



Fakultät für Maschinenwesen  
Lehrstuhl für Angewandte Mechanik

# Effizientes Positionieren am Beispiel Regalbediengerät

**Mathias Bachmayer**

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der  
Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)**

genehmigten Dissertation.

**Vorsitzender:** Univ.-Prof. Dr.-Ing. Willibald A. Günthner

**Prüfer der Dissertation:**

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. Heinz Ulbrich
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Joachim Rudolph, Universität des Saarlandes
3. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann

Die Dissertation wurde am 28.06.2012 bei der Technischen Universität München  
eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 30.10.2012 angenommen.



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik der Technischen Universität München.

Mein herzlicher Dank gilt dem Ordinarius des Lehrstuhls für Angewandte Mechanik, meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. Heinz Ulbrich für die stets wohlwollende Betreuung dieser Arbeit. Sein in mich gesetztes Vertrauen und die gewährten Freiheiten haben zu meiner Motivation und damit wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Für das meiner Arbeit entgegengebrachte Interesse und die Übernahme des Zweitgutachtens bedanke ich mich herzlich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Joachim Rudolph. Für die wertvolle Möglichkeit an seinem Lehrstuhl Systemtheorie und Regelungstechnik der Universität des Saarlandes als Gastforscher sein Werk zur flachheitsbasierten Steuerungs- und Regelungstheorie näher kennengelernt zu haben sei ebenfalls herzlich gedankt.

Ebenfalls verbunden bin ich Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann für die Übernahme des Drittgutachtens. Auch Herrn Prof. Dr.-Ing. Willibald A. Günthner gebührt mein Dank für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Auch allen Mitarbeitern des Lehrstuhls gilt mein Dank für das hervorragende produktive Arbeitsklima [8, 10, 12]. Mit großer Freude und Dank für die gemachten Erfahrungen erinnere ich mich auch an die große Zahl der von mir betreuten Studenten, ohne die der facettenreiche Umfang meiner Tätigkeit am Lehrstuhl in der kurzen Zeit nicht machbar gewesen wäre. Dank für das Korrekturlesen der Arbeit gebührt den Herren Dr.-Ing. Jan Clauberg, Dr.-Ing. Robert Huber, Dr.-Ing. Thorsten Schindler und Dr.-Ing. Thomas Buschmann.

Am Lehrstuhl Systemtheorie und Regelungstechnik der Universität des Saarlandes fand ich neben einer wissenschaftlich äußerst anregenden Umgebung, auch eine außerordentlich große Gastfreundschaft vor, woran ich mich in dankbarer Freude erinnere. Mein besonderer Dank gilt an dieser Stelle Frau Dipl.-Ing. Nicole Gehring nicht nur für das sehr sorgfältige und gewissenhafte Lesen der Arbeit, sondern auch für zahlreiche interessante fachliche Diskussionen.

Meine Tochter Anna Maria Bachmayer erfüllt mich mit Stolz. Zudem schenkt mir ihr Lachen stets neue Kraft und Freude. Herzlichen Dank mein Kind. Möge diese Arbeit einen Beitrag zur Verbesserung der Lebensqualität deiner Generation bringen!

Garching bei München, 30. Januar 2013

*Mathias Bachmayer*

Für meine Nachkommen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation: Schneller, weiter, höher . . . . .	1
1.2	Problemstellung . . . . .	3
1.2.1	Teufelskreis . . . . .	3
1.2.2	Ausweg aus dem Teufelskreis . . . . .	3
1.3	Stand der Literatur . . . . .	4
1.4	Ziel und Aufbau der Arbeit . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Modellierung der betrachteten Systemklasse</b>	<b>7</b>
2.1	Systemklasse . . . . .	7
2.1.1	Stammbaum der Systemklasse . . . . .	7
2.1.2	Definition der Systemklasse . . . . .	8
2.2	Euler-Bernoulli-Balken . . . . .	9
2.2.1	Potentielle und kinetische Energie . . . . .	9
2.2.2	Euler-Bernoulli-Balkendifferentialgleichung . . . . .	11
2.3	Finite-Differenzen-Modell . . . . .	11
2.3.1	Zustandsraumdarstellung der Balkendynamik . . . . .	12
2.3.2	Zeitvariante Massenbelegung . . . . .	17
2.3.3	System mit statischer Massenbelegung . . . . .	22
2.4	Antriebskraft . . . . .	23
2.4.1	Übersetzung . . . . .	23
2.4.2	Abtriebsseitige Ersatzmasse . . . . .	24
2.4.3	Spiel im Antriebsstrang . . . . .	25
2.5	Reibung . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Eigendynamik der Systemklasse</b>	<b>33</b>
3.1	Eigenfrequenzen und Eigenformen . . . . .	33
3.1.1	Separationsansatz . . . . .	33
3.1.2	Unterteilter Balken . . . . .	34
3.1.3	Randbedingungen . . . . .	35
3.1.4	Auswertung der Randbedingungen . . . . .	36
3.1.5	Newton-Verfahren . . . . .	37
3.1.6	Charakteristische Gleichung, Nullstellensuche und Eigenformen . . . . .	39
3.2	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit . . . . .	41
3.2.1	Analyse der Eigenformen . . . . .	41
3.2.2	Aussagen zur Beobachtbarkeit . . . . .	42
3.2.3	Optimiertes Konstruktionskonzept . . . . .	44
3.2.4	Schwingungsempfindlichkeit . . . . .	45
3.2.5	Aussagen zur Steuerbarkeit . . . . .	46

<b>4</b>	<b>Vorsteuerungsentwurf</b>	<b>48</b>
4.1	Vorsteuerungsentwurf mittels numerischer Optimierung . . . . .	48
4.1.1	Intervallweise konstante Kraftanregung . . . . .	49
4.1.2	Parametrierung mittels Fourierreihe . . . . .	50
4.1.3	Kostenfunktion . . . . .	50
4.1.4	Numerische Optimierung zur Vorsteuerungsauffindung . . . . .	51
4.2	Flachheitsbasierter Vorsteuerungsentwurf . . . . .	52
4.2.1	Berücksichtigung der Randbedingungen . . . . .	55
4.2.2	Reihendarstellung von Biegelinie und Antriebskraft . . . . .	58
4.2.3	Parametrierung der Reihe . . . . .	59
4.2.4	Berücksichtigung der Masse im Fußpunkt . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Regelungsentwurf</b>	<b>64</b>
5.1	Gründe für eine Regelung . . . . .	64
5.2	Vorsteuerung . . . . .	64
5.2.1	Reibungsvorsteuerung . . . . .	64
5.2.2	Vorsteuerung zur Positionierung . . . . .	65
5.3	Regelungs- und Steuerungskonzept . . . . .	66
5.4	Beobachter- und Regelungsentwurf . . . . .	67
5.4.1	Strukturbeschränkte Zustandsrückführung . . . . .	67
5.4.2	Kondition und Polverschiebeverfahren . . . . .	69
5.4.3	Reglerentwurf durch Zustandsrückführung . . . . .	69
5.4.4	Beobachterentwurf . . . . .	71
5.5	Zeitabhängiges Schließen des Regelkreises . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Resultate am Laborprüfstand LARS</b>	<b>74</b>
6.1	Systemkomponenten . . . . .	74
6.1.1	Linearaktor . . . . .	74
6.1.2	Balken . . . . .	76
6.1.3	Hubwagen . . . . .	79
6.1.4	Umrichter CDD3000 . . . . .	79
6.1.5	Hubwerkselektronik . . . . .	80
6.1.6	Steuerrechner DSpace . . . . .	81
6.2	Reibungsvorsteuerung . . . . .	81
6.3	Beobachter- und Reglerauslegung . . . . .	84
6.4	Ergebnisse . . . . .	88
6.4.1	Sprungantwort der beobachtergestützten Regelung . . . . .	88
6.4.2	Verhalten des vorgesteuert geregelten Systems . . . . .	90
<b>7</b>	<b>Ergebnisse am Regalbediengerät</b>	<b>92</b>
7.1	Parameterermittlung . . . . .	92
7.1.1	Systemmasse . . . . .	92
7.1.2	Antriebskraft . . . . .	94
7.1.3	Reibung . . . . .	94
7.2	PD-Regelung . . . . .	95
7.3	Flachheitsbasierte Vorsteuerung . . . . .	96

7.4	Ergebnisse . . . . .	97
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>98</b>
<b>A</b>	<b>Zwischenergebnisse des Steuerungsentwurfs</b>	<b>100</b>
A.1	Auswahl geeigneter Operatorfunktionen . . . . .	100
A.2	Koeffizienten zum flachheitsbasierten Steuerungsentwurf . . . . .	101
A.3	Ausdrücke der Operatorfunktionen $Q_1$ und $P_1(x)$ . . . . .	106
<b>B</b>	<b>Tabellen zur Operatorenrechnung</b>	<b>109</b>
<b>C</b>	<b>Koeffizientenfunktionen der Eigenwertgleichung</b>	<b>115</b>
<b>D</b>	<b>Mathematisches</b>	<b>117</b>
D.1	Eigenwerte transponierter Systemmatrizen . . . . .	117
D.2	Lineare Ausgleichsrechnung . . . . .	117
D.2.1	Herleitung . . . . .	117
D.2.2	Beispiele . . . . .	118
D.3	Gaußsche Glockenkurve . . . . .	120
<b>E</b>	<b>Stochastische Interpretation des Kalmanfilters</b>	<b>121</b>
<b>F</b>	<b>Begriffsklärung zum Biegebalken</b>	<b>122</b>
F.1	Spannungszustand . . . . .	122
F.2	Verformungszustand . . . . .	123
F.3	Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verformungszustand . . . . .	125
F.4	Kenngrößen eines Balkens und neutrale Faser . . . . .	126
F.4.1	Lastfall: Symmetrische reine Biegung . . . . .	126
F.4.2	Lastfall: Gerade Biegung und Euler-Bernoulli-Hypothese . . . . .	129
F.5	Biegelinie . . . . .	130
F.5.1	Herleitung . . . . .	130
F.5.2	Vereinfachte Biegelinie . . . . .	130
F.5.3	Problemspezifischer Einsatz der Biegelinie . . . . .	131
<b>G</b>	<b>Entwicklungsbeitrag zum humanoiden Roboterprojekt Lola</b>	<b>133</b>
<b>H</b>	<b>Entstandene Diplom- und Semesterarbeiten</b>	<b>135</b>
H.1	Regalbediengerät . . . . .	135
H.2	Softwareentwicklung Lola . . . . .	136
H.3	Verschiedenes . . . . .	136
	<b>Literatur</b>	<b>137</b>



# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation: Schneller, weiter, höher

Regalbediengeräte sind kostenintensive Manipulatoren, die in großer Stückzahl in Logistikzentren zur Erzielung eines hohen Durchsatzes eingesetzt werden.

Im Allgemeinen will man in kurzer Zeit möglichst viel bewirken - weshalb man nach möglichst hoher Leistung strebt. Im wirtschaftswissenschaftlichen Kontext will man die Produktivität erhöhen. Da in Zeiten steigender Energiepreise neben der Produktivität auch der zur Erzeugung des gewünschten Produkts benötigte Energieeinsatz immer stärker berücksichtigt werden muss, strebt man nach Effizienz. Unter Effizienz versteht man das Minimum des Verhältnisses von Aufwendungen (sowohl in Form von Material-, Zeit- als auch Energieeinsatz) zu Nutzen.

Bei dem in Bild 1.1 abgebildeten Regalbediengerät handelt es sich um ein Demonstrationsgerät, das in der Halle des Lehrstuhls für Fördertechnik Materialfluss und Logistik der Technischen Universität München steht. Der Durchsatz eines solchen Regalbediengeräts lässt sich nicht einfach durch schnelleres Verfahren und damit mehr Leistung stetig steigern, weil im Allgemeinen auftretende Schwingungsamplituden der Struktur bei Überschreiten einer tolerierbaren Amplitude am Ende des Positioniermanövers Abklingwartezeiten erfordern und damit den Zeitgewinn zu Nichte machen.



**Bild 1.1:** Beispiel Regalbediengerät: Oftmals wird der Durchsatz durch tolerierbare Nachschwingungsamplituden begrenzt.

## 1.2 Problemstellung

### 1.2.1 Teufelskreis

Will man die Effizienz des Positioniervorgangs der in dieser Arbeit betrachteten Maschinen steigern, so tritt folgender Teufelskreis zu Tage. Verfährt man ein klassisch geregeltes Gerät einfach schneller, so sind deutliche strukturbedingte Nachschwingungen im Ziel zu beobachten. Eine Erhöhung der Struktursteifigkeit zur Minimierung dieser Nachschwingungsamplituden erscheint sinnvoll. Bei einem gut konstruierten Gerät lässt sich die Struktursteifigkeit jedoch nur mit einem Mehr an Material erhöhen. Damit steigt die zu beschleunigende Masse, was den Energieverbrauch der Anlage erhöht und evtl. leistungsstärkere Antriebe nötig macht, um eine Steigerung des Durchsatzes zu erreichen. Somit steigen die Anlagenkosten auf zwei Arten an. Wegen Wirkungsgraden von stets kleiner eins steigt der Energiebedarf der Anlage auch beim Einsatz von Antriebseinheiten, die über die Möglichkeit verfügen, Energie ins Netz zurück zu speisen (Rekoperation). Sind die Anlagenkosten empfindlich gestiegen, so kann man versuchen, diese durch eine weitere Durchsatzsteigerung zu rechtfertigen. Damit steigen jedoch im Allgemeinen erneut die Nachschwingungsamplituden an, womit sich der Kreis schließt. Das bedeutet, man kann im Allgemeinen den Durchsatz nicht ohne eine deutliche Erhöhung der Anlage- und Betriebskosten steigern.

### 1.2.2 Ausweg aus dem Teufelskreis

Wie der Teufelskreis zu durchbrechen ist, verdeutlicht folgende Überlegung. Nachschwingungen im Ziel sind ein Zeichen für ungenutzt verpuffende Energie, die vom Antrieb während des Positioniervorgangs in die Struktur eingebracht wurde. Daraus folgt unmittelbar, dass ein Positioniermanöver mit gleicher Verfahrszeit dann effizient die Antriebskraft und damit die gesamte Anlage nutzt, wenn am Ende keine Strukturschwingungen auftreten. Gesucht ist jedoch keine Strategie, bei der die passive Dämpfung der Anlage erhöht wird, da Dämpfung eine Vernichtung von vom Aktor stammender Energie bedeutet und somit automatisch die Effizienz senkt. Offensichtlich ist dies im Falle eines passiven Schwingungsdämpfers.

Damit erscheint als Mittel der Wahl eine geeignete Vorsteuerstrategie für nachschwingungsfreies Positionieren sinnvoll. Im Gegensatz zu einem geschlossenen System zeichnet sich eine solche Vorsteuerung neben der Vermeidung von Restschwingungen durch eine hohe Unempfindlichkeit gegenüber Spiel im Antriebsstrang aus. In der Praxis kommen spielbehaftete Antriebe häufig aus Kostengründen zum Einsatz.

## 1.3 Stand der Literatur

Strukturodynamik stellt ein vor allem in der Luft- und Raumfahrttechnik besonders wichtiges Gebiet dar, da hier in der Natur der Sache liegend der Leichtbau eine sehr wichtige Rolle einnimmt. Um z.B. Flügel von Flugzeugen oder auch Solarpanele von Sateliten vor einem Bruch in Folge von aufklingenden Schwingungen zu bewahren, ist es nicht nur für die Sicherheit des Systems sondern auch aus ökonomischen Gesichtspunkten sinnvoll, mit relativ kostenintensiven Maßnahmen Schwingungen aktiv zu bedämpfen, wenn sich damit das Gewicht des Systems reduzieren lässt. Durch den Einsatz von Piezoelementen ist es möglich, flächig Sensorik und Aktorik in eine Struktur zu integrieren und damit den Verformungszustand einer Struktur zu beeinflussen wie in RUDOLPH [39] und MEURER [30]. Eine besonders elegante Herangehensweise zur Realisierung einer aktiven Schwingungsdämpfung mit relativ geringer Rechenleistung ergibt sich unter Anwendung der geometrischen Filterung zur modenselektiven Rückführung von Schwingungszuständen nach FREYMAN [18]. In der vorliegenden Problemstellung stellt der Antrieb die unmittelbare Ursache für den Energieeintrag in die Struktur dar, weshalb der Sinn eines weiteren Aktors aber auch eines Schwingungsdämpfers exklusiv zu Zwecken der Dämpfung fraglich ist. Daher wurden derartige Ansätze in dieser Arbeit nicht weiter untersucht.

In SCHUMACHER [41] finden sich phänomenologische Untersuchungen der auftretenden Nachschwingungsamplituden eines Regalbediengeräts in Abhängigkeit von Verfahrrweite und Verfahrrzeit. Dabei wurde eine wellenartige Abhängigkeit der Nachschwingungsamplituden von den genannten Parametern festgestellt. Damit lässt sich der Durchsatz eines Gerätes zwar in einem gewissen Maße steigern, nicht aber in der gewünschten und nötigen Flexibilität wie es im praktischen Einsatz erforderlich ist. In DIETZEL [13] rückt die Fahrtriebsregelung in den Fokus. Dabei wird das System durch ein Modell mit konzentrierten Massen modelliert und ein Zustandsregler hierfür entworfen. Die Sollvorgabe für den Regler wird mittels Polynomen interpoliert. Eine Berücksichtigung der Balkendynamik zur Berechnung einer entsprechenden Vorsteuerung erfolgt nicht.

In PARK [33] wird ein mechanisches System bestehend aus einem senkrecht eingespannt verfahrbaren Balken mit längs des Balkens verfahrbarer Masse betrachtet. Dabei werden mit dem Hamiltonprinzip die Bewegungsgleichungen des Systems aufgestellt. Zur Positionierung des Systems wird der Antriebskraftverlauf in Zeitintervalle unterteilt, in denen die Antriebskraft jeweils konstant ist. Zur Berechnung der Antriebskraftamplituden wird lediglich die erste Eigenfrequenz betrachtet, und ein als „Input Preshaping Method“ (IPM) benanntes Verfahren vorgestellt, mit dem Nachschwingungsamplituden nach dem Beschleunigungsvorgang minimiert werden. Während der Phasen konstanter Fahrt wird die Höhe der Masse auf die Zielhöhe gebracht. Schließlich wird wieder mit dem IPM-Verfahren eine Antriebskraftschaltsequenz zum nachschwingungsfreien Abbremsen beschrieben.

In RUDOLPH [38] wird die für endlichdimensionale nichtlineare Systeme in FLIESS ET AL. [15] vorgestellte flachheitsbasierte Regelungstheorie auf eine spezielle Klasse unendlich dimensionaler Systeme erweitert. Dabei findet sich auch ein

Beispiel zur flachheitsbasierten Parametrierung der Antriebskraft für einen rotatorisch gelagerten Balken mit Endmasse. Die darin aufgezeigte Methodik stellt die theoretische Grundlage für die in dieser Arbeit erfolgreich gefundene Parametrierung der Antriebskraft zur Vorsteuerung für das hier vorliegende System dar.

In STAUDECKER ET AL. [42] findet sich für ein Regalbediengerät eine passivitätsbasierte Regelungsstrategie sowie eine zeitoptimale Trajektorienplanung. Eine ähnliche Arbeit ohne zeitoptimale Trajektorienplanung aus der gleichen Arbeitsgruppe findet sich in ENNSBRUNNER [14]. Dabei wird mittels des Hamiltonschen Prinzips ein Modell unendlicher Dimension in Form von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen aufgestellt. Mit Hilfe des Ritz-Verfahrens wird eine endlich dimensionale Approximation gewonnen, wofür sich ein differentiell flacher Ausgang finden lässt. Basierend auf dem unendlichdimensionalen Systemmodell wird ein passivitätsbasiertes Regelgesetz hergeleitet, welches neben den in jedem Servoantrieb verfügbaren Ortskoordinaten von Fahr- und Hubwerk auch die im Balkenfußpunkt auftretende Scheerkraft benötigt. Dies bedeutet einen weiteren Sensor, was höhere Anlagengrundkosten bedeutet. Schließlich wird zur Generierung der Sollverläufe ein Algorithmus vorgestellt, mit Hilfe dessen es möglich ist, zeitoptimale Trajektorien numerisch innerhalb einer Zeitspanne von 2 bis 10 Sekunden zu berechnen.

## 1.4 Ziel und Aufbau der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es, die Effizienz bestehender Regalbediengeräte mit der vorhandenen Sensor- und Aktorausstattung mit den Möglichkeiten der Regelungs- und Steuerungstechnik zu steigern. Es soll also eine Methode erarbeitet werden, die ohne zusätzliche Sensoren und Aktoren auskommt und zum Anderen mit standardmäßig verfügbaren kostengünstigen häufig auch spielbehafteten Antriebslösungen eine nennenswerte Durchsatzsteigerung erreichen kann.

In Kapitel 2 wird das betrachtete dynamische System näher spezifiziert und modelliert. Dazu wird ausgehend vom in Bild 1.1 dargestellten Regalbediengerät ein zur weiteren Modellierung herangezogener dynamischer Kern abgeleitet. Dieser dynamische Kern definiert die Klasse von Systemen, auf die die Ergebnisse dieser Arbeit angewendet werden können. Mit Hilfe der Euler-Bernoulli-Balken-Theorie ist hier die für die Nachschwingungen hauptverantwortliche Struktur der Maschine mathematisch modelliert. Mit Hilfe der Methode der Finiten-Differenzen wird anschließend eine ortsdiskrete Approximation der verteiltparametrischen Systemdynamik in Form eines Zustandsraummodells aufgestellt. Der Berücksichtigung von Getrieben zwischen Motor und System wird ein eigener Abschnitt gewidmet, ehe auf das für die praktische Anwendung der in dieser Arbeit erarbeiteten Vorgehensweise ebenso wichtige Phänomen der Reibung näher eingegangen wird.

Ob bei realen Anlagen mit den vorhandenen Servoantrieben und -platzierungen eine aktive Schwingungsbedämpfung ohne zusätzliche Sensorik und Aktorik überhaupt

möglich ist, wird im Kapitel 3 untersucht. Mit einem von den Eigenformen abgeleiteten Empfindlichkeitsmaß können Aussagen zur nötigen Mindestsensorauflösung zur sicheren Erfassung von Schwingungsamplituden der Struktur getroffen werden.

Zwei unterschiedliche Herangehensweisen zur Antriebskraftvorsteuerungsberechnung werden in Kapitel 4 vorgestellt. Dazu werden zwei zur numerischen Optimierung geeignete Parametrierungen der Antriebskraft vorgestellt und die Vor- und Nachteile diskutiert. Schließlich wird ein flachheitsbasierter analytischer Vorsteuerungsentwurf für das verteiltparametrische System durchgeführt. Damit ist es möglich, ein Regalbediengerät praktisch nachschwingungsfrei zu positionieren oder aber auch auf eine Geschwindigkeit zu beschleunigen.

Schließlich wird in Kapitel 5 die Vorsteuerung in eine Ablaufsteuerung mit Regelkreis zur Sicherstellung der Positioniergenauigkeit eingebettet. Basierend auf dem in Kapitel 2 gefundenen Zustandsraummodell, werden darin die Methoden zur Regler- und Beobachterausslegung vorgestellt.

Zur Validierung der in dieser Arbeit entwickelten Methodik wurde der in Kapitel 6 vorgestellte und LARS<sup>1</sup> genannte Laborprüfstand entwickelt. Neben einer kurzen Darstellung der Konstruktion der einzelnen Komponenten wurden die in den vorhergehenden Kapiteln dargelegten Methoden zur Vorsteuerung und Regelung implementiert und das Ergebnis in diesem Kapitel dargestellt.

Mit dem zu Demonstrationszwecken aufgebauten Regalbediengerät des Lehrstuhls Fördertechnik Materialfluss und Logistik wurde ebenfalls sehr erfolgreich die Wirksamkeit zur Durchsatzsteigerung an einer realen Anlage gezeigt, wie in Kapitel 7 dargestellt wird.

Die Arbeit schließt mit der Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse in Kapitel 8 sowie einer Einschätzung möglicher zukünftiger Entwicklungen.

---

<sup>1</sup> LARS=**L**inear **a**ktuiertes **R**obotersystem

## 2 Modellierung der betrachteten Systemklasse

Ein gutes Modell, zumindestens aber die Kenntnis der Struktur der die Systemdynamik beschreibenden Gleichungen, ist die Grundlage für einen Regelungsentwurf. Zunächst wird in Abschnitt 2.1 die in dieser Arbeit betrachtete Systemklasse definiert. Mittels des Verfahrens der finiten Differenzen (Abschnitt 2.3) wird die verteiltparametrische Systemdynamik mit einem Modell endlicher Dimension numerisch angenähert. Dieses Systemmodell wird zum Regler- und Beobachterentwurf herangezogen. In 2.5 wird auf das Phänomen der Reibung eingegangen.

### 2.1 Systemklasse

Zunächst wird die Struktur eines Regalbediengeräts mit einem Minimalmodell beschrieben, das die dynamischen Eigenschaften hinreichend abbildet. Alle Geräte, die entsprechend reduziert werden können, bilden die Klasse von Systemen, auf die diese Arbeit angewendet werden kann.

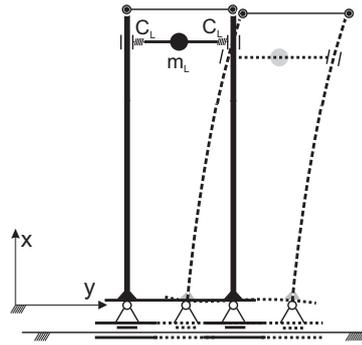
#### 2.1.1 Stammbaum der Systemklasse

In Bild 2.1 ist die vorgenommene mechanische Modellierung für ein Gerät wie in Bild 1.1 zu sehen. Die aktuierte translatorische Führung wird durch einen eigenen Balken mit zwei Unterstützungspunkten modelliert. Auf diesem Balken werden die senkrecht ausliegenden Balken kinematisch gekoppelt. Die freien Enden der Balken werden mittels eines jeweils zweiwertig gelagerten Starrkörpers auf Distanz gehalten. Auf den ausliegenden Balken ist ein translatorisch aktuiertes Werkzeug (z.B. ein Greifer) gelagert. In einem weiteren Schritt wird der die Fahrwerkssteifigkeit modellierende Balken durch Drehfedern mit der Härte  $k_T$  ersetzt, wie in Bild 2.2 dargestellt. Die Fahrwerksmasse (inkl. daran befestigter Anbauteile) wird durch zwei kinematisch gekoppelte Punktmassen in den Einspannungspunkten der Balkenstruktur modelliert.

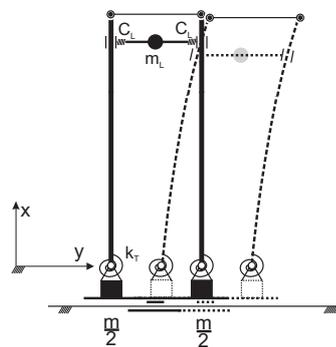
Unter Ausnutzung der vorhandenen Symmetrieachse<sup>1</sup> lässt sich das in Bild 2.2 dargestellte Modell in zwei Hälften teilen, die getrennt voneinander betrachtet werden können (Bild 2.3). Dabei wird berücksichtigt, dass auch die Antriebskräfte kinematisch bedingt symmetrisch auf die elastischen Elemente wirken. Die Koppelsteifigkeit des Werkzeugs ist aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht dargestellt.

---

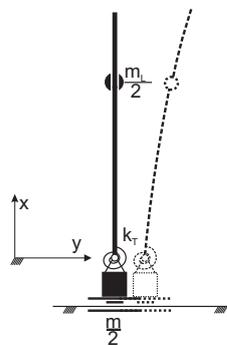
<sup>1</sup> Annahme: Vorhandene Symmetrieachsen der Massenverteilung und der Kinematik fallen zusammen.



**Bild 2.1:** Ersatzmodell für Anlagen mit Parallelkinematik



**Bild 2.2:** Reduziertes Ersatzmodell für Anlagen mit Parallelkinematik



**Bild 2.3:** Ersatzmodell und systemdynamischer Kern der hier betrachteten Systemklasse

### 2.1.2 Definition der Systemklasse

Das in Bild 2.3 dargestellte zur mathematischen Modellierung herangezogene mechanische Modell definiert die in dieser Arbeit betrachtete Systemklasse. Dabei umfasst die Systemklasse die in Tabelle 2.1 aufgeführten Parameter, wobei für die eingangs erwähnte Versuchsanlage als auch für den zur verlässlichen Validierung des Regelungskonzepts erstellten Prüfstands „LARS“ konkrete Werte angegeben sind.

**Tabelle 2.1:** Parameter der betrachteten Systemklasse mit konkreten Zahlenwerten des Laboraufbaus „LARS“ und eines Regalbediengerät(RBG)s

Parametername	Symbol	Einheit	LARS	RBG
Elastizitätsmodul	$E$	$N/m^2$	$21 \cdot 10^{10}$	$7,155 \cdot 10^{10}$
Flächenträgheitsmoment	$I$	$m^4$	$90 \cdot 10^{-12}$	$5,993 \cdot 10^{-5}$
Materialbedeckte Querschnittsfläche	$A$	$m^2$	$12 \cdot 10^{-5}$	$6542 \cdot 10^{-6}$
Dichte Balkenmaterial	$\rho$	$kg/m^3$	7850	2740
Balkenlänge	$L$	$m$	0,6	8,5
Einspannsteifigkeit	$k_T$	$Nm/rad$	$4,63 \cdot 10^7$	$2,15 \cdot 10^6$
Koppelsteifigkeit	$c_L$	$N/m$	$10^8$	$10^6$
Masse Fußpunkt	$m$	$kg$	3,659	1241
Masse Werkzeug	$m_T$	$kg$	1,662	120
Masse Zuladung	$m_Z$	$kg$	max. 0,476	max. 100
Lastmasse ( $m_T + m_Z$ )	$m_L$	$kg$	max. 2,138	max. 220
Trägheitsmoment der Last	$J$	$kgm^2$	$4,256 \cdot 10^{-3}$	0

## 2.2 Euler-Bernoulli-Balken

Bei einer Struktur, deren Querschnittsabmessungen klein im Vergleich zu ihrer Länge sind, spricht man von einem Balken. Das Euler-Bernoulli-Balkenmodell berücksichtigt keine Schubverformungen sowie Rotationsträgheiten. Dies ist bei sogenannten schlanken Balken zulässig, bei denen das Verhältnis aus Länge zu Balkendurchmesser mindestens zehn beträgt [28].

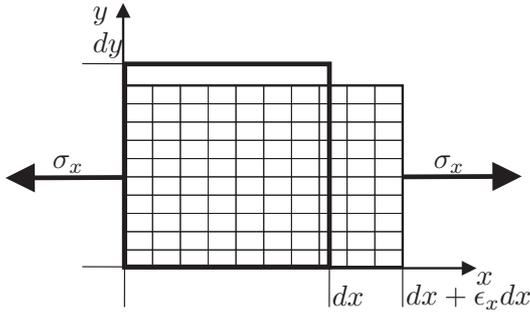
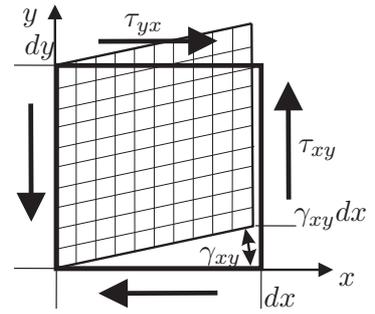
### 2.2.1 Potentielle und kinetische Energie

Während grundlegende Größen und Zusammenhänge zur Balkentheorie im Anhang F aufgeführt sind, finden sich in diesem Abschnitt die Ausdrücke für die im Euler-Bernoulli-Balken gespeicherten Energieformen. Diese können zur Aufstellung von Bewegungsgleichungen eines elastischen Systems oder aber auch als Gütefunktional im Rahmen einer numerischen Optimierung genutzt werden.

#### Formänderungsenergie des Balkens

Um die Formänderungsenergie zu berechnen, betrachtet man ein differentielles Element des deformierten Körpers. Bild 2.4 zeigt einen Lastfall bei dem nur normal zur Körperoberfläche Spannungen  $\sigma_x$  in Richtung der  $x$ -Achse wirken, wie es z.B. bei einem Zugstabversuch der Fall ist. In Bild 2.5 hingegen ist ein Lastfall in Folge einer reinen Schubbelastung in Folge der Schubspannungen  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{yx}$  dargestellt [27].

Für den in Bild 2.4 dargestellten Lastfall einer reinen Normalspannung  $\sigma_x$  berechnet sich die zur resultierenden Dehnung  $\epsilon_x$  um die Strecke  $\epsilon_x dx$  nötige differentielle

**Bild 2.4:** Normalbelastung**Bild 2.5:** Schubbelastung

Arbeit  $dW$  zu

$$dW = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dy dz dx. \quad (2.1)$$

Die benötigte differentielle Arbeit im Falle einer Schubdeformation um die Gleitung  $\gamma_{xy}$  berechnet sich bei einer wirkenden Schubspannung  $\tau_{xy}$  zu

$$dW = \frac{1}{2} \tau_{xy} dy dz \gamma_{xy} dx. \quad (2.2)$$

Diese für jeweils eine Raumrichtung durchgeführten Überlegungen lassen sich analog für die restlichen beiden Raumrichtungen durchführen. Zusammengefasst lässt sich ein Ausdruck für die im Elementarwürfel enthaltene Formänderungsenergie  $V$  anschreiben [27]

$$V = \frac{1}{2} \int_K (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (2.3)$$

Unter Berücksichtigung des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes F.22 und  $\tau = G\gamma$  lässt sich die Formänderungsenergie in Abhängigkeit von Normal- und Schubspannungen anschreiben zu

$$V = \int_K \left[ \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zy}^2) \right] dx dy dz. \quad (2.4)$$

Darin beschreibt  $\mu$  die Querdehnzahl,  $G$  das Schubmodul und  $E$  die Elastizitätskonstante. Wenn man davon ausgeht, dass Energieanteile in Folge von Schubdeformationen vernachlässigt werden können und die dem Biegemoment  $M$  zuzuschreibende Biegenormalspannung (F.36) den dominanten Verformungsenergieanteil übernimmt, lässt sich folgender Ausdruck zur Bestimmung der Biegeenergie angeben:

$$V_{\text{Biegung}} = \frac{1}{2} \int_K \frac{M^2(x) y^2}{EI_z^2(x)} dx dy dz = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \frac{M^2(x)}{EI_z^2(x)} \int_A y^2 dA \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2(x)}{EI_z(x)} dx. \quad (2.5)$$

Dabei wurde von der Definition des Flächenträgheitsmoments  $I_z$  gemäß (F.33) Gebrauch gemacht. Mit dem Zusammenhang zwischen Biegemoment und Biegelinie gemäß (F.47) erhält man einen Ausdruck für die Formänderungsenergie  $V_{\text{Biegung}}$ , der nur von der Biegelinie  $w(x)$ , der Balkengeometrie  $I_z$  und dem Elastizitätsmodul  $E$  abhängt:

$$V_{\text{Biegung}} = \frac{1}{2} \int_0^L EI_z(x) (w''(x))^2 dx. \quad (2.6)$$

### Kinetische Energie des Balkens

Die kinetische Energie eines homogenen Euler-Bernoulli-Balkens der Länge  $L$  beträgt

$$T_{\text{Kinetisch}} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(x) \dot{w}^2(x) dx. \quad (2.7)$$

### 2.2.2 Euler-Bernoulli-Balkendifferentialgleichung

Die Herleitung der Bewegungsgleichung eines Euler-Bernoulli-Balkens kann anhand des Momenten und Kräftegleichgewichts an einem infinitesimalen Balkenelement oder über das Hamiltonsche Prinzip erfolgen [28].

Das als Euler-Bernoulli-Balkendifferentialgleichung bekannte Resultat lautet für einen Balken mit konstantem Querschnitt

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + EI_z \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = 0. \quad (2.8)$$

Dabei bezeichnen  $E$  das Elastizitätsmodul des Werkstoffes,  $I$  das Flächenträgheitsmoment der Querschnittsgeometrie,  $A$  die vom Material bedeckte Querschnittsfläche und  $\rho$  die Dichte des Materials.

Nach David J. Russell kann die Euler-Bernoulli-Balkendifferentialgleichung wie folgt um innere Dämpfung erweitert werden [11]:

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - 2\gamma \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial t \partial x^2} + EI_z \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = 0. \quad (2.9)$$

## 2.3 Finite-Differenzen-Modell

Für Regler- und Beobachterentwurf aber auch zur numerischen Optimierung wird die verteiltparametrische Systemdynamik diskretisiert und damit einer numerischen

Auswertung zugänglich gemacht. Hierzu wird die Methode der finiten Differenzen verwendet.

### 2.3.1 Zustandsraumdarstellung der Balkendynamik

Zunächst wird die Dynamik des Balkens ohne aufgebrauchte Last (Bild 2.6) betrachtet. Dabei ergibt sich für den als Euler-Bernoulli-Balken modellierten Ausleger folgendes Randwertproblem:

$$-k_T w'(0,t) = -EI w''(0,t), \quad (2.10)$$

$$-EI w'''(0,t) = m_F \ddot{w}(0,t) - u(t), \quad (2.11)$$

$$w''(L,t) = 0, \quad (2.12)$$

$$-EI w'''(L,t) = -m_K \ddot{w}(L,t). \quad (2.13)$$

Die hinter den Randbedingungen stehenden anschaulichen Bedeutungen sind in Tabelle 2.2 gelistet. Zur Reduktion der verteiltparametrischen Systemdynamik auf ein

**Tabelle 2.2:** Bedeutung der Randbedingungen

RB-Nr.	Bedeutung
(2.10)	Das Biegemoment des Balkens am Fußpunkt entspricht dem Torsionsmoment der als Drehfeder $k_T$ modellierten Einspannungssteifigkeit.
(2.11)	Die Querkraft des Balkens am Fußpunkt entspricht der Stellkraft $u(t)$ und der Trägheitswirkung der Massen im Fußpunkt.
(2.12)	Das Biegemoment am freien Ende verschwindet.
(2.13)	Die Querkraft am freien Ende entspricht der Massenwirkung $m_K$

gewöhnliches Differentialgleichungssystem, werden basierend auf der Methode der finiten Differenzen die Ortsableitungen in (2.8) und in (2.10)-(2.13) ortsdiskretisiert.

Hierzu werden für die als Knoten bezeichneten Punkte der Biegelinie  $w(x,t)$  des Balkens folgende ortsdiskreten Notationen eingeführt und zur vereinfachten Lesbarkeit die explizite Zeitabhängigkeit der Biegelinie  $w(x,t)$  vernachlässigt, also

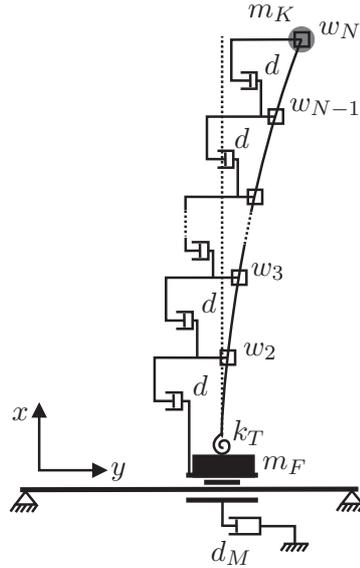
$$x_\nu = h(\nu - 1), \quad (2.14)$$

$$w_\nu = w(x_\nu, t), \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial w_\nu}{\partial x} = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_\nu}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 w_\nu}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=x_\nu}. \quad (2.17)$$

Entsprechend für die höheren Ortsableitungen  $\frac{\partial^3 w_\nu}{\partial x^3}$  und  $\frac{\partial^4 w_\nu}{\partial x^4}$ , wobei für den Index der Knoten  $\nu \in [1 \dots N]$  und für den Abstand der einzelnen Knoten  $h = \frac{L}{(N+1)} =$



**Bild 2.6:** Ortsdiskretisierung der verteiltparametrischen Balkendynamik.

$x_{\nu+1} - x_\nu$  gilt. Es bezeichnen  $L$  die Länge des Balkens und  $N$  die Anzahl der Knoten. Zur Herleitung der benötigten Ableitungsapproximationen bedient man sich der Taylorreihenentwicklung. Damit lassen sich die um einen Entwicklungspunkt  $w_\nu$  gelegenen Funktionswerte  $w_{\nu-1}$  sowie  $w_{\nu+1}$  folgendermaßen berechnen

$$w_{\nu+1} = w_\nu + h \frac{\partial w_\nu}{\partial x} + \frac{1}{2!} h^2 \frac{\partial^2 w_\nu}{\partial x^2} + \dots, \quad (2.18)$$

$$w_{\nu-1} = w_\nu - h \frac{\partial w_\nu}{\partial x} + \frac{1}{2!} h^2 \frac{\partial^2 w_\nu}{\partial x^2} - \dots \quad (2.19)$$

Aus (2.18) und (2.19) lässt sich mit

$$\frac{\partial w_\nu^+}{\partial x} = \frac{w_{\nu+1} - w_\nu}{h} + O(h) \quad (2.20)$$

und

$$\frac{\partial w_\nu^-}{\partial x} = \frac{w_\nu - w_{\nu-1}}{h} + O(h) \quad (2.21)$$

jeweils eine Approximation für die erste Ableitung angeben. Der sogenannte Vorwärts- (2.20) und der Rückwärtsdifferenzenquotient (2.21) führt jeweils zu einem Approximationsfehler erster Ordnung. Durch Subtraktion von (2.18) und (2.19) erhält man den sogenannten zentralen Differenzenquotienten, bei dem der Approximationsfehler nur mehr zweiter Ordnung ist:

$$\frac{\partial w_\nu}{\partial x} = \frac{w_{\nu+1} - w_{\nu-1}}{2h} + O(h^2). \quad (2.22)$$

Durch Addition von (2.18) und (2.19) lässt sich auch eine Approximation für die

zweite partielle Ableitung finden

$$\frac{\partial^2 w_\nu}{\partial x^2} = \frac{w_{\nu+1} - 2w_\nu + w_{\nu-1}}{h^2} + O(h^2). \quad (2.23)$$

Die Differenzenquotienten zur Approximation der höheren Ableitungen können unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse hergeleitet werden:

$$\left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right|_{x=\nu \cdot h} \approx \frac{w_{\nu+1} - w_{\nu-1}}{2h} = w'_\nu, \quad (2.24)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=\nu \cdot h} \approx \frac{w_{\nu+1} - 2w_\nu + w_{\nu-1}}{h^2} = w''_\nu, \quad (2.25)$$

$$\left. \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \right|_{x=\nu \cdot h} \approx \frac{w_{\nu+2} - 2w_{\nu+1} + 2w_{\nu-1} - w_{\nu-2}}{2h^3} = w'''_\nu, \quad (2.26)$$

$$\left. \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} \right|_{x=\nu \cdot h} \approx \frac{w_{\nu+2} - 4w_{\nu+1} + 6w_\nu - 4w_{\nu-1} + w_{\nu-2}}{h^4} = w^{(4)}_\nu. \quad (2.27)$$

Nun lassen sich aus der partiellen Euler-Bernoulli-Balkendifferentialgleichung (2.8)  $N$  gewöhnliche Differentialgleichungen ableiten:

$$\ddot{w}_1 = -\frac{EI}{h^4 \rho A} (w_{-1} - 4w_0 + 6w_1 - 4w_2 + w_3) \quad (2.28)$$

$$\ddot{w}_2 = -\frac{EI}{h^4 \rho A} (w_0 - 4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_4) \quad (2.29)$$

⋮

$$\ddot{w}_\nu = -\frac{EI}{h^4 \rho A} (w_{\nu-2} - 4w_{\nu-1} + 6w_\nu - 4w_{\nu+1} + w_{\nu+2}) \quad (2.30)$$

⋮

$$\ddot{w}_{N-1} = -\frac{EI}{h^4 \rho A} (w_{N-3} - 4w_{N-2} + 6w_{N-1} - 4w_N + w_{N+1}) \quad (2.31)$$

$$\ddot{w}_N = -\frac{EI}{h^4 \rho A} (w_{N-2} - 4w_{N-1} + 6w_N - 4w_{N+1} + w_{N+2}) \quad (2.32)$$

Die virtuellen Knoten mit den Indices  $\nu \in [-1, 0, N+1, N+2]$  werden mit Hilfe der Randbedingungen aus dem Gleichungssystem eliminiert. Dazu setzt man die entsprechenden diskreten Ortsableitungsapproximationen in die Randbedingungen ein und erhält

$$-k_T \frac{w_2 - w_0}{2h} = -EI \frac{w_2 - 2w_1 + w_0}{h^2}, \quad (2.33)$$

$$-EI \frac{w_3 - 2w_2 + 2w_0 - w_{-1}}{2h^3} = m_F \ddot{w}_1 - u, \quad (2.34)$$

$$\frac{w_{N+1} - 2w_N + w_{N-1}}{h^2} = 0, \quad (2.35)$$

$$-EI \frac{w_{N+2} - 2w_{N+1} - 2w_{N-1} + w_{N-2}}{2h^3} = -m_K \ddot{w}_N. \quad (2.36)$$

Durch Lösung dieses Gleichungssystems lassen sich die Ausdrücke für die virtuellen Knoten  $w_{-1}$ ,  $w_0$ ,  $w_{N+1}$  und  $w_{N+2}$  wie folgt bestimmen.

$$w_0 = -\frac{2EI - k_T h}{2EI + k_T h} w_2 + \frac{4EI}{2EI + k_T h} w_1, \quad (2.37)$$

$$w_{-1} = w_3 - 2 \left( 1 + \frac{2EI - k_T h}{2EI + k_T h} \right) w_2 + \frac{8EI}{2EI + k_T h} w_1 + \frac{2h^3}{EI} (m_F \ddot{w}_1 - u), \quad (2.38)$$

$$w_{N+1} = 2w_N - w_{N-1}, \quad (2.39)$$

$$w_{N+2} = \frac{2h^3 m_K}{EI} \ddot{w}_N + 4w_N - 4w_{N-1} + w_{N-2}. \quad (2.40)$$

### Zustandsraummodell

Die  $N$  diskreten Auslenkungen aus der Nulllage  $w_\nu$  können im folgenden Gleichungssystem in Vektor-Matrix-Schreibweise zusammengefasst werden:

$$\begin{bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \\ \vdots \\ \ddot{w}_{N-1} \\ \ddot{w}_N \end{bmatrix} = \mathbf{A}_0 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.41)$$

mit

$$\mathbf{A}_0 = -\frac{EI}{\rho A h^4} \begin{bmatrix} (6 - 8k_1)k_3 & (2k_2 - 6)k_3 & 2k_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 4k_1 - 4 & 6 - k_2 & -4 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2k_4 & -4k_4 & 2k_4 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

und

$$k_1 = \frac{EI}{2EI + k_T h}, \quad (2.43)$$

$$k_2 = \frac{2EI - k_T h}{2EI + k_T h}, \quad (2.44)$$

$$k_3 = \frac{h\rho A}{h\rho A + 2m_F}, \quad (2.45)$$

$$k_4 = \frac{h\rho A}{h\rho A + 2m_K}, \quad (2.46)$$

$$\zeta = \frac{1}{\frac{\rho Ah}{2} + m_F}. \quad (2.47)$$

Das Gleichungssystem (2.41) lässt sich in Zustandsraumdarstellung schreiben als

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \vdots \\ \dot{w}_N \\ \ddot{w}_1 \\ \vdots \\ \ddot{w}_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \\ \dot{w}_1 \\ \vdots \\ \dot{w}_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \zeta \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u(t), \quad (2.48)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{E}\mathbf{x} \quad (2.49)$$

mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$  und dem Ausgang  $\mathbf{y}$ .

### Strukturdämpfung

Wie in Bild 2.6 bereits angedeutet, soll auch Strukturdämpfung modelliert werden. Dämpfung in komplexen mechanischen Strukturen ist von vielen Parametern abhängig, etwa von der Art der Fügetechnik (Schweisssnaht, Schraubverbindung oder Rahmen aus einem Guss), aber auch von Anbauteilen, die auf die Struktur aufgebracht werden. Aus diesem Grund wurde von einer detaillierten Modellierung abgesehen. Eine anschauliche Modellierung erfolgt durch Dämpferelemente  $d$  womit die Knotenrelativgeschwindigkeiten auf die jeweiligen Knotenbeschleunigungen dissipativ wirken:

$$\ddot{w}_\nu^+ = \frac{d}{m_\nu} (\dot{w}_{\nu+1} - \dot{w}_\nu), \quad (2.50)$$

$$\ddot{w}_\nu^- = \frac{d}{m_\nu} (\dot{w}_{\nu-1} - \dot{w}_\nu). \quad (2.51)$$

Die gesamte auf einen Knoten wirkende Beschleunigung  $\ddot{w}_\nu$  in Folge der modellierten Dämpferelemente lässt sich durch Summation der Beiträge in (2.50) und (2.51) darstellen:

$$\ddot{w}_\nu = \frac{d}{m_\nu} (\dot{w}_{\nu+1} - 2\dot{w}_\nu + \dot{w}_{\nu-1}) \quad (2.52)$$

Nun könnte man mittels der bereits gefundenen Zusammenhänge für die virtuellen Knoten  $w_0$  (2.37) und  $w_{N+1}$  (2.39) die gesuchte Dämpfungsmatrix aufstellen. Statt dessen wird nun die Brücke dieses aus der Anschauung gewonnenen Modells zu einer in der Literatur zu findenden kontinuierlichen Modellierung geschlagen.

Wendet man die Methode der finiten Differenzen auf den Dämpfungsterm der partiellen Differentialgleichung (2.9) an, erhält man folgenden Dämpfungsbeitrag zur Knotenbeschleunigung  $\ddot{w}_i$ :

$$\ddot{w}_\nu = -2\gamma \frac{\dot{w}_{\nu+1} - 2\dot{w}_\nu + \dot{w}_{\nu-1}}{h^2}. \quad (2.53)$$

Vergleicht man (2.53) mit (2.52) erkennt man den Zusammenhang zwischen der durch Anschauung eingeführten Dämpferkonstanten  $d$  und dem Dämpfungsparameter  $\gamma$  nach Russell [11]:

$$\gamma = -\frac{dh^2}{2m_\nu}. \quad (2.54)$$

Die Dämpfungsmatrix lässt sich nun unter Berücksichtigung der Randbedingungen in Form der virtuellen Knoten  $w_0$  (2.37) und  $w_{N+1}$  (2.39) wie folgt angeben:

$$\mathbf{D} = -\frac{2\gamma}{h^2} \begin{bmatrix} 4k_1 - 2 & 1 - k_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

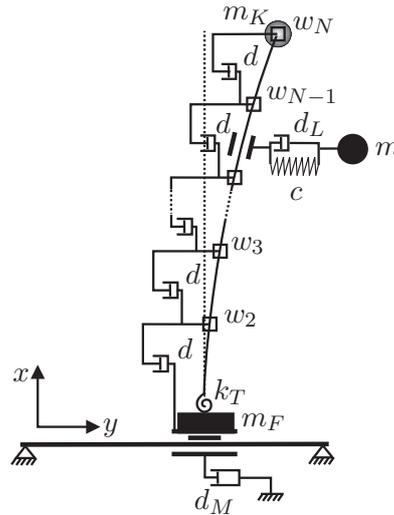
Damit ergibt sich für das betrachtete Teilsystem nach Bild 2.6 folgende Zustandsraumdarstellung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \vdots \\ \dot{w}_N \\ \ddot{w}_1 \\ \vdots \\ \ddot{w}_N \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mathbf{A}_0 & \mathbf{D} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \\ \dot{w}_1 \\ \vdots \\ \dot{w}_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \zeta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u, \quad (2.56)$$

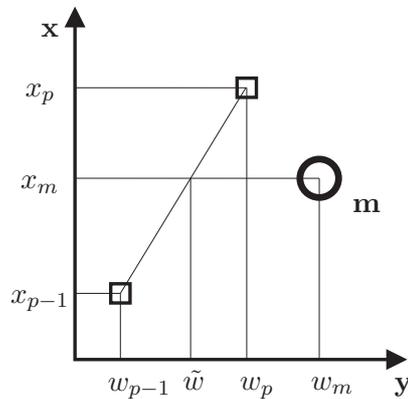
$\mathbf{y} = \mathbf{E} \mathbf{x}.$

### 2.3.2 Zeitvariante Massenbelegung

Nachdem für den als Euler-Bernoulli-Balken modellierten Träger eine Zustandsraumdarstellung mit Hilfe der Methode der Finiten Differenzen gefunden wurde, wird nun die auf dem Träger bewegliche Last als Punktmasse modelliert. Besteht die Struktur aus nur einem Balken, wird die Last nicht nur translatorisch sondern auch rotatorisch bewegt. Da allerdings die rotatorische Anregung mit sehr geringer Amplitude



**Bild 2.7:** Ortsdiskretisierung mit zeitvarianter Massenbelegung.



**Bild 2.8:** Veranschaulichung der verwendeten Größen zur Modellierung einer sich zwischen zwei Knoten befindlichen Last.

und abgeschwächt durch die stets wirkenden Koppelsteifigkeiten des Fahrwerks erfolgt, wird sie vernachlässigt. Die Zulässigkeit dieser Näherung konnte experimentell bestätigt werden.

## Modellierung

Die Nutzlast befinde sich zwischen den Knoten mit den Indices  $p - 1$  und  $p$  (siehe Bild 2.8). Zur Bestimmung der Feder- und Dämpferkräfte ist der Ort der Biegelinie  $\tilde{w}$  zwischen den Knoten zu approximieren.

Die lineare Approximation der herrschenden Balkenauslenkung  $\tilde{w}$  an der Stelle der Nutzlast  $x_m$  und deren zeitliche Ableitung  $\dot{\tilde{w}}$  lassen sich wie folgt berechnen:

$$\tilde{w} = w_{p-1} + \frac{x_m - x_{p-1}}{h} (w_p - w_{p-1}) \quad (2.57)$$

$$\dot{\tilde{w}} = \dot{w}_{p-1} + \frac{\dot{x}_m}{h} (w_p - w_{p-1}) + \frac{x_m - x_{p-1}}{h} (\dot{w}_p - \dot{w}_{p-1}). \quad (2.58)$$

Damit sind die zur Auswertung des Hookeschen Federgesetzes benötigten Größen gegeben:

$$F_c = c (w_m - \tilde{w}) \quad (2.59)$$

$$F_c = c \left( w_m - w_{p-1} - \frac{x_m - x_{p-1}}{h} (w_p - w_{p-1}) \right) \quad (2.60)$$

$$F_{d_L} = d_L (\dot{w}_m - \dot{\tilde{w}}) \quad (2.61)$$

$$= d_L \left( \dot{w}_m - \dot{w}_{p-1} - \frac{\dot{x}_m}{h} (w_p - w_{p-1}) - \frac{x_m - x_{p-1}}{h} (\dot{w}_p - \dot{w}_{p-1}) \right). \quad (2.62)$$

Durch Aufstellen des Kräftegleichgewichts in horizontaler und vertikaler Richtung erhält man die Bewegungsgleichungen der Nutzlast:

$$\ddot{w}_m = \frac{1}{m_L} (-F_c - F_{d_L}) \quad (2.63)$$

$$\ddot{x}_m = \frac{F_{Hub}}{m_L}. \quad (2.64)$$

Für die unmittelbar um die Nutzlast benachbarten Knoten ergeben sich folgende zusätzlichen nach dem Ort der Nutzlast gewichteten Beschleunigungen:

$$\ddot{w}_{p,zus}(x_m, x_p) = \frac{1}{m_p} \frac{x_m - x_p + h}{h} (F_c + F_d) \quad (2.65)$$

$$\ddot{w}_{p-1,zus}(x_m, x_{p-1}) = \frac{1}{m_{p-1}} \frac{x_{p-1} + h - x_m}{h} (F_c + F_d) \quad (2.66)$$

mit den Knotenmassen  $m_\nu$  mit  $\nu \in [p-1, p]$ . Die Massen  $m_\nu$  berechnen sich zu:

$$m_1 = \rho Ah \cdot \frac{1}{2k_3} = \frac{\rho Ah}{2} + m_F, \quad (2.67)$$

$$m_\nu = \rho Ah \quad \nu = 2, \dots, N-1, \quad (2.68)$$

$$m_N = \rho Ah \cdot \frac{1}{2k_4} = \frac{\rho Ah}{2} + m_K \quad (2.69)$$

mit den Faktoren  $k_3$  und  $k_4$  nach (2.45) und (2.46).

### Zeitvariantes Zustandsraummodell

In diesem Abschnitt wird die Zustandsraumdarstellung des translatorisch gelagerten Balkens (2.48) um die vorangehend erarbeiteten Größen erweitert. Dazu muss der Vektor  $b$  zur Berücksichtigung der vertikalen Hubkraft  $F_{Hub}$  um eine Spalte ergänzt werden. Um die Dynamik der neuen Zustände der Nutzlast - Hubhöhe und Hubgeschwindigkeit - mit zu erfassen, muss die Zustandsraumdarstellung um die

zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (2.63) und (2.64) entsprechend erweitert werden.

Abschließend sind die auf die Struktur wirkenden Trägheitskräfte der beweglichen Last zu berücksichtigen. Dabei kommen zu den aus der Euler-Bernoulli-Balkendynamik resultierenden Knotenbeschleunigungen, die aus den Feder- und Dämpferkräften resultierenden Beschleunigungen der benachbarten Knoten hinzu:

$$\ddot{w}_p = \ddot{w}_{p,\text{zeitinvariant}} + \ddot{w}_{p,\text{zus}} \quad (2.70)$$

$$\ddot{w}_{p-1} = \ddot{w}_{p-1,\text{zeitinvariant}} + \ddot{w}_{p-1,\text{zus}}. \quad (2.71)$$

Um den Ausdruck „benachbart“ mathematisch fassen zu können, werden die in Bild 2.9 dargestellten Schaltfunktionen  $S_p(x_m, x_\nu)$  in (2.72) und  $S_{p-1}(x_m, x_\nu)$  in (2.73) eingeführt.

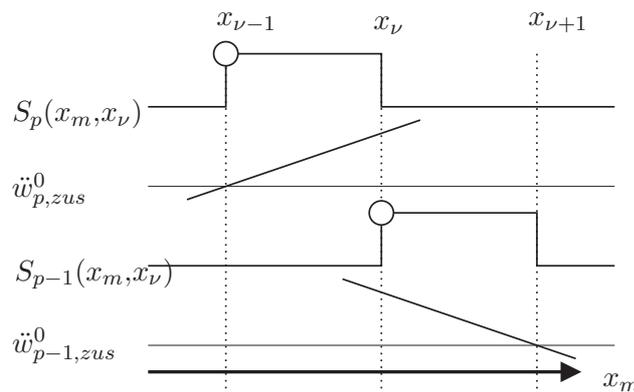
$$S_p(x_m, x_\nu) = \Theta_1(x_\nu - x_m) - \Theta_1(x_\nu - (x_m + h)) \quad \nu = 2, \dots, N \quad (2.72)$$

$$S_{p-1}(x_m, x_\nu) = \Theta_1(x_\nu - (x_m - h)) - \Theta_1(x_\nu - x_m) \quad \nu = 2, \dots, N \quad (2.73)$$

Dabei ist  $\Theta_c(t)$  die Heavside-Funktion:

$$\Theta_c(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}. \quad (2.74)$$

Befindet sich der Knoten  $x_\nu$  einerseits überhalb dem Ort der Masse  $x_m$  und andererseits aber nicht weiter unterhalb von  $x_\nu$  als einen Knotenabstand  $h$ , so beträgt der Wert der Funktion  $S_p$  gleich eins. Ansonsten verschwindet  $S_p$ . Damit signalisiert diese Schaltfunktion, ob als zusätzliche Beschleunigung für den Knoten am Ort  $x_\nu$  Gleichung (2.65) zur Anwendung kommt. Falls der Knoten  $x_\nu$  nicht die Rolle des oberen Knotens  $x_p$  aus Bild 2.8 übernimmt, sondern die des unteren Knotens  $x_{p-1}$  wird dies entsprechend durch  $S_{p-1}$  signalisiert. Bild 2.9 veranschaulicht dies am Beispiel eines Knotens  $x_\nu$ .



**Bild 2.9:** Veranschaulichung der Schaltfunktionen und der in Folge der Last zusätzlichen Beschleunigungen.

Insgesamt kann ein Differentialgleichungssystem (2.75) für die Simulation eines Sys-



### 2.3.3 System mit statischer Massenbelegung

Da die aktive Schwingungsdämpfung mittels einer Zustandsregelung für den Zielpunkt des Positioniermanövers ausgelegt werden soll, werden die nötigen Schritte zur Erweiterung von (2.48) um eine fest auf der Struktur befindliche Masse vorgestellt.

Dabei wird analog zum vorangegangenen Abschnitt die Wirkung der Lastmasse auf die benachbarten Knoten gewichtet verteilt. Da die Fahrwerksfederung im Vergleich zur Steifigkeit des Balkens im Allgemeinen wesentlich steifer ist, wird die Masse zur Reglerauslegung als starr angekoppelt betrachtet. Die Masse der Last wird dann proportional zu ihren Abständen von den benachbarten Knoten zu deren jeweiligen Massen addiert.

Die zu den um die Last unmittelbar benachbarten Knoten gehörenden Zeilen  $\mathbf{a}_p$  und  $\mathbf{a}_{p-1}$  der zeitinvarianten Systemmatrix  $\mathbf{A}_0$  werden dazu wie folgt modifiziert:

$$\mathbf{a}_{p,neu} = k_{oben} \cdot \mathbf{a}_{p,alt}, \quad (2.76)$$

$$\mathbf{a}_{p-1,neu} = k_{unten} \cdot \mathbf{a}_{p-1,alt} \quad (2.77)$$

wobei

$$k_{oben} = \frac{\rho Ah}{\rho Ah + 2k_4 m_L \cdot Anteil_{oben}}, \quad p = N, \quad (2.78)$$

$$k_{unten} = \frac{\rho Ah}{\rho Ah + 2k_4 m_L \cdot Anteil_{unten}}, \quad p = N, \quad (2.79)$$

$$k_{oben} = \frac{\rho Ah}{\rho Ah + m_L \cdot Anteil_{oben}}, \quad p = 2, \dots, N - 1, \quad (2.80)$$

$$k_{unten} = \frac{\rho Ah}{\rho Ah + m_L \cdot Anteil_{unten}}, \quad p = 2, \dots, N - 1, \quad (2.81)$$

$$k_{oben} = \frac{\rho Ah}{\rho Ah + 2k_3 m_L \cdot Anteil_{oben}}, \quad p = 1, \quad (2.82)$$

$$k_{unten} = \frac{\rho Ah}{\rho Ah + 2k_3 m_L \cdot Anteil_{unten}}, \quad p = 1, \quad (2.83)$$

$$Anteil_{oben} = \frac{x_m - x_{p-1}}{h}, \quad (2.84)$$

$$Anteil_{unten} = \frac{x_p - x_m}{h} \quad (2.85)$$

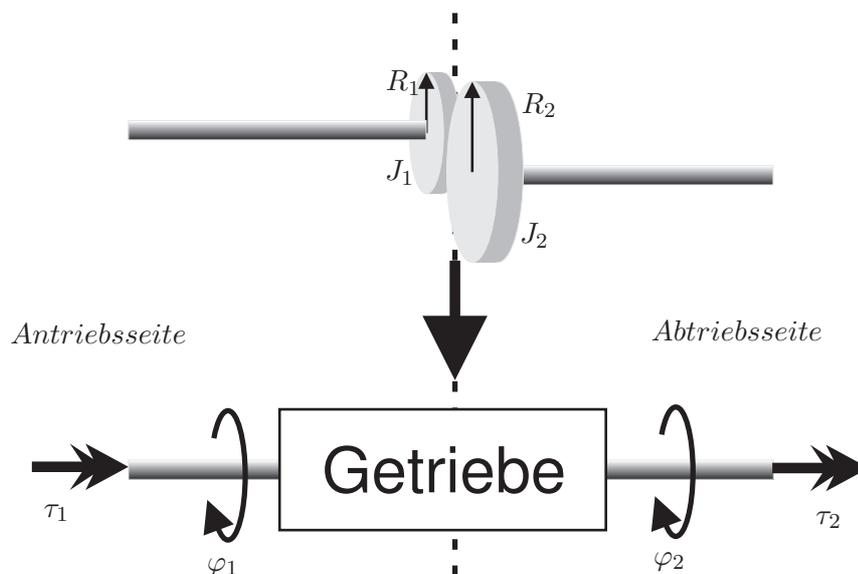
mit  $k_3$  und  $k_4$  nach (2.45) und (2.46). Befindet sich die Last zwischen dem ersten und zweiten Knoten, also in unmittelbarer Nachbarschaft zum Kräfteinleitungspunkt, muss zusätzlich die Einkoppelmatrix  $\mathbf{B}$  angepasst werden. Hierfür wird der Faktor  $\zeta$  neu berechnet:

$$\zeta = \frac{2}{\frac{\rho Ah}{2} + m_{Fuss} + m_L Anteil_{unten}}. \quad (2.86)$$

## 2.4 Antriebskraft

In den nachfolgenden Abschnitten wird die vorangehend jeweils direkt auf die Masse der Einspannung wirkende Kraft  $u(t)$  berechnet.

### 2.4.1 Übersetzung



**Bild 2.10:** Schematischer Aufbau eines einstufigen Getriebes und Abstraktion

In Bild 2.10 ist der schematische Aufbau eines einstufigen Getriebes gezeichnet. Die auch für mehrstufige Getriebe gültige Abstraktion ist ebenfalls dargestellt. Die abtriebsseitige Zählpfeilrichtung ist dabei losgelöst von der physikalischen Dreh- und Momentenrichtung, um nicht zwischen Getrieben mit gerader oder ungeradzahlgiger Stufenzahl unterscheiden zu müssen. Ferner werden nachfolgend ideale Zahnräder betrachtet, weshalb die Übersetzung  $i$  als winkelunabhängige Konstante angenommen wird. Für große Anlagen ist diese Vereinfachung sicherlich zulässig, da die Amplitude der Übersetzungswelligkeit zum einen sehr klein ausfällt und zum anderen von hochfrequenter Natur ist. Die hochfrequente Momentenanregung wird vom aktuierten mechanischen System gemittelt.

Aus der Kinematik und dem Momentengleichgewicht folgend ergibt sich jeweils das konstante Übersetzungsverhältnis  $i$  für die jeweiligen antriebs- und abtriebsseitigen Größen zu

$$i = \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\tau_2}{\tau_1}. \quad (2.87)$$

**Definition 2.4.1** Die Übersetzung  $i$  sagt aus, wie oft sich der Motor für eine abtriebsseitige Umdrehung drehen muß. Für  $i > 1$  spricht man auch von einer Untersetzung.

Sofern nicht dynamisch auf die Zahnflanken der einzelnen Getriebestufen wirkende Kräfte abgebildet werden sollen, ist es zweckmäßig die Drehträgheiten  $J_1$  und  $J_2$  auf die An- oder hier besser die Abtriebsseite zu transformieren:

$$J_1^{Gesamt} = J_1 + \frac{1}{i^2} J_2, \quad (2.88)$$

$$\ddot{\varphi}_1 J_1^{Gesamt} = \tau_1, \quad (2.89)$$

$$J_2^{Gesamt} = J_2 + i^2 J_1, \quad (2.90)$$

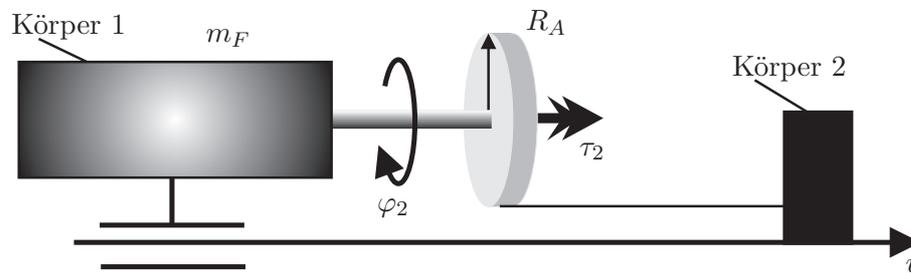
$$\ddot{\varphi}_2 J_2^{Gesamt} = \tau_2, \quad (2.91)$$

Dabei beschreibt (2.89) die für die Antriebsseite umgerechnete Dynamik des Antriebsstrangs. Der Zusammenhang zur Abtriebsseite ist damit rein kinematischer Natur. In (2.91) ist der analoge Sachverhalt auf die Abtriebsseite bezogen.

## 2.4.2 Abtriebsseitige Ersatzmasse

Die in diesen Kapitel vorgestellten Modellierungen gehen von Kräften aus, die direkt auf die zu bewegenden Massen wirken. Daher müssen die rotatorischen Trägheiten in entsprechende translatorische Trägheiten umgerechnet und dem zu bewegenden Körper zugeschlagen werden um den dynamischen Einfluss eines Getriebes z.B. im Rahmen einer Vorsteuerung zu berücksichtigen.

Um eine Rotation in eine Translation zu wandeln kommen für längere translatorische Wege oft Räder als letzte Getriebestufe zum Einsatz. Gängige Mittel hierzu sind Zahnriemen oder -stangen, Seilzug oder auch Reibradantriebe. In Bild 2.11 ist ein aktuiertes translatorisches Gelenk dargestellt. Der Antrieb befindet sich auf Körper 1 und prägt das Moment  $\tau_2$  auf das Abtriebszahnrad mit dem Radius  $R_A$  ein. Der Kraftschluss erfolgt exemplarisch mittels eines Seils. Es gilt folgende differentielle



**Bild 2.11:** Schematische Darstellung der Umsetzung einer rotatorischen Bewegung in eine translatorische Bewegung.

kinematische Beziehung zwischen der Beschleunigung  $\ddot{y}$ , dem Radius  $R_A$  und der

Winkelbeschleunigung  $\ddot{\varphi}_2$ :

$$\ddot{\varphi}_2 R_A = \ddot{y}. \quad (2.92)$$

Aus der gegebenen Kinematik folgt für das Momentengleichgewicht um die Abtriebsachse

$$\tau_1 = J_2^{Gesamt} \ddot{\varphi}_2 + m_F \ddot{y} R_A. \quad (2.93)$$

Zusammen mit (2.92) lässt sich schreiben

$$\tau_1 = J_2^{Gesamt} \frac{\ddot{y}}{R_A} + m_F \ddot{y} R_A \quad (2.94)$$

$$F_A^{Soll} = \left( J_2^{Gesamt} \frac{1}{R_A^2} + m_F \right) \ddot{y} \quad (2.95)$$

wodurch nach Vergleich mit dem Newtonschen Trägheitsgesetz als Formel für die gesuchte translatorische Scheinzusatzmasse  $m_Z$  folgt

$$m_Z = \frac{J_2 + i^2 J_1}{R_A^2}, \quad (2.96)$$

mit  $J_2$  dem abtriebsseitig vorhandenen Drehträgheitsmoment inkl. z.B. vorhandener Anbauteile,  $J_1$  dem antriebsseitigem Drehträgheitsmoment,  $R_A$  dem Abtriebsritzelradius und schließlich  $i$  der Getriebeübersetzung.

Für das am Antrieb nötige Moment  $\tau_1$  zur Bewegung der Fusspunktmasse  $m_F$  und der Scheinzusatzmasse  $m_Z$  entlang der Trajektorie des Fusspunkts  $y$  kann der rein kinematische Zusammenhang

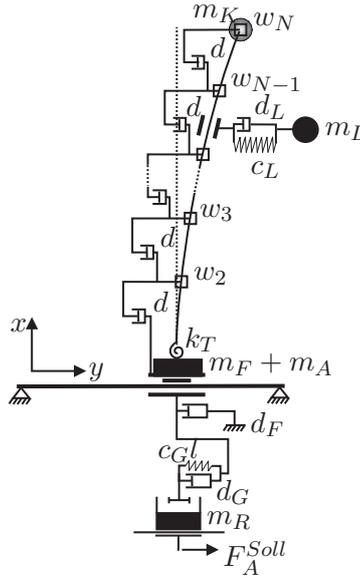
$$\tau_1 = \frac{F_A^{Soll} R_A}{i} \quad (2.97)$$

dienen, wobei  $F_A^{Soll}$  nach (2.95) in Abhängigkeit der gewünschten Fusspunkttrajektorie  $y$  bestimmt wird.

### 2.4.3 Spiel im Antriebsstrang

Aus wirtschaftlichen Gründen werden im Antrieb häufig Elemente verwendet, die nicht spielfrei sind. Spiel stellt für Regelkreise eine die Bandbreite oft maßgeblich limitierende Größe dar, was sich z.B. mittels der Methode der harmonischen Balance zeigen lässt [17]. Wogegen eine Vorsteuerung auf Grund der fehlenden Rückkopplung keine Probleme in Form von auftretenden störenden Grenzyklen aufweist.

Um spielbehaftete Antriebe simulativ zu erfassen, wurde folgende Modellierung vorgenommen. Der Zustandsraum ist um mindestens zwei Zustände zu erweitern - Lage und Geschwindigkeit des Rotors. Im Falle mehrstufiger Getriebe sind entsprechend weitere Zustandserweiterungen zur vollständigen Abbildung nötig.



**Bild 2.12:** Erweiterung um spielbehafteten Antrieb mit rotatorisch bewegten Teilen

Der freie Weg, den das Gerät zurücklegen kann ehe dazu eine Drehung der Antriebsseite nötig ist, wird als Spiel  $y_{Spiel}$  bezeichnet. Für den Winkel des Abtriebs  $\varphi_2^{Spiel}$  entlang des Spiels gilt

$$y_{Spiel} = R_A \varphi_2^{Spiel}. \quad (2.98)$$

Nun müssen die Drehträgheiten in antriebs- und abtriebsseitige Drehträgheiten separiert werden. Aus (2.96) folgt für die Zusatzmasse des Rotors  $m_R$  und die des Abtriebs  $m_A$

$$m_A = \frac{J_2}{R_A^2} \quad (2.99a)$$

$$m_R = \frac{i^2 J_1}{R_A^2}. \quad (2.99b)$$

Die zusätzliche Dynamik des Rotors ausgedrückt in translatorischen Ersatzgrößen errechnet sich zu

$$\frac{J_1 i^2}{R_A^2} \ddot{y}_R = \frac{i}{R_A} \tau_1 - F_A. \quad (2.100)$$

Zusammen mit Formel (2.97) lässt sich vereinfachend schreiben

$$\frac{J_1 i^2}{R_A^2} \ddot{y}_R = F_A^{Soll} - F_A. \quad (2.101)$$

Mit  $F_A^{Soll}$  der geplanten dem Umrichter vorgegebenen Antriebskraft am Gerät,  $F_A$  der von den Zahnflanken übertragenen Antriebskraft.  $F_A$  ist nichtlinear von Lage und Geschwindigkeit des Rotors ( $y_R$  sowie  $\dot{y}_R$ ) und des Fahrwerks  $y_F$  sowie  $\dot{y}_F$

**Tabelle 2.3:** Parameter des Fahrantriebs

<b>Motor</b>	Typ	MCA21X25RSO P1
	Massenträgheitsmoment $J_A$	0,02118 $kgm^2$
	maximales Moment $M_{Mot,MAX}$	300 $Nm$
<b>Getriebe</b>	Typ	GPA-03-1A CN 21XN25
	Massenträgheitsmoment $J_2$	0,0187 $kgm^2$
	maximales Moment $\tau_2^{Max}$	290 $Nm$
	Getriebeübersetzung $i$	3
	Getriebespiel $\varphi_2^{Spiel}$	6 $arcmin$
	Getriebedrehsteifigkeit $c_G$	47 $Nm/arcmin = 2820 Nm/^\circ$
<b>Abtriebsritzel</b>	Radius $R_A$	50 $mm$

abhängig und wie folgt definiert.

$$R_A F_A = \begin{cases} 0, & \text{wenn } |y_R - y_F| < \frac{y_{Spiel}}{2} \\ c_G(y_R - y_F) + d_G(\dot{y}_R - \dot{y}_F) & \text{wenn } y_R - y_F > \frac{y_{Spiel}}{2} \\ c_G(y_R - y_F) + d_G(\dot{y}_R - \dot{y}_F) & \text{wenn } y_R - y_F < -\frac{y_{Spiel}}{2} \end{cases} \quad (2.102)$$

Dabei ist  $c_G$  die Getriebesteifigkeit,  $y_{Spiel}$  der Betrag des Spiels und  $d_G$  die Getriebedämpfung. Die Getriebesteifigkeit kann Datenblättern von Getriebeherstellern entnommen werden.

Nach [19] setzt sich die Dämpfung im Wesentlichen aus Werkstoffdämpfungen in Folge der auftretenden Materialverformungen und der Dämpfung im Schmierfilm zwischen den Zahnflanken zusammen. In der Literatur sind z.T. stark unterschiedliche Angaben über die Dämpfung, sowie deren Modellierung, zu finden. Für Getriebe üblicher Ausführung liegt das Lehr'sche Dämpfungsmaß  $D$  zwischen 0,05 und 0,1. Nach [19] erfolgt die Umrechnung auf den Dämpfungsfaktor  $d_G$  mit der einfachen Beziehung des Ein-Masse-Schwingers:

$$d_G = D \cdot 2\sqrt{c_G \cdot m_R} \quad (2.103)$$

### Parameter einer realen Antriebskonfiguration

In Tabelle 2.3 sind exemplarisch die Daten einer realen Antriebskonfiguration der Firma Lenze [23, 24] aufgeführt.

Das Getriebespiel  $y_2^{Spiel}$  berechnet sich zu:

$$y_{Spiel} = \frac{\varphi_2^{Spiel} \cdot \pi}{60 \cdot 180} \cdot R_A = 0,08727 \text{ mm} \quad (2.104)$$

Die translatorischen Ersatzmassen  $m_A$  und  $m_R$  errechnen sich mit (2.99b) zu

$$m_R = \frac{J_1 \cdot i^2}{R_A^2} = 76,25 \text{ kg}, \quad (2.105a)$$

$$m_A = \frac{J_2}{R_A^2} = 67,32 \text{ kg}. \quad (2.105b)$$

Die im Datenblatt des Getriebes gegebene Größe der Trägheit am Abtrieb ist  $J_2^{Gesamt}$ , da allerdings die Trägheit des Antriebsstummels wesentlich kleiner ist als die des Abtriebs, wird selbige hier vernachlässigt. Die Ersatzfedersteifigkeit des Getriebes  $c_G$  berechnet sich zu:

$$c_{Gl} = \frac{c_G \cdot 180 \cdot 60}{\pi \cdot R_A^2} = 6,463 \cdot 10^7 \text{ N/m}. \quad (2.106)$$

### Anpassungen des Zustandsraummodells

Im Falle eines einstufigen spielbehafteten Getriebes ist das Zustandsraummodell wie folgt zu ergänzen. Die Lage des Rotors  $y_R$  und dessen Geschwindigkeit  $\dot{y}_R$  sind als neue Zustände einzuführen. Die in den vorigen Abschnitten als  $u$  bezeichnete Antriebskraft ist nun durch  $F_A$  aus (2.102) in Abhängigkeit der Zustände  $y_R$ ,  $\dot{y}_R$ ,  $y_F$  und  $\dot{y}_F$  gegeben. Die Dynamik von  $y_R$  ist mit (2.100) gegeben, weshalb auch der neue Systemeingang durch  $F_A^{Soll}$  durch  $u$  gegeben ist. Zur Gesamtmasse der Einspannung mit den sonstigen am Fußpunkt befindlichen Anbauteilen  $m_F$  ist die translatorische Ersatzmasse der Drehträgheiten aus Getriebe und Motor  $m_A$  zu addieren.

## 2.5 Reibung

Sowohl für die Kraftvorsteuerung als auch für die Güte der Positionsregelung stellt die Reibung in der praktischen Anwendung den Hauptgegenspieler dar, weshalb nachfolgend die Phänomene der Reibung näher beleuchtet werden.

### Reibungsarten

Die Reibungskraft wirkt der Bewegungsrichtung entgegen und wandelt damit kinetische Energie in Wärme. Aussagen zur Reibung können nie für einen Körper allein getroffen werden, sondern nur für ein *Tribosystem*, bestehend aus Grundkörper, Gegenkörper, Zwischenstoff und Umgebungsmedium. Man unterscheidet zwischen zwei verschiedenen Formen der Reibung [22, 29]:

#### 1. Trockene Reibung

Trockene Reibung ist durch Relativbewegung zweier Körper ohne Schmiermittel gekennzeichnet. Zu unterscheiden sind einige Spezialfälle, von denen die drei wichtigsten aufgeführt werden sollen.

- Coulomb-Reibung

Reibungskräfte sind auf mikroskopische und makroskopische Phänomene zurückzuführen. Einerseits sind sie eine Folge von Wechselwirkungen zwischen vielen Atomen in den obersten Atomlagen der sich berührenden Oberflächen. In den Kontaktflächen entstandene atomare oder molekulare Bindungen, auch Adhäsion genannt, werden bei Relativbewegung durch sogenanntes Scheren wieder getrennt, wodurch ein Energieverlust entsteht. Adhäsionsbindungen werden begünstigt durch Mikrorauigkeit der Kontaktflächen, welche durch Gitterfehler, wie z.B. Stufenversetzungen, begründet wird. Ferner wird Energie durch makroskopische Effekte dissipiert. Deformation und Furchung verursacht eine Reibungswirkung durch Verdrängen von Überschneidungen der Makroerhebungen. Diese makroskopischen Unebenheiten werden durch Fertigungsungenauigkeiten oder plastische Verformung hervorgerufen.

Die Reibungskraft ist abhängig von Material und Oberflächenbeschaffenheit der Körper. Außerdem wird deutlich, dass Reibungsmechanismen örtlich und zeitlich stochastisch verteilte Prozesse sind.

Wird auf einen ruhenden Körper eine Kraft eingeprägt, wirkt die Haftreibung einer Bewegung entgegen so lange:

$$|F| < H_0 = \mu_0 F_N, \quad (2.107)$$

mit dem Haftreibungskoeffizienten  $\mu_0$ . Wird die Haftreibungsgrenze  $H_0$  überschritten, beginnt der Körper zu gleiten und es muss die Gleitreibung überwunden werden:

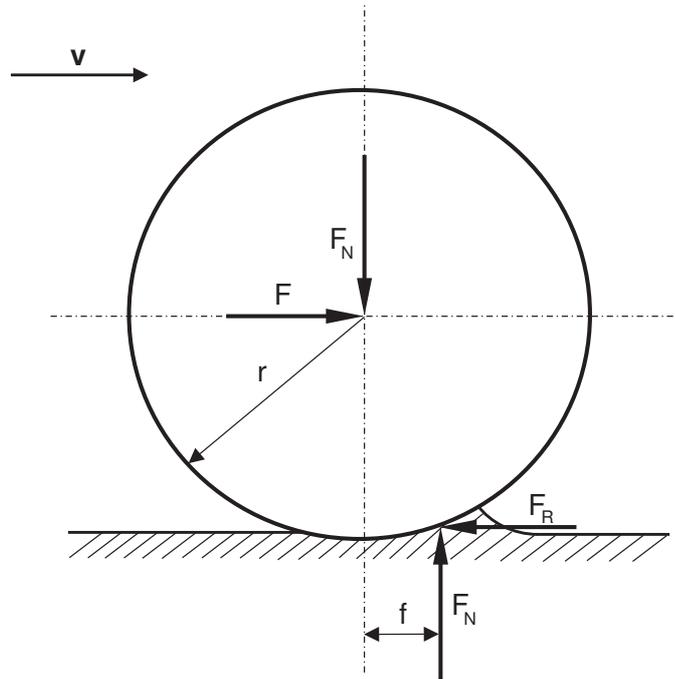
$$\mathbf{F}_R = -\mu_R F_N \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}. \quad (2.108)$$

Dabei ist  $\mu_R$  der Gleitreibungskoeffizient. Der Gleitreibungskoeffizient ist kleiner als der Haftreibungskoeffizient ( $\mu_R < \mu_0$ ), da bei Gleiten nicht das relative Minimum des mittleren Abstands beider Grenzflächen erreicht wird.

- Rollreibung

Beim Rollen eines Körpers auf einer Unterlage ist Adhäsion nicht entscheidend. Die Rollreibungskraft wird bestimmt durch elastische Verformung der nicht ideal starren Körper. Der Rollkörper drückt sich in die Unterlage und schiebt eine Schwelle vor sich her. Da es keine ideal elastische Verformung gibt, führen Nachwirkung und Hysterese zu Energieverlusten. Das Prinzip ist in Bild 2.13 dargestellt. Den Rollvorgang kann man sich als fortwährendes Kippen über die Schwelle vorstellen, wozu ein entsprechendes Drehmoment zur Aufrechterhaltung der Bewegung zugeführt werden muss.

Bildet man das Momentengleichgewicht um die Körperachse, so erhält



**Bild 2.13:** Darstellung der Ursache für Rollreibung

man:

$$F_R r = F_N f, \quad (2.109)$$

wobei  $f$  der Hebelarm der Rollreibungskraft,  $r$  der Radius des Rollkörpers und  $F_N$  die Summe aus Gewichtskraft und Belastung der Achse ist. Durch Umstellung der Gleichung erhält man die Rollreibungskraft:

$$\mathbf{F}_R = -\mu_{Roll} F_N \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad \text{mit der Rollreibungszahl } \mu_{Roll} = \frac{f}{r}. \quad (2.110)$$

Rollreibung ist geringer als Gleitreibung, da bei Rollvorgängen sich kontaktierende Stoffbereiche der beiden Kontaktpartner nur normal zur Kontaktfläche annähern und wieder entfernen. Für technische Anwendungen wie z.B. Wälzlager wählt man  $f = 0,0005\text{mm} - 0,001\text{mm}$ . Treten Gleit- und Rollreibung gleichzeitig auf, bezeichnet man diese Mischform als Wälzreibung.

- Bohrreibung

Bohrreibung beschreibt die Reibung am Auflagerpunkt einer sich um die vertikale Achse drehenden Kugel auf einer horizontalen Ebene. Sie ist ein Gleichgewichtszustand zwischen Reibungswiderstand und Drehmoment.

## 2. Fluidreibung

Fluidreibung tritt auf, wenn sich zwischen den Gleitflächen ein permanenter Schmierfilm bildet. Typische Schmierstoffe sind Öle, Wasser oder Gase. Die

Gleitflächen sind vollständig voneinander getrennt. Daher entsteht die Flüssigkeitsreibung durch die innere Reibung des Fluids. Man klassifiziert die Fluidreibung nach der Reynoldszahl  $Re$  und erhält 2 Grenzfälle.

- Viskose Reibung/Stokes-Reibung

Man spricht von viskoser Reibung, wenn die charakteristische Reynoldszahl eine kritische Reynoldszahl unterschreitet  $Re < Re_{krit}$ . Für eine Plattenanströmung gilt etwa  $Re_{krit} = 3 \cdot 10^6$ . In diesem Fall wird der Körper vom Fluid laminar umströmt und die Reibungskraft ist proportional zum Belag der Anströmgeschwindigkeit:

$$\mathbf{F}_R = -b|\mathbf{v}|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}. \quad (2.111)$$

Hierbei ist  $b$  der Zähigkeitskoeffizient, welcher abhängig ist von der Form des Körpers und der Viskosität des Fluids.

- Turbulente Reibung/Newton-Reibung

Ist die charakteristische Reynoldszahl größer als die kritische Reynoldszahl  $Re > Re_{krit}$  so liegt turbulente Reibung vor. Dabei wird der Körper vom Fluid turbulent umströmt und die Reibungskraft ist proportional zur Anströmgeschwindigkeit im Quadrat:

$$\mathbf{F}_R = -d|\mathbf{v}|^2\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}. \quad (2.112)$$

Dabei ist  $d$  der Reibungskoeffizient. Dieser ist abhängig von der Anströmfläche, der Oberflächenbeschaffenheit, der Dichte und Art des Fluids.

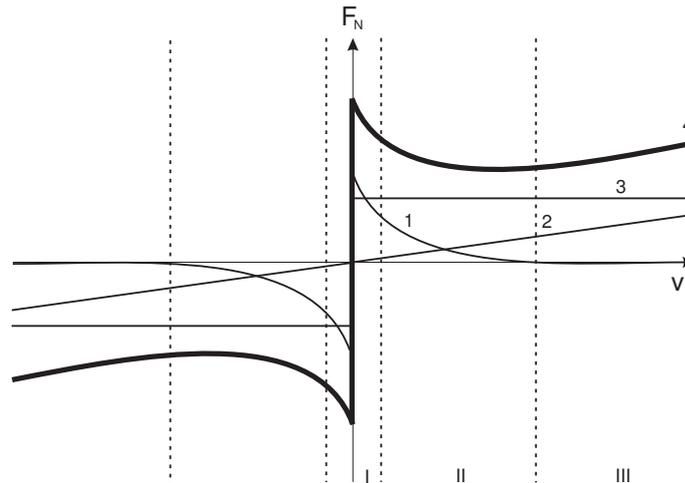
Es ist anzumerken, dass der Übergang zwischen den beiden Grenzfällen fließend ist. Die allgemeine Formel für die Fluidreibung lautet in ungekürzter Darstellung:

$$\mathbf{F}_R = -a|\mathbf{v}|^n\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}. \quad (2.113)$$

Insbesondere soll dabei auf die Fluidreibung in geschmierten Lagern hingewiesen werden, bei der der Exponent den Wert  $n = \frac{1}{2}$  annimmt.

Der Übergang von der Festkörperreibung zur Fluidreibung wird durch die Stribeckkurve dargestellt. Die Stribeckkurve beschreibt den Verlauf der Reibkraft in Abhängigkeit von der Reibgeschwindigkeit im Falle hydrodynamischer Reibung. Wesentliche Bereiche der Stribeckkurve sind in Bild 2.14 dargestellt:

- reine Haftreibung ( $v = 0$ )
- Grenzreibung (I)
- Mischreibung (II)
- Fluidreibung (III)



**Bild 2.14:** Stribeckkurve: 1 Haftreibanteil, 2 viskoser Reibanteil, 3 Rollreibung, 4 Stribeckreibung

Findet keine Relativbewegung statt, so herrscht Haftreibung. Sobald eine Kraft angreift, die größer als die Haftreibungskraft ist, beginnt die Relativbewegung. Zunächst trennen nur einige Moleküle des Schmierstoffs teilweise den Grundkörper vom Gegenkörper, es herrscht Grenzreibung. Dabei nimmt die Haftreibungskraft nicht sprunghaft sondern stetig ab. Sobald sich ein dünner Schmierfilm bildet und nur noch einige Rauheitshügel von Grund- und Gegenkörper ohne Trennung durch den Schmierstoff aufeinander gleiten, liegt Mischreibung vor. Bei weiterer Geschwindigkeitserhöhung erfolgt ein Übergang von der Mischreibung zur Fluidreibung, bei der Grund- und Gegenkörper vollständig durch den Schmierstoff getrennt sind. Weiterhin ist aus Bild 2.14 ersichtlich, dass die Stribeckkurve die Summe aus Haftreibung, viskoser Reibung und Rollreibungskraft darstellt. Daraus ergibt sich im Bereich der Mischreibung ein lokales Minimum der Reibungskraft, bis diese im Bereich der Fluidreibung linear ansteigt.

## 3 Eigendynamik der Systemklasse

In diesem Kapitel werden die dynamischen Eigenschaften des Systems untersucht. Dazu werden zunächst die auftretenden Eigenfrequenzen und Eigenformen als dynamische Kenngrößen des homogenen Differentialgleichungssystems behandelt. Im nächsten Abschnitt werden Aussagen zur Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit des Systemzustands basierend auf den zuvor hergeleiteten Eigenformen getroffen.

### 3.1 Eigenfrequenzen und Eigenformen

Nachfolgend werden auf analytischem Weg die Eigenfrequenzen und Eigenformen der in dieser Arbeit betrachteten mechanischen Systemstruktur hergeleitet. Damit können auf anschauliche Weise Fragen zur benötigten Bandbreite der Signalverarbeitungskette, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des zeitinvarianten Systems beantwortet werden.

#### 3.1.1 Separationsansatz

Zur Lösung der homogenen Euler-Bernoulli-Balkendifferentialgleichung (2.8) benutzt man den Separationsansatz [43]

$$w(x,t) = \sum_{\iota=1}^{\infty} \hat{w}_{\iota}(x) q_{\iota}(t) = \mathbf{q}(t)^T \hat{\mathbf{w}}(x). \quad (3.1)$$

Um dem Superpositionsprinzip linearer Systeme zu genügen, muss jeder einzelne Summenterm des Ansatzes auch für sich die Euler-Bernoulli-Balkendifferentialgleichung erfüllen, also

$$\hat{w}_{\iota}^{IV} q_{\iota} + \left( \frac{\rho A}{EI} \right) \hat{w}_{\iota} \ddot{q}_{\iota} = 0. \quad (3.2)$$

Dabei dient die Notation  $\hat{w}_{\iota}^{IV}$  der leichteren Lesbarkeit von  $\frac{\partial^4 \hat{w}(x)}{\partial x^4}$ . Durch Umformung lassen sich die zeitlichen und örtlichen Änderungen der  $\iota$ -ten Eigenform und -frequenz separieren. Da Ort und Zeit unabhängige Größen sind, müssen die Verhältnisse der sogenannten Separationskonstante  $\omega_{\iota}$  genügen, gemäß

$$\left( \frac{EI}{\rho A} \right) \frac{\hat{w}_{\iota}^{IV}}{\hat{w}_{\iota}} = -\frac{\ddot{q}_{\iota}}{q_{\iota}} = \omega_{\iota}^2. \quad (3.3)$$

Nur wenn die Verhältnisse einer nicht verschwindenden Konstanten entsprechen, ergeben sich nichttriviale Lösungen der interessierenden Orts- und Zeitfunktionen. Damit lässt sich die Separation von orts- und zeitabhängiger Dynamik vollziehen und man erhält

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 \quad (3.4)$$

$$\hat{w}_i^{IV} - \beta_i^4 \hat{w}_i = 0 \quad (3.5)$$

mit

$$\beta_i^4 = \left( \frac{\rho A}{EI} \right) \omega_i^2. \quad (3.6)$$

Für (3.4) verwendet man den Lösungsansatz

$$q_i(t) = A_i e^{j(\omega_i t + \phi_i)} \quad (3.7)$$

mit  $j = \sqrt{-1}$  und für (3.5) die Darstellung

$$\hat{w}_i(x) = A_i \cos(\beta_i x) + B_i \sin(\beta_i x) + C_i \cosh(\beta_i x) + D_i \sinh(\beta_i x). \quad (3.8)$$

Mit dem allgemeinen Ansatz einer Mode

$$w_i(x, t) = \hat{w}_i(x) q_i(t) \quad (3.9)$$

lässt sich zur Bestimmung der Parameter  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  durch Einsetzen des allgemeinen Ansatzes einer Mode und dessen entsprechenden Ableitungen in die beim vorliegenden Fall geltenden Randbedingungen ein lineares Gleichungssystem erzeugen. Durch Lösen dieses Gleichungssystems lassen sich für die einzelnen Parameter Ausdrücke in Abhängigkeit von  $\beta_i$  und  $\omega_i$  finden, wobei unter Berücksichtigung von (3.6)  $\omega_i$  eliminiert wird. Damit die Parameter  $A_i$  bis  $D_i$  ungleich von Null sind, müssen die entsprechenden jeweils von  $\beta_i$  abhängigen Terme verschwinden. Dies entspricht der Forderung einer verschwindenden Determinante für die Existenz einer nichttrivialen Lösung und stellt die noch fehlenden Bedingungen zur Bestimmung der jeweiligen Kreisfrequenz  $\omega_i$  dar.

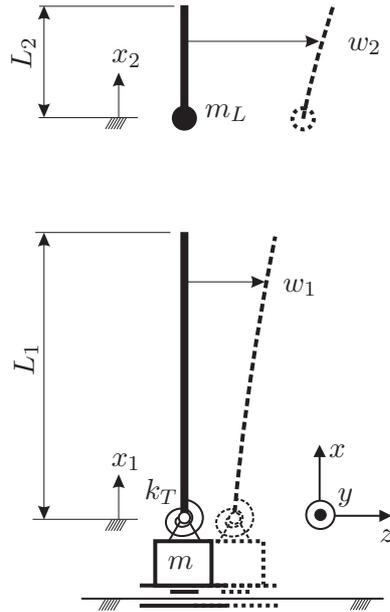
### 3.1.2 Unterteilter Balken

In Bild 3.1 ist die im Folgenden herangezogene Unterteilung des Auslegers in zwei Balkensegmente dargestellt. In den Gebieten der einzelnen Balken gilt jeweils (2.8):

$$\left( \frac{\partial^4 w_1}{\partial x_1^4} \right) + \left( \frac{\rho A}{EI} \right) \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \right) = 0 \quad x_1 \in [0, L_1] \quad (3.10)$$

und

$$\left( \frac{\partial^4 w_2}{\partial x_2^4} \right) + \left( \frac{\rho A}{EI} \right) \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \right) = 0 \quad x_2 \in [0, L_2]. \quad (3.11)$$



**Bild 3.1:** In zwei Balkensegmente oberhalb bzw. unterhalb der Last  $m_L$  unterteiltes Systemmodell.

Zur Lösung wird jeweils der bereits eingeführte Ansatz (3.8) verwendet, also

$$w_{1l}(x) = A_l \cos(\beta_l x_1) + B_l \sin(\beta_l x_1) + C_l \cosh(\beta_l x_1) + D_l \sinh(\beta_l x_1) \quad (3.12)$$

und

$$w_{2l}(x) = E_l \cos(\beta_l x_2) + F_l \sin(\beta_l x_2) + G_l \cosh(\beta_l x_2) + H_l \sinh(\beta_l x_2). \quad (3.13)$$

### 3.1.3 Randbedingungen

Die Randbedingungen zu den durch (3.10) und (3.11) beschriebenen Bereichen ergeben sich gemäß Bild 3.1 zu:

$$-EI \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \right)_{x_1=0} = -k_T \left( \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right)_{x_1=0}, \quad (3.14)$$

$$-EI \left( \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3} \right)_{x_1=0} = +m \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \right)_{x_1=0}, \quad (3.15)$$

$$\left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} \right)_{x_2=L_2} = 0, \quad (3.16)$$

$$\left( \frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3} \right)_{x_2=L_2} = 0, \quad (3.17)$$

$$w_1(L_1, t) = w_2(0, t), \quad (3.18)$$

$$\left( \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right)_{x_1=L_1} = \left( \frac{\partial w_2}{\partial x_2} \right)_{x_2=0}, \quad (3.19)$$



mit

$$\mathbf{M}_\iota(\sigma) = \begin{bmatrix} \cos(\beta_\iota\sigma) & \sin(\beta_\iota\sigma) \\ -\sin(\beta_\iota\sigma) & \cos(\beta_\iota\sigma) \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{N}_\iota(\sigma) = \begin{bmatrix} \cosh(\beta_\iota\sigma) & \sinh(\beta_\iota\sigma) \\ \sinh(\beta_\iota\sigma) & \cosh(\beta_\iota\sigma) \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Um eine nichttriviale Lösung für die Parameter  $\mathbf{p}_\iota$  zu erhalten muss die Determinante  $\det(\mathbf{V}_\iota)$  verschwinden.

Die sich für große  $\beta_\iota$  einem periodischen Verlauf annähernde charakteristische Gleichung lautet geschrieben mit den vier superponierten amplitudenmodulierten Grundkreisfrequenzen  $L_1 + L_2$ ,  $L_1 - L_2$ ,  $L_1$  und  $L_2$ :

$$\begin{aligned} & \left[ f_{\sin pp} \sin(\beta_\iota L_2 + \beta_\iota L_1) + f_{\cos pp} \cos(\beta_\iota L_2 + \beta_\iota L_1) \right. \\ & + f_{\sin mp} \sin(-\beta_\iota L_2 + \beta_\iota L_1) + f_{\cos mp} \cos(-\beta_\iota L_2 + \beta_\iota L_1) + f_{\sin b} \sin(\beta_\iota L_1) \\ & \quad + f_{\sin b2} \sin(\beta_\iota L_2) + f_{\cos b1} \cos(\beta_\iota L_1) + f_{\cos b2} \cos(\beta_\iota L_2) - 4\rho^2 A^2 EI \beta_\iota \\ & \quad \left. + 4k_T m \rho A \beta_\iota \right] / \left[ -\rho^2 A^2 EI \beta_\iota + k_T m \rho A \beta_\iota \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

mit den im Anhang C abgedruckten nicht periodischen Koeffizientenfunktionen  $f_*$  (C.1) - (C.8). Die Kenntnis der Struktur der Gleichung ist zur Beurteilung und Festlegung der nötigen Schrittweite zum sicheren Auffinden der Nullstellen im nachfolgenden Abschnitt wichtig.

### 3.1.5 Newton-Verfahren

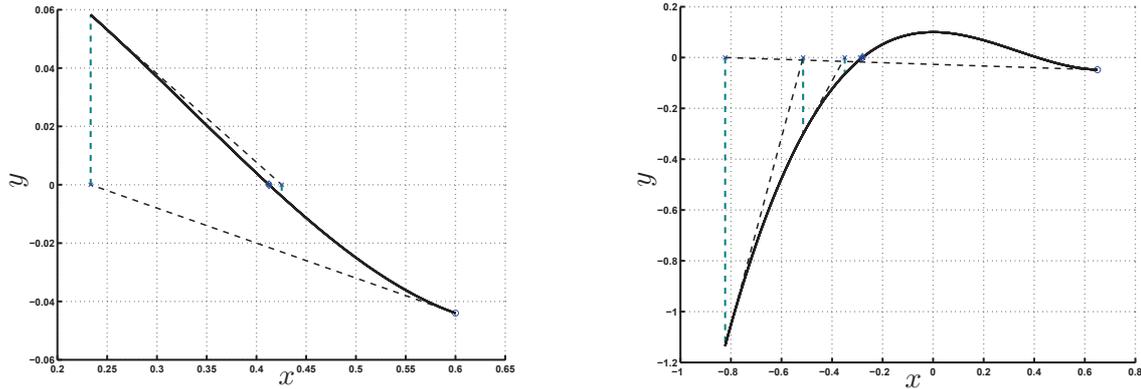
Zur numerischen Lösung der nichtlinearen charakteristischen Gleichung (3.25) wurde auf das iterative Verfahren zur Nullstellensuche nach Newton zurückgegriffen [21]. Dabei approximiert man die nichtlineare Funktion mittels einer Tangente im Punkt des Startwertes. Die Nullstelle der Tangente stellt zum Einen eine neue Approximation für die gesuchte Nullstelle und zum Anderen den neuen Startwert für den nächsten Iterationsschritt dar. Aus dieser Überlegung lässt sich folgende Iterationsvorschrift ableiten:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x)}{f'(x)} \Big|_{x=x_k} \quad (3.26)$$

mit

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad (3.27)$$

der Ableitung der Funktion  $f$  an der Stelle  $x$ . In Bild 3.2 wird die Startwertabhängigkeit des Verfahrens bei schlechter Startwertwahl demonstriert. Links wurde bei



**Bild 3.2:** Visualisierung des Newton-Verfahrens und Ergebnisabhängigkeit vom Startwert anhand der Funktion  $x \mapsto f(x) = x^3 - x^2 + 0,1$ . Links wird mit Startwert  $x = 0,6$  die benachbarte Nullstelle gefunden, während mit Startwert  $x = 0,65$  die Nullstelle übersprungen wird wie rechts dargestellt.

$x = 0,6$  gestartet, womit die benachbarte Nullstelle von  $f(x) = x^3 - x^2 + 0,1$  gefunden wurde. Mit dem näher zum lokalen Minimum gelegenen Startwert  $x = 0,65$  wird die benachbarte Nullstelle übersprungen, und das Verfahren konvergiert in der übernächsten Nullstelle.

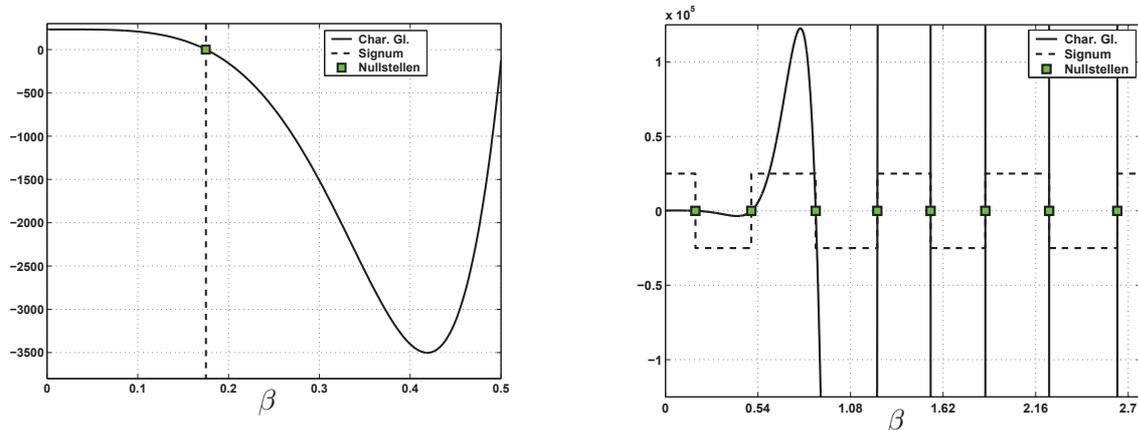
Um die Ermittlung jeder Nullstelle sicher zu stellen, müssen folglich die Startwerte nahe genug an den gesuchten Nullstellen liegen. Hierzu wurde ein dreistufiges Verfahren implementiert. In der ersten Stufe wird die charakteristische Gleichung (3.25) in äquidistantem Abstand bzgl. des Vorzeichens abgetastet. In der zweiten Stufe werden in der sich ergebenden Zahlenreihe die Stellen mit Vorzeichenwechsel gesucht, die als Startwerte für eine Nullstellensuche dienen. Im letzten Schritt wird ausgehend von den gefundenen Startwerten mittels des Newton-Verfahrens eine im Allgemeinen wesentlich exaktere numerische Bestimmung der gesuchten Nullstelle durchgeführt.

Der Suchraum für  $\beta_i$  lässt sich mit Gleichung (3.6) auf einen praktisch interessierenden Frequenzbereich eingrenzen. Grundsätzlich kritisch bleibt die gewählte Abtastweite, um sicher zu stellen, wirklich jede Nullstelle im betrachteten Bereich zu finden. Je größer die Abtastweite ist, um so größer ist die Gefahr, an einem lokalen Extremum zu starten und wie in Bild 3.2 dargestellt die eigentlich nächstgelegene Nullstelle zu überspringen.

Für große Werte von  $\beta_i$  kann die halbe Periodendauer des höchstfrequenten Anteils als sinnvolle Bezugsgröße für die maximale Abtastweite  $\delta\beta_{max} = \frac{\pi}{L_1 + L_2}$  herangezogen werden. Um nahe bei den gesuchten Nullstellen zu beginnen wurde mit einer hohen Abtastung von  $\frac{1}{1000}\delta\beta_{max}$  gearbeitet. Da die benötigte Rechenzeit in diesem Zusammenhang keine Rolle spielt, wurde an dieser Stelle auf eine weitere analytische Analyse der Gleichung zur Reduzierung der berechneten Abtastwerte verzichtet.

### 3.1.6 Charakteristische Gleichung, Nullstellensuche und Eigenformen

In Bild 3.3 ist der Verlauf der charakteristischen Gleichung (3.25) sowie die Lage ihrer Nullstellen mit den Parametern des Systems RBG gemäß Tabelle 2.1 zur Veranschaulichung dargestellt.

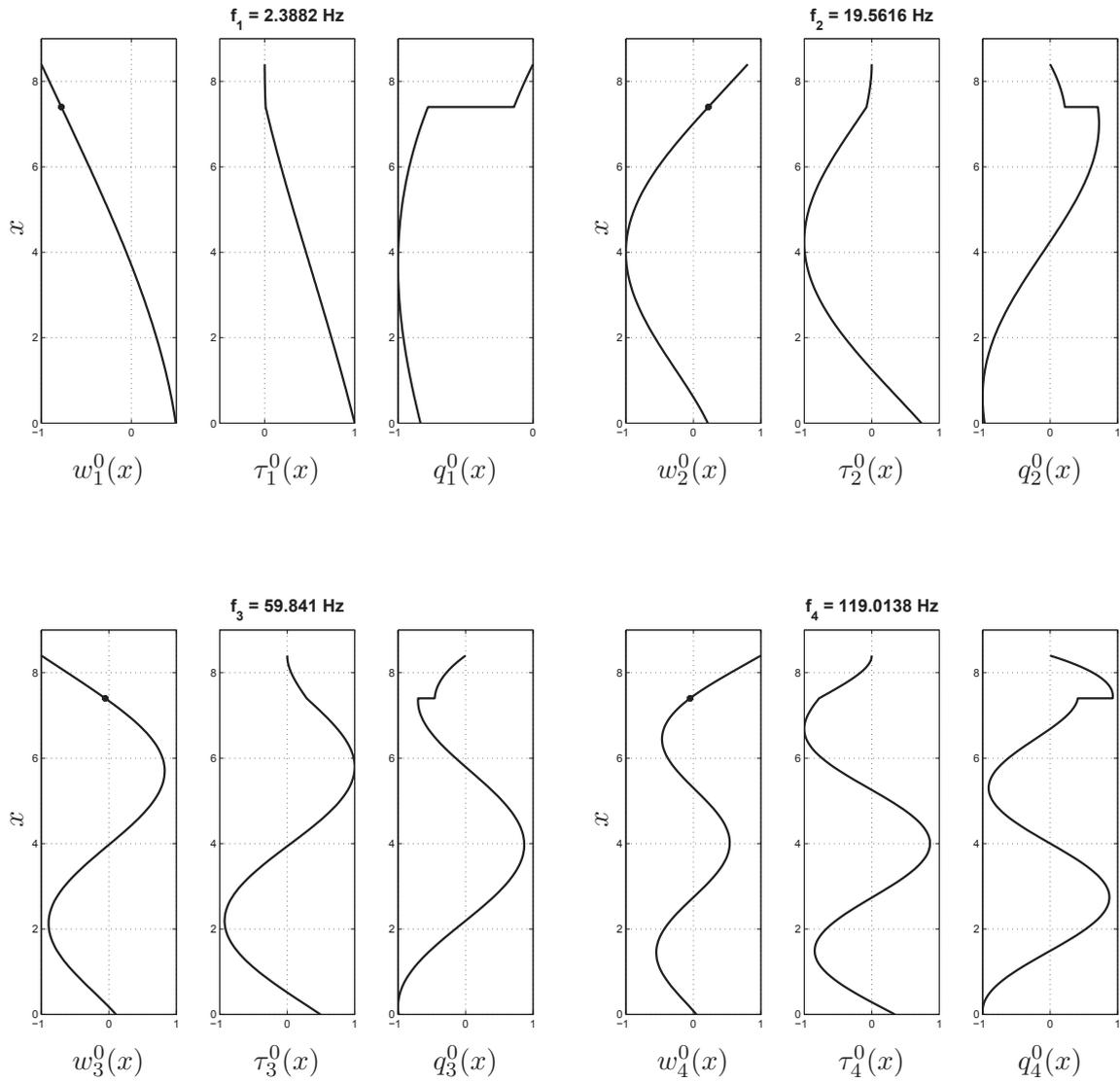


**Bild 3.3:** Charakteristische Gleichung und Nullstellensuche. Links: Polynomiell dominierter Bereich und erste Nullstelle, Rechts: Lage der ersten acht Nullstellen.

Für 100kg Zuladung bei  $x = 7,4\text{m}$  ergeben sich die in Bild 3.4 exemplarisch dargestellten ersten vier Eigenformen und -frequenzen. Da für die Querkräfte  $Q_1$  vor und  $Q_2$  an der Stelle der Last gilt

$$Q_1(x_1 = L_1, t) - m_L \ddot{w}_2(x_2 = 0, t) = Q_2(0, t), \quad (3.28)$$

und die Ableitung des Momentenverlaufs nach der  $x$ -Koordinate dem Querkraftverlauf entspricht, äußert sich der Querkraftsprung als Sprung der Steigung im Momentenverlauf.



**Bild 3.4:** 1. bis 4. Eigenform mit jeweils damit verbundenen Querkräfte- und Momentenverläufen mit  $m_Z = 100\text{kg}$ ,  $L_1 = 7,4\text{m}$  und  $L = 8,4\text{m}$

## 3.2 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

In diesem Abschnitt wird aufbauend auf den Eigenformen und -frequenzen die Fragestellung der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems untersucht. Dabei ist von besonderem Interesse, ob mit dem am Fusspunkt wirkendem Servoantrieb und der damit gegebenen Positionsmessung ausreicht, oder ob zusätzliche Stell- und Meßgrößen nötig sind.

Dabei wird die Betrachtung auf den zeitinvarianten Fall beschränkt, d.h. die Last steht still. Mit dieser Einschränkung kann man in der Praxis aus zweierlei Grund leben. Zum Einen liegen die Störanregungen - z.B. in Folge verschmutzter oder ausgeschlagener Fahrschienen - in Frequenzbereichen, die mit einem üblichen Antriebsmotor und dem oftmals spielbehafteten Getriebe nicht ausgeregelt werden können. Zum Anderen hat sich gezeigt, dass die Anwesenheit einer aktiven Schwingungsdämpfung zusammen mit der Vorsteuerung bezogen auf die Spielzeit bei einem parametrisch nicht exakt abgebildeten System oftmals nicht von Vorteil ist. Offensichtlich ist dies bei Anlagen, bei denen die Vorsteuerung die verfügbare Aktorkraft phasenweise voll ausschöpft, wodurch für eine Regelung lediglich das „Reduzieren“ der geplanten Antriebskraft in diesen Phasen der Bewegung übrig bleibt - was für das Ziel Spielzeitreduzierung kontraproduktiv ist.

Statt dessen wird das Augenmerk auf die aktive Schwingungsbedämpfung im Ziel des Positioniervorgangs gerichtet, um in Folge von Modellierungsungenauigkeiten oder während der Fahrt akkumulierter Störschwingungen selbige möglichst schnell definiert zu beseitigen.

Im folgenden Abschnitt wird die Fragestellung, ob Schwingungen bzgl. der ersten drei Eigenformen beobachtbar und steuerbar sind, durch systematische Auswertung und Analyse der Eigenformen analysiert. Höhere Eigenformen werden nicht berücksichtigt, da bei den hier betrachteten Systemen die damit verbundenen Eigenfrequenzen eine hohe materialbedingte Eigendämpfung zur Folge haben und von den meisten Antrieben bzgl. der damit erreichbaren Bandbreite nicht aktiv ausgeregelt werden können. Auf die explizite Anwendung der Kalmanschen Kriterien zu Steuer- und Beobachtbarkeit auf das in Abschnitt 2.3 hergeleitete Zustandsraummodell wird an dieser Stelle verzichtet - da sich damit keine neuen oder gar abweichenden Aussagen ergeben haben.

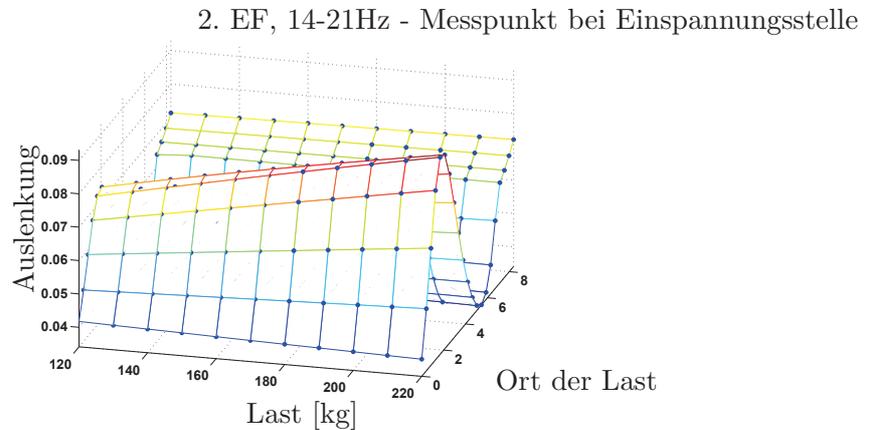
### 3.2.1 Analyse der Eigenformen

In Folge des heute üblichen Einsatzes eines Servoantriebs steht als kostengünstige Messgröße mindestens die Position der Struktur an der Einspannstelle zur Verfügung. Daher ist von besonderem Interesse, ob es bei einem Gerät Konstellationen aus Lasthöhe und Zuladung gibt, die zu einem Verschwinden der modalen Auslenkung  $\hat{w}_i(x)$  am Ort des Antriebs führen bzw. ob die dort auftretenden Amplituden mit der vorhandenen Sensorik aufgelöst werden können. Um diese Fragestellungen

beantworten zu können, werden zusätzlich der Ort der Last selbst und das freischwingende Balkenende als mögliche Messpunkte der Auslenkung betrachtet.

### Systematisches Vorgehen

In Bild 3.5 soll die numerische Vorgehensweise anhand eines Ergebnisses für die 2. Eigenform in dreidimensionaler Darstellung veranschaulicht werden. Die normierte modale Auslenkung am Ort der Beobachtung wird über Masse und Ort der auf dem Balken befindlichen Last aufgetragen. Zur Beurteilung der Beobachtbarkeit reicht eine Projektion der Daten in die Achsen für „Auslenkung“ und „Ort der Last“ aus, in der die normierten modalen Auslenkungen als durch die Zuladung parametrisierte Kurvenschar scheint. Von dieser Darstellungsart wird in den nachfolgenden Abschnitten Gebrauch gemacht.



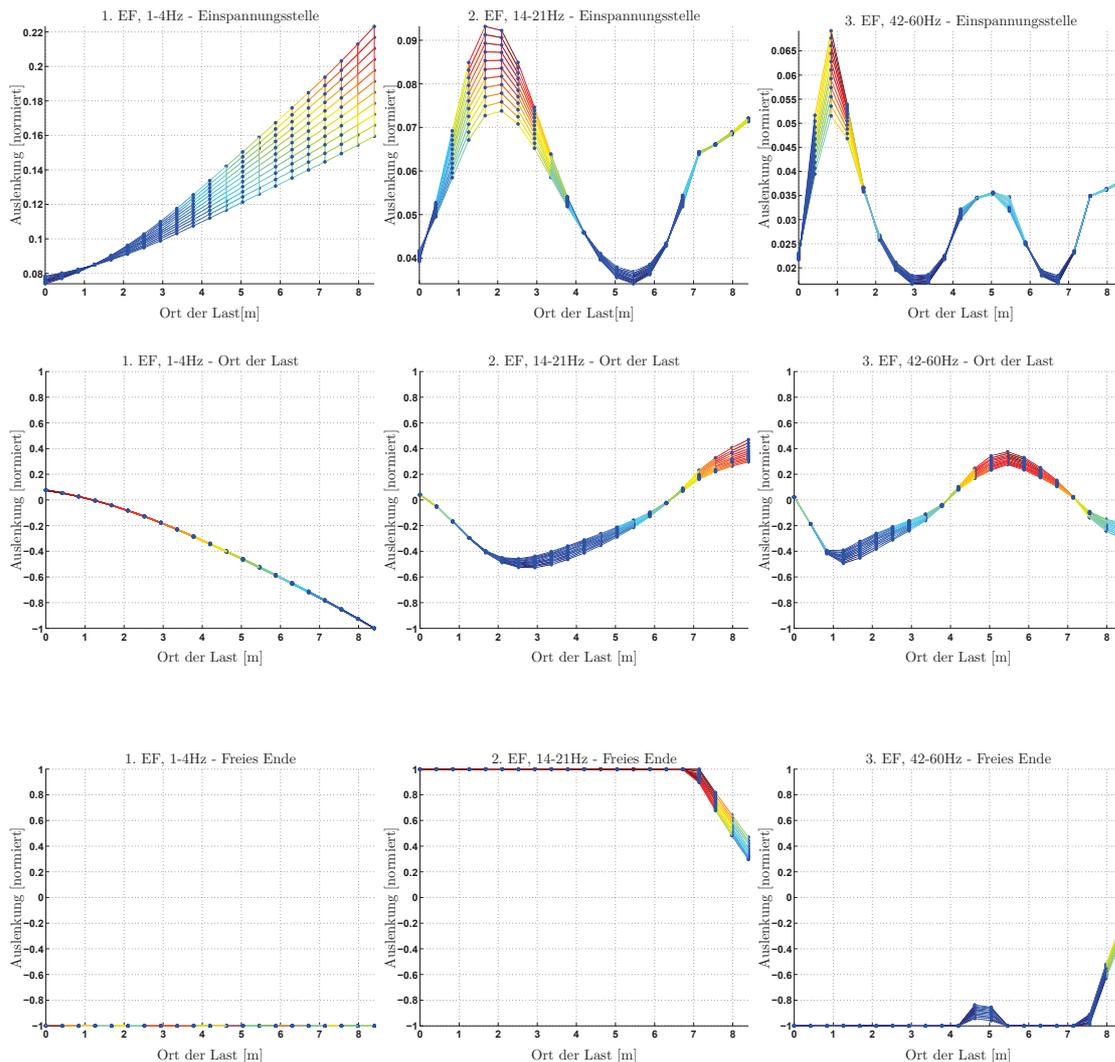
**Bild 3.5:** Auslenkungen der zweiten Eigenform für unterschiedliche Konfigurationen des Geräts RBG.

### Numerische Ergebnisse für die Systeme RBG und LARS

In Bild 3.6 und Bild 3.7 sind die Auslenkungen bzgl. eines Messpunkts über dem Ort der Last als Kurvenschar mit dem Parameter Last dargestellt. Dabei wurde die Last im systemspezifischen Zuladungsbereich variiert. Neben dem Ort der Einspannungsstelle wurden auch die Stelle der Last ( $x = L_1$ ) und das freie Ende des Balkens ( $x = L_1 + L_2$ ) als mögliche Orte für einen Auslenkungssensor untersucht.

#### 3.2.2 Aussagen zur Beobachtbarkeit

Da die Auslenkungen in beiden Fällen am Fußpunkt nicht verschwinden, sind somit mindestens die ersten 3 Eigenformen am Ort der Einspannung beobachtbar. Beim System RBG fällt aufgrund des hohen im Fußpunkt konzentrierten Masseanteils in Folge von Antrieben und Schaltschrank die messbare Schwingungsamplitude nur

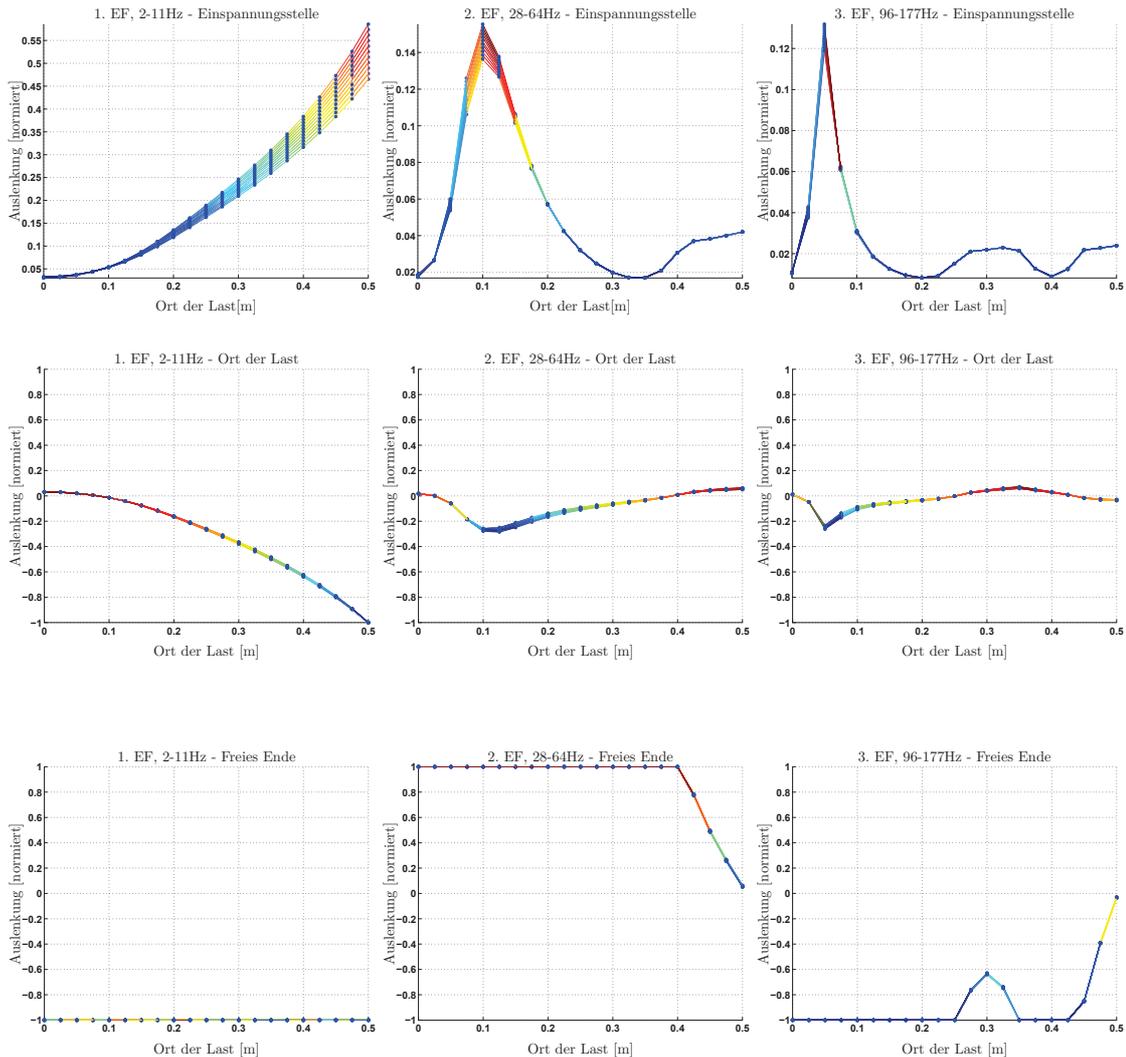


**Bild 3.6:** Scharkurven der normierten Auslenkungen der ersten drei Eigenformen für das System RBG (vgl. Tabelle 2.1) für Lastmassen von  $120\text{kg}$  bis  $220\text{kg}$  an den Messpunkten „Freies Ende“, „Ort der Last“ sowie „Einspannungsstelle“

sehr gering aus. Für die erste Eigenform treten hier an der Stelle der Einspannung minimal 6 bis maximal 22 Prozent der Auslenkung auf. Beim System LARS treten minimal 4 bis maximal über 55 Prozent der maximalen Schwingungsamplitude der Struktur auf. Die zweiten und dritten Eigenformen liegen im Bereich zwischen 1 bis maximal 15 Prozent der Schwingungsamplitude am Ort der Einspannung bei den betrachteten Systemkonfigurationen.

Der schlechteste Ort zur Sensorpositionierung ist der Ort der Last, da dort bei allen untersuchten Eigenformen mindestens ein Schwingungsknoten durchschritten wird – also keine Beobachtbarkeit der entsprechenden Mode aus einer von der Auslenkung abgeleiteten Messgröße gegeben ist.

Als optimaler Punkt zur Montage eines weiteren Sensors zur Erfassung der Auslenkung ist das frei schwingende Balkenende zu nennen, da hier nahezu für alle Orte der Last in beiden Szenarien die maximalen Schwingungsamplituden auftreten.



**Bild 3.7:** Scharkurven der normierten Auslenkungen der ersten drei Eigenformen für das System LARS (vgl. Tabelle 2.1) für Lastmassen von  $1,66\text{kg}$  bis  $2,10\text{kg}$  an den Messpunkten „Freies Ende“, „Ort der Last“ sowie „Einspannungsstelle“.

Die in der Strukturüberwachung populäre Messung der Strukturdehnung mittels Dehnmessstreifen wurde nicht explizit untersucht, da hierfür ein deutlich höherer Montageaufwand und damit zusätzliche Kosten anfallen, wodurch die wirtschaftliche Umsetzung – gerade bei bereits bestehenden Anlagen – äußerst fraglich ist. Allerdings können mit der hier angewendeten Methode auch hierfür Aussagen zur Beobachtbarkeit in analoger Weise gewonnen werden.

### 3.2.3 Optimiertes Konstruktionskonzept

Wird man sich einerseits der Bedeutung einer Eigenform als zeitlich modulierte Massenverteilung des betrachteten Geräts bewusst, die um einen Ruhepunkt oszilliert und bedenkt andererseits, dass das Gerät nicht beschleunigt wird, wenn keine

äußeren Kräfte wirken, ist die logische Folge, dass die Eigenformen um den System-schwerpunkt oszillieren müssen.

In der praktischen Anwendung stören Schwingungsamplituden am Ort des Werkzeugs. Eine ruhige Struktur ist grundsätzlich wünschenswert, aber nicht zwingend zu fordern. Ziel ist es die Massenverhältnisse des Geräts so zu beeinflussen, dass das Werkzeug stets nah am Systemschwerpunkt liegt.

Folgende Konstruktionsziele werden hierzu formuliert:

- Möglichst wenig Masse im Fußpunkt,
- Leichte Struktur,
- Möglichst hohes Massenverhältniss des Werkzeugs zum restlichen Gerät.

Als konkrete Maßnahmen sind z.B. die Platzierung der Antriebe als stationäre Einheiten zu sehen, die über eine geeignete Mechanik (Seilzug, Zahnriemen o.ä.) die nötigen Kräfte auf das zu bewegende Gerät übertragen.

Ein derartiges Gerät hätte zudem wesentlich höhere Eigenfrequenzen, wodurch sich die jedem Material eigene Strukturdämpfung deutlicher bemerkbar macht und die Systemdynamik zusätzlich positiv beeinflusst.

### 3.2.4 Schwingungsempfindlichkeit

Um die im Rahmen einer Sensorwahl sich ergebende ingenieurmäßige Fragestellung nach der nötigen Sensorauflösung einfach beantworten zu können, wird in diesem Abschnitt die Größe Schwingungsempfindlichkeit eingeführt. Die Schwingungsempfindlichkeit stellt das Verhältnis zwischen Amplitude am Ort der Last im Nenner und dem Ort der Messung im Zähler dar. Falls z.B. 1 mm Schwingungsamplitude am Ort der Last akzeptiert werden kann, lässt sich durch einfache Multiplikation mit der Schwingungsempfindlichkeit die resultierende Schwingungsamplitude am Ort der Messung - und damit die Mindestsensorauflösung - bestimmen.

Da oftmals Servoantriebe eingesetzt werden, ist es aus wirtschaftlichen Gründen wünschenswert keinen zusätzlichen Sensor zu benötigen. Daher wird nachfolgend die Schwingungsempfindlichkeit explizit am Ort des Antriebs - also an der Einspannungsstelle - ausgewertet. Zusätzlich wird selbige für die frei schwingende Spitze ausgewertet.

Zur Verifikation der vorangehend formulierten Konstruktionsziele wird vom Datensatz des Systems RBG gemäß Tabelle 2.1 das System OPTK (Optimierte Konstruktion) postuliert, das sich lediglich durch das Fehlen einer Fussmasse unterscheidet.

Einerseits lässt sich aus den Grafiken in Bild 3.8 die deutliche Verbesserung der Schwingungsempfindlichkeit am Ort der Einspannung und damit am Ort des Sensors beim System OPTK erkennen. Andererseits lassen sich konkrete Aussagen zur benötigten Auflösung des Messsystems treffen. Weist das optimierte System OPTK

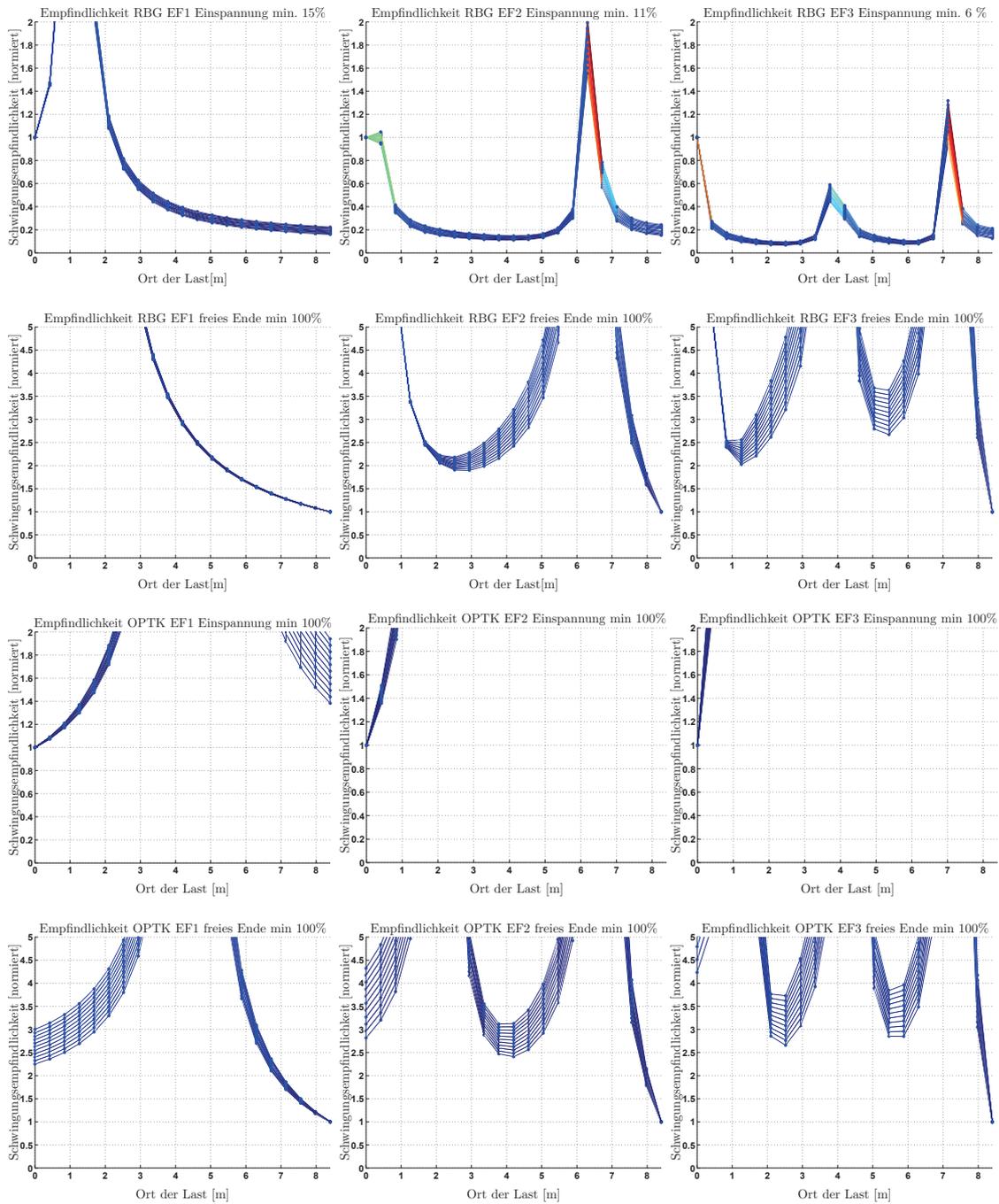
stets Schwingungsempfindlichkeiten größer 1 auf, sind bei dem System RBG Schwingungsempfindlichkeitsminima von 15% bei der ersten, 11% bei der zweiten und 6% bei der dritten Eigenform zu verzeichnen. Das heißt um z.B. 1 mm Schwingungsamplitude am Ort der Last überhaupt erfassen zu können, ist bei der ersten Eigenform ein Messsystem mit mindestens 0,15mm und bei der dritten Eigenform mit mindestens 0,06mm Auflösung nötig. Zusammen mit dem in Abschnitt 2.4.3 hergeleiteten Spiel des Antriebs von mind. 0,087mm ist die Verwertbarkeit der Information zur aktiven Schwingungsdämpfung fraglich bzw. im Falle der 3. Eigenform nicht mehr effektiv möglich. Häufig sind Abtriebsritzel kostengünstig mit Passfedern auf Wellen montiert, womit ein deutlich größeres Spiel ins System eingefügt wird.

Eine Messung an der Mastspitze scheint als der bezüglich Empfindlichkeit beste Ort für eine Messung zu sein, verursacht jedoch zusätzliche Kosten.

### 3.2.5 Aussagen zur Steuerbarkeit

Die Steuerbarkeit ließe sich auf analogem Wege wie vorangehend bzgl. der durch das gewählte Stellglied beeinflussbaren Größe der Querkraft am Ort der Einspannung untersuchen. Da jedoch die Beobachtbarkeit am Ort des Aktors mit stets von Null verschiedenen Auslenkungen gezeigt wurde, ist auf Grund einer am Balkenende angekoppelten Masse stets eine Querkraft nötig, um selbige zu bewegen. Damit ist klar dass mindestens die hier betrachteten ersten 3 Eigenformen steuerbar sind.

Zusammen mit der Tatsache, einen flachheitsbasierten Vorsteuerungsentwurf für das verteilt parametrische System erfolgreich durchgeführt zu haben, bleibt festzustellen dass das System steuerbar ist.



**Bild 3.8:** Schwingungsempfindlichkeiten für das System RBG (ersten zwei Zeilen) und das optimierte System OPTK (letzten zwei Zeilen) dargestellt als durch die Zuladung (0 bis 100kg) parametrisierte Scharkurven über dem Ort der Last.

## 4 Vorsteuerungsentwurf

Aus wirtschaftlichen und wartungstechnischen Überlegungen heraus werden Motor- und Sensorsystem zu einem sogenannten Servomotor zusammengefasst und ein Getriebe zum Antrieb der eigentlichen Strecke angeflanscht. Da spielfreie Getriebelösungen wie z.B. Harmonic Drive oder Zykloidengetriebe wesentlich kostenintensiver sind als normale nicht vorgespannte Zahnradgetriebe werden diese nur wo unbedingt nötig eingebaut. Ist der Motor infolge des Spiels nicht im Eingriff mit dem Abtrieb, so reduziert sich die Strecke auf den Motor selbst. Das Ablösen der Zahnflanken ohne abtriebsseitigen Sensor kann jedoch nicht exakt erfasst werden. Bei der Regelauslegung muß dem Rechnung getragen werden, indem die Bandbreite der Regelung niedrig genug gewählt wird, um das Auftreten von Grenzzyklen (ratternder Antrieb) zu vermeiden. Totzeiten, z.B. in Folge zeitdiskret arbeitender Rechensysteme oder Filtervorrichtungen zur Bandbegrenzung und/oder Rauschunterdrückung, engen die Möglichkeiten einer Regelung zur Beeinflussung der Systemdynamik weiter ein.

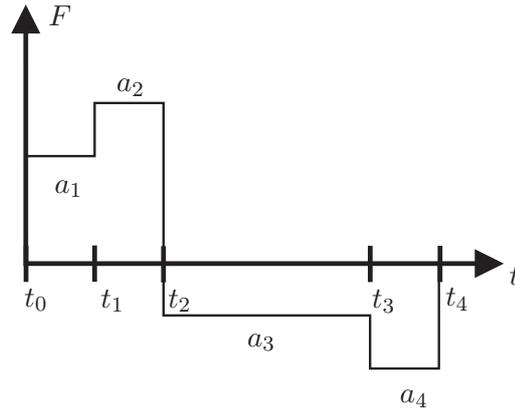
In den nachfolgenden Abschnitten werden verschiedene Methoden zur Berechnung von Vorsteuertrajektorien vorgestellt, womit es möglich ist, das durch Aktor und Strecke gegebene Positionierdynamikpotential voll auszuschöpfen.

### 4.1 Vorsteuerungsentwurf mittels numerischer Optimierung

Verfügt man über ein numerisches Modell oder können am System direkt gefahrlos Ansteuertrajektorien erprobt und validiert werden, so liegt es nahe mittels einer numerischen Optimierung eine Vorsteuertrajektorie zu finden, die ein Optimierungsproblem zumindest lokal löst. Jedoch ist die Zeitersparnis die dieses Vorgehen zunächst meist mit sich bringt, oftmals nur dann ein tatsächlicher Vorteil, wenn man lediglich eine kleine Anzahl von optimierten Trajektorien oder nur ein Kennfeld benötigt.

Der Grund für dieses heute – und wohl auch künftig – gültige Paradoxon liegt in der benötigten Rechen- bzw. Versuchszeit, die eine Funktionsauswertung benötigt und der Nichtübertragbarkeit eines Ergebnisses auf andere Parametrierungen der gleichen Problemstellung. Mit einer numerisch gefundenen optimalen Lösung für den Fall A hat man im Allgemeinen kein auf den Fall B übertragbares Ergebnis, selbst wenn sich Fall A und B lediglich in einem Parameterwert unterscheiden.

Daher versucht man in die Parametrierung des Problems alle vorhandenen Nebenbedingungen einzuarbeiten um die freie Parameterzahl gering zu halten. Gemäß den Grundgesetzen von Newton ändert sich die Geschwindigkeit des Schwerpunkts eines



**Bild 4.1:** Intervallweise in der Amplitude konstant parametrierter Beschleunigungsverlauf über der Zeit

Systems proportional zu den an ihm angreifenden Kräften. Für das hier vorliegende Problem ist es naheliegend nach Parametrierungen der Antriebskräfte zu suchen, bei denen der Schwerpunkt am Anfang und am Ende des Manövers in Ruhe und an den jeweils gewünschten Positionen ist. Zur Sicherstellung der Randbedingungen werden eine entsprechende Anzahl Parameter der Parametrierung mathematisch festgelegt. Alle verbleibenden freien Parameter stellen den Suchraum dar, in dem der Optimierer Parametervariationen durchführen kann.

### 4.1.1 Intervallweise konstante Kraftanregung

Bild 4.1 zeigt exemplarisch die nachfolgend vorgestellte Parametrierung mit 4 Intervallen, die durch die Zeitpunkte  $t_0 \dots t_4$  und die zwischen den Zeitpunkten wirkenden Beschleunigungen des Schwerpunkts  $a_1^S \dots a_4^S$  parametrieren sind. Für den Zustand des Schwerpunktes ergibt sich für den Ort  $x_{i+1}^S$  und die Geschwindigkeit  $v_{i+1}^S$  nach einem Zeitintervall bei anfänglichem Ort  $x_i^S$  und Geschwindigkeit  $v_i^S$  folgende Bestimmungsgleichungen:

$$x_{i+1}^S = \frac{1}{2} a_i^S \Delta t_i^2 + v_i^S \Delta t_i + x_i^S \quad (4.1)$$

$$v_{i+1}^S = a_i^S \Delta t_i + v_i^S. \quad (4.2)$$

Um nach  $n$  Kraftintervallen am Ort  $x_n^S$  mit der Geschwindigkeit  $v_n^S$  zu sein, kann man zum Beispiel die Beschleunigungen der letzten Zeitintervalle entsprechend berechnen:

$$a_{n-1}^S = \frac{x_n^S - \frac{1}{2} \Delta t_n (v_n^S - v_{n-2}^S) - v_{n-2}^S \Delta t_{n-1} - x_{n-2}^S}{\frac{1}{2} (\Delta t_{n-1} \Delta t_n + \Delta t_{n-1}^2)} \quad (4.3)$$

$$a_n^S = \frac{v_n^S - a_{n-1}^S \Delta t_{n-1} - v_{n-2}^S}{\Delta t_n} \quad (4.4)$$

### 4.1.2 Parametrierung mittels Fourierreihe

Im Gegensatz zur nicht glatten Parametrierung der Antriebskraft wird hier eine auf der Fourierreihe basierende Möglichkeit der Parametrierung kurz dargestellt, womit sich glatte Kurvenzüge ergeben. Ein Positioniermanöver zeichnet sich durch einen vom Anfangsort unterschiedlichen Positionswert aus, weshalb die halbe Periodendauer der den Schwerpunkt  $x^S$  parametrierenden Fourierreihe

$$x^S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^N a_i \cos\left(\frac{i\pi t}{T_E}\right) + \sum_{i=1}^N b_i \sin\left(\frac{i\pi t}{T_E}\right) \quad (4.5)$$

die Positionierzeit  $T_E$  bedeutet.

Gemäß Newtons *lex secunda*, kann ausgehend vom Ort des Schwerpunkts  $x^S$  die nötige Antriebskraft  $u(t)$  wie folgt berechnet werden

$$u(t) = m\ddot{x}^S(t), \quad (4.6)$$

wobei  $m$  der Gesamtmasse der Gerätschaft entspricht.

Wie bereits im vorangehenden Abschnitt wird auch hier der Suchraum reduziert, was Rechenzeit spart und das Gestalten der Gütefunktion einfacher gestaltet. Um eine Trajektorie für einen am Anfang und am Ende ruhenden Schwerpunkt zu erhalten, werden die Koeffizienten

$$a_1 = x_0 - \frac{a_0}{2} - a_2 - a_3 - \sum_{i=4}^N a_i, \quad x^S(0) = x_0 \quad (4.7)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( x_E + x_0 - a_0 - \sum_{i=4}^N a_i (1 + (-1)^i) \right), \quad x^S(T_E) = x_E \quad (4.8)$$

$$b_1 = -2b_2 - \sum_{i=3}^n ib_i, \quad \dot{x}^S(0) = 0 \quad (4.9)$$

$$b_2 = -\frac{1}{4} \left( \sum_{i=4}^n ib_i (1 + (-1)^i) \right), \quad \dot{x}^S(T_E) = 0 \quad (4.10)$$

bestimmt. Die verbleibenden Parameter können dazu benutzt werden, weitere Forderungen an die Trajektorie zu stellen und dadurch den Suchraum weiter zu reduzieren.

### 4.1.3 Kostenfunktion

Wird nun ein numerisches Modell des Systems mit den vorangehend parametrisierten Antriebskräften beaufschlagt, so ist zwar der Ort und die Geschwindigkeit des Schwerpunkts am Ende (und ohnehin zu Beginn) des Manövers bekannt, nicht jedoch der Verformungszustand des Geräts. Um eine Optimierung durchführen zu können,

benötigt man ein Maß, um die Güte eines simulierten Manövers zu bewerten. In diesem Fall ist als „Gut“ eine unverformte in Ruhe befindliche Struktur anzusehen. Im Gegensatz zu mathematischen Ausdrücken, die die Biegelinie abtasten um Verformungen bzw. Geschwindigkeiten mittels quadratischen Straffunktionen zu bewerten, ist die im System enthaltene Energie eine zwar abstrakte aber bzgl. modaler Beschaffenheit des Verformungszustands unabhängige und daher überlegene Kostenfunktion

$$K(t) = V(t) + T(t). \quad (4.11)$$

In 4.11 stellt  $V(t)$  die potentielle Energie gemäß 2.6 und  $T(t)$  die kinetische Energie gemäß 2.7 dar. Werden im Modell zusätzlich Reibungseffekte simuliert - was sinnvoll ist - greifen am System Kräfte an, die in der Parametrierung nicht berücksichtigt werden konnten. Daher ist in diesem Fall die Gütefunktion um den quadratischen Abstand des Schwerpunkts von der Solllage zu erweitern, womit man auf die erweiterte Kostenfunktion

$$K(t) = V(t) + T(t) + |\Delta x^S|k \quad (4.12)$$

kommt. Der Faktor  $k$  stellt einen Gewichtungsfaktor dar, womit sich die Bedeutung einer örtlichen Abweichung zum Auftreten von Schwingungen im System gewichten lässt.

#### 4.1.4 Numerische Optimierung zur Vorsteuerungsauffindung

Mit einer Parametrierung, geeigneten Kostenfunktion und einem numerischen Modell der Systemdynamik kann man mittels eines Optimierungsalgorithmus einen Satz optimaler Parameter automatisiert suchen. Im Rahmen dieser Arbeit kam der bereits in [32] genutzte Optimierungsalgorithmus Implicit Filtering for Constrained Optimizations (IFFCO) zum Einsatz. Weil es meist viel zu lange dauert, den kompletten Suchraum numerisch abzurastern, versuchen numerische Optimierungsverfahren mit möglichst wenigen Funktionsauswertungen das Optimum zu ermitteln. Dabei kommen z.B. Hypothesen wie das Problem ist konvex zum Einsatz. Derartige Verfahren haben den Vorteil bei glatten Problemen schnell ins nächst gelegene Optimum zu konvergieren, jedoch den Nachteil bei einer sehr unruhigen Gütefunktion des Problems oft in einem lokalen Minimum hängen zu bleiben. IFFCO stellt einen Kompromiss dar, indem sogenannte Quasigradienten mit sehr großer Schrittweite berechnet werden – was sich in mehreren technischen Aufgabenstellungen als sinnvoll bewährt hat [32]. Jedoch gibt es keinen „Superoptimierer“, der gemittelt über alle Problemstellungen anderen Optimierungsalgorithmen überlegen wäre, wie Wolpert und Marcready 1997 in ihrem sogenannten *No Free Lunch Theorem* postuliert haben [35]. Unabhängig welchem Optimierungsverfahren man den Vorzug gibt, die Geschwindigkeit der Konvergenz hängt maßgeblich von der Dauer einer Funktionsauswertung ab.

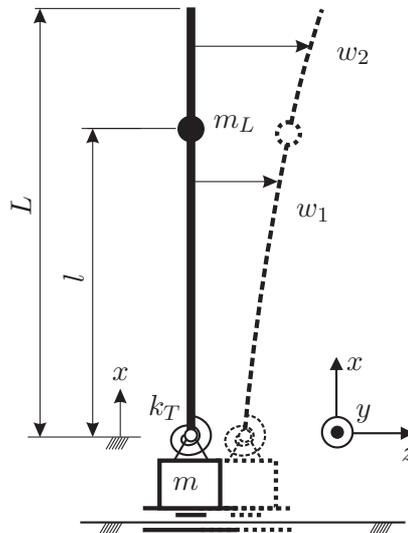
Bei dem hier im Fokus stehenden Vorrichtungstyp hat man im Wesentlichen fünf Parameter zu berücksichtigen: Fahrweite, Fahrhöhe, Zuladung, Produkt aus Elas-

tizitätsmodul und Flächenträgheitsmoment des Balkens  $EI$ , sowie den Massenbelag des Balkens  $\rho A$ . Hat man einen konkreten Anlagentyp im Auge mit konstanten Materialparametern bedeutet dies immerhin weit über 1000 Trajektorien die berechnet werden müssen, will man für zumindest jeweils 10 unterschiedliche Parameterwerte Trajektorien für die daraus resultierenden Kombinationen vorhalten.

Mit Hilfe der numerischen Optimierung kann zwar relativ schnell ein zumindest lokal optimales Ergebnis für ein Szenario gefunden werden, jedoch fehlt diesem Ergebnis die analytischen Vorschriften eigene Übertragbarkeit auf andere, sich lediglich in Parametern unterscheidender Fälle und stellt somit im Allgemeinen keinen praktikablen Weg zur Auffindung optimaler Vorsteuertrajektorien in Echtzeit dar [4, 5, 10].

## 4.2 Flachheitsbasierter Vorsteuerungsentwurf

In [37] wird für nichtlineare Systeme mit konzentrierter Systemdynamik das Vorgehen des Entwurfs von flachheitsbasierter Steuerung, Regelung und Beobachter dargestellt. In [1, 16, 38] wird dieser Begriff auf Systeme endlicher und unendlicher Dimension erweitert. Ausgehend von dieser theoretischen Grundlage wird in diesem Abschnitt ein flachheitsbasiertes Vorsteuergesetz für die hier betrachtete Systemklasse hergeleitet [2, 3, 6, 9]. Bild 4.2 zeigt das zur Systemklasse gehörige Modell und die



**Bild 4.2:** In zwei Balkensegmente  $w_1$  und  $w_2$  unterteilter Ausleger

im Folgenden verwendete Nomenklatur. Das System wird analog zu Abschnitt 3.1.2 in zwei Bereiche unterteilt – oberhalb und unterhalb der Nutzlast  $m_L$  – in denen jeweils die Euler-Bernoulli-Differentialgleichung (2.8) gilt:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} w_1(x,t) + \left(\frac{\rho A}{EI}\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_1(x,t) = 0, \quad x \in [0,l] \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} w_2(x,t) + \left(\frac{\rho A}{EI}\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_2(x,t) = 0, \quad x \in [l,L]. \quad (4.14)$$

Eine normierte Darstellung der Differentialgleichungen bietet rechentechnische Vorteile, weshalb die Ortsvariable  $x$  und die Zeit  $t$  skaliert werden:

$$\underline{t} = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} t, \quad (4.15)$$

$$\underline{x} = \frac{x}{L}. \quad (4.16)$$

Der normierte Ort der Nutzlast  $l$  errechnet sich somit analog zu

$$\underline{l} = \frac{l}{L}. \quad (4.17)$$

Setzt man  $\underline{t}$  und  $\underline{x}$  in (4.13) und (4.14) ein, so ergeben sich die normierten Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial^4}{\partial \underline{x}^4} w_1(\underline{x}, \underline{t}) + \frac{\partial^2}{\partial \underline{t}^2} w_1(\underline{x}, \underline{t}) = 0, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial^4}{\partial \underline{x}^4} w_2(\underline{x}, \underline{t}) + \frac{\partial^2}{\partial \underline{t}^2} w_2(\underline{x}, \underline{t}) = 0. \quad (4.19)$$

Existiert ein flacher Ausgang, so lässt sich neben der Stellkraft auch die Biegelinie durch diesen parametrieren. Damit ist auch der Ort der Masse am Fusspunkt – also des Fahrwerks – parametrierbar. Dadurch kann der zum Folgen der Bewegung nötige Trägheitskraftverlauf der im Fusspunkt befindlichen Masse auch separat nachträglich berechnet werden. Die ohnehin aufwändigen analytischen Umformungen können dadurch etwas erleichtert werden, weshalb in den nachfolgenden Randbedingungen die Fußpunktmasse vernachlässigt wird:

$$-EI w_1''(0, t) = -k_T w_1'(0, t) \quad (4.20)$$

$$-EI w_1'''(0, t) = u(t) \quad (4.21)$$

$$w_1(l, t) = w_2(l, t) \quad (4.22)$$

$$w_1'(l, t) = w_2'(l, t) \quad (4.23)$$

$$w_1''(l, t) = w_2''(l, t) \quad (4.24)$$

$$-EI w_1'''(l, t) + m_L \ddot{w}_1(l, t) = -EI w_2'''(l, t) \quad (4.25)$$

$$w''(L, t) = 0 \quad (4.26)$$

$$w'''(L, t) = 0 \quad (4.27)$$

In Tabelle 4.1 sind die Bedeutungen der angesetzten Randbedingungen aufgeführt. Die Randbedingungen (4.20) - (4.27) normiert mit (4.15) - (4.16) lassen sich wie folgt schreiben:

$$\alpha w_1''(0, \underline{t}) = w_1'(0, \underline{t}) \quad (4.28)$$

$$w_1'''(0, \underline{t}) = \tilde{u}(\underline{t}) \quad (4.29)$$

$$w_1(l, \underline{t}) = w_2(l, \underline{t}) \quad (4.30)$$

**Tabelle 4.1:** Randbedingungen des oberen und unteren Balkensegments

RB-Nr.	Bedeutung
(4.20)	Torsionsmoment der Einspannung entspricht dem Biegemoment am Balkenfußpunkt.
(4.21)	Die Stellkraft $u(t)$ entspricht der Querkraft am Balkenfußpunkt.
(4.22)	Die Auslenkungen des unteren und oberen Balkenabschnitts jeweils an der Stelle $x = l$ sind gleich.
(4.23)	Die Neigungen des unteren und oberen Balkenabschnitts jeweils an der Stelle $x = l$ sind gleich.
(4.24)	Das Biegemoment des unteren Balkenabschnitts an der Stelle $x = l$ entspricht dem Biegemoment des oberen Balkenabschnitts an der Stelle $x = l$ .
(4.25)	Die Summe der Querkraft des unteren Balkenabschnitts an der Stelle $x = l$ und der Trägheitskraft der Masse an der Stelle $x = l$ entspricht der Querkraft des oberen Balkenabschnitts an der Stelle $x = l$ .
(4.26)	Am freien Ende herrscht kein Biegemoment.
(4.27)	Am freien Ende ist die Querkraft gleich Null.

$$w_1'(l, \underline{t}) = w_2'(l, \underline{t}) \quad (4.31)$$

$$w_1''(l, \underline{t}) = w_2''(l, \underline{t}) \quad (4.32)$$

$$w_1'''(l, \underline{t}) + \varphi \ddot{w}_1(l, \underline{t}) = w_2'''(l, \underline{t}) \quad (4.33)$$

$$w''(1, \underline{t}) = 0 \quad (4.34)$$

$$w'''(1, \underline{t}) = 0 \quad (4.35)$$

mit

$$\alpha = \frac{EI}{k_T L} \quad (4.36)$$

$$\varphi = -\frac{m_L}{\rho L A} \quad (4.37)$$

$$\tilde{u}(\underline{t}) = -\frac{L^3}{EI} u(\underline{t}). \quad (4.38)$$

Mit Hilfe des Mikusiński-Operatorenkalküls gehen die partiellen Differentialgleichungen in gewöhnliche über [31]. Formal lässt sich mit dem Operator  $s$  dieses Kalküls arbeiten, als ob es sich um die komplexe Frequenzvariable der Laplacetransformation handelt [38]. Die zu  $w$  und  $u$  gehörenden Darstellungen werden mit  $\hat{w}$  und  $\hat{u}$  bezeichnet.

Mit den homogenen Anfangsprofilen

$$w_1(\underline{x}, 0) = 0 \quad (4.39)$$

$$w_2(\underline{x}, 0) = 0 \quad (4.40)$$

$$\dot{w}_1(\underline{x}, 0) = 0 \quad (4.41)$$

$$\dot{w}_2(\underline{x}, 0) = 0 \quad (4.42)$$

erhält man so aus (4.18) - (4.19) die gewöhnlichen Dgln.:

$$\frac{d^4}{d\underline{x}^4} \hat{w}_1(\underline{x}) + s^2 \hat{w}_1(\underline{x}) = 0 \quad (4.43)$$

$$\frac{d^4}{d\underline{x}^4} \hat{w}_2(\underline{x}) + s^2 \hat{w}_2(\underline{x}) = 0, \quad (4.44)$$

in denen der Operator  $s$  als Parameter aufzufassen ist.

### 4.2.1 Berücksichtigung der Randbedingungen

Für das hier betrachtete Problem ist die Kombination aus den Lösungsansätzen nach [38] und [39] besonders vorteilhaft, da bei den vorliegenden Randbedingungen der analytische Aufwand zur weiteren Rechnung wesentlich geringer wird. Dies ist mit der Lage der Nullstellen der Ansatzfunktionen und den vorliegenden Randbedingungen zu erklären. Aus diesem Grund wird für die beiden Balkensegmente mit jeweils unterschiedlichen Ansätzen gearbeitet:

$$\hat{w}_1(\underline{x}) = a C_1(\underline{x}) + b C_2(\underline{x}) + c S_1(\underline{x}) + d S_2(\underline{x}), \quad (4.45)$$

$$\hat{w}_2(\underline{x}) = e C^+(\underline{x}) + f C^-(\underline{x}) + g S^+(\underline{x}) + h S^-(\underline{x}). \quad (4.46)$$

Dabei sind die Operatorfunktionen  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $S_1$  und  $S_2$  in (4.45) nach [39] wie folgt definiert:

$$C_1(\underline{x}) = \frac{\cosh(\sqrt{j s \underline{x}}) + \cos(\sqrt{j s \underline{x}})}{2} \quad (4.47)$$

$$C_2(\underline{x}) = \frac{\cosh(\sqrt{j s \underline{x}}) - \cos(\sqrt{j s \underline{x}})}{2j s} \quad (4.48)$$

$$S_1(\underline{x}) = \frac{\sinh(\sqrt{j s \underline{x}}) + \sin(\sqrt{j s \underline{x}})}{2\sqrt{j s}} \quad (4.49)$$

$$S_2(\underline{x}) = \frac{\sinh(\sqrt{j s \underline{x}}) - \sin(\sqrt{j s \underline{x}})}{2(j s)^{3/2}}. \quad (4.50)$$

Die Operatorfunktionen  $C^+$ ,  $C^-$ ,  $S^+$  und  $S^-$  in (4.46) lauten nach [38]:

$$C^+(\underline{x}) = \frac{C + \bar{C}}{2} = \frac{\partial S^-}{\partial \underline{x}} \quad (4.51)$$

$$C^-(\underline{x}) = \frac{C - \bar{C}}{2j} = \frac{\partial S^+}{\partial \underline{x}} \quad (4.52)$$

$$S^+(\underline{x}) = \frac{\bar{S} + j S}{2h\sqrt{s}} = -\frac{1}{s} \frac{\partial C^+}{\partial \underline{x}} \quad (4.53)$$

$$S^-(\underline{x}) = \frac{-\bar{S} + jS}{2\bar{h}\sqrt{s}} = \frac{1}{s} \frac{\partial C^-}{\partial \underline{x}}. \quad (4.54)$$

mit den Abkürzungen

$$C(\underline{x}) = \cosh [h\sqrt{s}(1 - \underline{x})], \quad (4.55)$$

$$S(\underline{x}) = \sinh [h\sqrt{s}(1 - \underline{x})], \quad (4.56)$$

$$j = \sqrt{-1} \quad (4.57)$$

$$h = \exp(j\pi/4). \quad (4.58)$$

Es bezeichnen  $\bar{C}$ ,  $\bar{S}$  und  $\bar{h}$  jeweils die zu  $C$ ,  $S$  und  $h$  konjugiert komplexen Ausdrücke.

Die verwendeten hyperbolischen Funktionen der Lösungsansätze sind nicht unabhängig voneinander, es lassen sich folgende nützliche Identitäten finden:

$$C^+(\underline{x}) = C_1(\underline{x} - 1) \quad (4.59)$$

$$C^-(\underline{x}) = s C_2(\underline{x} - 1) \quad (4.60)$$

$$S^-(\underline{x}) = S_1(\underline{x} - 1) \quad (4.61)$$

$$S^+(\underline{x}) = s S_2(\underline{x} - 1). \quad (4.62)$$

Werden die Lösungsansätze (4.45) – (4.46) in die Randbedingungen (4.28), (4.29), (4.34) und (4.35) eingesetzt, so ergeben sich:

$$c = \alpha b \quad (4.63)$$

$$d = \hat{u} \quad (4.64)$$

$$f = 0 \quad (4.65)$$

$$g = 0. \quad (4.66)$$

Damit vereinfachen sich die Gleichungen (4.45) und (4.46) zu

$$\hat{w}_1(\underline{x}) = a C_1(\underline{x}) + b C_2(\underline{x}) + \alpha b S_1(\underline{x}) + \hat{u} S_2(\underline{x}) \quad (4.67)$$

$$\hat{w}_2(\underline{x}) = e C^+(\underline{x}) + h S^-(\underline{x}). \quad (4.68)$$

Unter Verwendung der verbleibenden vier Randbedingungen (4.30) – (4.33) und den Gleichungen (4.67) – (4.68) erhält man ein Gleichungssystem für die vier Unbekannten  $a$ ,  $b$ ,  $e$  und  $h$ :

$$a C_1(l) + b [C_2(l) + \alpha S_1(l)] + \hat{u} S_2(l) = e C^+(l) + h S^-(l) \quad (4.69)$$

$$-a s^2 S_2(l) + b [S_1(l) + \alpha C_1(l)] + \hat{u} C_2(l) = -s e S^+(l) + h C^+(l) \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} -a s^2 C_2(l) + b [C_1(l) - \alpha s^2 S_2(l)] + \hat{u} S_1(l) &= -s e C^-(l) - s h S^+(l) \\ &\quad - a s^2 S_1(l) + \hat{u} C_1(l) \\ &\quad - b [s^2 S_2(l) + \alpha s^2 C_2(l)] \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\varphi s^2 [a C_1(l) + b [C_2(l) + \alpha S1(l)] + \hat{u} S_2(l)] = -s^2 e S^-(l) - s h C^-(l). \quad (4.72)$$

Die sich für die Unbekannten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  ergebenden Ausdrücke sind im Anhang A.2 abgedruckt. Setzt man  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  in (4.68) und (4.67) ein, so erhält man Gleichungen der Form

$$Q_1 \hat{w}_1(\underline{x}) = P_1(\underline{x}) \hat{u} \quad (4.73)$$

$$Q_2 \hat{w}_2(\underline{x}) = P_2(\underline{x}) \hat{u}. \quad (4.74)$$

Eliminiert man aus (4.73) und (4.74)  $\hat{u}$ , so erhält man

$$P_2(\underline{x}) Q_1 \hat{w}_1(\underline{x}) = P_1(\underline{x}) Q_2 \hat{w}_2(\underline{x}). \quad (4.75)$$

Führt man an dieser Stelle die Größe  $\hat{y}_0$  ein, so lässt sich schreiben

$$\hat{w}_1(\underline{x}) = P_1(\underline{x}) Q_2 \hat{y}_0 \quad (4.76)$$

$$\hat{w}_2(\underline{x}) = P_2(\underline{x}) Q_1 \hat{y}_0 \quad (4.77)$$

$$\hat{u} = Q_1 Q_2 \hat{y}_0. \quad (4.78)$$

Wie man sich leicht überzeugt ist (4.75) mit (4.78) widerspruchsfrei erfüllt. Gelingt nun noch die Transformation in den Zeitbereich, ist  $y_0$  eine Parametrierung der gesuchten Biegelinien  $w_1(\underline{x})$ ,  $w_2(\underline{x})$  und der Stellgröße  $\tilde{u}$ .

Da es die Berechnung erheblich vereinfacht, lässt sich eine den zweiten Balkenabschnitt indirekt parametrierende Größe  $\hat{y}$  einführen, die formal durch den flachen Ausgang des Systems  $\hat{y}_0$  mit

$$\hat{y} = Q_2 \hat{y}_0 \quad (4.79)$$

parametriert werden kann. Gelingt es nun den unteren Balkenabschnitt nur durch die Größe  $\hat{y}$  zu parametrieren, so lässt sich der zur Parametrierung der Stellgröße  $u$  notwendige Rechenaufwand stark verringern.

Weist die Parametrierung des unteren Balkenabschnitts die Eigenschaft auf, diesen in endlicher Zeit ohne jegliche verbleibende Erregung zu positionieren, so muss auch das obere Balkenstück nach Beendigung des Positioniermanövers in absoluter Ruhe sein. Diese Überlegung kann mit der Orthogonalität der Eigenfunktionen zueinander begründet werden, wodurch der Biegezustand eineindeutig auf die unendlich vielen Eigenfunktionen abgebildet wird. Ist an einem Punkt auf dem Balken jegliche Orts- und Zeitableitung gleich Null, so bedeutet dies unweigerlich dass das System in Ruhe ist, wenn von außen keine weitere Anregung erfolgt.

Eine Funktionenfamilie, die diese Forderung leisten kann, stellen die sogenannten Gevrey-Funktionen dar [38].

## 4.2.2 Reihendarstellung von Biegelinie und Antriebskraft

Mit der Größe  $\hat{y}$  folgt aus (4.79):

$$\hat{w}_1(\underline{x}) = P_1(\underline{x}) \hat{y} \quad (4.80)$$

$$\hat{u} = Q_1 \hat{y}. \quad (4.81)$$

Die Parametrierung der Trajektorien für einen Übergangsvorgang und die Berechnung der dazugehörigen Steuerung erfolgt durch Vorgabe einer Solltrajektorie für  $y$ , die zu  $\hat{y}$  gehörende Zeitfunktion [38]. Stellt man die Gleichungen jeweils als Potenzreihe dar, dann lässt sich der Differentialoperator  $s$  direkt durch den vertrauten Operator  $\frac{d}{dt}$  ersetzen.

In  $P_1$  und  $Q_1$  treten Multiplikationen mit bis zu 4 Operatorfunktionen auf. Analog zu den Additionstheoremen der Trigonometrie, lassen sich Identitäten finden, mittels derer die Multiplikationen in Summen gewandelt werden können. Im Anhang B sind die zur Umrechnung hergeleiteten nützlichen Identitäten zu finden. Hat man eine Summendarstellung bestehend aus den Operatorfunktionen gefunden, so lassen sich die nachfolgend in (4.82)-(4.85) aufgeführten Reihendarstellungen der benötigten Operatorfunktionen einsetzen und die einzelnen Reihen durch Umsortieren als eine Reihe schreiben

$$C_1(\underline{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \underline{x}^{4n}}{(4n)!} s^{2n} \quad (4.82)$$

$$C_2(\underline{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \underline{x}^{4n+2}}{(4n+2)!} s^{2n} \quad (4.83)$$

$$S_1(\underline{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \underline{x}^{4n+1}}{(4n+1)!} s^{2n} \quad (4.84)$$

$$S_2(\underline{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \underline{x}^{4n+3}}{(4n+3)!} s^{2n}. \quad (4.85)$$

Der Übergang in den Zeitbereich erfolgt anschließend durch Ersetzen der Potenzen des Operators  $s$  durch die entsprechenden Zeitableitungen. Die Lösung für das vorliegende System lautet:

$$w_1(\underline{x}, \underline{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( p_{1,n}(\underline{x}) \frac{y^{(2n)}(\underline{t})}{(4n)!} + p_{2,n}(\underline{x}) \frac{y^{(2n+2)}(\underline{t})}{(4n+2)!} + p_{3,n}(\underline{x}) \frac{y^{(2n+2)}(\underline{t})}{(4n+3)!} \right), \quad (4.86)$$

und für die Stellkraft ergibt sich

$$u(\underline{t}) = \frac{EI}{L^3} \left( \alpha \frac{y^{(2)}(\underline{t})}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( q_{1,n} \frac{y^{(2n+2)}(\underline{t})}{(4n+1)!} + q_{2,n} \frac{y^{(2n+4)}(\underline{t})}{(4n+3)!} \right) \right) \quad (4.87)$$

mit

$$\begin{aligned}
p_{1,n}(\underline{x}) &= \frac{1}{2} \left( \underline{x}^{4n} + (\Re + \Im)\{(1 - \underline{x} + j)^{4n}\} \right), \\
p_{2,n}(\underline{x}) &= \frac{\alpha\varphi}{4} (\Im\{(\underline{x} - 1 + j)^{4n+2}\} + \Im\{(\underline{x} - \underline{l} + \underline{l}j)^{4n+2}\}) \\
&\quad + \frac{\alpha\varphi}{8} \left[ (\Re - \Im)\{(\underline{l} - 1 + \underline{x} + (\underline{l} - 1)j)^{4n+2}\} \right. \\
&\quad \left. - \Re\{(\underline{x} - \underline{l} + 1 - (\underline{l} - 1)j)^{4n+2}\} + \Im\{(\underline{x} - \underline{l} + 1 + (\underline{l} - 1)j)^{4n+2}\} \right] \\
&\quad + \frac{\alpha\varphi}{8} \left[ (\Re - \Im)\{(\underline{x} - 1 - (2\underline{l} - 1)j)^{4n+2}\} \right. \\
&\quad \left. - (\Re - \Im)\{(\underline{x} - 2\underline{l} + 1 + j)^{4n+2}\} \right], \\
p_{3,n}(\underline{x}) &= -\frac{\alpha}{2} \underline{x}^{4n+3} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\varphi}{4}\right) \Re\{(\underline{x} - 1 - j)^{4n+3}\} - \frac{\alpha}{2} \Im\{(\underline{x} - 1 - j)^{4n+3}\} \\
&\quad + \frac{\varphi}{2} \Re\{(\underline{l} - \underline{x} + \underline{l}j)^{4n+3}\} + \frac{\varphi}{8} \left[ (\Re - \Im)\{(\underline{l} - 1 + \underline{x} + (\underline{l} - 1)j)^{4n+3}\} \right. \\
&\quad \left. + (\Re - \Im)\{(\underline{l} - 1 - \underline{x} + (\underline{l} - 1)j)^{4n+3}\} \right] \\
&\quad - \frac{\varphi}{8} \left[ (\Re - \Im)\{(\underline{x} - 2\underline{l} + 1 - j)^{4n+3}\} \right. \\
&\quad \left. + (\Re - \Im)\{(\underline{x} - 1 + (2\underline{l} - 1)j)^{4n+3}\} \right], \\
q_{1,n} &= [(-4)^n \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\varphi}{4} - \frac{\underline{l}\varphi}{2} \right) + (2\underline{l} - 1 + j)^{4n} \frac{\varphi}{8} (-1 - j) + \\
&\quad + (2\underline{l} - 1 - j)^{4n} \frac{\varphi}{8} (j - 1)] (4n + 1) + (-4)^n, \\
q_{2,n} &= \left\{ (-4)^{n+1} (1 + 2\underline{l}^{4n+3} - 2(\underline{l} - 1)^{4n+3}) + 2\Re\{(1 + (2\underline{l} - 1)j)^{4n+3}\} \right\} \frac{\varphi\alpha}{8}.
\end{aligned}$$

### 4.2.3 Parametrierung der Reihe

Neben einer reinen Positionierbewegung mit sich stetig ändernder Geschwindigkeit sollen auch Beschleunigungsbewegungen auf eine konstante Geschwindigkeit – z.B. die vom System maximal erreichbare Geschwindigkeit – realisiert werden können.

Die die Trajektorie  $t \mapsto y(t)$  parametrierende Funktion muss einerseits also die gerade genannten Manöver ermöglichen und zum anderen aber auch die Konvergenz der verwendeten Reihen garantieren. Um die Anfangs- und Konvergenzbedingungen zu erfüllen, wählt man eine Trajektorie  $t \mapsto y(t)$  derart, dass die folgenden in [38] zu findenden Bedingungen für eine glatte Funktion  $y$  erfüllt sind:

- $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine  $\mathcal{C}^\infty$  Funktion,
- $y^{(i)}(t) = 0$  für  $t \leq 0$ ,  $i \geq 0$ ,
- $y^{(i)}(t) = y_T^{(i)}(t)$  für  $t \geq T$ ,  $i \geq 0$ ,
- $y$  ist eine Gevrey-Funktion der Klasse  $\alpha < 2$ .

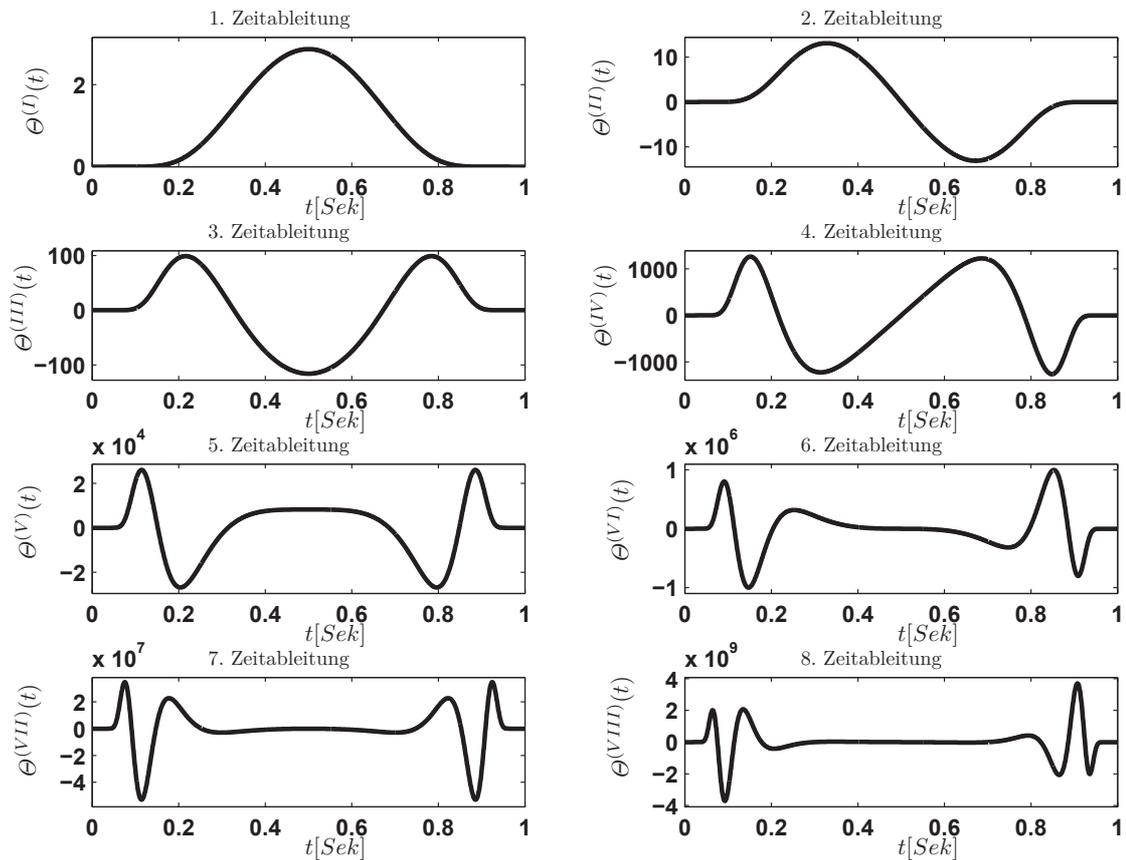
Eine Funktion, die diese Bedingungen erfüllt, kann keine analytische Funktion sein, außer sie ist identisch Null. Die Funktion

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{\int_0^t \theta_{\sigma,T}(\tau) d\tau}{\int_0^T \theta_{\sigma,T}(\tau) d\tau} & t \in (0,T) \\ 1 & t \geq T \end{cases} \quad (4.88)$$

mit der glockenförmigen den Integrkern bildenden Funktion

$$\theta_{\sigma,T}(t) = \begin{cases} 0 & t \notin (0,T) \\ \exp\left(\frac{-1}{\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\frac{t}{T}\right]^\sigma}\right) & t \in (0,T) \end{cases} \quad (4.89)$$

ist eine Gevrey-Funktion der Klasse  $\alpha = 1 + \frac{1}{\sigma}$  [26]. Mit dieser Funktion wurde in dieser Arbeit gearbeitet. In [38] findet sich ein weiteres Beispiel einer Gevrey-



**Bild 4.3:** Exemplarisch dargestellte ersten 8 Zeitableitungen der zur Parametrierung der Lösung herangezogenen Gevrey-Funktion aus (4.88) mit den Parametern  $\sigma = 1.1$  und  $T = 1$

Funktion:

$$\Theta_G(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{2(2\frac{t}{T}-1)}{(4\frac{t}{T}(1-\frac{t}{T}))^\sigma}\right) & t \in (0, T) \\ 1 & t \geq T \end{cases} \quad (4.90)$$

Für beide Funktionen sind in [38] rekursive Algorithmen zur Berechnung der Zeita-bleitungen zu finden, wodurch eine effiziente numerische Implementierung möglich ist.

Mit diesen Funktionen ist es möglich den zeitlichen Übergang für das System zwischen einer Anfangs- und Endtrajektorie mit endlich vielen Ableitungen, die nicht identisch Null sind, zu interpolieren. Von dieser Möglichkeit wird nachfolgend für die Manöver Positionieren und Beschleunigen Gebrauch gemacht.

### Positionieren

Für Positionierzwecke ist die Zieltrajektorie  $t \mapsto y_T(t)$  einfach eine Konstante  $y_T^*$ , die den Weg bezeichnet, um den die Vorrichtung verfahren werden soll. Der Verschleiß zwischen den beiden Positionen lässt sich leicht durch Multiplikation von (4.88) mit dem gewünschten Verfahrensweg  $y_T^*$  bewerkstelligen:

$$t \mapsto y^*(t) = y_T^* \Theta(t). \quad (4.91)$$

In Bild 4.4 ist die Trajektorie des flachen Ausgangs gemäß (4.91) zum nachschwingungsfreien Positionieren dargestellt.

### Beschleunigen

Falls über längere Distanzen positioniert werden soll, sind durch die maximal verfügbare Fahrgeschwindigkeit zusätzliche Grenzen gesetzt. Daher ist es wünschenswert, das Gerät auf die maximal verfügbare Geschwindigkeit schwingungsfrei zu beschleunigen. Die für  $t > T$  zu erreichende Zieltrajektorie lautet

$$t \mapsto y_T(t) = vt + y_0. \quad (4.92)$$

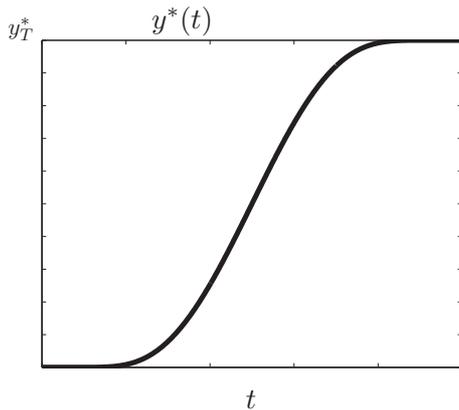
Eine mögliche Wahl für einer Trajektorie  $t \mapsto y^*(t)$  die sich in endlicher Zeit der Zieltrajektorie angleicht ist

$$t \mapsto y^*(t) = \int_0^t v \Theta(\tau) d\tau, \quad (4.93)$$

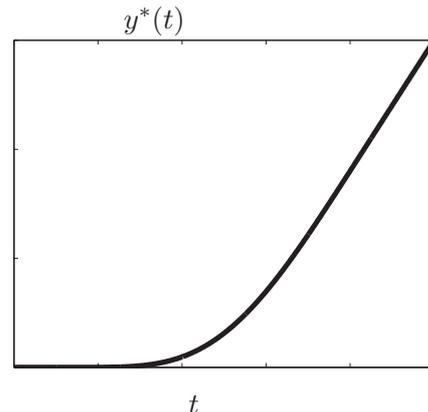
wobei sich die Stetigkeit zur Zieltrajektorie  $y_T(t)$  mit folgender Festlegung der Konstanten (4.92)

$$y_0 = -\frac{\int_0^T \Theta(\tau) d\tau}{T} \quad (4.94)$$

garantieren lässt. In Bild 4.5 ist die Trajektorie des flachen Ausgangs gemäß (4.93) zum nachschwingungsfreien Beschleunigen auf eine Zielgeschwindigkeit dargestellt.



**Bild 4.4:** Exemplarischer Verlauf des flachen Ausgangs über der Zeit zur Parametrierung eines Positioniermanövers



**Bild 4.5:** Exemplarischer Verlauf des flachen Ausgangs über der Zeit zur Parametrierung eines Beschleunigungsmanövers

#### 4.2.4 Berücksichtigung der Masse im Fußpunkt

Mit den vorangehend gefundenen Parametrierungen lässt sich der Verlauf der Biegelinie  $w(\underline{x}, t)$  und die zu diesem Verlauf führende als Querkraft wirkende Antriebskraft  $u(t)$  derart mathematisch parametrieren, dass keine unerwünschten Restschwingungen verbleiben. Befindet sich nun eine Masse an der Stelle des Fußpunktes, so muß diese entsprechend der Beschleunigung der Biegelinie an der Stelle der Einspannung  $\ddot{w}(\underline{x}, t)|_{\underline{x}=0}$  mitbeschleunigt werden womit für die nötige Antriebskraft gilt:

$$u_{m_g}(t) = u(t) + \ddot{w}(\underline{x}, t)|_{\underline{x}=0} m_g \quad (4.95)$$

Darin bezeichnet  $m_g$  die gesamte durch den Aktor an der Einspannungsstelle des Balkens zu beschleunigende Masse, d.h. die direkt wägbare Masse des Fußpunktes  $m_F$  und die rotatorischen Trägheiten  $m_A$  sowie gegebenenfalls  $m_R$  wie in Abschnitt 2.4.2 bzw. 2.4.3 hergeleitet.

In Bild 4.6 und Bild 4.8 finden sich exemplarisch die berechneten Kraftverläufe für ein Positionier- und ein Beschleunigungsmanöver am Laborsystem LARS. Dabei entspricht der Kurvenzug „U Balken“ der flachheitsbasiert berechneten Querkraft

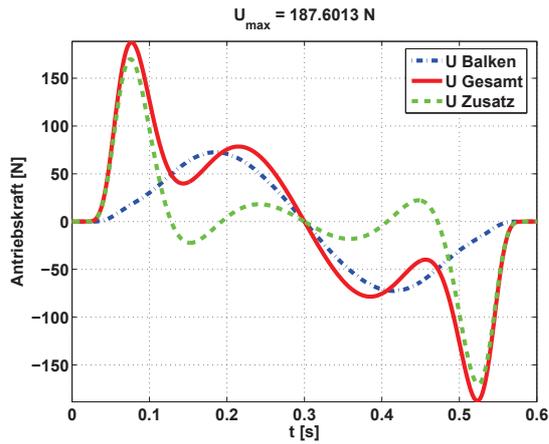


Bild 4.6: Kraftverläufe zum Positionieren

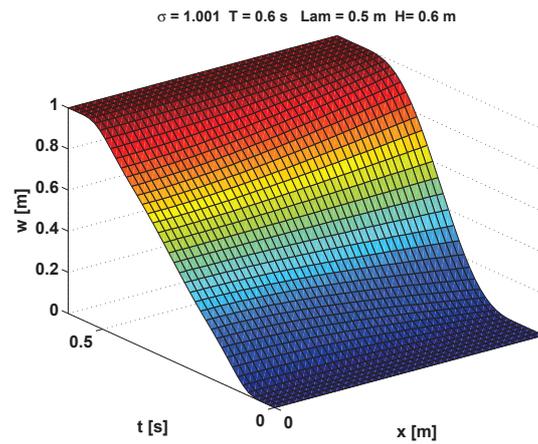


Bild 4.7: Biegefeld zum Positionieren

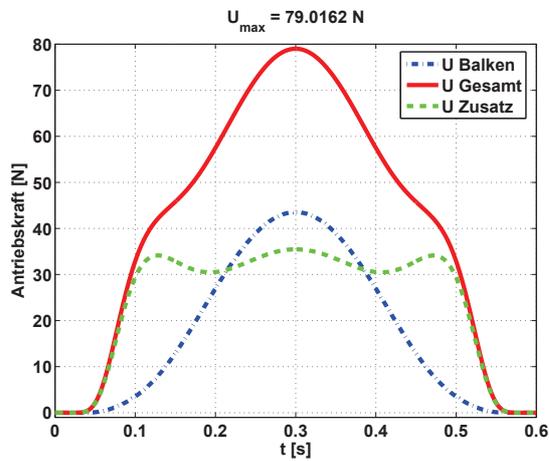


Bild 4.8: Kraftverläufe zum Beschleunigen

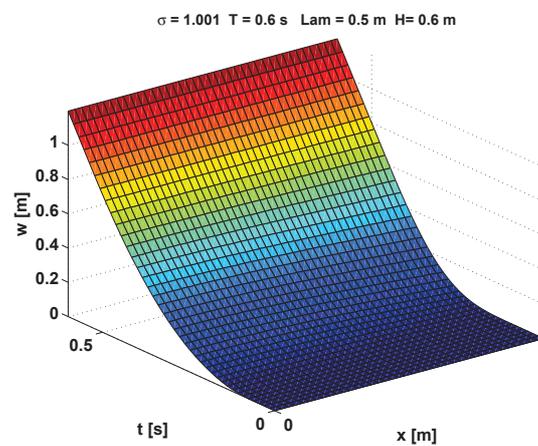


Bild 4.9: Biegefeld zum Beschleunigen

am Balkenfusspunkt  $u(t)$ , „U Zusatz“ dem Kraftverlauf zur nötigen Beschleunigung der Masse  $m_g$  am Fusspunkt und „U Gesamt“ dem resultierenden Antriebskraftverlauf  $u_{m_g}(t)$ . In Bild 4.7 und Bild 4.9 finden sich die Verläufe der Biegefelder  $w(x,t)$  während der Positionier und Beschleunigungsmanöver.

# 5 Regelungsentwurf

## 5.1 Gründe für eine Regelung

Die vorgestellten Vorsteuerungsverfahren bewerkstelligen bei einem idealen System nachschwingungsfreies Positionieren der flexiblen Struktur.

Bei einem realen System gibt es jedoch stets folgende Störeinflüsse zu beachten:

- Reibung, hier insbesondere Rollreibungseffekte
- Parameterschwankungen zum Beispiel durch fertigungstechnische Toleranzen oder Materialschwankungen bedingt
- Modellierungsungenauigkeiten
- Kinematische Störanregungen, zum Beispiel durch verschmutzte oder verbogene Führungen
- Benutzereingriffe wie nachträglich angebrachte Anbauteile

Einige der oben genannten Punkte sind schwer zu modellieren, bzw. die Parametrierung der Modellierung ist stark zeitvariant. So ändert sich ein Reibungsmodell verschleißbedingt stetig mit zusätzlicher starker Parameterabhängigkeit - etwa von der Temperatur des Schmiermittels. Daher ist derartigen Störeinflüssen nur sehr schwer und begrenzt mit entsprechenden Vorsteueralgorithmen exakt entgegenzukommen.

Um einen zuverlässigen Betrieb auch über längere Laufzeiten zu gewähren, wird die Vorsteuerung um eine Regelung erweitert.

## 5.2 Vorsteuerung

### 5.2.1 Reibungsvorsteuerung

Wie im Abschnitt 2.5 dargestellt, gibt es verschiedene Ursachen von Reibung. Im Falle der trockenen Reibung spielen Materialparameter und v.a. geometrische Größen eine maßgebliche Rolle. Da im Falle der trockenen Reibung kein Fluid die Rollflächen umspült, machen sich auch sehr kleine Fremdkörper wie Staubpartikel deutlich bemerkbar. Daher ist es nicht verwunderlich, dass jedes Lager geschmiert oder wenigstens geölt wird. Das dadurch resultierende Reibungsverhalten ergibt sich als

gewichtete Überlagerung zumindest der genannten Phänomene mit besonderem Einfluß durch die mechanischen Parameter Anpresskraft und Geschwindigkeit. Darüberhinaus gehen durch die beteiligten Phänomene und Mechanismen die unterschiedlichsten messbaren aber auch stochastischen Parameter in das Lagerverhalten ein.

Im Allgemeinen lässt sich das tatsächliche Reibungsverhalten mittels der in Bild 2.14 dargestellten Stribeckkurve gut annähern. Dadurch ist die Parameterzahl deutlich reduziert und die betreffenden Größen direkt am System ermittelbar. In den im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Fällen waren Rollreibungseffekte derart dominant, dass der Haftreibungsanteil vernachlässigt werden kann und eine Reibungskennlinie der Form

$$F_R(v) = \begin{cases} F_{Roll+} + b_+v & \text{für } v > 0 \\ \kappa & \text{für } v = 0 \\ F_{Roll-} + b_-v & \text{für } v < 0 \end{cases}$$

mit  $\kappa \in [F_{Roll-} \dots F_{Roll+}]$  eine praktisch hinreichend genaue Approximation darstellt.

Hat man die Möglichkeit am System geschwindigkeitsgeregelte Messfahrten durchzuführen, lässt sich aus den Antriebskraftverläufen eine Reibungskennlinie ermitteln. Bei konstanter Fahrt wird jeweils ein Antriebskraftwert erfasst, welcher der aufzubringenden Reibungskraft zur Aufrechterhaltung der Geschwindigkeit entspricht. Dabei hat sich folgendes Vorgehen bewährt:

1. Mindestens fünf Antriebskraftmesswerte pro Geschwindigkeit und Richtung ermitteln
2. Mittelwert pro Geschwindigkeitsstufe bilden
3. Koeffizienten der Geradensegmente mittels der linearen Ausgleichsrechnung<sup>1</sup> ermitteln

## 5.2.2 Vorsteuerung zur Positionierung

Während die vorgenannte Reibungsvorsteuerung lediglich versucht den Effekt der Reibung steuerungstechnisch zu kompensieren, hat die Vorsteuerung zur Positionierung den Zweck ein vorab geplantes Systemverhalten herbeizuführen. Im Gegensatz zu einer Regelung ist eine reine Vorsteuerung unempfindlich gegenüber Rückwirkungen vom System insb. was selbsterregte Schwingungen anbelangt. So wirken sich z.B. Totzeiten, die die mögliche Bandbreite einer reinen Regelung stark begrenzen gar nicht begrenzend auf die mögliche Manöverdynamik aus. Ein weiterer Vorteil einer Vorsteuerung ist es die verfügbare Aktorkraft voll ausschöpfen zu können, während

---

<sup>1</sup> Siehe Anhang D.2

man bei einem geregelten System einen gewissen Handlungsspielraum zur Aktorbegrenze einhalten sollte um z.B. Begrenzungs Effekte<sup>2</sup> der Regelung zu vermeiden [17].

### 5.3 Regelungs- und Steuerungskonzept

Um den vorgenannten Vorteil einer Steuerung zu nutzen, wird der Positioniervorgang in einen rein gesteuerten, einen geregelten und einen Übergangsbereich unterteilt. Dazu wird ein Zustandsautomat benötigt, der vor jedem Manöver die Vorsteuerungsalgorithmen, Regler und ggf. Beobachter konfiguriert.

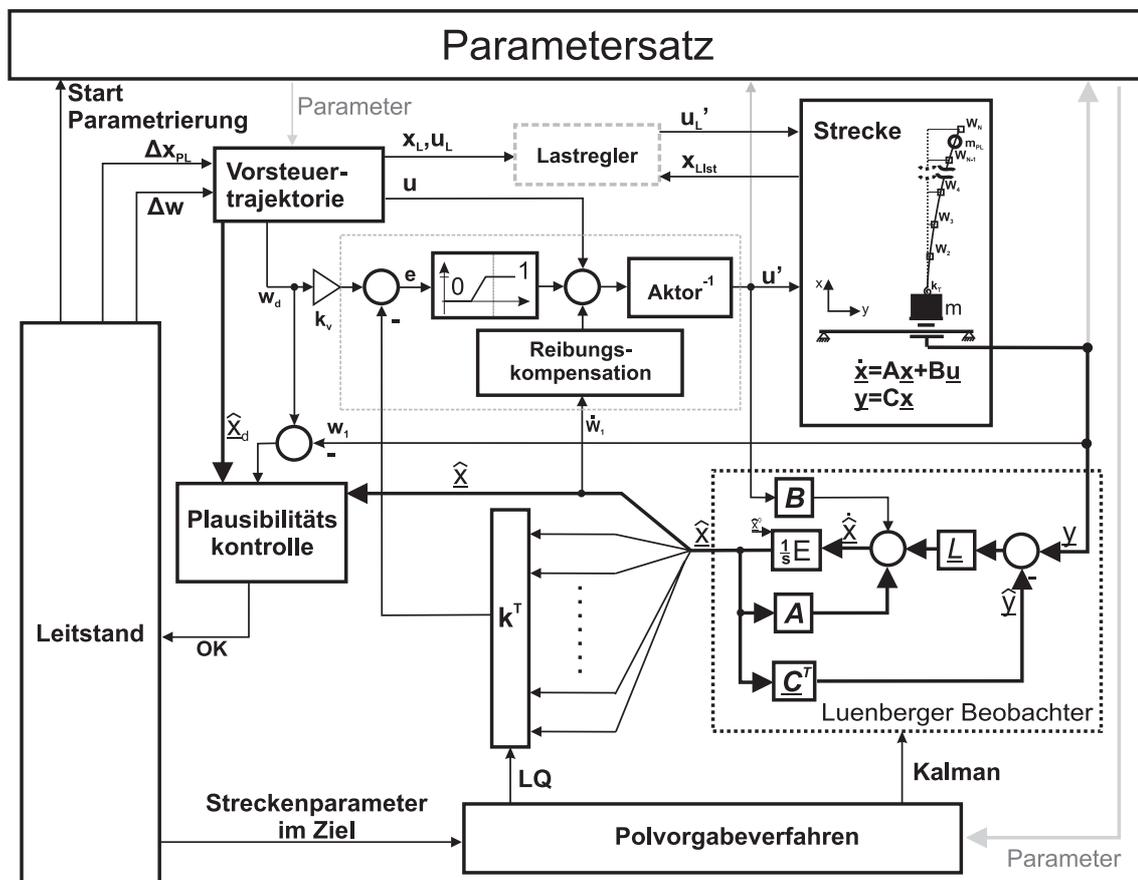


Bild 5.1: Regelungskonzept

In Abbildung 5.1 erkennt man das Blockschaftbild für das System LARS. Dabei wird der für die Balkendynamik entscheidende Regelkreis besonders detailliert dargestellt. Mittels eines Luenberger-Beobachters werden die für den Zustandsregler nötigen Zustandsgrößen ermittelt, wodurch zusätzliche Sensoren vermieden werden. Zustandsregler und -beobachter werden mittels Polvorgabeverfahren in Abhängigkeit von den Systemparametern konfiguriert. Im Falle eines Systems mit Spiel empfiehlt sich der

<sup>2</sup> Auch als Wind-Up bekannt.

Einsatz eines klassischen einfachen PD-Reglers. Dadurch entfällt der Beobachter und der Ort des Fusspunkts  $w_1$  wird direkt zur Fehlerdifferenzbildung herangezogen. Die skalare Vorfiltergröße  $k_v$  ist beim Einsatz eines PD-Reglers anstatt zu  $k_v = N$  – also der Knotenanzahl – mit  $k_v = 1$  zu wählen.

Mit den vorliegenden Informationen kann ferner eine Abweichung vom geplanten Biegeverlauf ermittelt werden. Falls es hier zu großen Abweichungen kommt, kann der steuernde Zustandsautomat die Antriebskraft abschalten und das System definiert herunterfahren. Das Stellsignal des Reglers wird um die Kraft aus der Reibungsvorsteuerung erweitert. Um dynamische Effekte des Aktors zu unterdrücken wird die Stellgröße durch die Übertragungsfunktion der inversen Aktordynamik modifiziert ehe der Aktor der Anlage damit beaufschlagt wird.

## 5.4 Beobachter- und Regelungsentwurf

Nachfolgend werden Regelungs- und Beobachterentwurf ausgehend vom in (2.75) vorgestellten Zustandsraummodell mit den im Abschnitt 2.3.3 durchgeführten Modifikationen für ein System mit zeitinvarianter Massenbelegung durchgeführt.

### 5.4.1 Strukturbeschränkte Zustandsrückführung

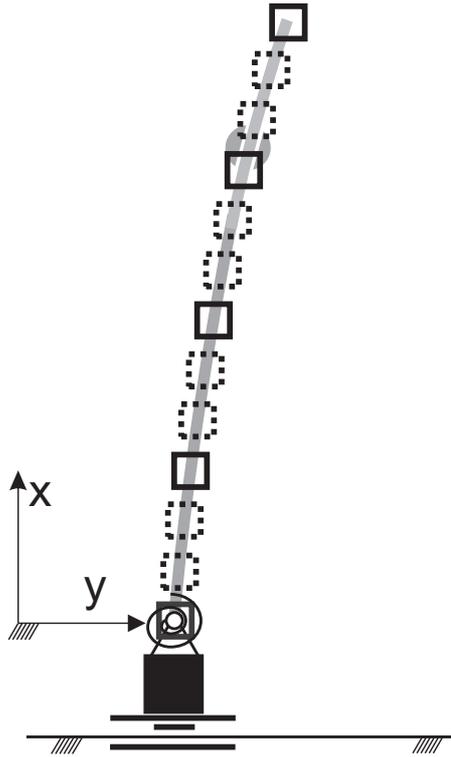
Durch die Methode der Finiten Differenzen wird ein endlich dimensionales Systemmodell gewonnen, das einer Annäherung der tatsächlich vorhandenen verteilt parametrischen Systemdynamik entspricht. Die Dimension des numerischen Modells ist stets endlich, während sich das zu Grunde gelegte mathematische Modell einer partiellen Differentialgleichung von unendlicher Dimension ist. Zur numerischen Untersuchung dieses Umstands auf das Ergebnis eines Regelungsentwurfs wurde die Strecke mit einem Zustandsraummodell mit einer höheren Knotenzahl  $N_{strecke}$  simuliert, während die Zustandsrückführung und -reglerauslegung auf einem Systemmodell mit einer kleineren Knotenzahl  $N_{modell}$  basiert wie in Bild 5.2 veranschaulicht wird. Eine derartige Regelung wird als strukturbeschränkte Zustandsrückführung oder als Ausgangsrückführung bezeichnet [17].

Nur wenn der Reglerentwurf die Eigenwerte des geregelten Systems nicht in unbeabsichtigter Weise verschiebt, kann das beabsichtigte Systemverhalten erwartet werden. Dieser Zusammenhang kann direkt untersucht werden wenn

$$N_{strecke} - 1 = k \cdot (N_{modell} - 1) \quad k \in \mathbb{N} \quad (5.1)$$

Dann fallen die Knoten des Modells exakt mit den Knoten der Strecke zusammen. Eine Zustandsrückführung mit dem Vektor der Rückführverstärkungen

$$\mathbf{R}_{modell} = [r_{1modell} \quad r_{2modell} \quad r_{3modell} \quad \cdots \quad r_{Nmodell}] \quad (5.2)$$



**Bild 5.2:** Diskretisierung der Balkenstruktur durch Knoten. Schwarz durchgezogen stellen Knoten des zum Reglerentwurfs herangezogenen gestrichelt des zur numerischen Simulation der Strecke genutzten Modells dar.

verschiebt die Eigenwerte des Modells, die sich als Nullstellen der charakteristischen Gleichung

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{modell} + \mathbf{B}_{modell} \cdot \mathbf{R}_{modell}] = 0 \quad (5.3)$$

berechnen. Wird dieser Regler aber auf das höher dimensionale System angewendet so ergibt sich für den Vektor der Zustandsrückführung der simulierten Strecke

$$\hat{\mathbf{R}}_{strecke} = [r_{1modell} \quad 0 \quad 0 \quad r_{2modell} \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad r_{Nmodell}] \quad (5.4)$$

Ein solcher Entwurf gewährt im Allgemeinen keine Stabilität. Es muss also die höher dimensionale Strecke im Entwurf des nieder dimensionalen Reglers berücksichtigt werden. In [17] findet sich zum Entwurf von Ausgangsrückführungen ein Ansatz nach Riccati-Art. Jedoch lieferte bereits das Riccati-Verfahren für eine vollständige Zustandsrückführung für ein reduziertes Modell mit nur 5 Knoten auch am Prüfstand stabiles Systemverhalten, weshalb diese Möglichkeit nicht angewendet wurde.

### 5.4.2 Kondition und Polverschiebungsverfahren

Die Empfindlichkeit einer numerisch zu berechnenden Lösung eines Gleichungssystems gegenüber numerischen Ungenauigkeiten lässt sich mit dem Begriff der Kondition des Problems erfassen. Schlecht konditionierte Probleme streuen bereits bei kleinen Fehlern die Ergebnisse stark. Folgendes Beispiel aus [20] soll diesen Zusammenhang verdeutlichen. Betrachtet wird folgendes lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.01 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Die Lösung dieses Systems ist  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Verändert man die Systemmatrix nur minimal, so wird aus (5.5) das Gleichungssystem (5.6).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.005 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.01 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Die Lösung dieses Systems ist jetzt aber eine völlig andere! Der Lösungsvektor  $\mathbf{x}$  berechnet sich zu

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -0.01 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Für den Regelungs- und Beobachterentwurf werden zur Polvorgabe jedoch mathematische Operationen wie die Berechnung von Inversen zumindest jedoch das Lösen linearer Gleichungssysteme benötigt. Will man bei einem schlecht konditioniertem Problem wie dem hier vorliegenden eine manuelle Polvorgabe realisieren, empfiehlt sich das Verfahren der sukzessiven Polvorgabe gemäß [36]. Wegen der sukzessiven numerischen Bearbeitung lässt sich das Ergebnis nach jedem Schritt kontrollieren. Es hat sich gezeigt, dass die Verschiebung eines konjugiert komplexen Streckeneigenwertes in zwei reelle Regelungseigenwerte numerisch schwierig ist, während die Verschiebung lediglich des Realteils des konjugiert komplexen Streckeneigenwertes numerisch keine Probleme bereitet.

Jedoch konnten die simulativ gewonnenen positiven Erfahrungen beim realen Prüfstandsversuch nicht bestätigt werden. Hier zeigte sich, dass eine im Rahmen eines Riccati-Regler-Entwurfs zu Stande kommende Platzierung der Pole, im Bezug auf die Systemstabilität der manuellen Polvorgabe zu bevorzugen ist.

### 5.4.3 Reglerentwurf durch Zustandsrückführung

Die im Abschnitt 2.3 hergeleiteten Systemgleichungen entsprechen im Falle einer sich nicht bewegenden Masse einem linearen zeitinvarianten System dessen Dynamik sich

durch den nachfolgenden Satz Gleichungen beschreiben lässt:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (5.9)$$

Die Dynamik des Systems soll mittels einer Zustandsrückführung

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}\mathbf{x} \quad (5.10)$$

beeinflusst werden. Setzt man dieses Regelgesetz in die Zustandsdifferentialgleichung (5.8) ein, so erhält man für das geregelte System:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R})\mathbf{x} \quad (5.11)$$

Jeder Eigenwert  $s$  des geregelten Systems genügt jeweils der charakteristischen Gleichung

$$\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R})] = 0. \quad (5.12)$$

Ein Riccati-Reglerentwurf platziert die Eigenwerte des geregelten Systems so, dass das quadratische Gütemaß  $J$  minimiert wird [17]:

$$J = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) dt}_{\text{verlaufsgewichtender Anteil}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathbf{u}(t)^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{u}(t) dt}_{\text{verbrauchsgewichtender Anteil}} \quad (5.13)$$

$$\text{mit } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & q_{NN} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{q}_{NN} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Q}$  ist dabei die Matrix der Gewichtungsfaktoren für das Gütemaß der Zustände und  $\tilde{\mathbf{Q}}$  die Matrix der Gewichtungsfaktoren für das Gütemaß der Stellgrößen. Die Wahl der Gewichtungsfaktoren ist vom Anwender vorzunehmen. Soll z.B.  $x_1$  besonders schnell klein gemacht werden, dann wählt man  $q_{11}$  besonders groß.

Damit lässt sich nun das Regelgesetz für einen Zustandsregler nach Riccati anschreiben:

$$\mathbf{u} = -\underbrace{\tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}}_{\mathbf{R}} \mathbf{x}. \quad (5.14)$$

Dabei ist  $\mathbf{P}$  eine konstante, symmetrische positiv definite ( $N \times N$ )-Matrix, die sich als Lösung der algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung ergibt:

$$\mathbf{P}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{Q}}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5.15)$$

Routinen zur Lösung dieser Matrixgleichung sind in vielen Programmpaketen enthalten. Bei MATLAB etwa lautet der entsprechende Befehl:

$$[X,L,G] = \text{CARE}(A,B,Q,R)$$

Die Faktoren der Gewichtsmatrix  $\mathbf{Q}$  des Zustandsvektors werden für die Positionen  $q_P$  und Geschwindigkeiten  $q_G$  getrennt betrachtet. Das ist sinnvoll, da die Bewertung der Position die Stellgrößenverstärkung bestimmt und die Bewertung der Geschwindigkeit einen dämpfenden Charakter besitzt. Damit ergibt sich die Gewichtsmatrix des Zustandsvektors zu:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_P & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & q_P & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & q_G & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & q_G \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Da das betrachtete System nur eine Stellgröße, die Aktorkraft, besitzt, vereinfacht sich die Matrix  $\tilde{\mathbf{Q}}$  mit den Gewichtungsfaktoren für das Gütemaß der Stellgrößen zur skalaren Größe  $\tilde{Q} = r$ .

Nach [17] ist bei der Auslegung des Riccati-Reglers nur das Verhältnis der entsprechenden Einträge der Gewichtsmatrizen  $\mathbf{Q}$  zu denen der  $\tilde{\mathbf{Q}}$  und nicht die Absolutwerte bedeutend. Daher wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Gewichtsmatrix der Stellgrößen zu  $r = 1$  gesetzt und nur die  $q_P$  und  $q_G$  variiert.

#### 5.4.4 Beobachterentwurf

Ausgehend von einem parallel zur realen Strecke simulierten Systemmodell, machte Luenberger folgenden Vorschlag einer Rückkoppelung aus Messgrößen auf das Beobachtermodell, um die Dynamik des beobachteten Zustandsvektors  $\hat{x}$  gezielt zu beeinflussen [17]:

$$\dot{\hat{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\hat{x} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Ly} \quad (5.17)$$

Als Entwurfsfreiheitsgrad hat man nun die Matrix  $\mathbf{L}$  um die Dynamik des Schätzfehlers  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  festzulegen [17]:

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \quad (5.18)$$

$$\dot{\tilde{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} - (\mathbf{A}\hat{x} - \mathbf{LC}\hat{x} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Ly}) \quad (5.19)$$

$$(5.20)$$

was wegen  $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$  nach kurzer Umformung zu

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} \quad (5.21)$$

führt. Die Dynamik des Schätzfehlers lässt sich also durch die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$  mit dem Entwurfsparameter in Form der Matrix  $\mathbf{L}$  festlegen [17].

Mit der im Anhang D.1 dargestellten Identität bzgl. der Dynamik transponierter Systeme, lässt sich die Fehlerdifferentialgleichung in ein transponiertes Ersatzsystem umwandeln [17]:

$$\dot{\mathbf{x}}_f = (\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T\mathbf{L}^T)\mathbf{x}_f \quad (5.22)$$

Führt man die Größe  $\mathbf{u}_f = -\mathbf{L}^T\mathbf{x}_f$  ein, ist offensichtlich, dass sich der Beobachterentwurf auf den Zustandsreglerentwurf zurückführen lässt. Die für die Polvorgabeverfahren existierenden Algorithmen gelten analog mit den Ersetzungen

$$\mathbf{A}^T \text{ anstelle von } \mathbf{A} \quad (5.23)$$

$$\mathbf{C}^T \text{ anstelle von } \mathbf{B} \quad (5.24)$$

$$\mathbf{L}^T \text{ anstelle von } \mathbf{R} \quad (5.25)$$

Der Unterschied zwischen Luenberger-Beobachter und Kalman-Filter besteht lediglich in der Bestimmung der Rückführmatrix  $\mathbf{L}$ , welche beim Kalman-Filter ein quadratisches Gütemaß optimiert [17]. Der Kalman-Filter-Entwurf entspricht formal einem Zustandsreglerentwurf nach Riccati aus Kapitel 5.4.3. In Analogie erhält man dann den optimalen Beobachter für das System gemäß (5.8) bzw. (5.9) aus:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}\mathbf{y} \quad (5.26)$$

mit

$$\mathbf{L} = (\tilde{\mathbf{R}}_N^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P})^T = \mathbf{P}\mathbf{C}^T\tilde{\mathbf{R}}_N^{-1} \quad (5.27)$$

und  $\mathbf{P}$  der konstanten, symmetrischen, positiv definiten ( $N \times N$ )-Matrix, die sich als Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung ergibt:

$$\mathbf{P}\mathbf{C}^T\tilde{\mathbf{R}}_N^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{Q}_N = \mathbf{0} \quad (5.28)$$

Durch die Wahl von  $\mathbf{L}$  wird die Kostenfunktion

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathbf{x}_f(t)^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_f(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathbf{u}_f(t)^T \tilde{\mathbf{R}}_N \mathbf{u}_f(t) dt \quad (5.29)$$

minimiert, der fiktive Regelkreis regelt also auftretende Schätzfehler  $\mathbf{x}_f$  auf eine optimale Weise aus [17].

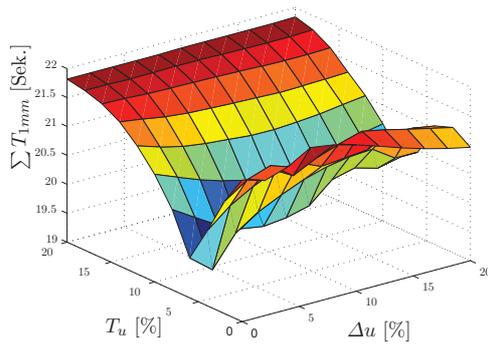


Bild 5.3: Verfahrszeiten

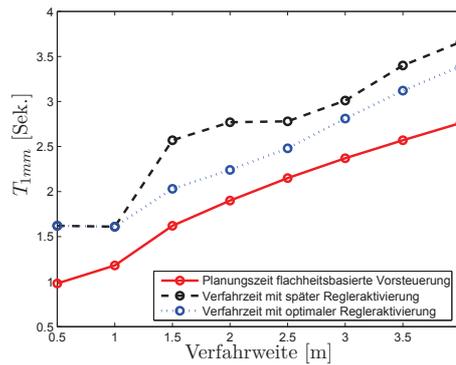


Bild 5.4: Positionierzeiten

Das Separationstheorem besagt, dass sich Regelkreis- und Beobachtereigenwerte nicht beeinflussen, sondern das dynamische System als Vereinigung der Eigenwertmengen mitbestimmen [17]. Daher ist es zweckmäßig die Beobachtereigenwerte links von den Regelungseigenwerten zu platzieren, um die geregelte Systemdynamik nicht durch den Beobachter auszubremsen.

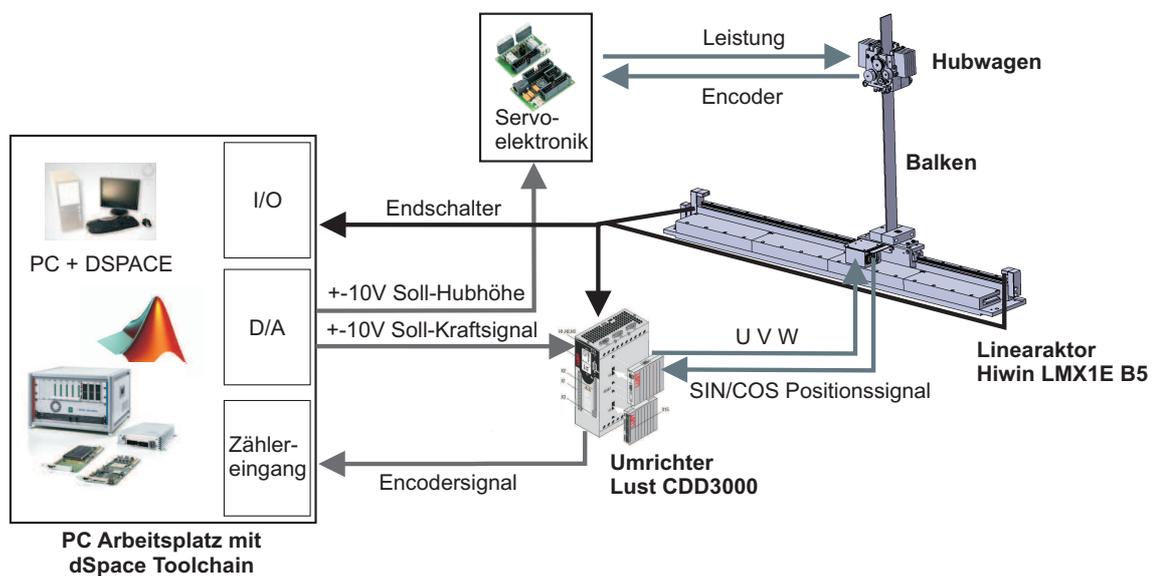
Das Kalman-Filter zeigt gegenüber einem durch Polvorgabe entworfenen Beobachter oftmals gutmütigeres Verhalten bezüglich Einschwingdynamik und Robustheit gegen Rauschen. Daher wird es bei der Handhabung von Messungen, die mit Störsignalen überlagert sind, bevorzugt. Auch in diesem hier vorliegenden Anwendungsbeispiel hat sich die Beobachterausslegung nach Kalman bewährt.

## 5.5 Zeitabhängiges Schließen des Regelkreises

Das vorliegende Regelungskonzept unterteilt die Positionieraufgabe zeitlich in eine reine Vorsteuerdynamik zu Gunsten höchst möglicher Dynamik und eine Festwertregelung mit aktiver Schwingungsbedämpfung. Es konnte simulativ ein optimaler Zeitpunkt und Einschaltzeitdauer für die Aktivierung des Festwertreglers im Falle einer zeitvarianten Massenbelegung gefunden werden. Dabei wurde der Einschaltvorgang als linearer Anstieg eines Proportionalgliedes zwischen Aktor und Stellgrößen Ausgang  $u$  modelliert. Als Gütemaß wurde der Zeitpunkt definiert, bei dem sich die Restschwingungsamplituden unter der vorgegebenen Schranke von 1 mm befanden. Als optimaler Einschaltverlauf wurden 94 % als Aktivierungsstart- und 96 % als Aktivierungsendpunkt in Zusammenhang mit der flachheitsbasierten Vorsteuerung simulativ gefunden. Die Prozentangaben beziehen sich dabei auf die Planungszeit der Vorsteuerung.

# 6 Resultate am Laborprüfstand LARS

## 6.1 Systemkomponenten



**Bild 6.1:** Schematische Darstellung des Demonstrators „LARS“

Mit wohlwollender Genehmigung von Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. Heinz Ulbrich wurde aus den Mitteln des Lehrstuhls für Angewandte Mechanik ein Laborprüfstand im Rahmen dieser Arbeit entwickelt. Dieser stellt ein linear aktuiertes Robotersystem (LARS) dar [7].

### 6.1.1 Linearaktor

Hohe Dynamik, große Kraftamplituden und möglichst guter Gleichlauf sind für den Aktor eines solchen Laborversuchs wünschenswert. Daher wurde ein eisenloser permanentmagneterregter linearer Synchronmotor ausgewählt. In Tabelle 6.1 finden sich die Eckdaten des eingesetzten Aktors der Firma Hiwin Lineartechnologie GmbH.

Die im Fußpunkt gemäß Modell bewegte Masse  $m$  ergibt sich aus der Summe der

**Tabelle 6.1:** Parameter des Linearaktors LMX1E B5

Name	Einheit	Wert
Nennkraft	$F_N$	90 N
Spitzenkraft	$F_S$	270 N
Maximale Verfahrgeschwindigkeit	$v_S$	$5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Maximale Beschleunigung	$a_{max}$	$100 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Sensorgenauigkeit	$x_{abs}$	$\pm 0,02 \text{ mm}$
Sensorauflösung	$x_{res}$	$\pm 0,001 \text{ mm}$
Verfahrweite	$\Delta x_{max}$	800 mm
Masse Forcer	$m_{FRC}$	1830 g
Masse Einspannung	$m_{SPN}$	1218 g
Masse Forcerzuleitung	$m_{Fzl}$	750 g
effektive Wagenmasse	$m_W$	3,379 kg

Masse des Forcers<sup>1</sup>, der Einspannvorrichtung sowie der halben Masse der Forcerzuleitung.

Da in den Kugelumlauführungen sehr viele Stahlkugeln (160 Stück) umlaufen, wurde deren Einfluss auf die effektiv zu beschleunigende Masse untersucht, was ein Analogon zu den in 2.4.2 dargestellten Zusammenhängen bei Getrieben ist.

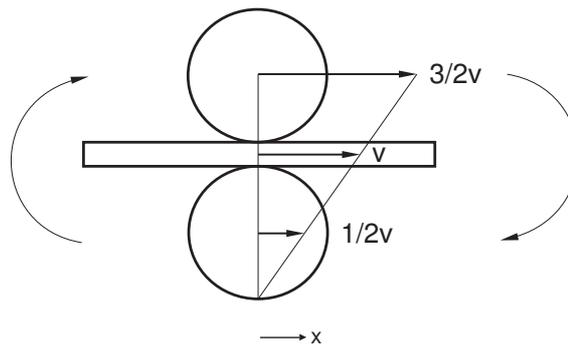
**Bild 6.2:** Schematische Darstellung der Lagerkinematik

Bild 6.2 zeigt schematisch die kinematischen Verhältnisse in den Kugellagern des Wagens. Die Kugeln werden in einer Führung ständig im Uhrzeigersinn geführt. Stellt man die kinetische Energie des Wagens auf, muss man folgende Terme beachten:

<sup>1</sup> Mit engl. „Forcer“ wird das in Kunstharz vergossene Wicklungspaket des Linearaktors bezeichnet, welches sich im Stator magnetfeld bewegt. Zur eigentlichen Forcer Masse wurden die Massen der damit fest verschraubten Kugelumlauführungen und der Anschlussplatte hinzugeschlagen.

- Translatorische Energie  $E_{\text{Transl.W}}$  des Wagens
- Translatorische Energie  $E_{\text{Transl.Koben}}$  der oberen Kugeln
- Translatorische Energie  $E_{\text{Transl.Kunten}}$  der unteren Kugeln
- Rotatorische Energie  $E_{\text{Rot.Kges}}$  aller Kugeln

Wenn die Kugeln von der unteren in die obere Reihe wechseln, werden sie beschleunigt, von der oberen Reihe in die untere verzögert. Formelmäßig ergibt sich

- $n = 40$  (Kugel pro Lager)
- $a = 4$  (Anzahl der Lager)
- $m_K = 0,13 \text{ g}$  (Masse einer Kugel)
- $r$  (Radius der Lagerkugeln)

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}m_W v^2}_{E_{\text{Transl.W}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{n}{2} a m_K \left(\frac{3}{2}v\right)^2}_{E_{\text{Transl.Koben}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{n}{2} a m_K \left(\frac{1}{2}v\right)^2}_{E_{\text{Transl.Kunten}}} + \underbrace{\frac{1}{2} n a J_K \dot{\varphi}^2}_{E_{\text{Rot.Kges}}} \quad \text{mit } \frac{v}{2} = \dot{\varphi} r \quad (6.1)$$

$$= \frac{1}{2} m_W v^2 + \frac{5}{8} n a m_K v^2 + \frac{1}{8} n a \frac{J_K}{r^2} v^2 \quad \text{mit } J_K = \frac{2}{5} m_K r^2 \quad (6.2)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \underbrace{m_W + n a m_K}_{m_{\text{Messung}}} + \underbrace{\frac{7}{20} n a m_K}_{m_{\text{Zusatz}}} \right) v^2 \quad (6.3)$$

mit

$$m_{\text{Zusatz}} = \frac{7}{20} n a m_K = 7,28 \text{ g} \ll m = 3.379 \text{ kg}. \quad (6.4)$$

Die dynamische Zusatzmasse ist somit gegenüber der Wagenmasse vernachlässigbar.

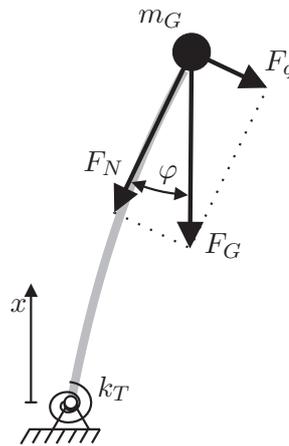
### 6.1.2 Balken

Eine Struktur, die große Schwingungsamplituden mechanisch erlaubt, ist wünschenswert, um die Wirksamkeit des hier vorgestellten Regelungs- und Steuerungskonzepts deutlich demonstrieren zu können. Diese Forderung bedingt eine dünne Balkengeometrie, um auch bei hohen Krümmungen die auftretenden Materialspannungen möglichst gering zu halten. Für den Prüfstand wurde der Edelstahl X5CrNi18-10 (V2A-Stahl) mit rechteckigem  $3 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$  Querschnitt gewählt, dessen Materialparameter in Tabelle 6.2 zu finden sind.

Ein weiteres wichtiges Auslegungskriterium ist, dass der Balken in Ruhe weder zur einen noch zur anderen Seite hängt, sondern senkrecht steht. In Bild 6.3 sind die

**Tabelle 6.2:** Materialparameter des eingesetzten Edelstahl 1.4301

Name	Symbol	Wert
Elastizitätsgrenze	$R_p$	$210 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
Streckgrenze	$R_m$	$520 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
E-Modul	$E$	$210 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}$
Dichte	$\rho$	$7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

**Bild 6.3:** Elastisch eingespannter Balken mit am freien Ende befindlicher Masse  $m_G$  und Balkenreaktionskräften  $F_q$  und  $F_N$  in Folge der Gewichtskraft  $F_G$ 

durch die Gewichtskraft  $F_G$  der Masse  $m_G$  in den Balken bei  $x = L$  eingeleitete Normalkraft  $F_N$  und Querkraft  $F_q$  dargestellt. Mit der Drehfedersteifigkeit  $k_T$  lassen sich Elastizitäten der Einspannung berücksichtigen. Für die senkrecht zur Biegelinie  $w$  angreifende Querkraft  $F_q$  gilt mit den in F.5.2 dargestellten Beziehungen:

$$w''(x) = \frac{1}{EI} (F_q x - F_q L) \quad (6.5a)$$

$$w'(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} F_q x^2 - F_q L x - \frac{F_q L EI}{k} \right) \quad (6.5b)$$

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{6} F_q x^3 - \frac{1}{2} F_q L x^2 - \frac{F_q L EI}{k} x \right). \quad (6.5c)$$

Speziell am freien Ende des Balkens, also bei  $x = L$  gilt:

$$w(L) = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{3} F_q L^3 - \frac{F_q L EI}{k} L \right) \quad (6.6a)$$

$$w'(L) = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{2} F_q L^2 - \frac{F_q L EI}{k} \right) \quad (6.6b)$$

$$w''(L) = 0. \quad (6.6c)$$

Mit dem Neigungswinkel  $\varphi$  an der Spitze des Balkens  $\tan(\varphi) = w'(L)$  folgt

$$\varphi = \arctan \left( \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{2} F_q L^2 - \frac{F_q L EI}{k} \right) \right). \quad (6.7a)$$

Mit dem geometrischen Zusammenhang aus Querkraft  $F_q$  und verursachender Schwerkraft  $F_G$ ,

$$F_q = F_G \sin(\varphi), \quad (6.8)$$

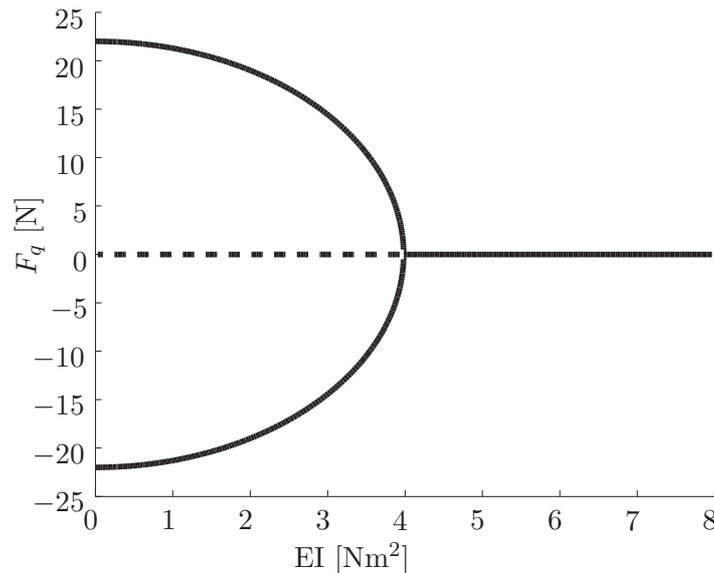
lässt sich die folgende implizite Gleichung anschreiben:

$$F_q = F_G \sin \left( \arctan \left( \frac{-F_q L^2 k - 2F_q L E I}{2E I k} \right) \right). \quad (6.9)$$

In Abbildung 6.4 sind die Lösungen der Querkraft im Ruhezustand über der Biegesteifigkeit  $EI$  als konstruktiver Parameter für die maximale Wagenmasse von 2,2 kg aufgetragen. Man erkennt eine Lösungsvergabelung – Bifurkation genannt – bei Unterschreiten eines Werts der Biegesteifigkeit von  $3.98 \text{ kNm}^2$ . Wählt man die Dicke des Balkens also so dünn, dass sich nicht mindestens diese Biegesteifigkeit ergibt, wird man der Forderung nach einem im Ruhezustand senkrecht stehenden Balken nicht gerecht.

**Tabelle 6.3:** Balkenparameter

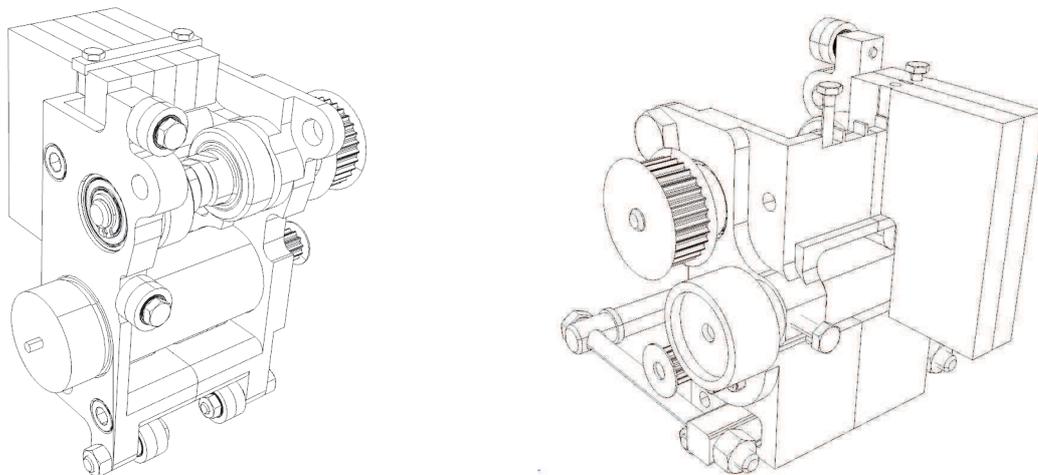
Name	Symbol	Wert
Flächenträgheitsmoment	$I$	$90 \text{ mm}^4$
Elastizitätsmodul	$E$	$210 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}$
Höhe des Balkens	$H$	$600 \text{ mm}$
Max. Zuladung an der Mastspitze	$m_G$	$2,2 \text{ kg}$
Einspannsteifigkeit	$k_T$	$4,6 \cdot 10^7 \text{ Nm/rad}$



**Bild 6.4:** Bifurkation der Gleichgewichtslösung der Balkenquerkraft für den Fall maximaler Zuladung an der Mastspitze.

### 6.1.3 Hubwagen

Das Hubwerk wurde aus zwei nahezu symmetrischen Hälften aufgebaut, die jeweils aus zwei miteinander verschraubten gefräßten Grundkörpern bestehen. Gummi umhüllte Stahlräder stellen den Reibradantrieb dar. Pro Wagenhälfte können bis zu 5 zusätzliche Gewichte eingehängt werden. Der Wagen wiegt 1560g und maximal 2190g mit den montierten Gewichten. Den Antrieb stellen zwei Gleichstrommotoren mit jeweils 60 Watt Leistung vom Typ RE30 der Firma Maxon dar, womit Beschleunigungen von bis zur zweifachen Erdbeschleunigung bei vollbeladenem Hubwerksmotor erzeugt werden können. In Bild 6.5 sind 3D Skizzen der beiden Wagenhälften dargestellt.

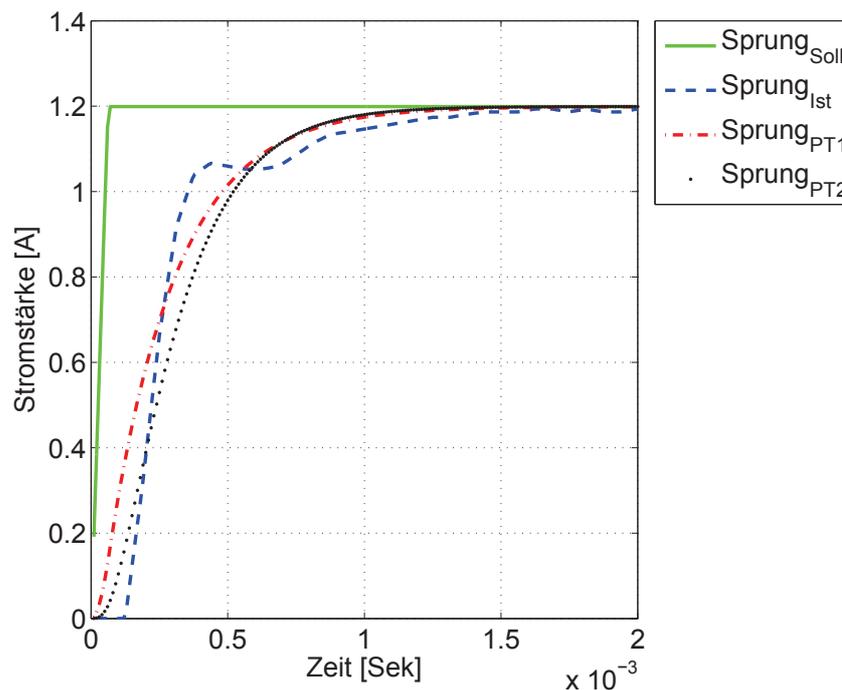


**Bild 6.5:** Skizzen der Wagenhälften

### 6.1.4 Umrichter CDD3000

Der Umrichter CDD3000 der Firma Lust Antriebstechnik GmbH arbeitet im Modus eines Stromvektorstellers mit analogem Amplitudensollwerteingang. D.h., ein vom Steuerrechner vorgegebener Spannungswert wird als Sollvorgabe für die Stromregler entsprechend der positionsabhängigen Lage des Vektors herangezogen.

Zur Untersuchung der Dynamik des Stromreglers wurde die Sprungantwort des Geräts aufgezeichnet. Neben der Sprungantwort sind die Sollwert- und zwei die Sprungantwort mit PT1 bzw. PT2-Verhalten modellierende Kurven in Bild 6.6 dargestellt. Da bereits nach 1,5 ms – also nur der 1,5 fachen Abtastrate des digitalen Regelkreises – der Stromwert als eingeschwingen anzusehen ist, wurde für die weiteren Untersuchungen die Dynamik des Umrichters vernachlässigt und selbiger als Proportionalglied mit nachgeschalteter Totzeit von 1 ms vereinfachend modelliert. Die darin enthaltene Totzeit  $T_t = 1$  ms trägt der Tatsache Rechnung, dass der Umrichter die Klemmenspannung nur mit 1 kHz Abtastrate einliest. Diese Totzeit ist z.B. zur Ermittlung der Stabilitätsgrenzen mittels Wurzelortskurven oder Bodediagrammen



**Bild 6.6:** Messung und Modellierung der Stromreglerdynamik anhand der Sprungantwort

wichtig. Für die Reglerauslegung an sich kann sie jedoch als klein genug im Vergleich zu den im System berücksichtigten Frequenzen angesehen und damit vernachlässigt werden.

Die Übertragungsfunktion von Strom zu Kraft wurde als Proportionalglied angenommen.

### 6.1.5 Hubwerkselektronik

Die Hubhöhe von 0 bis 600 mm wird mittels eines Spannungspegels von 0 bis 5 V der in den Hubwagen integrierten Elektronik vorgegeben. Einer der beiden Elektromotoren ist positionsgeregt, während der zweite Motor synchronisiert zum ersten Motor geschwindigkeitsgeregt ist. Der Grund hierfür liegt im mit Reibradantrieben verbundenen Schlupf, der im Falle zweier positionsgeregelter Antriebsachsen zu gegeneinander arbeitenden Antrieben und damit unnötig hohem Stromverbrauch führen kann. Die Elektronik ist mit Modulen aus dem Baukastensystem Modularis der Firma Aevum Mechatronik GmbH realisiert und arbeitet mit einer digitalen Abtastrate von 1kHz.

### 6.1.6 Steuerrechner DSpace

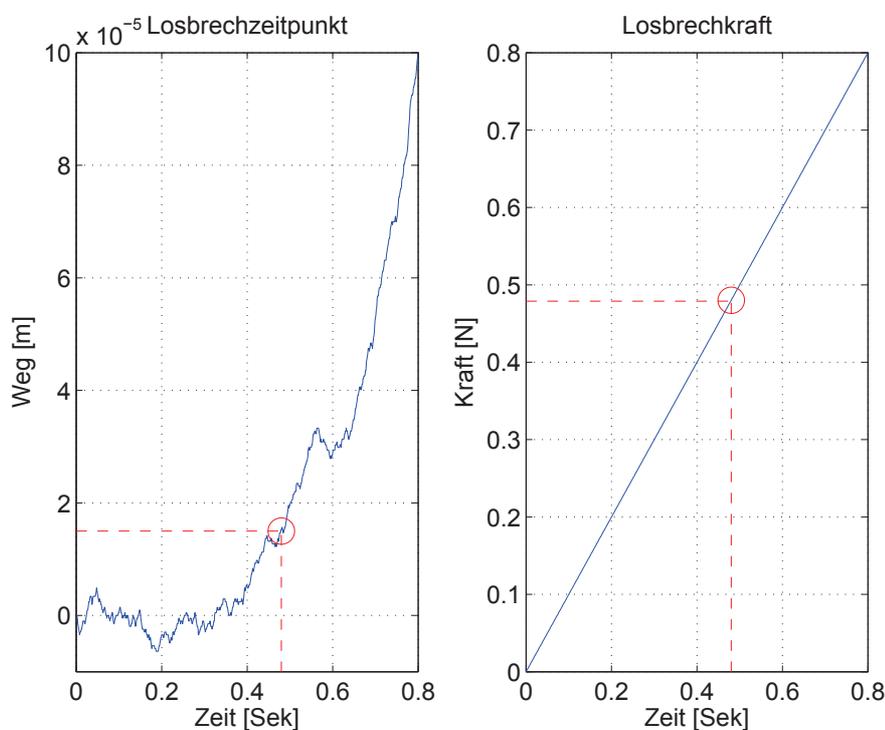
Benutzerschnittstelle, Reglerauslegung und Regelung für das System wurden auf einer DSpace-Hardware mittels dem entsprechenden Matlab Simulink Compiler implementiert. Als Abtastrate des Regelkreises wurde hier 1 kHz als Standard gewählt. Damit ist die quasikontinuierliche Dynamik dieses Systems analog zum Fall des Umrichters um einen Totzeitterm zu erweitern, falls Stabilitätsuntersuchungen im Grenzbereich validiert werden sollen.

## 6.2 Reibungsvorsteuerung

### Experimentelle Ermittlung der Reibungskennlinie

#### Haftkraft

Zur Ermittlung der Haftkraft wurde ein Losbrechversuch wie in Bild 6.7 dargestellt wiederholt durchgeführt. Während die Aktorkraft langsam zunimmt, wird das Positionssignal überwacht. Wenn das Positionssignal die Toleranzgrenze für das Messrauschen von  $15\mu\text{m}$  überschreitet, ist die Haftkraft überschritten worden und der vorletzte Kraftwert wird als Haftkraft gespeichert. Um die Führungsschiene auf Unterschiede in Ihrem Reibungsverhalten zu überprüfen, wurden je 5 Versuche an den Positionen  $x = 20\text{ cm}$  und  $x = 60\text{ cm}$  durchgeführt.



**Bild 6.7:** Ermittlung der Haftkraft an der Stelle  $x = 20\text{ cm}$

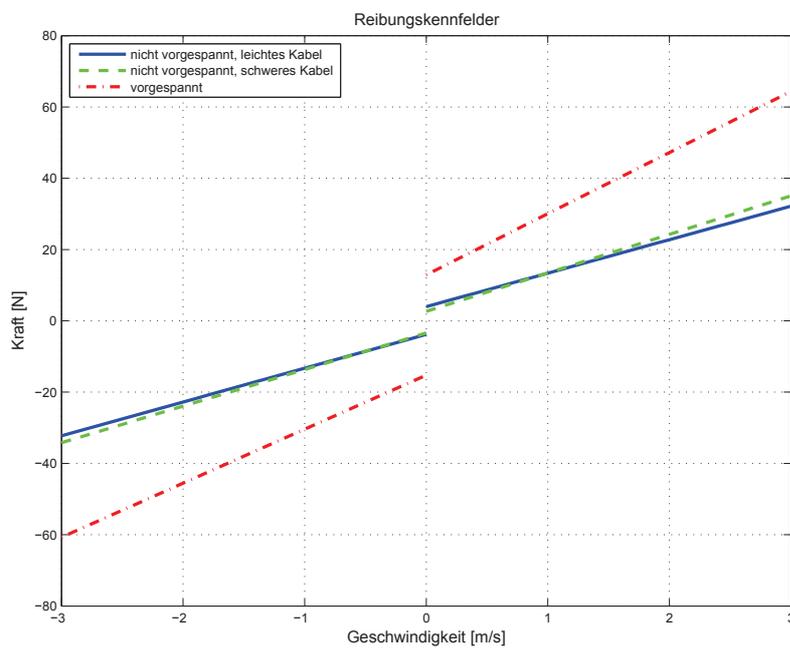
Die ermittelten Kräfte für die je 5 Einzelversuche und die Mittelwerte an der Stelle  $x = 20 \text{ cm}$  sind in Tabelle 6.4 aufgeführt. Man erkennt deutliche Unterschiede an den beiden Orten, was auf Fertigungsungenauigkeiten zurückgeführt werden kann. Dies verdeutlicht, dass es aussichtslos ist eine exakte Haftkraftvorsteuerung zu realisieren. Das Phänomen der Haftreibung stellt zusammen mit dem der Rollreibung die größte Herausforderung dar, da der Beobachter durch einen stillstehenden Wagen keine Rückmeldung über im System befindliche Schwingungen erhält und er andererseits seinen geschätzten Zustand der gemessenen Rückmeldung angleicht. Daher ist es bei derartigen Systemen äußerst wünschenswert, einen Messgröße zurückzuführen, die von diesem Phänomen nicht betroffen ist.

**Tabelle 6.4:** Versuchsergebnisse für Einzelkräfte und gemittelte Kräfte bei nicht vorgespannten Kugelumlaufführungen

	Einzelwerte [N]					Mittelwert [N]
<i>Ort 20cm</i>	0,480	0,573	0,489	0,581	0,515	<b>0,5276</b>
<i>Ort 60cm</i>	1,399	1,306	1,214	1,086	1,657	<b>1,3324</b>

### Reibungskennfeld

Der Linearaktor benötigt eine drei-phasige Spannungsversorgung, die gewöhnlich mit einer Energiekette realisiert wird. Um die damit verbundenen Kräfteinwirkungseffekte für den Prüfstand zu vermeiden, wurde das Kabel an langen Seilen hängend zum beweglichen Teil des Aktors geführt. Dadurch lässt sich die Rückwirkung von Kabelmasse und -steifigkeit auf das System minimieren. Zusätzlich wurde zum robusten und damit schweren Serienkabel ein leichtes flexibles Kabel bestehend aus einzelnen Litzen und einer flexiblen Abschirmung gefertigt. Die Auswirkung des Kabels auf die Reibungsmessung lässt sich in Bild 6.8 erkennen. Noch deutlicher wirkt sich die Vorspannung der eingesetzten Lager aus.



**Bild 6.8:** Darstellung von 3 Reibungskennfeldern

Die aus den Messfahrten mittels linearer Ausgleichsrechnung (siehe D.2) ermittelten Geradenparameter der zur Vorsteuerung benötigten Reibungskennlinie aus 5.2.1 finden sich in Tabelle 6.5.

**Tabelle 6.5:** Koeffizienten der Reibungskennfelder

	$F_{Roll+}$	$b_+$	$F_{Roll-}$	$b_-$
Lager nicht vorgespannt, leichtes Kabel	3,980	9,392	-3,803	9,484
Lager nicht vorgespannt, schweres Kabel	3,648	10,803	-3,421	10,253
Lager vorgespannt, leichtes Kabel	12,904	17,157	-15,263	15,146

## 6.3 Beobachter- und Reglerauslegung

Routinen zur Erstellung eines Kalman-Filters sind in vielen Programmpaketen enthalten. Bei MATLAB etwa lautet der entsprechende Befehl

$$[\text{KEST},L,P] = \text{KALMAN}(\text{SYS},Q_N,R_N,NN).$$

Dabei geht MATLAB von folgender Zustandsraumdarstellung aus:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{w} \quad (6.10)$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \quad (6.11)$$

mit den Erwartungswerten  $E(\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T) = Q_N \cdot \boldsymbol{I}$ ,  $E(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T) = R_N \cdot \boldsymbol{I}$  und  $E(\boldsymbol{w}\boldsymbol{v}^T) = NN \cdot \boldsymbol{I}$ .

Damit bestehen folgende Identitäten zu den in (5.29) als Gewichtungsmatrizen eingeführten Größen:

- Kovarianzmatrix des Prozessrauschens:  $\boldsymbol{Q}_N = Q_N \cdot \boldsymbol{I}$
- Kovarianzmatrix des Messrauschens:  $\tilde{\boldsymbol{R}}_N = R_N \cdot \boldsymbol{I}$

Wegen der Annahme Prozess- und Messrauschen sind nicht miteinander korreliert, ist der entsprechende Korrelationsmatrixgewichtungsfaktor  $NN$  nachfolgend stets zu Null gesetzt.

### Messtechnische Ermittlung von $\tilde{\boldsymbol{R}}_N$ :

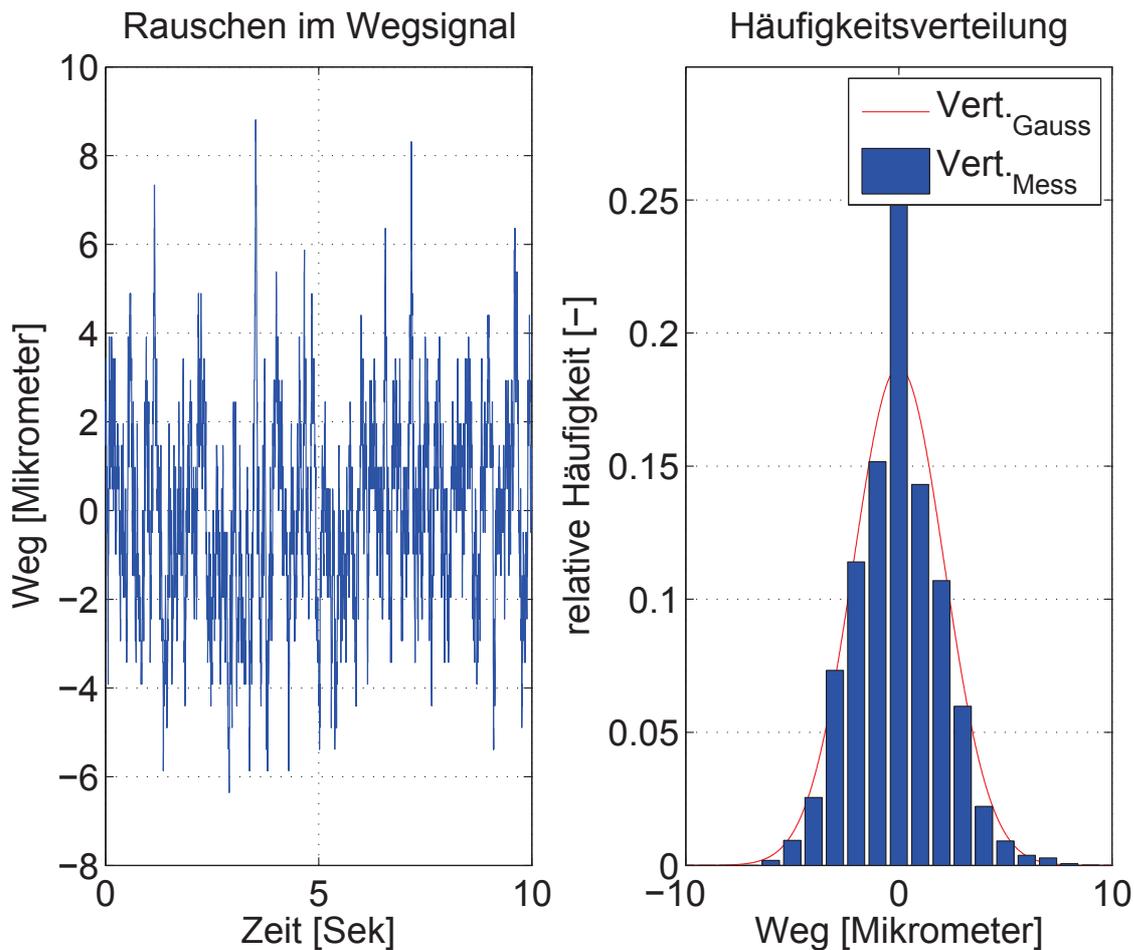
Damit man die entsprechenden Kovarianzmatrizen aus den Rauschprozessen (vgl. auch Erläuterungen Anhang E) berechnen kann, muss weißes Rauschen vorliegen. Um diese Voraussetzung für das Messsignal zu überprüfen, wurden 10000 Messschritte des ruhenden Systems aufgenommen. Das Ergebnis ist im linken Bild der Abbildung 6.9 dargestellt. Für des Messsignal wurde ermittelt:

- Erwartungswert  $E(\boldsymbol{v}) = -0.0510\mu\text{m}$
- Varianz  $VAR(\boldsymbol{v}) = \sigma^2 = 4.5412\mu\text{m}^2$

Für weißes Rauschen muss gegeben sein:

1. Der Erwartungswert der Messwerte ist Null:  $E(X) = 0$ .
2. Die Messwerte sind gaußverteilt.

Der Erwartungswert des Messsignals beträgt  $-0.0510\mu\text{m}$ . Bei einer Auflösung von  $1\mu\text{m}$  kann man dies als vernachlässigbar klein angesehen werden. Im rechten Bild der Abbildung 6.9 ist die Häufigkeitsverteilung der Messwerte als Balkendiagramm und dazu die Gaußkurve (D.13) parametrisiert mit  $\mu = -0,051\mu\text{m}$  und  $\sigma = 4,5412\mu\text{m}$  aufgetragen. Bis auf eine Abweichung im mittleren stimmen die Graphen sehr gut überein. Daher wird das dem Messsignal überlagerte Störsignal als weißes Rauschen angesehen.



**Bild 6.9:** Links: Darstellung des Messsignals, Rechts: Häufigkeitsverteilung der Messwerte

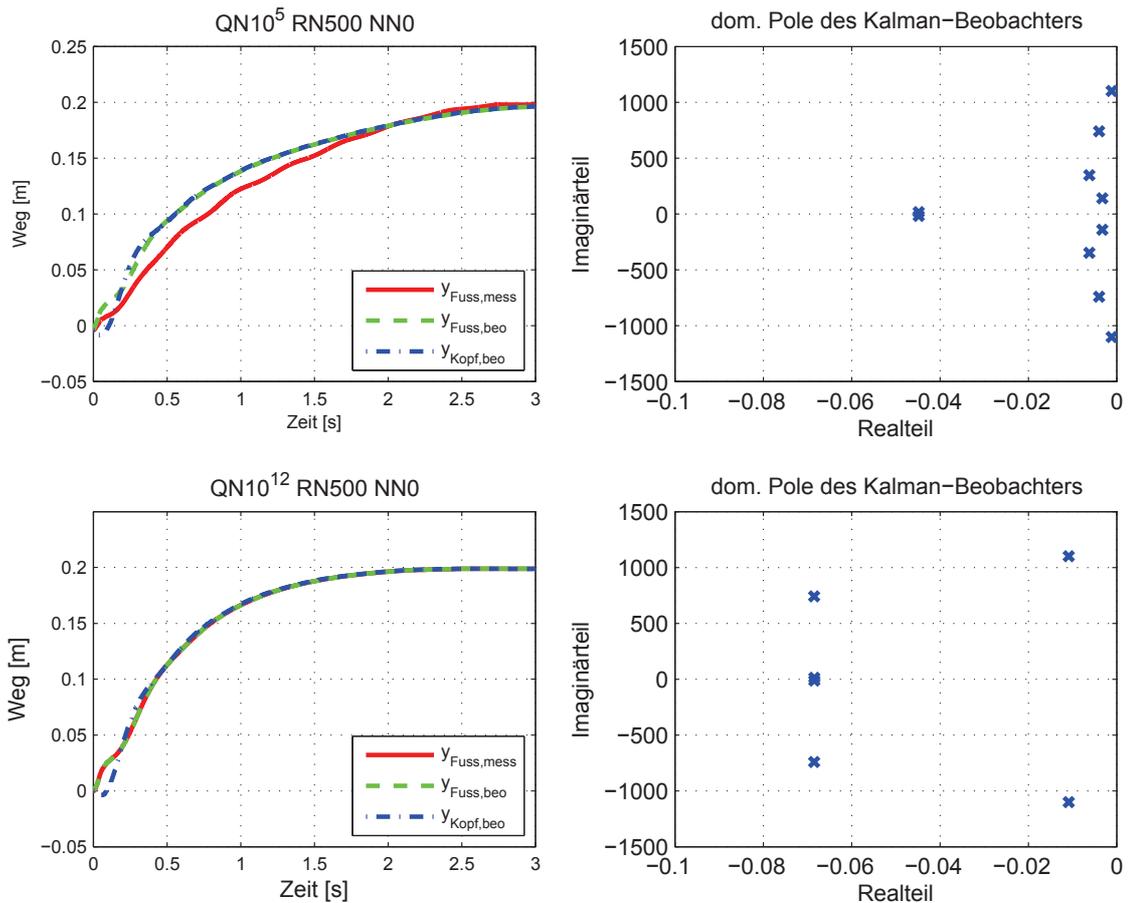
Damit ergäbe sich für

$$\tilde{\mathbf{R}}_N = E(\mathbf{v}\mathbf{v}^T) = \sigma_v^2 = 4.5412[\mu\text{m}^2] = 4.5412 \times 10^{-12}[\text{m}^2] = RN. \quad (6.12)$$

### Heuristische Ermittlung von $\mathbf{Q}_N$ und $\tilde{\mathbf{R}}_N$ :

Da die Kovarianzmatrix des Prozessrauschens nicht berechnet werden kann, muss die Einstellung der Beobachterparameter experimentell bestimmt werden. Die Auslegung des Beobachterentwurfes erfolgt nach dem *Separationstheorem* unabhängig von der Reglerauslegung [17]. Daher wird hier ohne Einschränkung der Allgemeinheit als Regler der Zustandsregler nach Riccati basierend auf den folgenden Einstellungen gewählt:  $Q_P = 2 \times 10^7$ ,  $Q_G = 6 \times 10^6$ ,  $\tilde{Q} = 1$ . Das Hubwerk befindet sich jeweils auf einer Höhe von 0,5 m.

Abbildung 6.10 zeigt auf den zwei linken Bildern den beobachteten und gemessenen Fußpunkt und den geschätzten Kopfpunkt für die Sprungantwort. Dabei wurde

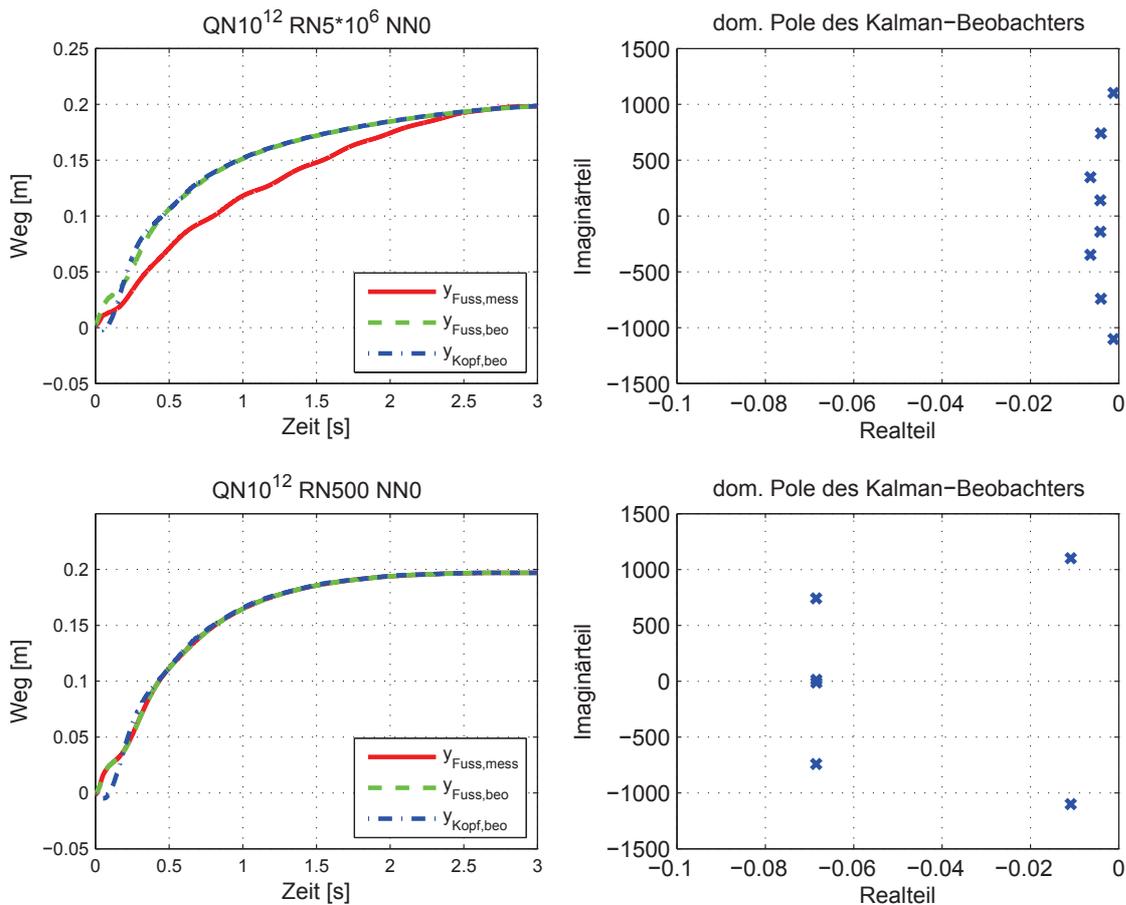


**Bild 6.10:** Links: Beobachteter und gemessener Fußpunkt und geschätzter Kopfpunkt bei einer Sprungantwort und verschiedenem  $QN$ , Rechts: Dominierende Eigenwerte des Beobachters

der Parameter  $QN$  variiert. Die dominierenden Pole des zugehörigen Kalman-Filters sind auf der rechten Seite dargestellt. Man erkennt, dass bei höherem  $QN$  die dominierenden Eigenwerte weiter links in der komplexen Halbebene liegen und damit der beobachtete Fußpunkt dem Messwert schneller folgt. Interessant ist dabei die Tatsache, dass bei beiden Einstellungen die Verläufe der beobachteten Größen nahezu identisch sind und sich die gemessenen Wegverläufe deutlich unterscheiden. Der Verlauf des beobachteten Kopfpunktes lässt sich nicht im Diagramm überprüfen. Subjektiv schwankte der Balken bei größerem  $QN$  deutlich weniger und ist dadurch näher am Schätzwert.

In Abbildung 6.11 ist das gleiche Vorgehen mit variiertem  $RN$  dargestellt. Man erkennt hier, dass bei kleinerem  $RN$  die dominierenden Eigenwerte weiter links in der komplexen Halbebene liegen und damit der beobachtete Fußpunkt dem Messwert genauer folgt. Subjektiv schwankte der Balken bei kleinerem  $QN$  deutlich weniger und ist dadurch näher am Schätzwert.

Erhöht man  $QN$  und senkt man  $RN$  weiter, wird der beobachtete Fußpunkt genauer und der beobachtete Kopfpunkt oszilliert weniger, obwohl im Versuch Restschwin-



**Bild 6.11:** Links: Beobachteter und gemessener Fußpunkt und geschätzter Kopfpunkt bei einer Sprungantwort und verschiedenem  $RN$ , Rechts: Dominierende Eigenwerte des Beobachters

gungen des Kopfpunktes übrigbleiben. Der Grund liegt im bereits in Abschnitt 6.2 erwähnten Umstand, dass durch die Haftreibung der Fußpunkt stillsteht, obwohl der Kopfpunkt weiter leichte Schwingungen ausführt, die der Beobachter nicht mehr erkennt. Um den beobachteten Fußpunkt nicht sofort auf den Messwert zu zwingen und beobachtete Restschwingungen zu erhalten, darf der Beobachter nicht zu schnell auf den Messwert einschwingen.

Daher muss nach subjektiven Kriterien aus den genügend schnellen Beobachtern derjenige gefunden werden, der die Restschwingungen richtig schätzen kann. In Tabelle 6.6 ist das Vorgehen dargestellt. Aufgrund der subjektiven Beurteilung wurden die Beobachterparameter zu  $QN = 10^8$ ,  $RN = 500$  festgelegt.

**Tabelle 6.6:** Einstellung der Beobachterparameter hinsichtlich Einschwingdynamik und Restschwingungen bei Führungssprung

QN	RN	Dynamik	Restschwingungen <sup>2</sup>
$10^6$	$10^3$	langsam	hohe Amplituden
$10^8$	$10^{-3}$	sehr schnell	geringe Amplituden
$10^8$	500	schnell	keine
$10^8$	$10^4$	schnell	geringe Amplituden
$10^{10}$	$10^3$	sehr schnell	geringe Amplituden

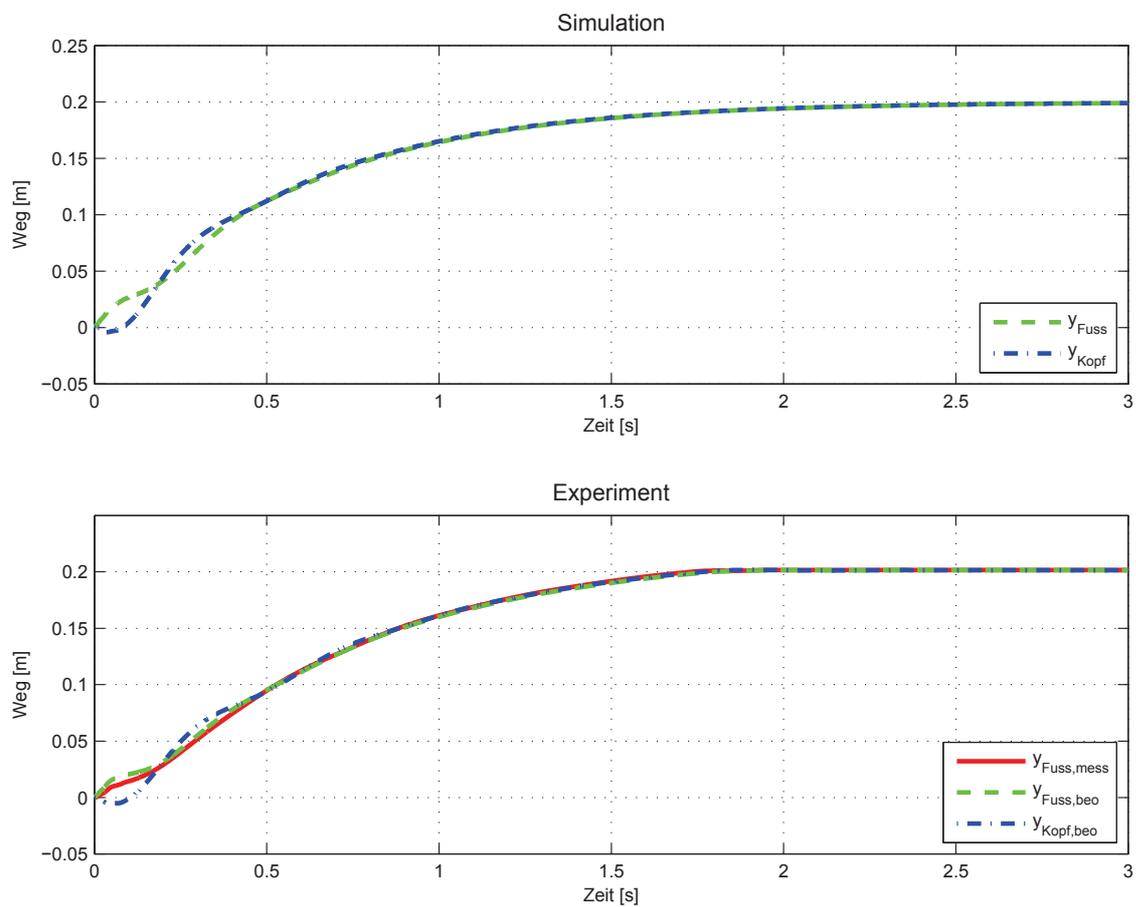
## 6.4 Ergebnisse

### 6.4.1 Sprungantwort der beobachtergestützten Regelung

In Abbildung 6.12 ist ein Vergleich der Sprungantwort des geregelten Systems ohne Vorsteuerung bei einer Wagenhöhe von  $0,5m$  im Versuch und in der Simulation dargestellt. Zur numerischen Simulation wurde das in 2.3 hergeleitete Finite-Differenzen-Modell genutzt. Der Zustandsregler nach Riccati basiert auf den Parametern  $Q_P = 2 \times 10^7$ ,  $Q_G = 6 \times 10^6$ ,  $\tilde{Q} = 1$  und das Kalman-Filter besitzt die Gewichtungsfaktoren der Kovarianzmatrizen  $QN = 10^8$ ,  $RN = 500$ .

Man erkennt ein anfängliches Unterschwingen des Kopfpunktes mit anschließenden Oszillationen, was auf den nichtminimalphasigen Charakter der entsprechenden Übertragungsfunktion von Fuß- zu Lastpunkt hinweist. Beobachteter und gemessener Fußpunkt zeigen wie der simulierte Fußpunkt einen charakteristischen Knick zu Beginn und dann einen Schnittpunkt mit dem Kopfpunkt. Das Ende unterscheidet sich voneinander, denn die Simulation konvergiert langsamer, während im Versuch der Wagen zur Ruhe kommt sobald er in die Zone der Haftreibung kommt. Diese ist in der Simulation nicht berücksichtigt.

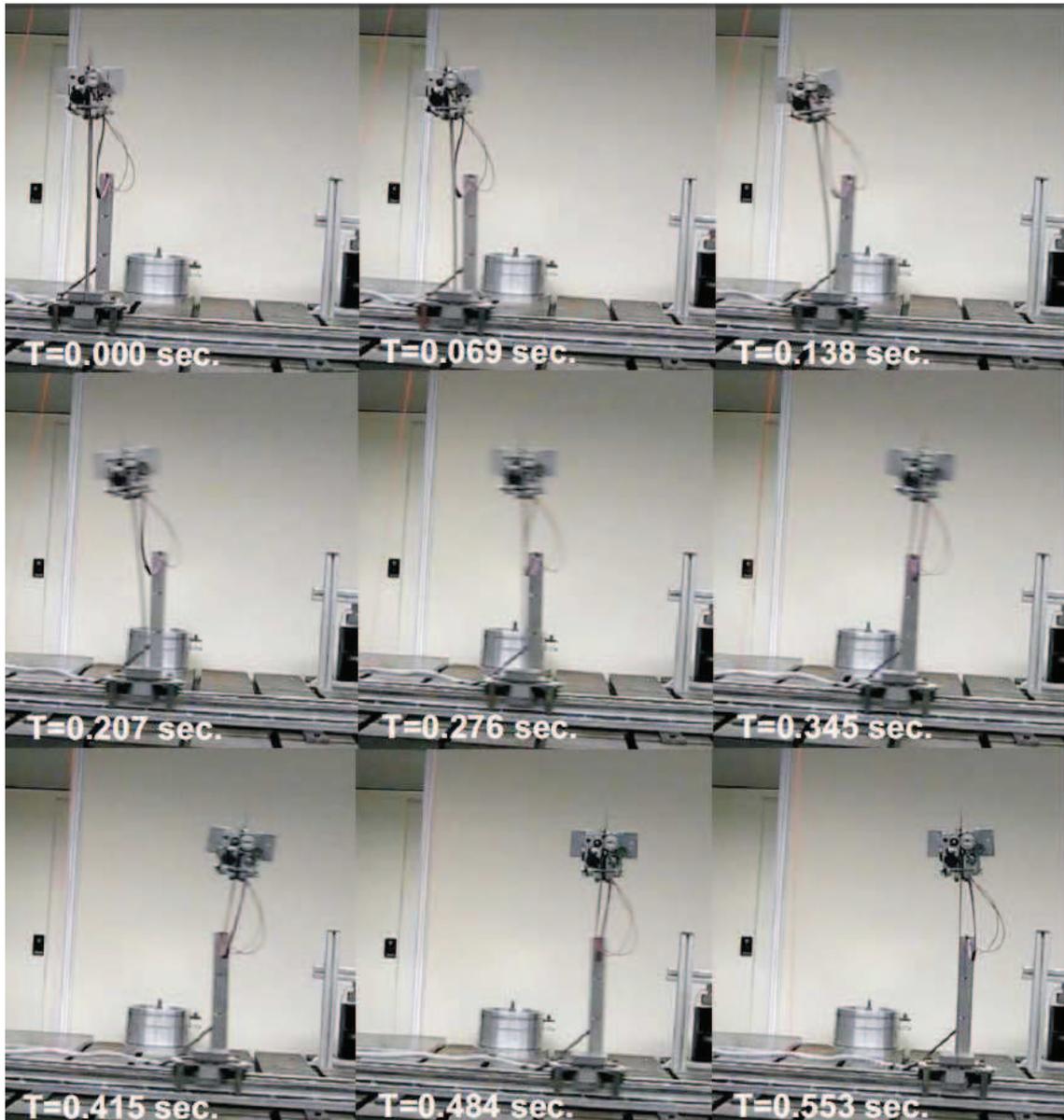
Man erkennt das aperiodisch stabile Verhalten des beobachtergestützt geregelten Systems.



**Bild 6.12:** Vergleich von Versuch und Simulation des Zustandsreglers anhand des Messgrößenverlaufs einer Sprungantwort

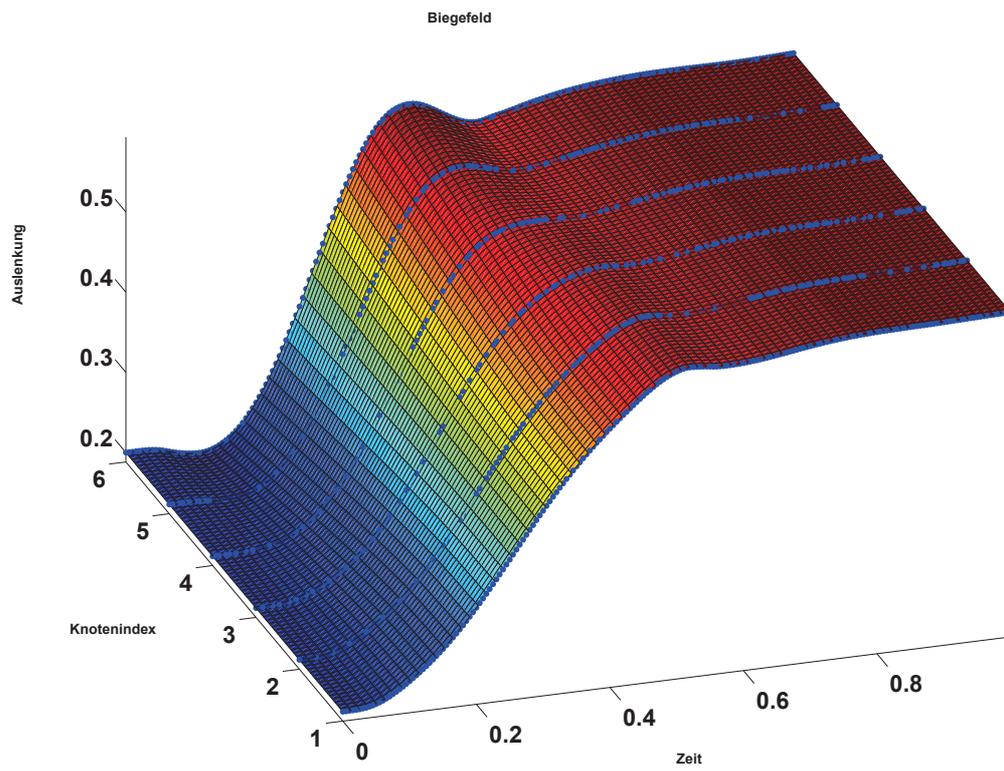
### 6.4.2 Verhalten des vorgesteuert geregelten Systems

Nun soll die Wirksamkeit des Verfahrens anhand des Laborprüfstandes demonstriert werden. In Abbildung 6.13 erkennt man die Phasen der Bewegung eines Positioniermanövers um 40 cm von links nach rechts mit maximaler Hubwagenzuladung innerhalb von 0.6 Sekunden womit die Grenze der Materialbelastbarkeit erreicht ist. Trotz dieser massiven Deformation des Balkens ist das System nach Abschluss des Manövers in Ruhe. Das der Regelung und dem Beobachter zu Grunde gelegte fini-



**Bild 6.13:** Phasen der Bewegung eines nachschwingungsfreien Positioniermanövers am Rande der Materialbelastbarkeit

te Differenzen Modell berücksichtigt 6 Knoten. Die vom Beobachter während des Positioniermanövers beobachteten Knotenpositionen sind in 6.14 dargestellt.



**Bild 6.14:** Verlauf des beobachteten Balkenzustands während des Manövers.

## 7 Ergebnisse am Regalbediengerät

Auch am Regalbediengerät des Lehrstuhls Fördertechnik Materialfluss und Logistik (FML) konnte das hier vorgestellte Konzept im Rahmen dieser Arbeit mit überzeugendem Ergebnis implementiert werden. Dabei wurde der kommerzielle Fahrwerkservoantrieb im momentengeregelten Modus betrieben, um via CAN und PC die flachheitsbasierte Vorsteuerung dem Fahrwerksantrieb aufzuprägen und den am Manövrierende greifenden Regelkreis zu schließen.

### 7.1 Parameterermittlung

Für eine Vorsteuerung ist die Kenntniss der im System tatsächlich vorliegenden Parameter von elementarer Bedeutung. Mit den vor Ort verfügbaren Mitteln wurden unkonventionell aber effektiv die benötigten Parameter und Kennlinien ermittelt, wobei sich erhebliche Abweichungen zu den ursprünglich angenommenen Daten herausstellten.

#### 7.1.1 Systemmasse

Da es nur mit hohem Aufwand und Sicherheitsrisiko verbunden gewesen wäre das gesamte Gerät anzuheben und zu wiegen, wurde es lediglich von der linken und von der rechten Rolle angehoben und die dazu nötigen Kräfte erfasst. In Bild 7.1 und Bild 7.2 sind die Aufbauten zur Ermittlung der zum Anheben jeweils nötigen Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  dargestellt. Auf den Bildern erkennt man ein auf Böcken gelagertes I-Profil, das als Hebel zur manuellen Krafterzeugung genutzt wurde. Am kürzeren Ende des I-Profil-Hebels wurde die Kranwaage zwischen Hebelarm und Gerät mit Hilfe von Lastgurten zur Kraftmessung eingehängt. In Bild 7.3 ist das Modell zur Berechnung der Gerätegesamtmasse dargestellt. Aus baulichen Gegebenheiten am Gerät musste zur Ermittlung der Hebekraft  $F_1$  die Bodentraverse mit Hilfe eines Stahlträgers um das Stück  $h$  verlängert werden, um senkrecht anheben zu können. Die Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  wurden sequentiell ermittelt, das Gerät ruhte also stets auf einer der Rollen in den Lagerpunkten  $LP_1$  beziehungsweise  $LP_2$ .

Stellt man das Momentengleichgewicht um den Lagerpunkt  $LP_1$  für die Hebekraft  $F_2$ , dem Abstand  $s$  der am Systemschwerpunkt angreifenden Kraft  $F_G$ , dem Abstand  $D$  zwischen den Lagerrollenpunkten  $LP_1$  und  $LP_2$  sowie dem Abstand  $d$  von den Lagerrollenpunkten zum Ende der Bodentraverse auf, erhält man

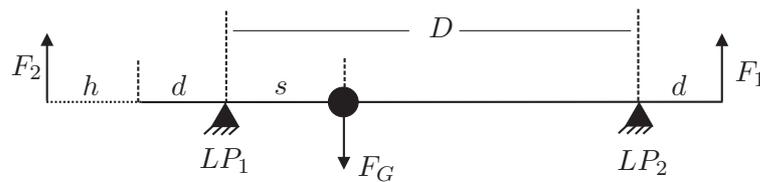
$$F_1(d + D) = mgs \tag{7.1}$$



**Bild 7.1:** Messvorrichtung zur Ermittlung der Hebekraft  $F_1$



**Bild 7.2:** Messvorrichtung zur Ermittlung der Hebekraft  $F_2$



**Bild 7.3:** Modell zur Ermittlung der Gesamtmasse aus den Messergebnissen

mit  $m$  der gesuchten Systemmasse und  $g$  der Erdbeschleunigung. Analog erhält man unter Berücksichtigung der zusätzlichen Hebellänge  $h$

$$F_2(h + D + d) = mg(D - s). \quad (7.2)$$

Eliminiert man aus den beiden Gleichungen den nicht interessierenden Parameter  $s$  erhält man für den Zusammenhang für die Gesamtmasse

$$m = \frac{F_2(h + D + d) + F_1(D + d)}{gD}. \quad (7.3)$$

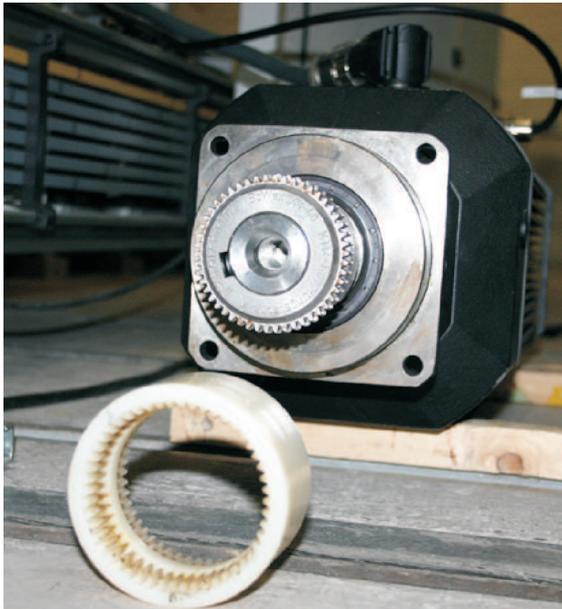
Die eingesetzte Kranwaage rechnet naturgemäß bereits die gemessene Kraft auf eine Masse um, weshalb sich weiter für den praktischen Einsatz mit  $F_1 = m_1g$  und  $F_2 = m_2g$  sinnvoll vereinfachen lässt

$$m = \frac{m_2(h + D + d) + m_1(D + d)}{D} \quad (7.4)$$

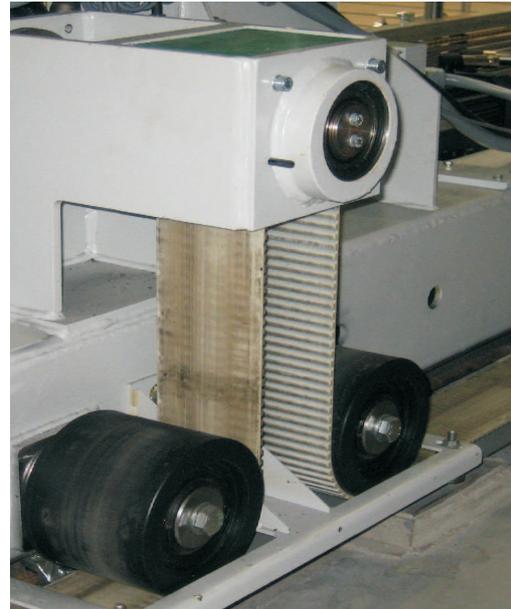
Mit den Messergebnissen  $m_1 = 470$  kg,  $m_2 = 1045$  kg und den Parametern  $D = 3,2$  m,  $d = 0,11$  m und  $h = 0,3$  m ergibt sich eine Gesamtmasse von 1665 kg. Aus Zeitgründen ungeklärt blieb die genaue Massenverteilung des Gerätes.

### 7.1.2 Antriebskraft

In Bild 7.4 ist der ausgebaute Fahrwerksgetriebemotor mit der Kunststoffmuffe zur formschlüssigen Kraftübertragung an den in Bild 7.5 abgebildeten Omegaantrieb dargestellt. Die Antriebsparameter finden sich in Tabelle 2.3. Um die vom System tatsächlich eingeregeltere Antriebskraft zu ermitteln, wurde das System festgespannt und erneut mit der Kranwaage die vorliegende Zugkraft ermittelt. In Bild 7.6 sind



**Bild 7.4:** Fahrmotor mit Kunststoffmuffe



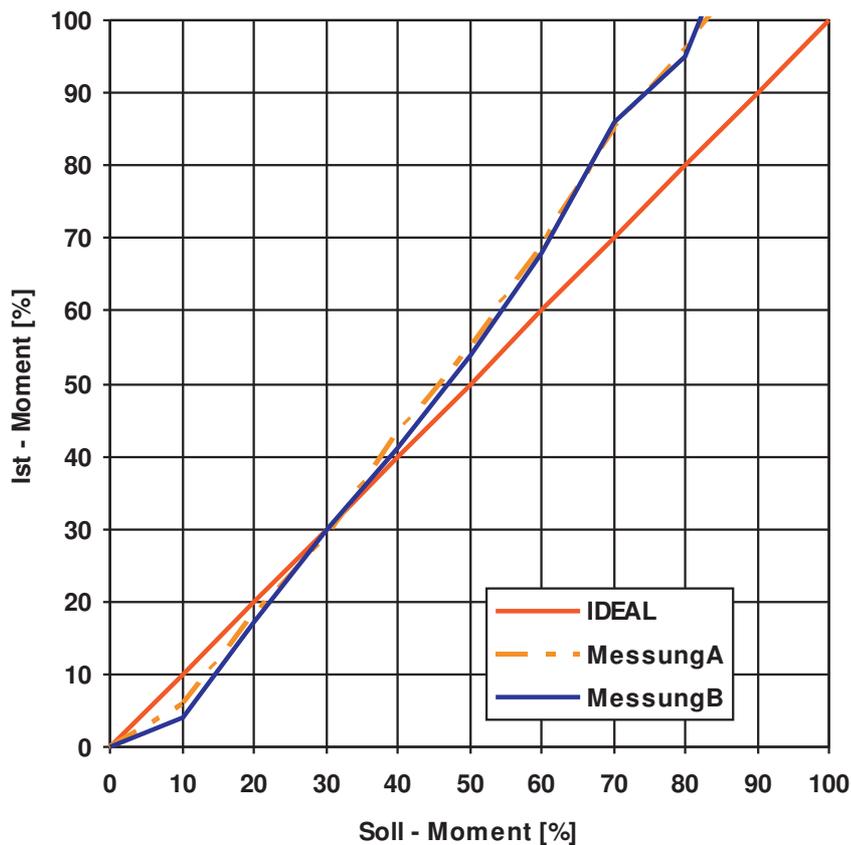
**Bild 7.5:** Omegaantrieb mit stahlseilbewährtem Zahnriemen

zwei Messläufe dargestellt. Man erkennt einen Anfangs deutlich unter dem Soll liegenden Kraftwert der ab ca. 30% des verfügbaren Stellbereichs deutlich über dem Sollverlauf liegt. Diese statische Kennlinie wurde in Form einer Tabelle verwendet, um den Antriebsmomentenverlauf zu linearisieren. Weiter bleibt festzuhalten, dass die Kennlinie deutlich von der Temperatur des Käfigläufers abhängig ist, was mit dessen temperaturabhängigem Widerstandswert und dem sich bei gleichem Schlupf unterschiedlich einstellenden Induktionsstrom zu erklären ist.

### 7.1.3 Reibung

Mit dem vorangehend vermessenen und linearisierten Antriebsmotor wurde nun analog zum in 6.2 vorgestellten Verfahren auch am Regalbediengerät die Reibungskennlinie ermittelt. Es zeigte sich auch hier, dass das mittels Stahlrollen auf einer Stahlschiene gelagerte System über eine dominante Rollreibung verfügt und Haftreibungsanteile zu vernachlässigen sind.

Zum Test der Güte der Reibungsvorsteuerung wurde das System mit zwei Kraftintervallen von konstantem Betrag und gleicher Dauer aber umgekehrtem Vorzeichen



**Bild 7.6:** Messergebnisse des tatsächlichen zum idealen prozentualen Antriebskraftverlauf bei stehendem Motor

beaufschlagt, was einem Bang-Bang artigen Positionieren entspricht. Die tatsächlich erreichte zur theoretisch zu erreichenden Position diente als Gütekriterium. Neben einer Abhängigkeit zum Ort der Fahrschiene zeigte sich eine Abhängigkeit von dem während des Positioniermanövers maximal erreichten Geschwindigkeitsbetrag. Sprich für sehr schnelles ruckartiges Positionieren waren nennenswerte Abweichungen von der Sollposition zu registrieren. Dies könnte mit der dynamischen Anpresskraftverlagerung während starker Beschleunigungsphasen zusammenhängen, womit die tatsächlich auftretende Rollreibung in Folge der zusätzlichen Anpresskraft auf die Lagerrollen signifikant abweicht. Aus Zeitgründen wurde dies nicht weiter untersucht.

## 7.2 PD-Regelung

Das in Kapitel 5 vorgestellte Regelungskonzept wurde an der großen Anlage ohne Beobachter und Zustandsregler umgesetzt. Statt dessen wurde ein einfacher PD-Positionsregelkreis realisiert. Die Reglereinstellung erfolgte heuristisch am Gerät in

Anlehnung an die Einstellregeln von Ziegler Nichols. Mit diesem einfachen Vorgehen konnte die Anlage hinreichend genau die Sollposition einregeln.

### 7.3 Flachheitsbasierte Vorsteuerung

Zur Vorsteuerung des Regalbediengeräts wurden die in Abschnitt 4.2 vorgestellten flachheitsbasierten Parametrierungen zum nachschwingungsfreien Positionieren und Beschleunigen eingesetzt. Zur Verdeutlichung der Strukturbewegung sind in Bild 7.7 die Biegelinientrajektorie über Ort und Zeit sowie in Bild 7.8 als Schnappschussansicht zu bestimmten Zeitpunkten für ein flachheitsbasiertes Positioniermanövers eines Regalbediengeräts exemplarisch dargestellt. Analoge Abbildungen für ein nachschwingungsfreies Beschleunigungsmanöver finden sich in Bild 7.9 und Bild 7.10.

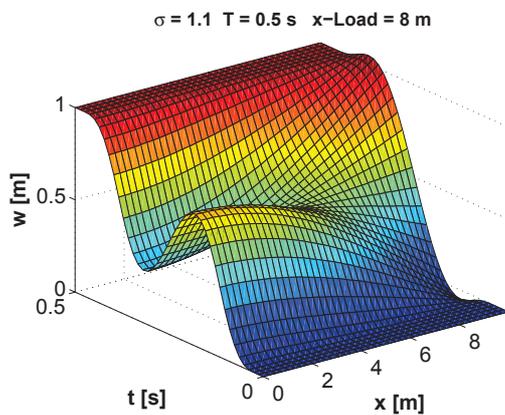


Bild 7.7: Biegelinientrajektorie

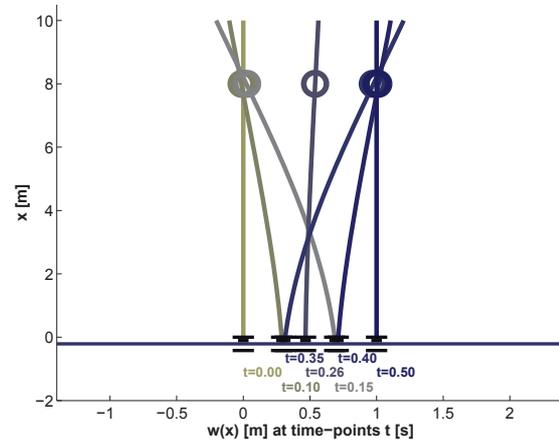


Bild 7.8: Phasen der Positionierbewegung

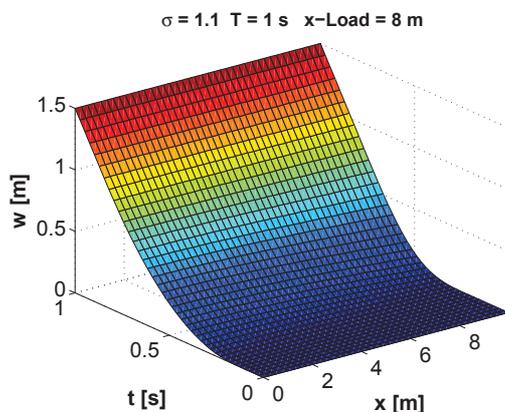


Bild 7.9: Biegelinientrajektorie

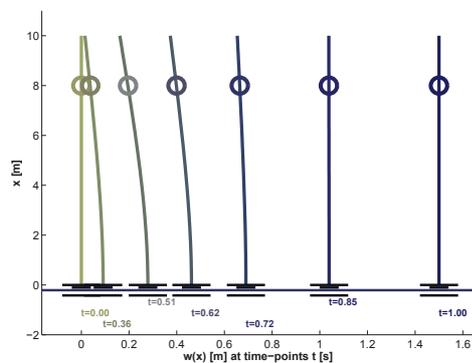


Bild 7.10: Phasen der Beschleunigung

## 7.4 Ergebnisse

An der Anlage konnte eine Verbesserung der Positionierzeiten unter Anwendung der in dieser Arbeit erarbeiteten Methoden im Nahbereich<sup>1</sup> von bis zu 40% erreicht werden. Zusätzlich finden sich in der vom Lehrstuhl für Fördertechnik Materialfluss und Logistik getätigten Veröffentlichung [40] Untersuchungen die auf den im Rahmen dieser Arbeit erarbeiteten Resultaten aufbauen und unter Berücksichtigung von Einlagerstrategien die zu erwartende Steigerung des Gesamtdurchsatzes einer realen Anlage bewerten. Demnach lassen sich die Verfahrszeiten im Mittel um ca. 14% reduzieren. Je nach Einlagerstrategie ist eine Steigerung der Umschlagleistung eines entsprechenden Regalbediengerätelagers von 11 bis 13% erreichbar.

---

<sup>1</sup> Unter Nahbereich werden Positioniermanöver über kurze Distanzen verstanden, bei denen der Antrieb seine Höchstdrehzahl nicht erreicht.

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Bereitstellung eines Regelungs- und Steuerungskonzepts, mittels dessen es möglich ist, den Durchsatz von bereits im Einsatz befindlichen Regalbediengeräteanlagen in der Größenordnung von 40 %<sup>1</sup> zu steigern. Dabei ist das vorgeschlagene Konzept in der Lage, unabhängig von Spiel im Antriebsstrang die verfügbare Aktorkraft im Rahmen der durch die Materialbeanspruchung gegebenen Grenzen zur Positionierung des Systems nutzbar zu machen.

Ausgehend von einem Zweimast-Regalbediengerät wird der dynamische Kern des Systems bestehend aus elastischen Balken erarbeitet. Basierend auf der Euler-Bernoulli-Balkentheorie wird ein endlichdimensionales numerisch auswertbares Modell in Zustandsraumdarstellung mit Hilfe der Methode der finiten Differenzen aufgestellt. Für die hier vorgeschlagene rein gesteuerte Bewegungsphase ist eine Kompensation der Reibungseffekte nötig, weshalb eine grundlegende Übersicht über die einzelnen Phänomene gegeben wird.

Mit Hilfe der berechneten Eigenformen und Eigenfrequenzen wird für den Prüfstand LARS und das Regalbediengerät die Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit mit Hilfe eines am Fußpunkt befindlichen Servoantriebs gezeigt. Darüber hinaus wird ein Empfindlichkeitsmaß postuliert, mit Hilfe dessen es auf praktische Weise möglich ist, Aussagen zur benötigten Sensorauflösung zu treffen. Ferner werden für zukünftige Anlagen schwingungsoptimale Konstruktionsziele postuliert, die versuchen das Verhältnis von Werkzeug- zu Strukturgewicht zu maximieren, da hiermit die am Werkzeug auftretenden Schwingungsamplituden minimiert und die Wirksamkeit der jedem Material eigenen Strukturdämpfung maximiert werden.

Den Kern des hier vorgeschlagenen Konzepts stellt das Vorsteuerungskonzept dar, mittels dessen es idealerweise möglich sein soll, in praktisch Echtzeit eine Vorsteuertrajektorie zu berechnen. Mit den aufgezeigten Methoden der numerischen Optimierung einer Antriebskrafttrajektorie mit Berechnungszeiten auf einem PC mit 2,4 GHz Taktrate von bis zu 2 Wochen, ist der Forderung nach Echtzeit mit den derzeit verfügbaren Rechenleistungen nicht gerecht zu werden. Mit Hilfe des für das System erfolgreich gefundenen flachheitsbasierten Vorsteuergesetz jedoch sehr wohl.

Am Laborprüfstand LARS wird das zuvor vorgestellte beobachtergestützte Regelungs- und Steuerungskonzept demonstriert. Es zeigte sich, dass ein Reglerentwurf nach Riccati und ein Kalman-Filter zur Beobachtung der nicht gemessenen Zustände eine zuverlässig arbeitende – wenn auch nicht trivial feinjustierbare – Lösung darstellt.

---

<sup>1</sup> Bezogen auf Manöver mit kurzer Verfahrrweite

Hauptgrund hierfür ist die Haftreibung, die bei einem Nulldurchgang der Fußpunktgeschwindigkeit den Fußpunkt des Aufbaus in Ruhe halten kann, obgleich die Struktur schwingt. Schwingt nun der Beobachter zu schnell auf den scheinbar ruhenden Balkenzustand ein, kann der Zustandsregler nicht mehr zur aktiven Schwingungsdämpfung dienen.

Auch an der Regalbediengeräteversuchsanlage des Lehrstuhls Fördertechnik Materialfluss und Logistik konnte das Potential zur Steigerung des Durchsatzes mit Hilfe der hier dargestellten Vorsteuerverfahren deutlich festgestellt werden. Im Nahbereich lassen sich Positionierzeiterparnisse von bis zu 40 % erreichen.

So stellt das hier vorgestellte Verfahren eine praxistaugliche leistungsfähige zumindest für Betreiber von Logistikzentren wirtschaftlich äußerst interessante Möglichkeit zur signifikanten Durchsatz- und Wettbewerbsfähigkeitssteigerung dar, wie in [40] dargestellt wurde. Dass diese Leistungssteigerung ohne jegliche bauliche Veränderung an einer realen Anlage erreicht werden konnte, deren exakte Massenverteilung nicht bekannt waren, zeigt die Leistungsfähigkeit des Verfahrens und lässt auf weitere ausschöpfbare Potentiale schließen.

Aufgrund der in 1.2.1 dargestellten Zusammenhänge ist bei den heutigen Anlagen oftmals der Antrieb nicht stark genug gewählt, um den bewusst steif und damit schwer konstruierten Rahmen bis an die Belastungsgrenzen zu deformieren. Rüstet man einen stärkeren Antrieb unter Berücksichtigung der Ermüdungs- und Materialbelastungsproblematik nach, lässt sich damit das mit der hier dargelegten Vorsteuerung verbundene Potential erst in vollem Umfang erschließen.

Weiterführende Forschungsaktivitäten könnten der automatisierten Parameteridentifikation, dem Berechnen von Vorsteuertrajektorien mit zeitvarianter Massenbelegung in Echtzeit oder aber auch konstruktiven Veränderungen zur Verbesserung des Schwingungsverhaltens künftiger Maschinen unter energetischen Gesichtspunkten gewidmet werden.

In der Gesamtbetrachtung kann damit festgestellt werden, dass die durchgeführten Arbeiten einen sinnvollen Beitrag zur Produktivitätssteigerung von Regalbediengeräten und allen Maschinen mit vergleichbar zu modellierendem Aufbau geleistet haben. Insbesondere die vom anwendernahen Lehrstuhl Fördertechnik Materialfluss und Logistik getätigte größtenteils auf den Ergebnissen dieser Arbeit basierende Veröffentlichung [40] belegt dies.

# A Zwischenergebnisse des Steuerungsentwurfs

## A.1 Auswahl geeigneter Operatorfunktionen

Für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^4}{dx^4} w(x) + s^2 w(x) = 0 \quad (\text{A.1})$$

existiert der Eulersche Lösungsansatz mit trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen [34]:

$$w(x) = a_1 \cos(\psi x) + a_2 \sin(\psi x) + a_3 \cosh(\psi x) + a_4 \sinh(\psi x) \quad (\text{A.2})$$

mit  $\psi = \sqrt{j} s$ . Setzt man diesen Lösungsansatz in die für den unteren und oberen Balkenabschnitt gültigen Randbedingungen (4.28), (4.29), (4.34) und (4.35) ein, ergibt sich

$$j\alpha s (-a_1 + a_3) = (a_2 + a_4) \sqrt{j} s \quad (\text{A.3})$$

$$(js)^{\frac{3}{2}} (-a_2 + a_4) = \tilde{u}(t) \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} & -a_5 js \cos(\sqrt{j} s) - a_6 js \sin(\sqrt{j} s) \\ & + a_7 js \cosh(\sqrt{j} s) + a_8 js \sinh(\sqrt{j} s) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} & + a_5 (js)^{\frac{3}{2}} \sin(\sqrt{j} s) - a_6 (js)^{\frac{3}{2}} \cos(\sqrt{j} s) \\ & + a_7 (js)^{\frac{3}{2}} \sinh(\sqrt{j} s) + a_8 (js)^{\frac{3}{2}} \cosh(\sqrt{j} s) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Zusammen mit den Randbedingungen (4.30) - (4.33) ergibt sich somit ein Gleichungssystem von 8 Gleichungen und 8 Unbekannten.

Neben dem Lösungsansatz (A.2) existieren auch andere Darstellungsformen. Diese anderen Darstellungen können den Vorteil besitzen, dass Ihre Summanden bzw. deren Ableitungen an geeigneter Stelle eine Nullstelle besitzen, was den Lösungsweg deutlich vereinfacht. In der Literatur wird z.B. in [38] und [39] mit jeweils einer anderen Darstellungsform gearbeitet. In Kombination miteinander lassen sich diese beiden Darstellungsformen für das hier vorliegende Problem besonders vorteilhaft anwenden.

## A.2 Koeffizienten zum flachheitsbasierten Steuerungsentwurf

Die Koeffizienten der Lösung der Biegeschwingungsgleichung aus Abschnitt 4.2.1, ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
 a = -\hat{u} & \left[ C_1(l)^2 C^+(l)^2 - C^-(l) s^3 S^-(l) S_2(l) C_2(l) - s^2 C^-(l) S^+(l) C_2(l) S_1(l) + \right. \\
 & C^+(l)^2 s^2 S_1(l) S_2(l) + C^+(l)^2 s^2 C_2(l) \alpha S_1(l) - C^+(l)^2 s^2 \varphi C_2(l) S_1(l) + \\
 & C_1(l)^2 s S^-(l) S^+(l) + C_1(l) C^+(l) s S^+(l) S_1(l) - s^3 S^-(l) S^+(l) C_2(l)^2 - \\
 & C_1(l)^2 C^-(l) s S^-(l) \alpha + C^+(l) s^3 S^+(l) S_2(l) C_2(l) + \\
 & C_1(l)^2 C^+(l) s S^+(l) \alpha - C_1(l) C^+(l)^2 s^2 \alpha S_2(l) - \\
 & C_1(l) C^-(l) s S^-(l) S_1(l) - C_1(l) s^2 S^-(l)^2 C_2(l) + C^+(l) s^3 C^-(l) S_2(l)^2 - \\
 & C^+(l) C^-(l) s S_1(l)^2 + C^+(l) s^3 \varphi S^+(l) S_2(l) S_1(l) - \\
 & C^-(l) \varphi s^3 S^-(l) S_2(l) S_1(l) - s^3 \varphi S^-(l) S^+(l) C_2(l) S_1(l) - \\
 & C^-(l)^2 s^2 S_2(l) S_1(l) + 2 s^3 S^+(l) S_2(l) S_1(l) S^-(l) - C^+(l) s^2 C_2(l) S_1(l) S^-(l) + \\
 & C_1(l) C^+(l) s^2 S^-(l) S_2(l) + C_1(l) C^+(l)^2 s^2 \varphi S_2(l) + \\
 & C_1(l) s^3 S_2(l) S^-(l) \varphi S^+(l) + C_1(l) s^2 S^+(l) S_2(l) C^-(l) + \\
 & C_1(l) s^2 S^+(l)^2 C_2(l) + 2 C_1(l) C^+(l) C^-(l) s C_2(l) + C^-(l)^2 s^2 C_2(l)^2 + \\
 & s^4 S_2(l)^2 S^+(l)^2 + s^2 S^-(l)^2 S_1(l)^2 + C_1(l) s^2 S^+(l)^2 \alpha S_1(l) - \\
 & C^+(l)^2 s^2 \varphi S_1(l)^2 \alpha + C^-(l) \varphi s^3 S^-(l) C_2(l)^2 + \\
 & C^-(l) \varphi s^3 S^-(l) C_2(l) \alpha S_1(l) + C^-(l)^2 s^2 C_2(l) \alpha S_1(l) - \\
 & s^3 \varphi S^-(l) S^+(l) S_1(l)^2 \alpha - s^2 C^-(l) S^+(l) S_1(l)^2 \alpha - \\
 & C^+(l) s^2 S^-(l) S_1(l)^2 \alpha - C^+(l) s^3 \varphi S^+(l) C_2(l)^2 - \\
 & C^+(l) s^3 \varphi S^+(l) C_2(l) \alpha S_1(l) - C^+(l) s^4 S_2(l)^2 S^-(l) \alpha + \\
 & C^+(l) s^3 S^+(l) C_2(l)^2 \alpha + s^4 S_2(l) S^-(l)^2 C_2(l) \alpha - \\
 & s^2 S_2(l) C_1(l) C^-(l)^2 \alpha + s^3 S_2(l) C_1(l) C^+(l) \varphi S^+(l) \alpha - \\
 & s^3 S_2(l) C_1(l) C^-(l) \varphi S^-(l) \alpha - s^4 S_2(l)^2 C^+(l)^2 \varphi \alpha - \\
 & s^5 S_2(l)^2 S^-(l) \varphi S^+(l) \alpha - s^4 S_2(l)^2 S^+(l) C^-(l) \alpha + \\
 & s^4 S_2(l) S^+(l)^2 \alpha C_2(l) + s^2 S^-(l)^2 C_1(l) \alpha S_1(l) - \\
 & \left. s^3 S^-(l) \alpha C_2(l)^2 C^-(l) \right] / \left[ s^2 \left[ - C_1(l) s^2 S^-(l)^2 C_2(l) \alpha + \right. \right. \\
 & C^+(l) s^3 C^-(l) S_2(l)^2 \alpha - C^+(l) C^-(l) s S_1(l)^2 \alpha + \\
 & C^+(l)^2 s^2 S_1(l) \alpha S_2(l) - C^-(l) \varphi s^3 S^-(l) S_2(l) C_2(l) + \\
 & C^+(l) s^3 \varphi S^+(l) S_2(l) \alpha S_1(l) - C^+(l)^2 s^2 C_2(l) S_2(l) + \\
 & C^+(l) s^2 S^-(l) C_2(l)^2 + C^+(l)^2 s^2 \varphi C_2(l)^2 - C^+(l) s^3 S^+(l) S_2(l)^2 - \\
 & C^+(l) s S_1(l)^2 S^+(l) - C^-(l)^2 s^2 S_2(l) C_2(l) + C^-(l) s^3 S_2(l)^2 S^-(l) + \\
 & \left. C^-(l) s S_1(l)^2 S^-(l) - S_2(l)^2 S^-(l)^2 s^4 \alpha - s^2 S^-(l)^2 C_2(l) S_1(l) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s^2 S^+(l)^2 S_1(l)^2 \alpha - s^2 S^+(l)^2 S_1(l) C_2(l) + s^2 C^-(l) S^+(l) C_2(l)^2 - \\
& C^+(l)^2 s^2 C_2(l)^2 \alpha + C_1(l)^2 \varphi C^+(l)^2 + C_1(l)^2 C^+(l) S^-(l) + \\
& C_1(l)^2 C^-(l) S^+(l) - C_1(l)^2 C^-(l)^2 \alpha + C_1(l) S_2(l) S^-(l)^2 s^2 - \\
& C_1(l) C^-(l)^2 S_1(l) + C_1(l) s^2 S^+(l)^2 S_2(l) - C_1(l) C^+(l)^2 S_1(l) + \\
& C^-(l) s^3 S_2(l) S^-(l) \alpha C_2(l) - C^-(l) \varphi s^3 S^-(l) S_2(l) \alpha S_1(l) - \\
& C^-(l)^2 s^2 S_2(l) \alpha S_1(l) + 2 s^3 S^+(l) S_2(l) S_1(l) S^-(l) \alpha + \\
& s^3 \varphi S^-(l) S^+(l) C_2(l)^2 + s^2 C^-(l) S^+(l) C_2(l) \alpha S_1(l) + \\
& s^3 \varphi S^-(l) S^+(l) C_2(l) \alpha S_1(l) - s^3 C_2(l)^2 S^-(l) S^+(l) \alpha + \\
& C^+(l)^2 s^2 \varphi C_2(l) \alpha S_1(l) - C^+(l) s^3 S^+(l) S_2(l) \alpha C_2(l) + \\
& C^+(l) s^2 C_2(l) S_1(l) S^-(l) \alpha + C^+(l) s^3 \varphi S^+(l) S_2(l) C_2(l) + \\
& C_1(l)^2 C^+(l) s \varphi S^+(l) \alpha - C_1(l)^2 C^-(l) \varphi s S^-(l) \alpha + \\
& C_1(l)^2 s S^-(l) S^+(l) \alpha + C_1(l)^2 s \varphi S^-(l) S^+(l) + \\
& C_1(l) C^+(l) s \varphi S^+(l) S_1(l) - C_1(l) C^+(l)^2 s^2 \varphi \alpha S_2(l) - \\
& C_1(l) s^3 S_2(l) S^-(l) \varphi S^+(l) \alpha - C_1(l) C^-(l) \varphi s S^-(l) S_1(l) - \\
& C_1(l) s^2 S^+(l) S_2(l) C^-(l) \alpha + C_1(l) C^-(l) s S_1(l) S^-(l) \alpha + \\
& C_1(l) s^2 S^+(l)^2 \alpha C_2(l) + 2 C_1(l) C^+(l) C^-(l) \alpha s C_2(l) - \\
& C_1(l) C^+(l) s S_1(l) S^+(l) \alpha - C_1(l) C^+(l) s^2 S^-(l) \alpha S_2(l) \Big] \Big] \quad (\text{A.7})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b = -\hat{u} & \left[ -C^-(l)^2 s^3 S_2(l)^2 - s^3 S^-(l)^2 C_2(l)^2 - C^+(l)^2 s S_1(l)^2 - C_1(l)^2 C^+(l) C^-(l) - \right. \\
& C_1(l)^2 s S^+(l)^2 - 2 C^+(l) C^-(l) s^2 S_1(l) S_2(l) - C_1(l) C^-(l) s^2 S_2(l) S^-(l) + \\
& C^+(l) s^4 \varphi S^+(l) S_2(l)^2 - C^+(l) s^2 S_1(l) S^+(l) C_2(l) + C^+(l) s^2 C_2(l)^2 C^-(l) + \\
& C_1(l) C^+(l)^2 s \varphi S_1(l) + C^+(l)^2 s^3 \varphi C_2(l) S_2(l) + \\
& C^+(l) s^3 C_2(l) S_2(l) S^-(l) + C_1(l) C^+(l) s^2 S^+(l) S_2(l) - C^-(l) \varphi s^4 S^-(l) S_2(l)^2 + \\
& C^-(l) s^2 S_1(l) S^-(l) C_2(l) + s^3 S^+(l) S_2(l) C^-(l) C_2(l) + s^4 S^+(l) S_2(l)^2 S^-(l) + \\
& s^4 S^+(l) S_2(l) \varphi S^-(l) C_2(l) + S_2(l) S^-(l)^2 s^3 S_1(l) - s^2 S_1(l)^2 S^-(l) S^+(l) - \\
& s^3 S^+(l)^2 S_1(l) S_2(l) - C_1(l) C^-(l) \varphi s^2 S^-(l) C_2(l) - C_1(l) C^-(l)^2 s C_2(l) + \\
& C_1(l) C^+(l)^2 s C_2(l) + C_1(l) s^2 \varphi S^-(l) S^+(l) S_1(l) + 2 C_1(l) s^2 C_2(l) S^-(l) S^+(l) + \\
& C_1(l) s C^-(l) S^+(l) S_1(l) + C_1(l) C^+(l) s S^-(l) S_1(l) + \\
& \left. C_1(l) C^+(l) s^2 \varphi S^+(l) C_2(l) \right] / \left[ s \left[ -C_1(l) s^2 S^-(l)^2 C_2(l) \alpha + \right. \right. \\
& C^+(l) s^3 C^-(l) S_2(l)^2 \alpha - C^+(l) C^-(l) s S_1(l)^2 \alpha + C^+(l)^2 s^2 S_1(l) \alpha S_2(l) - \\
& C^-(l) \varphi s^3 S^-(l) S_2(l) C_2(l) + C^+(l) s^3 \varphi S^+(l) S_2(l) \alpha S_1(l) - \\
& C^+(l)^2 s^2 C_2(l) S_2(l) + C^+(l) s^2 S^-(l) C_2(l)^2 + C^+(l)^2 s^2 \varphi C_2(l)^2 - \\
& C^+(l) s^3 S^+(l) S_2(l)^2 - C^+(l) s S_1(l)^2 S^+(l) - C^-(l)^2 s^2 S_2(l) C_2(l) + \\
& \left. C^-(l) s^3 S_2(l)^2 S^-(l) + C^-(l) s S_1(l)^2 S^-(l) - S_2(l)^2 S^-(l)^2 s^4 \alpha - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s^2 S^-(l)^2 C_2(l) S_1(l) - s^2 S^+(l)^2 S_1(l)^2 \alpha - s^2 S^+(l)^2 S_1(l) C_2(l) + \\
& s^2 C^-(l) S^+(l) C_2(l)^2 - C^+(l)^2 s^2 C_2(l)^2 \alpha + C_1(l)^2 \varphi C^+(l)^2 + \\
& C_1(l)^2 C^+(l) S^-(l) + C_1(l)^2 C^-(l) S^+(l) - C_1(l)^2 C^-(l)^2 \alpha + C_1(l) S_2(l) S^-(l)^2 s^2 - \\
& C_1(l) C^-(l)^2 S_1(l) + C_1(l) s^2 S^+(l)^2 S_2(l) - C_1(l) C^+(l)^2 S_1(l) + \\
& C^-(l) s^3 S_2(l) S^-(l) \alpha C_2(l) - C^-(l) \varphi s^3 S^-(l) S_2(l) \alpha S_1(l) - \\
& C^-(l)^2 s^2 S_2(l) \alpha S_1(l) + 2 s^3 S^+(l) S_2(l) S_1(l) S^-(l) \alpha + \\
& s^3 \varphi S^-(l) S^+(l) C_2(l)^2 + s^2 C^-(l) S^+(l) C_2(l) \alpha S_1(l) + \\
& s^3 \varphi S^-(l) S^+(l) C_2(l) \alpha S_1(l) - s^3 C_2(l)^2 S^-(l) S^+(l) \alpha + \\
& C^+(l)^2 s^2 \varphi C_2(l) \alpha S_1(l) - C^+(l) s^3 S^+(l) S_2(l) \alpha C_2(l) + \\
& C^+(l) s^2 C_2(l) S_1(l) S^-(l) \alpha + C^+(l) s^3 \varphi S^+(l) S_2(l) C_2(l) + \\
& C_1(l)^2 C^+(l) s \varphi S^+(l) \alpha - C_1(l)^2 C^-(l) \varphi s S^-(l) \alpha + \\
& C_1(l)^2 s S^-(l) S^+(l) \alpha + C_1(l)^2 s \varphi S^-(l) S^+(l) + \\
& C_1(l) C^+(l) s \varphi S^+(l) S_1(l) - C_1(l) C^+(l)^2 s^2 \varphi \alpha S_2(l) - \\
& C_1(l) s^3 S_2(l) S^-(l) \varphi S^+(l) \alpha - C_1(l) C^-(l) \varphi s S^-(l) S_1(l) - \\
& C_1(l) s^2 S^+(l) S_2(l) C^-(l) \alpha + C_1(l) C^-(l) s S_1(l) S^-(l) \alpha + \\
& C_1(l) s^2 S^+(l)^2 \alpha C_2(l) + 2 C_1(l) C^+(l) C^-(l) \alpha s C_2(l) - \\
& \left. \left. C_1(l) C^+(l) s S_1(l) S^+(l) \alpha - C_1(l) C^+(l) s^2 S^-(l) \alpha S_2(l) \right] \right] \quad (A.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e = \hat{u} \left[ \right. & C_1(l) s^4 S_2^2(l) S^-(l) \alpha - s^4 C_2^2(l) \varphi S^-(l) \alpha S_1(l) + \\
& 2 s^3 S_2(l) C_2(l) C^-(l) S_1(l) - 2 C_1(l) s^3 S^+(l) S_2(l) \alpha S_1(l) - \\
& s^2 S_1(l)^3 S^-(l) - s^3 C_2(l)^3 C^-(l) - s^5 S^+(l) S_2(l)^3 + \\
& s^3 S^+(l) C_2(l) S_1^2(l) \alpha - C_1(l) s^3 S^+(l) C_2^2(l) \alpha - C_1(l) s^4 S_2^2(l) \varphi S^-(l) + \\
& s^3 S_2(l) \alpha S_1^2(l) C^-(l) - 2 C_1(l) s^3 S^+(l) S_2(l) C_2(l) + \\
& 2 s^4 S_2(l) C_2(l) \varphi S^-(l) S_1(l) - s^5 S^+(l) S_2^2(l) \alpha C_2(l) + \\
& C_1^2(l) s^2 \alpha C^+(l) S_2(l) + s^5 S_2(l)^3 C^-(l) \alpha + s^4 S_2(l) C_2^2(l) S^-(l) - \\
& s^4 S_1(l) S_2^2(l) S^-(l) - s^4 S_2^2(l) C_2(l) C^+(l) + s^4 C_2(l)^3 S^-(l) \alpha - \\
& s^4 C_2(l)^3 \varphi S^-(l) - s^3 S^+(l) S_1^2(l) S_2(l) + s^3 S^+(l) C_2^2(l) S_1(l) + \\
& s^2 S_1^2(l) C^+(l) C_2(l) + s^2 C^+(l) S_1(l)^3 \alpha - C_1(l)^3 s S^+(l) \alpha - \\
& C_1^2(l) s^2 S_2(l) S^-(l) - C_1^2(l) s S_1(l) S^+(l) - C_1^2(l) s C_2(l) C^-(l) - \\
& C_1(l) s^3 S_2^2(l) C^-(l) - C_1(l) C^+(l) s^2 C_2^2(l) + C_1(l) S_1^2(l) C^-(l) s + \\
& S_2(l)^3 S^-(l) \varphi \alpha s^6 - s^4 C_2^2(l) \alpha S_2(l) C^+(l) + \\
& s^4 S_2^2(l) \alpha S_1(l) C^+(l) - 2 s^4 S_2(l) \alpha S_1(l) C_2(l) S^-(l) + \\
& s^4 S_2(l) \alpha S_1^2(l) \varphi S^-(l) - s^3 C_2^2(l) C^-(l) \alpha S_1(l) - \\
& C_1(l)^3 C^+(l) + C_1^2(l) s^2 C_2(l) S^-(l) \alpha + C_1^2(l) s^2 \alpha \varphi S^-(l) S_1(l) - \\
& \left. \left. C_1^2(l) s^2 C_2(l) \varphi S^-(l) + C_1^2(l) s \alpha C^-(l) S_1(l) \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 C_1(l) s^4 \alpha S_2(l) \varphi S^-(l) C_2(l) + 2 C_1(l) s^3 \alpha S_2(l) C^-(l) C_2(l) - \\
& 2 C_1(l) s^2 C^+(l) S_1(l) S_2(l) - C_1(l) s^2 \alpha S_1^2(l) S^-(l) - \\
& 2 C_1(l) C^+(l) s^2 C_2(l) \alpha S_1(l) + C_1(l) s^2 S_1^2(l) \varphi S^-(l) + \\
& 2 C_1(l) s^2 C_2(l) S^-(l) S_1(l) \Big] / \Big[ s^2 \Big[ - C_1(l) s^2 S^-(l)^2 C_2(l) \alpha + \\
& C^+(l) s^3 C^-(l) S_2^2(l) \alpha - C^+(l) C^-(l) s S_1^2(l) \alpha + \\
& C^+(l)^2 s^2 S_1(l) \alpha S_2(l) - C^-(l) \varphi s^3 S^-(l) S_2(l) C_2(l) + \\
& C^+(l) s^3 \varphi S^+(l) S_2(l) \alpha S_1(l) - C^+(l)^2 s^2 C_2(l) S_2(l) + \\
& C^+(l) s^2 S^-(l) C_2^2(l) + C^+(l)^2 s^2 \varphi C_2^2(l) - C^+(l) s^3 S^+(l) S_2^2(l) - \\
& C^+(l) s S_1^2(l) S^+(l) - C^-(l)^2 s^2 S_2(l) C_2(l) + C^-(l) s^3 S_2^2(l) S^-(l) + \\
& C^-(l) s S_1^2(l) S^-(l) - S_2^2(l) S^-(l)^2 s^4 \alpha - s^2 S^-(l)^2 C_2(l) S_1(l) - \\
& s^2 S^+(l)^2 S_1^2(l) \alpha - s^2 S^+(l)^2 S_1(l) C_2(l) + s^2 C^-(l) S^+(l) C_2^2(l) - \\
& C^+(l)^2 s^2 C_2^2(l) \alpha + C_1^2(l) \varphi C^+(l)^2 + C_1^2(l) C^+(l) S^-(l) + \\
& C_1^2(l) C^-(l) S^+(l) - C_1^2(l) C^-(l)^2 \alpha + C_1(l) S_2(l) S^-(l)^2 s^2 - \\
& C_1(l) C^-(l)^2 S_1(l) + C_1(l) s^2 S^+(l)^2 S_2(l) - C_1(l) C^+(l)^2 S_1(l) + \\
& C^-(l) s^3 S_2(l) S^-(l) \alpha C_2(l) - C^-(l) \varphi s^3 S^-(l) S_2(l) \alpha S_1(l) - \\
& C^-(l)^2 s^2 S_2(l) \alpha S_1(l) + 2 s^3 S^+(l) S_2(l) S_1(l) S^-(l) \alpha + \\
& s^3 \varphi S^-(l) S^+(l) C_2^2(l) + s^2 C^-(l) S^+(l) C_2(l) \alpha S_1(l) + \\
& s^3 \varphi S^-(l) S^+(l) C_2(l) \alpha S_1(l) - s^3 C_2^2(l) S^-(l) S^+(l) \alpha + \\
& C^+(l)^2 s^2 \varphi C_2(l) \alpha S_1(l) - C^+(l) s^3 S^+(l) S_2(l) \alpha C_2(l) + \\
& C^+(l) s^2 C_2(l) S_1(l) S^-(l) \alpha + C^+(l) s^3 \varphi S^+(l) S_2(l) C_2(l) + \\
& C_1^2(l) C^+(l) s \varphi S^+(l) \alpha - C_1^2(l) C^-(l) \varphi s S^-(l) \alpha + \\
& C_1^2(l) s S^-(l) S^+(l) \alpha + C_1^2(l) s \varphi S^-(l) S^+(l) + \\
& C_1(l) C^+(l) s \varphi S^+(l) S_1(l) - C_1(l) C^+(l)^2 s^2 \varphi \alpha S_2(l) - \\
& C_1(l) s^3 S_2(l) S^-(l) \varphi S^+(l) \alpha - C_1(l) C^-(l) \varphi s S^-(l) S_1(l) - \\
& C_1(l) s^2 S^+(l) S_2(l) C^-(l) \alpha + C_1(l) C^-(l) s S_1(l) S^-(l) \alpha + \\
& C_1(l) s^2 S^+(l)^2 \alpha C_2(l) + 2 C_1(l) C^+(l) C^-(l) \alpha s C_2(l) - \\
& C_1(l) C^+(l) s S_1(l) S^+(l) \alpha - C_1(l) C^+(l) s^2 S^-(l) \alpha S_2(l) \Big] \Big] \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h = -\hat{u} \Big[ & - C_1(l)^3 C^-(l) \alpha - 2 C^+(l) s^3 S_2(l) \alpha S_1(l) C_2(l) + C_1(l)^3 S^+(l) + \\
& C^+(l) s^5 S_2(l)^3 \varphi \alpha + 2 C^+(l) S_1(l) s^3 \varphi C_2(l) S_2(l) + \\
& C^+(l) s^3 S_2(l) \alpha S_1(l)^2 \varphi - C^+(l) C_2(l)^2 s^3 \varphi \alpha S_1(l) - \\
& s^4 S_2(l)^3 C^-(l) - C_2(l)^3 s^3 S^-(l) - C^+(l) S_1(l)^3 s - C_1(l)^2 C^-(l) S_1(l) - \\
& S_1(l)^2 C^-(l) s^2 S_2(l) - S_1(l)^2 s^2 S^+(l) C_2(l) + S_1(l) s^2 C_2(l)^2 C^-(l) + \\
& s^4 C_2(l) S_2(l)^2 S^+(l) - S^+(l) s^2 S_1(l)^3 \alpha + s^5 S_2(l)^3 S^-(l) \alpha - \\
& C^+(l) C_2(l)^3 s^3 \varphi + C^+(l) s^3 C_2(l)^2 S_2(l) - C^+(l) s^3 S_2(l)^2 S_1(l) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C^+(l) C_2(l)^3 s^3 \alpha - C_1(l)^2 s C_2(l) S^-(l) + C_1(l) S_1(l)^2 s S^-(l) + \\
& C_1(l) S^+(l) s^2 C_2(l)^2 - C_1(l) s^3 S_2(l)^2 S^-(l) + 2 S_1(l) s^3 C_2(l) S_2(l) S^-(l) - \\
& s^4 S_2(l)^2 \alpha C^-(l) C_2(l) + C_2(l) s^2 C^-(l) S_1(l)^2 \alpha - \\
& s^4 S_2(l)^2 \alpha S_1(l) S^+(l) + S^+(l) s^4 C_2(l)^2 \alpha S_2(l) + \\
& s^3 S_2(l) S^-(l) \alpha S_1(l)^2 - C_2(l)^2 s^3 S_1(l) S^-(l) \alpha + \\
& C_1(l)^2 C^+(l) \alpha s \varphi S_1(l) - C_1(l)^2 s S_2(l) C^+(l) - \\
& C_1(l)^2 C^+(l) C_2(l) s \varphi + C_1(l)^2 C^+(l) \alpha s C_2(l) - \\
& C_1(l)^2 \alpha s^2 S^+(l) S_2(l) + C_1(l)^2 \alpha s S^-(l) S_1(l) + \\
& 2 C_1(l) C^+(l) S_1(l) s C_2(l) + C_1(l) C^+(l) s^3 S_2(l)^2 \alpha - \\
& C_1(l) C^+(l) \alpha s S_1(l)^2 + 2 C_1(l) C^+(l) \alpha s^3 \varphi C_2(l) S_2(l) + \\
& C_1(l) C^+(l) S_1(l)^2 s \varphi - C_1(l) C^+(l) s^3 S_2(l)^2 \varphi + \\
& 2 C_1(l) \alpha s^3 C_2(l) S_2(l) S^-(l) + 2 C_1(l) \alpha s^2 S_1(l) S^+(l) C_2(l) + \\
& 2 C_1(l) S_1(l) s^2 S^+(l) S_2(l) - C_1(l) \alpha s^2 C_2(l)^2 C^-(l) - \\
& 2 C_1(l) \alpha C^-(l) s^2 S_1(l) S_2(l) - \\
& 2 C_1(l) s^2 C_2(l) S_2(l) C^-(l) \Big] / \left[ s \left[ - C_1(l) s^2 S^-(l)^2 C_2(l) \alpha + \right. \right. \\
& C^+(l) s^3 C^-(l) S_2(l)^2 \alpha - C^+(l) C^-(l) s S_1(l)^2 \alpha + \\
& C^+(l)^2 s^2 S_1(l) \alpha S_2(l) - C^-(l) \varphi s^3 S^-(l) S_2(l) C_2(l) + \\
& C^+(l) s^3 \varphi S^+(l) S_2(l) \alpha S_1(l) - C^+(l)^2 s^2 C_2(l) S_2(l) + \\
& C^+(l) s^2 S^-(l) C_2(l)^2 + C^+(l)^2 s^2 \varphi C_2(l)^2 - C^+(l) s^3 S^+(l) S_2(l)^2 - \\
& C^+(l) s S_1(l)^2 S^+(l) - C^-(l)^2 s^2 S_2(l) C_2(l) + C^-(l) s^3 S_2(l)^2 S^-(l) + \\
& C^-(l) s S_1(l)^2 S^-(l) - S_2(l)^2 S^-(l)^2 s^4 \alpha - s^2 S^-(l)^2 C_2(l) S_1(l) - \\
& s^2 S^+(l)^2 S_1(l)^2 \alpha - s^2 S^+(l)^2 S_1(l) C_2(l) + s^2 C^-(l) S^+(l) C_2(l)^2 - \\
& C^+(l)^2 s^2 C_2(l)^2 \alpha + C_1(l)^2 \varphi C^+(l)^2 + C_1(l)^2 C^+(l) S^-(l) + \\
& C_1(l)^2 C^-(l) S^+(l) - C_1(l)^2 C^-(l)^2 \alpha + C_1(l) S_2(l) S^-(l)^2 s^2 - \\
& C_1(l) C^-(l)^2 S_1(l) + C_1(l) s^2 S^+(l)^2 S_2(l) - C_1(l) C^+(l)^2 S_1(l) + \\
& C^-(l) s^3 S_2(l) S^-(l) \alpha C_2(l) - C^-(l) \varphi s^3 S^-(l) S_2(l) \alpha S_1(l) - \\
& C^-(l)^2 s^2 S_2(l) \alpha S_1(l) + 2 s^3 S^+(l) S_2(l) S_1(l) S^-(l) \alpha + \\
& s^3 \varphi S^-(l) S^+(l) C_2(l)^2 + s^2 C^-(l) S^+(l) C_2(l) \alpha S_1(l) + \\
& s^3 \varphi S^-(l) S^+(l) C_2(l) \alpha S_1(l) - s^3 C_2(l)^2 S^-(l) S^+(l) \alpha + \\
& C^+(l)^2 s^2 \varphi C_2(l) \alpha S_1(l) - C^+(l) s^3 S^+(l) S_2(l) \alpha C_2(l) + \\
& C^+(l) s^2 C_2(l) S_1(l) S^-(l) \alpha + C^+(l) s^3 \varphi S^+(l) S_2(l) C_2(l) + \\
& C_1(l)^2 C^+(l) s \varphi S^+(l) \alpha - C_1(l)^2 C^-(l) \varphi s S^-(l) \alpha + \\
& C_1(l)^2 s S^-(l) S^+(l) \alpha + C_1(l)^2 s \varphi S^-(l) S^+(l) + \\
& C_1(l) C^+(l) s \varphi S^+(l) S_1(l) - C_1(l) C^+(l)^2 s^2 \varphi \alpha S_2(l) - \\
& C_1(l) s^3 S_2(l) S^-(l) \varphi S^+(l) \alpha - C_1(l) C^-(l) \varphi s S^-(l) S_1(l) - \\
& C_1(l) s^2 S^+(l) S_2(l) C^-(l) \alpha + C_1(l) C^-(l) s S_1(l) S^-(l) \alpha + \\
& C_1(l) s^2 S^+(l)^2 \alpha C_2(l) + 2 C_1(l) C^+(l) C^-(l) \alpha s C_2(l) -
\end{aligned}$$

$$\left. C_1(l) C^+(l) s S_1(l) S^+(l) \alpha - C_1(l) C^+(l) s^2 S^-(l) \alpha S_2(l) \right] \quad (\text{A.10})$$

### A.3 Ausdrücke der Operatorfunktionen $Q_1$ und $P_1(x)$

Für  $Q_1$  und  $P_1(x)$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} Q_1 = s^2 & \left[ C_1(1+j) \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\varphi}{4} \right) + C_1(l+l j) \left( -\frac{\varphi}{2} \right) + \right. \\ & C_1(2l-1+j) \left( \frac{\varphi}{8} \right) (-1-j) + C_1(2l-1-j) \left( \frac{\varphi}{8} \right) (j-1) - \frac{\alpha}{2} + \\ & S_1(1+j) \left( \frac{1-j}{2} \right) + S_2(1+j) \left( \frac{\varphi \alpha s^2}{8} \right) (1+j) + \\ & S_2(l+l j) \left( \frac{\varphi \alpha s^2}{4} \right) (1+j) + S_2(l-1+(l-1) j) \left( \frac{-\varphi \alpha s^2}{4} \right) (1+j) + \\ & \left. S_2(1+(2l-1) j) \left( \frac{\varphi \alpha s^2}{8} \right) + S_2(-1+(2l-1) j) - \left( \frac{\varphi \alpha s^2}{8} \right) \right] \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1(x) = & \frac{1}{2} C_1(x) \\ & + \frac{1}{4} ((1-I) C_1(1-x+j) + (1+j) C_1(1-x-I)) \\ & + \frac{j s^2 \alpha \varphi}{8} (C_2(x-1-j) - C_2(x-1+j)) \\ & + \frac{j s^2 \alpha \varphi}{4} (C_2(x-l-l j) - C_2(x-l+l j)) \\ & - \frac{s^2 \alpha \varphi}{16} (1+j) (-C_2(l-1+x+(l-1) j) + C_2(x-l+1-j(l-1))) \\ & \quad + j C_2(l-1+x-j(l-1)) - j C_2(x-l+1+(l-1) j)) \\ & + \frac{s^2 \alpha \varphi}{16} ((1+j) (C_2(-1+x-j(2l-1)) - C_2(x-2l+1+j)) \\ & \quad + (-1+j) (-C_2(x-1+j(2l-1)) + C_2(x-2l+1-j))) \\ & - \frac{s^2 \alpha}{2} S_2(x) \\ & + \frac{s^2 \alpha}{4} ((1+j) S_2(x-1-j) + (1-j) S_2(x-1+j)) \\ & + \frac{s^2 \varphi}{8} (-S_2(x-1-j) - S_2(x-1+j)) \\ & + \frac{s^2 \varphi}{4} (S_2(l-x+l j) - S_2(x-l+l j)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{s^2 \varphi}{16} (1+j) (S_2(l-1+x+j(l-1)) + S_2(l-1-x+j(l-1))) \\
& \quad + S_2(l-1+j(l-1-x)) + S_2(l-1+j(l-1+x))) \\
& - \frac{s^2 \varphi}{16} ((1+j) (S_2(x-2l+1-j) + S_2(x-1+j(2l-1))) \\
& \quad + (1-j) (S_2(x-2l+1+j) - S_2(1-x+j(2l-1))))
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Nach einer Potenzreihenentwicklung folgt für  $Q$  und  $P(x)$ :

$$\begin{aligned}
Q_1 = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[ (1+j)^{4n} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\varphi}{4} \right) + (l+l j)^{4n} \left( -\frac{\varphi}{2} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (2l-1+j)^{4n} \frac{\varphi}{8} (-1-j) + (2l-1-j)^{4n} \frac{\varphi}{8} (j-1) \right] (4n+1) \right. \\
& \quad \left. + (1+j)^{4n+1} \left( \frac{1-j}{2} \right) \right\} (-1)^n \frac{s^{2n+2}}{(4n+1)!} \\
& - \frac{\alpha}{2} s^2 \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[ (1+j)^{4n+3} + 2(l+l j)^{4n+3} - 2(l-1+(l-1)j)^{4n+3} \right] (1+j) \right. \\
& \quad \left. + (1+(2l-1)j)^{4n+3} - (-1+(2l-1)j)^{4n+3} \right\} \frac{\varphi \alpha}{8} (-1)^n \frac{s^{2n+4}}{(4n+3)!}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
P_1(x) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} x^{4n} + \frac{1}{4} (1-j) (1-x+j)^{4n} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4} (1+j) (1-x-j)^{4n} \right\} (-1)^n \frac{s^{2n}}{(4n)!} \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{j \alpha \varphi}{8} ((x-1-j)^{4n+2} - (x-1+j)^{4n+2}) \right. \\
& \quad + \frac{j \alpha \varphi}{4} ((x-l-l j)^{4n+2} - (x-l+l j)^{4n+2}) \\
& \quad + \frac{\alpha \varphi}{16} \left[ (1+j) ((l-1+x+(l-1)j)^{4n+2} - (x-l+1-(l-1)j)^{4n+2}) \right. \\
& \quad \quad \left. + (1-j) ((l-1+x-(l-1)j)^{4n+2} - (x-l+1+(l-1)j)^{4n+2}) \right] \\
& \quad + \frac{\alpha \varphi}{16} \left[ (1+j) ((x-1+(2l-1)j)^{4n+2} - (x-2l+1+j)^{4n+2}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1-j) \left( (x-1+(2l-1)j)^{4n+2} - (x-2l+1-j)^{4n+2} \right) \Big] \Big\} \\
& \cdot (-1)^n \frac{s^{2n+2}}{(4n+2)!} \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -\frac{\alpha}{2} x^{4n+3} \right. \\
& + \left( \frac{\alpha}{4} (1+j) - \frac{\varphi}{8} \right) (x-1-j)^{4n+3} \\
& + \left( \frac{\alpha}{4} (1-j) - \frac{\varphi}{8} \right) (x-1+j)^{4n+3} \\
& + \frac{\varphi}{4} \left( (l-x+l j)^{4n+3} - (x-l+l j)^{4n+3} \right) \\
& + \frac{\varphi}{16} (1+j) \left[ (l-1+x+(l-1)j)^{4n+3} + (l-1-x+(l-1)j)^{4n+3} \right. \\
& \quad \left. + (l-1+(l-1-x)j)^{4n+3} + (l-1+(l-1+x)j)^{4n+3} \right] \\
& - \frac{\varphi}{16} \left[ (1+j) \left[ (x-2l+1-j)^{4n+3} + (x-1+(2l-1)j)^{4n+3} \right] \right. \\
& \quad \left. + (1-j) \left[ (x-2l+1+j)^{4n+3} - (1-x+(2l-1)j)^{4n+3} \right] \right] \Big\} \\
& \cdot (-1)^n \frac{s^{2n+2}}{(4n+3)!} \tag{A.14}
\end{aligned}$$

## B Tabellen zur Operatorenrechnung

Nachfolgend werden im Rahmen der Berechnungen zur Parametrierung der verteilt parametrischen Strecke mittels flachem Ausgang  $y$  gefundene nützliche Identitäten aufgeführt. Für alle Tabellen gilt:  $u_1, u_2 \in \mathfrak{R}$

**Tabelle B.1:** Definition der Operatorfunktionen

$C_1(x) = \frac{\cosh(\sqrt{js}x) + \cos(\sqrt{js}x)}{2}$	$C_2(x) = \frac{\cosh(\sqrt{js}x) - \cos(\sqrt{js}x)}{2js}$
$S_1(x) = \frac{\sinh(\sqrt{js}x) + \sin(\sqrt{js}x)}{2\sqrt{js}}$	$S_2(x) = \frac{\sinh(\sqrt{js}x) - \sin(\sqrt{js}x)}{2(js)^{\frac{3}{2}}}$
$C^+(x) = \frac{\cosh(\sqrt{js}(1-x)) + \cos(\sqrt{js}(1-x))}{2}$	$C^-(x) = \frac{\cosh(\sqrt{js}(1-x)) - \cos(\sqrt{js}(1-x))}{2j}$
$S^+(x) = \frac{\sin(\sqrt{js}(1-x)) - \sinh(\sqrt{js}(1-x))}{2j^{\frac{3}{2}}\sqrt{s}}$	$S^-(x) = \frac{-\sin(\sqrt{js}(1-x)) - \sinh(\sqrt{js}(1-x))}{2\sqrt{js}}$

**Tabelle B.2:** Ableitungen der Operatorfunktionen

$\frac{d}{dx} C_1(x) = -s^2 S_2(x)$	$\frac{d}{dx} C_2(x) = S_1(x)$
$\frac{d}{dx} S_1(x) = C_1(x)$	$\frac{d}{dx} S_2(x) = C_2(x)$
$\frac{d}{dx} C^+(x) = -s S^+(x)$	$\frac{d}{dx} C^-(x) = s S^-(x)$
$\frac{d}{dx} S^+(x) = C^-(x)$	$\frac{d}{dx} S^-(x) = C^+(x)$

**Tabelle B.3:** Zweifache, reelle Produkte von Operatorfunktionen

Produkt	Ergebnis
$C_1(u_1) \cdot C_1(u_2)$	$= \frac{1}{4} [C_1(u_1 + u_2) + C_1(u_1 - u_2)] + \frac{1}{2} \Re\{C_1(u_1 + u_2 j)\}$
$C_1(u_1) \cdot C_2(u_2)$	$= \frac{1}{4} [C_2(u_1 + u_2) + C_2(u_1 - u_2)] - \frac{1}{2j} \Re\{C_2(u_1 + u_2 j) j\}$
$C_1(u_1) \cdot S_1(u_2)$	$= \frac{1}{4} [S_1(u_1 + u_2) + S_1(u_2 - u_1)] + \frac{1}{2\sqrt{j}} \Im\{S_1(u_1 + u_2 j) \sqrt{j}\}$
$C_1(u_1) \cdot S_2(u_2)$	$= \frac{1}{4} [S_2(u_1 + u_2) + S_2(u_2 - u_1)] - \frac{1}{2j^{\frac{3}{2}}} \Im\{S_2(u_1 + u_2 j) j^{\frac{3}{2}}\}$
$C_2(u_1) \cdot C_2(u_2)$	$= -\frac{1}{4s^2} [C_1(u_1 + u_2) + C_1(u_1 - u_2)] + \frac{1}{2s^2} \Re\{C_1(u_1 + u_2 j)\}$
$C_2(u_1) \cdot S_1(u_2)$	$= \frac{1}{4} [S_2(u_1 + u_2) + S_2(u_2 - u_1)] + \frac{1}{2j^{\frac{3}{2}}} \Im\{S_2(u_1 + u_2 j) j^{\frac{3}{2}}\}$
$C_2(u_1) \cdot S_2(u_2)$	$= -\frac{1}{4s^2} [S_1(u_1 + u_2) + S_1(u_2 - u_1)] + \frac{1}{2\sqrt{j}s^2} \Im\{S_1(u_1 + u_2 j) \sqrt{j}\}$
$S_1(u_1) \cdot S_1(u_2)$	$= \frac{1}{4} [C_2(u_1 + u_2) - C_2(u_1 - u_2)] + \frac{1}{2j} \Im\{C_2(u_1 + u_2 j) j\}$
$S_1(u_1) \cdot S_2(u_2)$	$= -\frac{1}{4s^2} [C_1(u_1 + u_2) - C_1(u_1 - u_2)] + \frac{1}{2s^2} \Im\{C_1(u_1 + u_2 j)\}$
$S_2(u_1) \cdot S_2(u_2)$	$= -\frac{1}{4s^2} [C_2(u_1 + u_2) - C_2(u_1 - u_2)] + \frac{1}{2j s^2} \Im\{C_2(u_1 + u_2 j) j\}$
$C^+(u_1) \cdot C^+(u_2)$	$= \frac{1}{4} [C_1(u_1 + u_2 - 2) + C_1(u_1 - u_2)] + \frac{1}{2} \Re\{C_1(u_1 - 1 + (u_2 - 1) j)\}$
$C^+(u_1) \cdot C^-(u_2)$	$= \frac{s}{4} [C_2(u_1 + u_2 - 2) + C_2(u_1 - u_2)] - \frac{s}{2j} \Re\{C_2(u_1 - 1 + (u_2 - 1) j) j\}$
$C^+(u_1) \cdot S^+(u_2)$	$= \frac{s}{4} [S_2(u_1 + u_2 - 2) + S_2(u_2 - u_1)] - \frac{s}{2j^{\frac{3}{2}}} \Im\{S_2(u_1 - 1 + (u_2 - 1) j) j^{\frac{3}{2}}\}$
$C^+(u_1) \cdot S^-(u_2)$	$= \frac{1}{4} [S_1(u_1 + u_2 - 2) + S_1(u_2 - u_1)] + \frac{1}{2\sqrt{j}} \Im\{S_1(u_1 - 1 + (u_2 - 1) j) \sqrt{j}\}$
$C^-(u_1) \cdot C^-(u_2)$	$= -\frac{1}{4} [C_1(u_1 + u_2 - 2) + C_1(u_1 - u_2)] + \frac{1}{2} \Re\{C_1(u_1 - 1 + (u_2 - 1) j)\}$
$C^-(u_1) \cdot S^+(u_2)$	$= -\frac{1}{4} [S_1(u_1 + u_2 - 2) + S_1(u_2 - u_1)] + \frac{1}{2\sqrt{j}} \Im\{S_1(u_1 - 1 + (u_2 - 1) j) \sqrt{j}\}$
$C^-(u_1) \cdot S^-(u_2)$	$= \frac{s}{4} [S_2(u_1 + u_2 - 2) + S_2(u_2 - u_1)] + \frac{s}{2j^{\frac{3}{2}}} \Im\{S_2(u_1 - 1 + (u_2 - 1) j) j^{\frac{3}{2}}\}$
$S^+(u_1) \cdot S^+(u_2)$	$= -\frac{1}{4} [C_2(u_1 + u_2 - 2) - C_2(u_1 - u_2)] + \frac{1}{2j} \Im\{C_2(u_1 - 1 + (u_2 - 1) j) j\}$
$S^+(u_1) \cdot S^-(u_2)$	$= -\frac{1}{4s} [C_1(u_1 + u_2 - 2) - C_1(u_1 - u_2)] + \frac{1}{2s} \Im\{C_1(u_1 - 1 + (u_2 - 1) j)\}$
$S^-(u_1) \cdot S^-(u_2)$	$= \frac{1}{4} [C_2(u_1 + u_2 - 2) - C_2(u_1 - u_2)] + \frac{1}{2j} \Im\{C_2(u_1 - 1 + (u_2 - 1) j) j\}$

**Tabelle B.4:** Zweifache, komplexe Produkte von Operatorfunktionen

Produkt	Ergebnis
$C_1(u_1 + u_2 j) \cdot C_1(u_3 + u_4 j)$	$= \frac{1}{4} \left[ C_1(u_1 + u_3 + (u_2 + u_4) j) + C_1(u_1 - u_3 + (u_2 - u_4) j) \right]$ $+ \frac{1}{4} \left[ C_1(u_1 + u_4 + (u_2 - u_3) j) + C_1(u_1 - u_4 + (u_2 + u_3) j) \right]$
$C_1(u_1 + u_2 j) \cdot C_2(u_3 + u_4 j)$	$= \frac{1}{4} \left[ C_2(u_1 + u_3 + (u_2 + u_4) j) + C_2(u_1 - u_3 + (u_2 - u_4) j) \right]$ $- \frac{1}{4} \left[ C_2(u_1 + u_4 + (u_2 - u_3) j) + C_2(u_1 - u_4 + (u_2 + u_3) j) \right]$
$C_1(u_1 + u_2 j) \cdot S_1(u_3 + u_4 j)$	$= \frac{1}{4} \left[ S_1(u_1 + u_3 + (u_2 + u_4) j) + S_1(u_3 - u_1 + (u_4 - u_2) j) \right]$ $+ \frac{1}{4} \left[ S_1(u_2 + u_3 + (u_4 - u_1) j) + S_1(u_3 - u_2 + (u_4 + u_1) j) \right]$
$C_1(u_1 + u_2 j) \cdot S_2(u_3 + u_4 j)$	$= \frac{1}{4} \left[ S_2(u_1 + u_3 + (u_2 + u_4) j) + S_2(u_3 - u_1 + (u_4 - u_2) j) \right]$ $+ \frac{1}{4} \left[ S_2(u_2 + u_3 + (u_4 - u_1) j) + S_2(u_3 - u_2 + (u_4 + u_1) j) \right]$
$C_2(u_1 + u_2 j) \cdot C_2(u_3 + u_4 j)$	$= -\frac{1}{4s^2} \left[ C_1(u_1 + u_3 + (u_2 + u_4) j) + C_1(u_1 - u_3 + (u_2 - u_4) j) \right]$ $+ \frac{1}{4s^2} \left[ C_1(u_1 - u_4 + (u_2 + u_3) j) + C_1(u_1 + u_4 + (u_2 - u_3) j) \right]$
$C_2(u_1 + u_2 j) \cdot S_1(u_3 + u_4 j)$	$= \frac{1}{4} \left[ S_2(u_1 + u_3 + (u_2 + u_4) j) + S_2(u_3 - u_1 + (u_4 - u_2) j) \right]$ $- \frac{1}{4} \left[ S_2(u_2 + u_3 + (u_4 - u_1) j) + S_2(u_3 - u_2 + (u_1 + u_4) j) \right]$
$C_2(u_1 + u_2 j) \cdot S_2(u_3 + u_4 j)$	$= -\frac{1}{4s^2} \left[ S_1(u_1 + u_3 + (u_2 + u_4) j) + S_1(u_3 - u_1 + (u_4 - u_2) j) \right]$ $+ \frac{1}{4s^2} \left[ S_1(u_2 + u_3 + (u_4 - u_1) j) + S_1(u_3 - u_2 + (u_1 + u_4) j) \right]$
$S_1(u_1 + u_2 j) \cdot S_1(u_3 + u_4 j)$	$= \frac{1}{4} \left[ C_2(u_1 + u_3 + (u_2 + u_4) j) - C_2(u_1 - u_3 + (u_2 - u_4) j) \right]$ $+ \frac{1}{4} \left[ j C_2(u_1 + u_4 + (u_2 - u_3) j) - j C_2(u_1 - u_4 + (u_2 + u_3) j) \right]$
$S_1(u_1 + u_2 j) \cdot S_2(u_3 + u_4 j)$	$= -\frac{1}{4s^2} \left[ C_1(u_1 + u_3 + (u_2 + u_4) j) - C_1(u_1 - u_3 + (u_2 - u_4) j) \right]$ $+ \frac{1}{4s^2} \left[ j C_1(u_1 + u_4 + (u_2 - u_3) j) - j C_1(u_1 - u_4 + (u_2 + u_3) j) \right]$
$S_2(u_1 + u_2 j) \cdot S_2(u_3 + u_4 j)$	$= -\frac{1}{4s^2} \left[ C_2(u_1 + u_3 + (u_2 + u_4) j) - C_2(u_1 - u_3 + (u_2 - u_4) j) \right]$ $+ \frac{1}{4s^2} \left[ j C_2(u_1 + u_4 + (u_2 - u_3) j) - j C_2(u_1 - u_4 + (u_2 + u_3) j) \right]$

**Tabelle B.5:** Vereinfachungen bei dem Spezialfall:  $u_1 = u_2$ 

Spezialfall	Vereinfachung
$\Re\{C_1(u_1 + u_1 j)\}$	$= C_1(u_1 - u_1 j) = C_1(u_1 + u_1 j)$
$\Im\{C_1(u_1 + u_1 j)\}$	$= 0$
$\frac{1}{j} \Re\{C_2(u_1 + u_1 j) j\}$	$= 0$
$\frac{1}{j} \Im\{C_2(u_1 + u_1 j) j\}$	$= \frac{1}{j} C_2(u_1 + u_1 j) = -\frac{1}{j} C_2(u_1 - u_1 j)$
$\frac{1}{\sqrt{j}} \Re\{S_1(u_1 + u_1 j) \sqrt{j}\}$	$= \frac{1-j}{2} S_1(u_1 + u_1 j)$
$\frac{1}{\sqrt{j}} \Im\{S_1(u_1 + u_1 j) \sqrt{j}\}$	$= \frac{1-j}{2} S_1(u_1 + u_1 j) = \frac{1}{\sqrt{j}} \Re\{S_1(u_1 + u_1 j) \sqrt{j}\}$
$\frac{1}{j^{\frac{3}{2}}} \Re\{S_2(u_1 + u_1 j) j^{\frac{3}{2}}\}$	$= \frac{1+j}{2} S_2(u_1 + u_1 j)$
$\frac{1}{j^{\frac{3}{2}}} \Im\{S_2(u_1 + u_1 j) j^{\frac{3}{2}}\}$	$= -\frac{1+j}{2} S_2(u_1 + u_1 j)$

**Tabelle B.6:** Wichtige Eigenschaften und Symmetrien der Operatorfunktionen

$C_1(0) = 1$	$C^+(1) = 1$
$C_2(0) = 0$	$C^-(1) = 0$
$S_1(0) = 0$	$S^+(1) = 0$
$S_2(0) = 0$	$S^-(1) = 0$
$C_1(x) = C_1(-x)$	$C^+(x) = C^+(-x)$
$C_2(x) = C_2(-x)$	$C^-(x) = C^-(-x)$
$S_1(x) = -S_1(-x)$	$S^-(x) = -S^-(-x)$
$S_2(x) = -S_2(-x)$	$S^+(x) = -S^+(-x)$
$C^+(x) = C_1(x-1)$	$C_1(u_1 + u_2 j) = C_1(-u_2 + u_1 j)$
$C^-(x) = C_2(x-1) \cdot s$	$C_2(u_1 + u_2 j) = -C_2(-u_2 + u_1 j)$
$S^-(x) = S_1(x-1)$	$S_1(u_1 + u_2 j) = -j S_1(-u_2 + u_1 j)$
$S^+(x) = S_2(x-1) \cdot s$	$S_2(u_1 + u_2 j) = j S_2(-u_2 + u_1 j)$

**Tabelle B.7:** Potenzreihenentwicklung der Operatorfunktionen

Operatorfunktion	Potenzreihenentwicklung
$C_1(x) =$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{4n}}{(4n)!} s^{2n}$
$C_2(x) =$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{4n+2}}{(4n+2)!} s^{2n}$
$S_1(x) =$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{4n+1}}{(4n+1)!} s^{2n}$
$S_2(x) =$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{4n+3}}{(4n+3)!} s^{2n}$
$C^+(x) =$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{4n}}{(4n)!} s^{2n}$
$C^-(x) =$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{4n+2}}{(4n+2)!} s^{2n+1}$
$S^+(x) =$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{4n+3}}{(4n+3)!} s^{2n+1}$
$S^-(x) =$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{4n+1}}{(4n+1)!} s^{2n}$

## C Koeffizientenfunktionen der Eigenwertgleichung

Die in Gleichung (3.25) aus Gründen der Lesbarkeit zu Koeffizientenfunktionen zusammengefassten Ausdrücke lauten:

$$\begin{aligned}
 & \left( -4m\beta_i^2 EI\rho A - \beta_i^2 EI\rho Am_L - \beta_i^2 k_T m m_L + 4k_T \rho^2 A^2 \right) \cosh(\beta_i L_2 + \beta_i L_1) \\
 & + \left( -m_L \beta_i^2 EI\rho A - m_L \beta_i^2 k_T m \right) \cosh(-\beta_i L_2 + \beta_i L_1) \\
 & \quad - 2m\beta_i^3 m_L EI \sinh(\beta_i L_2 + \beta_i L_1) \\
 & + \left( -\beta_i m_L k_T \rho A - m\beta_i^3 m_L EI \right) \sinh(-\beta_i L_2 + \beta_i L_1) \\
 & = f_{sinpp}
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( +\beta_i^2 EI\rho Am_L + 4k_T \rho^2 A^2 + 4m\beta_i^2 EI\rho A + \beta_i^2 k_T m m_L \right) \sinh(\beta_i L_2 + \beta_i L_1) \\
 & + \left( +\beta_i m_L k_T \rho A - m\beta_i^3 m_L EI \right) \cosh(-\beta_i L_2 + \beta_i L_1) \\
 & + \left( +4\beta_i k_T m \rho + 4\beta_i EI\rho^2 A^2 + 2k_T \rho A \beta_i m_L \right) \cosh(\beta_i L_2 + \beta_i L_1) \\
 & = f_{cospp}
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( +k_T \rho A \beta_i m_L - m\beta_i^3 EI m_L \right) \sinh(\beta_i L_2 + \beta_i L_1) \\
 & = f_{sinmp}
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( +\beta_i^2 k_T m m_L + \beta_i^2 EI\rho Am_L \right) \sinh(\beta_i L_2 + \beta_i L_1) \\
 & + \left( k_T \rho A \beta_i m_L + m\beta_i^3 EI m_L \right) \cosh(\beta_i L_2 + \beta_i L_1) \\
 & = f_{cosmp}
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned}
 & -4m m_L \beta_i^3 EI \sinh(\beta_i L_1) \\
 & + \left( -2EI\rho A \beta_i^2 m_L - 2k_T m \beta_i^2 m_L \right) \cosh(\beta_i L_1) \\
 & = f_{sinb1}
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( -2EI\rho Am_L \beta_i^2 + 2k_T m \beta_i^2 m_L \right) \cosh(\beta_i L_2) \\
 & = f_{sinb2} \\
 & + 4k_T \beta_i m_L \rho A \cosh(\beta_i L_1)
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

$$\begin{aligned} & + \left( +2k_T m m_L \beta_i^2 + 2EI \rho A m_L \beta_i^2 \right) \sinh(\beta_i L_1) \\ & = f_{\text{cosb1}} \end{aligned} \tag{C.7}$$

$$\begin{aligned} & + \left( -2k_T m m_L \beta_i^2 + 2EI \rho A \beta_i^2 m_L \right) \sinh(\beta_i L_2) \\ & = f_{\text{cosb2}}. \end{aligned} \tag{C.8}$$

# D Mathematisches

## D.1 Eigenwerte transponierter Systemmatrizen

Zwei beliebige quadratische Matrizen die durch Transposition auseinander hervorgehen, besitzen die gleichen Eigenwerte. Es gilt

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{M}^T] = \det[s\mathbf{I} - \mathbf{M}]^T \quad (\text{D.1})$$

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{M}^T] = \det[s\mathbf{I} - \mathbf{M}], \quad (\text{D.2})$$

[17, 21].

## D.2 Lineare Ausgleichsrechnung

### D.2.1 Herleitung

In der Praxis bekommt man häufig aus Experimenten ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{D.3})$$

wobei  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  gegeben sind und  $\mathbf{x}$  gesucht ist.

Da ein solches System mehr Gleichungen als Unbekannte hat, ist im Allgemeinen das Residuum  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} \neq 0$  und besitzt somit keine exakte Lösung. Gesucht ist daher eine Lösung  $\hat{\mathbf{x}}$ , für die hinsichtlich der Euklidischen Norm gilt:

$$\|\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}})\|_2 = \min \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_2 \quad (\text{D.4})$$

Dazu minimiert man die quadratische Funktion

$$\varphi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}})\|_2^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} \quad (\text{D.5})$$

Als notwendige Bedingung dafür, dass  $\hat{\mathbf{x}}$  Minimalpunkt von  $\varphi(\mathbf{x})$  ist, findet man:

$$\text{grad}\varphi(\hat{\mathbf{x}}) = 2\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - 2\mathbf{A}^T \mathbf{b} = 0 \quad (\text{D.6})$$

Durch Umstellen erhält man die *Normalgleichung*, nach deren Auflösung man die gesuchte Lösung  $\hat{\mathbf{x}}$  erhält:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (\text{D.7})$$

## D.2.2 Beispiele

Mittels der linearen Ausgleichsrechnung lassen sich Funktionenparameter so bestimmen, dass die Abstände zu einer Menge von Punkten minimal werden.

### Ausgleichsgerade

Als erstes Beispiel sei die Ausgleichsgerade für folgende 4 Messwerte gesucht:

**Tabelle D.1:** Wertetabelle

$i$	1	2	3	4
$t_i$	-1	0	1	2
$y_i$	2	1	2	3

#### Vorgehen:

1. Gewünschtes Polynom allgemein aufstellen:  $y(t) = c_0 + c_1 t$
2. Gleichungssystem aufstellen, indem die Messwerte in das Polynom eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} y(t_i) &= y_i \\ c_0 - c_1 &= 2 \\ c_0 + 0 &= 1 \\ c_0 + c_1 &= 2 \\ c_0 + 2c_1 &= 3 \end{aligned}$$

3. Gleichungssystem als Matrixgleichung schreiben:  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Einsetzen in Normalgleichung und lösen der Matrixgleichung:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

5. Koeffizienten von  $\mathbf{x}$  auslesen und in  $y(t)$  einsetzen:

$$y(t) = 1,8 + 0,4t$$

### Ausgleichsparabel

Als weiteres Beispiel sollen die Koeffizienten einer Ausgleichsparabel der Form

$$y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \tag{D.8}$$

zur Punktemenge aus Tabelle D.1 bestimmt werden.

Das Vorgehen erfolgt analog zum vorangehend gezeigten Fall der Ausgleichsgerade:

1. Matrizen bestimmen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{D.9}$$

2. In Normalengleichung einsetzen und z.B. via Gauss-Elimination lösen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{2}{5} \\ 2 \end{bmatrix} \tag{D.10}$$

$$\mathbf{c} = \left( \frac{13}{10} \quad -\frac{1}{10} \quad \frac{1}{2} \right) \tag{D.11}$$

3. Die gesuchte Ausgleichsparabel ergibt sich zu:

$$y(t) = \frac{13}{10} - \frac{1}{10}t + \frac{1}{2}t^2 \tag{D.12}$$

### D.3 Gaußsche Glockenkurve

Liegt eine Normalverteilung einer Zufallsgröße  $X$  vor, wird die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte von einer Gaußschen Glockenkurve mit dem Erwartungswert  $\mu$  und der Varianz  $\sigma$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (\text{D.13})$$

beschrieben.

## E Stochastische Interpretation des Kalmanfilters

Anstelle der Interpretation eines fiktiven Regelkreises mit Gewichtungsmatrizen kann man den Kalmanfilter auch als ein um Rauscheinwirkungen erweitertes Systemmodell verstehen.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{w} \quad (\text{E.1})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (\text{E.2})$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{w}$  das Prozessrauschen und  $\mathbf{v}$  das Messrauschen, die jeweils als stationär, mittelwertfrei, weiß, Gaußsch und unkorreliert vorausgesetzt seien [17]. Die gesuchten Kovarianzmatrizen besitzen folgende Struktur<sup>12</sup>:

- $\mathbf{Q}$  ist die Kovarianzmatrix für das Prozessrauschen:

$$\mathbf{Q}_N = E(\mathbf{w}\mathbf{w}^T) = \begin{bmatrix} \sigma_{w_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_{w_n}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

- $\tilde{\mathbf{Q}}$  ist die Kovarianzmatrix für das Messrauschen:

$$\tilde{\mathbf{R}}_N = E(\mathbf{v}\mathbf{v}^T) = \begin{bmatrix} \sigma_{v_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_{v_p}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

Damit stehen zwar Gewichtungsmatrizen zur Verfügung die anschaulich interpretiert werden können, jedoch messtechnisch nur schwer bis gar nicht ermittelbar sind. Aus Ermangelung tieferer Einsicht setzt man sie häufig gleich skalar gewichteter Einheitsmatrizen, wie auch im experimentellen Teil dieser Arbeit geschehen [17].

---

1 Dabei wurde genutzt, dass die Kovarianz gleicher Zustandsvariablen der Varianz der Zustandsvariable entspricht:  $COV(X,X) = E((X - E(X))(X - E(X))) = VAR(X)$

2 Rauschprozesse werden als unkorreliert betrachtet, daher werden die Nebendiagonalen auf 0 gesetzt

## F Begriffsklärung zum Biegebalken

Dieser Abschnitt soll als Schnellreferenz dienen. Für eine umfassendere Darstellung der relevanten Begriffe und Größen wird auf [27] verwiesen.

### F.1 Spannungszustand

In Flüssigkeiten und Gasen wird die skalare Größe Druck als Quotient aus Kraft pro Fläche definiert. Sofern es sich um kein zu viskoses Fluid handelt, ist dies ausreichend, da dann keine Schubspannungen auftreten. Im Falle eines Festkörpers sind Schubspannungen nicht zu vernachlässigen, weshalb die vektorielle Größe der Spannung  $\mathbf{p}$  als Grenzwert des Quotienten aus Kraftvektor pro Fläche definiert ist [27]:

$$\mathbf{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}. \quad (\text{F.1})$$

Die Einheit des Drucks ist das Pascal und lässt sich nach (F.2) in SI-Einheiten umrechnen:

$$1Pa = 1 \frac{N}{m^2}. \quad (\text{F.2})$$

Bei einer verfeinerten Analyse des Spannungszustandes müssen auch die Momentenspannungen  $\mathbf{m}$  – die analog definiert werden – berücksichtigt werden:

$$\mathbf{m} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta A}. \quad (\text{F.3})$$

Dies geschieht in der Theorie des sogenannten Cosserat-Kontinuums. In der klassischen Elasto-Mechanik werden die Momentenspannungen vernachlässigt, was auch bei den meisten technisch interessanten Materialien zulässig ist [27].

Der an einem Punkt im Bauteil vorliegende Spannungszustand  $\tau_{ij}$  kann daher vollständig durch drei Spannungsvektoren  $\mathbf{p}_x$ ,  $\mathbf{p}_y$ ,  $\mathbf{p}_z$  beschrieben werden, die jeweils den an den Oberflächen eines den Punkt umgebenden infinitesimalen Würfels angreifenden Spannungsvektor beschreiben. Dabei sind die Achsen des verwendeten Koordinatensystems jeweils Oberflächennormalen des betrachteten Würfels.

Die parallel zu den Oberflächennormalen wirkenden Spannungskomponenten bezeichnet man als Normalspannungen  $\sigma$  und die in der entsprechenden Ebene liegenden Komponenten als Schubspannungen  $\tau$ . Den Spannungszustand eines von einem würfelförmigen infinitesimalen Volumen umgebenen Punktes kann man durch

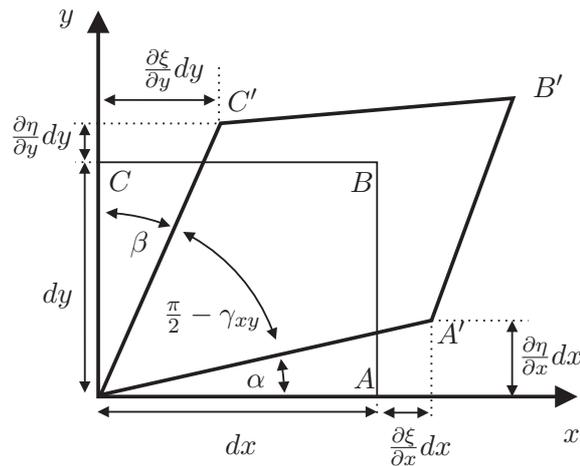


Bild F.1: Lastfall der symmetrischen reinen Biegung

Zusammenfassen der drei Spannungsvektoren zu einer Matrix darstellen. Dieser Tensor 2. Stufe schreibt sich zu

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (\text{F.4})$$

Bei der hier gemäß [27] verwendeten Nomenklatur bezeichnet der Buchstabe des ersten Index die zur Schnittfläche gehörende Normale des Koordinatensystems. Im Falle von Schubspannungen bezeichnet der zweite Index die Achse parallel zur Wirkrichtung der bezeichneten Größe.

## F.2 Verformungszustand

Der Verformungszustand drückt die Längen- und Lageänderung eines Körpers im Bezug zum unverformten Zustand aus. Mathematisch gefasst wird die Verformung mittels eines Vektors  $\boldsymbol{\rho} = [\xi, \eta, \zeta]$ , der die Verrückung eines Punktes vom unverformten in den verformten Zustand relativ zu einem Bezugskordinatensystem ausdrückt. Da die Verrückungen im Allgemeinen ortsabhängig sind, geht man auf eine differentielle Beschreibung der Verrückung  $d\boldsymbol{\rho} = [d\xi, d\eta, d\zeta]$  über [27]:

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz \quad (\text{F.5})$$

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta}{\partial z} dz \quad (\text{F.6})$$

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy + \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz. \quad (\text{F.7})$$

$$(\text{F.8})$$

Bild F.1 stellt den Verformungszustand eines Rechtecks mit den Eckpunkten OABC im unverformten und  $OA'B'C'$  im verformten Zustand dar.

**Definition F.2.1** *Unter Dehnung  $\epsilon$  wird das Verhältnis von Verlängerung und ursprünglicher Länge verstanden [27].*

Damit lässt sich folgender Quotient aufstellen:

$$\epsilon_x = \frac{(dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx) - dx}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (\text{F.9})$$

womit sich im dreidimensionalen Fall ergibt

$$\epsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (\text{F.10})$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (\text{F.11})$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \quad (\text{F.12})$$

Unter der Voraussetzung kleiner Winkel gilt

$$\tan(\alpha) = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \approx \alpha \quad (\text{F.13})$$

$$\tan(\beta) = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \approx \beta. \quad (\text{F.14})$$

Für die in Bild F.1 eingezeichnete Winkeländerung  $\gamma_{xy}$  – auch Gleitungen oder Schiebungen genannt – ergibt sich im allgemeinen dreidimensionalen Fall [27]:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{F.15})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (\text{F.16})$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \quad (\text{F.17})$$

Damit kann der Verzerrungstensor angegeben werden, womit die Verformung eines Elementarquaders gegeben ist zu.

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \epsilon_z \end{pmatrix} \quad (\text{F.18})$$

Der Verzerrungstensor ist wie der Spannungstensor symmetrisch, es lassen sich auch hierfür drei Hauptachsen finden, für die die Dehnungen Extremwerte annehmen. Die Gleitungen verschwinden dabei und der Verzerrungstensor nimmt Diagonalform an [27].

## F.3 Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verformungszustand

Der Verformungszustand ist zunächst rein von geometrischer Bedeutung. Gemäß Newtons Lex Secunda ist die Änderung der Bewegungsgeschwindigkeit eines Körpers proportional zur Ursache in Form einer angreifenden Kraft. Mit dem Schnittprinzip lässt sich dies auch für infinitesimale Teilkörper eines elastischen Körpers übertragen. Die an den Rändern des betrachteten Körpers wirkenden Kräfte werden durch den Spannungszustand beschrieben. Ein elastisches Material kehrt beim Verschwinden einer äußeren Kraft in den undeformierten Ausgangszustand zurück [27].

Der wechselseitige Zusammenhang zwischen Verformungszustand und Spannungszustand wird durch die für einen Werkstoff geltenden Stoffgesetze beschrieben. Die Stoffgesetze sind experimentell zu bestimmen. Für die Klasse linear-elastischer Materialien sind dabei Abhängigkeiten zwischen Normal- sowie Schubspannungen und den jeweils damit verbundenen Gleitungen, Dehnungen sowie der Querkontraktion zu bestimmen.

Im Bereich der Elastizitätsgrenzen eines linear elastischen Materials gilt der als Hooksches Gesetz bekannte Zusammenhang (F.19) zwischen Normalspannung  $\sigma$  und Längenänderung  $\epsilon$  sowie der weniger populäre Zusammenhang (F.20) zwischen Schubspannungen  $\tau$  und Gleitungen  $\gamma$ .

$$\sigma = E\epsilon \quad (\text{F.19})$$

$$\tau = G\gamma \quad (\text{F.20})$$

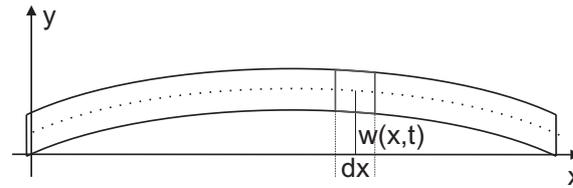
Darin ist  $E$  das Elastizitätsmodul und  $G$  das Schubmodul. In (F.19) und (F.20) handelt es sich um Tensoren 0. Stufe, also skalare Größen. Die meisten Werkstoffe sind elastisch anisotrop, wodurch Spannungen unterschiedlicher Richtungen mit Dehnungen und Gleitungen anderer Richtungen verkoppelt sein können. Ein anschauliches Beispiel stellt das Phänomen der Querkontraktion während eines Zugstabversuches dar [27].

Um allgemein Zusammenhänge zwischen Verformungstensor und Spannungstensor erfassen zu können werden die Tensoren Verformungszustand  $\boldsymbol{\epsilon}$  und Spannungszustand  $\boldsymbol{\sigma}$  mit einem Tensor  $\mathbf{E}$  4. Stufe aufeinander abgebildet:

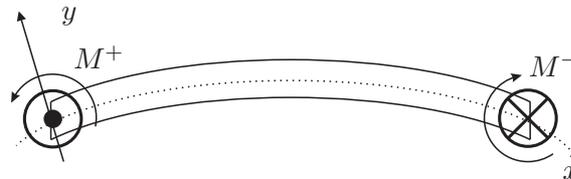
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\epsilon}. \quad (\text{F.21})$$

Im Falle isotroper Medien gelten die als verallgemeinertes Hooksches Gesetz bekannten Zusammenhänge, die einen einachsigen Spannungszustand mit einem 3 achsigen Verformungszustand verknüpfen [27]. Dabei reduziert sich die in (F.21) enthaltene Anzahl von Parametern auf 2 – dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Querdehnzahl  $\mu$ :

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (\text{F.22a})$$



**Bild F.2:** Skizze eines ausgelenkten Balkens mit strichliert gezeichneter neutraler Faser



**Bild F.3:** Lastfall der symmetrischen reinen Biegung

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (\text{F.22b})$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \quad (\text{F.22c})$$

## F.4 Kenngrößen eines Balkens und neutrale Faser

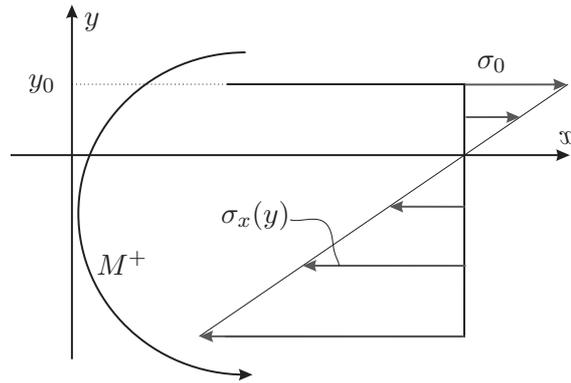
Betrachtet wird der in F.2 dargestellte verformte Balken. Nachfolgend werden anhand der symmetrischen und geraden Biegung der Zusammenhang zwischen Flächenträgheitsmoment  $I$ , Elastizitätsmodul  $E$  und der neutralen Faser dargestellt [27]. Den Betrachtungen liegt jeweils homogenes isotropes Material zu Grunde.

### F.4.1 Lastfall: Symmetrische reine Biegung

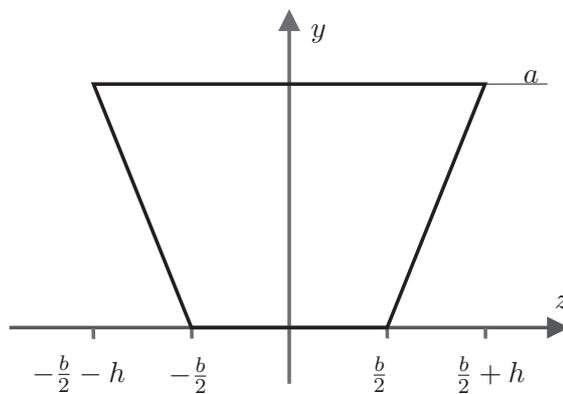
Beim Lastfall der symmetrischen reinen Biegung werden an den Rändern der betrachteten Balkenstruktur gegengleiche Momente eingeprägt wie in Bild F.3 dargestellt. Daraus folgen konstante Schnittgrößen zwischen den Stellen der Momenteneinprägung. Setzt man konstante Querschnitte voraus, so folgt für den Verformungszustand des als Kreissegment gebogenen Balkens der lineare Zusammenhang aus (F.24) [27]:

$$\epsilon_x(y) = \frac{\epsilon_0}{y_0} \cdot y. \quad (\text{F.23})$$

In Bild F.4 ist das positive Schnittufer mit der Normalspannungsverteilung und dem vom Balken zu übertragenden Moment dargestellt. Mit dem linearen Zusammenhang



**Bild F.4:** Positives Schnittufer mit eingezeichneter Spannungsverteilung



**Bild F.5:** Trapezförmiger Balkenquerschnitt

zwischen Dehnungszustand und Spannungszustand nach Hooke, lässt sich für den hier betrachteten einachsigen Spannungszustand schreiben:

$$\sigma_x(y) = \frac{\sigma_0}{y_0} \cdot y. \quad (\text{F.24})$$

**Definition F.4.1** *Unter der neutralen Faser versteht man den Ort  $y_n$  im Querschnitt der nicht gedehnt wird [27].*

Am Beispiel eines trapezförmigen Querschnitts wird der Ort der neutralen Faser gemäß Satz F.4.1 berechnet.

Für die Schnittgrößen muß sowohl Kräfte- (F.25) als auch Momentengleichgewicht (F.26) herrschen.

$$\int_A \sigma_x dA \stackrel{\text{def.}}{=} 0 \quad (\text{F.25})$$

$$M - \int_A y \sigma_x dA \stackrel{\text{def.}}{=} 0 \quad (\text{F.26})$$

Mit der Annahme einer linearen Spannungsverteilung lässt sich die Normalspannung  $\sigma_x(y)$  mit dem zu bestimmenden Ort der neutralen Faser  $y_n$  angeben zu:

$$\sigma_x(y) = \frac{\sigma_0}{a - y_n}(y - y_n) = \frac{\sigma_0}{y_0}(y - y_n). \quad (\text{F.27})$$

Damit ergibt sich für die auf den Balken wirkende Normalspannung

$$N = \int_A \sigma_x(y) dA = \int_0^a \int_{-\frac{b}{2} - \frac{h}{a}y}^{\frac{b}{2} + \frac{h}{a}y} \frac{\sigma_0}{y_0}(y - y_n) dy dz. \quad (\text{F.28})$$

Da Kräftegleichgewicht nach F.25 gelten muß, erhält man weiter

$$N = \frac{\sigma_0 a}{y_0} \left( \frac{ab}{2} - y_n(h + b) + \frac{2}{3}ha \right) \stackrel{\text{def.}}{=} 0. \quad (\text{F.29})$$

Der Ort der neutralen Faser ergibt sich so zu

$$y_n = a \frac{\frac{1}{2}b + \frac{2}{3}h}{h + b}, \quad (\text{F.30})$$

was dem Ort des Flächenschwerpunkts der betrachteten Querschnittsfläche entspricht.

**Definition F.4.2** Die neutralen Fasern eines Balkens bilden eine Ebene die durch den Flächenschwerpunkt der Querschnittsfläche geht [27].

Legt man die z-Achse in den Flächenschwerpunkt - also dem Ort der neutralen Faser - ergibt sich aus dem Momentengleichgewicht nach kurzer Rechnung folgender Zusammenhang:

$$M = \int_A y \sigma_x(y) dA \quad (\text{F.31})$$

$$M = \frac{\sigma_0}{y_0} \int_A y^2 dA \quad (\text{F.32})$$

$$M = \frac{\sigma_0}{y_0} I_z. \quad (\text{F.33})$$

Die integrale Größe  $I_z$  nennt man Flächenträgheitsmoment des Balkens. Dabei handelt es sich um ein Flächenträgheitsmoment 1. Ordnung. Flächenträgheitsmomente 2. Ordnung werden für den Satz von Steiner benötigt. Das Flächenträgheitsmoment des Balkenquerschnitts in Bild F.5 berechnet sich konkret zu

$$I_z = \left( \frac{1}{3}a^3b + \frac{1}{2}ha^3 \right). \quad (\text{F.34})$$

Die Spannung im Querschnitt lässt sich nach (F.35) als Funktion von Entfernung zur neutralen Faser  $y$ , dem Flächenträgheitsmoment  $I_z$  des Balkens und dem einwirkenden Biegemoment  $M$  errechnen:

$$\sigma(y) = \frac{M}{I_z} y. \quad (\text{F.35})$$

## F.4.2 Lastfall: Gerade Biegung und Euler-Bernoulli-Hypothese

Erfolgt die Belastung des Balkens durch Kräfte die in der  $x$ - $y$ -Ebene liegen, wobei die  $y$ -Achse zugleich eine der durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehenden Hauptachsen ist so spricht man von einer geraden Biegung. Dabei biegt sich der Balken in der  $x$ - $y$ -Ebene durch.

Die Komponenten des resultierenden Schnittwinders hängen hier von  $x$  ab. Daher kann keine auf Symmetrieüberlegungen basierende allgemeine Aussage über die Art der Verformung getroffen werden.

Man behilft sich hier der für schlanke nicht zu hohe Träger zutreffenden Euler-Bernoulli-Hypothese:

**Definition F.4.3** *Querschnittsflächen bleiben auch nach Aufbringen der Belastung eben.*

Dadurch können die vorigen Ergebnisse zur Spannungsverteilung als Näherung für den Fall der geraden Biegung übertragen werden und es gilt das lineare Gesetz

$$\sigma_x(x,y) = \frac{M(x)}{I_z} y, \quad (\text{F.36})$$

wobei  $y$  den Abstand von der neutralen Faser bezeichnet.

Für die maximal im Balken auftretende Spannung gilt

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} y_{max}}{I_z} = \frac{M_{max}}{W_z}, \quad (\text{F.37})$$

mit  $M_{max}$  dem maximalen Biegemoment und  $y_{max}$  der Stelle mit dem größten Abstand von der neutralen Faser. Den Quotienten  $W_z$  aus Flächenträgheitsmoment  $I_z$  und maximalem Abstand  $y_{max}$  nennt man Widerstandsmoment des Balkens.

Damit ist der für diese Arbeit relevante Lastfall grundlegend behandelt. Weitere Lastfälle z.B. die schiefe Biegung können durch Superposition der hier dargestellten Lastfälle berechnet werden. Für weitere Details wird auf [27] verwiesen.

## F.5 Biegelinie

### F.5.1 Herleitung

Unter der Biegelinie  $w$  versteht man den geometrischen Ort der neutralen Faser des betrachteten Verformungszustands eines Balkens. Die Biegelinie  $w(x)$  ist somit eine Funktion des Ortes  $x$  die die Auslenkung zum unverformten Ausgangszustand angibt.

Für den Krümmungsradius einer Funktion gilt der Zusammenhang nach [21]:

$$-\frac{1}{R(x)} = \frac{w''(x)}{(1 + w'^2(x))^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{F.38})$$

Aus geometrischen Überlegungen an dem um die  $z$ -Achse gebogenen Balkensegment heraus gilt ferner.

$$R(x)d\varphi = dx \quad (\text{F.39})$$

$$yd\varphi = \epsilon(y)dx \quad (\text{F.40})$$

womit folgt

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{\epsilon}{y}. \quad (\text{F.41})$$

Zusammen mit (F.36) und dem Hookeschen Gesetz (F.19) folgt

$$\frac{\epsilon}{y} = \frac{M(x)}{EI_z} \quad (\text{F.42})$$

Durch Gleichsetzen von (F.42) und (F.38) folgt die Differentialgleichung der Biegelinie zu

$$\frac{w''(x)}{(1 + w'^2(x))^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M(x)}{EI_z} \quad (\text{F.43})$$

### F.5.2 Vereinfachte Biegelinie

Für die Annahme von  $w' \ll 1$  lässt sich der Ausdruck wie folgt vereinfachen

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{EI_z}. \quad (\text{F.44})$$

Aufgrund der Zusammenhänge, die aus den Untersuchungen zum Schnittwinder der inneren Kräfte eines belasteten Balkens in [27] folgen, lassen sich folgende wichtigen Differentialgleichungen für die Biegelinie aufstellen:

$$EI_z w''''(x) = q(x) \quad (\text{F.45})$$

$$-EI_z w'''(x) = Q(x) = -\int_0^x q(\xi) d\xi \quad (\text{F.46})$$

$$-EI_z w''(x) = M(x) = \int_0^x Q(\xi) d\xi \quad (\text{F.47})$$

$$EI_z w'(x) = \varphi(x) = \int_0^x M(\xi) d\xi \quad (\text{F.48})$$

$$EI_z w(x) = \int_0^x \varphi(x) dx. \quad (\text{F.49})$$

Womit ein integraler Zusammenhang zwischen den Größen Streckenlast  $q(x)$ , Querkraft  $Q(x)$ , Biegemoment  $M(x)$  und dem Neigungswinkel  $\varphi(x)$  an der betrachteten Stelle  $x$  gegeben ist.

### F.5.3 Problemspezifischer Einsatz der Biegelinie

Die Kenntniss der Biegelinie  $w(x)$  ermöglicht die Bestimmung der Schnittgrößen und wird häufig für statische Problemstellungen z.B. im Bereich des Bauingenieurwesens eingesetzt. Natürlicherweise treten während des Positioniervorgangs der hier betrachteten Systeme Strukturdeformationen auf, wobei der elastische Bereich der eingesetzten Materialien nicht verlassen werden darf. Da die Hauptkomponente der auf die Struktur wirkenden Trägheitskräfte orthogonal zur Ruhelage des Balkens verläuft, stellen selbige lediglich in den Gleichungen (F.45) und (F.46) zusätzliche dynamische Kraftkomponenten dar, auf die nicht allein aus der Biegelinie zurückgerechnet werden kann. Allerdings kann Gleichung (F.43) bzw. (F.47) herangezogen werden um aus dem aktuellen Verformungszustand auf den im Balken herrschenden Momentenverlauf zu schließen.

Die hierbei gemachte Vernachlässigung dynamischer Momente fußt auf zwei für das hier vorliegende System im Allgemeinen zutreffenden Annahmen. Zum Einen sind die Trägheitsmomente von evtl. vorhandenen Anbauteilen gering im Vergleich zu deren Trägheit. Zum Anderen wirken auf die am Balken montierten Anbauteile keine großen Drehbeschleunigungen. Im Falle eines symmetrisch aufgebauten Systems aus zwei Balken wirkt auf die zu positionierende Last kinematisch bedingt keinerlei Drehbeschleunigung.

Mit der Kenntnis des Momentenverlaufs gemäß (F.47) kann man daher zusammen mit (F.42) die im Balken auftretenden Dehnungen errechnen. Davon wurde Gebrauch gemacht um die für die in dieser Arbeit eingesetzten Vorsteuerungsverfahren festzulegenden Planungszeiten iterativ zu bestimmen.

## G Entwicklungsbeitrag zum humanoiden Roboterprojekt Lola

Gerne unterstützte ich das ehrgeizige Projekt „Lola“ mit der Entwicklung einer hochintegrierten PMSM<sup>1</sup> Antriebsregler- und Kommunikationsgatewayelektronik (Siehe auch [12, 25]). In einem Zeitrahmen von einem halben Jahr Vollzeit entstand unter anderem die in Bild G.1 und Bild G.2 dargestellte 12 lagige Elektronik, die insgesamt 12 mal auf dem Roboter Lola zur dezentralen Regelung seiner 24 Antriebe eingesetzt wird.

Die 12 lagige Platine beherbergt auf 80 x 55 mm Grundfläche im Wesentlichen folgendes Chipset:

- Freescale: 16 Bit DSP 56F8367
- Xilinx: Spartan 3 FPGA XC3S400
- Xilinx: SpartanAN 3 FPGA XC3S400
- Texas Instruments: 2 x Phy Transceiver DP83848I
- GSI Technologie: 1 Mb SRAM
- Phillips: 2 x High Speed Can Transceiver PCA82C250
- Maxim : MAX3226 RS232 Transceiver
- Intersil: 4 x EL7536 Schaltregler für 3V3, 3V3, 1V2 und 2V5
- Texas Instruments: 3 A Weitbereichseingangsschaltregler 5V

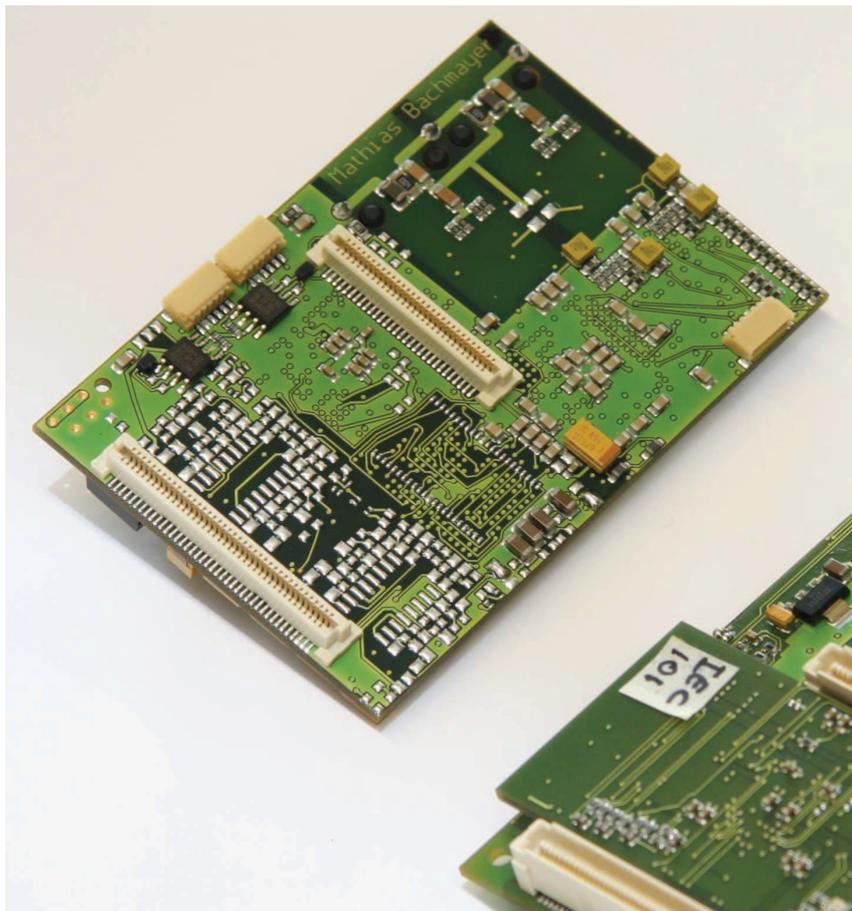
Die programmierbaren Bausteine sind mit 16 Bit Daten- und Adressbus an den DSP zum sogenannten Memorymapping angebunden. Der FPGA Spartan AN stellt eine Rechenleistungsreserve dar, die man vorteilhaft zur Berechnung von parallelisierbaren Aufgabenstellungen wie Auswertung von linearen Gleichungssystemen, z.B. von Beobachtern aber auch zur Anbindung weiterer Peripherie einsetzen könnte. Sämtliche Signale sind auf die Leiterplatte-Leiterplatte Steckersockel ausgeführt, womit das Modul auch weitere Bausteine via Memory Mapping verwalten kann.

---

<sup>1</sup> Permanent Magnet erregter Synchron Motor



**Bild G.1:** Platinenansicht Bauteilseite



**Bild G.2:** Platinenansicht Lötseite

# H Entstandene Diplom- und Semesterarbeiten

Im Rahmen dieser Arbeit wurden folgende Studien- und Diplomarbeitsthemen konzipiert und die zugehörigen Arbeiten betreut.

## H.1 Regalbediengerät

- Hartmann, B.: Modellierung und flachheitsbasierte Steuerung eines elastischen Roboters. Diplomarbeit 2007
- Bittner, M.: Konstruktion eines Prüfstandes zur Regelung von Robotern mit zeitvarianter Massenbelegung. Semesterarbeit 2008
- Lachner, J.: Modellierung und Ansätze zur Schätzung eines Biegebalkens. Semesterarbeit 2008
- Röckenwagner, S.: Beobachtergestützte Zustandsregelung mit Parameterschätzung. Semesterarbeit 2008
- Berger, B.: Modellierung flachheitsbasierte Vorsteuerung und Regelung eines verteilt parametrischen Systems mit zeitvarianter Massenbelegung. Diplomarbeit 2008
- Berger, B.: Flachheitsbasierte Steuerung eines verteilt parametrischen Systems. Semesterarbeit 2008
- Svircev, V.: Zustandsreglerentwurf zur aktiven Schwingungsbedämpfung verteilt parametrischer Systeme. Diplomarbeit 2008
- Güntner, M.: Bewegungsgleichungen nach Hamilton, numerische Modellierung und Generierung optimaler Vorsteuertrajektorien für ein elastisches Regalbediengerät mit zeitvarianter Massenbelegung. Semesterarbeit 2008
- Geuss, M.: Linear aktuiertes Robotersystem „LARS“ - Inbetriebnahme und Softwareentwicklung. Semesterarbeit 2009

## H.2 Softwareentwicklung Lola

- Raffler, T.: CAN-Treiberentwicklung für das inertielle Messsystem iVRU-FC auf dem DSP 56F8367. Semesterarbeit 2008
- Chucholovski, F.: Implementierung einer CANopen Bibliothek für Freescale DSPs zur Ansteuerung von Motortreibern. Semesterarbeit 2008
- Roth, E.: Development of DSP based PMSM Vector Control for biped Walking Robot. Semesterarbeit 2008

## H.3 Verschiedenes

- Ruder, J.: Entwicklung und Validierung eines FPGA basierten Regelsystems. Semesterarbeit 2008
- Fink, S.: Regelung eines Fahrradmodells auf nicht-ebenem Untergrund. Diplomarbeit 2008
- Metz, C.: Parallelisierung durch den Einsatz eines FPGAs in der Mehrkörpersimulation. Semesterarbeit 2008

# Literatur

- [1] Aoustin, Y. ; Fliess, M. ; Mounier, H. ; Rouchon, P. ; Rudolph, J.: Theory and practice in the motion planning and control of a flexible robot arm using Mikusiński operators. In: *Proceedings of the 5th Symposium on Robotics and Control*. Nantes, 1997, S. 287–293
- [2] Bachmayer, M. ; Rudolph, J. ; Ulbrich, H.: Acceleration of linearly actuated elastic robots avoiding residual vibrations. In: *Proceedings of the 9th International Conference on Motion and Vibration Control*. Munich, Germany, September 15-18 2008
- [3] Bachmayer, M. ; Rudolph, J. ; Ulbrich, H.: Flatness based feed forward control for a horizontally moving beam with a point mass. In: *Proceedings of the 4th European Conference of Structural Control*. St. Petersburg, Russia, September 8-12 2008
- [4] Bachmayer, M. ; Schipplick, M. ; Günthner, W. ; Ulbrich, H.: Increasing rack feeder performance. In: *Proceedings of the 10th International Material Handling Research Colloquium 2008 (IMHRC)*. Dortmund, Germany, May 28-June 02 2008
- [5] Bachmayer, M. ; Schipplick, M. ; Thümmel, T. ; Kessler, S. ; Günthner, W. ; Ulbrich, H.: Nachschwingungsfreie Positionierung elastischer Roboter durch numerische und analytische Trajektorienplanung am Beispiel Regalbediengerät. In: *Proceedings of the 2nd VDI/VDE-Tagung Elektrisch-mechanische Antriebssysteme*. Böblingen, Germany, September 23-24 2008, S. 199–205
- [6] Bachmayer, M. ; Ulbrich, H.: Trajectory planning for linearly actuated elastic robots using flatness based control theory. In: *Proceedings of the 22th International Conference Theoretical and Applied Mechanics*. Adelaide, Australia, August 25-29 2008
- [7] Bachmayer, M ; Ulbrich, H ; Rudolph, J: Flatness Based Control of a Horizontally Moving Erected Beam with a Point Mass. In: *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* 17 (2011), Nr. 01, 49-69. <http://dx.doi.org/10.1080/13873954.2010.537517>. – DOI 10.1080/13873954.2010.537517
- [8] Bachmayer, M. ; Wagner, P. ; Ulbrich, H.: Eine stabilisierte Kamera für Fahrerassistenzsysteme - Anforderungen, Konzept, Regelungsansätze. In: *Mechatronik 2007 - Innovative Produktentwicklung*. Wiesloch, May 2007
- [9] Bachmayer, M. ; Zander, R. ; Ulbrich, H.: Numerical approaches for residual vibration free positioning of elastic robots. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 40 (2009), March, Nr. 3, S. 161–168

- [10] BACHMAYER, M. ; ZANDER, Roland ; ULBRICH, H.: Numerical approaches for residual vibration free positioning of elastic robots. In: *Proceedings of the 2nd International Conference on Advanced Computational Engineering and Experimenting*. Barcelona, Spain, July 14-15 2008
- [11] BANKS, H.T.: *Control and Estimation in Distributed Parameter Systems*. Vol. 11. Siam, 1992. – ISBN 0–89871–297–1
- [12] BUSCHMANN, T. ; LOHMEIER, S. ; BACHMAYER, M. ; ULBRICH, H. ; PFEIFFER, F.: A Collocation Method for Real-Time Walking Pattern Generation. In: *Proc IEEE-RAS Int Conference on Humanoid Robotics (Humanoids)*, 2007
- [13] DIETZEL, Michael: *Beeinflussung des Schwingungsverhaltens von Regalbediengeräten durch Regelung des Fahrantriebs*, Dissertation, 1999
- [14] ENSBRUNNER, H. ; SCHLACHER, K.: Control of weakly damped finite and infinite dimensional Euler-Lagrange Systems. In: *Proceedings of the 16th Conference of the International Federation of Automatic Control*. Prague, 2005
- [15] FLIESS, M. ; LEVINE, J. ; PHILIPPE, M. ; ROUCHON, P.: Flatness and Defect of Nonlinear Systems: Introductory Theory and Examples. In: *Int. J. Control* (1995)
- [16] FLIESS, M. ; MOUNIER, H. ; ROUCHON, P. ; RUDOLPH, J.: Systèmes linéaires sur les opérateurs de Mikusiński et commande d'une poutre flexible. In: *ESAIM Proc.* 2, 1997, S. 183–193
- [17] FÖLLINGER, O. ; DÖRRSCHEIDT, F. ; KLITTICH, M.: *Regelungstechnik*. 10. Aufl. Heidelberg : Hüthig-Verlag, 2008. – ISBN 978–3–7785–2970–6
- [18] FREYMANN, R.: *Strukturdynamik*. Springer Verlag, 2011. – ISBN 978–3–64219–697–3
- [19] GERBER, H.: *Innere dynamische Zusatzkräfte bei Stirnradgetrieben*. Dissertation, Lehrstuhl für Maschinenelemente FZG, Technische Universität München, 1984
- [20] GRAMMLICH, G.: *Numerische Mathematik mit Matlab*. dpunkt-Verlag, 2000. – ISBN 978–3932588556
- [21] HACKBUSCH, W. ; SCHWARZ, H. R. ; ZEIDLER, E.: *Teubner - Taschenbuch der Mathematik*. Leipzig : B.G. Teubner, 1996. – ISBN 3–8154–2001–6
- [22] HERING, E. ; MARTIN, R. ; STROHER, M.: *Physik für Ingenieure*. 11. Auflage. Springer Verlag, 2012. – ISBN 978–3–64222–568–0
- [23] LENZE: *Katalog: Planetary gearboxes*. Fima Lenze, 2005
- [24] LENZE: *Katalog: Servomotoren*. Fima Lenze, 2005
- [25] LOHMEIER, S. ; BUSCHMANN, T. ; ULBRICH, H.: System Design and Control of Antropomorphic Walking Robot LOLA. In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 14 (2009), Nr. 06, S. 658–666
- [26] LYNCH, F. A. ; RUDOLPH, J.: Flatness-based boundary control of a class of quasilinear parabolic distributed parameter systems. In: *Int. J. Control* (2002)

- [27] MAGNUS, K. ; MÜLLER-SLANY, H.H.: *Grundlagen der Technischen Mechanik*. 3. Auflage. Stuttgart : Teubner Studienbücher - Mechanik, 1974. – ISBN 978-3-8351-0007-7
- [28] MAGNUS, K. ; POPP, K.: *Schwingungen*. 5. Aufl. Stuttgart : Teubner Studienbücher - Mechanik, 1997. – ISBN 3-519-32302-8
- [29] MESCHÉDE, D.: *Gerthsen Physik*. 22. Auflage. Berlin : Springer, 2006. – ISBN 3-540-25421-8
- [30] MEURER, T. ; THULL, D. ; KUGI, A.: Flatness-based tracking control of a piezoactuated Euler-Bernoulli beam with non collocated output feedback: theory and experiments. In: *Int. J. Control* (2008)
- [31] MIKUSIŃSKI, J.: *Operational Calculus*. Bd. 1 Pergamon, Oxford & PWN, Warszawa, 1983
- [32] NEUMANN, L.: *Optimierung von CVT-Ketten*. Dissertation 2007. VDI-Verlag, 2007. – ISBN 978-3-18-364612-8
- [33] PARK, S. ; KIM, B.K. ; YOUM, Y.: Single-Mode Vibration Suppression for a beam-mass-cart system using input preshaping with a robust internal-loop compensator. In: *Journal of Sounds and Vibration, Vol. 241, Issue 4, Pages 693-716* (2001)
- [34] PFEIFFER, F.: *Einführung in die Dynamik*. 2. Aufl. Stuttgart : Teubner Studienbücher - Mechanik, 1992. – ISBN 3-519-12367-3
- [35] POLAND, J.: *Modellgestützte und Evolutionäre Optimierungsverfahren für die Motorentwicklung*. Logos Verlag, 2002. – ISBN 3832500154
- [36] ROPPENECKER, G.: *Vollständige modale Synthese linearer Systeme und ihre Anwendung zum Entwurf strukturbeschränkter Zustandsrückführungen*. Dissertation 1983. VDI-Verlag, 1983. – ISBN 3-18-145908-9
- [37] ROTHFUSS, R. ; RUDOLPH, J. ; ZEITZ, M.: Flachheit: Ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme. In: *at - Automatisierungstechnik 45, Oldenburg Verlag* (1997)
- [38] RUDOLPH, J.: *Beiträge zur flachheitsbasierten Folgeregelung linearer Systeme endlicher und unendlicher Dimension*. Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik, Shaker Verlag, Aachen, 2003
- [39] RUDOLPH, J. ; WOITTENNEK, F.: Flachheitsbasierte Randsteuerung von elastischen Balken mit Piezoaktuatoren. In: *at - Automatisierungstechnik 50, Oldenburg Verlag* (2002)
- [40] SCHIPPLICK, M. ; GÜNTNER, W. A.: Potentiale einer flachheitsbasierten Antriebssteuerung am Beispiel Regalbediengerät. In: *Automatisierungstechnik 4* (2011), Nr. 01, 242-247
- [41] SCHUMACHER, Meinhard: *Untersuchung des Schwingungsverhaltens von Einmast-Regalbediengeräten*, Wissenschaftliche Berichte des Institutes für Fördertechnik und Logistiksysteme der Universität Karlsruhe, Dissertation, 1994

- 
- [42] STAUDECKER, M. ; SCHLACHER, K. ; HANSL, R.: Passivity Based Control and Time Optimal Trajectory Planning of a Single Mast Stacker Crane. In: *Proceedings of the 17th World Congress*. Seoul, July 2008
- [43] ULBRICH, H.: *Maschinendynamik*. 1. Aufl. Stuttgart : Teubner-Verlag, 1996. – ISBN 3519032333