

Vorlesung

Schaltungstechnik 1

Univ.-Prof. Dr. techn. Josef A. Nossek

WS 2011/12
9. Oktober 2012

<http://www.nws.ei.tum.de>



Technische Universität München
Lehrstuhl für Netzwerktheorie und Signalverarbeitung
Univ.-Prof. Dr.techn. Josef A. Nossek



12. Auflage 2012



Schaltungstechnik 1 — Skriptum zur Vorlesung der Technischen Universität München steht unter einer Creative Commons Namensnennung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Unported Lizenz. Um die Lizenz anzusehen, gehen Sie bitte zu <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/> oder schicken Sie einen Brief an Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA. Über diese Lizenz hinausgehende Erlaubnisse können Sie beim Lehrstuhl für Netzwerktheorie und Signalverarbeitung der Technischen Universität München unter <http://www.nws.ei.tum.de> erhalten.

©Copyright 2012 Technische Universität München

Kontakt: Josef.A.Nossek@tum.de

Herausgeber: Univ.-Prof. Dr. techn. Josef A. Nossek,
Lehrstuhl für Netzwerktheorie und Signalverarbeitung, Technische Universität München

Referenznummer: TUM-LNS-TR-12-05

Druck: Fachschaft Elektrotechnik und Informationstechnik e.V., München

Vorwort

Die Schaltungstechnik ist ein grundlegendes Wissensgebiet der Elektrotechnik und Informationstechnik. Eine Vorlesung über dieses Gebiet muss das theoretische Fundament darstellen, die darauf beruhenden Konzepte entwickeln und die wichtigsten Ergebnisse herleiten. Sie soll damit die Voraussetzungen für viele weitere Vorlesungen und für die spätere kreative Ingenieur Tätigkeit schaffen. Eine frühe und gründliche Vertrautheit mit den Methoden der Schaltungstechnik ist deshalb unerlässlich.

Methodische Klarheit und Anschaulichkeit sind keine Gegensätze, sondern werden wie auch in allen anderen Vorlesungen gleichermaßen angestrebt. Abstrakte Darstellungen werden dabei als solche verstanden, bei denen man nur wesensmäßige Beziehungen ins Auge fasst, um die ihnen zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten umso deutlicher hervortreten zu lassen. So stellt eine darauf begründete Vorlesung keine höheren Anforderungen an die Studenten: Sie werden die für Sie neuen Sachverhalte nicht wegen der abstrakten (auf das Wesentliche konzentrierten und idealisierten) Behandlung als schwierig empfinden – es sei denn, Sie werden von anderen durch Warnungen vor dem Schwierigkeitsgrad verschreckt. Solche Unterscheidungen der Art „abstrakt = schwierig, aber anschaulich = einfach“ haben ihre Ursache dann eher im unzulänglichen Verständnis der Warnenden, das dann auf die Studierenden projiziert wird. Ebenso, wie abstrakt und anschaulich keine Gegensätze bilden, stehen auch Theorie und Praxis nicht im Widerstreit: Das Gegenteil von „praktisch“ ist nämlich „unpraktisch“ und nicht etwa „theoretisch“. In diesem Sinne sind auch die Worte des großen Physikers Ludwig Boltzmann zu verstehen:

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie!

Diesen Ansprüchen möchte die Vorlesung Schaltungstechnik gerecht werden, nämlich gleichermaßen abstrakt und anschaulich, theoretisch klar und praktisch nützlich zu sein, um damit den Studenten ein Grundlagenwissen zu vermitteln, das sie durch ihr weiteres Studium und Berufsleben begleitet und ihr schöpferisches Denken und Handeln mitbestimmt.

In der Vorlesung Schaltungstechnik werden nichtlineare Netzwerkelemente und Schaltungen von Anfang an als grundlegend und nicht als spezielle Erweiterung linearer Schaltungen behandelt. Das entspricht zum einen der durch die rasante Entwicklung der Technologie vor allem der Großintegration gestiegenen Bedeutung der nichtlinearen Schaltungen und trägt zum anderen einem klaren didaktischen Konzept Rechnung, bei dem die Klasse der linearen Schaltungen als wichtiger Spezialfall eingeführt wird. So lassen sich auch die wesentlichen Konsequenzen der Linearität und ihre daraus resultierende theoretische und praktische Bedeutung viel klarer darstellen.

Im ersten Semester werden in den Kapiteln 1 bis 10 ausschließlich resistive Schaltungen, also Schaltungen ohne dynamische Effekte, behandelt. Durch diese Beschränkung sind im ersten Semester an mathematischem Werkzeug im wesentlichen nur die Methoden der (vor allem linearen) Algebra erforderlich, mit denen die Studenten in der parallel dazu angebotenen

IV

Mathematikvorlesung vertraut gemacht werden. Es wird dabei bewusst darauf verzichtet, die Schaltungstechnik auf dem Feldkonzept der Elektrizitätslehre zu begründen, da diese Vorgehensweise weder methodische noch didaktische Vorteile aufweist. Hier reicht vielmehr eine knappe Darstellung der einschränkenden Annahmen (Abstraktionen) aus, die die Behandlung elektrotechnischer Probleme mit den Methoden der axiomatisch aufgebauten Schaltungstechnik rechtfertigen.

Erst im zweiten Semester werden ab Kapitel 11 dynamische Schaltungen betrachtet. Um bei der mathematischen Behandlung den Rahmen der Möglichkeiten des ersten Studienjahres nicht zu sprengen, werden von den nichtlinearen Schaltungen quantitativ nur die stückweise linearen untersucht. Damit können alle Aufgaben auf die abschnittsweise Lösung von Systemen linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen ersten Grades zurückgeführt werden. Dabei steht die sogenannte Zustandsbeschreibung dynamischer Schaltungen im Zeitbereich im Mittelpunkt. Auch die praktisch wichtige und fast allgegenwärtige komplexe Wechselstromrechnung lässt sich mit allen ihren Voraussetzungen klar aus der allgemeinen Zustandsbeschreibung gewinnen.

Die Notwendigkeit einer solchen Vorlesung hat sich bei der 1989 erfolgten Reform des Studiums in der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik ergeben. Ziel der Reform war die Verbesserung und Modernisierung der Ausbildung in den grundlegenden Wissensgebieten: Es sollen bereits von Anfang an die Methoden gelehrt werden, die später vom Ingenieur in der industriellen Entwicklungs- oder wissenschaftlichen Forschungsarbeit angewandt werden. Dieses Konzept hat sich nun über 20 Jahre bewährt und damit gezeigt, dass theoretische Grundlagen keine kurze Halbwertszeit haben. Sie sind es, die durch ganzes, langes Ingenieurberufsleben tragen, und man muss sie frühzeitig lernen, um sie wirklich zu verinnerlichen.

Iffeldorf, im September 2009

Josef A. Nossek

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen	1
1.1 Aufgabenstellung	1
1.2 Elektrische Signale	1
1.3 Modellierung	2
1.3.1 Die Konzentriertheithypothese	2
1.3.2 Reale Schaltung, Schaltplan und Netzwerk	4
1.4 Historische Anmerkungen	5
2. Kirchhoff-Gesetze und Graphen	6
2.1 Zählpfeile	6
2.2 Tore	7
2.3 Kirchhoffsches Stromgesetz	7
2.4 Kirchhoffsches Spannungsgesetz	8
2.5 Netzwerkgraph	10
2.6 Inzidenzmatrizen	11
2.7 Linearität der Kirchhoffschen Gleichungen	12
3. Resistive Eintore	14
3.1 Modellierung	15
3.2 Algebraische Beschreibungsformen	16
3.2.1 Implizite Darstellung	17
3.2.2 Parameterdarstellung	18
3.2.3 Explizite Darstellungen	18
3.3 Eigenschaften resistiver Eintore	19
3.3.1 Polung	19
3.3.2 Leistungsbedarf	19
3.3.3 Quellenfreiheit	20
3.3.4 Dualität	20
3.4 Streng lineare resistive Eintore	21
3.4.1 Der Nullator	22
3.4.2 Widerstandsgeraden	22
3.4.2.1 Die trivialen Widerstandsgeraden	23
3.4.2.2 Ohmsche Widerstände	24

3.4.2.3	Negative Widerstände	24
3.4.2.4	Zeitvariante Ohmsche Widerstände	24
3.4.2.5	Schalter	25
3.4.3	Der Norator	25
3.5	Resistive Diodenmodelle	26
3.5.1	pn-Dioden	26
3.5.2	Photodioden	27
3.5.3	Zener-Dioden	27
3.5.4	Tunneldioden	27
3.6	Eintorgrundsaltungen	28
3.6.1	Umpolung	28
3.6.2	Parallelschaltung	29
3.6.3	Serienschaltung	29
3.6.4	Verschaltung von Widerstandsgeraden	30
3.6.4.1	Parallelschaltung von Widerständen	31
3.6.4.2	Serienschaltung von Widerständen	31
3.6.5	Eine kombinierte Schaltung	31
3.7	Lineare Quellen	33
3.7.1	Unabhängige Quellen	34
3.7.1.1	Stromquellen	34
3.7.1.2	Spannungsquellen	35
3.7.2	Die Innenstruktur linearer Quellen	35
3.8	Stückweise lineare Widerstände	36
3.8.1	Stückweise lineare Dioden	36
3.8.1.1	Ideale Dioden	36
3.8.1.2	Konkave Widerstände	37
3.8.1.3	Konvexe Widerstände	37
3.8.2	Reale negative Widerstände	37
3.9	Eintorschaltungen	38
3.9.1	Arbeitspunkt	39
3.9.2	Verarbeitung informationstragender Signale	40
3.9.3	Kleinsignalübertragung	43
4.	Resistive Zweitore	45
4.1	Beschreibungsformen	46
4.1.1	Ein Optokoppler	47
4.1.2	Linearisierung	50
4.2	Lineare Zweitore	52

4.2.1	Beschreibungsformen streng linearer Zweitore	52
4.2.1.1	Kern- und Bildbeschreibung	53
4.2.1.2	Zweitormatrizen	54
4.2.2	Nicht quellenfreie lineare Zweitore	58
4.3	Eigenschaften resistiver Zweitore	60
4.3.1	Leistungsbilanz	60
4.3.1.1	Verlustlosigkeit	60
4.3.1.2	Passivität/Aktivität	61
4.3.2	Zeitvarianz	62
4.3.3	Dualität	62
4.3.4	Umkehrbarkeit (Symmetrie)	63
4.3.5	Reziprozität linearer Zweitore	64
4.4	Spezielle Zweitore	65
4.4.1	Gesteuerte Quellen	66
4.4.2	Nullor	67
4.4.3	Übertrager	69
4.4.4	Gyrator (Dualwandler)	70
4.4.5	Negativ-Immittanz-Konverter	71
4.5	Zusammenschaltung von Zweitoren	72
4.5.1	Parallelschaltung	73
4.5.2	Serienschaltung	74
4.5.3	Hybride Verschaltungen	75
4.5.4	Zur Torbedingung in Zweitorschaltungen	75
4.5.5	Kettenschaltungen	77
5.	Transistoren	79
5.1	Bipolare Transistoren	79
5.1.1	npn-Transistor	80
5.1.1.1	Das resistive Ebers-Moll-Modell	80
5.1.1.2	Kennlinienfelder	81
5.1.1.3	Vereinfachte Ersatzschaltungen	81
5.1.1.4	Arbeitspunkt und Kleinsignalanalyse	83
5.1.2	pnp-Transistor	89
5.1.3	Komplementärstufen	89
5.2	Feldeffekttransistoren	92
5.2.1	n-MOS-Transistoren	93
5.2.1.1	Das resistive Shichman-Hodges-Modell	93
5.2.1.2	Arbeitspunkteinstellung und Übertragungsverhalten	95
5.2.2	p-MOS-Transistoren	98
5.2.3	CMOS-Schaltungen	98

6. Operationsverstärker	101
6.1 Der Operationsverstärker als Zweitor	103
6.2 Modellierung	104
6.2.1 Reale Übertragungskennlinie und Imperfektionen	104
6.2.2 Idealisiertes nichtlineares Modell	106
6.2.3 Nullormodell	107
6.3 Operationsverstärkerschaltungen	107
6.3.1 Komparator	108
6.3.2 Invertierender Verstärker	108
6.3.3 Nichtinvertierender Verstärker	110
6.3.3.1 Der Spannungsfolger	111
6.3.4 Negativmittanzkonverter (NIK)	112
6.3.5 Stückweise Lineare Widerstände	113
6.3.5.1 Ideale Dioden	114
6.3.5.2 Konkave Widerstände	115
6.3.5.3 Konvexe Widerstände	115
6.4 Lineare Operationsverstärkerschaltungen	116
6.4.1 Virtuelle Masse	116
6.4.2 Summierer	116
6.4.3 Gesteuerte Quellen	117
6.4.3.1 Spannungsgesteuerte Spannungsquelle (USU)	117
6.4.3.2 Stromgesteuerte Spannungsquelle (ISU)	118
6.4.3.3 Spannungsgesteuerte Stromquelle (USI)	119
6.4.3.4 Stromgesteuerte Stromquelle (ISI)	120
6.4.4 Gyrtator	120
7. Resistive Mehr Tore	122
7.1 Beschreibungsformen	122
7.2 Spezielle Mehr Tore	124
7.2.1 Mehr Tor-Übertrager	124
7.2.2 Zirkulator	125
7.2.3 Multiplizierer und Dividierer	127
8. Allgemeine Analyseverfahren	128
8.1 Verbindungsmehrtor	129
8.1.1 Beschreibungsgleichungen des Verbindungsmehrtors	129
8.1.2 Tellegenscher Satz	132
8.2 Systematisches Aufstellen der Kirchhoffschen Gleichungen	133

8.2.1	Baumkonzept	133
8.2.2	Kirchhoffsche Gleichungen zu einem Baum	134
8.2.3	Knotenspannungsanalyse	135
8.2.4	Maschenstromanalyse	136
8.3	Tableaugleichungen	138
8.3.1	Lineare Netzwerkelemente	138
8.3.2	Nichtlineare Netzwerkelemente	140
8.4	Newton-Raphson-Algorithmus	140
8.5	Reduzierte Knotenspannungsanalyse/Maschenstromanalyse	143
8.5.1	Nichtlineare Netzwerkelemente	145
8.6	Direktes Aufstellen der Knotenleitwertmatrix	146
8.7	Nichtspannungsgesteuerte Elemente in der Knotenleitwertmatrix	151
8.7.1	Quellenumwandlung	151
8.7.2	Dualwandlung	152
8.7.3	Nulloreinbau	153
9.	Netzwerkeigenschaften	157
9.1	Duales Netzwerk	157
9.1.1	Substitutionstheorem	158
9.1.2	Eigenschaften linearer Netzwerke	158
9.1.2.1	Superpositionsprinzip	159
9.1.2.2	Zweipolersatzschaltungen	161
9.2	Passivität und inkrementale Passivität	164
10.	Logikschaltungen	168
10.1	Binäre Signale und elementare Verknüpfungen	168
10.2	Boolesche Algebra	169
10.3	Schaltungstechnische Realisierungen der Grundverknüpfungen	170
10.3.1	NAND in DTL (Dioden-Transistor-Logik)	171
10.3.2	NAND in TTL (Transistor-Transistor-Logik)	174
10.3.3	NOR in ECL (Emitter-Coupled-Logic)	175
10.3.4	NOT, NAND und NOR in CMOS	176
Anhang		178
A.1	Graphen	178
A.1.1	Ungerichtete Graphen	178
A.1.1.1	Planarität	179
A.1.1.2	Teilgraphen	180

A.1.1.3	Zusammenhängende Graphen	180
A.1.2	Gerichtete Graphen	181
A.1.2.1	Graphen mit Bezugsknoten	182
A.1.2.2	Zusammengehängte Graphen	182
A.1.3	Spezielle Graphen	182
A.1.3.1	Schleifen	183
A.1.3.2	Bäume	183
A.1.4	Algebraische Strukturbeschreibung	183
A.2	Linearisierung	184
A.2.1	Lineare Approximation resistiver Eintore	185
A.2.1.1	Lineare Approximation einer pn-Diode	185
A.2.1.2	Freie Wahl der Darstellungsform	187
A.2.1.3	Die Kleinsignalnäherung	187
A.2.2	Partielle Ableitungen und Gradient	189
A.2.3	Lineare Approximation resistiver Mehrere	191
A.2.3.1	Lineare Approximation eines resistiven Zweitores	191
A.3	Lineare Algebra	193
A.3.1	Matrizen	193
A.3.2	Matrixoperationen	195
A.3.2.1	Matrizenaddition/-subtraktion	195
A.3.2.2	Multiplikationen	195
A.3.2.3	Transposition	197
A.3.2.4	Spur	197
A.3.2.5	Determinante	197
A.3.2.6	Inverse	198
A.3.3	Vektorräume	199
A.3.3.1	Lineare Unterräume	200
A.3.3.2	Lineare Abhängigkeit, Basis und Rang einer Matrix	201
A.3.3.3	Länge, Winkel und Orthogonalität	202
A.3.4	Lineare Abbildungen und Gleichungssysteme	204
A.3.4.1	Längentreue Abbildungen	205
A.3.4.2	Lineare Gleichungen	206
A.3.5	Eigenwerte und Eigenvektoren	207
A.3.5.1	Jordanform	208
A.3.5.2	Funktionen von Matrizen	209
A.3.6	Quadratische Formen	211
	Literaturverzeichnis	213
A.4	Netzwerkelemente (Circuit Elements)	214

1. Grundlagen

In diesem einführenden ersten Kapitel soll zunächst die Aufgabe der Ingenieurdisziplin Schaltungstechnik dargestellt und die dabei benötigten Grundbegriffe beispielhaft beschrieben werden. Strenge Definitionen und Folgerungen bleiben den folgenden Kapiteln vorbehalten. Viele der hier erstmals eingeführten Begriffe, Gedanken und Methoden werden erst bei fortdauernder intensiver Beschäftigung und Auseinandersetzung mit ihnen ausreichende Klarheit gewinnen.

1.1 Aufgabenstellung

Zentrale Aufgabe der *Schaltungstechnik (circuit theory)* ist die Analyse und darauf fußend die Vorhersage (Prognose) des elektrischen Verhaltens realer Schaltungen. Diese Analyse liefert die Grundlage für den systematischen Entwurf von Schaltungen im Hinblick auf verschiedenste Anforderungen. Hier wurden bereits Begriffe benutzt, die noch einer gewissen Präzisierung bedürfen:

Eine *reale Schaltung (physical circuit)* ist eine Anordnung von miteinander verbundenen *elektrischen Bauelementen (electric devices)*. Realen Schaltungen begegnet man im Alltag auf Schritt und Tritt, Beispiele dafür sind: Funktionseinheiten einer HiFi-Anlage (Verstärker, Empfänger, Equalizer, ...) Taschenrechnerschaltkreise, Hörgerätefilter- und Heizungsregelschaltungen, Synthesizer, Energieversorgungs- und Telefonnetz, Diese Liste realer Schaltungen ließe sich beliebig fortsetzen. Ebenso lang ist die Liste der in diesen Schaltungen eingesetzten elektrischen Bauelemente: Transistoren, Widerstände, Dioden, Kondensatoren, Spulen, Schalter, Relais, Drähte, Übertrager, Batterien, ...

Unter dem *elektrischen Verhalten* einer Schaltung versteht man den Verlauf der Spannungen und Ströme innerhalb dieser Schaltung über der Zeit bei Vorgabe einiger dieser Größen oder Parameter. Zu den Strömen und Spannungen kommen noch weitere elektrische und allgemein physikalische Größen hinzu, wie Ladung und Fluss, oder Leistung und Energie, die aus den primären elektrischen Größen Strom und Spannung abgeleitet werden können.

1.2 Elektrische Signale

Den Zeitverlauf einer elektrischen Größe (meist einer Spannung oder eines Stromes), dem man eine bestimmte Bedeutung beimisst, nennt man (*elektrisches*) Signal. Eine zeitabhängige Quelle, die ein Signal erzeugt, heißt dementsprechend eine *Signalquelle*.

Man kann Signalquellen verwenden, um den Einfluss nichtelektrischer physikalischer Größen auf eine Schaltung zu erfassen. Beispielsweise stellt Schall eine mechanische

zeitabhängige Größe dar. Ein Mikrofon mit Verstärker, das einer Schaltung eine zeitabhängige, zum umgebenden Luftdruck proportionale Spannung einprägt, ist dann eine *Messsonde* (oder *Sensor*), die durch eine Signalspannungsquelle modelliert werden kann.

Wie das Beispiel in Bild 1.1 zeigt, können Signale häufig in einen zur Einstellung bestimmter Betriebsbedingungen der Schaltung erforderlichen konstanten Gleichanteil, und den eigentlich “interessanten” zeitabhängigen und damit informationstragenden Wechselanteil zerlegt werden.

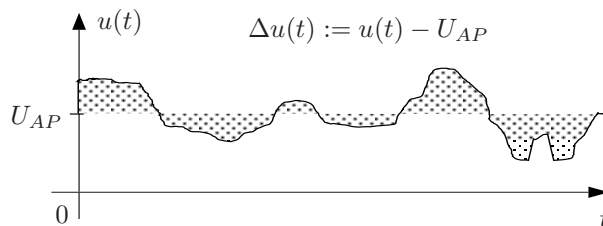


Bild 1.1 Gleichanteil U_{AP} und Wechselanteil $\Delta u(t)$ einer Signalspannung $u(t)$

So ist beispielsweise bei dem Mikrofon natürlich nur die Schwankung des Luftdruckes um den dem Normaldruck entsprechenden Gleichanteil von Interesse.

1.3 Modellierung

Von der realen Schaltung zum Netzwerk gelangt man durch Modellierung der elektrischen Bauelemente und deren Verbindungen durch Netzwerkelemente. Diese Modellierung ist stets mit einer Abstraktion verbunden: Netzwerkelemente sind idealisierte Modelle mit einer präzisen mathematischen Beschreibung des Zusammenhangs der zugeordneten elektrischen Größen. Dabei werden vom Netzwerkelement nicht mehr alle Eigenschaften des Bauelementes wiedergegeben (wie beispielsweise die in seinem Datenblatt angegebenen räumlichen Abmessungen, Temperaturbeständigkeit, das Gewicht, die Gehäuseform, der Preis ...).

Die zum Netzwerkelement gehörige mathematische Beschreibung beschränkt sich auf die wesentlichen Gesetzmäßigkeiten, z. B. auf das durch den konstanten Widerstandswert eines Metallfilmwiderstandes gegebene Verhältnis zwischen Spannung und Strom. Bei komplizierteren Bauelementen bzw. bei einer geforderten detailgetreuen Beschreibung erfolgt die Modellierung eines Bauelementes durch eine Kombination mehrerer Netzwerkelemente, also durch ein Netzwerk. Die Verbindungsleitungen oder Drähte, die die Bauelemente einer realen Schaltung verbinden, werden meist als perfekt leitend angenommen und entsprechend modelliert.

1.3.1 Die Konzentriertheithypothese

Die Schaltungstechnik beschränkt sich auf die Untersuchung von Schaltungen aus konzentrierten Elementen: Dies bedeutet, dass die größte räumliche Ausdehnung d der realen Schaltung (und damit natürlich auch der darin enthaltenen elektrischen Bauelemente) so klein ist, dass eine kontinuierliche Abhängigkeit der elektrischen Größen wie Strom und Spannung von den Ortskoordinaten nicht berücksichtigt werden muss.

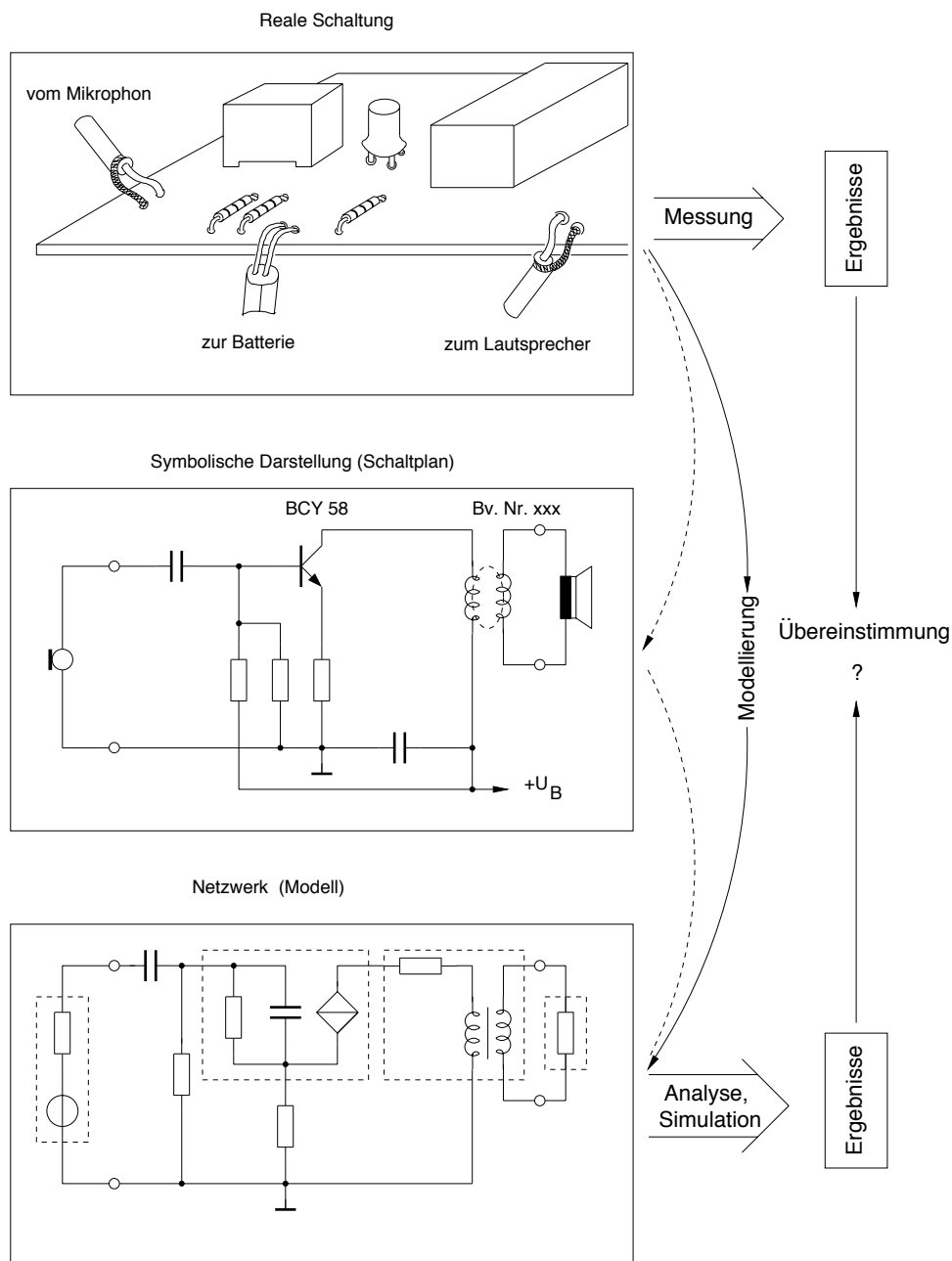


Bild 1.2 Eine reale Schaltung, ihr Schaltplan und ihre idealisierte Darstellung als Netzwerk.

Um das sicherzustellen, muss die Wellenlänge λ der relevanten Signale wesentlich größer sein als die Ausdehnung der Schaltung:

$$d \ll \lambda$$

(1.1)

Die Wellenlänge λ erhält man aus der Signalfrequenz f oder der Signaldauer T über die Beziehung:

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} \quad (1.2)$$

wobei c die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Wellenfeldes ist. Bei elektromagnetischen Wellen ist dies die Lichtgeschwindigkeit, deren Wert im Vakuum

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1} \quad (1.3)$$

beträgt. Ist die Gl.(1.1) nicht erfüllt, so müssen anstelle der schaltungstechnischen Variablen wie Strom und Spannung elektromagnetische Feldgrößen, und anstelle der Schaltungstechnik die Elektrodynamik (Maxwellsche Theorie) angewendet werden.

Eine Analogie zu dieser Abgrenzung von Theorien mit verschiedenen Anwendbarkeitsbereichen findet man in der Mechanik: Die klassische Newtonsche Mechanik steht zur Einsteinschen Relativitätstheorie in einer ähnlichen Beziehung wie die Schaltungstechnik zur Elektrodynamik: Die klassische Mechanik liefert eine genaue Beschreibung realer Anordnungen, wenn die auftretenden Geschwindigkeiten sehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind. Ebenso liefert die Schaltungstechnik als die Theorie der konzentrierten Schaltungen für eine große Klasse praktisch relevanter realer Schaltungen eine adäquate Beschreibung.

1.3.2 Reale Schaltung, Schaltplan und Netzwerk

Bild 1.2 stellt den Modellierungsgedanken und die dabei vollzogene Abstraktion beispielhaft dar. Dabei ist auch angedeutet, wie die Qualität der Modellierung zu überprüfen ist: durch den Vergleich der Analyseergebnisse mit an der realen Schaltung gewonnenen Messergebnissen!

Das Ausmaß der Übereinstimmung von mit Hilfe des Netzwerks gewonnenen Analyseergebnissen mit an der realen Schaltung gewonnenen Messergebnissen ist der Prüfstein für die Qualität der Modellierung. Die Messung beschränkt sich dabei auf die elektrischen Größen (Strom und Spannung) an den (zugänglichen) Klemmen.

$i = i(t)$	Strom in Ampere, A
$u = u(t)$	Spannung in Volt, V
t	Zeit in Sekunden, s
$i(t), u(t)$	Augenblickswert, Momentanwert

Diese *Momentanwerte* können mit geeigneten Messinstrumenten (näherungsweise) ermittelt werden.

Die Modellierung der elektrischen Bauelemente durch Netzwerkelemente wird hier als gegeben betrachtet. Auf der Grundlage dieser Modelle ist es die Aufgabe der Schaltungstechnik, das elektrische Verhalten der Schaltung (oder vielmehr, des Netzwerks) zu berechnen.

Dabei beschränkt sich die Modellierung der Bauelemente auf das Klemmenverhalten. Physikalische Phänomene im Bauelement sind nur insofern relevant, als sie sich auf das elektrische Klemmenverhalten auswirken und werden nur durch dieses beschrieben.

Die Modellierung kann mit unterschiedlichem Abstraktionsgrad erfolgen, abhängig von der Komplexität der Schaltung und den zu untersuchenden Eigenschaften.

Ein Beispiel: Soll bei einer Operationsverstärkerschaltung nur die Verstärkung im linearen Arbeitsbereich untersucht werden, so reicht ein sehr einfaches Makromodell (wie der Nullor) aus, und die Analyse wird sehr einfach. Will man aber von der gleichen Schaltung auch weitaus subtilere Kenngrößen wie den Offset, die Gleichtaktunterdrückung, das Eigenrauschen, oder die Sprungantwort im Großsignalbetrieb wissen, so ist eine detaillierte Modellierung der einzelnen Komponenten innerhalb des Operationsverstärkers notwendig.

Technische Anordnungen, die wegen ihrer großen Komplexität nur auf hohem Abstraktionsniveau modelliert werden können, nennt man Systeme. Die Grenzen zwischen System auf der einen und Schaltung, Netzwerk auf der anderen Seite, sind fließend. Insbesondere die Schaltungen von extremer Komplexität ermöglichende VLSI (Very Large Scale Integration)-Technologie führt zum Zusammenwachsen von Schaltungs- und Systemtechnik.

1.4 Historische Anmerkungen

Die Entstehung einer eigenständigen Theorie der Schaltungen muss im Zusammenhang mit der historischen Entwicklung der physikalischen Grundlagen gesehen werden. Bereits 1827 legte Georg Simon Ohm ein Buch mit dem Titel „Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet“ vor, das alle wesentlichen Grundgesetze für elektrische Stromkreise enthält. Ohm war in erster Linie an den physikalischen Gesetzmäßigkeiten interessiert, und weniger an einer zur Behandlung auch größerer Schaltungen geeigneten abstrakten Verallgemeinerung. Dieser Schritt blieb Gustav Robert Kirchhoff vorbehalten, der mit seiner Arbeit „Über die Auflösung von Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird“ die Geburtsstunde der Schaltungstechnik in das Jahr 1847 legte. 1853 begründete Hermann von Helmholtz mit dem Beitrag „Über einige Gesetze der Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendungen auf die thierisch-elektrischen Versuche“ die Theorie der Eintore (oder Zweipole). Einen weiteren Impuls für die Herausbildung einer eigenständigen Theorie der Schaltungen stellt schließlich auch James Clerk Maxwells berühmtes Werk „A Treatise on Electricity and Magnetism“ dar, dessen deutsche Fassung 1883 erschien. Im weiteren Verlauf der Geschichte hat eine Vielzahl von Persönlichkeiten aus aller Welt mitgewirkt, das Theoriegebäude der Schaltungstechnik in seiner heutigen Größe zu errichten. Eine sehr schöne Darstellung der historischen Entwicklung findet sich dabei in einem Büchlein von G. Wunsch mit dem Titel „Geschichte der Systemtheorie“¹.

¹Erschienen 1985 im Oldenbourg Verlag.

2. Kirchhoff-Gesetze und Graphen

Netzwerke bestehen aus Netzwerkelementen, die über eine unterschiedliche Zahl von Klemmen (Polen, Knoten) zugänglich sein können.

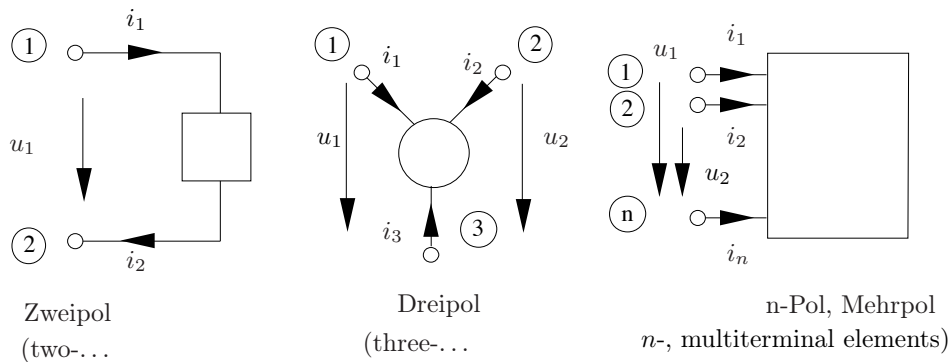


Bild 2.1 Zwei-, drei- u. mehrpolige Netzwerkelemente

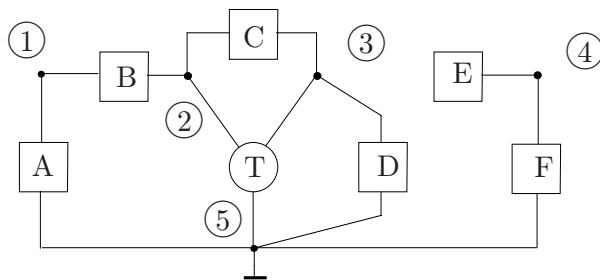


Bild 2.2 Netzwerk aus Zwei- und Dreipolen mit fünf Knoten (Klemmen)

2.1 Zählpfeile

Spannungen zwischen Klemmen (Knoten) muss man eine *Polarität* zuordnen. Dasselbe gilt für *Ströme*, die von einer Klemme (Knoten) in das Netzwerkelement bzw. von diesem in einen Knoten fließen. Diese *Bezugsrichtungen* werden durch *Spannungs-* bzw. *Stromzählpfeile* gekennzeichnet.

Diese Spannungs- und Stromzählpfeile geben auch die Orientierung der *Messgeräte* an, mit denen man in der realen Schaltung Spannung und Strom misst. Die Pfeilrichtung zusammen mit dem Vorzeichen der gemessenen Größe bestimmt die tatsächliche Richtung des Stromflusses bzw. der Potentialdifferenz. Ist das Vorzeichen der gemessenen Größe positiv, so stimmen tatsächliche Richtung und Bezugsrichtung (Pfeilrichtung) überein.

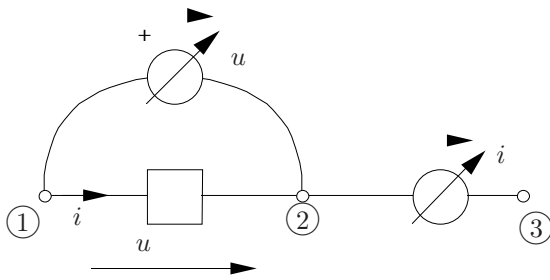


Bild 2.3 Bezugsrichtungen und Messgeräte

2.2 Tore

Zwei Klemmen bilden ein *Klemmenpaar* oder Tor, wenn die über die Klemmen fließenden Ströme entgegengesetzt gleich sind. Stimmen die Richtungen von Strom- und Spannungszählpfeil an einem Klemmenpaar überein, so nennt man dies eine *assoziierte Zählpfeilrichtung*.

Sind bei einem $2n$ -Pol die $2n$ Klemmenströme paarweise entgegengesetzt gleich, handelt es sich um ein n -Tor. Ein Dreipol kann durch die äußere Beschaltung zum Zweitor werden.

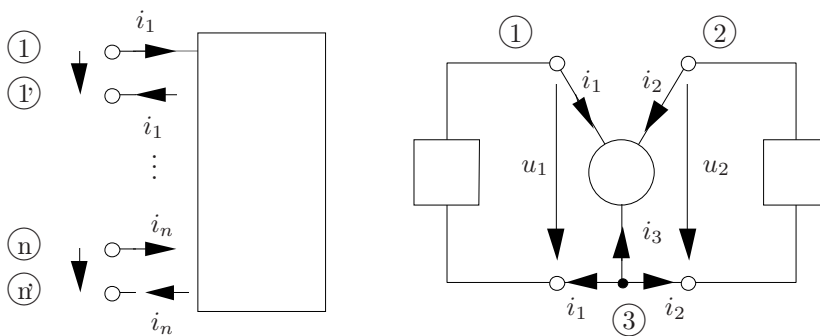


Bild 2.4 Mehrtore und Mehrpole

2.3 Kirchhoffsches Stromgesetz (Kirchhoff's Current Law KCL)

Das *Kirchhoffsche Stromgesetz* ist eine Formulierung des Gesetzes der Erhaltung elektrischer Ladung (charge conservation) für konzentrierte Schaltungen.

Dazu betrachtet man eine geschlossene Hüllfläche mit einer „Innenseite“ und einer „Außenseite“, die kein Netzwerkelement durchtrennt. Die Ladung im Inneren der Hülle wird bei konzentrierten Netzwerken als konstant angenommen. Aufgrund der Ladungserhaltung muss deshalb zu jedem Zeitpunkt die algebraische Summe aller aus der Hülle heraus- und hineinfließenden Ströme verschwinden. Herausfließende und hineinfließende Ströme werden positiv bzw. negativ gezählt. Legt man die Hülle so, dass sie gerade einen Knoten im Netzwerk umfasst, so erhält man die elementare Knotenregel:

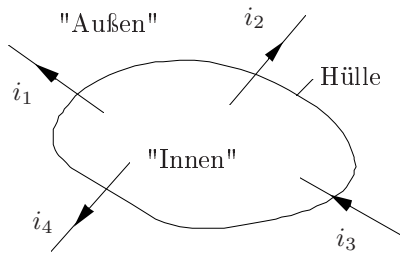


Bild 2.5 Hülle und Ströme

KCL (Knotenregel): In einem Netzwerk aus konzentrierten Elementen verschwindet zu jedem Zeitpunkt die Summe aller aus einem Knoten herausfließenden Ströme.

$$\sum_{\text{Knoten}} i_j(t) = 0 \quad (2.1)$$

Legt man die Hülle so, dass sie nicht nur einen Knoten (z.B. zwei Knoten und einen Zweipol) umschließt, so spricht man von einem *Superknoten*. Das KCL bleibt sinngemäß gültig. In Bild 2.6 ist dies beispielsweise mit der die Knoten ①, ② und ③ umfassenden Hülle \mathcal{H}_1 gezeigt. Man erkennt auch, dass ein Zweipol stets ein Eintor ist: Mit Hilfe einer Hülle \mathcal{H}_2 , die nur den betrachteten Zweipol einschließt zeigt man, dass die Klemmenströme entgegengesetzt gleich sind und das Klemmenpaar somit ein Tor bildet.

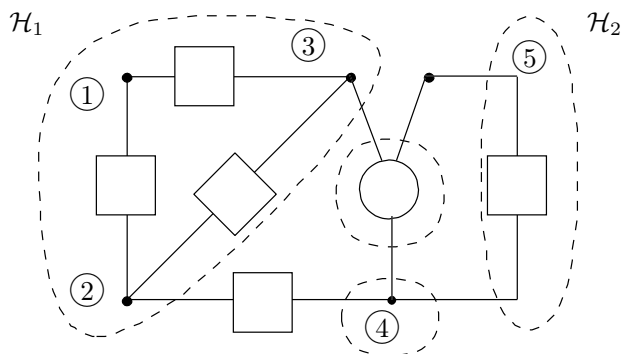


Bild 2.6 Knoten und Superknoten

2.4 Kirchhoffsches Spannungsgesetz (Kirchhoff's Voltage Law KVL)

Ähnlich wie bei statischen elektrischen Feldern im Raum, kann unter der Annahme konzentrierter Elemente auch jedem Punkt (Knoten) eines elektrischen Netzwerks eine skalare Größe, das elektrische Potential, zugeordnet werden. Dieses ist bis auf eine, allen Knoten gemeinsame additive Konstante eindeutig. Zur Festlegung dieser Konstante wird das Potential eines willkürlichen Bezugspunktes zu Null definiert. Als Bezugspunkt oder Bezugsknoten wählt man bei konzentrierten Netzwerken häufig den Knoten mit der höchsten Knotennummer.

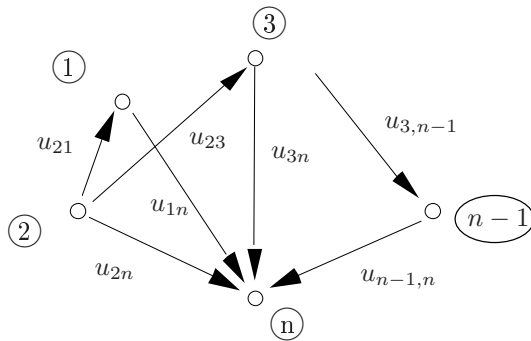


Bild 2.7 Knotenpotentiale

In einer zusammenhängenden Schaltung aus konzentrierten Elementen ist die Spannung zwischen einem Knotenpaar α und β gleich der Differenz der zugehörigen Knotenpotentiale bzw. Knotenspannungen:

$$u_{\alpha\beta} = u_{k\alpha} - u_{k\beta}$$

(2.2)

Man kann nun mit solchen Knotenpaaren α β einen *geschlossenen Umlauf* (*closed node sequence*) festlegen (beispielsweise den Umlauf α β , β η , η λ , λ α , der durch die Knotenfolge α β η λ α definiert ist). Ein geschlossener Umlauf heißt auch *Schleife*, wenn man diesen stets entlang von Netzwerkelementen ausführen kann.

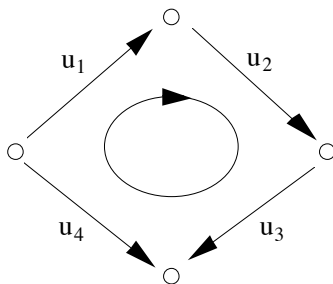


Bild 2.8 Umlauf und Spannungen. Spannungen werden in Umlaufrichtung positiv gezählt $u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) - u_4(t) = 0 \quad \forall t$

Daraus ergibt sich das *Kirchhoffsche Spannungsgesetz*:

KVL: In einem zusammenhängenden Netzwerk aus konzentrierten Elementen verschwindet zu jedem Zeitpunkt die algebraische Summe aller Spannungen zwischen Knotenpaaren, die einen geschlossenen Umlauf (Schleife) bilden:

$$\sum_{\text{Umlauf}} u_j(t) = 0$$

(2.3)

Das Kirchhoffsche Spannungsgesetz ist eine Formulierung des Induktionssatzes für konzentrierte Netzwerke. Die Annahme konzentrierter Netzwerkelemente beinhaltet, dass kein zeitlich veränderlicher magnetischer Fluss außerhalb der Elemente auftritt. Nachdem das KVL für geschlossene Umläufe gilt, gilt es auch für Schleifen. Die in Bild 2.9 angegebenen Umläufe sind auch Schleifen.

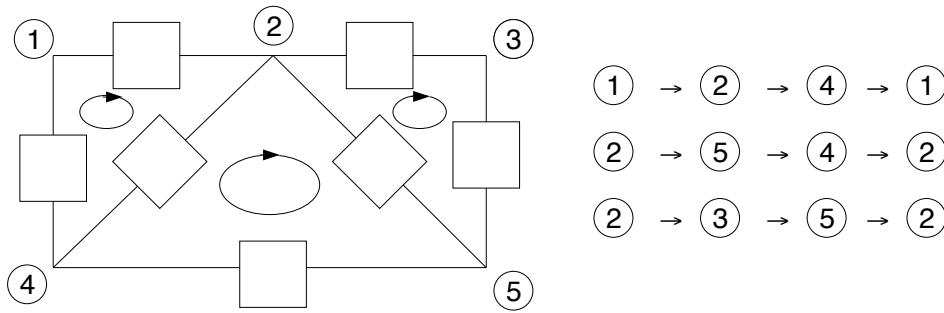


Bild 2.9 Umläufe als Schleifen

2.5 Netzwerkgraph

Die Verbindung zwischen den Netzwerkelementen kann mit einem *Graphen (Netzwerkgraphen)* beschrieben werden. Der Netzwerkgraph spiegelt die Verbindungsstruktur wieder, ohne Netzwerkelemente zu spezifizieren. Ein Netzwerkgraph wird definiert durch eine *Knotenmenge*

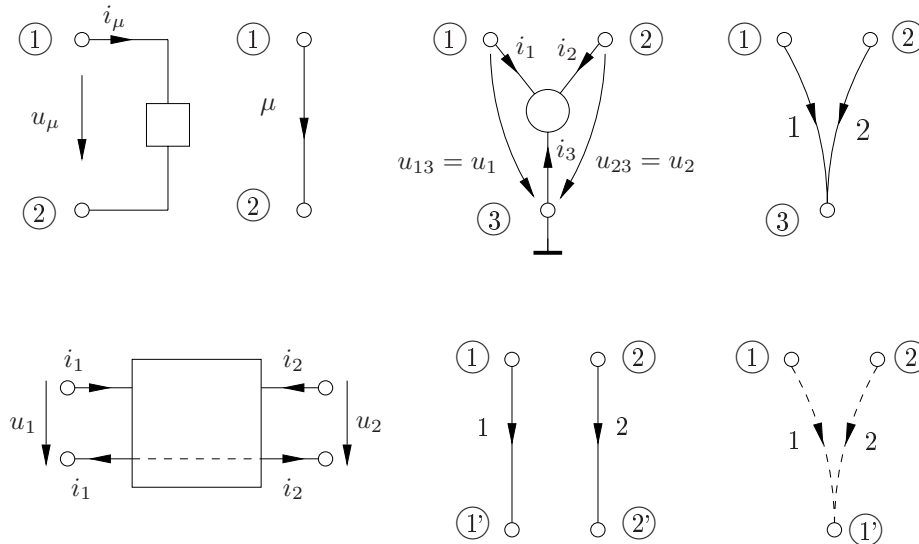


Bild 2.10 Netzwerkelemente und Netzwerkgraphen

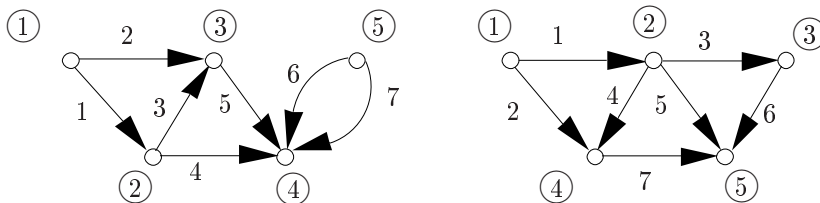


Bild 2.11 Netzwerkgraph der Schaltungen von Bild 2.6 und Bild 2.9

$\{\textcircled{1}, \textcircled{2}, \dots, \textcircled{n}\}$, eine *Zweigmeng*e $\{1, 2, \dots, b\}$ und eine Vorschrift, die jeden Zweig μ einem Knotenpaar $\textcircled{\alpha} \textcircled{\beta}$ zuordnet. Da man jedem Zweig mit den Bezugsrichtungen des Zählpeilsystems eine Richtung zuordnet, handelt es sich um einen *gerichteten Graphen (digraph)*.

Man verwendet assoziierte Zählpfeile, damit gibt die Richtung jedes Zweiges des Graphen die Spannungs- und Strombezugsrichtung an. Die zugehörigen Spannungen heißen *Zweigspannungen* oder *Kantenspannungen*, die zugehörigen Ströme heißen *Zweigströme* oder *Kantenströme*.

2.6 Inzidenzmatrizen

Ein Netzwerkgraph habe n Knoten und b Zweige. Die Matrix A' gibt die Strukturinformation des Netzwerkgraphen tabellarisch wieder.

Für den Graphen (Bild 2.11 links) der Schaltung aus Bild 2.6 lautet diese:

$$A' = \begin{array}{ccccccc} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \end{array} & \begin{array}{l} \text{Knoten} \\ \downarrow \end{array} \\ \text{Zweige} & \rightarrow & \end{array} \quad (2.4)$$

wobei man die einzelnen Elemente nach folgender Regel erhält:

$$a'_{\beta\alpha} = \begin{cases} +1 & \text{Zweig } \alpha \text{ geht von Knoten } \beta \text{ aus} \\ -1 & \text{Zweig } \alpha \text{ führt zum Knoten } \beta \\ 0 & \text{Zweig } \alpha \text{ berührt Knoten } \beta \text{ nicht} \end{cases}$$

A' heißt *Knoteninzidenzmatrix*. Mit A' lassen sich die Kirchhoffschen Knotengleichungen nach den Regeln der Matrixmultiplikation sehr kompakt formulieren:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 + i_2 & & & & & & \\ -i_1 & +i_3 + i_4 & & & & & \\ & -i_2 - i_3 & +i_5 & & & & \\ & & & -i_4 - i_5 - i_6 - i_7 & & & \\ & & & & +i_6 + i_7 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$A' \cdot i = 0$$

A' : $n \times b$ Inzidenzmatrix, i : $b \times 1$ Spaltenvektor

Jede Spalte von A' enthält genau ein Matrixelement $+1$, ein Matrixelement -1 und sonst Nullen. Das heißt, alle Spaltensummen von A' verschwinden. Man kann deshalb jede der n Knotengleichungen (2.5) durch Linearkombination der weiteren $n - 1$ Gleichungen gewinnen. Die n Gleichungen (2.5) sind linear abhängig.

Streicht man nun die zu einem willkürlich gewählten *Bezugsknoten* gehörige Zeile in A' , so ergibt sich die reduzierte Knoteninzidenzmatrix A mit der Dimension $(n - 1) \times b$.

Die verbleibenden Knotengleichungen sind linear unabhängig und lauten kompakt:

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{0}} \quad \text{KCL in Matrixform} \quad (2.6)$$

Drückt man die Zweigspannung der b Zweige durch die Differenz der zugehörigen Knotenspannungen aus, so lässt sich eine ebenso kompakte Matrixform angeben:

$$\begin{array}{l} \text{Zweige} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \downarrow u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{array} = \begin{array}{l} +u_{k1}-u_{k2} \\ +u_{k1} \quad -u_{k3} \\ \quad +u_{k2}-u_{k3} \\ +u_{k2} \quad -u_{k4} \\ \quad +u_{k3}-u_{k4} \\ \quad \quad -u_{k4}+u_{k5} \\ \quad \quad -u_{k4}+u_{k5} \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{l} u_{k1} \\ u_{k2} \\ u_{k3} \\ u_{k4} \\ u_{k5} \end{array} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}' \cdot \mathbf{u}'_k$$

wobei für die Elemente von \mathbf{M}' gilt:

$$m'_{\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \text{Zweig } \alpha \text{ geht von Knoten } \beta \text{ aus} \\ -1 & \text{Zweig } \alpha \text{ führt zum Knoten } \beta \\ 0 & \text{Zweig } \alpha \text{ berührt Knoten } \beta \text{ nicht} \end{cases}$$

Aus der Konstruktionsvorschrift für die Matrix \mathbf{M} folgt:

$$m'_{\beta\alpha} = a'_{\alpha\beta}$$

und damit:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{A}'^T$$

Ordnet man dem Bezugsknoten das Potential 0V zu, so kann man die entsprechende Spalte von \mathbf{M}' streichen. Damit erhält man ein kompaktes Kirchhoffsches Spannungsgesetz:

$$\boxed{\mathbf{u} - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{u}_k = \mathbf{0}} \quad \text{KVL in Matrixform} \quad (2.8)$$

Jede Gleichung in Gl.(2.8) besagt, dass die algebraische Summe der Spannungen eines geschlossenen Umlaufs, bestehend aus zwei durch einen Zweig verbundenen Knoten und dem Bezugsknoten, verschwindet. Ist in dem Netzwerk jeder Knoten mit dem Bezugsknoten über einen Zweig verbunden, so sind alle Umläufe Schleifen.

2.7 Linearität der Kirchhoffschen Gleichungen

Die Vektoren \mathbf{u} der möglichen Zweigspannungen besitzen eine bemerkenswerte Eigenschaft: Die gewichtete Summe zweier Lösungen $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}$, ist wieder eine Lösung, da sie wieder dem Kirchhoffschen Spannungsgesetz ($\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{u}_k, \frac{1}{V} \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n-1}$) gehorcht:

$$\alpha \cdot \mathbf{u}^{(1)} + \beta \cdot \mathbf{u}^{(2)} = \alpha \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{u}_k^{(1)} + \beta \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{u}_k^{(2)} = \mathbf{A}^T \cdot \left(\alpha \cdot \mathbf{u}_k^{(1)} + \beta \cdot \mathbf{u}_k^{(2)} \right),$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Dieselbe Aussage gilt auch für die Lösungsvektoren der Zweigströme:

$$\mathbf{A} \left(\alpha \cdot \mathbf{i}^{(1)} + \beta \cdot \mathbf{i}^{(2)} \right) = \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}^{(1)} + \beta \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}^{(2)} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Damit erfüllen die Spannungs- und Stromvektoren an einem elektrischen Netzwerk gerade die Eigenschaften, die in der Mathematik als Abgeschlossenheitsaxiome von Vektorräumen definiert sind. Insbesondere ist die Linearkombination zweier Lösungen wieder in der Lösungsmenge enthalten.

3. Resistive Eintore

Ein *resistives Eintor*, *resistiver Zweipol* oder *Widerstand* ist ein Eintor, dessen Klemmengrößen oder *Betriebsgrößen* $u(t)$ und $i(t)$ zu jedem Zeitpunkt t in einer Relation $\mathcal{F}(t)$ zueinander stehen, die nur vom Zeitpunkt t , nicht aber von der genauen Vorgeschichte (den Betriebsgrößen zu früheren Zeitpunkten) abhängt.¹ Bild 3.1 zeigt das Elementsymbol eines resistiven Eintores $\mathcal{F}(t)$, und die zur Definition seines elektrischen Verhaltens dienenden Zählpfeile. Können zum

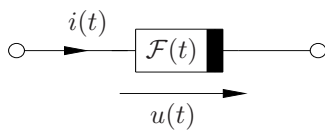


Bild 3.1 Das Elementsymbol eines resistiven Eintores \mathcal{F}

Zeitpunkt t gleichzeitig ein Strom $i(t)$ fließen und eine Spannung $u(t)$ anliegen, so heißt das Paar $(u(t), i(t))$ ein (*zulässiger*) *Betriebspunkt* von $\mathcal{F}(t)$ zum Zeitpunkt t . Bei festem t stellen alle derartigen Paare eine Teilmenge $\mathcal{F}(t)$ der Betriebsebene oder *u-i-Ebene* dar, wobei:

$$\mathcal{F}_{ui} = \left\{ (u, i) \mid \frac{u}{V} \in \mathbb{R} \wedge \frac{i}{A} \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.1)$$

\mathcal{F}_{ui} besitzt die Struktur eines zweidimensionalen reellen Vektorraumes und wird daher oft äquivalent explizit als solcher aufgefasst, wobei die Betriebspunkte einer Kennlinie dann entsprechend als Vektoren $\begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix}$ geschrieben werden:

$$\mathcal{F}_{ui} = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} \mid \frac{u}{V} \in \mathbb{R} \wedge \frac{i}{A} \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.2)$$

$\mathcal{F}(t)$ wird dann *Kennlinie* (von \mathcal{F}) *zum Zeitpunkt* t bezeichnet:

$$\mathcal{F}(t) = \{(u(t), i(t)) \mid (u(t), i(t)) \text{ ist Betriebspunkt von } \mathcal{F} \text{ zum Zeitpunkt } t\} \quad (3.3)$$

Wie schon die Verwendung des gleichen Symbols $\mathcal{F}(t)$ andeutet, muss für die Zwecke der Schaltungstechnik nicht zwischen einem Netzwerkelement und seiner Kennlinie unterschieden werden.

Oft ergibt sich für alle Zeitpunkte dieselbe Kennlinie, das Eintor heißt dann *zeitinvariant* (im Gegensatz zu *zeitvariant*). Man muss dann nirgendwo mehr auf die Zeit Bezug nehmen und kann einfacher sagen: Die *Kennlinie* \mathcal{F} des Eintores \mathcal{F} ist die Menge seiner Betriebspunkte:

$$\mathcal{F} = \{(u, i) \mid (u, i) \text{ ist Betriebspunkt von } \mathcal{F}\} \quad (3.4)$$

Alle in der Schaltungstechnik behandelten Kennlinien sind dabei formal als reine Definitionen aufzufassen. Die ausnahmslos vorhandene und oft explizit angegebene Entsprechung zu in der Praxis auftretenden Bauelementen oder Anschlusstoren größerer Schaltungen bildet zwar den

¹Es gibt auch noch sogenannte *gedächtnisbehaftete Netzwerkelemente*, deren Verhalten auch noch von Klemmenströmen und -spannungen zu früheren Zeitpunkten mitbeeinflusst wird, wie Spulen und Kondensatoren.

Bezug zur Anwendung, ist aber für einen konsistenten Aufbau der Theorie weder notwendig noch überhaupt in exakter Weise verwendbar, da kein mathematisches Modell ein reales Bauteil vollständig beschreiben kann.

Dies erlaubt einen Aufbau der schaltungstechnischen Theorie, die weitgehend unabhängig von den genauen Eigenschaften der tatsächlich angewandten Bauelemente ist und dadurch unbeeinflusst von technischen Fortschritten anwendbar bleibt: Bedeutungsschwerpunkte mögen sich vielleicht verschieben, aber einmal bewiesene Ergebnisse bleiben zeitlos gültig.

3.1 Modellierung

Eine Kennlinie $\mathcal{F}(t)$ soll meist ein *Modell* des elektrischen Verhaltens eines real existierenden Bauelements darstellen: Eine möglichst einfache mathematische Beschreibung, die in guter Übereinstimmung mit im Labor am realen Bauelement durchführbaren Messungen steht. Modelle sind notgedrungen immer Näherungen, und oft verwendet man bei verschiedenen Berechnungen verschiedene Modelle für ein und dasselbe Bauelement, je nach der gerade erforderlichen Genauigkeit.

Als Beispiel zur Modellierung eines resistiven Eintores soll im folgenden anhand einer Photodiode (deren Elementsymbol in Bild 3.2 abgebildet ist) gezeigt werden, wie man aufgrund von Messungen am realen Bauelement eine mathematische Modellbeschreibung erstellen kann. Da

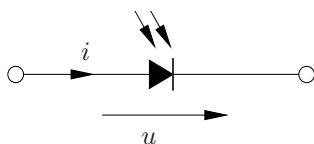


Bild 3.2 Das Elementsymbol einer Photodiode

zu einem einzigen Zeitpunkt auch nur eine einzige Messung durchgeführt werden kann, sind reproduzierbare Messungen zunächst nur bei zeitinvarianten Bauelementen denkbar. Dies stellt aber dennoch kein Problem dar: Zeitvarianz wurde nämlich eingeführt, um die Abhängigkeit des Verhaltens vieler realer Bauelemente von Umwelteinflüssen wie Temperatur, Feuchtigkeit oder Lichteinfall auf eine einheitliche Art und Weise berücksichtigen zu können, indem man nicht alle diese Umgebungsbedingungen einzeln aufführt, sondern man einfach das Bauelement zu jedem Zeitpunkt t durch seine, allen dann wirksamen Umgebungseinflüssen entsprechende, Kennlinie $\mathcal{F}(t)$ beschreibt.

Man kann folglich eine angenäherte Zeitinvarianz durch sorgfältiges Konstanthalten aller Umgebungsbedingungen erreichen. Bei der Photodiode genügt es beispielsweise, sie in einen lichtundurchlässigen schwarzen Kasten mit geregelter Innentemperatur zu stecken.

Bild 3.3 zeigt die Ergebnisse vieler Messungen als Betriebspunkte in die $u - i$ -Ebene eingezeichnet, sowie eine glatte Kurve, die durch ein als *curve-fitting* bezeichnetes Verfahren diesen Messergebnissen angepasst wurde und damit ein erstes Modell der Kennlinie der Photodiode darstellt. Die eingezeichnete Kennlinie wird durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$i = 10\mu\text{A} \cdot (e^{u/25\text{mV}} - 1)$$

Es fand also eine Idealisierung statt: Das komplizierte Bauelement Photodiode wird nun durch eine einfache algebraische Beziehung zwischen u und i als resistives Eintor beschrieben.

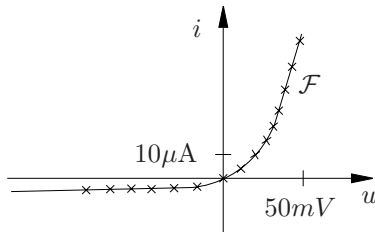


Bild 3.3 Gemessene Betriebspunkte und eine idealisierte Kennlinie einer Photodiode

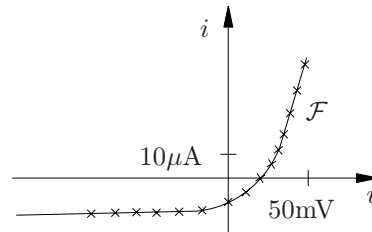


Bild 3.4 Die idealisierte Kennlinie der mit 100 lx beleuchteten Photodiode

Nun soll die Messreihe mit dem Unterschied wiederholt werden, dass die Diode innerhalb ihres temperaturgeregelten Kastens mit einer Stärke von 100 lx beleuchtet wird. Das Ergebnis dieser zweiten Messreihe ist in Bild 3.4 zu sehen.

Die neue angepasste Kennlinie hat die Gestalt:

$$i = 10\mu\text{A} \cdot (e^{u/25\text{mV}} - 2)$$

Offensichtlich wird das elektrische Verhalten der Photodiode von der Umgebungsgröße "Beleuchtung" beeinflusst. Durch viele weitere Messreihen kommt man schließlich zu einem detaillierteren Modell, das die Beleuchtungsstärke L als Parameter beinhaltet:

$$i = 10\mu\text{A} \cdot (e^{u/25\text{mV}} - 1 - \frac{L}{100\text{lx}})$$

Ersetzt man nun L durch einen bekannten oder postulierten Zeitverlauf $L(t)$, so entsteht daraus eine andere Kennliniengleichung, deren Parameter die Zeit t ist:

$$i(t) = 10\mu\text{A} \cdot (e^{u(t)/25\text{mV}} - 1 - \frac{L(t)}{100\text{lx}})$$

Dies stellt schließlich das Modell der Photodiode als zeitvariantes Element dar.

Die Zahlenwerte dieses Beispiels entsprechen ungefähr denen der Germanium-Photodiode APY 12. Da sich andere Photodioden ähnlich verhalten, arbeitet man praktisch meist mit einer Beschreibung in rein abstrakten Variablen. Gebräuchlich ist beispielsweise:

$$i(t) = I_s \cdot (e^{u(t)/U_T} - 1) - i_L(t)$$

wobei $i_L(t)$ der sogenannte Photostrom ist. In dem obigen Beispiel hätte er die Form:

$$i_L(t) = 100\text{nA}\text{lx}^{-1} \cdot L(t)$$

3.2 Algebraische Beschreibungsformen

Die rein topologische Auffassung eines resistiven Eintores als eine Menge von Betriebspunkten ist extrem allgemein. Die meisten Kennlinien sind allerdings tatsächlich Kurven, man kann dann

auf eine zum Durchführen von Berechnungen weitaus geeignetere algebraische Beschreibung übergehen.

Im folgenden werden die drei wesentlichen algebraischen Beschreibungsformen für den zeitinvarianten Fall vorgestellt: In abstrakter Form für ein allgemeines resistives Eintor \mathcal{F} , und konkret anhand eines Beispieleintores \mathcal{G} , dessen Betriebspunkte der Gleichung

$$\frac{i}{i_0} = \arctan \frac{u}{u_0}$$

genügen und das somit die in Bild 3.5 gezeigte Kennlinie besitzt. Die einfache Verallgemeinerung auf zeitvariable Kennlinien muss hier nicht näher beschrieben werden.

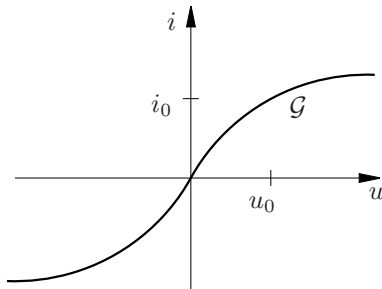


Bild 3.5 Eine Beispielkennlinie

3.2.1 Implizite Darstellung

Man kann die Kennlinie von \mathcal{F} als die Nullstellenmenge einer *konstituierenden Funktion* $f_{\mathcal{F}}$ darstellen:

$$\mathcal{F} = \{(u, i) | f_{\mathcal{F}}(u, i) = 0\} \quad (3.5)$$

\mathcal{F} wird damit durch eine einzige Gleichung beschrieben, eine *implizite Darstellung*:

$$f_{\mathcal{F}}(u, i) = 0 \quad (3.6)$$

Eine konstituierende Funktion des Beispiels \mathcal{G} ist:

$$f_{\mathcal{G}}(u, i) = \left(\frac{i}{i_0} - \arctan \frac{u}{u_0} \right)$$

was man durch Umformung der für \mathcal{G} gegebenen Gleichung in

$$\frac{i}{i_0} - \arctan \frac{u}{u_0} = 0$$

sofort erkennt.

Implizite Darstellungen sind nicht eindeutig: Jede andere Funktion, die dieselben Nullstellen liefert, ist ebenfalls zur Beschreibung der Kennlinie geeignet. Wendet man beispielsweise die Äquivalenz

$$x = 0 \iff e^x - 1 = 0$$

auf Gl.(3.6) an, so erhält man eine andere implizite Darstellung derselben Kennlinie:

$$e^{f_{\mathcal{F}}(u, i)} - 1 = 0$$

Implizite Darstellungen sind oft unpraktisch. Da aber bei manchen Kennlinien keine andere algebraische Beschreibung in geschlossener Form existiert, kann man nicht gänzlich auf sie verzichten.

3.2.2 Parameterdarstellung

Bei einer *Parameterdarstellung* führt man eine zusätzliche Variable $\lambda \in \mathbb{R}$ ein, den *Parameter*, und drückt die Betriebsgrößen u und i durch diesen aus:

$$u = u_{\mathcal{F}}(\lambda) \quad (3.7)$$

$$i = i_{\mathcal{F}}(\lambda) \quad (3.8)$$

Dabei muss jedes einem einzigen Parameterwert λ zugeordnete Betriebsgrößenpaar einen Betriebspunkt darstellen:

$$\forall \lambda : (u_{\mathcal{F}}(\lambda), i_{\mathcal{F}}(\lambda)) \in \mathcal{F} \quad (3.9)$$

Die Kennlinie \mathcal{F} kann dann auch umgekehrt beschrieben werden durch:

$$\mathcal{F} = \{(u_{\mathcal{F}}(\lambda), i_{\mathcal{F}}(\lambda)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (3.10)$$

Im Beispiel \mathcal{G} kann man als naheliegenden Parameter den Winkel φ wählen, wobei:

$$\varphi = \frac{i}{i_0} \quad \text{und damit:} \quad \frac{u}{u_0} = \tan \varphi$$

Damit man wirklich nur die in Bild 3.5 gezeigte Kennlinie erhält, und nicht alle parallel übereinander liegenden Äste der Umkehrrelation der Tangensfunktion, muss zusätzlich noch der Definitionsbereich des Parameters φ eingeschränkt werden:

$$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$$

Als *Strom-* und *Spannungsfunktion* der entsprechenden Parameterdarstellung von \mathcal{G} erhält man:

$$i_{\mathcal{G}}(\varphi) = i_0 \varphi$$

$$u_{\mathcal{G}}(\varphi) = u_0 \tan \varphi$$

Auch Parameterdarstellungen sind nicht eindeutig. Wenn man aber den Parameter wie im hier gezeigten Beispiel so wählt, dass die Funktionen $u_{\mathcal{F}}$ und $i_{\mathcal{F}}$ stetig und (falls möglich) differenzierbar sind, kann man mit ihnen trotzdem bereits relativ bequem arbeiten.

3.2.3 Explizite Darstellungen

Bei expliziten Darstellungen wird eine Betriebsgröße als Funktion der jeweils anderen ausgedrückt. Das Argument dieser Funktion heißt dann die *steuernde* Größe. Sobald diese fest gewählt ist, ist die entsprechende explizite Darstellung (sofern sie existiert) eindeutig festgelegt. Bei Eintoren gibt es somit zwei explizite Darstellungen:

Oft kann der Strom i als eine Funktion der Spannung u dargestellt werden:

$$i = g_{\mathcal{F}}(u) \quad (3.11)$$

\mathcal{F} heißt dann *spannungsgesteuert*, und $g_{\mathcal{F}}$ ist seine *Leitwertsdarstellung*.

Umgekehrt kann auch u eine Funktion $r_{\mathcal{F}}$ von i sein:

$$u = r_{\mathcal{F}}(i) \quad (3.12)$$

\mathcal{F} heißt dann *stromgesteuert*, und $r_{\mathcal{F}}$ ist seine *Widerstandsdarstellung*.

Die Leitwertsdarstellung des Beispiels \mathcal{G} ist die Funktion:

$$g_{\mathcal{G}}(u) = i_0 \arctan \frac{u}{u_0}$$

Die Widerstandsdarstellung erhält man entsprechend zu:

$$r_{\mathcal{G}}(i) = u_0 \tan \frac{i}{i_0}$$

wobei der Definitionsbereich des Stroms i (ähnlich wie oben bei der Parameterdarstellung abhängig von φ) eingeschränkt werden muss:

$$i \in \left(-\frac{\pi}{2}i_0, +\frac{\pi}{2}i_0 \right)$$

Explizite Darstellungen sind in der praktischen Arbeit meist am einfachsten handzuhaben.

3.3 Eigenschaften resistiver Eintore

Viele resistive Eintore genügen zusätzlichen Bedingungen. Einige dieser besonderen Eigenschaften werden im Folgenden sowohl in topologischer (Mengen-) als auch in algebraischer (Formel-) Schreibweise vorgestellt.

3.3.1 Polung

Ein resistives Eintor \mathcal{F} heißt *ungepolt* oder *bilateral* (im Gegensatz zu *gepolt* und *unilateral*), wenn seine Kennlinie punktsymmetrisch zum Ursprung ist:

$$\forall (u, i) \in \mathcal{F} : (-u, -i) \in \mathcal{F} \quad (3.13)$$

oder äquivalent:

$$f(u, i) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(-u, -i) = 0 \quad (3.14)$$

Dies bedeutet, dass man die beiden Klemmen des resistiven Eintores vertauschen kann, ohne sein Verhalten zu ändern. Ungepolte Eintore erhalten daher auch symmetrische Elementsymbole.

3.3.2 Leistungsbedarf

Durch Messung der kalorischen Stromwärme stellt man fest, dass man die in einem resistiven Eintor \mathcal{F} *verbrauchte* (also in Wärme umgesetzte) *Leistung* $p(t) > 0$ durch

$$p(t) = u(t)i(t) \quad (3.15)$$

angeben kann. Entsprechend definiert man dann auch eine von \mathcal{F} *abgegebene Leistung* $p(t) < 0$.

\mathcal{F} heißt dann *aktiv*, wenn es mindestens einen Betriebspunkt besitzt, in dem es Leistung abgibt:

$$(\exists(u, i) \in \mathcal{F} : ui < 0) \iff \mathcal{F} \text{ ist aktiv} \quad (3.16)$$

und *passiv*, wenn dies nicht der Fall ist:

$$(\forall(u, i) \in \mathcal{F} : ui \geq 0) \iff \mathcal{F} \text{ ist passiv} \quad (3.17)$$

Die Kennlinie passiver resistiver Eintore verläuft nur durch den I. und III. Quadranten und auf den Koordinatenachsen.

Des weiteren heißt \mathcal{F} *verlustfrei* wenn die in allen Betriebspunkten umgesetzte Leistung 0W ist, also:

$$(\forall(u, i) \in \mathcal{F} : ui = 0) \iff \mathcal{F} \text{ ist verlustfrei} \quad (3.18)$$

und *verlustbehaftet*, wenn dies nicht der Fall ist:

$$(\exists(u, i) \in \mathcal{F} : ui \neq 0) \iff \mathcal{F} \text{ ist verlustbehaftet} \quad (3.19)$$

Verlustfreie resistive Eintore sind passiv, ihre Kennlinie liegt ganz auf den Koordinatenachsen.

3.3.3 Quellenfreiheit

Ein resistives Eintor heißt schließlich *quellenfrei*, wenn seine Kennlinie den Ursprung der $u - i$ -Ebene enthält:

$$(0, 0) \in \mathcal{F} \iff \mathcal{F} \text{ ist quellenfrei} \quad (3.20)$$

3.3.4 Dualität

Gegeben sei eine Konstante R_d mit der Einheit $\frac{V}{A}$. Zwei resistive Eintore \mathcal{F} und \mathcal{F}^d heißen *zueinander dual* bezüglich der *Dualitätskonstante* R_d , wenn:

$$\forall(u, i) : \left((u, i) \in \mathcal{F} \iff (R_d i, \frac{u}{R_d}) \in \mathcal{F}^d \right) \quad (3.21)$$

oder äquivalent:

$$\forall(u, i) : \left(f(u, i) = 0 \iff f^d(u, i) := f(R_d i, \frac{u}{R_d}) = 0 \right) \quad (3.22)$$

Man erhält also die Kennlinie von \mathcal{F}^d aus der von \mathcal{F} (und umgekehrt), indem man u und i vertauscht und so mit der Dualitätskonstante verrechnet, dass sich wieder die richtigen Einheiten ergeben.

Skaliert man das $u - i$ -Diagramm so, dass die Gerade $u = R_d i$ seine Winkelhalbierende wird, so gehen die Kennlinien von \mathcal{F} und \mathcal{F}^d durch Spiegelung an dieser Geraden ineinander über:

Viele Eigenschaften von \mathcal{F} lassen sich einfach auf das duale Eintor übertragen:

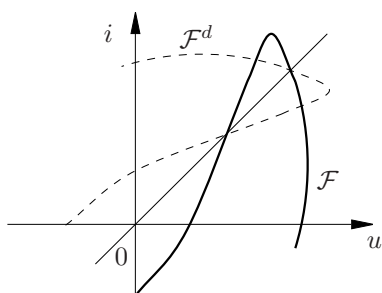


Bild 3.6 Zwei zueinander duale Kennlinien

- Ist \mathcal{F} spannungsgesteuert, so ist \mathcal{F}^d stromgesteuert.
- Ist \mathcal{F} stromgesteuert, so ist \mathcal{F}^d spannungsgesteuert.
- Ist \mathcal{F} ungepolt, so ist es \mathcal{F}^d auch.
- Ist \mathcal{F} passiv oder aktiv, so ist es \mathcal{F}^d auch.
- Ist \mathcal{F} verlustfrei oder verlustbehaftet, so ist es \mathcal{F}^d auch.
- Ist \mathcal{F} zeitvariant oder zeitinvariant, so ist es \mathcal{F}^d auch.

Das Konzept der Dualität wird später auf ganze Schaltungen erweitert werden, und erlaubt dann eine viel weitergehende Einsparung von Arbeit, da man auch bei ganzen zueinander dualen Schaltungen nur immer eine untersuchen muss, und alle Ergebnisse einfach auf die jeweils andere übertragen kann.

3.4 Streng lineare resistive Eintore

Ein resistives Eintor \mathcal{F} heißt *streng linear* wenn:

$$\forall k \in \mathbb{R}, (u, i) \in \mathcal{F} : (ku, ki) \in \mathcal{F} \quad (3.23)$$

$$\forall (u_1, i_1), (u_2, i_2) \in \mathcal{F} : (u_1 + u_2, i_1 + i_2) \in \mathcal{F} \quad (3.24)$$

Wählt man $k = 0$ oder $k = -1$ in Gl.(3.23), so sieht man, dass alle streng linearen Eintore quellenfrei und ungepolt sind.

Wählt man eine Vektorschreibweise und definiert die Multiplikation eines Betriebspunktes $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix}$ mit einer reellen Zahl k , sowie die Summe zweier Betriebspunkte $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$ als:

$$k\mathbf{x} = k \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} ku \\ ki \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ i_1 + i_2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

so kann man die Gleichungen (3.23) und (3.24) gleichwertig auch in der folgenden Form schreiben:

$$\forall k \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathcal{F} : (k\mathbf{x}) \in \mathcal{F} \quad (3.27)$$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{F} : (x_1 + x_2) \in \mathcal{F} \quad (3.28)$$

Dies sind aber die aus der linearen Algebra bekannten Abgeschlossenheitsforderungen an einen reellen Vektorraum, man kann die Definition der strengen Linearität daher auch einfacher fassen:

Ein resistives Eintor heißt *streng linear*, wenn seine Kennlinie ein Untervektorraum der $u - i$ -Ebene ist!

Da auch die Kirchhoffschen Gesetze streng linear sind, sind die streng linearen Netzwerkelemente besonders wichtig. Bei Eintoren gibt es solche mit der Dimension null, eins oder zwei:

3.4.1 Der Nullator

Der *Nullator* ist das streng lineare Netzwerkelement, dessen Kennlinie der Untervektorraum der Dimension null der $u - i$ -Ebene ist, und daher nur aus dem Ursprung besteht:

$$\mathcal{F}_0 = (0, 0) \quad (3.29)$$

Eine äquivalente Beschreibung sind auch die zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ i &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Über die grundsätzlichen Eigenschaften aller streng linearen Netzwerkelemente hinaus ist der Nullator verlustlos und zu sich selbst dual. Bild 3.7 zeigt seine Kennlinie und sein Elementsymbol.

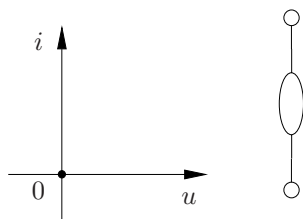


Bild 3.7 Kennlinie und Elementsymbol des Nullators

verwendet. Insbesondere stellt er (wie in Kapitel 6 gezeigt wird) eine sehr gute Beschreibung des Eingangstores von im linearen Bereich betriebenen Operationsverstärkern dar.

3.4.2 Widerstandsgeraden

Die *streng linearen Widerstände* sind in der Praxis extrem wichtig, Bild 3.8 zeigt ihr Elementsymbol. Ihre eindimensionale Kennlinie ist eine Ursprungsgerade, die *Widerstandsgerade*. Die

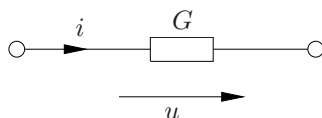


Bild 3.8 Das Elementsymbol eines streng linearen Widerstands

Leitwertsdarstellung eines streng linearen Widerstands ist eine einfache Proportionalität:

$$i = Gu \quad (3.31)$$

Der die Steigung dieser Geraden im $u - i$ -Diagramm angegebende Proportionalitätsfaktor G heißt entsprechend *Leitwert* und kann anhand eines beliebigen Betriebspunktes $(u, i) \neq (0, 0)$ der Kennlinie berechnet werden zu:

$$G = \frac{i}{u} \quad (3.32)$$

Die Einheit des Leitwerts ist das *Siemens* mit dem Formelzeichen S:

$$1\text{S} := \frac{1\text{A}}{1\text{V}} \quad (3.33)$$

Vollkommen analog hat die Widerstandsdarstellung die Gestalt:

$$u = Ri \quad (3.34)$$

wobei der Widerstand R reziprok zum Leitwert ist:

$$R := \frac{1}{G} = \frac{u}{i} \quad (3.35)$$

Seine Einheit ist das zum Siemens reziproke *Ohm* mit dem Formelzeichen Ω :

$$1\Omega := \frac{1\text{V}}{1\text{A}} \quad (3.36)$$

Bei streng linearen Widerständen ist es üblich, das Elementsymbol in Schaltplänen einfach mit dem Leitwert oder Widerstand zu bezeichnen. Welche dieser beiden Alternativen gemeint ist, deutet entweder der gewählte Formelbuchstabe R oder G an, oder (bei Zahlenangaben) die Einheit.

Das zu einem Leitwert G duale Element ist der *duale Leitwert* G^d mit dem Wert:

$$G^d = \frac{1}{R_d^2 G} \quad (3.37)$$

Der zu R duale Widerstand R^d berechnet sich analog zu:

$$R^d = \frac{R_d^2}{R} \quad (3.38)$$

3.4.2.1 Die trivialen Widerstandsgeraden

Zwei wichtige Spezialfälle sind die *trivialen Widerstandsgeraden*:

Der in Bild 3.9 gezeigte *Leerlauf* hat den Leitwert 0S und wird beschrieben durch:

$$i = 0 \quad (3.39)$$

Seine Widerstandsdarstellung existiert nicht.

Bei dem zum Leerlauf dualen *Kurzschluss* (Bild 3.10) existiert die Leitwertsdarstellung nicht. Er hat den Widerstandswert 0Ω und die explizite Beschreibung:

$$u = 0 \quad (3.40)$$

Man kann aber auch bei den trivialen Widerstandsgeraden noch an der praktischen Reziprozität Gl.(3.35) von R und G festhalten, wenn man zusätzlich den Wert ∞ als Steigung senkrechter Kennlinien zulässt und (nur für diesen speziellen Zweck!!!!) definiert:

$$0 := \frac{1}{\infty} \quad \text{und} \quad \infty := \frac{1}{0} \quad (3.41)$$

Damit erhält der Leerlauf den Widerstand $\infty\Omega$, und der Kurzschluss den Leitwert ∞S zugeordnet.

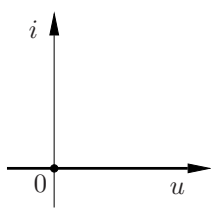


Bild 3.9 Die Kennlinie und Elementsymbol des Leerlaufs

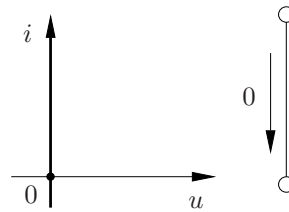


Bild 3.10 Die Kennlinie und Elementsymbol des Kurzschlusses

3.4.2.2 Ohmsche Widerstände

Eine passive Widerstandsgerade heißt Ohmscher Widerstand, und genügt den Bedingungen:

$$\infty \geq G \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \infty \geq R \geq 0 \quad (3.42)$$

Die Grenzfälle Kurzschluss und Leerlauf sind sogar verlustlos. Der Ohmsche Widerstand ent-

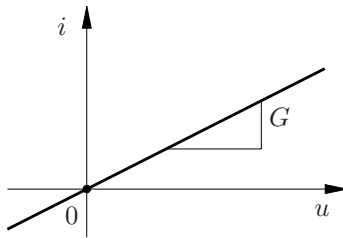


Bild 3.11 Die Kennlinie eines ohmschen Widerstands

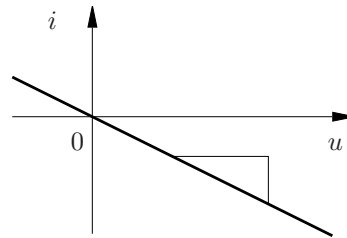


Bild 3.12 Die Kennlinie eines negativen Widerstands

spricht dem Modell vieler elektrischer *Verbraucher*: Zweipolen, die elektrische Leistung strikt aufnehmen und sie in Wärme oder eine andere nichtelektrische Energieform umwandeln.

3.4.2.3 Negative Widerstände

Nicht ohmsche streng lineare Widerstände sind aktiv und heißen *Negative Widerstände*, da für sie:

$$-\infty < G < 0 \quad \text{bzw.} \quad -\infty < R < 0 \quad \text{gilt} \quad (3.43)$$

Eine typische Kennlinie sieht man in Bild 3.12.

3.4.2.4 Zeitvariante Ohmsche Widerstände

Der Widerstands- und Leitwert *zeitvarianter Widerstände* ist zeitabhängig:

$$R(t) = \frac{u(t)}{i(t)}, \quad G(t) = \frac{i(t)}{u(t)}$$

wobei $(u(t), i(t)) \neq (0, 0)$ ein beliebiger Punkt auf der Kennlinie ist.

Mit zeitvarianten Widerständen modelliert man Elemente, die in guter Näherung streng linear sind, deren Verhalten aber maßgeblich von nichtelektrischen Umgebungsbedingungen beeinflusst wird. Sie werden daher oft für Messzwecke eingesetzt: Ein temperaturabhängiger Widerstand beispielsweise kann zur Umsetzung eines zeitabhängigen Temperaturverlaufs in eine zeitabhängige elektrische Größe eingesetzt werden, also zur Bildung eines Signals beitragen.

3.4.2.5 Schalter

Ein *Schalter* ist ein spezieller zeitvarianter Widerstand, der sich zu jedem Zeitpunkt immer entweder wie ein Kurzschluss (man sagt: er ist *geschlossen*) oder wie ein Leerlauf (man sagt: er ist *offen*) verhält. Bild 3.13 zeigt sein Elementsymbol. Bei Verwendung von Schaltern muss man

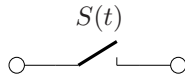


Bild 3.13 Das Elementsymbol eines idealen Schalters

immer eindeutig angeben, wann sie welchen Zustand haben. Dies geschieht durch die Angabe einer für alle Zeitpunkte t definierten Schaltfunktion $S(t)$:

$$S(t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn der Schalter geschlossen ist} \\ 0 & \text{wenn der Schalter offen ist} \end{cases} \quad (3.44)$$

Schalter sind immer linear, verlustfrei und ungepolt. Der zu einem Schalter duale Zweipol ist ein Schalter, der sich zu jedem Zeitpunkt im entgegengesetzten Zustand befindet. Man definiert daher die zu $S(t)$ *duale Schaltfunktion* $S^d(t)$ als:

$$S^d(t) = 1 - S(t) \quad (3.45)$$

In der Praxis kommen häufig *periodische Schalter* vor, die immer strikt abwechselnd für eine konstante Zeitspanne t_0 geschlossen und t_1 offen sind. Bild 3.14 zeigt eine entsprechende Schaltfunktion. Die Zeit $T := t_0 + t_1$ ist die Periodendauer.

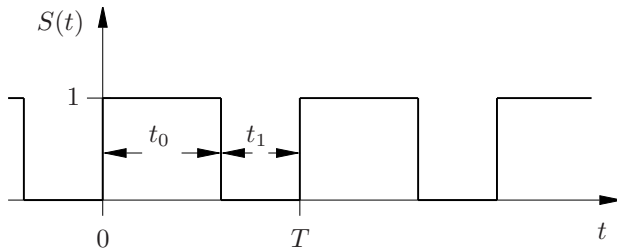


Bild 3.14 Eine Schaltfunktion eines periodischen Schalters

3.4.3 Der Norator

Der *Norator* schließlich ist der streng lineare resistive Zweipol, dessen Kennlinie zweidimensional ist und damit die ganze $u - i$ -Ebene überdeckt:

$$\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_{ui} \quad (3.46)$$

Zu seiner Beschreibung ist keine Gleichung nötig, da alle Betriebspunkte zulässig sind.

Der Norator ist aktiv und zu sich selbst dual; Bild 3.15 zeigt seine Kennlinie und sein Elementsymbol. Zusammen mit dem Nullator wird auch der Norator häufig in idealisierten Modellen verwendet, insbesondere auch als Modell des Ausgangstores eines linear betriebenen Operationsverstärkers.

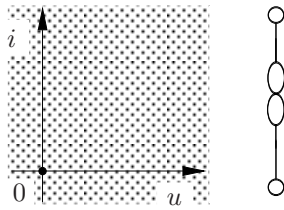


Bild 3.15 Kennlinie und Elementsymbol des Norators

3.5 Resistive Diodenmodelle

Halbleiterbauelemente können, sofern sie in hinreichend langsame Schaltungen eingebettet werden, gut als resistive Elemente modelliert werden. Den Eigenschaften der realen Halbleiter entsprechend sind sie meist zeitinvariant, gepolt, quellenfrei und passiv.

Die wichtigste Klasse zweipoliger Halbleiter sind die *Dioden*, die durch eine Kontaktzone entgegengesetzt dotierter Halbleiter gebildet werden. Durch unterschiedliche Herstellungsprozesse kann man für unterschiedliche Anwendungen optimierte Dioden produzieren, von denen einige an dieser Stelle vorgestellt werden sollen.

Das Elementsymbol einer Diode enthält immer ein auffälliges gleichseitiges Dreieck, dessen Orientierung die Zählpfeilrichtungen andeutet, bezüglich derer die Kennlinie definiert ist.

3.5.1 pn-Dioden

Die einfachste Diode ist die in Bild 3.16 zusammen mit ihrer Kennlinie dargestellte *pn-Diode*.

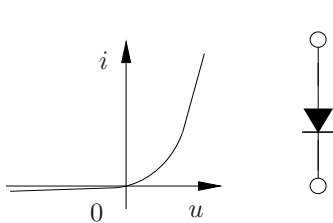


Bild 3.16 Kennlinie und Elementsymbol einer pn-Diode

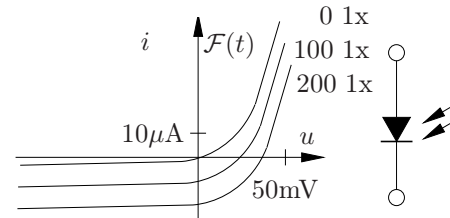


Bild 3.17 Kennlinienfeld und Elementsymbol einer Photodiode

Es fließt nur bei positiver Vorspannung ein nennenswerter Strom, die Diode ist dann *durchlässig*, die Richtung des Stromflusses ist die *Durchlassrichtung*. Bei negativer Vorspannung *sperrt* die Diode, es fließt nur ein extrem geringer *Sperrstrom* in *Sperrrichtung*.

Die pn-Diode ist sowohl spannungs- als auch stromgesteuert; in Leitwerts- und der dazu inversen Widerstandsdarstellung wird ihre Kennlinie analytisch beschrieben durch:

$$\begin{aligned}
 i &= I_s(e^{u/U_T} - 1) \\
 u &= U_T \ln \left(\frac{i}{I_s} + 1 \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.47}$$

I_s ist der *Sperrstrom* der Diode, und U_T die *Temperaturspannung*:

$$U_T = \frac{kT}{e}$$

Die dadurch indirekt gegebene Temperaturabhängigkeit der Kennlinie soll hier aber im allgemeinen nicht berücksichtigt werden. Bei Raumtemperatur hat U_T einen Wert von ungefähr 25 mV. Der Sperrstrom einer typischen Diode liegt im Bereich von pA.

3.5.2 Photodioden

Die Kennlinie einer *Photodiode* entspricht prinzipiell der im $u - i$ -Diagramm um den beleuchtungsabhängigen *Photostrom* i_L nach unten verschobenen Kennlinie einer pn-Diode. Als zeitvarianten Modell dient üblicherweise die schon anhand des in 3.1 diskutierten Beispiels eingeführte Gleichung:

$$i(t) = I_s \cdot (e^{u(t)/U_T} - 1) - i_L(t) \quad (3.48)$$

Zur übersichtlichen Darstellung des Verhaltens zeitvarianter Eintore verwendet man oft ein *Kennlinienfeld*: Ein Diagramm, in das gleich mehrere Kennlinien des Elements eingezeichnet sind, von denen jede einem bestimmten Wert der maßgeblichen Einflussgröße entspricht.

Bild 3.17 zeigt entsprechend ein beleuchtungsabhängiges Kennlinienfeld der Photodiode APY 12.

In der Praxis gibt es zwei prinzipielle Ausführungsformen: Die eigentlichen Photodioden werden, in Sperrrichtung betrieben, für Mess- und Übertragungszwecke eingesetzt, während *Solarzellen* im aktiven Bereich betrieben werden und ihre Beschaltung mit elektrischer Leistung versorgen.

3.5.3 Zener-Dioden

Bild 3.18 zeigt Kennlinie und Elementsymbol einer Zener-Diode: Unterhalb der sehr präzise

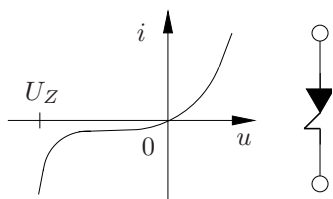


Bild 3.18 Kennlinienfeld und Elementsymbol einer Zener-Diode

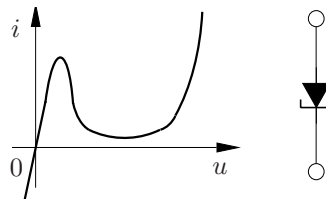


Bild 3.19 Kennlinienfeld und Elementsymbol einer Tunnelodiode

bestimmten *Zener-Spannung* U_Z fließt ein sehr großer Strom. Diesen Effekt bezeichnet man als *Zener-Effekt* oder *Zener-Durchbruch*. Zener-Dioden werden im Bereich dieses Durchbruchs betrieben, beispielsweise als billige Spannungsnormale.

3.5.4 Tunnelioden

Die Kennlinie einer *Tunnelodiode* wie der in Bild 3.19 dargestellten besitzt schließlich als Besonderheit einen Teil mit negativer Steigung. Tunnelioden sind daher nicht mehr stromgesteuert.

3.6 Eintorgrundschaltungen

Bevor man bei der Analyse einer Schaltung mit dem Aufstellen eines vollständigen Gleichungssystems beginnt, lohnt es sich oft, die Schaltung zuerst durch Zusammenfassen miteinander verschalteter resistiver Netzwerkelemente zu vereinfachen.

Als allgemeines Werkzeug hierfür dient die folgende Diskussion der Eintorgrundschaltungen, von denen sich jede insgesamt wie ein einziges Eintor verhält.

3.6.1 Umpolung

Die Kennlinie eines resistiven Eintores \mathcal{F} ist meist bezüglich eines fest vereinbarten Zählpfeilsystems gegeben, dessen Orientierung (wie in Bild 3.1) bereits durch das Elementsymbol klar ausgedrückt wird. Manchmal ist es aber zweckmäßig, das Element durch gerade entgegengesetzt gerichtete Zählpfeile zu beschreiben. In diesem Fall führt man eine neue Kennlinie $\bar{\mathcal{F}}$ ein, die *Umpolung* von \mathcal{F} , die bezüglich dieser umgedrehten Zählpfeile definiert ist. Bild 3.20 zeigt

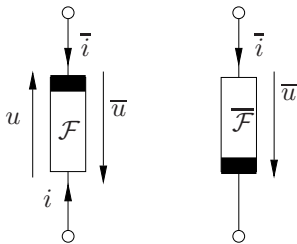


Bild 3.20 Ein resistives Eintor \mathcal{F} mit zwei entgegengesetzten Zählpfeilsystemen, und seine Umpolung $\bar{\mathcal{F}}$

ein Eintor \mathcal{F} , dessen Kennlinie konsistent zu Bild 3.1 bezüglich der Größen u und i definiert ist, das aber nun durch \bar{u} und \bar{i} beschrieben und als das rechts abgebildete Element mit der Kennlinie $\bar{\mathcal{F}}$ aufgefasst werden soll. Der einfache Zusammenhang zwischen den beiden Zählpfeilsystemen wird dann durch die Kirchhoffschen Gesetze bestimmt:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= -u \\ \bar{i} &= -i\end{aligned}$$

Da die Zählpfeile der quergestrichenen Größen passend (vergleiche Bild 3.1) zum umgedrehten Eintor orientiert sind, kann man einfach durch die folgende Substitution zu dessen Kennlinie übergehen, die (graphisch interpretiert) einer Rotation um 180° um den Ursprung der $u - i$ -Ebene entspricht:

$$(u, i) \in \mathcal{F} \iff (\bar{u}, \bar{i}) \in \bar{\mathcal{F}} \quad (3.49)$$

Natürlich existieren auch entsprechende Substitutionen für die algebraischen Beschreibungsformen; bei der impliziten Darstellung erhält man beispielsweise:

$$f_{\bar{\mathcal{F}}}(\bar{u}, \bar{i}) = f_{\mathcal{F}}(-\bar{u}, -\bar{i}) \quad (3.50)$$

oder für die Leitwärts- und Widerstandsdarstellung:

$$\begin{aligned}g_{\bar{\mathcal{F}}}(\bar{u}) &= -g_{\mathcal{F}}(-\bar{u}) \\ r_{\bar{\mathcal{F}}}(\bar{i}) &= -r_{\mathcal{F}}(-\bar{i})\end{aligned} \quad (3.51)$$

Diese Diskussion liefert auch die Rechtfertigung für die Definitionen des Abschnitts 3.3.1: Ein Eintor ist damit ungepolt, wenn es bei Umpolung in sich selbst übergeht.

3.6.2 Parallelschaltung

Die im Bild 3.21 links gezeigte *Parallelschaltung* zweier resistiver Eintore \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 ist äquivalent zu einem einzigen resistiven Eintor \mathcal{G} : dessen Kennlinie im Folgenden berechnet werden soll.

Die Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze ergibt:

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 \\ u_1 &= u_2 = u \end{aligned}$$

\mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 können sich also gleichzeitig nur in Betriebspunkten mit derselben Spannung u befinden, beispielsweise (u, i_1) und (u, i_2) . Daraus erhält man einen Betriebspunkt der Parallelschaltung \mathcal{G} :

$$(u, i) = (u, i_1 + i_2)$$

Allgemeiner ergibt jede solche Zusammenfassung von Betriebspunkten der Teilwiderstände einen Betriebspunkt von \mathcal{G} , man kann die zusammengefasste Kennlinie daher angeben durch:

$$\mathcal{G} = \{(u, i) \mid \exists i_1 : ((u, i_1) \in \mathcal{F}_1 \wedge (u, i - i_1) \in \mathcal{F}_2)\} \quad (3.52)$$

Eine einfachere Formel ergibt sich, wenn die Leitwertsdarstellungen von \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 vorliegen:

$$\begin{aligned} i_1 &= g_{\mathcal{F}_1}(u) \\ i_2 &= g_{\mathcal{F}_2}(u) \end{aligned}$$

\mathcal{G} ist dann ebenfalls spannungsgesteuert, der Gesamtstrom i beträgt:

$$i = i_1 + i_2 = g_{\mathcal{F}_1}(u) + g_{\mathcal{F}_2}(u) =: g_{\mathcal{G}}(u)$$

Die Leitwertsdarstellung der Parallelschaltung ist damit die Summe der Leitwertsdarstellungen der Einzelwiderstände, abstrakt ausgedrückt ergibt sich $g_{\mathcal{G}}$ zu:

$$g_{\mathcal{G}} = g_{\mathcal{F}_1} + g_{\mathcal{F}_2} \quad (3.53)$$

was einer einfachen Funktionsaddition im $u - i$ -Diagramm entspricht. Diese Zusammenfassung ist übrigens selbst dann noch anschaulich graphisch durchführbar, wenn eines der resistiven Teileintore nicht spannungsgesteuert ist.

3.6.3 Serienschaltung

Auch die im Bild 3.22 gezeigte *Serienschaltung* zweier resistiver Eintore \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 ist insgesamt äquivalent zu einem einzigen resistiven Eintor \mathcal{G} . Die genaue Analyse kann hier übersprungen werden, da sich die Serienschaltung dual zur Parallelschaltung verhält: Unter Vertauschung von Strom- und Spannung, KCL- und KVL, Leitwärts- und Widerstandsdarstellung etc., und jeweils geeigneter Verrechnung mit der Dualitätskonstanten, gehen alle Aussagen über die beiden Schaltungen ineinander über. Man könnte sie aber genauso auch über einen vollständig analogen Rechenweg neu herleiten.

Als Mengenbeschreibung der zusammengefassten Kennlinie \mathcal{G} der Serienschaltung erhält man jedenfalls insgesamt den Ausdruck:

$$\mathcal{G} = \{(u, i) \mid \exists u_1 : ((u_1, i) \in \mathcal{F}_1 \wedge (u - u_1, i) \in \mathcal{F}_2)\} \quad (3.54)$$

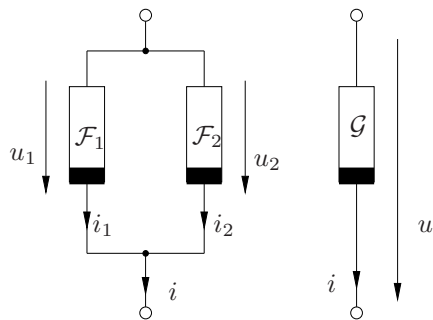


Bild 3.21 Die Zusammenfassung zweier parallelgeschalteter resistiver Eintore

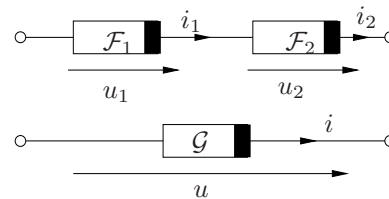


Bild 3.22 Die Zusammenfassung zweier in Serie geschalteter resistiver Eintore

Wenn die Widerstandsdarstellungen von \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 existieren:

$$\begin{aligned} u_1 &= r_{\mathcal{F}_1}(i) \\ u_2 &= r_{\mathcal{F}_2}(i) \end{aligned}$$

erhält man als Ausdruck für die Gesamtspannung:

$$u = u_1 + u_2 = r_{\mathcal{F}_1}(i) + r_{\mathcal{F}_2}(i)$$

Die Funktionssumme der Widerstandsdarstellungen der Teileintore ergibt damit die von \mathcal{G} :

$$r_{\mathcal{G}} = r_{\mathcal{F}_1} + r_{\mathcal{F}_2} \quad (3.55)$$

Das Zusammenfassen stromgesteuerter resistiver Elemente läuft also auf eine einfache Funktionsaddition im i - u -Diagramm (!) hinaus.

Falls man beim graphischen Arbeiten konsequent im üblicheren i - u -Diagramm arbeiten möchte, muss man darauf achten, dass man bei der Zusammenfassung einzelner Kennlinienpunkte wirklich immer bei konstantem Strom die Spannungen addiert, also in konstanter Höhe von der i -Achse ausgehend arbeitet.

3.6.4 Verschaltung von Widerstandsgeraden

Ein häufiger und besonders einfacher Spezialfall bei Parallel- und Serienschaltung ist die Verschaltung streng linearer Widerstände. In der Praxis ist es dabei teilweise üblich, einige Formeln in einer abgekürzten Schreibweise darzustellen, die hier gleich vorneweg eingeführt und erläutert werden soll:

Die *parallele Summe* zweier reeller Zahlen a und b soll eine reelle Zahl $a||b$ sein, für die gilt:

$$\frac{1}{a||b} := \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (3.56)$$

Aufgelöst ergibt dies die Berechnungsvorschrift:

$$a||b = \frac{ab}{a+b} \quad (3.57)$$

In der Rangfolge der binären Rechenoperationen bindet die parallele Summe stärker als additive und schwächer als multiplikative Terme, also

$$\begin{aligned} a||b + c &:= (a||b) + c \\ a||bc &:= a||(bc) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Wie leicht zu überprüfen ist, ist die parallele Summe kommutativ und assoziativ:

$$\begin{aligned} a||b &= b||a \\ a||(b||c) &= (a||b)||c \end{aligned} \quad (3.59)$$

Man kann die Definition daher auf mehr als zwei Operanden erweitern, beispielsweise:

$$a||b||c = a||(b||c) = \frac{abc}{ab + bc + ca} \quad (3.60)$$

3.6.4.1 Parallelschaltung von Widerständen

Ein häufiger Spezialfall ist die Parallelschaltung zweier durch Widerstandsgeraden beschriebener resistiver Eintore, ihre Leitwerte seien G_1 und G_2 :

$$\begin{aligned} i_1 &= G_1 u \\ i_2 &= G_2 u \\ \Rightarrow i &= i_1 + i_2 = (G_1 + G_2)u =: Gu \end{aligned}$$

Die Kennlinie der Parallelschaltung ist daher ebenfalls eine Widerstandsgerade mit dem Leitwert G :

$$\Rightarrow G = G_1 + G_2 \quad (3.61)$$

Umgeschrieben auf die zu den Leitwerten inversen Widerstände lautet dies:

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Der Gesamtwiderstand der Parallelschaltung ist damit die parallele Summe der Teilwiderstände:

$$\Rightarrow R = R_1 || R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.62)$$

3.6.4.2 Serienschaltung von Widerständen

Vollkommen analog zur Parallelschaltung ergibt sich bei der Serienschaltung zweier durch Widerstandsgeraden beschriebener resistiver Eintore mit den Werten R_1 und R_2 ebenfalls wieder eine Widerstandsgerade mit der Steigung:

$$R = R_1 + R_2 \quad (3.63)$$

Der Gesamtleitwert der Serienschaltung ist dann die parallele Summe der Teilleitwerte:

$$G = G_1 || G_2 = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \quad (3.64)$$

3.6.5 Eine kombinierte Schaltung

Durch systematisches Anwenden der gerade beschriebenen Methoden und Überlegungen können oft auch größere Schaltungen zu einzelnen Elementen zusammengefasst werden. Hier soll als relativ kompliziertes Beispiel die Gesamtkennlinie der Schaltung von Bild 3.23 ermittelt werden. \mathcal{G} soll dabei das in Abschnitt 3.2 verwendete Beispieltor sein, dessen Parameterdarstellung auf die im Bild verwendeten Zählfeile übertragen die folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned} i_1(\varphi) &= i_0 \varphi \\ u_1(\varphi) &= u_0 \tan \varphi \end{aligned}$$

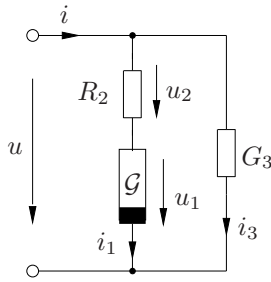


Bild 3.23 Eine kombinierte Reihen- und Parallelschaltung

Da durch R_2 derselbe Strom i_1 fließt, fällt an ihm die Spannung

$$u_2 = R_2 i_1$$

ab, und die Gesamtspannung $u(\varphi) = u_1 + u_2$ ergibt sich zu:

$$u(\varphi) = u_0 \tan \varphi + R_2 i_0 \varphi$$

Diese Spannung liegt auch an G_3 an, der Strom i_3 hat damit den Wert:

$$i_3 = G_3 u = G_3 u_0 \tan \varphi + G_3 R_2 i_0 \varphi$$

und mit:

$$i_3 + i_1 = G_3 u_0 \tan \varphi + G_3 R_2 i_0 \varphi + i_0 \varphi$$

erhält man schließlich den Gesamtstrom $i(\varphi) = i_1 + i_3$ zu:

$$i(\varphi) = G_3 u_0 \tan \varphi + (G_3 R_2 + 1) i_0 \varphi$$

Die beiden Ausdrücke für $u(\varphi)$ und $i(\varphi)$ sind eine Parameterdarstellung der Gesamtschaltung.

Die genaue Form dieser Kennlinie ist natürlich von den genauen Werten von R_2 und G_3 abhängig. In Bild 3.24 ist eine spezielle Dimensionierung angegeben, bei der die dargestellte komplizierte Kennlinie entsteht, die weder spannungs- noch stromgesteuert ist. Dieses Beispiel

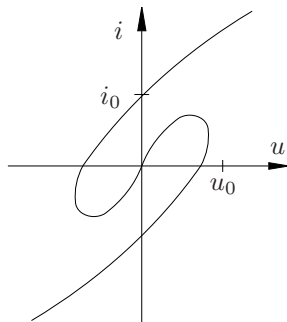


Bild 3.24 Eine mögliche Kennlinie der Schaltung von Bild 3.23

illustriert auch die Bedeutung der Parameterdarstellung, deren Verwendung hier auf direktem Weg die analytische Berechnung einer Kennlinie ermöglicht, bei der keine der expliziten Darstellungen existiert. Auch die implizite Beschreibung ist hier nicht besonders hilfreich: Nach einigem Überlegen gelangt man von dieser ausgehend zu der Gleichung:

$$\frac{i - G_3 u}{i_0} - \arctan \frac{(1 + R_2 G_3) u - R_2 i}{u_0} = 0$$

deren den Kennlinienpunkten entsprechende Nullstellen man dann noch suchen muss . . .

3.7 Lineare Quellen

In Abschnitt 3.4 wurden sogenannte streng lineare Kennlinien diskutiert, die die Gestalt eines Untervektorraums der $u-i$ -Ebene haben. Von ähnlicher Bedeutung sind in der Schaltungstechnik die sogenannten *linearen* Kennlinien:

Ein resistives Eintor heißt *linear*, wenn seine Kennlinie ein affiner Unterraum der $u-i$ -Ebene ist!

Eine lineare Kennlinie geht also bei Verschiebung auf den Ursprung in eine streng lineare über. Man bezeichnet daher umgekehrt auch streng lineare Elemente als *linear* und *quellenfrei*. Elemente, die wie die oben diskutierten Dioden nicht linear sind, heißen *nichtlinear*.

An dieser Stelle sollen dabei nur Kennlinien der Dimension eins diskutiert werden: Affine Geraden in der $u-i$ -Ebene. Sofern sie nicht durch den Ursprung verläuft, ist jede solche Gerade aktiv; man bezeichnet und verwendet lineare Zweipole daher meist als Quellen.

Im Hinblick auf später bei den Zweipolschaltungen verwendete Notation werden zur Beschreibung der Quellen in diesem Abschnitt immer die gestrichenen Klemmengrößen u' und i' verwendet.

Ein *linearer Quellenzweipol* oder kurz eine *lineare Quelle* ist ein resistiver Zweipol, dessen Kennlinie eine nicht durch den Ursprung verlaufende Gerade ist. Bild 3.25 zeigt ein Beispiel. Die allgemeinste Beschreibung derartiger Kennlinien ist die folgende implizite mit drei Para-

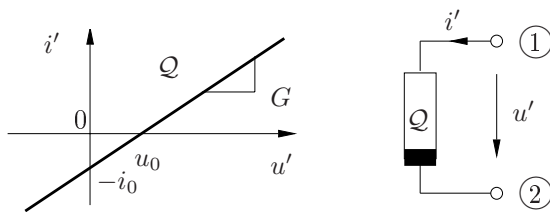


Bild 3.25 Die Kennlinie einer linearen Quelle \mathcal{Q}

metern, wobei m und n nicht beide gleich null sein dürfen, da sonst keine Gerade entsteht:

$$mu' + ni' - e = 0 \quad (3.65)$$

Die Kennlinie \mathcal{Q} ist die Nullstellenmenge dieser Gleichung, die sowohl den Fall achsenparalleler Geraden (bei $m = 0$ oder $n = 0$) als auch den streng linearen Fall (bei $e = 0$) beinhaltet.

In der folgenden Betrachtung seien diese Spezialfälle ausgeschlossen, alle drei Parameter sind also ungleich null. Die Kennlinie von \mathcal{Q} ist dann wie in Bild 3.25 eine in der $u'-i'$ -Ebene schräg liegende Gerade mit den beiden Achsenabschnitten $-i_0$ und u_0 . Im Kurzschlussfall (siehe Bild 3.26 links) erhält man über

$$\begin{aligned} u &= 0 && \text{(Kurzschluss)} \\ u - u' &= 0 && \text{(KVL)} \\ \Rightarrow u' &= u = 0 \\ i' &= -i_0 && \text{(Kennlinie von } \mathcal{Q}) \\ i' + i &= 0 && \text{(KCL)} \end{aligned}$$

den Strom i in der Kurzschlussbrücke zu

$$\Rightarrow i = -i' = i_0 \quad (3.66)$$

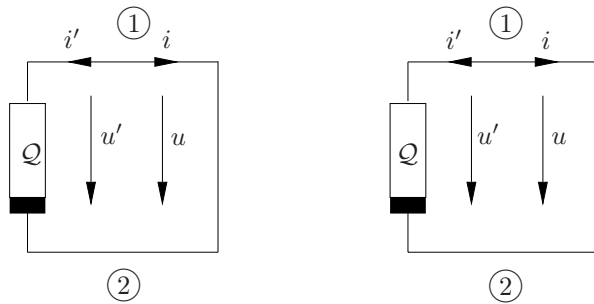


Bild 3.26 Die Beschaltung einer linearen Quelle mit einem Kurzschluss und einem Leerlauf

Der Achsenabschnitt mit umgekehrten Vorzeichen i_0 auf der Strom-Achse heißt daher der *Kurzschlussstrom* von Q .

Über eine vollkommen analoge Herleitung ergibt sich im Fall eines Leerlaufs (siehe Bild 3.26 rechts) die Spannung u zwischen den Klemmen von Q zu

$$u = u' = u_0 \tag{3.67}$$

Der zweite Achsenabschnitt u_0 heißt daher die *Leerlaufspannung* von Q .

Man definiert außerdem noch den zueinander inversen *Innenleitwert* G und *-widerstand* R :

$$G := \frac{i_0}{u_0} \tag{3.68}$$

$$R := \frac{u_0}{i_0}$$

3.7.1 Unabhängige Quellen

Unabhängige Quellen sind lineare Quellen, deren Kennlinie achsenparallel ist. Sie erzwingen unabhängig von allen anderen Vorgängen in einer Schaltung einen bestimmten Strom durch oder eine bestimmte Spannung zwischen ihren Klemmen. Man sagt auch: Die unabhängige Quelle *prägt* der Schaltung einen Strom ein oder eine Spannung auf.

3.7.1.1 Stromquellen

Durch die Klemmen einer *Stromquelle* fließt unabhängig von der Spannung ein fester Strom $i = i_0$ oder, im zeitvarianten Fall, $i = i_0(t)$. Stromquellen sind spannungsgesteuert, aktiv, gepolt und linear. Bild 3.27 zeigt Kennlinie und Elementsymbol einer Konstantstromquelle. Der Leerlauf kann auch als *Nullstromquelle* aufgefasst werden, durch die immer der Strom $0A$

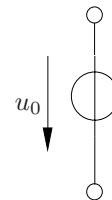
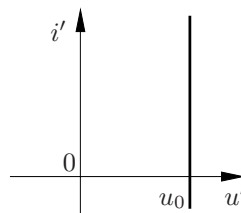
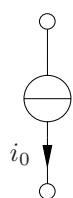
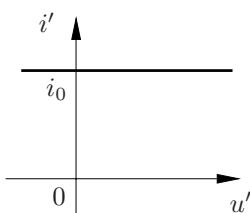


Bild 3.27 Kennlinie und Elementsymbol einer Stromquelle

Bild 3.28 Kennlinie und Elementsymbol einer Spannungsquelle

fließt. Der Innenleitwert einer Stromquelle ist immer 0 , ihr Innenwiderstand ∞ .

3.7.1.2 Spannungsquellen

An den Klemmen einer *Spannungsquelle* liegt unabhängig vom Strom die feste Spannung $u = u_0$ an, oder, im zeitvarianten Fall, $u = u_0(t)$. Spannungsquellen sind bezüglich geeigneter Dualitätskonstanten (z.B. $R_d = \frac{u_0}{i_0}$) dual zu Stromquellen und daher stromgesteuert, aktiv, gepolt und linear.

Das Bild 3.28 zeigt Kennlinie und Elementsymbol einer Konstantspannungsquelle:

Der Kurzschluss kann als *Nullspannungsquelle* aufgefasst werden. Der Innenwiderstand einer Spannungsquelle ist 0, ihr Innenleitwert ∞ .

3.7.2 Die Innenstruktur linearer Quellen

Lineare Quellen, deren Kennlinie nicht achsenparallel ist, können immer durch die beiden in Bild 3.29 gezeigten und zueinander vollkommen äquivalenten Ersatzschaltbilder ersetzt werden, wobei die verwendeten Größen wie oben definiert die Leerlaufspannung, der Kurzschlussstrom und der Innenwiderstand R und -leitwert G sind. Die Äquivalenz kann sehr ein-

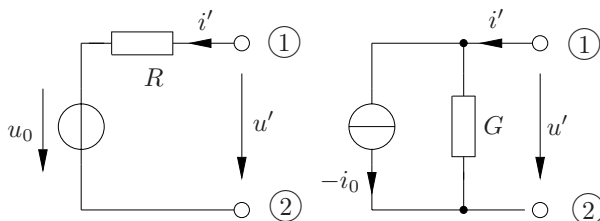


Bild 3.29 Die Innenstruktur linearer Quellen und Quellenumwandlung

fach gezeigt werden:

Die Anwendung von KVL auf die linke Schaltung führt auf die Gleichung:

$$u' - Ri' - u_0 = 0 \quad (3.69)$$

die der impliziten Beschreibung Gl. (3.65) der linearen Quellenkennlinie mit der speziellen Wahl der Parameter $m = 1$, $n = -R$ und $e = u_0$ entspricht.

Erweitert man Gl. (3.69) mit $-G$, so erhält man unter Berücksichtigung von Gl.(3.68) die Gleichung:

$$-Gu' + i' + i_0 = 0 \quad (3.70)$$

eine lineare Quellenkennlinie mit den geänderten Parameterwerten $m = -G$, $n = 1$ und $e = -i_0$, die einerseits äquivalent zur Beschreibung Gl.(3.69) ist, andererseits aber auch dem Ergebnis der Anwendung von KCL auf den Knoten ② der in rechten Schaltung von Bild 3.29 entspricht.

In der Praxis wählt man bei der Darstellung einer Schaltung immer die jeweils geeignetere dieser beiden äquivalenten Innenstrukturen aus.

Eine weitere Anwendung besteht in der Schaltungsumformung: Tritt in einer Schaltung die in Bild 3.29 links abgebildete *Spannungsquelle mit Innenwiderstand* als Teilschaltung auf, so

kann man sie durch die rechts gezeigte *Stromquelle mit Innenleitwert* ersetzen, wenn man deren neue Parameter und G nach den folgenden Regeln aus den ursprünglichen Größen und R bestimmt:

$$i_0 = \frac{u_0}{R}, \quad G = \frac{1}{R} \quad (3.71)$$

Die Rechenvorschrift für die umgekehrte Richtung lautet entsprechend:

$$u_0 = \frac{i_0}{G}, \quad R = \frac{1}{G} \quad (3.72)$$

Dieses als *Quellenumwandlung* bezeichnete Ersetzen einer Quellenersatzschaltung durch eine äquivalente andere kann oft vorteilhaft zur Vereinfachung von Schaltungen eingesetzt werden.

3.8 Stückweise lineare Widerstände

Um bestimmte Arten von Berechnungen sehr vorteilhaft durchführen zu können, nähert man Kennlinien oft durch *stückweise lineare* Kennlinien an, die aus einer stetigen Kette einzelner Geradenstücke (den sogenannten *Ästen*) bestehen.

Ein Ast ist zunächst linear und kann daher durch eine lineare Quellenkennlinie beschrieben werden. Seine begrenzte Ausdehnung wird über eine Einschränkung einer Betriebsgröße meist in Form einer *Bedingungsungleichung* ausgedrückt.

3.8.1 Stückweise lineare Dioden

Einfache stückweise lineare Diodenmodelle kann man aus nur zwei Halbgeraden zusammensetzen. Als (bei Netzwerkelementen sinnvolle) Verallgemeinerung sollen jeweils zusätzlich noch die dualen Elemente eingeführt werden. Die Dreiecke im Symbol dieser idealisierten Dioden sind nicht ausgefüllt.

3.8.1.1 Ideale Dioden

Die *ideale Diode* ist eine idealisierte Darstellung des Durchlass- und Sperrverhaltens der pn-Diode. Ihre Kennlinie, die nur aus dem negativen Ast der u -Achse und dem positiven Ast der i -Achse besteht, ist zusammen mit ihrem Elementsymbol in Bild 3.30 dargestellt. Ideale Dioden sind verlustlos; das zu ihnen duale Element ist einfach eine umgepolte ideale Diode.

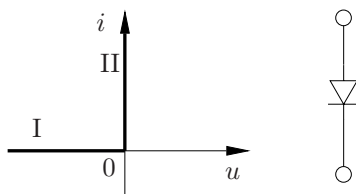


Bild 3.30 Kennlinie und Elementsymbol der idealen Diode

Die Kennlinie der idealen Diode kann zusammengesetzt aus zwei Ästen beschrieben werden:

$$i = 0 \quad \text{falls} \quad u \leq 0 \quad (\text{Ast I}) \quad (3.73)$$

$$u = 0 \quad \text{falls} \quad i \geq 0 \quad (\text{Ast II}) \quad (3.74)$$

Der Ursprung $(0, 0)$ wurde dabei beiden Ästen zugeschlagen.

3.8.1.2 Konkave Widerstände

Ein *konkaver Widerstand* wird durch das Parameterpaar (G, U) beschrieben. Seine zusammen mit dem Elementsymbol in Bild 3.31 dargestellte Kennlinie besteht aus der Halbgeraden $(-\infty, U)$ auf der u -Achse, und einer sich vom Punkt $(U, 0)$ der u - i -Ebene nach oben (hin zu positiven Stromwerten) erstreckenden Halbgeraden mit Steigung G .

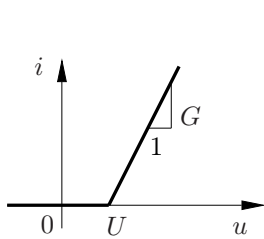


Bild 3.31 Kennlinie und Elementsymbol eines konkaven Widerstands

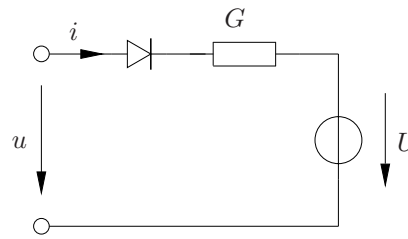


Bild 3.32 Mögliche Innenstruktur eines konkaven Widerstands

Das Bild (3.31 und 3.32) zeigt Kennlinie und Elementsymbol eines typischen konkaven Widerstands: Konkave Widerstände der Form $(G, 0)$ oder (G, U) mit $G > 0$ und der *Einsatzspannung* $U > 0$, typisch ist oft $(\infty, 0,7 \text{ V})$, stellen in vielen praktischen Anwendungen ein einfaches und gutes pn-Diodenmodell dar. Die ideale Diode ist der extremere Grenzfall $(\infty, 0)$ eines konkaven Widerstands.

Man kann die Kennlinie eines konkaven Widerstands beispielsweise über die in Bild 3.32 gegebene Serienschaltung einer idealen Diode mit einer linearen Quelle realisieren:

Konkave Widerstände mit $G < 0$ sind nicht mehr spannungsgesteuert und werden nur selten benötigt.

3.8.1.3 Konvexe Widerstände

Ein *konvexer Widerstand* wird durch das Parameterpaar (R, I) beschrieben. Seine Kennlinie besteht aus der Halbgeraden $(-\infty, I)$ auf der i -Achse, und einer sich vom Punkt $(0, I)$ der u - i -Ebene nach rechts (hin zu positiven Spannungswerten) erstreckenden Halbgeraden mit Steigung $1/R$. Er ist damit dual zu einem entsprechend gewählten konkaven Widerstand:

$$(R, I) \quad \text{ist dual zu} \quad (G, U) = \left(\frac{R}{R_d^2}, R_d I \right) \quad (3.75)$$

Bild 3.33 zeigt Kennlinie und Elementsymbol, Bild 3.34 eine mögliche Innenstruktur eines konvexen Widerstands.

3.8.2 Reale negative Widerstände

Negative Widerstandsgeraden wie in Abschnitt 3.4.2.3 besprochen sind praktisch nicht realisierbar. In Kapitel 6 wird aber gezeigt, wie man mit Hilfe eines Operationsverstärkers die beiden in

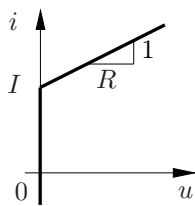


Bild 3.33 Kennlinie und Elementsymbol eines konvexen Widerstands

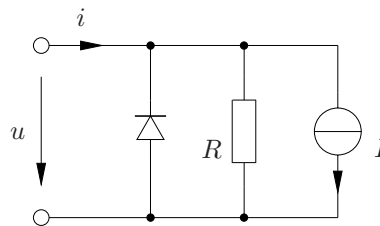


Bild 3.34 Eine mögliche Innenstruktur eines konvexen Widerstands

Bild 3.35 gezeigten Kennlinien erzeugen kann, die sich zumindest in ihrem mittleren Ast wie ein negativer Widerstand verhalten.

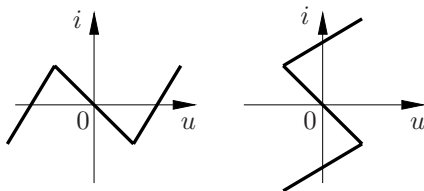


Bild 3.35 Die N- und S-Kennlinienform realer negativer Widerstände

Man bezeichnet beide Schaltungen als *reale negative Widerstände*, wobei der links abgebildete spannungsgesteuerte eine *N-Kennlinie*, der rechts gezeigte stromgesteuerte eine *S-Kennlinie* besitzt.

3.9 Eintorschaltungen

Jede reale Schaltung ist in eine *Anwendung* eingebunden und erfüllt eine *Aufgabe*. In der *Informationstechnik* (oder *Nachrichtentechnik*) besteht diese in der Übermittlung und/oder Verarbeitung informationstragender Signale. Diese sind Bestandteil der elektrischen Signale, also der Betriebsgrößen der entsprechenden Schaltungen: Sie bilden deren „interessanten“ Wechselanteil.

Der nicht informationstragende Gleichanteil ist zwar für die Einstellung des gewünschten Betriebsverhaltens der Schaltung wichtig, für ihre Funktion im Rahmen der Aufgabenstellung und zugehörigen Anwendung aber nicht ausschlaggebend. Der Gleichanteil kann auch verschwinden, der (weiter unten definierte) Arbeitspunkt der Schaltung liegt dann im Ursprung des Betriebsraums.

Diese getrennte Betrachtung von zeitabhängigen und konstanten Signalanteilen, die natürlich ganz allgemein für die Interpretation der Funktion einer Schaltung von Bedeutung ist, wird zunächst am Beispiel der einfachsten eine sinnvolle Aufgabe erfüllenden Schaltung eingeführt: Dabei handelt es sich um eine Zusammenschaltung eines Quellen- und eines Last-eintores, die damit die einfachste Form eines Stromkreises bilden.

3.9.1 Arbeitspunkt

Zur Bestimmung des Gleichanteils aller Betriebsgrößen, des sogenannten *Arbeitspunkts* der Schaltung, werden sowohl die Quelle \mathcal{Q} als auch die Last \mathcal{L} des in Bild 3.36 dargestellten Stromkreises als zeitinvariant vorausgesetzt. Die Kennlinie der Quelle ist dabei in der $u' - i'$ -

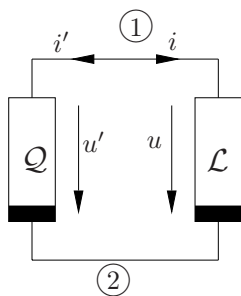


Bild 3.36 Ein aus einer linearen Quelle und einer resistiven Last gebildeter Stromkreis

Ebene gegeben, die der Last in der $u - i$ -Ebene.

Eine Lösung dieser Schaltung erfüllt die Bedingungen

$$\begin{aligned} (u', i') &\in \mathcal{Q} \\ (u, i) &\in \mathcal{L} \\ i &= -i' \\ u &= u' \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich vorteilhaft, die Größen u' und i' zu eliminieren, die nur zur Beschreibung der Quelle als Zweipol mit den üblichen assoziierten Zählpfeilrichtungen gebraucht werden. Praktischer ist eine Beschreibung von \mathcal{Q} abhängig von u und i , also den Betriebsgrößen, die \mathcal{Q} an die Last liefert.

Diese Darstellung bezeichnet man als die *externe Kennlinie* \mathcal{Q}^x der Quelle \mathcal{Q} . Man erhält sie durch

$$\mathcal{Q}^x = \{(u, i) | (u', i') = (u, -i) \in \mathcal{Q}\} \quad (3.76)$$

beziehungsweise in Formelschreibweise, wenn $f_{\mathcal{Q}}$ die konstituierende Funktion von \mathcal{Q} ist, durch

$$f_{\mathcal{Q}^x}(u, i) = f_{\mathcal{Q}}(u, -i) = 0 \quad (3.77)$$

Graphisch gesehen ist das nichts anderes als eine Spiegelung von \mathcal{Q} an der u -Achse.

Die Bedingungen für eine Lösung der Schaltung lauten nunmehr nur noch:

$$(u, i) \in \mathcal{Q}^x \quad \text{und} \quad (u, i) \in \mathcal{L} \quad (3.78)$$

Da die externe Kennlinie \mathcal{Q}^x der Quelle also eine Einschränkung an die Last darstellt, indem sie ihr über die Kennlinie \mathcal{L} hinaus vorschreibt, welche Betriebspunkte sie in der Schaltung überhaupt annehmen darf, bezeichnet man sie auch als *Lastlinie* oder *Lastgerade*.

Man erhält die Lösungsmenge, die sogenannte *Arbeitspunktmenge*, als Schnittmenge von \mathcal{Q}^x und \mathcal{L} :

$$\mathcal{AP} = \mathcal{Q}^x \cap \mathcal{L} \quad (3.79)$$

Dies geschieht am einfachsten, indem man beide Kennlinien in die $u - i$ -Ebene einträgt und graphisch den Durchschnitt bestimmt. Im Bild 3.37 sind auch die Koordinatenrichtungen von u' und i' eingetragen:

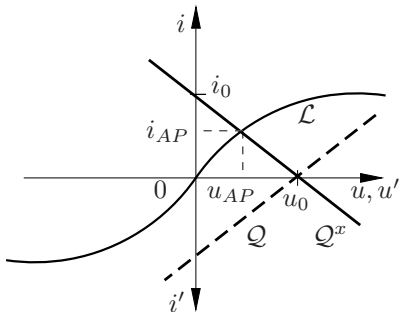


Bild 3.37 Die graphische Bestimmung des Arbeitspunkts des Stromkreises von Bild 3.36

In dem Beispiel existiert nur ein einziger Schnittpunkt von Q^x und \mathcal{L} , der (in diesem Fall eindeutige) *Arbeitspunkt* AP der Schaltung. Da ein Arbeitspunkt eine spezielle Lösung einer Schaltung ist, charakterisiert man ihn durch ein vollständiges System von Strömen und Spannungen, in diesem einfachen Fall durch das Paar u_{AP}, i_{AP} .

Die Arbeitspunktmenge kann auch leer sein, wenn sich keine Betriebsgrößenpaare angeben lassen, die gleichzeitig Bestandteil der externen Quellen- und der Lastkennlinie sind. Ein einfaches Beispiel hierfür ist der aus einer unabhängigen Spannungsquelle und einer idealen Diode bestehende Stromkreis von Bild 3.38, bei dem die Arbeitspunktbestimmung auf einen Widerspruch führt. Dieser Widerspruch hat seine Ursache natürlich (wie meistens) in einer überidea-

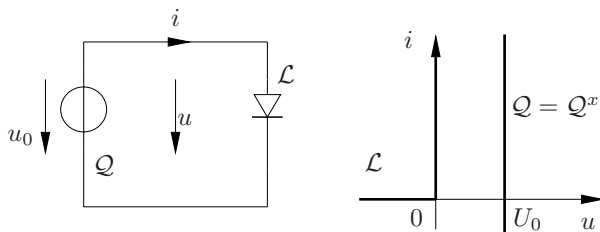


Bild 3.38 Eine möglicherweise widersprüchliche überidealisierte Schaltung

lisierten Modellierung. Durch Berücksichtigung eines Innenwiderstands der Quelle oder Ersatz der idealen Diode durch eine pn-Diode lässt sich dieser Widerspruch aufheben und ein Arbeitspunkt angeben.

3.9.2 Verarbeitung informationstragender Signale

Schon bei der Arbeitspunkteinstellung geht man davon aus, dass mindestens eine Betriebsgröße vorgegeben ist. In dem Beispiel des einfachen Stromkreises von Bild 3.36 und den zugehörigen Kennlinien in Bild 3.37 war das die Urspannung u_0 des Quellenzweipols \mathcal{Q} . Aufgrund dieser aufgeprägten Spannung ergeben sich die anderen Betriebsgrößen, wie u_{AP} und i_{AP} .

Das Konzept, die Betriebsgrößen in eine vorgegebene (einprägbare) *Eingangsgröße*, *Erregung* oder *Ursache* und eine oder mehrere davon abhängende *Ausgangsgrößen*, *Antworten* oder *Wirkungen* einzuteilen, ist sehr allgemein anwendbar. Insbesondere erweist es sich bei zeitabhängigen Signalverläufen als zweckmäßig.

Die zeitabhängigen Signale werden dazu wieder allgemein in einen konstanten und einen zeitabhängigen Anteil aufgespalten. Beispielsweise kann eine Erregung $a(t)$ über:

$$a(t) = A + \Delta a(t) \quad (3.80)$$

aufgespalten werden in den konstanten *Arbeitspunkt* oder *Gleichanteil* A , und den zeitabhängigen Wechselanteil $\Delta a(t)$, der das eigentliche *informationstragende Signal* oder kurz *Signal* darstellt. Die zur Erregung a gehörende Antwort b :

$$b(t) := b(a(t)) \quad (3.81)$$

kann in gleicher Weise aufgespalten werden:

$$b(t) = B + \Delta b(t) \quad (3.82)$$

wobei $b(a)$ eine Kennlinie in der a - b -Ebene darstellt. Diese *Verarbeitungs-* oder *Übertragungskennlinie* kann mit Hilfe der Kennlinie der in der Schaltung enthaltenen Eintore und ihrer speziellen Verschaltung ermittelt werden.

Man bestimmt sie, indem man zu jedem Wert der Erregung den zugehörigen Wert der Antwort berechnet (der natürlich eindeutig sein muss), und diesen Zusammenhang als Funktion auffasst. Bei einer graphischen Bearbeitung führt man dies natürlich nur punktweise durch und erstellt durch Interpolation eine glatte Kurve.

Ein einfaches Beispiel ist der in Bild 3.39 dargestellte *Einweggleichrichter* mit Erregung $a(t) = u_0(t)$ und Antwort $b(t) = u_L(t)$. Mit $A = u_{0\text{ AP}} = 0$ und $B = u_{L\text{ AP}} = 0$ verschwinden die Arbeitspunktgrößen, der AP ist dann der Ursprung der (u_0, u_L) -Ebene. Die linke Hälfte

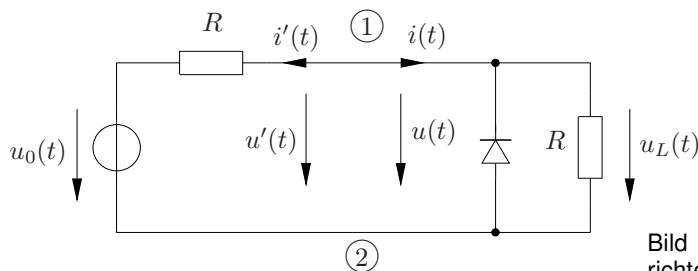


Bild 3.39 Eine Einweggleichrichterschaltung

der Schaltung ist ein Quellenzweipol mit Innenwiderstand R , dessen Leerlaufspannung man sich als von außen beeinflussbaren Parameter, also als Erregung vorstellen kann. Er wird daher durch eine ganze Kennlinienschar $Q(u_0)$ charakterisiert. Durch Einsetzen der Zeitabhängigkeit von $u_0(t)$ kann man ihn natürlich auch als zeitvariant betrachten: $Q(t) = Q(u_0(t))$.

Die rechte Hälfte, eine Parallelschaltung einer idealen Diode mit dem Lastwiderstand R , verhält sich insgesamt wie ein konvexer Widerstand \mathcal{L} mit den Parametern $(R, 0)$.

Im u - i -Diagramm lassen sich mit dieser Interpretation einfach die Lösungen der Schaltung abhängig von $u_0(t)$ finden. Neu ist nur, dass das externe Verhalten des Quellenzweipols nicht durch eine einzige Kennlinie, sondern durch eine mit u_0 parametrisierte Kennlinienschar $Q^x(u_0)$ beschrieben wird. In Bild 3.40 sind beispielhaft $Q^x(U_0)$ und $Q^x(-U_0)$ eingezeichnet, wobei U_0 ein willkürlich gewählter Parameterwert ist. Die von u_0 abhängende Lösung $P(u_0)$ der Schaltung entspricht jeweils dem Schnittpunkt der Kennlinie \mathcal{L} des konvexen Widerstands mit der zu u_0 gehörenden externen Quellenkennlinie $Q^x(u_0)$:

$$P(u_0) = (u(u_0), i(u_0)) = (u_L(u_0), i(u_0)) = \mathcal{L} \cap Q^x(u_0)$$

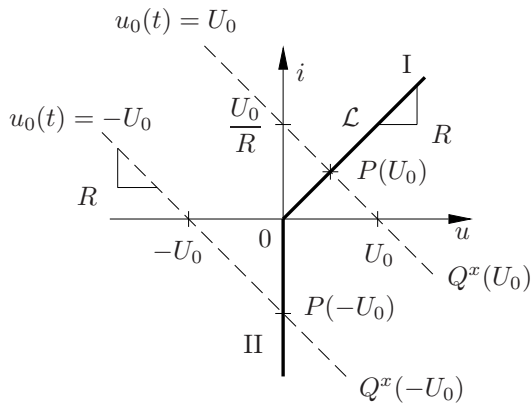


Bild 3.40 Arbeitspunktbestimmung beim Einweggleichrichter für verschiedene Quellenspannungen

Wegen der stückweisen Linearität kann man einfach eine Fallunterscheidung in zwei Bereiche I und II treffen, in denen sich die Lösung und davon abhängig ein Teil der Übertragungskennlinie jeweils einfach analytisch darstellen lassen:

$$I) \quad u_0 \geq 0 \Rightarrow P(u_0) = \left(\frac{u_0}{2}, \frac{u_0}{2R} \right) \Rightarrow u_L(u_0) = \frac{u_0}{2}$$

$$II) \quad u_0 < 0 \Rightarrow P(u_0) = \left(0, \frac{u_0}{R} \right) \Rightarrow u_L(u_0) = 0$$

Insgesamt erhält man damit die Übertragungskennlinie des Einweggleichrichters zu:

$$u_L(u_0) = \begin{cases} \frac{u_0}{2} & \text{wenn } u_0 \geq 0 \\ 0 & \text{wenn } u_0 < 0 \end{cases}$$

Diese stückweise lineare Kennlinie des Einweggleichrichters ist in Bild 3.41 graphisch dargestellt: Erregt man die Schaltung mit einer Sinusspannung mit Amplitude U_0

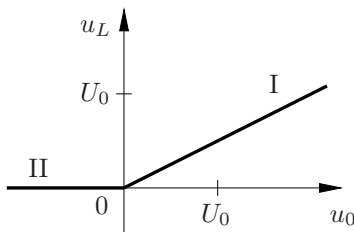


Bild 3.41 Die Spannungsübertragungskennlinie des Einweggleichrichters

$$u_o(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

so ergibt sich als Antwort ein Sinusverlauf mit halber Amplitude, dessen negative Halbwellen abgeschnitten sind:

$$u_L(t) = \begin{cases} \frac{U_0}{2} \sin(\omega t) & \text{wenn } \sin(\omega t) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dieses *Abschneiden* sieht man besonders deutlich beim graphischen Vergleich: Das Beispiel zeigt auch, dass eine nichtlineare Übertragung die Kurvenform von Signalen ändert.

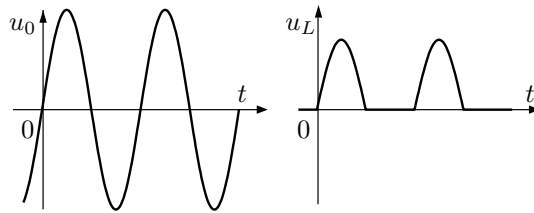


Bild 3.42 Übertragung einer Sinusspannung am Einweggleichrichter

3.9.3 Kleinsignalübertragung

Sofern die Übertragungscharakteristik $b(a)$ im Arbeitspunkt stetig und differenzierbar ist, kann man sie um den Arbeitspunkt *linearisieren*, also so durch eine lineare Funktion $b_{lin}(a)$ ersetzen, dass Funktionswert und Steigung im Arbeitspunkt übereinstimmen:

$$b_{lin}(A) = b(A) ; \quad \frac{db_{lin}}{da}(A) = \frac{db}{da}(A) \quad (3.83)$$

$b_{lin}(a)$ ist in einer Umgebung des Arbeitspunkts die beste lineare Näherung für $b(a)$:

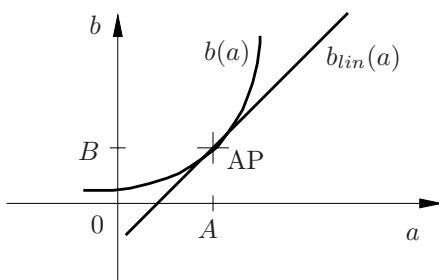


Bild 3.43 Die Linearisierung einer Kennlinie um den Arbeitspunkt

Nach Einführung des *Übertragungsfaktors* oder *Gewinns* g

$$g := \frac{db}{da}(A) \quad (3.84)$$

lässt sich die *linearisierte Übertragungscharakteristik* $b_{lin}(a)$ einfach explizit angeben:

$$b_{lin}(a) = b(A) + g \cdot (a - A) \quad (3.85)$$

Überträgt man daran die nach 3.80 zerlegte Erregung, so erhält man:

$$b_{lin}(a(t)) = b_{lin}(A + \Delta a(t)) = b(A) + g \cdot (A + \Delta a(t) - A) = b(A) + g \cdot \Delta a(t) \quad (3.86)$$

$$\Rightarrow b_{lin}(a(t)) = B + \Delta b(t)$$

Die Antwort kann also genau wie die Erregung aufgespalten werden, wobei die konstanten Arbeitspunktanteile über die nichtlineare Übertragungskennlinie zusammenhängen

$$B = b(A) \quad (3.87)$$

und sich für die Übertragung der *Kleinsignale* eine lineare Beziehung ergibt:

$$\Delta b(t) = g \cdot \Delta a(t) \quad (3.88)$$

Eine resistive Schaltung skaliert Kleinsignale also mit einem konstanten Faktor und lässt ihre Kurvenform unverändert. Der Name Kleinsignal kommt von einer einschränkenden Voraussetzung, dass diese informationstragenden Signalteile „klein genug“ sein müssen, um der angenäherten linearen Beschreibung zu genügen.

4. Resistive Zweitore

Bei der Modellierung elektrischer Bauelemente durch Netzwerkelemente kommt man nicht immer mit nur zwei Klemmen, also einem Tor, aus. Die naheliegende Verallgemeinerung liegt im Übergang von Eintoren zu *Zweitoren*. Bild 4.1 zeigt ein Zweitor mit einer äußeren Beschaltung, die die Einhaltung der Torbedingungen sicherstellt. Falls dies nicht durch die besondere Form

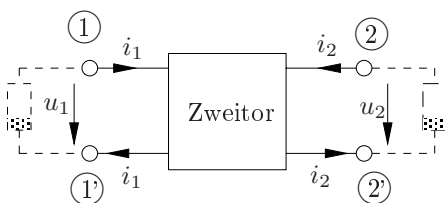


Bild 4.1 Ein Zweitor mit äußerer Beschaltung

der äußeren Beschaltung erzwungen wird, muss durch a priori Wissen über die innere Struktur des Zweitores klar sein, dass die Klemmenpaare (1), (1') und (2), (2') jeweils ein Tor bilden, also die Klemmenströme jeweils entgegengesetzt gleich sind. Ist auch das nicht gewährleistet, dann ist das in Bild 4.1 dargestellte Netzwerkelement mit vier Klemmen ein *Vierpol* und **kein** Zweitor. Die hier gewählte Beschreibung mit den vier Betriebsgrößen u_1, u_2, i_1, i_2 kann nur einem Zweitor, nicht aber einem "echten" Vierpol gerecht werden¹. Zu beachten ist auch, dass die Zweitorbeschreibung keinerlei Aussagen über die Spannung zwischen Klemmen macht, die zu verschiedenen Toren gehören (wie beispielsweise (1'), (2)). Ein Dreipol kann stets zu einem Zweitor ergänzt und als solches beschrieben werden. Ebenso wie bei resistiven Eintoren ist auch

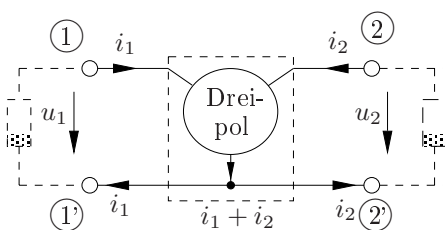


Bild 4.2 Ein als Zweitor betriebener Dreipol

das Verhalten resistiver Zweitore durch die Beziehung zwischen den hier vier Betriebsgrößen $u_1(t), u_2(t), i_1(t)$ und $i_2(t)$ zum selben Zeitpunkt t vollständig charakterisiert.

Die Menge aller zulässigen Betriebspunkte, von denen jeder als ein Wertequadrupel (u_1, u_2, i_1, i_2) aufgefasst werden kann, stellt eine "Kennfläche" im vierdimensionalen *Signalraum* dar.

¹In der älteren Literatur wird leider nicht immer zwischen Zweitor und Vierpol klar unterschieden.

4.1 Beschreibungsformen

Die Torspannungen und Torströme werden paarweise zu Spaltenvektoren zusammengefasst:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Implizit lässt sich die Kennfläche \mathcal{F} als Nullstellenmenge einer vektoriellen konstituierenden Funktion

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{i}) = \mathbf{0}, \quad \text{wobei} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

beschreiben. Ausführlich geschrieben lautet diese:

$$\begin{aligned} f_1(u_1, u_2, i_1, i_2) &= 0 \\ f_2(u_1, u_2, i_1, i_2) &= 0 \end{aligned}$$

Für die Kennfläche gilt:

$$\mathcal{F} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{i}) \mid \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{i}) = \mathbf{0}\} \quad (4.2)$$

Die implizite konstituierende Funktion ist (wie schon bei den Eintoren) nicht eindeutig, wohl aber die durch sie definierte Nullstellenmenge.

Neben der impliziten Beschreibung kann auch wieder eine Parameterdarstellung angegeben werden, wobei die Betriebspunkte auf der Kennfläche nun mit Hilfe eines Parameterpaares $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ ausgedrückt werden, das auch als Vektor geschrieben werden kann:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Die Betriebspunkte haben damit die Gestalt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{c}) \\ \mathbf{i}(\mathbf{c}) \end{bmatrix} \in \mathcal{F} \quad (4.3)$$

Ausführlich kann man auch alle Komponenten dieses Vektors als Funktionen beschreiben:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{c}) \\ \mathbf{i}(\mathbf{c}) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} u_1(c_1, c_2) \\ u_2(c_1, c_2) \\ i_1(c_1, c_2) \\ i_2(c_1, c_2) \end{bmatrix}$$

Eine derartige Parameterdarstellung wird im Folgenden häufig für die Herleitung wichtiger Eigenschaften und deren Nachweis bei streng linearen Zweitoren benutzt.

Neben der impliziten und der parametrisierten Beschreibung gibt es natürlich auch bei Zweitoren explizite Beschreibungen. Dabei wird die Funktion (4.1) nach zwei der vier Betriebsgrößen aufgelöst.

Dafür gibt es insgesamt sechs verschiedene Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} i_1 &= g_1(u_1, u_2) \\ i_2 &= g_2(u_1, u_2) \end{aligned} \quad \mathbf{i} = \mathbf{g}(\mathbf{u}) \quad \text{Leitwertsbeschreibung}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= r_1(i_1, i_2) \\ u_2 &= r_2(i_1, i_2) \end{aligned} \quad \mathbf{u} = \mathbf{r}(\mathbf{i}) \quad \text{Widerstandsbeschreibung}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= h_1(i_1, u_2) \\ i_2 &= h_2(i_1, u_2) \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{h} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{hybride Beschreibung}$$

$$\begin{aligned} i_1 &= h'_1(u_1, i_2) \\ u_2 &= h'_2(u_1, i_2) \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{h}' \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \text{inverse hybride Beschreibung}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1(u_2, -i_2) \\ i_1 &= a_2(u_2, -i_2) \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{a} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad \text{Kettenbeschreibung}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= a'_1(u_1, -i_1) \\ i_2 &= a'_2(u_1, -i_1) \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{a}' \begin{bmatrix} u_1 \\ -i_1 \end{bmatrix} \quad \text{inverse Kettenbeschreibung}$$

Das bei den Kettenbeschreibungen benutzte negative Vorzeichen jeweils eines Stromes (i_1 bzw. i_2) erweist sich bei der Kettenschaltung von Zweitoren als vorteilhaft. Die Namen der verschiedenen expliziten Beschreibungsformen sind weitgehend selbsterklärend und werden insbesondere bei Zusammenschaltung streng linearer Zweitore noch an Klarheit gewinnen.

Diese sechs expliziten Darstellungen existieren nicht immer alle.

In der Vektornotation sind alle hier behandelten Beschreibungsformen für Zweitore aufwärtskompatibel zu Mehratoren mit beliebiger Torzahl.

4.1.1 Ein Optokoppler

Am Beispiel des *Optokopplers*, bei dem zwei wohlbekannte Eintore optisch gekoppelt werden, sollen nun einige der genannten Zweitorebeschreibungen hergeleitet werden. Als Lichtquelle wird das Eintor Glühlampe am Tor 1 und als lichtempfindliches Eintore eine Photodiode am Tor 2 angeschaltet. Man denkt sich beide Eintore in einem Behältnis von Umwelteinflüssen abgeschirmt, so dass die an der Photodiode auftretende Beleuchtungsstärke ausschließlich von der Glühlampe herrührt. Die Glühlampe wird näherungsweise als streng lineares Eintore beschrieben:

$$u_1 = R_1 i_1$$

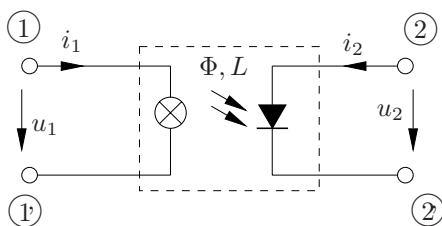


Bild 4.3 Glühlampe und Photodiode als Optokoppler

Der abgegebene Lichtstrom Φ ist direkt proportional zur am Eingangstor 1 aufgenommenen elektrischen Leistung:

$$\Phi = \eta p_1 = \eta u_1 i_1$$

wobei dem *Wirkungsgrad* $0 < \eta < 1$ entsprechend nur ein Teil dieser Leistung in Licht umgewandelt wird.

Als Modell der Photodiode wird das in Abschnitt 3.1 vorgestellte verwendet:

$$i_2 = I_S \left(e^{u_2/U_T} - 1 - \frac{L}{L_0} \right)$$

wobei L die Beleuchtungsstärke am Ort der Diode ist. Der Bezugswert L_0 ist dabei derjenige, bei dem sich der Sperrstrom gerade verdoppelt:

$$i_2(u_2 \rightarrow -\infty) = -I_S \left(1 + \frac{L}{L_0} \right) \Big|_{L=L_0} = -2I_S$$

Die Beleuchtungsstärke am Ort der Diode ergibt mit der lichtempfindlichen Fläche A multipliziert den Anteil des Lichtstromes

$$\Phi k' = AL, \quad k' < 1,$$

der die Photodiode trifft. Es ergibt sich

$$\frac{L}{L_0} = \frac{\Phi k'}{AL_0} = \frac{k' \eta}{AL_0} u_1 i_1$$

Fasst man die diversen Konstanten zu einer einzigen Konstanten k zusammen:

$$k = \frac{k' \eta}{AL_0}$$

so ergibt sich als explizite Widerstandsbeschreibung des Optokopplers:

$$\begin{aligned} u_1 &= r_1(i_1, i_2) = R_1 i_1 \\ u_2 &= r_2(i_1, i_2) = U_T \ln \left(i_1^2 k R_1 + 1 + \frac{i_2}{I_S} \right) \end{aligned}$$

Die dazu inverse Leitwertsbeschreibung hat die Gestalt:

$$\begin{aligned} i_1 &= g_1(u_1, u_2) = \frac{1}{R_1} u_1 \\ i_2 &= g_2(u_1, u_2) = I_S \left(-k \frac{u_1^2}{R_1} - 1 + e^{u_2/U_T} \right) \end{aligned}$$

Bilder 4.4 und 4.5 zeigen jeweils eine graphische Darstellung der beiden Funktionen und der Leitwertsdarstellung als Flächen in dreidimensionalen Räumen. Bei g_1 handelt es sich dabei um eine Ebene, bei g_2 um eine gekrümmte Fläche. Diese beiden Funktionen der Torspannungen können auch mit Hilfe parametrisierter Kurvenscharen als sogenannte *Kennlinienfelder* in einer Ebene dargestellt werden, wenn man sie als Funktionen von nur noch einer Torspannung betrachtet, und die jeweils andere als Parameter auffasst. Die Bilder 4.6 und 4.7 zeigen den (von u_2 unabhängigen) Eingangsstrom des Optokopplers in der u_1 - i_1 -Ebene, und in der u_2 - i_2 -Ebene den Ausgangsstrom mit u_1 als Parameter. Beide hybride Beschreibungen existieren ebenfalls:

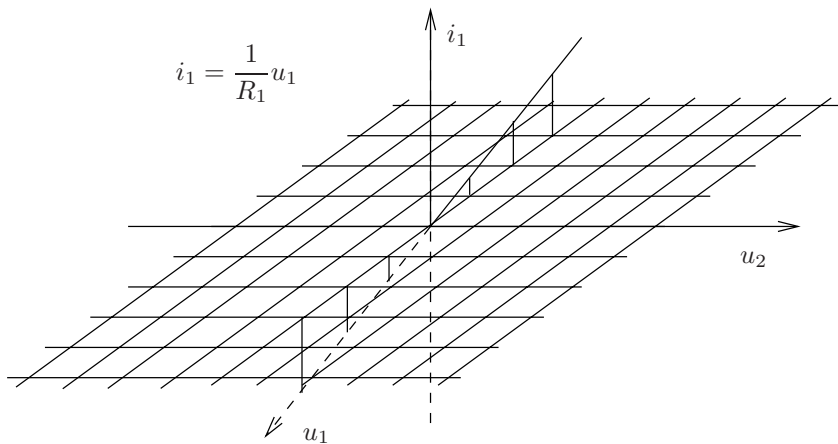


Bild 4.4 Der Eingangsstrom des Optokopplers als Funktion der Torspannungen

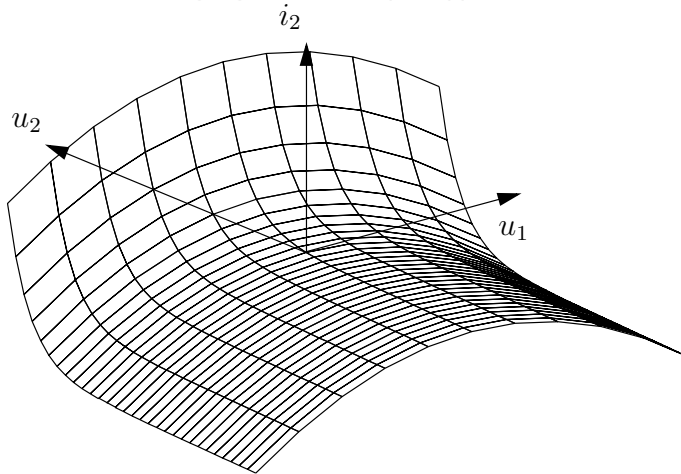


Bild 4.5 Der Ausgangsstrom des Optokopplers als Funktion der Torspannungen

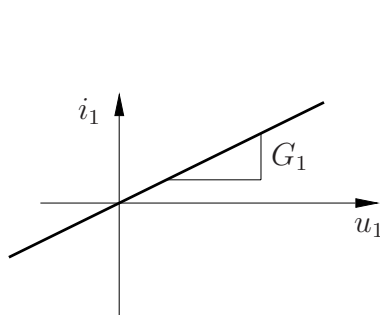


Bild 4.6 Das Eingangskennlinienfeld des Optokopplers mit u_2 als Parameter

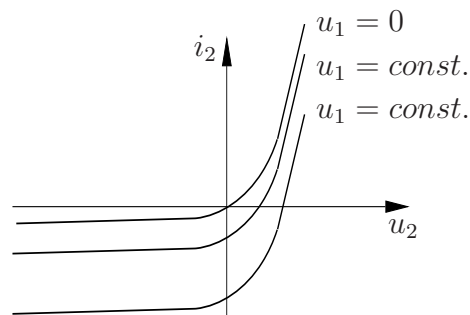


Bild 4.7 Das Ausgangskennlinienfeld des Optokopplers mit u_1 als Parameter

$$\begin{aligned}
 u_1 &= h_1(i_1, u_2) = R_1 i_1 \\
 i_2 &= h_2(i_1, u_2) = I_S \left(-k i_1^2 R_1 - 1 + e^{u_2/U_T} \right) \\
 i_1 &= h'_1(u_1, i_2) = \frac{1}{R_1} u_1 \\
 u_2 &= h'_2(u_1, i_2) = U_T \ln \left(u_1^2 \frac{k}{R_1} + 1 + \frac{i_2}{I_S} \right)
 \end{aligned}$$

Die Kettenbeschreibungen existieren hier beide nicht.

4.1.2 Linearisierung

So wie bei den Eintoren führt man auch bei Zweitoren häufig eine gedankliche Aufspaltung der Signale in den der Arbeitspunkteinstellung dienenden Gleichanteil und den informations-tragenden Wechselanteil durch. Die Zerlegung der Betriebsgrößen eines Zweitores führt auf die Gleichungen:

$$\begin{aligned} i_1 &= I_1 + \Delta i_1 \\ i_2 &= I_2 + \Delta i_2 \\ u_1 &= U_1 + \Delta u_1 \\ u_2 &= U_2 + \Delta u_2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Im Arbeitspunkt ist auch dann wieder eine näherungsweise lineare Beschreibung möglich, wenn die Kennfläche stetig und differenzierbar ist. Hierfür müssen die sogenannten partiellen Ableitungen einer beliebigen Beschreibungsform existieren, beispielsweise $\frac{\partial g_1}{\partial u_1}$, $\frac{\partial g_1}{\partial u_2}$, $\frac{\partial g_2}{\partial u_1}$ und $\frac{\partial g_2}{\partial u_2}$ bei der Leitwertdarstellung, und im durch $[U_1 \ U_2 \ I_1 \ I_2]^T$ bestimmten Arbeitspunkt stetig sein.

Damit kann dann die linearisierte Darstellung angegeben werden:

$$\begin{aligned} i_1 &= g_1(u_1, u_2) = g_1(U_1, U_2) + \Delta i_1 \approx I_1 + \left. \frac{\partial g_1}{\partial u_1} \right|_{AP} \cdot \Delta u_1 + \left. \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \right|_{AP} \cdot \Delta u_2 \\ i_2 &= g_2(u_1, u_2) = g_2(U_1, U_2) + \Delta i_2 \approx I_2 + \left. \frac{\partial g_2}{\partial u_1} \right|_{AP} \cdot \Delta u_1 + \left. \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \right|_{AP} \cdot \Delta u_2 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis hat in Matrixschreibweise die übersichtliche Gestalt:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \end{array} \right] \bigg|_{AP} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

und kann in abstrakter Vektorschreibweise in einer noch kürzeren Notation dargestellt werden als eine Formel, die auch noch bei Mehrtoren ihre Gültigkeit behalten wird:

$$\mathbf{i} \approx \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \tag{4.6}$$

wobei $\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}$ die als *Jacobimatrix* bekannte Matrix der partiellen Ableitungen bezeichnet. Die genaue Bedeutung der einzelnen Symbole erkennt man beim Vergleich von Gl.(4.6) mit Gl.(4.5).

Linearisiert man den Optokoppler dementsprechend im Ursprung des Signalraumes, also in dem Arbeitspunkt

$$[U_1 \ U_2 \ I_1 \ I_2]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T = \mathbf{0}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial g_1}{\partial u_1} \right|_{AP} &= \frac{1}{R_1} & \left. \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \right|_{AP} &= 0 \\ \left. \frac{\partial g_2}{\partial u_1} \right|_{AP} &= -2I_S k \frac{u_1}{R_1} \Big|_{u_1=U_1=0} = 0 & \left. \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \right|_{AP} &= \frac{I_S}{U_T} e^{u_2/U_T} \Big|_{u_2=U_2=0} = \frac{I_S}{U_T} \end{aligned}$$

und damit:

$$\Delta i_1 = \frac{1}{R_1} \Delta u_1, \quad \Delta i_2 = \frac{I_S}{U_T} \Delta u_2$$

als lineare Näherung der Leitwertsbeschreibung im Ursprung als Arbeitspunkt.

Sinngemäß kann eine solche linearisierte Beschreibung natürlich nicht nur auf explizite, sondern auch auf implizite Beschreibungsformen angewendet werden:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{i}) = \mathbf{f}(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{u}, \mathbf{I} + \Delta \mathbf{i}) = \mathbf{f}(\mathbf{U}, \mathbf{I}) + \Delta \mathbf{f}(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{i}) = \mathbf{0}$$

Da der Arbeitspunkt für sich genommen auch bereits der impliziten Beschreibung genügen muss:

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}, \mathbf{I}) = \mathbf{0}$$

erfüllt auch die Kleinsignalbeschreibung eine (nun sogar lineare) implizite Gleichung:

$$\Delta \mathbf{f}(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{i}) = \mathbf{0}$$

Die lineare Kleinsignalbeschreibung erhält man mit Hilfe der partiellen Ableitungen der Komponenten der konstituierenden Funktion, die in zwei Matrizen zusammengefasst werden:

$$\mathbf{M} := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial i_1} & \frac{\partial f_1}{\partial i_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial i_1} & \frac{\partial f_2}{\partial i_2} \end{bmatrix},$$

Es gilt dann:

$$\Delta \mathbf{f}(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{i}) = \mathbf{M} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{N} \Delta \mathbf{i} = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

Angewandt auf den Optokoppler ergibt sich aus

$$\begin{aligned} f_1(u_1, u_2, i_1, i_2) &= u_1 - R_1 i_1 = 0 \\ f_2(u_1, u_2, i_1, i_2) &= -I_S k \frac{u_1^2}{R_1} + I_S e^{u_2/U_T} - i_2 - I_S = 0 \end{aligned}$$

für die Ableitungen im Ursprung des Betriebsraums:

$$\mathbf{M} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{I_S}{U_T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} := \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

und weiter:

$$\Delta f_1(\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta i_1, \Delta i_2) = \Delta u_1 - R_1 \Delta i_1 = 0$$

$$\Delta f_2(\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta i_1, \Delta i_2) = \frac{I_S}{U_T} \Delta u_2 - \Delta i_2 = 0$$

Erwartungsgemäß sind diese linearisierten Gleichungen äquivalent zu der oben hergeleiteten linearisierten expliziten Beschreibung des Optokopplers.

4.2 Lineare Zweitore

Ein resistives Zweitor heißt *streng linear* oder *linear und quellenfrei*, wenn eine beliebige Linearkombination zweier Betriebspunkte wieder ein Betriebspunkt ist:

$$\begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ i_1^{(1)} \\ i_2^{(1)} \end{bmatrix} \in \mathcal{F} \wedge \begin{bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ i_1^{(2)} \\ i_2^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathcal{F} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha u_1^{(1)} + \beta u_1^{(2)} \\ \alpha u_2^{(1)} + \beta u_2^{(2)} \\ \alpha i_1^{(1)} + \beta i_1^{(2)} \\ \alpha i_2^{(1)} + \beta i_2^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathcal{F}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

In kompakter Vektorschreibweise gilt also:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{i}^{(1)} \end{bmatrix} \in \mathcal{F} \wedge \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(2)} \\ \mathbf{i}^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathcal{F} \Rightarrow \alpha \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{i}^{(1)} \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(2)} \\ \mathbf{i}^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathcal{F}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}} \quad (4.8)$$

Die Ströme und Spannungen an einem streng linearen Zweitor erfüllen also gerade wieder die Eigenschaften eines (linearen) Vektorraumes. Die “Kennfläche” eines linearen Zweitores lässt sich im vierdimensionalen Signalraum aber leider nicht mehr skizzieren. Wesentliche Eigenschaften dieser Fläche und Möglichkeiten einer algebraischen Beschreibung lassen sich allerdings schon durch den Vergleich mit einem streng linearen Eintor (dem linearen ohmschen Widerstand) ableiten.

4.2.1 Beschreibungsformen streng linearer Zweitore

Die bereits im dritten Kapitel vorgestellten drei Beschreibungsformen resistiver Elemente existieren natürlich auch im Linearen, und können dann sehr elegant in Matrixschreibweise ausgedrückt werden. Dies soll hier am einfachen Beispiel des (streng linearen) ohmschen Widerstandes gezeigt werden, dessen in Bild 4.8 abgebildete Kennlinie geometrisch anschaulich eine Gerade in der u - i -Ebene ist: Eine implizite Beschreibung in Matrixschreibweise lautet:

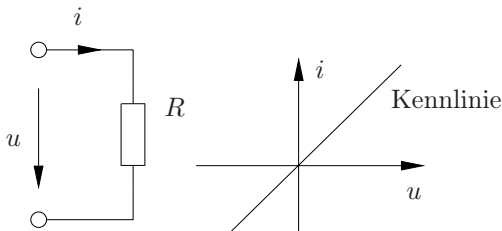


Bild 4.8 Die Kennlinie eines streng linearen resistiven Eintores

$$\begin{bmatrix} 1 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} = 0$$

Unter Verwendung eines Parameters erhält man eine Parameterdarstellung:

$$\begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ri_0 \\ i_0 \end{bmatrix} \cdot c$$

Schließlich kann man zwei explizite Darstellungen angeben. Die spannungsgesteuerte hat die Form:

$$i = R^{-1}u$$

4.2.1.1 Kern- und Bildbeschreibung

Die Kennlinie eines beliebigen (nichtlinearen) resistiven **Eintors** gewinnt man durch (unendlich viele) Strom- und Spannungsmessungen. Diese Messungen lassen sich zu *Signal-* oder *Betriebsgrößenpaaren* zusammenfassen und als Vektor im *Signal-* oder *Betriebsraum* interpretieren. Bei einem streng linearen Eintor genügt zur eindeutigen Festlegung der Kennlinie bereits **eine** nichttriviale Messung $\begin{bmatrix} u^{(1)} \\ i^{(1)} \end{bmatrix}$: Jede weitere Messung $\begin{bmatrix} u^{(2)} \\ i^{(2)} \end{bmatrix}$ ist wegen

$$\begin{bmatrix} u^{(2)} \\ i^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^{(1)} \\ i^{(1)} \end{bmatrix} \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

ebenfalls ein zulässiger Betriebspunkt des Eintores und beinhaltet daher keine neue Information.

Die *triviale Messung* ist das Paar $\begin{bmatrix} u^{(1)} \\ i^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$: Der Koordinatenursprung muss nämlich aufgrund der Definition der strengen Linearität (im Falle $\alpha = 0$) immer Element der Kennlinie sein. Alle zulässigen $\begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix}$ -Signalvektoren bilden somit einen eindimensionalen *linearen Unterraum* des zweidimensionalen Signalraumes, also eine Ursprungsgerade in der u - i -Ebene.

Ein **Zweitore** wird bereits durch vier Signale $[u_1, u_2, i_1, i_2]^T =: [\mathbf{u}^T \ \mathbf{i}^T]^T$, die einen vierdimensionalen Signalraum aufspannen, beschrieben. Der zulässige Lösungsraum gehorcht zwei unabhängigen Restriktionen. Im Fall des streng linearen Zweitores bildet er einen zweidimensionalen linearen Unterraum des Signalraumes (Ebene durch den Ursprung). Algebraisch lässt sich dieser Unterraum als *Nullraum* oder *Kern* einer linearen Abbildung $[M \ N]$ interpretieren:

$$\mathcal{F} = \text{Kern} [M \ N] := \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} \mid [M \ N] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\}, \text{Rang} [M \ N] = 2 \quad (4.9)$$

Ausgeschrieben sieht die Matrix $[M \ N]$ folgendermaßen aus:

$$[M \ N] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & n_{11} & n_{12} \\ m_{21} & m_{22} & n_{21} & n_{22} \end{bmatrix}$$

Diese Darstellung entspricht einer impliziten Beschreibung des linearen Zweitores (Nullstellenmenge).

Die zweite Möglichkeit der Beschreibung ist wieder die parametrisierte Darstellung, indem man den gesamten Betriebsraum als *lineare Hülle* zweier, linear unabhängiger Messvektoren interpretiert:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{i}^{(1)} \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(2)} \\ \mathbf{i}^{(2)} \end{bmatrix} c_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(1)} & \mathbf{u}^{(2)} \\ \mathbf{i}^{(1)} & \mathbf{i}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad (4.10)$$

Die beiden reellen Parameter c_1 und c_2 in Gl.(4.10) ersetzen die Zahlen α und β aus Gleichung (4.8). Gleichung (4.10) lässt sich durch Einführung der *Betriebsmatrix* noch kompakter formulieren. Die Betriebsmatrix setzt sich spaltenweise aus zwei linear unabhängigen Messvektoren zusammen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(1)} & \mathbf{u}^{(2)} \\ \mathbf{i}^{(1)} & \mathbf{i}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Die lineare Hülle der Spaltenvektoren der Betriebsmatrix heißt auch *Bildraum* oder *Bild* der Betriebsmatrix:

$$\mathcal{F} = \text{Bild} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} := \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad \text{Rang} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = 2 \quad (4.11)$$

Für ein gegebenes Zweitor ist der *Betriebsraum* eindeutig. Weder die Matrix $[\mathbf{M} \ \mathbf{N}]$ noch die Betriebsmatrix $\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$ sind allerdings eindeutig. Eine beliebige Linkstransformation einer impliziten Beschreibung durch eine nichtsinguläre 2×2 -Matrix \mathbf{T}

$$[\mathbf{M}' \ \mathbf{N}'] = \mathbf{T} [\mathbf{M} \ \mathbf{N}]$$

lässt nämlich den Nullraum unverändert. Genauso lässt sich eine Betriebsmatrix $\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$ durch eine nichtsinguläre Rechtstransformation mit \mathbf{T} in eine andere Betriebsmatrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}' \\ \mathbf{I}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T}$$

überführen, die den gleichen Bildraum besitzt. Die Spaltenvektoren der Betriebsmatrix bilden eine Basis des Betriebsraumes.

Die implizite und die parametrisierte Beschreibung eines streng linearen Zweitores sind beide vollständig und somit gleichwertig. Allerdings lassen sich an der Betriebsmatrixdarstellung viele Zweitoreigenschaften besser erkennen, während eine implizite Beschreibung bei der Schaltungsanalyse leichter aufzustellen ist.

4.2.1.2 Zweitormatrizen

Neben der Kern- und Bildbeschreibung streng linearer Zweitore gibt es eine Reihe expliziter Darstellungsmöglichkeiten, bei denen nach 2 der 4 Größen u_1, u_2, i_1, i_2 aufgelöst wird. Man hat insgesamt $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten auszuwählen und erhält entsprechend die folgenden 6

Matrixgleichungen:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}u_1 + g_{12}u_2 \\ g_{21}u_1 + g_{22}u_2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \\ r_{21}i_1 + r_{22}i_2 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}i_1 + h_{12}u_2 \\ h_{21}i_1 + h_{22}u_2 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}' \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{11}u_1 + h'_{12}i_2 \\ h'_{21}u_1 + h'_{22}i_2 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}u_2 - a_{12}i_2 \\ a_{21}u_2 - a_{22}i_2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}' \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ -i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11}u_1 - a'_{12}i_1 \\ a'_{21}u_1 - a'_{22}i_1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Diese 6 Zweitormatrizen besitzen jeweils einen Namen, der in Tabelle 4.1 aufgelistet ist.

G:	Leitwertmatrix
R:	Widerstandsmatrix
H:	Hybridmatrix
H':	inverse Hybridmatrix
A:	Kettenmatrix
A':	inverse Kettenmatrix

Tabelle 4.1 Bezeichnung der Zweitormatrizen

Bei den Kettenbeschreibungen ist besonders darauf zu achten, dass diese von $-i_2$ bzw. $-i_1$ abhängen!

Die verschiedenen expliziten Beschreibungsgleichungen können bei der Verschaltung von Zweitoren vorteilhaft eingesetzt werden. Alle diese Zweitormatrizen lassen sich aus einer impliziten oder aus einer parametrisierten Darstellung berechnen, falls die gesuchte Zweitormatrix existiert. Dazu bestimmt man eine geeignete, nichtsinguläre Transformationsmatrix \mathbf{T} , so dass sich die entsprechende Zweitormatrix unmittelbar ablesen lässt.

Beispiel 1:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} M & N \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} &= 0 \\
 M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} M & N \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} &= 0 \\
 \begin{bmatrix} 1 & M^{-1} \cdot N \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} &= 0 \\
 u + M^{-1} \cdot N \cdot i &= 0 \\
 u &= -M^{-1} \cdot N \cdot i \\
 \Downarrow \\
 R &= -M^{-1} \cdot N
 \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} \cdot c \\
 \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} \cdot U^{-1} \cdot c' \\
 \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ I \cdot U^{-1} \end{bmatrix} \cdot c' \\
 \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ I \cdot U^{-1} \end{bmatrix} \cdot u \\
 \Downarrow \\
 G &= I U^{-1}
 \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur Kern- und Bildbeschreibung existieren die 6 Zweitormatrizen nicht immer. Zum Beispiel gibt es keine Widerstandsbeschreibung, wenn die Matrix M nicht invertierbar ist. Falls eine Zweitormatrix jedoch existiert, ist sie für ein gegebenes Zweitor eindeutig, und es besteht die Möglichkeit die Matrizen gemäß Tabelle 4.2 ineinander umzurechnen. Durch geeignete Beschaltung eines Zweitores lassen sich die Elemente der Beschreibungsmatrizen direkt bestimmen und entsprechend interpretieren. Tabelle 4.2.3 gibt exemplarisch die Bedeutung der Elemente der G - und der R -Matrix an (die der Elemente der übrigen Matrizen ergeben sich sinngemäß), wobei immer Tor 1 als *Eingang* und Tor 2 als *Ausgang* bezeichnet wird.

	\mathbf{R}	\mathbf{G}	\mathbf{H}	\mathbf{H}'	\mathbf{A}	\mathbf{A}'
\mathbf{R}	$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \mathbf{G}} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{22}} \begin{bmatrix} \det \mathbf{H} & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h'_{12} \\ h'_{21} & \det \mathbf{H}' \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{21}} \begin{bmatrix} a_{11} \det \mathbf{A} \\ 1 & a_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{21}} \begin{bmatrix} a'_{22} & 1 \\ \det \mathbf{A}' & a'_{11} \end{bmatrix}$
\mathbf{G}	$\frac{1}{\det \mathbf{R}} \begin{bmatrix} r_{22} & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & \det \mathbf{H} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{22}} \begin{bmatrix} \det \mathbf{H}' & h'_{12} \\ -h'_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} - \det \mathbf{A} \\ -1 & a_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{12}} \begin{bmatrix} a'_{11} & -1 \\ -\det \mathbf{A}' & a'_{22} \end{bmatrix}$
\mathbf{H}	$\frac{1}{r_{22}} \begin{bmatrix} \det \mathbf{R} & r_{12} \\ -r_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{21} & \det \mathbf{G} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \mathbf{H}'} \begin{bmatrix} h'_{22} & -h'_{12} \\ -h'_{21} & h'_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{22}} \begin{bmatrix} a_{12} \det \mathbf{A} \\ -1 & a_{21} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{11}} \begin{bmatrix} a'_{12} & 1 \\ -\det \mathbf{A}' & a'_{21} \end{bmatrix}$
\mathbf{H}'	$\frac{1}{r_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -r_{12} \\ r_{21} & \det \mathbf{R} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{22}} \begin{bmatrix} \det \mathbf{G} & g_{12} \\ -g_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \mathbf{H}} \begin{bmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{11}} \begin{bmatrix} a_{21} - \det \mathbf{A} \\ 1 & a_{12} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{22}} \begin{bmatrix} a'_{21} & -1 \\ \det \mathbf{A}' & a'_{12} \end{bmatrix}$
\mathbf{A}	$\frac{1}{r_{21}} \begin{bmatrix} r_{11} \det \mathbf{R} \\ 1 & r_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{21}} \begin{bmatrix} -g_{22} & -1 \\ -\det \mathbf{G} & -g_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{21}} \begin{bmatrix} -\det \mathbf{H} & -h_{11} \\ -h_{22} & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{21}} \begin{bmatrix} 1 & h'_{22} \\ h'_{11} & \det \mathbf{H}' \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \mathbf{A}'} \begin{bmatrix} a'_{22} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{11} \end{bmatrix}$
\mathbf{A}'	$\frac{1}{r_{12}} \begin{bmatrix} r_{22} \det \mathbf{R} \\ 1 & r_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{12}} \begin{bmatrix} -g_{11} & -1 \\ -\det \mathbf{G} & -g_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{12}} \begin{bmatrix} 1 & h_{11} \\ h_{22} & \det \mathbf{H} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{12}} \begin{bmatrix} -\det \mathbf{H}' & -h'_{22} \\ -h'_{11} & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}$

Tabelle 4.2.2: Die Umrechnungstabelle der Zweitormatrizen

$g_{11} = \frac{i_1}{u_1} \Big _{u_2=0}$	Eingangsleitwert bei kurzgeschlossenem Ausgang	$r_{11} = \frac{u_1}{i_1} \Big _{i_2=0}$	Eingangswiderstand bei leerlaufendem Ausgang
$g_{22} = \frac{i_2}{u_2} \Big _{u_1=0}$	Ausgangsleitwert bei kurzgeschlossenem Eingang	$r_{22} = \frac{u_2}{i_2} \Big _{i_1=0}$	Ausgangswiderstand bei leerlaufendem Eingang
$g_{21} = \frac{i_2}{u_1} \Big _{u_2=0}$	Vorwärtstransferleitwert bei kurzgeschlossenem Ausgang	$r_{21} = \frac{u_2}{i_1} \Big _{i_2=0}$	Vorwärtstransferwiderstand bei leerlaufendem Ausgang
$g_{12} = \frac{i_1}{u_2} \Big _{u_1=0}$	Rückwärtstransferleitwert bei kurzgeschlossenem Eingang	$r_{12} = \frac{u_1}{i_2} \Big _{i_1=0}$	Rückwärtstransfer- widerstand bei leerlaufendem Eingang

Tabelle 4.2 Die Bedeutung einiger Zweitor-Matrixelemente.

4.2.2 Nicht quellenfreie lineare Zweitore

Der Betriebsraum von linearen resistiven Zweitoren, die Quellen enthalten, ist keine Ursprungsebene mehr, sondern eine affine Ebene:

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u - u_0 \\ i - i_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\} = \text{Kern} \begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} \cdot c + \begin{bmatrix} u_0 \\ i_0 \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Bild} \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Die implizite Beschreibung Gl.(4.18) bzw. die parametrisierte Betriebsraumdarstellung Gl.(4.19) ist eine Ebenengleichung mit dem "Aufhängepunkt" $\begin{bmatrix} u_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$, dessen Wahl natürlich nicht eindeutig ist, da er beliebig auf der Ebene verschoben werden kann.

Falls aber beispielsweise das System $U \cdot c = -u_0$ lösbar ist, so besitzt die Betriebsebene einen eindeutigen Schnittpunkt $\begin{bmatrix} 0 \\ i_G \end{bmatrix}$ mit der "i-Achse", der dann als Aufhängepunkt gewählt werden kann. Dazu muss die Leitwertmatrix existieren und es gilt:

$$i_G = i_0 - G \cdot u_0$$

Durch eine geeignete Transformation der Betriebsmatrix (siehe Beispiel 2) lässt sich schließlich die explizite Matrixgleichung:

$$i = G \cdot u + i_G$$

aufstellen. Auf analoge Weise entstehen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{G} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{G1} \\ i_{G2} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{R1} \\ u_{R2} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{H1} \\ i_{H2} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{H}' \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{H'1} \\ u_{H'2} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{A1} \\ i_{A1} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{A}' \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ -i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{A'2} \\ i_{A'2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Diese Gleichungen (4.20) besitzen jeweils einen die inneren Quellen repräsentierenden Term, der im streng linearen Fall verschwindet. Die Gleichungen (4.20) gehen dann in Gl.(4.17) über. Die Gleichungen (4.20) führen unmittelbar zu Ersatzschaltungen, in denen das, durch die Matrizen \mathbf{G} , \mathbf{R} , \mathbf{H} , \mathbf{H}' , \mathbf{A} bzw. \mathbf{A}' beschriebene streng lineare Zweitor durch **nur zwei** unabhängige Quellen ergänzt wird.

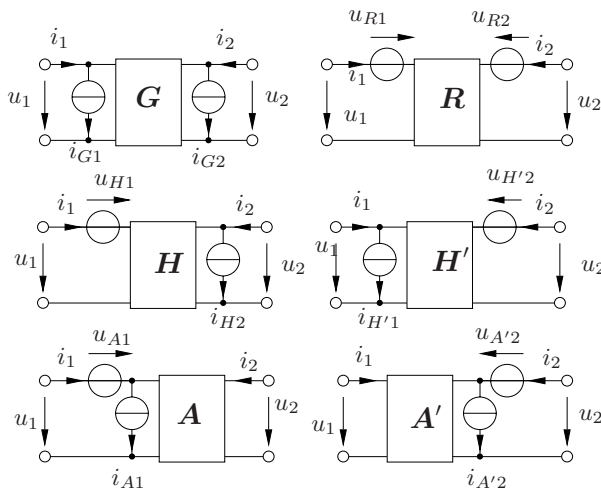


Bild 4.9 Zerlegungen nicht quellenfreier linearer Zweitore

Diese Darstellungen sind beispielsweise bei der Behandlung nicht autonomer dynamischer Schaltungen zweiten Grades wichtig, bei denen die beiden Tore mit Reaktanzen beschaltet werden. Ein weiterer praktisch bedeutsamer Anwendungsfall ist die Rauschanalyse, wobei sich jedes rauschende lineare Zweitor durch ein rauschfreies lineares Zweitor und zwei externe Rauschquellen ersetzen lässt.

4.3 Eigenschaften resistiver Zweitore

Die Eigenschaften resistiver Zweitore sind durch die Leistungsbilanz, also durch eine spezielle Lage des Betriebsraumes, aber auch durch Symmetrien im Betriebsraum charakterisiert. Für nichtlineare Zweitore ist es üblich, den Betriebsraum implizit zu beschreiben, während für lineare Zweitore eine Betriebsmatrixdarstellung aussagekräftiger ist. Im Folgenden werden die Bezeichnungen $f(u_1, u_2, i_1, i_2)$, $f(\mathbf{u}, \mathbf{i})$ und $f\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{smallmatrix}\right)$ synonym gebraucht: Alle drei Bezeichnungen bedeuten, dass die vier formalen Parameter der Funktion $f(\bullet, \bullet, \bullet, \bullet)$ durch die aktuellen Parameter u_1, u_2, i_1 und i_2 ersetzt werden, und zwar in der Reihenfolge, in der sie im Parametervektor auftreten.

4.3.1 Leistungsbilanz

Die Leistungs- bzw. Energiebilanz hat in physikalischen Systemen wegen des zentralen Satzes der Energieerhaltung große Bedeutung. Dabei fungieren elektrische Netzwerke als Wandler zwischen verschiedenen Energieformen (elektrische Energie und mechanische, Licht- oder Wärmeenergie, ...).

4.3.1.1 Verlustlosigkeit

Ein Zweitor heißt *verlustlos*, wenn die Summe der an den beiden Toren aufgenommenen (elektrischen) Leistungen für alle Zeiten und für alle Betriebspunkte verschwindet:

$$p_1(t) + p_2(t) = u_1(t) \cdot i_1(t) + u_2(t) \cdot i_2(t) = 0$$

oder kompakt:

$$\boxed{\forall \begin{smallmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{smallmatrix} \in \mathcal{F} : \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{i} = 0} \quad \text{Verlustlosigkeit} \quad (4.21)$$

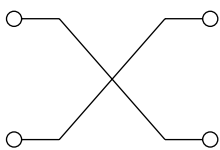


Bild 4.10 Verlustloses Zweitor Umpolung

Für streng lineare Zweitore lässt sich eine Bedingung für Verlustlosigkeit nicht nur punktweise sondern an die gesamte Betriebsmatrix herleiten: Mit

$$\begin{smallmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{smallmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$$

lautet die Bedingung für Verlustlosigkeit:

$$\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{i} = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{c} = 0$$

Aufspalten der Matrix $\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{I}$ in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Anteil ergibt:

$$\mathbf{c}^T \left[\frac{1}{2} (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{I} + \mathbf{I}^T \cdot \mathbf{U}) \right] \mathbf{c} + \mathbf{c}^T \left[\frac{1}{2} (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{I} - \mathbf{I}^T \cdot \mathbf{U}) \right] \mathbf{c} = 0 \quad (4.22)$$

Der zweite Summand von Gleichung (4.22) verschwindet unabhängig vom Parametervektor \mathbf{c} , da eine quadratische Form $h = \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{c}$ bezüglich einer schiefsymmetrischen Matrix $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ ($\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{I} - \mathbf{I}^T \cdot \mathbf{U})$) immer den Wert Null hat.

Beweis:

Die Transposition verändert eine skalare Größe nicht. Mit Hilfe der Gesetze der Matrixtransposition und unter Ausnutzung der Schiefsymmetrie lässt sich die folgende Gleichungskette aufstellen:

$$\begin{aligned}
 h &= h^T = && \text{h skalar} \\
 &= (\mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{c})^T = && \text{Definition von h} \\
 &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c} = && \text{Rechenregeln der Matrixtransposition} \\
 &= -\mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{c} = && \text{Schiefsymmetrie von } \mathbf{A} : \mathbf{A}^T = -\mathbf{A} \\
 &= -h && \text{Definition von h}
 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$h = -h \Rightarrow h = 0$$

Während der zweite Summand von Gleichung (4.22) also generell verschwindet muss der symmetrische Anteil von $\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{I}$ identisch null sein, damit die Gleichung für beliebige \mathbf{c} erfüllt ist:

$$\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{I} + \mathbf{I}^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{0}$$

In einer Formulierung als verallgemeinerte quadratische Form (Gramsche Matrix) bedeutet dies:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{0}} \iff \text{Verlustlosigkeit eines linearen Zweitores} \quad (4.23)$$

4.3.1.2 Passivität/Aktivität

Falls die gesamte aufgenommene Leistung für alle Zeiten und für alle Betriebspunkte größer oder gleich Null ist, so heißt das Zweitor *passiv*, und bei Ausschluss des Gleichheitszeichens *strikt passiv*:

$$\boxed{\forall \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} \in \mathcal{F} : \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{i} \geq 0} \quad \text{Passivität} \quad (4.24)$$

Die Passivität eines Zweitores besagt dabei **nicht**, dass an **beiden** Toren Leistung aufgenommen wird: Lediglich in der Summe muss Leistung aufgenommen werden! Ein Zweitor heißt *aktiv*, wenn es nicht passiv ist:

$$\boxed{\exists \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} \in \mathcal{F} : \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{i} < 0} \quad \text{Aktivität} \quad (4.25)$$

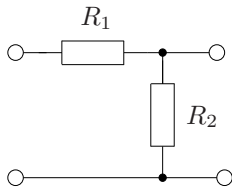
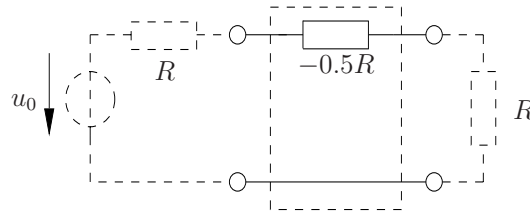
Bild 4.11 Passives Zweitor
Spannungsteiler

Bild 4.12 Aktives Zweitor Verstärker

4.3.2 Zeitvarianz

Ein Zweitor heißt *zeitvariant*, wenn die Zeit t in die es charakterisierende Beziehung eingeht:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{i}(t) \end{array} \right\} \left| \mathbf{f}_t(\mathbf{u}, \mathbf{i}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{i}, t) = \mathbf{0} \right. \quad (4.26)$$

Es ist *zeitinvariant*, wenn gilt:

$$\forall t : \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{i}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{i})$$

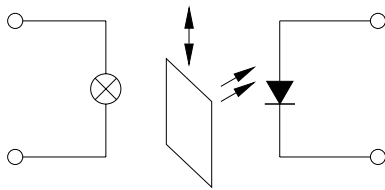


Bild 4.13 Zeitvariantes Zweitor Lichtschanke

4.3.3 Dualität

\mathcal{F}^d ist das bezüglich der Dualitätskonstanten R_d zu \mathcal{F} *duale Zweitor*, wenn die Rollen von Strom und Spannung (über die Umrechnung durch R_d) vertauscht sind:

$$\mathcal{F}^d = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{array} \right\} \left| \mathbf{f}^d \left(\begin{array}{l} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{array} \right) = \mathbf{0} \right. \quad (4.27)$$

wobei

$$\mathbf{f}^d \left(\begin{array}{l} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{array} \right) = \mathbf{f} \left(\begin{array}{l} R_d \mathbf{i} \\ \frac{1}{R_d} \mathbf{u} \end{array} \right) = \mathbf{f} \left(\left[\begin{array}{cc} 0 & R_d \mathbf{1} \\ \frac{1}{R_d} \mathbf{1} & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{array} \right)$$

Ist \mathcal{F} streng linear, so gilt für die Betriebsmatrix:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^d = \begin{bmatrix} R_d \mathbf{I} \\ \frac{1}{R_d} \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R_d \mathbf{1} \\ \frac{1}{R_d} \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Bringt man die Betriebsmatrix von \mathcal{F} und \mathcal{F}^d jeweils in die Form an der sich die Leitwert- bzw. die Widerstandsmatrix ablesen lässt, so findet man den Zusammenhang:

$$\mathbf{G}^d = \frac{1}{R_d^2} \mathbf{R}, \quad \mathbf{R}^d = R_d^2 \mathbf{G}$$

4.3.4 Umkehrbarkeit (Symmetrie)

Ein Zweitor heißt *umkehrbar* oder *symmetrisch*, wenn durch Vertauschen der beiden Tore der Betriebsraum unverändert bleibt:

$$\mathcal{F}^u = \mathcal{F} \quad (4.28)$$

wobei gilt:

$$\mathcal{F}^u = \{(\mathbf{u}, \mathbf{i}) \mid \mathbf{f}^u(\mathbf{u}, \mathbf{i}) = \mathbf{0}\}$$

mit

$$\mathbf{f}^u(\mathbf{u}, \mathbf{i}) = \begin{bmatrix} f_1(u_2, u_1, i_2, i_1) \\ f_2(u_2, u_1, i_2, i_1) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{P} \cdot \mathbf{i}) = \mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix}\right)$$

und

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1}$$

\mathbf{P} ist eine selbstinverse Permutationsmatrix, die das Umdrehen des Zweitores (wie in Bild 4.14 angedeutet) algebraisch beschreibt. Ist \mathcal{F} streng linear, so muss eine nicht singuläre Transformationsmatrix \mathbf{T} existieren, damit gilt:

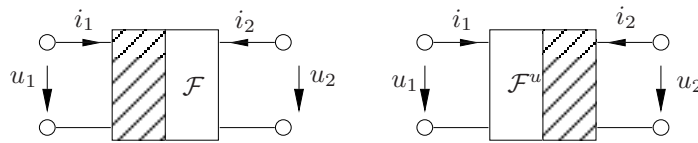


Bild 4.14 Zweitor und umgekehrtes Zweitor

existieren, damit gilt:

$$\exists \mathbf{T} : \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^u \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \\ & \mathbf{P} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T}$$

Die Transformation \mathbf{T} ist nötig, da die Betriebsmatrix nicht eindeutig ist. Geht man von einer Leitwertsdarstellung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}$$

oder Widerstandsdarstellung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

der Betriebsmatrix aus und wählt \mathbf{T} so, dass die Betriebsmatrix des umgekehrten Zweitores wieder eine Leitwert- bzw. Widerstandsdarstellung bildet, so lauten die eindeutigen Bedingungen für Umkehrbarkeit an \mathbf{G} bzw. \mathbf{R} :

$$\mathbf{G} = \mathbf{P} \mathbf{G} \mathbf{P}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} \mathbf{R} \mathbf{P}$$

Das heißt, beim umkehrbaren Zweitor sind \mathbf{G} und \mathbf{R} (falls existent!) unter Spalten- und Zeilentausch invariant. Falls ein umkehrbares Zweitor außerdem eine Kettenbeschreibung besitzt, so gilt:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}'$$

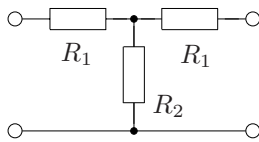


Bild 4.15 Symmetrisches Zweitor T-Glied

Geht ein Zweitor bei Umkehrung in sein duales Zweitor über

$$\mathcal{F}^u = \mathcal{F}^d$$

so nennt man es *antimetrisch*.

4.3.5 Reziprozität linearer Zweitore

Analyse des Spannungsteilers in Bild 4.11 führt auf die Widerstands-Matrixgleichung:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Obwohl die Schaltung keine erkennbare Symmetrie aufweist, sind die beiden Transferwiderstände gleich. Diese Eigenschaft heißt *Reziprozität* oder *Übertragungssymmetrie*. Sämtliche Zweitore, die sich nur aus den Netzwerkelementen Widerstand und Übertrager (Kapazität und Induktivität) zusammensetzen sind reziprok. Auch eine Reihe weiterer Übertragungsgrößen sind bei reziproken Zweitoren paarweise identisch: Das Verhältnis von Ursache und Wirkung ändert sich nicht, wenn man wie in Bild 4.16 gezeigt Quelle (unabhängige Strom- oder Spannungsquelle) und Last (Nullquelle: Leerlauf oder Kurzschluss) vertauscht, vorausgesetzt Quelle und Nullquelle am jeweiligen Tor sind vom gleichen Typ.

Die beschreibenden Matrizen erfüllen dann (sofern sie existieren) die folgenden Zusatzbedingungen:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^T, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}^T$$

$$\det \mathbf{A} = 1, \quad \det \mathbf{A}' = 1,$$

Untersucht man die schiefsymmetrische Matrix $\mathbf{U}^T \mathbf{I} - \mathbf{I}^T \mathbf{U}$ aus Gleichung (4.22) genauer und geht zum Beispiel vom Widerstandszusammenhang zwischen den Komponenten \mathbf{U} und \mathbf{I} ($\mathbf{U} = \mathbf{R} \mathbf{I}$) der Betriebsmatrix aus, so erhält man:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{I} - \mathbf{I}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}^T \mathbf{R}^T \mathbf{I} - \mathbf{I}^T \mathbf{R} \mathbf{I} = \mathbf{I}^T (\mathbf{R}^T - \mathbf{R}) \mathbf{I}$$

Bei einem reziproken Zweitor ist die Widerstandsmatrix bekanntlich symmetrisch ($\mathbf{R}^T = \mathbf{R}$). Daher verschwindet beim reziproken Zweitor der schiefsymmetrische Anteil von $\mathbf{U}^T \mathbf{I}$:

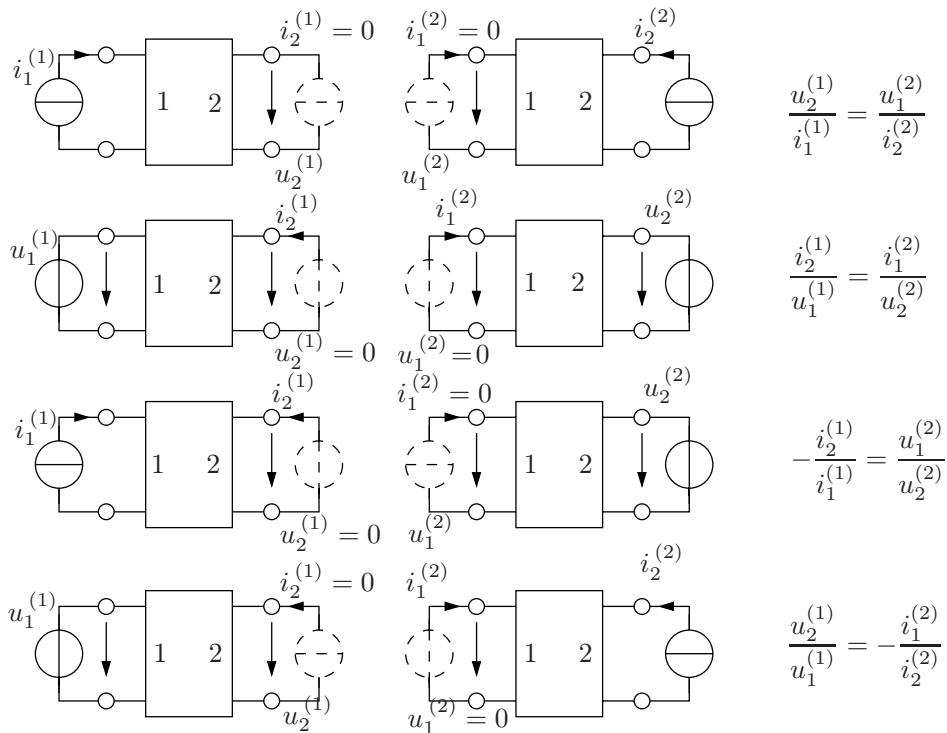


Bild 4.16 Reziprozitätsbeziehungen

Dieser Zusammenhang ist unabhängig von der Existenz der verschiedenen Zweitormatrizen und dient deshalb im folgenden als Definition der Reziprozität. Formuliert für die Betriebsmatrix lautet diese Definition also:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{0}} \Leftrightarrow \text{Reziprozität eines linearen Zweitores} \quad (4.29)$$

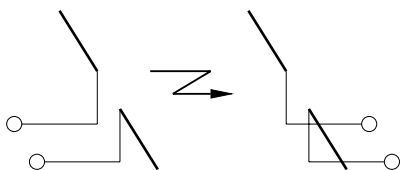


Bild 4.17 Reziprokes Zweitor Funkstrecke (nicht resistiv)

4.4 Spezielle Zweitore

Für die Modellierung praktisch wichtiger Zweitor-, oder Dreipolbauelemente benötigt man eine Reihe spezieller, idealisierter Zweitore. Meist steht dabei die Übertragungseigenschaft im Vordergrund, die am günstigsten durch die Kettenmatrix beschrieben wird. Deshalb klassifiziert man diese speziellen Zweitore anhand ihrer Kettenmatrix.

- Alle vier Elemente der Kettenmatrix gleich null \Rightarrow *Nullor*.

- Drei Elemente der Kettenmatrix gleich null \Rightarrow *gesteuerte Quellen* (USI, ISI, USU, ISU).
- Zwei Elemente der Kettenmatrix gleich null \Rightarrow Fallunterscheidung:
 - Hauptdiagonalelemente gleich null \Rightarrow *Inverter* (z.B.: Gyrator)
 - Nebendiagonalelemente gleich null \Rightarrow *Konverter* (z. B.: idealer Übertrager, NIK)

	Inverter	Konverter
Positiv	$\begin{bmatrix} 0 & R \\ \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ddot{u}} \end{bmatrix}$
Negativ	$\begin{bmatrix} 0 & R \\ -\frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$

Für die folgenden Zweitore sind jeweils die konstituierenden Gleichungen einer expliziten und häufig auch einer impliziten Beschreibung angegeben.

4.4.1 Gesteuerte Quellen

Gesteuerte Quellen sind spezielle Zweitore, die aus zwei Zweigen bestehen. Ein Zweig, der sogenannte *Steuerungszweig*, ist entweder ein Leerlauf oder ein Kurzschluss. Der andere Zweig, der sogenannte *gesteuerte Zweig*, ist eine abhängige Strom- oder Spannungsquelle. Aus diesen unterschiedlichen Möglichkeiten (zwei für den Steuerungszweig, zwei für den gesteuerten Zweig) ergeben sich insgesamt vier verschiedene gesteuerte Quellen.

Im Allgemeinen geht man von einer galvanischen Trennung von steuerndem und gesteuerten Zweig aus (siehe auch Beispiel Optokoppler). In vielen Fällen ist aber diese galvanische Trennung nicht wichtig und wird durch die äußere Beschaltung (gemeinsame Bezugsklemme: aus dem Zweitor wird ein Dreipol) aufgehoben. Auch die schaltungstechnische Realisierung der gesteuerten Quellen fällt leichter, wenn man von einer gemeinsamen Bezugsklemme ausgehen darf (siehe Kapitel 6).

Mit Hilfe der gesteuerten Quellen lassen sich einfache Ersatzschaltbilder für Zweitore angeben, deren Parameter direkt durch die Elemente der Zweitormatrizen G , R , H , H' gegeben sind. Gesteuerte Quellen können auch mit Hilfe von Nullatoren, Noratoren und ohmschen Widerständen realisiert werden. Dies wird am Beispiel einer USI im Bild 4.21 dargestellt. Wie man sich leicht überzeugt, sind die in den Bildern 4.18 bis 4.21 dargestellten gesteuerten Quellen streng linear.

Nichtlineare gesteuerte Quellen, die für die Modellierung von mehrpoligen Bauelementen von Bedeutung sind, werden ebenfalls durch die in Bild 4.18 gezeigten Netzwerke symbolisiert. Die gesteuerten Größen hängen dann aber nicht linear von den Steuerungsgrößen ab.

Beispiel: Bild 4.22

4.4 Spezielle Zweitore

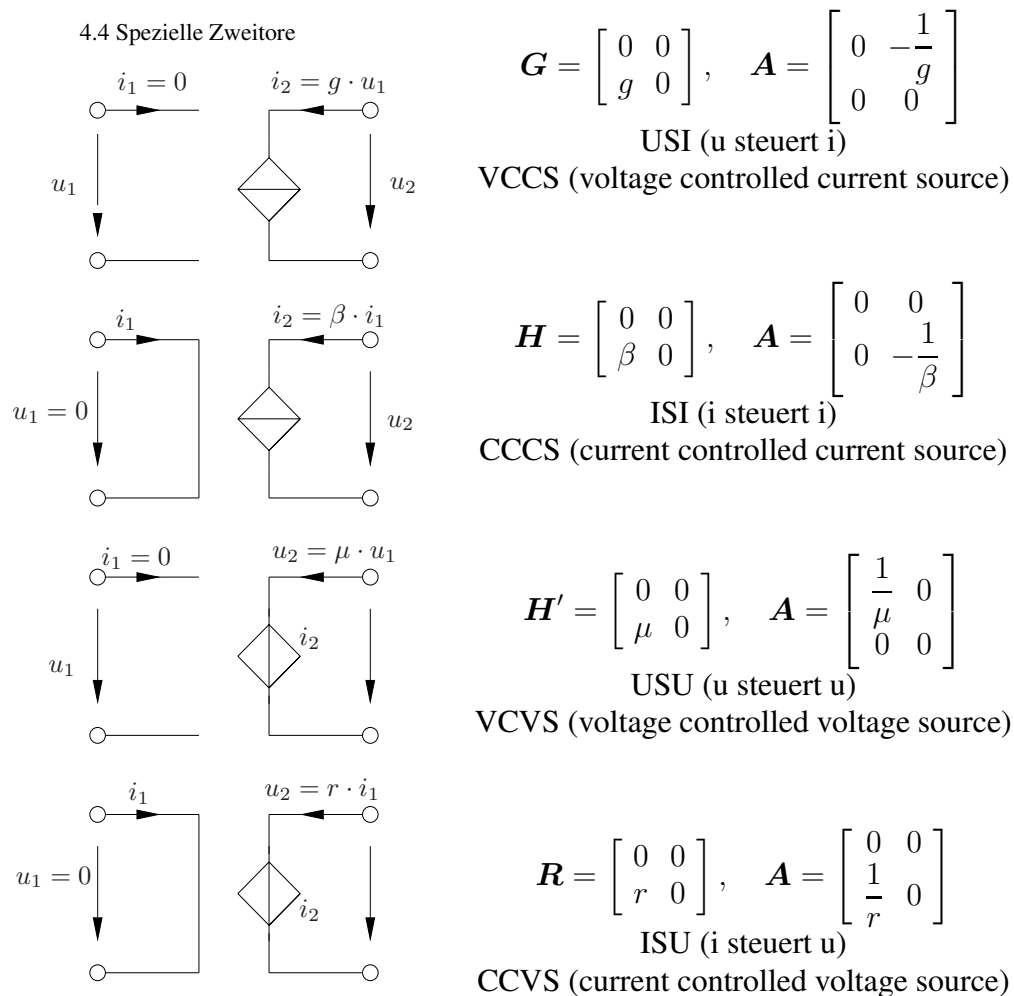


Bild 4.18 Gesteuerte Quellen und ihre Matrixbeschreibungen

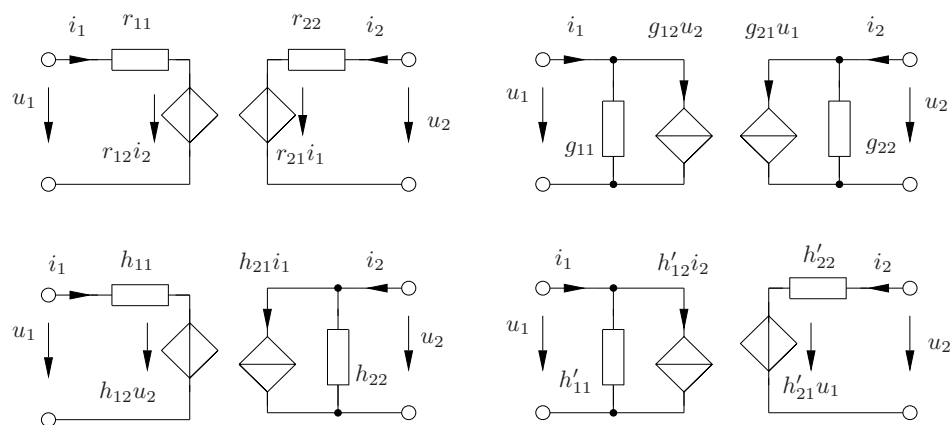


Bild 4.19 Zweitorersatzschaltungen mit zwei gesteuerten Quellen

4.4.2 Nullor

Der Nullor ist ein resistives Zweitor, das beschrieben wird durch

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{i}) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{i} = 0$$

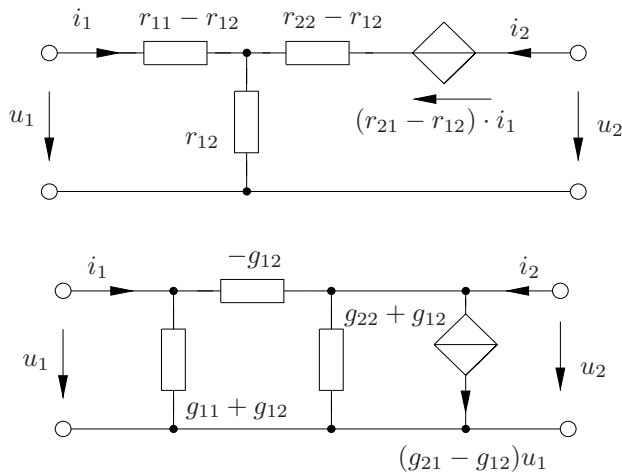


Bild 4.20 Zweitorersatzschaltungen mit einer gesteuerten Quelle

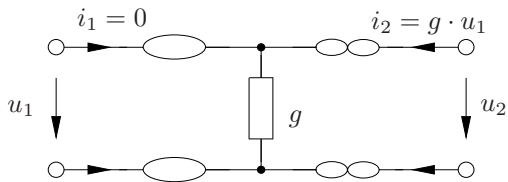


Bild 4.21 USI mit Nullatoren und Noratoren

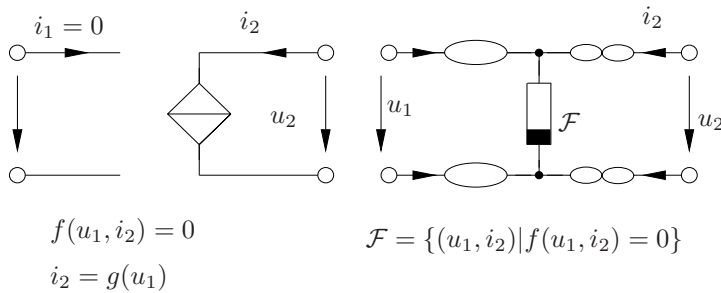


Bild 4.22 \mathcal{F} ist ein spannungsgesteuerter nichtlinearer Widerstand

$$\text{mit } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

es gilt also:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \text{ V} \\ i_1 &= 0 \text{ A} \end{aligned}$$

Über u_2 und i_2 werden keinerlei Aussagen gemacht, das heißt,

$$\begin{aligned} u_2 &= \text{beliebig} \\ i_2 &= \text{beliebig} \end{aligned}$$

Daraus wird unmittelbar klar, dass das Zweitor Nullor durch die zwei Eintore Nullator und Norator ersetzt werden kann. Von den sechs Zweitormatrizen existiert für den Nullor nur die

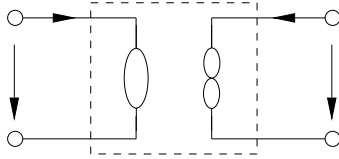


Bild 4.23 Nullor-Ersatzschaltung

Kettenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (4.31)$$

deren besondere Form für seinen Namen verantwortlich ist. Dabei erkennt man auch, dass jede der vier verschiedenen gesteuerten Quellen (siehe Bild 4.18) eine ebensolche Kettenmatrix erhält, wenn der zugehörige Steuerungsfaktor über alle Maßen ansteigt ($g, \beta, \mu, r \rightarrow \infty$).

Anmerkung:

Der Nullor als Zweitor wird vorteilhaft als lineare Ersatzschaltung des idealen Operationsverstärkers (siehe Kapitel 6) bzw. als Dreipol für den idealen Transistor verwendet.

4.4.3 Übertrager

Der *ideale Übertrager* (*ideale Transformator*) ist ein resistives Zweitor, das durch folgende konstituierende Gleichungen beschrieben wird:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{i}) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

mit $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -\ddot{u} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \ddot{u} & 1 \end{bmatrix}$ (4.32)

das heißt, es gilt

$$\begin{aligned} u_1 - \ddot{u} \cdot u_2 &= 0 \\ i_1 \ddot{u} + i_2 &= 0 \end{aligned}$$

Weder \mathbf{M} noch \mathbf{N} sind invertierbar, d. h. sowohl \mathbf{G} als auch \mathbf{R} existieren nicht.

Man kann aber \mathbf{M} und \mathbf{N} partitionieren und erhält zwei Hybrid- und zwei Kettenbeschreibungen:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \ddot{u} \\ -\ddot{u} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\ddot{u}} \\ \frac{1}{\ddot{u}} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ddot{u}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\ddot{u}} & 0 \\ 0 & \ddot{u} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Wie man sich leicht überzeugt ist der ideale Übertrager verlustlos

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ i_1 & i_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{u}u_2 & u_2 \\ -\ddot{u}i_1 & i_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ -\ddot{u}i_1 \end{bmatrix} = \ddot{u} \cdot u_2 i_1 + u_2 \cdot (-\ddot{u} \cdot i_1) = 0$$

und reziprok, da

$$\det \mathbf{A} = 1, \quad \det \mathbf{A}' = 1$$

Er ist umkehrbar für $\ddot{u} = \pm 1$.

Dieser ideale Übertrager ist die idealisierte Modellierung eines *realen Übertragers* (*Transformators*), dessen *Übersetzungsverhältnis* \ddot{u} durch das Verhältnis der primären zur sekundären Windungszahl bestimmt ist. Die konstituierenden Gleichungen sowie die daraus abgeleiteten

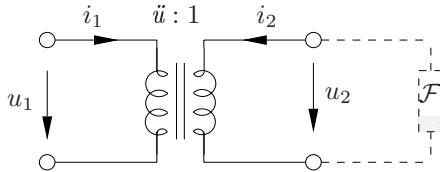


Bild 4.24 Ein Übertrager

Zweitormatrizen gelten definitionsgemäß für alle Zeitverläufe von $u(t)$ und $i(t)$ (auch für Gleichstrom bzw. Gleichspannung!).

Wird der ideale Übertrager sekundärseitig mit einem resistiven Zweipol \mathcal{F} abgeschlossen, so erhält man am Tor 1 den Zweipol

$$\mathcal{F}_{\ddot{u}} = \left\{ (u_1, i_1) \mid (u_2, -i_2) = \left(\frac{u_1}{\ddot{u}}, \ddot{u} \cdot i_1 \right) \in \mathcal{F} \right\}$$

Insbesondere gilt für eine Widerstandsgerade mit der Steigung $\frac{1}{R}$:

$$R = -\frac{u_2}{i_2} \Rightarrow R_{\ddot{u}} = \ddot{u}^2 \cdot R$$

Der Zweitorübertrager ist ein *Positiv-Immittanz-Konverter* (PIK).

4.4.4 Gyrator (Dualwandler)

Der Gyrator ist ein Zweitor mit den konstituierenden Matrizen

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & R_1 \\ -R_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Das heißt, es gilt:

$$\begin{aligned} u_1 &= -i_2 \cdot R_1 \\ u_2 &= i_1 \cdot R_2 \end{aligned}$$

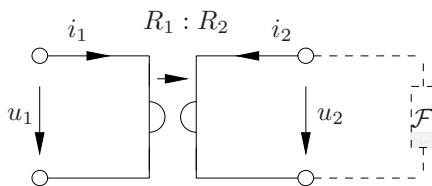


Bild 4.25 Ein Gyrator

Wird der Gyrator sekundärseitig mit einem resistiven Zweipol \mathcal{F} abgeschlossen, so erhält man am Tor 1 den Zweipol:

$$\mathcal{F}_{Gyr} = \left\{ (u_1, i_1) \mid (u_2, -i_2) = \left(i_1 \cdot R_2, \frac{u_1}{R_1} \right) \in \mathcal{F} \right\}$$

Man erkennt, dass für $R_1 = R_2 = R_d$ die Kennlinie an Tor 1 durch

$$\mathcal{F}_{Gyr} = \mathcal{F}^d$$

gegeben ist, und damit dem zu \mathcal{F} dualen Zweipol entspricht (daher auch der Name *Dualwand-ler*).

Für $R_1 = R_2 = R_d$ folgt auch

$$(u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2) = u_1 \cdot \frac{u_2}{R_d} + u_2 \cdot \left(-\frac{u_1}{R_d}\right) = 0$$

der ideale Gyrator mit $R_1 = R_2$ ist also verlustlos.

Es existieren folgende Zweitormatrizen

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_1} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -R_1 \\ R_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & R_1 \\ \frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & -R_2 \\ \frac{-1}{R_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Im Folgenden soll immer Verlustlosigkeit, d. h. $R_1 = R_2 = R_d$, vorausgesetzt werden. Offensichtlich gilt dann:

$$\mathbf{G} = -\mathbf{G}^T, \quad \mathbf{R} = -\mathbf{R}^T, \quad \det \mathbf{A} = -1, \quad \det \mathbf{A}' = -1$$

Man nennt den Gyrator deshalb *antireziprok*.

Außerdem ist der Gyrator *antimetrisch*, da gilt:

$$\mathcal{F}^u = \mathcal{F}^d$$

Schaltet man den beiden Toren eines Zweitores jeweils einen Gyrator (alle mit gleichem Gyrationswiderstand R_d) vor, so erhält man ein neues Zweitor, das zum ursprünglichen dual ist.

Ausgehend von der Matrixbeschreibung in den Gleichungen kann der Gyrator durch Parallelschaltung zweier USI oder als Reihenschaltung zweier ISU mit jeweils entgegengesetzt gleichem Steuerungsfaktor realisiert werden. Die gesteuerten Quellen wiederum lassen sich mit Hilfe von ohmschen Widerständen und Nulloren (also mit Operationsverstärkern oder mit Transistoren) realisieren.

Der Gyrator ist ein *Positiv-Immittanz-Inverter* (PII).

4.4.5 Negativ-Immittanz-Konverter

Der *Negativ-Immittanz-Konverter* (NIK) ist durch folgende Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{N} charakterisiert

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}; \quad k \in \mathbb{R} \quad (4.38)$$

Das heißt, es gilt:

$$u_1 = -k \cdot u_2 \\ i_1 = -\frac{1}{k} \cdot i_2$$

Schließt man Tor 2 mit dem resistiven Zweipol \mathcal{F} ab, so erhält man am Tor 1

$$\mathcal{F}_{NIK} = \left\{ (u_1, i_1) \mid (u_2, -i_2) = \left(-\frac{u_1}{k}, i_1 \cdot k \right) \in \mathcal{F} \right\}$$

Für $k = 1$ ist dies der an der i_1 -Achse gespiegelte Zweipol, für $k = -1$ der an der u_1 -Achse gespiegelte Zweipol. Liegt \mathcal{F} ganz im I. und III. Quadranten der u - i -Ebene, so liegt \mathcal{F}_{NIK} ganz im II. und IV. Quadranten.

Ist \mathcal{F} ein ohmscher Widerstand mit der Steigung $\frac{1}{R}$, so ist \mathcal{F}_{NIK} ein negativer Widerstand mit der Steigung $-\frac{1}{R}$.

Von dieser Eigenschaft, einen positiven Widerstand in einen negativen Widerstand zu wandeln, kommt der Name des Zweitores. Dabei ist das Kunstwort *Immittanz* ein Akronym für Impedanz und Admittanz, in unserem Fall für Widerstand und Leitwert.

Die Zweitormatrizen des NIK lauten:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{k} \\ -\frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{k} & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Der NIK ist aktiv, antireziprok und für $|k| = 1$ symmetrisch.

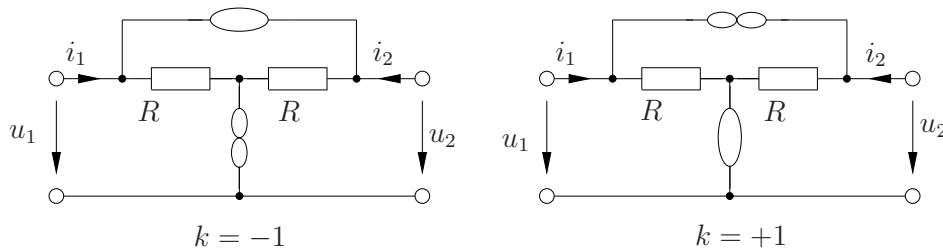
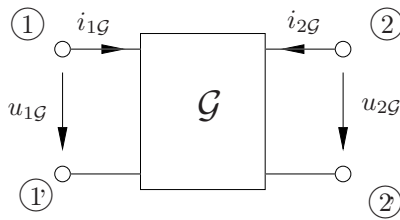


Bild 4.26 Nullor-Realisierungen eines NIK mit $k = \pm 1$

4.5 Zusammenschaltung von Zweitoren

Analog zu den bei den Eintoren diskutierten Verschaltungen kann man oft auch zwei geeignet mit einander verbundene Zweitore \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 insgesamt wieder als ein einziges zur Gesamtschaltung äquivalentes "Ersatzzweitor" \mathcal{G} auffassen (Bild 4.27). Es gibt insgesamt fünf grundlegend verschiedene Möglichkeiten, zwei Zweitore zusammenzuschalten, die wie bei den Eintoren denjenigen Darstellungsformen der Zweitore entsprechen, mit deren Hilfe sich der einfachste Ausdruck für das Verhalten der Gesamtschaltung ergibt.

Bild 4.27 Das Ersatzzweitor \mathcal{G} der im folgenden abgebildeten Zweitorschaltungen

4.5.1 Parallelschaltung

Bei der *Parallelschaltung* Bild 4.28 zweier Zweitore werden (vollkommen analog zur Parallelschaltung von Eintoren) sowohl die Eingangs- als auch die Ausgangstore parallelgeschaltet. Die

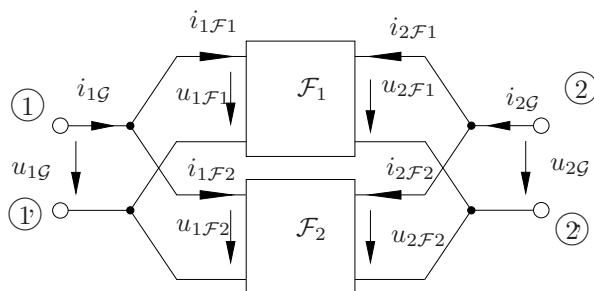


Bild 4.28 Die Parallelschaltung von Zweitoren

Anwendung des Kirchhoffschen Spannungsgesetzes ergibt nun:

$$\begin{aligned} u_{1G} &= u_{1F1} = u_{1F2} \\ u_{2G} &= u_{2F1} = u_{2F2} \end{aligned}$$

was unter Verwendung der Torspannungsvektoren $\mathbf{u}_G = \begin{bmatrix} u_{1G} \\ u_{2G} \end{bmatrix}$ etc. auch einfach als Vektorgleichung geschrieben werden kann:

$$\mathbf{u}_G = \mathbf{u}_{F1} = \mathbf{u}_{F2} \quad (4.41)$$

Analog führt das Kirchhoffsche Stromgesetz auf:

$$\begin{aligned} i_{1G} &= i_{1F1} + i_{1F2} \\ i_{2G} &= i_{2F1} + i_{2F2} \end{aligned}$$

oder mit den Torstromvektoren $\mathbf{i}_G = \begin{bmatrix} i_{1G} \\ i_{2G} \end{bmatrix}$ etc. äquivalent:

$$\mathbf{i}_G = \mathbf{i}_{F1} + \mathbf{i}_{F2} \quad (4.42)$$

Nun werde angenommen, dass die Torbedingungen an \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 erfüllt sind, womit diese beiden Vierpole als Zweitore aufgefasst werden können, und dass ihre Leitwertdarstellungen existieren:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{F1} &= \mathbf{g}_{F1}(\mathbf{u}_{F1}) \\ \mathbf{i}_{F2} &= \mathbf{g}_{F2}(\mathbf{u}_{F2}) \end{aligned}$$

Von der Stromgleichung (4.42) ausgehend kann man nun eine Leitwertsbeschreibung der Gesamtschaltung \mathcal{G} explizit berechnen:

$$\mathbf{i}_G = \mathbf{i}_{F1} + \mathbf{i}_{F2} = \mathbf{g}_{F1}(\mathbf{u}_{F1}) + \mathbf{g}_{F2}(\mathbf{u}_{F2}) = \mathbf{g}_{F1}(\mathbf{u}_G) + \mathbf{g}_{F2}(\mathbf{u}_G) =: \mathbf{g}_G(\mathbf{u}_G)$$

was elegant und kompakt als Addition vektorwertiger Funktionen geschrieben werden kann:

$$\mathbf{g}_G = \mathbf{g}_{\mathcal{F}_1} + \mathbf{g}_{\mathcal{F}_2} \quad (4.43)$$

Besonders einfach ist wieder der streng lineare Fall. Die Teilzweitore werden dann durch ihre Leitwertsmatrizen $\mathbf{G}_{\mathcal{F}_1}$ und $\mathbf{G}_{\mathcal{F}_2}$ beschrieben:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{\mathcal{F}_1} &= \mathbf{G}_{\mathcal{F}_1} \mathbf{u}_{\mathcal{F}_1} \\ \mathbf{i}_{\mathcal{F}_2} &= \mathbf{G}_{\mathcal{F}_2} \mathbf{u}_{\mathcal{F}_2} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich analog zum allgemeinen nichtlinearen Fall:

$$\mathbf{i}_G = \mathbf{i}_{\mathcal{F}_1} + \mathbf{i}_{\mathcal{F}_2} = \mathbf{G}_{\mathcal{F}_1} \mathbf{u}_{\mathcal{F}_1} + \mathbf{G}_{\mathcal{F}_2} \mathbf{u}_{\mathcal{F}_2} = \mathbf{G}_{\mathcal{F}_1} \mathbf{u}_G + \mathbf{G}_{\mathcal{F}_2} \mathbf{u}_G =: \mathbf{G}_G \mathbf{u}_G$$

Die Parallelschaltung der beiden streng linearen Zweitore ist damit ebenfalls streng linear, und ihre Leitwertsmatrix ist die Summe der Leitwertsmatrizen der Teilzweitore:

$$\mathbf{G}_F = \mathbf{G}_{\mathcal{F}_1} + \mathbf{G}_{\mathcal{F}_2} \quad (4.44)$$

Ein Vergleich mit Abschnitt 3.6.2, der Parallelschaltung von Eintoren, zeigt hier besonders deutlich, welche eine natürliche Verallgemeinerung der bei Eintoren noch unmittelbar anschaulichen Zusammenhänge die vektorielle Betrachtung von Zwei- und später Mehrporten darstellt.

4.5.2 Serienschaltung

Bei der *Serienschaltung* Bild 4.29 sind die Ein- und Ausgangstore in Serie geschaltet. Die Seri-

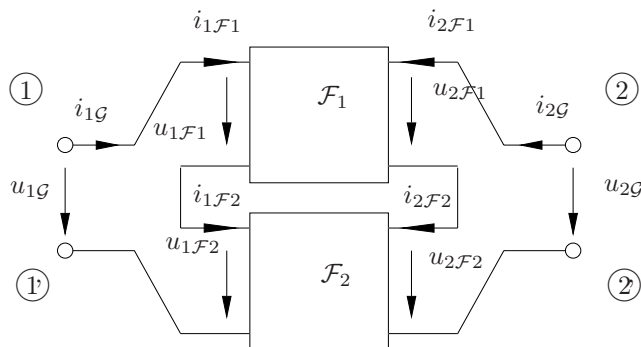


Bild 4.29 Die Serienschaltung von Zweitoren

enschaltung verhält sich vollkommen dual zur Parallelschaltung, da in den (vektoriellen) Kirchhoffgleichungen Ströme und Spannungen nun ihre Rollen tauschen:

$$\mathbf{i}_G = \mathbf{i}_{\mathcal{F}_1} = \mathbf{i}_{\mathcal{F}_2} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{u}_G = \mathbf{u}_{\mathcal{F}_1} + \mathbf{u}_{\mathcal{F}_2} \quad (4.46)$$

Die Zusammenfassung erfolgt hier ausgehend von der Widerstandsbeschreibung. Im allgemeinen Fall (und natürlich bei Einhaltung der Torbedingungen) ergibt sich als Ausdruck für die Gesamtschaltung:

$$\mathbf{r}_G = \mathbf{r}_{\mathcal{F}_1} + \mathbf{r}_{\mathcal{F}_2} \quad (4.47)$$

Im streng linearen Fall ergibt sich schließlich die Widerstandsmatrix der Gesamtschaltung einfach zu:

$$\mathbf{R}_G = \mathbf{R}_{\mathcal{F}_1} + \mathbf{R}_{\mathcal{F}_2} \quad (4.48)$$

4.5.3 Hybride Verschaltungen

Bei *hybriden* oder *gemischten Verschaltungen* wird jeweils ein Torpaar in Serie und das andere parallel geschaltet. Im Rahmen einer eindeutigen Nomenklatur werden beide auftretenden Verschaltungsarten explizit angegeben: zuerst die des Eingangs, dann die des Ausgangs. Es gibt damit die folgenden beiden Hybridschaltungen:

- Die *Serien-Parallel-Schaltung*.
Hier sind die Eingänge in Serie und die Ausgänge parallelgeschaltet.
 - Die *Parallel-Serien-Schaltung*.
Hier sind die Eingänge parallel und die Ausgänge in Serie geschaltet.
- Beide Fälle sind in Bild 4.30 abgebildet.

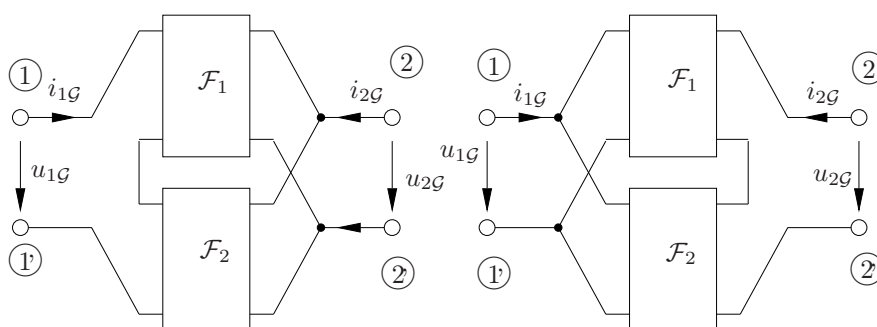


Bild 4.30 Die Serien-Parallel- (links) und Parallel-Serien-Schaltung (rechts) zweier Zweitore

Auch hier besteht eine vollkommene Analogie zur Analyse der Parallel- und Serienschaltung; der einzige wesentliche Unterschied besteht darin, dass nun “gemischte” Betriebsgrößenvektoren auftreten, die sowohl Spannungs- als auch Stromkomponenten enthalten.

Als Ergebnis erhält man als Ausdruck für die Gesamtschaltung bei der **Serien-Parallel-Schaltung** die hybride Beschreibung, also im allgemeinen Fall:

$$\mathbf{h}_G = \mathbf{h}_{\mathcal{F}_1} + \mathbf{h}_{\mathcal{F}_2} \quad (4.49)$$

und bei strenger Linearität:

$$\mathbf{H}_G = \mathbf{H}_{\mathcal{F}_1} + \mathbf{H}_{\mathcal{F}_2} \quad (4.50)$$

Bei der **Parallel-Serien-Schaltung** ergibt sich die inverse hybride Beschreibung, also:

$$\mathbf{h}'_G = \mathbf{h}'_{\mathcal{F}_1} + \mathbf{h}'_{\mathcal{F}_2} \quad (4.51)$$

oder:

$$\mathbf{H}'_G = \mathbf{H}'_{\mathcal{F}_1} + \mathbf{H}'_{\mathcal{F}_2} \quad (4.52)$$

4.5.4 Zur Torbedingung in Zweitorschaltungen

Bei den bisher erwähnten Zweitorschaltungen muss immer strikt darauf geachtet werden, dass die Torbedingungen an den miteinander verschalteten Zweitoren erfüllt sind. An dieser Stelle soll anhand eines einfachen Beispielles demonstriert werden, dass die oben hergeleiteten Ergebnisse bei Verletzung der Torbedingungen tatsächlich ungültig werden können.

Gegeben sei das in Bild 4.31 gezeigte, aus zwei ohmschen Widerständen R_1 und R_2 zusammengesetzte streng lineare Zweitor \mathcal{F} .

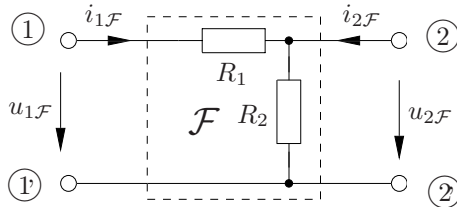


Bild 4.31 Ein Beispielzweitor \mathcal{F}

Stellt man die Torspannungen abhängig von den Torströmen dar:

$$u_{1\mathcal{F}} = R_1 i_{1\mathcal{F}} + R_2 (i_{1\mathcal{F}} + i_{2\mathcal{F}}) = (R_1 + R_2) i_{1\mathcal{F}} + R_2 i_{2\mathcal{F}}$$

$$u_{2\mathcal{F}} = R_2 (i_{1\mathcal{F}} + i_{2\mathcal{F}}) = R_2 i_{1\mathcal{F}} + R_2 i_{2\mathcal{F}}$$

so erhält man als Koeffizientenmatrix dieses Systems die Widerstandsmatrix $\mathbf{R}_{\mathcal{F}}$ von \mathcal{F} :

$$\mathbf{R}_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_2 \end{bmatrix}$$

Nun werden zwei solche Zweitore \mathcal{F} (die jetzt als \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 bezeichnet werden) wie in Bild 4.32 in Serie geschaltet, was ein Gesamtzweitor \mathcal{G}' ergibt. Der Widerstand R_1 von \mathcal{F}_2 ist da-

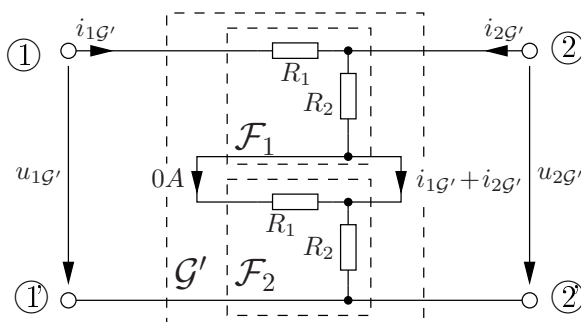


Bild 4.32 Eine Serienschaltung mit verletzter Torbedingung

bei kurzgeschlossen und kann aus der Schaltung entfernt werden, ohne dass sich ihr Verhalten ändert. Die Gesamtschaltung besitzt damit dieselbe Struktur wie \mathcal{F} , nur der Widerstand R_2 ist durch eine Serienschaltung mit dem Gesamtwiderstand $2R_2$ zu substituieren. Die Widerstandsmatrix $\mathbf{R}_{\mathcal{G}'}$ von \mathcal{G}' ergibt sich damit zu:

$$\mathbf{R}_{\mathcal{G}'} = \begin{bmatrix} R_1 + 2R_2 & 2R_2 \\ 2R_2 & 2R_2 \end{bmatrix}$$

Offensichtlich ist hier:

$$\mathbf{R}_{\mathcal{G}'} \neq \mathbf{R}_{\mathcal{F}_1} + \mathbf{R}_{\mathcal{F}_2} = 2\mathbf{R}_{\mathcal{F}}$$

Dieses Ergebnis stellt aber einen Widerspruch zu Gleichung (4.48) dar, da die bei der Herleitung dieser Gleichung vorausgesetzte Torbedingung in dieser Schaltung verletzt wird: Der Widerstand R_1 von \mathcal{F}_2 ist hier stromlos, bei Einhaltung der Torbedingung müsste er aber den Strom i_{1G} führen. Gleichung (4.48) ist also hier einfach nicht anwendbar.

Durch Beschalten mit einem idealen Übertrager ist es übrigens immer möglich, die Einhaltung der Torbedingungen an einem Zweitor zu garantieren. Ein Beispiel hierfür zeigt Bild 4.33.

Das obere Zweitor \mathcal{F}_1 ist dort eingangsseitig mit einem idealen Übertrager mit dem Übersetzungsverhältnis 1:1 beschaltet. Das Beschalten eines Tores mit einem 1:1-Übertrager ändert nichts an der Zweitorbeschreibung, also besitzt \mathcal{F}_1 zusammen mit dem Übertrager nach wie vor die gleiche Widerstandsmatrix $\mathbf{R}_{\mathcal{F}_1} = \mathbf{R}_{\mathcal{F}}$. Gleichzeitig ist nun aber auch gewährleistet, dass durch den Widerstand R_1 in \mathcal{F}_2 auch tatsächlich der Torstrom i_{1G} fließt. Da in der Serienschal-

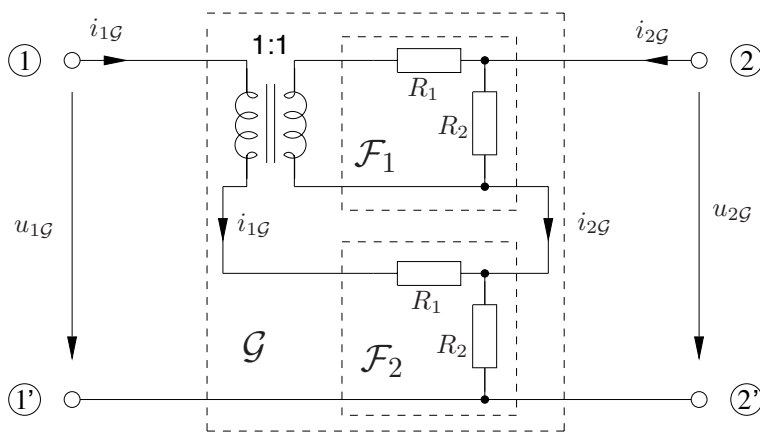


Bild 4.33 Erzwingen der Torbedingung mit einem idealen 1:1-Übertrager

tung \mathcal{G} die Torbedingungen zwangsweise erfüllt sind, darf ihre Widerstandsmatrix mit Gl.(4.48) berechnet werden, und es ergibt sich:

$$\mathbf{R}_{\mathcal{G}} = \mathbf{R}_{\mathcal{F}_1} + \mathbf{R}_{\mathcal{F}_2} = 2\mathbf{R}_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 2R_1 + 2R_2 & 2R_2 \\ 2R_2 & 2R_2 \end{bmatrix}$$

Mit geringem Aufwand kann man dieses Ergebnis durch direkte Analyse der Schaltung verifizieren.

4.5.5 Kettenschaltungen

Die in Bild 4.34 abgebildete Anordnung von Zweitoren heißt Kettenschaltung. Gegenüber den bisher diskutierten Schaltungen zeichnet sie sich insbesondere dadurch aus, dass, sofern die Gesamtschaltung als Zweitor betrieben wird, die Torbedingungen innerhalb der Schaltung aufgrund der Kirchhoffschen Gesetze automatisch erfüllt sind. Eine Analyse ist unter Verwendung

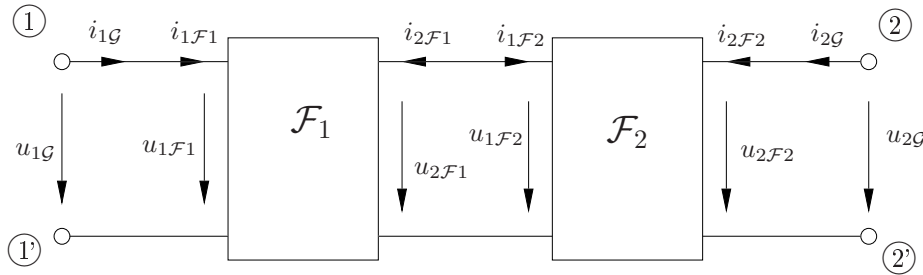


Bild 4.34 Die Kettenschaltung zweier Zweitore

der Kettendarstellung der Teilzweitore einfach möglich. Dabei treten gemischte Vektoren von Betriebsgrößen mit teilweise sogar negativen Vorzeichen auf:

$$\begin{bmatrix} u_{1\mathcal{F}_1} \\ i_{1\mathcal{F}_1} \end{bmatrix} = \mathbf{a}_{\mathcal{F}_1} \begin{bmatrix} u_{2\mathcal{F}_1} \\ -i_{2\mathcal{F}_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{1\mathcal{F}_2} \\ i_{1\mathcal{F}_2} \end{bmatrix} = \mathbf{a}_{\mathcal{F}_2} \begin{bmatrix} u_{2\mathcal{F}_2} \\ -i_{2\mathcal{F}_2} \end{bmatrix}$$

Unter Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze kann man damit auch einen expliziten Ausdruck für die gesamte Kettenschaltung \mathcal{G} angeben:

$$\begin{bmatrix} u_{1\mathcal{G}} \\ i_{1\mathcal{G}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1\mathcal{F}_1} \\ i_{1\mathcal{F}_1} \end{bmatrix} = \mathbf{a}_{\mathcal{F}_1} \begin{bmatrix} u_{2\mathcal{F}_1} \\ -i_{2\mathcal{F}_1} \end{bmatrix} = \mathbf{a}_{\mathcal{F}_1} \begin{bmatrix} u_{1\mathcal{F}_2} \\ i_{1\mathcal{F}_2} \end{bmatrix} = \mathbf{a}_{\mathcal{F}_1} \left(\mathbf{a}_{\mathcal{F}_2} \begin{bmatrix} u_{2\mathcal{F}_2} \\ -i_{2\mathcal{F}_2} \end{bmatrix} \right)$$

der der Kettendarstellung von \mathcal{G} entspricht:

$$\begin{bmatrix} u_{1\mathcal{G}} \\ i_{1\mathcal{G}} \end{bmatrix} = \mathbf{a}_{\mathcal{G}} \begin{bmatrix} u_{2\mathcal{G}} \\ -i_{2\mathcal{G}} \end{bmatrix}$$

Man kann $\mathbf{a}_{\mathcal{G}}$ daher formal als Verkettung von Funktionen ausdrücken:

$$\mathbf{a}_{\mathcal{G}} = \mathbf{a}_{\mathcal{F}_1} \circ \mathbf{a}_{\mathcal{F}_2} \quad (4.53)$$

Die Linearisierung der Verkettung von Funktionen führt auf ein Matrizenprodukt. Damit lässt sich im Falle streng linearer Zweitore die Kettenmatrix $\mathbf{A}_{\mathcal{G}}$ der Kettenschaltung einfach angeben als:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{G}} = \mathbf{A}_{\mathcal{F}_1} \cdot \mathbf{A}_{\mathcal{F}_2} \quad (4.54)$$

wobei $\mathbf{A}_{\mathcal{F}_1}$ und $\mathbf{A}_{\mathcal{F}_2}$ die Kettenmatrizen der Teilzweitore sind.

Dieses Ergebnis kann natürlich auch unter Einschränkung auf die strenge Linearität besonders einfach hergeleitet werden:

$$\begin{bmatrix} u_{1\mathcal{G}} \\ i_{1\mathcal{G}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1\mathcal{F}_1} \\ i_{1\mathcal{F}_1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\mathcal{F}_1} \begin{bmatrix} u_{2\mathcal{F}_1} \\ -i_{2\mathcal{F}_1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\mathcal{F}_1} \begin{bmatrix} u_{1\mathcal{F}_2} \\ i_{1\mathcal{F}_2} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\mathcal{F}_1} \mathbf{A}_{\mathcal{F}_2} \begin{bmatrix} u_{2\mathcal{F}_2} \\ -i_{2\mathcal{F}_2} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\mathcal{F}_1} \mathbf{A}_{\mathcal{F}_2} \begin{bmatrix} u_{2\mathcal{G}} \\ -i_{2\mathcal{G}} \end{bmatrix}$$

Einen prinzipiell gleichwertigen Satz von Formeln erhält man schließlich auch unter Verwendung der "inversen" Kettendarstellung, mit lediglich dem einen einzigen Unterschied, dass sich hier die Reihenfolge der Zweitorbeschreibungen bei der Verkettung oder Matrizenmultiplikation umkehrt:

$$\mathbf{a}'_{\mathcal{G}} = \mathbf{a}'_{\mathcal{F}_2} \circ \mathbf{a}'_{\mathcal{F}_1} \quad (4.55)$$

$$\mathbf{A}'_{\mathcal{G}} = \mathbf{A}'_{\mathcal{F}_2} \cdot \mathbf{A}'_{\mathcal{F}_1} \quad (4.56)$$

5. Transistoren

Das praktisch wichtigste dreipolige Bauelement, das hier als nichtlineares Zweitor behandelt wird, ist zweifellos der *Transistor*. Es gibt zwei wesentliche Klassen von Transistoren, deren aus Sicht der Schaltungstechnik ähnliche Funktionen auf zwei grundlegend verschiedene physikalische Prinzipien zurückgehen: Bipolare Transistoren und (unipolare) Feldeffekttransistoren.

5.1 Bipolare Transistoren

Ein *Bipolartransistor* besteht aus drei Halbleiterschichten, die als Anschlüsse von außen zugänglich sind und als *Emitter*, *Basis* und *Kollektor* bezeichnet werden. Entsprechend zur Wahl des Vorzeichens der Dotierung für die verschiedenen Schichten bei der Herstellung gibt es Bipolartransistoren unterschiedlicher *Polarität*: Bei einem *npn-Transistor* sind Kollektor und Emitter n- und die Basis p-dotiert, bei einem *pnp-Transistor* ist es umgekehrt.

Im Schaltsymbol eines Bipolartransistors ist die Basis durch einen Querbalken dargestellt, und der Emitteranschluss mit einem Pfeil versehen, dessen Orientierung mit der Polung der *Emitter-Basis-Diode* übereinstimmt: Das Bild 5.1 zeigt auch die zur Beschreibung der Tran-

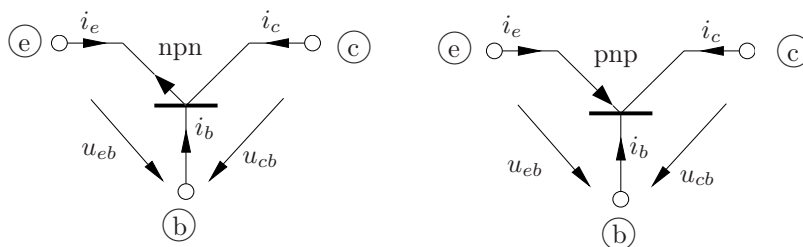


Bild 5.1 Zählpfeile bei npn- und pnp-Bipolartransistoren

sistorbetriebsgrößen üblicherweise verwendeten Zählpfeilbezeichnungen und -richtungen: Die an den Anschlüssen in den Transistor orientierten Ströme i_e , i_b und i_c heißen *Emitter-*, *Basis-* und *Kollektorstrom*. Die Spannungen u_{eb} , u_{cb} , und u_{ce} sind die *Emitter-Basis-Spannung*, die *Kollektor-Basis-Spannung* und die *Kollektor-Emitter-Spannung*.

Je nachdem, welche der drei Klemmen beiden Toren als gemeinsame Klemme zugeordnet wird, spricht man von einem Transistor in *Emitter-*, *Basis-* oder *Kollektorschaltung*. Alle drei Grundschaltungen kommen in praktischen Anwendungen vor. In jenen Anwendungen, in denen das hier vorgestellte resistive Modell des Transistors ausreichend genau ist (also bei zeitlich nur langsam veränderlichen Strömen und Spannungen), trifft man die in Bild 5.2 dargestellte *Emitterschaltung* am häufigsten an.

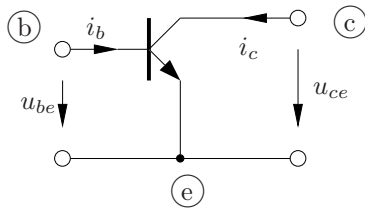


Bild 5.2 Ein npn-Transistor in Emitterschaltung

5.1.1 npn-Transistor

Das Klemmenverhalten von Bipolartransistoren wird am Beispiel des npn-Transistors mit algebraischen Gleichungen beschrieben. Dieses resistive Modell wird der physikalischen Realität des Transistors bei niederfrequenten (also langsam veränderlichen) Strömen und Spannungen voll gerecht. Der zum npn-Transistor komplementäre pnp-Transistor wird später entsprechend dargestellt.

5.1.1.1 Das resistive Ebers-Moll-Modell

Die *Ebers-Moll-Gleichungen* sind eine Leitwertsbeschreibung des als Zweitor aufgefassten npn-Transistors in Basisschaltung:

$$i_e = -I_{es} \left(\exp \left(-\frac{u_{eb}}{U_T} \right) - 1 \right) + \alpha_R I_{cs} \left(\exp \left(-\frac{u_{cb}}{U_T} \right) - 1 \right) \quad (5.1)$$

$$i_c = \alpha_F I_{es} \left(\exp \left(-\frac{u_{eb}}{U_T} \right) - 1 \right) - I_{cs} \left(\exp \left(-\frac{u_{cb}}{U_T} \right) - 1 \right) \quad (5.2)$$

Typische Werte für die in diesen Gleichungen auftretenden Parameter sind:

$$\begin{aligned} U_T &= 26 \text{ mV} \\ I_{es} &\approx I_{cs} \approx (10^{-12} \dots 10^{-10}) \text{ A} \\ \alpha_R &\approx 0,5 \\ \alpha_F &\approx 0,99 \end{aligned}$$

Die Ebers-Moll-Gleichungen können mit Hilfe von pn-Übergängen (pn-Dioden) und stromgesteuerten Stromquellen in Form der in Bild 5.3 gezeigten Ersatzschaltung dargestellt werden: Diese Ersatzschaltung wird beschrieben durch die Kennlinien der pn-Übergänge:

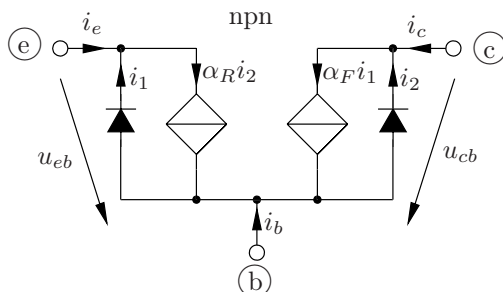


Bild 5.3 Die Ebers-Moll-Ersatzschaltung für npn-Transistoren

$$i_1 = I_{es} \left(\exp \left(-\frac{u_{eb}}{U_T} \right) - 1 \right)$$

$$i_2 = I_{cs} \left(\exp \left(-\frac{u_{cb}}{U_T} \right) - 1 \right)$$

die Gleichungen der gesteuerten Quellen:

$$i_e + i_1 = \alpha_R i_2$$

$$i_c + i_2 = \alpha_F i_1$$

und die Kirchhoffgesetze:

$$i_b = -i_e - i_c$$

$$u_{ce} = u_{cb} - u_{eb}$$

5.1.1.2 Kennlinienfelder

Die Ebers-Moll-Ersatzschaltung kann für viele praktische Anwendungen weiter vereinfacht werden. Dies wird an der traditionell üblichen hybriden Beschreibung des Transistors unter Verwendung der Torgrößen der Emitterschaltung u_{be}, u_{ce}, i_b, i_c deutlich:

$$u_{be} = h_1(i_b, u_{ce}) \quad (5.3)$$

$$i_c = h_2(i_b, u_{ce}) \quad (5.4)$$

Dabei wird im sogenannten *Ausgangskennlinienfeld* der Kollektorstrom i_c in Abhängigkeit von der Kollektorspannung u_{ce} dargestellt. Als Parameter der Kurvenschar dient dabei der Basisstrom i_b . Da im praktisch üblichen Arbeitsbereich des Transistors, dem *Vorwärtsbetrieb*, die Kollektor-Basis-Diode gesperrt ist (beim hier behandelten npn-Transistor also bei $u_{cb} \geq 0$) und die Emitter-Basis-Diode in Durchlassrichtung ($u_{eb} < 0$) betrieben wird, ist $u_{ce} > 0$.

Wegen der geringen Abhängigkeit von u_{ce} besteht das zugehörige Eingangskennlinienfeld nur aus einer einzigen Kennlinie, die i_b als Funktion von u_{be} beschreibt, und der exponentiellen Kennlinie eines pn-Übergangs entspricht.

Bild 5.4 und 5.5 zeigen beispielhaft die Ein- bzw. Ausgangskennlinienfelder des weit verbreiteten Kleinleistungstransistors BCY 58. Aufgrund der Darstellung der exponentiellen Beziehung zwischen den Eingangsgrößen in einem halblogarithmischen Diagramm erscheint die Eingangskennlinie hier in guter Näherung als eine Gerade. Beim Ausgangskennlinienfeld wird nur der dem Vorwärtsbetrieb des Transistors entsprechende Quadrant dargestellt.

5.1.1.3 Vereinfachte Ersatzschaltungen

Die näherungsweise Unabhängigkeit der Eingangskennlinie von den Ausgangsgrößen kommt daher, dass die Kollektor-Basis-Diode sperrt und damit hochohmig ist, und in Folge auch die von ihrem Sperrstrom gesteuerte Stromquelle $\alpha_R i_2$ zur Nullquelle wird. Durch einfaches Weglassen dieser beiden Elemente gelangt man zu dem vereinfachten Ersatzschaltbild für den Vorwärtsbetrieb, Bild 5.6. Eine toräquivalente, der Emitterschaltung angemessene Ersatzschal-

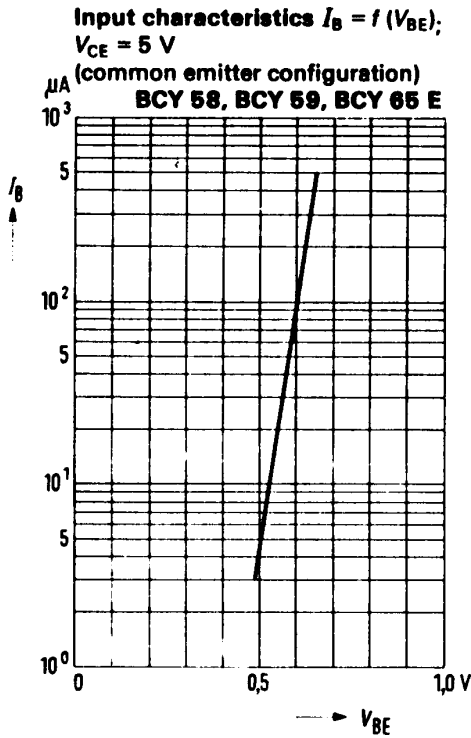


Bild 5.4 Eingangskennlinie und

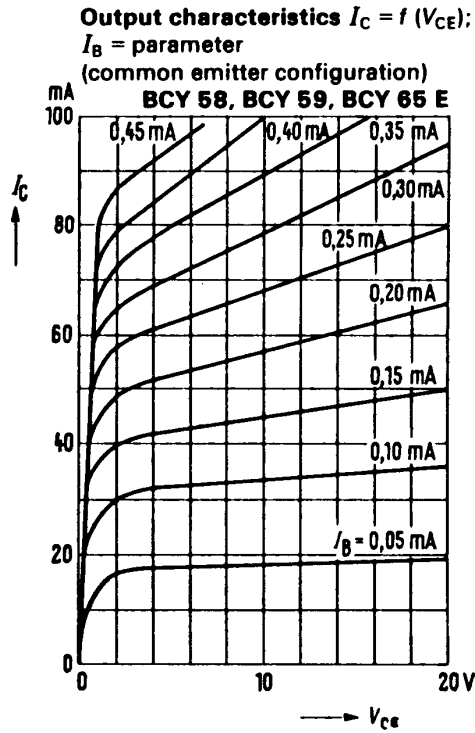


Bild 5.5 Ausgangskennlinienfeld des npn-Transistors BCY 58

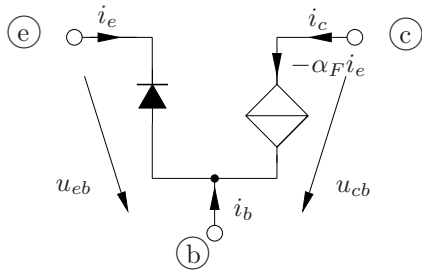


Bild 5.6 Eine vereinfachte Ersatzschaltung für den Vorwärtsbetrieb

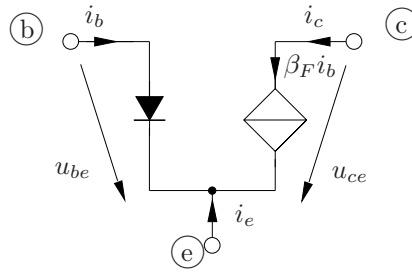


Bild 5.7 Vereinfachte Ersatzschaltung für den npn-Transistor in Emitterschaltung

tung erhält man durch Umformung der Gleichungen

$$i_e = -I_{es} \left(\exp \left(-\frac{u_{eb}}{U_T} \right) - 1 \right)$$

$$i_c = -\alpha_F i_e$$

mit $i_b = -i_e - i_c$ in

$$i_b = (1 - \alpha_F) I_{es} \left(\exp \left(-\frac{u_{eb}}{U_T} \right) - 1 \right)$$

$$i_c = \frac{\alpha_F}{1 - \alpha_F} i_b = \beta_F i_b$$

Man darf diese vereinfachte Ersatzschaltung nur benutzen, wenn $u_{cb} \geq 0$ sichergestellt ist!

Sie lässt sich dann noch weiter vereinfachen, indem man, wie in Bild 5.8 gezeigt, zuerst den pn-Übergang von Bild 5.7 durch die stückweise lineare Kennlinie eines konkaven Widerstands ersetzt und darauf fußend ein linearisiertes Kleinsignalersatzschaltbild im Arbeitspunkt angibt. Für die Steigung der $i_b - u_{be}$ -Kennlinie im Arbeitspunkt gilt

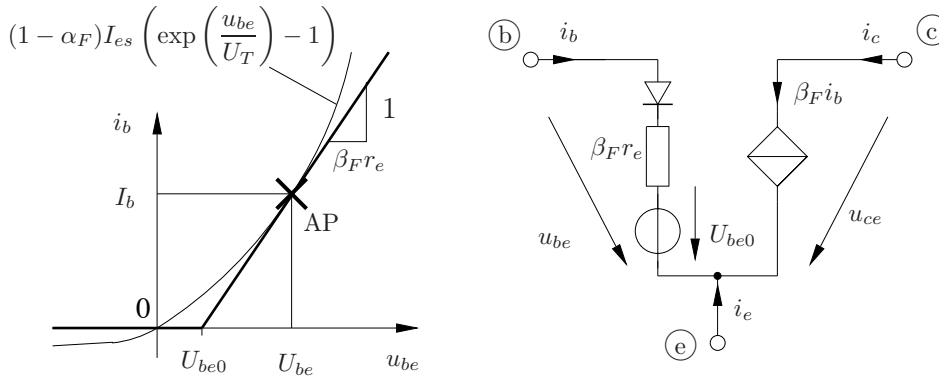


Bild 5.8 Stückweise lineare Ersatzschaltung des npn-Transistors in Emitterschaltung

$$\left. \frac{\partial i_b}{\partial u_{be}} \right|_{u_{be}=U_{be}} = (1 - \alpha_F) \frac{I_{es}}{U_T} \exp\left(\frac{U_{be}}{U_T}\right) \approx \frac{I_b}{U_T} \approx \frac{-I_e}{U_T \beta_F} = \frac{-1}{\frac{U_T}{I_e} \beta_F} = \frac{1}{r_e \beta_F}$$

wobei $r_e = \frac{U_T}{-I_e}$

Ist $u_{be} > 0$ durch die äußere Beschaltung sichergestellt, so kann die ideale Diode im Basis-Emitterzweig entfallen und auf die lineare Kleinsignalersatzschaltung von Bild 5.9 übergegangen werden: Die gesteuerte Quelle kann entweder als USI mit dem Steuerleitwert $g_m = \frac{1}{r_e}$ oder

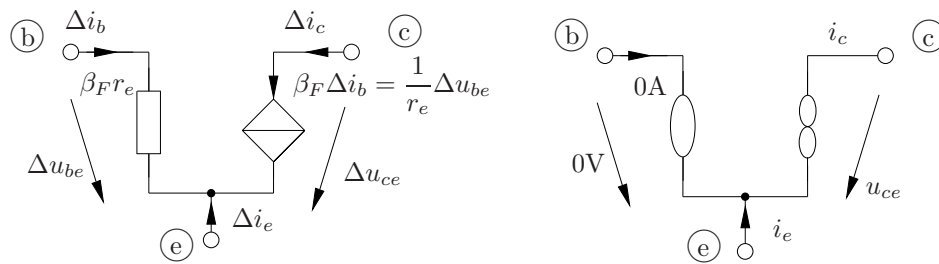


Bild 5.9 Vereinfachte Kleinsignalersatzschaltung (ohne Rückwirkung und ohne Ausgangsleitwert)

Bild 5.10 Dreipolnullor als Transistorersatzschaltung

als ISI mit dem Steuerfaktor β_F aufgefasst werden. Treibt man die Idealisierung noch einen Schritt weiter voran, so dass $\beta_F \rightarrow \infty$, so erkennt man, dass die Ersatzschaltung von Bild 5.9 zum Dreipolnullor von Bild 5.10 entartet.

5.1.1.4 Arbeitspunkt und Kleinsignalanalyse

Die Betriebsgrößen einer Transistorschaltung werden wieder in bereits gewohnter Weise in die den Arbeitspunkt festlegenden Gleichanteile und in die informationstragenden Kleinsignale zerlegt. Zur Ermittlung des Arbeitspunktes wird zunächst die bereits bei den Eintoren diskutierte

graphische Methode benutzt. Diese ist bei relativ einfachen, übersichtlichen Schaltungen erfolgreich, wo eine Partitionierung der Schaltung in Last- und Quelleneintor für beide Tore des Transistors entkoppelt durchgeführt werden kann. Das wird mit Hilfe der vereinfachten Ersatzschaltung von Bild 5.7, deren zugehöriges Kennlinienfeld in Bild 5.11 dargestellt ist, demonstriert. Bild 5.11 zeigt die Anwendung dieses Kennlinienfeldes zur Arbeitspunktermittlung der einfa-

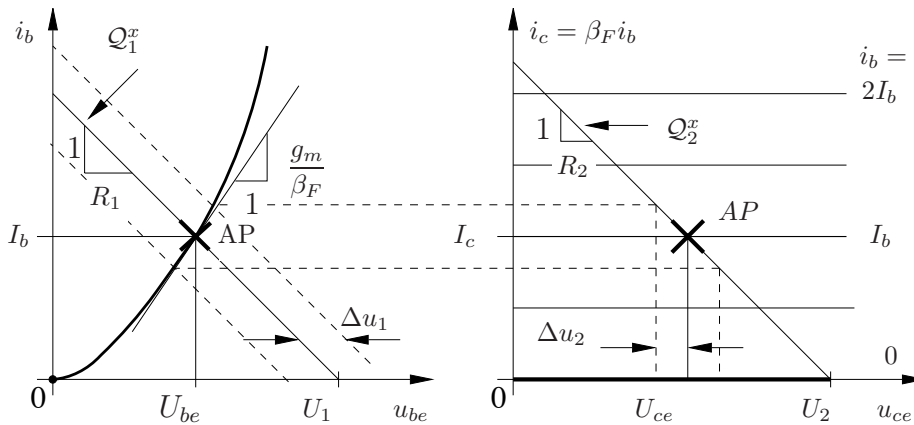


Bild 5.11 Transistorkennlinienfeld mit externen Quellenkennlinien Q_1^x und Q_2^x zur Arbeitspunktbestimmung

chen Verstärkerschaltung in Bild 5.12. Q_1^x und Q_2^x sind die externen Kennlinien der Quellen Q_1 und Q_2 . Den Arbeitspunkt des Transistors, der durch die vier Größen U_{be} , I_b , U_{ce} , I_c festge-

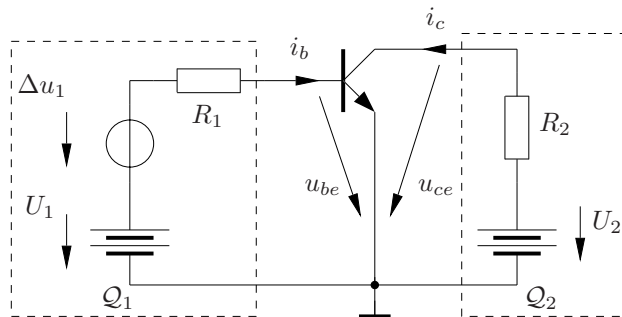


Bild 5.12 Einstufiger Transistorverstärker

legt ist, erhält man durch Schnitt von Q_1^x mit der Diodenkennlinie des Eingangstores (U_{be} , I_b) und durch Schnitt Q_2^x mit der durch I_b ausgewählten Ausgangskennlinie (U_{ce} , I_c).

Aus den AP-Koordinaten erhält man die Steilheit $g_m = \frac{1}{r_e}$ mit

$$g_m = \beta_F \frac{I_b}{U_T}$$

und hat damit alle für die Kleinsignalanalyse erforderlichen Parameter ermittelt. Die zugehörige Kleinsignalersatzschaltung ist in Bild 5.13 dargestellt. Für die am Transistoreingang wirksame Steuerspannung Δu_{be} erhält man durch Spannungsteilung,

$$\Delta u_{be} = \frac{\beta_F r_e}{R_1 + \beta_F r_e} \Delta u_1$$

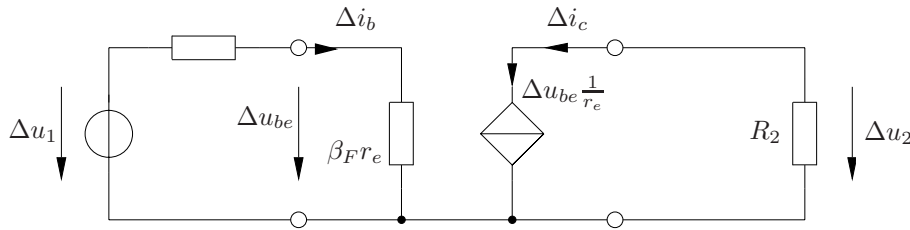


Bild 5.13 Kleinsignalersatzschaltung des Transistorverstärkers

und damit für die am Ausgang an R_2 abfallende Kleinsignalspannung.

$$\Delta u_2 = -\Delta i_c R_2 = -\frac{1}{r_e} \Delta u_{be} R_2 = -\frac{\beta_F R_2}{R_1 + \beta_F r_e} \Delta u_1$$

Für die Spannungsverstärkung ergibt sich somit

$$v_u = \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = -\frac{\beta_F R_2}{R_1 + \beta_F r_e}$$

Beispiel:

$$R_1 = 30\text{k}\Omega \quad R_2 = 1\text{k}\Omega \quad \beta_F = 100$$

$$U_1 = 1\text{V} \quad U_2 = 5\text{V} \quad U_{be} = 0,7\text{V} \quad U_{ce} = 4\text{V}$$

$$U_T = 26\text{mV} \quad I_b = 10\mu\text{A} \quad I_c = 1\text{mA}$$

$$r_e \approx 26\Omega \quad v_u \approx -3$$

In diesem Fall würde die Verwendung des Dreipolnullors als idealisierter Transistor zu keinem Ergebnis führen, da die äußere Beschaltung keine Rückwirkung von den Nullorausgangsgrößen (i_c, u_{ce}) auf die Nulloreingangsgrößen (i_b, u_{be}) bewirkt.

Als nächstes werden Arbeitspunkt und Kleinsignalverhalten des Transistorverstärkers mit Emitttergegenkopplung von Bild 5.14 untersucht, bei der Eingangs- und Ausgangsbetriebsgrößen des Transistors nicht nur über die Steilheit verkoppelt sind. Für den Arbeitspunkt gelten

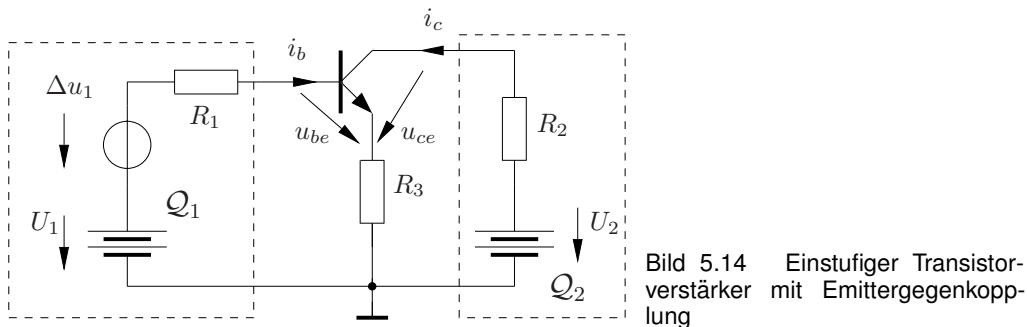


Bild 5.14 Einstufiger Transistorverstärker mit Emitttergegenkopplung

folgende Gleichungen

$$U_1 = I_b R_1 + U_{be} + (I_b + I_c) R_3$$

$$U_2 = I_c R_2 + U_{ce} + (I_b + I_c) R_3$$

Mit der vereinfachten Transistorersatzschaltung von Bild 5.7 gilt zusätzlich

$$I_b = (1 - \alpha_F) I_{es} \left(\exp \left(\frac{U_{be}}{U_T} \right) - 1 \right)$$

$$I_c = \beta_F I_b = \frac{\alpha_F}{1 - \alpha_F} I_b$$

Daraus erhält man die Gleichungen mit den fiktiven Quellen:

$$\mathcal{Q}'_1: U_1 - I_b (R_1 + (1 + \beta_F) R_3) = U_1 - I_b R'_1 = U_{be}$$

$$\mathcal{Q}'_2: U_2 - I_c \left(R_2 + \left(1 + \frac{1}{\beta_F} \right) R_3 \right) = U_2 - I_c R'_2 = U_{ce}$$

wofür man den Arbeitspunkt wieder wie in Bild 5.15 gezeigt graphisch ermitteln kann. Wählt man

$$R_1 = 10\text{k}\Omega, R_2 = 800\Omega, R_3 = 200\Omega$$

so ergibt sich mit $\beta_F = 100$ wieder der gleiche Arbeitspunkt für den Transistor wie beim Beispiel nach Bild 5.11 und Bild 5.12 mit

$$I_b = 10\mu\text{A}, U_{be} = 0,7\text{V}, I_c = 1\text{mA}, U_{ce} = 4\text{V}.$$

Damit sind wieder alle Parameter der Kleinsignalersatzschaltung (Bild 5.16) bekannt. Die

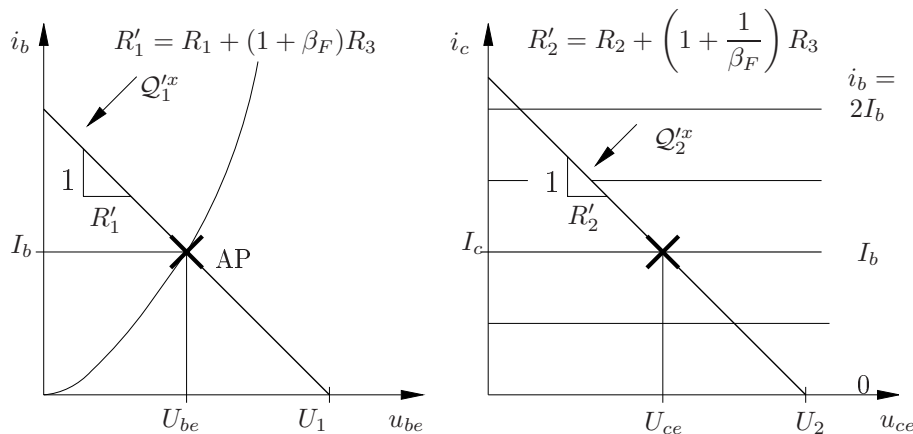


Bild 5.15 Transistorkennlinienfeld mit fiktiven externen Quellenkennlinien $\mathcal{Q}'_1{}^x$ und $\mathcal{Q}'_2{}^x$ zur AP-Bestimmung

Schleifengleichungen für diese Schaltung lauten:

$$\Delta u_1 - \Delta i_b (R_1 + \beta_F r_e + R_3) - \Delta i_c R_3 = 0$$

$$\Delta u_2 = -\Delta i_c R_2$$

Damit gilt $\Delta i_c = \beta_F \Delta i_b$ und weiter:

$$\Delta i_c = \frac{\Delta u_1 \beta_F}{R_1 + \beta_F r_e + R_3 (1 + \beta_F)}$$

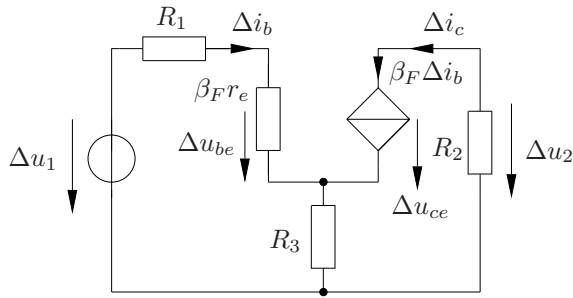


Bild 5.16 Kleinsignalersatzschaltung für den Verstärker von Bild 5.14

Für die Spannungsverstärkung ergibt sich somit:

$$v_u = \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = -\frac{\beta_F R_2}{(1 + \beta_F) R_3 + \beta_F r_e + R_1} = -2,44$$

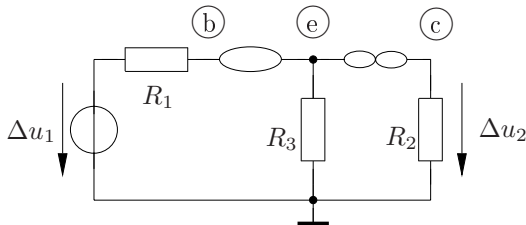


Bild 5.17 Idealisierte Kleinsignalersatzschaltung mit Dreipolnullor

Eine weitere Vereinfachung erzielt man, indem man den Transistor durch einen Dreipolnullor ersetzt. Dies entspricht dem Grenzübergang $\beta_F \rightarrow \infty$. Es gilt dann:

$$\frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = v_u = -\frac{R_2}{R_3} = -4$$

Hier liefert die idealisierte Ersatzschaltung von Bild 5.17 ein sinnvolles, wenn auch ungenaues Ergebnis. Je "besser" der Transistor tatsächlich ist, das heißt, je größer β_F und je kleiner r_e ist, um so kleiner wird der Fehler durch die idealisierte Beschreibung. Das folgende Beispiel, bei dem der AP der Schaltung von Bild 5.14 zu größerem Kollektorstrom verlegt wurde, verifiziert das.

Beispiel: $R_1 = 10\text{k}\Omega$, $R_2 = 800\Omega$, $R_3 = 200\Omega$, $U_1 = 1\text{V}$, $U_2 = 5\text{V}$, $U_{be} = 0,7\text{V}$

$\beta_F = 100$: $R'_1 = R_1 + R_3(1 + \beta_F) \approx 10^4\Omega + 200\Omega \cdot 100 = 30\text{k}\Omega$

$R'_2 = R_2 + R_3(1 + \frac{1}{\beta_F}) \approx 800\Omega + 200\Omega = 1\text{k}\Omega$

$I_b = (U_1 - U_{be})/R'_1 = 0,3\text{V}/30\text{k}\Omega = 10\mu\text{A}$

$I_c = \beta_F I_b = 1\text{mA} \Rightarrow U_{ce} = 4\text{V}$, $r_e = U_T/I_c = 26\text{mV}/1\text{mA} = 26\Omega$

$v_u = \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = -\frac{\beta_F R_2}{(1 + \beta_F) R_3 + \beta_F r_e + R_1} \approx \underline{\underline{-2,44}}$

$\beta_F = 300$: $R'_1 \approx 10^4\Omega + 200\Omega \cdot 300 = 70\text{k}\Omega$

$R'_2 \approx 1\text{k}\Omega$, $I_b = 4,28\mu\text{A}$, $I_c = 1,286\text{mA}$

$\Rightarrow U_{ce} = 3,7\text{V}$, $r_e = 20,2\Omega$

$v_u = -\frac{300 \cdot 800}{301 \cdot 200 + 300 \cdot 20,2 + 10^4} = -\frac{2,4 \cdot 10^5}{7,63 \cdot 10^4} \approx \underline{\underline{-3,15}}$

$$\begin{aligned} \underline{\beta_F = 1000}: \quad R'_1 &\approx 10^4 \Omega + 200 \Omega \cdot 1000 = 210 \text{k}\Omega \\ R'_2 &\approx 1 \text{k}\Omega, I_b = 1,43 \mu\text{A}, I_c = 1,43 \text{mA} \\ &\Rightarrow U_{ce} = 3,57 \text{V}, r_e = 18,2 \Omega \\ v_u &= -\frac{1000 \cdot 800}{1001 \cdot 200 + 1000 \cdot 18,2 + 10^4} = -\frac{8 \cdot 10^5}{2,284 \cdot 10^5} \approx \underline{\underline{-3,50}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\beta_F = 10^4}: \quad R'_1 &\approx 10^4 \Omega + 200 \Omega \cdot 10^4 = 2,1 \text{M}\Omega \\ R'_2 &\approx 1 \text{k}\Omega, I_b = 0,149 \mu\text{A}, I_c = 1,49 \text{mA} \\ &\Rightarrow U_{ce} = 3,51 \text{V}, r_e = 17,4 \Omega \\ v_u &= -\frac{10000 \cdot 800}{10001 \cdot 200 + 10000 \cdot 17,4 + 10^4} = -\frac{8 \cdot 10^6}{2,184 \cdot 10^6} \approx \underline{\underline{-3,66}} \end{aligned}$$

Hier wird die Abweichung vom idealisierten Ergebnis $v_u = -4$, dass für $\beta_F \rightarrow \infty$ und $r_e \rightarrow 0$ gilt, bereits ab $\beta_F = 300$ deutlich geringer.

Bei komplexeren Schaltungen versagt die graphische Methode zur Arbeitspunktbestimmung. So musste man bereits in der Schaltung nach Bild 5.14 "fiktive" Quellenkennlinien einführen (vgl. Bild 5.15). Es bleibt im Allgemeinen die Aufgabe bestehen, ein nichtlineares Gleichungssystem iterativ, beispielsweise mit dem Newton-Raphson-Verfahren (siehe Kapitel 8), zu lösen.

Man kann das schwierige Problem der iterativen Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems näherungsweise auf ein lineares, nicht quellenfreies Problem zurückführen, indem man die lineare, nicht quellenfreie Ersatzschaltung von Bild 5.18 für den Transistor benutzt. Der dabei angenommene Wert von $U_{be} = 0,6 \text{V}$ hängt nur unwesentlich von I_b ab.

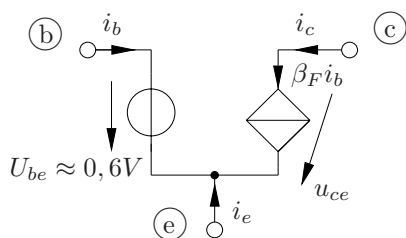


Bild 5.18 Lineare, nicht quellenfreie Transistorersatzschaltung

Für eine Variation des Basisstromes (und damit auch des Kollektorstromes) von mehr als drei Dekaden schwankt U_{be} nur von 0,5 bis 0,7 V!

Ist die so näherungsweise berechnete Arbeitspunkteinstellung nicht genau genug, so ist sie doch eine brauchbare Ausgangslösung für die nichtlinearen Gleichungen. Es ist dann aber eventuell auch eine verbesserte Modellierung notwendig.

Man muss immer beachten, ob die Modellierung implizit Annahmen über die äußere Beschaltung macht oder nicht!

5.1.2 pnp-Transistor

Der pnp-Transistor (Bild 5.1 rechts) wird durch die folgenden Ebers-Moll-Gleichungen beschrieben, die man aus Gl.(5.1) und (5.2) durch Vorzeichenumkehr der Spannungen u_{eb} , u_{cb} und der Ströme i_e , i_c erhält:

$$i_e = I_{es} \left(\exp \left(\frac{u_{eb}}{U_T} \right) - 1 \right) - \alpha_R I_{cs} \left(\exp \left(\frac{u_{cb}}{U_T} \right) - 1 \right) \quad (5.5)$$

$$i_c = -\alpha_F I_{es} \left(\exp \left(\frac{u_{eb}}{U_T} \right) - 1 \right) + I_{cs} \left(\exp \left(\frac{u_{cb}}{U_T} \right) - 1 \right) \quad (5.6)$$

Diese Gleichungen können ebenfalls mit Hilfe von pn-Übergängen und stromgesteuerten Stromquellen (ISI) in Form der Ersatzschaltung Bild 5.19 dargestellt werden. Die weiteren

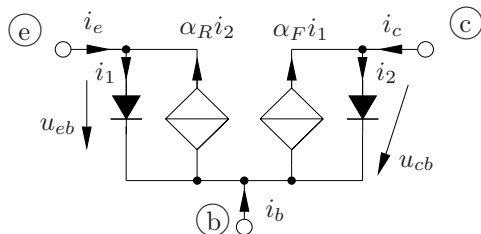


Bild 5.19 Die Ebers-Moll-Ersatzschaltung für pnp-Transistoren

vereinfachten Ersatzschaltbilder (Bilder 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.17) ergeben sich für den pnp-Transistor sinngemäß aus der vollständigen Ebers-Moll-Ersatzschaltung. Bemerkenswert ist, dass die Kleinsignalersatzschaltbilder für npn- und pnp-Transistoren identisch sind.

5.1.3 Komplementärstufen

Die Verwendung der beiden komplementären Transistoren in einer Schaltung ermöglicht besonders einfache, effiziente Schaltungskonzepte sowohl für die Arbeitspunkteinstellung als auch für die Signalübertragung. Dies ist insbesondere bei monolithisch integrierten Schaltungen wichtig, bei denen sonst häufig benutzte Bauelemente wie Übertrager, Kondensatoren und Drosseln, die zur Trennung der für den Arbeitspunkt verantwortlichen „Gleichstromkreise“ und der für die Signalübertragung wesentlichen „Wechselstromkreise“ dienen, nicht realisiert werden können.

Die vorteilhafte Verwendung komplementärer Transistoren soll am Beispiel der in Bipolar-Operationsverstärkern (siehe Kapitel 6) meist verwendeten Gegentaktausgangsstufe demonstriert werden. Dabei wird auch die Übertragungskennlinie durch die Komplementarität der Transistorkennlinien näherungsweise linear. Damit wird lineares Verhalten auch für den „Großsignalbetrieb“ erreicht. In Bild 5.21 wurden die Transistoren T_1 und T_2 durch die stückweise lineare Ersatzschaltung (Bild 5.8) ersetzt. Bemisst man $U_{01} = U_{be01}$, $U_{02} = -U_{be02}$ so heben sich die in der Mitte der Schaltung skizzierten unabhängigen Quellen in ihrer Wirkung auf und die Schaltung kann zu der in Bild 5.22 gezeigten weiter vereinfacht werden. Man kann nun eine einfache Fallunterscheidung durchführen:

$$i_1 \geq 0 \Rightarrow i_1 = i_{b1}, i_{b2} = 0$$

$$i_1 \leq 0 \Rightarrow i_1 = i_{b2}, i_{b1} = 0$$

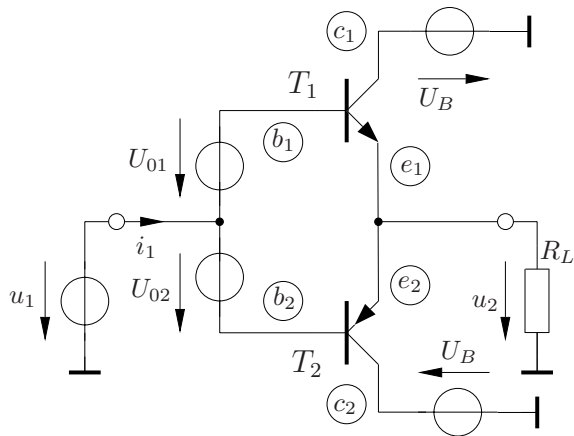


Bild 5.20 Prinzipschaltbild einer komplementären Gegentaktausgangsstufe

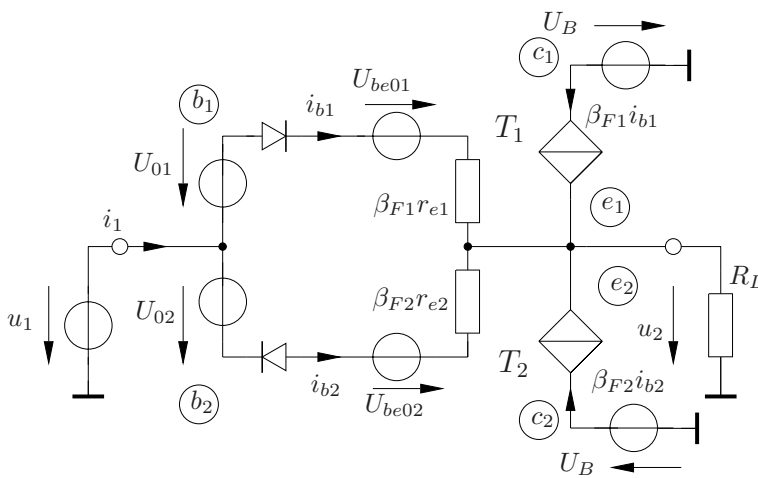


Bild 5.21 Komplementäre Gegentaktstufe mit stückweise linearen Transistormodellen

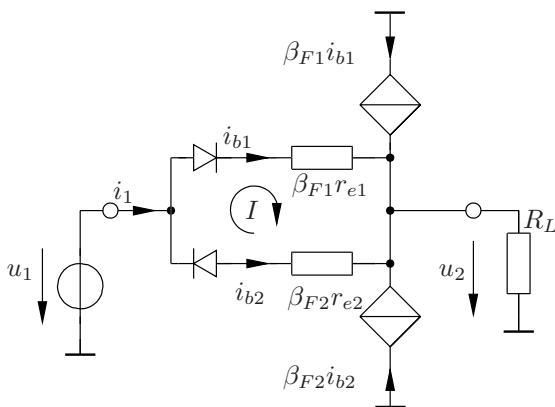
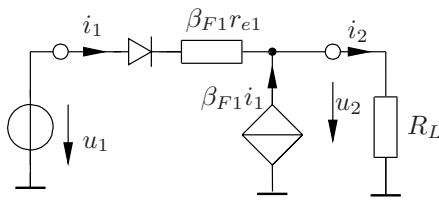


Bild 5.22 Vereinfachtes Schaltbild der komplementären Gegentaktstufe

Dieser Zusammenhang lässt sich leicht anhand der Schleife I in Bild 5.22 verifizieren. Damit ergibt sich für $i_1 > 0$ die vereinfachte Ersatzschaltung von Bild 5.23. Dabei wurde der wegen

Bild 5.23 Weiter vereinfachte Ersatzschaltung für $i_1 > 0$

$i_{b2} = 0$ stromlose Teil einfach weggelassen.

Die Knoten- und Schleifengleichungen lauten:

$$i_2 = i_1 + \beta_{F1} i_1$$

$$u_1 = \beta_{F1} i_1 r_e + i_2 R_L$$

$$u_2 = i_2 R_L$$

Damit folgt

$$u_1 = i_1 (\beta_{F1} r_{e1} + (1 + \beta_{F1}) R_L)$$

$$i_1 = \frac{u_1}{\beta_{F1} r_{e1} + (1 + \beta_{F1}) R_L} \quad \text{wenn } u_1 \geq 0 \quad \text{und}$$

$$u_2 = i_1 (1 + \beta_{F1}) R_L = \frac{(1 + \beta_{F1}) u_1 R_L}{\beta_{F1} r_e + (1 + \beta_{F1}) R_L} \approx u_1$$

Die Übertragungskennlinie ist in der $u_1 - u_2$ -Ebene also eine Winkelhalbierende des ersten Quadranten. Die vereinfachte Ersatzschaltung für $i_1 \leq 0$ sieht prinzipiell ebenso wie jene für $i_1 \geq 0$ aus. Man erhält als Übertragungskennlinie eine Winkelhalbierende des dritten Quadranten der $u_1 - u_2$ -Ebene:

$$u_2 \approx u_1 \quad \text{für } u_1 \leq 0$$

Die beiden Kennlinienäste ergänzen sich (stetig und knickfrei im Ursprung) zu einer Geraden bis zu den jeweiligen Sättigungsgrenzen, bei denen T_1 oder T_2 nicht im Vorwärtsbetrieb arbeiten und die vereinfachte Ersatzschaltung ihre Gültigkeit verliert. Bild 5.24 zeigt die Gesamtkennlinie. Der Arbeitspunkt dieser Schaltung liegt im Ursprung der $u_2 - u_1$ -Ebene. In ihm sind auch alle Ströme gleich null. Deshalb wird der Spannungsversorgung (Batterie) ohne Aussteuerung, also bei $\Delta u_1 = 0$ auch keinerlei Leistung entnommen. Voraussetzung für die Stetigkeit

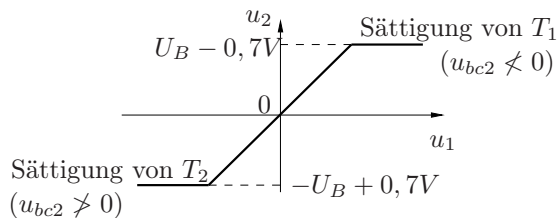


Bild 5.24 Übertragungskennlinie der Gegentaktausgangsstufe

und Knickfreiheit der Übertragungskennlinie ist die Gleichheit der Transistorkenngrößen von T_1 und T_2 ($\beta_{F1} = \beta_{F2}$ und $r_{e1} = r_{e2}$) und die Bemessung der externen Spannungsquellen

$U_{01} = U_{be01}$ und $U_{02} = -U_{be02}$. Diese Spannungsquellen werden im Allgemeinen mit Hilfe von Stromquellen und von pn-Übergängen realisiert (Bild 5.25). Obwohl die *Spannungsverstärkung*

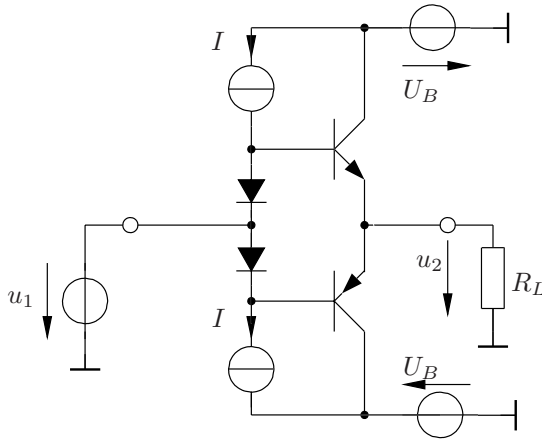


Bild 5.25 Reale komplementäre Gegentaktstufe

$$v_u := \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = \frac{u_2}{u_1}$$

dieser Schaltung nicht größer als eins ist, erfüllt sie dennoch eine sinnvolle Verstärkungsaufgabe: Die *Stromverstärkung*

$$v_i := \frac{\Delta i_2}{\Delta i_1} = \frac{i_2}{i_1} = 1 + \beta_F$$

ist nämlich erheblich und führt zu einer entsprechenden *Leistungsverstärkung*.

$$v_P := \frac{\Delta p_2}{\Delta p_1} = v_u \cdot v_i \approx \beta_F$$

5.2 Feldeffekttransistoren

Ein (*unipolarer*) *Feldeffekttransistor (FET)* hat drei Anschlüsse, die als *Source*, *Gate* und *Drain* bezeichnet werden. Der Hauptstromfluss (entsprechend dem Stromfluss zwischen Emitter und Kollektor eines Bipolartransistors) findet beim FET in nur einer n- oder p-dotierten Schicht statt: dem *Kanal (channel)* zwischen Source und Drain. Daher kommt auch die Bezeichnung “Unipolartransistor”. Der dritte Anschluss, die “Steuerelektrode” (Gate), kann von diesem Kanal durch einen Isolator (*Insulated Gate FET, IGFET*) oder durch einen gesperrten pn-Übergang (*Junction FET, JFET*) getrennt sein.

Im Rahmen der VLSI-Technologie (Very Large Scale Integration) hat insbesondere der IGFET überragende Bedeutung gewonnen, wobei Siliziumdioxid als Isolator zwischen der metallischen oder polykristallinen Silizium-Gateelektrode und dem in n- oder p-dotiertem Silizium ausgeführten Kanal verwendet wird. Daher auch der Name MOS-Transistor (**M**etal-**O**xide-**S**emiconductor).

In der sogenannten *CMOS-Technologie* werden (in Entsprechung zu den komplementären npn- und pnp-Bipolartransistoren) n-Kanal und p-Kanal Transistoren vom sogenannten *Anreichererstyp (enhancement transistor)* benutzt. In der nMOS-Technologie hingegen finden n-Kanal Transistoren vom *Anreichererstyp (auch „normally-off“ genannt)* und *Verarmungstyp (depletion oder „normally-on“ transistor)* Verwendung.

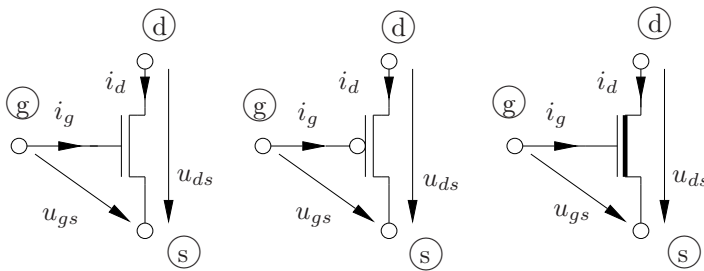


Bild 5.26 n-Kanal-Enhancement-FET (links), p-Kanal-Enhancement-FET und n-Kanal-Depletion-FET (rechts)

5.2.1 n-MOS-Transistoren

Im Folgenden wird zunächst der n-Kanal-MOSFET modelliert (sowohl Enhancement- als auch Depletion-Transistor) und einfache Schaltungen damit untersucht.

Anschließend wird das wieder nur durch Vorzeichenumkehr der Spannungen und Ströme folgende p-Kanal-MOSFET-Modell angegeben und die Vorzüge der komplementären Schaltungstechnik betont.

5.2.1.1 Das resistive Shichman-Hodges-Modell

Die bezüglich Source und Drain symmetrische Ausführung eines FET wird in Leitwertform für die Sourceschaltung durch eine gesteuerte Stromquelle beschrieben.

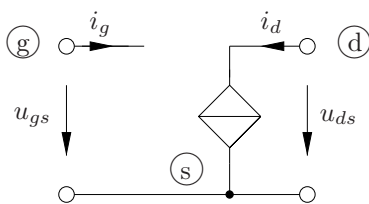


Bild 5.27 Resistives Shichman-Hodges-Modell

Der Gatestrom i_g ist stets null (was beim hier behandelten IGFET durch die Isolation, beim JFET durch den gesperrten pn-Übergang bewirkt wird). Der Drainstrom wird über:

$$i_d = i_1 - i_2 \quad (5.7)$$

in zwei Komponenten i_1 und i_2 zerlegt, die von den beiden Spannungen u_{gs} und u_{gd} aus Symmetriegründen gleichermaßen gesteuert werden. Es gilt:

$$i_1 = \begin{cases} \frac{1}{2}\beta(u_{gs} - U_{th})^2 & \text{für } u_{gs} > U_{th} \\ 0 & \text{für } u_{gs} \leq U_{th} \end{cases} \quad (5.8)$$

$$i_2 = \begin{cases} \frac{1}{2}\beta(u_{gd} - U_{th})^2 & \text{für } u_{gd} > U_{th} \\ 0 & \text{für } u_{gd} \leq U_{th} \end{cases} \quad (5.9)$$

Dabei ist U_{th} die Schwellenspannung (threshold voltage), die von der Steuerspannung (u_{gs} , bzw. u_{gd}) überschritten werden muss, damit es zum Stromfluss im Kanal kommt.

Aufgrund des symmetrischen Aufbaus dieses Bauelementes wird durch die von außen an die Kanalanschlüsse angelegte Spannung erst entschieden, welche Klemme als Source und welche als Drain zu betrachten ist. Diese Zuordnung wird beim n-Kanal-MOSFET durch $u_{ds} \geq 0$ festgelegt.

Kombiniert man diese beiden Gleichungen unter Berücksichtigung von

$$u_{ds} = u_{gs} - u_{gd} \quad (5.10)$$

so ergibt sich als Leitwertsdarstellung des n-Kanal-FETs:

$$i_g = 0 \quad (5.11)$$

$$i_d = \begin{cases} 0 & \text{für } u_{gs} - U_{th} \leq 0 \\ \beta \left((u_{gs} - U_{th})u_{ds} - \frac{1}{2}u_{ds}^2 \right) & \text{für } 0 < u_{gs} - U_{th} > u_{ds} \\ \frac{1}{2}\beta(u_{gs} - U_{th})^2 & \text{für } 0 < u_{gs} - U_{th} \leq u_{ds} \end{cases} \quad (5.12)$$

Ist $U_{th} > 0$ („normally off“), so handelt es sich um einen Enhancementstransistor, für $U_{th} < 0$ („normally on“) um einen Depletionstransistor.

Den Bereich $u_{gs} \leq U_{th}$ nennt man den *Sperrbereich*, $0 < u_{gs} - U_{th} > u_{ds}$ den *linearen Bereich (Triodenbereich)*, und $0 < u_{gs} - U_{th} \leq u_{ds}$ den *Sättigungsbereich (Pentodenbereich)*.

Eine Abhängigkeit des Drainstromes von der Drain-Source-Spannung auch im Sättigungsbereich aufgrund der *Kanallängenmodulation* wird durch Hinzunahme des Faktors $(1 + \lambda u_{ds})$ modelliert. Dies führt auf die folgende Leitwertsbeschreibung:

$$i_g = 0 \quad (5.13)$$

$$i_d = \begin{cases} 0 & \text{für } u_{gs} - U_{th} \leq 0 \\ \beta \left((u_{gs} - U_{th})u_{ds} - \frac{1}{2}u_{ds}^2 \right) (1 + \lambda u_{ds}) & \text{für } 0 < u_{gs} - U_{th} > u_{ds} \\ \frac{1}{2}\beta(u_{gs} - U_{th})^2(1 + \lambda u_{ds}) & \text{für } 0 < u_{gs} - U_{th} \leq u_{ds} \end{cases} \quad (5.14)$$

Bild 5.28 zeigt das Ausgangskennlinienfeld eines nMOS-Enhancementstransistors ohne und mit Berücksichtigung der Kanallängenmodulation. Da $i_g = 0$ gilt, ist kein Eingangskennlinienfeld erforderlich.

Für einen nMOS-Depletionstransistor sieht das Ausgangskennlinienfeld ebenso wie für den Enhancementstransistor aus; es unterscheidet sich nur durch die zu den einzelnen Kennlinien gehörigen u_{gs} -Werte, da $U_{th} < 0$ ist.

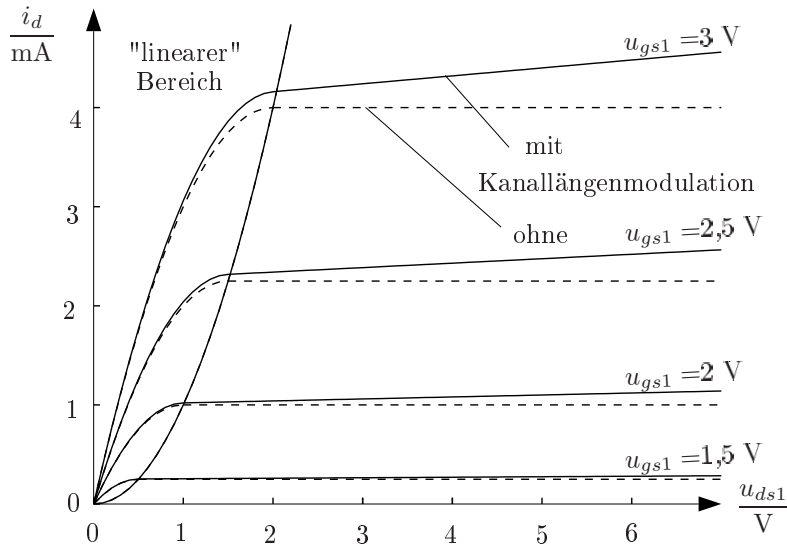


Bild 5.28 Kennlinienfeld eines nMOS-Enhancementtransistors ($U_{th} = 1\text{V}$, $\beta = 2 \cdot 10^{-3}\text{AV}^{-2}$, $\lambda = 2 \cdot 10^{-2}\text{V}^{-1}$)

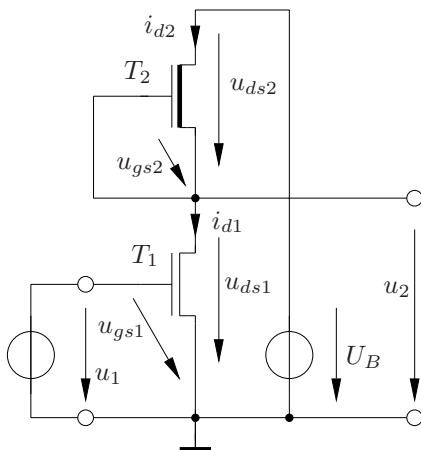


Bild 5.29 nMOS-Inverter

5.2.1.2 Arbeitspunkteinstellung und Übertragungsverhalten

Es wird zunächst eine einfache Inverterstufe in n-Kanaltechnik untersucht (Bild 5.29).

Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}
 i_{d1} &= i_{d2} \\
 u_{gs1} &= u_1 \\
 u_{ds1} &= U_B - u_{ds2} = u_2 \\
 u_{gs2} &= 0
 \end{aligned}$$

Man zeichnet nun die Kennlinien der beiden Transistoren T_1 und T_2 in der u_{ds1} - i_d -Ebene, wobei $i_d = i_{d1} = i_{d2}$. Das Kennlinienfeld des "Treibertransistors" T_1 hat die übliche Form (vergleiche Bild 5.28), während die für den "Lasttransistor" T_2 gültige Kennlinie ($u_{gs2} = 0$) als externe Lastkennlinie eingetragen wird (Bild 5.30).

In Bild 5.31 ist die Übertragungskennlinie dargestellt, die punktweise aus dem Kennlinienfeld von Bild 5.30 entnommen werden kann.

Ferner wird, wie schon oft,

$$u_i = U_i + \Delta u_i, \quad i \in \{1, 2\}$$

in den Arbeitspunkt- und Kleinsignalanteil zerlegt.

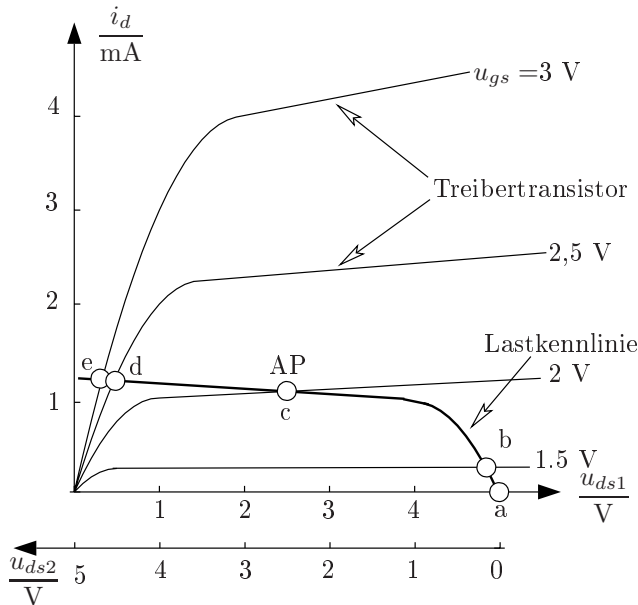


Bild 5.30 Kennlinienfeld mit Lastkennlinie für den nMOS-Inverter

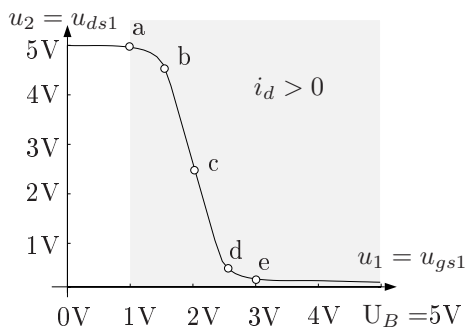


Bild 5.31 Übertragungskennlinie des nMOS-Inverters

In dem steilen Teil der Übertragungskennlinie um den Arbeitspunkt weist der Inverter eine hohe Kleinsignalverstärkung auf. Diese kann mit Hilfe der Kleinsignalersatzschaltung für die beiden Transistoren im jeweiligen Arbeitspunkt

$$\begin{aligned}
 T_1 : & \quad U_{gs1} = 2V & \quad U_{ds1} = 2,5V & \quad I_{d1} = 1,05mA \\
 T_2 : & \quad U_{gs2} = 0V & \quad U_{ds2} = 2,5V & \quad I_{d2} = 1,05mA
 \end{aligned}$$

angegeben werden.

Dazu müssen die Steilheit g_m und der Innenleitwert g_0 bestimmt werden:

$$g_m = \left. \frac{\partial i_d}{\partial u_{gs}} \right|_{\text{AP}} = (\beta(u_{gs} - U_{th})(1 + \lambda u_{ds}))|_{\text{AP}}$$

$$g_0 = \left. \frac{\partial i_d}{\partial u_{ds}} \right|_{\text{AP}} = \left(\frac{\beta}{2}(u_{gs} - U_{th})^2 \lambda \right) \Big|_{\text{AP}}$$

Mit:

$$T_1 : \quad \beta_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{AV}^{-2}, \quad \lambda_1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{V}^{-1}, \quad U_{th1} = 1 \text{V}$$

$$T_2 : \quad \beta_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{AV}^{-2}, \quad \lambda_2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{V}^{-1}, \quad U_{th2} = -1 \text{V}$$

erhält man:

$$T_1, T_2 : \quad g_m = 2,1 \text{mS}, \quad g_0 = 20 \mu\text{S}$$

Die komplette Kleinsignalersatzschaltung des Inverters ist in Bild 5.32 dargestellt.

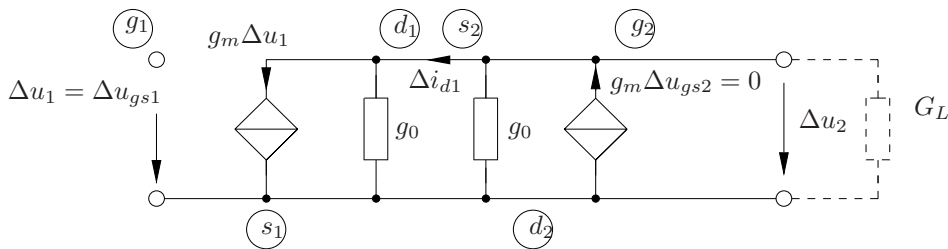


Bild 5.32 Kleinsignalersatzschaltung des nMOS-Inverters.

Aus Betrachtung des Bildes 5.32 folgt für Δu_2 unmittelbar:

$$\Delta u_2 = -\Delta i_{d1} \frac{1}{2g_0} = -\Delta u_1 \frac{g_m}{2g_0}$$

und damit für die Spannungsverstärkung:

$$v_u = \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = -\frac{g_m}{2g_0} = -\frac{2,1 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-6}} = -52,5.$$

Bei Anschalten einer Belastung G_L von beispielsweise $100 \mu\text{S}$ (entsprechend $10 \text{k}\Omega$) verringert sich die Verstärkung entsprechend auf:

$$v_u = -\frac{g_m}{2g_0 + G_L} = -15.$$

Sobald die Eingangsspannung u_1 die Schwellenspannung U_{th} des Treibertransistors T_1 übersteigt, wird der Versorgungsspannungsquelle U_B Leistung entnommen. Diese "statische" Leistungsaufnahme ist der wesentliche Nachteil der n-Kanal-Schaltungstechnik beim Einsatz für Logikschaltungen (siehe auch Kapitel 10).

5.2.2 p-MOS-Transistoren

Die Shichman-Hodges-Gleichungen für den p-Kanal-Transistor erhält man einfach durch Vorzeichenumkehr von Strömen und Spannungen in Gl. (5.11) und (5.12) oder (bei Berücksichtigung der Kanallängenmodulation) Gl.(5.13) und (5.14):

$$i_g = 0 \quad (5.15)$$

$$i_d = \begin{cases} 0 & \text{für } U_{th} - u_{gs} \leq 0 \\ -\beta \left((u_{gs} - U_{th})u_{ds} - \frac{1}{2}u_{ds}^2 \right) (1 - \lambda u_{ds}) & \text{für } 0 < U_{th} - u_{gs} > -u_{ds} \\ -\frac{1}{2}\beta(u_{gs} - U_{th})^2(1 - \lambda u_{ds}) & \text{für } 0 < U_{th} - u_{gs} \leq -u_{ds} \end{cases} \quad (5.16)$$

Für $U_{th} < 0$ („normally off“) liegt ein Enhancementstransistor, für $U_{th} > 0$ („normally on“) ein Depletionstransistor vor. Beim p-Kanal-MOSFET gilt stets $u_{ds} \leq 0$ (zur Festlegung von Source und Drain).

5.2.3 CMOS-Schaltungen

Die Vorzüge einer komplementären Schaltungstechnik haben auch bei MOS-Schaltungen zu einer breiten Verwendung geführt. Dabei werden ausschließlich n- und p-Kanal-Enhancementstransistoren eingesetzt. Die Funktionsweise und Vorzüge werden hier anhand des einfachen CMOS-Inverters erläutert, der in Bild 5.33 abgebildet ist. Es gilt:

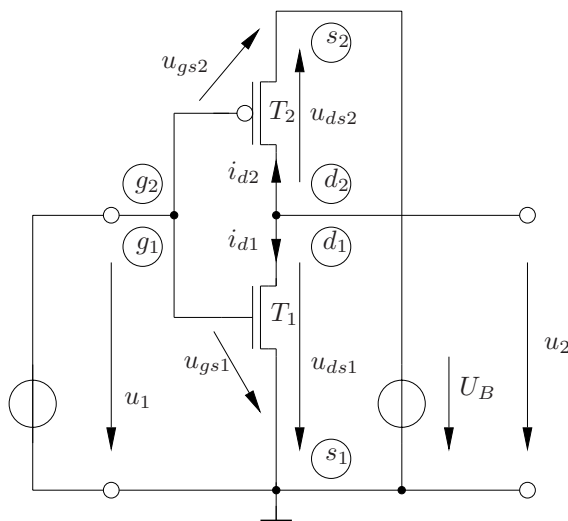


Bild 5.33 CMOS-Inverter

$$u_{ds2} = u_{ds1} - U_B \quad u_{gs2} = u_{gs1} - U_B$$

$$u_2 = u_{ds1} \quad u_1 = u_{gs1}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen wird die Kennlinienschar von T_2 auf die Koordinaten von T_1 umgerechnet und beide Kennlinienfelder in der u_{ds1} - i_{d1} -Ebene dargestellt.

Es lässt sich natürlich auch für diesen Verstärker eine Kleinsignalersatzschaltung um einen Arbeitspunkt (beispielsweise Punkt d) angeben. Da der Transistor T_2 hier nicht nur als Lastelement (mit $\Delta u_{gs2} = 0$) wirkt, ergibt sich trotz der gleichen Kennlinienfelder der Einzeltransistoren eine größere Verstärkung als beim nMOS-Inverter.

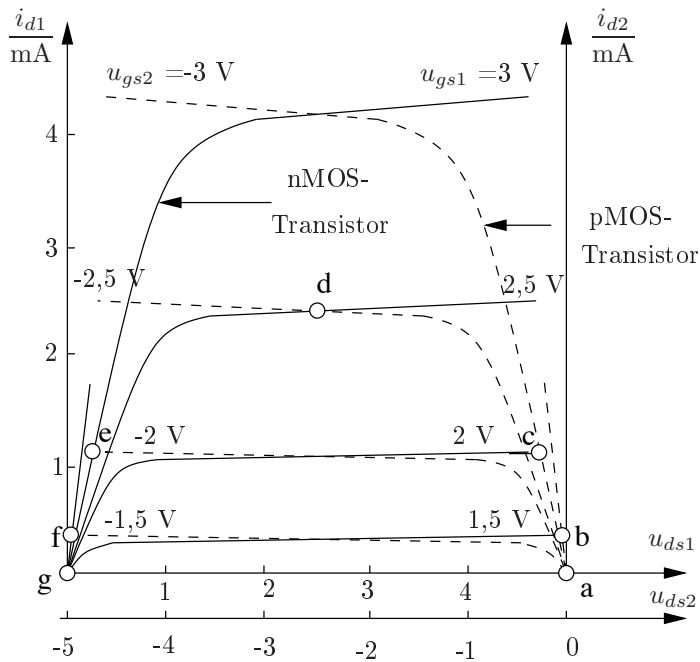


Bild 5.34 Kennlinienfelder für den CMOS-Inverter

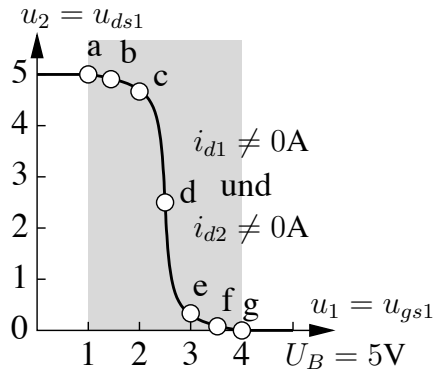


Bild 5.35 Übertragungskennlinie des CMOS-Inverters

Die Kleinsignalersatzschaltung des CMOS-Inverters ist in Bild 5.36 dargestellt.

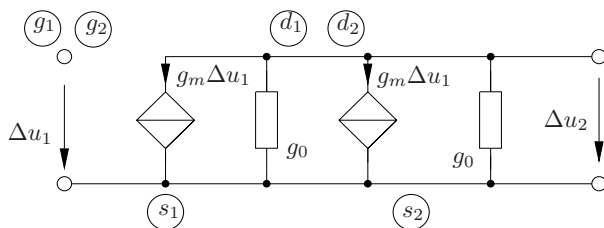


Bild 5.36 Kleinsignalersatzschaltung des CMOS-Inverters

Es gilt somit:

$$\Delta u_2 = -\frac{2g_m \Delta u_1}{2g_0} \quad \text{und} \quad v_u = \left. \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} \right|_{AP=d} = -105$$

Der eigentliche Vorteil dieses CMOS-Inverters im Vergleich zum nMOS-Inverter besteht aber in der Tatsache, dass für

$$u_1 \leq U_{th1} \quad \text{und} \quad u_1 \geq U_B + U_{th2}$$

der Versorgungsspannungsquelle **keine** Leistung entnommen wird. In Anwendungen, wo die Eingangsspannung die meiste Zeit in einem dieser beiden Spannungsbereiche liegt, also bei $u_1 \approx 0V$ oder $u_1 \approx U_B$, ist damit die der Batterie entnommene Leistung sehr klein. Diese spezielle Betriebsart ist bei logischen Schaltungen gegeben.

6. Operationsverstärker

Der Begriff *Operationsverstärker* (*Operational Amplifier*, kurz *Op-Amp*) wurde im Mai 1947¹ für die damals zur Durchführung analoger Rechenoperationen entwickelten hochwertigen Differenzverstärker geprägt, die ihre Anwendung in zur analogen Simulation von Integro-Differentialgleichungen dienenden Schaltungen fanden, den sogenannten *Analogrechnern*.

Reale Op-Amps besitzen mindestens die fünf in dem folgenden Ersatzsymbol gezeigten Anschlüsse. Die ersten Operationsverstärker wurden Mitte der vierziger Jahre unter Verwen-

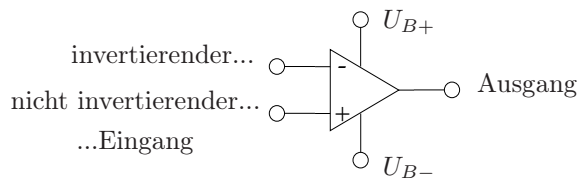


Bild 6.1 Die Anschlüsse eines realen Operationsverstärkers

dung von Röhren aufgebaut. Die ersten Halbleiterrealisierungen entstanden etwa Mitte 1950 unter Verwendung diskreter bipolarer Transistoren. Bild 6.2 zeigt eine der damaligen Technologie entsprechende Schaltung. Die volle Bedeutung des Operationsverstärkers wurde aber

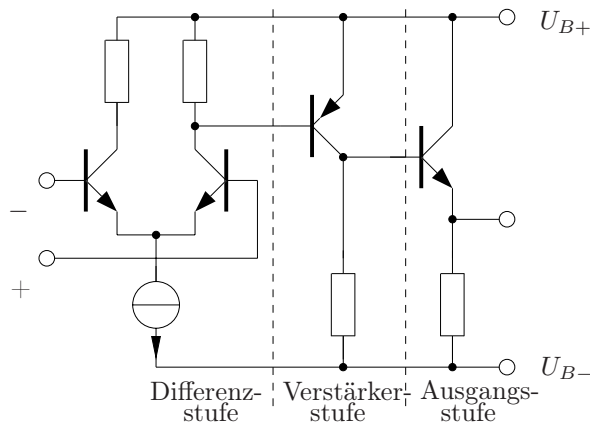


Bild 6.2 Ein einfacher Op-Amp mit Bipolartransistoren

erst Mitte 1960 offenbar, als die ersten monolithisch integrierten Realisierungen auf den Markt kamen: Der Op-Amp musste nun nicht mehr als Schaltung aufgebaut werden, sondern man konnte ihn als außerordentlich vielseitiges, flexibles und darüber hinaus wirtschaftliches Bauelement betrachten. Von da an fand er eine derartige Verbreitung, dass er seit Jahren eines der wichtigsten Bauelemente in der Elektronik darstellt — ein Siegeszug, der ohne die Technik der monolithischen Integration nicht denkbar wäre.

Praktisch alle kommerziell verfügbaren Operationsverstärker sind mit Bipolartransistoren aufgebaut. Bild 6.3 zeigt die prinzipielle Ausführung der wesentlichen Funktionseinheiten eines

¹In dem Artikel „Analysis of Problems in Dynamics by Electronic Circuits“ von J.R. Ragazzini, R.H. Randall und F.A. Russell, erschienen in den Proceedings of the IRE

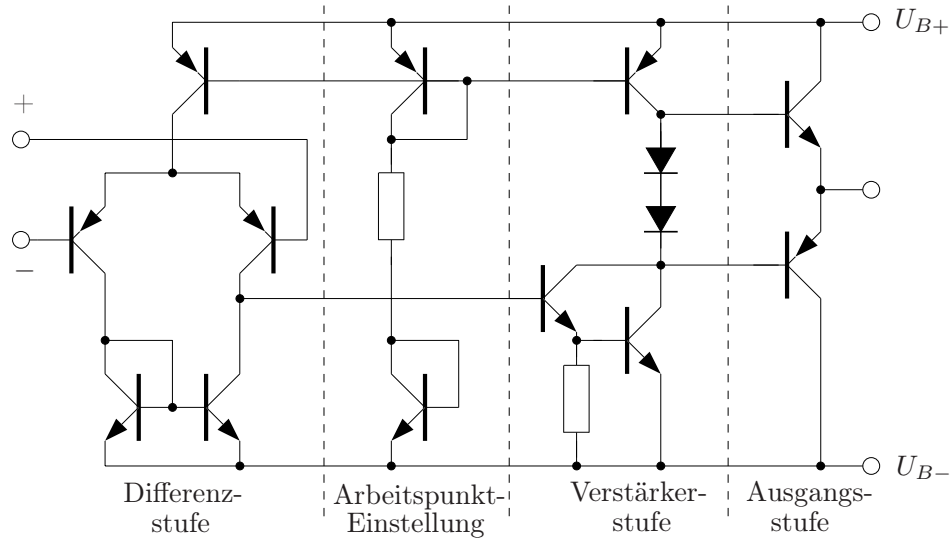
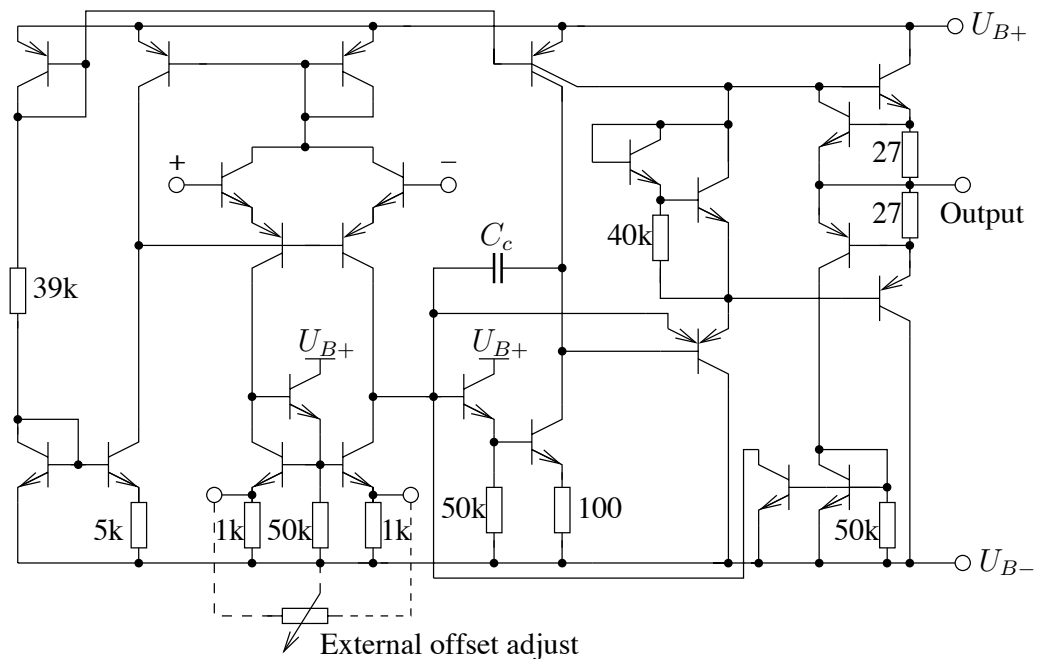


Bild 6.3 Eine Prinzipschaltung eines integrierbaren Operationsverstärkers

Bild 6.4 Innenschaltung des kommerziellen Operationsverstärkers $\mu A741$

monolithisch integrierten Op-Amps. Bild 6.4 zeigt das Innenleben des kommerziellen Operationsverstärkers $\mu A741$.

Bei Bauteilen für diskrete Schaltungen sind in einem einzigen Gehäuse oft ein, zwei oder vier gleichartige Operationsverstärker integriert, man spricht dann entsprechend von *Single-*, *Dual-* und *Quad-Op-Amps*. In hochintegrierten VLSI-Bausteinen werden Op-Amps oft als Bestandteile eines komplexen Systems eingesetzt. Dabei bedient man sich häufig maßgeschneiderter Strukturen in CMOS-Technologie. Bild 6.5 zeigt die Prinzipschaltung eines typischen CMOS-Op-Amps.

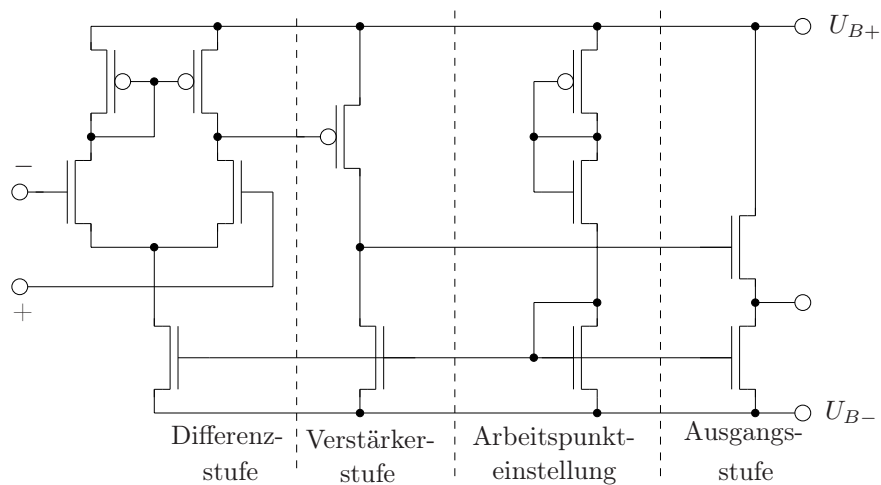


Bild 6.5 Eine Prinzipschaltung eines CMOS-Op-Amps

6.1 Der Operationsverstärker als Zweitor

Im folgenden soll der Op-Amp ohne Betrachtung seiner relativ komplizierten Innenstruktur durch ein vereinfachtes elektrisches Verhalten bezüglich seiner Klemmen als Zweitor beschrieben werden. Dazu wird ein abstraktes Symbol mit nur noch vier Anschlüssen eingeführt: Der

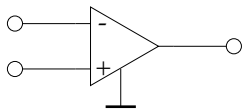


Bild 6.6 Das vierpolige Op-Amp-Symbol

vierte Anschluss ist typischerweise fest mit dem Bezugspotential verbunden.

Man kann diese Darstellung auf die an der realen Schaltung orientierte vorherige zurückführen, indem man die ohnehin konstanten Versorgungsspannungen als Quellen mit in das Elementinnere übernimmt, und lediglich zur Ableitung von Strömen eine Verbindung über den *Masseknoten* herstellt, der auf Bezugspotential liegt und mit jeweils dem zweiten Pol der Versorgungsspannungsquellen verbunden ist. Unter Verwendung dieser Symbolik muss man

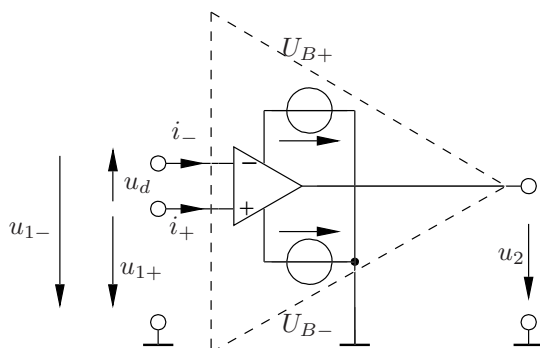


Bild 6.7 Der Übergang vom fünfpoligen zum vierpoligen Op-Amp-Symbol

sich bei Op-Amp-Anwendungen nicht mehr um die Arbeitspunkteinstellung kümmern: Diese Probleme wurden bereits beim Entwurf des Op-Amps und durch seine Beschaltung mit den

Versorgungsspannungen $U_{B\pm}$ gelöst. Alle Betriebsgrößen (Spannungen und Ströme) sind deshalb als Klein- oder auch Großsignalaussteuerung um einen im Ursprung des Betriebsraumes liegenden Arbeitspunkt zu verstehen. Meist sind die Versorgungsspannungen symmetrisch, also $U_{B+} = U_B$ und $U_{B-} = -U_B$.

Nur durch Imperfektionen (Unsymmetrien im Op-Amp-Inneren) kann der Arbeitspunkt etwas außerhalb des Ursprungs zu liegen kommen. Diese unerwünschte Erscheinung bezeichnet man als *Offset*.

Für eine Behandlung des Op-Amps als Zweitor muss außerdem die Einhaltung der Torbedingungen gewährleistet sein. Beim Eingangstor ist dies wegen der bei realen Op-Amps immer vorhandenen *Eingangsruheströme* i_+ und i_- zunächst nicht der Fall. Meist sind aber in guter Näherung $i_+ \approx 0$ und $i_- \approx 0$, was dann auch eine näherungsweise Erfüllung der Torbedingung $i_+ \approx i_-$ des Eingangs bedeutet. Die am Eingangstor anliegende Spannung ist dabei die sogenannte *Differenzspannung* u_d :

$$u_d = u_{1+} - u_{1-}.$$

Die feste Verbindung des Elements mit dem Masseknoten gewährleistet schließlich auch noch die Einhaltung der Torbedingung am Ausgang, da dann jeder dem Ausgangsknoten des Operationsverstärkers entnommene Strom über die Verbindung zur Masse ausgeglichen wird.

Abschließend sei noch bemerkt, dass in der Literatur vielfach auch ein dreipoliges Op-Amp-Symbol verwendet wird, bei dem einfach auch dieser Masseanschluss noch weggelassen wurde. Da dies aber zu einer scheinbaren Verletzung des Kirchhoffschen Stromgesetzes führt (wegen des dann im Schaltbild nicht mehr auftretenden Ausgleichsstromes über die Spannungsversorgung), sollte diese Darstellungsweise vermieden werden.

6.2 Modellierung

Reale Operationsverstärker sind genau genommen dynamische Elemente. Bei hinreichend langsamen zeitlichen Veränderungen der anliegenden Signale kann man sie jedoch als resistiv betrachten, so dass die Entwicklung des im folgenden diskutierten idealisierten und rein resistiven Modells zulässig und sinnvoll ist.

Der Op-Amp soll zunächst durch seine Spannungsübertragungskennlinie im Differenzbetrieb modelliert werden. Aus dieser Darstellung lassen sich dann einfache Ersatzschaltungen für den linearen und nichtlinearen Betrieb ableiten.

Abweichungen vom idealen Differenzverstärkerverhalten – die sogenannte Gleichtaktverstärkung – sollen hier vernachlässigt werden. Ebenso nicht berücksichtigt werden Störungen wie eine Störspannungseinkopplung über die Spannungsversorgung.

6.2.1 Reale Übertragungskennlinie und Imperfektionen

Die Übertragungskennlinie des Op-Amp stellt den Zusammenhang zwischen der Ausgangsspannung und der Differenzeingangsspannung dar.

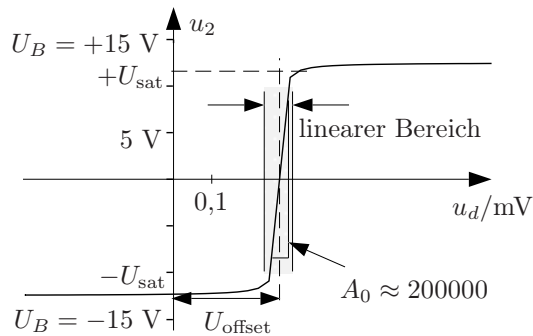


Bild 6.8 Eine typische Übertragungskennlinie eines realen Op-Amps

Diese Kennlinie hat meist eine in beliebiger Richtung aus dem Ursprung heraus verschobene und sehr steile sigmoide Gestalt: Die von Unsymmetrien im Inneren des realen Operationsverstärkers herrührende sogenannte *Offsetspannung* U_{offset} im Arbeitspunkt kann durch eine extern am idealen Op-Amp angebrachte Spannungsquelle modelliert werden. Ebenso modelliert man die *Eingangsruhestrome* I_{1+} und I_{1-} und erhält damit die in Bild 6.9 gezeigte Ersatzschaltung.

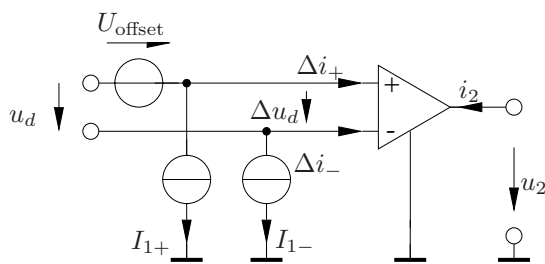


Bild 6.9 Die Berücksichtigung von Imperfektionen

Dadurch ist gewährleistet, dass der Eingangsarbeitspunkt des idealisierten Op-Amp-Modells, das im folgenden entworfen wird, im Ursprung des Betriebsraumes liegt.

Die Differenz I_{offset} der Eingangsruhestrome heißt *Offsetstrom*:

$$I_{\text{offset}} = I_{1+} - I_{1-}.$$

Typische Größenordnungen dieser Offsetgrößen sind beispielsweise beim weit verbreiteten $\mu\text{A} 741$:

$$I_{1+} \approx 80\text{nA} \quad |I_{\text{offset}}| \approx 20\text{nA}$$

$$I_{1-} \approx 80\text{nA} \quad |U_{\text{offset}}| \approx 1\text{mV}$$

Diese Werte sind so klein, dass die Offsetgrößen in vielen praktisch wichtigen Op-Amp-Anwendungen vernachlässigt werden können.

Ebenso soll der sehr kleine Eingangsleitwert vernachlässigt werden, so dass gilt:

$$\Delta i_+ + \Delta i_- \approx 0.$$

Eine weitere Vernachlässigung des sehr kleinen Ausgangswiderstandes bedeutet schließlich, dass die Spannungsübertragungskennlinie als unabhängig vom Ausgangsstrom i_2 betrachtet wird.

6.2.2 Idealisertes nichtlineares Modell

Durch eine weitere Vereinfachung gelangt man schließlich zum idealen Operationsverstärker, dessen Elementsymbol mit einem ∞ gekennzeichnet wird: Wie in Bild 6.11 gezeigt, approxi-

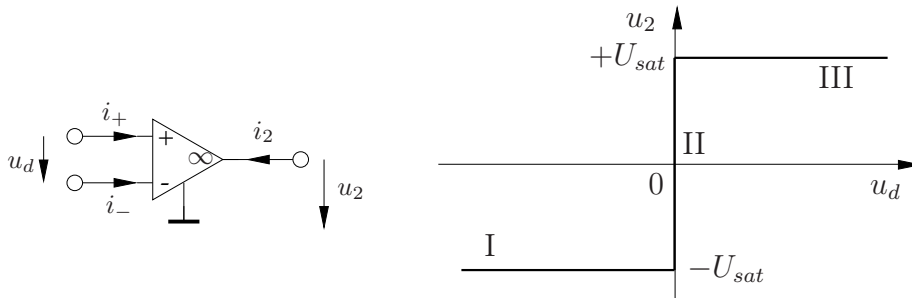


Bild 6.10 Das Symbol des idealen Op-Amp

Bild 6.11 Die Übertragungskennlinie des idealen Op-Amp

miert man dazu die durch Elimination der Offsetgrößen auf den Ursprung verschobene Übertragungskennlinie des realen Op-Amps im linearen Bereich durch eine senkrechte Gerade, was der Durchführung des Grenzübergangs $A_0 \rightarrow \infty$ entspricht. Die Ausgangsspannung genügt auf den drei Ästen dieser stückweise linearen idealisierten Kennlinie den Bedingungen:

$$\begin{aligned}
 I) \quad & u_2 = -U_{sat} \quad \text{für} \quad u_d < 0 \Leftrightarrow u_{1+} < u_{1-} \\
 II) \quad & |u_2| \leq U_{sat} \quad \text{für} \quad u_d = 0 \Leftrightarrow u_{1+} = u_{1-} \\
 III) \quad & u_2 = U_{sat} \quad \text{für} \quad u_d > 0 \Leftrightarrow u_{1+} > u_{1-}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Damit kann man für den Op-Amp in *Sättigung*, also bei Betrieb in den durch $u_d < 0$ und $u_d > 0$ charakterisierten Bereichen I und III der Kennlinie, jeweils eine sehr einfache Ersatzschaltung angeben:

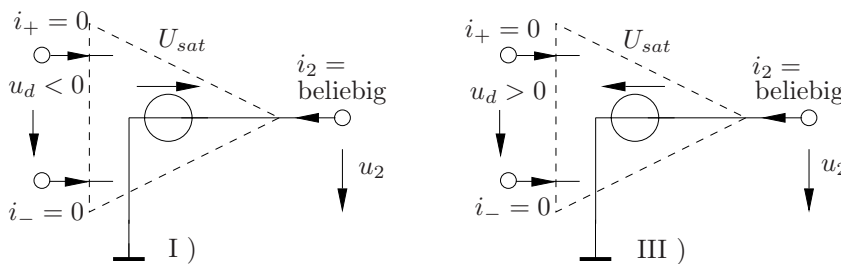


Bild 6.12 Ersatzschaltbilder für den idealen Op-Amp im Sättigungsbereich

Für die Modellierung im sogenannten (*streng*) *linearen Bereich* II muss das Verhalten bei u_d genauer untersucht werden, die Übertragungskennlinie alleine gibt darüber keine eindeutige Auskunft.

6.2.3 Nullmodell

Der lineare Bereich ist charakterisiert durch:

$$u_d = 0.$$

Da ein verschwindend kleiner Eingangsleitwert vorausgesetzt wurde, gilt auch:

$$i_+ = i_- = 0.$$

Das Eingangstor des idealisierten Operationsverstärkers kann damit im linearen Bereich durch einen Nullator adäquat beschrieben werden.

Der Verlauf der Spannungsübertragungskennlinie im linearen Bereich lässt hingegen (außer der wenig informativen Bedingung $|u_2| \leq U_{sat}$) keine Aussage über die Ausgangsspannung zu. Da wegen des als vernachlässigbar klein vorausgesetzten Ausgangswiderstands auch keine Aussage über den Ausgangsstrom getroffen werden kann, verhält sich das Ausgangstor wie ein Norator.

Der Operationsverstärker kann damit im linearen Bereich der Kennlinie durch einen *Nullor* beschrieben werden: ein Zweitor, in dessen Inneren der Eingang mit einem Nullator und der Ausgang mit einem Norator beschaltet ist. Dieses Nullormodell ist nicht anwendbar, wenn die

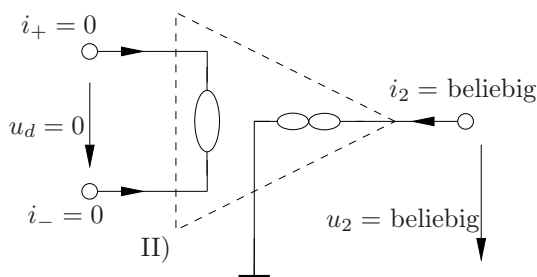


Bild 6.13 Das Nullormodell des idealen Op-Amp

äußere Beschaltung keine Rückwirkung vom Ausgangsgrößenpaar (u_2, i_2) auf das Eingangsgrößenpaar $(u_d, i_+ = -i_-)$ zulässt.

Praktisch bedeutet das natürlich, dass im Rahmen dieser Beschaltung der Operationsverstärker dann gar nicht mehr im linearen Bereich sondern in Sättigung betrieben wird, was ein Verlassen des Gültigkeitsbereichs des Nullormodells bedeutet.

Bei der praktischen Analyse nichtlinearer Operationsverstärkerschaltungen bestimmt man für jeden der drei Betriebsbereiche unter Verwendung der jeweils passenden Ersatzschaltung alle Lösungen. Anhand der die Kennlinienäste charakterisierenden Ungleichungen überprüft man dann, ob diese auch tatsächlich innerhalb des vorausgesetzten Betriebsbereiches liegen und damit auch einer Lösung der realen Schaltung entsprechen.

6.3 Operationsverstärkerschaltungen

Alle Op-Amp-Schaltungen sind prinzipiell nichtlinear (meist stückweise linear), sofern man nicht besonders dafür sorgt, dass sie nur in einem um den AP linearen Bereich betrieben werden. In vielen praktischen Anwendungen wird von den nichtlinearen Eigenschaften des Op-Amp vorteilhaft Gebrauch gemacht.

6.3.1 Komparator

Der idealisierte Op-Amp stellt mit seiner Übertragungskennlinie einen *Komparator* (*Vergleicher*) dar: Die Ausgangsspannung ist gleich $+U_{sat}$ für $u_{1+} > u_{1-}$, und $-U_{sat}$ für $u_{1+} < u_{1-}$. Er vergleicht also die beiden Eingangsspannungen miteinander.

6.3.2 Invertierender Verstärker

Gegeben sei die folgende Schaltung, ein sogenannter *invertierender Verstärker*:

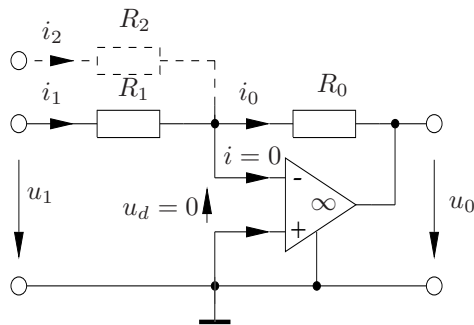


Bild 6.14 Ein invertierender Verstärker

Lineare Analyse:

Durch Augenschein lassen sich für diese Anordnung folgende Gleichungen anschreiben, die für Betrieb des Op-Amp im streng linearen Bereich (Kennlinienast II) gültig sind:

$$\begin{aligned} u_1 - i_1 R_1 &= 0 \\ u_0 + i_0 R_0 &= 0 \\ i_1 &= i_0. \end{aligned}$$

Nach Elimination der Ströme erhält man:

$$u_1 = -\frac{u_0}{R_0} R_1$$

Die *Spannungsverstärkung* v_u der Schaltung ergibt sich damit zu:

$$v_u = \frac{u_0}{u_1} = -\frac{R_0}{R_1}. \quad (6.2)$$

Fügt man (wie im Bild gestrichelt angedeutet) weitere Einkoppelwiderstände $R_2, R_3 \dots$ hinzu, über die dann jeweils ein zusätzlicher Strom $i_2, i_3 \dots$, in den virtuellen Massepunkt eingespeist wird, so tritt im Rückkopplungswiderstand R_0 die Summe dieser Ströme auf und für die Ausgangsspannung ergibt sich:

$$u_0 = -(i_1 + i_2 + i_3 + \dots) R_0.$$

Oder, ausgedrückt durch die Eingangsspannungen $u_1, u_2, u_3 \dots$ vom jeweiligen Eingang zur Masse:

$$u_0 = -\left(\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_3}{R_3} + \dots\right) R_0. \quad (6.3)$$

Die Ausgangsspannung des invertierenden Verstärkers ist also das negative einer Linearkombination der Eingangsströme oder -spannungen mit positiven Koeffizienten (alle Widerstände sind ohmsch!).

Nichtlineare Analyse:

Bei der linearen Analyse schien die Polung des Eingangstores des Operationsverstärkers zunächst belanglos zu sein, da der zur Modellierung des Eingangs verwendete Nullator ungepolt ist. Der Op-Amp ist aber insgesamt ein nichtlineares Element, so dass man auch die Existenz von Betriebspunkten in den Sättigungsbereichen überprüfen muss.

Eine Berücksichtigung der Begrenzungseigenschaften des Op-Amp führt tatsächlich auf zwei unterschiedliche Übertragungskennlinien des invertierenden Verstärkers. Die in Bild 6.15 links abgebildete Kennlinie entspricht dabei der in Bild 6.14 gezeigten „richtigen“ Polung des Op-Amp-Eingangstores, die rechte erhält man bei ”verkehrter“ Polung des Eingangs. Obwohl

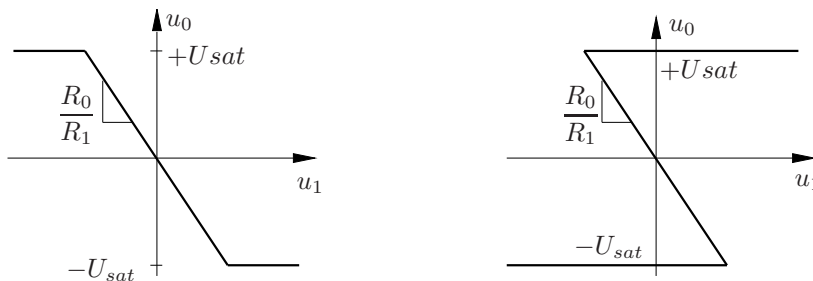


Bild 6.15 Die Kennlinie eines invertierenden Verstärkers bei richtiger und falscher Polung

die Kennlinien im linearen Bereich identisch sind, führt die unterschiedliche Lage der zu den Begrenzungsbereichen gehörenden Äste dazu, dass die Ausgangsspannung nur in der linken Kennlinie eine Funktion der Eingangsspannung darstellt, während die Zuordnung durch die rechte Kennlinie mehrdeutig ist: Beispielsweise ergeben sich für $u_1 = 0$ insgesamt drei mögliche Ausgangsspannungen, nämlich $u_0 = +U_{sat}$, $u_0 = 0$ oder $u_0 = -U_{sat}$. Es gibt keine Möglichkeit, sicher vorherzusagen, welcher dieser drei Werte tatsächlich auftreten wird.

Baut man die verkehrt gepolte Schaltung versuchsweise auf, so ergeben Messungen der Ausgangsspannungen immer eine der Spannungen $+U_{sat}$ oder $-U_{sat}$, die entsprechenden Lösungen sind *stabil*. Die Ausgangsspannung 0 wird hingegen nie gemessen, der zugehörige Arbeitspunkt ist *instabil*. Der verkehrt gepolte invertierende Verstärker kann also gar nicht im linearen Bereich betrieben werden!

Analyse bei endlicher Verstärkung:

In der obigen Analyse wurde der Einfluss der tatsächlich nicht unendlich großen Differenzverstärkung des im streng linearen Bereich betriebenen Op-Amp vernachlässigt. Die Berechtigung dazu soll an dieser Stelle nachgeliefert werden: Aus den drei Maschengleichungen der im Bild rechts dargestellten Ersatzschaltung:

$$u_1 + u_d - i_1 R_1 = 0$$

$$A_0 u_d + u_d + i_1 R_2 = 0$$

$$u_0 = A_0 u_d$$

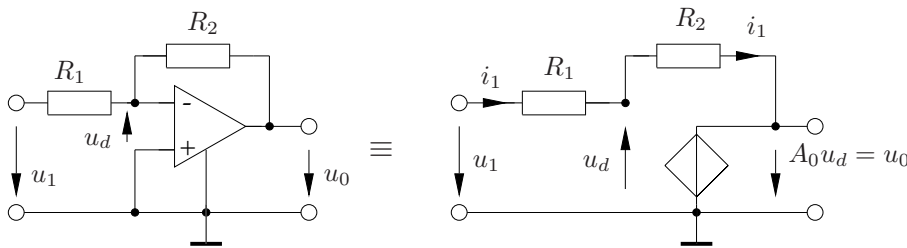


Bild 6.16 Ein invertierender Verstärker mit Op-Amp mit endlicher Verstärkung

erhält man:

$$i_1 = \frac{u_1 + u_d}{R_1} \quad u_d = \frac{u_0}{A_0} \quad \text{sowie} \quad i_1 = -\frac{u_d(1 + A_0)}{R_2}.$$

Elimination von i_1 und u_d führt dann zunächst auf:

$$\left(u_1 + \frac{u_0}{A_0}\right) \frac{1}{R_1} = -\frac{u_0}{A_0} \cdot \frac{(1 + A_0)}{R_2},$$

woraus man schließlich die Spannungsverstärkung erhält:

$$\frac{u_0}{u_1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{A_0} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}. \quad (6.4)$$

Für $R_2 = 100R_1$ und $A_0 = 10^5$ ergibt sich dann beispielsweise der Wert

$$\frac{u_0}{u_1} = -100 \cdot \frac{1}{1 + 10^{-5}(1 + 100)} \approx -\frac{100}{1 + 10^{-3}} \approx -100(1 - 10^{-3})$$

der von dem der Schaltung mit idealisiertem Op-Amp (also $A_0 \rightarrow \infty$) nur um ca. 0.1% abweicht!

Auch bei allen im folgenden vorgestellten Schaltungen lässt sich zeigen, dass der Einfluss der endlichen Spannungsverstärkung im linearen Bereich meist vernachlässigbar ist.

6.3.3 Nichtinvertierender Verstärker

Die folgende Schaltung (Bild 6.17) ist ein *nichtinvertierender Verstärker*:

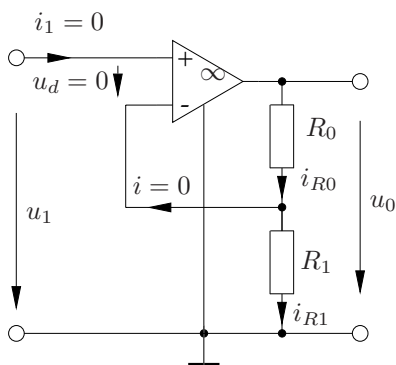


Bild 6.17 Ein nicht invertierender Verstärker

Im streng linearen Betrieb erhält man durch Augenschein die Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_0 - i_{R0}R_0 - i_{R1}R_1 &= 0 \\ u_1 - i_{R1}R_1 &= 0 \\ i_{R0} &= i_{R1}. \end{aligned}$$

Ausgangsspannung und Spannungsverstärkung ergeben sich damit zu:

$$\begin{aligned} u_0 &= i_{R1}(R_0 + R_1) = \frac{u_1}{R_1}(R_0 + R_1) \\ v_u &= \frac{u_0}{u_1} = 1 + \frac{R_0}{R_1}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Die Ausgangsspannung besitzt also dasselbe Vorzeichen wie die Eingangsspannung.

Bezüglich des Einflusses endlicher Verstärkung und der Polung des Op-Amp-Eingangstores gilt ähnliches wie beim invertierenden Verstärker.

Bei nichtlinearer Analyse erhält man als Kennlinien für den richtig (wie in Bild 6.18 gezeigt) und verkehrt gepolten Fall.

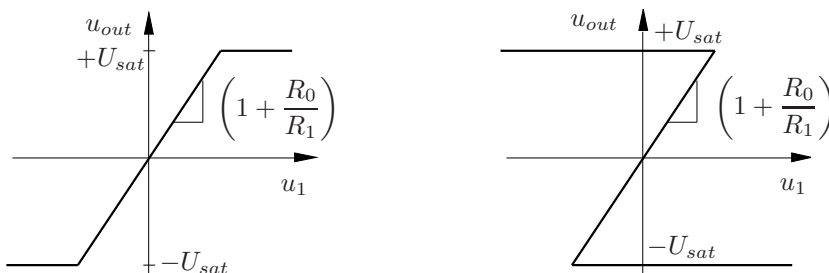


Bild 6.18 Kennlinie des nichtinvertierenden Verstärkers bei richtiger und falscher Polung

6.3.3.1 Der Spannungsfolger

Ein nicht invertierender Verstärker mit der Verstärkung $v_u = 1$ heißt *Spannungsfolger*, da der Ausgang dann immer den gleichen Spannungswert wie der Eingang hat. Der Spannungsfolger belastet die mit seinem Eingang verbundene Quelle nicht ($i_1 = 0$), und kann an eine an seinem Ausgang anliegende Last beliebige Ströme liefern.

Aus Gleichung (6.5) kann man diese gewünschte Spannungsverstärkung $v_u = 1$ durch den Grenzübergang $R_0 = 0$ und $R_1 \rightarrow \infty$ erhalten, was dem Ersetzen von R_0 durch einen Kurzschluss und R_1 durch einen Leerlauf entspricht. Auf diese Weise erhält man aus dem in Bild 6.17 gezeigten nicht invertierenden Verstärker die sehr einfache Schaltung des Spannungsfolgers:

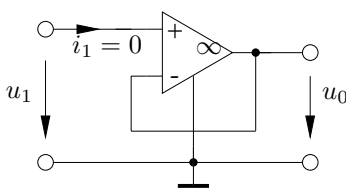


Bild 6.19 Der Spannungsfolger

6.3.4 Negativmittanzkonverter (NIK)

Eine wichtige Anwendung von Operationsverstärkern ist die Realisierung negativer Widerstände mit Hilfe eines *Negativmittanzkonverters*. Bei Betrieb des Op-Amps im linearen Bereich ist die Kennlinie der in Bild 6.20 abgebildeten Schaltung eine Widerstandsgerade mit dem negativen Widerstandswert $-R_L$.

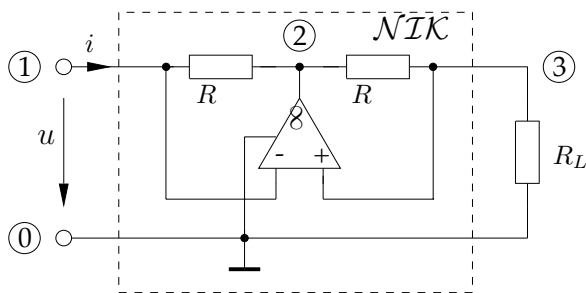


Bild 6.20 Realisierung eines negativen Widerstands mit Hilfe eines Op-Amp NIKs

Lineare Analyse:

Ersetzen des Op-Amps durch das Nullormodell ergibt die folgende Ersatzschaltung:

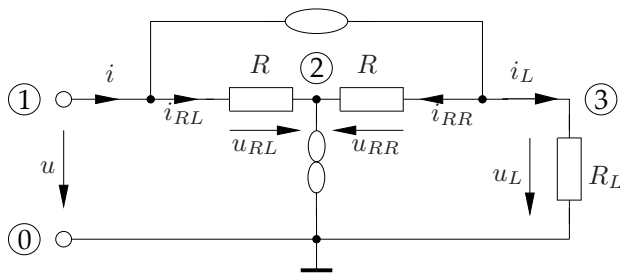


Bild 6.21 Übergang zum Nullormodell

Interessant an dieser Ersatzschaltung ist vor allem die Symmetrie des den Op-Amp beinhaltenen mittleren Teils, auf die auch die Funktion der Schaltung zurückgeht.

Der Nullator erzwingt Spannungsgleichheit der Knoten ① und ③:

$$u = u_L.$$

Aus Symmetriegründen folgt daraus auch

$$u_{RR} = u_{RL},$$

weshalb durch die beiden gleichen Widerstände R auch jeweils ein gleich großer Strom fließen muss:

$$i_{RR} = i_{RL}.$$

Da der Nullator keinen Strom aus ① und ③ zieht, gilt außerdem:

$$\begin{aligned} i &= i_{RL} \\ i_L &= -i_{RR}. \end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$i = -i_L$$

Das ohmsche Gesetz für den Lastwiderstand R_L

$$u_L = R_L i_L$$

kann nun auch durch die Eingangsgrößen u und i der Schaltung ausgedrückt werden:

$$u = -R_L i.$$

Da u und i bezüglich assoziierter Zählpfeilrichtungen definiert sind, folgt, dass sich der Eingang des mit einer ohmschen Last R_L beschalteten Negativmittanzkonverters tatsächlich wie eine Widerstandsgerade mit dem Wert $-R_L$ verhält.

Nichtlineare Analyse:

Auch beim im Abschnitt 6.3.4 behandelten NIK stellen wir – abhängig von der Polung des Op-Amp-Eingangstores – wesentlich unterschiedliches Verhalten fest, und zwar die sogenannte *S-* bzw. *N-Kennlinie*. Später werden wir damit die sogenannten *kurzschlussinstabilen* (*leerlaufstabilen*) bzw. *leerlaufinstabilen* (*kurzschlussstabilen*) negativen Widerstände identifizieren.

Die folgenden Zweipolkennlinien erhält man durch Analyse der in Bild 6.20 gezeigten Schaltung für einen negativen Widerstand unter Verwendung des idealisierten stückweise linearen Modells und ausgangsseitiger Beschaltung mit einem ohmschen Leitwert G . Die S-

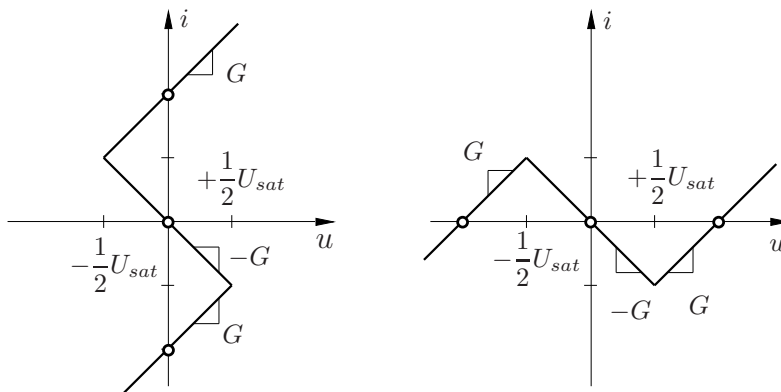


Bild 6.22 Kennlinien der Op-Amp-Realisierung negativer Widerstände vom „S“- bzw. „N“-Typ

Kennlinie ergibt sich bei der oben abgebildeten, die N-Kennlinie bei der umgekehrten Polung. Wieder ergeben sich für $i = 0$ (LL) bzw. für $u = 0$ (KS) jeweils 3 mögliche Arbeitspunkte, die nicht alle stabil sind.

6.3.5 Stückweise Lineare Widerstände

Mit Hilfe von Operationsverstärkern und Dioden lassen sich viele stückweise lineare Widerstände synthetisieren. Beispiele dafür sind bereits die oben diskutierten S- und N-Kennlinien negativer Widerstände. Jedoch auch die bereits in Kapitel 3 diskutierten elementaren stückweise linearen resistiven Zweipole, die ideale Diode und konkave und konvexe Widerstände, kann man unter Zuhilfenahme von Dioden als Op-Amp-Schaltungen aufbauen.

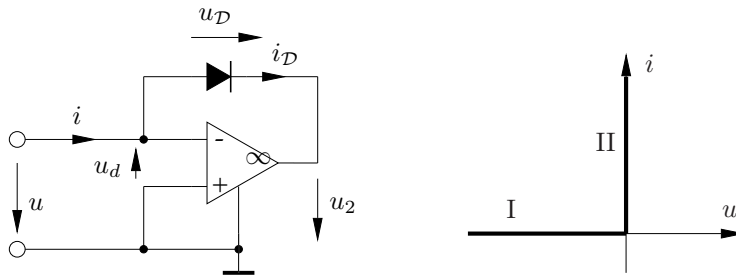


Bild 6.23 Op-Amp-Realisierung und Kennlinie einer idealen Diode

6.3.5.1 Ideale Dioden

Die in Bild 6.23 abgebildete Schaltung hat bezüglich ihrer Eingangsklemmen ein Verhalten das in sehr guter Näherung dem einer idealen Diode entspricht: Unter Zuhilfenahme des stückweise linearen Op-Amp-Modells (mit beispielsweise $U_{sat} = 12,5 \text{ V}$) und der Elementgleichung

$$i_{\mathcal{D}} = I_s \left(\exp\left(\frac{u_{\mathcal{D}}}{U_T}\right) - 1 \right)$$

eines pn-Übergangs (mit z.B. $U_T = 25 \text{ mV}$ und $I_s = 10^{-17} \text{ A}$) kann diese Schaltung nun analysiert werden, wobei man zweckmäßigerweise eine Fallunterscheidung nach den drei Betriebsbereichen des Op-Amps durchführt:

Bereich I: $u < 0$

Da hier $u_d = -u > 0$ gilt, ist $u_2 = U_{sat}$, und für den Spannungsabfall an der Diode ergibt sich:

$$u_{\mathcal{D}} = -u_2 - u_d < -U_{sat}$$

Einsetzen in die Elementgleichung der Diode ergibt:

$$\begin{aligned} i = i_{\mathcal{D}} &= I_s \left(\exp\left(-\frac{U_{sat}}{U_T}\right) \cdot \exp\left(\frac{u}{U_T}\right) - 1 \right) \\ &= 10^{-17} \text{ A} \cdot \left(\exp(-500) \cdot \exp\left(\frac{u}{U_T}\right) - 1 \right) \approx 0. \end{aligned}$$

Der Strom im Bereich I entspricht also dem vernachlässigbaren Sperrstrom der Diode.

Bereich III: $u > 0$

Aus $u_d = -u < 0$, folgt $u_2 = -U_{sat}$, und damit:

$$u_{\mathcal{D}} = -u_2 - u_d > +U_{sat}$$

Einsetzen in die Elementgleichung der Diode ergibt dann:

$$\begin{aligned} i = i_{\mathcal{D}} &= I_s \left(\exp\left(\frac{U_{sat}}{U_T}\right) \cdot \exp\left(\frac{u}{U_T}\right) - 1 \right) \\ &= 10^{-17} \text{ A} \cdot \left(\exp(+500) \cdot \exp\left(\frac{u}{U_T}\right) - 1 \right) \approx 10^{200} \text{ A} \cdot \exp\left(\frac{u}{U_T}\right) =: I_{max} \exp\left(\frac{u}{U_T}\right), \end{aligned}$$

was sicherlich keine weiteren praktisch sinnvollen Betriebspunkte zur Kennlinie beiträgt.

Bereich II: $u = 0$

Das hier wegen $u = u_d = 0$ anwendbare Nullmodell des Op-Amps macht über u_2 zunächst keine Aussage. Dennoch sind nicht alle Ströme $i > I_s$ aus dem Betriebsbereich des pn-Überganges zulässig, sondern es existiert eine obere Schranke bei I_{max} , da dort die nichtlineare Gesamtkennlinie stetig in den Bereich III übergehen muss. Die damit noch zulässigen Ströme

$$I_{max} > i > -I_s$$

entsprechen aber in guter Näherung der Bedingung $i > 0$ bei der idealen Diode.

Um eine umgepolte ideale Diode zu realisieren genügt es, in der Schaltung von Bild 6.23 die pn-Diode umzupolen.

6.3.5.2 Konkave Widerstände

Analog zur im dritten Kapitel besprochenen Realisierung eines konkaven Widerstandes als Serienschaltung eines ohmschen Widerstandes, einer Spannungsquelle und einer idealen Diode, ergibt sich als praktisch äquivalente Op-Amp-Schaltung die in Bild 6.24 gezeigte: Der Ein-

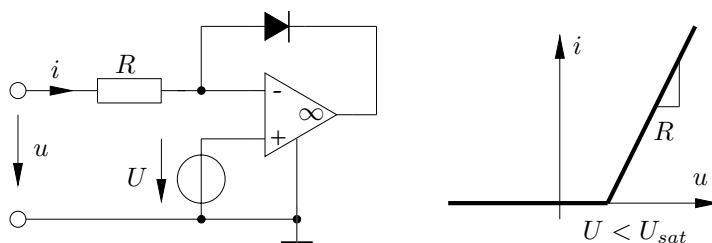


Bild 6.24 Op-Amp-Realisierung und Kennlinie eines konkaven Widerstands

bau der Spannungsquelle an der gezeigten Stelle zwischen Masse und dem nicht invertierenden Eingang des Op-Amps ist dabei vorteilhaft, da dann auch die Verwendung von Spannungsquellen erlaubt ist, von denen ein Anschluss bereits fest mit Masse verbunden ist (z.B. bei einem Netzgerät) oder die nicht mit Strömen belastet werden sollen (z.B. der Ausgang eines Spannungsteilers).

6.3.5.3 Konvexe Widerstände

Sinngemäß ergibt sich auch eine Op-Amp-Realisierung eines konvexen Widerstandes. Dabei wurde wie oben angedeutet die ideale Diode durch Umdrehen der pn-Diode umgepolt.

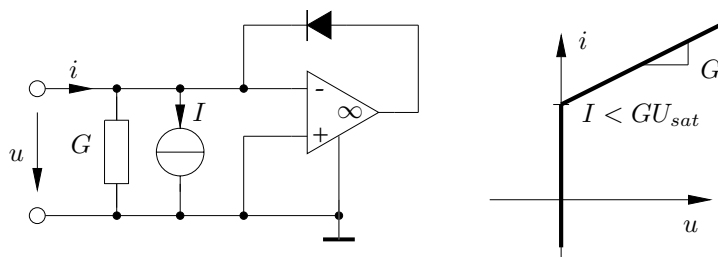


Bild 6.25 Op-Amp-Realisierung und Kennlinie eines konvexen Widerstands

6.4 Lineare Operationsverstärkerschaltungen

Ist durch die äußere Beschaltung eines Operationsverstärkers gewährleistet, dass er ausschließlich im streng linearen Bereich betrieben wird, also alleine durch einen (streng linearen!) Nullor modelliert werden kann, so spricht man von einer *linearen Operationsverstärkerschaltung*.

Aus der Fülle praktisch wichtiger Schaltungen sollen nur einige typische Vertreter vorgestellt werden. Anhand dieser Beispiele wird auch das durch Verwendung der Nulloreigenschaften ermöglichte einfache direkte Aufstellen der Analysegleichungen demonstriert.

6.4.1 Virtuelle Masse

In vielen Op-Amp-Schaltungen ist der nichtinvertierende Eingang mit dem Bezugspotential, der Masse verbunden. Wegen der Nullatortreigenschaft des Eingangstores liegt damit auch der invertierende Eingang auf dem Bezugspotential, ohne jedoch einen Strom zur Masse ableiten zu können. Dieser Schaltungsknoten heißt daher eine *virtuelle Masse (virtual ground)*. Die gesamte

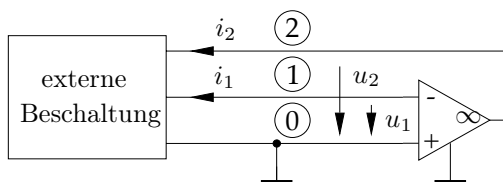


Bild 6.26 Die virtuelle Masse beim idealen Op-Amp

äußere Beschaltung des abgebildeten Op-Amps ist zu einem Dreipol zusammengefasst.

Knoten ① ist der Masseknoten dieser Schaltung. ① liegt auf dem selben Potential, und lässt gleichzeitig keinen Stromfluss zu, da:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ i_1 &= 0. \end{aligned}$$

Knoten ① ist daher ein virtueller Masseknoten.

6.4.2 Summierer

Durch Kombination von invertierendem und nicht invertierendem Verstärker gelangt man zu einem *Summierverstärker* oder *Summierer*. Unter Verwendung der Hilfsgrößen

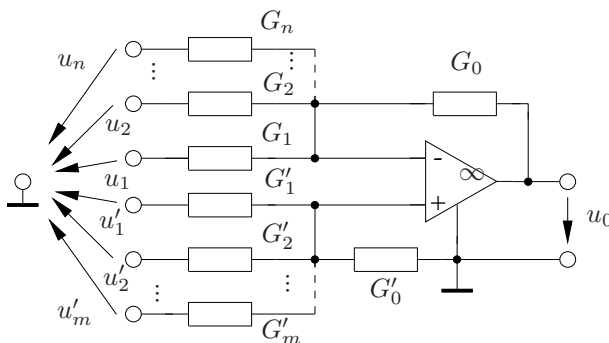


Bild 6.27 Der ideale Op-Amp als Summierer

$$\begin{aligned}
 G &= \sum_{i=0}^n G_i & G' &= \sum_{i=0}^m G'_i \\
 K_i &= \frac{G_i}{G_0} & K'_i &= \frac{G'_i}{G_0} \cdot \frac{G}{G'}
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

ergibt sich die Ausgangsspannung zu:

$$u_0 = - \sum_{i=1}^n K_i u_i + \sum_{i=1}^m K'_i u'_i
 \tag{6.7}$$

Ein Summierer kann also eine beliebige Linearkombination von Eingangsspannungen bilden.

6.4.3 Gesteuerte Quellen

Unter der Einschränkung, dass jeweils ein Pol des Eingangs- und Ausgangstores fest mit Masse verbunden sein müssen, gibt es Op-Amp-Realisierungen von allen vier Arten von gesteuerten Quellen (USU, ISU, USI, ISI). Im allgemeinen werden dafür jeweils zwei Op-Amps benötigt.

6.4.3.1 Spannungsgesteuerte Spannungsquelle (USU)

Die in Bild 6.28 rechts abgebildete Nullorschaltung verhält sich wie eine spannungsgesteuerte Spannungsquelle (USU) mit positivem Steuerungsfaktor $\mu = 1 + R_0/R_1$. Der Massebezug

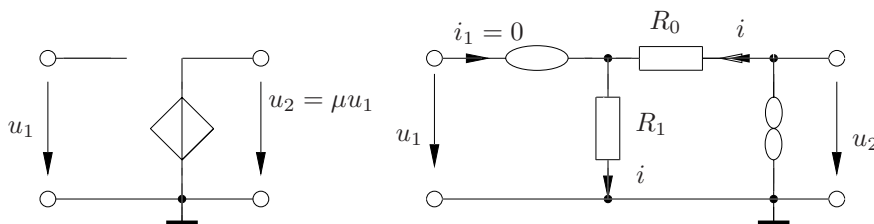


Bild 6.28 Eine Nullor-Realisierung einer USU mit Steuerungsfaktor $\mu > 1$

des Norators erlaubt es dann, diese Nullorschaltung als im streng linearen Bereich betriebenen nicht invertierenden Verstärker aufzufassen, der sich damit als Ersatzschaltung für die gesteuerte Quelle ergibt. Soll eine USU mit negativem Steuerungsfaktor $\mu < 0$ realisiert werden,

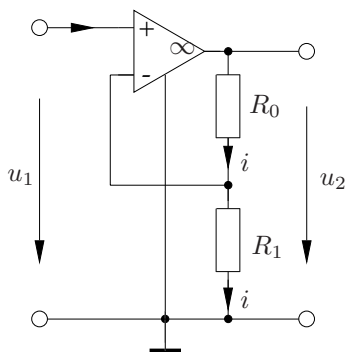


Bild 6.29 Eine Op-Amp-Realisierung einer USU mit $\mu > 1$

so schaltet man einen invertierenden Verstärker in Kette mit einem nicht invertierenden oder

einem Spannungsfolger. Der Steuerungsfaktor ergibt sich dann als Produkt der beiden Spannungsverstärkungen.

Bei der Schaltung in Bild 6.30 beispielsweise hat der Spannungsfolger am Eingang den Steuerungsfaktor 1, und der folgende invertierende Verstärker eine Spannungsverstärkung von $-\frac{R_0}{R_1}$, die damit auch den Übertragungsfaktor $\mu = \frac{u_2}{u_1}$ der Gesamtschaltung herstellt. Durch

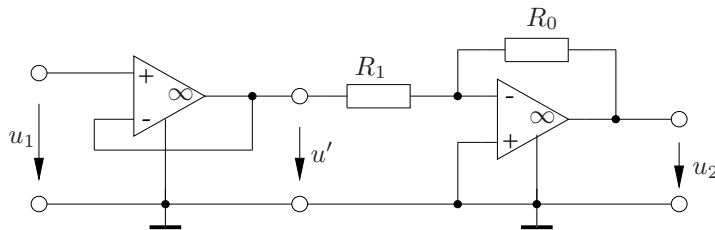


Bild 6.30 Eine Op-Amp-Realisierung einer USU mit $\mu < 0$

Verkettung mit einem weiteren invertierenden Verstärker könnte man schließlich die Realisierung eines Steuerungsfaktors im Bereich $\mu \in (0, 1)$ ermöglichen, die Zahl von dann drei benötigten Op-Amps ist aber zu hoch, um die Schaltung noch praktisch attraktiv zu machen. Stattdessen sollte man (als guter Entwickler) von vorneherein die umgebende Schaltung so entwerfen, dass eine der einfacheren Schaltungen ausreicht oder zumindest der Spannungsfolger am Eingang unnötig wird.

6.4.3.2 Stromgesteuerte Spannungsquelle (ISU)

Eine ISU mit negativem Steuerungswiderstand r kann besonders einfach realisiert werden: Die

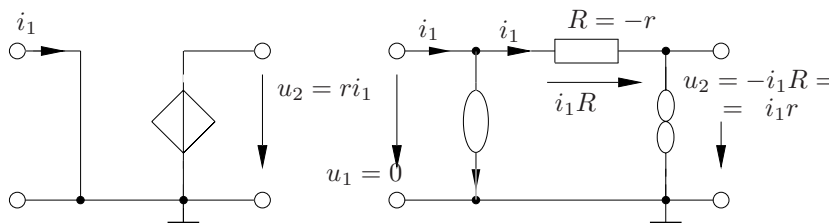


Bild 6.31 Eine Nullor-Realisierung einer ISU mit $r < 0$

entsprechende Op-Amp-Schaltung ist das Kernstück eines invertierenden Verstärkers: Um einen

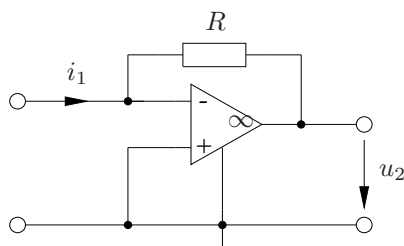


Bild 6.32 Eine Op-Amp-Realisierung einer ISU mit $r < 0$

Steuerungswiderstand $r > 0$ zu verwirklichen, schaltet man der ISU mit $r < 0$ einen zusätzlichen invertierenden Verstärker mit $v_u = -1$ nach.

6.4.3.3 Spannungsgesteuerte Stromquelle (USI)

Zur Realisierung einer idealen USI schaltet man deren Ausgang zunächst einen positiven und einen betragsgleichen negativen Leitwert hinzu, die zusammen einen Leerlauf darstellen und das Verhalten der Gesamtschaltung damit nicht verändern. Durch Quellenumwandlung kann man dann die USI auf eine der oben bereits besprochenen gesteuerten Spannungsquellen (mit einem zusätzlichen positiven Innenwiderstand R) zurückführen.

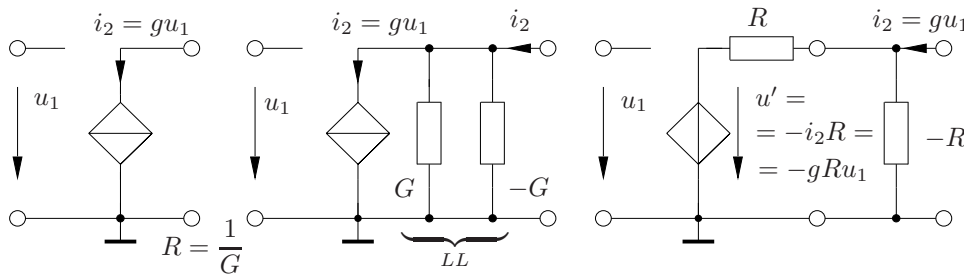


Bild 6.33 Zur Realisierung einer USI durch äquivalente Transformation auf bekannte Schaltungen

Den negativen Widerstand $-R$ kann man mit Hilfe eines NIK realisieren, so dass sich als vollständige Nullor-Realisierung der USI die folgende Schaltung (Bild 6.34) ergibt. Wählt

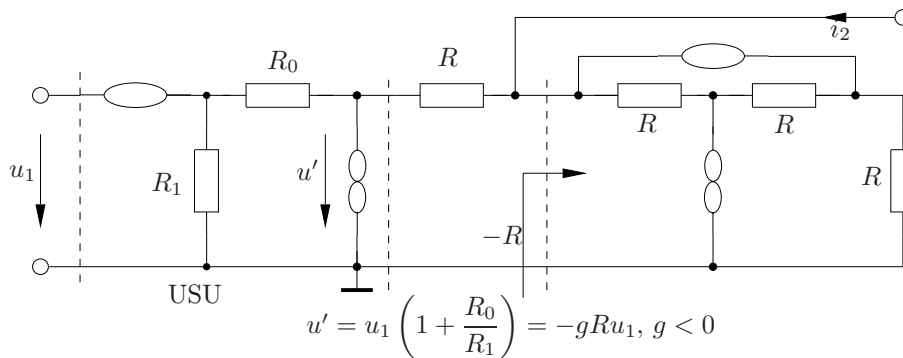


Bild 6.34 Eine Nullor-Realisierung der USI von Bild 6.33

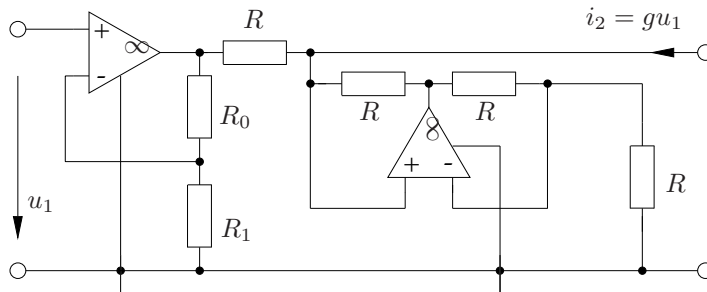


Bild 6.35 Eine Op-Amp-Realisierung der USI

man R so, dass $-gR = 1$ gilt, so kann die Schaltung weiter vereinfacht werden: der nicht

invertierende Verstärker wird durch einen Spannungsfolger ($v_u = 1$, $R_0 = 0$, $R_1 \rightarrow \infty$) ersetzt.

Für die Realisierung positiver Steuerleitwerte $g > 0$ kann z. B. wieder ein invertierender Verstärker unmittelbar nach dem Spannungsfolger eingesetzt werden.

6.4.3.4 Stromgesteuerte Stromquelle (ISI)

Für die Realisierung einer ISI wird einfach die USU, d.h. der nicht invertierende Verstärker bzw. Spannungsfolger von Bild 6.35, durch eine ISU (von Bild 6.32) ersetzt.

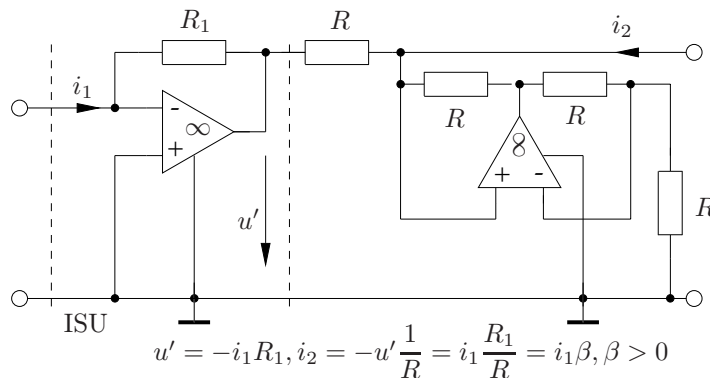


Bild 6.36 Eine Op-Amp-Realisierung der ISI mit $\beta > 0$

Für einen negativen Steuerungsfaktor $\beta < 0$ kann wiederum zusätzlich ein invertierender Verstärker eingesetzt werden.

6.4.4 Gyrator

Einen Gyrator erhält man durch Parallelschaltung zweier USI oder durch Reihenschaltung zweier ISU. Eine dritte Realisierungsmöglichkeit beruht auf der folgenden Faktorisierung seiner Kettenmatrix:

$$\mathbf{A}_{Gyr} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & R \\ -\frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{NIK} \cdot \mathbf{A}_{NII}.$$

Dies entspricht der Kettenschaltung eines NIK mit $k = -1$ mit einem *Negativmittanzinverter* (NII). Eine entsprechende Op-AmpSchaltung ist beispielsweise die in Bild 6.38 gezeigte.

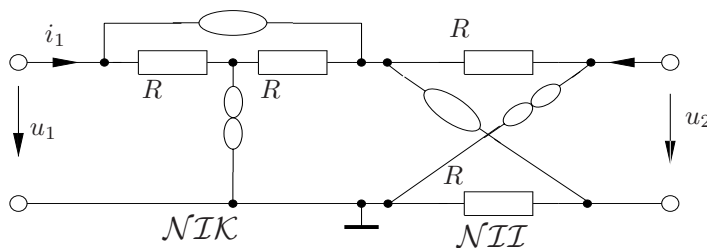


Bild 6.37 Ein Gyrator bestehend aus einem NIK in Kette mit einem NII

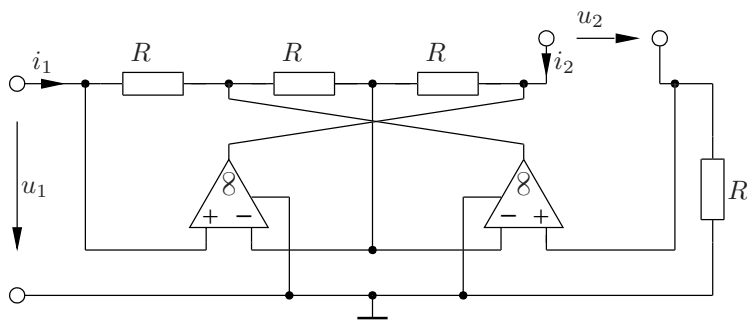


Bild 6.38 Eine mögliche Op-Amp-Realisierung des Gytrators von Bild 6.37

Für die paarweise Zusammenfassung von Nullator und Norator zu einem Nullor gibt es zwei Möglichkeiten und für die Polung jedes Op-Amp-Eingangstores jeweils zwei Möglichkeiten. Aus den insgesamt acht – als streng lineare Nullorschaltung äquivalenten – Schaltungen ist hier die bei realem Op-Amp für eine Gytratorrealisierung am besten geeignete dargestellt.

7. Resistive Mehr Tore

Ein *resistives Mehrtor* (p -Tor) ist eine gedächtnislose „Black Box“ die an $2p$ Klemmen von außen zugänglich ist. Die Zuordnung der Klemmen zu Toren (Klemmenpaaren, bei denen die Ströme entgegengesetzt gleich sind) kann durch den internen Aufbau bewirkt sein, muss aber im allgemeinen wieder durch die äußere Beschaltung sichergestellt werden. Ein $(p + 1)$ -Pol kann auch stets als p -Tor aufgefasst werden (Bild 7.1). Ein p -Tor kann aber im allgemeinen nicht als $2p$ -Pol (oder gar als $(p + 1)$ -Pol) behandelt werden, da beim p -Tor keine Aussage über Spannungen zwischen zu verschiedenen Toren gehörigen Klemmen gemacht wird.

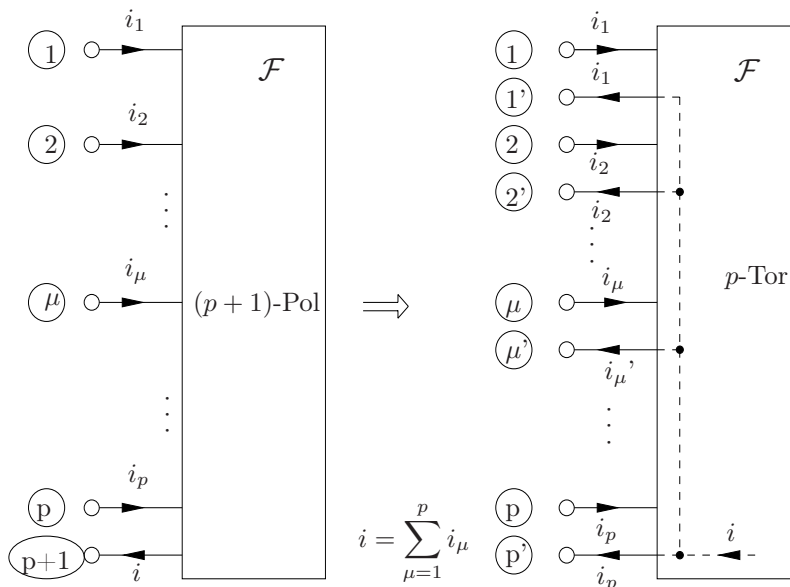


Bild 7.1 $(p + 1)$ -Pol und zugehöriges p -Tor

Der Betriebszustand eines resistiven Mehrtores ist durch einen Torstromvektor $\mathbf{i}(t)$ und einen Torspannungsvektor $\mathbf{u}(t)$ zum Zeitpunkt t bestimmt. Die Menge aller möglichen Betriebszustände ist der Betriebsraum \mathcal{F} . Der Betriebsraum eines p -Tores hat die topologische Dimension p .

7.1 Beschreibungsformen

Zur Beschreibung eines p -Tores fasst man die Torspannungen und Torströme jeweils zu einem p -dimensionalen Vektor

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_p]^T$$

$$\mathbf{i} = [i_1 \ i_2 \ \dots \ i_p]^T$$

zusammen. Es gibt nun wieder drei mögliche algebraische Beschreibungen: Zum einen kann der Betriebsraum \mathcal{F} die Nullstellenmenge von p Funktionen $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_p]^T$ in je $2p$ Variablen sein. Eine Alternative ist die Parametrisierung von \mathcal{F} mit Hilfe von Funktionen $\mathbf{f}_u = [f_{u1} \ f_{u2} \ \dots \ f_{up}]^T$ und $\mathbf{f}_i = [f_{i1} \ f_{i2} \ \dots \ f_{ip}]^T$, die jeweils vom Parametervektor $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_p]^T$ abhängen. Außerdem existieren im Prinzip

$$\binom{2p}{p} = \frac{(2p)!}{(p!)^2}$$

Möglichkeiten p Variablen in Abhängigkeit der übrigen p Variablen explizit auszudrücken. Von praktischer Bedeutung sind neben einigen hybriden Beschreibungen die spannungsgesteuerte ($\mathbf{g} = [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_p]^T$), die stromgesteuerte ($\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_p]^T$) und die Kettenbeschreibung ($\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p]^T$).

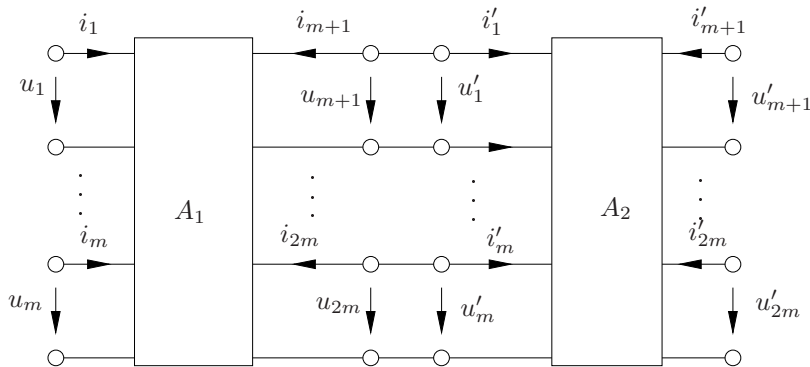
	nichtlinear	streng linear
implizit:	$\mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} \mid \mathbf{f} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} \right) = \mathbf{0} \right\}$	$\mathcal{F} = \text{Kern} [\mathbf{M} \ \mathbf{N}],$ $\text{Rang} [\mathbf{M} \ \mathbf{N}] = p$
parametrisiert:	$\mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u(\mathbf{c}) \\ \mathbf{f}_i(\mathbf{c}) \end{bmatrix}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^p \right\}$	$\mathcal{F} = \text{Bild} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix},$ $\text{Rang} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = p;$
spannungsgesteuert:	$\mathbf{i} = \mathbf{g}(\mathbf{u})$	$\mathbf{i} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}$
stromgesteuert:	$\mathbf{u} = \mathbf{r}(\mathbf{i})$	$\mathbf{u} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}$
Kettenbeschreibung:	$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{i}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{a} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ -\mathbf{i}_2 \end{bmatrix} \right)$	$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{i}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ -\mathbf{i}_2 \end{bmatrix}$

Tabelle 1: Algebraische Beschreibung resistiver Mehrtere.

Die Funktionen \mathbf{g} , \mathbf{r} und \mathbf{a} bzw. die Matrizen \mathbf{G} , \mathbf{R} und \mathbf{A} der expliziten Beschreibungen sind – falls existent – eindeutig. Für die Existenz einer das Mehrtor vollständig charakterisierenden Kettenbeschreibung ist eine Torzahlsymmetrie $p = 2m$ erforderlich, wobei den Eingangstoren $1 \dots m$ der Index 1 und den Ausgangstoren $m+1 \dots 2m$ der Index 2 zugeordnet ist (siehe Bild 7.2). Die Kettenbeschreibung ist günstig für die Analyse von verketteten $2m$ -Toren.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{i}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{a}_{ges} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{u}'_2 \\ -\mathbf{i}'_2 \end{bmatrix} \right) = \mathbf{a}_1 \left(\mathbf{a}_2 \left(\begin{bmatrix} \mathbf{u}'_2 \\ -\mathbf{i}'_2 \end{bmatrix} \right) \right); \quad \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{i}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{ges} \begin{bmatrix} \mathbf{u}'_2 \\ -\mathbf{i}'_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{u}'_2 \\ -\mathbf{i}'_2 \end{bmatrix}$$

Man erkennt, dass die vektorielle Schreibweise für Zweitore sich unmittelbar auf Mehrtere anwenden lässt. Sämtliche vektoriellen Definitionen und Matrixgleichungen aus Kapitel 4 sind aufwärtskompatibel für Mehrtere formuliert. Bei Angaben über Dimension und Rang ist die “2” durch die Torzahl p zu ersetzen.

Bild 7.2 Kettenschaltung von $2m$ -Toren

7.2 Spezielle Mehr Tore

Die folgenden idealisierten Mehr Tore dienen entweder als Modell für real existierende Bauelemente oder realisieren elementare funktionale Zusammenhänge, die sich in das Mehr Torkonzept der Netzwerktheorie einbetten lassen.

7.2.1 Mehr Tor-Übertrager

Der ideale Zweitorübertrager lässt sich zum *Mehrtor-Übertrager* verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung entspricht der idealisierten Modellierung eines realen Mehrwicklungsübertragers.

$$\begin{aligned}
 u_1 - \ddot{u}_2 \cdot u_2 &= 0 \\
 u_1 - \ddot{u}_3 \cdot u_3 &= 0 \\
 &\vdots \\
 u_1 - \ddot{u}_p \cdot u_p &= 0 \\
 i_1 + \frac{1}{\ddot{u}_2} \cdot i_2 + \frac{1}{\ddot{u}_3} \cdot i_3 \dots + \frac{1}{\ddot{u}_p} \cdot i_p &= 0
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\ddot{u}_2} & -\frac{1}{\ddot{u}_3} & \dots & -\frac{1}{\ddot{u}_p} \\ \frac{1}{\ddot{u}_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{\ddot{u}_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\ddot{u}_p} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} = \mathbf{H}' \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_p \end{bmatrix}$$

Ein idealer p -Tor-Übertrager kann stets mit Hilfe von $(p - 1)$ -Zweitor-Übertragern realisiert werden.

7.2 Spezielle Mehr Tore

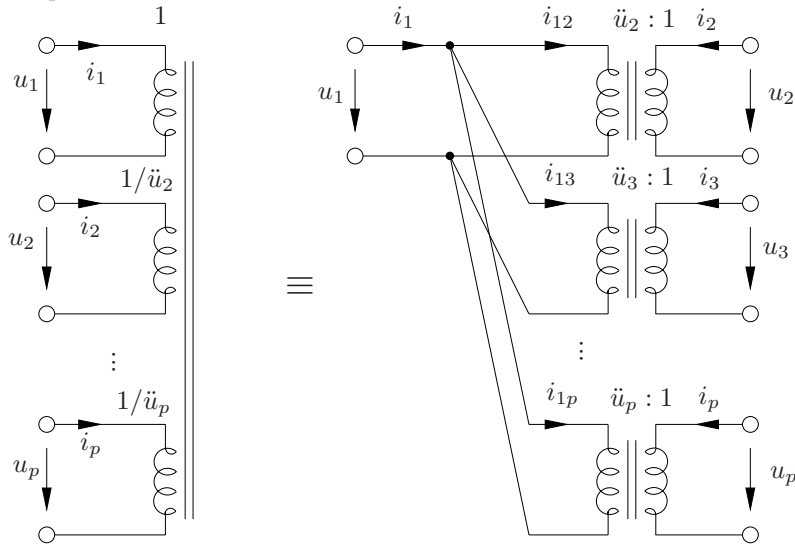


Bild 7.3 Äquivalenz von p-Tor-Übertragern

7.2.2 Zirkulator

Zirkulatoren sind sehr nützliche Mehr Tore, die insbesondere im Mikrowellenbereich häufig eingesetzt werden. Die konstituierenden Matrizen M und N des Dreitorzirkulators lauten:

$$M = \mathbf{1}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -R & +R \\ +R & 0 & -R \\ -R & +R & 0 \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

Daraus ergibt sich für die Widerstandsmatrix unmittelbar

$$R = -M^{-1} \cdot N = -N = \begin{bmatrix} 0 & +R & -R \\ -R & 0 & +R \\ +R & -R & 0 \end{bmatrix}$$

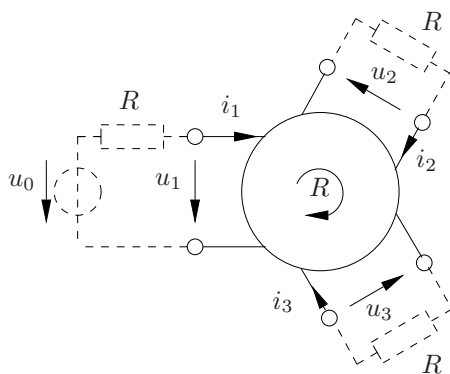


Bild 7.4 Drei-Tor-Zirkulator

Aus Gl.(7.2) lässt sich auch herleiten, dass

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = 0$$

gilt, d. h. der Zirkulator ist verlustlos.

Beschaltet man den Zirkulator am Tor 1 mit einer Spannungsquelle mit Innenwiderstand R und an den Toren 2 und 3 mit R (siehe Bild 7.4), so gelten folgende Eigenschaften: An Tor 1 nimmt der Zirkulator die Leistung

$$p_1 = u_1 \cdot i_1 = \frac{u_0^2}{4R}$$

auf. Am Tor 2 bzw. 3 gibt das verlustlose Mehr Tor

$$-p_2 = -u_2 \cdot i_2 \quad \text{und} \quad -p_3 = -u_3 \cdot i_3$$

an die Abschlusswiderstände ab.

Aus Gl.(7.2) folgt

$$i_1 = i_2, \quad i_3 = 0, \quad u_1 = -u_2, \quad u_3 = 0, \\ -p_2 = p_1 \quad \text{und} \quad -p_3 = 0$$

d. h. die am Tor-1 aufgenommene Leistung wird am Tor-2 abgegeben. Für Tor-3 bleibt nichts übrig. Wird andererseits am Tor-2 eine Quelle angeschaltet und die Leistung aufgenommen, so wird an Tor-3 abgegeben und nichts bleibt für Tor-1 übrig usw. . Aus diesem Verhalten, das eine Art Kreisverkehr der Signale darstellt, wird unmittelbar der Name Zirkulator klar.

Anwendungsbeispiel: Ein p -Tor-Zirkulator mit $p > 3$ kann stets durch Zusammenschaltung

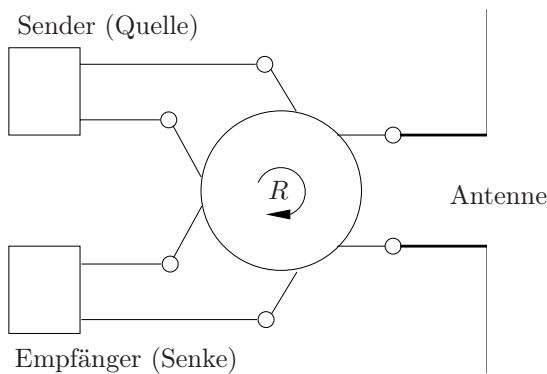


Bild 7.5 Trennen von Sende- und Empfangsleistung

mehrerer Dreitorzirkulatoren realisiert werden.

Der Zirkulator ist offensichtlich nicht übertragungssymmetrisch, d. h. nicht reziprok. Mit Hilfe eines Gyrtators kann ein 3- Tor- Zirkulator realisiert werden.

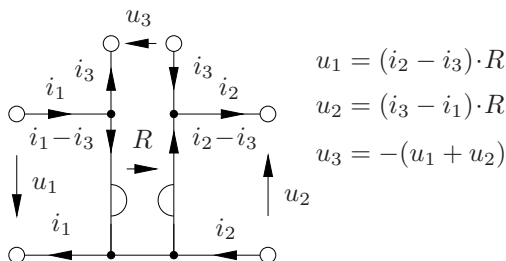


Bild 7.6 Drei-Tor-Zirkulator-
realisierung mit Gyrtator

7.2.3 Multiplizierer und Dividierer

Multiplizierer und Dividierer sind speziell entwickelte, nicht-lineare Dreitore, deren starre Ausgangsspannung am Tor 3 vom Produkt bzw. vom Quotienten der Torspannungen 1 und 2 abhängt. Sie dienen zum Beispiel als Analogrechner. Für beide Dreitore existiert je eine hybride explizite Beschreibungsgleichung.

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{h} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{u_1 u_2}{u_M} \end{bmatrix} \quad \text{Multiplizierer} \quad (7.3)$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{h} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{u_1}{u_2} \cdot u_D \end{bmatrix} \quad \text{Dividierer} \quad (7.4)$$

Die Größen u_M und u_D sind eine Multiplizierer- bzw. Dividiererkonstante. Bild 7.7 zeigt das Elementensymbol des Multiplizierers (Realisierungsmöglichkeit siehe Übung). Bild 7.8 gibt eine Realisierung des Dividierers mit Hilfe eines Multipliziererbausteins im Rückkoppelzweig eines Operationsverstärkers an.

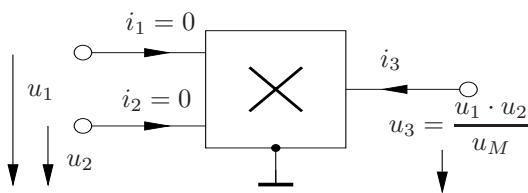
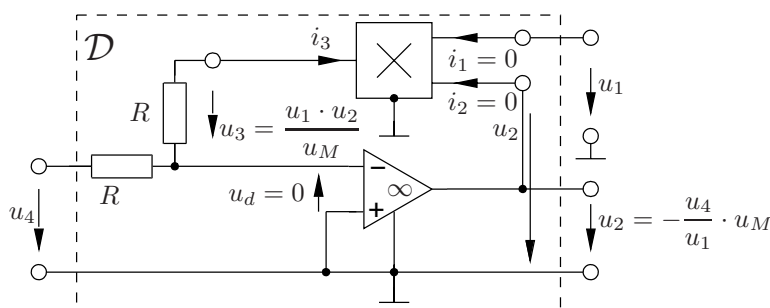


Bild 7.7 Multiplizierer

Bild 7.8 Dividierer mit $u_D = -u_M$

8. Allgemeine Analyseverfahren

Allgemeine Analyseverfahren sind systematische Methoden, um symbolisch oder numerisch die Ströme und Spannungen an einem elektrischen Netzwerk in Abhängigkeit der Verbindungsstruktur und der Elementcharakteristik zu berechnen. Beim Entwurf solcher Methoden sind verschiedene Gesichtspunkte zu berücksichtigen:

- Für eine rechnergestützte Analyse ist eine formalisierte maschinenverständliche Prozedur erforderlich. Der zugrundeliegende Algorithmus muss außerdem unempfindlich gegen Rundungsfehler sein.
- Für eine symbolische Analyse von Hand ist ein einfaches Aufstellen möglichst weniger Analysegleichungen von Vorteil.

Um allgemeine Analyseverfahren entwickeln zu können, ist ein grundlegendes Verständnis des Zusammenwirkens der durch die Kirchhoffschen Gesetze beschriebenen Verbindungsstruktur mit den Netzwerkelementen, den *Subsystemen*, erforderlich. Ein erster Schritt wurde bereits im Kapitel 2 (Kirchhoff - Gesetze) durch Einführung der Knoteninzidenzmatrix \mathbf{A} gemacht. Der folgende Abschnitt verallgemeinert die Analyse der Verbindungsstruktur und bettet sie ins Mehrtorkonzept ein.

Bei elektrischen Netzwerken, die sich durch konzentrierte Elemente modellieren lassen, ist die räumliche Anordnung der Elemente irrelevant, es kommt nur auf die Verschaltung als solche an. Deshalb kann man eine systematische Analyse solcher Kirchhoffnetze in 2 Schritte zerlegen:

- Beschreibung der Verbindungsstruktur
- Charakterisierung der Netzwerkelemente

Die Modellierung eines elektrischen Netzwerks mit Hilfe eines gerichteten Graphen beschreibt ausschließlich die Verbindungsstruktur. Die Bilder 8.2 und 8.1 veranschaulichen, wie sich die Verbindungsstruktur auch als *Verbindungsmehrtor* interpretieren lässt.

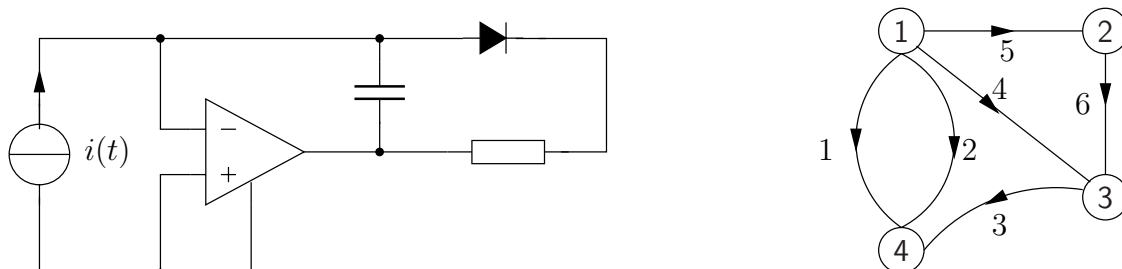


Bild 8.1 Schaltbild (Logarithmierer mit Phasenkompensation) und Netzwerkgraph

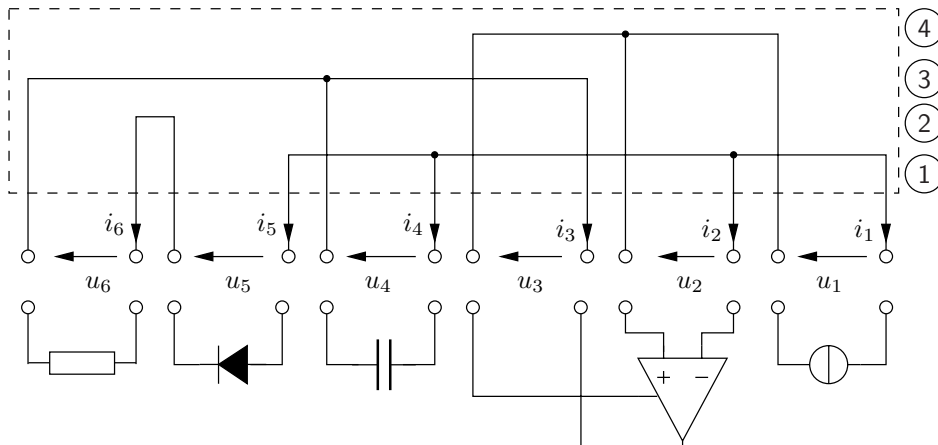


Bild 8.2 Verbindungsmehrtor und Subsysteme

8.1 Verbindungsmehrtor

Das Verbindungsmehrtor hat folgende Eigenschaften:

- Anzahl der Tore $p =$ Anzahl der Kanten b .
- Zeitinvarianz.
- Strenge Linearität, da es durch die linearen Kirchhoffschen Gleichungen beschrieben wird und keine Quellen im Inneren besitzt.
- Verlustlosigkeit, da im ideal leitenden Draht keine Energie gespeichert werden kann und keine Energie in Wärme umgesetzt wird (Beweis folgt).
- Reziprozität (Beweis folgt).

8.1.1 Beschreibungsgleichungen des Verbindungsmehrtors

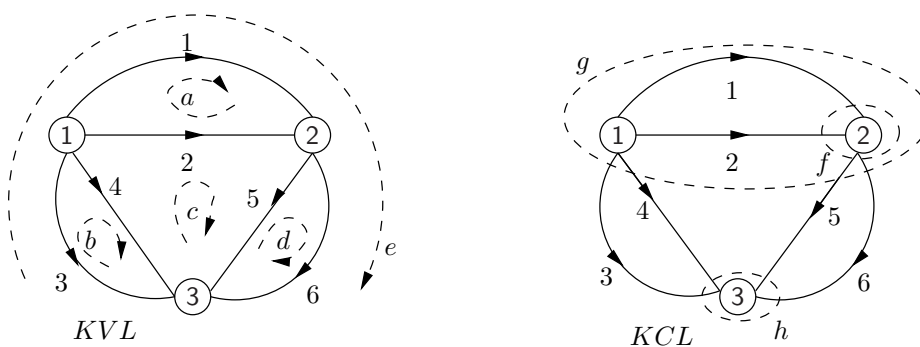


Bild 8.3 Beliebige Schleifen und (Super-) Knoten

Eine implizite algebraische Beschreibung des Verbindungsmehrtors erhält man direkt aus den Kirchhoffschen Gleichungen. Man benötigt dazu ausreichend viele Knoten-, Superknoten-, Maschen- oder Schleifengleichungen.

Beispiel (Bild 8.3):

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc}
 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1
 \end{array} \right] & \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{array} = \mathbf{0} \\
 \\
 =: \left[\begin{array}{cc} \mathbf{B}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}' \end{array} \right] \begin{array}{l} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{array} = \mathbf{0} & (8.1)
 \end{array}$$

Anmerkung: Die aufgestellten Gleichungen sind nicht unabhängig voneinander, die Matrizen \mathbf{A}' und \mathbf{B}' sind deshalb mit einem Strich gekennzeichnet. Sie beschreiben die Verbindungsstruktur aber vollständig.

Die wesentlichen Eigenschaften dieser algebraischen Beschreibung des Verbindungsmehrs sind:

- Die Abbildung $[\mathbf{M} \ \mathbf{N}] \cdot \begin{array}{l} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{array} = \mathbf{0}$ zerfällt in zwei entkoppelte homogene Gleichungssysteme $\mathbf{B}' \mathbf{u} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{A}' \mathbf{i} = \mathbf{0}$.
- \mathbf{B}' und \mathbf{A}' sind Inzidenzmatrizen, sie enthalten nur die Elemente des endlichen Zahlkörpers $\{-1; 0; 1\}$.
- Der Rang der Matrix $\left[\begin{array}{cc} \mathbf{B}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}' \end{array} \right]$ ist b . Die Matrix beschreibt also das lineare b -Tor vollständig.
- Jede Knotenpunktgleichung steht auf jeder Schleifengleichung senkrecht.

Die letzte Aussage ist eine geometrische Interpretation dafür, dass das Skalarprodukt zweier beliebiger Zeilenvektoren von \mathbf{B}' und \mathbf{A}' verschwindet. Mit

$$\mathbf{B}' =: \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n^T \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}' =: \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix}$$

gilt nämlich

$$\mathbf{b}_i^T \mathbf{a}_j = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

oder

$$\boxed{\mathbf{B}' \mathbf{A}'^T = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}' \mathbf{B}'^T = \mathbf{0}} \quad (8.2)$$

Begründung:

Fall 1: Falls die Knotengleichung j und die Schleifengleichung i keine gemeinsamen Kanten besitzen, so verschwinden sämtliche Summanden von $\mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{a}_j$.

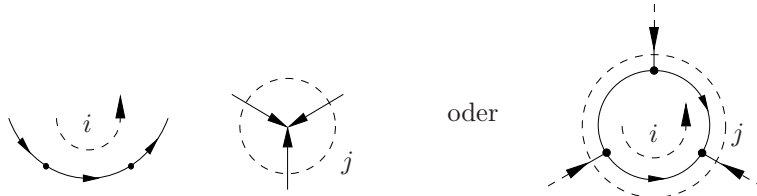


Bild 8.4 Knoten und Schleifen ohne gemeinsame Kante

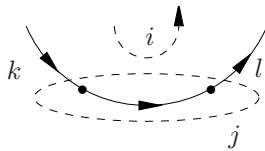


Bild 8.5 Knoten und Schleife mit zwei gemeinsamen Kanten

Fall 2: Falls der Knotengleichung j und der Schleifengleichung i die beiden Kanten k und l gemeinsam sind, so haben die Summanden $b_{ik} \cdot a_{jk}$ und $b_{il} \cdot a_{jl}$ unterschiedliches Vorzeichen und heben sich auf.

Fall 3: Besonders „exotische Superknoten“ können auch mehr als zwei Kanten mit einer Schleife gemeinsam haben. In jedem Fall jedoch durchdringt eine geschlossene Schleife in Richtung ihres Umlaufsinn die Knotenhülle genauso oft von außen nach innen wie von innen nach außen. Dadurch heben sich die Summanden von $\mathbf{b}_i^T \mathbf{a}_j$ immer paarweise auf.

Wegen der Orthogonalität der beiden Beschreibungsgleichungssysteme $\mathbf{B}'\mathbf{u} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{A}'\mathbf{i} = \mathbf{0}$ lässt sich sofort eine Parameterdarstellung des Betriebsraums eines Verbindungsmehrtors angeben:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}'^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}'^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_u \\ \mathbf{c}_i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{c}_u \\ \mathbf{c}_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n}, \quad \text{Rang} \begin{bmatrix} \mathbf{A}'^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}'^T \end{bmatrix} = b \quad (8.3)$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Formel erfolgt durch Einsetzen in die Kirchhoffschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{B}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}'^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}'^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_u \\ \mathbf{c}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}'\mathbf{A}'^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}'\mathbf{B}'^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_u \\ \mathbf{c}_i \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_u \\ \mathbf{c}_i \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Der parametrisierte Betriebsraum in Gleichung (8.3) enthält somit am Verbindungsmehrtor zulässige Spannungs- und Stromvektoren. Der Rang der speziellen Betriebsmatrix in Gleichung 8.3 ist nach Voraussetzung gleich b , deshalb beschreibt ihr Bildraum den vollständigen Betriebsraum.

8.1.2 Tellegenscher Satz

Das Verbindungsmehrtor ist sowohl reziprok als auch verlustlos. Zum Beweis geht man von der Parameterdarstellung des Lösungsraums aus:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}'^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}'^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_u \\ \mathbf{c}_i \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{c}$$

mit

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}'^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}'^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_u \\ \mathbf{c}_i \end{bmatrix}$$

Es folgt:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{I} = (\mathbf{I}^T \mathbf{U})^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}' \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}'^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}' \mathbf{B}'^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Diese Beziehung am Verbindungsmehrtor ist auch als *Tellegenscher Satz* bekannt:

$$\boxed{\mathbf{U}^T \mathbf{I} = \mathbf{0}} \quad \text{Tellegenscher Satz} \quad (8.4)$$

Somit gilt insbesondere:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{I} - \mathbf{I}^T \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (\text{Reziprozität})$$

und

$$\mathbf{U}^T \mathbf{I} + \mathbf{I}^T \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (\text{Verlustlosigkeit})$$

Die Gleichungen (8.3) und (8.4) lassen sich auch geometrisch interpretieren und für einfache Netzwerke veranschaulichen (siehe Übung):

- Der b -dimensionale Lösungsraum, projiziert in den \mathbb{R}^b , zerfällt wegen der entkoppelten Gleichungen für \mathbf{u} und \mathbf{i} in zwei unabhängige Teilräume

$$\mathbf{u} \in \text{Bild}(\mathbf{A}'^T) = \mathcal{F}_u \quad \text{und} \quad \mathbf{i} \in \text{Bild}(\mathbf{B}'^T) = \mathcal{F}_i$$

- Die beiden Teilräume \mathcal{F}_u und \mathcal{F}_i stehen senkrecht aufeinander.
- \mathcal{F}_u vereinigt mit \mathcal{F}_i bildet gerade den \mathbb{R}^b , da $\text{Rang}(\mathbf{A}') + \text{Rang}(\mathbf{B}') = b$.

Die Orthogonalität von \mathcal{F}_u und \mathcal{F}_i besagt, dass jeder Torspannungsvektor $\mathbf{u}^{(1)}$ eines Verbindungsmehrtors auf jedem Torstromvektor $\mathbf{i}^{(2)}$ senkrecht steht:

$$\mathbf{u}^{(1)T} \cdot \mathbf{i}^{(2)} = 0$$

Diese Eigenschaft ist eine Besonderheit eines reziproken und verlustlosen Mehrtors. Sie hat überhaupt nichts mit seiner Beschaltung (den Subsystemen) zu tun. Die Beziehung gilt insbesondere auch für verschiedene Netzwerke (1) und (2) gleicher Topologie. Der Kantenspannungsvektor des Netzwerks (1) steht also senkrecht auf dem Kantenstromvektor des Netzwerks (2). Verschiedene Netzwerke gleicher Topologie sind nämlich nichts anderes als verschiedene Beschaltungen desselben Verbindungsmehrtors.

Die Aussage des Tellegenschen Satzes in Verbindung mit einer vollständigen Beschreibung des Teillösungsraumes \mathcal{F}_u der zulässigen Spannungsvektoren legt gleichzeitig den Teillösungsraum \mathcal{F}_i der zulässigen Stromvektoren als orthogonales Komplement im \mathbb{R}^b fest ($\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_u^\perp$). Von den drei Gesetzen zur Charakterisierung von Verbindungsnetzwerken

- Kirchhoffsches Spannungsgesetz
- Kirchhoffsches Stromgesetz
- Tellegenscher Satz

genügen also bereits zwei. Das dritte Gesetz lässt sich aus den beiden anderen jeweils ableiten.

8.2 Systematisches Aufstellen der Kirchhoffschen Gleichungen

Zur systematischen Analyse des Verbindungsnetzwerks ist es nötig, am Netzwerkgraphen folgende Gleichungen abzulesen:

- Eine maximale Anzahl linear unabhängiger Schleifengleichungen.
- Eine maximale Anzahl linear unabhängiger Knotengleichungen.

Dieses Problem ist äquivalent zur Suche einer Basis für jeden der beiden orthogonalen Teilräume \mathcal{F}_u^\perp und \mathcal{F}_i^\perp .

8.2.1 Baumkonzept

Linear unabhängige Gleichungen entstehen sicher dann, wenn jede Gleichung eine Kante berücksichtigt, die in keiner anderen Gleichung auftritt. Teilt man die Kanten des Netzwerkgraphen in zwei Klassen ein, so lässt sich diese Bedingung relativ leicht einhalten. Diese Klassen sind:

1. *Baumkanten*
2. *Verbindungskanten*

Ein *Baum* \mathcal{T} eines zusammenhängenden Graphen \mathcal{G} ist ein Teilgraph von \mathcal{G} , der die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- a) \mathcal{T} ist ein zusammenhängender Graph
- b) \mathcal{T} enthält alle Knoten von \mathcal{G}
- c) \mathcal{T} hat keine Schleifen

Beispiel: siehe Bild 8.6

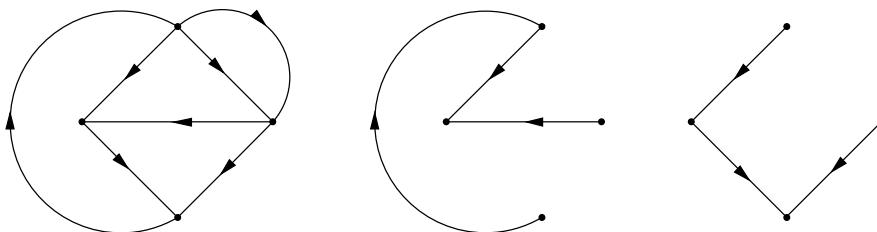


Bild 8.6 Netzwerkgraph und mögliche Bäume

Anmerkung: Es gibt $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$ verschiedene Bäume im Graphen \mathcal{G} , wobei \mathbf{A} die zugehörige Knoteninzidenzmatrix ist. Die Baumzweige sind diejenigen $(n - 1)$ Kanten, die in \mathcal{T} liegen, die Verbindungskanten sind die übrigen $b - (n - 1)$ Kanten.

8.2.2 Kirchhoffsche Gleichungen zu einem Baum

Durch die Wahl eines Baumes im Netzwerkgraphen lässt sich eine (bis auf die Kantenummerierung) eindeutige Vorschrift zum Aufstellen von Schleifengleichungen angeben:

- Man nummeriert zunächst die Baumzweige und anschließend die Verbindungskanten fortlaufend
- Es gibt nun $b - (n - 1) = s$ linear unabhängige Schleifengleichungen, die genau eine Verbindungskante und sonst nur Baumzweige enthalten. Die Orientierung der Schleifen wird durch die jeweilige Verbindungskante vorgegeben.

Beispiel: (Bilder 8.7 und 8.8)

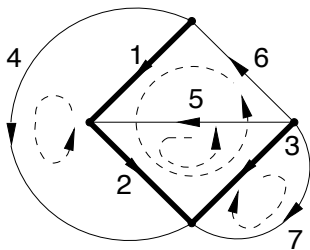


Bild 8.7 Graph mit einem Baum (fett)

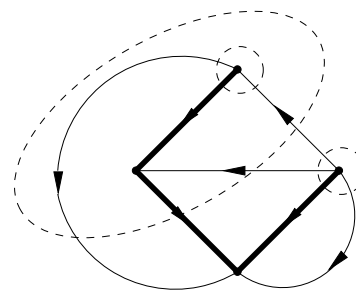


Bild 8.8 (Super-)Knoten, von den Kanten einer Schnittmenge durchstoßen

KVL zu Bild 8.7:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & -1 & & 1 & & & \\ & 1 & -1 & & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & & & 1 & \\ & & -1 & & & & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{array} = \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} =: \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Die Kanten 1-3 sind Baumzweige, die Kanten 4-7 Verbindungskanten. Obige Konstruktionsvorschrift der Schleifenmatrix \mathbf{B} stellt sicher, dass im Verbindungskanten-Teil von \mathbf{B} immer eine $s \times s$ -Einheitsmatrix entsteht. Eine solche Schleifenmatrix hat also immer den vollen Rang s . Partitioniert man den Kantenspannungsvektor in die Baumzweig-Spannungen \mathbf{u}_b und die Verbindungskanten-Spannungen \mathbf{u}_v so haben die Schleifengleichungen zu einem gewählten Baum immer die Form:

$$\boxed{\mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = [\mathbf{B}_b \quad \mathbf{1}_s] \begin{array}{l} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_v \end{array}} = \mathbf{0}, \quad \text{Rang} [\mathbf{B}_b \quad \mathbf{1}_s] = b - (n - 1) = s \quad (8.5)$$

Der Tellegensche Satz ermöglicht es, direkt aus der impliziten Beschreibung von \mathcal{F}_u eine Beschreibung des Teillösungsraumes $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_u^\perp$ anzugeben. Dazu betrachte man die Matrix

$$[\mathbf{1}_{n-1} - \mathbf{B}_b^T]$$

Der Zeilenraum dieser Matrix bildet das orthogonale Komplement zum Zeilenraum der Schleifenmatrix

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_b \quad \mathbf{1}_s]$$

Beweis:

$$[\mathbf{B}_b \quad \mathbf{1}_s] [\mathbf{1}_{n-1} \quad -\mathbf{B}_b^T]^T = \mathbf{B}_b - \mathbf{B}_b = \mathbf{0}$$

Eine mögliche, vollständige Beschreibung des Verbindungsmehrtors lautet somit:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_b & \mathbf{1}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n-1} & -\mathbf{B}_b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_v \\ \mathbf{i}_b \\ \mathbf{i}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

Die Matrix $[\mathbf{1}_{n-1} \quad -\mathbf{B}_b^T]$, die zunächst rein algebraisch konstruiert wurde, lässt sich auch am Graphen interpretieren. Die Gleichungen

$$[\mathbf{1}_{n-1} \quad -\mathbf{B}_b^T] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_b \\ \mathbf{i}_v \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

sind $n - 1$ linear unabhängige Superknoten- oder *Schnittmengengleichungen*, die jeweils genau einen Baumzweig und sonst nur Verbindungskanten betreffen. Eine *Schnittmenge* ist dabei eine Menge von Kanten eines zusammenhängenden Graphen, die den Graphen in zwei Hälften teilt, wenn diese Kanten entfernt werden. Die Orientierung der Superknotengleichungen wird durch den jeweiligen Baumzweig festgelegt (Bild 8.8).

Wenn man zunächst Schnittmengengleichungen aufstellt und daraus algebraisch Schleifengleichungen konstruiert, so nennt man die Matrix $-\mathbf{B}_b^T$ meist \mathbf{Q}_v oder \mathbf{A}_v .

Zwischen Bäumen in einem Graphen und Eigenschaften des zugehörigen Netzwerks (Verbindungsmehrtors) gibt es eine Reihe von Querbeziehungen:

- Der Raum \mathcal{F}_i besitzt die Dimension $b - (n - 1)$, d. h. im Netzwerk lassen sich $s = b - (n - 1)$ linear unabhängige Ströme einprägen, und zwar durch Ströme in den Verbindungskanten bzw. an den entsprechenden Toren des Verbindungs- b -Tors.
- Der Raum \mathcal{F}_u besitzt die Dimension $n - 1$, d. h. dem Netzwerk lassen sich $n - 1$ unabhängige Spannungen aufprägen, und zwar durch Spannungsquellen in den Baumzweigen bzw. an den entsprechenden Toren des Verbindungs- b -Tors.

Das hier vorgestellte, auf einen Baum im Graphen gestützte, systematische Analyseverfahren wird Schleifenanalyse bzw. Schnittmengenanalyse genannt.

8.2.3 Knotenspannungsanalyse

Bei der Knotenspannungsanalyse wird die Wahl eines Baumes durch die Einführung zusätzlicher Variablen, der Knotenspannungen, ersetzt. Deswegen beschreiben die Gleichungen der Knotenspannungsanalyse nicht mehr einen Netzwerkgraph mit b Kanten bzw. ein Verbindungsmehrtor mit b Toren sondern ein $b + (n - 1)$ Tor. Die neuen $(n - 1)$ Tore bleiben unbeschaltet und dienen als Messtore für die Knotenspannungen. Der zugehörige Graph besitzt $(n - 1)$ zusätzliche Kanten zwischen dem Bezugsknoten und den übrigen $(n - 1)$ Knoten. Die Kno-

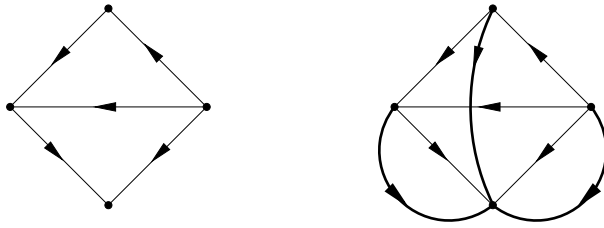


Bild 8.9 Erweiterter Netzwerkgraph für die Knotenspannungsanalyse

tensspannungsanalyse ist eine Schnittmengenanalyse bezüglich des „Sternbaumes“, der aus den zusätzlich eingeführten Kanten besteht. Mit der Zuordnung

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_b, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_v$$

lautet Gleichung Gl.(8.6):

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}^T & \mathbf{1}_b & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n-1} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{i}_k \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

\mathbf{A} ist die bekannte Knoteninzidenzmatrix (siehe Kapitel 2). Wegen der a-priori-Information $\mathbf{i}_k = \mathbf{0}$ (da die zusätzlichen Messtore leerlaufen) vereinfacht sich die Beschreibung des erweiterten Verbindungsmehrtors zu:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}^T & \mathbf{1}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad b + (n - 1) \quad \text{Gleichungen} \quad (8.7)$$

Die Freiheitsgrade bei der Knotenspannungsanalyse sind:

- Zweig - und Knotennummerierung
- Zählpfeilrichtungen
- Bezugsknotenfestlegung

Die Vorteile der Knotenspannungsanalyse sind:

- Das Aufstellen eines Baumes entfällt
- \mathbf{A} kann durch Augenschein („by inspection“) aufgestellt werden.

8.2.4 Maschenstromanalyse

Die *Maschenstromanalyse* ist ein zur Knotenspannungsanalyse duales Verfahren, das sich allerdings nur auf *planare Netzwerke* anwenden lässt. Ein Netzwerk heißt planar, wenn es möglich ist seinen Graphen in der Ebene überkreuzungsfrei zu zeichnen. Die s elementaren Schleifen des planaren Graphen heißen Maschen. Die zugehörigen *Maschengleichungen* sind linear unabhängig und können „by inspection“ aufgestellt werden. Genauso wie bei der Knotenspannungsanalyse werden zusätzliche Variablen, die Maschenströme \mathbf{i}_m eingeführt. Die Maschenströme sind zum Teil fiktive Ströme, die sich nicht unmittelbar messen lassen. Ein Kantenstrom ergibt sich als Summe der anliegenden Maschenströme. Dabei wird ein Maschenstrom negativ gezählt, falls Masche und Kante unterschiedliche Orientierung haben. Das folgende Beispiel zeigt, dass das zugehörige Gleichungssystem die duale Struktur zu den Gleichungen der Knotenspannungsanalyse hat.

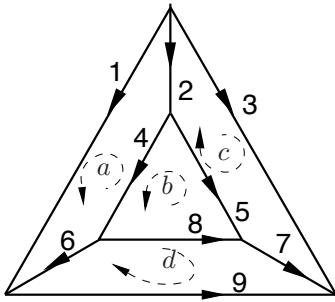


Bild 8.10 Planarer Graph mit Maschen

Beispiel: (Bild 8.10)

KVL des planaren Netzwerkgraphen:

$$\begin{array}{l} \text{a} \\ \text{b} \\ \text{c} \\ \text{d} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & & & & & \\ & & & 1 & -1 & & 1 & & \\ & -1 & 1 & -1 & -1 & & & & \\ & & & & -1 & 1 & 1 & -1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =: \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = 0$$

KCL des planaren Netzwerkgraphen:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ -1 & -1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ -1 & 1 & & & & & & & \\ & -1 & -1 & & & & & & \\ -1 & & & -1 & & & & & \\ & & & -1 & 1 & & & & \\ & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & & & -1 & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{ma} \\ i_{mb} \\ i_{mc} \\ i_{md} \end{bmatrix} =: \mathbf{i} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{i}_m$$

Die beschreibenden Matrizen der beiden Gleichungssysteme für KVL und KCL sind offensichtlich gerade wieder durch die Transposition miteinander verknüpft. Zusammengefasst ergibt sich also:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_b & -\mathbf{B}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \\ \mathbf{i}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad b + s \text{ Gleichungen} \quad (8.8)$$

Anmerkung: Ein zunächst nicht planares Netzwerk lässt sich durch Einführung von idealen Übertragern mit $\ddot{u}=1$ so modifizieren, dass die Zweigspannungen und -ströme unverändert bleiben, der zugehörige Netzwerkgraph aber planar ist (siehe Bild 8.11). Damit ist auch jedes zunächst nicht planare Netzwerk der Maschenstromanalyse zugänglich. Die Anzahl der Kanten des Graphen (und damit die Anzahl der Schleifengleichungen) wird allerdings um zwei Kanten pro idealem Übertrager erhöht.

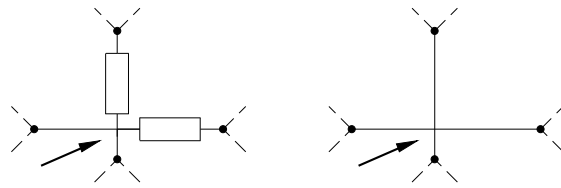


Bild 8.11 Ausschnitt eines nicht planaren Netzwerks und zugehöriger nichtplanarer Graph

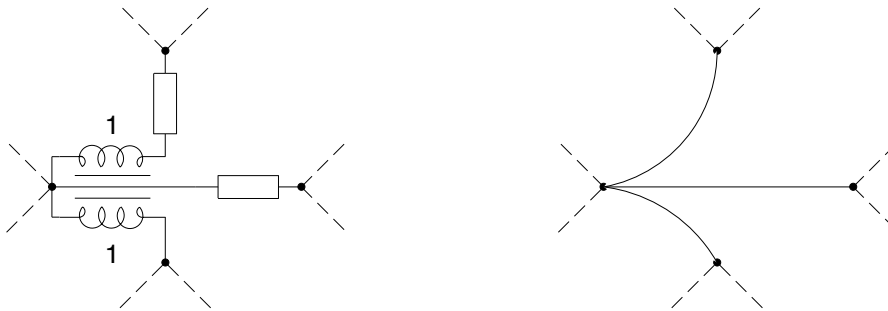


Bild 8.12 Modifiziertes Netzwerk mit unveränderten Zweigströmen und -spannungen und zugehöriger planarer Graph

8.3 Tableaugleichungen

Zur vollständigen Analyse eines elektrischen Netzwerks müssen die Gleichungen der Verbindungsstruktur um die Spezifikation der Subsysteme ergänzt werden. Als Subsysteme kommen beliebige, zeitinvariante, nichtlineare und dynamische Ein- oder Mehrforen in Frage. Der gesuchte Spannungs- und Stromvektor ergibt sich als Schnittpunkt der „Kennlinie“ der Subsysteme mit dem Betriebsraum des Verbindungsmehrtors. Für das praktische Aufstellen und Lösen des zugehörigen Gleichungssystems ist es sinnvoll, zwischen linearen und nichtlinearen Netzwerken zu unterscheiden.

8.3.1 Lineare Netzwerkelemente

Bei linearen, resistiven Netzwerkelementen lassen sich sämtliche konstituierenden Gleichungen zusammenfassen in der Form:

$$\begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} = e$$

Alle unabhängigen Quellen sind dabei im Erregungsvektor e vereinigt. Besteht das Netzwerk nur aus Zweipolen, so sind M und N Diagonalmatrizen, bei Mehrforen Blockdiagonalmatrizen entsprechender Blockgröße. Im zeitvarianten Fall können M , N oder e und somit auch u und i von der Zeit abhängen.

Die Kombination der konstituierenden Gleichungen mit der Beschreibung des Verbindungsnetzwerks heißt *Tableau-Gleichungssystem*:

$$\boxed{\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{bmatrix}} \quad 2b \text{ Gleichungen} \quad (8.9)$$

Beispiel: (Bilder 8.13 -8.15)

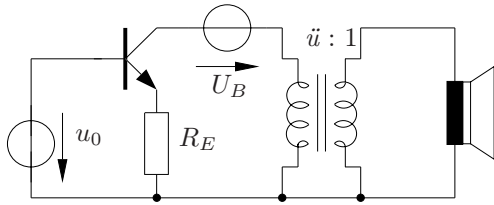


Bild 8.13 Einfacher Verstärker

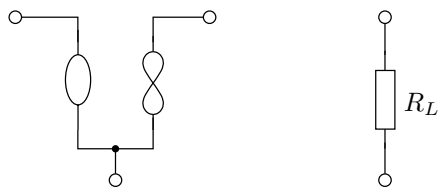


Bild 8.14 Transistormodell und Lautsprechermodell

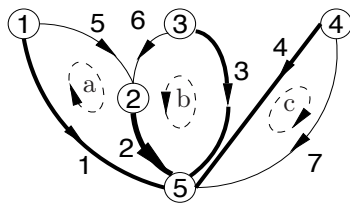


Bild 8.15 Netzwerkgraph der Kleinsignalersatzschaltung mit Baum (fett)

Tableugleichungen:

KVL: a	-1	1	0	0	1	0	0	u_1	=	u_0				
KVL: b	0	1	-1	0	0	1	0				u_2	0		
KVL: c	0	0	0	-1	0	0	1				u_3	0		
KCL: ①					1	0	0	0	1	0	0	u_4	0	
KCL: ②					0	1	0	0	-1	-1	0	u_5	0	
KCL: ③					0	0	1	0	0	1	0	u_6	0	
KCL: ④					0	0	0	1	0	0	1	u_7	0	
Spannungsquelle	1				0							i_1	=	u_0
R_E		1					$-R_E$					i_2	0	
Übertrager			1	$-\ddot{u}$			0	0				i_3	0	
			0	0			\ddot{u}	1				i_4	0	
idealer Transistor					1	0			0	0		i_5	0	
					0	0			1	0		i_6	0	
Lautsprecher									$-R_L$			i_7	0	

Bezieht man bei der Analyse des Verbindungsmehrtors die Knotenspannungen bzw. Maschenströme mit ein, so erhält man das *Knoten-* bzw. *Maschentableausystem*:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\mathbf{A}^T & \mathbf{1}_b & \mathbf{0} & \mathbf{u}_k \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{N} & \mathbf{i} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e} \end{array} \right] \quad \begin{array}{c} b \\ n-1 \\ b \end{array} \quad (8.10)$$

$\frac{\quad}{2b + (n-1)} \text{ Gleichungen}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_b & -\mathbf{B}^T & \mathbf{i} \\ \mathbf{M} & \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{i}_m \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e} \end{array} \right] \quad \begin{array}{c} 1 \\ b \\ b \end{array} \quad (8.11)$$

$\frac{\quad}{2b + s} \text{ Gleichungen}$

Das Tableaugleichungssystem besitzt genau dann eine eindeutige Lösung zum Zeitpunkt t_0 , wenn die Determinante der Tableaumatrix $\mathbf{T}(t)$ zum Zeitpunkt t_0 nicht verschwindet:

$$\det \mathbf{T}(t_0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{eindeutige Lösung} \quad (8.12)$$

Die Tableauanalyse ist ohne Einschränkungen anwendbar. Sie ist für eine rechnergestützte Analyse gut geeignet, wenn numerische Lösungsverfahren zur Lösung von Gleichungssystemen verwendet werden, die die schwache Besetzungsstruktur von \mathbf{T} ausnutzen.

8.3.2 Nichtlineare Netzwerkelemente

Ist ein Netzwerk mit nichtlinearen und zeitvarianten Netzwerkelementen beschaltet, so lassen sich die konstituierenden Gleichungen bekanntlich in die implizite Form

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{i}, t) = \mathbf{0} \quad (8.13)$$

bringen. Zusammen mit der Beschreibung des Verbindungsnetzwerks ergibt sich ein *nichtlineares Tableaugleichungssystem*:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{array} \right] \begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{array} = \mathbf{0} \quad p \text{ Gleichungen in } 2p \text{ Variablen}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{i}, t) = \mathbf{0} \quad p \text{ Gleichungen in } 2p \text{ Variablen (und der Zeit)}$$

8.4 Newton-Raphson-Algorithmus

Falls ein resistives Netzwerk geeignet modelliert wurde, so hat das zugehörige Gleichungssystem entweder genau eine oder endlich viele verschiedene Lösungen. Keine oder unendlich viele Lösungen sind das Ergebnis ungeeigneter Modellierung. Bei linearen Netzwerken existiert prinzipiell eine analytische Lösung. Für allgemein nichtlineare Netzwerke gibt es hingegen nur numerische Methoden.

Ein mögliches, iteratives Lösungsverfahren ist der *Newton-Raphson-Algorithmus (NRA)*. Dieser Algorithmus ist ein Nullstellen-Suchverfahren, oder treffender ein Nullstellen-Verbesserungs-Verfahren, dessen Verhalten sich im Eindimensionalen gut veranschaulichen lässt. Ausgehend von einem Startwert $x^{(0)}$, dem ersten Schätzwert für eine Nullstelle von $f(x)$,

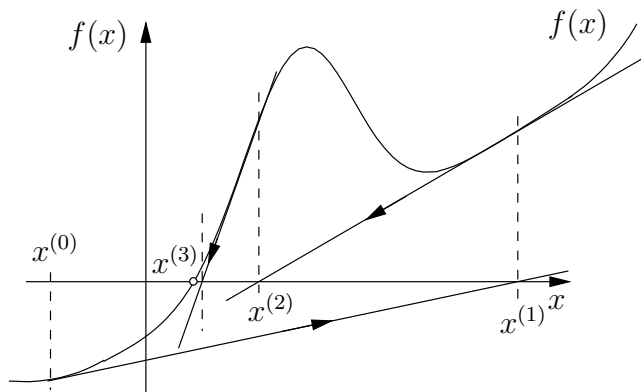


Bild 8.16 Funktionsweise des Newton-Raphson-Algorithmus

konstruiert man die Tangente an den Graphen von $f(x)$ im Punkt $(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$. Der Abszissenwert $x^{(1)}$ am Schnittpunkt der Tangente mit der x -Achse ist im allgemeinen ein verbesserter Schätzwert für eine Nullstelle von $f(x)$. Dieses Verfahren wird iterativ solange wiederholt, bis die gesuchte Nullstelle mit ausreichender Genauigkeit bestimmt ist. Allerdings sollte man kritisch gegenüber den numerischen Ergebnissen eines Analyseprogramms sein, das so oder ähnlich arbeitet. Außer möglichen Rundungsfehlern treten nämlich einige prinzipielle Probleme auf.

- Die Wahl des Startwertes ist sehr kritisch:
 - Der NRA kann bei gegebenem Startwert nur eine Nullstelle von mehreren finden
 - Bei ungünstiger Wahl des Startwertes konvergiert das Verfahren nicht.

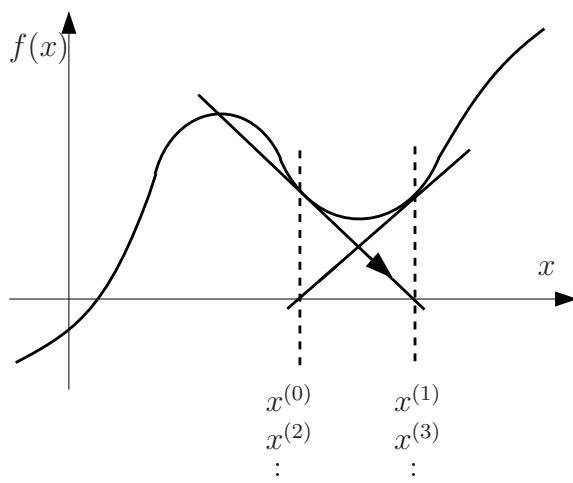


Bild 8.17 Ungünstige Wahl des Startwertes

- Verschwindet die Steigung von $f(x)$ an der Nullstelle, so konvergiert das Verfahren sehr schlecht.

Die Tangente $t(x)$ im Punkt $(x^{(j)})$, $f(x^{(j)})$ lässt sich als lineares Glied einer *Taylorentwicklung* von $f(x)$ im Punkt $x^{(j)}$ interpretieren:

$$f(x) = f(x^{(j)}) + f'(x^{(j)}) \cdot (x - x^{(j)}) + \frac{1}{2} \cdot f''(x^{(j)}) \cdot (x - x^{(j)})^2 + \dots$$

$$t(x) = f(x^{(j)}) + f'(x^{(j)}) \cdot (x - x^{(j)})$$

Diese Linearisierung kann man auch ins Mehrdimensionale (Zahl der Variablen am Beispiel der nichtlinearen Tableaugleichungen) übertragen:

$$\boxed{t(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(j)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(j)}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j)})} \quad (8.14)$$

wobei gilt:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(j)} = \begin{bmatrix} x_1^{(j)} \\ x_2^{(j)} \\ \vdots \\ x_{2p}^{(j)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_{2p}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(j)}) = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{2p}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{2p}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{2p}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{2p}}{\partial x_{2p}} \end{array} \right] \Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(j)}}$$

\mathbf{J} heißt *Jacobi- oder Funktionalmatrix*. Der „Schnittpunkt der Tangente mit der Abszisse“ ($t(\mathbf{x}) = 0$) ist wieder ein verbesserter Schätzwert ($j + 1$) für die Nullstellen von $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(j)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(j)}) \cdot (\mathbf{x}^{(j+1)} - \mathbf{x}^{(j)})$$

Daraus leitet sich die Iterationsformel

$$\mathbf{x}^{(j+1)} = \mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^{(j)}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(j)})$$

ab. Die zuvor erwähnten Probleme verschärfen sich im Mehrdimensionalen leider drastisch.

Bei der Analyse nichtlinearer Netzwerke identifiziert man $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit dem nichtlinearen Tableau

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_p(\mathbf{x}) \\ \hline f_{p+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_{2p}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{i} \\ \hline \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{i}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Nachdem die ersten p Gleichungen dieses Systems (die Kirchhoff-Gleichungen) bereits linear sind, gehen sie bei der Linearisierung in sich selbst über. Dasselbe gilt natürlich auch für die Elementgleichungen linearer Netzwerkelemente.

Bei realen nichtlinearen Netzwerken sind nur wenige der $(2p)^2$ partiellen Ableitungen der Jacobimatrix von Null verschieden. Liegt z.B. in den Kanten 1 und 2 eines Netzwerks je ein spannungsgesteuertes und ein stromgesteuertes nichtlineares Zweipol-Element

$$f_{p+1}(\mathbf{u}, \mathbf{i}) : -g_1(u_1) + i_1 = 0$$

$$f_{p+2}(\mathbf{u}, \mathbf{i}) : u_2 - r_2(i_2) = 0$$

so sind nur die Funktionen f_{p+1} und f_{p+2} nichtlinear und hängen auch nur von den Variablen u_1 , i_1 bzw. u_2 , i_2 ab. Die interessanten Einträge des linearisierten Gleichungssystems lauten also (in der Form von Gleichung (8.14)):

Zeile $p + 1$:

$$t_{p+1} = (-g_1(u_1^{(j)}) + i_1^{(j)}) + \begin{bmatrix} -G_1^{(j)} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 - u_1^{(j)} \\ i_1 - i_1^{(j)} \end{bmatrix}$$

Zeile $p + 2$:

$$t_{p+2} = (u_2^{(j)} - r_2(i_2^{(j)})) + \begin{bmatrix} 1 & -R_2^{(j)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 - u_2^{(j)} \\ i_2 - i_2^{(j)} \end{bmatrix}$$

wobei gilt:

$$G_1^{(j)} = \left. \frac{\partial g_1(u_1)}{\partial u_1} \right|_{u_1=u_1^{(j)}}, \quad R_2^{(j)} = \left. \frac{\partial r_2(i_2)}{\partial i_2} \right|_{i_2=i_2^{(j)}}$$

Die Terme $i_1^{(j)}$ bzw. $u_2^{(j)}$ heben sich weg und am „Schnittpunkt mit der Abszisse“ ($t_{p+1} = t_{p+2} = 0$) geht (u_1, u_2, i_1, i_2) in $(u_1^{j+1}, u_2^{j+1}, i_1^{j+1}, i_2^{j+1})$ über. Somit folgt:

$$i_1^{(j+1)} = G_1^{(j)} \cdot u_1^{(j+1)} + \left(g_1(u_1^{(j)}) - G_1^{(j)} \cdot u_1^{(j)} \right) \quad (8.15)$$

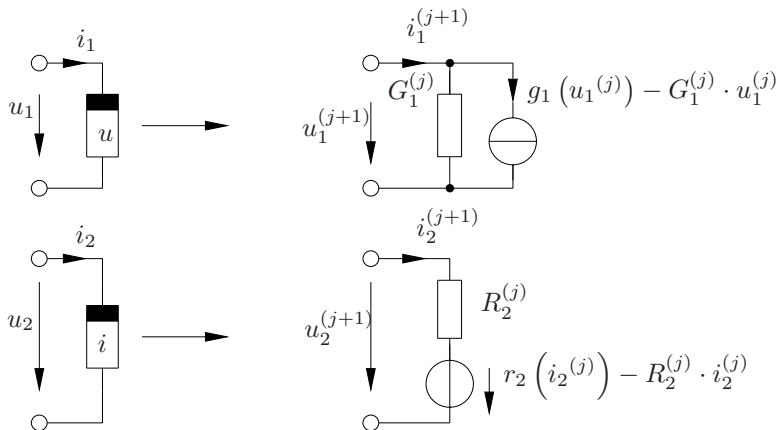
$$u_2^{(j+1)} = R_2^{(j)} \cdot i_2^{(j+1)} + \left(r_2(i_2^{(j)}) - R_2^{(j)} \cdot i_2^{(j)} \right) \quad (8.16)$$

Diese beiden Gleichungen besitzen je ein schaltungstechnisches Äquivalent. Dabei sind Strom und Spannung der verbesserten Lösung ($j + 1$) die Klemmengrößen.

Der Newton-Raphson-Algorithmus lässt sich also durch wiederholte Betriebspunktsuche in einem linearen Netzwerk mit konstanter Topologie veranschaulichen. Nichtlineare Netzwerkelemente sind dabei durch ihre affine Linearisierung, deren Parameter sich von Iterationsschritt zu Iterationsschritt ändert, zu ersetzen.

8.5 Reduzierte Knotenspannungsanalyse/Maschenstromanalyse

Für eine formelmäßige Netzwerkanalyse ist es günstig, die große Zahl von Gleichungen und Unbekannten des Tableausystems durch einfache Substitutionen zu reduzieren. Enthält das

Bild 8.18 Linearisierte Ersatzschaltung im Iterationsschritt j

Netzwerk nur spannungsgesteuerte Elemente (also auch insbesondere keine Spannungsquellen), so gelingt diese Reduktion im Rahmen der Knotenspannungsanalyse. Dazu geht man folgendermaßen vor:

- Stromquellen und Paralleleitwerte zu je einer Kante bzw. zu einer Beschaltung des Verbindungsmehrtors zusammenfassen.
- Aufstellen des Knotenspannungstableausystems (siehe Gleichung (8.9)).

$$\begin{bmatrix} -A^T & \mathbf{1}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

- Auflösen der dritten Zeile nach \mathbf{i} :

$$\mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{N}\mathbf{i} = \mathbf{e} \Rightarrow \mathbf{i} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{e} =: \mathbf{Y}\mathbf{u} + \mathbf{i}_0$$

\mathbf{Y} heißt *Kantenleitwertmatrix*, \mathbf{i}_0 *Kanten-Stromquellenvektor*.

- Elimination von \mathbf{u} mit Hilfe der ersten Zeile:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}_k \Rightarrow \mathbf{i} = \mathbf{Y} \mathbf{A}^T \mathbf{u}_k + \mathbf{i}_0$$

- Einsetzen in die zweite Zeile:

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T \mathbf{u}_k = -\mathbf{A}\mathbf{i}_0 =: \boxed{\mathbf{Y}_k \mathbf{u}_k = \mathbf{i}_q} \quad (8.17)$$

Die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix \mathbf{Y}_k heißt *Knotenleitwertmatrix*, \mathbf{i}_q *Knoten-Stromquellenvektor* oder kurz *Quellenvektor*. Die Matrix \mathbf{N} ist nur invertierbar, falls sämtliche Elemente spannungsgesteuert sind.

Beispiel: (Bild 8.19):

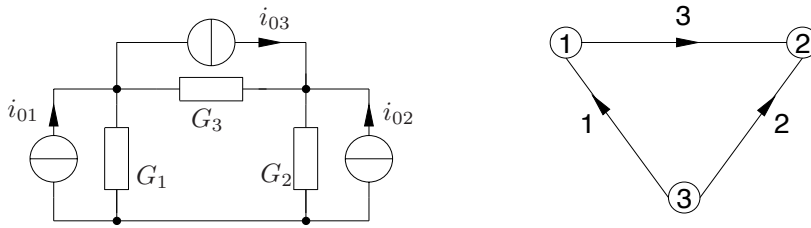


Bild 8.19 Spannungsgesteuerte Elemente und vereinfachter Netzwerkgraph

Knotenspannungstableau (Knoten 3 als Bezugsknoten):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & 0 & -1 & -1 \\ & -G_1 & & 1 & & \\ & & -G_2 & & 1 & \\ & & & -G_3 & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{k1} \\ u_{k2} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ i_{01} \\ i_{02} \\ i_{03} \end{bmatrix}$$

Kantenleitwertmatrix und Kantenstromquellenvektor:

$$\mathbf{Y} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} G_1 & & \\ & G_2 & \\ & & G_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_0 = \begin{bmatrix} i_{01} \\ i_{02} \\ i_{03} \end{bmatrix}$$

Knotenleitwertmatrix:

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix}$$

Knoten-Stromquellenvektor:

$$\mathbf{i}_q = -\mathbf{A}\mathbf{i}_0 = \begin{bmatrix} i_{01} - i_{03} \\ i_{02} + i_{03} \end{bmatrix}$$

Enthält ein planares Netzwerk nur stromgesteuerte Elemente, so lässt sich auf analoge Weise eine $s \times s$ Maschenwiderstandsmatrix und ein Maschen-Spannungsquellenvektor aus den Maschentableaugleichungen Gl. (8.11) herleiten:

$$\mathbf{Z}_m = \mathbf{B}(-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{B}^T, \quad -\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{e} = -\mathbf{B}\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_q$$

und es gilt:

$$\boxed{\mathbf{Z}_m \mathbf{i}_m = \mathbf{u}_q} \quad (8.18)$$

8.5.1 Nichtlineare Netzwerkelemente

Sind sämtliche Netzwerkelemente eines nichtlinearen Netzwerks spannungsgesteuert, so kann man den Stromvektor \mathbf{i} als (nichtlineare) Funktion des Spannungsvektors \mathbf{u} darstellen:

$$\mathbf{i} = \mathbf{g}(\mathbf{u})$$

Diese Funktion ersetzt die Kantenleitwertsbeziehung $i = Y u$. Somit erhält man als reduzierte Knotenspannungs-Analysegleichungen für Netzwerke mit spannungsgesteuerten, nichtlinearen Elementen:

$$\boxed{A \cdot g(A^T u_k) = i_q} \quad (8.19)$$

Auf dieses Gleichungssystem lässt sich der Newton-Raphson-Algorithmus anwenden.

8.6 Direktes Aufstellen der Knotenleitwertmatrix

Die Knotenleitwertmatrix und der Knoten-Stromquellenvektor, die im vorangegangenen Abschnitt aus der Kantenleitwertmatrix und dem Kanten-Stromquellenvektor

$$Y_k = A Y A^T \quad \text{und} \quad i_q = -A i_0$$

berechnet wurden, lassen sich auch unmittelbar aufstellen.

Eine Beschreibung der Form,

$$Y_k u_k = i_q$$

deren Lösung die gewünschten Knotenspannungen liefert, existiert immer dann, wenn das Netzwerk nur lineare spannungsgesteuerte Elemente, d.h. ohmsche Leitwerte, unabhängige Stromquellen und Mehrpole (bzw. Mehrpole), für die ihrerseits eine Leitwertmatrix existiert, enthält. Das heißt jeder Zweig (Kante) des Netzwerkes besteht im allgemeinen aus der Parallelschaltung einer unabhängigen Stromquelle (\rightarrow Kanten-Stromquellenvektor), eines ohmschen Leitwerts und einer Anzahl von gesteuerten Stromquellen (USI's), deren Steuerspannungen durch andere Zweige des Netzwerkes bestimmt sind.

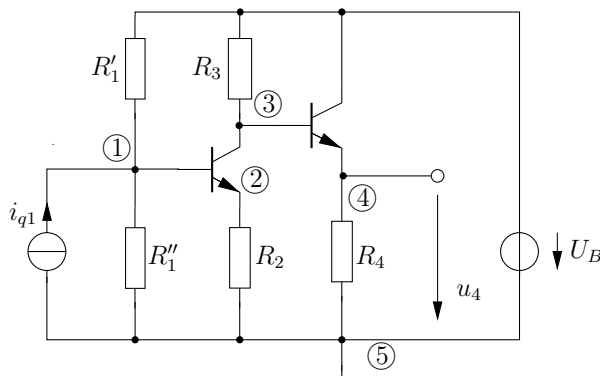


Bild 8.20 Zweistufiger Transistorverstärker

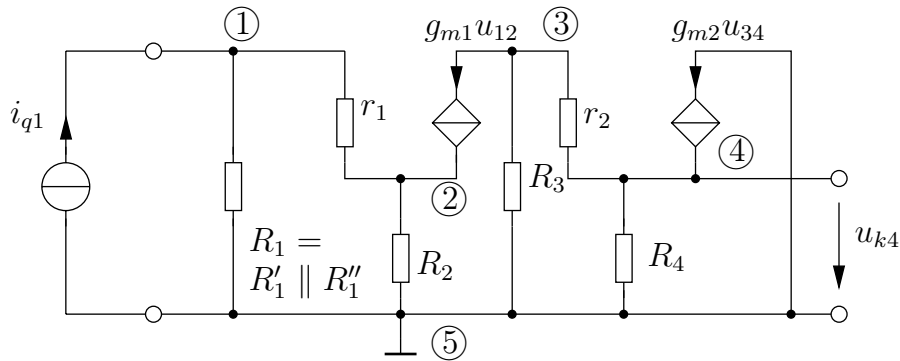


Bild 8.21 Linearisierte Kleinsignalersatzschaltung

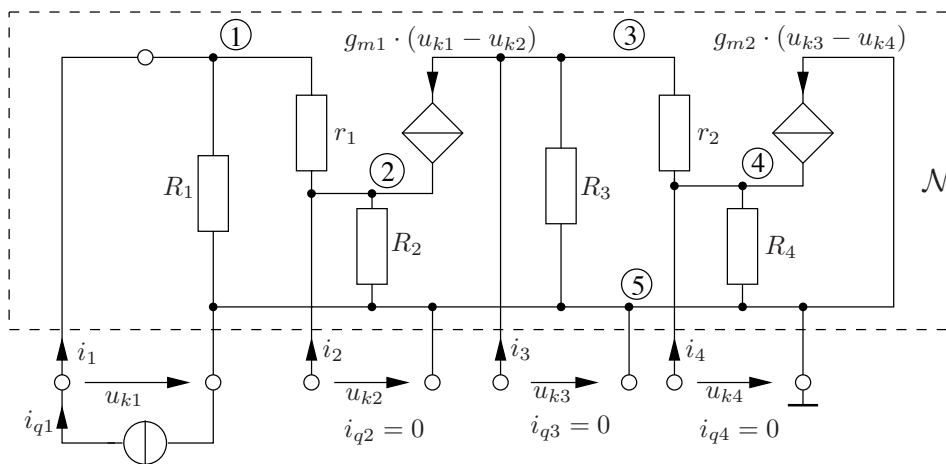


Bild 8.22 5-Knoten-Netzwerk als 4-Tor

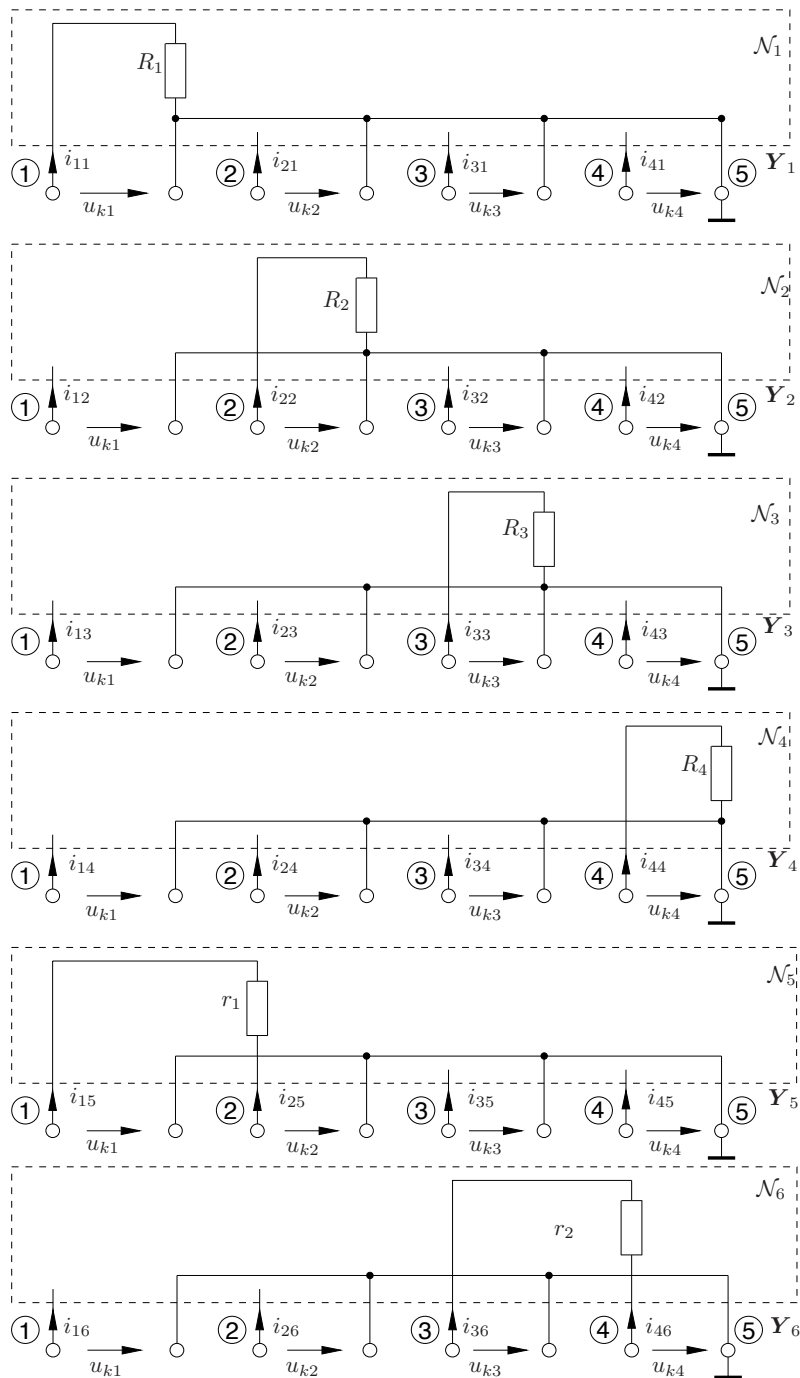
Damit lässt sich ein Netzwerk mit n Knoten durch Parallelschaltung von mehreren $(n - 1)$ -Toren darstellen, wobei jedes $(n - 1)$ -Tor nur ein einziges Netzwerkelement - einen Ohmschen Leitwert oder eine spannungsgesteuerte Stromquelle (USI) - enthält. Die unabhängigen Stromquellen werden als äußere Erregung des Netzwerks betrachtet. Die $(n - 1)$ -Tore aller dieser Teilnetzwerke haben jeweils eine Klemme für alle Tore gemeinsam: den auf Bezugspotential (Masse) liegenden Knoten n . Die Knotenleitwertmatrix \mathbf{Y}_k ist die Leitwertmatrix des Gesamt- $(n - 1)$ -Tors und damit die Summe der Leitwertmatrizen aller elementaren, jeweils nur ein Element enthaltenden $(n - 1)$ -Tore.

Beispiel: Bild 8.20.

Die Kleinsignalersatzschaltung des Transistorverstärkers enthält 5 Knoten. Durch das Anbringen von Klemmen an den Knoten erhält man ein 4-Tor (Bild 8.22).

Im folgenden wird dieses Netzwerk in 8 Teilnetzwerke $\mathcal{N}_1 \dots \mathcal{N}_8$ zerlegt, die jeweils nur einen Ohmschen Widerstand oder eine spannungsgesteuerte Stromquelle enthalten und durch die Leitwertmatrizen $\mathbf{Y}_1 \dots \mathbf{Y}_8$ beschrieben sind. Die Gesamtschaltung ist die Parallelschaltung der Teilnetzwerke. Die Knotenleitwertmatrix von \mathcal{N} ist also die Summe der Leitwertmatrizen der Teilnetzwerke (Bilder 8.23 und 8.24):

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_4 + \mathbf{Y}_5 + \mathbf{Y}_6 + \mathbf{Y}_7 + \mathbf{Y}_8.$$

Bild 8.23 Teilnetzwerke $\mathcal{N}_1 \dots \mathcal{N}_6$

Es muss nur das Aufstellen der Leitwertmatrix für zwei Typen von Teilnetzwerken untersucht werden:

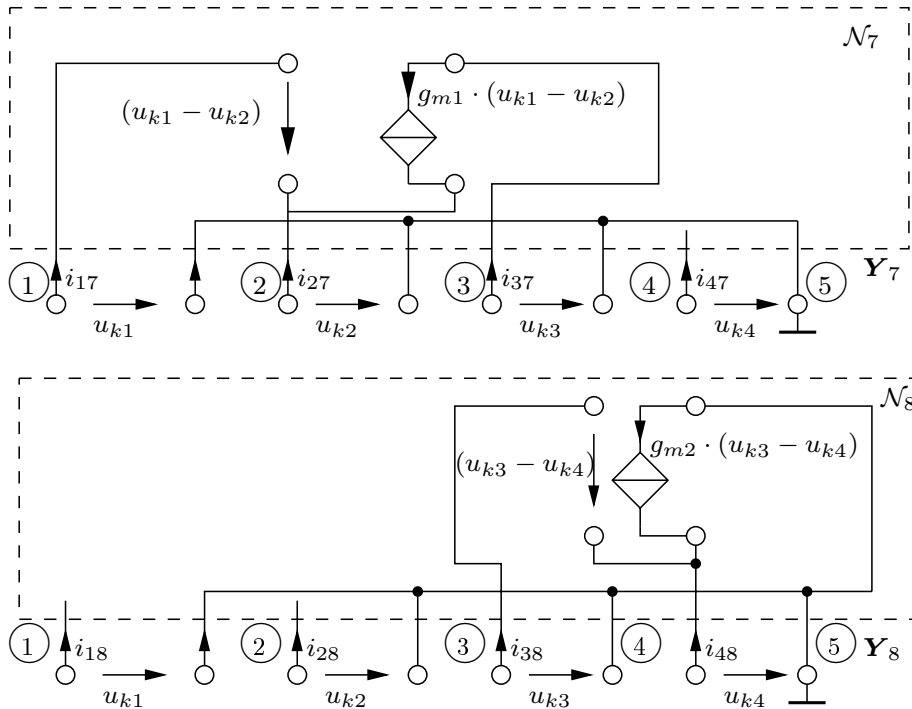


Bild 8.24 Teilnetzwerke $\mathcal{N}_1 \dots \mathcal{N}_8$, (Fortsetzung)

- a) das Teilnetzwerk \mathcal{N}_μ enthält einen einzigen ohmschen Leitwert G , und zwar zwischen Knoten α und β :

$$i_{\alpha\mu} = (u_{k\alpha} - u_{k\beta}) G = u_{k\alpha}G - u_{k\beta}G$$

$$i_{\beta\mu} = -(u_{k\alpha} - u_{k\beta}) G = -u_{k\alpha}G + u_{k\beta}G$$

$$Y_\mu = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \dots & G & \dots & \dots & -G & \dots \\ \vdots & \vdots \\ \dots & -G & \dots & \dots & G & \dots \\ \vdots & \vdots \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

Liegt einer der beiden Knoten auf Bezugspotential, so entfallen die entsprechenden Eintragungen.

- b) das Teilnetzwerk \mathcal{N}_ν enthält eine USI mit Steuerleitwert g_m , das Steuerungstor liegt zwischen Knoten γ und δ , das gesteuerte Tor zwischen α und β :

$$i_{\alpha\nu} = (u_{k\gamma} - u_{k\delta}) g_m = u_{k\gamma}g_m - u_{k\delta}g_m$$

$$i_{\beta\nu} = -(u_{k\gamma} - u_{k\delta}) g_m = -u_{k\gamma}g_m + u_{k\delta}g_m$$

$$\mathbf{Y}_\nu = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \cdots & g_m & \cdots & -g_m \\ \vdots & \vdots \\ \cdots & -g_m & \cdots & g_m \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

The diagram shows a circuit with four nodes: α , β , γ , and δ . A voltage source u is connected between nodes α and β . A current source $i = g_m u$ is connected between nodes γ and δ . The current source is represented by a diamond shape with an arrow pointing downwards.

Ist einer oder mehrere der 4 Knoten mit Bezugspotential identisch, so entfallen die entsprechenden Eintragungen.

Für die 8 Teilmatrizen des Beispiels folgt somit:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}_1 &= \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{Y}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{Y}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{Y}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{Y}_5 &= \begin{bmatrix} g_1 & -g_1 & 0 & 0 \\ -g_1 & g_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{Y}_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 & -g_2 \\ 0 & 0 & -g_2 & g_2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{Y}_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g_{m1} & g_{m1} & 0 & 0 \\ g_{m1} & -g_{m1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{Y}_8 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_{m2} & g_{m2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Knotenleitwertmatrix des Gesamtnetzwerks:

$$\mathbf{Y}_k = \sum_{i=1}^8 \mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} G_1 + g_1 & -g_1 & 0 & 0 \\ -g_1 - g_{m1} & G_2 + g_1 + g_{m1} & 0 & 0 \\ g_{m1} & -g_{m1} & G_3 + g_2 & -g_2 \\ 0 & 0 & -g_2 - g_{m2} & G_4 + g_2 + g_{m2} \end{bmatrix}$$

Natürlich ist es bei der praktischen Aufstellung von \mathbf{Y}_k nicht notwendig, alle Teilnetzwerke aufzuzeichnen und ihre zugehörigen Teilmatrizen aufzustellen. Man legt stattdessen eine Tabelle an, in die schrittweise die Einträge entsprechend den einzelnen Netzwerkelementen vorgenommen werden und erhält so die gesamte Knotenleitwertmatrix.

Die unabhängigen Kantenstromquellen werden im Knoten-Stromquellenvektor zusammengefasst. Jene Kantenstromquellen, die nicht mit Bezugspotential verbunden sind – also nicht von vornherein auch Knotenstromquellen sind – können leicht in zwei Knotenstromquellen umgewandelt werden:

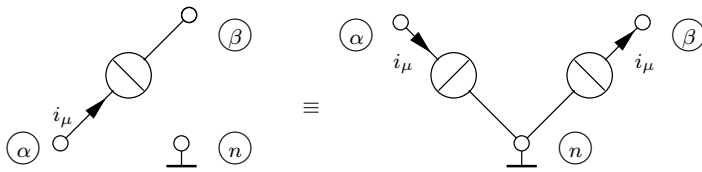


Bild 8.25 Wandlung von Kantenstromquellen in Knotenstromquellen

8.7 Nichtspannungsgesteuerte Elemente in der Knotenleitwertmatrix

Nicht spannungsgesteuerte Netzwerkelemente z.B. ideale Spannungsquellen, stromgesteuerte Spannungsquellen (ISU), ... können nicht unmittelbar in Y_k eingetragen werden. Dies stellt jedoch keine echte Einschränkung in der praktischen Anwendbarkeit der Knotenanalyse dar, da alle nichtspannungsgesteuerten linearen Elemente unter eventueller Hinzunahme von Gytratoren auf spannungsgesteuerte zurückgeführt werden können. Damit wird die Knotenanalyse auf alle linearen Schaltungen anwendbar, wenn man den Einbau von Nulloren gemäß Abschnitt 8.7.3 vorsieht.

8.7.1 Quellenumwandlung

Treten in dem zu analysierenden Netzwerk ideale Spannungsquellen (ungesteuert oder spannungsgesteuert (USU)) in Serie mit einem ohmschen Widerstand auf, so wird diese durch Quellenumwandlung in eine Stromquelle – die ja ein spannungsgesteuertes Netzwerkelement ist – gewandelt und damit der Knotenspannungsanalyse zugänglich. Der „innere“ Knoten η des

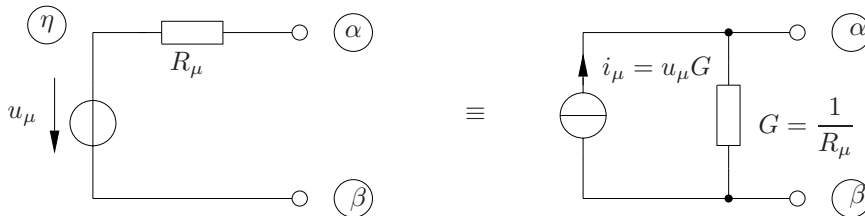


Bild 8.26 Quellenumwandlung

linken Quellenzweipols geht dabei natürlich verloren.

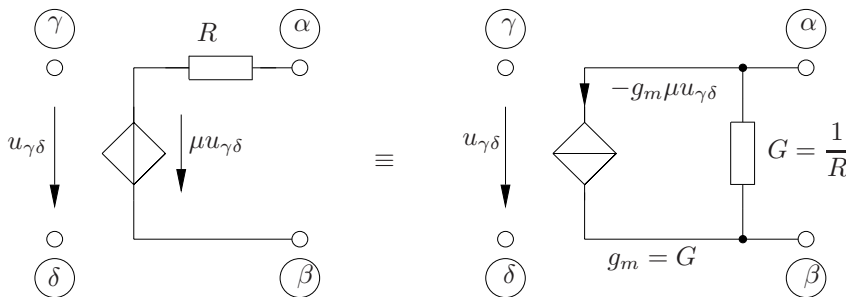


Bild 8.27 Quellenumwandlung

8.7.2 Dualwandlung

Jedes nicht spannungsgesteuerte Mehrtor kann in ein spannungsgesteuertes mit an den Toren vorgeschalteten Gyrotoren (Dualwandler) gewandelt werden. Das neue spannungsgesteuerte Mehrtor und die zusätzlichen Gyrotoren (zwei parallele USI) können dann in Y_k eingetragen werden.

Dies wird zunächst am Beispiel der drei gesteuerten Quellen, für die keine Leitwertbeschreibung existiert, gezeigt (Bilder 8.28 - 8.30).

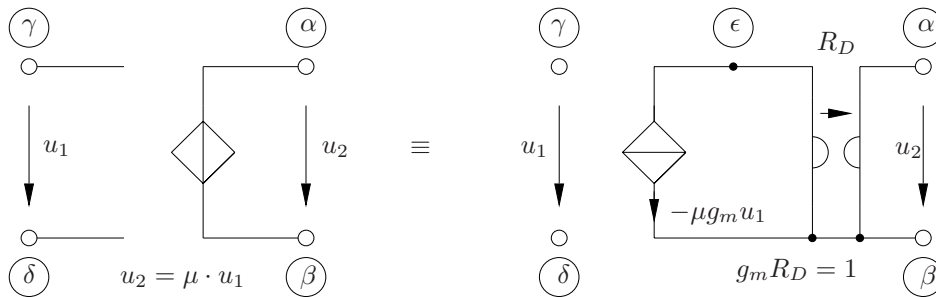


Bild 8.28 Dualwandlung gesteuerter Quellen

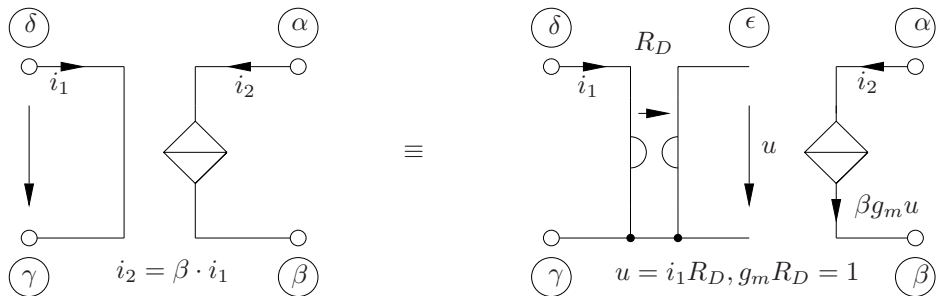


Bild 8.29 Dualwandlung gesteuerter Quellen

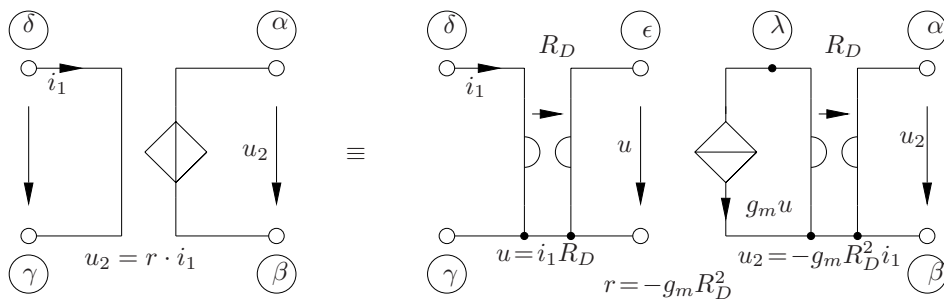


Bild 8.30 Dualwandlung gesteuerter Quellen

Der Gyrator selbst wird für die Knotenspannungsanalyse so dargestellt:

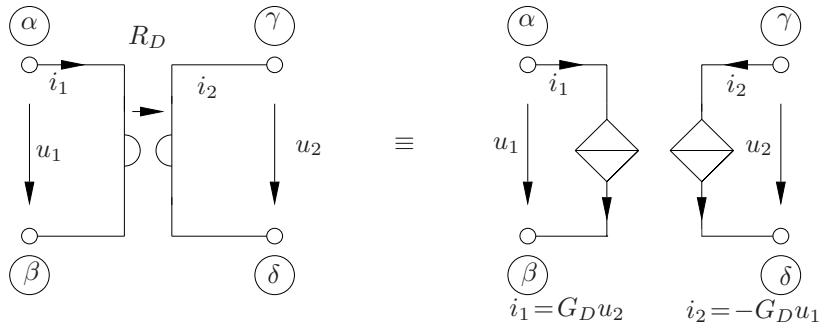


Bild 8.31 Gyratorersatzschaltbild für die Leitwertbeschreibung $G_D = \frac{1}{R_D}$

Der ideale Übertrager lässt sich ebenfalls mit Hilfe von Gyratoren darstellen:

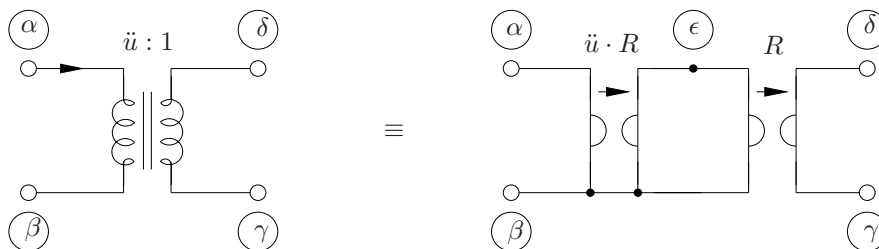


Bild 8.32 Übertragerersatzschaltbild für die reduzierte Knotenspannungsanalyse

Damit sind alle Netzwerkelemente, für die entweder eine Leitwerts-, Widerstands- oder Hybridbeschreibung existiert, durch Kombination spannungsgesteuerter Elemente darstellbar und damit der Knotenanalyse zugänglich.

8.7.3 Nulloreinbau

Es verbleibt die Berücksichtigung idealer Operationsverstärker, für die keine der vorgenannten Beschreibungsformen (Leitwerts-, Widerstands-, Hybrid-) existiert. Es zeigt sich jedoch, dass der Einbau von idealen Op-Amps in Y_k mit Hilfe der Nullator-Norator-Beschreibung besonders einfach ist.

Man stellt zunächst die Knotenleitwertmatrix Y'_k der Schaltung ohne Nullor, d. h. Nullator und Norator jeweils durch einen Leerlauf ersetzt, auf.

Diese \mathbf{Y}'_k -Matrix wird nun durch den Einbau von Nullatoren und Noratoren wie folgt modifiziert:

Nullator: Der Einbau eines Nullators zwischen den Knoten α und β erzwingt, dass beide Knoten die gleiche Knotenspannung haben, d. h.

$$u_{k\alpha} = u_{k\beta}$$

Im Gleichungssystem $\mathbf{Y}'_k \mathbf{u}_k = \mathbf{i}_q$ bedeutet dies für jede Gleichung:

$$y'_{11}u_{k1} + \cdots + \underbrace{y'_{1\alpha}u_{k\alpha} + y'_{1\beta}u_{k\beta}}_{(y'_{1\alpha} + y'_{1\beta})u_{k\alpha}} + \cdots = i_{q1}$$

eine Zusammenfassung $y_{i\alpha} = y'_{i\alpha} + y'_{i\beta}$, $i = 1 \cdots n - 1$ d.h. es werden die Spalten α und β von \mathbf{Y}'_k addiert und der Knotenspannungsvektor durch Streichen um $u_{k\beta}$ verkürzt. Diese Prozedur wird für alle Nullatoren der Schaltung schrittweise durchgeführt.

Norator: Der Norator zwischen Knoten γ und δ bewirkt, dass die beiden für γ und δ getrennt geltenden Kirchhoffschen Knotengleichungen zu einer Superknotengleichung für γ und δ gemeinsam zusammengefasst werden.

$$\begin{aligned} y'_{\gamma 1}u_{k1} + \cdots + y'_{\gamma n-1}u_{kn-1} &= i_{q\gamma} - i' \\ y'_{\delta 1}u_{k1} + \cdots + y'_{\delta n-1}u_{kn-1} &= i_{q\delta} + i' \\ (y'_{\gamma 1} + y'_{\delta 1})u_{k1} + \cdots + (y'_{\gamma n-1} + y'_{\delta n-1})u_{kn-1} &= i_{q\gamma} + i_{q\delta} \end{aligned}$$

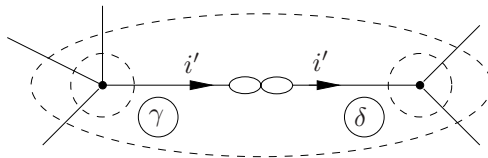


Bild 8.33 Superknoten um eine Norator-Kante

Das heißt, es werden die Zeilen γ und δ von \mathbf{Y}'_k addiert und der Knoten-Stromquellenvektor wird durch Zusammenfassen von $i_{q\gamma} + i_{q\delta}$ verkürzt. Diese Prozedur wird für alle Noratoren der Schaltung schrittweise durchgeführt.

Bei realen Op-Amp-Schaltungen ist der Norator meist einseitig ($\textcircled{\delta}$) mit Bezugspotential verbunden. Die Prozedur des Noratoreinbaus vereinfacht sich damit zu einem einfachen Weglassen der Zeile γ (die Zeile γ wird zur linear abhängigen Zeile n des Bezugsknoten addiert). Für jeden Nullator verringert sich die Spaltenzahl der zunächst quadratischen \mathbf{Y}'_k -Matrix, für jeden Norator die Zeilenzahl. Nur bei gleicher Anzahl von Nullatoren und Noratoren, d.h. bei paarweisem Einbau (Nullor), kann das verbleibende Gleichungssystem eindeutig lösbar sein.

Beispiel: (Bild 8.34)

Gesucht $\frac{i_3}{u_1} = ?$, $\frac{u_{k3}}{u_1} = ?$

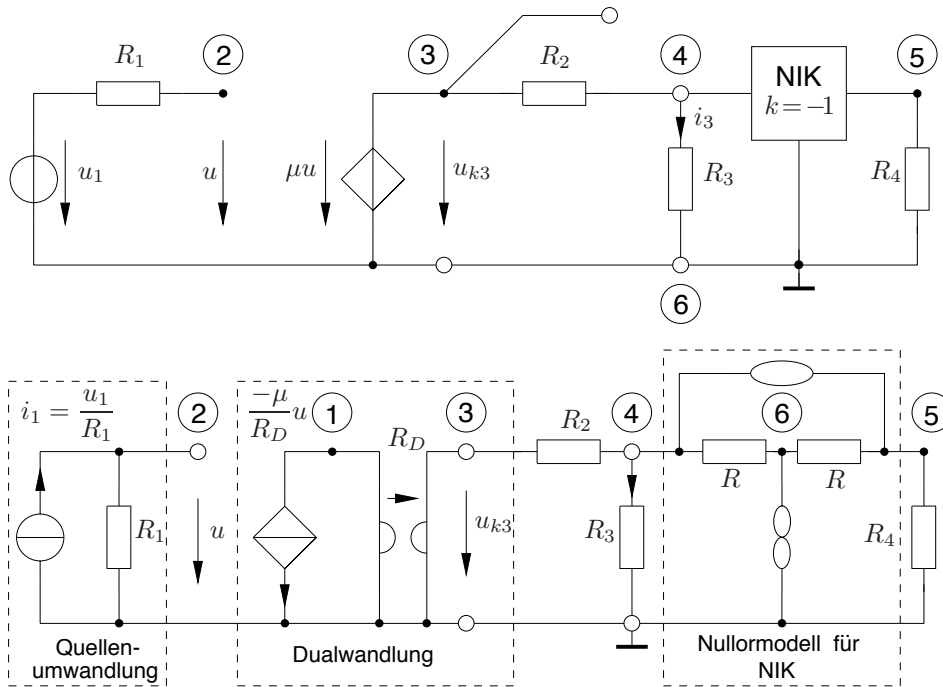


Bild 8.34 Wandlung nicht spannungsgesteuerter Elemente

Die Leitwertmatrix und der Quellenvektor ohne Nullor lauten ($G_i = \frac{1}{R_i}$):

$$\mathbf{Y}'_k = \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \end{matrix} \begin{bmatrix} & & & & & & \\ & -\mu G_D & G_D & & & & \\ & G_1 & & & & & \\ -G_D & & G_2 & -G_2 & & & \\ & & -G_2 & G_2 + G_3 + G & & -G & \\ & & & & G + G_4 & -G & \\ & & & -G & -G & G + G & \end{bmatrix}, \mathbf{i}'_q = \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 G_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nach Addition von Spalten 4 und 5 (Nullator) und Weglassen von Zeile 6 (Norator gegen Masse) erhält man die Gleichungen der reduzierten Knotenspannungsanalyse:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4,5 & 6 \\
 \textcircled{1} & & -\mu G_D & G_D & & \\
 \textcircled{2} & & G_1 & & & \\
 \textcircled{3} & -G_D & & G_2 & -G_2 & \\
 \textcircled{4} & & & -G_2 & G_2 + G_3 + G & -G \\
 \textcircled{5} & & & & G + G_4 & -G
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 u_{k1} \\
 u_{k2} \\
 u_{k3} \\
 u_{k4,5} \\
 u_{k6}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 0 \\
 u_1 G_1 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array}$$

Das Verhältnis von u_{k3} und u_1 lässt sich unmittelbar aus den beiden ersten Gleichungen berechnen:

$$\frac{u_{k3}}{u_1} = \mu$$

Setzt man u_{k3} in die Differenz der beiden Gleichungen 4 und 5 ein, so ergibt sich für u_{k4} :

$$u_{k4} = \mu \cdot u_1 \cdot \frac{G_2}{G_2 + G_3 - G_4}.$$

Für das Verhältnis von i_3 und u_1 erhält man mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes ($i_3 = G_3 \cdot u_{k4}$) schließlich:

$$\frac{i_3}{u_1} = \frac{\mu \cdot G_2 \cdot G_3}{G_2 + G_3 - G_4}$$

9. Netzwerkeigenschaften

In Ergänzung zu den Ein- und Mehrforeigenschaften, die bereits in den Kapiteln 3, 4 und 5 vorgestellt wurden, behandelt dieser Abschnitt Prinzipien und Eigenschaften, die sich erst durch die Trennung der Verbindungsstruktur von den Subsystemen, durch die Tableaugleichungen und mit Hilfe des Tellegen'schen Satzes verstehen lassen.

9.1 Duales Netzwerk

Nach Kapitel 3 bzw. 4 werden beim Dualwandeln Ströme und Spannungen über die Umrechnungskonstante R_d vertauscht.

$$\begin{bmatrix} u^d \\ i^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & R_d \mathbf{1} \\ \frac{1}{R_d} \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix}$$

Diese Transformation führt bei der Beschreibung des dualen Verbindungsmehrtors zum Austausch der Matrizen A und B :

$$\begin{bmatrix} B^d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^d \\ i^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad B^d = A \quad \text{und} \quad A^d = B$$

Ein *duales*, ausschließlich galvanisch gekoppeltes *Netzwerk* existiert allerdings nur, wenn das ursprüngliche Netzwerk planar ist, sich also in einer Ebene überkreuzungsfrei darstellen lässt. Wie schon bei der Maschenstromanalyse Gl.(8.2.4) gezeigt, kann jedes nicht planare Netzwerk mit Hilfe von idealen Übertragern in eine äquivalente planare Schaltung überführt werden.

Für planare Netzwerke gibt es ein einfaches Konstruktionsverfahren zur Erzeugung des dualen Netzwerks. Dazu wandelt man Maschen in Knoten und Knoten in Maschen um. Serienschaltungen werden mit Parallelschaltungen vertauscht und die entsprechenden Netzwerkelemente gehen in die dualen Netzwerkelemente über. Bild 9.1¹ veranschaulicht, wie jede Masche des

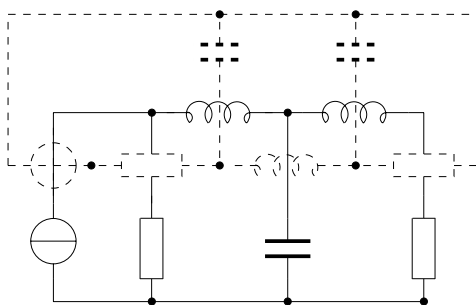


Bild 9.1 Dualwandlung eines planaren Netzwerks

ursprünglichen Netzwerkgraphen in einen Knoten des dualen Netzwerkgraphen übergeht. Dabei ist für die "äußere Masche" ebenfalls ein Knoten vorzusehen. Jedes Netzwerkelement der ursprünglichen Schaltung wird durch das duale Netzwerkelement gekreuzt.

9.1.1 Substitutionstheorem

Viele technische Probleme beschränken sich auf die Verschaltung von Ein- oder Mehrtoren, deren Innenstruktur unter Umständen recht kompliziert ist. Falls der Klemmenstrom oder die Klemmenspannung eines sonst beliebig nichtlinearen und zeitvarianten resistiven Netzwerkes bekannt ist, so lässt sich jedoch meist eine abstrahierte, einfache Ersatzschaltung angeben. Bild 9.2 zeigt ein Netzwerk \mathcal{N} , das in zwei Teile \mathcal{N}_1 und \mathcal{N}_2 zerfällt, die am Klemmenpaar ①, ①' miteinander verbunden sind. Die Schaltung sei zu allen Zeitpunkten eindeutig lösbar; insbesondere stellen sich der Strom $i(t)$ und die Spannung $u(t)$ ein.

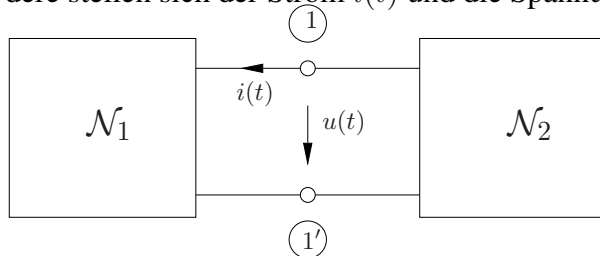


Bild 9.2 Zwei verbundene resistive Eintore

Ist \mathcal{N}_1 zu allen Zeitpunkten spannungsgesteuert, so lässt sich das Eintor \mathcal{N}_2 durch die (zeitvariante) Spannungsquelle $u(t)$ substituieren, ohne dass sich die Ströme und Spannungen in \mathcal{N}_1 ändern.

Entsprechendes gilt, falls \mathcal{N}_1 zu allen Zeiten stromgesteuert ist. Das Substitutionstheorem

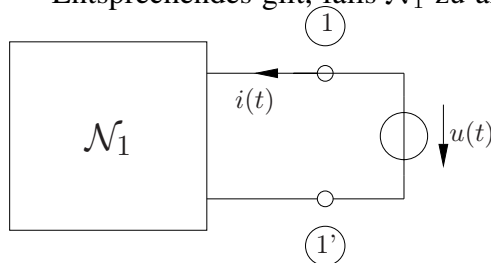


Bild 9.3 Substitution von \mathcal{N}_2 durch eine Spannungsquelle

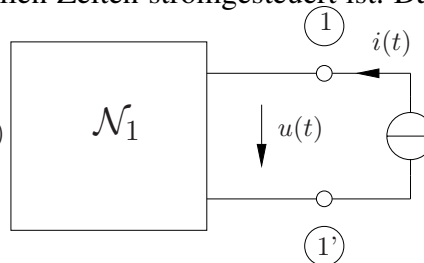


Bild 9.4 Substitution von \mathcal{N}_2 durch eine Stromquelle

lässt sich sinngemäß für Mehrtore erweitern.

Vorsicht, falls \mathcal{N}_1 z.B. nicht spannungsgesteuert ist, so kann das ursprünglich eindeutig lösbare Netzwerk durch Spannungsquellen-Substitution mehrere Lösungen bekommen. Bild 9.5 veranschaulicht dies an einem zeitinvarianten Beispiel.

9.1.2 Eigenschaften linearer Netzwerke

Scheinbar schwierige und unübersichtliche Probleme lassen sich bei linearen Netzwerken elegant vereinfachen und entkoppeln. Dieser Abschnitt stellt dazu zwei Methoden vor: das Su-

¹Kapazität und Induktivität sind dual zueinander

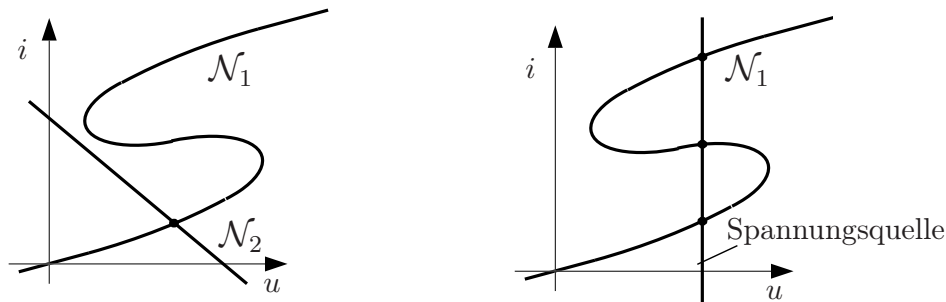


Bild 9.5 Mehrdeutige Lösung durch Spannungsquellen-Substitution

perpositionsprinzip und die Vereinfachung von an nur zwei Klemmen zugänglichen linearen Schaltungen durch *Zweipolersatzschaltungen*. Diese Prinzipien gelten auch im zeitvarianten Fall, wobei die Zeit t einfach die Rolle eines Parameters hat. Sie werden hier zur Vereinfachung allerdings nur für den zeitinvarianten Fall formuliert.

9.1.2.1 Superpositionsprinzip

In einem linearen, eindeutig lösbaren Netzwerk setzt sich jede Spannung und jeder Strom aus der Summe der Reaktionen auf die einzelnen unabhängigen Quellen zusammen.

Beweis: Aus der Tableauanalyse folgt die Beziehung:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \\ M & N \end{bmatrix}}_T \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{bmatrix}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Netzwerkkanten so nummeriert, dass der Quellenvektor e folgende Form annimmt:

$$e^T = [0, \dots, 0, u_{01}, \dots, u_{0\alpha}, i_{01}, \dots, i_{0\beta}] =: [\mathbf{0}^T \mathbf{u}_0^T \mathbf{i}_0^T]$$

Das Netzwerk hat nach Voraussetzung eine eindeutige Lösung. Die Inverse der Tableaumatrix T existiert damit und sei partitioniert in:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \overset{2p-\alpha-\beta}{\leftarrow} & \overset{\alpha}{\leftarrow} & \overset{\beta}{\leftarrow} \\ \dots & \mathbf{G} & \mathbf{Z} \\ \dots & \mathbf{Y} & \mathbf{H} \end{bmatrix}.$$

Die Lösung lautet somit:

$$\begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{i}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{i}_0 \end{bmatrix}$$

Für die gesuchten Ströme und Spannungen gilt also im Einzelnen:

$$u_i = \sum_{j=1}^{\alpha} g_{ij} \cdot u_{0j} + \sum_{j=1}^{\beta} z_{ij} \cdot i_{0j}$$

$$i_i = \sum_{j=1}^{\alpha} y_{ij} \cdot u_{0j} + \sum_{j=1}^{\beta} h_{ij} \cdot i_{0j} \quad \text{q.e.d.}$$

Um die Reaktion der gesuchten Größe auf eine einzelne Quelle zu berechnen, kann man ein vereinfachtes Schaltbild benutzen, bei dem alle übrigen unabhängigen Quellen durch die zugehörige Nullquelle zu ersetzen sind:

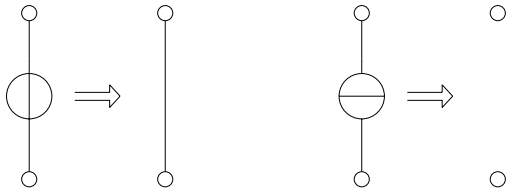


Bild 9.6 ESB nicht berücksichtigter Quellen beim Superpositionsprinzip

Beispiel:

Der Differenzverstärker in Bild 9.7 soll mit Hilfe des Superpositionsprinzips untersucht werden. Der Op-Amp arbeite in seinem linearen Bereich. Bild 9.8 zeigt die beiden Ersatz-

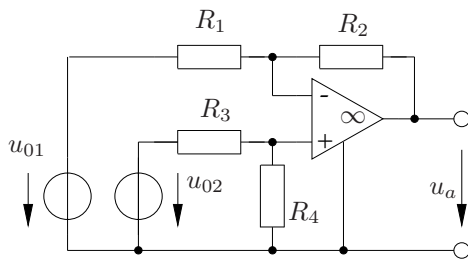


Bild 9.7 Differenzverstärker

schaltbilder, deren Teilantworten u_{a1} und u_{a2} sich zur Gesamtspannung u_a linear überlagern. Die erste Ersatzschaltung ist ein invertierender Verstärker mit der Übertragungsgleichung.

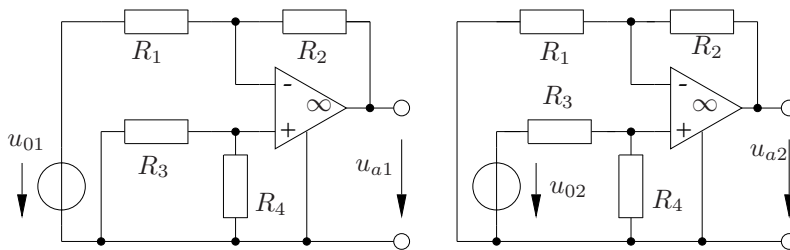


Bild 9.8 ESB's des Superpositionsprinzips

$$u_{a1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot u_{01}$$

Die zweite Ersatzschaltung ist von u_{02} aus „gesehen“ ein nicht invertierender Verstärker, wobei u_{02} noch durch den Spannungsteiler R_3, R_4 reduziert wird. Die Übertragungsgleichung lautet also:

$$u_{a2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \cdot u_{02}$$

Wegen der Linearität der Schaltung erhält man die Gesamtspannung durch simple Addition der Teilspannungen:

$$\begin{aligned} u_a &= u_{a1} + u_{a2} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot u_{01} + \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot u_{02} = \\ &= \frac{R_2}{R_1} \left[\frac{1 + \frac{R_1}{R_2}}{1 + \frac{R_3}{R_4}} \cdot u_{02} - u_{01} \right] \\ &= \frac{R_2}{R_1} [u_{02} - u_{01}] \quad \text{für} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \end{aligned}$$

9.1.2.2 Zweipolersatzschaltungen

Jede beliebige Schaltung aus linearen resistiven Netzwerkelementen, die nur über ein Klemmenpaar von außen zugänglich und intern eindeutig lösbar ist, verhält sich bezüglich dieses Klemmenpaares wieder linear und resistiv und lässt sich durch eines der beiden folgenden, einfachen Ersatzteintore substituieren. Dabei wird im Gegensatz zum Substitutionstheorem nicht die Kenntnis der Klemmengröße u bzw. i vorausgesetzt.

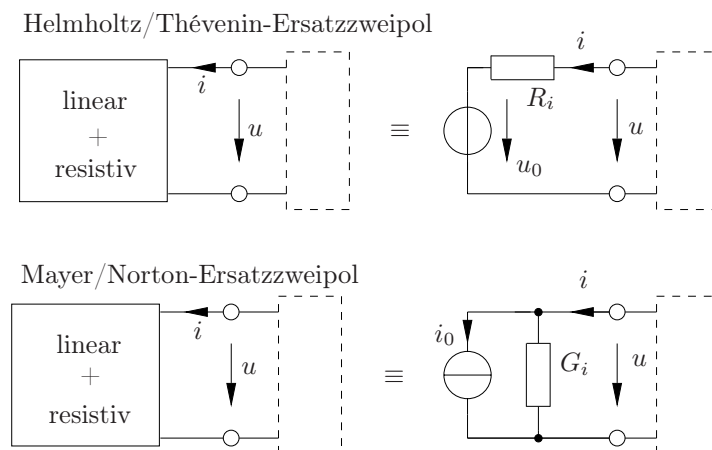


Bild 9.9 Zweipolersatzschaltungen

Beweis:

Aus der Tableaubeschreibung für das lineare resistive Netzwerk, bei der die konstituierende Gleichung für das von außen zugängliche Klemmenpaar fehlt, folgt:

$$\begin{bmatrix} b - n + 1 \\ n - 1 \\ b - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{M}' & \mathbf{N}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e}' \end{bmatrix}$$

Durch Umordnen der Variablen und Gleichungen und geeignetes Partitionieren bekommt dieses (unterbestimmte) System die Form:

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3^T \\ t_4 & t_5 & \mathbf{T}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \mathbf{i} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

wobei im Vektor x alle $2b - 2$ internen Variablen zusammengefasst sind. Die interne, eindeutige Lösbarkeit garantiert, dass \mathbf{T}_6 invertierbar ist. Nach Elimination aller internen Variablen erhält man:

$$\begin{bmatrix} m & n \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \mathbf{e}$$

mit

$$m = t_1 - \mathbf{t}_3^T \mathbf{T}_6^{-1} \mathbf{t}_4$$

$$n = t_2 - \mathbf{t}_3^T \mathbf{T}_6^{-1} \mathbf{t}_5$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{t}_3^T \mathbf{T}_6^{-1} \mathbf{e}_2$$

Diese Gleichung beschreibt eine affine Gerade in der u - i -Ebene, die eindeutig ein lineares, resistives Eintor charakterisiert. Für jede affine Gerade existiert mindestens eine der beiden Ersatzzweipole als physikalische Realisierung.

q.e.d.

Falls die Messschaltungen in Bild 9.11 eine eindeutige Lösung besitzen, so lassen sich damit die Parameter u_0 und R_i bzw. i_0 und G_i der jeweiligen Zweipolersatzschaltung bestimmen. R_i

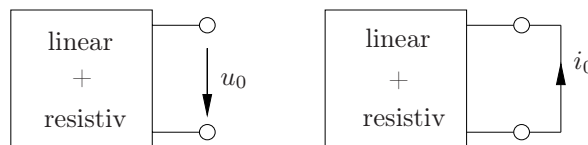


Bild 9.10 Messung der Leerlaufspannung bzw. des Kurzschlussstroms

bzw. G_i lässt sich auch aus den beiden vorausgegangenen Messungen berechnen zu

$$R_i = \frac{u_0}{i_0}, \quad G_i = \frac{i_0}{u_0}$$

Die zweite Möglichkeit zur Messung“ von R_i bzw. G_i besteht darin, sämtliche unabhängigen Quellen durch die zugehörigen Nullquellen zu ersetzen und das verbleibende streng lineare Eintor von außen zu erregen. Für alle nicht entarteten Zweipole mit $G_i \neq 0$ und $R_i \neq 0$ existiert sowohl der Helmholtz- als auch der Mayer-Ersatzzweipol.

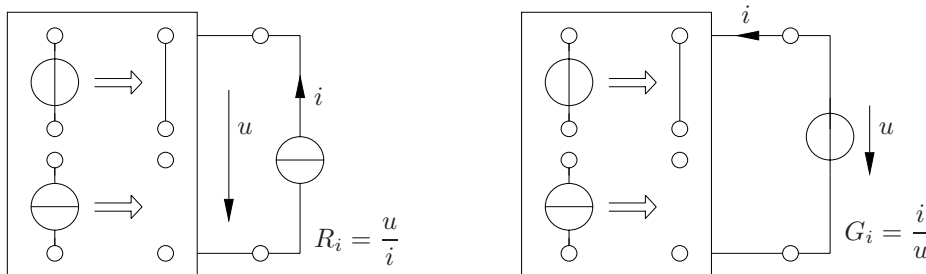


Bild 9.11 Messung des Innenwiderstands

Beispiel:

Bild 9.12 zeigt ein lineares, resistives Eintor, dessen Helmholtz-Ersatzschaltung zu ermitteln ist. Bei unbelasteten Klemmen ergibt sich folgende Leerlaufspannung:

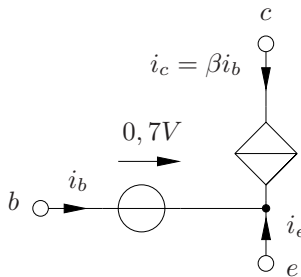


Bild 9.12 Lineares Transistor-Großsignal-ESB

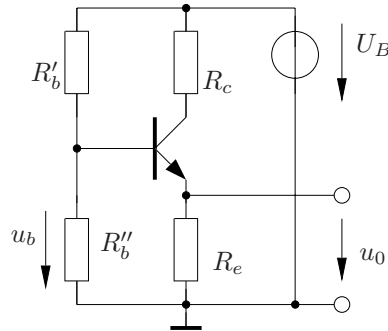


Bild 9.13 Lineares, resistives Eintor

$$u_0 = -i_e R_e = i_b (1 + \beta) R_e$$

Der Basisstrom i_b berechnet sich aus dem Basispotential u_b .

$$u_b = u_0 + 0,7 \text{ V}$$

zu

$$i_b = \frac{U_B - u_b}{R'_b} - \frac{u_b}{R''_b} = \frac{U_B - u_0 - 0,7 \text{ V}}{R'_b} - \frac{u_0 + 0,7 \text{ V}}{R''_b}$$

Damit folgt für u_0 :

$$u_0 = \frac{U_B - 0,7 \text{ V} \left(1 + \frac{R'_b}{R''_b}\right)}{1 + \frac{R'_b}{R''_b} + \frac{R'_b}{R_e(1 + \beta)}} \approx U_B \frac{R''_b}{R''_b + R'_b} - 0,7 \text{ V} \quad \text{für } \beta \gg \frac{R'_b}{R_e}$$

Zur Berechnung des Innenwiderstandes ist die Schaltung in Bild 9.14 zu analysieren; man beachte, dass die gesteuerte Quelle nicht durch eine Nullquelle ersetzt werden darf. Eine externe

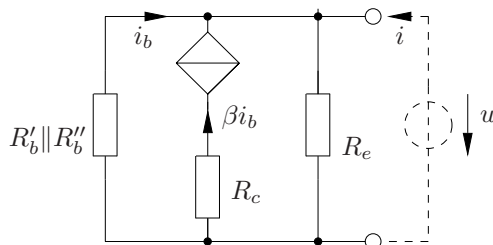


Bild 9.14 Messschaltung für den Innenwiderstand

Erregung u ruft den Strom

$$i = -i_b(1 + \beta) + \frac{u}{R_e} = \frac{u}{R''_b \parallel R'_b} (1 + \beta) + \frac{u}{R_e}$$

hervor. Der Innenwiderstand beträgt demnach:

$$R_i = R_e \parallel \frac{R_b'' \parallel R_b'}{1 + \beta}$$

Da das Emittential dem Basispotential nachfolgt, wird diese Schaltung oft als *Emitterfolger* bezeichnet. Der Innenwiderstand des Emitterfolgerausgangs ist für hohe Stromverstärkung β sehr klein. Der Kollektorwiderstand R_c (seriell zu einer Stromquelle) hat beim gegebenen Transistormodell keinerlei Auswirkung.

9.2 Passivität und inkrementale Passivität

Passivität wurde sowohl im Linearen wie im Nichtlinearen untersucht. Ein resistives Ein- oder Mehrtor heißt passiv, wenn die aufgenommene Leistung in jedem Betriebspunkt positiv oder null ist:

$$\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{i} \geq 0 \quad (\text{Beim Eintor sind die Größen } \mathbf{u} \text{ und } \mathbf{i} \text{ Skalare})$$

Die Passivität der Netzwerkelemente überträgt sich genauso wie die Linearität auf das gesamte Netzwerk.

Es gilt also: Ein Ein- oder Mehrtor, das sich im Inneren nur aus passiven Netzwerkelementen (Subsystemen) zusammensetzt, verhält sich selbst wieder passiv.

Beweis: Aus der Verlustlosigkeit des Verbindungsmehrtors folgt für dessen Ströme und

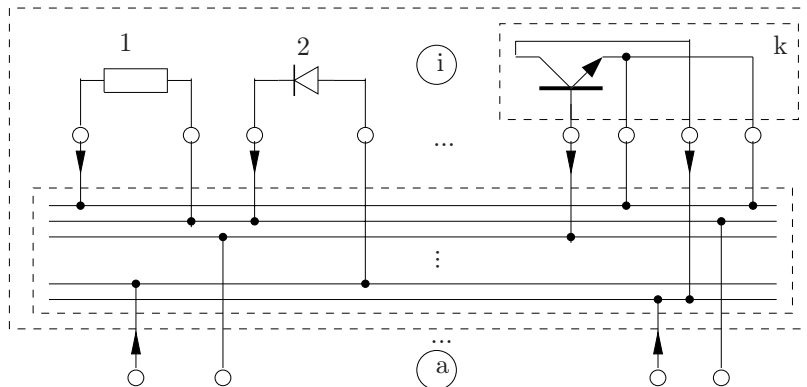


Bild 9.15 Mehrtor aus passiven Subsystemen

Spannungen:

$$\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{i} = 0$$

Zur Beschreibung des äußeren Klemmenverhaltens muss man die Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{i} in innere (i) und äußere (a) Signalgrößen partitionieren:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_a \\ \mathbf{i}_i \end{bmatrix}$$

Die Leistungsbilanz lautet somit:

$$\mathbf{u}_a^T \dot{\mathbf{i}}_a = -\mathbf{u}_i^T \dot{\mathbf{i}}_i$$

Das Skalarprodukt auf der rechten Seite setzt sich aus der Summe der Leistungsflüsse in die k Subsysteme zusammen. Das negative Vorzeichen wird dazu benutzt die unterschiedlichen Stromzählpfeilrichtungen für das Verbindungsmehrtor und die Subsysteme einander anzugleichen:

$$\mathbf{u}_a^T \dot{\mathbf{i}}_a = \sum_{j=1}^k \mathbf{u}_{ij}^T (-\dot{\mathbf{i}}_{ij})$$

\mathbf{u}_{ij} und $\dot{\mathbf{i}}_{ij}$ symbolisieren jeweils Spannung bzw. Strom am internen Netzwerkelement j . Dabei sind als Netzwerkelemente auch Mehrtore zulässig. Die Größen \mathbf{u}_{ij} bzw. $\dot{\mathbf{i}}_{ij}$ wurden deshalb allgemein vektoriell angenommen. Nach Voraussetzung sind sämtliche Subsysteme passiv und damit sämtliche Summanden $\mathbf{u}_{ij}^T (-\dot{\mathbf{i}}_{ij})$ nicht negativ. Daraus folgt:

$$\mathbf{u}_a^T \dot{\mathbf{i}}_a \geq 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Lineare und passive Ein- oder Mehrtore sind immer auch differentiell passiv, da eine Linearisierung (der Tangentialraum) an einem beliebigen Betriebspunkt immer mit dem Betriebsraum selbst zusammenfällt. Ganz anders sieht dies bei nichtlinearen Netzwerkelementen aus. Man muss daher für nichtlineare Ein- oder Mehrtore neben der Passivität zusätzlich die Begriffe der *inkrementalen Passivität* bzw. der *Monotonie* des Betriebsraumes einführen. Die Monotonie ist wichtig im Zusammenhang mit der Stabilität (siehe 2. Semester) und eindeutigen Lösbarkeit nichtlinearer Netzwerke.

Ein Ein- oder Mehrtor heißt *strikt inkremental passiv* bzw. der Betriebsraum *strikt monoton zunehmend*, wenn für zwei beliebige, voneinander verschiedene Betriebspunkte $\begin{bmatrix} \mathbf{u}' \\ \dot{\mathbf{i}}' \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} \mathbf{u}'' \\ \dot{\mathbf{i}}'' \end{bmatrix}$ gilt:

$$[\mathbf{u}' - \mathbf{u}'']^T [\dot{\mathbf{i}}' - \dot{\mathbf{i}}''] > 0 \quad (9.1)$$

Bild 9.16 zeigt die Kennlinie eines strikt inkremental passiven Zweipols. Gleichung 9.1 ist äquivalent mit der Forderung, die Sekante s habe positive Steigung. Vorsicht, ein strikt inkremental passives Netzwerkelement kann durchaus aktiv sein (siehe Bild 9.16) und umgekehrt kann ein passives Element inkremental aktiv sein (z.B. Tunnelodiode oder Transistor).

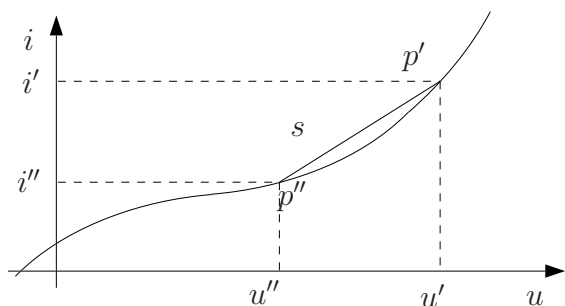


Bild 9.16 Strikt monoton zunehmende Kennlinie

Besteht ein resistives Mehrtor intern nur aus strikt inkremental passiven Netzwerkelementen, so verhält es sich an den äußeren Klemmen selbst wieder strikt inkremental passiv.

Beweis:

Die Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{i} sollen im folgenden die Betriebsgrößen am Verbindungsmehrtor gemäß Bild 9.15 symbolisieren. Die Lösungsräume \mathcal{F}_u und \mathcal{F}_i des Verbindungsmehrtors sind linear. Infolgedessen liegt auch die Differenz $\mathbf{u}' - \mathbf{u}''$ und $\mathbf{i}' - \mathbf{i}''$ zweier Betriebsvektoren wieder in \mathcal{F}_u bzw. \mathcal{F}_i . Aus dem Tellegenschen Satz folgt somit:

$$(\mathbf{u}' - \mathbf{u}'')^T (\mathbf{i}' - \mathbf{i}'') = 0$$

Durch Partitionierung der Signalvektoren in innere und äußere Signale:

$$\mathbf{u} =: \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} =: \begin{bmatrix} \mathbf{i}_a \\ \mathbf{i}_i \end{bmatrix}$$

erhält man

$$(\mathbf{u}'_a - \mathbf{u}''_a)^T (\mathbf{i}'_a - \mathbf{i}''_a) = -(\mathbf{u}'_i - \mathbf{u}''_i)^T (\mathbf{i}'_i - \mathbf{i}''_i)$$

Nach Aufgliederung der rechten Seite in die Summanden der k Subsysteme (Ein- oder Mehr-tore) ergibt sich schließlich: .

$$(\mathbf{u}'_a - \mathbf{u}''_a)^T (\mathbf{i}'_a - \mathbf{i}''_a) = \sum_{j=1}^k (\mathbf{u}'_{ij} - \mathbf{u}''_{ij})^T (-(\mathbf{i}'_{ij} - \mathbf{i}''_{ij}))$$

Nach Voraussetzung sind alle Netzwerkelemente (Subsysteme) strikt inkremental passiv. Somit sind sämtliche Summanden (unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Stromzählpfeile für das Verbindungsmehrtor und die Netzwerkelemente) positiv, woraus folgt:

$$(\mathbf{u}'_a - \mathbf{u}''_a)^T (\mathbf{i}'_a - \mathbf{i}''_a) \geq 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Strikt inkremental passive Netzwerke besitzen eine Eigenschaft, die sie wesentlich von anderen nichtlinearen Netzwerken unterscheidet:

Setzt sich ein Netzwerk nur aus strikt inkremental passiven Subsystemen zusammen, so ist diese Bedingung hinreichend dafür, dass die Betriebsgrößen des Netzwerks höchstens eine Lösung haben.

Beweis:

Man unterscheidet jetzt nicht mehr zwischen inneren und äußeren Toren des Verbindungsmehrtors. Alle Tore seien mit strikt inkremental passiven Netzwerkelementen (k Ein- oder Mehr-toren vektorielle Schreibweise auch für die Subsysteme) beschaltet. Man nimmt zunächst zwei verschiedene Lösungen $\begin{bmatrix} \mathbf{u}' \\ \mathbf{i}' \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} \mathbf{u}'' \\ \mathbf{i}'' \end{bmatrix}$ an.

Aufgrund des Tellegenschen Satzes muss das Skalarprodukt der Lösungsdifferenzen verschwinden:

$$[\mathbf{u}' - \mathbf{u}'']^T [\mathbf{i}' - \mathbf{i}''] = 0$$

Wegen der strikt inkrementalen Passivität der k Subsysteme gilt für sämtliche Summanden:

$$(\mathbf{u}'_j - \mathbf{u}''_j)^T (\mathbf{i}'_j - \mathbf{i}''_j) = 0$$

falls

$$(\mathbf{u}'_j - \mathbf{u}''_j) \neq 0 \wedge (\mathbf{i}'_j - \mathbf{i}''_j) \neq 0 \quad \text{für } 1 \leq j \leq k$$

$((\mathbf{u}'_j - \mathbf{u}''_j) \neq 0 \wedge (\mathbf{i}'_j - \mathbf{i}''_j) = 0) \vee ((\mathbf{u}'_j - \mathbf{u}''_j) = 0 \wedge (\mathbf{i}'_j - \mathbf{i}''_j) \neq 0)$ dürfen aufgrund der Definition der strikten Passivität nicht auftreten.

Nach Voraussetzung sind die beiden Lösungen verschieden, somit existiert mindestens ein Summand größer null. Dies ist ein Widerspruch zum Tellegenschen Satz; die beiden Lösungen können also nicht verschieden sein.

q.e.d.

Anmerkung: Unabhängige Quellen sind nicht strikt monoton. Ein sonst strikt monotones Netzwerk besitzt allerdings weiterhin eine eindeutige Lösung, wenn in keiner Schleife nur Spannungsquellen und in keiner Schnittmenge nur Stromquellen liegen. Diese Einschränkung ist bereits als Bedingung für eine eindeutige Lösung der Betriebsgrößen von linearen Schaltungen bekannt.

Vor der Eindeutigkeit wäre eigentlich erst die Frage nach der Existenz einer Lösung zu untersuchen. Nun stellt sich bei einer realen Schaltung allerdings immer ein Spannungs- und ein Stromvektor ein, wenn das Netzwerk nicht gerade in "Rauch" aufgeht. So gesehen stellt jede physikalische Schaltung die Existenz einer Lösung sicher. Durch Überidealisierung bei der Modellierung kann es allerdings passieren, dass das beschreibende Gleichungssystem keine Lösung besitzt. Die Konsequenz kann in einem solchen Fall nur sein, die Modellierung zu verfeinern. Ohne Beweis sei hier angemerkt, dass die Existenz einer Lösung auch mathematisch sichergestellt ist, wenn sich der Betriebsraum aller Netzwerkelemente stetig (nicht notwendigerweise monoton) von

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\infty \\ -\infty \end{bmatrix} \quad \text{bis} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\infty \\ +\infty \end{bmatrix}$$

erstreckt.

10. Logikschaltungen

Bei *Logikschaltungen* handelt es sich um ausgeprägt nichtlineare Schaltungen, die ausschließlich im Großsignalbetrieb benutzt werden. Häufig bezeichnet man sie auch als *Digitalschaltungen*, wobei sich der folgende Abschnitt allerdings auf die Verknüpfung *binärer Signale* beschränkt.

10.1 Binäre Signale und elementare Verknüpfungen

Binäre Signale sind Signale, die jeweils nur einen von zwei diskreten Werten annehmen können. In Logikschaltungen werden sie meist durch Spannungen (Signalspannungen) repräsentiert, wobei einer der beiden diskreten Zustände ungefähr der Spannung 0 V entspricht. Der zweite erlaubte Wert ist dann meist ungefähr gleich der Betriebsspannung (z.B. +5 V bei TTL (Transistor-Transistor-Logik)).

$$u_1 = \begin{cases} \approx 5 \text{ V} \\ \approx 0 \text{ V} \end{cases} \Rightarrow x_1 = \begin{cases} \text{„1“: wahr, richtig} \\ \text{„0“: nicht wahr, falsch} \end{cases}$$

Sind x_1, \dots, x_n die Eingangssignale einer logischen Schaltung, so erhält man die Ausgangssignale y_1, \dots, y_m durch die Verknüpfungsgleichungen

$$y_\mu = F_\mu(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mu = 1, \dots, m$$

Die Werte der Ausgangssignale lassen sich für jede Funktion F_μ durch eine *Wertetabelle* oder *Wahrheitstabelle* angeben, die sämtliche Kombinationsmöglichkeiten der Eingangssignale enthält.

Die Zuordnung der binären Signalvariablen mit ihren formalen Zuständen „1“ und „0“ erlaubt eine Abstraktion der Beschreibung durch die *Boolesche Algebra*, die von der aktuellen technologischen Realisierung und den elektrischen Repräsentationen der Signale unabhängig ist. Bei der praktischen Realisierung lässt sich ein relativ großer Signalspannungsbereich eindeutig einem binären Zustand zuordnen. Diese Eigenschaft macht logische Schaltungen sehr unempfindlich gegenüber Störungen.

Ein Übergang von „1“ nach „0“ bzw. umgekehrt wird in erster Näherung unverzögert ausgeführt; dies entspricht einer Modellierung als *resistive* logische Schaltung.

Übergang von kontinuierlichen zu binären Signalen:

$$u_\mu = \begin{cases} \approx 0 \text{ V} \\ \approx 5 \text{ V} \end{cases} \Rightarrow x_\mu = \begin{cases} \text{„0“} \\ \text{„1“} \end{cases} \quad \mu = 1, \dots, n \quad \text{„0“} \dots \text{logisch 0, unwahr}$$

$$u'_\mu = \begin{cases} \approx 0 \text{ V} \\ \approx 5 \text{ V} \end{cases} \Rightarrow y_\mu = \begin{cases} \text{„0“} \\ \text{„1“} \end{cases} \quad \mu = 1, \dots, m \quad \text{„1“} \dots \text{logisch 1, wahr}$$

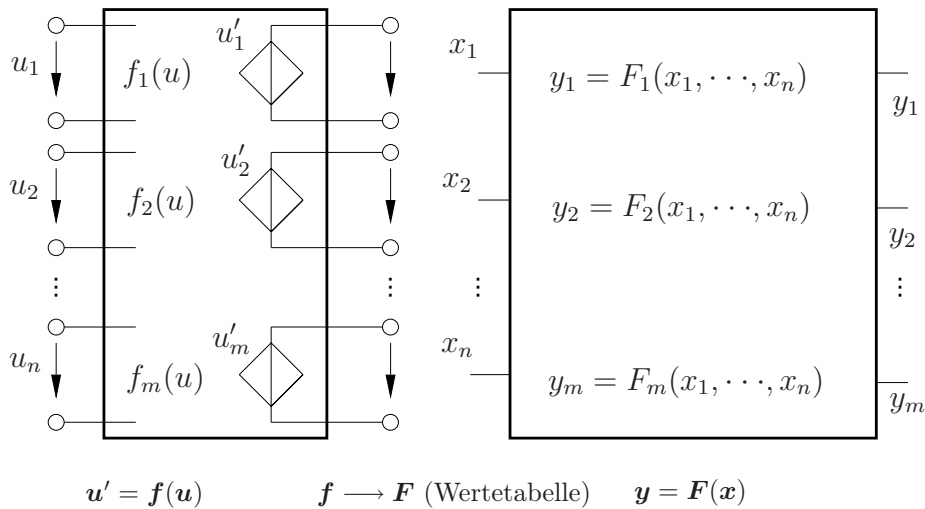


Bild 10.1 Abstrahiertes Modell resistiver logischer Schaltungen

Die *Grundverknüpfungen* bzw. die zugehörigen *Grundsaltungen* bilden maximal zwei binäre Eingangssignale auf ein Ausgangssignal ab. Es gibt drei elementare Verknüpfungen (elementare Grundsaltungen), mit deren Hilfe alle Verknüpfungsaufgaben gelöst werden können:

- die Negation (NICHT / NOT)
- die Konjunktion (UND / AND)
- die Disjunktion (ODER / OR)

Nach einer Definition dieser elementaren Verknüpfungen folgen praktisch wichtige Grundsaltungen, also Realisierungen dieser Verknüpfungen, in verschiedenen Technologien.

Die Tabelle 10.2 stellt ein (nicht normiertes) Gattersymbol, die algebraische Beschreibung sowie die Wertetabelle der elementaren Verknüpfungen mit maximal zwei Eingangsvariablen zusammen.

10.2 Boolesche Algebra

Das mathematische Hilfsmittel zur Beschreibung logischer Verknüpfungen der Form $y = F(x)$ ist die Boolesche Algebra. Dabei nehmen sowohl die unabhängigen Variablen x als auch die abhängigen Variablen y nur die Werte „0“ und „1“ an.

Tabelle 10.3 fasst die wichtigsten Rechenregeln für logische Verknüpfungen zusammen und gibt für die jeweiligen Ausdrücke eine schaltungstechnische Realisierung auf Schaltsymbolebene an. Es ist bemerkenswert, dass alle 16 möglichen Verknüpfungen zweier Eingangssignale x_1, x_2 zu einem Ausgangssignal (zwei mögliche Ausgangszustände für jede der $2^2 = 4$ Eingangskombinationen) ausschließlich mit

NEGATION (NICHT, NOT)	KONJUNKTION (UND, AND)	DISJUNKTION (ODER, OR)																												
$x \quad \neg \quad y$ $y = \bar{x}$ <table border="1"> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	0	1	1	0	$x_1 \quad \wedge \quad x_2 \quad y$ $y = x_1 \wedge x_2$ <table border="1"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	$x_1 \quad \vee \quad x_2 \quad y$ $y = x_1 \vee x_2$ <table border="1"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1																													
1	0																													
0	0	0																												
0	1	0																												
1	0	0																												
1	1	1																												
0	0	0																												
0	1	1																												
1	0	1																												
1	1	1																												
NAND		NOR																												
$x_1 \quad x_2 \quad y$ $y = \overline{(x_1 \wedge x_2)}$		$x_1 \quad x_2 \quad y$ $y = \overline{(x_1 \vee x_2)}$																												

Bild 10.2 Tabelle 1: Elementare Verknüpfungen

NAND-Gattern

oder mit

NOR-Gattern

realisiert werden können. Das Bild 10.4 zeigen jeweils ein Beispiel.

NAND- und/oder NOR-Gatter sind die meist realisierten Grundschaltungen in

- Bipolartechnologie (DTL, TTL, ECL)
- MOS-Technologie (CMOS)

10.3 Schaltungstechnische Realisierungen der Grundverknüpfungen

Im Verlauf der technischen Entwicklung hat sich eine Vielzahl unterschiedlicher Schaltungskonzepte zur Realisierung logischer Verknüpfungen herausgebildet. Diese Konzepte unterscheiden sich außer in der benutzten Halbleitertechnologie (Bipolar/MOS) in der Schaltgeschwindigkeit, dem Leistungsverbrauch (statisch und dynamisch) sowie im Signalpegel und den Ein- und Ausgangswiderständen.

Im folgenden werden Grundschaltungen für NAND, NOR oder NOT-Gatter der wichtigsten Logikfamilien vorgestellt.

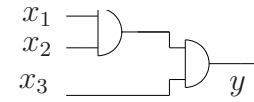
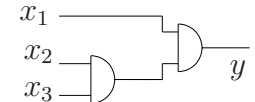
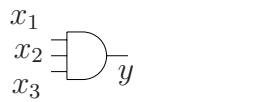
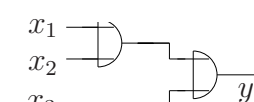
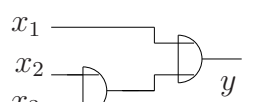
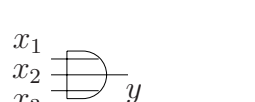
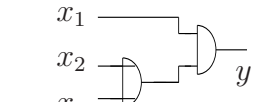
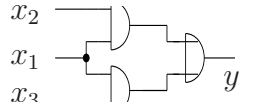
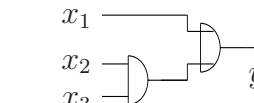
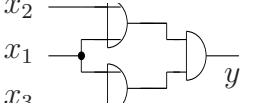

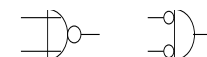
<p>Kommutativgesetz: $x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$ $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$</p>
<p>Assoziativgesetz: $(x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">    </div> <p>$(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3$</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">    </div>
<p>Distributivgesetz</p> <p>$x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">   </div> <p>$x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">   </div>
<p>Zweifache Negation: $\overline{\overline{x}} = x$</p>
<p>De Morgansche Gesetze:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> $\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$  </div> <div style="text-align: center;"> $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$  </div> </div>

Bild 10.3 Tabelle 2: Rechenregeln

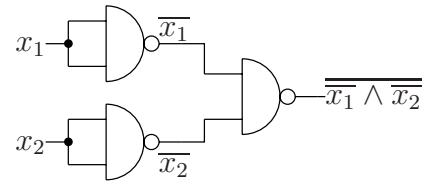
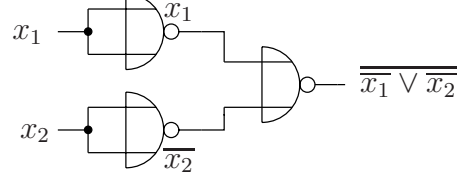


Bild 10.4 AND mit NOR ($x_1 \wedge x_2 = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}$) und OR mit NAND ($x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}}$)

10.3.1 NAND in DTL (Dioden-Transistor-Logik)

Die DTL-Logik wird heute in dieser Form kaum mehr verwendet; sie bietet aber einen guten Einblick für das Verständnis logischer Halbleiterschaltungen. Die beiden Dioden D_3 und D_4

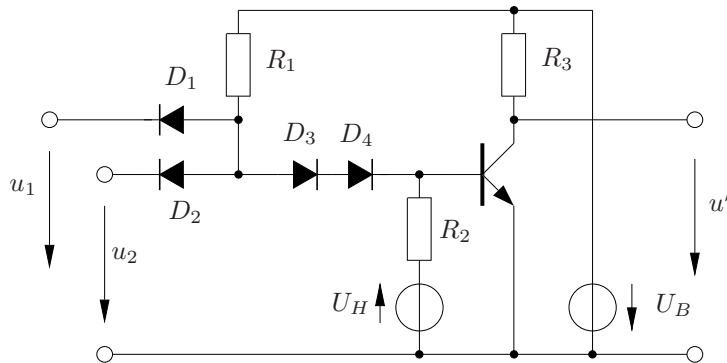


Bild 10.5 Ein NAND-Gatter in Dioden-Transistor-Logik

verschieben die Schaltschwelle des Transistors ungefähr zur halben Betriebsspannung. Durch die Hilfsspannungsquelle U_H verbessert sich das dynamische Verhalten der Schaltung. Für eine Analyse der resistiven Ersatzschaltung wird das stückweise lineare Diodenmodell mit 2 Ästen in Bild 10.5 benutzt.

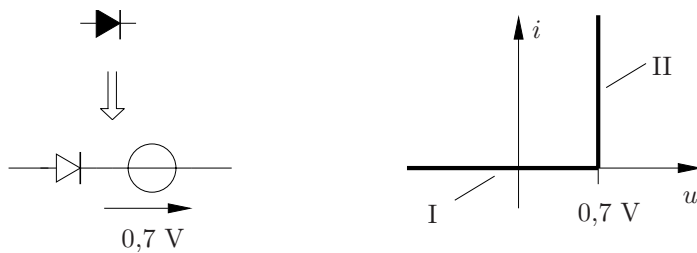


Bild 10.6 Modellierung der Dioden

Auch der Transistor wird durch ein stückweise lineares Modell ersetzt und der Basisstrom gegenüber dem Strom durch R_2 vernachlässigt. Mit diesen beiden Modellen und den Elementen-

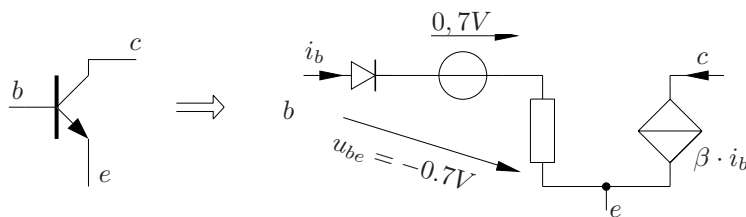


Bild 10.7 Modellierung des Transistors

tewerten

$$\begin{aligned}
 U_B &= 6 \text{ V} & R_1 &= 2,6 \text{ k}\Omega \\
 U_H &= 3 \text{ V} & R_2 &= 5 \text{ k}\Omega \\
 & & R_3 &= 2 \text{ k}\Omega
 \end{aligned}$$

erhält man für die vier möglichen Eingangskombinationen von u_1 und u_2 das folgende Analyseergebnis:

- a) Analysegleichungen ohne Transistor für $x_1 = „1“$ und $x_2 = „1“$:

D_1 gesperrt: Kennlinienast I : $i_{D1} = 0, u_{D1} < 0$

D_2 gesperrt: Kennlinienast I : $i_{D2} = 0, u_{D2} < 0$

D_3 leitend: Kennlinienast II : $u_{D3} = 0, i_{D3} > 0$

D_4 leitend: Kennlinienast II : $u_{D4} = 0, i_{D4} > 0$

$$IR_1 + 2U_D + IR_2 - U_H - U_B = 0 \Rightarrow I = \frac{U_B + U_H - 2U_D}{R_1 + R_2}$$

$$u_{be} = IR_2 - U_H; \quad I = \frac{6 + 3 - 1,4}{7600} = 1 \text{ mA}; \quad u_{be} = 2 \text{ V}$$

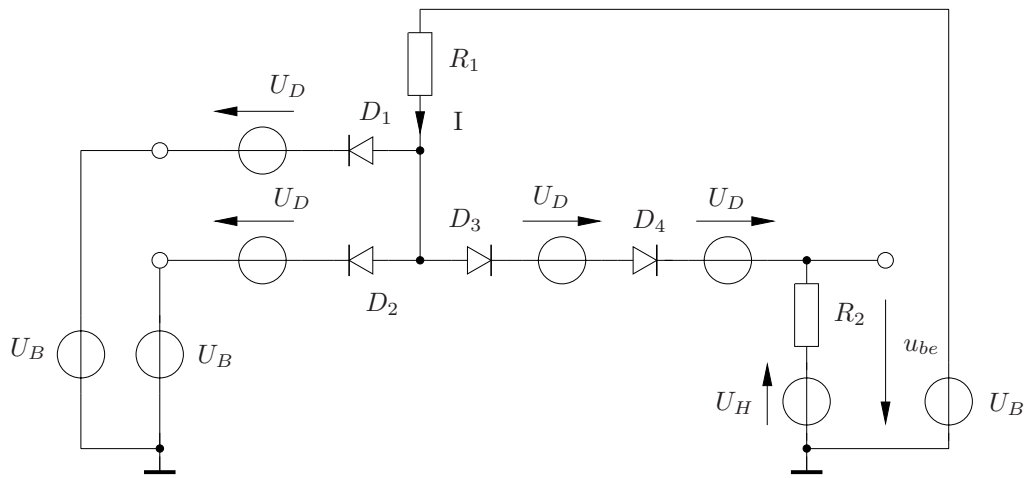


Bild 10.8 Ersatzschaltbild des DTL-Eingangskreises für $x_1 = „1“$ und $x_2 = „1“$

Transistor:

$$u_{be} > 0,7 \text{ V} \quad i_b \gg 0 \quad \Rightarrow \quad i_c \gg 0 \quad u_{ce} \approx 0$$

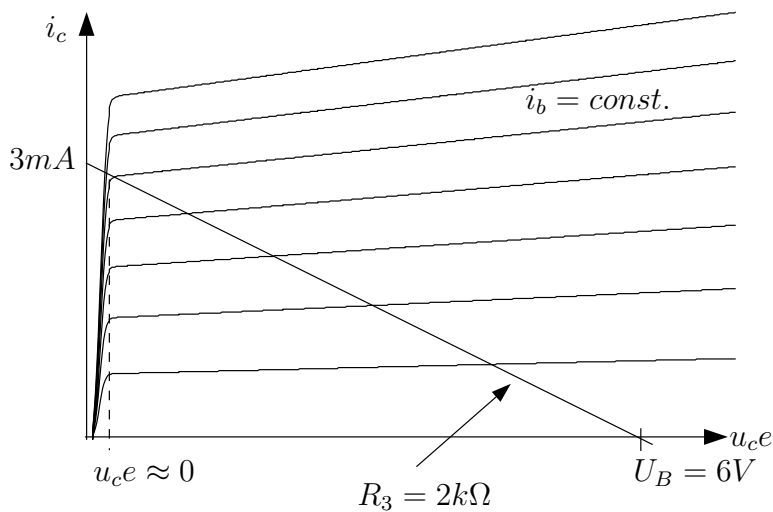


Bild 10.9 Transistor-Ausgangskennlinienfeld mit Lastgerade

Logische Funktion:

$$u' = u_{ce} \approx 0 \Rightarrow y = „0“ = \overline{„1“ \wedge „1“}$$

b) Analysegleichungen ohne Transistor für $x_1 = „0“$ und $x_2 = „1“$:

D_1 leitend: Kennlinienast II : $u_{D1} = 0, i_{D1} > 0$

D_2 gesperrt: Kennlinienast I : $u_{D2} < 0, i_{D2} = 0$

D_3 leitend: Kennlinienast II : $u_{D3} = 0, i_{D3} > 0$

D_4 leitend: Kennlinienast II : $u_{D4} = 0, i_{D4} > 0$

$$I_1 R_1 + U_D - U_B = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{U_B - U_D}{R_1} = \frac{5,3}{2600} \approx 2 \text{ mA}$$

$$I_2 R_2 - U_H + 2U_D - U_D = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{U_H - U_D}{R_2} = \frac{2,3}{5000} \approx 0,46 \text{ mA}$$

$$u_{be} = I_2 R_2 - U_H = (2,3 - 3) \text{ V} = -0,7 \text{ V}$$

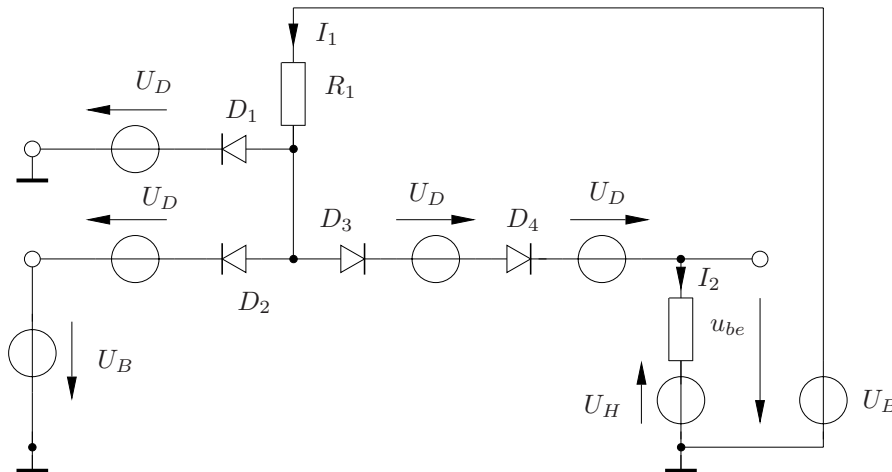


Bild 10.10 Ersatzschaltbild des DTL-Eingangskreises für $x_1 = „0“$ und $x_2 = „1“$

Transistor:

$$u_{be} < 0 \Rightarrow i_b = 0 \Rightarrow i_c = 0 \Rightarrow u' = u_{ce} = 6 \text{ V}$$

Logische Funktion:

$$u' = u_{ce} = 6 \text{ V} \Rightarrow y = „1“ = \overline{„0“ \wedge „1“}$$

c,d) $(x_1 = „1“ \wedge x_2 = „0“)$ und $(x_1 = „0“ \wedge x_2 = „0“)$ führen auf die gleichen Ströme I_1 und I_2 und damit auf den gleichen y -Wert.

10.3.2 NAND in TTL (Transistor-Transistor-Logik)

TTL-Schaltkreise sind die am meisten verbreiteten bipolaren Logikschaltungen. Es existieren verschiedene Varianten für hohe Schaltgeschwindigkeit, hohe Störsicherheit, oder niedrige Leistungsaufnahme. Die logische Verknüpfung wird durch den Multi-Emitter-Eingangstransistor

$$U_H = -1,15 \text{ V (intern erzeugte Hilfsspannung)}$$

$$U_B = -5,2 \text{ V}$$

$$\text{„1“} \hat{=} -0,75 \text{ V}$$

$$\text{„0“} \hat{=} -1,6 \text{ V}$$

Ein ECL-Gatter besteht im wesentlichen aus einem Differenzverstärker mit mehreren parallelen Eingangstransistoren. Der Ausgangstransistor in Kollektorschaltung sorgt für einen niedrigen Ausgangswiderstand. Um den Einfluss des Betriebsspannungs-Innenwiderstandes zu minimieren wird die Plusklemme als Masse (Bezugsklemme) benutzt. Der Signalhub ist recht klein im Vergleich zur Betriebsspannung.

10.3.4 NOT, NAND und NOR in CMOS

Die CMOS-Technologie ist aus zwei Gründen für integrierte Digitalschaltungen besonders attraktiv:

- Zum einen lässt sich der statische Leistungsverbrauch sehr klein halten, da je nach Schaltzustand immer einer der beiden komplementären Transistoren gesperrt ist und somit kein Strom fließt
- Zum anderen bilden sich bei Feldeffekttransistoren nur unterhalb der Gate-Elektrode Stromkanäle aus, was eine Isolation der einzelnen Transistoren auf einem Chip überflüssig macht und zu relativ einfachen Realisierungsstrukturen führt.

Der CMOS-Inverter besteht aus zwei komplementären, selbstsperrenden MOS-Transistoren. Die Schaltung hat im Bereich $U_1 \approx U_B/2$ eine sehr hohe Spannungsverstärkung und damit eine fast ideale Umschaltcharakteristik, die für die Rekonstruktion von binären Signalen von Bedeutung ist. Ein NAND-Gatter besteht aus zwei parallelen p-Kanal-Transistoren

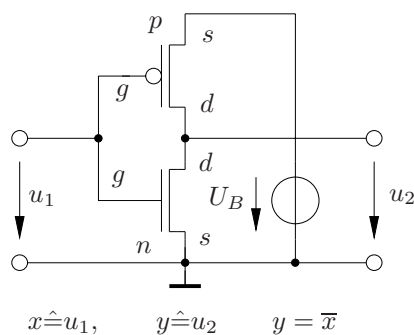


Bild 10.13 CMOS-Inverter

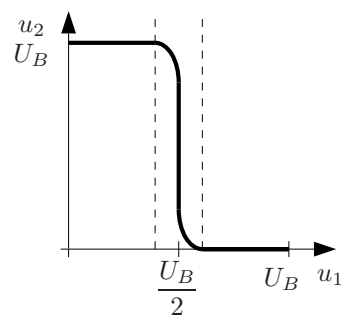


Bild 10.14 Übertragungscharakteristik

und zwei n-Kanal-Transistoren in Reihe, wobei die Gate-Anschlüsse eines komplementären Paares jeweils zu einer Eingangsklemme zusammengefasst sind. Umgekehrt sind die Verhältnisse beim CMOS-NOR-Gatter, wie die Bilder 10.15 und 10.16 zeigen.

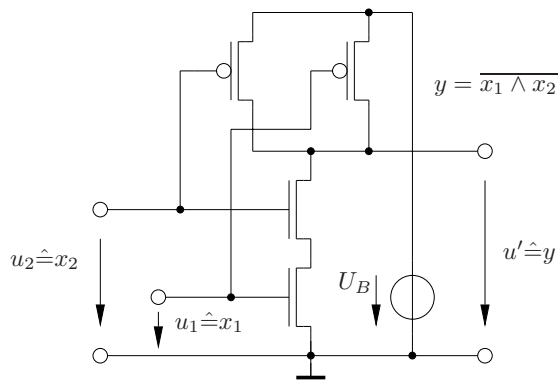


Bild 10.15 NAND-Gatter in CMOS-Technologie

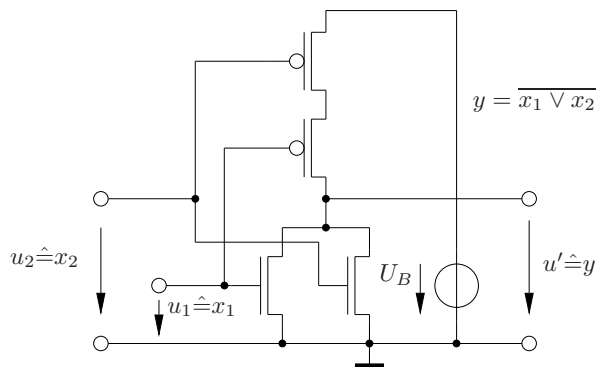
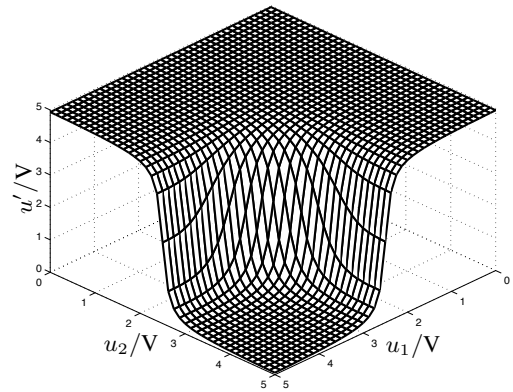
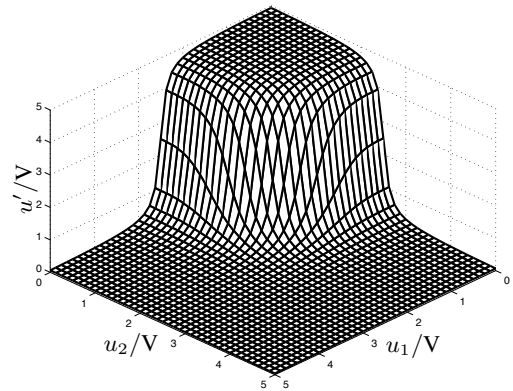


Bild 10.16 NOR-Gatter in CMOS-Technologie



Anhang

A.1 Graphen

Graphen dienen in der Mathematik und Informatik zur einfachen qualitativen Darstellung von Zusammenhängen zwischen endlich vielen Objekten. Zur Veranschaulichung der Bedeutung dieses abstrakten Werkzeugs für die Schaltungstechnik werden im folgenden alle wesentlichen Begriffe anhand der Netzwerkgraphen einfacher elektronischer Schaltungen eingeführt; deren Schaltbilder und die Methodik der Konstruktion des zugehörigen Graphen sind aber an dieser Stelle bedeutungslos.

A.1.1 Ungerichtete Graphen

Ein (*ungerichteter*) Graph $\mathcal{G}(N, B)$ wird definiert durch Angabe einer *Knotenmenge*

$$N = \{n_1, n_2, \dots, n_n\} \quad (\text{A.1})$$

deren Elemente n_j *Knoten* (*nodes, vertices*) heißen, und einer *Kanten-* oder *Zweigmenge*

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_b\} \quad (\text{A.2})$$

deren Elemente b_j *Kanten* (*edges*) oder *Zweige* (*branches*) genannt werden¹, und die Struktur eines ungeordneten Paares von Knoten besitzen:

$$\forall j : b_j = \{n_a, n_b\} \wedge n_a, n_b \in \mathbb{N} \quad (\text{A.3})$$

Der Fall $n_a = n_b$ ist dabei ausdrücklich zugelassen: Eine derartige Kante, die einen Knoten mit sich selbst verbindet, wird *Schlinge* (*self-loop*) genannt.

Die Anzahl n der Knoten heißt die *Knotenzahl*, die Anzahl b der Kanten die *Kantenzahl* des Graphen:

$$n = |N| \quad (\text{A.4})$$

$$b = |B| \quad (\text{A.5})$$

Einen Graphen stellt man graphisch dar, indem man die Knoten als Punkte zeichnet und die Kanten als Verbindungslinien zwischen den Knoten. Die genaue Art der Darstellung ist dabei aber unwesentlich, die Struktur wird alleine von den durch die Kanten gegebenen Nachbarschaftsbeziehungen bestimmt.

Gegeben sei beispielsweise der Graph $\mathcal{G}_I(N_I, B_I)$ eines beidseitig beschalteten Brückengleichrichters, der $n_I = 4$ Knoten und $b_I = 6$ Kanten besitzt: Dabei wurden wie üblich schlich-

¹Dabei ist der Ausdruck „Kante“ der in der Mathematik und Informatik beim Umgang mit rein abstrakten Graphen übliche, wogegen man bei den Netzwerkgraphen der Schaltungstechnik meist von „Zweigen“ spricht.

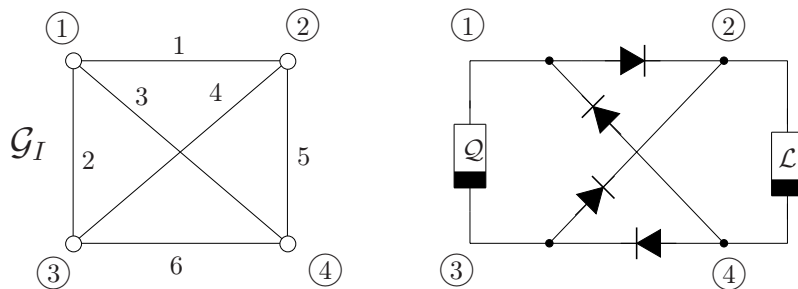


Bild A.1 Der Graph $\mathcal{G}_{\mathcal{I}}$ eines beschalteten Brückengleichrichters

te natürliche Zahlen zur Bezeichnung der Kanten verwendet, und mit einem Kreis umrandete als Symbole für die Knoten. Die Knoten- und Kantenmenge von \mathcal{G}_I ergeben sich damit zu:

$$N_I = \{\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4}\}.$$

$$B_I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Die Kanten werden dabei als ungeordnete Paare von Knoten aufgefasst, und als Mengen geschrieben:

$$\text{Kante1} = \{\textcircled{1}, \textcircled{2}\} = \{\textcircled{2}, \textcircled{1}\}.$$

ist hierfür ein typisches Beispiel.

Im folgenden sollen nun einige Eigenschaften eingeführt werden, die ein Graph alleine aufgrund seiner mathematischen Struktur besitzen kann. Beispielsweise nennt man einen Graphen *schlingentragend*, wenn er Schlingen enthält, ansonsten *schlingenf*rei. Die meisten wichtigen Eigenschaften sind allerdings schwieriger zu definieren:

A.1.1.1 Planarität

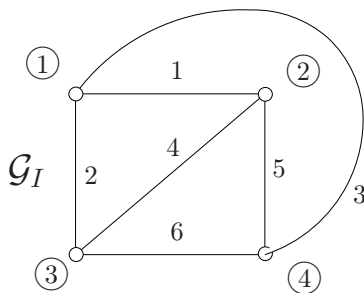


Bild A.2 Eine planar umgezeichnete Fassung von \mathcal{G}_I

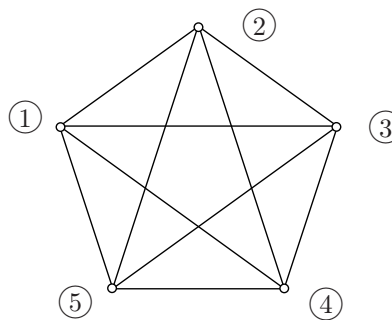


Bild A.3 Der einfachste nicht planare Graph

Ein Graph $\mathcal{G}(N, B)$ heißt *planar*, wenn es möglich ist, ihn auf einem ebenen Blatt Papier so zu zeichnen, dass sich keine zwei Kanten aus B kreuzen.

\mathcal{G}_I ist planar, da man ihn wie in Bild A.2 gezeigt ohne Kantenüberkreuzungen darstellen kann: Der einfachste nicht planare Graph besitzt 5 Knoten und 10 Kanten:

Die Netzwerkgraphen realer Schaltungen sind im allgemeinen nicht planar.

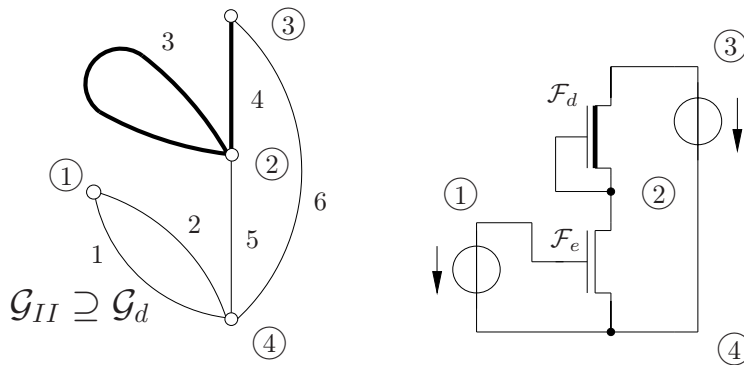


Bild A.4 Der einem Transistor entsprechende Teilgraph \mathcal{G}_d im Graphen \mathcal{G}_{II} eines n-MOS-Inverters

A.1.1.2 Teilgraphen

Ein Graph $\mathcal{G}_t(N_t, B_t)$ heißt ein *Teilgraph* $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{G}$ des Graphen $\mathcal{G}(N, B)$, wenn

$$N_t \subseteq N \wedge B_t \subseteq B \tag{A.6}$$

Als Beispiel ist hier im Graphen \mathcal{G}_{II} eines beschalteten n-MOS-Inverters der dem Verarmungs-FET \mathcal{F}_d , entsprechende Teilgraph $\mathcal{G}_d(N_d, B_d) \subseteq \mathcal{G}_{II}$ fett hervorgehoben: \mathcal{G}_{II} ist übrigens schlingentragend: Die Kante $3 = \{②, ②\}$ stellt eine Schlinge am Knoten ② dar.

A.1.1.3 Zusammenhängende Graphen

Ein Graph $\mathcal{G}(N, B)$ heißt *unzusammenhängend (disconnected)*, wenn man N in zwei disjunkte Teilmengen N_1 und N_2 aufspalten kann, die durch keine einzige Kante $b_\lambda = \{n_i \in N_1, n_j \in N_2\}$ aus B miteinander verbunden sind:

$$\exists N_1, N_2 : (N = N_1 \cup N_2 \wedge N_1 \cap N_2 = \emptyset \wedge \nexists b_\lambda = \{n_i \in N_1, n_j \in N_2\} \in B) \tag{A.7}$$

Ein Graph, der nicht unzusammenhängend ist, heißt *zusammenhängend (connected)*.

Gegeben sei beispielsweise der Graph \mathcal{G}_{III} einer Übertragerschaltung zur Leistungsanpassung (siehe Bild A.5).

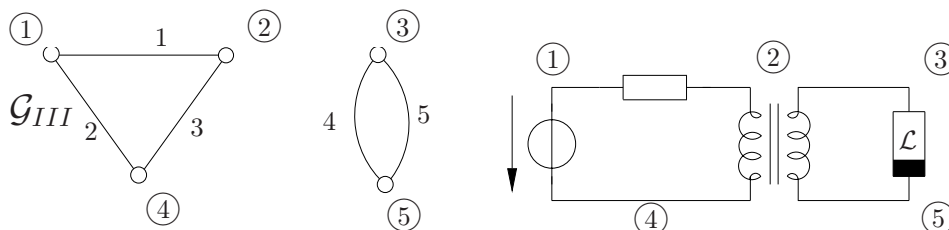


Bild A.5 Der unzusammenhängende Graph \mathcal{G}_{III} einer Übertragerschaltung

Wie man sofort sieht, ist \mathcal{G}_{III} unzusammenhängend. Mit Hilfe der Definition (A.8) kann man dies zeigen, indem man $N_1 = \{①, ②, ④\}$ und $N_2 = \{③, ⑤\}$ wählt.

Zusammenhängende Komponenten Jeder Graph $\mathcal{G}(N, B)$ kann eindeutig in eine Anzahl ν zusammenhängender und zueinander disjunkter Teilgraphen $\mathcal{G}_1(N_1, B_1), \mathcal{G}_2(N_2, B_2), \dots, \mathcal{G}_\nu(N_\nu, B_\nu)$, zerlegt werden, so dass gleichzeitig gilt:

$$\begin{aligned} \forall i : \mathcal{G}_i & \text{ ist zusammenhängend} \\ \forall i \neq j : N_i \cap N_j &= \emptyset \wedge B_i \cap B_j = \emptyset \\ N &= N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_\nu \wedge B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_\nu \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Diese Teilgraphen \mathcal{G}_i heißen die *zusammenhängenden Komponenten* von \mathcal{G} .

\mathcal{G}_{III} besitzt zwei zusammenhängende Komponenten: $\mathcal{G}_1(N_1, B_1)$ und $\mathcal{G}_2(N_2, B_2)$, wobei

$$N_1 = \{\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{4}\}, B_1 = \{1, 2, 3\}$$

und

$$N_2 = \{\textcircled{3}, \textcircled{5}\}, B_2 = \{4, 5\}$$

Zusammenhängende Graphen wie \mathcal{G}_I besitzen natürlich nur eine einzige zusammenhängende Komponente: sich selbst!

Schnittmengen Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $\mathcal{G}(N, B)$. Eine Teilmenge $S \subset B$ seiner Kanten heißt *Schnittmenge*, wenn gleichzeitig gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(N, B \setminus S) & \text{ ist unzusammenhängend} \\ \forall b \in S : \mathcal{G}(N, (B \setminus S) \cup \{b\}) & \text{ ist zusammenhängend} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Die Differenzmenge $B \setminus S$ ist die Menge aller Elemente von B , die nicht in S enthalten sind. Anschaulich ausgedrückt ist eine Schnittmenge eine minimale Menge von Kanten, deren Entfernung den Graphen in zwei zusammenhängende Komponenten zerfallen lässt. Gleichzeitig reicht aber jede einzelne Kante der Schnittmenge aus, um die beiden Komponenten wieder zu verbinden.

Beispielsweise sind $S_1 = \{1, 2, 3\}$ und $S_2 = \{2, 3, 4, 5\}$ Schnittmengen des Graphen \mathcal{G}_I .

Im Graphen \mathcal{G}_{II} sind folgende Mengen **keine** Schnittmengen:

- $\{2, 5\}$ kann entfernt werden, ohne dass \mathcal{G}_{II} unzusammenhängend wird.
- $\{1, 2, 5\}$ enthält unnötigerweise die Kante 5.
- $\{1, 2, 5, 6\}$ ist zu groß: Bereits eine Teilmenge davon reicht, um \mathcal{G}_{II} zu zerschneiden.

A.1.2 Gerichtete Graphen

Ein *gerichteter Graph* (*directed graph*) oder *Digraph* $\mathcal{G}(N, B)$ ist ein Graph, dessen sämtliche Kanten $e_j \in B$ mit einer *Richtung* versehen sind. Dies wird ausgedrückt, indem man jede Kante nun als ein geordnetes Paar mit dem *Anfangsknoten* n_a und dem *Endknoten* n_b auffasst:

$$\forall j : e_j = (n_a, n_b) \wedge n_a, n_b \in N \quad (\text{A.10})$$

Geordnete Paare werden dabei mit runden Klammern geschrieben, nicht mehr mit geschweiften.

Graphisch stellt man gerichtete Graphen dar, indem man auf jeder Kante eine Pfeilspitze anbringt, die vom Anfangs- zum Endknoten zeigt. Eine gerichtete Ausführung von \mathcal{G}_{III} ist beispielsweise:

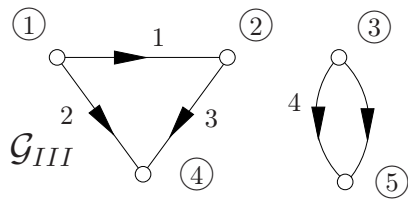


Bild A.6 Eine gerichtete Fassung des Graphen \mathcal{G}_{III}

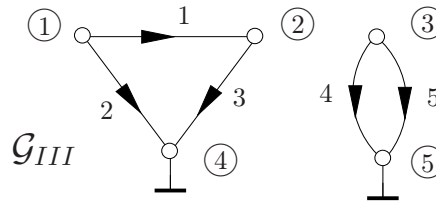


Bild A.7 \mathcal{G}_{III} als Graph mit Bezugsknoten

A.1.2.1 Graphen mit Bezugsknoten

Bei Netzwerkgraphen in der Schaltungstechnik zeichnet man in jeder zusammenhängenden Komponente $\mathcal{G}_\lambda(N_\lambda, B_\lambda)$ genau einen willkürlich gewählten Knoten $n_\lambda \in N_\lambda$ besonders aus (meist den mit der höchsten Nummer), den sogenannten *Bezugsknoten (datum)*. Die sich dabei ergebende Struktur heißt *Graph mit Bezugsknoten* $\mathcal{G}(N, B, M)$, wobei M die Bezugsknotenmenge ist:

$$M = \{n_\alpha, n_\beta, \dots, n_\omega\} \tag{A.11}$$

Zur graphischen Kennzeichnung der Bezugsknoten wird das übliche Massesymbol verwendet. Nach Wahl der Bezugsknotenmenge $M_{III} = \{4, 5\}$ ergibt sich beispielsweise die in Bild A.7 dargestellte Struktur von \mathcal{G}_{III} .

Ein zusammenhängender Graph kann natürlich nur einen einzigen Bezugsknoten besitzen.

A.1.2.2 Zusammengehängte Graphen

Da es bei Netzwerkgraphen in der Schaltungstechnik eine gewisse Vereinfachung bedeutet, wenn man sich auf die Bearbeitung zusammenhängender Graphen mit eindeutigen Bezugsknoten beschränkt, erzeugt man diese Struktur aus unzusammenhängenden Graphen willkürlich:

Gegeben sei ein nicht zusammenhängender Graph mit Bezugsknoten $\mathcal{G}(N, B, M)$. Man erhält den zugehörigen *zusammengehängten Graph (hinged Graph)* \mathcal{G}^h aus \mathcal{G} , indem man alle Bezugsknoten $n_\lambda \in M$ zu einem einzigen zusammenfasst.

Bei \mathcal{G}_{III} bedeutet das, dass 4 und 5 zu einem einzigen Bezugsknoten 4 von \mathcal{G}_{III}^h zusammengefasst werden. \mathcal{G}_{III}^h hat damit die in Bild A.8 gezeigte Struktur.

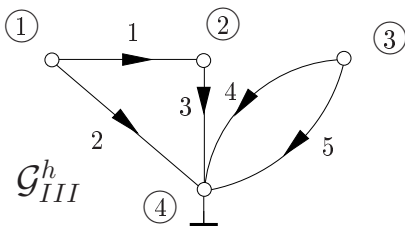


Bild A.8 Der von \mathcal{G}_{III} abgeleitete zusammengehängte Graph \mathcal{G}_{III}^h

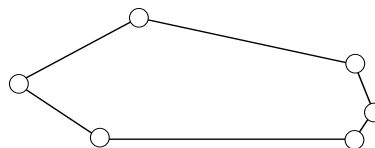


Bild A.9 Eine Schleife

A.1.3 Spezielle Graphen

Zum Führen einiger Beweise ist es oft vorteilhaft, aus einem allgemeinen Graphen einen Teilgraphen auszuwählen, der eine bestimmte einfache Struktur besitzt.

A.1.3.1 Schleifen

Eine *Schleife (loop)* ist ein zusammenhängender schlingenfreier Graph, in dem jeder Knoten mit genau zwei Kanten verbunden ist. Bild A.9 zeigt ein Beispiel.

Typischerweise werden Schleifen betrachtet, die Teilgraphen eines Netzwerkgraphen sind. Bild A.11 zeigt beispielsweise eine Schleife in \mathcal{G}_{III}^h :

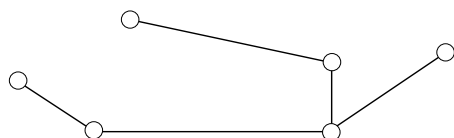


Bild A.10 Ein Baum

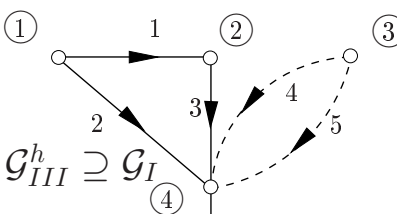


Bild A.11 Eine Schleife \mathcal{G} in \mathcal{G}_{III}^h

A.1.3.2 Bäume

Ein *Baum (tree)* ist ein zusammenhängender Graph, der durch das Entfernen jeder beliebigen einzelnen Kante unzusammenhängend wird, beispielsweise Bild A.10:

Ein (*maximaler*) *Baum* \mathcal{G}_b in einem zusammenhängenden Graphen $\mathcal{G}(N, B)$ ist ein baumförmiger Teilgraph, der alle Knoten von \mathcal{G} überdeckt.

Bild A.12 zeigt (fett hervorgehoben) einen maximalen Baum \mathcal{G}_b in \mathcal{G}_{III}^h : \mathcal{G}_{III}^h selbst ist nicht

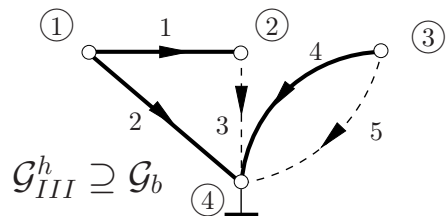


Bild A.12 Ein Baum \mathcal{G}_b in \mathcal{G}_{III}^h

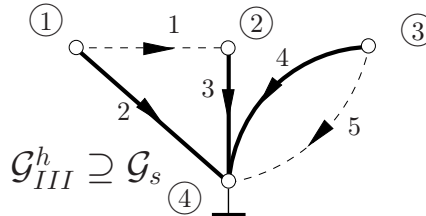


Bild A.13 Ein Sternbaum \mathcal{G}_s in \mathcal{G}_{III}^h

zusammenhängend und besitzt daher keinen maximalen Baum.

Sternbäume Gegeben sei ein zusammenhängender gerichteter Graph mit Bezugsknoten. Ein *Sternbaum* in diesem Graphen ist dann ein Baum, dessen sämtliche Kanten im Bezugsknoten enden. Bild A.13 zeigt einen maximalen Sternbaum \mathcal{G}_s in \mathcal{G}_{III}^h :

A.1.4 Algebraische Strukturbeschreibung

Um einen einfachen Übergang zu auf Graphen aufbauenden schaltungstechnischen Berechnungen zu ermöglichen, ist eine algebraische Darstellung der Struktur gerichteter Graphen wünschenswert.

Gegeben sei ein zusammenhängender gerichteter Graph $\mathcal{G}(N, B, M)$ mit n Knoten und b Kanten, die beide fortlaufend ab 1 durchnummeriert sind. Der Bezugsknoten habe die höchste Nummer n .

Die (*Knoten-*)*Inzidenzmatrix* A' von \mathcal{G} ist eine $n \times b$ -Matrix, deren Elemente aus $\{-1, 0, 1\}$ gemäß der folgenden Regel bestimmt werden:

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{wenn die Kante } j \text{ im Knoten } i \text{ beginnt} \\ -1 & \text{wenn die Kante } j \text{ im Knoten } i \text{ endet} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Jede Spalte ist also einer Kante zugeordnet, und jede Zeile einem Knoten.

Diese Zugehörigkeit ist hier bei der Inzidenzmatrix A'_{III} von \mathcal{G}_{III}^h explizit mit angegeben:

$$A'_{III} = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \textcircled{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \textcircled{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \textcircled{4} & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Die *reduzierte* (*Knoten-*)*Inzidenzmatrix* A ist eine $(n-1) \times b$ -Matrix und entsteht nach derselben Regel, aber ohne die dem Bezugsknoten zugeordnete letzte Zeile. A besitzt immer vollen Rang.

Die reduzierte Inzidenzmatrix A_{III} von \mathcal{G}_{III}^h lautet damit:

$$A_{III} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Inzidenzmatrizen ermöglichen den Übergang von der Graphentheorie zur linearen Algebra.

A.2 Linearisierung

Viele der Informationsübertragung dienende Schaltungen wie Filter, Verstärker, Übertragungsstrecken sollten sich idealerweise linear verhalten; im Rahmen einer Realisierung mit nicht linearen Bauelementen wie Transistoren oder Dioden ist dies aber nur unter Einschränkungen möglich. Die *Linearisierung* einer Schaltung ermöglicht eine Interpretation ihres Verhaltens als linear, wobei das tatsächliche Verhalten approximiert wird. Dadurch erzielt man eine wesentliche Vereinfachung der Betrachtung vieler nicht linearer Schaltungen und führt gleichzeitig ihre Analyse und Synthese einer Bearbeitung mit algebraischen Methoden zu.

Mathematische Grundlage der Linearisierung ist die Taylor-Approximation von Funktionen durch eine Potenzreihe. Ihre praktische Bedeutung begründet sich darin, dass der beim Abbruch der Potenzreihe gemachte Fehler abgeschätzt werden kann. Zur Begründung der in der Schaltungstechnik üblichen Vorgehensweise bei der Linearisierung entwickelt man ausgehend von einer expliziten Beschreibungsform eines Netzwerkelements (oder einer Teilschaltung) die erste, lineare Taylor-Approximation. Diese kann als lineare Schaltung interpretiert werden.

Voraussetzung der Linearisierung ist die konsequente Verwendung der Kleinsignalnäherung, wonach eine Betriebsgröße $x(t)$ in einen konstanten Anteil X und einen zeitabhängigen Anteil $\Delta x(t)$ kleiner Amplitude zerlegt wird:

$$x(t) = X + \Delta x(t) \quad (\text{A.13})$$

Der Arbeitspunkt X muss dabei vorgegeben sein und dient als Stützstelle der Taylor-Approximation.

A.2.1 Lineare Approximation resistiver Eintore

Die expliziten Darstellungen resistiver Bauelemente sind meist Funktionen der Art $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Taylor-Approximation einer solchen Funktion f ist in einer offenen Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}$ einer Stützstelle X möglich, wenn f in U $(r + 1)$ -mal stetig differenzierbar ist. Mit $X, x \in U$ gilt,

$$f(x) = T_r(x, X) + R_r(x, X) \quad (\text{A.14})$$

wobei das r -te Taylor-Polynom

$$T_r(x, X) := \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(X)}{k!} (x - X)^k = \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(X)}{k!} \Delta x^k \quad (\text{A.15})$$

den Funktionswert annähert,

$$f(x) \approx T_r(x, X) \quad (\text{A.16})$$

und das Restglied nach Lagrange

$$R_r(x, X) = \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!} (x - X)^{r+1} \quad (\text{A.17})$$

mit $\xi \in [x, X]$ den Fehler beschreibt:

$$R_r(x, X) = O((\Delta x)^{r+1}) \quad (\text{A.18})$$

Im Spezialfall $r = 1$ erhält man die *lineare Approximation*

$$T_1(x, X) := f(X) + f'(X)(x - X) = f(X) + f'(X)\Delta x \quad (\text{A.19})$$

mit dem Restglied

$$R_1(x, X) = \frac{f''(\xi)}{2} (x - X)^2 = \frac{f''(\xi)}{2} \Delta x^2 \quad (\text{A.20})$$

Da ξ nicht genau bekannt ist, muss man das Restglied abschätzen:

$$|R_1(x, X)| \leq \frac{(x - X)^2}{2} \cdot \max_{\xi \in [x, X]} |f''(\xi)| \quad (\text{A.21})$$

Offensichtlich ist die Approximation umso genauer, je kleiner Δx ist.

A.2.1.1 Lineare Approximation einer pn-Diode

Als einfaches Beispiel wird nun die in Bild A.14 gezeigte pn-Diode \mathcal{D} betrachtet. Diese besitzt die Leitwertdarstellung

$$i_D = g_D(u_D) = I_s \left(\exp\left(\frac{u_D}{U_T}\right) - 1 \right) \quad (\text{A.22})$$

mit den Parameterwerten $I_s = 10,3 \text{ pA}$, $U_T = 25 \text{ mV}$. Bild A.15 zeigt die lineare Approxi-

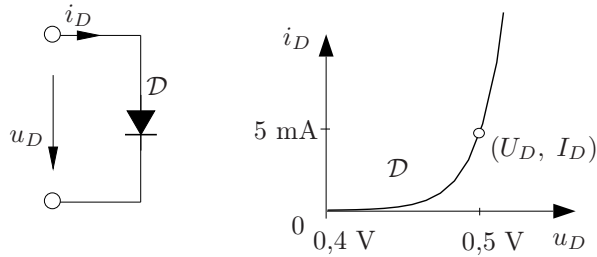


Bild A.14 Elementsymbol und Kennlinie der pn-Diode \mathcal{D}

Approximation \mathcal{D}_{lin} der Diodenkennlinie durch das erste Taylor-Polynom in dem durch

$$U_D = 0,5 \text{ V} \tag{A.23}$$

gegebenen Betriebspunkt. \mathcal{D}_{lin} wird durch Approximation der Leitwertsdarstellung g_D mit (A.19) bestimmt und hat die Form

$$i_D \approx I_D + G_D(u_D - U_D) \tag{A.24}$$

mit den Parametern

$$I_D = g_D(U_D) = I_s \left(\exp \left(\frac{U_D}{U_T} \right) - 1 \right) \approx 5,0 \text{ mA} \tag{A.25}$$

$$G_D = g'_D(U_D) = \frac{I_s}{U_T} \exp \left(\frac{U_D}{U_T} \right) \approx 0,20 \text{ S} \tag{A.26}$$

G_D heißt der Kleinsignalleitwert von \mathcal{D} in (U_D, I_D) . Bild A.16 zeigt eine Schaltung, deren

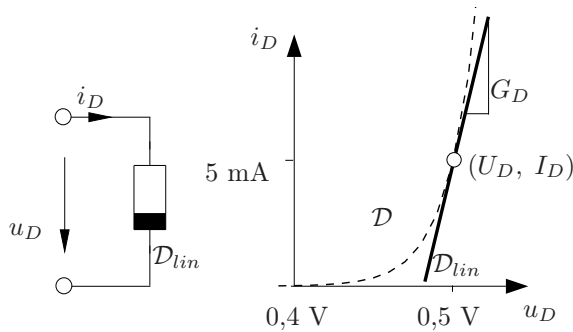


Bild A.15 Die lineare Approximation \mathcal{D}_{lin} der Diodenkennlinie \mathcal{D}

Klemmenverhalten dem der linearen Approximation (affine Widerstandsgerade) entspricht und die damit eine schaltungstechnische Interpretation des ersten Taylorpolynoms darstellt.

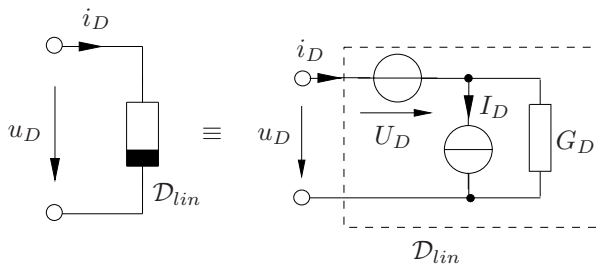


Bild A.16 Eine schaltungstechnische Interpretation der linearen Approximation \mathcal{D}_{lin}

A.2.1.2 Freie Wahl der Darstellungsform

Die lineare Approximation stellt eine Vereinfachung dar. Es ist zunächst nicht ohne weiteres selbstverständlich, dass sie als solche verträglich mit der Anwendung anderer üblicher Arbeitsmethoden ist. Diese *Konsistenz* ist aber tatsächlich gegeben: Die lineare Approximation und die der Schaltungsanalyse dienenden Arbeitsschritte kann man in beliebiger Reihenfolge durchführen; es ergibt sich stets dasselbe Ergebnis. Anhand der Diode \mathcal{D} wird nun gezeigt, dass die Linearisierung und ein Wechsel der Darstellungsform in beliebiger Reihenfolge vorgenommen werden können.

Die Widerstandsdarstellung der Diodenkennlinie lautet

$$u_D = r_D(i_D) = U_T \ln \left(\frac{i_D}{I_s} + 1 \right) \quad (\text{A.27})$$

Ihre lineare Approximation

$$u_D \approx U_D + R_D(i_D - I_D) \quad (\text{A.28})$$

ist die Umkehrung von (A.24), und wie erwartet ist auch der nun mit

$$R_D = r_D'(I_D) = \frac{U_T}{I_D + I_s} \approx 5\Omega \quad (\text{A.29})$$

bestimmte *Kleinsignalwiderstand* der Kehrwert des vorher aus der linearen Approximation der Leitwertdarstellung bestimmten Kleinsigalleitwerts G_D :

$$R_D = \frac{1}{G_D} \quad (\text{A.30})$$

A.2.1.3 Die Kleinsignalnäherung

Zur beispielhaften Begründung der Kleinsignalnäherung wird nun die in Bild A.17 gezeigte einfache Diodenschaltung untersucht. Die Diode soll hier zur Stabilisierung der Ausgangsspannung u_D gegen über kleinen Schwankungen Δu_B der Versorgungsspannung U_B dienen. In den Schaltbildern stellen unausgefüllte Quellsymbole zeitunabhängige Konstantquellen, schraffierte Symbole hingegen zeitabhängige Kleinsignalquellen dar. Zur Arbeitspunktbestimmung

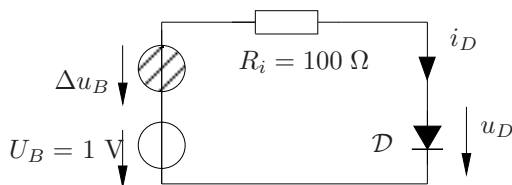


Bild A.17 Eine Diodenschaltung zur Spannungsstabilisierung

wird die Schaltung ohne Kleinsignalquelle zeitunabhängig betrieben. Man erhält die *Arbeitspunktschaltung* Bild A.18, in der die Diode \mathcal{D} in dem bereits im vorigen Abschnitt betrachteten Betriebspunkt betrieben wird. Substituiert man die Diode durch ihre lineare Approximation, so erhält man die lineare Gesamtschaltung in Bild A.20, deren Verhalten in der Nähe des Arbeitspunkts näherungsweise dem der ursprünglichen Schaltung Bild A.17 entspricht. Bild A.20 wird nun als Superposition zweier Schaltungen aufgefasst, nämlich der *linearen Arbeitspunktschaltung* Bild A.21, die alle Konstantquellen enthält, und der *Kleinsignalschaltung* Bild A.22 mit allen zeitabhängigen Kleinsignalquellen. Die lineare Arbeitspunktschaltung wird normalerweise nie explizit entwickelt: Da sie als einzigen Betriebszustand den ohnehin bereits bekannten

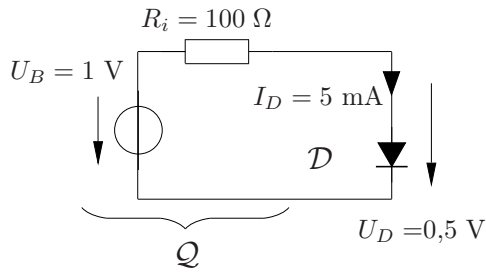


Bild A.18 Der Arbeitspunkt der Diodenschaltung

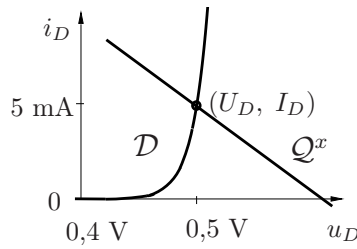


Bild A.19 Bestimmung des Arbeitspunkts der Diodenschaltung

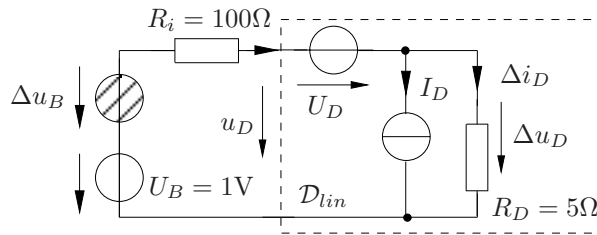


Bild A.20 Die lineare Gesamtschaltung mit linearer Approximation der Diodenkennlinie

Arbeitspunkt modelliert, liefert sie keine neue Information. Die Kleinsignalschaltung hingegen stellt eine eigenständige und leistungsfähige neue Sichtweise des Verhaltens der Schaltung dar. Während das Verhältnis der Ausgangs- und Versorgungsspannung

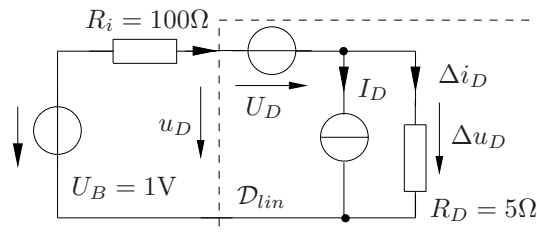


Bild A.21 Die in der Superposition der Gesamtschaltung nicht betrachtete lineare Arbeitspunktschaltung

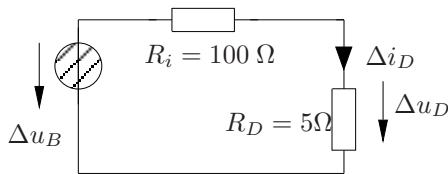


Bild A.22 Die Kleinsignalersatzschaltung

$$\frac{U_D}{U_B} \approx \frac{1}{2} \tag{A.31}$$

beträgt, ergibt sich aus der Kleinsignalschaltung als Amplitudenverhältnis der Kleinsignale.

$$\frac{\Delta u_D}{\Delta u_B} \approx \frac{1}{21} \tag{A.32}$$

Man kann nun die relative Schwankung $\frac{\Delta u_D}{\Delta u_B}$ der Ausgangsspannung zur Schwankung $\frac{\Delta u_D}{U_B}$ der Versorgungsspannung in Beziehung setzen:

$$\frac{\left(\frac{\Delta u_D}{u_D}\right)}{\left(\frac{\Delta u_D}{U_B}\right)} = \frac{\Delta u_D}{\Delta u_B} \cdot \frac{U_B}{U_D} \approx \frac{1}{10,5} \quad (\text{A.33})$$

Die Schaltung dient also tatsächlich der Spannungsstabilisierung: Bei Schwankungen der Versorgungsspannung ändert sich die Ausgangsspannung in viel geringerem Maße.

Die Anforderungen an die Schaltung werden nun genauer spezifiziert: Die maximal zulässige Abweichung der Diodenspannung von ihrem Arbeitspunktwert sei

$$|\Delta u_D| \leq 10 \text{ mV}. \quad (\text{A.34})$$

Aus der Kleinsignalnäherung erhält man dann mit (A.32) als höchste erlaubte Schwankung der Versorgungsspannung näherungsweise

$$|\Delta u_B| \leq \frac{\Delta u_B}{\Delta u_D} |\Delta u_D| \approx 210 \text{ mV}. \quad (\text{A.35})$$

A.2.2 Partielle Ableitungen und Gradient

Die *partiellen Ableitungen* einer Funktion $f(x, y)$ nach x und y sind wie folgt definiert:

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} := \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (\text{A.37})$$

sofern diese Grenzwerte existieren. Man beachte, dass $\frac{\partial f}{\partial x}$ einfach die gewöhnliche Ableitung von f nach x unter Konstanthaltung von y ist, und entsprechend $\frac{\partial f}{\partial y}$ die gewöhnliche Ableitung von f nach y unter Konstanthaltung von x . Somit kann man die üblichen Differentiationsregeln zur Bestimmung partieller Ableitungen anwenden.

Analog definiert man die partiellen Ableitungen einer Funktion $f(\mathbf{x})$ nach den Komponenten x_1, \dots, x_n eines Vektors \mathbf{x} :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} := \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x_k} \quad (\text{A.38})$$

Der aus den partiellen Ableitungen einer Funktion f gebildete Zeilenvektor

$$\mathbf{grad} f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad (\text{A.39})$$

heißt der *Gradient* von f . Mit Hilfe des Gradienten kann man die Tangentialebene an f über einer beliebigen vorgegebenen Stelle \mathbf{X} einfach angeben; sie hat die Gestalt

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{X}) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \mathbf{X}(x_k - X_k) \quad (\text{A.40})$$

oder in Vektorschreibweise.

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{X}) + \mathbf{grad} f|_{\mathbf{X}} (\mathbf{x} - \mathbf{X}) \quad (\text{A.41})$$

Als Beispiel betrachte man nun das Polynom.

$$f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 2x_2 + 4 \quad (\text{A.42})$$

Mit den partiellen Ableitungen,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -4x_1 + x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 - 2x_2 + 2 \quad (\text{A.43})$$

lautet die Tangentialebene über einer beliebigen Stelle \mathbf{X} .

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = f(X_1, X_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)(x_1 - X_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)(x_2 - X_2) \quad (\text{A.44})$$

Bild A.23 zeigt den Graph des Polynoms zusammen mit der Tangentialebene über der Stelle $\mathbf{X} = (1, 1)$

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = -3x_1 + x_2 + 6 \quad (\text{A.45})$$

Die Tangentialebene ist gleichzeitig die lineare Taylorapproximation des Polynoms.

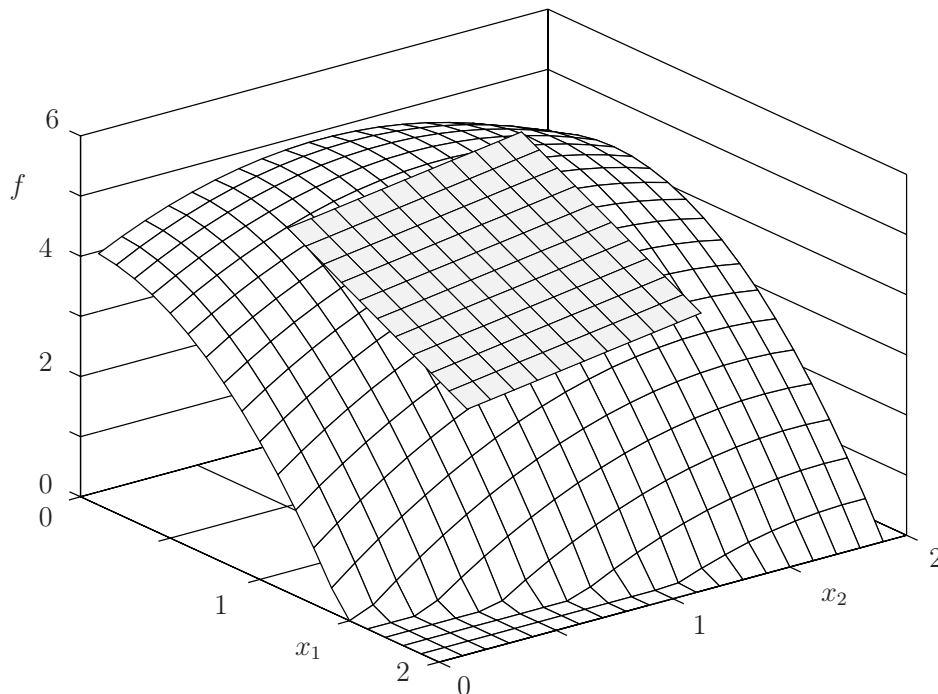


Bild A.23 Eine Funktion (hell) und Ihre Tangentialebene (dunkel) über der Stelle (1, 1)

A.2.3 Lineare Approximation resistiver Mehrtere

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mehrerer Variabler sei in einer konvexen Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von \mathbf{X} $(r + 1)$ -mal stetig differenzierbar. Auch dann existiert wieder eine Taylor-Approximation

$$f(\mathbf{x}) = T_r(\mathbf{x}, \mathbf{X}) + R_r(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \quad (\text{A.46})$$

Im hier interessierenden Spezialfall $r = 1$ lautet die erste Taylor-Approximation

$$T_1(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^n (x_i - X_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{X}) \quad (\text{A.47})$$

mit dem Restglied nach Lagrange

$$R_1(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left((x_i - X_i)(x_j - X_j) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) \right) \quad (\text{A.48})$$

wobei ξ auf der geraden Verbindungslinie zwischen \mathbf{x} und \mathbf{X} liegt; mit $\vartheta \in [0, 1]$ also .

$$\xi = \mathbf{X} + \vartheta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) \quad (\text{A.49})$$

Auch hier ist das Restglied „klein“ im Sinne von

$$R_1(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = O(\|\Delta \mathbf{x}\|^2) \quad (\text{A.50})$$

Um dies auf die Schaltungstechnik zu übertragen, muss man berücksichtigen, dass jede explizite Darstellung eines resistiven Mehrtores keine reellwertige sondern eine vektorwertige Funktion \mathbf{f} mehrerer Variabler (nämlich der steuernden Torgrößen) ist. Man trifft daher eine komponentenweise Betrachtung: Jede gesteuerte Größe wird für sich im Sinne einer Taylor-Approximation durch die steuernden ausgedrückt, und das Ergebnis wiederum in Matrix- und Vektorschreibweise zusammengefasst:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{X}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{X}} (\mathbf{x} - \mathbf{X}) \quad (\text{A.51})$$

Für das Restglied ist eine entsprechend abkürzende Schreibweise nicht möglich.

A.2.3.1 Lineare Approximation eines resistiven Zweitores

Gegeben sei nun das Beispielzweitor \mathcal{F} mit der in Bild A.24 gezeigten Innenstruktur. Die Diode \mathcal{D} ist dabei identisch zu der bereits in Abschnitt A.2.1.1 verwendeten, und der Widerstand R hat den Wert

$$R = 100 \Omega \quad (\text{A.52})$$

Wie man leicht nachrechnet, hat \mathcal{F} die Kettenbeschreibung ,

$$u_1 = u_2 + U_T \ln \left(\frac{u_2}{RI_s} - \frac{i_2}{I_s} + 1 \right) \quad (\text{A.53})$$

$$i_1 = \frac{u_2}{R} - i_2 \quad (\text{A.54})$$

Für den ausgangsseitig durch ,

$$U_2 = 0,5 \text{ V}, \quad I_2 = -5 \text{ mA} \quad (\text{A.55})$$

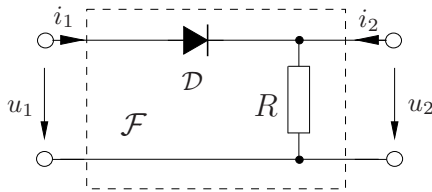


Bild A.24 Das resistive Beispielzweitor \mathcal{F}

charakterisierten Arbeitspunkt ermittelt man mit der Kettenbeschreibung die Eingangsgrößen

$$U_1 = 0,517 \text{ V}, \quad I_1 = 10 \text{ mA} \tag{A.56}$$

In Linearisierung der Kettenbeschreibung erhält man allgemein

$$\frac{\partial(u_1, i_1)}{\partial x(u_2, -i_2)} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{U_T}{u_2 - Ri_2 + RI_s} & \frac{R}{u_2 - Ri_2 + RI_s} \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} 1 + \frac{\overline{R_D}}{R} & \overline{R_D} \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix} \tag{A.57}$$

und speziell im Arbeitspunkt.

$$\left. \frac{\partial(u_1, i_1)}{\partial x(u_2, -i_2)} \right|_{AP} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{2,5\Omega}{100\Omega} & 2,5\Omega \\ \frac{1}{100\Omega} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,025 & 2,5\Omega \\ 10 \text{ mS} & 1 \end{bmatrix} \tag{A.58}$$

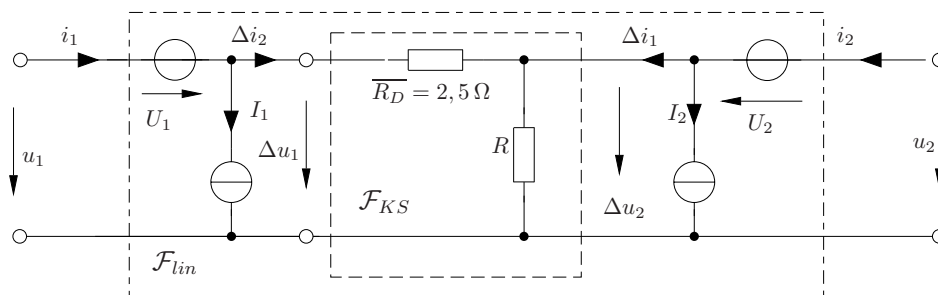


Bild A.25 Lineare Approximation und Kleinsignal-Ersatzschaltbild des Beispielzweitors \mathcal{F}

Eine schaltungstechnische Interpretation dieser Jacobimatrix alleine ergibt das in Bild A.25 innen dargestellte Kleinsignalerersatzschaltbild \mathcal{F}_Δ . Zusammen mit den die Arbeitspunktgrößen nachbildenden Quellen an den Toren bildet dieses die lineare Approximation \mathcal{F}_{lin} Bild A.25 von \mathcal{F} .

A.3 Lineare Algebra

Dieser Anhang enthält eine Zusammenfassung grundlegender Rechenregeln der Matrixalgebra sowie der Eigenschaften linearer Abbildungen, soweit sie für die Schaltungstechnik im 1. und 2. Semester von Bedeutung sind. Die lineare Algebra ist ein einheitliches und mächtiges Werkzeug zur Beschreibung von linearen Ein-, Zwei und Mehrtoeren, hinter der auch ein großes Reservoir von Algorithmen zur numerischen Schaltungsanalyse steht. Die Vektorraumanschauung erlaubt es, das Verhalten von elektrischen Netzwerken sowie deren spezielle Eigenschaften anschaulich geometrisch zu interpretieren.

A.3.1 Matrizen

Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (der Ordnung $m \times n$) ist ein rechteckiges Zahlenschema

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.59})$$

mit m Zeilen und n Spalten.

Eine Matrix mit nur einer Spalte heißt (Spalten-) Vektor; eine Matrix mit nur einer Zeile Zeilenvektor. Spaltenvektoren werden mit fetten Kleinbuchstaben, Zeilenvektoren mit einem zusätzlichen hochgestellten T symbolisiert. Matrizen (mit mindestens zwei Spalten und Zeilen) sind durch fette Großbuchstaben gekennzeichnet. Um die Zusammensetzung einer Matrix aus ihren einzelnen Einträgen zu symbolisieren, schreibt man auch:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \quad (\text{A.60})$$

Matrizen mit einer speziellen Struktur werden meist mit speziellen Symbolen gekennzeichnet. Tabelle A.1 gibt einen Überblick über wichtige strukturierte Matrizen.

Name	Definition	Notation	Beispiel
Skalar	$m = n = 1$	α	1
Spaltenvektor	$n = 1$	\mathbf{a}	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
Zeilenvektor	$m = 1$	\mathbf{a}^T	[1 2]
Nullmatrix	$a_{ij} = 0$	$\mathbf{0}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Nullvektor	$a_i = 0$	$\mathbf{0}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Diagonalmatrix	$a_{ij} = 0, i \neq j$	$\mathbf{D}, \text{diag}(d_i)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
Einheitsmatrix	$a_{ii} = 1$ $a_{ij} = 0, i \neq j$	$\mathbf{1}, \mathbf{1}_n$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
obere Dreiecksmatrix	$a_{ij} = 0, i > j$	\mathbf{R}	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$
untere Dreiecksmatrix	$a_{ij} = 0, j > i$	\mathbf{L}	
symmetrische Matrix	$a_{ij} = a_{ji}$		$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
schiefssymmetrische Matrix	$a_{ij} = -a_{ji}$		$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

Tabelle A.1: Speziell strukturierte Matrizen.

In vielen Fällen ist es sinnvoll, eine Matrix in Teilblöcke zu partitionieren:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1s} \\ \vdots \\ a_{r1} \dots a_{rs} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{1(s+1)} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{r(s+1)} \dots a_{rn} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{(r+1)1} \dots a_{(r+1)s} \\ \vdots \\ a_{m1} \dots a_{ms} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{(r+1)(s+1)} \dots a_{(r+1)n} \\ \vdots \\ a_{m(s+1)} \dots a_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.61})$$

Diese Vorgehensweise lässt sich auf eine beliebige Zahl von Partitionen erweitern. Eine spezielle Partitionierung einer Matrix ist die Zerlegung in ihre Spaltenvektoren

$$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{array} \right] \\ \dots \\ \left[\begin{array}{c} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{array} \right] \end{array} \right] = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n] \quad (\text{A.62})$$

bzw. in ihre Zeilenvektoren:

$$\left[\begin{array}{ccc} [a_{11} \ \dots \ a_{1n}] \\ \vdots \\ [a_{1n} \ \dots \ a_{mn}] \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_n^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.63})$$

A.3.2 Matrixoperationen

Für Matrizen sind eine Multiplikation und eine Addition definiert. Unter diesen beiden Verknüpfungen besitzt die Menge der Matrizen die wohldefinierte Struktur eines Ringes; d.h. mit Matrizen kann man rechnen wie mit skalaren Größen. Der wesentliche Unterschied liegt in der Matrixmultiplikation: Das Kommutativ- (Vertauschungs-) Gesetz gilt im allgemeinen nicht!

Neben der Verknüpfung von Matrizen gibt es eine Reihe von Funktionen, die auf nur einer Matrix definiert sind und aus dem Skalaren nicht bekannt sind.

A.3.2.1 Matrizenaddition/-subtraktion

Zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gleicher Dimension addiert bzw. subtrahiert man komponentenweise:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (a_{ij} \pm b_{ij}) \quad (\text{A.64})$$

A.3.2.2 Multiplikationen

α) Skalare Multiplikation.

Die Multiplikation einer Matrix \mathbf{A} mit einer skalaren Größe α ist definiert als

$$\alpha \mathbf{A} = (\alpha \cdot a_{ij}) \quad (\text{A.65})$$

β) Skalarprodukt.

Die Funktion

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (\text{A.66})$$

bildet einen Zeilenvektor $\mathbf{a}^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ und einen Spaltenvektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ auf eine skalare Größe ab und heißt Skalarprodukt. Beide Vektoren müssen die gleiche Anzahl von Elementen haben.

γ) Matrixmultiplikation.

Zur Berechnung des Produkts einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ und einer Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ wählt man günstigerweise für \mathbf{A} eine Zeilenpartitionierung und für \mathbf{B} eine Spaltenpartitionierung.

Der Eintrag (i, j) der Produktmatrix setzt sich aus dem Skalarprodukt der i -ten Zeile von A und der j -ten Spalte von B zusammen:

$$AB = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_m^T \end{bmatrix} [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n] = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^T \mathbf{b}_1 & \dots & \tilde{\mathbf{a}}_1^T \mathbf{b}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_m^T \mathbf{b}_1 & \dots & \tilde{\mathbf{a}}_m^T \mathbf{b}_n \end{bmatrix} = (\tilde{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{b}_j) \quad (\text{A.67})$$

Zur übersichtlichen Berechnung des Matrixprodukts mit Bleistift und Papier ordnet man die beiden Faktoren wie in Bild A.26 an.

Vorsicht, die Matrixmultiplikation ist (auch bei quadratischen Matrizen) nicht kommutativ, d.h. $AB \neq BA$! Bei rechteckigen Matrizen mit $m \neq n$ ist das Produkt BA noch nicht einmal definiert.

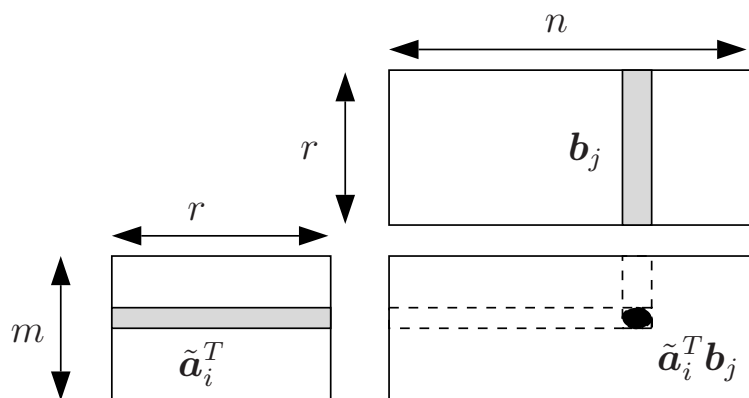


Bild A.26 Schema zur Matrixmultiplikation

Die Berechnungsregeln und das Schema in Bild A.26 gelten in gleicher Weise für partitionierte Matrizen, wobei die Summanden in Gleichung (A.66) Matrixprodukte von entsprechenden zueinander kompatiblen Blockmatrizen sind.

Für $A, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B, B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ und $C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{r \times s}$ gehorcht die Matrixmultiplikation den Gesetzen:

$$\left. \begin{aligned} (A_1 + A_2)B &= A_1B + A_2B \\ A(B_1 + B_2) &= AB_1 + AB_2 \end{aligned} \right\} \text{(distributiv)}$$

$$A(BC) = (AB)C \quad \text{(assoziativ)}$$

$$\mathbf{1}_m A = A \mathbf{1}_n = A$$

aber im allgemeinen

$$AB \neq BA \quad \text{(nicht kommutativ)}$$
(A.68)

A.3.2.3 Transposition

Die Transposition $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^T$ vertauscht die Zeilen und Spalten einer Matrix und wird durch ein hochgestelltes T gekennzeichnet:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.69})$$

Für $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ gelten die Rechenregeln:

$$\begin{array}{l} (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \\ (\mathbf{AC})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^T \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{21}^T \\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22}^T \end{bmatrix} \end{array} \quad (\text{A.70})$$

Für eine symmetrische Matrix gilt $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Für eine schiefsymmetrische Matrix $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

A.3.2.4 Spur

Die Spur einer quadratischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist als Summe ihrer Diagonalelemente definiert:

$$\text{Sp} \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (\text{A.71})$$

Für $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{C}, \mathbf{D}^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$, und α skalar gelten die Rechenregeln:

$$\begin{array}{l} \text{Sp} \alpha = \alpha \\ \text{Sp}(\alpha \mathbf{A}) = \alpha \text{Sp} \mathbf{A} \\ \text{Sp}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \text{Sp} \mathbf{A} \pm \text{Sp} \mathbf{B} \\ \text{Sp}(\mathbf{DC}) = \text{Sp}(\mathbf{CD}) = \sum_{i,j} c_{ij} d_{ij} \end{array} \quad (\text{A.72})$$

A.3.2.5 Determinante

Die Determinante $\det \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ einer quadratischen Matrix ist genauso wie die Spur eine Abbildung von $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$. Sie lässt sich am einfachsten rekursiv definieren:

$$\det \alpha = \alpha; \det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij} \quad (\text{A.73})$$

Dabei bezeichnet α eine skalare Größe und die Matrix \mathbf{A}_{ij} ist diejenige $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, die durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte gemäß

Bild A.27 aus \mathbf{A} hervorgeht. Gleichung (A.73) ist als Laplacescher Entwicklungssatz bekannt. Die Entwicklung der Determinante in Gleichung (A.73) kann nach der i -ten Zeile (erste Summe) bzw. nach der j -ten Spalte (zweite Summe) erfolgen. Die Nummer der Entwicklungszeile bzw. -spalte ist frei wählbar. Die Vorzeichenzuordnung der einzelnen Summanden entspricht einem $(+, -)$ -Schachbrettmuster über der Matrix \mathbf{A} . Eine quadratische Matrix heißt singulär

$$\det \mathbf{A} = \begin{array}{c} j \\ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{[Matrix with column } j \text{ shaded]} \\ \hline \end{array} \\ a_{1j} \det \mathbf{A}_{1j} \end{array} - \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{[Matrix with row } j \text{ shaded]} \\ \hline \end{array} \\ a_{2j} \det \mathbf{A}_{2j} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{[Matrix with row } j \text{ and column } j \text{ shaded]} \\ \hline \end{array} \\ \dots \end{array} - \dots - \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{[Matrix with row } j \text{ and column } j \text{ shaded]} \\ \hline \end{array} \\ a_{nj} \det \mathbf{A}_{nj} \end{array}$$

Bild A.27 Symbolische Entwicklung der Determinante nach der j -ten Spalte (j ungerade)

falls $\det \mathbf{A} = 0$ gilt, ansonsten ist \mathbf{A} nichtsingulär. Die Berechnung der Determinante aus der rekursiven Definitionsgleichung (A.73) führt schnell zu einer explodierenden Zahl von Summanden. Folgende Rechenregeln sowie Zusammenhänge an Dreiecks- und Diagonalmatrizen können deshalb die Berechnung wesentlich vereinfachen:

$\det \mathbf{R} = \prod_{i=1}^n r_{ii}, \quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ dreieckig oder diagonal}$	(A.74)
$\det (c\mathbf{A}) = c^n \det \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$	
$\det (\mathbf{A}\mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$	
$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$	

A.3.2.6 Inverse

Die Inverse einer quadratischen Matrix \mathbf{A} ist die eindeutige Matrix \mathbf{A}^{-1} , für die gilt:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1} \tag{A.75}$$

Die Inverse existiert genau dann, wenn die Determinante von \mathbf{A} nicht verschwindet ($\det \mathbf{A} \neq 0$). Falls die jeweiligen Inversen existieren, gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{A}^{-1} = \left(\frac{(-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}}{\det \mathbf{A}} \right) \\
 (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \\
 (c\mathbf{A})^{-1} = c^{-1} \mathbf{A}^{-1} \\
 (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T := \mathbf{A}^{-T} \\
 \text{diag}^{-1}(d_i) = \text{diag} \left(\frac{1}{d_i} \right) \\
 \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})^{-1}}_{=: \mathbf{X}} & -\mathbf{X}^{-1}\mathbf{BD}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CX}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{CX}^{-1}\mathbf{BD}^{-1} \end{array} \right] \\
 (\mathbf{A} + \mathbf{BDC})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{CA}^{-1}
 \end{array} \tag{A.76}$$

Für eine 2×2 -Matrix erhält man die Inverse nach (A.76) durch Vertauschen der Hauptdiagonalelemente, Ändern des Vorzeichens der Nebendiagonalelemente und Teilen durch die Determinante:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{A.77}$$

A.3.3 Vektorräume

Eine Menge von Elementen einer kommutativen Gruppe $(\mathbb{M}, +)$ (z.B. Vektoren aus dem \mathbb{R}^n) heißt *Vektorraum* über dem Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} , wenn folgende Verknüpfungsregeln für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{M}, \mu, \lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt sind:

$$\begin{array}{l}
 \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \\
 (\mu + \lambda)\mathbf{x} = \mu\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x} \\
 (\mu\lambda)\mathbf{x} = \mu(\lambda\mathbf{x}) \\
 1\mathbf{x} = \mathbf{x}
 \end{array} \tag{A.78}$$

Obige Definitionen werden in der Mathematik meist abstrakt postuliert, d.h. es wird bewusst darauf verzichtet, ein bestimmtes Koordinatensystem bei der Beschreibung von Vektoren zugrunde zu legen.

Das Rechnen mit Matrizen erfüllt offensichtlich gerade die Definitionen eines Vektorraums und lässt sich wie in Bild A.28 entsprechend geometrisch interpretieren. Die Repräsentation von Vektoren durch Matrizen mit einer Spalte bzw. einer Zeile legt allerdings ein konkretes Koordinatensystem zugrunde. Die Ströme und Spannungen eines elektrischen Netzwerk können als

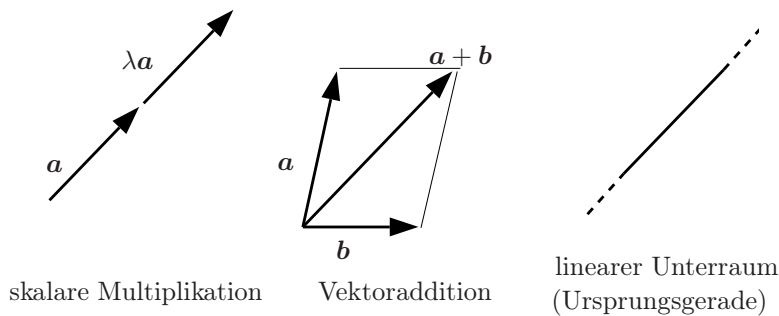


Bild A.28 Geometrische Interpretationen

Koordinaten eines Vektors und jeder Betriebspunkt somit auch geometrisch aufgefasst werden. Eine gewichtete Summe von Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$:

$$c_1 \mathbf{a}_1 + \dots + c_n \mathbf{a}_n \quad (\text{A.79})$$

heißt *Linearkombination* von $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Die Linearkombination von Vektoren kann man in das Rechenschema mit Matrizen einbetten:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{c} \quad (\text{A.80})$$

A.3.3.1 Lineare Unterräume

Ist \mathbb{W} eine Untermenge von \mathbb{M} , so dass für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{W}, \lambda \in \mathbb{R}$, gilt

$$\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in \mathbb{W} \quad (\text{A.81})$$

so heißt \mathbb{W} ein *linearer Unterraum* von \mathbb{M} .

Alle Vektoren \mathbf{x} , die sich durch Linearkombination der Spalten von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ erzeugen lassen, liegen in einem linearen Unterraum \mathbb{W} des \mathbb{R}^m . Man sagt, die Spalten von \mathbf{A} spannen den Unterraum \mathbb{W} auf. \mathbb{W} heißt auch das Bild von \mathbf{A} oder der Spaltenraum von \mathbf{A} :

$$\text{Bild } \mathbf{A} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{c}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n\} \quad (\text{A.82})$$

Gleichung (A.82) beschreibt die Vektoren in \mathbb{W} mit Hilfe der *Parameter* in \mathbf{c} und der Spaltenvektoren in \mathbf{A} . Daneben existiert auch die implizite Beschreibung eines linearen Unterraums in Form eines homogenen Gleichungssystems $\mathbf{B} \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Die Menge aller Lösungen dieses (unterbestimmten) Gleichungssystems heißt Kern von \mathbf{B} :

$$\text{Kern } \mathbf{B} := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{B} \mathbf{x} = \mathbf{0}\} \quad (\text{A.83})$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass alle Lösungen von Gl.(A.83) und (A.82) die Gleichung (A.81) des linearen Unterraumes erfüllen.

Beispiel: Der Betriebsraum eines linearen p -Tores "schneidet" einen p -dimensionalen linearen Unterraum aus dem $2p$ -dimensionalen Vektorraum aller denkbaren Ströme und Spannungen am p -Tor:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{c}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^p \right\}$$

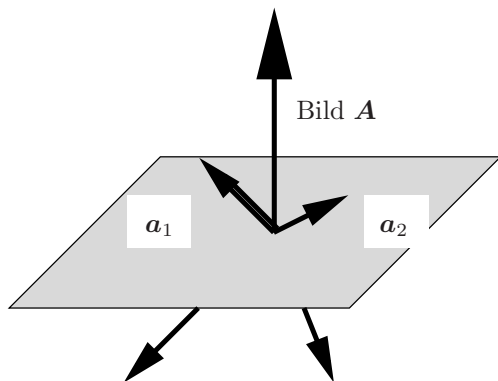


Bild A.29 Spaltenraum oder Bild einer zweispaltigen Matrix A , aufgespannt durch die Vektoren a_1 und a_2

A.3.3.2 Lineare Abhängigkeit, Basis und Rang einer Matrix

Vektoren a_1, \dots, a_n heißen linear abhängig, wenn Zahlen c_1, \dots, c_n existieren, die nicht alle 0 sind, so dass sich der Nullvektor durch Linearkombination erzeugen lässt:

$$c_1 a_1 + \dots + c_n a_n = 0 \tag{A.84}$$

Eine linear unabhängige Menge von Vektoren a_1, \dots, a_n , die den linearen Unterraum \mathbb{W} aufspannen, ist eine Basis von \mathbb{W} . Eine solche Basis erfüllt folgende Eigenschaften:

- Jede Basis von \mathbb{W} enthält dieselbe Zahl von Elementen; diese Zahl heißt die *Dimension* von \mathbb{W} .
- Ist a_1, \dots, a_n eine Basis von \mathbb{W} , dann lässt sich jedes Element $x \in \mathbb{W}$ als Linearkombination dieser Basisvektoren darstellen: $x = \sum_{i=1}^n c_i a_i$. Die Wahl der c_i ist eindeutig.

Bezogen auf die Matrix A , deren Spalten den Unterraum \mathbb{W} aufspannen, spricht man vom *Rang* $r(A)$. Der Rang $r(A)$ ist also gleich der maximalen Zahl von linear unabhängigen Spaltenvektoren in A bzw. gleich der Dimension des Spaltenraumes von A . Diese Aussagen gelten in gleicher Weise auch für die Zeilenvektoren von A .

Den Rang einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ erkennt man am besten, indem man sie als Produkt einer $(m \times r)$ Matrix C mit r linear unabhängigen Spalten und einer $(r \times n)$ Matrix D mit r linear unabhängigen Zeilen darstellt, wie Bild A.30 veranschaulicht. Für den Rang von Matrizen

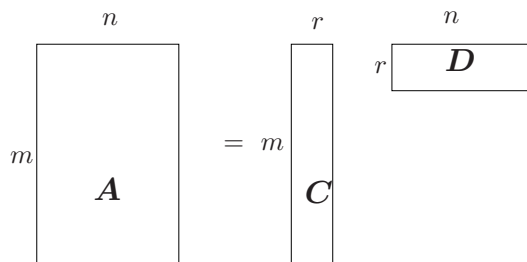


Bild A.30 Repräsentation einer Rang r Matrix

$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq r(\mathbf{A}) \leq \min(m, n) \\
 r(\mathbf{A}) &= r(\mathbf{A}^T) \\
 r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &\leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) \\
 r(\mathbf{AT}) &\leq \min(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{T})) \\
 r(\mathbf{AT}) &= r(\mathbf{A}) \text{ falls } \det(\mathbf{T}) \neq 0
 \end{aligned}
 \tag{A.85}$$

Falls die Spalten von \mathbf{A} eine Basis von \mathbb{W} sind, so bilden die Spalten von \mathbf{AT} für $\det(\mathbf{T}) \neq 0$ wieder eine Basis von \mathbb{W} . Durch Variation über alle nichtsingulären Matrizen \mathbf{T} lassen sich alle möglichen Basen von \mathbb{W} erzeugen.

A.3.3.3 Länge, Winkel und Orthogonalität

Das Skalarprodukt oder Innenprodukt von Vektoren definierte eine Längen- und Winkelmessung im Vektorraum. Es gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}^T \mathbf{a} &= |\mathbf{a}|^2 > 0 \text{ für } \forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \\
 \cos(\angle_a^b) &= \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \\
 \mathbf{a}^T \mathbf{b} &= \mathbf{b}^T \mathbf{a} \quad (\text{symmetrisch}) \\
 \lambda(\mathbf{a}^T \mathbf{b}) &= \mathbf{a}^T (\lambda \mathbf{b}) \quad (\text{bilinear}) \\
 \mathbf{a}^T (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a}^T \mathbf{b} + \mathbf{a}^T \mathbf{c} \quad (\text{distributiv}) \\
 |\mathbf{a}^T \mathbf{b}| &\leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \quad (\text{Cauchy-Schwarzsche Ungleichung}) \\
 |\mathbf{a} + \mathbf{b}| &\leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \quad (\text{Dreiecksungleichung})
 \end{aligned}
 \tag{A.86}$$

Zwei Vektoren heißen zueinander *orthogonal*, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = 0
 \tag{A.87}$$

Der Begriff der Orthogonalität lässt sich auch auf lineare Unterräume erweitern: Zwei Unterräume \mathbb{W}_1 und \mathbb{W}_2 sind zueinander orthogonal, wenn jeder Vektor aus \mathbb{W}_1 zu jedem Vektor aus \mathbb{W}_2 orthogonal ist.

Dazu muss für zwei beliebige Basismatrizen \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 von bzw. gelten:

$$\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 = \mathbf{0}
 \tag{A.88}$$

Bild A.31 veranschaulicht geometrisch zwei zueinander orthogonale Unterräume. Die Leistungsflussmessung in elektrischen Netzwerken lässt sich als Längenmessung des zugehörigen Betriebsvektors interpretieren. Dazu ist allerdings die Einführung einer neuen Messmetrik“ erforderlich, die den Zusammenhang zwischen der formalen mathematischen Längenmessung

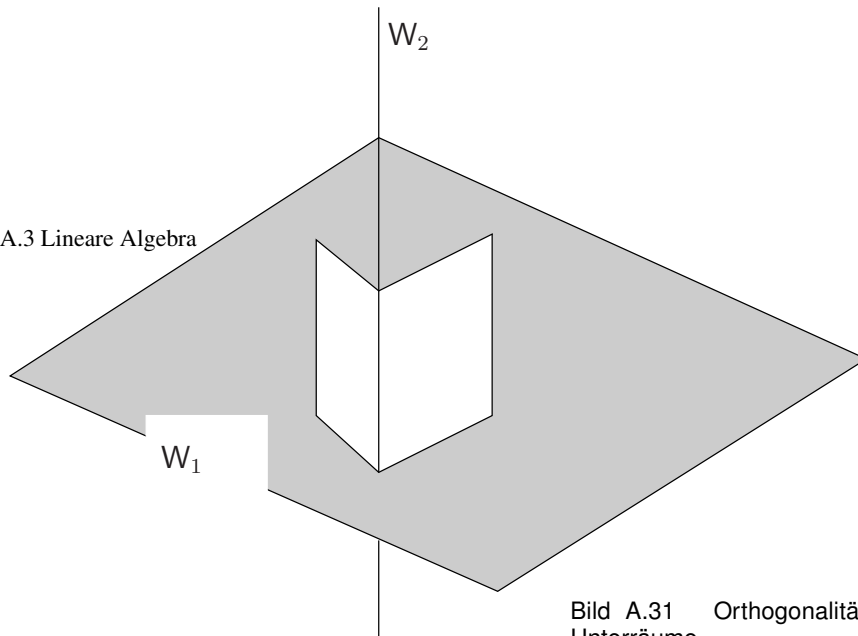


Bild A.31 Orthogonalität zweier Unterräume

und dem physikalischen Leistungsfluss herstellt. Insbesondere ist zu bedenken, dass der Leistungsfluss sowohl positiv als auch negativ sein kann, je nachdem ob das elektrische Netzwerk Leistung aufnimmt oder abgibt. Die Metrik beeinflusst man durch das Einfügen einer *symmetrischen* Gewichtungsmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ (Metriktenor) im Skalarprodukt. Längen- und Winkelmessung verallgemeinern sich damit zu:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{a} &= |\mathbf{a}|_C^2 \\
 \cos(\angle_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^{\mathbf{C}}) &= \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|_C |\mathbf{b}|_C} \\
 \mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{b} &= \mathbf{b}^T \mathbf{C} \mathbf{a} \quad (\text{symmetrisch}) \\
 (\lambda \mathbf{a}^T) \mathbf{C} \mathbf{b} &= \mathbf{a}^T \mathbf{C} (\lambda \mathbf{b}) \quad (\text{bilinear}) \\
 \mathbf{a}^T \mathbf{C} (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{b} + \mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{c} \quad (\text{distributiv})
 \end{aligned}
 \tag{A.89}$$

Für indefinite Gewichtsmatrizen \mathbf{C} (vgl. quadratische Formen) sind die Ungleichungen von (A.86) nicht mehr erfüllt. Zwei Vektoren heißen \mathbf{C} -orthogonal, wenn das gewichtete Skalarprodukt $\mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{b}$ verschwindet.

Beispiel: Die Momentanleistung an einem resistiven Eintor ist gegeben durch

$$p = u \cdot i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix}$$

Somit lässt sich die Zuordnung $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix}$ und $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ treffen und man kann folgende qualitativ unterschiedlichen „Längen“ messen:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \text{ V} \\ 1 \text{ A} \end{bmatrix} \Rightarrow p = 1 \text{ W}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \text{ V} \\ 1 \text{ A} \end{bmatrix} \Rightarrow p = 0 \text{ W}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \text{ V} \\ -1 \text{ A} \end{bmatrix} \Rightarrow p = -1 \text{ W}$$

Ein Vektor, der nicht selbst der Nullvektor ist, dessen verallgemeinerte Länge aber verschwindet, heißt *isotrop*. Ein ganzer Unterraum ist isotrop, wenn für eine beliebige Basismatrix \mathbf{A} gilt:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (\text{A.90})$$

Beispiel:

Der Betriebsraum $\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$ eines verlustlosen linearen resistiven p -Tores ist ein isotroper Unterraum bezüglich des Metriktensors $\begin{bmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

A.3.4 Lineare Abbildungen und Gleichungssysteme

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ordnet jedem Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ einen Vektor $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ zu. Die Abbildung f heißt linear, wenn gilt:

- $f(\alpha, \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$, (homogen)
- $f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2)$, (additiv)

Für eine konkrete Basiswahl in den beiden Vektorräumen lässt sich eine lineare Abbildung immer als Multiplikation mit einer festen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ schreiben:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (\text{A.91})$$

Konzentriert man sich zunächst auf die Menge aller möglichen Bildvektoren $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ und die zugehörigen Ursprungsvektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, so fällt die Äquivalenz von (A.82) und (A.91) auf, d.h. alle Bildvektoren liegen im linearen Unterraum \mathbf{A} . Jedem Vektor \mathbf{x} wird genau ein Vektor \mathbf{y} zugeordnet. Das Urbild von \mathbf{y} muss jedoch nicht eindeutig sein: Angenommen es existieren zwei Urbilder \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 , die auf dasselbe \mathbf{y} abgebildet werden, so muss aufgrund der Linearität der Abbildung gelten

$$\mathbf{A} \mathbf{x}_1 - \mathbf{A} \mathbf{x}_2 = \mathbf{y} - \mathbf{y} = \mathbf{0} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$$

Diese Bedingung an den Differenzvektor $\mathbf{d} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ definiert nach (A.83) selbst einen linearen Unterraum im \mathbb{R}^n , den Kern von \mathbf{A} . Das Urbild von \mathbf{y} ist somit nur eindeutig bis auf die Addition eines beliebigen Vektors $\mathbf{d} \in \text{Kern } \mathbf{A}$.

Betrachtet man die „transponierte“ Abbildung $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$, die offensichtlich eine Abbildung $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ darstellt, so folgt aus (A.82), dass alle Bildvektoren \mathbf{x} im linearen Unterraum \mathbf{A}^T liegen. Die Mehrdeutigkeit des Urbildes ist diesmal durch den Kern \mathbf{A}^T gegeben.

Die Dimension der beiden Unterräume Bild \mathbf{A} und Bild \mathbf{A}^T sind gleich dem Rang der Matrix \mathbf{A} .

Bild \mathbf{A} und Kern \mathbf{A}^T definieren je einen Unterraum im \mathbb{R}^m . Seien $\mathbf{y}_B \in \text{Bild } \mathbf{A}$ und $\mathbf{y}_K \in \text{Kern } \mathbf{A}^T$ zwei beliebige Vektoren aus den jeweiligen Unterräumen, so erhält man für deren Skalarprodukt

$$\mathbf{y}_B^T \mathbf{y}_K = (\mathbf{A} \mathbf{x})^T \mathbf{y}_K = (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T) \mathbf{y}_K = \mathbf{x}^T \underbrace{(\mathbf{A}^T \mathbf{y}_K)}_{\mathbf{0}} = 0$$

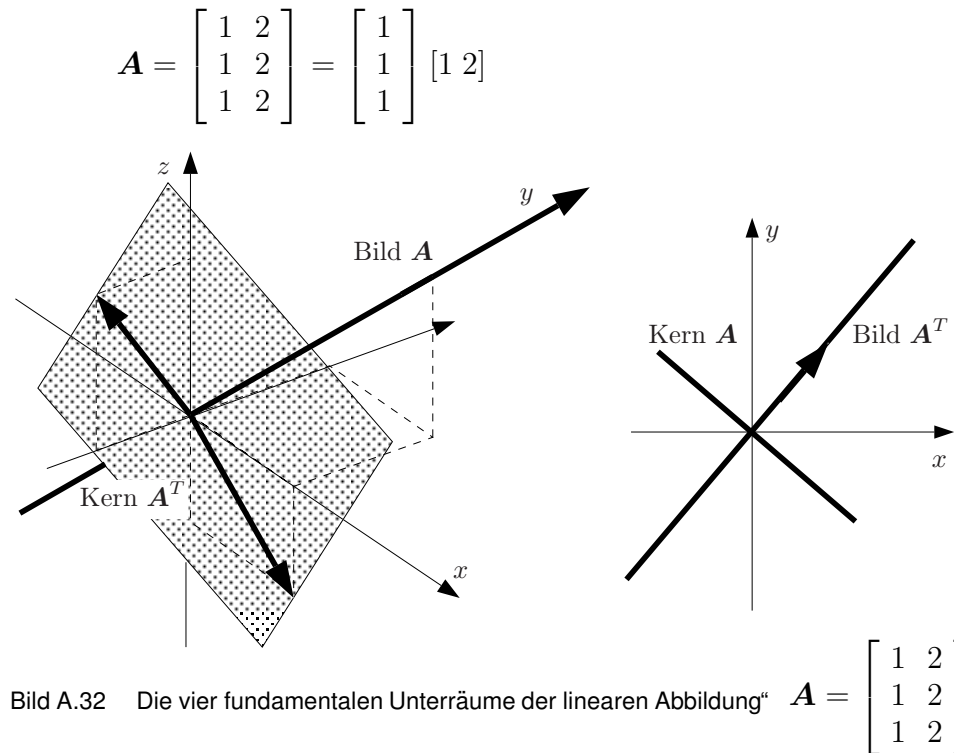
Beide Unterräume stehen somit aufeinander senkrecht. Die Dimensionen von Bild \mathbf{A} und Kern \mathbf{A}^T ergänzen sich zur Gesamtdimension m . Kern \mathbf{A}^T heißt deshalb auch das orthogonale Komplement zu Bild \mathbf{A} (und umgekehrt).

Dieselbe Eigenschaft lässt sich für die entsprechend definierten Unterräume im \mathbb{R}^n , d.h. für Bild \mathbf{A}^T und Kern \mathbf{A} , ableiten.

Mit jeder Matrix \mathbf{A} bzw. linearen Abbildung sind somit vier fundamentale Unterräume verknüpft, die paarweise aufeinander senkrecht stehen und deren Dimensionen vom Rang r der Matrix \mathbf{A} bestimmt werden. Diese Eigenschaften sind im *Fundamentalsatz* der linearen Algebra zusammengefasst:

$$\begin{array}{l} \text{Bild } \mathbf{A} = (\text{Kern } \mathbf{A}^T)^\perp; \quad \dim(\text{Bild } \mathbf{A}) = r; \quad \dim(\text{Kern } \mathbf{A}^T) = m - r \\ \text{Bild } \mathbf{A}^T = (\text{Kern } \mathbf{A})^\perp; \quad \dim(\text{Bild } \mathbf{A}^T) = r; \quad \dim(\text{Kern } \mathbf{A}) = n - r \end{array} \quad (\text{A.92})$$

Bild A.32 veranschaulicht diese Zusammenhänge für die Rang-1-Abbildungsmatrix.



Beispiel:

Alle Kantenspannungen an einem Kirchhoffnetz mit der Knoteninzidenzmatrix \mathbf{A} gehorchen der Gleichung $\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}_k$ für beliebige Knotenspannungen \mathbf{u}_k . Die Kantenströme an jedem Netzwerk derselben Topologie sind durch die Gleichung $\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$ charakterisiert. Aus $\mathbf{u} \in \text{Bild } \mathbf{A}^T$ und $\mathbf{i} \in \text{Kern } \mathbf{A}$ folgt somit der Tellegen'sche Satz bzw. die Orthogonalität aller nur denkbaren \mathbf{u} 's und \mathbf{i} 's an Netzwerken gleicher Topologie.

A.3.4.1 Längentreue Abbildungen

Eine wichtige Klasse von linearen Abbildungen sind längen- und winkeltreue Abbildungen von $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Eine solche Abbildung sei durch die Matrix \mathbf{Q} beschrieben. Sie darf nach

(A.86) das Skalarprodukt zwischen zwei Bildvektoren im Vergleich zum Skalarprodukt der Ursprungsvektoren nicht verändern, d.h. für alle Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} muss gelten:

$$(\mathbf{Q}\mathbf{a})^T \mathbf{Q}\mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$$

Das Produkt $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$ muss somit gleich der Einheitsmatrix sein:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{1} \tag{A.93}$$

Die Matrix \mathbf{Q} heißt orthogonal, da die Spalten von \mathbf{Q} aufeinander senkrecht stehen (sollte aber eigentlich besser orthonormal heißen, da die Spaltenvektoren außerdem die Länge 1 haben). Bei der verallgemeinerten Längenmessung nach (A.89) geht (A.93) in

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q} = \mathbf{C} \tag{A.94}$$

über.

Beispiel:

Am Tor 2 eines Zweitors wird die Leistung $p_2 = u_2(-i_2)$ abgegeben, die man als verallgemeinerte Länge des Zustandsvektors $\begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$ interpretieren kann:

$$p_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

Der Zustandsvektor $\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$ am Eingang des Zweitors ergibt sich mit Hilfe der Kettenmatrix \mathbf{A} als lineares Abbild von $\begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$ zu

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

Werden alle Zustandsvektoren am Tor 2 auf Zustandsvektoren gleicher Länge am Tor 1 abgebildet, so ist das Zweitor verlustlos. Nach Gleichung A.94 muss die Kettenmatrix eines solchen verlustlosen Zweitors \mathbf{C} -orthogonal sein:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} = \mathbf{C} \quad \text{mit } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \text{Zweitor verlustlos}$$

A.3.4.2 Lineare Gleichungen

Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten hat die Form einer linearen Abbildung

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{A.95}$$

mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Gesucht ist das Urbild \mathbf{x} von \mathbf{b} . Es gilt folgende prinzipiellen Unterscheidungen zu treffen:

- Falls $m = n$ und \mathbf{A} nichtsingulär ist ($\det \mathbf{A} \neq 0$), so hat das Gleichungssystem genau eine Lösung:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \tag{A.96}$$

- Die Gleichungen sind konsistent (d.h. sie haben zumindest eine Lösung) wenn \mathbf{b} im Bildraum von \mathbf{A} liegt ($\mathbf{b} \in \text{Bild } \mathbf{A}$) oder wenn

$$\text{Rang}[\mathbf{b}, \mathbf{A}] = \text{Rang } \mathbf{A} \quad (\text{A.97})$$

gilt. Lösungen des homogenen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ können zu dieser Lösung addiert werden und liefern wieder eine Lösung.

- Das homogene System $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hat genau dann eine nichttriviale Lösung $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, wenn

$$\text{Rang } \mathbf{A} < m \quad (\text{A.98})$$

gilt. Für quadratische Matrizen ($m = n$) ist dies gleichbedeutend mit $\det \mathbf{A} = 0$.

A.3.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Für eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist der Term

$$c(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1})$$

ein Polynom in λ vom Grad n . $c(\lambda)$ heißt das *charakteristische Polynom* der Matrix \mathbf{A} . Die n (möglicherweise komplexen) Nullstellen dieses Polynoms sind die *Eigenwerte* von \mathbf{A} .

Für das charakteristische Polynom und dessen Nullstellen gelten die Rechenregeln:

$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = (-\lambda)^n + \text{Spur } \mathbf{A}(-\lambda)^{n-1} + \dots + \det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda)$	(A.99)
$\det(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{1}) = \prod_{i=1}^n (r_{ii} - \lambda) \quad \mathbf{R} \text{ dreieckig oder diagonal}$	
$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = \det \mathbf{C}^{-1} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \det \mathbf{C} = \det(\mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} - \lambda \mathbf{1})$	
$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det \mathbf{A}, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Spur } \mathbf{A}$	

Die Matrix $\mathbf{A} + \alpha \mathbf{1}$ hat die Eigenwerte $\lambda_i + \alpha$ und dieselben Eigenvektoren wie \mathbf{A} . Für jedes $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ verschwindet $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1})$. Infolgedessen hat das Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x}$$

eine nichttriviale Lösung $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Der Vektor \mathbf{x} heißt *Eigenvektor* zum Eigenwert λ_i . Falls \mathbf{x} und \mathbf{y} Eigenvektoren zu λ_i sind, so sind $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ und $\alpha \mathbf{x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) ebenfalls Eigenvektoren zu λ_i . Somit bildet die Menge aller Eigenvektoren zum Eigenwert λ_i einen linearen Unterraum, der auch *Eigenraum* zum Eigenwert λ_i genannt wird.

Im allgemeinen wird eine Matrix, die ein technisches System beschreibt, n verschiedene Eigenwerte besitzen. Zu jedem dieser Eigenwerte λ_i gehört ein eindimensionaler Eigenraum, der vom Eigenvektor \mathbf{x}_i aufgespannt wird. Fasst man alle Eigenvektoren spaltenweise zu einer Matrix \mathbf{X} zusammen, so hat diese Matrix vollen Rang (d.h. die Eigenvektoren sind linear unabhängig). Da folgender Zusammenhang gilt:

$$\mathbf{X}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{X} = \text{diag}(\lambda_i) \quad (\text{A.100})$$

heißt die Matrix \mathbf{A} *diagonalisierbar*.

A.3.5.1 Jordanform

Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, deren charakteristisches Polynom mehrfache Nullstellen besitzt, wird im allgemeinen nicht diagonalisierbar sein. Wenn k die *algebraische* Vielfachheit der Nullstelle λ_i des charakteristischen Polynoms bezeichnet und $r = n - \text{Rang}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1})$ den Rangabfall der Matrix $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1})$, so besitzt die Matrix \mathbf{A} nur r statt k linear unabhängige Eigenvektoren zum k -fachen Eigenwert λ_i . Dabei gilt die Relation:

$$1 \leq r \leq k$$

Die Größe r heißt die *geometrische* Vielfachheit des Eigenwertes λ_i . Nur im Fall $r = k$ (für alle mehrfachen Eigenwerte) ist die Matrix \mathbf{A} diagonalisierbar. Auch wenn zum Eigenwert der algebraischen Vielfachheit k nur r linear unabhängige Eigenvektoren existieren, so existiert doch in jedem Fall ein k -dimensionaler Unterraum Bild \mathbf{V} , der auf sich selbst abgebildet wird:

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{J}_i$$

Bei geeigneter Wahl der Basisvektoren in \mathbf{V} , kann man die $k \times k$ Matrix \mathbf{J}_i in die Form:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_i^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_i^{(r)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_i^{(p)} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad p = 1, \dots, r \quad (\text{A.101})$$

bringen. Die Blockmatrizen $\mathbf{J}_i^{(p)}$ heißen Jordanblöcke. Mit jedem Jordanblock der Dimension $u \times u$ sind genau ein Eigenvektor \mathbf{v}_1 und $(u - 1)$ Hauptvektoren $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_u$ der Stufen 2 bis u verbunden. Ein Hauptvektor \mathbf{v}_q der Stufe q von \mathbf{A} zum Eigenwert λ_i gehorcht den Bedingungen:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1})^q \mathbf{v}_q = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1})^{q-1} \mathbf{v}_q \neq \mathbf{0}$$

Der Eigenvektor und die Hauptvektoren bezüglich des Jordanblocks $\mathbf{J}_i^{(p)}$ lassen sich rekursiv aus der Gleichung

$$\mathbf{A}[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_u] = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_u] \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

bestimmen:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1})\mathbf{v}_1 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1})\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 \\ (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1})\mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_2 \\ &\vdots \\ (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1})\mathbf{v}_u &= \mathbf{v}_{u-1} \end{aligned}$$

Kombiniert man alle Eigen- und Hauptvektoren zu einer Matrix \mathbf{P} , so erhält man eine Matrix mit vollem Rang (die Eigen- und Hauptvektoren sind linear unabhängig) und es gilt:

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \text{diag}(\mathbf{J}_i) \quad (\text{A.102})$$

Diese Zerlegung existiert für jede beliebige quadratische Matrix \mathbf{A} .

Beispiel 1:

Folgende Matrix hat den zweifachen Eigenwert 8 und den dreifachen Eigenwert 0. Ihre Zerlegung in Jordanblöcke hat die Form:

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} & & & & \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & & & \\ & \mathbf{J}_2^{(1)} & & & \\ & & & & \mathbf{J}_3^{(2)} \end{bmatrix}$$

Beispiel 2:

Mögliche Eigenvektoren und Hauptvektoren der Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

lauten:

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta - 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Mit Hilfe von $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ lässt sich \mathbf{A} unabhängig von der Wahl der Parameter α, β , und γ , auf Jordanform bringen. Man kann deshalb bei der Berechnung einer Hauptvektorkette von vornherein möglichst einfache Parameter wählen.

A.3.5.2 Funktionen von Matrizen

Als Verallgemeinerung von skalaren Funktionen treten in mehrdimensionalen Systemen oft Funktionen von Matrizen auf. Grob gesprochen ergibt sich die matrixwertige Funktion $f(\mathbf{A})$ aus der skalaren Funktion $f(x)$ durch Substitution von x durch \mathbf{A} , wenn $f(x)$ an der Stelle der Eigenwerte von \mathbf{A} definiert ist. So wird z.B. aus der Funktion $f(x) = (1+x)/(1-x)$ die matrixwertige Funktion $(\mathbf{1} + \mathbf{A})(\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$.

Die Berechnung von $f(\mathbf{A})$ wird etwas schwieriger, wenn $f(\cdot)$ eine transzendente Funktion ist. Eine Möglichkeit in dieser Situation ist, die Eigenwertzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^{-1}$ zu berechnen und die Formel

$$\boxed{f(\mathbf{A}) = \mathbf{X}f(\mathbf{\Lambda})\mathbf{X}^{-1}} \quad (\text{A.103})$$

zu benutzen. Der Zusammenhang (A.103) folgt formal aus der Reihenentwicklung von $f(\mathbf{A})$:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \mathbf{A}^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (\mathbf{X}\mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^{-1})^i = \mathbf{X} \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i \mathbf{\Lambda}^i \right) \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}f(\mathbf{\Lambda})\mathbf{X}^{-1}$$

Für eine diagonale Matrix $\mathbf{\Lambda}$ ergibt sich:

$$f(\mathbf{\Lambda}) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

Für einen nichttrivialen ($u \times u$) Jordanblock der Form (A.101) erhält man:

$$f(\mathbf{J}_i^{(p)}) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2} & \cdots & \frac{f^{u-1}(\lambda_i)}{(u-1)!} \\ & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & f(\lambda_i) & \ddots & \frac{f''(\lambda_i)}{2} \\ & & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ & & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

wobei $f'(\lambda_i), f''(\lambda_i), \dots, f^{u-1}(\lambda_i)$ die Ableitungen von $f(x)$ bis zur Ordnung $(u-1)$ bezeichnen.

Beispiel:

Gesucht sei die matrixwertige Funktion $e^{\mathbf{A}t}$ für

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Matrix \mathbf{A} besitzt die Jordan-Normalform

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}^{-1}}$$

Für den Jordanblock \mathbf{J} als matrixwertiges Argument der ursprünglich skalaren Funktion $e^{x \cdot t}$ erhält man:

$$e^{\mathbf{J}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Nach der Rücktransformation ergibt sich somit:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{bmatrix} e^{2t}$$

A.3.6 Quadratische Formen

Quadratische Formen sind Ausdrücke der Form,

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (\text{A.104})$$

wobei \mathbf{A} eine symmetrische Matrix bezeichnet². Solche quadratischen Ausdrücke treten z.B. bei der Längenmessung von Vektoren, bei der Leistungsmessung oder Energiemessung oder auch als quadratisches Glied bei der Reihenentwicklung von skalaren Funktionen mehrerer Veränderlicher auf.

Jede quadratische Form lässt sich in eine gewichtete Summe von reinen Quadraten transformieren. Dies gelingt mit Hilfe der Eigenwertzerlegung von $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Für die Eigenwertzerlegung einer symmetrischen Matrix gilt:

- \mathbf{A} ist diagonalisierbar und es existiert eine orthogonale Matrix \mathbf{Q} ($\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{1}$) so dass $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \text{diag}(\lambda_i)$ erfüllt ist.
- Alle Eigenwerte sind reell.

Besitzt \mathbf{A} nur verschiedene Eigenwerte, die in der Diagonalmatrix $\text{diag}(\lambda_i)$ der Größe nach geordnet seien, so ist die Matrix \mathbf{Q} der Eigenvektoren bis auf den Orientierungssinn (Vorzeichen) eindeutig. Bei einem k -fachen Eigenwert spannen die zugehörigen Spalten $\mathbf{q}_q, \dots, \mathbf{q}_{q+k-1}$ in \mathbf{Q} einen k -dimensionalen Unterraum auf, wobei jeder Vektor in diesem Unterraum Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist. Dieser Unterraum ist eindeutig, nicht jedoch die Wahl der (orthogonalen) Basis $[\mathbf{q}_q, \dots, \mathbf{q}_{q+k-1}]$. Eine beliebige, ebenfalls orthogonale Basis lässt sich durch folgende Transformation gewinnen: $[\tilde{\mathbf{q}}_q, \dots, \tilde{\mathbf{q}}_{q+k-1}] = [\mathbf{q}_q, \dots, \mathbf{q}_{q+k-1}] \mathbf{P}$ mit $\mathbf{P} \mathbf{P}^T = \mathbf{1}_k$

Die winkel- und längenerhaltende Transformation $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^T \mathbf{x}$ führt somit zu einer Diagonalisierung der quadratischen Form, in der keine Mischterme mehr auftreten:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \text{diag}(\lambda_i) \mathbf{Q}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \text{diag}(\lambda_i) \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \quad (\text{A.105})$$

Die Transformation $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^T \mathbf{x}$ heißt auch Hauptachsentransformation.

Quadratische Formen werden folgendermaßen klassifiziert:

$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ \Leftrightarrow \mathbf{A} ist positiv definit	(A.106)
$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ \Leftrightarrow \mathbf{A} ist positiv semidefinit	
$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \neq 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ \Leftrightarrow \mathbf{A} ist indefinit	

Aus der Hauptachsentransformation kann man unmittelbar erkennen, dass \mathbf{A} genau dann positiv definit ist, wenn alle Eigenwerte größer als 0 sind. \mathbf{A} ist positiv semidefinit, wenn zu den positiven Eigenwerten auch Nulleigenwerte hinzukommen. Wenn die Eigenwerte von \mathbf{A} unterschiedliche Vorzeichen haben, so ist die zugehörige quadratische Form indefinit. In diesem Fall








²Die Matrix \mathbf{A} lässt sich notfalls durch ihren symmetrischen Anteil $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$ ersetzen, ohne den Wert der quadratischen Form $Q(\mathbf{x})$ zu verändern (siehe Beweis zu Gleichung (A.79))

Literaturverzeichnis

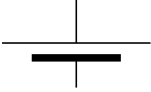


- [1] L.O. Chua, C.A. Desoer, E.S. Kuh, „Linear and Nonlinear Circuits“, *McGraw-Hill, Inc.*, New York 1987.
- [2] G.H. Golub, C.F. van Loan, „Matrix Computations“, *The Johns Hopkins University Press*, Baltimore 1989.
- [3] K.V. Mardia, J.T. Kent, J.M. Bibby, „Multivariate Analysis“, *Academic Press*, London 1979.
- [4] K. Meyberg, P. Vachenauer, „Höhere Mathematik 1“, *Springer-Verlag*, Berlin 1990.
- [5] G. Strang, „Linear Algebra and its Applications“, *Academic Press, Inc.*, New York 1980.

A.4 Netzwerkelemente (Circuit Elements)

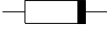
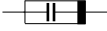
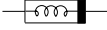









Allgemeine Symbole

	Knoten	node
	Klemme	terminal
	Masse, Bezugspotential	ground, datum
	Knotennummern	node numbers
	Draht	wire
	Stromzählpfeil	current reference direction
	Spannungszählpfeil	voltage reference direction

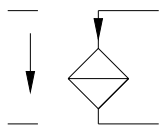
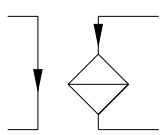
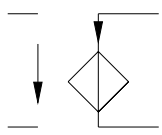
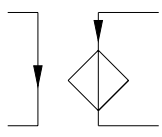
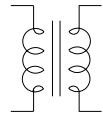
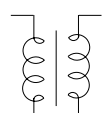
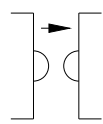
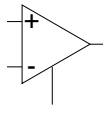
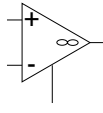
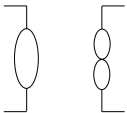
Quellen (Sources)

	Batterie Galvanisches Element	battery, galvanic element
	(unabhängige) Stromquelle	(independent) current source
	(unabhängige) Spannungsquelle	(independent) voltage source





Weitere Zweipole (Two-Terminal Elements)

	nichtlinearer Widerstand	nonlinear resistor
	nichtlineare Kapazität	nonlinear capacitor
	nichtlineare Induktivität	nonlinear inductor
	(linearer) Widerstand	(linear) resistor
	(lineare) Kapazität	(linear) capacitor
	(lineare) Induktivität	(linear) inductor
	Schalter	switch
	ideale Diode	ideal diode
(G, U) 	konkaver Widerstand	concave resistor
(R, I) 	konvexer Widerstand	convex resistor
	Nullator	nullator
	Norator	norator



Zweitore (Two-Ports)

	spannungsgesteuerte Stromquelle	voltage-controlled current source
	stromgesteuerte Stromquelle	current-controlled current source
	spannungsgesteuerte Spannungsquelle	voltage-controlled voltage source
	stromgesteuerte Spannungsquelle	current-controlled voltage source
	idealer Übertrager	ideal transformer
	Übertrager	transformer
	Gyrator	gyrator
	Operationsverstärker	op-amp
	idealer Operationsverstärker	ideal op-amp
	Nullor	nullor




Dioden (Diodes)

	pn-Übergang	pn-junction
	Tunneldiode	tunnel diode
	Zener-Diode	zener diode
	Varaktor	varactor

Bipolare Transistoren (Bipolar Transistors)

	nnp-Transistor	nnp-transistor
	pnp-Transistor	pnp-transistor

MOS³-FETs⁴

	n-Kanal Anreicherungstyp	n-channel enhancement type
	p-Kanal Anreicherungstyp	p-channel enhancement type
	n-Kanal Verarmungstyp	n-channel depletion type

³MOS: metal oxide semiconductor

⁴FET: field effect transistor