

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
Lehrstuhl für Regelungstechnik

# Transparente Dynamikvorgabe bei der nichtlinearen passivitätsbasierten Zustandsregelung

Paul Kotyczka

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der  
Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs  
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. Heinz Ulbrich  
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann  
2. Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Claus Hillermeier  
Universität der Bundeswehr München

Die Dissertation wurde am 15.09.2010 bei der Technischen Universität München  
eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 16.12.2010 angenommen.



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Regelungstechnik der Technischen Universität München.

Mein herzlicher Dank gilt meinem Betreuer Prof. Dr. Boris Lohmann. Die Freiheit bei der Wahl und Bearbeitung des Themas, das mir stets entgegengebrachte Vertrauen sowie seine Aufgeschlossenheit und Gesprächsbereitschaft waren der fruchtbare Boden für das wissenschaftliche Arbeiten.

Ebenso danke ich Prof. Dr. Claus Hillermeier für sein fortwährendes Interesse an meiner Arbeit und die Bereitschaft, das Zweitgutachten zu übernehmen.

Allen Kollegen des Lehrstuhls sei für die gute Zusammenarbeit während der vergangenen Jahre und alle fachlichen und nichtfachlichen Gespräche gedankt. Jeder Einzelne trug auf seine Weise zur kollegialen, ja freundschaftlichen Atmosphäre am Lehrstuhl bei. Besonders danken möchte ich Guido Koch und Enrico Pellegrini für die Überlassung „ihres“ Hydraulikzylinders zum Experiment sowie Thomas Huber für die Fertigung der Laborversuche.

Meinen Diplomanden Alexander Volf und Florian Peter sei für ihre wertvolle Mitarbeit auf den Gebieten der Trajektorienfolgeregelung und der unteraktuierten mechanischen Systeme gedankt.

Durch sein gewissenhaftes Lektorat leistete mein Kollege Tobias Kloiber, dem ich an dieser Stelle herzlich dafür danke, einen unschätzbaren Beitrag zur Druckreife dieser Arbeit.

Nicht zuletzt gilt der Dank meinen Eltern, deren Unterstützung ich mir stets gewiss sein konnte und meiner Frau Christine, die durch ihre Geduld und ihr Verständnis die Arbeit mittrug und erleichterte.

Garching, im September 2010

Paul Kotyczka



## Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird eine praktikable Lösung für das Problem der durchschaubaren Parameterwahl und gezielten Dynamikvorgabe beim nichtlinearen Zustandsreglerentwurf mit IDA-PBC entwickelt.

*Interconnection and Damping Assignment Passivity Based Control* (IDA-PBC) ist ein Verfahren zur nichtlinearen, passivitätsbasierten Zustandsregelung, dessen Attraktivität in seiner Strukturiertheit, dem konstruktiven Stabilitätsnachweis und der Offenheit für verschiedene Systemklassen liegt. Durch Zustandsrückführung wird die Strecke in ein *Port-Hamilton'sches* System transformiert, dem eine virtuelle Energie zugewiesen wird, ebenso wie eine Struktur- und eine Dämpfungsmatrix, die den Austausch und die Dissipation derselben Energie darstellen. Damit liegt die geregelte Strecke in einer energiebasierten Beschreibung vor, wobei die virtuelle Energie als Ljapunowfunktion zum Stabilitätsnachweis für das nichtlineare geregelte System dient.

Im Regelfall können jedoch nicht alle Entwurfparameter in den drei genannten Konstrukten voneinander unabhängig vorgegeben werden. Die Einschränkung der realisierbaren Dynamik durch die geringere Zahl an Stellgrößen als Zuständen wird in Form einer vektorwertigen *Restriktionsgleichung* formuliert. Diese stellt einen Satz partieller Differentialgleichungen für die virtuelle Energie dar, der die verschiedenen Entwurfparameter miteinander verkoppelt. Das bisher übliche Verfahren zur Parametrierung von IDA-PBC sieht vor, Struktur- und Dämpfungsmatrix aus physikalischen Erwägungen vorzugeben und – Lösbarkeit vorausgesetzt – aus der Lösung der Restriktionsgleichung die Schar dem System zuweisbarer Energien zu ermitteln. Über den frei wählbaren homogenen Anteil wird die Lösung derart angepasst, dass sich ein möglichst großes, durch die Form der Energie abgeschätztes Einzugsgebiet der Ruhelage ergibt.

Zwei Schwierigkeiten sind mit dem beschriebenen Vorgehen verbunden: Zum einen ist zunächst nicht gesichert, dass für eine physikalisch motivierte Parametrierung der Struktur- und Dämpfungsmatrix – etwa das Schwächen, Stärken oder Etablieren neuer Kopplungen im System – eine Lösung der Restriktionsgleichung existiert. Zum anderen ist der Effekt einer derartigen Parametrierung auf die Dynamik des geregelten Systems undurchsichtig. Aufgrund der gegenseitigen Abhängigkeit der Entwurfparameter kann die Wirkung einer Parametrierung den Erwartungen sogar widersprechen.

Während bei linearen zeitinvarianten Strecken die Lage der Eigenwerte einen Aufschluss über das quantitative Zeitverhalten der Lösung des zugrunde liegenden Systems von Zustandsdifferentialgleichungen erlaubt, gibt es für nichtlineare Systeme, auch in Port-Hamilton'scher Darstellung, kein vergleichbares Kriterium. Daher wird für die Analyse nichtlinearer Systeme häufig die lineare Approximation des Systems am Arbeitspunkt herangezogen.

Beim in dieser Arbeit vorgestellten Ansatz zur Parametrierung von IDA-PBC wird die lineare Approximation des aus der Regelung entstehenden Port-Hamilton'schen Systems in Abhängigkeit der Gesamtheit der Entwurfsparameter ausgedrückt und mit einer vom Entwerfer vorgegebenen linearen Wunschdynamik verglichen. Mithilfe der Transformation auf eine Normalform lässt sich die Lösbarkeit der Restriktionsgleichung sehr übersichtlich in Abhängigkeit der Entwurfsparameter von Struktur- und Dämpfungsmatrix analysieren. Durch eine lokale lineare Transformation liefert der Vergleich der linearisierten Dynamik ein in der Regel unterbestimmtes lineares Gleichungssystem für die Parameter von Struktur- und Dämpfungsmatrix sowie Parameter der quadratischen Näherung der Energie. Letztere werden durch die frei wählbare homogene Lösung der Restriktionsgleichung realisiert. Aufgrund der Unterbestimmtheit verbleiben meist freie Parameter zur Erfüllung weiterer Entwurfsziele, so etwa zur Maximierung des durch die Energie abgeschätzten Einzugsgebiets der Ruhelage (*Energy Shaping*).

Die entwickelte Methode der *Zuweisung lokal linearer Dynamik* vereint die Vorteile des nichtlinearen Zustandsreglerentwurfs durch IDA-PBC, darin besonders die inhärente Konstruktion einer Energiefunktion für das nichtlinear geregelte System, mit der gezielten Dynamikvorgabe durch die Festlegung der Eigenschaften der Linearisierung. Die linearen Bestimmungsgleichungen zur Zuweisung lokal linearer Dynamik zeigen in transparenter Weise die Wechselwirkungen der Entwurfsparameter des IDA-PBC-Ansatzes auf. Durch die Einfachheit des Vorgehens wird die Anwendbarkeit von IDA-PBC verbessert. Als weiterer Vorteil im Vergleich zum konventionellen Vorgehen kann auf die – oft unübersichtliche – Definitheitsprüfung der Energiefunktion verzichtet werden.

Die Zuweisung lokal linearer Dynamik wird für beliebig zustandsabhängige Entwurfsmatrizen eingeführt. Aufgrund der einfacheren Lösbarkeitsbedingung bietet sich jedoch der anfängliche Ansatz teilweise konstanter Matrizen bzw. geschickt zerlegbarer zustandsabhängiger Matrizen an. Die Methode lässt sich geradlinig auf zeitvariante Systeme erweitern, mit den damit verbundenen Schwierigkeiten beim Stabilitätsnachweis. Weiterhin wird eine Formulierung des Verfahrens für eine Klasse mechanischer unteraktuierter Systeme vorgestellt.

Anhand akademischer Beispiele werden die Schwierigkeiten bei der Parametrierung von IDA-PBC erläutert und die Entwurfsschritte zur Zuweisung lokal linearer Dynamik gezeigt. Die Anwendung und Güte der Methode wird an drei technischen Beispielen (elektromechanisch, hydraulisch und mechanisch unteraktuiert) für die Festwertregelung illustriert. Am elektromechanischen System „Schwebende Kugel“ wird zudem eine Trajektorienfolgeregelung mit vorgegebener lokal linearer Fehlerdynamik realisiert.

*Für Christine*





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Stabilität nichtlinearer dynamischer Systeme . . . . .	7
2.1.1	Zeitinvariante Systeme . . . . .	8
2.1.2	Zeitveränderliche Systeme . . . . .	11
2.2	Differentialgeometrische Begriffe . . . . .	13
2.2.1	Vektoren und Kovektoren auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	14
2.2.2	Distribution und Kodistribution . . . . .	17
2.2.3	Satz von Frobenius . . . . .	18
2.3	Lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	21
2.3.1	Methode der Charakteristiken . . . . .	22
2.3.2	Systeme linearer partieller Differentialgleichungen . . . . .	26
2.4	Passivitätsbasierte Regelung . . . . .	28
2.4.1	Passivität . . . . .	28
2.4.2	Port-Hamilton-Systeme . . . . .	31
2.4.3	IDA-PBC . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Normalformen für IDA-PBC</b>	<b>35</b>
3.1	Normalform der Zustandsdifferentialgleichung . . . . .	35
3.2	Normalform der Restriktionsgleichung . . . . .	39
3.2.1	Normalform und charakteristische Koordinaten . . . . .	40

3.2.2	Transformation auf Normalform . . . . .	41
3.2.3	Lösbarkeit der Restriktionsgleichung . . . . .	46
3.3	Äquivalente Zustands- und Restriktionsgleichung . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Parametrierung von IDA-PBC</b>	<b>51</b>
4.1	Motivation . . . . .	52
4.1.1	Vorteile von IDA-PBC . . . . .	52
4.1.2	Beispiele zur Wirkung der Entwurfparameter . . . . .	54
4.1.3	Maßnahmen zur transparenten Parametrierung . . . . .	58
4.2	Grundgleichungen . . . . .	60
4.2.1	Linearisierung des Port-Hamilton-Systems . . . . .	61
4.2.2	Transformation der Bestimmungsgleichung . . . . .	62
4.2.3	Matrixgleichungen . . . . .	65
4.2.4	Festlegung der Entwurfparameter . . . . .	68
4.2.5	Zum Umgang mit der verbleibenden Entwurfsfreiheit . . . . .	78
4.3	Zustandsabhängige Entwurfparameter . . . . .	80
4.4	Zustands- und zeitabhängige Entwurfparameter . . . . .	84
4.5	Vergleich mit dem üblichen Vorgehen zur Parametrierung von IDA-PBC . . . . .	86
4.5.1	Konventionelles Vorgehen . . . . .	86
4.5.2	Zuweisung lokal linearer Dynamik . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Unteraktuierte mechanische Systeme</b>	<b>91</b>
5.1	Ein-/Ausgangs-Linearisierung . . . . .	91
5.2	IDA-PBC . . . . .	95
5.2.1	Kinetische Energie . . . . .	97
5.2.2	Potentielle Energie . . . . .	98
5.3	Zuweisung lokal linearer Dynamik . . . . .	101
5.3.1	Wirkung der Entwurfparameter . . . . .	101
5.3.2	Linearisierung der resultierenden Dynamik . . . . .	103

<b>6</b>	<b>Beispiele</b>	<b>107</b>
6.1	Festwertregelung der Schwebenden Kugel . . . . .	107
6.1.1	Modellbildung . . . . .	108
6.1.2	Systematischer Regelungsentwurf . . . . .	110
6.1.3	Experiment . . . . .	116
6.2	Folgeregelung der Schwebenden Kugel . . . . .	118
6.2.1	Flachheitsbasierte Vorsteuerung . . . . .	118
6.2.2	IDA-PBC mit Zuweisung lokal linearer Dynamik . . . . .	119
6.2.3	Experiment . . . . .	126
6.3	Hydraulikaktuator . . . . .	130
6.3.1	Modellbildung . . . . .	131
6.3.2	Systematischer Entwurf einer Festwertregelung . . . . .	133
6.3.3	Experiment . . . . .	139
6.4	Modell einer kippenden Laufmaschine . . . . .	141
6.4.1	Modellbildung . . . . .	141
6.4.2	IDA-PBC . . . . .	144
6.4.3	Simulation . . . . .	145
6.5	Diskussion . . . . .	147
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>149</b>
	<b>Anhang</b>	<b>151</b>
A	Zur Kommutativität zweier Vektorfelder . . . . .	151
B	Jacobimatrix eines Matrix-Vektor-Produkts . . . . .	152
C	Physikalische Parameter der Beispielsysteme . . . . .	153
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>155</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Die grundlegende Aufgabe einer Regelung ist die Stabilisierung einer vom Entwerfer vorgegebenen Ruhelage eines dynamischen Systems. Zur Erfüllung dieser Aufgabe existiert eine Vielzahl *linearer* und *nichtlinearer* Verfahren. Gerade die Methoden der *linearen Zustandsregelung*, siehe z. B. [14], [36] oder [2], bestehen durch ihre konzeptionelle Einfachheit und die transparente Parametrierbarkeit des erzielbaren dynamischen Verhaltens.

**Einfachheit.** Ein lineares dynamisches System (ohne Durchgriff) wird durch die Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{1.1}$$

mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  vollständig beschrieben. Ein Regelgesetz aus konstanter Zustandsrückführung und Vorsteuerung (Vorfilter)

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{F}\mathbf{v},\tag{1.2}$$

welches mithilfe verschiedener Entwurfsverfahren gewonnen werden kann, führt auf das geregelte System in formell identischer Beschreibung

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{v}.\tag{1.3}$$

Alle für den Entwurf wichtigen Eigenschaften wie Stabilität, Steuer- und Beobachtbarkeit lassen sich mit den Methoden der linearen Algebra aus den Systemmatrizen ableiten.

**Transparenz der Dynamik.** Die komplexen Eigenwerte der Dynamikmatrizen  $\mathbf{A}$  bzw.  $\mathbf{A} - \mathbf{BR}$  treten in den Exponenten der (komplexen) Lösungsbasis der Differentialgleichungen (1.1) bzw. (1.3) auf und geben Aufschluss über Abklingkonstanten und Oszillationsfrequenzen in der Lösung. Für den Regelungsentwurf werden Regelungseigenwerte der Matrix  $\mathbf{A} - \mathbf{BR}$  vorgegeben, deren Lage vom Entwerfer entsprechend seinen Anforderungen an Dynamik und Robustheit gewählt wird. (Im Falle eines Mehrgrößensystems kommt weitere Entwurfsfreiheit in Form von sog. Parametervektoren hinzu [50].) Da aus den Regelungseigenwerten auf das quantitative Verhalten der Lösung von (1.3) geschlossen werden kann, ist deren Vorgabe *transparent* hinsichtlich der Dynamik.

**Anwendbarkeit auf nichtlineare Systeme.** Die lineare Approximation eines nichtlinearen Systems stellt<sup>1</sup> in der Nähe seiner Ruhelage eine gültige Näherung des dynamischen Verhaltens dar (*Methode der Linearisierung*<sup>2</sup>). Entsprechend kann das so approximierte Verhalten durch lineare Zustandsrückführung beeinflusst werden. In der Beschränkung auf eine *unspezifizierte* Umgebung der Gleichgewichtslage und der Notwendigkeit eines darin *ausreichend linearen* Verhaltens liegt jedoch die Schwäche des Linearisierungsansatzes.

Diese Nachteile entfallen bei der Anwendung eines inhärent nichtlinearen Entwurfsverfahrens wie IDA-PBC.

**IDA-PBC.** Das Verfahren *Interconnection and Damping Assignment Passivity Based Control*, kurz IDA-PBC [47, 48, 45], ermöglicht für *nichtlineare* Systeme<sup>3</sup>

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (1.4)$$

den systematischen Entwurf von Zustandsregelungen der Form

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}, \quad (1.5)$$

mit denen das geregelte System eine *Port-Hamilton'sche* Darstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x}))\nabla H_d(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{v} \quad (1.6)$$

---

<sup>1</sup>abgesehen vom Sonderfall der Eigenwerte auf der imaginären Achse

<sup>2</sup>Vgl. die Darstellung in [60], Kapitel 3.2, S. 63.

<sup>3</sup>Diese müssen nicht steuerungsaffin sein, jedoch ist das Vorgehen für diese Systemklasse besonders strukturiert.

annimmt. Entwurfsgrößen sind nicht mehr die Eigenwerte der Dynamikmatrix, sondern eine verallgemeinerte *Energiefunktion*  $H_d(\mathbf{x})$  sowie die *Struktur-* und *Dämpfungsmatrizen*  $\mathbf{J}_d(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$ . Letztere beschreiben den Austausch und die Dissipation der dem System zugewiesenen (virtuellen) Energie. Der große Vorteil – gerade im Unterschied zur Anwendung linearer Regler, die nur lokal asymptotische Stabilität sichern – ist der nicht-lineare Stabilitätsnachweis und die Abschätzung des Einzugsgebiets der Ruhelage durch die Energiefunktion.

**Problematik der Parametrierung.** Dem Vorteil einer aus dem Regelungsentwurf *konstruktiv* hervorgehenden Ljapunowfunktion beim IDA-PBC-Entwurf steht die Schwierigkeit der Wahl der Entwurfsparameter für das Port-Hamilton'sche Zielsystem gegenüber. Zum einen ist die Festlegung der Entwurfsgrößen eingeschränkt durch die sog. (vektorwertige) Restriktionsgleichung, welche die durch  $\mathbf{u}$  nicht beeinflussbare Dynamik darstellt. Es handelt sich um ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, welches nur für bestimmte Parametrierungen von  $\mathbf{J}_d(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$  eine Lösung besitzt. Zum anderen ist – trotz der physikalischen Anschaulichkeit der Systembeschreibung – die Wirkung einzelner Entwurfsgrößen in der Energie oder den vorzugebenden Matrizen *undurchsichtig*. Der Grund liegt in der Verkopplung durch die Restriktionsgleichung, wodurch die Entwurfsparameter nicht isoliert voneinander betrachtet werden dürfen.

Wünschenswert wäre, das Zeitverhalten der Lösung von (1.6) ohne Berechnung derselben oder Simulation im Voraus einschätzen und durch gezielte Wahl der Entwurfsparameter beeinflussen zu können<sup>4</sup>. Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren ist ein Versuch, diesem Ziel näherzukommen, indem die *lokale* Wirkung von Entwurfsparametern, insbesondere auf die Energie, analysiert wird. Durch daraus abgeleitete Bestimmungsgleichungen kann *lokal lineare Wunschdynamik* des nichtlinearen Port-Hamilton'schen Systems (1.6) *gezielt* realisiert werden.

**Beitrag der Arbeit.** Die in dieser Arbeit vorgestellte *Zuweisung lokal linearer Dynamik* gründet auf der Methode der Linearisierung, indem zur *Parametrierung* des nichtlinearen, passivitätsbasierten IDA-PBC-Regelgesetzes die lineare Approximation der geregelten Strecke (das *lineare Ziel-* oder *Referenzsystem*) mit gewünschten lokalen Eigenschaften herangezogen wird. Durch das Einbeziehen lokal gültiger Argumente (Eigenwerte der Linearisierung) bietet der Ansatz eine Lösung des Problems der transparenten Vorgabe dynamischen Verhaltens beim IDA-PBC-Entwurf an.

---

<sup>4</sup>Dies entspricht im besten Fall einem *Verständnis* der Gleichung (1.6), wie es der englische Physiker Paul A. M. Dirac formulierte: „I consider that I understand an equation when I can predict the properties of its solutions, without actually solving it.“ [64]

Aufbauend auf der *Strukturierung* des Zustandsraums der betrachteten steuerungsaffinen Systeme und der Transformation der Restriktionsgleichung auf eine Normalform wird die Lösbarkeitsprüfung derselben vereinfacht. Aus der Linearisierung der IDA-PBC-Bestimmungsgleichung ergibt sich mithilfe einer weiteren, lokal linearen Transformation ein (in der Regel unterbestimmtes) *lineares Gleichungssystem* für die Entwurfsparameter, mit dem lokal lineare Dynamik *in sehr einfacher Weise* zugewiesen, also die Linearisierung des geregelten Systems mit gewünschten Eigenschaften versehen werden kann.

Mit der *zusätzlichen Information*, die in Form der asymptotisch stabilen Wunschdynamik von Beginn an im Entwurfsprozess zur Verfügung steht, kann die bisher benötigte Definitheitsprüfung der Energie entfallen, was die Anwendbarkeit von IDA-PBC erhöht.

Die verbleibende Entwurfsvfreiheit kann weiterhin – jedoch bei definierter lokal linearer Dynamik – zur Anpassung der Energie (*Energy Shaping*) genutzt werden, etwa mit dem Ziel, ein möglichst weit abgeschätztes Einzugsgebiet der Ruhelage zu erhalten.

Mit der Formulierung für zeitvariante Strecken und für unteraktuierte mechanische Systeme werden Anpassungen der Methode für eine weitere Regelungsaufgabe (Trajektorienfolge) und eine relevante Systemklasse vorgestellt.

**Überblick.** In Kapitel 2 werden für die Arbeit wichtige Stabilitätssätze zusammengefasst. Weiterhin werden differentialgeometrische Begriffe eingeführt und Integrabilitätsbedingungen erläutert, die zur Untersuchung der Lösbarkeit und zur Lösung partieller Differentialgleichungssysteme, wie sie bei IDA-PBC auftreten, erforderlich sind. Ebenso wird eine kurze Einführung in die passivitätsbasierte Regelung im Allgemeinen und IDA-PBC im Besonderen gegeben.

In Kapitel 3 werden Normalformen für die Zustandsdifferential- und Restriktionsgleichung definiert, welche die Grundlage für den strukturierten und transparenten Regelungsentwurf (im Sinne der durchschaubaren Wirkung der Entwurfsparameter) mit IDA-PBC bilden. Eine einfache Lösbarkeitsbedingung für eine Klasse so strukturierter IDA-PBC-Entwurfsprobleme wird angegeben. Weiterhin wird gezeigt, wie eine äquivalente Formulierung der IDA-PBC-Bestimmungsgleichung (und damit der Restriktionsgleichung) dazu genutzt werden kann, die Klasse der Entwurfsprobleme, deren Lösbarkeit einfach zu überprüfen ist, zu erweitern.

Das Hauptergebnis der Arbeit wird in Kapitel 4 vorgestellt. Die Grundgleichungen zur Zuweisung lokal linearer Dynamik werden hergeleitet und anhand akademischer Beispiele wird das Vorgehen bei der Parametrierung sowie der Umgang mit der verbleibenden Entwurfsvfreiheit illustriert. Es wird gezeigt, wie mithilfe der äquivalenten Restriktionsgleichung der Ansatz unter anderem auf das Trajektorienfolgeproblem erweitert werden kann. Abschließend wird die Zuweisung lokal linearer Dynamik mit dem konventionellen



Vorgehen zur Parametrierung des IDA-PBC-Entwurfs verglichen.

Kapitel 5 beschreibt die Adaption des Verfahrens auf eine bestimmte Klasse unteraktuierter mechanischer Systeme.

In Kapitel 6 wird die Anwendung der Methode auf die Festwertregelung dreier technischer Systeme (elektromechanisch, hydraulisch und mechanisch unteraktuiert) gezeigt. Für das elektromechanische System wird zudem die Trajektorienfolgeregelung mit vorgegebener lokal linearer Fehlerdynamik entworfen. Experimente und Simulationen ergänzen die Herleitung der Regelgesetze und belegen die Güte des vorgestellten Entwurfsverfahrens.



# Kapitel 2

## Grundlagen

In diesem Kapitel werden für die vorliegende Arbeit relevante Tatsachen und Begriffe aus der Stabilitätstheorie, der Differentialgeometrie und zu partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zusammengefasst. Abschließend wird eine kurze Einführung in die passivitätsbasierte Regelung, insbesondere mit IDA-PBC, gegeben.

### 2.1 Stabilität nichtlinearer dynamischer Systeme

Zur Beurteilung der Stabilität einer Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  des nichtlinearen, *zeitinvarianten* Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

werden üblicherweise die indirekte (erste) oder die direkte (zweite) Methode von *Ljapunow* herangezogen. Das Invarianzprinzip von *Krassowskij-LaSalle* erlaubt den Stabilitätsnachweis unter schwächeren Voraussetzungen an die zum Nachweis benötigte skalare Funktion als Ljapunows direkte Methode. Für *zeitveränderliche* Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, \infty), \quad \mathbf{f} : X \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

gestaltet sich der Stabilitätsnachweis schwieriger, da schon Aussagen über die zeitvariante Linearisierung des Systems nicht mehr anhand der (zeitveränderlichen) Eigenwerte getroffen werden können. Die folgenden Definitionen und Stabilitätssätze sind überwiegend den Lehrbüchern [22] und [53] entnommen.

### 2.1.1 Zeitinvariante Systeme

**Definition 2.1 (Ljapunow-Stabilität)**<sup>1</sup> Die durch  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  definierte Ruhelage des Systems (2.1) wird als *stabil im Sinne von Ljapunow* bezeichnet, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  existiert, so dass für alle  $t \geq 0$

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon \quad (2.3)$$

gilt. Zu jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $\mathbf{x}^*$  muss also eine  $\delta$ -Umgebung existieren, in der die Anfangswerte von (2.1) liegen, so dass die Lösung auf die  $\varepsilon$ -Umgebung beschränkt ist. Die Ruhelage ist *asymptotisch stabil*, falls ein  $\delta > 0$  existiert, so dass die Lösung zusätzlich gegen  $\mathbf{x}^*$  strebt:

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*. \quad (2.4)$$

□

**Satz 2.1 (Indirekte Methode)**<sup>2</sup> Sei  $\mathbf{x}^*$  eine Ruhelage des Systems (2.1) und  $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar in einer Umgebung von  $\mathbf{x}^*$ . Die Linearisierung

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} \quad (2.5)$$

mit  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$  beschreibt die lineare Näherung von (2.1) in der Nähe von  $\mathbf{x}^*$ . Liegen alle Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  in der offenen linken komplexen Halbebene  $\mathbb{C}^-$ , dann ist  $\mathbf{x}^*$  *asymptotisch stabil*, liegt mindestens einer in der offenen rechten Halbebene  $\mathbb{C}^+$ , so ist  $\mathbf{x}^*$  *instabil*. Liegt mindestens ein Eigenwert auf der Imaginärachse, dann ist  $\mathbf{x}^*$  eine nichthyperbolische Ruhelage und eine Stabilitätsaussage nicht möglich. □

Die indirekte Methode nach Ljapunow gibt Aufschluss über die Stabilität der Ruhelage, jedoch *nicht* über die  $\delta$ -Umgebung, also das sichere Einzugsgebiet der Ruhelage. Mithilfe der *direkten Methode nach Ljapunow*, bei der das Verhalten des Zustandsvektors anhand einer skalaren Funktion, der *Ljapunowfunktion*, beurteilt wird, lässt sich das Einzugsgebiet der Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  abschätzen.

---

<sup>1</sup>[22], Definition 3.1 bzw. [53], Definitionen 3.3 und 3.4

<sup>2</sup>[22], Satz 3.7 bzw. [53], Satz 3.1

**Satz 2.2 (Direkte Methode)**<sup>3</sup> Sei  $\mathbf{x}^*$  eine Ruhelage von (2.1) und  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf  $X$  stetig differenzierbare Funktion, für die

$$V(\mathbf{x}^*) = V^* \quad \text{und} \quad V(\mathbf{x}) > V^*, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^* \quad (2.6)$$

gilt<sup>4</sup>. Ferner nehme  $V(\mathbf{x})$  unter dem Fluss der Differentialgleichung (2.1) monoton ab:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0. \quad (2.7)$$

Dann ist  $\mathbf{x}^*$  stabil im Sinne von Ljapunow. Nimmt die Funktion streng monoton ab, d. h.

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*, \quad (2.8)$$

dann ist die Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  asymptotisch stabil.  $\square$

In vielen Fällen, so auch bei den meisten Beispielen in dieser Arbeit, ist die streng monotone Abnahme der als Ljapunow-Kandidat angesetzten Funktion nicht gegeben. Der Nachweis asymptotischer Stabilität kann jedoch mit dem *Invarianzprinzip nach Krassowskij-LaSalle* trotzdem gelingen. Zum Stabilitätsnachweis für eine konkrete Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  bieten sich – statt des allgemein gefassten Invarianzprinzips – die schon davor formulierten *Sätze von Barbashin und Krassowskij*<sup>5</sup> an:

**Satz 2.3 (Satz von Barbashin)** Sei  $\mathbf{x}^*$  eine Ruhelage von (2.1) und  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf  $X$  stetig differenzierbare Funktion mit den Eigenschaften (2.6) und (2.7). Sei weiterhin

$$E = \{\mathbf{x} \in X \mid \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (2.9)$$

Ist die triviale Lösung  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^*$  die einzige Lösung, die unter dem Fluss von (2.1) in  $E$  bleibt, dann ist die Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  asymptotisch stabil.  $\square$

Gilt obige Aussage auf  $X = \mathbb{R}^n$  mit einer radial unbeschränkten Funktion  $V$ , dann ist die Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  *global* asymptotisch stabil (Satz von Krassowskij).

---

<sup>3</sup>[22], Satz 3.1 bzw. [53], Satz 3.2

<sup>4</sup>Sie ist damit „positiv definit“ in um  $\mathbf{x}^*$  und  $V^*$  verschobenen Koordinaten.

<sup>5</sup>[22], Satz 3.4 und Korollare 3.1 und 3.2

Für lineare Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.10)$$

wird die quadratische Form

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x} \quad (2.11)$$

als eine mögliche Ljapunowfunktion angesetzt. Ihre zeitliche Änderung ist mit

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} =: -\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} \quad (2.12)$$

ebenfalls eine quadratische Form. Einsetzen von (2.10) ergibt die *Ljapunowgleichung*

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

Existieren positiv definite Matrizen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$ , welche die Ljapunowgleichung lösen, dann ist (2.11) eine Ljapunowfunktion und  $\mathbf{A}$  asymptotisch stabil. Für die Zuweisung lokal linearer Dynamik sind die in [6] zusammengefassten Ljapunow-Umkehrrsätze von besonderem Interesse.

**Satz 2.4 (Umkehrrsatz 1)** Ist  $\mathbf{A}$  asymptotisch stabil, dann existieren positiv definite Matrizen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$ , die die Ljapunowgleichung (2.13) lösen.  $\square$

Ist darüber hinaus positive Semidefinitheit von  $\mathbf{Q}$  gegeben, gilt Folgendes:

**Satz 2.5 (Umkehrrsatz 2)** Ist  $\mathbf{A}$  asymptotisch stabil und  $\mathbf{Q}$  positiv semidefinit, dann ist die Lösung  $\mathbf{P}$  der Ljapunowgleichung (2.13) ebenfalls positiv semidefinit. Ist zudem das Paar  $(\mathbf{Q}, \mathbf{A})$  beobachtbar, hat also die Kalman'sche Beobachtbarkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T & (\mathbf{Q}\mathbf{A})^T & \dots & (\mathbf{Q}\mathbf{A}^{n-1})^T \end{bmatrix}^T \quad (2.14)$$

vollen Rang, dann ist  $\mathbf{P}$  positiv definit.  $\square$

### 2.1.2 Zeitveränderliche Systeme

Für zeitveränderliche Systeme werden die Begriffe Ljapunow-Stabilität und asymptotische Stabilität analog zu Definition 2.1 eingeführt, mit dem Unterschied, dass  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$  von der Anfangszeit  $t_0$  abhängen darf. Hängt  $\delta = \delta(\varepsilon)$  nicht von  $t_0$  ab, dann spricht man von *gleichmäßiger* Stabilität<sup>6</sup>. Zum Nachweis der Stabilität der Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  des zeitvarianten Systems (2.2) und zur Abschätzung des Einzugsgebiets sind *zeitinvariante* Schranken einer *zeitveränderlichen* Ljapunowfunktion  $V(\mathbf{x}, t)$  zu bestimmen.

**Satz 2.6 (Stabilität nichtlinearer zeitvarianter Systeme)**<sup>7</sup> Sei  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  stückweise stetig in  $t$  und lokal Lipschitz in  $\mathbf{x}$  für alle  $t \geq 0$ . Durch  $B_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq r\}$  sei eine kugelförmige Umgebung um die Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  definiert. Ferner sei  $V(\mathbf{x}, t)$  eine stetig differenzierbare Funktion auf  $X$ . Erfüllt  $V(\mathbf{x}, t)$  für alle  $t \geq 0$  und  $\mathbf{x} \in X$  die Bedingungen

$$\begin{aligned} W_1(\mathbf{x}) &\leq V(\mathbf{x}, t) \leq W_2(\mathbf{x}), \\ \dot{V}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \leq -W_3(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

mit zeitunabhängigen, stetigen und positiv definiten Funktionen  $W_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2, 3$ <sup>8</sup>, dann ist die Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  *gleichmäßig asymptotisch stabil*. Jede Trajektorie, die in  $\{\mathbf{x} \in B_r \mid W_2(\mathbf{x}) \leq c\}$  beginnt, wobei  $c < \min_{\|\mathbf{x}\|=r} W_1(\mathbf{x})$  eine untere Schranke von  $W_1(\mathbf{x})$  auf dem Rand von  $B_r$  ist, bleibt beschränkt und strebt für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $\mathbf{x}^*$ .  $\square$

Die Bestimmung der zeitinvarianten Schranken liefert, wie in Abb. 2.1 schraffiert dargestellt, mit  $\{\mathbf{x} \in B_r \mid W_2(\mathbf{x}) \leq c\}$  eine Abschätzung des Einzugsgebiets der Ruhelage.

Bei der in dieser Arbeit vorgestellten Technik der *Zuweisung lokal linearer Dynamik* wird die lineare Approximation der Dynamik des nichtlinear geregelten Systems als Entwurfsgröße vom Benutzer vorgegeben. Im Falle der Trajektorienfolge-regelung ergibt sich ein lineares, aber zeitvariantes Zielsystem, dessen Stabilität vorauszusetzen ist. Daher wird im Folgenden kurz auf die Stabilität linearer zeitvarianter Systeme eingegangen.

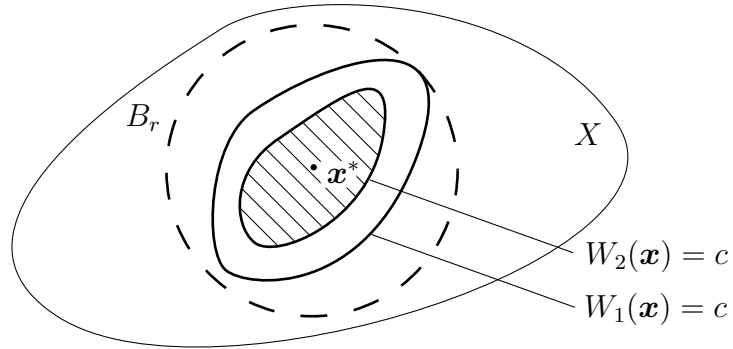
Die Taylor-Reihenentwicklung nichtlinearer zeitvarianter Systeme (2.2) lautet

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, t)}_{=0} + \mathbf{A}(t)\Delta \mathbf{x} + \mathbf{f}_h(\Delta \mathbf{x}, t) \quad (2.16)$$

<sup>6</sup>[53], Definitionen 4.1, 4.2 und 4.5

<sup>7</sup>[22], Satz 3.8

<sup>8</sup>D. h.  $W_i(\mathbf{x})$  haben Minima  $W_1^* = W_2^*$  und  $W_3^* = 0$  in  $\mathbf{x}^*$  und es gilt  $W_i(\mathbf{x}) > W_i^*$  für  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ .



**Abbildung 2.1:** Zeitinvariante Schranken von  $V(\mathbf{x}, t)$  und Abschätzung des Einzugsgebiets.

mit der zeitvarianten Matrix

$$\mathbf{A}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*}, \quad (2.17)$$

der Abweichung von der Ruhelage  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$  und dem Vektorfeld  $\mathbf{f}_h(\Delta \mathbf{x}, t)$ , welches Terme höherer Ordnung enthält. Gilt

$$\lim_{\|\Delta \mathbf{x}\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \frac{\|\mathbf{f}_h(\Delta \mathbf{x}, t)\|}{\|\Delta \mathbf{x}\|} = 0, \quad (2.18)$$

dann ist die Konvergenz von  $\mathbf{A}(t)\Delta \mathbf{x}$  gegen  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, t)$  für  $\Delta \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  gleichmäßig in  $t$  und

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\Delta \mathbf{x} \quad (2.19)$$

die Linearisierung von (2.2)<sup>9</sup>. Um eine Stabilitätsaussage für die Linearisierung zu treffen, ist es jedoch nicht – wie im zeitinvarianten Fall – ausreichend, die Eigenwertlagen von  $\mathbf{A}(t)$  für alle (festen)  $t \geq 0$  zu überprüfen, siehe die Beispiele zur Instabilität trotz negativer Realteile [61] bzw. zur Stabilität trotz positiver Realteile [65].

Die Lösung der zeitvarianten Differentialgleichung (2.19) hat die Form

$$\Delta \mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Delta \mathbf{x}(0) \quad (2.20)$$

mit der Transitionsmatrix  $\Phi(t)$  und dem Anfangswert  $\Delta \mathbf{x}(0)$ .

---

<sup>9</sup>[60], Abschnitt 5.5



**Definition 2.2 (Exponentielle Stabilität)**<sup>10</sup> Die Ruhelage  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$  von (2.19) ist *exponentiell stabil*, wenn sich die Norm der Transitionsmatrix  $\Phi(t)$  durch eine Exponentialfunktion

$$\|\Phi(t)\| \leq ke^{-\gamma t}, \quad k, \gamma > 0 \quad (2.21)$$

mit zeitunabhängiger Abklingkonstante abschätzen lässt.  $\square$

Eine obere Schranke gemäß (2.21) kann, wie etwa in [24] oder [10] dargestellt, über mehrere Abschätzungen und unter Anwendung des Bellman-Gronwall-Lemmas ermittelt werden. Von der *exponentiellen* Stabilität der Linearisierung ist dann auch der Schluss auf die *exponentielle* Stabilität der Ruhelage des nichtlinearen Systems zulässig:

**Satz 2.7 (Methode der Linearisierung für zeitvariante Systeme)**<sup>11</sup> Sei (2.19) die Linearisierung von (2.2). Es gelte (2.18) und  $\mathbf{A}(t)$  sei beschränkt. Die Ruhelage  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$  des linearisierten Systems sei exponentiell stabil. Dann ist auch die Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  des ursprünglichen nichtlinearen zeitvarianten Systems exponentiell stabil.  $\square$

Für den Entwurf linearer Zustandsrückführungen für zeitvariante Eingrößensysteme bietet sich die zeitvariante Version der Ackermannformel [13] an<sup>12</sup>. Ist die darin enthaltene Transformation auf Regelungsnormalform eine *Ljapunow-Transformation* [16], dann folgt aus der asymptotischen Stabilität des (durch die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms) in Regelungsnormalform vorgegebenen *zeitinvarianten* Systems auch die asymptotische Stabilität von (2.19).

## 2.2 Differentialgeometrische Begriffe

Insbesondere im Zusammenhang mit der Lösbarkeit von Systemen partieller Differentialgleichungen, wie sie bei IDA-PBC auftreten, spielen differentialgeometrische Begriffe, wie die *Involutivität* einer *Distribution*, eine Rolle. Die wichtigsten Definitionen werden im folgenden Abschnitt vorgestellt. Gut verständliche Erklärungen der zentralen Begriffe finden sich u. a. in [43], [11] und [37].

---

<sup>10</sup>[53], Definition 4.3 bzw. [22], Satz 3.9 und die anschließende Bemerkung

<sup>11</sup>[60], Abschnitt 5.5, Satz 15

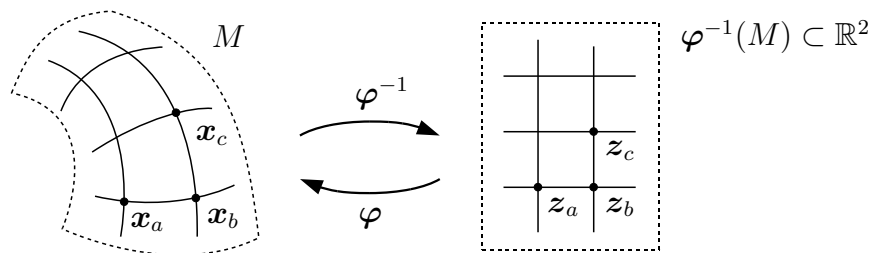
<sup>12</sup>Dieser Ansatz ist eine Möglichkeit zur Wahl der lokal linearen Zieldynamik für die Trajektorienfolge.

### 2.2.1 Vektoren und Kovektoren auf Mannigfaltigkeiten

Unmittelbar verbunden mit der Lösbarkeit von Systemen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung ist die Frage, wann die Lösungskurven der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, d \quad (2.22)$$

nicht auf dem gesamten Definitionsraum  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , sondern auf einem niedrigerdimensionalen Unterraum, einer sog. *Untermannigfaltigkeit* des  $\mathbb{R}^n$  verlaufen.



**Abbildung 2.2:** Glatte Mannigfaltigkeit der Dimension 2 und Diffeomorphismus zum  $\mathbb{R}^2$ .

Existieren für eine Menge  $M$  in der Umgebung jedes Punktes  $\mathbf{x}$  umkehrbar stetig differenzierbare Abbildungen  $\varphi$  bzw.  $\varphi^{-1}$  (Diffeomorphismen) zu einem Unterraum des  $\mathbb{R}^d$ , sog. Koordinatenkarten (*coordinate charts*), die sich „überlappend“ zu einem *Atlas* auf  $M$  zusammenfügen lassen, dann wird die Menge  $M$  als *glatte Mannigfaltigkeit*<sup>13</sup> der Dimension  $d$  bezeichnet.  $M$  ist damit *lokal diffeomorph* zum  $\mathbb{R}^d$ , d. h. kann durch  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{z})$  mit  $d$  *lokalen Koordinaten* versehen werden (Abb. 2.2).

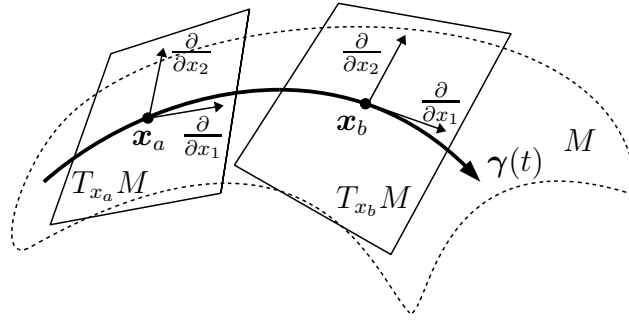
Jedem Punkt  $\mathbf{x}$  einer  $d$ -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit  $M$  wird ein *Tangentialraum*  $T_{\mathbf{x}}M$  zugeordnet, dessen Basisvektoren in den dort „angehefteten“ lokalen Koordinaten  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d}\}$  sind. Verläuft eine über die Zeit parametrisierte Kurve  $\gamma(t)$  in  $M$ , so liegt ihr Tangentialvektor zur Zeit  $t$  im entsprechenden Tangentialraum (Abb. 2.3):

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M. \quad (2.23)$$

Die Vereinigung aller Tangentialräume auf  $M$  ist das *Tangentialbündel*

$$TM = \bigcup_{\mathbf{x} \in M} T_{\mathbf{x}}M. \quad (2.24)$$

<sup>13</sup> *Glatt* deutet an, dass die Differenzierbarkeit hinreichend oft gegeben sein muss.



**Abbildung 2.3:** Über die Zeit parametrisierte Kurve auf einer glatten Mannigfaltigkeit, Tangentialräume in zwei Punkten.

Im Rahmen dieser Arbeit sind besonders Mannigfaltigkeiten von Interesse, die durch Lösungskurven von Differentialgleichungen beschrieben werden. Betrachtet man zunächst die Differentialgleichung (2.1), so ist ihre Lösungskurve durch den Fluss

$$\mathbf{x}(t) = \Phi_t^f(\mathbf{x}_0) \quad (2.25)$$

mit dem Anfangswert  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$  gegeben. Das Vektorfeld  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  gibt in jedem Punkt  $\mathbf{x} \in X$  durch

$$\left. \frac{d}{dt} \Phi_t^f(\mathbf{x}) \right|_{t=0} =: \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.26)$$

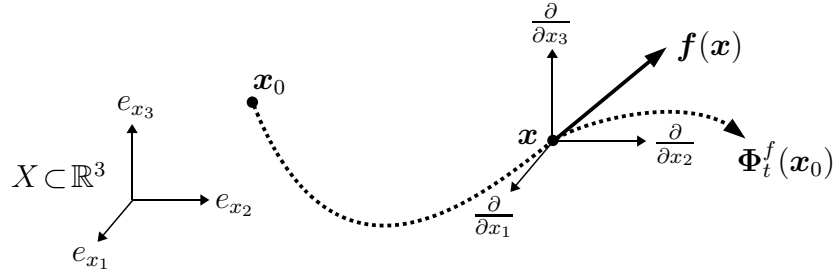
den Tangentialvektor an die Lösung wieder. Damit „lebt“  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  auf dem Tangentialraum  $T_x X$  und lässt sich als

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} =: \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

durch dessen Basisvektoren ausdrücken (Abb. 2.4).

Zu jedem Tangentialraum existiert ein *dualer Raum*  $T_x^* X$  der linearen Abbildungen des  $T_x X$  auf die reellen Zahlen. Dessen Basisvektoren  $\{dx_1, \dots, dx_n\}$  sind über die Paarung mit den Basisvektoren des Tangentialraums

$$\left\langle dx_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij}, \quad \text{mit} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.28)$$



**Abbildung 2.4:** Vektorfeld und Fluss einer Differentialgleichung.

definiert. Die Elemente des Dualraums, die sog. *1-Formen* oder *Kovektoren* haben damit die Form

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \omega_i(\mathbf{x}) dx_i =: [\omega_1(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \omega_n(\mathbf{x})] \quad (2.29)$$

und lassen sich in Gestalt von Zeilenvektoren notieren. Die Paarung einer 1-Form mit einem Tangentialvektor

$$\langle \omega(\mathbf{x}); \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{i=1}^n \omega_i(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x}) \quad (2.30)$$

lässt sich als inneres Produkt des Spalten- und Zeilenvektors in (2.27) und (2.29) schreiben und ist in der Tat als Abbildung  $\omega(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$  mit

$$\omega : T_x X \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.31)$$

zu verstehen.

Handelt es sich bei den Komponenten eines Kovektors um partielle Ableitungen einer skalaren Funktion  $\lambda(\mathbf{x})$ , dann wird der Kovektor als *exakte 1-Form* oder *exaktes Differential* bezeichnet und durch

$$d\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i = \left[ \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right] \quad (2.32)$$

notiert. Die Abbildung eines Vektors  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  durch ein exaktes Differential  $d\lambda(\mathbf{x})$

$$\langle d\lambda(\mathbf{x}); \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = L_f \lambda(\mathbf{x}) \quad (2.33)$$

entspricht damit der Lie-Ableitung der Funktion  $\lambda(\mathbf{x})$  in Richtung von  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Sind die Komponenten einer 1-Form  $\omega(\mathbf{x})$  tatsächlich partielle Ableitungen einer skalaren Funktion

$$\omega_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.34)$$

dann ist nach dem *Satz von Schwarz* die Vertauschbarkeit der zweiten partiellen Ableitungen von  $\lambda(\mathbf{x})$  gegeben und damit

$$\frac{\partial \omega_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j(\mathbf{x})}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.35)$$

Dies ist somit die notwendige Bedingung für die Existenz einer Potential- oder Stammfunktion  $\lambda(\mathbf{x})$ , d. h. für die Exaktheit der 1-Form:

$$\omega(\mathbf{x}) = d\lambda(\mathbf{x}). \quad (2.36)$$

Obige Bedingung ist gleichzeitig hinreichend (auf einem sternförmigen Gebiet<sup>14</sup>):

**Satz 2.8 (Lemma von Poincaré)**<sup>15</sup> Erfüllt die stetig differenzierbare 1-Form  $\omega(\mathbf{x})$  auf einem sternförmigen Gebiet  $X$  die Integrabilitätsbedingung (2.35), dann besitzt sie auf diesem Gebiet eine Stammfunktion, ist also ein exaktes Differential.  $\square$

## 2.2.2 Distribution und Kodistribution

Wird nicht nur *ein* Vektorfeld sondern eine Sammlung von Vektorfeldern  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d$  auf  $X$  betrachtet, so definiert diese eine *Distribution*  $\Delta$ . Die Distribution

$$\Delta(\mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_d(\mathbf{x})\}, \quad \mathbf{x} \in X \quad (2.37)$$

ist nicht mehr nur die Abbildung eines Punktes  $\mathbf{x} \in X$  auf den Tangentialraum, sondern spannt in jedem Punkt einen *Unterraum* des  $T_{\mathbf{x}}X$  auf. Versteht man die einzelnen Vektorfelder  $\mathbf{f}_i$ ,  $i = 1, \dots, d$  als Spalten einer  $n \times d$ -Matrix, dann ist durch

$$\dim(\Delta(\mathbf{x})) = \text{Rang}([\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \ \dots \ \mathbf{f}_d(\mathbf{x})]) \quad (2.38)$$

<sup>14</sup>D. h. es existiert ein Zentrum  $\mathbf{a}$ , so dass alle Strecken zu jedem Punkt  $\mathbf{x} \in X$  in  $X$  liegen.

<sup>15</sup>[23], Kapitel 5.4, Satz 4

die *Dimension* der Distribution an der Stelle  $\mathbf{x}$  definiert. Gilt  $\Delta(\mathbf{x}) = \text{const.}$  auf der offenen Menge  $X$ , dann wird die Distribution  $\Delta$  als *regulär* oder *nichtsingulär* bezeichnet.

Das zur Distribution duale Objekt ist eine *Kodistribution*, bestehend aus 1-Formen  $\omega_i : T_x X \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine besondere Kodistribution ist der *Annihilator*  $\Delta^\perp$ . Zu einer  $d$ -dimensionalen Distribution  $\Delta$  enthält er genau  $n - d$  1-Formen  $\omega_i$ , die durch

$$\langle \omega_i(\mathbf{x}); \mathbf{f}_j(\mathbf{x}) \rangle = 0, \quad \mathbf{x} \in X, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, n - d \\ j = 1, \dots, d \end{cases} \quad (2.39)$$

alle Vektoren  $\mathbf{f}_i \in \Delta$  auslöschen (annihilieren).

## 2.2.3 Satz von Frobenius

### 2.2.3.1 Kommutativität

Zwei Vektorfelder  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{g}$  *kommutieren*, wenn der Fluss einer Differentialgleichung unter der abwechselnden Wirkung von  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $-\mathbf{f}$  und  $-\mathbf{g}$  für jeweils dieselbe infinitesimale Dauer  $\Delta t$  wieder den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  erreicht, also

$$\Phi_{\Delta t}^{-\mathbf{g}} \circ \Phi_{\Delta t}^{-\mathbf{f}} \circ \Phi_{\Delta t}^{\mathbf{g}} \circ \Phi_{\Delta t}^{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.40)$$

gilt<sup>16</sup>. Aufgrund der Eigenschaft

$$\Phi_t^{\mathbf{v}} \circ \Phi_t^{-\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad (2.41)$$

des Flusses einer Differentialgleichung  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  lässt sich Forderung (2.40) äquivalent als

$$\underbrace{\Phi_{\Delta t}^{\mathbf{g}} \circ \Phi_{\Delta t}^{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)}_{\mathbf{x}^a(2\Delta t)} = \underbrace{\Phi_{\Delta t}^{\mathbf{f}} \circ \Phi_{\Delta t}^{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0)}_{\mathbf{x}^b(2\Delta t)} \quad (2.42)$$

schreiben. Die Differenz zwischen  $\mathbf{x}^a(2\Delta t)$  und  $\mathbf{x}^b(2\Delta t)$  beschreibt die Vertauschbarkeit (Kommutativität) der Vektorfelder. Für kleine  $\Delta t$  erhält man (siehe Anhang)

$$\mathbf{x}^a(2\Delta t) - \mathbf{x}^b(2\Delta t) = \left( \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right) \Big|_{\mathbf{x}_0} \Delta t^2 =: [\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})] \Big|_{\mathbf{x}_0} \Delta t^2. \quad (2.43)$$

---

<sup>16</sup>Das Ergebnis des Ausdrucks rechts vom Operator  $\circ$  wird in den Ausdruck links davon eingesetzt.

Die Vektorfelder  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{g}$  kommutieren also genau dann, wenn ihre *Lie-Klammer*  $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$ , welche selbst ein Vektorfeld ist, für alle  $\mathbf{x} \in X$  identisch Null ist.

### 2.2.3.2 Involutivität

Eine weniger restriktive Eigenschaft als die Kommutativität ist die *Involutivität* von Vektorfeldern (einer Distribution). Eine reguläre Distribution  $\Delta$  der Dimension  $d$  ist *involutiv*, wenn alle paarweise gebildeten Lie-Klammern der enthaltenen Vektorfelder wiederum in  $\Delta$  liegen:

$$[\mathbf{f}_i(\mathbf{x}), \mathbf{f}_j(\mathbf{x})] \in \Delta(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \dots, d. \quad (2.44)$$

Eine nichtinvolutive Distribution  $\Delta$  wird durch Hinzufügen der durch (ggf. wiederholtes) Anwenden der Lie-Klammer entstandenen neuen Vektorfelder zum *involutiven Abschluss*  $\overline{\Delta} = \text{inv}(\Delta)$  erweitert.

Es lässt sich leicht zeigen, dass Distributionen linearer Vektorfelder  $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}$  involutiv sind. Damit ist *Nichtinvolutivität* eine Eigenschaft, die ausschließlich bei der Betrachtung nichtlinearer dynamischer Systeme auftritt.

### 2.2.3.3 Integrabilität

Eine nichtsinguläre Distribution  $\Delta$  der Dimension  $d$  wird auf einem Unterraum  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  als *vollständig integrierbar* bezeichnet, wenn der Annihilator  $\Delta^\perp$  an jedem Punkt  $\mathbf{x} \in X$  von exakten Differentialen reellwertiger Funktionen  $\lambda_1(\mathbf{x}), \dots, \lambda_{n-d}(\mathbf{x})$  aufgespannt wird:

$$\Delta^\perp(\mathbf{x}) = \text{span}\{d\lambda_1(\mathbf{x}), \dots, d\lambda_{n-d}(\mathbf{x})\}. \quad (2.45)$$

Die Funktionen  $\lambda_j(\mathbf{x})$  müssen also jeweils den Satz von  $d$  homogenen partiellen Differentialgleichungen

$$\langle d\lambda_j(\mathbf{x}); \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \rangle = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \lambda_j(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, d \\ j = 1, \dots, n - d \end{cases} \quad (2.46)$$

erfüllen. Vollständige Integrabilität bedeutet damit die Existenz von  $n - d$  voneinander unabhängigen Funktionen, die unter dem Fluss der Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, d \quad (2.47)$$

konstant bleiben. Die Funktionen  $\lambda_1(\mathbf{x}), \dots, \lambda_{n-d}(\mathbf{x})$  lassen sich dann durch

$$\phi_{d+1}(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x}), \quad \dots, \quad \phi_n(\mathbf{x}) = \lambda_{n-d}(\mathbf{x}) \quad (2.48)$$

zur Transformation der Differentialgleichungen (2.47) in neue Koordinaten  $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x})$  nutzen. Da unter dem Fluss von (2.47) offensichtlich  $\dot{z}_{d+i} = \dot{\lambda}_i = 0$  für  $i = 1, \dots, d$  gilt, sind die transformierten Vektorfelder

$$\left( \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \right) \circ \phi^{-1}(\mathbf{z}) = \tilde{\mathbf{f}}_i(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{i,1}(\mathbf{z}) \\ \vdots \\ \tilde{f}_{i,d}(\mathbf{z}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, d \quad (2.49)$$

in den letzten  $n - d$  Komponenten Null. Die transformierte Distribution spannt somit den  $d$ -dimensionalen Unterraum

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{z}) = \text{span}\{\tilde{\mathbf{f}}_1(\mathbf{z}), \dots, \tilde{\mathbf{f}}_d(\mathbf{z})\} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_d}\right\} \quad (2.50)$$

auf. Die Lösungen der Differentialgleichungen (2.47) verlaufen also auf  $d$ -dimensionalen *Integralmannigfaltigkeiten*, die mit den lokalen Koordinaten  $z_1, \dots, z_d$  versehen sind (siehe Abb. 2.5). Die Transformation der Distribution  $\Delta$  auf die Form (2.50) durch einen Diffeomorphismus  $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x})$  wird auch als *Begradigen* der Distribution (engl. *straightening out*, siehe [37]) bezeichnet.

Der Satz von Frobenius gibt eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Integrierbarkeit einer Distribution an:

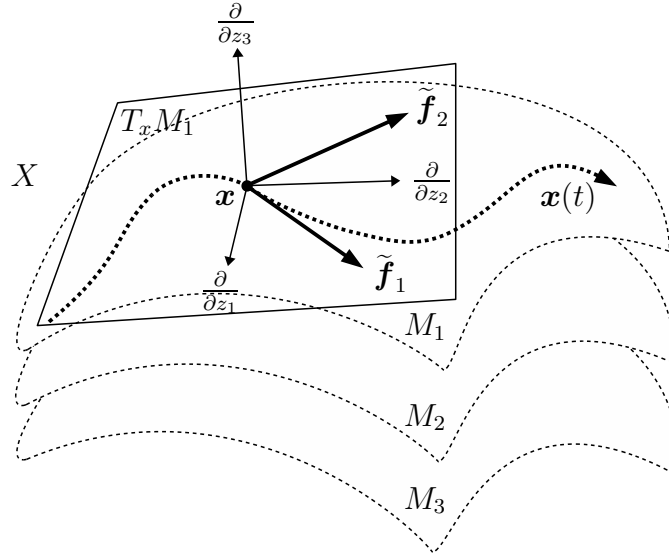
**Satz 2.9 (Frobenius)**<sup>17</sup> Eine nichtsinguläre Distribution ist genau dann vollständig integrierbar, wenn sie involutiv ist.  $\square$

*Anmerkung:* Ist die Distribution nicht nur involutiv, sondern kommutieren alle Vektorfelder, gilt also  $[\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j] = \mathbf{0}$  für  $i, j = 1, \dots, d$ , dann lassen sich Koordinaten konstruieren [9], in denen die Vektorfelder jeweils Basisvektoren des Tangentialraums sind:  $\tilde{\mathbf{f}}_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$ , vgl. Beispiel 3.1.

---

<sup>17</sup>[21], Satz 1.4.1





**Abbildung 2.5:** Integralmannigfaltigkeiten  $M_i$  einer involutiven Distribution  $\Delta = \text{span}\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ . Der Tangentialraum in einem Punkt  $\mathbf{x}$  wird durch die ersten beiden Basisvektoren  $\frac{\partial}{\partial z_1}$  und  $\frac{\partial}{\partial z_2}$  in den begradigten Koordinaten aufgespannt. Durch die unterschiedlichen Lösungsmannigfaltigkeiten  $M_i$  (abhängig vom Anfangswert  $\mathbf{x}(0)$ ) ergibt sich eine *Blätterung* (engl. *foliation*) des Zustandsraums.

## 2.3 Lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Die beim IDA-PBC-Entwurf auftretende vektorwertige Restriktionsgleichung stellt ein System *inhomogener linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung* der Form

$$a_1(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_1} + a_2(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \dots + a_n(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_n} = b(\mathbf{x}) \quad (2.51)$$

dar. Die partiellen Ableitungen der gesuchten Lösung  $H(\mathbf{x})$  treten darin linear auf,  $a_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, n$  sind die Koeffizientenfunktionen und  $b(\mathbf{x})$  ist der Quellterm der skalaren Gleichung. Wird dieser durch Null ersetzt, erhält man die zugehörige *Rumpf-Differentialgleichung* oder *homogene partielle Differentialgleichung*

$$a_1(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_1} + a_2(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \dots + a_n(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_n} = 0. \quad (2.52)$$

Setzt man eine Lösung der Rumpf-Differentialgleichung in die inhomogene partielle Differentialgleichung (2.51) ein, so liefert diese keinen Beitrag zur rechten Seite. Das bedeutet, dass zu jeder *partikulären Lösung*  $H^p(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x})$  der inhomogenen Differentialgleichung

eine beliebige *homogene Lösung* der Rumpf-Differentialgleichung  $H^h(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})$  addiert werden kann, ohne dass die Lösung ihre Gültigkeit verliert:

$$H(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{x}). \quad (2.53)$$

### 2.3.1 Methode der Charakteristiken

Zur analytischen Lösung der partiellen Differentialgleichung (2.51) eignet sich die *Methode der Charakteristiken* (siehe etwa [41]), die im Folgenden kurz beschrieben wird.

#### 2.3.1.1 Erste Integrale

Durch die Koeffizientenfunktionen der Rumpf-Differentialgleichung ist das *charakteristische Differentialgleichungssystem*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ a_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (2.54)$$

definiert. Ersetzen der Koeffizientenfunktionen durch die Zeitableitungen  $\dot{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  in (2.52) ergibt mit

$$\left[ \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \dot{H}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.55)$$

eine Umformulierung der Rumpf-Differentialgleichung. Man erkennt, dass jede Lösung  $\Phi(\mathbf{x})$  der Rumpf-Differentialgleichung gleichzeitig eine *Invariante* des charakteristischen Differentialgleichungssystems ist, d. h. eine Funktion, die unter dem Fluss von (2.54) konstant bleibt. Solche Invarianten oder *ersten Integrale* werden zur Definition neuer Koordinaten genutzt, in denen die partielle Differentialgleichung (2.51) auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduziert wird.

Zur Ermittlung von ersten Integralen wird aus dem charakteristischen Differentialgleichungssystem die Zeit eliminiert, was auf ein System von *Phasen-Differentialgleichungen*

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{a_1(\mathbf{x})}{a_n(\mathbf{x})}, \quad \dots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{a_{n-1}(\mathbf{x})}{a_n(\mathbf{x})} \quad (2.56)$$

führt. Die Festlegung auf  $dx_n$  im Nenner ist hier willkürlich. Die Lösungen des Systems von Phasen-Differentialgleichungen<sup>18</sup> hängen von  $\mathbf{x}$  und von  $n - 1$  Integrationskonstanten  $x_{10}, \dots, x_{(n-1)0}$  bzw. Funktionen  $c_i(x_{10}, \dots, x_{(n-1)0})$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$  derselben ab:

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(\mathbf{x}, c_1, \dots, c_{n-1}) \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= g_{n-1}(\mathbf{x}, c_1, \dots, c_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Das nichtlineare Gleichungssystem ist schließlich nach

$$c_1 = \phi_1(\mathbf{x}), \quad \dots, \quad c_{n-1} = \phi_{n-1}(\mathbf{x}) \quad (2.58)$$

aufzulösen. Die  $n - 1$  Funktionen  $\phi_i(\mathbf{x})$  bleiben entlang der Lösungen von (2.54) unverändert, sind damit erste Integrale und charakterisieren einzelne Lösungstrajektorien im Phasenraum.

**Beispiel 2.1 (Ermittlung eines ersten Integrals)** Gegeben sei die partielle Differentialgleichung in zwei Variablen

$$(-x_1 - x_2) \frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_1} + (x_1 - x_2) \frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_2} = b(x_1, x_2). \quad (2.59)$$

Das charakteristische Differentialgleichungssystem ist

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

und beschreibt einen gedämpften Oszillator. Als Lösung der Phasen-Differentialgleichung

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{-x_1 - x_2}{x_1 - x_2} \quad (2.61)$$

ergibt sich (mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems) die implizite Funktion

$$\arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right) - \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2) - c_1 = 0, \quad (2.62)$$

---

<sup>18</sup>besonders einfach zu ermitteln im Sonderfall trennbarer Differentialgleichungen

die, nach der Integrationskonstante  $c_1 = \phi_1(x_1, x_2)$  aufgelöst, das erste Integral definiert. Beliebige Funktionen von  $\phi_1(x_1, x_2)$  lösen die Rumpf-Differentialgleichung.  $\square$

### 2.3.1.2 Reduktion auf eine gewöhnliche Differentialgleichung

Sind  $n - 1$  unabhängige, stetig differenzierbare Lösungen der Rumpf-Differentialgleichung und damit erste Integrale  $\phi_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$  bekannt, dann lässt sich eine Koordinatentransformation  $\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$  mit

$$\mathbf{z} = [\mathbf{z}_\alpha^T \ z_\nu]^T = [z_{\alpha,1} \ \dots \ z_{\alpha,n-1} \ z_\nu]^T \quad (2.63)$$

und

$$\begin{aligned} z_{\alpha,1} &= t_1(\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_{n-1}(\mathbf{x})) \\ &\vdots \\ z_{\alpha,n-1} &= t_{n-1}(\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_{n-1}(\mathbf{x})) \\ z_\nu &= t_n(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.64)$$

definieren, wobei  $t_i(\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_{n-1}(\mathbf{x}))$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$  voneinander unabhängige Funktionen der ersten Integrale sind. Die Festlegung der letzten Komponente  $z_\nu = t_n(\mathbf{x})$  vervollständigt die Transformation zu einem Diffeomorphismus. Ist

$$\tilde{H}(\mathbf{z}) = H(\mathbf{x}) \circ \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z}) \quad (2.65)$$

die in die neuen  $z$ -Koordinaten transformierte Lösung von (2.51), so drückt

$$\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{\partial \tilde{H}(\mathbf{z})}{\partial z_{\alpha,j}} \circ \mathbf{t}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial t_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \tilde{H}(\mathbf{z})}{\partial z_\nu} \circ \mathbf{t}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.66)$$

die partiellen Ableitungen von  $H(x)$  in Abhängigkeit von  $\frac{\partial \tilde{H}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}$  aus. Eingesetzt in die linke

Seite von (2.51) erhält man

$$\sum_{i=1}^n \left( a_i(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \left( a_i(\mathbf{x}) \cdot \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \widetilde{H}(\mathbf{z})}{\partial z_{\alpha,j}} \circ \mathbf{t}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial t_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial \widetilde{H}(\mathbf{z})}{\partial z_\nu} \circ \mathbf{t}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) \right)}_{(2.67)}.$$

Der unterklammerte Ausdruck lässt sich umstellen zu

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{\partial \widetilde{H}(\mathbf{z})}{\partial z_{\alpha,j}} \circ \mathbf{t}(\mathbf{x}) \cdot \sum_{i=1}^n \left( a_i(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial t_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) \right). \quad (2.68)$$

Da die Funktionen  $t_j(\mathbf{x})$ ,  $j = 1, \dots, n-1$  Lösungen der homogenen partiellen Differentialgleichung sind, wird die innere Summe zu Null und (2.67) zu

$$\sum_{i=1}^n \left( a_i(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n \left( a_i(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial \widetilde{H}(\mathbf{z})}{\partial z_\nu} \circ \mathbf{t}(\mathbf{x}). \quad (2.69)$$

Die auf  $z$ -Koordinaten transformierte partielle Differentialgleichung (2.51) reduziert sich damit auf die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\sum_{i=1}^n \left( a_i(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) \circ \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z}) \cdot \frac{\widetilde{H}(\mathbf{z})}{\partial z_\nu} = b(\mathbf{x}) \circ \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z}). \quad (2.70)$$

**Beispiel 2.2 (Reduktion der partiellen Differentialgleichung)** Gegeben ist die lineare partielle Differentialgleichung

$$x_2 \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_3} = x_1. \quad (2.71)$$

Das charakteristische Differentialgleichungssystem lautet

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 1, \quad \dot{x}_3 = x_3 \quad (2.72)$$

und durch

$$\frac{dx_1}{dx_2} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dx_3} = \frac{1}{x_3} \quad (2.73)$$

sind zwei trennbare Phasen-Differentialgleichungen gegeben. Aus den Lösungen

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + c_1 \quad \text{und} \quad x_2 = \ln x_3 + c_2 \quad (2.74)$$

ergeben sich die beiden Invarianten

$$z_{\alpha 1} = -c_1 = \frac{1}{2}x_2^2 - x_1 \quad \text{und} \quad z_{\alpha 2} = e^{-c_2} = x_3 e^{-x_2}, \quad (2.75)$$

welche die ersten beiden Zustände in  $z$ -Koordinaten definieren. Durch  $z_\nu = x_2$  wird die Transformation  $\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$  vervollständigt und die gemäß (2.70) in eine gewöhnliche Differentialgleichung in  $z_\nu$  umgewandelte partielle Differentialgleichung (2.71) lautet

$$\frac{\partial \tilde{H}(\mathbf{z})}{\partial z_\nu} = \frac{1}{2}z_\nu^2 - z_{\alpha,1}. \quad (2.76)$$

Die Schar von Lösungen in  $z$ -Koordinaten ist<sup>19</sup>

$$\tilde{H}(\mathbf{z}) = \frac{1}{6}z_\nu^3 - z_{\alpha,1}z_\nu + \tilde{\Phi}(z_{\alpha,1}, z_{\alpha,2}). \quad (2.77)$$

□

Die Koordinaten  $z_\alpha$ , in denen die Lösung der homogenen partiellen Differentialgleichung vorliegt, werden im Folgenden – es handelt sich ja um Invarianten des charakteristischen Differentialgleichungssystems – als *charakteristische Koordinaten* bezeichnet.

### 2.3.2 Systeme linearer partieller Differentialgleichungen

Beim Regelungsentwurf mit dem IDA-PBC-Ansatz treten *Systeme* partieller Differentialgleichungen erster Ordnung der Gestalt

$$\mathbf{W}(\mathbf{x})\nabla H(\mathbf{x}) = \mathbf{s}(\mathbf{x}) \quad (2.78)$$

auf, wobei die Matrix

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = [\mathbf{w}_1(\mathbf{x}) \ \dots \ \mathbf{w}_d(\mathbf{x})]^T, \quad \mathbf{w}_i : X \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, d \quad (2.79)$$

---

<sup>19</sup>Wenn klar ist, in welchen Koordinaten die Funktionen definiert sind, wird die Tilde weggelassen.

die Koeffizientenfunktionen enthält und

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = [s_1(\mathbf{x}) \ \dots \ s_d(\mathbf{x})]^T, \quad \mathbf{s} : X \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (2.80)$$

den Vektor der Quellterme bezeichnet. Die  $d$  partiellen Differentialgleichungen lassen sich gemäß Gl. (2.33) auch in der Form

$$\langle dH(\mathbf{x}); \mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \rangle = s_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, d \quad (2.81)$$

darstellen. Gesucht ist die Funktion  $H(\mathbf{x})$ , deren Differential  $dH(\mathbf{x})$ , mit den Vektorfeldern  $\mathbf{w}_i(\mathbf{x})$  durch die Paarung  $\langle \cdot; \cdot \rangle$  verknüpft, jeweils den Quellterm  $s_i(\mathbf{x})$  ergibt.

**Lösbarkeit.** Für den Satz von Rumpf-Differentialgleichungen

$$\langle dH(\mathbf{x}); \mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, d \quad (2.82)$$

liefert der Satz von Frobenius eine hinreichende Lösbarkeitsbedingung. Gesucht ist *eine* Größe  $H(\mathbf{x})$ , die unter dem Fluss der Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{w}_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, d \quad (2.83)$$

konstant bleibt. Nach Satz 2.9 existieren  $n-d$  solcher Größen  $\lambda_j(\mathbf{x})$ , wenn die Distribution

$$\Delta_W(\mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{w}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{w}_d(\mathbf{x})\} \quad (2.84)$$

involutiv ist. Damit ist die Involutivität von  $\Delta_W$  *hinreichend*, aber nicht notwendig für die Existenz einer Lösung des Systems homogener partieller Differentialgleichungen (2.82). Dies wird klar, wenn man annimmt,  $\Delta_W$  sei *nicht* involutiv und der involutive Abschluss  $\overline{\Delta}_W$  habe die Dimension  $k < n$ . Dann existieren immer noch  $n-k$  Funktionen  $\overline{\lambda}_j(\mathbf{x})$ , für die

$$\langle d\overline{\lambda}_j(\mathbf{x}); \overline{\mathbf{w}}_i(\mathbf{x}) \rangle = 0, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, k \\ j = 1, \dots, n-k \end{cases} \quad (2.85)$$

gilt, wobei  $\overline{\mathbf{w}}_i(\mathbf{x})$  die Vektorfelder des involutiven Abschlusses von  $\Delta_W$  bezeichnet. Die Funktionen  $\overline{\lambda}_j(\mathbf{x})$  lösen damit auch (2.82).

Die Lösbarkeit des Satzes *inhomogener* partieller Differentialgleichungen (2.81) lässt sich mit Hilfe des folgenden Satzes aus [8] (darin auch der Beweis) beurteilen.

**Satz 2.10 (Lösbarkeit partieller Differentialgleichungssysteme)** Der Satz partieller Differentialgleichungen (2.78) hat genau dann eine Lösung, wenn die involutiven Abschlüsse  $\overline{\Delta}_W(\mathbf{x})$  und  $\overline{\Delta}_{W,s}(\mathbf{x})$  der regulären Distributionen  $\Delta_W(\mathbf{x})$  und

$$\Delta_{W,s}(\mathbf{x}) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(\mathbf{x}) \\ s_1(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \mathbf{w}_d(\mathbf{x}) \\ s_d(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \right\} \quad (2.86)$$

gleiche Dimension

$$\dim(\overline{\Delta}_W) = \dim(\overline{\Delta}_{W,s}) \leq n \quad (2.87)$$

haben. □

Ist gewährleistet, dass der Satz partieller Differentialgleichungen (2.78) eine Lösung besitzt, so lässt sich diese mithilfe eines Computer-Algebra-Systems ermitteln.

## 2.4 Passivitätsbasierte Regelung

Dieser Abschnitt gibt eine kurze Einführung in die passivitätsbasierte Regelung nichtlinearer Systeme. Nach der Definition der Passivität werden einige Eigenschaften passiver Systeme vorgestellt. Anschließend wird die *Port-Hamilton'sche* Systembeschreibung eingeführt, welche direkt aus der energiebasierten Modellierung folgt und die Grundlage für das in dieser Arbeit genutzte passivitätsbasierte Regelungsverfahren IDA-PBC bildet.

Für einen Überblick über die passivitätsbasierte Regelung bieten sich die Übersichtsaufsätze [32] an. Die Stabilisierung durch Passivierung ist eines der Hauptthemen von [51], während sich [46] der Stabilisierung (auch Folgeregelung) von elektromechanischen Systemen widmet, die durch Euler-Lagrange-Gleichungen beschrieben werden. In [59] ist die Modellierung und Regelung von Port-Hamilton-Systemen beschrieben. Der Aufsatz [45] bietet einen guten Überblick, speziell über die Methode IDA-PBC. Weiterhin sei auf den Aufsatz [7] verwiesen, in dem der Zusammenhang zwischen Passivität, Differenzordnung und Stabilität der Nulldynamik eines nichtlinearen Systems hergestellt wird.

### 2.4.1 Passivität

*Passive Systeme* zeichnen sich dadurch aus, dass sie eine *Speicherfunktion*, d. h. eine verallgemeinerte *Energiefunktion* besitzen, deren zeitliche Änderung durch eine dem System



zugeführte *Leistung* nach oben beschränkt ist. Für ein passives System mit Eingang Null dient die Speicherfunktion zum Nachweis der Stabilität der Ruhelage  $\mathbf{x}^*$ .

**Definition 2.3 (Passivität)**<sup>20</sup> Das steuerungsaffine System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2.88a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (2.88b)$$

mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$  und den Ein- und Ausgangsvektoren  $\mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  besitze in  $\mathbf{x}^*$  (für  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ) eine Ruhelage. Das System heißt dann *passiv*, wenn eine nach unten beschränkte *Speicherfunktion*  $H(\mathbf{x})$  mit  $H(\mathbf{x}^*) = H^*$  und  $H(\mathbf{x}^*) \geq H^*$  für  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$  existiert<sup>21</sup>, so dass für alle Anfangswerte  $\mathbf{x}(0)$ , alle Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(t)$  und alle  $t \geq 0$  die Dissipativitätsungleichung

$$H(\mathbf{x}(t)) - H(\mathbf{x}(0)) \leq \int_0^t s(\mathbf{u}(\tau), \mathbf{y}(\tau)) d\tau \quad (2.89)$$

mit der speziellen Zufuhrtrate

$$s(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) = \mathbf{y}^T(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.90)$$

gilt. Bei stetiger Differenzierbarkeit der Speicherfunktion, die im Folgenden stets vorausgesetzt wird, lautet die differentielle Passivitätsungleichung

$$\dot{H}(\mathbf{x}(t)) \leq \mathbf{y}^T(t)\mathbf{u}(t). \quad (2.91)$$

□

Bei passiven Systeme mit positiv definiter Speicherfunktion dient diese als Ljapunowfunktion für den Fall  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Den Nachweis asymptotischer Stabilität ermöglicht (falls nicht bereits  $\dot{H} < 0$  gilt) das Invarianzprinzip von Krassowskij-LaSalle bzw. die Sätze von Barbashin (Satz 2.3) oder Krassowskij.

Die Eigenschaft, dass bestimmte Verschaltungen passiver Systeme, so etwa die Rückkopplung und die Parallelschaltung, auf passive Gesamtsysteme führen [51], lässt sich zum

---

<sup>20</sup>vgl. [51], Definition 2.2

<sup>21</sup> $H(\mathbf{x})$  mit diesen Eigenschaften wird der Kürze halber auch als positiv semidefinit bezeichnet, vgl. die Fußnote zu Satz 2.2.

Regelungsentwurf ausnutzen. Die einfachste Möglichkeit ist das Einbringen zusätzlicher Dämpfung durch eine Ausgangsrückführung

$$\mathbf{u} = -\boldsymbol{\phi}(\mathbf{y} - \mathbf{y}^*), \quad (\mathbf{y} - \mathbf{y}^*)^T \boldsymbol{\phi}(\mathbf{y} - \mathbf{y}^*) > 0, \quad \mathbf{y} \neq \mathbf{y}^*. \quad (2.92)$$

Die Wirkung entspricht zusätzlicher Reibung in einem mechanischen oder erhöhtem ohmschen Widerstand in einem elektrischen System. Ist das passive System mit positiv definiter Speicherfunktion Nullzustands-ermittelbar, gilt also  $\mathbf{y} = \mathbf{y}^* \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ , dann wird durch (2.92) die Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  asymptotisch stabilisiert<sup>22</sup>.

Aufgrund der günstigen Eigenschaften ist es erstrebenswert, ein gegebenes dynamisches System (2.88) durch Regelung in ein passives System zu überführen. Existiert eine erweiterte statische Zustandsrückführung

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})\mathbf{v} \quad (2.93)$$

mit invertierbarer Matrix  $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$ , unter der das geregelte System mit gegebenem Ausgang (2.88b) und neuem Eingang  $\mathbf{v}$  passiv ist, dann wird das Originalsystem (2.88) als *Feedback-äquivalent* zu einem passiven System bezeichnet.

**Satz 2.11 (Feedback-Äquivalenz)**<sup>23</sup> Das System (2.88) ist genau dann (lokal) *Feedback-äquivalent* zu einem passiven System mit positiv definiter Speicherfunktion  $H(\mathbf{x})$ , für die also  $H(\mathbf{x}^*) = H^*$  und  $H(\mathbf{x}) > H^*$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$  gilt, wenn es

- die vektorielle Differenzordnung  $\{1, \dots, 1\}$  an der Stelle  $\mathbf{x}^*$  besitzt und
- schwache Minimalphasigkeit von (2.88), also Ljapunow-Stabilität der Nulldynamik<sup>24</sup> des Systems gegeben ist. □

Es sei nochmals angemerkt, dass Passivität des durch (2.93) geregelten Systems mit dem Ausgang (2.88b) bezüglich des *neuen Eingangs*  $\mathbf{v}$  festgestellt wird.

Eine besondere Klasse passiver Systeme stellen die *Port-Hamilton'schen* Systeme dar.

---

<sup>22</sup>[7], Satz 3.2

<sup>23</sup>[7], Satz 4.7

<sup>24</sup>Zum Begriff der Nulldynamik siehe z. B. [53], Abschnitt 6.1 oder [7], Abschnitt IV. Es handelt sich um die *interne Dynamik*, welche das System beschreibt, wenn der Ausgang (durch ein *ausgangsvullendes Regelgesetz*) konstant Null bzw.  $\mathbf{y}^* = \mathbf{h}(\mathbf{x}^*)$  gehalten wird.

### 2.4.2 Port-Hamilton-Systeme

Konzentriert-parametrische Systeme lassen sich durch verallgemeinerte Energiespeicher (die Systemordnung  $n$  entspricht in der Regel ihrer Anzahl), dissipative Elemente sowie Leistungsschnittstellen (Tore, engl.: *ports*) zur Umgebung modellieren. Jeder Komponente ist ein Paar von Torvariablen (etwa Kraft/Geschwindigkeit oder Spannung/Strom) zugeordnet, deren Produkt eine Leistung ergibt.

Erfolgt die Verschaltung der (Netzwerk-)Elemente *leistungserhaltend*, d. h. gilt eine verallgemeinerte Energiebilanzgleichung<sup>25</sup>, dann lässt sich eine energiebasierte, passive Systemdarstellung ableiten. Kenngrößen eines Port-Hamilton'schen Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x}))\nabla H(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2.94a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}^T(\mathbf{x})\nabla H(\mathbf{x}) \quad (2.94b)$$

sind neben der Eingangsmatrix  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  die nach unten beschränkte Energie- oder Hamiltonfunktion  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sowie die beiden Matrizen  $\mathbf{J}, \mathbf{R} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ . Während die schiefsymmetrische *Strukturmatrix*  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  den systeminternen Energieaustausch abbildet, wird durch die symmetrische, positiv semidefinite *Dämpfungsmatrix*  $\mathbf{R}(\mathbf{x})$  der dissipative Term in der Passivitätsungleichung

$$\dot{H}(\mathbf{x}) = -(\nabla H(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}_d(\mathbf{x}) \nabla H(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^T \mathbf{u} \leq \mathbf{y}^T \mathbf{u}, \quad (2.95)$$

die sich aus der Definition des *kollokierten* passiven Ausgangs (2.94b) ergibt, beschrieben. Aufgrund der besonderen, inhärent passiven Struktur bietet sich die Port-Hamilton'sche Systembeschreibung als Ausgangspunkt für den passivitätsbasierten Regelungsentwurf an.

Beim „klassischen“ Ansatz der passivitätsbasierten Regelung (siehe z. B. [46]) wird, unter Vorgabe einer gewünschten, in der Regel quadratischen Speicher- und damit Ljapunowfunktion  $H(\mathbf{x})$ , versucht, ein Regelgesetz zu entwerfen, mit dem  $\dot{H}(\mathbf{x}(t)) \leq 0$  gilt. Problematisch bei diesem Ansatz ist jedoch, dass er für bestimmte vorgegebene Speicherfunktionen auf eine Inversion der Systemdynamik führen kann und damit die Minimalphasigkeit des ursprünglichen Systems voraussetzt.

Beim im Folgenden beschriebenen Verfahren IDA-PBC wird dagegen (in dessen üblichster Variante) die Energiefunktion für das geregelte System zunächst freigelassen. Die dem

---

<sup>25</sup>Mathematisch liegt der Verschaltung eine sog. *Dirac-Struktur* zugrunde, siehe [59].

System zuweisbaren Energien ergeben sich aus der Schar der Lösungen eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen.

### 2.4.3 Interconnection and Damping Assignment Passivity Based Control (IDA-PBC)

Das Ziel von IDA-PBC ist, eine statische Zustandsrückführung (2.93) für das durch die Differentialgleichung (2.88a) beschriebene System zu ermitteln, die das System in die Port-Hamilton'sche Darstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x}))\nabla H_d(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{v} \quad (2.96a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}^T(\mathbf{x})\nabla H_d(\mathbf{x}) \quad (2.96b)$$

überführt. Die anfangs festzulegenden Entwurfparameter sind die Strukturmatrix  $\mathbf{J}_d(\mathbf{x})$  und die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$ . Daraufhin ist die Energie im Schritt des sog. *Energy Shaping* über die homogene Lösung eines Satzes partieller Differentialgleichungen so zu formen, dass sich ein Minimum in der gewünschten Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  einstellt:

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x}} H_d(\mathbf{x}). \quad (2.97)$$

Ist dies gelungen, so gilt entsprechend (2.95) die Passivitätsungleichung  $\dot{H}_d(\mathbf{x}) \leq \mathbf{y}^T \mathbf{v}$  mit dem kollokierten passiven Ausgang (2.96b). Die Stabilität der Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  des geregelten Systems lässt sich für  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  auf einem durch  $\{\mathbf{x} \in X \mid H_d(\mathbf{x}) \leq c\}$  abgeschätzten Gebiet zeigen. Dabei ist  $c$  der größte Wert von  $H_d(\mathbf{x})$ , für den, bei gleichzeitiger positiver Semi-definitheit von  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$ , die Äquipotentialflächen der Energie um  $\mathbf{x}^*$  geschlossen sind. Ist zudem die größte in

$$E = \{\mathbf{x} \in X \mid (\nabla H_d(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}_d(\mathbf{x}) \nabla H_d(\mathbf{x}) = 0\} \quad (2.98)$$

enthaltene invariante Untermenge die Ruhelage selbst, dann ist  $\mathbf{x}^*$  asymptotisch stabil.

Der Vergleich von (2.88a) mit (2.96a) ergibt die *IDA-PBC-Bestimmungsgleichung*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \stackrel{!}{=} (\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x}))\nabla H_d(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{v}. \quad (2.99)$$

Da für  $m < n$  die Spalten von  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  nur einen Unterraum des Zustandsraums aufspannen,

bleibt ein Teil der Dynamik durch Zustandsrückführung unverändert. Die *Restriktionsgleichung*

$$\mathbf{G}^\perp(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}^\perp(\mathbf{x})(\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x}))\nabla H_d(\mathbf{x}), \quad (2.100)$$

welche sich aus der Multiplikation von (2.99) mit einem *Linksannihilator* vollen Ranges  $n - m$

$$\mathbf{G}^\perp(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{(n-m) \times n} \quad \text{mit} \quad \mathbf{G}^\perp(\mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.101)$$

ergibt, drückt diese Einschränkung aus. In dem Satz von  $n - m$  linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für die Energie des geregelten Systems  $H_d(\mathbf{x})$  müssen die Matrizen  $\mathbf{J}_d(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$  so gewählt sein, dass eine Lösung existiert und diese (2.97) erfüllt. Die Lösung

$$H_d(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{z}_\alpha) \quad (2.102)$$

setzt sich aus einem partikulären Anteil  $\Psi(\mathbf{x})$  und einem homogenen Anteil  $\Phi(\mathbf{z}_\alpha)$  zusammen, wobei letzterer in den charakteristischen Koordinaten  $\mathbf{z}_\alpha$  frei wählbar ist. Um die Forderung (2.97) zu erfüllen, ist  $\Phi(\mathbf{z}_\alpha)$  so zu formen, dass mit

$$\nabla H_d(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}^*} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{Q}_d = \frac{\partial^2 H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_{\mathbf{x}^*} > 0 \quad (2.103)$$

der Gradient der Energie in  $\mathbf{x}^*$  verschwindet und ihre Hessematrix  $\mathbf{Q}_d$  dort positiv definit wird. Weiterhin kann durch Variation von  $\Phi(\mathbf{z}_\alpha)$  z. B. eine Maximierung des Einzugsgebiets der Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  realisiert werden. Die statische nichtlineare Zustandsrückführung, die (2.88a) in das Port-Hamilton-System (2.96) transformiert, berechnet sich schließlich aus

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}^+(\mathbf{x})((\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x}))\nabla H_d(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})) + \mathbf{v} \quad (2.104)$$

mit der Pseudoinversen der Eingangsmatrix

$$\mathbf{G}^+(\mathbf{x}) = (\mathbf{G}^T(\mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{G}^T(\mathbf{x}). \quad (2.105)$$

Anschließend an diesen ersten Schritt, in dem bei vorgegebener Struktur- und Dämpfungsmatrix die Energie in geeigneter Weise geformt wird (*Energy Shaping*), kann durch

Ausgangsrückführung (2.92) zusätzliche Dämpfung eingefügt werden (*Damping Injection*).

Ist für die Lösung von (2.100) eine bestimmte Struktur vorgegeben, bei mechanischen Systemen etwa die Summe aus potentieller und kinetischer Energie, so spricht man vom *parametrischen*, ansonsten vom *nichtparametrischen* Ansatz.

Beim eher unüblichen *algebraischen* Ansatz wird die gewünschte Energie  $H_d(\mathbf{x})$  und dadurch der Ausgang (2.96b) des geregelten Systems von Anfang an festgelegt. Die Restriktionsgleichung (2.100) wird dadurch algebraisch und ist nach den Matrizen  $\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}_d^T(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_d^T(\mathbf{x}) \geq 0$  aufzulösen. Ist das ursprüngliche System mit dem *neuen* Ausgang (2.88a, 2.96b) jedoch nicht Feedback-äquivalent zu einem passiven System, weil etwa Minimalphasigkeit nicht gegeben ist, so ergibt die Lösung keine positiv semidefinite Dämpfungsmatrix. In diesem Fall lässt sich das System nicht durch Zustandsrückführung in ein passives Port-Hamilton-System (2.96) mit der vorgegebenen Energie  $H_d(\mathbf{x})$  überführen.

Damit ist der algebraische Ansatz, ebenso wie Feedback-linearisierende Verfahren, durch eventuelle Nichtminimalphasigkeit eingeschränkt. Als Beispiel für die resultierende Instabilität sei auf die partielle Ein-/Ausgangs-Linearisierung des unteraktuierten mechanischen Systems *Acrobot* in Kapitel 5 verwiesen. Mit der Wahl des aktuierten Gelenkwinkels als Ausgangsgröße ergibt sich eine instabile Nulldynamik. Durch die Anwendung von IDA-PBC in der üblichen nichtalgebraischen Version lässt sich das System jedoch stabilisieren, wobei der resultierende kollokierte Ausgang eine Funktion der Gelenkgeschwindigkeiten bzw. mechanischen Impulse ist.

Ein Hindernis beim IDA-PBC-Entwurf ist die Lösung der partiellen Differentialgleichungen bzw. schon die Beurteilung der *Lösbarkeit* für eine gegebene Parametrierung der Matrizen  $\mathbf{J}_d(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$ . Mit Satz 2.10 steht eine Lösbarkeitsbedingung zur Verfügung, mit der solche Parametrierungen der *Entwurfsmatrix*

$$\mathbf{F}_d(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x}) \quad (2.106)$$

ausgeschlossen werden können, für die keine Lösung der Restriktionsgleichung existiert.

Passivitätsbasierte Verfahren werden auf eine Reihe technischer Systeme erfolgreich angewandt. Neben Beiträgen zur Regelung leistungselektronischer Schaltungen [52], Anwendungen im Bereich der Antriebstechnik [3] oder von Energieübertragungssystemen [44] gibt es zur Klasse der unteraktuierten mechanischen Systeme eine Vielzahl von Arbeiten, z. B. [1, 39]. Weiterhin werden passivitätsbasierte Methoden zur Regelung verteilt-parametrischer Systeme [33, 34] eingesetzt sowie (z. B. in Kombination mit einer flachheitsbasierten Vorsteuerung) zur exakten Folgeregelung [15, 57].

# Kapitel 3

## Normalformen für den Regelungsentwurf mit IDA-PBC

In diesem Kapitel werden zwei *Normalformen* vorgestellt, welche die Grundlage für den in der vorliegenden Arbeit entwickelten *transparenten* Regelungsentwurf mit IDA-PBC darstellen.

Die *Normalform der Zustandsdifferentialgleichung* beschreibt die im Weiteren betrachtete Systemklasse, deren Zustandsraum aus *aktuierten* und *unaktuierten* Koordinaten besteht. Wird die Entwurfsmatrix des Port-Hamilton'schen Zielsystems entsprechend aufgeteilt, so ergibt sich eine erste Klassifizierung der Entwurfparameter.

Die *Normalform der vektorwertigen Restriktionsgleichung* folgt aus einer Zustandstransformation, in der die charakteristischen Koordinaten der partiellen Differentialgleichungen explizit als Zustände auftreten, vgl. (2.64). Dies ermöglicht, die Wirkung der homogenen Lösung der Restriktionsgleichung in den neuen Koordinaten zu *lokalisieren*.

Beide genannten Normalformen erlauben später, in sehr einfacher Weise Entwurfparameter des IDA-PBC-Ansatzes zur Realisierung gewünschter lokal linearer Dynamik zu bestimmen.

### 3.1 Normalform der Zustandsdifferentialgleichung

Betrachtet werden steuerungsaffine dynamische Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in U \subseteq \mathbb{R}^m. \quad (3.1)$$

Neben dem Drift-Vektorfeld  $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  wirkt über die Eingangsmatrix  $\mathbf{G} : X \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$

der Vektor der Eingangs- oder Stellgrößen  $\mathbf{u}$  auf die Zeitableitung des Zustandsvektors  $\mathbf{x}$ . Die Eingangsmatrix

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \ \dots \ \mathbf{g}_m(\mathbf{x})] \quad (3.2)$$

besteht aus den  $m$  glatten Eingangsvektorfeldern  $\mathbf{g}_i : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die eine Distribution

$$\Delta_G(\mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x})\} \quad (3.3)$$

aufspannen. Für viele technische Systeme ist diese Distribution – insbesondere, wenn  $\mathbf{G}$  konstant ist – involutiv.

Zur Definition der Normalform der Zustandsdifferentialgleichung wird das System (3.1) zunächst ohne Driftterm, also für  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$ , betrachtet:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x})u_i. \quad (3.4)$$

Ist die Distribution  $\Delta_G$  der Eingangsvektorfelder involutiv, dann verlaufen gemäß Satz 2.9 die Lösungen von (3.4) für beliebige Eingangssignale  $u_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$  auf  $m$ -dimensionalen, vom Anfangszustand abhängigen Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  (Abb. 3.1, links). Die einzelnen Untermannigfaltigkeiten sind diffeomorph zum  $\mathbb{R}^m$ , d. h. in der Umgebung jedes Punktes  $\mathbf{x}$  existiert eine Koordinatentransformation  $\check{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x})$ , so dass die transformierten Vektorfelder

$$\check{\mathbf{g}}_i(\check{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \circ \varphi^{-1}(\check{\mathbf{x}}) \quad (3.5)$$

lokal den  $\mathbb{R}^m$  mit den Basisvektoren  $\frac{\partial}{\partial \check{x}_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$  aufspannen:

$$\text{span}\{\check{\mathbf{g}}_1(\check{\mathbf{x}}), \dots, \check{\mathbf{g}}_m(\check{\mathbf{x}})\} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial \check{x}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \check{x}_m}\right\} = \mathbb{R}^m. \quad (3.6)$$

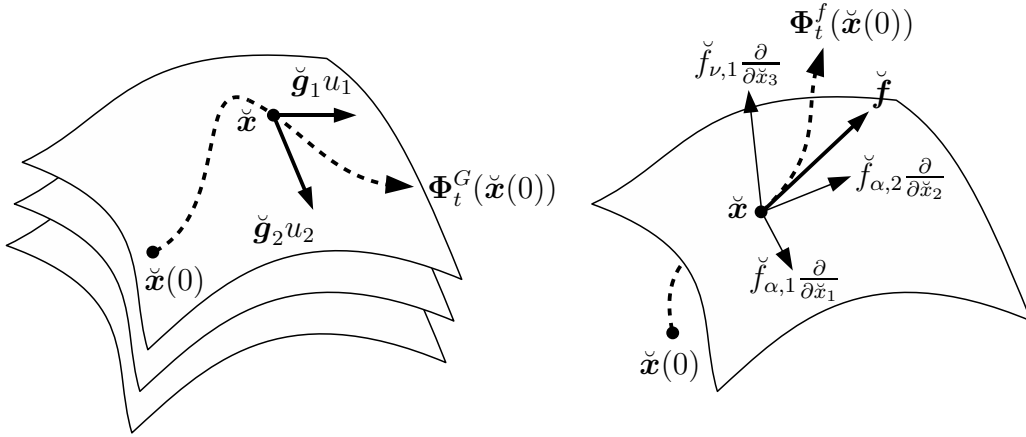
Damit lassen sich die Eingangsvektorfelder in der Form

$$\check{\mathbf{g}}_i(\check{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{g}}_{\alpha,i}(\check{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.7)$$

mit  $\check{\mathbf{g}}_{\alpha,i} : \check{X} \rightarrow \mathbb{R}^m$  darstellen bzw. die transformierte Eingangsmatrix als

$$\check{\mathbf{G}}(\check{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{G}}_{\alpha}(\check{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \check{\mathbf{G}}_{\alpha} : \check{X} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}. \quad (3.8)$$





**Abbildung 3.1:** Blätterung des Zustandsraums durch den Fluss der Eingangsvektorfelder (links) und Darstellung des Driftvektorfelds (rechts).

Entsprechend (3.5) lässt sich auch das Drift-Vektorfeld  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  transformieren und in zwei Komponenten zerlegen (Abb. 3.1, rechts):

$$\check{\mathbf{f}}(\check{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{f}}_\alpha(\check{\mathbf{x}}) \\ \check{\mathbf{f}}_\nu(\check{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}, \quad \check{\mathbf{f}}_\alpha : \check{X} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \check{\mathbf{f}}_\nu : \check{X} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}. \quad (3.9)$$

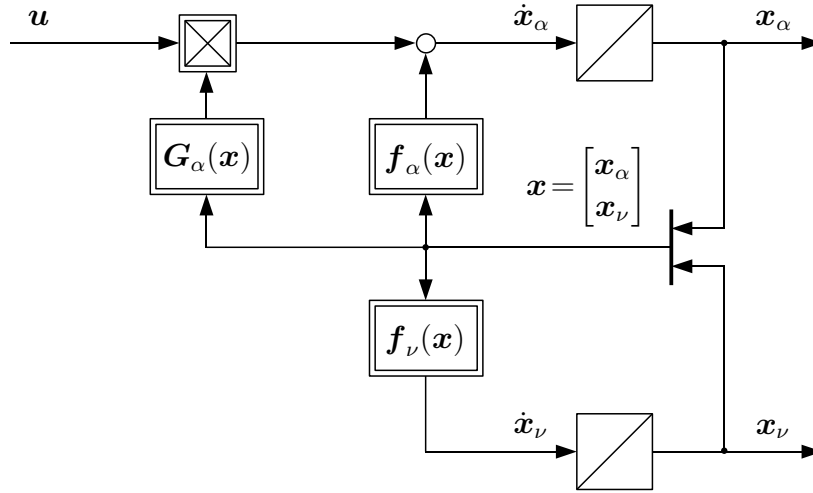
Zusammen lautet die transformierte Zustandsdifferentialgleichung

$$\begin{bmatrix} \dot{\check{\mathbf{x}}}_\alpha \\ \dot{\check{\mathbf{x}}}_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{f}}_\alpha(\check{\mathbf{x}}) \\ \check{\mathbf{f}}_\nu(\check{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \check{\mathbf{G}}_\alpha(\check{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}. \quad (3.10)$$

Durch die Unterteilung der Vektorfelder ist eine Aufspaltung des Zustandsraums in *aktuierte* und *unaktuierte* Koordinaten  $\check{\mathbf{x}}_\alpha$  bzw.  $\check{\mathbf{x}}_\nu$  gegeben. Die Bezeichnungen sind der Nomenklatur bei unteraktuierten mechanischen Systemen [54] entlehnt, wo solche verallgemeinerten Koordinaten als *aktuiert* bezeichnet werden, welche durch äußere Kräfte/Momente angetrieben sind. Hier bedeutet *aktuiert* bzw. *unaktuiert*, dass nur die Zeitableitungen der Zustände  $\check{\mathbf{x}}_\alpha$  unmittelbar vom Eingangsvektor  $\mathbf{u}$  beeinflusst werden, während  $\mathbf{u}$  keine direkte Wirkung auf  $\dot{\check{\mathbf{x}}}_\nu$  hat (vgl. Abb. 3.2).

**Definition 3.1 (Normalform der Zustandsdifferentialgleichung)** Die Darstellung der steuerungsaffinen Zustandsdifferentialgleichung (3.1) in der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_\alpha \\ \dot{\mathbf{x}}_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\alpha(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3.11)$$



**Abbildung 3.2:** Normalform der Zustandsdifferentialgleichung im Blockschaltbild.

wird als *Normalform* (für die Parametrierung von IDA-PBC durch Zuweisung lokal linearer Dynamik) bezeichnet. Darin ist der Zustandsvektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  in *aktuierte* und *unaktuierte* Koordinaten  $\mathbf{x}_\alpha \in \mathbb{R}^m$  und  $\mathbf{x}_\nu \in \mathbb{R}^{n-m}$  aufgeteilt.  $\square$

*Anmerkung:* Wird zur Normalform der Zustandsdifferentialgleichung der Ausgang  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_\alpha$  definiert, so hat das System Vektor-Differenzordnung  $\{1, \dots, 1\}$  und  $\dot{\mathbf{x}}_\nu = \mathbf{f}_\nu(\mathbf{0}, \mathbf{x}_\nu)$  beschreibt die Nulldynamik.

Im Folgenden wird die Darstellung der Zustandsdifferentialgleichung in der Normalform (3.11) vorausgesetzt. Entsprechend lässt sich die Entwurfsmatrix  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x})$  für IDA-PBC in Submatrizen aufteilen und die Bestimmungsgleichung (2.99) für  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  in der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_\alpha \\ \dot{\mathbf{x}}_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\alpha(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} \stackrel{!}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{x}) \\ \mathbf{F}_\nu(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_d(\mathbf{x})} \nabla H_d(\mathbf{x}) \quad (3.12)$$

angeben. Durch

$$\mathbf{F}_\alpha(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^T(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_\nu(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_1^T(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\nu}_{n-m}^T(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

sind die Parameter des *aktuierten* bzw. *unaktuierten Teils* der Entwurfsmatrix in den

Vektorfeldern

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_i : X &\rightarrow \mathbb{R}^n, & i = 1, \dots, m & \quad \text{und} \\ \boldsymbol{\nu}_j : X &\rightarrow \mathbb{R}^n, & j = 1, \dots, n - m \end{aligned} \quad (3.14)$$

zusammengefasst. Setzt man mit

$$\mathbf{G}^\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-m) \times m} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

den *einfachsten* Linksannihilator für die Eingangsmatrix an, so lautet die vektorwertige Restriktionsgleichung

$$\mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_\nu(\mathbf{x}) \nabla H_d(\mathbf{x}), \quad (3.16)$$

bzw. ausgeschrieben

$$\begin{bmatrix} f_{\nu,1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_{\nu,n-m}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_1^T(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\nu}_{n-m}^T(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \nabla H_d(\mathbf{x}). \quad (3.17)$$

Damit treten als Koeffizientenfunktionen der  $n - m$  zu lösenden skalaren partiellen Differentialgleichungen *ausschließlich* die Elemente des unaktuierten Teils  $\mathbf{F}_\nu(\mathbf{x})$  der Entwurfsmatrix auf. Das IDA-PBC-Regelgesetz, in welches die geeignet geformte Lösung  $H_d(\mathbf{x})$  einzusetzen ist, lautet schließlich

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}_\alpha^{-1}(\mathbf{x})(\mathbf{F}_\alpha(\mathbf{x}) \nabla H_d(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x})). \quad (3.18)$$

*Anmerkung:* Die Wahl eines anderen, zustandsabhängigen Linksannihilators  $\hat{\mathbf{G}}^\perp(\mathbf{x})$  kann günstig sein, wenn die Restriktionsgleichung (3.16) keine akzeptable Lösung besitzt. Hierin liegt weitere Entwurfsmatrixfreiheit, die in Abschnitt 4.3 diskutiert wird.

## 3.2 Normalform der Restriktionsgleichung

Während die Normalform der Zustandsdifferentialgleichung eine erste Strukturierung der Entwurfsmatrix  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x})$  liefert, hilft eine geeignete Transformation der Restriktionsgleichung (3.16), deren Lösbarkeit und die Wirkung ihrer frei parametrierbaren homogenen Lösung besser zu beurteilen.

Satz 2.10 beschreibt eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz einer Lösung der Restriktionsgleichung (3.16), die im Allgemeinen jedoch *in Abhängigkeit der festzulegenden Elemente der Matrix  $\mathbf{F}_\nu(\mathbf{x})$*  aufwendig zu überprüfen ist. Beschränkt man sich zunächst auf eine *konstante* Matrix  $\mathbf{F}_\nu$ , dann ergibt sich eine deutlich vereinfachte Lösbarkeitsbedingung.

In einer auf *Normalform* transformierten Restriktionsgleichung tritt pro skalarer partieller Differentialgleichung nur *eine* partielle Ableitung der gesuchten Funktion auf. Dadurch lässt sich ein Teil des transformierten Zustandsvektors unmittelbar mit den charakteristischen Koordinaten identifizieren, wodurch Transparenz bzgl. der Wirkung der homogenen Lösung entsteht.

Der Aufwand, der mit der Konstruktion einer Transformation auf Normalform für *beliebige* Matrizen  $\mathbf{F}_\nu(\mathbf{x})$  verbunden ist – nämlich die Lösung eines nichtlinearen Differentialgleichungssystems – ist ein weiterer Grund für die Beschränkung auf konstante Matrizen  $\mathbf{F}_\nu$ , für die sich eine einfache, lineare Transformation ergibt.

### 3.2.1 Normalform und charakteristische Koordinaten

Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen ist die im Folgenden definierte besondere Darstellung der Restriktionsgleichung.

**Definition 3.2 (Normalform der Restriktionsgleichung)** Lässt sich die Restriktionsgleichung (3.16) mithilfe einer umkehrbar stetig differenzierbaren Koordinatentransformation  $\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$  in der Form

$$\tilde{\mathbf{f}}_\nu(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-m) \times m} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \nabla \tilde{H}_d(\mathbf{z}) \quad (3.19)$$

mit

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_\alpha \\ \mathbf{z}_\nu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_\alpha = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_\nu = \begin{bmatrix} z_{m+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

darstellen, so werden die Koordinaten  $\mathbf{z}$  als *Normalkoordinaten* bezeichnet und Gl. (3.19) als *Normalform der Restriktionsgleichung*.  $\square$

Offensichtlich löst jede beliebige Funktion  $\tilde{\Phi}(\mathbf{z}_\alpha)$  der ersten  $m$  Elemente des transformierten Zustandsvektors die zugehörige homogene partielle Differentialgleichung

$$\mathbf{0} = \left( \frac{\partial \tilde{H}_d(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}_\nu} \right)^T \quad (3.21)$$

und kann zur partikulären Lösung von (3.19) addiert werden. Damit ist  $\mathbf{z}_\alpha$  ein Vektor *charakteristischer Koordinaten*.

*Anmerkung:* In gleicher Weise lässt sich der  $m$ -dimensionale Vektor charakteristischer Koordinaten identifizieren, wenn eine Transformation  $\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$  zwar nicht auf die genannte Normalform führt, sich aber die Restriktionsgleichung in neuen Koordinaten in der allgemeineren Form

$$\tilde{\mathbf{f}}_\nu(\mathbf{z}) = \left[ \mathbf{0}_{(n-m) \times m} \quad \mathbf{V}(\mathbf{z}) \right] \nabla \tilde{H}_d(\mathbf{z}) \quad (3.22)$$

mit einer regulären Matrix  $\mathbf{V}(\mathbf{z}) \neq \mathbf{I}$  darstellen lässt. Auch in diesem Fall lautet die homogene partielle Differentialgleichung (nach Multiplikation mit  $\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{z})$ ) wie in (3.21) und der erste Teil  $\mathbf{z}_\alpha \in \mathbb{R}^m$  des transformierten Zustandsvektors beschreibt charakteristische Koordinaten.

### 3.2.2 Transformation auf Normalform

Die Restriktionsgleichung (3.16) lässt sich auch zeilenweise in der Form

$$\langle dH_d(\mathbf{x}); \boldsymbol{\nu}_j(\mathbf{x}) \rangle = f_{\nu,j}(\mathbf{x}), \quad j = 1, \dots, n - m \quad (3.23)$$

darstellen. Gesucht ist die Transformation  $\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$ , so dass (3.23) zu

$$\langle d\tilde{H}_d(\mathbf{z}); \frac{\partial}{\partial z_{\nu,j}} \rangle = \tilde{f}_{\nu,j}(\mathbf{z}), \quad j = 1, \dots, n - m \quad (3.24)$$

wird, d. h. die Vektorfelder  $\boldsymbol{\nu}_j(\mathbf{x})$  der Entwurfsmatrix zu Basisvektoren des Tangentialraums  $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_j = \frac{\partial}{\partial z_{\nu,j}}$  transformieren<sup>1</sup>. Ausgeschrieben muss also

$$\frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left[ \boldsymbol{\nu}_1(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \boldsymbol{\nu}_{n-m}(\mathbf{x}) \right] = \left[ \mathbf{e}_{m+1} \quad \dots \quad \mathbf{e}_n \right] \quad (3.25)$$

---

<sup>1</sup>Gemeint ist der Tangentialraum an einem Punkt der Integralmannigfaltigkeit der Distribution (3.28).

gelten. Dieser Satz von Gleichungen für  $\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$  lässt sich aufteilen in die Bestimmungsgleichungen für die charakteristischen Koordinaten  $z_{\alpha,i} = t_i(\mathbf{x})$

$$\langle dt_i(\mathbf{x}); \boldsymbol{\nu}_j(\mathbf{x}) \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.26)$$

und

$$\langle dt_i(\mathbf{x}); \boldsymbol{\nu}_j(\mathbf{x}) \rangle = \delta_{i(m+j)}, \quad i = m+1, \dots, n \quad (3.27)$$

für  $j = 1, \dots, n-m$ . Gleichung (3.26) ist die Forderung, dass der Annihilator  $\Delta_\nu^\perp$  der Distribution

$$\Delta_\nu(\mathbf{x}) = \text{span}\{\boldsymbol{\nu}_1(\mathbf{x}), \dots, \boldsymbol{\nu}_{n-m}(\mathbf{x})\} \quad (3.28)$$

von vollständigen Differentialen  $dt_1(\mathbf{x}), \dots, dt_m(\mathbf{x})$  aufgespannt wird, die Distribution also vollständig integrierbar ist. Dies ist nach dem Satz von Frobenius genau dann gegeben, wenn  $\Delta_\nu$  involutiv ist. Mit dieser notwendigen Bedingung ist jedoch nur sichergestellt, dass eine Transformation existiert, so dass die Vektorfelder  $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_j(\mathbf{z})$ ,  $j = 1, \dots, n-m$  denselben Unterraum aufspannen wie die letzten  $n-m$  Basisvektoren des Tangentialraums, also

$$\tilde{\Delta}_\nu(\mathbf{z}) = \text{span}\{\tilde{\boldsymbol{\nu}}_1(\mathbf{z}), \dots, \tilde{\boldsymbol{\nu}}_{n-m}(\mathbf{z})\} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_{m+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right\}. \quad (3.29)$$

Damit ist Involutivität von  $\Delta_\nu$  hinreichend für die Existenz einer Transformation der Restriktionsgleichung in die Form (3.22), jedoch nicht für die Existenz einer Transformation in die Normalform (3.19).

Dazu müssen, wie in Gleichung (3.25) gefordert, die Vektorfelder  $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_j(\mathbf{z})$  selbst Basisvektoren des Tangentialraums sein, es muss also  $\mathbf{V}(\mathbf{z}) = \mathbf{I}$  gelten. Dies ist erst möglich, wenn die Vektorfelder  $\boldsymbol{\nu}_j(\mathbf{x})$  – wie die Basisvektoren in  $z$ -Koordinaten – kommutieren (vgl. die Anmerkung in Abschnitt 2.2.3):

$$[\boldsymbol{\nu}_i(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}_j(\mathbf{x})] = \mathbf{0}, \quad i, j = 1, \dots, n-m. \quad (3.30)$$

*Anmerkung:* Man beachte, dass die Forderung nach Involutivität von  $\Delta_\nu$  stärker ist als die Lösbarkeitsbedingung nach Satz 2.10. Es können also auch Lösungen der Restriktionsgleichung (3.16) existieren, wenn eine Transformation auf die Normalform (3.19) oder (3.22) nicht möglich ist. In diesem Fall verringert sich die Anzahl charakteristischer Koordinaten.

### 3.2.2.1 Beliebige Vektorfelder

Die in [9] vorgestellte Prozedur<sup>2</sup> zur Konstruktion einer Transformation  $\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$  auf Normalkoordinaten sei an dieser Stelle kurz skizziert. Die Flüsse der kommutierenden Vektorfelder  $\boldsymbol{\nu}_1(\mathbf{x}), \dots, \boldsymbol{\nu}_{n-m}(\mathbf{x})$  verlaufen auf einer  $n-m$ -dimensionalen Integralmannigfaltigkeit, die durch  $m$  darauf konstante Koordinaten  $z_1, \dots, z_m$  beschrieben werden kann. Aufgrund der Kommutativität ist die Reihenfolge der Anwendung der Vektorfelder beliebig, so dass die *Zeiten*, für die jedes Vektorfeld wirkt, als neue Koordinaten  $z_{m+1}, \dots, z_n$  auf der Integralmannigfaltigkeit betrachtet werden können. Der zusammengesetzte Fluss ist dann

$$\begin{aligned} \Phi_{z_n}^{\boldsymbol{\nu}_{n-m}} \circ \dots \circ \Phi_{z_{m+2}}^{\boldsymbol{\nu}_2} \circ \Phi_{z_{m+1}}^{\boldsymbol{\nu}_1} (\mathbf{t}^{-1}([z_1, \dots, z_m, 0, \dots, 0]^T)) &= \\ &= \mathbf{t}^{-1}([z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_n]^T), \end{aligned} \quad (3.31)$$

woraus die gewünschte Eigenschaft  $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_j(\mathbf{z}) = \frac{\partial}{\partial z_{m+j}}$  der transformierten Vektorfelder ersichtlich ist.

**Beispiel 3.1 (Konstruktion der Transformation)** Gegeben sind die beiden kommutierenden Vektorfelder

$$\boldsymbol{\nu}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 - x_2 \\ -2x_3 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Die von ihnen aufgespannte Distribution ist involutiv und es existiert eine Größe  $z_1 = t_1(\mathbf{x})$ , die unter dem Fluss der Differentialgleichungen  $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\nu}_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2$  erhalten bleibt und durch  $z_1 = \text{const.}$  die Integralmannigfaltigkeit beschreibt. Sie ergibt sich aus einer Lösung der beiden homogenen partiellen Differentialgleichungen

$$\langle dt_1(\mathbf{x}); \boldsymbol{\nu}_i(\mathbf{x}) \rangle = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.33)$$

Man erhält, z. B. mithilfe eines Computer-Algebra-Systems,

$$z_1 = t_1(\mathbf{x}) = \frac{x_2 + x_3}{\sqrt{x_3}}. \quad (3.34)$$

---

<sup>2</sup>Section 4: Coordinates adapted to an integrable distribution

Zur weiteren Konstruktion der Zustandstransformation werden die Zeiten, für die jeweils die Vektorfelder  $\boldsymbol{\nu}_1(\mathbf{x})$  bzw.  $\boldsymbol{\nu}_2(\mathbf{x})$  wirken und damit den Fluss der Differentialgleichung induzieren, als neue Koordinaten  $z_2$  und  $z_3$  interpretiert. Während der entsprechenden Intervalle gilt

$$\frac{d}{dt}\mathbf{z} = \frac{d}{dz_i}\mathbf{z} = \mathbf{e}_i, \quad i = 2, 3 \quad (3.35)$$

bzw.  $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_1(\mathbf{z}) = \frac{\partial}{\partial z_2}$  und  $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_2(\mathbf{z}) = \frac{\partial}{\partial z_3}$ . Die beiden Vektorfelder transformieren damit zu Basisvektoren des Tangentialraums. Für die linearen Differentialgleichungen im Beispiel lässt sich der zusammengesetzte Fluss

$$\mathbf{x}(z_2, z_3, \mathbf{x}_0) = \Phi_{z_3}^{f_2} \circ \Phi_{z_2}^{f_1}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} x_{10}e^{-z_2} \\ (x_{20} + x_{30})e^{-z_3} - x_{30}e^{-2z_3} \\ x_{30}e^{-2z_3} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

analytisch darstellen, woraus sich die Transformationsvorschriften

$$x_1 = x_{10}e^{-z_2} \quad \text{und} \quad x_3 = x_{30}e^{-2z_3} \quad (3.37)$$

bzw. umgekehrt

$$z_2 = t_2(\mathbf{x}) = -\ln x_1 + \ln x_{10} \quad \text{und} \quad z_3 = t_3(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\ln x_3 + \frac{1}{2}\ln x_{30} \quad (3.38)$$

ermitteln lassen. Mit (3.34) ist die Transformation auf Normalkoordinaten vollständig und die Multiplikation der Jacobimatrix

$$\frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{x_3}} & \frac{1}{2\sqrt{x_3}} \left(1 - \frac{x_2}{x_3}\right) \\ -\frac{1}{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2x_3} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

mit  $\boldsymbol{\nu}_{1,2}(\mathbf{x})$  bestätigt, dass beide Vektorfelder zu Einheitsvektoren in  $z$ -Koordinaten transformieren.  $\square$

Das beschriebene Vorgehen erfordert die *analytische Lösung* der im Allgemeinen nichtlinearen Differentialgleichungen  $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\nu}_i(\mathbf{x})$ , welche selbst mit erheblichem Aufwand verbunden ist. Die Ermittlung einer Normalform der Restriktionsgleichung ist in dieser Arbeit jedoch als *Hilfsmittel* für die Parametrierung der Entwurfsmatrix  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x})$  und der Energiefunktion  $H_d(\mathbf{x})$  gedacht. Im Hinblick darauf ist es ungünstig, die Elemente der Matrix



$\mathbf{F}_\nu(\mathbf{x})$  und damit die Koeffizienten(-funktionen) der Restriktionsgleichung (3.16) vollkommen frei zu lassen. Durch die Einschränkung der Entwurfsmatrizen auf die Klasse

$$\mathbf{F}_d(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{x}) \\ \mathbf{F}_\nu \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

mit konstanten Vektoren  $\boldsymbol{\nu}_j$  in der unteren Submatrix

$$\mathbf{F}_\nu = [\boldsymbol{\nu}_1 \ \dots \ \boldsymbol{\nu}_{n-m}]^T \quad (3.41)$$

ist die Forderung nach Kommutativität der Vektorfelder (3.30) automatisch erfüllt und die Normalform der Restriktionsgleichung lässt sich deutlich einfacher konstruieren.

### 3.2.2.2 Konstante Vektoren

Die Forderung (3.25) für die Transformation der Vektoren  $\boldsymbol{\nu}_j$ ,  $j = 1, \dots, n - m$  wird mit dem Ansatz einer linearen Transformation  $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$  zu

$$\mathbf{T}\mathbf{F}_\nu^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times (n-m)} \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{F}_\nu^T = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times (n-m)} \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

d. h. die letzten  $n - m$  Spalten der gesuchten inversen Transformationsmatrix sind durch  $\mathbf{F}_\nu^T$  bestimmt, während die ersten  $m$  Spalten beliebig gewählt werden können.

**Satz 3.1 (Transformation der Restriktionsgleichung)** Für Entwurfsmatrizen mit konstanter Submatrix  $\mathbf{F}_\nu$  vollen Zeilenranges  $n - m$  wird die Restriktionsgleichung

$$\mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_\nu \nabla H_d(\mathbf{x}) \quad (3.43)$$

durch eine lineare Koordinatentransformation  $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$  mit

$$\mathbf{T} = [\ast \ \mathbf{F}_\nu^T]^{-1}, \quad (3.44)$$

wobei die beliebige Matrix  $\ast \in \mathbb{R}^{n \times m}$  Regularität von  $\mathbf{T}$  gewährleistet, in die Normalform (3.19) transformiert.  $\square$

*Beweis.* Durch Einsetzen von  $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$  für  $\mathbf{F}_\nu = \text{const.}$  in (3.25).  $\blacksquare$

Für die transparente Parametrierung von IDA-PBC stellt sich, wie später klar wird, die Wahl  $\mathbf{T} = [\mathbf{F}_\alpha^T(\mathbf{x}^\ast) \ \mathbf{F}_\nu^T]^{-1}$  als günstig heraus.

### 3.2.3 Lösbarkeit der Restriktionsgleichung

In Normalkoordinaten lautet die Restriktionsgleichung gemäß (3.19)

$$\left[ \tilde{f}_{\nu,1}(\mathbf{z}) \quad \dots \quad \tilde{f}_{\nu,n-m}(\mathbf{z}) \right] = \left[ \frac{\partial \tilde{H}_d(\mathbf{z})}{\partial z_{\nu,1}} \quad \dots \quad \frac{\partial \tilde{H}_d(\mathbf{z})}{\partial z_{\nu,n-m}} \right]. \quad (3.45)$$

Die Frage nach ihrer Lösbarkeit ist äquivalent zur Frage, wann eine  $n - m$ -dimensionale 1-Form mit den Komponenten  $\tilde{f}_{\nu,i}(\mathbf{z})$  ein exaktes Differential ist. Diese Frage wurde jedoch bereits mit dem Lemma von Poincaré (Satz 2.8) beantwortet, wonach die Integrabilitätsbedingung (2.35)

$$\frac{\partial \tilde{f}_{\nu,i}(\mathbf{z})}{\partial z_{\nu,j}} - \frac{\partial \tilde{f}_{\nu,j}(\mathbf{z})}{\partial z_{\nu,i}} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n - m \quad (3.46)$$

erfüllt sein muss. Mit

$$\frac{\partial \tilde{f}_{\nu,i}(\mathbf{z})}{\partial z_{\nu,j}} = \frac{\partial f_{\nu,i}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \circ \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z}) \cdot \frac{\partial \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z})}{\partial z_{\nu,j}} \quad (3.47)$$

und

$$\frac{\partial \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z})}{\partial z_{\nu,j}} = \frac{\partial \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z})}{\partial z_{\nu}} \mathbf{e}_j = \mathbf{F}_{\nu}^T \mathbf{e}_j = \boldsymbol{\nu}_j \quad (3.48)$$

für  $\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z}) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{z}$  nach (3.44) lässt sich (3.46) in Originalkoordinaten transformieren:

$$\frac{\partial f_{\nu,i}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\nu}_j - \frac{\partial f_{\nu,j}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\nu}_i = 0, \quad i, j = 1, \dots, n - m. \quad (3.49)$$

#### Satz 3.2 (Lösbarkeit der Restriktionsgleichung mit konstantem Hauptteil)

Die Restriktionsgleichung (3.43) mit konstantem Hauptteil  $\mathbf{F}_{\nu}$  gemäß (3.41) besitzt genau dann eine Lösung, wenn

$$\langle df_{\nu,i}(\mathbf{x}); \boldsymbol{\nu}_j \rangle - \langle df_{\nu,j}(\mathbf{x}); \boldsymbol{\nu}_i \rangle = 0 \quad (3.50)$$

für alle  $i, j = 1, \dots, n - m$  gilt. Die Ausdrücke auf der linken Seite sind als Lie-Ableitungen der Elemente  $f_{\nu,i}(\mathbf{x})$  des Quellterms der Restriktionsgleichung in Richtung der konstanten Vektorfelder  $\boldsymbol{\nu}_j$  zu verstehen.  $\square$

*Beweis.* Der Beweis lässt sich auch über die Anwendung von Satz 2.10 für  $\mathbf{W} = \mathbf{F}_\nu$  und  $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_\nu(\mathbf{x})$  führen. Da die konstante Matrix  $\mathbf{W}$  vollen Rang  $n - m$  hat, ist die Distribution  $\Delta_{\mathbf{W}}$  involutiv und hat die Dimension  $n - m$ . Lösbarkeit ist gegeben, wenn der involutive Abschluss von  $\Delta_{\mathbf{W},s}$  ebenfalls Dimension  $n - m$  besitzt. Die Lie-Klammern der erweiterten Vektorfelder in  $\Delta_{\mathbf{W},s}$  sind lediglich in ihren  $n + 1$ -ten Komponenten, welche der linken Seite von (3.50) entsprechen, ungleich Null. Da die Distribution  $\Delta_{\mathbf{W},s}$  nur erweitert wird, wenn mindestens eine der  $n + 1$ -ten Komponenten von Null verschieden ist, entspricht im betrachteten Fall (3.50) der Bedingung (2.87). ■

Für zeitvariante Vektorfelder  $\mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}, t)$  und Matrizen  $\mathbf{F}_\nu(t)$  ist Bedingung (3.50) in ganz analoger Weise anwendbar, da die Zeit  $t$  – im Gegensatz zu den unabhängigen Variablen  $\mathbf{x}$  – als Parameter zu betrachten ist. Entsprechend lautet die Formulierung im zeitveränderlichen Fall:

$$\langle df_{\nu,i}(\mathbf{x}, t); \boldsymbol{\nu}_j(t) \rangle - \langle df_{\nu,j}(\mathbf{x}, t); \boldsymbol{\nu}_i(t) \rangle = 0, \quad i, j = 1, \dots, n - m, \quad \forall t. \quad (3.51)$$

### 3.3 Äquivalente Formulierung der Zustands- und Restriktionsgleichung

In manchen Fällen schränkt die Lösbarkeitsbedingung (3.50) für die Restriktionsgleichung (3.43) eine konstant angesetzte Submatrix  $\mathbf{F}_\nu$  derart ein, dass gewünschte Eigenschaften des resultierenden Port-Hamilton-Systems nicht erreicht werden können (siehe Abschnitt 4.3 für eine detailliertere Beschreibung). In diesen Fällen kann es von Vorteil sein, eine *äquivalente Bestimmungsgleichung* bzw. daraus resultierend eine *äquivalente Restriktionsgleichung* zu formulieren, die eine Lösung für eine *konstante* Koeffizientenmatrix besitzt.

Multipliziert man die Bestimmungsgleichung (3.12) von links mit einer im betrachteten Gebiet des Zustandsraums regulären oberen Dreiecksmatrix

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11}(\mathbf{x}) & \mathbf{D}_{12}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times m} & \mathbf{D}_{22}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

ergibt sich eine strukturell identische, *äquivalente* oder *Ersatz-Bestimmungsgleichung*

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_\alpha(\mathbf{x}) \\ \hat{\mathbf{f}}_\nu(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}}_\alpha(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_\alpha(\mathbf{x}) \\ \hat{\mathbf{F}}_\nu(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \nabla H_d(\mathbf{x}) \quad (3.53)$$

mit

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{x}), \quad \hat{\mathbf{F}}_d(\mathbf{x}) = \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{F}_d(\mathbf{x}). \quad (3.54)$$

Der *Trick* besteht darin, das Vektorfeld  $\hat{\mathbf{f}}_\nu(\mathbf{x}) = \mathbf{D}_{22}(\mathbf{x})\mathbf{f}_\nu(\mathbf{x})$  durch die Wahl von  $\mathbf{D}_{22}(\mathbf{x})$  so zu vereinfachen, dass eine Lösung der *Ersatz-Restriktionsgleichung*

$$\hat{\mathbf{f}}_\nu(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{F}}_\nu \nabla H_d(\mathbf{x}) \quad (3.55)$$

mit einer konstant angesetzten und in ausreichendem Maße parametrierbaren<sup>3</sup> Matrix  $\hat{\mathbf{F}}_\nu$  vollen Zeilenranges existiert. Durch die Konstanz von  $\hat{\mathbf{F}}_\nu$  lässt sich die Lösbarkeit einfach in Abhängigkeit der (Ersatz-)Entwurfparameter überprüfen. Die charakteristischen Koordinaten sind mithilfe der linearen Transformation (3.44) direkt abzulesen.

Nach einer Vorparametrierung von  $\hat{\mathbf{F}}_\nu$  hinsichtlich der Lösbarkeit der Ersatz-Restriktionsgleichung und der Lösung derselben kann die zustandsabhängige Entwurfsmatrix<sup>4</sup>

$$\mathbf{F}_d(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{F}}_d \quad (3.56)$$

des Originalproblems zur weiteren Bestimmung der Entwurfparameter (siehe nächstes Kapitel) herangezogen werden. Eine Schwierigkeit, die sich aus der Zustandsabhängigkeit der resultierenden Entwurfsmatrix des Originalproblems ergibt, ist, dass in der Regel positive Semidefinitheit der resultierenden Dissipationsmatrix nur in einer – für den Stabilitätsnachweis zu bestimmenden – Umgebung der Ruhelage gewährleistet ist.

Da die Vorparametrierung von  $\hat{\mathbf{F}}_\nu$  rein auf der Ersatz-Restriktionsgleichung (3.55) beruht, reicht es, eine Blockdiagonalmatrix

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \text{diag}\{\mathbf{I}, \mathbf{D}_{22}(\mathbf{x})\} \quad (3.57)$$

zur Ermittlung der Ersatz-Bestimmungsgleichung zu verwenden bzw. für die ursprüngliche Bestimmungsgleichung (3.12) den zustandsabhängigen Linksannihilator

$$\hat{\mathbf{G}}^\perp(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-m) \times m} & \mathbf{D}_{22}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

anzusetzen.

---

<sup>3</sup>D. h. die Lösbarkeitsbedingung soll nicht bereits zu viele Elemente von  $\hat{\mathbf{F}}_\nu$  einschränken.

<sup>4</sup>Auch  $\hat{\mathbf{F}}_\alpha$  sei als konstant angenommen.

Sind der Driftvektor  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  und die Eingangsmatrix  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$  zeitabhängig, so etwa beim Problem der Trajektorienfolgeregelung, ist im Allgemeinen der Ansatz einer *zeit- und zustandsabhängigen* Entwurfsmatrix  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x}, t)$  notwendig (Abschnitt 4.4). Wiederum ist ein geeigneter Linksannihilator

$$\hat{\mathbf{G}}^\perp(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-m) \times m} & \mathbf{D}_{22}(\mathbf{x}, t) \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

zu ermitteln, mit dem sich die Ersatz-Restriktionsgleichung

$$\hat{\mathbf{f}}_\nu(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{F}}_\nu(t) \nabla H_d(\mathbf{x}, t) \quad (3.60)$$

mit einer *zustandsunabhängigen* Matrix  $\hat{\mathbf{F}}_\nu(t)$  ansetzen lässt. Die Lösbarkeit ist nach Bedingung (3.51) zu beurteilen. Da die resultierende Energie  $H_d(\mathbf{x}, t)$  explizit von der Zeit abhängt, erfordert der Stabilitätsnachweis, der mit den in Abschnitt 2.1.2 dargestellten Methoden zu führen ist, deutlich mehr Aufwand.



# Kapitel 4

## Parametrierung von IDA-PBC durch Zuweisung lokal linearer Dynamik

Auf die im letzten Kapitel eingeführten Normalformen der Zustandsdifferential- und der Restriktionsgleichung wird nun zurückgegriffen, um Parameter der Entwurfsmatrix  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x})$  und der homogenen Lösung  $\Phi(\mathbf{z}_\alpha)$  zu bestimmen, mit denen *die Linearisierung* des aus dem IDA-PBC-Entwurf hervorgehenden Port-Hamilton-Systems *gewünschte Dynamik* hat. Hierfür wurde die Wendung *lokal lineare Dynamik* gewählt<sup>1</sup>. Die lokal lineare Dynamik wird in Form der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_d$  des linearisierten Systems vorgegeben.

Die Zuweisung lokal linearer Dynamik greift die *Methode der Linearisierung*, wie sie in [60] hinsichtlich der Stabilitätsanalyse beschrieben wird, auf und nutzt sie zur Regelsynthese für nichtlineare Systeme:

*The linearization method, as the name implies, consists of linearizing the given system in the neighborhood of an equilibrium and determining the behavior of the nonlinear system by studying the resulting linear system. The power of the method lies in the fact that, except for special cases [...], the method yields definitive results that are valid in some neighborhood of the equilibrium.*

Im Kontext der Zustandsrückführlinearisierung wurde in [20] ein Verfahren vorgestellt, mit dem einem nichtlinearen System durch nichtlineare Zustandsrückführung gewünschtes, zumindest näherungsweise lineares Verhalten aufgeprägt und eine *quantitative Ab-*

---

<sup>1</sup>Damit ist ausdrücklich *nicht* die *exakt* lineare Dynamik gemeint, die etwa durch Zustandsrückführlinearisierung entsteht. Im Hinblick auf die Prägnanz der Formulierung wurde auf die Erwähnung des Näherungsaspekts in *lokal linear* jedoch verzichtet.

*schätzung des Einzugsgebiets* der Ruhelage gegeben wird. Zwei wesentliche Unterschiede zur vorliegenden Arbeit sind hervorzuheben:

- In [20] wird letztlich ein *exakt lineares* Zielsystem vorgegeben (Gleichung (2) darin, in der hier verwendeten Notation):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \stackrel{!}{=} \mathbf{A}_d\mathbf{x}. \quad (4.1)$$

Das dort hergeleitete Regelgesetz besteht aus einem linearen Anteil, der aus dem linearen Zustandsreglerentwurf hervorgeht und einem nichtlinearen Anteil, um die Nichtlinearitäten so gut wie möglich zu kompensieren. Hier hingegen sind die Port-Hamilton'schen Zielsysteme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \stackrel{!}{=} (\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x}))\nabla H_d(\mathbf{x}) \quad (4.2)$$

inhärent *nichtlinear*. Nicht die bestmögliche Kompensation von Nichtlinearitäten steht im Vordergrund, sondern die – neben der Vorgabe lokal linearer Dynamik – vorteilhafteste Zuweisung der Energie  $H_d(\mathbf{x})$  für das geregelte System, etwa im Sinne des größten Einzugsgebiets der Ruhelage.

- In [20] beruht der Stabilitätsnachweis der Ruhelage auf einer quadratischen Ljapunowfunktion und einer konservativen Abschätzung des Einzugsgebiets. Aus dem IDA-PBC-Entwurf, mit dessen Parametrierung sich diese Arbeit beschäftigt, resultiert hingegen eine beliebig nichtquadratische Energiefunktion, die eine genauere Abschätzung des Einzugsgebiets erlaubt.

## 4.1 Motivation

Dieser Abschnitt fasst einige Vorteile des IDA-PBC-Ansatzes zusammen, zeigt aber auch anhand zweier Beispiele, wie eine missverstandene physikalische Anschaulichkeit zur Fehlinterpretation des dynamischen Verhaltens führen kann.

### 4.1.1 Vorteile von IDA-PBC

IDA-PBC ist ein sehr systematisches nichtlineares Zustandsregler-Entwurfsverfahren, insbesondere aufgrund der im Folgenden skizzierten Eigenschaften.



**Stabilitätsnachweis.** Die Energiefunktion  $H_d(\mathbf{x})$  des durch Zustandsregelung realisierten Port-Hamilton-Systems dient, zusammen mit der positiv semidefiniten Dämpfungsmatrix, dem Nachweis der Passivität und der Stabilität. Sie ergibt sich *aus dem Regelungsentwurf* und muss weder anfangs vorgegeben noch im Nachhinein konstruiert werden.

**Universalität.** Die Anwendung von IDA-PBC unterliegt grundsätzlich keiner strukturellen Einschränkung in Bezug auf die Systemklasse<sup>2</sup>. Da die Regelungsaufgabe die Stabilisierung einer Ruhelage im *Zustandsraum*<sup>3</sup> ist, spielt auch die Festlegung eines Ausgangs und damit Eigenschaften wie Differenzordnung oder Stabilität der Nulldynamik keine unmittelbare Rolle. Die Einschränkungen hinsichtlich Lösbarkeit und erzielbarer Dynamik ergeben sich für jedes einzelne System, abhängig von der Festlegung der Entwurfsmatrix  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x})$ , aus dessen spezifischer Restriktionsgleichung.

**Systematik.** Die Struktur des geregelten Systems in Port-Hamilton'scher Form bedingt auch ein sehr systematisches Vorgehen beim Regelungsentwurf. So sind die typischen Entwurfsschritte:

---

<b>Vorgabe</b>	Parametrierung von Struktur- und Dämpfungsmatrix
<b>Schritt 1</b>	Untersuchung der Lösbarkeit der Restriktionsgleichung
<b>Schritt 2</b>	Parametrische Darstellung der Lösung
<b>Schritt 3</b>	Sicherstellen positiver Semidefinitheit der Dämpfungsmatrix
<b>Schritt 4</b>	<i>Energy Shaping</i> : Erzeugen eines Minimums der Energie
<b>Schritt 5</b>	Nutzung noch offener Entwurfparameter zur weiteren Anpassung der Energie
<b>Schritt 6</b>	<i>Damping Injection</i> : Anpassung des dynamischen Verhaltens durch Einbringen zusätzlicher Dissipation

---

**Tabelle 4.1:** Entwurfsschritte beim konventionellen IDA-PBC-Ansatz.

**Entwurfsfreiheit.** Mit maximal  $n^2$  Elementen der Entwurfsmatrix  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x})$ , die beliebige Funktionen sein können, sowie einer in den maximal<sup>4</sup>  $m$  charakteristischen Koordinaten frei wählbaren homogenen Lösung der Restriktionsgleichung ist die Entwurfsfreiheit bei

---

<sup>2</sup>Die Beschränkung auf steuerungsaffine Systeme (mit involutiven Eingangsvektorfeldern) in dieser Arbeit liegt an der für diese Systemklasse in allgemeiner Form darstellbaren Restriktionsgleichung.

<sup>3</sup>Dies gilt auch für die Folgeregelung: Stabilisierung der Ruhelage Null in Fehlerkoordinaten.

<sup>4</sup>Vgl. dazu die Anmerkung in Abschnitt 3.2.2.

IDA-PBC enorm. Hinzu kommt die Freiheit in der Festlegung des Linksannihilators, die etwa den Ansatz einer konstanten (Ersatz-)Entwurfsmatrix ermöglichen kann. Die große Entwurfsmatrixfreiheit ist jedoch gleichzeitig, und hierin liegt die Schwierigkeit, verbunden mit der Frage nach der sinnvollen und günstigen Wahl der Parameter:

*Wie sind die Entwurfparameter von IDA-PBC zu wählen, damit sich gewünschtes, zu Beginn des Entwurfsprozesses definiertes, dynamisches Verhalten des geregelten Systems einstellt?*

Aus der physikalischen Anschauung heraus ist es denkbar, die Struktur- und Dämpfungsmatrix für das geregelte System zu Beginn des Regelungsentwurfs so zu wählen, dass sich darin neue Kopplungen zwischen Subsystemen oder veränderte Dissipation in Systemteilen abbilden. Zwei Dinge sind jedoch zu beachten:

- In der Regel lässt sich die Lösbarkeit der Restriktionsgleichung für eine vorgegebene Parametrierung von Struktur- und Dämpfungsmatrix, auch wenn diese physikalisch plausibel erscheint, nicht durch Augenschein beurteilen, sondern muss anhand der bekannten Bedingungen überprüft werden.
- Die Restriktionsgleichung stellt einen von jeder Parametrierung zu erfüllenden Bezug zwischen der Entwurfsmatrix und der neuen Energiefunktion her, so dass eine Veränderung von Struktur- und/oder Dämpfungsmatrix sich in einer modifizierten Energiefunktion abbilden kann.

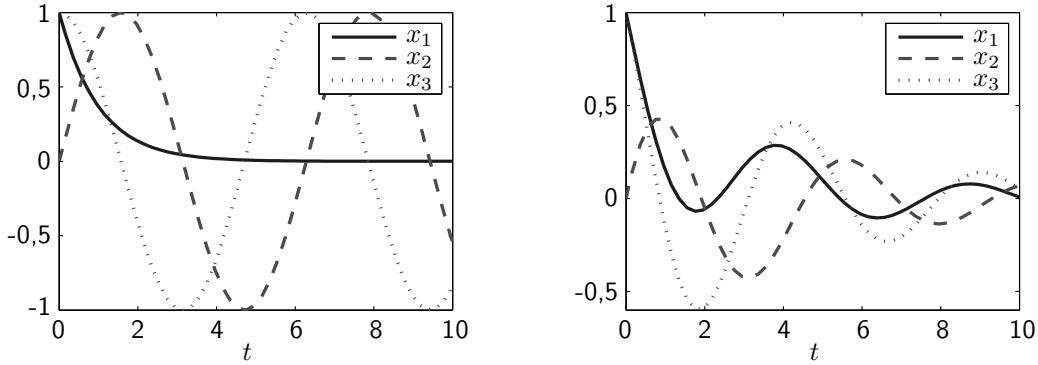
Dass eine isolierte Betrachtung der einzelnen Bestandteile der resultierenden Port-Hamilton'schen Systemdarstellung zur Abschätzung der tatsächlichen Dynamik nicht ausreicht und eine entsprechend einseitige Parameterwahl für IDA-PBC sogar auf widersprüchliche Ergebnisse führen kann, zeigen die folgenden Beispiele.

### 4.1.2 Beispiele zur Wirkung der Entwurfparameter

Zunächst wird die prinzipielle Schwierigkeit illustriert, dynamisches Verhalten eines Port-Hamilton-Systems durch die alleinige Betrachtung der Struktur- und Dämpfungsmatrix zu beurteilen.

**Beispiel 4.1 (Wirkung unterschiedlicher Energiefunktionen)** Gegeben seien zwei Port-Hamilton-Systeme

$$\Sigma_i : \quad \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J} - \mathbf{R})\nabla H_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2 \quad (4.3)$$



**Abbildung 4.1:** Antworten der beiden Port-Hamilton-Systeme auf einen Anfangswert.

mit identischer Struktur- und Dämpfungsmatrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

aber unterschiedlichen Energiefunktionen

$$\begin{aligned} H_1(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \\ H_2(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}((x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Das in Abb. 4.1 links dargestellte (Anfangswert-)Zeitverhalten des ersten Systems lässt sich unmittelbar durch die Matrizen  $\mathbf{J}$  und  $\mathbf{R}$  erklären. Während  $\mathbf{J}$  den fortwährenden Energieaustausch zwischen  $x_2$  und  $x_3$  beschreibt, klingt  $x_1$  gemäß  $\mathbf{R}$  monoton ab. Die Dynamik von  $\Sigma_1$  ist somit in gewisser Weise vorhersehbar. Der Grund hierfür ist, dass die Gesamtenergie  $H_1(\mathbf{x})$  mit den Quadraten der Systemzustände als Summe diskreter, voneinander unabhängiger Energiespeicher verstanden werden kann. Da jeder Zustand isoliert zur Gesamtenergie beiträgt, tritt er auch nur im entsprechenden Element des Gradienten auf und kann nur durch die schiefsymmetrische Strukturmatrix auf die Differentialgleichung eines anderen Zustands wirken.

Im Zeitverhalten von  $\Sigma_2$  verteilen sich hingegen Abklingen und Oszillationen auf alle drei Zustände. Im Ausdruck der Energiefunktion  $H_2(\mathbf{x})$  kommt es bereits zu einer Kopplung zwischen den Größen  $x_1$  und  $x_2$ , die *nicht* in  $\mathbf{J}$  abgebildet ist. Mit der Cholesky-Zerlegung<sup>5</sup>

<sup>5</sup>Für jede positiv definite Matrix existiert eine solche Faktorisierung mit einer invertierbaren unteren Dreiecksmatrix  $\mathbf{L}$  [40].

$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$  der Hessematrix der Energie  $H_2(\mathbf{x})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

und der Zustandstransformation  $\mathbf{x}' = \mathbf{L}^T \mathbf{x}$  lässt sich das Port-Hamilton-System in neuen Koordinaten durch

$$H_2'(\mathbf{x}') = \frac{1}{2}((x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2) \quad (4.7)$$

und

$$\mathbf{J}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}' = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

beschreiben. Die Kopplung zwischen den Zuständen  $x'_1$  und  $x'_2$  ist nun vollständig in der Strukturmatrix abgebildet.  $\square$

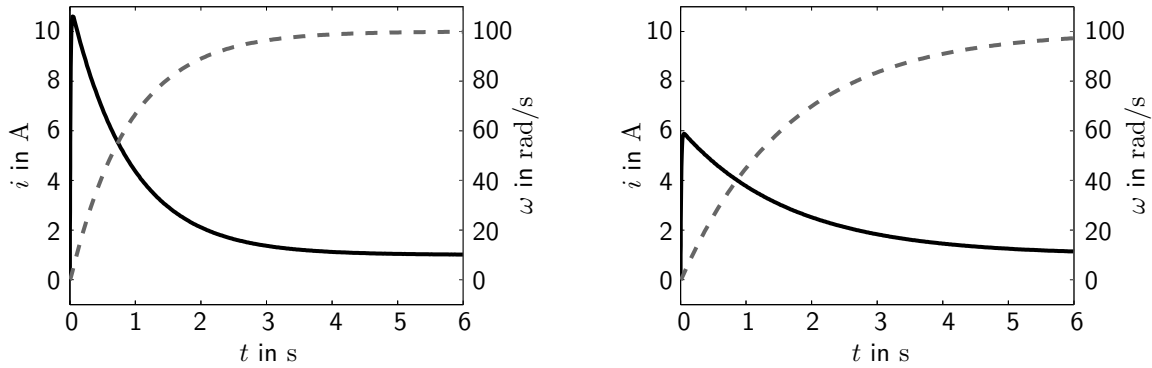
Dieses einfache lineare Beispiel verdeutlicht, dass zur Beurteilung der Dynamik eines Port-Hamilton-Systems stets die Entwurfsmatrix  $\mathbf{J} - \mathbf{R}$  und die Energiefunktion  $H$  betrachtet werden müssen. Dass sich die isolierte Festlegung einzelner Parameter widersprüchlich auf die resultierende Dynamik auswirken kann, zeigt das folgende, ebenfalls lineare Beispiel der Drehzahlregelung einer permanenterregten Gleichstrommaschine.

**Beispiel 4.2 (IDA-PBC für eine Gleichstrommaschine)** Das Port-Hamilton'sche Modell einer Gleichstrommaschine mit den Zuständen Ankerstrom  $x_1$  und Winkelgeschwindigkeit  $x_2$  sowie der Ankerspannung  $u$  als Stellgröße lautet

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L^2} & -\frac{k}{JL} \\ \frac{k}{JL} & -\frac{d}{J^2} \end{bmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) + \begin{bmatrix} 1 \\ L \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (4.9)$$

wobei sich die Gesamtenergie

$$H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}Lx_1^2 + \frac{1}{2}Jx_2^2 \quad (4.10)$$



**Abbildung 4.2:** Winkelgeschwindigkeit (strichliert) und Ankerstrom beim Übergang zur Soll-drehzahl 100 rad/s. Links: unregelt, rechts: IDA-PBC mit virtueller Trägheit  $J_d = J/2$ .

aus der in der Ankerinduktivität gespeicherten magnetischen Energie und der kinetischen Energie des Läufers zusammensetzt. Die physikalischen Parameter im Beispiel sind der ohmsche Widerstand  $R = 1 \Omega$  und die Induktivität der Ankerwicklung  $L = 10 \text{ mH}$ , die Motorkonstante  $k = 0,1 \text{ Vs}$ , das Massenträgheitsmoment  $J = 0,01 \text{ kgm}^2$  und der viskose Reibkoeffizient  $d = 10^{-3} \text{ Nms}$ . Fordert man für das geregelte System eine analoge Zustandsdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{R_d}{L_d^2} & -\frac{k_d}{J_d L_d} \\ \frac{k_d}{J_d L_d} & -\frac{d_d}{J_d^2} \end{bmatrix} \nabla H_d(\mathbf{x}) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (4.11)$$

mit der neuen virtuellen Energie

$$H_d(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} L_d x_1^2 + \frac{1}{2} J_d x_2^2 \quad (4.12)$$

und einer virtuellen Induktivität  $L_d$ , Trägheit  $J_d$ , usw., dann lautet die (algebraische) Restriktionsgleichung

$$\begin{bmatrix} \frac{k}{JL} & -\frac{d}{J^2} \end{bmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{k_d}{J_d L_d} & -\frac{d_d}{J_d^2} \end{bmatrix} \nabla H_d(\mathbf{x}), \quad (4.13)$$

woraus sich die Bedingungen

$$\frac{k}{J} = \frac{k_d}{J_d} \quad \text{und} \quad \frac{d}{J} = \frac{d_d}{J_d} \quad (4.14)$$

ableiten. Mit dem Ziel, das transiente Verhalten des geregelten Systems zu beschleunigen, wird mit  $J_d = J/2$  eine verringerte virtuelle Massenträgheit angesetzt. Wegen der Bedingungen (4.14) aus der Restriktionsgleichung müssen dann aber ebenso die virtuelle Dämpfung  $d_d = d/2$  und die Motorkonstante  $k_d = k/2$  angepasst werden.

Abbildung 4.2 zeigt die simulierten Transienten von Strom und Drehzahl des unregulierten bzw. geregelten Systems auf einen Sprung der Eingangsgröße  $u(t)$  bzw.  $v(t)$ , so dass sich die stationäre Drehzahl  $\omega^* = 100$  rad/s einstellt. Deutlich wird, dass die physikalisch motivierte, einseitige Festlegung der virtuellen Massenträgheit aufgrund der Kopplungen der Parameter in der Restriktionsgleichung die genau entgegengesetzte Wirkung als beabsichtigt, nämlich eine Verzögerung des Übergangsverhaltens, hat.  $\square$

### 4.1.3 Maßnahmen zur transparenten Parametrierung

Um den geschilderten Schwierigkeiten Rechnung zu tragen und eine transparente Parametrierung des Regelungsentwurfs mit IDA-PBC zu ermöglichen, werden in dieser Arbeit folgende Maßnahmen vorgeschlagen:

**Zur Lösbarkeit der Restriktionsgleichung.** Das zu regelnde System wird in der Normalform (3.11) dargestellt und die Submatrix  $\mathbf{F}_\nu$  in der Bestimmungsgleichung (3.12) konstant angesetzt. Zur Ermittlung der Restriktionsgleichung wird der einfachste Linksannihilator (3.15) verwendet, so dass *nur* die Elemente von  $\mathbf{F}_\nu$  als *konstante Koeffizienten* der Restriktionsgleichung auftreten. Damit lässt sich die Lösbarkeit einfach anhand der Bedingung (3.50) beurteilen.

Reicht eine konstante Parametrierung von  $\mathbf{F}_\nu$  nicht aus, um das IDA-PBC-Entwurfsproblem erfolgreich zu lösen, wird, wie in Abschnitt 3.3 beschrieben, versucht, ein Ersatzproblem mit einer konstanten Matrix  $\hat{\mathbf{F}}_\nu$  zu formulieren. Entsprechendes gilt für den zeitvarianten Fall, wobei die Lösbarkeit der Restriktionsgleichung mit dem Hauptteil  $\hat{\mathbf{F}}_\nu(t)$  durch die zeitvariante Bedingung (3.51) zu überprüfen ist.

**Zum Umgang mit der Entwurfsvfreiheit.** Durch die Aufspaltung der Bestimmungsgleichung (3.12) in einen aktuierten und einen unaktuierten Teil sowie die Verwendung des einfachsten Linksannihilators lässt sich, wie in Tabelle 4.2 dargestellt, die Wirkung verschiedener Gruppen von Entwurfparametern *lokalisieren*.

Die dadurch gegebene *Klassifikation* der Entwurfsgrößen erleichtert den systematischen Regelungsentwurf unter Vorgabe lokal linearer Dynamik, da die Entwurfsvfreiheit sukzes-

Entwurfsgröße	Wirkung auf
$\mathbf{G}^\perp(\mathbf{x})$	Lösbarkeit der Restriktionsgleichung
$\mathbf{F}_\nu(\mathbf{x})$	Lösbarkeit der Restriktionsgleichung Form der Energie Definitheit der Dissipationsmatrix
$\mathbf{F}_\alpha(\mathbf{x})$	Definitheit der Dissipationsmatrix
$\Phi(\mathbf{z}_\alpha)$	Form der Energie

**Tabelle 4.2:** Entwurfsgrößen und ihre Auswirkungen.

sive, entsprechend der Wirkung der einzelnen Parameterklassen, eingeschränkt werden kann.

Die bei erfolgreicher Zuweisung lokal linearer Dynamik verbleibende Entwurfsvfreiheit lässt sich weiterhin zum Anpassen der resultierenden Energiefunktion (*Energy Shaping*) nutzen.

**Zur transparenten Dynamikvorgabe.** Die Wunschdynamik soll anhand von Kriterien vorgegeben werden können, die dem Entwerfer eine Einschätzung von Einschwingdauer, Dämpfung und Robustheit des geregelten Systems erlauben. Für lineare Systeme bilden die *Eigenwerte der Dynamikmatrix* diese Eigenschaften ab, für nichtlineare Systeme gibt es keine Entsprechung. Daher wird, wie bereits zu Beginn des Kapitels dargestellt, die *Linearisierung des geregelten Systems*

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{F}_d(\mathbf{x}) \nabla H_d(\mathbf{x})) \right|_{\mathbf{x}^*} \Delta \mathbf{x} \quad (4.15)$$

mit lokal linearer Wunschdynamik

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_d \Delta \mathbf{x} \quad (4.16)$$

verglichen. Dadurch wird eine *quantifizierbare* und damit *transparente* Dynamikvorgabe für das Port-Hamilton'sche Zielsystem in der Umgebung seiner Ruhelage erzielt. Es stellt sich weiterhin heraus, dass sich mit diesem Vorgehen – in Verbindung mit einer Transformation der Bestimmungsgleichung auf eine lokale Normalform – die nötigen Entwurfparameter aus der Lösung eines *linearen Gleichungssystems* ergeben und die *Definitheitsprüfung der Energie überflüssig* wird.

Damit liefert die Zuweisung lokal linearer Dynamik einen zusätzlichen Vorteil gegenüber dem üblichen Vorgehen bei der Parametrierung von IDA-PBC, welches die Definitheits-

prüfung sowohl der Dissipationsmatrix als auch der – meist unübersichtlicheren – Hessematrix der Energie erfordert.

## 4.2 Grundgleichungen für die Zuweisung lokal linearer Dynamik

Zur Ermittlung *einfacher Bestimmungsgleichungen* für die Zuweisung lokal linearer Dynamik ist zunächst die in einen aktuierten und einen unaktuierten Teil zerlegte Port-Hamilton-Darstellung des geregelten Systems zu linearisieren. Unter Ausnutzung der besonderen Struktur ist es dann möglich, die Hessematrix der Energiefunktion des Port-Hamilton-Systems, welches *tatsächlich* die lokal lineare Wunschdynamik aufweist, in *lokalen Normalkoordinaten* anzugeben. Aus der erforderlichen Symmetrie der Hessematrix ergeben sich dann Bedingungen in Form *linearer Gleichungen* für die Parameter in der Entwurfsmatrix und der homogenen Lösung. Allen weiteren Überlegungen liegen folgende Annahmen zugrunde:

**Annahme 4.1** Die vorgegebene Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_d$  sei asymptotisch stabil.

**Annahme 4.2** Die Restriktionsgleichung sei lösbar für eine (transponierte) Koeffizientenmatrix  $\mathbf{F}_\nu^T(\mathbf{x})$ , die in der Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  vollen Rang  $n - m$  besitzt und deren Spalten  $\boldsymbol{\nu}_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, n - m$  eine involutive Distribution  $\Delta_\nu(\mathbf{x})$  bilden.

Die zweite Annahme ist Voraussetzung für die Regularität von  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x}^*)$ . Diese muss gegeben sein, damit der Vergleich des linearisierten Port-Hamilton-Systems (4.15) mit asymptotisch stabiler Wunschdynamik (4.16) und damit regulärer Matrix  $\mathbf{A}_d$  gelingen kann. Weiterhin ist durch die Involutivitätsforderung gesichert, dass genau  $m$  charakteristische Koordinaten für die Lösung der Restriktionsgleichung existieren (vgl. Abschnitt 3.2.1).

Durch die Zuweisung lokal linearer Dynamik werden u. a. die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der homogenen Lösung  $\Phi(\mathbf{z}_\alpha)$  so bestimmt, dass die für ein Minimum der Energie in der Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  erforderliche positive Definitheit der Hessematrix

$$\mathbf{Q}_d = \left. \frac{\partial^2 H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{x}^*} > 0 \quad (4.17)$$

automatisch gegeben ist. Zur Realisierung der Forderung

$$\nabla H_d(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}^*} = \mathbf{0} \quad (4.18)$$



sind hingegen Parameter *erster Ordnung*, die also die ersten partiellen Ableitungen von  $H_d$  betreffen, heranzuziehen. Durch einen entsprechenden Ansatz der homogenen Lösung  $\Phi(\mathbf{z}_\alpha)$  lassen sich die erforderlichen ersten und zweiten Ableitungen *unabhängig voneinander* festlegen. Die Bedingung (4.18) lässt sich dabei genau dann erfüllen, wenn es sich beim gewünschten Gleichgewichtspunkt  $\mathbf{x}^*$  um eine zulässige Ruhelage handelt, für die unter der entsprechenden stationären Stellgröße  $\mathbf{u}^*$  die Bedingung  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  und damit insbesondere  $\mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  gilt.

**Satz 4.1** Gilt unter der Annahme 4.2  $\mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , dann lässt sich die Forderung (4.18) durch Parameter erster Ordnung der homogenen Lösung  $\Phi(\mathbf{z}_\alpha)$  realisieren.  $\square$

*Beweis.* Ist  $\Delta_\nu(\mathbf{x})$  involutiv, dann existiert eine Transformation der Restriktionsgleichung auf die Form (3.22). Mit  $\mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}^*) = \tilde{\mathbf{f}}_\nu(\mathbf{z}^*) = \mathbf{0}$  gilt dann auch  $\nabla_{z_\nu} \tilde{H}_d(\mathbf{z}^*) = \mathbf{0}$ . Durch die freie Wahl der partiellen Ableitungen erster Ordnung in der homogenen Lösung  $\Phi(\mathbf{z}_\alpha)$  ist  $\nabla_{z_\alpha} \tilde{H}_d(\mathbf{z}^*) = \mathbf{0}$  und damit, zurücktransformiert in  $x$ -Koordinaten, (4.18) realisierbar.  $\blacksquare$

### 4.2.1 Linearisierung des Port-Hamilton-Systems

Die Jacobimatrix des Matrix-Vektor-Produkts  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x})\nabla H_d(\mathbf{x})$  in (4.15) berechnet sich, wie in Anhang B allgemein beschrieben. Wird durch die Parameter erster Ordnung der homogenen Lösung die Bedingung (4.18) realisiert, dann bleibt

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{F}_d(\mathbf{x})\nabla H_d(\mathbf{x})) \right|_{\mathbf{x}^*} = \mathbf{F}_d(\mathbf{x}^*) \left. \frac{\partial^2 H_d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{x}^*} = \mathbf{F}_d(\mathbf{x}^*) \mathbf{Q}_d. \quad (4.19)$$

Die vorzuzugende Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_d$  wird durch

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\alpha \\ \mathbf{A}_\nu \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

in einen aktuierten Teil  $\mathbf{A}_\alpha \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und einen unaktuierten Teil  $\mathbf{A}_\nu \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$  zerlegt, wobei letzterer gegenüber der Linearisierung des Originalsystems unverändert ist:

$$\mathbf{A}_\nu = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}^*}. \quad (4.21)$$

Damit liegt die Entwurfsvfreiheit bei der Vorgabe lokal linearer Dynamik in den  $m \cdot n$  Elementen von  $\mathbf{A}_\alpha$ . Im Eingrößenfall sind diese durch die – bei lokaler Steuerbarkeit von (3.11) – beliebig wählbaren Eigenwerte von  $\mathbf{A}_d$  eindeutig bestimmt, im Mehrgrößenfall kommen zusätzliche Freiheitsgrade (durch die Parametervektoren) hinzu.

Der Vergleich des linearisierten Port-Hamilton-Systems mit der lokal linearen Wunschyndynamik lässt sich schließlich durch die Matrixgleichung

$$\mathbf{F}_d(\mathbf{x}^*)\mathbf{Q}_d\Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}_d\Delta\mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{x}^*) \\ \mathbf{F}_\nu(\mathbf{x}^*) \end{bmatrix} \mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\alpha \\ \mathbf{A}_\nu \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

ausdrücken. Damit wird auch deutlich, dass, um asymptotisch stabile lokal lineare Dynamik mit einer regulären Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_d$  erreichen zu können, die Entwurfsmatrix  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x}^*)$  an der Ruhelage vollen Rang haben muss<sup>6</sup>.

## 4.2.2 Transformation der Bestimmungsgleichung

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Hessematrix der Energie des geregelten Systems *mit zugewiesener lokal linearer Dynamik* in einem Satz *lokaler Normalkoordinaten* darzustellen, in dem die Wirkung der homogenen Lösung sichtbar wird.

Durch Annahme 4.2 ist gesichert, dass die Restriktionsgleichung für eine Matrix  $\mathbf{F}_\nu(\mathbf{x}^*)$  vollen Zeilenranges eine Lösung besitzt und genau  $m$  charakteristische Koordinaten existieren. Mit der Festlegung von  $\mathbf{F}_\alpha(\mathbf{x}^*)$  lässt sich schließlich Regularität von  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x}^*)$  erzielen. Dann existiert auch lokal eine umkehrbare Transformation

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{F}_d^T(\mathbf{x}^*)\Delta\mathbf{z} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\mathbf{z} = \mathbf{F}_d^{-T}(\mathbf{x}^*)\Delta\mathbf{x}, \quad (4.23)$$

so dass Gleichung (4.22) in den Koordinaten  $\Delta\mathbf{z}$

$$\mathbf{F}_d(\mathbf{x}^*)\mathbf{Q}_d\mathbf{F}_d^T(\mathbf{x}^*)\Delta\mathbf{z} = \mathbf{A}_d\mathbf{F}_d^T(\mathbf{x}^*)\Delta\mathbf{z} \quad (4.24)$$

lautet. Die Matrix

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_d = \mathbf{F}_d(\mathbf{x}^*)\mathbf{Q}_d\mathbf{F}_d^T(\mathbf{x}^*) \quad (4.25)$$

stellt damit die Hessematrix der Energie in den lokalen Normalkoordinaten  $\Delta\mathbf{z}$  dar. Die Wahl dieser Bezeichnung gründet in der Tatsache, dass die Transformationsmatrix  $\mathbf{T} = \mathbf{F}_d^{-T}(\mathbf{x}^*)$ , eingesetzt für  $\frac{\partial\mathbf{t}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}|_{\mathbf{x}^*}$ , die an der Ruhelage ausgewertete Gleichung (3.25) zur Bestimmung der Transformation  $\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$  auf Normalkoordinaten erfüllt.

---

<sup>6</sup>Dass Regularität der Jacobimatrix  $\mathbf{A}_d$  für asymptotische Stabilität nicht zwingend ist, zeigt das Beispiel  $\dot{x} = -x^3$ . Dieser Sonderfall wird jedoch nicht betrachtet.

Bei den ersten  $m$  Komponenten  $\Delta z_\alpha$  von  $\Delta z$  handelt es sich um *lokale charakteristische Koordinaten*, da sie mit

$$\left. \frac{\partial \Delta z_\alpha}{\partial \Delta \mathbf{x}} \right|_{\Delta \mathbf{x}=\mathbf{0}} = \left. \frac{\partial z_\alpha}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \quad (4.26)$$

die bei  $\mathbf{x}^*$  ausgewertete Bedingung (3.26) zur Bestimmung charakteristischer Koordinaten erfüllen. Damit enthält die nordwestliche Submatrix

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha} := \left. \frac{\partial^2 \Delta \widetilde{H}_d(\Delta \mathbf{z})}{\partial \Delta \mathbf{z}_\alpha^2} \right|_{\Delta \mathbf{z}=\mathbf{0}} \quad (4.27)$$

von  $\widetilde{\mathbf{Q}}_d$  isoliert die zweiten partiellen Ableitungen der Energie (bzw. ihrer quadratischen Näherung) nach den lokalen charakteristischen Koordinaten  $\Delta z_\alpha$ .

Schließlich lässt sich Gleichung (4.24) als

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_d = \mathbf{A}_d \mathbf{F}_d^T(\mathbf{x}^*) \quad (4.28)$$

bzw. blockweise in der Form

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha} & \widetilde{\mathbf{Q}}_{\nu\alpha} \\ \widetilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\nu} & \widetilde{\mathbf{Q}}_{\nu\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^T(\mathbf{x}^*) & \mathbf{A}_\alpha \mathbf{F}_\nu^T(\mathbf{x}^*) \\ \mathbf{A}_\nu \mathbf{F}_\alpha^T(\mathbf{x}^*) & \mathbf{A}_\nu \mathbf{F}_\nu^T(\mathbf{x}^*) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

darstellen. Es handelt sich um eine gleichwertige Formulierung der Bestimmungsgleichung (4.22) zur Zuweisung lokal linearer Dynamik. Die Submatrizen  $\widetilde{\mathbf{Q}}_{ij}$ ,  $i, j \in \{\alpha, \nu\}$  enthalten die nach  $\Delta z_\alpha$  und  $\Delta z_\nu$  gegliederten zweifachen partiellen Ableitungen der Energie nach den lokalen Koordinaten  $\Delta z$ .

Zu beachten ist, dass die charakteristischen Koordinaten, in denen eine homogene Lösung der Restriktionsgleichung  $\Phi(\mathbf{z}'_\alpha)$  definiert ist, durch Gl. (3.26) nicht eindeutig bestimmt sind. Die in Gl. (4.29) enthaltene Information lässt sich nur dann geradlinig zur Parametrierung des IDA-PBC-Ansatzes nutzen, wenn für die charakteristischen Koordinaten<sup>7</sup>  $\mathbf{z}'_\alpha$  die lineare Approximation

$$\Delta \mathbf{z}'_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_{m \times (n-m)} \end{bmatrix} \mathbf{F}_d^{-T}(\mathbf{x}^*) \Delta \mathbf{x} \quad (4.30)$$

---

<sup>7</sup>genauer gesagt die Koordinatenfunktionen  $z'_{\alpha,1}(\mathbf{x}), \dots, z'_{\alpha,m}(\mathbf{x})$

gilt. In diesem Fall stimmt  $\Delta \mathbf{z}'_\alpha$  mit  $\Delta \mathbf{z}_\alpha$  nach Gl. (4.23) überein und  $\widetilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha}$  enthält die zweifachen partiellen Ableitungen der Energie  $H_d$  nach  $\mathbf{z}'_\alpha$  (bei gelungener Zuweisung lokal linearer Dynamik).

Gilt andererseits

$$\Delta \mathbf{z}'_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{0}_{m \times (n-m)} \end{bmatrix} \mathbf{F}_d^{-T}(\mathbf{x}^*) \Delta \mathbf{x} \quad (4.31)$$

mit einer regulären  $m \times m$ -Matrix  $\mathbf{C}$ , dann lassen sich durch

$$\Delta \mathbf{z}_\alpha = \mathbf{C} \Delta \mathbf{z}'_\alpha \quad (4.32)$$

und

$$\left. \frac{\partial^2 \widetilde{H}_d(\mathbf{z}')}{\partial \mathbf{z}'_\alpha{}^2} \right|_{\mathbf{z}'^*} = \mathbf{C}^T \widetilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha} \mathbf{C} \quad (4.33)$$

die benötigten zweifachen partiellen Ableitungen der Energie nach  $\mathbf{z}'_\alpha$  ausdrücken.

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden (abgesehen vom mechanischen System) zwei unterschiedliche Klassen von (ggf. zeitvarianten) Entwurfsmatrizen betrachtet:

**Fall 1:** Die Entwurfsmatrix  $\mathbf{F}_d$  ist konstant. Dann ist durch

$$\mathbf{z} = \mathbf{F}_d^{-T} \mathbf{x} \quad (4.34)$$

eine Transformation der Restriktionsgleichung auf die Normalform (3.19) gegeben. Der Vektor der charakteristischen Koordinaten ist

$$\mathbf{z}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_{m \times (n-m)} \end{bmatrix} \mathbf{F}_d^{-T} \mathbf{x} \quad (4.35)$$

und entspricht damit (4.30) bzw. den ersten Zeilen von (4.23).

**Fall 2:** Führt eine konstante Entwurfsmatrix  $\mathbf{F}_d$  nicht zur Lösung des IDA-PBC-Entwurfsproblems, wird ein äquivalentes Problem nach Abschnitt 3.3 mit einer konstanten Ersatz-Entwurfsmatrix  $\hat{\mathbf{F}}_d$  angesetzt. Durch

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{F}}_d^{-T} \mathbf{x} \quad (4.36)$$

wird die äquivalente Restriktionsgleichung auf Normalform transformiert. Mit  $\hat{\mathbf{F}}_d = \mathbf{D}(\mathbf{x}^*)\mathbf{F}_d(\mathbf{x}^*)$  gilt für die charakteristischen Koordinaten

$$\hat{\mathbf{z}}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_{m \times (n-m)} \end{bmatrix} \mathbf{D}^{-T}(\mathbf{x}^*)\mathbf{F}_d^{-T}(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}. \quad (4.37)$$

Bei Diagonalform von  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  nach (3.57) entspricht die lineare Approximation wiederum dem Ausdruck (4.30).

Damit erfüllen die durch (4.35) und (4.37) definierten charakteristischen Koordinatenfunktionen die oben genannte Bedingung an ihre Linearisierung und es gilt

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha} = \left. \frac{\partial^2 \tilde{H}_d(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}_\alpha^2} \right|_{\mathbf{z}^*} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha} = \left. \frac{\partial^2 \tilde{H}_d(\hat{\mathbf{z}})}{\partial \hat{\mathbf{z}}_\alpha^2} \right|_{\hat{\mathbf{z}}^*}. \quad (4.38)$$

Um begriffliche Klarheit zu schaffen und die direkte<sup>8</sup> Anwendbarkeit der vorgestellten Methode zu gewährleisten, wird folgende Annahme getroffen:

**Annahme 4.3** Die charakteristischen Koordinaten der Restriktionsgleichung seien derart gewählt, dass für ihre Linearisierung Gleichung (4.30) gilt.

### 4.2.3 Matrixgleichungen

Damit es sich bei der blockweise dargestellten Matrix (4.29) tatsächlich um die Hessematrix einer Energiefunktion handelt, muss diese symmetrisch sein:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_d = \tilde{\mathbf{Q}}_d^T. \quad (4.39)$$

Zur Realisierung gewünschter, durch die frei wählbare Submatrix  $\mathbf{A}_\alpha$  vorgegebener, lokal linearer Dynamik muss ferner für die Submatrix der zweiten partiellen Ableitungen nach den charakteristischen Koordinaten

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha} = \mathbf{A}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^T(\mathbf{x}^*) \quad (4.40)$$

gelten.

---

<sup>8</sup>d. h. ohne weitere Transformation

### 4.2.3.1 Energie

Gleichung (4.40) stellt einen linearen Zusammenhang zwischen den zweifachen partiellen Ableitungen der Energiefunktion bezüglich  $\mathbf{z}_\alpha$  und den Elementen der Matrix  $\mathbf{F}_\alpha(\mathbf{x})$  dar. Dabei setzt sich  $\widetilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha}$  aus den Hessematrizen der partikulären (Superskript  $\Psi$ ) und der freien homogenen Lösung der Restriktionsgleichung (Superskript  $\Phi$ ) bezüglich  $\mathbf{z}_\alpha$  zusammen:

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha} = \widetilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha}^\Psi + \widetilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha}^\Phi. \quad (4.41)$$

$\widetilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha}^\Phi$  und damit auch  $\widetilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha}$  lassen sich durch die homogene Lösung  $\widetilde{\Phi}(\mathbf{z}_\alpha)$  beliebig einstellen. Für die einzelnen Elemente der Hessematrizen in den  $\mathbf{z}_\alpha$ -Koordinaten werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$q_{ij} := \left. \frac{\partial \widetilde{H}_d(\mathbf{z})}{\partial z_{\alpha,i} \partial z_{\alpha,j}} \right|_{\mathbf{z}^*}, \quad \psi_{ij} := \left. \frac{\partial \widetilde{\Psi}(\mathbf{z})}{\partial z_{\alpha,i} \partial z_{\alpha,j}} \right|_{\mathbf{z}^*}, \quad \phi_{ij} := \left. \frac{\partial \widetilde{\Phi}(\mathbf{z}_\alpha)}{\partial z_{\alpha,i} \partial z_{\alpha,j}} \right|_{\mathbf{z}^*}. \quad (4.42)$$

Damit gilt

$$q_{ij} = \psi_{ij} + \phi_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (4.43)$$

Die Werte  $\phi_{ij}$  geben die Krümmung der homogenen Lösung  $\widetilde{\Phi}(\mathbf{z}_\alpha)$  in der Ruhelage  $\mathbf{z}^*$  an. Da sie in der Regel *nicht direkt* als Parameter der homogenen Lösung auftreten, können sie als *mittelbare* Entwurfparameter verstanden werden.

**Beispiel 4.3 (Parameter der homogenen Lösung)** Um mit der Ansatzfunktion  $\Phi(\mathbf{z}_\alpha) = \mu z_\alpha^2$  die geforderte Krümmung

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{z}_\alpha)}{\partial z_\alpha^2} \right|_{z_\alpha=0} = \phi_{11} \stackrel{!}{=} 1 \quad (4.44)$$

zu realisieren, ist die Parameterwahl  $\mu = \frac{1}{2}$  erforderlich. Daher ist  $\phi_{11}$  als *mittelbarer* und  $\mu$  als *unmittelbarer* Entwurfparameter in der homogenen Lösung zu verstehen.  $\square$

Eine durch (4.40) geforderte Krümmung der Energie lässt sich für eine bestimmte partikuläre Lösung eindeutig in die dafür notwendigen Parameter  $\phi_{ij}$  und diese wiederum in die freien Parameter einer geeignet angesetzten Funktion  $\Phi(\mathbf{z}_\alpha)$  umrechnen.

### 4.2.3.2 Symmetrie

Aus der Forderung nach Symmetrie der rechten Seite von (4.29) verbleiben drei Matrixgleichungen, die durch geeignete Parameterwahl in der Entwurfsmatrix zu erfüllen sind. Für die Symmetrie der nordwestlichen Submatrix

$$\mathbf{A}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^T(\mathbf{x}^*) - \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{x}^*) \mathbf{A}_\alpha^T = \mathbf{0} \quad (4.45)$$

ist zwischen dem Ein- und Mehrgrößenfall zu unterscheiden. Für  $m = 1$  ist Symmetrie (trivial) gegeben, für  $m > 1$  ist sie durch die Einschränkung der Entwurfsparameter in  $\mathbf{F}_\alpha(\mathbf{x})$  sicherzustellen.

Die südöstliche Matrixgleichung

$$\mathbf{A}_\nu \mathbf{F}_\nu^T(\mathbf{x}^*) - \mathbf{F}_\nu(\mathbf{x}^*) \mathbf{A}_\nu^T = \mathbf{0} \quad (4.46)$$

kann aus der Linearisierung der Restriktionsgleichung bei Existenz einer Lösung (und  $\nabla H_d(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}^*} = \mathbf{0}$ ) abgeleitet und damit als erfüllt betrachtet werden.

Die letzte Symmetrieforderung bezieht sich auf die Block-Nebendiagonalelemente und stellt mit

$$\mathbf{A}_\alpha \mathbf{F}_\nu^T(\mathbf{x}^*) - \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{x}^*) \mathbf{A}_\nu^T = \mathbf{0} \quad (4.47)$$

einen linearen Zusammenhang zwischen den Parametern der gesamten Entwurfsmatrix  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x})$  in der Ruhelage her.

In allen drei Matrixgleichungen (4.40), (4.45) und (4.47) ist  $\mathbf{A}_\nu$  durch Gl. (4.21) festgelegt, während  $\mathbf{A}_\alpha$  je nach Vorgabe der Eigenwerte (und ggf. Parametervektoren) der Wunsch-Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_d$  variiert. Wie bereits erwähnt, enthält  $\mathbf{A}_\alpha$  die *Entwurfsgrößen des linearisierten Systems*, die mithilfe der drei Matrixgleichungen *in die Parametrierung von  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x})$  und  $\tilde{\Phi}(\mathbf{z}_\alpha)$  übersetzt* werden.

### 4.2.3.3 Skalare Bestimmungsgleichungen

Alternativ lassen sich die Matrixgleichungen zur Zuweisung lokal linearer Dynamik in skalarer Form angeben ( $i = 1, \dots, m$ ):

$$(4.40) \quad \Leftrightarrow \quad \phi_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{\alpha,jk} \cdot \alpha_{ik}(\mathbf{x}^*) - \psi_{ij}, \quad j = i, \dots, m, \quad (4.48)$$

Matrixgleichung	Nummer	Skalare Gleichungen
$\widetilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha}^{\Psi} + \widetilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha}^{\Phi} = \mathbf{F}_{\alpha}(\mathbf{x}^*)\mathbf{A}_{\alpha}^T$	(4.40)	$(m^2 + m)/2$
$\mathbf{A}_{\alpha}\mathbf{F}_{\alpha}^T(\mathbf{x}^*) = \mathbf{F}_{\alpha}(\mathbf{x}^*)\mathbf{A}_{\alpha}^T$	(4.45)	$(m^2 - m)/2$
$\mathbf{A}_{\alpha}\mathbf{F}_{\nu}^T(\mathbf{x}^*) = \mathbf{F}_{\alpha}(\mathbf{x}^*)\mathbf{A}_{\nu}^T$	(4.47)	$m \cdot (n - m)$

**Tabelle 4.3:** Matrixgleichungen zur Zuweisung lokal linearer Dynamik und entsprechende Anzahl unabhängiger skalarer Gleichungen.

$$(4.45) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^n a_{\alpha,ik} \cdot \alpha_{jk}(\mathbf{x}^*) = \sum_{k=1}^n a_{\alpha,jk} \cdot \alpha_{ik}(\mathbf{x}^*), \quad j = 1, \dots, i-1, \quad (4.49)$$

$$(4.47) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^n a_{\alpha,ik} \cdot \nu_{jk}(\mathbf{x}^*) = \sum_{k=1}^n a_{\nu,jk} \cdot \alpha_{ik}(\mathbf{x}^*), \quad j = 1, \dots, n-m. \quad (4.50)$$

Mit  $a_{\nu,jk}$  wird das gegenüber der Linearisierung des Originalsystems unveränderte  $k$ -te Element der  $j$ -ten Zeile von  $\mathbf{A}_{\nu}$  (bzw. der  $m+j$ -ten Zeile von  $\mathbf{A}_d$ ) bezeichnet, während  $a_{\alpha,ik}$  das  $k$ -te Element der  $i$ -ten Zeile von  $\mathbf{A}_{\alpha}$  (bzw.  $\mathbf{A}_d$ ) darstellt.  $\alpha_{ik}(\mathbf{x}^*)$  (bzw.  $\nu_{ik}(\mathbf{x}^*)$ ) ist die  $k$ -te Komponente des Vektors  $\boldsymbol{\alpha}_i(\mathbf{x}^*)$  (bzw.  $\boldsymbol{\nu}_i(\mathbf{x}^*)$ ) und somit das  $(i, k)$ -te Element von  $\mathbf{F}_{\alpha}(\mathbf{x}^*)$  (bzw.  $\mathbf{F}_{\nu}(\mathbf{x}^*)$ ).

Alle von den Entwurfparametern zu erfüllenden Bedingungen sind in Tabelle 4.3 mit der jeweiligen Anzahl skalarer Gleichungen zusammengefasst. In der Summe ergeben sich  $m \cdot n$  Gleichungen bei  $m \cdot n$  frei vorgegebenen Elementen  $a_{\alpha,ik}$  der Matrix  $\mathbf{A}_{\alpha}$ . Die Zahl der offenen Entwurfparameter, um diese Gleichungen zu erfüllen, hängt stark davon ab, inwieweit die Entwurfsmatrix (durch die im folgenden Abschnitt beschriebenen Vorparametrierungen) bereits eingeschränkt ist. Stehen mehr als  $m \cdot n$  Parameter zur Lösung des dann unterbestimmten Gleichungssystems zur Verfügung, was häufig der Fall ist, dann können die überschüssigen Entwurfparameter zur Verwirklichung weiterer Entwurfsziele genutzt werden (siehe Abschnitt 4.2.5).

#### 4.2.4 Festlegung der Entwurfparameter

Zur konkreten Festlegung der Entwurfparameter – unter Berücksichtigung der Einschränkungen hinsichtlich Lösbarkeit und Definitheit – werden die im Folgenden beschriebenen Schritte vorgeschlagen.



#### 4.2.4.1 Erste Vorparametrierung der Koeffizientenmatrix

Da die Lösbarkeit der Restriktionsgleichung notwendige Voraussetzung für die Lösung des IDA-PBC-Entwurfsproblems ist, findet eine *erste Vorparametrierung* der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{F}_\nu(\mathbf{x})$  statt. Dazu sind die Elemente der vollbesetzten Matrix

$$\mathbf{F}_\nu(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \nu_{11}(\mathbf{x}) & \dots & \nu_{1n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{(n-m)1}(\mathbf{x}) & \dots & \nu_{(n-m)n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

mit Hilfe der Lösbarkeitsbedingung (2.87) nach Satz 2.10 einzuschränken. Aufgrund der aufwendigen Überprüfung dieser Bedingung ist es zunächst günstig, den Teil  $\mathbf{F}_\nu$  der Entwurfsmatrix und damit den Hauptteil der Restriktionsgleichung *konstant* anzusetzen, so dass die vereinfachte Lösbarkeitsbedingung (3.50) angewendet werden kann<sup>9</sup>. Für

$$\mathbf{F}_\nu = \begin{bmatrix} \nu_{11} & \dots & \nu_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{(n-m)1} & \dots & \nu_{(n-m)n} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

etabliert die Lösbarkeitsbedingung (3.50) Verknüpfungen zwischen den Elementen  $\nu_{ij}$  in Form algebraischer Gleichungen *und* fordert unter Umständen, dass einzelne Elemente Null werden. Der zweite Fall tritt ein, wenn Terme in (3.50) zustandsabhängig werden, wobei gleichzeitig Konstanz der darin vorkommenden Koeffizienten  $\nu_{ij}$  gefordert ist.

Mit dieser Vorparametrierung erhält die symbolische Matrix  $\mathbf{F}_\nu$  Nullelemente und Beziehungen zwischen einzelnen Einträgen, wodurch freie Parameter wegfallen.

**Beispiel 4.4 (Erste Vorparametrierung)** Die Lösbarkeitsbedingung (3.50) liefert für die Restriktionsgleichung

$$\begin{bmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \nu_{23} \end{bmatrix} \nabla H_d(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + x_3 + x_3^3 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

die Forderung

$$\nu_{12} + (1 + 3x_3^2)\nu_{13} - \nu_{21} = 0. \quad (4.54)$$

---

<sup>9</sup>Schlägt dieser Ansatz fehl, kann die Formulierung eines äquivalenten Problems, wie sie in Abschnitt 4.3 beschrieben wird, Abhilfe schaffen.

Für die konstanten Parameter muss also

$$\nu_{12} - \nu_{21} = 0 \quad \text{und} \quad \nu_{13} = 0 \quad (4.55)$$

gelten. Dadurch ist die erste Vorparametrierung der Entwurfsmatrix

$$\mathbf{F}_\nu = \begin{bmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & 0 \\ \nu_{12} & \nu_{22} & \nu_{23} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

gegeben. □

#### 4.2.4.2 Zur Berücksichtigung der Definitheitsbedingungen

Für den erfolgreichen IDA-PBC-Entwurf sind die Entwurfparameter weiter einzuschränken, um die beiden Definitheitsforderungen

$$\mathbf{Q}_d > 0 \quad \text{bzw.} \quad \widetilde{\mathbf{Q}}_d > 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{R}_d(\mathbf{x}^*) \geq 0 \quad (4.57)$$

einzuhalten. Sowohl die Elemente der Hessematrix  $\widetilde{\mathbf{Q}}_d$  nach (4.29) als auch die Einträge der Dissipationsmatrix in der Ruhelage

$$\mathbf{R}_d(\mathbf{x}^*) = -\frac{1}{2}(\mathbf{F}_d(\mathbf{x}^*) + \mathbf{F}_d^T(\mathbf{x}^*)) \quad (4.58)$$

hängen *linear* von den Entwurfparametern  $\alpha_{ij}(\mathbf{x}^*)$ ,  $\nu_{ij}(\mathbf{x}^*)$  und  $\phi_{ij}$  ab. Es erweist sich als günstig, zunächst für positive Semidefinitheit der Dissipationsmatrix zu sorgen, da

1. diese im Gegensatz zu  $\widetilde{\mathbf{Q}}_d$  nach (4.29) nur von den Entwurfparametern in  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x}^*)$  abhängt und
2. für  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x}^*) \geq 0$  bei gleichzeitiger Zuweisung asymptotisch stabiler lokal linearer Dynamik auf die Definitheitsprüfung von  $\widetilde{\mathbf{Q}}_d$  verzichtet werden kann.

Der erste Punkt ist offensichtlich. Anzumerken ist jedoch, dass zur Überprüfung der Semidefinitheit *alle* Hauptunterdeterminanten einer Matrix zu untersuchen sind, wogegen für die Definitheit die Betrachtung der nordwestlichen Hauptunterdeterminanten reicht [35].

Der zweite Vorteil erschließt sich, wenn die quadratische Näherung der Energie

$$\Delta H_d(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_d \Delta \mathbf{x} \quad (4.59)$$

unter der durch Parametrierung nach Tabelle 4.3 erzielten lokal linearen Dynamik

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_d(\mathbf{x}^*) \mathbf{Q}_d \Delta \mathbf{x} = \mathbf{A}_d \Delta \mathbf{x} \quad (4.60)$$

betrachtet wird. Je nachdem, ob der zweite oder dritte Term der Gleichung für  $\Delta \dot{\mathbf{x}}$  bei der Ermittlung der Zeitableitung von (4.59) eingesetzt wird (mit  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x}^*)$  nach Gl. (4.58)), ergeben sich die Ausdrücke

$$\Delta \dot{H}_d(\mathbf{x}) = -\Delta \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_d \mathbf{R}_d(\mathbf{x}^*) \mathbf{Q}_d \Delta \mathbf{x} \quad (4.61)$$

bzw.

$$\Delta \dot{H}_d(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_d^T \mathbf{Q}_d + \mathbf{Q}_d \mathbf{A}_d) \Delta \mathbf{x}. \quad (4.62)$$

Der Vergleich beider Ausdrücke liefert eine Ljapunowgleichung für das linearisierte Port-Hamilton-System bei erfolgreich zugewiesener lokal linearer Dynamik:

$$\mathbf{A}_d^T \mathbf{Q}_d + \mathbf{Q}_d \mathbf{A}_d + 2\mathbf{Q}_d \mathbf{R}_d(\mathbf{x}^*) \mathbf{Q}_d = \mathbf{0}. \quad (4.63)$$

Nach Satz 2.4 existieren für eine asymptotisch stabile Matrix  $\mathbf{A}_d$  positiv definite Matrizen  $\mathbf{Q}_d > 0$  und  $2\mathbf{Q}_d \mathbf{R}_d(\mathbf{x}^*) \mathbf{Q}_d > 0$  (bzw.  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x}^*) > 0$ ), die diese Gleichung lösen. Das bedeutet allerdings *nicht*, dass zu einer *bestimmten* Hessematrix  $\mathbf{Q}_d$ , die durch willkürliche Festlegung von  $\tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha}$  – unter Beachtung der Matrixgleichung (4.29) – positiv definit gemacht wurde, auch die entsprechende, wenigstens positiv semidefinite Matrix  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x}^*)$  existiert. Dieser Schluss ist unzulässig:

$$\mathbf{A}_d \text{ asymptotisch stabil, } \mathbf{Q}_d > 0 \text{ nach Tabelle 4.3} \not\Rightarrow \mathbf{R}_d(\mathbf{x}^*) \geq 0.$$

**Beispiel 4.5 (Falsche Parameterwahl)** Die Matrixgleichungen in Tabelle 4.3 zur Zuweisung lokal linearer Dynamik lassen sich für vorgegebene Matrizen  $\tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha}$  (so dass  $\tilde{\mathbf{Q}}_d > 0$ ) und  $\mathbf{F}_\nu$  gemäß

$$\mathbf{F}_\alpha^T(\mathbf{x}^*) = \mathbf{A}_d^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha} \\ \mathbf{F}_\nu \mathbf{A}_\alpha^T \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

auffösen. Gegeben ist (als akademisches Beispiel) das System [29]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 - x_2 \\ x_1 \\ x_2 + x_3 + x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.65)$$

mit der Linearisierung in der Ruhelage  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u. \quad (4.66)$$

Die instabile Gleichgewichtslage des lokal steuerbaren Systems soll mittels IDA-PBC stabilisiert werden, wobei die lokal lineare Wunschdynamik durch die Matrix

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} -4 & -7 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

mit dreifachem Eigenwert in  $-1$  vorgegeben wird. Die Entwurfsmatrix wird mit

$$\mathbf{F}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_\alpha \\ \mathbf{F}_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \nu_{23} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

konstant angesetzt. Die Restriktionsgleichung ist bereits in (4.53) dargestellt und liefert die erste Vorparametrierung (4.56).

Aus Gleichung (4.64) erhält man die Submatrix

$$\mathbf{F}_\alpha^T = \begin{bmatrix} -4\nu_{11} - 7\nu_{12} \\ q_{11} - 16\nu_{11} - 60\nu_{12} - 56\nu_{22} - 64\nu_{23} \\ -q_{11} + 16\nu_{11} + 56\nu_{12} + 49\nu_{22} + 56\nu_{23} \end{bmatrix}, \quad (4.69)$$

mit der sich für beliebige Werte der Elemente der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{F}_\nu$  und der Krümmung der Energie in der charakteristischen Koordinate

$$q_{11} = \frac{\partial^2 \tilde{H}_d(\mathbf{z})}{\partial z_1^2}, \quad z_1 = z_\alpha = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{F}_d^{-T} \mathbf{x} \quad (4.70)$$

die durch  $\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_d \Delta \mathbf{x}$  definierte lokal lineare Wunschdynamik einstellt. Die Hessematrix in Normalkoordinaten lautet dann

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_d = \begin{bmatrix} q_{11} & -4\nu_{11} - 7\nu_{12} & -4\nu_{12} - 7\nu_{22} - 8\nu_{23} \\ -4\nu_{11} - 7\nu_{12} & \nu_{11} & \nu_{12} \\ -4\nu_{12} - 7\nu_{22} - 8\nu_{23} & \nu_{12} & \nu_{22} + \nu_{23} \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Um die Definitheitsprüfung zu vereinfachen, werden die Parameter

$$\nu_{12} = 0 \quad \text{und} \quad \nu_{23} = -\frac{7}{8}\nu_{22} \quad (4.72)$$

gewählt, so dass die ersten beiden Elemente der dritten Zeile und Spalte zu Null werden. Als Bedingungen für die positive Definitheit von  $\widetilde{\mathbf{Q}}_d$  lassen sich dann angeben

$$q_{11} > 0, \quad 0 < \nu_{11} < \frac{q_{11}}{16}, \quad \nu_{22} > 0. \quad (4.73)$$

Die Dissipationsmatrix mit den bis hierhin festgelegten Parametern lautet

$$\mathbf{R}_d = \begin{bmatrix} 4\nu_{11} & \frac{1}{2}(15\nu_{11} - q_{11}) & \frac{1}{2}q_{11} - 8\nu_{11} \\ \frac{1}{2}(15\nu_{11} - q_{11}) & 0 & -\frac{1}{2}\nu_{22} \\ \frac{1}{2}q_{11} - 8\nu_{11} & -\frac{1}{2}\nu_{22} & \frac{7}{8}\nu_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.74)$$

Für  $\nu_{22} \neq 0$  ist jedoch die südöstliche  $2 \times 2$ -Hauptunterdeterminante negativ, wodurch positive Semidefinitheit der Dissipationsmatrix ausgeschlossen ist, auch wenn  $\widetilde{\mathbf{Q}}_d$  positiv definit ist.  $\square$

#### 4.2.4.3 Zweite Vorparametrierung der Entwurfsmatrix

Wird, statt  $\widetilde{\mathbf{Q}}_d > 0$  sicherzustellen, durch eine *zweite Vorparametrierung* der Entwurfsmatrix für positive Semidefinitheit der Dissipationsmatrix (4.58) in der Ruhelage gesorgt, kann Satz 2.5 zum Definitheitsnachweis der Hessematrix angewandt werden. Demnach besitzt die Ljapunowgleichung (4.63) für eine asymptotisch stabile Matrix  $\mathbf{A}_d$  und eine positiv semidefinite Matrix  $2\mathbf{Q}_d\mathbf{R}_d(\mathbf{x}^*)\mathbf{Q}_d$  (gleichbedeutend mit  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x}^*) \geq 0$ ) zumindest eine positiv semidefinite Lösung  $\mathbf{Q}_d \geq 0$ .

Bei erfolgreicher Zuweisung lokal linearer Dynamik, also Lösung der Matrixgleichungen in Tabelle 4.3, gilt die Gleichung  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x}^*)\mathbf{Q}_d = \mathbf{A}_d$ . Da die asymptotisch stabile Matrix  $\mathbf{A}_d$  regulär ist, haben auch die Matrizen  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x}^*)$  und  $\mathbf{Q}_d$  vollen Rang, woraus sich  $\mathbf{Q}_d > 0$  ergibt. Es gilt somit der folgende Schluss:

$\mathbf{A}_d$  asymptotisch stabil ,  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x}^*) \geq 0$  nach Tabelle 4.3  $\Rightarrow \mathbf{Q}_d > 0$ .

Im Rahmen der zweiten Vorparametrierung werden Entwurfparameter in  $\mathbf{F}_\alpha(\mathbf{x}^*)$  und der bereits vorparametrierten Matrix  $\mathbf{F}_\nu$  weiter eingeschränkt. Zum einen werden dabei algebraische Gleichungen zwischen den Elementen von  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x})$  etabliert, mit denen jene Zeilen und Spalten der Dissipationsmatrix zu Null werden, die aus der ersten Vorparametrierung bereits eine Null auf der Hauptdiagonale besitzen. Dadurch wird Indefinitheit von  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x}^*)$  verhindert. Zum anderen ergeben sich Ungleichungen für die Entwurfparameter, die aus den Determinanten-Ungleichungen für Semidefinitheit folgen.

#### 4.2.4.4 Hauptergebnis

Durch die beiden Vorparametrierungen und das Nutzen des Ljapunow-Umkehrsatzes 2.5 lässt sich schließlich ein Verfahren formulieren, systematisch eine Parametrierung für den IDA-PBC-Entwurf zu erhalten, mit dem sowohl die gewünschte lokal lineare Dynamik realisiert als auch Stabilität des resultierenden nichtlinearen Port-Hamilton-Systems gezeigt werden kann. Dabei entfällt die explizite Definitheitsprüfung der Energie- bzw. Ljapunowfunktion  $H_d(\mathbf{x})$ . Grundlage ist der folgende Satz:

**Satz 4.2 (Zuweisung lokal linearer Dynamik)** Gegeben sei eine asymptotisch stabile Wunsch-Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_d$  und eine erste Vorparametrierung der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{F}_\nu(\mathbf{x})$  mit vollem Zeilenrang  $n - m$  (Annahmen 4.1 und 4.2). Durch die geeignete Wahl der Parameter erster Ordnung der homogenen Lösung  $\Phi(\mathbf{z}_\alpha)$  sei  $\nabla H_d(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}^*} = \mathbf{0}$  sichergestellt, wobei die charakteristischen Koordinaten  $\mathbf{z}_\alpha$  Annahme 4.3 erfüllen. Dann gilt Folgendes:

Für eine Parametrierung der Entwurfsmatrix  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x})$  und der zweiten partiellen Ableitungen  $\widetilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha}^\Phi$  der homogenen Lösung  $\Phi(\mathbf{z}_\alpha)$  nach  $\mathbf{z}_\alpha$  gemäß Tabelle 4.3, welche  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x}^*) \geq 0$  gewährleistet, ist gleichzeitig  $\mathbf{Q}_d > 0$  erfüllt. Das bedeutet, die Hessematrix der Energie  $H_d(\mathbf{x})$  für das durch das IDA-PBC-Regelgesetz

$$\mathbf{u} = -\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{x})\nabla H_d(\mathbf{x}) \quad (4.75)$$

erzeugte Port-Hamilton'sche System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_d(\mathbf{x})\nabla H_d(\mathbf{x}) \quad (4.76)$$

ist an der gewünschten Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  positiv definit. Weiterhin ist durch

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_d \Delta \mathbf{x} \quad (4.77)$$

die lineare Näherung des geregelten Systems in  $\mathbf{x}^*$  gegeben.  $\square$

*Beweis.* Durch die Parameterwahl nach Tabelle 4.3 ist die Gleichung  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x}^*)\mathbf{Q}_d = \mathbf{A}_d$  erfüllt und damit die Linearisierung von (4.76) gegeben durch (4.77). Positive Definitheit von  $\mathbf{Q}_d$  folgt aus der Anwendung von Satz 2.5, wie in Abschnitt 4.2.4.3 beschrieben.  $\blacksquare$

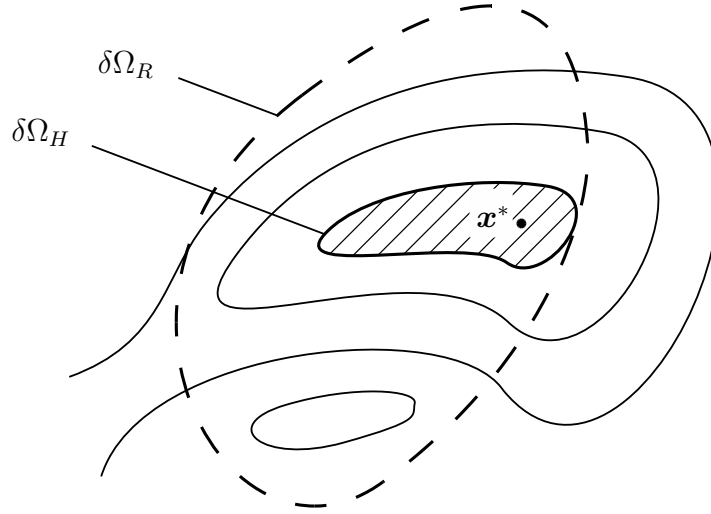
Die Abschätzung des Einzugsgebiets der Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  erfolgt, wie bei IDA-PBC üblich: Sei  $\Omega_R$  die Menge aller  $\mathbf{x} \in X$ , für die  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x}) \geq 0$  gilt und die  $\mathbf{x}^*$  enthält. Sei darin  $\Omega_H$  die Menge aller  $\mathbf{x}$ , welche auf geschlossenen Niveauflächen der Energie  $H_d$  liegen, die keine weiteren lokalen Minima als  $\mathbf{x}^*$  einschließen<sup>10</sup>. Dann ist  $\Omega_H$  eine Abschätzung des Einzugsgebiets der Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  (Abb. 4.3).

*Anmerkungen:* Das Gleichungssystem nach Tabelle 4.3 ist, trotz der Einschränkungen durch die beiden Vorparametrierungen der Entwurfsmatrix, in der Regel unter- oder wenigstens exakt bestimmt, so auch in allen Beispielen in dieser Arbeit. Der Grund ist, wie bereits in 4.2.3.3 dargestellt, die gegenüber den in  $\mathbf{A}_\alpha$  vorgebbaren  $m \cdot n$  Parametern deutlich höhere Zahl von freien Parametern in  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x})$  und den ersten und zweiten Ableitungen der homogenen Lösung  $\Phi(\mathbf{z}_\alpha)$ .

Durch die Lösung der Bestimmungsgleichungen in Tabelle 4.3 werden Entwurfparameter des IDA-PBC-Ansatzes ermittelt, welche die lokalen Eigenschaften *asymptotische Stabilität der Ruhelage  $\mathbf{x}^*$*  und *gewünschte lokal lineare Dynamik* des resultierenden Port-Hamilton-Systems einstellen. Die aufgrund der Unterbestimmtheit des Gleichungssystems verbleibenden freien Parameter können zur Verbesserung der Eigenschaften des geregelten Systems *im Großen* genutzt werden, etwa um das durch die Energiefunktion  $H_d(\mathbf{x})$  quantifizierte Einzugsgebiet der Ruhelage zu vergrößern. Mit dem selben Ziel kann die homogene Lösung in Termen höherer Ordnung als 2, die nicht auf die zweiten partiellen Ableitungen wirken, frei angepasst werden.

Das folgende Beispiel verdeutlicht die Anwendung von Satz 4.2 zur Parametrierung der nichtlinearen IDA-PBC-Regelung. Im folgenden Abschnitt 4.2.5 wird darauf Bezug nehmend illustriert, wie mit den verbleibenden freien Entwurfparametern und Termen hö-

<sup>10</sup>Durch den Nebensatz wird sichergestellt, dass keine andere Ruhelage in  $\Omega_H$  liegt als  $\mathbf{x}^*$ .



**Abbildung 4.3:** Darstellung geschlossener Höhenlinien von  $H_d$ , der Ränder der Mengen  $\Omega_R$  und  $\Omega_H$  sowie der Abschätzung des Einzugsgebiets der Ruhelage (schraffiert).

herer Ordnung in der homogenen Lösung die Eigenschaften des geregelten Systems weiter angepasst werden können.

**Beispiel 4.6 (Zuweisung lokal linearer Dynamik, [29])** Statt wie in Beispiel 4.5 durch gezielte Parameterwahl die Hessematrix  $\tilde{\mathbf{Q}}_d$  positiv definit zu machen, werden jene Parameterwerte bestimmt, für die die Dissipationsmatrix wenigstens positiv semidefinit ist (zweite Vorparametrierung). Aus der ersten Vorparametrierung (4.56) folgt die Dissipationsmatrix

$$\mathbf{R}_d = \begin{bmatrix} -\alpha_{11} & -\frac{1}{2}(\alpha_{12} + \nu_{11}) & -\frac{1}{2}(\alpha_{13} + \nu_{12}) \\ -\frac{1}{2}(\alpha_{12} + \nu_{11}) & -\nu_{12} & -\frac{1}{2}\nu_{22} \\ -\frac{1}{2}(\alpha_{13} + \nu_{12}) & -\frac{1}{2}\nu_{22} & -\nu_{23} \end{bmatrix}. \quad (4.78)$$

Vereinfachend werden die Parameter

$$\alpha_{12} = -\nu_{11} \quad \text{und} \quad \alpha_{13} = -\nu_{12} \quad (4.79)$$

festgelegt, so dass die erste Zeile und Spalte nur aus dem Diagonalelement  $-\alpha_{11}$  bestehen. Damit ist  $\mathbf{R}_d$  genau dann positiv definit, wenn die Bedingungen

$$\alpha_{11} < 0, \quad \nu_{12} < 0, \quad \nu_{23} < 0 \quad \text{und} \quad \nu_{22}^2 < 4\nu_{12}\nu_{23} \quad (4.80)$$

erfüllt sind. Da nur  $x_\alpha = x_1$  aktuiert ist, ist Gleichung (4.45) skalar und damit automatisch



erfüllt. Die Matrixgleichungen (4.40) und (4.47) liefern das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\phi_{11} + \psi_{11} + 4\alpha_{11} - 4\nu_{11} - 8\nu_{12} &= 0, \\ \alpha_{11} + 4\nu_{11} + 7\nu_{12} &= 0, \\ \nu_{11} - 3\nu_{12} - 7\nu_{22} - 8\nu_{23} &= 0,\end{aligned}\tag{4.81}$$

welches (als eine Möglichkeit) eindeutig nach  $\phi_{11}$ ,  $\alpha_{11}$  und  $\nu_{11}$  aufgelöst werden kann, wobei  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{22}$  und  $\nu_{23}$  als freie Parameter übrig bleiben:

$$\begin{aligned}\phi_{11} &= 105\nu_{12} + 161\nu_{22} + 184\nu_{23} - \psi_{11}, \\ \alpha_{11} &= -19\nu_{12} - 28\nu_{22} - 32\nu_{23}, \\ \nu_{11} &= 3\nu_{12} + 7\nu_{22} + 8\nu_{23}.\end{aligned}\tag{4.82}$$

Setzt man zur weiteren Vereinfachung  $\nu_{12} = -1$  an und drückt  $\nu_{23}$  durch  $\nu_{23} = -k\frac{\nu_{22}^2}{4}$  aus, dann ergibt sich die Dämpfungsmatrix

$$\mathbf{R}_d = \begin{bmatrix} -19 + 28\nu_{22} - 8k\nu_{22}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\nu_{22} \\ 0 & -\frac{1}{2}\nu_{22} & \frac{1}{4}k\nu_{22}^2 \end{bmatrix}.\tag{4.83}$$

Die Matrix ist positiv definit für Parameterwerte in den offenen Intervallen

$$k \in \left(1, \frac{49}{38}\right) \quad \text{und} \quad \nu_{22} \in \left(\frac{7}{4k} - \frac{\sqrt{49 - 38k}}{4k}, \frac{7}{4k} + \frac{\sqrt{49 - 38k}}{4k}\right)\tag{4.84}$$

bzw. semidefinit bei Einschluss der Grenzen für eines der Intervalle. Innerhalb dieser Intervalle sind  $k$  und  $\nu_{22}$  freie Entwurfparameter.

Für  $k = 1$  und  $\nu_{22} = 1,25$  erhält man die positiv semidefinite Matrix

$$\mathbf{R}_d = \begin{bmatrix} 3,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,625 \\ 0 & -0,625 & 0,625^2 \end{bmatrix}.\tag{4.85}$$

Nach Satz 4.2 ergibt sich aufgrund der asymptotisch stabilen lokal linearen Dynamik auch eine positiv definite Hessematrix  $\mathbf{Q}_d$ . Dazu muss die weiter oben berechnete Krümmung

$\phi_{11}$  der Energie in der charakteristischen Koordinate  $z_\alpha$  noch in Parameter der Ansatzfunktion umgerechnet werden. Letztere wird zu

$$\Phi(z_\alpha) = \frac{1}{2}\mu_2 z_\alpha^2 + \frac{1}{4}\mu_4 z_\alpha^4 \quad (4.86)$$

gewählt. Aus einer partikulären Lösung  $\Psi(\mathbf{x})$  der Restriktionsgleichung (die mittels Computer-Algebra berechnet wurde und der Kürze halber nicht dargestellt ist), lässt sich  $\psi_{11}$  ermitteln und schließlich durch den Vergleich der ersten Gleichung von (4.82) mit

$$\phi_{11} = \left. \frac{\partial^2 \Phi(z_\alpha)}{\partial z_\alpha^2} \right|_{z^*=\mathbf{0}} = \mu_2 \quad (4.87)$$

der Parameter  $\mu_2$ . Als Koeffizient der 4. Potenz von  $z_\alpha$  spielt  $\mu_4$  für die lokal lineare Dynamik keine Rolle, kann aber zur Anpassung der Energie im Großen ungleich Null gewählt werden.

Die Bedingung  $\nabla \widetilde{H}_d(\mathbf{z})|_{z^*=\mathbf{0}} = \mathbf{0}$  ist für die gegebene partikuläre Lösung erfüllt und somit keine Anpassung der Energie durch Parameter erster Ordnung von  $\Phi(z_\alpha)$  nötig.

Im Regelgesetz

$$u = -f_1(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_\alpha \nabla H_d(\mathbf{x}) \quad (4.88)$$

sind nun  $\nu_{22}$ ,  $k$  (und damit  $\nu_{23}$ ) sowie  $\mu_4$  freie Parameter, mit denen das Systemverhalten bei *gleichbleibender Dynamik der Linearisierung* weiter angepasst werden kann.  $\square$

#### 4.2.5 Zum Umgang mit der verbleibenden Entwurfsmöglichkeit

Anhand des vorangegangenen Beispiels wird illustriert, wie die bei der Zuweisung lokal linearer Dynamik frei gebliebenen Parameter zur Verwirklichung weiterer Entwurfsziele – exemplarisch zur Vergrößerung des abgeschätzten Einzugsgebiets – genutzt werden können.

Abbildung 4.4 zeigt die größten geschlossenen Niveauflächen der Energiefunktion  $H_d(\mathbf{x})$  aus Beispiel 4.6 für jeweils zwei unterschiedliche Werte der freien Parameter  $k$  und  $\nu_{22}$ . Weiterhin wird durch die Gewichtung  $\mu_4 \neq 0$  ein Term vierter Ordnung zur homogenen Lösung der Restriktionsgleichung (entsprechend einem kubischen Term im Regelgesetz) hinzugefügt (rechts). Die Zuordnungen der Parametrierungen zu den Grafiken sind Tabelle 4.4 zu entnehmen. Man beachte die unterschiedliche Skalierung der Achsen in den Fällen (e) und (f).

	$\nu_{22}$	$k$	$\mu_4$	$x_3^{\text{inst}}(0)$
(a)	1,25	1,1	0	0,19
(b)	1,25	1,0	0	0,25
(c)	1,0	1,1	0	0,20
(d)	1,0	1,0	0	0,21
(e)	1,0	1,1	100	0,34
(f)	1,0	1,0	100	0,42
linear	–	–	–	0,16

**Tabelle 4.4:** Parameter für Beispiel 4.6 und Anfangswerte  $x_3(0)$ , ab denen Instabilität eintritt.

Um die unterschiedlich parametrisierten nichtlinearen IDA-PBC-Regelgesetze gegenüberzustellen und auch mit der entsprechenden linearisierten Zustandsrückführung

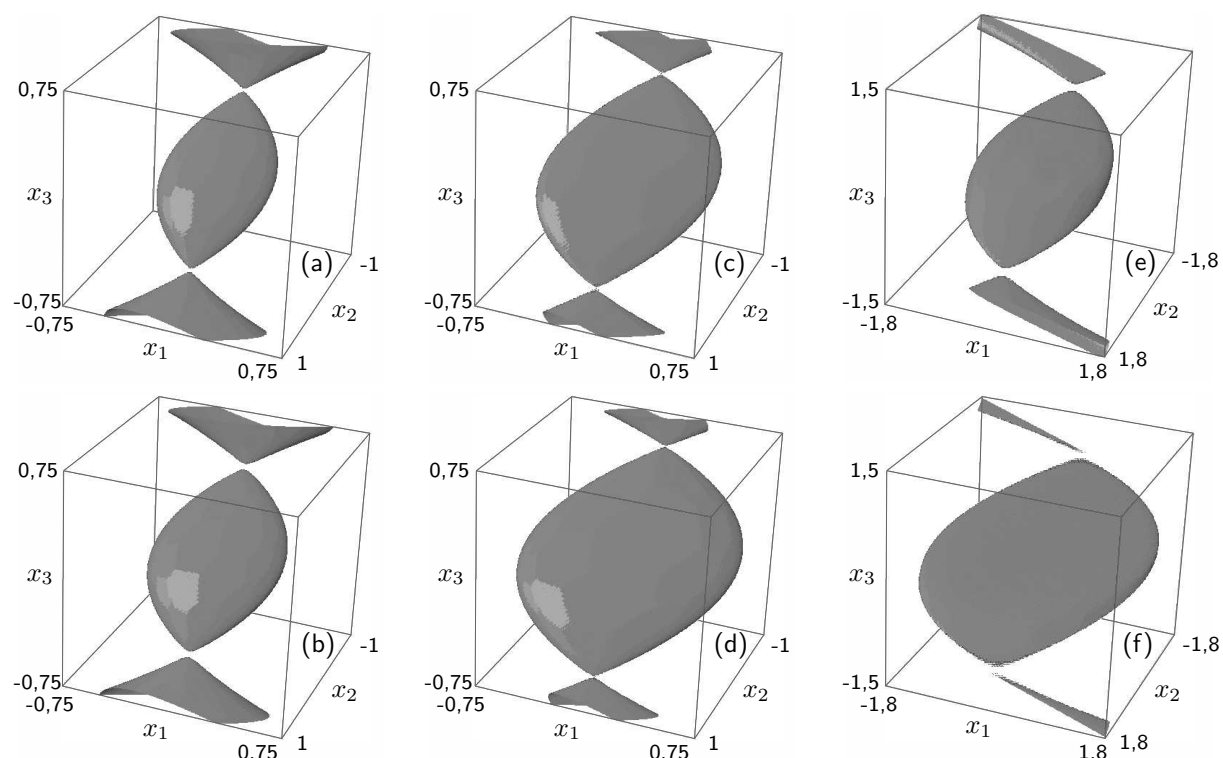
$$u_{\text{lin}} = -\mathbf{r}^T \mathbf{x} := -\left( \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^*=\mathbf{0}} - \mathbf{F}_\alpha \mathbf{Q}_d \right) \mathbf{x} \quad (4.89)$$

zu vergleichen, werden die verschiedenen Regelungen für die Strecke (4.65) für Anfangswerte  $\mathbf{x}(0) = [0 \ 0 \ x_3(0)]^T$  simuliert<sup>11</sup>. Dabei ergeben sich die ebenfalls in Tabelle 4.4 dargestellten Grenzen  $x_3^{\text{inst}}(0)$  für den Anfangswert von  $x_3$ , ab dem Instabilität des geregelten Systems eintritt. Die Grenzen liegen – wenn auch in unterschiedlichem Ausmaß – für die verschieden parametrisierten IDA-PBC-Regelgesetze höher als für den vergleichbaren linearen Zustandsregler.

In Abb. 4.5 sind Transienten der Systemzustände für einen Anfangswert  $x_3(0) = 0,2$  dargestellt. Während die Ruhelage  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  unter der linearen Zustandsrückführung nicht stabilisiert werden kann (oben rechts), gelingt dies mit den meisten der nach Tabelle 4.4 parametrisierten nichtlinearen IDA-PBC-Regelgesetze. Die Transienten der beiden dargestellten Fälle (b) und (f) ähneln – was beabsichtigt war – stark dem linearen Vergleichssystem  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}$  (oben links). Während Fall (b) mit dem Referenzsystem fast übereinstimmt, wirkt das Einschwingverhalten in (f) verzerrt. Dies ist auf den kubischen Term im Regelgesetz zurückzuführen, der mit  $\mu_4 = 100$  recht stark gewichtet ist.

Die hier dargestellten Auswirkungen der (sehr überschaubaren) Variation von Parametern, die keinen Einfluss auf das an der Ruhelage ausgewertete lokal lineare Verhalten haben, machen zwei Dinge deutlich: Zum einen lässt sich sehr wohl das Einzugsgebiet und damit auch die Robustheit der Stabilität der Ruhelage optimieren (*Energy Shaping*).

<sup>11</sup>mit einer Stellgrößenbegrenzung  $|u| \leq u_{\text{max}} = 10$

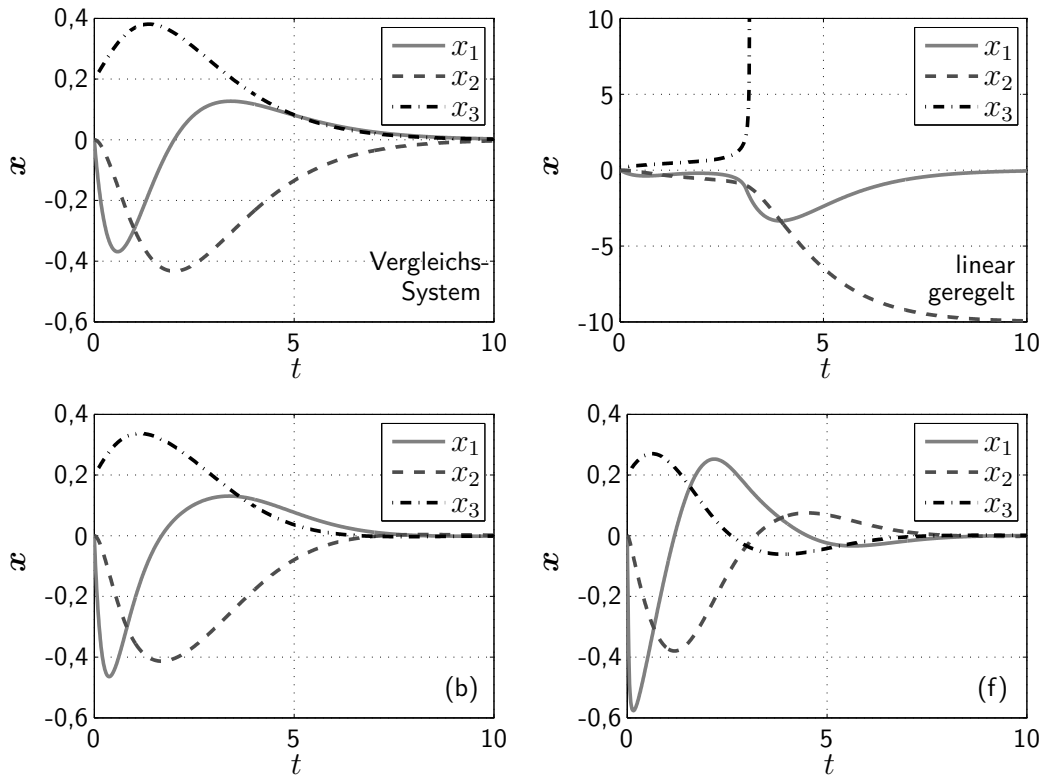


**Abbildung 4.4:** Größte geschlossene Niveauflächen möglicher Energien in Beispiel 4.6.

Zum anderen ist, insbesondere bei der Variation von Parametern höherer Ordnung in der Energiefunktion Folgendes zu beachten: Zwar wird das durch die Linearisierung beschriebene Verhalten *an der Ruhelage* nicht beeinflusst, jedoch zeigen die Parameter höherer Ordnung bei entsprechender Gewichtung bereits in naher Umgebung der Ruhelage eine Wirkung, die das vorgegebene lokal lineare Verhalten ggf. deutlich überlagern kann.

### 4.3 Zustandsabhängige Entwurfsparameter

Zur Parametrierung des IDA-PBC-Entwurfs durch Zuweisung lokal linearer Dynamik wurde bis hierher der Fall einer konstanten Submatrix  $F_\nu$  betrachtet. Diese Matrix stellt den konstanten Hauptteil der Restriktionsgleichung dar, die sich aus der Multiplikation der IDA-PBC-Bestimmungsgleichung (3.12) mit dem einfachsten Linksannihilator (3.15) ergibt. In manchen Fällen – so etwa im Beispiel weiter unten – wird durch die erste Vorparametrierung der Entwurfsmatrix (Lösbarkeitsuntersuchung der Restriktionsgleichung) die Entwurfsmatrix derart eingeschränkt, dass das notwendige Formen der Energie in bestimmten Koordinaten verhindert wird. Weiterhin kann die erste Vorparametrierung die Regularität der Dissipationsmatrix ausschließen, die jedoch für den Stabilitätsnachweis



**Abbildung 4.5:** Transienten des Zustands in Beispiel 4.6 für  $\mathbf{x}(0) = [0 \ 0 \ 0,2]^T$ .

im zeitveränderlichen Fall, etwa bei der Trajektorienfolge (vgl. Abschnitt 6.2), günstig ist.

Ein denkbarer Ausweg ist das Aufheben der Einschränkung auf konstante Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{F}_\nu$ . Der Umgang mit der dann gegebenen Entwurfsfreiheit durch *beliebige* Funktionen für die Elemente von  $\mathbf{F}_\nu(\mathbf{x})$  ist im Allgemeinen jedoch schwierig; bereits die Untersuchung der Lösbarkeit nach Satz 2.10 wird deutlich aufwendiger.

Eine andere Möglichkeit, welche in dieser Arbeit verfolgt wird, ist, die bisher ungenutzte Entwurfsfreiheit im Linksannihilator zu verwenden, um eine Vereinfachung des Quellterms der Restriktionsgleichung herbeizuführen. Dann lässt sich, wie in Abschnitt 3.3 beschrieben, eine äquivalente Restriktionsgleichung mit konstantem Hauptteil ansetzen, für die die schwächere Lösbarkeitsbedingung nach Satz 3.2 anwendbar ist.

Multiplikation der Bestimmungsgleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\alpha(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{x}) \\ \mathbf{F}_\nu(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \nabla H_d(\mathbf{x}) \quad (4.90)$$

mit dem modifizierten Linksannihilator

$$\hat{\mathbf{G}}^\perp(\mathbf{x}) = [\mathbf{0}_{(n-m) \times m} \quad \mathbf{D}_{22}(\mathbf{x})], \quad (4.91)$$

wobei  $\mathbf{D}_{22}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  in einer ausreichenden Umgebung der Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  regulär ist, liefert die äquivalente Restriktionsgleichung

$$\underbrace{\mathbf{D}_{22}(\mathbf{x}) \mathbf{f}_\nu(\mathbf{x})}_{\hat{\mathbf{f}}_\nu(\mathbf{x})} = \underbrace{\mathbf{D}_{22}(\mathbf{x}) \mathbf{F}_\nu(\mathbf{x})}_{\hat{\mathbf{F}}_\nu} \nabla H_d(\mathbf{x}). \quad (4.92)$$

Durch geeignete Wahl der regulären Matrix  $\mathbf{D}_{22}(\mathbf{x})$  ist dafür zu sorgen, dass der Quellterm  $\hat{\mathbf{f}}_\nu(\mathbf{x})$  derart vereinfacht wird, dass mit einer konstant anzusetzenden Ersatz-Koeffizientenmatrix  $\hat{\mathbf{F}}_\nu$  die Restriktionsgleichung lösbar ist – bei vollem Zeilenrang der durch die Lösbarkeitsbedingung eingeschränkten Matrix. Nach abgeschlossener erster Vorparametrierung kann der unaktuierte Teil der eigentlichen Entwurfsmatrix

$$\mathbf{F}_\nu(\mathbf{x}) = \mathbf{D}_{22}^{-1}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{F}}_\nu \quad (4.93)$$

berechnet werden. Durch die zweite Vorparametrierung ist sicherzustellen, dass die resultierende Dämpfungsmatrix  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$  auf einem ausreichend großen Gebiet um die Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  positiv semidefinit ist. Schließlich lässt sich unter Anwendung von Satz 4.2 die Parametrierung zur Zuweisung lokal linearer Dynamik gemäß Tabelle 4.3 bestimmen. Das folgende Beispiel illustriert das Vorgehen.

**Beispiel 4.7 (Zustandsabhängige Entwurfsmatrix, [29])** Betrachtet wird das System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 - x_2 \\ x_1 \\ x_2 + x_3 + x_2x_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (4.94)$$

welches sich gegenüber (4.94) nur geringfügig unterscheidet ( $x_2x_3^2$  statt  $x_3^3$  in der letzten Differentialgleichung). Die Linearisierung in der Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  und die vorgegebene lokal lineare Wunschdynamik sind unverändert (4.66) und (4.67). Die IDA-PBC-Bestimmungsgleichung mit konstant angesetzter Entwurfsmatrix  $\mathbf{F}_d$  lautet

$$\begin{bmatrix} -2x_1 - x_2 \\ x_1 \\ x_2 + x_3 + x_2x_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \nu_{23} \end{bmatrix} \nabla H_d(\mathbf{x}). \quad (4.95)$$

Damit die durch die beiden letzten Zeilen gegebene Restriktionsgleichung eine Lösung  $H_d(\mathbf{x})$  besitzt, muss laut (3.50)

$$(1 + x_3^2)\nu_{12} + (1 + 2x_2x_3)\nu_{13} - \nu_{21} = 0 \quad (4.96)$$

gelten, woraus sich die Bedingung  $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{21} = 0$  ableitet. Unter dieser Einschränkung lautet die Hessematrix der Energie in lokalen Normalkoordinaten<sup>12</sup> nach (4.29)

$$\tilde{\mathbf{Q}}_d = \begin{bmatrix} \psi_{11} + \phi_{11} & -4\nu_{11} & -7\nu_{22} - 8\nu_{23} \\ \alpha_{11} & \nu_{11} & 0 \\ \alpha_{12} + \alpha_{13} & 0 & \nu_{22} + \nu_{23} \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

und die Dissipationsmatrix

$$\mathbf{R}_d = \begin{bmatrix} -\alpha_{11} & -\frac{1}{2}(\alpha_{12} + \nu_{11}) & -\frac{1}{2}\alpha_{13} \\ -\frac{1}{2}(\alpha_{12} + \nu_{11}) & 0 & -\frac{1}{2}\nu_{22} \\ -\frac{1}{2}\alpha_{13} & -\frac{1}{2}\nu_{22} & -\nu_{23} \end{bmatrix}. \quad (4.98)$$

Damit letztere positiv semidefinit sein kann, sind  $\nu_{22} = 0$  und  $\nu_{23} \leq 0$  notwendig. Unter diesen Bedingungen ist jedoch das letzte Element von  $\tilde{\mathbf{Q}}_d$  nichtpositiv, was positive Definitheit von  $\tilde{\mathbf{Q}}_d$  verhindert. Damit führt die konstante Parametrierung der Koeffizientenmatrix für das Originalsystem nicht zum Erfolg.

Durch eine Multiplikation der ursprünglichen Bestimmungsgleichung (4.95) mit der Diagonalmatrix

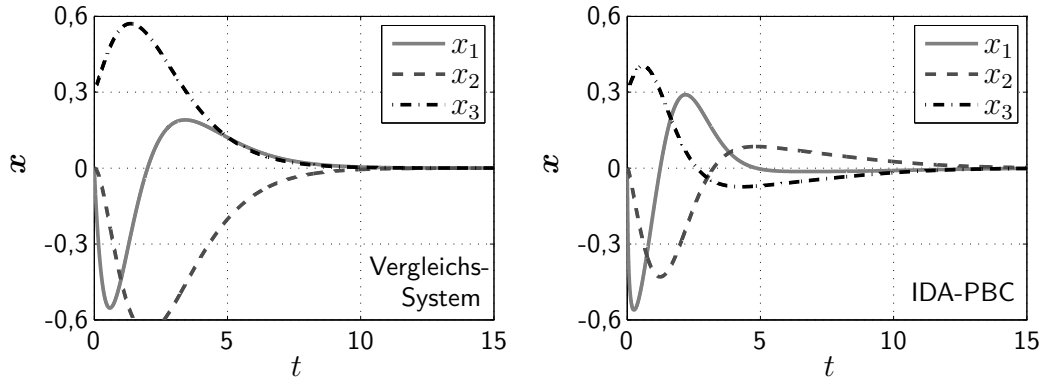
$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \text{diag}\left\{1, 1, \frac{1}{1 + x_3^2}\right\} \quad (4.99)$$

lässt sich der Quellterm der Restriktionsgleichung vereinfachen:  $x_2$  und  $x_3$  treten in getrennten Summanden auf. Für eine nun konstant angesetzte Ersatz-Entwurfsmatrix  $\hat{\mathbf{F}}_d$  (aus der mittels  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{F}}_d$  die Entwurfsmatrix des ursprünglichen Problems berechnet wird) lautet die Restriktionsgleichung

$$\begin{bmatrix} \hat{\nu}_{11} & \hat{\nu}_{12} & \hat{\nu}_{13} \\ \hat{\nu}_{21} & \hat{\nu}_{22} & \hat{\nu}_{23} \end{bmatrix} \nabla H_d(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + \frac{x_3}{1+x_3^2} \end{bmatrix}. \quad (4.100)$$

---

<sup>12</sup>An dieser Stelle ist die Bestimmungsgleichung (4.47) noch nicht ausgewertet.



**Abbildung 4.6:** Transienten des Zustandsvektors in Beispiel 4.7 für  $\mathbf{x}(0) = [0 \ 0 \ 0,3]^T$ .

Die Lösbarkeitsbedingung nach (3.50) für die Ersatz-Restriktionsgleichung lautet

$$\hat{\nu}_{12} + \frac{1 - x_3^2}{(1 + x_3^2)^2} \hat{\nu}_{13} - \hat{\nu}_{21} = 0 \quad (4.101)$$

und ist für die Parameterwerte  $\hat{\nu}_{13} = 0$  und  $\hat{\nu}_{21} = \hat{\nu}_{12}$  erfüllt. Es handelt sich um dieselbe formelle Einschränkung der Koeffizientenmatrix wie in Beispiel 4.6. Setzt man ebenso analog zu Beispiel 4.6  $\hat{\alpha}_{12} = -\hat{\nu}_{11}$  und  $\hat{\alpha}_{13} = -\nu_{12} = 1$  an sowie ersetzt  $\hat{\nu}_{23} = -\frac{1}{4}k\hat{\nu}_{22}^2$ , so erhält man die Dämpfungsmatrix

$$\mathbf{R}_d(x_3) = \begin{bmatrix} -19 + 28\hat{\nu}_{22} - 8k\hat{\nu}_{22}^2 & 0 & \frac{1}{2}x_3^2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\hat{\nu}_{22}(1 + x_3^2) \\ \frac{1}{2}x_3^2 & -\frac{1}{2}\hat{\nu}_{22}(1 + x_3^2) & \frac{1}{4}k\hat{\nu}_{22}^2(1 + x_3^2) \end{bmatrix}. \quad (4.102)$$

Für die Parameterwahl  $k = 1,25$ ,  $\nu_{22} = 1,5$  und eine Gewichtung  $\mu_4 = 100$  des Terms vierter Ordnung in der homogenen Lösung (4.86) ist die oben angegebene Dämpfungsmatrix positiv definit für  $|x_3| \leq 0,46$ . In Abb. 4.6 sind die Transienten des Zustandsvektors für das lineare Vergleichssystem und die durch IDA-PBC-Regelung stabilisierte Strecke dargestellt. Zwar fällt die Ähnlichkeit der Zeitverläufe schwächer aus als in Beispiel 4.6, zu bemerken ist jedoch, dass der entsprechende lineare Regler bereits für Anfangswerte  $x_3(0) \geq 0,33$  die Ruhelage  $\mathbf{x}^*$  nicht mehr zu stabilisieren vermag.  $\square$

## 4.4 Zustands- und zeitabhängige Entwurfparameter

Wird IDA-PBC in Kombination mit einer, etwa flachheitsbasierten, Vorsteuerung verwendet [56], dann lautet die Regelungsaufgabe, den Trajektorienfolgefehler  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t)$



zu beseitigen, also für  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0}$  zu sorgen. Das IDA-PBC-Entwurfsproblem wird in diesem Fall für das zeitvariante Fehlersystem formuliert, was auf den Ansatz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{e}, t) \\ \mathbf{f}_\nu(\mathbf{e}, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\alpha(\mathbf{e}, t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{e}, t) \\ \mathbf{F}_\nu(\mathbf{e}, t) \end{bmatrix} \nabla H_d(\mathbf{e}, t) \quad (4.103)$$

führt. Wie im vorigen Abschnitt beschrieben, mag eine zustandsunabhängige Entwurfsmatrix  $\mathbf{F}_d(t)$  ungeeignet sein, das Regelungsproblem zu lösen, etwa weil – unter Berücksichtigung der Lösbarkeitsbedingung (3.51) – die Entwurfsmatrix singulär wird oder der Stabilitätsnachweis nach Satz 2.6 durch Semidefinitheit der Dämpfungsmatrix  $\mathbf{R}_d(t)$  erschwert oder verhindert wird. Wiederum kann die Formulierung einer Ersatz-Restriktionsgleichung durch Verwendung eines zustands- und zeitabhängigen Linksannihilators

$$\hat{\mathbf{G}}^\perp(\mathbf{e}, t) = [\mathbf{0}_{(n-m) \times m} \quad \mathbf{D}_{22}(\mathbf{e}, t)] \quad (4.104)$$

Abhilfe schaffen. Durch einen vereinfachten Quellterm  $\hat{\mathbf{f}}_\nu(\mathbf{e}, t)$  können sich weniger restriktive partielle Differentialgleichungen

$$\hat{\mathbf{f}}_\nu(\mathbf{e}, t) = \hat{\mathbf{F}}_\nu(t) \nabla H_d(\mathbf{e}, t) \quad (4.105)$$

mit einer zustandsunabhängig angesetzten Koeffizientenmatrix ergeben. Analog zum vorigen Abschnitt lässt sich aus der vorparametrierten Matrix  $\hat{\mathbf{F}}_\nu(t)$  die eigentliche Teil-Entwurfsmatrix  $\mathbf{F}_\nu(\mathbf{e}, t)$  berechnen.

Eine besondere Schwierigkeit der Zeitvarianz liegt bereits in der Vorgabe der zeitveränderlichen lokal linearen Solldynamik

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_d(t) \mathbf{e}. \quad (4.106)$$

Zunächst ist zu beachten, dass der Stabilitätsnachweis für ein solches lineares zeitvariantes System deutlich aufwendiger ist und etwa die Lage der Eigenwerte, ausgewertet für feste  $t$ , kein Kriterium für Stabilität oder Instabilität darstellt [61, 65]. Da  $\mathbf{A}_d(t)$  bei der Parametrierung von IDA-PBC nur als *Hilfsgröße* verwendet wird und der Stabilitätsnachweis für das geregelte nichtlineare System Ljapunow-basiert mithilfe der resultierenden Energiefunktion nach Satz 2.6 durchzuführen ist, wird der *exakte* Stabilitätsnachweis von (4.106) zunächst vernachlässigt.

Der Kerngedanke der Zuweisung lokal linearer Dynamik ist das – im Rahmen der Interpretierbarkeit von Eigenwerten – vorhersehbare dynamische Verhalten des geregelten Systems. Daher wird folgendes Vorgehen zur Parametrierung einer Trajektorienfolgeregelung vorgeschlagen:

- Die zeitvariante Wunsch-Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_d(t)$  ist so festzulegen, dass die Eigenwerte für alle  $t \geq 0$  in der linken komplexen Halbebene liegen. Für eine genügend langsame Trajektorie bzw. „gutmütiges“ Systemverhalten kann die Stabilität des zeitvarianten linearen Systems angenommen werden.
- Als Anhaltspunkt für die Wunschkonstante Dynamikmatrix  $\overline{\mathbf{A}}_d$  mit vorgegebenen Eigenschaften. Der unaktuierte Teil  $\overline{\mathbf{A}}_\nu$  entspricht der Jacobimatrix von  $\mathbf{f}_\nu(\mathbf{e}, t)$  an einem mittleren Punkt der Solltrajektorie,  $\overline{\mathbf{A}}_\alpha$  wird der Wunschkonstante Dynamikmatrix entsprechend ermittelt.
- $\overline{\mathbf{A}}_\alpha$  wird als aktuierter Teil der Matrix  $\mathbf{A}_d(t)$  in die Bestimmungsgleichungen zur Zuweisung lokal linearer Dynamik eingesetzt. Die Annahme im ersten Punkt ist anhand der resultierenden Eigenwerte von  $\mathbf{A}_d(t)$  entlang der Trajektorie zu verifizieren.
- Der Stabilitätsnachweis für das resultierende nichtlineare Port-Hamilton-System erfolgt nach Satz 2.6.

Der Entwurf einer Folgeregelung unter Zuweisung lokal linearer Dynamik wird am Laborversuch „Schwebende Kugel“ in Abschnitt 6.2 illustriert.

## 4.5 Vergleich mit dem üblichen Vorgehen zur Parametrierung von IDA-PBC

Die Zuweisung lokal linearer Dynamik stellt einen neuen Zugang zur Parametrierung des nichtlinearen Zustandsreglerentwurfs mit IDA-PBC dar. Anhand der Flussbilder in Abb. 4.7 wird dieser Ansatz dem bisher üblichen Vorgehen gegenübergestellt.

### 4.5.1 Konventionelles Vorgehen

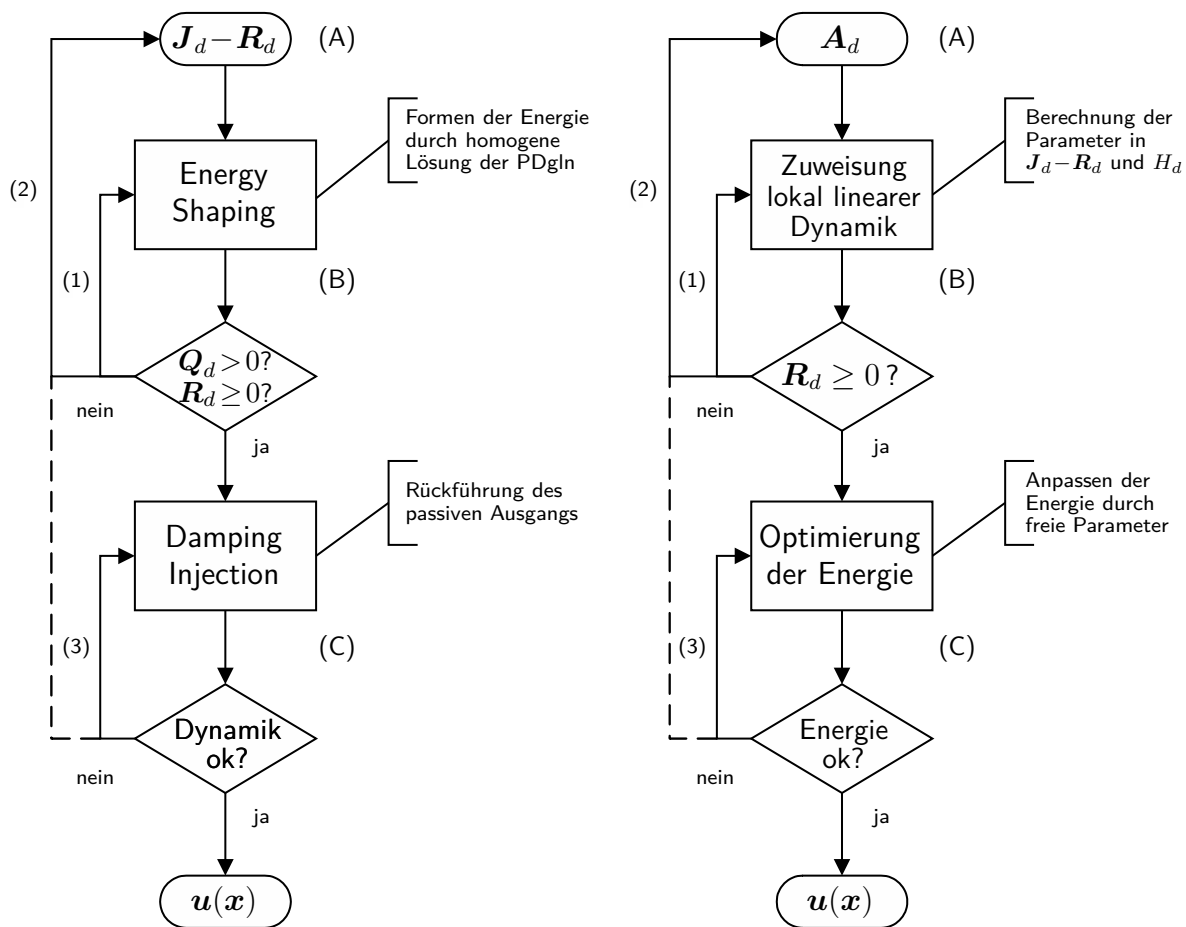
Wie bereits in Abschnitt 2.4.3 kurz dargestellt, setzt sich die gängige Prozedur beim IDA-PBC-Entwurf aus einem Schritt, in dem für *vorgegebene* Struktur- und Dämpfungsmatrizen die Energie günstig geformt wird (*Energy Shaping*) und einem ggf. anschließenden Einbringen zusätzlicher Dämpfung (*Damping Injection*) zusammen. Anders formuliert besteht der Entwurfsprozess aus der anfänglichen *Strukturvorgabe* (A), der *Energieformung* (B) und einer abschließenden *Dynamikanpassung* (C).

- (A) Die Strukturvorgabe, d. h. die Wahl von  $\mathbf{J}_d(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$ , erfolgt zum einen nach physikalischen Erwägungen. Zum anderen sind an dieser Stelle bereits solche Parametrierungen auszuschließen, für welche die Lösbarkeit der Restriktionsgleichung nicht gegeben ist. Die Struktur beider Matrizen wird mit noch offenen Parameterwerten festgelegt und sichergestellt, dass  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x})$  positiv semidefinit sein kann.
- (B) Bei der Energieformung wird versucht, durch Variation der homogenen Lösung und der freien Parameter in der Entwurfsmatrix  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x})$  die Energie so zu gestalten, dass sie ein Minimum in der gewünschten Ruhelage annimmt. Gleichzeitig wird eine möglichst große Ausdehnung des durch die Energie abgeschätzten Einzugsgebiets der Ruhelage angestrebt. Überprüft wird die Gültigkeit der Parametrierung im Wesentlichen anhand der positiven Definitheit der Hessematrix  $\mathbf{Q}_d$  der Energie, zu gewährleisten ist aber gleichzeitig  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x}) \geq 0$ . Ist eine der beiden Bedingungen nicht erfüllt, so müssen Parameterwerte angepasst (1) oder ggf. die Struktur der Entwurfsmatrix neu angesetzt (2) werden.
- (C) Nach gelungener Formung der Energie wird das dynamische Verhalten (in der Simulation) überprüft. Ist es nicht zufriedenstellend (3), erlaubt das nachträgliche Einfügen von Dämpfung eine Anpassung der Dynamik.

### 4.5.2 Zuweisung lokal linearer Dynamik

Beim in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren wird die Reihenfolge der Entwurfsschritte umgekehrt. Ausgehend von der *Dynamikvorgabe* (A) anhand des asymptotisch stabilen linearen Referenzsystems wird die dafür nötige *Struktur ermittelt* (B). Schließlich wird ebenfalls in einem Schritt der *Energieformung* (C) die verbleibende Entwurfsfreiheit genutzt.

- (A) Anhand der Linearisierung der Strecke in der gewünschten Ruhelage wird über ein lineares Zustandsregler-Entwurfsproblem eine Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_d$  mit gewünschten Eigenschaften ermittelt. Bei den Eigenwerten der Matrix handelt es sich um Größen, die die Dynamik, insbesondere das Störverhalten, *quantifizieren*. Mit dem Ziel der Dynamikvorgabe werden sie (und ggf. die Parametervektoren) bzw. die resultierenden Elemente des aktuierten Teils  $\mathbf{A}_\alpha$  der Dynamikmatrix als neue, zu Beginn des Entwurfsprozesses vorgegebene Parameter für den IDA-PBC-Ansatz betrachtet.
- (B) Für das IDA-PBC-Entwurfsproblem (bzw. ein Ersatzproblem) wird eine Entwurfsmatrix mit konstantem Teil  $\mathbf{F}_\nu$  angesetzt, die bezüglich der Lösbarkeit der Restriktionsgleichung eingeschränkt wird (erste Vorparametrierung). Eine zweite Vorpara-



**Abbildung 4.7:** Flussbilder zur Parametrierung von IDA-PBC. Links: Übliches Vorgehen, rechts: Zuweisung lokal linearer Dynamik.

metrierung schafft die Voraussetzung für positive Semidefinitheit der Dämpfungsmatrix. Das (in der Regel unterbestimmte) lineare Gleichungssystem zur Zuweisung lokal linearer Dynamik wird nach Entwurfsparametern in  $\mathbf{F}_d(\mathbf{x})$  und der homogenen Lösung der Restriktionsgleichung gelöst. Gilt für die resultierenden Parameter  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x}^*) \geq 0$ , ist *gleichzeitig* positive Definitheit der Hessematrix der Energie in der Ruhelage gesichert. Deren Überprüfung kann somit entfallen. Eine Reparametrierung der Entwurfsmatrix (1) kann dann nötig werden, wenn  $\mathbf{R}_d(\mathbf{x}) \geq 0$  wegen einer zu starken Vereinfachung der Entwurfsmatrix im Rahmen der Vorparametrierungen verhindert wird oder zu wenige freie Parameter übrig bleiben. Weiterhin kann eine Anpassung der vorgegebenen Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_d$  stattfinden (2). Im Beispiel des Hydraulikaktuators (Abschnitt 6.3) hängt etwa  $\mathbf{Q}_d$  und damit die Form der Energie stark von den Imaginärteilen der vorgegebenen Eigenwerte ab.

- (C) Mit den freien Parametern, die aufgrund der meist vorliegenden Unterbestimmtheit des linearen Gleichungssystems zur Verfügung stehen, wird im letzten Schritt die Form der Energie, ggf. iterativ (3), angepasst, etwa um das abgeschätzte Einzugsgebiet der Ruhelage zu maximieren.

Schließlich lässt sich das folgende Schema zur Parametrierung von IDA-PBC angeben, das auch in den Beispielen in Kapitel 6 angewandt wird:

<b>Vorgabe</b>	Lokal lineare Wunschdynamik
<b>Schritt 1</b>	Erste Vorparametrierung: Lösbarkeit der Restriktionsgleichung
<b>Schritt 2</b>	Zweite Vorparametrierung: Voraussetzung für positive Semidefinitheit der Dämpfungsmatrix
<b>Schritt 3</b>	Parametrische Darstellung der Energiefunktion
<b>Schritt 4</b>	Einstellen der Ruhelage durch den Gradienten der Energie
<b>Schritt 5</b>	Lösung des Gleichungssystems zur Zuweisung lokal linearer Dynamik Sicherstellen positiver Semidefinitheit der Dämpfungsmatrix
<b>Schritt 6</b>	Festlegung der noch offenen Parameter ( <i>Energy Shaping</i> )

**Tabelle 4.5:** Entwurfsschritte zur Zuweisung lokal linearer Dynamik bei IDA-PBC.



# Kapitel 5

## Parametrierung für unteraktuierte mechanische Systeme

Als *unteraktuiert* werden mechanische Systeme bezeichnet, die weniger Aktuatoren besitzen, die auf unabhängige Koordinaten wirken, als Freiheitsgrade. Diese Einschränkung erschwert die Regelung solcher Systeme erheblich, siehe [55] für einen Überblick über die verschiedenen Methoden. Die Dissertation [42] liefert eine ausführliche Klassifikation unteraktuierter mechanischer Systeme und stellt den Systemklassen entsprechende, auf Reduktion der Systemordnung beruhende, Verfahren zur Stabilisierung dar. Zur Regelung unteraktuierter mechanischer Systeme existiert eine Variante von IDA-PBC [1], die der speziellen Struktur der Systemdarstellung gerecht wird.

Im folgenden Abschnitt wird verdeutlicht, wie die Anwendung Ein-/Ausgangs-linearisierender Verfahren (*Computed Torque*<sup>1</sup>) bei unteraktuierten mechanischen Systemen zu Instabilität führen kann. Im anschließenden Abschnitt 5.2 wird IDA-PBC für eine Klasse unteraktuierter mechanischer Systeme vorgestellt. In Abschnitt 5.3 werden Bestimmungsgleichungen zur Zuweisung lokal linearer Dynamik für den Fall zweier Freiheitsgrade hergeleitet.

### 5.1 Ein-/Ausgangs-Linearisierung

Ein *vollständig aktuiertes* mechanisches System, z. B. ein Industrieroboter, dessen Glieder als Starrkörper modelliert werden, lässt sich durch die Bewegungsgleichungen zweiter

---

<sup>1</sup>vgl. [53], Abschnitt 9.1.2

Ordnung

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \nabla V(\mathbf{q}) \quad (5.1)$$

mit den jeweils  $n$ -dimensionalen Vektoren der Gelenkwinkel und -geschwindigkeiten  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  sowie der Antriebsmomente  $\boldsymbol{\tau}$  darstellen (Reibung werde nicht betrachtet bzw. als kompensiert angenommen). Neben der symmetrischen, positiv definiten Trägheitsmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  enthält die Darstellung eine Matrix  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , durch die (mit  $\dot{\mathbf{q}}$  multipliziert) Coriolis- und Zentrifugalkräfte/-momente dargestellt werden sowie den Gradienten  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  der potentiellen Energie. Das Regelgesetz

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{v} \quad (5.2)$$

kompensiert die genannten Terme und führt auf die bezüglich des neuen Eingangs  $\mathbf{v}$  lineare Darstellung der Strecke

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}. \quad (5.3)$$

Durch

$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{q}}_d(t) - 2\lambda(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d(t)) - \lambda^2(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d(t)), \quad \lambda > 0 \quad (5.4)$$

lässt sich nun exaktes Folgeverhalten der Gelenkwinkel für eine vorgegebene Trajektorie  $\mathbf{q}_d(t)$  mit der asymptotisch stabilen Fehlerdynamik

$$(\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d(t)) + 2\lambda(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d(t)) + \lambda^2(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d(t)) = \mathbf{0} \quad (5.5)$$

einstellen.

Bei *unteraktuierten* mechanischen Systemen ist der Konfigurationsraum in aktuierte Koordinaten  $\mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^m$ , welche von den verallgemeinerten Kräften/Momenten  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^m$  direkt beeinflusst werden, und unaktuierte Koordinaten  $\mathbf{q}_u \in \mathbb{R}^{n-m}$  aufgeteilt. Die Bewegungsgleichungen lassen sich durch

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}(\mathbf{q}) & \mathbf{M}_{12}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{M}_{12}^T(\mathbf{q}) & \mathbf{M}_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_a \\ \ddot{\mathbf{q}}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{C}_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{C}_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{C}_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_a \\ \dot{\mathbf{q}}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{q}) \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

darstellen. Das Regelgesetz

$$\boldsymbol{\tau} = \widetilde{\mathbf{C}}_{11}\dot{\mathbf{q}}_a + \widetilde{\mathbf{C}}_{12}\dot{\mathbf{q}}_u + \widetilde{\mathbf{g}}_1 + \widetilde{\mathbf{M}}_{11}\mathbf{v} \quad (5.7)$$



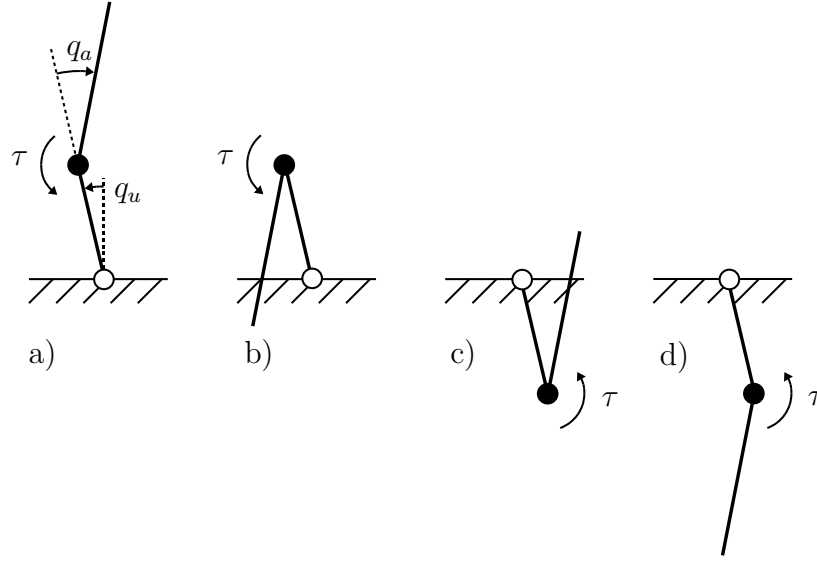


Abbildung 5.1: Acrobot in der Nähe einer der vier möglichen Ruhelagen.

mit

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{C}}_{11} &= \mathbf{C}_{11} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{21}, & \widetilde{\mathbf{M}}_{11} &= \mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{12}^T, \\ \widetilde{\mathbf{C}}_{12} &= \mathbf{C}_{12} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{22}, & \widetilde{\mathbf{g}}_1 &= \mathbf{g}_1 - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{g}_2\end{aligned}\quad (5.8)$$

führt nun auf die linearisierte Darstellung der aktuierten Koordinaten

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{v}. \quad (5.9)$$

Wiederum kann versucht werden, durch geeignete Festlegung von  $\mathbf{v}$  asymptotisches Folgeverhalten der aktuierten Koordinaten bzw. die Stabilisierung einer gewünschten Ruhelage  $\mathbf{q}_a^*$  zu erreichen.

Die zweite Zeile von (5.6) beschreibt mit den Bewegungsgleichungen für die unaktuierten Koordinaten die interne Dynamik bezüglich des Ausgangs  $\mathbf{y} = \mathbf{q}_a$ . Durch den Ansatz von  $\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{0}$  und die Auswertung der entsprechenden Ausdrücke bei  $\dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{q}_a = \mathbf{0}$  (Superskript 0) erhält man die Differentialgleichung

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = -(\mathbf{M}_{22}^0)^{-1}\mathbf{C}_{22}^0\dot{\mathbf{q}}_a - (\mathbf{M}_{22}^0)^{-1}\mathbf{g}_2^0 \quad (5.10)$$

für die Nulldynamik. Die Stabilität der Nulldynamik hängt entscheidend vom Gravitationsvektor  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  ab, wodurch die direkte Anwendbarkeit der Ein-/Ausgangs-linearisierenden

Konfiguration	a)	b)	c)	d)
$q_u^*$	0	0	$\pi$	$\pi$
$q_a^*$	0	$\pi$	0	$\pi$
Nulldynamik	instabil	instabil	stabil	stabil

**Tabelle 5.1:** Stabilität der Nulldynamik für die unterschiedlichen Ruhelagen des Acrobot nach Abb. 5.1 bei partieller Ein-/Ausgangs-Linearisierung.

Methode eingeschränkt ist. So lässt sich der in Abb. 5.1 dargestellte *Acrobot*<sup>2</sup> durch ein einfaches Regelgesetz

$$v = -2\lambda\dot{q}_a - \lambda^2(q_a - q_a^*) \quad (5.11)$$

nur in jenen Ruhelagen  $\mathbf{q}^*$  asymptotisch stabilisieren, an denen  $q_u^* = \pi$  gilt, vgl. Tabelle 5.1.

Die beschriebene Schwierigkeit motiviert den Einsatz passivitäts-/energiebasierter Verfahren auch und gerade zur Regelung unteraktuierter mechanischer Systeme, zumal der Ansatz des *Potential Energy Shaping* auf die 1981 von Takegaki und Arimoto [58] formulierte Methode zur Regelung mechanischer Manipulatoren zurückgeht.

Im Gegensatz zum oben genannten Verfahren wird bei IDA-PBC dem System keine vorgegebene lineare Dynamik für ein Teilsystem aufgezwungen. Dadurch wird eine Inversion der Dynamik des Teilsystems, welche in der Folge zu Instabilität führen kann, vermieden. Vielmehr wird eine in verallgemeinerter Hamilton'scher Darstellung formulierte Zieldynamik vorgegeben, wobei insbesondere die virtuelle Energiefunktion zunächst unbestimmt bleibt. Erst aus der Lösung von Restriktionsgleichungen, die der nicht durch Regelung veränderlichen Dynamik Rechnung tragen, ergibt sich die Schar von Energiefunktionen, die dem System aufgeprägt werden können. Aus jenen Energien, die gleichzeitig die Eigenschaften von Ljapunowfunktionen besitzen, ergibt sich die Menge der stabilisierenden Regelgesetze.

Erwähnt sei an dieser Stelle, dass mit der Methode der *Controlled Lagrangians* ein mit IDA-PBC verwandtes Verfahren existiert, mit welchem dem geregelten System – statt einer Hamiltonfunktion – eine neue Lagrangefunktion aufgeprägt wird [5, 4].

Wie bei den allgemeinen steuerungsaffinen Systemen ist jedoch die Festlegung einzelner

---

<sup>2</sup>Es handelt sich um ein mechanisches System mit zwei rotatorischen Freiheitsgraden. Das erste Glied ist frei drehbar gelagert, das zweite wird angetrieben.

Entwurfparameter des IDA-PBC-Ansatzes wenig transparent hinsichtlich der resultierenden Systemdynamik. Daher wird im Folgenden die Zuweisung lokal linearer Dynamik auf eine spezielle Klasse unteraktuierter mechanischer Systeme übertragen. In Abschnitt 5.2 wird der IDA-PBC-Ansatz für die Stabilisierung der betrachteten Systeme aufgestellt, vgl. auch [25, 28], und insbesondere die Lösung der partiellen Differentialgleichung für die (virtuelle) potentielle Energie diskutiert. Die Zuweisung lokal linearer Dynamik bei unteraktuierten mechanischen Systemen mit zwei Freiheitsgraden wird in Abschnitt 5.3 vorgestellt.

## 5.2 IDA-PBC

Das an einer gewünschten Ruhelage  $\mathbf{q}^*$  im Konfigurationsraum zu stabilisierende mechanische System wird in kanonischer Hamilton'scher Form

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

mit den Koordinaten  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , den Impulsen  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ , der Energie- oder Hamiltonfunktion  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  und den verallgemeinerten äußeren Kräften/Momenten  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ , welche als Eingangsgrößen auf die ersten  $m$  Freiheitsgrade wirken, dargestellt. Das System wird als verlustlos betrachtet<sup>3</sup>.

Der Konfigurationsraum lässt sich in aktuierte Gelenkkordinaten  $\mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^m$  und unaktuierte Koordinaten  $\mathbf{q}_u \in \mathbb{R}^{n-m}$  gemäß

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_u \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{q}_a = \begin{bmatrix} q_{a,1} \\ \vdots \\ q_{a,m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_u = \begin{bmatrix} q_{u,1} \\ \vdots \\ q_{u,n-m} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

zerlegen. Der zu regelnden Strecke wird ein Zielsystem in *verallgemeinerter* Hamilton'scher Darstellung

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{J}_1(\mathbf{q}) \\ -\mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}) & \mathbf{J}_2(\mathbf{q}) - \mathbf{R}_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \nabla_{\mathbf{p}} H_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

---

<sup>3</sup>Diese Annahme kann auch als erfüllt betrachtet werden, wenn bekannte Reibung in den aktuierten Koordinaten kompensiert wird. Mit der Rolle nichtmodellierter Dissipation beim IDA-PBC-Entwurf befasst sich [18].

gegenübergestellt. Dabei sind  $\mathbf{J}_{1,2}(\mathbf{q}) = -\mathbf{J}_{1,2}^T(\mathbf{q})$  und  $\mathbf{R}_2(\mathbf{q}) = \mathbf{R}_2^T(\mathbf{q}) \geq 0$  zunächst frei angesetzte Matrizen und  $H_d : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  die zu bestimmende Energie für das geregelte System, welche die Bedingung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}^* \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \arg \min_{[\mathbf{q} \ \mathbf{p}]^T} H_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (5.15)$$

zu erfüllen hat. Analog zur physikalischen Energie  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  wird die virtuelle Energie  $H_d(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  als Summe aus potentieller und kinetischer Energie angesetzt:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = V(\mathbf{q}) + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \quad \text{und} \quad H_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = V_d(\mathbf{q}) + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}_d^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p}. \quad (5.16)$$

Der Vergleich der ersten Zeilen von Streckendynamik (5.12) und Zieldynamik (5.14) liefert die erste von den Entwurfsparametern zu erfüllende Gleichung

$$\nabla_p H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{J}_1(\mathbf{q}) \nabla_p H_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (5.17)$$

Nach Einsetzen von (5.16) ergibt sich

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{q}) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{M}_d(\mathbf{q}) \quad (5.18)$$

als notwendige Wahl, die sicherstellt, dass der physikalische Zusammenhang zwischen Impulsen und Geschwindigkeiten  $\mathbf{p} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$  gewahrt bleibt. Aus dem Vergleich der zweiten Zeilen von (5.12) und (5.14) und der Multiplikation mit dem Linksannihilator vollen Ranges

$$\mathbf{G}^\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-m) \times m} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

folgt schließlich, zusammen mit (5.18), die vektorwertige Restriktionsgleichung ( $n - m$  skalare Gleichungen)

$$\nabla_{q_u} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{G}^\perp \mathbf{M}_d(\mathbf{q}) \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \nabla_q H_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - \mathbf{G}^\perp (\mathbf{J}_2(\mathbf{q}) - \mathbf{R}_2(\mathbf{q})) \nabla_p H_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (5.20)$$

für die Energiefunktion  $H_d(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  des geregelten Systems. Für den weiteren Verlauf der Arbeit wird die Annahme einfacher Unteraktuiertheit getroffen:

**Annahme 5.1** Es gelte  $m = n - 1$ , d. h. genau ein Freiheitsgrad sei nicht aktuiert.

Damit ist der Zeilenvektor

$$\mathbf{g}^\perp = [0 \ \dots \ 0 \ 1] \in \mathbb{R}^{1 \times n} \quad (5.21)$$

der vollständige Linksannihilator, mit dem die Abkürzung

$$\mathbf{m}_{d,n}^T(\mathbf{q}) = \mathbf{g}^\perp \mathbf{M}_d(\mathbf{q}) \quad (5.22)$$

für die letzte Zeile der virtuellen Trägheitsmatrix definiert wird. Die nun skalare Restriktionsgleichung (5.20) lässt sich nach dem Einsetzen von (5.16) nach Termen sortieren, die  $\mathbf{M}_d(\mathbf{q})$  und damit die resultierende kinetische Energie bzw. die potentielle Energie  $V_d(\mathbf{q})$  betreffen.

### 5.2.1 Kinetische Energie

Die partielle Differentialgleichung für die Elemente von  $\mathbf{M}_d(\mathbf{q})$  und somit für die kinetische Energie lautet (unter Weglassen des Arguments  $\mathbf{q}$ )

$$\mathbf{m}_{d,n}^T \mathbf{M}^{-1} \underbrace{\nabla_{\mathbf{q}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{p} \right)}_{(A)} - \underbrace{\mathbf{g}^\perp (\mathbf{J}_2 - \mathbf{R}_2)}_{(B)} \mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{p} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_n} \left( \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p} \right)}_{(C)}. \quad (5.23)$$

Es handelt sich um eine nichtlineare, inhomogene partielle Differentialgleichung, deren Lösbarkeit undurchsichtig und deren Lösung – falls sie existiert – aufwendig ist. Zudem ist für die Lösung  $\mathbf{M}_d(\mathbf{q})$  positive Definitheit sicherzustellen. Eine Möglichkeit, mit dieser partiellen Differentialgleichung umzugehen (für den Fall  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{0}$ ), wird in [62] vorgestellt, wobei die Homogenisierung der partiellen Differentialgleichung mittels einer Zustandstransformation und eine Umparametrierung der Wunschdynamik des geregelten Systems die entscheidenden Schritte zur Lösung des Problems sind.

In der vorliegenden Arbeit wird dieser Ansatz nicht verfolgt. Stattdessen werden drei Annahmen getroffen (vgl. auch [39, 28]):

**Annahme 5.2** Die (physikalische) Trägheitsmatrix hänge nur von aktuierten Koordinaten ab:  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}(\mathbf{q}_a)$ .

**Annahme 5.3** Die virtuelle Trägheitsmatrix sei konstant:  $\mathbf{M}_d = \text{const.}$

**Annahme 5.4** Es gelte  $\mathbf{g}^\perp(\mathbf{J}_2 - \mathbf{R}_2) = \mathbf{0}^T$ . Insbesondere werden

$$\mathbf{J}_2 = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{R}_2 = \text{diag}\{r_1, \dots, r_{n-1}, 0\} \quad (5.24)$$

angesetzt.

Jede der drei Annahmen macht einen der Terme (A) bis (C) in Gleichung (5.23) zu Null, wodurch die Gleichung trivial gelöst und nur die partielle Differentialgleichung für die potentielle Energie zu betrachten ist.

### 5.2.2 Potentielle Energie

Für die potentielle Energie  $V_d(\mathbf{q})$  des geregelten Systems ergibt sich die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\underbrace{\mathbf{m}_{d,n}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_a)}_{\mathbf{a}_0^T(\mathbf{q}_a)} \nabla_{\mathbf{q}} V_d(\mathbf{q}) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_n} V(\mathbf{q})}_{b_0(\mathbf{q})} \quad (5.25)$$

mit den im Vektor  $\mathbf{a}_0(\mathbf{q}_a)$  zusammengefassten Koeffizienten des Hauptteils und dem Quellterm  $b_0(\mathbf{q})$ . Ausgeschrieben lautet die Restriktionsgleichung somit

$$a_{0,1}(\mathbf{q}_a) \frac{\partial}{\partial q_1} V_d(\mathbf{q}) + \dots + a_{0,n}(\mathbf{q}_a) \frac{\partial}{\partial q_n} V_d(\mathbf{q}) = b_0(\mathbf{q}). \quad (5.26)$$

Zu einer analytischen Lösung dieser partiellen Differentialgleichung mit der Methode der Charakteristiken sind die in Abschnitt 2.3.1 skizzierten Schritte nötig. Da allerdings bereits das Auffinden erster Integrale – wenn dies überhaupt analytisch möglich ist – bei beliebigen Koeffizientenfunktionen  $a_{0,i}(\mathbf{x})$  eine Schwierigkeit darstellt, wird im Folgenden der gut handhabbare Fall von zwei mechanischen Freiheitsgraden und damit zwei unabhängigen Variablen in der partiellen Differentialgleichung betrachtet. Dieser Fall schließt den Acrobot ein und auch den in Abschnitt 6.4 vorgestellten Laborversuch.

Unter Berücksichtigung von Annahme 5.2 führt im Fall  $n = 2$  die Division von (5.25) durch die führende Koeffizientenfunktion  $a_{0,1}(q_1)$  auf

$$\frac{\partial}{\partial q_1} V_d(q_1, q_2) + a(q_1) \frac{\partial}{\partial q_2} V_d(q_1, q_2) = b(q_1, q_2) \quad (5.27)$$

mit den Abkürzungen

$$a(q_1) = \frac{a_{0,2}(q_1)}{a_{0,1}(q_1)} \quad \text{und} \quad b(q_1, q_2) = \frac{b_0(q_1, q_2)}{a_{0,1}(q_1)}. \quad (5.28)$$

Für die Zuweisung lokal linearer Dynamik spielt die Hessematrix der Energie in der Ruhelage eine herausragende Rolle. Bei den im vorigen Kapitel betrachteten Problemstellungen wurde durch die Vorparametrierung der Entwurfsmatrix und ggf. eine Faktorisierung derselben versucht, konstante Koeffizienten im Hauptteil der partiellen Differentialgleichungen zu erhalten. Damit ergab sich – unter einer einfachen Rangbedingung – stets eine lineare Transformation der partiellen Differentialgleichungen auf Normalform, mit deren Hilfe sich die Hessematrix der Energie für gegebene lineare Wunschdynamik darstellen ließ.

Die Transformation der partiellen Differentialgleichung (5.27) auf Normalform entspricht deren Reduktion auf eine gewöhnliche Differentialgleichung gemäß (2.70), was wie bereits erwähnt, im Fall  $n = 2$  und unter den getroffenen Annahmen noch gut handhabbar ist. Im Folgenden wird (5.27) in  $z$ -Koordinaten gelöst, die Hessematrix ermittelt und diese schließlich in die Gelenkkordinaten zurücktransformiert, um dann für die Zuweisung lokal linearer Dynamik genutzt zu werden.

### 5.2.2.1 Lösung der Rumpf-Differentialgleichung

Die Lösung der homogenen oder Rumpf-Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial q_1} V_d(q_1, q_2) + a(q_1) \frac{\partial}{\partial q_2} V_d(q_1, q_2) = 0 \quad (5.29)$$

ergibt sich aus der Lösung der Phasen-Differentialgleichung

$$\frac{dq_2}{dq_1} = a(q_1) \quad (5.30)$$

des charakteristischen Differentialgleichungssystems  $\dot{q}_1 = 1$ ,  $\dot{q}_2 = a(q_1)$ . Die Integrationskonstante  $c$  in der Lösung

$$q_2 = \int a(q_1) dq_1 + c \quad (5.31)$$

ist ein erstes Integral und definiert die *charakteristische Koordinate*

$$z_\alpha = q_2 - \int a(q_1) dq_1. \quad (5.32)$$

Die unbestimmten Integrale sind als Stammfunktionen von  $a(q_1)$  zu verstehen. Jede beliebige Funktion  $\Phi(z_\alpha)$  kann als *homogene Lösung* zur Lösung der inhomogenen partiellen Differentialgleichung (5.27) addiert werden, um die Form der Lösung so zu beeinflussen, dass Bedingung (5.15) erfüllt ist.

### 5.2.2.2 Lösung der inhomogenen partiellen Differentialgleichung

Mit Hilfe der um  $z_\nu$  ergänzten Koordinatentransformation

$$\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{q}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} z_\alpha \\ z_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 - \int a(q_1) dq_1 \\ q_1 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

lässt sich die partielle Differentialgleichung für die potentielle Energie (5.27) als gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial z_\nu} \tilde{V}_d(z_\alpha, z_\nu) = \tilde{b}(z_\alpha, z_\nu) \quad (5.34)$$

mit

$$\tilde{V}_d(z_\alpha, z_\nu) = V_d(q_1, q_2) \circ \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z}), \quad \tilde{b}(z_\alpha, z_\nu) = b(q_1, q_2) \circ \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z}) \quad (5.35)$$

schreiben, deren Lösung unter Einbeziehung des homogenen Anteils

$$\tilde{V}_d(z_\alpha, z_\nu) = \int \tilde{b}(z_\alpha, z_\nu) dz_\nu + \Phi(z_\alpha) \quad (5.36)$$

ist. Die Hessematrix der potentiellen Energie lässt sich damit als

$$\tilde{\mathbf{Q}}_v(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \Phi''(z_\alpha) + \int \tilde{b}_{z_\alpha z_\alpha}(z_\alpha, z_\nu) dz_\nu & \tilde{b}_{z_\alpha}(z_\alpha, z_\nu) \\ \tilde{b}_{z_\alpha}(z_\alpha, z_\nu) & \tilde{b}_{z_\nu}(z_\alpha, z_\nu) \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

darstellen<sup>4</sup>. Der Übersicht halber wird die Schreibweise

$$\tilde{b}_{z_\nu}(\mathbf{z}) = \frac{\partial}{\partial z_\nu} \tilde{b}(\mathbf{z}), \quad \tilde{b}_{z_\alpha}(\mathbf{z}) = \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \tilde{b}(\mathbf{z}), \quad \tilde{b}_{z_\alpha z_\alpha}(\mathbf{z}) = \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha^2} \tilde{b}(\mathbf{z}) \quad (5.38)$$

verwendet. Mit der Jacobimatrix der Koordinatentransformation

$$\mathbf{T}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -a(q_1) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

---

<sup>4</sup>Da die Integrationsgrenzen nicht von  $z_\alpha$  abhängen und  $\tilde{b}$  stetig nach  $z_\alpha$  differenzierbar ist, lassen sich Integration und Differentiation im ersten Element von  $\tilde{\mathbf{Q}}_v$  vertauschen, vgl. [40], Kapitel 8, Satz 1.1.



ergibt sich der Zusammenhang

$$\mathbf{Q}_v(\mathbf{q}) = \mathbf{T}^T(\mathbf{q}) \cdot (\tilde{\mathbf{Q}}_v(\mathbf{z}) \circ \mathbf{t}(\mathbf{q})) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{q}) \quad (5.40)$$

zwischen der Hessematrix in Gelenk- und Normalkoordinaten. Die partiellen Ableitungen von  $\tilde{b}(\mathbf{z})$  transformieren gemäß

$$\tilde{b}_{z_\nu}(\mathbf{z}) = \left( \frac{\partial b(\mathbf{q})}{\partial q_1} + a(q_1) \frac{\partial b(\mathbf{q})}{\partial q_2} \right) \circ \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z}), \quad \tilde{b}_{z_\alpha}(\mathbf{z}) = \frac{\partial b(\mathbf{q})}{\partial q_2} \circ \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z}), \quad (5.41)$$

womit sich, zusammen mit der Abkürzung

$$c(\mathbf{q}) = \left( \Phi''(z_\alpha) + \int \tilde{b}_{z_\alpha z_\alpha}(\mathbf{z}) dz_\nu \right) \circ \mathbf{t}(\mathbf{q}), \quad (5.42)$$

der folgende Ausdruck für die Hessematrix in Originalkoordinaten ergibt:

$$\mathbf{Q}_v(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a^2(q_1)c(\mathbf{q}) - a(q_1)b_{q_2}(\mathbf{q}) + b_{q_1}(\mathbf{q}) & -a(q_1)c(\mathbf{q}) + b_{q_2}(\mathbf{q}) \\ -a(q_1)c(\mathbf{q}) + b_{q_2}(\mathbf{q}) & c(\mathbf{q}) \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

## 5.3 Zuweisung lokal linearer Dynamik

Die soeben ermittelte Hessematrix der potentiellen Energie des geregelten Systems wird zur Zuweisung lokal linearer Dynamik genutzt. Zunächst wird jedoch untersucht, wie sich die Entwurfparameter des IDA-PBC-Ansatzes in der Zustandsdarstellung des geregelten Systems auswirken.

### 5.3.1 Wirkung der Entwurfparameter

Die partielle Differentialgleichung (5.25) für die potentielle Energie lautet im Fall zweier Freiheitsgrade

$$\mathbf{m}_{d,2}^T \mathbf{M}^{-1}(q_1) \nabla_q V_d(\mathbf{q}) = b_0(\mathbf{q}). \quad (5.44)$$

Als virtuelle Trägheitsmatrix wird

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} m_{d,11} & m_{d,12} \\ m_{d,12} & m_{d,22} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

angesetzt. Damit lautet (5.44) ausgeschrieben

$$\begin{bmatrix} m_{d,12} & m_{d,22} \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}(q_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\partial V_d(\mathbf{q})}{\partial q_1} + \begin{bmatrix} m_{d,12} & m_{d,22} \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}(q_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\partial V_d(\mathbf{q})}{\partial q_2} = b_0(\mathbf{q}). \quad (5.46)$$

Division durch die führende Koeffizientenfunktion ergibt

$$\frac{\partial V_d(\mathbf{q})}{\partial q_1} + \underbrace{\frac{\begin{bmatrix} m_{d,12} & m_{d,22} \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}(q_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} m_{d,12} & m_{d,22} \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}(q_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}_{= \frac{a_{0,2}(q_1)}{a_{0,1}(q_1)} =: a(q_1)} \frac{\partial V_d(\mathbf{q})}{\partial q_2} = \underbrace{\frac{b_0(\mathbf{q})}{\begin{bmatrix} m_{d,12} & m_{d,22} \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}(q_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}_{= \frac{b_0(\mathbf{q})}{a_{0,1}(q_1)} =: b(\mathbf{q})}. \quad (5.47)$$

Wird nun aus den Ausdrücken  $a_{0,i}(q_1)$ ,  $i = 1, 2$  der Parameter  $m_{d,12}$  ausgeklammert und für die Lösung

$$V_d(\mathbf{q}) = \frac{1}{m_{d,12}} \hat{V}_d(\mathbf{q}) \quad (5.48)$$

angesetzt, so lautet die partielle Differentialgleichung für  $\hat{V}_d(\mathbf{q})$

$$\frac{\partial \hat{V}_d(\mathbf{q})}{\partial q_1} + \underbrace{\frac{\begin{bmatrix} 1 & \frac{m_{d,22}}{m_{d,12}} \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}(q_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & \frac{m_{d,22}}{m_{d,12}} \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}(q_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}_{= \hat{a}(q_1)} \frac{\partial \hat{V}_d(\mathbf{q})}{\partial q_2} = \underbrace{\frac{b_0(\mathbf{q})}{\begin{bmatrix} 1 & \frac{m_{d,22}}{m_{d,12}} \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}(q_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}_{= \hat{b}(\mathbf{q})}. \quad (5.49)$$

Die Funktionen  $\hat{a}(q_1)$  und  $\hat{b}(\mathbf{q})$  und damit auch die Lösung  $\hat{V}_d(\mathbf{q})$  hängen nur vom Quotienten  $\frac{m_{d,22}}{m_{d,12}}$ , nicht von  $m_{d,12}$  selbst ab. Die ursprünglich gesuchte Lösung  $V_d(\mathbf{q})$  ergibt sich durch reine Skalierung mit  $\frac{1}{m_{d,12}}$  gemäß (5.48). Damit nimmt der Entwurfsparameter  $m_{d,12}$  letztlich keinen Einfluss auf die Form der Energie, da die homogene Lösung in gleicher Weise skaliert werden kann. Zur Untersuchung der lokal linearen Dynamik, für die nur die quadratische Näherung der Energie von Bedeutung ist, reicht der Ansatz einer quadratischen Funktion

$$\hat{\Phi}(z_\alpha) = \frac{1}{2} \mu z_\alpha^2 \quad \text{bzw.} \quad \Phi(z_\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\mu}{m_{d,12}} z_\alpha^2. \quad (5.50)$$

Um die Wirkung der Entwurfparameter zu bestimmen, wird die Differentialgleichung für  $\dot{p}_1$ , die als einzige durch Zustandsregelung verändert wird, betrachtet (mit  $r_1$  als einzigem Parameter der Matrix  $\mathbf{R}_2$  laut Annahme 5.4). Durch Auswerten von (5.14) erhält man

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= - \begin{bmatrix} m_{d,11} & m_{d,12} \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}(q_1) \nabla_q V_d(\mathbf{q}) - \begin{bmatrix} r_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{m_{d,11}m_{d,22} - m_{d,12}^2} \begin{bmatrix} m_{d,22} & -m_{d,12} \\ -m_{d,12} & m_{d,11} \end{bmatrix} \mathbf{p} = \\ &= - \begin{bmatrix} \frac{m_{d,11}}{m_{d,12}} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}(q_1) \nabla_q \hat{V}_d(\mathbf{q}) - \begin{bmatrix} \frac{r_1}{m_{d,12}} & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\frac{m_{d,11}}{m_{d,12}} \frac{m_{d,22}}{m_{d,12}} - 1} \begin{bmatrix} \frac{m_{d,22}}{m_{d,12}} & -1 \\ -1 & \frac{m_{d,11}}{m_{d,12}} \end{bmatrix} \mathbf{p} \end{aligned} \quad (5.51)$$

bzw.

$$\dot{p}_1 = - \begin{bmatrix} \hat{m}_{d,11} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}(q_1) \nabla_q \hat{V}_d(\mathbf{q}) - \begin{bmatrix} \hat{r}_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\hat{m}_{d,11}\hat{m}_{d,22} - 1} \begin{bmatrix} \hat{m}_{d,22} & -1 \\ -1 & \hat{m}_{d,11} \end{bmatrix} \mathbf{p}, \quad (5.52)$$

worin alle auf  $m_{d,12}$  bezogenen Parameter mit einem Akzent versehen sind. Der Absolutwert von  $m_{d,12}$  tritt nicht als unabhängiger Parameter in Erscheinung, sondern wirkt in identischer Weise auf die übrigen. Im Folgenden wird

$$m_{d,12} = 1 \quad (5.53)$$

festgelegt, so dass genau vier unabhängige Entwurfparameter

$$\hat{m}_{d,11} = m_{d,11}, \quad \hat{m}_{d,22} = m_{d,22}, \quad \hat{\mu} = \mu \quad \text{und} \quad \hat{r}_1 = r_1 \quad (5.54)$$

zur Festlegung der lokal linearen Dynamik vierter Ordnung verbleiben.

### 5.3.2 Linearisierung der resultierenden Dynamik

Die Linearisierung der Zieldynamik (5.14) unter Berücksichtigung von (5.18) ergibt

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{q}} \\ \Delta \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \overline{\mathbf{M}} \mathbf{M}_d \\ -\mathbf{M}_d \overline{\mathbf{M}} & -\mathbf{R}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_v \Delta \mathbf{q} \\ \overline{\mathbf{M}}_d \Delta \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \overline{\mathbf{M}} \\ -\mathbf{M}_d \overline{\mathbf{M}} \mathbf{Q}_v & -\mathbf{R}_2 \overline{\mathbf{M}}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \mathbf{p} \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

Durch  $\overline{\mathbf{M}}_{(d)} := \mathbf{M}_{(d)}^{-1}$  wird die inverse Trägheitsmatrix, ausgewertet an der Ruhelage  $\mathbf{q}^*$ , notiert. Die Hessematrix  $\mathbf{Q}_v$  der potentiellen Energie ist ebenfalls an der Ruhelage

auszuwerten. Zur Zuweisung lokal linearer Dynamik wird das linearisierte System mit der Wunschdynamik

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{q}} \\ \Delta \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{d,12} \\ \mathbf{A}_{d,21} & \mathbf{A}_{d,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

verglichen, die sich durch Eigenwertvorgabe für das linearisierte Originalsystem ergibt. Da nur die Differentialgleichung für  $p_1$  durch Zustandsrückführung verändert wird, variieren, abhängig von den vorgegebenen Regelungseigenwerten, die Einträge der ersten Zeilen der Submatrizen

$$\mathbf{A}_{d,21} = \begin{bmatrix} a_{d,31} & a_{d,32} \\ (a_{d,41}) & (a_{d,42}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{d,22} = \begin{bmatrix} a_{d,33} & a_{d,34} \\ (a_{d,43}) & (a_{d,44}) \end{bmatrix}. \quad (5.57)$$

Die unveränderlichen Elemente von  $\mathbf{A}_d$  sind eingeklammert. Durch die Wahl der IDA-PBC-Entwurfparameter  $m_{d,11}$ ,  $m_{d,22}$ ,  $r_1$  und  $\mu$  sind die gewünschten Einträge  $a_{d,3i}$ ,  $i = 1, \dots, 4$  zu realisieren.

### 5.3.2.1 Vergleich von $\mathbf{A}_{d,22}$

Aus der Forderung

$$-\mathbf{R}_2 \overline{\mathbf{M}}_d \stackrel{!}{=} \mathbf{A}_{d,22} \quad \Leftrightarrow \quad -\mathbf{R}_2 = \mathbf{A}_{d,22} \mathbf{M}_d \quad (5.58)$$

bzw.

$$-\begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} a_{d,33} & a_{d,34} \\ (a_{d,43}) & (a_{d,44}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{d,11} & 1 \\ 1 & m_{d,22} \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} -r_1 &= a_{d,33} m_{d,11} + a_{d,34}, \\ 0 &= a_{d,33} + a_{d,34} m_{d,22}, \end{aligned} \quad (5.60)$$

woraus sich unmittelbar der Parameter der Trägheitsmatrix

$$m_{d,22} = -\frac{a_{d,33}}{a_{d,34}} \quad (5.61)$$

ergibt. Dies ist insbesondere bemerkenswert, da durch diese Festlegung, zusammen mit  $m_{d,12} = 1$ , die Parameterabhängigkeit der Restriktionsgleichung (5.44) und damit des zur partikulären Lösung gehörenden Teils der Hessematrix  $\mathbf{Q}_v$  behoben ist. Daraus folgen schließlich die einfachen Gleichungen für die Bestimmung der Entwurfparameter  $m_{d,11}$  und  $\mu$  im folgenden Abschnitt.

### 5.3.2.2 Vergleich von $\mathbf{A}_{d,21}$

Mit der Hessematrix  $\mathbf{Q}_v$  gemäß (5.43) lässt sich die erste Zeile von

$$-\mathbf{M}_d \overline{\mathbf{M}} \mathbf{Q}_v \stackrel{!}{=} \mathbf{A}_{d,21} \quad (5.62)$$

zur Bestimmung der noch offenen Parameter  $m_{d,11}$  und  $\mu$  (über  $c$  nach Gl. (5.42)) heranziehen. Die Lösung des Gleichungssystems (alle Funktionen sind in der Ruhelage auszuwerten)

$$\begin{bmatrix} -m_{d,11} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{m}_{11} & \overline{m}_{12} \\ \overline{m}_{12} & \overline{m}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 c - ab_{q_2} + b_{q_1} & -ac + b_{q_2} \\ -ac + b_{q_2} & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{d,31} & -a_{d,32} \end{bmatrix}, \quad (5.63)$$

worin  $\overline{m}_{ij}$  das  $(i, j)$ -te Element der Inversen von  $\mathbf{M}(q_1^*)$  bezeichnet, liefert

$$m_{d,11} = -\frac{a_{d,31} + aa_{d,32} + \overline{m}_{12}b_{q_1} + \overline{m}_{22}b_{q_2}}{\overline{m}_{11}b_{q_1} + \overline{m}_{12}b_{q_2}}. \quad (5.64)$$

Mit diesem Parameter kann  $r_1$  gemäß (5.60) und schließlich

$$c = \frac{a_{d,32} + (\overline{m}_{11}m_{d,11} + \overline{m}_{12})}{(a\overline{m}_{11} - \overline{m}_{12})m_{d,11} + (a\overline{m}_{12} - \overline{m}_{22})} \quad (5.65)$$

bestimmt werden, woraus sich der Parameter

$$\mu = \Phi'' = c - \int b_{q_2 q_2} dq_1 \quad (5.66)$$

der homogenen Lösung berechnen lässt. In der folgenden Übersicht sind die Bestimmungsgleichungen für die Entwurfparameter zusammengefasst.

$$\begin{aligned}
m_{d,11} &= -\frac{a_{d,31} + aa_{d,32} + \bar{m}_{12}b_{q_1} + \bar{m}_{22}b_{q_2}}{\bar{m}_{11}b_{q_1} + \bar{m}_{12}b_{q_2}} \\
m_{d,12} &= 1 \\
m_{d,22} &= -\frac{a_{d,33}}{a_{d,34}} \\
r_1 &= -a_{d,33}m_{d,11} - a_{d,34} \\
\mu &= c - \int b_{q_2q_2}dq_1 \\
\text{mit } c &= \frac{a_{d,32} + (\bar{m}_{11}m_{d,11} + \bar{m}_{12})}{(a\bar{m}_{11} - \bar{m}_{12})m_{d,11} + (a\bar{m}_{12} - \bar{m}_{22})}
\end{aligned}$$

**Tabelle 5.2:** Bestimmungsgleichungen zur Zuweisung lokal linearer Dynamik für die betrachtete Klasse unteraktuierter mechanischer Systeme mit zwei Freiheitsgraden. Alle Ausdrücke sind an der Ruhelage  $\mathbf{q}^*$  auszuwerten.

# Kapitel 6

## Beispiele

Die Anwendung des in dieser Arbeit vorgestellten Verfahrens zur Parametrierung der nichtlinearen Zustandsregelung mit IDA-PBC wird in diesem Kapitel anhand dreier Beispiele, die elektromechanische, hydraulische und unteraktuierte mechanische Systeme repräsentieren, veranschaulicht. Für alle drei Systeme wird eine Festwertregelung entworfen. Am Laborversuch „Schwebende Kugel<sup>1</sup>“ wird zusätzlich eine Trajektorienfolgeregelung realisiert.

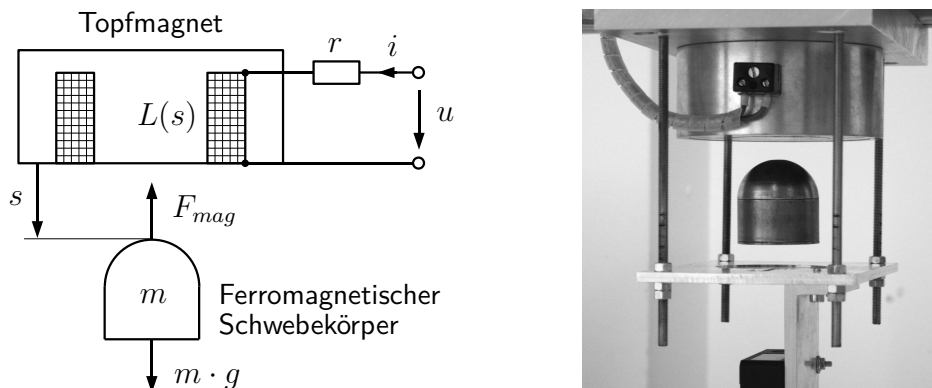
In Abschnitt 6.5 werden die Ergebnisse aus Experimenten und Simulation für alle Beispiele zusammengefasst und im Vergleich zum linearen Zustandsreglerentwurf diskutiert. Daraus ergeben sich Schlussfolgerungen über die Anwendbarkeit und den Nutzen der durch Zuweisung lokal linearer Dynamik parametrisierten Zustandsregelung mit IDA-PBC.

### 6.1 Festwertregelung der Schwebenden Kugel

Im Laborversuch „Schwebende Kugel“ (vgl. auch [27, 30]) soll ein ferromagnetischer Körper unter einem Elektromagneten in gewünschtem Abstand schwebend gehalten werden. Ein solches System (engl.: *magnetic levitation system*) wird häufig als Benchmark-Beispiel zur Erprobung nichtlinearer Steuerungs- und Regelungs-Entwurfsverfahren herangezogen. In [47] wird gezeigt, dass zur Festwertregelung mit IDA-PBC die Strukturmatrix des in Port-Hamilton'scher Darstellung modellierten Systems verändert werden muss. Dies geschieht in Form einer zusätzlichen Kopplung zwischen elektrischem und mechanischem Subsystem. In [15] und [56] dient die Schwebende Kugel zur Illustration der in den beiden

---

<sup>1</sup>Wie in Abb. 6.1 zu sehen, handelt es sich um einen anders geformten Schwebekörper. Der Kürze halber wird der Versuchsaufbau trotzdem als „Schwebende Kugel“ bezeichnet.



**Abbildung 6.1:** Skizze und Foto des Laborversuchs „Schwebende Kugel“.

Arbeiten entwickelten Methoden zur passivitätsbasierten Folgeregelung.

Der Versuch am Lehrstuhl für Regelungstechnik besteht aus einem Topfmagneten, der über eine pulsweitenmoduliert angesteuerte H-Brücke im Einquadrantenbetrieb bestromt wird, einem Laser-Distanzsensord (unten in Abb. 6.1) sowie einer Datenerfassungskarte und je einem PC zur Programmierung und Echtzeit-Ausführung des Regelalgorithmus mit Matlab/Simulink und xPC Target.

### 6.1.1 Modellbildung

Für die Modellierung lässt sich der Versuch in ein elektrisches und ein mechanisches Teilsystem zerlegen. Die Kopplung der Subsysteme erfolgt über die Ortsabhängigkeit der Induktivität  $L(s)$ .

**Elektrisches Teilsystem.** Im elektrischen Ersatzschaltbild liegt die Induktivität der Anordnung  $L(s)$  in Serie mit dem ohmschen Widerstand der Spule  $r_L$  und dem Messwiderstand  $r_i$  zur Bestimmung des Stromes. Am elektrischen Kreis liegt als Eingangsgröße die über eine Periode des PWM-Signals gemittelte Spannung

$$u = du_0, \quad 0 \leq d \leq 1 \quad (6.1)$$

mit dem Tastverhältnis  $d$  und der Versorgungsspannung  $u_0$  der Brückenschaltung an. Daraus ergibt sich die Kirchhoff'sche Maschengleichung

$$u = \underbrace{(r_i + r_L)}_{=:r} i + \frac{d}{dt} \phi \quad (6.2)$$



mit dem verketteten magnetischen Fluss  $\phi$  und dem Spulenstrom  $i$ . Im linearen Arbeitsbereich der Spule (ohne magnetische Sättigung) gilt

$$\phi = L(s)i, \quad (6.3)$$

so dass die Differentialgleichung des elektrischen Subsystems in der für den magnetischen Energiespeicher kanonischen Zustandsvariable  $\phi$  lautet:

$$\dot{\phi} = -\frac{r}{L(s)}\phi + u. \quad (6.4)$$

Da der Schwebekörper wie ein zusätzlicher Eisenkern für die Spule wirkt, variiert die Induktivität der Anordnung zwischen  $L_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} L(s)$  ohne Schwebekörper und  $L_0 = L(0)$  bei am Elektromagneten anliegendem Schwebekörper. Ein möglicher Ansatz, diese Tatsache zu berücksichtigen (vgl. auch [15]), ist

$$L(s) = L_\infty + \frac{a}{b+s} = L_\infty \cdot \frac{b+c+s}{b+s}, \quad c = \frac{a}{L_\infty} \quad (6.5)$$

mit Konstanten  $a$ ,  $b$  und  $L_\infty$ . In den Arbeiten [47] und [56] wird ein Ausdruck der Form  $L(s) = \frac{a}{s}$  angesetzt, für den die Lösung der IDA-PBC-Restriktionsgleichung eine polynomiale Energiefunktion  $H_d(\mathbf{x})$  ist. Mit dem hier verwendeten Ausdruck (6.5), der insbesondere für kleine Abstände  $s$  das Systemverhalten besser approximiert, ergibt sich hingegen eine etwas aufwendigere Lösung.

**Mechanisches Teilsystem.** Die den Schwebekörper anziehende magnetische Kraft  $F_{\text{mag}}(s)$  berechnet sich aus der Ortsableitung des magnetischen (Ko-)Energieinhalts [17]:

$$\begin{aligned} F_{\text{mag}}(s) &= \frac{\partial}{\partial s} W_{\text{mag}}^*(i, s) = \frac{1}{2} L'(s) i^2 = \\ &= -\frac{\partial}{\partial s} W_{\text{mag}}(\phi, s) = \frac{1}{2} \frac{L'(s)}{L^2(s)} \phi^2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Zusammen mit der Gravitationskraft  $F_g = m g$  ergeben sich aus dem Kräftegleichgewicht  $\dot{p} = F_{\text{mag}} + F_g$  die Bewegungsgleichungen des mechanischen Subsystems in den kanonischen Koordinaten Ort  $s$  und Impuls  $p$ :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{p}{m}, \\ \dot{p} &= \frac{1}{2} \frac{L'(s)}{L^2(s)} \phi^2 + m g. \end{aligned} \quad (6.7)$$

**Gesamtsystem.** Mit der Definition des Zustandsvektors

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\phi \ s \ p]^T \quad (6.8)$$

erhält man die steuerungsaffine Zustandsdifferentialgleichung

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\alpha \\ \dot{\mathbf{x}}_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_\alpha(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u \quad (6.9)$$

mit den nach der aktuierten Koordinate  $x_\alpha = x_1$  und den unaktuierten Zuständen  $\mathbf{x}_\nu = [x_2 \ x_3]^T$  aufgeteilten Bestandteilen des Drift-Vektorfelds

$$f_\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{r}{L(x_2)}x_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{x_3}{m} \\ \frac{1}{2} \frac{L'(x_2)}{L^2(x_2)} x_1^2 + mg \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Die Werte der physikalischen Parameter der Laboranordnung sind Tabelle C.1 im Anhang zu entnehmen.

### 6.1.2 Systematischer Regelungsentwurf

Ziel der Festwertregelung ist, eine durch den gewünschten Abstand  $x_2^* = s^*$  definierte Ruhelage durch Zustandsrückführung zu stabilisieren. Aus der Forderung  $\mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  an die unaktuierten Komponenten des Drift-Vektorfelds ergeben sich die übrigen stationären Zustandsgrößen:

$$x_1^* = \begin{matrix} + \\ (-) \end{matrix} \sqrt{-2mg \frac{L^2(x_2^*)}{L'(x_2^*)}} = \frac{\sqrt{2mga}}{c} (b + c + x_2^*) \quad \text{und} \quad x_3^* = 0. \quad (6.11)$$

Für den Entwurf der passivitätsbasierten Zustandsrückführung wird die konstante Entwurfsmatrix

$$\mathbf{F}_d = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\nu}_1^T \\ \boldsymbol{\nu}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \nu_{23} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

angesetzt.

### 6.1.2.1 Schritt 1: Lösbarkeit der Restriktionsgleichung

Mit dem Linksannihilator  $\mathbf{G}^\perp = [\mathbf{0}_{2 \times 1} \quad \mathbf{I}_2]$  ergibt sich die Restriktionsgleichung

$$\begin{bmatrix} f_{\nu,1}(\mathbf{x}) \\ f_{\nu,2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \nu_{23} \end{bmatrix} \nabla H_d(\mathbf{x}). \quad (6.13)$$

Aus der Lösbarkeitsbedingung (3.50) folgt die Forderung

$$\frac{L'(x_2)}{L^2(x_2)} x_1 \left( \nu_{11} + \left( \frac{L''(x_2)}{2L'(x_2)} - \frac{L'(x_2)}{L(x_2)} \right) x_1 \nu_{12} \right) - \frac{1}{m} \nu_{23} \stackrel{!}{=} 0, \quad (6.14)$$

welche für konstant angesetzte Parameter durch

$$\nu_{11} = \nu_{12} = \nu_{23} = 0 \quad (6.15)$$

für alle  $\mathbf{x}$  erfüllt ist. Damit lautet die *erste Vorparametrierung* der Entwurfsmatrix

$$\mathbf{F}_d = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 0 & \nu_{13} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

### 6.1.2.2 Schritt 2: Definitheit der Dämpfungsmatrix

Da die Stabilitätsaussage bei der Zuweisung lokal linearer Dynamik nach Satz 4.2 an die positive Semidefinitheit der Dissipationsmatrix geknüpft ist, werden in einem weiteren Schritt der Vorparametrierung die Entwurfparameter entsprechend dieser Forderung eingeschränkt. Die Dissipationsmatrix

$$\mathbf{R}_d = -\frac{1}{2}(\mathbf{F}_d + \mathbf{F}_d^T) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} + \nu_{21} \\ \alpha_{12} & 0 & \nu_{13} + \nu_{22} \\ \alpha_{13} + \nu_{21} & \nu_{13} + \nu_{22} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

kann, da mit  $-\alpha_{11}$  nur das erste Diagonalelement ungleich Null ist, nur positiv semidefinit sein, wenn für die Parameter

$$\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{13} = -\nu_{21}, \quad \nu_{13} = -\nu_{22} \quad \text{sowie} \quad \alpha_{11} < 0 \quad (6.18)$$

gilt. Die *zweite Vorparametrierung* der Entwurfsmatrix ist somit

$$\mathbf{F}_d = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & -\nu_{21} \\ 0 & 0 & -\nu_{22} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

Für den IDA-PBC-Entwurf verbleiben damit zwei freie Parameter  $\nu_{21}$  und  $\nu_{22}$ , die den verlustlosen Austausch der zu bestimmenden Energie  $H_d$  darstellen sowie ein Parameter  $\alpha_{11}$  für die Dissipation. Bei geeigneter Parameterwahl ( $\alpha_{11} \neq 0, \nu_{22} \neq 0$ ) ist die Entwurfsmatrix  $\mathbf{F}_d$  regulär, so dass die Transformation  $\mathbf{x} = \mathbf{F}_d^T \mathbf{z}$  auf Normalkoordinaten existiert und umkehrbar ist.

### 6.1.2.3 Schritt 3: Parametrische Darstellung der Energiefunktion

Unter Berücksichtigung der Vorparametrierung von  $\mathbf{F}_d$  ergibt sich als mögliche<sup>2</sup> partikuläre Lösung der Restriktionsgleichung (6.13)

$$\Psi(\zeta, x_2, x_3) = \frac{1}{\nu_{22}} \left( 2c_1 \ln(x_2 + b + c)(\zeta + b + c) + c_1 \frac{(\zeta + b + c)^2}{(x_2 + b + c)} + (c_2 - c_1)x_2 - \frac{x_3^2}{2m} \right) \quad (6.20)$$

mit den Abkürzungen

$$c_1 = \frac{c^2 \gamma^2}{2a}, \quad c_2 = mg, \quad \gamma = \frac{\nu_{21}}{\nu_{22}} \quad \text{und} \quad \zeta = x_2 - \frac{1}{\gamma} x_1. \quad (6.21)$$

$\zeta$  bezeichnet eine charakteristische Koordinate und lässt sich durch  $\zeta = -\frac{\alpha_{11}}{\gamma} z_\alpha$  in das erste Element  $z_\alpha$  des transformierten Zustandsvektors  $\mathbf{z} = \mathbf{F}_d^{-T} \mathbf{x}$  umrechnen. Die Darstellung der partikulären Lösung ist jedoch übersichtlicher in  $\zeta$ .

Der letzte Summand in (6.20) stellt die kinetische Energie des Schwebekörpers im geregelten System dar. Da durch die homogene Lösung  $\Phi(\zeta)$  dieser Term nicht angepasst wird  $-x_3$  tritt in  $\zeta$  nicht auf – bietet sich die Wahl

$$\nu_{22} = -1 \quad (6.22)$$

---

<sup>2</sup>Die Lösung ist nicht eindeutig. Zwei partikuläre Lösungen können sich in Funktionen der charakteristischen Koordinate(n) unterscheiden.

an. Damit bleibt die kinetische Energie unverändert und somit physikalisch anschaulich. Ferner ist  $\nu_{22}$  ein reiner Skalierungsfaktor für die Energie des geregelten Systems, der keinen Einfluss auf die *Form* der Energiefunktion hat (auch in  $\gamma$  spielt nur das Verhältnis zu  $\nu_{21}$  eine Rolle). Daher besteht keine Notwendigkeit zu einer weiteren Modifikation von  $\nu_{22}$ .

Als homogene Lösung wird die Funktion

$$\Phi(\zeta) = \mu_1 \ln(\zeta + b + c)(\zeta + \mu_2) \quad (6.23)$$

mit Konstanten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  angesetzt, um dem logarithmischen Term in der partikulären Lösung entgegenzuwirken.

#### 6.1.2.4 Schritt 4: Einstellen der Ruhelage

Da für den Ansatz der homogenen Lösung (6.23) die Parameter  $\mu_1$  und  $\mu_2$  sowohl in der ersten als auch in der zweiten Ableitung nach  $\zeta$  vorkommen, lassen sich  $\nabla H_d(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}^*} = \mathbf{0}$  und die aus der Bestimmungsgleichung (4.40) geforderte Krümmung  $\phi_{11}$  der homogenen Lösung in  $z_\alpha$  nicht getrennt voneinander realisieren. Daher ist an dieser Stelle mit der Lösung von Gleichung (4.40) bereits der erste Schritt für die Zuweisung lokal linearer Dynamik durchzuführen.

Die Linearisierung des unregulierten Systems an einer durch  $x_2^*$  vorgegebenen Ruhelage liefert eine reguläre Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  mit der Struktur

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

Das linearisierte System

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{b} \Delta u \quad (6.25)$$

ist steuerbar, so dass die Eigenwerte der Dynamikmatrix

$$\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{r}^T =: \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\alpha \\ \mathbf{A}_\nu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_\alpha \in \mathbb{R}^{1 \times 3}, \quad \mathbf{A}_\nu \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \quad (6.26)$$

für das linearisierte geregelte System frei gewählt werden können. Aus der Eigenwertvor-

gabe ergibt sich der Zeilenvektor

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} a_{\alpha,11} & a_{\alpha,12} & a_{\alpha,13} \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

der, um Verwechslungen in den Bestimmungsgleichungen zu vermeiden, als Matrix notiert wird und die Entwurfsgrößen für die Parametrierung des nichtlinearen IDA-PBC-Entwurfs durch Zuweisung lokal linearer Dynamik enthält.

Da es sich um ein Eingrößensystem handelt, ist die Forderung (4.45) nach Symmetrie von  $\mathbf{A}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^T$  trivial erfüllt und der Ausdruck für die nach (4.40) geforderte Krümmung der homogenen Lösung lautet

$$\phi_{11} = -\psi_{11} + a_{\alpha,11}\alpha_{11} - a_{\alpha,13}\nu_{21} \quad (6.28)$$

mit

$$\psi_{11} = \left. \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial z_\alpha^2} \right|_{z^*} = \frac{\nu_{21}^2}{m} - \frac{c^2 \alpha_{11}^2}{ac_3}, \quad c_3 = b + c + x_2^* \quad (6.29)$$

und ist mit der zweiten Ableitung der Ansatzfunktion

$$\phi_{11} = \left. \tilde{\Phi}''(z_\alpha) \right|_{z_\alpha^*} = \frac{\alpha_{11}^2}{\gamma^2} \Phi''(\zeta) \Big|_{\zeta^*} = \mu_1 \frac{\alpha_{11}^2}{\gamma^2 c_4^2} (2c_4 - (\zeta^* + \mu_2)), \quad c_4 = \zeta^* + b + c \quad (6.30)$$

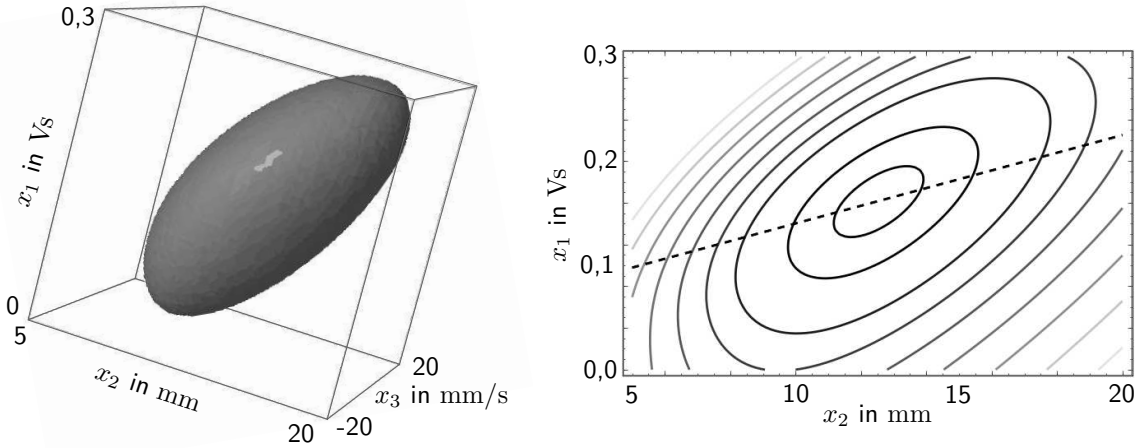
zu vergleichen. Aus der Forderung  $\nabla H_d(\mathbf{x})|_{x^*} = \mathbf{0}$  erhält man schließlich eine weitere Gleichung, die zusammen mit (6.30) nach den offenen Parametern  $\mu_1$  und  $\mu_2$  aufgelöst werden kann:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2 + \ln c_4} \left( -c_5 + \frac{\gamma^2 c_4}{\alpha_{11}^2} \phi_{11} \right), & c_5 &= 2c_1 \left( \ln c_3 + \frac{c_4}{c_3} \right). \\ \mu_2 &= -c_4 \left( \ln c_4 + \frac{c_5}{\mu_1} \right) - \zeta^*, \end{aligned} \quad (6.31)$$

### 6.1.2.5 Schritt 5: Vorgabe lokal linearer Dynamik

Zur Realisierung der lokal linearen Wunschdynamik verbleibt die Lösung der Bestimmungsgleichung (4.47)

$$\mathbf{F}_\alpha \mathbf{A}_\nu^T = \mathbf{A}_\alpha \mathbf{F}_\nu^T \quad (6.32)$$



**Abbildung 6.2:** Geschlossene Niveauläche von  $H_d(\mathbf{x})$  (links), Höhenlinien für den Schnitt bei  $x_3 = 0$  mm/s, Gerade zulässiger Ruhelagen (rechts).

nach den freien Parametern der Entwurfsmatrix  $\alpha_{11}$  und  $\nu_{21}$ . Man erhält aus

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & -\nu_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_{31} \\ 0 & a_{32} \\ a_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\alpha,11} & a_{\alpha,12} & a_{\alpha,13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \nu_{21} \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

zwei skalare Gleichungen, welche aufgelöst die Werte der Entwurfparameter

$$\begin{aligned} \nu_{21} &= -\frac{a_{\alpha,13}}{a_{23}}, \\ \alpha_{11} &= \frac{a_{\alpha,11}}{a_{31}} \nu_{21} - \frac{a_{\alpha,12}}{a_{31}} \end{aligned} \quad (6.34)$$

in Abhängigkeit der Elemente der vorgegebenen Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_d$  ergeben. Da der Parameter  $\nu_{22}$  wegen seiner fehlenden Auswirkung auf die Gestalt der Energie bereits festgelegt wurde, besteht keine weitere Entwurfsmöglichkeit (die Möglichkeit, die Ansatzfunktion (6.23) zu variieren, wird hier nicht genutzt) und Schritt 6 entfällt.

Das so parametrisierte IDA-PBC-Regelgesetz

$$u_{\text{IDA}} = -f_{\alpha}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_{\alpha} \nabla H_d(\mathbf{x}) \quad (6.35)$$

stabilisiert die durch  $x_2^*$  vorgegebene Ruhelage. Die asymptotische Stabilität in einem durch  $H_d(\mathbf{x})$  abgeschätzten Gebiet kann (da  $\mathbf{R}_d$  nur positiv semidefinit ist) mit dem Satz von Barbashin (Satz 2.3) nachgewiesen werden.

Abbildung 6.2 zeigt eine geschlossene Niveaufläche der Energie  $H_d(\mathbf{x})$  um die Ruhelage bei  $x_2^* = 12,5$  mm. Die Niveaufläche liegt innerhalb der zulässigen Grenzen des magnetischen Flusses<sup>3</sup>. Daneben ist ein Schnitt durch die Niveauflächen von  $H_d(\mathbf{x})$  für  $x_3 = 0$ , also für einen ruhenden Schwebekörper, dargestellt. Zusätzlich ist die Gerade in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene eingezeichnet, auf der sich die möglichen Ruhelagen nach Gl. (6.11) befinden. Es wird deutlich, dass die dargestellte Ruhelage auch für benachbarte (durch anders parametrisierte Festwertregelungen eingestellte) Ruhelagen im Arbeitsbereich  $x_2 \in [5 \text{ mm}, 20 \text{ mm}]$  attraktiv ist<sup>4</sup>. Damit lassen sich Arbeitspunktwechsel durch das Umschalten zwischen Regelgesetzen erreichen, deren Ruhelagen sich im Einzugsgebiet der jeweils anderen befinden.

### 6.1.3 Experiment

Für das Experiment werden zwei nichtlineare IDA-PBC-Regler für die Ruhelagen  $x_2^* = 7,5$  mm und  $x_2^* = 12,5$  mm entworfen, wobei für die Linearisierung des geregelten Systems jeweils drei reelle Eigenwerte bei  $-50$  vorgegeben werden. Zum Vergleich werden die mit denselben Eigenwerten parametrisierten linearen Zustandsregler

$$u_{\text{lin}} = -\mathbf{r}^T \Delta \mathbf{x} + u^* \quad (6.36)$$

für beide Ruhelagen ermittelt.

Abbildung 6.3 zeigt oben den gemessenen Abstand des Schwebekörpers für Arbeitspunktwechsel zwischen den Ruhelagen unter den nichtlinearen IDA-PBC-Reglern und den linearen Zustandsreglern (für beide Arbeitspunkte) sowie zum Vergleich das Verhalten des simulierten linearen Referenzsystems. Die Messungen zeigen insbesondere hinsichtlich der Dauer der transienten Vorgänge sehr gute Übereinstimmung mit dem linearen Referenzsystem, welches für die Parameterierung der Regler herangezogen wurde.

Zwischen den Verläufen unter der nichtlinearen und der linearen Regelung sind nur geringfügige Unterschiede zu erkennen. So verhält sich das System unter dem IDA-PBC-Regelgesetz (6.35) für die steigenden Flanken (hin zu größeren Abständen) etwas schneller, für die fallenden Flanken etwas langsamer als unter dem linearen Regelgesetz (6.36), was auch in den abgebildeten Stellgrößenverläufen sichtbar ist<sup>5</sup>. Gegenüber dem linearen Regelgesetz enthält  $u_{\text{IDA}}$  Nichtlinearitäten in der Kompensation von  $f_\alpha(\mathbf{x})$  sowie dem

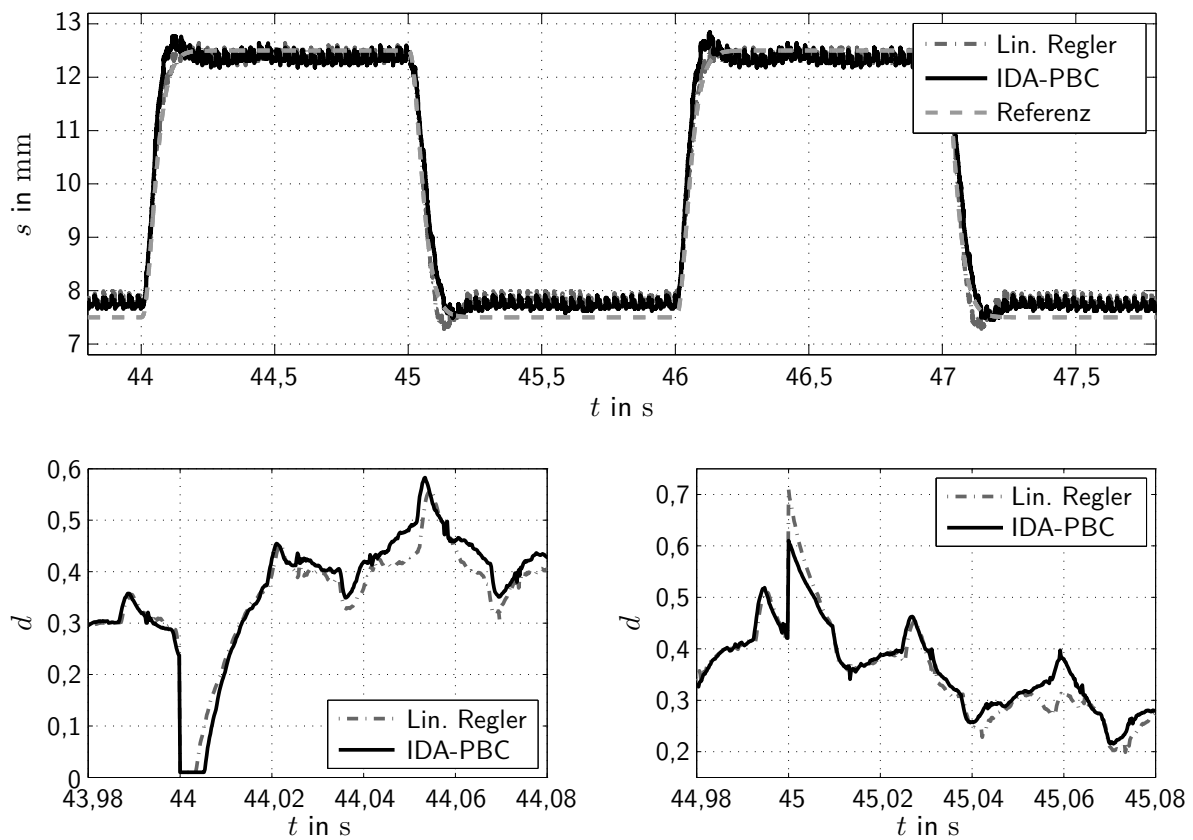
<sup>3</sup>Diese ergeben sich aus der Beschränkung des Spulenstroms auf etwa  $0 \text{ A} \leq i \leq 4,5 \text{ A}$ .

<sup>4</sup>Dabei wird unterstellt, dass die Dissipation ausreicht, um die Trajektorie von den Bereichen der Fluss-Sättigung fernzuhalten.

<sup>5</sup>Die Welligkeit ist auf die Abtastung des nahezu sägezahnförmigen Stromsignals zurückzuführen.



Gradienten der Energie, die, wie in Abb. 6.2 zu erkennen, von einem Ellipsoiden (und damit einer quadratischen Funktion) abweicht.



**Abbildung 6.3:** Arbeitspunktwechsel der Schwebenden Kugel. Gemessener Abstand (oben) sowie Stellsignal für zwei entgegengesetzte Sprünge (unten).

## 6.2 Folgeregelung der Schwebenden Kugel

Die Regelungsaufgabe des exakten Folgens einer Solltrajektorie für den Abstand des Schwebekörpers wird mithilfe einer flachheitsbasierten Vorsteuerung, in Kombination mit der Stabilisierung des Fehlersystems durch IDA-PBC erfüllt [31]. Im Gegensatz zu den Arbeiten [15] und [56] liegt hier der Fokus auf der systematischen Dynamikvorgabe für das Fehlersystem durch die Zuweisung lokal linearer Dynamik.

### 6.2.1 Flachheitsbasierte Vorsteuerung

Die Zustandsdifferentialgleichungen für die Schwebende Kugel (6.9) beschreiben zusammen mit der Definition des Ausgangs

$$y = x_2 \quad (6.37)$$

ein *differentiell flaches* System [12]. Damit lassen sich die Stellgröße  $u$  sowie der Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  entlang einer vorgegebenen Solltrajektorie durch den Zeitverlauf des Ausgangs  $y_d(t)$  und dessen Zeitableitungen bis zur Ordnung  $n = 3$  differentiell parametrieren. Entlang der Solltrajektorie ergeben sich die Verläufe der Zustandsgrößen

$$\begin{aligned} x_{1d}(t) &= \frac{1}{c} \sqrt{2am(g - \ddot{y}_d(t))} (b + c + y_d(t)), \\ x_{2d}(t) &= y_d(t), \\ x_{3d}(t) &= m\dot{y}_d(t). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Mit der Zeitableitung des magnetischen Flusses

$$\dot{x}_{1d}(t) = \frac{1}{c} \dot{y}_d(t) \sqrt{2am(g - \ddot{y}_d(t))} - \frac{(b + c + y_d(t)) \ddot{y}_d(t)}{2c \sqrt{2am(g - \ddot{y}_d(t))}} \quad (6.39)$$

erhält man durch Auflösen der ersten Zustandsdifferentialgleichung nach  $u$  die Steuerung

$$u_d(t) = \sqrt{2am(g - \ddot{y}_d(t))} \left( \frac{\dot{y}_d(t)}{c} + \frac{r}{a} (b + y_d(t)) \right) - \frac{(b + c + y_d(t)) \ddot{y}_d(t)}{2c \sqrt{2am(g - \ddot{y}_d(t))}}. \quad (6.40)$$

Aus der zeitvarianten Zustands- und Eingangstransformation

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d(t), \quad u = u_d(t) + v \quad (6.41)$$

ergibt sich die Differentialgleichung für den Zustandsfehler

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}_e(\mathbf{e}, t) + \mathbf{g}_e \cdot v \quad \text{mit} \quad \mathbf{f}_e(\mathbf{e}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_d(t)), \quad \mathbf{g}_e = \mathbf{g}. \quad (6.42)$$

Im Folgenden wird der Index  $e$  der Übersicht halber weggelassen. Das zustandsabhängige und zeitvariante Drift-Vektorfeld des Fehlersystems lautet ausgeschrieben

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}, t) = \begin{bmatrix} f_{\alpha,1}(\mathbf{e}, t) \\ f_{\nu,1}(\mathbf{e}, t) \\ f_{\nu,2}(\mathbf{e}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \frac{c}{a} \left( \frac{\beta(e_2, t)}{\gamma(e_2, t)} (x_{1d}(t) + e_1) - \frac{\beta(0, t)}{\gamma(0, t)} x_{1d}(t) \right) \\ \frac{e_3}{m} \\ -\frac{1}{2} \frac{c^2}{a} \left( \frac{(x_{1d}(t) + e_1)^2}{\gamma^2(e_2, t)} - \frac{x_{1d}^2(t)}{\gamma^2(0, t)} \right) \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

mit den Abkürzungen

$$\beta(e_2, t) = b + x_{2d}(t) + e_2, \quad \gamma(e_2, t) = \beta(e_2, t) + c. \quad (6.44)$$

An der gewünschten Ruhelage  $\mathbf{e}^* = \mathbf{0}$  gilt offensichtlich  $\mathbf{f}_\nu(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$  für alle  $t$ , was notwendige Voraussetzung für den Entwurf einer stabilisierenden Zustandsrückführung ist.

## 6.2.2 IDA-PBC mit Zuweisung lokal linearer Dynamik

### 6.2.2.1 Schritt 1: Lösbarkeit der Restriktionsgleichung

Formuliert man die Restriktionsgleichung

$$\mathbf{G}^\perp \mathbf{f}(\mathbf{e}, t) = \mathbf{G}^\perp \mathbf{F}_d(t) \nabla H_d(\mathbf{e}, t) \quad (6.45)$$

mit dem einfachsten Annihilator und der rein zeitabhängigen Entwurfsmatrix

$$\mathbf{G}^\perp = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_d(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) \\ \nu_{11}(t) & \nu_{12}(t) & \nu_{13}(t) \\ \nu_{21}(t) & \nu_{22}(t) & \nu_{23}(t) \end{bmatrix}, \quad (6.46)$$

so ergibt die Auswertung der zeitvarianten Lösbarkeitsbedingung (3.51) nach Satz 3.2 die Forderung

$$\nu_{11}(t) = \nu_{12}(t) = \nu_{23}(t) = 0 \quad \forall t. \quad (6.47)$$

Eine solche Parametrierung verhindert wegen  $\nu_{12}(t) = 0$  die positive Definitheit der Dissipationsmatrix, was für den Stabilitätsnachweis des zeitvarianten Systems ungünstig ist. Daher wird eine zustands- und zeitabhängige Entwurfsmatrix

$$\mathbf{F}_d(\mathbf{e}, t) = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{e}, t) \hat{\mathbf{F}}_d(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}(\mathbf{e}, t) = \text{diag}\{1, d_2(\mathbf{e}, t), d_3(\mathbf{e}, t)\} \quad (6.48)$$

angesetzt, so dass sich statt der ursprünglichen IDA-PBC-Bestimmungsgleichung

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}, t) + \mathbf{g}v = \mathbf{F}_d(\mathbf{e}, t) \nabla H_d(\mathbf{e}, t) \quad (6.49)$$

durch Multiplikation mit  $\mathbf{D}(\mathbf{e}, t)$  eine Ersatz-Bestimmungsgleichung

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{e}, t) + \hat{\mathbf{g}}v = \hat{\mathbf{F}}_d(t) \nabla H_d(\mathbf{e}, t) \quad (6.50)$$

mit zustandsunabhängiger Entwurfsmatrix  $\hat{\mathbf{F}}_d(t)$  ergibt. Mit dem Ansatz der Funktionen

$$\begin{aligned} d_2(\mathbf{e}, t) &= m(k_0(t) + k_1(t)e_1 + k_2(t)e_2 + k_3(t)e_3) \quad \text{und} \\ d_3(\mathbf{e}, t) &= \frac{2a}{c^2} \gamma^2(e_2, t) \end{aligned} \quad (6.51)$$

lautet die äquivalente Restriktionsgleichung

$$\begin{bmatrix} \hat{\nu}_{11}(t) & \hat{\nu}_{12}(t) & \hat{\nu}_{13}(t) \\ \hat{\nu}_{21}(t) & \hat{\nu}_{22}(t) & \hat{\nu}_{23}(t) \end{bmatrix} \nabla H_d(\mathbf{e}, t) = \begin{bmatrix} (k_0(t) + k_1(t)e_1 + k_2(t)e_2 + k_3(t)e_3)e_3 \\ \frac{\gamma^2(e_2, t)}{\gamma^2(0, t)} x_{1d}^2(t) - (x_{1d}(t) + e_1)^2 \end{bmatrix}. \quad (6.52)$$

Der Übersichtlichkeit halber wird im Folgenden auf die explizite Darstellung der Zeitabhängigkeit der Entwurfparameter verzichtet, es gilt also  $\hat{\alpha}_{ij} = \hat{\alpha}_{ij}(t)$  bzw.  $\hat{\nu}_{ij} = \hat{\nu}_{ij}(t)$ .

Die Restriktionsgleichung besitzt eine Lösung für

$$\hat{\nu}_{11} = \hat{\nu}_{22} = 0, \quad k_1(t) = k_3(t) = 0 \quad (6.53)$$

sowie

$$k_0(t) = \frac{2\hat{\nu}_{12} x_{1d}^2(t)}{\hat{\nu}_{23} \gamma(0, t)}, \quad k_2(t) = \frac{k_0(t)}{\gamma(0, t)}. \quad (6.54)$$

Mit (6.48) ergibt sich die erste Vorparametrierung

$$\mathbf{F}_d(\mathbf{e}, t) = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{11} & \hat{\alpha}_{12} & \hat{\alpha}_{13} \\ 0 & \frac{\hat{\nu}_{12}}{m(k_0(t) + k_2(t)e_2)} & \frac{\hat{\nu}_{13}}{m(k_0(t) + k_2(t)e_2)} \\ \frac{c^2 \hat{\nu}_{21}}{2a\gamma^2(e_2, t)} & 0 & \frac{c^2 \hat{\nu}_{23}}{2a\gamma^2(e_2, t)} \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

der zustandsabhängigen Entwurfsmatrix.

### 6.2.2.2 Schritt 2: Definitheit der Dämpfungsmatrix

Zur Vereinfachung der resultierenden Dissipationsmatrix  $\mathbf{R}_d(\mathbf{e}, t)$  werden die Parameter

$$\hat{\alpha}_{12} = 0 \quad \text{und} \quad \hat{\nu}_{21} = -\frac{2a}{c^2} \gamma^2(0, t) \hat{\alpha}_{13} \quad (6.56)$$

gesetzt. Es erweist sich aufgrund der resultierenden Darstellung von  $\mathbf{R}_d(\mathbf{e}, t)$  als günstig, an dieser Stelle bereits die erste Bestimmungsgleichung zur Zuweisung lokal linearer Dynamik nach den Parametern  $\hat{\alpha}_{13}$  und  $\hat{\nu}_{13}$  aufzulösen. Die Dynamikmatrix des linearisierten geregelten Systems entlang der Trajektorie ist

$$\mathbf{A}_d(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\alpha(t) \\ \mathbf{A}_\nu(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\alpha,11}(t) & a_{\alpha,12}(t) & a_{\alpha,13}(t) \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ -\frac{c^2 x_{1d}(t)}{a\gamma^2(0, t)} & \frac{c^2 x_{1d}^2(t)}{a\gamma^3(0, t)} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.57)$$

Die Submatrix  $\mathbf{A}_\nu(t)$  folgt aus der Linearisierung der unaktuerten Dynamik, die ggf. zeitvarianten Parameter  $a_{\alpha,1i} = a_{\alpha,1i}(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  ergeben sich aus der Eigenwertvorgabe entlang der Trajektorie. Die Lösung der Bestimmungsgleichung (4.47), die sich aufgrund der Faktorisierung von  $\mathbf{F}_d(\mathbf{e}, t)$  als

$$\hat{\mathbf{F}}_\alpha(t) \mathbf{A}_\nu^T(t) = \mathbf{A}_\alpha(t) \hat{\mathbf{F}}_\nu^T(t) \cdot \text{diag}\{d_2^{-1}(\mathbf{0}, t), d_3^{-1}(\mathbf{0}, t)\} \quad (6.58)$$

darstellen lässt, liefert die Festlegung der Parameter

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{13} &= \frac{c^2}{2a} \frac{a_{\alpha,13} \hat{\nu}_{23} + 2\hat{\alpha}_{11} x_{1d}(t)}{a_{\alpha,11} \gamma^2(0, t)} \quad \text{und} \\ \hat{\nu}_{13} &= -\frac{a_{\alpha,12} \hat{\nu}_{12}}{a_{\alpha,13}} + \frac{2\hat{\nu}_{12}}{a_{\alpha,13} \hat{\nu}_{23}} \frac{\hat{\alpha}_{13} x_{1d}^2(t)}{\gamma(0, t)}. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Die damit resultierende Dissipationsmatrix ist

$$\mathbf{R}_d(\mathbf{e}, t) = \begin{bmatrix} -\hat{\alpha}_{11} & 0 & r_{13} \\ 0 & -\frac{\hat{\nu}_{23}\gamma^2(0, t)}{2mx_{1d}^2(t)\gamma(e_2, t)} & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & -\frac{c^2\hat{\nu}_{23}}{2a\gamma^2(e_2, t)} \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

mit den Abkürzungen

$$r_{13} = \frac{\hat{\alpha}_{13}}{2} \left( \frac{\gamma^2(0, t)}{\gamma^2(e_2, t)} - 1 \right) \quad \text{und} \quad r_{23} = -\frac{\hat{\nu}_{13}\hat{\nu}_{23}}{4m\hat{\nu}_{12}} \frac{\gamma^2(0, t)}{\gamma(e_2, t)x_{1d}^2(t)}. \quad (6.61)$$

Der Ausdruck  $r_{13}$  wird Null für  $e_2 = 0$  und kann somit als Perturbation hinsichtlich der Definitheit der Matrix  $\mathbf{R}_d$  für  $e_2 \neq 0$  aufgefasst werden.

### 6.2.2.3 Schritt 3: Parametrische Darstellung der Energiefunktion

Eine partikuläre Lösung der Restriktionsgleichung (6.52) ist

$$\Psi(\mathbf{e}, t) = \frac{1}{2}\mathbf{e}^T \mathbf{Q}^\Psi(t) \mathbf{e} - \frac{1}{3\hat{\nu}_{21}}e_1^3 + \frac{x_{1d}^2(t)}{\hat{\nu}_{23}\gamma^2(0, t)} \left( e_2^2 e_3 - \frac{\hat{\nu}_{13}}{3\hat{\nu}_{12}}e_2^3 \right) \quad (6.62)$$

mit der Hessematrix in  $\mathbf{e}^* = \mathbf{0}$

$$\mathbf{Q}^\Psi(t) = 2 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{x_{1d}(t)}{\hat{\nu}_{21}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\hat{\nu}_{13}x_{1d}^2(t)}{\hat{\nu}_{12}\hat{\nu}_{23}\gamma(0, t)} & \frac{x_{1d}^2(t)}{\hat{\nu}_{23}\gamma(0, t)} \\ 0 & \frac{x_{1d}^2(t)}{\hat{\nu}_{23}\gamma(0, t)} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.63)$$

Als homogene Lösung wird

$$\Phi(z_\alpha) = \mu_1 z_\alpha + \frac{1}{2}\mu_2 z_\alpha^2 + \frac{1}{4}\mu_4 z_\alpha^4 \quad (6.64)$$

angesetzt, wobei durch

$$z_\alpha = [1 \ 0 \ 0] \hat{\mathbf{F}}_d^{-T}(t) \mathbf{e} \quad (6.65)$$

eine Darstellung der charakteristischen Koordinate gegeben ist.

#### 6.2.2.4 Schritt 4: Einstellen der Ruhelage

Die Forderung  $\nabla H_d(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$  ist für alle  $t$  durch  $\mu_1 = 0$  erfüllt.

#### 6.2.2.5 Schritt 5: Vorgabe lokal linearer Dynamik

Mit der Auswertung der zweiten Bestimmungsgleichung (4.40), in welche die zweiten partiellen Ableitungen von (6.62) und (6.64) nach  $z_\alpha$  eingesetzt werden, ergibt sich schließlich die Parametrierung

$$\mu_2(t) = a_{\alpha,11}\hat{\alpha}_{11} + a_{\alpha,13}\hat{\alpha}_{13} - \frac{c^2}{a} \frac{\hat{\alpha}_{11}^2 x_{1d}(t)}{\hat{\alpha}_{13} \gamma^2(0, t)}, \quad (6.66)$$

mit der die Zuweisung lokal linearer Dynamik abgeschlossen ist.

#### 6.2.2.6 Schritt 6: Festlegung der noch offenen Parameter

Durch die bisherigen Festlegungen ergibt sich, dass  $\hat{\nu}_{12}$  aus der Energiefunktion und Dissipationsmatrix fällt, so dass  $\hat{\alpha}_{11}$  und  $\hat{\nu}_{23}$  die beiden verbleibenden freien Parameter sind. Weiterhin sind die Parameter in  $\mathbf{A}_\alpha(t)$  offen.

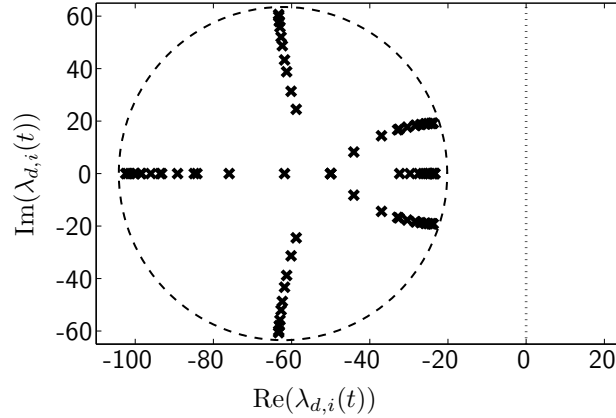
**Zur Eigenwertvorgabe.** Die Parameter  $\mathbf{A}_\alpha(t)$  des aktuierten Teils der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_d(t)$  werden für die Zuweisung lokal linearer Dynamik aus dem linearen Zustandsregler-Entwurfsproblem

$$\Delta \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}(t)\Delta \mathbf{e} + \mathbf{b}\Delta v, \quad \Delta v = -\mathbf{r}^T(t)\Delta \mathbf{e} \quad (6.67)$$

für die Linearisierung der Fehlerdynamik (6.42) gewonnen. Wie in Abschnitt 2.1.2 beschrieben, ist die Untersuchung der Stabilität des linearen zeitvarianten Referenzsystems

$$\Delta \dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}(t) - \mathbf{r}^T(t)\mathbf{b})\Delta \mathbf{e} = \mathbf{A}_d(t)\Delta \mathbf{e} \quad (6.68)$$

erheblich aufwendiger als im zeitinvarianten Fall. Eine Möglichkeit, die Zustandsrückführung  $\mathbf{r}^T(t)$  und damit eine stabile vorgegebene Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_d(t)$  zu ermitteln, ist die Anwendung der zeitvarianten Ackermannformel [13]. Ist die darin enthaltene zeitvariante Transformation auf Regelungsnormalform eine Ljapunow-Transformation, dann ist bei Vorgabe von Regelungseigenwerten (der Dynamikmatrix in Regelungsnormalform) in der offenen linken Halbebene die Stabilität von (6.68) gesichert.



**Abbildung 6.4:** Eigenwerte der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_d(t)$  entlang der Trajektorie.

Beim IDA-PBC-Entwurf erfolgt der nichtlineare Stabilitätsnachweis im zeitveränderlichen Fall durch die Ermittlung zeitinvarianter Schranken der Energiefunktion  $H_d$ , vgl. Satz 2.6. Aufgrund dieser nachträglichen Prüfung wird auf den strengen Stabilitätsbeweis für das lineare Referenzsystem (6.68) verzichtet und wie in Abschnitt 4.4 beschrieben vorgegangen.

Ein mittlerer Punkt der Solltrajektorie  $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$  wird als stationär angenommen, im Beispiel entsprechend dem Gleichanteil der sinusförmigen Führungsgröße. Dort wird die mittlere Jacobimatrix des unaktuerten Subsystems

$$\bar{\mathbf{A}}_\nu = \mathbf{A}_\nu(t) \Big|_{\mathbf{x}(t)=\bar{\mathbf{x}}} \quad (6.69)$$

berechnet und der aktuierte Teil  $\bar{\mathbf{A}}_\alpha$  wird so gewählt, dass die mittlere Dynamikmatrix

$$\bar{\mathbf{A}}_d = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_\alpha \\ \bar{\mathbf{A}}_\nu \end{bmatrix} \quad (6.70)$$

gewünschte Eigenwerte hat. Schließlich wird zur Zuweisung lokal linearer Dynamik die Submatrix

$$\mathbf{A}_\alpha(t) = \bar{\mathbf{A}}_\alpha \quad (6.71)$$

genutzt. Dem Vorgehen liegt die Annahme zugrunde, dass die (festen) Eigenwerte von  $\bar{\mathbf{A}}_d$  die Dynamik des resultierenden, zeitvarianten Referenzsystems

$$\Delta \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_d(t) \Delta \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_\alpha \\ \mathbf{A}_\nu(t) \end{bmatrix} \Delta \mathbf{e} \quad (6.72)$$



hinreichend gut beschreiben und sich die tatsächlich vorliegende Zeitvarianz nicht destabilisierend auswirkt. Tatsächlich bewegen sich die „eingefrorenen“ Eigenwerte des so parametrisierten Referenzsystems (6.68) entlang der Solltrajektorie um die Eigenwerte der gemittelten Dynamikmatrix, siehe Abb. 6.4 für die sinusförmige Trajektorie im Beispiel. Bei erfolgreichem Reglerentwurf mit IDA-PBC werden durch den nichtlinearen Stabilitätsnachweis für das resultierende Port-Hamilton'sche System die hier getroffenen Annahmen im Nachhinein bestätigt.

Für den Abstand des Schwebekörpers wird der Sollverlauf

$$y_d(t) = C_1 + C_2 \sin(6t), \quad t \geq 0 \quad (6.73)$$

mit  $C_1 = 10$  mm und  $C_2 = 5$  mm vorgegeben. Dem linearen Referenzsystem werden, wie oben beschrieben, drei Eigenwerte der Matrix (6.70) bei  $-50$  für den mittleren Abstand  $\bar{y}_d = 10$  mm zugewiesen.

**Zur Optimierung der Energie.** Für die Abschätzung des Einzugsgebiets der Ruhelage  $\mathbf{e}^* = \mathbf{0}$  werden die Energie  $H_d(\mathbf{e}, t)$  und ihre Zeitableitung  $\dot{H}_d(\mathbf{e}, t)$  auf einem diskreten Gitter im Zustandsraum zu diskreten Zeitpunkten entlang der Solltrajektorie ausgewertet. Aus den Minima und Maxima über die Zeit ergeben sich die zeitinvarianten Schranken<sup>6</sup>

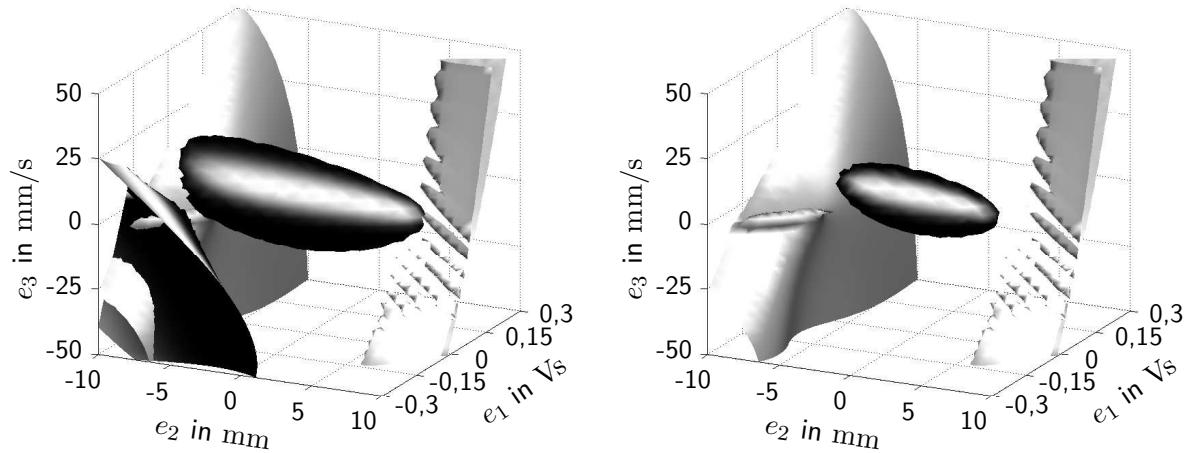
$$\begin{aligned} W_1[i, j, k] &= \min_l H_d(e[i, j, k], t[l]), \\ W_2[i, j, k] &= \max_l H_d(e[i, j, k], t[l]), \\ -W_3[i, j, k] &= \max_l \dot{H}_d(e[i, j, k], t[l]). \end{aligned} \quad (6.74)$$

Eine Stabilitätsaussage nach Satz 2.6 ist auf dem Gebiet des Zustandsraumes möglich, auf dem die Funktionen  $W_i(\mathbf{e})$ ,  $i = 1, 2, 3$  positiv definit sind. Das garantierte Einzugsgebiet der Ruhelage ist beschränkt durch die Niveaufläche  $W_2(\mathbf{e}) = c$ , deren Wert der größten geschlossenen Niveaufläche  $W_1(\mathbf{e}) = c$  entspricht, die vollkommen innerhalb des Gebiets liegt, auf dem  $W_3(\mathbf{e}) \geq 0$  gilt.

Durch die numerische Approximation des von  $W_2(\mathbf{e}) = c$  eingeschlossenen Volumens als Gütemaß lässt sich das abgeschätzte Einzugsgebiet computergestützt maximieren [63], woraus sich die Festlegung  $\hat{\alpha}_{11} = -9,89 \cdot 10^{-5}$  und  $\hat{\nu}_{23} = -582$  der noch verbliebenen Entwurfparameter ergibt. Abbildung 6.5 zeigt die rechnergestützt ermittelten Schranken. Hellgrau dargestellt sind die Äquipotentialflächen von  $W_3(\mathbf{e}) = 0$ . Sie stellen die

---

<sup>6</sup>Durch  $[i, j, k]$  und  $[l]$  werden die Gitterpunkte im Zustandsraum bzw. in der Zeit indiziert.



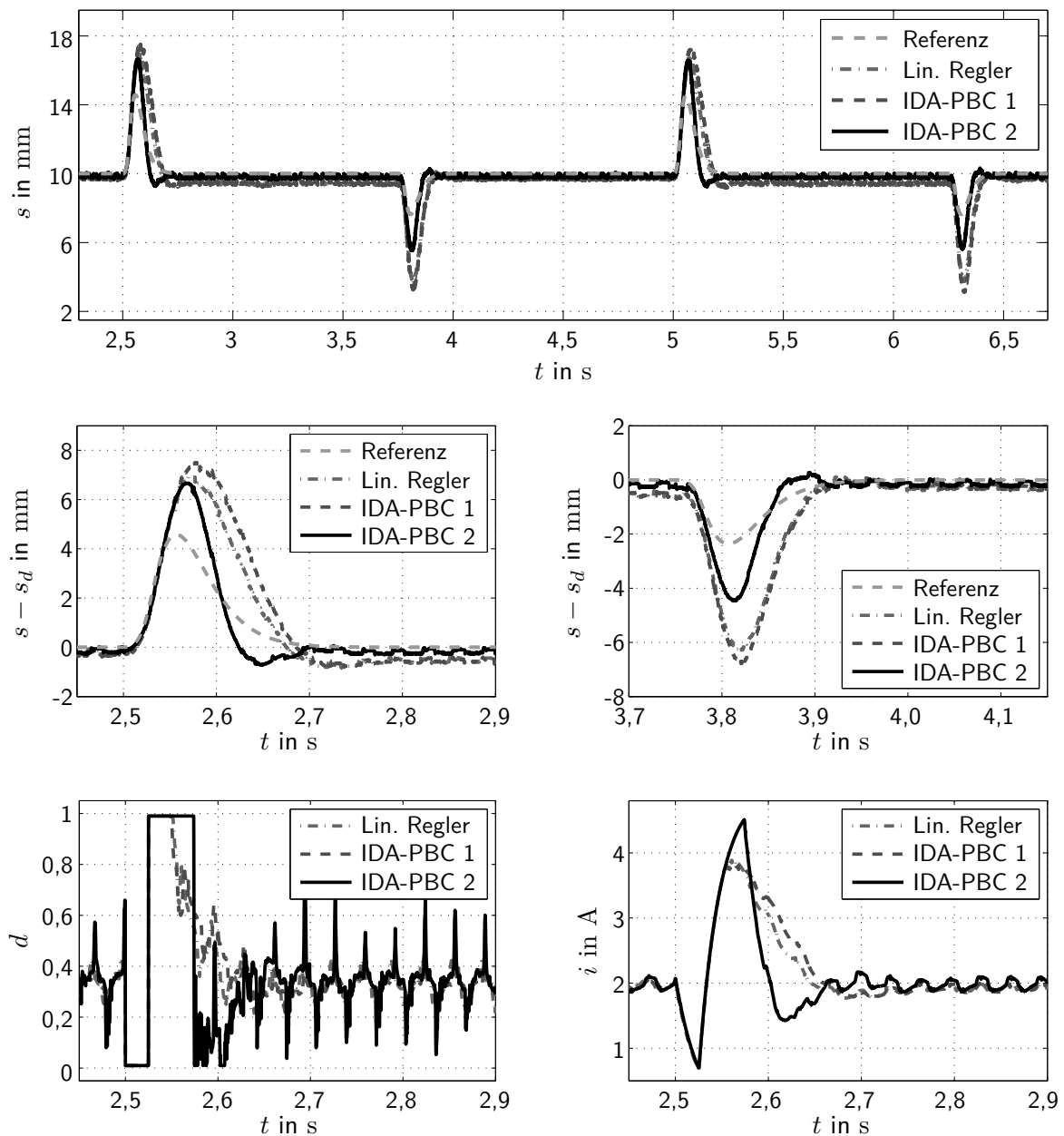
**Abbildung 6.5:** Niveauflächen der Schranken  $W_i(\mathbf{e})$ ,  $i = 1, 2, 3$  der zeitveränderlichen Energiefunktion  $H_d(\mathbf{e}, t)$ . Hellgrau:  $W_3(\mathbf{e}) = 0$ , dunkelgrau:  $W_1(\mathbf{e}) = c$  (links) bzw.  $W_2(\mathbf{e}) = c$  (rechts).

Grenze der Dissipativität des geregelten Systems abhängig vom Fehler  $\mathbf{e}$  dar. Dunkelgrau dargestellt ist links die größte, innerhalb des dissipativen Gebiets liegende, geschlossene Äquipotentialfläche von  $W_1(\mathbf{e})$ . Die für denselben Funktionswert  $c$  dargestellte Niveaufläche von  $W_2(\mathbf{e})$  (rechts) gibt eine Abschätzung des Einzugsgebiets der Ruhelage  $\mathbf{e}^* = \mathbf{0}$  an.

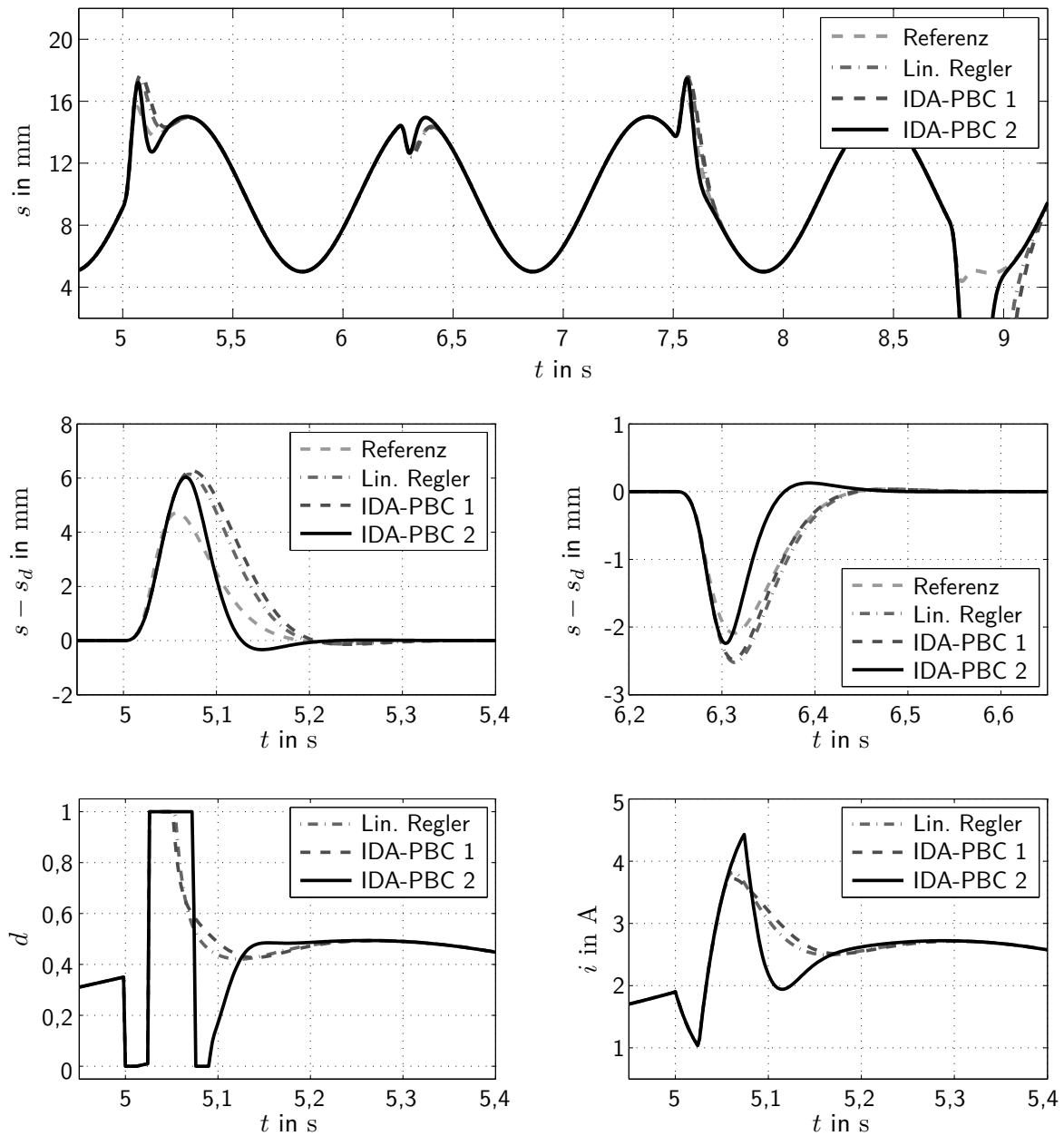
### 6.2.3 Experiment

In den Abbildungen 6.6–6.8 ist das Folge- und Störverhalten des Systems unter zwei unterschiedlich parametrisierten IDA-PBC-Regelgesetzen und der entsprechenden linearen Zustandsrückführung dargestellt sowie der Verlauf der Regelgröße im vorgegebenen linearen Referenzsystem. Die beiden IDA-PBC-Regelgesetze unterscheiden sich lediglich im Term vierter Ordnung der homogenen Lösung (6.64), der bei IDA-PBC 1 Null ist, gegenüber  $\mu_4 = 4 \cdot 10^{25}$  bei IDA-PBC 2.

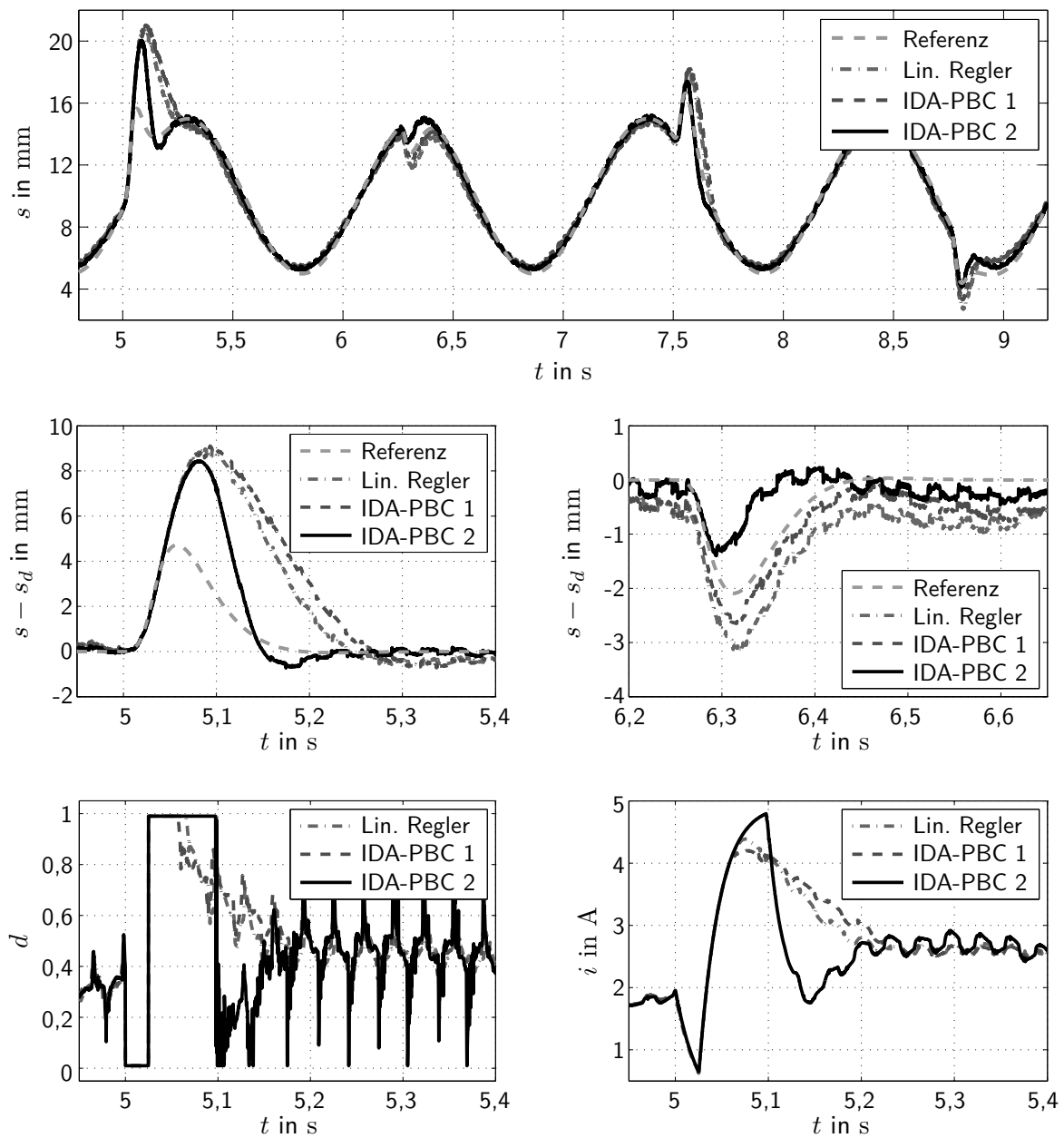
Abbildung 6.6 zeigt das Störverhalten bei Vorgabe des festen Sollabstands  $y_d^* = 10$  mm. Durch wiederkehrende, für jeweils wenige Millisekunden auftretende Fehlerspannungen wird der Schwebekörper aus seiner Sollposition ausgelenkt. Die unterschiedlichen Regelungen sollen den entstandenen (Folge-)Fehler, angelehnt an die Dynamik des Referenzsystems, eliminieren. Dies gelingt, wie in den gemessenen Verläufen des Abstands  $s$  dargestellt, sehr gut. Alle drei Regelungen weisen hinsichtlich der Form und Dauer des Ausregelvorgangs dem Referenzsystem entsprechendes Verhalten auf. Lediglich die Amplituden der Auslenkung aufgrund des Spannungsfehlers sind höher, was mit dem Unterschied zwi-



**Abbildung 6.6:** Abstand (oben), Folgefehler nach zwei Störungen (Mitte) sowie Tastverhältnis und Strom (unten) bei festem Sollwert.



**Abbildung 6.7:** Simulation von Abstand (oben), Folgefehler nach zwei Störungen (Mitte) sowie Tastverhältnis und Strom (unten) bei sinusförmiger Trajektorie.



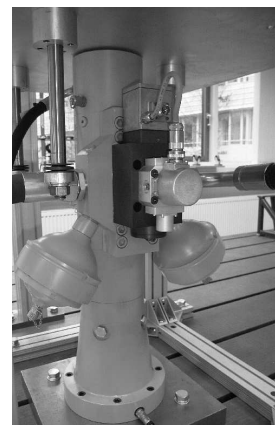
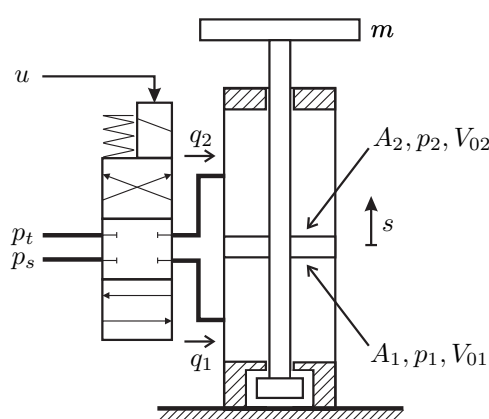
**Abbildung 6.8:** Abstand (oben), Folgefehler nach zwei Störungen (Mitte) sowie Tastverhältnis und Strom (unten) bei sinusförmiger Trajektorie.

schen dem vollständig linearen (bei  $y_d^*$  ausgewerteten) Referenzmodell und der tatsächlich vorliegenden Nichtlinearität der Strecke zu erklären ist. Der erste IDA-PBC-Regler verhält sich fast identisch zum linearen Regler. Bei IDA-PBC 2 dominiert hingegen der durch  $\mu_4$  stark gewichtete kubische Term im Regelgesetz, der die lokal lineare Dynamik nicht beeinflusst. Dieser zusätzliche, nichtlineare Regelungsanteil führt zu einer Beschleunigung des Ausregelvorgangs, die jedoch durch die Grenzen der Stellspannung beschränkt ist.

Das Bild bestätigt sich – insbesondere innerhalb des Betriebsbereichs zwischen 5 mm und 15 mm, in dem die Induktivität der Anordnung identifiziert wurde – in der Simulation und den Messungen für die Folgeregelung entlang der sinusförmigen Trajektorie (Abb. 6.7 und 6.8). Die Experimente weisen die Güte der in dieser Arbeit vorgestellten Zuweisung lokal linearer Dynamik zur transparenten Parametrierung des IDA-PBC-Regelungsentwurfs auch für den zeitvarianten Fall nach.

### 6.3 Hydraulikaktuator

Der Hydraulikaktuator (siehe Abb. 6.9) ist Bestandteil des Viertelfahrzeug-Prüfstands am Lehrstuhl für Regelungstechnik. Sein Kolbenhub bildet gemessene Straßenprofile ab, mit denen das Viertelfahrzeug-Modell angeregt wird. Der in Abschnitt 6.3.2 durchgeführte systematische IDA-PBC-Entwurf unter Zuweisung lokal linearer Dynamik basiert auf einem reduzierten Zustandsraummodell des Hydraulikzylinders, welches im folgenden Abschnitt vorgestellt wird.



**Abbildung 6.9:** Skizze des Hydraulikaktuators (links) und Foto des Zylinders als Komponente des Viertelfahrzeug-Prüfstands am Lehrstuhl für Regelungstechnik (rechts).

### 6.3.1 Modellbildung

Ein gängiges Modell für einen doppelt wirkenden Hydraulikzylinder (siehe z. B. [19]), wie er im Prüfstand verwendet wird, ist durch die Zustandsdifferentialgleichungen

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \frac{A_1}{m}p_1 - \frac{A_2}{m}p_2 - \frac{d}{m}x_2 - g \\
 \dot{p}_1 &= \frac{E}{V_1(x_1)}(-A_1x_2 + q_1) \\
 \dot{p}_2 &= \frac{E}{V_2(x_1)}(A_2x_2 + q_2)
 \end{aligned} \tag{6.75}$$

gegeben.  $x_1 = s$  und  $x_2 = v$  bezeichnen Kolbenhub und -geschwindigkeit,  $p_1$  und  $p_2$  sind die Drücke in den beiden Zylinderkammern. Für die Volumina der Kammern gilt

$$V_1(x_1) = V_{0,1} + A_1x_1 \quad \text{und} \quad V_2(x_1) = V_{0,2} - A_2x_1 \tag{6.76}$$

mit  $V_{0,i}$  den Volumina in der Nullstellung des Kolbens und  $A_i$  den effektiven Kolbenflächen. Die Zuflüsse in beide Kammern werden beschrieben durch

$$q_i = \Xi_i(p_i)u, \quad i = 1, 2 \tag{6.77}$$

mit

$$\Xi_1(p_1) = \begin{cases} k_v \sqrt{|p_s - p_1|} \cdot \text{sgn}(p_s - p_1), & u \geq 0 \\ k_v \sqrt{|p_1 - p_t|} \cdot \text{sgn}(p_1 - p_t), & u < 0 \end{cases}, \tag{6.78}$$

$$\Xi_2(p_2) = \begin{cases} k_v \sqrt{|p_2 - p_t|} \cdot \text{sgn}(p_2 - p_t), & u \geq 0 \\ k_v \sqrt{|p_s - p_2|} \cdot \text{sgn}(p_s - p_2), & u < 0 \end{cases}. \tag{6.79}$$

Der Stelleingang  $u$  ist die Schieberposition des 4/3-Wege-Proportionalventils,  $k_v$  bezeichnet den Ventilkoeffizienten,  $p_s$  und  $p_t$  sind der Versorgungs- bzw. der Tankdruck des Hydrauliksystems. Als übliche Annahmen werden sowohl innere als auch äußere Leckageflüsse vernachlässigt, ebenso wie die deutlich schnellere Ventildynamik.

Tabelle C.2 im Anhang gibt eine Übersicht über alle verwendeten Symbole und die Werte der physikalischen Parameter.

Zur Vereinfachung des Regelungsentwurfs mit IDA-PBC werden der Zustandsvektor und die Eingangsgröße gemäß

$$\begin{aligned} x_3 &= k_C(A_1 p_1 - A_2 p_2 - mg + EA_1 \ln(V_1(x_1)) - EA_2 \ln(V_2(x_1))) \\ x_4 &= k_C(A_2 p_2 + EA_2 \ln(V_2(x_1))) \end{aligned} \quad (6.80)$$

und

$$v = k_C \left( \frac{EA_1 \Xi_1(p_1)}{V_1(x_1)} - \frac{EA_2 \Xi_2(p_2)}{V_2(x_1)} \right) u \quad (6.81)$$

transformiert [19]. Die neuen Zustände  $x_3$  und  $x_4$  sind Invarianten, sog. Casimir-Funktionen für das autonome System ( $u = 0$ ). Ihre Existenz lässt sich aus der Port-Hamilton'schen Darstellung ableiten und ist plausibel vor dem Hintergrund, dass der hydraulische Teil des Systems verlustlos modelliert wird. Der Faktor  $k_C$  dient dazu, die folgenden Berechnungen numerisch gut konditioniert zu halten.

Das transformierte System lässt sich in zwei Subsysteme

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : \quad \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})v, \\ \Sigma_2 : \quad \dot{x}_4 &= g_4(\mathbf{x}, x_4)v \end{aligned} \quad (6.82)$$

zerlegen, wobei  $\Sigma_1$  durch den reduzierten Zustandsvektor

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T \quad (6.83)$$

beschrieben wird. Drift- und Eingangs-Vektorfeld des ersten Teilsystems sind

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2(\mathbf{x}) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.84)$$

Der Übersicht halber werden die Zustandsabhängigkeiten der Volumina  $V_i$  und der Funktionen  $\Xi_i$ ,  $i = 1, 2$  im Folgenden nicht ausgeschrieben. Damit lautet das zweite Element von  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$

$$f_2(\mathbf{x}) = -\frac{E}{m}(A_1 \ln(V_1) - A_2 \ln(V_2)) - \frac{dx_2}{m} + \frac{x_3}{mk_C} \quad (6.85)$$



und die Eingangsverstärkung von  $\Sigma_2$

$$g_4(\mathbf{x}, x_4) = \frac{A_2 \bar{\Xi}_2 V_1}{A_1 \bar{\Xi}_1 V_2 - A_2 \bar{\Xi}_2 V_1}. \quad (6.86)$$

Das Subsystem  $\Sigma_1$  wird nicht durch  $\Sigma_2$  beeinflusst, so dass nur der Entwurf einer stabilisierenden Regelung für das reduzierte System  $\Sigma_1$  betrachtet wird. Wie in [19] beschrieben, bleibt das Gesamtsystem stabil, wenn  $\Sigma_1$  durch ein Regelgesetz  $v(\mathbf{x})$  asymptotisch stabilisiert wird, da der Term  $g_4(\mathbf{x}, x_4)v(\mathbf{x})$  aufgrund  $0 < |g_4| < 1$  einer linearen Wachstumsbedingung genügt.

### 6.3.2 Systematischer Entwurf einer Festwertregelung

Die Regelungsaufgabe ist die Positionsregelung des Kolbenhubs auf einen festen Wert  $s^* = x_1^*$ . Im Folgenden wird die systematische Herleitung des stabilisierenden IDA-PBC-Regelgesetzes unter Zuweisung lokal linearer Wunschdynamik dargestellt (vgl. [26]).

#### 6.3.2.1 Schritt 1: Lösbarkeit der Restriktionsgleichung

Die Zerlegung des Drift-Vektorfelds nach Gl. (6.84) in einen unaktuerten und einen aktuerten Teil liefert

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad f_\alpha(\mathbf{x}) = 0. \quad (6.87)$$

Entsprechend lautet die anfängliche Parametrierung der konstanten Entwurfsmatrix

$$\mathbf{F}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_\nu \\ \mathbf{F}_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_1^T \\ \boldsymbol{\nu}_2^T \\ \boldsymbol{\alpha}_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \nu_{23} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{bmatrix}. \quad (6.88)$$

Die Überprüfung der Lösbarkeit der Restriktionsgleichung

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_1^T \\ \boldsymbol{\nu}_2^T \end{bmatrix} \nabla H_d(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (6.89)$$

nach der Bedingung (3.50) liefert die Forderung

$$\nu_{22} + \frac{E}{m} \left( \frac{A_1^2}{V_1} + \frac{A_2^2}{V_2} \right) \nu_{11} + \frac{d}{m} \nu_{12} - \frac{1}{k_C m} \nu_{13} \stackrel{!}{=} 0, \quad (6.90)$$

welche durch die Parameterwahl

$$\nu_{11} = 0 \quad \text{und} \quad \nu_{13} = k_C(d\nu_{12} + m\nu_{22}) \quad (6.91)$$

für alle  $\boldsymbol{x}$  erfüllt ist.

### 6.3.2.2 Schritt 2: Definitheit der Dämpfungsmatrix

Aus der oben ermittelten ersten Vorparametrierung der Entwurfsmatrix  $\boldsymbol{F}_d$  ergibt sich die Dissipationsmatrix

$$\boldsymbol{R}_d = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}_d + \boldsymbol{F}_d^T) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\nu_{12} - \nu_{21} & -\nu_{13} - \alpha_{11} \\ -\nu_{12} - \nu_{21} & -2\nu_{22} & -\nu_{23} - \alpha_{12} \\ -\nu_{13} - \alpha_{11} & -\nu_{23} - \alpha_{12} & -2\alpha_{13} \end{bmatrix}. \quad (6.92)$$

Um positive Semidefinitheit von  $\boldsymbol{R}_d$  sicherzustellen, sind (aufgrund der Null im ersten Hauptdiagonalelement) durch

$$\nu_{21} = -\nu_{12} \quad \text{und} \quad \alpha_{11} = -\nu_{13} \quad (6.93)$$

die verbleibenden Elemente der ersten Zeile bzw. Spalte Null zu setzen. Die offenen Parameter müssen den Ungleichungen

$$-\nu_{22} \geq 0, \quad -\alpha_{13} \geq 0 \quad \text{und} \quad 4\nu_{22}\alpha_{13} - (\nu_{23} + \alpha_{12})^2 \geq 0 \quad (6.94)$$

genügen, wobei wenigstens eines der Hauptdiagonalelemente echt größer Null sein muss. Zur weiteren Vereinfachung wird

$$\nu_{23} = -\alpha_{12} \quad (6.95)$$

gesetzt, so dass sich die Dissipationsmatrix in Diagonalform

$$\boldsymbol{R}_d = \text{diag}\{0, -\nu_{22}, -\alpha_{13}\} \quad (6.96)$$

mit den freien Parametern  $\nu_{22}$  und  $\alpha_{13}$  ergibt.

### 6.3.2.3 Schritt 3: Parametrische Darstellung der Energiefunktion

Die Lösung der Restriktionsgleichung  $\mathbf{F}_\nu \nabla H_d(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_\nu(\mathbf{x})$ , deren Existenz durch die Einhaltung der Lösbarkeitsbedingung gesichert ist, lässt sich mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems ermitteln. Eine partikuläre Lösung ist

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_2, x_3) = & \frac{1}{2mk_C \nu_{12}^2} \left( \frac{\nu_{13} \nu_{22}}{\nu_{12}} - \nu_{23} \right) x_1^2 + \\ & + \frac{1}{mk_C \nu_{12}} \left( \frac{\nu_{13}}{\nu_{12}} x_2 - x_3 \right) x_1 + \frac{1}{2\nu_{12}} x_2^2 + \\ & + \frac{EV_1}{\nu_{12} m} (\ln V_1 - 1) + \frac{EV_2}{\nu_{12} m} (\ln V_2 - 1), \end{aligned} \quad (6.97)$$

während sich als Lösung der homogenen partiellen Differentialgleichung  $\mathbf{F}_\nu \nabla H_d(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  eine beliebige Funktion  $\Phi(\zeta)$  in der charakteristischen Koordinate

$$\zeta = \frac{1}{\nu_{12}} \left( \nu_{23} - \frac{\nu_{22} \nu_{13}}{\nu_{12}} \right) x_1 - \frac{\nu_{13}}{\nu_{12}} x_2 + x_3 \quad (6.98)$$

ergibt, wobei  $\nu_{13}$  der Festlegung in (6.91) genügt. Die Umrechnung zwischen  $\zeta$  und dem Zustand  $z_\alpha = \mathbf{e}_3^T \mathbf{F}_d^{-T} \mathbf{x}$  in Normalkoordinaten erfolgt gemäß

$$\zeta = \left( \alpha_{13} + \frac{\nu_{13}^2 \nu_{22}}{\nu_{12}^2} \right) z_\alpha =: cz_\alpha. \quad (6.99)$$

Für die homogene Lösung, mit der die Energie des geregelten Systems zu formen ist, wird eine einfache quadratische Funktion

$$\Phi(\zeta) = \mu_1 \zeta + \frac{1}{2} \mu_2 \zeta^2 \quad (6.100)$$

angesetzt. Der Parameter  $\mu_2$  ist in erster Linie für die Krümmung der resultierenden Energiefunktion in der gewünschten Ruhelage verantwortlich, wogegen die Wahl von  $\mu_1$  für das Einhalten der Bedingung  $\nabla H_d(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}^*} = \mathbf{0}$  sorgt. Im Folgenden gelte  $A_1 = A_2 = A$ .

### 6.3.2.4 Schritt 4: Einstellen der Ruhelage

Damit der Gradient der Energiefunktion in  $\mathbf{x}^*$  verschwindet, wird die Bedingung

$$\left. \frac{\partial H_d(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}^*} = 0 \quad (6.101)$$

nach  $\mu_1$  aufgelöst. Man erhält den Ausdruck

$$\mu_1 = \frac{x_1^*}{\nu_{12}^2} \left( \frac{1}{k_C m} - \mu_2 (\nu_{12} \nu_{23} - \nu_{13} \nu_{22}) \right) + \mu_2 A E k_C^2 m \nu_{12}^2 (\ln V_2^* - \ln V_1^*) \quad (6.102)$$

mit  $V_i^*$ ,  $i = 1, 2$  den Kammervolumina an der gewünschten Ruhelage. Es lässt sich leicht überprüfen, dass mit dieser Wahl für den kompletten Gradienten  $\nabla H(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}^*} = \mathbf{0}$  gilt.

### 6.3.2.5 Schritt 5: Zuweisung lokal linearer Dynamik

Die Jacobimatrix von  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  an der gewünschten, durch  $x_1^*$  definierten Ruhelage

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ 0 \\ k_C E A (\ln V_1^* - \ln V_2^*) \end{bmatrix} \quad (6.103)$$

ist

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & -\frac{d}{m} & \frac{1}{k_C m} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad a_{21} = -\frac{EA^2}{m} \left( \frac{1}{V_1^*} + \frac{1}{V_2^*} \right). \quad (6.104)$$

Unter einer linearen Zustandsrückführung  $\Delta v = -\mathbf{r}^T \Delta \mathbf{x}$  sind der unaktuierte und der aktuierte Teil der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_d$  des linearisierten geregelten Systems gegeben durch

$$\mathbf{A}_\nu = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_\nu(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_\alpha = [a_{\alpha,11} \quad a_{\alpha,12} \quad a_{\alpha,13}] = [-r_1 \quad -r_2 \quad -r_3]. \quad (6.105)$$

Bei gegebener Steuerbarkeit von  $(\mathbf{A}, \mathbf{g})$  lassen sich durch die Festlegung der Koeffizienten  $r_i$  von  $\mathbf{r}^T$  beliebige Eigenwerte  $\lambda_{d,i}$ ,  $i = 1, 2, 3$  von  $\mathbf{A}_d$  realisieren. Diese Regelungseigenwerte sind die Entwurfsgößen für die Zuweisung lokal linearer Dynamik. Die Koeffizienten  $r_i$  werden aus der Lösung des linearen Eigenwertvorgabe-Problems ermittelt.

Zur Zuweisung lokal linearer Dynamik sind die Matrixgleichungen aus Tabelle 4.3 nach den Entwurfparametern aufzulösen. Da es sich um ein Eingrößensystem handelt, entfällt Gleichung (4.45). Gleichung (4.47) lautet

$$\mathbf{F}_\alpha \mathbf{A}_\nu^T = \mathbf{A}_\alpha \mathbf{F}_\nu^T \quad (6.106)$$

und ausgeschrieben

$$\begin{aligned} -r_2\nu_{12} - r_3\nu_{13} &= \alpha_{12}, \\ -r_1\nu_{21} - r_2\nu_{22} - r_3\nu_{23} &= a_{21}\alpha_{11} - \frac{d}{m}\alpha_{12} + \frac{1}{mk_C}\alpha_{13}. \end{aligned} \quad (6.107)$$

Unter Berücksichtigung von (6.91) erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} r_2 + r_3k_cd & -1 \\ r_1 + a_{21}k_cd & -r_3 - \frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{12} \\ \nu_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_3k_cm & 0 \\ -a_{21}k_cm + r_2 & \frac{1}{k_cm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{22} \\ \alpha_{13} \end{bmatrix}, \quad (6.108)$$

aus dem sich die Parameter  $\nu_{12}$  und  $\nu_{23}$  eindeutig in Abhängigkeit der freien Parametern der Dämpfungsmatrix  $\nu_{22}$  und  $\alpha_{13}$  bestimmen lassen.

Mithilfe der dritten Gleichung (4.40) wird die zur Zuweisung lokal linearer Dynamik erforderliche zweite Ableitung der homogenen Lösung  $\Phi$  nach  $z_\alpha$

$$\phi_{11} = - \left. \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{z})}{\partial z_\alpha^2} \right|_{z^*} - r_1\alpha_{11} - r_2\alpha_{12} - r_3\alpha_{13} \quad (6.109)$$

ermittelt und mit dem entsprechenden Ausdruck aus dem Ansatz der homogenen Lösung (6.100) verglichen. Damit ergibt sich als letzte Gleichung

$$\mu_2 = \frac{\partial^2 \Phi(\zeta)}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi(z_\alpha)}{\partial z_\alpha^2} = \frac{\phi_{11}}{c^2}. \quad (6.110)$$

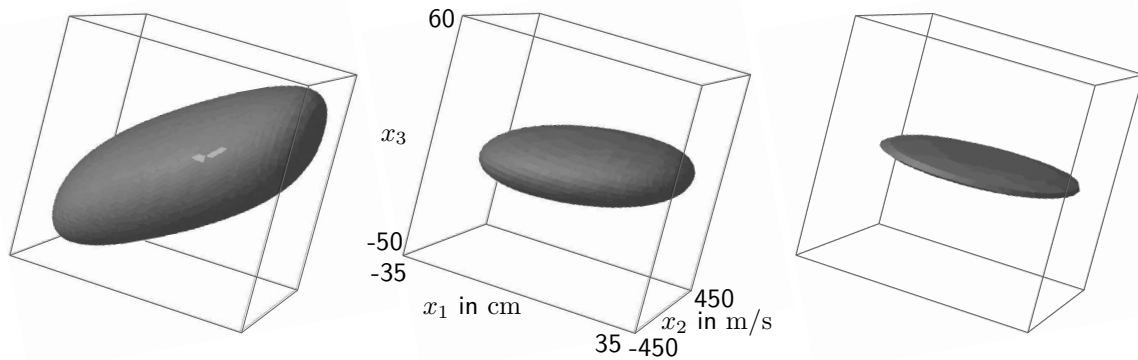
### 6.3.2.6 Schritt 6: Festlegung der noch offenen Parameter

Es verbleiben 5 freie Entwurfsparameter: die drei Regelungseigenwerte für das linearisierte System sowie  $\alpha_{13} < 0$  und  $\nu_{22} < 0$ . Das linearisierte unregelte System besitzt einen Eigenwert in Null sowie ein komplexes Eigenwertpaar:

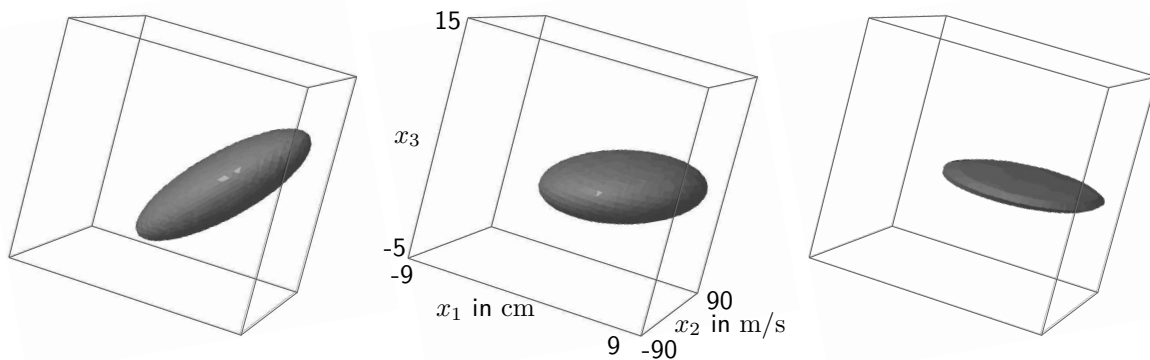
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \sigma \pm j\omega. \quad (6.111)$$

Für die Linearisierung des geregelten Systems werden ebenso ein reeller Eigenwert und ein komplexes Eigenwertpaar mit identischem Realteil  $\sigma_d$  vorgegeben. Es stellt sich als vorteilhaft hinsichtlich der Gestalt der resultierenden Energie  $H_d$  heraus, den Imaginärteil  $\pm j\omega$  gegenüber dem unregulierten System unverändert zu lassen:

$$\lambda_{d,1} = \sigma_d, \quad \lambda_{d,2,3} = \sigma_d \pm j\omega. \quad (6.112)$$



**Abbildung 6.10:** Größte geschlossene Niveauflächen von  $H_d$  im Definitionsbereich der Energiefunktion.  $\alpha_{13} = -1$ ,  $\nu_{22} \in \{-1, -1000, -10000\}$  (von links nach rechts).



**Abbildung 6.11:** Größte geschlossene Niveauflächen von  $H_d$  unter Berücksichtigung des maximalen Kolbenhubs.  $\alpha_{13} = -1$ ,  $\nu_{22} \in \{-1, -1000, -10000\}$  (von links nach rechts).

Eine Variation der Parameter  $\alpha_{13}$  und  $\nu_{22}$  der Entwurfsmatrix lässt die zugewiesene lokal lineare Dynamik unverändert, wirkt jedoch auf das dynamische Verhalten im Großen. Dies wird insbesondere anhand der logarithmischen Terme in der Energiefunktion (6.97) deutlich, die mit  $\frac{1}{\nu_{12}}$  gewichtet werden, wobei  $\nu_{12}$  über die Lösung des Gleichungssystems (6.108) von den offenen Parametern abhängt.

Abbildung 6.10 zeigt die größten geschlossenen Niveauflächen der Energiefunktion, die vollständig innerhalb des Definitionsbereichs der logarithmischen Terme von (6.97) liegen, für die Ruhelage  $x_1^* = 3$  cm bei Vorgabe von  $\sigma_d = -20$  und unter einer Variation von  $\nu_{22}$ . Die vorhandenen Totvolumina der Zylinderkammern sind hierbei jedoch nicht berücksichtigt. Die tatsächlich realisierbaren Kolbenhübe liegen innerhalb der Grenzen  $x_{1,\max} = \pm 9$  cm und Abbildung 6.11 zeigt die entsprechenden Niveauflächen unter Beachtung dieser Beschränkung.

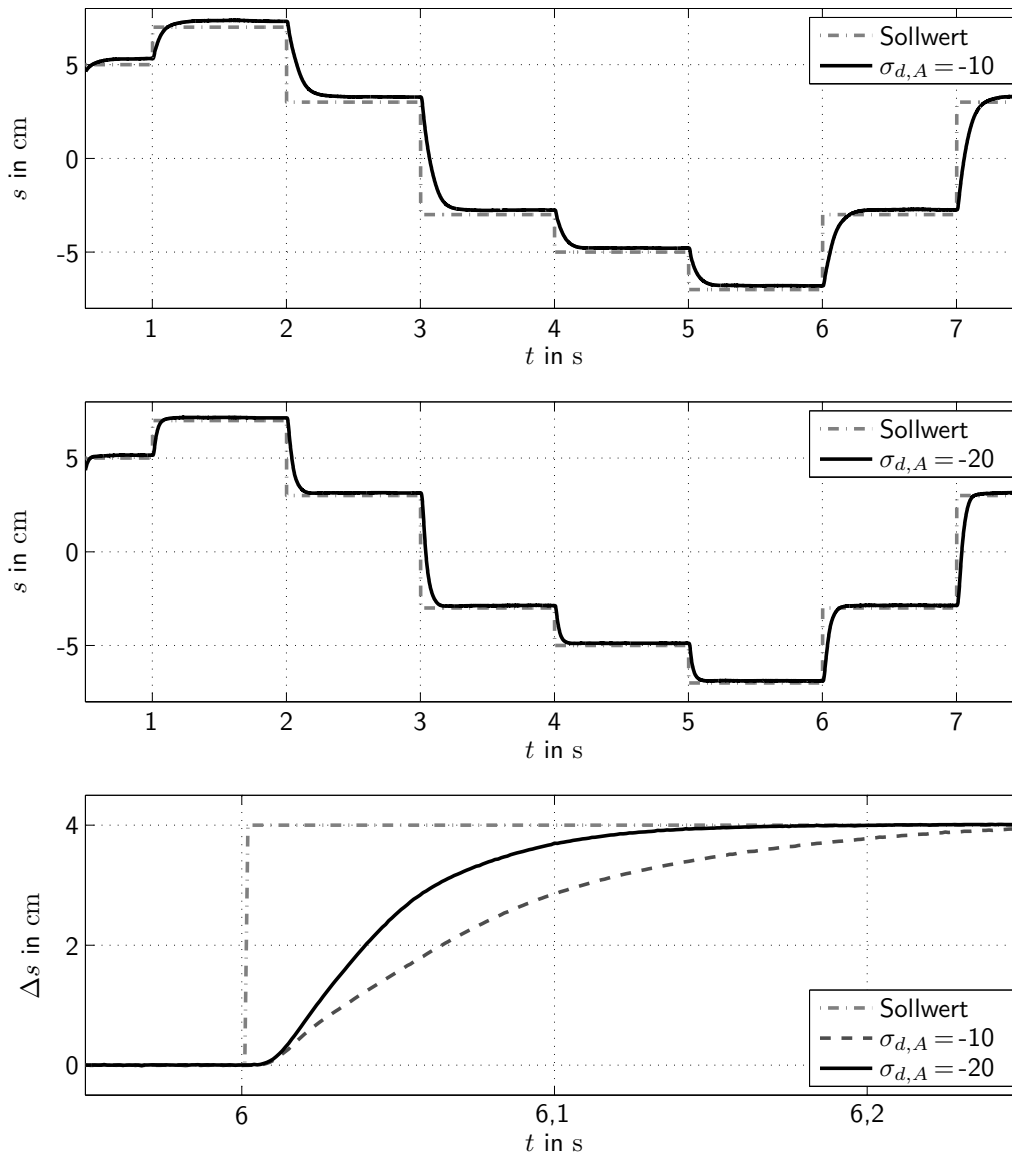
Ohne eine weitere Optimierung hinsichtlich des abgeschätzten Einzugsgebiets der Ruhelage vorzunehmen, werden die Parameter  $\alpha_{13} = \nu_{22} = -1$  festgelegt. Ein weiterer Freiheitsgrad, der nicht genutzt wurde, ist die Form der homogenen Lösung  $\Phi(\zeta)$ . Für das vorliegende Beispiel reicht jedoch der linear-quadratische Ansatz in (6.100) aus, um eine wohlgeformte Gesamtenergie  $H_d$  zu erreichen.

Mit der durch Zuweisung lokal linearer Dynamik ermittelten Parametrierung des IDA-PBC-Ansatzes ist Stabilität der Ruhelage im durch die Niveauflächen von  $H_d$  abgeschätzten Einzugsgebiet gegeben. Aufgrund der Semidefinitheit der Dämpfungsmatrix ist, wie bei der Schwebenden Kugel, die asymptotische Stabilität durch die Anwendung des Satzes von Barbashin nachzuweisen.

### 6.3.3 Experiment

Zur Implementierung am Prüfstand werden IDA-PBC-Regler für Ruhelagen im Intervall  $x_1^* \in [-7 \text{ cm}, 7 \text{ cm}]$  entworfen. Mit  $\sigma_{d,A} = -10$  und  $\sigma_{d,B} = -20$  wird unterschiedliche Dynamik für die jeweilige Festwertregelung vorgegeben.

In Abb. 6.12 sind die Messungen des Kolbenhubs für eine Reihe von Arbeitspunktwechseln dargestellt. In den ersten beiden Diagrammen ist der qualitative Unterschied in der Dynamik der Transienten deutlich zu erkennen. Wie zu erwarten, fällt auch der stationäre Fehler aufgrund der Modellungenauigkeit für  $\sigma_{d,B}$  wegen der höheren Verstärkungen in der Zustandsrückführung geringer aus. Aus dem letzten Diagramm lassen sich ferner Ersatzzeitkonstanten für die Transienten abschätzen, die im erwarteten Bereich von (grob)  $T_{A/B} \approx \frac{1}{\sigma_{d,A/B}}$  liegen und damit das erwartete Verhältnis von etwa 2 : 1 aufweisen.



**Abbildung 6.12:** Gemessene Arbeitspunktwechsel für unterschiedliche Realteile der Eigenwerte des linearen Zielsystems (oben und Mitte). Vergleich einer Sprungantwort für beide Parametrierungen (unten, Verschiebung in der Ordinate, so dass jeweils  $\Delta s(6\text{ s}) = 0$  cm).



## 6.4 Modell einer kippenden Laufmaschine

Zur Illustration der Parametrierung von IDA-PBC für unteraktuierte mechanische Systeme dient das stark vereinfachte (Labor-)Modell einer ins Kippen geratenen Laufmaschine. Der in Abb. 6.13 skizzierte Aufbau besteht aus zwei drehbar gelagerten Gliedern. Während das untere, den „Fuß“ des Laufroboters darstellende Glied, frei drehbar gelagert ist (Drehpunkt  $D_2$ ), repräsentiert das obere Glied vereinfachend den restlichen „Körper“ und wird in der Achse  $D_1$  von einem Getriebemotor angetrieben. Die Regelungsaufgabe besteht darin, durch geeignete Aktuation dieses Antriebs und damit des oberen Glieds, den Aufbau in einer (instabilen) Ruhelage zu stabilisieren, wobei Glied 1 gegenüber dem Boden eine senkrechte Lage einnehmen soll.

Die Regelungsaufgabe ist angelehnt an die Situation, in der ein Laufroboter aufgrund einer Bodenunebenheit, Kante oder äußeren Störung den Flächenkontakt der Füße verloren hat und ins Kippen geraten ist. Damit stellt er vorübergehend ein unteraktuiertes System dar. Die Roboterregelung versucht zunächst seine Lage zu stabilisieren, bevor – so schnell wie möglich – die Füße vollen Flächenkontakt zurückerlangen und wieder vollständige Aktuiertheit gegeben ist.

### 6.4.1 Modellbildung

Aufgrund seiner komplizierteren Geometrie kann das dargestellte System als eine Verallgemeinerung des Acrobot-Modells (siehe z. B. [39]) betrachtet werden. In Tabelle 6.1 sind alle für die Modellierung verwendeten Symbole erläutert, Tabelle C.3 im Anhang enthält die physikalischen Parameter.

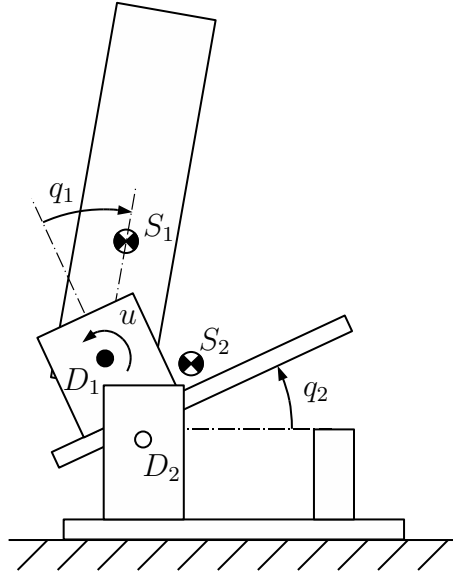
Ziel der Modellbildung ist eine Darstellung der Bewegungsgleichungen in der Hamilton'schen Form

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} u, \quad (6.113)$$

mit der Gesamtenergie oder Hamiltonfunktion

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = V(\mathbf{q}) + T(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = V(\mathbf{q}) + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p}, \quad (6.114)$$

die sich aus potentieller und kinetischer Energie zusammensetzt. Zur Ermittlung der kinetischen Energie werden die rotatorischen und translatorischen Bewegungsenergien aller drei Körper (Glied 1 und 2, Antrieb) addiert. Die ohne Superskript angegebenen Massenträgheitsmomente sind *um den Drehpunkt* zu verstehen. Ein hochgestelltes „S“ deutet



**Abbildung 6.13:** Skizze des Laborversuchs „Kippende Laufmaschine“.

den Bezug zum jeweiligen Schwerpunkt an. Es gilt

$$T = T_1 + T_A + T_2 \quad (6.115)$$

mit

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} J_2 \dot{q}_2^2 \\ T_A &= \frac{1}{2} J_A (\dot{q}_2 + \ddot{u} \dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2} m_A d^2 \dot{q}_2^2 \\ T_1 &= \frac{1}{2} J_1^S (\dot{q}_2 + \dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_{S_1}^2 + \dot{y}_{S_1}^2). \end{aligned} \quad (6.116)$$

Für  $T_1$  sind die Schwerpunktkoordinaten von Glied 1 *im Inertialsystem*

$$(x_{S_1}, y_{S_1}) = (d \cos q_2 + h_1 \cos(q_1 + q_2), -d \sin q_2 - h_1 \sin(q_1 + q_2)) \quad (6.117)$$

nach der Zeit abzuleiten. Das Trägheitsmoment  $J_1^S$  des oberen Gliedes lässt sich mithilfe des Steiner'schen Satzes durch  $J_1 = J_1^S + m_1 h_1^2$  auf den Drehpunkt  $D_1$  beziehen. Die kinetische Energie (welche in der nichtrelativistischen Mechanik identisch mit der Koenergie ist) ergibt sich nach Einsetzen der Schwerpunktgeschwindigkeiten in der Form

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(q_1) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1}(q_1) \mathbf{p}. \quad (6.118)$$

Symbole	Erläuterung
$(s_2, h_2)$	Schwerpunktkoordinaten für Glied 2 im bewegten Koordinatensystem
$(0, h_1)$	Schwerpunktkoordinaten für Glied 1 im bewegten Koordinatensystem
$(0, d)$	Koordinaten der Drehachse in Koordinatensystem 2
$m_{1,2}, m_A$	Massen der Glieder 1 und 2 und des Antriebs
$J_{1,2}, J_A$	Massenträgheiten der Glieder und des Antriebs <i>um die Drehpunkte</i>
$q_{1,2}$	Gelenkwinkel ( $q_1$ abtriebsseitig)
$\ddot{u}$	Getriebeübersetzung $q_2/q_1 = \ddot{u}$

**Tabelle 6.1:** Erklärung der Symbole für die Modellierung.

Die mechanischen Impulse sind durch  $\mathbf{p} = \mathbf{M}(q_1)\dot{\mathbf{q}}$  definiert mit der Trägheitsmatrix

$$\mathbf{M}(q_1) = \begin{bmatrix} c_{12} & c_{11} + c_2 \cos(q_1) \\ c_{11} + c_2 \cos(q_1) & c_{10} + 2c_2 \cos(q_1) + c_3 \end{bmatrix} \quad (6.119)$$

und den darin enthaltenen Abkürzungen

$$\begin{aligned} c_{1i} &= J_1 + J_A \cdot \ddot{u}^i, & i &= 0, 1, 2 \\ c_2 &= m_1 d h_1, \\ c_3 &= J_2 + (m_1 + m_A) d^2. \end{aligned} \quad (6.120)$$

Die potentielle Energie besteht aus den Lageenergien der drei Baugruppen

$$\begin{aligned} V_2 &= m_2 g (s_2 \sin q_2 + h_2 \cos q_2), \\ V_A &= m_A g d \cos q_2, \\ V_1 &= m_1 g (d \cos q_2 + h_1 \cos(q_1 + q_2)) \end{aligned} \quad (6.121)$$

und lässt sich zusammenfassen durch

$$V(\mathbf{q}) = c_4 \cos(q_1 + q_2) + c_5 \cos q_2 + c_6 \sin q_2 \quad (6.122)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} c_4 &= m_1 h_1 g, \\ c_5 &= ((m_1 + m_A) d + m_2 h_2) g, \\ c_6 &= m_2 s_2 g. \end{aligned} \quad (6.123)$$

Mit dem Vektor  $\mathbf{g} = \mathbf{e}_1$  lässt sich schließlich die Hamilton'sche Zustandsdarstellung nach (6.113) angeben, wobei  $u$  das auf die Sekundärseite des Getriebes umgerechnete Antriebsmoment ist.

### 6.4.2 IDA-PBC

Wie in Kapitel 5 beschrieben, wird für das System ein IDA-PBC-Regelgesetz zur Stabilisierung der instabilen Ruhelage

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_2^* \\ q_2^* \end{bmatrix} \quad (6.124)$$

entworfen. Durch  $q_1^* = -q_2^*$  ist der Forderung entsprochen, dass Glied 1 senkrecht zum Boden ausgerichtet ist. Die Annahme 5.1 aus Abschnitt 5.2 nach einfacher Unteraktuiertheit gilt ebenso wie Annahme 5.2, wonach die Trägheitsmatrix  $\mathbf{M}(q_1)$  nur von der aktuierten Koordinate abhängt. Durch den Ansatz einer konstanten (virtuellen) Trägheitsmatrix

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} m_{d,11} & 1 \\ 1 & m_{d,22} \end{bmatrix} \quad (6.125)$$

(zur Festlegung  $m_{d,12} = 1$  siehe Abschnitt 5.3.1) wird Annahme 5.3 entsprochen und Annahme 5.4 ist für die (virtuelle) Dämpfungsmatrix

$$\mathbf{R}_d = \text{diag}\{r_1, 0\} \quad (6.126)$$

erfüllt. Die von einem Computer-Algebra-System zu lösende partielle Differentialgleichung ist in (5.47) dargestellt, wobei

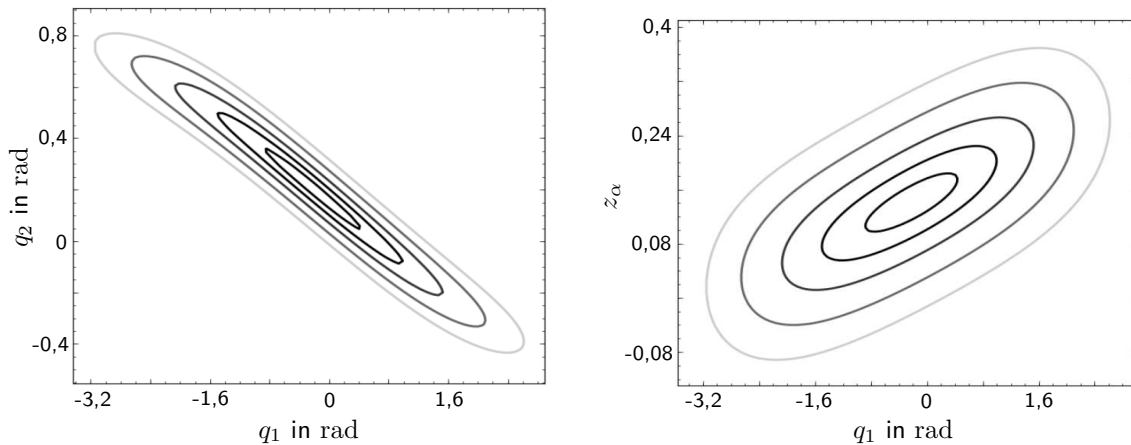
$$b_0(q_1, q_2) = \frac{\partial}{\partial q_2} V(q_1, q_2) \quad (6.127)$$

die partielle Ableitung der physikalischen potentiellen Energie nach der unaktuierten Koordinate ist. Als homogene Lösung wird die linear-quadratische Funktion

$$\Phi(z_\alpha) = \mu_1 z_\alpha + \frac{1}{2} \mu_2^2 z_\alpha^2 \quad (6.128)$$

angesetzt, wobei der Parameter  $\mu_1$  für

$$\nabla V_d(\mathbf{q}) \Big|_{\mathbf{q}^*} = \mathbf{0} \quad (6.129)$$



**Abbildung 6.14:** Geschlossene Höhenlinien der potentiellen Energiefunktion  $V_d$  in unterschiedlichen Koordinaten.

sorgt und  $\mu_2$  die für die lokal lineare Dynamik geforderte Krümmung der Energie in der Ruhelage realisiert.

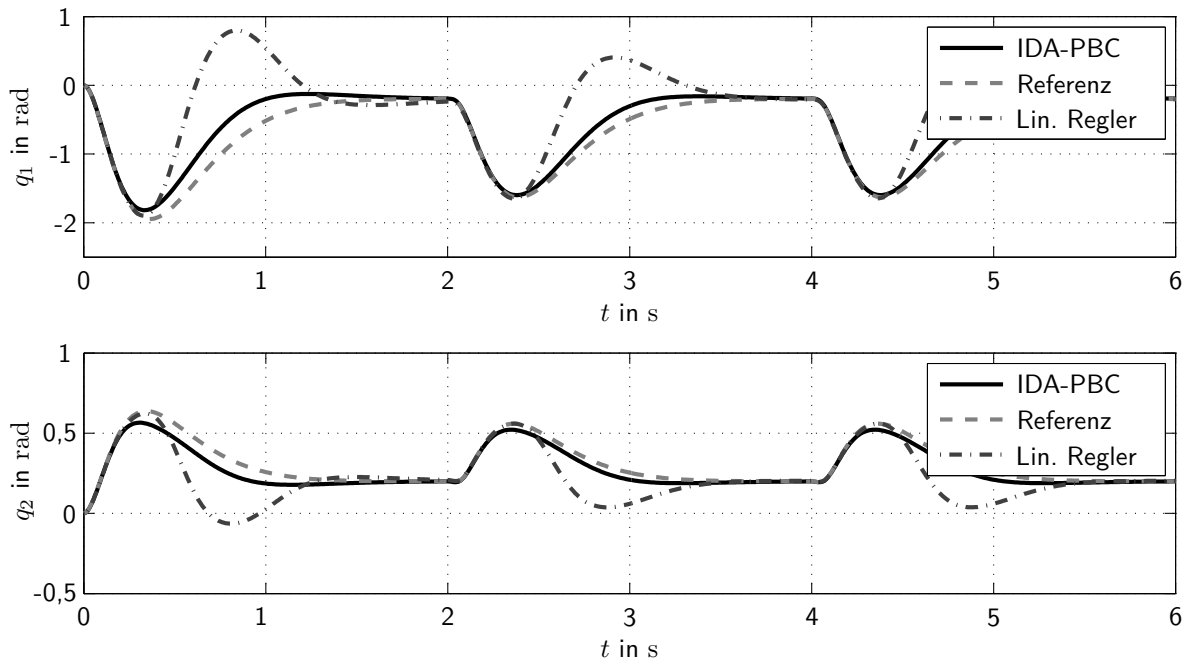
Die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_d$  wird mit rein reellen, doppelten Eigenwerten bei  $-6$  und  $-7$  vorgegeben. Die in den IDA-PBC-Ansatz einzusetzenden Parameter  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $m_{d,11}$ ,  $m_{d,22}$  und  $r_1$  ergeben sich aus der Auswertung der Gleichungen in Tabelle 5.2. In Abb. 6.14 sind die Höhenlinien der resultierenden potentiellen Energiefunktion dargestellt, links in den Gelenkkoordinaten  $(q_1, q_2)$ , rechts in den Koordinaten  $(q_1, z_\alpha)$ .

Wie bei den anderen Beispielen lässt sich zeigen, dass  $\mathbf{q}^*$  die einzige Lösung der Bewegungsgleichungen des geregelten Systems ist, die in der Menge  $\{\mathbf{q} \mid \dot{H}_d(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = 0\}$  bleiben kann, wodurch asymptotische Stabilität von  $\mathbf{q}^*$  im durch  $V_d(\mathbf{q})$  abgeschätzten Einzugsgebiet nachgewiesen wird.

An dieser Stelle angemerkt sei eine Möglichkeit, die Entwurfsfreiheit in der Eigenwertlage in Verbindung mit der Formung der Energie zu nutzen. Vorgegeben werden lediglich die Realteile der Eigenwerte als Maß für die Abklingdauer des Regelvorgangs, während über die Imaginärteile die Größe der durch die Höhenlinien der Energie eingeschlossenen Fläche maximiert wird [49].

### 6.4.3 Simulation

Abbildung 6.15 zeigt die Ausgleichsvorgänge in den Gelenkkoordinaten für wiederkehrend aufgebrauchte, rechteckförmige Drehmoment-Störungen auf das unaktuierte Gelenk. Dargestellt sind die Gelenkwinkel unter dem durch Zuweisung lokal linearer Dynamik parametrisierten nichtlinearen IDA-PBC-Regelgesetz, dem entsprechenden linearen Zustands-



**Abbildung 6.15:** Simulierte Gelenkwinkel unter IDA-PBC und dem linearen Zustandsregler sowie deren Verlauf im linearen Vergleichssystem. Störmoment  $-0,1\text{ Nm}$  über  $60\text{ ms}$  auf  $q_2$ .

regler und die simulierten Gelenkwinkel des linearen Referenzsystems. Die Ähnlichkeit der Zeitverläufe ist offensichtlich, wobei die Gelenkwinkel unter dem linearen Regelgesetz im Vergleich zu IDA-PBC deutlich vom Referenzverlauf abweichen.

Im Gegensatz zu den bisherigen Beispielen ist das mit identischen Eigenwerten parametrisierte lineare Regelgesetz deutlich schlechter zur Stabilisierung der Ruhelage  $\mathbf{q}^*$  des unteraktuierten mechanischen Systems geeignet. Die Robustheit der Regelung gegenüber Stößen, welche die Gelenkwinkel auslenken und damit als Anfangswertstörungen interpretiert werden können, ist wesentlich geringer.

Zum Vorteil der Abschätzung des Einzugsgebiets der Ruhelage kommt bei diesem letzten Beispiel somit der Vorteil einer *robusten Stabilisierbarkeit* hinzu, welche erst durch die Anwendung der *nichtlinearen* Zustandsrückführung durch IDA-PBC gegeben ist. Die Zuweisung lokal linearer Dynamik setzt darauf auf und versieht das geregelte System in transparenter Weise mit gewünschtem dynamischen Verhalten.

## 6.5 Diskussion

Die in diesem Kapitel vorgestellten Beispiele sind als *Nachweis der Anwendbarkeit* der Zuweisung lokal linearer Dynamik beim IDA-PBC-Entwurf zu verstehen. Die Herleitung der nichtlinearen Regelgesetze und deren Parametrierung erfolgt in den Beispielen 6.1-6.3 nach dem in Tabelle 4.5 dargestellten Schema in systematischer und transparenter Weise. Für das unteraktuierte mechanische System in Beispiel 6.4 werden die Bestimmungsgleichungen nach Tabelle 5.2 ausgewertet.

**Dynamikvorgabe.** Als Entwurfsgrößen dienen bei der Zuweisung lokal linearer Dynamik die Elemente des aktuierten Teils der Wunsch-Dynamikmatrix, die im Eingrößenfall eindeutig durch die Regelungseigenwerte des linearisierten Systems bestimmt sind. In allen Experimenten und Simulationen verhält sich das geregelte System als Antwort auf Anfangswertfehler oder Störungen in sehr guter Übereinstimmung zum linearen Referenzsystem.

**Stabilitätsnachweis.** Die Zuweisung lokal linearer Dynamik enthält nach wie vor den Entwurfsschritt des *Energy Shaping*, der im Vergleich zum konventionellen IDA-PBC erst am Ende des Entwurfs mit den dann noch offenen Parametern stattfindet. Damit wird der größte Vorteil von IDA-PBC, nämlich die Konstruktion einer Energiefunktion, mit der Stabilität in einem wohldefinierten Einzugsgebiet nachgewiesen wird, in vollem Umfang genutzt.

**Vergleich.** Da für die Parametrierung von IDA-PBC ein lineares Referenzsystem verwendet wird, welches aus einem linearen Zustandsregler-Entwurfsproblem hervorgeht, sind die resultierenden Regelgesetze mit den entsprechenden linearen Zustandsreglern zu vergleichen. In der Tat weist die lineare Regelung in den Beispielen 6.1-6.3 (für 6.3 ist der Vergleich nicht dargestellt) fast identisches Verhalten auf. Der Grund ist, dass für die Schwebende Kugel und den Hydraulikaktuator die Linearisierungen am Arbeitspunkt bzw. entlang der Solltrajektorie das nichtlineare Systemverhalten hinreichend gut approximieren (vgl. die Bemerkungen über die Anwendbarkeit linearer Regelgesetze in der Einleitung). Damit ergibt sich aus der Anwendung des – deutlich aufwendigeren – IDA-PBC-Entwurfs kein Vorteil hinsichtlich der Stabilisierbarkeit für diese beiden Systeme. Der Vorteil liegt in der Möglichkeit, den Einzugsbereich der Ruhelage darzustellen und ggf. anzupassen. So lässt sich für die Arbeitspunktwechsel in 6.1 nachweisen, dass sich die beiden Ruhelagen im Einzugsgebiet der jeweils anderen befinden (vgl. Abb. 6.2) und auch im zeitvarianten Fall der Folgeregelung ist die Ermittlung einer zeitinvarianten Schranke des Einzugsgebiets möglich (Abb. 6.5).

Weniger „gutmütig“ als die ersten beiden Beispiele verhält sich das unteraktuierte mechanische System in Abschnitt 6.4. Hier stabilisiert der lineare Zustandsregler zwar die gewünschte Ruhelage im ungestörten Fall, jedoch reagiert das System deutlich empfindlicher auf Störungen. Dies zeigt sich neben der stärkeren Abweichung vom vorgegebenen linearen Referenzverhalten darin, dass unter dem linearen Regler bereits weit schwächere Drehmomentstöße das System destabilisieren als unter IDA-PBC. In diesem Beispiel ist der nichtlineare Entwurf notwendig für die ausreichend robuste Stabilisierung des Systems und die Vorteile von IDA-PBC und der Zuweisung lokal linearer Dynamik kommen voll zum Tragen.

**Fazit.** Die Beispiele verdeutlichen, dass mit der Zuweisung lokal linearer Dynamik die transparente Dynamikvorgabe für IDA-PBC praktikabel ist und auf die gewünschten Ergebnisse führt. Stets ist der Vorteil gegenüber linearen Zustandsreglern die quantitative Abschätzung des Einzugsgebiets der Ruhelage, bei „gravierend nichtlinearem“ Systemverhalten wie beim Modell der kippenden Laufmaschine kommt der entscheidende Vorteil der robusteren Stabilisierbarkeit hinzu.



# Kapitel 7

## Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Verfahren zur Parametrierung des nichtlinearen, passivitätsbasierten Zustandsreglerentwurfs mittels IDA-PBC vorgestellt. Durch die Lösung eines einfachen Systems linearer Gleichungen werden Entwurfsparameter für IDA-PBC bestimmt, so dass die Linearisierung des geregelten Systems eine vorgegebene Dynamik aufweist.

Die dem Vorgehen zugrunde liegende Idee, die Linearisierung zur transparenten lokalen Dynamikvorgabe zu nutzen, ist selbstverständlich ebenso zur Parametrierung anderer nichtlinearer Entwurfsverfahren anwendbar. Die Methode IDA-PBC hebt sich jedoch insbesondere durch ihren *allgemeinen* Ansatz ab: Mit der Bestimmungsgleichung und der daraus abgeleiteten Restriktionsgleichung ist eine implizite Formulierung *aller* nichtlinearen Zustandsregelungen gegeben, die auf ein Zielsystem in der – gerade für den Stabilitätsnachweis günstigen – Port-Hamilton’schen Form führen. Die Kunst besteht in der *Einschränkung* dieser Allgemeinheit mit dem Ziel, dem geregelten System gewünschte Eigenschaften aufzuprägen, so etwa in Bezug auf die Dynamik, aber auch die Robustheit der Stabilität, welche sich über das Einzugsgebiet der Ruhelage abschätzen lässt. Während Letzteres (*Energy Shaping*) der zentrale Bestandteil vieler Arbeiten zu IDA-PBC ist, bleibt die *systematische* Dynamikvorgabe bisher unberücksichtigt.

Hier stellt die Zuweisung lokal linearer Dynamik eine Lösung dar, die zusätzlich das Vorgehen beim *Energy Shaping* erleichtert, indem – ohne explizite Prüfung derselben – die positive Definitheit der Energiefunktion gewährleistet wird.

Die Zuweisung lokal linearer Dynamik als Zusatz zum IDA-PBC-Entwurf bietet sich für die Regelung weiterer Systemklassen an, in denen zukünftige Herausforderungen liegen:

*Unteraktuierte mechanische Systeme.* Die Zuweisung lokal linearer Dynamik in Verbindung mit weniger restriktiven Voraussetzungen und für eine größere Anzahl von Freiheits-

graden ist eine ungelöste Frage.

*Strukturumschaltende Systeme.* Im Kontext der Dissipativitätstheorie für schaltende Systeme [66] kann der IDA-PBC-Ansatz zu einem strukturierten Regelungsentwurf beitragen. Zur Parametrierung der unterschiedlichen Port-Hamilton'schen Zielsysteme, zwischen denen Umschaltung stattfindet, bietet sich die Zuweisung lokal linearer Dynamik an.

*Verteilt-parametrische Systeme.* Zu überprüfen bleibt, inwieweit die Idee der Zuweisung lokal linearer Dynamik auf die Regelung verteilt-parametrischer Systeme [38, 34] mit IDA-PBC übertragen werden kann.

# Anhang

## A Zur Kommutativität zweier Vektorfelder

Die Lösungen der Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}^a = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}), & 0 \leq t < \Delta t \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}), & \Delta t \leq t \leq 2\Delta t \end{cases} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{x}}^b = \begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{x}), & 0 \leq t < \Delta t \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}), & \Delta t \leq t \leq 2\Delta t \end{cases}$$

werden für  $\Delta t \rightarrow 0$  durch ihre Taylor-Reihenentwicklungen bis zum quadratischen Term approximiert. Für  $\mathbf{x}^a$  ergeben sich

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^a(\Delta t) &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad \text{und} \\ \mathbf{x}^a(2\Delta t) &= \mathbf{x}^a(\Delta t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}^a(\Delta t)) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^a(\Delta t)} \mathbf{g}(\mathbf{x}^a(\Delta t)) \cdot \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3). \end{aligned}$$

Mit den Näherungen der von  $\mathbf{x}^a(\Delta t)$  abhängigen Terme

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}^a(\Delta t)) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^a(\Delta t)} \mathbf{g}(\mathbf{x}^a(\Delta t)) &= \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) + \mathcal{O}(\Delta t) \end{aligned}$$

erhält man (alle Terme jeweils bei  $\mathbf{x}_0$  ausgewertet)

$$\mathbf{x}^a(2\Delta t) = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \Delta t + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} \right) \cdot \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

und analog

$$\mathbf{x}^b(2\Delta t) = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{g} + \mathbf{f}) \cdot \Delta t + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} \right) \cdot \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3).$$

Die Differenz der beiden letzten Ausdrücke ergibt schließlich (2.43).

## B Jacobimatrix eines Matrix-Vektor-Produkts

Gesucht ist die Jacobimatrix des Ausdrucks

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , der  $n \times n$ -Matrix  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ , bestehend aus den Zeilenvektoren  $\mathbf{a}_1^T(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{a}_n^T(\mathbf{x})$  und dem Spaltenvektor  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ . Zunächst wird nur das Skalarprodukt

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) b_i(\mathbf{x})$$

zweier Vektoren betrachtet. Die partielle Ableitung nach einem Element  $x_j$  von  $\mathbf{x}$  ist

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) \frac{\partial b_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} + b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial a_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \mathbf{a}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \mathbf{b}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})}{\partial x_j}.$$

Der Zeilenvektor aller partiellen Ableitungen ist damit

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x})) = \mathbf{a}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{b}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}.$$

Damit ergibt sich für die Jacobimatrix des Matrix-Vektor-Produkts

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial a_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial a_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial a_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial a_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}.$$

## C Physikalische Parameter der Beispielsysteme

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Masse des Schwebekörpers	$m$	$91,8 \cdot 10^{-3}$	kg
Induktivität Elektromagnet	$L_{\text{inf}}$	$62,8 \cdot 10^{-3}$	H
	$a$	$9,89 \cdot 10^{-5}$	Hm
	$b$	$4,97 \cdot 10^{-3}$	m
Widerstand Elektromagnet	$r_L$	2,09	$\Omega$
Strom-Messwiderstand	$r_i$	0,1	$\Omega$
Versorgungsspannung	$u_0$	12	V

**Tabelle C.1:** Parameter des Laborversuchs „Schwebende Kugel“.

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Kolben- und Lastmasse	$m$	67,3	kg
Effektive Kolbenfläche	$A_1 = A_2 = A$	$4,40 \cdot 10^{-2}$	m <sup>2</sup>
Kammervolumen	$V_{01} = V_{02} = V_0$	$1,58 \cdot 10^{-2}$	m <sup>3</sup>
Dämpfungskoeffizient	$d$	100	Ns/m
Ersatz-Kompressibilitätsmodul	$E$	$5,54 \cdot 10^8$	N/m <sup>2</sup>
Ventilkoeffizient	$k_v$	$1,26 \cdot 10^{-3}$	m <sup>3</sup> /(s $\sqrt{\text{N}}$ )
Versorgungsdruck	$p_s$	$100 \cdot 10^5$	N/m <sup>2</sup>
Tankdruck	$p_t$	$2 \cdot 10^5$	N/m <sup>2</sup>

**Tabelle C.2:** Parameter des Hydraulikzylinders.

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Masse Glied 1	$m_1$	225	g
Masse Glied 2	$m_2$	375	g
Masse Antrieb	$m_A$	460	g
Trägheitsmoment Glied 1	$J_1$	$1,74 \cdot 10^4$	g cm <sup>2</sup>
Trägheitsmoment Glied 2	$J_2$	$1,21 \cdot 10^4$	g cm <sup>2</sup>
Trägheitsmoment Antrieb	$J_A$	41,9	g cm <sup>2</sup>
Abstand $\overline{D_1 D_2}$	$d$	4,1	cm
Abstand $\overline{D_1 S_1}$	$h_1$	5,18	cm
$x$ -Komponente von $\overline{D_2 S_2}$	$s_2$	2,27	cm
$y$ -Komponente von $\overline{D_2 S_2}$	$h_2$	3,67	cm
Übersetzung	$\ddot{u}$	66	–

**Tabelle C.3:** Parameter des Laborversuchs „Kippende Laufmaschine“.



# Literaturverzeichnis

- [1] ACOSTA, J. A. ; ORTEGA, R. ; ASTOLFI, A. ; MAHINDRAKAR, A. D.: Interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with underactuation degree one. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 50 (2005), Nr. 12, S. 1936–1955
- [2] ANTSAKLIS, P. J. ; MICHEL, A. N.: *Linear Systems*. Birkhäuser, Boston, 2006
- [3] BATTLE, C. ; DÒRIA-CEREZO, A. ; ORTEGA, R.: Power flow control of a doubly-fed induction machine coupled to a flywheel. In: *Proc. IEEE International Conference on Control Applications, Taipei, Taiwan*, 2004, S. 1645–1650
- [4] BLOCH, A. M. ; CHANG, D. E. ; LEONARD, N. E. ; MARSDEN, J. E.: Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems. II. Potential shaping. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 46 (2001), S. 1556–1571
- [5] BLOCH, A. M. ; LEONARD, N. E. ; MARSDEN, J. E.: Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems. I. The first matching theorem. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 45 (2000), S. 2253–2270
- [6] BOYD, S.: *Linear Dynamical Systems*. Lecture Notes, Stanford University. <http://www.stanford.edu/class/ee363/notes/lq-lyap-notes.pdf>. Version: 2005
- [7] BYRNES, C. I. ; ISIDORI, A. ; WILLEMS, J. C.: Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 36 (1991), S. 1228–1240
- [8] CHENG, D. ; ASTOLFI, A. ; ORTEGA, R.: On feedback equivalence to port controlled Hamiltonian systems. In: *Systems & Control Letters* 54 (2005), S. 911–917
- [9] CRAMPIN, M. ; PIRANI, F. A. E.: *Applicable Differential Geometry*. Cambridge University Press, 1986

- [10] DEUTSCHER, J.: A parametric approach to the design of linear time-varying tracking controllers for nonlinear systems. In: *Proc. 10th European Control Conference, Budapest, Hungary, 2009*, S. 1450–1455
- [11] FECKO, M.: *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*. Cambridge University Press, 2006
- [12] FLIESS, M. ; LÉVINE, J. ; MARTIN, P. ; ROUCHON, P.: Flatness and defect of non-linear systems: Introductory theory and examples. In: *International Journal of Control* 61 (1995), Nr. 6, S. 1327–1361
- [13] FÖLLINGER, O.: Entwurf zeitvarianter Systeme durch Polvorgabe. In: *Regelungstechnik* 26 (1978), S. 189–196
- [14] FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik*. Hüthig Verlag, Heidelberg, 2008
- [15] FUJIMOTO, K. ; KAZUNORI, S. ; TOSHIHARU, S.: Trajectory tracking control of port-controlled Hamiltonian systems via generalized canonical transformations. In: *Automatica* 39 (2003), S. 2059–2069
- [16] GANTMACHER, F. R.: *Matrizentheorie*. Springer-Verlag, Berlin, 1986
- [17] GERLING, D.: *Elektrische Maschinen und Antriebe*. Vorlesungsskriptum, Universität der Bundeswehr, München, 2009
- [18] GÓMEZ-ESTERN, F. ; VAN DER SCHAFT, A. J.: Physical damping in IDA-PBC controlled underactuated mechanical systems. In: *European Journal of Control* 10 (2004), S. 451–468
- [19] GRABMAIR, G. ; SCHLACHER, K.: Energy-based nonlinear control of hydraulically actuated mechanical systems. In: *Proc. 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, Sevilla, Spain, 2005*, S. 7520–7525
- [20] HOHMANN, S. ; KREBS, V.: Exakte und näherungsweise Zustandsrückführlinearisierung nichtlinearer Systeme. In: *at – Automatisierungstechnik* 48 (2000), S. 392–398
- [21] ISIDORI, A.: *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, London, 1995
- [22] KHALIL, H. K.: *Nonlinear Systems*. 2nd Edition. Prentice-Hall, 1996
- [23] KÖNIGSBERGER, K.: *Analysis 2*. Springer-Verlag, 2004
- [24] KNOOP, M. ; MORENO, J. ; SCHUMACHER, A.: Stabilität einer Klasse zeitvarianter linearer Systeme. In: *at – Automatisierungstechnik* 41 (1993), S. 97–98



- [25] KOTYCZKA, P.: Passivitätsbasierte Regelung unteraktuierter mechanischer Systeme am Beispiel eines stehenden Doppelpendels. In: LOHMANN, B. (Hrsg.) ; ROPPEN-ECKER, G. (Hrsg.): *Methoden und Anwendungen der Regelungstechnik. Erlangen-Münchener Workshops 2005 und 2006*. Shaker-Verlag, 2007, S. 37–50
- [26] KOTYCZKA, P. ; KOCH, G. ; PELLEGRINI, E. ; LOHMANN, B.: Transparent parametrization of nonlinear IDA-PBC for a hydraulic actuator. In: *Proc. 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, Bologna, Italy*, 2010, S. 1122–1127
- [27] KOTYCZKA, P. ; LOHMANN, B.: A constructive approach for the parametrization of interconnection and damping assignment passivity based control. In: *Proc. 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, Ajaccio, France*, 2008, S. 964–969
- [28] KOTYCZKA, P. ; LOHMANN, B.: Systematic parametrization of interconnection and damping assignment control for the double inverted pendulum. In: *Proc. 9th International Conference on Motion and Vibration Control, Munich*, 2008
- [29] KOTYCZKA, P. ; LOHMANN, B.: Parametrization of IDA-PBC by assignment of local linear dynamics. In: *Proc. 10th European Control Conference, Budapest, Hungary*, 2009, S. 4721–4726
- [30] KOTYCZKA, P. ; LOHMANN, B.: Parametrierung von IDA-PBC über Zuweisung lokal linearer Dynamik. In: *at – Automatisierungstechnik* 58 (2010), Nr. 1, S. 38–48
- [31] KOTYCZKA, P. ; VOLF, A. ; LOHMANN, B.: Passivity based trajectory tracking control with predefined local linear error dynamics. In: *Proc. 2010 American Control Conference, Baltimore, USA*, S. 3429–3434
- [32] KUGI, A. ; SCHLACHER, K.: Analyse und Synthese nichtlinearer dissipativer Systeme: Ein Überblick (Teil 1 und 2). In: *at – Automatisierungstechnik* 50 (2002), Nr. 2, 3, S. 63–69, 103–111
- [33] KUGI, A. ; SCHLACHER, K.: Passivitätsbasierte Regelung piezoelektrischer Strukturen. In: *at – Automatisierungstechnik* 50 (2002), S. 422–431
- [34] KUGI, A. ; THULL, D.: A combination of flatness-based tracking control with passivity-based control for a certain class of infinite-dimensional systems. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 5 (2005), S. 169–172
- [35] LORENZ, F.: *Lineare Algebra II*. BI Wissenschaftsverlag, 1989
- [36] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2*. Springer-Verlag, 2002

- [37] LÉVINE, J.: *Analysis and Control of Nonlinear Systems*. Springer-Verlag, 2009
- [38] MACCHELLI, A.: *Port Hamiltonian Systems – A Unified Approach for Modeling and Control of Finite and Infinite Dimensional Physical Systems*, Department of Electronics, Computer Science and Systems, University of Bologna, Diss., 2003
- [39] MAHINDRAKAR, A. D. ; ASTOLFI, A. ; ORTEGA, R. ; VIOLA, G.: Further constructive results on interconnection and damping assignment control of mechanical systems: The Acrobot example. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 16 (2006), S. 671–685
- [40] MEYBERG, K. ; VACHENAUER, P.: *Höhere Mathematik 1*. Springer-Verlag, 1999
- [41] MEYBERG, K. ; VACHENAUER, P.: *Höhere Mathematik 2*. Springer-Verlag, 1999
- [42] OLFATI-SABER, R.: *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles*, Massachusetts Institute of Technology, Diss., 2001
- [43] OLVER, P. J.: *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer, New-York, 1993
- [44] ORTEGA, R. ; GALAZ, M. ; ASTOLFI, A. ; SUN, Y. ; SHEN, T.: Transient stabilization of multimachine power systems with nontrivial transfer conductances. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 50 (2005), Nr. 1, S. 60–75
- [45] ORTEGA, R. ; GARCÍA-CANSECO, E.: Interconnection and damping assignment passivity-based control: A survey. In: *European Journal of Control* 10 (2004), S. 432–450
- [46] ORTEGA, R. ; LORÍA, A. ; NICKLASSON, P. J. ; SIRA-RAMÍREZ, H.: *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*. Springer-Verlag, London, 1998
- [47] ORTEGA, R. ; VAN DER SCHAFT, A. J. ; MAREELS, I. ; MASCHKE, B.: Putting energy back in control. In: *IEEE Control Systems Magazine* 21 (2001), S. 18–33
- [48] ORTEGA, R. ; VAN DER SCHAFT, A. J. ; MASCHKE, B. ; ESCOBAR, G.: Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems. In: *Automatica* 38 (2002), S. 585–596
- [49] PETER, F.: *Parametrierung von IDA-PBC für mechanische unteraktuierte Systeme*. Lehrstuhl für Regelungstechnik, TU München, Diplomarbeit, 2010
- [50] ROPPENECKER, G.: *Vollständige Modale Synthese linearer Systeme und ihre Anwendung zum Entwurf strukturbeschränkter Zustandsrückführungen*. VDI-Verlag, 1983

- [51] SEPULCHRE, R. ; JANKOVIĆ, M. ; KOKOTOVIĆ, P. V.: *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag, London, 1997
- [52] SIRA-RAMÍREZ, H. ; PEREZ-MORENO, R. A. ; ORTEGA, R. ; GARCÍA-ESTEBAN, M.: Passivity-based controllers for the stabilization of DC-to-DC power converters. In: *Automatica* 33 (1997), Nr. 4, S. 499–513
- [53] SLOTINE, J.-J. E. ; LI, W.: *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, 1991
- [54] SPONG, M. W.: Energy based control of a class of underactuated mechanical systems. In: *Proc. 13th IFAC World Congress*, 1996, S. 431–435
- [55] SPONG, M. W.: Underactuated mechanical systems. In: SICILIANO, B. (Hrsg.) ; VALAVANIS, K. P. (Hrsg.): *Control Problems in Robotics and Automation, Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1998, S. 135–150
- [56] STADLMAYR, R.: *On a Combination of Feedforward and Feedback Control for Mechatronic Systems*, Insitiut für Regelungstechnik und Prozessautomatisierung, Johannes Kepler Universität Linz, Diss., 2008
- [57] STADLMAYR, R. ; SCHÖBERL, M. ; SCHLACHER, K.: A combination of feedforward and feedback for the control of the nonlinear benchmark inertia wheel pendulum. In: *Proc. 9th European Control Conference, Kos, Greece*, 2007, S. 5802–5808
- [58] TAKEGAKI, M. ; ARIMOTO, S.: A new feedback method for dynamic control of manipulators. In: *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* 102 (1981), S. 119–125
- [59] VAN DER SCHAFT, A. J.: *L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Springer-Verlag, London, 2000
- [60] VIDYASAGAR, M.: *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-Hall, 1993
- [61] VINOGRADOV, R. E.: On a criterion for instability in the sense of A. M. Lyapunov for solutions of linear systems of differential equations. In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 84 (1952)
- [62] VIOLA, G. ; ORTEGA, R. ; BANAVAR, R. ; ACOSTA, J. A. ; ASTOLFI, A.: Total energy shaping control of mechanical systems: Simplifying the matching equations via coordinate changes. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 52 (2007), Nr. 6, S. 1093–1099

- [63] VOLF, A.: *Transparente Parametrierung der Trajektorienfolgeregelung mit IDA-PBC*. Lehrstuhl für Regelungstechnik, TU München, Diplomarbeit, 2009
- [64] WILCZEK, F. ; DEVINE, B.: *Longing for the Harmonies: Themes and Variations from Modern Physics*. New York Norton, 1988
- [65] WU, M.: A note on stability of linear time-varying systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 19 (1974), S. 162
- [66] ZHAO, J. ; HILL, D. J.: Dissipativity theory for switched systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 53 (2008), S. 941–953