

Technische Universität München  
Lehrstuhl für Angewandte Mechanik

# Experimentelle Mechanismendynamik

—  
Messung,  
Modellierung, Simulation, Verifikation, Interpretation  
und Beeinflussung  
typischer Schwingungsphänomene  
an einem Mechanismenprüfstand

**Dr.-Ing. Thomas Thümmel**

Thalham  
Gemeinde Attenkirchen

Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technische Universität München zur  
Erlangung der Lehrbefähigung für das Fachgebiet „Maschinendynamik“ genehmigten

## **Habilitationsschrift**

Mentorat:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. Heinz Ulbrich (Vorsitz)  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Bernd-Robert Höhn  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Burkhard Corves, RWTH Aachen

Die Habilitationsschrift wurde am 27.06. 2008 bei der Technische Universität München  
eingereicht, durch das Mentorat am 13.08. 2009 zur Annahme empfohlen und  
durch die Fakultät für Maschinenwesen am 27.03.2012 beschlossen.



# Verlags-Innenseite

(gestaltet vom VDI-Verlag)

# Impressumseite

(gestaltet vom VDI-Verlag)

## Vorwort

Diese Arbeit entstand in vielen kleinen Schritten während meiner Tätigkeit als Akademischer Direktor seit Oktober 1990 am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik (vormals Lehrstuhl B für Mechanik) der Technischen Universität München. Nur durch die wohlwollende Förderung und das Vertrauen der Ordinarien Prof. Dr.-Ing. Dr.h.c. Friedrich Pfeiffer und Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing.habil. Heinz H. Ulbrich konnte diese Arbeit entstehen.

Die Arbeit fasst die Ergebnisse und Erfahrungen mit dem Mechanismenprüfstand zusammen. Auf dem langen Weg von den ersten Ideen im Jahre 1991 bis zur Vorlage dieser Arbeit im Jahre 2008 unterstützten mich viele Freunde und Helfer.

Den endgültigen Anstoß und das detaillierte Konzept des Mechanismenprüfstandes als Kur-belschwinge mit zwei redundanten Antrieben entstand während eines Gastaufenthaltes von Prof. Jorge Angeles von der McGill Universität Montreal am Lehrstuhl B für Mechanik der Technischen Universität München in den Jahren 1991/1992. Dieser Glücksumstand geht ebenfalls auf die ausgezeichneten Kontakte von Prof. Pfeiffer zur internationalen Fachwelt zurück, wie die Verbindung mit den Mechanismenexperten Prof. Mikio Horie und Prof. Yukio Takeda vom Tokyo Institut of Technology. Beide weilten am Lehrstuhl B für Mechanik. Prof. Horie gab mir mit seiner Einladung zum Studienaufenthalt an seinem Institut im September 2003 den Startimpuls zum Schreiben dieser Arbeit.

Der Versuchsstand benötigte eine materielle Basis. Gerade beim Antrag auf Sachbeihilfe an die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) stand mir Prof. Pfeiffer zur Seite. Der DFG gilt der Dank für die Förderung des Projektes 'Redundantantriebe' unter Pf/166-1 in Höhe von 81.674 DM mit Genehmigung vom 16.11.1992.

Wesentliche Erfahrungen zur Mechanismendynamik konnte ich bei meinem Doktorvater, Prof. Dr.-Ing. habil. Hans Dresig an der TU Chemnitz am Lehrstuhl Maschinendynamik und Schwingungslehre in den 80er Jahren sammeln. Mit seiner Aufgeschlossenheit, seinen Ideen und Interpretationen zu Schwingungsproblemen in Verarbeitungsmaschinen, die ich in Gesprächen mit der Industrie oder bei der Kaffeerrunde miterleben durfte, gaben mir das Rüstzeug für meine Laufbahn. Die fruchtbare Zusammenarbeit konnte 1990 bis 2006 im VDI-Arbeitsausschuss A204 'Mechanismendynamik' unter der Leitung von Prof. Dresig fortgesetzt werden.

Im Verein Deutscher Ingenieure fühle ich mich seit meinem Studium beheimatet. Schon vor 1990, in der ostdeutschen Ingenieurvereinigung 'Kammer der Technik', brachte mir die Arbeitsgruppentätigkeit das Problemverständnis und viele Industriekontakte. Mit den VDI-Fachkollegen der Arbeitsgruppen 'Mechanismendynamik', 'Bewegungssteuerung in Be- und Verarbeitungsmaschinen' unter Leitung von Prof. S. Schönfeld und seit 2005 'Motion Control' unter Prof. B. Corves führte ich viele Fachgespräche und erhielt unzählige Anregungen. Stellvertretend denke ich an Prof. G. Brandenburg, Prof. Karl-Heinz Modler, Prof. R. Braune, Lutz Rockhausen, Andreas Fricke, Holger Wiese, Martin Virow und Josef Gießler.

Die meisten Gespräche zu den vielen Details und täglichen Fragestellungen mit meinem Mechanismenprüfstand gehen auf das Konto der Kollegen und Studenten am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik. Allen voran halfen mir Prof. H. Bremer, Christoph Glocker, Andreas Stiegelmeier, Kilian Funk und Martin Förg tiefer in die Mehrkörperdynamik vorzudringen. Die Kollegen des Lehrstuhles standen mir aber auch bei allen Tagesproblemen mit Rat und Tat zur Seite, hier möchte ich gerade in der Endphase der Arbeit besonders Martin Schwaiger, Gerhard Schillhuber,

Robert Huber und Lucas Ginzinger danken. Außerdem weiß ich die professionelle Hilfe in Labor, Werkstatt und Computerfragen zu schätzen. Für so manchen Tipp und Handgriff danke ich Georg Mayr, Gerhard Wanderer, Wolfgang Kruppa, Walter Wöß und Willi Miller.

Am Mechanismenprüfstand halfen und lernten viele Studenten. Es entstanden über 12 Semester- und Diplomarbeiten. Besonders herausragende Beiträge erbrachten Josef Steuer, Marc Brandl, Andreas Gaull und Lucas Ginzinger.

In gleicher Weise gilt mein Dank für das gewissenhafte Korrekturlesen an Daniela Jensen (jetzt Förg), Andreas Fricke, Daniel Hammerbacher, Thorsten Schindler, Bastian Esefeld, Thomas Villgrattner, Lucas Ginzinger und nicht zuletzt meiner lieben Frau Simone.

Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing.habil. H. Ulbrich, Prof. Dr.-Ing. B. Höhn und Prof. Dr.-Ing. B. Corves danke ich für das meiner Arbeit entgegengebrachte Interesse sowie für die Übernahme des Mentorats und der Gutachten. Das Verfahren war bereits am 13.08. 2009 mit dem positiven Abschlussbericht des Mentorats an den Dekan und der darauf verstrichenen viermonatigen Frist auch ohne Beschluss des Fachbereichsrates der Fakultät Maschinenwesen formal positiv beendet. Da bei diesem Habilitationsverfahren die Fakultät erstmalig nach der neuen Habilitationsordnung verfahren wollte, verzögerte sich leider der endgültige Abschluss bis zur erfolgreichen Veröffentlichung im Jahr 2012.

Für die fachliche aber auch moralische Unterstützung möchte ich mich bei allen vielmals bedanken, auch wenn nicht jeder im Einzelnen genannt werden konnte.

Thalham, Mai 2012

Thomas Thümmel

---

– *Meiner Familie* –

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Anwendungsfeld und Beispiele . . . . .	1
1.2	Idee, Ziel und Struktur der Arbeit . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Das Untersuchungsobjekt – Prüfstand und Modellbildung</b>	<b>10</b>
2.1	Aufbau des Mechanismenprüfstandes . . . . .	10
2.2	Erwartete und gemessene Betriebsschwingungen . . . . .	13
2.3	Fragestellungen und Modelle zur Mechanismendynamik . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Der zwangläufige ebene Starrkörper-Mechanismus</b>	<b>23</b>
3.1	Modellbeschreibung und Parameter . . . . .	23
3.2	Parameteridentifikation mit Hilfe eines Optimierers . . . . .	27
3.3	Maschinenaufstellung – Massenausgleich . . . . .	30
3.4	Eigenbewegung – Leistungsausgleich . . . . .	33
3.4.1	Bewegungsgleichung, Eigenbewegung und Antriebsleistung . . . . .	33
3.4.2	Nutzung der Eigenbewegung am Mechanismenprüfstand . . . . .	35
3.5	Wechselwirkung Servomotor – Starrkörper-Mechanismus . . . . .	38
3.5.1	Modelle und Simulationen zur Wechselwirkung: Motor – Mechanismus . . . . .	38
3.5.2	Messung der Wechselwirkung Servomotor – Mechanismus . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Kraftregelung mit redundanten Antrieben</b>	<b>49</b>
4.1	Gedanken zum dynamischen Ausgleich durch Redundantantriebe . . . . .	49
4.2	Antriebsvarianten zur Kraftregelung . . . . .	51
4.2.1	Prinzip der virtuellen Arbeit und Bewegungsgleichungen . . . . .	51
4.2.2	Aktor als redundanter Antrieb . . . . .	53
4.2.3	Aktor als zusätzlicher Freiheitsgrad . . . . .	54
4.2.4	Schlussfolgerungen zum Gelenkkraftausgleich mit redundanten Antrieben . . . . .	55
4.3	Ausgleich aller Fundamentkräfte an der Kurbelschwinge . . . . .	56
4.3.1	Bedingungen zum Ausgleich aller Fundamentkräfte . . . . .	56
4.3.2	Berechnung der Sollmomentenverläufe zur Vorsteuerung . . . . .	57
4.3.3	Regelungskonzept zum Ausgleich aller Fundamentkräfte . . . . .	58
4.4	Experimente zur Kraftregelung mit redundanten Antrieben . . . . .	61
4.4.1	Hardware zur Regelungstechnik . . . . .	61
4.4.2	Messergebnisse mit PID-Regelung . . . . .	63
4.4.3	Bessere Ergebnisse durch eine Lernregelung . . . . .	65
4.4.4	Frequenzselektiver Gelenkkraftausgleich mit Lernregelung . . . . .	67
4.4.5	Entlastung des Hauptantriebes durch redundante Antriebe . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Der Starrkörper-Mechanismus mit einseitigen Bindungen</b>	<b>71</b>
5.1	Einführung und Zielstellung . . . . .	71
5.2	Literaturauswertung und Historie . . . . .	72
5.3	Grundlagen der Systembeschreibung von MKS . . . . .	78
5.3.1	Begriffe und Klassifizierungen . . . . .	78
5.3.2	Bewegungsdifferentialgleichungen (BDGL) . . . . .	83
5.3.3	Kopplungskinematik . . . . .	88
5.3.4	Kontaktgesetze: Kraftgesetze – Stoßgesetze . . . . .	91

5.4	Lösungsalgorithmen für MKS . . . . .	102
5.5	Die Kurbelschwinge mit Spiel am Kurbelbolzen . . . . .	107
5.5.1	Messung der Bolzenmittelpunktsbahn und x-Beschleunigung . . . . .	107
5.5.2	Systembeschreibung der spielbehafteten Kurbelschwinge . . . . .	111
5.5.3	Simulation der Bolzenmittelpunktsbahn . . . . .	117
5.5.4	Pendelschwingungen im spielbehafteten Drehgelenk . . . . .	120
<b>6</b>	<b>Modalanalyse des Maschinengestelles</b>	<b>123</b>
6.1	Motivation und Vorgehen der experimentellen Modalanalyse . . . . .	123
6.2	Ergebnisse der experimentellen Modalanalyse . . . . .	125
6.3	Modalanalyse mit Hilfe eines Finite-Elemente Rechenmodells . . . . .	129
6.4	Verifizierung der Ergebnisse . . . . .	131
<b>7</b>	<b>Zusammenfassende Übersicht zu Schwingungsphänomenen</b>	<b>133</b>
	<b>Anhang A – Kontaktschleife</b>	<b>135</b>
	<b>Anhang B – Simulationsdaten</b>	<b>139</b>
	<b>Literatur</b>	<b>141</b>



## Kurzfassung

Die Arbeit behandelt Schwingungsphänomene in schnelllaufenden Maschinen mit ungleichmäßig bewegten Werkzeugen. Das Anwendungsfeld konzentriert sich auf Verarbeitungsmaschinen, z.B. Textilmaschinen, Druckmaschinen, Umformtechnik oder Verpackungsmaschinen einschließlich Zuführeinrichtungen. Zur Kraft- und Bewegungsübertragung besitzen diese Maschinen Mechanismen (Koppel- oder Kurvengetriebe).

Untersucht werden Schwingungen infolge der wechselnden Trägheitskräfte und technologisch bedingten Belastungen, die sich wie folgt äußern: Rückwirkungen auf den Antriebsmotor (Drehungleichförmigkeit, erhöhter Energieverbrauch), Wirkungen in den Gelenken (Spiel-Stöße, Lärmanregung, Reibverluste), Fundamentalschwingungen oder Verfälschung der Werkzeugbewegung durch Verformung elastischer Glieder oder Gelenke.

Anhand eines Mechanismenprüfstandes, bestehend aus einer Kurbelschwinge mit zwei redundanten Servomotoren und umfangreicher Sensorik, werden diese Schwingungsphänomene systematisch untersucht. Messung, Signaltransformation, Modellbildung, Verifikation und Schwingungsinterpretation werden einbezogen. Als Modell dienen der 'zwangsläufige ebene Starrkörper-Mechanismus', der 'Starrkörpermechanismus mit einseitigen Bindungen' und die 'linear-elastische Gestellstruktur'.

Verschiedene Methoden zum dynamischen Ausgleich, wie Massenausgleich oder Leistungsausgleich, werden demonstriert. Aktive Methoden (Energiezufuhr), speziell der Einsatz redundanter Antriebe, ergänzen die Möglichkeiten zur bewussten Schwingungsbeeinflussung.

Besonders hervorzuheben sind Ergebnisse zur Nutzung der Eigenbewegung und Wechselwirkung zwischen Motor und Mechanismus, die Gelenkkraftregelung durch zwei redundante Antriebe, die Bolzenverlagerungsbahnen und Pendelschwingungen im spielbehafteten Kurbel-Koppel-Gelenk, die Eigenschwingformen der Grundplatte und nicht zuletzt Wasserfalldiagramme nach der Zeit-Frequenz-Analyse von Maschinenhochläufen. Besonderes Augenmerk liegt immer auf dem Abgleich einfacher Berechnungsmodelle mit der experimentellen Untersuchung.

Die Arbeit liefert sowohl einen theoretischen als auch einen experimentellen Zugang für die Fragestellungen der Mechanismendynamik.

# Experimental Dynamics of Mechanisms

—  
**Modelling, Simulation, Interpretation and Modification  
of Typical Vibration Phenomena using an  
Experimental Mechanism Setup**

## Abstract

This habilitation thesis investigates vibration phenomena in high-speed machinery with irregular reciprocating motion of the tools. The application field is focussed on processing machinery like textile, packing, forging, cutting or printing machines. Usually, such machines realize the motion and force transmission by linkages, cams or geared n-bar mechanisms.

The author describes vibrations resulting from external and processing forces at the output link or from varying inertia forces. These vibrations in turn lead to a number of dynamic effects: Disturbance of the servo drive (speed fluctuation, increasing power consumption), effects in the joints (clearance-impact-noise-phenomenon, energy dissipation by friction), reaction forces acting on the frame (loading, oscillations) or the disturbance of the output link motion by vibrations of flexible parts.

The vibration phenomena are investigated systematically with an experimental mechanism setup in the university lab. It consists of a crank-and-rocker mechanism, various sensors, controller boards and software. Measurements, signal processing, modelling and verification are included. The 'planar single-freedom constraint-motion rigid-body mechanism', the 'rigid-body mechanism with unilateral contacts' and the 'linear-elastic frame structure' serve as a physical models.

Different balancing methods such as frame force balancing or input torque balancing are demonstrated. Active procedures (energy supply), especially the application of additional redundant drives, complete the possibilities influencing of vibrations.

Particularly, the following results should be mentioned: The use of the 'eigenmotion' for power economy, the kinetic interactions between servo drive and mechanism, the joint force control by redundant drives and learning control, the investigation of a defined clearance at the crank coupler revolute joint including measurements of the bolt trajectory and pendulum motions of the bolt in the case, the eigenfrequencies and mode shapes of the frame plate and last but not least the waterfall diagrams of a running up. Special attention is given to the model and parameter value tuning in interaction of simulation and measurements in every case.

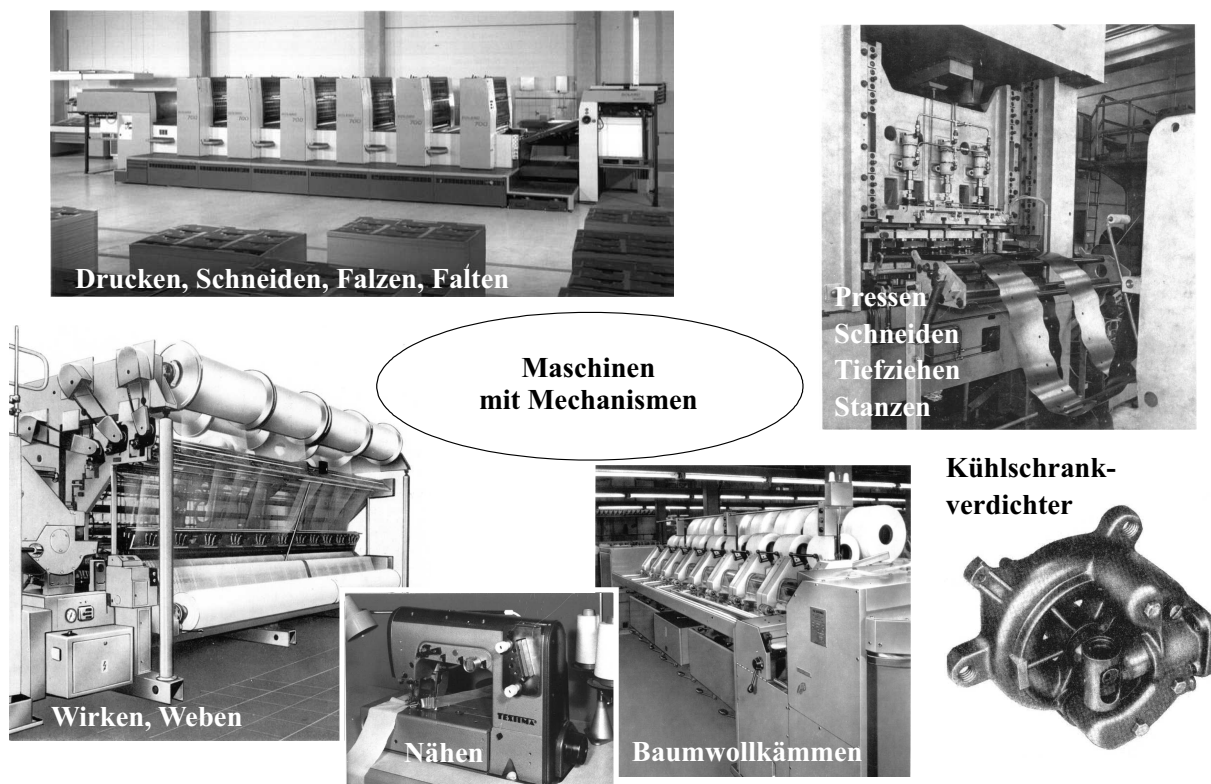
The thesis provides both a theoretical and an experimental approach toward the dynamics of mechanism.

# 1 Einleitung

## 1.1 Anwendungsfeld und Beispiele

Für die Herstellung verschiedenartiger materieller Güter und Produkte müssen Werkzeuge präzise und koordiniert bewegt werden. Meist realisieren mehrere Werkzeuge den Herstellungsprozess an der Wirkstelle. Sowohl der Verarbeitungsprozess als auch die massebehafteten Werkzeuge erfordern dazu eine ausreichende Kraftwirkung und Lagerung.

Praktischerweise übernehmen hochproduktive Maschinen diese Aufgabe. Neben mindestens einem Motor oder Aktor benötigen diese Maschinen Baugruppen zur Kraft- und Bewegungsübertragung, wie z.B. ein Getriebe, das Maschinengestell, Führungen und Lager. Mechanismen (Koppel- oder Kurvengetriebe) sind dabei die dominierenden Übertragungsglieder für schnelle ungleichmäßige Bewegungen. Die Maschinen in Bild 1 realisieren ihre Bewegungen auf diese Weise. Das Anwendungsfeld reicht aber noch viel weiter: So enthalten auch Konsumgüter und Haushaltgeräte, Verpackungsmaschinen, Landmaschinen oder Zuführeinrichtungen „hin und hergehende“ Werkzeugbewegungen.



**Bild 1:** Maschinen mit ungleichmäßigen Werkzeugbewegungen durch Mechanismen

Folgende zwei Beispiele sollen das breite Spektrum aber auch die Spezifik der Maschinen mit ungleichmäßigen Werkzeugbewegungen illustrieren:

### Die Wirkmaschine (Bild 2)

Wirkmaschinen dienen zur Herstellung von Stoffen für Sportbekleidung, zur Fertigung von Handtüchern oder Gardinen aber auch zur Produktion technischer Textilien. Im Gegensatz zu Webmaschinen, die ein Flächengebilde durch Überkreuzlegen der Fäden erzeugen, bilden Wirkmaschinen den Stoff aus Maschen. Die Arbeitsbreiten reichen von 1 m bis 5 m, wobei bis zu 2000

Nadelpaarungen gleichzeitig eingreifen. Die unterschiedlichen Nadeltypen sind auf Nadelträgern (Barren) befestigt. Die Barren sehen aus wie ein großer Kamm.

Die Fäden müssen beim Wirken um eine Nadel herumgelegt werden. Die Maschenbildung erfordert Schwing- und Hubbewegungen. Ein Nadelträger, der Legebarren, bewegt sich zusätzlich quer zu den anderen Mechanismen. Diese Versatzbewegung wird besonders bei hochtourigen Maschinen mit einem Kurvengetriebe erzeugt, siehe Bild 2 unten. Das Koppelgetriebe rechts im Bild hebt und senkt den Nadelbarren.



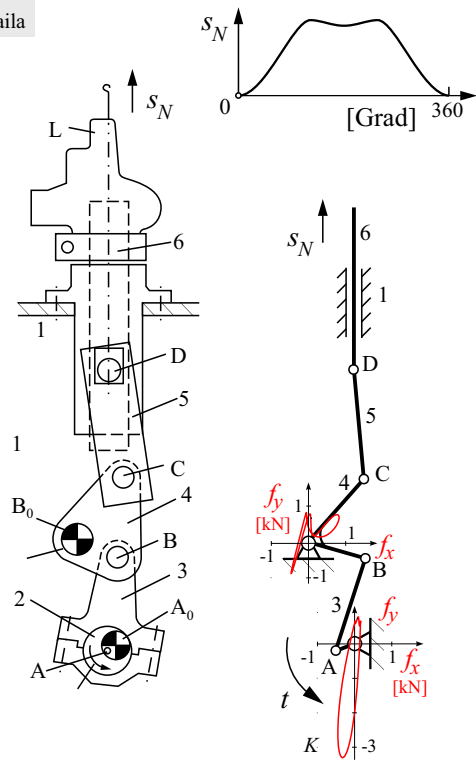
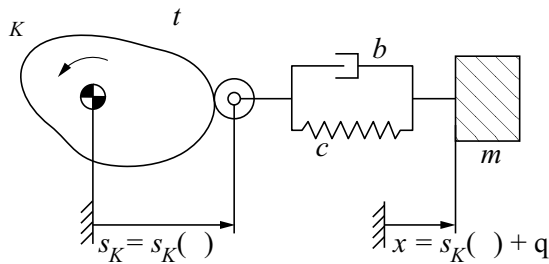
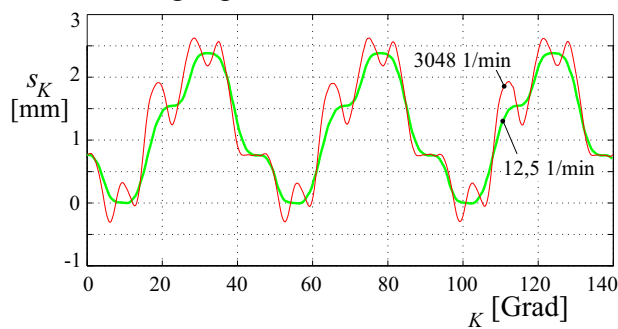
LIBA Maschinenfabrik GmbH, Naila

Wirkmaschine



Wirkstelle

Versatzbewegung



Nadelantrieb

Bild 2: Wirkmaschine mit verschiedenen Nadelbewegungen zur Maschenbildung

Die Wirkmaschine ist ein typischer Vertreter des Zielgebietes dieser Arbeit. Sie führt komplexe Werkzeugbewegungen (3D) mit hoher Dynamik aus. Zur ITMA 2007 (Internationale Textilmaschinen Messe) in München liefen Wirkmaschinen mit 4000 Maschenreihen pro Minute. Allerdings steigt dann die Lärmbelastung durch diese Maschine deutlich an.

Die Schwingungs- und Lärmanregung bei Wirkmaschinen spielen schon lange eine leistungsbegrenzende Rolle, siehe DRESIG, THÜMMEL 1982 [11] oder [86]. Damals lagen die technisch erreichbaren Drehzahlen bei 2000 1/min. Bei dieser Taktrate heben im Nadelantrieb mehrfach angeordnete Koppelgetriebe jeweils eine Masse von 4,09 kg um  $\pm 9,9$  mm (Bild 2 rechts).

Polardiagramme der Gelenkkräfte verdeutlichen den Wechsel der Kräfte in Betrag und Richtung während einer Kurbelumdrehung. Mit der Darstellung der Kraftdiagramme direkt in oder neben den Gelenken im kinematischen Schema gewinnt der Ingenieur den Überblick über die Verteilung der Belastungen in der Maschine und kann daraus Risiken und Gegenmaßnahmen ableiten.

In den 90er Jahren galt es, die Drehzahlgrenze von 3000 Maschenreihen pro Minute zu durchbrechen. Das gelang durch den Einsatz von HS-Kurvenscheiben (HS = Harmonische Synthese = High Speed) für die Versatzbewegung, siehe Bild 2 links. Hier beträgt der Hub ca. 2,5 mm bei Legebarrenmassen von ca. 30 kg. Das Überspringen in den Rasten und Umkehrlagen führte damals zur Kollision und zum Bruch der Nadeln. Die HS-Kurvenprofile vermeiden die Resonanzen höherer Ordnung mit einer Eigenfrequenz bei ca. 200 Hz. Dazu sind Kurvenverläufe zu wählen, die als Fourierreihe dargestellt, nur niedere Harmonische enthalten. Im Beispiel dürfen keine merkbaren Anteile über der 5. Erregerordnung auftreten. Mit der Dynamik von Wirkmaschinen befassen sich RÖSSLER 1985 [76] oder LÜDER 1995 [60].

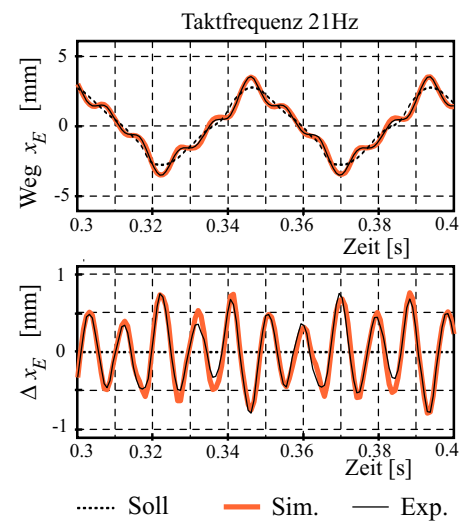
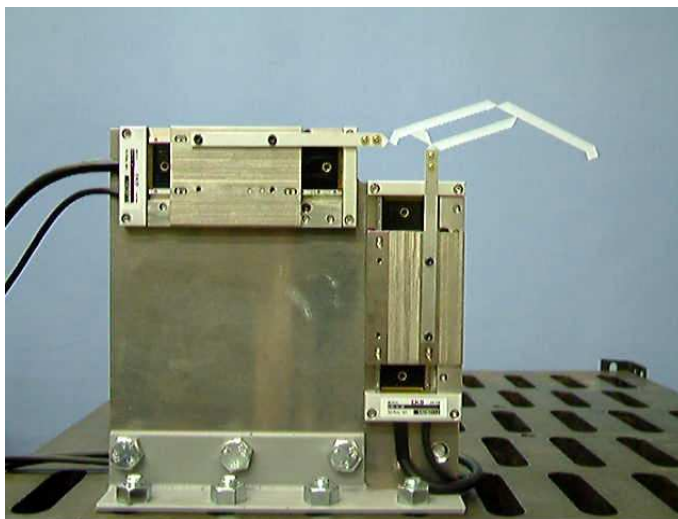
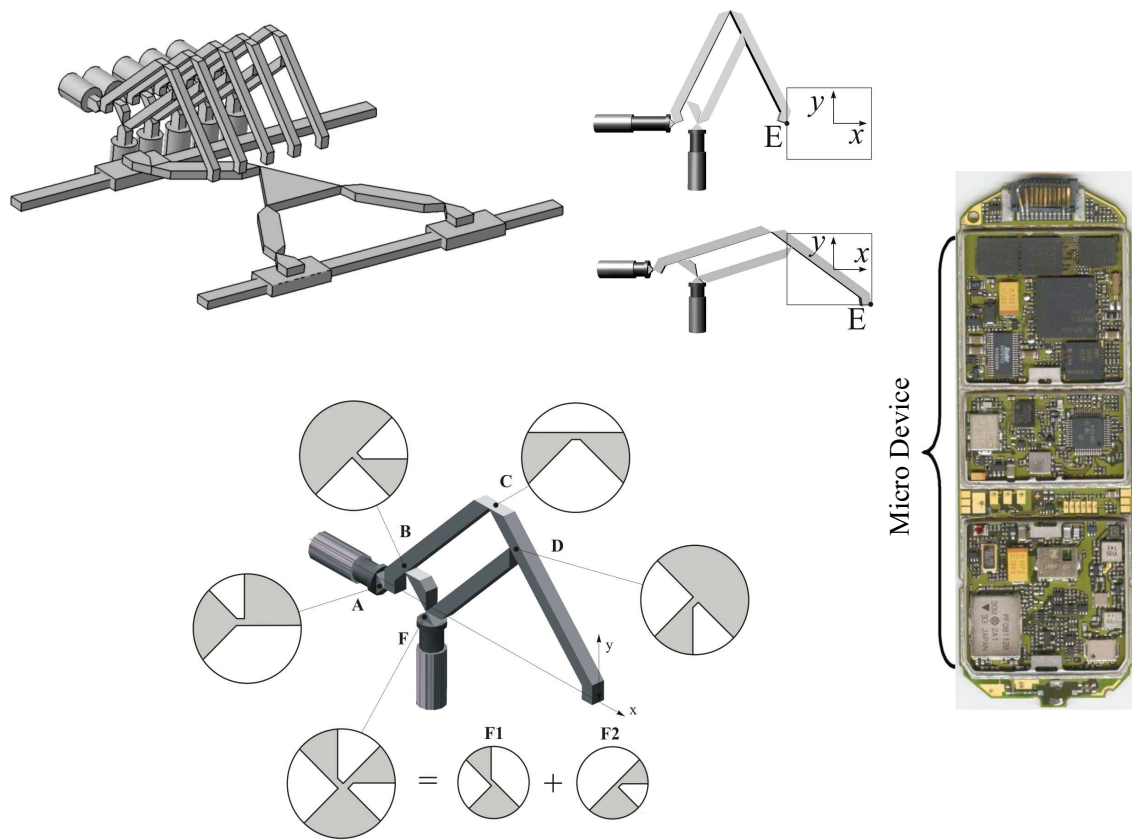
### Der Miniatur-Pantograph-Mechanismus (Bild 3)

Der Miniatur-Pantograph-Mechanismus bildet ein Grundelement für eine Miniaturtaktstraße (Bild 3 links oben) zur Bestückung von Leiterplatten und 'Micro devices', wie sie zum Beispiel im Handy zu finden sind.

HORIE, THÜMMEL, ISHI, HUBER und ISHIKAWA untersuchen den Prototyp eines einzelnen Pantographen, 2002 [110], [55] und 2005 [114]. Der Mechanismus erreicht einen Arbeitsraum von 50 x 40 mm. Er besteht vollständig aus Polypropylen (PP). Die Feststoffgelenke (Bild 3 Mitte) haben einen Querschnitt von 0,2 mm und sichern durch ihre Biegung die Beweglichkeit des Pantographen. Auch die balkenförmigen 5 mm dicken Teilkörper mit quadratischem Querschnitt besitzen eine Elastizität. Die untersten Biegeeigenformformen der Balkenstruktur bei Frequenzen von 104 Hz und 242 Hz können zum Überspringen in den Umkehrlagen führen.

Beim Prototypen erzeugen zwei orthogonale Linearaktoren Bewegungen mit bis zu 20 Takten pro Sekunde. Durch Dynamiksimulationen und Experimente können Trajektorien für Pick-und-Place-Aufgaben gefunden werden, welche den dynamischen Positionierungsfehler auf 0,1mm begrenzen [114].

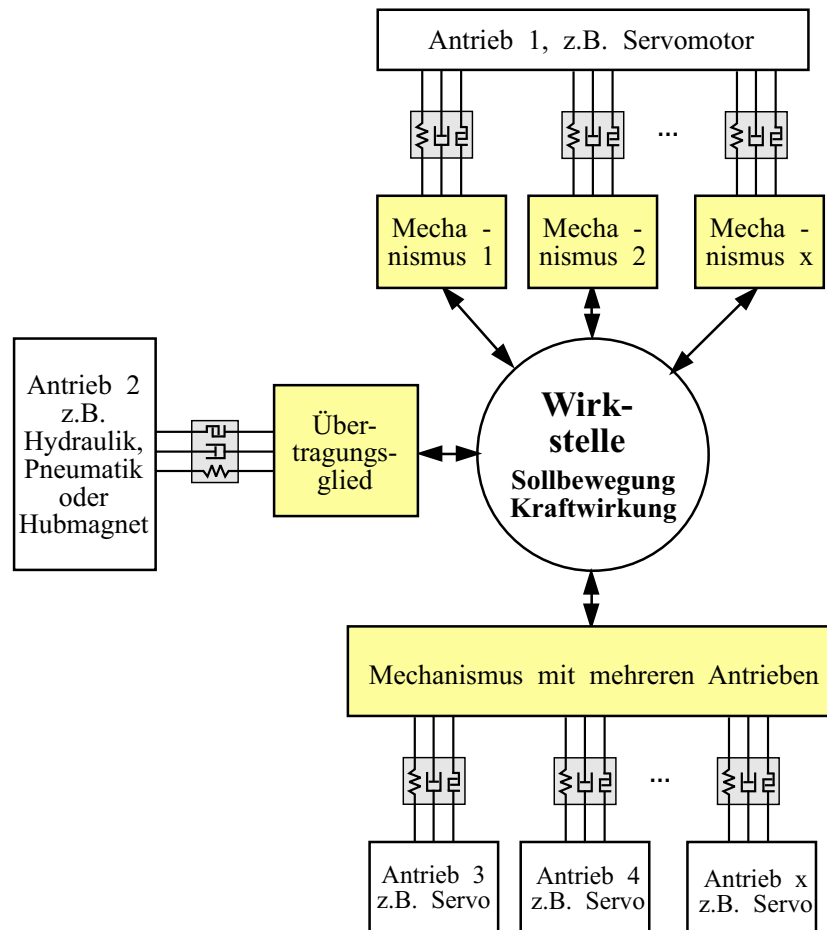
Bild 3 unten rechts zeigt für eine horizontale Testbewegung mit 21 Hz Taktrate die Sollbewegung (gestrichelt), Simulation und Messung des Endeffektorpunktes E. Die Kurvenverläufe darunter machen die Abweichungen zur Sollbewegung deutlich. Die Simulation behandelt den Pantograph als elastisches Mehrkörpersystem (Volllinie orange). Die Messsignale liefert ein Lasersensors (schwarze Volllinie). Der Modellabgleich beinhaltet auch die Schätzung der modalen Dämpfungen von 4,04 % bzw. 4,95 % für die erste bzw. zweite Eigenfrequenz.



**Bild 3:** Pantograph-Mechanismus für Pick-and-Place-Aufgaben

Mit der Verfügbarkeit von Servomotoren und preisgünstiger digitaler Mess- und Regelungstechnik auf Microprozessorbasis eröffnen sich völlig neue Wege für die Bewegungserzeugung und für moderne flexible Maschinenkonzepte. Die Antriebstechnik der Maschinen hat sich seit Jahrhunderten vom Einzelantrieb einer ganzen Fabrik (Wasserrad oder Dampfmaschine mit Transmission) bis zu mehreren Einzelantrieben an einer Maschine (z.B. Servomotoren, Hubmagnete, Pneumatik) grundlegend gewandelt.

Bild 4 enthält verschiedene Antriebskonzepte für Verarbeitungsmaschinen. Die Variantenvielfalt ist hoch und die praktischen Realisierungsmöglichkeiten sind so gut wie unerschöpflich. Die Wahl der Mittel wird allein bestimmt von dem Zweck, der effektiven und qualitätsgerechten Herstellung der gewünschten materiellen Güter und Produkte.



**Bild 4:** Antriebskonzepte für mehrere Werkzeuge in einer Maschine [107]

Wichtig ist die Sicherung der Werkzeugbewegungen bei gleichzeitiger Beherrschung der technologisch bedingten Kraftwirkung beim Herstellungsprozess.

Für schnelle ungleichmäßige Bewegungen übernehmen Mechanismen (Koppel- oder Kurvengetriebe) die Aufgabe der Bewegungsumformung von der Antriebsbewegung, z.B. drehend vom Motor oder translatorisch vom Aktor, zu allgemeinen räumlichen Werkzeugbewegungen. Zu den einfachsten Mechanismen gehören die Schubkurbel, die Kurbelschwinge oder das Nockengetriebe. Zusätzlich können Mechanismen sehr effektiv mechanische Energie speichern (Schwungrad, Federn) und enorme Kraftverstärkungen (Kniehebel) bewirken.

Wenn die Bewegungen mehrerer unterschiedlicher Werkzeuge von einem einzigen Antrieb ausgehen und über eine Hauptwelle („Königswelle“) und verschiedene Mechanismen erzeugt werden, sind die Einzelbewegungen rein mechanisch synchronisiert. Diese Synchronisation mit mechanischem Zwanglauf sichert eine eindeutige Lagezuordnung bezogen auf den Kurbelwinkel. Die **winkelsynchronen** Bewegungen der Werkzeuge funktionieren für jede beliebige Arbeitsdrehzahl (solange keine Resonanzstelle erreicht wird).

Der Trend geht heute zu vielen Einzelantrieben in einer Maschine, zu einem Direktantrieb für jedes Werkzeug bzw. für jede Teilbewegung. Die Synchronisation erfolgt nun auf elektronischem Weg, als **Zeitsynchronisation**, und muss der Arbeitsdrehzahl angepasst werden. Die Mechanismen können dann wesentlich einfacher aussehen. Es lassen sich teilweise vielgliedrige räumliche Mechanismen durch die viergliedrigen Koppelgetriebe wie Kurbelschwinge oder Schubkurbel ersetzen.

Seit den 80er Jahren werden Mechanismen mit mehreren Freiheitsgraden und damit mit mehreren Stellantrieben zur Erzeugung flexibler Bahnkurven entwickelt und eingesetzt, HAMMERSCHMIDT et al. 1994 [48] oder BERGER [120, S.245-258] und NITZ [120, S.259-270] im Jahre 1996. Zusätzlich zu den nur noch elektronisch synchronisierten Servoantrieben für die Teilbewegungen innerhalb der Maschine (Kinematik) können jedoch auch Stellantriebe extra zur gezielten Änderung des dynamischen Verhaltens angeordnet werden, wie bei THÜMMEL 1996 [102] oder BORMANN, ULBRICH 1996 [3].

Schnelllaufende Maschinenantriebe mit ungleichförmig übertragenden Getrieben sind oft von **unerwünschten Schwingungserscheinungen** infolge der wechselnden Trägheitskräfte und technologisch bedingten Belastungen begleitet. Diese wechselnden Kraftwirkungen äußern sich z.B. als Rückwirkungen auf den Antriebsmotor in Form von Drehungleichförmigkeit, Torsionsschwingungen, erhöhtem Energieverbrauch oder Überforderung und Instabilität der Motorregelung. Weiter zeigt sich die Maschinendynamik durch Fundamentalschwingungen, Spiel-Stöße in den Gelenken, Lärmanregung, Reibverluste und übermäßigem Verschleiß in den Gelenken, als eine Verfälschung der Werkzeugbewegung durch Schwingungen elastischer Bauteile oder durch Gelenkspiel. Ferner können Überlastungen zum Bruch der Bauteile führen. Insbesondere weil die Kräfte mit dem Quadrat der Drehzahl anwachsen, kommen bei Erhöhung der Taktraten immer wieder neue, auch nichtlineare mechanische Effekte zur Wirkung.

Um diese Schwingungserscheinungen zu beherrschen, wurden die klassischen **Methoden zum dynamischen Ausgleich** wie Auswuchten bzw. Massenausgleich oder Leistungsausgleich immer weiter entwickelt, wobei der Wechsel von kinetischer und potenzielle Energie besser ausgenutzt wird. Die Vorzüge dieser passiven Methoden können heute mit aktiven Einrichtungen ergänzt werden, die zusätzliche Antriebe mit Energiezufuhr aufweisen. Zur Beeinflussung der Schwingungserscheinungen lässt sich z.B. die Wirkung der Stellantriebe auf das innere Kraftfeld, auf die Gelenkkräfte im Mechanismus ausnutzen, THÜMMEL 1996 [102].

Trotz des eindeutigen Trends zur direkten Bewegungserzeugung mit Linearantrieben oder Stellmotoren ohne Getriebe kann zur Umsetzung der schnellen ungleichmäßigen Bewegungen schwerer Werkzeuge mit ausreichenden Wirkkräften auf die Koppelgetriebe nicht verzichtet werden. Erste Versuche in diese neue Richtung, wie z.B. WINKLER 1992 [122], überschätzten zunächst die Möglichkeiten der Direktantriebe als Ersatz für Mechanismen. Beschleunigungen von über  $300\cdot g$  ( $1\cdot g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ) in Industrienähmaschinen oder von  $0,5\cdot g$  eines 9500 kg schweren Stößels einer Karosseriepresse sind ohne die ungleichmäßige und zwangläufige Übersetzung der Mechanismen kaum realisierbar. Die enormen Kraftwirkungen bei kürzesten Zykluszeiten ( $100 \text{ Hz} = 6000 \text{ Takte/min}$  bei Nähmaschinen) lassen sich mit gleichförmig angetriebenen Mechanismen einfach realisieren [107].

Ein Antriebssystem besitzt natürlich sowohl zur Kraft- und Bewegungsübertragung als auch zur Signal- und Informationsübertragung weitere Übertragungsglieder. So beeinflussen z.B. Wellen, Kupplungen, Bremsen, Getriebe mit gleichmäßiger Übersetzung oder Sensoren, Verstärker, Motorregler, Stromrichter und Frequenzumrichter das dynamische Verhalten des Gesamtsystems. Dazu kommen noch verschiedenartige Wechselwirkungen mit dem technologischen Prozess.



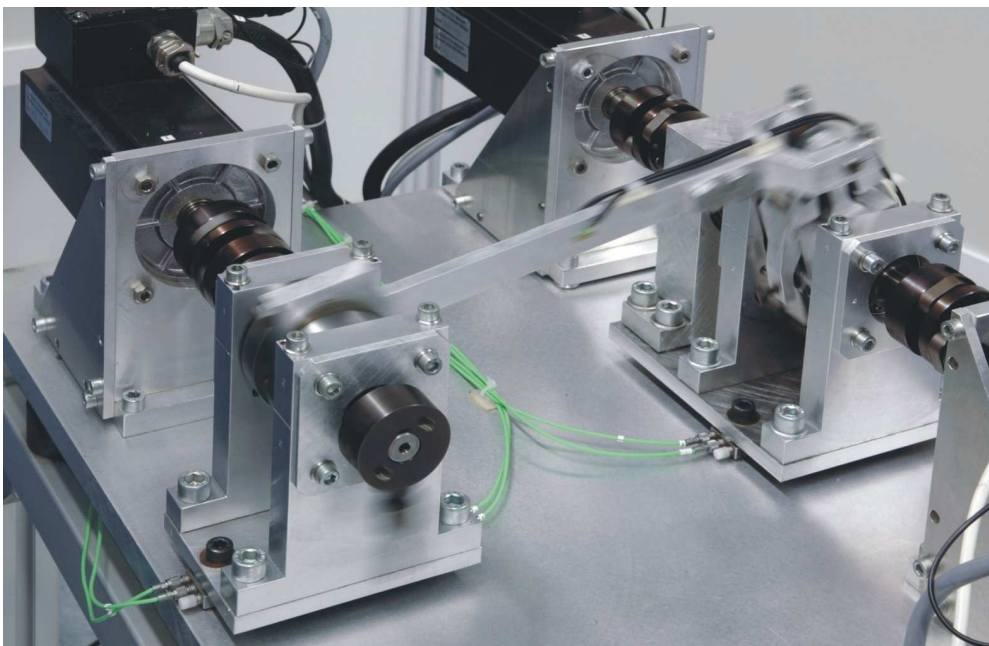
Mit den Forderungen nach höheren Drehzahlen bei präziser Werkzeugbewegung und kostengünstiger leichter Bauweise muss allen Systemkomponenten eine gebührende Beachtung geschenkt werden. Es müssen Methoden zur Beherrschung der Phänomene bereitgestellt und die neuen Möglichkeiten aus der Kombination von Servoantrieben und Mechanismen für praktische Anwendungen umgesetzt und erprobt werden.

Darum werden Methoden zur Modellierung und Simulation benötigt. Allgemeines Ziel ist es, schon im Entwurfsstadium die dynamischen Eigenschaften von derartigen Antriebssystemen mit Mechanismen beurteilen zu können und somit ein virtuelles Prototyping zu ermöglichen.

## 1.2 Idee, Ziel und Struktur der Arbeit

Die enorme Vielfalt der Maschinen, der herzustellenden Produkte und Güter, aber auch die vielseitigen Schwingungsphänomene und die Komplexität der nichtlinearen Effekte erschweren die Übersicht und die Erforschung dieses Gebietes. Besonders der Abgleich der Berechnungsmodelle und die Parametergewinnung bilden immer wieder neue Herausforderungen.

So entstand 1991 die **Idee**, mit einem **Mechanismenprüfstand** (Bild 5) schrittweise und systematisch Schwingungsphänomene in Maschinen mit Mechanismen zu untersuchen. Als Mechanismus wird für das Laborsystem die ebene Kurbelschwinge gewählt, Bild 6.



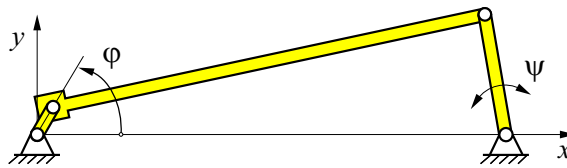
**Bild 5:** Mechanismenprüfstand – Kurbelschwinge und Servomotoren

Die vorliegende Arbeit soll einerseits die experimentellen Erfahrungen mit dem Mechanismenprüfstand zusammenfassen und andererseits verschiedene Modellierungsansätze und Lösungsverfahren zur Interpretation gemessener Erscheinungen heranziehen. Die Theorie soll experimentell veranschaulicht und die praktischen Herausforderungen benannt werden.

Die Arbeit beginnt mit der Beschreibung der Experimentierbasis. **Kapitel 2** erläutert den konstruktiven Aufbau des Mechanismenprüfstandes einschließlich Sensorik und Signalverarbeitung. Einige typische Messschriebe zeigen bereits Schwingungsphänomene des realen Systems, ohne aber alle Ursachen aufzuklären. Neben Zeitschrieben gehören dazu auch Wasserfalldiagramme

von Maschinenhochläufen. Eine Systematik zu Fragestellungen der Mechanismendynamik und allgemeine Aussagen zur Modellbildung ergänzen das Kapitel 2.

Die Grundstruktur der weiteren Kapitel teilt sich in zwei Hauptblöcke mit unterschiedlicher Modellierungstiefe. Die Kapitel 3 und 4 legen das Modell des 'zwangläufigen ebenen Starrkörper-Mechanismus' zu Grunde, welches dem Bild 6 entspricht. Modelle mit unilateralen Kontakten und mengenwertigen Kraftgesetzen beschreiben in Kapitel 5 den Einfluss von Gelenkspiel, Reibung und Stößen.



**Bild 6:** Die ebene Kurbelschwinge vom Mechanismenprüfstand

Mit der klassischen Modellierung in **Kapitel 3** können bereits viele typische Eigenschaften von Maschinen mit ungleichmäßiger Übersetzung aufgedeckt werden. Über die Dynamik der zwangläufigen Starrkörper-Mechanismen gibt die VDI-Richtlinie 2149 Blatt 1 einen breiten Überblick [117].

Im Kapitel 3.2 wird näher auf die Parameteridentifikation eingegangen. Da für das Modell teilweise viele Bauteile, ganze Baugruppen zu einem Starrkörper zusammengefasst werden, bleibt diese Aufgabe nicht immer trivial. Die automatische Identifikation von Trägheitsparametern durch ein nichtlineares Optimierungsverfahren mit gemessenen und berechneten Kraftgrößen wird dabei zur Hilfe genommen [104].

Einen Schwerpunkt bildet weiterhin der Massenausgleich zur Minderung der Fundamentalschwingungen (Kapitel 3.3). Den Leistungsausgleich zur Reduktion der Wechselbelastung von Motor und Kupplung und die Nutzung der Eigenbewegung zur Einsparung von Antriebsleistung [102, S.284-289] demonstriert Kapitel 3.4. Auf das Zusammenspiel der Kurbelschwinge mit dem geregelten Servomotor geht Kapitel 3.5 ein. Speziell wird der zu erwartende und der tatsächlich auftretende Winkelgeschwindigkeitsverlauf über eine Kurbelumdrehung untersucht.

Neben dem Massen- und Leistungsausgleich lag bei den ersten Experimenten mit dem Mechanismenprüfstand der Schwerpunkt der Untersuchungen auf dem aktiven Gelenkkraftausgleich und dem Einsatz redundanter Antriebe, vgl. [98], [102], [101] und [103]. Darum soll sich **Kapitel 4** ausführlich der Kraftregelung mit redundanten Antrieben widmen. Hierfür haben STEUER 1994 [83] und BRANDL 1995 [4] umfangreiche Unterstützung geleistet.

Die Regelung der Mechanismendynamik durch redundante Antriebe ordnet Kapitel 4.1 unter allgemeinen Methoden des dynamischen Ausgleiches ein und diskutiert die Anwendungsmöglichkeiten. Das Prinzip der virtuellen Arbeit liefert im Kapitel 4.2 explizite Gleichungen für die zu regelnden Gelenkkräfte. Für die zwei Varianten der Aktoranordnung decken die Differentialgleichungen die Vor- und Nachteile auf und liefern die Begründung für die Wahl redundanter Antriebe.

Eine interessante Fragestellung verfolgt Kapitel 4.3 mit dem Ausgleich aller Fundamentkräfte an der Kurbelschwinge. Das klingt zwar verblüffend, funktioniert aber im Zusammenspiel von zwei geregelten redundanten Antrieben mit einem Massenausgleich. Das Regelungskonzept nutzt die zeitvariante Stellmatrix zur Auslegung der Vorsteuerung.

Verschiedene praktische Gesichtspunkte beleuchtet Kapitel 4.4 und beschreibt Experimente zur Kraftregelung mit redundanten Antrieben. Diese reichen von der klassischen PID-Regelung

mit Vorsteuerung bis zur Lernregelung, die für Maschinen im Dauerbetrieb besonders gute Ergebnisse liefert. Neue Möglichkeiten sollen die Ergebnisse zum frequenzselektiven Gelenkkraftausgleich und zur Entlastung des Hauptantriebes durch redundante Antriebe aufzeigen.

Das **Kapitel 5** geht vom Modell 'Starrkörper-Mechanismus mit einseitigen Bindungen' aus. An dieser Stelle wird ausführlicher auf die Historie und Literatur der Modellbildung für Mechanismen eingegangen ( Kapitel 5.2).

Durch die immer speziellere Detaillierungstiefe wachsen auch die theoretischen Ansprüche. Deshalb versuchen die Kapitel 5.3 und 5.4 dem Ingenieur die Zusammenhänge der 'nichtglatten Mechanik' zu veranschaulichen. Basis bildet die am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik der TU München entwickelte Theorie, die der Autor mit seinem Prüfstand speziell auf Mechanismen anwendet.

Gegenüber der Kurbelschwinge (wie im Mechanismenprüfstand) diene zuerst eine ebene Schubkurbel mit Spiel am Kurbelbolzen (ein Kontakt) und am Schieber (vier Kontakte) als akademisches Beispiel zur Erläuterung der Theorie [106], [108], [109]. Auf Wechselwirkungen zwischen Stößen am Kurbelbolzen und Kippstößen am Schieber geht [109] besonders ein. Die vorliegende Arbeit greift diese Beispiel nicht noch einmal auf, da es dazu keine Experimente gibt.

Erst im zweiten Schritt folgte die Modellierung der Kurbelschwinge mit Spiel am Kurbelbolzen, d.h. an nur einem Gelenk, und die experimentelle Verifikation am Mechanismenprüfstand [113], [112]. Diese Untersuchungen werden im Kapitel 5.5 ausführlich beschrieben. Hier ging besonders die Arbeit von GINZINGER [38] ein.

Zur experimentellen Modalanalyse soll das **Kapitel 6** eine Einführung geben. Beim Vergleich von Zwangskräften zwischen der MKS-Simulation und Messungen am Mechanismenprüfstand blieben zunächst einige Peaks in den Spektren und Schwingungserscheinungen ungeklärt. Um Ursachen aufzudecken, die von Schwingungen der Gestellstruktur herrühren, kam die experimentelle Modalanalyse zur Anwendung.

Wie bei der Beschreibung gemessener Betriebsschwingungen im Kapitel 2.2 gezeigt wird, geben Wasserfalldiagramme (Ordnungsanalysen bzw. Zeitfrequenzanalysen) einen globalen Überblick zum Maschinenverhalten in einem relativ breiten Frequenzbereich.

Mit diesem Überblick zum Maschinenverhalten kann die experimentelle Modalanalyse ganz gezielt in bestimmten Frequenzbereichen die modalen Parameter, also die Eigenfrequenzen, Eigenschwingformen und modalen Dämpfungen, aufspüren. Neben dem experimentellen Vorgehen beschreibt Kapitel 6 einige Möglichkeiten der Verifikation wie die Kohärenzfunktion oder das MAC-Kriterium. Die Arbeit von GAULL [35] liefert dazu wichtige Ergebnisse.

Im **Kapitel 7** sollen die verschiedenartigsten Schwingungserscheinungen am Mechanismenprüfstand (Eigenfrequenzen der Fundamentierung, Riemenschwingungen oder auch typische nichtlineare Schwingungen, wie Stöße in spielbehafteten Lagern) zusammen gestellt werden. Ein Wasserfall-Diagramm bis 500 Hz und 1400 1/min veranschaulicht die Ergebnisse.

Bemerkungen zum Anliegen der Arbeit:

Die Zusammenstellung soll einen Zugang und eine Übersicht für den „Angewandten Mechaniker“ (sowohl für den Berechnungsingenieur als auch für den Versuchsfeldingenieur) zur Mechanismendynamik ermöglichen, typische Schwingungsphänomene veranschaulichen und erhebt nicht den Anspruch einer theoretischen Weiterentwicklung.

Der Lehrbuchgedanke entstand nicht zuletzt durch die jahrelange Lehrerfahrung des Autors. Die von 1993 bis 2003 an der TU München gehaltene Vorlesung 'Dynamik und Regelung von Mechanismen', die seit 2003 bis jetzt laufende Vorlesung 'Maschinendynamik' und die Vorlesung 'Experimentelle Schwingungsanalyse' [115] (1991 bis heute) nutzen die Ergebnisse vom Mechanismenprüfstand.

## 2 Das Untersuchungsobjekt – Prüfstand und Modellbildung

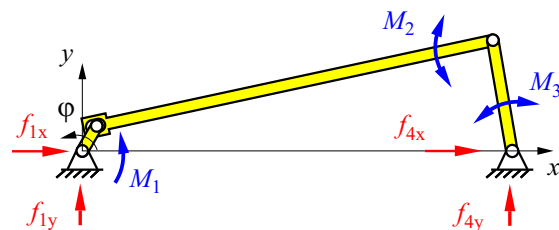
### 2.1 Aufbau des Mechanismenprüfstandes

Seit 1994 nutzt der Autor den in Bild 7 dargestellten Mechanismenprüfstand für Forschung und Lehre. Als Mechanismus dient die **Kurbelschwinge**, eines der elementarsten Koppelgetriebe, auch Viereck genannt. Hinzu kommen ein Steuer-PC mit verschiedenen Boards zur AD- und DA-Wandlung und zur Signalverarbeitung, drei bürstenlose Servo-Motoren mit Resolver und Inkrementalgeber-Emulation, Mehrkomponenten-Piezo-Kraftsensoren und zahlreiche Steuer- und Auswertprogramme.



– Kurbelschwinge

Kurbellänge:	20,0 mm
Koppellänge:	283,0 mm
Schwingenlänge:	77,5 mm
Gestelllänge:	300,0 mm



– 3 Servomotoren mit Resolver

$M_1$	nominal, Drehzahlregler
$M_2, M_3$	redundant, Momentenregler

– Piezokraftsensoren unter den Lagerböcken

– Gummifederelemente unter der Grundplatte

– Drehzahlen bis 2000 1/min

– Spiel am Kurbelbolzen: 0 bis 0,1mm

**Bild 7:** Untersuchungsobjekt Mechanismenprüfstand

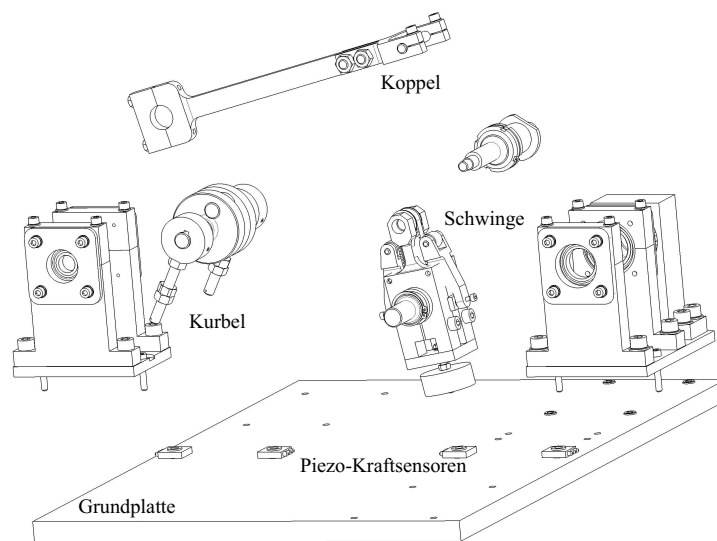
Es können Pleuels (Koppeln) mit unterschiedlichem Spiel im Kurbel-Koppel-Gelenk verwendet werden: Ohne Spiel bis 0,1 mm Spiel. Dehnmessstreifen ermitteln am Pleuel die Längsdehnung bzw. die Längskraft. Die Bolzenverlagerungsbahn infolge Spiel kann mit Wirbelstromsensoren gemessen werden. Piezo-Beschleunigungssensoren dienen zur Erfassung der Schwingungen an verschiedenen Positionen und in unterschiedlichen Richtungen.

Die Kurbelschwinge mit den drei Motoren regt den Fußboden zu Schwingungen an. Mit vier tief abgestimmten Gummifederelementen (Bild 7 links) unter der Grundplatte kann die Schwingungserregung des Laborbodens beschränkt werden.

Der Nominalantrieb  $M_1$  treibt über eine Schmidt-Kupplung die Kurbelwelle an. Die redundanten Servomotoren  $M_2$  und  $M_3$  sind ebenfalls mit einer Schmidt-Kupplung angeschlossen. Dadurch bewirken sie bei Fluchtungsfehlern keine Querkräfte auf die Lagerböcke der Schwinge.

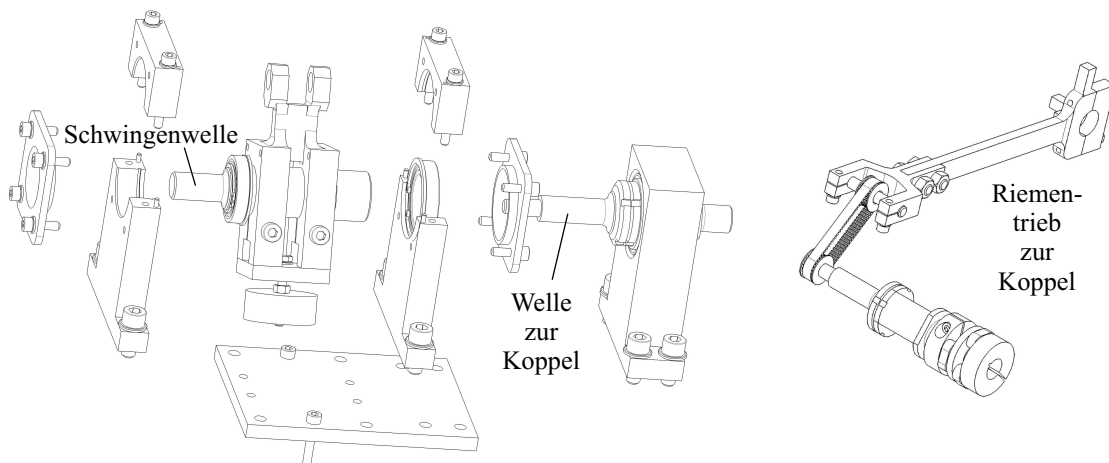
Unter jedem Lagerbock befinden sich zwei 3-Komponenten Piezokraftsensoren, siehe Bild 8. Mit dieser Anordnung können nach entsprechender Kalibrierung alle vier Fundamentkraftkomponenten ( $f_{1x}$ ,  $f_{1y}$ ,  $f_{4x}$  und  $f_{4y}$ ) bestimmt werden. Da Piezosensoren mit Ladungsverstärkern nicht statisch kalibrierbar sind, wird eine bekannte Unwucht bei gemessener Drehzahl zur dynamischen Kalibrierung verwendet, so dass die Darstellung der Fliehkraft im Polardiagramm ( $f_y$  als Funktion von  $f_x$ ) einen Kreis ergibt.

Die Kurbel und die Schwinge enthalten verstellbare Ausgleichsmassen für einen Massenausgleich.



**Bild 8:** Explosivdarstellung einschließlich Grundplatte und Kraftsensoren

Die Lagerung der Antriebswellen zur Koppel (fliegend) und zur Schwinge geht aus der Explosivdarstellung in Bild 9 hervor. Der Motor  $M_3$  treibt die Schwinge direkt an, während der Motor  $M_2$  das Drehmoment über einen Zahnriementrieb auf das Pleuel überträgt, siehe Bild 9 rechts. Die hohle Schwingenwelle besitzt eine Aussparung zur Durchführung des Zahnriemens.



**Bild 9:** Explosivdarstellung von Bauteilen zur Koppel und Schwinge

Bild 10 zeigt abschließend eine Gesamtansicht des Prüfstandes. Der Steuerschrank mit VME-Bus-Steuer-PC 486, mit vier Ladungsverstärkern, mit einer Adapterplatte zur Kabelverzweigung und mit der unten verborgenen Leistungselektronik für die Servomotoren komplettieren die Ausstattung.



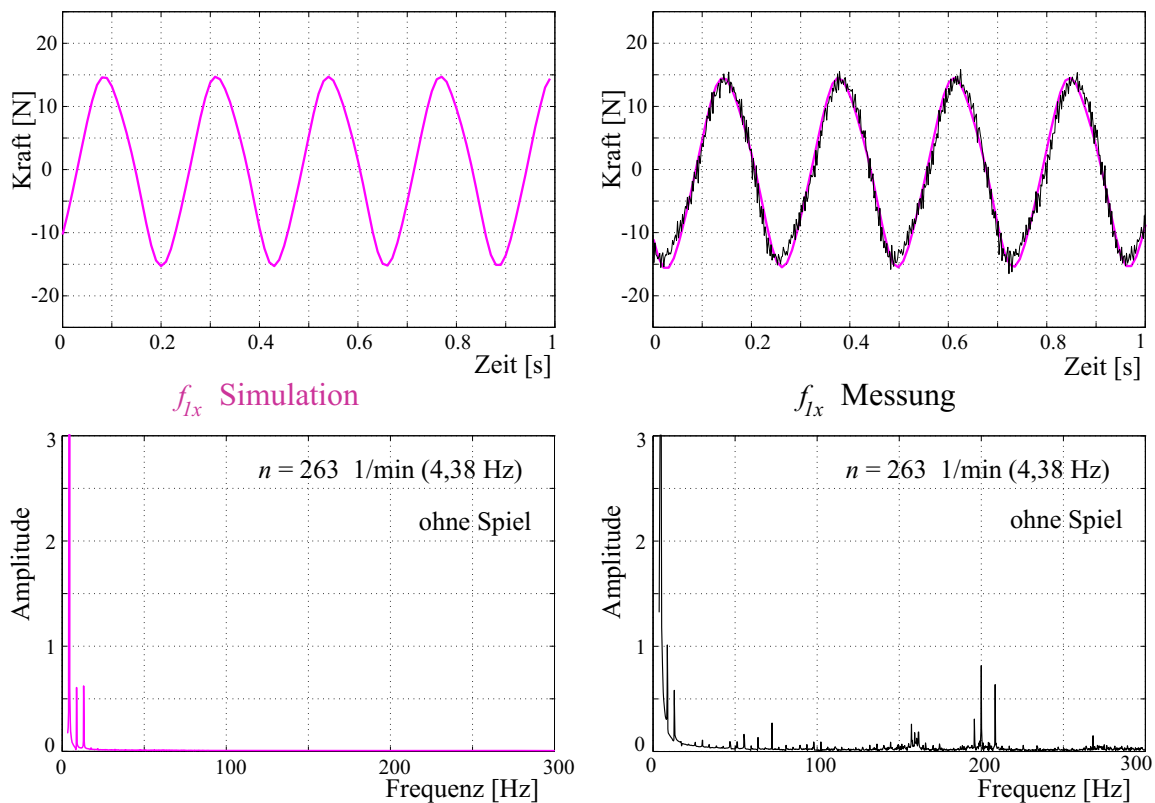
**Bild 10:** Mechanismenprüfstand – Gesamtansicht

## 2.2 Erwartete und gemessene Betriebsschwingungen

Infolge der Trägheitskräfte ungleichmäßig bewegter Körper ergeben sich bei jedem Mechanismus wechselnde Lagerkräfte. Bei vorgegebener Antriebsbewegung (z.B.  $\varphi = \Omega t$ ) und einem zwangläufigen Starrkörper-Modell folgen aus der Kinetostatik periodische Lagerkräfte. Diese lassen sich in einer Fourierreihe entwickeln, wobei die erste Harmonische stark dominiert. Bild 11 zeigt die horizontale Lagerkraftkomponente  $f_{1x}$  im Kurbelwellenlager.

Die Drehzahl von 263 1/min entspricht einer Grundschiwingung im Kraftverlauf von 4,38 Hz, die im Bild 11 links oben mit einer Periodendauer von  $T_p = 0,228$  s deutlich sichtbar ist. Um besonders die höheren Harmonischen (Vielfache von 4,38 Hz) zu erkennen, sind in den Spektren die Amplituden bei 3 N abgeschnitten. Die erste Harmonische besitzt tatsächlich eine Amplitude von 15 N.

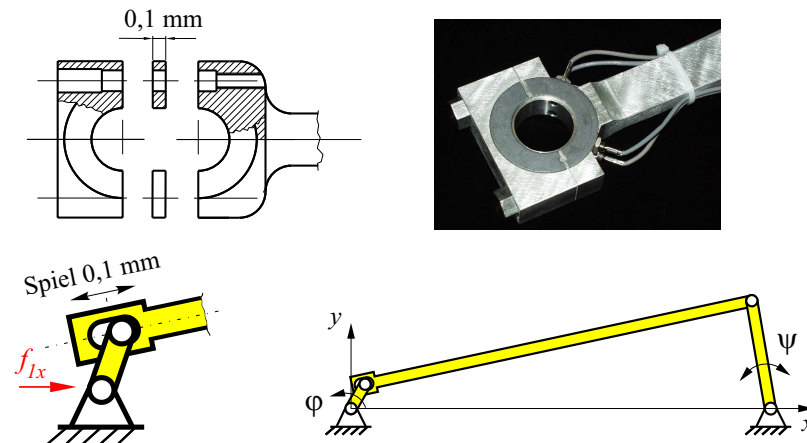
Am realen Mechanismenprüfstand (ohne zusätzliches Spiel) weist der Zeitverlauf schwache hochfrequente Störungen auf, vgl. Bild 11 rechts. Im Spektrum erscheinen diese Störungen als Peaks bei ca. 70 Hz, 160 Hz und 200 Hz. Hier stellt sich die Frage, ob in diesen Bereichen Eigenfrequenzen liegen und welchen Eigenschwingformen diese entsprechen. Mit dem einfachen Starrkörper-Modell der Kurbelschwinge sind diese Peaks nicht erklärbar.



**Bild 11:** Simulierte und gemessene Horizontalkraft ohne Spiel am Kurbelbolzen

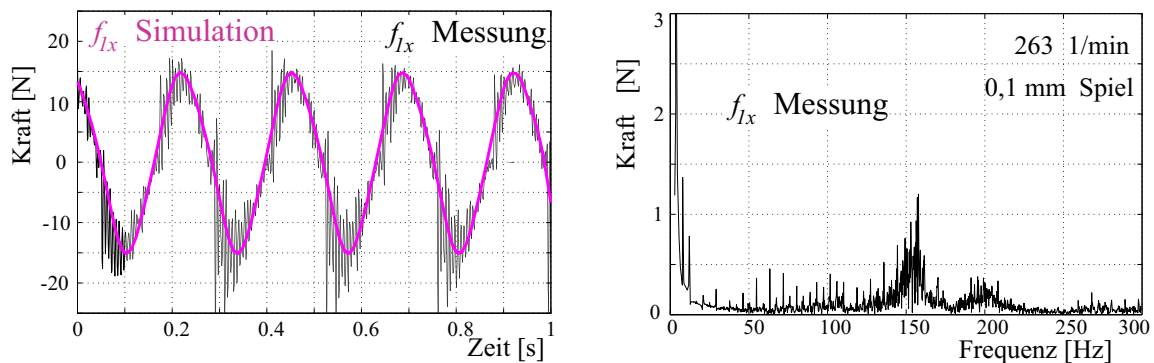
Die Klärung der modalen Schwingungseigenschaften des Mechanismenprüfstandes (Eigenfrequenzen und Eigenschwingformen) gewinnt besonders dann an Bedeutung, wenn spezielle Schwingungsphänomene bewusst erzeugt und untersucht werden sollen. Je besser bereits der Ursprung vorhandener Peaks (Bild 11 unten rechts) geklärt ist, desto zielsicherer können zusätzlich erzeugte Erscheinungen interpretiert werden.

In einer Voruntersuchung (gegenüber Messungen in Kapitel 5.5.1 ab Seite 107) erhielt das Pleuellager ein definiertes Spiel von 0,1 mm in Pleuellängsrichtung, siehe Bild 12. Mit dieser Vereinfachung (eindimensional, 1D) werden einige charakteristische Erscheinungen sichtbar [111].



**Bild 12:** Realisierung von 0,1 mm Spiel am Pleuel-Kurbelbolzen-Gelenk

Das Bild 13 zeigt den Zeitschrieb der gemessenen Horizontalkraft  $f_{1x}$  mit 1D-Spiel von 0,1 mm. Jeweils nach Nulldurchgang beginnen hochfrequente Schwingungen. Aus dem Zeitschrieb kann für diesen Ausschwingvorgang eine Periodendauer von 6,58 ms ausgemessen werden, die eine Frequenz von 152 Hz ergibt<sup>1</sup>.



**Bild 13:** Gemessene Horizontalkraft am Pleuellager (mit Spiel)

Die Drehzahl von 263 1/min entspricht wieder einer Grundschwingung im Kraftverlauf von 4,38 Hz. Die zahlreichen Peaks bzw. erhöhten Amplituden im Frequenzbereich weit oberhalb der Drehfrequenz (4,38 Hz) zwischen 50 Hz und um 250 Hz erschweren die Zuordnung der Effekte, die durch das Spiel am Pleuellager verursacht werden.

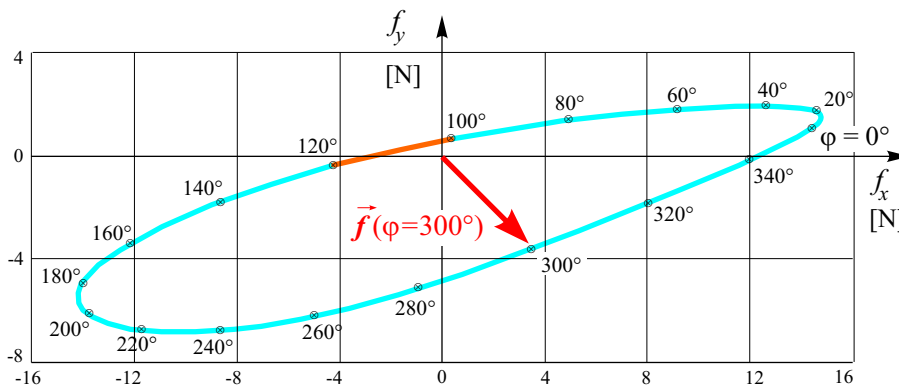
Jetzt kann ein Vergleich mit den Messergebnissen ohne zusätzliches Spiel die Änderungen im Schwingungsverhalten aufdecken, doch welche Schwingformen und Entstehungsmechanismen hierfür ursächlich sind, bleibt unklar. Darum werden im Kapitel 6 die modalen Parameter des Mechanismenprüfstandes ermittelt.

<sup>1</sup>In [111, S.553] hat sich leider ein Kommafehler eingeschlichen, dort stehen falsch: 0,658 s und 1,52 Hz.



Im Kraftverlauf von  $f_{1x}$  mit 1D-Spiel im Bolzengelenk (Bild 13) treten bei fallender Kraft höhere Amplituden auf, als bei ansteigender Kraft. Die alleinige Betrachtung der Gelenkkraftkomponente  $f_{1x}$  reicht für die Klärung des Spiel-Stoss-Lärm-Phänomens in Drehgelenken nicht aus, hier ist die Darstellung des Kraftvektors im Polardiagramm hilfreich.

Bild 14 zeigt das **Polardiagramm der Gelenkkraft** im Bolzengelenk über eine Kurbelumdrehung bei 250 1/min ohne Spiel und ohne Reibung als Ergebnis einer kinetostatischen Rechnung. Wie zu erkennen ist, verschwindet bei dieser Drehzahl die Gelenkkraft annähernd zwischen den Kurbelwinkeln  $100^\circ$  und  $120^\circ$ . In diesem Bereich ist ein Kontaktverlust zu erwarten. Der Schwerkrafteinfluss trägt maßgeblich zu diesem Effekt bei. Steigt die Kraft  $f_{1x}$  mit dem Kurbelwinkel  $\varphi$  zwischen  $280^\circ$  und  $300^\circ$  an, so ist während des Nulldurchganges die Gefahr für Kontaktverlust geringer, weil in dieser Phase die vertikale Kraft  $f_{1y}$  mit 5 N evtl. den Kontakt erzwingt. Allein aus den Kraftverläufen lässt sich allerdings das reale Verhalten nicht erklären. Hierfür muss zusätzlich die Relativbewegung im Bolzengelenk und Reibung einbezogen werden, siehe Kapitel 5.5 ab Seite 107.



**Bild 14:** Polardiagramm der Kraft im Bolzengelenk bei 250 1/min

In gleicher Weise wie in den Fundamentkräften zeigen sich die wechselnden Trägheitswirkungen im erforderlichen Antriebsmoment. Wird der Motorsteuerung eine konstante Winkelgeschwindigkeit vorgegeben, z.B. in Bild 15 die Drehzahlen  $n=606$  1/min bzw.  $47,7$  1/min, dann muss der Motor durch ein wechselndes Antriebsmoment die Schwinge während eines Arbeitszyklus zweimal beschleunigen und abbremsen. Die Einstellungen des Motorreglers bestimmen dabei die Güte, wie exakt wirklich eine konstante Winkelgeschwindigkeit des Mechanismus gesichert wird. Weitere Untersuchungen dazu folgen im Kapitel 3.5.

Auch ein Lastmoment an der Schwinge, welches in einer Maschine durch die technologisch bedingten Kräfte an der Wirkstelle verursacht wird, beeinflusst den Bewegungszustand des Mechanismus maßgeblich. In Bild 15 bewirkt ein konstantes Lastmoment  $M_3$  ein mit der Drehfrequenz wechselndes Antriebsmoment. Dagegen dominiert ohne Lastmoment bei hoher Drehzahl ( $606$  1/min) die Trägheitswirkung mit der doppelten Drehfrequenz bzw. mit der 2. Harmonischen. Bei geringer Drehzahl ( $47,7$  1/min) kompensiert ein immer positives kleines Antriebsmoment die Reibverluste, vgl. Bild 15 rechts oben.

Die im Zeitschrieb von Antriebsmoment und Antriebswinkelgeschwindigkeit erkennbaren hochfrequenten Schwingungen (im Bild 15 unten mit etwa  $110$  Hz bzw. mit  $T_p=0,009$  s) können durch den Motor mit Drehzahlregler verursacht werden. Mit Wechselwirkungen zwischen Servoantrieb und Mechanismus befasst sich Kapitel 3.5 ab Seite 38.

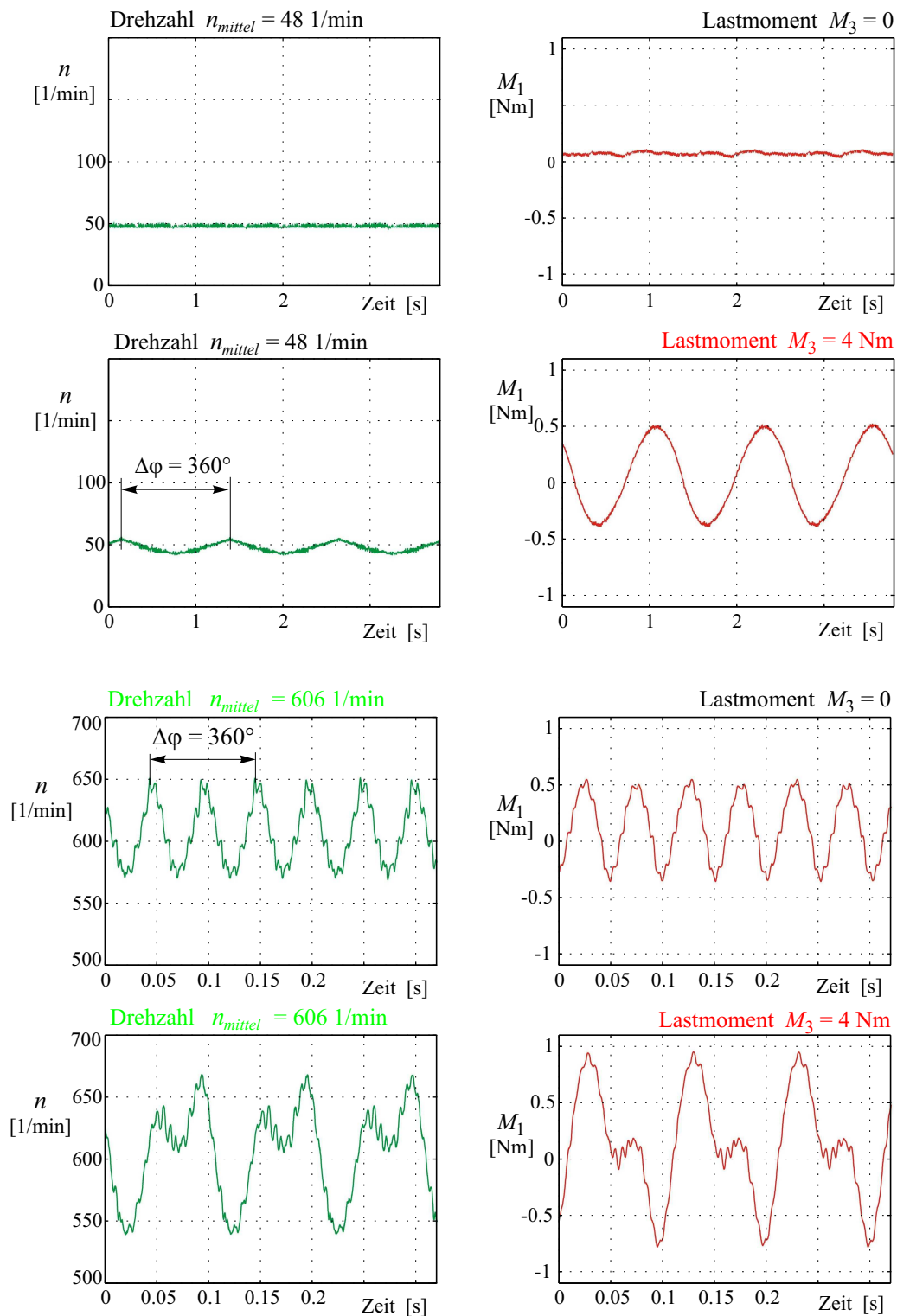
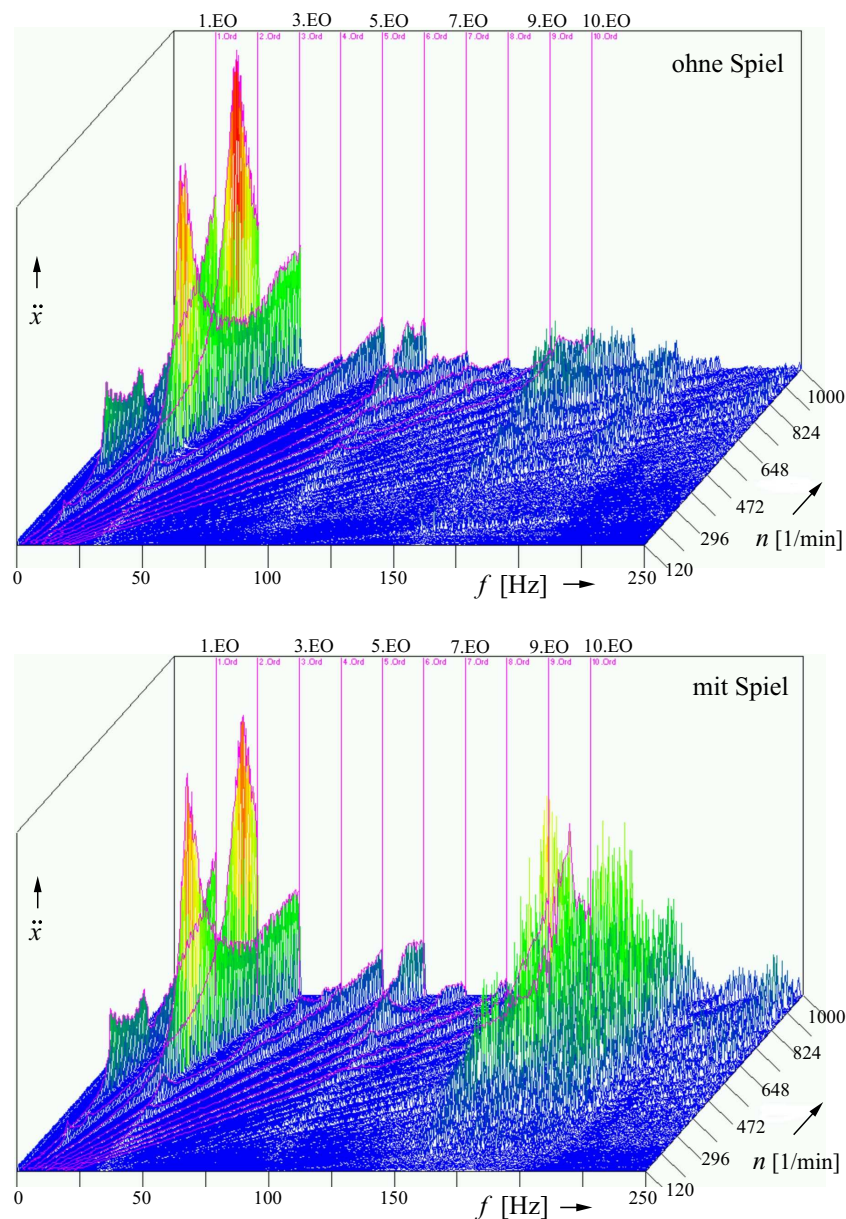


Bild 15: Bewegungszustände des Mechanismenprüfstandes ( $M_1$  und  $n$  bzw.  $\varphi$ )

In Wasserfalldiagrammen wie in Bild 16 werden alle Informationen über das Schwingungsverhalten in einem breiten Betriebsbereich gleichzeitig veranschaulicht. Das liefert einen Gesamteindruck, kann aber auch Erscheinungen verdecken.

Bild 16 stellt Wasserfalldiagramme der horizontalen Beschleunigung  $\ddot{x}$  an der Grundplatte für zwei Fälle gegenüber, Messungen ohne und mit Spiel (1D) am Kurbelbolzen. Es werden Zeitfrequenzanalysen bei einem Hochlauf zwischen 120 und 1000 1/min dargestellt. Interessanterweise ruft Spiel eine breitbandige Anregung (evtl. durch Stöße) erst oberhalb von 150 Hz hervor, während unterhalb das Verhalten fast deckungsgleich bleibt. Auch bei niedrigen Drehzahlen unter 300 1/min verursacht das Spiel kaum Amplitudenüberhöhungen.



**Bild 16:** Maschinenhochlauf der x-Beschleunigung, 120-1000 1/min (1D-Spiel)

Das Bild 17 zeigt für den gleichen Messaufbau im reduzierten Frequenzbereich unter 80 Hz neben dem Wasserfalldiagramm auch ein CAMPBELL-Diagramm. In dieser Darstellung können

mögliche Resonanzstellen an den Schnittpunkten von horizontalen Frequenzlinien (Eigenfrequenzen) und schrägen Linien der Erregerordnungen (EO's) abgelesen werden. Nicht alle möglichen Resonanzstellen wirken sich auf die spezielle Messgröße (hier x-Beschleunigung) aus. Im Beispiel dominieren die Resonanzen der 6. Eigenfrequenz von 32 Hz mit der 2. und 3. Erregerordnung, weiterhin regt die 1. EO mit geringerer Wirkung die Eigenfrequenzen  $f_1$  und  $f_3$  an.

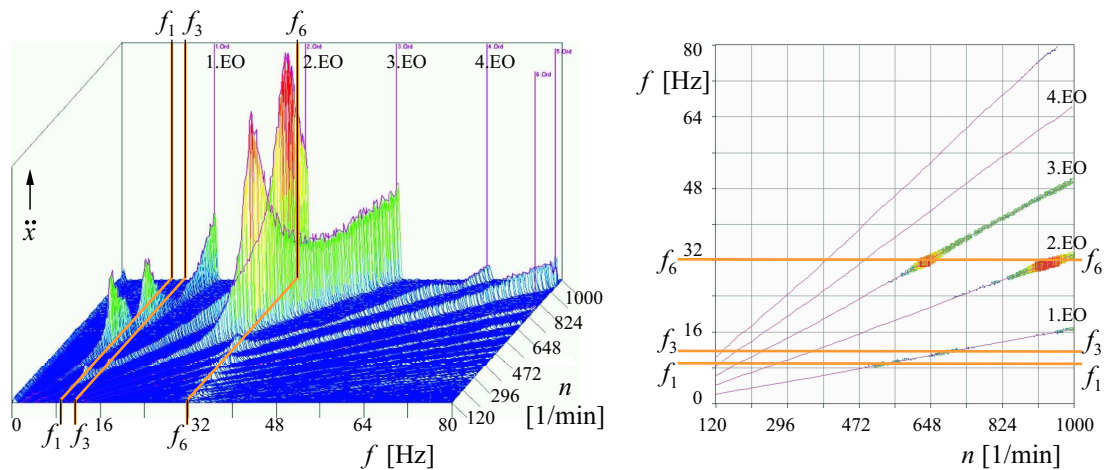


Bild 17: Maschinenhochlauf der x-Beschleunigung, 120-1000 1/min, 2D-Spiel

Bemerkung:

Bild 81 (S. 110) zeigt die CAMPBELL-Diagramme passend zu Bild 16.

## 2.3 Fragestellungen und Modelle zur Mechanismendynamik

Um Ursachen für gemessene oder nur beobachtete Schwingungserscheinungen aufzudecken, müssen physikalische Zusammenhänge und mögliche Modelle bekannt sein. Je nach Ziel und Zweck sind Umfang und Schwierigkeitsgrad zu wählen. Es gilt der Leitsatz: „So einfach wie möglich, so kompliziert wie nötig.“

Verschiedenste Fragestellungen zur Berechnung und für die maschinendynamisch günstige Auslegung lassen sich in die folgende Klassifizierung (Tabelle 1) einordnen.

Tabelle 1: Aufgabenstellungen zur Mechanismendynamik

<u>Klassifizierung von Aufgabenstellungen zur Mechanismendynamik</u>	
<b>1. Kinematische Analyse (Vorwärtskinematik):</b>	<i>Berechnung der Bewegung (Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung) aller Körper bei gegebenem Zustand (Lage, Geschwindigkeit) der Minimalkoordinaten, d.h. bei fest vorgegebener Antriebsbewegung</i>
<b>2. Kinetostatische Analyse (inverse Kinetik):</b>	<i>Bestimmung der Gelenkkräfte und des Antriebsmomentes bei gegebener Bewegung (gelöste 1. Aufgabe) und gegebener äußerer Belastung</i>
<b>3a. Bestimmung des Bewegungszustandes (Integration der DGL):</b>	<i>Berechnung der Bewegung (Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung) der Minimalkoordinaten (Antriebsbewegung) bei gegebener äußerer Belastung (starres MKS)</i>
<b>3b. Elastokinetische Analyse (elastisches MKS):</b>	<i>Bestimmung der elastischen Deformationen (Abweichung von der Sollbewegung), bei gegebener Sollbewegung und gegebener äußerer Belastung (Integration der DGL für das um die Sollbewegung linearisierte System). Komplexere Aufgabe: Integration bei gleichzeitig gesuchter 'großer' Sollbewegung und kleinen elastischen Deformationen (3a+3b als nichtlineares System)</i>
<b>3c. Analyse als strukturvariantes System:</b>	<i>Bestimmung der Strukturvarianten, der Bewegung und der inneren Kräfte für Systeme mit einseitigen Bindungen (z.B Kontaktverlust infolge Spiel, Haft-Gleit-Übergänge) bei gegebener äußerer Belastung (Integration der DGL unter Berücksichtigung von Ungleichheits-NB)</i>
<b>4 Dynamischer Ausgleich (Optimierung):</b>	<i>Verminderung der Wirkungen der wechselnden Trägheitskräfte und der schwankenden technologisch bedingten Kräfte bei gleichzeitiger Sicherung der Funktion der Maschine mit ausreichendem Bedienkomfort. Ziele des dynamischen Ausgleiches: - Ausgleich der Wirkungen auf das Fundament - Ausgleich der Wirkungen auf den Antrieb - Ausgleich der Wirkungen in den Gelenken - Ausgleich der Wirkungen auf die bewegten Körper - Ausgleich der Wirkungen auf den technologischen Prozess</i>

Die Fragestellungen für den Ingenieur könnten noch weiter gefasst werden, doch diese Arbeit geht immer von einer bekannten Struktur und Topologie oder von einer schon real existierenden Maschine aus. Der Schwerpunkt liegt hier auf der **Analyse** von Mehrkörpersystemen (MKS).

Ausgehend vom Zweck einer Maschine, von den herzustellenden materiellen Gütern und Produkten ergeben sich die technologischen Anforderungen an die Bewegung der Werkzeuge. Diese fasst der Ingenieur in einem Bewegungsplan zusammen. Auf den Strukturentwurf, d.h. auf die Auswahl und Synthese einer Struktur, die den Bewegungsplan umsetzt, wird in dieser Arbeit nicht eingegangen.

Je nach Aufgabenstellung (Klassifizierung) ändern sich Komplexität und Menge der eingehenden Parameter. Entsprechende Modellstufen stellt Bild 18 dem zugehörigen mathematischen Gleichungssatz gegenüber.

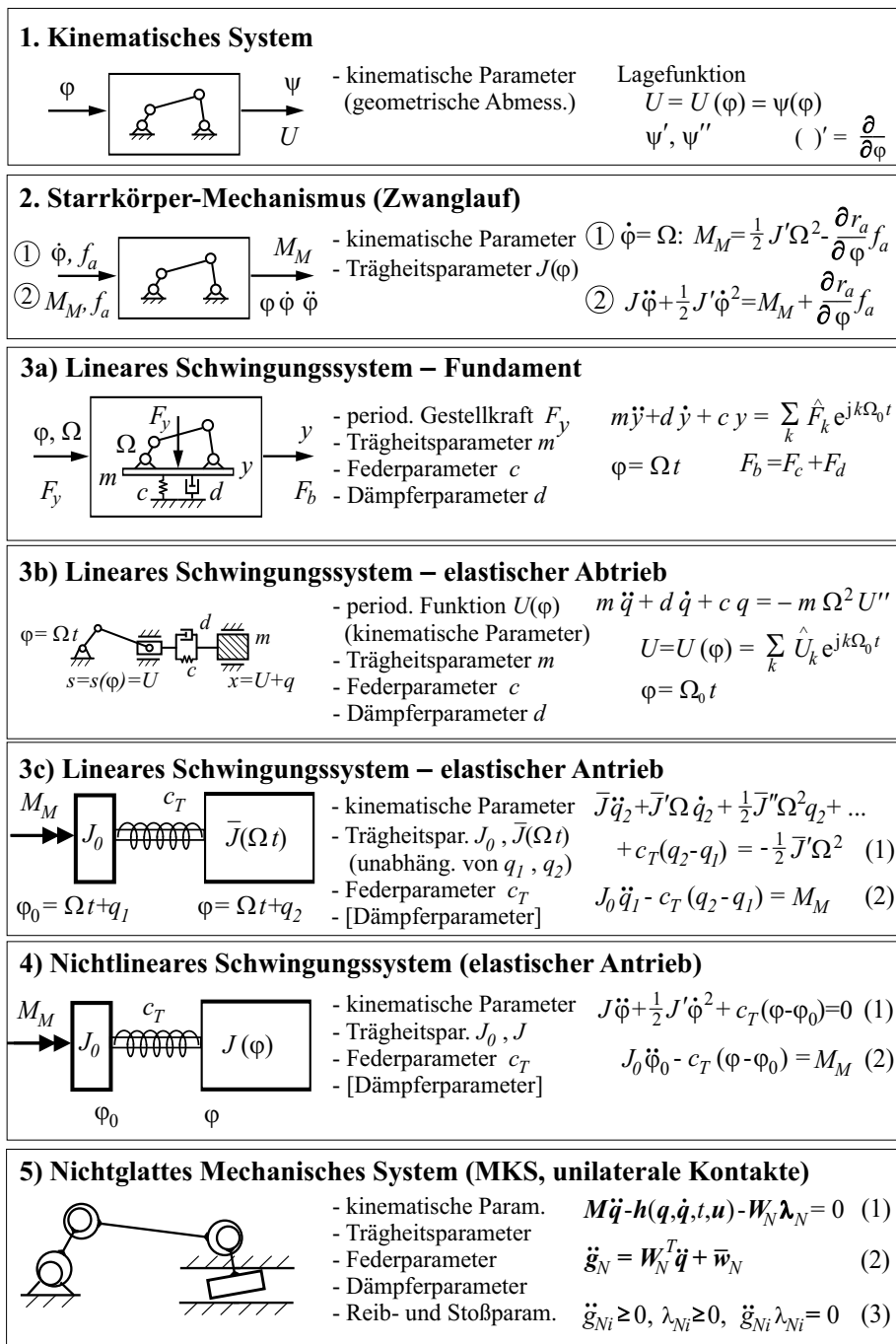


Bild 18: Modellstufen für Mechanismen in Antriebssystemen

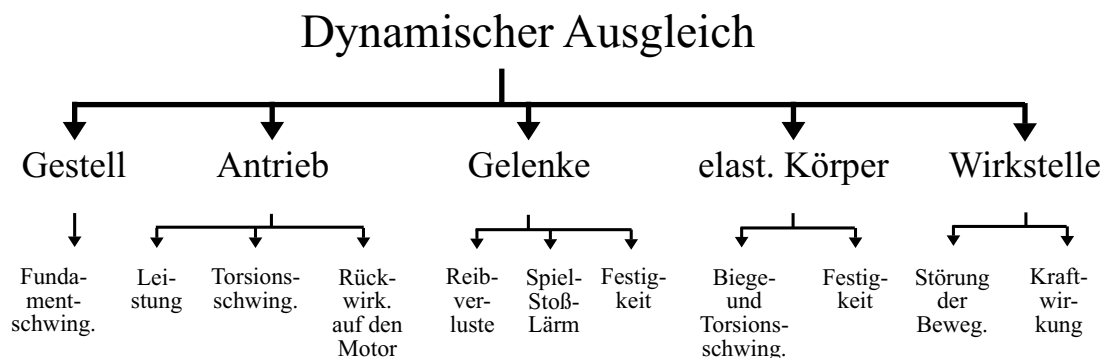
So erfordert die 'Kinematische Analyse' (Tab. 1, Komplex 1) bzw. das 'Kinematische System' (Bild 18 oben) keine Trägheitsparameter und äußeren Belastungen. Auf Lageebene ergibt sich für die kinematische Analyse ein nichtlineares Gleichungssystem, während danach auf Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene nur lineare Gleichungssysteme zu lösen sind. Weil diese Analyse bei der Antriebsbewegung oder der Bewegung der Minimalkoordinate beginnend rekursiv vorgeht, wird das Vorgehen auch 'Vorwärtskinematik' genannt.

Die 'kinetostatische Analyse' führt ebenfalls auf ein lineares Gleichungssystem und erfordert keine numerische Integration. Sie setzt eine bekannte und fest vorgegebene Antriebsbewegung voraus. Unter Umständen ist der Systemzustand vorher durch Integration der Bewegungsdifferentialgleichung (Kinetik) für die Minimalkoordinaten zu bestimmen (eine Form der 3. Aufgabengruppe). Die 'kinetostatische Analyse' berechnet nur die bei der 'Kinetik' zunächst vernachlässigbaren passiven Kräfte (Zwangskräfte). Sie beginnt bei den Belastungen am Abtrieb (Werkzeuge) und geht evtl. rekursiv zurück bis zum Antrieb. Sie wird deshalb als 'inverse Kinetik' bezeichnet.

Auf die mathematisch anspruchsvollsten Aufgaben (3. Komplex in Tab. 1) geht das Kapitel 5 ausführlicher ein. Besonders die mathematische Beschreibung durch Differentialgleichungen mit Nebenbedingungen (einseitige Bindungen) stehen dort im Mittelpunkt. Die Modellstufen 2 bis 4 nach Bild 18 können als Sonderfälle der 'nichtglatten' Mehrkörperdynamik (letzte Modellstufe 5) verstanden werden.

Der vierte Aufgabenkomplex (Dynamischer Ausgleich) stellt für den Ingenieur nach wie vor die größte Herausforderung dar; denn hier ist immer der Kompromiss zwischen vielen Kriterien einschließlich Realisierungszeitraum und Kosten zu suchen.

Der **dynamische Ausgleich** hat die Aufgabe, unerwünschte Wirkungen der schwankenden Trägheitskräfte oder der technologisch bedingten Kräfte in Mechanismen zu kompensieren. Die Wirkungen zeigen sich insbesondere als Schwingungsanregung des Gestells, Wechselwirkungen zum Antrieb, in Form von Spiel-Stoß-Lärm-Problemen in den Gelenken, Reibverlusten oder Verfälschung der Abtriebsbewegung durch Schwingungen elastischer Bauteile, vgl. Bild 19.



**Bild 19:** Zielrichtungen des dynamischen Ausgleiches schnelllaufender Mechanismen

Traditionell wird der dynamische Ausgleich durch Änderung der Masseparameter der Getriebe-glieder (z.B. Zusatzmassen) oder durch zusätzliche Getriebe-glieder (einschließlich Kompensato-ren und Tilger) gelöst [13], [17]. So funktioniert auch der in Kapitel 3.3 auf Seite 30 vorgestellte Massenausgleich. Dabei handelt es sich immer um **passive Methoden** ohne Energiezufuhr. Es wird nur in einer bestimmten Art und Weise Energie gespeichert und zu einem späteren Zeitpunkt abgegeben. Das Schwungrad ist das einfachste Beispiel dafür.

Zum dynamischen Ausgleich dienen jedoch auch die gezielte Beeinflussung von Eigenfrequenzen, die Vermeidung einzelner Erregerharmonischer oder die Veränderung der Eigenschwingformen. Den einzelnen Maßnahmen sollten stets spezielle Minimalmodelle zu Grunde gelegt werden, die das physikalische Wesen der Schwingungserscheinung erklären. Anderenfalls wäre eine optimale Auslegung dem Zufall überlassen.

Maßnahmen und Beispiele zum dynamischen Ausgleich mit passiven Methoden werden in der VDI-Richtlinie 2149 (Blatt1) [117] und in [14], [16] für den Konstrukteur zusammengefasst . Aus Kostengründen sollte bei Schwingungsproblemen zunächst die Anwendung passiver Methoden geprüft werden.

Aufwendigere Methoden sind zusätzliche oder **redundante Antriebe**, denen sich Kapitel 4 widmet. Ein System ist redundant angetrieben, wenn es mehr Antriebe als Freiheitsgrade besitzt. Damit gelingt es, die inneren Zwangskräfte in den Gelenken gezielt zu beeinflussen. Die Verteilung der Zwangskräfte in der Maschine wird dynamisch günstig gestaltet. Der Mechanismus wird dabei gezielt in sich verspannt. Redundante Antriebe beeinflussen damit Spiel-Stöße in den Gelenken, Lärm, Verschleiß und Vibrationen elastischer Bauteile.

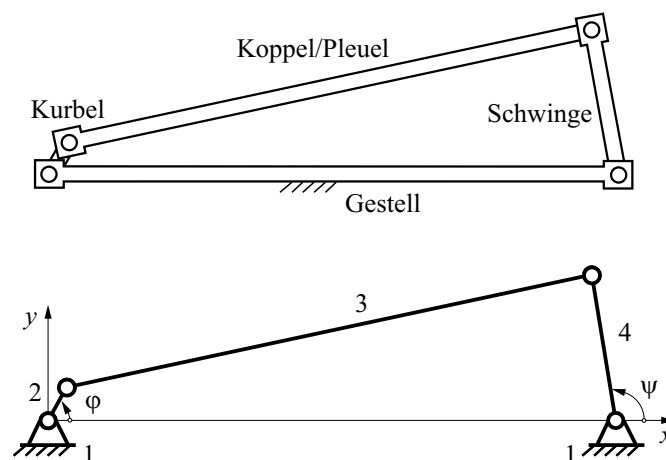


### 3 Der zwangläufige ebene Starrkörper-Mechanismus

#### 3.1 Modellbeschreibung und Parameter

Das Verhalten schnelllaufender Mechanismen lässt sich zum überwiegenden Teil mit Hilfe des Modells 'Ebener zwangläufiger Starrkörper-Mechanismus' beschreiben [117]. Der **Zwanglauf** ist dann gesichert, wenn der Freiheitsgrad des Mechanismus genau mit der Anzahl der Antriebe übereinstimmt. Unter dem **Freiheitsgrad** (degree of freedom – *dof*) wird dabei die minimale Anzahl von Koordinaten verstanden, die zur eindeutigen Beschreibung der Lage aller Körper erforderlich ist. Bei Zwanglauf entspricht der Freiheitsgrad dem Getriebelehrebegriff 'Laufgrad'. Gelenkspiel und elastische Deformationen der Mechanismenglieder und Gelenkelemente stören den Zwanglauf. Diskrete Federn und Dämpfer scheiden damit an dieser Stelle zur Kopplung zweier Körper aus. Die Gelenke, wie z.B. Drehgelenke oder Schubgelenke, müssen die gewünschten Relativbewegungen der Getriebeglieder ohne Einschränkung zulassen und alle anderen Bewegungsmöglichkeiten eindeutig sperren.

Bild 20 zeigt das den obigen Annahmen entsprechende Modell der Kurbelschwinge, welche als reales Objekt im Mechanismenprüfstand verwendet wird. Die Nummerierung der Körper beginnt mit dem Gestell als Nummer 1, gefolgt vom Antrieb als Getriebeglied 2. Für das System mit einem Freiheitsgrad ( $dof = 1$ ) dient in der Regel die Kurbel als Antrieb. Der Kurbelwinkel  $\varphi$  als Antriebskoordinate wird als Minimalcoordinate des Systems gewählt. Es wäre aber auch ein Antrieb mit dem Winkel  $\psi$  an der Schwinge möglich.



**Bild 20:** Kurbelschwinge und kinematisches Schema

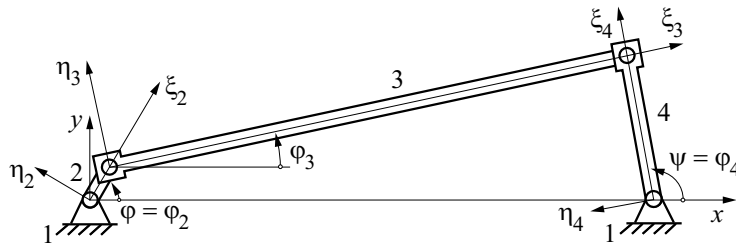
Das **kinematische Schema** stellt zwangläufige ebene Mechanismen maßstäblich und nach DIN ISO 3952-1 sinnbildlich dar. Die Anzahl, Anordnung und Funktion der Körper (Glieder) und Kopplungen (Gelenke) gehen daraus eindeutig hervor. Nur die für die Bewegung relevante Geometrie ist einzubeziehen. Die konstruktive Gestaltung der einzelnen Körper spielt dabei keine Rolle. Die für das kinematische Schema erforderlichen Abmessungen des Mechanismenprüfstandes enthält Tabelle 2.

Um mit dem Modell des 'ebenen zwangläufigen Starrkörper-Mechanismus' auch die Trägheitswirkungen zu erfassen, müssen für jeden bewegten Körper auch die in Tabelle 2 enthaltenen Trägheitsparameter bekannt sein. Für die ebene Bewegung in der x-y-Ebene genügen dabei pro Körper die Masse  $m_i$ , die Schwerpunktlage  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  und das Massenträgheitsmoment  $J_{S_i}$  um die z-Achse bzw.  $\zeta$ -Achse bezüglich des Schwerpunktes. Das Bild 21 zeigt die Lage der körperfesten  $\xi_i$ - $\eta_i$ -Koordinatensysteme.

Die Bereitstellung der **Trägheitsparameter** wie in Tabelle 2 erscheint zunächst trivial und selbstverständlich. Doch die folgenden Gedanken und praktischen Erfahrungen mit der einfachen Kurbelschwinge des Mechanismenprüfstandes relativieren diese Annahme.<sup>2</sup>

Tabelle 2: Abmessungen der Kurbelschwinge im Mechanismenprüfstand

Nr.	Körper/Glied	Länge	Masse	Schwerpunkt		Massenträgheitsmoment
i		$l_i$ mm	$m_i$ kg	$\xi_i$ mm	$\eta_i$ mm	$J_{Si}$ kg mm <sup>2</sup>
2	Kurbel	20,0	1,481	-3,0	0	1714
3	Koppel/Pleuel	283,0	0,511	171,0	0	6608
4	Schwinge	77,5	0,696	-18,9	0	1668
1	Gestell	300,0	-	-	-	-



**Bild 21:** Kurbelschwinge mit körperfesten Koordinatensystemen

Bis hierher setzt die Parameterbestimmung keine real gefertigten Bauteile voraus. 3D-CAD-Programme, die auf Volumenmodellen basieren, stellen die Trägheitsparameter in der Entwurfsphase bereit. Nach der Fertigung bieten sich mit den tatsächlich vorhandenen Bauteilen experimentelle Methoden an.

Im demontierten Zustand können die Trägheitsparameter durch Wiegen und Auspendeln direkt bestimmt werden, siehe z.B. DRESIG, HOLZWEISSIG [21, S.14-25]. Besonders die Massenträgheitsmomente  $J_{Si}$  sollten experimentell durch Auspendeln geschätzt werden. Wenn verschiedene inhomogene Materialien mit nicht exakt bekannter Dichte verbaut sind oder z.B. auf dem Pleuel Dehnmessstreifen mit der zugehörigen Kabelführung aufgeklebt sind, dann kann ein CAD-Modell nur unsichere Parameter liefern, die experimentell verifiziert werden sollten.

Eine weitere Möglichkeit, zu zuverlässigen Trägheitsparametern zu gelangen, bietet die Parameteridentifikation mit Optimierer. Das nächste Kapitel 3.2 beschreibt diesen Weg.

Im konkreten Anwendungsfall bestehen die bewegten Getriebeglieder Kurbel, Koppel und Schwinge aus einer ganzen Baugruppe, siehe Bild 22. Zu jeder Baugruppe gehört ein Servomotor, dessen Drehträgheit hier noch weggelassen wird, da die Motoren selbst nicht in das Modell eingehen. Das Kapitel 3.5 'Wechselwirkung Servomotor – Starrkörper-Mechanismus' bezieht hingegen einfache Motormodelle zur Drehmomentenerzeugung ein.

Die Kupplungen bilden bei der jetzigen Modellbildung die Schnittstelle zu den Motoren. Sie werden hinsichtlich Trägheitswirkung dem Massenträgheitsmoment der Antriebswellen zugeschlagen. Für das Getriebeglied Kurbel können somit alle gewünschten Trägheitsparameter bzgl. des gliedfesten Koordinatensystems vom CAD-Programm geliefert werden.

Das Getriebeglied Koppel bereitet Probleme, weil der Zahnriemenantrieb nicht direkt zum starren Körper des Pleuels gehört. Der Zahnriemen wird streng genommen mit der Schwinge bewegt

<sup>2</sup>Infolge Umbauten und Spezifik spezieller Untersuchungen sowie späterer Verifikation verwenden die Kapitel 3.5 und 5.5 z.T. andere Trägheitsparameter.

und die Antriebswelle vor dem Zahnriemen erfährt keine translatorische Bewegung. Als Kompromiss werden Masse und Schwerpunktlage der Koppel ohne Zahnriemen und Antriebswelle berechnet, aber dem Massenträgheitsmoment der Koppel die Drehträgheit des Zahnriemenantriebes (Riemen, Welle und Kupplung) zugeschlagen. In gleicher Weise wird die Drehträgheit der redundanten Motoren zur Koppel und Schwinge einbezogen, wenn diese Motoren für bestimmte Betriebsweisen nur passiv (ohne Drehmoment) mitlaufen, vgl. Fußnote S. 24.

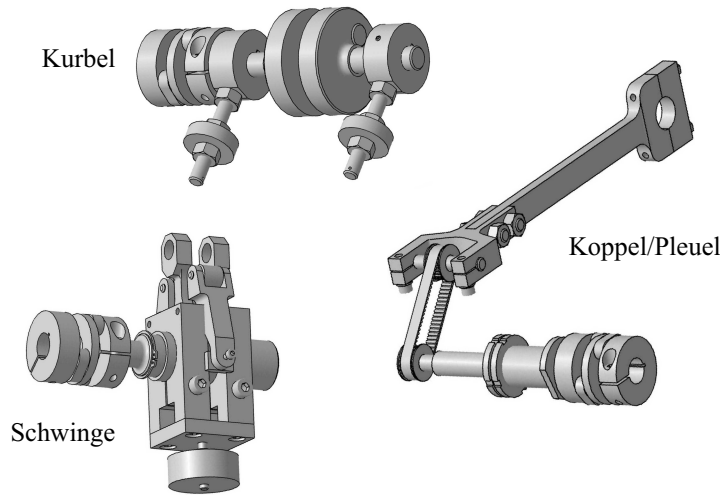


Bild 22: Baugruppen der Getriebeglieder Kurbel, Koppel und Schwinge

Sind die kinematischen Parameter und die Trägheitsparameter zum kinematischen Schema bekannt, folgt die **mathematische Formulierung der Kinetik**. Für das Modell 'ebener zwangläufiger Starrkörper-Mechanismus' mit einem Antrieb reicht genau eine Differentialgleichung. Zur Herleitung in Minimalkoordinaten bieten sich die LAGRANGESchen Gleichungen 2. Art an [21], [69], [116]. Der Kurbelwinkel  $\varphi$  dient als Antriebs- und Minimalkoordinate.

Die Kinetik erfordert weitere Parameter zur Beschreibung der äußeren aktiven Kräfte und Momente. Bild 23 führt diese für das Beispiel Kurbelschwinge ein.

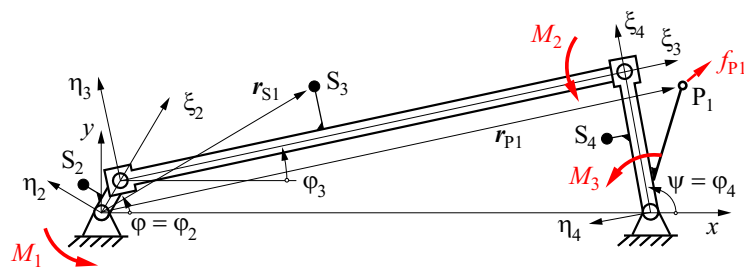


Bild 23: Kurbelschwinge mit Schwerpunkten und äußeren Kräften

Dabei können das Motormoment an der Kurbelwelle  $M_1 = M_M$ , die redundanten Motormomente  $M_2$  und  $M_3$  (siehe Bild 23), aber auch Reibung, Dämpfung und technologisch bedingte Kräfte, wie beispielhaft  $\mathbf{f}_{P_i}$ , in die 'generalisierte Kraft'  $M_{red}(\varphi, \dot{\varphi}, t)$  einfließen.

Projizierte äußere Belastung: 
$$M_{red}(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \sum_{i=2}^I \varphi'_i M_i + \sum_{i=1}^L \mathbf{r}'_{P_i} \mathbf{f}_{P_i} \quad \text{Abk.: } \frac{\partial(\ )}{\partial \varphi} = (\ )' \quad (1)$$

Wenn äußere aktive Kräfte als Potentialkräfte bekannt sind, können diese auch über die Ableitung der potentiellen Energie  $V$  berechnet werden.

Die Trägheitsparameter aller bewegten Körper gehen über die kinetische Energie  $T$  in die mathematische Systembeschreibung ein.  $J_{red}$  entsteht durch die Projektion auf den als Minimalkoordinate gewählten Kurbelwinkel  $\varphi$ :

$$\text{Kinetische Energie:} \quad T = \frac{1}{2} J_{red}(\varphi) \dot{\varphi}^2 \quad (2)$$

$$\text{Projizierte Trägheit:} \quad J_{red}(\varphi) = \sum_{i=2}^I m_i \mathbf{r}'_{Si}{}^2 + J_i \varphi_i'^2 \quad \text{Abk.:} \quad \frac{\partial(\quad)}{\partial\varphi} = (\quad)' \quad (3)$$

Die projizierte Trägheit  $J_{red} = J_{red}(\varphi)$  hängt von der Kurbelstellung ab. Demgegenüber bleiben die Trägheitsparameter der Starrkörper bezogen auf die körperfesten  $\xi_i\text{-}\eta_i$ -Koordinatensysteme konstant.

Mit der projizierten Trägheit  $J_{red}$  und der projizierten äußeren Belastung  $M_{red}$  ergibt sich die folgende Differentialgleichung (DGL):

$J_{red}(\varphi) \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} J'_{red}(\varphi) \dot{\varphi}^2 = M_{red}(\varphi, \dot{\varphi}, t)$	<p style="margin: 0;"><b>DGL</b> <b>Starrkörper-</b> <b>Mechanismus</b></p> <p style="margin: 0;">(4)</p>
--	---

Diese allgemeine Formulierung der DGL gilt für jeden 'ebenen zwangläufigen Starrkörper-Mechanismus' mit einem Antrieb ( $doF=1$ ). Nur  $J_{red}$  und  $M_{red}$  verkörpern die Spezifik.

$J_{red}(\varphi)$  besitzt aber gegenüber dem allgemeinen  $M_{red}(\varphi, \dot{\varphi}, t)$  die Besonderheit, dass die projizierte Trägheit unabhängig von der Drehgeschwindigkeit bzw. vom Betriebszustand der Maschine ist und nur vom Kurbelwinkel  $\varphi$  abhängt.

Bemerkung:

Mit den Bewegungs-Differentialgleichungen für allgemeine Mehrkörpersysteme befasst sich Kapitel 5.3.2 ab Seite 83 ausführlicher und leitet DGL(4) als Sonderfall ab.

### 3.2 Parameteridentifikation mit Hilfe eines Optimierers

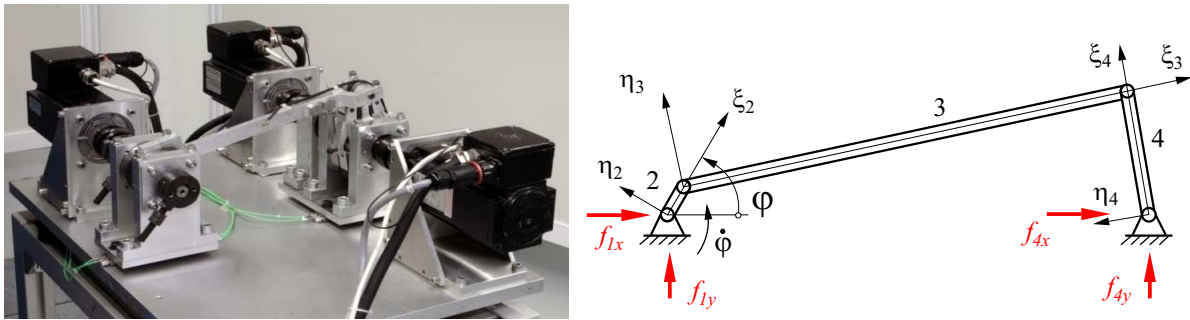
In der Ingenieur Tätigkeit bleibt der Abgleich von Simulation und Messung eine ständige Herausforderung. Die Frage nach zutreffenden und abgesicherten Parametersätzen stellt sich bei jeder Maschine immer wieder neu.

Ein Hilfsmittel, die Parametersätze eines Modells ausgehend von Startwerten (CAD oder Experimente, Kapitel 3.1) zu verifizieren, bietet die Parameteridentifikation mit Optimierer. Diese Methode kombiniert Simulations- und Messergebnisse an der realen komplett aufgebauten Maschine und mit aller Spezifik des tatsächlichen Betriebszustandes.

Exemplarisch sollen hier auf diesem Weg am Mechanismenprüfstand **Trägheitsparameter identifiziert** werden. Im räumlichen Fall besitzt ein starrer Körper die folgenden 10 Trägheitsparameter:

$$m, \quad m \mathbf{r}_{RS} = m \begin{pmatrix} \xi_S \\ \eta_S \\ \zeta_S \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_S = \begin{pmatrix} I_{\xi\xi} & I_{\xi\eta} & I_{\eta\zeta} \\ & I_{\eta\eta} & I_{\eta\zeta} \\ & & I_{\zeta\zeta} \end{pmatrix}_{\text{sym.}} \quad (5)$$

Die Parameter lassen sich bei ebener Bewegung auf vier Größen reduzieren: Masse  $m$ , Schwerpunktlage  $\xi_S$ ,  $\eta_S$  und Massenträgheitsmoment  $J_S = J_{\zeta\zeta}$  um die z-Achse bzw.  $\zeta$ -Achse bezüglich des Schwerpunktes.



**Bild 24:** Mechanismenprüfstand zur Messung der Fundamentalkraftkomponenten

Folgende **Prozedur** wird hier zur Optimierung der Trägheitsparameter verwendet:

- Messung der vier Fundamentalkraftkomponenten  $f_{1x}$ ,  $f_{1y}$ ,  $f_{4x}$  und  $f_{4y}$  und der Antriebswinkelgeschwindigkeit in definierten Kurbelstellungen  $i$ , insgesamt in  $N = 72$  Stellungen, speziell bei  $\varphi = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, \dots, 355^\circ$
- Berechnung der vier Fundamentalkraftkomponenten  $f_{1x}$ ,  $f_{1y}$ ,  $f_{4x}$  und  $f_{4y}$  bei gegebener Antriebswinkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  in den bei der Messung festgelegten Kurbelstellungen
- Optimierung der Zielfunktion unter Freigabe ausgewählter Trägheitsparameter als Optimierungsvariable.

Im Anwendungsbeispiel lautet die zu minimierende Kosten- bzw. Zielfunktion:

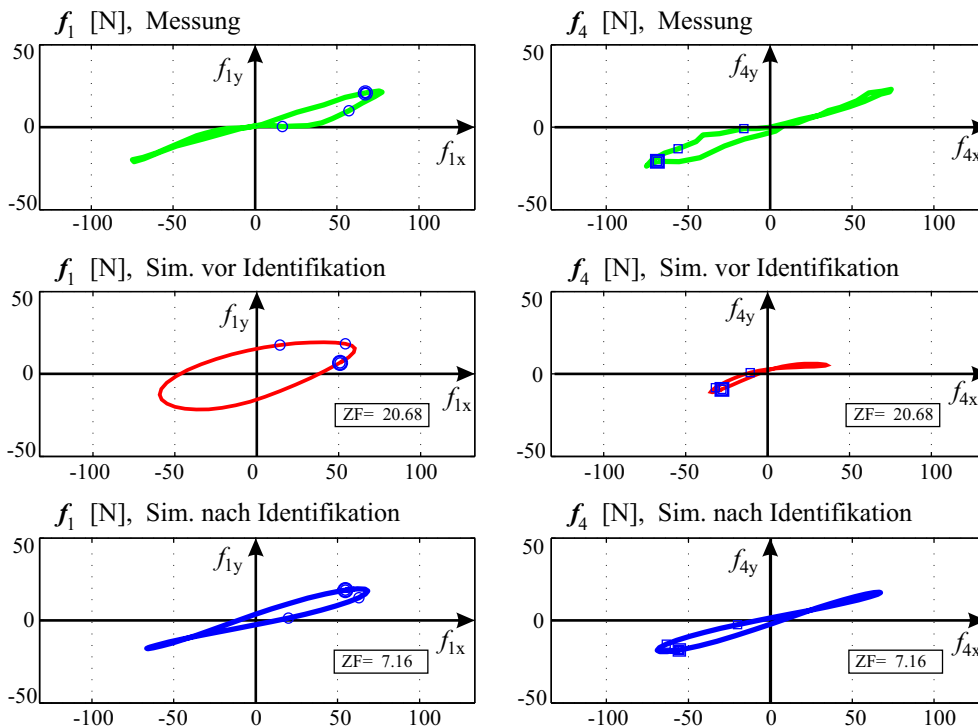
$$ZF = \sum_{i=1}^N [(f_{1x}^c - f_{1x}^m)^2 + (f_{1y}^c - f_{1y}^m)^2 + (f_{4x}^c - f_{4x}^m)^2 + (f_{4y}^c - f_{4y}^m)^2]_i \quad (6)$$

Die gemessenen Kräfte kennzeichnet der hochgesetzte Index 'm' und der Index 'c' markiert die mit Computer simulierte Kraftkomponenten. Das Bild 24 zeigt die Lage der körperfesten  $\xi_i$ - $\eta_i$ -Koordinatensysteme und die zu vergleichenden Kraftkomponenten.

Das nichtlineare Optimierungsproblem birgt die Gefahr, dass im Gebirge des Zielfunktionalis die Parameterkombination eines Nebenminimums angesteuert wird, die nicht dem globalen Optimum entspricht. Aus diesem Grunde scheiden reine Gradientenverfahren als Suchalgorithmus aus. Hier ist auf globalisierende Verfahren zurückzugreifen.

Von THÜMMEL 1997 [104] und JENSEN 2007 [56] konnten gute Erfahrungen mit einem Verfahren von FLETCHER, POWELL 1963 [27] gesammelt werden. JENSEN 2007 [56] und ESEFELD 2007 [25] erprobten zusätzlich den 'Implicit Filtering' Algorithmus, siehe DAVID et al. 1996 [10] oder KELLEY 2002 [58].

Neben dem Suchalgorithmus erfordert die Wahl des Parametervektors einige Erfahrung und Intuition. Auch die festzulegenden Startwerte und Restriktionen des Parametervektors beeinflussen das Ergebnis der Optimierungsrechnung. Je nach konstruktiver Gestaltung der Bauteile stehen die Trägheitsparameter  $m$ ,  $\xi_S$ ,  $\eta_S$  und  $J_S$  untereinander in einem Abhängigkeitsverhältnis. So muss ein schlanker prismatischer Körper der Länge  $L$  und einer bestimmten Masse  $m$  auch ein Massenträgheitsmoment besitzen, was der Formel  $J_S = m L^2/12$  genügt. Eine Optimierung mit Nebenbedingungen, welche aus der konkreten Bauteilgeometrie abzuleiten sind, ist zwar aufwendig, sichert aber plausible Ergebnisse.



**Bild 25:** Fundamentalkraftverläufe bei der Parameteridentifikation

Bei der Wahl der Optimierungsparameter und Festlegung der Restriktionen kann auch ein pragmatisches Vorgehen weiterhelfen. Die Masse eines vorhandenen Körpers lässt sich einfach und genau durch Wiegen bestimmen. Dieser Trägheitsparameter kann dann als gesichert von den Optimierungsparametern weggenommen werden.

Von den möglichen 12 Trägheitsparametern für die Kurbelschwinge als 'zwangläufiger ebener Starrkörper-Mechanismus' werden deshalb zur Identifikation nur die folgenden 5 in den Parametervektor  $\mathbf{x}_{opt}$  aufgenommen:

$$\mathbf{x}_{opt} = (\xi_{S2} \ \xi_{S3} \ \xi_{S4} \ J_{S3} \ J_{S4})^T \quad (7)$$

Tabelle 2 auf S. 24 enthält bereits geschätzte Trägheitsparameter, damit sind Startwerte und Parametergrenzen abschätzbar. Die Problematik infolge der Reduktion der gesamten Baugruppe Koppel (einschließlich Riementrieb, S. 25) auf einen Starrkörper wirft die Frage auf, ob die Massenträgheitsmomente richtig zugeordnet sind. Auch darum fällt die Wahl auf  $J_{S3}$  und  $J_{S4}$  als Optimierungsparameter.

Die Polardiagramme der Lagerkräfte im Kurbelwellenlager  $\mathbf{f}_1$  und im Schwingenwellenlager  $\mathbf{f}_4$  veranschaulichen die Funktionsweise der Optimierungsrechnung und Anpassung, siehe Bild 25. Diese Möglichkeit der visuellen Plausibilitätsprüfung wird durch die großen Marker zur Kurbelstellung  $\varphi=0$  und zwei weitere Marker für darauf folgende Stellungen verbessert.

In der praktischen Umsetzung verläuft die Parameteridentifikation nicht ohne Hürden. Einige Erfahrungen können wie folgt zusammengefasst werden:

- Die Identifizierung sollte mit plausiblen einfachen Experimenten beginnen, z.B. eine bekannte Masse anbringen und abnehmen und die Plausibilität der Optimierung prüfen.
- Am Anfang nur wenige Parameter als Optimierungsvariable nutzen, das Ergebnis selbst an Hand der Kraftkurven wie in Bild 25 visuell prüfen.
- Findet der Optimierer das Optimum an den Grenzen der physikalisch und konstruktiv sinnvollen Parameterbereiche, evtl. die Restriktionen erweitern.
- Identifikation der Trägheitsparameter für das Modell 'zwangsläufiger ebener Starrkörper-Mechanismus' möglichst bei Drehzahlen über 600 1/min betreiben, um Störeinflüsse, die nicht aus Trägheitswirkungen stammen, gering zu halten.
- Erweiterung des Parametervektors um einen Phasenwinkel zwischen Messwerten und simulierten Werten. Im Bild 25 kennzeichnet deshalb ein großer Marker den Wert zum Kurbelwinkel  $\varphi=0$  gefolgt von kleineren Markern zu den nächsten Positionen
- Wird in der Simulation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bzw. Drehzahl innerhalb einer Kurbelumdrehung gerechnet, dann ist diese Annahme auch für die Messung zu prüfen, mögliche erwartete Abweichungen sind im Kapitel 3.5 beschrieben.
- Eine Parameteridentifikation mit Optimierer kann die intuitive und iterative Vorgehensweise des Ingenieurs nicht durch eine einzige Rechnung mit allen Parametern auf einmal ersetzen, sondern nur eingebettet in den Modellabgleich Teilschritte unterstützen.
- Wegen nicht im Berechnungsmodell erfassten Effekten, wegen Messabweichungen (besonders Zeitverzögerungen, Phasenverschiebungen) wird immer ein Restwert der zu minimierenden Zielfunktion bleiben.

Für den Spezialfall Trägheitsparameter sind hiermit das Vorgehen und praktische Erfahrungen exemplarisch beschrieben. Generell hat sich die Parameteridentifikation durch Optimierer aus gemessenen und simulierten Kraftgrößen (und evtl. auch Bewegungsgrößen) bewährt. Diese Methode könnte genauso für Mehrkörpersystem-Modelle mit Dämpfung, Spiel, Stößen und Reibung oder zur Identifikation von Servomotoren einschließlich Reglerparametern angewendet werden. HÖLZL [51] identifiziert z.B. Parameter für Reibung und Trägheit an einem Industrieroboter aus der Messung der Gelenkmomente, Winkel und Winkelgeschwindigkeiten.

Im sequentiellen Vorgehen des Modellabgleiches komplexer Maschinen kann die Teilaufgabe Trägheitsparameter separat behandelt werden. Andere besonders unsichere Parameter wie bei Dämpfung und Reibung sollten in nachfolgenden Teilschritten getrennt validiert werden.

### 3.3 Maschinenaufstellung – Massenausgleich

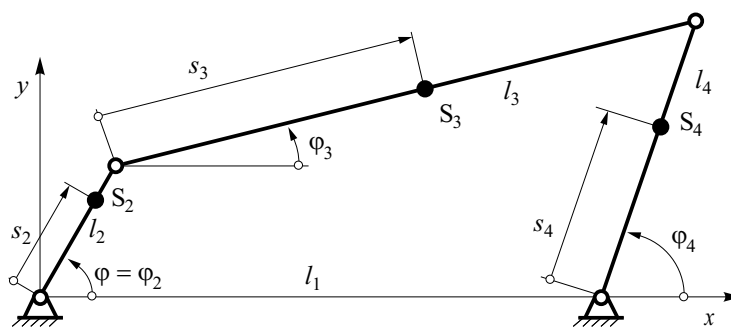
Ähnlich wie das Auswuchten bei Rotoren hat der Massenausgleich bei Mechanismen das Ziel, die wechselnden Lagerkräfte zur Umgebung in Grenzen zu halten und damit Fundamentalschwingungen zu vermeiden. Durch Änderung der Massenverteilung lassen sich aber auch die Wirkungen der Trägheitskräfte auf den Antrieb oder auf die Gelenke beeinflussen, vgl. Bild 19, S. 21.

Theoretisch bewirkt ein Mechanismus auf das Fundament keine resultierenden Kräfte, wenn der Gesamtimpuls des Systems konstant bleibt. Das ist der Fall, wenn der Gesamtschwerpunkt in Ruhe bleibt. Es wird dann auch vom vollständigen Massenkraftausgleich gesprochen. Analog gilt für die Momentenwirkung auf das Fundament die Forderung nach Konstanz des Drehimpulses bzw. Dralls.

Eine ausführliche Zusammenstellung zum Ausgleich störender Trägheitswirkungen auf das Gestell ist bei DRESIG et al. [17] zu finden. Die Wirkungen der Trägheitskräfte im Mechanismus auf das Fundament führen oft zu Fragestellungen der **Maschinenaufstellung** und **Schwingungsisolation**. Diese unerwünschte resultierende Schwingungserregung kann nur durch die Trägheitswirkungen 'gegenläufig' bewegter Körper ausgeglichen werden. Eine passive Schwingungsisolation mit Feder-Dämpferelementen vermindert die Ausbreitung der Kraftwirkung, beseitigt aber nicht deren Ursache. Einzelne Fundamentkraftkomponenten bleiben beim Massenausgleich erhalten, können sich sogar vergrößern. Sie kompensieren sich innerhalb der Systemgrenzen, welche bei Mechanismen durch das Gestell gegeben sind.

Für ebene zwangläufige Starrkörper-Mechanismen gelingt es, analytisch Beziehungen für die Trägheitsparameter herzuleiten, damit die resultierenden Fundamentkräfte verschwinden. Sollen auch die resultierenden Momente ausgeglichen werden, sind in der Regel immer die Kinematik des Grundmechanismus nicht beeinflussende rotierende Zusatzkörper anzubringen. Die VDI-Richtlinie 2149, Blatt 1 [117] gibt dazu eine Anleitung.

Die analytischen Beziehungen für den vollständigen Fundamentkraftausgleich (Ausgleich der resultierenden Trägheitskräfte) der **Kurbelschwinge** sollen hier kurz dargestellt werden, weil bei der Kraftregelung darauf zurückgegriffen wird (Kapitel 4, S. 57). Dazu seien die Mechanismenglieder symmetrisch bzgl. ihrer Gelenkverbindung, so dass die Schwerpunkte mit einer Koordinate fixiert sind, vgl. Bild 26. Einen allgemeineren Fall enthält [117, S.16].



**Bild 26:** Kurbelschwinge zum Massenkraftausgleich

Über die Schwerpunktbeschreibung aller bewegten Körper lassen sich Bedingungen herleiten, die unabhängig vom Bewegungszustand  $\varphi_2$  und  $\dot{\varphi}_2 = \Omega$  sind. In den folgenden Beziehungen soll die Darstellung in der komplexen Zahlenebene ( $x = \Re$ ;  $y = \Im$ ) bzw. die EULERSche Relation  $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$  den Schreibaufwand reduzieren.



Gemäß Bild 26 folgt für die Lage des Gesamtschwerpunktes:

$$\underbrace{(m_2 + m_3 + m_4)}_m \underbrace{(x_S + j y_S)}_{\mathbf{r}_S} = \sum_{i=2}^4 [m_i \underbrace{(x_{Si} + j y_{Si})}_{\mathbf{r}_{Si}}] \quad \text{mit } j^2 = -1 \quad (8)$$

$$\mathbf{r}_{S2} = s_2 e^{j \varphi_2} \quad (9)$$

$$\mathbf{r}_{S3} = l_2 e^{j \varphi_2} + s_3 e^{j \varphi_3}$$

$$\mathbf{r}_{S4} = l_1 + s_4 e^{j \varphi_4} \quad (10)$$

Zusätzlich wird die Zwangsbedingung der Schleife (Vektorpolygon) genutzt:

$$l_2 e^{j \varphi_2} + l_3 e^{j \varphi_3} = l_1 + l_4 e^{j \varphi_4} \quad (11)$$

Nach Einsetzen von (9) in (8) und Substitution von  $\varphi_4$  über (11) ergibt sich die Lage des Gesamtschwerpunktes.

$$\begin{aligned} m \mathbf{r}_S &= m_4 l_1 \left(1 - \frac{s_4}{l_4}\right) + \\ &+ e^{j \varphi_2} \underbrace{[m_2 s_2 + m_3 l_2 + m_4 s_4 \frac{l_2}{l_4}]}_{\rightarrow 0} + e^{j \varphi_3} \underbrace{[m_3 s_3 + m_4 s_4 \frac{l_3}{l_4}]}_{\rightarrow 0} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_S = 0:$$

Auf das Gestell wirken **keine resultierenden Kräfte, wenn der Gesamtschwerpunkt ruht** bzw. keine Geschwindigkeitsänderung erfährt ( $\dot{\mathbf{r}}_S = 0$ ), wenn also die in Gl. (12) gekennzeichneten Klammerausdrücke verschwinden.

Somit lautet die Massenausgleichsbedingung für  $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_4$  (resultierende Fundamentkraft gleich Null) und feste Werte  $m_2, m_3, m_4, l_1, l_2, l_3, l_4$  und  $s_3$ :

$$s_2 = -l_2 \frac{m_3}{m_2} \left(1 - \frac{s_3}{l_3}\right) \quad \text{und} \quad s_4 = -l_4 \frac{m_3}{m_4} \frac{s_3}{l_3} \quad (13)$$

Natürlich können diese Ausgleichsbedingungen auch beliebig umgestellt werden, wenn die konkrete Konstruktion andere Werte als unveränderlich vorgibt. Die in Gl. (12) gekennzeichneten Klammerausdrücke werden auch als **verallgemeinerte Unwuchten** bezeichnet, vgl. [117, S.13]. Sie sind unabhängig von den Zustandsgrößen, vom Bewegungszustand  $\varphi_2$  und  $\dot{\varphi}_2 = \Omega$  bzw. von der Drehzahl  $n$  und müssen analog zur Unwucht von Rotoren beseitigt werden.

Die Schwerpunktkoordinaten  $s_2$  und  $s_4$  sind in unserem konkreten Fall negativ (bei positivem  $s_3$ ), was durchaus konstruktive Probleme mit sich bringen kann, wenn dies nicht im Voraus bedacht wurde. Durch die erforderlichen Zusatzmassen erhöhen sich natürlich auch die Massen  $m_2$  und  $m_3$ . Mit der Realisierung der Ausgleichsbedingungen (13) durch die Schwerpunktverschiebung einzelner Teilkörper vergrößern sich meist auch deren Massenträgheitsmomente. Genau diese Auswirkungen können mit der Messung der einzelnen Fundamentkraftkomponenten am Mechanismenprüfstand beobachtet werden.

Mit Bild 27 werden die Schritte beim Fundamentkraftausgleich deutlich. Ohne Massenausgleich kompensieren sich die Kräfte  $\mathbf{f}_1$  und  $\mathbf{f}_4$  nicht. Mit einer Raute sind die Kräfte für die Kurbelstellung  $\varphi = 0$  markiert. Mit Massenkraftausgleich heben sich dagegen die beiden Lagerkräfte in jeder Kurbelstellung auf. Man beachte jedoch, dass die einzelnen Gelenkkräfte nach dem Massenausgleich größer werden. Im Bild 27 oben sind auch die verstellbaren Massen am Mechanismenprüfstand erkennbar. Die Lage und Größe der Zusatzmassen wurde im Voraus berechnet, während die Feineinstellung viele Messungen in Anspruch nahm.

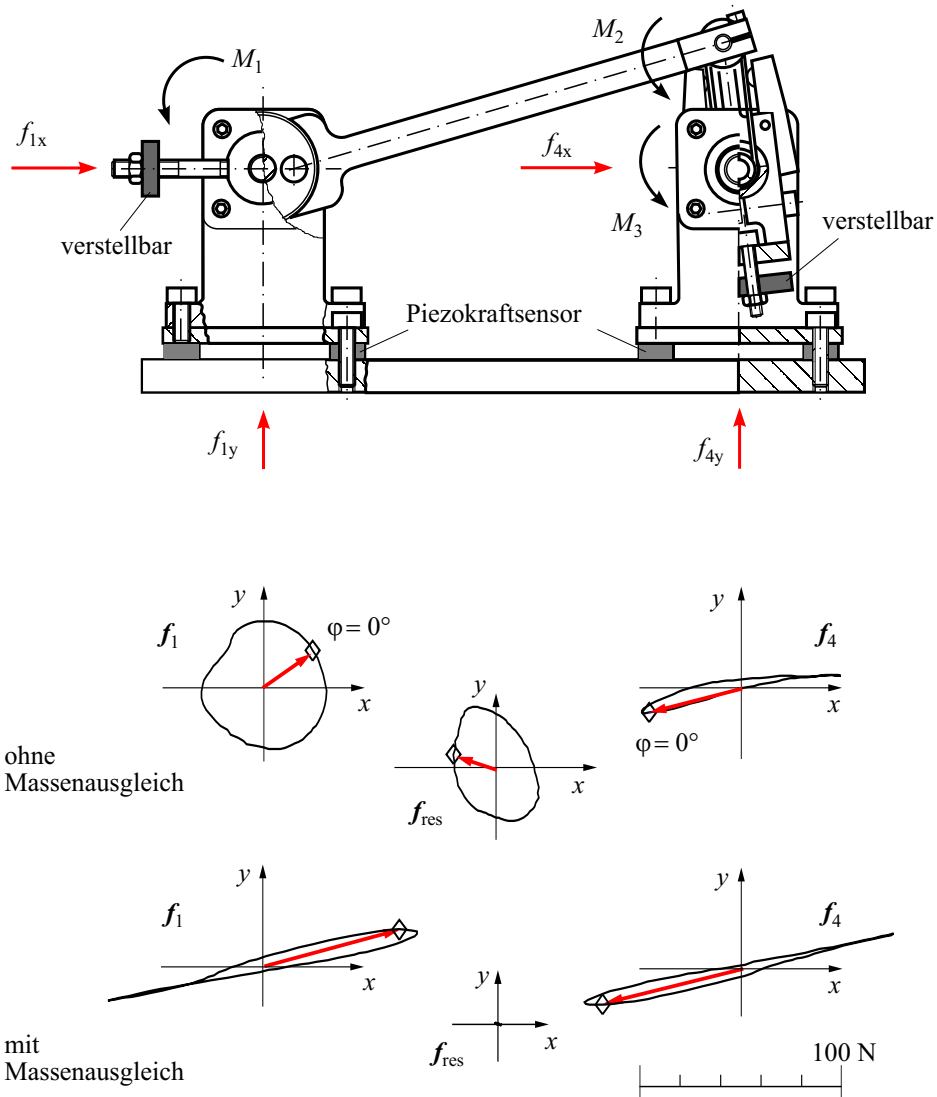


Bild 27: Polardiagramme der Kräfte  $f_1$  und  $f_4$  beim Fundamentkraftausgleich

Bemerkung:

Beim Gelenkkraftausgleich mit redundanten Antrieben können die einzelnen Kraftkomponenten vollständig ausgeglichen werden, vgl. Kapitel 4.4.2 Bild 48 auf S. 63 und [98, S.467].

### 3.4 Eigenbewegung – Leistungsausgleich

#### 3.4.1 Bewegungsgleichung, Eigenbewegung und Antriebsleistung

Erste Ergebnisse zur Aufschaltung der Eigenbewegung am Mechanismenprüfstand enthält der Beitrag von THÜMMEL 1996 [102, S.284-289]. Die theoretischen Grundlagen gehen viele Jahre zurück. Die praktische Nutzung gelingt jedoch erst in den letzten Jahren mit der breiten Verfügbarkeit der Servoantriebstechnik.

Zunächst sollen kurz einige theoretische Zusammenhänge dargestellt werden. Die Bewegung des ebenen 'zwangläufigen Starrkörper-Mechanismus' mit einem Antrieb ( $dof=1$ ) wird entsprechend DGL (4) auf Seite 26 durch folgende nichtlineare Differentialgleichung bestimmt:

$$J(\varphi) \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} J'(\varphi) \dot{\varphi}^2 = M(\varphi, \dot{\varphi}, t)$$

Eine numerische Integration der DGL (4) kann i.Allg. den Bewegungszustand einer so modellierten Maschine ermitteln. Hier soll der analytische Weg weiter verfolgt werden.

Wenn als Sonderfall das Moment  $M_{red}(\varphi, \dot{\varphi}, t)$  allein vom Antriebswinkel abhängt, d.h.  $M=M(\varphi)$ , dann lässt sich die DGL analytisch integrieren, vgl. DRESIG/HOLZWEISSIG [21, S.122] oder PAUL [68, S.447].

Entsprechend [21] gelten die Umformungen :

$$T' = \frac{dT}{d\varphi} = \frac{dJ \dot{\varphi}^2 / 2}{d\varphi} = \frac{1}{2} J' \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J \frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi} = \frac{1}{2} J' \dot{\varphi}^2 + J \ddot{\varphi} \quad (14)$$

$$\text{mit} \quad \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varphi}^2}{dt} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \frac{1}{\dot{\varphi}} = \ddot{\varphi} \quad (15)$$

Mithin lässt sich die linke Seite der DGL (4) als Änderung der kinetischen Energie schreiben. Es folgt:

$$T' = M(\varphi) = \frac{1}{2} J' \dot{\varphi}^2 + J \ddot{\varphi} \quad (16)$$

Eine Integration von der Anfangsstellung  $\varphi(t_o)=\varphi_o$  und  $\dot{\varphi}(t_o)=\Omega_o$  bis zur Stellung  $\varphi$  ergibt:

$$\int_{\varphi_o}^{\varphi} dT = \int_{\varphi_o}^{\varphi} M(\bar{\varphi}) d\bar{\varphi}$$

$$\frac{1}{2} J(\varphi) \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} J(\varphi_o) \Omega_o^2 = W(\varphi, \varphi_o) \quad (17)$$

mit der Arbeit  $W(\varphi, \varphi_o)$  der äußeren aktiven Kräfte und der kinetischen Energie  $T_o$  in der Anfangsstellung:

$$T_o = \frac{1}{2} J(\varphi_o) \Omega_o^2 \quad (18)$$

Umstellen von Gl.(17) führt zur Antriebswinkelgeschwindigkeit abhängig vom Winkel  $\varphi$ :

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{2T_o + 2W}{J}} = \sqrt{\frac{J(\varphi_o) \Omega_o^2 + 2W(\varphi, \varphi_o)}{J(\varphi)}} = \Omega_o \sqrt{\frac{J(\varphi_o)}{J(\varphi)} \left(1 + \frac{W(\varphi, \varphi_o)}{T_o}\right)} \quad (19)$$

Bei höheren Arbeitsdrehzahlen des Mechanismus kann die Arbeit der äußeren aktiven Kräfte  $W(\varphi, \varphi_o)$  gegenüber der ursprünglichen kinetischen Energie als sehr klein angenommen werden.

Mit  $[W(\varphi, \varphi_o) / T_o] \ll 1$  gilt die Reihenentwicklung

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \Omega_o \sqrt{\frac{J(\varphi_o)}{J(\varphi)}} \left[ 1 + \frac{W(\varphi, \varphi_o)}{2 T_o} + \dots \right] \quad (20)$$

Wird die Arbeit der äußeren aktiven Kräfte  $W(\varphi, \varphi_o)$  ganz vernachlässigt, folgt schließlich:

$$\dot{\varphi}_{eig}(\varphi) = \Omega_o \sqrt{\frac{J(\varphi_o)}{J(\varphi)}} = \sqrt{\frac{2T_o}{J(\varphi)}} = \frac{k}{\sqrt{J(\varphi)}} \quad \text{Eigenbewegung} \quad (21)$$

$$\ddot{\varphi}_{eig}(\varphi) = -\frac{J'(\varphi) J(\varphi_o)}{2J(\varphi)^2} \Omega_o^2 = -\frac{J'(\varphi) T_o}{J(\varphi)^2} \quad (22)$$

Diese **Eigenbewegung** stellt sich ein, wenn der Mechanismus nach Erteilen einer Anfangsenergie  $T_o + V_o$  in der Stellung  $\varphi_o$  sich selbst überlassen bleibt [13, S.94]. Unter Vernachlässigung von Dämpfung und Reibung (Dissipation) wird danach kein Antriebsmoment mehr benötigt, es gilt:  $M_{An} = 0$ . Wird bei der Auslegung eines Mechanismus im Rahmen der technologischen Möglichkeiten des Bewegungsplanes an der Wirkstelle eine Antriebsbewegung nahe der Eigenbewegung vorgesehen, kann die erforderliche **Antriebsleistung minimiert** werden.

Der Kurbel wird bei ihrer Eigenbewegung gestattet, sich so zu bewegen, dass die Summe von kinetischer und potentieller Energie konstant bleibt. Die Kurbel reguliert mit variabler Winkelgeschwindigkeit die Konstanz der Energie.

Theoretisch erfordert unter vorherigen Annahmen eine Antriebsbewegung entsprechend der Eigenbewegung  $\dot{\varphi}_{eig}(\varphi)$  kein Antriebsmoment und damit keine Antriebsleistung, denn

$$P(\varphi) = M(\varphi) \dot{\varphi}(\varphi) \quad (23)$$

Speziell für den Mechanismenprüfstand soll nun die Eigenbewegung bei einer durchschnittlichen Winkelgeschwindigkeit von  $\dot{\varphi}_m = 83,78$  1/s bzw. einer Drehzahl  $n_m = 800$  1/min näher betrachtet werden.

Bild 28 zeigt das veränderliche reduzierte Massenträgheitsmoment  $J_{red}(\varphi)$ , den Antriebsmomentenverlauf  $M_{hart}(\varphi)$  für den idealen Grenzfall  $\dot{\varphi}_{hart} = \text{konst.}$  und die Eigenbewegung  $\dot{\varphi}_{eig}(\varphi)$ . Die vereinfachte Simulation enthält nur Trägheitskräfte, kein Eigengewicht und keine anderen äußeren aktiven Kräfte.

Im Bewegungsverlauf  $\dot{\varphi}_{eig}(\varphi)$  dominiert die 2. Ordnung, d.h. **zwei Peaks** während einer Kurbelumdrehung über  $360^\circ$ . Für das Antriebsmoment  $M_{hart}(\varphi)$  in der Mitte von Bild 28 bleibt die Drehzahl konstant. Die mechanische Antriebsleistung besitzt ebenfalls wie das Moment unter obigen Voraussetzungen (lastfrei, reibungsfrei, nur Trägheitswirkung) den Mittelwert Null und zwei Peaks während einer Kurbelumdrehung. Zur Motorauswahl ist deshalb bei schnelllaufenden Mechanismen bzw. bei Maschinen mit wechselnder Antriebsbelastung nicht die maximale Leistung und nicht die mittlere Leistung sondern der Effektivwert der Leistung zugrunde zu legen:

$$P_{motor} \geq P_{eff} \approx M_{eff} \Omega \quad (24)$$

Bei erzwungener konstanter Winkelgeschwindigkeit über eine Kurbelumdrehung erzeugt das wechselnde Moment  $M(\varphi)$  Stromwärmeverluste, die mit dem Effektivwert der Antriebsleistung zusammen hängen, vgl. [117, S.33] und [118]:

$$P_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\varphi)^2 d\varphi} \quad (25)$$

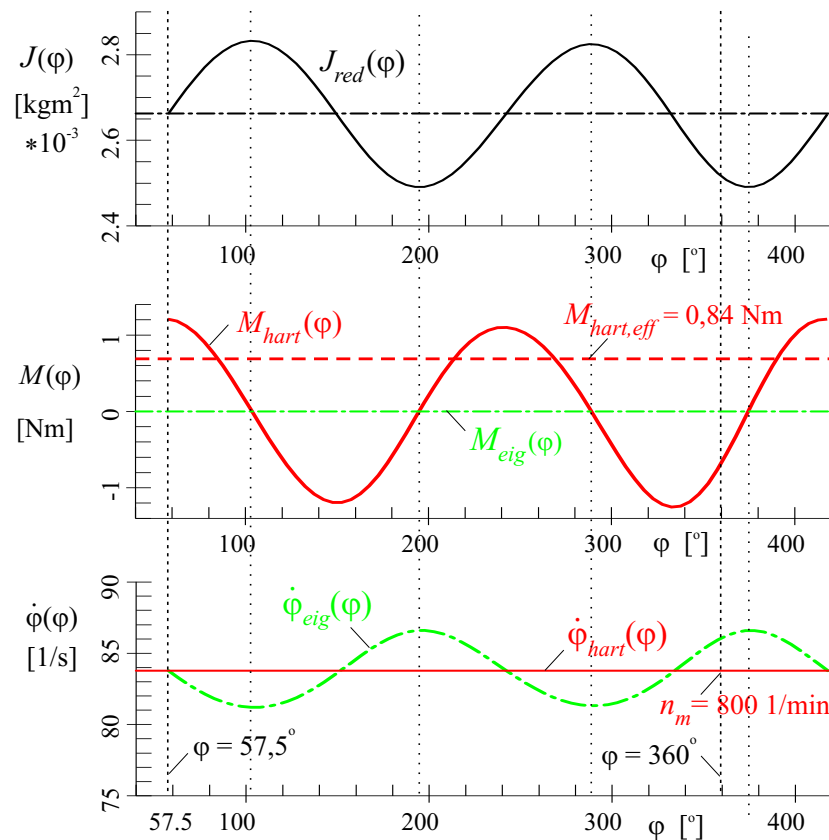


Bild 28: Berechnete Bewegungs- und Momentenverläufe bei 800 1/min

### 3.4.2 Nutzung der Eigenbewegung am Mechanismenprüfstand

Zur Erfüllung der technologischen Anforderungen des Bewegungsplanes der Werkzeuge einer Verarbeitungsmaschine existiert immer ein gewisses Toleranzband. Wird bei der kinematischen Auslegung eines Mechanismus dieses Toleranzband für die Werkzeugbewegung ausgenutzt und eine Antriebsbewegung nahe der Eigenbewegung vorgesehen, dann strebt die erforderliche effektive **Antriebsleistung** gegen ein **Minimum**.

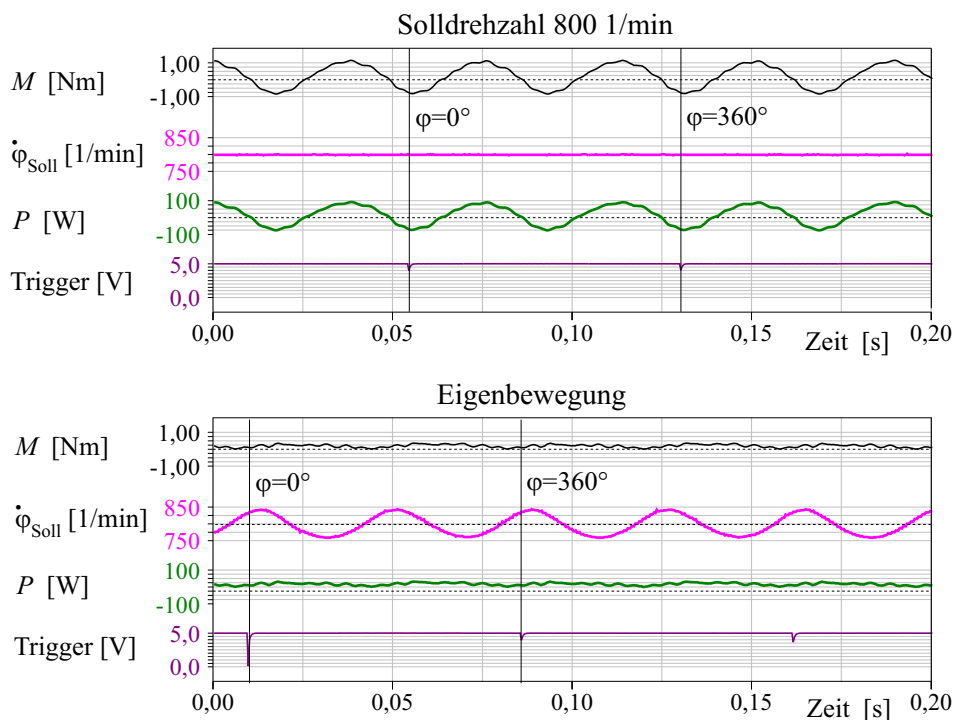
Die mittlere Antriebswinkelgeschwindigkeit, die der Drehzahl der Maschine entspricht, soll dabei exakt beibehalten bleiben. Theoretisch muss das Motormoment nur die dissipativen Reibmomente und Lastmomente infolge der Arbeit an der Wirkstelle aufbringen. Von DRESIG und VUL'FSON [13, S.95] wurde 1989 diese Überlegung bereits als Optimierungsproblem formuliert. Doch erst jetzt sind Servomotoren und digitale Regler für eine breitere praktische Nutzung verfügbar (vgl. auch Anmerkung auf S. 46 im Kap. 3.5).

Hier soll noch eine weitere Überlegung hinsichtlich Einhaltung der Maschinendrehzahl nach einem Maschinenhochlauf und anschließender Aufschaltung der Eigenbewegung angestellt werden. Entscheidend dafür ist der Zeitpunkt bzw. die **Kurbelstellung der Zuschaltung**. Die Eigenbewegung ist genau in der Stellung zuzuschalten, wenn die kinetische Energie bzw. die projizierte Trägheit ihren Mittelwert erreicht, um Einschwingvorgänge zu vermeiden und auch nach dem Zuschalten die gleiche mittlere Winkelgeschwindigkeit zu gewährleisten.

Letztlich heißt Sicherung der Eigenbewegung nichts anderes als Realisierung konstanter kinetischer Energie. Für die Kurbelschwinge wäre das entsprechend Bild 28 die Stellung  $\varphi = 57,5^\circ$ .

Die dynamischen Effekte können am Mechanismenprüfstand durch folgende gemessene Kenngrößen veranschaulicht werden: Antriebswinkelgeschwindigkeit (Tachosignal vom Resolver) und Antriebsmoment (Spannungssignal von der Motorsteuerung proportional zum Motorstrom) über eine Kurbelumdrehung mit exakter Lagezuordnung (Incrementalgeber signale, emuliert vom Resolver).

In Bild 29 sind das gemessene veränderliche Antriebsmoment  $M(\varphi)$  und die Eigenbewegung  $\dot{\varphi}_{eig}(\varphi)$  für die Kurbelschwinge dargestellt. Das unten eingblendete Triggersignal mit einem Impuls beim Kurbelwinkel  $\varphi = 0$  liefert die Lagezuordnung. Bei einer mittleren Drehzahl von 800 1/min wird der Motorsteuerung die voraus berechnete Eigenbewegung  $\dot{\varphi}_{eig}(\varphi)$  nach Bild 28 vorgegeben. Speziell am Mechanismenprüfstand bewerkstelligt dies ein Steuerprogramm, welches als äußere Kaskade zur kommerziellen Drehzahlregelung fungiert.

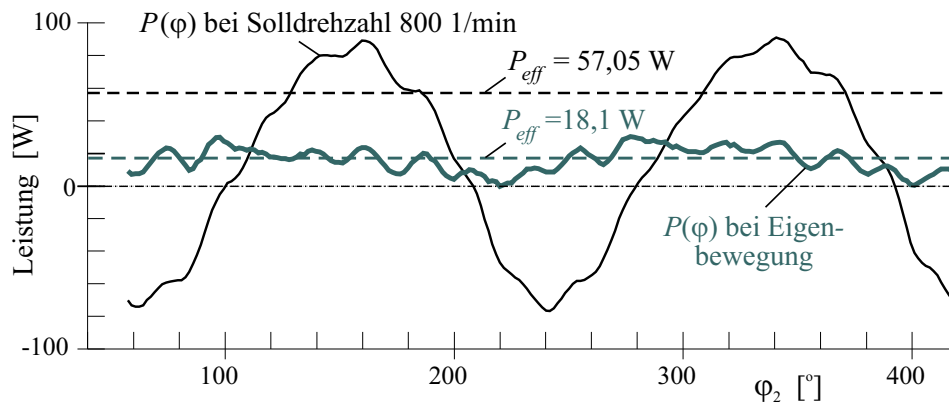


**Bild 29:** Messergebnisse zur Eigenbewegung bei 800 1/min

Bild 30 veranschaulicht gezoomt die vorteilhafte Nutzung der Eigenbewegung mit dem Verlauf der momentanen Leistung und dem Effektivwert für genau eine Kurbelumdrehung. Der Effektivwert nach Aufschalten der Eigenbewegung beträgt mit  $P_{eff} = 18,1$  W nur noch 31,7 % des Ausgangszustandes.

Eine Anwendung findet die Ausnutzung der Eigenbewegung im Antrieb von Pilgerschrittwalwerken, vgl. Patentschrift DE 41 16 397 C1 [67]. Mit über 100 kW Antriebsleistung spielt eine solches Einsparpotenzial schon eine beachtliche Rolle.

Bei der Bewertung der Leistung am Mechanismenprüfstand muss beachtet werden, dass nicht der theoretische Grenzfall der 'harten' Kennlinie als Bezug dient. Der kommerzielle drehzahlregelte Servoantrieb liefert  $P_{eff} = 57,05$  W, theoretisch läge der Wert bei  $P_{eff} = 70,37$  W wenn die Sollwinkelgeschwindigkeit tatsächlich konstant 800 1/min bliebe. Der theoretische Wert resultiert aus dem Effektivwert des Antriebsmomentes in Bild 28. Die etwas 'weichere' Motorregelung erspart also ebenfalls Stromwärmeverluste, speziell sinkt  $P_{eff}$  auf  $\frac{57,05}{70,37} = 81\%$ .



**Bild 30:** Antriebsleistung bei 800 1/min Sollvorgabe und bei Eigenbewegung

Die experimentelle Verifikation birgt in sich auch einige Herausforderungen:

- Zwischen den aufgezeichneten Signalen (Bild 29) liegt ein z.T. beachtlicher Phasenversatz, da sich die Messkette für Moment, Winkelgeschwindigkeit oder Trigger unterscheidet. Das gemessene Moment in Bild 29 ist bis zur Identität mit der Rechnung in Bild 28 z.B. um ca.  $36^\circ$  bzw. 7,5 ms zu verschieben. Eine Periode dauert bei 800 1/min bzw. bei 13.33 Hz Drehfrequenz gerade 75 ms.
- Neben der Messung stellt die Steuerung oder Regelung bei mit  $2 \cdot 13,3 = 26,6$  Hz wechselnden Führungsgrößen und Wechsellast bereits Anforderungen, die speziell die kommerzielle Drehzahlregelung des Mechanismenprüfstandes (Drehzahl als mittlere Winkelgeschwindigkeit) von vorn herein nicht erfüllt. Für den Prüfstand liegt die Verzugszeit inkl. Totzeit zwischen Vorgabe der Winkelgeschwindigkeit und zurück geliefertem Istwert bei  $T_v = 12,2$  ms, was bei 13.33 Hz Grundfrequenz bereits einer Phase von  $\varphi_v = 58,5^\circ$  entspricht.
- Das Übertragungsverhalten der kommerziellen Motorregelung hinsichtlich Drehzahl weist bei 20 Hz bereits -2,1 dB Amplitudenabfall auf.

Ein Steuerprogramm für die Aufschaltung der Eigenbewegung überwindet diese Schwierigkeiten durch einen variablen Phasenversatz und eine variable Verstärkung des Wechselanteiles der Sollwinkelgeschwindigkeit.

Abschließend sei noch auf den positiven Konstantanteil der Leistung bzw. des Momentes hingewiesen. Ein Reibmoment  $M_R = 0,22$  Nm folgt aus dem linearen Mittelwert des Momentes. Es verhindert im Falle aufgebrachter Eigenbewegung bereits eine Wechselbelastung an der Kurbelwelle, das Antriebsmoment bleibt immer positiv.

Bemerkung:

Eine noch nicht realisierte Lernregelung könnte diese Ergebnisse sicher weiter verbessern. Hier könnte analog wie bei der Gelenkkraftregelung in Kapitel 4.4.3 ab Seite 65 vorgegangen werden. Die Gelenkkraftregelung mit der Vorgabe, dass die Kurbellagerkräfte verschwinden sollen, entspricht in gewissem Maße der Zielstellung, dem Hauptantrieb keine Wechsellast aufzuprägen. Die redundanten Antriebe mit dem Regelziel  $f_1 \Rightarrow 0$  entlasten den Hauptantrieb  $M_1$  ähnlich wie bei Aufschaltung der Eigenbewegung, wie in Kapitel 4.4.5 ab S. 69, allerdings kann jetzt die ursprünglich gewünschte konstante Winkelgeschwindigkeit der Kurbel gesichert werden.

### 3.5 Wechselwirkung Servomotor – Starrkörper-Mechanismus

Im Normalfall geht ein Maschinenentwickler davon aus, dass der Antriebsmotor mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreht und die Werkzeuge die daraus abgeleitete ungleichmäßige Sollbewegung einhalten. Solange alle Werkzeugbewegungen von einer „Königswelle“ abgeleitet sind und sich der Mechanismus durch den Zwanglauf selbst winkelsynchron verhält, funktionieren die Maschinen auch ohne konstant bleibende Winkelgeschwindigkeit der Motorwelle.

Heute steht eine hoch entwickelte und flexibel variierbare Servo-Antriebstechnik zur Verfügung. Mit der Aufspaltung des Antriebsstranges in mehrere mit eigenem Motor angetriebene und rein elektronisch synchronisierte Werkzeuge kann die Rückwirkung der einzelnen Mechanismen sehr unterschiedliche Abweichungen zur vorgegebenen Winkelgeschwindigkeit hervorrufen.

Jetzt wird darum der zu erwartende und der tatsächlich auftretende **Winkelgeschwindigkeitsverlauf über eine Kurbelumdrehung** betrachtet. Die Untersuchungen haben wenig damit zu tun, ob die Drehzahlregelung exakt die vorgegebene Drehzahl  $n$  [1/min] realisiert; denn diese wird häufig nur mit einem Impuls pro Umdrehung gemessen und entspricht somit der gemittelten Winkelgeschwindigkeit  $\Omega = \pi n/30$  [1/s]. Drehzahlregelungen sichern i.Allg. recht zuverlässig die gewünschte mittlere Drehzahl, d.h. die Anzahl Arbeitstakte pro Minute. Sie erzwingen aber keinesfalls von vorn herein eine konstante Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi} = \omega(\varphi)$  innerhalb des Arbeitszyklus.

Als Bewertungskriterium für die Schwankung der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi} = \omega(\varphi)$  innerhalb einer Kurbelumdrehung bietet sich der dimensionslose **Ungleichförmigkeitsgrad** an [117, S.43]. Er liegt für konstantes  $\omega$  bei  $\delta = 0$  und erreicht für  $\omega_{min} = 0$  seinen höchsten Wert  $\delta = 2$ . Mit der mittleren Winkelgeschwindigkeit  $\omega_m = \Omega$  ist er definiert durch:

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_m} \quad (26)$$

Nun sollen weitere Grundaussagen für Maschinen im 'Dauerbetrieb' für das **stationäre Betriebsverhalten** abgeleitet werden. Fragen der Energieeffizienz und die Nutzung der Eigenbewegung zur Einsparung von Antriebsleistung behandelt bereits das Kapitel 3.4.

#### 3.5.1 Modelle und Simulationen zur Wechselwirkung: Motor – Mechanismus

Den Ausgangspunkt setzt wieder die DGL (4) von S. 26 für das Modell des 'ebenen zwangläufigen Starrkörper-Mechanismus' mit einem Antrieb ( $dof=1$ ):

$$J(\varphi) \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} J'(\varphi) \dot{\varphi}^2 = M(\varphi, \dot{\varphi}, t)$$

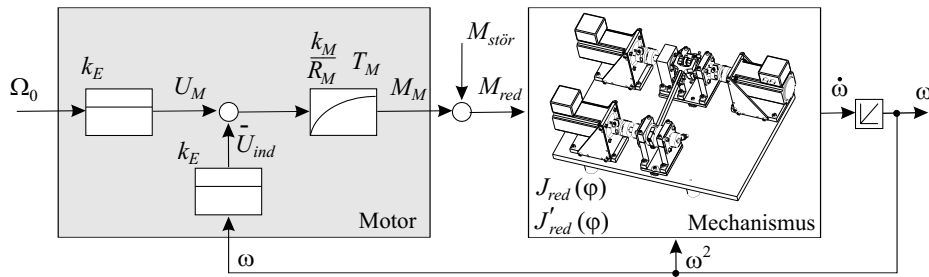
Neben der wechselnden Trägheitswirkung enthält die DGL die 'generalisierte Kraft'  $M(\varphi, \dot{\varphi}, t)$ . Geometrie, Koordinatensysteme und Belastungen erklärt Bild 23 auf S. 25. In diesem Abschnitt soll in das reduzierte Moment  $M = M_{red}(\varphi, \dot{\varphi}, t)$  allein das Motormoment  $M_1 = M_M$  einfließen. Für jeden beliebigen dynamischen Lastfall mit  $M(\varphi, \dot{\varphi}, t)$  liefert eine numerische Integration den tatsächlichen Zeitverlauf der Antriebsbewegung.

Es erweist sich gerade für die Berücksichtigung von elektrischen Antrieben einschließlich zugehöriger elektrischer Übertragungsglieder (z.B. Umrichter) und Regler als sinnvoll, die physikalischen Zusammenhänge in Form von weiteren Zustandsgrößen und Differentialgleichungen angemessen zu modellieren und abzugleichen. Zur detailgetreuen Beschreibung wird hier jedoch auf die Literatur der Elektrotechnik verwiesen, z.B. BROSCHE [8] oder SCHRÖDER [78].



Bei dem verwendeten Servomotor handelt es sich um eine bürstenlose sinuskommutierte Synchronmaschine mit Resolver, einen sogenannten 'Drehstrom-Synchron-Servomotor' oder 'AC brushless servo'. Das Drehfeld in den Drei-Phasen-Wicklungen des Stators wird der Position des mit Permanentmagneten bestückten Rotors ständig nachgeführt.

Für die beabsichtigte grundsätzliche Erfassung der 'Wechselwirkung Servomotor – Starrkörper-Mechanismus' im stationären Betrieb reichen bereits vereinfachte linearisierte Formen der Motorbeschreibung, die das Motormoment  $M_M$  und die Motordrehzahl, speziell die Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \dot{\varphi}$ , verknüpfen, vergleiche HEIMANN et al. [50, S.34-54] oder mit Bezug zur MATLAB-Simulation PIETRUSZKA [72].



**Bild 31:** Vereinfachtes Strukturbild des Servoantriebes ohne Drehzahlregler

Das Funktionsschema in Bild 31 vereinfacht den Servoantrieb am Mechanismenprüfstand, der im Verhalten einer Gleichstrommaschine entspricht [78]. Analog zur Spannungsbilanz am Ankerstromkreis der Gleichstrommaschine gilt näherungsweise die Motorgleichung:

$$U_M = R_M I_M + L_M \dot{I}_M + U_{ind} \quad (27)$$

Die Klemmspannung  $U_M$  am Servomotor bewirkt an den Statorspulen mit dem OHMSchen Widerstand  $R_M$  und der Induktivität  $L_M$  den Strom  $I_M$ . Infolge Rotation des Magnetfeldes mit  $\omega = \dot{\varphi}$  entsteht die Gegeninduktionsspannung  $U_{ind} = k_E \omega$ . Der magnetische Fluß  $\Phi$  wird mit vorgegebener Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_0$  gegenüber den Spulen im Stator umgetrieben, bleibt aber relativ zum Rotor konstant (synchron).  $U_{ind}$  entsteht durch die Änderung des magnetischen Flusses  $\Phi$ . Der induktive Widerstand ( $L_M \dot{I}_M$ ) verursacht eine Zeitverzögerung ( $T_M = L_M/R_M$ ), wie eine Art 'Stromdämpfer'. Im Motor erzeugt die LORENTZ-Kraft ein dem Motorstrom proportionales Drehmoment:

$$M_M = k_M I_M \quad \text{bzw.} \quad \dot{M}_M = k_M \dot{I}_M \quad (28)$$

Nach Multiplikation von Gl.(27) mit  $k_M/L_M$  und unter Nutzung der Gl.(28) folgt:

$$\dot{M}_M = \frac{k_M}{L_M} (U_M - U_{ind}) - \frac{R_M}{L_M} M_M \quad \text{bzw.} \quad \dot{M}_M = \frac{k_M}{L_M} (U_M - k_E \omega) - \frac{1}{T_M} M_M$$

Für den Motor *ohne* Drehzahlregelung ergibt sich mit  $U_M = k_E \Omega_0$  der Zusammenhang:

$$T_M \dot{M}_M + M_M = \frac{k_M k_E}{R_M} (\Omega_0 - \omega) \approx k_M I_{M,Soll} \quad (29)$$

Die Beschreibung der Drehzahlregelung mit  $I_{M,Soll}$  folgt mit dem Fall 5 auf Seite 44.

Für die folgenden Simulationen besitzt der Mechanismenprüfstand die Parameter entsprechend Tabelle 3, welche von Tabelle 2 auf S. 24 abweichen. Für den Servoantrieb (M1) gelten die Parameter in Tabelle 4. Die oberen fünf fixen Kennwerte stammen aus dem Datenblatt des Motors. Die unteren resultieren aus experimentellem Abgleich.

Tabelle 3: Parameter der Kurbelschwinge zur Motorsimulation

Nr.	Körper/Glied	Länge	Masse	Schwerpunkt		Massenträgheitsmoment
i		$l_i$ mm	$m_i$ kg	$\xi_i$ mm	$\eta_i$ mm	$J_{Si}$ kg mm <sup>2</sup>
2	Kurbel	20,0	1,785	-2,78	0	1550
3	Koppel/Pleuel	283,0	0,504	155,0	0	7350
4	Schwinge	77,5	1,517	-16,3	0	3610
1	Gestell	300,0	-	-	-	-

Tabelle 4: Kennwerte der Servomotoren

Variable	Dimension	Wert	Benennung
$k_M$	Nm/A	0,377	Motorkonstante (Momentenfaktor, $M_M = k_M I_M$ )
$k_E$	Vs	0,468	Erregerkonstante (Faktor in $U_{ind} = k_E \omega$ )
$L_M$	H	0,0058	Induktivität der Wicklungen (1 H = 1 Vs/A)
$R_M$	Ohm	0,86	OHMScher Widerstand der Wicklungen im Motor
$T_M$	ms	6,74	Zeitkonstante des Motors ( $T_M = L_M/R_M$ )
$T_{PT1}$	ms	1,67	Zeitkonstante des Servomotors incl. Stromregler
$\Omega_0$	1/s	83,78	Soll-Winkelgeschwindigkeit $n_o = 800$ 1/min
$k_P$	As	z.B. 0,506	Verstärkungsfaktor im PI Drehzahlregler
$k_I$	A	z.B. 19,3	Integralanteil im PI Drehzahlregler
$T_\omega$	ms	z.B. 26	Zeitkonstante im PI-Drehzahlregler $T_\omega = k_P/k_I$

Im Weiteren sollen an Hand des Mechanismenprüfstandes bei  $n_o = 800$  1/min ( $\Omega_o = 83,78$  1/s) die folgenden fünf charakteristischen Fälle simuliert und diskutiert werden:

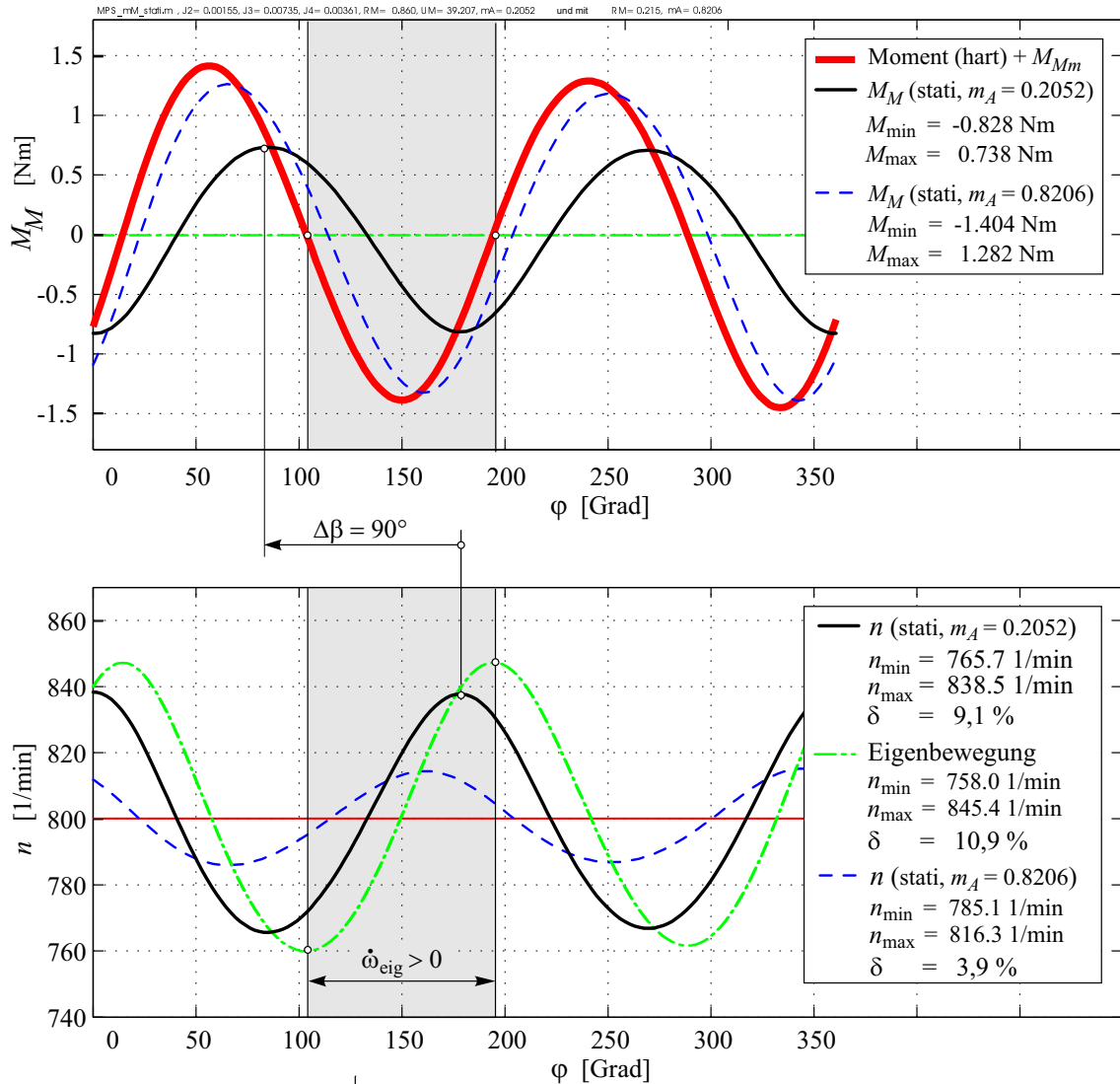
1.  $M_M = 0$  Eigenbewegung ( $T + V = \text{konst.}$ )
2.  $M_{hart}(\varphi)$  'harte' Motorkennlinie ( $\dot{\varphi} = \Omega_0 = \text{konst.}$ )
3.  $M_M = m_A(\Omega_0 - \omega)$  statische Kennlinie
4.  $M_M(\varphi, \omega)$  PT1-Motor ( $U_M = k_M \Omega_0$ )
5.  $M_M(\varphi, \omega, I_M)$  PT1-Motor und PI-Drehzahl-Regler

Die Diskussion der Wechselwirkung Servoantrieb – Starrkörper-Mechanismus erfolgt anhand der Momenten- und Winkelgeschwindigkeits-Verläufe. Bild 32 zeigt diese für die Fälle 1 bis 3.

Die Eigenbewegung  $\dot{\varphi}_{eig} = \omega_{eig}$  (grüne Strich-Punkt-Linie) mit  $M_M = 0$  als Fall 1 oder entsprechend Kapitel 3.4 dient ebenso als Referenz wie  $M_{hart}$  (rote Volllinie) für die ideal 'harte' Motorkennlinie ( $\dot{\varphi} = \text{konst.}$ ). Ein zusätzlicher Index 'm' kennzeichnet jeweils lineare Mittelwerte wie bei  $M_{Mm}$  für das Motormoment. Der dimensionslose Ungleichförmigkeitsgrad  $\delta$  nach Gl. (26) besitzt für die beiden Referenzkurven folgende Werte:

- Eigenbewegung:  $\delta = 10,9$  %
- harte Kennlinie:  $\delta = 0$

Zusätzlich zur Kurveninterpretation werden jeweils die in MATLAB implementierten mathematischen Beziehungen für die Fälle 1 bis 5 kurz zusammengestellt.


 Bild 32: Motor (statische Kennlinie,  $m_A$  variiert) – Moment- und Drehzahlschwankung

**Fall 1: Eigenbewegung:**  $M_M = 0$

$$\dot{\varphi}_{eig}(\varphi) = \omega_{eig} = \Omega_o \sqrt{\frac{J(\varphi_o)}{J(\varphi)}} = \sqrt{\frac{2T_o}{J(\varphi)}} = \frac{k}{\sqrt{J(\varphi)}} \quad (30)$$

Die Anfangsenergie  $T_o = J(\varphi_o)\dot{\varphi}_o^2/2$  muss so variiert werden, dass die gewünschte mittlere Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  entsteht, die der Drehzahl 800 1/min entspricht, vgl. Kapitel 3.4.

**Fall 2: 'harte' Motorkennlinie:**  $\dot{\varphi} = \Omega_o = \text{konst.}$

Aus der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi} = \Omega_o = \text{konst.}$  folgt  $\ddot{\varphi} = 0$ . Damit entsteht aus DGL (4) unter Vernachlässigung weiterer äußerer aktiver Kräfte und Momente der folgende einfache explizit bestimmbare Ausdruck:

$$M_{hart} = \frac{1}{2} J'(\varphi) \Omega_o^2 \quad (31)$$

Das projizierte Massenträgheitsmoment  $J_{red}(\varphi) = J(\varphi)$  bzw.  $J'(\varphi)$  entsprechend Gl. (3) lässt sich für die Kurbelschwinge analytisch angeben z.B. bei DRESIG [21, S.117]. Beide

Referenzkurven  $\omega_{eig}(\varphi)$  und  $M_{hart}(\varphi)$  können somit für die Kurbelschwinge als Funktionen des Kurbelwinkels  $\varphi$  ohne numerische Integration explizit berechnet werden, vgl. Kapitel 3.4.1.

**Fall 3: statische Motorkennlinie:**  $M_M = m_A (\Omega_0 - \omega)$

Mit der statischen Motorkennlinie wird jede Zeitverzögerung zwischen Drehzahlvorgabe und Drehmomentenwirkung des Motors zur Drehzahländerung vernachlässigt. Die Zustandsform der DGL für die numerische Integration lautet:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ [M_{red}(\varphi, \omega) - \frac{1}{2} J'(\varphi) \omega^2] / J(\varphi) \end{pmatrix} \quad (32)$$

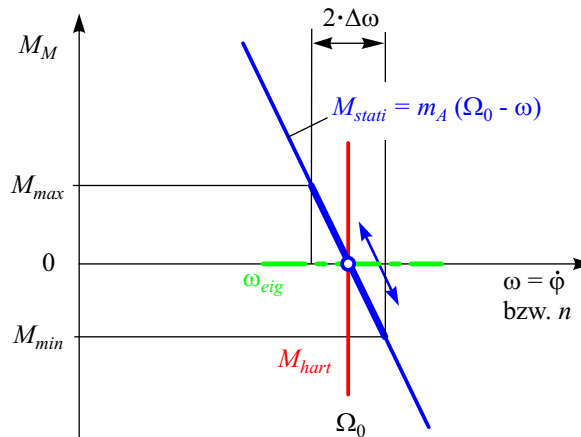
Unter Vernachlässigung weiterer äußerer aktiver Kräfte und Momente gilt dabei direkt:

$$M_{red}(\varphi, \omega) = M_M = m_A (\Omega_0 - \omega) \quad \text{mit} \quad m_A = \frac{k_E k_M}{R_M}$$

Mit den Motorwerten laut Datenblatt (Tab. 4) folgt  $m_A = 0,205$  Nms. Damit wird im Drehzahlverlauf (schwarze Volllinie in Bild 32) eine leichte Verbesserung des Ungleichförmigkeitsgrades auf  $\delta = 9,1\%$  gegenüber der Eigenbewegung  $\delta_{eig} = 10,9\%$  erreicht. Mit der Erhöhung des Anstiegs der Motorkennlinie wie z.B. auf  $m_A = 0,8206$  Nms (blaue gestrichelte Linie,  $\delta = 3,9\%$ ) wird mehr und mehr die 'harte' Motorkennlinie angenähert, für welche  $m_A = +\infty$  gilt.

Generell dominiert in allen Verläufen  $M_M(\varphi)$  und  $\omega(\varphi)$  die 2. Harmonische. Ein Charakteristikum der Verläufe mit statischer Motorkennlinie ist der  **feste Phasenversatz** zwischen  $\omega$  und  $M_M$  von  $\Delta\beta = 90^\circ$  (Bild 32).

Anhand der Motorkennlinie  $M_M = M_M(n)$  veranschaulicht Bild 33 die bisher vorgestellten drei Fälle. Die Eigenbewegung  $\dot{\varphi}_{eig} = \omega_{eig}$  mit  $M_M = 0$  (grüne Linie) bildet ebenso einen Grenzfall, wie die ideal 'harte' Motorkennlinie ( $M_{hart}$  mit  $n = \text{konst.}$ , rote Linie).



**Bild 33:** Statische Motorkennlinie, Eigenbewegung und ideal 'harte' Kennlinie

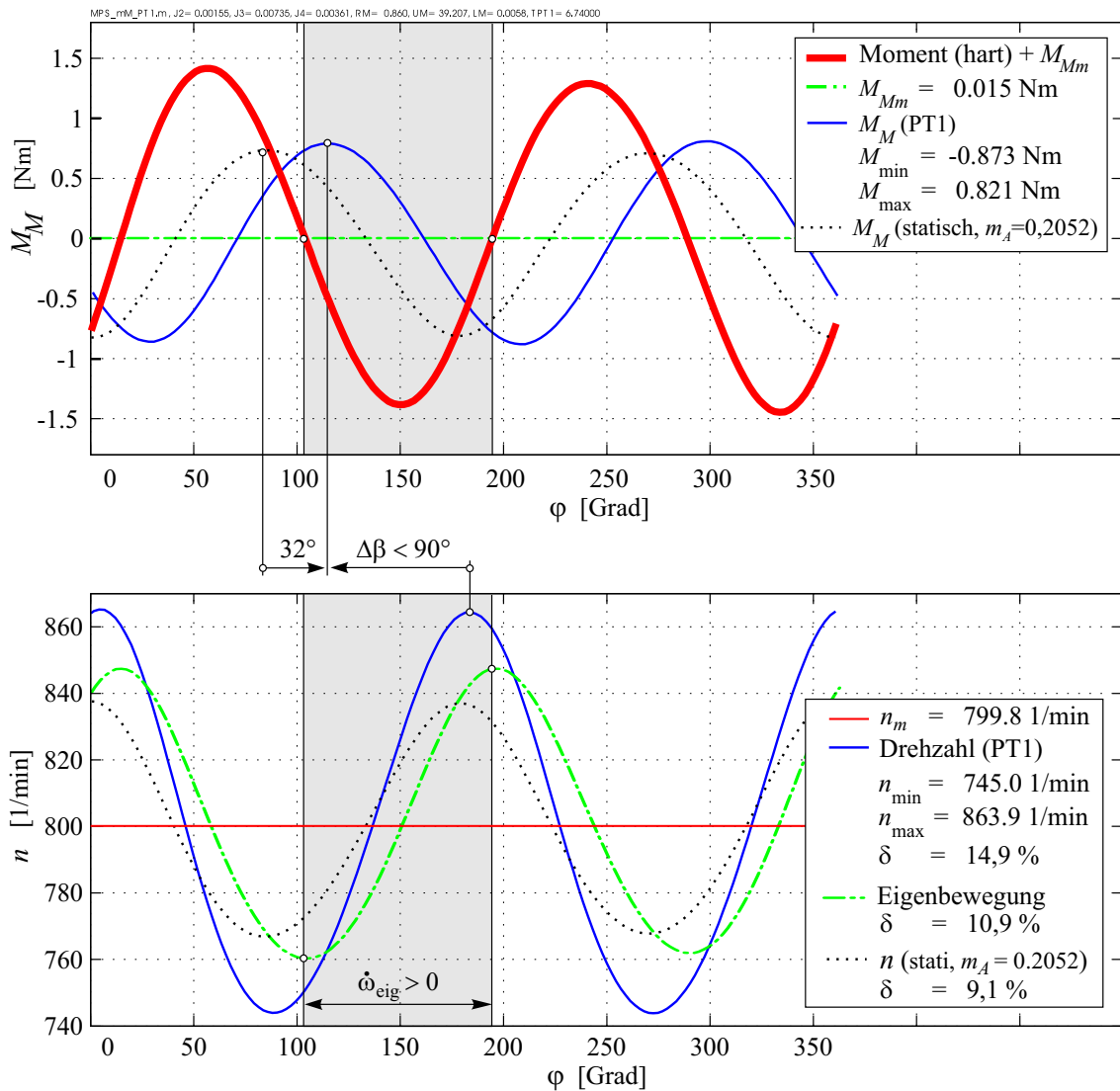
In der Realität weisen Motoren mit Permanentmagnet als Stator (Gleichstrommotor) oder als Rotor (EC-Motoren, d.h. elektronisch kommutiert) oder auch Asynchronmotoren eine solche lineare Kennlinie auf, die auch als Gleichstrom-Nebenschlussverhalten bezeichnet wird.

Aus diesem Grund kann den Momenten- und Winkelgeschwindigkeitsverläufen in Bild 32 Grundsatzzusammenhang zuerkannt werden. Moment und Winkelgeschwindigkeit schwanken **über eine Kurbelumdrehung zweimal**. Auf der statischen Kennlinie in Bild 33 pendelt der Ist-Zustand entlang der Geraden um den Arbeitspunkt bei  $\Omega_0$ .

**Fall 4: Motor als PT1-Übertragungsglied:**

Der reale Servomotor besitzt kein statisches, sondern näherungsweise ein PT1-Übertragungsverhalten. Als weitere Zustandsgröße kommt das Motormoment  $M_M$  mit der Zeitkonstanten  $T_M$  entsprechend Gl. (29) hinzu.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \\ \dot{M}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ [M_{red}(\varphi, \omega, M_M) - \frac{1}{2} J'(\varphi) \omega^2] / J(\varphi) \\ \frac{k_M k_E}{T_M R_M} (\Omega_o - \omega) - \frac{1}{T_M} M_M \end{pmatrix} \quad (33)$$



**Bild 34:** Motor als PT1 – Moment- und Drehzahlschwankung bei 800 1/min

Für den Motor als PT1-Übertragungsglied gilt nicht mehr der feste Phasenversatz zwischen  $\omega$  und  $M_M$  von  $\Delta\beta = 90^\circ$  wie für die statische Kennlinie. Infolge PT1-Motorverhalten verändert sich der Phasenversatz ( $T_M = 6,74$  ms,  $n = 800$  1/min  $\rightarrow \Delta\varphi \approx 32^\circ$ ) und das Minimum von  $M_M$  liegt nicht mehr notwendiger Weise im Bereich von  $\dot{\omega}_{eig} > 0$ .

Entsprechend Bild 34 liegt das Maximum von  $M_M$  in diesem Bereich  $\dot{\omega}_{eig} > 0$ , d.h. wenn die Kurbelschwinge infolge Eigenbewegung beschleunigt (anschiebt), dann beschleunigt auch der

Motor. Die Folge ist der deutlich größere Ungleichförmigkeitsgrad  $\delta_{PT1} = 14,9\%$  gegenüber  $\delta_{stati} = 9,1\%$ . Es tritt durch den Phasenversatz sogar der Fall ein, dass  $\delta_{PT1} = 14,9\%$  über dem als Grenzwert erwarteten Wert der Eigenbewegung  $\delta_{eig} = 10,9\%$  liegt.

Aus energetischer Sicht kann in Bild 34 oben auch das Integral des Antriebsmomentes im „grauen Bereich“ als die zugeführte Energie ausgewertet werden, die im Bereich  $\dot{\omega}_{eig} > 0$  negativ sein muss, um den Mechanismus nicht unnötig zu beschleunigen.

### Fall 5: Motor (PT1) und PI-Drehzahl-Regler:

Der Servoantrieb im Mechanismenprüfstand kann stark vereinfacht als PT1-Motor und PI-Drehzahlregler beschrieben werden. Die Näherung begründet sich aus der Beschränkung auf den stationären Betrieb und der Tatsache, dass keine exakte detaillierte Dokumentation vorliegt. Das Flussdiagramm in Bild 35 veranschaulicht den Simulationsablauf.

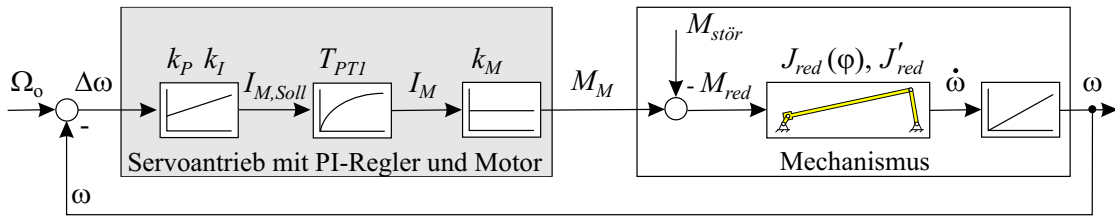


Bild 35: Flussdiagramm Motor, PI-Regler und Kurbelschwinge

Der reale Servoantrieb besitzt eine zusätzliche Kaskade mit der Rückführung des Soll-Motorstromes, was primär dazu dient, Nichtlinearitäten und Zeitverzögerungen des Elektromotors zu kompensieren, die sogenannte „EMK-Kompensation“. Der Phasenversatz bzw. die Zeitkonstante des Motors ändert sich damit in unserem Beispiel von  $T_M = L_M/R_M = 6,74$  ms in Gl. (29) auf  $T_{PT1} = 1,67$  ms. Dabei resultiert  $T_{PT1}$  aus einer Sprungantwortmessung im Modus Momentenregelung.

Die Zustandsform der DGL für die numerische Integration erhält durch den PI-Regler eine vierte Zustandsvariable  $I_{M,Soll}$  (Soll-Motorstrom) neben  $\varphi$ ,  $\omega$  und  $M_M$ . Die erste Ableitung  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$  für den Integrator berechnet sich zu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \\ \dot{M}_M \\ \dot{I}_{M,Soll} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ [M_{red}(\varphi, \omega, M_M) - \frac{1}{2} J'(\varphi) \omega^2] / J(\varphi) \\ \frac{1}{T_{PT1}} k_M I_{M,Soll} - \frac{1}{T_{PT1}} M_M \\ k_I (\Omega_o - \omega) - k_p \dot{\omega} \end{pmatrix} \quad (34)$$

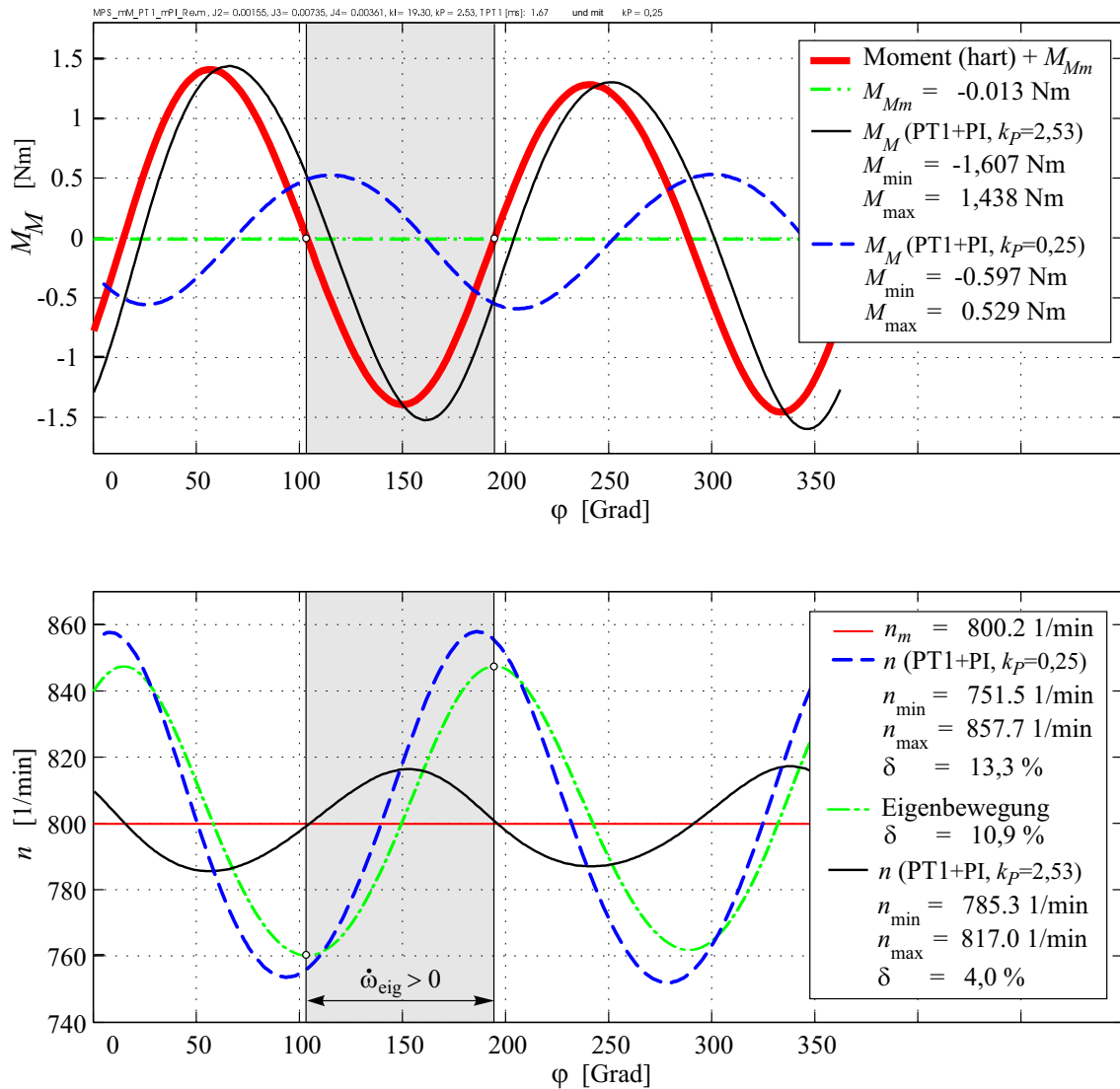
Der Soll-Motorstrom  $I_{M,Soll}$  entspricht näherungsweise dem Ausdruck  $k_E (\Omega_o - \omega) / R_M$  in Gl. (29). Für den PI-Drehzahlregler mit der Regelabweichung  $e_\omega = \Delta\omega = (\Omega_o - \omega)$  und der Zeitkonstanten  $T_\omega = k_I / k_P$  gilt:

$$I_{M,Soll} = k_P (e_\omega + \frac{1}{T_\omega} \int e_\omega dt) \quad \text{bzw.} \quad \dot{I}_{M,Soll} = -k_P \dot{\omega} + k_I (\Omega_o - \omega)$$

Bild 36 zeigt die Verläufe mit zwei unterschiedlichen P-Faktoren:  $k_P = 2,53$  As als schwarze Volllinie und  $k_P = 0,25$  As als blau gestrichelte Linie ( $k_I = 19,3$  A). Bei zu schwacher Verstärkung  $k_P$  des PI-Drehzahlreglers, wie mit  $k_P = 0,25$  As (blau gestrichelt), tritt wieder der Fall ein, dass

$\delta_{eig} = 13,3\%$  deutlich über dem als Grenzwert erwarteten Wert der Eigenbewegung  $\delta_{eig} = 10,9\%$  liegt. Die Zeitverzögerung kann auch ein Grund für diesen Effekt sein.

Wie besonders im Momentenverlauf (Bild 36 oben) erkennbar ist, nähert sich mit größerem Verstärkungsfaktor ( $k_P = 2,53 \text{ As}$ ) das Verhalten hinsichtlich Phase und Betrag demjenigen des Grenzfalles ideale 'harte' Motorkennlinie an. Schließlich weist Bild 36 (unten) mit ( $k_P = 2,53 \text{ As}$ ) auf die Wirksamkeit der Drehzahlregelung hin. Mit dem 'härter' eingestellten Regler geht der Ungleichförmigkeitsgrad mit  $\delta = 4,0\%$  weiter gegen Null.



**Bild 36:** Motor (PT1,PI-Regler:  $k_P$  variiert) – Moment- und Drehzahlschwankung

Im „grauen Bereich“ bei  $\dot{\omega}_{eig} > 0$  führt der drehzahlgeregelte Servoantrieb mit  $M_M$  wieder Energie zu, während infolge der Eigenbewegung die Kurbelschwinge ebenfalls die Antriebswelle beschleunigt. Darum kann der Ungleichförmigkeitsgrad nur schlechter sein als bei der Eigenbewegung.

### Resümee zur Wechselwirkung Servomotor – Mechanismus:

Momenten- und Winkelgeschwindigkeitsverläufe schwanken **über eine Kurbelumdrehung zweimal**. Mit den drei einfachen Modellen (Fall 3: statische Kennlinie, Fall 4: PT1-Motor und Fall 5: PT1-Motor + PI-Drehzahl-Regler) lässt sich das stationäre Betriebsverhalten durch wenige Parameter gut beschreiben. Die Eigenbewegung (Fall 1) und die ideal 'harte' Kennlinie (Fall 2) bilden Grenzfälle, die allerdings durch ungünstig gewählte Reglerparameter und Zeitverzögerungen noch übertroffen werden können.

Anschaulich bedeutet die Schwankung von Moment und Drehzahl im stationären Betrieb innerhalb eines Arbeitstaktes ein Pendeln um den Arbeitspunkt  $\Omega_o$  auf der linearisierten statischen Kennlinie, vgl. Bild 33.

### **Anmerkungen zur Wechselwirkung Servomotor – Mechanismus:**

a) SCHRÖDER [78, S.29] unterteilt das stationäre Verhalten der Arbeitsmaschinen:  $m_M = f(n, \varphi)$  in drei Fälle:

1. Asynchrones bzw. Nebenschluss-Verhalten
2. Konstant-Moment-Verhalten
3. Synchrones Verhalten,  $n(M) = \text{konst.}$

Für Maschinen mit Mechanismen im Antriebsstrang, d.h. mit ungleichmäßiger Werkzeugbewegung trifft nur der 1. Fall zu. Das mögliche und zu erwartende Betriebsverhalten wird in [78], wie in fast allen bisherigen Büchern über Elektromotoren, nicht beschrieben.

b) Aspekte der praktischen Anwendung von Servomotoren zum Antrieb von Mechanismen untersuchen BRAUNE, CALLESEN und KÖSTER 2006 [6]. Nutzungspotenziale und Aspekte des Entwurfes werden aufgezeigt. Kommerzielle Drehmomenten-Vorsteuerungen bieten zunehmend typische Lastfälle zur Auswahl, „... von denen das beschleunigungsproportionale Last-Drehmoment eines konstanten Last-Massenträgheitsmomentes natürlich das gängigste ist. Wie vorne bereits angedeutet, reicht diese Art Drehmomenten-Vorsteuerung für das etwas komplexere Verhalten eines angetriebenen Koppelgetriebes mit veränderlichem  $J_{red}$ -Verlauf aber nicht nur nicht aus, sondern stiftet erfahrungsgemäß mehr Schaden als Nutzen.“ [6, S. 33].

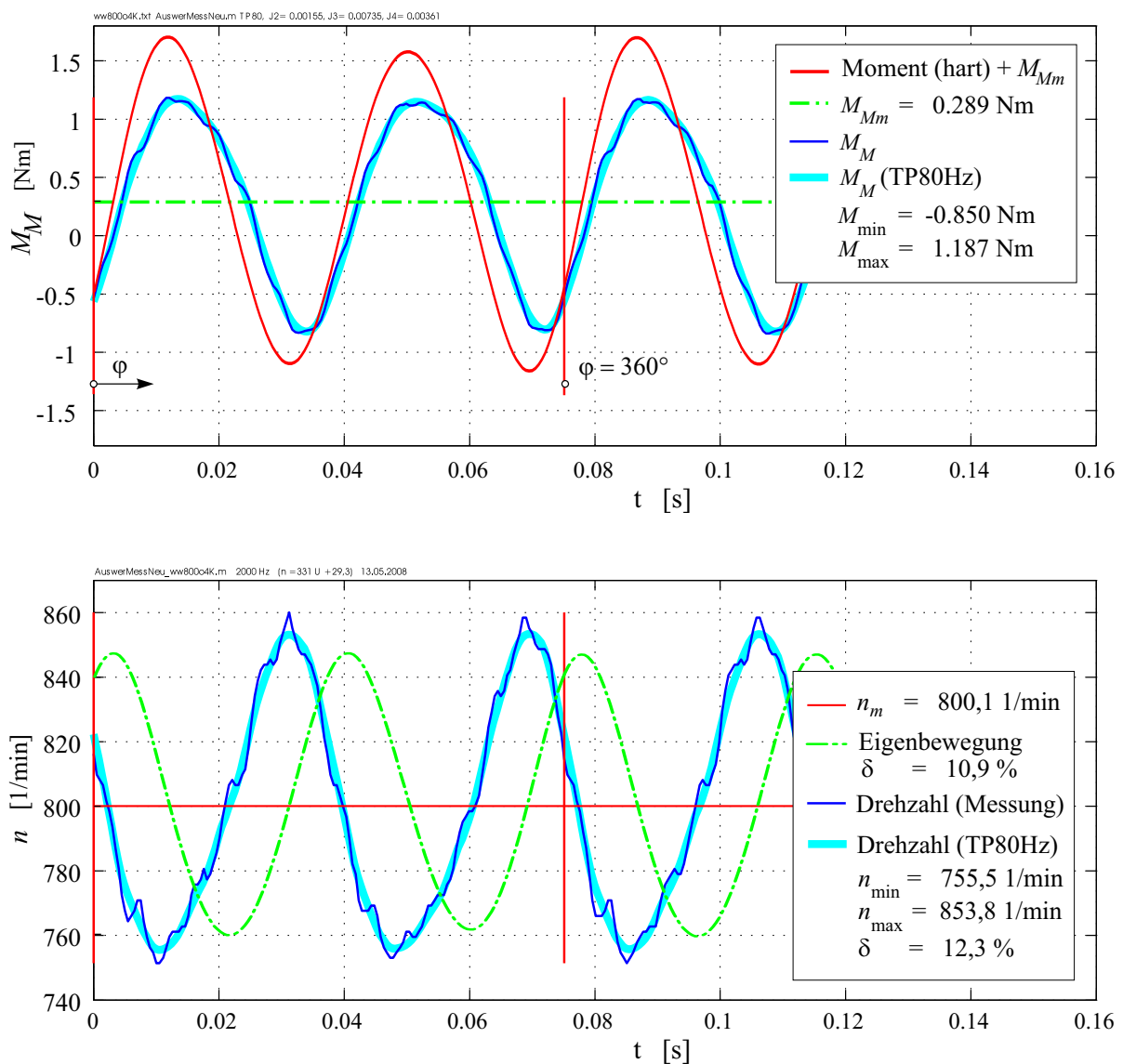
c) Seit 2006 arbeitet der VDI-EKV/VDE-GMA Arbeitsausschuss A223 „Motion Control“ an der VDI-Richtlinie 2742 zu diesem Thema der Verknüpfung von Servomotoren mit ungleichmäßig übersetzenden Getrieben (Mechanismen).



### 3.5.2 Messung der Wechselwirkung Servomotor – Mechanismus

Messungen am Mechanismenprüfstand bei 800 1/min in Bild 37 zeigen zwar, dass der reale Drehzahlregler die mittlere Drehzahl exakt einhalten kann, aber im Verlauf der Winkelgeschwindigkeit über eine Kurbelumdrehung (zwischen den beiden roten vertikalen Linien) sind die Abweichungen unerwartet hoch.

Offensichtlich bestehen in der Einstellung des Drehzahlreglers noch große Reserven hinsichtlich eines besseren Ungleichförmigkeitsgrades. Trotz relativ hoher Motormomente tritt der Fall ein, dass  $\delta_{Mess} = 12,3\%$  deutlich über dem als Grenzwert erwarteten Wert der Eigenbewegung bei  $\delta_{eig} = 10,9\%$  liegt. Eine optimale Einstellung des Servoreglers am Mechanismenprüfstand für einen möglichst glatten Winkelgeschwindigkeitsverlauf über eine Kurbelumdrehung wird nicht weiter verfolgt, da es nicht der Erklärung des grundsätzlichen Verhaltens dient.



**Bild 37:** Messung bei 800 1/min – Moment- und Drehzahlschwankung

Der gemessene Mittelwert des Motormomentes  $M_{Mm} = 0,289 \text{ Nm}$  bildet ein Maß für die Reibverluste im Antriebssystem, vgl. Kapitel 3.4.2.

Phasenverschiebungen zwischen Messkurven und Simulation wurden hier nicht weiter untersucht. Einige Bemerkungen dazu befinden sich am Ende von Kapitel 3.4.2, da beim Aufschalten der Eigenbewegung der Phasenversatz kompensiert werden muss.

Mit dem Modell 'Starrkörper-Mechanismus + PT1-Motor + PI-Drehzahlregler' gelingt es schließlich, die gemessenen Verläufe mit  $k_P = 0,506 \text{ As}$  und  $k_I = 19,3 \text{ A}$  anzunähern. Zum Modellabgleich dienen nur die zwei Reglerkoeffizienten, die sich unterschiedlich auf Drehmoment und Winkelgeschwindigkeit auswirken.

Bild 38 enthält neben der Simulation  $M_M(\text{PT1+PI})$  zum Vergleich den ungefilterten Messverlauf aus Bild 37. Die gemessenen Verläufe wurden per Hand phasenverschoben. Der reibungsbedingte Mittelwert  $M_{Mm} = 0,289 \text{ Nm}$  wurde aus der Messung herausgerechnet, um den Vergleich mit der Simulation (ohne Reibung) zu erleichtern.

Wie der gelungene Modellabgleich zeigt, erweist sich damit das Modell 'zwangsläufiger Starrkörper-Mechanismus' als ausreichend, um das reale Betriebsverhalten des Mechanismenprüfstandes mit Servoantrieb im 'Dauerbetrieb' anzunähern.

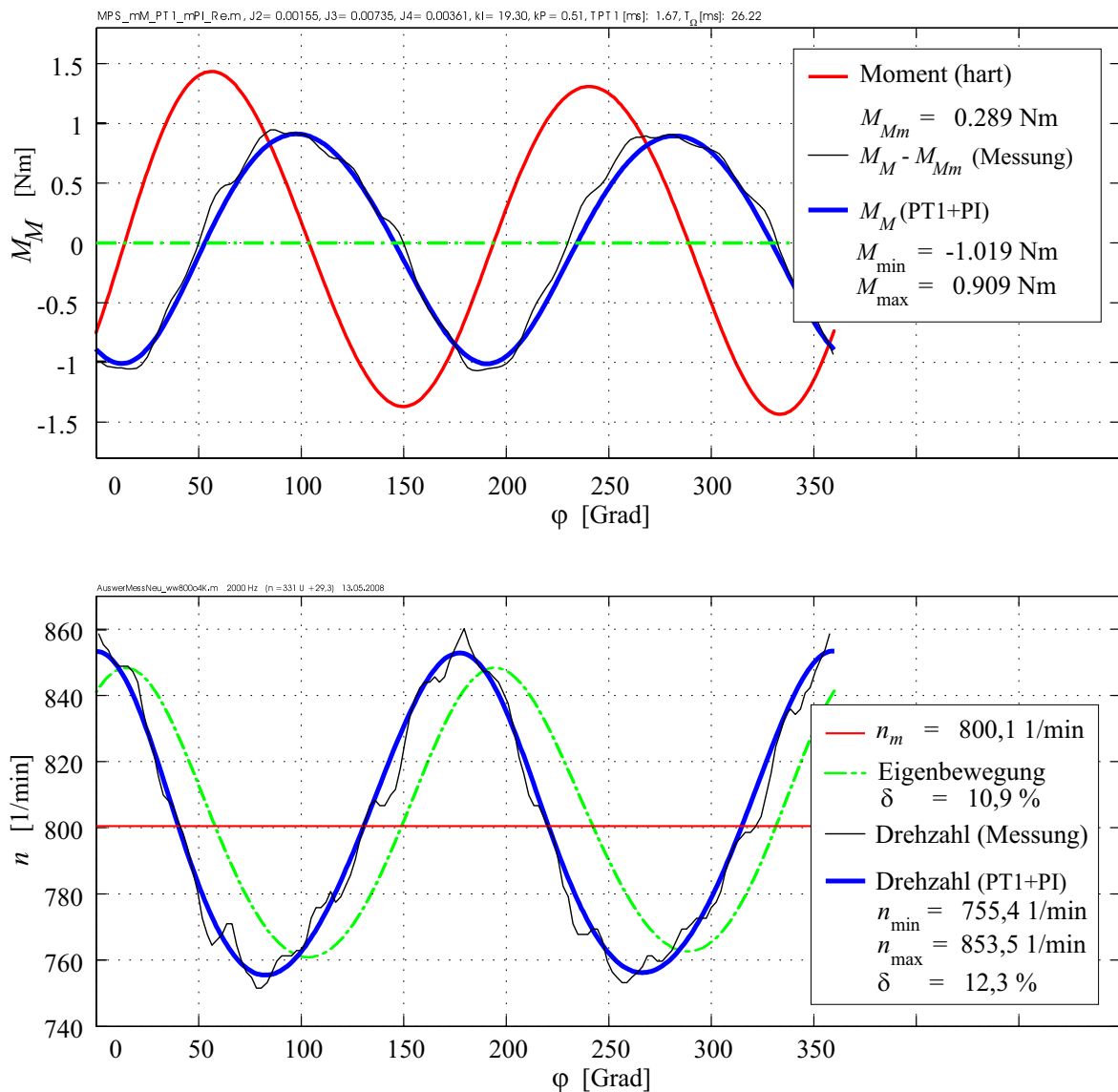


Bild 38: Modellabgleich ( $k_P$  und  $k_I$ ) – Moment- und Drehzahlschwankung

## 4 Kraftregelung mit redundanten Antrieben

Der aktive dynamische Ausgleich von Gelenkkräften steht im Mittelpunkt dieses Kapitels. Dafür wird die Methode der redundanten Antriebe untersucht und von der Theorie her den Möglichkeiten durch Aktoren mit zusätzlichem Freiheitsgrad gegenübergestellt.

Fragestellungen der praktischen Erprobung dieses Verfahrens gaben den Anstoß zum Bau des Mechanismenprüfstandes und fanden Niederschlag in mehreren Veröffentlichungen, wie [1] und [97] bis [103]. Hier werden die wichtigsten Erkenntnisse zusammengefasst.

### 4.1 Gedanken zum dynamischen Ausgleich durch Redundantantriebe

Die Regelung von Gelenkkräften durch redundante Antriebe gehört zu den **aktiven Methoden** des dynamischen Ausgleiches bei Mechanismen. Einen Überblick zu den Zielen und Methoden des dynamischen Ausgleiches vermittelt Kapitel 2.3. Die Spezifik der redundanten Antriebe soll jetzt zunächst verbal beschrieben werden.

Klassischer Weise wird der dynamische Ausgleich durch Änderung der Masseparameter der Getriebeglieder (Massenausgleich) vorgenommen. Diese passive Methode arbeitet ohne Energiezufuhr, sie speichert nur Energie wie im einfachsten Fall das Schwungrad. Aufwand und Kosten geben den passiven Methoden zunächst den Vorrang.

Eine **neue Methode** sind zusätzliche bzw. **redundante Antriebe**, die u.a. von ANGELES, NAHON und THÜMMEL 1992 [1] vorgestellt wurden. Als redundant werden alle zusätzlichen Antriebe bezeichnet, die über die Anzahl der erforderlichen Antriebe des Mechanismus zur Sicherung der zwangläufigen Bewegung hinausgehen. Ein System ist redundant angetrieben, wenn es mehr Antriebe als Freiheitsgrade besitzt.

Der Unterschied zwischen Redundantantrieben und Antrieben mit zusätzlichem Freiheitsgrad ist vergleichbar mit der Anbringung von Zusatzfedern einerseits zwischen den vorhandenen Körpern und andererseits mit einer frei schwingenden Zusatzmasse. Der Mechanismenprüfstand verwendet die Servomotoren  $M_2$  und  $M_3$  als redundante Antriebe, siehe Kapitel 2.1 und Bild 7.

Mit Redundantantrieben gelingt es, unter Sicherung der Bewegungsaufgabe durch den Hauptantrieb, die inneren Zwangskräfte in den Gelenken gezielt zu beeinflussen. Die Verteilung der Zwangskräfte in der Maschine wird durch 'innere Verspannungen' dynamisch günstig gestaltet. Die ungleichmäßige Sollbewegung aller Werkzeuge, aber auch aller Mechanismenglieder kann bei diesem Gelenkkraftausgleich mit redundanten Antrieben unverändert beibehalten bleiben.

Es sei an dieser Stelle besonders hervorgehoben, dass die Methode der redundanten Antriebe auf die einzelnen dynamischen Effekte infolge der wechselnden Zwangskräfte innerhalb des Mechanismus zielt. Sie verändert nicht die resultierenden Schwingungen des Maschinengestells gegenüber dem Fundament bzw. gegenüber der Umgebung, wobei das starre Gestell der Gesamtmaschine als ein Block zu sehen ist.

Die resultierende Kraftwirkung eines Mechanismus auf die Umgebung wird allein durch die Trägheitswirkung aller ungleichmäßig bewegten Körper (und durch eingeprägte Kräfte von außerhalb der Systemgrenze wie z.B. die Gewichtskraft) verursacht. Für das Modell des ebenen Mechanismus ergeben sich folgende resultierenden Belastungen:

$$\begin{aligned}
 F_x &= - \sum_{i=2}^I m_i \ddot{x}_{Si} & F_y &= - \sum_{i=2}^I m_i \ddot{y}_{Si} \\
 M_z &= - \sum_{i=2}^I [J_{Si} \ddot{\varphi}_i + m_i (x_{Si} \ddot{y}_{Si} - y_{Si} \ddot{x}_{Si})]
 \end{aligned} \tag{35}$$

Zwangskräfte innerhalb eines Systems können dessen Impuls- und Drallbilanz nicht verändern! **Redundante Antriebe ersetzen keinen Massenausgleich!** Es gilt die Faustregel: „Resultierende Massenkkräfte können nur durch Massenkkräfte kompensiert werden!“ [117, S.8].

Innere Kräfte und Momente der Maschine, wie Federkräfte zwischen einzelnen Getriebegliedern, technologisch bedingte Kräfte (z.B. Schneide- und Presskräfte in Umformmaschinen und polygrafischen Maschinen, Gaskräfte in Verbrennungsmotoren und Kompressoren) sowie geregelte hydraulische, pneumatische oder elektromagnetische Zusatzkräfte einschließlich Motormomente haben **keinen** unmittelbaren **Einfluss** auf die resultierenden Gestellbelastungen, da sie immer paarweise gleichgroß entgegengesetzt auftreten und innerhalb eines starren Gestells kompensiert werden. Solche **inneren Kräfte** können sich lediglich auf die Größe und Richtung einzelner Gelenkkkräfte, auf Vibrationskräfte (zusätzliche Kräfte z.B. infolge Deformation elastischer Getriebeglieder) sowie auf die innere Belastung des Gestells auswirken.

Mit einer digitalen Momentenregelung der Redundantantriebe kann das Regelziel, einen bestimmten Gelenkkraftverlauf über eine Kurbelumdrehung zu erzeugen, per Software flexibel an die Maschinenbedingungen angepasst werden. Redundantantriebe sind an der 'fertigen' Maschine nachrüstbar. Sie sollten bevorzugt als Servomotoren an Wellen im Gestell angebracht werden. Aber auch Anordnungen als Stellglied zwischen bewegten Körpern z.B. Elektromagnet, Piezotranslator, Hydraulik- oder Pneumatikzylinder sind denkbar.

Der exakte Ausgleich genau einer Gelenkkraftkomponente erfordert i.Allg. genau einen Aktor, was im Kapitel 4.2.4 noch formelmäßig belegt wird. Allerdings ist für viele dynamische Effekte ein Nullausgleich nicht notwendig bzw. sogar unerwünscht, z.B. bei der Verhinderung von Spielstößen. Dann können auch mehrere Gelenkkraftkomponenten durch nur wenige redundante Antriebe im Mittel beeinflusst werden.

Mit Hilfe geregelter redundanter Antriebe gelingt es, verschiedenste Zielstellungen des dynamischen Ausgleiches zu verfolgen, wie sie in Bild 19 auf S. 21 veranschaulicht sind. Bezüglich der Lösung von Schwingungsproblemen beschränkt sich dieser Abschnitt auf die Beeinflussung von Gelenkkkräften, genauer gesagt auf die Realisierung eines Sollverlaufes der Kräfte innerhalb eines Arbeitstaktes. Da die Gelenkkkräfte die Erregerquelle verschiedener Schwingungserscheinungen darstellen, kann ein Gelenkkraftausgleich auch zur Schwingungsminderung beitragen.

Der hier nicht beschriebene Schritt von der Schwingungserscheinung zu einem Sollverlauf für die Erregerkräfte, für bestimmte Gelenkkkräfte, ist nicht einfach und immer maschinenspezifisch. Unter den vielen Varianten sei z.B. an die Hydrodynamik in Gleitlagern mit ausgewählten Positionen der Ölzufuhr oder an die Kolbenverkippung und Reibung in einem Schubgelenk gedacht. Die Wirkungen in den Gelenken verkörpern gerade deshalb eine Herausforderung, weil an den Verbindungsstellen der relativ zueinander bewegten Körper seitens der Physik und auch von der konstruktiven Gestaltung her eine breite Vielfalt möglich ist.

Die hier gewählte Problemstellung, der **Ausgleich einzelner Fundamentkräfte** ( $f \rightarrow 0$ ), trägt überwiegend akademischen Charakter, zeigt dafür aber sehr viele zusätzlich untersuchte und gemessene Details zur regelungstechnischen Umsetzung.

## 4.2 Antriebsvarianten zur Kraftregelung

Aus Sicht der technischen Mechanik sind zwei Stellgliedanordnungen am vorhandenen Grundmechanismus möglich: Antrieb an zusätzlichem Freiheitsgrad oder Redundantantrieb, der den Freiheitsgrad nicht erhöht.

Für die Kurbelschwinge sollen jetzt die mathematischen Beziehungen für den Ausgleich der horizontalen Lagerkraft  $f_{1x}$  an der Kurbelwelle gegenüber gestellt werden, um beide Varianten bewerten zu können.

### 4.2.1 Prinzip der virtuellen Arbeit und Bewegungsgleichungen

Es sollen allgemeine Gleichungen für beliebige Zwangskräfte in Starrkörper-Mechanismen hergeleitet werden. Bewegungsdifferentialgleichungen, wie DGL (4), beschreiben allgemein die Kinetik von Mehrkörpersystemen. Doch hier wird nach einer möglichst expliziten Beziehung für eine einzige Kraftkomponente, für eine Zwangskraft, gesucht.

Zu diesem Zwecke bietet das Prinzip der virtuellen Arbeit einen vorteilhaften Zugang. Dafür wird in Bild 39 am Beispiel der Kurbelschwinge ganz fiktiv eine virtuelle Koordinate  $p$  eingeführt, als Beispiel die vertikale virtuelle Verschiebung des Schwingenlagers. Der Mechanismus erlangt durch die Koordinaten  $\varphi$  und  $p$  den Freiheitsgrad  $dof=2$ . Mit der virtuellen Koordinate  $p$  korrespondiert die Zwangskraft  $F_p$ , welche natürlich auch in entgegengesetzter Richtung als Reaktionskraft zum Gestell auftritt. Der virtuelle Schieber versinnbildlicht die freie Verschiebbarkeit.

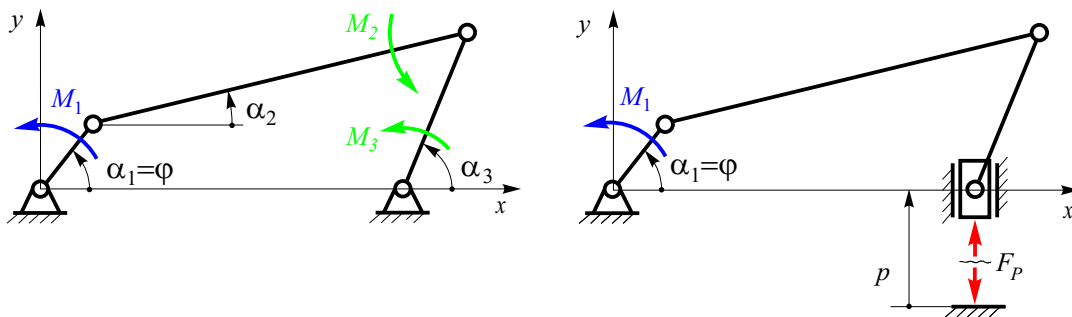


Bild 39: Koordinate  $p$  und Gelenkkraft  $F_p$  nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit

Es wird nun eine explizite Gleichung für die Kraft  $F_p$  bei bekannten Momenten  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  und gegebener Bewegung gesucht.

Zunächst soll die **allgemeine Vorgehensweise** erläutert werden:

1. Aufstellen der DGL'n für  $\varphi(t)$  und die virtuelle Koordinate  $p(t)$  ( $dof=2$ ):

$$f_\varphi(\ddot{\varphi}, \ddot{p}, \dot{\varphi}, \dot{p}, \varphi, p, F_p, M_1, M_2, M_3) = 0$$

$$f_p(\ddot{\varphi}, \ddot{p}, \dot{\varphi}, \dot{p}, \varphi, p, F_p, M_1, M_2, M_3) = 0$$

2. Virtuelle Koordinate  $p$  streichen:

$$\ddot{p} = 0, \quad \dot{p} = 0, \quad p = 0,$$

$$f_\varphi(\ddot{\varphi}, \dot{\varphi}, \varphi, F_p, M_1, M_2, M_3) = 0$$

$$f_p(\ddot{\varphi}, \dot{\varphi}, \varphi, F_p, M_1, M_2, M_3) = 0$$

3. Zwangskraft  $F$  leistet keine Arbeit bei Bewegung mit  $\varphi \Rightarrow F$  in DGL  $f_\varphi$  streichen

$$f_\varphi(\ddot{\varphi}, \dot{\varphi}, \varphi, M_1, M_2, M_3) = 0$$

$$f_p(\ddot{\varphi}, \dot{\varphi}, \varphi, F_p, M_1, M_2, M_3) = 0$$

4. Funktion  $f_p$  nach gesuchtem  $F_p$  auflösen, vorher die von  $f_p$  unabhängige DGL mit  $f_\varphi$  lösen.

Diese Schritte über die DGL mit der virtuellen Koordinate  $p$  sind erforderlich, um die Projektionen bzw. partiellen Ableitungen in der passenden Form für die Kraft-Funktion  $f_p$  zu bekommen. Der 4. Schritt entspricht in der Theorie der Mehrkörpersysteme der 'inversen Kinetik' lt. Tab. 1 auf S. 19.

Die Gleichungen sind nicht auf die Fundamentkraft  $F_p$  beschränkt, sondern gelten allgemein für eine willkürliche Gelenkkraftkomponente oder ein Drehmoment bei Annahme einer virtuellen Winkelkoordinate, wie z.B. von DRESIG in [128, S.362-368] beschrieben.

Um für den Mechanismus die Zwangskraft  $F_p$  berechnen zu können, wird auch die DGL für ein System mit mindestens zwei Minimalkoordinaten benötigt. Diese lassen sich analog zur DGL (4) nach dem LAGRANGESCH 2 Formalismus herleiten. Mit dem Freiheitsgrad  $dof$ , mit  $N$  bewegten Körpern und mit den Minimalkoordinaten  $q_j, q_k$  ( $j$  und  $k$  von 1 bis  $dof$ ) ergibt sich für die Komponente  $p$  folgende Form [21, S. 103]:

$$\sum_{k=1}^{dof} m_{pk} \ddot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{dof} \sum_{k=1}^{dof} m_{jpk} \dot{q}_j \dot{q}_k = Q_p = F_p + \sum_{i=1}^M \frac{\partial \alpha_i}{\partial p} M_i + \sum_{i=1}^L \frac{\partial \mathbf{r}_{ai}}{\partial p} \mathbf{f}_{ai} \quad (36)$$

Eine Darstellung mit den allgemeinen Projektionen  $m_{jpk}(\mathbf{q})$  und  $m_{pk}(\mathbf{q})$  der Massen  $m_i$  und Massenträgheitsmomente  $I_{S_i}$  bietet Kapitel 5.3.2 (S. 84). Äquivalent zum reduzierten Massenträgheitsmoment  $J_{red}$  und dessen Ableitung  $J'_{red}$  im eindimensionalen Fall in DGL (4) definieren jetzt diese Projektionen im mehrdimensionalen Fall die Elemente der Massenmatrix. Entsprechend Gl. (79) lauten diese:

$$m_{pk}(\mathbf{q}) = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_p \partial \dot{q}_k} = \sum_{i=2}^N \left[ m_i \frac{\partial \mathbf{r}_{S_i}^T}{\partial q_p} \frac{\partial \mathbf{r}_{S_i}}{\partial q_k} + I_{S_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_p} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} \right]$$

Für die beliebige Zwangskraft  $F_p$  und den Freiheitsgrad  $dof = 1$  (Koordinate  $q_1 = \varphi$ ) folgt schließlich aus (36) und dem Prinzip der virtuellen Arbeit:

$$F_p = \underbrace{m_{p\varphi} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial m_{\varphi p}}{\partial \varphi} - \frac{\partial m_{\varphi\varphi}}{\partial p} \right) \dot{\varphi}^2}_{\text{Projektion der Trägheitswirkung}} - \underbrace{\sum_{i=1}^M \frac{\partial \alpha_i}{\partial p} M_i}_{\text{Projektion der Stellmomente}} - \underbrace{\sum_{i=1}^L \frac{\partial \mathbf{r}_{ai}}{\partial p} \mathbf{f}_{ai}}_{\text{Projektion der Störkräfte}} \quad (37)$$

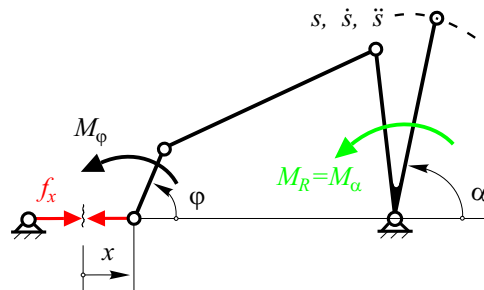
Der Trägheitseinfluss wächst offensichtlich mit dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ( $\dot{\varphi}^2$ ), was einer quadratischen Abhängigkeit von der Drehzahl entspricht. Die Stellmomente  $M_i$  und Störkräfte gehen mit rein lageabhängigen Faktoren (JACOBI-Matrizen) linear ein.

### 4.2.2 Aktor als redundanter Antrieb

Mit dem Redundantantrieb  $M_R = M_\alpha$  als Stellglied (Bild 40) an der Schwinge lautet die Lagerkraft  $f_x$  zur virtuellen Koordinate  $x$  im Kurbelwellenlager

$$-f_x = \underbrace{m_{x\varphi} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial m_{\varphi x}}{\partial \varphi} - \frac{\partial m_{\varphi\varphi}}{\partial x} \right) \dot{\varphi}^2}_{\text{Projektion der Trägheitswirkung}} - \underbrace{\frac{\partial \alpha}{\partial x} M_R}_{\text{Projektion des Stellmomentes}} \quad (38)$$

Die allgemeine Beziehung in Gleichung (37) vereinfacht sich. Beim Kräftepaar  $f_x$  gilt das Vorzeichen aus Gl. (38) für die Kraft entgegen der virtuellen Koordinate  $x$ .



**Bild 40:** Kraftausgleich durch Stellglied als Redundantantrieb

Das Modell der Pleuelenschwinge mit dem Redundantantrieb  $M_R = M_\alpha$  zur Koordinate  $\alpha$  besitzt den Freiheitsgrad **Eins** und entsprechend Gl. (36) folgt die Bewegungs-DGL zur Minimalcoordinate  $\varphi$ :

$$M_\varphi = m_{\varphi\varphi} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} \right) \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} M_R \quad (39)$$

#### Anmerkung zum Redundantantrieb: Entkopplung der Kinematik

1. Die Kraft  $f_x$  hängt linear vom Aktormoment  $M_R$  ab, wenn  $\dot{\varphi}$  und  $\ddot{\varphi}$  gegeben sind.
2. Die Steuerbarkeit ist gesichert, wenn  $\partial \alpha / \partial x \neq 0$ .
3. Das Drehmoment  $M_\varphi$  sichert nach Gl. (39) über  $\dot{\varphi}$  und  $\ddot{\varphi}$  die Sollbewegung ( $s$ ,  $\dot{s}$ ,  $\ddot{s}$ ).
4. Das Drehmoment  $M_\varphi$  beeinflusst  $f_x$  nur indirekt über den Trägheitsterm, weil  $\partial \varphi / \partial x = 0$ .
5. Das Drehmoment  $M_R$  gleicht nach Gl. (38) die Kraft  $f_x$  aus und stört  $\dot{\varphi}$  und  $\ddot{\varphi}$  nur schwach, solange der drehzahlgezielte Hauptantrieb mit dem Moment  $M_\varphi$  den Störeinfluss von  $M_R$  kompensiert.

### 4.2.3 Aktor als zusätzlicher Freiheitsgrad

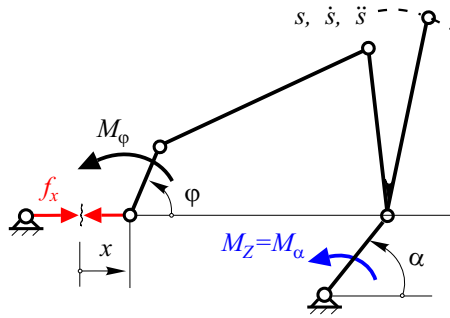
Mit dem Moment  $M_Z$  als Stellglied mit zusätzlichem Freiheitsgrad (Bild 41) gilt für die Lagerkraft  $f_x$  zur virtuellen Koordinate  $x$  im Kurbelwellenlager

$$-f_x = m_{x\varphi} \ddot{\varphi} + m_{x\alpha} \ddot{\alpha} + \frac{1}{2} \left( m_{\varphi\varphi x} \dot{\varphi}^2 + 2 m_{\varphi\alpha x} \dot{\varphi} \dot{\alpha} + m_{\alpha\alpha x} \dot{\alpha}^2 \right) \quad (40)$$

Mit je einem zusätzlichen Gelenk und Körper entsteht aus der viergliedrigen Kurbelschwinge ein fünfgliedriger Mechanismus. Die **zwei** Bewegungsdifferentialgleichungen ( $dof = 2$ ) zu den Minimalkoordinaten  $\varphi$  und  $\alpha$  lauten:

$$M_\varphi = m_{\varphi\varphi} \ddot{\varphi} + m_{\varphi\alpha} \ddot{\alpha} + \frac{1}{2} \left( m_{\varphi\varphi\varphi} \dot{\varphi}^2 + 2 m_{\varphi\alpha\varphi} \dot{\varphi} \dot{\alpha} + m_{\alpha\alpha\varphi} \dot{\alpha}^2 \right) \quad (41)$$

$$M_\alpha = m_{\alpha\alpha} \ddot{\alpha} + m_{\alpha\varphi} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \left( m_{\varphi\varphi\alpha} \dot{\varphi}^2 + 2 m_{\varphi\alpha\alpha} \dot{\varphi} \dot{\alpha} + m_{\alpha\alpha\alpha} \dot{\alpha}^2 \right) \quad (42)$$



**Bild 41:** Kraftausgleich durch Stellglied mit zusätzlichem Freiheitsgrad

Bemerkungen zum Stellglied mit zusätzlichem Freiheitsgrad: **Indirekte Kraftregelung**

1. Die Sicherung der Sollbewegung ( $s$ ,  $\dot{s}$ ,  $\ddot{s}$ ) über den Hauptantrieb  $\dot{\varphi}$  und  $\ddot{\varphi}$  und den Antrieb mit zusätzlichem Freiheitsgrad  $\dot{\alpha}$  und  $\ddot{\alpha}$  ist schwierig, da  $\dot{\varphi}$  und  $\dot{\alpha}$  während einer Kurbelumdrehung gemeinsam variiert werden müssten.
2. Die Drehmomente  $M_\varphi$  und  $M_\alpha = M_z$  sind nur über Bewegungsgrößen bzw. Trägheitsterme mit  $f_x$  gekoppelt, weil:  $\partial\varphi/\partial x = 0$  und  $\partial\alpha/\partial x = 0$
3. Die Beeinflussung von  $f_x$  ist durch  $M_Z$  **nur indirekt** über die Trägheitsterme möglich. Ein Ausgleich von  $f_x$  ohne Änderung der Sollbewegung ( $s$ ,  $\dot{s}$ ,  $\ddot{s}$ ) kann damit kaum erreicht werden.



#### 4.2.4 Schlussfolgerungen zum Gelenkkraftausgleich mit redundanten Antrieben

Im Fall der Aktoranordnung mit zusätzlichem Freiheitsgrad wird die Struktur des Mechanismus erweitert, es sind zusätzliche Körper und Gelenke einzufügen. Jeder neue Freiheitsgrad wird extra mit einem weiteren Stellglied gesteuert. Alle Antriebe sichern dann gemeinsam den Zwanglauf. Damit wird jedoch bei gegebener Bewegungsaufgabe die Auslegung des Mechanismus nach rein kinematischen Gesichtspunkten komplizierter. Der Entwurf muss dann sofort die Kinematik der Zusatzkoordinate beinhalten, während redundante Antriebe ein 'Nachrüsten' am 'fertigen' Mechanismus gestatten.

Da weiterhin die Steuerung von  $f_x$  durch  $M_Z$  im Fall 'zusätzlicher Freiheitsgrad' nur indirekt über die Bewegungsgrößen  $\dot{\varphi}$ ,  $\ddot{\varphi}$ ,  $\dot{\alpha}$  und  $\ddot{\alpha}$  und die Trägheitsterme möglich ist, wird für den Gelenkkraftausgleich die **Entscheidung** für die Stellgliedanordnung als **redundanter Antrieb** gefällt.

Es soll zusätzlich der Frage nachgegangen werden, wie viele redundante Antriebe sind für die Beeinflussung einer ausgewählten Anzahl von Zwangskräften erforderlich? Die mathematischen Beziehungen für eine Antwort enthalten die vorherigen Kapitel.

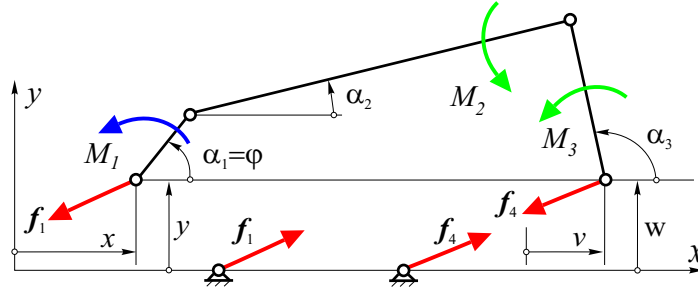
1. Bei fest vorgegebener Bewegung  $\dot{\varphi}$  und  $\ddot{\varphi}$  ergibt sich für jede auszugleichende Zwangskraft  $F_p$  eine lineare Gleichung analog zu Gl. (37), dadurch entsteht für K Zwangskräfte ein lineares Gleichungssystem mit K Gleichungen bei I unbekanntem Stellmomenten  $M_i$ .
2. **Je Kraftkomponente  $F_p$  ist zum Ausgleich genau ein Redundantantrieb erforderlich.**
3. Die Steuerbarkeit von  $F_p$  durch  $M_i$  ist nur bei  $\frac{\partial \alpha_i}{\partial p} \neq 0$  gesichert, wenn das Gleichungssystem also nicht singulär ist.
4. Die Koeffizienten des Gleichungssystems ändern sich mit der Kurbelstellung  $\varphi$ . Die Kondition des Gleichungssystems ist zu prüfen.
5. Sollen nur Redundantantriebe an gestellgelagerten Wellen angreifen, dann sind für den Ausgleich beider Kraftkomponenten in einem Drehgelenk genau zwei Wellen außer dem Hauptantrieb erforderlich. Eine Kurbelschwinge bietet jedoch nur eine solche Welle. In diesem Fall wären Redundantantriebe in bewegten Gelenken oder auch Zylinder zwischen bewegten Körpern anzuordnen.
6. Wenn mehr als eine Kraftkomponente durch einen Redundantantrieb ausgeregelt bzw. beeinflusst werden soll, ist kein vollständiger Ausgleich erreichbar. Dennoch kann z.B. nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate eine Zielfunktion mit mehreren Kräften durch einen redundanten Antrieb optimiert werden.

### 4.3 Ausgleich aller Fundamentkräfte an der Kurbelschwinge

Als Anwendungsfall zum Gelenkkräftenausgleich nach Gleichung (37) soll untersucht werden, ob und wie **alle vier Fundamentkraftkomponenten** der Kurbelschwinge mit Redundantantrieben ausgleichbar sind.

#### 4.3.1 Bedingungen zum Ausgleich aller Fundamentkräfte

Allgemein ist für die Regelung **einer** Kraftkomponente genau **ein** Redundantantrieb erforderlich. Deshalb wird neben einem Redundantantrieb  $M_3$  an der Schwinge ein weiterer Antrieb  $M_2$  an der Koppel angebracht, vgl. Bild 9, S. 11. Wie noch gezeigt wird, kann unter zusätzlichen Bedingungen auf zwei weitere redundante Antriebe verzichtet werden. In Bild 42 sind außerdem alle Fundamentkräfte mit den zugeordneten virtuellen Koordinaten angetragen.



**Bild 42:** Fundamentkräfte des Mechanismenprüfstandes – Kurbelschwinge

Bei der Kurbelschwinge ergeben sich unter Anwendung der Gleichung (37) und für  $\varphi = \Omega t$  die Fundamentkraftkomponenten wie folgt:

$$f_{1x} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} M_2 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} M_3 - \left[ \frac{\partial m_{\varphi x}}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{\varphi \varphi}}{\partial x} \right] \Omega^2 \quad (43)$$

$$f_{1y} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} M_2 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} M_3 - \left[ \frac{\partial m_{\varphi y}}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{\varphi \varphi}}{\partial y} \right] \Omega^2 \quad (44)$$

$$f_{4v} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial v} M_2 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial v} M_3 - \left[ \frac{\partial m_{\varphi v}}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{\varphi \varphi}}{\partial v} \right] \Omega^2 \quad (45)$$

$$f_{4w} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial w} M_2 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial w} M_3 - \left[ \frac{\partial m_{\varphi w}}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{\varphi \varphi}}{\partial w} \right] \Omega^2 \quad (46)$$

$M_1$  erscheint **nicht** in den obigen Gleichungen, das Moment  $M_1$  muss zur Aufrechterhaltung des Bewegungszustandes die folgende Nebenbedingung erfüllen:

$$M_1(\varphi) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{\varphi \varphi}}{\partial \varphi} \Omega^2 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \varphi} M_2 - \frac{\partial \alpha_3}{\partial \varphi} M_3 \quad (47)$$

Mit den Gleichungen (43) bis (46) wird klar, dass so nur zwei Gelenkkräftkomponenten, z.B.  $f_{1x}$  und  $f_{1y}$ , ausgeglichen werden könnten. Es **fehlen zwei Steuermomente**.

Zwei weitere 'Stellmöglichkeiten' bieten die eckigen Klammer-Terme vor  $\Omega^2$  mit den Projektionen der Masseparameter. Die Trägheitsparameter (Masse, Schwerpunktlage und Massenträgheitsmoment) können in der Regel nur passiv vor der Inbetriebnahme durch Zusatzmassen, andere Form oder anderes Material variiert werden, vgl. Kapitel 3.3.

### Zusatzbedingungen für den Ausgleich der Massenkräfte

Für eine Kurbelschwinge entsprechend Bild 26 mit symmetrischen Gliedern bzgl. der Längsachse gelten nach Bild 23, S. 25 für die körperfesten Koordinaten  $\xi_{S2} = s_2$  und  $\xi_{S4} = s_4$  nach Gl. (13) die folgenden Massenausgleichsbedingungen:

$$s_2 = -l_2 \frac{m_3}{m_2} \left(1 - \frac{s_3}{l_3}\right) \quad \text{und} \quad s_4 = -l_4 \frac{m_3}{m_4} \frac{s_3}{l_3}$$

Diese Bedingungen sind unabhängig vom Zustand (Kurbelwinkel  $\varphi$  und Kurbelwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$ ) des Mechanismus. Bei Einhaltung dieser zwei Bedingungen verschwinden die **resultierenden** Fundamentkräfte infolge der Trägheitswirkung auf das Maschinengestell, es verbleibt jedoch das resultierende Gestellmoment (Bild 27 S. 32).

Für die Kräfte  $\mathbf{f}_1^o$  und  $\mathbf{f}_4^o$  (Index  $^o$  bedeutet ohne  $M_2$  und  $M_3$ ) folgt aus Gl. (43)-(46):

$$0 = \mathbf{f}_1^o + \mathbf{f}_4^o = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \end{pmatrix}^o + \begin{pmatrix} f_{4x} \\ f_{4y} \end{pmatrix}^o \quad (48)$$

Die entsprechenden eckigen Klammer-Terme in Gl. (43) bis (46) müssen sich aufheben, dann verschwinden die resultierenden Kräfte bei jedem  $\Omega$  bzw. bei jeder Drehzahl.

Da für die Kurbelschwinge weiter gilt:

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} = -\frac{\partial \alpha_i}{\partial v} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} = -\frac{\partial \alpha_i}{\partial w} \quad (49)$$

wird dieser Massenausgleich durch die zugeschalteten Redundantantriebe  $M_2$ ,  $M_3$  nicht beeinflusst. Es sind somit zwei weitere 'Stellmöglichkeiten' bzw. Gleichungen gefunden.<sup>1</sup>

#### 4.3.2 Berechnung der Sollmomentenverläufe zur Vorsteuerung

Nach Realisierung des Massenausgleiches mit Gl. (48) können die Sollmomente  $M_2$  und  $M_3$  für den Ausgleich aller Fundamentkraftkomponenten bei gegebenem Bewegungszustand  $\Omega$  mit den Gleichungen (43) bis (46) berechnet werden, so dass die folgende Bedingung erfüllt wird:

$$\boxed{\mathbf{f}_1 = 0 \quad \mathbf{f}_4 = 0 \quad \implies \quad \text{Ausgleich aller Fundamentkräfte}} \quad (50)$$

Die Sollmomente für den Fundamentkraftausgleich ohne aktive äußere Kräfte sind in Bild 43 für eine Drehzahl von 800 1/Min. aufgezeichnet.

Infolge des quadratischen Einflusses der Drehzahl auf die Momente wären für den vollständigen Ausgleich der Fundamentkräfte bei der Drehzahl 2400 1/Min. maximale Stellmomente von ca. 70 Nm notwendig. Für den Hauptantrieb verschwindet das berechnete Moment  $M_1$ , wenn Reibung und Arbeitswiderstände unberücksichtigt bleiben. Als resultierendes Moment auf das Gestell  $M_{Res}$  verbleibt durch die von den Lagerböcken getrennte Motorabstützung bei diesem aktiven Ausgleich aller Fundamentkräfte:

$$M_{Res} = M_1 + M_2 + M_3 \neq 0 \quad (51)$$

<sup>1</sup>Allerdings können hier nicht einbezogene aktive äußere Störkräfte  $\mathbf{f}_{P_i}$  den Gesamtimpuls beeinflussen und damit dem „vollständigen Ausgleich“ der Massenkräfte überlagert sein.

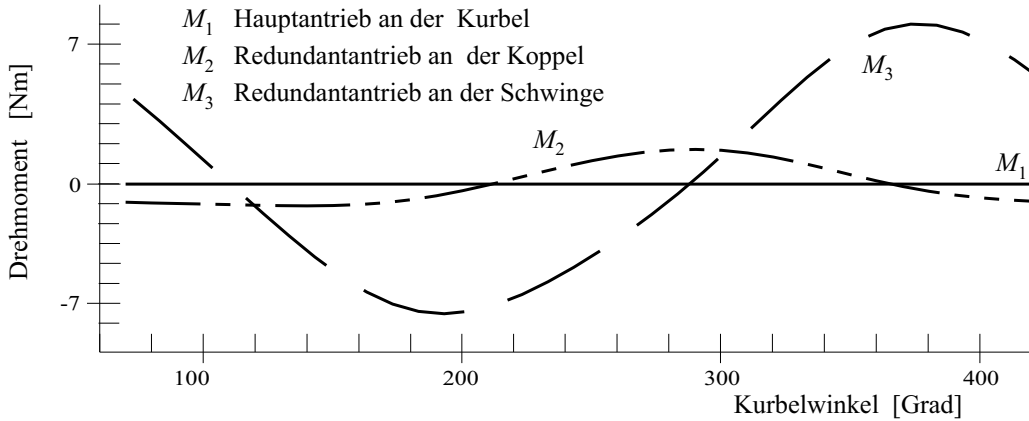


Bild 43: Sollmomentenverläufe für den Fundamentkraftausgleich bei  $n = 800 \text{ 1/min}$

Mit der Möglichkeit, bei gegebenem Bewegungszustand  $\dot{\varphi}(\varphi) = \Omega$ , die Stellmomente  $M_2$  und  $M_3$  durch Lösung des linearen  $4 \times 4$  Gleichungssystems (43) bis (46) mit den Nebenbedingungen aus Gl. (48) zu berechnen, scheint eine einfache Lösung für eine Vorsteuerung der Servoantriebe gegeben. Doch leider hängen die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems vom Kurbelwinkel ab und auch die Winkelgeschwindigkeit wird im realen Betrieb einer Maschine nie über eine volle Kurbelumdrehung konstant bleiben, vgl. Kapitel 3.4 und 3.5.

### 4.3.3 Regelungskonzept zum Ausgleich aller Fundamentkräfte

Im Rahmen der bisherigen Überlegungen wurden prinzipiell die Steuerbarkeit von Gelenkkräften geklärt und Sollmomente berechnet. Auf Grund von Modellabweichungen und Störungen im Betrieb sind jedoch Abweichungen von den gewünschten Gelenkforceverläufen unvermeidbar. Zum Zwecke eines besseren dynamischen Ausgleiches wird eine Rückführung der Kräfte über einen Regelkreis vorgesehen.

Hier soll der allgemeine Ansatz zur Regelung am Beispiel der Kurbelschwinge mit den Stellgrößen  $M_1, M_2, M_3$  und den Regelgrößen  $\varphi, \dot{\varphi} = \Omega$  bzw.  $f_{1x}, f_{1y}, f_{4v}, f_{4w}$  (Bild 42) entwickelt werden. Bei dem Konzept nach Bild 44 wird von einer möglichen Kaskadierung der Teilaufgaben ausgegangen. Die kommerzielle analoge Drehzahlregelung des Kompletantriebes  $M_1$  hat mit einem ausreichenden Motormoment die Sollbewegung ( $\dot{\varphi}(\varphi) = \Omega$ ) zu sichern, während im **digitalen Kraftregelkreis** für  $f_{1x}, f_{1y}$  die Momentenregelung der Kompletantriebe  $M_2$  und  $M_3$  genutzt wird. Es ist ausreichend, mit  $M_2$  und  $M_3$  nur die Kraft  $\mathbf{f}_1$  auszuregulieren, da infolge des „vollständigen“ Ausgleiches der Massenkräfte nach Gl. (48) gilt:  $-\mathbf{f}_4 = \mathbf{f}_1$ .

Den Zusammenhang zwischen den Kraftregelgrößen  $\mathbf{f}_1 = (f_{1x}, f_{1y})^T$  und Stellgrößen  $\mathbf{u}_g = (M_3, M_2)^T$  liefern die Gleichungen (43) und (44). Die Mehrgrößenregelung ist mit einer beliebigen Störkraft  $\mathbf{f}_{ai}$  entsprechend Gl. (37) S. 52 wie folgt formulierbar:

$$\begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_3 \\ M_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial m_{\varphi x}}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{\varphi \varphi}}{\partial x} \\ \frac{\partial m_{\varphi y}}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{\varphi \varphi}}{\partial y} \end{pmatrix} \Omega^2 + \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_{ai}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{ai}}{\partial y} \end{pmatrix} \mathbf{f}_{ai} \quad (52)$$

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{J}^T(\varphi) \cdot \mathbf{u}_g - \mathbf{g}(\varphi, \Omega) + \mathbf{f}_{axy} \longrightarrow 0 \quad (53)$$

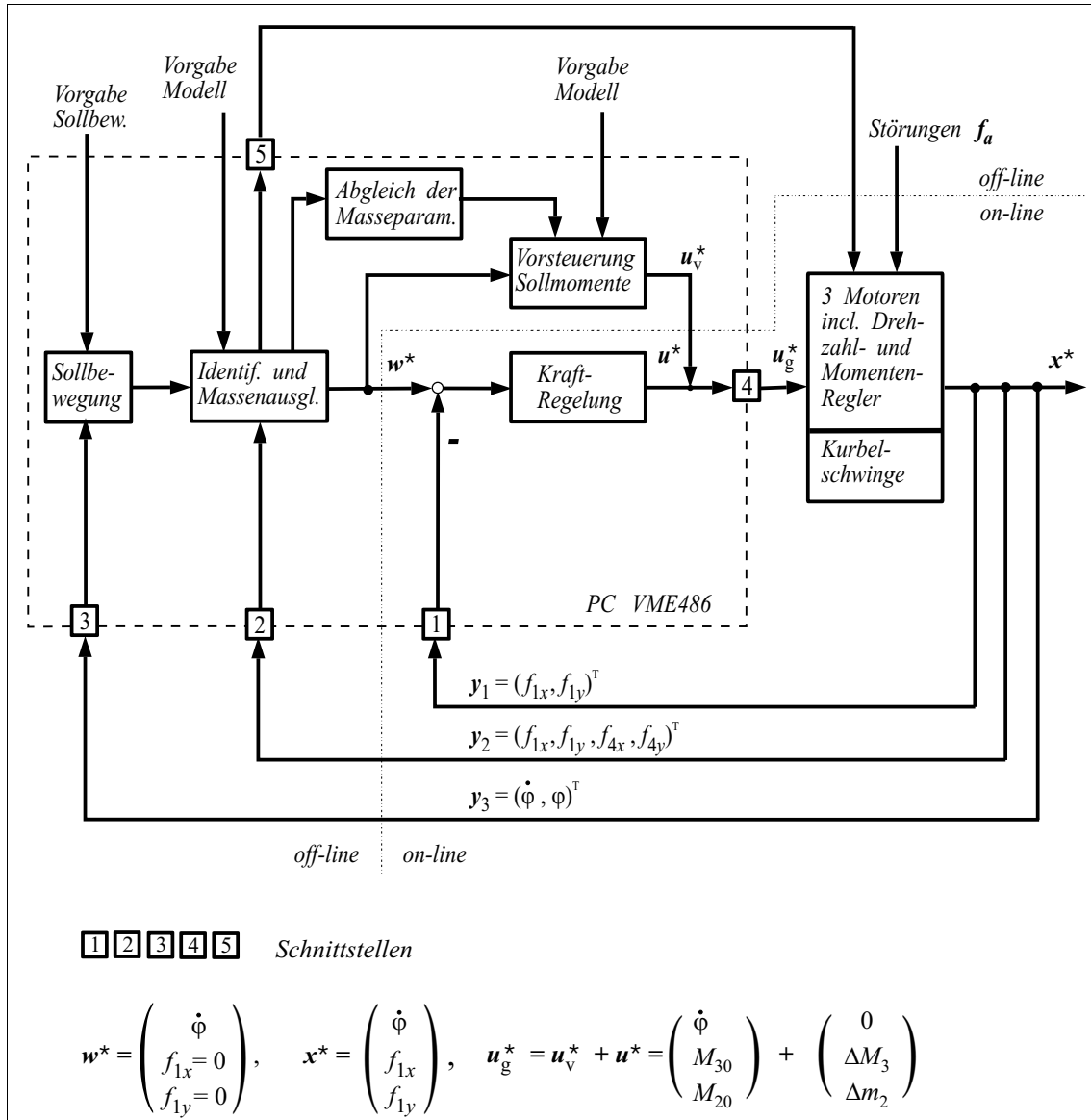


Bild 44: Funktionsprinzip der digitalen Kraftregelung einer Kurbelschwinge

Der Stellvektor  $\mathbf{u}_g$  kann in Vorsteuer- und Reglermomente aufgeteilt werden:

$$\mathbf{u}_g = \begin{pmatrix} M_3 \\ M_2 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_o + \Delta \mathbf{M} = \mathbf{u}_v + \mathbf{u} \tag{54}$$

wobei die periodischen Vorsteuermomente  $\mathbf{u}_v(\varphi, \Omega) = \mathbf{M}_o$  je nach Arbeitsdrehzahl ( $\cong \Omega$ ) off-line entsprechend (52) ohne  $\mathbf{f}_{axy}$  aus folgender Bedingung berechnet werden können:

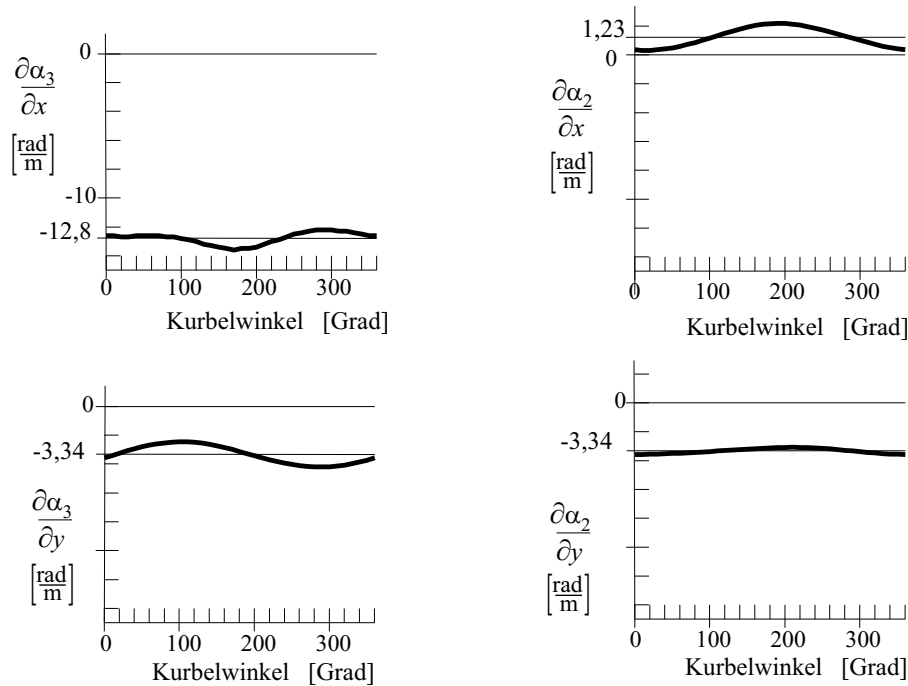
$$\mathbf{J}^T(\varphi) \cdot \mathbf{u}_v(\varphi, \Omega) - \mathbf{g}(\varphi, \Omega) = 0 \tag{55}$$

Einsetzen von (54) und (55) in die Gleichung (53) ergibt die Regelaufgabe:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{J}^T(\varphi) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f}_{axy} \longrightarrow \text{Min.} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{z} \longrightarrow \text{Min.} \end{aligned} \tag{56}$$

Die Regelgröße  $\boldsymbol{x}$  (Kräfte) ist proportional zur Steuergröße  $\boldsymbol{u}$  (Momente der Redundantantriebe). Die Koeffizienten in der Stellmatrix  $\boldsymbol{B}$  hängen vom Kurbelwinkel  $\varphi$  ab, siehe Bild 45.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -12.8 & 1.23 \\ -3.34 & -3.34 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{m}} \quad (57)$$



**Bild 45:** Koeffizienten von  $\boldsymbol{B}$  (Jacobimatrix) für die Kurbelschwinge

Beim ersten Entwurf des Reglers werden die Einflussfunktionen  $\frac{\partial \alpha_i}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \alpha_i}{\partial y}$  ( $i=1,2$ ) durch konstante Koeffizienten angenähert. Im Gegensatz dazu kann zur off-line Berechnung der Vorsteuerermomente  $\boldsymbol{u}_v$  die zeitveränderliche Matrix  $\boldsymbol{B}$  verwendet werden.

Die Matrix  $\boldsymbol{B}$  dient weiter zur Zerlegung der **Mehrgrößenregelung** in zwei zu entwerfende Eingrößenregler, für die unvollständige stationäre Entkopplung nach FÖLLINGER [28, S. 374].

Bei der Arbeit der Maschine im Dauerbetrieb mit fester Drehzahl lässt sich die Vorsteuerung  $\boldsymbol{u}_v$  auch einfach mit dem linearen Gleichungssystem

$$\boldsymbol{f}_{1,mes}(\varphi, \Omega) = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u}_v(\varphi, \Omega) \quad (58)$$

aus den gemessenen zwei Komponenten der Kraft  $\boldsymbol{f}_{1,mes}$  berechnen. Die Kurbelschwinge wird dafür bei ausgeschalteten Redundantantrieben in den Betriebszustand mit der Drehzahl entsprechend  $\Omega$  versetzt. Gegenüber einer Rechnung nach Gleichung (55) sind bei diesem Vorgehen die Projektionen der Trägheitskräfte in  $\boldsymbol{g}(\varphi, \Omega)$  nicht erforderlich und ebenso wie die mitgemessenen Störkräfte bereits kompensiert.

### Resümee:

Das System zur Kraftregelung mit Redundantantrieben weist im mechanischen Teil theoretisch ein **reines P-Verhalten** auf. Der Motor wird mit PT1-Verhalten angenähert. Weitere Übertragungsglieder kommen hinzu. Unter der Voraussetzung der stationären Entkopplung des Mehrgrößensystems kann deshalb je Kraftkomponente ein **PID-Regler** verwendet werden.

## 4.4 Experimente zur Kraftregelung mit redundanten Antrieben

### 4.4.1 Hardware zur Regelungstechnik

Dem speziellen Aufbau des Mechanismenprüfstandes widmet sich Kapitel 2.1. Das Zusammenspiel der Hardwarekomponenten veranschaulicht Bild 46. Hier sind auch die 12-Bit und 16-Bit DA bzw. AD-Wandlerkarten und Digital-IO-Karten benannt.

Eine hohe Flexibilität wird dadurch erreicht, dass über Software und PC der Ablauf bei verschiedenen Teilversuchen gesteuert werden kann, z.B. das Anfahren auf Betriebsdrehzahl, die Zuschaltung der Kraftmessung, das Zuschalten der redundanten Motoren  $M_2$  und  $M_3$ .

Die Programmierung erfolgte in BORLAND C++. Zur Nutzung des Timers liegen ASSEMBLER-Routinen vor. Taktraten von 3600 Hz zur Messung und Steuerung sind damit realisierbar, auch wenn die Zeitverzögerung von der Momentenvorgabe bis zur Kraftwirkung etwa 5 ms beträgt. Die Verzögerungszeit resultiert vor allem aus dem 100 Hz Tiefpassfilter im Ladungsverstärker.

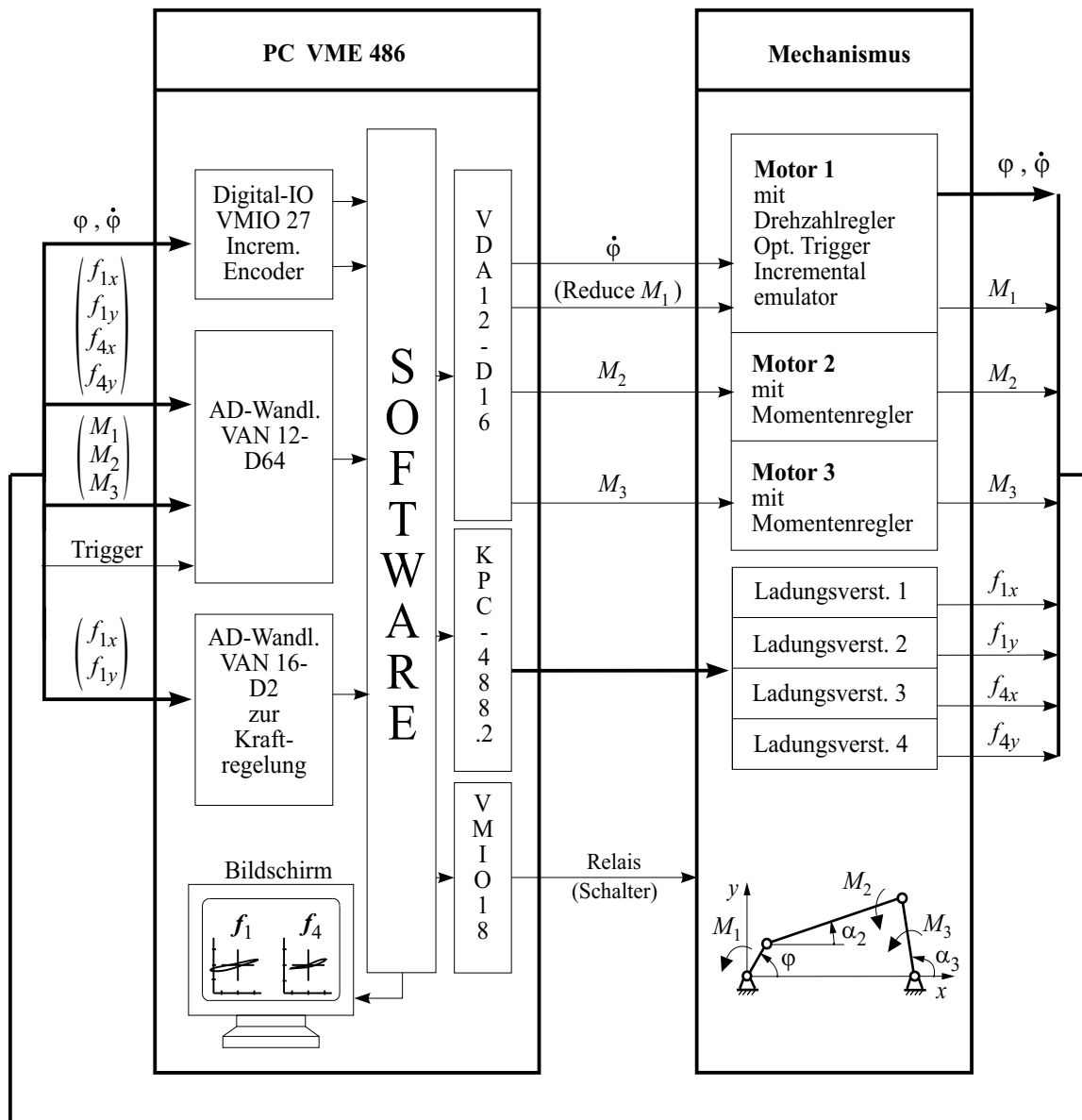
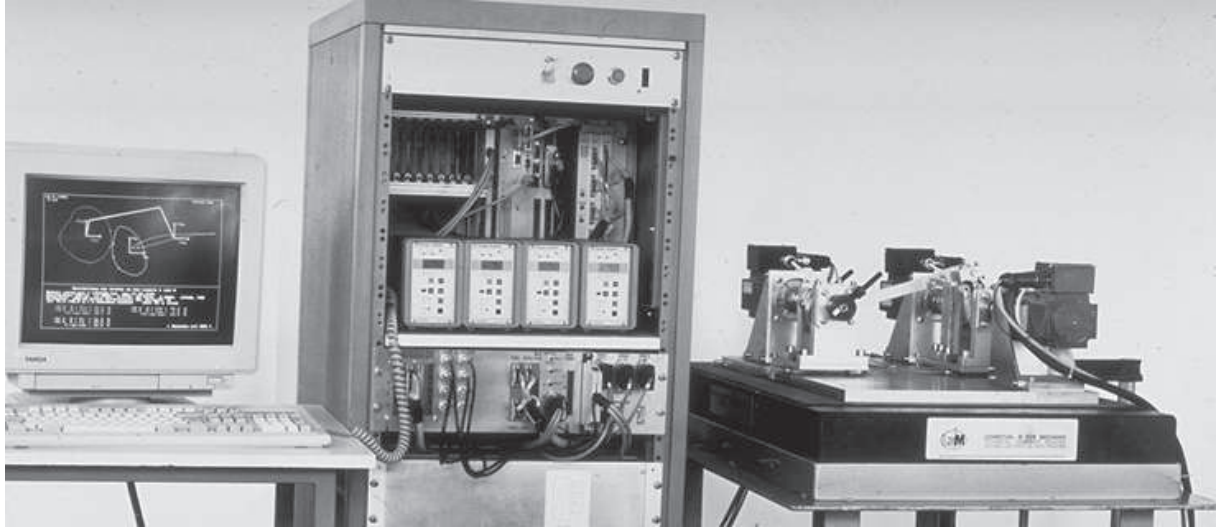


Bild 46: Schema zum Gesamtaufbau des Mechanismenprüfstandes

Einen kurzen Überblick des Versuchsstandes vermittelt nochmals das Foto (Bild 47) aus der ersten Zeit der Untersuchungen.

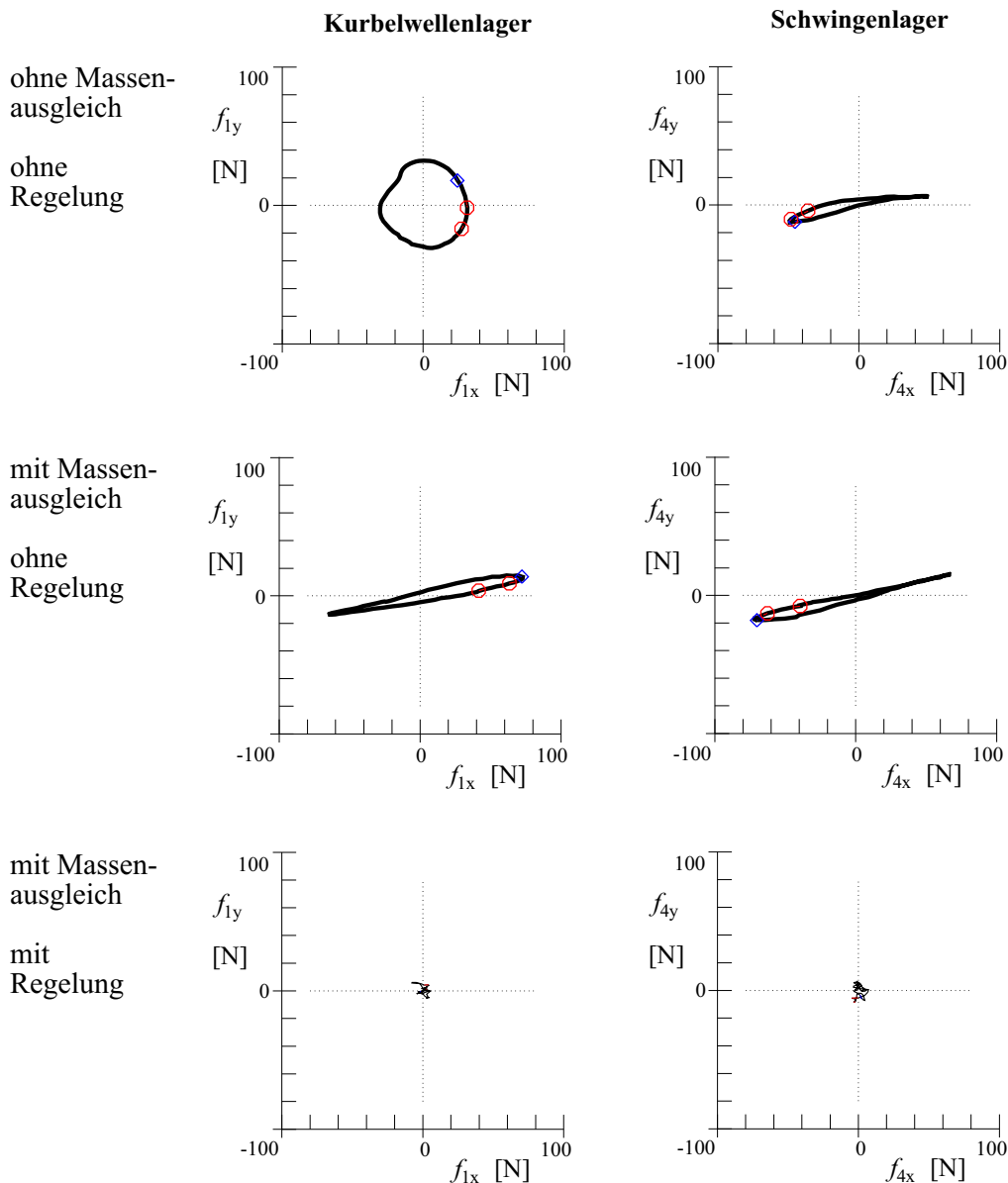


**Bild 47:** Gesamtaufbau des Mechanismenprüfstandes mit Redundantantrieben



## 4.4.2 Messergebnisse mit PID-Regelung

Mit Bild 48 werden die Schritte beim Ausgleich aller Fundamentkräfte der Kurbelschwinge mit etwa 600 1/min deutlich. Eine Raute ( $\diamond$ ) markiert die Kräfte für die Kurbelstellung  $\varphi = 0$ . Die Kreise ( $\circ$ ) kennzeichnen darauf folgende Werte und deuten damit die Drehrichtung an. Ohne Massenausgleich kompensieren sich die Kräfte  $\mathbf{f}_1$  und  $\mathbf{f}_4$  nicht. In der Bildmitte heben sich dagegen die beiden Lagerkräfte in jeder Kurbelstellung gegenseitig auf (Massenkraftausgleich), während mit Kraftregelung beide Kräfte nahezu ganz verschwinden.

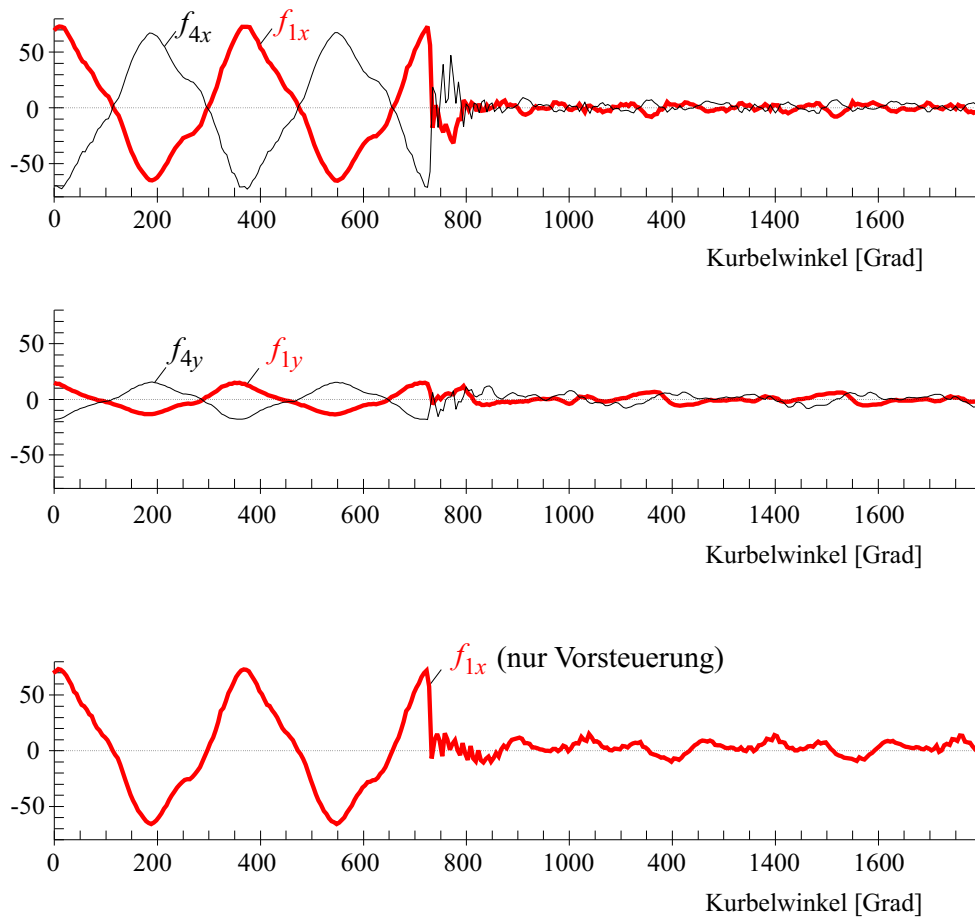


**Bild 48:** Polardiagramme der Kräfte  $\mathbf{f}_1$  und  $\mathbf{f}_4$  beim Fundamentkraftausgleich

Die Zeitschriebe in Bild 49 zeigen ebenfalls den Kraftausgleich, nach zwei Kurbelumkehrungen wird der Regler zugeschaltet. Der Massenausgleich wird bereits vor dieser Messung mit den Ausgleichsmassen eingestellt, die Fundamentkräfte  $\mathbf{f}_1$  und  $\mathbf{f}_4$  heben sich dadurch sowohl ohne als auch mit Regelung auf. Eine Gelenkkraft  $f_{1x}$  im Bereich von  $\pm 70$  N kann mit dem

verfügbaren Stellmoment von  $\pm 5$  Nm des Motors  $M_3$  und  $\pm 2$  Nm des Motors  $M_2$  ausgeglichen werden. Allerdings bleiben auch mit der Regelung geringe Restkräfte als höherfrequente Störung bestehen.

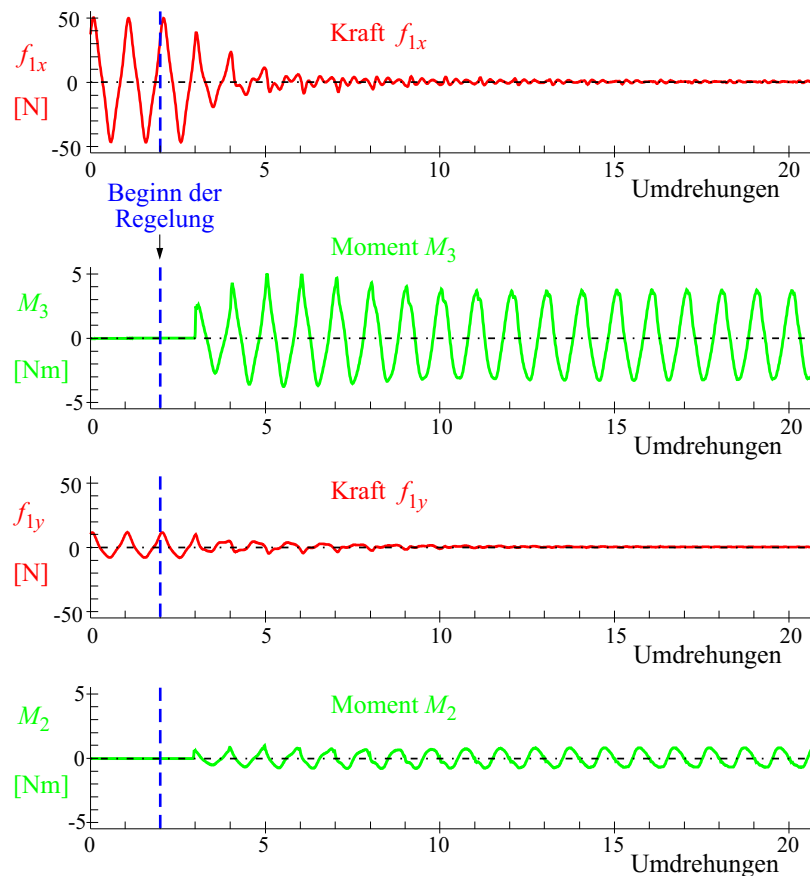
Im Experiment hat sich die Verwendung einer Vorsteuerung bewährt, weil damit die rückzuführenden Kraftsignale wesentlich schwächer sind und mit einer feineren Auflösung gemessen werden können.



**Bild 49:** Zeitschriebe der Kraftkomponenten beim Fundamentkraftausgleich

### 4.4.3 Bessere Ergebnisse durch eine Lernregelung

Bisher konnten mit einem reinen PID-Regler zwar die Kräfte deutlich gesenkt werden (Bild 49), infolge von Tot- und Verzugszeit blieben jedoch hochfrequente Reststörungen nahe 10 %. Die Ausnutzung der zyklischen Arbeitsweise der Maschine durch eine Lernregelung bringt bessere Ergebnisse ([4],[101] und [103]), wie Bild 50 mit einer Messung bei 500 1/min deutlich macht.



**Bild 50:** Aktiver Kraftausgleich mit Lernregelung

Die Lernregelung entsprechend Bild 51 speichert nach der Kraftmessung über eine volle Umdrehung die berechneten Stellmomente inkl. der vom Regler bestimmten Anteile und schaltet diese erst einen Zyklus später in der richtigen Kurbelstellung zu. Die Lagerückführung des Kurbelwinkels synchronisiert die Messung der Kräfte und das Aufschalten der Stellmomente. Von Zyklus zu Zyklus können die gespeicherten Stellmomentenwerte verbessert werden, das System lernt. Totzeitprobleme wie beim PID-Regler sind damit beherrschbar.

Für die anschließenden Betrachtungen sollen zusätzlich zu Bild 44 folgende Abkürzungen gelten:

$k$	Index des Zyklus (eine Kurbelumdrehung)
$T_P$	Periodendauer bzw. Zykluszeit
$T_A$	Abtastzeit
$\mathbf{u}(n, k)$	Stellgröße zur diskreten Zeit $t = n T_A$ innerhalb des Zyklus $k$
$T_t$	Verzugs- bzw. Totzeit der Regelstrecke

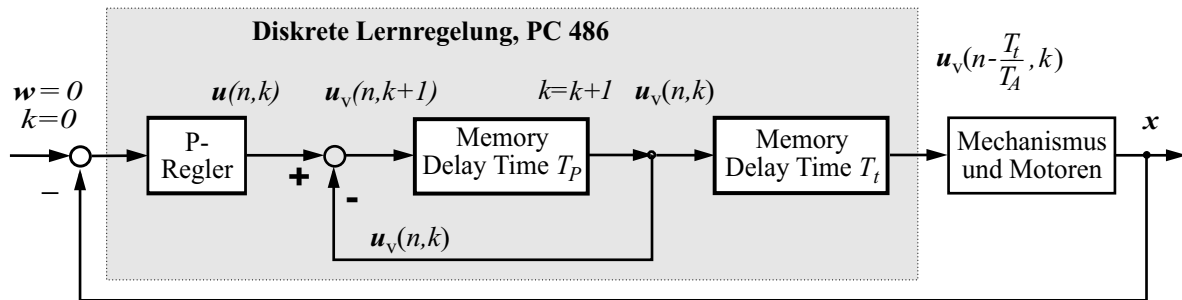


Bild 51: Regelkonzept der digitalen Lernregelung

Die **Konvergenz der Lernregelung** und Reglerauslegung folgt aus einer Reihenentwicklung. Soll die Eingrößenregelung  $f = f_x \rightarrow 0$  konvergieren, so muss die Folge der Kraftwerte von Zyklus zu Zyklus bei der gleichen Kurbelstellung  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k, \dots$  den Grenzwert Null besitzen. Mit dem Verstärkungsfaktor  $\gamma$  (P-Regler) folgt für das Stellmoment:

$$M_k = -\gamma f_{k-1} + M_{k-1} \quad \text{mit } M_1 = 0 \quad \text{und dem Index des Zyklus } k = 1, 2, 3, \dots \quad (59)$$

Mit dem Mechanikmodell entsprechend Gl. (53) bis (56) sowie mit  $a = b\gamma$  ergeben sich die Kräfte

$$\begin{aligned} f_1 &= -g && = -g \\ f_2 &= -g + b M_2 = -g + b [-\gamma f_1] && = -g - a [f_1] = -g(1 - a) \\ f_3 &= -g + b M_3 = -g + b [-\gamma f_2 + M_2] && = -g - a [f_2 + f_1] = -g(1 - a)^2 \\ \dots & && \\ f_k &= -g + b M_k = -g + b [-\gamma f_{k-1} + M_{k-1}] = -g - a \sum_{n=1}^{k-1} f_n && = -g(1 - a)^{k-1} \end{aligned}$$

Die **Konvergenz** der Kräfte ist gesichert, wenn  $|\rho| = |1 - a| < 1$  bzw.  $0 < a = b\gamma < 2$ . Mit  $\gamma$  kann der Regler entworfen werden, wobei mit  $b\gamma < 1$  kein 'overdrive' erzeugt wird, d.h. keine alternierende Folge wie mit  $1 < b\gamma < 2$ . Für die Regelung  $f_{1x} \Rightarrow 0$  mit  $M_3$  und  $b_{11} = 12,8$  gilt:  $\gamma < 0,156$ , besser  $\gamma < 0,078$  (wegen overdrive).

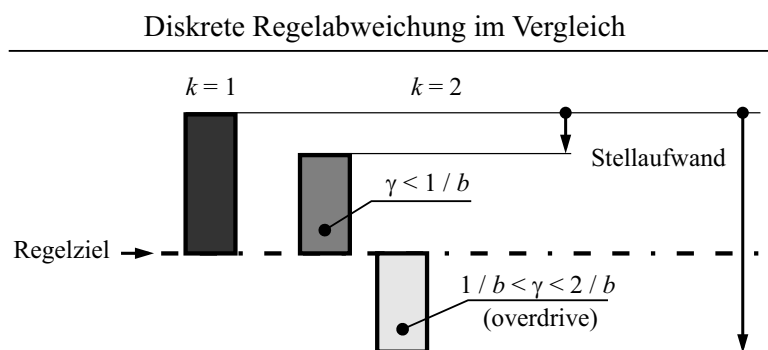


Bild 52: Stellmoment bei der Lernregelung mit und ohne 'overdrive'

Unter 'overdrive' wird der Fall verstanden, dass die Stellmomente um das Regelziel alternierend wechseln, aber konvergieren. Daraus folgt ein erhöhter Stellaufwand.

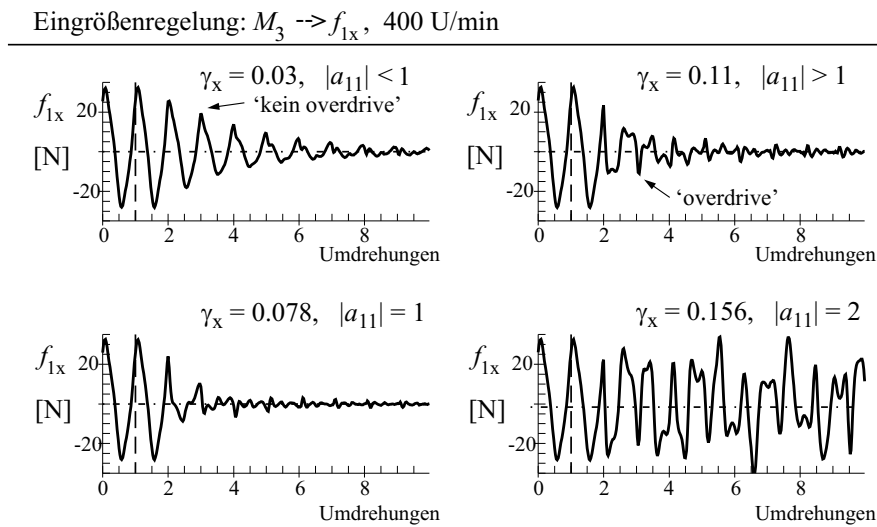
Für Zweigrößenregelung folgt nach der Reihenentwicklung:

$$\gamma_x \left( \frac{b_{12}b_{21}}{b_{22}} - b_{11} \right) < 2 \quad \gamma_y \left( \frac{b_{12}b_{21}}{b_{11}} - b_{22} \right) < 2 \quad (60)$$

Mit den Parametern des Mechanismenprüfstandes ergibt sich für die Zweigrößenregelung:

$$\gamma_x < 0,071, \gamma_y < 0,273 \text{ ohne 'overdrive'}$$

In Bild 50 sind  $\gamma_x = \gamma_y = 0,06$  verwendet.



**Bild 53:** Lernregelung mit unterschiedlicher verstärkungsabhängiger Konvergenz

#### 4.4.4 Frequenzselektiver Gelenkkräftausgleich mit Lernregelung

Bisher galt die Zielstellung, Gelenkkräfte durch redundante Antriebe vollständig auszugleichen, wofür relativ hohe Aktmomente gebraucht werden. Für die Optimierung des Schwingungsverhaltens kann es jedoch oft genügen, die Anregung bestimmter Frequenzen zu vermeiden. Ein frequenzselektiver Ausgleich wäre dann ausreichend. Damit können Resonanzen mit Biegeeigenfrequenzen einzelner Getriebeglieder, Schwingungen von Wälzlagern oder Übertragungselementen wie Zahnriemen vermieden werden. Oft liegen auch die Grundfrequenzen entsprechend der Maschinendrehzahl deutlich unter den Eigenfrequenzen und gerade höhere Harmonische infolge der nichtlinearen Übersetzung der Mechanismen verursachen die Resonanz. Mit passiven Methoden gleichen auch DRESIG et al. [17] einzelne Harmonische aus.

Als Beispiel soll in dieser Arbeit der Ausgleich der 3. Harmonischen der Fundamentkraft im Kurbelwellenlager  $f_1$  vorgestellt werden [101], [4]. Hier erweist sich das Konzept der Lernregelung wiederholt als vorteilhaft.

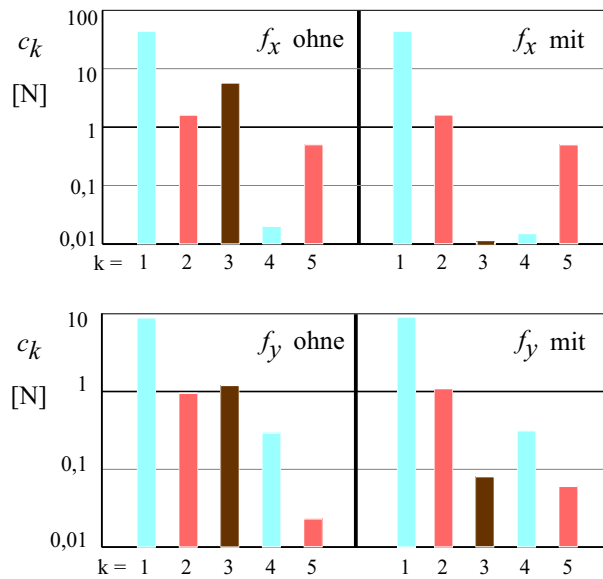
Das Bild 54 zeigt Ergebnisse am Mechanismenprüfstand, die Fourierkoeffizienten ohne und mit zugeschalteter Lernregelung bei einer Drehzahl von 500 1/min im Dauerbetrieb. Gegenüber der dominierenden Grundharmonischen (ca.  $\pm 50$  N) hebt die logarithmische Skalierung die höheren Harmonischen besonders hervor. Die 3. Harmonische (ursprünglich  $f_{1x} \approx \pm 6$  N) verschwindet nahezu, während die anderen Kraftanteile erhalten bleiben.

Für die Fourierreihe jeder periodischen Kraftkomponente gilt:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(\Omega kt - \beta_k) \quad (61)$$

Wenn die 3. Motorordnung der Regelgröße  $x$  mit der Lernregelung ausgeglichen werden soll, dann ist folgendes  $x_R$  zu minimieren:

$$x_R = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(\Omega kt - \beta_k) - c_3 \sin(3\Omega t - \beta_3) \quad (62)$$



**Bild 54:** Ausgleich der 3. Harmonischen von  $f_1$

Ein Vergleich der verbrauchten Energie über eine Kurbelumdrehung zwischen dem vollständigen Ausgleich und dem alleinigen Ausgleich der 3. Harmonischen macht den Vorteil sehr deutlich. Die erforderliche Energie

$$W_i = \int_0^{2\pi} |M_i(\varphi)| d\varphi \quad (63)$$

für die redundanten Motoren  $M_i$  in Tabelle 5 weist in der Summe eine Reduktion der Stellenergie auf 37,1 % aus. Der Mechanismenprüfstand lief dazu bei einer Drehzahl von 500 1/min.

Tabelle 5: Energieverbrauch der Motoren  $M_2$  und  $M_3$

W[J]	Vollst. Ausgleich	Ausgleich der 3. Harmonischen
$W_3$	14.73 J	5.62 J
$W_2$	3.68 J	1.21 J
$\sum_i$	18.41 J	6.83 J
%	100 %	37,1 %

#### 4.4.5 Entlastung des Hauptantriebes durch redundante Antriebe

Anstelle der einfachen Sollfunktion  $f(\varphi)=0$  kann die Lernregelung im Prinzip auch jeden beliebigen Zeitverlauf einer Gelenkkraft sichern, er muss nur periodisch sein mit der Grundfrequenz des Mechanismus. Die verfügbaren Motormomente begrenzen auch die freie Wahl der Sollkraftverläufe. Eine umlaufende Gelenkkraft wäre z.B. durch eine Sinus- bzw. Cosinusfunktion für die x- bzw. y-Komponente zu erreichen, womit ein Kontaktverlust in einem spielbehafteten Drehgelenk vermieden werden kann.

Hier soll mit einer Lernregelung wie im Abschnitt 4.4.3 an der Kurbelschwinge die Rückwirkung der redundanten Servoantriebe an Schwinge  $M_3$  und Koppel  $M_2$  auf den Hauptantrieb  $M_1$  diskutiert werden. Mit redundanten Antrieben kann die erforderliche wechselnde kinetische Energie zur ungleichmäßigen Bewegung der Mechanismenglieder in Kooperation mit dem Originalantrieb an der Kurbel erbracht werden. Idealerweise sollte der schnell drehende Hauptantrieb die etwa konstanten Arbeitswiderstände (z.B. Reibmoment) überwinden.

Die redundanten Antriebe können Wechselmomente aufbringen und sollten möglichst nahe am Ort der wechselnden Trägheitskräfte angebracht sein. Auf diese Weise lässt sich ähnlich wie auch mit Energiespeichern (Federn, Schwungmassen) die Ungleichmäßigkeit der Antriebsbewegung bzw. die Abweichung von der Sollbewegung reduzieren.

Bild 55 enthält das Motormoment  $M_1$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  des Hauptantriebes als Messschrieb. Im Ausgangszustand mit ausgeschalteten Redundantantrieben schwankt  $M_1$  zwischen  $-0,25$  Nm und  $0,47$  Nm. Der Drehzahlregler kann zwar die Drehzahl (Mittelwert) einhalten,  $\dot{\varphi}(t)$  schwankt aber zweimal mit  $\pm 15$  1/min während einer Kurbelumdrehung, woraus ein Ungleichförmigkeitsgrad nach Gl. (26) S. 38 von  $\delta_o = 8,6\%$  folgt. Im unteren Teil sind die redundanten Servomotoren mit der Lernregelung aus Abschnitt 4.4.3 zugeschaltet. Der Ungleichförmigkeitsgrad verbessert sich mit  $\delta_{ReAnt} = 2,9\%$  deutlich.

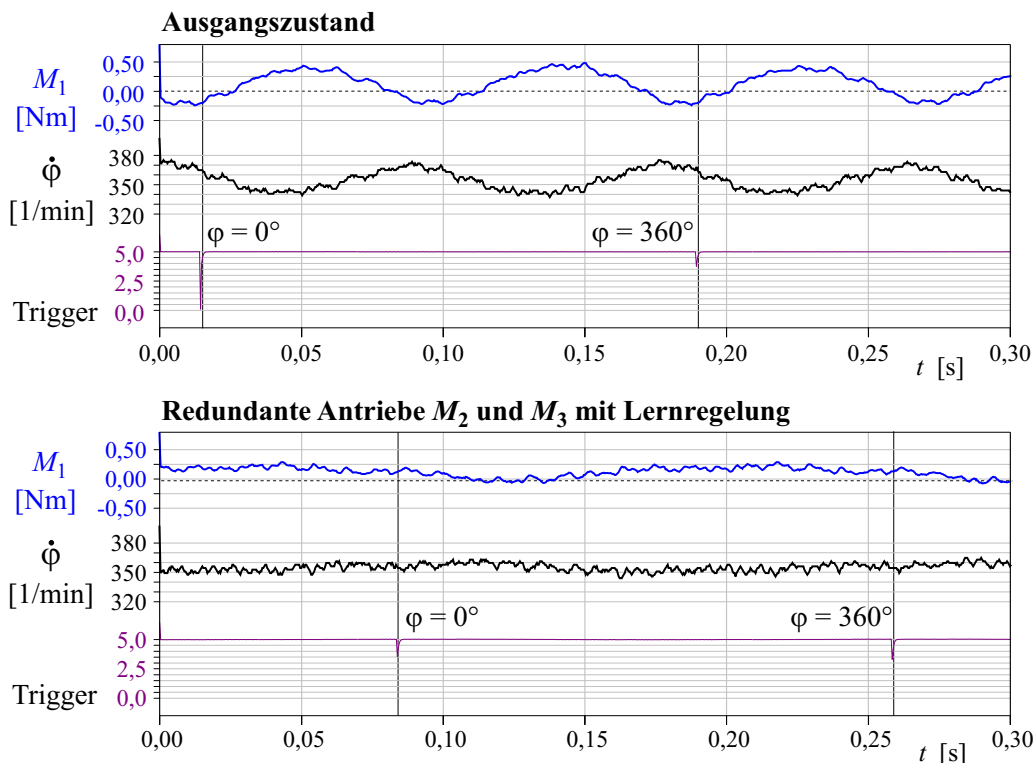


Bild 55: Rückwirkung redundanter Motoren auf den Hauptantrieb bei 350 1/min

Das Ziel verschwindender Kurbellagerkräfte entspricht einer Entlastung des Hauptantriebs. Sowohl  $M_1(t)$  als auch  $\dot{\varphi}(t)$  weisen nur noch hochfrequente Störungen (z.B. durch Motorregler, Frequenzumrichter und EMV) auf, sind aber gegenüber dem Ausgangszustand als konstant anzusehen.

Die redundanten Antriebe entlasten den Hauptantrieb  $M_1$  ähnlich wie bei Aufschaltung der Eigenbewegung in Kapitel 3.4.2 (ab S. 35), allerdings kann jetzt die ursprünglich gewünschte konstante Winkelgeschwindigkeit der Kurbel gesichert werden.

### **Schlussbemerkungen zum aktiven dynamischen Ausgleich**

Die theoretischen und experimentellen Ergebnisse bestätigen die Möglichkeit, dass mittels redundanter Antriebe die inneren Zwangskräfte und damit die Ursache für Schwingungserscheinungen in Mechanismen aktiv beeinflussbar sind. Anwendungen werden z.B. beim Spielausgleich im Pressenbau und bei der Lärminderung in Textilmaschinen gesehen. Interessant erscheinen generell alle hohtourigen Maschinen, die im Dauerbetrieb arbeiten.

Der aktive dynamische Ausgleich setzt die Beherrschung der Mehrkörperdynamik in Verbindung mit der Elektronik und Regelungstechnik voraus. Die Entwicklung PC-gesteuerter Messtechnik und Servo-Antriebstechnik bietet dafür einen guten Ansatz. In Zukunft werden sich die Kosten für aktive Methoden im Verhältnis zu passiven Methoden des dynamischen Ausgleiches weiter verringern, zumal der Trend zu elektronisch synchronisierten Einzelantrieben günstige Voraussetzungen schafft.



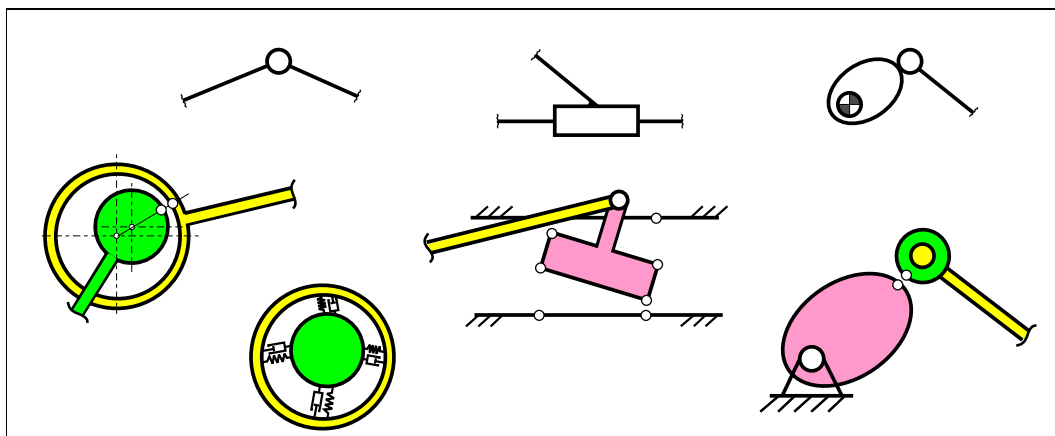
## 5 Der Starrkörper-Mechanismus mit einseitigen Bindungen

### 5.1 Einführung und Zielstellung

Kapitel 5 behandelt Mechanismen mit Spiel und Reibung. Das Hauptaugenmerk liegt auf Ansätzen zur **Modellbildung** und auf der Simulation von **Kopplungen zwischen den Körpern** (Gelenke, Kontakte u.a.). Eine ausreichende Nachbildung der komplexen Vorgänge erfordert physikalische Vorkenntnisse und Ansätze. Mit der Entwicklung der Computer- und Messtechnik sowie durch Verbesserung der theoretischen und experimentellen Methoden gelingt es immer wieder, den Modellvorrat zu erweitern und zu verfeinern. Das führt zu einer Berücksichtigung von Erscheinungen, die früher als 'Dreckeckeffekte' galten. Hinsichtlich Fragestellungen und Modellen entsprechend Bild 18 (S. 20) wendet sich jetzt das Kapitel 5 der detailliertesten Stufe 'Nichtglatte Mechanische Systeme' zu.

Jetzt sollen die **Wirkungen in den Gelenken** der Mechanismen genauer beschrieben werden. Aus Sicht der Mechanik sind Gelenke die Kontaktstellen zwischen Körpern, die bestimmte Relativbewegungen zulassen, während sie andere Bewegungsrichtungen einschränken. Der Ingenieur geht bisher in der Regel von idealen Gelenken aus: Ebene Drehgelenke mit einem Drehfreiheitsgrad (Bild 56 oben), ebene Schubgelenke mit einem Schiebefreiheitsgrad oder ebene Kurvgelenke mit einem tangentialen Schiebefreiheitsgrad und einem Drehfreiheitsgrad. Diese Modellierung ist ausreichend für den Kinematikentwurf und die Kinetostatik zur Bauteilauslegung.

Sobald die Frage nach Schwingungs- und Geräuschursachen oder Selbsthemmung gestellt wird, müssen Spiel, Stöße und Reibung modelliert werden. Damit reicht die einfache im kinematischen Schema (Bild 20, S. 23) dokumentierte Modellierung nicht mehr aus: Ein ebenes Drehgelenk erhält infolge Spiel zwei zusätzliche Schiebefreiheitsgrade, ein ebenes Kurvgelenk kann in Normalenrichtung abheben. Ein ebenes Schubgelenk muss in der Regel mit vier Kontaktstellen modelliert werden und besitzt nun 3 Freiheitsgrade, siehe Bild 56 unten.



**Bild 56:** Gelenkmodelle unterschiedlicher Modellierungstiefe

Die verfeinerte Modellbildung für Mechanismengelenke verlangt weitere geometrische Parameter und konstruktive Details, z.B. den Bolzendurchmesser, die Schieberlänge und -breite oder eine Formbeschreibung der Kontaktflächen. Sie kann sogar eine räumliche Beschreibung der Gelenke erfordern.

Eine Zwischenstufe, eine vereinfachte Variante räumlicher (3D) Mechanismen nutzt die räumliche Schichtung eben bewegter Mechanismen [117, S.7]. Damit entstehen aus einem Gestellpunkt im kinematischen Schema z.B. zwei Lagerpunkte (Lagerböcke) einer Kurbelwelle. Kräfte und Kipp-

momente stehen damit in ihrer Aufteilung kinetisch so zur Verfügung, wie sie für die Dimensionierung der Lager benötigt werden.

Mit der Modellverfeinerung steigen gleichzeitig die Anforderungen an die Parameterbeschaffung. Die Bedeutung der Messtechnik und Materialwissenschaften für die experimentelle Erfassung, Analyse und Auswertung der Vorgänge in Reib- und Stoßpaarungen darf keinesfalls übersehen werden. Die erreichbaren Fertigungsgenauigkeiten und Toleranzen setzen ebenfalls Grenzen für eine sinnvolle Modellierungstiefe.

Neben der Gelenkmodellierung sind die Modelle und Methoden von Kapitel 5 auch für die Prozessdynamik an der **Wirkstelle** von Bedeutung. Die Wirkstelle einer Verarbeitungsmaschine geht in ihrer Vielseitigkeit und Multiphysik der Vorgänge über Gelenkmodelle hinaus.

Eine Teilmenge der möglichen Prozesse lässt sich durch Masse-Masse-Kontakte mit Reibung, Kontaktverlust und Stößen beschreiben, z.B. beim Verpacken, Stanzen, Schneiden, Biegen oder Falzen verschiedener Körper und Materialien oder in Zuführeinrichtungen, bei Füge- und Montageaufgaben. Dieses Kapitel stellt somit Modellierungsmöglichkeiten für alle Kontaktstellen in Mechanismen bereit, für Gelenke und Wirkstellen.

Vor der Modellierung und experimentellen Untersuchung der Kurbelschwinge als 'Starrkörper-Mechanismus mit einseitigen Bindungen' soll durch das Kapitel 5.2 ein historischer Abriss mit Literaturhinweisen zu Reibung und Stößen gegeben werden. Besonders der Einbeziehung in die Mechanismendynamik wird dabei Beachtung geschenkt.

Das Kapitel 5.3 behandelt für ebene starre Mehrkörpersysteme die theoretischen Grundlagen genau soweit, wie dies für die Kurbelschwinge mit Spiel benötigt wird. Das schließt die Kinetik in Form von DGL, die Kontaktkinematik und die Kontaktgesetze (Reib- und Stoßgesetze) ein. Einige Lösungsalgorithmen trägt Kapitel 5.4 zusammen.

Wegen der Komplexität und Problemspezifität der 'nichtglatten' Mehrkörperdynamik wird im Kapitel 5.5.2 exemplarisch für das einfache Beispiel einer Kurbelschwinge mit Spiel am Kurbelbolzen die Theorie vollständig und Schritt für Schritt angewendet und der komplette Formelsatz für eine eigene Implementierung angegeben.

## 5.2 Literaturlauswertung und Historie

Natürlich gilt nach wie vor für die Modellbildung der Grundsatz: „So genau wie nötig, so einfach wie möglich“. Nicht jede Mechanismenauslegung muss mehrfache Reibstöße einbeziehen. Frühere Arbeiten in den 70er und 80er Jahren waren zusätzlich durch begrenzte Geschwindigkeiten und Speicherkapazitäten des Hilfsmittels Computer dazu angehalten, nach sinnvollen ingenieurmäßigen Vereinfachungen zu suchen.

Die **Mechanismendynamik** beschränkte sich darum oft auf eine Kontaktstelle, ohne die Wechselwirkung zwischen mehreren Kontakten zu erfassen, oder das System wurde nur für geschlossene Kontakte simuliert. Ein detektierter Kontaktverlust führte zum Abbruch.

Die Methode der „zusätzlichen masselosen Koppel“ (massless link) mit der Länge des Spielkreisradius hat sich für ebene Drehgelenke mit ständigem Kontakt bewährt [12]. Gleichzeitig fassen DRESIG und STELZMANN 1987 in [12] die Näherungstheorie zur Vorausberechnung möglicher Kontaktverluste in spielbehafteten Drehgelenken nach einer kinetostatischen Analyse zusammen. Sie nehmen dabei ebenfalls wie THÜMMEL 1983 bis 1985 [87], [88], [90] und [89] die Veröffentlichung von HAINES aus dem Jahr 1980 [43] als Grundlage. Die Antriebsbewegung wird dabei fest vorgegeben, Rückwirkungen der Vorgänge in den Gelenken des Mechanismus auf den Bewegungszustand des Antriebes werden vernachlässigt. **Kontaktverluste** sollen **vermieden** werden, um hochfrequente Schwingungen nach dem folgenden Stoß auszuschließen.

Als Beispiel verwendet [12] eine Schubkurbel mit Spiel (ständiger Kontakt) und Reibung am Kurbelbolzengelenk. Vereinfachungen führen auf eine nichtlineare DGL mit veränderlichen Koeffizienten für kleine zusätzliche Relativverdrehungen im Bolzengelenk und zeigen Parametererregung in Wechselwirkung mit erzwungenen Schwingungen an.

Für den Kontaktpunkt können **hochfrequente tangential Relativbewegungen des Bolzens in der Lagerschale** nachgebildet werden. Diese Näherung ist deshalb besonders wertvoll, weil sie die innere Physik dieser speziellen Pendelschwingungen (Kapitel 5.5.4) ohne Kontaktverlust aufdeckt.

Die Eigenfrequenz liegt dabei in der Regel ein bis zwei Zehnerpotenzen über der Drehfrequenz des Mechanismus, also im akustischen Bereich. Die Bewegungen und physikalischen Phänomene sind damit ein Schlüssel zur Klärung von **Lärmursachen** schnelllaufender Mechanismen. Der Vergleich von Simulationen am spielbehafteten Drehgelenk mit und ohne Reibung zeigt, dass die Entscheidung über Kontaktverlust nicht ohne Mitnahme der Reibung beantwortet werden kann. In [12] gibt es keine experimentelle Absicherung.

EICKHOFF 1996 [22] und THÜMMEL 1987 [95] nutzen die kinetostatische Analyse, um COULOMBSche Reibung in Dreh- und Schubgelenken zu berücksichtigen. Sie verwenden die Normalkräfte der reibungsfreien Analyse zur Berechnung der tangentialen Reibkräfte und bestimmen evtl. in einer zweiten Iteration erneut die Normalkräfte, jetzt mit den Reibkräften aus der ersten Iteration als äußere eingeprägte Kräfte. Für zyklisch arbeitende Mechanismen ist diese Näherung zur Abschätzung der Reibverluste recht praktikabel.

Weitere ingenieurmäßige Darstellungen von Phänomenen und Abschätzungen zur dynamischen Wirkung des Gelenkspiels in Koppelgetrieben sind bei DRESIG und VUL'FSON in [13] 1989 und [16] 1993 zu finden. Hervorzuheben sind Kontaktverluste nach einem Nulldurchgang der Gelenkkraft mit anschließenden Stößen. Besonders die Abschätzung der Vibrationskraftspitzen infolge Spiel-Stoß erscheint wichtig, da sie ein Mehrfaches der kinetostatischen Werte erreichen können, vgl. auch DRESIG, THÜMMEL 1982 [11]. Die konstruktive Auslegung der Mechanismen erfordert dann eine andere Dimensionierung.

Hochfrequente Schwingungen in spielbehafteten Gelenken sind auch **experimentell** mehrfach nachgewiesen worden, z.B von HAINES 1985 [44] oder von SENEVIRATNE und EARLES 1992 [80] und von HORIE 1986 [54].

OGAWA, FUNABASHI und HORIE [54], [34], [33] verwenden 1978 bis 1986 zwar keine Weg- und Kraftmessung in spielbehafteten Drehgelenken, weisen aber mit stroboskopischen Fotos und Messungen des Antriebsmomentes die relative Bolzenbewegung in der Lagerschale nach. Sie untersuchten eine Kurbelschwinge mit zwei spielbehafteten Gelenken an der Koppel und eine Schubkurbel mit Spiel am Kurbelbolzen. Die tangentialen und normalen Kontaktkräfte  $F_T$  und  $F_N$  werden mit Gleitreibung, viskoser Dämpfung und linearer elastischer Rückstellung modelliert:

$$F_T = \mu F_N \operatorname{sign} \dot{g}_T + d_T \dot{g}_T \quad (64)$$

$$F_N = c_N g_N + d_N \dot{g}_N \quad (65)$$

mit dem Abstand der Kontaktpunkte  $g_N$  und den Relativgeschwindigkeiten  $\dot{g}_T$  und  $\dot{g}_N$ . Die Wechselwirkung zur Antriebsbewegung, Stöße und Haft-Gleit-Übergänge sind wiederum vernachlässigt. Durch Formoptimierung einer Koppel konnte HORIE 1986 [54] die Wirkung der Trägheitskräfte auf die Zwangskräfte im spielbehafteten Kurbeldrehgelenk so gestalten, dass Kontaktverlust ausgeschlossen ist, was im Experiment eine Senkung des Schalldruckpegels um bis zu 10 dB bewirkte.

Interessante Messungen an Mechanismen mit spielbehafteten Dreh- und Schubgelenken lieferten ROSE und BAILER 1976 [77]. Sie erfassten die Zeitverläufe von Spiel (Bolzenweg, Kontaktindikator ja/nein) und Kräften in den Gelenken sowie den Antriebsmomentenverlauf, vgl. Bild 57. Sie weisen besonders auf die Erhöhung der Kraftspitzen bei zwei spielbehafteten Gelenken gegenüber nur einem Gelenk hin.

Koppelgetriebe mit Spiel in  $G_{54}$  und  $G_{34}$

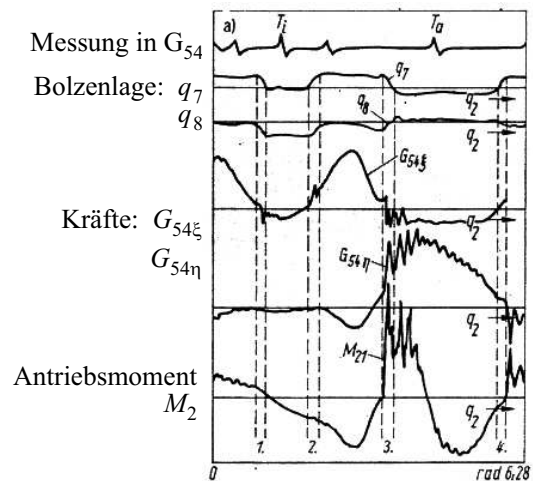
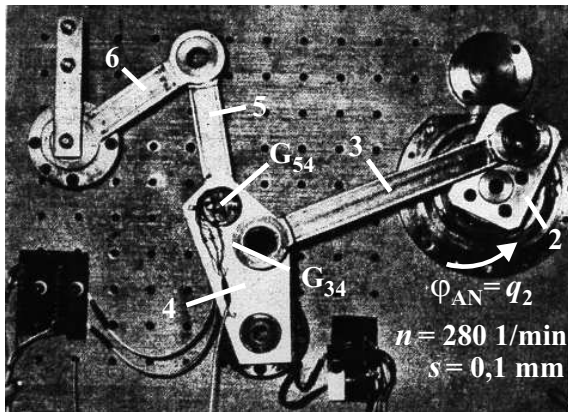


Bild 57: Experimente von ROSE und BAILER [77] an Mechanismen mit Spiel

Von dieser Forschungsgruppe wurden bereits 1976 auch Simulationen vorgelegt. HAMMERSCHMIDT [47], [46] entwirft verschiedene Modelle für spielbehaftete Drehgelenke mit Feder-Dämpfer-Elementen und zentralem Stoß (NEWTONSches Stoßgesetz) aber ohne Reibung. Die Wechselwirkungen zwischen Normal- und Tangentialbewegungen in den Kontaktpunkten konnten damit nicht erfasst werden. Auch die Zustandsübergänge bei mehreren spielbehafteten Drehgelenken sind nicht realitätsnah nachvollziehbar. Dennoch ist der Ansatz zur Gelenkmodellierung mit Feder-Dämpfer-Elementen für Schmierfilm und Lagersteifigkeit, überlagert mit einem Stoßmodell, beachtenswert. VOLMER und HAMMERSCHMIDT [121] befassen sich 1978 mit Gelenken als spielbehaftete Kontaktstellen in Mechanismen und versuchen, die störenden mechanischen Effekte durch konstruktive Maßnahmen zu vermeiden.

Physikalisch handelt es sich bei den zu modellierenden Phänomenen zum einen um **Coulombreibung mit Haft- und Gleitphasen**, die in ihrem Zusammenspiel sogar zu selbsterregten Schwingungen führen können, und andererseits um **Unilateralität (Einseitigkeit) von Kontakten**, die ein Abheben von Körpern ermöglicht und demzufolge auch deren stoßhaftes Aufsetzen beinhaltet. Beide Phänomene beeinflussen sich gegenseitig.

**Forschungsergebnisse der 'nicht-glatten' Mehrkörperdynamik** bzw. Kontaktmechanik aus anderen Anwendungsfeldern gehen in der Modellbildung schon wesentlich weiter als die Mechanismendynamik und deren Anwendung im Verarbeitungsmaschinenbau. Beispiele unter Regie von PFEIFFER an der TU München begannen 1982 mit dem Spielzeugspecht und sind durch viele Veröffentlichungen und fast 80 Dissertationen belegt. Unter ULBRICH wurden diese Arbeiten am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik weiter geführt. Hier eine Auswahl:

- 'Getrieberasseln' lastfreier Zahnräder in PKW-Antriebssträngen von KÜCÜKAY 1987 [57]
- 'Getriebehämmern' unter Last stehender Zahnräder in PKW-Antriebssträngen von PRESTL 1990 [73]

- 'Nichtlineare Dynamik von Steuertrieben in KFZ' von FRITZER 1992 [31]
- 'Kettentriebe mit Einlaufstößen, Drehstößen und Polygoneffekt' von FRITZ 1998 [30]
- 'Reibdämpfer an Turbinenschaufeln im Flugzeugbau' von HAJEK 1990 [45]
- 'Reibschwingungstilger für Stahlschornsteine' von STIEGELMEYER 2001 [84]
- 'Montageprozesse mit Robotern' von MEITINGER 1998 [61]
- 'Schlagbohrmaschinen und -hämmer' von GLOCKER u. PFEIFFER 1992 und 1996 [39], [70]
- 'Reibstöße' mit einer Wurfmaschine von BEITELSCHMIDT 1998 [2]
- 'Transportvorgänge in Rüttelförderern' von WOLFSTEINER 1999 [124], [125]
- 'CVT-Kettentriebe' von LEBRECHT 2007 [59], NEUMANN 2007 [65]
- 'Schubglieder-Kettentriebe' von BULLINGER 2005 [9], GEIER 2007 [37]
- 'Nockentriebe' in PKW-Ventiltrieben von ENGELHARDT 2007 [24]

Unter PFEIFFER und ULBRICH reiften durch theoretische Arbeiten die kompakte mathematische Systembeschreibung und die numerischen Lösungsmethoden derartiger Systeme, was die Arbeiten von GLOCKER 1992 [39], WÖSLE 1997 [123], STIEGELMEYER 2001 [84], FUNK 2004 [32] und FÖRG 2007 [29] belegen. Umfassend und systematisch sind theoretische Zusammenhänge mit 'kleinen' plausiblen Beispielen zu dieser Fachdisziplin der "Dynamik von Starrkörpersystemen mit Reibung und Stößen" von GLOCKER 1995 [41] beschrieben.<sup>3</sup>

Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Methoden der Kontaktmechanik nach GLOCKER 1995 [41] und STIEGELMEYER 2001 [84] zeichnen sich durch die Wiedergabe, Beschreibung und Beherrschung folgender Effekte aus:

1. Beliebige Anzahl von Kontaktstellen und Körpern
2. Erfassung der Reibung mit Haft- und Gleitphasen einschließlich gegenseitiger Beeinflussung mehrerer Reibkontakte und hochfrequenter Haft-Gleit-Übergänge bis zum durch Selbsterregung erzeugten chaotischen Schwingungsverhalten
3. Stoßgesetzformulierung auf Impulsebene nach POISSON mit Kompressions- und Expansionsphase und vernachlässigter Stoßzeit ( $\Delta t \rightarrow 0$ )
4. Zulassen von Mehrfachstößen mit Reibung, z.B.:
  - von Reibung in einseitigen Kontakten
  - Haft-Gleit-Wechsel während eines Stoßes ( $\Delta t \rightarrow 0$ )
  - Öffnen von Kontakten infolge Stoß in einem anderen Kontakt
5. Erfassung der Zustandsübergänge in den Kontakten (Separation – Kontakt, Haften – Gleiten) in Abhängigkeit der zeitlichen Evolution der Systemdynamik ( $\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \mathbf{F}^a$ ), auch induzierte Zustandsübergänge, siehe Zitat S. 76
6. Auffinden des richtigen Kontaktzustandes bei Vermeidung des kombinatorischen Problems

---

<sup>3</sup>PFEIFFER fasst in [71] (erschienen im September 2008, nach Einreichen der vorliegenden Arbeit) unter dem Titel 'Mechanical System Dynamics' auf 575 Seiten Theorie und Anwendungen zusammen.

7. Gleichzeitige und mathematisch konsistente Erfassung der Dissipation durch Reibung und der diskontinuierlichen Dynamik durch Stöße
8. Zulassen von mengenwertigen Kennlinien zur Beschreibung der Kontaktgesetze, Aufbereitung in mathematisch auswertbarer Form
9. Zulassung abhängiger Bindungen, d.h. linear abhängige Gleichungen für die Kinematik verschiedener Kontaktpunkte (z.B. 4 Kontaktpunkte für einen Schieber)
10. keine Stoßwellen und keine lokalen elastischen Deformationen (parallelgeschaltete diskrete Federn erlaubt), damit relativ wenige überschaubare Parameter

Die größte Herausforderung bei der Behandlung von solchen Systemen stellt die Bestimmung der Kontaktzustände nach einem Zustandsübergang (Änderung der Minimalkoordinaten  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ ) dar. Auf Grund von sich unstetig ändernden Kraftgrößen kann im allgemeinen keinerlei Vorinformation zur Bestimmung des neuen Zustands genutzt werden, was an Hand des folgenden Beispiels von GLOCKER 1995 [41, S. 3] leicht einzusehen ist:

*„Beim Übergang von Gleiten nach Haften ändert sich die tangentielle Reibkraft sprunghaft. Bei einem auf einer horizontalen Ebene gleitenden Klotz ergibt sie sich nach dem Coulomb'schen Gesetz aus dem Produkt von Gewichtskraft und Reibkoeffizienten. Diese Reibkraft bremst den Klotz so lange ab, bis er zum Stillstand kommt, womit dann die **Tangentialkraft** auf den Wert Null **springt**, während die Normalkraft (Gewicht) konstant bleibt. Betrachtet man jetzt einen Turm aus  $n$  Körpern und nimmt an, dass von den insgesamt  $n$  Kontaktstellen alle bis auf eine haften, so wird sich, wenn der eine gleitende Kontakt zur Ruhe kommt, der dort auftretende Tangentialkraftsprung auch in allen übrigen Kontakten auswirken und kann deswegen zu **induzierten Zustandsübergängen** führen. Unterscheidet man im ebenen Fall pro Kontakt drei mögliche Zustände, nämlich Haften und Gleiten in zwei entgegengesetzte Richtungen, so ergeben sich insgesamt  $3^n$  verschiedene Kombinationsmöglichkeiten, von denen nur eine mit dem Coulomb'schen Reibgesetz verträglich ist. Das Auffinden der richtigen Kontaktzustände resultiert also in einem **kombinatorischen Problem**, dessen Formulierung und Auswertung einen zentralen Punkt in der Kontaktmechanik einnimmt.“*

Der Auswertung von Stoßproblemen liegt ein kombinatorisches Problem zugrunde. Dieses äußert sich neben Haft-Gleit-Wechseln während des Stoßvorgangs darin, dass unter Umständen bestimmte geschlossene Kontakte keine Impulse übertragen oder sich unter dem Einfluss eines an anderer Stelle auftretenden Stoßes zum darauf folgenden Zeitpunkt öffnen.

Möglich wird die Beherrschung dieser Phänomene durch die Einheit von physikalischem Problem und mathematischer Formulierung. Für Reibung und Stöße beschreibt GLOCKER 1995 [41] die mengenwertigen Kennlinien durch Komplementaritäten und löst das Gesamtproblem über ein lineares Komplementaritätsproblem (LCP).

SCHULZ [79] wendet 1997 die Theorie von GLOCKER auf die Optimierung des Mechanismus eines Niederspannungsschalters an. Der Mechanismus selbst wird spiel- und reibungsfrei modelliert, während im Stromkontakt und in zwei Anschlüssen Mehrfachstöße zugelassen werden. Hiermit ist auch ein Beispiel zur Modellierung der Wirkstellen gegeben.

Heute existieren zahlreiche Softwarepakete zur Simulation der Kinetik von Mehrkörpersystemen, die für die früher meist 'eben betrachtete' Mechanismendynamik angewendet werden. Allerdings sind Spiel, Stöße und Reibung auch in den heutigen Simulationsprogrammen meist

unzureichend und nur auf Umwegen einbeziehbar. Spielbehaftete Gelenke sind in der Regel mit nichtlinearen Feder-Dämpfer-Elementen modelliert, ohne Reibung und ohne Stoß. Eine umfangreiche experimentelle Absicherung solcher Simulationsergebnisse ist eher selten.

Bereits 1998 wurde von THÜMMEL und GLOCKER [106] die 'nichtglatte Mechanik' auf Mechanismen mit Reibung und Spiel angewendet. Eine ebene **Schubkurbel** mit Spiel am Kurbelbolzen (nur ein Kontakt) diente als akademisches Beispiel zur Erläuterung der Theorie. Am erweiterten Beispiel der Schubkurbel mit Spiel am Kurbelbolzen (ein Kontakt) und vier Kontakten am Schieber (Bild 56 Mitte) sind 1999 von THÜMMEL in [109] besonders die Wechselwirkungen zwischen Stößen am Kurbelbolzen und Kippstößen am Schieber beschrieben. Die Implementierung in MATLAB bezog einen LCP-Löser von FUNK ein [32]. Experimente gibt es dazu keine.

Anfänglich (1998, 1999) verwendete der Autor der vorliegenden Arbeit Kontaktgesetze auf **Beschleunigungsebene** [106], [109], [108], die auf GLOCKER 1995 [41] aufbauen. Diese Vorgehensweise ist aus theoretischer Sicht übersichtlich darstellbar und durchgängig. Jedoch bereitet die numerische Auswertung verschiedene Probleme. Darum wird inzwischen ein anderer Weg bevorzugt, das Time-Stepping.

Insbesondere die Arbeit von STIEGELMEYR 2001 [84] stellt eine umfassende und universale Formulierung für Mehrkörpersysteme mit einseitigen Kontakten auf **Lage- oder Geschwindigkeitsebene** dar. Als Kontaktindikatoren dienen dabei der Abstand und die Relativgeschwindigkeit der Kontaktpunkte in Normal- und Tangentialrichtung der Kontur. Reine Masse-Masse-Kontakte mit Abheben und Stoss, aber auch Gleit-Haft-Übergänge können somit als Kraft-Weg- oder Kraft-Geschwindigkeits-Gesetz beschrieben werden. Steife Federn sind nicht erforderlich. Motiviert durch eine selbsttätige Driftkorrektur und durch das von GLOCKER 1995 [41, S.30] genannte Identifikationsproblem bei Zustandswechseln wird beim **Time-Stepping**-Algorithmus [84] die Auswertung auf der physikalisch motivierten Lage- oder Geschwindigkeitsebene realisiert.

Mit Hilfe dieser Formulierung in [84] konnte 2004 von GINZINGER und THÜMMEL [38], [112], [113] für die Kurbelschwinge mit spielbehaftetem Bolzengelenk eine äußerst stabile Simulation erzeugt werden, ohne Driftprobleme bei länger geschlossenen Kontakten, mit der Möglichkeit einen Dauerbetrieb zu simulieren. Die Simulationen erfolgten in der Programmierumgebung von MATLAB und sind experimentell abgesichert, siehe Kapitel 5.5.

Jüngste Arbeiten benutzen den am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik geschaffenen objektorientierten Mehrkörper-Simulationscode MBSim mit Time-Stepping zur Identifikation unterschiedlicher Modellparameter. Hier wird der Berechnungskern der Mehrkörpersystem-Simulation in einen nichtlinearen Optimierungscode eingebettet. In die Zielfunktion gehen gemessene und simulierte Werte ausgewählter Kraft- und Bewegungsgrößen ein, ESEFELD 2007 [25]. Die Parameteridentifikation verläuft nach dem in Kapitel 3.2 vorgestellten Prinzip.

### 5.3 Grundlagen der Systembeschreibung von MKS

#### 5.3.1 Begriffe und Klassifizierungen

Vor einer mathematischen Beschreibung der Mehrkörpersysteme liegt der vom Ingenieur zu beschreitende Weg von der realen Maschine zum Modell. Das **Mehrkörpersystem (MKS)** muss eindeutig in Körper und Kopplungen (Verbindungselemente, Kontakte bzw. Bindungen) strukturiert werden, siehe Bilder 58 und 59. Dafür gibt es immer mehrere Varianten. Es entstehen viele Fragen: Welche physikalischen Effekte sind einzubeziehen? Welche Komponenten und Bauteile sollen zusammengefasst werden? Wie sind die Systemgrenzen festzulegen? Die Topologie entscheidet jedoch später nicht unwesentlich über die Effizienz der Lösungsalgorithmen.

Dieses Kapitel beschreibt 'nichtglatte' mechanische Systeme (Modellstufe 5 in Bild 18, S. 20). Mit der folgenden Theorie lassen sich allgemeine räumliche Mehrkörpersysteme mit ein- oder mengenwertigen Kraftgesetzen behandeln. Die Dynamik schließt dabei kontinuierliche und diskontinuierliche Ereignisse (Stoßimpulse) ein.

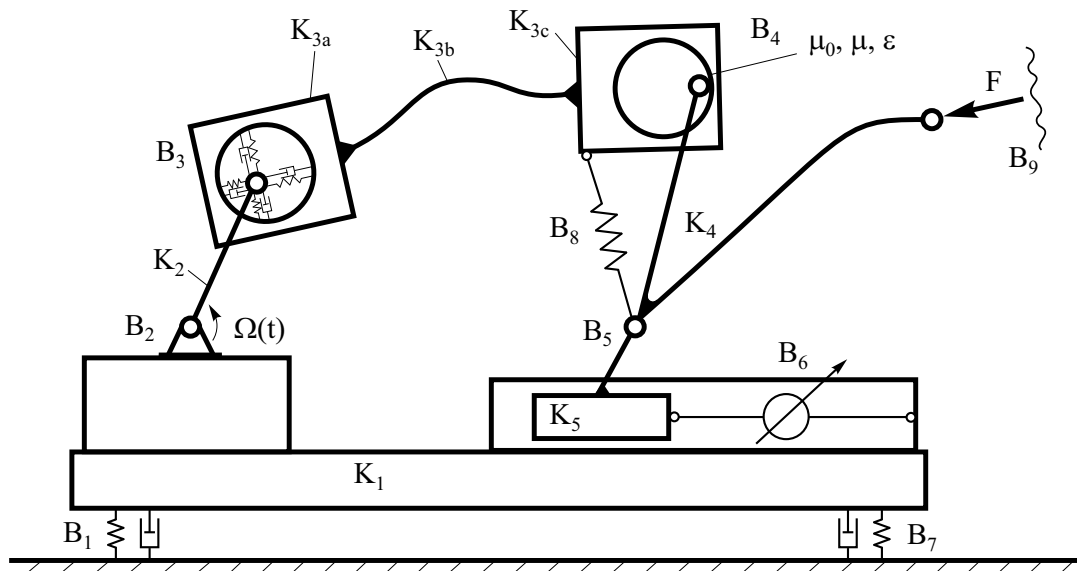


Bild 58: Kurbelschwinge als allgemeines Mehrkörpersystem

Bild 58 erweitert eine Kurbelschwinge vom Modell als 'zwangläufiger ebener Starrkörper-Mechanismus' (Kapitel 3) zu einem allgemeinen MKS (rein akademisch). Der Zwanglauf ist aufgehoben, die einwertigen Bindungen  $B_1$ ,  $B_3$ ,  $B_6$ ,  $B_7$  und  $B_8$  und die mengenwertige Bindung  $B_4$  erhöhen den Freiheitsgrad des Systems. Allein durch einen Antrieb ( $B_2$ ) an der Kurbel mit  $\varphi = \Omega t$  und das zusätzliche Stellglied ( $B_6$ ) ist der Zustand des Systems nicht eindeutig festgelegt. Weitere Koordinaten müssen vorgegeben werden.

Der **Systemzustand**  $z$  beschreibt eindeutig die Bewegung des Mehrkörpersystems. Er enthält die generalisierten Koordinaten  $q$  und generalisierten Geschwindigkeiten  $u$ :

$$z = \begin{pmatrix} q \\ u \end{pmatrix} \quad z \in \mathbb{R}^{n_q+n_u} \quad \text{mit} \quad \dot{q} = T u \quad (66)$$

mit der Abbildungsmatrix  $T(q) \in \mathbb{R}^{n_q \times n_u}$ .



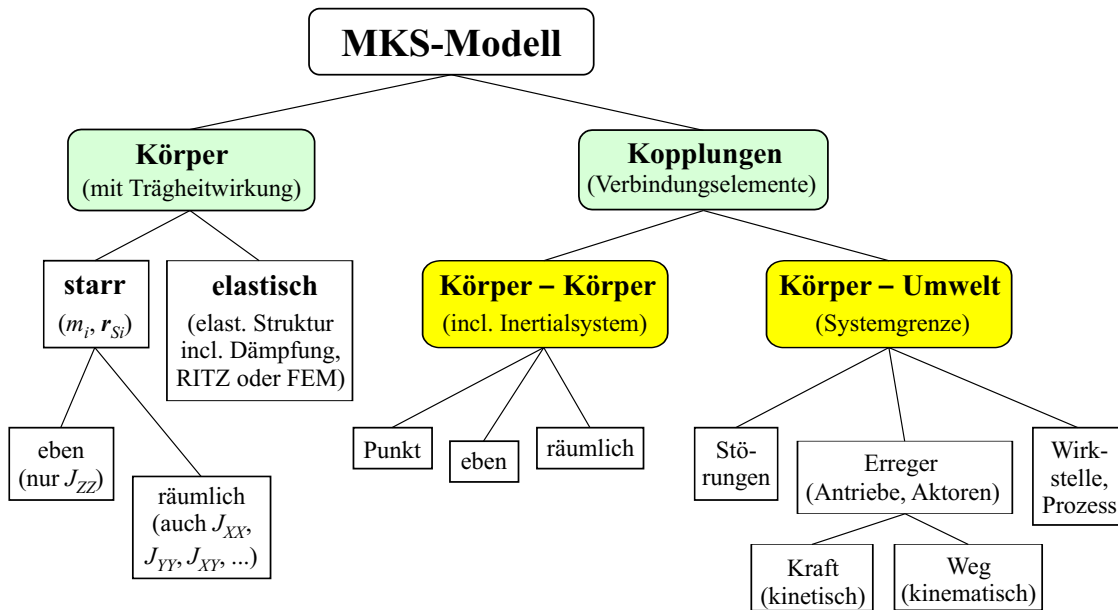


Bild 59: Strukturelemente für MKS (je nach Systemgrenze)

Eine **Bindung** zwischen zwei Körpern nach Bild 60 koppelt zwei Punkte (einen Punkt je Körper) mit dem Abstand  $g$  und der Relativgeschwindigkeit  $\dot{g}$  durch ein Paar von Bindungskräften, z.B.  $\vec{f}_{Bi} = \lambda \vec{n}_i$  und  $\vec{f}_{Bj} = \lambda \vec{n}_j$  mit dem Betragsparameter  $\lambda$  und einem Richtungsvektor, z.B.  $\vec{n}_i$  in Normalrichtung. Das Kräftepaar der Zwangskräfte wird somit von einem einzigen Betragsparameter vertreten.



Bild 60: Kopplung zweier Körper im MKS am Beispiel einer Feder

Zwischen zwei Körpern sollen nur maximal zwei Kontaktpunktpaare geschlossen sein. Die Punkte sind auch nicht unbedingt körperfest. Bei einem Kurvengelenk (Bild 56 rechts unten) wandert der Kontaktpunkt der Kurvenscheibe. Die Beschränkung auf **Punktkontakte** (2 Punkte, nicht flächenmäßig) liefert einen anschaulichen Zugang zu Systemen mit einseitigen Bindungen. Andere Arbeiten, z.B. FUNK [32, S.65-66] und ZANDER [126] erweitern diese Beschreibungsart auf Kontakte zwischen zwei kontinuierlich modellierten Körpern. Die Diskretisierung des Kontaktes muss dann an die Diskretisierung der Körper angepasst werden.

Bild 61 klassifiziert die Kopplungen in MKS nach deren Wertigkeit in einwertige und mengenwertige Bindungen. Eine einwertige Bindung bzw. ein **einwertiges Kraftgesetz** ist funktionell eindeutig vom Systemzustand  $z$  und von der Zeit abhängig, d.h. für einen Zustand  $z$  und einen Zeitpunkt  $t$  existiert genau eine Bindungskraft. Demgegenüber lassen sich **mengenwertige Kraftgesetze** nur über Nebenbedingungen  $\mathcal{N}$  formulieren, d.h. zu einem Zustand kann es mehrere (eine Menge) verträgliche Kräfte in einer Bindung geben. Die Beschreibung mengenwertiger Kraftgesetze führt zu Ungleichungen (Kap. 5.3.4).

Einwertige Kraftgesetze zeichnen sich weiter dadurch aus, dass die Struktur der MKS und damit die Art und Anzahl der Minimalkoordinaten zur eindeutigen Beschreibung der Bewegung

des MKS konstant bleibt. Das Gleiche gilt auch noch für zweiseitige Bindungen aus der Gruppe der mengenwertigen Bindungen, die auch kinematische Kopplungen genannt werden. Ein Mehrkörpersystem mit nur einwertigen und zweiseitigen mengenwertigen Bindungen behält damit immer den gleichen Freiheitsgrad.

Demgegenüber lassen einseitige Bindungen Strukturänderungen im MKS zu. Der starre Kontakt in Normalrichtung kann offen oder geschlossen sein. Im offenen Zustand können sich beide Kontaktpartner frei relativ zueinander bewegen, der Systemfreiheitsgrad steigt nach dem Öffnen eines Kontaktes. Der Vergleich von Dreh- oder Schubgelenken mit oder ohne Spiel (Bild 56, S. 71) veranschaulicht diese Problematik.

Zweiseitige Bindungen bzw. kinematische Kopplungen erlauben keine Relativbewegung in Richtung der Zwangskräfte, welche deshalb nur passive Kräfte sein können. Diese Kräfte in zweiseitigen Bindungen leisten keine Arbeit.

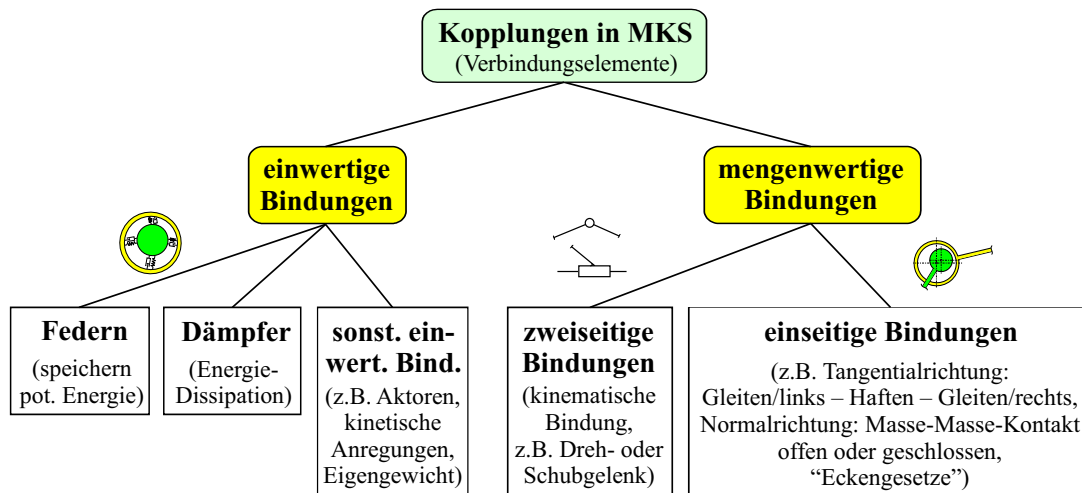


Bild 61: Klassifizierung der Kopplungen nach Wertigkeit der Kraftgesetze

Die Unterteilung der MKS-Kopplungen in Bindungen mit ein- oder mengenwertigen Kraftgesetzen (Bild 61) bringt Vorteile für die numerische Auswertung der Bewegungsdifferentialgleichungen (BDGL). Auf die physikalisch motivierte Klassifizierung in eingepreßte Kräfte und Zwangskräfte oder in aktive und passive Kräfte wird hier nicht näher eingegangen.

Ein ausgedehnter Körper  $K$ , bei dem die relative Lage aller infinitesimal kleinen Massenelemente  $dm$  ( $m = \int_K dm$ ) zueinander innerhalb des Körpers stets konstant bleibt, wird als **starr** bezeichnet. Ein **starres Mehrkörpersystem** ist ein aus  $n = n_K \geq 2$  bewegten Starrkörpern zusammengesetztes System. Das ruhende Maschinengestell wird in der Getriebelehre (Mechanismen, Zwanglauf, Kap. 3.1) immer als Körper 1 eingeschlossen, in der MKS-Theorie gilt diese Forderung nicht.

Zur Beschreibung eines Mehrkörpersystems nach 'Freischnitt' sind bei räumlicher Betrachtungsweise bekanntlich  $6n$  Parameter notwendig (drei für Rotation, drei für Translation,  $n$  Körper), welche auch als **Systemkoordinaten** bezeichnet und im Vektor  $\mathbf{y}$  zusammengefasst werden. Bei diesen Systemkoordinaten handelt es sich, da die einzelnen Körper in irgendeiner Weise miteinander verbunden sind (etwa durch Gelenke), um voneinander abhängige Größen. Diese geometrischen Abhängigkeiten werden **Zwangsbedingungen** (ZB) genannt und lassen sich für Systeme ohne einseitige Bindungen immer als implizite vektorwertige Funktion

$$\Phi(\mathbf{y}, t) = \mathbf{0}, \quad \Phi \in \mathbb{R}^m, \quad m \leq 6n \quad (67)$$

ansetzen, z.B. ein Vektorpolygon für das Viergelenk der ebenen Kurbelschwinge (Gl. (11), S. 31). Diese algebraischen Gleichungen heißen holonome Bindungen, da sie nur von der Lage und der Zeit nicht von Geschwindigkeiten abhängen. Ohne explizite Zeitabhängigkeit wird zusätzlich die Bezeichnung skleronome Bindung verwendet.

Bei der Formulierung des Gesamtproblems in Systemkoordinaten  $\mathbf{y}$  ergeben sich neben den  $6n$  gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung  $m$  algebraische Gleichungen, die die Bewegungsvielfalt des Systems einschränken. Die Umformung all dieser Gleichungen führt alternativ zu einem System differential-algebraischer Gleichungen (DAEs) der Form

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{12n}, \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{12n+m} \quad (68)$$

(vgl. EICH-SOELLNER und FÜHRER [23]), wobei gilt:

$$\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{(12n+m) \times 12n} \quad (69)$$

Dabei verkörpert  $\mathbf{E}$  eine Einheitsmatrix und  $\mathbf{M}$  eine Massenmatrix. Die Funktion  $\mathbf{f}$  bezieht alle Kräfte und Momente (äußere aktive und Zwangskräfte) an den komplett 'freigeschnittenen' Körpern ein und beinhaltet auch die Bindungsgleichungen (67) mit  $\Phi(\mathbf{y}, t) = \mathbf{0}$ . Neben dem Zustand  $\mathbf{x}$  enthält Gl. (69) auch genau  $m$  unbekannte Zwangskräfte.

Für Problemstellungen solcher Art (DAEs) sind in der Vergangenheit speziell angepasste Lösungsalgorithmen entwickelt worden.

Eine andere Herangehensweise für Systeme mit Bindungen ist die, dass eine Beschreibung in sogenannten **Minimalkoordinaten**  $\mathbf{q}$  gesucht wird, die nur die freien Bewegungsmöglichkeiten berücksichtigt, so dass die Bindungsgleichungen (67) nicht mehr explizit betrachtet werden müssen. Daraus resultiert ein Satz von  $f = 6n - m$  gewöhnlichen Differentialgleichungen. Der Vektor der Systemkoordinaten  $\mathbf{y}$  muss dann eine Funktion von  $\mathbf{q}$  sein:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{q}), \quad (\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{dof}), \quad dof = 6n - m \quad (70)$$

Auch in der Mechanismendynamik ist der Übergang auf Minimalkoordinaten gebräuchlich. Besonders für zwangsläufige ebene Starrkörper-Mechanismen (Kapitel 3) führt DRESIG [13, S.15] den Begriff **Lagefunktion** ein. Er bezeichnet diese mit  $U = U(\mathbf{q})$ , wobei für Mechanismen mit einem Antrieb üblicherweise der Kurbelwinkel  $\varphi$  als einzige Minimalcoordinate dient. Die Berechnung des Verlaufes einer beliebigen Lagegröße  $U$ , z.B. des Abtriebswinkels, in Abhängigkeit vom Antriebswinkel als 'kinematische Übertragungsfunktion' stellt eine Standardaufgabe dar (S. 20, Bild 18 oben).

Der Vorteil der Methode mit Minimalkoordinaten liegt darin, dass anstatt der  $6n + m$  Gleichungen umfassenden Beschreibung in Systemkoordinaten (als System 1.Ordnung  $12n + m$  Gleichungen) nunmehr  $2m$  Gleichungen weniger ausreichen. Der numerische Aufwand ist demgemäß deutlich geringer.

Ein Nachteil entsteht mit zunehmender Systemkomplexität (Anzahl der Freiheitsgrade, nicht-lineare Bindungsgleichungen). Es kann oft sehr schwierig oder gar unmöglich werden, alle überzähligen Systemkoordinaten  $\mathbf{y}$  oder willkürlichen Koordinaten analytisch als Funktion der Minimalkoordinaten  $\mathbf{q}$  zu bestimmen (Lagefunktionen  $U$ ) und damit vollständig aus der Systembeschreibung zu eliminieren.

Eine Kombination der beiden Methoden ergibt schließlich eine Form ähnlich zu den LAGRANGESchen Gleichungen 1. Art, bei der möglichst wenige Nebenbedingungen durch LAGRANGESche

Multiplikatoren  $\lambda$  explizit berücksichtigt werden. Im Fall b) „BDGL für Systeme mit einseitigen Bindungen“ (ab S. 86) wird davon Gebrauch gemacht.

Für die ebene Kurbelschwinge ist die Ermittlung der Minimalkoordinaten indes mit einigem Aufwand noch explizit möglich, so dass nur die einseitigen Bindungen in Gestalt von Nebenbedingungen auftreten und ansonsten mit der minimalen Anzahl generalisierter Koordinaten gerechnet werden kann (Kap. 5.5).

Die mathematische Beschreibung eines Mehrkörpersystems mit ein- oder mengenwertigen Kraftgesetzen gliedert sich in drei Blöcke:

- **BDGL** – Bewegungsdifferentialgleichungen (Impuls- und Drallsatz je Körper, evtl. Projektion in die zwangsfreien Richtungen) → Kap. 5.3.2
- **Kopplungs kinematik** (Festlegung der Koordinaten, Parametrierung, Zwangsbedingungen, JACOBI-Matrizen) → Kap. 5.3.3
- **Kraftgesetze** für die Kopplungen (ein- oder mengenwertige Kraftgesetze einschließlich Gesetze oder Kennfelder für Antriebe und Wirkstellen, d.h. Prozessdynamik) und für diskontinuierliche Dynamik die **Stoßgesetze** → Kap. 5.3.4

Die folgenden Unterpunkte gehen etwas ausführlicher auf die drei Blöcke ein. Die Zusammenfassung greift auf umfangreiche theoretische Arbeiten zurück, besonders auf GLOCKER 1995 [41], STIEGELMEYR 2001 [84], FUNK 2004 [32] und FÖRG 2007 [29]. Die jüngste Arbeit [29] geht dabei in kompakter und übersichtlicher Form bis hin zur Numerik und übersteigt wesentlich die hier dargestellte exemplarische Einführung.

### 5.3.2 Bewegungsdifferentialgleichungen (BDGL)

#### a) BDGL für MKS ohne einseitige Bindungen

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen für ein Mehrkörpersystem werden zunächst mit Impuls- und Drallsatz für jeden einzelnen ungebundenen Starrkörper (Freischnitt) die zugehörigen sechs Bewegungsgleichungen bestimmt. Über das Prinzip der virtuellen Arbeit nach d'ALEMBERT und LAGRANGE oder das Prinzip von JOURDAIN erfolgt die Projektion in die zwangsfreien Richtungen [69], [116]. Es ergeben sich schließlich die '**Projektiven Newton-Euler-Gleichungen**' für starre MKS:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{J}_T^T (\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{f}^e) + \mathbf{J}_R^T (\dot{\mathbf{L}}_S - \mathbf{M}^e) \right\}_i = 0 \quad (71)$$

mit den aktiven eingepprägten Momenten  $\mathbf{M}_i^e$  bzw. den aktiven eingepprägten Kräften  $\mathbf{f}_i^e$ . In der Regel berechnet man die Jacobi-Matrizen eines Körper  $i$  für die Translation  $\mathbf{J}_{T,i} \in \mathbb{R}^{3 \times dof}$  und für die Rotation  $\mathbf{J}_{R,i} \in \mathbb{R}^{3 \times dof}$  wie folgt:

$$\mathbf{J}_{T,i} = \frac{\partial \mathbf{v}_{S_i}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad \text{und} \quad \mathbf{J}_{R,i} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (72)$$

Sie beinhalten die Absolutgeschwindigkeiten der Körperschwerpunkte  $\mathbf{v}_{S_i}$  und die Drehgeschwindigkeiten der Körper  $\boldsymbol{\omega}_i$  [7], [41], [69]. Zu den JACOBI-Matrizen liefert STIEGELMEYR [84, S. 10-14] eine gute Zusammenfassung.

Auf eine Beziehung zur Kinematik der MKS soll an dieser Stelle nochmals hingewiesen werden. Die generalisierten Geschwindigkeiten  $\mathbf{u}$  werden mit Gl. (66) eingeführt (S. 78). Diese lassen sich bekanntlich bei räumlicher Drehbewegung nicht immer integrieren und damit direkt einem einzigen Drehwinkel zuordnen, dann gilt  $\mathbf{u} \neq \dot{\mathbf{q}}$ . Vielmehr lassen sich die Zeitableitungen  $\dot{\mathbf{q}}$  der Lagegrößen durch eine Linearkombination der Geschwindigkeitsgrößen  $\mathbf{u}$  mit der lageabhängigen Abbildungsmatrix  $\mathbf{T}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n_q \times n_u}$  berechnen, siehe z.B. BREMER [7, S. 13-37]:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{T} \mathbf{u} \quad (73)$$

Für den Freiheitsgrad des Systems gilt  $dof = n_q$  und die Ungleichung  $n_q \leq n_u$ .

Weitere Umformungen der Gl. (71) durch Einführung von Beschleunigungen führen zur Abspaltung der Massenmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)$ . Der Rechenweg wird hier weggelassen. Wichtig für alles Weitere ist, dass sich die Bewegungsdifferentialgleichungen (BDGL) für Systeme ohne einseitige Bindungen mit Hilfe von Gleichung (71) und unter Verwendung von Minimalkoordinaten stets in folgende Form bringen lassen:

$$\begin{array}{l} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{T} \mathbf{u} \\ \mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) \end{array} \quad (74)$$

Dabei ist  $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \in \mathbb{R}^{dof \times dof}$  die positiv definite, symmetrische Matrix der Trägheitseigenschaften (Massenmatrix). Der generalisierte Kraftvektor  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{dof}$  enthält alle nicht zur Beschleunigung proportionalen Trägheitswirkungen und alle anderen aktiven eingepprägten Kräfte und Momente. Diese Bezeichnungen stimmen mit FÖRG 2007 [29] überein und bilden die Basis für die Mehrkörpersimulations-Bibliothek MBSim <<http://code.google.com/p/mbsim-env/>> des Lehrstuhles für Angewandte Mechanik der TU München.

Mit der weiteren Aufspaltung des Kraftvektors  $\mathbf{h}$  entstehen verschiedene spezielle Formulierungen, z.B. nach SLOTINE 1991 [81, S. 393]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) \mathbf{u} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{s}(t) \in \mathbb{R}^{dof} \quad (75)$$

Der Vektor  $\mathbf{s}(t) \in \mathbb{R}^{dof}$  repräsentiert alle aktiven eingepprägten Kräfte und Momente, die explizit nur von der Zeit abhängen, z.B. Stellkräfte und -momente durch Motoren und Aktoren. In der Matrix  $\mathbf{D}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) \in \mathbb{R}^{dof \times dof}$  werden geschwindigkeitsabhängige Terme, wie die nichtlinearen Koeffizienten der Coriolis- bzw. der Zentrifugalkräfte und ggf. auch viskose Dämpfungskräfte  $\mathbf{F}_v(\dot{\mathbf{q}})$ , berücksichtigt. In  $\mathbf{c}(\mathbf{q}, t) \in \mathbb{R}^{dof}$  sind die Gravitationskräfte und alle weiteren nur von der Lage (Vektor  $\mathbf{q}$ ) abhängigen Kräfte und Momente (konservative Kräfte bzw. Potenzialkräfte) zusammengefasst.

Die Darstellung der Matrix  $\mathbf{D}$  ist nicht eindeutig definiert, SLOTINE [81, S. 401]. Sie kann z.B. für die trägheitsabhängigen Terme und mit  $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}}$  komponentenweise durch folgende Gleichung ermittelt werden [81, S. 400]:

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \left[ \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_i} \right] \dot{q}_k \quad (76)$$

Die Elemente  $m_{pk}$  der lageabhängigen Massenmatrix bzw. die Elemente  $c_{pk}$  der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{C}$  (aus  $\mathbf{c}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{C} \mathbf{q}$ ) lassen sich jeweils durch zweifaches partielles Ableiten aus der kinetischen Energie  $T$  bzw. aus der potenziellen Energie  $V$  berechnen:

$$m_{pk}(\mathbf{q}) = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_p \partial \dot{q}_k} \quad \text{bzw.} \quad c_{pk}(\mathbf{q}) = \frac{\partial^2 V}{\partial q_p \partial q_k} \quad (77)$$

Der Term  $\mathbf{D}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) \dot{\mathbf{q}}$  in Gl. (75) enthält im allgemeinen immer Ausdrücke mit Produkten aus zwei Geschwindigkeiten z.B.  $(\dot{q}_i \cdot \dot{q}_k)$ . Er ist damit **quadratisch hinsichtlich der generalisierten Geschwindigkeiten**, was die folgende Schreibweise sehr gut deutlich macht.

DRESIG [13, S. 61-65 und S. 219-224] leitet wie SLOTINE die nichtlinearen zeitvarianten DGL für einen Mechanismus mit mehreren Antrieben mit Hilfe der LAGRANGESchen Gleichungen 2. Art her. Entsprechend [13, S. 222] lauten diese mit dem Freiheitsgrad  $dof$ , mit den Antriebskoordinaten  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_{dof})^T$  und  $N$  bewegten Körpern:

$$\sum_{k=1}^{dof} m_{pk} \ddot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{dof} \sum_{k=1}^{dof} m_{jpk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{dof} c_{pk} q_k = Q_p \quad p \in (1, \dots, dof) \quad (78)$$

Die Elemente der Massenmatrix ergeben sich speziell für den ebenen Starrkörper-Mechanismus mit den Massen  $m_i$  und Massenträgheitsmomenten  $I_{Si}$  wie folgt:

$$m_{pk}(\mathbf{q}) = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_p \partial \dot{q}_k} = \sum_{i=2}^N \left[ m_i \frac{\partial \mathbf{r}_{Si}^T}{\partial q_p} \frac{\partial \mathbf{r}_{Si}}{\partial q_k} + I_{Si} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_p} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} \right] \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{pk}}{\partial q_j} = \sum_{i=2}^N \left\{ m_i \left[ \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_{Si}^T}{\partial q_p} \right) \frac{\partial \mathbf{r}_{Si}}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathbf{r}_{Si}}{\partial q_p} \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_{Si}^T}{\partial q_k} \right) \right] \right. \\ \left. + I_{Si} \left[ \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_p} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_p} \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} \right) \right] \right\} \quad (80) \end{aligned}$$

Die Projektionen in den geschwindigkeitsabhängigen Termen entsprechen z.B. nach SMIRNOV [82, S.208] den CHRISTOFFELSchen Dreiindizesymbolen 1. Art (bis auf den Faktor 1/2) in der Form:

$$m_{jkp}(\mathbf{q}) = \left( \frac{\partial m_{pk}}{\partial q_j} + \frac{\partial m_{pj}}{\partial q_k} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_p} \right) = m_{kjp}(\mathbf{q}) \quad (81)$$

Von DRESIG, HOLZWEISSIG [21, S. 103] werden diese Zusammenhänge ebenfalls beschrieben, sie verwenden  $\Gamma_{klp} = \Gamma_{lkp}$  als Symbol. Im Kapitel 4.2 auf S. 52 finden diese Beziehungen Anwendung zur Herleitung der Gleichungen für die Kraftregelung.

Die generalisierte Kraftkomponente  $Q_p$  entspricht der Projektion der äußeren aktiven Kräfte  $\mathbf{f}_{ai}$  bzw.  $\mathbf{f}_{Pi}$  und Momente  $M_i$  in die zwangsfreie Richtung der Minimalkoordinate  $q_p$  analog zu Gl. (1) auf S.25 oder  $\mathbf{f}_i^e$ ,  $\mathbf{M}_i^e$  in Gl. (71). Mit den Ortsvektoren der Kraftangriffspunkte  $\mathbf{r}_{ai}$  und den Gliedwinkeln  $\alpha_i$  für die ebene Drehung folgt:

$$Q_p = \sum_{i=1}^M \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_p} M_i + \sum_{i=1}^L \frac{\partial \mathbf{r}_{ai}}{\partial q_p} \mathbf{f}_{ai} \quad (82)$$

Die gleiche Form wie die BDGL (78) ergibt sich vereinfacht für den ebenen zwangsläufigen Starrkörper-Mechanismus mit einem Antrieb ( $\varphi=q$ ), vergleiche DGL (4) in Kapitel 3:

$$J_{red}(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} J'_{red}(q) \dot{q}^2 = M_{red}(q, \dot{q}, t)$$

Abschließend sei bemerkt: Es handelt sich bei der mathematischen Beschreibung für Mehrkörpersysteme ohne einseitige Bindungen in Gl. (74), (75), (78) i.A. immer um ein System *nichtlinearer* gewöhnlicher Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten (ohne Nebenbedingungen).

### b) BDGL für Systeme mit mengenwertigen einseitigen Bindungen

Bei Mehrkörpersystemen mit mengenwertigen einseitigen Bindungen, wie z.B. das Bolzengelenk mit Spiel als starrer Kontakt (ohne Federn), hängt der Systemzustand ganz wesentlich von den Verhältnissen in der Kopplung ab. Bild 62 veranschaulicht die Parametrierung der Bindungskraft  $\vec{f}_B = \lambda \vec{n}$  mit dem Betragsparameter  $\lambda$  und zwei Richtungsvektoren, z.B.  $\vec{n}_b$  und  $\vec{n}_h$  in Normalrichtung für ein spielbehaftetes Drehgelenk (Index 'b' von 'bolt' und 'h' von 'hole'). Mit dem gleichen Betragsparameter  $\lambda$  entsteht so ein Kräftepaar. Analog dazu führt bereits Bild 60 auf S. 79 die Parametrierung für eine Federkopplung ein.

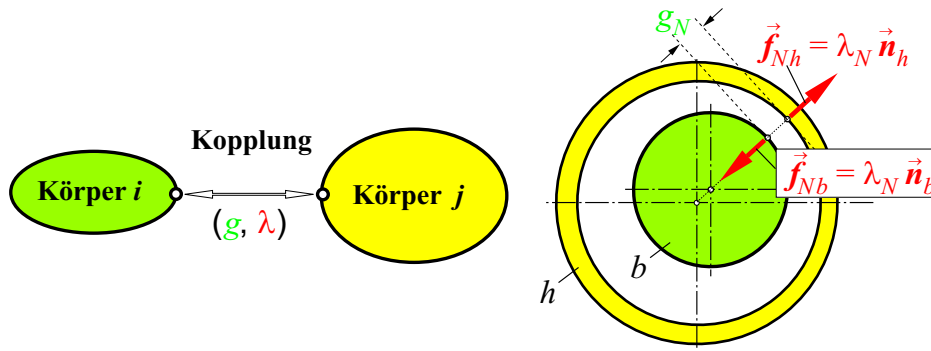


Bild 62: Parametrierung im Drehgelenk mit Spiel

Ein MKS mit nur zweiseitigen Bindungen zeichnet sich dadurch aus, dass der Freiheitsgrad  $dof$  konstant ist (Kap. 5.3.1, S. 80). Bei einseitigen Bindungen ändert er sich mit der Zeit. Für jeden Kontaktpunkt können die Zustände Separation, Kontakt mit Gleiten und Kontakt mit Haften eintreten und damit im ebenen Fall den Freiheitsgrad um Eins oder Zwei verringern. Wenn eine Kontaktphase zwischen zwei Körpern auftritt, führt dies zu Kontaktkräften, die in die Bewegungsgleichungen mit eingebunden werden müssen. Bei einem einseitigen (auch: *unilateralen*) Kontakt ist eine Kraftübertragung entlang der Normalen nur in eine Richtung möglich. Der Fall der Separation eines Kontakts geht einher mit späterem stoßhaften Aufsetzen und unerwünschter Schwingungsanregung.

Nach GLOCKER [41] besteht eines der Hauptprobleme von Systemen mit einseitigen Bindungen darin, dass sich die Bindungszustände in Abhängigkeit von der Systemdynamik ändern und dabei Unstetigkeiten in den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen verursachen. Können bei ausschließlich stetigen Zustandsänderungen noch leicht Aussagen über das zukünftige Systemverhalten getroffen werden, so ist dies hier nicht mehr ohne weiteres möglich.

Dem Umstand des von der Zeit abhängigen Systemfreiheitsgrades  $dof = dof(t)$  kann auf mehrere Arten begegnet werden. Beispielsweise könnte der Konfigurationswechsel der Kontakte explizit detektiert und mit einem jeweils angepassten Satz von Minimalkoordinaten gearbeitet werden. In diesem Falle müssen für jeden Kontaktzustand separate Bewegungsgleichungen vorgesehen werden, zwischen denen mittels passender Übergangsbedingungen im richtigen Moment umgeschaltet werden muss. Aufgrund der Vielzahl an möglichen Konfigurationen bei komplexeren Systemen und des damit verbundenen hohen Aufwands wird am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik üblicherweise eine andere Herangehensweise gewählt.

Es wird für alle Kontaktzustände von einem konstanten Satz von *generalisierten* Koordinaten ausgegangen und die Bindungsgesetze über in die BDGL eingeführte Zwangskräfte erfüllt [70], [106], [109]. Die Anzahl der Koordinaten entspricht der Anzahl der Minimalkoordinaten, wenn alle Kontakte offen sind. Die Bindungskräfte in den einseitigen Bindungen werden deshalb explizit als LAGRANGESche Multiplikatoren, z.B. in der Form  $\mathbf{W}_N(\mathbf{q}, t) \lambda_N$  in die BDGL (74)



für MKS ohne einseitige Bindungen aufgenommen. Im Sonderfall mit  $\mathbf{T} = \mathbf{E}$  (Einheitsmatrix) bzw.  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}$ , der auch für ebene Mechanismen zutrifft, gilt in Anlehnung an Gl. (74) die BDGL 2. Ordnung für MKS ohne einseitige Bindungen:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \quad (83)$$

Bei MKS mit einseitigen Bindungen gilt diese Bewegungsgleichung (83) nur für den Fall, dass keine der einseitigen Bindungen geschlossen ist. Dann gilt die DGL (83) mit dem Vektor  $\mathbf{q}$  als Minimalkoordinaten ohne weitere Nebenbedingungen.

Wird eine einseitige Bindung geschlossen, verringert sich eigentlich die Zahl der Minimalkoordinaten. Es wird jedoch der Koordinatensatz  $\mathbf{q}$  beibehalten, die Bindungskräfte (Zwangskräfte) in Normalenrichtung  $\lambda_N$  bzw. in Tangentialrichtung  $\lambda_T$  zu den eigentlich überzähligen Koordinaten sind jetzt wie 'äußere' Kräfte in die BDGL aufzunehmen, es entsteht:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathbf{W}_N(\mathbf{q})\lambda_N - \mathbf{W}_T(\mathbf{q})\lambda_T = 0 \quad (84)$$

Die LAGRANGESchen Multiplikatoren sind mit Koppelmatrizen  $\mathbf{W}(\mathbf{q})$  verbunden. Diese JACOBI-Matrizen drehen die Richtungen der Kontaktkräfte in die Richtungen der generalisierten Koordinaten. Die Kopplungskinematik (Kapitel 5.3.3) stellt die nichtlinearen geometrischen Beziehungen für Ort, Richtung und Bewegung der Kontaktpunkte und die Kontaktindikatoren ( $\mathbf{g}_N$ ,  $\dot{\mathbf{g}}_N$ ,  $\dot{\mathbf{g}}_T$ ) bereit, woraus sich die Projektionsmatrizen  $\mathbf{W}_N(\mathbf{q})$  und  $\mathbf{W}_T(\mathbf{q})$  wie folgt berechnen lassen:

$$\mathbf{W}_N(\mathbf{q}) = \frac{\partial \dot{\mathbf{g}}_N}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad \text{und} \quad \mathbf{W}_T(\mathbf{q}) = \frac{\partial \dot{\mathbf{g}}_T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (85)$$

Die Zusammenfassung der tangentialen und normalen Komponenten ergibt:

$$\mathbf{W} = (\mathbf{W}_T \ \mathbf{W}_N), \quad \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_\lambda} \quad (86)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_T \\ \lambda_N \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{n_\lambda} \quad (87)$$

FÖRG 2007 [29, S. 18-22] nutzt wieder die generalisierten Geschwindigkeiten  $\mathbf{u}$ , damit lauten gegenüber BDGL (74) die allgemeinen BDGL für MKS mit einseitigen Bindungen:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{T} \mathbf{u} \\ \mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{W}(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \\ (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, t) &\in \mathcal{N} \end{aligned} \quad (88)$$

Die explizit in die Systembeschreibung (88) aufgenommenen Bindungskräfte  $\boldsymbol{\lambda}$  in den einseitigen Bindungen haben zusätzlich die in den folgenden Abschnitten 5.3.3 und 5.3.4 näher beschriebenen **Nebenbedingungen**  $\mathcal{N}$  zu erfüllen.

### 5.3.3 Kopplungskinematik

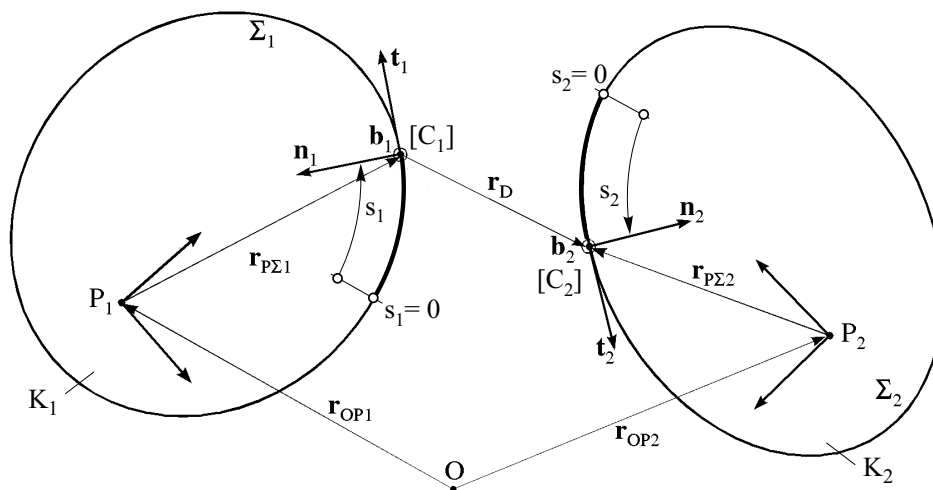
Die Kopplungskinematik ist die Basis für die Formulierung der Kontakt- und Kraftgesetze, die in Kapitel 5.3.4 behandelt werden. Sie entscheidet über die verschiedenen Kontaktzustände. Die Kontaktkinematik muss für jeden Kontaktpunkt (ein Kontakt – 2 Punkte, siehe Bild 60, S. 79 oder Bild 62, S. 86) folgende Indikatoren in Tangential- und Normalrichtung in Abhängigkeit von den gewählten Minimalkoordinaten  $\mathbf{q}$  und Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}$  bereitstellen:

Lageebene:	$g_N$	Abstand, $g_N = g_N(\mathbf{q})$
Geschwindigkeitsebene:	$\dot{g}_N$ und $\dot{g}_T$	Relativgeschwindigkeit, $\dot{g}_i = \dot{g}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$
[Beschleunigungsebene:	$\ddot{g}_N$ und $\ddot{g}_T$	Relativbeschleunigung, $\ddot{g}_i = \ddot{g}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$

Die Parametrierung mit Normal- und Tangentialrichtung hat sich hierbei bewährt. Die physikalische Begründung der Kontaktzustände kommt auch ohne die Beschleunigungsebene aus. Einige Auswertelgorithmen setzen aber die Transformation des Kontaktproblems bis zu den Beschleunigungen voraus, darum ist diese Ebene oben mit eckigen Klammern als Option gekennzeichnet.

In die Kopplungskinematik geht viel Problemspezifität ein. Sie ist der aufwendigste Teil der Systembeschreibung. So muss hier die Konturgeometrie berücksichtigt werden. Es ist zu entscheiden, welche Kontaktpunkte eine Kopplung zweier Körper beschreiben, wie z.B. beim Schubgelenk mit Spiel (Bild 56 Mitte auf S. 71). Die gleichen Kontaktgrößen ( $g_N$ ,  $\dot{g}_N$  und  $\dot{g}_T$ ) sind übrigens auch zu formulieren, wenn mit Federn und Dämpfern modelliert wird.

Ausführlich setzen sich GLOCKER [41] und STIEGELMEYR [84] mit der gesamten Kontaktkinematik auseinander, Auszüge enthalten [106, S. 255-259], [109, S. 89] und [36, S.9 bis 14]. An dieser Stelle soll nur für den Punktkontakt auf Lageebene eine Einführung gegeben werden.



**Bild 63:** Zur Kontaktkinematik zweier ebener Körper aus [41, S. 22]

Zur mathematischen Beschreibung und Erfassung der Kontaktkinematik werden durch Bild 63 einige Begriffe und Größen eingeführt. Der [Normal-]Abstand zweier (ebener) Körper bezeichnet die kürzeste Verbindungslinie zwischen ihnen. Die Kontur  $\Sigma$  (konvex) eines solchen Körpers beschreibt der Parametervektor  $\mathbf{r}_\Sigma(s)$  mit dem Konturparameter  $s$ . Es lässt sich ein begleitendes Dreiein bestehend aus Normale  $\mathbf{n}$ , Tangente  $\mathbf{t}$  und Binormale  $\mathbf{b}$  einführen, vgl. auch MEY-

BERG/VACHENAUER [62]. Der Abstand zweier ebener Körper  $K_1, K_2$  wird bestimmt, indem alle Paare von Punkten  $C_1 \in \Sigma_1, C_2 \in \Sigma_2$  gesucht werden, für die gilt:

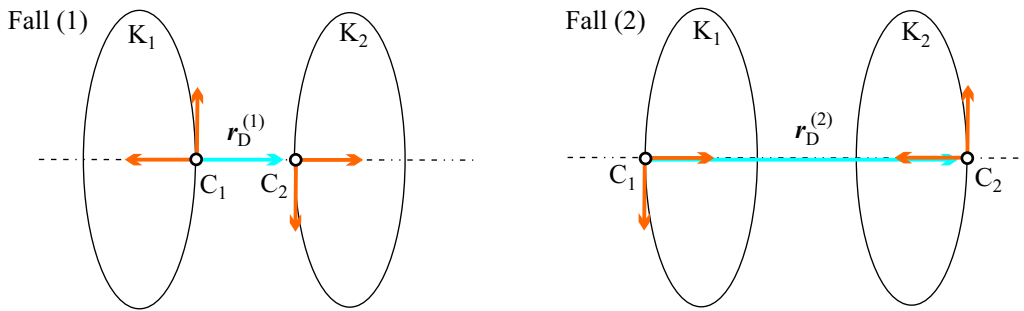
$$\mathbf{n}_{C_1} \uparrow \downarrow \mathbf{n}_{C_2} \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_{C_1} \perp \mathbf{r}_D \quad (89)$$

mit dem Abstandsvektor

$$\mathbf{r}_D = \mathbf{r}_{C_2} - \mathbf{r}_{C_1} \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}_{C_i} = \mathbf{r}_{OP_i} - \mathbf{r}_{PC_i} \quad (90)$$

Daraus resultieren zwei Fälle (ohne die Normalenbedingung in Gl. (89) wären es vier) für den Normalabstand, vgl. Bild 64:

$$g_N^{(1)} = (-\mathbf{r}_D^{(1)})^T \cdot \mathbf{n}_{C_1} \quad \text{und} \quad g_N^{(2)} = (\mathbf{r}_D^{(2)})^T \cdot \mathbf{n}_{C_1} \quad (91)$$



**Bild 64:** Die zwei Kandidaten für den Normalabstand

Weil definitionsgemäß die kürzeste Verbindungslinie gesucht wird, erfolgt die Festlegung auf eine der beiden Möglichkeiten (hier auf Fall 1) durch:

$$g_N(K_1, K_2) = \min \{|g_N^{(i)}|, i = 1, 2\} \quad (92)$$

Ein Kontakt heißt offen, wenn der **Normalabstand** einen positiven Wert besitzt. Ist der Normalabstand Null, wird der Kontakt als geschlossen bezeichnet. Bei einer Penetration, d. h. einem Eindringen der Körper ineinander, wird der Abstand  $g_N(K_1, K_2)$  negativ. Dieser Fall soll im Folgenden als unzulässig betrachtet werden, da von starren Körpern ohne Kontaktnachgiebigkeit ausgegangen wird. (Zur Erkennung einer Kontaktzustandsänderung im Algorithmus wird allerdings jeweils kurz in diesen Bereich eingetreten.)

Der Normalabstand  $g_N$  ist Indikator der Kontaktkinematik auf Lageebene. Zur vollständigen Beschreibung des Kontaktzustandes sind jedoch oft zusätzlich Kontaktindikatoren auf **Geschwindigkeitsebene** ( $\dot{g}_N, \dot{g}_T$ ) notwendig. Speziell bei diskontinuierlicher Dynamik müssen die Relativgeschwindigkeiten der Kontaktpunkte in Normalenrichtung bzw. Tangentialrichtung in die Betrachtungen mit einbezogen werden. Denn bei einem Stoß treffen zwei Körper mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aufeinander.

Die Kontaktpunkte  $C_1, C_2$  fallen nur momentan (und innerhalb der Stoßzeit gleich bleibend) mit den *körperfesten* Punkten  $\Sigma_{P_1}, \Sigma_{P_2}$  auf der Kontur  $\Sigma_1, \Sigma_2$  zusammen (Bild 63). Entscheidend für das weitere Verhalten des Systems während und nach dem Stoß ist die Relativgeschwindigkeit der momentan *körperfesten* Punkte, d. h. also die der Kontaktpunkte.

Werden mit  $\mathbf{v}_{C_1}$ ,  $\mathbf{v}_{C_2}$  die Geschwindigkeiten der Punkte  $C_1$ ,  $C_2$  bezeichnet, dann ergeben sich die Geschwindigkeiten in Normalenrichtung und in tangentialer Richtung durch die folgenden Gleichungen (Herleitung: GLOCKER [41, S. 25-28]):

$$\dot{g}_N = \mathbf{n}_1^T \mathbf{v}_{C_1} + \mathbf{n}_2^T \mathbf{v}_{C_2} \quad \text{und} \quad \dot{g}_T = \mathbf{t}_1^T \mathbf{v}_{C_1} + \mathbf{t}_2^T \mathbf{v}_{C_2} \quad (93)$$

Weitere Umformungen ersetzen die absoluten Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_{C_i}$  ( $i = 1, 2$ ) mit den JACOBI-Matrizen  $\mathbf{J}_{C_i}$  durch die Zustandsgrößen im Vektor  $\dot{\mathbf{q}}$  (TAYLOR-Entwicklung):

$$\mathbf{v}_{C_i} = \mathbf{J}_{C_i} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{v}}_{C_i} \quad \text{mit} \quad \mathbf{J}_{C_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{C_i}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (94)$$

Für die Relativgeschwindigkeit  $\dot{g}_N$  in Normalenrichtung wird noch ein Schritt aufgezeigt:

$$\begin{aligned} \dot{g}_N &= \mathbf{n}_1^T (\mathbf{J}_{C_1} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{v}}_{C_1}) + \mathbf{n}_2^T (\mathbf{J}_{C_2} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{v}}_{C_2}) \\ \dot{g}_N &= (\mathbf{n}_1^T \mathbf{J}_{C_1} + \mathbf{n}_2^T \mathbf{J}_{C_2}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{n}_1^T \hat{\mathbf{v}}_{C_1} + \mathbf{n}_2^T \hat{\mathbf{v}}_{C_2}] \\ \dot{g}_N &= \mathbf{W}_N^T \dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{w}}_N \end{aligned} \quad (95)$$

Die Relativbeschleunigungen können aus Gl. (93) durch zeitliche Differentiation gewonnen werden. Die Beziehungen der Kopplungskinematik lassen sich schließlich für mehrere Kontaktpunkte, wofür jetzt Vektoren stehen (z.B.  $\mathbf{g}_N$ ,  $\dot{\mathbf{g}}_N$ ), wie folgt zusammenfassen:

$\begin{aligned} \mathbf{g}_N &= \mathbf{g}_N(\mathbf{q}) \\ \dot{\mathbf{g}}_N &= \mathbf{W}_N^T \dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{w}}_N & \dot{g}_T &= \mathbf{W}_T^T \dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{w}}_T \\ \ddot{\mathbf{g}}_N &= \mathbf{W}_N^T \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{w}}_N & \ddot{g}_T &= \mathbf{W}_T^T \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{w}}_T \end{aligned}$	(96)
--	------

Für die Abkürzungen  $\hat{\mathbf{w}}_N$ ,  $\hat{\mathbf{w}}_T$ ,  $\bar{\mathbf{w}}_N$  und  $\bar{\mathbf{w}}_T$  gelten die Abhängigkeiten:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{w}}_N &= \hat{\mathbf{w}}_N(\mathbf{q}) \\ \hat{\mathbf{w}}_T &= \hat{\mathbf{w}}_T(\mathbf{q}) \\ \bar{\mathbf{w}}_N &= \bar{\mathbf{w}}_N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{W}}_N^T \dot{\mathbf{q}} + \dot{\hat{\mathbf{w}}}_N \\ \bar{\mathbf{w}}_T &= \bar{\mathbf{w}}_T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{W}}_T^T \dot{\mathbf{q}} + \dot{\hat{\mathbf{w}}}_T \end{aligned}$$

Die Herausforderung der Kopplungskinematik liegt in den nichtlinearen geometrischen Beziehungen der Zwangsbedingungen, die in die Projektionsmatrizen  $\mathbf{W}_N(\mathbf{q})$  und  $\mathbf{W}_T(\mathbf{q})$  einfließen, vgl. Gl. (85). Zwar lassen sich über Vektorpolygone und implizite Differentiation Beziehungen für Ort, Richtung und Bewegung der Kontaktpunkte relativ schnell angeben, allerdings sind dann viele Koordinaten und Winkel mit transzendenten Gleichungen verknüpft. Nur selten gelingt es, diese explizit zu einer allein von den Minimalkoordinaten abhängigen Funktion wie  $\mathbf{g}_N = \mathbf{g}_N(\mathbf{q})$  aufzulösen.

Die **Problemspezifik** gestattet in dieser Arbeit nur ein **exemplarisches Vorgehen** hinsichtlich Kontaktkinematik. Für ein ebenes Drehgelenk mit Spiel am Kurbelbolzen der Kurbelschwinge (nur ein Kontaktpunktpaar) wird die Theorie im Kapitel 5.5.2 in Einzelschritten erläutert. Hier gelingt auch die explizite Auflösung zu einer allein von den Minimalkoordinaten abhängigen Funktion, wie z.B. auf Lageebene:  $g_N = g_N(\mathbf{q})$ .

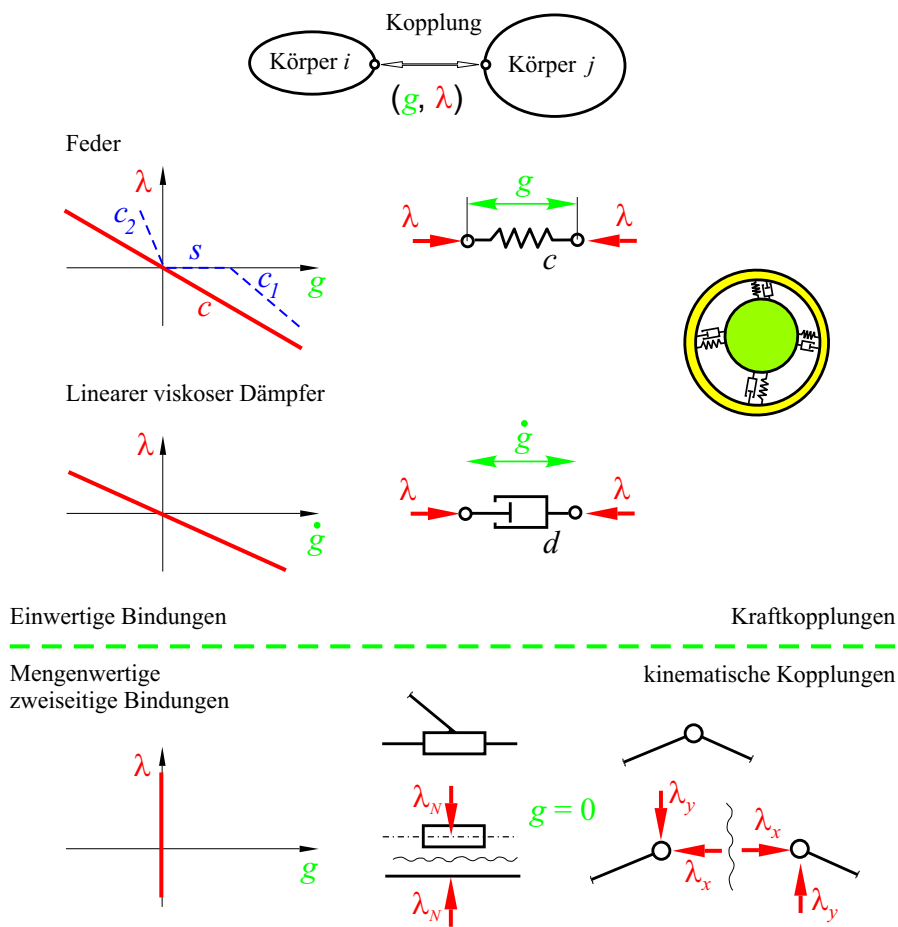
**5.3.4 Kontaktgesetze: Kraftgesetze – Stoßgesetze**

Der Abschnitt 5.3.1 führte bereits die Begriffe 'Bindung' oder 'Kopplung' ein und klassifiziert diese in Bild 61 auf S. 80 nach ihrer Wertigkeit in einwertige und mengenwertige Bindungen. Einwertige und zweiseitige mengenwertige Bindungen ändern den Freiheitsgrad des Systems nicht. Bei einseitigen mengenwertigen Bindungen kann sich zum Beispiel durch Öffnen eines Kontaktes der Freiheitsgrad erhöhen.

Gegenüber Abschnitt 5.3.1 sollen jetzt einige Kennlinien und mathematische Beziehungen beschrieben werden. Neben den Kraftgesetzen im Teil a) soll im Teil b) auch die diskontinuierliche Dynamik mit Impulsgesetzen betrachtet werden. Sie zeichnet sich durch Sprünge und Unstetigkeiten in den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aus.

**a) Kontinuierliche Dynamik – Kraftgesetze**

Dieser Abschnitt soll den Unterschied zwischen klassischen (einwertigen) Kraftgesetzen und mengenwertigen Kraftgesetzen verdeutlichen. Ein Kontaktpunktpaar auf den beteiligten Körpern, der Normalabstand  $g_N$  und die mit einem Richtungsvektor (z.B. Normalenvektor  $\vec{n}$ ) zu multiplizierende skalare Kontaktkraft  $\lambda$  (z.B.  $\lambda_N$  ... Normalkraft) definieren eine Kopplung (Bild 60, S. 79 und Bild 62, S. 86). Der Wert von  $\lambda$  soll für eine Druckkraft positiv sein.



**Bild 65:** Kraftgesetze für Mehrkörpersysteme – klassisch

Bild 65 zeigt oben klassische einwertige Kraftgesetze. Die Verwendung von diskreten Feder- oder Dämpfer-Elementen zwischen zwei Körpern wird als **Kraftkopplung** oder auch **Kraftelement**

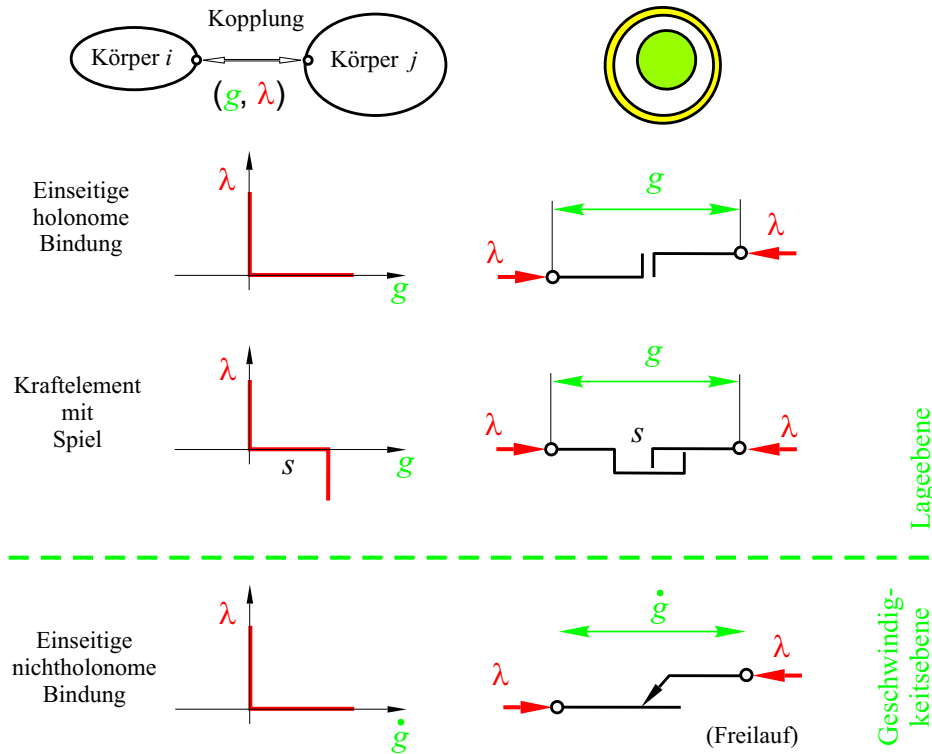
bezeichnet. Ein Mehrkörpermodell wird dadurch an dieser Stelle aufgetrennt, der kinematische Zwang wird aufgehoben.

Natürlich können die Feder- und Dämpferkennlinien auch nichtlinear und geknickt (unstetig in der 1. Ableitung) sein. Die Kennlinien sind aber immer eindeutige Funktionen mit genau einer Kraft  $\lambda$  zu einem Abstand  $g$  bzw. zu einer Relativgeschwindigkeit  $\dot{g}$ . MKS-Programme bieten heute bereits vielfältige vorgefertigte Modellelemente, die dieser Kategorie Kraftkopplung zuzuordnen sind.

Einen zweiten Typ klassischer Kopplung in MKS, die **kinematische Kopplung**, illustriert der untere Teil von Bild 65. Die zweiseitige Bindung zeichnet sich durch einen konstanten Abstand (z.B.  $g=0$ ) und eine beliebige Kontaktkraft  $\lambda$  aus. Ein funktioneller Zusammenhang zwischen  $g$  und  $\lambda$  im Sinne eindeutiger Zuordnung existiert nicht. Es handelt sich hier bereits um ein mengenwertiges Kraftgesetz.

Bei der Berechnung (Integration) der Bewegungsdifferentialgleichung in Minimalkoordinaten bleiben diese Zwangskräfte kinematischer Kopplungen **passive Kräfte** und haben keinen Einfluss. Sie können nach der Berechnung der Zeitfolge von Systemzuständen durch eine 'inverse Dynamik'-Rechnung (Kinetostatik) im Nachhinein ermittelt werden. Es sei angemerkt, dass das spielfreie ebene Drehgelenk gleichzeitig zwei zweiseitige Bindungen repräsentiert mit zwei Kraftkomponenten, analog schließt das ebene Schubgelenk ohne Spiel mit Normalkraft und Kippmoment zwei Bindungen ein.

Im Bild 66 handelt es sich um einseitige bzw. **unilaterale Kopplungen**, d.h. um Kontakte mit unterschiedlichen Zuständen wie Offen, Geschlossen, Stoß, Haften, Linksgleiten oder Rechtsgleiten. Die zugehörigen Kraftgesetze sind mengenwertig und besitzen zueinander orthogonale Kurventeile. Die 'Eckengesetze' sind sehr einfach interpretierbar und besitzen wesentlich weniger Parameter als nichtlineare Gesetze für Kraftkopplungen.



**Bild 66:** Kraftgesetze für Mehrkörpersysteme – mengenwertig (unilateral)

So reicht für das unilaterale Kraftelement mit Spiel genau ein Parameter, das Spiel  $s$ . Ein vergleichbares nichtlineares Gesetz für Kraftkopplungen hätte nicht die beiden vertikal verlaufenden Kurvenäste, sondern anstelle dessen je einen schrägen Ast mit jeweils einer Federkonstante, vgl. Bild 65 links oben.

Unilaterale Kraftgesetze entscheiden in Verbindung mit der Kopplungskinematik  $\mathbf{g}_N, \dot{\mathbf{g}}_N, \dot{\mathbf{g}}_T$ , die wiederum vom Zustand  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  abhängt, über Art und Zeitfolge von Kontaktzuständen. Die detaillierten Vorgänge in Normal- und Tangentialrichtung werden noch im Verlauf dieses Kapitels beschrieben.

Generell lassen sich die Eckengesetze als **Komplementarität** mathematisch formulieren, z.B. gilt für die einseitige holonome Bindung auf Lageebene:

$$g \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad g \cdot \lambda = 0 \quad (97)$$

Normalabstand  $g$  oder Normalkraft  $\lambda$  sind größer/gleich Null, wobei aber gleichzeitig nur eine Größe davon ungleich Null wird. Deshalb verschwindet  $(g \cdot \lambda)$ , das Produkt aus beiden.

Da sich mengenwertige Kraftgesetze sowohl in Normalenrichtung für Öffnen und Schließen als auch in Tangentialrichtung für Haften, Linksgleiten und Rechtsgleiten mit Komplementaritäten, in einheitlicher mathematischer Form darstellen lassen, entsteht eine kompakte Systembeschreibung.<sup>1</sup>

Erst diese einheitliche Systembeschreibung von Mehrkörpersystemen mit Reibung, Spiel und Stößen durch mengenwertige Kennlinien bzw. Komplementaritäten macht das kombinatorische Problem möglicher Kontaktzustände bei mehreren einseitigen Kontakten mathematisch beherrschbar. Auf die Algorithmen geht Kapitel 5.4 kurz ein.

Im Unterschied zu alternativen Ansätzen der Modellierung spielbehafteter Gelenke mit Feder-Dämpfer-Elementen, die in der Regel große Parameterunsicherheiten für die nichtlinearen Feder-Dämpfer-Kennlinien, steife DGL und hohe Rechenzeiten hervorrufen, lassen sich jetzt die realen physikalischen Verhältnisse einschließlich Haft-Gleit-Übergänge und Mehrfachstöße besser nachbilden.

Mengenwertige Kraftgesetze beweisen besonders für Systeme mit mehreren Kontaktstellen und vielen verschiedenen voneinander abhängigen Kontaktzuständen ihre Leistungsfähigkeit. Es werden tatsächlich a priori Systemzustände unterschieden und Systeme als strukturvariant behandelt. Demgegenüber bleibt mit einer Systembeschreibung durch klassische Kraftfunktionen der Zustand aller Kopplungen während der Bewegung immer der gleiche.

Kopplungszustände werden bei einwertigen Kraftgesetzen nicht auf direktem Weg unterschieden. Der Zustand einer Kopplung (z.B. Offen, Geschlossen) kann aus der Kraftfunktion (z.B. nichtlineare Feder mit Spiel) eindeutig abgelesen werden. Die so indirekt ermittelten Kontaktzustände hängen aber gerade bei mehreren abhängigen Kontakten sehr stark von den unsicheren Parametern der nichtlinearen Kraftgesetze ab.

Für Systeme mit vielen 'trockenen' starren Masse-Masse-Kontakten und häufigem Wechsel der Kontaktzustände bietet sich deshalb die Modellierung mit Eckengesetzen und einseitigen Bindungen an. Für Kontakte mit Elastizitäten oder Dämpfern bzw. nennenswertem Schmierfilm zwischen den Massen haben Modelle mit Kraftkopplungen ihre Vorteile.

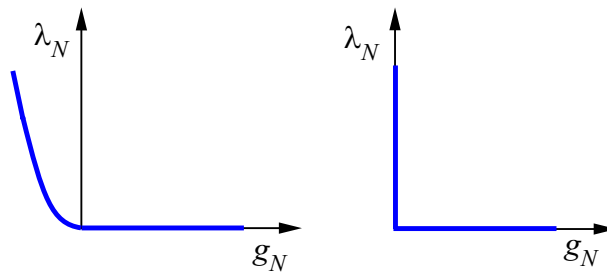
---

<sup>1</sup>Besonders FÖRG 2007 [29] zeigt, dass MKS einschließlich diskontinuierlicher Dynamik (Stöße) durch Beschreibung der Kopplungen auf Geschwindigkeits- und Impulsebene einheitlich diskretisierbar und mit Time-Stepping-Verfahren numerisch iterativ lösbar sind. Zur numerischen Behandlung wird dabei in einem weiteren Schritt von Komplementaritäten und gewöhnlichen DGL auf Projektionen und Maß-DGL übergegangen.

### Kontaktzustände

Jetzt soll die mathematische Beschreibung speziell für die Fälle vertieft werden, die im Kapitel 5.5 praktisch angewendet werden.

Bei sehr steifen Körpern kann auf die Modellierung lokaler Kontaktnachgiebigkeiten verzichtet und ein mengenwertiges Kraftgesetz angesetzt werden. Bild 67 skizziert den Gedanken vom Grenzübergang der Kontaktsteifigkeit in **Normalenrichtung**. Im linken Diagramm ist ein funktioneller Zusammenhang zwischen dem Normalabstand  $g_N$  und der zugehörigen Normalkraft  $\lambda_N$  zu sehen, d. h. jedem  $g_N$  ist in eindeutiger Weise ein  $\lambda_N(g_N)$  zugewiesen. Der Graph der Funktion steigt für  $g_N < 0$  sehr stark an. Dies ist die Situation, wie sie für lokale Kontaktnachgiebigkeiten auftritt. Rechts daneben ist ein mengenwertiges Kraftgesetz abgebildet. Für den Fall  $g_N = 0$  ist  $\lambda_N$  größer/gleich Null und zunächst nicht eindeutig festgelegt. Ein ineinander Eindringen wird ausgeschlossen.



**Bild 67:** Kontaktgesetze in Normalenrichtung

Dieses Gesetz ist wie schon in Gl. (97) als Komplementarität formulierbar, siehe GLOCKER [41] oder STIEGELMEYR [84], d.h.

$$g_N \geq 0, \quad \lambda_N \geq 0, \quad g_N \lambda_N = 0 \quad (98)$$

In Normalenrichtung werden die beiden Zustände Kontakt und Separation unterschieden. Über das Auftreten eines Stoßes kann dabei nur die zeitliche Abfolge von Kontaktzuständen in Wechselwirkung mit der gesamten Systembewegung  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  und  $\ddot{\mathbf{q}}$  entscheiden. Wenn der Kontakt zum Zeitpunkt  $t_k$  offen ist, muss im nächsten Zeitschritt mit der Bedingung  $g_N = 0$  geprüft werden, ob er zu der Menge der geschlossenen Kontakte übergegangen ist. Genau dann sind für das System die Stoßgleichungen (S. 98) auszuwerten.

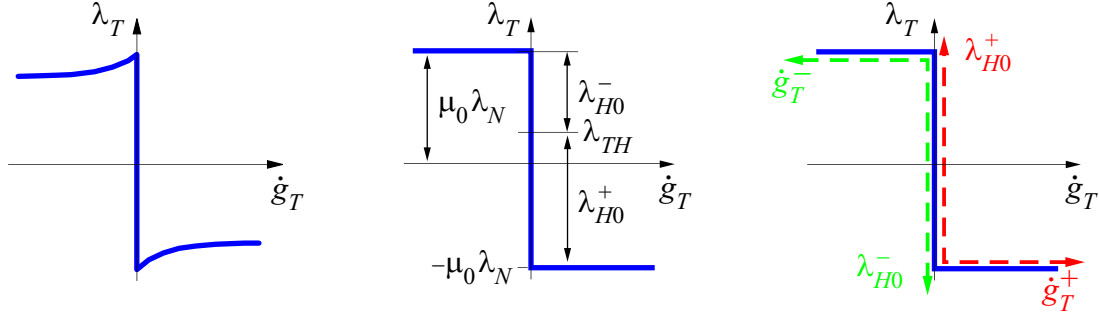
Für einen geschlossenen Kontakt ( $g_N = 0$ ) wird die **Tangentialrichtung** untersucht (Bild 68). Zur Modellierung der Reibkontakte dient zumeist das COULOMB'sche Gesetz für Trockenreibung. Die Kennlinie links in Bild 68 ist auch unter dem Namen STRIBECKKurve bekannt. In dieser Arbeit (für die Kurbelschwinge mit Spiel) wird allerdings vereinfachend angenommen, dass die Kraft für  $\dot{g}_T > 0$  und  $\dot{g}_T < 0$  konstant ist ( $\mu = \mu_0$ ) wie in der Mitte von Bild 68.

Im Haftfall  $\dot{g}_T = 0$  ist keine eindeutige Zuordnung von Gleitgeschwindigkeit  $\dot{g}_T$  und Tangentialkraft  $\lambda_T$  möglich. Es liegt ein mengenwertiges Gesetz vor. Mit dem Haftreibungskoeffizienten  $\mu_0$  kann eine beliebige Tangentialkraft  $\lambda_T$  innerhalb der Haftgrenzen  $-\mu_0 \lambda_N \leq \lambda_T \leq \mu_0 \lambda_N$  entstehen. Die Haftkraftreserve von einer momentanen Haftkraft  $\lambda_{TH}$  bis zum Gleiten mit positiver Tangentialgeschwindigkeit beträgt  $\lambda_{H0}^+$ , analog  $\lambda_{H0}^-$  zur anderen Richtung. Für die Haftkraftreserven gilt:

$$\lambda_{H0}^+ = \mu_0 \lambda_N + \lambda_{TH} \quad \lambda_{H0}^- = \mu_0 \lambda_N - \lambda_{TH} \quad \lambda_{H0}^+ + \lambda_{H0}^- = 2 \mu_0 \lambda_N \quad (99)$$



Wie bei GLOCKER [41] und STIEGELMEYR [84, S. 22-24] ausführlich hergeleitet, muss für die Beschreibung dieser Kennlinie durch Komplementaritäten eine Zerlegung in zwei Kurvenäste vorgenommen werden, siehe Bild 68 rechts.



**Bild 68:** Reibkraftgesetze in Tangentialrichtung

Die Komplementaritäten ergeben sich lt. [84, S. 23] zu

$$\dot{g}_T^+ \geq 0, \quad \lambda_{H0}^+ \geq 0, \quad \dot{g}_T^+ \lambda_{H0}^+ = 0 \quad (100)$$

$$\dot{g}_T^- \geq 0, \quad \lambda_{H0}^- \geq 0, \quad \dot{g}_T^- \lambda_{H0}^- = 0 \quad (101)$$

Die Relativgeschwindigkeiten  $\dot{g}_T^+$  bzw.  $\dot{g}_T^-$  in (100), (101) beinhalten den positiven bzw. negativen Anteil der Tangentialgeschwindigkeit  $\dot{g}_T = \dot{g}_T^+ - \dot{g}_T^-$  nach der Beziehung:

$$\dot{g}_T^+ = \frac{1}{2} (|\dot{g}_T| + \dot{g}_T) \geq 0 \quad \text{und} \quad \dot{g}_T^- = \frac{1}{2} (|\dot{g}_T| - \dot{g}_T) \geq 0 \quad (102)$$

Zur Erläuterung der Kontaktgesetze wird nun zum allgemeinen Fall **beliebig vieler Kontaktpunkte** (Anzahl  $n_G$ , Menge  $I_G$ ) übergegangen. Nur für die Menge aller geschlossenen Kontakte  $I_S$  treten Kontaktkräfte  $\lambda_N$  und  $\lambda_T$  ungleich Null auf. Mit dem Lageindikator  $g_{Ni} = 0$  werden geschlossene Kontakte erkannt.

Für einen beliebigen Kontakt mit Index  $i$  werden zur Unterscheidung seines Kontaktzustandes vier **Indexmengen** eingeführt.

$$\begin{aligned} I_G &= \{1, 2, \dots, n_G\} \\ I_S &= \{i \in I_G \mid g_{Ni} = 0\} \quad \text{mit } n_S \text{ Elementen} \\ I_N &= \{i \in I_S \mid \dot{g}_{Ni} = 0\} \quad \text{mit } n_N \text{ Elementen} \\ I_H &= \{i \in I_N \mid \dot{g}_{Ti} = 0\} \quad \text{mit } n_H \text{ Elementen} \end{aligned} \quad (103)$$

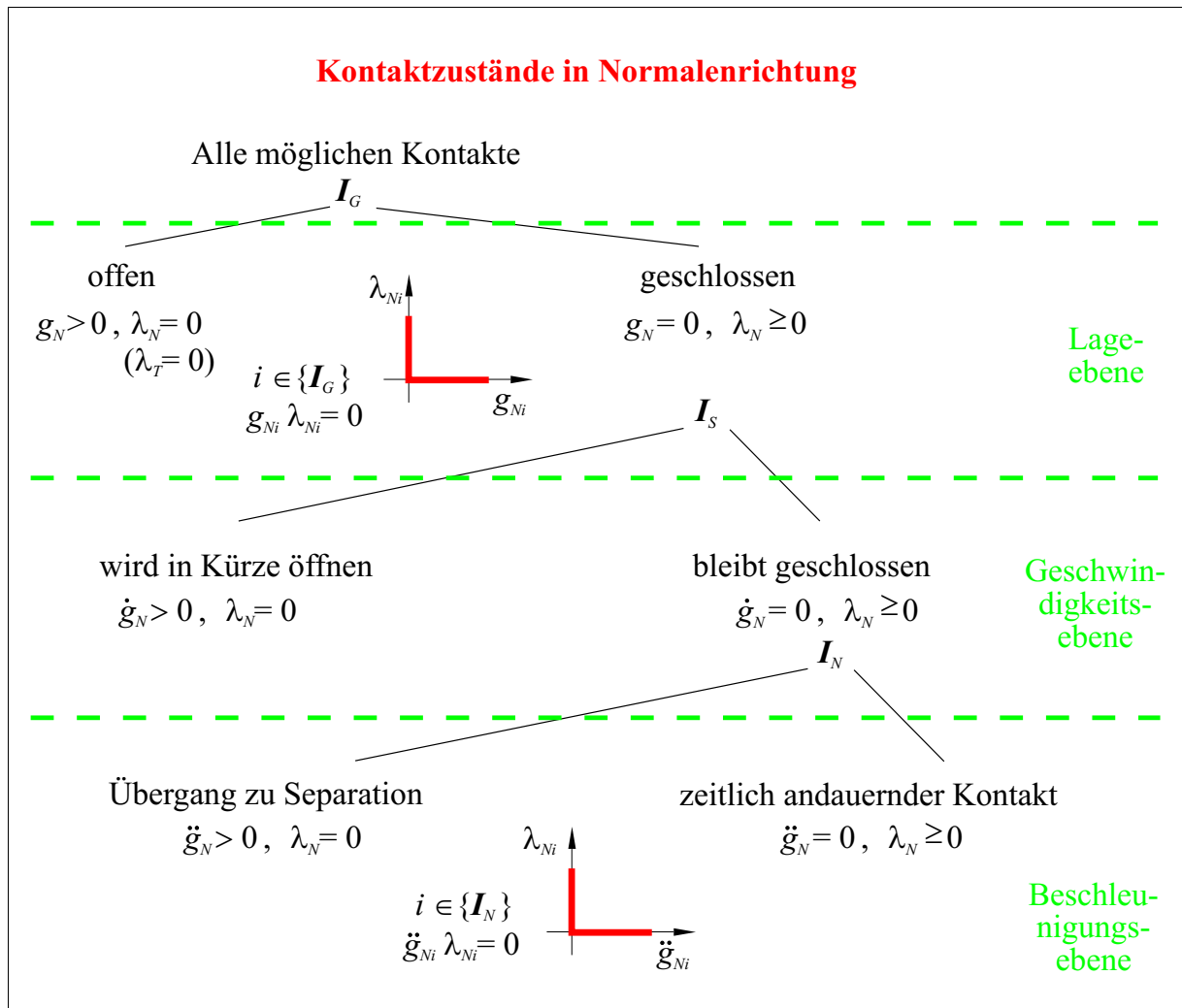
Die Menge  $I_N$  beschreibt die geschlossenen Kontakte, die die notwendige Bedingung für anhaltenden Kontakt erfüllen, nämlich eine verschwindende Relativgeschwindigkeit in Normalenrichtung. Die Menge  $I_H$  umfasst Kontakte, die möglicherweise haften können. Die Anzahl der Elemente von  $I_S$ ,  $I_N$ ,  $I_H$  ist nicht konstant, da sich die Kontaktzustände auf Grund von Stößen, Haft-Gleit-Übergängen und Abheben von Körpern ändern können.

Die Bilder 69 und 70 fassen nochmals die Evolution der Kontaktzustände ohne Stöße zusammen. Stufenweise und in verschiedenen Auswerteebenen (Lage, Geschwindigkeit oder Beschleunigung) müssen spezielle Fallunterscheidungen getroffen werden.

Die BDGL (84) von S. 87 erhält dann auf der Lageebe (mit  $I_S$ ) die Form:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h} - \sum_{i \in I_S} [\mathbf{w}_{Ni} \lambda_{Ni} + \mathbf{w}_{Ti} \lambda_{Ti}] = 0 \quad (104)$$

Diese Indexmengen werden nur dann alle gebraucht, wenn im Lösungsalgorithmus das Kontaktproblem auf Beschleunigungsebene bearbeitet wird (Kap. 5.4), beim Time-Stepping-Verfahren auf Geschwindigkeits- und Impuls-Ebene kann die Indexmengenverwaltung stark vereinfacht werden.



**Bild 69:** Mengenvwertige Kontaktgesetze in Normalenrichtung

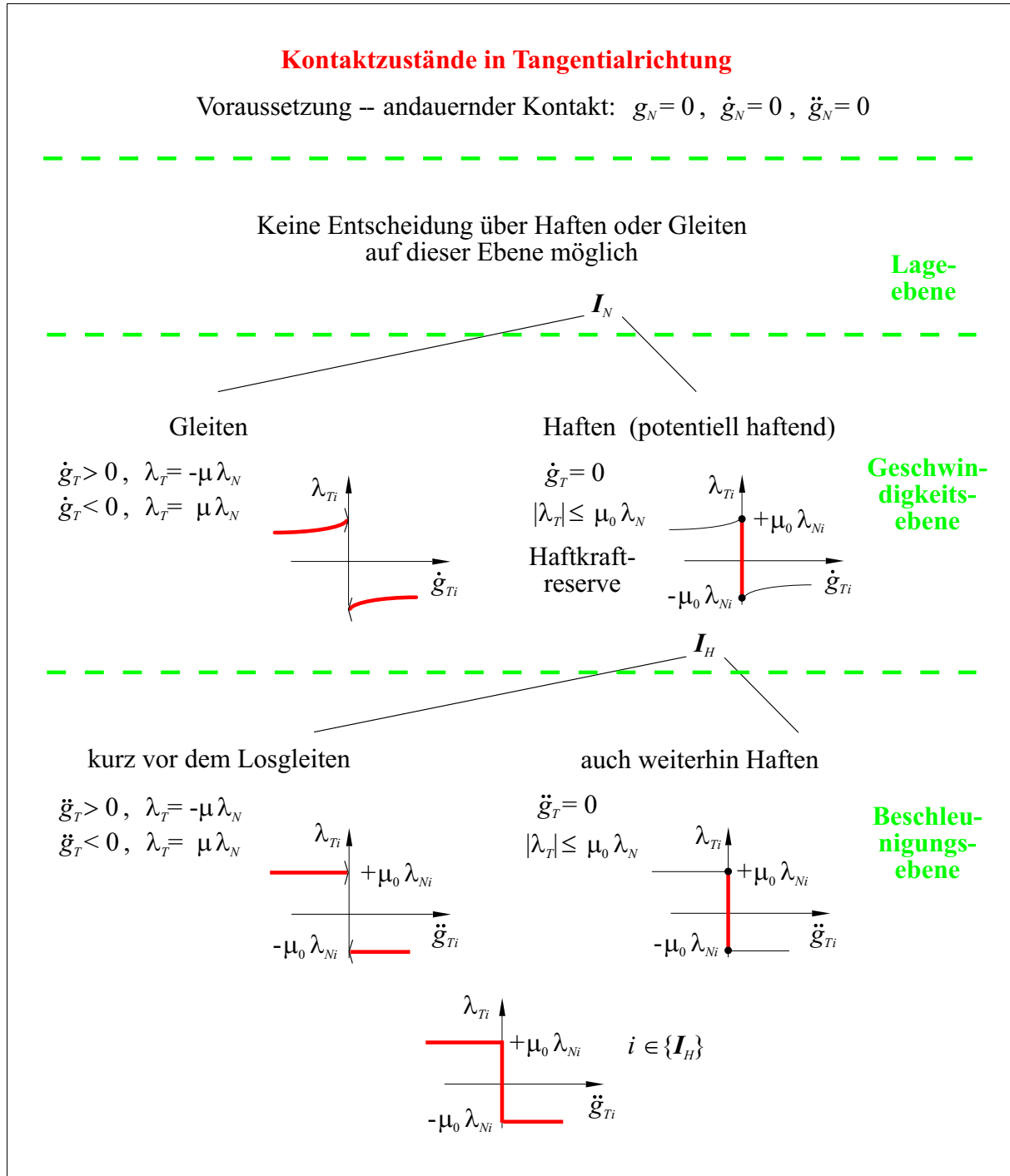


Bild 70: Mengenwertige Kontaktgesetze in Tangentialrichtung

### b) Diskontinuierliche Dynamik – Impulsgesetze (Stöße)

Ausführlich setzen sich GLOCKER 1995 [41, S.97-134] und STIEGELMEYR [84, S. 37-57] mit der Stoßtheorie und deren Einbindung in die Mehrkörpersimulation auseinander. Hier sollen nur wenige Grundgedanken aufgenommen werden.

Kommt ein bisher offener Kontaktpunkt im nächsten Zeitpunkt zur Menge der geschlossenen Kontakte hinzu, dann wird im System ein Stoßvorgang induziert. Der Stoßvorgang wird nach POISSON in Kompressions- und Expansionsphase aufgeteilt, bei gleichzeitiger Annahme:

$$\Delta t = t_E - t_A \rightarrow 0 \quad (105)$$

Es gilt folgende Indizierung:

- A – Stoßanfang – Kompressionsbeginn
- C – Kompressionsende und Expansionsbeginn
- E – Stoßende – Expansionsende

Die Stoßmodellierung nach POISSON benutzt einen Stoßkoeffizienten  $\varepsilon$ , der das dissipative Verhalten eines Stoßes charakterisiert. Der Koeffizient  $\varepsilon$  gibt das Verhältnis des in der Expansionsphase freigesetzten Impulses zu dem während der Kompression gespeicherten Impuls an.

$$\varepsilon = \frac{\Lambda_{Expansion}}{\Lambda_{Kompression}} \quad (106)$$

Bei teilelastischen Stößen liegt der Wert des Stoßkoeffizienten  $\varepsilon$  im Intervall  $]0, 1[$  mit den Grenzwerten:  $\varepsilon = 1$  – ideal elastischer Stoß, und  $\varepsilon = 0$  – ideal plastischer Stoß.

Ein Stoß wird als Geschwindigkeitssprung idealisiert, der wiederum nur durch eine unendliche Kraft in verschwindender Zeit erzeugbar ist. Die Lage der Körper einschließlich der Kontaktpunkte und Krafteingriffsrichtungen  $\mathbf{n}_i, \mathbf{t}_i$  aller Kontakte  $i$  wird innerhalb der Stoßzeit als konstant angenommen. Zum Stoßbeginn  $t = t_A$  sind der Systemzustand  $\mathbf{q}(t_A)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(t_A)$  und die Kontaktindikatoren  $g_{NAi}, \dot{g}_{NAi}, \dot{g}_{TAi}$  bekannt. Nun haben die Stoßgesetze die Aufgabe, die Systemzustände  $\dot{\mathbf{q}}(t_C)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(t_E)$  und die Kontaktindikatoren  $\dot{g}_{NCi}, \dot{g}_{TCi}, \dot{g}_{NEi}, \dot{g}_{TEi}$  nach der Kompression ( $t=t_C$ ) und am Stoßende nach der Expansion ( $t=t_E$ ) zu bestimmen.

Das Stoßverhalten des Starrkörpersystems wird global (integrale Näherung) unter Einfluss der mechanischen Grundgleichungen eines Starrkörpersystems, d.h. auf Impuls- und Geschwindigkeitsebene, betrachtet. Da sich in MKS mit Starrkörperkontakten Impulse ohne Zeitverzögerung über alle geschlossenen Kontakte ausbreiten, müssen alle momentan geschlossenen einseitigen Bindungen gemeinsam betrachtet werden.

Für die Erstellung einer Impulsbilanz wird die BDGL (104), S. 95:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h} - \sum_{i \in I_S} [\mathbf{w}_{Ni} \lambda_{Ni} + \mathbf{w}_{Ti} \lambda_{Ti}] = 0$$

zunächst vom Stoßanfang bis zum Ende der Kompressionsphase ( $t=t_C$ ) ausgewertet, es gilt:

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) - \sum_{i \in I_S} [\mathbf{w}_{Ni} \Lambda_{NCi} - \mathbf{w}_{Ti} \Lambda_{TCi}] = 0 \quad (107)$$

Alle Kontaktkräfte geschlossener Kontakte  $\lambda_{Ni}, \lambda_{Ti}$  ( $i \in I_S$ ) liefern einen Anteil in Form der Impulse  $\Lambda_{NCi}, \Lambda_{TCi}$ , während ein Impuls infolge  $\mathbf{h}$  vernachlässigt wird. STIEGELMEYR [84] erweitert das POISSONSche Stoßgesetz auf eine endliche kurze Stoßzeit mit der Konsequenz der kleinen Lageänderung ( $\mathbf{q}_E \neq \mathbf{q}_A$ ) und kleinen Anteilen der Impulse  $\mathbf{H} = \mathbf{h} \cdot \Delta t$ .

### Kompressionsphase

Im folgenden wird (wie für das Beispiel Kurbelschwinge ausreichend) von einer einzigen einseitigen Bindung ausgegangen. Die Impulsbilanz (107) vereinfacht sich dann zu:

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) - \mathbf{w}_N \Lambda_{NC} - \mathbf{w}_T \Lambda_{TC} = 0 \quad (108)$$

Die Impulsbilanz kann nach der Geschwindigkeitsänderung aufgelöst werden. Einsetzen in die Kinematikbeziehungen für einen einzelnen aktiven Kontakt

$$\begin{aligned} \dot{q}_{NC} &= \dot{q}_{NA} + \mathbf{w}_N^T (\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) \\ \dot{q}_{TC} &= \dot{q}_{TA} + \mathbf{w}_T^T (\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) \end{aligned} \quad (109)$$

ergibt einen Zusammenhang zwischen den Relativgeschwindigkeiten und Impulsen im betrachteten Kontakt:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{NC} &= \dot{q}_{NA} + \mathbf{w}_N^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{w}_N \Lambda_{NC} + \mathbf{w}_T \Lambda_{TC}) \\ \dot{q}_{TC} &= \dot{q}_{TA} + \mathbf{w}_T^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{w}_N \Lambda_{NC} + \mathbf{w}_T \Lambda_{TC}) \end{aligned} \quad (110)$$

Daraus entsteht der Gleichungssatz zur Auswertung der Kompressionsphase (schon auf den Lösungsalgorithmus mit Time-Stepping im folgenden Kapitel 5.4 ausgerichtet):

$$\begin{aligned} \dot{q}_{NC} &= \dot{q}_{NA} + w_{NN} \Lambda_{NC} + w_{NT} \Lambda_{TC} \\ \dot{q}_{TC} &= \dot{q}_{TA} + w_{TN} \Lambda_{NC} + w_{TT} \Lambda_{TC} \end{aligned} \quad (111)$$

mit den Abkürzungen:

$$w_{NN} = \mathbf{w}_N^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{w}_N \quad w_{TT} = \mathbf{w}_T^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{w}_T \quad w_{NT} = \mathbf{w}_N^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{w}_T = w_{TN} \quad (112)$$

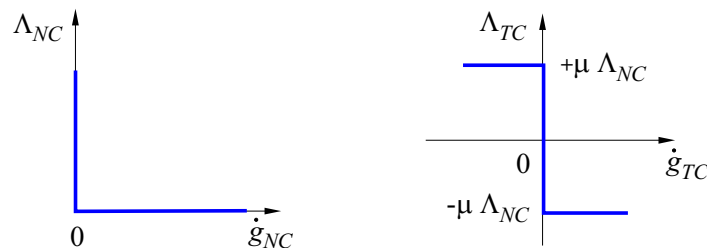
Weitere Beziehungen zur Berechnung der Unbekannten  $\dot{q}_{NC}$ ,  $\dot{q}_{TC}$ ,  $\Lambda_{NC}$  und  $\Lambda_{TC}$  liefern die folgenden Kontaktgesetze, die wiederum mengenwertig sind. Als Komplementarität formuliert lauten diese für die Kompressionsphase nach GLOCKER 1995 [41, S.109-114]:

$$\Lambda_{NC} \geq 0; \quad \dot{q}_{NC} \geq 0; \quad \Lambda_{NC} \cdot \dot{q}_{NC} = 0 \quad (113)$$

$$|\Lambda_{TC}| \leq \mu \Lambda_{NC}; \quad \begin{cases} |\Lambda_{TC}| < \mu \Lambda_{NC} & \Rightarrow \dot{q}_{TC} = 0 \\ \Lambda_{TC} = +\mu \Lambda_{NC} & \Rightarrow \dot{q}_{TC} \leq 0 \\ \Lambda_{TC} = -\mu \Lambda_{NC} & \Rightarrow \dot{q}_{TC} \geq 0 \end{cases} \quad (114)$$

In der Normalenrichtung dürfen keine 'Zugimpulse' auftreten, die Normalgeschwindigkeit kann Null aber nicht negativ werden, da sich am Ende der Kompressionsphase die Körper nicht mehr aufeinander zu bewegen dürfen. In tangentialer Richtung lässt sich das Stoßgesetz in Analogie zum COULOMBSchen Reibgesetz herleiten.

Diese Stoßgesetze sind in den beiden Kennlinien in Bild 71 veranschaulicht.



**Bild 71:** Kontaktgesetze für die Kompressionsphase

### Expansionsphase

Die Expansionsphase schließt nahtlos an die Kompression an, beginnend zum Zeitpunkt  $C$  und endend mit  $E$ . Im Allgemeinen ist das Stoßgesetz von POISSON (106) nur zur Behandlung von Einfach-Stößen gedacht. Unter dem Gesichtspunkt von möglichen Mehrfach-Stößen ist es notwendig, das Gesetz zu verändern, um ein Eindringen der Stoßpartner am Ende des Vorgangs auszuschließen. Ähnlich der Kompressionsphase in Normalenrichtung muss für die Normalgeschwindigkeit nach der Expansionsphase gelten

$$\dot{g}_{NE} \geq 0 \quad (115)$$

und für den Expansionsimpuls

$$\Lambda_{NE} \geq \varepsilon \Lambda_{NC} \quad (116)$$

Ist der Expansionsimpuls  $\Lambda_{NE}$  groß genug um eine Separation der Kontaktpartner zu erlauben, dann kann die Normalgeschwindigkeit jeden positiven Wert einnehmen  $\dot{g}_{NE} \geq 0$ . Ist dies nicht der Fall (wie z.B. bei Impulsen aus anderen einseitigen Kontakten), sollte der Expansionsimpuls größer als der ursprünglich durch POISSON vorgesehene Impuls sein, um ein Eindringen der Stoßpartner zu verhindern ( $\Lambda_{NE} > \varepsilon \Lambda_{NC}$ ). In diesem Fall ist  $\dot{g}_{NE} = 0$ . Beide Fälle können mathematisch ausgedrückt werden:

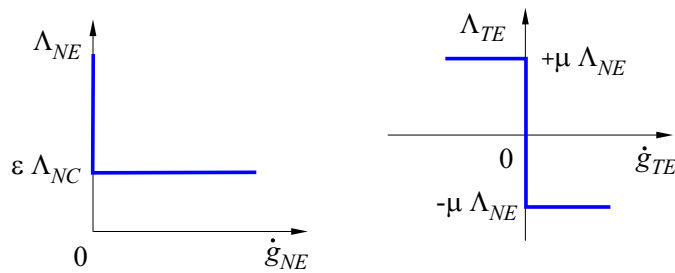
$$(\Lambda_{NE} - \varepsilon \Lambda_{NC}) \cdot \dot{g}_{NE} = 0 \quad (117)$$

Im linken Teil von Bild 72 ist die Kennlinie für dieses Gesetz angetragen. Der einzige Unterschied zum Bild 71 besteht im Offset-Impuls  $\varepsilon \Lambda_{NC}$ .

Genauso wie bei der Kompressionsphase kann das Gesetz für den Tangentialkontakt in drei Fälle aufgeteilt werden: Haften, Gleiten in positive Richtung, Gleiten in negative Richtung.

$$|\Lambda_{TE}| \leq \mu \Lambda_{NE}; \quad \begin{cases} |\Lambda_{TE}| < \mu \Lambda_{NE} & \Rightarrow \dot{g}_{TE} = 0 \\ \Lambda_{TE} = +\mu \Lambda_{NE} & \Rightarrow \dot{g}_{TE} \leq 0 \\ \Lambda_{TE} = -\mu \Lambda_{NE} & \Rightarrow \dot{g}_{TE} \geq 0 \end{cases} \quad (118)$$

Die Kennlinie für die tangentialen Richtung ist im rechten Teil von Bild 72 eingetragen.



**Bild 72:** Kontaktgesetze für die Expansionsphase

Bei der praktischen Auswertung eines teilelastischen Stoßgesetzes tritt das **Problem der unendlichen Stoßfolge** auf [84, S. 47]. Eine übliche numerische Maßnahme, um die Stoßserie zu beenden, besteht in der Auswertung eines plastischen Stoßes ab einer definitionsgemäß kleinen Annäherungsgeschwindigkeit. Dieses Hilfsmittel ist nicht physikalisch motiviert, aber zweckmäßig.

Das Bild 73 enthält zusammenfassend einen Überblick zur Evolution des Stoßvorganges in Kompressions- und Expansionsphase.

### Kontaktgesetze: Stoß - Kompression

Voraussetzung: Lage der Kontaktpunkte konstant ( $\mathbf{n}_i = \text{konst.}, \mathbf{t}_i = \text{konst.}$ )

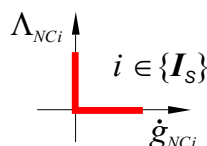
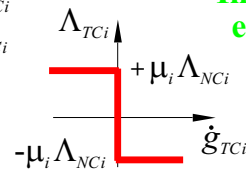
---

Entscheidung über Auftreten eines Stoßes:

Zeit $t_{k-i}$ : $g_{Ni} > 0$	Kontakt offen	$i \in \{\mathbf{I}_G \setminus \mathbf{I}_S\}$	}	Stoß	Lage- ebene
Zeit $t_k$ : $g_{Ni} = 0$	Kontakt geschlossen	$i \in \{\mathbf{I}_S\}$			

Kompressionsbeginn =  $t_k = t_A$       Kompressionsende =  $t_C$

---

Normalenrichtung	Tangentialrichtung		Geschwindigkeits- und Impuls- ebene
$\dot{g}_{NCi} \geq 0$ $\Lambda_{NCi} \geq 0$ $\dot{g}_{NCi} \Lambda_{NCi} = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} \dot{g}_{TCi} = 0 \\ \dot{g}_{TCi} < 0 \\ \dot{g}_{TCi} > 0 \end{array} \right. \begin{array}{l}  \Lambda_{TCi}  \leq +\mu_i \Lambda_{NCi} \\ \Lambda_{TCi} = +\mu_i \Lambda_{NCi} \\ \Lambda_{TCi} = -\mu_i \Lambda_{NCi} \end{array}$		

Entscheidung über Kompressionsende:  $\dot{g}_{NCi} \geq 0 \quad \forall i \in \{\mathbf{I}_S\}$

### Kontaktgesetze: Stoß - Expansion

Voraussetzung: Lage der Kontaktpunkte konstant ( $\mathbf{n}_i = \text{konst.}, \mathbf{t}_i = \text{konst.}$ )

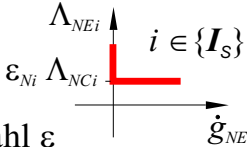
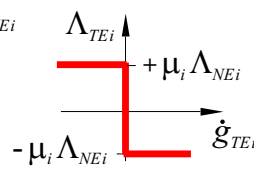
---

Kontakt geschlossen:  $g_{Ni} = 0 \quad i \in \{\mathbf{I}_S\}$

Zeit  $t_C$ : Ende Kompression, Anfang Expansion

Zeit  $t_E$ : Ende Expansion

---

Normalenrichtung	Tangentialrichtung		Geschwindigkeits- und Impuls- ebene
$\dot{g}_{NEi} \geq 0$ $\Lambda_{NEi} - \epsilon_{Ni} \Lambda_{NCi} \geq 0$ $\dot{g}_{NEi} (\Lambda_{NEi} - \epsilon_{Ni} \Lambda_{NCi}) = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} \dot{g}_{TEi} = 0 \\ \dot{g}_{TEi} < 0 \\ \dot{g}_{TEi} > 0 \end{array} \right. \begin{array}{l}  \Lambda_{TEi}  \leq +\mu_i \Lambda_{NEi} \\ \Lambda_{TEi} = +\mu_i \Lambda_{NEi} \\ \Lambda_{TEi} = -\mu_i \Lambda_{NEi} \end{array}$		

Stoßzahl  $\epsilon$

**Bild 73:** Kontaktgesetze für Reibstöße – Kompression (oben) bzw. Expansion (unten)

Anmerkung zum Lösungsalgorithmus für die diskontinuierliche Dynamik:  
 Aus den Beziehungen für die diskontinuierliche Dynamik, wie zum Beispiel Gl. (113), (114) und (111) zur Kompressionsphase, ergeben sich die zu lösenden Komplementaritätsprobleme für die Kontaktschleife in Bild 75 auf S. 105. Die tangentialen Stoßgesetze lassen sich mit einer Haftreserve analog zum Reibgesetz (Bild 68) aufspalten. Damit entsteht die mathematische Standardform eines linearen Komplementaritätsproblems (LCP), für die es Lösungsverfahren gibt. Der Schritt über ein LCP wird in unserem Falle eines einzelnen Kontaktes durch direkte Fallunterscheidungen umgangen.

#### 5.4 Lösungsalgorithmen für MKS

Die einheitliche Systembeschreibung allgemeiner Mehrkörpersysteme mit Reibung, Spiel und Stößen durch mengenwertige Kennlinien, Komplementaritäten bzw. in Form von Ungleichheitsnebenbedingungen macht die Mehrkörperdynamik einer effizienten Berechnung zugänglich. Allgemeingültige mathematische Werkzeuge wie LCP-Löser oder Projektionsverfahren (werden in dieser Arbeit nicht behandelt) können dann verwendet werden. Besonders FUNK 2004 [32] und FÖRG 2007 [29] zeigen, dass MKS einschließlich diskontinuierlicher Dynamik (Stöße) durch Beschreibung der Kopplungen auf Geschwindigkeits- und Impulsebene einheitlich diskretisierbar und mit Time-Stepping-Verfahren numerisch lösbar sind.

FÖRG 2007 [29] fasst die Systembeschreibung für MKS mit einseitigen Bindungen, wie schon in Kapitel 5.3.2 und Gl. (88) auf Seite 87 erwähnt, in kompakter Form zusammen:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{T} \mathbf{u} \\ \mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{W}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} \\ (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, t) &\in \mathcal{N}\end{aligned}$$

In die Nebenbedingungen  $\mathcal{N}$  gehen sowohl die Kopplungskinematik als auch die mengenwertigen Kontaktgesetze ein. Sie beinhalten auch Ungleichungen. Die effektive Anwendbarkeit dieser Darstellung mit moderner Numerik (Maßtheorie und Projektionsverfahren) ist bereits durch viele Beispiele abgesichert, z.B. FÖRG 2007 [29].

Hier sollen jetzt in vereinfachter Weise einige Schritte mit Blick auf die Anwendung in Kapitel 5.5 angeführt werden. Für ebene Bewegungen, wie im Anwendungsfall 'Mechanismenprüfstand' im Kapitel 5.5, sind die Drehgeschwindigkeiten direkt integrierbar. Es gilt  $\mathbf{T} = \mathbf{E}$  und die vereinfachte Form wie Gl. (84) als **Bewegungsdifferentialgleichung 2. Ordnung**:

$$\boxed{M(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathbf{W}_N(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}_N - \mathbf{W}_T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}_T = 0} \quad (119)$$

Mit der **Kopplungskinematik** nach Gl. (96):

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{g}_N &= \mathbf{g}_N(\mathbf{q}) \\ \dot{\mathbf{g}}_N &= \mathbf{W}_N^T \dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{w}}_N & \dot{\mathbf{g}}_T &= \mathbf{W}_T^T \dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{w}}_T \\ \ddot{\mathbf{g}}_N &= \mathbf{W}_N^T \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{w}}_N & \ddot{\mathbf{g}}_T &= \mathbf{W}_T^T \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{w}}_T \end{aligned}} \quad (120)$$

und den **Kontaktgesetzen**, wie z.B. für die Normalenrichtung der einseitigen Bindung  $k$  entsprechend Gl. (98):

$$\boxed{g_{Nk} \geq 0, \quad \lambda_{Nk} \geq 0, \quad g_{Nk} \cdot \lambda_{Nk} = 0} \quad (121)$$

besitzt die **Systembeschreibung** insgesamt **drei Blöcke**. Damit besteht nun die Aufgabe, daraus die zeitliche Veränderung des Systemzustandes  $\mathbf{q}(t)$  und  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  zu berechnen.



### Lösung auf Beschleunigungsebene

Innerhalb eines Integratorschrittes der numerischen Integration muss die Prozedur für die Zeitableitung bei bekanntem Zustand bereitgestellt werden. Das entspricht an dieser Stelle:

$$\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) [\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{W}_N(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}_N + \mathbf{W}_T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}_T] \quad (122)$$

Da aber die Kontaktkräfte  $\boldsymbol{\lambda}_N$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_T$  unbekannt sind, wird vor diesem Schritt das Kontaktproblem gelöst, indem in Gl. (120) und (121) die Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{q}}$  aus Gl. (122) eingesetzt wird. Dieser Ablauf kann sehr einfach formuliert werden, setzt aber die Transformation des Kontaktproblems auf Beschleunigungsebene voraus (Gl. (120), untere Zeile). Dieser Algorithmus führt wegen nicht exakt erfüllter Kontaktbedingungen auf den physikalisch richtigen Ebenen der Lage und Geschwindigkeit zu Driftproblemen.

Für einen einzelnen Kontakt mit dem Index  $i$  und am Beispiel der Normalbindung gliedert sich die Kontaktbedingung entsprechend Bild 69 auf S. 96 in drei Stufen:

$$\begin{aligned} g_{Ni} > 0 & \quad \Rightarrow \quad \lambda_{Ni} = 0 \\ g_{Ni} = 0, \quad \dot{g}_{Ni} > 0 & \Rightarrow \quad \lambda_{Ni} = 0 \\ g_{Ni} = 0, \quad \dot{g}_{Ni} = 0 & \Rightarrow \quad \ddot{g}_{Ni} \geq 0, \quad \lambda_{Ni} \geq 0, \quad \ddot{g}_{Ni} \lambda_{Ni} = 0 \end{aligned} \quad (123)$$

Die oberen beiden Zeilen in (123) beschreiben funktionelle Zusammenhänge, während die Komplementarität in der unteren Zeile mengenwertig ist.

Als mathematisches Werkzeug bietet sich zwischen jedem Integrationsschritt für die Berechnung der Bewegung und Kontaktkräfte ein lineares Komplementaritätsproblem (LCP) an. Es hat die allgemeine Form:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{y} \geq 0, \quad \mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{x} \mathbf{y} = 0 \quad (124)$$

Gegeben sind  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{b}$ , bei gesuchtem  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$ .

Die lineare Systemgleichung

$$\ddot{\mathbf{g}}_N = \mathbf{A} \boldsymbol{\lambda}_N + \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \mathbf{w}_N^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{w}_N \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \mathbf{w}_N^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{h} + \bar{\mathbf{w}}_N \quad (125)$$

entsteht aus der 3. Zeile in Gl. (120) durch Elimination von  $\ddot{\mathbf{q}}$  mittels Gl. (122) und mit der Zuordnung von  $\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\lambda}_N$  und  $\mathbf{y} \rightarrow \ddot{\mathbf{g}}_N$ .

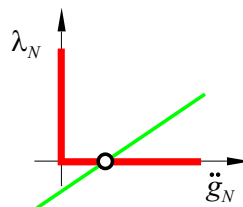


Bild 74: Grafik zur LCP-Lösung

Stark vereinfacht auf einen Kontakt veranschaulicht Bild 74 in geometrischer Form die Lösung des Komplementaritätsproblems. Durch den Schnittpunkt des 'Eckengesetzes' der Komplementarität mit der Geraden zur linearen Gleichung folgt hier genau ein Wert für  $\ddot{g}_N$  bei  $\lambda_N = 0$ .

Auf diese Weise sind nach der LCP-Lösung für alle Kontakte die  $\lambda_N$  und  $\dot{\mathbf{g}}_N$  bekannt und mit  $\lambda_N$  kann die Beschleunigung entsprechend Gl. (122) berechnet werden.

Nun folgt im Algorithmus der nächste Zeitschritt, welchen ein Standard-Integrator mit variabler Schrittweite ausführen kann. Er liefert den Systemzustand  $\mathbf{q}$  und  $\dot{\mathbf{q}}$  zum Folgezeitpunkt. Diese Schrittfolge wird solange fortgesetzt bis ein Kontaktindikator eine Änderung eines Kontaktzustandes anzeigt. Jetzt muss der Zeitpunkt des Zustandswechsels über eine Schaltpunktsuche eingegrenzt werden und der Integrator stoppt. Es startet der LCP-Löser und berechnet die aktuelle Kontaktkraft  $\lambda_N$ .

### Lösung auf Geschwindigkeitsebene – Time-Stepping

Ein möglicher Lösungsweg, besonders auch bei Kontakten, die über einen längeren Zeitraum geschlossen oder geöffnet bleiben (Driftproblem bei Lösung auf Beschleunigungsebene), führt über das Time-Stepping-Verfahren. Hierfür ist die Systembeschreibung mit konstanter Zeitschrittweite zu diskretisieren (Index  $i$  des Zeitschrittes).

Zur Diskretisierung kann z.B. die explizite EULER-Formel verwendet werden. Für die Beschleunigung lautet dieser auch EULER-Vorwärtsverfahren genannte Schritt:

$$\ddot{\mathbf{q}}(i) = \frac{\dot{\mathbf{q}}(i+1) - \dot{\mathbf{q}}(i)}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{q}}(i+1) = \dot{\mathbf{q}}(i) + \ddot{\mathbf{q}}(i) \Delta t \quad (126)$$

wobei  $\Delta t$  die Zeitschrittweite und  $i$  abkürzend den diskreten Zeitpunkt  $t_i$  repräsentiert. Die Diskretisierung von der Geschwindigkeits- auf die Lageebene erfolgt mit der impliziten EULER-Vorschrift (auch EULER-Rückwärtsverfahren genannt), weil diese infolge 'numerischer Dämpfung' stabiler arbeitet, STIEGELMEYER [84, S. 28-31].

$$\mathbf{q}(i+1) = \mathbf{q}(i) + \dot{\mathbf{q}}(i+1)\Delta t \quad (127)$$

Hierbei handelt es sich in beiden Fällen um einen Übergang von der exakten Lösung auf eine numerische Näherung. In Hinsicht auf das Anwendungsbeispiel 'Kurbelschwinge mit Spiel am Kurbelbolzen' soll weiter nur ein einziger einseitiger Kontakt einbezogen werden. Aus den bisher gewonnen Erkenntnissen lässt sich der folgende Gleichungssatz zur Berechnung der unbekanntenen Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}(i+1)$ , Lagen  $\mathbf{q}(i+1)$  und der Kontaktkräfte  $\lambda_N$ ,  $\lambda_T$  zusammenstellen:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}(i+1) &= \dot{\mathbf{q}}(i) + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t))\Delta t + \mathbf{w}_N \lambda_N \Delta t + \mathbf{w}_T \lambda_T \Delta t \\ \mathbf{q}(i+1) &= \mathbf{q}(i) + \dot{\mathbf{q}}(i+1)\Delta t \\ g_N(i+1) &= \mathbf{w}_N^T(\mathbf{q}(i+1) - \mathbf{q}(i)) + g_N(i) \\ \dot{g}_T(i+1) &= \mathbf{w}_T^T(\dot{\mathbf{q}}(i+1) - \dot{\mathbf{q}}(i)) + \dot{g}_T(i) \\ g_N &\geq 0; \quad \lambda_N \geq 0; \quad g_N \lambda_N = 0 \\ \dot{g}_T^+ &\geq 0; \quad \lambda_{H0}^+ \geq 0; \quad \dot{g}_T^+ \lambda_{H0}^+ = 0 \\ \dot{g}_T^- &\geq 0; \quad \lambda_{H0}^- \geq 0; \quad \dot{g}_T^- \lambda_{H0}^- = 0 \end{aligned} \quad (128)$$

Dabei ist  $\dot{\mathbf{q}}(i+1)$  aus der oberen BDGL im Gl.-Satz (128) in die zweite und vierte Gl. einzusetzen. Diese Gleichungen stellen ein lineares Komplementaritätsproblem für  $g_N$  und  $\lambda_N$  bzw.  $\dot{g}_T$  und  $\lambda_T$  dar. Der Lösungsalgorithmus hierfür ist im Anhang A und bei GINZINGER 2004 [38] komplett zu finden. Hier soll nur dessen oberste Ebene aufgezeigt werden, siehe Bild 75.

Zur Vereinfachung der Schreibweise bietet sich in der Kontaktschleife der Übergang auf 'Impulsebene' an. Dafür können sämtliche Kraftgrößen, die im Gleichungssatz (128) mit dem Zeitinkrement  $\Delta t$  gewichtet sind, mit dem jeweiligen Großbuchstaben abgekürzt werden.

$$\Lambda_N = \lambda_N \Delta t; \quad \Lambda_T = \lambda_T \Delta t; \quad \mathbf{H} = \mathbf{h} \Delta t \quad (129)$$

Der Time-Stepping-Algorithmus (Bild 75) arbeitet dabei mit Geschwindigkeiten und hinsichtlich der Kraftgrößen mit 'verallgemeinerten' Impulsen. Beschleunigungen sind zur Ermittlung von  $\mathbf{q}(t)$  und  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  nicht explizit notwendig, es sei denn, die inverse Dynamik (in einem zweiten Schritt) ist gewünscht.

Die Diskretisierung und Unterscheidung der Zeitpunkte ( $i$ ) und ( $i+1$ ) in (126) bis (128) sichert bereits die Aufgaben des numerischen Integrators, der zumal mit dem EULER-Verfahren und konstanter Schrittweite sehr 'robust' und einfach ausfällt. Beim mit 'Time-Stepping' bezeichneten Vorgehen wird immer zuerst ein neuer Zeitschritt berechnet und erst danach geprüft, ob noch spezielle Nebenbedingungen zu erfüllen sind.

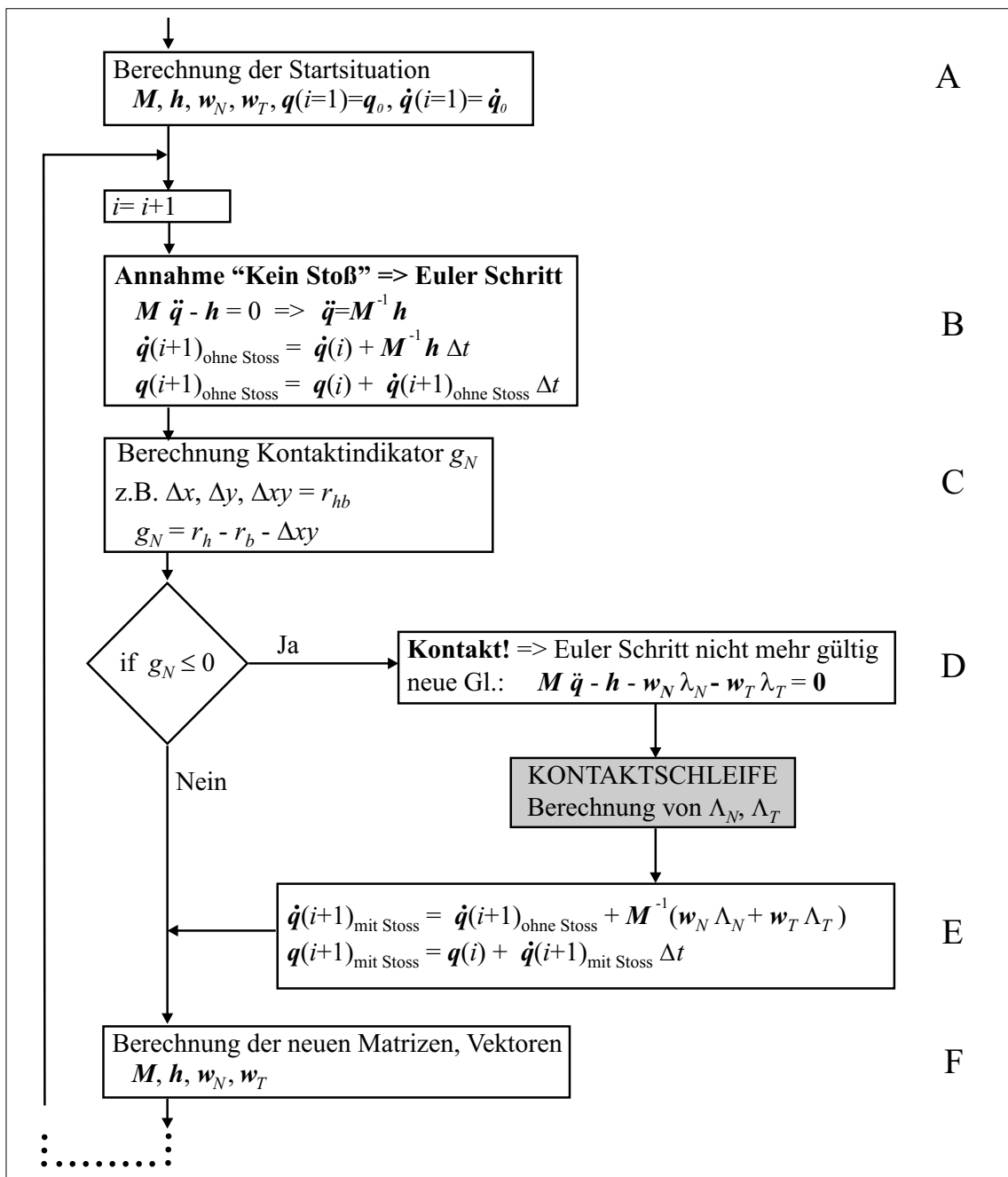


Bild 75: Spezieller Time-Stepping-Algorithmus

Die Kontaktschleife wird nur durchlaufen, wenn der Kontakt geschlossen ist, d.h. wenn die Kontaktkräfte aktiv eingreifen. Die Auswertung der Kontaktbedingungen erfolgt einheitlich für Normalenrichtung, Tangentialrichtung (Reibung) und für Stöße mit den 'Impulsen'  $\Lambda_N$ ,  $\Lambda_T$  nach Gl. (129) und den Relativgeschwindigkeiten  $\dot{g}_N$  und  $\dot{g}_T$ .

Zu den Hauptschritten im Algorithmus (Bild 75) sei nach GINZINGER 2004 [38, S.31] folgendes angemerkt:

In Abschnitt A wird die Startsituation berechnet, wie z.B. die Massenmatrix, für den ersten Zeitschritt. In B wird unter der Annahme, dass kein Kontakt vorherrscht, ein EULER-Schritt vorgenommen. In C wird die relative Position des Bolzens im Lager ermittelt. Diese dient unter D zur Entscheidung ob die Annahme 'Kein Kontakt' richtig war, und der EULER-Schritt somit gültig bleibt, oder ob die Kontaktschleife mit der modifizierten Bewegungsgleichung zum Einsatz kommt.

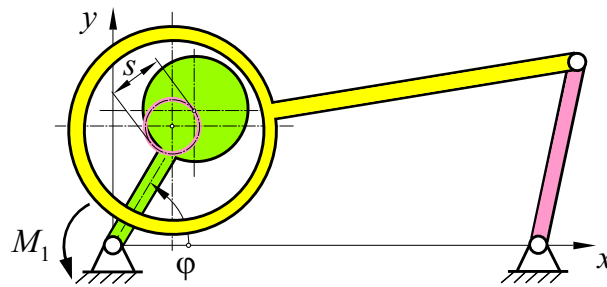
Im Fall eines Kontaktes wird mit E die neue Lage und Geschwindigkeit und im Abschnitt F entsprechend A die Startsituation für den nächsten Schritt berechnet. Hierbei entsteht auch ein Fehler, der mit einer Zusatzschleife vor dem Rücksprung zu  $(i = i + 1)$  reduziert werden kann. Die Transformationsmatrizen  $\mathbf{W}_N, \mathbf{W}_T, \dots$  sind von der Lage abhängig. In der Kontaktschleife werden nach der Berechnung des neuen Zeitpunkts noch die Transformationsmatrizen des alten Zeitpunkts verwendet. Dadurch entsteht ein Fehler der bei bestimmten Konfigurationen nicht unerheblich ist. Dieser läßt sich sehr einfach reduzieren, indem die Berechnung des Zeitschritts wiederholt wird, mit den Transformationsmatrizen, die beim ersten Durchlauf des Zeitschritts berechnet wurden. Diese Wiederholung wird so oft ausgeführt, bis der numerische Fehler unter einer definierten Grenze liegt.

Anmerkung:

Für die Kurbelschwinge mit nur einem spielbehafteten Kontakt enthalten die Transformationsmatrizen  $\mathbf{W}_N, \mathbf{W}_T, \dots$  nur eine Spalte und werden deshalb in diesem Kapitel als Vektoren  $\mathbf{w}_N, \mathbf{w}_T, \dots$  geschrieben.

## 5.5 Die Kurbelschwinge mit Spiel am Kurbelbolzen

Dieses Kapitel konzentriert sich auf die Phänomene in **einem** spielbehafteten Drehgelenk. Das einfache Beispiel illustriert die Theorie der Mehrkörpersysteme mit einseitigen Bindungen. Als Mechanismus dient eine Kurbelschwinge mit Spiel  $s \approx 0,1$  mm im Bolzengelenk, vgl. Bild 76. Mit dem in Kapitel 2 bereits beschriebenen Mechanismenprüfstand [98], [102] steht eine universelle und flexible Experimentierbasis zur Verfügung.

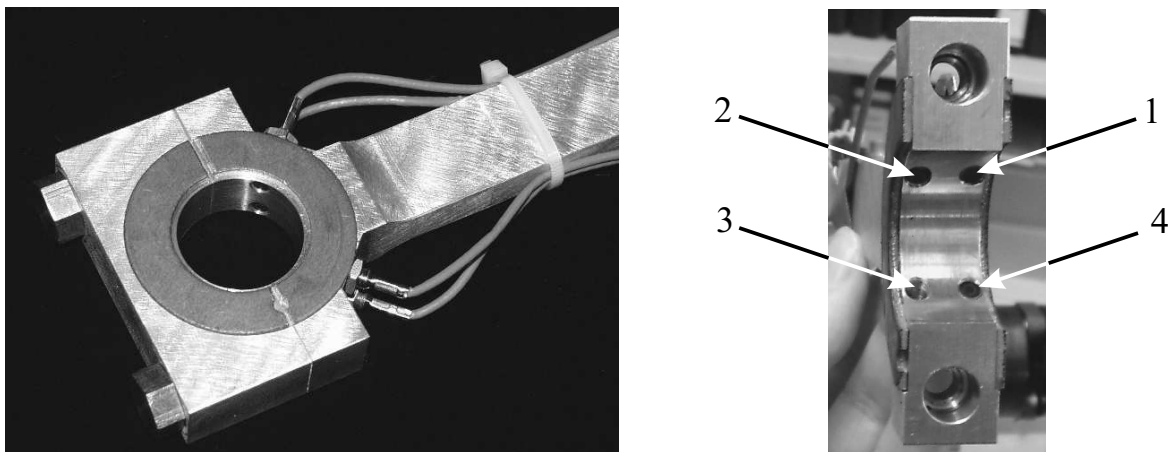


**Bild 76:** Kurbelschwinge mit Spiel am Kurbelbolzen

Nach der Vorstellung einiger experimenteller Ergebnisse folgen die spezielle Modellierung und Systembeschreibung bis zu Simulationsergebnissen, die mit der Messung abgeglichen und interpretiert werden. GINZINGER 2004 [38] liefert die Basis für diesen Abschnitt.

### 5.5.1 Messung der Bolzenmittelpunktsbahn und x-Beschleunigung

Beim Prüfstand lassen sich verschiedene Pleuels, z.B. ohne Spiel oder mit 0,1 mm Spiel am Kurbel-Koppel-Gelenk, leicht auswechseln. Das Spiel sitzt dabei zwischen dem Außenring eines Nadellagers und der Klemmung im Pleuel. Mit Hilfe von Wirbelstromsensoren lässt sich die Bolzenverlagerungsbahn ermitteln. Diese sind paarweise im  $90^\circ$  Winkel zueinander angeordnet, siehe Bild 77.



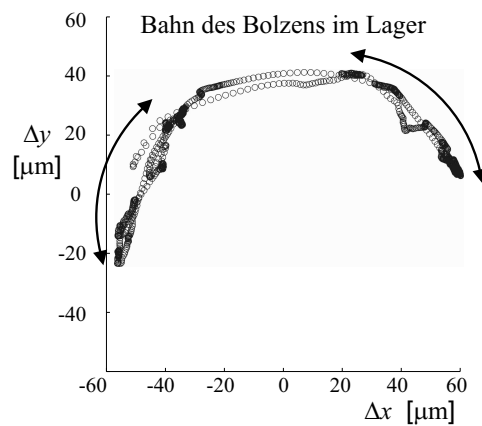
**Bild 77:** Koppel mit Spiel (links), Anordnung der Wirbelstromsensoren (rechts)

Diese paarweise Anordnung ermöglicht die Detektion einer Verkipfung. Nach dem Vergleich der Signale kann festgestellt werden, dass die Verkipfung keinen sichtbaren Einfluss auf die Messergebnisse hat.

Die von den Wirbelstromsensoren erhaltenen Signale werden so transformiert, dass die relative Lage des Bolzenmittelpunktes im Lager mit 0,1 mm Spiel abgebildet wird. Der 'Spielkreis' mit dem Durchmesser von 0,1 mm ist in den Bildern 76 und 79 eingetragen.

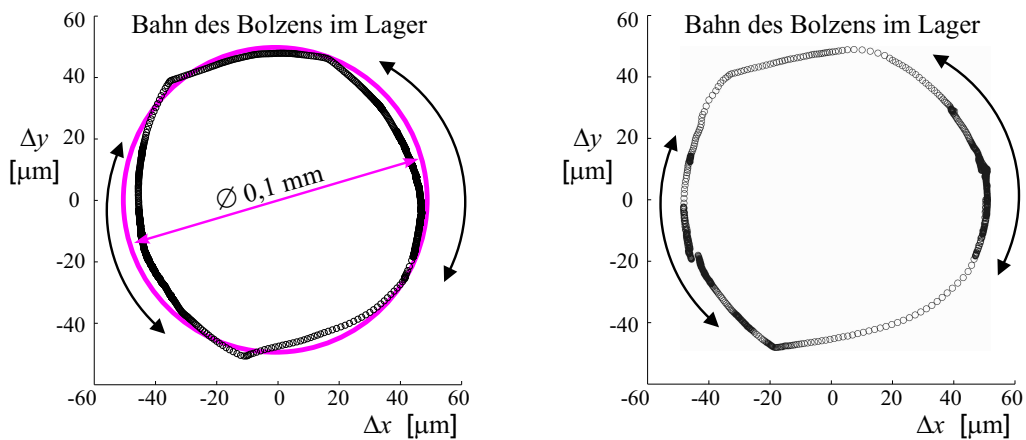
Ein Vergleich der gemessenen Bolzenverlagerungsbahnen bei verschiedenen Drehzahlen zwischen 120 und 700 1/min ermöglicht es, drei Betriebszustände zu identifizieren:

1. Betriebszustand  $\leq 230$  1/min
2. Betriebszustand  $\sim 230$ -250 1/min
3. Betriebszustand  $\geq 250$  1/min



**Bild 78:** Messung 1 Umdrehung, 1. Betriebszustand, 141 1/min

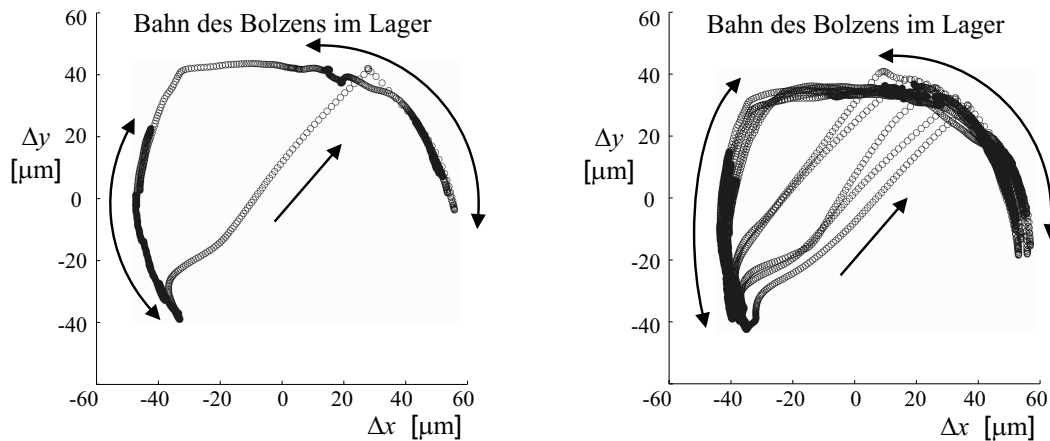
Im 1. Betriebszustand, der in Bild 78 dargestellt ist, überwiegt der Einfluss der Schwerkraft auf das spielbehaftete Lager. Dadurch 'liegt' die Koppel auf dem Bolzen oben auf. Im Gegensatz dazu verliert die Schwerkraft im 3. Betriebszustand an Bedeutung, Bild 79. Hier ist die relative Bewegung zwischen Bolzen und Lagerschale durch Trägheits-, Flieh- und Reibungskräfte zu erklären. Es entsteht eine umlaufende Bahn.



**Bild 79:** Messung 1 Umdrehung, 3. Betriebszustand, 480 1/min (links), 619 1/min (rechts)

Im Zustand 2 geschieht der Übergang zwischen dem oben 'Hin-und-Her-Wandern' (Zustand 1) und 'Umlaufen' (Zustand 3). Es treten Stöße auf, die auch deutlich hörbar sind. Dieser Zustand

findet nur in einem sehr schmalen Drehzahlband statt, ist jedoch ein stationärer Zustand, wie es aus Bild 80 rechts ersichtlich ist. Das unterschiedliche Aussehen des Sprungs in dieser Abbildung lässt sich mit leichten und unvermeidbaren Drehzahlschwankungen erklären.



**Bild 80:** 2. Betriebszustand, 240 1/min, 1 Umdrehung (links) und 5 Umdrehungen (rechts)

Beim Vergleich der Bolzenverlagerungsbahnen der drei Betriebszustände wird ersichtlich, dass sich das Verhalten in einigen Abschnitten sehr ähnelt. Der Bolzen pendelt abwechselnd an der rechten und linken Seite der Lagerschale. Nur der Wechsel zwischen den Pendelvorgängen ändert sich mit der Drehzahl. Diese Pendelschwingungen werden im Kapitel 5.5.4 noch näher untersucht. Die vier 'Ecken' in den Bildern kommen durch Nichtlinearität der Sensoren und durch die Messanordnung zustande.

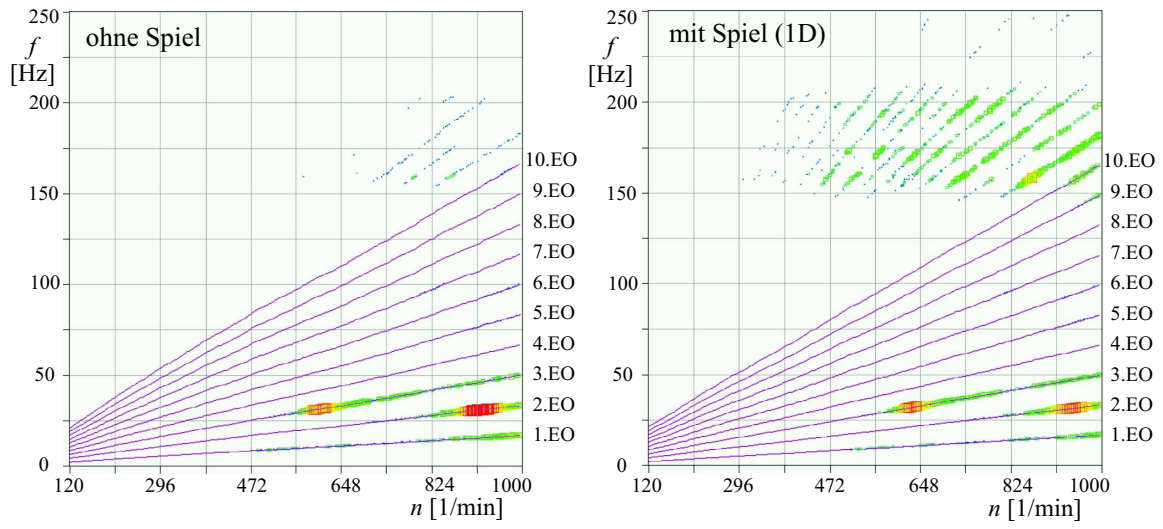
Außer den Messungen der Bolzenmittelpunktsbahn des spielbehafteten Kurbelbolzens liegen noch weitere Messergebnisse vor, die physikalische Phänomene infolge veränderlicher Kontaktzustände deutlich machen.

CAMPBELL-Diagramme oder auch Wasserfalldiagramme veranschaulichen das Systemverhalten an Hand einer Messgröße bei einem Maschinenhochlauf. Untersuchungen hierzu liefern PAFFENHOLZ [66] und GINZINGER [38, S.41-44].

Als Messgröße dient dabei die horizontale Beschleunigung  $\ddot{x}$  an der Grundplatte. Messungen mit und ohne Spiel am Kurbelbolzen sind als CAMPBELL-Diagramm im Bild 81 bzw. als Wasserfalldiagramm in Bild 16 auf S. 17 gegenübergestellt.

Interessanterweise ruft Spiel eine breitbandige Anregung (evtl. durch Stöße) erst oberhalb von 150 Hz hervor, während unterhalb das Verhalten fast deckungsgleich bleibt. Bei niedrigen Drehzahlen unter 300 1/min verursacht das Spiel kaum Amplitudenüberhöhungen.

Diese Erscheinung ist jetzt zum Teil durch die unterschiedlichen drehzahlabhängigen Betriebszustände erklärbar, denn erst ab einer bestimmten Drehzahl kommt es zum 2. Zustand mit Abheben und Stößen. Bei diesen Messungen handelt es sich allerdings um das Pleuel mit 1D-Spiel nach Bild 12 auf S. 14. Zum Anderen haben natürlich auch die im jeweiligen Frequenzbereich liegenden Eigenschwingformen (siehe Kapitel 6, Bild 99) einen Einfluss.



**Bild 81:** CAMPBELL-Diagramm der x-Beschleunigung, 120-1000 1/min



### 5.5.2 Systembeschreibung der spielbehafteten Kurbelschwinge

Die Systembeschreibung beinhaltet nach Kapitel 5.3 die Bewegungs-Differentialgleichung, die Kopplungskinematik und die Kraftgesetze. Jetzt sollen diese für das einfache Beispiel zusammengestellt werden.

Das Modell der Kurbelschwinge mit Spiel am Kurbelbolzen besitzt 3 Freiheitsgrade, vgl. Bild 82. Der Systemzustand wird durch die generalisierten Koordinaten (auch Minimalkoordinaten) im Vektor  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$  eindeutig bestimmt.

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u/l_2 \\ v/l_2 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (130)$$

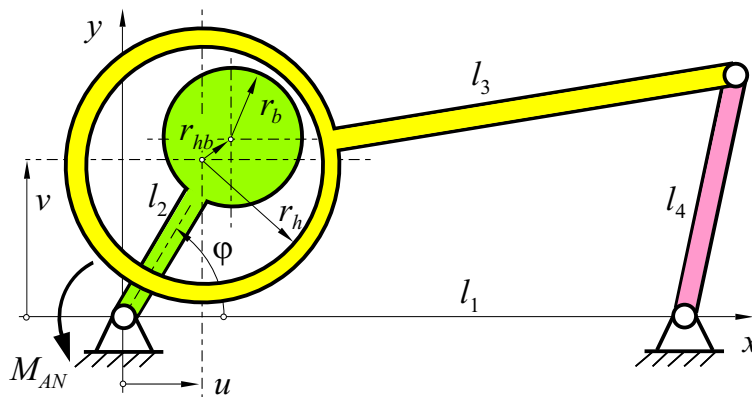


Bild 82: Koordinaten zur Kurbelschwinge mit Spiel am Bolzen

### Kontaktkinematik

Die Kontaktkinematik ist die Grundlage für die Formulierung der Kontaktgesetze und die Selektion der Kontaktzustände. Sie muss im Beispiel für den Kontakt folgende Indikatoren in Tangential- und Normalenrichtung in Abhängigkeit von den gewählten generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}$  und deren Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}$  bereitstellen:

- Lageebene:  $g_N$  (Abstand, normal)
- Geschwindigkeitsebene:  $\dot{g}_N$  und  $\dot{g}_T$  (Relativgeschwindigkeit, normal u. tangential)

Mit der Kontaktkinematik muss die Konturgeometrie berücksichtigt und entschieden werden, wie viele Kontaktpunkte ein bestimmtes Gelenk beschreiben.

Für ein ebenes Drehgelenk mit Spiel ist ein Kontaktpunkt je Körper ausreichend:  $C_b$  am Bolzen und  $C_h$  an der Lagerschale. Es gibt mit  $g_N$  nur einen einzigen Kontaktabstand. Die zu betrachtenden Körper sind zum einen die Lagerschale (Index  $h$  wie 'hole') und zum anderen der Kurbelbolzen (Index  $b$ ). Bild 83 verdeutlicht die geometrischen Gegebenheiten.

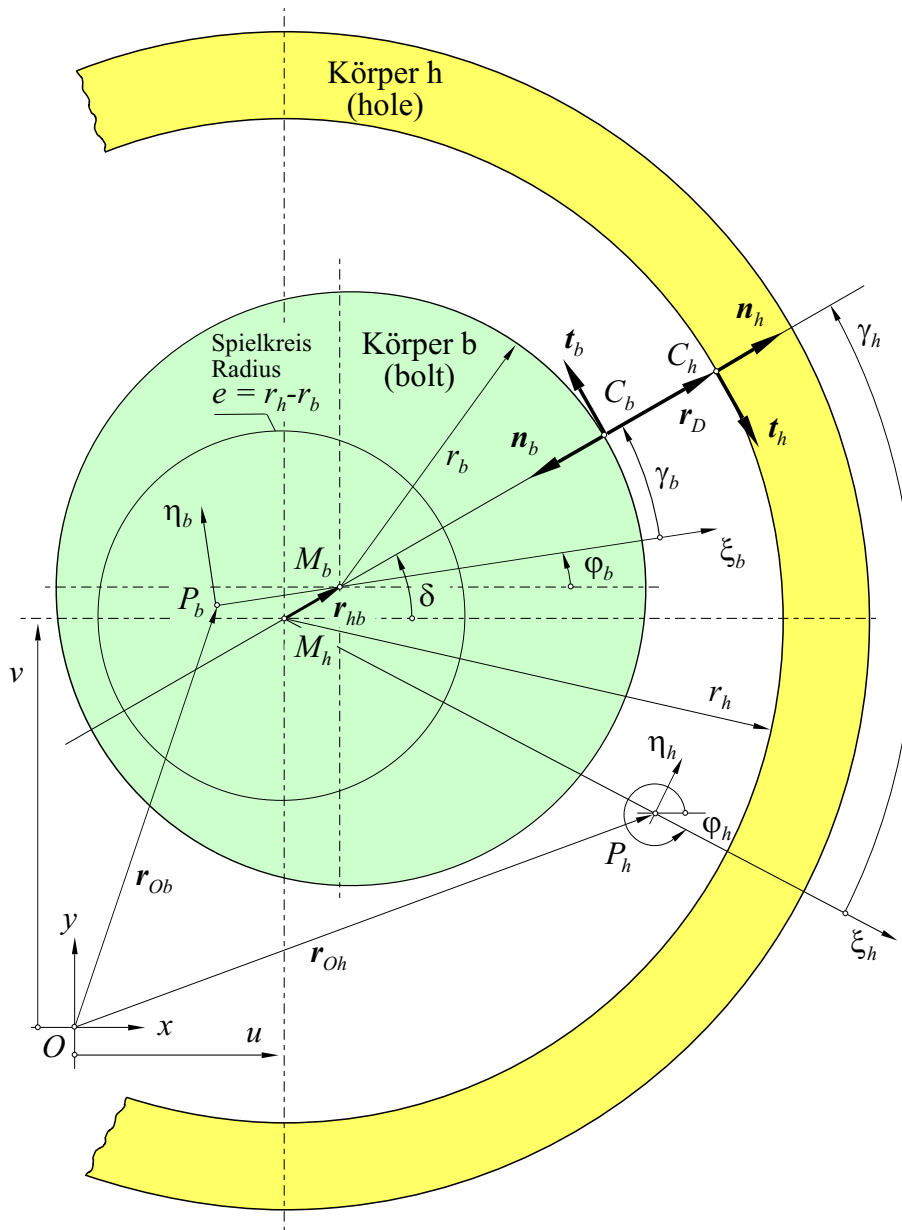


Bild 83: Kontaktkinematik im Drehgelenk mit Spiel

Die Ableitungen folgen der einführenden Übersicht in Kapitel 5.3.3. Alle Vektoren beziehen sich auf das Inertialsystem. Die Normal- und Tangentialvektoren des begleitenden Dreibeins lassen sich in folgender Weise ausdrücken:

$$\mathbf{n}_b = \begin{pmatrix} -\cos \delta \\ -\sin \delta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{n}_h = \begin{pmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} = -\mathbf{n}_b \quad (131)$$

$$\mathbf{t}_b = \begin{pmatrix} -\sin \delta \\ \cos \delta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_h = \begin{pmatrix} \sin \delta \\ -\cos \delta \end{pmatrix} = -\mathbf{t}_b \quad (132)$$

Für den Vektor  $\mathbf{r}_D = (\mathbf{r}_{C_h} - \mathbf{r}_{C_b})$  gilt:

$$\mathbf{r}_D = \begin{pmatrix} l_2 (\bar{u} - \cos \varphi) + (r_h - r_b) \cos \delta \\ l_2 (\bar{v} - \sin \varphi) + (r_h - r_b) \sin \delta \end{pmatrix} \quad (133)$$



Zusammenfassend ergibt sich:

$$\sin \psi = \frac{y e^2 + x W}{2 l_3 d^2} \quad \cos \psi = \frac{x e^2 - y W}{2 l_3 d^2} \quad (143)$$

$$\sin \theta = \frac{-y c^2 + x W}{2 l_4 d^2} \quad \cos \theta = -\frac{x c^2 + y W}{2 l_4 d^2} \quad (144)$$

Mit den Vereinfachungen:

$$x = l_1 - u \quad y = -v \quad (145)$$

$$d^2 = x^2 + y^2 \quad c^2 = d^2 + l_4^2 - l_3^2 \quad e^2 = d^2 + l_3^2 - l_4^2 \quad (146)$$

$$W = \sqrt{4 l_3^2 d^2 - e^4} = \sqrt{4 l_4^2 d^2 - c^4} \quad (147)$$

In den Gleichungen (143), (144) kann ein anderes Vorzeichen eine alternative Variante der Montage ausdrücken.

Die Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\psi}$  und  $\dot{\theta}$  lauten:

$$\dot{\theta} = \varepsilon_c l_2 \dot{u} + \varepsilon_s l_2 \dot{v} \quad \dot{\psi} = k_c l_2 \dot{u} + k_s l_2 \dot{v} \quad (148)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} k_c &= \frac{\cos \theta}{l_3 \sin(\psi - \theta)} & k_s &= \frac{\sin \theta}{l_3 \sin(\psi - \theta)} \\ \varepsilon_c &= \frac{\cos \psi}{l_4 \sin(\psi - \theta)} & \varepsilon_s &= \frac{\sin \psi}{l_4 \sin(\psi - \theta)} \end{aligned} \quad (149)$$

Einsetzen der obigen Beziehungen in Gleichung (93) auf S. 90 liefert schließlich die Normalgeschwindigkeit:

$$\dot{g}_N = l_2 \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \\ \sin(\varphi - \delta) \end{pmatrix}^T}_{= \mathbf{w}_N^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}}_{= \dot{\mathbf{q}}} \quad (150)$$

und die Tangentialgeschwindigkeit:

$$\dot{g}_T = \underbrace{\begin{pmatrix} l_2 (\sin \delta - r_h k_c) \\ -l_2 (r_h k_s + \cos \delta) \\ r_b + l_2 \cos(\varphi - \delta) \end{pmatrix}^T}_{= \mathbf{w}_T^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}}_{= \dot{\mathbf{q}}} \quad (151)$$

Damit sind alle Größen für die Kontaktkinematik des spielbehafteten Bolzgelenkes der Kurvenschwinge in expliziter Form zusammengestellt.

Falls benötigt, können die Kontaktindikatoren auf Beschleunigungsebene wie angedeutet durch Differentiation der Gleichungen (150), (151) gewonnen werden:

$$\ddot{g}_N = \mathbf{w}_N^T \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{w}}_N^T \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{w}_N^T \ddot{\mathbf{q}} + \bar{w}_N \quad (152)$$

$$\ddot{g}_T = \mathbf{w}_T^T \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{w}}_T^T \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{w}_T^T \ddot{\mathbf{q}} + \bar{w}_T \quad (153)$$

### Kontaktgesetze

Die Kontaktgesetze, speziell die Kraftgesetze, stellen eine weitere Komponente bei der Simulation strukturvarianter Systeme dar. Hier muss eine entsprechende Auswahl getroffen werden.

Es werden mengenwertige Kraftgesetze für den Normalkontakt (offen/geschlossen), für die COULOMBSche Reibung (tangential) und das POISSONSche Stoßgesetz mit Kompressions- und Expansionsphase einbezogen.

Da die Beziehungen in Kapitel 5.3.4 schon auf das spielbehaftete Bolzengelenk der Kurbelschwinge (einen unilateralen Kontakt) ausgerichtet sind, wird an dieser Stelle auf eine Wiederholung verzichtet.

Insgesamt gehen in die Kraft- und Stoßgesetze **nur drei Parameter** ein: Das Spiel  $s$ , der Reibkoeffizient  $\mu$  und der Stoßkoeffizient  $\varepsilon$ . Zur Vereinfachung wird für den vorliegenden Fall angenommen, dass der Reibkoeffizient  $\mu$  nicht von der Tangentialgeschwindigkeit abhängt.

### Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung für Mehrkörpersysteme mit einer einseitigen Bindungen und der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  lautet entsprechend Gl. (119) :

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathbf{w}_N(\mathbf{q})\lambda_N - \mathbf{w}_T(\mathbf{q})\lambda_T = 0 \quad (154)$$

Der nichtlineare Kraftvektor  $\mathbf{h}$  enthält Trägheitswirkungen und äußere aktive Kraftwirkungen.

Der Vollständigkeit halber folgt der Gleichungssatz für die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und den Kraftvektor  $\mathbf{h}$  zur Kurbelschwinge mit spielbehaftetem Bolzengelenk nach GINZINGER [38, S.27]:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} (m_{111} + m_{112})l_2^2 & (m_{121} + m_{122})l_2^2 & 0 \\ (m_{211} + m_{212})l_2^2 & (m_{221} + m_{222})l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 + m_2r_2^2 \end{pmatrix} \quad (155)$$

mit

$$\begin{aligned} m_{111} &= m_3(1 - 2r_{3y}k_c + k_c^2r_3^2) \\ m_{112} &= I_3k_c^2 + I_4\varepsilon_c^2 + m_4r_4^2\varepsilon_c^2 \\ m_{121} &= m_3(r_{3x}k_c - r_{3y}k_s + r_3^2k_ck_s) \\ m_{122} &= I_3k_ck_s + I_4\varepsilon_c\varepsilon_s + m_4r_4^2\varepsilon_c\varepsilon_s \\ m_{221} &= m_3(1 + 2r_{3x}k_s + r_3^2k_s^2) \\ m_{222} &= I_3k_s^2 + I_4\varepsilon_s^2 + m_4r_4^2\varepsilon_s^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_{11} - l_2^2(h_{12}\dot{u} + h_{13}\dot{v}) - g_1 \\ h_{21} - l_2^2(h_{22}\dot{u} + h_{23}\dot{v}) - g_2 \\ M_{AN} - g_3 \end{pmatrix} \quad (156)$$

mit

$$\begin{aligned} h_{11} &= l_2(m_3r_{3x}\dot{\psi}^2 + k_cM_3 + \varepsilon_cM_4) \\ h_{12} &= I_3^*k_c\dot{k}_c + I_4^*\varepsilon_c\dot{\varepsilon}_c - m_3r_{3y}\dot{k}_c \\ h_{13} &= I_3^*k_c\dot{k}_s + I_4^*\varepsilon_c\dot{\varepsilon}_s - m_3r_{3y}\dot{k}_s \\ h_{21} &= l_2(m_3r_{3x}\dot{\psi}^2 + k_sM_3 + \varepsilon_sM_4) \\ h_{22} &= I_3^*k_s\dot{k}_c + I_4^*\varepsilon_s\dot{\varepsilon}_c + m_3r_{3x}\dot{k}_c \\ h_{23} &= I_3^*k_s\dot{k}_s + I_4^*\varepsilon_s\dot{\varepsilon}_s - m_3r_{3x}\dot{k}_s \end{aligned}$$

Anmerkung: In  $h_{21}$  ist ein Fehler korrigiert, in [38] steht falsch:  $k_cM_3 + \varepsilon_cM_4$ .

$$\begin{aligned}
g_1 &= g \left( m_3 r_3 \frac{\partial \sin \psi}{\partial \bar{u}} + m_4 r_4 \frac{\partial \sin \theta}{\partial \bar{u}} \right) \\
g_2 &= g \left( m_3 \left( r_3 \frac{\partial \sin \psi}{\partial \bar{v}} + l_2 \right) + m_4 r_4 \frac{\partial \sin \theta}{\partial \bar{v}} \right) \\
g_3 &= g m_2 r_2 \cos \varphi
\end{aligned}$$

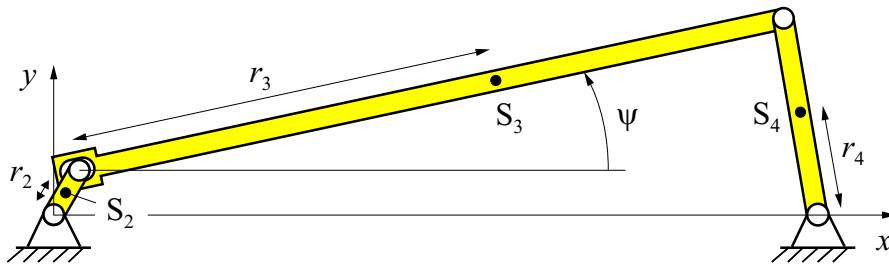
$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sin \psi}{\partial \bar{u}} &= l_2 \frac{d^2(-2xy - W + \frac{x^2}{W}(-4l_3^2 + 2e^2)) + 2x(ye^2 + xW)}{2l_3 d^4} \\
\frac{\partial \sin \psi}{\partial \bar{v}} &= l_2 \frac{d^2(-e^2 - 2y^2 + \frac{xy}{W}(-4l_3^2 + 2e^2)) + 2y(ye^2 + xW)}{2l_3 d^4} \\
\frac{\partial \sin \theta}{\partial \bar{u}} &= l_2 \frac{d^2(2xy - W + \frac{x^2}{W}(-4l_3^2 + 2e^2)) + 2x(ye^2 + xW)}{2l_4 d^4} \\
\frac{\partial \sin \theta}{\partial \bar{v}} &= l_2 \frac{d^2(c^2 + 2y^2 + \frac{xy}{W}(-4l_3^2 + 2e^2)) + 2y(ye^2 + xW)}{2l_4 d^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3^* &= I_3 + m_3 r_3^2 & r_{3x} &= r_3 \cos \psi \\
I_4^* &= I_4 + m_4 r_4^2 & r_{3y} &= r_3 \sin \psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{k}_c &= \frac{\dot{\theta} \cos \psi - \dot{\psi} \cos(\psi - \theta) \cos \theta}{l_3 \sin^2(\psi - \theta)} & \dot{k}_s &= \frac{\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\psi} \cos(\psi - \theta) \sin \theta}{l_3 \sin^2(\psi - \theta)} \\
\dot{\varepsilon}_c &= \frac{\dot{\theta} \cos \psi \cos(\psi - \theta) - \dot{\psi} \cos \theta}{l_4 \sin^2(\psi - \theta)} & \dot{\varepsilon}_s &= \frac{\dot{\theta} \sin \psi \cos(\psi - \theta) - \dot{\psi} \sin \theta}{l_4 \sin^2(\psi - \theta)}
\end{aligned}$$

Weitere Substitutionen (z.B.  $k_s$ ,  $k_c$ ,  $\varepsilon_s$ ,  $\varepsilon_c$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  oder  $W$ ) resultieren aus den geometrischen Beziehungen der Gleichungen (143) bis (149) auf Seite 114.

In Bild (85) sind die Schwerpunktsabstände  $r_i$  dargestellt. Der Schwerkrafteinfluss fließt mit  $g_i$  ein. Neben der Erdbeschleunigung  $g$  werden nur Abkürzungen verwendet, die in diesem Kapitel eingeführt sind.



**Bild 85:** Lage der Schwerpunkte

### 5.5.3 Simulation der Bolzenmittelpunktsbahn

Mit Hilfe des Formelsatzes aus Kapitel 5.5.2 für die Kurbelschwinge mit spielbehaftetem Bolzengelenk kann eine stabile Simulation erzeugt werden, ohne Driftprobleme bei länger geschlossenen Kontakten, mit der Möglichkeit einen Dauerbetrieb über mehrer Kurbelumdrehungen zu simulieren. Die Simulationen sind experimentell abgesichert, siehe Kapitel 5.5.1.

Wie im Kapitel 5.4 beschrieben, erfolgt die Lösung mit einem Time-Stepping-Algorithmus. Mit diesem wird bei der Simulation vorweg der nächste Zeitpunkt ohne Berücksichtigung eines sich eventuell schließenden Kontaktes berechnet. Nach Prüfung auf einen geschlossenen Kontakt, wird bei Bedarf die Kontaktbedingung mit den Zwangskräften erfüllt.

Bei der Implementierung ist eine direkte Lösung des linearen Komplementaritätsproblems (LCP) über Fallunterscheidungen möglich, da im vorliegenden Fall nur ein Kontaktpunkt modelliert ist. Auf spezielle mathematische Verfahren und LCP-Löser wird somit verzichtet.

Der vorgestellte Algorithmus ist in MATLAB implementiert. Dies ermöglicht vor allem eine schnelle und effiziente graphische Auswertung. Die Parametersätze aller Betriebszustände enthält der Anhang B. Die Simulation erfolgte auf einem Arbeitsplatz PC mit einem Intel Pentium 4 Prozessor (2 GHz) und 1GB Arbeitsspeicher. Sie verwendet folgende Parameter:

- Spiel am Kurbelbolzen: 0,1 mm
- Zeitschrittweite:  $10^{-4}$  s
- Reibungskoeffizient  $\mu = 0,07$
- Dissipationskoeffizient bei elastischem Stoß  $\varepsilon = 0,7$

Reibkräfte haben besonders im 2. Betriebszustand einen erheblichen Einfluss. Deshalb ist die Reibung als dissipatives Drehmoment auf die Koppel ( $M_3 = -0,99 \cdot \dot{\psi}$ ) bzw. auf die Schwinge ( $M_4 = -0,005 \cdot \dot{\theta}$ ) einbezogen. Ein geringes Antriebsmoment (z.B.  $M_1 = M_{AN} = 0,001$  Nm) sichert dann den stationären Betrieb. Da kein Drehzahlregler und kein Reibkontaktmodell außer im Bolzengelenk implementiert ist, resultieren die Werte aus gezieltem Probieren.

Selbst bei sehr sorgfältiger Wahl der Startwerte kann nicht vermieden werden, dass es bei der ersten simulierten Umdrehung zu Stößen kommt, die im 'eingeschwungenen' Zustand nicht mehr auftreten. Aus diesem Grund wird bei jeder Simulation die erste Umdrehung verworfen und nicht dargestellt. In Bild 86 ist links die erste Umdrehung einer Simulation bei 619 1/min dargestellt. Die ersten 20 Werte werden als Kreise dargestellt, alle anderen als Kreuze. Rechts abgebildet ist die zweite Umdrehung, die mit allen weiteren annähernd identisch ist.

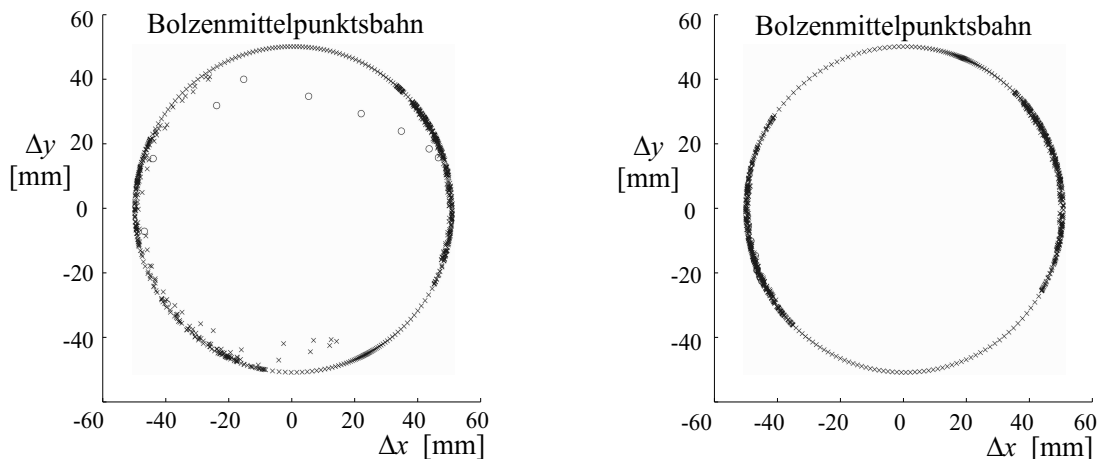
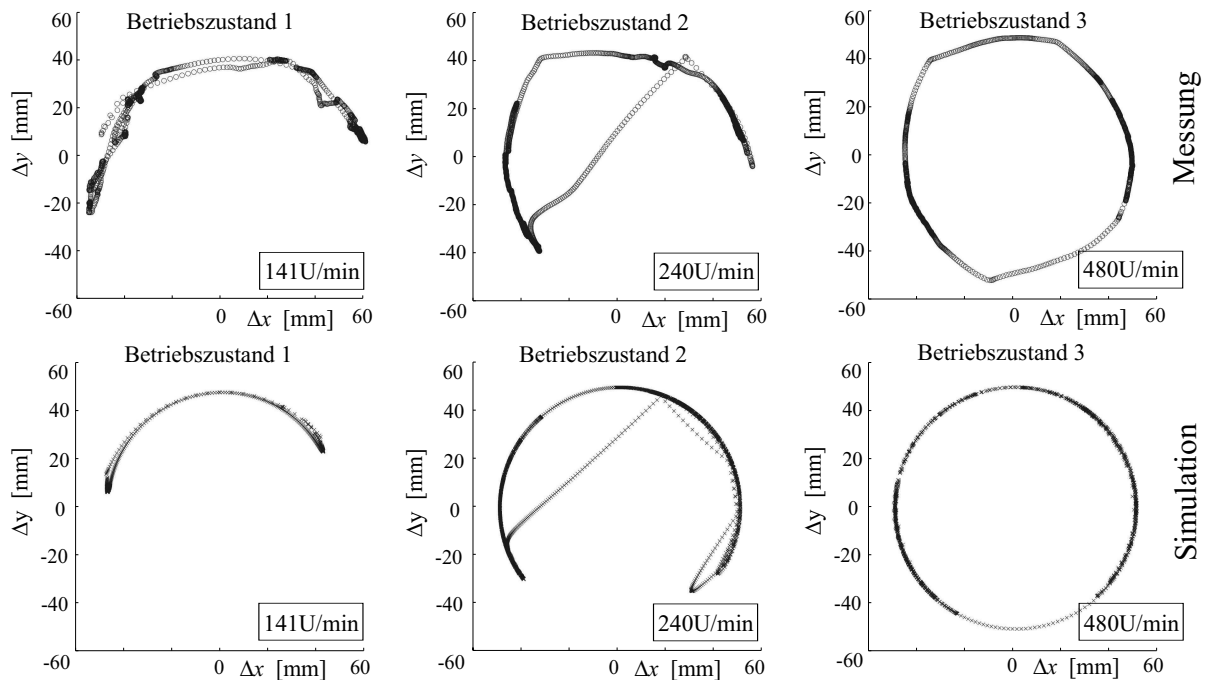


Bild 86: Einlaufphase, rechts: 1.Umdrehung, links: 2.Umdrehung, 619 1/min

Die Effizienz der Implementierung belegen die Rechenzeiten:

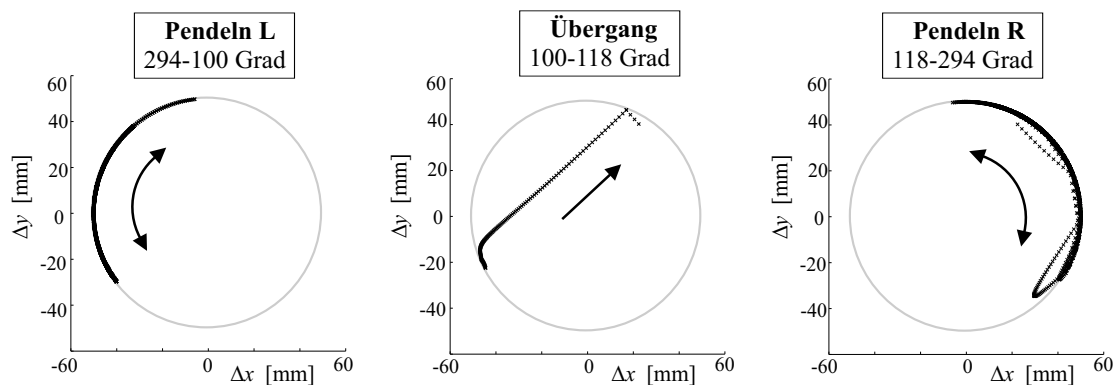
- 2 Umdrehungen bei 240 1/min: 20 s, Schrittweite  $10^{-4}$ s
- 2 Umdrehungen bei 480 1/min: 11 s, Schrittweite  $10^{-4}$ s

Das Bild 87 stellt Messungen aus Kap. 5.5.1 und Simulationen gegenüber. Bei einer Drehzahl von 141 1/min befindet sich der Mechanismus im 1. Betriebszustand. Es kommt zu keinem Abheben. Bei einer Drehzahl von 240 1/min befindet sich der Mechanismus im 2. Betriebszustand. Es treten Stöße auf. Im 3. Betriebszustand liegt der Bolzen ununterbrochen an der Lagerschale an und läuft um.



**Bild 87:** Bolzenverlagerungsbahn, Messung und Simulation, eine Umdrehung

Für genauere Untersuchungen wird in Bild 88 und 89 die Bolzenverlagerungsbahn einer Umdrehung unterteilt und den entsprechenden Kurbelwinkeln zugeordnet. Jeder Betriebszustand enthält mehrere Phasen: **Pendeln links**, **Pendeln rechts** und **Übergangsphasen**.



**Bild 88:** Aufspaltung der Simulation des 2. Betriebszustandes (240 1/min) in Phasen



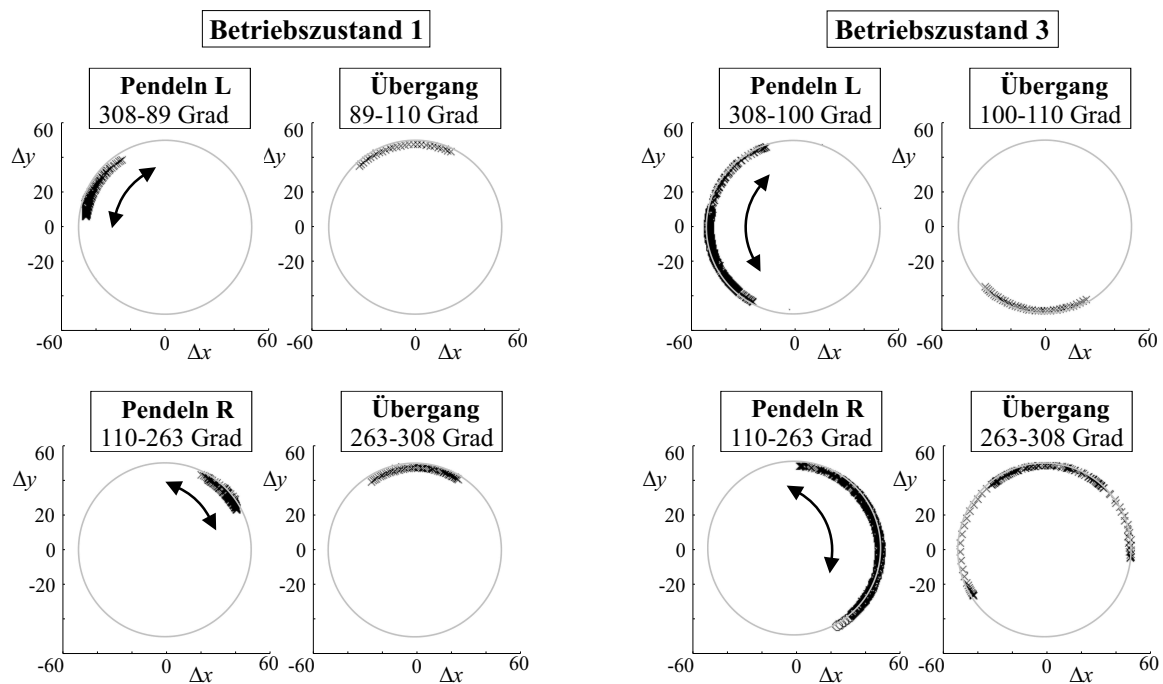


Bild 89: Aufspaltung der Simulation des 1. und 3. Betriebszustandes in Phasen

### 1. Betriebszustand ( $n < 230$ 1/min)

- $\varphi \approx 308^\circ - 89^\circ$ : Pendelschwingungen an der linken Lagerseite
- $\varphi \approx 89^\circ - 110^\circ$ : Übergang von der linken auf die rechte Lagerseite
- $\varphi \approx 110^\circ - 263^\circ$ : Pendelschwingungen an der rechten Lagerseite
- $\varphi \approx 263^\circ - 308^\circ$ : Übergang von der rechten auf die linke Lagerseite

### 2. Betriebszustand ( $n \sim 240$ 1/min)

- $\varphi \approx 294^\circ - 100^\circ$ : Pendelschwingungen an der linken Lagerseite
- $\varphi \approx 100^\circ - 118^\circ$ : Übergang von der linken auf die rechte Lagerseite mit Kontaktverlust und Stoß
- $\varphi \approx 118^\circ - 294^\circ$ : Pendelschwingungen an der rechten Lagerseite und Übergang auf die linke Seite ohne Kontaktverlust

### 3. Betriebszustand ( $n > 250$ 1/min)

- $\varphi \approx 308^\circ - 100^\circ$ : Pendelschwingungen an der linken Lagerseite
- $\varphi \approx 100^\circ - 110^\circ$ : Übergang von der linken auf die rechte Lagerseite durch Abheben
- $\varphi \approx 110^\circ - 263^\circ$ : Pendelschwingungen an der rechten Lagerseite
- $\varphi \approx 263^\circ - 308^\circ$ : Übergang von der rechten auf die linke Lagerseite durch Abheben

Werden Messung und Simulation der 3 Betriebszustände in Bild 87 verglichen, sind starke Ähnlichkeiten zu erkennen. Bei jeder Drehzahl tritt Pendeln an der rechten und linken Lagerseite auf. Lediglich der Übergang von der linken auf die rechte Seite variiert mit der Drehzahl. Die Pendelschwingungen, die in jedem Betriebszustand in mehreren Phasen auftreten, werden im folgenden Abschnitt noch einmal genauer untersucht.

#### 5.5.4 Pendelschwingungen im spielbehafteten Drehgelenk

Wie in den Bildern 87 bis 89 und beim Vergleich zwischen den Betriebszuständen bei 141 1/min, 240 1/min und 480 1/min ersichtlich ist, tritt das Pendeln des Bolzens an den Seiten der Lagerschale unabhängig vom Betriebszustand auf. Vermutlich entstehen die Pendelschwingungen durch Reibungseffekte im spielbehafteten Lager, da die Kurbel eine Kreisbahn vorgibt und diese der Koppel aufzwingt. In Bild 90 und 91 ist das Pendeln im **3. Betriebszustand** an der linken bzw. rechten Lagerschale mit den zugehörigen Kurbelstellungen dargestellt. Zur Veranschaulichung sind beide Bilder nicht maßstäblich gezeichnet, wie es eigentlich für ein 'kinematisches Schema' (vgl. Bild 20 auf S. 23) gefordert wird.

Der Wechsel zwischen dem Pendeln auf der linken und rechten Seite findet unabhängig von der Drehzahl bei ähnlichen Kurbelstellungen statt. Lediglich der Weg ändert sich mit der Drehzahl. Im 1. Betriebszustand überwiegt die Schwerkraft und der Wechsel geschieht beide Male über die Oberseite der Lagerschale. Hingegen verliert die Schwerkraft im 3. Betriebszustand an Bedeutung, so dass der Wechsel einmal oben und einmal unten geschieht.

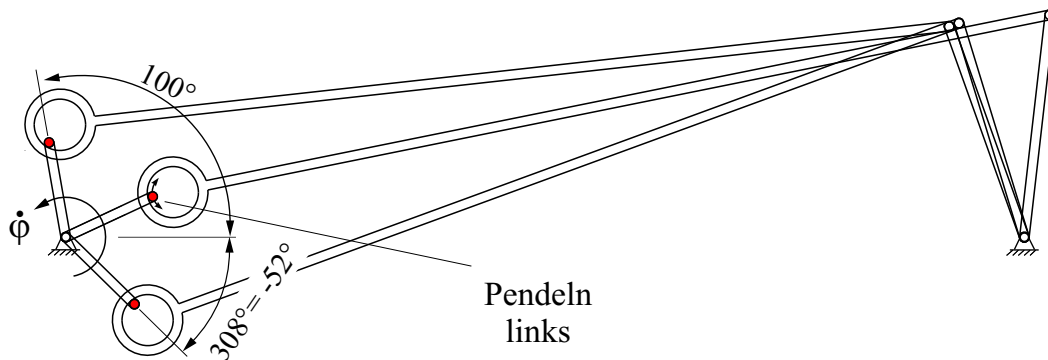


Bild 90: Pendelschwingungen auf der linken Seite, **3. Betriebszustand**

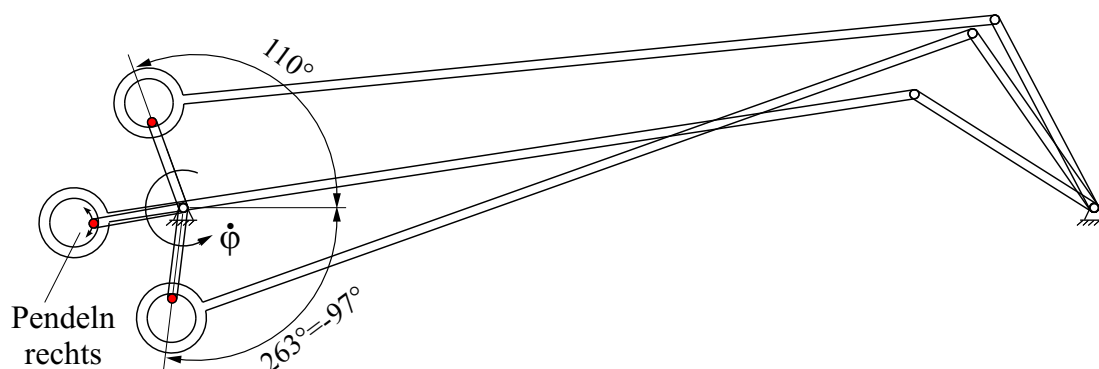
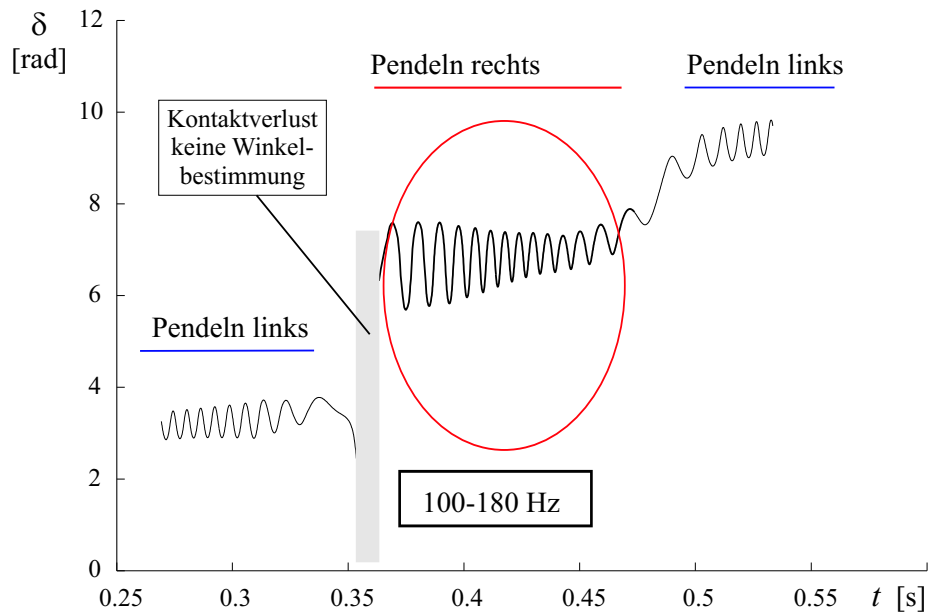


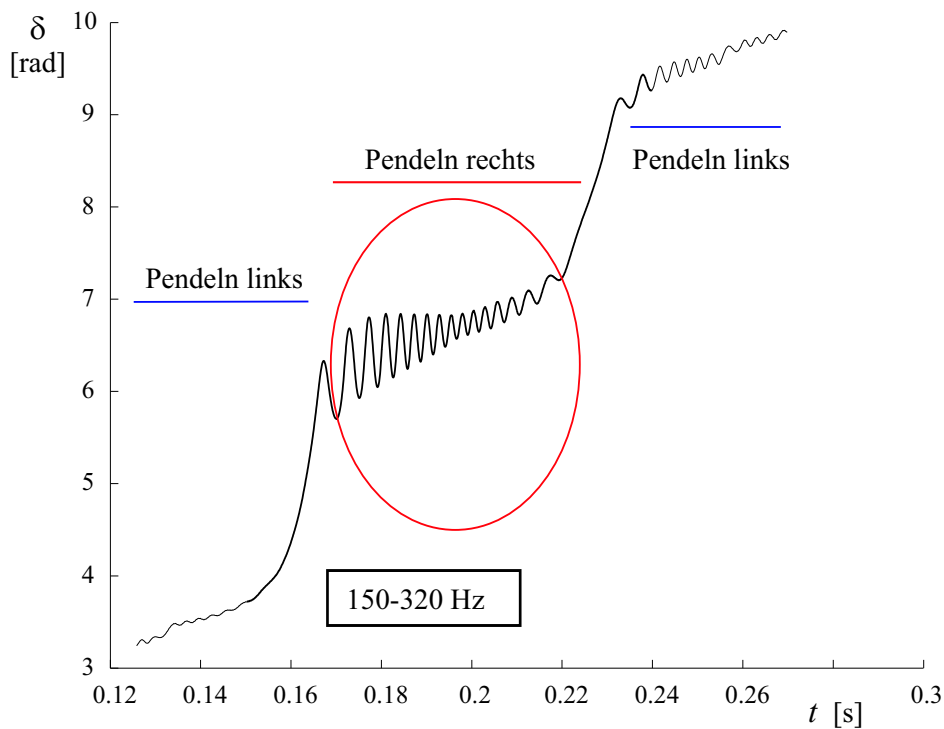
Bild 91: Pendelschwingungen auf der rechten Seite, **3. Betriebszustand**

Eine weitere Untersuchung betrifft den Frequenzinhalt dieser Pendelschwingungen. Die Auswertung der relativen Tangential- und Normalgeschwindigkeit mit Hilfe der FOURIER-Transformation ergab keine zufriedenstellenden Ergebnisse. Auf Grund der sich ununterbrochen ändernden Frequenz der Pendelschwingungen wird das Ergebnis verwischt. Deshalb wurde auf die Verwendung von Frequenzdarstellungen verzichtet.

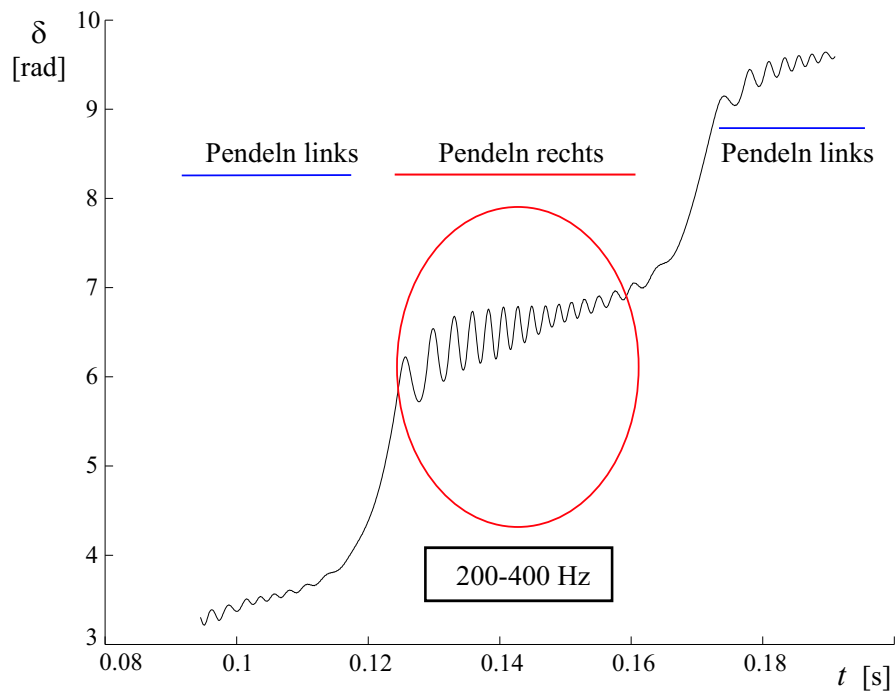
Nach der Umrechnung der Bolzenverlagerungsbahn in Polarkoordinaten kann der Winkel  $\delta$  (vgl. Bild 84) wie in den Bildern 92, 93 und 94 dargestellt werden. Die 'Sprünge' im Zeitverlauf kennzeichnen den schnellen Übergang zwischen den Pendelphasen. Auch ohne Spiel ergibt sich bei einer vollen Kurbelumdrehung im Bolzengelenk eine Relativdrehung von  $360 = 2\pi$ .



**Bild 92:** Polarwinkel der Bolzenverlagerungsbahn, 240 1/min



**Bild 93:** Polarwinkel der Bolzenverlagerungsbahn, 480 1/min



**Bild 94:** Polarwinkel der Bolzenverlagerungsbahn, 619 1/min

Aus den Bildern geht hervor, dass abhängig von der Drehzahl Pendelschwingungen mit Frequenzen von 100 - 400 Hz auftreten. Die Frequenzen entsprechen hier mit 0,1 mm Spiel dem 20- bis 40-fachen der Drehfrequenz der Kurbel. Unter Berücksichtigung der Ergebnisse der Ordnungsanalyse mit und ohne Spiel kann darauf geschlossen werden, dass diese Pendelschwingungen zur breitbandigen Anregung über 150 Hz bei einem spielbehafteten Lager maßgeblich beitragen.

Eine weitere Simulation mit 0,01 mm Spiel am Kurbelbolzen bewies die hohe Robustheit der Numerik bei Anwendung der Systembeschreibung mit einseitigen Bindungen. Hierbei erhöht sich die Pendelfrequenz auf ca. 1000 Hz.

## 6 Modalanalyse des Maschinengestelles

### 6.1 Motivation und Vorgehen der experimentellen Modalanalyse

Die Zielsetzung der Modalanalyse im vorliegenden Anwendungsfall liegt in der Ermittlung der modalen Parameter im Frequenzbereich von 5 Hz bis etwa 300 Hz. Nicht zuletzt sollen die Eigenfrequenzen und zugehörigen Eigenschwingformen zur Deutung der in Kapitel 2.2 (Seite 14 unten) aufgezeigten Schwingungserscheinungen dienen. Zu den hier zusammengefassten Ergebnissen hat besonders GAULL [35] und [113] beigetragen.

Die experimentelle Modalanalyse gliedert sich in vier Schritte [115, Kap. 8]:

1. Die Wahl einer passenden Anzahl von Messpunkten für Beschleunigungssensoren und die Festlegung der Anregung. Diese erfolgt recht einfach mit Impulshammer oder aufwendiger mit einem Shaker. Die Anregungskraft ist dabei immer zu messen.
2. Messung von Frequenzgangfunktionen. Zur Validierung sollten auch die Kohärenzfunktionen gemessen werden.
3. Anwendung eines 'Curve-Fitting'-Verfahrens zur Identifikation der Eigenfrequenzen und Eigenvektoren einschließlich der modalen Dämpfungen.
4. Verifikation der Ergebnisse durch Animationen, MAC-Kriterium u.a. Methoden der Plausibilitätsprüfung

Für die Modalanalyse wird die Kurbelschwinge in einer Winkelstellung blockiert. Die Schwingungen der Grundplatte stehen im Mittelpunkt der Untersuchungen. Die Eigenschwingformen des Mechanismenprüfstandes lassen sich in Starrkörperschwingungen und 'elastische' Schwingungen mit Biegung und Torsion einteilen. Es ist davon auszugehen, dass die Starrkörpereigenfrequenzen des Gesamtaufbaus in seiner relativ weichen Lagerung deutlich unterhalb der Eigenfrequenzen der elastischen Schwingformen der Grundplatte liegen. Aus diesem Grund werden diese beiden Gruppen getrennt voneinander untersucht. Die Anregungsart und -frequenzen lassen sich dementsprechend anpassen.

Der Mechanismenprüfstand entspricht unter starrer und blockierter Betrachtungsweise einem Blockfundament mit unsymmetrischer Massenverteilung. Bei den sechs zu erwartenden Starrkörpereigenformen handelt es sich deshalb um gekoppelte Translations- bzw. Rotationschwingformen.

Erste Messungen mit der Erregung durch Impulshammer liefern vor allem die Starrkörper-Eigenschwingformen. Allerdings gibt es bei der 4. und 5. Eigenfrequenz größere Streuungen, die auf die nichtlinearen Dämpfungselemente unter der Grundplatte zurückgeführt werden. Als plausible Ergebnisse mit der Impulshammeranregung liegen nur vier Starrkörper- und drei Biegeschwingformen vor.

Eine bandselektive stochastische Anregung der Struktur mit Hilfe eines elektrodynamischen Erregers (Shaker) führt zu bessern Ergebnissen. Die Erregeramplituden und -richtungen lassen sich somit genauer einhalten und bei Mittelungen reproduzierbar wiederholen.

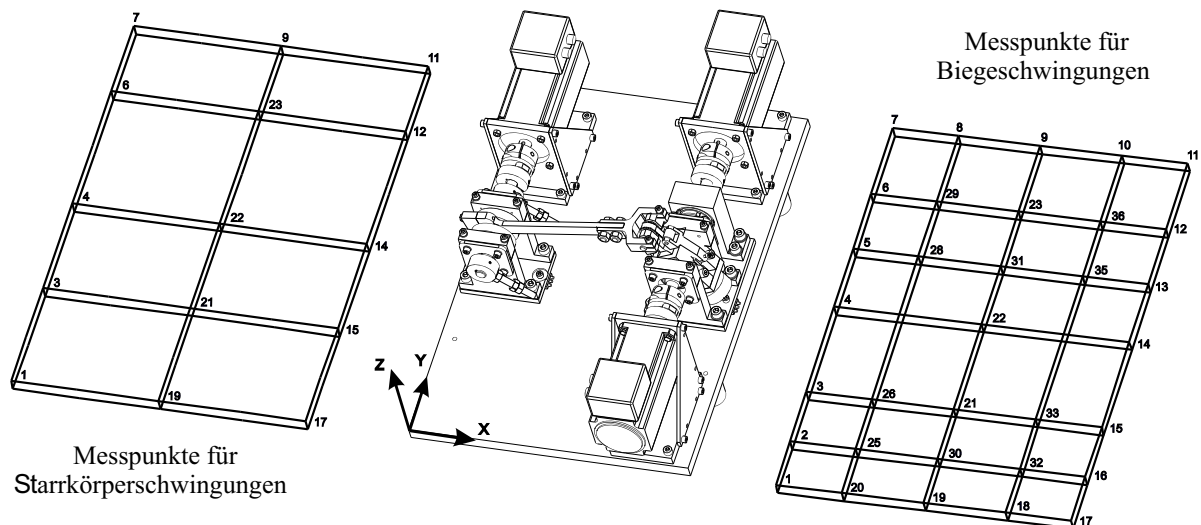
Der Ansatz, den Shaker mit einem vom Funktionsgenerator erzeugten Sweep-Sinus-Signal zu speisen, kann ebenfalls mangelhafte Resultate hervorbringen, wenn ohne spezielle Software nur eine Frequenzrampe mit konstanter Erregeramplitude gefahren wird. Hierfür muss spezielle Hardware verfügbar sein. Offensichtlich reicht ein einfacher Funktionsgenerator nicht dafür aus. Alle im Folgenden dargestellten Messergebnisse sind deshalb durch eine stochastische Erregung der Struktur mit einem Shaker erzielt.

Wie das Bild 95 zum Messaufbau zeigt, ist der elektrodynamische Erreger an zwei Stahlseilen aufgehängt und mit der Struktur über einen dünnen Stößel verbunden. Um hierbei eine Störung am Eingang zu vermeiden, wird das Shakerpendel überkritisch ausgelegt. Die Eigenfrequenz des Pendels liegt unter 3 Hz und das Erregersignal wird mit Hochpass 5 Hz gefiltert.



**Bild 95:** Messaufbau zur Modalanalyse mit Shaker

Die Messung des Eingangssignals erfolgt mit einem Piezo-Kraft-Sensor. Als Systemantwort werden an verschiedenen Messpunkten die Beschleunigungen in drei orthogonalen Koordinatenrichtungen gemessen, wobei drei auf einen Würfel geschraubte Piezo-Beschleunigungssensoren zum Einsatz kommen. Zur Befestigung des Würfels dient Bienenwachs.



**Bild 96:** Anordnung der Messpunkte je nach Messziel

Das Bild 96 zeigt die Verteilung der Messpunkte auf der Struktur. Daraus wird ersichtlich, dass für die Untersuchung der elastischen Eigenformen (verständlicherweise) an deutlich mehr Stellen gemessen werden muss, als es für die Starrkörpereigenformen erforderlich ist.

Die Anregung des Mechanismenprüfstandes erfolgt in x-, y- und z-Richtung. Der elektrodynamische Erreger mit Stößel ist dementsprechend zu montieren und auszurichten. Es können durch mehrere Messungen sechs Starrkörpereigenformen sowie sieben Biege- bzw. Torsionsschwingformen ermittelt werden. Im Sinne einer hohen Auflösung der Messungen im Frequenzbereich wird bei den einzelnen Messungen mit einer relativ langen Beobachtungsdauer (über 10 s) gearbeitet und über viele Messungen gemittelt. Je nach Anregungsrichtung der Struktur variieren sowohl die bestimmbareren Eigenformen, als auch in einem bestimmten Toleranzband die zugehörigen Eigenfrequenzen und modalen Dämpfungen.

Zur Überprüfung der Qualität der Signale und zur Fehleridentifizierung schon während der Messung kann die Kohärenzfunktion und das Autoleistungsspektrum der Anregung kontrolliert werden. Ein weiteres Kriterium zur Beurteilung der Messergebnisse ist, ob in der Frequenzgangkurve zwischen zwei Resonanzen ein (signifikantes) Minimum liegt. Dabei sollten die Minima mit sinkendem Abstand der Messpunkte zum Anregungspunkt Antiresonanzen bilden. Im kollokierten Fall (Anregungsort = Messpunkt) ist schließlich eine Abfolge von Resonanzen und Antiresonanzen feststellbar.

Die sich an die Messreihen anschließende Identifikation der modalen Parameter wird mit Hilfe eines MDOF (Multi-Degree of Freedom) Curve-Fitting-Verfahrens realisiert.

## 6.2 Ergebnisse der experimentellen Modalanalyse

Bei Anregung in x- und y-Richtung lassen sich mit den einzelnen Messungen fast immer alle sechs Starrkörpereigenformen beobachten. Die Anregung der Struktur in z-Richtung dient zur Identifikation einiger weniger Schwingformen. Etwas anders verhält es sich bei den Biegeeigenbewegungen. Hier sind erwartungsgemäß besonders durch die Anregung in z-Richtung gute Ergebnisse erzielbar. Sowohl beim Curve-Fitting, als auch bei der Überprüfung der damit erhaltenen Eigenvektoren ergibt sich im Anwendungsfall, dass bei Annahme der Bequemlichkeitshypothese (Proportionale Dämpfung) bessere Ergebnisse erzielbar sind, als bei der Annahme einer allgemeinen Dämpfung.

Im Folgenden sollen die Messergebnisse kurz interpretiert werden, siehe Bilder 97, 98 und 99. Bei der ersten Eigenschwingung mit der Frequenz von etwa 9 Hz handelt es sich vornehmlich um eine Translationsschwingung in x-Richtung, sie kann vor allem bei denjenigen Messungen festgestellt werden, bei denen in x-Richtung angeregt wird. Diese Bewegung ist überlagert durch eine Translationsbewegung in y-Richtung und eine Rotationsbewegung um die y-Achse. Allerdings sind die beiden letztgenannten Schwingformanteile in ihren Amplituden weitaus weniger signifikant.

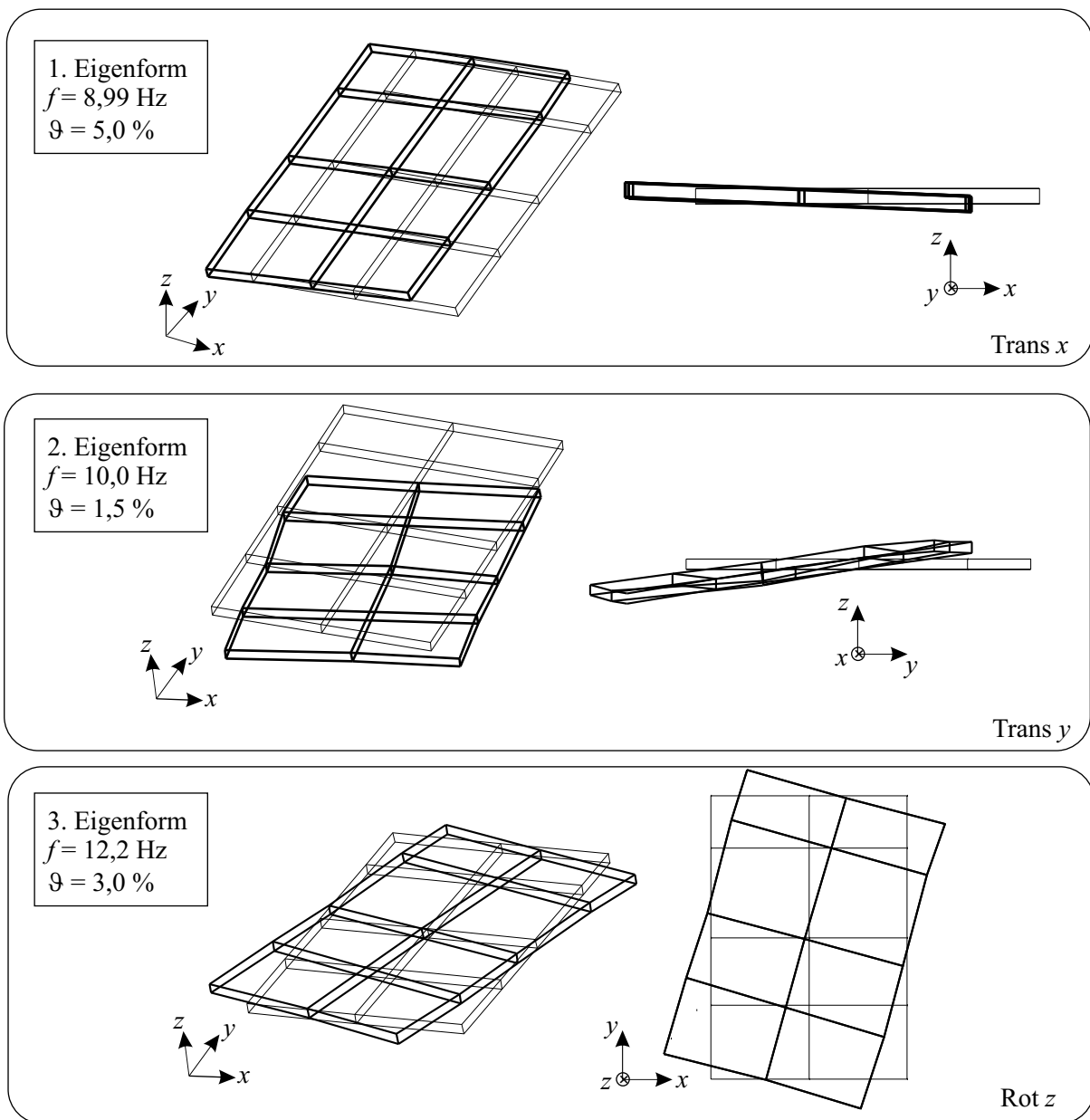
Die zweite Eigenschwingform bei ca. 10 Hz tritt besonders dann auf, wenn in y-Richtung angeregt wird und ist im Wesentlichen eine Translationsschwingung in y-Richtung. Allerdings kann auch hier eine schwache Rotationsbewegung (um die x-Achse und um die z-Achse) und eine zusätzliche geringfügige Translationskomponente (in x-Richtung) erkannt werden.

Die erste rein rotatorische Schwingungsform liegt bei etwa  $f_3 = 12$  Hz. Dabei dreht die Struktur um die z-Achse und alle anderen Bewegungsanteile sind in ihrer Größe vernachlässigbar.

Im Bereich von 19-22 Hz liegen zwei Eigenschwingformen, insgesamt die vierte und fünfte

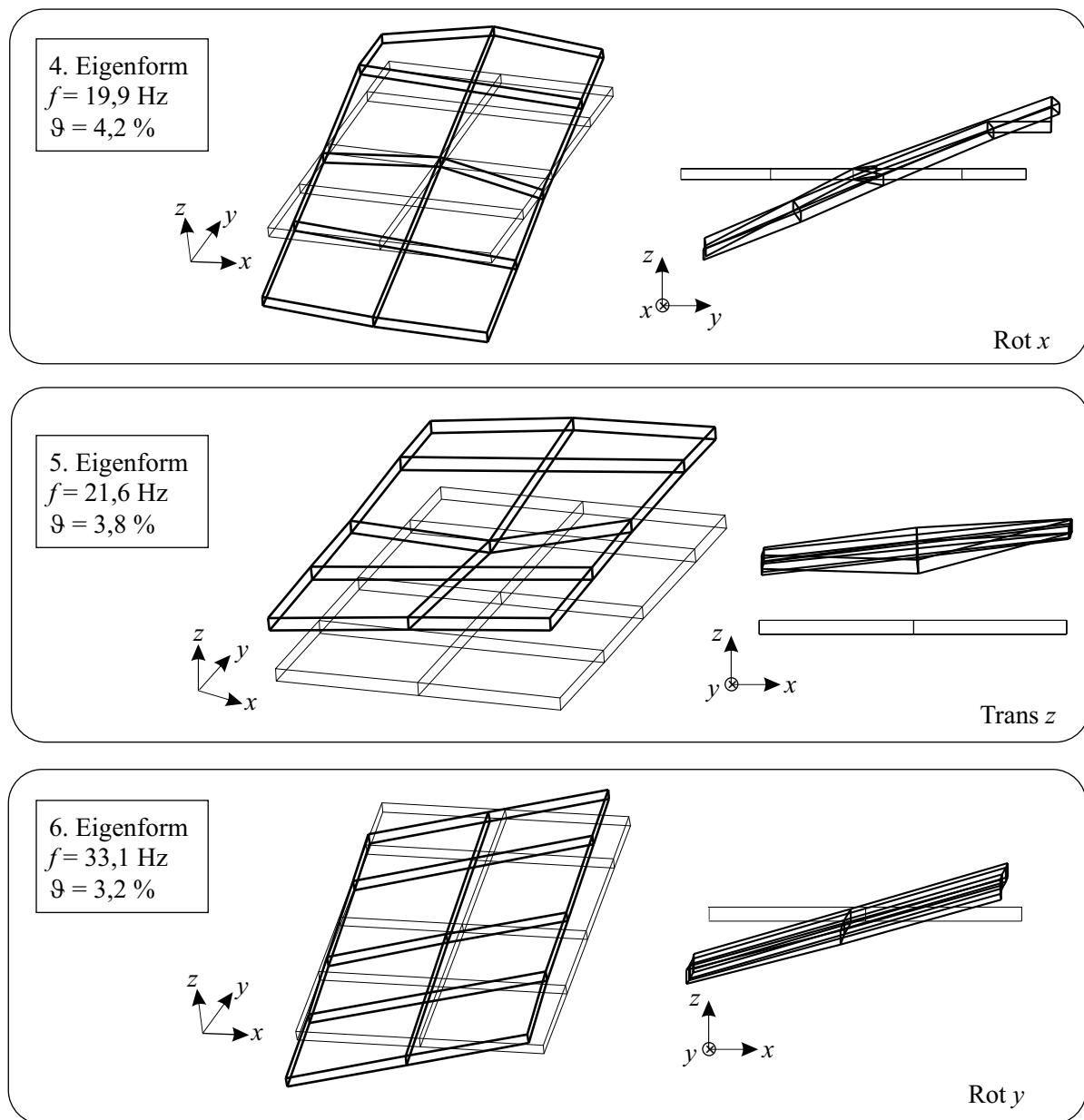
Eigenfrequenz, siehe Bild 98. Diejenige mit einer etwas tieferen Frequenz erzeugt hauptsächlich eine Rotationsschwingung um die  $x$ -Achse, die andere besteht zum größten Teil aus einer Translationsbewegung in  $z$ -Richtung. Letztere wird insbesondere bei der Anregung in  $z$ -Richtung nachgewiesen. Aufgrund der eng zusammenliegenden Eigenfrequenzen bei relativ starken Dämpfungen erfordert die saubere Trennung dieser beiden Schwingformen einen etwas größeren Aufwand. Mit Impulshammeranregung gelingt die Identifikation der 4. und 5. Eigenschwingform nur ungenügend.

Am eindeutigsten von allen Eigenschwingformen ist die Rotationsschwingung um die  $y$ -Achse ermittelbar. Diese sechste Eigenfrequenz liegt im Bereich von 32,5-33,5 Hz und kann nahezu aus jeder der Messungen unabhängig von der Anregungsrichtung gewonnen werden.



**Bild 97:** Darstellung der ersten drei Starrkörpereigenformen



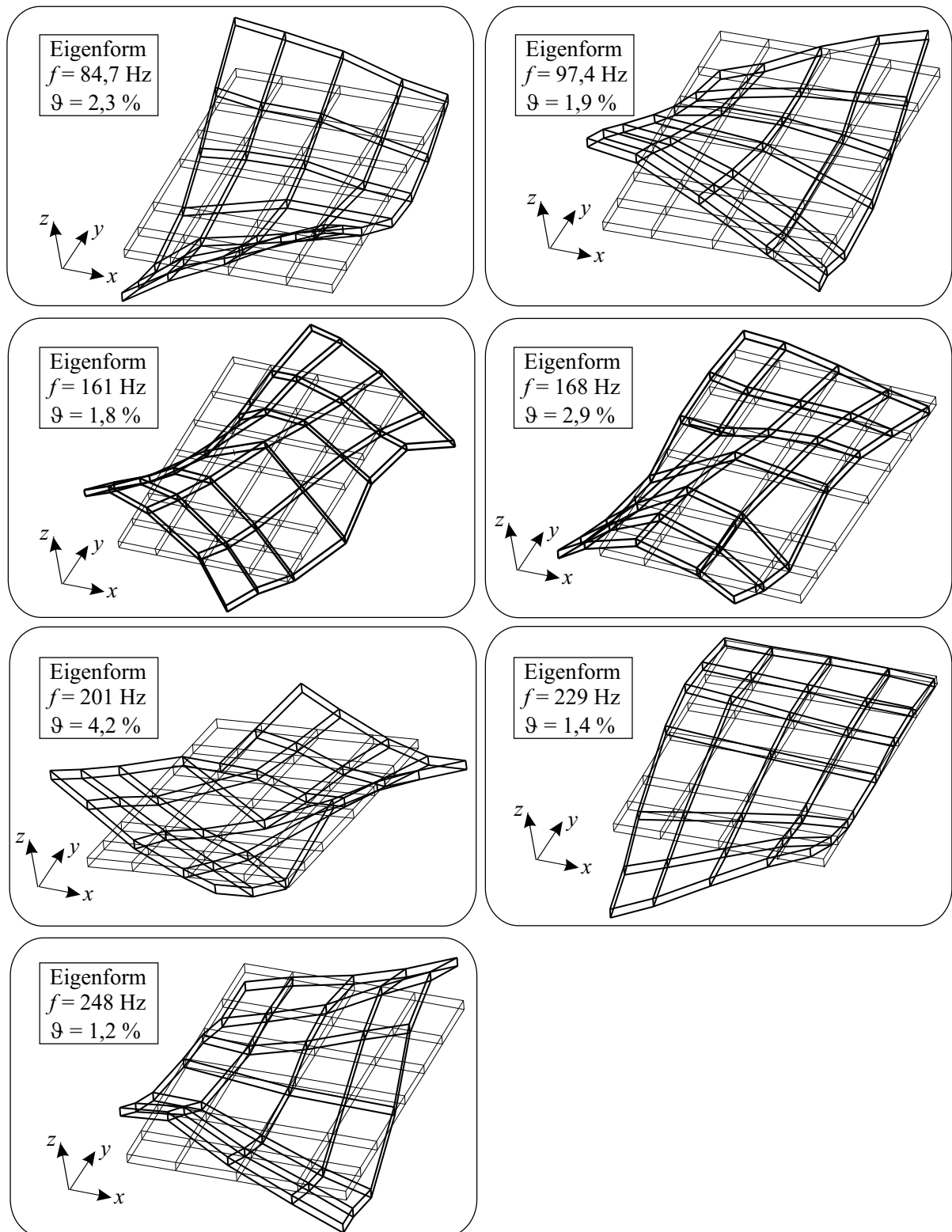


**Bild 98:** Darstellung der 4., 5. und 6. Starrkörpereigenform

Zur Gruppe der Schwingformen mit elastischen Deformationen der Grundplatte (Bild 99) ist festzuhalten, dass es sich hierbei hauptsächlich um Biege- und Torsionsschwingungen handelt, denen aber zum Teil auch translatorische bzw. rotatorische Bewegungsanteile der gesamten Platte überlagert sind.

Eine glattere Darstellung und detaillierte Bewertung der Eigenschwingformen über 100 Hz könnte mit einer höheren Dichte der Messpunkte erreicht werden, worauf hier verzichtet wird. Eigenschwingformen mit höheren Eigenfrequenzen über 250 Hz würden ebenfalls diesen erhöhten Messaufwand erforderlich machen.

Mit der niedrigsten Frequenz von 84,7 Hz liegen die Eigenfrequenzen dieser Gruppe deutlich über der höchsten Eigenfrequenz ( $f_6 \approx 33 \text{ Hz}$ ) aus der Gruppe der Starrkörperschwingungen.



**Bild 99:** Darstellung der Biege- und Torsionseigenschwingformen

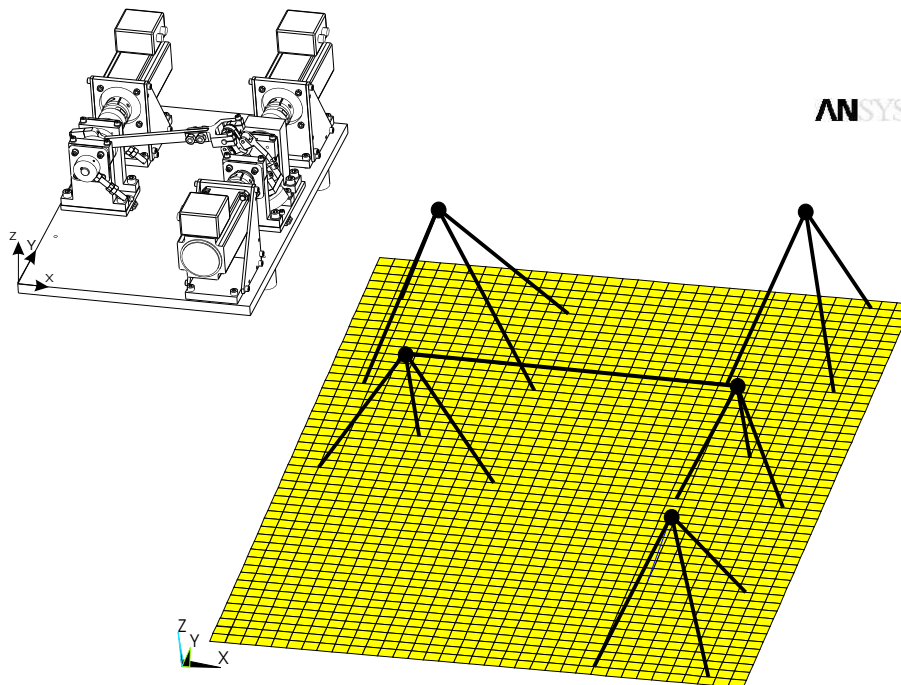
### 6.3 Modalanalyse mit Hilfe eines Finite-Elemente Rechenmodells

Zur rechnerischen Modalanalyse bietet sich die Finite-Elemente-Methode (FEM) an. Hier wird auf das FE-Programm ANSYS zurückgegriffen. Für die Modellierung des Mechanismenprüfstandes sind zunächst vereinfachende Annahmen zu treffen. So werden z.B. sämtliche Anbauteile und Aufbauten der Grundplatte als Starrkörper betrachtet, siehe Bild 100.

Eine weitere experimentell abgesicherte Annahme geht von der Entkopplung der Grundplattenschwingungen (Biegung, Torsion) gegenüber des Unterbaus aus. Die Schwingungen der Grundplatte (einschließlich Aufbauten) in der relativ weichen Gummi-Feder-Dämpfer-Lagerung haben kaum Wechselwirkungen mit den Schwingungen des Unterbaus aus Alu-Profilen. Die Schwingungsisolierung (Gummi-Federn) sperrt den Übertragungsweg für Frequenzen über 40 Hz (einige Richtungen ab 9 Hz) und die gemessenen Biegeschwingungen der Platte beginnen erst bei 80 Hz. Deshalb lässt sich die Berechnung auf die Grundplatte mit ihren Anbauteilen beschränken.

Die Gummi-Feder-Lagerung bereitet jedoch insofern Schwierigkeiten, als dass keine verlässlichen Daten über ihre dynamischen Eigenschaften vorliegen. Es wird deshalb zunächst von ersten Richtwerten  $c_{Druck} = 136 \text{ N/mm}$  und  $c_{Schub} = 22 \text{ N/mm}$  für die Steifigkeiten in Längs- bzw. Querrichtung und  $D = 0,04$  für das LEHR'schen Dämpfungsmaß ausgegangen. Spätere Sensitivitätsuntersuchungen durch Variieren dieser Parameter haben die Gültigkeit der Annahmen bestätigt.

Die FEM-Modellierung der Grundplatte im Bild 100 verwendet Shell63-Elemente, die Lagerung ist mit Combin14-Elementen verwirklicht. Eine regelmäßige (mapped) Vernetzung der Grundplatte bietet sich aufgrund der relativ einfachen Geometrie an.



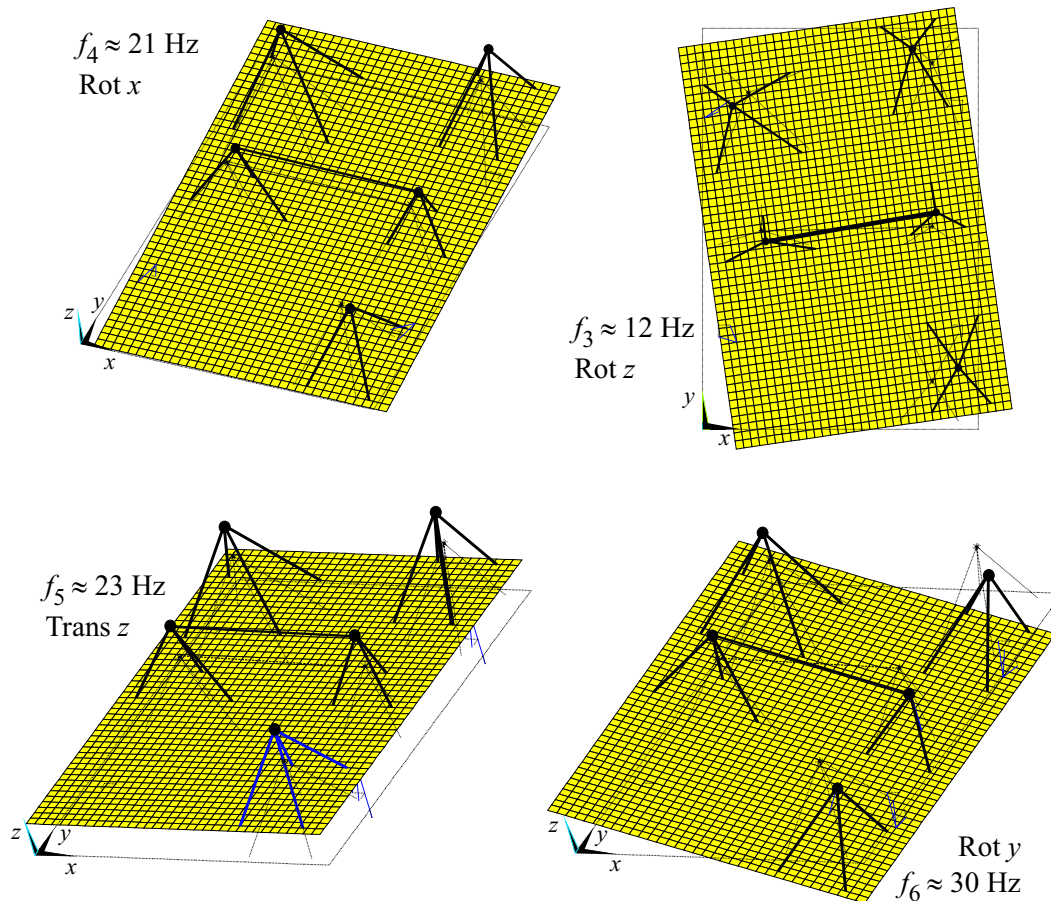
**Bild 100:** Darstellung des FE-Modells

Auf Grundlage von CAD-Konstruktionszeichnungen in CATIA können die Schwerpunkte, die Richtungen der Hauptträgheitsachsen und die Massenträgheitsmomente der einzelnen Komponenten (Motoren, Lagerböcke usw.) bestimmt werden. Mit dieser Information ist es möglich, die Anbauteile als Mass21-Elemente, d.h. als Masse und Drehträgheit eines starren

Körpers, zu idealisieren. Die Verbindung dieser Mass21-Elemente mit der Grundplatte stellt das Balkenelement vom Typ Beam4 her. Dessen Steifigkeit wird dabei so groß gewählt, dass sie im Verhältnis zu den restlichen Elementen als starr betrachtet werden können.

Das Bild 101 zeigt vier der sechs berechneten Starrkörpereigenformen. Besonders die vierte und fünfte Eigenschwingform mit den relativ eng beieinander liegenden Frequenzen zeigen eine hohe Sensitivität der Form gegenüber einer Änderung der Federsteifigkeiten. Ein anderes Verhältnis zwischen Druck- und Schubsteifigkeit liefert sofort auch andere Eigenschwingformen.

Bei einem Modellabgleich bereitet auch das nichtlineare Verhalten der Gummi-Feder-Dämpfer-Elemente Probleme, die Schwingformen variieren bei Änderung der Erregeramplituden und Anregungsrichtungen. Hier muss für eine linearisierte Näherung das Niveau der Erregung unter Betriebsbedingungen geschätzt werden.



**Bild 101:** Darstellung einiger berechneter Starrkörpereigenformen

## 6.4 Verifizierung der Ergebnisse

Für die Überprüfung der Ergebnisse der Messungen und der Berechnungen sind in der Literatur diverse Ansätze zu finden. Als gebräuchlichstes Vergleichskriterium für Eigenvektoren dient das Modal Assurance Criterion (MAC), es ist bekanntlich definiert durch das Skalarprodukt von Eigenvektoren  $\Phi$  mit einer entsprechenden Normierung. Es besitzt folgende Form:

$$\text{MAC}_{ki} = \frac{|\Phi_{mk}^H \cdot \Phi_{ri}|^2}{(\Phi_{mk}^H \cdot \Phi_{mk}) \cdot (\Phi_{ri}^H \cdot \Phi_{ri})} \quad (157)$$

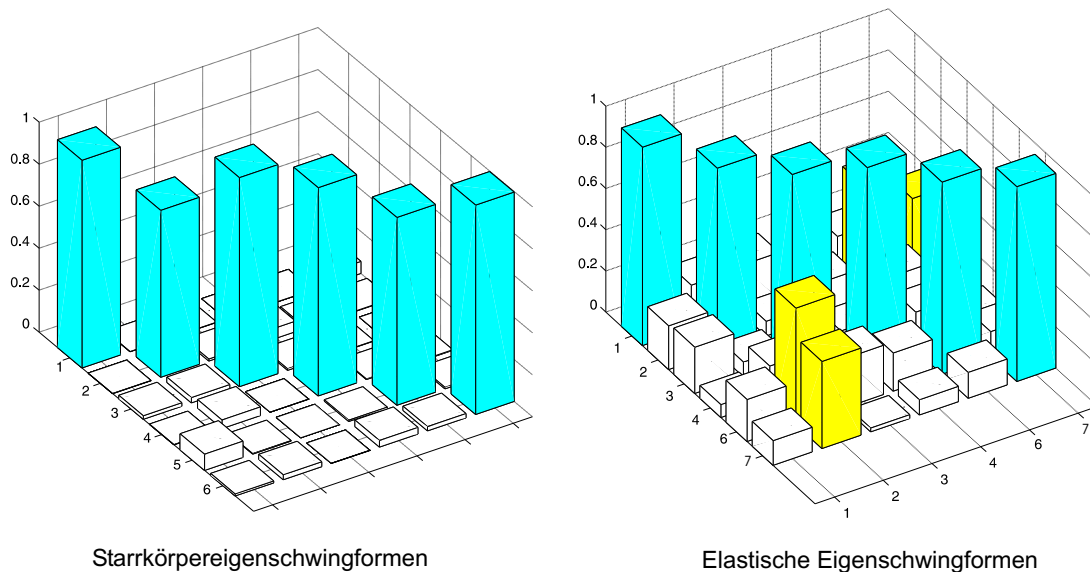
mit den k-ten bzw. i-ten Eigenvektoren  $\Phi_{mk}$  und  $\Phi_{ri}$  zweier Messungen ('m' und 'r') bzw. aus einer Messung 'm' und einer Berechnung 'r'. Das hochgestellte H kennzeichnet hierbei den hermiteschen (im Falle von reellen Vektoren: den transponierten) Vektor.

Das Orthogonalitätskriterium im MAC-Wert bestimmt dessen Grenzen mit:

$$0 \leq \text{MAC} \leq 1 \quad (158)$$

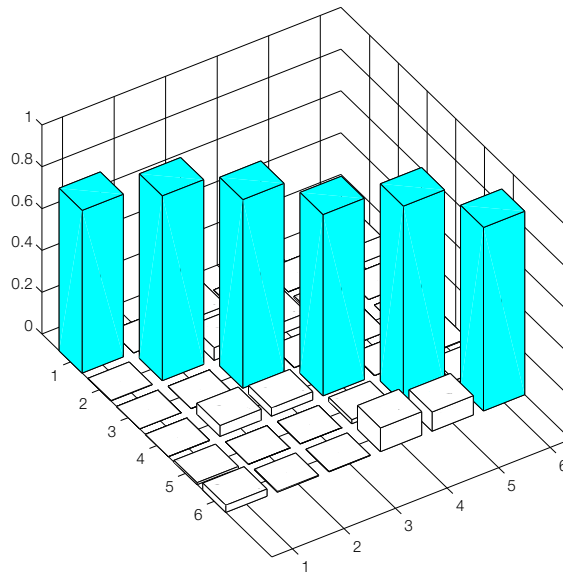
Das Kriterium strebt gegen den Wert 1, wenn zwei Vektoren identisch sind und nähert sich dem Wert Null für linear unabhängige Eigenvektoren. Der Idealfall (Wert Null) der Orthogonalität kann in der Regel bei der Wahl von Koordinaten an der realen Struktur nicht erreicht werden. Die Orthogonalität würde eine Koordinatentransformation mit der Massen- oder Steifigkeitsmatrix erfordern [115, Kap. 8]. Diese Matrizen sind jedoch bei reinen Messungen nicht bekannt.

Das Bild 102 (links) veranschaulicht eine auf diese Weise ermittelte Gegenüberstellung für Starrkörperschwingformen, die allein aus den Messreihen hervorgegangen sind. Im Bild 102 rechts ist ein Vergleich von sechs ermittelten elastischen Schwingformen abgebildet. Hier zeigt sich eine schlechtere Qualität in der Korrelation des 2. mit dem 6. und 7. Eigenvektor. Die 5. Eigenschwingform aus Bild 99 zur Eigenfrequenz  $f_{eig} = 201 \text{ Hz}$  ist in der Zusammenstellung des Bildes 102 weggelassen. Weiter Diagramme enthalten die Arbeiten von GAULL [35] und MÜLLER [64].



**Bild 102:** Vergleich von Messergebnissen mit dem Modal Assurance Criterion

Das Bild 103 gibt schließlich einen Vergleich von experimentellen und errechneten Starrkörpereigenschwingformen wieder. Aus diesen Abbildungen ist deutlich die gute Übereinstimmung von Messung und FE-Berechnung ersichtlich. Ein Abgleich der Eigenschwingformen mit elastischer Deformation der Platte macht nur Sinn, wenn sowohl die Dichte der Messpunkte als auch die FEM-Modellierung mit den Aufbauten verfeinert werden. Diesbezüglich wird hier auf einen weiteren Modellabgleich verzichtet.



**Bild 103:** Vergleich der Eigenvektoren aus Messung und Berechnung

Das Eigenschwingungsverhalten des Mechanismenprüfstandes ist nun durch die experimentelle Modalanalyse bekannt. Die sechs Starrkörpereigenschwingformen der Grundplatte einschließlich Kurbelschwinge liegen etwa bei: 9, 10, 12, 20, 22 und 33 Hz. Eigenschwingformen mit elastischer Deformation der Grundplatte verstärken Schwingungen bei ca. 85, 97, 161, 168, 201, 229 und 248 Hz.

Gemessene Schwingungserscheinungen, wie in den Abschnitten 2.2 oder 5.5 (Kurbelschwinge mit Spiel), können mit Hilfe der bekannten Eigenfrequenzen und zugeordneten Eigenschwingformen besser interpretiert werden. Zum Beispiel können die drehzahlabhängigen Pendelschwingungen in den Bildern 92 bis 94 auf den Seiten 121 bis 122 mit Biegeeigenfrequenzen der Grundplatte in Resonanz geraten. Stöße durch Spiel in Gelenken oder bei realen Maschinen durch Werkzeug-eingriff können auch breitbandig gleichzeitig viele Eigenschwingformen erregen. Hier hilft die geometrische Veranschaulichung mit den Eigenschwingformen bei der Begründung dominieren-der Peaks im Amplitudenspektrum.

## 7 Zusammenfassende Übersicht zu Schwingungsphänomenen

An der relativ einfachen und überschaubaren Maschine 'Mechanismenprüfstand' ist in dieser Arbeit mehrfach der Weg vom ersten Erkennen einer Schwingung in einer Messung über verschiedene Analysemethoden bis zur Modellbildung, Verifikation und Schwingungsinterpretation demonstriert worden. Besonderes Augenmerk liegt dabei auf der experimentellen Absicherung. Die Zusammenstellung liefert einen Zugang und eine Übersicht für den Berechnungsingenieur zum Gebiet der Mechanismendynamik. Aber auch der Versuchsfeldingenieur erhält zahlreiche Informationen über typische Schwingungsphänomene und deren Ursachen. Gerade in der engen Verknüpfung von Versuch, Minimalmodell und physikalischer Interpretation liegt die Basis zur Verbesserung und Weiterentwicklung schnelllaufender Verarbeitungsmaschinen mit ungleichmäßigen Werkzeugbewegungen.

Mit den Ergebnissen der Modalanalyse im Kapitel 6 gelingt es, eine große Anzahl von Peaks in gemessenen Spektren einzelnen Eigenfrequenzen zuzuordnen. Für das Verständnis, wie und warum eine Eigenfrequenz zur Wirkung kommt, sind die Eigenschwingformen (Moden) und Erregerkräfte (Ort, Betrag, Richtung) von fundamentaler Bedeutung.

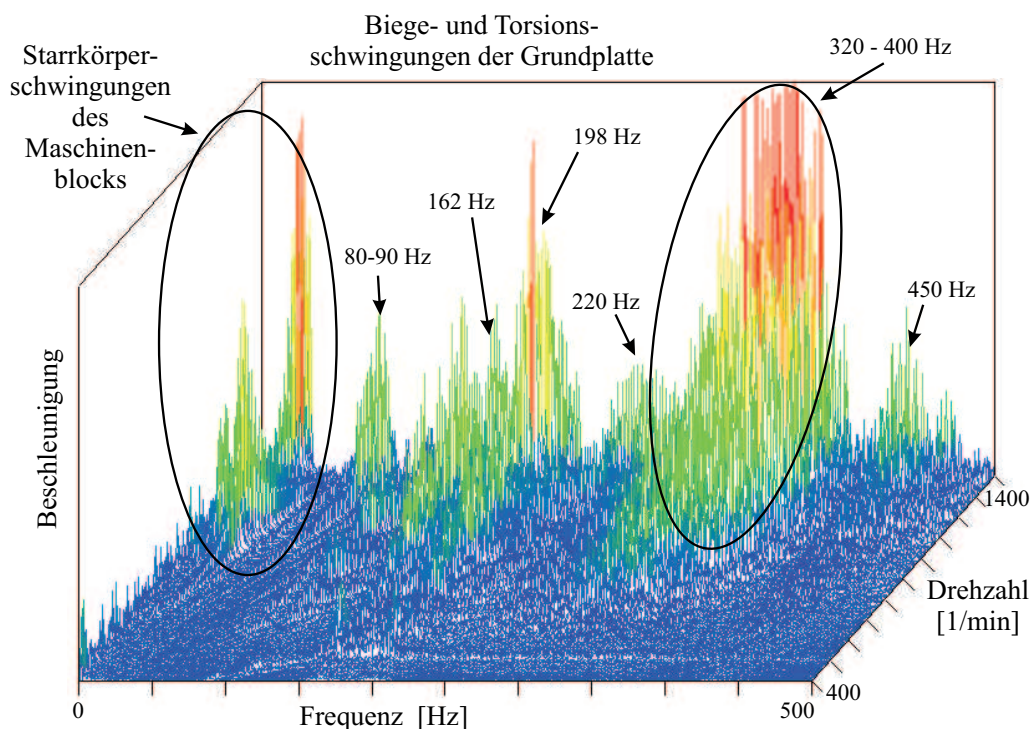
Schwierig gestaltet sich oft das Erkennen der Erregerkräfte. Sie hängen sehr stark von den Betriebsbedingungen ab. Sie erfordern konkrete Produkt- und Prozesskenntnisse, d.h. Ingenieur-erfahrung. Am Mechanismenprüfstand vermitteln gemessene Signale der Antriebsmomente (Motorstrom), der Fundamentkräfte (Piezo) und sogar der Pleuellängskräfte (DMS) einen guten Überblick zum Kraftfeld der Maschine im Betrieb. Zusätzlich stehen die Zustandsgrößen Antriebswinkel und Antriebswinkelgeschwindigkeit (Servo-Resolver-Signale) zur Verfügung.

Abschließend sollen mit Bild 104 erkannte, untersuchte und auch nicht weiter verfolgte Schwingungsphänomene am Mechanismenprüfstand mit einem Wasserfalldiagramm veranschaulicht werden. Die Erscheinungen gliedern sich in folgende 9 Gruppen:

1. Erzwungene Schwingungen durch wechselnde kinetostatische Gelenkkräfte (Trägheitskräfte ohne hochfrequente Vibrationskräfte),  
Grundharmonische entsprechend der Maschinendrehzahl ( $\Omega = \pi n/30$ ) und die unteren Harmonischen, hier beim Mechanismenprüfstand besonders stark bis zur 3. Harmonischen ( $3\Omega$ ) in den Lagerkräften und die 2. Harmonische im Antriebsmoment, wie in den Wasserfall- und CAMPBELL-Diagrammen (Bild 81, S. 110) sichtbar, regen aber auch die 11. bis 15. Erregerharmonische Eigenschwingformen der elastischen Struktur an
2. Schwingungen durch den kommerziellen Motordrehzahlregler,  
105 Hz gemessen nach der Sprunganregung auf die Drehmomenten- oder Drehzahlvorgabe der Servosteuerung
3. Vibrationen durch Spiel am Kurbelbolzen,  
152 Hz bei 263 1/min Betriebsdrehzahl, verifiziert durch MKS-Simulationen
4. Fundamentalschwingungen – Resonanzerscheinungen mit Eigenschwingungen des starren Maschinenblockes auf den Gummi-Feder-Elementen,  
genau 6 Starrkörpereigenformen (9,0 Hz, 10,0 Hz, 12,2 Hz, 19,9 Hz, 21,6 Hz, 33,1 Hz)
5. Gestellschwingungen – Resonanzerscheinungen mit Eigenschwingungen durch Biegung und Torsion der elastischen Grundplatte,  
die ersten Biege- bzw. Torsionseigenformen (84,7 Hz, 97,4 Hz, 161 Hz, 168 Hz, 201 Hz, 229 Hz, 248 Hz, ...)

6. Riemenschwingungen – Resonanzerscheinungen mit Eigenschwingungen des über Zahnriemen angekoppelten redundanten Antriebes am Pleuel (siehe Bild 9 auf S.11), diese Eigenfrequenz liegt zwischen 60 und 70 Hz
7. Pleuelbiegeschwingungen – Resonanzerscheinungen mit Eigenschwingungen der Biegung des Pleuels aus der Bewegungsebene heraus, wenn am Kurbelbolzen reichlich Spiel vorhanden ist, niedrigste Biegeeigenfrequenzen des einseitig freien Pleuels beträgt 43 Hz
8. Nichtlineare Phänomene, z.B. seitliches Anstreifen der Koppel an den Kurbelwangen, Umkehr der Reibwirkungsrichtung im Schwingenwellenlager und Pleuel-Schwingen-Gelenk, Spiel in weiteren Gelenken, Lagern und Verbindungselementen
9. Schwingungen durch Kräfte und Vorgänge an der Wirkstelle beim Be- oder Verarbeitungsprozess, z.B. Pressen, Schneiden, Sägen, Greifen, Zuführen, am Mechanismenprüfstand wären diese Erregerkräfte durch den redundanten Antrieb  $M_3$  an der Schwingenwelle experimentell nachvollziehbar

Die letztgenannten Phänomene wurden am Mechanismenprüfstand bisher nicht durch Experimente und Simulationen verifiziert. Weiter Schwingungsursachen und typische gemessene und simulierte Schwingungsverläufe bietet [119].



**Bild 104:** Schwingungsphänomene bis 500 Hz im Wasserfalldiagramm

Die Vielfalt der Peaks im Wasserfalldiagramm eines Maschinenhochlaufes bis 1400 1/min im Frequenzbereich bis 500 Hz zeigt eine Fülle weiterer Schwingungserscheinungen an. Diese Bilder variieren natürlich für unterschiedliche Messrichtungen. Mit den bisherigen Ergebnissen liegt dennoch bereits ein guter Überblick zum Schwingungsverhalten des Prüfstandes vor, so dass bei zukünftigen gezielten Änderungen, wie z.B. ein bewusst eingebautes Spiel am Kurbelbolzen oder im Schwingenlager, neu hinzukommende Peaks sicher zugeordnet und von den bisherigen sauber getrennt werden können.



## Anhang A

## A – Kontaktschleife

Dieser Anhang vervollständigt den beschriebenen Time-Stepping-Algorithmus in Bild 75 auf Seite 105 und ist aus GINZINGER 2004 [38, S.31-36] entnommen.

## A.1 Kontaktschleife

Wie bereits beschrieben wird in der Kontaktschleife zuerst entschieden, ob der Stoß elastisch oder plastisch ausgewertet wird (Bild 105). Dies geschieht mittels einer definierten Schwelle für die negative Normalgeschwindigkeit.

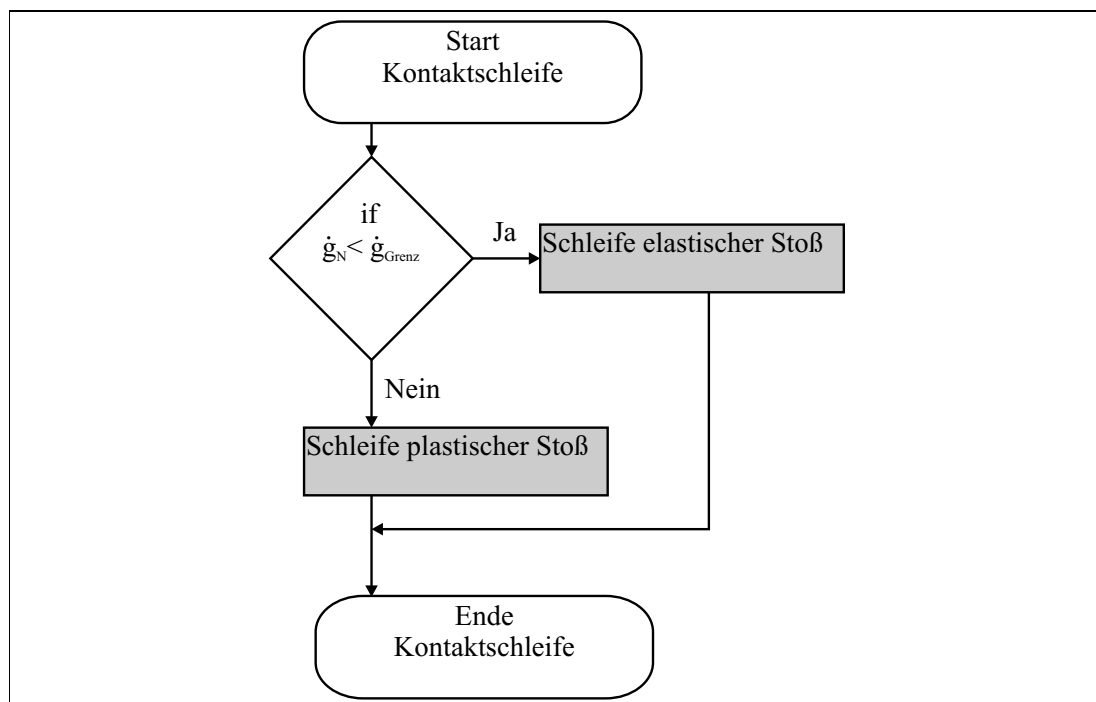


Bild 105: Entscheidung der Stoßart

## A.2 Elastischer Stoß

Der elastische Stoßvorgang ist nach dem Gesetz von Poisson in zwei Phasen unterteilt - der Kompressions- (Bild 106) und Expansionsphase (Bild 107). Entsprechend dem Stoßgesetz von Poisson ändert sich bei verschwindender Stoßzeit die Lage nicht (A). In den folgenden Schritten wird davon ausgegangen, dass am Ende der Kompressionsphase für die Geschwindigkeit des Normalabstands  $\dot{g}_N = 0$  gilt. Das Gesetz für den Tangentialstoß unterscheidet drei Fälle: Haften, Gleiten nach rechts, Gleiten nach links. Dieses Komplementaritätsproblem kann auf Grund der Modellierung eines einzigen Kontakts direkt gelöst werden, was in den Schritten C, D und E durch Abfragen erfolgt. Im Schritt B, wird der Stoß für den reibungsfreien Fall berechnet. Für die Expansionsphase gilt  $\Lambda_{NE} \geq \epsilon \Lambda_{NC}$ . Unter Berücksichtigung dieser Ungleichung wird auf dem selben Weg wie in der Kompressionsphase das LCP in den Schritten I, J und K direkt

gelöst. Im Schritt H ist die bereits diskutierte Modifikation des Poisson-Gesetzes. Damit es am Ende der Expansionsphase zu keinem Eindringen des Bolzens in die Lagerschale kommt, wird an dieser Stelle der Impuls bei Bedarf erhöht.

Der Gesamtimpuls setzt sich aus den Teilimpulsen der zwei Phasen zusammen.

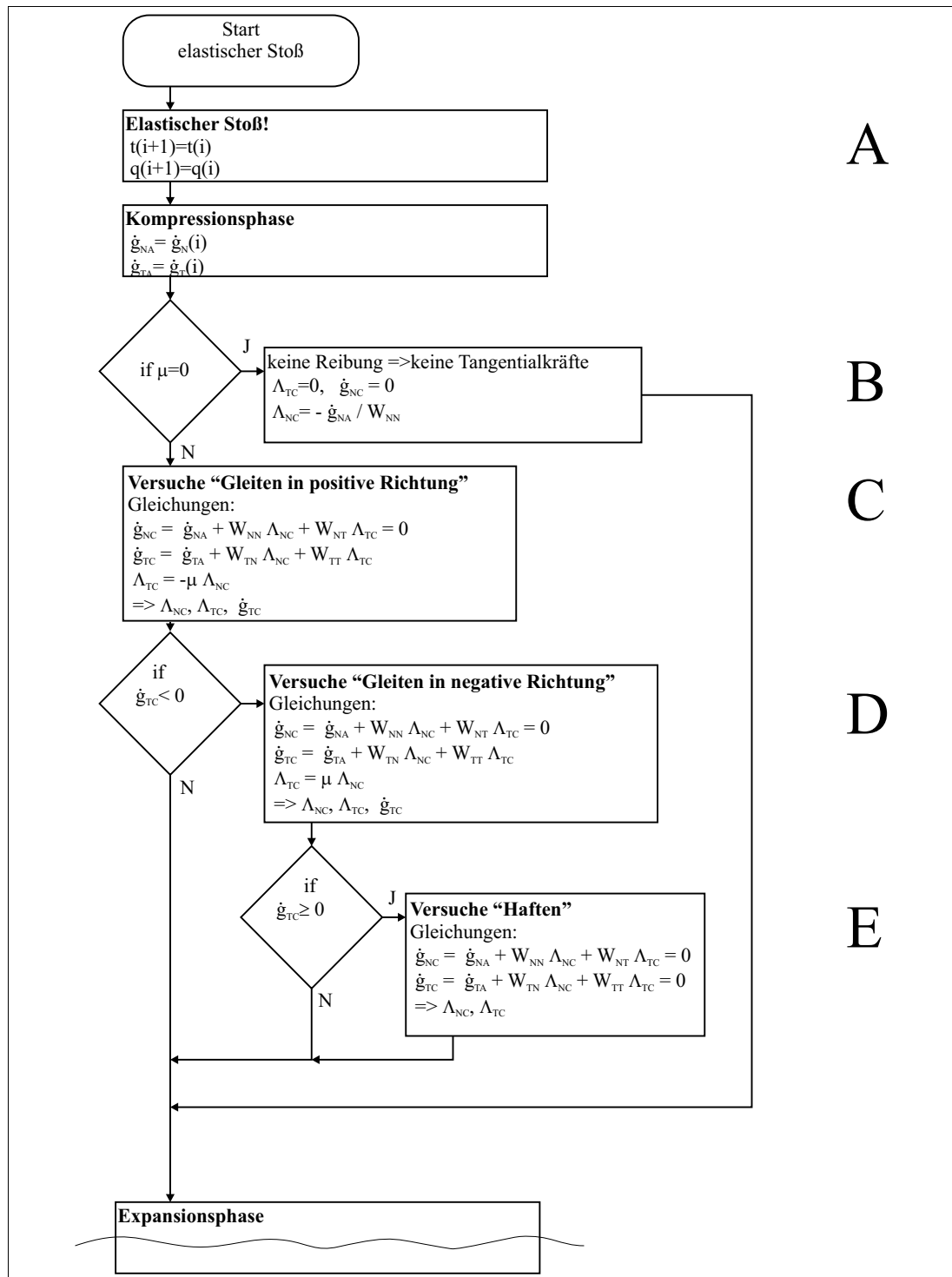
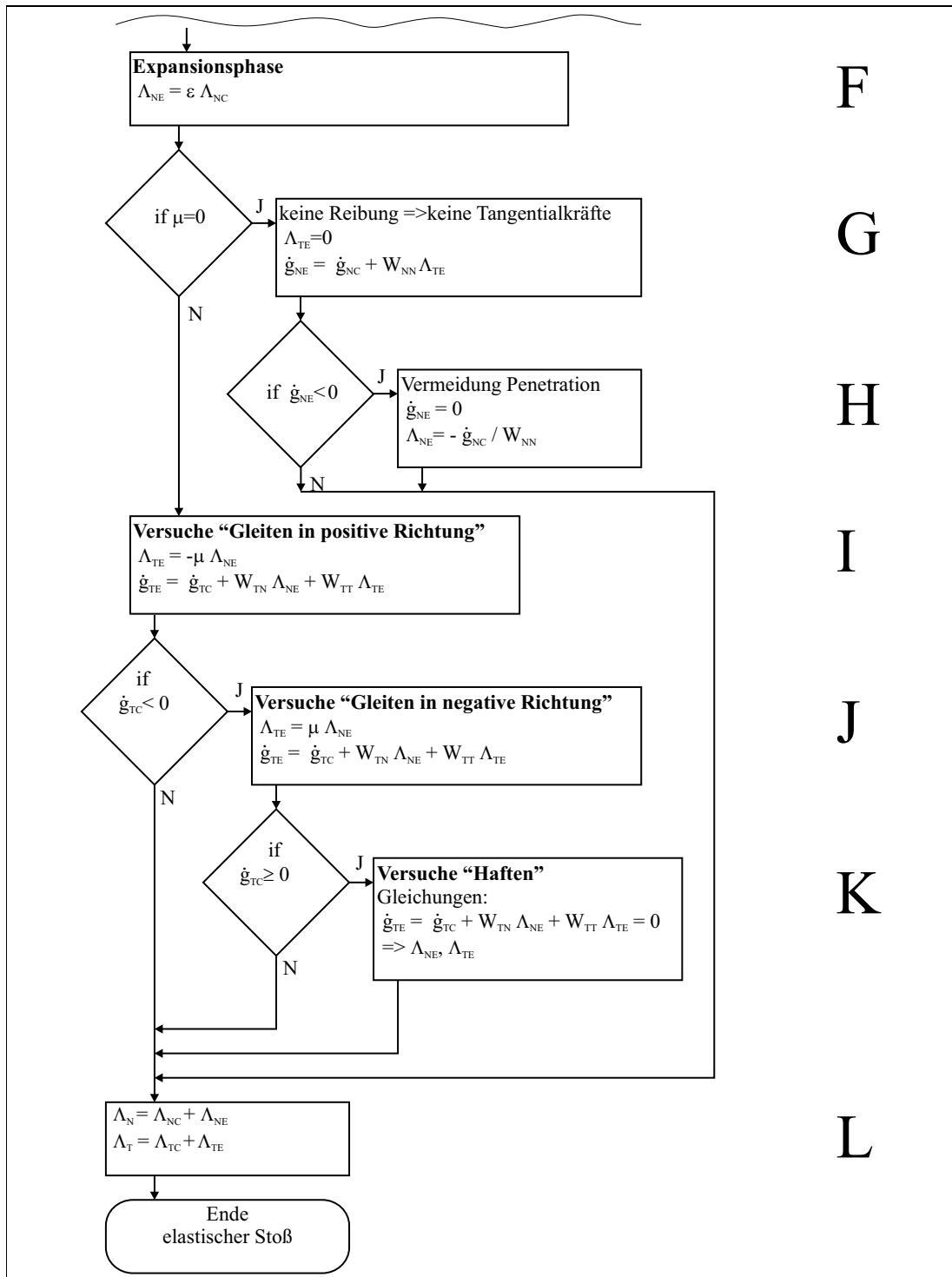


Bild 106: elastische Stoßberechnung - Kompressionsphase



F

G

H

I

J

K

L

Bild 107: elastische Stoßberechnung - Expansionsphase

## A.3 Plastischer Stoß

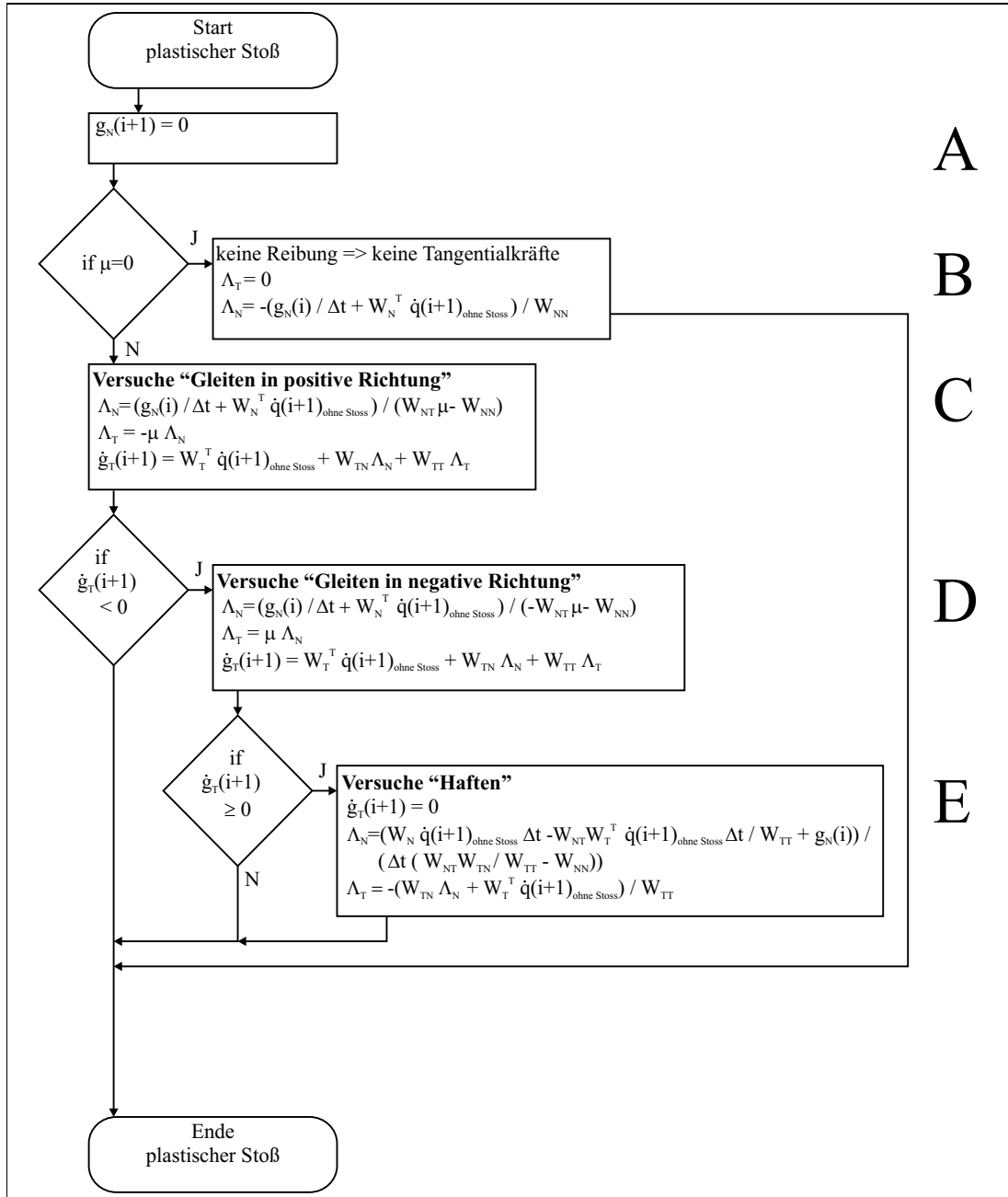


Bild 108: plastische Stoßberechnung

Der plastische Stoß wird im Gegensatz zum Poisson Gesetz mit endlicher Stoßzeit berechnet. Die Lage ändert sich also während des Vorgangs. Die Lösung des Komplementaritätsproblem erfolgt wieder auf direktem Weg, analog zu dem Verfahren, welches beim elastischen Stoß angewandt wurde.

## Anhang B

**B – Simulationsdaten**

Dieser Anhang vervollständigt die beschriebenen Simulationsdaten auf Seite 105 und ist aus GINZINGER 2004 [38, Anhang A] entnommen.

**B.1 Modellierungsparameter****Geometrische Daten (alle in [m])**

$$l_1 = 0.3$$

$$l_2 = 0.02$$

$$l_3 = 0.283$$

$$l_4 = 0.0775$$

$$r_b = 0.012 \text{ (Radius des Lagerbolzens)}$$

$$r_h = 0.01205 \text{ (Radius des Lagerrings)}$$

$$r_2 = -0.00278 \text{ (Schwerpunktslage in der Kurbel)}$$

$$r_3 = 0.1563 \text{ (Schwerpunktslage in der Koppel)}$$

$$r_4 = -0.02611 \text{ (Schwerpunktslage in der Schwinge)}$$

**Massen (alle in [kg])**

$$m_2 = 1.7853$$

$$m_3 = 0.4993$$

$$m_4 = 0.9379$$

**Trägheitsmomente (alle in [kgm<sup>2</sup>])**

$$I_2 = 0.002400$$

$$I_3 = 0.007350$$

$$I_4 = 0.002534$$

**sonstige Parameter**

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2 \text{ Schwerkraft}$$

$$\mu = 0.07 \text{ Reibungskoeffizient}$$

$$\varepsilon_N = 0.7 \text{ Dissipationskoeffizient beim elastischen Stoß}$$

$$\text{numfehl} = 5 * 10^{-7} \text{ Grenzwert für akzeptierten numerischen Fehler}$$

$$\dot{g}_{max} = -10^{-4} \text{ obere Schranke der negativen Normalgeschwindigkeit bis zu der die Stoßmodellierung elastisch durchgeführt wird.}$$

$$M_3 = -0.990 \dot{\psi} \text{ Reibmoment an der Koppel}$$

$$M_4 = -0.005 \dot{\Theta} \text{ Reibmoment an der Schwinge}$$

## B.2 Simulationsparameter

### 141 U/min

$\Delta t = 10^{-3}$  Zeitschrittweite

$n = 1600$  Anzahl der Schritte

$M_{AN} = 0.0001$  Nm

$q_{Start} = [0.9977; -0.0008; 0]$  Startwert für Lage

$\dot{q}_{Start} = [0; 15; 14]$  Startwert für Geschwindigkeit

### 240 U/min

$\Delta t = 10^{-4}$  Zeitschrittweite

$n = 9200$  Anzahl der Schritte

$M_{AN} = 0.0001$  Nm

$q_{Start} = [0.9977; -0.0008; 0]$  Startwert für Lage

$\dot{q}_{Start} = [0; 15; 24]$  Startwert für Geschwindigkeit

### 480 U/min

$\Delta t = 10^{-4}$  Zeitschrittweite

$n = 4800$  Anzahl der Schritte

$M_{AN} = 0.0$  Nm

$q_{Start} = [0.9977; -0.0008; 0]$  Startwert für Lage

$\dot{q}_{Start} = [0; 52; 51]$  Startwert für Geschwindigkeit

### 619 U/min

$\Delta t = 10^{-4}$  Zeitschrittweite

$n = 3700$  Anzahl der Schritte

$M_{AN} = 0.01$  Nm

$q_{Start} = [0.9977; -0.0008; 0]$  Startwert für Lage

$\dot{q}_{Start} = [0; 65; 68]$  Startwert für Geschwindigkeit

## Literatur

- [1] ANGELES, J.; NAHON, M.A.; THÜMMEL, T.: *Active Control for the Complete Dynamic Balancing of Linkages*. 22nd Biennial ASME Mechanisms Conference, Sept. 13-16 1992, Scottsdale/Arizona, DE-Vol. 47, Flexible Mechanisms, Dynamics and Analysis, page 305 - 310, ASME United Engineering Center New York 1992
- [2] BEITELSCHMIDT, M.: *Reibstöße in Mehrkörpersystemen*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 11 Schwingungstechnik, Dissertation am Lehrstuhl B für Mechanik der TU München, Nr. 275, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1999.
- [3] BORMANN, J; ULBRICH, H.: *Optimierung der Dynamik nichtlinearer Übersetzungsgetriebe durch geregelte Stelleingriffe – Theorie und Experiment*. In: VDI-Berichte 1285: Schwingungen in Maschinen, Fahrzeugen und Anlagen: Berechnung – Messung – Bewertung – Minderung, VDI-Schwingungstagung 96 der VDI-Gesellschaft Entwicklung Konstruktion Vertrieb, Veitshöchheim, 10./11. Okt. 1996 VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1996, S. 547-556
- [4] BRANDL, M.: *Regleroptimierung zum Ausgleich von Mechanismenschwingungen*. Diplomarbeit am Lehrstuhl B Mechanik der TU München, November 1995,
- [5] BRANDL, M.: *Messung von Trockenreibung*. Dissertation am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik der TU München, Fortschrittberichte VDI, Reihe 11 Schwingungstechnik, Nr. 292, VDI-Verlag Düsseldorf 2000.
- [6] BRAUNE, R.: *Koppelgetriebe mit Servo-Antrieb in schnellen Verarbeitungsmaschinen. (Nutzungspotenziale und Konzipierungsaspekte)* Tagungsband VVD-Tagung (Verarbeitungs- und Verpackungstechnik) 23./24.3.2006, TU Dresden, S. 311 - 348
- [7] BREMER, H.: *Dynamik und Regelung mechanischer Systeme*. Teubner Studienbücher Mechanik, B. G. Teubner Stuttgart 1988
- [8] BROSCHE, P.F.: *Moderne Stromrichterantriebe*. Leistungselektronik und Maschinen. Arbeitsweise drehzahlveränderbarer Antriebe mit Stromrichtern und Antriebsvernetzung. 3., überarb. und erw. Auflage, (Kamprath-Reihe) Vogel Buchverlag, Würzburg 1998
- [9] BULLINGER, M.: *Dynamik von Umschlingungsgetrieben mit Schubgliederband*. Dissertation am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik der TU München, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 12 Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik, Nr. 593, VDI-Verlag Düsseldorf, 2005
- [10] DAVID, J.W., KELLEY, C. T., CHENG, C.Y.: *Use of an implicit filtering algorithm for mechanical system parameter identification*. SAE Paper 960358, 1996 SAE International Congress and Exposition Conference Proceedings, Modeling of CI and SI Engines, pp 189-194, Society of Automotive Engineers, Washington, DC (1996)
- [11] DRESIG, H.; THÜMMEL, T.: *Näherungsweise Erfassung des Einflusses des Gelenkspiels auf die Gelenkkräfte in schnelllaufenden Koppelgetrieben*. Technische Mechanik 3(1982) Heft 1, S. 33-38 Herausgeber: Technische Universität 'Otto von Guericke' Magdeburg
- [12] DRESIG, H.; STELZMANN, U.: *Zur Theorie des Kontaktverlustes in spielbehafteten Drehgelenken*. Technische Mechanik 8 (1987) Heft 1, S. 40-45 Hrsg.: Technische Universität 'Otto von Guericke' Magdeburg.
- [13] DRESIG, H.; VUL'FSON, I.I.: *Dynamik der Mechanismen*. 328 Seiten, 81 Abb., 18 Tab. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin und Springer-Verlag Wien, New York 1989
- [14] DRESIG, H.; VUL'FSON, I.I.: *Maßnahmen und Beispiele zur Lösung dynamischer Probleme bei Verarbeitungsmaschinen*. Konstruktion 42 (1990) Heft 11, Seite 369 - 376, Springer-Verlag 1990
- [15] DRESIG, H.; THÜMMEL, Th.: *Parametrically excited Vibrations of Mechanisms*. Proceedings of the Eight IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Prag August 1991, Published by the Society of Czechoslovak Mathematicians and Physicists, Prague, Czechoslovakia, Volume 1, Page 177 - 180

- [16] DRESIG, H.; VUL'FSON, I.I.: *Kriterien zur Bewertung des dynamischen Einflusses von Spiel in zyklischen Mechanismen*. Konstruktion 45 (1993) Seite 351 - 357, Springer-Verlag 1993
- [17] DRESIG, H.; NAAKE, St. und ROCKHAUSEN, L.: *Vollständiger und harmonischer Ausgleich ebener Mechanismen*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 18, Nr. 155, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1994
- [18] DRESIG, H.: *Schwingungen mechanischer Antriebssysteme: Modellbildung, Berechnung, Analyse, Synthese*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2001
- [19] DRESIG, H.: *Schwingungen mechanischer Antriebssysteme: Modellbildung, Berechnung, Analyse, Synthese*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage 2006
- [20] DRESIG, H.; HOLZWEISSIG, F.: *Maschinendynamik*. 5. neubearbeitete und erweiterte Auflage mit 526 Seiten, 237 Abbildungen, Springer Verlag - Berlin Heidelberg New York 2004
- [21] DRESIG, H.; HOLZWEISSIG, F.: *Maschinendynamik*. 8. neu bearbeitete Auflage unter Mitarbeit von L. Rockhausen, 526 Seiten, 235 Abbildungen, Springer Verlag - Berlin Heidelberg New York 2007
- [22] EICKHOFF, M.: *GENESYS – Entwicklung und Anwendung eines Moduls zur kinetostatischen Analyse reibungsbehafteter Gelenkgetriebe*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 1: Konstruktionstechnik/Maschinenelemente, Nr. 259, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1996
- [23] EICH-SOELLNER, E.; FÜHRER, C.: *Numerical Methods in Multibody Dynamics*, 1. Auflage, Stuttgart: B.G. Teubner, 1998
- [24] ENGELHARDT, TH.: *Dynamik von Steuer- und Ventiltrieben*. Dissertation am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik der TU München, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 12 Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik, Nr. 656, VDI-Verlag Düsseldorf, 2007
- [25] ESEFELD, B.: *Parameteridentifikation an einer Kurbelschwinge mit Reibung, Spiel und Stößen*. Diplomarbeit am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik der TU München, November 2007
- [26] EWINS, D. J.: *Modal Testing: Theory and Practice*. Research Studies Press Ltd., Reprinted January 1995 (revised and re-set, 1. Auflage mit 269 Seiten, John Wiley & Sons - New York 1984, ISBN 0-47-190472-4)
- [27] FLETCHER, R., POWELL, M. J. D.: *A rapidly convergent descent method for minimization*. The Computer Journal, 6 / 1963, pp. 163–168, (1963)
- [28] FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Unter Mitwirkung von F. Dörrscheidt und M. Klittich, 7. Auflage, Hüthig Buch Verlag GmbH, Heidelberg 1992
- [29] FÖRG, M.: *Mehrkörpersysteme mit mengenwertigen Karftgesetzen – Theorie und Numerik*. Dissertation am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik der TU München, Fortschrittberichte VDI, Reihe 20 Rechnerunterstützte Verfahren, Nr. 411, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2007.
- [30] FRITZ, P.: *Dynamik schnellaufender Kettentriebe*. Dissertation am Lehrstuhl B für Mechanik der TU München, Fortschrittberichte VDI, Reihe 11 Schwingungstechnik, Nr. 253, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1998.
- [31] FRITZER, A.: *Nichtlineare Dynamik von Steuertrieben*. Dissertation am Lehrstuhl B für Mechanik der TU München, Fortschrittberichte VDI, Reihe 11 Schwingungstechnik, Nr. 176, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1992.
- [32] FUNK, K.: *Simulation eindimensionaler Kontinua mit Unstetigkeiten*. Dissertation am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik der TU München, Fortschrittberichte VDI, Reihe 18 Mechanik/Bruchmechanik, Nr. 294, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2004.
- [33] FUNABASHI, H.; OGAWA, K. and HORIE, M.: *A Dynamic Analysis of Mechanisms with Clearances*. Bulletin of the JSME, Vol. 21 (1978) November, No. 161, Paper No. 161-14, pp. 1652-1659
- [34] FUNABASHI, H.; OGAWA, K.; HORIE, M. and IIDA, H.: *A Dynamic Analysis of the Plane Crank-and-Rocker Mechanisms with Clearances*. Bulletin of the JSME, Vol. 23 (1980) March, No. 177, Paper No. 177-15, pp. 446-452



- [35] GAULL, A.: *Modalanalyse — Identifikation und Verifikation modaler Parameter am Mechanismenprüfstand*. Semesterarbeit am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik der TU München, Juni 2004
- [36] GAULL, A.: *Simulation und Regelung einer Kurbelschwinge mit Reibung und Spiel*. Diplomarbeit am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik der TU München, Dezember 2004
- [37] GEIER, TH.: *Dynamics of Push Belt CVTs*. Dissertation am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik der TU München, Fortschrittberichte VDI, Reihe 12 Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik, Nr. 654, VDI-Verlag Düsseldorf, 2007
- [38] GINZINGER, L.: *Simulation und Messungen an einer Kurbelschwinge mit Reibung, Spiel und Stößen*. Diplomarbeit am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik der TU München, Mai 2004
- [39] GLOCKER, Ch.; PFEIFFER, F.: *Dynamical Systems with Unilateral Contacts*. Nonlinear Dynamics 3, pp. 245 – 259, 1992, Kluwer Academic Publishers.
- [40] GLOCKER, Ch.; PFEIFFER, F.: *Multiple Impacts with Friction in Rigid Multibody Systems*. Nonlinear Dynamics 7, pp. 471-497, 1995, Kluwer Academic Publishers, Printed in Netherlands.
- [41] GLOCKER, Ch.: *Dynamik von Starrkörpersystemen mit Reibung und Stößen*. Dissertation am Lehrstuhl B für Mechanik der TU München, Fortschrittberichte VDI, Reihe 18 Mechanik/Bruchmechanik, Nr. 182, 226 pp., VDI-Verlag, Düsseldorf, 1995.
- [42] GLOCKER, Ch.: *Decomposition of Scalar Force Interactions*. IUTAM Symposium 'Unilateral Multibody Dynamics' Munich, Germany, August 3-7, 1998, Proceedings by Kluwer Academic Publishers, page 15-24, Printed in Netherlands 1999
- [43] HAINES R. S.: *Survey: 2-dimensional motion and impact at revolute joints*. Mechanism and Machine Theory, Vol.15 (1980) No. 5, pp. 361-370 Pergamon Press Ltd.
- [44] HAINES R. S.: *An Experimental Investigation into the Dynamic Behaviour of Revolute Joints with Varying Degrees of Clearance*. Mechanism and Machine Theory, Vol.20 (1985) No. 3, pp. 221-231. Pergamon Press Ltd.
- [45] HAJEK, M.: *Reibungsdämpfer für Turbinenschaufeln*. Dissertation am Lehrstuhl B für Mechanik der TU München, Fortschrittberichte VDI, Reihe 11 Schwingungstechnik, Nr. 128, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1990.
- [46] HAMMERSCHMIDT, Chr.: *Zur Untersuchung der dynamischen Wirkung des Spiels in Gelenken von Getrieben*. Dissertation B (Habilitation) an der TH Karl-Marx-Stadt (jetzt TU Chemnitz), 1974
- [47] HAMMERSCHMIDT, Chr. und GÖCKE, H.: *Berechnung von Getrieben unter Berücksichtigung des Spiels in Gelenken*. Wissenschaftliche Zeitschrift der TH Karl-Marx-Stadt (jetzt TU Chemnitz), 18 (1976) Heft 3, S. 321-330
- [48] HAMMERSCHMIDT, Chr.; BERGER, M. und PITTASCH, A.: *Mehrgliedrig flexible ungleichmäßige Bewegungen erzeugen mit rechnergesteuerten Antrieben*. Maschinenmarkt Würzburg 100 (1994) Heft 9, S. 50-53
- [49] HARRIS, C.M.: *Shock and Vibration Handbook*. Fourth Edition, McGraw-Hill Book Company, New York Toronto London 1995,
- [50] HEIMANN, B.; GERTH, W.; POPP, K.: *Mechatronik. Komponenten – Methoden – Beispiele*. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag München Wien 1998
- [51] HÖLZL, J.: *Modellierung, Identifikation und Simulation der Dynamik von Industrierobotern*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 372, Dissertation am Lehrstuhl B für Mechanik der TU München, Juni 1993, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1994
- [52] HOFER, G.: *Simulation und experimentelle Verifikation einer Kurbelschwinge mit Reibung, Spiel und Stößen*. Diplomarbeit am Lehrstuhl B für Mechanik der TU München, November 2000
- [53] HOLZWEISSIG, F.; DRESIG, H.: *Lehrbuch Maschinendynamik*. Fachbuchverlag Leipzig - Köln, 3., völlig neubearbeitete Auflage 1992

- [54] HORIE, M.; FUNABASHI, H.; OGAWA, K.; ABE, H.: *Dynamic Characteristics of Planar Link Mechanisms with Clearances*. (Conditions of Separation Occurrence between Pairing Elements – Paper No. 252-37, pp. 1888-1894), (Restrains of Separation between Pairing Elements – Paper No. 84-0405, pp. 1895-1899), Bulletin of the JSME, Vol. 29 (1986) June, No. 252.
- [55] ISHII, Y.; THÜMMEL, T.; HORIE, M.: *Dynamic characteristic of miniature molding pantograph mechanisms for surface mount systems*. Microsystem Technologies (2005) 11: pp. 991-996 (Technical paper), Publisher: Springer-Verlag GmbH, ISSN: 0946-7076 (Paper), 1432-1858 (Online), DOI: 10.1007/s00542-005-0525-5, Published online: 28.6.2005
- [56] JENSEN, D.: *Modelling and Identification of the Inertia Parameters of a Four-Bar Mechanism*. Masterarbeit am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik der TU München, März 2007
- [57] KÜCÜKAY, F.: *Dynamik der Zahnradgetriebe, Modelle, Verfahren, Verhalten*. Springer-Verlag, 1987.
- [58] KELLEY, C.T.: *A Brief Introduction to Implicit Filtering*. Version of September 14, 2002
- [59] LEBRECHT, W.: *Dynamische Effekte bei CVT-Umschlingungsgetrieben*. Dissertation am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik der TU München, Fortschrittberichte VDI, Reihe 12 Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik, Nr. 637, VDI-Verlag Düsseldorf, 2007.
- [60] LÜDER, R.: *Zur Synthese periodischer Bewegungsgesetze unter Berücksichtigung von Elastizität und Spiel*. Dissertation am Lehrstuhl Maschinendynamik der TU Chemnitz, VDI-Fortschritt-Bericht, R. 11, Nr. 225, 1995
- [61] MEITINGER, TH.: *Dynamik automatisierter Montageprozesse*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 2 Fertigungstechnik, Dissertation am Lehrstuhl B für Mechanik der TU München, Nr. 476, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1998
- [62] MEYBERG, K.; VACHENAUER, P.: *Höhere Mathematik 1*. Differential- und Integralrechnung, Vektor- und Matrizenrechnung, 4. Auflage, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1997
- [63] MEYBERG, K.; VACHENAUER, P.: *Höhere Mathematik 2*. Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Fourier-Analyse, Variationsrechnung, 2. völlig überarbeitete Auflage, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1997
- [64] MÜLLER, N.: *Experimentelle Modalanalyse am Mechanismenprüfstand*. Semesterarbeit am Lehrstuhl B für Mechanik der TU München, April 2001
- [65] NEUMANN, L.: *Optimierung von CVT-Ketten*. Dissertation am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik der TU München, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 12 Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik, Nr. 646, VDI-Verlag Düsseldorf, 2007.
- [66] PAFFENHOLZ, A.: *Demonstration und Interpretation von Schwingungen am Mechanismenprüfstand*. Semesterarbeit am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik der TU München, Juli 2003
- [67] Patentschrift DE 41 16 307 C1: *Verfahren zum Drehmomentenausgleich an einer Antriebseinrichtung eines Pilgerschrittwalzwerkes*. Patenterteilung: 29.10.1992
- [68] PAUL, B.: *Kinematics and Dynamics of Planar Machinery*. Penrice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1979
- [69] PFEIFFER, F.: *Einführung in die Dynamik*. 2., überarbeitete Auflage, Teubner Studienbücher Mechanik, B. G. Teubner Stuttgart 1992
- [70] PFEIFFER, F.; GLOCKER, Chr.: *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. Wiley Series in Non-linear Science, 317 pp., John Wiley & Sons, Inc., New York - Chichester 1996.
- [71] PFEIFFER, F.: *Mechanical Systems Dynamics*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol. 40, 575 pages, 430 figures, 19 tables, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008
- [72] PIETRUSZKA, W.D.: *MATLAB in der Ingenieurpraxis*. Modellbildung, Berechnung und Simulation, 1. Auflage Feb. 2005, B.G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2005

- [73] PRESTL, W.: *Zahnhämmern in Rädertrieben von Dieselmotoren*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 11, Nr. 145, Dissertation am Lehrstuhl B für Mechanik der TU München, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1991
- [74] RAVIER, B.: *Regelkonzepte zum dynamischen Ausgleich von Mechanismenschwingungen*. Semesterarbeit am Lehrstuhl B für Mechanik der TU München, August 1993
- [75] REHWINKEL, J.: *MKS-Simulation eines Versuchsstandmechanismus*. Semesterarbeit am Lehrstuhl B Mechanik der TU München, Dezember 1992
- [76] RÖSSLER, J.: *Grundlagen der Dynamik von Antriebssystemen im Textil- und Verarbeitungsmaschinenbau*. Habilitationsschrift (Dissertation B) am Lehrstuhl Maschinendynamik der TH Karl-Marx-Stadt 1985
- [77] ROSE, W.; BAILER, F.: *Experimentelle Untersuchungen an Koppelgetrieben mit spielbehafteten Gelenken*. Zeitschrift Maschinenbautechnik 25 (1976) Heft 8, S. 358-363 und 370
- [78] SCHRÖDER, D.: *Elektrische Antriebe – Grundlagen*. 2. Auflage, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 2000
- [79] SCHULZ, M.: *Optimierung von Mechanismen mit einseitigen Bindungen und Kollisionen*. Dissertation ETH Nr. 12041, ETH Zürich, Institut für Mechanik (Prof. Brauchli), Zürich 1997
- [80] SENEVIRATNE, S.D.; EARLES S.W.E.: *Chaotic Behaviour Exhibited During Contact Loss in a Cleared Joint of a Four-Bar Mechanism*. Mechanism and Machine Theory, Vol.27 (1992) No. 3, pp. 307-321. Pergamon Press Ltd.
- [81] SLOTINE, W.I.: *Applied nonlinear Control*, 1. Auflage, New Jersey: Prentice Hall 1991
- [82] SMIRNOW, J.J.E.; LI, W.: *Lehrgang der höheren Mathematik*, Teil IV/1, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1988
- [83] STEUER, J.: *Gelenkkraftregelung einer Kurbelschwinge*. Diplomarbeit am Lehrstuhl B für Mechanik der TU München, April 1994
- [84] STIEGELMEYR, A.: *Zur numerischen Berechnung strukturvarianter Mehrkörpersysteme*. Dissertation am Lehrstuhl B für Mechanik der TU München, VDI Verlag, Reihe 18 Nr.271, Düsseldorf 2001
- [85] STÜRZER, J.: *Versuchsstand: Vollständiger Massenausgleich einer Kurbelschwinge durch redundante Antriebe*. Diplomarbeit am Lehrstuhl B für Mechanik der TU München, Januar 1992
- [86] THÜMMEL, T.: *Dynamisch günstige Antriebe von Kettenwirkmaschinen*. Diplomarbeit TH Karl-Marx-Stadt (jetzt TU Chemnitz) Sektion Maschinenbauelemente 1981
- [87] THÜMMEL, T.: *Literaturbericht zum dynamischen Ausgleich schnellaufender Mechanismen*. Wissenschaftliche Schriftenreihe der TH Karl-Marx-Stadt (jetzt TU Chemnitz), Heft 7/1983, S. 57 - 92
- [88] THÜMMEL, T.: *Gelenkkraftausgleich ebener Mechanismen*. In: Fachtagung Getriebe- und Antriebstechnik 31.1.–2.2. 1984 in Magdeburg/DDR, Tagungssammelband, S. 115-118, TH 'Otto von Guericke' Magdeburg 1984
- [89] THÜMMEL, T.: *Algorithmen und Programme zum dynamischen Ausgleich von Mechanismen*. Dissertation an der TH Karl-Marx-Stadt (jetzt TU Chemnitz), 1985
- [90] THÜMMEL, T.: *Gelenkkraftausgleich in schnellaufenden Koppelgetrieben*. 6. Tagung Festkörpermechanik 'Dynamik und Getriebetechnik' 3.–6.9. 1985 in Dresden, Tagungssammelband A, S. XIX/1–XIX/13, VEB Fachbuchverlag Leipzig 1985
- [91] THÜMMEL, T.; KRETZSCHMAR, D.: *Analyse ebener Koppelgetriebe mit Personalcomputer*. Vortrag zur Fachtagung Getriebetechnik 22.–24.4. 1987 in Rostock-Warnemünde/DDR, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock 1987
- [92] THÜMMEL, T.; NEIDEL, H.: *Massen- und Leistungsausgleich in Textilmaschinen*. Vortrag zur Fachtagung Getriebetechnik 22.–24.4. 1987 in Rostock-Warnemünde/DDR, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock 1987

- [93] THÜMMEL, T.: *Kinematik und Dynamik von Koppelgetrieben nach dem Gliedergruppenkonzept*. Teil 1: Kinematik Technische Mechanik 8(1987) Heft 1, S. 64-69 Herausgeber: Technische Universität 'Otto von Guericke' Magdeburg
- [94] THÜMMEL, T.: *DYADE — Koppelgetriebeanalyse mit dem Personalcomputer*. Maschinenbautechnik Berlin 37(1988) Heft 11, S. 527-528
- [95] THÜMMEL, T.; Bartke, T.: *Kinematik und Dynamik von Koppelgetrieben nach dem Gliedergruppenkonzept*. Teil 2: Dynamik Technische Mechanik 8(1987) Heft 3, S. 68-73 Herausgeber: Technische Universität 'Otto von Guericke' Magdeburg
- [96] THÜMMEL, T.: *Regelung von Mechanismen durch redundante Antriebe*. Bericht zum DFG-Forschungsvorhaben Pf 166/24-1: Redundantantriebe, TU München, Lehrstuhl B für Mechanik, 34 Seiten, 24.6.1993
- [97] THÜMMEL, T.: *Dynamic Balancing of Linkages by Active Control with Redundant Drives*. In: Proceedings of the 9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms in Milano, 30.Aug. to 2.Sept. 1995, Vol.2, pp. 970-974, Politecnico Milano und Edizioni Unicopli Milano, Italy 1995
- [98] THÜMMEL, T.: *Lösung von Schwingungsproblemen in Verarbeitungsmaschinen durch geregelte redundante Antriebe*. In: VDI-Berichte 1220: Schwingungen in Antrieben: Analyse, Beurteilung Überwachung; Tagung Veitshöchheim, 25./26. Sept. 1995 der VDI-Gesellschaft Entwicklung Konstruktion Vertrieb, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1995, S. 453-468
- [99] THÜMMEL, T.: *Joint Force Control in High-speed Linkages*. In: Proceedings of the IFAC-Workshop Motion Control Oct. 9-11, 1995, pp. 913-920, Organized by Lehrstuhl B für Mechanik, TU München in cooperation with VDI/VDE-GMA
- [100] THÜMMEL, T.: *Versuchsstand: Schwingungsminderung in Hebelmechanismen durch Kraftregelung mit redundanten Servoantrieben*. Infoblatt zum Ausstellungsobjekt auf der HANNOVER MESSE Industrie innerhalb des InnovationsMARKT Bayern vom 22.-27. April 1996 in Hannover
- [101] THÜMMEL, T.; BRANDL, M.: *Active Balancing of Joint Forces in High-speed Linkages by Redundant Drives and Learning Control*. Paper and presentation at the 24nd Biennial ASME Mechanisms Conference, Aug. 19-22 1996, Irvine/California, Proceedings of the ASME 1996 DESIGN ENGINEERING TECHNICAL CONFERENCES at CD-ROM (Edited by J. Michael McCarthy) ASME United Engineering Center New York 1996, Paper 96-DETC-MECH-1572 p. 1-10, Extended abstracts p. 535
- [102] THÜMMEL, T.: *Dynamische Effekte durch geregelte Servoantriebe für schnellaufende Hebelmechanismen*. In: VDI-Berichte 1281: Kurvengetriebe, Gelenkgetriebe, gesteuerte Antriebe, Kinematik – Dynamik – Schwingungen, VDI-Getriebetagung 96, der VDI-Gesellschaft Entwicklung Konstruktion Vertrieb, Veitshöchheim, 17./18. Sept. 1996 VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1996, S. 281-294
- [103] THÜMMEL, T.: *Experiment und Theorie zur Lernregelung von Gelenkkraften in Hebelmechanismen*. Wissenschaftl. Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik vom 27.-31. Mai 1996 in Prag, Veröffentlichung in ZAMM 77 (1997) Supplement 1, S. 337-338
- [104] THÜMMEL, T.: *Identifikation von Trägheitsparametern für Mehrkörpersysteme durch Messung von Kraftgrößen*. Wissenschaftl. Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik vom 24.-27. März 1997 in Regensburg, Vortrag in Session S8.6: Identifikation III, keine schriftliche Veröffentlichung
- [105] THÜMMEL, T.; BAUER, S.: *Messung und Interpretation von Wasserfalldiagrammen für nichtlineare Antriebssysteme*. In: VDI-Berichte 1416: VDI-Tagung Schwingungen in Antrieben '98, der VDI-Gesellschaft Entwicklung Konstruktion Vertrieb, Frankenthal, 10./11. Sept. 1998 VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1998, S. 457-470
- [106] THÜMMEL, T.; GLOCKER, Ch.: *Mechanismen als Mehrkörpersysteme mit Reibung, Spiel und Stößen*. In: VDI-Berichte 1423: Kurvengetriebe, Koppelgetriebe, gesteuerte Antriebe, Problemlösungen in der Bewegungstechnik, VDI-Getriebetagung '98, der VDI-Gesellschaft Entwicklung Konstruktion Vertrieb, Kassel, 15./16. Sept. 1998 VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1998, S. 249-270

- [107] THÜMMEL, T.: *Servoantriebe und Koppelgetriebe – Bewertung der Antriebskonzepte für Verarbeitungsmaschinen aus Sicht der Mehrkörperdynamik*. Tagungsband SPS/IPC/DRIVES '98, Int. Fachmesse und Kongress für Speicherprogrammierbare Steuerungen, Industrie-PCs und Elektrische Antriebstechnik, Nürnberg, 24./26. Nov. 1998, Hüthig GmbH, Heidelberg 1998, S. 654-663
- [108] THÜMMEL, T.; FUNK, K.: *Multibody Modelling of Linkage Mechanisms including Friction, Clearance and Impact*. In: Proceedings of the 10th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms in Oulu, June 20 to 24, 1999, Vol.4, pp. 1387-1392, Oulu University Press, Finland 1999
- [109] THÜMMEL, T.: *Die Schubkurbel als Mehrkörpersystem mit einseitigen Bindungen*. Kolloquium Getriebetechnik 1999, Garching 20.-21. Sept. 1999, TU München, Lehrstuhl für Feingerätebau und Mikrotechnik, Tagungsband Hrsg.: Prof.Dr.-Ing. J. Heinzl, S. 87-100, Druck: Océ Printing Systems GmbH 1999
- [110] THÜMMEL, T.; HORIE, M.; ISHII, Y.: *Dynamikanalyse eines Miniatur-Pantograph-Mechanismus mit elastischen Gelenken und Gliedern*. In: VDI-Berichte 1707: Kurvengetriebe, Koppelgetriebe, gesteuerte Antriebe, Problemlösungen in der Bewegungstechnik, VDI-Getriebetagung 2002 der VDI-Gesellschaft Entwicklung Konstruktion Vertrieb, 19./20. Sept. 2002 in Dresden, VDI-Verlag GmbH Düsseldorf 2002, S. 165-184
- [111] THÜMMEL, T.; GAULL, A.: *Interpretation von Schwingungsphänomenen an einem Mechanismenprüfstand*. In: VDI-Berichte 1825: Modalanalyse und Identifikation. Verfahren und Anwendung bei dynamischen Systemen. VDI-Schwingungstagung 2004 der VDI-Gesellschaft Entwicklung Konstruktion Vertrieb, 25./26. Mai 2004 in Wiesloch, VDI-Verlag GmbH Düsseldorf 2004, S. 549-568
- [112] THÜMMEL, T.; GINZINGER, L.: *Measurements and Simulations of a Crank and Rocker Mechanism including Friction, Clearance and Impacts*. In: Proceedings of the IX. International Conference on the Theory of Machines and Mechanisms in Liberec / Czech Republic, Aug. 31-Sept. 2, 2004, pp.763-768 Technical University of Liberec, Department of Textile Machines Design 2004
- [113] THÜMMEL, T.; GINZINGER, L.; GAULL, A.: *Simulation und Messung an einer Kurbelschwinge mit Reibung, Spiel und Stößen*. In: VDI-Berichte 1845: Bewegungstechnik. Lösung von Bewegungsaufgaben mit Koppelgetrieben, Kurvengetrieben und gesteuerten Antrieben. VDI-Getriebetagung 2004 der VDI-Gesellschaft Entwicklung Konstruktion Vertrieb, 21./22. September 2004 in Fulda, VDI-Verlag GmbH Düsseldorf 2004, S. 191-210
- [114] THÜMMEL, T.; HUBER, R.; HORIE, M.; ISHIKAWA, Ch.: *Motion Control Design of a Molded Pantograph Mechanism with Large-deflective Hinges*. IUTAM Symposium on 'Vibration Control of Non-linear Mechanisms and Structures', Munich, Germany, 18-22 July 2005, Proceedings edited by H. Ulbrich and W. Günthner, Springer-Verlag GmbH, ISBN: 1-4020-4160-8, pp. 354-364
- [115] THÜMMEL, T.: *Experimentelle Schwingungsanalyse (früher: Schwingungsmessung für Maschinenbauer)*. Vorlesungsmanuskript, TU München, Lehrstuhl für Angewandte Mechanik, 201 Seiten, 140 Bilder, Stand November 2007
- [116] ULBRICH, H.: *Maschinendynamik*. Teubner-Studienbücher: Mechanik, Mit 95 Bildern und zahlreichen aufgaben mit Lösungen, B.G. Teubner Verlag Stuttgart 1996
- [117] VDI-Richtlinie 2149 Blatt 1: *Getriebedynamik – Starrkörper-Mechanismen / Dynamics of mechanisms – Rigid body mechanisms*. Erarbeitet vom Ausschuß 'Getriebedynamik' (A204), Ltng. DRESIG, H., Mitarbeit von THÜMMEL, T. u.a., Oktober 1999, 72 Seiten, Beuth Verlag GmbH, Berlin 1999, Neufassung Okt. 2008
- [118] VDI/VDE-Richtlinie 3547: *Gütebewertung für Bewegungssysteme und gesteuerte Bewegungsabläufe / Assessment of quality of motion systems and controlled sequences of motion*. Erarbeitet vom GMA-Fachausschuß 4.12 'Bewegungssteuerung von Be- und Verarbeitungsmaschinen', Ltng. SCHÖNFELD, R., Mitarbeit von THÜMMEL, T. u.a., Juni 2003, 26 Seiten, Beuth Verlag GmbH, Berlin 2003
- [119] VDI-Richtlinie 2149 Blatt 2: *Getriebedynamik – Schwingungsfähige Mechanismen*. Erarbeitet vom Ausschuß 'Getriebedynamik' (A204), Ltng. DRESIG, H., Mitarbeit von THÜMMEL, T. u.a., September 2006, 46 Seiten, Beuth Verlag GmbH, Berlin 2006

- [120] VDI Berichte 1281: *Kurvengetriebe, Gelenkgetriebe, gesteuerte Antriebe, Kinematik – Dynamik – Schwingungen*. VDI-Getriebetagung '96 in Veitshöchheim am 17. und 18. Sept. 1996, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1996
- [121] VOLMER, J.; HAMMERSCHMIDT, Chr.: *Einfluß der Gelenke auf die Leistungsfähigkeit ungleichmäßig übersetzter Getriebe und die Weiterentwicklung der Gelenke*. Wissenschaftliche Zeitschrift der TH Karl-Marx-Stadt (jetzt TU Chemnitz), 20 (1978) Heft 5, S. 651-657
- [122] WINKLER, H.: *Elektrische Getriebe - Eröffnung neuer Perspektiven im Webmaschinenbau*. In: VDI Berichte 958: Neue Methoden und Konzepte zur Lösung getriebetechnischer Bewegungsaufgaben. Tagung Fellbach 5. und 6. Mai 1992, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1992, S.193-199
- [123] WÖSLE, M.: *Dynamik von räumlichen strukturvarianten Starrkörpersystemen*. Dissertation am Lehrstuhl B für Mechanik der TU München, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 18 Mechanik/Bruchmechanik Nr. 213, VDI-Verlag Düsseldorf, 1997
- [124] WOLFSTEINER, P.; PFEIFFER, F.: *Dynamics of a Vibratory Feeder*. Paper and presentation at the ASME Design Engineering Technical Conferences, Sept. 14-17 1997, Sacramento/California, Proceedings of the ASME DETC'97 at CD-ROM Paper DETC97/VIB-3905 p. 1-9,
- [125] WOLFSTEINER, P.: *Dynamik von Vibrationsförderern*. Dissertation am Lehrstuhl B für Mechanik der TU München, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 2 Fertigungstechnik, Nr. 511, VDI-Verlag Düsseldorf, 1999.
- [126] ZANDER, R.: *Dynamik von räumlichen strukturvarianten Starrkörpersystemen*. Dissertation am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik der TU München, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 20 Rechnerunterstützte Verfahren, Nr. 420, VDI-Verlag Düsseldorf, 2008
- [127] ZSCHIESCHANG, T.: *Schwingungsanalyse an Maschinen mit ungleichförmig übersetzenden Getrieben*. Dissertation an der TU Chemnitz Fakultät für Maschinenbau und Verfahrenstechnik, Institut für Mechanik, Bericht 5/2000, Sonderdruck der TU Chemnitz 14.7.2000
- [128] VOLMER, J. (Herausg.): *Getriebetechnik, Koppelgetriebe*. 1. Auflage 1979, Autorenkollektiv von 15 Autoren, 428 Seiten, 348 Bilder, 48 Tafeln, Verlag Technik Berlin, 1979