

**Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik  
der Technischen Universität München  
Lehrstuhl für Technische Elektrophysik**

# **Modellierung und Simulation des elektro-fluid-mechanisch gekoppelten Verhaltens von Mikrobauteilen auf der Systemebene**

**Martin Nießner**

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. H.-G. Herzog  
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr. rer. nat. G. Wachutka  
2. Univ.-Prof. Dr. rer. nat. I. Eisele  
Universität der Bundeswehr München

Die Dissertation wurde am 24.01.2012 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik am 16.12.2014 angenommen.



*Meiner Familie*



# Kurzfassung

Der Entwurfsprozess für Mikrosensoren und -aktoren ist bisher nicht durchgängig in einer Simulationsumgebung abgebildet, da sich der Übergang von der Ebene der feldtheoretischen Kontinuumsbeschreibung zur Ebene der systembezogenen Makromodellierung mithilfe von konzentrierten oder verteilten Kompaktmodellen nicht allgemeingültig automatisieren lässt. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit ein automatisierbares Verfahren konzipiert, welches aus einer Kontinuums-theoretischen Beschreibung physikalisch basierte Systemmodelle extrahiert, die es erlauben, das elektro-fluid-mechanisch gekoppelte Verhalten von mikrostrukturierten Bauteilen auf der Systemebene zu analysieren.

Die verallgemeinerte Kirchhoffsche Netzwerktheorie stellt den theoretischen Rahmen des Verfahrens dar und ermöglicht eine konsistente und energieformübergreifende Synthese verschiedener Modellierungsansätze. Deformierbare mikromechanische Komponenten werden auf der Systemebene mittels einer Superposition von Eigenmoden und einem linearen Kontaktmodell beschrieben. Die Eigenmoden werden hierbei mittels der Methode der finiten Elemente ermittelt. Elektrostatische Systeme werden mithilfe einer Kombination von differentieller Plattenkondensatornäherung und Lagrange-Formalismus modelliert. Die fluidische Dämpfung, namentlich die Schmierfilmdämpfung, wird mit einem Mixed-Level-Modell dargestellt. Die benutzerfreundliche Anwendbarkeit des Verfahrens wird durch ein speziell entwickeltes, modulares Programm gewährleistet, welches die drei Methoden der Modellbildung automatisiert und energieformübergreifende Kopplungen konkret realisiert.

Zur Validierung des Verfahrens werden für zwei Mikroresonatoren und einen mikromechanischen Hochfrequenzschalter elektro-fluid-mechanisch gekoppelte Systemmodelle extrahiert und experimentellen Daten gegenübergestellt. Die Modelle berechnen die auf die Strukturen wirkende Schmierfilmdämpfung mit einem relativen Fehler kleiner als 4 %. Die statischen Schnapp- und Löse-Spannungen sowie die Schließ- und Öffnungszeiten des mikromechanischen Schalters werden mit einem relativen Fehler von 5 % und weniger wiedergegeben. Das Verhalten nach einem dynamischen mechanischen Anschlag kann im Vergleich zum Experiment qualitativ richtig reproduziert werden.

Das automatisierte Verfahren generiert hinreichend genaue Modelle für eine prädiktive Simulation und ermöglicht auf diese Weise eine durchgängig rechnergestützte Designoptimierung einer Vielzahl von viskos gedämpften, elektrostatisch gesteuerten mikromechanischen Bauteilen.



# Abstract

There is no software framework available yet that allows the seamless computer-aided design of microsensors and -actors throughout the complete development process. This is because there is no general method to automate the transition in modeling needed in order to move from device-level simulation to system-level simulation. A procedure addressing this problem is compiled that allows for a dedicated class of microdevices the generation of physics-based multi-energy domain coupled system-level models from respective device-level descriptions. These models enable the analysis of the fluid-electromechanically coupled behavior of microdevices on the system-level.

Generalized Kirchhoffian network theory is employed as a theoretical framework for the procedure and allows for a consistent combination of different modeling approaches. System-level models of movable and deformable mechanical components are derived using a superposition of eigenmodes that are extracted from finite element models. Mechanical contact is described employing a constant contact stiffness. A fragmentation into parallel plate capacitors in combination with the Lagrangian formalism is applied for the modeling of electrostatic fields. The squeeze-film damping forces exerted on the microdevices are calculated by a mixed-level model. A specifically developed easy-to-use toolbox automatically generates and couples the mechanical, electrostatic and fluidic models.

The performance of the thus extracted fluid-electromechanically coupled models is evaluated w.r.t. experimental data of two microresonators and one radio frequency micro-electromechanical switch. The system-level models calculate the squeeze-film damping forces with less than 4 % error. The errors concerning the static pull-in and release voltages as well as the opening and closing times of the microswitch are 5 % and less. The qualitative behavior after a dynamic impact can be reproduced correctly.

These results prove that the presented procedure generates multi-energy domain coupled system-level models that are predictive w.r.t. experiments. Thus, the automated procedure is suited to facilitate the seamless computer-aided design of electrostatically controlled and viscously damped microstructures.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b> . . . . .	1
1.1 Mikrosysteme . . . . .	1
1.2 Marktentwicklung und Anwendungsfelder von Mikrosystemen . . . . .	3
1.3 Modellierung und Simulation im Entwurf von Mikrosensoren und -aktoren . . . . .	8
1.4 Zielsetzung der Arbeit . . . . .	16
1.5 Hochfrequenzmikroschalter als Demonstrator . . . . .	17
1.6 Konvention . . . . .	19
<b>2. Modellierung von Mikrosystemen auf der Systemebene</b> . . . . .	21
2.1 Modellierungsebenen . . . . .	21
2.1.1 Definition und Einordnung der Modellierungsebenen . . . . .	22
2.1.2 Simulationswerkzeuge für die Systemebene . . . . .	24
2.2 Theoretische Grundlagen . . . . .	25
2.2.1 Partitionierung in Subsysteme und Synthese des Gesamtmodells . . . . .	25
2.2.2 Systemdarstellung als verallgemeinertes Kirchhoffsches Netzwerk . . . . .	27
2.3 Modellierung von Subsystemen . . . . .	38
2.3.1 Anforderungen an die Modellierung . . . . .	39
2.3.2 Ansätze für die Modellierung von Subsystemen . . . . .	39
<b>3. Modellierung dynamisch verformbarer mechanischer Subsysteme</b> . . . . .	47
3.1 Grundlagen der Mechanik verformbarer Körper . . . . .	47
3.2 Ordnungsreduktion mittels modaler Superposition . . . . .	49
3.3 Nichtlinearitäten . . . . .	52
3.4 Reibungsfreier mechanischer Kontakt . . . . .	54
<b>4. Modellierung elektrostatischer Subsysteme</b> . . . . .	59
4.1 Elektrostatische Grundlagen für Mehrelektroden-Kondensatoranordnungen . . . . .	59
4.2 Differentielle Plattenkondensatornäherung . . . . .	62

4.3	Streifelder . . . . .	63
4.4	Beschreibung mithilfe des Lagrangeschen Formalismus . . . . .	64
4.5	Elektromechanische Kopplung . . . . .	65
4.5.1	Phänomenologische Beschreibung . . . . .	65
4.5.2	Implementierung . . . . .	71
<b>5.</b>	<b>Modellierung fluidischer Subsysteme: Dämpfung von perforierten Mikrostrukturen . . . . .</b>	<b>73</b>
5.1	Fluidmechanische Grundlagen . . . . .	73
5.2	Schmierfilmdämpfung . . . . .	79
5.3	Mixed-Level Modell . . . . .	83
5.3.1	Finites Netzwerk zur Diskretisierung der Reynoldsgleichung . . . . .	85
5.3.2	Kompaktmodellierung von Rändern und Perforationen . . . . .	87
5.3.3	Bewertung des Mixed-Level-Modells . . . . .	90
5.3.4	Korrekturfaktoren für verdünnte Gase . . . . .	95
5.3.5	Physikalisch basierte Ordnungsreduktion . . . . .	98
5.4	Fluid-Struktur Wechselwirkung . . . . .	100
5.5	Alternative Modellierungsansätze . . . . .	101
5.5.1	Analytische Modellierung durch Zerlegung in Lochzellen . . . . .	101
5.5.2	Modellierung auf der Basis einer modifizierten Reynoldsgleichung . . . . .	103
5.5.3	Hybride Modelle . . . . .	103
<b>6.</b>	<b>Automatisierte Modellgenerierung . . . . .</b>	<b>105</b>
6.1	Zusammenführung . . . . .	105
6.2	Motivation . . . . .	107
6.3	Ablauf der automatisierten Modellerstellung . . . . .	107
6.4	Algorithmen . . . . .	109
6.5	Automatische Ordnungsreduktion des Mixed-Level Modells . . . . .	113
6.6	Besonderheiten bei der Implementierung des mechanischen Kontaktes . . . . .	114
<b>7.</b>	<b>Experimentelle Validierung des mechanisch-fluidischen gekoppelten Modells . . . . .</b>	<b>117</b>
7.1	Experimenteller Messaufbau . . . . .	117
7.2	Teststrukturen . . . . .	120
7.3	Messergebnisse und Diskussion . . . . .	124
7.4	Vergleich mit dem mechanisch-fluidisch gekoppelten Mixed-Level Modell . . . . .	128
7.5	Vergleich mit alternativen Dämpfungsmodellen . . . . .	131
7.6	Zusammenfassung . . . . .	133

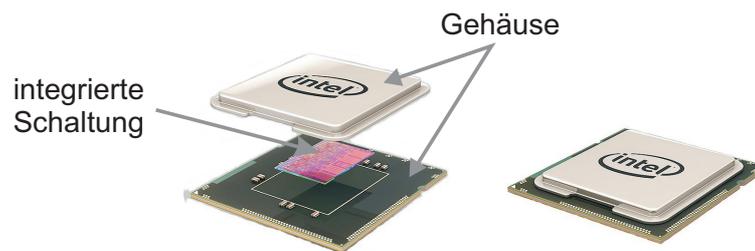
<b>8. Simulation eines Hochfrequenzmikroschalters auf der Systemebene</b> . . . .	135
8.1 Herstellung des Schalters . . . . .	135
8.2 Experimentelle Charakterisierung des Schalters . . . . .	137
8.2.1 Topographie . . . . .	137
8.2.2 Eigenfrequenzen und -schwingformen . . . . .	140
8.2.3 Schließ- und Öffnungsverhalten . . . . .	142
8.3 Simulation des Schalters . . . . .	147
8.3.1 Modellerstellung und -kalibrierung . . . . .	147
8.3.2 Schließ- und Öffnungsverhalten . . . . .	152
8.3.3 Zusammenfassung . . . . .	155
8.4 Reduktion der Anschlagsgeschwindigkeit . . . . .	156
<b>9. Zusammenfassung und Ausblick</b> . . . . .	159
<b>Anhang</b> . . . . .	163
<b>A. Symbol- und Variablenverzeichnis</b> . . . . .	165
<b>B. Ergänzungen zur Fluidik</b> . . . . .	175
B.1 Korrekturfaktoren für verdünnte Gase . . . . .	175
B.2 Kompaktmodell von Veijola . . . . .	176
B.3 Kompaktmodell von Bao . . . . .	179
<b>C. Quantifizierung der Dämpfung auf Resonatoren</b> . . . . .	181
C.1 Gütefaktor $Q$ . . . . .	181
C.2 Dämpfungsmaß $\zeta$ . . . . .	183
C.3 Logarithmisches Dekrement $\Lambda$ . . . . .	184
C.4 Abklingkonstante $\delta$ . . . . .	184
<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	186



# 1. Einleitung

## 1.1 Mikrosysteme

Das Mikrosystem mit dem größten Verbreitungs- und Bekanntheitsgrad ist das elektronische Mikrosystem in Form der integrierten Schaltung. Mit integrierten Schaltungen können Mikroprozessoren (siehe Abbildung 1.1) und Mikrokontroller realisiert werden, welche sich in den verschiedensten Produkten des alltäglichen Lebens, wie beispielsweise Mobiltelefonen, Rechnern, Fernsehern, Spielekonsolen und allen weiteren elektronischen Geräten der Unterhaltungsindustrie befinden. Teilweise wurden diese Produkte auch erst durch integrierte Schaltungen ermöglicht.



**Abb. 1.1:** Explosionszeichnung (links) eines Mikroprozessors (rechts) der Firma Intel. Der integrierte Schaltkreis, welcher die Funktionalität des Mikroprozessors implementiert, befindet sich auf dem Teilstück einer Halbleiterscheibe. Dieses wird in einem Gehäuse verpackt, um es vor Umwelteinflüssen zu schützen. Die Abbildungen wurden [170] entnommen und beschriftet.

Das elektronische Mikrosystem der integrierten Schaltung besteht aus einer gezielten topologischen Verbindung von elektronischen Bauelementen. Die Abmessungen der einzelnen Bauelemente betragen, je nach Herstellungstechnologie, mehrere zehn Nanometer [150] bis einige Mikrometer – man spricht daher von einem hohen Grad an Miniaturisierung. Durch die Kombination der Bauelemente zu einer Schaltung, auf ähnlicher Größenskala, kann sehr viel Funktionalität auf sehr kleinem Raum realisiert werden – man spricht von einem hohen Grad an Integration. Sowohl die hohe Miniaturisierung als auch die hohe Integration sind wesentliche Merkmale von elektronischen Mikrosystemen und ermöglichen die kostengünstige parallele Massenfertigung dieser Systeme [46]. Sie sind aber auch das Ergebnis von mehr als 50 Jahren Investition, Forschung und Entwicklung im Bereich der Mikroelektronik<sup>1</sup> [53].

---

<sup>1</sup> Unter dem Begriff Mikroelektronik werden hier die Verfahren für den Entwurf und die Herstellung von integrierten Schaltungen, und damit elektronischen Mikrosystemen, zusammengefasst.

Angesichts des Erfolgs von elektronischen Mikrosystemen wurde, zeitversetzt zur Mikroelektronik, damit begonnen auch nichtelektrische Systeme zu miniaturisieren und zu integrieren [89]. Entscheidend für die Entwicklung der entsprechend mechanischen, fluidischen, chemischen und thermischen Mikrosysteme war, wie auch im Bereich der Mikroelektronik [53], die Verfügbarkeit jeweils geeigneter Herstellungsverfahren [46]. Die bisher bedeutendsten Entwicklungen für die Herstellung von mikromechanischen Strukturen, d.h. von Komponenten eines mechanischen Mikrosystems, fanden beispielsweise zwischen dem Ende der 70er bis Mitte der 90er Jahre statt [8, 60, 80].

Konnten mit elektronischen Mikrosystemen bisher lediglich elektrische Signale verarbeitet werden, erlaubten die miniaturisierten nichtelektrischen Systeme nun auch eine mikrosystemische Verarbeitung von mechanischen, thermischen und anderen Größen. Mittels gekoppelter Mikrosysteme wurde des Weiteren die Wandlung zwischen verschiedenen physikalischen Energieformen und damit die Realisierung von Mikrowandlern in Form von Mikrosensoren und Mikroaktoren möglich.

Basierend auf den bisherigen Ausführungen können bereits die allgemeingültigen Merkmale von Mikrosystemen formuliert werden:

- *Miniaturisierung*: Die charakteristischen Abmessungen eines Mikrosystems befinden sich im Mikrometerbereich.
- *Systemeigenschaft*: Ein Mikrosystem besteht aus mehreren einzelnen Komponenten oder wiederum aus mehreren Teilsystemen.
- *Integration*: Die Bestandteile eines Mikrosystems sind auf der Größenskala ihrer charakteristischen Abmessungen miteinander verbunden und realisieren eine definierte Topologie.
- *Signalverarbeitende Funktionalität*: Ein Mikrosystem kann die Größen einer physikalischen Energieform verarbeiten.
- *Wandlerfunktionalität*: Ein Mikrosystem kann zwischen verschiedenen physikalischen Energieformen wandeln. Hierbei kann es als Mikrosensor fungieren, d.h. Größen einer Energieform detektieren, oder als Mikroaktor agieren, d.h. die Größen einer Energieform aktiv verändern, bzw. simultan sowohl als Mikrosensor und -aktor wirken.

Aufgrund der Vorreiterrolle der Mikroelektronik in der Entwicklung von Mikrosystemen, werden die einzelnen Merkmale vor allem aus der Perspektive der Elektronik interpretiert. Folglich wird unter der signalverarbeitenden Funktionalität vor allem die Fähigkeit eines Mikrosystems verstanden, elektrische Signale zu verarbeiten. Des Weiteren gilt als Mikrosensor ein System, welches nichtelektrische Größen in elektrische Signale umwandelt, z.B. ein Drucksensor, der den mechanischen Druck in ein elektrisches Signal umwandelt. Ebenfalls gilt als Mikroaktor ein System, welches elektrische Energie in nichtelektrische Energieformen umwandelt, z.B. ein Mikroresonator, dessen mechanische Masse durch elektrische Anregung in Schwingung versetzt wird.

Diese historisch bedingte Sichtweise ist einschränkend, denn Signalverarbeitung ist auf der mikrosystemischen Ebene natürlicherweise auch außerhalb der elektrischen Energieform möglich. Forke *et al.* [37] implementierten beispielsweise das Prinzip des Superheterodynempfängers<sup>2</sup> aus der elektrischen Hochfrequenztechnik mit rein mikromechanischen Komponenten, um mechanische Schwingungen für eine spätere Analyse gezielt zu konvertieren. Auch in fluidischen Mikrosystemen ist es möglich das Strömungsverhalten von Fluiden durch rein fluidische Komponenten gezielt zu beeinflussen [96], d.h. fluidische Signalverarbeitung zu betreiben. Ebenso ist die Mikrosensor und -aktorfunktionalität auch zwischen zwei nichtelektrischen Energieformen möglich. Als Beispiel sei hier stellvertretend ein thermomechanischer Mikroaktor [158] genannt, der durch die thermischen Ausdehnung der mikromechanischen Struktur mechanische Kräfte ausüben kann.

Des Weiteren ist zu bemerken, dass ein Mikrosystem nicht gleichzeitig sowohl das Merkmal der signalverarbeitenden als auch der Wandlerfunktionalität aufweisen muss. Die elektronischen Mikrosysteme besitzen beispielsweise lediglich signalverarbeitende Funktionalität, jedoch keine Wandlerfunktionalität.

Die Verfahren zum Entwurf und zur Herstellung von Mikrosystemen werden allgemein unter dem Begriff Mikrosystemtechnik zusammengefasst. Dieser Oberbegriff lässt sich in physikalische Teilbereiche spezifizierende Begriffe, wie der Mikroelektronik, Mikromechanik und Mikrofluidik untergliedern [46].

## 1.2 Marktentwicklung und Anwendungsfelder von Mikrosystemen

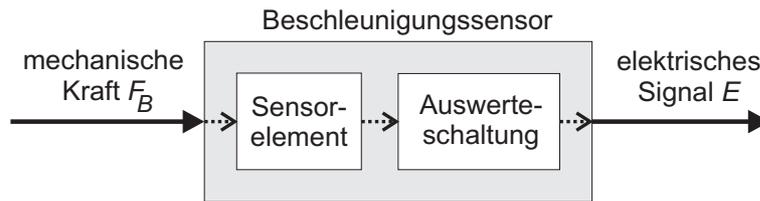
Die Etablierung von Mikrosystemen auf einem Markt verläuft für elektronische und nichtelektrische Mikrosysteme sehr unterschiedlich. Gerlach und Dötzel [46] begründen dies mit der Tatsache, dass „die Mikrosystemtechnik [im Allgemeinen] mit den klassischen Herstellungsverfahren und Systemtechniken starke technische Konkurrenz hat, während [...] [speziell] die Mikroelektronik keine echte technologische Alternative besitzt.“<sup>3</sup>. Ein nichtelektrisches Mikrosystem muss sich demnach stets gegen eine bereits vorhandene, meist makroskopische Lösung durchsetzen.

Des Weiteren führen Gerlach und Dötzel [46] aus, dass nicht *der* Markt für Mikrosysteme existiert, sondern dass für jedes einzelne Mikrosystem ein oder mehrere Märkte existieren. Aus diesem Grund setzen sich Mikrosysteme nicht auf *dem* Markt durch, sondern jedes Mikrosystem muss sich auf jedem einzelnen Zielmarkt etablieren und sich dabei ggf.

---

<sup>2</sup> Superheterodynempfänger (auch Überlagerungsempfänger genannt) wurden in der Rundfunktechnik entwickelt [41, 126]. Das Grundprinzip dieses Empfängers besteht (vereinfachend ausgedrückt) darin, in einer Vorstufe aus dem empfangenen hochfrequenten Signal, welches aus einem hochfrequentem Trägersignal und einem zumeist niederfrequentem Nutzsignal besteht, durch gezielte Frequenzmischung das Nutzsignal zu extrahieren, bevor das Signal an den verarbeitenden Teil der Empfangsschaltung geht. Auf diese Weise kann das Nutzsignal mit kostengünstigen, niederfrequenten Empfangsschaltungen anstatt mit kostenintensiven Hochfrequenzschaltungen weiterverarbeitet werden.

<sup>3</sup> Gerlach und Dötzel [46], Seite 15, letzter Absatz.



**Abb. 1.2:** Schematische Darstellung eines Beschleunigungssensors. Die mechanische Beschleunigung wird von einem Sensorelement aufgenommen, welches die mechanische Kraft  $F_B$  in ein elektrisches Signal  $E$  wandelt. Dieses Signal wird von einer Auswerteschaltung aufbereitet und nach außen geführt.

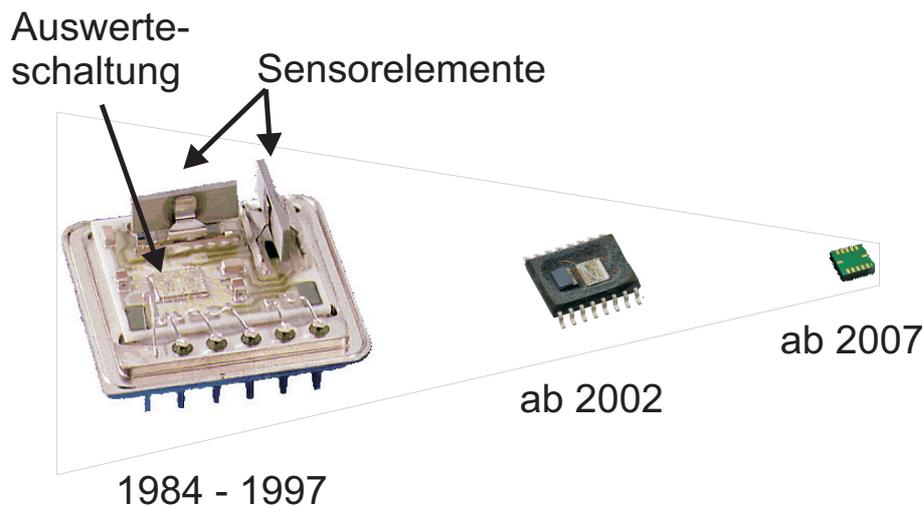
gegen eine bereits vorhandene Lösung durchsetzen. Da die Zielmärkte sehr unterschiedliche Anforderungen aufweisen können, kann ein Mikrosystem auf seinen Zielmärkten unterschiedlich erfolgreich sein.

Eine Schilderung aller verschiedenen Typen von Mikrosystemen und deren Märkte, sowie Marktentwicklungen, ist im Rahmen dieser Einführung demzufolge nicht zu bewerkstelligen. Um dennoch eine qualitative Vorstellung einer möglichen Marktentwicklung und deren Implikationen auf Forschung und Entwicklung zu vermitteln, sollen Anwendungsfelder und Marktentwicklung exemplarisch am Beispiel des mikroelektromechanischen Beschleunigungssensors (siehe Abb. 1.2) skizziert werden – ohne jedoch einen Anspruch auf Allgemeingültig bzw. Übertragbarkeit der Schilderung auf andere Mikrosensoren und -aktoren zu erheben. Bezüglich der Marktentwicklungen anderer Typen von Mikrosystemen sei auf weiterführende Literatur verwiesen [46, 87, 95].

Die Entwicklung von mikromechanischen Beschleunigungssensoren wurde anfangs maßgeblich seitens der Automobilindustrie vorangetrieben [121]. Auslöser war der Druck des Automobilmarktes kontinuierlich mehr Komfort- und Sicherheitsfunktionen anzubieten. Um dies zu ermöglichen, wurden bisher rein mechanisch implementierte Fahrzeugfunktionen sukzessive von intelligenten elektronischen Steuer- und Regelmodulen übernommen und zur Verfügung gestellt. Daraus resultierte ein „hoher Bedarf an Sensoren und Aktoren“<sup>3</sup>, mit denen die aktuelle Situation des Fahrzeugs erfasst, an die elektronischen Module übermittelt, und durch die elektronischen Regelmodule gezielt beeinflusst werden konnte. Da ein Fahrzeug nur wenig Volumen für Sensoren und Aktoren zur Verfügung stellt und zudem deren Gewicht minimal sein soll, wurden Lösungen auf Basis der Mikrosystemtechnik gesucht. Die hierfür notwendigen und beträchtlichen Investitionen in Forschung und Entwicklung wurden in Kauf genommen [121].

Dieser Aspekt sei gesondert herausgestellt: Eine mikrosystemtechnische Lösung wurde nicht aufgrund von Kostenvorteilen, sondern aufgrund von Leistungsvorteilen, d.h. kleines Volumen, geringes Gewicht und geringer Stromverbrauch gewählt. Weber [160, 161, 162] vertritt sogar die These, dass mikrosystemtechnische Lösungen sich auf einem Markt *nie* aufgrund von Kostenvorteilen, sondern *stets* aufgrund von Leistungsvorteilen etablieren.

<sup>3</sup> Reif [121], Seite 13.

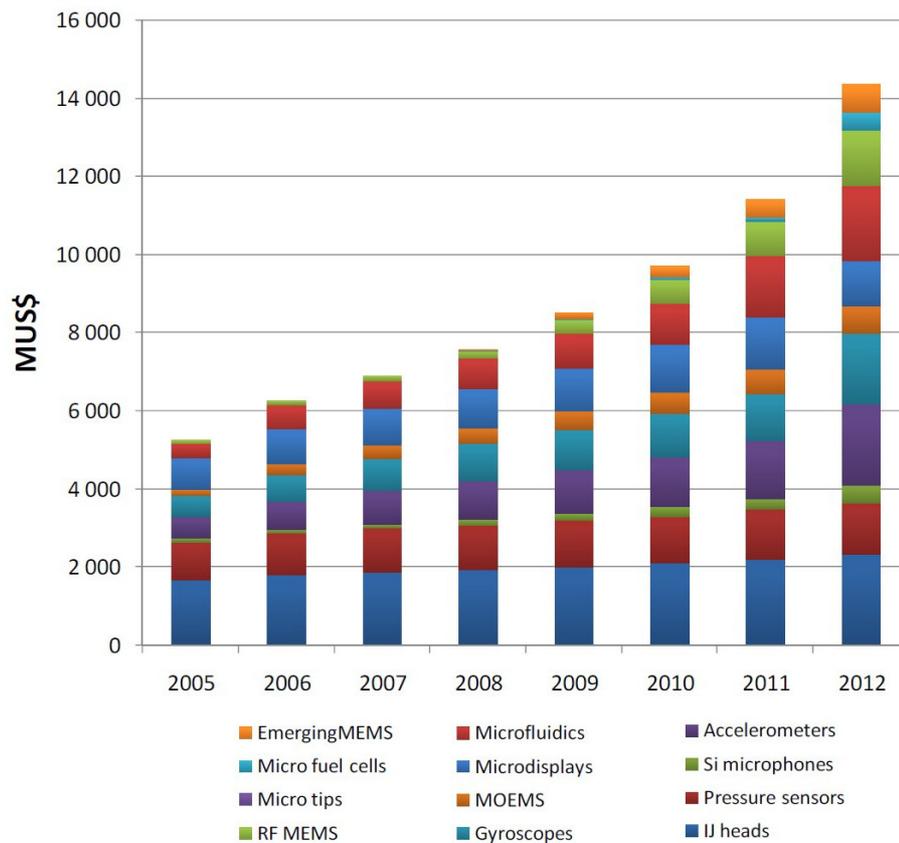


**Abb. 1.3:** Mikroelektromechanische Beschleunigungssensoren der Firma Bosch (Abbildungen entnommen aus [49]) für den Automobilmarkt. Die erste Generation (1.v.l.) verwendet den piezoelektrischen Effekt, um die Beschleunigungskraft zu detektieren und ist teilweise noch diskret aufgebaut. Die dritte Generation (2.v.l.) verwendet das kapazitive Detektionsprinzip und ist in Silizium gefertigt. Die fünfte Generation (3.v.l.) ist kapazitiv und noch stärker miniaturisiert.

Abbildung 1.3 zeigt drei Generationen von Beschleunigungssensoren, die von der Firma Bosch entwickelt und vermarktet wurden. Die Größe der Sensoren verringert sich stetig. Diese Entwicklung ermöglicht die Stückkosten zu senken, da mehr Sensoren pro Halbleiterscheibe hergestellt werden können. Des Weiteren ist zu bemerken, dass verschiedene Sensorprinzipien eingesetzt werden. Dies veranschaulicht einen wichtigen Aspekt bei der Entwicklung von Sensoren: es können verschiedene Koppelungseffekte genutzt werden, um die gleiche Sensorfunktionalität zu realisieren (siehe Teilkapitel 1.3).

Die mikroelektromechanischen Beschleunigungssensoren wurden für zwei Anwendungen eingesetzt [49, 121]. Zum einen wurden sie verwendet, um den Aufprall eines Fahrzeuges zu detektieren und den Airbag auszulösen. Zum anderen wurden sie in Kombination mit Drehratensensoren im Rahmen des Elektronischen Stabilitätsprogrammes (ESP) eingesetzt. Da diese beiden Anwendungen Sicherheitsfunktionen realisieren, sind die Anforderungen bezüglich der Verlässlichkeit und Robustheit äußerst hoch [121].

Das Marktvolumen der mikroelektromechanischen Beschleunigungssensoren ist seit deren Etablierung kontinuierlich gewachsen [42, 121]. Abbildung 1.4 zeigt die tatsächliche Marktentwicklung für die Jahre 2005 bis 2007 und extrapoliert die Entwicklung für die Jahre 2008 bis 2012. Bemerkenswert ist der starke Zuwachs, welcher ab dem Jahr 2008 prognostiziert ist. Dieser fällt wesentlich höher als in den Vorjahren aus. Dies ist nach Mounier [92] jedoch nicht auf hohe Zuwachsraten im Automobilbereich zurückzuführen, sondern darauf, dass die mikrotechnischen Beschleunigungssensoren nun auch massiv in Konsumgütern, wie z.B. Digitalkameras, Mobiltelefonen und Spielekonsolen, eingesetzt werden. Treiber dieser Entwicklung ist, ähnlich wie zuvor auf dem Automobilmarkt, der



**Abb. 1.4:** Weltmarkt für Mikrosensoren und -aktoren [92] aufgeschlüsselt nach Sensortyp. Die Entwicklung ab 2008 ist auf Basis der Daten von 2007 prognostiziert.

Zwang immer mehr Komfortfunktionen im Produkt zu integrieren, um sich von Wettbewerbern zu diversifizieren bzw. mit diesen gleichzuziehen. Diese Prognose bestätigte sich im Jahr 2011. Der Markt für Mikrosysteme im Bereich der Konsumgüter erreichte 2011 ein Gesamtvolumen von 2,25 Milliarden USD [18]. Die Wachstumsrate betrug, bezogen auf das Marktvolumen von 2010, beträchtliche 37 %. Bis 2015 wird eine Verdopplung des Marktvolumens für Inertialsensoren im Konsumgüterbereich erwartet [20].

Die Herausbildung des stark wachsenden Marktes im Konsumgüterbereich hatte wesentliche Auswirkungen auf die Hersteller von Mikrosystemen. Während der ersten Entwicklungen von Mikrosystemen für den Automobilmarkt vereinte ein Hersteller üblicherweise Forschung, Entwicklung und Fertigung im gleichen Hause. Dies war notwendig, um die hohen Zuverlässigkeitsanforderungen für die sicherheitsrelevanten Anwendungen zu gewährleisten. Die hohen erzielbaren Preise auf dem Automobilsektor ermöglichten jedem Hersteller diese jeweils komplette Infrastruktur aufrecht zu erhalten. Die Anwendungen in Konsumgüterbereich stellen im Vergleich zum Automobilsektor jedoch sehr verschiedene Anforderungen. Die entscheidenden Kriterien für den Erfolg eines Produktes sind hier die Größe des Gehäuses, denn dieses muss in die stets flacher werdenden Mobilgeräte

passen, und, aufgrund des enormen Preisdrucks auf dem Konsumgütermarkt, ein, im Vergleich zum Automobilbereich, wesentlich geringerer Preis [42, 92]. Unbedingte Zuverlässigkeit ist kein absolutes Entscheidungskriterium mehr<sup>4</sup>. Ebenfalls verlangen die Hersteller von Konsumgütern fertige Sensormodule, welche komfortabel und, wegen der wesentlich kürzeren Produktzyklen, schnell in das jeweilige Endprodukt eingebunden werden können, und nicht, wie auf dem Automobilmarkt üblich, einzelne Sensoren [92].

Da die Infrastruktur und Produktkonzepte der auf dem Automobilmarkt aktiven Mikrosensoren- und aktorenhersteller diese andersartigen Anforderungen in Kombination mit dem Preisdruck strukturell nicht erfüllen können, verschob sich die bisherige Marktaufteilung zwischen den Herstellern. Unternehmen, die bisher keine entscheidenden Marktanteile im Automobilbereich aufweisen konnten, erreichten, wie beispielsweise STMicroelectronics, aufgrund von speziellen Konzepten für den Konsumgütermarkt, rapide sehr große Anteile auf dem Markt für Mikrosensoren im Konsumgüterbereich [17].

Des Weiteren etablierten sich weitere firmenorganisatorische Konzepte. Viele Hersteller von Mikrosystemen, vereinen im eigenen Hause nur noch Forschung und Entwicklung, lagern die Fertigung jedoch komplett an einen Auftragsfertiger, eine sog. *foundry*<sup>5</sup>, aus. Dies ist in den hohen Kosten von Fertigungseinrichtungen für Mikrosysteme [46] begründet, welche durch die Nutzung der standardisierten Herstellungsprozesse eines Auftragsfertigers reduziert werden können. Diese Unternehmen ohne eigene Fertigung, sog. *fabless companies*, setzten im Jahr 2010 bereits 23 % des gesamten Marktvolumens von Mikrosensoren und -aktoren um. Ihr Anteil wird sich nach Schätzungen von Bouchaud [17] weiter und stark erhöhen, da auch bedeutende Hersteller von Mikrosensoren für den Automobilmarkt angekündigt haben, dass sie, um ihre Kosten zu senken, künftig ebenfalls eine *foundry*, statt der hauseigenen Fertigungsanlagen nutzen wollen.

Dies hat entscheidende Auswirkungen auf die industrielle Forschung und Entwicklung. Konnte bisher für jeden Mikrosensor nahezu beliebig mit der hauseigenen Fertigung Rücksprache gehalten und Herstellungsprozesse ggf. angepasst werden, so existiert nun eine definierte Schnittstelle zwischen dem Auftragsfertiger und dem Unternehmen. Der Auftragsfertiger bietet eine genau dokumentierte Auswahl an Prozessen mit den entsprechenden Materialparametern und Entwurfsregeln, sog. *design rules*, an. Die firmeneigene Forschung und Entwicklung muss infolgedessen neue Mikrosensoren und -aktoren innerhalb dieses vorgegebenen Rahmens entwerfen.

Die wichtigste Folge dieser Entwicklung ist, dass Forschung und Entwicklung im Bereich der Mikrosensoren und -aktoren weitestgehend rechnergestützt erfolgen muss. Ein augenblicklicher Austausch mit der Fertigung ist nicht mehr möglich. Dies erfordert – zwingend – verlässliche und prädiktive Modelle und Umgebungen für die Simulation von Mikrosystemen<sup>6</sup>.

---

<sup>4</sup> In der ersten Version eines weitverbreiteten Mobiltelefons wurde z.B. ein Beschleunigungssensor eingesetzt, welcher zu temporärer Fehlfunktion neigte. Dies wurde durch die Anwender jedoch stets geduldig durch sanftes Klopfen auf das Mobiltelefon behoben [39].

<sup>5</sup> Die größten Auftragsfertiger für Mikrosensoren und -aktoren sind u.a. STMicroelectronics (Italien), Texas Instruments (USA), APM (Taiwan) und Bosch (Deutschland).

<sup>6</sup> Einige Hersteller von Simulationsumgebungen greifen diese Entwicklung bereits gezielt auf und pas-

### 1.3 Modellierung und Simulation im Entwurf von Mikrosensoren und -aktoren

Wie bereits im vorigen Teilkapitel 1.2 aufgezeigt, spielen Modellierung und Simulation im Entwurfsprozess eine bedeutende Rolle. Dies ist unter anderem darin begründet, dass sich mittels Simulation kosten- und zeitintensive experimentelle Phasen reduzieren, und auf diese Weise Kosten und zeitliche Dauer des Entwurfsprozesses erheblich verringert werden können [42]. Schrag [129] listet drei weitere Vorteile auf, die sich durch den Einsatz von Simulation gegenüber rein experimentell getriebene Entwurfsprozesse eröffnen:

- *Machbarkeit*: Simulation ermöglicht es zeitnah, die Umsetzbarkeit eines Konzeptes zu eruieren, d.h. ob sich ein Bauelement erwartungsgemäß verhalten wird und mit den ausgewählten Fertigungsprozessen und Materialien realisiert werden kann.
- *Verständnis des Bauteilverhaltens*: Es ist kostspielig und diffizil, allein auf der Basis von Experimenten ein umfassendes Verständnis des Bauteilverhaltens zu erlangen. Simulationen gestatten ausführliche Einblicke in räumlich verteilte physikalische Effekte, sowie deren zeitlichen Ablauf und erlauben auf diese Weise das Verhalten des Bauteils im Detail zu verstehen. Dies ist sowohl für den Entwurf als auch für die Analyse von Bauteilversagen, d.h. in der Qualitätssicherung, von großem Nutzen.
- *Optimierung und Zuverlässigkeit*: Simulation ermöglicht die zeitnahe Bewertung verschiedener Varianten eines Entwurfs und damit die Optimierung des Bauteils. Des Weiteren können die Auswirkungen prozesstechnischer Toleranzen auf das Bauteilverhalten bewertet und der Bauteilentwurf ggf. angepasst werden.

Nachfolgend werden die Einsatzmöglichkeiten von Modellierung und Simulation, sowie, im Vergleich zur Mikroelektronik, die Besonderheiten des Entwurfsprozesses von Mikrosensoren und -aktoren aufgezeigt.

Mikrosensoren und -aktoren sind Bauelemente, die verschiedene Energie- und Signalformen ineinander umwandeln (siehe Kapitel 1.1). Hierzu müssen physikalische Koppelungseffekte genutzt werden. Wachutka [155] stellt diese für die thermischen, elektrischen, elektromagnetischen und mechanischen Energien in Form einer Matrix dar (siehe Tabelle 1.1). Je nach gewünschter Art von Eingangs- und Ausgangsgrößen können mit Tabelle 1.1 entsprechende Koppelungseffekte identifiziert werden. So kann beispielsweise ein Mikrosensor, welcher den mechanischen Druck in ein elektrisches Signal wandeln soll, mit Hilfe des piezoresistiven Effekts<sup>7</sup> realisiert werden. Wachutka [155] betont hier-

---

sen ihre Produkte dieser neuen Situation an. Das Unternehmen Coventor vertreibt mit den Produkten Coventorware Architect3D und MEMS+ beispielsweise Simulationsumgebungen, welche mit einer aktuellen Material- und Prozessdatenbank der führenden Auftragsfertiger ausgeliefert werden. Der Arbeitsablauf innerhalb der Simulationsumgebungen ist des Weiteren dahingehend strukturiert, dass nur Mikrosensoren und -aktoren entworfen werden können, die mittels der ausgewählten Materialien und Prozesse auch tatsächlich gefertigt werden können.

<sup>7</sup> Der piezoresistiven Effekt basiert auf einer Änderung der elektrischen Leitfähigkeit aufgrund des mechanischen Druckes. Wachutka stellt dies detailliert in [157] dar.

Ein- und Ausgangsgrößen	Thermisch	Elektrisch	Elektromagnetisch	Mechanisch
Thermisch	Wärmeleitung	Seebeckeffekt	Thermische Emission	Thermische Materialausdehnung
Elektrisch	Joulesche Wärme, Peltier-effekt	Elektrische Leitung, Polarisierung	Optische Rekombination	Piezo-elektrischer Effekt
Elektromagnetisch	Induktives Heizen	Optische Generation von Ladungsträgern	Induktion, Elektromagnetische Wellen	Strahlungsdruck
Mechanisch	Reibung	Piezo-resistiver Effekt	Photo-elastischer Effekt	Übertragung von Kräften

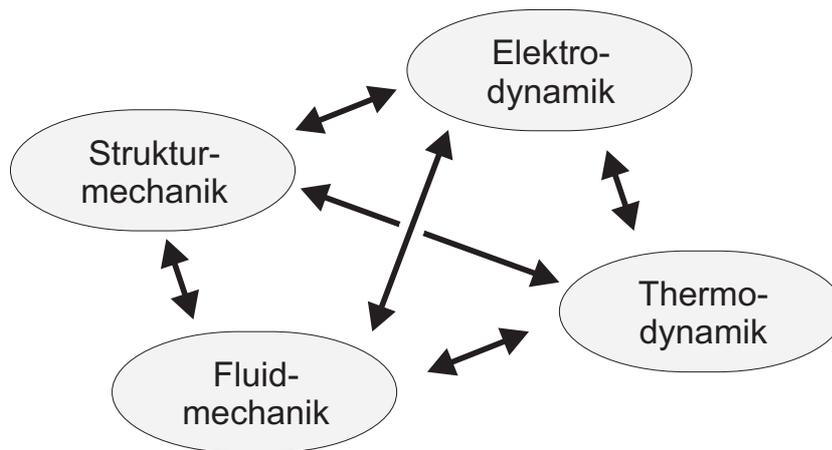
**Tab. 1.1:** Koppelungseffekte zwischen den termischen, elektrischen, elektromagnetischen und mechanischen Energieformen nach Wachutka [155].

bei explizit, dass neben dem gewünschten Koppelungseffekt stets auch unerwünschte, parasitäre Koppelungseffekte auftreten<sup>8</sup>. Wachutka [155] führt weiterhin aus, dass es stets mehrere Möglichkeiten gibt, einen bestimmten Typ von Mikrosensor zu realisieren. So ist im Fall des Drucksensors, neben dem piezoresistivem Effekt, auch eine Realisierung über den piezoelektrischen Effekt oder ein kapazitives Detektionsprinzip möglich. Diese Vielfalt an Realisierungsmöglichkeiten ist eine Besonderheit im Entwurf von Mikrosensoren und -aktoren.

Für die Modellierung und Simulation bedeutet die gezielte Verwendung von Koppelungseffekten, dass stets mehrere physikalische Energieformen, sowie deren bidirektionale Koppelungen, berücksichtigt werden müssen (siehe Abbildung 1.5). Im englischsprachigen Raum hat sich für die Beschreibung dieses Umstandes das Wort *multiphysics* etabliert. Im Entwurfsprozess der Mikroelektronik ist, im Regelfall<sup>9</sup>, lediglich die elektrische Energieform zu berücksichtigen. Die Vielfalt an Realisierungsmöglichkeiten geht einher mit einer Vielfalt an Materialien und Herstellungstechnologien. Werden in der Mikroelektronik, bis auf wenige Ausnahmen, Silizium und standardisierte Herstellungsprozesse verwendet, werden in der Mikrosensorik und -aktorik verschiedenste Materialien

<sup>8</sup> Im Fall des piezoresistiven Drucksensors kann beispielsweise auch Wärme eine Änderung der elektrischen Leitfähigkeit bewirken [155, 156, 157].

<sup>9</sup> Ausnahmen bilden hier u.a. leistungselektronische Module, die eine starke Wärmeentwicklung aufweisen [47], und Arbeiten auf dem Gebiet hochfrequenter Schaltungen [114, 113].



**Abb. 1.5:** Kopplung zwischen verschiedenen Teilgebieten der Physik.

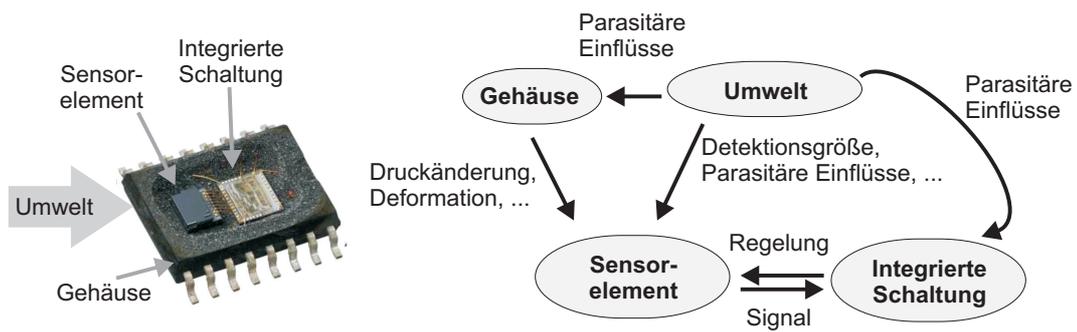
und Prozesse eingesetzt<sup>10</sup>. Aus diesem Grund können Fertigungsanlagen für integrierte Schaltungen nicht uneingeschränkt für die Fertigung für Mikrosensoren und -aktoren genutzt werden, da eine Verunreinigung durch diese, aus Sicht der Mikroelektronik, „fremden“ Materialien und damit verbundenen „fremden“ Herstellungsprozesse zu befürchten ist.

Aufgrund der Inkompatibilität der Fertigungsprozesse werden Mikrosensoren und -aktoren in der Regel hybrid aufgebaut, d.h. die Wandlerkomponente<sup>11</sup> und die integrierte Schaltung werden unabhängig voneinander gefertigt und erst im Gehäuse miteinander verdrahtet. Dies ist eine weitere Besonderheit, die beim Entwurf in der Mikroelektronik nicht vorhanden ist. Integrierte Schaltungen werden in der Regel monolithisch, d.h. auf einer einzelnen Halbleiterscheibe gefertigt.

Darüber hinaus stellen sowohl die Aufbau- und Verbindungstechnik als auch die Gehäusung von Mikrosensoren und -aktoren, das sog. *packaging*, eine stete, je nach Sensor- bzw. Aktortyp verschiedene, Herausforderung dar. Während integrierte Schaltungen gezielt vor Umwelteinflüssen geschützt werden sollen, müssen Sensoren und Aktoren bestimmte Größen der Umwelt detektieren bzw. manipulieren können. Drucksensoren benötigen beispielsweise eine Öffnung im Gehäuse, um den Umgebungsdruck messen zu können. Drehratensensoren erfordern für die Sicherstellung ihrer Funktion hingegen ein hohes und langzeitstabiles Vakuum im Gehäuse. Dieser Unterschied wirkt sich derart aus, dass die Gehäusung in der Mikroelektronik weitestgehend standardisiert werden konnte, wohingegen die Gehäusung von Mikrosensoren und -aktoren stets bauteilspezifisch erfolgen muss.

<sup>10</sup> Für Mikrosysteme, in welchen der piezoelektrischen Effekt genutzt wird, werden beispielsweise sehr oft Keramiken aus Blei-Zirkonat-Titanat verwendet [46]. Für spezielle Anwendungen in der Luftfahrttechnik werden, statt Silizium, auch flexible Substrate wie Kapton und nicht-standard Herstellungsprozesse eingesetzt [122].

<sup>11</sup> Die Wandlerkomponente ist der Teil des Mikrosystems, welcher die Funktionalität des Sensors bzw. Aktors realisiert.

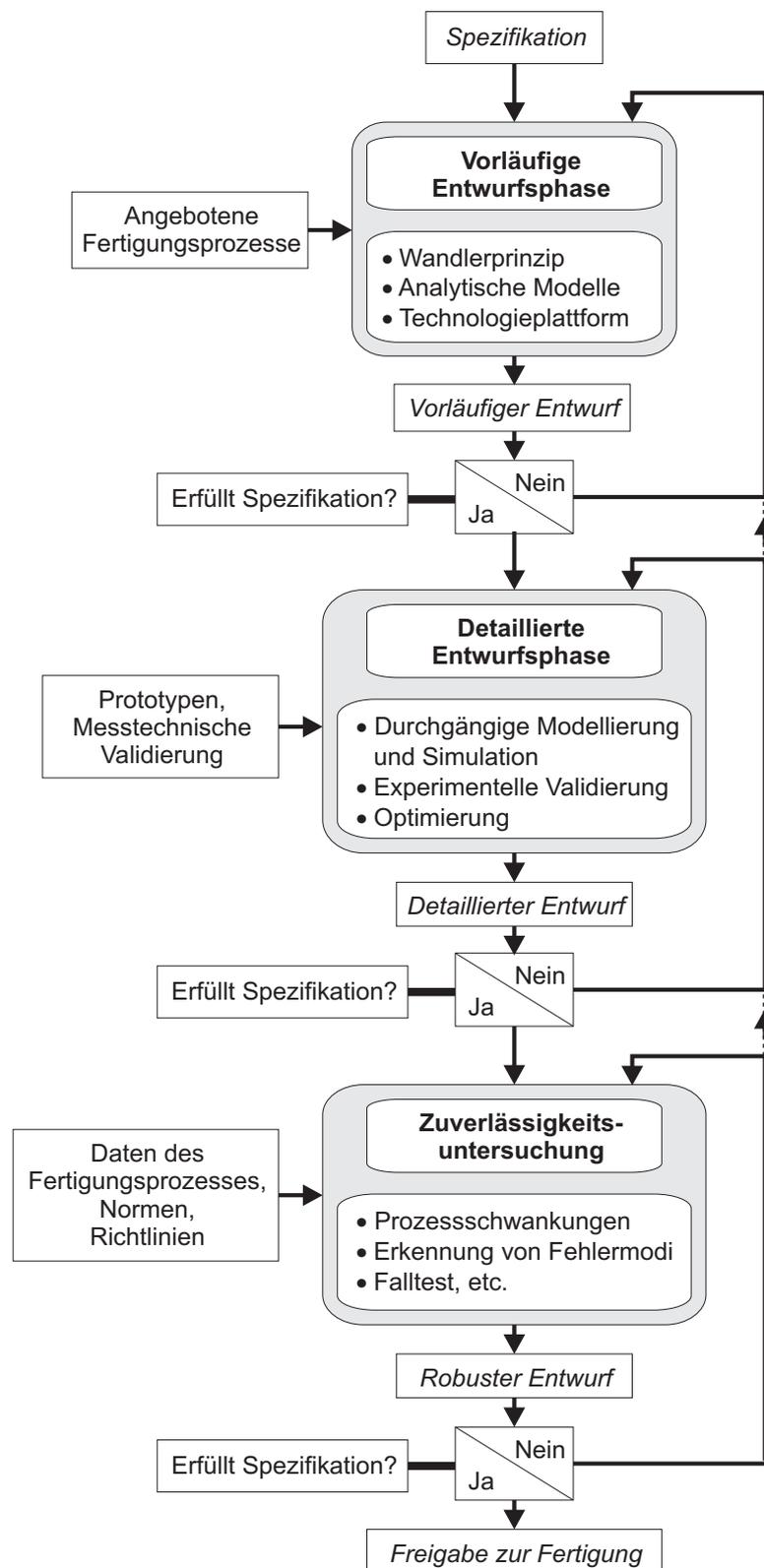


**Abb. 1.6:** Schematische Darstellung der Interaktionen zwischen Sensorelement, integrierter Schaltung, Gehäuse und Umwelt am Beispiel eines mikroelektromechanischen Beschleunigungssensors.

Abbildung 1.6 veranschaulicht, am Beispiel des Beschleunigungssensors aus Teilkapitel 1.2, die infolge dieser Besonderheiten bei der Modellierung von Mikrosensoren und -aktoren zu berücksichtigenden Interaktionen zwischen Wandlerelement, integrierter Schaltung und Gehäuse. Die Umwelt wirkt auf alle Teilsysteme ein. Auf das mikromechanische Sensorelement wirken neben der Detektionsgröße, d.h. der Beschleunigung, aus der Umwelt stets auch ungewollte, parasitäre Einflüsse, wie z.B. eine Materialausdehnung aufgrund einer Temperaturänderung (siehe Tabelle 1.1). Diese parasitären Einflüssen haben ebenfalls Auswirkungen auf das Gehäuse. So kann z.B. eine Temperaturänderung den Druck innerhalb eines hermetisch versiegelten Gehäuses verändern und das Gehäuse über eine Materialausdehnung deformieren. Beides beeinflusst das mikromechanische Sensorelement. Eine drastische Erhöhung der Temperatur kann des Weiteren die Funktionalität einer integrierten Schaltung gefährden.

Abbildung 1.7 skizziert, in Anlehnung an Wachutka [152, 155], Dötzel und Gerlach [46], Senturia [132] und Mehner [87], den sich, aufgrund der verschiedenen Besonderheiten ergebenden Entwurfsprozess für Mikrosensoren und -aktoren. Kennzeichnendes Merkmal des Prozesses ist dessen stark iterativer Verlauf. Es findet kein geradliniger Entwurf bis zur Fertigungsfreigabe statt, sondern innerhalb des Entwurfsprozesses werden, in Abhängigkeit der Zwischenergebnisse aus den einzelnen Phasen, ggf. mehrfach, Rücksprünge vollzogen.

Am Anfang des Prozesses steht die Spezifikation des Sensors bzw. Aktors. In einer vorläufigen Entwurfsphase werden das Wandlerprinzip, d.h. der physikalische Koppelungseffekt, die Materialien, Herstellungsprozesse und Technologien eruiert. Der hierdurch entstandene vorläufige Entwurf wird in einer detaillierten Entwurfsphase konkretisiert. Der hieraus resultierende detaillierte Entwurf wird in einer weiteren Phase in Bezug auf seine Robustheit gegenüber Fertigungstoleranzen und auf die Einhaltung von Normen untersucht. Erfüllt der robuste Entwurf die Spezifikation, wird der Entwurf zur Fertigung freigegeben.



**Abb. 1.7:** Entwurfsprozess von Mikrosensoren und -aktoren. Der Prozess ist mehrstufig und iterativ.

Neben der Spezifikation sind in den drei Phasen weitere Eingaben erforderlich. In der vorläufigen Entwurfsphase müssen verfügbaren Herstellungsprozesse gesichtet werden. In der detaillierten Phase ist eine experimentelle Validierung des Entwurfs erforderlich. Für die Zuverlässigkeitsuntersuchung müssen Fertigungstoleranzen, sowie die einzuhaltenden Richtlinien und Normen bekannt sein.

Modellierung und Simulation finden Anwendung in allen drei Phasen des Entwurfs. In der vorläufigen Entwurfsphase wird zumeist auf Basis einfacher analytischer Zusammenhänge ein rudimentäres Modell des zu entwickelnden Mikrobauteils gesucht. Dieses rudimentäre Modell dient zur Abschätzung, ob die Spezifikation mit dem ausgewählten Wandlerprinzip und der zugehörigen Technologie realisiert werden kann.

Die detaillierte Entwurfsphase basiert, bis auf einige gezielte Experimente zur Verifikation, fast ausschließlich auf Modellierung und Simulation [42]. Abbildung 1.8 zeigt eine präzisere Untergliederung dieser, ebenfalls durch Iteration gekennzeichneten Phase in Anlehnung an Wachutka [152, 155]. In der Stufe „Prozesssimulation“ wird der Herstellungsprozess simuliert, um die konkrete Geometrie des künftigen Bauteils und die Materialparameter der einzelnen Schichten abschätzen zu können. In der darauf folgenden Phase „Bauelementsimulation“ wird das Wandlerelement des Mikrosensors bzw. -aktors analysiert. Ziel dieser Phase ist, ein tieferes Verständnis der Funktionsweise zu erlangen, sowie die Funktionalität zu optimieren. Am Ende der zweiten Stufe sollte ein kompaktes Modell stehen, welches das Ein- und Ausgangsverhalten des Bauteils innerhalb des Betriebsbereichs akkurat wiedergibt. Dieses kompakte Modell wird in der dritten Phase „Systemsimulation“ mit den Modellen für die äußere elektronische Beschaltung, des Regelalgorithmus und der Einflüsse durch die Gehäusung vernetzt. Zielsetzung dieser Phase ist das Verhalten des gesamten Sensor- bzw. Aktorsystems zu analysieren, zu bewerten und zu optimieren. Am Ende dieser Phase sollte ein Modell stehen, welches eine rechen-technisch schnelle Evaluierung des Gesamtsystems ermöglicht.

Dieses Modell aus der detaillierten Phase wird in der letzten den Phase des Gesamtprozesses (siehe Abb. 1.7) eingesetzt, um den Entwurf in Bezug auf Zuverlässigkeit und Robustheit zu untersuchen. Hierzu müssen sehr viele, leicht modifizierte Varianten, des Entwurfs simuliert und auf Einhaltung der Spezifikation überprüft werden.

Der soeben beschriebene und stark rechnergestützte Entwurfsprozess für Mikrosensoren und -aktoren ist, bemerkenswerterweise, bisher nicht zusammenhängend in einer Simulationsumgebung abgebildet. Während für den Entwurf in der Mikroelektronik von Systemhäusern wie Cadence<sup>12</sup> oder Synopsys<sup>13</sup> Programmpakete angeboten werden, die das komplette Spektrum über Prozess-, Bauelement- und Systemsimulation durchgängig abdecken, werden im Entwurfsprozess von Mikrosensoren und -aktoren, trotz der steigenden Bedeutung der Simulation<sup>14</sup>, die Produkte verschiedener Systemhäuser verwendet.

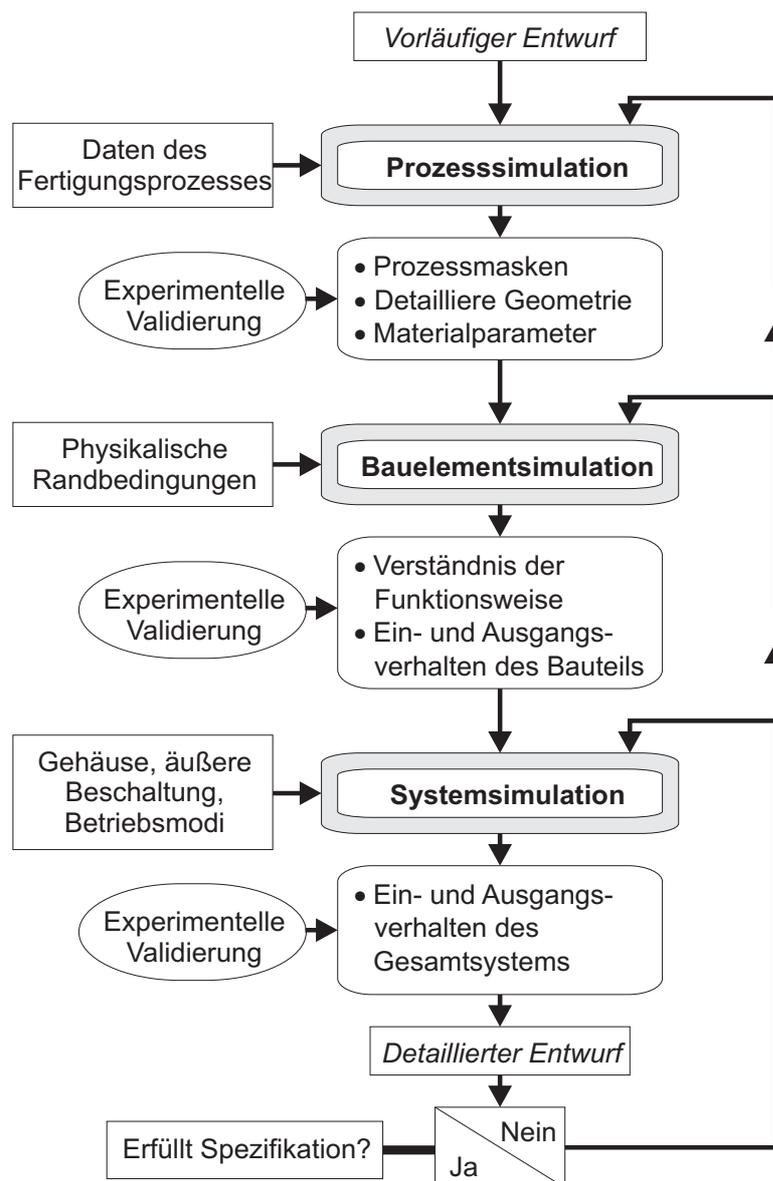
Eine Unterstützung des Entwurfsprozess von Mikrosensoren und -aktoren durch Simulatoren sieht zum Zeitpunkt dieser Arbeit, wie folgt aus: Im vorläufigen Entwurf werden die analytischen Zusammenhänge in einem numerischen Paket, beispielsweise Matlab

---

<sup>12</sup> <http://www.cadence.com/>

<sup>13</sup> <http://www.synopsys.com/>

<sup>14</sup> vgl. Ausführungen gegen Ende des Teilkapitels 1.2



**Abb. 1.8:** Detaillierte Entwurfsphase von Mikrosensoren und -aktoren.

(Fa. Mathworks) implementiert und ausgewertet. In der Phase „Prozesssimulation“ des detaillierten Entwurfs wird für die Simulation der Herstellung beispielsweise der Simulator SEMulator3D (Fa. Coventor) eingesetzt. Typische Simulatoren für die Bauelementsimulation sind Comsol Multiphysics (Fa. Comsol), Ansys Multiphysics (Fa. Ansys) oder Coventorware Analyzer (Fa. Coventor). Für die Systemsimulation und die Zuverlässigkeitsuntersuchungen wird hingegen beispielsweise auf die Simulatoren Matlab/Simulink, Spectre (Fa. Cadence), MEMS+ und Architect3D (beide Fa. Coventor) zurückgegriffen. Neben den genannten gibt es eine größere Anzahl weiterer Simulatoren, die ebenfalls im Entwurf von Mikrosystemen zum Einsatz kommen. Es ist demnach festzuhalten, dass der rechnergestützte Entwurf von Mikrosensoren und -aktoren durch einen ständigen Wechsel

zwischen verschiedenen Simulatoren, teilweise unterschiedlicher Systemhäuser, gekennzeichnet ist.

Weiterhin komplizierend wirkt sich der Umstand aus, dass ein Austausch der Modelle zwischen den Simulatoren, abgesehen von der Problematik nicht kompatibler Dateiformate der verschiedenen Systemhäuser, allein aufgrund von mathematisch-numerischen Unterschieden entweder überhaupt nicht oder nur bedingt möglich ist. Ein Teil der Simulatoren<sup>15</sup> wurde hauptsächlich dazu entwickelt, partielle Differentialgleichungen zu lösen, wohingegen der andere Teil<sup>16</sup> vor allem zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen programmiert wurde. Der Grund für diese zwei Ausrichtungen sind die unterschiedlichen Ziele, die mit den jeweiligen Umgebungen verfolgt werden. Soll das zu entwerfende Bauteil detailliert, d.h. räumlich und zeitlich aufgelöst, untersucht werden, wird ein Modell auf der Basis von partiellen Differentialgleichungen herangezogen. Der entsprechende Simulator nimmt sowohl eine räumliche als auch eine zeitliche Diskretisierung der Gleichungen vor und löst das auf diese Weise entstandene Gleichungssystem numerisch. Die bekanntesten numerischen Methoden, die zur Diskretisierung von partiellen Differentialgleichungen eingesetzt werden, sind die Finite-Element-Methode (FEM) und die Boundary-Element-Methode (BEM). Da für jeden Diskretisierungspunkt der räumlich aufgelösten Modelle Größen wie beispielsweise die mechanische Deformation oder die mechanische Spannung berechnet werden müssen, besitzen die FEM- bzw. BEM-Simulationsmodelle eine sehr große Anzahl an Freiheitsgraden, in der Regel zwischen mehreren Zehntausend bis mehrere Millionen. Dies hat zur Folge, dass FEM- bzw. BEM-Simulationen hochgradig rechenintensiv sind. Sollen mehrere physikalische Energieformen gekoppelt betrachtet oder lange zeitliche Verläufe berechnet werden, steigt der Rechenaufwand derart an, dass die Simulationszeiten schnell inakzeptabel hoch werden. Ist hingegen nur der zeitliche Verlauf von einigen bestimmten Größen von Interesse, kann ggf. auf Modelle zurückgegriffen werden, die auf gewöhnlichen Differentialgleichungen basieren. Simulatoren, die gewöhnliche Differentialgleichungen lösen, diskretisieren diese ausschließlich im Zeitbereich. Hierdurch haben die Simulationsmodelle eine wesentlich geringere Anzahl von Freiheitsgraden, was eine rechnerisch schnelle Auswertung von langen zeitlichen Verläufen ermöglicht. Diese Art Modell eignet sich des Weiteren, in Verbindung mit einem entsprechenden Simulator, zur Analyse des Zusammenwirkens verschiedener Systemkomponenten, wie beispielsweise der Wechselwirkung zwischen einem Mikrowandlerelement, dessen Regelschaltung und Gehäuse.

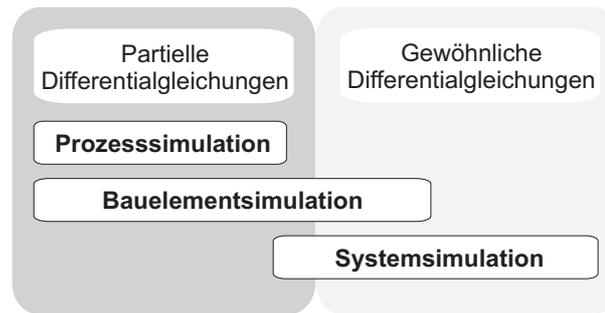
Abbildung 1.9 typisiert die drei Simulationsphasen des detaillierten Entwurfs (siehe Abb. 1.8) in Bezug auf die zu Grunde liegenden Differentialgleichungen<sup>17</sup>. Selbst innerhalb einer Simulationsphase kommen verschiedene Typen von Differentialgleichungen zum Einsatz. Im Übergang zwischen den Phasen der Bauelement- und Systemsimulation findet ein fließender Wechsel von partiellen zu gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen statt.

---

<sup>15</sup> Dies sind von den genannten Beispielen Comsol bzw. Ansys Multiphysics und Coventor Analyzer.

<sup>16</sup> Dies sind von den genannten Beispielen Matlab/Simulink, Spectre, MEMS+ und Architect3D.

<sup>17</sup> Neben den Differentialgleichungen werden ebenfalls algebraische Gleichungen gelöst. Diese sind zur Wahrung der Übersichtlichkeit jedoch nicht in Abb. 1.9 erwähnt.



**Abb. 1.9:** Typisierung der Phasen aus Abb. 1.8 nach zu Grunde liegender Mathematik.

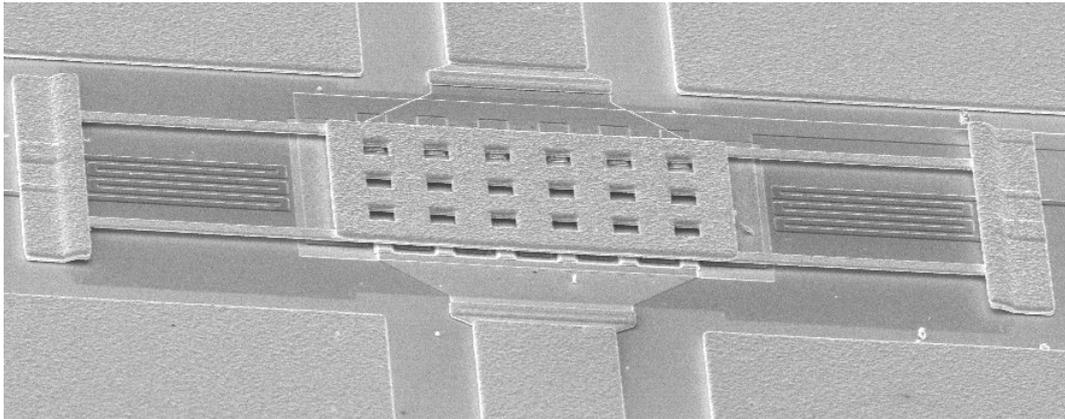
Dieser Übergang ist in Bezug auf einen durchgängig simulationsgestützten Entwurfsprozess äußerst prekär. Simulationsmodelle, die auf partiellen Differentialgleichungen basieren, besitzen in der Regel eine hohe räumliche Auflösung. Diese kann (und soll) jedoch nicht in Simulationsmodelle abgebildet werden, die auf gewöhnlichen Differentialgleichungen basieren. Dies macht eine Reduktion der auf partiellen Differentialgleichungen basierenden Simulationsmodelle erforderlich. Die Art und Weise, wie diese Reduktion durchgeführt wird, bestimmt die Qualität des resultierenden, für die weiteren Entwurfsphasen eingesetzten Modells, und damit die Aussagekraft der Ergebnisse aus den Phasen der Systemsimulation und der Zuverlässigkeitsuntersuchung.

## 1.4 Zielsetzung der Arbeit

Die Ausführungen in Teilkapitel 1.2 zeigen die steigende Bedeutung der Simulation im Entwurf von Mikrosensoren und -aktoren auf. Teilkapitel 1.3 führt weiterhin an, dass der Übergang von Modellen, die auf partiellen Differentialgleichungen basieren, zu Modellen, die auf gewöhnlichen Differentialgleichungen basieren, den Kardinalpunkt eines durchgängig rechnergestützten Entwurfsprozesses darstellt.

Ziel dieser Arbeit ist es, diesen kritischen Übergang auf physikalisch basierte Art und Weise zu systematisieren, weitestgehend zu automatisieren und die, mittels des hierzu erarbeiteten Verfahrens konstruierten Modelle, experimentell zu verifizieren. Der Fokus der Arbeit liegt hierbei auf elektro-fluid-mechanisch gekoppelte Problemstellungen, da diese bei einer Vielzahl von Mikrosystemen anzutreffen sind.

Diese Zielstellung impliziert den Aufbau dieser Arbeit. In Kapitel 2 wird zuerst die sog. Systemebene definiert, auf welcher hauptsächlich gewöhnliche Differentialgleichungen eingesetzt werden. Anschließend wird das Modellierungsvorgehen systematisiert und ein konsistenter theoretischer Rahmen für die Modellierung auf der Systemebene festgelegt. Basierend auf diesen allgemeinen Betrachtungen, wird in den Kapiteln 3, 4 und 5 erläutert, wie für mechanische, elektrostatische und fluidmechanische Probleme, aus einer Darstellung mittels partieller Differentialgleichungen, Systemmodelle extrahiert werden können. Kapitel 6 beschreibt die automatisierte Erstellung elektro-fluid-mechanisch ge-



**Abb. 1.10:** Rasterelektronenmikroskopische (REM) Aufnahme des zu modellierenden Hochfrequenzmikroschalters.

koppelter Systemmodelle. In Kapitel 7 wird, in einem ersten Schritt, das fluid-mechanisch gekoppelte Systemmodell anhand dreier Mikroresonatoren experimentell verifiziert. In Kapitel 8 wird, in einem zweiten Schritt, das elektro-fluid-mechanisch gekoppelte Systemmodell eines mikromechanischen Hochfrequenzschalters (siehe folgendes Teilkapitel) gegenüber experimentellen Daten bewertet. Abschließend werden die Ergebnisse der Arbeit in Kapitel 9 zusammengefasst und Anregungen für weitere Arbeiten gegeben.

## 1.5 Hochfrequenzmikroschalter als Demonstrator

Zur Evaluierung der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Methoden zur Modellierung und Simulation von elektro-fluid-mechanisch gekoppelten Problemstellungen auf der Systemebene werden diese, in Kapitel 8, auf den in Abbildung 1.10 dargestellten mikromechanischen Hochfrequenzschalter angewendet. Die lateralen Abmessungen des Schalters betragen  $600\ \mu\text{m} \times 200\ \mu\text{m}$  (Länge  $\times$  Breite). Auf den Fingernagel<sup>18</sup> eines erwachsenen Menschen könnten demzufolge ca. 833 Mikroschalter dieser Art aufgebracht werden.

Der von der Forschungseinrichtung Fondazione Bruno Kessler<sup>19</sup> (FBK) als Prototyp gefertigte Schalter [35, 119] dient zur Schaltung von hochfrequenten elektrischen Signalen im Gigahertzbereich<sup>20</sup>. Der mechanische Schalter selbst wird jedoch lediglich im Hertzbereich betrieben.

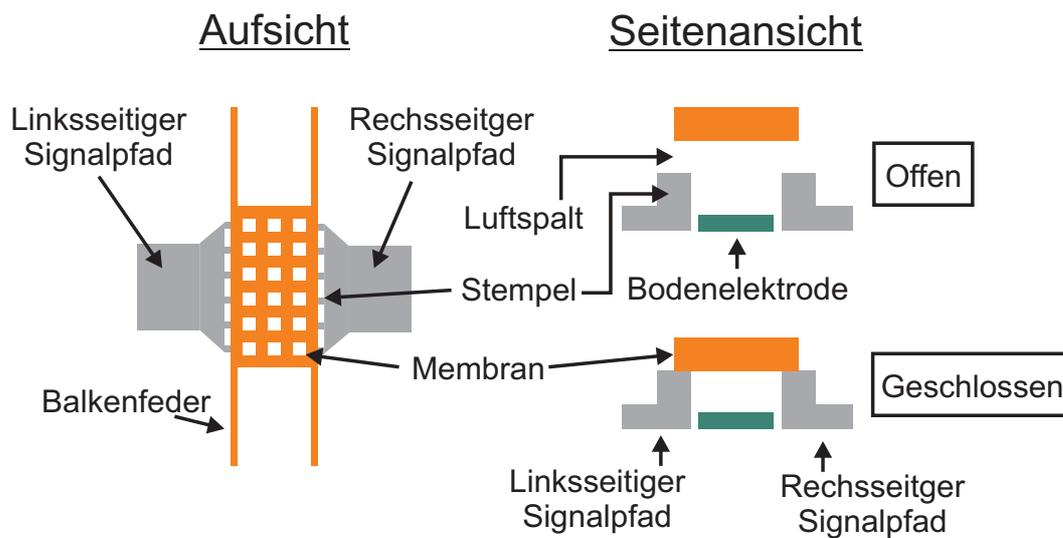
Der mikromechanische Schalter besteht aus einer freitragenden perforierten Membran, die an vier Balkenfedern befestigt ist (siehe Aufsicht in Abb. 1.11). Unterhalb der Membran befinden sich zwölf Stempel und eine Bodenelektrode. Jeweils sechs der Stempel

---

<sup>18</sup> Es wird eine Fläche von  $1\ \text{cm} \times 1\ \text{cm} = 1\ \text{cm}^2$  angenommen.

<sup>19</sup> Die Forschungseinrichtung Fondazione Bruno Kessler (FBK) ist in Povo di Trento, Italien, ansässig.

<sup>20</sup> Der Mobilfunkstandard Universal Mobile Telecommunications System (UMTS) nutzt beispielsweise Frequenzbänder zwischen 1.9 GHz und 2.2 GHz.



**Abb. 1.11:** Schematische Aufsicht und Seitenansicht des Mikroschalters. Die Abbildungen dienen zur Veranschaulichung der Funktionsweise und sind gegenüber der tatsächlichen Struktur stark vereinfacht.

sind mit dem links- bzw. rechtsseitigen Signalpfad verbunden. Im Grundzustand ist der Schalter offen. Zwischen den Stempeln und der Membran existiert ein Luftspalt, der den Signalpfad elektrisch unterbricht (siehe Seitenansicht „Offen“ in Abb. 1.11). Wird die Bodenelektrode unter Spannung gestellt, entstehen elektrostatische Kräfte, welche die Membran nach unten ziehen, bis diese auf den Stempeln zu liegen kommt. Auf diese Weise entsteht, über die Stempel und die Membran, ein ohmscher Kontakt zwischen linkem und rechtem Signalpfad (siehe Seitenansicht „Geschlossen“ in Abb. 1.11). Der Schalter ist geschlossen. Wird die Bodenelektrode spannungsfrei gestellt, bewegen die mechanischen Rückstellkräfte die Membran zurück in die Ausgangslage. Der Schalter ist wieder offen und der Signalpfad unterbrochen.

Das Hauptanwendungsfeld dieses Mikrobauteils ist im Bereich der Telekommunikation<sup>21</sup> zu finden [95]. Rebeiz [120] stellt das Potential dieses Mikrobauteils heraus: Im Vergleich zu den derzeit eingesetzten elektronischen Schaltern, d.h. PIN-Dioden und Feldeffekttransistoren, besitzen die mechanischen Mikroschalter eine wesentlich höhere Isolierfähigkeit<sup>22</sup> und Linearität bei gleichzeitig geringerem Leistungsverbrauch. Mikromechanische Schalter könnten auf diese Weise die Batterielaufzeit von Mobiltelefonen immens verlängern [95]. Die noch unzureichende Zuverlässigkeit dieser Mikrostrukturen verhindert bisher jedoch den Einsatz dieser Bauteile im Bereich der Telekommunikation [63, 120].

<sup>21</sup> Beispielsweise in Mobiltelefonen als Wahlschalter zwischen Empfangsmodulen für verschiedene Frequenzbänder [120] und im Rahmen von konfigurierbaren Impedanzanpassungsnetzwerken [70]. Mit anderen elektromechanischen Mikrostrukturen können noch weitergehende Schaltungen realisiert werden [95, 120].

<sup>22</sup> Isolierfähigkeit bezeichnet die Fähigkeit eines *offenen* Schalters, elektrische Signale zu blockieren. Mikromechanische Schalter weisen für Frequenzen bis zu 100 GHz hervorragende Isolierfähigkeit auf, während z.B. FETs bereits ab Frequenzen von 60 GHz nicht mehr in der Lage sind elektrische Signale zu blockieren.

## 1.6 Konvention

Um zu verdeutlichen, welche mathematischen Vorgehensweisen und Operationen analytisch bzw. auf der Ebene kontinuierlicher Felder, und welche Operationen numerisch bzw. auf der Ebene der Systembetrachtung durchführbar sind, wird in den folgenden Kapiteln in der Darstellung zwischen Variablen kontinuierlicher Systeme und Variablen diskretisierter Systeme unterschieden. Tabelle 1.2 listet die entsprechenden Symbole und deren Bedeutung auf:

Bedeutung	Kontinuierliches System	Diskretisiertes System
Tensor 0.Stufe (Skalar)	$a$	$a$
Tensor 1.Stufe (Vektor)	$\vec{a}$	$\underline{a}$
Tensor 2.Stufe (Matrix)	$\vec{\vec{a}}$	$\underline{\underline{a}}$
Tensor 3.Stufe	$\vec{\vec{\vec{a}}}$	$\underline{\underline{\underline{a}}}$
Tensor 4.Stufe	$\vec{\vec{\vec{\vec{a}}}}$	$\underline{\underline{\underline{\underline{a}}}}$

**Tab. 1.2:** Konvention für die Verwendung der Symbole.



## 2. Modellierung von Mikrosystemen auf der Systemebene

In diesem Kapitel wird der theoretische Rahmen für die Modellierung und Simulation von Mikrosystemen auf der Systemebene dargelegt. Teilkapitel 2.1 grenzt verschiedene Modellierungsebenen voneinander ab und definiert diese für die vorliegende Arbeit. In Teilkapitel 2.2 wird das konzeptionelle Vorgehen bei der Modellierung von Mikrosystemen erläutert. Teilkapitel 2.3 kategorisiert die Ansätze, die für eine Modellierung auf der Systemebene angewendet werden können.

### 2.1 Modellierungsebenen

Für die Modellierung von Mikrosystemen werden Modellierungsebenen<sup>1</sup> mit unterschiedlichen Graden an Abstraktion eingesetzt. Es existiert jedoch keine eindeutige und allgemeingültige Definition dieser Ebenen. Schrag [129] unterscheidet, aus der Perspektive der Physik, zwischen einer kontinuierlichen Feldebene und einer Systemebene. Auf der kontinuierlichen Feldebene wird die in Form von partiellen Differentialgleichungen zu Grunde liegende Beschreibung des Mikrosystems mit Hilfe von FEM- bzw. BEM-Simulatoren räumlich diskretisiert und somit „quasikontinuierlich“ gelöst. Auf der Systemebene wird das Mikrosystem, je nach Anforderung, entweder räumlich aufgelöst, oder mittels konzentrierter Modelle, bzw. sowohl räumlich aufgelöst als auch mittels konzentrierten Modellen, jedoch stets auf der Basis von gewöhnlichen Differentialgleichungen modelliert und simuliert. Sattler [128] orientiert sich bei der Definition der Ebenen an der detaillierten Entwurfsphase (siehe Abb. 1.8) und definiert eine Prozess-, eine Bauelement- und eine Systemebene, auf welchen die Simulationen der entsprechenden Teilphasen (siehe Teilkapitel 1.3) durchzuführen sind. Hierbei basieren Modelle der ersten beiden Ebenen auf partiellen, die Modelle der Systemebene auf gewöhnlichen Differentialgleichungen. Diese Einteilung erweist sich jedoch als begrenzt sachdienlich, woraufhin Sattler diese implizit um eine Mischformen der von ihm definierten Bauelement- und Systemebenen erweitert, auf welcher einige oder alle Teile des Bauelementmodells durch kompaktere, auf gewöhnlichen Differentialgleichungen basierende Modelle ersetzt werden können. Gerlach [46] orientiert sich, ebenfalls wie Sattler [128], am Entwurfsprozess, ohne jedoch den verwendeten Differentialgleichungstyp zu konkretisieren, und de-

---

<sup>1</sup> Synonyme Bezeichnungen für diese Ebenen sind u.a. Modellierungsstufen [129] bzw. Modell- und Simulationsebenen [46].

finiert Ebenen für Technologie-, Bauelement-, Komponenten- und Systemmodelle bzw. -simulationen. Gerlachs Einteilung kongruiert mit der von Sattler, wobei die Ebene der Komponentenmodelle der von Sattler implizierten Mischebene entspricht. Senturias Definition [132] entspricht im wesentlichen der von Gerlach. Senturia unternimmt ebenfalls keine Konkretisierung hinsichtlich des verwendeten Typs an Differentialgleichung, grenzt die verschiedenen Ebenen jedoch nicht so eindeutig ab wie Gerlach und Sattler. Mehner [87] verwendet die Begriffe der physikalischen Ebene, der Makromodellebene und der Systemebene. Die Definition der physikalischen Ebene korrespondiert weitestgehend mit der kontinuierlichen Feldebene von Schrag. Die Makromodellebene entspricht der von Sattler implizierten Mischebene und Gerlachs Ebene der Komponentenmodelle. Mehners Definition der Systemebene deckt sich überwiegend mit der von Gerlach.

Die beträchtliche Unschärfe hinsichtlich der Definition und Abgrenzung der verschiedenen Abstraktionsebenen erfordert eine Festlegung der Modellierungsebenen.

### 2.1.1 Definition und Einordnung der Modellierungsebenen

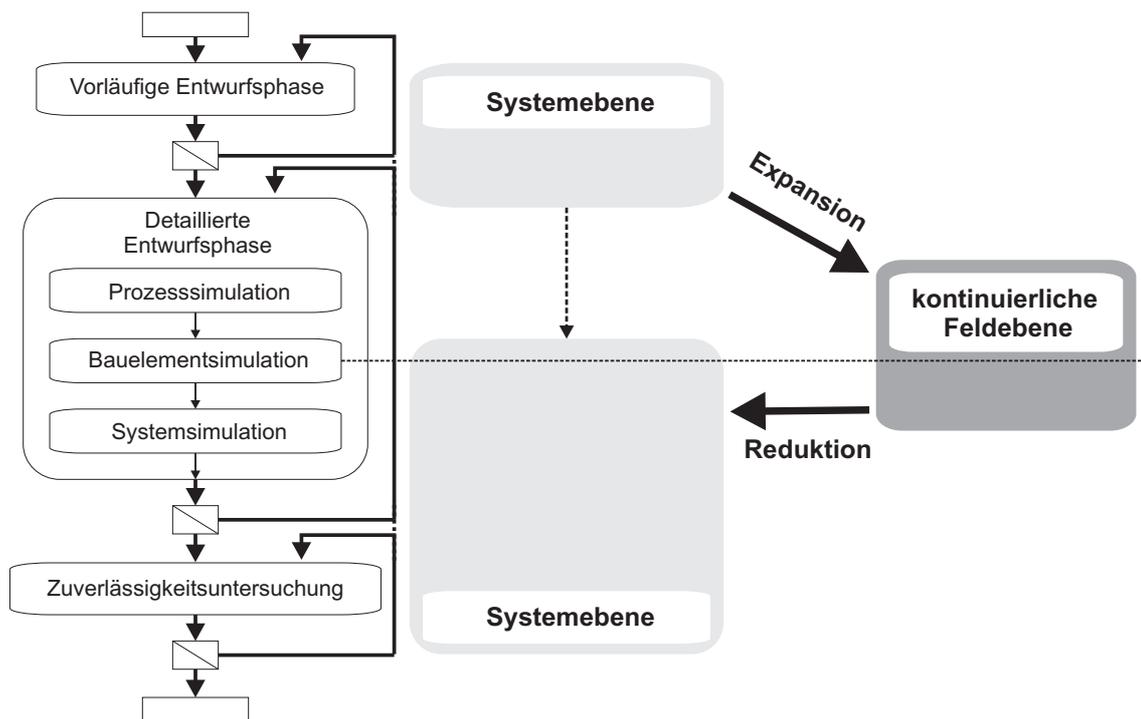
Die Festlegung der Modellierungsebenen für diese Arbeit ist wesentlich an der Definition von Schrag [129] angelehnt. Aus physikalisch-mathematischer Sichtweise wird, äquivalent zu Schrag, zwischen zwei Ebenen unterschieden: der *kontinuierlichen Feldebene* und der *Systemebene*.

Unter der *kontinuierlichen Feldebene* wird eine Ebene zur räumlich und ggf. zeitlich aufgelösten Modellierung und Simulation von Teilen des Mikrosystems, hauptsächlich auf der Basis von partiellen Differentialgleichungen verstanden.

Unter der *Systemebene* wird eine Ebene zur Modellierung und Simulation von Teilen des Mikrosystems, als auch des gesamten Mikrosystems, hauptsächlich auf der Basis von gewöhnlichen Differentialgleichungen verstanden. Die Systemebene steht hinsichtlich der Abstraktion eine Ebene über der kontinuierlichen Feldebene. Aus diesem Grund besitzen die auf der Systemebene eingesetzten Modelle eine, teilweise wesentlich, geringere Anzahl an Freiheitsgraden.

Abbildung 2.1 illustriert die Verwendung der zwei definierten Ebenen bezüglich des Gesamtentwurfsprozesses für Mikrosensoren und -aktoren. Modellierung und Simulation auf der kontinuierlichen Feldebene werden, im Regelfall, ausschließlich innerhalb der detaillierten Entwurfsphase eingesetzt. Modellierung und Simulation auf der Systemebene findet sowohl in der vorläufigen Entwurfsphase als auch ab den späteren Teilphasen des detaillierten Entwurfs statt. Für die Bauelement- und Systemsimulation werden zeitweise beide Modellierungsebenen parallel eingesetzt.

In Teilkapitel 1.3 wurde bereits dargelegt, dass für die beiden Ebenen unterschiedliche Simulationswerkzeuge existieren und, v.a. infolge des verschiedenartigen Differentialgleichungstyps, kein direkter Austausch von Modellen zwischen den Simulatoren bzw. den beiden Ebenen möglich ist. Daher muss der vorläufige Entwurf, welcher aus der vorläufigen Entwurfsphase resultiert, für eine Simulation auf der kontinuierlichen Feldebene expandiert werden, d.h. die zuvor verwendeten kompakten analytischen Gleichungen



**Abb. 2.1:** Verwendung der kontinuierlichen Feldebene und der Systemebene im Gesamtentwurfsprozess für Mikrosensoren und -aktoren. Abb. 1.7 und 1.8 wurden, zur Wahrung der Übersichtlichkeit, simplifiziert und in der linksstehenden Darstellung zusammengeführt.

müssen durch partielle Differentialgleichungen ersetzt und auf der Geometrie des Bauelements räumlich und ggf. zeitlich diskretisiert werden. Soll hingegen während des detaillierten Entwurfs von der kontinuierlichen Feldebene auf die Systemebene gewechselt werden, so ist eine Reduktion vorzunehmen, d.h. aus den kontinuierlichen Modellen sind kompaktere Modelle zu abstrahieren bzw. zu extrahieren.

Einige bereits in Form von Simulationswerkzeugen<sup>2</sup> realisierte Ansätze versuchen einen Wechsel auf die kontinuierliche Feldebene und die damit verbundenen Konvertierungsschritte zu vermeiden (siehe gestrichelter Pfeil in Abb. 2.1). Ein derartiger Schritt ist jedoch nur sinnvoll, wenn für die Beschreibung des zu analysierenden Mikrosystems Bibliotheken mit hinreichend genauen Kompaktmodellen vorhanden sind, die eine detaillierte Untersuchung auf der kontinuierlichen Feldebene tatsächlich entbehrlich machen. Liegen keine entsprechenden Kompaktmodelle vor, ist kein prädiktives Simulationsergebnis zu erwarten<sup>3</sup>.

<sup>2</sup> z.B. die Simulatoren Coventorware Architect3D und MEMS+ der Firma Coventor.

<sup>3</sup> Die Simulatoren Coventorware Architect3D und MEMS+ der Firma Coventor bieten, zum Zeitpunkt dieser Arbeit, beispielsweise keine Kompaktmodelle an, die eine Berechnung der fluidischen Dämpfung in Mikrosystemen für komplexere Geometrien erlauben würde.

<b>Ursprung</b>	Schaltungssimulation	Numerische Pakete	Systemsimulation
<b>Beispiele</b>	Saber, Spectre, Spice	Mathematica, Matlab	Architect3D, Dymola, Matlab/Simulink, MEMS+, Simplorer
<b>Vorteile</b>	Stabile und effiziente Löser, eigene Modelle erstellbar, Eingabe des Gleichungssystems mittels Netzlisten	Sehr vielseitig, teilweise massive Eingriffe in Löser möglich, eigene Modelle erstellbar	Teilweise Modell- bibliotheken für Mikrosysteme, problemorientierte Benutzeroberflächen
<b>Nachteile</b>	Umfangreiche Modellbibliotheken nur von elektronischen Bauelementen	Keine Modellbibliotheken vorhanden, keine problemorientierte Benutzeroberflächen	Modelle der Bibliotheken nicht einsehbar, schwer um eigene Modelle erweiterbar

**Tab. 2.1:** Exemplarische Übersicht von Werkzeugen für die Simulation auf der Systemebene.

## 2.1.2 Simulationswerkzeuge für die Systemebene

Typische Werkzeuge für die Simulation auf der kontinuierlichen Feld- bzw. Systemebene sind bereits in Teilkapitel 1.3 aufgelistet. Da das Ziel dieser Arbeit darin besteht, Modelle auf der Systemebene zu erstellen, wird auf die entsprechenden Werkzeuge zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen nochmals gesondert eingegangen. Tabelle 2.1 listet die bereits in 1.3 angeführten Simulatoren sowie weitere auf und ordnet diese nach deren Ursprung ein. Hierbei wird kein Anspruch auf eine vollständige Erfassung aller Simulatoren und deren Eigenschaften erhoben.

Ein Teil der Werkzeuge haben ihren Ursprung in der Schaltungssimulation. Hier wurden frühzeitig Werkzeuge zur Lösung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen, auch nichtlinearer Art, benötigt und entwickelt. Der Simulator Spice entstand beispielsweise während der 1960er Jahre aus einem amerikanischen Forschungsprojekt [93]. Aufgrund ihrer langen Historie, sind die numerischen Löser dieser Werkzeuge meist sehr ausgereift, d.h. sehr stabil und effizient [94]. Die Modellbibliotheken dieser Simulatoren enthalten hauptsächlich Modelle für elektronische Bauelemente, können in der Regel jedoch dynamisch erweitert werden. Hierfür werden spezielle Beschreibungssprachen, engl. *hardware description languages* (HDLs), angeboten. Vertreter dieser Sprachen sind VHDL-AMS<sup>4</sup> und Verilog-AMS<sup>5</sup>.

<sup>4</sup> VHDL ist eine Abkürzung für „Very High Speed Integrated Circuit Hardware Description Language“. AMS steht für „Analog and Mixed-Signal“. Grundlage für diese Sprache sind die Spezifikationen IEEE 1076-1993 und IEEE 1076.1-1999.

<sup>5</sup> Verilog bezeichnet hier die Sprache, die Abkürzung AMS steht ebenfalls für „Analog and Mixed-Signal“.

Ein anderer Teil der einsetzbaren Werkzeuge stammt aus dem Bereich der numerischen Pakete, die zur Lösung verschiedenster mathematischer Gleichungen entwickelt wurden. Diese sind zwar sehr vielseitig, bieten jedoch standardmäßig keine Modellbibliotheken und keine komfortable Benutzeroberfläche zur Modellierung von Mikrosystemen.

Eine dritte Art von Simulatoren wurde bereits gezielt für energieformübergreifende Modellierungsaufgaben entwickelt. Diesbezüglich ist zu bemerken, dass diese Systemsimulatoren zumeist in Form einer problemorientierten Benutzeroberfläche kombiniert mit Modellbibliotheken bereitgestellt werden, und die numerische Lösung an einen Schaltungssimulator oder ein numerisches Paket ausgelagert wird. Von den genannten Systemsimulatoren wurden Architect3D und MEMS+ sogar speziell für die Modellierung von Mikrosystemen entwickelt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird für die Simulation auf der Systemebene ein Schaltungssimulator, konkret Spectre der Firma Cadence, eingesetzt. Hierfür liegen mehrere Gründe vor. Zu allererst erlauben Schaltungssimulatoren die Darstellung eines Systems als Kirchhoffsches Netzwerk. Systemsimulatoren, wie z.B. Simulink, die eine Signalflussdarstellung des Systems erfordern, sind hingegen für diese Arbeit nicht geeignet (siehe Teilkapitel 2.2.2). Darüber hinaus eignen sich die stabilen numerischen Löser der Schaltungssimulatoren sehr gut für die Klasse der zu rechnenden Probleme (siehe Kapitel 6). Zum anderen lassen sich die erstellten Modelle sehr komfortabel über eine Beschreibungssprache implementieren. Des Weiteren erlaubt die Möglichkeit, das Gleichungssystem über eine Netzliste einzugeben, eine weitgehende Automatisierung der Modellerstellung (siehe Kapitel 7). Ebenso ist die direkte Co-Simulation mit dem Modell der elektronischen Beschaltung möglich.

## 2.2 Theoretische Grundlagen

Nach der Definition der Systemebene, sowie der Auswahl des Werkzeuges für die Simulation, wird in diesem Teilkapitel das allgemeine Vorgehen bei der Modellierung von Mikrosystemen auf der Systemebene strukturiert und der theoretische Rahmen für die Modellbildung festgelegt.

### 2.2.1 Partitionierung in Subsysteme und Synthese des Gesamtmodells

Aufgrund ihrer Komplexität können Mikrosysteme, insbesondere Mikrosensoren und -aktoren, nicht in einem einzigen Schritt modelliert werden, sondern erfordern ein systematisches Vorgehen bei der Bildung von Modellen. Der Systemtheoretiker Willems [165] reduziert die in dieser Arbeit verwendete Vorgehensweise auf drei Schritte<sup>6</sup>:

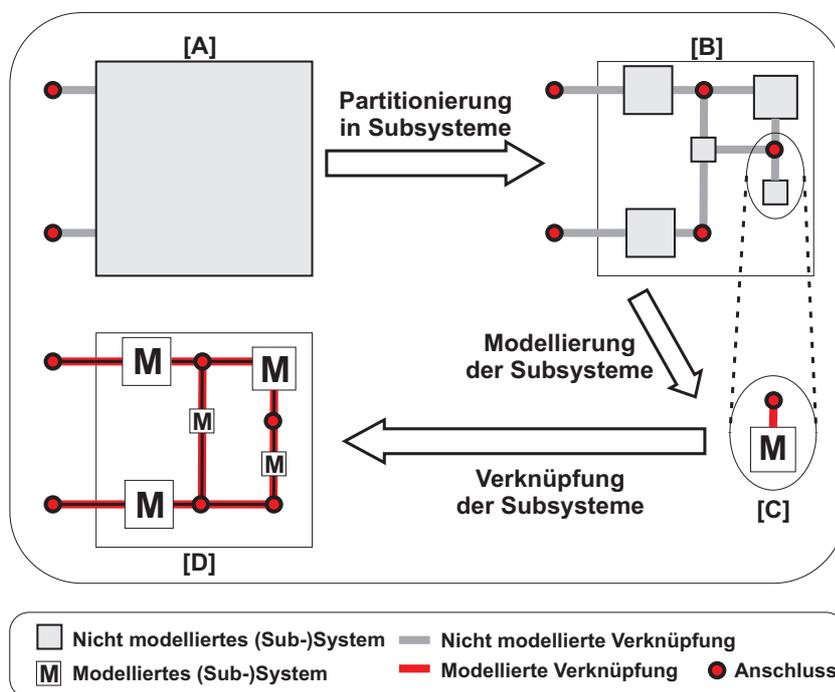
---

<sup>6</sup> Auch Schrag [129] und Sattler [128] verwenden diese Vorgehensweise. Willems [165] bezeichnet die entsprechenden Schritte mit *tearing*, *zooming* und *linking*.

1. Partitionierung in Subsysteme,
2. Modellierung der Subsysteme und
3. Verknüpfung der Subsysteme.

Abbildung 2.2 stellt diese drei Schritte schematisch dar. Ist ein zu modellierendes System zu komplex, wird dieses zuerst solange, auch rekursiv, partitioniert, bis dieses in greifbare Subsysteme zerlegt ist. „Greifbar“ ist hier bezüglich der Modellierbarkeit zu verstehen, d.h. das entsprechende (Sub-)System kann durch ein einzelnes Modell abgebildet werden. Aus dem Partitionierungsvorgang ergibt sich gleichzeitig die Topologie des Systemmodells, d.h. durch die Zerlegung wird festgelegt, welche Subsysteme miteinander verknüpft sind und wie die Art dieser Verknüpfung ist. Im zweiten Schritt werden die einzelnen Subsysteme nacheinander durch konkrete Modelle beschrieben. Gleichzeitig wird hierbei spezifiziert, welche Zustandsvariablen des Subsystems über Anschlüsse für andere Subsysteme zugänglich sind. Um das Modell des Gesamtsystems zu synthetisieren, werden im dritten Schritt die einzelnen Modelle über ihre Anschlüsse miteinander verknüpft.

Dieses abstrakte Vorgehen bedarf der Konkretisierung. Insbesondere ist ein theoretisches Rahmenwerk erforderlich, welches festlegt, wie die Schnittstellen zwischen den Subsystemen bzw. Modellen, d.h. die Anschlüsse, und damit letztendlich die Modelle, auf konsistente Art und Weise zu formulieren sind.



**Abb. 2.2:** Schemabild des Modellierungsablaufs. Das zu analysierende System [A] wird zuerst in Subsysteme partitioniert [B]. Nach der Modellierung [C] der einzelnen Subsysteme und deren Anschlüsse werden diese wieder zu einem Modell des Gesamtsystems [D] zusammengeführt.

Energieform	Extensive Variable $\mathcal{E}$	Intensive Variable $\mathcal{I}$
thermisch	Entropie $S_t$	Temperatur $T_t$
chemisch	Teilchenzahl $N_c$	chemisches Potential $\mu_c$
elektrisch	elektrische Ladung $Q_e$	elektrisches Potential $\Phi_e$

**Tab. 2.2:** Beispiele konjugierter Variablen [155].

### 2.2.2 Systemdarstellung als verallgemeinertes Kirchhoffsches Netzwerk

In dieser Arbeit stellt die „verallgemeinerte Kirchhoffsche Netzwerktheorie“ den theoretischen Rahmen für die Modellierung auf der Systemebene dar. Im Folgenden wird in stark verknappter Form dargestellt, wie sich die verallgemeinerte Kirchhoffsche Netzwerktheorie mit Hilfe von thermodynamischen Betrachtungen und Bilanzgleichungen konstruieren und systematisch auf die verschiedenen Energieformen anwenden lässt<sup>7</sup>.

#### Allgemeine Darstellung

Die Variablen eines Systems lassen sich aus Sicht der Thermodynamik in extensive und intensive Variablen einteilen [21]. Ein Paar  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{E}$  zusammengehörender intensiver und extensiver Variablen wird als „konjugierte Variable“ bezeichnet [155]. Tabelle 2.2 listet Beispiele für konjugierte Variablen auf.

Mittels der Relation von Gibbs lässt sich die Änderung der inneren Energie eines thermodynamischen Systems  $dU$  durch die Änderung der konjugierten Variablen ausdrücken. In dieser Relation steht die extensive Variable stets in differentieller Form, die intensive Variable hingegen nicht:

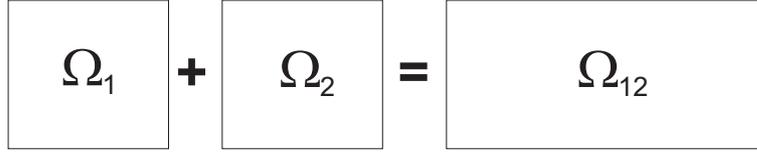
$$dU = T_t dS_t + \mu_c dN_c + \sum_i \mathcal{I}_i d\mathcal{E}_i \quad (2.1)$$

Entsprechend lässt sich daraus ableiten, dass eine extensive Variable fließen kann, eine intensive Variable hingegen nicht [21, 155]. Werden zwei Gebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  zusammengeschlossen (siehe Abbildung 2.3), so verhalten sich die extensiven Variablen auf dem zusammengeschlossenen Gebiet  $\Omega_{12}$  additiv

$$\mathcal{E}_{\Omega_{12}} = \mathcal{E}_{\Omega_1} + \mathcal{E}_{\Omega_2} \quad (2.2)$$

---

<sup>7</sup> Ein detaillierte Darstellung ist in den entsprechenden Veröffentlichungen und Skripten von Wachutka [152, 155, 156] sowie in den Abhandlungen von Callen [21] und Senturia [132] zu finden. Die verknappte Darstellung erfolgt v.a. anhand dieser Materialien.



**Abb. 2.3:** Schematische Darstellung des Zusammenschlusses der Gebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  zum Gebiet  $\Omega_{12}$ .

während intensive Variablen anstreben, über einem Gebiet homogen zu werden:

$$\mathcal{I}_{\Omega_{12}} \neq f(\vec{r}) \quad \text{für} \quad \vec{r} \in \Omega_{12} \quad (2.3)$$

Wachutka [155, 156] zeigt weiterhin auf, dass im thermodynamischen Gleichgewicht eines Systems zwischen einer extensiven Zustandsvariable  $\mathcal{E}$  und einer intensiven Zustandsvariable  $\mathcal{I}$ , mittels des Theorems von Onsager [110], ein linearer, differentieller Zusammenhang gebildet werden kann, der auch in der „näheren“ Umgebung dieses Gleichgewichtspunkts gültig ist [156]:

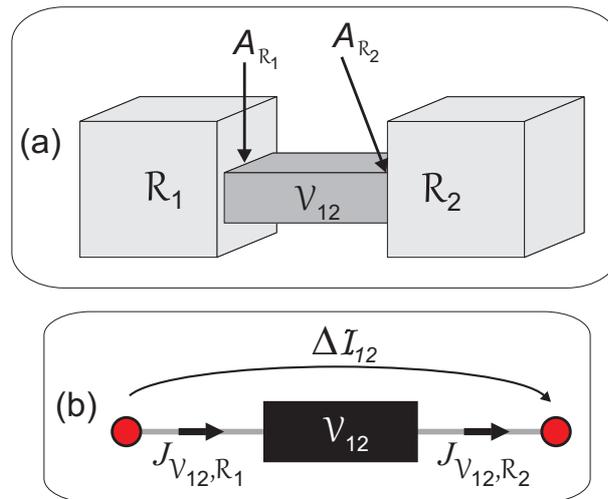
$$\underbrace{\vec{j}_{\mathcal{E}}}_{\text{Fluss}} = \underbrace{\mathcal{L}}_{\substack{\text{linearer} \\ \text{Transport-} \\ \text{koeffizient}}} \cdot \underbrace{(-\nabla \mathcal{I})}_{\substack{\text{treibende} \\ \text{Kraft}}} \quad (2.4)$$

Gleichung 2.4 wird in dieser Arbeit, in Übereinstimmung mit Wachutka [156, 152], derart interpretiert, dass der Gradient einer intensiven thermodynamischen Variable einen Fluss  $\vec{j}_{\mathcal{E}}$  einer extensiven thermodynamischen Variable treibt. Der Gradient einer intensiven thermodynamischen Variable wird daher auch als „treibende Kraft“ bezeichnet. Die Verknüpfung zwischen der treibenden Kraft und dem getriebenen Fluss erfolgt über einen „linearen Transportkoeffizienten“  $\mathcal{L}$ , welcher, cursorisch formuliert, das physikalische Transportmodell beinhaltet. Hierbei ist anzumerken, dass „linear“ lediglich im Sinne der Struktur von Gleichung 2.4 zu interpretieren ist. Der Transportkoeffizient kann sehr wohl ein Tensor mit nichtlinearen Einträgen sein und Abhängigkeiten bezüglich  $\mathcal{I}$ , sowie deren Ableitungen und weiteren Größen aufweisen [156, 157].

Das räumliche und zeitliche Verhalten von Flüssen extensiver Größen wird mittels lokaler bzw. integraler Bilanzgleichungen beschrieben:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho_{\mathcal{E}}}{\partial t}}_{\substack{\text{Akkumulations-} \\ \text{rate}}} = - \underbrace{\nabla \cdot \vec{j}_{\mathcal{E}}}_{\substack{\text{lokaler} \\ \text{Zu- bzw. Abfluss}}} + \underbrace{\Pi_{\mathcal{E}}}_{\substack{\text{Generations-} \\ \text{rate}}} \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) d^3r = - \int_{\partial V} \vec{j}_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) d\vec{\sigma} + \int_V \Pi_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) d^3r \quad (2.6)$$



**Abb. 2.4:** Demonstratorsystem. **(a)** Dreidimensionale Darstellung des Systems bestehend aus zwei Reservoirs  $\mathcal{R}_1$  und  $\mathcal{R}_2$  und einer Verbindung  $\mathcal{V}_{12}$ . Die Querschnittsflächen  $A_{\mathcal{R}_1}$  und  $A_{\mathcal{R}_2}$  befinden sich am Übergang zwischen der Verbindung und den entsprechenden Reservoirs. **(b)** Abstrakte Darstellung des Systems.

Nach Ausdruck 2.5 kann die Dichte  $\rho_{\mathcal{E}}$  einer extensiven Variable lokal entweder durch einen lokalen Zu- bzw. Abfluss  $\nabla \cdot \vec{j}_{\mathcal{E}}$  oder durch lokale Generation  $\Pi_{\mathcal{E}}$  verändert werden. Entsprechend ergibt sich durch Integration von 2.5 über ein Kontrollvolumen  $V$  die allgemeine Bilanzgleichung 2.6 in integraler Darstellung. Wird die Relation 2.4 in die Bilanzgleichung 2.5 eingesetzt, so folgt des Weiteren ein Zusammenhang zwischen der Bilanzierung der extensiven thermodynamischen Größe und der dazu konjugierten intensiven Größe:

$$\frac{\partial \rho_{\mathcal{E}}}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathcal{L} \cdot \nabla \mathcal{I}) + \Pi_{\mathcal{E}} \quad (2.7)$$

Diese Zusammenhänge erlauben die Ableitung von drei von insgesamt vier generischen Eigenschaften, die ein, sich nach diesen Grundgleichungen verhaltendes, System haben kann. Diese Eigenschaften werden, um eine bessere Übersicht zu gewährleisten, anhand einer integralen Beschreibung des in Abbildung 2.4a dargestellten Systems erläutert, welches aus zwei würfelförmigen Reservoirs  $\mathcal{R}_1$  und  $\mathcal{R}_2$ , sowie einer quaderförmigen Verbindung  $\mathcal{V}_{12}$  der Länge  $l$  mit der Querschnittsfläche  $A$  zwischen den Reservoirs besteht.

Für dieses Demonstratorsystem wird weiterhin angenommen:

- $\mathcal{I}_1 \neq f(\vec{r})$  für  $\vec{r} \in \mathcal{R}_1$ , d.h. über  $\mathcal{R}_1$  sei die intensive Variable  $\mathcal{I}_1$  homogen.
- $\mathcal{I}_2 \neq f(\vec{r})$  für  $\vec{r} \in \mathcal{R}_2$ , d.h. über  $\mathcal{R}_2$  sei die intensive Variable  $\mathcal{I}_2$  homogen.
- Es gelte  $\mathcal{I}_1 \neq \mathcal{I}_2$ , d.h. es entsteht eine treibende Kraft innerhalb  $\mathcal{V}_{12}$ .
- Das System sei abgeschlossen, d.h. es tauscht keine Größen mit der Umgebung aus.

Unter diesen Annahmen lässt sich das System mit der in Teilkapitel 2.2 dargelegten Vorgehensweise direkt in zwei Anschlüsse und einen Modellblock partitionieren (siehe Abbildung 2.4b). Die Auswertung der integralen Bilanzgleichung 2.6 für die Verbindung  $\mathcal{V}_{12}$  ergibt das konkrete Modell für die Verbindung:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_{12}} \rho_{\mathcal{E}\mathcal{V}_{12}}(\vec{r}, t) d^3r = \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\mathcal{V}_{12}}(t) \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} - \int_{\partial\mathcal{V}_{12}} \vec{j}_{\mathcal{E}\mathcal{V}_{12}}(\vec{r}, t) d\vec{\sigma} &= - \left( \int_{A_{\mathcal{R}_1}} \vec{j}_{\mathcal{E}\mathcal{V}_{12}} d\vec{\sigma} + \int_{A_{\mathcal{R}_2}} \vec{j}_{\mathcal{E}\mathcal{V}_{12}} d\vec{\sigma} \right) = \\ &= J_{\mathcal{V}_{12}, \mathcal{R}_1}(t) - J_{\mathcal{V}_{12}, \mathcal{R}_2}(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\int_{\mathcal{V}_{1 \leftrightarrow 2}} \Pi_{\mathcal{E}\mathcal{V}_{12}}(\vec{r}, t) d^3r = J_{\Pi, \mathcal{V}_{12}}(t) \quad (2.10)$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\mathcal{V}_{12}}(t) = J_{\mathcal{V}_{12}, \mathcal{R}_1}(t) - J_{\mathcal{V}_{12}, \mathcal{R}_2}(t) + J_{\Pi, \mathcal{V}_{12}}(t) \quad (2.11)$$

Insgesamt existieren vier generische Eigenschaften. Ein Kontrollvolumen kann leitfähig, eine Quelle, kapazitiv oder induktiv sein. Die Eigenschaft der Leitfähigkeit bedeutet, dass ein Kontrollvolumen eine extensive Größe transportieren kann. Abgeleitet werden kann diese Eigenschaft aus Gleichung 2.11 durch Annahme von Quellenfreiheit ( $J_{\Pi, \mathcal{V}_{12}}(t) \equiv 0$ ) und des stationären Falls ( $d/dt \equiv 0$ ):

$$J_{\mathcal{V}_{12}, \mathcal{R}_1} - J_{\mathcal{V}_{12}, \mathcal{R}_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad J_{\mathcal{V}_{12}, \mathcal{R}_1} = J_{\mathcal{V}_{12}, \mathcal{R}_2} = J_{\mathcal{V}_{12}} \quad (2.12)$$

Ausdruck 2.12 besagt, dass unter diesen Annahmen der eingehende integrale Fluss  $J_{\mathcal{V}_{12}, \mathcal{R}_1}$  gleich dem ausgehenden  $J_{\mathcal{V}_{12}, \mathcal{R}_2}$  ist, d.h. die extensive Größe wird über die Verbindung  $\mathcal{V}_{12}$  transportiert. Wird die Onsager-Relation (Ausdruck 2.4) integriert, so ergibt sich ein Zusammenhang zwischen dem Fluss  $J_{\mathcal{V}_{12}}$  durch die Verbindung  $\mathcal{V}_{12}$  und der Differenz der intensiven Variablen  $\Delta\mathcal{I}_{12}(t) = \mathcal{I}_2(t) - \mathcal{I}_1(t)$ , welcher lautet:

$$J_{\mathcal{V}_{12}} = \left( \int_A \mathcal{L} d\vec{\sigma} \right) \cdot \frac{\Delta\mathcal{I}_{12}}{l} \quad (2.13)$$

Folglich existiert im Fall der Leitfähigkeit eines Kontrollvolumens  $V$  eine generische Beziehung  $f$  zwischen integralem Fluss und der Differenz der intensiven Variablen:

$$J_{\mathcal{E}, V} = f(\Delta\mathcal{I}_V) \quad (2.14)$$

Die zweite Eigenschaft ist die der Quelle. Existiert in dem Kontrollvolumen ein Generationsmechanismus mit  $\Pi_{\mathcal{E}} \neq 0$ , so wird ein Fluss einer extensiven Größe  $J_{\Pi}$  eingepreßt. Diese Eigenschaft kann durch Annahme des stationären Falls ( $d/dt \equiv 0$ ) aus Gleichung 2.11 abgeleitet werden:

$$J_{\mathcal{V}_{12}, \mathcal{R}_1} - J_{\mathcal{V}_{12}, \mathcal{R}_2} = -J_{\Pi, \mathcal{V}_{12}} \quad (2.15)$$

Ausdruck 2.15 besagt, dass in diesem Fall die ein- und ausgehenden Flüssen sich nicht zu Null ergeben und der von der Quelle eingepreßte Fluss zu berücksichtigen ist. Der eingepreßte Strom kann hierbei von verschiedensten Größen  $\vec{\mathcal{X}}$  abhängig sein. Folglich gilt allgemein für ein Kontrollvolumen  $V$ :

$$J_{\Pi, \mathcal{E}, V} = f(\vec{\mathcal{X}}) \quad (2.16)$$

Die weiteren generischen Eigenschaften haben energiespeichernden Charakter. Die kapazitive Eigenschaft beruht auf der Fähigkeit eines Kontrollvolumens, eine extensive Größe akkumulieren zu können. Abgeleitet werden kann diese Eigenschaft aus Gleichung 2.11 durch die Annahme von Quellenfreiheit ( $J_{\Pi, \mathcal{V}_{12}} \equiv 0$ ):

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\mathcal{V}_{12}}(t) = J_{\mathcal{V}_{12}, \mathcal{R}_1}(t) - J_{\mathcal{V}_{12}, \mathcal{R}_2}(t) \quad (2.17)$$

Beziehung 2.17 besagt, dass in diesem Falle die ein- und ausgehenden Flüssen sich nicht zu Null ergeben, sondern in der Verbindung eine extensive Größe gespeichert bzw. abgegeben werden kann. Allgemein formuliert gilt auf diese Weise für ein Kontrollvolumen:

$$J_{\mathcal{E}, V}(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{E}_V(t) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{E}_V(t) = \int_{t_0}^t J_{\mathcal{E}, V}(t) dt + \mathcal{E}_V(t_0) \quad (2.18)$$

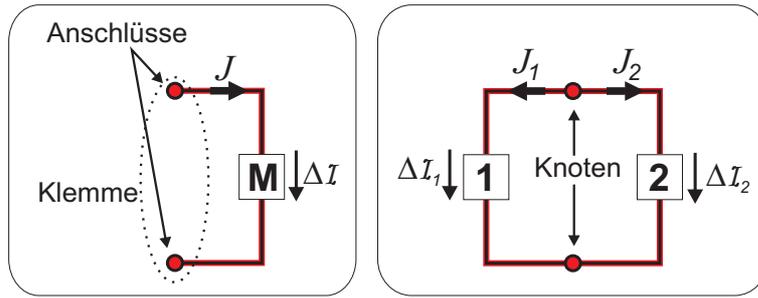
Ist weiterhin die extensive Größe mit der treibenden Kraft über einen Kapazitätskoeffizienten [136, 154]  $\mathcal{K}_C$  verknüpft, ergo

$$\mathcal{E}_V(t) = \mathcal{K}_C \cdot \Delta \mathcal{I}_V(t) \quad (2.19)$$

ergibt sich durch Einsetzen in Gleichung 2.18:

$$J_{\mathcal{E}, V}(t) = \frac{d}{dt} \{ \mathcal{K}_C \cdot \Delta \mathcal{I}_V(t) \} \quad (2.20)$$

Eine detaillierte Herleitung der vierten, induktiven Eigenschaft ist im Rahmen der verknüpften Darstellung nicht bewerkstelligbar. Aus diesem Grund werden direkt die resultierenden Gleichungen angegeben. Bezüglich der Herleitung wird auf die Ausführungen



**Abb. 2.5:** Schemabild zum Verständnis der Begriffe Anschluss, Klemme und Knoten.

in den Abhandlungen von Wachukta [154], Voigt [151] und Senturia [132] verwiesen. Allgemein ist, entsprechend der genannten Ausführungen, ein Kontrollvolumen  $V$  induktiv, wenn es ein verallgemeinertes Moment  $\mathcal{M}_V(t)$  aufbauen kann:

$$\Delta\mathcal{I}_V(t) = \frac{d}{dt}\mathcal{M}_V(t) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{M}_V(t) = \int_{t_0}^t \Delta\mathcal{I}_V(t)dt + \mathcal{M}_V(t_0) \quad (2.21)$$

Existiert des Weiteren über einen Induktivitätskoeffizienten [154]  $\mathcal{K}_I$  ein Zusammenhang zwischen dem verallgemeinerten Moment und dem Fluss der extensiven Variable

$$\mathcal{M}_V(t) = \mathcal{K}_I \cdot J_{\mathcal{E},V}(t) \quad (2.22)$$

ergibt sich durch Einsetzen in 2.21:

$$\Delta\mathcal{I}_V(t) = \frac{d}{dt}\{\mathcal{K}_I \cdot J_{\mathcal{E},V}(t)\} \quad (2.23)$$

Zur Wahrung der Übersicht sind die essentiellen generischen Variablen und Zusammenhänge für Kontrollvolumina nochmals in den Tabellen 2.3 und 2.4 zusammengefasst. Dabei werden, vorausgreifend auf spätere Teilkapitel, Klassifizierungen für ein jeweils sich entsprechend verhaltendes System eingeführt. Des Weiteren werden die Systeme hinsichtlich ihres energetischen Verhaltens typisiert.

Nachdem mit den generischen Eigenschaften erste Grundlagen zur konkreten Modellierung von (Sub-)Systemen geschaffen wurden, ist weiterhin das Verhalten bei der Kopplung von Systemen zu modellieren. Damit eine Differenz  $\Delta\mathcal{I}$  einer intensiven Größe über einem System abfallen kann, muss ein System mindestens zwei Anschlüsse aufweisen (siehe Abbildung 2.5 links). Ein Paar von zwei Anschlüssen wird im Folgenden als Klemme bezeichnet. Werden mehrere Subsysteme über ihre Anschlüsse miteinander verbunden, so entstehen Knoten (siehe Abbildung 2.5 rechts).

Zur Beschreibung der Knoten wird angenommen, dass diese ein Volumen  $\mathcal{V} \rightarrow 0$  besitzen, sodass diese zumeist weder eine extensive Variable speichern noch generieren kön-

Symbol	Beschreibung
$\mathcal{I}_V$	generische intensive Variable
$\mathcal{E}_V$	generische extensive Variable
$J_{\mathcal{E},V}$	integraler Fluss der extensiven Variable (engl. <i>through-quantity</i> )
$\Delta\mathcal{I}_V$	Differenz der intensiven Variable (engl. <i>across-quantity</i> )

**Tab. 2.3:** Aufstellung der wichtigsten verwendeten Symbole und deren Beschreibung bezogen auf ein Kontrollvolumen  $V$ .

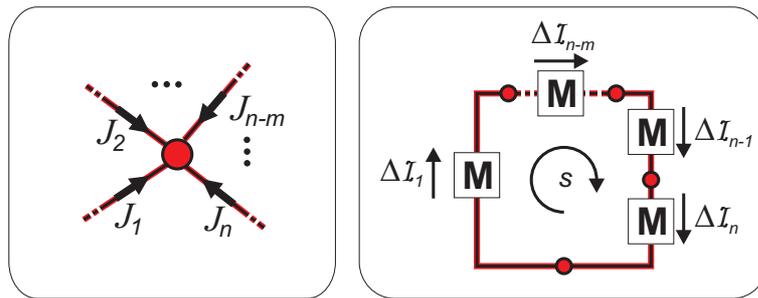
Eigenschaft	Klassifizierung	Beschreibende Gleichung	Energetische Typisierung
resistiv (leitfähig)	generischer Widerstand (Leitwert)	$J_{\mathcal{E},V} = f(\Delta\mathcal{I}_V)$	passiv, dissipativ
Quelle	generische Quelle	$J_{\Pi,\mathcal{E},V}(t) = f(\vec{\mathcal{X}}, t)$	aktiv
kapazitiv	generischer Kondensator	$J_{\mathcal{E},V}(t) = \frac{d}{dt} \{\mathcal{K}_C \cdot \Delta\mathcal{I}_V(t)\}$	passiv, speichernd
induktiv	generische Spule	$\Delta\mathcal{I}_V(t) = \frac{d}{dt} \{\mathcal{K}_I \cdot J_{\mathcal{E},V}(t)\}$	passiv, speichernd

**Tab. 2.4:** Aufstellung der Bezeichnungen, beschreibenden Gleichungen und Typisierung der vier generischen Eigenschaften bezogen auf ein Kontrollvolumen  $V$ .

nen. Unter diesen Annahmen folgt aus 2.6, dass sich die Bilanz der integralen Flüsse der extensiven an einem Knoten zu Null ergeben muss:

$$\sum_n J_n = 0 \quad (2.24)$$

Ausdruck 2.24 wird im Folgenden als „verallgemeinerte Kirchhoffsche Knotenregel“ bezeichnet. Die einzige Ausnahme dieser Regel stellen speichernde Knoten dar. Ein Beispiel hierfür sind die Elektroden eines elektrischen Kondensators, welche als Knoten angesehen werden können, jedoch elektrische Ladung, d.h. eine extensive Größe speichern können. Es lässt sich eine zur Knotenregel duale Regel für die Differenzen der intensiven Variablen herleiten. Da die treibenden Kräfte als Gradienten einer intensiven Größe definiert sind, ist das resultierende Vektorfeld konservativ. Folglich muss ein geschlossenes Wegintegral der treibenden Kräfte, und damit auch die Summe der Differenzen der intensiven Variablen über eine Schleife  $s$  (siehe Abbildung 2.6) der miteinander verknüpften



**Abb. 2.6:** Schemabild zum Verständnis der verallgemeinerten Kirchhoffschen Regeln. Links ist ein Knoten mit  $n$  eingehenden Flüssen dargestellt. Rechts ist eine Schleife  $s$  über eine drei miteinander verknüpfte Systemen dargestellt.

Systeme, Null ergeben:

$$\oint_s (-\nabla \mathcal{I}) d\vec{s} = \sum_n \Delta \mathcal{I}_n = 0 \quad (2.25)$$

In der Elektrotechnik wird die Ausführung des geschlossenen Wegintegrals auch als das „Laufen einer Masche“ bezeichnet. Daher wird für Ausdruck 2.25 in dieser Arbeit der Begriff „verallgemeinerte Kirchhoffsche Maschenregel“ verwendet.

Für eine Verknüpfung von zwei Systemen über eine Klemme (siehe Abbildung 2.5 rechts) ergibt sich folglich:

$$\begin{aligned} J_1 &= -J_2 \\ \Delta \mathcal{I}_1 &= \Delta \mathcal{I}_2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Das Produkt einer integralen extensiven Flussgröße und der zugehörigen Differenz der intensiven Variablen hat des Weiteren die Dimension der Leistung:

$$\text{Dim} [\Delta \mathcal{I} \cdot J_{\mathcal{E}}] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W} \quad (2.27)$$

Folglich bilanzieren die allgemeinen Regeln 2.24 und 2.25 den Austausch von Energie zwischen (Sub-)Systemen. Dies ist im Prinzip ein Rückschluss auf die Gibbs-Relation 2.1.

Die allgemeine Darstellung abschließend, ist anzumerken, dass die Tabellen 2.3 und 2.4 lediglich generische Eigenschaften von Systemen mit zwei Anschlüssen, d.h. einer Klemme, auflisten. Diese Art System wird auch als Ein-Tor bezeichnet [107]. Neben Ein-Toren existieren Systeme mit mehr als zwei Anschlüssen, d.h. sog. Mehr-Tore bzw. Multipole. Dies liegt insbesondere bei der Präsenz mehrerer Energieformen vor, denn hier müssen bisweilen die Größen einer Energieform in die der anderen gewandelt werden, d.h. es existieren Systeme mit Klemmen für verschiedene Energieformen. Die generischen Eigenschaften aus den Tabellen sind jedoch auf diese Systeme übertragbar bzw. auch neue spezifische generische Eigenschaften, wie beispielsweise die des Transformators

bzw. Gyrotors [132], sind möglich. Gesondert ist hier auf die allgemeine Formulierung der Quelle hinzuweisen (siehe Tabelle 2.4), welche eine generische Implementierung von Mehr-Toren erlaubt: Wenn der Vektor  $\vec{X}$  eine Differenz einer intensiven Variable bzw. einen integralen Fluss einer anderen Klemme enthält, als die, an welcher der Strom der Quelle eingepreßt wird, so ist bereits ein gesteuertes Mehr-Tor definiert.

### Konkretisierung am Beispiel der elektrischen Energieform

Ein entscheidender Punkt, den Wachukta in [152, 155, 156, 157] darlegt, ist, dass die, bisher allgemein formulierten Zusammenhänge nicht nur für die Thermodynamik, d.h. die thermische Energieform, gültig, sondern auch auf andere Energieformen übertragbar sind. Dies wird im Folgenden exemplarisch anhand der elektrischen Energieform aufgezeigt. In diesem Fall sind die extensiven und intensiven Größen die elektrische Ladung  $Q_e$  und das elektrische Potential  $\Phi_e$  (siehe Tabelle 2.2). Des Weiteren entspricht der integrale Fluss der extensiven Variable dem elektrischen Strom  $I_e$  und die treibende Kraft der elektrischen Spannung, d.h. der Potentialdifferenz  $U_e = \Delta\Phi_e$ .

Nach Gleichung 2.4 verursacht ein Gradient des elektrischen Potentials, d.h. ein Spannungsabfall, einen Fluss  $\vec{j}_e$  an elektrischer Ladung:

$$\vec{j}_e = \sigma_e \cdot (-\nabla\Phi_e) \quad (2.28)$$

Der lineare Transportkoeffizient ist in Form der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma_e$  gegeben. Gleichung 2.28 wird in der Elektrotechnik als „lokales ohmsches Gesetz“ bezeichnet. Eine dem allgemeinen resistiven Zusammenhang in Tabelle 2.4 entsprechende Beziehung kann durch Integration von 2.28 abgeleitet werden:

$$I_e = G_e \cdot U_e \quad \text{bzw.} \quad U_e = R_e \cdot I_e \quad (2.29)$$

Hier bezeichnen  $G_e$  bzw.  $R_e$  den elektrischen Leitwert bzw. den elektrischen Widerstand. Ausdruck 2.29 wird in der Elektrotechnik als „ohmsches Gesetz in integraler Darstellung“ oder auch nur als „ohmsches Gesetz“ bezeichnet.

Entsprechend der allgemeinen Darstellung einer Quelle in Tabelle 2.4, gibt es elektrische Stromquellen. Die allgemeinen kapazitiven und induktiven Zusammenhänge aus Tabelle 2.4 finden sich in bzw. führen zu den Beschreibungen für einen elektrischen Kondensator und eine elektrische Spule:

$$I_e = C_e \cdot \dot{U}_e \quad (2.30)$$

$$U_e = L_e \cdot \dot{I}_e \quad (2.31)$$

Energieform	elektrisch	mechanisch	fluidisch
Intensive Variable $\mathcal{I}$	$\Phi_e$ [V]	$v_m$ [m/s]	$p_f$ [Pa]
Extensive Variable $\mathcal{E}$	$Q_e$ [As]	$p_m$ [kg · m/s]	$V_f$ [m <sup>3</sup> ]
Integraler Fluss $J_{\mathcal{E}}$	$I_e$ [A]	$F_m$ [N]	$Q_f$ [m <sup>3</sup> /s]
Differenz $\Delta\mathcal{I}$	$\Delta\Phi_e$ [V]	$\Delta v_m$ [m/s]	$\Delta p_f$ [Pa]
Dim[ $\Delta\mathcal{I} \cdot I_{\mathcal{E}}$ ]	V · A = W	N · m/s = W	Pa · m <sup>3</sup> /s = W

**Tab. 2.5:** Aufstellung der für die Modellierung des mikromechanischen Hochfrequenzschalters relevanten konjugierten Variablen.

Hier bezeichnen  $C_e$  und  $L_e$  die Kapazitäts- bzw. Induktivitätskoeffizienten. Die allgemeinen Vernetzungsregeln 2.24 bzw. 2.25 angewendet auf die elektrische Energieform ergeben die Kirchhoffsche Knotenregel und die Kirchhoffsche Maschenregel:

$$\sum_n I_{e,n} = 0 \quad (2.32)$$

$$\sum_n U_{e,n} = 0 \quad (2.33)$$

Auf diese Weise lassen sich mittels der allgemeinen Zusammenhänge alle Gleichungen ableiten, die zur vollständigen Beschreibung einer elektrischen Schaltung benötigt werden:

- Bauelementgleichungen,
- die Kirchhoffsche Knotenregel und
- die Kirchhoffsche Maschenregel.

### Weitere Energieformen

Analog zur elektrischen Energieform lässt sich der allgemeine Formalismus auch auf weitere Energieformen übertragen [128, 132, 152]. Tabelle 2.5 listet, als Beispiel, konkret die Variablen gemäß Tabelle 2.3 auf, die für die Modellierung der Energieformen des mikromechanischen Hochfrequenzschalters aus Teilkapitel 1.5 relevant sind.

Diese systematische Übertragbarkeit ermöglicht es, nicht-elektrische, sowie energieformübergreifende Problemstellungen in einem standardmäßigen Schaltungssimulator konsistent zu modellieren und zu simulieren.

### Besonderheiten der Modellierung nicht-elektrischer in Schaltungssimulatoren

In Hinblick auf die konkrete Implementierung ist es wichtig anzuführen, dass bezüglich der integralen Flüsse und Differenzen der intensiven Variablen diverse Freiheitsgrade bestehen [132]. Für eine bessere Interpretierbarkeit oder zur Erhöhung der numerischen Stabilität bzw. Konvergenz [73], ist es möglich an den Klemmen der Subsysteme andere, als die in Tabelle 2.5 genannten konjugierten Variablen zu verwenden. So ist es beispielsweise in der mechanischen Systemsimulation weit verbreitet, die Positions-differenz  $\Delta z$  statt der Geschwindigkeitsdifferenz  $\Delta v_m$  als Differenz zu implementieren. In der thermischen Systemsimulation wird, statt des Entropieflusses  $\dot{S}_t$ , der Wärmefluss  $\dot{Q}_t$  implementiert. Dies führt regelmäßig, wie z.B. bei Willems [165], zu Verwirrungen, da das Produkt der an den Klemmen implementierten Größen nun nicht mehr die Dimension der Leistung besitzt.

Diesbezüglich ist zu sagen, dass dezidiert unterschieden werden muss zwischen den in den Modellen implementierten Gleichungen und den Größen an den Klemmen. Die in den Modellen implementierten Gleichungen müssen stets physikalisch konsistent sein. Bei der Implementierung der Klemmengrößen bestehen hingegen Freiheitsgrade. So kann beispielsweise für ein mechanisches Systemmodell tatsächlich  $\Delta u_e$  als äußere Klemmengröße implementiert werden, wenn vor der Einbindung in die Modellgleichungen der Schritt  $\Delta v_e = \Delta \dot{u}_e$  durchgeführt wird. Die Klemmengrößen werden somit durch Zwischenschritte lediglich „maskiert“ und das zu lösende Gleichungssystem ist letztendlich in Abhängigkeit der „ursprünglichen“ extensiven Flüsse und Differenzen der intensiven Variablen formuliert.

### Abgrenzung zur Signalflussdarstellung

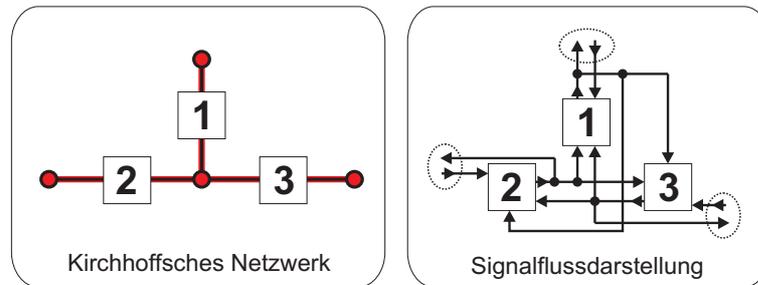
Weiterhin ist anzuführen, dass die Regeln 2.24 und 2.25 gemäß Definition einen bidirektionalen Austausch von Energie zwischen Systemen erlauben. Einige Systemsimulatoren, insbesondere Simulink, schränken jedoch den Austausch von Variablen in Bezug auf die Richtung ein, d.h. sie erlauben nur unidirektionalen Variablen-austausch und erfordern daher die Definition von Ein- und Ausgangsanschlüssen. Dies zwingt den Modellierer zu einer gedanklichen Unterteilung der Zustandsvariablen eines Systems in Eingangs- und Ausgangsvariablen. Diese Denkart ist z.B. in der Regelungstechnik und in der Signalverarbeitung durchaus gerechtfertigt, im Allgemeinen entspricht diese Denkart hingegen nicht der Physik [165]<sup>8</sup>.

Nach Willems [166] ist an dieser, vom Systemsimulator oktroyierten Denkweise weiterhin problematisch, dass diese es ermöglicht, letztendlich Verbindungen zwischen Systemen zu definieren, die zwar mathematisch, aber nicht physikalisch sinnvoll sind, da kein Austausch von Energie bilanziert wird. Des Weiteren kann die entsprechende Darstellung

---

<sup>8</sup> Bei Willems [165], Seite 47, lautet es konkret: „Viewing relations between system variables in terms of inputs and outputs, while viewing interconnection as output-to-input assignment, with signal transmission from one subsystem to another, usually introduces a signal transmission mechanism that is not part of the physics of the system or the interconnection.“

in Simulink, die sog. Signalflussdarstellung, mit zunehmender Komplexität des Systems zu Verwirrung führen, da die Topologie des Systems nicht mehr übersichtlich dargestellt werden kann [166]. Abbildung 2.7 zeigt beispielsweise ein aus 3 Subsystemen bestehendes System, einmal als Kirchhoffsches Netzwerk dargestellt, und einmal die äquivalente Verknüpfung in Signalflussdarstellung.



**Abb. 2.7:** Die linke Abbildung zeigt ein System in Kirchhoff'scher Netzwerkdarstellung. Das rechte Bild zeigt das identische System in Signalflussdarstellung. Sind alle Flussrichtungen in der Signalflussdarstellung modelliert, wird diese zunehmend unübersichtlich.

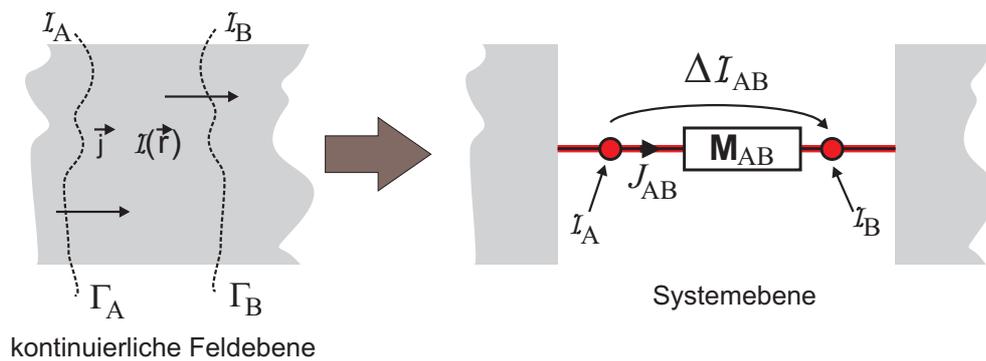
Systemsimulatoren, die auf einer Ein- und Ausgangs-Beschreibung basieren, sind folglich nur begrenzt für die Modellierung von Kirchhoff'schen Netzwerken geeignet und werden aus diesem Grund nicht in dieser Arbeit eingesetzt.

## 2.3 Modellierung von Subsystemen

Nach der Strukturierung der Vorgehensweise bei der Modellierung von Mikrosystemen auf der Systemebene (vgl. Teilkapitel 2.2.1) und Festlegung des theoretischen Rahmens für die Modellierung (vgl. Teilkapitel 2.2.2), werden nun die möglichen Ansätze zur konkreten Modellierung von (Sub-)Systemen kategorisiert.

In Hinblick auf die Konsistenz mit dem theoretischen Rahmen der verallgemeinerten Kirchhoff'schen Netzwerktheorie, wird bei der konkreten Modellierung davon ausgegangen, dass es möglich ist, ein (Sub-)System in Abhängigkeit einer Differenz einer intensiven Variable  $\Delta\mathcal{I}$  und einem zugehörigen integralen extensiven Fluss  $J_{\mathcal{E}}$  zu modellieren. Hierfür ist es bisweilen notwendig, kontinuierliche Systeme sinnvoll in einzelne Subsysteme zu unterteilen. Analog zu Voigt [151], Schrag [129] und Sattler [128] muss hierzu, wie in Abbildung 2.8 dargestellt, eine Partitionierung gefunden werden, sodass die intensive Variable  $\mathcal{I}$  des kontinuierlichen Systems entlang der Unterteilungsflächen bzw. -linien konstant ist.

Zur konkreten Modellierung der auf diese Weise entstandenen Subsysteme kann auf die folgend dargestellten Ansätze zurückgegriffen werden.



**Abb. 2.8:** Visualisierung der Partitionierung von kontinuierlichen Systemen. Es sind Unterteilungslinien bzw. -flächen  $\Gamma$  derart zu identifizieren, dass die intensive Variable  $I$  entlang dieser bzw. auf diesen konstant ist. Auf diese Weise kann im Systemmodell ein Knoten mit dem entsprechenden Wert der intensiven Variable gebildet werden. In diesen Knoten fließt der, über die Unterteilungsfläche bzw. -linie integrierte extensive Fluss  $J$ .

### 2.3.1 Anforderungen an die Modellierung

Wachukta [152] formuliert drei Anforderungen, die ein Modell eines (Sub-)Systems erfüllen muss, damit ein Modell – prinzipiell – dazu in der Lage ist, physikalisch sinnvolle Ergebnisse zu liefern:

- *Konsistenz:* Um zwischen den (Sub-)Systemen einen physikalisch sinnvollen Austausch von Größen zu gewährleisten, ist die Modellierung des (Sub-)Systems mit dem jeweiligen theoretischen Rahmen der Systemmodellierung konsistent zu halten. Im Fall dieser Arbeit bedeutet dies, dass die Modellierung, wie bereits erwähnt, in Abhängigkeit von Differenzen intensiver Variablen und integralen extensiven Flüssen zu erfolgenden hat.
- *Transparenz:* Das Modell sollte systematisch von einer mikroskopischen Beschreibung abgeleitet werden. Des Weiteren sollten die Parameter eines Modells intuitiv interpretierbar und messtechnisch erfassbar sein. Nur auf diese Weise ist eine Kalibrierung der Parameter des Modells möglich.
- *Maßgeschneiderte Gültigkeit:* Die Anzahl der Freiheitsgrade des Modells sind auf die physikalischen Eigenschaften des (Sub-)Systems, sowie den Anforderungen bezüglich der Genauigkeit und des Gültigkeitsbereichs anzupassen.

### 2.3.2 Ansätze für die Modellierung von Subsystemen

Folgend werden in verknappter Form fünf Möglichkeiten zur Modellierung von Subsystemen auf der Systemebene aufgezeigt und hinsichtlich der soeben genannten Anforderungen bewertet.

### **Physikalisch basierte und analytische Kompaktmodelle**

Ein physikalisch basiertes, analytisches Kompaktmodell ist eine konzentrierte Beschreibung eines Systems, die aus der analytischen Lösung eines mit partiellen Differentialgleichungen formulierten physikalischen Problems unter bestimmten Randbedingungen resultiert. Auf diese Weise enthält ein analytisches Kompaktmodell ausschließlich Geometrie- und Materialparameter als Modellparameter.

Typische Beispiele für diese Art von konzentriertem Modell sind die analytischen Beschreibungen von Basiselementen der Mechanik (z.B. Formel für Balkenbiegung [46]), der Elektrostatik (z.B. Formel für Plattenkondensator in Teilkapitel 4.2) und der Fluidik (z.B. Formel für Strömung durch einen runden Kanal in Teilkapitel 5.3.2).

Analytische Kompaktmodelle können prinzipiell alle der in Teilkapitel 2.3.1 genannten Anforderungen erfüllen. Allein bezüglich des Gültigkeitsbereichs sind evtl. Grenzen gesetzt, da zur Ableitung eines analytischen Modells in der Regel vereinfachende Annahmen getroffen werden müssen. Ein Beispiel hierfür wäre in der Mechanik die Annahme linearen mechanischen Verhaltens bei der Ableitung eines Kompaktmodells für einen Balken. Folglich ist es mit dem resultierenden Kompaktmodell nicht möglich, nichtlineare mechanische Effekte, wie z.B. das mechanische Knicken, zu simulieren. In der Elektrostatik werden beispielsweise Streufelder bei der Ableitung der Plattenkondensatorformel vernachlässigt.

Teilweise werden Anstrengungen unternommen, diese nicht-idealen Effekte durch Korrekturterme nachzubilden. Sind diese Zusatzterme, deren Gültigkeit oftmals explizit auf bestimmte Situationen eingeschränkt ist, jedoch nicht transparent abgeleitet bzw. formuliert, erfordern diese Expertenwissen seitens des Modellierers, und beeinträchtigen des Weiteren die Transparenz des Gesamtmodells.

### **Finite Netzwerke**

Nicht alle physikalischen Situationen lassen sich im erforderlichen Gültigkeitsbereich auf analytische Kompaktmodelle, d.h. auf wenige Gleichungen konzentriert, abbilden, sondern erfordern eine räumlich aufgelöste Modellierung. Dies ist insbesondere der Fall bei komplexen Geometrien und verteilten physikalischen Effekten, wie z.B. der fluidischen Dämpfung [128, 129] und dem elektrothermomechanischen Verhalten bestimmter Geometrien [151].

Finite Netzwerke ermöglichen, im Gegensatz zu konzentrierten Kompaktmodellen, eine verteilte flusserhaltende Beschreibung eines physikalischen Problems auf der Systemebene. Finite Netzwerke werden systematisch in vier Schritten erstellt:

- 1) Darstellung des physikalischen Problems in Form der Bilanzgleichung (2.5) und des Onsager-Zusammenhangs zwischen Flussgröße und treibender Kraft 2.4.
- 2) Räumliche Diskretisierung der zu beschreibenden Geometrie.

- 3) Alle Punkte der räumlichen Diskretisierung werden in Knoten eines verallgemeinerten Kirchhoffschen Netzwerks umgewidmet.
- 4) Durch die Integration der Bilanzgleichung und des Onsager-Zusammenhangs zwischen den Punkten der räumlichen Diskretisierung werden Widerstände, Quellen und Kapazitäten abgeleitet, die zwischen den entsprechenden Knoten des Kirchhoffschen Netzwerks gesetzt werden.

Aufgrund ihrer Konstruktion sind finite Netzwerke, in Hinblick auf den theoretischen Rahmen, konsistent formuliert. Die Ableitung des Netzwerks ist transparent und aufgrund der systematischen Vorgehensweise automatisierbar, wenngleich anzumerken ist, dass das resultierende Netzwerk, im Gegensatz zu FEM-Modellen, keine expliziten räumlichen Koordinaten mehr enthält. Die bessere Gültigkeit des finiten Netzwerks gegenüber Kompaktmodellen wird jedoch mit einer, im Vergleich zu analytischen Kompaktmodellen, beträchtlich erhöhten Anzahl von Freiheitsgraden erkaufte.

Eine konkrete Ableitung eines Finites Netzwerks für die Modellierung eines fluidischen Problems wird in Teilkapitel 5.3.1 aufgezeigt.

### **Mixed-Level Modelle**

Da die physikalisch basierten, analytischen Kompaktmodelle und die finiten Netzwerke konsistent im Rahmen der verallgemeinerten Kirchhoffschen Netzwerktheorie formuliert sind, können diese beiden Ansätze direkt miteinander kombiniert werden. Da das resultierende Modell infolgedessen verteilte (finites Netzwerk) und konzentrierte (analytische Kompaktmodelle) Modellierungsebenen bzw. -ansätze vermischt, wird dieses als „Mixed-Level-Modell“ bezeichnet [129].

Da Mixed-Level-Modelle aus einer Kombination der beiden vorig genannten Ansätze bestehen, sind diese konsistent, transparent und besitzen entsprechend eine erhöhte Anzahl von Freiheitsgraden, welche jedoch im Vergleich zu äquivalenten FEM-Modellen wesentlich geringer sein kann [103].

Ein konkretes Beispiel für ein Mixed-Level-Modell ist das in Teilkapitel 5.3 abgeleitete Modell für die Beschreibung der fluidischen Dämpfung auf perforierte Membranen.

### **Modelle basierend auf einer Superposition von Basisfunktionen**

Die drei bisher aufgezeigten Ansätze sind durchweg physikalisch basiert. Ist jedoch keiner dieser Ansätze zielführend bzw. besitzt das resultierende Modell eine disqualifizierend hohe Anzahl an Freiheitsgraden, kann alternativ auf algebraisch basierte Ansätze zurückgegriffen werden.

Ein systematischer, algebraischer, und infolgedessen sehr gut automatisierbarer Ansatz zur Modellierung eines physikalischen Problems ist, dieses durch eine Superposition von speziell gewählten Basisfunktionen zu beschreiben:

$$x(\vec{r}, t) = \sum_i q_{B,i}(t) \cdot \Phi_{B,i}(\vec{r}) \quad (2.34)$$

Hier ist  $x(\vec{r}, t)$  die zeitabhängige, räumliche Verteilung einer physikalischen Variable, wie z.B. die mechanische Deformation eines Körpers oder eine Druckverteilung. Das Verhalten der Variable wird mithilfe einer Überlagerung von räumlich variierenden Basisfunktionen  $\Phi_{B,i}(\vec{r})$ , skaliert mit einer zeitlich variierenden Amplitude  $q_{B,i}(t)$ , modelliert. Die Basisfunktionen sollten vorzugsweise orthogonal zueinander sein. Die Anzahl  $i$  der verwendeten Basisfunktionen entspricht der Anzahl der Freiheitsgrade des resultierenden Modells. Aus diesem Grund wird versucht, einen minimalen Satz an Basisfunktionen zu finden.

Der Kardinalpunkt bei der Modellierung mittels dieses Ansatzes besteht in der Ableitung bzw. Berechnung und Auswahl geeigneter Basisfunktionen  $\Phi_{B,i}(\vec{r})$ . In [99] werden die Basisfunktionen zur Modellierung des dynamischen Verformungsverhaltens eines beidseitig eingespannten Balkens vollständig analytisch berechnet. Eine derartige analytische Berechnung ist jedoch nur für einfache Geometrien möglich. Infolgedessen werden die Basisfunktionen zumeist mittels mathematischer Methoden aus vorhanden, diskreten Daten extrahiert. Dies hat eine Diskretisierung von Ausdruck 2.34 zur Folge:

$$\underline{x}(t) = \sum_i q_{B,i}(t) \cdot \underline{\Phi}_{B,i} \quad (2.35)$$

Hierbei sind  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $\underline{\Phi}_{B,i} \in \mathbb{R}^n$  durch räumliche Diskretisierung entstandene Vektoren. Bezüglich der Verfahren zur Extraktion der Basisvektoren  $\underline{\Phi}_{B,i}$  sind zu unterscheiden:

- Extraktion mittels Singulärwertzerlegung aus Ergebnissen transienter Simulationen oder Messergebnissen.
- Extraktion mittels algebraischer Ordnungsreduktion der Systemmatrix.
- Extraktion durch Berechnung von Eigenwerten und -vektoren.

Die Extraktion von Basisvektoren aus diskreten transienten Simulations- bzw. Messdaten kann sowohl bei linearen und nicht gekoppelten als auch nichtlinearen bzw. gekoppelten physikalischen Problemen durchgeführt werden und erfolgt in drei Schritten [61]. Zuerst müssen, den zu modellierenden Arbeitsbereich abdeckend, hinreichend viele transiente Ergebnisse produziert werden. Im nächsten Schritt werden die Ergebnisse in Form einer Matrix zusammengefasst. Abschließend werden, beispielsweise mittels einer Singulärwertzerlegung<sup>9</sup> dieser Matrix, die Basisvektoren berechnet.

---

<sup>9</sup> Auch bekannt als „vollständige orthogonale Zerlegung“. Englische Bezeichnungen sind *singular value decomposition (SVD)* bzw. *proper orthogonal decomposition (POD)*. Neben der Singulärwertzerlegung könne auch andere Methoden, wie z.B. die Hauptkomponentenanalyse (engl. *principal component analysis (PCA)*) [91], eingesetzt werden.

Ein Nachteil dieser Vorgehensweise ist, dass, auf zeitintensive Weise, zuerst, entweder durch Simulation oder durch Messung, hinreichend viele Ergebnisse produziert werden müssen. Weiterhin sind die extrahierten Basisvektoren nicht bezüglich der Geometrie bzw. des verwendeten Materials parametrisiert, d.h. die Extraktion muss bei jeder Änderung des zu modellierenden Bauteils erneut durchgeführt werden.

Eine Alternative zur Bestimmung der Basisvektoren aus Simulations- bzw. Messergebnissen ist die Extraktion der Basisvektoren mittels algebraischer Ordnungsreduktionsverfahren aus der Systemmatrix. Bei diesem Vorgehen wird davon Gebrauch gemacht, dass die FEM-Simulatoren die zu Grunde liegenden partiellen Differentialgleichungen durch räumliche Diskretisierung letztendlich in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überführen:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{f}_{ext}(t) \quad (2.36)$$

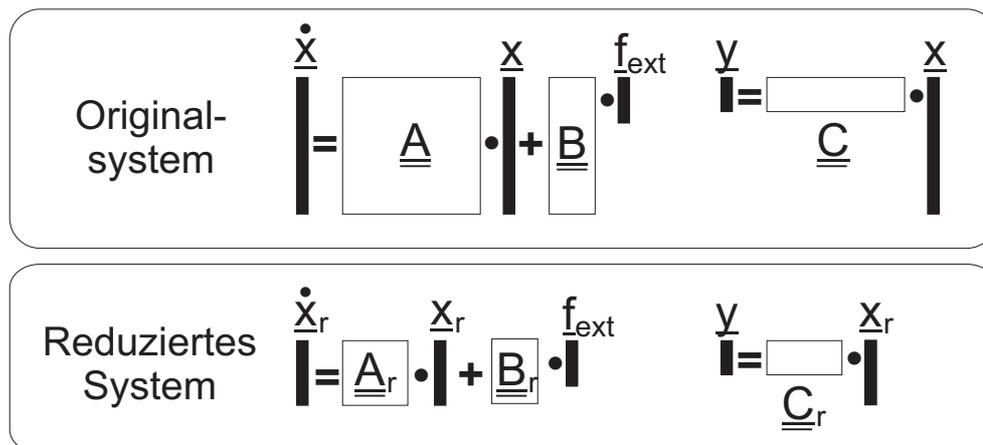
Hier enthält der Vektor  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  alle Zustandsgrößen an allen Diskretisierungspunkten des Systems, der Vektor  $\underline{f}_{ext}(t) \in \mathbb{R}^m$  alle externen Kräfte und  $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  stellt die mittels der FEM-Beschreibung des Systems erstellte Systemmatrix dar. Die Matrix  $\underline{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  verknüpft die externen Kräfte mit den entsprechenden Diskretisierungspunkten und enthält nur die Einträge 0 oder 1. Des Weiteren wird, analog zum Vorgehen in der Regelungstechnik, bei diesem Extraktionsvorgehen davon ausgegangen, dass nicht alle Zustandsgrößen des Systems für eine kompakte Modellierung relevant sind. Aus diesem Grund wird ein Ausgangsvektor  $\underline{y} \in \mathbb{R}^p$  definiert:

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) \quad (2.37)$$

Die Einträge der Matrix  $\underline{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  sind entweder 1 oder 0, d.h. sie führen die im Vektor  $\underline{x}$  enthaltenen Zustandsvariablen entweder zum Vektor  $\underline{y}$  durch oder nicht. Auf diese Darstellung des Systems werden algebraische Methoden zur Ordnungsreduktion angewendet, z.B. Krylov-Unterraum-Methoden in Form des Arnoldi- bzw. Lanczos-Verfahrens [9, 127], mit dem Ziel die Anzahl  $n$  der Zustände des Systems zu reduzieren, bei gleichzeitiger Beibehaltung der relevanten Eingangs- und Ausgangsgrößen in den Vektoren  $\underline{f}_{ext}$  bzw.  $\underline{y}$ . Ergebnis der algebraischen Verfahren ist idealerweise ein System, welches das Verhalten des ursprünglichen Systems hinreichend genau nachbildet, jedoch eine wesentlich geringere Anzahl von Zustandsgrößen  $q \ll n$  besitzt (siehe Abbildung 2.9).

Der Inhalt der auf diese Weise entstandenen reduzierten Systemmatrix  $\underline{A}_r \in \mathbb{R}^{q \times q}$  (siehe Abbildung 2.9) ist im Gegensatz zur vollständigen Systemmatrix  $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  jedoch nicht mehr bezüglich des ursprünglichen FEM-Modells interpretierbar, d.h. vollkommen intransparent.

Da die algebraischen Ordnungsreduktionsverfahren eine Systemmatrix mit konstanten Einträgen voraussetzen, ist diese Art der Extraktion konstruktionsbedingt zwar auf gekoppelte [58, 59], jedoch lediglich lineare bzw. um einen Arbeitspunkt linearisierte physikalische Systeme beschränkt. Aus diesem Grund werden diese Verfahren v.a. auf thermische



**Abb. 2.9:** Visualisierung des ursprünglichen und ordnungsreduzierten numerischen Gleichungssystems.

und lineare mechanische Systeme angewendet<sup>10</sup>. Bei einer Änderung der Geometrie des zu modellierenden Systems ist der Extraktionsvorgang, wie beim ersten Extraktionsansatz, zu wiederholen. Materialparameter können hingegen ggf. auch in der reduzierten Systemmatrix erhalten bleiben [10].

Die dritte Möglichkeit zur Wahl der Basisfunktionen besteht in der Bestimmung einer Untermenge der aus dem vorliegenden Differentialgleichungssystem berechneten Eigenwerte und -vektoren. Dies ist zwar, rein mathematisch gesehen, weniger effizient, als das vorherige Verfahren, bietet jedoch den Vorteil, dass die Eigenvektoren und -werte ggf. noch intuitiv interpretierbar sind und mit diesen eine Beschreibung des Systems in, im Sinne der Lagrangeschen Mechanik, generalisierten Koordinaten erstellt werden kann.

Beispiele für dieses Vorgehen sind ebenfalls im mechanischen bzw. thermischen Bereich zu finden. Bei mechanischen Systemmodellen, die auf der sog. modalen Superposition basieren, werden als Basisvektoren die mechanischen Eigenschwingungsformen – auch Moden genannt – verwendet. Ebenso finden die mechanischen Eigenwerte, die in diesem Falle den Eigenfrequenzen entsprechen, Eingang in das Systemmodell. In Teilkapitel 3.2 ist die Ableitung eines solchen Modells detailliert beschrieben. Im Fall der thermischen Energieform entsprechen die Eigenvektoren und -werte den Temperaturverteilungen und den zugehörigen Abklingkonstanten [30].

Die eigenvektorbasierte Superposition ist, wie die vorigen Verfahren, konstruktionsbedingt auf lineare bzw. linearisierte Systeme beschränkt und ist bei einer Änderung der Geometrie neu zu erstellen. Es existieren jedoch bereits Arbeiten [77], die auf der Basis von Reihenentwicklungen aus der Finiten-Element-Formulierung heraus eine Parametrisierung erstellen und diese bis zu den Eigenvektoren durchführen. Auch zur Berücksichtigung von Nichtlinearitäten existieren, v.a. im Bereich der Mechanik, bereits implementierte Ansätze [72, 88, 142].

<sup>10</sup> Schwache Nichtlinearitäten können ggf. noch durch entsprechende Taylorentwicklungen berücksichtigt werden [9].

Abschließend werden die auf Superposition basierende Modelle hinsichtlich ihrer Konsistenz, Transparenz und Gültigkeit bewertet. Da die algebraischen Methoden es auf einfache Art und Weise ermöglichen, Anschlüsse bzw. Klemmen zu generieren, über die nicht zwangsweise Energie ausgetauscht wird, ist bei Verwendung dieses Modelltyps die Konsistenz bezüglich der verallgemeinerten Kirchhoffschen Netzwerktheorie stets kritisch zu überprüfen. Transparenz ist im Falle der algebraischen Ordnungsreduktion generell nicht gegeben. Nur im Falle der Eigenvektoren und -werte ist noch eine sinnvolle physikalische Interpretation möglich. Die Gültigkeit der ordnungsreduzierten Modelle ist innerhalb des Arbeitsbereiches, welcher zur Extraktion der letzteren betrachtet wurde, gegeben. Außerhalb dieses Bereiches können hingegen keine physikalisch sinnvollen Ergebnisse garantiert werden.

### **Verhaltensmodelle**

Ein weiterer algebraischer Ansatz zur Modellierung eines Subsystems ist, einen rein mathematischen Zusammenhang aus entsprechenden Messungen bzw. Simulationsergebnissen zu extrahieren. Hierzu wird eine mathematische Ansatzfunktion gewählt und deren Parameter mittels Ausgleichsrechnung aus den vorliegenden Daten bestimmt.

Beispiele in dieser Arbeit sind die in den Teilkapiteln 5.3.4 und 5.5.1 dargelegten Korrekturfaktoren für verdünnte Gase bzw. das Kompaktmodell von Veijola [144].

Ein Vorteil dieser Art der Modellierung ist, dass diese stets möglich ist. Nachteil dieser Vorgehensweise ist, dass ein sehr hoher Aufwand betrieben werden muss, um für die Extraktion ausreichend Mess- bzw. Simulationsergebnisse zu produzieren. Des Weiteren ist, da das Modell auf einem rein mathematischen Zusammenhang basiert, die Prädiktivität von Verhaltensmodellen außerhalb des zur Extraktion verwendeten Datenbereichs äußerst fragwürdig. Infolgedessen ist die Extraktion für alle Änderungen von Geometrie-, Material oder Betriebsparameter erneut zu wiederholen, was wiederum zu einem hohen Aufwand führt.

In Bezug auf die Konsistenz sind Verhaltensmodelle stets kritisch zu prüfen, denn die Struktur der Gleichungen stammt nicht aus der Physik, sondern ist rein unter mathematischen Gesichtspunkten gewählt. Auf diese Weise ist die Einhaltung physikalischer Gesetze per se nicht gewährleistet. Infolgedessen ist es möglich, dass aus einem, energetisch gesehen, passiven Kirchhoffschen Bauelement außerhalb des Extraktionsbereichs ein aktives wird, obwohl das der physikalischen Realität widerspricht. Konstruktionsbedingt ist ebenfalls, per se, keine Transparenz gewährleistet. Bezüglich der Gültigkeit ist festzuhalten, dass diese im Extraktionsbereich wohl gegeben ist, außerhalb des Extraktionsbereichs per se nicht (siehe dazu auch Teilkapitel 7.5).

Verhaltensmodelle sollten folglich nur dann eingesetzt werden, wenn alle anderen Ansätze zu keinem Ergebnis führen.



### 3. Modellierung dynamisch verformbarer mechanischer Subsysteme

In diesem Kapitel wird eine systematische, und damit automatisierbare Vorgehensweise zur Erstellung von ordnungsreduzierten Systemmodellen mechanischer Körper vorgestellt. Hierfür wird zuerst in verknappter Form auf die essentiellen Grundlagen der Mechanik elastischer Körper eingegangen. Daraufhin wird das Verfahren zur Extraktion von ordnungsreduzierten Modellen für die Systemebene dargestellt. Nach einer Erläuterung des resultierenden Gleichungssystems wird aufgezeigt, wie der mechanische Kontakt, und unter welchen Einschränkungen dieser in diesem Modell berücksichtigt werden kann.

#### 3.1 Grundlagen der Mechanik verformbarer Körper

Die Grundlagen der Mechanik werden anhand der Abhandlung von Willner [167] und bezüglich der Referenzkonfiguration<sup>1</sup> eines mechanischen Körpers dargelegt. Analog zur verallgemeinerten Vorgehensweise in Teilkapitel 2.2.2 wird für die Beschreibung des dynamischen Verhaltens verformbarer Körper, eine Materialgleichung (vgl. Ausdruck 2.4) und eine Bilanzgleichung (vgl. Ausdruck 2.5) benötigt.

Nach Willner [167] gilt für einen hyperelastischen<sup>2</sup> mechanischen Körper generell folgender Zusammenhang:

$$\vec{T}_m = \rho_0 \frac{\partial \Psi_m}{\partial \vec{E}_m} \quad (3.1)$$

Hier bezeichnet  $\vec{T}_m$  den zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor, welcher die Spannungen in materiellen Koordinaten bezüglich der Referenzkonfiguration beschreibt,  $\vec{E}_m$  den Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor,  $\Psi_m$  die freie Energie des mechanischen Körpers und  $\rho_0$  die Materialdichte. Die Materialgleichung 3.1 ist sowohl für lineares als auch für nichtlineares Materialverhalten gültig. Da in dieser Arbeit hauptsächlich lineare

---

<sup>1</sup> Unter Referenzkonfiguration versteht Willner [167] die Ausgangslage des mechanischen Körpers. Das Gegenstück zur Referenzkonfiguration ist die Momentankonfiguration eines Körpers, welche den derzeitigen (Deformations-)Zustand eines Körpers beschreibt.

<sup>2</sup> Nach Willner [167] verhält sich ein hyperelastisches Material bei großen Deformationen isotherm, reversibel, homogen und ggf. nichtlinear bzw. anisotrop.

mechanische Körper betrachtet werden, ist es gerechtfertigt eine Linearisierung von 3.1 vorzunehmen. Hierzu wird der Zusammenhang zwischen der Spannungsrate  $\dot{\vec{T}}_m$  und der Verzerrungsrate  $\dot{\vec{E}}_m$  betrachtet:

$$\dot{\vec{T}}_m = \rho_0 \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial \dot{\vec{E}}_m^2} \cdot \dot{\vec{E}}_m \quad (3.2)$$

Wird das Produkt aus der Materialdichte und der zweiten tensoriellen Ableitung der freien Energie nach dem Verzerrungstensor als Elastizitätstensor 4. Stufe  $\overset{\text{iiii}}{C}_m$  definiert, so ergibt sich folgende, kompakte Darstellung:

$$\overset{\text{iiii}}{C}_m = \rho_0 \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial \dot{\vec{E}}_m^2} \quad (3.3)$$

$$\dot{\vec{T}}_m = \overset{\text{iiii}}{C}_m \cdot \dot{\vec{E}}_m \quad (3.4)$$

Bei linearelastischen mechanischen Systemen sind alle 81 Einträge des Elastizitätstensors konstant<sup>3</sup>. Die differentielle Beziehung 3.4 vereinfacht sich auf diese Weise zu:

$$\vec{T}_m = \overset{\text{iiii}}{C}_m \cdot \vec{E}_m \quad (3.5)$$

Mittels Symmetriebetrachtungen kann weiterhin gezeigt werden, dass maximal 21 dieser Einträge voneinander unabhängig sind [167]. Liegt des Weiteren orthotropes bzw. isotropes Materialverhalten vor, reduziert sich die Anzahl entsprechend weiter auf 9 bzw. 2 unabhängige Einträge.

Mit der linearisierten Materialgleichung 3.4 kann das statische Verformungsverhalten eines Körpers beschrieben werden. Zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens wird die Impulsbilanzgleichung in lokaler Darstellung hinzugezogen:

$$\rho_0 \dot{\vec{v}}_m = \nabla \cdot \vec{\vec{T}}_m^T + \rho_0 \vec{g}_m \quad (3.6)$$

Mit der Randbedingung:

$$\vec{N} \cdot \vec{\vec{T}}_m = \vec{f}_m \quad (3.7)$$

Hier bezeichnet  $\vec{\vec{T}}_m$ , den ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor, welcher eine räumliche Basis besitzt, der Term  $\rho_0 \vec{g}_m$  die auf den Körper wirkenden Volumenkräften, und  $\vec{v}$

---

<sup>3</sup> Dies wird von Willner [167] durch Diskussion einer Reihenentwicklung der freien Energie nach dem Verzerrungstensor gezeigt.

die Änderung der Geschwindigkeit des Körpers, d.h. der Beschleunigung des Körpers. Der Vektor  $\vec{f}_m$  stellt die auf den mechanischen Körper wirkenden Oberflächenkräfte dar. Die Oberfläche des Körpers wird mit dem Normalenvektor  $\vec{N}$  beschrieben. Transformiert man die räumliche Basis des ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor  $\vec{\tau}_m$  mittels des Deformationsgradienten  $\vec{F}_m$  auf materielle Koordinaten, so kann folgender Zusammenhang mit dem zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor  $\vec{T}_m$  gebildet werden:

$$\vec{T}_m = \vec{\tau}_m \cdot \vec{F}_m^{-T} \quad (3.8)$$

Der Deformationsgradient  $\vec{F}_m$  beschreibt hierbei die Relativbewegungen der materiellen Punkte zueinander, d.h. die lokalen Eigenschaften der Deformation, und ist als Gradient der Ortsvektoren definiert [167].

## 3.2 Ordnungsreduktion mittels modaler Superposition

Eine analytische Lösung des aus der linearisierten Materialgleichung 3.4 und der Impulsbilanzgleichung 3.6 bestehenden partiellen Differentialgleichungssystems ist, aufgrund der mathematischen Komplexität, nur für einfache Geometrien, wie z.B. Balken und Platten möglich. Die Berechnung topographisch komplexer Geometrien erfolgt in der Regel deshalb numerisch, konkret mittels der Finite-Element-Methode [168]. Hierzu wird das partielle Differentialgleichungssystem räumlich diskretisiert, was zu folgender Darstellung<sup>4</sup> des mechanischen System führt:

$$\underline{\underline{M}} \cdot \frac{\partial^2 \underline{x}(t)}{\partial t^2} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{x}(t) = \left( \underline{\underline{M}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \underline{\underline{K}} \right) \cdot \underline{x}(t) = \underline{f}_{ext}(t) \quad (3.9)$$

Hier bezeichnen  $\underline{\underline{M}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\underline{\underline{K}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die sog. Massen- bzw. Steifigkeitsmatrizen des mechanischen Systems, die durch Auswertung der entsprechenden Ansatzfunktionen der eingesetzten Finite-Element-Formulierung sowie der Randbedingungen, aufgestellt wurden [45, 57]. Der Vektor  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  beinhaltet die zu berechnenden mechanischen Freiheitsgrade des Systems, wie z.B. Verschiebungen und Rotationen. Der Vektor  $\underline{f}_{ext} \in \mathbb{R}^n$  enthält die auf das mechanische System wirkenden externen Kräfte. Die Anzahl  $n$  der Freiheitsgrade des FEM-Modells kann sich, je nach Diskretisierung, zwischen mehreren Hundert bis mehreren Millionen befinden.

Ausgehend von dieser Darstellung wird im Folgenden ein ordnungsreduziertes Modell des mechanischen Systems für die Systemebene extrahiert, welches eine wesentlich geringere Anzahl an Freiheitsgraden besitzt. In Hinblick auf physikalische Interpretierbarkeit wird hierfür ein superponierendes Verfahren auf der Basis von Eigenvektoren und

---

<sup>4</sup> Für eine übersichtliche Darstellung im Rahmen dieser Arbeit wird das Gleichungssystem in Form einer Differentialgleichung 2.Ordnung angegeben. Zur numerischen Lösung wird dieses System jedoch in der Regel in eine Differentialgleichungssystem 1.Ordnung (siehe Gleichung 2.36) überführt.

-werten gewählt<sup>5</sup>. Die Eigenvektoren  $\underline{\Phi}_{m,i}$  und -werte  $\lambda_{m,i}$  des Gleichungssystems 3.9 werden hierzu, bei Annahme von  $\underline{f}_{ext} \equiv 0$ , aus dem zugehörigen Eigenwertproblem bestimmt [3, 24]:

$$(\underline{M} \cdot \lambda_{m,i} + \underline{K}) \cdot \underline{\Phi}_{m,i} = 0 \quad (3.10)$$

Durch analytische Lösung des Eigenwertproblems für einen beidseitig eingespannten Balken wird in [57, 99]<sup>6</sup> gezeigt, dass die Eigenvektoren  $\underline{\Phi}_{m,i} \in \mathbb{R}^n$  den Eigenschwingformen (siehe Teilkapitel 8.3.1 für konkrete Beispiele), auch Eigenmoden genannt, des mechanischen Körpers entsprechen. Weiterhin wird gezeigt, dass die Eigenwerte dem negativen Quadrat der Eigenfrequenzen  $\omega_{m,i}$  des mechanischen Körpers entsprechen:

$$\lambda_{m,i} = -\omega_{m,i}^2 \quad (3.11)$$

Weiter sind die Eigenmoden orthogonal zueinander:

$$\langle \underline{\Phi}_{m,j} | \underline{\Phi}_{m,k} \rangle = \delta_{jk} \quad (3.12)$$

Des Weiteren gilt, was theoretisch über den Satz von Virial begründet ist, dass die Eigenschwingformen mit steigendem Index  $i$  und größer werdenden Eigenfrequenz  $\omega_{m,i}$  stetig komplexere Deformationen aufweisen. Entsprechend energieintensiver ist die Anregung der höheren Eigenmoden.

Dem Ansatz in Gleichung 2.35 folgend, können mithilfe der berechneten Eigenmoden die Freiheitsgrade  $\underline{x}(t)$  des mechanischen Körpers mittels modaler Superposition, d.h. einer Überlagerung von Eigenmoden, dargestellt werden:

$$\underline{x}(t) = \sum_{i=1}^n q_{m,i}(t) \cdot \underline{\Phi}_{m,i} = \underline{\Phi}_m \cdot \underline{q}_m(t) \quad (3.13)$$

Hier bezeichnen  $q_{m,i}(t)$  die Amplituden<sup>7</sup> der Eigenmoden  $\underline{\Phi}_{m,i} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{\Phi}_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine aus den Eigenvektoren aufgebaute Matrix und  $\underline{q}_m(t) \in \mathbb{R}^n$  den Vektor der modalen Amplituden.

Aus dem vollständigen Satz von  $n$  Eigenmoden ist im nächsten Schritt eine Untermenge von  $p \ll n$  Eigenmoden zu bestimmen, welche  $\underline{x}(t)$ , im Sinne eines ordnungsreduzierten Systemmodells, hinreichend genau approximieren.

$$\underline{x}(t) \approx \sum_{i=1}^p q_{m,i}(t) \cdot \underline{\Phi}_{m,i} = \underline{\Phi}_{m,red} \cdot \underline{q}_{m,red}(t) \quad (3.14)$$

<sup>5</sup> Vgl. die allgemeinen Ausführungen auf den Seiten 41ff.

<sup>6</sup> In [99] wird konkret auf Seite 56ff eine analytische Lösung für einen beidseitig eingespannten, mit einer Streckenlast beaufschlagten, Biegebalken errechnet.

<sup>7</sup> Aus mathematischer Sichtweise kann man die Amplituden auch als Skalierungsfaktoren bezeichnen.

Hier bezeichnen  $\underline{\Phi}_{m,red} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  eine aus der reduzierten Eigenvektorbasis aufgebaute Matrix und  $\underline{q}_{m,red}(t) \in \mathbb{R}^p$  den Vektor der entsprechenden modalen Amplituden. Die Bestimmung der Untermenge an Eigenvektoren ist ein elementarer Schritt bei der Erstellung des Systemmodells. Nach dem derzeitigen Stand der Forschung existiert kein Verfahren, welches auf vollständig automatisierbare Weise eine allgemeingültige Untermenge an Eigenmoden bestimmt. Lediglich für bestimmte Situationen, z.B. für explizit vorgegebene Lastfälle, existieren automatische Verfahren [3]. Dies hat zur Folge, dass für die Auswahl der Eigenmoden Expertenwissen erforderlich ist, um ein evident prädiktives Systemmodell zu extrahieren.

Durch Einsetzen der Approximation von 3.14 in 3.9 und gleichzeitiger, linksseitiger Multiplikation mit  $\underline{\Phi}_{m,red}^T \in \mathbb{R}^{n \times p}$  folgt:

$$\left( \underline{\Phi}_{m,red}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_{m,red} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \underline{\Phi}_{m,red}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\Phi}_{m,red} \right) \cdot \underline{q}_{m,red}(t) = \underline{\Phi}_{m,red}^T \cdot \underline{f}_{ext}(t) \quad (3.15)$$

Da die Eigenmoden gleichzeitig die Eigenvektoren des Gleichungssystems sind, kann in 3.15 eine Hauptachsentransformation der Massen- bzw. Steifigkeitsmatrizen durchgeführt werden. Setzt man des Weiteren die Skalierungsfreiheit der Eigenmoden derart ein, dass die Massenmatrix  $\underline{M}$  zur Einheitsmatrix  $\underline{E}$  transformiert wird, folgt:

$$\left( \underline{E} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \underline{\omega}_m \right) \cdot \underline{q}_{m,red}(t) = \underline{\Phi}_{m,red}^T \cdot \underline{f}_{ext}(t) \quad (3.16)$$

Die Einheitsmatrix  $\underline{E} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  und die Matrix  $\underline{\omega}_m \in \mathbb{R}^{p \times p}$  besitzen durch die Hauptachsentransformation lediglich Einträge auf ihren Hauptdiagonalen. Durch die Transformation resultiert, dass die Werte auf der Hauptdiagonalen der Matrix  $\underline{\omega}_m$  dem Quadrat der Eigenfrequenzen  $\omega_{m,i}$  entspricht [57]. Ausdruck 3.16 stellt auf diese Weise ein System bestehend aus  $p$  entkoppelten Differentialgleichungen 2.Ordnung folgender Form dar:

$$\ddot{q}_{m,i}(t) + \omega_{m,i}^2 \cdot q_{m,i}(t) = \underline{\Phi}_{m,i}^T \cdot \underline{f}_{ext}(t) = \sum_{j=1}^n \Phi_{m,i,j} \cdot f_{ext,j}(t) \quad \forall i \in \{1..p\} \quad (3.17)$$

In diesen Differentialgleichungen spiegelt sich der Satz von Virial mathematisch wieder: Je höher die Eigenfrequenz  $\omega_{m,i}$  eines Eigenmodes, desto größer muss die externe Anregung  $\underline{f}_{ext}$  werden, um eine nennenswerte Amplitude  $q_{m,i}$  hervorzurufen.

Gabbay [44] interpretiert die modalen Amplituden aus Sicht der Physik als generalisierte Koordinaten im Sinne der Lagrangeschen Mechanik, die das mechanische System unter den gegebenen Zwangsbedingungen beschreiben. Folglich müssen die entkoppelten Differentialgleichungen 3.17 dem Lagrangeschen Formalismus [50, 51] entsprechen:

$$\mathcal{L}_m(\underline{q}_{m,red}, \dot{\underline{q}}_{m,red}, t) = T_m(\underline{q}_{m,red}, \dot{\underline{q}}_{m,red}, t) - V_m(\underline{q}_{m,red}, \dot{\underline{q}}_{m,red}, t) \quad (3.18)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{q}_{m,i}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial q_{m,i}} = 0 \quad \forall i \quad (3.19)$$

Hier bezeichnen  $\mathcal{L}_m$  die Lagrangefunktion,  $T_m$  die kinetische Energie und  $V_m$  die potentielle Energie des mechanischen Systems. Durch Vergleich von 3.18 und 3.19 mit 3.17 ergibt sich unter der Annahme von  $f_{ext}(t) \equiv 0$ :

$$T_m(\underline{q}_{m,red}, \underline{\dot{q}}_{m,red}, t) = T_m(\underline{\dot{q}}_{m,red}, t) = \sum_i \frac{1}{2} (\dot{q}_{m,i}(t))^2 \quad (3.20)$$

$$V_m(\underline{q}_{m,red}, \underline{\dot{q}}_{m,red}, t) = V_m(\underline{q}_{m,red}, t) = \sum_i \frac{1}{2} \omega_{m,i}^2 (q_{m,i}(t))^2 \quad (3.21)$$

Vorteil der Beschreibung als Lagrangesches System ist, dass der Lagrange-Formalismus eine systematische Integration von Energieformen sowohl mechanischer als auch nicht-mechanischer Art ermöglicht. Dies wird im anschließenden Teilkapitel gezielt eingesetzt und ist ebenfalls in Hinblick auf die Systemdarstellung von entscheidender Bedeutung. Darüber hinaus erlaubt die rechte Seite von Ausdruck 3.17, mittels der Transformation über  $\underline{\Phi}_{m,i}^T$ , jegliche Klasse von angreifenden Kräften  $f_{ext}(t)$  einzubinden.

Werden die modalen Geschwindigkeiten  $\dot{q}_{m,i}$  als intensive Variable des Lagrangeschen Systems aufgefasst, so ergibt sich folgende, mit Tabelle 2.4 korrespondierende Interpretation der modalen, mechanischen Bewegungsgleichung:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(\dot{q}_{m,i})}_{\substack{\text{kapazitiv,} \\ \text{„mechanischer} \\ \text{Kondensator“}}} + \underbrace{d_m \cdot \dot{q}_{m,i}}_{\substack{\text{dissipativ,} \\ \text{„mechanischer} \\ \text{Widerstand“}}} + \underbrace{\omega_{m,i}^2 \int \dot{q}_{m,i} dt}_{\substack{\text{induktiv,} \\ \text{„mechanische} \\ \text{Spule“}}} = \underbrace{\underline{\Phi}_{m,i}^T \cdot f_{ext}(t)}_{\substack{\text{„mechanische} \\ \text{Quelle“}}} \quad (3.22)$$

Der erste Term, welcher die Massenträgheit des Systems beschreibt, entspricht einem Kondensator. Der zweite, zur modalen Geschwindigkeit proportionale Term ist in den vorigen Darstellungen nicht enthalten und wurde zur Wahrung der Vollständigkeit aufgenommen. Er entspricht einer dissipativen Reibungskraft. Der Proportionalitätsfaktor  $d_m$  beschreibt in kompakter Form die dissipativen Mechanismen und ist zugleich Wert des entsprechenden Widerstandes im Kirchhoffschen Ersatzschaltbild. Der dritte Term, welcher die Formenergie des Systems beschreibt, entspricht einer Spule. Die externen Kräfte wirken in Form einer Quelle.

### 3.3 Nichtlinearitäten

Die Gleichungen 3.14 und 3.17 ermöglichen mittels weniger Freiheitsgrade ein linearmechanisches System hinreichend genau darzustellen. Da es nach dem derzeitigen Stand der

Forschung noch kein allgemeingültiges, auf der Systemmatrix basierendes Ordnungsreduktionsverfahren für nichtlineare mechanische Systeme gibt, müssen die entsprechenden Effekte durch Modifikation des linearmechanischen Modells berücksichtigt werden. Hierzu existieren zwei Möglichkeiten.

Zum einen kann das nichtlineare mechanische System um einen Arbeitspunkt linearisiert werden. Dies entspricht der Erweiterung von Ausdruck 3.14 um einen konstanten vektoriellen Anteil  $\underline{x}_{AP} \in \mathbb{R}^n$ :

$$\underline{x}(t) \approx \underline{x}_{AP} + \sum_{i=1}^p q_{m,i}(t) \cdot \Phi_{m,i} = \underline{x}_{AP} + \underline{\Phi}_{m,red} \cdot \underline{q}_{m,red}(t) \quad (3.23)$$

Des Weiteren müssen die Massen- und Steifigkeitsmatrix des Systems 3.9 am Arbeitspunkt ausgewertet werden. Auf diese Weise entsteht ein 3.17 entsprechendes Gleichungssystem, jedoch mit modifizierten Eigenfrequenzen  $\omega_{m,i,AP}$ :

$$\ddot{q}_{m,i}(t) + \omega_{m,i,AP}^2 \cdot q_{m,i}(t) = \sum_{j=1}^n \Phi_{m,i,j} \cdot f_{ext,j}(t) \quad \forall i \quad (3.24)$$

Das linearisierte System ist jedoch nur in einem beschränkten Bereich um den Arbeitspunkt gültig. Alternativ zu dieser Vorgehensweise, besteht die Möglichkeit Nichtlinearitäten über die Lagrangefunktion, ergo auf der Systemebene, einzubeziehen. Mehner [88] berücksichtigt auf diese Weise Effekte, wie z.B. das sog. *stress stiffening*<sup>8</sup>. Hierzu setzt Mehner [88] die potentielle mechanische Energie des Systems als gekoppeltes Polynom  $P_m(\underline{q}_{m,red})$  der modalen Amplituden an:

$$V_m(\underline{q}_{m,red}, t) = P_m(\underline{q}_{m,red}(t)) \quad (3.25)$$

Somit resultieren modale Bewegungsgleichungen folgender Form:

$$\ddot{q}_{m,i}(t) + \frac{\partial P_m(\underline{q}_{m,red})}{\partial q_{m,i}} \cdot q_{m,i}(t) = \sum_{j=1}^n \Phi_{m,i,j} \cdot f_{ext,j}(t) \quad \forall i \quad (3.26)$$

Zur Aufstellung des Polynoms berechnet Mehner [88] für bestimmte Lastfälle die tatsächliche mechanische Formänderungsenergie des zu modellierenden nichtlinearen mechanischen Systems und bestimmt die Koeffizienten des Polynoms mittels eines speziellen Verfahrens. Dies bedeutet, dass der Rechenaufwand für die Extraktion der Koeffizienten mit der Anzahl  $p$  der berücksichtigten Eigenmoden und der Ordnung der Terme extrem

---

<sup>8</sup> Mit *stress stiffening* wird eine Situation beschrieben, in welcher, beispielsweise ein lateral beidseitig eingespannter Balken vertikal derart stark ausgelenkt wird, dass die lateralen Zugspannungen sehr hoch werden und wie eine „Erhöhung“ der mechanischen Steifigkeit des Balkens wirken. Mathematisch lässt sich diese Situation definieren wie folgt: Der Gradient der mechanischen Formänderungsenergie infolge von Dehnungen wie vergleichbar groß wie der Gradient der mechanischen Formänderungsenergie infolge von Biegung.

ansteigt. Um dies zu verhindern, wird auf Basis der berechneten Lastfälle eine Klassifizierung in dominante und relevante Moden eingeführt. Dominante Moden weisen bei den Lastfällen einen hohen Beitrag, d.h. eine hohe modale Amplitude, auf. Relevante Moden weisen hingegen lediglich einen kleinen Beitrag auf. Das angesetzte Polynom wird in einem nächsten Schritt derart modifiziert, dass die modalen Amplituden der dominanten mit allen anderen dominanten und relevanten Moden koppeln können, die relevanten Moden jedoch untereinander nicht koppeln können. Auf diese Weise wird, letztendlich durch das Nullsetzen entsprechender Koeffizienten, eine starke Reduktion der für die Extraktion notwendigen Rechenzeit erreicht. Eine detaillierte Beschreibung dieser Vorgehensweise ist in der Dissertation von Bennini [11] enthalten, der dieses Prozedere in abgewandelter Form auch für die Kopplung des mechanischen Systemmodells mit anderen Energieformen, konkret dem elektrostatischen Energiebereich, einsetzt.

Einige Autoren, wie beispielsweise Handtmann [55] zweifeln oftmals zurecht an, ob die mechanischen Eigenmoden des ungedämpften mechanischen Systems bei starker Nichtlinearität oder auch bei starker Kopplung mit anderen Energieformen geeignete Basisfunktionen darstellen. Bennini [11] evaluiert diesbezüglich für ein nichtlineares System die mechanischen Eigenmoden gegenüber einer Basis aus Vektoren, die mit Hilfe des Karhunen-Loève-Verfahrens sowie einer Singulärwertzerlegung analog zu Hung [61] bestimmt wurden. Er stellt fest, dass die Karhunen-Loève-Vektoren, die den mechanischen Eigenmoden sehr ähneln, im Bereich von Einspannstellen akkuratere Ergebnisse liefern. Gleichwohl bezweifelt er jedoch, ob der, im Vergleich zur Extraktion der Eigenmoden, stark erhöhte Rechenaufwand gerechtfertigt ist.

### 3.4 Reibungsfreier mechanischer Kontakt

Ein natürlicher Vorgang des im Rahmen dieser Arbeit als Demonstrator zu analysierenden mikromechanischen Hochfrequenzschalters (vgl. Teilkapitel 1.5) ist der Schließvorgang. Aus diesem Grund ist auf der Systemebene ebenfalls der mechanische Kontakt zwischen einem beweglichen, deformierbaren und einem festen, ebenfalls deformierbaren Körper zu modellieren.

Das Fachgebiet der Kontaktmechanik ist jedoch ein „weites Feld“<sup>9</sup>, was eine vollständige Beschreibung des mechanischen Kontaktes, v.a. in Hinblick auf eine kompakte Beschreibung für die Systemebene, im Rahmen dieser Arbeit nicht erlaubt. Aus diesem Grund werden folgende Annahmen getroffen:

- Der mechanische Kontakt sei reibungsfrei.
- Adhäsion sei vernachlässigbar.
- Plastische Verformung finde nicht statt.

---

<sup>9</sup> Wörtliches Zitat aus Theodor Fontanes Roman „Effi Briest“ [36]. Unter dem Begriff „weites Feld“ wird hier die Weitläufigkeit eines Themas verstanden, das nicht auf kompakte Weise erschöpfend abgehandelt werden kann.

Diese Annahmen wirken sich stark vereinfachend aus. Im Falle des Demonstrators sind diese jedoch gerechtfertigt. Da der Kontakt durch vertikales Aufeinandertreffen der perforierten Membran und der Kontaktstempel stattfindet, spielen tangentielle Reibungskräfte eine untergeordnete Rolle. Da die Oberfläche der Membran herstellungsbedingt extrem rau ist, kann analog der theoretischen Betrachtungen in [118] davon ausgegangen werden, dass Adhäsionskräfte allenfalls eine marginale Rolle spielen. Eine plastische Verformung der Membran des Schalters tritt langfristig zwar unbestreitbar auf, jedoch kann davon ausgegangen werden, dass diese im Rahmen eines bzw. von wenigen Schließvorgängen vernachlässigbar ist.

Unter diesen Annahmen zeigt Wriggers [169] mittels Variationsrechnung, dass, im Falle des mechanischen Kontaktes, Kräfte auf die aufeinandertreffenden Oberflächen der mechanischen Körper wirken, die einem Durchdringen dieser entgegensteuern. Im Allgemeinen sind diese Kontaktkräfte abhängig von der Fläche des Kontaktes zwischen den beiden Körpern, sowie, im Falle nichtlinearem Materialverhaltens, auch von den gegenseitigen Eindringtiefen [118, 169].

Im Rahmen dieser Arbeit können, in Hinblick auf die durchzuführende Modellierung des Hochfrequenzmikroschalters, jedoch angenommen werden, dass die Kontaktfläche pro Kontaktstempel konstant ist, sowie dass das Materialverhalten im Falle des Kontaktes linear ist. Die Annahme einer konstanten Kontaktfläche ist durch die geringe Breite und Länge der Kontaktstempel gerechtfertigt, d.h. wenn die Membran auf den jeweiligen Stempel trifft, kann davon ausgegangen werden, dass diese auf der kompletten Fläche des Stempels aufliegt. Da aufgrund der Betriebsparameter weiterhin lediglich geringe Eindringtiefen, und damit geringe Verformungen zu erwarten sind, ist die Annahme linearen Materialverhaltens ebenfalls gerechtfertigt.

In Abhängigkeit des Abstandes  $h_{con,k}(t)$  zwischen den jeweiligen Kontaktstempeln und der Membran, können die entsprechenden Kontaktkräfte  $F_{kontakt,k}(t)$  wie folgt modelliert werden:

$$|F_{con,k}(t)| = \begin{cases} 0 & \text{für } h_{con,k}(t) \geq 0 \\ k_{con,k} \cdot |h_{con,k}(t)| & \text{für } h_{con,k}(t) < 0 \end{cases} \quad \forall k \quad (3.27)$$

Der Parameter  $k_{con,k}$  bezeichnet hierbei die mechanische Kontaktsteifigkeit des  $k$ -ten Kontaktstempels auf der Systemebene. Dieser wirkt tatsächlich entsprechend einer zusätzlichen mechanische Steifigkeit auf die Membran, wenn diese versucht, den Kontaktstempel einzudrücken.

Die Extraktion dieses Parameters kann mithilfe von FEM-Simulation erfolgen und wird in Teilkapitel 8.3.1 konkret auf diese Weise durchgeführt. Ist keine Extraktion möglich, so kann die Kontaktsteifigkeit im Bereich der Mikrosysteme, falls ein beweglicher Körper geringer Dicke auf einen festen Körper wesentlich größerer Dicke trifft, in der Regel, wie durch Teilkapitel 8.3.1 belegt, grob durch eine, im Vergleich zur mechanischen Steifigkeit des beweglichen Körpers, um den Faktor 1000 höhere Steifigkeit abgeschätzt werden.

Die Kontaktformulierung 3.27 wird mittels Transformation über die Eigenmoden in die modale Beschreibung des mechanischen Systems 3.17 integriert:

$$\ddot{q}_{m,i} + \omega_{m,i}^2 q_{m,i} = \sum_{j=1}^n \Phi_{m,i,j} \cdot f_{ext,j} + \sum_k \begin{cases} 0 & \text{f. } h_{con,k} \geq 0 \\ \Phi_{m,con,i,k} k_{con,k} h_{con,k} & \text{f. } h_{con,k} < 0 \end{cases} \quad \forall i \quad (3.28)$$

Hier bezeichnet  $\Phi_{m,con,i,k}$  einen für den Kontaktstempel durch Mittelwertbildung berechneten modalen Formfaktor<sup>10</sup>:

$$\Phi_{m,con,i,k} = \frac{\sum_{j_k} A_{j_k} \cdot \Phi_{m,i,j_k}}{\sum_{j_k} A_{j_k}} \quad \forall k, i \quad (3.29)$$

Der Doppelindex  $j_k$  bezeichnet hierbei die Diskretisierungspunkte des  $k$ -ten Kontaktstempels und  $A_{j_k}$  die mit einem Punkt assoziierte Oberfläche, welche zur Gewichtung des entsprechenden modalen Formfaktors  $\Phi_{m,i,j_k}$  verwendet wird. Auch die Abstände  $h_{con,k}$  sind in Abhängigkeit des initialen Abstandes  $h_{con,0,k}$  und der modalen Amplituden darzustellen:

$$h_{con,k}(t) = h_{con,0,k} + \sum_i \Phi_{m,con,i,k} \cdot q_{m,i}(t) \quad \forall k \quad (3.30)$$

Mittels der Gleichungen 3.30 und 3.28 ist ein wichtiger Aspekt des mechanischen Kontaktes ersichtlich: Befindet sich das System in Kontakt, so werden über die Kontaktformulierung die Eigenmoden des Systems gekoppelt. Die modalen Formfaktoren der Kontaktstempel  $\Phi_{m,con,i,k}$  skalieren hierbei den Energietransfer zwischen den Eigenmoden. Des Weiteren spielt die Eigenfrequenz der Moden eine entscheidende Rolle: Je höher die Eigenfrequenz, desto mehr Formänderungsenergie kann während des kurzzeitigen Aufpralls in der entsprechenden Mode eingespeichert werden.

Die Formfaktoren  $\Phi_{m,con,i,k}$  können ebenfalls zur Identifikation von Eigenmoden eingesetzt werden, die ohne Kontakt keine Beiträge zum Zustandsvektor des Systems liefern würden, jedoch durch die Kontaktsituation aktiviert werden (siehe Teilkapitel 8.3.1). Dies ist ein entscheidender Vorteil des hier eingesetzten, auf Eigenvektoren und Eigenwerten basierenden, Verfahrens gegenüber einer Ordnungsreduktion mittels algebraischer Verfahren aus der Systemmatrix<sup>11</sup>. Die letztgenannten Verfahren extrahieren nur so viele Basisvektoren, wie unbedingt notwendig. Folglich ist keine systematische Untersuchung der gesamten Basis hinsichtlich der Relevanz im Falle des mechanischen Kontaktes möglich.

Abschließend ist zu bemerken, dass der mechanische Kontakt ein mathematisches Hindernisproblem [76] darstellt, dessen numerische Implementierung delikater ist. Aus diesem

<sup>10</sup> Der Begriff Formfaktor bezeichnet in dieser Arbeit den punktuellen Wert einer Eigenschwingform. Eine diskretisierte Eigenschwingform  $\underline{\Phi}_{m,i}$  besteht beispielsweise aus den Formfaktoren  $\Phi_{m,i,j}$ , d.h. den Werten an den einzelnen Diskretisierungspunkten  $j$ .

<sup>11</sup> Vgl. Ausführungen auf Seite 41ff bzgl. Krylov-Unterraum-Methoden.

Grund werden in Teilkapitel 6.6 die Kontaktkräfte in eine speziellen Funktion eingebettet, welche den Übergang in den Kontakt numerisch stetig gestaltet.



## 4. Modellierung elektrostatischer Subsysteme

In diesem Kapitel werden zwei Möglichkeiten zur Modellierung elektrostatischer Subsysteme auf der Systemebene diskutiert. Insbesondere wird auf kapazitive Subsysteme eingegangen, da diese in Mikrosystemen gezielt als elektrischer Antrieb und zur elektrischen Detektion eingesetzt werden. Hierfür wird zuerst in verknappter Form auf die essentiellen Grundlagen der Elektrostatik eingegangen. Daraufhin wird auf eine diskretisierte, analytische Darstellung mittels differentieller Plattenkondensatornäherung und der damit verbundenen Problematik der Streufelder eingegangen. Zuletzt wird eine Lagrangesche Beschreibung auf Basis der modalen Koordinaten dargelegt und auf die elektromechanische Kopplung eingegangen.

### 4.1 Elektrostatische Grundlagen für Mehrelektroden-Kondensatoranordnungen

Wie in Tabelle 2.2 dargestellt, sind die elektrische Ladung  $Q_e$  und das elektrische Potential  $\Phi_e$  die extensiven bzw. die intensiven Größen elektrischer Systeme. Da hier statische und kapazitive elektrische Subsysteme betrachtet werden sollen, ist gemäß den Ausführungen in Kapitel 2.2.2 der direkte Zusammenhang zwischen der extensiven Größe und der intensiven Größe eines elektrostatischen System zu analysieren, welcher im integralen Fall (vgl. Ausdruck 2.19) folgende Form besitzt:

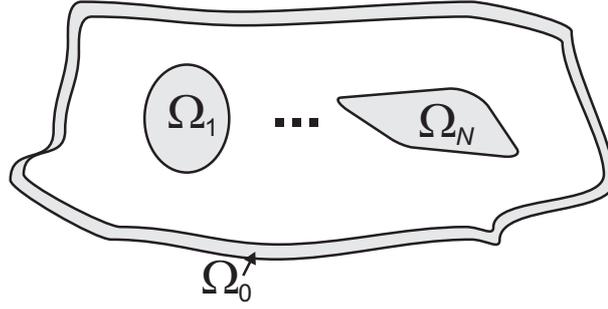
$$Q_e = K_{C,e} \cdot \Delta \Phi_e \quad (4.1)$$

Hier entspricht  $K_{C,e}$  dem Kapazitätskoeffizienten eines elektrostatischen Systems. Auf der kontinuierlichen Feldebene lautet der entsprechende, als Materialgleichung bezeichnete [153, 154] Zusammenhang:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r}) \cdot (-\nabla \Phi_e(\vec{r})) = \varepsilon(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad (4.2)$$

Hier bezeichnen  $\vec{D}(\vec{r})$  das dielektrische Verschiebungsfeld,  $\varepsilon(\vec{r})$  die dielektrische Konstante (oder elektrische Permittivität), und  $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \Phi_e(\vec{r})$  das als elektrische Feldstärke bezeichnete Gradientenfeld des elektrischen Potentials [153]. Gemäß dem Gaußschem Gesetz in differentieller Form gilt:

$$\nabla \vec{D}(\vec{r}) = \rho_e(\vec{r}) \quad (4.3)$$



**Abb. 4.1:** Generische kapazitive Anordnung mit  $N$  Elektroden (Äquipotentialflächen), sowie einer umgebenden Elektrode des Systems mit dem Index 0.

Hier bezeichnet  $\rho_e(\vec{r})$  die lokale elektrische Raumladungsdichte. Wird die Materialgleichung 4.2 in das Gaußsche Gesetz 4.3 eingesetzt, so ergibt sich die sog. Poissongleichung, welche zur Lösung einer elektrostatischen Problemstellung ausgewertet werden muss:

$$\nabla (\varepsilon(\vec{r}) \nabla \Phi_e(\vec{r})) = -\rho_e(\vec{r}) \quad (4.4)$$

Im Fall einer kapazitiven elektrischen Anordnung existieren leitende Oberflächen, sog. Elektroden, auf welchen sich Ladungen befinden (siehe Abbildung 4.1). In einem System von  $N$  Elektroden, die zur Vereinfachung gleichzeitig als Äquipotentialflächen betrachtet werden, berechnet sich nach Wachutka [154] die auf der Oberfläche  $\Omega_k$  einer Elektrode  $k$  durch die anderen Elektroden und Potentiale influenzierte Ladung  $Q_{e,k}$  zu:

$$Q_{e,k} = \int_{\partial\Omega_k} \vec{D} \cdot \vec{n} da = \int_{\partial\Omega_k} (-\varepsilon \nabla \Phi_e) \vec{n} da = \sum_l V_{e,l} \int_{\partial\Omega_k} -\varepsilon \nabla \Phi_{no,e,l} \vec{n} da \quad (4.5)$$

Hier bezeichnen  $V_{e,l}$  das elektrische Potential auf der  $l$ -ten Äquipotentialfläche und  $\Phi_{no,e,l}(\vec{r})$  eine speziell normierte Potentialverteilung, für die gilt:

$$\Phi_{no,e,l}|_{\Omega_k} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases} \quad (4.6)$$

Anhand des Ausdrucks 4.5 bietet sich die Definition von Kapazitätskoeffizienten  $C_{kl}$ , auch bezeichnet als Maxwellsche Kapazitätskoeffizienten, an:

$$C_{kl} := \int_{\partial\Omega_k} -\varepsilon \vec{n} \nabla \Phi_{no,e,l} da = \int_{\Omega} \nabla \Phi_{no,e,k} \varepsilon \nabla \Phi_{no,e,l} dr^3 \quad (4.7)$$

Die Maxwellschen Kapazitätskoeffizienten  $C_{kl}$  sind hierbei ausschließlich Funktionen der Geometrie und der dielektrischen Konstanten des Problems. Sie sind weiterhin die Konkretisierung des allgemeinen Kapazitätskoeffizienten  $K_{C,e}$  in Ausdruck 4.1. Durch die Einführung der Koeffizienten lässt sich Ausdruck 4.5 wesentlich kompakter schreiben:

$$Q_{e,k} = \sum_l C_{kl} \cdot V_{e,l} \quad (4.8)$$

Dies entspricht einer Vektor-Matrix-Darstellung folgender Form:

$$\underline{Q}_e = \begin{pmatrix} Q_{e,0} \\ Q_{e,1} \\ \vdots \\ Q_{e,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & \dots & C_{0N} \\ C_{10} & C_{11} & \dots & C_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N0} & C_{N1} & \dots & C_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{e,0} \\ V_{e,1} \\ \vdots \\ V_{e,N} \end{pmatrix} = \underline{\underline{C}}_e \cdot \underline{V}_e \quad (4.9)$$

Wachutka [153] zeigt weiterhin, dass die Maxwellschen Kapazitätskoeffizienten symmetrisch sind bzw. die Maxwellsche Kapazitätsmatrix  $\underline{\underline{C}}$  positiv semi-definit ist. Aufgrund dieser Eigenschaften gilt:

$$C_{kl} = C_{lk} \quad (4.10)$$

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}^T \quad (4.11)$$

Da das gesamte kapazitive System ladungsneutral ist, müssen sich des Weiteren die Zeilen- bzw. Spaltensummen der Einträge in der Maxwellschen Kapazitätsmatrix  $\underline{\underline{C}}$  zu Null ergeben:

$$\sum_k C_{kl} = 0 \quad \forall l \quad \text{und} \quad \sum_l C_{kl} = 0 \quad \forall k \quad (4.12)$$

Die im System gespeicherte elektrostatische Energie  $W_{el}$  berechnet sich, in kompakter Darstellung, zu:

$$W_{el} = \frac{1}{2} \cdot \underline{V}_e^T \cdot \underline{\underline{C}}_e \cdot \underline{V}_e \quad (4.13)$$

Elektrostatische Kräfte, die zwischen den entsprechenden Elektroden wirken, können aus der Energie  $W_{el}$  durch Variationsrechnung bestimmt werden:

$$\underline{F}_{el} = \frac{\partial W_{el}}{\partial \underline{r}} = \frac{1}{2} \cdot \underline{V}_e^T \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \underline{\underline{C}}_e(\underline{r}) \right) \cdot \underline{V}_e \quad (4.14)$$

Für einen einfachen Plattenkondensator mit der Plattenfläche  $A_{pk}$ , dem Plattenabstand  $h_{pk}(\underline{r})$  und der Potentialdifferenz  $V_{pk}$  ergibt sich, durch entsprechende Auswertung der allgemeinen Darstellungen, folgender Ausdruck für die elektrostatische Kraft:

$$\underline{F}_{el} = \frac{\partial W_{el}}{\partial \underline{r}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \left( \varepsilon \frac{A_{pk}}{h_{pk}(\underline{r})} \right) \cdot V_{pk}^2 = \frac{\varepsilon A_{pk} V_{pk}^2}{2} \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \left( \frac{1}{h_{pk}(\underline{r})} \right) \quad (4.15)$$

Nach Darlegung der allgemeinen Gleichungen für kapazitive elektrostatische Subsysteme sind im Folgenden die jeweiligen Kapazitätskoeffizienten konkret zu bestimmen. Diesbezüglich ist zu beachten, dass das in Kapitel 3 abgeleitete Systemmodell explizit das Ziel hat, nicht nur starre, sondern auch deformierbare mechanische Körper zu modellieren. Analytische Kompaktmodelle für kapazitive Anordnungen, die starre Elektroden voraussetzen, wie z.B. die von Schrag [129] und Sattler [128] eingesetzten Modelle für Platten- und Torsionskondensatoren, sind für diese Arbeit deshalb nicht geeignet. Aus diesem Grund werden nachstehend zwei Herangehensweisen diskutiert, die für die Modellierung von elektrostatischen Subsystemen mit deformierbaren Elektroden geeignet sind: die sog. differentielle Plattenkondensatornäherung und eine Beschreibung mittels des Lagrange-schen Formalismus.

## 4.2 Differentielle Plattenkondensatornäherung

Die differentielle Plattenkondensatornäherung ist im Sinne von Teilkapitel 2.3.2 als finites Netzwerk zu klassifizieren. Die Grundidee besteht darin, eine deformierbare Elektrode als Parallelschaltung differentiell kleiner<sup>1</sup> Plattenkondensatoren aufzufassen, die entsprechend unterschiedliche Plattenabstände besitzen (siehe Abbildung 4.2).

Die Gesamtkapazität des Kondensators und die Gesamtkraft auf eine Elektrode ergeben sich somit über die Summe der Kapazitäten bzw. der elektrostatischen Kräfte der einzelnen differentiellen Plattenkondensatoren:

$$C_{ges}(\vec{r}) = \sum_q C_{pk,q}(\vec{r}) = \varepsilon \sum_q \frac{A_{pk,q}}{h_{pk,q}(\vec{r})} \quad (4.16)$$

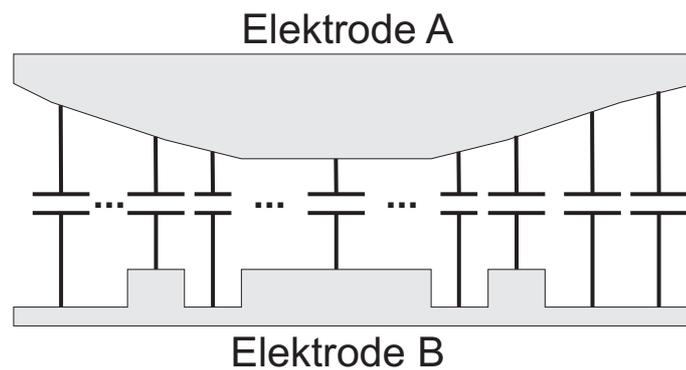
$$\underline{F}_{el} = \frac{\varepsilon V_{pk}^2}{2} \sum_q A_{pk,q} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left( \frac{1}{h_{pk,q}(\vec{r})} \right) \quad (4.17)$$

Die inhärente Annahme, die hierdurch getroffen wird, ist, dass das elektrische Feld nur innerhalb und senkrecht zwischen den Platten der differentiellen Kondensatoren verläuft. Einerseits ist diese Näherung für viele Mikrostrukturen anwendbar, da großen lateralen Abmessungen kleine Plattenabstände gegenüberstehen. Andererseits ist das Modell infolgedessen nicht in der Lage laterale Feldkomponenten zu berücksichtigen, die bei einer entsprechend starken Deformation von Elektroden auftreten können.

Ebenfalls werden mit diesem Ansatz zunächst Streufelder am Rand der Elektroden, sowie an Perforationen vernachlässigt. Diese können, wie im folgenden Teilkapitel gezeigt, jedoch mittels Kompaktmodellen oder Korrekturfaktoren berücksichtigt werden.

---

<sup>1</sup> Die tatsächliche Granularität, d.h. die Größe der Plattenkondensatorflächen, ist abhängig von dem zu modellierenden Problem.



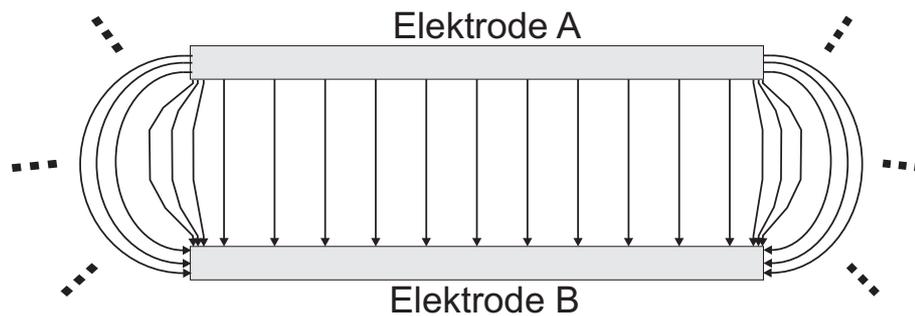
**Abb. 4.2:** Schematische Visualisierung der differentiellen Plattenkondensatornäherung für eine, aus zwei Elektroden bestehende, zweidimensionale Anordnung. Die obere Elektrode könnte beispielsweise eine deformierbare mechanische Brücke und die untere Elektrode eine feste Bodenelektrode mit gezielten Erhöhungen darstellen. Die Anzahl und Fläche der Plattenkondensatorelemente ist von der Variation des Abstandes zwischen den Elektroden abhängig.

### 4.3 Streufelder

An Rändern von Elektrodenanordnungen, sowie an Löchern treten sog. Streufelder auf (siehe Beispiel in Abbildung 4.3), die in dem analytischen Ausdruck für den Plattenkondensator, und damit in der Modellierung mittels differentieller Plattenkondensatoren, nicht enthalten sind. Grundlegend existieren zwei Möglichkeiten, Streufelder zu berücksichtigen:

- Analytische Berechnung eines Ausdrucks mittels komplexer Funktionentheorie, und
- Extraktion eines Verhaltensmodells aus numerischen Ergebnissen.

Hinsichtlich der in Teilkapitel 2.3.1 genannten Anforderung an die Modellierung wäre ein analytisches Kompaktmodell am erstrebenswertesten. Lorenz [83] leitet beispielsweise erfolgreich mittels komplexer Funktionentheorie, d.h. konformer Abbildung, konkret in Form der Schwarz-Christoffel Transformation, analytische Kompaktmodelle für die Kapazitäten und elektrostatischen Kräfte von mikromechanischen Kammantrieben ab. Diese wurden von Strommer [138] durch numerische Rechnung weitestgehend bestätigt. Die grundsätzliche Einschränkung bei der Herleitung von analytischen Modellen mittels konformer Abbildung besteht darin, dass diese lediglich auf zweidimensionale Probleme anwendbar ist [83, 98, 141]. Infolgedessen muss eine dreidimensionale Kapazitätsanordnung entweder, wie bei Lorenz [83], in zweidimensionale Strukturen bestimmter Tiefe unterteilt werden können, oder es resultiert eine Abweichung zwischen der mittels des zweidimensionalen Modells berechneten und der tatsächlichen Kapazität der Anordnung, da entsprechende dreidimensionale Effekte nicht berücksichtigt werden [138].



**Abb. 4.3:** Schematische Darstellung der Streufelder am Rand eines Plattenkondensators. Die gerichteten schwarzen Linien stellen die elektrischen Feldlinien dar. Neben den am Rand gezeigten Streufeldern existieren noch weitere Feldlinien, die von den Ober- bzw. Unterseiten der Elektroden ausgehen. Diese wurden nicht dargestellt, sondern lediglich mit Punkten angedeutet.

Alternativ kann aus numerischen Simulationsergebnissen ein Verhaltensmodell für die Streufelder interpoliert werden. Hierbei ist darauf zu achten, dass das Verhaltensmodell die tatsächlichen Geometrieparameter beinhaltet und sinnvoll mit diesen skaliert. Ein Beispiel für diese Art von Modell ist das in [98] erstellte Kompaktmodell zur Berücksichtigung von runden Perforationen in einer Elektrode. Dieses Kompaktmodell wurde von Sattler [128] auf quadratische Perforationen erweitert.

## 4.4 Beschreibung mithilfe des Lagrangeschen Formalismus

Die bisherigen Ausführungen verfolgen das Ziel, die Kapazitätskoeffizienten einer Anordnung und daraus die elektrostatischen Kräfte zu berechnen. Ein davon abweichender Ansatz besteht darin, die Energie des elektrostatischen Systems direkt in Abhängigkeit der modalen Koordinaten des mechanischen Systems zu berechnen und daraufhin den resultierenden Ausdruck für die elektrische Energie über die Lagrangefunktion mit dem mechanischen Systemmodell zu kombinieren.

Gabbay [43] und Bennini [11] gehen exakt auf diese Weise vor. Zur Berechnung der elektrostatischen Energie in Abhängigkeit der modalen Amplituden führen Sie eine Reihe von elektrostatischen Simulationen der Gesamtgeometrie durch. Durch Interpolation der Ergebnisse wird ein analytisch auswertbarer Ausdruck für die elektrostatische Energie in Abhängigkeit der modalen Amplituden erstellt [11] und als potentielle Energie direkt in die Lagrangefunktion integriert.

Mittels der Vorgehensweise von Gabbay [43] und Bennini [11] können auf automatisierbare Weise Verhaltensmodelle für komplexe Geometrien, sowie deren Streufelder extrahiert werden. Die Verhaltensmodelle haben jedoch den Nachteil, dass diese sehr intransparent sind und für jede Änderung der Geometrie mit dem entsprechenden numerischen

Aufwand neu erstellt werden müssen.

Von Vorteil wäre daher, wenn ein parametrisierbares Kompaktmodell für eine Integration mittels des Lagrangeschen Formalismus vorhanden wäre. Diese kombinierte Vorgehensweise wird im Rahmen dieser Arbeit verwendet und in Teilkapitel 6.4 näher erläutert.

## 4.5 Elektromechanische Kopplung

Die Kopplung zwischen der Elektrostatik und der Mechanik führt, wie im Folgenden beschrieben, zu einem Gleichungssystem, welches Instabilitäten beinhaltet. Aus diesem Grund ist die numerische Behandlung von elektromechanisch gekoppelten Systemen, v.a. im Bereich der quasi-stationären Berechnungen, ein stets aktuelles Forschungsgebiet. Dies ist darin begründet, dass die in FEM-Simulatoren standardmäßig eingesetzten numerischen Algorithmen, welche stets eine stabile bzw. eindeutige Lösung suchen, aufgrund der Instabilitäten des Gleichungssystems divergieren [76]. Dieser Umstand forciert die Entwicklung von erweiterten Lösungsverfahren, die Gleichungssysteme mit Instabilitäten lösen können. Beispielhafte Vertreter sind das von König [76] vorgestellte Homotopieverfahren und das DIPIE<sup>2</sup>-Verfahren der Arbeitsgruppe um Elata [15]. Diese erweiterten Verfahren sind für die vorliegende Arbeit jedoch nur bedingt relevant, da in erster Linie nicht das quasi-statische, sondern das transiente Verhalten von elektromechanischen Mikrobauteilen untersucht wird.

### 4.5.1 Phänomenologische Beschreibung

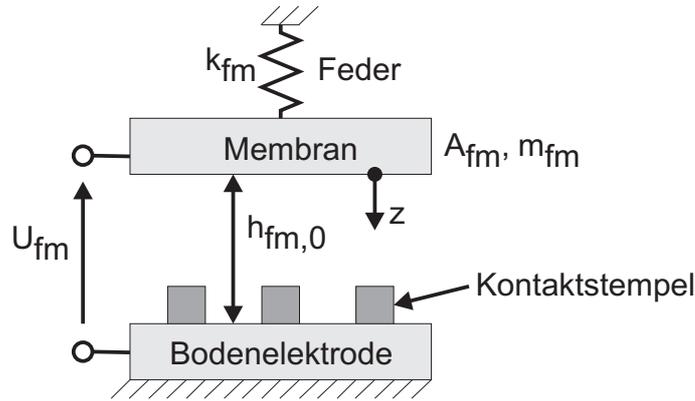
Die grundlegende Problematik der elektromechanischen Kopplung wird im Folgenden anhand der in Abbildung 4.4 skizzierten Anordnung erläutert. Die untersuchte Struktur besteht aus einer, an einer Feder aufgehängten, vertikal beweglichen Platte, einer Bodenelektrode und nicht-leitfähigen Kontaktstempeln. In der Darstellung bezeichnen  $k_{fm}$  die Steifigkeit der Feder,  $m_{fm}$  und  $A_{fm}$  die Masse und die Fläche der starren Membran,  $h_{fm,0}$  den Abstand zwischen Membran und Bodenelektrode im Ausgangszustand und  $z$  die Auslenkung der Membran in Richtung Bodenelektrode. Die Membran ist elektrisch geerdet ( $\Phi_e = 0$ ). Die Bodenelektrode besitzt das Potential  $\Phi_e = U_{fm}$ , sodass eine Plattenkondensatoranordnung resultiert, an welcher die Spannung  $U_{fm}$  abfällt. Die Kapazität  $C_{fm}$  der Anordnung errechnet sich zu:

$$C_{fm}(z) = \varepsilon \frac{A_{fm}}{h_{fm}} = \varepsilon \frac{A_{fm}}{h_{fm,0} - z} \quad (4.18)$$

Augenscheinlich erfolgt die Kopplung von der Mechanik in die Elektrostatik über den variablen Spaltabstand  $h_{fm} = h_{fm,0} - z$ , welcher ein Parameter der elektrischen Kapazität ist. Die Kopplung von der Elektrostatik in die Mechanik erfolgt hingegen über

---

<sup>2</sup> DIPIE ist eine Abkürzung für *Displacement Iteration Pull-In Extraction*.



**Abb. 4.4:** Anordnung zur Erläuterung der elektromechanischen Kopplung.

die elektrostatische Kraft  $F_{fm,el} = \frac{U_{fm}^2}{2} \frac{\partial C_{fm}(z)}{\partial z}$ , welche als Oberflächenkraft an der Membran angreift. Die Kräftebilanz des elektromechanischen Systems ergibt sich, unter zusätzlicher Berücksichtigung von Dämpfungseffekten (Dämpfungskonstante  $d_{fm}$ ), zu:

$$m_{fm}\ddot{z} + d_{fm}\dot{z} + k_{fm}z = \frac{\varepsilon U_{fm}^2 A_{fm}}{2} \frac{1}{(h_{fm,0} - z)^2} \quad (4.19)$$

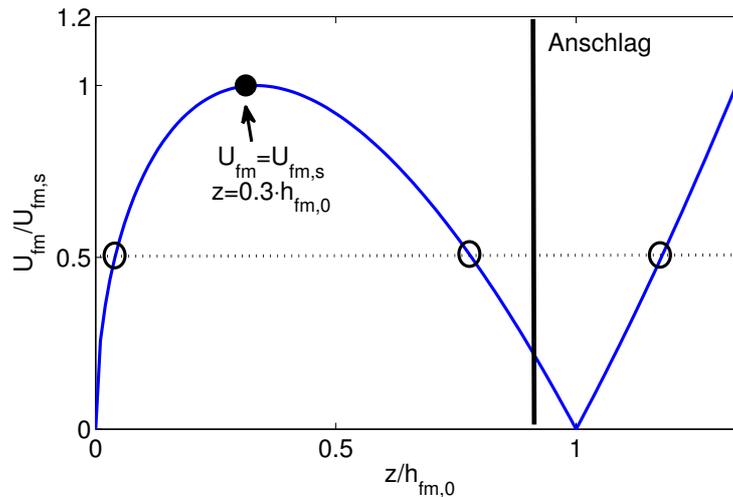
Wird vorerst der quasi-stationäre Fall ( $\ddot{z} = \dot{z} \equiv 0$ ) betrachtet, so steht einer linearen mechanischen Federkraft  $F_{fm,feder} = k_{fm}z$  eine nichtlineare elektrostatische Kraft  $F_{fm,el} \propto 1/(const - z)^2$  gegenüber. Wird die zu einer Auslenkung  $z$  zugehörige Spannung  $U_{fm}$  berechnet, so ergibt sich folgender, nichtlinearer Ausdruck:

$$U_{fm} = \sqrt{\frac{2k_{fm}(h_{fm,0} - z)^2 z}{\varepsilon A_{fm}}} = f(z) \quad (4.20)$$

Graph 4.5 stellt  $U_{fm}$  in Abhängigkeit der Auslenkung  $z$  dar. Hierbei sind die Auslenkungen auf den Spaltabstand  $h_{fm,0}$  und die Spannungen auf das im Bereich  $0 < z < h_{fm,0}$  befindliche, lokale Maximum ( $\partial U_{fm}/\partial z = 0$ ) bei  $z = h_{fm,0}/3$  normiert, welches den Spannungswert  $U_{fm,s}$  besitzt:

$$U_{fm,s} = \sqrt{\frac{8k_{fm}h_{fm,0}^3}{27\varepsilon A_{fm}}} \quad (4.21)$$

Da in der Wurzel ein Polynom dritten Grades in  $z$  steht, folgt, dass in der Umkehrfunktion zu Ausdruck 4.20, d.h.  $z = f^{-1}(U_{fm})$ , für einen Spannungswert  $U_{fm}$  bis zu drei unterschiedliche mathematische Lösungen von  $z$  existieren können. Dies ist in Graph 4.5 durch die gestrichelte Linie, beispielhaft für die Spannung  $U_{fm} = 0.5 \cdot U_{fm,s}$ , dargestellt und darüber hinaus der Grund, warum numerische Standardverfahren divergieren.



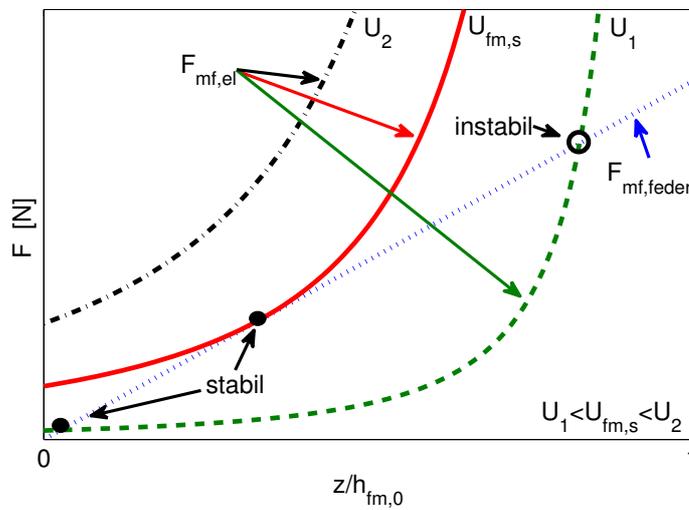
**Abb. 4.5:** Graph des Ausdruckes 4.20. Die senkrechte schwarze Linie symbolisiert den mechanischen Anschlag des Systems. Die Achsen sind normiert.

Von den drei mathematischen Lösungen ist diejenige, welche sich jenseits des mechanischen Anschlages (siehe senkrechte Linie in Graph 4.5) befindet, physikalisch nicht sinnvoll und kann aus diesem Grund ausgeschlossen werden. Von den zwei weiteren Lösungen ist stets eine stabil und eine instabil. Dies soll im Folgenden anhand der beiden Graphen 4.6 und 4.7 erläutert werden.

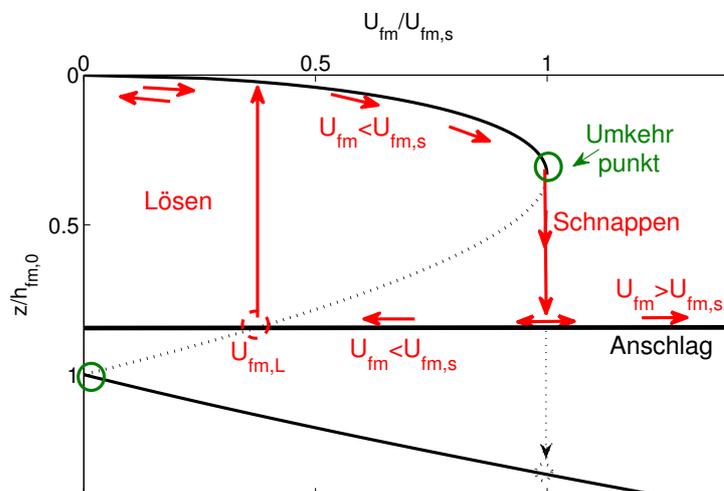
In Abbildung 4.6 werden im Bereich  $0 < z < h_{fm,0}$  die Graphen der Federkraft und der elektrostatischen Kräfte für verschiedene Spannungen aufgezeigt. Im Fall der Spannung  $U_1 < U_{fm,s}$  existieren zwei Schnittpunkte der Graphen, d.h. zwei mathematische Lösungen. Die Lösungen können anhand des Kräfteverlaufs in  $+z$ -Richtung klassifiziert werden. Steigt in  $+z$ -Richtung die Federkraft stärker an, als die elektrostatische Kraft, so liegt eine stabile Lösung vor. Dies ist so zu interpretieren, dass die Federkraft auch bei größer werdender Auslenkung die elektrostatische Kraft noch ausreichend kompensieren kann und das System somit eine Art „Stabilitätsreserve“ besitzt. Steigt jedoch in Richtung  $+z$  die elektrostatische Kraft stärker an, als die Federkraft, so besitzt das System keine Stabilitätsreserve mehr und die Membran wird auf den Anschlag gezogen. Im Fall der Spannung  $U_{fm,s}$  fallen die beiden Lösungen zu einer stabilen Lösung zusammen. Im Fall der Spannung  $U_2 > U_{fm,s}$  existiert kein Schnittpunkt, d.h. die elektrostatische Kraft ist größer als die mechanische Kraft und zieht die Membran auf den Anschlag.

Graph 4.7 erläutert, wie sich die Auslenkung  $z$  der Membran in Abhängigkeit der Spannung  $U_{fm}$  verhält. Der Verlauf des Graphen stellt eine sog. *S-Kurve* dar, d.h. einen Verlauf aus stabilen und instabilen Ästen<sup>3</sup>. Hierbei gehen an Umkehrpunkten stabile Äste in instabile über, und vice versa [76]. Ein Umkehrpunkt kann über die tangentielle Steigung identifiziert werden, welche am Umkehrpunkt gegen  $\pm\infty$  strebt.

<sup>3</sup> Derartige Verläufe treten nicht nur bei elektromechanisch gekoppelten Systemen auf, sondern auch bei elektrothermisch gekoppelten Betrachtung von Halbleiterleistungsbau-elementen [75].



**Abb. 4.6:** Graph der mechanischen Federkraft  $F_{fm,feder}$  und der elektrostatischen Kräfte  $F_{fm,el}$  für drei Spannungen  $U_1 < U_{fm,s} < U_2$ . Schneiden sich die Graphen der Kräfte  $F_{fm,feder}$  und  $F_{fm,el}$ , so existieren im Bereich  $0 < z < h_{fm,0}$ , maximal zwei Lösungen.



**Abb. 4.7:** Auslenkung der Membran aus Anordnung 4.4 in Abhängigkeit der angelegten Spannung  $U_{fm}$ . Der Verlauf entsteht durch Rotation des Graphen 4.5, d.h. es ist dessen Umkehrfunktion dargestellt. Stabile Äste des Graphens ( $dz/dU_{fm} > 0$ ) sind mit durchgezogener Linie und instabile Äste ( $dz/dU_{fm} < 0$ ) mit strichlierter Linie dargestellt. Die Achsen sind normiert.

Der konkrete Verlauf der Kurve wird im Folgenden anhand der Auslenkung der Membran bei stetig steigender Spannung (z.B. Dreiecksspannung) diskutiert. Beginnend von der Ausgangslage bei  $z = 0$  wird die Membran mit steigender Spannung zuerst stabil in Richtung Bodenelektrode ausgelenkt (siehe Pfeile in Abbildung 4.7). Die Federkraft kann hierbei die elektrostatische Kraft solange kompensieren, bis die Spannung  $U_{fm} = U_{fm,S}$  erreicht wird.

Bei dieser Spannung geht die tangentielle Steigung in Graph 4.7 gegen  $+\infty$ , d.h. es liegt ein Umkehrpunkt vor. Tatsächlich ist im Bereich  $0 < U_{fm} < U_{fm,S}$  die tangentielle Steigung  $dz/dU_{fm} > 0$ , was bezüglich der vorigen Erläuterungen einer Stabilitätsreserve entspricht. Ab dem Umkehrpunkt bei  $U_{fm} = U_{fm,S}$  ist die tangentielle Steigung hingegen  $dz/dU_{fm} < 0$ , was instabilem Verhalten entspricht. Aus diesem Grund versucht die Membran bei steigender Spannung ( $U_{fm} > U_{fm,S}$ ) vom Umkehrpunkt auf den nächsten, mathematisch stabilen Punkt zu schnappen (vgl. gestrichelter Pfeil in Abbildung 4.7), weshalb  $U_{fm,S}$  als Schnapp-Spannung, oder engl. *pull-in voltage*, bezeichnet wird.

Da dieser stabile Punkt jenseits der Gegenelektrode liegt ( $z > h_{fm,0}$ ), ist er jedoch physikalisch nicht zu erreichen, weshalb die Membran auf dem mechanischen Anschlag zu liegen kommt. Aus mathematischer Sicht bestimmt in dieser Situation das Hindernisproblem „mechanischer Kontakt“ (vgl. Teilkapitel 3.4) das Verhalten des Systems. Wird die Spannung weiter erhöht, so bleibt die Membran auf dem Anschlag liegen. Erst bei Verringerung der Spannung löst sich die Membran, wenn die Spannung den Wert der Löse-Spannung  $U_{fm,L}$ , engl. *release voltage* oder *pull-out voltage*, mit  $U_{fm,L} < U_{fm,S}$  erreicht. Dies entspricht dem Schnittpunkt des instabilen Astes mit der, durch das Hindernisproblem, eingeschränkten Auslenkung  $z$ . Infolgedessen springt das System auf den nächsten erreichbaren stabilen Ast, d.h. die Membran wird vom Anschlag angehoben und auf eine stabile Position ( $z < h_{fm,0}/3$ ) gebracht. Nun kann die Membran durch weiteres Verringern der Spannung wieder in die Ausgangszustand versetzt, oder durch Erhöhen der Spannung erneut ausgelenkt werden.

Da Schnapp-Spannung und Löse-Spannung unterschiedlich sind ( $U_{fm,S} > U_{fm,L}$ ), spricht man von einem Hystereseverhalten elektromechanisch gekoppelter Systeme. Des Weiteren wird eine Spannung, welche geringfügig höher als die Löse-Spannung  $U_{fm,L}$  ist, und auf diese Weise eine Mikrostruktur noch auf dem mechanischen Anschlag halten kann, als Halte-Spannung, engl. *hold voltage*, bezeichnet.

Die bisherigen Erläuterungen bezogen sich auf den stationären Fall ( $\ddot{z} = \dot{z} \equiv 0$ ). Wird der dynamische Fall betrachtet, so sind ebenfalls die Massenträgheit des Systems, sowie die dissipativen Dämpfungskräfte zu berücksichtigen. Dies hat hinsichtlich der numerischen Lösungsverfahren den Vorteil, dass kein stationärer Gleichgewichtspunkt mehr zu berechnen ist, sondern die zeitliche Trajektorie des Systems: Wird ein elektromechanisches System instabil, so wird die bewegliche Mikrostruktur lediglich beschleunigt, bis diese in den mechanischen Kontakt gerät. Statische Kennlinien wie in Abbildung 4.7 sind folglich, wie bei Rocha *et al.* [123, 125] aufgezeigt, durch Phasenporträts zu ersetzen, welche in einer von den Zustandsvariablen<sup>4</sup> aufgespannten Ebene die möglichen Trajektorien des Sys-

---

<sup>4</sup> Bei Rocha *et al.* [125] sind dies beispielsweise die Auslenkung und die Geschwindigkeit des beweglichen Mikrobauteils.

tems skizzieren. Die Phasenporträts sind zwar sehr aufschlussreich, gleichzeitig jedoch sehr aufwendig zu berechnen. Des Weiteren variieren die Phasenporträts entscheidend mit den Anfangsbedingungen des Systems und der verwendeten Anregung. Aus diesem Grund erscheint diese Art der Darstellung nur bewerkstelligbar, falls das elektromechanische System vollständig mittels analytischer Kompaktmodelle beschrieben werden kann. Infolgedessen ist im Allgemeinen nur die Berechnung einzelner Trajektorien, d.h. zeitlicher Verläufe, praktikabel.

Wenngleich auch im dynamischen Fall keine umfassenden Darstellungsmöglichkeit vergleichbar mit denen des quasi-stationären Falles existiert, sind wichtige qualitative Aussagen bezüglich des dynamischen Verhaltens elektromechanischer Systeme möglich. Eine Grundaussage von Nielson *et al.* [97] und Rocha *et al.* [125] ist, dass durch gezielte Einspeicherung von kinetischer Energie in der Massenträgheit der beweglichen Mikrostruktur das dynamische Verhalten des elektromechanischen Systems beeinflusst werden kann. Rocha *et al.* [125] formulieren dies mathematisch folgendermaßen: *Durch extern gesteuerte Variation der kinetischen Energie kann eine, im Sinne der quasi-stationären Betrachtung, instabile Trajektorie eines elektromechanischen Systems in eine stabile geändert werden und vice versa*<sup>5</sup>. Konkret bedeutet dies, dass ein elektromechanisch gekoppeltes System durch geeignete transiente elektrische Anregung auch bei Spannungen, die niedriger sind, als die quasi-stationäre Schnapp-Spannung, zum Schnappen auf die Kontakte, engl. *pull-in*, gebracht werden kann. Im Umkehrschluss ist es ebenfalls möglich, ein System, welches in naher Zukunft schnappen würde, durch eine Änderung der elektrischen Anregung wieder zu stabilisieren.

Diesbezüglich zeigen Nielson *et al.* [97] und Leus *et al.* [81], dass mittels eines Spannungssprunges (z.B. Rechteckspannung) oder über eine periodische elektrostatische Anregung tatsächlich die zum Schnappen der Mikrostruktur notwendige Spannung, gegenüber der quasi-stationären Schnapp-Spannung, teilweise erheblich<sup>6</sup>, reduziert werden kann. Rocha *et al.* [125] verifizieren des Weiteren, dass mittels einer dynamischen Regelung die bewegliche Membran einer Anordnung analog Abbildung 4.4 bei einer Auslenkung  $z > h_{fm,0}/3$  stabilisiert werden kann, obwohl die Membran quasi-stationären Überlegungen gemäß schnappen müsste.

Weiteren, entscheidenden Einfluss auf den transienten Verlauf hat die fluidische Dämpfung [12, 52, 81, 97, 124, 125]. Daher ist eine akkurate Modellierung der fluidischen Dämpfung für die Simulation des dynamischen Schließ- und Öffnungsverhaltens des in Teilkapitel 1.5 vorgestellten Mikroschalters essentiell.

---

<sup>5</sup> Übersetzt aus dem Englischen und des Weiteren kontextbezogen ergänzt. Im Original heißt der Schlüsselsatz bei Rocha *et al.* [125], Seite 74: „[...] This indicates that the structure can dynamically go from a stable trajectory to an unstable one, or vice-versa, by a timely change in the voltage applied to slow-down the movement. [...]“

<sup>6</sup> Nielson *et al.* [97] legen dar, dass bei einer Anregung mittels Spannungssprung, die zum Schnappen notwendige Spannung, je nach vorliegender Dämpfung, gegenüber der statischen Schnapp-Spannung um bis zu 8 % reduziert werden kann. Im Fall der periodischen Anregung ist die notwendige Spannung zur Herbeiführung des Schnappens indirekt proportional zur Wurzel des Gütefaktors. Für einen Gütefaktor von 1000 ist, theoretisch, bereits ca. 10 % der statischen Schnapp-Spannung ausreichend, um das Schnappen herbeizuführen.

### 4.5.2 Implementierung

Zur Koppelung der elektrostatischen und mechanischen Subsysteme innerhalb eines verallgemeinerten Kirchhoffschen Netzwerkes sind diese in Abhängigkeit der entsprechenden integralen Flussgrößen und Differenzen darzustellen (siehe Teilkapitel 2.2.2).

Zum einen sind die Plattenabstände  $h_{pk,q}$  der differentiellen Plattenkondensatornäherung (vgl. Teilkapitel 4.2) analog zu den Ausdrücken 3.29 und 3.30 in Abhängigkeit der modalen Amplituden darzustellen. Elektrische Kapazitäten werden auf diese Weise eine Funktion der Zustandsgrößen des modalen Modells:

$$C_e = C_e(\underline{q}_{m,red}) \quad (4.22)$$

Da transiente Vorgänge betrachtet werden, ist des Weiteren die Ladung der Kondensatoranordnung zu bilanzieren. Werden resistive Verluste vernachlässigt, ergibt sich die integrale Ladungsbilanz zu:

$$I_e = \dot{Q}_e = \frac{d}{dt} \{C_e(\underline{q}_{m,red})U_e\} = U_e \sum_i \frac{\partial C_e(\underline{q}_{m,red})}{\partial q_{m,i}} \dot{q}_{m,i} + C_e(\underline{q}_{m,red})\dot{U}_e \quad (4.23)$$

Äquivalent sind die elektrostatischen Kräfte in Abhängigkeit der modalen Koordinaten zu formulieren und mit modalen Formfaktoren zu gewichten (vgl. Ausdruck 3.17). Die modale, elektrostatische Kraft auf eine Eigenmode  $i$  stellt sich wie folgt dar:

$$\tilde{F}_{m,el,modal,i} = \Phi_{m,i,kap} \cdot F_{el,i} = \Phi_{m,i,kap} \cdot \frac{U_e^2}{2} \frac{\partial C_e(\underline{q}_{m,red})}{\partial q_{m,i}} \quad (4.24)$$

Die modalen Formfaktoren  $\Phi_{m,i,kap}$  sind hierbei analog zu Ausdruck 3.29 zu extrahieren.

Einer kapazitiven Anordnung entspricht auf diese Weise ein Kirchhoffsches Netzwerkelement, das sowohl elektrische als auch mechanische Klemmen besitzt. Im elektrischen Netzwerk verhält sich das Element wie ein variabler Kondensator. Im mechanischen Netzwerk verhält sich das Element wie eine mechanische (Kraft-)Quelle.



## 5. Modellierung fluidischer Subsysteme: Dämpfung von perforierten Mikrostrukturen

In diesem Kapitel wird dargelegt, wie für die Systemebene ein, im Sinne der Anforderungen in Teilkapitel 2.3.1, maßgeschneidertes Modell für die viskose, fluidische Dämpfung von perforierten Mikrostrukturen konstruiert werden kann. Hierzu wird zuerst in verknappter Form auf die allgemeinen fluidmechanischen Grundlagen eingegangen. Aufgrund der Eigenschaften der vorliegenden Klasse von mikromechanischen Strukturen werden die Freiheitsgrade der allgemeingültigen Gleichungen in einem zweiten Schritt problemangepasst reduziert. Daraufhin werden die konkrete Implementierung der vereinfachten Gleichungen in Form eines Mixed-Level-Modells, inklusive der notwendigen Korrekturterme, erläutert, sowie das Systemmodell, durch Vergleich mit FEM-Simulationen, bewertet. Dem schließt sich die Darlegung eines physikalisch begründeten Verfahrens an, welches die Freiheitsgrade von rechenintensiven fluidischen Mixed-Level-Modellen der beschriebenen Art wesentlich reduziert. Abschließend werden alternative Modellierungsansätze aus der Literatur beschrieben.

### 5.1 Fluidmechanische Grundlagen

Die Darlegung der fluidmechanischen Grundlagen erfolgt in der Eulerschen Beschreibung, d.h. es wird von einem ortsfesten Beobachter ausgegangen, der zu unterschiedlichen Zeitpunkten das Fluid betrachtet. Folglich sind die Feldgrößen  $\Phi_f$  in der Eulerschen Beschreibung Funktionen des Ortes  $\vec{r}$  und der Zeit:

$$\Phi_f = \Phi_f(\vec{r}, t) \quad (5.1)$$

Diesem Aspekt wird bei der Differentiation der Feldgrößen nach der Zeit mittels der sog. *materiellen Ableitung*  $\frac{D}{Dt}$  Rechnung getragen:

$$\frac{D\Phi_f}{Dt} = \frac{\partial\Phi_f}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_f}{\partial\vec{r}} \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial\Phi_f}{\partial t} + (\vec{v}_f \nabla) \Phi_f \quad (5.2)$$

Hier bezeichnet  $\vec{v}_f$  das Geschwindigkeitsfeld des zu modellierenden Fluids.

Analog zu den allgemeinen Ausführungen in Teilkapitel 2.2.2 und den strukturmechanischen Grundlagen in Teilkapitel 3.1, werden die fluidmechanischen Grundlagen ebenfalls

mittels Bilanz- und Materialgleichungen konstruiert. Gemäß Tabelle 2.5 ist die intensive Größe in der Fluidik der Druck  $p_f$  und die extensive Größe das Volumen  $V_f$ . Diese Größen gilt es, in einen Zusammenhang zu stellen. Dieses Ziel verfolgend, wird zuerst die Impulsbilanz des zu beschreibenden Fluids betrachtet [79, 164]:

$$\rho_f \frac{D\vec{v}_f}{Dt} = \rho_f \vec{g}_f + \nabla \vec{\tau}_f \quad (5.3)$$

Hier bezeichnen  $\rho_f$  die Dichte des Fluids,  $\vec{g}_f$  die auf das Volumen einwirkenden Beschleunigungen und  $\vec{\tau}_f$  die angreifenden Oberflächenspannungen. Ausdruck 5.3 ist derart zu interpretieren, dass der Impuls entweder durch einwirkende Beschleunigungen oder Oberflächenspannungen verändert werden kann.

Die Oberflächenkräfte  $\vec{\tau}_f$  setzen sich hierbei aus zwei Anteilen zusammen. Befindet sich ein Fluid in Ruhe, so müssen sich die am Fluidelement angreifenden Kräfte im Gleichgewicht befinden. Im statischen Fall existieren nur normale Oberflächenkräfte [79], sodass ein isotroper Spannungstensor auf das Fluid wirkt, dessen Einträge auf der Hauptdiagonalen identischen sind. Mit der Einheitsmatrix  $\vec{E}$  und dem Druck  $p_f$  lässt sich der statische Anteil formulieren, wie folgt:

$$\vec{\tau}_{f,static} = -p_f \cdot \vec{E} \quad (5.4)$$

Sich bewegende Fluide entwickeln aufgrund ihrer Viskosität zusätzliche Spannungskomponenten, die in dem Tensor  $\vec{\sigma}_f$  subsumiert werden:

$$\vec{\tau}_{f,dynamisch} = \vec{\sigma}_f \quad (5.5)$$

Für den Tensor der Oberflächenspannungen  $\vec{\tau}_f$  gilt auf diese Weise:

$$\vec{\tau}_f = \vec{\tau}_{f,static} + \vec{\tau}_{f,dynamisch} = -p_f \cdot \vec{E} + \vec{\sigma}_f \quad (5.6)$$

Um den Tensor  $\vec{\sigma}_f$  beschreiben zu können, ist eine Materialgleichung abzuleiten, die einen Zusammenhang zwischen den Oberflächenspannungen und dem Geschwindigkeitsfeld des Fluids  $\vec{v}_f$  herstellt. Für die Ableitung des Zusammenhangs sind nur die Komponenten von  $\vec{v}_f$  von Interesse, die auch tatsächlich formverändernde Spannungen hervorrufen. Demnach kann der Gleichanteil des Geschwindigkeitsfeldes vernachlässigt werden, da dieser keine Formveränderung bewirkt. Aus diesem Grund wird nicht direkt das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}_f$ , sondern die Änderung des Feldes  $\nabla \vec{v}_f$  betrachtet. Bezüglich  $\nabla \vec{v}_f$  sind wiederum nur die Anteile von Interesse, die eine Formänderung auslösen. Diese können gezielt aus dem symmetrischen Anteil von  $\nabla \vec{v}_f$  extrahiert werden:

$$\vec{w}_f = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v}_f + (\nabla \vec{v}_f)^T) \quad (5.7)$$

Im Folgenden gilt es, zwischen den Tensoren  $\vec{\sigma}_f$  und  $\vec{w}_f$  einen Zusammenhang zu finden. Wird ein linearer Zusammenhang angenommen, man spricht auch von einem Newtonschen Fluid, sind im allgemeinsten Fall die beiden Tensoren 2. Stufe über einen Tensor der 4. Stufe miteinander verknüpft:

$$\vec{\sigma}_f = \vec{\vec{c}}_f \cdot \vec{w}_f \quad (5.8)$$

Der Viskositätstensor  $\vec{\vec{c}}_f$  besitzt maximal 81 unabhängige Komponenten. In dieser Arbeit wird jedoch ein Gas, d.h. konkret Luft, modelliert, dessen Materialeigenschaften bezüglich Gleichung 5.8 als isotropisch und symmetrisch angenommen werden können. Kundu [79] zeigt mathematisch, dass sich unter diesen Annahmen die Anzahl der unabhängigen Komponenten auf lediglich zwei reduzieren lässt. Dieses Vorgehen ist in Analogie zur Behandlung des Elastizitätstensors in der Mechanik zu sehen (vgl. Teilkapitel 3.1). Die beiden verbleibenden unabhängigen Parameter sind die Scherviskosität  $\eta$  und die Volumenviskosität  $\iota_f$ . Mit der Hypothese von Stokes kann weiterhin die Volumenviskosität eliminiert werden:

$$\iota_f = -\frac{2}{3}\eta \quad (5.9)$$

Werden die Isotropie und Symmetrie von  $\vec{\vec{c}}_f$ , die Hypothese von Stokes, sowie der Nabla-Operator für den Tensor der Oberflächenspannungen  $\vec{\tau}_f$  ausgewertet und wird darüber hinaus angenommen, dass die Scherviskosität  $\eta$  konstant ist, folgt [79]:

$$\nabla \vec{\tau}_f = \nabla \left( -p_f \cdot \vec{E} + \vec{\vec{c}}_f \cdot \vec{w}_f \right) = -\nabla p_f + \eta \left( \nabla^2 \vec{v}_f - \frac{1}{3} \nabla (\nabla \vec{v}_f)^T \right) \quad (5.10)$$

Wird Ausdruck 5.10 in die Impulsbilanz 5.3 eingesetzt, resultiert der als *Navier-Stokes-Gleichung* bekannte Ausdruck:

$$\underbrace{\rho_f \frac{D\vec{v}_f}{Dt}}_{\text{Massen-trägheit}} = \underbrace{\rho_f \vec{g}_f}_{\text{Volumen-kräfte}} - \underbrace{\nabla p_f}_{\text{Druck-ein-wirkung}} + \underbrace{\eta \left( \nabla^2 \vec{v}_f - \frac{1}{3} \nabla (\nabla \vec{v}_f)^T \right)}_{\substack{\text{Spannungen aufgrund der} \\ \text{Bewegung des Fluids} \\ \text{ („Reibungsterm“)}}} \quad (5.11)$$

Die physikalischen Interpretationen der einzelnen Terme sind bereits in der Darstellung der Navier-Stokes-Gleichung 5.11 eingearbeitet. Die Navier-Stokes-Gleichung, liefert jedoch nur 3 Gleichungen für vier unbekannte Größen, die sich aus den drei Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{v}_f$  und dem Druck  $p_f$  zusammensetzen. Aus diesem Grund ist die Navier-Stokes-Gleichung stets mit der Bilanzgleichung für die Masse zu ergänzen.

Das vollständige Gleichungssystem lautet demnach:

$$\begin{aligned} \rho_f \frac{D\vec{v}_f}{Dt} &= \rho_f \vec{g}_f - \nabla p_f + \eta \left( \nabla^2 \vec{v}_f - \frac{1}{3} \nabla (\nabla \vec{v}_f)^T \right) \\ \frac{D\rho_f}{Dt} + \rho_f \nabla \vec{v}_f &= 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Der Gleichungssatz 5.12 ist in dieser Arbeit der allgemeinste Ausdruck zur Modellierung von Fluiden, die folgenden Annahmen genügen:

- Das Fluid verhält sich isotrop.
- Der Tensor der Oberflächenspannungen  $\vec{\tau}_f$  ist direkt und linear proportional zu den Geschwindigkeitsänderungen  $\nabla \vec{v}_f$ . Ein Fluid das diese Eigenschaft besitzt wird auch als Newtonsches Fluid bezeichnet.
- Die Hypothese von Stokes ist zu allen Zeitpunkten gültig.

Die Gleichungen in 5.12 können unter bestimmten Bedingungen vereinfacht werden. Um zu prüfen, ob eine entsprechende Bedingung vorliegt, werden in der Fluidmechanik dimensionslose Kennzahlen eingesetzt. Drei dieser Kennzahlen, namentlich die Reynolds-Zahl  $Re$ , die Stokes-Zahl  $St$  und die Mach-Zahl  $Ma$ , werden im Folgenden genauer betrachtet.

Die Reynolds-Zahl gibt das Verhältnis zwischen den Trägheitskräften  $F_{f,t}$  und den viskosen Reibungskräften  $F_{f,r}$  eines Fluids an:

$$Re = \frac{F_{f,t}}{F_{f,r}} \quad (5.13)$$

Ist die Reynolds-Zahl groß, dominiert die Massenträgheit (linke Seite von 5.11<sup>1</sup>) die Navier-Stokes-Gleichung und damit die Trägheitskräfte das Strömungsverhalten des Fluids. Werden die Trägheitskräfte entsprechend groß, so kann eine Strömung turbulent werden. Ist die Reynolds-Zahl hingegen klein, so dominiert die viskose Reibung (3. Term der rechten Seite von 5.11) das Strömungsverhalten des Fluids. In diesem Fall spricht man von einer laminaren Strömung.

Zur Veranschaulichung der Reynolds-Zahl wird ein Fluidelement mit der charakteristischen Länge  $L_c$ , der Dichte  $\rho_f$ , der charakteristischen Geschwindigkeit  $v_c$  und der Scherviskosität  $\eta$  betrachtet. Die Trägheitskraft  $F_{f,t}$  des Fluidelements und die Reibungskraft  $F_{f,r}$  auf das Fluidelement errechnen sich auf diese Weise zu:

$$F_{f,t} = \underbrace{\rho_f L_c^3}_{\text{Masse}} \cdot \underbrace{v_c \cdot t_c^{-1}}_{\text{Beschleunigung}} = \rho_f L_c^2 \cdot v_c^2 \quad (5.14)$$

---

<sup>1</sup> Konkret dominiert hier der nichtlineare konvektive Anteil  $(\vec{v}_f \nabla) \vec{v}_f$  von  $\frac{D\vec{v}_f}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + (\vec{v}_f \nabla) \vec{v}_f$ .

$$F_{f,r} = \underbrace{\eta \cdot v_c \cdot L_c^{-1}}_{\text{Scherkraft}} \cdot \underbrace{L_c^2}_{\text{Fläche}} = \eta v_c \cdot L_c \quad (5.15)$$

Nach Einsetzen von 5.14 und 5.15 in 5.13 folgt für die Reynolds-Zahl konkret:

$$Re = \frac{\rho_f L_c v_c}{\eta} \quad (5.16)$$

Die Stokes-Zahl ist eine weitere dimensionslose Kennzahl, welche v.a. bei Resonatoren betrachtet wird. Sie beschreibt nach Wyrwa [171] das Verhältnis zwischen der Relaxationszeit eines Fluides zu einem die Strömung charakterisierenden Zeitmaß. Ist die Stokes-Zahl groß, so ändert sich eine, durch die oszillierende Bewegung eines Resonators verursachte Strömung derart schnell, dass ihr das Fluid nicht mehr folgen kann, d.h. dieses ist zu träge<sup>2</sup>. Ist die Stokes-Zahl hingegen klein, so kann das Fluid der Bewegung des Resonators folgen. Nach Frangi [39] berechnet sich die Stokes-Zahl für einen Resonator mit der Frequenz  $f_{res}$  zu:

$$St = \frac{f_{res} L_c^2}{\eta} \quad (5.17)$$

Die Mach-Zahl  $Ma$  gibt wiederum das Verhältnis zwischen den Trägheitskräften  $F_{f,t}$  und den Kompressionskräften  $F_{f,k}$  eines Fluids an. Unter Kompressionskraft wird hier die Widerstandskraft eines Fluids gegenüber einer Kompression, d.h. einer Volumenverringerng durch Massenverdichtung, verstanden. Die Mach-Zahl reduziert sich nach Berechnung zum Verhältnis der charakteristischen Geschwindigkeit  $v_c$  und der lokalen Schallgeschwindigkeit  $v_s$ :

$$Ma = \frac{v_c}{v_s} \quad (5.18)$$

Ist die Mach-Zahl groß, so können die Trägheitskräfte eine Kompression des Fluids bewirken<sup>3</sup>. Ist die Mach-Zahl hingegen klein, so sind die Trägheitskräfte nicht in der Lage eine entscheidende Kompression des Fluids zu bewirken.

Tabelle 5.1 zeigt die konkreten Vereinfachungen auf, die bei der entsprechenden Größenordnung der Reynolds-Zahl, Stokes-Zahl und Mach-Zahl möglich sind. Sind die Reynolds- und Stokes-Zahl sehr klein ( $Re \ll 1$  und  $St \ll 1$ ), so kann der Trägheitsterm (linke Seite der Navier-Stokes-Gleichung) vernachlässigt werden. Das resultierende Gleichungssystem wird in der Fluidmechanik als *Stokes-Gleichung* bezeichnet. Ist die Mach-Zahl sehr klein ( $Ma \ll 1$ ), so können Kompressionseffekte, d.h. die Änderung der Dichte, vernachlässigt werden. Man spricht in diesem Fall von einem inkompressiblen Fluid. Bezüglich der Gleichungssysteme vereinfacht sich die Bilanzgleichung für die

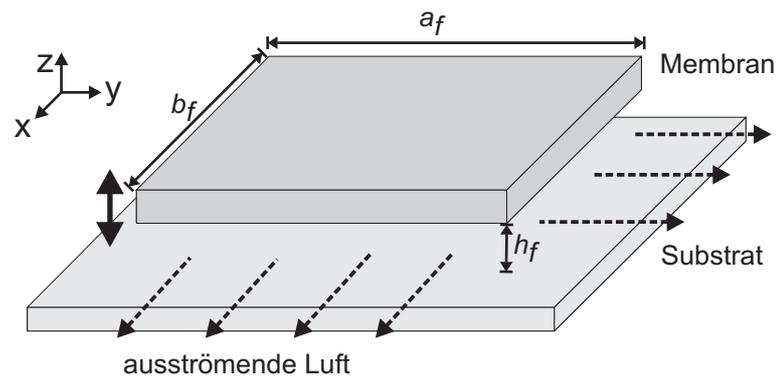
<sup>2</sup> Konkret dominiert hier die partielle Ableitung nach der Zeit  $\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t}$  von  $\frac{D\vec{v}_f}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + (\vec{v}_f \nabla) \vec{v}_f$ .

<sup>3</sup> Bei großen Mach-Zahlen konkret auch Stoßwellen.

Masse zu  $\nabla \vec{v}_f = 0$ , was ebenfalls zu einer Vereinfachung der Reibungsterme führt. Die entsprechenden Gleichungen werden als inkompressible Navier-Stokes-Gleichung bzw. inkompressible Stokes-Gleichung bezeichnet.

Bezeichnung und Gleichungssystem	Bedingungen
Navier-Stokes-Gleichung $\rho_f \frac{D\vec{v}_f}{Dt} = \rho_f \vec{g}_f - \nabla p_f + \eta \left( \nabla^2 \vec{v}_f - \frac{1}{3} \nabla (\nabla \vec{v}_f)^T \right)$ $\frac{D\rho_f}{Dt} + \rho_f \nabla \vec{v}_f = 0$	
Stokes-Gleichung $\rho_f \vec{g}_f - \nabla p_f + \eta \left( \nabla^2 \vec{v}_f - \frac{1}{3} \nabla (\nabla \vec{v}_f)^T \right) = 0$ $\frac{D\rho_f}{Dt} + \rho_f \nabla \vec{v}_f = 0$	$Re, St \ll 1$
Inkompressible Navier-Stokes-Gleichung $\rho_f \frac{D\vec{v}_f}{Dt} = \rho_f \vec{g}_f - \nabla p_f + \eta \nabla^2 \vec{v}_f$ $\nabla \vec{v}_f = 0$	$Ma \ll 1$
Inkompressible Stokes-Gleichung $\rho_f \vec{g}_f - \nabla p_f + \eta \nabla^2 \vec{v}_f = 0$ $\nabla \vec{v}_f = 0$	$Re, St, Ma \ll 1$

**Tab. 5.1:** Aufstellung der Gleichungssysteme für die Modellierung von Fluiden auf der Ebene kontinuierlicher Felder für entsprechende Größenordnungen der Reynolds-, Stokes- und der Mach-Zahl. Für alle Gleichungssysteme gelten des Weiteren die Annahmen, dass ein isotropes, Newtonsches Fluid mit konstanter Scherviskosität vorliegt.



**Abb. 5.1:** Schematische Darstellung einer Situation, wie sie in vielen Mikrosystemen anzutreffen ist: eine freitragende Membran (Aufhängungen sind nicht dargestellt) bewegt sich oberhalb eines fixierten Substrates.

## 5.2 Schmierfilmdämpfung

In vielen Mikrosystemen liegt die Situation vor, dass sich eine freitragende Membran oberhalb eines festen Substrates bewegt. Dies ist insbesondere der Fall für Mikrostrukturen, die in Oberflächenmikromechanik gefertigt wurden, wie z.B. der Mikroschalter aus Teilkapitel 1.5. Der vertikale Abstand zwischen der Membran und dem Substrat ist hierbei wesentlich geringer, als die lateralen Abmessungen der Membran (siehe Abbildung 5.1).

Diese geometrische Situation ist seit Jahrzehnten Untersuchungsgegenstand der Tribologie [54]. Die sich zwischen den plattenähnlichen Körpern befindliche, dünne, filmartige Fluidschicht wird in der Tribologie als Schmierfilm bezeichnet. Entsprechend wird die auf die bewegliche Membran wirkende Dämpfung als Schmierfilmdämpfung, engl. *squeeze-film damping*, tituliert. Die Schmierfilmdämpfung kann hierbei mittels einer weitgehend vereinfachten Navier-Stokes-Gleichung, konkret der sog. *Reynoldsgleichung*, beschrieben werden. Die Annahmen, die zur Reynoldsgleichung führen, werden im Folgenden erläutert:

- *Annahme 1:* Bei Geometrien wie in Abbildung 5.1 kann angenommen werden, dass die Strömung im Spalt von Reibungskräften dominiert, somit laminar und die Reynolds-Zahl folglich sehr klein ist:

$$Re \ll 1 \quad (5.19)$$

Ist weiterhin die Geschwindigkeit der sich bewegenden Membran derart, dass die Stokes-Zahl sehr klein ist, d.h.  $St \ll 1$ , kann nach Tabelle 5.1 die Stokes-Gleichung statt der Navier-Stokes-Gleichung für die Beschreibung der Strömung zwischen den beiden plattenähnlichen Körpern eingesetzt werden.

- *Annahme 2:* Beschleunigungskräfte können vernachlässigt werden:

$$\vec{g}_f = 0 \quad (5.20)$$

Entsprechend kann der Term  $\rho_f \vec{g}_f$  in der Stokes-Gleichung vernachlässigt werden.

- *Annahme 3:* Die lateralen Abmessungen  $a_f$  und  $b_f$  der plattenähnlichen Körper sind um ein Vielfaches größer als deren vertikaler Abstand  $h_f$  (vgl. Abbildung 5.1):

$$a_f, b_f \gg h_f \quad (5.21)$$

- *Annahme 4:* Die lateralen Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{v}_f = (v_{f,x}, v_{f,y}, v_{f,z})^T$  sind um ein Vielfaches größer, als die vertikale Komponente:

$$v_{f,x}, v_{f,y} \gg v_{f,z} \quad (5.22)$$

Dies erlaubt  $v_{f,z}$  bei der weiteren Analyse zu vernachlässigen:  $v_{f,z} \approx 0$ .

- *Annahme 5:* Mit den Annahmen 3 und 4 folgt, dass die Änderungen des Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{v}_f$  in vertikaler Richtung aufgrund der geringen Spalthöhe wesentlich größer sind, als die lateralen Geschwindigkeitsänderungen:

$$\frac{\partial v_{f,i}}{\partial z} \gg \frac{\partial v_{f,i}}{\partial y}, \frac{\partial v_{f,i}}{\partial x} \quad \forall i \in \{x, y\} \quad (5.23)$$

Dies gilt ebenfalls bezüglich der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 v_{f,i}}{\partial z^2} \gg \frac{\partial^2 v_{f,i}}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 v_{f,i}}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 v_{f,i}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v_{f,i}}{\partial y^2} \quad \forall i \in \{x, y\} \quad (5.24)$$

Dies erlaubt folgende Vereinfachung bei der Beschreibung der Reibungskräfte:

$$\eta \left( \nabla^2 \vec{v}_f - \frac{1}{3} \nabla (\nabla \vec{v}_f)^T \right) \approx \eta \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_{f,x}}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_{f,y}}{\partial z^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

- *Annahme 6:* Für diese Arbeit wird weiterhin angenommen, dass sich die plattenähnlichen Körper lediglich vertikal gegeneinander bewegen. Aus diesem Grund ergeben sich für die lateralen Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes folgende Randbedingungen:

$$v_{f,i}(0) \equiv 0 \quad \forall i \in \{x, y\} \quad (5.26)$$

$$v_{f,i}(h) \equiv 0 \quad \forall i \in \{x, y\} \quad (5.27)$$

Mit diesen Annahmen kann die Stokes-Gleichung für die vorliegende Situation wesentlich vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_f}{\partial x} &= \eta \frac{\partial^2 v_{f,x}}{\partial z^2} \\ \frac{\partial p_f}{\partial y} &= \eta \frac{\partial^2 v_{f,y}}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial z} = 0$$

Dieser Satz an Gleichungen ermöglicht durch zweifache Integration in  $z$ -Richtung eine analytische Lösung für das Geschwindigkeitsfeld im Spalt zu berechnen. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen aus Annahme 6 stellt sich die Lösung wie folgt dar:

$$\vec{v}_{f,2D} = \begin{pmatrix} v_{f,x} \\ v_{f,y} \end{pmatrix} = \frac{z^2 - h_f z}{2\eta} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{z^2 - h_f z}{2\eta} \nabla p_f \quad (5.29)$$

Die lateralen Geschwindigkeitskomponenten haben entsprechend dieser Lösung parabolische Geschwindigkeitsprofile, welche in  $z$ -Richtung variieren und bei  $z = h_f/2$  ihr jeweiliges Maximum besitzen. Dieser analytische Zusammenhang wird nun in die Bilanzgleichung für die Masse eingesetzt, die in Hinblick auf die spätere Interpretation zuerst umgeformt wird:

$$\frac{D\rho_f}{Dt} + \rho_f \nabla \vec{v}_f = \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \vec{v}_f \nabla \rho_f + \rho_f \nabla \vec{v}_f = \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla (\rho_f \vec{v}_f) = 0 \quad (5.30)$$

Durch Einsetzen des Geschwindigkeitsfeldes 5.29 und Integration über den Spaltabstand  $h_f$  resultiert<sup>4</sup>:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho_f}{\partial t} h_f}_{\substack{\text{Kompression} \\ \text{(Akkumulation)}}} = \underbrace{\nabla \left( \frac{\rho_f h_f^3}{12\eta} \nabla p_f \right)}_{\text{Zu- bzw. Abfluss}} - \underbrace{\rho_f \frac{\partial h_f}{\partial t}}_{\text{Generation}} \quad (5.31)$$

Ausdruck 5.31 wird in dieser Arbeit als *Reynoldsgleichung* bezeichnet. Tatsächlich handelt es sich jedoch um eine vereinfachte Version der allgemeinen Reynoldsgleichung, die i.a. auch Terme enthält, welche die laterale Bewegungen der plattenähnlichen Körper beschreiben [54].

Im Sinne einer Bilanzgleichung stellt der Term auf der linken Seite von Ausdruck 5.31 eine Akkumulationsrate dar. Akkumuliert wird, als extensive Größe der Fluidmechanik, das Volumen. Die Speicherung von Volumen wird dabei durch Verdichtung bewerkstelligt.

Der erste Term auf der rechten Seite modelliert den Zu- bzw. Abfluss an Fluid. Strukturell setzt sich der fluidische Fluss, entsprechend den allgemeinen Ausführungen in Teilkapitel 2.2.2, aus einem linearen Transportkoeffizienten und dem Gradienten der intensiven Variable, konkret des Druckes, zusammen.

Der zweite Term auf der rechten Seite stellt eine Generationsrate dar: Bewegt sich die Membran in Richtung Substrat, d.h.  $\partial h_f / \partial t < 0$ , so generiert der Term einen positiven Volumenfluss, welcher dem durch die Membran verdrängten Volumen entspricht. Dieses

---

<sup>4</sup> Die Integration über  $h_f$  ist möglich da  $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$  gilt. Zur Erläuterung wurde gleichzeitig aufgespalten:  $\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f h_f) = \frac{\partial \rho_f}{\partial t} h_f + \rho_f \frac{\partial h_f}{\partial t}$ . Des Weiteren wurde der Term  $\rho_f \frac{\partial h_f}{\partial t}$  auf die andere Seite gebracht.

Volumen kann entweder über den Flussterm abtransportiert oder über den Akkumulati-  
onsterm, d.h. durch lokale Kompression des Fluids, gespeichert werden.

Bei den in dieser Arbeit untersuchten Mikrostrukturen befindet sich im Spalt zwischen  
den plattenähnlichen Körpern ein Gas, konkret Luft. Wird diese Luftschicht als ideales  
Gas modelliert und die Temperatur  $T_f$  innerhalb der Schicht als konstant angenommen,  
so lässt sich eine direkte Proportionalität zwischen der Dichte und dem Druck herstellen:

$$\frac{p_f}{\rho_f} = R_{s,f} \cdot T_f = const = \frac{p_{f,0}}{\rho_{f,0}} \quad \Rightarrow \quad \rho_f = \rho_{f,0} \frac{p_f}{p_{f,0}} \quad (5.32)$$

Hier bezeichnen  $R_{s,f}$  die Gaskonstante und  $p_{f,0}$  bzw.  $\rho_{f,0}$  den Druck und die Dichte an  
einem bestimmten Referenzpunkt, z.B. unter Normalbedingungen. Wird die Proportiona-  
lität 5.32 in die Reynoldsgleichung eingesetzt, so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p_f}{p_{f,0}} \right) h_f = \nabla \left( \frac{h_f^3}{12\eta} \frac{p_f}{p_{f,0}} \nabla p_f \right) - \frac{p_f}{p_{f,0}} \frac{\partial h_f}{\partial t} \quad (5.33)$$

Im Folgenden wird die durch den Schmierfilm auf die Membran ausgeübte Kraft charak-  
terisiert. Hierzu wird die Reynoldsgleichung linearisiert, d.h. es wird davon ausgegangen,  
dass die Druckunterschiede innerhalb des Schmierfilms und die Auslenkung der beweg-  
lichen Membran gering sind, und darüber hinaus normiert. Weiterhin wird angenommen,  
dass die Auslenkung der Membran sinusförmig und mit der Kreisfrequenz  $\omega_{sin}$  erfolgt:

$$\begin{aligned} p_f &= p_{f,0} + P_f \\ h_f &= h_{f,0} + h_{sin} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Ebenfalls werden folgende Normierungen vorgenommen:

$$\begin{aligned} p_{f,no} &= P_f / p_{f,0} \\ h_{f,no} &= h_{sin} / h_{f,0} \\ \nabla_{no} &= L_c \nabla \\ t_{f,no} &= t \cdot \omega_{sin} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Mit diesen Linearisierungen und Normierungen stellt sich die Reynoldsgleichung dar, wie  
folgt:

$$\frac{\nabla_{no}^2 p_{f,no}}{\sigma_f} - \frac{\partial p_{f,no}}{\partial t_{f,no}} = \frac{\partial h_{f,no}}{\partial t_{f,no}} \quad (5.36)$$

Hier bezeichnet  $\sigma_f$  die Squeeze-Zahl:

$$\sigma_f = \frac{12\eta\omega_{sin}L_c^2}{h_{f,0}^2 p_{f,0}} \quad (5.37)$$

Die Squeeze-Zahl ermöglicht eine Charakterisierung der durch den Fluidfilm ausgeübten Kraft, welche sich durch die Integration der Druckunterschiede  $p_{f,no}$  berechnet:

$$F_{m,f}(t) = \int_A p_{f,no}(t) \cdot dA \quad \Rightarrow \quad F_{m,f}(t) \propto p_{f,no}(t) \quad (5.38)$$

Die zu integrierenden Druckunterschiede entstehen nach Ausdruck 5.37 aufgrund des durch die vertikale Bewegung der Membran  $\partial h_{f,no}/\partial t_{f,no}$  erzeugten Volumenflusses. Dieser Volumenfluss kann entweder, mittels des viskosen Reibungstermes  $\nabla_{no}^2 p_{f,no}/\sigma_f$  abfließen oder mittels der Akkumulationsrate  $\partial p_{f,no}/\partial t_{f,no}$  gespeichert werden.

Fließt der Fluss ab, so erzeugt er einen Druckgradienten und somit Druckunterschiede, die proportional zur Geschwindigkeit der Membran sind. Dies entspricht, aus Sicht der Mechanik, analog zur generischen Beschreibung  $F_{m,Reibung} = d_m \cdot \partial z/\partial t$ , einer dissipativen Kraft, welche die Bewegung der Membran dämpft:

$$\frac{\partial h_{f,no}}{\partial t_{f,no}} \rightarrow \frac{\nabla_{no}^2 p_{f,no}}{\sigma_f} \quad \Rightarrow \quad F_{m,f}(t) \propto p_{f,no}(t) \propto \frac{\partial h_f}{\partial t_{f,no}} \Rightarrow \text{Reibungskraft} \quad (5.39)$$

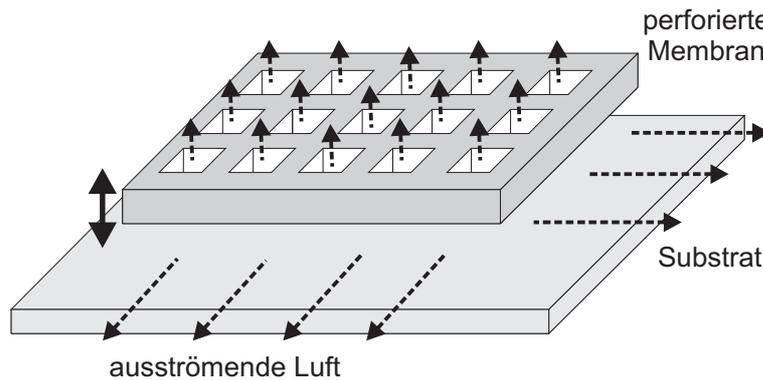
Wird der Fluss hingegen gespeichert, so verhalten sich die Druckänderungen proportional zur Auslenkung der Membran. Dies entspricht, aus Sicht der Mechanik, analog zur generischen Beschreibung  $F_{m,Feder} = k_m \cdot z$ , einer Federkraft:

$$\frac{\partial h_{f,no}}{\partial t_{f,no}} \rightarrow \frac{\partial p_{f,no}}{\partial t_{f,no}} \quad \Rightarrow \quad F_{m,f}(t) \propto p_{f,no}(t) \propto h_{f,no}(t) \Rightarrow \text{Federkraft} \quad (5.40)$$

Diesen Ausführungen folgend, entspricht die Squeeze-Zahl  $\sigma_f$  einem Maß für das Verhältnis der Dämpfungs- und Federkräfte. Ist die Squeeze-Zahl sehr groß, so dominiert in Gleichung 5.36 der Akkumulationsterm und damit die Federkraft. Dies entspricht einer Situation, in welcher sich die Membran derartig schnell bewegt, dass die Luft im Spalt weder ab- noch zufließen kann und folglich komprimiert bzw. expandiert wird. Ist die Squeeze-Zahl hingegen sehr klein, so dominiert in Gleichung 5.36 der viskose Reibungsterm und damit die Dämpfungskraft. Dies entspricht einer Situation, in welcher die Luft im Spalt über den Berandung der Membran ab- und zufließen kann und dabei an den Wänden Reibarbeit verrichtet.

### 5.3 Mixed-Level Modell

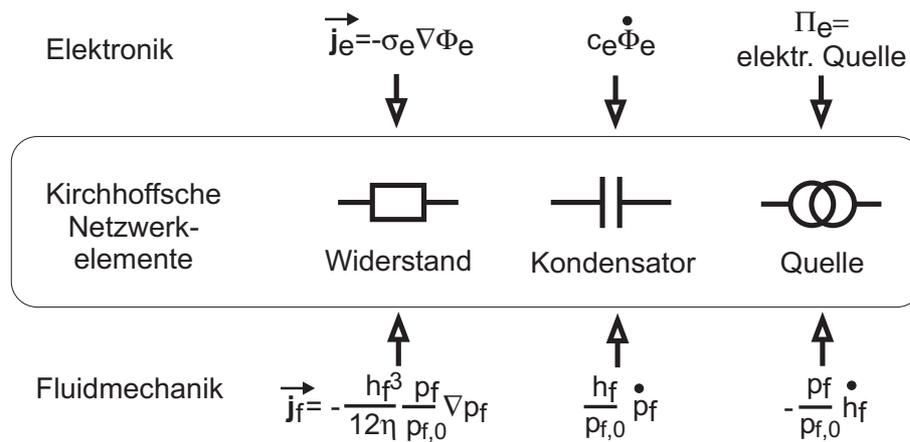
Für zwei sich entweder vertikal oder torsional gegeneinander bewegende Plattenkörper liegen für die linearisierte Reynoldsgleichung 5.36 zahlreiche analytische Lösungen vor [14, 28]. Diese sind jedoch nicht geeignet, um die tatsächliche Situation in mikromechanischen Systemen zu modellieren. Die Gründe hierfür sind folgende:



**Abb. 5.2:** Schematische Darstellung der Situation aus Abbildung 5.1 inklusive Perforationen.

- a. *Perforationen:* Die meisten mikromechanischen Membranen sind perforiert, d.h. mit Löchern versetzt (vgl. Abbildung 5.2). Dies geschieht aus zwei Gründen: zum einen erfordern die oberflächenmikromechanischen Herstellungsprozesse Perforationen, damit entsprechende Opferschichten entfernt werden können. Zum anderen wird über die Perforationen auch gezielt das Dämpfungsverhalten eingestellt.
- b. *Randeffekte:* Bei den analytischen Lösungen von Blech [14] und Darling *et al.* [28] wird entlang der Ränder der untersuchten Geometrien entweder die Dirichlet-Randbedingung  $p_f = p_{f,0}$ , d.h. der Druck entspricht konstant dem Umgebungsdruck, oder die Neumann-Randbedingung  $\partial p_f / \partial \vec{n} = \vec{0}$ , d.h. ein Druckgradient, angenommen. Schrag [129] zeigt jedoch, dass die tatsächliche Situation wesentlich komplexer ist und der Druck entlang des Randes eine Funktion des ein- bzw. abfließenden Volumenflusses ist (siehe Teilkapitel 5.3.2). Weiterhin ist der Einfluss dieser Randeffekte umso stärker, je kleiner das Verhältnis der lateralen Abmessungen der Plattenkörper im Vergleich zum Spaltabstand wird.
- c. *Große Auslenkungen:* Einige freitragende mikromechanische Membranen erfahren große Auslenkungen, welche die Linearisierungsbedingungen 5.36 verletzen und zu einer nichtlinearen Dämpfungskraft führen. Als Beispiel sei hier der in Teilkapitel 1.5 vorgestellte mikromechanische Schalter genannt, dessen Membran zur Schließung des Kontaktes um die gesamte Spalthöhe von 3  $\mu\text{m}$  ausgelenkt wird.
- d. *Verdünnte Gase:* Aufgrund der kleinen Dimensionen und ggf. niedrigen Drücken in Mikrosystemen ist der Luftfilm als verdünntes Gas (siehe Teilkapitel 5.3.4) zu behandeln, was in den analytischen Lösungen nicht enthalten ist.

Aufgrund dieser Punkte ist es nicht zielführend, die Schmierfilmdämpfung in Mikrosystemen mittels der analytischen Lösungen der linearisierten Reynoldsgleichung zu modellieren. Als auf der Systemebene praktikable Lösung wird daher das von Schrag erstmals in [130] vorgestellte fluidische Mixed-Level-Modell eingesetzt.



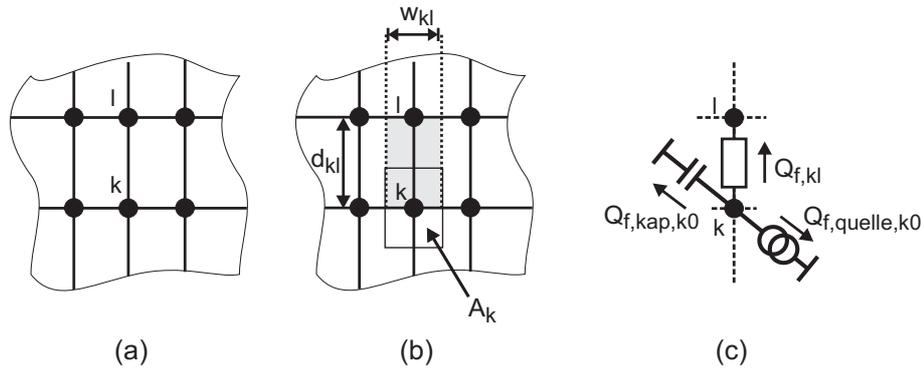
**Abb. 5.3:** Abbildung der Reynoldsgleichung 5.33 in Kirchhoffsche Netzwerkelemente. Die Abbildung zeigt ebenfalls die Analogie zur Elektronik auf.

Die Grundidee des dargelegten Modells ist, die Reynoldsgleichung in einem finiten Netzwerk flusserhaltend zu diskretisieren und dieses fluidische Kirchhoffsche Netzwerk an den Rändern und Perforationen mit entsprechenden Kompaktmodellen zu ergänzen, welche die jeweiligen Effekte konsistent abbilden. Die Konstruktion des fluidischen Mixed-Level-Modells wird in den folgenden Teilkapiteln detailliert erläutert.

### 5.3.1 Finites Netzwerk zur Diskretisierung der Reynoldsgleichung

Zur Erstellung des fluidischen finiten Netzwerkes müssen die vier auf Seite 40 gelisteten Schritte abgearbeitet werden. Der erste Punkt ist bereits vollzogen, da die Reynoldsgleichung 5.33 aus der Bilanzgleichung für die Masse des fluidischen Systems resultiert und zugleich der Flussterm das Produkt eines Transportkoeffizienten und einer treibenden Kraft ist. Die Elemente des künftigen fluidischen Kirchhoffschen Netzwerkes ergeben sich durch Anschauung der Terme in der Reynoldsgleichung 5.33 in Form von dissipativen Widerständen, fluidischen Quellen und Kapazitäten (siehe Abbildung 5.3).

Zur räumlichen Diskretisierung der Reynoldsgleichung (Schritt 2) wird in dieser Arbeit die Methode der finiten Boxen [5] eingesetzt, welche einer der Standardmethoden im Bereich der Simulation von elektronischen Halbleiterbauelementen darstellt. Die für die Diskretisierung verwendete Elementgeometrie ist hierbei zweidimensional und rechteckig. Abbildung 5.4a zeigt einen Ausschnitt des zweidimensionalen Gitters, das durch die laterale Diskretisierung des Luftspaltes entsteht.



**Abb. 5.4:** Abbildung (a) zeigt einen Ausschnitt des lateralen Gitters aus rechteckigen Elementen, welches durch die laterale Diskretisierung des Luftspaltes entsteht. Die geometrischen Größen des Gitters werden in (b) dargestellt. Bild (c) visualisiert die resultierenden Netzwerkelemente an einem Beispielknoten  $k$ .

Die Gitterpunkte der räumlichen Diskretisierung werden nun in Knoten eines fluidischen Kirchhoffschen Netzwerkes überführt, in welchem der Druck  $P_f$  und der Volumenfluss  $Q_f$  bilanziert werden (Schritt 3). Hierbei wird, zur vereinfachten Berechnung der Kraft auf die Membran, nicht der absolute Druck, sondern die Druckdifferenz relativ zum Umgebungsdruck  $p_{f,0}$  berechnet:

$$P_f = p_f - p_{f,0} \quad (5.41)$$

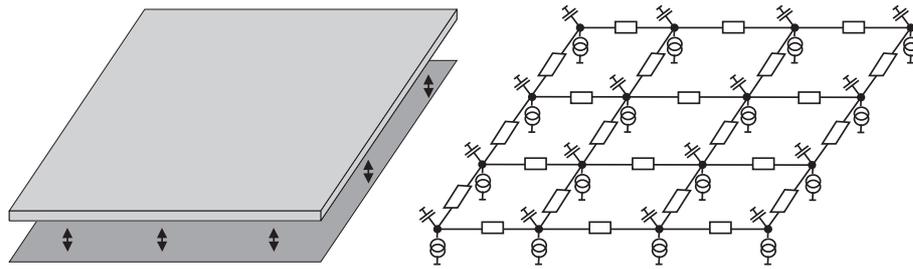
Der Druck  $P_{f,k}$  an einem beliebigen Knoten  $k$  kann hierbei als der über die Knotenfläche  $A_k$  gemittelte Druck gedeutet werden. Die Knotenfläche  $A_k$  wird hierzu mittels des zum Gitter zugehörigen Voronoi-Graphen bestimmt [5].

Die Kirchhoffschen Netzwerkelemente an den Knoten werden durch Multiplikation der Reynoldsgleichung mit den geometrischen Größen aus der Diskretisierung generiert. Zur Veranschaulichung wird hierzu exemplarisch ein Knoten  $k$  betrachtet, welcher mit einem weiteren Knoten  $l$  verbunden ist (siehe Abbildung 5.4b). Die Flüsse  $Q_{f,Quelle,k0}$  und  $Q_{f,Kap,k0}$  (vgl. Abbildung 5.4c), die in den Knoten  $k$  aufgrund der fluidischen Generations- und Akkumulationsrate einfließen, ergeben sich durch Multiplikation mit der Knotenfläche  $A_k$  zu:

$$Q_{f,Quelle,k0} = A_k \frac{p_{f,k}}{p_{f,0}} \frac{\partial h_{f,k}}{\partial t} \quad (5.42)$$

$$Q_{f,Kap,k0} = A_k \underbrace{\frac{h_{f,k}}{p_{f,0}}}_{C_{f,k}} \frac{\partial P_{f,k}}{\partial t} \quad (5.43)$$

Der in Ausdruck 5.43 unterklammerte Term kann hierbei als fluidische Kapazität  $C_{f,k}$  am Knoten  $k$  interpretiert werden. Der Poiseuille-Fluss  $Q_{f,kl}$  zum Knoten  $l$  wird als Kanal-



**Abb. 5.5:** Beispielhafte Geometrie für die Schmierfilmdämpfung (links) und das entsprechende finite Netzwerk zur Modellierung der Reynoldsgleichung (rechts).

strömung interpretiert und ergibt sich durch Multiplikation der zweidimensionalen Flussdichte mit der Kanalweite  $w_{kl}$  zu:

$$Q_{f,kl} = w_{kl} \frac{h_{f,kl}^3 \tilde{p}_{f,kl}}{12\eta p_{f,0}} \cdot \frac{\Delta P_{f,kl}}{d_{kl}} = \underbrace{\frac{w_{kl} h_{f,kl}^3 \tilde{p}_{f,kl}}{12\eta d_{kl} p_{f,0}}}_{G_{f,kl}} \cdot \Delta P_{f,kl} \quad (5.44)$$

Hier entsprechen  $\tilde{p}_{f,kl}$  dem aus  $p_{f,k}$  und  $p_{f,l}$  gemittelten absoluten Druck,  $\Delta P_{f,kl}$  der Druckdifferenz und  $d_{kl}$  dem Abstand zwischen den beiden Knoten. Der Term  $\Delta P_{f,kl}/d_{kl}$  entspricht folglich einem eindimensionalen Gradienten. Der unterklammerte Term stellt den fluidischen Leitwert  $G_{f,kl}$  von Knoten  $k$  zu Knoten  $l$  dar.

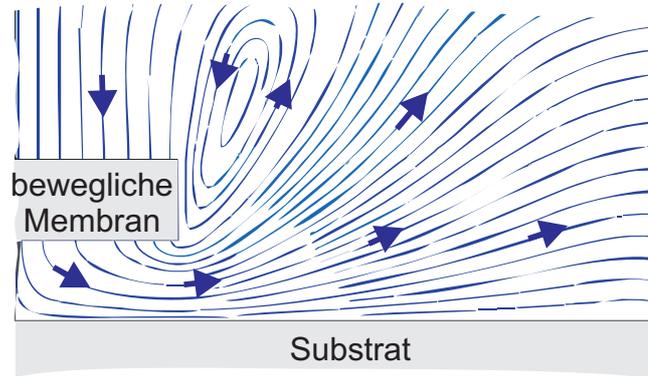
Bezüglich der Quelle, der fluidischen Kapazität  $C_{f,k}$  und des Leitwerts  $G_{f,kl}$  ist festzustellen, dass diese nicht konstant sind, sondern von der Auslenkung der Membran abhängen. Folglich handelt es sich um nichtlineare mechanisch-fluidisch gekoppelte Kirchhoffsche Netzwerkelemente, die sowohl fluidische als auch mechanische Klemmen besitzen.

Wird dieses Vorgehen für alle Diskretisierungspunkte durchgeführt, so entsteht das in Abbildung 5.5 veranschaulichte fluidische Netzwerk. Zur besseren Übersicht werden die mechanischen Klemmen der einzelnen Multipole nicht dargestellt.

### 5.3.2 Kompaktmodellierung von Rändern und Perforationen

Das im vorigen Teilkapitel erstellte finite Netzwerk berechnet bisher lediglich die Reynoldsgleichung zwischen zwei Platten und berücksichtigt weder Effekte am Rand noch an Perforationen. Die Strömung über den Rand der Membran hinaus wird von Schrag [129] als Blendenströmung modelliert, was Sattler [128] und Dotz [29] als sinnvoll erachten und übernehmen. Für eine elliptische Blende berechnet sich nach Hasimoto [56] der fluidische Widerstand einer Blende, d.h. das Verhältnis aus der Druckdifferenz und dem Volumenfluss, zu:

$$Z_{f,B} = \frac{\Delta P_f}{Q_f} = \eta \frac{3\pi}{2} \frac{s_B}{A_B^2} \quad (5.45)$$



**Abb. 5.6:** Strömungslinien am Rand einer sich nach unten bewegenden Membran. Aufgrund des Substrates kann das Fluid nur in den oberen Halbraum entweichen.

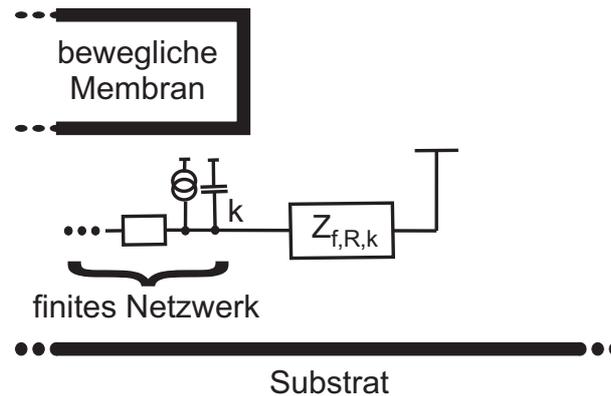
Hier bezeichnen  $s_B$  den Umfang der elliptischen Blende und  $A_B$  die Fläche der Blende. Wird bei der Berechnung des Umfangs die Spalthöhe  $h_f$  vernachlässigt, ergibt sich für den kompletten Rand entlang der Seite  $a_f$  folgender Blendenwiderstand:

$$Z_{f,R,a_f} = \tau \cdot \eta \frac{3\pi}{2} \frac{1}{h_f^2 a_f} \quad (5.46)$$

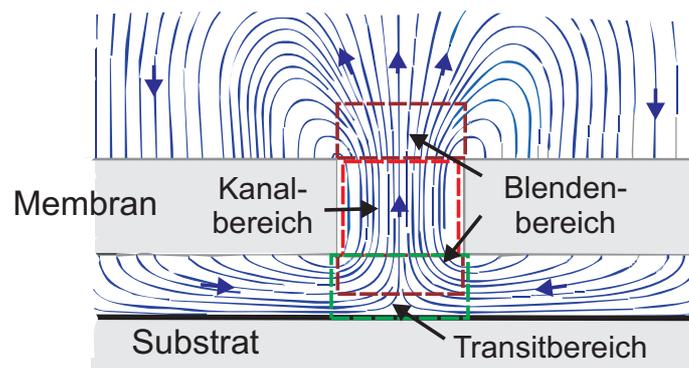
Der Nicht-Idealitätsfaktor  $\tau$  berücksichtigt hierbei, dass statt einer elliptischen, tatsächlich eine rechteckige Blende vorliegt und die Luft aus dem Spalt wegen des Substrates nur in die obere Hälfte des Halbraumes entweichen kann (siehe Abbildung 5.6). Nach Dotz [29] muss infolgedessen  $\tau > 1$  gelten, was durch Sattler [128] bestätigt wird, der mittels FEM-Simulationen  $\tau$  zu 1.68 bestimmt. Um den Widerstand aus Gleichung 5.46 in das finite Netzwerk einpflegen zu können, ist die Berandung in Teilstücke  $r_k$  zu diskretisieren, welche den am Rand lokalisierten Knoten  $k$  des Netzwerkes zuzuordnen sind. Für einen Widerstand  $Z_{f,B,k}$ , der einem Randknoten  $k$  angefügt wird (siehe Abbildung 5.7) folgt auf diese Weise:

$$Z_{f,R,k} = 1.68 \cdot \eta \frac{3\pi}{2} \frac{1}{h_{f,k}^2 r_k} \quad (5.47)$$

Zur Modellierung von Perforationen schlägt Schrag [129] vor, eine Unterteilung in drei Bereiche (siehe Abbildung 5.8) und dementsprechend eine Serienschaltung von drei fluidischen Widerständen einzusetzen (siehe Abbildung 5.9), was Sattler [128] übernimmt und darüber hinaus die Kompaktmodelle für die Widerstände verfeinert. Bei den Widerständen handelt es sich konkret um einen Transitwiderstand  $Z_{f,T,r}$ , welcher für eine Perforation  $r$  den Übergangsbereich von der Poiseuille-Strömung in den Kanal des Loches modelliert, einen Kanalwiderstand  $Z_{f,K,r}$ , welcher die Strömung innerhalb des Kanals durch die Membran beschreibt, und einem Blendenwiderstand  $Z_{f,B,r}$ , welcher die Blendenströmungen in den Ein- und Ausflussbereichen des Kanals modelliert. Sattler gibt



**Abb. 5.7:** Zur Modellierung der Blendenströmung wird zwischen den jeweiligen Knoten des finiten Netzwerkes, welche sich am Rand der Membran befinden, und dem Aussendruck  $P_f = 0$  ein fluidischer Widerstand  $Z_{f,R,k}$  eingeführt.



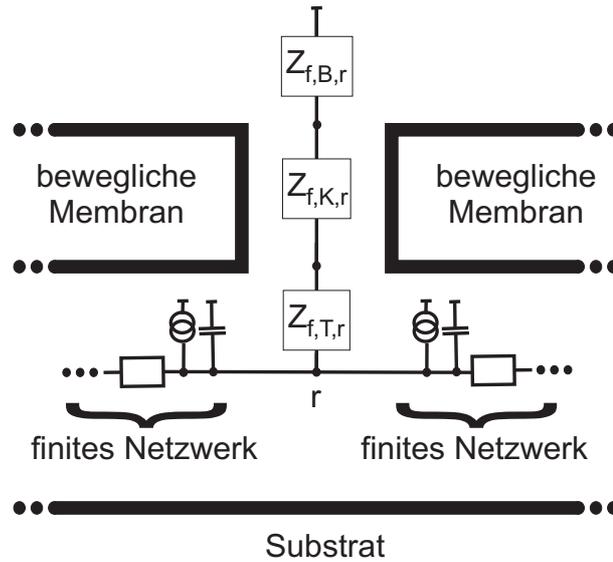
**Abb. 5.8:** Strömungslinien an einer Perforation und Unterteilung des Gebietes nahe einer Perforation in Transit-, Kanal- und Blendenbereich.

in [128] sowohl Kompaktmodelle für Perforationen mit runder als auch mit quadratischer Querschnittsfläche an. Im Rahmen dieser Arbeit werden lediglich die Modelle für Perforationen mit quadratischem Querschnitt eingesetzt, welche nach Sattler [128] lauten:

$$Z_{f,T,r} = \tau \cdot \eta \frac{3\pi}{2} \frac{1}{h_{f,r}^2 s_r} \quad (5.48)$$

$$Z_{f,K,r} = \eta \frac{12}{0.42} \frac{L_r}{a_r^4} \quad (5.49)$$

$$Z_{f,B,r} = \eta \frac{21}{a_r^3} \quad (5.50)$$



**Abb. 5.9:** Zur Modellierung von Perforationen wird zwischen den jeweiligen Knoten des finiten Netzwerkes, welche sich an den Positionen der Löcher befinden, und dem Aussendruck  $P_f = 0$  ein Serienschaltung von fluidischer Widerstand eingeführt, welche den Transitbereich, den Kanalbereich und die Blendenströmung modellieren.

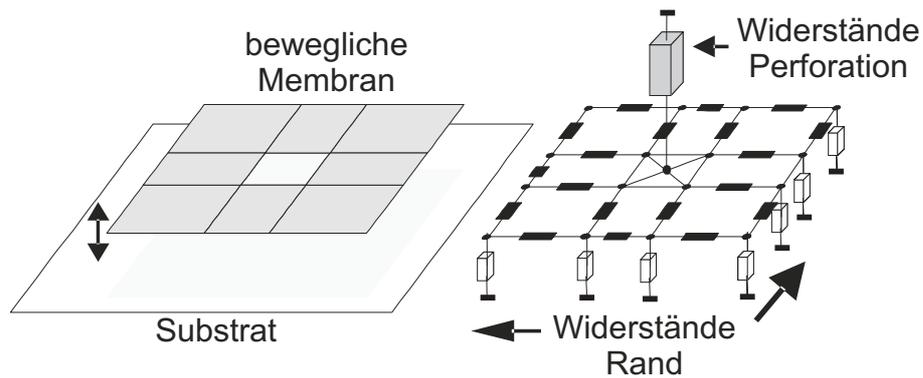
Hier bezeichnen  $h_{f,r}$  die mittlere Spalthöhe an der Perforation  $r$ ,  $s_r = 4a_r$  den Umfang der Perforation,  $a_r$  die Seitenlänge der quadratischen Perforation und  $L_r$  die Länge des Kanals, welche der Membrandicke entspricht. Des Weiteren ist bei der Modellierung der Perforationen neben dem vom finiten Netzwerk einströmenden Fluss  $Q_{f, FN}$ , auch das sich unterhalb des Loches befindliche Fluid zu berücksichtigen, welches durch die Bewegung der Membran ebenfalls verdrängt wird. Auf diese Weise berechnet sich der Druckabfall  $p_{f, Loch, r}$  an einem Loch  $r$  zu:

$$p_{f, Loch, r} = (Z_{f, T, r} + Z_{f, K, r} + Z_{f, B, r}) \cdot Q_{f, FN} + (Z_{f, K, r} + Z_{f, B, r}) \cdot a_r^2 \frac{\partial h_{f, r}}{\partial t} \quad (5.51)$$

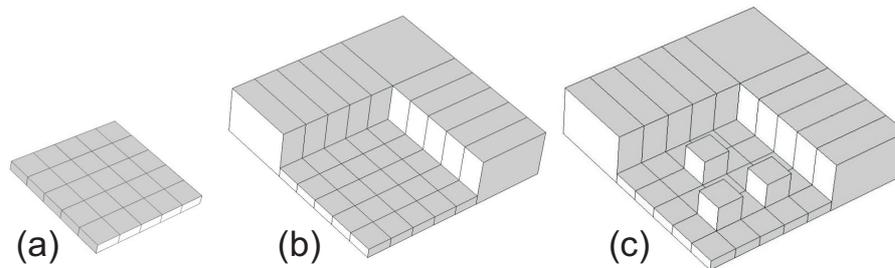
Abbildung 5.10 stellt exemplarisch für eine Membran mit einer Perforation das mit diesen Ausführungen resultierende fluidische Mixed-Level-Modell, bestehend aus finitem Netzwerk und Kompaktmodellen in Form von fluidischen Widerständen, dar.

### 5.3.3 Bewertung des Mixed-Level-Modells

Das in den Teilkapiteln 5.3.1 und Teilkapiteln 5.3.2 vorgestellte Mixed-Level-Modell wird im Folgenden anhand von FEM-Simulationen bewertet, in welchen die Navier-Stokes-Gleichung gelöst wird. Die Evaluierung erfolgt hierbei in drei Schritten. Zuerst wird eine Geometrie mit der Randbedingung  $P_f = 0$  untersucht, dann die identische Geometrie



**Abb. 5.10:** Einfach perforierte Membran, welche sich oberhalb eines fixierten Substrates bewegt (links) und das dieser Situation entsprechende Mixed-Level-Modell (rechts).

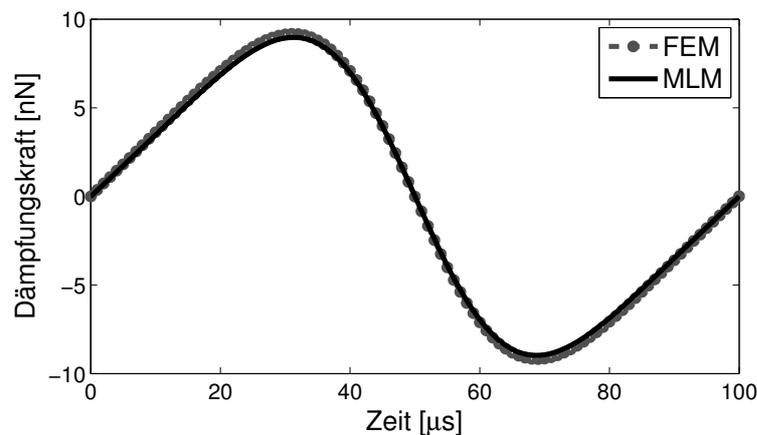


**Abb. 5.11:** Schematische Darstellung der FEM-Modelle. Untersucht wird eine  $25 \mu\text{m} \times 25 \mu\text{m} \times 5 \mu\text{m}$  ( $L \times B \times H$ ) große Membran mit einem Abstand von  $2 \mu\text{m}$  zum Substrat. In (a) ist der Luftspalt vernetzt. Randbedingung ist  $P_f = 0$ . In (b) sind zur Berücksichtigung von Randeffekten Aussenbereiche vernetzt. In (c) werden drei Perforationen eingebracht. Bei den Modellen (b) und (c) sind zur besseren Übersicht einige Aussenbereiche ausgeblendet.

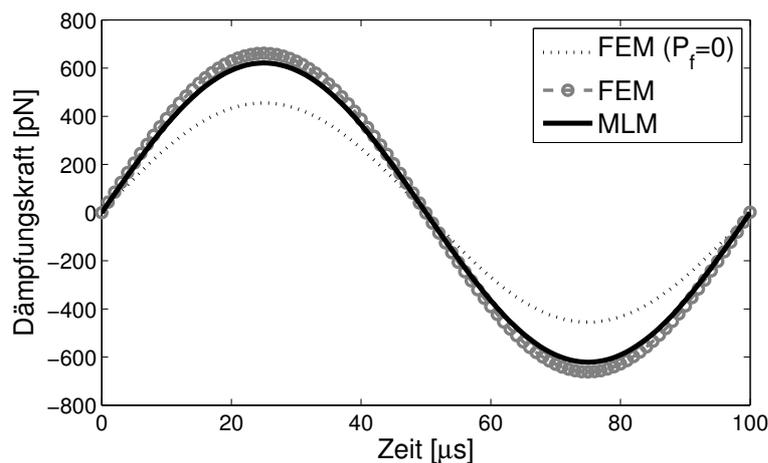
mit Randeffekten und zuletzt eine perforierte Geometrie mit Randeffekten (siehe Abbildung 5.11).

Abbildung 5.12 zeigt für die Bedingung  $P_f = 0$  (vgl. Abbildung 5.11a), wie sich die durch das finite Netzwerk berechnete Dämpfungskraft im Vergleich zu einer Lösung der Navier-Stokes-Gleichung verhält. Die sehr gute Übereinstimmung, mit einem relativen Fehler von maximal 2.2 %, beweist, dass das vorgeschlagene fluidische Netzwerk dazu geeignet ist, die Schmierfilmdämpfung zu modellieren.

Abbildung 5.13 vergleicht, die Dämpfungskraft eines Mixed-Level-Modells, bestehend aus finitem Netzwerk mit Randwiderständen, mit der des äquivalenten FEM-Modells (vgl. Abbildung 5.11b). Um das Randmodell quantitativ bewerten zu können, wurde, bei lediglich geringer Auslenkung der oberen Membran, bezüglich der Spalthöhe linearisiert und inkompressibel ( $\partial \rho_f / \partial t = 0$ ) gerechnet. Im Gegensatz zum vorherigen Vergleich der

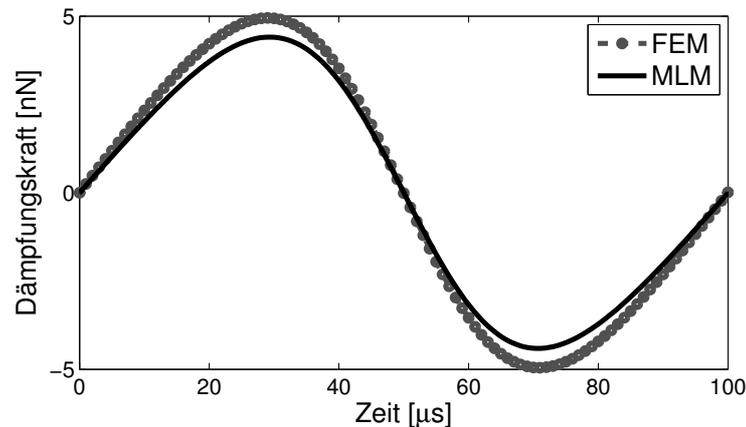


**Abb. 5.12:** Vergleich der mittels Mixed-Level-Modells (MLM) bzw. FEM-Simulation (FEM) berechneten Dämpfungskräfte für die Randbedingung  $P_f = 0$  (vgl. Abbildung 5.11a). Nichtlineare Rechnung.



**Abb. 5.13:** Vergleich der mittels Mixed-Level-Modells (MLM) bzw. FEM-Simulation (FEM) berechneten Dämpfungskräfte bei Berücksichtigung der Randeﬀekte (vgl. Abbildung 5.11b). Lineare Rechnung. Zur Veranschaulichung des Einﬂusses der Randeﬀekte ist ebenfalls die mittels FEM berechnete Dämpfungskraft unter Verwendung der Randbedingung  $P_f = 0$  eingezeichnet.

Dämpfungskräfte ist in Abbildung 5.13 bereits optisch ein Fehler zu erkennen, welcher sich zu einem maximalen relativen Fehler von 6.1 % quantifizieren lässt. Dieser Fehler erscheint als hoch, jedoch ist darauf hinzuweisen, dass ohne die Randwiderstände die Dämpfungskraft um 32 % unterschätzt würde (vgl. Graph für die Randbedingung  $P_f = 0$  in Abbildung 5.13).



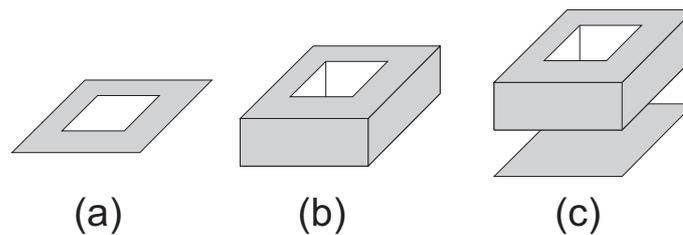
**Abb. 5.14:** Vergleich der mittels Mixed-Level-Modells (MLM) bzw. FEM-Simulation (FEM) berechneten Dämpfungskräfte für eine perforierte Membran bei Berücksichtigung der Randeffekte (vgl. Abbildung 5.11c) und für eine große sinusförmige Auslenkung.

Mit drei, nicht regelmäßig verteilten Perforationen, weichen die beiden berechneten Dämpfungskräfte um nahezu 12 % ab (siehe Abbildung 5.14). Hierbei unterschätzt das Mixed-Level-Modell, bestehend aus finitem Netzwerk, Randwiderständen und Widerständen für die Perforationen, die durch das äquivalente FEM-Modell berechnete Kraft. Gegenüber der Untersuchung der Randwiderstände ergibt sich ein beträchtlicher Fehlersprung von ca. 6 %. Dies widerspricht Sattler [128], welcher seine Kompaktmodelle in Bezug auf FEM-Simulationen als besser validiert angibt.

Tatsächlich untersucht Sattler [128] in seiner Arbeit hauptsächlich die Modelle für runde Perforationen, da sich diese sowohl analytisch als auch, rechentechnisch wenig aufwendig, mittels zylindersymmetrischer FEM-Simulationen validieren lassen. Die Validierung der Kompaktmodelle für quadratische Perforationen tritt hingegen in den Hintergrund. Aus diesem Grund wurde mit [29] eine gezielte Untersuchung der Kompaktmodelle für quadratische Perforationen durchgeführt. Hierzu wurden, mittels FEM, zuerst eine quadratische Lochblende, daraufhin eine Kanal-Blende-Struktur und abschließend eine Lochzelle, d.h. eine Kanal-Blende-Transitbereich-Struktur betrachtet (vgl. Abbildung 5.15).

Bezüglich des Blendenmodelles 5.50 wurde festgestellt, dass dieses den aus FEM-Simulationen berechneten Widerstand um ca. 16 % überschätzt. Dies ist darin begründet, dass der Blendenwiderstand eine Funktion des Verhältnisses der Lochgröße zur Größe der betrachteten Zelle ist, was über die auf das Fluid wirkenden Scherkräfte entlang der Lochblende erklärt werden kann. Es ist daher zu vermuten, dass Sattler den Blendenwiderstand bei einem bestimmten Verhältnis extrahiert hat.

Das Kompaktmodell für den fluidischen Widerstand eines Kanals wurde durch FEM-Simulation einwandfrei bestätigt. Mit der Evaluierung der Kanal-Blenden-Struktur konnte weiterhin verifiziert werden, dass ein korrigiertes Kompaktmodell für die Blende und



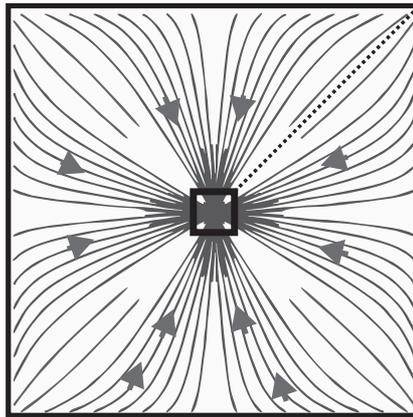
**Abb. 5.15:** Schematische Zeichnung der sukzessive untersuchten Geometrien. Struktur (a) stellt eine Blende dar und dient zur Überprüfung des reinen Blendenwiderstandes. Struktur (b) erlaubt den Blenden- und Kanalwiderstand in Kombination zu untersuchen. Mit Struktur (c) werden die Transit-, Kanal- und Blendenwiderstände evaluiert.

das Kanalmodell den mittels FEM-Simulation berechneten Widerstand sehr gut approximieren. Weiterhin wurde gezeigt, dass im Kanal eine Anlaufänge<sup>5</sup>, wie von Schrag [129] vermutet, vorhanden ist, deren Einfluss auf den Gesamtwiderstand, wie von Sattler [128] angenommen, jedoch vernachlässigbar ist.

Im Fall der Kanal-Blende-Transitbereich-Struktur wurden Effekte identifiziert, die nicht durch das Kompaktmodell 5.48 abgedeckt werden. Das Modell 5.48 impliziert beispielsweise eine homogene Anströmung der Perforation. Bei quadratischen Lochzellen wird, im Gegensatz zu den bei Sattler evaluierten runden Lochzellen, die Perforation jedoch inhomogen angeströmt (vgl. Abbildung 5.16), was durch die nicht-äquidistante Entfernung der Fluidelemente von der Perforation erklärbar ist. Fluidelemente, die sich auf einer Diagonalen (punktierter Linie in Abbildung 5.16) befinden, müssen einen längeren Weg zum Loch zurücklegen, als Elemente, die sich lediglich senkrecht zur Lochkante bewegen müssen. Dies führt zur Ausbildung eines bevorzugten Strömungsverlaufes. Der Grad der Inhomogenität ist sowohl vom Spaltabstand  $h_f$  als auch vom Verhältnis der Lochgröße zur Größe der Lochzelle abhängig und ist umso stärker ausgeprägt, je kleiner der Spaltabstand und je größer das Verhältnis ist. Die analytischen Kompaktmodelle tendieren hierbei, die durch FEM-Simulation berechneten Widerstände zu unterschätzen, was in Einklang mit dem Evaluierungsergebnis für die dreifach perforierte Membran aus Abbildung 5.11c steht. Die von Sattler [128] angegebenen Modelle weisen, aufgrund der Überschätzung des Blendenwiderstandes, im Vergleich zu den in [29] korrigierten Modellen, die geringere Abweichung gegenüber FEM-Simulationen auf.

In der Zusammenfassung müsste in dem Kompaktmodell für die Blende die Größe der betrachteten Lochzelle als weiterer Parameter aufgenommen werden. Dies ist insofern problematisch, da bei unregelmäßig perforierten Membranen es nicht trivial ist, für jede Perforation eine Zellgröße zu bestimmen. Des Weiteren müsste das Transitmodell 5.48 dahingehend verändert werden, dass die inhomogene Strömung in Abhängigkeit des Spaltabstandes und des Verhältnisses von Lochgröße zu Zellgröße berücksichtigt werden kann.

<sup>5</sup> Unter Anlaufänge wird hier die Strecke verstanden, die benötigt wird, um innerhalb eines Kanals ein vollständiges Hagen-Poiseuille-Profil auszubilden.



**Abb. 5.16:** In [29] berechnete Strömungslinien einer quadratischen Lochzelle. Das Loch befindet sich in der Mitte der Lochzelle. Der Hauptteil der Linien verläuft über den Mittelbereich der Lochkanten.

Da zum Zeitpunkt dieser Arbeit keine entscheidend besseren Kompaktmodelle, als die von Sattler [128] aufgeführten Ausdrücke 5.48 bis 5.50, vorlagen, werden diese im Folgenden für die Modellierung von perforierten Membranen herangezogen. Das Mixed-Level-Modell stellt gegenüber FEM-Modellen eine Beschreibung mit einer wesentlich geringeren Anzahl von Freiheitsgraden dar. Um diese Einsparung an Freiheitsgraden zu erreichen, sind Ungenauigkeiten in einem akzeptablen Maße, wie auch bei den in Teilkapitel 5.5 beschriebenen Dämpfungsmodellen zu sehen, in Kauf zu nehmen.

### 5.3.4 Korrekturfaktoren für verdünnte Gase

Das Mixed-Level-Modell für die fluidische Dämpfung basiert auf der Reynoldsgleichung 5.31, welche aus der (Navier-)Stokes-Gleichung abgeleitet wurde. Die Navier-Stokes-Gleichung setzt wiederum einen linearen Zusammenhang zwischen Spannungstensor und Geschwindigkeit voraus (vgl. Ausdruck 5.8), welcher jedoch nur gegeben ist, wenn das zu modellierende Gas bzw. Fluid als Kontinuum betrachtet werden kann. Kontinuum bedeutet, dass hinreichend viele Moleküle pro Volumeneinheit vorhanden sein müssen, um mittels der Methoden der statistische Mechanik ein makroskopisch verwertbares Ensemble bilden zu können [155, 156]. Ist dies nicht gegeben, so ist jedes Molekül einzeln zu betrachten und über die Boltzmann-Gleichung die entsprechende Trajektorie des jeweiligen Moleküls zu berechnen [155, 156].

Auf die konkrete physikalische Situation interpretiert, setzt der Zusammenhang 5.8 voraus, dass hinreichend viele Gasmoleküle pro Volumeneinheit vorhanden sind, sodass die Kollision zwischen diesen Molekülen der dominierende Kollisionsvorgang ist, was durch eine Scherviskosität  $\eta$  beschrieben werden kann. Liegt hingegen ein verdünntes Gas vor, d.h. existieren wenige Gasmoleküle pro Volumeneinheit, so ist die Wahrscheinlichkeit der intermolekularen Kollision gering und die Kollision mit den Oberflächen ist der dominierende Vorgang. Dies hat zur Folge, dass eine Beschreibung des Verhaltens über eine

Scherviskosität  $\eta$  nicht mehr sinnvoll ist, und stattdessen die Trajektorien der einzelnen Moleküle, sowie deren Kollision mit den Oberflächen berechnet werden müssen.

Das Maß der Verdünnung eines Gases kann mittels der dimensionslosen Knudsen-Zahl  $Kn$  bestimmt werden, welche das Verhältnis der mittleren freien Weglänge eines Gasmoleküls  $\lambda_f$  zur charakteristischen Länge einer Geometrie darstellt:

$$Kn = \frac{\lambda_f}{L_c} \quad (5.52)$$

Die Weglänge  $\lambda_f$  lässt sich aus der Gastheorie [32] mittels der Boltzmannkonstante  $k$ , der Temperatur  $T_f$ , des Durchmessers der Gasmoleküle  $d_{mo}$  und des Druckes  $p_f$  berechnen. Wird die Temperatur als konstant angenommen, so ist die Weglänge indirekt proportional zum Druck:

$$\lambda_f = \frac{kT_f}{\sqrt{2}\pi d_{mo}^2 \cdot p_f} = const_{\lambda_f} \cdot \frac{1}{p_f} \quad (5.53)$$

Mit dem Umstand, dass die freie Weglänge unter Standardbedingungen 69 nm beträgt, kann der Proportionalitätsfaktor bestimmt werden:

$$const_{\lambda_f} = 69 \text{ nm} \cdot 1013 \text{ hPa} \approx 7 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{Pa} \quad (5.54)$$

Ist  $\lambda_f$  klein gegenüber der charakteristischen Länge  $L_c$ , d.h. die Knudsen-Zahl ist klein, trifft ein Gasmolekül auf dem Weg in Richtung Wand viele andere Moleküle, was zur Folge hat, dass die intermolekulare Kollision dominiert. Ist  $\lambda_f$  hingegen groß gegenüber der Länge  $L_c$ , so trifft das Molekül mit hoher Wahrscheinlichkeit direkt die Wand, d.h. die Kollision an Wänden dominiert. Gemäß den Ausdrücken 5.52 bis 5.54 liegen große Knudsen-Zahlen, d.h. verdünnte Gase, sowohl im Falle von sehr kleinen charakteristischen Längen  $L_c$  als auch bei sehr niedrigen Drücken  $p_f$  vor. Mikrosysteme haben per se sehr kleine charakteristischen Längen und werden oftmals unter geringen Drücken betrieben [38, 40, 128]. Aus diesem Grund ist es essentiell, die Verdünnung von Gasen bei der fluidischen Modellierung von Mikrosystemen zu berücksichtigen.

Bezüglich der Größenordnung der Knudsen-Zahl werden die Bereiche der Kontinuums-, Schlupf-, Übergangs- und der freien Molekularströmung unterschieden (siehe Tabelle 5.2). Im Bereich der Kontinuumsströmung ist die Navier-Stokes-Gleichung gültig. Im Schlupfbereich kann immer noch mit der Navier-Stokes-Gleichung, jedoch mit modifizierten Randbedingungen für Oberflächen, gerechnet werden. Die modifizierten Randbedingungen erlauben hierbei einen Schlupf zwischen der Geschwindigkeit des Gases und der Geschwindigkeit der Wand. Im Bereich der freien Molekularströmungen muss hingegen für jedes Molekül die Boltzmann-Gleichung gelöst werden, was hochgradig rechenintensiv ist. Aus diesem Grund existieren zur Lösung der Boltzmann-Gleichung, wie in [38, 40, 74, 128, 135] diskutiert, verschiedenste Näherungsverfahren. Aufgrund fehlender dezidiert Verfahren stellt der Bereich der Übergangsströmung aus Sicht der Modellierung die größte Schwierigkeit dar und wird zumeist mit einer Kombination von verschiedenen Methoden bearbeitet [38, 39, 40].

$Kn \leq 0.001$	Kontinuumsströmung
$0.001 < Kn \leq 0.1$	Schlupfströmung
$0.1 < Kn \leq 10$	Übergangsströmung
$10 < Kn$	freier Molekularströmung

**Tab. 5.2:** Klassifizierung der Knudsen-Zahl in Bereiche nach [13, 22, 23, 31, 74].

In Hinblick auf das Mixed-Level-Modell besteht die Herausforderung darin, die Verdünnung des Luftfilms zwischen der Membran und dem Substrat auf der Systemebene entsprechend zu berücksichtigen. Dies ist insofern problematisch, da zwischen den Bereichen unterschiedlicher Knudsen-Zahlen das zugrunde liegende Modell stetig geändert wird. Folglich müsste ebenfalls auf der Systemebene stetig, je nach Knudsenbereich, zwischen verschiedenen Modellen für die Schmierfilmdämpfung gewechselt werden. Dies ist aus Sicht der Implementierung unpraktikabel. Aus diesem Grund wird versucht, den Grad der Verdünnung mittels Korrekturfaktoren nachzubilden. Die Grundidee hierbei ist, dass sich ein fluidischer Widerstand, welcher letztendlich aus Zusammenhang 5.8 resultiert, im Falle eines dünner werdenden Gases verringern muss, da weniger intermolekulare Kollisionen auftreten und das Gas folglich unter geringerem Widerstand abfließen kann. Die korrigierten fluidischen Leitwerte bzw. Widerstände des Mixed-Level-Modells lauten auf diese Weise:

$$G_{f,kl}^* = G_{f,kl} \cdot \Psi_{rey} \quad (5.55)$$

$$Z_{f,R,k}^* = Z_{f,R,k} \cdot \Psi_{RT}^{-1} \quad (5.56)$$

$$R_{f,T,r}^* = R_{f,T,r} \cdot \Psi_{RT}^{-1} \quad (5.57)$$

$$R_{f,K,r}^* = R_{f,K,r} \cdot \Psi_K^{-1} \quad (5.58)$$

$$R_{f,B,r}^* = R_{f,B,r} \cdot \Psi_B^{-1} \quad (5.59)$$

Die Korrekturfaktoren  $\Psi_{rey}$ ,  $\Psi_{RT}$ ,  $\Psi_K$  und  $\Psi_B$  sind intransparente Verhaltensmodelle in Abhängigkeit der Knudsen-Zahl  $Kn$  bzw. weiterer fluidischer Kenngrößen (siehe Anhang B.1) [4, 74, 133, 134, 135, 143, 145, 146, 148]. Die Faktoren wurden aus den Simulationsdaten für spezielle Geometrien, d.h. einer Kanal- bzw. Blendengeometrie extrahiert. Infolgedessen ist die Verwendung der Korrekturfaktoren in Hinblick auf die Prädiktivität des Gesamtmodells grundlegend problematisch. Darüber hinaus waren die Faktoren zum Zeitpunkt dieser Arbeit noch nicht systematisch experimentell validiert. Aufgrund fehlender Alternativen werden diese Korrekturfaktoren im Rahmen dieser Arbeit dennoch eingesetzt, um die Verdünnung von Gasen zu berücksichtigen.

### 5.3.5 Physikalisch basierte Ordnungsreduktion

Die Anzahl der Freiheitsgrade des Mixed-Level-Modells steigt, je feiner die Diskretisierung bzw. je größer die lateralen Abmessungen der Membran werden und je höher die Zahl der Perforationen ist. Dies ist aus Sicht der Systemmodellierung suboptimal, da diese auf eine Beschreibung mittels kompakter Modelle mit wenigen Freiheitsgraden zielt. Aus diesem Grund stellt sich die Frage, ob nicht eine systematische und automatisierbare Reduktion von rechenintensiven Mixed-Level-Modellen möglich ist.

Von Schrag wurde bereits 2004 in [131] festgestellt, dass bei entsprechend hohem Perforationsgrad die fluidischen Widerstände für Löcher mittels einer fluidischen Parallelschaltung massiv zusammengefasst werden können, und auf diese Weise die Anzahl der Freiheitsgrade stark reduziert werden kann. 2008 wurde in [104] gezeigt, dass nicht nur die fluidischen Widerstände der Löcher, sondern komplette Perforationszellen<sup>6</sup> parallel geschaltet werden können, was eine noch stärkere Reduktion der Freiheitsgrade erlaubt, da ebenfalls die Knoten des finiten Netzwerks zusammengefasst werden. Keine der Arbeiten gibt jedoch an, unter welchen Bedingungen Löcher bzw. Perforationszellen kombiniert werden können. Derartige Kriterien sind jedoch Voraussetzung für eine Automatisierung der Ordnungsreduktion.

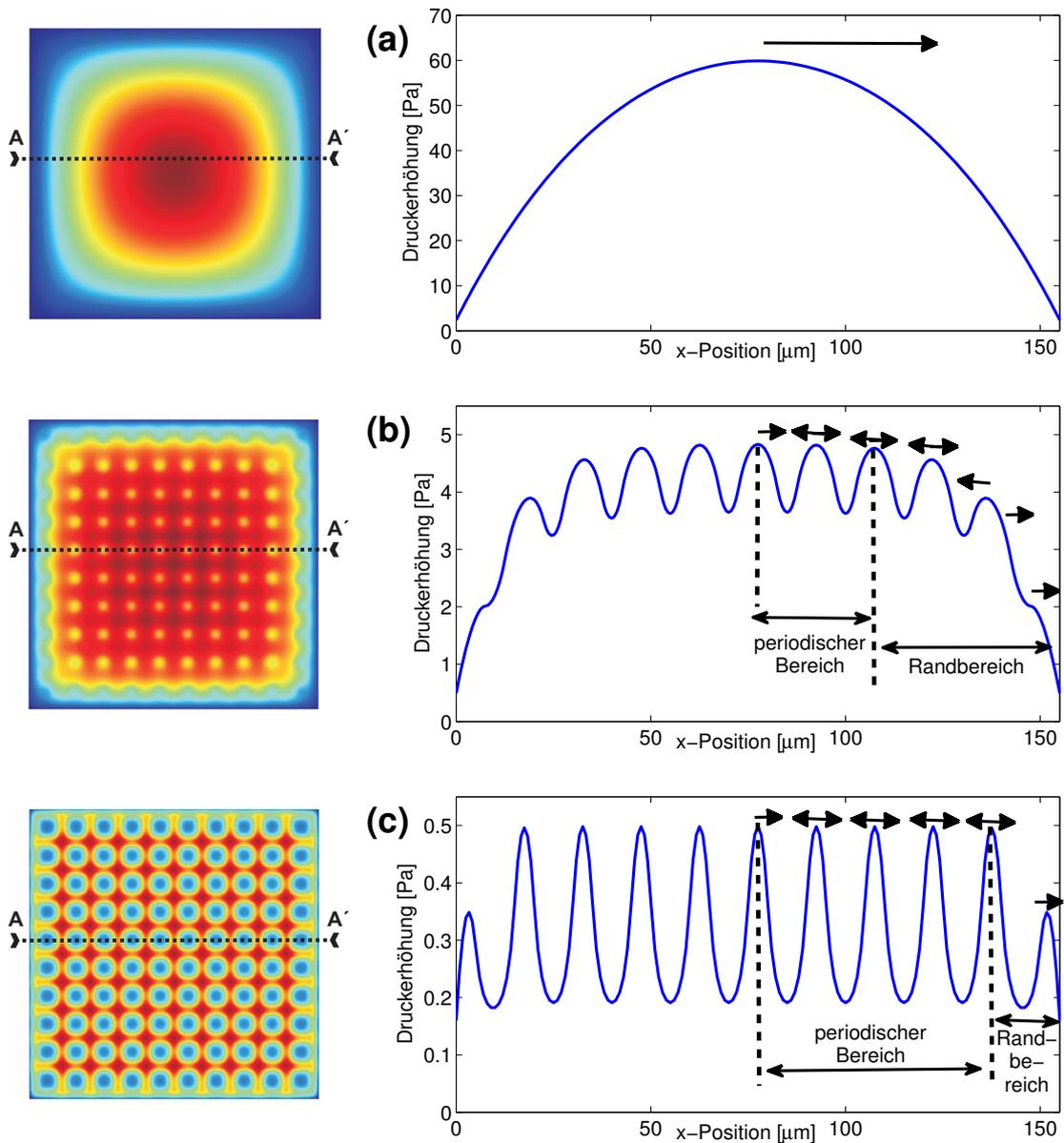
Eine physikalische Begründung, warum eine Parallelschaltung überhaupt möglich ist, wird im Folgenden mithilfe von Übersicht 5.17 erläutert. In dieser Abbildung werden die Druckverteilungen unter drei quadratischen Membranen mit identischen lateralen Abmessungen von 155  $\mu\text{m}$ , jedoch mit unterschiedlichen Perforationsgraden abgebildet. Die drei Membranen verhalten sich starr und bewegen sich gegen ein fixiertes Substrat. Membran (a) ist nicht perforiert, die Membranen (b) und (c) weisen einen Perforationsgrad<sup>7</sup> von 10 % bzw. 42 % auf. Die Druckverteilung unter Membran (a) ist parabolisch. Die stark perforierte Membran (c) weist, abgesehen von den Randbereichen, eine periodische Druckverteilung auf, welche durch die regelmäßig verteilten Perforationen eingestellt wird. Die Druckverteilung unter der leicht perforierten Membran (b) ist eine Mischform der beiden anderen Druckverteilungen. Über einen weiten Randbereich variiert die Druckverteilung parabelartig, während im Inneren der Membran sich eine, vom qualitativen Verlauf her mit Membran (c) vergleichbare, periodische Druckverteilung einstellt.

Diese Beobachtung erlaubt folgende Hypothese aufzustellen: *Die Druckverteilung unter einer perforierten Membran ist grundlegend periodisch und wird durch die jeweilige Perforation bestimmt. Gestört wird diese Periodizität durch den Einfluss des Randes. Grund für diese Störung ist, dass das abfließende Fluid stets den Weg des geringsten fluidischen Widerstandes wählt und nahe des Membranrandes infolgedessen auch über diesen abfließt. Deshalb ist die Störung der Periodizität umso stärker zu erwarten, je kleiner die lateralen Abmessungen der Membran sind und je geringer eine Membran perforiert ist.*

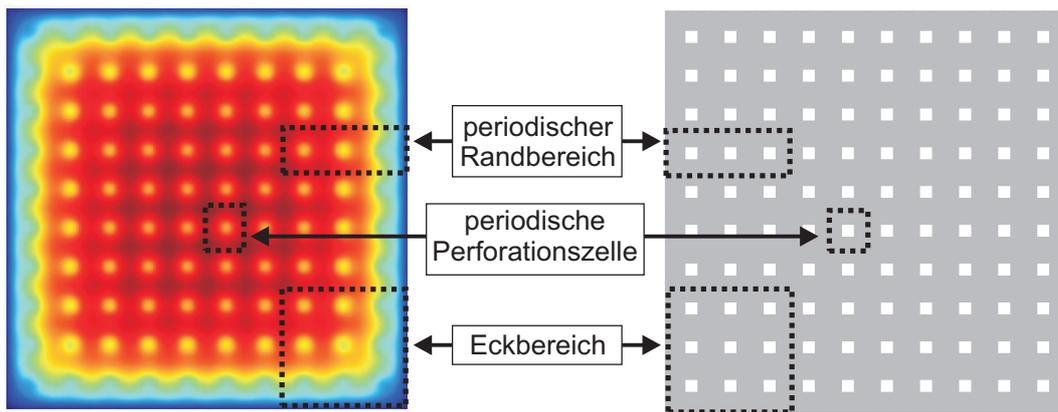
---

<sup>6</sup> Unter Perforationszelle wird hier eine rechteckige Zelle verstanden, welche in ihrer Mitte eine quadratische Perforation besitzt (vgl. Abbildung 5.15c).

<sup>7</sup> Unter Perforationsgrad wird hier das Verhältnis der Fläche aller Löcher zur Gesamtfläche der Membran ( $a_f \cdot b_f$ ) verstanden.



**Abb. 5.17:** Profile der Druckerhöhungen für drei bewegte Membranen. Die Profile wurden mittels des in [149] beschriebenen Modells berechnet. Die Abbildungen (a) zeigen das Profil unterhalb einer nicht perforierten Membran, sowie einen Schnitt durch das Profil in  $x$ -Richtung (gestrichelte Linie A-A'). Die Luft entweicht ausschließlich über den Rand. In (b) wird das Profil einer zu 10% perforierten Membran gezeigt. Der Schnitt durch das Profil zeigt, dass die Luft im Inneren der Membran ausschließlich über die Perforationen abfließt, jedoch im Randbereich zunehmend über die Berandung entweicht. In den Grafiken (c) wird das Profil einer zu 42% perforierten Membran dargestellt. Die Luft fließt hauptsächlich über die Perforationen ab. Lediglich bei den Löchern, welche sich direkt am Rand befinden, hat dieser einen Einfluss.



**Abb. 5.18:** Schemazeichnung der Unterteilung in periodische Bereiche zur Reduktion der Freiheitsgrade des Mixed-Level-Modells.

Nach der Hypothese ist es gerechtfertigt, wie in der schematischen Skizze 5.18 aufzeigt, eine mit vielen Löchern perforierte, großflächige Membran in periodisch wiederkehrende innere Perforationszellen und in einen Randbereich zu zerlegen. Der Randbereich könnte wiederum in einen Eckbereich und einen periodischen Randbereich unterteilt werden. Auf diese Weise müssten, zur Berechnung der Dämpfungskraft statt der vollständigen Membran lediglich eine innere Perforationszelle, ein periodischer Randbereich und ein Eckbereich modelliert und entsprechend ihrer Anzahl gewichtet werden:

$$F_{m,f} = X \cdot F_{m,f,Zelle} + Y \cdot F_{m,f,Rand} + Z \cdot F_{m,f,Eckbereich} \quad (5.60)$$

Für nicht starre, sondern verformbare Membranen kann ebenfalls eine Reduktion analog zu Ausdruck 5.60 vorgenommen werden. Erforderlich hierzu ist eine entsprechende Unterteilung des inneren Zellbereichs, des periodischen Randbereichs und der Eckbereiche gemäß der zu erwartenden Deformation der Membran. Dies wird in Teilkapitel 6.5 näher ausgeführt.

Ein allgemeingültiges Kriterium zur Abschätzung der notwendigen Größe des Rand- bzw. Eckbereichs kann nicht aufgestellt werden. Aus diesem Grund werden in Teilkapitel 7.4 empirische Untersuchungen durchgeführt.

## 5.4 Fluid-Struktur Wechselwirkung

Für die Berechnung der Dämpfungskraft auf eine sich bewegende und perforierte Membran ist das mechanische Modell der Membran mit dem fluidischen Mixed-Level-Modell innerhalb eines verallgemeinerten Kirchhoffschen Netzwerkes zu koppeln. Die Kopplung von der Mechanik in die Fluidik ist über die Spalthöhe inhärent in der Reynoldsgleichung 5.31 und damit in den Elementen des finiten Netzwerkes enthalten. Auch das Kompaktmodell für den Rand sowie für den Transitbereich enthalten die Spalthöhe als

geometrischen Parameter (vgl. Ausdrücke 5.47 und 5.48). Zur Verknüpfung mit dem modalen mechanischen Subsystem müssen lediglich die Spalthöhen  $h_{f,k}$  des Mixed-Level-Modells, analog zu Gleichung 3.30, in Abhängigkeit der modalen Amplituden  $q_{m,i}$  und der modalen Formfaktoren  $\Phi_{m,i,k}$  formuliert werden:

$$h_{f,k}(t) = h_{f,k,0} + \sum_i \Phi_{m,i,k} \cdot q_{m,i}(t) \quad \forall k \quad (5.61)$$

Die Fluidik wirkt über die, gemäß Gleichung 5.38 zu berechnende Dämpfungskraft  $F_{m,f}$  auf die Mechanik ein. Aus dem Mixed-Level-Modell berechnet sich  $F_{m,f}$  durch Multiplikation der Knotendrucke  $P_{f,k}$  mit den zugehörigen Knotenflächen  $A_k$ . Zur Kopplung mit dem modalen mechanischen Modell müssen des Weiteren die modalen Formfaktoren  $\Phi_{m,i,k}$  berücksichtigt werden (vgl. Ausdruck 3.17). Die auf einen Eigenmode  $i$  wirkende modale Kraft berechnet sich infolgedessen zu:

$$\tilde{F}_{m,f,modal,i} = \underline{\Phi}_{m,i}^T \underline{F}_{m,f} = \sum_k \Phi_{m,i,k} \cdot P_{f,k} \cdot A_k \quad (5.62)$$

In gleicher Weise sind die Scherkräfte an den Kanalwänden der Perforationen zu berücksichtigen [128]. Analog zu Teilkapitel 4.5.2 sind die resultierenden Netzwerkelemente mechanisch-fluidisch gekoppelt und besitzen fluidische sowie mechanische Klemmen.

## 5.5 Alternative Modellierungsansätze

Zur Modellierung der Schmierfilmdämpfung in Mikrostrukturen existieren zahlreiche weitere Ansätze [6, 111, 112, 144, 147, 149]. Von diesen werden im Folgenden drei vorgestellt, um in Teilkapitel 7.5 das Mixed-Level-Modell gegenüber diesen alternativen Ansätzen bewerten zu können.

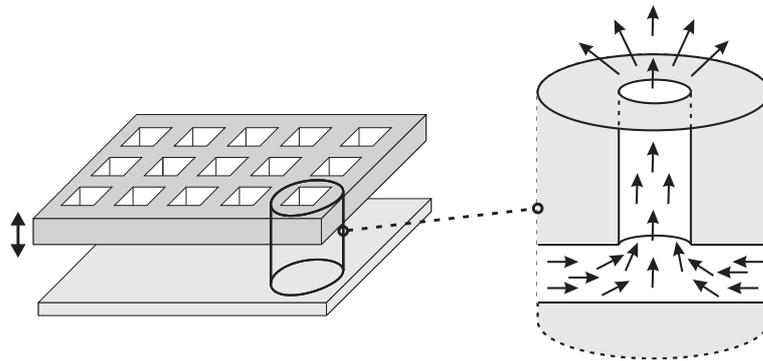
### 5.5.1 Analytische Modellierung durch Zerlegung in Lochzellen

Ein Modellierungsansatz basiert darauf, dass, analog zu den Ausführungen in Teilkapitel 5.3.5, eine perforierte Membran in Perforationszellen zerlegt werden kann (siehe Abbildung 5.19). Hierbei wird davon ausgegangen, dass die Perforationszellen bezüglich ihrer Geometrie vollkommen und ihrer Druckverteilung prinzipiell identisch sind<sup>8</sup>. Aus diesem Grund muss lediglich die Dämpfungskraft einer einzelnen Perforationszelle berechnet werden und diese mit der Anzahl der Zellen gewichtet werden:

$$F_{m,f} = X_{gesamt} \cdot F_{m,f,Zelle} \quad (5.63)$$

---

<sup>8</sup> Diese Annahme impliziert gleichzeitig, dass das komplette Fluid einer Zelle ausschließlich durch die Perforationen zu- und abfließt.



**Abb. 5.19:** Schemazeichnung der Unterteilung einer perforierten Membran in periodische Lochzellen. Diese Zerlegung impliziert gleichzeitig, dass das komplette Fluid, dargestellt mittels schwarzer Pfeile, aus dem Spalt ausschließlich durch die Perforationen zu- und abfließt.

Veijola [144] verfolgt einen derartigen Ansatz und hat das Ziel, die Dämpfungskraft auf die periodisch perforierte Platte mittels eines parametrisierten Verhaltensmodells zu beschreiben. Dazu rechnet er quadratische Löcher und Zellen in geometrisch entsprechende runde Löcher und Zellen um und gelangt unter Ausnutzung der Zylindersymmetrie zu einer geschlossenen Lösung der Reynoldsgleichung. Analog zu Schrag [129] und Sattler [128] modelliert er Perforationen mittels fluidischer Widerstände, welche den Lochkanal, die Blende und den Transitbereich beschreiben. Im Gegensatz zu Schrag und Sattler, welche ausschließlich physikalisch basierte Kompaktmodelle verwenden, setzt Veijola hauptsächlich Verhaltensmodelle ein, welche aus FEM-Simulationen extrahiert wurden. Zur Modellierung verdünnter Gase extrahiert Veijola, ebenfalls mittels FEM-Simulationen, entsprechende Korrekturfaktoren und gibt deren Gültigkeit bis in den Schlupfbereich hinein an. Um den Druckabfall in Richtung Rand zu berücksichtigen, wird eine Homogenisierungsmethode eingesetzt [144]. Der vollständige Gleichungssatz zur Berechnung der Dämpfungskraft ist in Anhang B.2 aufgeführt.

Der Vorteil dieser Beschreibung durch Verhaltensmodelle ist, dass es mittels weniger Gleichung möglich ist, die Dämpfungskraft auf eine perforierte Membran zu berechnen. Ergo ist das Modell komfortabel zu implementieren und schnell auswertbar. Ein Nachteil dieser Art der Modellierung ist, dass Randeffekte oder die zusätzliche Dämpfung aufgrund der Aufhängung der Membran nur über Umwege [86] berücksichtigt werden können. Infolgedessen ist bei kleinen lateralen Abmessungen einer Membran bzw. bei geringen Perforationsgraden eine Überschätzung der Dämpfungskraft zu erwarten. Pandey *et al.* [112, 111] schlagen vor, analog zu den Ausführungen in Teilkapitel 5.3.5, Randzellen einzuführen und können belegen, dass auf diese Weise eine bessere Übereinstimmung mit experimentellen Daten erreicht werden kann. Zur Berechnung der Dämpfungskraft der Randzellen sind jedoch FEM-Simulationen erforderlich, welche vor der Berechnung der Dämpfungskraft mittels des Kompaktmodells durchgeführt werden müssen. Des Weiteren erlauben es diese intransparenten Verhaltensmodelle nicht, geometrische Nichtidealitäten, wie z.B. aufgrund des Ätzprozesses partiell aufgeweitete Kanäle, zu berücksichtigen.

### 5.5.2 Modellierung auf der Basis einer modifizierten Reynoldsgleichung

Ein weiterer Ansatz für eine kompakte Modellierung beruht darin, in die Reynoldsgleichung 5.31 eine Generationsrate  $\Pi_{f,Loch}$  einzubauen, welche den vertikalen Zu- bzw. Abfluss durch die Perforationen modelliert. Die sog. *modifizierte Reynoldsgleichung* lautet:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} h_f = \nabla \left( \frac{\rho_f h_f^3}{12\eta} \nabla p_f \right) - \rho_f \frac{\partial h_f}{\partial t} + \Pi_{f,Loch} \quad (5.64)$$

Bao *et al.* [7] verfolgen einen derartigen Ansatz und verwenden als Generationsterm eine effektive Zu- bzw. Abflussdichte, welche mit der Reynoldsgleichung über die komplette perforierte Membran integriert wird und auf diese Weise einen geschlossenen Ausdruck für die Dämpfungskraft auf eine perforierte Membran erlaubt. Das Integrieren des zusätzlichen Generationsterms über die perforierte Membran kann als räumliches „Verschmieren“ der Perforationen aufgefasst werden. Die Gleichungen dieses Kompaktmodells sind in Anhang B.3 aufgeführt.

Der Vorteil dieses Modells ist, dass es, analog zum vorigen Modell, mittels weniger Gleichung möglich ist, die Dämpfungskraft auf eine perforierte Membran zu berechnen. Neben der nicht vorhandenen Berücksichtigung von Randeffekten und der Membranaufhängung besteht jedoch ein entscheidender Nachteil dieses Ansatzes darin, dass durch das „Verschmieren“ der Perforationen das tatsächliche Druckprofil einer perforierten Membran (vgl. Abbildung 5.17c) nicht dargestellt werden kann, sondern ein effektives Druckprofil errechnet wird, welches eher dem einer nicht perforierten Membran (vgl. Abbildung 5.17a) gleicht<sup>9</sup>. Aus diesem Grund kann diese Art von Modell nur sinnvolle Dämpfungskräfte berechnen, wenn der Perforationsgrad hoch ist und damit ein „Verschmieren“ der Löcher gerechtfertigt ist.

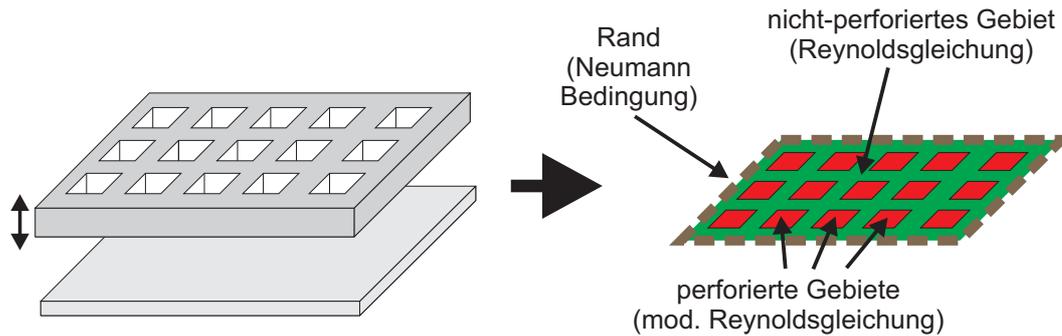
### 5.5.3 Hybride Modelle

Eine Alternative zu den Kompaktmodellierungsansätzen aus Teilkapiteln 5.5.1 und 5.5.2 ist ein Ansatz, der in Analogie zur Idee des Mixed-Level-Modells, auf hybride Weise kontinuierliche Modellierung und Kompaktmodellierung miteinander verknüpft.

Veijola stellt in [149] einen derartigen Ansatz vor. Das vorgeschlagene Modell ist für die Implementierung in einem FEM-Simulator konstruiert<sup>10</sup>. Konkret wird zur Berechnung der Dämpfungskraft die Membran in ein nicht-perforiertes Gebiet und perforierte Gebiete untergliedert (siehe Abbildung 5.20). Auf dem nicht perforiertem Gebiet wird die Reynoldsgleichung 5.31 berechnet. Auf den perforierten Gebieten wird eine modifizierte Reynoldsgleichung berechnet, welche jedoch eine, im Vergleich zu Ausdruck 5.64, veränderte Generationsrate aufweist. Konkret wird die Zu- bzw. Abflussdichte nicht mehr

<sup>9</sup> Jedoch mit entsprechender Abflachung des Profilverlaufs in Richtung Membranmitte.

<sup>10</sup> Das Mixed-Level-Modell ist hingegen in einem Schaltungssimulator zu implementieren.



**Abb. 5.20:** Schemazeichnung des hybriden Ansatzes. Das zu berechnende zweidimensionale Problem wird in einen nicht-perforierten Bereich und in perforierte Bereiche untergliedert. Am Rand des FEM-Modells wird eine Neumann-Bedingung angesetzt.

auf die gesamte Geometrie „verschmiert“, sondern ausschließlich auf die lateralen Abmessungen der Perforation. Der Zu- bzw. Abfluss, welcher zu einer Dichte umzurechnen ist, wird hierbei mittels eines Kompaktmodells bestimmt. Zur Modellierung von Randeffekten wird am Rand der Membran eine heuristisch extrahierte Neumann-Randbedingung eingesetzt [149].

Bezüglich der Grundidee, eine perforierte Membran in ein nicht-perforiertes Gebiet zu zerlegen, auf welchem die Reynoldsgleichung berechnet wird, und Perforationen bzw. den Rand lokal entsprechende zu berücksichtigen, gleicht dieser Ansatz dem Mixed-Level-Modell. Aufgrund dessen, dass ein FEM-Simulator zur Implementierung eingesetzt wird, unterscheiden sich die beiden Ansätze jedoch hinsichtlich der Modellierung von Löchern und der Randeffekte. Erlaubt die konsistent flusserhaltende Modellierung im Mixed-Level-Modell Kompaktmodelle in Form von fluidischen Widerständen zu verwenden, ist dies bei einer FEM-Implementierung hingegen nicht möglich. Dies ist darin begründet, dass FEM-Simulatoren stets die intensive Variable auf einem Gebiet berechnen und bezüglich dieser lediglich Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen erlauben. Infolgedessen können Kompaktmodelle, die Differenzen einer intensiven Variable und integrale Flüsse einer extensiven Variable miteinander verknüpfen, nicht eingesetzt werden<sup>11</sup>, da die entsprechenden integralen Flüsse entweder gar nicht, oder nur als sekundäre Größe berechnet werden.

Der Vorteil dieses Ansatzes ist, dass die perforierte Membran durch die räumliche Auflösung und lokale Berücksichtigung von Löchern und Rändern, akkurat modelliert wird. Die Nachteile dieses Ansatzes bestehen zum einem in der, im Vergleich zum Mixed-Level-Modell, wesentlich höheren Anzahl von Freiheitsgraden<sup>12</sup> und in der, wie erläutert, eingeschränkten Möglichkeit, Kompaktmodelle einzusetzen, was dazu führt, dass intransparente Verhaltensmodelle, wie z.B. jenes zur Modellierung des Randes, herangezogen werden.

<sup>11</sup> Bzw. sie führen, wie in [85] erläutert, zu ggf. verfälschten Ergebnissen.

<sup>12</sup> Im Gegensatz zum Mixed-Level-Modell muss hier ebenfalls der Bereich unterhalb der Perforationen diskretisiert werden. Des Weiteren ist gleichzeitig die perforierte Membran vollständig mittels finiten Elementen zu modellieren, d.h. es muss ein mechanisch-fluidisch gekoppeltes Problem gelöst werden.

## 6. Automatisierte Modellgenerierung

In diesem Kapitel wird die automatisierte Erstellung von elektro-fluid-mechanisch gekoppelten Systemmodellen auf Basis der in den Kapiteln 3, 4 und 5 abgeleiteten Gleichungen und Kompaktmodellen erläutert. Nach der Zusammenführung der Modelle und der Motivation der Automatisierung wird der allgemeine Ablauf der Modellerstellung begründet und erörtert. Daraufhin werden spezielle Algorithmen skizziert, die im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurden, um die Automatisierung zu bewerkstelligen. Abschließend werden Besonderheiten bezüglich der Implementierung einzelner Modelle diskutiert.

### 6.1 Zusammenführung

Zur Erstellung von elektro-fluid-mechanisch gekoppelten Systemmodellen sind Kirchhoffsche Netzwerke für drei unterschiedliche Energieformen zu erstellen:

- Zur Modellierung der Mechanik ist für jede berücksichtigte mechanische Eigenmode  $i$  ein *mechanisches Kirchhoffsches Netzwerk* zu erstellen. Die Unterschiede in den modalen Amplituden  $\Delta q_i$  und die modalen Kräfte  $\tilde{F}_{m,modal,i}$  stellen die Differenzen der intensiven Variablen (engl. *across-quantities*) und die Flussgrößen (engl. *through-quantities*) dieser mechanischen Netzwerke dar.
- Zur Beschreibung der Schmierfilmdämpfung mittels des Mixed-Level-Modells ist ein *fluidisches Kirchhoffsches Netzwerk* zu erstellen. Die Druckunterschiede  $\Delta P_{kl}$  und die Volumenflüsse  $Q_{kl}$  stellen die Differenzen der intensiven Variablen und die Flussgrößen dieses Netzwerkes dar.
- Ein *elektrisches Kirchhoffsches Netzwerk* ist erforderlich, um die Ladung in den kapazitiven Anordnungen zu bilanzieren. Die Potentialunterschiede  $\Delta \Phi_e$  und die elektrischen Ströme  $I_e$  stellen die Differenzen der intensiven Variablen und die Flussgrößen dieses Netzwerkes dar.

Diese Netzwerke sind über die in Abbildung 6.1 dargestellten bidirektionalen Kopplungen miteinander verknüpft. Diese Kopplungen haben Netzwerkelemente zur Folge, die Klemmen für mehrere Energiebereiche besitzen (siehe Teilkapitel 4.5.2 und 5.4). Diese Elemente sind für den Schaltungssimulator als *HDL*<sup>1</sup>-Modelle zu formulieren und in einer entsprechenden Bibliothek zu hinterlegen.

---

<sup>1</sup> Das Kürzel *HDL* steht für *hardware description language* und ist in Teilkapitel 2.1.2 erläutert.

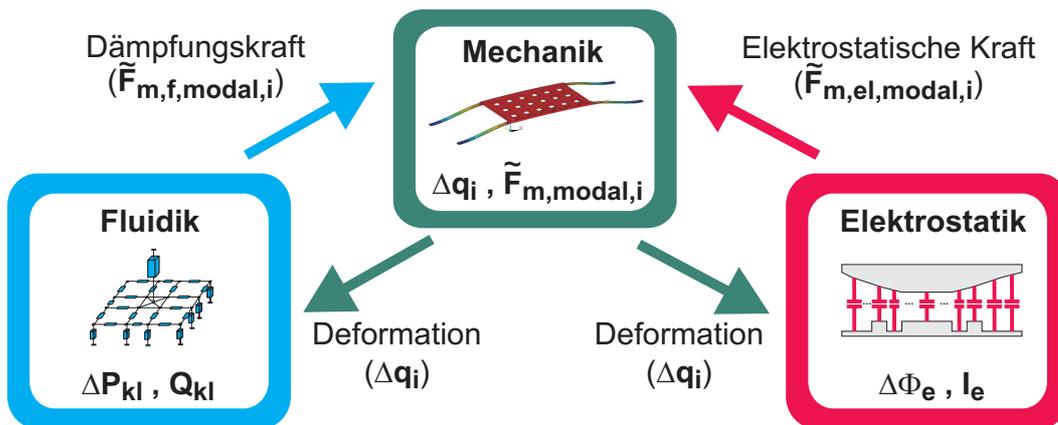


Abb. 6.1: Energieformübergreifende Kopplungen zwischen den Netzwerken.

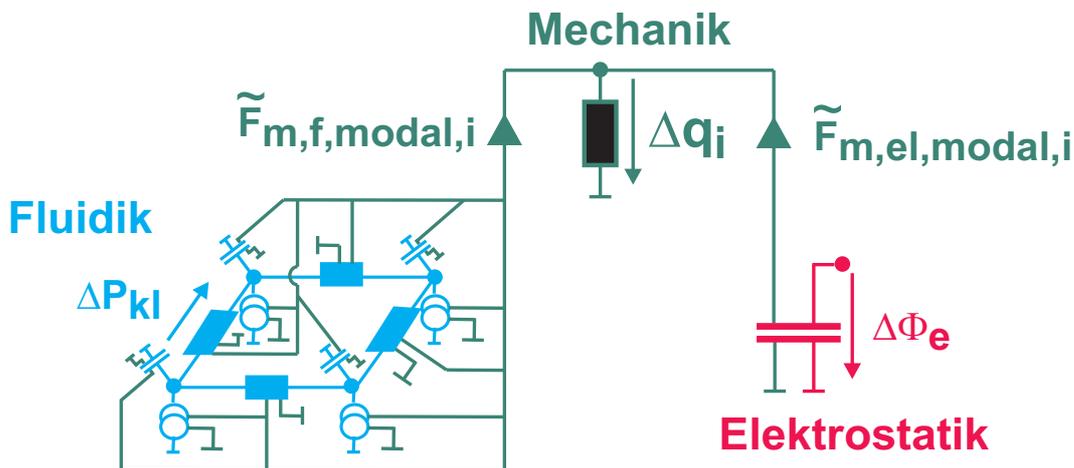


Abb. 6.2: Schaltplan eines energieformübergreifenden Kirchhoffschen Netzwerkes. Die modale Bewegungsgleichung und das Kontaktmodell sind zur besseren Übersicht als kompaktes Element dargestellt.

Abbildung 6.2 skizziert für ein einfaches Systemmodell, welches eine nicht-perforierte Platte mit einer Eigenmode und einer Elektrodenanordnung beschreibt, das zu implementierende energieformübergreifende Kirchhoffsche Netzwerk.

Der Schaltplan des Netzwerkes ist bereits für diesen einfachen Fall unübersichtlich. Besitzt das fluidische Netzwerk mehr Knoten oder werden mehrere Eigenmoden berücksichtigt, so ist der Schaltplan nicht mehr darstellbar. Ebenso wird es unmöglich eine derart komplexe Schaltung manuell zu implementieren.

## 6.2 Motivation

Die automatisierte Erstellung von elektro-fluid-mechanisch gekoppelten Systemmodellen ist durch folgende Punkte motiviert:

- *Anwendbarkeit*: Es ist keinesfalls möglich, das in Teilkapitel 5.3.1 beschriebene finite Netzwerk, welches mehrere tausend Knoten umfassen kann, sowie das resultierende energieformübergreifende Kirchhoffsche Netzwerk (siehe voriges Teilkapitel) manuell zu implementieren. Ebenfalls erschwert die Entwicklung von skript-sprachengesteuerten Simulatoren hin zu Simulatoren mit grafischen Oberflächen die Nutzung von semi-automatischen Skripten zur Erstellung von finiten Netzen<sup>2</sup>. Des Weiteren müssen zur Beschreibung der Auslenkung mittels eines modalen mechanischen Modells allen Elementen des verallgemeinerten Netzwerkes entsprechende modale Formfaktoren zugewiesen werden. Eine Automatisierung ist aus diesen Gründen zwingend erforderlich, um das Systemmodell implementieren und, damit die Ansätze überhaupt anwenden zu können.
- *Kalibrierung und Validierung*: Erst die wiederholte Anwendung der beschriebenen Modellierungsansätze aus den Kapitel 3, 4 und 5 auf reale Strukturen ermöglicht es, Modellparameter gegenüber Experimenten zu kalibrieren und daraufhin den Modellierungsansatz in der seiner Gesamtheit zu validieren. Eine wiederholte Anwendung setzt wiederum voraus, dass der Ansatz effizient auf reale Strukturen anwendbar, d.h. gemäß den vorigen Ausführungen, automatisiert ist.
- *Anwenderfreundlichkeit und Lancierung*: Eine benutzerfreundliche Automatisierung fördert die Anwendung des Modellierungsansätze und auf diese Weise die Verbreitung der Methodik.

## 6.3 Ablauf der automatisierten Modellerstellung

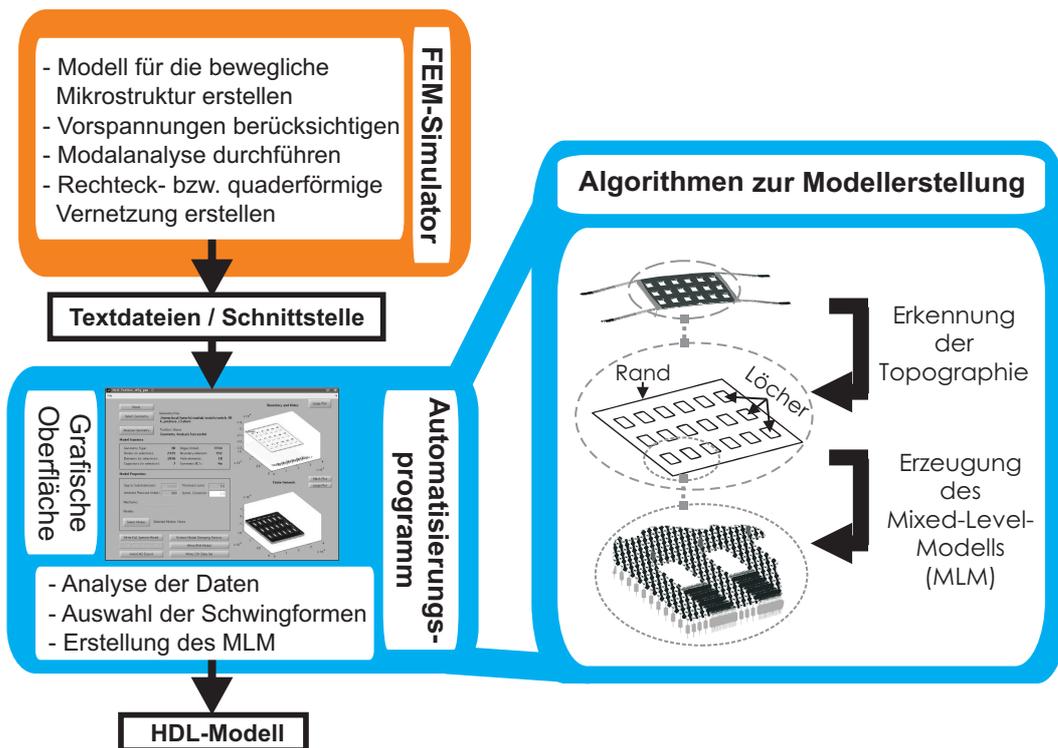
Ein wichtiges Ziel bei der Konzeption der Automatisierung war es, unnötige Parallelentwicklungen zu bereits vorhandenen Programmen zu vermeiden. Aus diesem Grund wird bei der automatisierten Modellerstellung vorausgesetzt, dass Programme, z.B. FEM-Simulatoren, vorhanden sind, welche

- a) die Eigenfrequenzen und -schwingformen einer mechanischen Struktur berechnen,
- b) eine rechteckige<sup>3</sup> bzw. quaderförmige Vernetzung der frei beweglichen Mikrostruktur liefern können, und

---

<sup>2</sup> Beispielsweise das von Sattler in [128] vorgestellte Skript ANTOS, welches in der für Ansys spezifischen Sprache APDL programmiert ist, kann aufgrund der Einführung der grafischen Benutzeroberfläche Ansys Workbench nicht mehr mittels der hauptsächlichen Oberfläche des Simulators ausgeführt werden. Weiterhin sind im Skript Ränder und Löcher manuell zu markieren.

<sup>3</sup> Engl. *mapped mesh*.



**Abb. 6.3:** Ablaufdiagramm der automatisierten Erstellung des elektro-fluid-mechanisch gekoppelten Systemmodells aus den Daten eines FEM-Simulators.

- c) diese Daten einem externen Programm, beispielsweise mittels Textdateien oder einer Programmschnittstelle (API)<sup>4</sup>, zugänglich machen können.

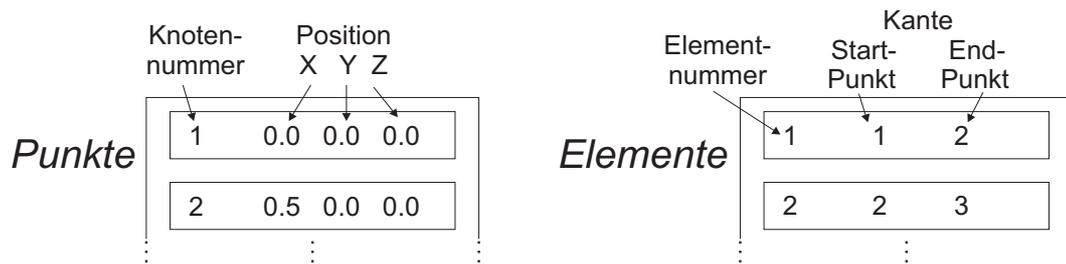
Für die genannten Punkte existieren bereits ausgereifte und implementierte Verfahren [3, 24, 45]. Abbildung 6.3 zeigt, unter der Voraussetzung, dass ein entsprechender FEM-Simulator vorhanden ist, den generellen Ablauf der automatisierten Modellerstellung.

Im ersten Schritt muss der Benutzer im FEM-Simulator ein Modell der beweglichen mikromechanischen Struktur erstellen. In diesem kann er, im Detail, herstellungsbedingte Vorspannungen in der Struktur, sowie weitere Besonderheiten berücksichtigen. Das Modell kann sowohl zwei- als auch dreidimensional sein. Daraufhin muss der Benutzer eine sog. *Modalanalyse* durchführen, in welcher die Eigenfrequenzen und -schwingformen der mechanischen Struktur berechnet werden. Zuletzt muss der Benutzer die komplette Struktur in quaderförmige bzw. rechteckige Elemente vernetzen und, sofern keine Programmschnittstelle zur Übertragung der Daten vorhanden ist, diese als Textdateien ablegen.

Im zweiten Schritt sind die Daten des FEM-Simulators, bestehend aus Eigenfrequenzen und diskretisierten Eigenschwingformen<sup>5</sup>, sowie der Vernetzung der mechanischen Struk-

<sup>4</sup> Engl. *Application Programming Interface (API)*.

<sup>5</sup> Die diskretisierten Eigenmoden sind hierbei so zu normierten, dass diese, gemäß den Ausführungen in Teilkapitel 3.2, die Massenmatrix des mechanischen Modells zur Einheitsmatrix transformieren.



**Abb. 6.4:** Visualisierung der Konstrukte *Punkte* und *Elemente*. *Punkte* enthält in jeweils einem Eintrag die Nummer und die Position der Diskretisierungspunkte. *Elemente* enthält in einem Eintrag jeweils die Elementnummer und eine Elementkante. Eine Elementkante besteht aus einem Start- und einem Endpunkt.

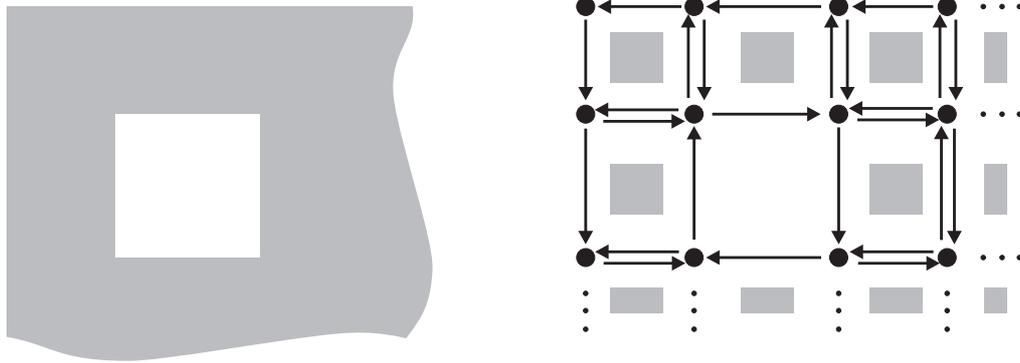
tur, in das Automatisierungsprogramm einzulesen. Sind die Daten im Programm vorhanden, so muss der Benutzer eine geeignete Basis an Eigenschwingformen auswählen. Dieser Schritt ist, wie in den Teilkapiteln 2.3.2 und 3.2 erläutert, essentiell und ist, nach dem Stand der Forschung zum Zeitpunkt dieser Arbeit, nicht uneingeschränkt automatisierbar. Nachdem der Benutzer den Abstand der beweglichen Struktur zum Substrat, den Umgebungsdruck, die im Modell zu integrierenden Elektrodenanordnungen und Kontaktflächen eingegeben hat, kann dieser über die im nächsten Teilkapitel skizzierten Algorithmen die Topographie der mechanischen Struktur analysieren und das elektro-fluid-mechanisch gekoppelte Systemmodell erstellen lassen.

Resultat ist ein transparentes, hierarchisch strukturiertes *HDL*<sup>6</sup>-Modell mit Bibliotheken, welches direkt in einem Schaltungssimulator, in dieser Arbeit in Spectre von Cadence, simuliert werden kann.

## 6.4 Algorithmen

Eine detaillierte Beschreibung der Algorithmen mittels Ablaufdiagrammen wäre, aufgrund zahlreicher Unterroutinen, unübersichtlich. Infolgedessen, wird in diesem Teilkapitel eine textuelle Darstellung ausgewählter Algorithmen vorgenommen, in welcher die durchgeführten Operationen abstrakt beschrieben werden. Die Darlegung geht davon aus, dass die Diskretisierungsdaten in Form der Konstrukte *Punkte*, bestehend aus den Punktnummern und den  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinaten der Punkte, und *Elemente*, bestehend aus Elementnummern und Elementkanten, vorhanden sind. Unter Elementkante wird hierbei ein Konstrukt verstanden, welches zwei Punktnummern, konkret einen Start- und einen Endpunkt, enthält (siehe Abbildung 6.4).

<sup>6</sup> Das Kürzel *HDL* steht für *hardware description language* und ist in Teilkapitel 2.1.2 erläutert.



**Abb. 6.5:** Randbereich einer perforierten Membran (links) und deren Diskretisierung (rechts) in Form von Diskretisierungspunkten und Elementkanten. Elementkanten, die sich am Außenrand und an Löchern befinden, haben keine entgegengesetzte Kante. Elementkanten, die sich im Innenbereich der Membran befinden, haben eine entgegengesetzte Kante.

### Extraktion der zweidimensionalen Diskretisierung

Ist das mechanische Modell dreidimensional, so ist zunächst die Unterseite der Mikrostruktur zu identifizieren, sodass eine, zur Erstellung des finiten Netzwerkes, geeignete, rechteckige und zweidimensionale Diskretisierung vorliegt. Der hierfür notwendige Algorithmus kann wie folgt skizziert werden:

- Finde Diskretisierungspunkt mit minimalen  $x$ ,  $y$  und  $z$ -Koordinaten.
- Merke minimales  $z_{min}$ .
- Extrahiere alle Diskretisierungspunkte und Elementkanten bei  $z_{min}$ .

### Algorithmus zur Erkennung der Topographie

Im zweiten Schritt ist die Topographie der mechanischen Struktur zu identifizieren. Hier wird der Umstand ausgenutzt, dass Elementkanten, die innerhalb eines nicht-perforierten Gebietes liegen, aufgrund der Nachbarelemente, stets entgegengesetzte Elementkanten besitzen (siehe Abbildung 6.5). Folglich sind zur Identifikation des Randes und der Löcher alle Elementkanten zu extrahieren, die keine entgegengesetzte Kanten aufweisen.

- Erstelle Konstrukt  $Kanten$  mit allen Elementkanten der zweidimensionalen Diskretisierung.
- Erstelle leere Konstrukte  $Kanten_{Aussen}$  und  $Kanten_{Innen}$ .

- Solange Konstrukt  $Kanten$  nicht leer:
  - Falls entgegengesetzte Kante vorhanden:
    - \* Speichere Kante in  $Kanten_{Innen}$ .
    - \* Lösche beide Kanten in  $Kanten$ .
  - Falls *keine* entgegengesetzte Kante vorhanden:
    - \* Speichere Kante in  $Kanten_{Aussen}$ .
    - \* Lösche Kante in  $Kanten$ .

Die im Konstrukt  $Kanten_{Aussen}$  vorhandenen Kanten sind in einem zweiten Schritt in Kanten des Randes und der Löcher zu unterteilen.

- Erstelle leeres Konstrukt  $Kette_{Rand}$ .
- Finde in der zweidimensionalen Diskretisierung den Punkt  $p_{LinksOben}$  mit minimalem  $x$  und maximalem  $y$ .
- Speichere  $p_{LinksOben}$  in  $Kette_{Rand}$ .
- Finde erste Kante  $Kante_{2P}$  in  $Kanten_{Aussen}$ , die  $p_{LinksOben}$  enthält.
- Extrahiere Punkt  $p_{neu} \neq p_{LinksOben}$  aus  $Kante_{2P}$ .
- Lösche Kante  $Kante_{2P}$  in  $Kanten_{Aussen}$ .
- Solange Konstrukt  $p_{neu} \neq p_{LinksOben}$ :
  - Speichere  $p_{neu}$  in  $Kette_{Rand}$ .
  - Setze  $p_{alt} = p_{neu}$ .
  - Finde erste Kante  $Kante_{2P}$  in  $Kanten_{Aussen}$ , die  $p_{alt}$  enthält.
  - Extrahiere Punkt  $p_{neu} \neq p_{alt}$  aus  $Kante_{2P}$ .
  - Lösche Kante  $Kante_{2P}$  in  $Kanten_{Aussen}$ .
- Setze  $Anzahl_{Loecher} = 0$ .
- Solange Konstrukt  $Kanten_{Aussen}$  nicht leer:
  - Setze  $Anzahl_{Loecher} = Anzahl_{Loecher} + 1$ .
  - Erstelle leeres Konstrukt  $Kette_{Loch,i}$  mit  $i = Anzahl_{Loecher}$ .
  - Finde in den Punkten der Kanten in  $Kanten_{Aussen}$  den Punkt  $p_{LinksOben}$  mit minimalem  $x$  und maximalem  $y$ .
  - Speichere  $p_{LinksOben}$  in  $Kette_{Loch,i}$ .
  - Finde erste Kante  $Kante_{2P}$  in  $Kanten_{Aussen}$ , die  $p_{LinksOben}$  enthält.

- Extrahiere Punkt  $p_{neu} \neq p_{LinksOben}$  aus  $Kante_{2P}$ .
- Lösche Kante  $Kante_{2P}$  in  $Kanten_{Aussen}$ .
- Solange Konstrukt  $p_{neu} \neq p_{LinksOben}$ :
  - \* Speichere  $p_{neu}$  in  $Kette_{Loch,i}$ .
  - \* Setze  $p_{alt} = p_{neu}$ .
  - \* Finde erste Kante  $Kante_{2P}$  in  $Kanten_{Aussen}$ , die  $p_{alt}$  enthält.
  - \* Extrahiere Punkt  $p_{neu} \neq p_{alt}$  aus  $Kante_{2P}$ .
  - \* Lösche Kante  $Kante_{2P}$  in  $Kanten_{Aussen}$ .

Mittels des Algorithmus entstehen folglich ein Konstrukt  $Kanten_{Innen}$ , welches alle Kanten innerhalb des nicht perforierten Bereichs enthält, ein Konstrukt  $Kette_{Rand}$ , welche eine Verkettung von Punkten enthält, welche als Polygon den äußeren Rand der Mikrostruktur darstellen, und, entsprechend der Gesamtzahl der Löcher, viele einzelne Konstrukte  $Kette_{Loch,i}$ , welche als Polygone die Umrandungen der Perforationen darstellen.

Mit diesen Konstrukten können alle geometrischen Daten, wie z.B. die Knotenflächen  $A_k$ , Knotenabstände  $d_{kl}$ , Kanalweiten  $w_{kl}$ , Randlängen  $r_k$ , sowie gemittelte modale Formfaktoren jeglicher Art berechnet werden, die zur Parametrisierung, und damit zur automatischen Erstellung des fluidischen Mixed-Level-Modells aus Teilkapitel 5.3 erforderlich sind.

### Erstellung von Kompaktmodellen für elektrostatische Anordnungen

Mit den Eingaben des Benutzers ist bekannt, welche Punkte der Diskretisierung zu einer elektrostatischen Anordnung, konkret zur oberen, beweglichen Elektrode, gehören. Der Benutzer kann hierbei mehrere Teilgebiete definieren, sodass Konstrukte  $Punkte_{Elektrode,i}$  vorliegen, welche die zu einer Elektrode zugehörigen Punkte enthalten. Der folgende Algorithmus versucht, mittels der differentiellen Plattenkondensatornäherung (siehe Teilkapitel 4.2), für die vorliegenden Gebiete jeweils einen effektiven Plattenkondensator zu extrahieren. Er liefert dem Benutzer eine Fehlermeldung, falls das extrahierte Plattenkondensatormodell zu hohe Abweichungen gegenüber der differentiellen Plattenkondensatornäherung aufweist.

- Für alle Konstrukte  $Punkte_{Elektrode,i}$ :
  - Für jede, vom Benutzer ausgewählte Eigenmode:
    - \* Berechne für die Punkte im Konstrukt  $Punkte_{Elektrode,i}$  einen gemittelten modalen Formfaktor.
    - \* Berechne die Fläche  $A_{Elektrode,i}$ , die mittels der Punkte in  $Punkte_{Elektrode,i}$  eingeschlossen wird.
    - \* Berechne die modale Amplitude  $q_{max}$  im Kontaktfall, d.h. die maximal mögliche Amplitude.

- \* Erstelle für jeden Punkt aus  $Punkte_{Elektrode, i}$  einen Plattenkondensator.
- \* Berechne für jeden Plattenkondensator die Kapazität über die modale Amplitude  $\in [0, q_{max}]$ .
- \* Addiere die Kapazitäten der Plattenkondensatoren zu einer Gesamtkapazität.
- \* Berechne durch Ausgleichsrechnung einen modalen Formfaktor für den effektiven Plattenkondensator mit der Fläche  $A_{Elektrode, i}$ <sup>7</sup>.
- \* Berechne den maximalen Fehler  $Error_{max}$ , den der effektive Plattenkondensator, über den Bereich der modalen Amplitude  $\in [0, q_{max}]$ , im Vergleich zur Summe der Einzelkapazitäten aufweist.
- \* Generiere eine Fehlermeldung, falls  $Error_{max} > Error_{Schranke}$ .

Da der effektive Plattenkondensator aus der Kapazität  $C_e$ , welche letztendlich proportional zur elektrostatischen Energie  $W_{el}$  bei  $U_e = 1$  V ist<sup>8</sup>, extrahiert wurde, kann dieses Vorgehen als eine Kombination der in den Teilkapiteln 4.2 und 4.4 dargestellten Methodiken gesehen werden: Mittels der differentiellen Plattenkondensatornäherung wird die Kapazität (Energie) in Abhängigkeit der modalen Amplituden berechnet und mittels des Lagrangen Formalismus wird aus dieser Kapazität (Energie), unter Verwendung der Plattenkondensatorformel als Ansatzfunktion, ein Kompaktmodell für die kapazitive Anordnung erstellt.

## 6.5 Automatische Ordnungsreduktion des Mixed-Level Modells

Zur automatisierten Erstellung von ordnungsreduzierten Mixed-Level-Modellen gemäß Teilkapitel 5.3.5, sind seitens des Benutzers zwei weitere Eingaben erforderlich: die Anzahl der Perforationszellen im Randbereich  $Zellen_{Rand}$  (siehe Abbildung 6.6) und die maximal erlaubte relative Abweichung der Perforationszellen hinsichtlich des modalen Formfaktors  $Error_{max,modal}$  in Prozent. Mit  $Zellen_{Rand}$  kann eine perforierte Membran, entsprechend Abbildung 5.18, in Eck-, Rand- und innere, periodische Bereiche unterteilt werden.

Mittels  $Error_{max,modal}$  ist eine weitere Verfeinerung dieser Einteilung durchführbar. Der Grundgedanke hierbei ist folgender: Besitzen Perforationszellen bzw. Rand- oder Eckbereiche hinsichtlich des gemittelten modalen Formfaktors eine Abweichung größer als  $Error_{max,modal}$ , so werden diese, bei gleicher Amplitude, entsprechend unterschiedliche Auslenkungen erfahren, was wiederum in unterschiedlichen Druckprofilen resultiert.

---

<sup>7</sup> Konkret wird zur Bestimmung des modalen Formfaktors eine Ausgleichsrechnung bezüglich der Inversen der Gesamtkapazität ausgeführt. Dies ist darin begründet, dass auf diese Weise lediglich ein Polynom, statt einer inversen Polynomfunktion, vorliegt. Gabbay [43] und Bennini [11] gehen analog vor.

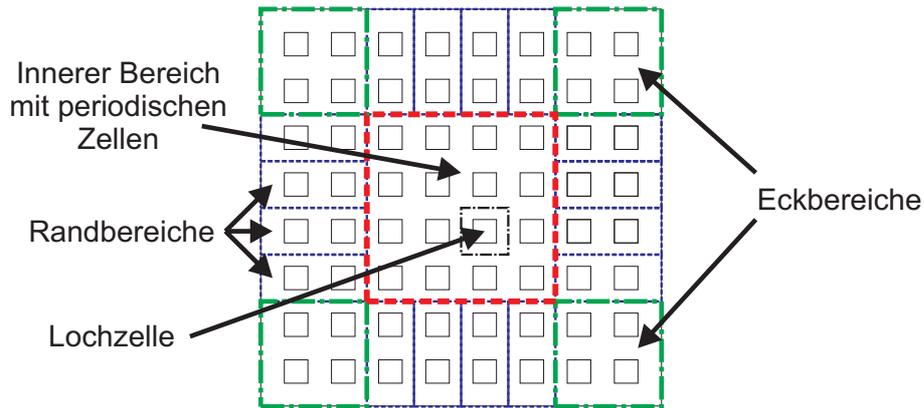
<sup>8</sup>  $W_{el} = \frac{1}{2} C_e U_e^2$

Folglich sollten, z.B. statt die inneren Perforationszellen lediglich durch eine Zelle zu modellieren, mehrere Zellen verwendet werden, die jeweils eine Untergruppe von inneren Zellen modelliert, in welcher eine Abweichung kleiner  $Error_{max,modal}$  vorliegt. Für die inneren Perforationszellen stellt sich der Algorithmus wie im Folgenden dar, und kann entsprechend auf Rand- und Eckbereiche übertragen werden. Voraussetzung für die korrekte Funktionsweise des Algorithmus ist, dass die Membran regelmäßig diskretisiert ist.

- Erstelle anhand der Konstrukte  $Kette_{Loch,i}$  eine Matrix  $M_{Loecher,XY}$  mit den  $x$ - und  $y$ -Positionen der Lochmitten.
- Bestimme mittels  $M_{Loecher,XY}$  die Größe einer Perforationszelle.
- Extrahiere die Diskretisierung  $D_{Zelle}$  einer Perforationszelle. Verwende hierzu eine Zelle aus der Mitte der Membran.
- Berechne für jede Perforationszelle im inneren Bereich der Membran den gemittelten modalen Formfaktor. Verwende hierbei  $D_{Zelle}$  als geometrische Schablone, um die Knoten einer Zelle zu identifizieren.
- Berechne, in rekursiver Weise, solange eine Unterteilung der Zellen, sodass innerhalb der Zellgruppen die gemittelten Formfaktoren weniger, als  $Error_{max,modal}$  voneinander abweichen.
- Erstelle, der Anzahl der Untergruppen entsprechend, viele Perforationszellen der Struktur  $D_{Zelle}$  und parametrisiere jeden Knoten dieser Zellen mit repräsentativen Formfaktoren.

## 6.6 Besonderheiten bei der Implementierung des mechanischen Kontaktes

Die Implementierung des mechanischen Kontaktes ist numerisch delikat, da das Kontaktmodell 3.28, mathematisch gesehen, eine unstetige Funktion mit starken Sprüngen am Übergang bei  $h_{con,k} = 0$  darstellt. Wie in den Teilkapiteln 4.5 und 5.4 erläutert, koppelt das mechanische Subsystem über die Spalthöhe mit *allen* Teilmodellen der elektrostatischen und fluidischen Subsysteme. Dies hat zur Folge, dass sich Unstetigkeiten des mechanischen Modells direkt auf alle anderen Subsysteme auswirken und auf diese Weise das im Schaltungssimulator zu lösende Gleichungssystem rapide divergieren lassen. Die Berechnung eines transienten Schließvorganges mit einem Kontaktmodell der Form 3.28 ist konkret nur mittels zusätzlicher, künstlicher Dämpfungsterme möglich, welche das Simulationsergebnis entsprechend verfälschen [64, 100, 105].



**Abb. 6.6:** Unterteilung einer perforierten Membran (8 x 8 Löcher) mit dem Parameter  $Zellen_{Rand} = 2$ . Randbereiche enthalten auf diese Weise jeweils  $2 \times 1$  (=  $Zellen_{Rand} \times 1$ ) bzw.  $1 \times 2$  Lochzellen, sowie den Rand der Membran und Eckbereiche enthalten jeweils  $2 \times 2$  (=  $Zellen_{Rand} \times Zellen_{Rand}$ ) Lochzellen, sowie die den Rand der Membran. Der Innenbereich der Membran wird durch eine repräsentative Lochzelle modelliert.

Aus diesem Grund wird das mechanische Kontaktmodell mittels einer Übergangsfunktion  $\Xi$  in eine stetige Funktion transformiert. Der Übergang  $\Xi$  ist Funktion der Spalthöhe  $h_{con,k}(\underline{q})$ , und damit der modalen Amplituden:

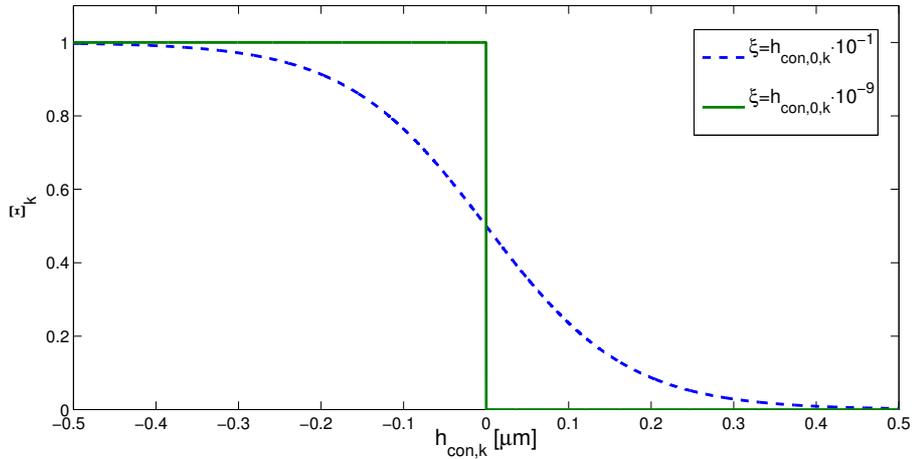
$$\Xi_k(\underline{q}) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ 1 - \tanh \left( \frac{h_{con,k}(\underline{q})}{\xi} \right) \right\} \quad (6.1)$$

Der Parameter  $\xi$  stellt hierbei die „Härte“ des Übergangs ein. Abbildung 6.7 zeigt den Verlauf der Übergangsfunktion für die Werte  $\xi = h_{con,0,k} \cdot 10^{-1}$  und  $\xi = h_{con,0,k} \cdot 10^{-9}$ . Für die Implementierung des mechanischen Kontaktes wird der Parameter zu  $\xi = h_{con,0,k} \cdot 10^{-9}$  gewählt, d.h. der Übergang ist scharf und für allen Werte von  $h_{con,k}(\underline{q})$  stetig.

Infolgedessen gestaltet sich die Implementierung der Kontaktkräfte, zusammen mit den modalen Bewegungsgleichungen, wie folgt:

$$\ddot{q}_{m,i} + \omega_{m,i}^2 q_{m,i} = \sum_{j=1}^n \Phi_{m,i,j} \cdot f_{ext,j} + \sum_k \Xi_k(\underline{q}) \cdot \Phi_{m,con,i,k} k_{con,k} h_{con,k} \quad \forall i \quad (6.2)$$

Jedoch auch mit dieser Formulierung traten, im Rahmen dieser Arbeit, anfänglich Konvergenzprobleme auf. Diese resultierten aus den fluidischen Widerständen und Kapazitäten des Mixed-Level-Modells (siehe Teilkapitel 5.3), welche die Luft zwischen den Kontaktstempeln modellierten und Funktionen der Spalthöhe sind. Grund hierfür war, dass, mit der bisherigen Implementierung im Falle des Eindringens der Membran in den Kontakt der Spaltabstand zu einer negativen Höhe berechnet wurde, was zu physikalisch



**Abb. 6.7:** Übergangsfunktion  $\Xi_k$  für verschiedene „Härten“  $\xi$ .

nicht sinnvollen Ergebnissen führte, welche wiederum die Simulationen divergieren ließen. Folglich sind an Orten möglichen mechanischen Kontaktes ebenfalls die Spalthöhen der fluidischen Modelle mittels Übergangsfunktionen der Art 6.1 hinsichtlich des Minimums auf einen Wert  $h_{f,min}$  zu beschränken:

$$\Xi_k^*(\underline{q}) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ 1 - \tanh \left( \frac{h_{f,k}(\underline{q}) - h_{f,min}}{h_{f,k,0} \cdot 10^{-8}} \right) \right\} \quad (6.3)$$

$$h_{f,k}^*(\underline{q}) = \Xi_k^*(\underline{q}) \cdot h_{f,min} + (1 - \Xi_k^*(\underline{q})) \cdot h_{f,k}(\underline{q}) \quad (6.4)$$

Die Formulierungen 6.1 bis 6.4 erweisen sich bezüglich des elektro-fluid-mechanisch gekoppelten Systemmodells als numerisch stabil und ermöglichen infolgedessen die Simulation des dynamischen Schließ- und Öffnungsverhaltens (siehe Teilkapitel 8.3.2).

## 7. Experimentelle Validierung des mechanisch-fluidischen gekoppelten Modells

Die Unsicherheiten bezüglich der Kompaktmodelle (siehe Teilkapitel 5.3.3) und der Korrekturfaktoren für verdünnte Gase (siehe Teilkapitel 5.3.4) erfordern eine dezidierte experimentelle Bewertung des fluidischen Mixed-Level-Modells. Da das fluidische Modell inhärent mit der Mechanik gekoppelt ist, wird im Folgenden konkret der mechanisch-fluidisch gekoppelte Teil des Systemmodells evaluiert.

Hierzu werden zuerst der experimentelle Messaufbau, sowie die zur Verfügung stehenden Teststrukturen erläutert. Anschließend werden die Messergebnisse diskutiert und zur Bewertung des Mixed-Level-Modells herangezogen. Nach einem Vergleich mit den in Teilkapitel 5.5 vorgestellten, alternativen Modellen, werden die Ergebnisse der Bewertung zusammengefasst.

### 7.1 Experimenteller Messaufbau

Zu Beginn dieser Arbeit war am Lehrstuhl für Technische Elektrophysik der Technischen Universität München als einzige Möglichkeit zur Charakterisierung von mikroelektromechanische Strukturen ein Weißlichtinterferometer des Typs NT1100 DMEMS der Firma Veeco<sup>1</sup> vorhanden. Dieser optische Messaufbau erlaubt die Topographie einer Mikrostruktur berührungsfrei zu vermessen. Hierzu werden, mittels eines Piezoaktors, der optische Fokus auf die Struktur in  $z$ -Richtung durchfahren und die infolgedessen in  $z$ -Abhängigkeit aufgenommenen Interferenzmuster ausgewertet. Auf diese Weise kann, bildlich gesprochen, aus einzelnen Scheiben die dreidimensionale Geometrie der Struktur errechnet werden. Der Vorteil dieses Messverfahrens ist, dass die statische Topographie eines Mikrosystems sehr genau vermessen werden kann. Der Nachteil dieses Verfahrens ist, dass sich zeitaufgelöste Messungen sehr aufwendig gestalten. Zur Durchführung von zeitabhängigen Messungen muss die zu untersuchende Mikrostruktur mit einem synchronisiert betriebenen Stroboskop beleuchtet werden, um ein Quasi-Standbild der sich bewegenden Struktur zu erzeugen, welches durch das Verfahren des optischen Fokus vermessen werden kann. Diese Prozedur setzt ein sich vollständig periodisch bewegendes Mikrobauteil voraus und ist für jeden Phasenschritt der periodischen Bewegung zu wiederholen. Daraufhin ist mittels eines Bildverarbeitungsprogrammes eine Fläche der sich

---

<sup>1</sup> <http://www.veeco.com/>

bewegenden Mikrostruktur zu bestimmen, mit welcher, bezüglich einer zu wählenden Referenzebene, die relative Auslenkung des Mikrobauteils berechnet wird. Auf diese Weise liegt die über die gewählte Fläche gemittelte, relative Auslenkung der Mikrostruktur als primäre Messgröße vor. Der Messvorgang für *eine* zeitaufgelöste Messung samt der graphischen Auswertung umfasst hierbei mehrere Stunden bis Tage.

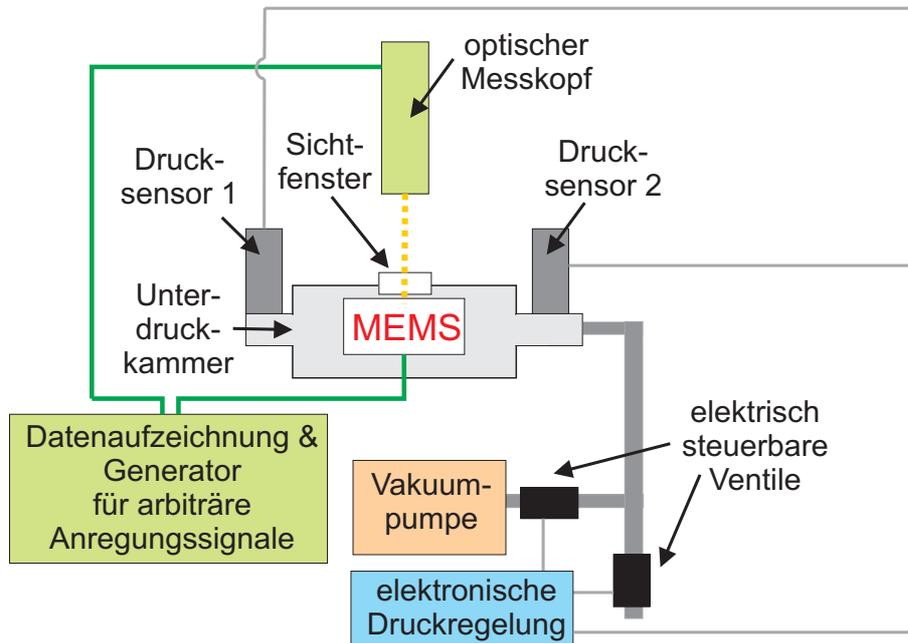
Da für eine experimentelle Untersuchung der fluidischen Dämpfung – hauptsächlich – zeitaufgelöste Messungen erforderlich sind, wurde im Rahmen dieser Arbeit eine zweite und zeitlich effizientere Möglichkeit zur Charakterisierung von Mikrosystemen konzipiert und implementiert. Dieser Aufbau basiert auf einem Raster-Laser-Vibrometer des Typs MSA-500 der Firma Polytec<sup>2</sup> und, auf diese Weise, auf dem Doppler-Effekt [78], als Messprinzip [115, 116, 117]. Die primäre Messgröße ist infolgedessen, im Gegensatz zum ersten Aufbau, die Geschwindigkeit des untersuchten Mikrobau-elementes. Neben der Geschwindigkeit existiert als weitere Messgröße die Auslenkung der Mikrostruktur, welche aus dem Phasengang des überlagerten Laserstrahls bestimmt wird. Die Auslenkung kann jedoch nicht bezüglich einer Referenzebene bestimmt werden und besitzt aus diesem Grund einen willkürlichen Gleichanteil. Wird mit dem Strahl des Lasers lediglich ein Punkt auf der Oberfläche der sich bewegenden Struktur vermessen, so kann eine Messung nahezu in Echtzeit durchgeführt werden. Soll hingegen die Oberfläche einer Mikrostruktur vermessen werden, ist diese in periodische Bewegung zu versetzen und vom Benutzer ein Punkteraster zu definieren, welches vom Raster-Laser-Vibrometer automatisch abgefahren wird. Der flächenartige Messvorgang benötigt mehrere Minuten.

Um eine Untersuchung der fluidischen Dämpfung von Mikrosystemen bei verschiedenen Umgebungsdrücken zu ermöglichen, wurden im Rahmen studentischer Arbeiten eine Unterdruckkammer [90] und eine elektronische Druckregelung entwickelt. Abbildung 7.1 zeigt eine Schemazeichnung des Gesamtaufbaus und Abbildung 7.2 eine beschriftete Photographie einiger Komponenten. In der Unterdruckkammer wird das elektronisch ansteuerbare mikroelektromechanische System (MEMS) installiert. Die Kammer besitzt ein Sichtfenster, durch welches der Laserstrahl die Bewegung der Mikrostruktur optisch erfassen kann<sup>3</sup>. Der Druck in der Kammer wird mittels einer elektronischen Regelung eingestellt. Diese misst mittels zweier Drucksensoren den Ist-Druck, vergleicht diesen mit dem vorgegebenen Soll-Druck und stellt letzteren, mittels zweier elektrisch steuerbarer Ventile, über die Abpumprate ein. Beide Drucksensoren sind hochpräzise kapazitive Sensoren (Messfehler max. 0.2 % [109]). Drucksensor 1 ist für Drücke kleiner 130 Pa und Sensor 2 für Drücke größer 100 Pa ausgelegt. Die elektronische Regelung wählt, je nach Druckbereich, automatisch den entsprechenden Drucksensor aus. Das erste Ventil befindet sich vor der Vakuumpumpe und dient zur Regelung der Abpumprate. Die Vakuumpumpe selbst, welche hybrid aus einer Membran- und einer Turbo-Molekular-Pumpe aufgebaut ist, ist nicht regelbar und läuft stets bei ihrer jeweiligen Vollast-Abpumpleistung. Das zweite Ventil befindet sich zwischen dem Vakuumschlauch und dem Aussenbereich. Es dient zum Einlass von Luft.

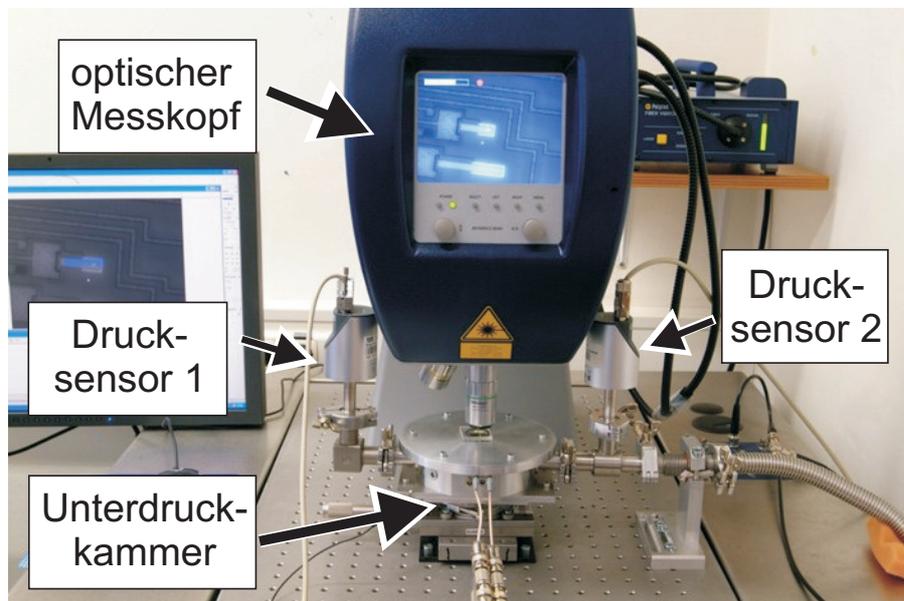
---

<sup>2</sup> <http://www.polytec.de/>

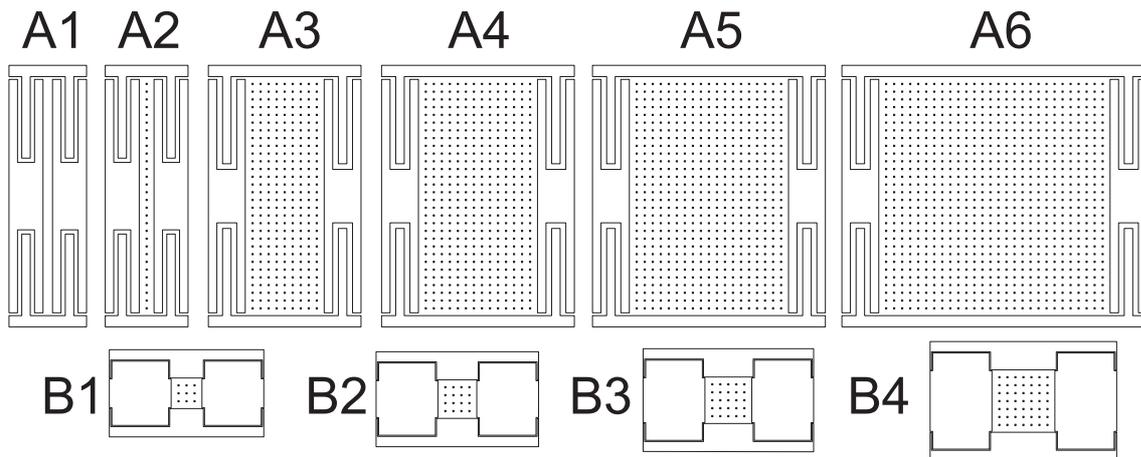
<sup>3</sup> Da die Frequenzverschiebung und nicht, wie beim Weißlichtinterferometer, der Unterschied des optischen Weges ausgewertet wird, muss das Sichtfenster nicht kompensiert werden. Beim Weißlichtinterferometer ist das optische Fenster hingegen optisch zu kompensieren.



**Abb. 7.1:** Schemabild des Raster-Laser-Vibrometer-basierten Aufbaus.



**Abb. 7.2:** Beschriftete Photographie einiger Komponenten des Raster-Laser-Vibrometer-basierten Aufbaus.



**Abb. 7.3:** Beispiel einer Serie von Teststrukturen mit identischem Perforationsgrad. Die Serie unterteilt sich in zwei verschiedene Typen von Strukturen. Die mit A bezeichneten Typen stellen eine, ausgehend von einem nicht perforierten Balken der Länge  $850\ \mu\text{m}$ , stetig breiter werdende Reihe von Membranen dar. Die Breite der Typen A3 bis A6 betragen  $280$ ,  $425$ ,  $560$  und  $850\ \mu\text{m}$ . Die Strukturen des Typs B stellen kleine quadratische Membranen mit je  $3 \times 3$ ,  $4 \times 4$ ,  $5 \times 5$  und  $7 \times 7$  Perforationen dar.

## 7.2 Teststrukturen

Zur Evaluierung des mechanisch-fluidisch gekoppelten Systemmodells wurden im Rahmen dieser Arbeit insgesamt 100 verschiedene Teststrukturen für die Fertigung in SOI-Technologie<sup>4</sup> entworfen. Die Strukturen unterscheiden sich hinsichtlich ihres Perforationsgrades und ihrer lateralen Dimensionen, sodass für einige perforierte Strukturen der Kanalwiderstand, für andere der Blenden- bzw. Randwiderstand dominiert. Auf diese Weise soll eine systematische Bewertung der Kompaktmodelle für die Widerstände ermöglicht werden. Jeweils 10 Strukturen besitzen hierbei einen identischen Perforationsgrad und bilden eine Serie (siehe Abbildung 7.3). Bei 100 Teststrukturen existieren infolgedessen 10 Serien mit unterschiedlichem Perforationsgraden.

Um gezielt die Schmierfilmdämpfung zu untersuchen, wurden die Strukturen derart konzipiert, dass die jeweils erste Eigenschwingung eine hauptsächlich vertikale Bewegung darstellt. Die Teststrukturen können aus diesem Grund auch als vertikal schwingende Resonatoren angesehen werden. Um weiterhin die Stokes-Zahl  $St$  (siehe Teilkapitel 5.1 und 5.2) klein zu halten, wurden mittels mäanderartiger Aufhängungen die Resonanzfrequenzen der Eigenmoden systematisch herabgesetzt.

<sup>4</sup> SOI ist die Abkürzung für *Silicon On Insulator*. SOI-Technologie bezeichnet die Fertigung von Mikrobauelementen unter Verwendung von SOI-Halbleiterscheiben. Diese Halbleiterscheiben sind aus einem Silizium-Oxid-Silizium-Schichtstapel aufgebaut. Für die Teststrukturen wurden Halbleiterscheiben eingesetzt, die aus einer  $500\ \mu\text{m}$  dicken Schicht Silizium, einer  $2\ \mu\text{m}$  dicken Schicht Oxid und einer  $15\ \mu\text{m}$  dicken Schicht Silizium aufgebaut sind.

Aufgrund von Problemen mit dem Herstellungsprozess<sup>5</sup> konnte bis zum Ende dieser Arbeit jedoch nur eine Serie, und diese ebenfalls nur teilweise, erfolgreich fertig gestellt werden. Die hauptsächlichen Effekte, welche die geplante Funktionsweise der Resonatoren verhinderten, waren das vorzeitige Ablösen von Strukturen während des Freistellungsprozesses<sup>6</sup> und Rückstände an der Unterseite der Strukturen [1, 2]. Des Weiteren treten Kerbungsvorgänge<sup>7</sup> auf [2], die entsprechend zu berücksichtigen sind.

Das vorzeitige Ablösen von Strukturen während des Freistellungsprozesses trat auf, da auf einer Halbleiterscheibe Strukturen mit unterschiedlichen Perforationsgraden gefertigt wurden. Die Freistellung von gering perforierten Strukturen benötigt mehr Zeit als das Freistellen von stark perforierten Strukturen. Dies hat zur Folge, dass die Befestigungsrahmen von stark perforierten Strukturen freigestellt wurden, und sich infolgedessen samt der Strukturen ablösten, bevor der Freistellungsprozess für die gering perforierten Strukturen beendet war [1].

Rückstände an der Strukturunterseite (siehe Abbildung 7.4 links) können einerseits von einer nicht vollständigen Freistellung der beweglichen Strukturen stammen, d.h. es liegen Oxidreste vor, oder, andererseits, durch Ablagerung von schwer löslichen Reaktionsprodukten des Ätzprozesses [1] entstehen. Die lateralen Ausmaße und die Höhe der Rückstände können nur durch zerstörende Messverfahren bestimmt werden [1, 2]. Dies bedeutet, dass für ein intaktes Bauteil keine konkrete Spalthöhe ermittelt werden kann, welche jedoch zur Parametrisierung des Mixed-Level-Modell und zur Validierung des letzteren zwingend erforderlich ist. Des Weiteren erhöhen die Rückstände die Masse einer beweglichen Mikrostruktur und beeinflussen auf diese Weise das Schwingungsverhalten des entsprechenden Resonators.

Die Kerbungsvorgänge (siehe Abbildung 7.4 rechts) resultieren aus dem inhomogenen Verhalten des Ätzprozesses an der Oxidschicht der SOI-Halbleiterscheibe [1, 2]. Der Ätzprozess ist in erster Linie für die vertikale Tiefenätzung der oberen Siliziumschicht der SOI-Halbleiterscheibe ausgelegt. Trifft dieser auf die Oxidschicht der SOI-Halbleiterscheibe, wird die freizustellende Mikrostruktur oberhalb der Oxidschicht, d.h. an der Unterseite der Struktur, auch lateral angegriffen. Dies hat eine trichterförmige Aufweitung der Kanäleingänge zur Folge, was bei der fluidischen Modellierung der Strukturen durch eine entsprechende Reduktion des Blendenwiderstandes zu berücksichtigen ist.

Die bisher einzige funktionsfähige Serie an Resonatoren besitzt, bei einer Seitenlänge der quadratischen Löcher von 13.3  $\mu\text{m}$ , einen spezifizierten Perforationsgrad von 45 %. Um sicherzustellen, dass keine Oxidreste vorhanden sind, wurden zwei Strukturen der Serie durch Beaufschlagung mit einer Gleichspannung größer der jeweiligen Schnappspannung, zum Schnappen (siehe Teilkapitel 4.5) auf das Substrat provoziert und die Planarität der aufliegenden Strukturen vermessen<sup>8</sup>. Die Messungen ergaben, dass beide Strukturen plan aufliegen und folglich keine nennenswerten Oxidreste oder Ablagerungen

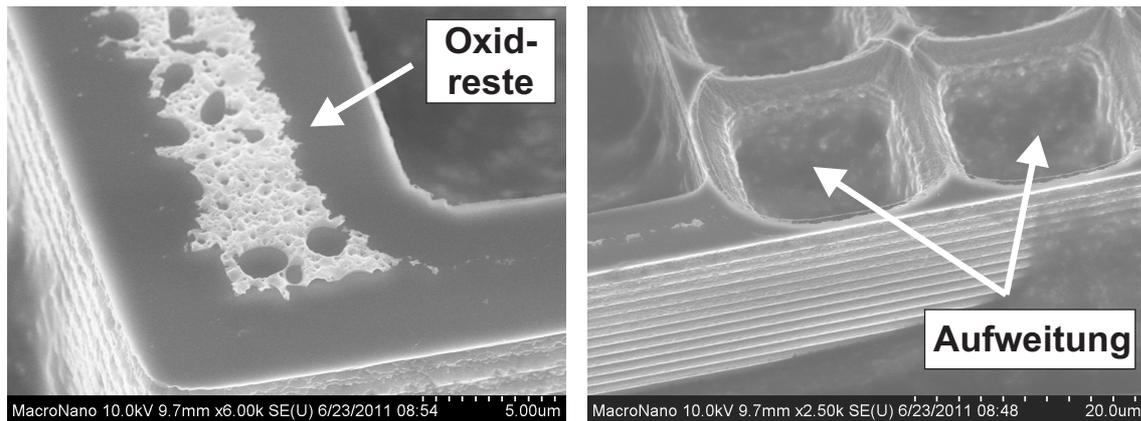
---

<sup>5</sup> Die Dimensionierung der Strukturen befand sich im Grenzbereich dessen, was mit der vorhandenen Anlagentechnik gefertigt werden konnte.

<sup>6</sup> Mit Freistellungsprozess wird hier die Entfernung der Oxidschicht unterhalb der frei beweglichen Mikrostrukturen bezeichnet.

<sup>7</sup> Engl. *notching*.

<sup>8</sup> Sind keine Oxidreste vorhanden, so liegt die frei bewegliche Struktur plan auf dem Substrat auf. Sind



**Abb. 7.4:** Rasterelektronenmikroskopische Aufnahmen [2] von Unterseiten der Teststrukturen. Aufgrund nicht vollständig erfolgter Freistellung können Oxidreste zurückbleiben (links). Kerbungsvorgänge haben eine Aufweitung der Kanaleingänge zur Folge (rechts).

sonstiger Art vorhanden sind. Das Problem dieser Vorgehensweise ist jedoch, dass die Strukturen aufgrund von Adhäsionskräften auf dem Substrat haften bleiben, d.h. diese Art der Messung zerstörend ist. Auf der Basis von topographischen Messungen mittels des Weißlichtinterferometers wurden von den verbleibenden Strukturen der Serie jeweils die vielversprechendsten Vertreter der beiden Strukturtypen, konkret A4 und B4 ausgewählt.

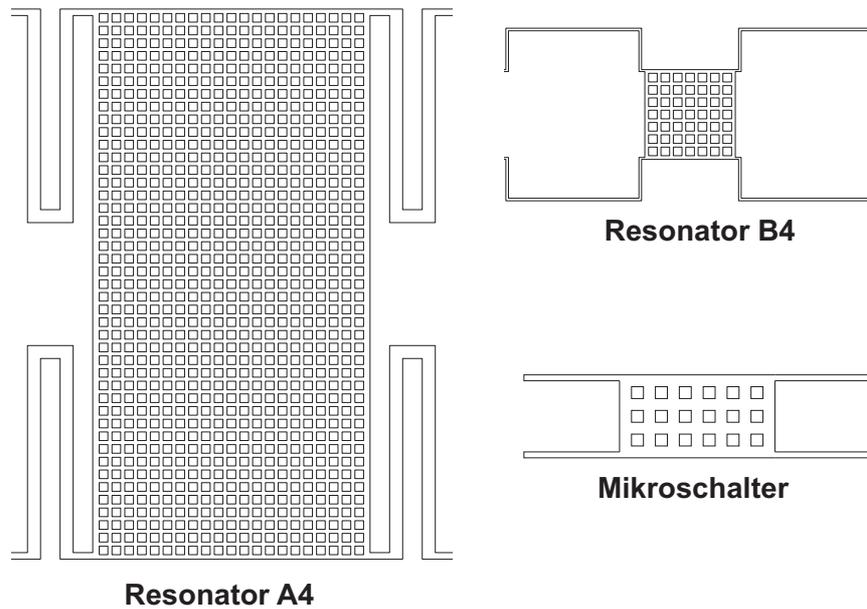
Um diese beiden Strukturen für eine Evaluierung des fluidischen Mixed-Level-Modells sinnvoll zu ergänzen, wurde ebenfalls ein Mikroschalter des in Teilkapitel 1.5 beschriebenen Typs, jedoch mit anderer Spalthöhe<sup>9</sup>, als Teststruktur hinzugenommen und zur Bestimmung der fluidischen Dämpfung nicht als Schalter, sondern als Resonator betrieben.

Infolgedessen stehen für die Evaluierung des Mixed-Level-Modells die drei in Abbildung 7.5 dargestellten Strukturen zur Verfügung. Insgesamt liegen auf diese Weise Strukturen mit einer Membranfläche zwischen 0.017 und 0.36 mm<sup>2</sup>, einer Lochgröße zwischen 13.3 und 20 µm und Perforationsgraden zwischen 23 und 46.9 % vor (siehe Zusammenstellung der technischen Daten in Tabelle 7.1).

---

hingegen Oxidreste vorhanden, so liegt die Struktur nicht plan auf dem Substrat auf und wird ebenfalls nicht um die maximal mögliche Weglänge von 2 µm ausgelenkt.

<sup>9</sup> Zur Untersuchung des Mikroschalters in der Unterdruckkammer musste dieser entsprechend präpariert werden, d.h. es durfte lediglich ein kleines Halbleiterscheibenstück vorliegen, welches des Weiteren mittels Bonddrähten geeignet kontaktiert werden musste. Das einzige, mit Mikroschaltern besetzte, Halbleiterscheibenstück, welches sich für diese Präparation eignete, hatte, durch Variation des Herstellungsprozesses bedingt [62], jedoch eine größere Spalthöhe, als der in Teilkapitel 1.5 dargestellte und in Kapitel 8 untersuchte Mikroschalter.



**Abb. 7.5:** Darstellung der für die experimentelle Validierung des fluidischen Mixed-Level-Modells eingesetzten Strukturen.

	Resonator A4	Resonator B4	Mikroschalter
Material	Silizium	Silizium	Gold
Breite der Membran [ $\mu\text{m}$ ]	425	133	140
Länge der Membran [ $\mu\text{m}$ ]	850	127.6	260
Dicke der Membran [ $\mu\text{m}$ ]	15.65	15.65	5.2
Spalthöhe [ $\mu\text{m}$ ]	2.2	2	(m) 3.1
Seitenlänge der Löcher [ $\mu\text{m}$ ]	13.3	13.3	20
Abstand zwischen Löchern [ $\mu\text{m}$ ]	6.3	5.7	20
Abstand der Löcher zum Rand [ $\mu\text{m}$ ]	(m) 8.45	(m) 3.5	20
Anzahl der Löcher	21 x 43	7 x 7	3 x 6
Perforationsgrad [%]	44.2	46.9	23
Resonanzfrequenz [kHz]	30	44	14

**Tab. 7.1:** Technische Daten der Strukturen aus Abbildung 7.5. Ein vorangestelltes (m) bedeutet, dass ein gemittelter Wert vorliegt. Im Fall des Mikroschalters variiert das Höhenprofil im Luftspalt z.B. zwischen 2  $\mu\text{m}$  und 3.7  $\mu\text{m}$ . Die genannten Resonanzfrequenzen beziehen sich auf die jeweils ersten, vertikalen Eigenschwingungen der Strukturen. Die Topographie der Strukturen wurde mit dem Weißlichtinterferometer vermessen. Die Resonanzfrequenzen wurden mittels des Laser-Vibrometers bestimmt.

### 7.3 Messergebnisse und Diskussion

Zur Darstellung der Messergebnisse ist ein geeignetes Maß zur Quantifizierung der Dämpfung zu wählen. Mit dem Gütefaktor, dem Dämpfungsmaß, dem logarithmischen Dekrement und der Abklingkonstante stehen, wie in Anhang C erläutert, mehrere Möglichkeiten zur Verfügung. Außer der Abklingkonstante werden hierbei alle Maße bezüglich der Eigenfrequenz des vorliegenden Resonators berechnet und führen infolgedessen nur zu einer sinnvollen Quantifizierung der Dämpfung versus des Druckes, wenn die Eigenfrequenz des betrachteten Resonators stabil ist. Die Resonatoren A4 und B4 wurden derart entworfen, dass ihre Resonanzfrequenzen stabil sind. Der Mikroschalter hingegen wurde nie primär für eine Verwendung als Resonator entworfen. Die mechanische Resonanzfrequenz eines Mikroschalters kann sich beispielsweise aufgrund von Prellvorgängen während des Schließens und daher mit steigender Anzahl an Betriebszyklen durchaus verschieben. Aus diesem Grund wurde, als noch lediglich der Weißlichtinterferometerbasierte Messplatz mit dessen beträchtlichen Messzeiten (siehe Teilkapitel 7.1) zur Verfügung stand, in [106] die Abklingkonstante als Maß gewählt, um unabhängig von der variierenden Resonanzfrequenz des Mikroschalters eine sinnvolle Darstellung zu ermöglichen. Mit dem Laser-Vibrometer-basierten Messplatz steht jedoch eine Charakterisierungsmöglichkeit zur Verfügung, mit welcher in einem Bruchteil der vorigen Messzeiten die Dämpfung bestimmt werden kann. Aus diesem Grund ist die Variation der Resonanzfrequenz des vermessenen Mikroschalters vernachlässigbar gering und es ist möglich, das in der Literatur [86, 111, 112, 147] übliche Maß des Gütefaktors zu verwenden.

Der Gütefaktor  $Q$  ist eine dimensionslose Kennzahl, welche sich nach Franke [41] mit der Resonanzfrequenz  $f_{res}$  des betrachteten Resonators wie folgt definiert:

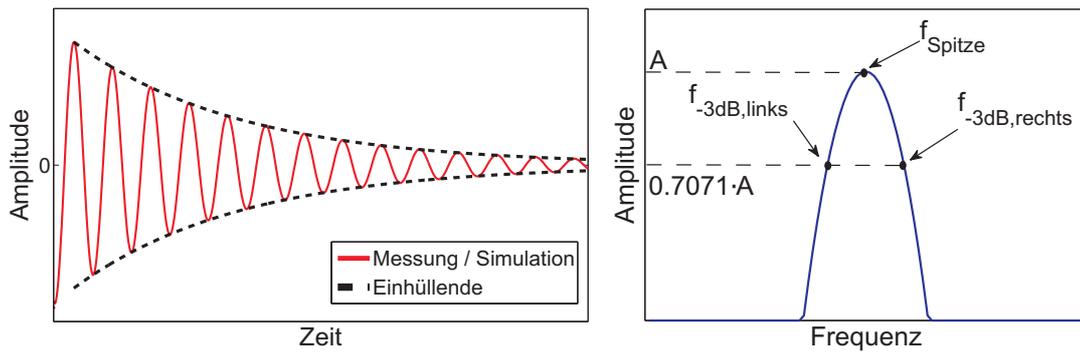
$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \frac{\text{Momentane Gesamtenergie des Resonators}}{\text{Momentan pro Periode dissipierte Energie}} = \\ &= 2\pi f_{res} \frac{\text{Momentane Gesamtenergie des Resonators}}{\text{Momentane mittlere Verlustleistung}} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Der Gütefaktor  $Q$  ist infolgedessen umso höher, je geringer die Verlustleistung eines Resonators, und damit die Dämpfung auf einen Resonator, ist. Der Gütefaktor kann aus Messung und Simulation entweder aus einer Darstellung der Amplitude über die Frequenz (siehe Abbildung 7.6 links), oder über den zeitlichen Verlauf der gedämpften Eigenschwingung (siehe Abbildung 7.6 rechts) extrahiert werden. Die entsprechenden Berechnungsvorschriften sind in den Anhängen C.1 und C.4 erläutert.

Die Gütefaktoren der drei elektrisch angeregten Teststrukturen wurden im Experiment hauptsächlich<sup>10</sup> aus dem Frequenzbereich extrahiert. Hierzu wurden die Strukturen mit weißem Rauschen geringer Amplitude beaufschlagt. Neben dem weißen Rauschen existieren selbstverständlich effizientere Anregungssignale, wie z.B. das sog. *periodic chirp*

---

<sup>10</sup> Es wurden bei bestimmten Drücken ebenfalls Messungen der gedämpften Eigenschwingungen (Anregung mittels Rechteck-Spannung) im Zeitbereich durchgeführt. Diese Messungen dienten jedoch lediglich zur punktuellen Verifikation der aus dem Frequenzbereich extrahierten Gütefaktoren.



**Abb. 7.6:** Der Gütefaktor  $Q$  kann entweder aus dem zeitlichen Verlauf (links), oder aus dem Amplitudenspektrum (rechts) bestimmt werden.

	Resonator A4	Resonator B4	Mikroschalter
$Q_{Exp}$ bei 960 hPa	17.35	37.47	13.58
$Q_{Exp}$ bei $\approx 1$ hPa	553.43	404.5	280.8

**Tab. 7.2:** Experimentell extrahierte Gütefaktoren bei 1 und 960 hPa.

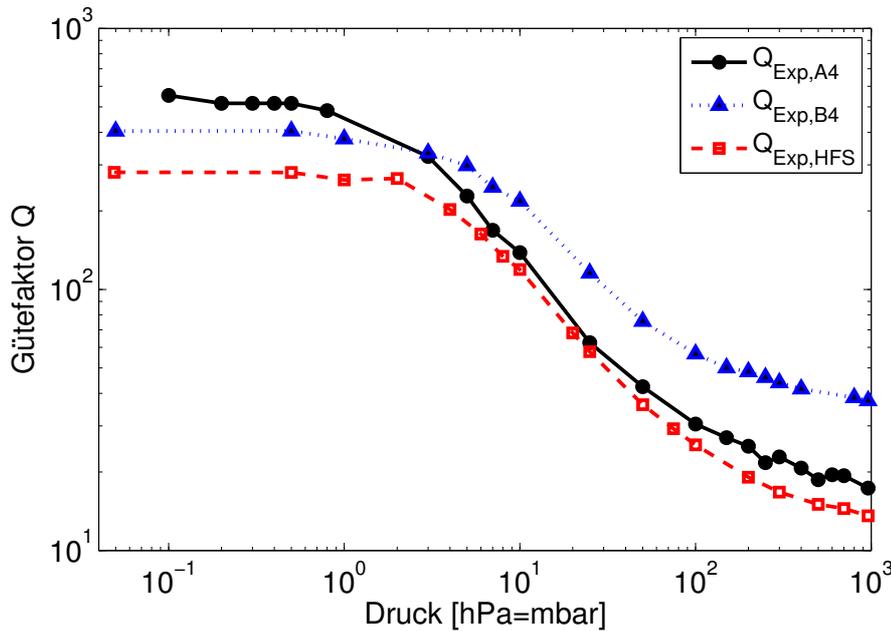
Signal [116]. Aufgrund der nichtlinearen elektrostatischen Kräfte führen diese Anregungssignale jedoch zu entsprechenden Dreckeffekten, welche das mittels Fourier-Transformation erhaltene Amplitudenspektrum für eine Extraktion des Gütefaktors unbrauchbar werden lassen. Eine geringe Amplitude wurde gewählt, um den Einfluss der elektrostatischen Kräfte auf die Eigenfrequenz des Resonators zu minimieren (siehe spätere Ausführungen in diesem Teilkapitel).

Das durch die gewählte Anregungsform bedingte Rauschen im resultierenden Amplitudenspektrum wurde durch Mittelung von ca. 500 Messungen pro eingestelltem Druck entfernt.

Abbildung 7.7 zeigt, für die drei Teststrukturen, die auf diese Weise extrahierten Gütefaktoren über den Druck in der Unterdruckkammer. Tabelle 7.2 gibt des Weiteren die konkreten Werte der Gütefaktoren bei 960 hPa<sup>11</sup> und 1 hPa an. Der qualitative Verlauf ist für alle Teststrukturen identisch. Mit fallendem Druck steigen die Gütefaktoren zuerst an. Dies ist nachvollziehbar, da sich die fluidische Dämpfung verringert. Für Drücke geringer als 1 hPa steigen die Gütefaktoren nicht mehr an, sondern verbleiben auf einer Art Plateau.

Die Deckelung der Gütefaktoren auf diesem Plateau kann einerseits durch weitere dissipative Mechanismen, wie z.B. der thermoelastischen Dämpfung [30] oder Anker- und Oberflächenverlusten [39, 163], andererseits durch die elektrostatische Anregung selbst resultieren. Insbesondere die im Frequenzbereich breitbandige elektrostatische Anregung ist hier kritisch zu betrachten. Die elektrostatischen Kräfte wirken auf die Strukturen ent-

<sup>11</sup> Dies entspricht dem Normaldruck am Standort München, welcher einer Höhe von 518 m über Normalnull besitzt.



**Abb. 7.7:** Experimentell bestimmte Gütefaktoren der drei Teststrukturen bei verschiedenen Drücken in der Unterdruckkammer. Die Markierungen stellen die diskreten Messwerte dar und sind durch entsprechende Linien miteinander verbunden. Für die Messungen wurde das Laser-Vibrometer eingesetzt.

sprechend einer negativen mechanischen Feder und verschieben auf diese Weise die Resonanzfrequenzen der Strukturen. Dies führt, durch die vorher beschriebene Mittelung über mehrere Messungen bedingt, wiederum zu einer Erhöhung der 3dB-Bandbreite und damit zur Verringerung des Gütefaktors (vgl. Ausdruck C.10).

Dieser Vorgang wird im Folgenden kursorisch anhand des Mikroschalters erläutert und abgeschätzt. Hierzu wird dieser in vereinfachter Weise als eindimensionaler Feder-Masse-Schwinger mit der Masse  $m_{fm}$  und der Federsteifigkeit  $k_{fm}$  betrachtet. Werden die Dämpfung und der mechanische Kontakt vernachlässigt, folgt für die Bewegungsgleichung bezüglich der Auslenkung  $z$ :

$$m_{fm}\ddot{z} + k_{fm}z = F_{m,el}(z) \quad (7.2)$$

Wird die nichtlineare elektrostatische Kraft  $F_{m,el}(z)$  um die Ruhelage ( $z = 0$ ) in einer Taylor-Reihe entwickelt, so ergibt sich folgende Darstellung:

$$m_{fm}\ddot{z} + k_{fm}z = F_{m,el}(z)|_{z=0} + \left. \frac{\partial F_{m,el}(z)}{\partial z} \right|_{z=0} z + O^{n \geq 2} \quad (7.3)$$

Wird der zur Auslenkung  $u$  proportionale Term der Reihe auf die linke Seite gebracht, kann eine effektive Federsteifigkeit  $k_{elmech}$  des elektromechanischen Systems definiert werden:

$$m_{fm}\ddot{z} + \underbrace{\left(k_{fm} - \frac{\partial F_{m,el}(z)}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0}}_{=:k_{elmech}} z = F_{m,el}(z)\bigg|_{z=0} + O^{n \geq 2} \quad (7.4)$$

Mit dieser effektiven Federsteifigkeit ergibt sich die Resonanzfrequenz  $f_{elmech}$  des elektromechanischen Systems näherungsweise zu:

$$f_{elmech} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{elmech}}{m_{fm}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{fm} - \frac{\partial F_{m,el}(z)}{\partial z}\big|_{z=0}}{m_{fm}}} \quad (7.5)$$

Die Verschiebung der Resonanzfrequenz  $\Delta f_{res}$  aufgrund der elektrostatischen Kräfte stellt sich auf diese Weise dar, wie folgt:

$$\Delta f_{res} = f_{fm} - f_{elmech} = \frac{1}{2\pi} \left( \sqrt{\frac{k_{fm}}{m_{fm}}} - \sqrt{\frac{k_{fm} - \frac{\partial F_{m,el}(z)}{\partial z}\big|_{z=0}}{m_{fm}}} \right) \quad (7.6)$$

Bei einem elektrischen Signal, welches zwischen 0 und 3 V variiert, kann für den Mikroschalter, mittels Ausdruck 7.6, die Verschiebung auf ca. 7 Hz abgeschätzt werden<sup>12</sup>. Infolgedessen ist die maximal extrahierbare Güte, durch die Anregung und das Messverfahren bedingt, bereits auf  $Q_{max} = 14000/7 = 2000$  beschränkt. Mit steigender Amplitude verringert sich  $Q_{max}$  entsprechend – bei einer Amplitude von 5 V bereits auf  $Q_{max} \approx 740$ .

Diese messverfahrensbedingte Limitierung existiert entsprechend auch für die Resonatoren A4 und B4. Aus diesem Grund sind die Werte der Gütefaktoren auf dem Plateau sehr kritisch zu betrachten.

Natürlich wäre es möglich, die Gütefaktoren, statt aus dem Amplitudenspektrum, aus dem zeitlichen Verlauf über die Abklingkonstante zu bestimmen. Das Problem hierbei ist jedoch, dass die einhüllende Exponentialfunktion bei hohen Werten von  $Q$  nur mehr einen sehr leichten Abfall aufweist und der Fehler bei der Extraktion mittels Ausgleichsrechnung, falls kein entsprechend langer gemessener zeitlicher Verlauf vorliegt, groß wird. Um den durch die elektrostatische Anregung bedingten Fehler zu verifizieren und zu quantifizieren, wurde im Rahmen dieser Arbeit eine Anregung mittels piezoelektrischer Schwingungsgeber getestet. Unglücklicherweise besaßen die Schwingungsgeber parasitäre Eigenresonanzen im Bereich der Resonanzen der Teststrukturen, sodass keine zuverlässige Extraktion von Gütefaktoren möglich war.

---

<sup>12</sup> Die Masse der Membran kann mittels der Dichte auf  $m_{fm} \approx 2 \cdot 10^{-9}$  kg geschätzt werden, und infolgedessen die Federsteifigkeit (über die Resonanzfrequenz von 14 kHz) auf  $k_{fm} \approx 15.4$  N/m. Die elektrostatische Kraft wird mittels der Plattenkondensatorformel geschätzt ( $A_{pk} = 7 \cdot 20 \cdot 140 \cdot 10^{-12}$  m und  $h_{pk} = 3 \cdot 10^{-6}$  m).

	Resonator A4	Resonator B4	Mikroschalter
$Q_{Exp}$ bei 960 hPa	17.35	37.47	13.58
$Q_{MLM}$ bei 960 hPa	17.36	37.39	13.08
rel. Abweichung	0.1 %	0.2 %	3.7 %

**Tab. 7.3:** Vergleich der mittels Mixed-Level-Modell (MLM) und experimentell bestimmten Gütefaktoren bei 960 hPa.

## 7.4 Vergleich mit dem mechanisch-fluidisch gekoppelten Mixed-Level Modell

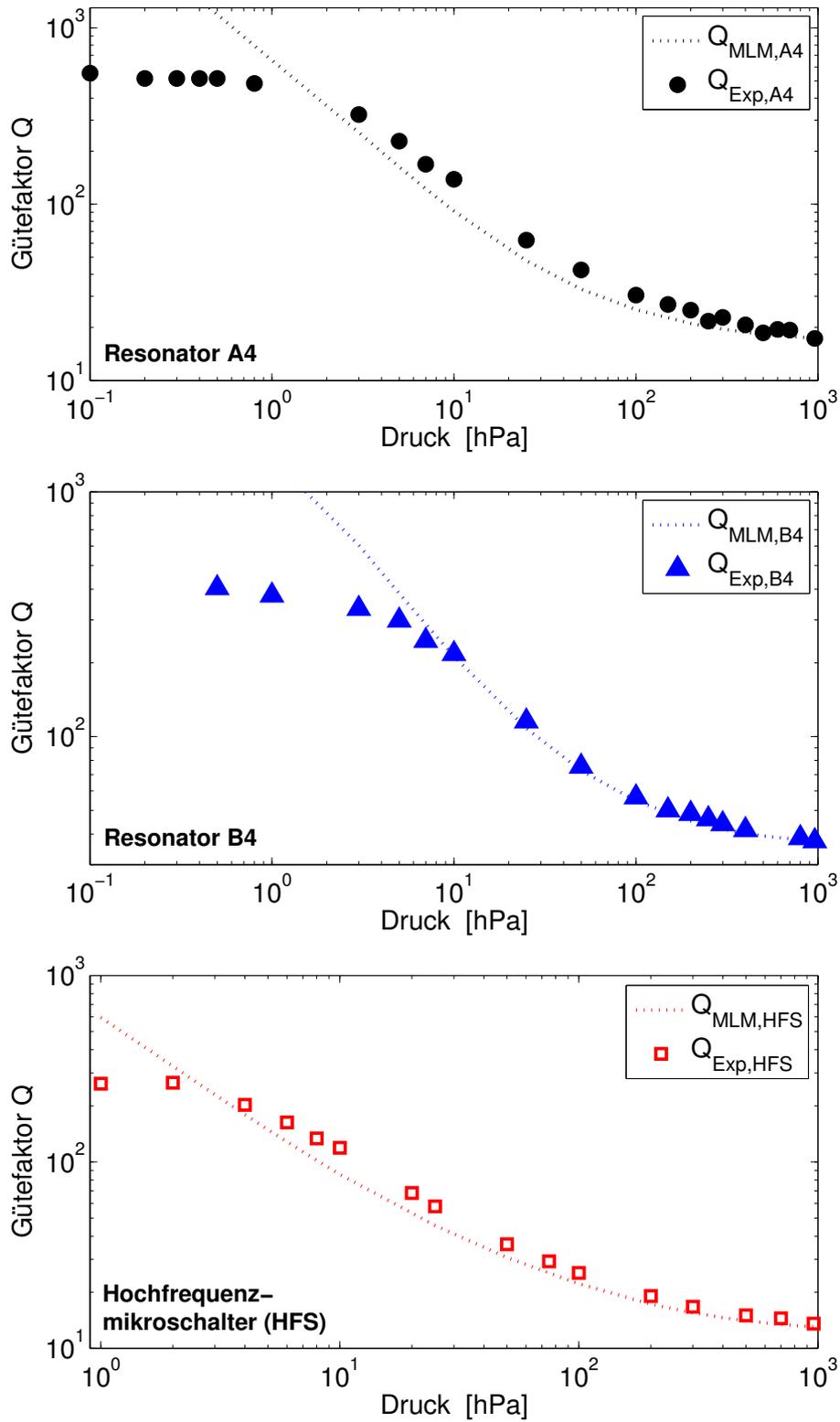
Für die drei Teststrukturen wurden unter Verwendung der technischen Daten aus Teilkapitel 7.2 mittels des in Kapitel 6 dargelegten Automatisierungsprogrammes elektro-fluid-mechanisch gekoppelte Systemmodelle erzeugt. Im Fall des Mikroschalters wurde hierbei auch die örtlich variierende Spalthöhe berücksichtigt. Im Fall der Resonatoren A4 und B4 wurde die Aufweitung der Kanaleingänge an der Strukturunterseite durch eine Halbierung des Blendenwiderstandes (siehe Ausdruck 5.50) berücksichtigt. Diese Modelle wurden im Zeitbereich mit einer Rechteckspannung beaufschlagt und die Gütefaktoren aus der resultierenden abklingenden Schwingung extrahiert.

Abbildung 7.8 vergleicht die Simulationsergebnisse mit den experimentell bestimmten Gütefaktoren. Die mittels Simulation bestimmten Gütefaktoren zeigen für Drücke nahe den Normalbedingungen eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Tabelle 7.3 vergleicht explizit die Werte der Gütefaktoren bei 960 hPa und zeigt, dass die maximale Abweichung weniger als 4 % beträgt. Würden die zusätzlichen, nicht-fluidischen Dämpfungsmechanismen berücksichtigt, welche das Plateau (siehe voriges Teilkapitel) bedingen, so würde sich die Abweichung entsprechend erhöhen<sup>13</sup>.

Mit fallendem Druck, und damit wachsendem Einfluss der nicht experimentell validierten Korrekturfaktoren für verdünnte Gase aus Teilkapitel 5.3.4, überschätzen die Simulationsmodelle die Dämpfung zunächst. Die maximale Abweichung der Gütefaktoren übersteigt hierbei eine Abweichung von 15 % für Drücke weniger als 200 hPa. Wird das Plateau erreicht, wechselt die Überschätzung aufgrund der fehlenden Deckelung durch andere Mechanismen in eine starke Unterschätzung der Dämpfung.

Die bisher untersuchten Mixed-Level-Modelle der Teststrukturen berücksichtigten jede einzelne Perforation. Der mit 903 Löchern perforierte Resonator A4 eignet sich gut, um die in Teilkapitel 5.3.5 dargelegte Vorgehensweise zur Ordnungsreduktion von Mixed-Level-Modellen zu testen und zu bewerten. Tabelle 7.4 zeigt auf, wie viele Freiheitsgrade das vollständige Modell und die jeweils reduzierten Modelle besitzen, die mittels des Algorithmus auf Seite 113ff erzeugt wurden.

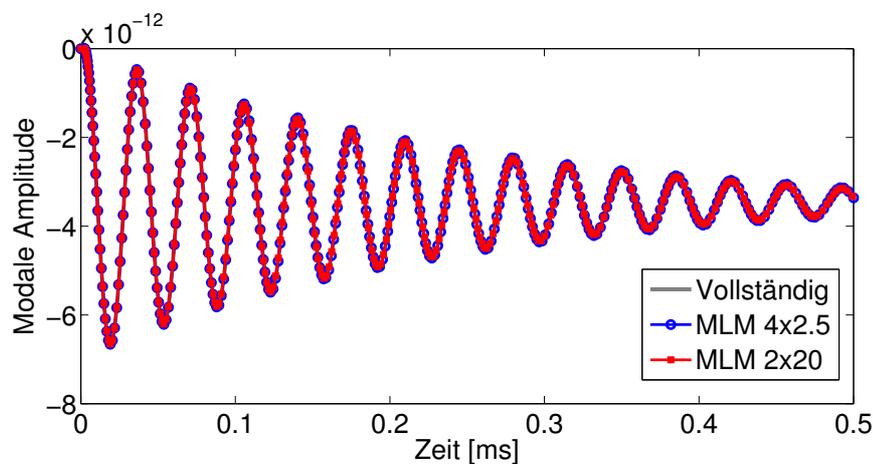
<sup>13</sup> Würden für die Strukturen beispielsweise limitierende Dämpfungsmechanismen mit den Gütefaktoren  $Q_{Limit,A4} = 700$ ,  $Q_{Limit,B4} = 500$  und  $Q_{Limit,HFS} = 350$  angenommen, so ergäben sich mittels des Zusammenhanges  $1/Q_{Gesamt} = 1/Q_{MLM} + 1/Q_{Limit}$  Abweichungen von bis zu 7.2 %.



**Abb. 7.8:** Vergleich der mittels Mixed-Level-Modell (MLM) bestimmten Gütefaktoren mit den experimentellen Ergebnissen.

Bezeichnung	$Zellen_{Rand}$	$Error_{max,modal}$	Freiheitsgrade	Rechenzeit	Fehler $Q$
Vollständig	-	-	10929	325 s	0 %
MLM 4x2.5	4	2.5 %	1156	15 s	1.4 %
MLM 2x20	2	20 %	854	12 s	3.2 %

**Tab. 7.4:** Daten des vollständigen und der ordnungsreduzierten Mixed-Level-Modelle des Resonators A4. Die Rechenzeit bezieht sich auf eine 4 ms lange transiente Simulation gedämpfter Schwingungen, die von einer Rechteckspannung der Periodendauer von 2 ms angeregt werden. Die Simulationen wurden auf einem Prozessor mit einer Taktfrequenz von 2.66 GHz durchgeführt.



**Abb. 7.9:** Ausschnitt der transienten Schwingungsverläufe der modalen Amplituden der ersten Eigenschwingform der Modelle aus Tabelle 7.4.

Das Modell „MLM 4x2.5“ wurde mit einem großen Eck- und Randbereich sowie einer dreifachen Untergruppierung des inneren periodischen Bereiches erzeugt. Das Modell „MLM 2x20“ wurde hingegen mit dem Ziel einer maximalen Reduktion von Freiheitsgraden erzeugt, d.h. es besitzt keinerlei Untergruppierungen. Abbildung 7.9 zeigt die zeitlichen Verläufe der modalen Amplitude der ersten Eigenschwingform des Resonators A4. Die Verläufe unterscheiden sich nur minimal, was sich in der geringen Abweichung der aus diesen Verläufen berechneten Gütefaktoren widerspiegelt. Die Abweichung des am stärksten reduzierten Modells beträgt, bei einer Rechenzeiteinsparung um den Faktor 27, gegenüber dem vollständigen Modell akzeptable 3.2 % (siehe Tabelle 7.4).

Modell	Kapitel	Resonator A4	Resonator B4	Mikroschalter
$Q_{Exp}$	7.3	17.35	37.47	13.58
$Q_{MLM}$	5.3	17.36 (-0.1 %)	37.39 (+0.2 %)	13.08 (+3.7 %)
$Q_{Lochzelle}$	5.5.1	15.25 (+12.1 %)	19.93 (+46.8 %)	18.04 (-32.8 %)
$Q_{mod.Rey.}$	5.5.2	16.18 (+6.7 %)	24.96 (+33.4 %)	6.98 (+48.6 %)
$Q_{Hybrid}$	5.5.3	21.43 (-23.5 %)	44.05 (-17.6 %)	18.80 (-38.5 %)

**Tab. 7.5:** Gegenüberstellung der Gütefaktoren alle Modelle bei 960 hPa. In Klammern ist der relative Fehler gegenüber dem experimentell bestimmten Gütefaktor angegeben. Ein positiver Wert bedeutet eine Überschätzung der Dämpfung, ein negativer Wert eine Unterschätzung der Dämpfung.

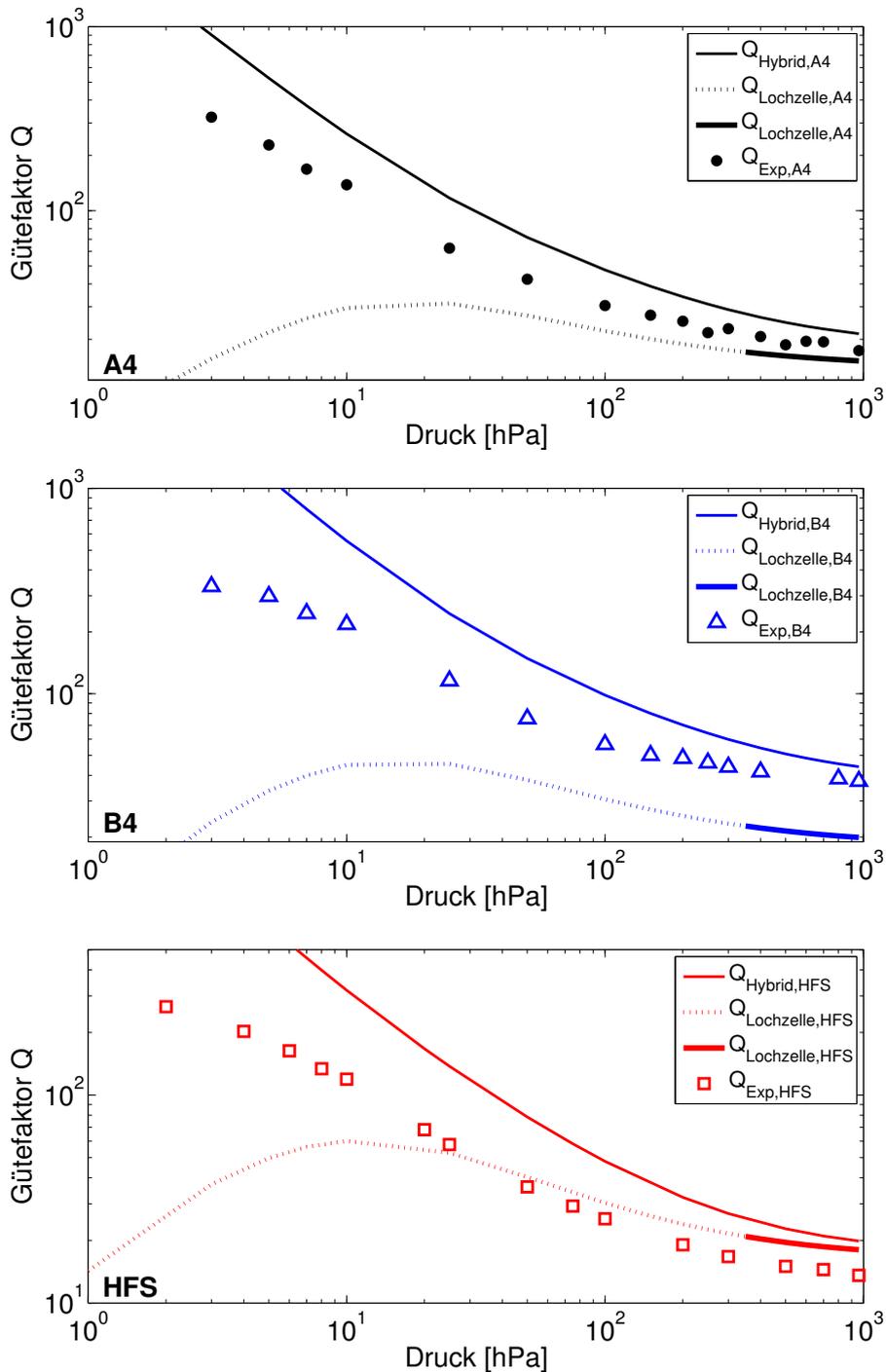
## 7.5 Vergleich mit alternativen Dämpfungsmodellen

Abbildung 7.10 stellt die, mittels der alternativen Modelle aus den Teilkapiteln 5.5.1 ( $Q_{Lochzelle}$ ) und 5.5.3 ( $Q_{Hybrid}$ ), berechneten Gütefaktoren über den Druck dar und vergleicht diese mit den experimentellen Daten. Die Besonderheiten der jeweiligen Teststrukturen wurden, je nach Möglichkeit, berücksichtigt. Im Fall der Aufweitung der Löcher an der Membranunterseite bei den Resonatoren A4 und B4 war dies jedoch nicht möglich, da in den vorhandenen Modellen kein physikalischer Parameter entsprechend verändert werden konnte<sup>14</sup>. Das alternative Modell aus Teilkapitel 5.5.2 ( $Q_{mod.Rey.}$ ) ist nicht dargestellt, da dieses keine verdünnten Gase, und damit Druckvariationen, berücksichtigen kann.

Das Modell aus Teilkapitel 5.5.1, welches auf einer Zerlegung in Lochzellen basiert, tendiert dazu, die Dämpfung zu überschätzen, was durch die nicht vorhandene Berücksichtigung von Randeinflüssen erklärbar ist. Bemerkenswert ist das Verhalten des Modells außerhalb des Gültigkeitsbereichs  $Kn < 0.1$ . Entgegen der physikalischen Erwartung, d.h. mit fallendem Druck steigt der Gütefaktor, verringert sich der mittels des Modells berechnete Gütefaktor unterhalb eines gewissen Druckes wieder. Dieses Verhalten ist auf die rein algebraisch motivierte Gleichungsstruktur des Modells zurückzuführen. Das hybride Modell aus Teilkapitel 5.5.3 tendiert dazu, die Dämpfung zu unterschätzen. Mit fallendem Druck steigt, wie physikalisch zu erwarten ist, der vom Modell errechnete Gütefaktor an.

Um die alternativen Modelle aus Teilkapitel 5.5 möglichst unabhängig von den Einflüssen der Korrekturfaktoren (siehe Teilkapitel 5.3.4) quantitativ bewerten zu können, werden diese in Tabelle 7.5 möglichst nah an den Normalbedingungen, d.h. konkret bei 960 hPa, gegenübergestellt.

<sup>14</sup> Eine Berücksichtigung wäre nur über eine künstliche Verkürzung der Kanallänge oder einer Vergrößerung der Kanalweite möglich gewesen. Hierzu hätten FEM-Simulationen durchgeführt werden müssen, um die entsprechenden Korrekturen bestimmen zu können. Dies widerspricht jedoch dem Gedanken eines vollständig parametrisierten Kompaktmodells.



**Abb. 7.10:** Vergleich der mittels der Modelle aus den Teilkapiteln 5.5.1 ( $Q_{Lochzelle}$ ) und 5.5.3 ( $Q_{Hybrid}$ ) bestimmten Gütefaktoren mit den experimentellen Ergebnissen. Für das Modell aus Teilkapitel 5.5.1 sind die Werte innerhalb des Gültigkeitsbereichs mit durchgezogener Linie, und außerhalb des Gültigkeitsbereichs mit strichlierter Linie dargestellt.

Das Mixed-Level-Modell weist den geringsten Fehler gegenüber den experimentellen Werten auf. Wie zu erwarten war, weisen die alternativen Kompaktmodelle ( $Q_{Lochzelle}$  und  $Q_{mod.Rey.}$ ) für den hoch perforierten und großflächigen Resonator A4 die geringste Abweichungen auf. Für die kleineren Strukturen (Resonator B4 und Mikroschalter) weisen die Kompaktmodelle, vermutlich aufgrund des anteilmäßig größeren Einflusses der Randbereiche, hingegen starke Abweichungen auf. Das Verhalten des hybriden Modells ( $Q_{Hybrid}$ ) ist nicht schlüssig erklärbar. Es ist anzunehmen, dass die in [86] angegebenen Standardwerte für die heuristische Randbedingung und weitere, in [149] beschriebene, nicht physikalisch basierte und nicht transparente Parameter für die untersuchten Strukturen im Rahmen dieser Arbeit nicht optimal gewählt wurden.

## 7.6 Zusammenfassung

Das in Teilkapitel 5.3 erläuterte Mixed-Level-Modell wurde anhand von drei Teststrukturen gegenüber experimentellen Werten und den alternativen Modellen aus Teilkapitel 5.5 evaluiert. Das Mixed-Level-Modell zeigt, trotz der in den Teilkapiteln 5.3.3 und 5.3.4 dargelegten Unsicherheiten bezüglich der Kompaktmodelle und der Korrekturfaktoren eine sehr gute bis akzeptable Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen. Für Drücke oberhalb von ca. 200 hPa betragen die Abweichungen weniger als 15 %. Im Vergleich mit den alternativen Modellen liefert das Mixed-Level-Modell deutlich genauere Gütefaktoren. Hierbei wirken sich vor allem die physikalisch transparenten Parameter und Kompaktmodelle des Mixed-Level-Modells positiv aus, da diese eine gezielte Berücksichtigung der örtlich variierenden Spalthöhe, der Kanalaufweitung und von Randeinflüssen erlauben.



## 8. Simulation eines Hochfrequenzmikroschalters auf der Systemebene

In diesem Kapitel wird für den in Teilkapitel 1.5 beschriebenen, mikromechanischen Hochfrequenzschalter ein elektro-fluid-mechanisch gekoppeltes Systemmodell erstellt und anhand von experimentellen Ergebnissen bewertet. Anfangs werden hierzu einige wichtige Aspekte der Herstellung und deren Auswirkungen auf das Bauteil erläutert. Im Anschluss wird der Hochfrequenzschalter umfassend experimentell charakterisiert. Mit diesen Erkenntnissen wird das gekoppelte Systemmodell erstellt, kalibriert und gegenüber den Daten aus der Charakterisierung bewertet. Mithilfe des kalibrierten Systemmodells wird ein elektrisches Signal konzipiert, welches während des dynamischen Schließvorganges eine Verringerung der Aufprallgeschwindigkeit der Membran ermöglicht. Abschließend wird dieses Signal experimentell untersucht und bewertet.

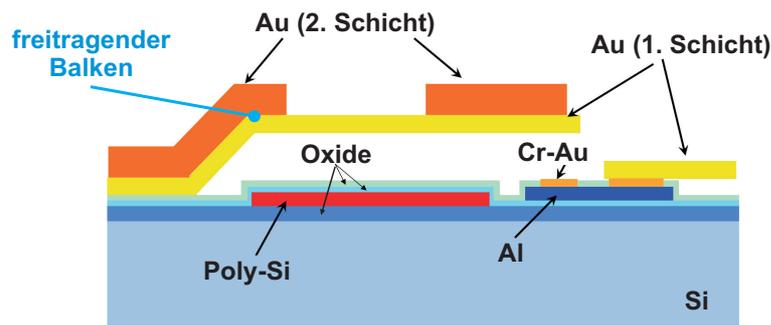
### 8.1 Herstellung des Schalters

Der Hochfrequenzschalter wurde am Forschungsinstitut Fondazione Bruno Kessler (FBK)<sup>1</sup> in goldbasierter Oberflächenmikromechanik gefertigt [48, 66]. Der komplette Prozess umfasst 160 Einzelschritte und ist zur Fertigung von Mikrosystemen für die Anwendung in Hochfrequenzschaltungen konzipiert [35]. Abbildung 8.1 zeigt den Schichtaufbau, welcher durch den Prozess erzeugt werden kann. Als Basis dient eine Halbleiterscheibe aus Silizium (Si), auf welcher zur elektrischen Isolation eine Oxidschicht aufgebracht wird. Auf dieser Oxidschicht werden Pfade für niederfrequente Signale aus Poly-Silizium (Poly-Si) strukturiert. Daraufhin wird zur elektrischen Isolation erneut eine Oxidschicht abgeschieden. Mittels einer hauptsächlich aus Aluminium (Al) bestehenden Metallisierungsschicht werden im nächsten Schritt vergrabene Pfade für hochfrequente Signale geschaffen und wiederum eine isolierende Oxidschicht abgeschieden. Diese Oxidschicht wird an dezidierten Stellen mit Durchkontaktierungen aus einer Chrom-Gold-Legierung (Cr-Au) versehen.

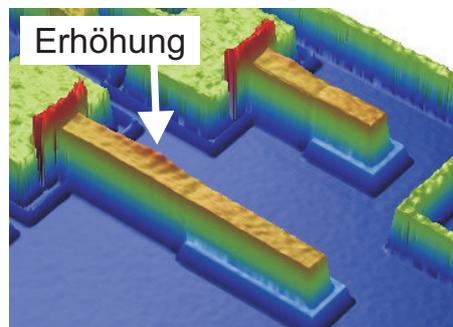
Im Anschluss wird für die Realisierung von freitragenden Strukturen auf die entsprechenden Bereiche der strukturierten Halbleiterscheibe eine Opferschicht aus Photolack aufgebracht. Abschließend werden nacheinander zwei Schichten aus Gold (Au) galvanisch

---

<sup>1</sup> Das Institut ist in Povo di Trento, Italien, angesiedelt. <http://www.fbk.eu>.



**Abb. 8.1:** Aufbau der Strukturen aus den einzelnen, durch den Prozess abgeschiedenen Schichten am Beispiel eines freitragenden Balkens [69].



**Abb. 8.2:** Weißlichtinterferometrische Aufnahme eines freitragenden Balkens. Im hinteren Drittel des Balkens ist eine deutliche Erhöhung der Schichtdicke am Rand des Balkens zu erkennen, wie sie durch eine Inhomogenität des elektrischen Feldes während des galvanischen Abscheidungsprozesses resultieren kann.

abgeschieden und die Opferschicht wieder entfernt. Die Goldschichten stellen die hauptsächlichen Pfade für die hochfrequenten elektrischen Signale dar. Bezüglich der freitragenden Strukturen wird die erste Goldschicht zur grundlegenden Realisierung der geometrischen Form und die zweite Goldschicht zur gezielten Versteifung der freitragenden Strukturen eingesetzt.

Die zweifache galvanische Abscheidung und das Entfernen der Opferschicht sind gleichzeitig die Schritte des Prozesses, welche die stärksten Auswirkungen auf die mechanischen Eigenschaften der freitragenden Strukturen haben. Zum einen ist es, mit der derzeitigen Anlagentechnik diffizil, die Abscheidung der Goldschichten über die gesamte Halbleiterscheibe hinweg homogen zu gestalten [34, 65]. Infolgedessen besteht hinsichtlich der spezifizierten Dicken der Goldschichten von  $1.8\ \mu\text{m}$  bzw.  $3\ \mu\text{m}$  eine Varianz von ca. 13 % [35]. Insbesondere an den Rändern der freitragenden Strukturen können aufgrund der dort inhomogenen elektrischen Feldstärke während der galvanischen Abscheidung unerwünschte Erhöhungen entstehen (siehe Abbildung 8.2).

Zum anderen entstehen während der Entfernung der Opferschicht nicht vernachlässig-

bare Verspannungen in den freitragenden Strukturen<sup>2</sup> [70], die nicht prädiktiv berechnet werden können, darüber hinaus von Prozessdurchlauf zu Prozessdurchlauf variieren und letztendlich durch die Messung von dezidierten Teststrukturen abgeschätzt werden müssen [34, 65].

In Hinblick auf die rechnergestützte Untersuchung des mikromechanischen Hochfrequenzschalters bedeutet dies, dass eine Kalibrierung des verwendeten Systemmodells auf die Technologie der untersuchten Schalter zwingend erforderlich ist. Für diese Kalibrierung sind geeignete Messungen zur Bestimmung der Dicken der Goldschichten sowie zur Extraktion der mechanischen Vorspannungen in den freitragenden Strukturen durchzuführen.

## 8.2 Experimentelle Charakterisierung des Schalters

Die Charakterisierung des Mikroschalters erfolgte in drei Schritten. Zuerst wurde die Topographie des Schalters erfasst, um die Dicken der Goldschichten abzuschätzen, und die weiteren Schichtdicken verifizieren zu können. Im zweiten Schritt wurden die Eigenfrequenzen und -schwingformen des Schalters erfasst, um bei der Kalibrierung des Systemmodells in Teilkapitel 8.3.1 die mechanischen Vorspannungen berücksichtigen zu können. Abschließend wurde das quasi-statische und dynamische Schließ- und Öffnungsverhalten des Schalters aufgenommen.

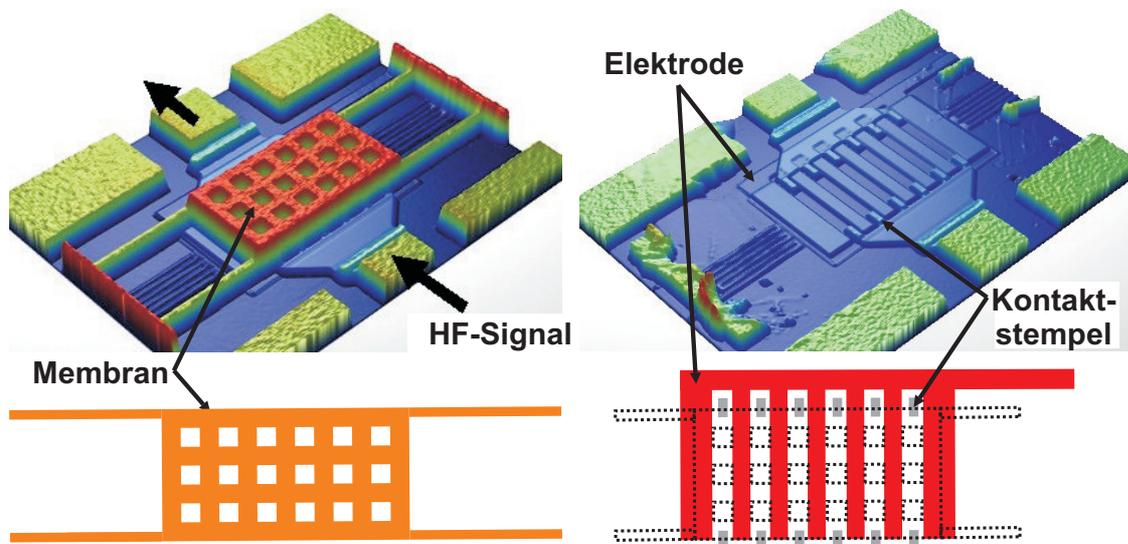
### 8.2.1 Topographie

Abbildung 8.3 zeigt die ermittelte Topographie des Mikroschalters, aus welcher die lateralen Abmessungen des Mikroschalters extrahiert werden können. Diese stimmen mit den durch die Masken definierten Abmessungen überein. Die Randbreiten, Seitenlängen der Löcher und Lochabstände der Membran betragen jeweils 20  $\mu\text{m}$ , woraufhin sich die in Tabelle 7.1 aufgeführten Abmessungen ergeben. Die Aufhängungen besitzen eine laterale Abmessung von 165  $\mu\text{m}$  x 10  $\mu\text{m}$  (Länge x Breite). Die lateralen Dimensionen der Bodenelektrode aus Poly-Silizium sind mittels des Weißlichtinterferometers ebenfalls vermessbar, da die Oxidschichten optisch durchlässig sind. Die Elektrode besteht aus sieben miteinander verbundenen Fingern der Breite 20  $\mu\text{m}$ , welche sich jeweils unter den nicht perforierten Stegen der Membran befinden. Die Kontaktstempel haben eine Breite von 10  $\mu\text{m}$  und befinden sich unter dem Rand der perforierten Stege der Membran.

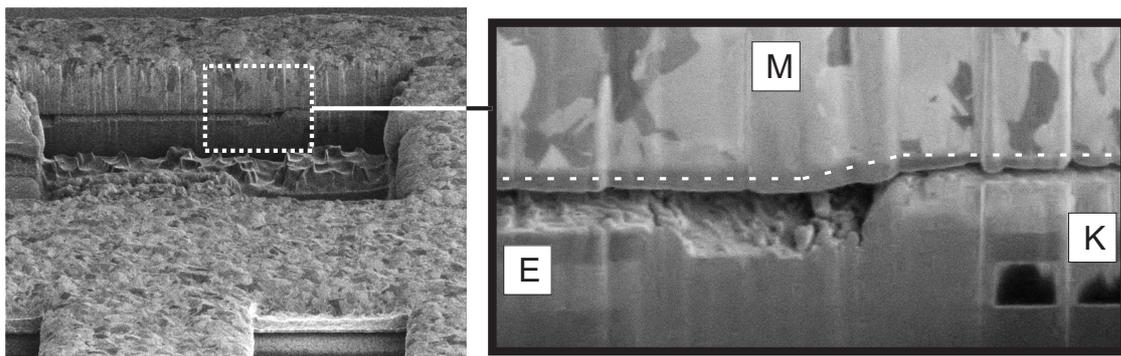
Die Dicken der Membran und der Aufhängungen können mittels des Weißlichtinterferometers aufgrund der optisch durchsichtigen Oxidschichten nicht bestimmt werden. Infol-

---

<sup>2</sup> Die Vorspannungen werden durch mehrere Mechanismen erzeugt, deren Zusammenwirken bis zum Zeitpunkt dieser Arbeit noch nicht vollständig geklärt ist [65]. Aus diesem Grund werden diese im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht diskutiert.



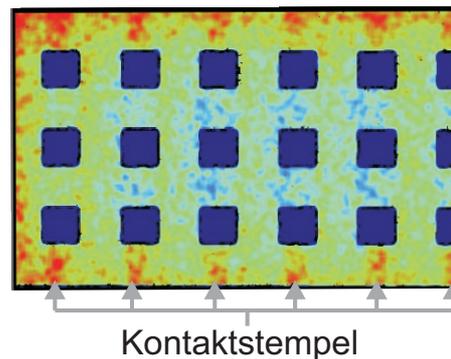
**Abb. 8.3:** Weißlichtinterferometrische Aufnahmen und Schemazeichnungen des Schalters mit (links) und ohne Membran (rechts). Die Membran wurde mittels eines zerstörenden Verfahrens entfernt.



**Abb. 8.4:** FIB/REM-Aufnahmen des Schalters. Zuerst wurde mittels eines Ionenstrahls ein Loch erzeugt (links). Durch schräge Ansicht der Probe konnten in einem zweiten Schritt die Schichtdicken der Struktur bestimmt werden. Die rechte Abbildung zeigt einen Ausschnitt mit Membran (M), Elektrode (E) und Kontaktstempel (K) im geschlossenen Zustand des Schalters. Die strichlierte Linie zeichnet die Deformation der Membran nach.

gedessen wurden FIB<sup>3</sup>/REM-Messungen durchgeführt. Hierzu wurde mittels eines Ionenstrahls erst ein rechteckförmiger Bereich abgetragen, um die Schichtdicken unterhalb der Membran bestimmen zu können (siehe Abbildung 8.4).

<sup>3</sup> FIB steht für *Focused Ion Beam*. Ausgewertet wird hier die Streuung der Ionen bzw. Elektronen an der zu untersuchenden Struktur. Aus diesem Grund sind mittels des FIB-Verfahrens auch Oxidschichten vermessbar.



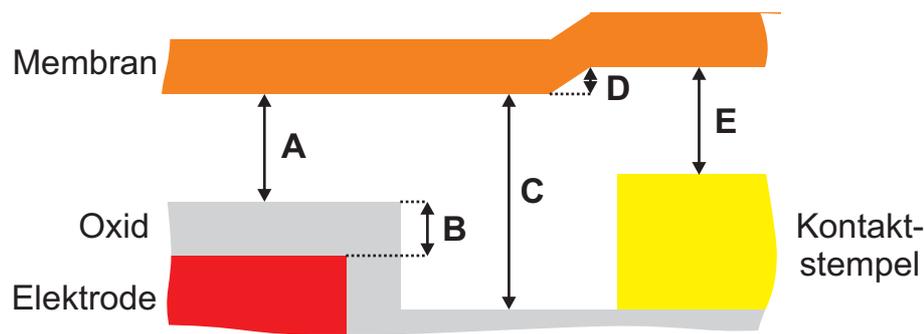
**Abb. 8.5:** Weißlichtinterferometrische Profilmessung der Membran in Falschfarbendarstellung. Oberhalb der Kontaktstempel sind deutliche Erhöhungen zu erkennen.

Bezeichnung	Mittelwert [nm]
(A) Abstand zw. Oxid(Elektrode) und Membran	2300
(B) Dicke des Oxids auf der Elektrode	400
(C) Abstand zw. Oxid(Substrat) und Membran	3000
(D) Deformation der Membran	400
(E) Abstand zw. Kontaktstempel und Membran	1680
Dicke der Federn	1800
Dicke der Membran	3200
Verbleibender Luftspalt	50

**Tab. 8.1:** Vertikale Abstände der Abb. 8.6 und Dicken von Federn und Membran.

Die FIB/REM-Aufnahmen zeigen, zum einen, die Oberflächenrauigkeit der galvanisch abgeschiedenen Schichten (vgl. Abbildung 8.4 links). Zum anderen zeigen sie, dass die Membran leicht deformiert ist (siehe weiße Linie in Abbildung 8.4 rechts). Die Form der Deformation lässt vermuten, dass die Membran während der Schließvorgänge an den Stellen der Kontaktstempel mit zunehmender Zyklenzahl plastisch verformt wird. Da diese Verformungen auch im offenen Zustand messbar sind (siehe Abbildung 8.5), wird diese Vermutung bestätigt. Des Weiteren zeigen die Aufnahmen, dass die Membran im geschlossenen Zustand des Schalters nicht plan auf den Kontaktstempeln aufliegt, sondern ein sehr geringer Luftspalt verbleibt.

Mit den aus den FIB/REM-Aufnahmen extrahierten Werten und der mittels des Weißlichtinterferometers gemessenen Auslenkung der Membran im geschlossenen Zustand können die in Abbildung 8.6 dargestellten vertikalen Abstände und die Schichtdicken der Federn und der Membran zu den in Tabelle 8.1 aufgeführten Werten bestimmt werden. Diese weichen teilweise erheblich von den in [35] spezifizierten Werten ab. Die Untersuchung der Topographie war aus diesem Grund sinnvoll. Ungewollte lokale Vergrößerung der Schichtdicken aufgrund der galvanischen Abscheidung konnten hingegen in keiner nennenswerten Höhe festgestellt werden.



**Abb. 8.6:** Für das Modell relevante vertikale Abstände und deren Bezeichnung. Die Werte für die Abstände sind in Tabelle 8.1 aufgeführt.

## 8.2.2 Eigenfrequenzen und -schwingformen

Die Bestimmung der mechanischen Vorspannungen für die Modellierung erfolgt über die Verschiebung der Eigenfrequenzen. Aus diesem Grund wurden nach der topographischen Charakterisierung die Eigenfrequenzen und -schwingformen des Mikroschalters untersucht. Hierzu wurde der Mikroschalter, gemäß den Ausführungen in Teilkapitel 7.3, elektrisch mit weißem Rauschen beaufschlagt und die Membran mithilfe des Raster-Laser-Vibrometers flächenartig vermessen. Mittels dieser Art der Anregung und Messung werden alle Schwingformen erfasst, die über die Elektroden aktiviert werden können<sup>4</sup> und vertikale Schwingungskomponenten<sup>5</sup> besitzen.

Abbildung 8.7 zeigt das über alle Rasterpunkte gemittelte Geschwindigkeitsspektrum der Membran. Bis zu einer Frequenz von 250 kHz sind im Spektrum acht Resonanzüberhöhungen, gekennzeichnet als  $M_{e,1}$  bis  $M_{e,8}$ , erkennbar<sup>6</sup>. Abbildung 8.7 zeigt die zugehörigen Eigenschwingformen<sup>7</sup>. Da das optisch verfügbare Bildfeld die Aufnahme des gesamten Schalters nicht erlaubte, sind jeweils nur die Aufhängungen und ein Teil der Membran dargestellt. Ein schwarzes Gitternetz visualisiert hierbei die Nulllage des untersuchten Strukturteils.

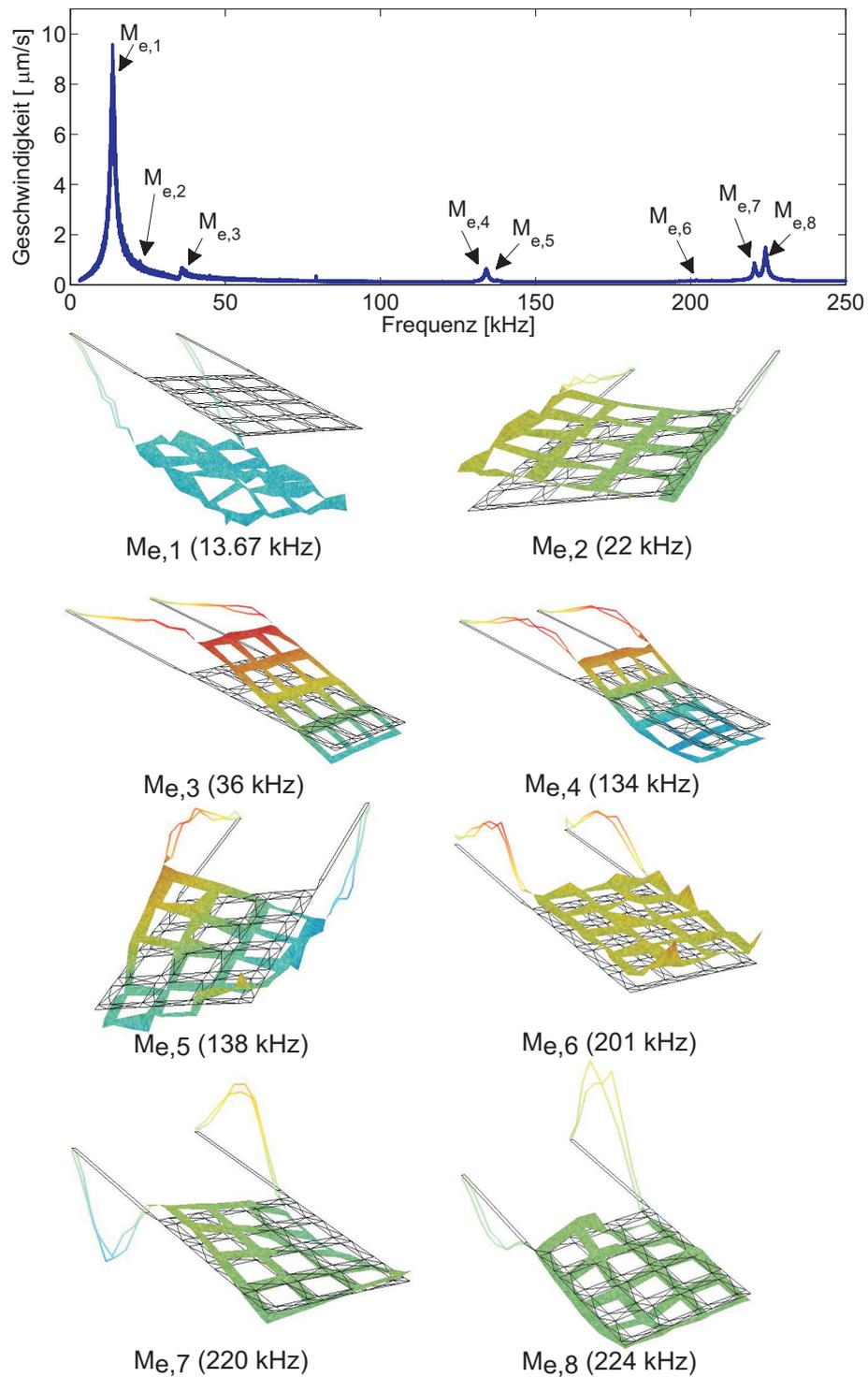
Die vertikal schwingende, fundamentale Eigenfrequenz bei 13.67 kHz dominiert das Spektrum, so dass die zweite Eigenfrequenz, welche eine Verkippung darstellt, im Spektrum kaum erkennbar ist. Um 220 kHz existieren zwei Eigenresonanzen, deren Schwingformen  $M_{e,7}$  und  $M_{e,8}$  sich nicht eindeutig trennen lassen.

<sup>4</sup> Mittels der elektrostatischen Anregung wird aus dem Resonator, d.h. der Membran des Mikroschalters, ein geführtes System. Folglich werden nur die durch die elektrische Führung angesprochenen Eigenschwingformen aktiviert.

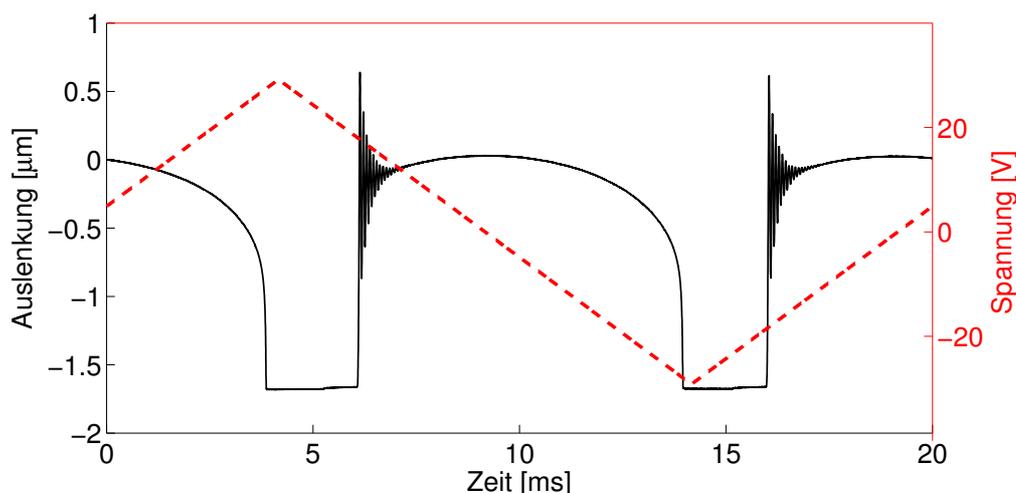
<sup>5</sup> Laterale Schwingungskomponenten können mit dem in Teilkapitel 7.1 beschriebenen Messaufbau nicht erfasst werden.

<sup>6</sup> Es wurde ebenfalls für Frequenzen größer 250 kHz nach Resonanzüberhöhungen gesucht, was aufgrund bei der niedrigen Anregungsamplitude wegen des zunehmenden Rauschpegels in den signalverarbeitenden elektronischen Komponenten jedoch zu keinem Erfolg führte.

<sup>7</sup> Die Abbildung zeigt konkret die, auf die Fläche der Membran interpolierten, Geschwindigkeiten der Rasterpunkte bei der entsprechenden Frequenz.



**Abb. 8.7:** Geschwindigkeitsspektrum der Membran bei Anregung mittels weißem Rauschen und zugehörige Eigenschwingformen.



**Abb. 8.8:** Mittels Raster-Laser-Vibrometer im Zeitbereich gemessene Auslenkung der Membran bei einer Anregung mittels Dreiecksspannung.

### 8.2.3 Schließ- und Öffnungsverhalten

Im letzten Schritt der experimentellen Charakterisierung werden das quasi-statische und das dynamische Schließ- und Öffnungsverhalten des Schalters untersucht. Ziel der quasi-statischen Analyse ist die Bestimmung der statischen Schnapp- bzw. Lösespannung (siehe Teilkapitel 4.5). Hierzu ist der Schalter mittels eines niederfrequenten Signals derart anzuregen, dass die Massenträgheit und die Dämpfungskräfte einen möglichst geringen Einfluss ausüben. Gleichzeitig ist die Form des elektrischen Anregungssignals dergestalt zu wählen, dass der Effekt der dielektrischen Aufladung [33, 84, 140] möglichst minimiert wird. Dies entspricht einem Signal ohne Gleichanteil.

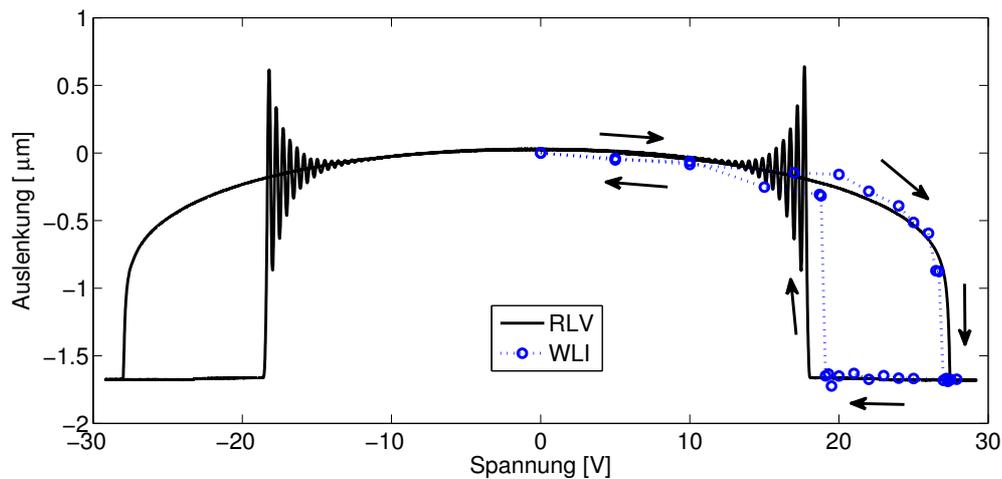
Diese Anweisungen befolgend, wird der Mikroschalter zur Messung der Auslenkung mit einer Dreiecksspannung der Amplitude  $60 \text{ V}^8$  und der Frequenz  $50 \text{ Hz}$  beaufschlagt (siehe Abbildung 8.8). Die Membran des Schalters wird mit ansteigender Spannung<sup>9</sup> kontinuierlich stärker ausgelenkt, bis die Schnapp-Spannung erreicht ist und die Membran auf die Kontaktstempel gezogen wird. Bei fallender Spannung löst sich die Membran bei Erreichen der Lösespannung und kehrt mittels einer gedämpften Oszillation wieder zur ihre Ruhelage zurück.

Durch Auftragen der Auslenkung über die angelegte Spannung entsteht der Graph 8.9, welcher eine direkte Extraktion der Schnapp-Spannung  $U_S$  und Löse-Spannung  $U_L$  erlaubt. Die Abbildung 8.9 enthält des Weiteren Werte aus einer manuellen Messungen mithilfe des Weißlichtinterferometers<sup>10</sup>. Tabelle 8.2 listet die aus den Messungen extrahierten Schnapp- und Löse-Spannungen auf. Zwischen der positiven ( $U > 0$ ) und nega-

<sup>8</sup> Amplitudenwert von Spitze zu Spitze.

<sup>9</sup> Das Vorzeichen der Spannung ist hierbei irrelevant (siehe Ausdruck 4.17).

<sup>10</sup> In der Messung wurde eine Spannungsquelle manuell gesteuert und für die verschiedenen Spannungen die Auslenkung der Membran bestimmt. Durch die manuelle Steuerung der Quelle ist keine derart feine



**Abb. 8.9:** Auslenkung der Membran in Abhängigkeit der angelegten Spannung. Es sind Messwerte des Raster-Laser-Vibrometers (RLV) und des Weißlichtinterferometers (WLI) angegeben. Der Schließ- und Öffnungszyklus des Schalters ist mittels Pfeilen verdeutlicht.

tiven ( $U < 0$ ) Dreieckspannung sind sowohl Schnapp- als auch Lösespannung um konstant  $0.5 \text{ V}$  verschoben. Dies deutet nach Iannacci [67] darauf hin, dass eine permanente Einlagerung von parasitärer Ladung in der Oxidschicht oberhalb der Bodenelektrode vorhanden ist, was bei der späteren Modellierung des Schalters durch eine Spannungsquelle mit konstanter Spannung zu berücksichtigen ist. Die mittels des Weißlichtinterferometers extrahierten Werte weichen  $3 \%$  ( $U_S$ ) bzw.  $6 \%$  ( $U_L$ ) von der Vibrometer-Messung ab, was durch die manuelle Ansteuerung bedingt sein kann. Im Vergleich zu Messungen des identischen Schalters und weiterer Schalter der gleichen Bauart [71], welche zwei Jahre früher stattfanden, ergeben sich weit größere Abweichungen von bis zu  $7 \%$  ( $U_S$ ) bzw.  $32 \%$  ( $U_L$ )<sup>11</sup>. Dies verdeutlicht, dass sowohl  $U_S$  als auch  $U_L$  über den Lebenszyklus des Mikroschalters keine konstanten Größen sind. Infolgedessen ist es nicht zielführend, das Modell eines Hochfrequenzschalters der vorliegenden Bauart derart zu kalibrieren, dass  $U_S$  bzw.  $U_L$  mit den experimentellen Daten exakt übereinstimmen.

Zur Analyse des dynamischen Schließ- und Öffnungsverhaltens wird der Schalter mit einer Rechteckspannung der Frequenz  $200 \text{ Hz}$  und der Amplituden  $35 \text{ V}$  bzw.  $0 \text{ V}$  beaufschlagt. Die Spannung von  $35 \text{ V}$  liegt deutlich über der statischen Schnapp-Spannung, was zunächst verwunderlich erscheint, da, wie in Teilkapitel 4.5 erläutert, im dynamischen Fall bereits eine Spannung kleiner der statischen Schnapp-Spannung ausreichen

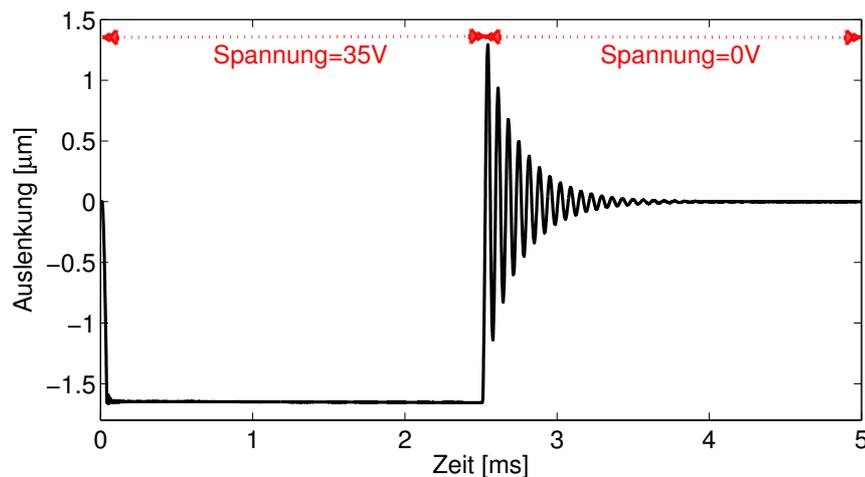
---

Auflösung der Spannung, wie beim automatisch ablaufenden Messvorgang mittels des Raster-Laser-Vibrometers möglich.

<sup>11</sup> Dieser beträchtliche Unterschied ist vermutlich durch die plastische Deformation bedingt, welche im geschlossenen Zustand den Abstand zwischen Bodenelektrode und Membran verringert, was wiederum zu erhöhten elektrostatischen Kräften führt. Aufgrund der höheren Kräfte löst sich die Membran erst bei entsprechend niedrigerer Spannung.

Messung	$U_S$ [V]	$U_L$ [V]
RLV ( $U > 0$ )	27.2	17.9
RLV ( $U < 0$ )	-27.7	-18.4
WLI ( $U > 0$ )	27	19

**Tab. 8.2:** Werte der aus den Messungen in Abbildung 8.9 extrahierten Schnapp- ( $U_S$ ) und Löse-Spannungen ( $U_L$ ).



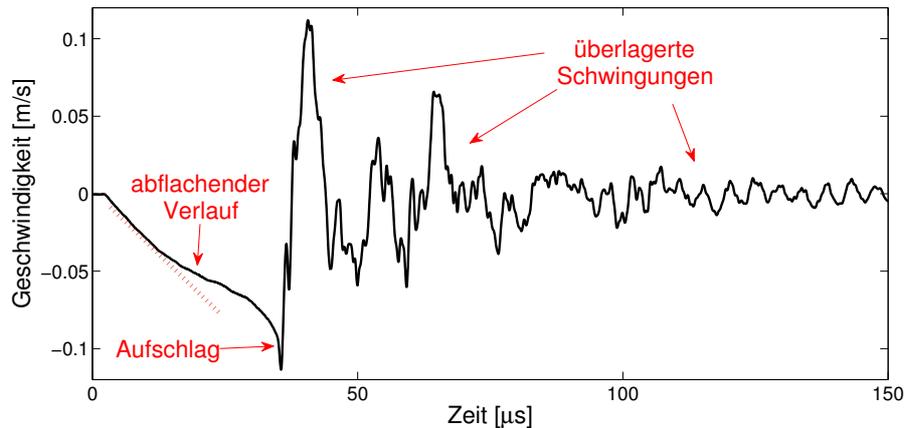
**Abb. 8.10:** Auslenkung der Membran bei einer Anregung mittels Rechteckspannung der Frequenz 200 Hz und der Amplituden 35 V bzw. 0 V.

sollte, um den Schalter zu schließen. Für den Betrieb der Schalter sind derart überhöhte Spannungen mit Bedacht gewählt, um eine „Spannungsreserve“ zu integrieren, welche auch bei einer Erhöhung der statischen Schnapp-Spannung über den Lebenszyklus des Schalters hinweg oder aufgrund von Fertigungstoleranzen, das Schließen des Schalters ermöglicht. Abbildung 8.10 zeigt, für die beschriebene Anregung, das Verhalten der Membran, welche zuerst auf die Kontaktstempel gezogen wird und nach Abschaltung der Spannung mittels einer gedämpften Schwingung wieder in ihre Ausgangslage zurückkehrt. Die Schließzeit<sup>12</sup> des Schalters beträgt ca. 30 µs und die Öffnungszeit<sup>13</sup> ca. 20 µs.

Im Folgenden wird der Schließvorgang genauer analysiert. Hierzu wird die in Abbildung 8.11 dargestellte, an einem Punkt der Membran gemessene Geschwindigkeit betrachtet. Zwei Aspekte sind hervorzuheben. Zum einen wird der anfängliche Verlauf der Geschwindigkeit, bis kurz vor dem Anschlag, zunehmend flacher. Zu erwarten wäre gewesen, dass die nichtlinearen und, mit verringertem Spaltabstand, stark zunehmenden

<sup>12</sup> Die Zeit, welche die Membran benötigt, um, bei Beaufschlagung mit der Spannung von 35 V, von der Ruhelage aus, das erste Mal die Kontaktstempel zu berühren.

<sup>13</sup> Die Zeit, welche die Membran benötigt, um, nach Abschalten der Spannung, von der Schließposition zum ersten Mal in Ausgangslage zurückzukehren (Nulldurchgang).



**Abb. 8.11:** Geschwindigkeit an einem Eckpunkt der Membran bei einer Anregung mittels Rechteckspannung. Dargestellt ist lediglich die Zeit bis und kurz nach dem Aufschlagen der Membran.

elektrostatischen Kräfte die Membran zunehmend beschleunigen<sup>14</sup>. Tatsächlich steigen jedoch die nichtlinearen Dämpfungskräfte, mit verringertem Spaltabstand, derart an, dass sich die Beschleunigung der Membran verringert. Infolgedessen eignet sich dieser Verlauf der Geschwindigkeit sehr gut, um das Modell der fluidischen Dämpfung während des Schließvorgangs zu bewerten.

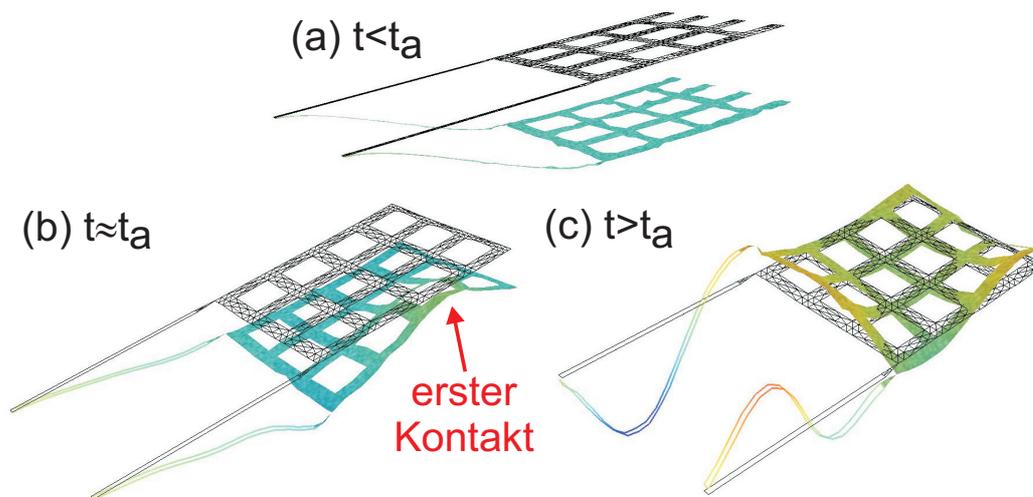
Zum anderen tritt nach dem Anschlag eine Überlagerung verschiedener Schwingungen auf. Abbildung 8.12 zeigt die aus einem Punkteraster konstruierten Geschwindigkeitsverteilungen des Schalters kurz vor dem Aufprall, zum Zeitpunkt des Aufpralls und kurz nach dem Aufprall. Vor dem Aufprall bewegt sich die Membran hauptsächlich in Form ihrer ersten Eigenschwingung  $M_{e,1}$  in Richtung Kontaktstempel. Aus Abbildung 8.12a ist jedoch nicht erkennbar, dass auch eine sehr geringe Torsionsbewegung um die Längsachse, entsprechend der zweiten Eigenschwingung  $M_{e,2}$ , stattfindet. Aufgrund dieser Torsionsbewegung trifft die Membran asymmetrisch, d.h. mit einer Seite zuerst, auf die Kontaktstempel (siehe Abbildung 8.12b). Dies hat zur Folge, dass diverse Eigenschwingungsformen angeregt werden, die in der Untersuchung des vorigen Teilkapitels nicht enthalten sind. Die Schwingform in Abbildung 8.12c ist ein Beispiel für eine Eigenmode, die keiner bisher ermittelten Modenformen (vgl. Abbildung 8.7) entspricht. Aufgrund der komplexen Deformation der Federn<sup>15</sup> muss es sich um eine Schwingform mit einer höheren Eigenfrequenz als die bisher betrachteten 250 kHz handeln.

Aufgrund des zeitlich kurzen Anschlagvorganges ist es nicht möglich, die Eigenfrequenz dieser höherfrequenten Modenformen mittels einer Fourier-Transformation der Messdaten zu bestimmen<sup>16</sup>. Infolgedessen wurde ein Algorithmus entworfen, welcher das Signal

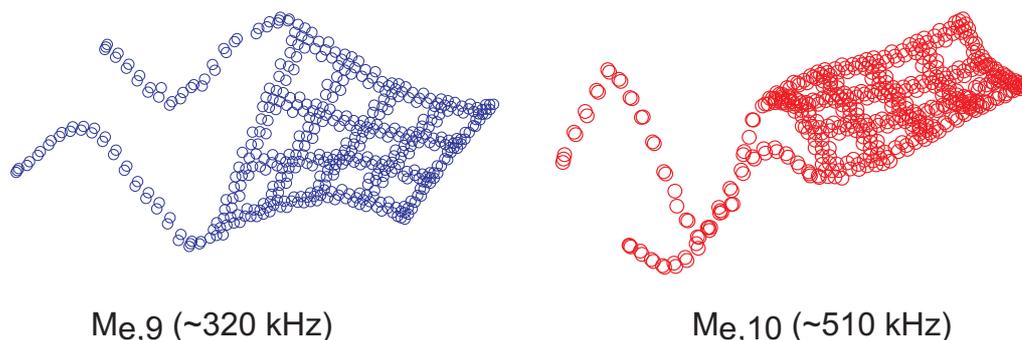
<sup>14</sup> Dies entspräche einem Verlauf, welcher die strichlierte Tangente unterschreitet.

<sup>15</sup> Die Federn enthalten einen Knotenpunkt in ihrer Mitte, was bei keiner der Moden in Abbildung 8.7 der Fall ist

<sup>16</sup> Für eine genaue Auflösung bis zu hohen Frequenzen benötigt der Algorithmus der schnellen Fourier-



**Abb. 8.12:** Aus einem Punkteraster interpolierte Geschwindigkeitsverteilungen des Schalters kurz vor dem Aufprall (Bild a,  $t < t_a$ ), zum Zeitpunkt des Aufpralls (Bild b,  $t \approx t_a$ ) und kurz nach dem Aufprall (Bild c,  $t > t_a$ ).



**Abb. 8.13:** Aus der transienten Messung mittels Bandpass gefilterte Schwingformen.

im Zeitbereich mittels eines Bandpasses filtert und, über die Amplitude, aus der Phase die ausgeprägteste Schwingform extrahiert. Abbildung 8.13 zeigt exemplarisch zwei der auf diese Weise bestimmten Schwingformen und deren aufgrund der Filterung lediglich abschätzbaren Eigenfrequenzen. Die Mode  $M_{e,9}$  entspricht hierbei weitestgehend der Mode in Abbildung 8.12c.

---

Transformation *Fast Fourier Transformation (FFT)* viele Abtastwerte. Diese entsprechend große Anzahl an Abtastwerten kann aus einem Prellvorgang nicht extrahiert werden.

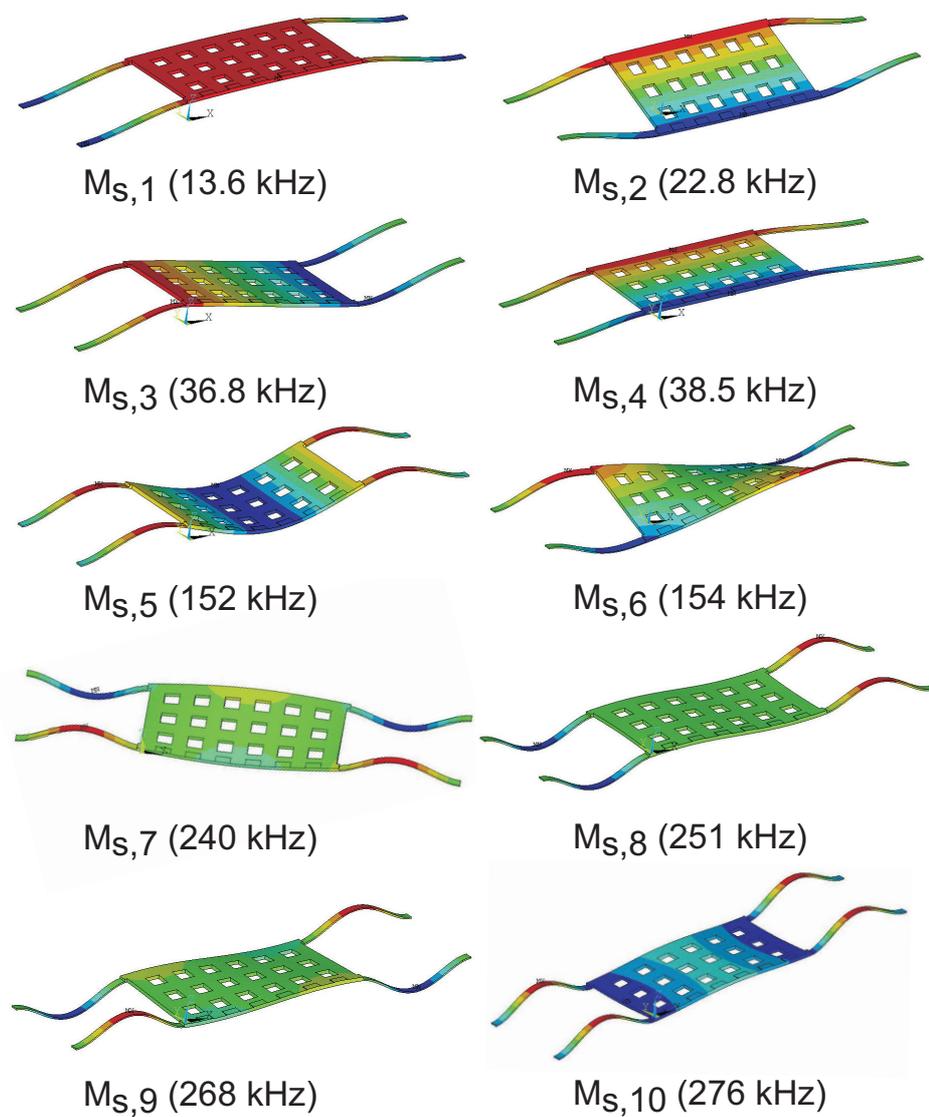
## 8.3 Simulation des Schalters

Zur Evaluierung des elektro-fluid-mechanischen gekoppelten Modellierungsansatzes (siehe Kapitel 3, 4 und 5), wird für den vorliegenden Schalter mittels des in Kapitel 6 vorgestellten Programmes ein Systemmodell automatisiert erstellt, kalibriert und gegenüber Messungen bewertet.

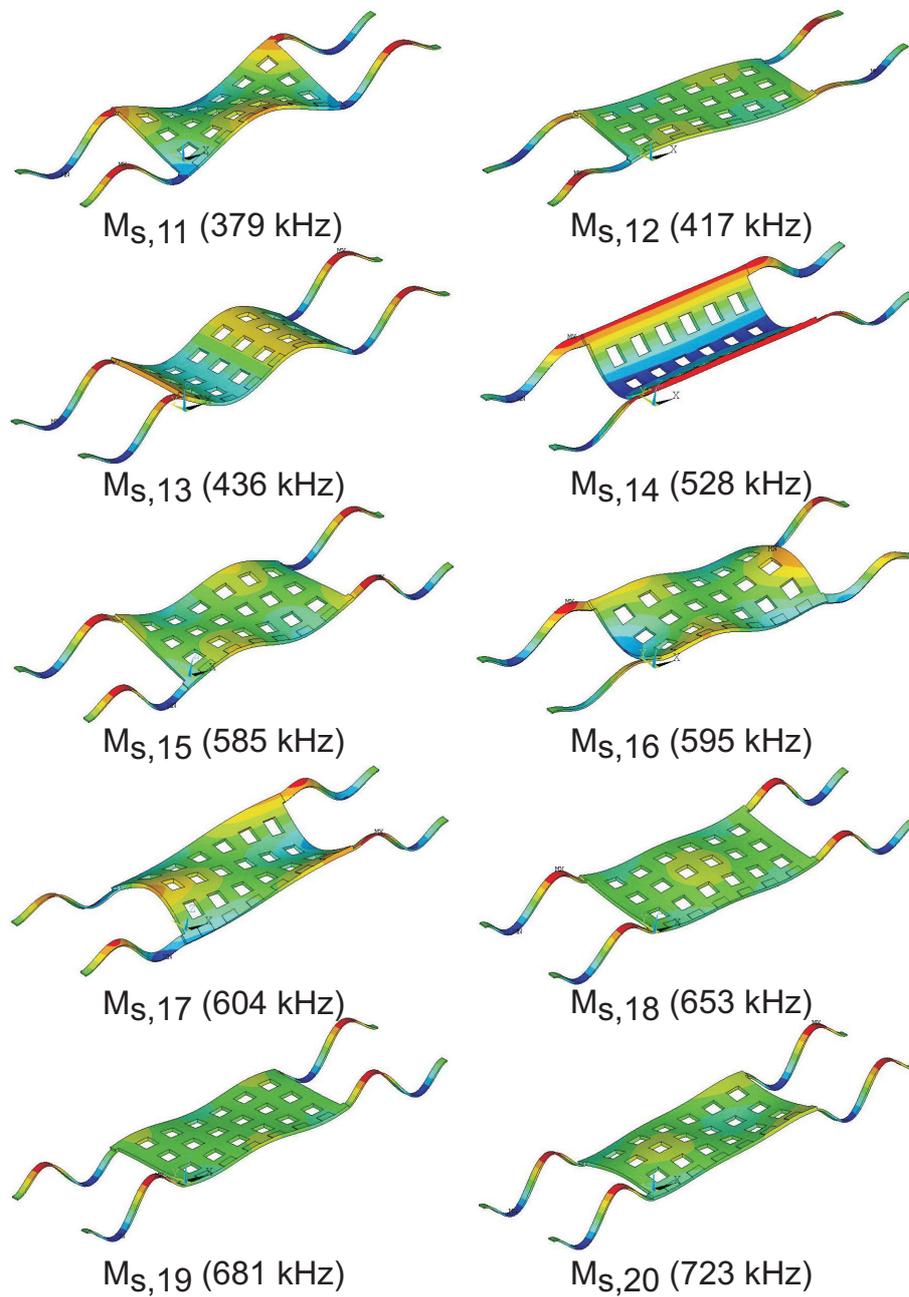
### 8.3.1 Modellerstellung und -kalibrierung

Für die automatisierte Erstellung des gekoppelten Systemmodells wurde, dem Ablaufdiagramm 6.3 folgend, zuerst ein mechanisches FEM-Modell der an Federn aufgehängten Membran aufgebaut. Mittels entsprechender Simulationen konnte der Einfluss mechanischer Nichtlinearitäten im Betriebsbereich des Schalters auf unter 5 % quantifiziert werden [102]. Infolgedessen ist es gerechtfertigt, die modale Superposition für die Modellierung der Mechanik einzusetzen. Die mechanische Vorspannung innerhalb der Membran wurde über Temperaturdifferenzen eingepreßt und derart kalibriert, dass die fundamentale Eigenresonanz möglichst akkurat wiedergegeben wird. Die Abbildungen 8.14 und 8.15 zeigen die ersten zwanzig, mittels Eigenwertberechnung ermittelten Moden des FEM-Modells. Tabelle 8.3 vergleicht diese, durch Zuordnung über die Modenform, mit den experimentellen Daten. Die ersten drei Moden weisen bezüglich Ihrer Resonanzfrequenzen eine lediglich geringe Abweichung gegenüber den Messungen auf. Mit steigender Komplexität der Verformung, und damit Höhe der Eigenfrequenz, nimmt der Fehler zu. Weiterhin steigen die Frequenzen der zugeordneten, experimentell erfassten Moden nicht monoton an, d.h. die Reihenfolge der Moden ist nicht identisch.

Sowohl die hohen Fehler bezüglich der Eigenfrequenzen als auch die veränderte Reihenfolge der Moden weisen darauf hin, dass es mit dem mechanischen FEM-Modell nicht möglich ist, den Mikroschalter akkurat abzubilden. In Hinblick auf die Simulation des mechanischen Anschlags sind jedoch auch die höheren Eigenmoden bedeutend. Aus diesem Grund werden die im Systemmodell berücksichtigten Moden mit den experimentell ermittelten Frequenzen kalibriert. Dieser Schritt erscheint zunächst willkürlich, kann jedoch mittels der Konstruktionsvorschrift des modalen mechanischen Modells (siehe Teilkapitel 3.2) gerechtfertigt werden. Die Masse des Schalters ist im FEM-Modell aufgrund der experimentell ermittelten Topographie sehr genau abgebildet. Infolgedessen sind die, auf die Masse normierten Modenformen verlässlich ermittelt. Die mechanischen Vorspannungen wirken sich ausschließlich auf das Steifigkeitsverhalten der Membran und der Federn aus. Infolgedessen beeinflussen diese, in Hinblick auf das modale Modell, ausschließlich die Eigenfrequenzen. Ergo wird durch Anpassung der Eigenfrequenzen lediglich einer nicht akkurat abbildbaren mechanischen Vorspannung Rechnung getragen.



**Abb. 8.14:** Eigenschwingformen und -frequenzen des FEM-Modells (Nr. 1 bis 10).



**Abb. 8.15:** Eigenschwingformen und -frequenzen des FEM-Modells (Nr. 11 bis 20).

Mode (Sim.)	Frequenz (Sim.)	Mode (Exp.)	Frequenz (Exp.)	Fehler	Modell
$M_{s,1}$	13.6 kHz	$M_{e,1}$	13.67 kHz	0.5 %	Ja (1)
$M_{s,2}$	22.8 kHz	$M_{e,2}$	22 kHz	4 %	Ja (2)
$M_{s,3}$	36.8 kHz	$M_{e,3}$	36 kHz	3 %	-
$M_{s,5}$	152 kHz	$M_{e,4}$	134 kHz	12 %	Ja (3)
$M_{s,6}$	154 kHz	$M_{e,5}$	138 kHz	11 %	-
$M_{s,7}$	240 kHz	$M_{e,7}$	220 kHz	9 %	Ja (4)
$M_{s,8}$	251 kHz	$M_{e,6}$	201 kHz	20 %	-
$M_{s,9}$	268 kHz	$M_{e,8}$	224 kHz	17 %	-
$M_{s,10}$	276 kHz	-	240 kHz	13 %	Ja (5)
$M_{s,11}$	379 kHz	$M_{e,9}$	320 kHz	16 %	Ja (6)
$M_{s,14}$	527 kHz	-	440 kHz	17 %	Ja (7)
$M_{s,18}$	652 kHz	-	530 kHz	19 %	Ja (8)
$M_{s,19}$	681 kHz	$M_{e,10}$	510 kHz	25 %	Ja (9)

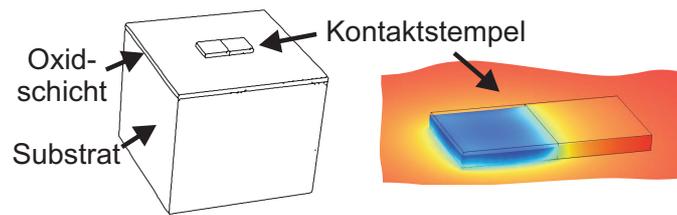
**Tab. 8.3:** Zuordnung zwischen simulierten und experimentell ermittelten Modenformen. Mit „-“ versehene experimentelle Daten wurde mittels der Filterung aus der transienten Messung des Anschlags extrahiert und sind nicht als Modenform dargestellt. Die Spalte „Fehler“ gibt die relative Abweichung der Resonanzfrequenzen aus Simulation und Experiment an. Die Spalte „Modell“ gibt an, ob die entsprechende Mode für das zu erstellende Systemmodell ausgewählt wurde und welche fortlaufende Nummerierung die Mode im Modell besitzt.

Die Auswahl der Moden selbst wurde hinsichtlich des Aufschlagvorganges durchgeführt, d.h. es wurden aufgrund der Erkenntnisse aus Teilkapitel 8.2.3 jene Eigenschwingformen selektiert, die während der Charakterisierung des dynamischen Schließvorgangs auftraten und bezüglich der Länge der Membran symmetrisch sind<sup>17</sup>. Insgesamt wurden auf diese Weise neun Moden ausgewählt (siehe Spalte „Modell“ in Tabelle 8.3).

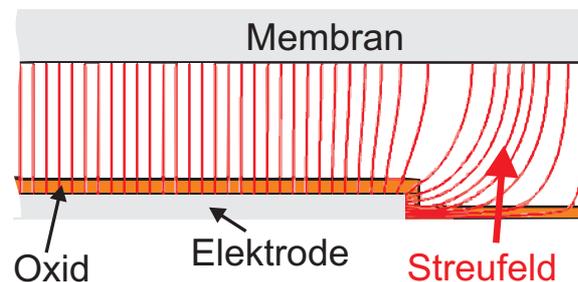
Die zwölf Kontaktstempel wurden einzeln modelliert. Zur Bestimmung der Kontaktsteifigkeit wurde eine FEM-Simulation durchgeführt. In dieser wurde der Kontaktstempel samt darunterliegendem Oxid und Substrat modelliert und auf den Bereich des Kontaktstempels, auf welchem die Membran zu liegen kommt, eine konstante Flächenlast aufgebracht (siehe Abbildung 8.16). Bei einer homogenen Flächenlast von insgesamt 100  $\mu\text{N}$  wurde der vordere Teil des Stempels im Mittel um 69 pm eingedrückt. Dies entspricht einer Kontaktsteifigkeit von  $1.45 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ . Diese Steifigkeit ist, im Vergleich zur Steifigkeit der an Federn aufgehängten Membran<sup>18</sup> von ca. 15.4 N/m um fünf Ordnungen höher. Dieser beträchtliche Steifigkeitsunterschied führt zu den in Abbildung 8.5 dargestellten plastischen Verformungen der Membran an den Stellen der Kontaktstempel und bedeutet in Hinblick auf die Modellierung, dass die Kontaktstempel gegenüber der Membran als undeformierbar angesehen werden können.

<sup>17</sup> Da die Membran zuerst auf die mittleren Kontaktstempel auftrifft, werden hauptsächlich bezüglich der Längsachse symmetrische Schwingformen aktiviert.

<sup>18</sup> Siehe Abschätzung in Fußnote 12 auf Seite 127.



**Abb. 8.16:** FEM-Modell zur Extraktion der Kontaktsteifigkeit (links) und Falschfarbendarstellung der Deformation des Kontaktstempels bei Aufliegen der Membran (rechts).

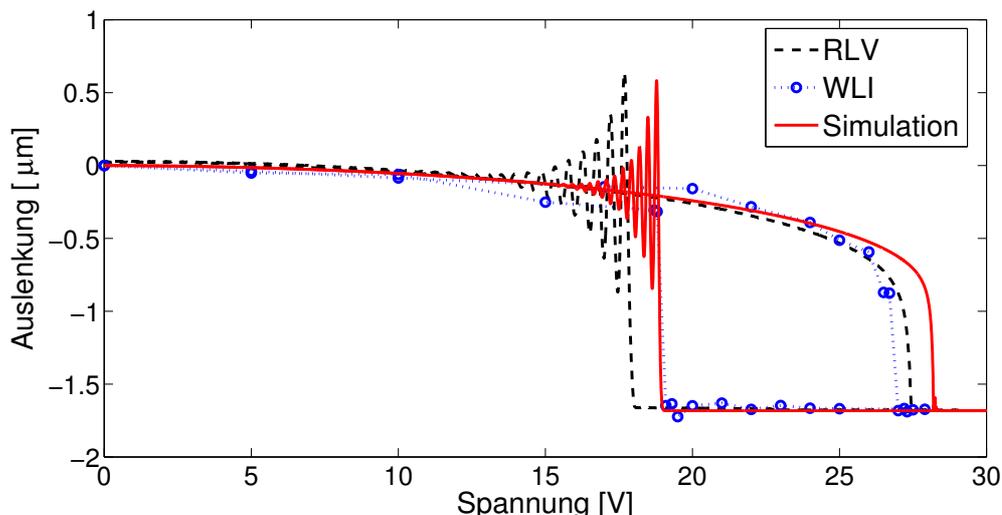


**Abb. 8.17:** Zweidimensionaler Schnitt durch die Membran und die Elektroden. Dargestellt sind die Feldlinien zwischen der Elektrode und der Membran für einen nicht perforierten Bereich.

Um auch bei komplexer Deformation der Membran eine akkurate Modellierung der Elektrostatik zu erreichen, wurden die sieben Finger der Bodenelektrode jeweils in sechs Segmente unterteilt. Auf diese Weise wird die Bodenelektrode mittels 42 effektiver Plattenkondensatorelemente dargestellt, welche mit dem in Teilkapitel 6.4 beschriebenen Algorithmus parametrisiert wurden. Um Streufelder zu berücksichtigen, wurden diese mittels zweidimensionaler FEM-Simulationen abgeschätzt. Vor allem die Feldlinien, welche seitlich der Elektroden austreten (siehe Abbildung 8.17) erhöhen hierbei die Kapazität, sowie die elektrostatische Kraft. Die Berechnungen ergaben, dass die Erhöhung pro Elektrodenfinger mit einem konstanten Faktor von 1.08 abgeschätzt werden kann<sup>19</sup>. Weiterhin wird die aus Tabelle 8.2 extrahierte Verschiebung der Schnapp- und Lösespannungen aufgrund von eingelagerten Ladungen mittels einer Spannungsquelle von 0.5 V eingepreist.

Für eine präzise Berechnung der fluidischen Dämpfung wurde dem Automatisierungsprogramm ein räumlich aufgelöstes Höhenprofil übergeben, welches mit den Werten aus Tabelle 8.1 den räumlich variierenden Luftspalt unterhalb der Membran abbildet. Als minimaler Luftspalt an den Kontaktstempeln (siehe Teilkapitel 6.6) wurden der experimentell bestimmte Wert von 50 nm eingesetzt.

<sup>19</sup> In dem Abstand zwischen Elektrode und Membran, welcher für die Modellierung der Betriebsmodi des Schalters relevant ist, beträgt der relative Fehler mit dieser Abschätzung  $\pm 3\%$ .



**Abb. 8.18:** Auslenkung der Membran in Abhängigkeit der angelegten Spannung. Die Ergebnisse der Systemsimulation sind gegenüber Messwerten des Raster-Laser-Vibrometers (RLV) und des Weißlichtinterferometers (WLI) aufgetragen.

	Simulation	RLV (gemittelt)	WLI
$U_S$ [V] (rel. Fehler)	28.1	27.45 (2.3 %)	27 (3.9 %)
$U_L$ [V] (rel. Fehler)	19	18.15 (4.5 %)	19 (0.0 %)

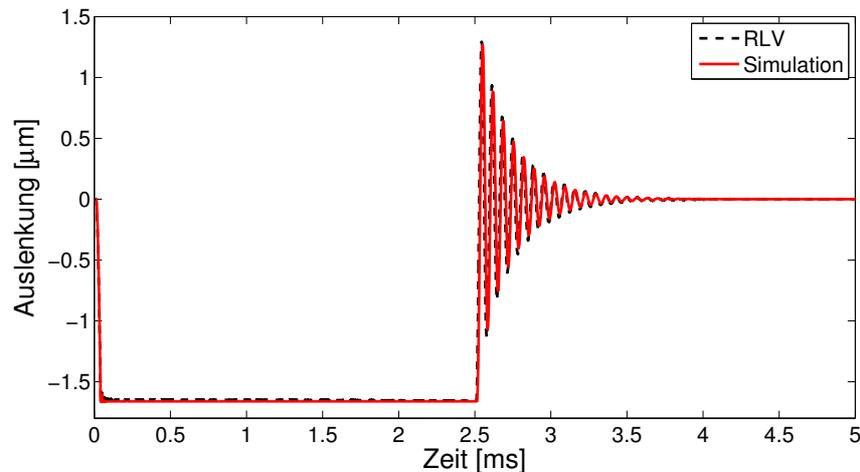
**Tab. 8.4:** Vergleich der simulierten und gemessenen Schnapp- und Löse-Spannungen.

### 8.3.2 Schließ- und Öffnungsverhalten

Das kalibrierte Modell wird im Folgenden gegenüber den Messungen aus Teilkapitel 8.2.3 bewertet. Abbildung 8.18 stellt die Ergebnisse des simulierten quasi-stationären Schließ- und Öffnungsverhaltens den Messwerten gegenüber. Das Systemmodell überschätzt die Schnapp- und Lösespannung um bis zu 4.5 % (siehe Tabelle 8.4), was darauf hindeutet, dass die elektrostatischen Kräfte vom Modell unterschätzt werden. Aufgrund der im vorigen Teilkapitel diskutierten Varianz der Schnapp- und Lösespannung bei diesem Schaltertyp, ist dieser Fehler jedoch akzeptabel.

Bezüglich des dynamischen Schließ- und Öffnungsverhaltens zeigen die Abweichungen bezüglich der Schnapp- und Lösespannung keinen nennenswerten Einfluss (siehe Abbildung 8.19). Die Simulation reproduziert die Schließ- und die Öffnungszeit mit Abweichungen von maximal 5 %, sowie präzise die gedämpfte Schwingung nach dem Lösen der Membran bei Öffnung des Schalters.

Das Aufprallen der Membran wird vom Modell qualitativ richtig wiedergegeben. Die im Modell berücksichtigten Moden werden durch den Aufschlag aktiviert. Abbildung 8.20 zeigt an drei Punkten der Membran die jeweils simulierte und gemessene Auslenkung. Die simulierte Auslenkung zeigte für verschiedene Messungen einen variablen Versatz

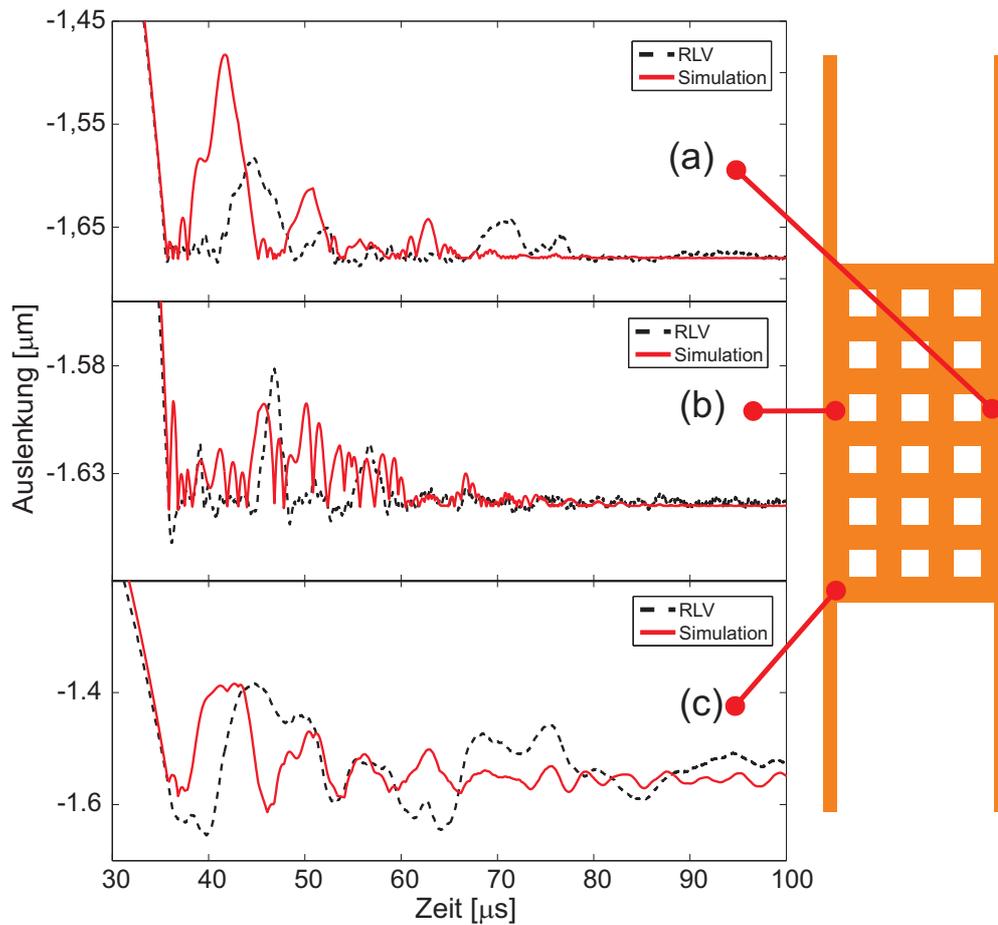


**Abb. 8.19:** Auslenkung der Membran bei einer Anregung mittels Rechteckspannung. Das simulierte Experiment wird gegenüber den Messwerten aufgetragen.

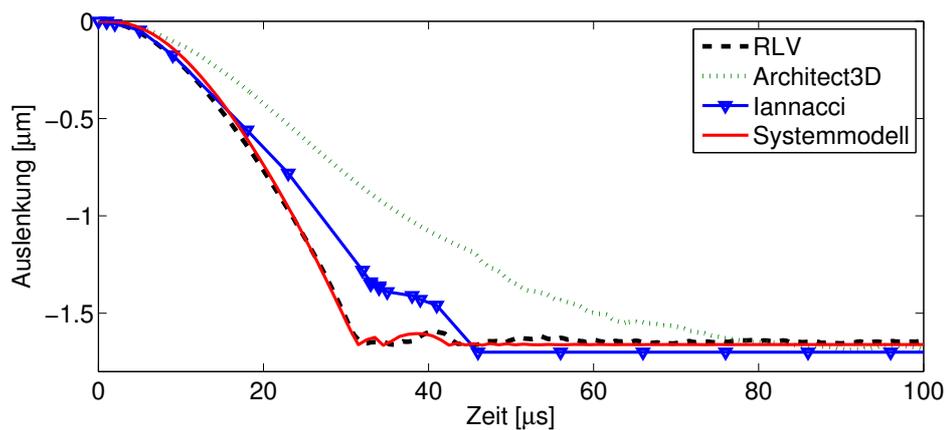
von bis zu 50 nm. Da hier eine qualitative Betrachtung im Vordergrund steht, wurde zur besseren Übersicht die Simulation um den in der Messung schwankenden Versatz korrigiert. An Messpunkt (a), welcher sich direkt oberhalb des Kontaktstempels befindet, auf welchem die Membran zuerst aufkommt, sieht das Verhalten qualitativ ähnlich aus, weicht allerdings hinsichtlich der absoluten Amplituden und der zeitlichen Abstände der konstruktiven Überlagerungen ab. An Messpunkt (b), welcher sich oberhalb des gegenüberliegenden Kontaktstempels befindet, treten direkt nach dem Aufschlag ebenfalls Unterschiede im quantitativen Verlauf auf. An Messpunkt (c), welcher an der Ecke der Membran lokalisiert ist, reproduziert das Modell, was qualitativ korrekt ist, eine Schwingung mit großer Amplitude. Der quantitative Verlauf weicht wiederum ab.

Diese Beobachtungen zeigen, dass das Systemmodell in der Lage ist, das Verhalten der Membran im Falle eines dynamischen Anschlags qualitativ nachzubilden, quantitativ hingegen nicht. Eine Vorhersage des exakten quantitativen Verlaufs nach einem Aufprall ist jedoch selbst mittels FEM-Simulation, d.h. auf der kontinuierlichen Feldebene, eine Herausforderung [12, 52] und kann aus diesem Grund nicht Ziel der Systemsimulation sein, welche Modelle mit wesentlich weniger Freiheitsgraden einsetzt.

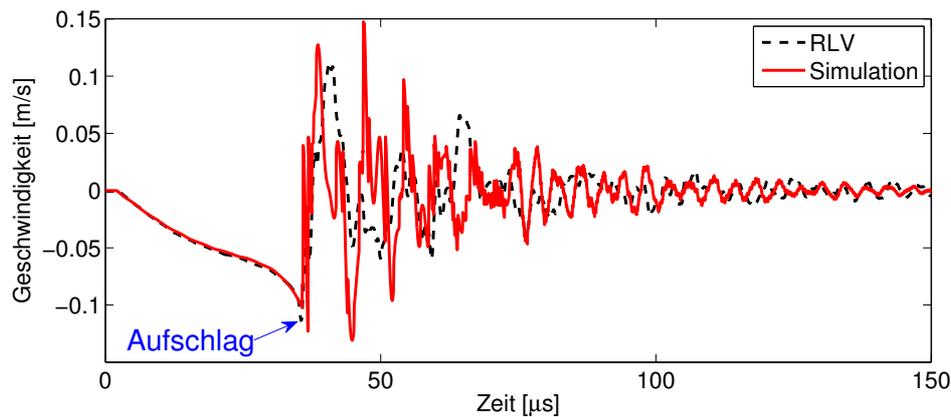
Infolgedessen sind die Übereinstimmungen bezüglich der Schnapp- und Lösespannung, der Schließ- und Öffnungszeiten sowie des qualitativen Verlaufs im Falle eines dynamischen Anschlags als die entscheidenden Bewertungskriterien für das Systemmodell anzusehen, und nicht der exakte quantitative Verlauf im Falle eines Anschlags. Des Weiteren ist herauszustellen, dass das vorliegende Systemmodell, trotz der Abweichungen, das quantitative Verhalten nach einem dynamischen Anschlag wesentlich akkurater wiedergibt als vergleichbare Systemmodelle (siehe Abbildung 8.21).



**Abb. 8.20:** Gemessene und simulierte Auslenkungen an drei Punkten der Membran bei einer Anregung mittels Rechteckspannung.



**Abb. 8.21:** Vergleich des quantitativen Verlaufs während eines Anschlags [101]. Gezeigt werden Messungen sowie Simulationsergebnisse des Systemmodells (nur 2 Eigenmoden), eines Modells von Iannacci [68] und eines Modells, welches im Simulator Coventorware Architect3D [25] erstellt und gerechnet wurde.



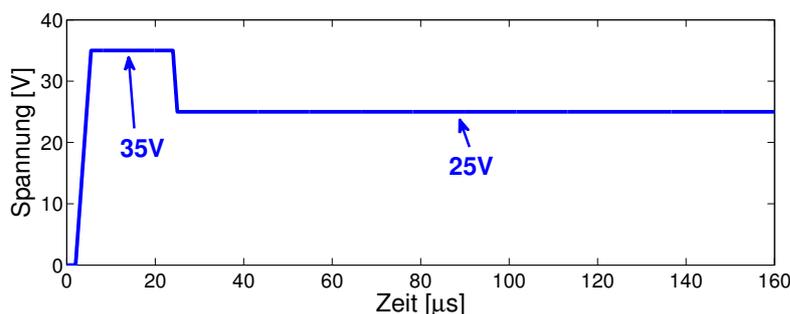
**Abb. 8.22:** Simulierte und gemessene Geschwindigkeit an einem Eckpunkt der Membran bei einer Anregung mittels Rechteckspannung. Dargestellt ist lediglich die Zeit bis und kurz nach dem Aufschlagen der Membran.

Zuletzt wird, mittels Abbildung 8.22, die Reproduktion des gemessenen Geschwindigkeitsverlaufes 8.11 bewertet. Analog zu den vorigen Betrachtungen kann das Modell das Verhalten der Membran, nach deren Aufschlag, nicht korrekt wiedergeben. Bis zum Aufschlag wird die Geschwindigkeit hingegen präzise wiedergegeben, was die Folgerung erlaubt, dass das fluidische Mixed-Level-Modell die Dämpfung akkurat berechnet.

### 8.3.3 Zusammenfassung

Das automatisiert erstellte und kalibrierte, elektro-fluid-mechanisch gekoppelte Systemmodell ist in der Lage, die essentielle Kennwerte des mikromechanischen Schalters, namentlich die Schnapp- und Lösespannung sowie die Schließ- und Öffnungszeiten, mit einer Genauigkeit von 5 % zu reproduzieren. Ebenfalls werden der Geschwindigkeitsverlauf der Membran bis zum Anschlag quantitativ genau und das Verhalten nach dem Anschlag qualitativ richtig wiedergegeben.

Das quantitative Verhalten während und nach einem Anschlag wird hingegen nicht akkurat beschrieben. Mögliche Gründe hierfür könnten im Systemmodell nicht enthaltene Modenformen sein, welche beim Anschlag zusätzlich aktiviert werden, oder nicht berücksichtigte physikalische Vorgänge, wie beispielsweise die Ausbreitung von Schockwellen innerhalb der Membran während des Anschlags. Im Vergleich zu anderen Systemmodellen liefert das vorgestellte Modell jedoch wesentlich realitätsnähere Ergebnisse [100, 101].



**Abb. 8.23:** Rechnergestützt entworfenes Anregungssignal zur Reduktion der Anschlagsgeschwindigkeit.

## 8.4 Reduktion der Anschlagsgeschwindigkeit

Im Folgenden wird eruiert, ob das kalibrierte Systemmodell auch in der Lage ist, das Verhalten des Mikroschalters für noch nicht experimentell untersuchte Situationen vorherzusagen. Hierzu wird mittels des Modells ein Anregungssignal entworfen, welches gezielt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Aufschlages reduziert, um die mechanische Beanspruchung der Membran zu verringern. Als Orientierung hierfür dienen die Arbeiten von Czaplewski [26] und Sumali [139], in welchen eine sog. *Puls-und-Halte-Spannung* als Anregungssignal vorgeschlagen wird.

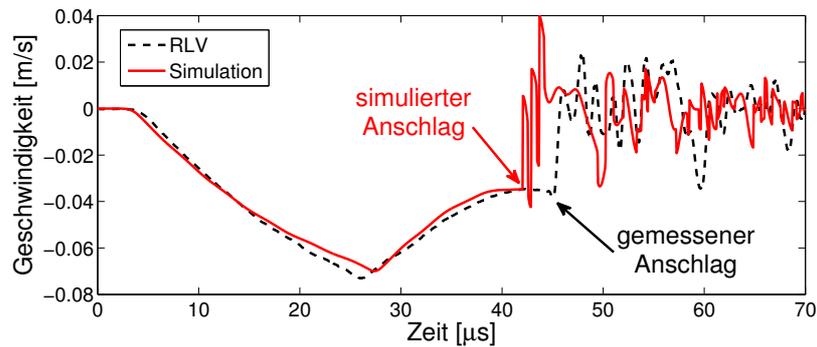
Eine Puls-und-Halte-Spannung setzt sich aus einem kurzen Puls hoher Spannungsamplitude, einer spannungsfreien Pause und einem langen Puls mit einer Spannung geringfügig größer der Lösespannung, der sog. *Haltespannung*, zusammen. Mit dieser Signalform werden die beweglichen Elemente eines Mikroschalters zuerst stark in Richtung Bodenelektrode beschleunigt. Während der spannungsfreien Pause verlangsamen sich die beweglichen Elemente wieder. Auf diese Weise besitzen die beweglichen Komponenten zum Zeitpunkt des Aufpralls nur eine vergleichsweise geringe Geschwindigkeit. Mit der Haltespannung wird sichergestellt, dass die beweglichen Komponenten auf den Kontaktstempeln verbleiben.

In den Arbeiten [26] und [139] werden auf intensive Weise experimentelle Daten eingesetzt, um die Puls-und-Halte-Spannungen zu entwerfen. In diesem Teilkapitel wird das elektrische Signal hingegen ausschließlich unter Verwendung des kalibrierten Systemmodells, d.h. rechnergestützt, entworfen.

Die in Abbildung 8.23 dargestellte, vereinfachte Form<sup>20</sup> der Puls-und-Halte-Spannung besitzt für eine Dauer von 18.5 µs die Amplitude von 35 V, im Anschluss eine Amplitude von 25 V und sollte der Simulation nach die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Aufpralls von 0.1 m/s<sup>21</sup> auf 0.035 m/s verringern. Dies entspräche einer Reduktion der kinetischen Energie während des Aufpralls um nahezu 88 %.

<sup>20</sup> Die entworfene Signalform besitzt keine spannungsfreie Pause.

<sup>21</sup> Vgl. Abbildung 8.11, d.h. gegenüber einer Anregung mittels Rechteckspannung von konstant 35V.



**Abb. 8.24:** Simulierter und gemessener Geschwindigkeitsverlauf bei Anregung mittels des in Abbildung 8.23 dargestellten Signals.

Abbildung 8.24 stellt die simulierten und gemessenen Verläufe für das entworfene Anregungssignal gegenüber. Trotz des als zu früh berechneten Zeitpunkt des Anschlages, weicht die gemessene Anschlagsgeschwindigkeit mit 0.038 m/s lediglich geringfügig ab. Dies zeigt, dass das kalibrierte elektro-fluid-mechanisch gekoppelte Systemmodell prädiktiv ist und für den Entwurf von Signalformen geeignet ist, welche das Schnappen von gedämpften elektromechanischen Mikrosystemen unter dezidierten Nebenbedingungen herbeiführen.



## 9. Zusammenfassung und Ausblick

Modellierung und Simulation sind, nicht zuletzt aufgrund des zunehmenden Trends zu Unternehmen ohne eigene Fertigung (siehe Kapitel 1), essentielle Werkzeuge für den Entwurf von Mikrosensoren und -aktoren. Der Kardinalpunkt eines durchgängig rechnergestützten Entwurfsprozesses ist hierbei der Übergang von der Ebene kontinuierlicher Felder auf die Systemebene. Die physikalisch basierte Systematisierung dieses Übergangs, mit Fokus auf elektro-fluid-mechanisch gekoppelte Problemstellungen, war das Ziel dieser Arbeit.

Zu diesem Zweck wurde das Modellierungsvorgehen für die Systemebene allgemein strukturiert und mit der verallgemeinerten Kirchhoffschen Netzwerktheorie ein Rahmen für die konsistente Modellierung festgelegt (siehe Kapitel 2). Nachfolgend wurden Verfahren vorgestellt, die es ermöglichen aus Beschreibungen auf der kontinuierlichen Feldebene sowohl konzentrierte als auch räumlich aufgelöste Systemmodelle zu extrahieren.

Für die konzentrierte Beschreibung beweglicher und verformbarer mechanischer Körper auf der Systemebene wurde die Methode der modalen Superposition vorgeschlagen (siehe Kapitel 3). Diese stellt zwar ein algebraisches Ordnungsreduktionsverfahren dar, kann jedoch aus physikalischer Sicht, im Sinne der Lagrangeschen Mechanik, als System mit generalisierten Koordinaten interpretiert werden. Ein Kernproblem dieser Vorgehensweise ist die Auswahl einer geeigneten Basis an Eigenmoden. Die Selektion der Eigenmoden war, zum derzeitigen Stand der Forschung, nicht allgemeingültig automatisierbar und muss aus diesem Grund manuell erfolgen. Zur Beschreibung des mechanischen Kontaktes wurde ein Modell mit einer konstanten Kontaktsteifigkeit unterbreitet.

Im Bereich der Elektrostatik wurden mit der räumlich aufgelösten differentiellen Plattenkondensatornäherung und einem konzentrierten Ansatz, welcher auf dem Lagrange-Formalismus basiert, zwei automatisierbare Möglichkeiten zur Modellierung deformierbarer Elektrodenanordnungen auf der Systemebene vorgestellt und kombiniert (siehe Kapitel 4 bzw. 6.4). Ebenfalls wurde auf die Instabilitäten eines elektromechanisch gekoppelten Systems eingegangen und dargelegt, dass im dynamischen Fall Kennwerte aus der (quasi-)statischen Analyse, wie z.B. die statische Schnapp-Spannung, nur mehr eingeschränkt aussagekräftig sind. Aus diesem Grund ist im dynamischen Fall, sofern zu eruieren ist, ob ein elektromechanisches System schnappt oder nicht, stets die vollständige Trajektorie des Systems zu berechnen.

Auf dem Gebiet der Fluidmechanik wurde insbesondere die Schmierfilmdämpfung behandelt (siehe Kapitel 5). Zur Modellierung dieser Art von Dämpfung auf der Systemebene wurde das von Schrag [129] vorgeschlagene und von Sattler [128] verfeinerte Mixed-Level-Modell herangezogen, welches zur akkuraten Beschreibung der Schmier-

filmdämpfung sowohl ein räumlich aufgelöstes finites Netzwerk als auch konzentrierte Kompaktmodelle einsetzt. Bei der Evaluierung des Mixed-Level-Modells gegenüber FEM-Simulationen traten teilweise relative Fehler von mehr als 10 % auf. Diese sind mit den von Dotz [29] identifizierten Abweichungen der Kompaktmodelle von Sattler [128] für quadratische Perforationen zu erklären. Dennoch stellten die Modelle von Sattler [128] die zum Zeitpunkt dieser Arbeit akkuratesten physikalisch basierten Kompaktmodelle zur Beschreibung quadratischer Perforationen dar, und wurden infolgedessen weiterhin eingesetzt. Um verdünnte Gase zu modellieren, wurden, wie bei Schrag und Sattler, bisher noch nicht verifizierte Korrekturfaktoren verwendet. Zur Reduktion von Mixed-Level-Modellen mit einer großen Anzahl von Freiheitsgraden wurde eine physikalisch motivierte Ordnungsreduktion in Form einer Unterteilung in periodische Eck-, Rand-, und innere Zellenbereiche vorgeschlagen.

Eine manuelle Extraktion und Kopplung der mechanischen, elektrostatischen und fluidischen Systemmodelle ist nicht praktikabel. Aus diesem Grund wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Automatisierungsprogramm mit anwenderfreundlicher graphischer Benutzeroberfläche erstellt, welches, mittels speziell entwickelter Algorithmen, diese beiden Schritte automatisiert durchführt (siehe Kapitel 6). Als Eingabe benötigt das Programm ein rein mechanisches FEM-Modell der Mikrostruktur, sowie die vom FEM-Simulator berechneten und vom Benutzer ausgewählten mechanischen Eigenmoden. Als Ausgabe liefert das Programm ein elektro-fluid-mechanisch gekoppeltes Systemmodell, welches direkt in einem Schaltungssimulator gerechnet werden kann.

Die Evaluierung der, mittels der vorgeschlagenen Verfahrensweisen automatisiert extrahierten, gekoppelten Systemmodelle war ein zentraler Bestandteil dieser Arbeit und erfolgte in zwei Schritten. Zuerst wurden, um die Zuverlässigkeit des fluidischen Mixed-Level-Modells zu bewerten, für drei, als Resonatoren betriebene Mikrostrukturen, mechanisch-fluidisch gekoppelte Systemmodelle erstellt und diese experimentellen Daten und alternativen Modellen [7, 144, 149] gegenübergestellt (siehe Kapitel 7). Als Maß zur Quantifizierung der fluidischen Dämpfung diente der Gütefaktor. Diese erste Bewertungsphase führte zu folgenden Ergebnissen:

- Das fluidische Mixed-Level-Modell berechnet die Schmierfilmdämpfung auf die drei untersuchten Mikrostrukturen sehr akkurat. Der relative Fehler gegenüber den Messergebnissen beträgt weniger als 4 %. Das Mixed-Level-Modell ist aus diesem Grund als prädiktiv einzustufen.
- Die alternativen Modelle weisen gegenüber den Messwerten relative Fehler zwischen 6.7 % und 48.6 % auf. Das Mixed-Level-Modell ist infolgedessen wesentlich präziser, als die untersuchten alternativen Modelle. Der geringere Fehler des Mixed-Level-Modells ist auf die, im Vergleich zu den alternativen Modellen, physikalisch basiertere Modellierung zurückzuführen, welche es erlaubt die Spezifika der zu untersuchenden Mikrostrukturen gezielt zu berücksichtigen.
- Die physikalisch motivierte Ordnungsreduktion von Mixed-Level-Modellen wurde anhand der großflächigsten Mikrostruktur getestet. Ein stark reduziertes Modell,

welches gegenüber dem vollständigen Modell nur 8 % der Freiheitsgrade und nur 4 % der Rechenzeit aufwies, lieferte einen um lediglich 3.2 % abweichenden Gütefaktor. Das ordnungsreduzierende Verfahren ist aus diesem Grund als prinzipiell verwendungsfähig anzusehen.

Nachfolgend wurde, um die elektrostatische Modellierung, sowie die elektromechanische Kopplung und das mechanische Kontaktmodell zu testen, für einen ohmschen Hochfrequenzmikroschalter ein elektro-fluid-mechanisch gekoppeltes Systemmodell automatisiert erstellt und gegenüber experimentellen Daten evaluiert. Diese zweite Bewertungsphase führte zu den nachstehenden Ergebnissen:

- Das elektro-fluid-mechanisch gekoppelte Systemmodell reproduziert im quasi-statischen Experiment die Schnapp- und Löse-Spannungen bis auf 5 % genau. Folglich sind die elektrostatische Modellierung und die implementierte elektromechanische Kopplung verwendungsfähig.
- Die Schließ- und Öffnungszeiten werden auf 5 % genau wiedergegeben. Ebenfalls wird der Geschwindigkeitsverlauf bis zum Anschlag akkurat berechnet. Dies zeigt, dass das fluidische Mixed-Level-Modell, im Zusammenspiel mit dem modalen mechanischen Systemmodell, auch bei großen Auslenkungen die Schmierfilmdämpfung zuverlässig berechnen kann.
- Das elektro-fluid-mechanisch gekoppelte Systemmodell eignet sich infolgedessen für den vollständig rechnergestützten Entwurf von Anregungssignalen elektrostatisch gesteuerter Mikroschalter, welche die Anschlagsgeschwindigkeit der beweglichen mechanischen Komponenten oder (bzw. und) die Höhe der notwendigen Spannung zur Herbeiführung des dynamischen Schnappens verringern. Durch Berücksichtigung von Fertigungstoleranzen, sowie von Veränderungen des Mikrobauteils über dessen Lebenszyklus hinweg, könnte weiterhin die Zuverlässigkeit dieser Signale sichergestellt werden.
- Übereinstimmend mit dem qualitativen Verhalten im Experiment werden in der Simulation während des Aufpralls der beweglichen Membran über das vorgeschlagene Kontaktmodell zusätzliche Eigenmoden aktiviert. Quantitativ stimmt die anschließend berechnete Überlagerung der Eigenmoden mit den experimentellen Daten nicht überein. Im Vergleich zu anderen Systemmodellen wird jedoch ein wesentlich realitätsnäherer Verlauf wiedergegeben.

Die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen belegen, dass die, mittels der vorgeschlagenen und automatisierten Vorgehensweise, aus mechanischen FEM-Modellen extrahierten, elektro-fluid-mechanisch gekoppelten Systemmodelle in der Lage sind, mit Ausnahme des quantitativen Verhaltens nach einem dynamischen mechanischen Anschlag, prädiktive Ergebnisse zu erzielen.

Ausgehend von den Resultaten dieser Arbeit werden folgende weitere Untersuchungen empfohlen:

- Das fluidische Mixed-Level-Modell zeigte eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten dreier Mikrostrukturen. Für eine belastbare Aussage bezüglich der allgemeinen Gültigkeit des Mixed-Level-Modells ist die Untersuchung weiterer Strukturen erforderlich. Als Teststrukturen sollten sowohl Membranen unterschiedlicher Perforationsgrade (siehe Beispiele in Teilkapitel 7.2) als auch Balkenstrukturen eingesetzt werden. Mit Balkenstrukturen kann gezielt das Randmodell bewertet werden. Die perforierten Membranen erlauben eine entsprechende Bewertung der Perforationsmodelle.
- Die von Sattler [128] erstellten Kompaktmodelle für quadratische Perforationen sollten, gemäß den Anregungen von Dotz [29], derart angepasst werden, dass diese dreidimensionale Effekte akkurater berücksichtigen.
- Weiterhin ist eine systematische Validierung der Korrekturfaktoren erstrebenswert. Mit geeigneten numerischen Methoden könnten bei verschiedenen Umgebungsdrücken die Volumenflüsse durch eine Kanal-Blende-Struktur und durch eine komplette Lochzelle (vgl. z.B. [40]) berechnet und den bisherigen Modellen gegenübergestellt werden. Diese Untersuchung würde zeigen, ob die bisherige Aufteilung in isolierte Elemente, d.h. jeweils ein Korrekturfaktor für eine Blende bzw. einen Kanal, gerechtfertigt ist. Ebenfalls sollten die Korrekturfaktoren experimentell evaluiert werden. Dies kann durch Bestimmung von Gütefaktoren mikromechanischen Strukturen bei verschiedenen Umgebungsdrücken bewerkstelligt werden. Hierzu sollte im Experiment die Anregung nicht elektrostatisch, sondern über geeignete Piezoelemente erfolgen (siehe Diskussion in Teilkapitel 7.3).
- Zur weiteren Analyse, Bewertung und ggf. Verbesserung des Kontaktmodells aus Teilkapitel 3.4 sollten weitere Mikroschalter untersucht werden. Interessant wären hier v.a. Strukturen, deren Material mechanisch steifer als Gold ist, und bei deren Anschlag weniger Eigenmoden aktiviert werden.
- Die physikalisch motivierte Ordnungsreduktion von fluidischen Mixed-Level-Modellen erwies sich als prinzipiell verwendungsfähig. Hier sollten mittels FEM-Simulationen die Grenzen dieses Verfahrens eruiert und, wenn möglich, analytisch abgeschätzt werden.

# Anhang



# A. Symbol- und Variablenverzeichnis

## Symbole in Formeln

Symbol	Bedeutung
$a_f$	Laterale Abmessung eines plattenähnlichen Körpers
$a_r$	Seitenlänge eines quadratischen Loches
$A_B$	Fläche einer elliptischen Blende
$A_j$ u. $A_k$	Fläche eines Diskretisierungspunktes bzw. Knotens des finiten Netzwerkmodells
$A_{fm}$	Elektrodenfläche des Plattenkondensators eines vereinfachten elektromechanischen Systems
$A_{pk}$	Elektrodenfläche eines Plattenkondensators
$A_{pk,q}$	Elektrodenfläche eines Plattenkondensators einer differentiellen Anordnung
$\underline{\underline{A}}$	Systemmatrix eines FEM-Modells
$b_f$	Laterale Abmessung eines plattenähnlichen Körpers
$\underline{\underline{B}}$	Einkoppelmatrix eines FEM-Modells
$c_e$	Lokale elektrische Kapazität
$const_{\lambda_f}$	Proportionalitätsfaktor zur Bestimmung der freien Weglänge $\lambda_f$ eines Gasmoleküls aus dem Umgebungsdruck
$C_e$	Elektrische Kapazität
$C_{f,k}$	Fluidische Kapazität an einem Knoten des finiten Netzwerkmodells
$C_{fm}$	Kapazität des Plattenkondensators eines vereinfachten elektromechanischen Systems
$C_{ges}$	Gesamtkapazität eines differentiellen Plattenkondensators
$C_{kl}$	Maxwellscher Kapazitätskoeffizient
$C_{pk,q}$	Kapazität eines Plattenkondensators einer differentiellen Anordnung
$\underline{\underline{C_e}}$	Maxwellsche Kapazitätsmatrix
$\underline{\underline{C}}$	Auskoppelmatrix eines FEM-Modells
$\overset{\uparrow}{\uparrow}{\uparrow}{\underline{\underline{c_f}}}$	Viskositätstensor
$\overset{\uparrow}{\uparrow}{\uparrow}{\underline{\underline{C_m}}}$	Elastizitätstensor

Symbol	Bedeutung
$d_{fm}$	Dämpfungskoeffizient eines vereinfachten elektromechanischen Systems
$d_{kl}$	Laterale Distanz zwischen zwei Knoten des finiten Netzwerkmodells
$d_m$	Dämpfungskoeffizient (Mechanik)
$d_{mo}$	Durchmesser eines Gasmoleküls
$d\vec{\sigma}$	Differentielles Oberflächenelement
$dU$	Änderung der inneren Energie eines thermodynamischen Systems
$\vec{D}$	Dielektrisches Verschiebungsfeld
$\mathcal{E}$	Extensive thermodynamische Variable
$\vec{E}$	Elektrisches Feld
$\vec{\tilde{E}}_m$	Green-Lagrangescher Verzerrungstensor (Mechanik)
$\underline{E}$	Einheitsmatrix
$f_m$	Oberflächenkraftdichte (Mechanik)
$f_{res}$	Resonanzfrequenz eines Resonators (Mechanik)
$F_{con,k}$	mechanische Kontaktkraft eines Stempels
$F_{f,r}$	Reibungskraft (Fluidmechanik)
$F_{f,t}$	Trägheitskraft (Fluidmechanik)
$F_m$	Mechanische Kraft
$F_{m,el}$	Elektrostatische Kraft zwischen den Elektroden eines Kondensators
$F_{m,f}$	Dämpfungskraft eines Fluidfilms
$F_{m,f,Eckbereich}$	Dämpfungskraft eines Eckbereichs
$F_{m,f,Rand}$	Dämpfungskraft einer Randzelle
$F_{m,f,Zelle}$	Dämpfungskraft einer Perforationszelle
$\tilde{F}_{m,el,modal,i}$	Modale elektrostatische Kraft einer Elektrodenanordnung
$\tilde{F}_{m,f,modal,i}$	Modale Dämpfungskraft eines Fluidfilms
$\underline{f}_{ext}$	Auf einen mechanischen Körper einwirkende Kräfte
$\underline{F}_{el}$	Elektrostatische Kraft (vektoriell)
$\vec{F}_m$	Deformationstensor
$G_e$	Elektrischer Leitwert
$G_{f,kl}$	Fluidischer Leitwert zwischen zwei Knoten des finiten Netzwerkmodells
$\vec{g}_f$	Einwirkende Beschleunigungen
$h_{con,0,k}$	Initialer Luftspalt oberhalb eines Kontaktstempels
$h_{con,k}$	Luftspalt oberhalb eines Kontaktstempels
$h_f$	Spaltabstand zwischen zwei plattenähnlichen Körpern
$h_{f,0}$	Initialer Spaltabstand zwischen zwei plattenähnlichen Körpern
$h_{f,k}$	Spaltabstand an einem Knoten des finiten Netzwerkmodells

Symbol	Bedeutung
$h_{f,k,0}$	Initialer Spaltabstand an einem Knoten des finiten Netzwerkmodells
$h_{f,kl}$	Gemittelter Spaltabstand zweier Knoten des finiten Netzwerkmodells
$h_{f,min}$	Minimaler Spaltabstand
$h_{f,no}$	Normierter Spaltabstand zwischen zwei plattenähnlichen Körpern
$h_{f,r}$	Spaltabstand an einem Loch des Mixed-Level-Modells
$h_{fm}$	Spaltabstand eines Plattenkondensators eines vereinfachten elektromechanischen Systems
$h_{fm,0}$	Initialer Spaltabstand eines Plattenkondensators eines vereinfachten elektromechanischen Systems
$h_{pk}$	Spaltabstand eines Plattenkondensators
$h_{pk,q}$	Spaltabstand eines Plattenkondensators einer differentiellen Anordnung
$h_{sin}$	Amplitude einer sinusförmigen Auslenkung eines plattenähnlichen Körpers
$I_e$	Elektrischer Strom
$\mathcal{I}$	Intensive thermodynamische Variable
$\Delta\mathcal{I}$	Differenz einer intensiven thermodynamischen Variable
$\vec{j}_e$	Elektrische Flussdichte
$\vec{j}_\mathcal{E}$	Flussdichte einer extensiven thermodynamischen Variable
$\vec{j}_f$	Volumenflussdichte
$J_\mathcal{E}$	Integraler Fluss einer extensiven thermodynamischen Variable
$k$	Boltzmannkonstante
$k_{con,k}$	Mechanische Kontaktsteifigkeit eines Stempels
$k_{fm}$	Mechanische Steifigkeit eines vereinfachten elektromechanischen Systems
$k_m$	Mechanische Steifigkeit
$Kn$	Knudsen-Zahl (Fluidmechanik)
$\mathcal{K}_C$	Generischer Kapazitätskoeffizient
$\mathcal{K}_{C,e}$	Elektrischer Kapazitätskoeffizient
$\mathcal{K}_I$	Generischer Induktivitätskoeffizient
$\underline{K}$	Steifigkeitsmatrix eines mechanischen FEM-Modells
$L_c$	Charakteristische Länge (Fluidmechanik)
$L_e$	Elektrische Induktivität
$L_r$	Länge einer quadratischen Lochkanals im Mixed-Level-Modell
$M_{e,i}$	Experimentell ermittelter Eigenmode eines mechanischen Körpers
$M_{s,i}$	Experimentell ermittelter Eigenmode eines mechanischen Körpers

Symbol	Bedeutung
$\mathcal{L}$	Linearer Transportkoeffizient
$\mathcal{L}_m$	Lagrangefunktion eines mechanischen Systems
$\mathcal{M}_V$	Verallgemeinertes Moment
$\underline{\underline{M}}$	Massenmatrix eines mechanischen FEM-Modells
$\bar{N}_c$	Teilchenzahl eines chemischen System
$\vec{n}$ u. $\vec{N}$	Normalenvektoren
$p_f$	Druck (Fluidmechanik)
$p_{f,0}$	Referenzdruck (Fluidmechanik)
$p_{f,k}$	Druck an einem Knoten des finiten Netzwerkmodells
$p_{f,Loch,r}$	Druckabfall an einem Loch des Mixed-Level-Modells
$p_{f,no}$	Normierter Druck
$p_m$	Impuls (Mechanik)
$\tilde{p}_{f,kl}$	Gemittelter Druck zweier Knoten des finiten Netzwerkmodells
$P_f$	Druckänderung gegenüber $p_{f,0}$ (Fluidmechanik)
$P_{f,k}$	Druckänderung an einem Knoten des finiten Netzwerkmodells gegenüber $p_{f,0}$
$P_m$	Gekoppelte Polynomfunktion
$\Delta P_{f,kl}$	Druckdifferenz zwischen zwei Knoten des finiten Netzwerkmodells
$q_{B,i}$	Amplitude einer Basisfunktion
$q_{m,i}$	Amplitude einer mechanischen Eigenmode („modale“ Amplitude)
$\underline{q}_m$	Vektor aller modalen Amplituden
$\underline{q}_{m,red}$	Vektor einer Untermenge an modalen Amplituden
$Q$	Gütefaktor eines Resonators
$Q_e$	Elektrische Ladung
$Q_{Exp}$	Experimentell ermittelter Gütefaktor eines Resonators
$Q_f$	Volumenfluss (Fluidmechanik)
$Q_{f,kl}$	Volumenfluss zwischen zwei benachbarten Knoten eines finiten Netzwerkmodells
$Q_{f,FN}$	Volumenfluss von einem Loch in das bzw. aus dem finiten Netzwerkmodell
$Q_{f,Kap,k0}$	Volumenfluss einer fluidischen Quelle innerhalb eines finiten Netzwerkmodells
$Q_{f,Quelle,k0}$	Volumenfluss einer fluidischen Quelle innerhalb eines finiten Netzwerkmodells
$Q_{Hybrid}$	Mittels eines hybriden Modells ermittelter Gütefaktor eines Resonators
$Q_{Lochzelle}$	Mittels einer Zerlegung in Lochzellen ermittelter Gütefaktor eines Resonators
$Q_{max}$	Aufgrund der elektrostatischen Anregung maximal experimentell ermittelter Gütefaktor eines Resonators

Symbol	Bedeutung
$Q_{MLM}$	Mittels des Mixed-Level-Modells ermittelter Gütefaktor eines Resonators
$Q_{mod.Rey.}$	Mittels einer modifizierten Reynoldsgleichung ermittelter Gütefaktor eines Resonators
$\underline{Q}_e$	Vektor elektrischer Ladungen
$R_e$	Elektrischer Widerstand
$R_{s,f}$	Gaskonstante eines Fluids
$Re$	Reynolds-Zahl (Fluidmechanik)
$\vec{r}$	Ortsvektor
$s_B$	Umfang einer elliptischen Blende
$S_t$	Entropie
$St$	Stokes-Zahl (Fluidmechanik)
$t_c$	Charakteristische Zeitkonstante eines Fluids
$t_{f,no}$	Normierte Zeitkonstante
$T_f$	Temperatur eines Fluids
$T_m$	Kinetische Energie eines mechanischen Systems
$T_t$	Temperatur eines thermischen Systems
$\vec{T}_m$	Zweiter Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$U_e$	Elektrische Potentialdifferenz (Spannung)
$U_{fm}$	Elektrische Potentialdifferenz am Plattenkondensator eines vereinfachten elektromechanischen Systems
$U_{fm,L}$	Löse-Spannung eines vereinfachten elektromechanischen Systems
$U_{fm,S}$	Schnapp-Spannung eines vereinfachten elektromechanischen Systems
$U_L$	Löse-Spannung eines elektromechanischen Systems
$U_S$	Schnapp-Spannung eines elektromechanischen Systems
$v_c$	Charakteristische Geschwindigkeit eines Fluids
$v_{f,i}$	Komponente des Geschwindigkeitsfeldes eines Fluids in $i$ -Richtung
$v_m$	Geschwindigkeit eines mechanischen Körpers
$v_s$	Schallgeschwindigkeit innerhalb eines Fluids
$V_{e,l}$	Elektrisches Potential einer Elektrode
$V_f$	Volumen eines Fluids
$V_m$	Potentielle Energie eines mechanischen Systems
$V_{pk}$	Potentialdifferenz zwischen den Elektroden eines Plattenkondensators
$\vec{v}_f$	Geschwindigkeitsfeld eines Fluids
$\vec{v}_{f,2D}$	Zweidimensionales Geschwindigkeitsfeld zwischen zwei plattenähnlichen Körpern
$\underline{V}_e$	Vektor elektrischer Potentiale von Elektroden
$w_{kl}$	Breite des Strömungskanals zwischen zwei Knoten des finiten Netzwerkmodells

Symbol	Bedeutung
$W_{el}$	Elektrostatische Energie
$\vec{w}_f$	Formänderungsgeschwindigkeitstensor (Fluidmechanik)
$x(\vec{r})$	Kontinuierliche Verteilung einer physikalischen Variable
$X$	Anzahl an periodischen Perforationszellen für die Ordnungsreduktion eines Mixed-Level-Modells
$X_{Gesamt}$	Vollständige Anzahl an Perforationszellen
$\underline{x}$	Diskretisierte Verteilung einer physikalischen Variable
$\underline{x}_{AP}$	Diskretisierte Verteilung einer physikalischen Variable in einem Arbeitspunkt
$Y$	Anzahl an Randbereichen bei der Ordnungsreduktion eines Mixed-Level-Modells
$\underline{y}$	Ausgangsvektor eines FEM-Modells
$z$	Auslenkung in $z$ -Richtung
$Z$	Anzahl an Eckbereichen bei der Ordnungsreduktion eines Mixed-Level-Modells
$Z_{f,B}$	Fluidischer Widerstand einer Blende
$Z_{f,B,r}$	Fluidischer Blendenwiderstand eines quadratischen Loches
$Z_{f,B,r}^*$	Fluidischer Blendenwiderstand eines quadratischen Loches bei Berücksichtigung verdünnter Gase
$Z_{f,K,r}$	Fluidischer Kanalwiderstand eines quadratischen Loches
$Z_{f,K,r}^*$	Fluidischer Kanalwiderstand eines quadratischen Loches bei Berücksichtigung verdünnter Gase
$Z_{f,R,a_f}$	Fluidischer Blendenwiderstand entlang der Seitenlänge $a_f$
$Z_{f,R,k}$	Fluidischer Blendenwiderstand für einen Knoten am Rand des finiten Netzwerkmodells
$Z_{f,R,k}^*$	Fluidischer Blendenwiderstand für einen Knoten am Rand des finiten Netzwerkmodells bei Berücksichtigung verdünnter Gase
$Z_{f,T,r}$	Fluidischer Transitwiderstand an einem quadratischen Loch
$Z_{f,T,r}^*$	Fluidischer Transitwiderstand an einem quadratischen Loch bei Berücksichtigung verdünnter Gase
$\varepsilon$	Dielektrische Konstante
$\eta$	Scherviskosität (Fluidmechanik)
$\iota_f$	Volumenviskosität (Fluidmechanik)
$\lambda_f$	Mittlere freie Weglänge eines Gasmoleküls
$\lambda_{m,i}$	Eigenwerte eines mechanischen FEM-Modells
$\Phi_{B,i}(\vec{r})$	Kontinuierliche Basisfunktion
$\underline{\Phi}_{B,i}$	Diskretisierte Basisfunktion
$\Phi_e$	Elektrisches Potential
$\Phi_f$	Fluidische Feldgröße
$\Phi_{no,e,l}$	Normierte elektrische Potentialverteilung
$\Phi_{m,con,i,k}$	Modaler Formfaktor eines Kontaktstempels

Symbol	Bedeutung
$\Phi_{m,i,j}$	Modaler Formfaktor eines Eigenvektors eines mechanischen FEM-Modells
$\Phi_{m,i,kap}$	Modaler Formfaktor einer Elektrodenanordnung
$\underline{\Phi}_{m,i}$	Eigenvektoren eines mechanischen FEM-Modells
$\underline{\underline{\Phi}}_m$	Spaltenmatrix aller Eigenvektoren eines mechanischen FEM-Modells
$\underline{\underline{\Phi}}_{m,red}$	Spaltenmatrix einer Untermenge an Eigenvektoren eines mechanischen FEM-Modells
$\mu_c$	Chemisches Potential
$\Pi_e$	Generationsrate elektrischer Ladung
$\Pi_{\mathcal{E}}$	Generationsrate einer extensiven thermodynamischen Variable
$\Pi_{f,Loch}$	Als Generationsrate modellierter Zu- und Abfluss durch Perforationen
$\rho_0$	Dichte eines Materials
$\rho_e$	Elektrische Raumladungsdichte
$\rho_{\mathcal{E}}$	Dichte einer extensiven thermodynamischen Variable
$\rho_f$	Dichte eines Fluids
$\rho_{f,0}$	Dichte eines Fluids beim Referenzdruck $p_{f,0}$
$\sigma_e$	Spezifischer elektrischer Leitwert
$\sigma_f$	Squeeze-Zahl (Fluidmechanik)
$\vec{\sigma}_f$	Spannungen innerhalb eines Fluids
$\tau$	Nicht-Idealitätsfaktor einer nur in einen Halbraum geöffneten fluidischen Blende
$\vec{\tau}_f$	Tensor der Oberflächenspannungen (Fluidmechanik)
$\vec{\tau}_{f,dynamisch}$	Dynamischer Anteil von $\vec{\tau}_f$
$\vec{\tau}_{f,statisch}$	Statischer Anteil von $\vec{\tau}_f$
$\vec{\tau}_m$	Erster Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$\omega_{m,i}$	Eigenfrequenz eines mechanischen Systems
$\omega_{m,i,AP}$	Eigenfrequenz eines mechanischen Systems in einem Arbeitspunkt
$\omega_{sin}$	Kreisfrequenz einer sinusförmigen Auslenkung
$\underline{\underline{\omega}}_m$	Matrix der Quadrate der Eigenfrequenzen $\omega_{m,i}$
$\xi$	„Härte“ der Übergangsfunktion $\Xi_k$
$\Xi_k$	Übergangsfunktion für die Kontaktkräfte
$\Xi_k^*$	Übergangsfunktion zur Festlegung des minimalen Spaltabstandes
$\Psi_m$	freie Energie eines mechanischen Körpers
$\Psi_B$	Korrekturfaktor (verdünnte Gase) für den Blendenwiderstand eines quadratischen Loches
$\Psi_K$	Korrekturfaktor (verdünnte Gase) für den Kanalwiderstand eines quadratischen Loches

Symbol	Bedeutung
$\Psi_{rey}$	Korrekturfaktor (verdünnte Gase) für fluidische Leitwerte im finiten Netzwerkmodell
$\Psi_{RT}$	Korrekturfaktor (verdünnte Gase) für Randwiderstände im finiten Netzwerkmodell

## Variablen in Algorithmen

Variable	Bedeutung
$A_{Elektrode,i}$	Fläche einer Elektrode
$Anzahl_{Loecher}$	Zähler, welcher die Anzahl an Löchern enthält
$D_{Zelle}$	Diskretisierungspunkte einer Zelle
$Elemente$	Konstrukt, welches Nummer und Kanten von Elementen enthält
$Error_{max}$	Maximale Abweichung eines effektiven Plattenkondensators gegenüber einer vollständigen differentiellen Plattenkondensatornäherung
$Error_{max,modal}$	Maximal zulässiger Fehler bzgl. des modalen Formfaktors für die Ordnungsreduktion eines Mixed-Level-Modells
$Error_{Schränke}$	Maximal erlaubte Abweichung eines effektiven Plattenkondensators gegenüber einer vollständigen differentiellen Plattenkondensatornäherung
$i$	Zähler
$Kante_{2P}$	Konstrukt, welches die Knoten einer Elementkante enthält
$Kanten$	Konstrukt, welches alle Elementkanten der Ebene $z = z_{min}$ enthält
$Kanten_{Aussen}$	Konstrukt, welches alle Elementkanten der Ebene $z = z_{min}$ enthält, welche sich an Löchern oder am Rand befinden
$Kanten_{Innen}$	Konstrukt, welches alle Elementkanten der Ebene $z = z_{min}$ enthält, welche sich nicht an Löchern oder am Rand befinden
$Kette_{Loch,i}$	Konstrukt, welches, in Form eines Polygons, alle Diskretisierungspunkte enthält, welche ein Loch beschreiben
$Kette_{Rand}$	Konstrukt, welches, in Form eines Polygons, alle Diskretisierungspunkte enthält, welche sich am Rand befinden
$M_{Loecher,XY}$	Matrix mit den $x$ - und $y$ -Positionen der Lochmitten
$p_{alt}$	Alter Punkt

---

Variable	Bedeutung
$p_{LinksOben}$	Punkt mit minimalem $x$ und maximalem $y$
$p_{neu}$	Neuer Punkt
$Punkte$	Konstrukt, welches Nummer und Position der Diskretisierungspunkte enthält
$Punkte_{Elektrode,i}$	Konstrukt, welches Nummer und Position der Diskretisierungspunkte enthält, die eine Elektrode beschreiben
$q_{max}$	Maximal mögliche modale Amplitude (bis Spaltabstand gleich Null)
$z_{min}$	$z$ -Koordinate der untersten $xy$ -Ebene einer dreidimensionalen Diskretisierung
$Zellen_{Rand}$	Anzahl der Randzellen für die Ordnungsreduktion von Mixed-Level-Modellen



## B. Ergänzungen zur Fluidik

### B.1 Korrekturfaktoren für verdünnte Gase

Die Korrekturfaktoren sind der Arbeit von Sattler [128] entnommen, welcher diese mittels Literaturrecherche aus den Arbeiten von Beskok [4, 74], Veijola [146, 145, 143, 148] und Sharipov [135, 133, 134] aggregiert hat:

$$\Psi_{rey} = 1 + 9.638Kn^{1.159} \quad (\text{B.1})$$

$$\Psi_{RT} \approx \Psi_{rey} \cdot \frac{1 + 0.5D^{-0.5} \cdot 30^{-0.238}}{1 + 2.471D^{-0.659}} \quad (\text{B.2})$$

$$\Psi_K = \left(1 + 1.085Kn \cdot \arctan(8\sqrt{Kn})\right) \left(1 + \frac{6Kn}{1 + Kn}\right) \quad (\text{B.3})$$

$$\Psi_B = \left(1 + \frac{6.703Kn(1.577 + Kn)}{2.326 + Kn}\right) \cdot \left(\frac{1 + 0.688D^{-0.858}\Lambda_0^{-0.125}}{1 + 1.7D^{-0.858}}\right) \quad (\text{B.4})$$

Hier bezeichnen  $D = \sqrt{\pi}/(2Kn)$  den Verdünnungsparameter und  $\Lambda_0 = L_r/(a_r/\sqrt{\pi})$  das Verhältnis von Kanallänge zu Lochseitenlänge. Die Knudsenzahl  $Kn = \lambda_f/L_c$  berechnet sich hier, je nach Geometrie, verschieden. Tabelle B.1 listet die entsprechenden charakteristischen Längen  $L_c$  für die Korrekturfaktoren auf. Der Faktor  $\Psi_{RT}$  ist für die in dieser Arbeit untersuchten Mikrostrukturen genähert. Ein allgemeinerer Ausdruck findet sich in der Abhandlung von Sattler [128].

Korrekturfaktor	$L_c$
$\Psi_{Reynolds}$ (vgl. B.1)	$h_f$
$\Psi_{RT}$ (vgl. B.2)	$h_f$
$\Psi_K$ (vgl. B.3)	$a_r$
$\Psi_B$ (vgl. B.4)	$a_r/2$

**Tab. B.1:** Charakteristische Längen für die Berechnung von  $Kn$ .

$a$	Länge der Membran
$b$	Breite der Membran
$h_c$	Dicke der Membran
$h$	Spaltabstand
$s_0$	Seitenlänge des quadratischen Loches
$s_1$	Abstand zwischen den quadratischen Löchern
$M$	Anzahl der Löcher entlang der Länge $a$
$N$	Anzahl der Löcher entlang der Breite $b$
$\lambda$	mittlere freie Weglänge

**Tab. B.2:** Eingangparameter des Modells von Veijola

Der Gültigkeitsbereich für die Korrekturfaktoren ist bis  $Kn \approx 880$  angegeben [128, 145]. Diesbezüglich ist zu erwähnen, dass sich diese Gültigkeit auf Simulationsdaten bestimmter Geometrien bezieht. Eine systematische, experimentelle Verifikation der Korrekturfaktoren war zum Zeitpunkt dieser Arbeit noch nicht vorhanden.

## B.2 Kompaktmodell von Veijola

Die nachstehenden Gleichungen sind den Publikationen [86, 144, 147] entnommen. Tabelle B.2 listet die Parameter des Modells auf.

Veijola berechnet mit seinem Kompaktmodell einen Dämpfungskoeffizienten  $c_{P,Veijola}$ , welcher direkt als dissipativer Widerstand in ein mechanisches, Kirchhoffsches Ersatzschaltbild der freitragenden Membran eingesetzt werden kann.

Zur Berechnung müssen zuerst die quadratischen Geometrieparameter auf effektive Geometrieparameter einer runden Lochzelle umgerechnet werden, d.h. einem effektiven Lochradius  $r_0$  und einem effektiven Zellradius  $r_X$ :

$$r_0 \approx 0.547s_0$$

$$r_X = \frac{s_0 + s_1}{\sqrt{\pi}}$$

Des Weiteren müssen Koeffizienten berechnet werden, welche die verdünnten Gase berücksichtigen:

$$K_{ch} = \frac{\lambda}{h}$$

$$K_{tb} = \frac{\lambda}{r_0}$$

$$Q_{ch} = 1 + 6K_{ch}$$

$$Q_{tb} = 1 + 4K_{tb}$$

Der Dämpfungskoeffizient berechnet sich mittels einer Reihe:

$$c_{P, Veijola} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{G_{m,n}(a_{eff}, b_{eff}) + \frac{1}{R_{m,n}}} \quad (\text{B.5})$$

Hier sind  $a_{eff}$  und  $b_{eff}$  effektive laterale Längen, welche die Randeﬀekte berücksichtigen sollen:

$$a_{eff} = a + 1.3(1 + 3.3K_{ch})h$$

$$b_{eff} = b + 1.3(1 + 3.3K_{ch})h$$

Die anderen Koeffizienten sind gegeben durch:

$$G_{m,n}(x, y) = \left( \frac{m^2}{x^2} + \frac{n^2}{y^2} \right) \frac{m^2 n^2 \pi^6 h^3 Q_{ch}}{768 \eta x y}$$

$$R_{m,n} = \frac{64 M N R_P}{m^2 n^2 \pi^4}$$

Der Parameter  $R_P$  ist der gesamte fluidische Widerstand einer einzelnen Lochzelle und setzt sich aus einer in [144] erläuterten Serienschaltung verschiedener Anteile zusammen (siehe Abbildung B.1):

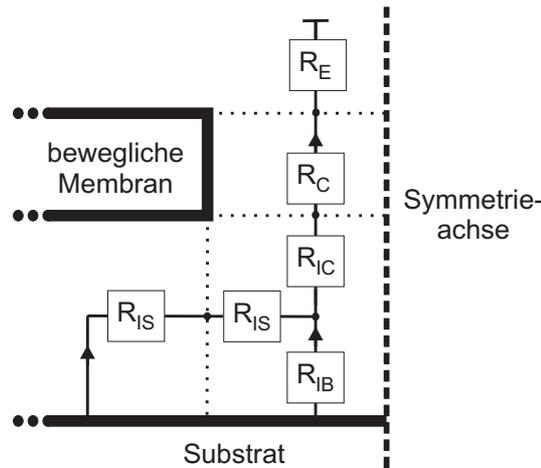
$$R_P = R_S + R_{IS} + R_{IB} + \frac{r_X^4}{r_0^4} (R_{IC} + R_C + R_E)$$

$$R_S = \frac{12\pi\eta r_X^4}{Q_{ch} h^3} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{r_X}{r_0} - \frac{3}{8} + \frac{r_0^2}{2r_X^2} - \frac{r_0^4}{8r_X^4} \right)$$

$$R_{IS} = \frac{6\pi(r_x^2 - r_0^2)^2}{r_0 h^2} \Delta_S$$

$$R_{IB} = 8\pi\eta r_0 \Delta_B$$

$$R_{IC} = 8\pi\eta r_0 \Delta_C$$



**Abb. B.1:** Schemazeichnung des fluidischen Widerstandnetzwerkes von Veijola [86].

$$R_C + R_E = 8\pi\eta \left( \frac{h_C}{Q_{tb}} + r_0\Delta_E \right)$$

Die Parameter  $\Delta_i$  mit  $i \in \{S, B, C, E\}$  sind hierbei effektive Verlängerungen, die mittels linearer Ausgleichsrechnung aus FEM-Daten extrahiert wurden. Sie berechnen sich zu:

$$\Delta_S = \frac{0.56 - 0.32\frac{r_0}{r_X} + 0.86\frac{r_0^2}{r_X^2}}{1 + 2.5K_{ch}}$$

$$\Delta_B = 1.33 \left( 1 - 0.812\frac{r_0^2}{r_X^2} \right) \frac{1 + 0.732K_{tb}}{1 + K_{ch}} f_B \left( \frac{r_0}{h}, \frac{h_c}{h} \right)$$

$$\Delta_C = (1 + 6K_{tb}) \left( 0.66 - 0.41\frac{r_0}{r_X} - 0.25\frac{r_0^2}{r_X^2} \right)$$

$$\Delta_E = \frac{0.944 \cdot 3\pi(1 + 0.216K_{tb})}{16} \left( 1 + 0.2\frac{r_0^2}{r_X^2} - 0.754\frac{r_0^4}{r_X^4} \right) f_E \left( \frac{r_0}{h} \right)$$

Mit:

$$f_B(x, y) = 1 + \frac{x^4 y^3}{7.11(43y^3 + 1)}$$

$$f_E(x) = 1 + \frac{x^{3.5}}{178(1 + 17.5K_{ch})}$$

Der Gütefaktor der freitragenden Membran berechnet sich mittels der Dämpfungskoeffizienten  $c_{P,Vejjola}$  zu:

$$Q_m = \frac{2\pi f_n m_p}{c_{P,Vejjola}} \quad (\text{B.6})$$

Hier bezeichnen  $f_n$  die natürliche mechanische Resonanzfrequenz der Membran und  $m_p$  die Masse der freitragenden Membran, wobei Vejjola nicht vollständig klärt, inwiefern ebenfalls die Masse der Aufhängungen zu berücksichtigen ist [86, 147].

### B.3 Kompaktmodell von Bao

Die Gleichungen zur Berechnung des Dämpfungskoeffizienten  $c_{Bao}$  nach dem Modell von Bao *et al.* [7] sind der Publikation [147] entnommen, da hier die identischen Eingangsparmeter, wie im vorigen Abschnitt (vgl. Tabelle B.2) verwendet werden, was zur Übersichtlichkeit beiträgt. Der Dämpfungskoeffizient berechnet sich zu:

$$c_{Bao} = -\gamma \frac{\eta a^3 b}{h^3} \quad (\text{B.7})$$

Mit:

$$\gamma = 3\alpha^2 - 6\alpha^2 \frac{\sinh^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{2}{\alpha}\right)} - \frac{24\alpha^3 \kappa}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh \frac{\sqrt{1 + \left(n\pi \frac{\alpha}{2}\right)^2}}{\alpha \kappa}}{n^2 \left[1 + \left(n\pi \frac{\alpha}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\kappa = \frac{a}{b}$$

$$\alpha = \frac{2l}{a}$$

$$l = \sqrt{\frac{2h^3 H_{eff} f_1(\beta)}{2\beta^2 r_0^2}}$$

$$f_1(\beta) = 1 + \frac{3r_0^4 f_2(\beta)}{16h_c h^3}$$

$$f_2(\beta) = 4\beta^2 - \beta^4 - 4 \ln \beta - 3$$

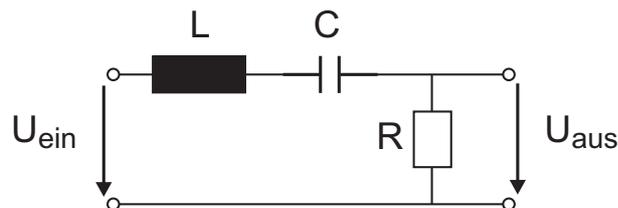
$$\beta = \frac{r_0}{r_X}$$

$$H_{eff} = h_c + \frac{3\pi r_0}{8}$$

## C. Quantifizierung der Dämpfung auf Resonatoren

### C.1 Gütefaktor $Q$

Der Gütefaktor  $Q$  ist eine dimensionslose Kennzahl zur Bewertung der Qualität eines Resonators und wird im Folgenden anhand eines Serienschwingkreises erläutert [41, 108], welcher aus der Spule  $L$ , der Kapazität  $C$  und dem Widerstand  $R$  besteht (siehe Abbildung C.1).



**Abb. C.1:** Mittels eines Serienschwingkreises realisierter Filter mit Eingangsspannung  $U_{\text{ein}}$  und am Widerstand abgegriffener Ausgangsspannung  $U_{\text{aus}}$ .

Wird eine rein sinusförmige Eingangsspannung  $U_{\text{ein}}$  angenommen und der Schwingkreis als Filter eingesetzt, lautet der Zusammenhang zwischen der Eingangsspannung und der am Widerstand abgegriffenen Ausgangsspannung  $U_{\text{aus}}$  in Fourier-Darstellung:

$$H(j\omega) = \frac{U_{\text{aus}}(j\omega)}{U_{\text{ein}}(j\omega)} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{R + j\omega L \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)} \quad (\text{C.1})$$

Nach Definition der ungedämpften Resonanzfrequenz des Schwingkreises

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{C.2})$$

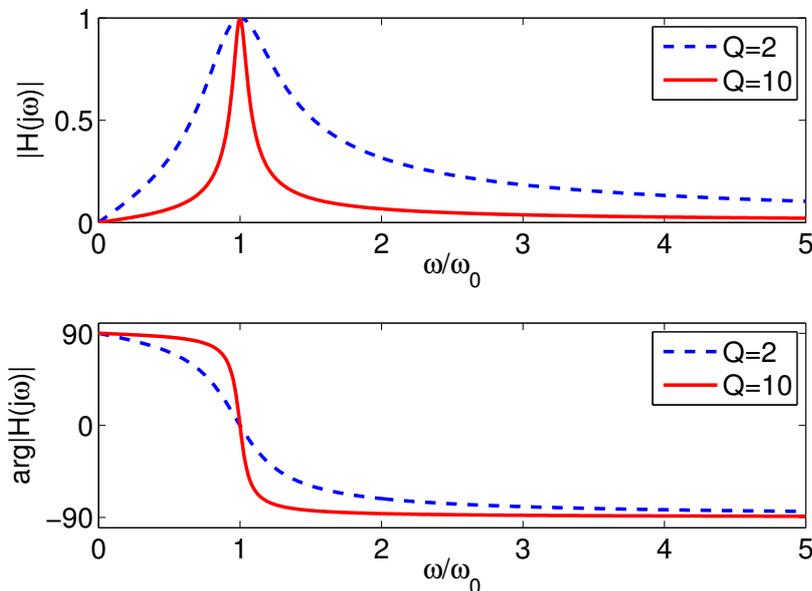
und des dimensionslosen Faktors

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C} \quad (\text{C.3})$$

stellt sich Ausdruck C.1 dar, wie folgt:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (\text{C.4})$$

Abbildung C.2 stellt den Betrag und die Phase des Ausdrucks C.4 für verschiedene Werte von  $Q$  dar. Je höher der Wert von  $Q$ , desto schmaler wird die Überhöhung bei  $\omega = \omega_0$ , d.h. die als Güte bezeichnete Selektivität des Filters wird höher. Aus diesem Grund wird  $Q$  auch als Gütefaktor bezeichnet. Weiterhin ist anzumerken, dass bei  $\omega = \omega_0$  das Vorzeichen der Phase von Ausdruck C.4 wechselt. Der Wechsel erfolgt umso abrupter, je höher der Gütefaktor ist.



**Abb. C.2:** Betrag und Phase des Ausdrucks C.4 für die Werte  $Q = 2$  und  $Q = 10$ .

Durch Erweiterung von Ausdruck C.3 mit  $I_e^2$  ergibt sich die Interpretation von  $Q$  als betragsmäßiges Verhältnis der während einer Schwingungsperiode vorhandenen Blindleistung  $P_B$  zur Wirkleistung  $P_W$ :

$$Q = \frac{\omega_0 L \cdot I_e^2}{R \cdot I_e^2} = \frac{1}{R \cdot I_e^2} \cdot \frac{I_e^2}{\omega_0 C} = \frac{|P_B|}{P_W} \quad (\text{C.5})$$

Diese Interpretation deckt sich mit Ausdruck 7.1: Je höher die im Widerstand dissipierte Leistung im Vergleich zur vorhandenen Blindleistung wird, desto niedriger wird der Gütefaktor. Wird der Zusammenhang darüber hinaus für den komplexen Leistungszeiger

$$\mathbf{P}_e = \frac{1}{2} \mathbf{U}_e \mathbf{I}_e^* = \frac{1}{2} \mathbf{Z}_e \mathbf{I}_e \mathbf{I}_e^* = \frac{1}{2} \mathbf{Z}_e |\mathbf{I}_e|^2 \quad (\text{C.6})$$

ausgewertet, so kann der Gütefaktor, analog zu Ausdruck C.5, aus der komplexen Impedanz  $\mathbf{Z}_e$  einer Schaltung berechnet werden:

$$Q = \frac{|\operatorname{Im}(\mathbf{Z})|}{\operatorname{Re}(\mathbf{Z})} \quad (\text{C.7})$$

Mittels analoger Rechnung [82] kann ebenfalls aus dem komplexen Eigenwert  $\mathbf{L} = \lambda_{\operatorname{Re}} + j\lambda_{\operatorname{Im}}$  eines Gleichungssystems der Gütefaktor berechnet werden:

$$Q = \frac{|\lambda_{\operatorname{Im}}|}{2 \cdot \lambda_{\operatorname{Re}}} \quad (\text{C.8})$$

Durch Betrachtung der Frequenzen  $f_{-3dB,links}$  und  $f_{-3dB,rechts}$ , bei denen der Betrag von Ausdruck C.4 linksseitig ( $f < f_0$ ) und rechtsseitig ( $f > f_0$ ) der Resonanz  $f_0 = \omega_0/2\pi$  auf  $|H(j\omega)| = 1/\sqrt{2}|H(j\omega_0)| = 0.7071 \cdot |H(j\omega_0)|$  abfällt, d.h. die übertragene Leistung halbiert sich, kann die sog. *3dB-Bandbreite*  $f_{3dB}$  definiert werden:

$$f_{3dB} = f_{-3dB,rechts} - f_{-3dB,links} \quad (\text{C.9})$$

Durch Berechnung der Frequenzen mittels Ausdruck C.4 lässt sich zeigen, dass der Gütefaktor mittels der Resonanzfrequenz  $f_0$  und der 3dB-Bandbreite  $f_{3dB}$  berechnet werden kann, zu:

$$Q = \frac{f_0}{f_{3dB}} \quad (\text{C.10})$$

Die bisherigen Ausführungen bezüglich des Gütefaktors  $Q$  beziehen sich auf elektrische Resonatoren, sind jedoch auf Resonatoren, die andere Energieformen speichern und dissipieren, übertragbar.

## C.2 Dämpfungsmaß $\zeta$

Als zum Gütefaktor  $\zeta$  reziproke Größe wird ebenfalls das Dämpfungsmaß  $\zeta$  verwendet:

$$\zeta = \frac{1}{2Q} \quad (\text{C.11})$$

Folglich gilt, dass je höher  $\zeta$  ist, desto höher ist ein Resonator gedämpft, d.h. desto niedriger ist dessen Güte. Alternativ wird  $\zeta$  auch als Dämpfungsgrad bezeichnet.

### C.3 Logarithmisches Dekrement $\Lambda$

Das logarithmische Dekrement  $\Lambda$  berechnet sich aus zwei, um exakt eine Schwingungsperiode verschobenen Amplitudenwerten, einer abklingenden Schwingung:

$$\Lambda = \ln \left( \frac{A_{\varphi_0}}{A_{\varphi_0+2\pi}} \right) \quad (\text{C.12})$$

Zwischen dem logarithmischen Dekrement und dem Gütefaktor besteht folgender Zusammenhang [99]:

$$Q = \frac{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}}{2\Lambda} \quad (\text{C.13})$$

### C.4 Abklingkonstante $\delta$

Betrachtet wird nach Weaver *et al.* [159], und analog zu Teilkapitel 3.2, die modale Bewegungsgleichung eines eindimensionalen, freien gedämpften Feder-Masse-Schwingers (Masse  $m_{fm}$ , Federsteifigkeit  $k_{fm}$  und Dämpfungskonstante  $d_{fm}$ ) mit  $\omega_0^2 = k_{fm}/m_{fm}$  und  $2\delta = d_{fm}/m_{fm}$ :

$$\ddot{u} + 2\delta\dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \quad (\text{C.14})$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung im Zeitbereich lautet:

$$u = e^{-\delta t} \{A_{\cos,0} \cos(\omega_d t) + A_{\sin,0} \sin(\omega_d t)\} \quad (\text{C.15})$$

Hierbei ist  $\omega_d$  die Resonanzfrequenz des gedämpften Systems:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (\text{C.16})$$

Wird lediglich der Sinus-Anteil der Lösung betrachtet ( $A_{\cos,0} \equiv 0$ ), so lässt sich Ausdruck C.15 darstellen, wie folgt:

$$u^* = \underbrace{A_{\sin,0} e^{-\delta t}}_{\substack{\text{exponentielle} \\ \text{Einhüllende} \\ E(t)}} \cdot \underbrace{\sin(\omega_d t)}_{\text{Sinus}} \quad (\text{C.17})$$

Die Lösung C.17 entspricht einer Sinusschwingung, welche durch eine exponentiell abfallende Funktion  $E(t) = A_{\sin,0} e^{-\delta t}$ , der sog. *Einhüllenden*, umschlossen ist.

Die Abklingkonstante  $\delta$  der Einhüllenden kann aus einem transienten Schwingungsverlauf entweder durch Ausgleichsrechnung [137], mittels des logarithmischen Dekrements, oder über die Güte bestimmt werden. Zwischen logarithmischen Dekrement und der Abklingkonstante gilt mit  $\tau_d = 2\pi/\omega_d$  folgender Zusammenhang:

$$\Lambda = \ln \left( \frac{A_{\varphi_0}}{A_{\varphi_0+2\pi}} \right) = \ln \left( \frac{A_{sin,0} e^{-\delta t}}{A_{sin,0} e^{-\delta(t+\tau_d)}} \right) = \ln(e^{\delta\tau_d}) = \delta\tau_d = \delta \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{\delta}{f_d} \quad (\text{C.18})$$

Zwischen der Abklingkonstante und dem Gütefaktor existiert mittels Ausdruck C.13 der Zusammenhang:

$$Q = \frac{\sqrt{4\pi^2 f_d^2 + \delta^2}}{2\delta} \quad (\text{C.19})$$

Abschließend ist bezüglich der Abklingkonstante  $\delta$  anzumerken, dass diese die einzige Quantifizierung der Dämpfung darstellt, welche sich nicht auf die Resonanzfrequenz eines Resonators bezieht und mittels Ausgleichsrechnung [137] unabhängig von dieser bestimmt werden kann.



# Literaturverzeichnis

- [1] A. Albrecht. *Persönliche Mitteilung*. Elektronische Nachricht vom 17.03.2011, 2011.
- [2] A. Albrecht. *Persönliche Mitteilung*. Elektronische Nachricht vom 26.06.2011, 2011.
- [3] Ansys, Inc. *Theory Reference for the Mechanical APDL and Mechanical Applications*, Version 12.0, Ansys, Inc., Canonsburg, PA, USA, 2009.
- [4] P. Bahukudumbi und A. Beskok. A phenomenological lubrication model of the entire knudsen regime. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 13:873–884, 2003.
- [5] R. Banks, D. Rose, und W. Fichtner. Numerical methods for semiconductor device simulation. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 30(9):1031–1041, 1983.
- [6] M. Bao und H. Yang. Squeeze film air damping in MEMS. *Sensors and Actuators A: Physical*, 136(1):3–27, 2007.
- [7] M. Bao, H. Yang, Y. Sun, und P. French. Modified Reynolds' equation and analytical analysis of squeeze-film air damping of perforated structures. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 13:795–800, 2003.
- [8] K. Beam. Anisotropic etching of silicon. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 25:1185–1193, 1978.
- [9] T. Bechtold. *Model Order Reduction of Electro-Thermal MEMS*, Dissertation, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Freiburg im Breisgau, Deutschland, 2005.
- [10] T. Bechtold, D. Hohlfeld, E. Rudnyi, und M. Günther. Efficient extraction of thin-film thermal parameters from numerical models via parametric model order reduction. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 20(4):045030 (13 Seiten), 2010.
- [11] F. Bennini. *Ordnungsreduktion von elektrostatisch-mechanischen Finite Elemente Modellen für die Mikrosystemtechnik*, Dissertation, Technische Universität Chemnitz, Chemnitz, Deutschland, 2005.

- [12] J. Bielen, J. Stulemeijer, D. Ganjoo, D. Ostergaard, und S. Noijen. Fluid-electrostatic-mechanical modeling of the dynamic response of RF-MEMS capacitive switches. In *Proceedings of the 9th International Conference on Thermal, Mechanical and Multiphysics Simulation and Experiments in Micro-Electronics and Micro-Systems, (EuroSimE 2008), April 20-23, Freiburg, Deutschland, 2008*, Seiten 1–8, 2008.
- [13] G. Bird. *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*. Clarendon Press, Oxford, UK, 2.Auflage, 1994.
- [14] J. Blech. On isothermal squeeze films. *ASME Journal of Lubrication Technology*, 105:615–620, 1983.
- [15] O. Bochobza-Degani, D. Elata, und Y. Nemirovsky. An efficient DIPIE algorithm for CAD of electrostatically actuated MEMS devices. *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*, 11(5):612–620, 2002.
- [16] O. Boepple, J. Buschmann, F. Dany, R. Diemer, J. Eberspaecher, A. Hartmann, J. Huang, B. Kuhfahl, und A. Schmid. CrossGeneration - mit Mikrosystemtechnik zu einem aktiveren und gesünderen Lebensstil. In *Proceedings of the 3rd Ambient Assisted Living Congress (AAL 2010)*, 2010.
- [17] J. Bouchaud. Consumer MEMS market outdoes itself again in 2011 with 37% growth. *MEMS Consumer & Mobile H1 2011 Market Tracker*, IHS iSuppli Market Research, 2011.
- [18] J. Bouchaud. Fabless firms expand activity. claim 23 percent of MEMS value in 2010. <http://www.isuppli.com/MEMS-and-Sensors/MarketWatch/Pages/Fabless-Firms-Expand-Activity-Claim-23-Percent-of-MEMS-Value-in-2010.aspx>, IHS iSuppli Market Research, 2011.
- [19] J. Bouchaud. MEMS continues to thrive in high-value applications. *MEMS Consumer & Mobile H1 2011 Market Tracker*, IHS iSuppli Market Research, 2011.
- [20] J. Bouchaud. Motion sensor market for smartphones and tablets to double by 2015. *MEMS Consumer & Mobile H1 2011 Market Tracker*, IHS iSuppli Market Research, 2011.
- [21] H. Callen. *Thermodynamics and Introduction to Thermostatistics*. John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 2.Auflage, 1985.
- [22] C. Cercignani. *The Boltzmann Equation and its Applications*. Springer, Berlin, Deutschland, 1987.
- [23] S. Chapman und T. Cowling. *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1960.
- [24] COMSOL AB. *COMSOL Multiphysics User's Guide*, Version 4.2a, Comsol AB, 2011.

- [25] Coventor, Inc. *Coventorware Architect Version 2008.10 Reference*, 2008.
- [26] D. Czaplewski, C. Dyck, H. Sumali, J. Massad, J. Kuppers, I. Reines, W. Cowan, und C. Tigges. A soft-landing waveform for actuation of a single-pole single-throw ohmic RF MEMS switch. *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*, 15(6):1586–1594, 2006.
- [27] F. Dany, I. Doerfler, und A. Schmid. CrossGeneration, Einsatzmöglichkeiten von IT Systemen als Antwort auf zukünftige Herausforderungen des Gesundheitssystems. In *Innovative Assistenzsysteme im Dienste des Menschen*, 2010.
- [28] R. Darling, C. Hivik, und J. Xu. Compact analytical modeling of squeeze film damping with arbitrary venting conditions using a green's function approach. *Sensors and Actuators A: Physical*, 70:32–41, 1998.
- [29] B. Dotz. *Evaluierung des Mixed-Level-Modells für Strukturen mit quadratischen Perforationen mittels FEM Simulation*, Technischer Report Nr. 2011/8, Lehrstuhl für Technische Elektrophysik, Technische Universität München, 2011.
- [30] A. Duwel, R. Candler, T. Kenny, und M. Varghese. Engineering MEMS resonators with low thermoelastic damping. *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*, 15(6):1437–1445, 2006.
- [31] M. Gad el Hak. The fluid mechanics of microdevices – the freeman scholar lecture. *Journal of Fluids Engineering*, 121:5–33, 1999.
- [32] M. Gad el Hak. *The MEMS Handbook*. CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2002.
- [33] D. Elata. Geometrical aspects of dielectric charging. In *Procedia Engineering. Zugl. Proceedings of Eurosensors XXIV Conference (EUROSENSORS 2010), September 5–8, Linz, Österreich, Band 5, Seiten 1308–1311*, 2010.
- [34] A. Faes. *Persönliche Mitteilung*. Private Diskussion am 17.08.2011 in München, 2011.
- [35] Fondazione Bruno Kessler, MEMS Resarch Unit. *RF-MEMS Switches Design Handbook (Version 1.0)*. Eigendruck, 2009.
- [36] T. Fontane. *Effi Briest*. Philipp Reclam jun. Verlag, Ditzingen, Deutschland, 1986.
- [37] R. Forke, D. Scheibner, W. Dötzel, und J. Mehner. Measurement unit for tunable low frequency vibration detection with MEMS force coupled oscillators. *Sensors and Actuators A: Physical*, 156:59–65, 2009.
- [38] A. Frangi. BEM technique for free-molecule flows in high frequency MEMS resonators. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33:493–498, 2009.
- [39] A. Frangi. *On the analysis of solid and fluid dissipation in MEMS resonators*. Vortrag am 20.06.2011 im Rahmen des Oberseminars des Lehrstuhls für Technische Elektrophysik der Technischen Universität München, 2011.

- [40] A. Frangi, A. Ghisi, und L. Coronato. On a deterministic approach for the evaluation of gas damping in inertial MEMS in the free-molecule regime. *Sensors and Actuators A: Physical*, 149(1):21–28, 2009.
- [41] S. Franke. *Radio Communication Circuits. Course Notes and Laboratory Notes*. Department of Electrical and Computer Engineering, University of Illinois, Urbana, IL, USA, 2004.
- [42] J. Franz. *MEMS-Sensorik bei Bosch*. Vortrag am 18.01.2010 im Rahmen des Oberseminars des Lehrstuhls für Technische Elektrophysik der Technischen Universität München, 2010.
- [43] L. Gabbay. *Computer aided macromodeling for MEMS*, Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 1998.
- [44] L. Gabbay, J. Mehner, und S. Senturia. Computer-aided generation of nonlinear reduced-order dynamic macromodels – I: Non-stress-stiffened case. *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*, 9(2):262–269, 2000.
- [45] C. Gebhardt. *Praxisbuch FEM mit Ansys Workbench*. Carl Hanser Verlag, München, Deutschland, 2011.
- [46] G. Gerlach und W. Dötzel. *Grundlagen der Mikrosystemtechnik*. Carl Hanser Verlag, München, Deutschland, 1997.
- [47] Y. Gerstenmaier, A. Castellazzi, und G. Wachutka. Electrothermal simulation of multichip-modules with novel transient thermal model and time-dependent boundary conditions. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 21(1):45–55, 2006.
- [48] F. Giacomozzi, V. Mulloni, S. Colpo, J. Iannacci, B. Margesin, und A. Faes. A flexible technology platform for the fabrication of RF-MEMS devices. In *Proceedings of the International Semiconductor Conference (CAS 2011), Oktober 17–19, Sinaia, Rumänien*, Band 1, Seiten 155–158, 2011.
- [49] Robert Bosch GmbH. Marketing Material. CD-ROM, 2009.
- [50] H. Goldstein, C. Poole, und J. Safko. *Classical Mechanics*. Pearson Education International, Upper Saddle River, NJ, USA, 3.Auflage, 2002.
- [51] W. Greiner. *Theoretische Physik. Band 2: Mechanik II*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, Deutschland, 4.Auflage, 1986.
- [52] Z. Guo, N. McGruer, und G. Adams. Modeling, simulation and measurement of the dynamic performance of an ohmic contact, electrostatically actuated RF MEMS switch. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 17(9):1899–1909, 2007.
- [53] J. Halfmann. *Die Entstehung der Mikroelektronik: zur Produktion technischen Fortschritts*. Campus Verlag, Frankfurt a. Main, Deutschland, 1984.

- [54] B. Hamrock, S. Schmid, und B. Jacobson. *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*. Marcel Dekker, Inc., New York, NY, USA, 2.Auflage, 2004.
- [55] M. Handtmann. *Dynamische Regelung mikroelektromechanischer Systeme (MEMS) mit Hilfe kapazitiver Signalwandlung und Krafrückkopplung*. 14. Band der Reihe *Ausgewählte Probleme der Elektronik und Mikromechanik*, Hrsg. G. Wachutka und D. Schmitt-Landsiedel, Shaker Verlag, Zugl. Dissertationsschrift an der Technischen Universität München (2002), Aachen, Deutschland, 2003.
- [56] H. Hasimoto. On the flow of a viscous fluid past a thin screen at small Reynolds numbers. *Journal of the Physical Society of Japan*, 13:633–639, 1958.
- [57] M. Hatch. *Vibration Simulation Using MATLAB and ANSYS*. Chapman and Hall/CRC, CA, USA, 2000.
- [58] D. Hohlfeld. System-Simulation eines MEMS-basierten piezoelektrischen Energy-Harvester Moduls. In *Proceedings of ANSYS Conference & 29. CADFEM Users' Meeting, Oktober 19–21 Stuttgart, Deutschland, 2011*.
- [59] D. Hohlfeld und R. van Schaijk. Multiphysics modeling, simulation and optimization of a MEMS-based piezoelectric energy harvester. In *Proceedings of the 5th European Comsol Conference, Oktober 26–28, Stuttgart, Deutschland, 2011*.
- [60] R. Howe und R. Muller. Polycrystalline silicon micromechanical beams. *Journal of the Electrochemical Society*, 130:1420–1423, 1983.
- [61] E. Hung und S. Senturia. Generating efficient dynamical models for microelectromechanical systems from a few finite-element simulation runs. *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*, 8(3):280–289, 1999.
- [62] J. Iannacci. *Persönliche Mitteilung*. Elektronische Nachricht vom 04.10.2010, 2010.
- [63] J. Iannacci. *Aspects in Design, Simulation and Characterization of Reliable RF-MEMS Switches in FBK Technology*. Vortrag am 04.07.2011 im Rahmen des Oberseminars des Lehrstuhls für Technische Elektrophysik der Technischen Universität München, 2011.
- [64] J. Iannacci. *Persönliche Mitteilung*. Elektronische Nachricht vom 07.02.2011, 2011.
- [65] J. Iannacci. *Persönliche Mitteilung*. Private Diskussion im Anschluss an den Vortrag am 04.07.2011, 2011.
- [66] J. Iannacci, A. Faes, und B. Margesin. MEMS technology for RF passive components. In *Proceedings of 4th International Symposium on Applied Sciences in Biomedical and Communication Technologies (ISABEL 2011), October 26–29, Barcelona, Spanien, Seiten 1–7, 2011*.

- [67] J. Iannacci, F. Faes, T. Künzig, M. Niessner, und G. Wachutka. Electromechanical and electromagnetic simulation of RF-MEMS complex networks based on compact modeling approach. In *Proceedings of TechConnect World NSTI Nanotech/Microtech 2011 (NSTI NANOTECH 2011)*, Vol. 2, Juni 13–16, Boston, MA, USA, Seiten 591–594, 2011.
- [68] J. Iannacci, R. Gaddi, und A. Gnudi. Experimental validation of mixed electromechanical and electromagnetic modeling of RF-MEMS devices within a standard IC simulation environment. *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*, 19(3):526–537, 2010.
- [69] J. Iannacci, F. Giacomozzi, S. Colpo, B. Margesin, und M. Bartek. A general purpose reconfigurable MEMS-based attenuator for radio frequency and microwave applications. In *Proceedings of the IEEE Region 8 EUROCON 2009 Conference*, Mai 18–23, St. Petersburg, Russland, Seiten 1201–1209, 2009.
- [70] J. Iannacci, D. Masotti, T. Künzig, und M. Niessner. A reconfigurable impedance matching network entirely manufactured in RF-MEMS technology. In *Proceedings of SPIE: Smart Sensors, Actuators, and MEMS V*, April 18–20, Prague, Czech Republic (SPIE Microtechnologies, Bellingham, WA, USA), Seiten 80660X–1–12, 2011.
- [71] J. Iannacci, A. Repchankova, D. Macii, und M. Niessner. A measurement procedure of technology-related model parameters for enhanced RF-MEMS design. In *Proceedings of the IEEE Advanced Methods for Uncertainty Estimation in Measurement International Workshop (AMUEM 2009)*, Juli 6-7, Bukarest, Rumänien, Seiten 44–49, 2009.
- [72] S. Idelsohn und A. Cardona. A load-dependent basis for reduced nonlinear structural dynamics. *Computers & Structures*, 20(1–3):203–210, 1985.
- [73] S. Iyer, Q. Jing, G. Fedder, und T. Mukherjee. Coverage speed and issues in analog HDL model formulation for MEMS. In *Proc. of the 4<sup>th</sup> Int. Conf. on Modeling and Simulation of Microsystems (MSM'01)*, USA, Seiten 590–593, 2001.
- [74] G. Karniadakis und A. Beskok. *Micro Flows: Fundamentals and Simulation*. Springer, New York, NY, USA, 2002.
- [75] U. Knipper. *Untersuchungen zur Robustheit von IGBT-Chips im Lawinendurchbruch*. 39. Band der Reihe *Ausgewählte Probleme der Elektronik und Mikromechanik*, Hrsg. G. Wachutka und D. Schmitt-Landsiedel, Shaker Verlag, Zugl. Dissertationsschrift an der Technischen Universität München (2011), Aachen, Deutschland, 20011.
- [76] E.-R. Koenig. *Modellierung und Simulation elektromechanischer Instabilitäten bei Mikrobauteilen*. 18. Band der Reihe *Ausgewählte Probleme der Elektronik und Mikromechanik*, Hrsg. G. Wachutka und D. Schmitt-Landsiedel, Shaker Verlag, Zugl. Dissertationsschrift an der Technischen Universität München (2005), Aachen, Deutschland, 2005.

- [77] V. Kolchuzhin. *Methods and Tools for Parametric Modeling and Simulation of Microsystems based on Finite Element Methods and Order Reduction Technologies Model Order Reduction of Electro-Thermal MEMS*, Dissertation, Technische Universität Chemnitz, Chemnitz, Deutschland, 2010.
- [78] H. Kuchling. *Taschenbuch der Physik*. Carl Hanser Verlag, München, Deutschland, 20. Auflage, 2010.
- [79] P. Kundu und I. Cohen. *Fluid Mechanics*. Elsevier Academic Press, San Diego, CA, USA, 3. Auflage, 2004.
- [80] F. Laermer und A. Schilp. Deutsches Patent DE 4 241 045 vom 26.05.1994 (US Patent 5 501 893 erteilt am 26.03.1996), Basispatent für das trockenchemische Tiefenätzen, 1994.
- [81] V. Leus und D. Elata. On the dynamic response of electrostatic MEMS switches. *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*, 17(1):236–243, 2008.
- [82] R. Lifshitz und M. Roukes. Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical systems. *Physical Review B*, 61(8):5600–5609, 2000.
- [83] G. Lorenz. *Netzwerksimulation mikromechanischer Systeme*. Shaker Verlag, Zugl. Dissertationsschrift an der Universität Bremen (1999), Aachen, Deutschland, 1999.
- [84] R. Marcelli, G. Bartolucci, G. Papaioannou, G. De Angelis, A. Lucibello, E. Proietti, B. Margesin, F. Giacomozzi, und F. Deborgies. Reliability of RF MEMS switches due to charging effects and their circuitual modelling. *Journal of Microsystem Technologies*, 16(7):1111–1118, 2010.
- [85] G. De Pasquale und T. Veijola. Comparative numerical study of FEM methods solving gas damping in perforated MEMS devices. *Journal of Microfluidics and Nanofluidics*, 5(4):517–528, 2008.
- [86] G. De Pasquale, T. Veijola, und Aurelio Somà. Modelling and validation of air damping in perforated gold and silicon MEMS plates. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 20:015010 (12), 2010.
- [87] J. Mehner. *Entwurf in der Mikrosystemtechnik*. 9. Band der Reihe *Dresdner Beiträge zur Sensorik*, Hrsg. G. Gerlach und W. Dötzel, Dresden University Press, Zugl. Habilitationsschrift an der Technischen Universität Chemnitz (1999), Dresden, Deutschland, 2000.
- [88] J. Mehner, L. Gabbay, und S. Senturia. Computer-aided generation of nonlinear reduced-order dynamic macromodels – II: Stress-stiffened case. *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*, 9(2):270–278, 2000.
- [89] S. Middelhoek. Celebration of the tenth transducers conference - the past, present and future of transducers research and development. *Sensors and Actuators A: Physical*, 82:2–23, 2000.

- [90] S. Müller. *Evaluation of fluidmechanical macro models for MEMS devices*, Technischer Report Nr. 2009/4, Lehrstuhl für Technische Elektrophysik, Technische Universität München, 2009.
- [91] B. Moore. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(1):17–32, 1981.
- [92] E. Mounier. MEMS markets and new applications. In *Proceedings of 2nd European Conference & Exhibition on Integration Issues of Miniaturized Systems - MOMS, MOEMS, ICS and Electronic Components (SSI 2008)*, Seiten 1–4, 2008.
- [93] L. Nagel und R. Rohrer. Computer analysis of nonlinear circuits, excluding radiation (CANCER). *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 6(4):166–182, 1971.
- [94] E. Ngoya, J. Rousset, und J. Obregon. Newton–raphson iteration speed-up algorithm for the solution of nonlinear circuit equations in general-purpose cad programs. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 16(6):638–644, 1997.
- [95] C. Nguyen. Mechanical radio. *IEEE Spectrum*, 46(12):30–35, 2009.
- [96] N.-T. Nguyen und S. Wereley. *Fundamentals and Applications of Microfluidics*. Artech House, Norwood, MA, USA, 2002.
- [97] G. Nielson und G. Barbastathis. Dynamic pull-in of parallel-plate and torsional electrostatic MEMS actuators. *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*, 14(4):811–821, 2006.
- [98] M. Niessner. *Physikalisch basiertes Kompaktmodell zur Kapazitätsberechnung von gelochten mikrostrukturierten Platten*, Technischer Report Nr. 2004/7, Lehrstuhl für Technische Elektrophysik, Technische Universität München, 2004.
- [99] M. Niessner. *Modellierung des dynamischen Verformungsverhaltens eines kapazitiven Inertialsensors*, Technischer Report Nr. 2005/6, Lehrstuhl für Technische Elektrophysik, Technische Universität München, 2005.
- [100] M. Niessner, J. Iannacci, A. Peller, G. Schrag, und G. Wachutka. Macromodel-based simulation and measurement of the dynamic pull-in of viscously damped RF-MEMS switches. In *Procedia Engineering. Zugl. Proceedings of Eurosensor XXIV Conference (EUROSENSORS 2010), September 5–8, Linz, Österreich, Band 5*, Seiten 78–81, 2010.
- [101] M. Niessner, J. Iannacci, und G. Schrag. Mechanical contact in system-level models of electrostatically actuated RF-MEMS switches: Experimental analysis and modeling. In *Proceedings of SPIE: Smart Sensors, Actuators, and MEMS V (SPIE Microtechnologies), April 18-20, Prague, Czech Republic*, Seiten 80660Y–1–9, 2011.

- [102] M. Niessner, G. Schrag, J. Iannacci, und G. Wachutka. Macromodel-based simulation and measurement of the dynamic pull-in of viscously damped RF-MEMS switches. *Sensors and Actuators A: Physical*, 172(1):269–279, 2011.
- [103] M. Niessner, G. Schrag, J. Iannacci, und G. Wachutka. Mixed-level modeling of squeeze film damping in MEMS: simulation and pressure-dependent experimental validation. In *Technical Digest of the 16th Int. Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS 2011), Juni 5-9, Beijing, China*, Seiten 1693–1698, 2011.
- [104] M. Niessner, G. Schrag, und G. Wachutka. Reduced-order modeling and coupled multi-energy domain simulation of damped highly perforated microstructures. In *Proc. of the 8th Cong. on Computational Mechanics and the 5th European Cong. on Computational Mechanics in Applied Sciences and Engineering (WC-CM8/ECCOMAS 2008), Juni 30 – Juli 4, Venedig, Italien*, 2008.
- [105] M. Niessner, G. Schrag, G. Wachutka, und J. Iannacci. Modeling and fast simulation of RF-MEMS switches within standard IC design frameworks. In *Proceedings of the 15th International Conference on Simulation of Semiconductor Processes and Devices (SISPAD 2010), September 6-8, Bolgna, Italien*, Seiten 317–320, 2010.
- [106] M. Niessner, G. Schrag, G. Wachutka, J. Iannacci, T. Reutter, und H. Mulatz. Non-linear model for the simulation of viscously damped RF-MEMS switches at varying ambient pressure conditions. In *Proceedings of Eurosensors XXIII (Eurosensors 2009), September 6-9, Lausanne, Schweiz*, Seiten 618–621, 2009.
- [107] J. Nossek. *Vorlesung Schaltungstechnik 1*, Vorlesungsskriptum, Lehrstuhl für Netzwerktheorie und Signalverarbeitung, Technische Universität München, 1999.
- [108] J. Nossek. *Vorlesung Schaltungstechnik 2*, Vorlesungsskriptum, Lehrstuhl für Netzwerktheorie und Signalverarbeitung, Technische Universität München, 2000.
- [109] Oerlikon Laybold Vacuum. *CERAVAC-Transmitter CTR 100*, Gebrauchsanleitung und Kalibrierungsprotokoll, 2008.
- [110] L. Onsager. Reciprocal relations in irreversible processes. *Physical Review*, 37:405–426, 1931.
- [111] A. Pandey und R. Pratap. A comparative study of analytical squeeze film damping models in rigid rectangular perforated MEMS structures with experimental results. *Journal of Microfluidics and Nanofluidics*, 40:205–218, 2008.
- [112] A. Pandey, R. Pratap, und F. Chaub. Analytical solution of the modified reynolds equation for squeeze film damping in perforated MEMS structures. *Sensors and Actuators A: Physical*, 135(2):839–848, 2007.

- [113] M. Pfof und D. Costachescu. Compact nonlinear thermal networks for accurate modeling of smart power ICs. In *Proceedings of the 10th International Symposium on Signals, Circuits and Systems (ISSCS 2011)*, Seiten 1–4, 2011.
- [114] M. Pfof, D. Costachescu, A. Podgaynaya, und M. Stecher. A simple approach for DMOS transistor modeling up to very high temperatures. In *Proceedings of the International Semiconductor Conference 2009 (CAS 2009)*, Band 2, Seiten 389–392, 2009.
- [115] Polytec GmbH. *Micro System Analyzer MSA-500*, Handbuch, 2011.
- [116] Polytec GmbH. *Polytec Scanning Vibrometer Software 8.7*, Handbuch, 2011.
- [117] Polytec GmbH. *Vibrometer Controller OFV-5000*, Handbuch, 2011.
- [118] V. Popov. *Kontaktmechanik und Reibung*. Springer-Verlag, Berlin, Deutschland, 2009.
- [119] K. Rangra, F. Giacomozzi, B. Margesin, L. Lorenzelli, V. Mulloni, C. Collini, R. Marcelli, und G. Soncini. Micromachined low actuation voltage RF MEMS capacitive switches, technology and characterization. In *Proceedings of the IEEE 2004 International Semiconductor Conference, October 4-6, Sinaia, Romania*, Seiten 165–168, 2004.
- [120] G. Rebeiz. *RF MEMS. Theory, Design, and Technology*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, USA, 2003.
- [121] K. Reif. *Sensoren im Kraftfahrzeug*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, Deutschland, 1. Auflage, 2010.
- [122] X. Riedl. *Mikrosensoren zur Transitionsmessung auf flexiblen Substraten*. Dissertation, Technische Universität München, 2011.
- [123] L. Rocha. *Dynamics and Nonlinearities of the Electro-Mechanical Coupling in Inertial MEMS*. Dissertation, Technische Universität Delft, 2005.
- [124] L. Rocha, E. Cretu, und R. Wolffenbuttel. Analysis and analytical modeling of static pull-in with application to mems-based voltage reference and process monitoring. *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*, 13(2):342–354, 2004.
- [125] L. Rocha, E. Cretu, und R. Wolffenbuttel. Using dynamic voltage drive in a parallel-plate electrostatic actuator for full-gap travel range and positioning. *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*, 15(1):69–83, 2006.
- [126] U. Rohde, J. Whitaker, und T. Bucher. *Communications Receivers: Principles and Design*. McGraw Hill, New York, NY, USA, 2. Auflage, 1997.
- [127] E. Rudnyi und J. Korvink. Review: Automatic model reduction for transient simulation of MEMS-based devices. *Sensors Update*, 11(1):3–33, 2002.

- [128] R. Sattler. *Physikalisch basierte Mixed-Level Modellierung von gedämpften elektromechanischen Systemen*. 28. Band der Reihe *Ausgewählte Probleme der Elektronik und Mikromechanik*, Hrsg. G. Wachutka und D. Schmitt-Landsiedel, Shaker Verlag, Zugl. Dissertationsschrift an der Technischen Universität München (2007), Aachen, Deutschland, 2007.
- [129] G. Schrag. *Modellierung gekoppelter Effekte in Mikrosystemen auf kontinuierlicher Feldebene und Systemebene*. 6. Band der Reihe *Ausgewählte Probleme der Elektronik und Mikromechanik*, Hrsg. G. Wachutka und D. Schmitt-Landsiedel, Shaker Verlag, Zugl. Dissertationsschrift an der Technischen Universität München (2002), Aachen, Deutschland, 2003.
- [130] G. Schrag, P. Voigt, und G. Wachutka. Physically-based Modeling of Squeeze Film Damping by Mixed Level System Simulation. In *Proceedings of the 11th Int. Conf. on Solid-State Sensors and Actuators (Transducers 2001), June 11-14, München, Deutschland, 2001*, Seiten 670–673, 2001.
- [131] G. Schrag und G. Wachutka. Accurate system-level damping model for highly perforated micromechanical devices. *Sensors and Actuators A: Physical*, 111(2-3):222–228, 2004.
- [132] S. Senturia. *Microsystem Design*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA, 2001.
- [133] F. Sharipov. Rarefied gas flow through a long rectangular channel. *Journal of Vacuum Science and Technology A*, 17:3062–3066, 1999.
- [134] F. Sharipov. Data on the slip coefficients. In *Proc. of the 3<sup>rd</sup> Int. Conf. on Modeling and Simulation of Microsystems (MSM'00), USA*, Seiten 570–573, 2000.
- [135] F. Sharipov und V. Seleznev. Data on internal rarefied gas flow. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 27:657–706, 1998.
- [136] K. Simonyi. *Theoretische Elektrotechnik*. Verlag Johann Ambrosius Barth, Leipzig, Deutschland, 10. Auflage, 1993.
- [137] P. Solans. *Squeeze-film damping in MEMS resonators: Analysis of experimental data and simulation*, Technischer Report Nr. 2011/4, Lehrstuhl für Technische Elektrophysik, Technische Universität München, 2011.
- [138] S. Strommer. *Numerisch gestützte Untersuchung eines Kompaktmodells für mikro-mechanische Kammantriebe*, Technischer Report Nr. 2009/8, Lehrstuhl für Technische Elektrophysik, Technische Universität München, 2009.
- [139] H. Sumali, J. Massad, D. Czaplewski, und C. Dyck. Waveform design for pulse-and-hold electrostatic actuation in MEMS. *Sensors and Actuators A: Physical*, 134:213–220, 2007.

- [140] P. Sumant, N. Aluru, und A. Cangellaris. A compact model for dielectric charging in RF MEMS capacitive switches. *International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering*, 19(2):197—203, 2009.
- [141] P. Sumant, A. Cangellaris, und N. Aluru. A conformal mapping based approach for fast two-dimensional FEM electrostatic analysis of MEMS devices without re-meshing. In *Proceedings of the 10th International Conference on Thermal, Mechanical and Multi-Physics simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems (EuroSimE 2009), Delft, Niederlande, April 26–29, Seiten CD-ROM, 8 Seiten.*, 2009.
- [142] P. Tiso, S. Hannot, und D. Rixen. A modal derivative approach for model reduction in MEMS nonlinear dynamic analysis. In *Proceedings of the IV European Conference on Computational Mechanics (ECCM 2010), Paris, Frankreich, May 16–21, Seiten CD-ROM, 3 Seiten.*, 2010.
- [143] T. Veijola. End effects of rare gas flow in short channels and in squeeze film dampers. In *Proc. of the 5th Int. Conf. on Modeling and Simulation of Microsystems (MSM'02), USA, Seiten 104–107, 2002.*
- [144] T. Veijola. Analytic damping model for an MEM perforation cell. *Journal of Microfluidics and Nanofluidics*, 2:249–260, 2006.
- [145] T. Veijola, H. Kuisma, und J. Lahdenperä. The influence of gas-surface interaction on gas-film damping in a silicon accelerometer. *Sensors and Actuators A: Physical*, 66:83–92, 1998.
- [146] T. Veijola, H. Kuisma, J. Lahdenperä, und T. Ryhänen. Equivalent-circuit model of the squeezed gas film in a silicon accelerometer. *Sensors and Actuators A: Physical*, 48:239–248, 1995.
- [147] T. Veijola, G. De Pasquale, und A. Somà. Experimental validation of compact damping models of perforated MEMS devices. *Journal of Microsystem Technologies*, 15(8):1121–1128, 2009.
- [148] T. Veijola, A. Pursula, und P. Raback. Extending the validity of existing squeezed-film damper models with elongations of surface dimensions. In *Proc. of the 7th Int. Conf. on Modeling and Simulation of Microsystems (MSM'04), USA, Seiten 235–238, 2004.*
- [149] T. Veijola und P. Raback. Methods for solving gas damping problems in perforated microstructures using a 2D finite-element solver. *Sensors*, 7:1069–1090, 2007.
- [150] A. Veloso, S. Demuynck, M. Ercken, A. Goethals, S. Locorotondo, et al. Demonstration of Scaled  $0.099\mu\text{m}^2$  FinFET 6T-SRAM Cell using Full-Field EUV Lithography for (Sub-)22nm Node Single-Patterning Technology. In *Proceedings of the IEEE International Electron Devices Meeting 2009 (IEDM 2009), Seiten 12.4.1–12.4.4, 2009.*

- [151] P. Voigt. *Compact Modeling of Microsystems*. 7. Band der Reihe *Ausgewählte Probleme der Elektronik und Mikromechanik*, Hrsg. G. Wachutka und D. Schmitt-Landsiedel, Shaker Verlag, Zugl. Dissertationsschrift an der Technischen Universität München (2002), Aachen, Deutschland, 2003.
- [152] G. Wachutka. Tailored modeling: A way to the 'virtual microtransducer fab'? *Sensors and Actuators A: Physical*, 47(1–3):603–612, 1995.
- [153] G. Wachutka. *Elektrizität und Magnetismus*, Vorlesungsskriptum, Stand Sommersemester 2011, Lehrstuhl für Technische Elektrophysik, Technische Universität München, 2011.
- [154] G. Wachutka. *Elektromagnetische Feldtheorie*, Vorlesungsskriptum, Stand Wintersemester 2010/2011, Lehrstuhl für Technische Elektrophysik, Technische Universität München, 2011.
- [155] G. Wachutka. *Modellierung mikrostrukturierter Bauelemente und Systeme 1*, Vorlesungsskriptum, Stand Wintersemester 2010/2011, Lehrstuhl für Technische Elektrophysik, Technische Universität München, 2011.
- [156] G. Wachutka. *Modellierung mikrostrukturierter Bauelemente und Systeme 2*, Vorlesungsskriptum, Stand Sommersemester 2011, Lehrstuhl für Technische Elektrophysik, Technische Universität München, 2011.
- [157] G. Wachutka. *Modellierung mikrostrukturierter Bauelemente und Systeme 3*, Vorlesungsskriptum, Stand Wintersemester 2010/2011, Lehrstuhl für Technische Elektrophysik, Technische Universität München, 2011.
- [158] T. Waterfall, K. Teichert, und B. Jensen. Simultaneous on-chip sensing and actuation using the thermomechanical in-plane microactuator. *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*, 17(5):1204–1209, 2008.
- [159] W. Weaver, S. Timoshenko, und D. Young. *Vibration Problems in Engineering*. John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 5.Auflage, 1990.
- [160] W. Weber. *Introduction and Overview*. Vortrag am 10.09.2007 im Rahmen des Tutorials „Industrialization of MEMS“, *37th European Solid State Research Conference (ESSDERC 2007)*, 2007.
- [161] W. Weber. *Persönliche Mitteilung*. Elektronische Nachricht vom 11.09.2007, 2007.
- [162] W. Weber. *Persönliche Mitteilung*. Elektronische Nachricht vom 23.09.2007, 2007.
- [163] M. Weinberg, R. Candler, S. Chandorkar, J. Varsanik, T. Kenny, und A. Duwel. Energy loss in MEMS resonators and the impact on inertial and RF devices. In *Tech. Digest of the 15th Int. Conf. on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (Transducers'09)*, USA, Seiten 688–695, 2009.
- [164] F. White. *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill Education, New York, NY, USA, 5.Auflage, 2005.

- [165] J. Willems. The behavioral approach to open and interconnected systems. modeling by tearing, zooming and linking. *IEEE Control Systems*, 27(6):46–99, 2007.
- [166] J. Willems. *System Interconnection*. Vortrag am 12.02.2009 im Rahmen des Kolloquiums am Lehrstuhl für Netzwerktheorie und Signalverarbeitung der Technischen Universität München, <http://homes.esat.kuleuven.be/~jwillems/Lectures/2009/Munich.pdf>, 2009.
- [167] K. Willner. *Kontinuums- und Kontaktmechanik. Synthetische und analytische Darstellung*. Springer-Verlag, Berlin, Deutschland, 2003.
- [168] P. Wriggers. *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer Verlag, Berlin, Deutschland, 2001.
- [169] P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. Springer Verlag, Berlin, Deutschland, 2. Auflage, 2006.
- [170] Staff Writers. *Amazing Pics: How a chip is made*. <http://apcmag.com/picture-gallery-how-a-chip-is-made.htm>, 2009.
- [171] J. Wyrwa. *Turbulenzmodellierung für stabil dichteschichtete Strömungen bei der Simulation des Transports von kohäsiven Sedimenten in Ästuaren*, Dissertation, Technische Universität Berlin, Berlin, Deutschland, 2003.

# Danksagung

Ich möchte mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr. Gerhard Wachutka, der mir durch seine Kontakte zu institutionellen und industriellen Kooperationspartnern und die Bereitstellung einer sehr guten Infrastruktur diese Arbeit ermöglicht hat. Er gewährte mir die Freiräume, die erforderlich waren, um eine eigenverantwortliche, produktive und familienfreundliche Arbeitsweise zu entfalten. Bei kritischen Fragestellungen stand er mir mit seinem umfangreichen physikalischen Wissen stets zur Seite.

Ein ebenso besonderer Dank gilt der Leiterin meiner Arbeitsgruppe Dr. Gabriele Schrag, welche die MEMS-Gruppe organisatorisch bündigte, thematisch strukturierte, Ziele vorgab und meine Anschaffungsgesuche für das Raster-Laser-Vibrometer unterstützte.

Herrn Prof. Dr. Ignaz Eisele danke ich herzlichst für die Begutachtung dieser Arbeit sowie Herrn Prof. Dr. Hans-Georg Herzog für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission und den damit verbundenen Aufgaben.

Ein großer Dank gilt allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Lehrstuhls für Technische Elektrophysik und des Fachgebiets für Mikrostrukturierte Mechatronische Systeme. Die Atmosphäre war stets kollegial und ermöglichte es, sowohl kreativitätsbezogene Durststrecken rapide zu beenden als auch extrinsische Herausforderungen, wie beispielsweise die Umstellung auf Bachelor-/Masterstudiengänge und die studentische Tsunamiwelle gemeinsam zu stemmen. Insbesondere bedanken möchte ich mich bei Dr. Alexander Heigl, welcher viele Arbeitspakete auf sich genommen hat, die sonst zusätzlich bei mir aufgeschlagen wären, und Stefan Schaub, welcher mir bei Umsetzungen jeglicher Art zur Seite stand und für die strikte Einhaltung von lehrstuhlspezifischen Ritualen sorgte.

Ein ebenso großer Dank gilt Dr. Jacopo Iannacci (Fondazione Bruno Kessler), welcher die Bereitstellung von Mikrostrukturen forcierte und es mir somit ermöglichte, die Messtechnik gezielt zu konzipieren. Er war jederzeit zu einem bilateralen Austausch von Ideen und Informationen bereit. Diese fruchtbare Zusammenarbeit mündete in 18 gemeinsamen Veröffentlichungen. Ich hoffe, dass diese Kooperation weiterhin bestehen bleibt.

Des Weiteren möchte ich mich bei Herrn Hans Mulatz und Dr. Markus Becherer (beide Lehrstuhl für Technische Elektronik) für den Aufbau und die FIB/REM-Messungen der Hochfrequenzmikroschalter bedanken.

Sehr hilfreich waren für mich ebenfalls die Hinweise meiner Korrekturleser Dr. Gabriele Schrag und Johannes Manz.

Zuletzt ein herzliches Dankeschön an meine Familie und Freunde, die mir jegliche Unterstützung gewährt haben, die zur Fertigstellung dieser Arbeit förderlich war.