



# Exakte Ein-/Ausgangslinearisation für die translatorische Dynamik eines Quadrocopters

Exact Input-Output Linearization for the Translational Dynamics of a Quadrotor Helicopter

Michael Buhl, Oliver Fritsch, Boris Lohmann, TU München

**Zusammenfassung** Der Beitrag beschreibt eine exakte E/A-Linearisierung für die translatorische Dynamik eines Quadrocopters. Die hierfür relevante Lageinformation reduziert sich auf die Ausrichtung des Schubvektors (bzw. der körperfesten z-Achse), welche mit zwei Freiheitsgraden beschrieben werden kann. Hierzu wird im vorliegenden Beitrag ein spezielles Schubachsenquaternion eingeführt. Die E/A-Linearisierung selbst erfolgt in zwei Stufen. Zunächst wird eine E/A-Linearisierung zwischen der z-Position und dem Schub durchgeführt und anschließend eine E/A-Linearisierung zwischen der xy-Position und den Stellmomenten.

**►►► Summary** This paper presents an exact input-output linearization for the translational dynamics of a quadrotor helicopter. For this purpose the required attitude information is fully given by the orientation of the thrust vector (coinciding with the body-fixed z-axis), which can be described with only two degrees of freedom. To this end a special quaternion for the thrust axis is introduced in this paper. The input-output linearization then consists of two stages. First an input-output linearization relating z position to thrust is performed and followed by a second input-output linearization relating xy position to the control torques.

**Schlagwörter** Positionsregelung, Quaternionen, Quadrocopter, Ein-/Ausgangslinearisation ►►► **Keywords** Position control, quaternions, quadrotor, feedback linearization

## 1 Einleitung

Unbemannte Flugsysteme besitzen ein breites und stetig wachsendes Anwendungsspektrum. Dieses reicht vom reinen Modellflug über kommerzielle Anwendungen (beispielsweise Inspektionsaufgaben, Filmaufnahmen oder Katastrophenschutz) bis hin zu militärischen Missionen. Das Flugsystem führt die jeweilige Aufgabe dabei entweder autonom oder von einem Bediener ferngesteuert durch.

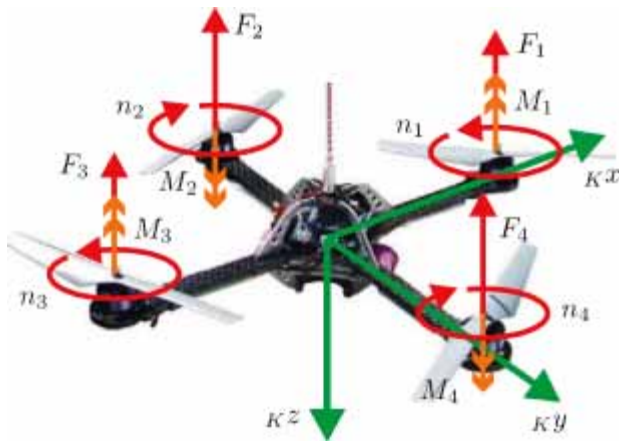
Der Quadrocopter ist ein besonders agiles unbemanntes Flugsystem, welches als Senkrechtstarter zusätzlich die Fähigkeit zum Schwebeflug mitbringt. Er besteht aus einem kreuzförmigen starren Rahmen, an dessen vier

Enden sich je ein Rotor befindet. Wie in Bild 1 skizziert erzeugen die vier Rotoren Schubkräfte  $F_1, \dots, F_4$  und Momente  $M_1, \dots, M_4$ . Aufgrund der paarweise verschiedenen Drehrichtungen wirken die Momente  $M_1, M_3$  gegensätzlich zu den Momenten  $M_2, M_4$ .

Für die vorgestellte E/A-Linearisierung wird die Dynamik der Rotoren vernachlässigt und davon ausgegangen, dass über die Rotordrehzahlen  $n_1, \dots, n_4$  jeweils eine Schubkraft und ein Moment vorgegeben werden kann:

$$F_i = F_i(n_i) \quad M_i = M_i(n_i) \quad (1)$$

Verschiebt man die Schubkräfte  $F_i$  sowie die Momente  $M_i$  in den Schwerpunkt des Quadrocopters, so ergibt



**Bild 1** Beispiel für einen Quadcopter. Hier der AscTec Hummingbird.

sich dort ein resultierender Schubkraftvektor  $\mathbf{S}$  sowie ein resultierender Momentenvektor  $\mathbf{M}$ , welche sich im körperfesten Koordinatensystem von Bild 1 darstellen als

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(F_1 + F_2 + F_3 + F_4) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{M} = (M_x \quad M_y \quad M_z)^T, \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L & 0 & -L \\ L & 0 & -L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$M_z = -M_1 + M_2 - M_3 + M_4, \quad (5)$$

wobei  $L$  die Entfernung zwischen dem Schwerpunkt des Quadcopters und den Rotoren bezeichnet. In diesem Beitrag wird davon ausgegangen, dass der nichtlineare Zusammenhang zwischen den Rotordrehzahlen  $n_i$  und den Kräften  $F_i$  bzw. Momenten  $M_i$  (in Form von Kennlinien) bekannt ist. Dadurch können anstelle der vier Rotordrehzahlen der Vektor  $\mathbf{M}$  und die  $z$ -Komponente  $S$  des Schubkraftvektors  $\mathbf{S}$  als Eingangsgrößen betrachtet werden. Letztere wird im Folgenden auch als Schub bezeichnet.

Ziel der vorgestellten E/A-Linearisierung ist es, ein Stellgesetz der Form  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\dots, v_x, v_y, v_z)$  und  $S = S(\dots, v_x, v_y, v_z)$  zu bestimmen, so dass anschließend über die drei virtuellen Eingangsgrößen  $v_x, v_y, v_z$  zeitliche Ableitungen der Ausgangsgrößen  $x, y, z$  (Position des Quadcopters) vorgegeben werden können:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^{(\delta_x)} \\ \dot{y}^{(\delta_y)} \\ \dot{z}^{(\delta_z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Durch geeignete Vorgabe der virtuellen Eingangsgrößen  $v_x, v_y, v_z$  lässt sich darauf aufbauend eine gewünschte Dynamik für das System (6) einstellen. Dieser letzte Schritt beim Entwurf einer Positionsregelung muss für jedes Quadcoptersystem individuell erfolgen und steht deshalb nicht im Fokus des Beitrags.

Durch die betrachteten vier Stellgrößen ( $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^3$  und  $S \in \mathbb{R}$ ) kann zusätzlich zu den drei Ausgangsgrößen  $x, y, z$  als vierte Ausgangsgröße die Orientierung des Quadcopters um dessen körperfeste  $z$ -Achse geregelt werden. Der Einfluss der zugehörigen Drehbeschleunigung  $\dot{\omega}_z$  auf den Momentenvektor  $\mathbf{M}$  wird in diesem Beitrag beschrieben. Die konkrete Vorgabe von  $\dot{\omega}_z$  ist hingegen nicht Teil des Beitrags, da sie unabhängig von der Positionsregelung entworfen werden kann und außerdem ebenfalls für jedes Quadcoptersystem individuell erfolgen muss.

Neben dem Entwurf einer Positionsregelung auf Basis einer exakten E/A-Linearisierung finden sich in der Literatur eine Vielzahl weiterer Ansätze. Ein Großteil dieser Arbeiten lässt sich dabei den folgenden Gruppen zuordnen:

- Linearisierung des Systems um einen Arbeitspunkt oder entlang einer Trajektorie und anschließender Entwurf eines linearen Regelgesetzes, z. B. [3; 10].
- E/A-Linearisierung des Systems unter der Annahme kleiner Euler-Winkel, z. B. [1; 8].
- Entwurf von kaskadierten Regelungen mit einer inneren Schleife für die Lage und ggf. den Schub und einer äußeren Schleife für die Position des Quadcopters, z. B. [7; 10; 12].
- Entwurf von nichtlinearen Regelungen mittels Backstepping, Sliding-Mode-Techniken oder anderen Ansätzen, z. B. [5; 6; 8; 9].

Mit wenigen Ausnahmen (z. B. [6]) können die verschiedenen Arbeiten auch anhand der verwendeten Lageparametrierung in folgende zwei Gruppen aufgeteilt werden:

- Parametrierung mittels Quaternionen, z. B. [4; 5].
- Parametrierung mittels Euler-Winkeln, z. B. [1–3; 7–12; 15].

Speziell in der zweiten Gruppe wird die erste Ableitung der Euler-Winkel gelegentlich stillschweigend mit den Drehraten approximiert [8; 15]. Diese Approximation hat jedoch höchstens im Bereich kleiner Winkel und kleiner Drehraten Gültigkeit. Auch für den translatorischen Teil der Dynamik wird oftmals die Annahme kleiner Winkel getroffen [1; 2; 8]. Dies führt dazu, dass sich die Dynamik insofern vereinfacht als den Bewegungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung dann jeweils genau ein Euler-Winkel zugeordnet werden kann. Sobald jedoch möglichst beliebige Bahnen im Raum hochdynamisch abgeflogen werden sollen, ist sowohl die Annahme kleiner Euler-Winkel als auch kleiner Drehraten wenig sinnvoll. Als Beispiel für ein in unseren Augen vollständiges Modell eines Quadcopters, welches die Lage mittels Euler-Winkeln parametrisiert und welches ohne wesentliche Vereinfachungen auskommt sei an dieser Stelle [9] angeführt.

Die in diesem Beitrag vorgestellte exakte E/A-Linearisierung basiert auf einer Lageparametrierung mittels Quaternionen. Diese bieten zum einen die in Abschnitt 2.1 aufgeführten Vorteile, zum anderen gestalten sich nach Meinung der Autoren dadurch auch die explizit

ausgeschriebenen Terme der E/A-Linearisierung deutlich überschaubarer.

Neben der Verwendung von Quaternionen unterscheidet sich der vorliegende Beitrag gegenüber den in [4; 11] beschriebenen exakten E/A-Linearisierungen durch eine getrennte E/A-Linearisierung der z-Richtung und der verbleibenden beiden Raumrichtungen. Die E/A-Linearisierung in z-Richtung erfolgt als erstes und wird durch Vorgabe des Schubs  $S$  erreicht. Dies entspricht zum einen der intuitiven Erwartung, dass über den Schub die Höhe des Quadrocopters am besten beeinflusst wird, zum anderen stellt der Schub für die beiden anderen Raumrichtungen danach keine Stellgröße mehr dar. Letzteres ist insofern vorteilhaft, als sich dadurch die relativen Grade  $\delta_x$  und  $\delta_y$  soweit erhöhen, dass bei der anschließenden E/A-Linearisierung bezüglich der x- und y-Richtung keine interne Dynamik entsteht. Anders als bei der in [4; 11] angewandten *dynamischen* E/A-Linearisierung wird im vorliegenden Beitrag durch die zweistufige E/A-Linearisierung die Systemordnung nicht erhöht.

## 2 Lageparametrierung mittels Quaternionen

### 2.1 Motivation für die Verwendung von Quaternionen

Ein oftmals aufgeführter Vorteil von Quaternionen gegenüber Euler-Winkeln ist deren lokale Umkehrbarkeit. Das heißt, jeder Drehung kann wenigstens innerhalb einer gewissen Menge (siehe dazu auch Abschnitt 2.2) eindeutig ein Quaternion zugeordnet werden. Im Gegensatz dazu besitzt eine Euler-Winkel basierte Drehmatrix so genannte kritische Punkte, an welchen diese nicht lokal umkehrbar ist. Für die angestrebte E/A-Linearisierung soll jedoch der Schubvektor des Quadrocopters  $\mathbf{S}$  immer nach „oben“ zeigen ( $\mathbf{S}^T \mathbf{g} < 0$ ), so dass diese kritischen Punkte nicht erreicht werden.

Die Verwendung von Quaternionen wurde im vorliegenden Fall stattdessen durch folgende Punkte motiviert:

1. Aufgrund der Symmetrien ist bei einem Quadrocopter die Interpretation der Euler-Winkel als *Rollen*, *Nicken* und *Gieren* eher fraglich. Stattdessen spielt für die Bewegung des Quadrocopters die Ausrichtung des Schubvektors eine zentrale Rolle. Ein Quaternion wird direkt aus der Information über die Drehachse und den Drehwinkel zwischen zwei Koordinatensystemen gebildet. Daher kann die Ausrichtung des Schubvektors mit einem geeigneten Quaternion (siehe hierzu das in Abschnitt 2.3 eingeführte Schubachsenquaternion) deutlich transparenter wiedergegeben werden als mit Euler-Winkeln, bei welchen erst mit Hilfe der sich ergebenden Rotationsmatrix auf die resultierende Ausrichtung des Schubvektors geschlossen werden kann.
2. Sowohl bei der Berechnung der zeitlichen Änderung als auch bei der Bestimmung der Rotationsmatrix tauchen keine trigonometrischen Funktionen auf. Dies

fördert zum einen die Übersichtlichkeit der in diesem Beitrag vorgestellten E/A-Linearisierung zum anderen vereinfachen sich dadurch die Rechenoperationen, welche für die Realisierung der E/A-Linearisierung nötig sind.

### 2.2 Benutzte Eigenschaften von Quaternionen

#### Bedeutung eines Quaternionen

Mit einem Quaternion  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^4$  kann die Verdrehung zwischen zwei Koordinatensystemen beschrieben werden. Im Fall des Quadrocopters kann z. B. mittels eines Quaternionen die Verdrehung des in Bild 1 dargestellten körperfesten Koordinatensystems gegenüber dem so genannten North East Down Systems (NED) und somit die Fluglage des Quadrocopters beschrieben werden. Wie in [16] dargestellt wird, ergeben sich die vier Komponenten eines Quaternionen aus der Drehachse und dem Drehwinkel zwischen den beiden Koordinatensystemen:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

wobei  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  die Drehachse und  $\alpha$  den Drehwinkel angibt. Da die Drehachse invariant gegenüber der Verdrehung ist, hat sie im Ausgangs- und im Zielsystem die gleiche Darstellung. Ferner wird der Betrag von  $\mathbf{a}$  immer zu eins gewählt, so dass auch  $\mathbf{q}$  immer die Länge eins hat.  $\mathbf{q}$  wird deshalb auch als *Einheitsquaternion* bezeichnet.

Anhand von (7) kann man auch erkennen, dass falls  $\mathbf{q}$  eine Drehung um  $\alpha$  beschreibt so führt eine Drehung um  $\alpha \pm 2\pi$  (um die selbe Achse) zum Quaternion  $-\mathbf{q}$ . Folglich beschreiben  $\mathbf{q}$  und  $-\mathbf{q}$  die selben Verdrehungen, weshalb bei der Rückrechnung von einer Rotationsmatrix auf das zugehörige Quaternion eine Zweideutigkeit besteht. Diese wird im Folgenden durch die Forderung  $q_4 \geq 0$  vermieden.

#### Quaternionen-Multiplikation

Die Multiplikation zweier Quaternionen ist definiert als

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} \circ \mathbf{p} = \underbrace{\begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}(\mathbf{q})} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Das resultierende Quaternion  $\mathbf{r}$  beschreibt die Rotation, die sich durch die beiden Rotationen  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{p}$  ergibt. Hierbei ist zu beachten, dass  $\mathbf{p}$  die zweite Rotation in dem bereits um  $\mathbf{q}$  verdrehten Koordinatensystem beschreibt.

#### Quaternionen-Kinematik

Rotiert das um  $\mathbf{q}$  verdrehte körperfeste Koordinatensystem mit den körperfesten Drehraten  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , so lautet

die zeitliche Veränderung von  $\mathbf{q}$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}(\mathbf{q})} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

### Rotationsmatrix

Falls  $\mathbf{q}$  die Rotation vom Koordinatensystem  $I$  nach  $K$  beschreibt, so gilt für die Darstellung eines Vektors

$${}_I \mathbf{x} = \mathbf{R}(\mathbf{q}) {}_K \mathbf{x} \quad (10)$$

mit

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_4^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) \\ 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & q_4^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) \\ 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) & 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) & q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

### 2.3 Aufspaltung der Lage in zwei Drehungen

Die Lage des Quadrocopters kann durch die Verdrehung des körperfesten Koordinatensystems gegenüber einem inertial festen Koordinatensystems (im Folgenden sei dies das North-East-Down (NED) System) und somit mittels eines Quaternion  $\mathbf{q}$  exakt beschrieben werden.

Für die angestrebte E/A-Linearisierung ist es nötig  $\mathbf{q}$  als Produkt zweier Quaternionen  $\mathbf{q}_{xy}$  und  $\mathbf{q}_z$  darzustellen,

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{xy} \circ \mathbf{q}_z. \quad (12)$$

Das Quaternion  $\mathbf{q}_{xy}$  beschreibt dabei die Verkippung der körperfesten  $z$ -Achse gegenüber der  $z$ -Achse des NED-Systems. Das sich hieraus ergebende Koordinatensystem wird im Folgenden als *Zwischensystem* bezeichnet (siehe Bild 2). Die Drehung des NED-Systems in das Zwischensystem findet dabei um eine Achse  $\mathbf{a}$  innerhalb der inertialen  $xy$ -Ebene statt, wodurch sich für  $\mathbf{q}_{xy}$  die Struktur

$$\mathbf{q}_{xy} = (q_x \quad q_y \quad 0 \quad q_p)^T \quad (13)$$

ergibt. Aufgrund von

$$q_p = \sqrt{1 - q_x^2 - q_y^2} \quad (14)$$

besitzt  $\mathbf{q}_{xy}$  nur die beiden Freiheitsgrade  $q_x$  und  $q_y$ .

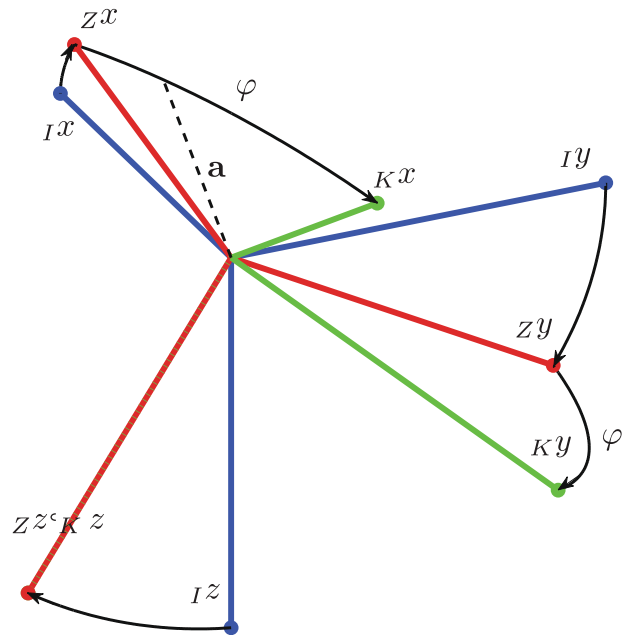
Das zweite Quaternion  $\mathbf{q}_z$  beschreibt die fehlende Drehung um die körperfeste  $z$ -Achse und hat dementsprechend die Struktur

$$\mathbf{q}_z = (0 \quad 0 \quad q_z \quad q_w)^T \quad (15)$$

und besitzt wegen

$$q_w = \sqrt{1 - q_z^2} \quad (16)$$

nur den Freiheitsgrad  $q_z$ .



**Bild 2** Inertiales Koordinatensystem (Index I), Zwischenkoordinatensystem (Index Z) und körperfestes Koordinatensystem (Index K).

Durch die Aufspaltung von  $\mathbf{q}$  ist es möglich die Ausrichtung des Schubvektors mittels der *beiden* Größen  $q_x$  und  $q_y$  zu beschreiben. Die dritte Größe  $q_z$  wird zwar zur Beschreibung der Lage des Quadrocopters benötigt, nicht jedoch für die Beschreibung dessen Schubvektors, welcher für die E/A-Linearisierung von entscheidender Bedeutung ist. Im Folgenden wird deshalb  $\mathbf{q}_{xy}$  als Schubachsenquaternion bezeichnet.

### 3 Dynamik des Schubachsenquaternion $\mathbf{q}_{xy}$

Die wesentliche Beeinflussung der Bewegung des Quadrocopters in  $xy$ -Richtung findet über die Ausrichtung des Schubvektors und damit über das Schubachsenquaternion  $\mathbf{q}_{xy}$  statt (siehe auch Impulssatz (27)). Das Schubachsenquaternion stellt jedoch keine Stellgröße dar. In Vorbereitung auf die angestrebte E/A-Linearisierung wird deshalb im Folgenden der Zusammenhang zwischen der Dynamik des Schubachsenquaternion und der Stellgröße  $\mathbf{M}$  hergeleitet.

Um  $\dot{\mathbf{q}}_{xy}$  entsprechend

$$\dot{\mathbf{q}}_{xy} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}_{xy} \tilde{\omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_p & 0 & q_y & q_x \\ 0 & q_p & -q_x & q_y \\ -q_y & q_x & q_p & 0 \\ -q_x & -q_y & 0 & q_p \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_x \\ \tilde{\omega}_y \\ \tilde{\omega}_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

zu bestimmen, benötigt man die Drehrate  $\tilde{\omega}$  des Zwischensystems. Die dritte Komponente von  $\tilde{\omega}$  kann aus der Forderung  $\mathbf{q}_{xy}(3) = \dot{\mathbf{q}}_{xy}(3) = 0$  bestimmt werden:

$$\tilde{\omega}_z = \frac{q_y \tilde{\omega}_x - q_x \tilde{\omega}_y}{q_p}. \quad (18)$$

Setzt man dies in (17) ein, so erhält man für die interessierenden beiden Komponenten von  $\dot{\mathbf{q}}_{xy}$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \end{pmatrix} = \frac{1}{q_p} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1-q_x^2 & -q_x q_y \\ -q_x q_y & 1-q_y^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_x \\ \tilde{\omega}_y \end{pmatrix} \quad (19)$$

Da das körperfeste Koordinatensystem und das Zwischensystem die gleiche  $z$ -Achse haben, können die Drehraten innerhalb der gemeinsamen  $xy$ -Ebene durch

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_x \\ \tilde{\omega}_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_\varphi} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{pmatrix} \quad (20)$$

einfach ineinander umgerechnet werden. Hierbei bezeichnen  $\omega_x, \omega_y$  die körperfesten Drehraten und der Winkel  $\varphi$ , welcher die Verdrehung des körperfesten Systems gegenüber dem Zwischensystem beschreibt (siehe Bild 2), ergibt sich zu  $\varphi = 2 \arcsin q_z$ .

Zur Bestimmung von  $\ddot{q}_x$  und  $\ddot{q}_y$  leitet man (19) nach der Zeit ab

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_x \\ \ddot{q}_y \end{pmatrix} = \left( -\frac{\dot{q}_p}{q_p^2} \mathbf{Z} + \frac{1}{q_p} \dot{\mathbf{Z}} \right) \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_x \\ \tilde{\omega}_y \end{pmatrix} + \frac{1}{q_p} \mathbf{Z} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\omega}}_x \\ \dot{\tilde{\omega}}_y \end{pmatrix} \quad (21)$$

Die hierbei auftretenden Drehbeschleunigungen des Zwischensystems ergeben sich durch Differentiation von (20) zu

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{\omega}}_x \\ \dot{\tilde{\omega}}_y \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \frac{d\mathbf{R}_\varphi}{d\varphi} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{pmatrix} + \mathbf{R}_\varphi \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \end{pmatrix} \quad (22)$$

mit  $\dot{\varphi} = \omega_z - \tilde{\omega}_z$ .

Kombiniert man (21) und (22) zeigt sich, dass  $(\ddot{q}_x \ \ddot{q}_y)^T$  in eine körperfeste Drehbeschleunigung  $(\dot{\omega}_x \ \dot{\omega}_y)^T$  umgerechnet werden kann. Die hierfür nötige Inversion von  $\mathbf{R}_\varphi$  und  $\mathbf{Z}$  ist für  $q_p \neq 0$  immer möglich. Der Sonderfall  $q_p = 0$  liegt vor, wenn die  $z$ -Achse des Quadrocopters antiparallel zum Schwerkraftvektor ist bzw. wenn der Quadrocopter „auf dem Kopf steht“. Vernachlässigt man diesen nicht interessierenden Sonderfall, so kann mit Hilfe des Drallsatzes

$$\mathbf{M} = \mathbf{J}\dot{\omega} + \omega \times (\mathbf{J}\omega) \quad (23)$$

zu jeder Drehbeschleunigung  $\dot{\omega} = (\dot{\omega}_x \ \dot{\omega}_y \ \dot{\omega}_z)^T$  und somit zu jeder Kombination  $\ddot{q}_x, \ddot{q}_y, \dot{\omega}_z$  das dazugehörige Stellmoment  $\mathbf{M}$  berechnet werden. Der Wert für  $\dot{\omega}_z$  stammt dabei aus einer separat und unabhängig zu entwerfenden Regelung für den Winkel  $\varphi$ , welche in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet wird. Um die folgende E/A-Linearisierung möglichst übersichtlich darzustellen, wird daher die Quaternionenbeschleunigung

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_x \\ \ddot{q}_y \end{pmatrix} \quad (24)$$

als Stellgröße betrachtet, welche mit Hilfe der Gleichungen (21), (22) und (23) immer auf die tatsächlichen Stellmomente  $\mathbf{M}$  umgerechnet werden kann.

## 4 Exakte E/A-Linearisierung

Grundlage für die E/A-Linearisierung ist die Beschreibung der translatorischen Dynamik des Quadrocopters durch die Bewegungsgleichungen

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -\mathbf{D} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} + \mathbf{R}(\mathbf{q}_{xy}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -S \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_x \\ \ddot{q}_y \end{pmatrix} = \mathbf{u} \quad (26)$$

mit

- $\mathbf{x} = (x \ y \ z)^T$  den Schwerpunktskoordinaten des Quadrocopters dargestellt im NED-System,
- $m$  der Masse des Quadrocopters,
- $S$  dem Betrag des Schubvektors,
- $\mathbf{D} = \text{diag}(d_x, d_y, d_z)$  einer konstanten Dämpfungsmatrix, (Die im Folgenden vorgestellte Linearisierung ist jedoch mit einer nichtlinearen Dämpfung ebenfalls möglich.)
- $\mathbf{R}(\mathbf{q}_{xy})$  der Rotationsmatrix zwischen dem NED System und dem Zwischensystem,
- $\mathbf{u}$  die in Abschnitt 3 Gleichung (24) eingeführte Quaternionenbeschleunigung.

Die 3 Eingangsgrößen für die translatorische Dynamik (25), (26) setzen sich somit aus dem Schub  $S$  und der Quaternionenbeschleunigung  $\mathbf{u}$  zusammen.

### 4.1 E/A-Linearisierung in $z$ -Richtung

Für die E/A-Linearisierung in  $z$ -Richtung wird zunächst der Impulssatz (25)

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -\mathbf{D} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2q_y q_p \\ 2q_x q_p \\ 2q_x^2 + 2q_y^2 - 1 \end{pmatrix} S \quad (27)$$

betrachtet, wobei  $\mathbf{R}(\mathbf{q}_{xy})$  entsprechend (11) eingesetzt wurde. Da der Schub  $S$  eine Stellgröße darstellt, ergibt sich für den Ausgang

- $x$  ein relativer Grad von 2 für  $q_y q_p \neq 0$  bzw. falls der Schubvektor nicht in der inertialen  $yz$ -Ebene ist,
- $y$  ein relativer Grad von 2 für  $q_x q_p \neq 0$  bzw. falls der Schubvektor nicht in der inertialen  $xz$ -Ebene ist,
- $z$  ein relativer Grad von 2 für  $q_x^2 + q_y^2 \neq 0,5$  bzw. falls der Schubvektor nicht in der inertialen  $xy$ -Ebene ist.

In den meisten Fällen beträgt somit der relative Grad des Quadrocopters  $3 \cdot 2 = 6$ . Entsprechend den Bewegungsgleichungen (25), (26) besteht der für die translatorische Dynamik relevante Zustandsvektor  $\mathbf{z}$  aus den Komponenten

$$\mathbf{z} = (\mathbf{x}^T \ \dot{\mathbf{x}}^T \ q_x \ q_y \ \dot{q}_x \ \dot{q}_y)^T, \quad (28)$$

wodurch sich eine Systemordnung von  $n = 10 > 6$  ergibt.

In einem ersten Schritt wird die Stellgröße  $S$ , welche die relativen Grade der drei Ausgänge auf jeweils zwei beschränkt, dazu verwendet für *einen* der drei Ausgänge ein lineares Verhalten zu erzeugen. Aus Sicht der beiden anderen Ausgänge stellt sich danach  $S$  nicht mehr

als Stellgröße sondern als Funktion von Zuständen und des entsprechenden virtuellen Eingangs dar. Dadurch erhöhen sich die relativen Grade der verbleibenden beiden Ausgänge. Im Ergebnis entspricht die Summe der relativen Grade aus beiden Linearisierungsschritten im vorliegenden Fall der Systemordnung. Somit verbleibt nach Durchführung der zweistufigen E/A-Linearisierung keine interne Dynamik.

Da im üblichen Betrieb des Quadrocopters der Schubvektor sowohl in der inertialen  $xz$ - als auch in der inertialen  $yz$ -Ebene liegen darf, nicht aber in der inertialen  $xy$ -Ebene, wird  $S$  dazu verwendet die Dynamik in  $z$ -Richtung zu linearisieren:

$$S = \frac{-mg + d_z \ddot{z} + m v_z}{2q_x^2 + 2q_y^2 - 1}. \quad (29)$$

Über die Wahl von  $v_z$  wird nun  $\ddot{z}$  vorgegeben. Eine mögliche Wahl für  $v_z$  wäre z. B.

$$\ddot{z} \stackrel{!}{=} v_z = \ddot{z}_{soll} + a_1(\dot{z}_{soll} - \dot{z}) + a_0(z_{soll} - z). \quad (30)$$

#### 4.2 E/A-Linearisierung in $xy$ -Richtung

Wie bereits erwähnt stellt aufgrund von (29) und (30) der Schub  $S$  für die verbleibenden beiden Ausgänge  $x$  und  $y$  nicht mehr eine Stellgröße sondern eine Funktion von Zuständen dar. Zur Bestimmung der relativen Grade können diese beiden Ausgänge nun weiter abgeleitet werden, siehe (34) und (35).

$$m \begin{pmatrix} \dot{x}^{(3)} \\ \dot{y}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_x \ddot{x} \\ -d_y \ddot{y} \end{pmatrix} + \dot{S} \begin{pmatrix} -2q_y q_p \\ 2q_x q_p \end{pmatrix} + S \begin{bmatrix} 0 & -2q_p & -2q_y \\ 2q_p & 0 & 2q_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \\ \dot{q}_p \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$m \begin{pmatrix} \dot{x}^{(4)} \\ \dot{y}^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_x \ddot{x}^{(3)} \\ -d_y \ddot{y}^{(3)} \end{pmatrix} + \ddot{S} \begin{pmatrix} -2q_y q_p \\ 2q_x q_p \end{pmatrix} + \left( 2\dot{S} \begin{bmatrix} 0 & -2q_p & -2q_y \\ 2q_p & 0 & 2q_x \end{bmatrix} + S \begin{bmatrix} 0 & -2\dot{q}_p & -2\dot{q}_y \\ 2\dot{q}_p & 0 & 2\dot{q}_x \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \\ \dot{q}_p \end{pmatrix} \\ + S \begin{bmatrix} 0 & -2q_p & -2q_y \\ 2q_p & 0 & 2q_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_x \\ \ddot{q}_y \\ \ddot{q}_p \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$\dot{q}_p = -\frac{q_x \dot{q}_x + q_y \dot{q}_y}{q_p}$$

$$\ddot{q}_p = -\frac{1}{q_p} (\dot{q}_x^2 + \dot{q}_y^2 + \dot{q}_p^2) - \frac{1}{q_p} (q_x \dot{q}_y - q_y \dot{q}_x) \begin{pmatrix} \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$\dot{S} = \frac{d_z \ddot{z} + m \dot{v}_z - S(4\dot{q}_x q_x + 4\dot{q}_y q_y)}{2q_x^2 + 2q_y^2 - 1}$$

$$\ddot{S} = \frac{d_z \ddot{z}^{(3)} + m \ddot{v}_z - 8\dot{S}(q_x \dot{q}_y) \begin{pmatrix} \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \end{pmatrix} - 4S(\dot{q}_x \dot{q}_y) \begin{pmatrix} \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \end{pmatrix} - 4S(q_x \dot{q}_y) \begin{pmatrix} \ddot{q}_x \\ \ddot{q}_y \end{pmatrix}}{2q_x^2 + 2q_y^2 - 1} \quad (37)$$

In (35) tauchen nun die Quaternionenbeschleunigungen  $\ddot{q}_x$  und  $\ddot{q}_y$  auf, welche wie in Abschnitt 3 beschrieben als Stellgröße  $\mathbf{u}$  angesehen werden können. Aufgrund von (14) und (29) hängen  $\dot{q}_p$  und  $\ddot{S}$  ebenfalls von  $\dot{q}_x$  und  $\dot{q}_y$  ab. Die entsprechenden Abhängigkeiten sind in (36) und (37) gegeben. Setzt man diese in (35) ein, ergibt sich die Beziehung (38). Für die dort auftretende Matrix  $\mathbf{W}$  gilt

$$\det(\mathbf{W}) = -\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{1 - 2q_x^2 - 2q_y^2}. \quad (31)$$

Solange also  $\gamma \neq 0$  (bzw. der Schubvektor nicht in der inertialen  $xy$ -Ebene liegt) kann man für  $x^{(4)}$  und  $y^{(4)}$  eine Vorgabe der Form

$$x^{(4)} \stackrel{!}{=} v_x = x_{soll}^{(4)} + b_3 (x_{soll}^{(3)} - x^{(3)}) + b_2 (\dot{x}_{soll} - \dot{x}) \\ + b_1 (\dot{x}_{soll} - \dot{x}) + b_0 (x_{soll} - x) \quad (32)$$

$$y^{(4)} \stackrel{!}{=} v_y = y_{soll}^{(4)} + b_3 (y_{soll}^{(3)} - y^{(3)}) + b_2 (\dot{y}_{soll} - \dot{y}) \\ + b_1 (\dot{y}_{soll} - \dot{y}) + b_0 (y_{soll} - y) \quad (33)$$

machen und aus (38) die Quaternionenbeschleunigung  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(v_x, v_y, v_z, \dot{v}_x, \dot{v}_y, \mathbf{z})$  bestimmen. Die Umrechnung von  $\mathbf{u}$  auf die Stellmomente  $\mathbf{M}$  erfolgt wie in Abschnitt 3 beschrieben anhand der Gleichungen (21), (22) und dem Drallsatz (23).

Über die Wahl der Koeffizienten in (30) und (32) bzw. (33) kann eine beliebige, stabile, lineare Fehlerdynamik in  $x$ ,  $y$  und  $z$ -Richtung vorgegeben werden.

$$\begin{aligned}
 m \begin{pmatrix} \ddot{x}^{(4)} \\ \ddot{y}^{(4)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -d_x \ddot{x}^{(3)} \\ -d_y \ddot{y}^{(3)} \end{pmatrix} + \frac{d_z \ddot{z}^{(3)} + m \ddot{v}_z}{\gamma} \begin{pmatrix} -2q_y q_p \\ 2q_x q_p \end{pmatrix} + 4\dot{S} \begin{bmatrix} 4q_x q_y q_p / \gamma & (4q_y^2 / \gamma - 1)q_p & -q_y \\ (1 - 4q_x^2 / \gamma)q_p & -4q_x q_y q_p / \gamma & q_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \\ \dot{q}_p \end{pmatrix} \\
 &+ 2S \begin{bmatrix} 4\dot{q}_x q_y q_p / \gamma + \frac{q_y}{q_p} \dot{q}_x & 4\dot{q}_y q_x q_p / \gamma + \frac{q_x}{q_p} \dot{q}_y - \dot{q}_p & \frac{q_y}{q_p} \dot{q}_p - \dot{q}_y \\ -4\dot{q}_x q_x q_p / \gamma + \dot{q}_p - \frac{q_x}{q_p} \dot{q}_x & -4\dot{q}_y q_y q_p / \gamma - \frac{q_x}{q_p} \dot{q}_y & \dot{q}_x - \frac{q_x}{q_p} \dot{q}_p \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \\ \dot{q}_p \end{pmatrix} \\
 &+ 2S \underbrace{\begin{bmatrix} 4q_x q_y q_p / \gamma + \frac{q_x q_y}{q_p} & 4q_y^2 q_p / \gamma + \frac{q_y^2}{q_p} - q_p \\ -4q_x^2 q_p / \gamma + q_p - \frac{q_x^2}{q_p} & -4q_x q_y q_p / \gamma - \frac{q_x q_y}{q_p} \end{bmatrix}}_W \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{q}_x \\ \ddot{q}_y \end{pmatrix}}_u \quad (38)
 \end{aligned}$$

mit  $\gamma = 2q_x^2 + 2q_y^2 - 1$ .

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Artikel wurde eine E/A-Linearisierung für die translatorische Dynamik eines Quadropters auf Basis von Quaternionen beschrieben. Die hierzu vorgeschlagene zweistufige Linearisierung (erst in  $z$ - und anschließend in  $x, y$ -Richtung), sowie die Verwendung von Quaternionen weisen aus Sicht der Autoren folgende positive Eigenschaften auf:

- Die Dynamik des Systems wird bei der Durchführung der E/A-Linearisierung nicht künstlich erhöht. Die Fehlerdynamik in  $z$ -Richtung kann um zwei Ordnungen kleiner gewählt werden als in  $x$ - oder  $y$ -Richtung. Dies trägt auch der Erwartung Rechnung, dass die Dynamik des Quadropters in  $z$ -Richtung über den Schub deutlich besser beeinflusst werden kann als in  $x$ - oder  $y$ -Richtung. Im Ergebnis entspricht das beschriebene Vorgehen somit der in [13] mit *quasi-statisch* bezeichneten Linearisierung.
- Die getrennte Linearisierung in  $z$ - und  $x, y$ -Richtung hat außerdem den Vorteil, dass für die Linearisierung nur  $2 \times 2$  Matrizen invertiert werden müssen.
- Obwohl der zentrale Ausdruck (38) für die E/A-Linearisierung durchaus umfangreich ist, würde eine E/A-Linearisierung auf Basis von Euler-Winkeln zu deutlich komplexeren Ausdrücken führen.

Aufgrund dieser Punkte erscheint der hier beschriebene Ansatz besonders geeignet um beim vorliegenden System eine exakte E/A-Linearisierung durchzuführen.

Erste erfolgreiche Flugversuche haben bereits gezeigt, dass die Umsetzung der beschriebenen E/A-Linearisierung auf einem  $\mu$ Controller möglich ist. Die Optimierung der hierzu nötigen Zustandsschätzung sowie die Auslegung der Positionsregelung über die virtuellen Eingangsgrößen  $v_x, v_y, v_z$  sind Gegenstand unserer aktuellen Forschungstätigkeit.

## Literatur

- [1] L. Beji and A. Abichou. Streamlined rotors mini rotorcraft: Trajectory generation and tracking. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 3:87–99, 2005.

- [2] P. Castillo, A. Dzul, and R. Lozano. Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12(4):510–516, 2004.
- [3] I. Cowling, O. Yakimenko, J. Whidborne, and A. Cooke. Direct method based control system for an autonomous quadrotor. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 60(2):285–316, 2010.
- [4] B. Driessen and A. Robin. A globally convergent tracking controller for the X4 flyer rotor craft for reference trajectories with positive thrust. *Robotica*, 22(04):375–388, 2004.
- [5] T. Hamel, R. Mahony, R. Lozano, and J. Ostrowski. Dynamic modelling and configuration stabilization for an X4-Flyer. In *Proceedings of the 15th IFAC World Congress*, 2002.
- [6] M.-D. Hua, T. Hamel, P. Morin, and C. Samson. A control approach for thrust-propelled underactuated vehicles and its application to VTOL drones. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(8):1837–1853, Aug. 2009.
- [7] F. Kendoul, Z. Yu, and K. Nonami. Guidance and nonlinear control system for autonomous flight of minirotorcraft unmanned aerial vehicles. *Journal of Field Robotics*, 27(3):311–334, 2010.
- [8] D. Lee, H. Jin Kim, and S. Sastry. Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 7:419–428, 2009.
- [9] T. Madani and A. Benallegue. Backstepping control with exact 2-sliding mode estimation for a quadrotor unmanned aerial vehicle. In *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 141–146, Oct. 2007.
- [10] N. Michael, D. Mellinger, Q. Lindsey, and V. Kumar. The GRASP multiple micro-UAV testbed. *Robotics & Automation Magazine*, 17(3):56–65, 2010.
- [11] V. Mistler, A. Benallegue, and N.K. M'Sirdi. Exact linearization and noninteracting control of a 4 rotors helicopter via dynamic feedback. In *Proceedings of the 10th IEEE International Workshop on Robot and Human Interactive Communication*, pages 586–593, 2001.
- [12] G. V. Raffo, M. G. Ortega, and F. R. Rubio. An integral predictive/nonlinear control structure for a quadrotor helicopter. *Automatica*, 46(1):29–39, 2010.
- [13] R. Rothfuß, J. Rudolph, and M. Zeitz. Flachheit: Ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme. *at – Automatisierungstechnik*, 45(11):517–525, 1997.
- [14] J. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [15] H. Voos. Entwurf eines Flugreglers für ein vierrotoriges unbemanntes Fluggerät. *at – Automatisierungstechnik*, 57:423–431, 2009.
- [16] J. Wertz, editor. *Spacecraft Attitude Determination and Control*. Kluwer Academic Publishers, 2002.

Manuskripteingang: 1. November 2010



**Dr.-Ing. Michael Buhl** arbeitet am Lehrstuhl für Regelungstechnik im Bereich nichtlineare Regelungen. Hauptarbeitsgebiete: strukturvariable Regelungen, industrielle Anwendungen.

Adresse: Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München, Fakultät Maschinenwesen, Boltzmannstr. 15, D-85748 Garching bei München, Fax: + 49-(0)89-289-15653, E-Mail: buhl@tum.de



**Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann** ist Leiter des Lehrstuhls für Regelungstechnik der Fakultät Maschinenwesen der TU München. Hauptarbeitsgebiete: Modellreduktion, nichtlineare, robuste und optimale Regelung, aktive Schwingungsdämpfung, industrielle Anwendungen.

Adresse: Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München, Fakultät Maschinenwesen, Boltzmannstr. 15, D-85748 Garching bei München, Fax: + 49-(0)89-289-15653, E-Mail: lohmann@tum.de



**Dipl.-Ing. Oliver Fritsch** arbeitet am Lehrstuhl für Regelungstechnik im Bereich nichtlineare Regelungen. Hauptarbeitsgebiete: Quaternionenbasierte Regelungsstrategien für Quadrocopter.

Adresse: Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München, Fakultät Maschinenwesen, Boltzmannstr. 15, D-85748 Garching bei München, Fax: + 49-(0)89-289-15653, E-Mail: oliver.fritsch@tum.de



## Faszinierendes für alle Technik-Begeisterten



Bernd Ulmann

### Analogrechner

Wunderwerke der Technik - Grundlagen,  
Geschichte und Anwendung

2010 | 500 S. | Gb. | € 49,80  
ISBN 978-3-486-59203-0

Das Buch präsentiert nicht nur die Grundlagen der Technik von Analogrechnern, sondern stellt auch die Geschichte der unterschiedlichen Analogrechner-Systeme anschaulich dar. Die Anwendungsgebiete reichen dabei von der Lösung grundlegender mathematischer Probleme über Berechnungen in Ökosystemen, in der Seismologie, Steuerungs- und Regelungstechnik und militärischen Anwendungen bis zu einigen überraschenden Beispielen aus Kunst und Unterhaltung.

Ein Teilgebiet der Informationstechnik, das nahezu in Vergessenheit geraten ist, aber eine große Faszination beinhaltet und durchaus Möglichkeiten zur Weiterentwicklung bietet.

---

**Das Buch richtet sich an Studierende der Informatik, der Elektrotechnik und des Maschinenbaus sowie weitere Technikbegeisterte.**

---

Bestellen Sie in Ihrer Fachbuchhandlung oder  
direkt bei uns: Tel: 089/45051-248, Fax: 089/45051-333  
verkauf@oldenbourg.de