

# Automatisierter Entwurf und Optimierung elektrischer Linearmaschinen

Alexander Thomas Oswald

Vollständiger Abdruck der von der  
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik  
der Technischen Universität München  
zur Erlangung des akademischen Grades eines

## **Doktor-Ingenieurs**

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Ralph Kennel

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Hans-Georg Herzog
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dieter Gerling

Die Dissertation wurde am 22.05.2014 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik am 27.10.2016 angenommen.

**Zusammenfassung** - Zur Dimensionierung von Systemen und zuvor zur Auswahl geeigneter Komponenten für ein System bedarf es, sofern eine Analyse verschiedener Topologien mit eingebunden werden und der Entwurf rechnergestützt (automatisiert) erfolgen soll, geeigneter Hilfsmittel, die derzeit jedoch nicht verfügbar sind. Generell werden mit der Systemzusammensetzung (Topologie) und dem Entwurf der Komponenten zeitgemäße Forderungen verbunden. Diese zielen meist auf die Ökonomie ab und bedürfen daher der größtmöglichen Effizienz eines Systems. Diese teilweise konträren Ziele (Kriterien) lassen sich nur durch den strukturierten Einsatz eines Optimierers bestmöglich erreichen, was auch die gegenseitige Abwägung beinhaltet.

Hierzu liefert diese Arbeit einen Beitrag dahingehend, dass zunächst ein innovatives „Top-Down“-Vorgehen für den durchgängigen Systementwurf eingeführt wird. Die weithin verbreitete V-Methode weist den Nachteil auf, dass nach erheblicher Projektlaufzeit noch Inkompatibilitäten zwischen Komponenten auftreten können und sogar das Systemziel durch die Nichteinhaltung von Zielen und Anforderungen gefährdet ist. Das vorgestellte Vorgehen legt dem gesamten Entwurf eine umfassende Analyse von Topologien zu Grunde. Aus dieser erhält ein Entscheider Informationen über die Eigenschaften bestimmter Kombinationen und kann an Hand von Zielen eine bestmögliche Topologie auswählen. Für diese erfolgt dann erst im weiteren Verlauf die Auslegung der Komponenten. Bei Einhaltung der Anforderungen an die Komponenten ist so auch die planmäßige Funktion des Systems sichergestellt.

Zur Integration der Methode in ein Computerprogramm bedarf es der Kombination einer möglichst einfachen analytischen Beschreibung verschiedener Komponenten in Kombination mit einem Optimierungsalgorithmus. Die methodischen Schritte werden, wie in dieser Arbeit gezeigt, werden an Hand einer Linearanordnung, im besonderen an Hand eines Lineargenerators, vollzogen, jedoch immer mit Blick auf die allgemeine Anwendbarkeit.

Nach einer Betrachtung bekannter Optimierungsverfahren und einer Beurteilung ihrer Eigenschaften erfolgt die Auswahl der Particle-Swarm-Optimierung, da diese das größte Entwicklungspotential besitzt und bereits in ihrer Grundstruktur besonders effizient Optimalwerte findet. Für die Systemauswahl ist nicht alleine die Ergebnisgenauigkeit entscheidend. Stärker noch wiegt die Zeit, die aufgewendet werden muss, da eine erhebliche Anzahl von Alternativen und Eingangsgrößen geprüft werden muss. Daher folgt die Vorstellung einer neuartigen Methode zur Suchraumreduzierung, die neben der schnellen Konvergenz auch die Ergebnisqualität verbessert. Weiter beschäftigt sich die Arbeit mit der Bewertung und Auswahl geeigneter Beschreibungsformen mehrkriterieller Probleme. Dabei geht die Arbeit besonders auf die „epsilon-constraint“-Methode ein, mit der jegliche Kriterien untersucht werden können.

Von der Optimierung wird eine analytische Beschreibung der mechanischen und elektrischen Komponenten des Systems gesteuert. Vereinfachend werden hier die Peripherie wie IT und die Regelung von der Betrachtung ausgenommen. Stattdessen wird gezeigt, wie mechanische Kopplungen analytisch beschrieben werden müssen. Die Bewegungsgleichung wird mit entsprechenden Kennlinien verbunden, welche die mechanischen Eigenschaften der Komponenten abbilden. Als Rückmeldungen an die Optimierung aus der Grobdimensionierung werden die bewegte Masse und der Wirkungsgrad der Linearmaschine identifiziert. Entsprechend erfolgt eine ausführliche Erörterung von Transformationsvorschriften zwischen Linearmaschinen und rotierenden Maschinen, da für die zweitgenannten umfassendes Expertenwissen verfügbar ist.

Schlussendlich bedarf es der Möglichkeit, entworfene Komponenten nachzurechnen, um ihre Eigenschaften aus dem Entwurf mit den Anforderungen aus der Topologien-Analyse vergleichen zu können. Zu diesem Zweck liefert diese Arbeit eine ausführliche Darstellung zur Nachrechnung von Linearmaschinen auf Grundlage der Strombelaststheorie, die für rotierende Maschinen bereits umfassend erarbeitet ist. Ein besonders hervorzuhebender Schwerpunkt liegt weiterhin im Entwurf verschiedener Permanentmagnetanordnungen und daraus resultierenden Rastkräften.

Insgesamt leistet die Arbeit folglich einen methodischen Beitrag zum rechnergestützten Entwurf elektromechanischer Wandler, die in mechatronischen Systemen zum Einsatz kommen sollen, sowie zur Optimierung des Systems und des Entwurfs. Gezeigte Beschreibungen und Zusammenhänge sind so gehalten, dass sich diese leicht auf andere Antriebe und Bewegungsformen übertragen lassen.

**Abstract** - For the design of systems and the proper selection of components before appropriate tools are needed, when different topologies shall be analysed and the design shall be made computerized (automated). But such tools aren't currently available. In most cases modern demands and needs are combined with the system topology and the design of the components. Mostly possible efficiency of a system is necessary to make economic systems available. Used criteria are partly conflicting and must be observed with an optimizer to allow structured and balanced decisions with respect to the different criteria.

Therefore this work provides a contribution to this idea and introduces an innovative top-down approach for the integrated system design. The method overcomes the disadvantage of the commonly used V-method where at the end of a project still incompatibilities may occur between components and even function and objectives of the complete system may be at risk. The proposed approach is based on a comprehensive analysis of topologies. A decision maker receives information about the properties of different combinations and will select the best one according to certain requirements and criteria. Components will be designed subsequently. If the components comply with the requirements from the topology optimization the planned function of the system can be ensured.

The integration of the method into a computer program requires the combination of a simple analytical description of different possible components in combination with an optimization algorithm. The methodological steps, as shown in this work, are indeed consistently described in terms of general usability, but in particular they are performed with reference to a linear array with a linear generator.

Based on a detailed investigation regarding known optimization methods and an assessment of their properties, the Particle Swarm Optimization is selected as appropriated algorithm for the mentioned tool, as it offers the greatest potential for further development and also efficiently finds optimal values in its basic structure. Within the method the result accuracy is not the only important aspect. For fast and efficient analysis and decisions the spent time of the tool is even more important, as a significant number of alternative topologies and components (input variables) must be checked. This is why the idea of a novel method for search space reduction is introduced, which improves not only the convergence time but also the quality of results. Moreover, the work deals with the evaluation and selection of appropriate possibilities to describe multi-criteria problems. Therefore special attention is given to the epsilon-constraint method.

The optimization is linked to an analytical description of the mechanical and electrical components of the system. Considerations here are done without peripherals such as IT and control. The focus is put on showing how mechanical couplings must be described analytically. The equation of motion is connected with characteristics that represent the mechanical properties of the components. As feedback to the optimization from a basic design, the moving mass and the efficiency of the linear machine can be identified.

A detailed discussion of transformation rules between linear and rotating machines is provided.

Finally, the possibility to calculate the behavior of designed components is necessary to compare their properties with the requirements from the topology analysis. All necessary formulas based on the current sheet theory are developed for the linear machines with a special look onto the design of permanent magnets and the impact on detent force.

Overall, the work provides a methodological contribution to the computer aided design of electromechanical transducers that shall be used in mechatronic systems, as well as to the optimization of such system and its design. Illustrated descriptions and relationships are explained so that these can be easily transferred to other drives and movement forms.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Kraft-Wärme-Kopplung: Effiziente Nutzung von Primärenergie . . . . .	1
1.2. Mini-KWK-Systeme: Technische Ausführungen . . . . .	2
1.3. Bestmögliche Zielerfüllung als Grundlage für den Systementwurf . . . . .	4
1.4. Systementwurf am Beispiel einer speziellen KWK-Anlage . . . . .	7
1.5. Automatisierter Entwurf und Optimierung . . . . .	10
1.6. Ziele der Arbeit und deren Abhandlung . . . . .	13
<b>2. Entwurf und Nachrechnung</b>	<b>16</b>
2.1. Stand der Technik . . . . .	16
2.2. Bauformen und Begriffe . . . . .	18
2.3. Wichtige Aspekte der Entwurfsautomatisierung . . . . .	22
2.4. Nachrechnung . . . . .	36
2.4.1. Rastkräfte . . . . .	37
2.4.2. Strombelaststheorie, elektromagnetische Kraft und Systemgleichungen . . . . .	44
<b>3. Numerische Optimierung</b>	<b>50</b>
3.1. Begriffe und Verfahren . . . . .	50
3.2. Particle-Swarm-Optimierung . . . . .	54
3.2.1. Restriktionen für das Erreichen der Raumbegrenzungen . . . . .	59
3.2.2. Interaktion der Partikel . . . . .	60
3.3. Multikriterielle Optimierung . . . . .	64
3.4. Testfunktionen . . . . .	71
<b>4. Systemmodell</b>	<b>84</b>
4.1. Modell des mechanischen Verbands . . . . .	84
4.2. Zielgrößen . . . . .	90
<b>5. Abschließende Bemerkungen</b>	<b>110</b>
<b>A. Herleitung zur Rastmomentberechnung nach Ackermann [2]</b>	<b>115</b>
<b>B. Systemgleichungen einer Solenoid-Linearmaschine mit Permanentmagneten</b>	<b>120</b>
B.1. Strombelast einer in Nuten gebetteten Spule und deren magnetisches Feld	120

---

B.2. Strombelag von 2p Spulen . . . . .	124
B.3. Erweiterung der Berechnungen auf einen Wicklungsstrang . . . . .	127
B.4. Einführung der Spulengruppe . . . . .	129
B.5. Strombelag und Feld eines Wicklungsstrangs mit Spulengruppen . . . .	130
B.6. Strombelag und Feld einer mehrsträngigen Wicklung . . . . .	134
B.7. Erregung der Wicklung durch ein symmetrisches Drehspannungssystem	139
B.8. Ersatzdurchflutung von Permanentmagneten . . . . .	140
B.8.1. Ableitung der überlagerten Größen . . . . .	145
<b>C. Kraftberechnung</b>	<b>153</b>
<b>D. Gleichungssystem für den stationären Betrieb</b>	<b>155</b>
D.1. Spannungsgleichungen . . . . .	155
D.2. Kraft im stationären Betrieb . . . . .	157
D.3. Leistungen . . . . .	158
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>159</b>
<b>E. Wichtige Variablen und Abkürzungen</b>	<b>162</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>172</b>

# 1. Einleitung

## 1.1. Kraft-Wärme-Kopplung: Effiziente Nutzung von Primärenergie

Am 26.4.2007 hat die Regierung der Bundesrepublik Deutschland im Rahmen des Integrierten Energie- und Klimaprogramms (IKEP) in Form einer Regierungserklärung, im Dezember gefolgt durch den Gesetzentwurf für das Erneuerbare-Energien-Gesetz (EEG) und das Kraft-Wärme-Kopplungs-Gesetz (KWKG), festgeschrieben, bis zum Jahr 2020 eine Senkung des Stromverbrauchs in Deutschland um 11% zu erreichen, und damit verbunden 40 Millionen Tonnen CO<sub>2</sub>-Einsparungen. Wesentlicher Kern des Vorhabens ist die Anhebung des Anteils erneuerbarer Energien an der Stromerzeugung von derzeit 12% auf bis zu 30%. Neben der damit einhergehenden Umstellung auf Geothermie, Windparks und Photovoltaik auf Seiten der Erzeuger und dem vollständigen Verzicht auf fossile Brennstoffe bietet der Einsatz dezentraler KWKG-Anlagen nach Einschätzung der Bundesregierung derart großes Potential, dass die Novellierung der Gesetze 2008 und 2009 zu einem vorgeschriebenen Anteil solcher Geräte an der Stromerzeugung in Höhe von 25% führte. Folglich muss die installierte Leistung bis 2020 verdoppelt werden, wozu neben den zum Einsatz kommenden Großgeräten dringend marktreife Produkte erzeugt werden müssen, die für den ökonomischen Einsatz beim Endverbraucher geeignet sind.

Das Umweltbundesamt stellt dazu fest, dass begründet durch derzeitige Produktions-, Installations- und Wartungskosten, verbunden mit den bestehenden Förder-Richtlinien sowie der erwarteten Entwicklung der Strom- und Brennstoffpreise<sup>1</sup>, eine Mindestgröße von 25 kW elektrischer, abgegebener Leistung<sup>2</sup> für einen ökonomischen Einsatz von KWKG-Anlagen nach heutigem Stand der Technik erforderlich ist [62]. Der durchschnittliche Bedarf eines Einfamilienhauses (150 m<sup>2</sup>) kann jedoch mit entsprechender Speichertechnik durch einen Generator mit 1 kW gedeckt werden. Der Heizbedarf wird für energie-effiziente Häuser mit 12-14 kW Spitzenleistung für besonders kalte Tage angegeben. Auch hier kann der mittlere Leistungsbedarf durch Wärmespeicher und zusätzliche Nutzung des Stroms zum kurzzeitigen Zuheizen auf 7-9 kW thermische Leistung reduziert werden.

---

<sup>1</sup>Auf Grund der höheren Ausbeute durch Brennwerttechnik steht besonders Gas im Fokus.

<sup>2</sup>Die bei der Verbrennung freiwerdende thermische Energie ist für bestehende Anlagen mindestens drei- bis viermal so groß.



Um zukünftige dezentrale Lösungen in Einfamilien- oder Reihenhäusern wirtschaftlich betreiben zu können, müssen innovative Systeme entwickelt werden, die dem Bedarf bei gleichzeitig geringer Komplexität und hoher Rentabilität gerecht werden. Dabei erfährt die auf Privathaushalte konzentrierte Strategie ihre Rechtfertigung durch das Forschungszentrum Jülich, demzufolge ein Drittel der heute eingesetzten Primärenergie auf Raumheizung und Warmwasserbereitung entfällt, wovon 90% in privaten Haushalten benötigt werden [121]. Bedenkt man, dass sich mit Erdgas-Brennwerttechnik fast 90% der eingesetzten Energie in Wärme umwandeln lassen, Strom hingegen nicht annähernd gleichermaßen effizient erzeugt und verteilt wird, ist die Zusammenführung beider Erzeugungsformen beim Verbraucher folgerichtig. Unter Ausgleich von Bedarfszeiten durch noch zu entwickelnde effiziente Speicher kann so der Gesamteinsatz benötigter Energie um rund 36% gesenkt werden, wobei Gesamtwirkungsgrade von ca. 90% für Mini-KWK-Anlagen als realisierbar gelten [4].

## 1.2. Mini-KWK-Systeme: Technische Ausführungen

Möchte man sich einen umfassenden Überblick über KWK-Geräte verschaffen, dient die Arbeitsgemeinschaft für sparsamen und umweltfreundlichen Energieverbrauch e.V. (ASUE) als zuverlässige Quelle<sup>3</sup>. Setzt man die Brennwerttechnik zur thermischen Energiegewinnung (Heizung und Warmwasser) als bestes Konzept voraus, können die Geräte noch nach der elektrischen Energiegewinnung durch drei eingesetzte Hauptformen unterschieden werden, die nun kurz allgemein beschrieben werden.

**Verbrennungsmotorische Systeme** Klassische Systeme binden einen rotierenden Generator direkt an die Welle eines Diesel-, Otto- oder Stirlingmotors an. Es erfolgen keine Neuentwicklungen, sondern PKW- oder Schiffsantriebe werden abhängig von der Leistungsklasse mit herkömmlichen Asynchron- oder Synchrongeneratoren gekoppelt. Solche Systeme entsprechen mit 80% Marktanteil dem derzeitigen Stand der Technik. Vorteile sind ein hoher Entwicklungsstand und ein vergleichsweise hoher elektrischer Anteil am Gesamtwirkungsgrad von ca. 25%. Allerdings weisen sie im Vergleich zu anderen Technologien hohe laufende Kosten und hohen Wartungsaufwand auf, beispielsweise durch Ölwechsel und höhere Emissionen. Lärm- und Schwingungsbelastungen können durch entsprechende Dämmung unterdrückt werden. Die hohen elektrischen Anteile sind aber auf Grund der vergleichsweise hohen benötigten Heizleistung (vgl. oben) in Häusern nicht vollständig nutzbar. Die erzeugte elektrische Energie kann besonders

---

<sup>3</sup>Die ASUE bietet auf ihrer Webseite <http://www.asue.de> extensive Informationen und eigene Untersuchungen zu allen Themen zukünftiger Energieerzeugung, darunter auch Listen zu Forschungsvorhaben, Prototypen und Geräten im Feldversuch aus dem Bereich der KWK.

bei Insellösungen nicht abgeführt werden und bei der Netzeinspeisung entstehen durch Filter und Regelungen zusätzliche Kosten.

Die größte Konkurrenz stellt aktuell der Sterling-Motor dar. Im Gegensatz zum direkten Verbrenner wird ein Arbeitskolben in einem abgeschlossenen Raum durch externe Erhitzung in Bewegung gesetzt. Die Hitze führt zur Expansion eines miteingeschlossenen Arbeitsgases. Die Rückstellung erfolgt automatisch durch die anschließende Abkühlung. Solche Systeme weisen elektrische Wirkungsgrade von 15% bei einem Gesamtwirkungsgrad von über 90% auf. Auf Grund der besonders geringen Emissionen und Geräusche sowie der Möglichkeit, nahezu wartungsfrei zu arbeiten, ist die Attraktivität solcher Systeme besonders hoch. Hinzu kommt die Möglichkeit der Vollintegration eines Lineargenerators. Wesentlicher Nachteil der Anordnung ist die erforderliche komplexe Regelung sowie der Umstand, dass ein effizienter Betrieb bei Bauformen kleiner Leistungen derzeit nur durch relativ hohe Kosten gewährleistet werden kann.

**Brennstoffzelle** Ein vollkommen anderes Prinzip nutzt den Umwandlungsprozess eines Energieträgers (überwiegend Erdgas) in einem Reformier zu einem stark  $H_2$ -reichen Gas. Dieses wird dem Zellenstapel zugeführt, in dem zusammen mit Sauerstoff kontrolliert Strom gewonnen wird. Als Abfallprodukte entstehen geringe  $CO_2$ -Mengen aus dem Reformier und Wasser aus der Stromerzeugung. Das System kommt ohne Generator aus, verursacht damit keine Geräusche und kann auch im Teillastbetrieb hohe elektrische Wirkungsgrade aufweisen, da es nicht an den Carnot-Prozess gebunden ist. Außerdem sind Brennstoffzellen immer modular aufgebaut, weshalb sie sich systembedingt einfach miniaturisieren lassen. Die Brennstoffzelle gilt als Zukunftstechnologie, deren Entwicklung jedoch noch erheblich vorangetrieben werden muss. Um kostengünstige Produkte herstellen zu können, die auch in der Lage sind, mit hohen Wirkungsgraden aufzuwarten, sind Anstrengungen zur Verbesserung in der Produktion der Zellenstapel und in der Gasreinigung im Reformier zu leisten. Besonders die Verfügbarkeit von kleinen, kompakten und kosteneffizienten Erdgasreformieren wird über den zukünftigen Einsatz der Brennstoffzelle entscheiden.

**Dampfexpansionsmaschinen** Bei der Verbrennung kann die Bewegung auch indirekt erzeugt werden, indem die aus der Verbrennung freiwerdende Energie dazu genutzt wird, ein Medium zu verdampfen und damit hohen Druck zu erzeugen. Der Druck des Arbeitsgases wird dann wechselseitig auf einen Arbeitskolben geleitet, wodurch sich eine alternierende Bewegung ergibt. Dabei gibt es eine Phase des konstanten Drucks und eine Phase, in der bei geschlossenen Ventilen das Gas eine Expansion erfährt, wodurch der Kolben weiterhin angetrieben wird. Hier erfolgt entweder eine Kopplung eines Lineargenerators über eine feste Verbindung oder eine Ausführung mit Vollintegration ähnlich dem Sterling-Antrieb. Das Arbeitsmedium befindet sich in einem

geschlossenen Kreislauf und verdampft nach der Energieabgabe und Kondensierung erneut. Solche Systeme erlauben die Nutzung von nahezu 90% der eingesetzten Energie, wovon auf den elektrischen Anteil bis zu 15% entfallen. Solche Anlagen sind problemfrei zu miniaturisieren, allerdings werden an die Regelung hohe Anforderungen gestellt. Ebenso können erhebliche Schwingungsbelastungen auftreten.

Die ASUE listet zu jedem Verfahren unterschiedliche Konzepte mit unterschiedlichen Reifegraden auf. Bisher fehlt jedoch eine allgemeine und unabhängige Bewertung der Technologien. Kriterien könnten die kumulierten Gesamtkosten von der Entstehung bis zur Verwertung, der Nutzungsgrad, die Komplexität und die Anfälligkeit sein. Der allgemeine Überblick zeigt bereits, dass alle Systeme Vor- und Nachteile aufweisen, wobei ohne objektive Analyse und detaillierte Bewertung aber keine Aussage darüber getroffen werden kann, welche Effizienz erreichbar ist und welcher finanzielle und materielle Einsatz dafür erforderlich ist. Die ausgeführten Anlagen beweisen nur die prinzipielle Funktionsweise und die generelle Eignung. Einen ersten Beitrag zur Beurteilung der KWK leistet Arndt [5] mit der Vorstellung einer Effizienz-Bewertungsmethode. Die Arbeit beschränkt sich jedoch auf die Berücksichtigung bestehender Systeme und deren Beurteilung hinsichtlich Strom- und Wärmebedarf in Deutschland und bestätigt damit das durch die Bundesregierung ermittelte Potential der KWK, ohne Vor- und Nachteile der Systeme in Bezug auf die Wirtschaftlichkeit zu beachten.

Zusammenfassend kann auf Grundlage der Veröffentlichungen der ASUE festgestellt werden, dass eine Vielzahl von Prototypen existiert, die für einen breiten Einsatz mit hoher Effizienz jedoch nicht geeignet sind. Um Marktreife im Einklang mit Effizienz und Ökonomie zu erlangen, muss sich die weitere Entwicklung auf ein zukunftssträchtiges Konzept konzentrieren, das zunächst topologisch zu identifizieren und anschließend detailliert zu spezifizieren ist.

### **1.3. Bestmögliche Zielerfüllung als Grundlage für den Systementwurf**

Das typische Vorgehen technischer Entwicklung ist, angelehnt an die IT-Branche, die sogenannte V-Methode [68, 167] (vgl. Abb. 1.1). Die strikte Einhaltung des Vorgehens ist oftmals Vorgabe zur Projektvergabe und bietet immanente Vorteile, wie eine saubere Dokumentation und strukturierte Koordination. Allerdings führt das Modell auch zu einer Schwerfälligkeit gegenüber Änderungen und bietet kaum Reaktionsspielraum auf spät entdeckte topologische Fehler. Das bedeutet in diesem Zusammenhang, dass bei der Festlegung des Systems in Form seiner Funktionsweise und seiner Bestandteile eine Unzulänglichkeit dahingehend vorliegt, dass diese Festlegung nicht dafür geeignet ist, an das System gestellte Anforderungen generell zu erfüllen. In der Folge entstehen

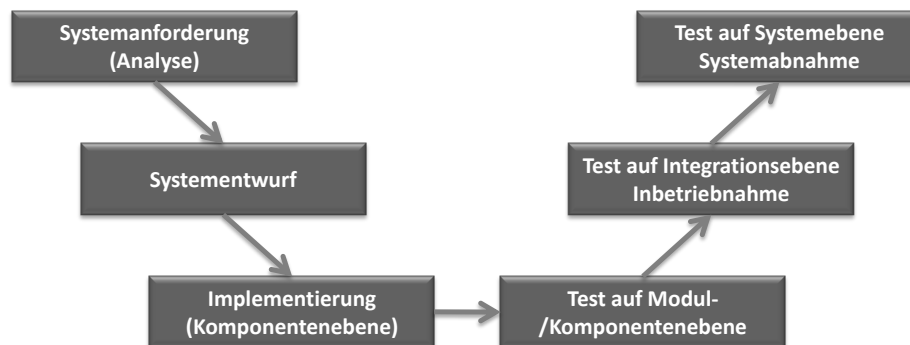


Abb. 1.1.: V-Methode für die Systementwicklung

erhebliche Kosten für Änderungen, sofern diese überhaupt noch vorzunehmen sind, was bei Projektlaufzeiten von mehreren Jahren in einem späten Stadium kaum der Fall sein dürfte.

Zum allgemeinen Verständnis wird das Vorgehen an Hand von Abb. 1.1 erläutert. Ausgehend von einem zukünftigen Produkt wird dessen Topologie im Regelfall auf Grundlage bestehender Produkte und von Expertenwissen festgelegt. Damit liegt auch die Spezifikation des Systems weitgehend fest. Infolgedessen beginnt der Prozess mit einer Analyse der vom System zu erfüllenden Anforderungen, auf Basis derer Ergebnisse Spezifikationen für die Module und Komponenten des Systems abgeleitet werden. Unter einem Modul ist hier ein Systemteil zu verstehen, der wiederum aus einzelnen Komponenten bestehen kann. Im Verlauf des Systementwurfs erfolgt kein übergeordneter Entwurf, sondern bereits die Dimensionierung der Einzelteile. Dieser Entwurfschritt geschieht ohne Rückwirkung auf die Systemfestlegung und berücksichtigt nur die Spezifikation für die jeweilige Komponente. Dabei wird vernachlässigt, dass Anforderungen unter Umständen nicht in der geplanten Weise erfüllt werden können und erhebliche Änderungen an der Komponente notwendig sind. Die Auswirkungen auf das System werden dann erst nach dem Zusammenfügen ersichtlich und auch hier erst im zweiten Testschritt auf der Integrationsebene. Auf der Modulebene werden nur Funktion und Erfüllung der Spezifikation für die Einzelteile geprüft. Sollten alle Funktionstests auch bei vollständiger Inbetriebnahme erfolgreich ablaufen, erfolgt abschließend auf der obersten Ebene eine Kontrolle, ob das System den Ergebnissen der Analyse gerecht wird.

Es ist einleuchtend, dass bereits im Rahmen der Systemzusammenführung eine entdeckte, unzureichende Funktionserfüllung kaum noch zu korrigieren ist, besonders wenn, wie oben erwähnt, zwischen Projektstart und Ende einige Jahre liegen. Die Betrachtung aller Gesamteinflüsse ist jedoch komplex und bedingt einen hohen Berechnungsaufwand. Daher erscheint es sinnvoll, Einflüsse sukzessive in ein Gesamtmodell zu integrieren, wobei dieses Modell aus einer Abfolge von Ebenen unterschiedlicher Komplexität bestehen

muss. Es wäre folglich wünschenswert, für die Entwicklung mechatronischer Systeme generell ein Werkzeug zur Verfügung zu haben, mit dem eine frühzeitige und zuverlässige Einschätzung der Systemerfüllung auf Basis der Anforderungen möglich ist, ohne bereits im ersten Schritt den vollständigen Entwurf aller Komponenten durchführen zu müssen, dabei aber gewährleistet ist, dass der Detailentwurf keine unerwünschten Veränderungen für das System und dessen Verhalten nach sich zieht.

In diesem Zusammenhang wird der Begriff der optimalen Erfüllung der Anforderungen eingeführt. Diese Erfüllung geht über die bloße Funktionserfüllung hinaus. Die optimale Erfüllung muss dabei grundsätzlich nicht auf eine spezielle Topologie abzielen. Verschiedene Topologien können bei unterschiedlicher Gewichtung der zu erfüllenden Kriterien, bezogen auf die Gewichtung und damit auf die subjektive Einschätzung und Priorisierung des Anwenders, als optimal bezeichnet werden. Diese Zusammenhänge müssen zusammen mit der Signifikanz der Einflussgrößen veranschaulicht werden. Der Anwender erhält durch die verallgemeinerte System-Untersuchung die Möglichkeit, neben der frühzeitigen Sicherstellung der Funktionalität auch ein ihm als optimal erscheinendes System auswählen zu können und dabei seine Entscheidung auf das Zusammenspiel objektiver Kriterien stützen zu können. Die Sicherstellung der Funktionalität muss dabei durch eine abstrakte Beschreibung der Komponenten gewährleistet sein, die vom Detailentwurf insofern losgelöst ist, dass das modellierte dynamische Verhalten in jedem Fall als Anforderung an den Entwurf übermittelt und anschließend erfüllt werden kann.

Eine solche allgemeine Betrachtung eines Systems ist bei Einhaltung der V-Methode nicht vorgesehen. Am Beispiel der KWK zeigt sich der Bedarf an einem Hilfsmittel für den Entwurfsprozess an den diversen Ansätzen, die sich derzeit in der Entwicklung oder dem Stadium eines Prototypen befinden. Daher wird hier vorgeschlagen, eine umfassende Analyse der Topologie und Systemauswahl frühzeitig so durchzuführen, dass die abgeleiteten Anforderungen durch die Komponenten mindestens erfüllt werden. Hierzu wird das in Abb. 1.2 gezeigte Vorgehen vorgestellt.

Im Gegensatz zur V-Methode erfolgt eine „horizontale“ Untersuchung, die sich durch eine qualitative Beschreibung des Systemverhaltens auszeichnet. Auf dieser Ebene kann festgestellt werden, ob bestimmte Topologien die an das Produkt gestellten Anforderungen erfüllen und weiter betrachtet werden oder ausscheiden. Bereits hier steht die Zielerfüllung im Mittelpunkt der Entwicklung. Dabei reicht es aus, dass im Modell berücksichtigt wird, welche Funktion dem einzelnen Modul innewohnt und welche Aufgabe durch diese Funktion erfüllt wird. Dieser Zusammenhang muss möglichst abstrakt beschrieben werden. Dabei wird man nicht umhin kommen, einfache quantitative Zusammenhänge in das Modell mit aufzunehmen, um die wesentlichen Kriterien, die das System beeinflussen, berücksichtigen zu können. Die Detailtiefe und die berücksichtigten Zusammenhänge ergeben sich aus den Rahmenbedingungen, die an das Produkt gestellt werden. Rahmenbedingungen folgen beispielsweise aus zulässigen

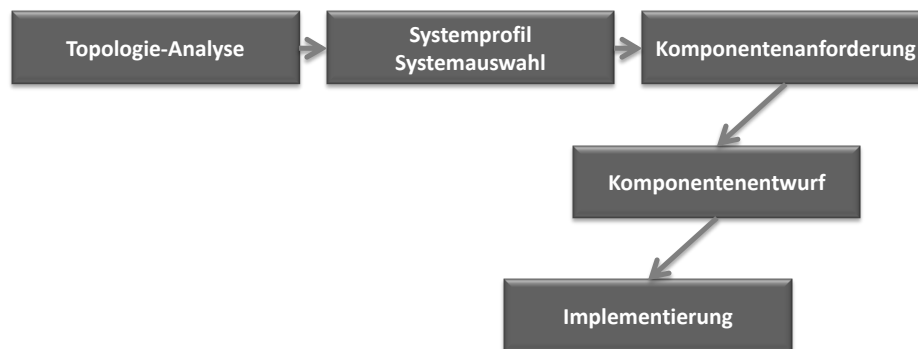


Abb. 1.2.: Innovatives „top-down“-Verfahren für die Systementwicklung

Herstellungskosten, Grenzen für Gewicht und Bauraum, der Effizienz oder auch dem Wartungsaufwand. Allgemein formuliert werden in den meisten Fällen Aussagen zu Energieflüssen (Effizienz des Systems) und der ökonomischen Rentabilität von Interesse sein. Abhängig von der subjektiven Priorisierung des Entwicklers erfolgt dann aus einer Menge möglicher Alternativen die Auswahl einer Topologie, für die eine Zielerfüllung sichergestellt ist.

Die Dekomposition auf Komponentenebene stellt eine spätere Verfeinerung der Betrachtung dar, die auf Basis einer spezifischen, für das Problem am besten geeigneten Topologie erfolgt. Aus der Topologie werden zuvor Spezifikationen abgeleitet, die sicherstellen, dass die zuvor bestimmten Anforderungen erfüllt werden. Hierzu ist es aber erforderlich, dass der Entwurfsprozess mit einer Rückmeldung an die Systemanalyse ausgestattet wird. Abhängig vom System können aus dem Entwurf veränderte Parameter hervorgehen, die das dynamische Systemverhalten verändern. Abweichungen der dynamischen Masse hätten Auswirkungen auf die Trägheit, weshalb im abstrakten Modell eine Überprüfung stattfinden muss, ob diese Abweichung das gesamte System günstig oder ungünstig beeinflusst. Bei einer ungünstigen Beeinflussung muss der Entwurf entsprechend korrigiert werden. Nach der abschließenden Implementierung müssen dann nur noch Produktionsfehler ausgeschlossen werden.

## 1.4. Systementwurf am Beispiel einer speziellen KWK-Anlage

Im Rückblick auf die oben erwähnten KWK-Systeme kann festgestellt werden, dass diese noch kaum Marktreife besitzen und ein ökonomischer Betrieb fraglich ist. Für die einzelnen Systeme fehlt neben dem unabhängigen Vergleich mit den jeweils anderen Systemen ein interner Nachweis, dass gezielte Modifikationen keine Verbesserung für Kosten, Komplexität oder Wirkungsgrad bieten. In diesen Kontext fügt sich auch

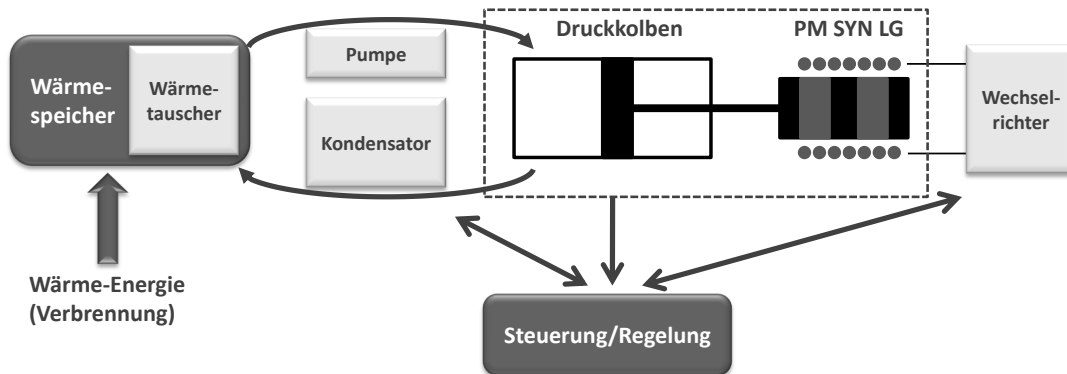


Abb. 1.3.: KWK-System nach Schilling [132]

ein neues Patent für eine Druckkolben-Linearmaschine mit langem Hub ein, das eine einfache und kostengünstige Technik sowie größtmögliche Effizienz unabhängig vom Arbeitstakt und dem Lastpunkt verspricht [132].

Die schematische Darstellung in Abb. 1.3 zeigt die wesentlichen Funktionseinheiten. Durch die Verbrennung fossiler Brennstoffe wird in einem Wärmespeicher mittels Tauscher und Pumpe ein Arbeitsgas komprimiert, das anschließend über eine Ventilsteuerung auf einen wechselseitig arbeitenden Hubkolben<sup>4</sup> drückt. Die Kraft am Kolben setzt sich aus der unmittelbaren Aufschaltung des Drucks und einer anschließenden Expansionsphase des Gases zusammen. Das abgekühlte Gas wird anschließend dem Speicher zugeführt und erneut erhitzt. Der Kolben ist direkt an einen Lineargenerator gekoppelt, der als Permanentmagnet-Synchronmaschine (PM SYN LG) ausgeführt ist. Über einen Wechselrichter kann dann Strom ins Netz gespeist werden.

Dem entgegen steht die Meinung, ein oszillierendes Lineargenerator-System mit ungefähr 1 kW elektrischer Leistung in Kopplung mit einer Sterling-Maschine würde die bestmögliche Topologie für Mikro-KWK darstellen [29]. Analysiert man den vorgestellten Entwurf kommt man zu dem Ergebnis, dass auch dieser nur auf Erfahrungswerten basiert. Beide Ansätze bleiben den gegenseitigen Nachweis der besseren Effizienz oder anderer relevanter Vorteile schuldig und grenzen sich weiterhin nicht nach objektiven Gesichtspunkten gegenüber anderen Topologien [4] ab.

Es ist daher dringend erforderlich, ein Softwareprodukt zur Verfügung zu stellen, das unter Anwendung der vorgestellten Entwurfsmethode, in der Lage ist, Topologien auf oberster Hierarchieebene mit möglichst geringem Modellierungsaufwand miteinander abzugleichen und mit einem dem Ergebnis angemessenen analytischen Entwurfs- und Nachrechenanteil zu unterlegen. „Angemessen“ bezieht sich dabei allgemein auf

<sup>4</sup>Auf Grundlage von Überschlagsrechnungen schlägt der Erfinder 20 cm Hub und 14 Hz Repe-  
tiefrequenz vor, um eine elektrische Leistung von 6 kW für ein Mehrfamilienhaus erzeugen zu  
können.

die zuvor bereits erläuterten Gesichtspunkte. Die nachfolgende Erörterung mit Beispielen aus dem Elektromaschinenbau bietet einen Überblick über die Vielzahl der Variationsmöglichkeiten.

Wesentliche Systemunterschiede ergeben sich bereits aus der Frage, welche Bewegungsformen miteinander kombiniert werden [82]. Dazu könnte ein Motor (rotierender oder linearer Bauform) entweder auf einen rotierenden Generator oder mittels Pleuel auf einen Lineargenerator arbeiten. Derzeit besteht generell bei Systementwürfen der Trend zur Vollintegration (vgl. [156]), was im vorliegenden Fall einer kombinierten Ausführung von Antrieb und Generator entspricht. Daraus ergeben sich jedoch weitere Fragen aus dem Bereich der Konstruktion (Festigkeit) und thermischen Analyse [158].

Selbst bei Festlegung auf das Linearprinzip bleiben immer noch zahlreiche Variationen. Die Ausführungsform (Gleichstrom-, Induktions-, Reluktanz-, Synchronmaschine) des Generators selbst kann auf verschiedenen Prinzipien basieren<sup>5</sup>. Bei der Betriebsart wiederum kann man allgemein unterscheiden zwischen einem langsamen repetierenden Betrieb mit langem Hub und einem oszillierenden Betrieb mit mechanischen und/oder Gasfedern. Bohreinrichtungen beispielsweise werden als Resonator mit Hüben von einigen Millimetern bis höchstens einigen Zentimetern ausgeführt [67, 148], Wellenkraftwerke hingegen, bedingt durch die Anregung, mit Hüben von einem Meter und mehr [144].

So kann festgehalten werden, dass die unterschiedlichen Arbeiten wichtige Ansätze zu Teilaspekten der jeweiligen Systeme liefern, die ganzheitliche Betrachtung mit nachvollziehbarer Entscheidung für eine Konfiguration aber ausbleibt. Diese Arbeit leistet einen Beitrag zu einer zukünftigen, ganzheitlichen Methode, muss sich aber auf grundlegende Fragen zur Systembeschreibung beschränken. Diese Einschränkung ist notwendig, da, wie vorstehende Übersicht zeigt, ansonsten diverse Topologien mit unterschiedlichsten Einflüssen zu modellieren wären. Dies kann erst nach einer generellen Sicherstellung der erfolgreichen Anwendung der Methode geschehen. Hierzu wird an Hand des neuen Patents [132] diskutiert, in welcher Form möglichst abstrakt das Systemverhalten nachgebildet werden kann. Weiter wird die Möglichkeit der Festlegung von Anforderungen für die Komponente Lineargenerator erläutert und dazu ein automatisierter Entwurf mit analytischer Nachrechnung erstellt, um zu zeigen, dass oben skizziertes Vorgehen praktikabel ist. Zudem wird überprüft, wie das Vorgehen durch einen Optimierungsalgorithmus unterstützt werden kann. Damit wird die gesamte Analyse dahingehend vereinfacht, dass die Ermittlung der optimalen Topologie zunächst nicht erfolgen muss und sich die Arbeit ausschließlich auf die Beschreibung der Komponenten und speziell auf die Optimierbarkeit des Systementwurfs konzentrieren kann.

---

<sup>5</sup>Eine spezielle Übersicht über Ausführungsformen von Linearantrieben bietet Chevallier [24].



## 1.5. Automatisierter Entwurf und Optimierung

Das bereits im vorangehenden Abschnitt dargelegte Vorgehen im Rahmen dieser Arbeit zeigt Abb. 1.4. Die hellgrau hinterlegten Felder stellen dabei Arbeitsschritte dar, die hier nicht untersucht werden. Dazu gehören die vorgelagerte Systemauswahl, die erst das ausreichende Verständnis für die abstrakte Modellierung von Systemen voraussetzt und die Nachrechnung und Optimierung von Spezialproblemen der hier genauer betrachteten Komponente. Aus Sicht des Elektromaschinenbaus sind der Entwurf und die automatisierte Optimierung der Komponente Generator besonders interessant. Für diesen erfolgt eine Einschränkung der Freiheitsgrade dahingehend, dass ausschließlich die zylinderförmige (tubulare) Ausführungsform mit Solenoid-Spulen Anwendung findet. Diese Bauform bietet die höchste Kraftdichte [150], was als Auswahlkriterium für eine kompakte Anlage eine sinnvolle Einschränkung darstellt. Weiterhin wird die Regelung von der Untersuchung ausgenommen. Hierzu existieren Arbeiten, die auch für schnelle Lastwechsel geeignete Algorithmen anbieten [145]. Daher wird hier angenommen, dass im Rahmen der Modellierung eingesetzte dynamische Beschreibungen (z.B. Kennlinien) durch die Regelung erfüllt werden können.

Für das bestehende System aus Druckzylinder und Lineargenerator muss dennoch eine

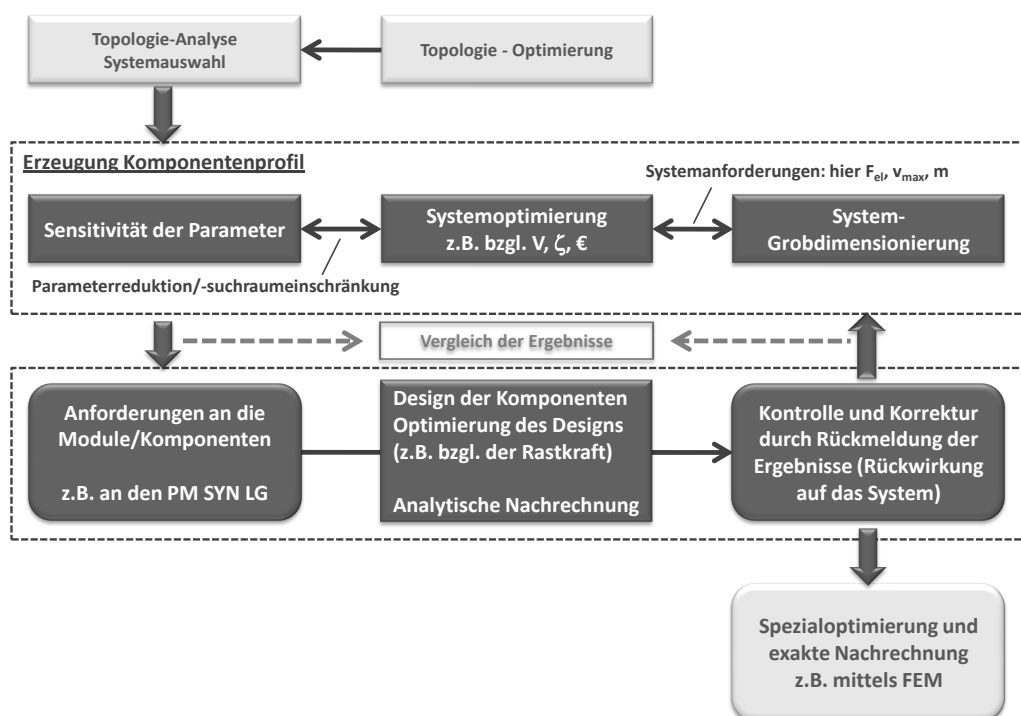


Abb. 1.4.: Optimierter Systementwurf [112]

einfache Beschreibung ermittelt werden, die dann mit Hilfe eines Optimierungsmoduls gesteuert wird. Ergebnis dieses Schrittes ist dann für jede Komponente ein Entwurfsprofil, dessen Erfüllung zu einem insgesamt für den Nutzer optimalen System beiträgt. Um eine zuverlässige Abschätzung des Systems zu gewährleisten, erfolgt eine Kopplung des Modells an einen Grobentwurf. Dieser muss auf diejenige notwendige Anzahl an Parametern reduziert werden, die das dynamische Verhalten und die Entwurfsziele signifikant beeinflussen. Gängige Fragestellungen behandeln die Reduzierung von Kosten und die Erhöhung der Effizienz. Die erste Forderung korreliert, stark vereinfacht ausgedrückt, mit den eingesetzten Massen, die zweite mit der gewonnenen Energie. Der Optimierer ist zusätzlich in der Lage, relevante Einflussgrößen festzustellen und Parameter geringer Signifikanz von der weiteren Betrachtung auszunehmen oder den zulässigen Bereich für Parameter zu verändern.

Abhängig von Nutzervorgaben und Prioritäten kann es vor der Phase des Komponentenentwurfs erforderlich sein, aus einer Menge gleichwertig optimaler Profile ein bestimmtes auszuwählen. Die Dimensionierung der Komponenten muss im Ergebnis diese Bedingungen erfüllen. Die Überprüfung geschieht mit einer analytischen Nachrechnung, die schließlich die oben abstrakt modellierten dynamischen Zusammenhänge nachbildet. Systemrelevante geometrische und physikalische Eigenschaften können jedoch nach dem detaillierten Entwurf von den der Modellbildung zu Grunde gelegten Annahmen und Näherungen abweichen. Folglich ist eine Rückgabe ermittelter Einflussfaktoren wie beispielsweise der Masse an die nächsthöhere Ebene unerlässlich und mündet in einen iterativen Prozess. Wenn die Annahmen und Näherungen von hinreichender Qualität waren, darf sich das Systemverhalten nicht so wesentlich ändern, dass dadurch die Topologie in Frage gestellt wird. Ziel der analytischen Berechnungen muss es sein, eine so hohe Genauigkeit zu erzielen, dass spezielle Berechnungen, beispielsweise mit „finiten Elementen“ nur bestätigenden Charakter haben oder die Qualität der Komponente erhöhen (z.B. Reduzierung der Rastkräfte bei gleichem dynamischen Verhalten).

Neben der Erzeugung eines abstrakten Modells und automatisierten Entwurfs bedarf die erfolgreiche Anwendung des Vorgehens eines Optimierungsalgorithmus' zur Mini- oder Maximierung der mathematischen Beschreibung bestimmter Ziele. Bis in das neunte Jahrzehnt des vergangenen Jahrhunderts konzentrierte sich der Forschungsaufwand darauf, einen bestmöglichen Optimierungsalgorithmus zu finden, der neben schneller Konvergenz universelle Einsetzbarkeit gewährleistet. Die Entwicklung untergliedert sich dabei in gradientenbasierte Verfahren und global heuristische (stochastische) Verfahren. Mit steigender Komplexität der Systeme steigt auch die Schwierigkeit (bis hin zur Unmöglichkeit), Gradienten in analytischer Form zu ermitteln. Daher haben sich im Bereich technischer Fragestellungen aus dem Bereich der stochastischen Verfahren evolutionäre Strategien durchgesetzt, die in Anlehnung an Populationen und deren Verhalten oder Fortpflanzung einen Suchraum erkunden und auswerten. In der jüngeren Zeit beschäftigen sich die Ingenieurwissenschaften fast ausschließlich mit der Weiterentwicklung bestehender Verfahren und deren Anwendung auf bestimmte Probleme. Herausragende Neuentwicklungen aus den letzten zehn Jahren sind nicht

bekannt.

Genetische Algorithmen, eine Untergruppe der evolutionären Algorithmen, galten bisher als Mittel der Wahl für technische Optimierungsaufgaben<sup>6</sup>. Im Bereich elektrischer Antriebe erfolgt aber generell eine Kopplung mit FEM-Software, wie das Beispiel eines zylinderförmigen Linearantriebs zeigt [120]. Die Leistungsfähigkeit der Optimierung kommt dabei nicht zum Tragen, da die von der FEM verursachte lange Rechenzeit nur die Berücksichtigung ausgewählter Aspekte erlaubt. Teilweise erfolgt nicht einmal der objektive Vergleich verschiedener Kombinationen miteinander, da oftmals bereits eine Verbesserung gegenüber einem Ist-Stand als Optimierung bezeichnet wird [164]. Grundsätzliche Fragen lassen sich nur durch Einbindung analytischer Modelle beantworten.

Insgesamt zeigt sich auch eine wesentliche Schwachstelle der genetischen Algorithmen. Eine Vielzahl von Parametern, deren Zusammenwirken bisher nicht verbindlich beschrieben wurde, entscheidet über den Erfolg der Optimierung und macht die Handhabung schwierig. Darüber hinaus hängt die Konvergenzgeschwindigkeit in hohem Maße davon ab, welcher Anspruch an die Zuverlässigkeit des Optimums als ein globales gestellt wird. Mit diesen Nachteilen beschäftigt sich Mütze in neueren Arbeiten [106, 107]. Sie schlägt vor, Modelle mathematisch zu analysieren und das Gesamtverhalten durch eine konvexe Funktion nachzubilden. Dieses Vorgehen ist als Approximation bekannt und galt bisher als wenig geeignet für komplexe Optimierungen, da für eine genaue Approximation aufwändige Nachrechnungen und Vergleiche notwendig sind. Der Vorteil einer konvexen Funktion ist aber, dass bei hinreichend genauer Näherung das absolute Extremum einfach bestimmbar ist und in der Nähe des globalen Optimums des komplexen Modells liegt. Der ermittelte Näherungswert könnte dann der Startwert einer nachgelagerten stochastischen oder deterministischen Optimierung sein. Neben der beschleunigten Konvergenz könnte damit theoretisch sichergestellt werden, das globale Optimum zu finden. Die Arbeiten konzentrieren sich aber auf mathematische Manipulationen und Transformationen am Modell des magnetischen Kreises eines BLDC-Antriebs. Das Fazit weist darauf hin, dass bestimmte vorgestellte Methoden jedoch nachteilige Auswirkungen für Konvergenz und Stabilität haben. Solange durch die Disziplin der Mathematik keine allgemein anerkannten Methoden zur Umwandlung komplexer Systemmodelle in konvexe Funktionen verfügbar gemacht werden, kann dieses Vorgehen keine verlässliche Grundlage für einen automatisierten Systementwurf darstellen. Für eine allgemeine Verwendbarkeit erscheint der Aspekt besonders wichtig, dass für die konvexe Funktion zwingend nachgewiesen werden muss, dass deren Extremwert näher am globalen Optimum des Modells als an jeglichem anderen lokalen Optimum liegt.

Eine besonders moderne und gleichzeitig die neueste eigenständige Entwicklung, die vor 25 Jahren ihren Anfang hatte, stellt die Particle Swarm Optimierung (PSO) dar. Diese

---

<sup>6</sup>Umfassende Nachweise für die Dominanz der genetischen Algorithmen sind bei Mütze [106] sowie in Abschnitt 3 nachzulesen.

simuliert das Verhalten von Schwärmen und bietet eine Reihe von Vorteilen gegenüber den komplexen genetischen Algorithmen [163]. Vornehmlich sind die Einfachheit des Basis-Algorithmus, dessen Justierung mit geringer Parameterzahl erfolgt, die damit verbundene einfache Implementierung und nahezu universelle Einsetzbarkeit sowie die bisher unübertroffene Konvergenzgeschwindigkeit im Vergleich mit anderen heuristischen Verfahren zu nennen. Diese positiven Eigenschaften führen zu einer zunehmenden Verbreitung der Methode, die auch in verschiedenen Verbesserungen der Basisvorschrift und einer Vielzahl von Hybridisierungen Ausdruck findet. Leistungsvergleiche mit genetischen Algorithmen auf Basis von Standardproblemen zeigen weiteres Potential, wodurch sich die PSO als Standardverfahren dauerhaft etablieren könnte (vgl. Abschnitt 3). Darauf deutet auch der erfolgreiche Einsatz für die Auslegung und Optimierung von Antriebssträngen von Hybridfahrzeugen hin [3], handelt es sich bei der Automobilindustrie schließlich um einen bedeutenden Zweig unter hohem Erfolgsdruck. Die einfache Anwendbarkeit zeigt sich so auch an weiteren Beispielen, wie der Optimierung von Antrieben für Kühlapparate [131] oder der Untersuchung verschiedener Wicklungsarten und Materialeigenschaften eines rotierenden Motors mit Oberflächenmagneten [38, 37].

Die PSO kommt aber auch im Elektromaschinenbau und der Mechatronik nur für spezielle Optimierungsfragen von Komponenten oder Teilaspekten zur Anwendung. Überwiegend erfolgt eine Erweiterung des Verständnisses für das Verhalten des Algorithmus'. Beispielsweise spielt das Verhalten der Parameter am Rand des Suchraums eine wichtige Rolle und war daher kürzlich Gegenstand einer Untersuchung [58]. Auf Grund des umfangreichen Potentials der PSO soll in dieser Arbeit die Anwendbarkeit für den automatisierten Entwurf von Systemen und elektromechanischen Wandlern untersucht werden. Dazu wird der Algorithmus in die oben beschriebene Methode eingebunden.

## 1.6. Ziele der Arbeit und deren Abhandlung

In den vorstehenden Abschnitten wird die Notwendigkeit für die Entwicklung eines umfassenden (ganzheitlichen) Softwaretools dargelegt, mit dem automatisiert eine Topologieauswahl für ein zukünftiges System durchführbar ist und mit dem anschließend die Komponenten so ausgelegt werden, dass die zuvor ermittelten Rahmenbedingungen zur Erfüllung der Systemziele eingehalten werden. Hierzu wird aufgeführt, welche Teilschritte erledigt werden müssen, um das innovative Vorgehen zur Anwendung bringen zu können. Diese Arbeit hat die Bereitstellung und Untersuchung einiger Werkzeuge zum Gegenstand, die zur Durchführung der Optimierung und des analytischen Teils in einem gesamten Tool unerlässlich sind.

Die Arbeit orientiert sich am Beispiel der zuvor beschriebenen KWK-Anlage [132] mit dem Schwerpunkt: Entwurf und Optimierung des Lineargenerators. Die daraus

festgelegten Themen lassen sich folgendermaßen formulieren:

- Beschreibung des Entwurfs und der Nachrechnung der Teilkomponente Lineargenerator zur Nutzbarmachung durch einen Optimierer
- Analyse und Diskussion der Particle-Swarm-Optimierung sowie bekannter und sinnvoller Erweiterungen und Modifikationen hinsichtlich des Einsatzes beim Entwurf eines Systems
- Entwurf einer abstrakten Modellierung des KWK-Systems aus der Perspektive des Elektromaschinenbaus
- Zusammenführung von Modell, analytischem Entwurf und analytischer Nachrechnung und Optimierungsalgorithmus.

Deren Bearbeitung, die graphisch in Abbildung 1.4 zusammengefasst ist, gestaltet sich innerhalb dieser Arbeit wie folgt:

Das anschließende Kapitel 2 geht auf den automatisierten Entwurf des Lineargenerators ein. Bekannte Schritte und Methoden werden dabei nicht eingehend behandelt. Es erfolgt vielmehr eine Beschreibung des methodischen, geordneten Vorgehens und der Kopplung zur Optimierung. Besondere Vorgänge, die an anderer Stelle (besonders für Linearmaschinen) nicht hinreichend beschrieben sind, wie die Dimensionierung der Magnetanordnung oder im Besonderen die Ermittlung von Rastkräften, werden hervorgehoben und ausführlich dargestellt. Das Kapitel wird durch die Ermittlung der Systemgleichungen aus der Strombelagstheorie abgeschlossen. Hierbei gilt wieder, dass Unterschiede und Übereinstimmungen zu rotierenden Maschinen herausgearbeitet werden. Die mathematischen Herleitungen stellen in großen Teilen ein Analogon zur Nachrechnung rotierender Maschinen dar, weshalb sich die vollständigen Formeln im Anhang der Arbeit wiederfinden.

Das anschließende Kapitel 3 beinhaltet eine umfassende Diskussion bekannter Optimierungsverfahren und zeigt objektive Gründe auf, die für die Verwendung der PSO innerhalb dieser Arbeit sprechen. Anschließend erfolgt die detaillierte Beschreibung der PSO und bekannter Veränderungen, die dann um weitere geeignete Modifikationen ergänzt werden. Besonderes Augenmerk wird auf die Kommunikation der Partikel innerhalb des Schwarms gerichtet, da sie in großem Maß zur Stabilität, der Konvergenz und der Suchraumabdeckung beiträgt. Weiter folgt eine Betrachtung der Einbindung mehrerer Zielkriterien. Darin enthalten ist die Aufstellung einer geeigneten Zielfunktion, wodurch bekannte Nachteile der vielfach verwendeten gewichteten Summe vermieden werden.

Kapitel 4 bietet im Anschluss eine einfache mathematische Funktionsbeschreibung des Systems durch Differentialgleichungen für die mechanische Kopplung und stellt die Kombination mit einer Beschreibung der Anregung für einen geregelten Fall mittels Kennlinien dar. Die gesamte Beschreibung wird nur durch wenige Parameter

bestimmt, die das Systemverhalten bestimmen und eine Abschätzung des Bauvolumens ermöglichen. In diesem Abschnitt erfolgt für den Generator die Ableitung einer Vorschrift zur Übertragung bekannten Wissens von rotierenden Maschinen auf Linearmaschinen. In diesem Kapitel erfolgt auch die Kombination von Optimierer mit den zuvor beschriebenen analytischen Zusammenhängen. Damit können die im Rahmen der Arbeit gewonnen Erkenntnisse in Form eines eigens für diese Arbeit generierten Computerprogramms getestet werden. Dabei erfolgt im speziellen Fall die Optimierung des zuvor beschriebenen Linearsystems hinsichtlich größtmöglicher Ausnutzung. Als zweites Zielkriterium wird die Masse des Systems betrachtet, die aus ökonomischen Gründen klein sein soll. Für die Optimierung wird das Modell für das System auf wenige Freiheitsgrade beschränkt. Dabei werden diejenigen Parameter gewählt, die das System signifikant beeinflussen. Dabei finden auch die im vorhergehenden Kapitel beschriebenen Mechanismen zur Suchraumreduzierung Anwendung. Damit können auch Systeme effizient optimiert werden, für die noch keine Kenntnis über signifikante Parameter vorliegen. Im Anschluss an die Generierung einer Parameterwolke für die weitere Eingabe in den Entwurf die Nachrechnung erfolgt eine subjektive Auswahl eines Testpunktes, für den beispielhaft ein computergestützter Entwurf mit integrierter Minimierung der Rastkräfte durchgeführt wird. Die Ergebnisse werden mit den Anforderungen und dem Eingangsparameten verglichen, um festzustellen, ob das einfache Eingangsmodell geeignet ist, um alle erforderlichen Parameter für einen optimalen Entwurf zu liefern.

Im abschließenden Kapitel erfolgt eine Zusammenfassung der Erkenntnisse und eine Darstellung sinnvoller weiterer Fragestellungen.

Insgesamt bietet die Arbeit einen Einstieg in die analytische Beschreibung mechatronischer (hier als Verband von Mechanik und elektrischer Maschine verstanden) Systeme und beschäftigt sich eingehend mit der Auslegung und Nachrechnung von PMLSYN. Ebenso bietet diese Arbeit einen umfassenden Beitrag zur Betrachtung von Optimierungsmethoden und geht besonders auf die Vernetzung von Partikeln im Rahmen der PSO ein. Die wichtigen Beiträge der Arbeit sowie eine Zusammenstellung empfohlener Erweiterungen und Folgearbeiten werden im die Arbeit abschließenden Resümee zusammengefasst.

## 2. Entwurf und Nachrechnung

### 2.1. Stand der Technik

Der Entwurf und die Nachrechnung elektromechanischer Wandler sind in diversen Arbeiten und Büchern umfassend dargestellt. Aus diesem Grund wird zunächst der Stand der Technik wiedergegeben, bevor diejenigen Aspekte dieser Arbeit, die sich auf Linearmaschinen und die Entwurfsautomatisierung beziehen und sich vom bekannten Vorgehen abheben, erörtert werden.

Der Begriff Linearantrieb erscheint erstmals 1851 in Form eines US-Patents (Antrieb von Lokomotiven mittels Solenoid-Linearmotor mit Schubkurbel) [116], spielt aber bis in die heutige Zeit, trotz Einsatz als Antriebskonzept für den Transrapid, eine untergeordnete Rolle im Bereich elektrischer Maschinen. Bis kurz nach 1970 wurden Linearantriebe in Solenoid-Bauform ausgeführt. Die Spulen waren anfangs ausschließlich Luftspulen und in axialer Richtung meistens fein verteilt angeordnet (vgl. [135]). Ab etwa 1970 verbreitete sich die Ausführung durch leitfähiges Material getrennter Spulen und erstmal erfolgte auch der Einsatz von Verbundwerkstoffen im Stator [108, 160]. Jedoch erst mit der Verbesserung magnetisch leitfähiger Verbundwerkstoffen und Dauermagneten erfolgte seit der Jahrhundertwende eine zunehmende Verbreitung der Linearantriebe.

Von den neueren Entwicklungen sind für diese Arbeit sogenannte Flachbett- bzw. Einzelkam-/Doppelkammerantriebe, wie sie in großem Stil von z.B. Siemens Linear Motor Systems, München, für Positionier- und Transportsysteme hergestellt oder von der RWTH Aachen entworfen werden, ohne Relevanz (vgl. auch [17, 44, 124]). Die Entwicklung von Solenoid-Maschinen hat sich vornehmlich auf die Erzielung hoher Kräfte gerichtet. Die Firma Oswald kann als repräsentativer Hersteller solcher Antriebe als Induktionsmaschine, elektrisch-erregte Synchronmaschine und auch PMSYN genannt werden [113, 114]. Anwendung finden solche Maschinen als Motor beispielsweise in Pressen oder Aufzügen [138]. Daneben werden besonders für die Energiegewinnung oszillierende Systeme mit Gasfedern entwickelt und als Prototypen für Wellenkraftwerke in unterschiedlichen Ausführungen zum Einsatz gebracht [19, 20, 104].

Der kurze Überblick zeigt die Vielfalt der verfügbaren und bekannten Ausführungsformen. Obwohl das grundsätzliche Vorgehen für den Entwurf solcher Antriebe in allen Fällen nahezu identisch ist, sind keine allgemeinen Auslegungsvorschriften und Vorgehensmuster bekannt, wie sie für rotierende Maschinen vorliegen. Dennoch sind

wesentliche Arbeiten aus dem Bereich rotierender Maschinen zumindest auszugsweise relevant und übertragbar. Zusätzlich sind einige Arbeiten bekannt, die sich speziell mit der Dimensionierung von Linearmaschinen beschäftigen und dabei wenigstens Einzelaspekte allgemein beschreiben.

Für rotierende Maschinen hat Meyer [96, 97] den Entwurf einer elektrisch erregten Vollpol-Synchronmaschine chronologisch erarbeitet und in eine automatisierbare Form gebracht. Dieses Vorgehen kann grundsätzlich auf Linearmaschinen übertragen werden, entsprechende Formeln müssen jedoch erstellt werden. Zusätzlich wird die Nachrechnung der Maschine mit Hilfe von automatisch erzeugten Reluktanznetzwerken beschrieben. Diese kommt auch bei Berardinelli für die Bestimmung der Luftspaltinduktion zum Einsatz [11]. Neuartig ist dort die Vorstellung einer positionsabhängigen Beschreibung. Die Netzwerkmethodik wird hier nicht verwendet. Soll diese Arbeit neben den analytischen Methoden um eine exakte Bestimmung der Luftspaltinduktion erweitert werden, können beide Arbeiten aber als Grundlage für ein entsprechendes Vorgehen dienen.

Die grundlegende Berechnung von Linearmotoren in planarer Bauweise, basierend auf der Strombelaststheorie, stellt Hellinger [57] vor. Diese muss jedoch genauso wie die Strombelaststheorie für rotierende Maschinen [60] für den vorliegenden Fall zylinderförmiger Linearmaschinen geprüft und angepasst werden. Zusätzlich stellt Hellinger ein umfangreiches Berechnungsverfahren für Luftspaltleitwerte vor. Die Arbeit von Ausderau [6] beschränkt sich auf die Entwicklung eines zweiphasigen PMSYN-Motors für kleine Kräfte. Ebenso werden ausschließlich integrierte Magnete (axial magnetisiert) berücksichtigt, deren Dimensionierung FEM-gestützt erfolgt. Die Richtschnur von Boldea [14] zum Entwurf von Linear bietet lediglich einfache Formeln zur Grobdimensionierung, die der Kombination mit FEM-Software bedarf, um wesentliche Parameter berechnen zu können, und kann hier daher nicht verwendet werden.

Für die Nachrechnung bietet Bianchi [12] einfache Berechnungsansätze für den magnetischen Kreis mit Oberflächenmagneten an. Diese müssen jedoch auf Grund ihrer Einfachheit in jedem Fall durch FEM überprüft werden und sind für die Ermittlung dynamischer Vorgänge ungeeignet. Weitere Arbeiten gestalten sich ähnlich und verwenden ausschließlich FEM zur Optimierung einzelner Kriterien wie Schubkraft oder Rastkraft [81, 147]. Die Beschreibung der elektromagnetischen Felder einer einseitigen PMSYN-Linearmaschine von Deng [34] ist umfassend, beschränkt sich jedoch auf Oberflächenmagnete und muss auf die vorliegende Bauart angepasst werden. Wang, Jewell und Howe [154, 153, 155] beschäftigen sich in verschiedenen Arbeiten mit der Nachrechnung zylindrischer Linearantriebe. Sie leiten hierzu eine Beschreibung auf Grundlage des magnetischen Vektorpotentials her, die es auch ermöglicht, Sättigungseffekte zu berücksichtigen. An Hand ausgewählter Beispiele zeigen sie die Einflüsse der Magnet- und Stator Durchmesser auf die Kraftdichte im Zusammenspiel mit Polteilung und Polbedeckung. Die Arbeiten können als Grundlage für eine detaillierte, analytische Beschreibung der Luftspaltflussdichte für verschiedene Magnetkonfigurationen herange-



zogen werden. Weitere Betrachtungen und Optimierungen beschränken sich jedoch auf ausgewählte Parameter für Oberflächenmagnete.

Rinderknecht [127] präsentiert zeitgleich zu dieser Arbeit entstandene Ergebnisse zur Strombelagstheorie zylinderförmiger Linearmaschinen mit Oberflächenmagneten. Die Ergebnisse der vollständigen Beschreibung, wie sie in dieser Arbeit zusammen mit einer Ersatzdurchflutung für Permanentmagnete und dynamischen Systemgleichungen erfolgt, zeigt jedoch erstmals eine Veröffentlichung des Autors [115]. Die vollständige Herleitung ist im Anhang dieser Arbeit nachzulesen. Die wesentlichen Schritte und Ergebnisse sind in den nachfolgenden Abschnitten zusammengestellt.

Neben unzähligen Veröffentlichungen bietet entsprechende Fachliteratur tiefgehende mathematische Beschreibungen zur Nachrechnung und Theorie elektrischer Maschinen. Beispielhaft sei die Reihe von Müller, Vogt und Ponick genannt [101, 102, 100]. Für die Analyse des dynamischen Verhaltens des vorliegenden PMSYNLG ist es sinnvoll, die dort und oben erwähnte Strombelagstheorie für zylindrische Antriebe anzupassen und daraus die Systemgleichungen abzuleiten. Entsprechende detaillierte Betrachtungen zu Flussdichten und Induktivitäten bzw. Leitwerten können dann später entsprechend einfach modifiziert und zusätzlich integriert werden.

## 2.2. Bauformen und Begriffe

Die methodische Beschreibung des Entwurfs erfolgt beispielhaft für einen Polysolenoid-Drehstromantrieb, ausgeführt als Permanentmagnet-Synchronmaschine. Diese Maschinen weisen jedoch gegenüber rotierenden Maschinen deutliche Unterschiede auf. Daher ist es sinnvoll, vor der Beschreibung der wichtigsten Entwurfsschritte und der Nachrechnung mögliche Bauformen und wichtige geometrische Besonderheiten zu beschreiben. Allgemein bekannte Begrifflichkeiten jedoch (z.B. Sehnung, Zonung) sind von rotierenden Maschinen bekannt und bedürfen keiner zusätzlichen Erläuterung.

Der erwähnte Maschinentyp besteht aus einem Stator, in dem die Wicklung unterge-

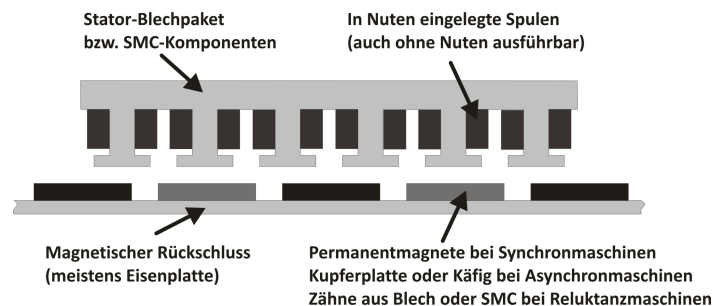


Abb. 2.1.: Komponenten des Linearantriebs

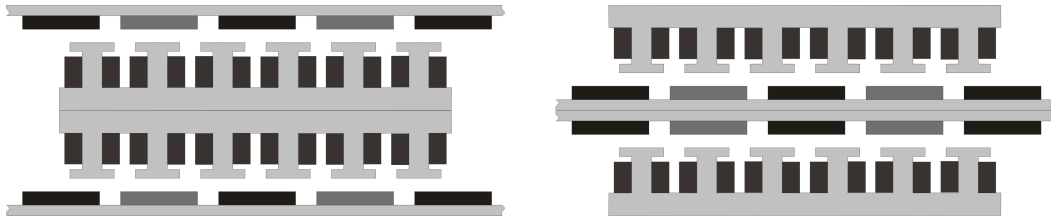


Abb. 2.2.: Linearmotor mit Kurzstator; links als Außenläufer rechts als Innenläufer

bracht ist, sowie einem Läufer, der im Wesentlichen aus Permanentmagneten besteht, die je nach Ausführung durch magnetisch leitfähiges Material (Rückschluss) miteinander verbunden sein können. Grundsätzlich kann eine Linearmaschine durch Auftrennen einer rotierenden Maschine und Abwickeln um deren Drehachse gebildet werden. Damit entsteht eine einseitige Linearmaschine (Kammform/Flachbett). Abb. 2.2 zeigt das Ergebnis. Führt man nun eine rotatorische Transformation des Schnitts um die lineare Bewegungsachse aus, ergibt sich der zylinderförmiger Antrieb.

Die Ausführung kann nun in Innenläufer und Außenläufer unterschieden werden. Je nach Länge des Stators spricht man von einem Kurzstator, wenn der Läuferteil länger ist, oder von einem Langstator. Unabhängig von der Ausführungsform kann nochmals unterteilt werden, und zwar in solche, bei denen der Stator den Translator bildet und solche, bei denen diese Aufgabe dem Läufer zuteil wird. Hieraus bildet sich eine Vielzahl von Kombinationsmöglichkeiten und Peripherie, die prinzipiell bei einer ausführlichen Systemanalyse zu berücksichtigen sind. Praktisch besitzen Kurzstatoren mit langem Verfahrensweg und gleichermaßen Außenläufer besonders bei hohen dynamischen Anforderungen generell untergeordnete Relevanz. Der Hauptgrund liegt in den notwendigen Schleppketten für die Stromversorgung und Kühlung. Daher werden alle hier gezeigten Berechnungen für einen Kurzstator mit bewegtem Innenläufer durchgeführt. Sämtliche Vorgehensweisen sind jedoch leicht auf die anderen Bauformen zu übertragen.

Die im Stator eingelegte Wicklung besteht aus einer beliebigen Anordnung von Spulen. Diese sind als Formspulen ausgeführt und zu Solenoiden gewickelt. Die Spulen erzeugen durch bekannte Verschaltungsmöglichkeiten zu Strängen ein magnetisches Drehfeld, das hier wegen seiner linearen Fortbewegung als Wanderfeld bezeichnet wird. Für gewöhnlich erfolgt eine Einbettung der Spulen in Nuten (vgl. Abb. 2.3). Eisenlose Ausführungen (Verzicht auf Statorzähe), die in der Anfangszeit der Solenoidmaschinen in Form von Asynchronmaschinen zum Einsatz kamen, sind heute kaum noch zu finden.

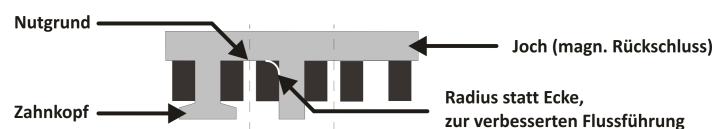


Abb. 2.3.: Nutformen des Linearantriebs

Da durch Zähne jedoch Rastkräfte hervorgerufen werden, könnte die eisenlose Variante durchaus für manche Anwendung interessant sein und ist im Einzelfall zu überprüfen. Eisenlose Antriebe weisen zudem den Vorteil auf, dass das Joch aus Blechringen mit axialer Schichtung gebildet werden kann. Sind Zähne gefordert, muss auf SMC (Soft Magnetic Composit)-Werkstoffe zurückgegriffen werden, aus denen sich entsprechende Profile formen lassen, die in der Produktion links und rechts der Spulen angeordnet werden.

Neben der generell hervorragenden Ausnutzung des Bauvolumens bietet die Bauform zwei weitere erhebliche Vorteile gegenüber allen anderen Varianten. Zum einen bedarf es für die Verbindung der Wicklungen jeweils nur eines kurzen Drahtstücks, das nicht zur Kraftbildung beiträgt. Wickelköpfe tauchen daher nicht auf, die Verbindungsstücke sind vernachlässigbar. Zum anderen ist es möglich, jegliche Verschaltung mit geringem Aufwand zu erzeugen. Da die Spulen zudem als Formspulen in die entsprechenden Formstücke des Stators eingelegt werden, kann eine eisenbehaftete Ausführung vorteilhaft mit Zahnköpfen versehen werden. Das Wickelschema sollte als grundlegende Variationsgröße für den Entwurf dienen.

Für den Läufer gibt es drei prinzipielle Magnetisierungsprinzipien bzw. -anordnungen. Weitere Formen verstehen sich als spezielle Ausprägung dieser Grundformen. Die Abwägung von Vor- und Nachteilen dieser Anordnungen stellt zusammen mit der Bewertung der Wicklung die größte Herausforderung für die Optimierung des Entwurfs dar. Diese entsteht durch die Vielzahl an Variationsmöglichkeiten, die in analytischer Form zu beschreiben sind, um effizient vom Optimierer verarbeitet werden zu können.

Als Oberflächenmagnete bezeichnet man hier Magnete mit radialer Magnetisierung, deren Polarität sich in axialer Richtung abwechselt. Einen entsprechenden Schnitt (Ebene durch  $l_{ax} - r$ ) zeigt Abb. 2.4 links. Die Anbringung erfolgt auf einem magnetischen Rückschluss. Für den vorliegenden Maschinentyp müssen einzelne Schalen auf dem Rückschluss angebracht oder ein durchgängiger, von innen nach außen magnetisierter Ring gefertigt werden. Je nach mechanischer Beanspruchung (Scherkräfte, Ruck) müssen die Magnete versenkt werden. Als Material für den Rückschluss kommt

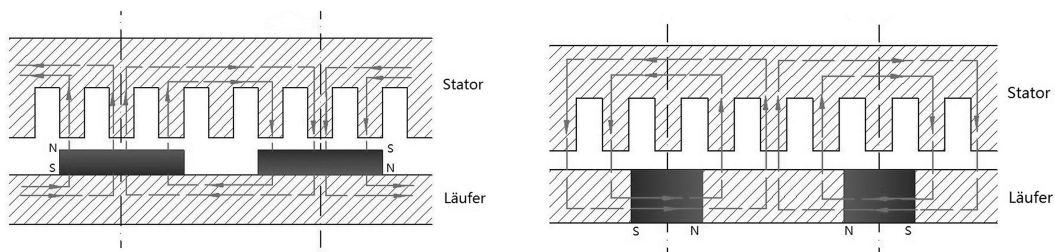


Abb. 2.4.: Prinzipielle Anordnung von radial und axial magnetisierten Permanentmagneten; die Pfade zeigen den Hauptfluss.

magnetisch gut leitfähiges Eisen oder SMC-Material in Frage. Das Material der Magnete bestimmt sich aus der geforderten Flussdichte, dem zulässigen Bauraum und den mechanischen und thermischen Belastungen. Die Wahl der Materialien stellt eine sinnvolle Eingriffsgröße (Parameter) für die Optimierung des Entwurfs dar.

Die Verwendung axial magnetisierter Magnete (Abb. 2.4 re.) geht mit einem geringeren Produktionsaufwand einher. Die Magnete können als Scheiben ausgeführt und in einem Stück gefertigt werden. Als Distanzstücke kommen Eisen oder SMC-Formteile zum Einsatz. Diese werden so weit möglich auf einer magnetisch nicht leitfähigen Welle montiert. Die Ausführung ohne Welle birgt erhebliche Probleme, da die Festigkeit nur durch Kleben oder Aufschrumpfen eines Rohres hergestellt wird. Die Anordnung erhält die Bezeichnung „integrierte Magnete“. Die Dimensionierung der Magnete und der Distanzstücke bestimmt wesentlich die Form der Luftspaltinduktion. Bei ungeeigneter Auslegung ergeben sich erhebliche Einsackungen im Bereich der Distanzstücke. Ausführungen hierzu finden sich im Abschnitt 2.4.1.

Die dritte Magnetanordnung, das Halbach-Array gemäß Abb. 2.5, besteht aus radial und axial magnetisierten Magneten in entsprechend abwechselnder Reihenfolge. Dadurch wird der Fluss auf der vom Luftspalt abgewandten Seite weitgehend unterdrückt und im Luftspalt verstärkt, wodurch sich bei gleicher Masse gegenüber Oberflächenmagneten ein Kraftzuwachs von 14% hervorrufen lässt [87]. Die Produktion gestaltet sich aufwendig, da es bisher in der Serienproduktion nicht möglich ist, solch eine Anordnung aus einem Stück zu fertigen. Die Dimensionierung ist anspruchsvoll und führt unter Umständen zu erheblichen Rastkräften, wenn Einsackungen im Bereich der radialen Magnete vernachlässigt werden (vgl. Abschnitt 2.4.1). Neben entsprechender Dimensionierung, die für die Nutzkraft nicht zwangsläufig im selben Maß ideal ist, kann durch Einsatz schräg magnetisierter Zwischenstücke eine nahezu sinusförmige Induktionsverteilung erreicht werden [165]. Insgesamt steigen dadurch jedoch der Aufwand und die Kosten für die Produktion, die hier nicht analytisch berücksichtigt werden.

Diese Arbeit lässt den Einfluss mechanischer und thermischer Beanspruchung unberücksichtigt. Dies spielt für die Erörterung der Methodik keine Rolle. Für die Optimierung

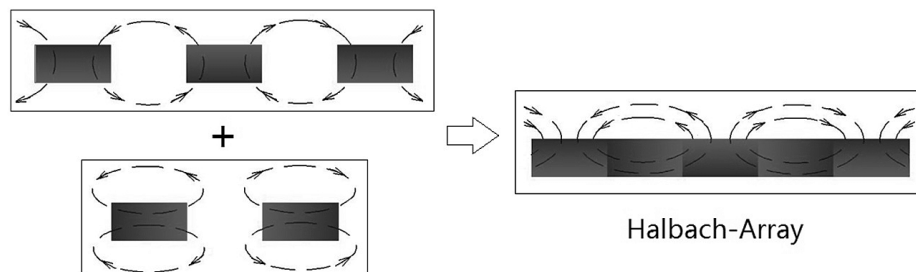


Abb. 2.5.: Prinzipielle Anordnung eines Halbach-Permanentmagnet-Arrays.

eines speziellen Antriebs oder Systems hingegen sind diese Einflüsse wesentlich. Hohe Temperaturen wirken sich auf viele Bauteile nachteilig aus. Der Wicklungswiderstand wächst mit der Temperatur erheblich ( $\Delta T = 100K$  bedingt  $\Delta R$  von 40%) und die magnetische Leitfähigkeit weichmagnetischer Werkstoffe nimmt ab. Der Produktkatalog der Firma Tridelta GmbH zeigt Kennlinien der Flussdichte in Abhängigkeit von der Temperatur. Diese sinkt bei einer Temperaturerhöhung um 80K um ca. 20%. Ähnliche Zusammenhänge gelten für andere Hersteller. Folglich müssen für Anwendungen mit hohen Temperaturen erhebliche Reserven bereitgestellt werden. Die Nachrechnung muss später um die entsprechenden nichtlinearen Zusammenhänge erweitert werden. Ebenso muss bei Permanentmagneten die thermische Stabilität berücksichtigt werden. Die Arbeitsbereiche verkleinern sich bei steigenden Temperaturen. Damit ist einerseits die Gefahr der dauerhaften Schädigung verbunden, andererseits ergeben sich Kräfteinbußen. Mechanische Beanspruchungen rühren zumeist von Scherlast durch auftretende Beschleunigungen (Ruck) oder von bei der Welle auftretenden Durchbiegungen (u.a. Eigenmoden) her. Für eine umfassende Analyse ist darüber hinaus auch die Einbeziehung notwendiger Peripherie (z.B. Schleppketten, Umrichter) sinnvoll und erforderlich.

### 2.3. Wichtige Aspekte der Entwurfsautomatisierung

Zu Beginn dieses Kapitels wurde bereits umfassend auf bekannte Methoden für den Entwurf elektromechanischer Wandler und dessen Automatisierung hingewiesen. Hier sollen entsprechende Aspekte dargestellt werden, die noch nicht oder nicht ausreichend diskutiert wurden und methodisch relevant sind. Das prinzipielle Vorgehen beim Entwurf elektromechanischer Wandler gilt als bekannt.

Man geht nun zunächst davon aus, dass dem Entwurf nach Durchlauf einer noch zu entwickelnden Systemoptimierung (vgl. Kapitel 4) ein Anforderungsprofil zur Verfügung steht. Hauptabmessungen, Strombelag, Luftspaltflussdichte sowie Eckgeschwindigkeit und Eckkraft des Generators stellen dabei die Rahmendaten dar. Für die Optimierung muss nun ein Vorgehen festgelegt werden, mit dem es gelingt, im Rahmen dieser Vorgaben einen bestmöglichen Entwurf zu generieren. Dieser muss die gleichen Zielkriterien, wie in der Systemoptimierung vorgegeben, erfüllen.

Ein weitgehend autonomes Verhalten des Optimierers verlangt, dass sämtliche Entwurfsschritte nicht nur durchgeführt, sondern auch bewertet werden können. Besonders für den Wicklungsentwurf stellt dies jedoch eine extrem hohe Anforderung dar. Aus diesem Grund wird vorgeschlagen, dass der Optimierer für die Hauptabmessungen eine Unterteilung der axialen Länge vornimmt, so dass sich im Rahmen von sinnvoll vorzugebenden Konstruktionsgrenzen Zähne und Nuten ergeben. Diese werden mit vorgegebenen Basis-Wickelschemata oder automatisch generierten beliebigen Wicklungen befüllt. Anschließend erfolgt eine Analyse der Felderregerkurve, ohne bereits exakt die

Nut- und Statorgeometrie festlegen zu müssen. Die Festlegung erfolgt ungeachtet von Randeffekten an den Enden des Antriebs für die ermittelte axiale Länge.

Wie erwähnt, beginnt der Entwurf mit der Unterteilung der axialen Länge in Nuten und Zähne, die sich aus der verwendeten Wicklung bestimmt. Bekannte und bewährte Ausführungsformen sind bereits umfassend durch eine Vielzahl von Arbeiten beschrieben [7, 125, 126]. Die genannten Ausführungen und Regeln können dazu verwendet werden, den Wicklungsentwurf computergestützt durchzuführen. Eine entsprechende Methode beschreibt Meyer [96] für Ganzloch- und Bruchlochwicklungen.

ES ist üblich und sinnvoll das dynamische Verhalten durch Kennlinien zu beschreiben. Da im vorliegenden Fall das dynamische Verhalten des Systems durch Kraft und Geschwindigkeit geprägt werden, wovon wesentlich die gewonnene elektrische Energie abhängt, ist es nicht sinnvoll, beliebige Wicklungsanordnungen zu untersuchen. Mit der Wicklung muss es möglich sein, Ankerstell- und Feldschwächbereich darzustellen. Daher werden hier nur klassische Wicklungen verwendet. Abhängig vom Bauraum wird es nicht möglich sein, jegliche Wicklung in der berechneten axialen Länge unterzubringen. Damit reduziert sich bereits die Auswahl. Eine weitere Reduktion der Auswahl erfolgt hier durch die Suche nach Wicklungen mit stark ausgeprägter Arbeitswelle im Vergleich zu anderen harmonischen Anteilen. Hierzu ist eine Fourieranalyse der Wicklungen erforderlich. Natürlich sind ebenso andere Kriterien für die Wahl der Wicklung denkbar, für das methodische Vorgehen ist dies aber bedeutungslos. Die Auswahl reduziert sich weiterhin dadurch, dass auf Grund konstruktiver Grenzen Zähne und Nuten in ihren Abmessungen Untergrenzen unterworfen sind und folglich beliebig viele Spulen nicht innerhalb der Hauptabmessungen Platz finden. Weiterhin wird gefordert, dass die Wicklung mindestens zwei Pole ausprägt. Allerdings ist es zulässig, Wicklungen mit geringem axialen Platzbedarf mehrfach hintereinander anzuordnen.

Die maximale zur Verfügung stehende axiale Länge für die Nutflächen folgt aus dem jeweils gewählten Material. Dabei müssen verschiedene Materialien im Entwurf berücksichtigt werden, da mit diesen unterschiedliche Kosten, Gewichte und Abmessungen verbunden sind und schließlich die Zielkriterien beeinflussen. Die zur Verfügung stehenden Längen für Nuten und Zähne werden durch die untersuchten Wickelschemata aufgeteilt, wodurch die Nutteilungen entstehen. Wie erwähnt, sind entsprechende Konstruktionsgrenzen vorzugeben.

Für eine schnelle Abschätzung der mindestens notwendigen Zahnfläche verwendet man die im Anforderungsprofil festgelegte Luftspaltinduktion und die Sättigungsinduktion des Materials. Daraus ergibt sich unter der Annahme von Flusskonstanz das Nutteilung-Zahnbreitungsverhältnis  $k_{nz}$ .

$$A_{\delta} \cdot B_{\delta m} = A_{\delta} \cdot B_{zsätt} \leftrightarrow \tau_n \cdot B_{\delta, m} = b_z \cdot B_{zsätt}$$

$$k_{nz} = \frac{B_{zsätt}}{B_{\delta m}} = \frac{\tau_n}{b_z} \quad (2.1)$$

Die resultierende Zahnbreite reduziert sich noch auf Grund der Zahnentlastung [100]. Die Breite wird iterativ bestimmt, da sie aus der nichtlinearen Magnetisierungskennlinie des Statormaterials folgt. Die übliche Modellierung verwendet einen Zusammenhang auf Grundlage der tan-Funktion.

$$\begin{aligned}
 B_{z \text{ real}} &= B_{z \text{ sätt}} - \mu_0 \cdot H_z \frac{A_{\text{Luft}}}{A_z} \\
 B_z(H_z) &= \mu_0 \cdot H_z + \frac{2}{\pi} \cdot B_{z \text{ sätt}} \cdot \arctan \left( \frac{\pi \cdot (\mu_r - 1) \cdot \mu_0 \cdot H_z}{2 \cdot B_{z \text{ sätt}}} \right) \\
 k_{nz \text{ neu}} &= k_{nz \text{ alt}} \cdot \frac{B_{z \text{ sätt}}}{B_{z \text{ real}}}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Die sich ergebende Nutbreite  $b_n = \tau_n - b_z$  stellt die Nutschlitzbreite für offene Nuten dar. Für Zahnköpfe ist es nicht sinnvoll, sämtliche Nutschlitzbreiten für eine Optimierung frei zu geben. Daher wird für teilgeschlossene Nuten eine Nutschlitzbreite  $b_{ns}$  von 2 mm als Näherungswert angenommen. Dieser muss durch einen entsprechend detaillierten Entwurf angepasst werden. Seine Weite bestimmt sich einerseits durch die verursachten harmonischen Feldanteile, aber auch maßgeblich aus der Rastkraftabschätzung (vgl. Abschnitt. A). Soll die detaillierte Dimensionierung bereits hier Berücksichtigung finden, bedarf es der von Meyer [96] vorgestellten iterativen Anpassung der Nutgeometrie.

Dies bedeutet einen erheblichen Aufwand, vor allem, da eine Vielzahl von Entwürfen mit detaillierter Rückwirkung auf das System berechnet werden müssen. Der Aufwand ist jedoch dann gerechtfertigt, wenn man die Optimierung nicht wie hier auf Grundlage einer festen (regelungsbasierten) Kraft-Geschwindigkeitscharakteristik für den Generator durchführt, sondern das Bewegungsprofil vollständig frei entwerfen will. Dann kann es auch sinnvoll sein, unsymmetrische Feldverläufe zu generieren. Denkbar ist beispielsweise die Ausführung eines Langstators mit höherer Windungszahl an den Rändern zur Erzeugung größerer Spannungen bei langsamer Geschwindigkeit an den Umkehrpunkten. Das methodische Vorgehen, wie hier gezeigt, bleibt davon jedoch prinzipiell unbeeinträchtigt. Es muss lediglich eine Vielzahl von Eingriffen durch den Optimierer realisiert werden.

Für alle zu untersuchenden Wickelschemata erfolgt die Unterteilung der Geometrie in Nuten und anschließend das Befüllen der Nuten mit Spulen. Da die qualitative Entwicklung des Strombelags und der Felderregerkurve geprüft werden, kann ein Vergleich der Ergebnisse ohne vorherigen Detailentwurf der Wicklung (Windungszahl, Draht) nur erfolgen, wenn die Strombeläge entsprechend normiert werden. Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 4.2 folgt über die Nutwandbelastung bei gegebenem Strombelag eine Vorgabe für die Stromdichte. Aus  $k_{nz}$  erhält man die axiale Länge, die für alle Nuten zur Verfügung steht. Aus diesen Randgrößen ergibt sich die maximal zulässige Strommenge im Stator, die von der Wicklung unabhängig ist. Definiert man nun Spulen als positiven und negativen Strombeitrag zu einer Nut mit einer normierten

Amplitude, muss man fordern, dass die Summe aller Einträge betragsmäßig für alle betrachteten Wicklungen identisch ist.<sup>1</sup> Die Strombeläge werden für die Stränge gemäß ihrer normierten Gewichtung  $a_n$  in einem Vektor abgelegt. Dieser erhält entsprechend der gewünschten Abtastung  $k$  Einträge für jede Nutteilung, der je Strang entsprechend dem Verhältnis  $k_{nz}$  lautet:  $\mathbf{L}_n = [0, \dots, 0, a_n, \dots, a_n, 0, \dots, 0]$ . Der gesamte Vektor  $\mathbf{L} = [\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_n]$  gibt die räumliche Lage der Strombeläge an.

Die Wicklung wird weiterhin einer Prüfung unterzogen. Je nach Vorgaben muss diese unter Umständen bestimmten Kriterien genügen. Im vorliegenden Fall ergibt sich aus der Beschränkung auf klassische Wicklungen die Notwendigkeit, solche Wicklungen auszuschließen, die unsymmetrische Felder erzeugen. Es wird dabei geprüft, ob die Gesamtdurchflutung Null ist und das jeweilige Schema eine gerade Polzahl ausbildet. Hierzu untersucht der Algorithmus die Felderregerkurve vor der Fourierzerlegung. Entsprechend der fallenden und steigenden Flanken kann auf die Polzahl geschlossen werden (vgl. Abb. 2.6).

Der zeitgewichtete Strombelag entsteht durch Multiplizieren des jeweiligen Vektors  $\mathbf{L}_m$  für den  $m$ -ten Strang mit dem entsprechenden normierten, zeitabhängigen Strom:

$$\mathbf{a}_m(\omega t) = \sin(\omega t - \varphi_{im}) \cdot \mathbf{L}_m \quad (2.3)$$

Das anschließende Integral über den gesamten Strombelag lässt sich mit hinreichender Genauigkeit numerisch durch eine iterative Summation von  $N_1 \cdot k$  Stützwerten entlang des Luftspalts ersetzen, sofern  $k$  groß gewählt wurde, und ergibt dann die Felderregerkurve. Da hier die Phasenlage und ein eventueller Offset unberücksichtigt bleiben können, erfolgt die Fourier-Analyse der Felderregerkurve für die Ordnungszahlen  $\nu$  besonders einfach in Amplituden-Phasen-Notation [21]:

$$f(z_1)_{(\nu)} = 2 \cdot \left| Z_{(\nu)} \right| \cdot \cos(\nu \cdot p \cdot z_1)$$

$$Z_{(\nu)} = \frac{\sum_0^{k \cdot N_1} e^{j \cdot \nu \cdot p \cdot z_{1(n)}} \cdot V(\omega t)_{(n)}}{N_1 \cdot k} \quad (2.4)$$

mit:  $z_{1(n+1)} - z_{1(n)} = \frac{2\pi}{N_1 \cdot k}$

Es bleibt noch zu erwähnen, dass die Analyse jeweils für die kleinste, nichtperiodische Einheit der Wicklung geschieht. Daher ist es erforderlich, die berechneten Werte mit der Wiederholungsziffer zu gewichten, wenn eine Wicklung mehrfach in axialer Ausdehnung in den Hauptabmessungen untergebracht wird.

<sup>1</sup>Beispiel: Zwei Nuten werden je mit einer Spulenseite der Amplitude 1 befüllt, dann ist der Betrag des gesamten Strombeitrags 2. Befüllt man die beiden Nuten jeweils mit zwei Spulenseiten, muss nun die Summe aller Strombeiträge ebenfalls 2 ergeben. Jede Spulenseite erhält dann als Amplitude 0,5.



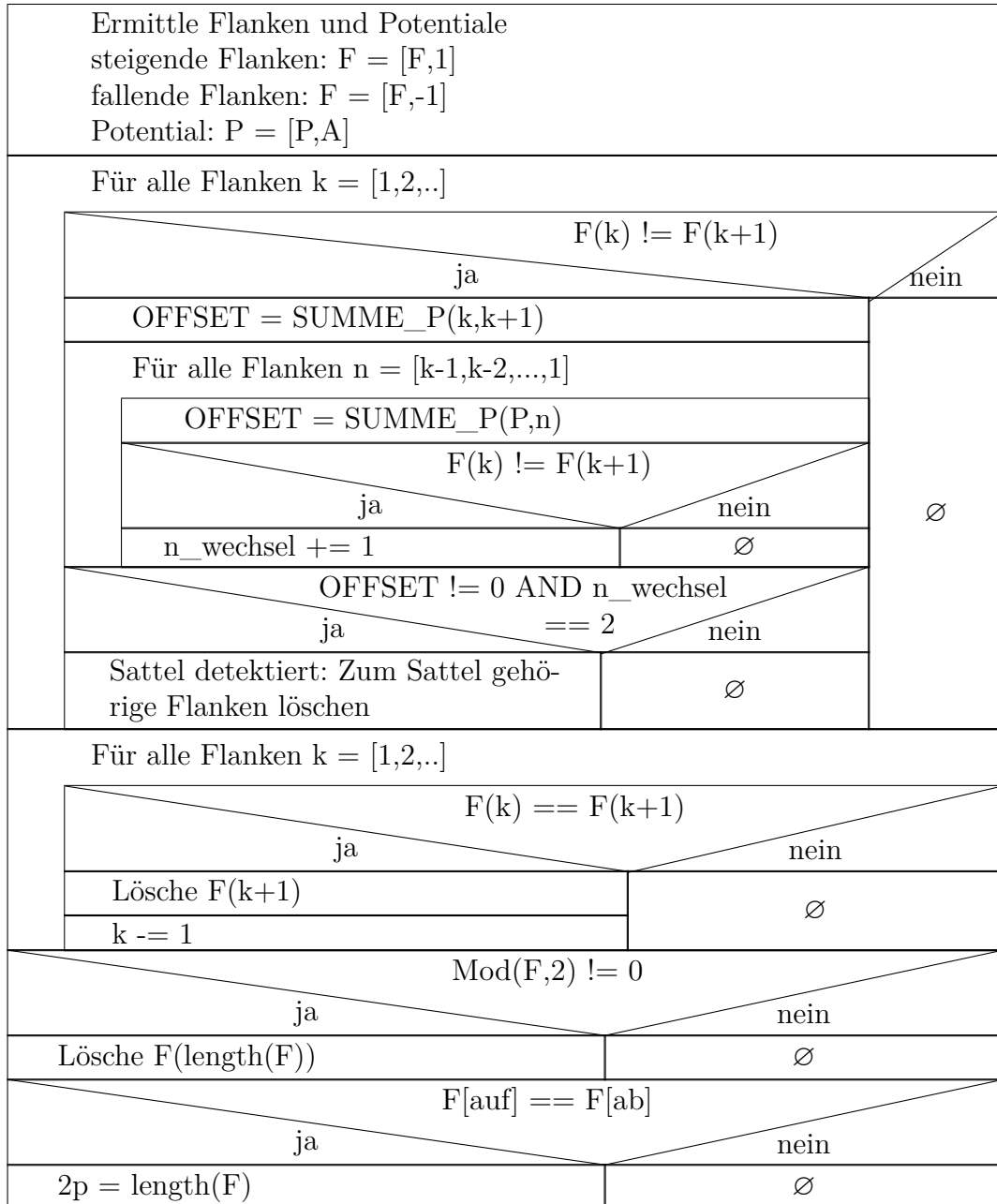


Abb. 2.6.: Struktogramm: Poldetektion

Abb. 2.7 zeigt exemplarisch die graphische Umsetzung der Analyse einer dreisträngigen Wicklung der Spulenweite 1 mit  $N_1 = 9$ ,  $q = 3/8$  mit  $\nu = 4$  als Arbeitswelle, bzw.  $q = 3/10$  mit  $\nu = 5$  als Arbeitswelle. Die Polpaarzahl der Grundwelle  $p_{(1)} = 1$  wurde korrekt detektiert. Die zugehörigen Werte für die einzelnen Wellen zeigt Tabelle 2.1.

Auf Basis der graphischen Darstellung zusammen mit der Ausgabe der normierten Werte für die Amplituden der Fourier-Koeffizienten kann der Optimierer geeignete Arbeitswellen vorschlagen, hier z.B. die Wellen 4 und 5 sowie auf Grundlage der Vergleiche der Arbeitswellen der Wicklungen untereinander unter Berücksichtigung der Oberwelleneinflüsse eine Sortierung vorgeben. Der Optimierer trifft keine Auswahl. Diese ist dem Ingenieur überlassen. Eine Auswahl durch den Optimierer an dieser Stelle ist nicht möglich, da der Einfluss der Wicklungen auf die Zielgrößen an dieser Stelle nicht bekannt ist. Der Optimierer kann den Nutzer nur darauf hinweisen, dass die beiden in Tabelle 2.1 gezeigten Wicklungen unterschiedliche Ordnungsziffern für die Welle mit der größten Amplitude haben und diese beiden Amplituden zudem ein erhebliche Differenz aufweisen. Der Nutzer kann sich nun für die vermeintlich bessere Wicklung entscheiden. Tatsächlich spielen für die Beurteilung hinsichtlich der bestmöglichen Erfüllung der Zielkriterien auch Auswirkungen auf die Läufermasse oder die Rastkraft eine erhebliche Rolle. Der Einsatz einer heuristischen Optimierung für die Suche nach der besten Wicklung und dem besten Material ist nicht sinnvoll. Der Grund hierfür liegt in der diskreten Beschränkung der Wicklungen auf bestimmte Ausführungsformen und der Materialien auf bestimmte Eigenschaften (Anfangspermeabilität und Sättigungsinduktion). Es ist schon für stetige Zusammenhänge kaum möglich, mit Sicherheit davon zu sprechen, den absoluten Bestpunkt gefunden zu haben. Der Einsatz eines heuristischen Suchverfahrens für Material und Wicklung kann, bedingt durch die nicht vorhersehbaren Auswirkungen, hier jedoch nur für die Verbesserung eines bestimmten Entwurfs eingesetzt werden. Zur Bestpunktsuche eignet sich nur ein gezieltes Absuchen. Um die manuell ausgewählten Kombinationen aus Wicklungen, Materialien und Nutformen dennoch zu reduzieren, eignet sich besonders das Rastverhalten<sup>2</sup>.

Sofern mit der vereinfachten Analyse des Feldes ohne explizite Nutgenerierung gearbeitet wurde, muss für den weiteren Entwurf die für die jeweilige Wicklung erforderliche Nutfläche sowie näherungsweise die Abmessungen der Zähne und des Jochs bestimmt werden, um eine Aussage über benötigte Massen und maximale Abmessungen treffen zu können. Die Nutfläche ist ferner für die Wicklungsauslegung von Bedeutung, die für die Abschätzung der Effizienz benötigt wird.

Aus der Anzahl der Wiederholungen des Wickelschemas innerhalb der axialen Länge  $n_{wh}$ , der Grundpolpaarzahl  $p$  und der Ordnungszahl  $\nu'$  der Arbeitswelle ergeben sich durch einfache geometrische Berechnungen die Polteilung und mit Hilfe der maximal

<sup>2</sup>Geometrische und konstruktive Randbedingungen wurden bereits weitgehend bei der Unterteilung der axialen Länge geprüft.

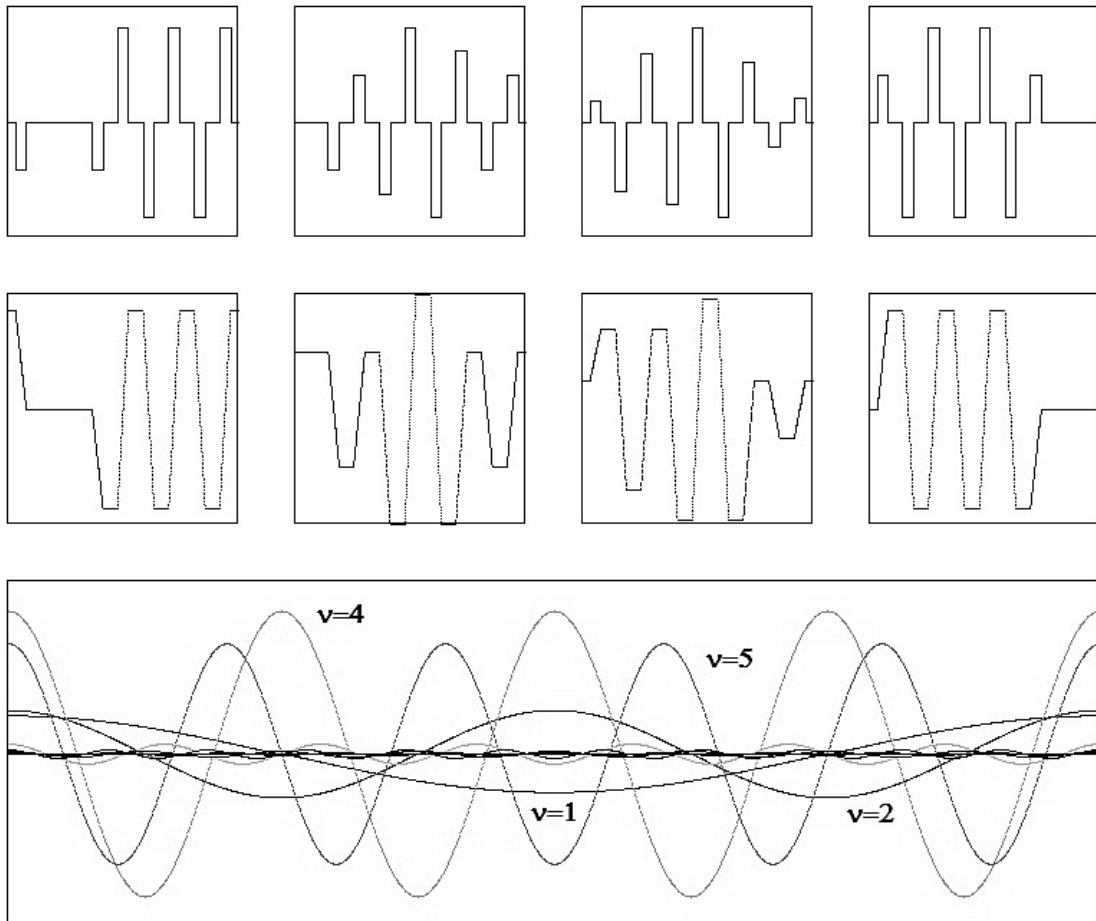


Abb. 2.7.: Normierte Strombeläge für die Phasenwinkel von Strang 1 bei 0, 30, 45, 60 Grad oben. Darunter die zugehörige Felderregerkurve sowie ganz unten deren Zerlegung in Grundwelle und höhere harmonische Anteile für  $\nu = 1 \dots 11$

$\nu$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\%(\nu = 1)$	100	115,13	0	387,24	308,7	0	32,31	12,19	0	9,61	19,98
$V_\nu$	0,06	0,069	0	0,232	0,185	0	0,019	0,007	0	0,005	0,011
$\nu'(p = 4)$	1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	7/4	8/4	9/4	10/4	11/4
$\xi'_\nu$	0,06	0,138	0	0,929	0,926	0	0,135	0,058	0	0,057	0,131
$\%(\nu = 1)$	100	86,37	0	42,73	19,58	0	13,69	20,46	0	15,84	8,15
$V_\nu$	0,48	0,414	0	0,205	0,093	0	0,065	0,098	0	0,076	0,039

Tab. 2.1.: Oberwellenanteile einer Wicklung der Spulenweite 1 mit  $N_1 = 9$ ,  $q = 3/8$  (oben) im Vergleich mit einer Einschichtwicklung der Spulenweite mit  $N_1 = 6$ ,  $q = 1/2$  (Einzelzahnwicklung mit Zwischenzahn). Der gesamte Stromeintrag ist in beiden Fällen identisch und normiert. Die gestrichelten Werte für die obere Wicklung zeigen die Wicklungsfaktoren bei Verwendung von  $\nu = 4$  als Arbeitsswelle.

zulässigen Stromdichte  $s_{max}$  und des Nutfüllfaktors der Formspulen z.B. ( $k_{nf} = 0,5$ ) die Nuthöhe ohne Zahnkopf. Dessen radiale Ausdehnung ist aber für diese Methode nur zur Berechnung der Massen von Bedeutung. Sie bestimmt sich maßgeblich durch die zulässigen Nutstreuleitwerte [100]. Diese werden hier zur Vereinfachung vernachlässigt und Zahnköpfe für die Abschätzung der Masse pauschal mit einer radialen Tiefe (z.B. 4 mm) belegt. Alternativ kann der Nutentwurf von Meyer [96] verwendet werden, der neben analytischen Methoden auch eine Kopplung mit magnetischen Netzwerken bietet. Die damit erreichte Abschätzung ist für die Entwurfszwecke in jedem Fall hinreichend genau. Hier wird abweichend von den hinten angegebenen Variablen vereinbart, dass  $a_1$  den entlang des Luftspalt gemittelten, thermisch wirksamen Strombelag (Effektivwert) bezeichnet.

$$\tau_n = \frac{l_{ax}}{Q_1} = \frac{l_{ax}}{n_{wh} \cdot N_1} \quad (2.5)$$

$$\tau_p = \frac{l_{ax}}{2p \cdot \nu' \cdot n_{wh}} \quad (2.6)$$

$$h_n = \frac{a_1 \cdot l_{ax}}{Q_1 \cdot b_n \cdot k_{nf} \cdot s_{max}} \quad (2.7)$$

Mit der Methode von Meyer ist auch die Dimensionierung des Jochs verbunden. Dieses kann alternativ zunächst auch durch die Annahme abgeschätzt werden, dass sich der Polfluss je zur Hälfte auf das Joch aufteilen muss, wobei es zulässig ist, den

Gleichrichtwert des Polflusses zu verwenden [100].

$$\begin{aligned}
 h_{1J} &= \frac{-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 - 4\gamma_2}}{2} \\
 \gamma_1 &= D_{1i} + 2 \cdot (h_n + h_z) \\
 \gamma_2 &= -\frac{B_\delta \cdot \tau_p \cdot D_{1i} \cdot \pi}{B_{z \text{ sätt}} \cdot k_{FE}}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Weitere Abschätzungen sind zunächst für die Statorgeometrie nicht erforderlich. Lediglich die Luftspaltweite sollte an dieser Stelle noch ermittelt werden. Die minimal erforderliche Weite bestimmt sich nach [100] und wird um den mechanischen Durchhang einer Stahlwelle [39] ergänzt:

$$\delta_{geo} = 0,25 \cdot \frac{\tau_p \cdot a_1}{B_\delta} \tag{2.9}$$

$$\delta_{geo} = \delta_{geo} + \frac{9,81 \cdot r_i \cdot \pi^2 \cdot l_{ax} \cdot 7,9 \cdot (2,5 \cdot l_{ax})^3}{48 \cdot 210000 \cdot \pi \cdot (D_W)^4 \cdot 64^{-1}} \tag{2.10}$$

Bevor die Wicklungsdetails wie Drahtstärke und Windungszahl festgelegt werden, ist es sinnvoll, zunächst zu überprüfen, ob die Statorgeometrie mit einer Läufergeometrie kombiniert werden kann. Dabei ist auf zwei Dinge besonders zu achten: Zum einen sind negative oder komplexe Zahlen für bestimmte Ergebnisse unzulässig (z.B. Innendurchmesser Rotor oder Magnet) und ermittelte Werte dürfen Konstruktionsgrenzwerte nicht über/-unterschreiten (z.B. Mindestdicke Welle). Solche Entwürfe können komplett verworfen und von der weiteren Betrachtung ausgenommen werden. Zum anderen bergen besonders Maschinen mit integrierten Magneten und Halbach-Anordnungen die Gefahr starker oder schwer kalkulierbarer Rastkräfte. Daher wird später eine analytische Methode erarbeitet (vgl. Anhang A), um diese bereits im Verlauf des Entwurfs abschätzen zu können.

Die Magnete werden für die eingangs erwähnten und in Abb. 2.8 nochmals gezeigten Anordnungen dimensioniert. Für alle drei Anordnungen erfolgt die Auslegung durch eine vereinfachte Nachrechnung des magnetischen Kreises. Zunächst kann mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes eine Bestimmung der Magnetabmessungen für den Hauptfluss erfolgen. Auftretende Streuung wird später iterativ berechnet. Die grundlegenden Entwurfsschritte werden zunächst beispielhaft an Oberflächenmagneten erklärt, Abweichungen für die anderen Magnete anschließend dargelegt. Das Umlaufintegral nach dem Durchflutungsgesetz lautet daher im ersten Schritt:

$$\oint \vec{H} \, dl = 0 = 2 \cdot H_m \cdot h_m + 2 \cdot H_\delta \cdot \delta' + V_{Fe}$$

Dabei ist  $\delta'$  der durch die Nutung scheinbar vergrößerte Luftspalt, dessen Berechnung mit dem Carter-Faktor erfolgt (vgl. [60]). Des Weiteren führt man den effektiven

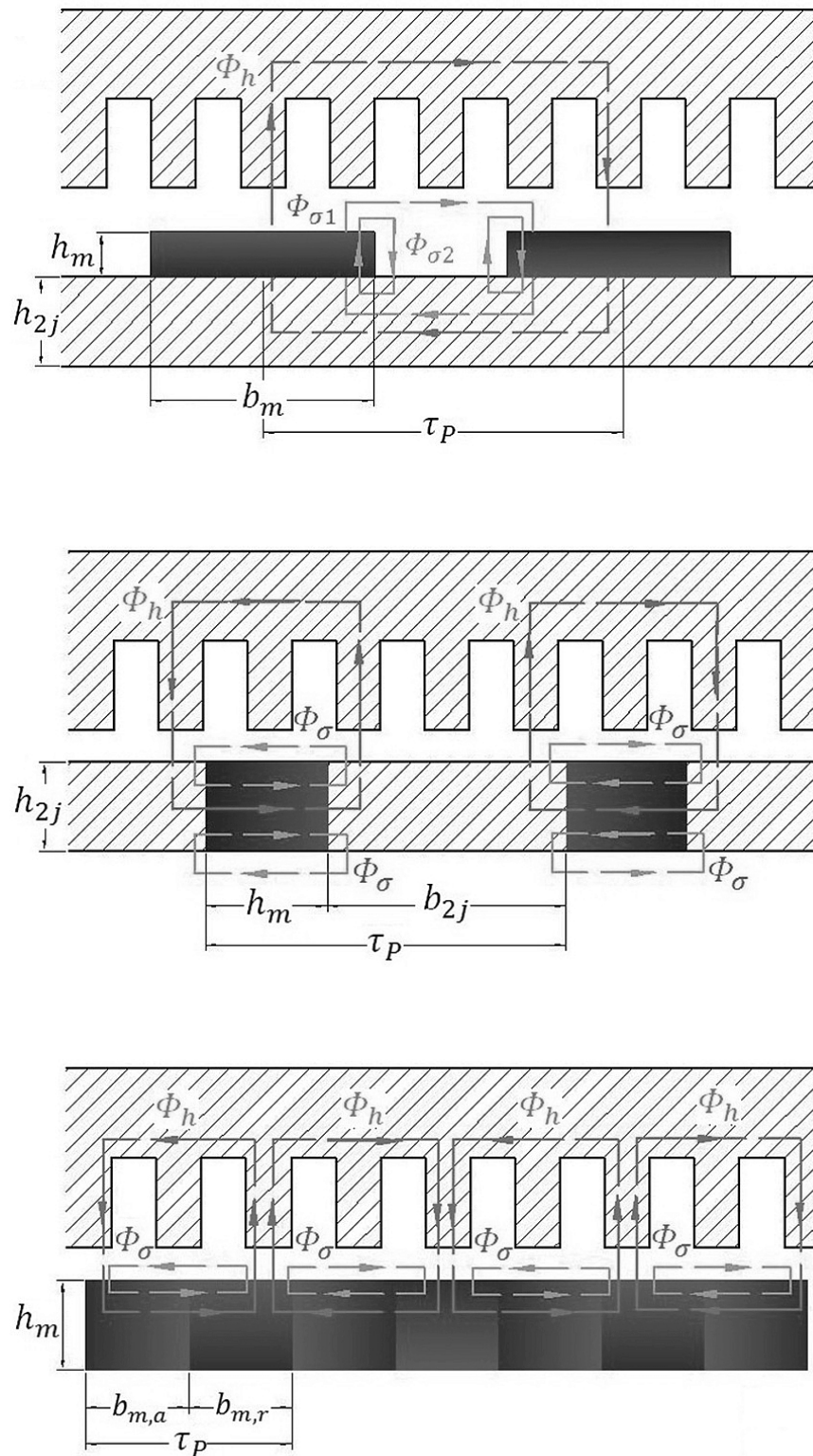


Abb. 2.8.: Flusspfade [152]

Luftspalt  $\delta_{eff}$  ein, der sich (scheinbar) unter Berücksichtigung des Spannungsabfalls  $V_{Fe}$  im Eisen einstellt. Dadurch, dass die entsprechende Feldstärke in Zahn und Joch durch die zuvor festgestellte maximal zulässige Sättigung festgelegt ist, lässt sich folgender Zusammenhang verwenden:

$$\begin{aligned} \delta_{eff} &= k_{mFE} \cdot \delta' \\ \text{mit: } k_{mFE} &= 1 + \frac{V_{FE}}{2 \cdot H_{\delta} \cdot \delta'} \\ \text{und: } V_{FE} &= H_{1J} \cdot \tau_p + 2 \cdot H_{1z} \cdot \left( h_n + \frac{h_{1J}}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Kennt man weiter den Arbeitspunkt des Magneten, der gemäß Anhang B.8 aus den geometrischen Gegebenheiten und einer prozentualen Streuziffer  $\sigma$  mit Hilfe einer sogenannten Scherungsgeraden zu ermitteln ist, können die geometrischen Abmessungen des Magneten bei gewünschter Luftspaltinduktion berechnet werden. Entsprechend der Flussverhältnisse repräsentiert  $A_{\delta}$  die vom Fluss durchsetzte Fläche eines Pols und  $A_m$  die eines Magneten. Für die Höhe des Magneten  $h_m$  folgt dann:

$$h_m = \frac{B_{\delta} \cdot \delta_{eff} \cdot \mu_r}{B_r \cdot \left( \frac{A_{\delta}}{A_m} \cdot \frac{B_{\delta}}{B_r} \cdot \frac{1}{\sigma-1} + 1 \right)} \quad (2.12)$$

mit:

$$\begin{aligned} A_{\delta} &= \tau_p \cdot \pi \cdot (D_{1i} - \delta_{geo}) \\ A_m &= b_m \cdot \pi \cdot (D_{1i} - \delta_{geo}) \\ b_m &= \alpha_m \cdot \tau_p \quad \alpha_m \in ]0 \dots 1[ \end{aligned}$$

Zur Erfüllung der Zielkriterien aus der Optimierung und der oftmals gleichzeitig geltenden Forderung nach geringen Rastkräften müssen die Abmessungen des Magneten (hier die Polbedeckung  $\alpha_m$ ) variiert und durch die analytische Nachrechnung die Wirkung auf die Rastkräfte überprüft werden. Zusätzlich kann auch durch die Nutzschlitzbreite die Rastkraft beeinflusst werden. Es ist allgemein bekannt, dass durch geschickte Wahl des Verhältnisses von Nutzschlitzbreite zu Polbedeckung die Rastkraft reduzierbar ist.

Für eine vollständige Abschätzung der benötigten Masse ist weiterhin die Jochhöhe des Läufers erforderlich. Für deren Berechnung nimmt man an, dass sich der Polfluss je zur Hälfte zu den beiden Seiten des Magneten aufteilt. Als Bemessungsgröße wird die Sättigungsinduktion des Materials verwendet:

$$\begin{aligned} h_{2J} &= \frac{D_{mi}}{2} - \sqrt{\left( \frac{D_{mi}}{2} \right)^2 - \frac{A_{\delta} \cdot B_{\delta}}{2 \cdot \pi \cdot (1 - \sigma) \cdot B_{FE\ s\ddot{a}t\ddot{t}} \cdot 0,95}} \\ D_{mi} &= D_{1i} - 2 \cdot \delta_{geo} - 2 \cdot h_m \end{aligned} \quad (2.13)$$

Oben wurde die iterative Korrektur der zunächst mit einem Erfahrungswert eingeführten Streuung angekündigt. Hierzu zeigt Abb. 2.8 entsprechende Flusspfade, die in der

Berechnung Berücksichtigung finden. Für diese gilt wiederum jeweils das Durchflutungsgesetz:

$$\begin{aligned} 2 \cdot H_m \cdot h_m + H_{\sigma 1} \cdot l_{\sigma 1} + V_{2J} &= 0 \\ 2 \cdot H_m \cdot h_m + H_{\sigma 2} \cdot l_{\sigma 2} + V_{2J} &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

mit  $V_{2J} \approx 0$  und

$$\begin{aligned} l_{\sigma 1} &= \tau_p - k_{\sigma 1} \cdot b_m \quad k_{\sigma 1} \in ]0, 1[ \\ l_{\sigma 2} &= h_m + \frac{\delta_{geo}}{2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Die Gesamtheit der einzelnen Flussdichten, zusammen mit der entsprechenden vom Streufluss durchsetzten Fläche, führt zu einer neuen Streuziffer. Die iterative Wiederholung der Berechnung (inkl. Anpassung der Magnetauslegung) führt dann nach einigen Schritten zur Konvergenz.

$$\begin{aligned} B_{\sigma \alpha} &= -\frac{\alpha \cdot \mu_0 \cdot B_r \cdot h_m}{l_{\sigma \alpha} \cdot (k_{SG} - \mu_0 \mu_r)} \quad \alpha = 1, 2 \\ \Phi_{\sigma \alpha} &= B_{\sigma \alpha} \cdot A_{\sigma \alpha} \\ A_{\sigma 1} &= \pi \cdot \left[ \left( \frac{D_{1i}}{2} \right)^2 - \left( \frac{D_{1i}}{2} - \delta_{geo} - h_m \right)^2 \right] \\ A_{\sigma 2} &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \alpha_m) \cdot \tau_p \cdot 2\pi \cdot \left( \frac{D_{1i}}{2} - \delta_{geo} \right) \\ \sigma' &= \frac{\Phi_{\sigma 1} + 2 \cdot \Phi_{\sigma 2}}{1 - \frac{\Phi_{\delta}}{\sigma}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Für die zweite Ausführung (integrierte Magnete) ändern sich, wie Abb. 2.8 zeigt, einige geometrische Bezeichnungen. Da die Magnetisierungsrichtung der Magnete axial ist, wird als Magnethöhe hier die axiale Ausdehnung bezeichnet. Die Bezeichnung der Magnetbreite entfällt, da diese mit der Höhe der magnetisch leitfähigen Zwischenstücke  $h_{2J}$  identisch ist. Deren axiale Länge ergibt sich wiederum aus der Differenz von  $\tau_p$  und  $h_m$ . Für Magnetscheiben mit Loch existieren zwei Streuwege, für vollständige Scheiben nur derjenige im Luftspalt. Es wird angenommen, dass bei Existenz beider Streuwege die Anteile identisch sind. Über das Umlaufintegral können so direkt die Abmessungen des Magneten bestimmt werden, wenn  $\alpha_m$  nun zur Variation der Breite



des Zwischenstücks dient.

$$\begin{aligned}
 H_m \cdot h_m + 2 \cdot H_\delta \cdot \delta_{eff} &= 0 \\
 A_m &= \frac{A_\delta \cdot B_\delta}{(1 - \sigma) \cdot \left( B_r - \frac{\mu_r \cdot B_\delta \cdot 2 \cdot \delta_{eff}}{h_m} \right)} \\
 A_\delta &= \frac{1}{2} \cdot \tau_p \cdot \pi \cdot \left( \frac{D_{1i}}{2} - \delta_{geo} \right) \\
 h_{2J} &= \left( \frac{D_{1i}}{2} - \delta_{geo} \right) - \sqrt{\left( \frac{D_{1i}}{2} - \delta_{geo} \right)^2 - \frac{A_m}{\pi}}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Für die Streuung folgt mit  $\alpha = 1$  aus Gleichung (2.16) und  $n_\sigma$  als Anzahl der Streupfade:

$$\sigma' = \frac{n_\sigma \cdot \Phi_{\sigma 1}}{1 - \frac{\Phi_\delta}{\sigma}} \tag{2.18}$$

Analog zum bisherigen Vorgehen kann auch beim Entwurf von Magneten in Halbacht-Anordnung verfahren werden. Allerdings kann die vereinfachte Berechnung als Grundlage für eine spezielle Nachrechnung dienen. Besonders bei der hier gewählten einfachen Ausführung kommt es zu massiven Einsackungen der Feldkurve im Bereich der Polmitte (vgl. Abschnitt A). Dieser Effekt ist analytisch nicht beschreibbar und bedarf einer komplexen Nachrechnung, beispielsweise mit einem Reluktanznetzwerk. Dennoch kann das Vorgehen für eine erste, näherungsweise Berechnung verwendet werden. Für genauere Ergebnisse besteht die Möglichkeit, eine Erweiterung für schräg magnetisierte Segmente [165] zu integrieren, wodurch eine verbesserte analytische Näherung und ein verbesserter Grundwellenanteil möglich sind. Ebenso kann durch geometrische Eingriffe (z.B. Verkleinern der radialen Ausdehnung des axial ausgerichteten Magneten) eine positive Beeinflussung der Feldkurve erreicht werden.

Unter Beibehaltung aller zuvor geltenden Randbedingungen sowie der Annahme, dass ein einheitliches Magnetmaterial zur Anwendung kommt und alle Teilmagnete vom selben Fluss durchsetzt sind, kann mit Hilfe folgender geometrischer Bedingungen eine Bestimmungsgleichung für die Abmessungen des radialen Magneten hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}
 A_{mr} &= b_{mr} \cdot \pi \cdot (D_{1i} - 2\delta_{geo}) \\
 A_{ma} &= k_a \cdot h_{2J} \cdot \pi \cdot (D_{1i} - 2\delta_{geo}) \\
 k_a &\in ]0, 1[ \quad \text{und} \quad h_{2J} = h_{mr} \quad \text{und} \quad b_{mr} = \alpha_m \cdot \tau_p
 \end{aligned}$$

Die vom Fluss durchsetzte Fläche des radialen Magneten bestimmt sich aus dem Polbedeckungsfaktor. Seine Höhe entspricht der radialen Ausdehnung  $h_{2J}$  des Läufers, da auf einen zusätzlichen Rückschluss verzichtet werden kann. Der axiale Magnet kann mit Hilfe des Faktors  $k_a$  gegenüber der Läuferhöhe prozentual verkleinert werden.

Dadurch wird die Einsackung günstig beeinflusst, wenn zugleich die Breite des Polbogens reduziert wird. Da keine analytischen Methoden existieren, wird aus einem Vergleich mit FEM-Rechnungen  $k_a = 0,9$  gewählt. Für die Höhe des radialen Magneten folgt so schließlich:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{b_m}{2} - \frac{B_\delta \cdot \delta_{eff} \cdot \mu_r}{B_r \cdot \left[ \frac{A_\delta \cdot B_\delta}{A_{mr} \cdot B_r \cdot (\sigma - 1)} + 1 \right]} \\ \gamma_2 &= \frac{A_{mr} \cdot (b_m - \tau_p)}{2 \cdot k_a \cdot \pi \cdot (D_{1i} - 2\delta_{geo})} \\ h_m &= \frac{-\gamma_1 \pm \sqrt{\gamma_1^2 - 4 \cdot \gamma_2}}{2}\end{aligned}\tag{2.19}$$

Aus den beiden Ergebnissen ist die kleinere, positive und nicht komplexe Lösung zu verwenden. Für die Streuung gilt wieder Gleichung (2.16) unter Verwendung von  $\alpha = 1$  und  $A_{\sigma 1}(h_m = 0)$ :

$$\sigma' = \frac{\Phi_{\sigma 1}}{1 - \frac{\Phi_\delta}{\sigma}}\tag{2.20}$$

Nach der Dimensionierung von Stator und Rotor erfolgt noch die Auslegung der Spulen, damit benötigte Kupfermengen abgeschätzt werden können. Dies ist besonders dann wichtig, wenn Kosten als Zielkriterium eine Rolle spielen. Außerdem werden die Wicklungsdaten, darunter die Strangwindungszahl  $w_1$ , die Leiterzahl je Nut  $z_n$  und der Strangwiderstand  $R_1$  für die Nachrechnung benötigt. Da sich die Strangwindungszahl jedoch aus dem Hauptfluss und dessen periodischer Änderung sowie einer gewünschten Strangspannung ergibt, muss die Spannung und die zugehörige Geschwindigkeit des Läufers festgelegt werden, es gilt dann [100]:

$$\begin{aligned}w_1 &= \frac{\sqrt{2} \cdot 0,95 \cdot U_1}{\xi \cdot \Phi_H \cdot \omega_1} \\ z_n &= \frac{a_{par} \cdot m \cdot w_1}{n_{wh} \cdot N_1}\end{aligned}\tag{2.21}$$

Für den Wicklungsfaktor der Strangwindung kann man aus der eingangs vollzogenen Analyse der Wicklung den Fourier-Koeffizienten für die jeweilige Arbeitswelle verwenden. Die Festlegung von  $\omega_1$  und  $U_1$  hingegen ist nicht trivial, da die alternierende Bewegung zu ständig unterschiedlichen Frequenzen und Spannungen im Betrieb führt. Sicher ist, dass die mechanische Anforderung mindestens erfüllt werden muss. Damit liegen die Größen als Mindestanforderung zumindest für den Eckpunkt fest. Unbekannt ist jedoch, ob eine Übererfüllung der Anforderung nicht vielleicht zu einem besseren Nutzungsgrad verhelfen kann. Insbesondere bei Integration eines entsprechenden Verlustmodells und Kopplung mit einem frequenz- und spannungsabhängigen Wechselrichtermodell sind die beiden Größen wichtige Eingriffsparameter für den Optimierer.

Aus der Strangzahl folgt die Anzahl der Leiter je Nut, woraus sich die Belastung für den Einzelleiter und die Leiterfläche ermitteln lässt.

$$\begin{aligned} i_L &= \frac{a_1 \cdot \tau_n}{z_n} \\ A_L &= \frac{k_{nf} \cdot b_N \cdot h_N}{z_N} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Mit Hilfe dieser beiden Größen kann in einer entsprechenden Datenbank<sup>3</sup>, die mit Herstellerwerten zu befüllen ist, ein Rund- oder Rechteckleiter gesucht werden, der die Angaben mindestens erfüllt. Mit den ermittelten Daten kann dann bereits der Strangwiderstand im kalten Zustand abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{w_1}{a_{par}} \cdot l_w \cdot \rho_{spez} \cdot \frac{1}{A_L} \\ l_w &= 2 \cdot \pi \cdot \left( \frac{D_{1i}}{2} + \frac{h_n}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Die Terme für die Haupt- und Koppelinduktivität sowie die Streuung werden im Abschnitt 2.4.2 beschrieben.

Wenn man für die Rückmeldung an den Optimierer noch die Massen der Bauteile benötigt, empfiehlt es sich, diese in eine endliche Anzahl Vollzylinder und/oder Hohlzylinder zu zerlegen und die einzelnen Volumina zu ermitteln. Zusammen mit der jeweiligen Dichte ergeben sich dann aus der Summe die Massen von Stator, Wicklung, Läuferisen (sofern vorhanden) und Magneten. Da es sich bei diesen Berechnungen um nahezu triviale Vorschriften handelt, kann auf explizite Darstellung verzichtet werden.

Abschließend wird darauf hingewiesen, dass der Entwurf ein Werkzeug im Rahmen der Optimierung darstellt, das für die Beurteilung des Maschinenverhaltens durch eine Nachrechnung erforderlich ist. Daher werden hier das methodische Vorgehen strukturiert und grundlegende Berechnungsvorschriften vorgestellt. Zweck dieser Erörterungen ist die Beschreibung notwendiger und sinnvoller Eingriffsmöglichkeiten durch den Optimierer in den Entwurf. Die vorgestellte Methodik ist leicht erweiterbar, um eine erhöhte Detaillierung zu erreichen und erfüllt den Anspruch eines Leitfadens.

## 2.4. Nachrechnung

Als weiteres Rüstzeug für diese Arbeit ist die Nachrechnung der entworfenen Maschine zu sehen. Die Kenntnis bestimmter Eigenschaften wie der Kraft, des Wirkungsgrads in

<sup>3</sup>Für verschiedene Drahtsorten können z.B. [10, 55] der Nenndurchmesser, die Dicke der Isolierung, der Kaltwiderstand und die zulässige Belastung bei bestimmten Stromdichten (DIN 46435) entnommen werden.

Abhängigkeit vom Betriebspunkt und der elektrische Eigenschaften sind unabdingbar für die Beurteilung der Entwurfsqualität und unter Umständen auch als Rückwirkung auf den übergeordneten Systementwurf erforderlich. Dies trifft vor allem auf solche Ergebnisse zu, die unmittelbar die Optimierungsziele des Systems betreffen. Ein Beispiel ist die Masse, die einerseits das dynamische Verhalten (Trägheit) des Systems wesentlich beeinflusst und zum anderen als Maß für die Wirtschaftlichkeit genannt wurde.

Daher erfolgt in diesem Kapitel eine ausführliche Diskussion über die analytischen Berechnung der Rastkräfte. Diese ist ein maßgeblicher Baustein für die Auslegung der Magnete. Dieses Werkzeug macht es möglich auf einfache Art und Weise den Antrieb für einen möglichst ruhigen Gleichlauf oder für möglichst hohe Selbsthaltekräfte zu optimieren. Anschließend werden die wichtigsten Systemgleichungen dargestellt und zusammengefasst, deren ausführliche Herleitungen im Anhang abgedruckt sind.

### 2.4.1. Rastkräfte

Von den bekannten und für diverse Maschinentypen einsetzbaren Berechnungsmethoden für Rastmomente und Rastkräfte, werden hier zwei unterschiedliche vorgestellt und für die Anwendung bei Linearantrieben beschrieben.

Will man nur die maximale Amplitude überprüfen, kann besonders einfach mit Energiedichten gearbeitet werden. Das Verfahren weist jedoch erhebliche Nachteile auf, wenn die vom Magneten hervorgerufene Feldkurve im Luftspalt nicht block- oder trapezförmig ist. Grundlegende Betrachtungen zur Ermittlung der Kraft auf Ankerzähne von Gleichstrommaschinen mit Hilfe der magnetischen Energie im Luftspalt stellt Mohr [105] mit dem Ziel dar, Dimensionierungsregeln für kleine Drehmomentschwankungen ableiten zu können. Darauf aufbauend untersuchte Koch [78] die permanentmagnetische Polfühligkeit von Gleichstrommotoren. Entgegen der ersten Arbeit wird nur die Änderung magnetischer Energie bei Änderung der Rotorlage untersucht. Vereinfacht man das Vorgehen, indem diskrete Zustände betrachtet werden, kann die maximale Amplitude der Rastkraft abgeschätzt werden. Aus der genannten Arbeit folgt, dass nur Bereiche interessant sind, in denen sich die Anordnung gegenüberliegender Nuten bzw. Zähne und Magneten ergibt. Die diskreten Bereiche können als die Zahnflanken und Magnetflanken identifiziert werden. Daher muss die Energiedifferenz an der Flanke ermittelt werden.

Liegt ein Zahn gegenüber dem Magnet, ergibt sich eine andere Energiedichte im Luftspalt als bei gegenüberliegender Nut. Durch Integration über das entsprechende Volumen des Magneten (als Energiequelle) kann man die auftretende Energiedifferenz zwischen den Luftspaltabschnitten bestimmen. Hierbei leuchtet ein, dass Flanken mit einer zugehörigen Gegenflanke innerhalb desselben Polbogens oder derselben Polücke in der Summe keinen Beitrag zur Rastkraft leisten. Differenziert man die für den

Pol ermittelte Energie nach dem Weg, erhält man eine Kraft [83]. Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$F_p = \frac{dW_\delta}{dz} \quad (2.24)$$

$$dW_\delta = w_\delta dV = w_\delta \cdot A dz = w_\delta \cdot (r_{ma}^2 - r_{mi}^2) \cdot \pi dz$$

$$dW_\delta = \underbrace{(w_z - w_n) \cdot (r_{ma}^2 - r_{mi}^2) \cdot \pi}_{F_p} dz \quad (2.25)$$

Für das Vorgehen gilt die Annahme einer gleichmäßigen Induktionsverteilung. Die Feldkurven in Abb. 2.9 zeigen, dass dies für Oberflächenmagnete hinreichend genau zutrifft. Hier bedarf es nur der Berücksichtigung der verringerten Feldstärke an den Segmenträndern. Integrierte Magnete und Halbach-Arrays (besonders bei ungenügender Dimensionierung und Segmentierung) neigen zu Einsackungen der Feldkurve über dem Segment und Überhöhungen an den Rändern. Die vereinfachte analytische Abschätzung ist dagegen fehleranfällig, weniger auf Grund der Überhöhung, vielmehr dadurch, dass durch die Einsackungen überlagerte Kräfte entstehen können. Dies gilt es, bei der Auswertung in jedem Fall zu beachten.

Die Herleitung der Energiedichten soll exemplarisch an Hand der Oberflächenmagnete erfolgen, da das Vorgehen auf die anderen Magnettypen übertragbar ist. Für die Energiedichte  $w_z$  für Bereiche, in denen sich Magnet und Zahn gegenüber stehen, gilt, unter Verweis auf eine Herleitung von Koch [77]:

$$w_z = -\frac{B_r^2}{2\mu_0} \cdot \frac{\delta_{geo}}{h_m + \mu_{mr} \cdot \delta_{geo}} \quad (2.26)$$

Gegenüber der Nutöffnung entsteht die größte Energiedifferenz zur Nutmitte. Für die auftretende Energiedichte  $w_n$  besteht keine allgemeine mathematische Beschreibung. Auf Abb. 2.9 sind jeweils die Einsackungen der Flussdichte im Bereich der Nuten zu erkennen. Zur Berechnung müssten die Feldwege analytisch exakt nachgebildet werden. Dies bedarf aber einer komplexen Analyse, evtl. sogar unterstützt durch Kontrollen mit FEM-Software [80]. Da nur der kleinste Wert der Energiedichte benötigt wird, soll hier eine Abschätzung zur Nachrechnung dienen. Dazu wird für den Feldweg der Abstand zwischen der dem Luftspalt zugewandten Ecke des Zahns und dem Aufpunkt der Nutmitte auf dem Magnetsegment angesetzt.

$$l_{ns} = \sqrt{\delta_{geo}^2 + x^2}$$

$$x_{max} = \frac{b_{ns}}{2}$$

$$w_{n \min} = -\frac{B_r^2}{2\mu_0} \cdot \frac{\sqrt{\delta_{geo}^2 + \left(\frac{b_{ns}}{2}\right)^2}}{h_m + \mu_{mr} \cdot \sqrt{\delta_{geo}^2 + \left(\frac{b_{ns}}{2}\right)^2}}$$

Da der Wert der berechneten Kraft für die Segmentkante maßgeblich von der Induktion des Segments abhängt, müssen auftretende Streuung und Feldaufweitung an den Segmentenden und damit verbundene geringere Induktionen berücksichtigt werden. Untersuchungen zeigen, dass mit 15-30% geringeren Feldstärken im Randbereich zu rechnen ist [111], bevor der Abfall in der Pollücke stattfindet. Diese Werte können auch durch die mit FEM ermittelten Kurven (Abb. 2.9) bestätigt werden. Zusätzlich führen Unsymmetrien zu weiteren Verzerrungen der Feldkurve. Aus der Abbildung wird ersichtlich, dass die Segmente in sich leichte Unsymmetrien aufweisen und die Randsegmente zusätzlich eine geringere Flussdichte hervorrufen als die inneren Segmente. Je nach Geometrie können sich Unterschiede von 10-20% ergeben. Die Auswirkungen sind mit der vorgestellten Methode nicht erfassbar. Berücksichtigt man jedoch, dass hier Annahmen getroffen wurden, zudem die Flussdichten nur näherungsweise bekannt sind und die Länge der Feldlinien im Nutschlitz nicht exakt berechnet wird, sind die erreichbaren Genauigkeiten mit Abweichungen zwischen 10-30% als gute Näherung zu betrachten, vor allem, da geometrische Änderungen korrekt als positiver oder negativer Einfluss detektierbar sind. Ein großer Nachteil des Verfahrens ist jedoch, dass unterschiedliche Zahn- und Polzahlen nicht einfach miteinander verglichen werden können. Zum Vergleich muss immer der Absolutwert berechnet werden, wozu alle relevanten Flanken zu detektieren sind. Dies ist jedoch nicht in allen Fällen trivial.

Ein weiterer großer Nachteil zeigt sich direkt bei Betrachtung der beiden anderen Magnetisierungsformen. Die den Verläufen in Abb. 2.9 zugrundeliegenden Magnetabmessungen wurden alle für dieselbe mittlere Luftspaltinduktion ausgelegt. Bei integrierten Magneten zeigt sich eine Überhöhung der Feldkurve an den Segmenträndern sowie eine gleichmäßige moderate Einsackung zur jeweiligen Segmentmitte. Weiterhin sind bei vorhandenen Nuten erhebliche Einbrüche der Feldkurven zu sehen. Im Gegenzug ergeben sich zusätzliche Verstärkungen an den Segmenträndern, wobei die äußeren Flanken besonders hart sind. Weiterhin weisen die Flusspfade zwischen dem Segment zum Zahn (Luftspaltweite zzgl. Eisenweg im Segment) und der Segmentkante zum Zahn bei Positionierung der Segmentkante in der Nutmitte (schräge Luftspaltweite zzgl. Eisenweg im Segment) keinen so großen Unterschied auf wie bei Oberflächenmagneten. Allerdings sind alle diese durch Betrachtung der FEM-Ergebnisse logisch erklärbar Zusammenhänge analytisch nicht oder nur unzureichend beschreibbar.

Für eine „worst case“-Abschätzung soll daher gelten: Die Induktionshübe über den Zähnen können Werte bis zur Sättigungsinduktion des Materials annehmen. An den Rändern der Flanken erfolgt wie zuvor ein Abschlag auf die maximale Induktion. Da die Flanken deutlich steiler sind, darf dieser nicht zu groß ausfallen. Es wird ein Wert von 10-20% vorgeschlagen. Dieser ergibt sich, wenn man die Differenz von der maximalen Flussdichte zu derjenigen Flussdichte bildet, ab der die Flanke als linearer Verlauf identifizierbar ist. Unter Beibehaltung der zuvor vereinbarten Bedingungen erhält man wiederum Werte, deren Abweichung mit 25-50% nicht so groß sind, dass diese nicht zumindest als Richtwert für die Dimensionierung dienen können. Noch

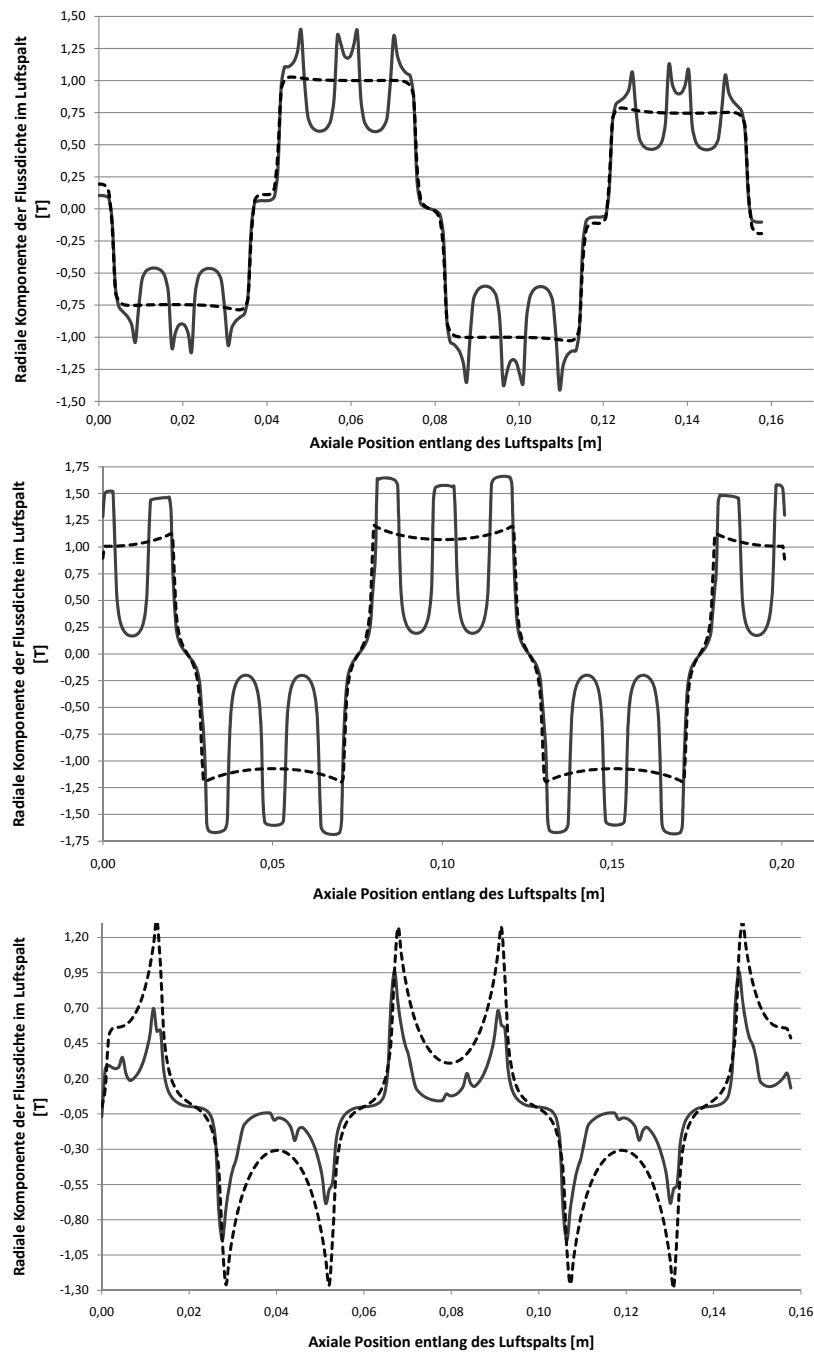


Abb. 2.9.: Exemplarische Ansicht der (mit FEM-Software ermittelten) Luftspaltinduktion im Bereich des Movers einer vierpoligen Maschine (durchgezogen: offene Nuten; gestrichelt: Stator als Hohlzylinder ohne Nuten. Oben: Oberflächenmagnete - Mitte: Integrierte Magnete - Unten: Halbach Array.

genauere Ergebnisse lassen sich sicherlich durch eine verbesserte Nachrechnung der Feldstärken, z.B. mit magnetischen Reluktanz-Netzwerken, und durch Berücksichtigung magnetischer Spannungsabfälle erreichen.

Die Halbach-Anordnung setzt sich aus der Aneinanderreihung von (hier zwei) Magneten zusammen. Für block- bis trapezförmige Luftspaltinduktionen kann dann die Berechnung analog zu den Oberflächenmagneten erfolgen. Legt man fest, dass die Magnethöhe immer die Ausdehnung in Magnetisierungsrichtung darstellt, gilt:

$$h_m = h_{ma} + \frac{h_{mr}}{2} + \frac{b_{mr}}{2} \quad (2.27)$$

Aus Abb. 2.9 (unten) wird jedoch deutlich, dass an den Flanken der radialen Magnete Induktionsspitzen auftreten, die zu beiden Seiten stark abfallen. Die analytisch berechneten Kräfte stimmen um ein Vielfaches nicht mit den Werten der FEM überein. Der Grund liegt in der entarteten Feldkurve. Die Form führt zu einer teilweisen Aufhebung der Rastkräfte, die mit der Methode nicht berücksichtigt werden kann. Allerdings wird die gezeigte Feldform kaum für eine Maschine eingesetzt werden, da sie erhebliche Oberwellenanteile für  $\nu = 3, 5, 7$  aufweist. Dem kann nur durch eine verbesserte Geometrie (z.B. kleinerer Außendurchmesser der axialen Magnete, kleinerer Polbogen der radialen Magnete) und/oder schräg magnetisierte Segmente begegnet werden. Jedoch muss dann beurteilt werden, ob die erzielbare Einsparung an Masse und Magnetmaterial von durchschnittlich 10% durch die erhöhte Komplexität gerechtfertigt wird.

Es bleibt festzuhalten, dass bei geeigneter Form der Luftspaltinduktion aussagekräftige Werte für die Rastkräfte mit Hilfe der vorgestellten Methode bestimmt werden können. Hierbei bleiben sogenannte Randeffekte an den Enden des kürzeren Maschinenteils aber unberücksichtigt. Mit FEM-Modellen kann nachgewiesen werden (durch Vergleich mit einer äquivalenten rotierenden Maschine mit großer Polzahl), dass für Langstatormaschinen der Einfluss durch die Ränder auf die Rastkraft eher unerheblich ist. Kurzstatoren hingegen wirken sich durchaus erheblich auf die Rastkräfte aus. Hierfür muss (bei Bedarf) eine Modellerweiterung vorgenommen werden. Neben der reinen analytischen Abschätzung im Rahmen der vorliegenden Arbeit stellt eine Kopplung mit Reluktanznetzwerken zur Untersuchung der Feldkurven eine sinnvolle Ergänzung dar. Möchte man nicht trapezförmige Feldverläufe berücksichtigen und auch die Ausprägung der Rastkraft bei verschiedenen Läuferpositionen ermitteln, muss man sich jedoch einer anderen Vorgehensweise bedienen [59].

Die Herleitung dieser zweiten, hier erörterten Vorgehensweise skizziert erstmals Ackermann [2], die auf der Darstellung der Luftspaltinduktion sowie der schwankenden Luftspaltleitwerte, hervorgerufen durch die Nutung mittels Fourier-Zerlegung, basiert. Das Verfahren gestaltet sich aufwendiger als das zuvor besprochene, hat aber den Vorteil, dass bei bekannter Form der Induktionskurve eine exakte Analyse der Rastkräfte möglich ist. Der Verlauf der Induktionskurve kann z.B. durch eine Nachrechnung mit



finiten Elementen oder Reluktanznetzwerken [97] erfolgen. Abhängig von der Auflösung, besonders bei Reluktanznetzwerken, können berechnete Punkte mit zuvor hinterlegten typischen Kurven verglichen und dann geeignete Fourier-Koeffizienten verwendet werden. Die Methode kann für alle Magnetanordnungen verwendet werden, da nur die axiale Verteilung der Luftspaltinduktion bekannt sein muss.

Um die von Ackermann gezeigte Herleitung verstehen und auf Linearmaschinen übertragen zu können, erfolgt in Anhang A die Durchführung der Herleitung, die in allen anderen Werken fehlt. Diese endet mit Gleichung (A.17) für das Rastmoment:

$$M(\vartheta) = \frac{W(\vartheta)}{d\vartheta} = -\frac{\pi}{4} D_\delta l_{FE} \sum_{\xi} \xi \frac{\sin(\xi \gamma l_{FE})}{\xi \gamma l_{FE}} a_{MMK(\xi)} a_{\Lambda(\xi)} \sin(\xi \vartheta)$$

$$\text{mit: } \xi = k \cdot KGV(2p, Q), k = 1, 2, \dots$$

Die enthaltenen Variablen gestalten sich wie folgt:  $D_\delta$  bildet den mittleren Luftspaltdurchmesser,  $l_{FE}$  die Eisenlänge in axialer Richtung ab. Mit  $\gamma$  wird ein Schrägungskoeffizient eingeführt. Wird die Schrägung vernachlässigt, läuft der Grenzwert von  $\sin(\xi \gamma l_{FE}) / (\xi \gamma l_{FE})$  für  $\gamma \rightarrow 0$  gegen 1. Die Ordnungsziffer  $\xi$  ergibt sich entsprechend der Herleitung als alle gemeinsame Vielfache der Polzahl  $2p$  und der Statornutzahl  $Q$ . Mit  $\vartheta$  wird die Rotorlage berücksichtigt. Die Beschreibung der Fourier-Koeffizienten für die MMK ( $a_{MMK}$ ) und die Luftspaltleitwerte ( $a_\Lambda$ ) erfolgt weiter unten.

Die gezeigte Herleitung lässt sich nun einfach auf das vorliegende Problem einer Linearmaschine übertragen. Dabei wird auf die Berücksichtigung der Schrägung verzichtet, da diese im Rahmen dieser Arbeit keine Anwendung findet und leicht zu ergänzen ist. Da die nochmalige Herleitung für die Linearmaschine keine neuen Aspekte liefert, wird auf deren Wiedergabe hier verzichtet. Stattdessen kann darauf hingewiesen werden, dass durch die wechselseitige Transformierung mit  $l \leftrightarrow U = D \cdot \pi$  die geometrischen Werte zunächst unbeeinflusst bleiben, sofern bei der Linearmaschine axiale Längen als  $2\pi$ -bezogene Größen definiert sind. Dann erhält man dasselbe Ergebnis für die gespeicherte Energie. Lediglich eine einmalige Ersetzung

$$\frac{z}{l} \hat{=} \frac{\vartheta}{2\pi}$$

vor der Differentiation ist notwendig, um der veränderten Bewegung Rechnung zu tragen. Daher folgt für die, von den Permanentmagneten in Wechselwirkung mit den Luftspaltleitwerten hervorgerufene Kraft (wenn  $s$  die Rotorlage in axialer Richtung als Bogenmaß ist):

$$F(s) = -r_\delta \cdot \pi \cdot \sum_{\xi} \xi a_{MMK,\xi} a_{\Lambda,\xi} \sin(\xi s) \quad (2.28)$$

Es verbleibt nun noch, geeignete Formen für die MMK und die Leitwerte zu definieren und diese als Fourier-Reihe darzustellen. Für die MMK sollen hier beispielhaft eine Trapezfunktion und für die Luftspaltleitwerte die in Abb. 2.10 gezeigte Form gelten.

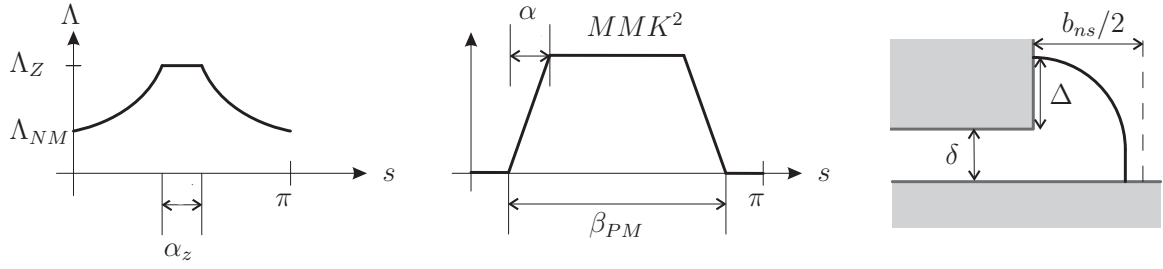


Abb. 2.10.: Parabelfunktion zur Nachbildung der Leitwerte; Trapezfunktion für die Nachbildung der MMK; angenommener Feldverlauf in der Nutöffnung (von links nach rechts)

Die beiden zu  $\frac{\pi}{2}$  symmetrischen Kurven sind zwischen 0 und  $\pi$  wie folgt definiert:

Parabelfunktion:

$$0 \leq s < \frac{\pi - \alpha_z}{2} \quad f(s) = \Lambda_{NM} + 4 \cdot \frac{\Lambda_Z - \Lambda_{NM}}{(\pi - \alpha_z)^2} \cdot s^2$$

$$\frac{\pi - \alpha_z}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2} \quad f(s) = \Lambda_Z$$

Trapezfunktion:

$$0 \leq s \leq \frac{\pi - \beta_{PM}}{2} \quad f(s) = 0$$

$$\frac{\pi - \beta_{PM}}{2} < s < \frac{\pi - \beta_{PM}}{2} + \alpha \quad f(s) = \frac{MMK^2}{\alpha} \cdot \left[ s - \frac{\pi - \beta_{PM}}{2} \right]$$

$$\frac{\pi - \beta_{PM}}{2} + \alpha \leq s \leq \frac{\pi}{2} \quad f(s) = MMK^2$$

Die Fourier-Koeffizienten ergeben sich durch abschnittsweise Integration und können fest im Algorithmus hinterlegt werden.<sup>4</sup>

Parabelfunktion:

$$\frac{a_{\Lambda(0)}}{2} = \frac{1}{\pi} \cdot \left[ \Lambda_Z \cdot \alpha_z + (2 \cdot \Lambda_{NM} + \Lambda_Z) \cdot \frac{\pi - \alpha_z}{3} \right]$$

$$a_{\Lambda(\xi)} = 4 \cdot (\Lambda_{NM} - \Lambda_Z) \left( \frac{\sin[\nu(\pi - \alpha_z)]}{\pi \nu^3 (\pi - \alpha_z)^2} - \frac{\cos[\nu(\pi - \alpha_z)]}{\pi \nu^2 (\pi - \alpha_z)} \right) + 2 \cdot \Lambda_Z \cdot \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu} \quad (2.29)$$

<sup>4</sup>Es wird vorausgesetzt, dass jeweils zwei magnetische Pole ein Polpaar und jeweils zwei Nuten die Seiten einer Spule bilden. Weiter ist es erforderlich, die Fourier-Zerlegung um  $p$  bzw.  $Q$  zu erweitern und die Integrationsgrenzen anzupassen, um alle Pole und Nuten zu beschreiben.

Trapezfunktion:

$$\begin{aligned} \frac{a_{MMK(0)}}{2} &= -\frac{MMK^2}{\pi} \cdot (\alpha - \beta_{PM}) \\ a_{MMK(\xi)} &= \frac{4 \cdot MMK^2 \cdot \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \cdot \left(\cos\left[\nu\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\right] - \cos\left(\frac{\nu\beta}{2}\right)\right)}{\pi\alpha\nu^2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Für den Leitwert im Zahnbereich wird hier auf einen einfachen Zusammenhang wie in [2] zurückgegriffen. Der Wert des Leitwerts in der Nutmitte ergibt sich dann durch Modifikation, indem man den Weg der Feldlinien durch die Luft mit dem in Abb. 2.10 rechts gezeigten Verlauf der Flusslinien für die Nutmitte annähert. Die Länge  $\Delta$  kann angenähert werden, indem man davon ausgeht, dass Fluss im Bereich der Nuten seitlich in die Zähne eintritt:

$$\begin{aligned} \Delta &= -r_i + \sqrt{r_i^2 + 2 \cdot r_i b_{ns} \frac{\overline{B}_\delta}{B_{Fe\text{ sätt}}}} \\ \Lambda_{NM} &= \frac{\mu_0}{h_m + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \min(\delta + \Delta, b_{ns}) + |\delta + \Delta - b_{ns}|} \\ \Lambda_Z &= \frac{\mu_0}{h_m + \delta} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Die beiden Kurven wurden auf Grund ihrer guten Übereinstimmung mit üblichen Formen, insbesondere der MMK, aber auch der Leitwerte, gewählt, wie sie bei üblicher Auslegung elektrischer Maschinen auftreten.

Abb. 2.11 zeigt, wie gut bei entsprechender Parametrierung der vorgestellten Kurven für  $MMK$  und  $\Lambda$  die Ergebnisse einer FEM-Nachrechnung mit den analytischen Ergebnissen übereinstimmen. Die Flankenbreite des Magneten  $\alpha$  wurde auf Grundlage von Messungen [111] mit 5% der Polteilung angenähert.

Die analytisch erzielten Ergebnisse sind bereits sehr genau. Durch komplexere Darstellung der Leitwerte sowie der Feldkurve kann die Qualität der Ergebnisse aber noch verbessert werden. Hierzu wird auf entsprechende Untersuchungen von Kolbe [79] und Hellinger [57] zu Luftspaltleitwerten verwiesen. Verbesserte Näherungen der Feldkurven können unter Anwendung einer Übersichtsarbeit [154] unter Anwendung des Vektorpotentials ausgeführt werden.

### 2.4.2. Strombelagstheorie, elektromagnetische Kraft und Systemgleichungen

Das dynamische Verhalten elektrischer Maschinen wird allgemein aus der Strombelagstheorie abgeleitet und ist für rotierende Maschinen, insbesondere Induktionsmaschinen

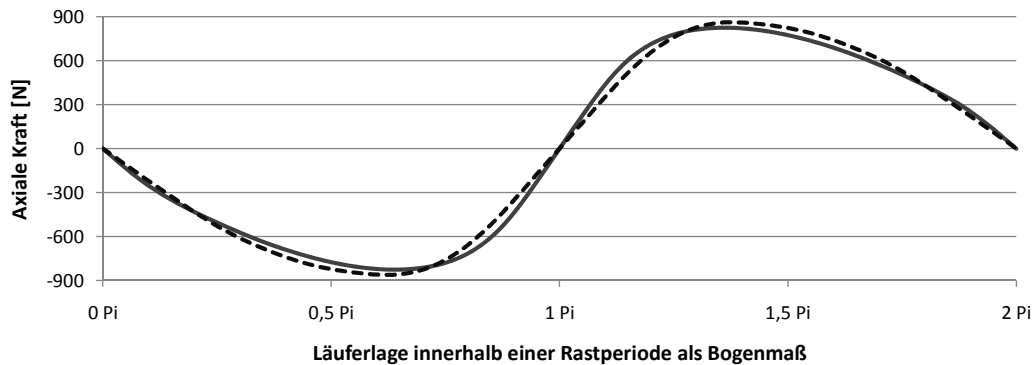


Abb. 2.11.: Rastkraftverlauf innerhalb einer Rastperiode für Oberflächenmagnete; durchgezogen: FEM-Berechnung - gestrichelt: analytische Nachrechnung mit Gleichung (2.28)

und elektrisch erregte Synchronmaschinen ausgiebig erarbeitet und umfassend beschrieben [60, 89]. Die Beschreibung für Linearmaschinen und besonders Polysolenoidmaschinen liegt hingegen bisher in nur unzureichender Form vor. Daher erfolgt für diese Arbeit eine entsprechende Nachrechnung bis hin zur Kraftbildung und Wirkungsgradberechnung. Hierzu ist jedoch die Übertragung und Anpassung der Strombelaststheorie auf den neuen Maschinentyp erforderlich. Ziel ist es zunächst, für die benötigten Spannungsdifferentialgleichungen einen Zusammenhang für den verketteten Fluss zur Verfügung zu stellen. Da alle erforderlichen Schritte analog zur Nachrechnung rotierender Maschinen durchgeführt werden können, interessiert maßgeblich das Ergebnis. Die umfangreichen Herleitungen sind daher in Anhang B ausgelagert. Hier werden nur die wichtigsten Ergebnisse dargestellt.

Unter der Voraussetzung, dass das speisende Drehspannungssystem symmetrisch ist, lauten die zum  $m$ -phasigen System gehörenden Spannungen und Ströme sowie die

resultierenden Raumzeiger:

$$u_{1\circ}(t) = U_{1\circ}\sqrt{2}\cos(2\pi f_1 \cdot t + \varphi_{1u} + (n-1)\frac{2\pi}{m}) \quad (\text{B.54})$$

$$i_{1\circ}(t) = I_{1\circ}\sqrt{2}\cos(2\pi f_1 \cdot t + \varphi_{1i} + (n-1)\frac{2\pi}{m}) \quad (\text{B.55})$$

$$\diamond = [A, B, C, D, \dots]$$

$$n = [1 : \diamond = A; 2 : \diamond = B; 3 : \diamond = C; \dots; m : \diamond = \text{Alph}(m)]$$

$$\vec{i}_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} I_1 e^{j\omega_1 t} \quad (\text{B.57})$$

$$\underline{I}_1 = I_1 e^{j\varphi_{1i}}$$

$$\vec{u}_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} U_1 e^{j\omega_1 t}$$

$$\underline{U}_1 = U_1 e^{j\varphi_{1u}}$$

Dem Anhang können weiterhin der vom speisenden System hervorgerufene Strombelag und das daraus entsprechend entstehende B-Feld für den Stator entnommen werden:

$$\vec{a}_{1(\nu_D)}(z_1, t) = j \frac{2m \cdot w_1}{l_2} \xi_{1(\nu_D)} \frac{\sqrt{2}}{2} I_1 e^{-j(\nu_D p z_1 + 2\pi f_1 t + \varphi_{1i})} \quad (\text{B.58})$$

$$\vec{B}_{1(\nu_D)}(z_1, t) = \frac{\mu_0 m \cdot w_1}{\delta'' \nu_D p \pi} \xi_{1(\nu_D)} \frac{\sqrt{2}}{2} I_1 e^{-j(\nu_D p z_1 + 2\pi f_1 t + \varphi_{1i})}$$

Die Ordnungszahlen  $\nu_D$  gehorchen dabei der nachfolgenden Regel:

$$\nu_D = m \cdot 2g + c \text{ mit } g_D = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ und} \quad (\text{B.52f})$$

$$c = [1, 3, 5, \dots, 2k+1] \forall 2k-1 < m; k = [1, 2, 3, \dots]$$

$$\text{für } m = 3 : \nu_D = [1, -5, 7, -11, 13, -17, \dots]$$

Zusammen mit dem Feld des Permanentmagneten

$$\vec{B}_{\delta m(\nu)} = (1 - \sigma) \frac{A_m}{A_\delta} \cdot \frac{1}{\chi_m + 1} \cdot \frac{2}{\nu\pi} \cdot \sin(\nu p \pi \frac{\beta_m}{l_2}) \cdot B_r \cdot e^{j\nu p z_m} e^{-j\nu p z_1} \quad (\text{B.74})$$

ergibt sich schließlich das Gesamtfeld im Luftspalt:

$$\vec{B}_{\delta(\nu)}(z_1, t) = \left( \frac{\mu_0 m \cdot w_1}{\delta'' \nu p \pi} \xi_{1(\nu)} \cdot \vec{i}_1(t) + (1 - \sigma) \frac{A_m}{A_\delta} \cdot \frac{1}{\chi_m + 1} \cdot \frac{2}{\nu\pi} \cdot \sin(\nu p \pi \frac{\beta_m}{l_2}) \cdot B_r e^{j\nu p z_m} \right) e^{-j\nu p z_1} \quad (\text{B.75})$$

Bei diesem Ausdruck ist zu beachten, dass die Ordnungszahlen des Stators und des Rotors anderen Bildungsgesetzen unterliegen. Für eine allgemeine Darstellung muss man analog zur Nachrechnung der Rastkräfte (Anhang A) ein neues gemeinsames Bildungsgesetz definieren, das die gemeinsam wirkenden Ordnungszahlen erfasst. Geht man jedoch von einer ausgeprägten Arbeitswelle aus, kann die Maschine als Grundwellenmaschine behandelt werden. Durch Vergleich mit der Luftspaltinduktion einer elektrisch erregten Synchronmaschine kann nun weiter eine Ersatzdurchflutung für den Magneten bestimmt werden, mit deren Hilfe sich dann zur Hauptinduktivität auch die Koppelinduktivität ermitteln lässt:

$$\Theta'_m = 2p(1 - \sigma) \frac{A_m \delta''}{A_\delta \mu_0 \chi_m + 1} \frac{1}{\sin\left(p\pi \frac{\beta_m}{b_2}\right)} \cdot B_r \cdot e^{jpz_m} \quad (\text{B.84a})$$

$$L_{1H} = m \cdot w_1^2 \cdot \frac{\mu_0}{\delta''} \cdot D_1 i \cdot l_2 \cdot \frac{1}{p^2 \pi} \cdot \xi_{1S(1)}^2 \xi_{1Z(1)}^2 \xi_{1N(1)} \quad (\text{B.86})$$

$$M_{PM} = w_1 \cdot \frac{\mu_0}{\delta''} \cdot D_1 i \cdot l_2 \cdot \frac{1}{p^2 \pi} \cdot \xi_{1S(1)} \xi_{1Z(1)} \quad (\text{B.87})$$

Mit den beiden Induktivitäten kann dann der verkettete Fluss allgemein angegeben werden:

$$\psi_{1H} = L_{1H} \cdot \frac{1}{2} [\vec{i}_1 + \vec{i}_1^*] + M_{PM} \cdot \Theta_m \cdot \frac{1}{2} (e^{-jpz_m} + e^{jpz_m}) \quad (\text{B.88})$$

Nun ist es möglich, den magnetischen Fluss strangweise mit Hilfe der Dreher anzugeben:

$$\psi_{\diamond H} = L_{11} \cdot i_{1\diamond} - \frac{L_{11}}{m-1} \cdot \sum_{\diamond' \setminus \diamond} i_{1\diamond'} + (m-1) \cdot M_{PM} \cdot \Theta_m \cdot \cos(p \cdot z_m - (n-1) \frac{2\pi}{m}) \quad (\text{2.32})$$

bzw.:

$$\psi_{\diamond H} = L_{1H} \cdot \left( \vec{i}_1 \underline{a}^{(n-1)(m-1)} + \vec{i}_1^* \underline{a}^{(n-1)} \right) + M_{PM} \cdot \left( \Theta'_m \underline{a}^{(n-1)(m-1)} + \Theta_m'^* \underline{a}^{(n-1)} \right) \quad (\text{2.33})$$

Führt man nun noch die Streuung - unterteilt in Nut- und Zahnkopfstreuung - mit Hilfe einer Leitwertberechnung ein, folgt für den total verketteten Fluss als Raumzeiger, der zum Aufstellen der Differentialgleichungen benötigt wird:

$$\vec{\psi}_1 = (L_{1H} + L_{1\sigma}) \cdot \vec{i}_1 + M_{PM} \cdot \Theta'_m \quad (\text{2.34a})$$

$$= L_1 \cdot \vec{i}_1 + M_{PM} \cdot \Theta'_m \quad (\text{2.34b})$$

$$\text{mit: } L_{\sigma 1} = 2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{w_1^2}{p} \cdot (\Lambda_N + \Lambda_Z) \quad \text{nach [100]}$$

$L_1$  totale Selbstinduktivität

Betrachtet man die oben dargestellten Zusammenhänge fällt eine erhebliche Ähnlichkeit zu den Gleichungen für rotierende Maschinen auf. Da in den vorhergehenden Abschnitten gezeigt wurde, dass die Unterschiede zwischen den Maschinentypen durch einfache geometrische Transformationen ausgedrückt werden können, entspricht dies den Erwartungen. Daher können die Spannungsdifferentialgleichungen direkt angegeben werden:

$$\begin{aligned} R_1 \cdot i_\infty(t) + \frac{d\psi_\infty(t)}{dt} &= u_\infty(t) \mid \cdot \underline{a}^{(n-1)} \\ \rightarrow R_1 \vec{i}_1(t) + \frac{d\vec{\psi}_1(t)}{dt} &= \vec{u}_1(t) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Die Kraft auf eine Leiteranordnung, die verteilt am Radius  $D/2$  angenommen wird, bestimmt sich aus einer Kraftdichte als Schub gemäß [18, 60] wie folgt:

$$\begin{aligned} F_{Le}(t) &= \int_{-\frac{l_i}{2}}^{\frac{l_i}{2}} \int_0^{\pi D} B(x, z, t) \cdot a(x, z, t) dx dz \\ dx &= \frac{D}{2} \cdot d\vartheta \end{aligned} \quad (2.36)$$

Die Integralgrenzen werden für eine Linearmaschine durch  $l_i$  für die Nutbreite in z-Richtung und durch die Nutlänge in x-Richtung (entspricht der Umfangsrichtung) ersetzt.

Für entsprechend ausgelegte Maschinen ist es zulässig, diese als Grundwellenmaschine zu behandeln, weshalb von Strombelag und Luftspaltfeld lediglich die Grundwellen weiter verwendet werden. Für die Berechnung der Kraft ist es erforderlich, die beiden reellen Ausdrücke  $a_1$  und  $B_\delta$  jeweils in komplexer Schreibweise anzugeben (vgl. Gleichungen (B.52.a),(B.53.a),(C.1) und (C.2))

$$\begin{aligned} a_{1(\nu)}(z_1, t) &= \vec{a}_{1(\nu)}(z_1, t) + \vec{a}_{1(\nu)}^*(z_1, t) \\ B_{\delta(\nu)}(z_1, t) &= \vec{B}_{\delta(\nu)}(z_1, t) + \vec{B}_{\delta(\nu)}^*(z_1, t) \end{aligned}$$

und in den Ausdruck für die Kraft eingesetzt. Da sowohl das B-Feld als auch der Strombelag von der Umfangskoordinate nicht beeinflusst sind, wirkt auf den Translator dann folgende Kraft<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} F_{LM}(t) &= -\pi \cdot D \cdot \int_0^{l_2} B_{\delta(\nu)}(z_1, t) \cdot a(z_1, t) dz_1 \\ F_{LM}(t) &= -j \frac{2\pi}{b_2} p \cdot m \cdot \xi_{1N(1)} \cdot M_{PM} \cdot \Theta_m \left( \vec{i}_1(t) \cdot e^{-j p z_m} - \vec{i}_1(t)^* \cdot e^{j p z_m} \right) \end{aligned} \quad (2.37) \quad (C.6)$$

<sup>5</sup>Die vollständige Berechnung kann in Anhang C nachvollzogen werden.

Abschließend werden in diesem Abschnitt die Systemgleichungen noch einmal zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1(t) &= R_1 \vec{i}_1(t) + \frac{d\vec{\psi}_1(t)}{dt} = R_1 \vec{i}_1(t) + \frac{d}{dt} (L_1 \vec{i}_1 + M_{PM} \cdot \Theta'_m) \\ F_{LM}(t) &= -j2\pi \frac{pm}{l_2} \xi_{1N(1)} \cdot M_{PM} \cdot \Theta_m (\vec{i}_1(t) \cdot e^{-j\mu z_m} - \vec{i}_1(t)^* \cdot e^{j\mu z_m}) \\ F_{LM}(t) - F_R - F_{Last}(t) - m_2 \cdot \frac{d\dot{z}_m}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem für Linearmaschinen ähnelt demjenigen von rotierenden Maschinen sehr stark. Unterschiede treten nur durch die Bewegungsrichtung auf. Mit Hilfe von Transformationen für Frequenz, Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit sowie geometrischen Transformationen (vgl. Kapitel 4) kann unter der Bedingung eines symmetrischen Drehspannungssystems und konstanter Geschwindigkeit aus den Systemgleichungen der Gleichungssatz für den stationären Betrieb aufgestellt werden. Die Herleitung birgt keine neuen Informationen, ist aber wesentlicher Gegenstand der Nachrechnung. Aus diesem Grund wird auf die Darstellung hier verzichtet und stattdessen ausführlich im Anhang D vollzogen. Die Berechnungen beinhalten alle Gleichungen bis hin zur mechanischen und elektrischen Leistung und stellen in ihrer Gesamtheit die Grundlage für eine quasistationäre Nachrechnung der Maschine dar, mit der auch die Abschätzung des Wirkungsgrads entlang der angenommenen Kraft-Geschwindigkeitskennlinie des Generators vorgenommen werden kann. Bessere Ergebnisse können später durch Integration einer Regelung erzielt werden, die jedoch nicht Bestandteil dieser Arbeit ist.



## 3. Numerische Optimierung

### 3.1. Begriffe und Verfahren

Unter Optimierung im Sinne dieser Arbeit ist das „Finden“ optimaler Parameter eines komplexen Systems zu verstehen. „Optimal“ definiert sich dabei über eine Zielfunktion, für die nach einem Extremwert (Minimum oder Maximum) gesucht wird. Im einfachsten Fall wird für eine Funktion  $y = f(x)$  die Nullstelle der ersten Ableitung gesucht. Bei komplexeren Funktionen, wie sie sich aus Systemgleichungen ergeben, für die der Einfluss einer Vielzahl an Parametern untersucht werden soll, ist dies nicht mehr trivial und wird durch numerische Programme<sup>1</sup> übernommen.

Bei der Behandlung von Optimierungsproblemen gilt für bestimmte Begriffe eine einheitliche Syntax:

**Zielfunktion:** Der zu optimierende Zusammenhang (z.B. Effizienz und/oder Kosten). Allgemein handelt es sich dabei um Funktionen zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen. Meist sind sie nicht geschlossen analytisch beschreibbar, besonders wenn ein Vektoroptimierungsproblem vorliegt. Besonders Knicke, Sprünge und Plateaus erschweren das Finden von Optimalwerten, vor allem, wenn lokale Optima nicht ausreichen.

**Parameter/Variablen:** Bezeichnet die Eingangsgrößen, die bei der Suche nach dem Optimum variiert werden.

**Nebenbedingung:** Zur Beschleunigung und Verbesserung der Lösbarkeit kann die Menge der Parameter durch Nebenbedingungen (Randbedingungen) eingeschränkt werden. Nebenbedingungen werden durch zusätzliche Gleichungen beschrieben, die zu erfüllen sind. Alternativ können die Parameter Grenzen unterworfen werden.

**Zulässige Menge:** Diejenigen Parameter (Such-/Parameter-Raum), die zur Optimierung verwendet werden dürfen.

**Lokales Optimum:** Jegliches Extremum der Zielfunktion.

---

<sup>1</sup>Die Bezeichnung „Programm“ an Stelle von Methode oder Algorithmus stammt aus dem militärischen Sprachgebrauch. Historisch wurde die Optimierung erstmals für Aktionspläne (program of actions) eingesetzt. Der Begriff „Programm“ bezieht sich dabei auf das Vorgehen und nicht auf das Computerprogramm.

**Globales Optimum:** Absolut größtes oder kleinstes Extremum der Zielfunktion.

**Skalares Optimierungsproblem:** Optimierung eines bestimmten reellwertigen Zusammenhangs (monokriteriell).

**Vektoroptimierungsproblem:** Optimierung hinsichtlich unterschiedlicher Ziele (multi-kriteriell). Eine eindeutige Lösung ist auf Grund entgegenschwieriger Kriterien meist nicht möglich. Dann müssen gleichwertige Lösungen subjektiv bewertet werden.

**Simulationsbasierte Optimierung (SBO):** Die Zielfunktion wird durch ein simulativ zu berechnendes Modell gebildet.

Von der hier durchgeführten Optimalwertsuche ist die Approximation zu unterscheiden. Dabei wird versucht, (meist mit der Fehlerquadratsumme) den Abstand zwischen einer Approximationsfunktion und dem abzubildenden Zusammenhang zu minimieren. Die Nachbildung sollte eine konvexe Funktion darstellen, da sich für diese das Optimum exakt angeben lässt. Die Methode hat sich bisher nicht durchgesetzt, da zur Bestimmung einer hinreichend genauen Funktion ein ähnlicher Aufwand erforderlich ist wie für die Durchführung einer Optimierung.

Den globalen Bestpunkt finden im ersten Suchgang mit absoluter Zuverlässigkeit nur exakte Lösungsverfahren oder systematische Algorithmen wie die Monte-Carlo-Methode [95] durch Rasterung des Suchgebiets. Zeiteffiziente Optimierer verwenden stochastische Suchmuster. Da diese aber in lokalen Extremwerten konvergieren können, muss beispielsweise durch wiederholte Suche sichergestellt werden, den absoluten Bestpunkt zu finden. Nachfolgend werden zunächst unterschiedliche Typen und eine Auswahl für diese Arbeit getroffen. Die exakte Beschreibung der Funktionsweise jedes einzelnen Programms ist nicht Bestandteil dieser Arbeit. Für ausführliche Beschreibungen kann auf [13, 50, 51, 118, 151] und die weiteren Quellen verwiesen werden.

Exakte Optimierungsverfahren (z.B. lineare Programmierung; Simplexmethode) [30], „Branch & Bond“-Verfahren [28]) erreichen nach finiter Schrittzahl immer die optimale Lösung. Hierzu ist die Existenz einer analytisch beschreibbaren Zielfunktion erforderlich, die evtl. sogar differenzierbar sein muss. Je komplexer ein System ist, desto unwahrscheinlicher ist es, dass eine solche Beschreibung mit vertretbarem Aufwand erstellt werden kann. Zudem steigt bei diesen Verfahren die Laufzeit exponentiell mit der Problemgröße [9, 133].

Anstatt nun stark vereinfachte, realitätsfremde Zusammenhänge aufzustellen, setzt man daher heuristische<sup>2</sup> Verfahren ein, die mit vertretbarem Zeit- und Rechenaufwand hochwertige Lösungen liefern [46]. Der Begriff stammt aus der Philosophie und bezeichnet die Lehre von Methoden zur Erkenntnisfindung. Heute versteht man darunter eine Sammlung problembezogener Regeln und Erfahrungswerte, die durch Algorithmen formalisiert werden. Ein Beispiel für solche Regeln ist die Priorisierung im Rahmen

---

<sup>2</sup>altgriechisch: heuriskein = finden

von Produktionsprozessen. Die Identifikation basiert überwiegend auf Plausibilitätsbetrachtungen. Die Methode trägt bereits maßgeblich zur Reduktion des Aufwands bei, der für das Finden sehr guter Lösungen aufzubringen ist.

Mit den Metaheuristiken wurde eine Erweiterung vorgestellt, um bei komplexen Problemen (große Anzahl an Parametern, nichtlineares Verhalten, Ableitung der Zielfunktion wegen Unstetigkeiten nicht möglich) problemunabhängig zu globalen Lösungen zu finden. Im allgemeinen Sinne handelt es sich dabei um (meist iterative) Vorgehensweisen zur Steuerung und Fortentwicklung untergeordneter Heuristiken. Tatsächlich ist heute darunter ein zeiteffizienter Suchprozess zu verstehen, der iterativ lokale Suchoperationen und/oder rekombinationsbasierte oder evolutionäre Verfahren einsetzt. Die jeweilige generische Suchschablone ist überwiegend aus der Natur inspiriert.

Theoretisch sind gemäß dem „No Free Lunch“-Theorem [157, 162] alle metaheuristischen Verfahren hinsichtlich der Robustheit (Rechenzeit und Qualität der Lösungen) gleichwertig. Wegener konnte ebenfalls nachweisen, dass die Robustheit nur unwesentlich von der Verfahrensgestalt und deren Parametern abhängt. Objektive Auswahlkriterien für ein bestimmtes Verfahren existieren folglich nicht. Diese sind immer subjektiv geprägt. Gründe können die Implementierbarkeit, die Komplexität oder der eigene Erfahrungsschatz sein.

Für die Entscheidungsfindung innerhalb dieser Arbeit werden kurz die wichtigsten Methoden<sup>3</sup>, unterteilt in zwei Gruppen, vorgestellt. Lokale (lokal-deterministische) Suchverfahren versuchen eine Lösung aus dem Suchraum (aktuell beste Lösung) durch kleine Veränderungen im Suchablauf zu verbessern. Sie weisen eine große Einfachheit und Effizienz auf, arbeiten aber mit der ersten oder zweiten Ableitung der Zielfunktion und setzen daher die Kenntnis dieser und deren Stetigkeit voraus. Das beliebteste Verfahren, wenn auch bei flachen Kurven nicht besonders effizient, ist der Gradientenabstieg. Dann schafft das Newton-Verfahren Abhilfe. Wesentlich effizienter hingegen ist das als Levenberg-Marquart-Algorithmus bekannte Gauß-Newton-Verfahren. Alle Verfahren weisen aber eine exponentiell steigende Rechenzeit (Invertierung der Hesse-Matrix) bei steigender Parameterzahl auf. Unstetige Funktionen können mit Hilfe der Tabu Search [52] untersucht werden. Auch für diese ist die Parameterzahl sinnvoll zu beschränken.

Daneben existieren sequentielle Verfahren, die keiner der Gruppen direkt zugeordnet werden können, meist aber zu den lokalen Suchverfahren gezählt werden, da eine sequentielle Verbesserung durch Verändern von Nachbarschaftsbeziehungen (erhöhte Intensivierung) um den Bestpunkt erfolgt. Prominente Vertreter dieser Verfahren sind die Iterated Local Search [51] und das Simulated Annealing [149]. Diese Verfahren sind für komplexe Systeme großer Parameterzahl rechenintensiv und nicht geeignet,

---

<sup>3</sup>Ergänzende Informationen können [56] entnommen werden. Die Studie wurde im Rahmen der Recherche für diese Arbeit angefertigt.

da letztlich nur ein Individuum zur (lokalen) Suche beiträgt. Die Abläufe sind zudem festgelegt, weshalb keine Anpassung an gefundene gute Lösungen erfolgt. [36, 43]

Die Gruppe der evolutionären und rekombinationsbasierten Verfahren [49, 123] versucht seit den 60er Jahren, die natürliche Evolution zu imitieren. Populationen möglicher Individuen (Lösungen) werden durch Rekombinations- und Mutationsregeln zu neuen Individuen fortentwickelt, mittels Selektion wird an Hand der Fitness über den Fortbestand entschieden. Die Diversifikation der Algorithmen ist besonders hoch. Idealerweise erreichen nach endlicher Zeit alle Individuen den gleichen Fitness-Level und vollziehen dann eine Intensivierung. Dazu muss der Algorithmus in geeigneter Weise parametrisiert werden, was in der praktischen Anwendung kaum gelingt [32, 99, 129]. Häufig endet die Konvergenz bei unzureichender Einstellung in lokalen Optimalwerten. Referenzarbeiten [45, 134] weisen zwar eine zügige Konvergenz auf, dabei handelt es sich jedoch um einen lokalen Bestpunkt. Nach langer Wartezeit konnte eine weitere Verbesserung des Ergebnisses beobachtet werden.

Neue „multicores“ im CPU-Bereich haben neuerdings einen Trend angestoßen, die Parallelisierung voranzutreiben. Bevorzugt werden Teilpopulationen auf unterschiedlichen CPU-Teilen gerechnet und über definierte Schnittstellen gekoppelt. Dadurch lassen sich neben einer schnelleren Suchraumerkundung Emigrationsprozesse realisieren. Die Komplexität und Beherrschbarkeit ist aber besonders schwierig, weshalb es noch keine Veröffentlichungen über die erfolgreiche Anwendung bei allgemeinen Problemen gibt. Ungeachtet der Schwierigkeiten stellen bis heute Evolutionsstrategien (Mutation) und genetische Algorithmen (genetische Rekombination) und deren Kombination die am häufigsten eingesetzten Algorithmen dar. Da aber sämtliche bekannten Hybridformen bis heute die schwere Beherrschbarkeit nicht ausräumen konnten, verliert sich das Interesse an diesen zusehends.

Dadurch wurden in den Jahren ab 1990 neue Entwicklungen angeregt, die sich am sozialen und kollektiven Verhalten von Tierpopulationen/-schwärmen (z.B. Ameisen, Bienen, Fische, Vögel) orientieren. Diese als Schwarmintelligenz bezeichneten Algorithmen sind die große Hoffnung vieler Anwender [15, 16].

Einzelne Individuen führen autonome, z.T. primitive Verhaltensmuster aus, interagieren aber über ein ausgeprägtes soziales Verhalten (Interaktion), woraus eine große kollektive Intelligenz entsteht (emergentes System). Die Verfahren sind in den Eigenschaften Robustheit, Flexibilität und Selbstorganisation<sup>4</sup> anderen Algorithmen überlegen. Gleichzeitig erfolgt eine mit stochastischen Verfahren kaum zu übertreffende Abdeckung des Suchraums durch eine Vielzahl gleichzeitig wirkender Individuen [15, 16, 93]. Die bekanntesten Algorithmen aus diesem Bereich sind der Particle Swarm (Abschnitt

---

<sup>4</sup>Darunter versteht man die selbständige Reaktion auf Einflüsse mittels Kommunikation auf Ebene der Individuen. Dazu zählen positives Feedback (Rekrutierung), negatives Feedback (z.B. Sättigung) sowie Fluktuation und Zufälligkeit bei der Erkundung der Umgebung.

3.2) und der Ameisenalgorithmus [35]. Ameisenkolonien eignen sich jedoch überwiegend für Planungsprobleme, die sich durch Graphen darstellen lassen (z.B. Problem des Handlungsreisenden).

Für die gezeigte Vielfalt an Optimierungsverfahren gibt es keine ausschließlich objektiven Entscheidungshilfen und Auswahlkriterien. Die Darstellung von Vorteilen bezieht sich immer auf bestimmte Standardfunktionen oder besondere Probleme [71]. Arbeiten von Forschungsgemeinschaften dienen allein dem Zweck, die Vorteile des eigenen Verfahrens herauszustellen. Die Ableitung von Hilfestellungen aus der Analyse der Grundprinzipien der Verfahren, bezogen auf ein Problem, führt wiederum zur Notwendigkeit, alle möglichen Lösungen betrachten zu müssen, und stellt damit dann die Anwendung von Optimierungsverfahren in Frage, da die Analyse bereits zur Lösung führt.

Die Auswahl der Eignung bestimmter Verfahren für das vorliegende Problem und dessen Klassifizierung kann im Rahmen dieser Arbeit nicht umfassend beleuchtet werden<sup>5</sup>, weshalb die Wahl eines als geeignet erscheinenden Verfahrens notwendig ist. Im Bereich der Ingenieurwissenschaften haben sich von den stochastischen Methoden Evolutionsalgorithmen und dabei besonders die genetischen Algorithmen mit Hybridisierungen und kollektive Intelligenzen, insbesondere der Particle-Swarm-Algorithmus für Probleme, wie das im Rahmen dieser Arbeit behandelte, bewährt und auch in vielen Bereichen durchgesetzt. Entsprechende Gründe sind oben dargestellt worden.

Es kann jedoch festgestellt werden, dass sich die PSO (Particle Swarm Optimierung) durch ihre einfache Implementierung und schnelle Konvergenz auszeichnet. Beide Umstände sind für die geplante mehrkriterielle Optimierung besonders wichtig, da eine Vielzahl von Suchläufen erforderlich ist, um eine Verteilung der Bestpunkte in Abhängigkeit der Ziele zu ermitteln. Die Überlegenheit der PSO gegenüber GA (Genetische Algorithmen) konnte sowohl bei der Minimierung atomarer Cluster [61] (stark multimodal<sup>6</sup>) als auch beim Training neuronaler Netzwerke [26] gezeigt werden. Und auch in der Anwendung bei anerkannten Testfunktionen konnte für die PSO bei gleicher Effektivität eine größere Effizienz nachgewiesen werden [54].

## 3.2. Particle-Swarm-Optimierung

Den Begriff Schwarmintelligenz führten erstmals Beni und Wang 1989 ein. Daraus entwickelte Reynolds sein Boids-Modell [15], das bereits die drei wesentlichen Verhaltensregeln der PSO kennt. Ausrichtung und Kohäsion bewirken eine Intensivierung

---

<sup>5</sup>Dabei handelt es sich um eine allgemeine Fragestellung, die zunächst durch die Mathematik geklärt werden muss.

<sup>6</sup>Multimodal bedeutet, dass unterschiedliche lokale Extremwerte existieren.

der Boids. Unter Boids versteht Reynolds die simulierten Objekte, die bei der PSO als Partikel bezeichnet werden. Dazu wird einem Boid die mittlere Ausrichtung und Position der umgebenden (benachbarten) Boids mitgeteilt und zugewiesen. Nachbarn sind bei Reynolds alle Boids, die sich innerhalb eines vom Anwender festgelegten Radius um das betreffende Boid befinden. Trennung führt durch Einschlagen einer Richtung, die der Häufung entgegenwirkt, zur Diversifikation. Die Bezeichnung PSO rührt schließlich von Kennedy und Eberhard [40, 73], die 1995 die Verhaltensregeln für den klassischen Algorithmus formulierten. Ein „cornfield vector“ zeigt dabei immer auf den jeweils persönlich besten Futterplatz und beinhaltet zusätzlich noch den besten Platz des Schwarms. Dadurch wurde es den „Vögeln“ möglich, individuell neue Plätze aufzuspüren.

Abbildung 3.1 zeigt einen Überblick über die wichtigsten Verarbeitungsschritte des Programms. Den Start bildet eine zufällig initialisierte Startpopulation, deren  $\nu$  Mitglieder masselose, kollisionsfreie Partikel sind, die sich frei im Suchraum  $R^d$  bewegen können und je eine potentielle Lösung (Dimensionen  $d$  am aktuellen Ort) darstellen. Jedes Partikel wird durch einen Vektor  $\mathbf{X}_\nu = [x_1, x_2, \dots, x_d]$  beschrieben. Ein zusätzlicher Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{V}_\nu = [v_1, v_2, \dots, v_d]$  bestimmt die jeweilige Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit in  $R^d$ . Die Geschwindigkeiten sollten Grenzen unterworfen werden, um eine repräsentative Untersuchung des Lösungsraums zu gewährleisten (vgl. unten). Die Größe der Population kann nicht durch analytische Regeln bestimmt werden. Die Anzahl der Dimensionen, der Wunsch nach schneller Konvergenz und hinreichende Sicherheit für das Finden des globalen Bestpunkts sind konkurrierende Anforderungen. Bekannte Richtwerte sind daher immer problembezogen. Eine Übersicht von Kennedy und Eberhart [74] weist eine tendenzielle Größe zwischen 10 und 50 Individuen auf. Diese Größen sind auch für das vorliegende Problem geeignet. Versuche am vorliegenden System haben zudem ergeben, dass, abhängig von der Kommunikation der Individuen untereinander, vollvernetzte Populationen größer sein müssen, um den Suchraum zuverlässig zu erkunden (vgl. unten).

Danach wird in der Optimierungsschleife für jedes Partikel entlang seiner Trajektorie die als Fitness  $F$  (z.B. Wirkungsgrad) bezeichnete Zielfunktion evaluiert. Daraus ergibt sich der persönliche Bestpunkt  $\vec{p}_\nu$ . Über die soziale Vernetzung wird die globale Bestposition  $\vec{p}_g$  kommuniziert. Die Bewegung der Partikel wird durch den sich, über Regeln und ggf. stochastische Manipulationen aktualisierenden, Geschwindigkeitsvektor bestimmt (vgl. unten). Die Suche wird solange ausgeführt, bis entweder eine bestimmte Anzahl an Wiederholungen oder ein Kriterium für die Veränderung der Ergebnisse erreicht ist (Konvergenzkriterium). Im vorliegenden Fall werden die gefundenen Ergebnisse sortiert und die Standardabweichung der besten  $k$  % der Partikel bestimmt. Liegt diese



Abb. 3.1.: Allgemeine Darstellung des Ablaufs einer PSO

unterhalb eines sinnvollen Wertes wird die Suche beendet:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= F(\vec{p}_a) \leq F(\vec{p}_b) \leq \dots \leq F(\vec{p}_n) \quad a, b, \dots, n \in [1, \nu] \\
 \mathbf{E}^* &= [F(\vec{p}_a), F(\vec{p}_m)] \quad m = \nu \cdot k \quad k \in [0, 1]
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Abbruchbedingung erfüllt, wenn gilt:

$$\sigma_{E^*} = \sqrt{\text{Var}(E^*)} < \varepsilon$$

Es liegt dann am Nutzer, den Algorithmus erneut zu starten, beispielsweise um das Ergebnis zu verifizieren oder um eine Paretofront zu ermitteln.

Das Struktogramm Abb. 3.2 stellt den Ablauf logisch dar und beinhaltet auch die Aktualisierungsregeln. Zu jedem Iterations-Schritt  $t$  erfolgt die Zuweisung des persönlichen und globalen Bestwerts. Die Speicherung kann ohne Information über den Schritt durchgeführt werden. Die Position eines Partikels im Schritt  $t$  ergibt sich aus der vorhergehenden und dem ermittelten Geschwindigkeitsvektor in Addition. Die Geschwindigkeit wiederum ist eine Summe aus vorhergehender Geschwindigkeit und den über die Zufallszahlen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  gewichteten Abständen zum persönlichen und globalen Bestpunkt. Die Bewegungsrichtung ist durch die resultierenden Werte der Vektoreinträge bestimmt. Der Ablauf ist in Abb. 3.3 zu sehen. Die Ausprägung des kognitiven und sozialen Verhaltens führt für große Werte  $\varphi_1$  zu verstärkter Exploration und damit Diversifikation, im Falle von  $\varphi_2$  strebt der Schwarm hingegen schnell zum globalen Bestpunkt. Die Wahl der Einstellung ist problemspezifisch und muss empirisch ermittelt werden. Werte um 2 gelten aber als robust und solide Ausgangsbasis [117]. In der praktischen Anwendung zeigt sich jedoch, dass die Wahl der Vernetzung die Konvergenz so stark beeinflusst, dass die Wahl der beiden Faktoren eine untergeordnete

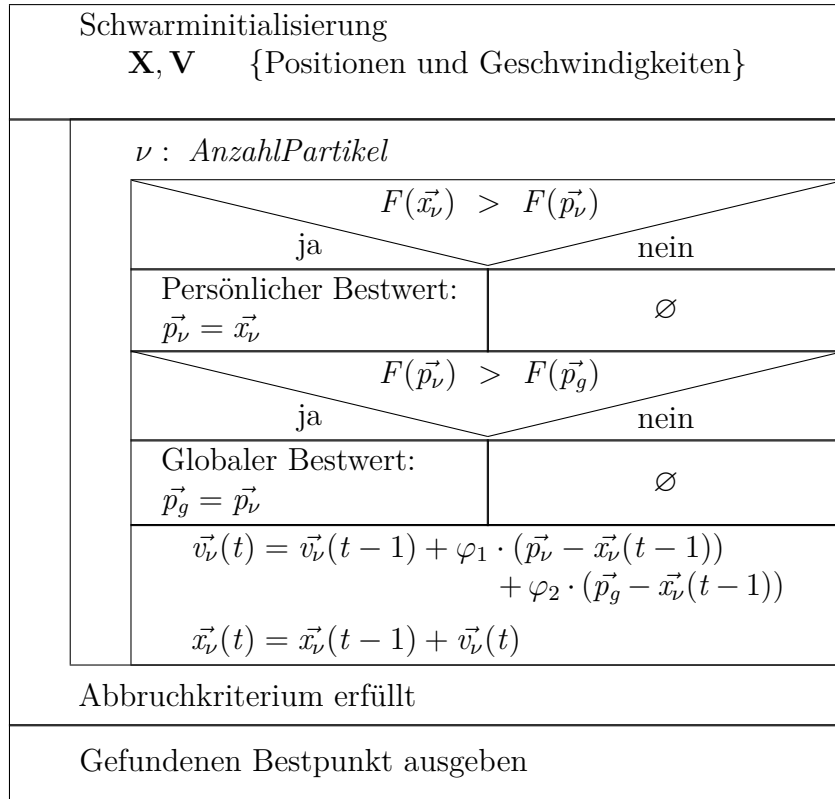


Abb. 3.2.: Struktogramm der PSO nach Kennedy/Eberhart.

Rolle spielt.

Falls wiederholt große Geschwindigkeiten auftreten, besteht die Gefahr der Instabilität (Oszillieren). Daher wird die Geschwindigkeit beschränkt. Zusätzlich besteht die Möglichkeit, die vorhergehende Geschwindigkeit mit einer Trägheit  $g$  (inertia weight) zu gewichten [137]. Diese verliert durch den Einsatz des auf S. 58 vorgestellten „constriction factor“ aber vollkommen an Bedeutung.

Die zugehörige Vorschrift zur Ermittlung der neuen Position für jede Raumkomponente lautet [40]:

$$v_\nu^d(t) = g \cdot v_\nu^d(t-1) + c_1 \cdot z_{\nu,1}^d \cdot (p_\nu^d - x_\nu^d(t-1)) + c_2 \cdot z_{\nu,2}^d \cdot (p_g^d - x_\nu^d(t-1)) \quad (3.2)$$

$$x_\nu^d(t) = x_\nu^d(t-1) + v_\nu^d(t) \quad (3.3)$$

Hierin wurden  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  durch je einen Ausdruck ersetzt, der jeweils aus den konstanten Faktoren  $c_1, c_2$  und einer Zufallszahl  $z_{\nu,1}, z_{\nu,2}$  mit Wert zwischen 0 und 1 besteht, die für jede Raumkomponente in jedem Schritt neu ermittelt werden.



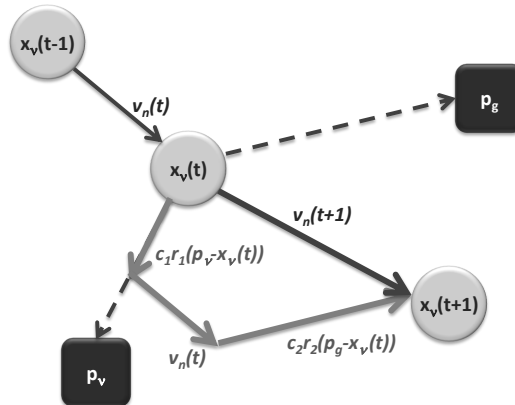


Abb. 3.3.: Zustandekommen der Trajektorie eines Partikels

Hier wird auf die Trägheit verzichtet und als maximale Geschwindigkeit ein Viertel der Suchraumlänge eingeführt. Die Dämpfung oder Beschleunigung wird dann durch den „constriction factor“  $\chi$  [25] (nachfolgend „Dämpfung“ genannt) gesteuert. Diese darf hier bei eingetretener Konvergenz auch größer als 1 gewählt werden (Unruhe), und kann analog zur Mutation bei den genetischen Algorithmen die Suche anregen, um evtl. einen besseren Punkt zu finden oder das Ergebnis zu verifizieren. Die Verwendung der Dämpfung stellt nachweislich das allgemeinere und bessere Vorgehen dar, um Instabilitäten vorzubeugen [41]. Die Untersuchung der Konvergenz-Eigenschaften durch Eigenwertanalyse von Clerc und Kennedy [25] ergab eine Bestimmungsmethode für  $c_1$  und  $c_2$ , wodurch die Stabilität (nicht die Konvergenz im globalen Optimum) des Systems gewährleistet wird:

$$\begin{aligned}
 v_\nu(t) &= v_\nu(t-1) + \varphi_1 \cdot (p_\nu - x_\nu(t-1)) + \varphi_2 (p_g - x_\nu(t-1)) \\
 x_\nu(t) &= \chi \cdot v_\nu(t-1) + \chi \cdot x_\nu(t-1) + (1 - \chi) \cdot c_\nu \\
 \chi &= \begin{cases} \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{2 - \varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}}} & \text{für: } \varphi > 4 \\ \kappa & \text{sonst} \end{cases} \quad \kappa \in ]0, 1[ \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

mit:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 \\
 c_\nu &= \frac{\varphi_1 \cdot p_\nu + \varphi_2 p_g}{\varphi_1 + \varphi_2}
 \end{aligned}$$

Typische Startwerte für Suchläufe sind  $\kappa = 0,99$  und  $c_1 = c_2 = 2,05$ . Die Sicherstellung der Konvergenz durch dieses Vorgehen kann nur unter vereinfachten Bedingungen für einfache Testfunktionen nachgewiesen werden [25]. Mangels allgemeinen Nachweises hilft die hier eingeführte Unruhe, lokale Minima zu verlassen. Auch die Wahl eines zu kleinen Wertes für  $V_{max}$  erhöht die Gefahr, ein lokales Optimum zu finden. In

Kombination mit der Unruhe wird ein eventueller Mangel aber behoben.

Neben den vorgestellten Varianten sind weitere Arbeiten bekannt, die Vorschläge zur Verbesserung des Algorithmus anbieten. Beim „comprehensive learning“ [70] werden komplexe Regeln eingeführt, um während des Suchvorgangs die lokale Bestposition eines Partikels auf Basis der umgebenden Partikel anzupassen. Das wirkt sich jedoch negativ auf die Rechenzeit aus. Durch die Vernetzung der Partikel (vgl. unten) kann der Informationsfluss einfacher und einmalig zu Beginn der Optimierung gesteuert werden. Oftmals finden sich Versuche, die Partikel mit einer permanenten Unruhe zu belegen. Die vorgeschlagene und implementierte Unruhe bietet jedoch den Vorteil, die Stabilität des Programms nicht zu beeinflussen, und weist dennoch eine hohe Effizienz auf.

Die vorliegende Implementierung wurde hingegen mit der neuartigen Fähigkeit ausgestattet, signifikante Parameter zu identifizieren. Hierzu wird nach einigen Iterationen überprüft, in welche Vorzugsrichtung sich die Parameter jeweils im gegenseitigen Vergleich (je zwei Parameter) bewegen. Ist ein Parameter gegenüber allen anderen dominant und zeigt in eine eindeutige Richtung, kann für diesen der Suchraum beschränkt werden. Ist ein Parameter nicht oder nur unwesentlich signifikant, besteht die Möglichkeit, den Parameter von der Suche auszunehmen. Letztgenannter Schritt ist immer vom Nutzer durchzuführen, da sehr flache Optima dann nicht untersucht werden können.

Besondere Weiterentwicklungen sind Hybridisierungen, die auch bei anderen Verfahren zu finden sind. Bei der PSO werden vor allem Methoden aus den evolutionären Strategien (Selektion, Rekombination oder Mutation) eingesetzt [31, 69, 136, 146]. Die Implementierung führt aber zu unnötig komplexen Algorithmen. Dies trifft auch für die „Optimized PSO“ [93] zu, die in Form einer Meta-Optimierung die besten Einstellungen für den eigentlichen Optimierer mittels umlagerter PSO ermittelt.

#### 3.2.1. Restriktionen für das Erreichen der Raumgrenzen

Da der Suchraum im Normalfall Grenzen aufweist, folgt daraus die Notwendigkeit, Regeln zu diskutieren, gemäß derer Partikel zu behandeln sind, die den Raum verlassen. Die möglichen Vorgehensweisen nach Huang [64] und Robinson [128] zeigt Abb. 3.4. Die einfachste Möglichkeit (a) besteht darin, den Partikel den Raum verlassen zu lassen und die Fitness nicht auszuwerten. Dann kehrt der Partikel nach endlicher Anzahl Schritte wieder ins Suchgebiet zurück. Dadurch geht aber unnötig Rechenleistung und Zeit für nicht zu untersuchende Gebiete verloren. Besser ist es, die „Energie“ derjenigen Raumkomponente zu absorbieren (b), für die eine Restriktionsverletzung vorliegt. Beim Anheften (b1) an den Auftreffpunkt muss der gesamte Geschwindigkeitsvektor beschnitten werden, was nur bei einer dauerhaften Fixierung des Partikels an dieser

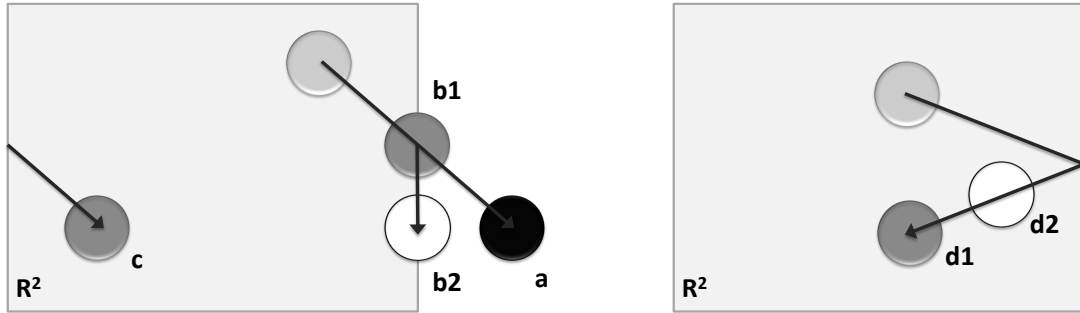


Abb. 3.4.: Behandlung von Randüberschreitung der Partikel: a) keine Beschränkung b1) Klebenbleiben (stick) an der Stelle des Auftreffens bzw. b2) Abgleiten entlang des Randes (Absorption) c) Wrap: Wiedereintritt auf der anderen Raumseite d1) Abprallen (bounce) ohne und d2) mit Dämpfung

Stelle sinnvoll ist. In allen anderen Fällen ist dem Abrutschen (b2) an der Raumgrenze der Vorzug zu geben, da nur der kritischen Richtung die Raumgrenze zuzuweisen ist. Das Vorgehen eignet sich besonders für Parameter, die bezüglich dieser Grenze eine hohe Signifikanz aufweisen. Die nachfolgende Vorschrift bildet dies für Obergrenzen ab. Untergrenzen sind analog zu behandeln.

$$x_\nu^d(t+1) = \begin{cases} x_\nu^d(t+1) & \text{für: } x_\nu^d(t+1) \leq x_{max}^d \\ x_{max}^d & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.5)$$

Möchte man die Übertretung zur Diversifikation nutzen, kann man die Energie „umbrechen“ (wrap). Das bedeutet, der Partikel fliegt von der anderen Seite wieder in den Suchraum (c). Die immanente stochastische Unruhe kann aber Instabilitäten hervorrufen, weshalb hier die Diversifikation durch die Partikelvernetzung sichergestellt wird (Abschnitt 3.2.2). Zudem befindet sich die Methode nicht im Einklang mit natürlichem Schwarmverhalten. Das für Konvergenz und Stabilität zuträglichste Vorgehen ist die Reflexion. Nach mehrmaliger Reflexion kann dadurch auch ein Zustand (b2) erreicht werden. Es ist zwischen Reflexion mit (d2) und ohne (d1) Dämpfung zu unterscheiden. Hier findet Variante (d1) Anwendung, wodurch an den Raumgrenzen eine Beruhigung des Schwarms eintritt. Die implementierte Vorschrift lautet:

$$x_\nu^d(t+1) = \begin{cases} x_\nu^d(t+1) & \text{für: } x_\nu^d(t+1) \leq x_{max}^d \\ x_{max}^d - z_{\nu,3} \cdot (x_\nu^d(t+1) - x_{max}^d) & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.6)$$

### 3.2.2. Interaktion der Partikel

Die Wichtigkeit der Wechselwirkung/Interaktion der einzelnen Partikel untereinander, genannt Nachbarschaftsbeziehungen, wurde bereits angedeutet. Abb. 3.5 zeigt die beiden

grundlegenden Topologien der PSO nach Kennedy und Eberhart [23]. Die Basis-PSO wurde mit dem GBest- (global best) Modell entwickelt. In dieser globalen Nachbarschaft sind alle Partikel ausnahmslos untereinander verbunden, der global beste Punkt ist allen Partikeln gleichermaßen bekannt. Die Topologie weist dann eine besonders schnelle Konvergenz auf, die Robustheit ist jedoch anfällig gegen lokale Minima [94]. Das von Kennedy gezeigte LBest-Modell (local best) [72] hingegen verzögert die Weitergabe des globalen Bestpunkts maximal. Die Vernetzung ist aber nicht praktikabel, da bei größeren Räumen mit vielen Partikeln die Konvergenz nicht akzeptabel ist.

In einer repräsentativen Untersuchung zu Konvergenz und Robustheit an zufällig generierten und besonders ausgewählten Topologien kommen Kennedy und Mendes [75] zu folgendem Ergebnis: Sowohl GBest als auch LBest schneiden, genauso wie zufällig generierte Topologien, besonders schlecht ab. Besonders gute Ergebnisse bei vergleichsweise geringer Schrittzahl hingegen zeigen sich bei zwei als Pyramiden- und von-Neumann-Topologie bekannten Verknüpfungsformen sowie bei Clusterbildung (Subpopulationen). Die Verifikation erfolgte an fünf Standardtestfunktionen (Sphere function, Rastrigin, Griewank, Rosenbrock - je  $d = 30$  und Shaffer's f6 -  $d = 2$ ).

Deshalb kommen hier die Topologien nach von Neumann bzw. zur beschleunigten Konvergenz versuchsweise ein Cluster mit GBest-Subpopulation zur Anwendung (vgl. Abb. 3.6). Nicht verwendet werden Pyramiden-Verbindungen. Diese beinhalten Tetraeder-Elemente und sind nicht planar, weshalb der Algorithmus erheblich komplexer ausfällt. Die Struktur mag einen Schwarm natürlicher abbilden als ein planares Netz, die Ergebnisse von Kennedy und Mendes weisen jedoch keinerlei Vorteile aus.

Die Clusterbildung erfolgt nach Abb. 3.7. Zur Intensivierung der Suche an verteilten Orten werden jeweils nahe beisammen liegende Partikel detektiert und dann untereinander verbunden. Es werden an einen Knoten die  $\nu/C$  nächsten Partikel angebunden, wenn  $C$  die Anzahl der Cluster ist. Danach wird dies für andere, noch ungebundene Partikel wiederholt. Die Alpha-Partikel werden zufällig ausgewählt und regeln die Kommunikation des globalen Bestpunkts. Die vorliegende Implementierung ist zusätzlich

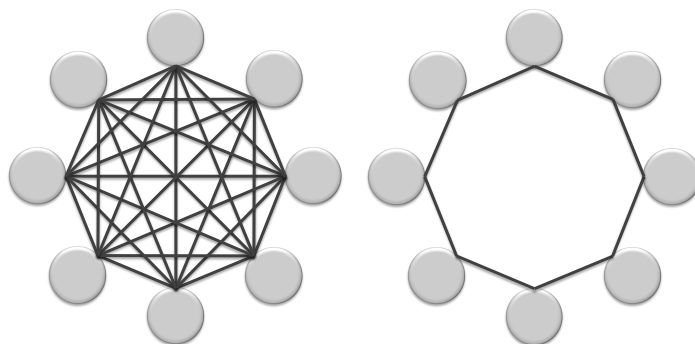


Abb. 3.5.: GBest- und LBest-Ring-Nachbarschafts-Topologie.

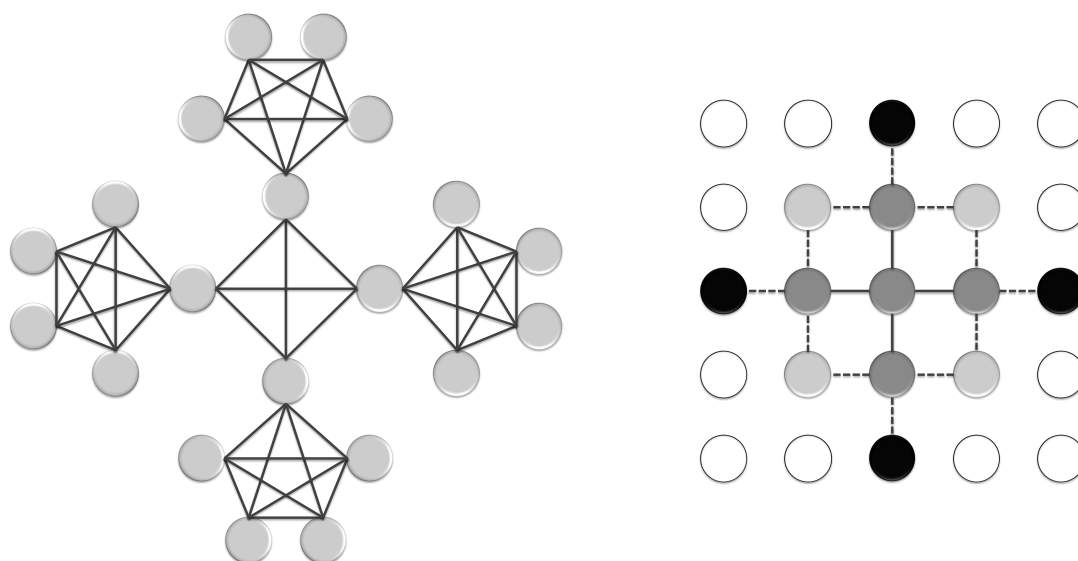


Abb. 3.6.: Nachbarschaftstopologie mit Clusterbildung (links) und von-Neumann-Topologie(n)(rechts).

mit einem Delay ausgestattet. Damit kann eine gewisse Anzahl Schritte eingestellt werden, bis zu der die Partikelbewegung vom globalen Bestpunkt unbeeinflusst bleibt. Diese Struktur weist nur eine geringe Verzögerung gegenüber GBest auf, führt aber schon zu einer deutlich besseren Suchraumabdeckung.

Bei den noch erfolgreichereren von-Neumann-Netzen gibt es unterschiedliche Verbindungsgrade. Abb. 3.6 zeigt zwei Varianten. Die Grundstruktur (je vier Verbindungen) wird durch die dunkelgrauen Partikel abgebildet. Dieses Schema kann über alle Partikel hinweg fortgesetzt werden. Es kommunizieren immer die direkten Nachbarn miteinander. Die gestrichelten Linien zeigen eine Struktur zweiten Grades. Höhere Grade kommen einer Clusterbildung gleich, da nur vier Elemente (schwarz) eine Verbindung zum Nachbarcluster besitzen. Die Auswahl der Nachbarn erfolgt analog zum Cluster oben über die kürzesten Verbindungen im Raum. Hier reicht jedoch ein Netz vom Grad 1 ( $r=1$ ) aus. Künstlich hinzugefügte Verzögerungen ergaben keine Verbesserung für die Ergebnisqualität.

Im Rahmen der Anpassung der Topologien gibt es weiterführende Vorschläge, die Verknüpfungen und Größen von Subpopulationen variabel zu gestalten [63, 143]. Man bezeichnet die Verfahren dann als „self-adapting“. Da sich in den zuvor erwähnten Untersuchungen jedoch keine signifikante Verbesserung hinsichtlich der Qualität des Ergebnisses gezeigt hat, wird im Rahmen dieser Arbeit auf die Implementierung eines geeigneten Verfahrens und auf die weitere Untersuchung verzichtet.

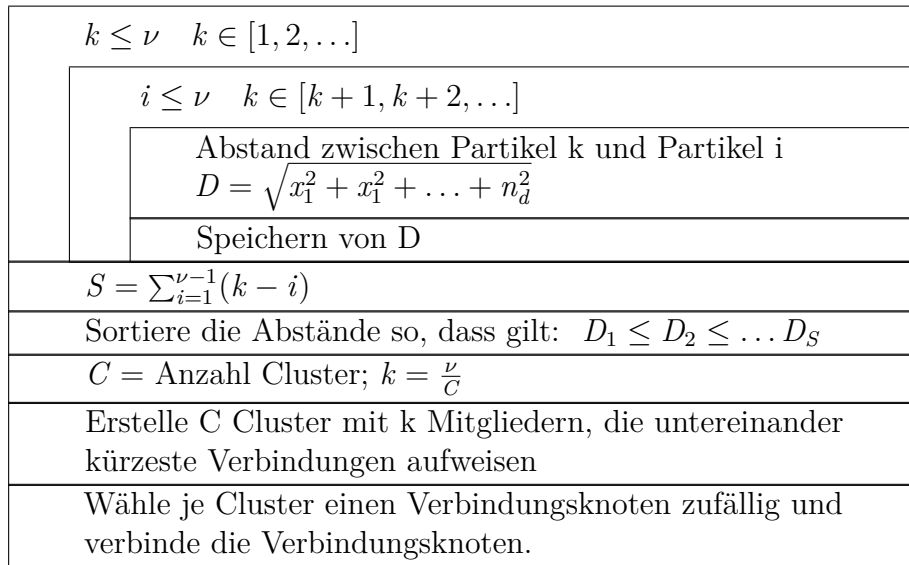


Abb. 3.7.: Struktogramm: Erstellen eines GBest-Clusters

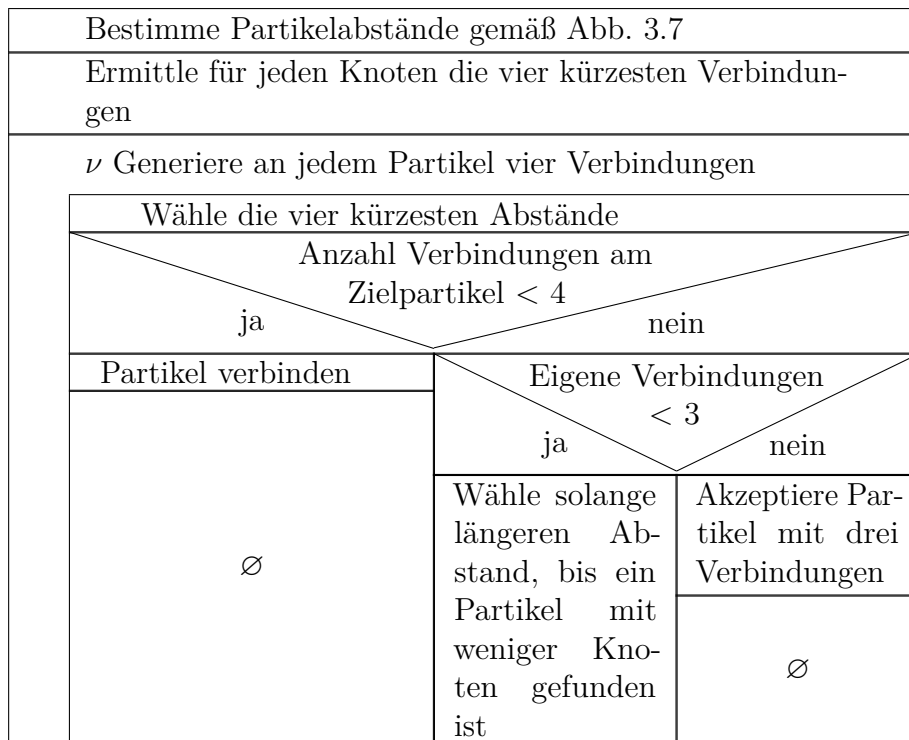


Abb. 3.8.: Struktogramm: Erstellen eines von-Neumann-Netzes

### 3.3. Multikriterielle Optimierung

Sobald optimale Lösungen unterschiedliche Ziele zu erfüllen haben, stellt sich die Frage, nach welchen Kriterien ein Parameterset als optimal bezeichnet werden darf. Die entsprechende Aufbereitung und Gewichtung der Ergebnisse nennt sich multikriterielle Optimierung [22, 42].

Die vorgenannte mono-kriterielle Zielfunktion  $F(\vec{x})$  setzt sich nun aus  $k$  Zielen zusammen und wird selbst als Vektor geschrieben (Vektoroptimierung). Zur leichteren Lesbarkeit werden Vektoren in Fettschrift dargestellt.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})] \\ \min f_i(\mathbf{x}) \mid \forall i \in [1, k], i \in \mathbb{Z} \\ \mathbf{x} &\in \mathcal{S} \wedge \mathcal{S} \in \mathcal{X} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Wir bezeichnen hierin  $\mathcal{X}$  als den Parameterraum, der aus allen verwendbaren Parametern aufgespannt wird. Die Nebenbedingungen schränken diesen auf den Suchraum  $\mathcal{S}$  ein.  $\mathcal{F}$  ist der durch die Zielfunktionen aufgespannte Raum, der den Unterraum  $\mathcal{Z}$  enthält, in dem sich nur die aus  $\mathcal{S}$  abbildbaren Zielwerte befinden.  $\mathcal{X}$  kann d-dimensional und  $\mathcal{F}$  m-dimensional sein.

Führt die Erfüllung eines Ziels auch zur Erfüllung eines anderen, sind sie kooperativ, und die Betrachtung kann monokriteriell erfolgen. Beeinflussen sich Ziele nicht, sind sie indifferent und werden unabhängig voneinander optimiert. Gemeinsam müssen nur konfliktäre Ziele behandelt werden. Da die Verbesserung des einen das andere verschlechtert, müssen Kompromisslösungen gefunden werden, die in ihrer gesamten Wirkung für den Nutzer optimal sind.

In der Realität verlassen sich Menschen auf Erfahrungswerte und logische Abwägungen, um die subjektiv beste Alternative auszuwählen. Dem käme beim Optimierer gleich, die Ziele zu gewichten und in einer Ersatzzielfunktion (monokriteriell) zu konsolidieren (Aggregation). Der Optimierungsalgorithmus kann dem Benutzer die Entscheidung also nicht abnehmen, losgelöst von aggregierten Funktionen aber objektiv gleichwertige Ergebnisse als Entscheidungshilfe bereitstellen, bevor eine Gewichtung vorgenommen wird. Das hat der Wissenschaftler Vilfredo Pareto für die Verteilung von Gütern (vgl. Wohlfahrtsökonomie) so beschrieben. Demzufolge ziehen alle Empfänger größtmöglichen Nutzen aus der Verteilung, wenn die Besserstellung eines Individuums mit einer Verschlechterung an anderer Stelle einhergeht. Lösungen, auf die diese Aussage zutrifft, bilden das pareto-optimale Set und sind dann objektiv gleichwertig<sup>7</sup>. Abb. 3.9 verdeutlicht den Begriff an Hand zweier Zielfunktionen, die mit ihren Höhenlinien (Indifferenzkurven) dargestellt sind. An den Tangentialpunkten der Höhenlinien

<sup>7</sup>Das Vorgehen sichert keine gerechte Verteilung, da die Berücksichtigung des subjektiven Bedarfs eine Wertung beinhalten würde. Die subjektive Auswahl erfolgt auf Grundlage des Sets.

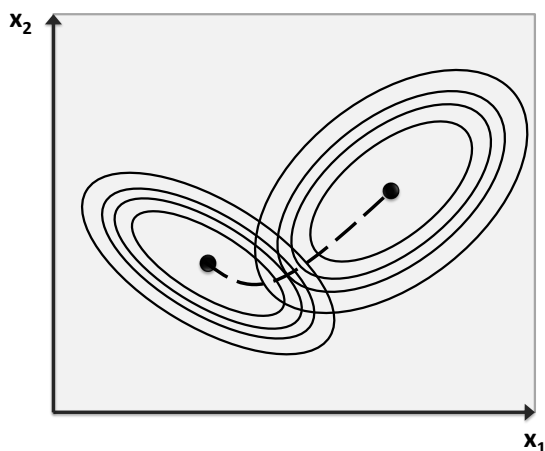


Abb. 3.9.: Indifferenzkurven zweier Zielfunktionen mit jeweiligem Minimum (schwarze Punkte) und Pareto-Menge (gestrichelt).

befinden sich Punkte, die aus Sicht beider Funktionen den minimalen, erreichbaren Funktionswert in der jeweiligen Konfiguration darstellen. Verlässt man den Punkt entlang einer Höhenlinie einer Funktion, springt man auf eine schlechtere Höhenlinie der jeweils anderen Funktion.

Mathematisch spricht man von nicht-dominierten Lösungen, aus denen sich die Pareto-Menge zusammensetzt: Lösung  $\mathbf{x}_1$  dominiert also  $\mathbf{x}_2$ , wenn gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \preceq \mathbf{x}_2, \text{ wenn gilt:} \\ f_i(\mathbf{x}_1) \not\geq f_i(\mathbf{x}_2) \quad \forall i = 1, 2, \dots, k \text{ und} \\ \exists i \in (1, 2, \dots, k), \text{ für das gilt: } f_i(\mathbf{x}_1) < f_i(\mathbf{x}_2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Für eine bestimmte Lösung (Parameter-Set), darf also kein Funktionswert eines Einzelziels schlechter sein als für eine Alternativlösung, zugleich muss mindestens ein Einzelziel besser sein als eines der Alternativlösung. Dann wird die Alternativlösung dominiert.

Abb. 3.10 zeigt ein bikriterielles Optimierungsproblem mit zwei Parametern. Nicht dominierte Lösungen bilden zusammen das Set pareto-optimaler Lösungen  $P$ , dessen zusammenhängende Darstellung im Zielraum die Pareto-Front  $PF$  ergibt. Die Front kann konvexe und/oder konkave Abschnitte und sogar Unstetigkeiten aufweisen. Für eine gute Entscheidungsgrundlage muss die Front durch eine gleichverteilte Anzahl pareto-optimaler Lösungen angenähert werden. Die gewünschte Anzahl bestimmt überwiegend die Suchdauer. Hierzu sind diverse Verfahren bekannt, die zur Ermittlung der Front eingesetzt werden können. Derzeit ist jedoch trotz aktueller Forschungen (vgl. unten) keine anerkannte Methode bekannt, deren Anwendung den kleinstmöglichen Aufwand zur Ermittlung der Front garantiert.



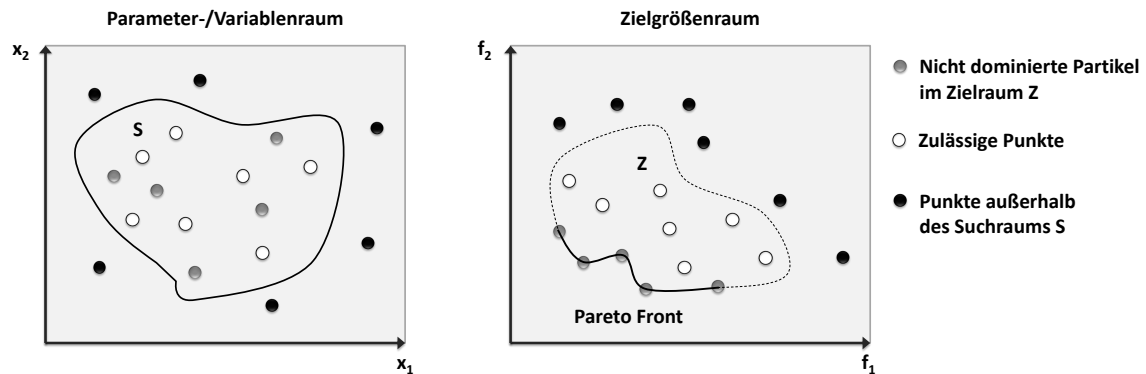


Abb. 3.10.: Darstellung eines bikriteriellen Problems mit Variablenraum der Größe 2.

Die grundsätzliche Herangehensweise an die Bestimmung eines Pareto-Sets lässt sich in vier Ansätze gliedern [65].

Das Herangehen **ohne Präferenzen** (no preference) an die Suche benötigt einen Entscheider (decision maker). Der Optimierer ermittelt dann mit Hilfe von Metriken (vgl. „global criterion“ und „multi-objective proximal bundle“ [98]) ein Ergebnis und stellt dieses dem Entscheider vor, der dieses ablehnen oder annehmen kann. Dieses Vorgehen ist aber wenig zielführend.

Deutlich zielgerichteter ist es, vor Durchführung der Optimierung eine Gewichtung der Ziele vorzunehmen. Anschließend erfolgt die Optimierung mit einem bestimmten Ergebnis als Lösung. Bei diesen **„priori-Methoden“** verzichtet man auf Kenntnis der Pareto-Front, erhält aber ein individuelles Ergebnis bei kurzer Rechenzeit. Typische Methoden sind die gewichtete Summe (weighted sum), minimax und die „epsilon-constraint“-Methode, die auch posteriori zum Einsatz kommen (vgl. Beschreibung unten). Weitere Methoden sind die Vorgabe eines Zielvektors (goal programming) und die lexikographische Sortierung.

Die lexikographische Sortierung [48] optimiert jedes Ziel in einer nach Wichtigkeit sortierten Reihenfolge. Neben der oftmals nicht vorhandenen objektiven Priorisierung weist das Verfahren den großen Nachteil auf, dass sich meist für das erste Kriterium ein gültiges Ergebnis ergibt und die Optimierung an Hand der weiteren Ziele unterbleibt. Goal Programming [66] zielt darauf ab, bestimmte Anspruchsniveaus  $z_i$  zu erfüllen (z.B. Wirtschaftlichkeit eines Systems unterhalb einer bestimmten Kostenschwelle):  $\min |f_i(\mathbf{x}) - z_i| \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$ . Hierbei handelt es sich aber nicht um eine objektive Bestpunktsuche, sondern um eine Zielerfüllung (dominierte Lösungen).

Demgegenüber stehen **„posteriori-Verfahren“**, die durch Variation der Ziele die Pareto-Front ermitteln und die häufigste Anwendung erfahren. Der Nutzer oder „decision maker“ wählt daraus eine geeignet erscheinende Lösung aus. Typischerweise werden

hier die gewichtete Summe, die minimax-Methode und die epsilon-constraint-Methode eingesetzt [27, 42, 53, 98].

Bei der *gewichteten Summe* wird eine Ersatzzielfunktion dadurch aufgestellt, dass man alle Zielgrößen durch positive Gewichte  $w_i$ , deren Summe 1 ergeben, zusammenfasst:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k w_i \cdot f_i(\mathbf{x}) \quad (3.9)$$

$$\sum_{i=1}^k w_i = 1 \quad |_{w_i > 0}$$

Durch wiederholte Suchläufe lassen sich bei Variation der Gewichte Lösungen auf der Pareto-Front finden. Das Verfahren zeichnet sich durch seine besonders einfache Anwendbarkeit aus, die aber mit dem Nachteil verbunden ist, dass konkave Stellen einer Front nicht gefunden werden können. Für zwei Ziele kann man aus der Gleichung (3.9) folgern:  $f_2 = -f_1 \frac{w_1}{w_2} + \frac{f}{w_2}$ . Der jeweils gefundene Optimalwert muss (wegen Gl. (3.8)) ein Tangentialpunkt zwischen den resultierenden Geraden und der Front sein, der nur auf einem vorspringenden Teil der Front liegen kann (vgl. Abb. 3.11, li.). Für das Verfahren gibt es Anpassungen („Bang-Bang Weighted Aggregation, Dynamic Weighted Aggregation“), die aber lediglich die Konvergenz beschleunigen können. Erst die Verwendung verteilter Populationen, Mutationsoperatoren oder externer Archive ermöglichen es, konkave Gebiete zu finden [8, 88, 92]. Die Verfahren sind auch nicht an iterative Suchläufe gebunden. Sie konvergieren im derzeitigen Entwicklungsstand jedoch nicht stabil und bedürfen noch der weiteren Entwicklung, besonders da Implementierung und Handhabung bisher nur problem-/anwendungsbezogen erfolgen können. Einige solcher Ansätze sind weiter unten beschrieben.

Bei Anwendung der gewichteten Summe ist in jedem Fall eine Normierung der Ziele durchzuführen. Hierzu kann entweder eine klassische Normgröße für jedes Ziel eingeführt werden, oder man verwendet Fuzzy Membership Functions [90]. Diese bieten den Vorteil, dass auch bei Überschreiten des Normbereichs kein Wert größer als 1 entsteht. Diese lassen sich vorteilhaft dann einsetzen, wenn ein gewünschter Zielwert abgeschätzt werden kann oder eine Zielgröße um einen Mittelwert schwanken darf.

Das sehr einfache Verfahren minimax, in dem der Abstand zwischen Lösung und einem Referenzniveau minimiert wird<sup>8</sup>, scheitert ebenfalls in konkaven Gebieten (vgl. Abb. 3.11). Bei ungefähr bekanntem Verlauf der Pareto-Front, kann jedoch gezielt ein besonders effizienter iterativer Ansatz zur Pareto-Front-Generierung genutzt werden [103].

<sup>8</sup>Durch die Vorschrift  $\min \max |f_i(\mathbf{x}) - z_i|$  ergeben sich für zwei Zielwerte zwei auf den Achsen senkrecht stehende Geraden, deren Schnittpunkt auf der Pareto-Front liegt. Das Verfahren kann dadurch aber nie in beliebige konkave Gebiete eindringen.

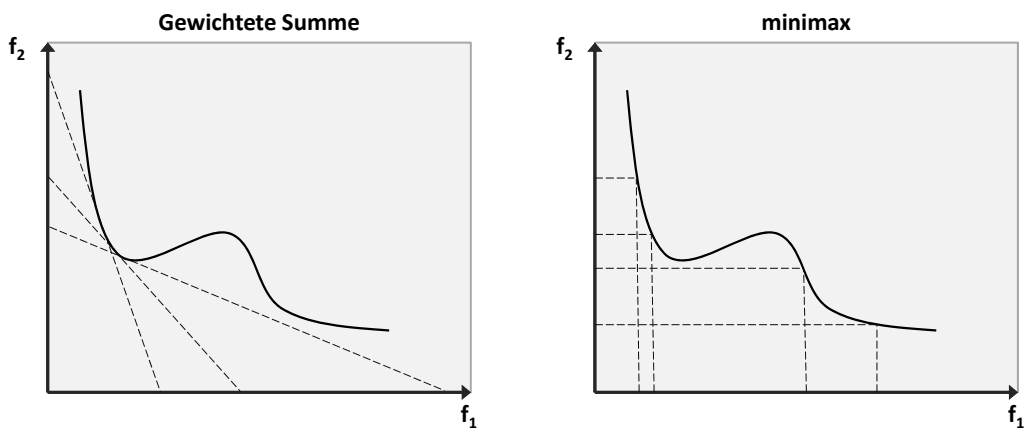


Abb. 3.11.: Detektion pareto-optimaler Punkte mit gewichteter Summe (li) und minimax Methode (re).

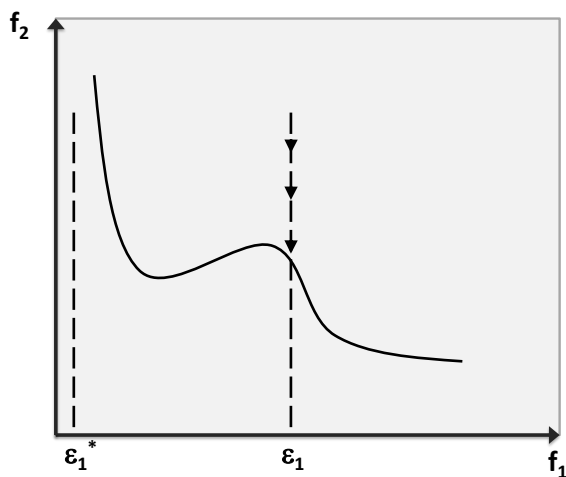


Abb. 3.12.: Detektion pareto-optimaler Punkte mit der epsilon-constraint-Methode.

Echte Abhilfe schafft die einfach zu implementierende epsilon-constraint-Methode, deren Grundidee es ist, nur ein Ziel zu optimieren, während die anderen Ziele festgehalten/beschränkt ( $\varepsilon$ -constraint) werden. Wählt man zu Beginn eine ausgewogene Gewichtung der Ziele, kann auch vermieden werden, dass die Grenzen des Zielraums unter- oder überschritten werden (vgl. Abb. 3.12 - Optimum von  $f_2$  mit Randbedingung  $f_1(\varepsilon_1)$ ). Laumanns, Thiele und Zitzler führen für das Verfahren ein strukturiertes Vorgehen ein, um die zulässigen  $\varepsilon$ -Grenzen einzuhalten und die Explosion der Rechenzeit für beliebige Variablen- und Zielräume durch willkürliche Wahl der  $\varepsilon$ -Werte zu vermeiden [85, 86]. Das Verfahren weist für Standardtestfunktionen hervorragende Ergebnisse (Rechenzeit und Qualität) auf und wird daher in dieser Arbeit für die Behandlung von mehreren Zielen neben der gewichteten Summe implementiert. Abb. 3.13 zeigt das für diese Arbeit angepasste Struktogramm.

Die „**progressive (interactive) Auswahl von Präferenzen**“-Methode (Tchebycheff Method [141], Reference Point Method [161]) stellt eine innovative Weiterentwicklung erwähnter Ansätze dar. Da die Umsetzung jedoch nicht trivial ist, soll sie auch für große Such- und Zielräume effizient ablaufen, gibt es bisher nur „Prototypen“ für die Implementierung. Für die PSO sollen Rudelführer Subschwärme anleiten, um die Pareto-Front von verschiedenen Stellen aus zu erkunden. Bisher steht jedoch der Nachweis aus, dass die selbstlernenden Schwärme für anerkannte Testfunktionen beliebiger Dimension erfolgreich arbeiten. Derzeit wird die größte Hoffnung auf „Vector Evaluated Approaches“ in Kombination mit PSO gesetzt [1]. Die größten Arbeitsgebiete sind die Erreichung einer ausreichenden Diversität (Bias-Bildungen durch Häufungen von Lösungen oder Lücken in der Front müssen vermieden werden) sowie die Pflege und Interaktion des Archivs. Die Diversität wird im Fall der PSO zwar anfänglich begünstigt, dennoch neigt der Algorithmus zu früher lokaler Konvergenz und Verharren in dem so gefundenen lokalen Bestpunkt.

Weitere Arbeiten zur Weiterentwicklung der PSO bedienen sich der Veränderung oder Kreuzung bereits bekannter Verfahren. Alam, Coello und Yang [119, 140, 163] bieten in diesem Zusammenhang extensive Überblicke über aktuelle Forschungsarbeiten. Darin zeigt sich, dass viele Algorithmen für bikriterielle Probleme funktionieren und zu EA (Evolutionäre Algorithmen) gleichwertig sind, allerdings ist die allgemeine Anwendbarkeit eingeschränkt. Für die Zukunft werden sich Neuentwicklungen weiterhin am genetischen Algorithmus NSGA-II (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm - II) [33] und dem evolutionären Algorithmus SPEA2 (Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2) [166] messen lassen müssen, die aktuell als Maßstab anerkannt sind. Besonders hervorzuheben sind aus dem Pool an Arbeiten OMOPSO<sup>9</sup> (Optimized Multi-Objective Particle Swarm Optimization) [139] und eine Hybridvariante der PSO

<sup>9</sup>OMOPSO verwendet im Unterschied zu MOPSO keine  $\varepsilon$ -Dominanz, sondern arbeitet mit einem Archiv für den Scharm führende Partikel. Außerdem wird versucht die Konvergenz mittels Mutationen der Partikel zu beschleunigen.

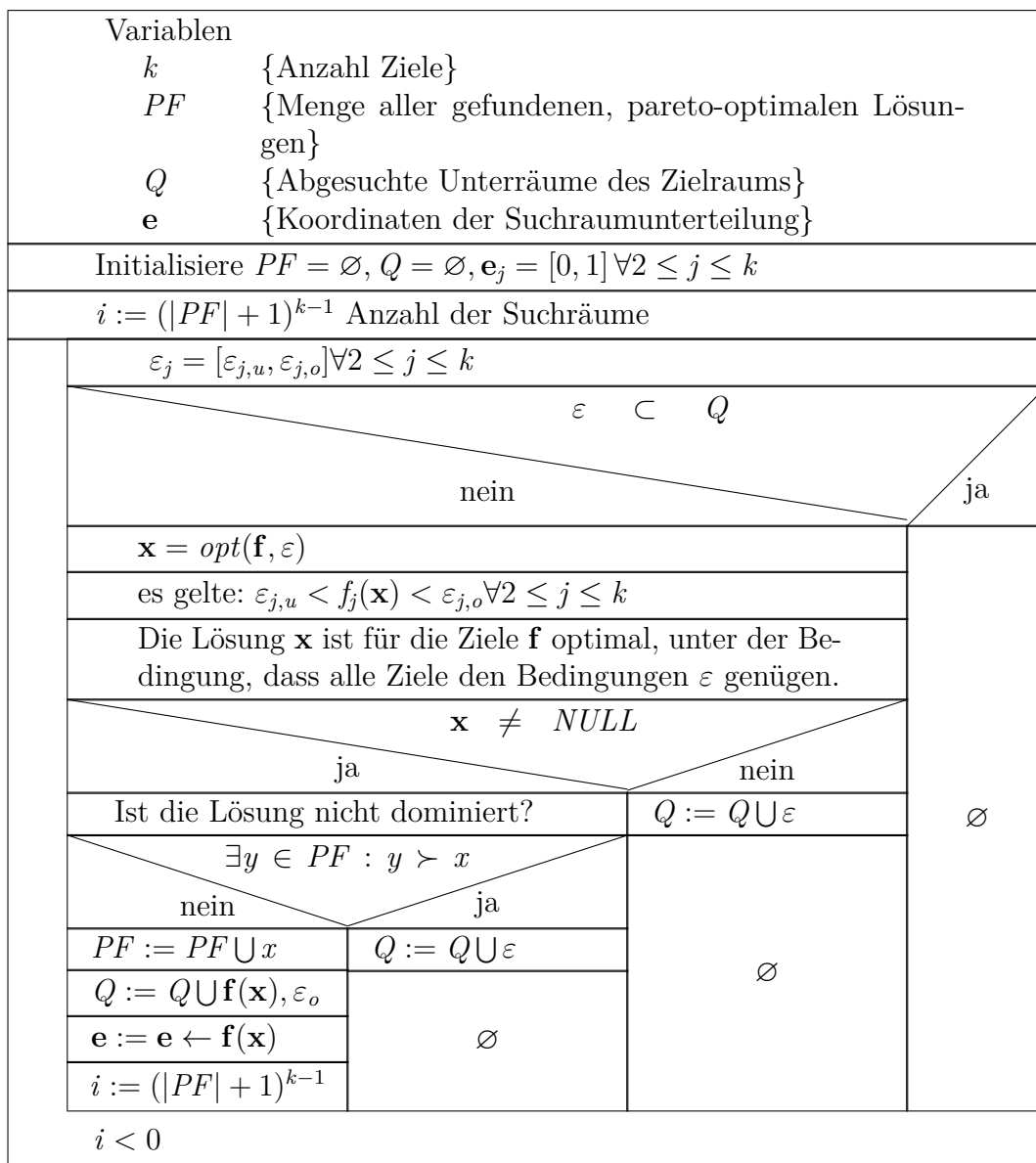


Abb. 3.13.: Struktogramm: epsilon-constraint-Methode für die Minimalwertsuche

in Verbindung mit Scatter Search [130]. Beide Verfahren konnten in Anwendung auf Standardtestfunktionen (z.B. Kursawe, ZDT oder Osyczka mit bis zu 30 Zielgrößen) durch vergleichbare Leistungsfähigkeit zu NSGA-II überzeugen. Weiterhin ist zu erwähnen, dass die MOPSO (Multi-Objective Particle Swarm Optimization) auf Grund ihrer Struktur bestens für Parallelisierungen geeignet ist. Es wird empfohlen, die Ansätze zu verfolgen und Erfolge auf ihre Anwendbarkeit hin zu prüfen. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher auf die Implementierung eines speziellen Algorithmus' zu Gunsten der nachgewiesenermaßen effizienten epsilon-constraint-Methode [86] verzichtet.

Abschließend wird darauf hingewiesen, dass es sinnvoll sein kann, bestimmte Punkte, wie beispielsweise die Randpunkte der Pareto-Front, für jeweils ein Kriterium zu ermitteln und dann Hyper-Ebenen anzunähern [103]. Zur effektiven Anwendung muss aber ein mathematischer Nachweis über die erwartete Form der zu detektierenden Front erbracht werden. Wenn zusätzlich der mathematische Nachweis gelingt, dass pareto-optimale Lösungen im Suchraum einer gewissen Regelmäßigkeit folgen, würde sich die Suche nach der Front drastisch vereinfachen. Der mathematische Nachweis stellt jedoch bereits selbst die Lösung für das Optimierungsproblem dar. Die dazu notwendigen analytischen Beschreibungen sind aber bisher nicht bekannt. Daher stellt die Kombination der PSO mit der epsilon-constraint-Methode für die Arbeit das effizienteste Vorgehen in Bezug auf Implementierbarkeit, Suchdauer und Ergebnisqualität dar.

### 3.4. Testfunktionen

Die vorhergehend beschriebenen Methoden sollen an Hand anerkannter Testfunktionen auf ihre Leistungsfähigkeit geprüft werden. Dazu werden drei anspruchsvolle Funktionen mit unterschiedlichen Eigenschaften ausgewählt.

Die einfachste Testfunktion erhält ihren Namen aus ihrer Form (vgl. Abb. 3.14). Die alpine-Funktion ist für bis zu zehn Dimensionen in einem Wertebereich  $x_i = [-10 \dots 10]$  definiert:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n |x_i \cdot \sin(x_i) + 0,1 \cdot x_i| \quad (3.10)$$

Die Funktion verfügt über viele lokale Minima, besitzt jedoch ein ausgeprägtes, globales Optimum mit dem Wert 0 bei  $[0, 0, \dots]$ . Dabei ist das Optimum weniger in seinem

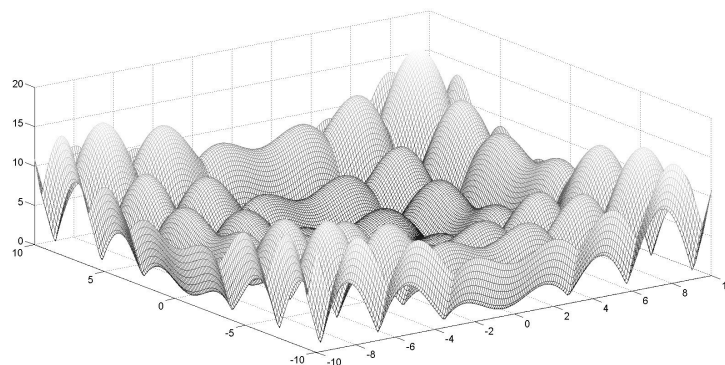


Abb. 3.14.: alpine-Funktion für zwei Dimensionen

Funktionswert gegenüber den lokalen Bestpunkten als vielmehr in der Entfernung deutlich abgegrenzt. Dadurch lässt sich die Neigung der Partikel zu Konvergenz und Verharren in lokalen Bestpunkten untersuchen. Generell ist die Gefahr bei GBest-Topologien deutlich höher in einem lokalen Minimum zu konvergieren. Dem kann durch eine Erhöhung der Partikelzahl entgegengewirkt werden. Möchte man jedoch gezielt wie im vorliegenden Fall die Konvergenz durch Suchraumeinschränkung und Reduktion der Geschwindigkeiten beschleunigen, ist selbst das kein Garant für das Auffinden des globalen Bestpunkts. Tabelle 3.1 (S. 82) listet die entsprechenden Bestwerte und die Abweichungen auf. Durch Einsatz der Cluster lässt sich nur in geringem Maß eine Verbesserung erzielen, da auch hier ein frühzeitiges Einschwenken auf den globalen Bestpunkt erfolgt. Hervorragende Ergebnisse lassen sich durch die von-Neumann-Topologie erzielen, da hier die Partikel (bei ausreichend großer Anzahl an Partikeln) lange Zeit unbeeinflusst den Suchraum stochastisch abtasten und dann erst eine langsame Annäherung an den Bestpunkt erfolgt. Zur besseren Vergleichbarkeit sind die Werte in Tabelle 3.1 jeweils für 100 Iterationen dargestellt. Alternativ lassen sich auch die Ergebnisqualität sowie die nötige Iterationszahl bei Konvergenzdetektion ermitteln. Dabei zeigt sich für GBest und das Cluster eine schnelle Konvergenz mit hoher Fehlerrate. Nach einer endlichen Anzahl von Schritten gelingt es, sofern der Suchraum nicht eingeschränkt wird, auch diesen Topologien das globale Optimum anzunähern. Der Einsatz der von-Neumann-Nachbarschaft und entsprechender Detektionsmechanismen führt, wie die Ergebnisse zeigen, immer in die Region um das globale Optimum.

Wesentlich anspruchsvoller für den Optimierer ist die Griewank-Funktion wie sie durch Gleichung (3.11) beschrieben wird. Diese ist für zwei Dimensionen in Abb. 3.15 zu sehen. Auf den ersten Blick ist die Lage des globalen Optimums vermeintlich klar zu erkennen. Bei genauer Betrachtung der Umgebung des Optimums zeigt sich jedoch, dass viele lokale Minima mit nur geringer Abweichung in dessen Nähe zu finden sind. Das globale Optimum mit Wert 0 liegt hier bei  $[100, 100, \dots]$ . Der Suchraum wird typischerweise für bis zu 30 Dimensionen im Bereich von  $-300$  bis  $300$  aufgespannt. Der Optimierer muss einen Bereich von  $\pm 1$  um das globale Minimum treffen. Ist die Abweichung einer Komponente größer, befindet sich der Optimierer bereits in einem lokalen Bestpunkt.

$$f(\vec{x}) = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - 100)^2}{4000} - \prod_{i=1}^n \cos \left[ \frac{x_i - 100}{\sqrt{i}} \right] \quad (3.11)$$

Besonders schwierig gestaltet sich die Suche im langen und gestreckten Tal der Rosenbrock-Funktion (Abb. 3.16). Diese durch Gleichung (3.12) beschriebene Funktion eignet sich besonders für die Untersuchung der Ergebnisqualität. Auf Grund des sehr flachen Verlaufs muss die Suche sehr fein erfolgen und stellt hohe Anforderungen an die Detektion der Konvergenz. Das globale Optimum mit Wert 0 liegt bei  $[1, 1, \dots]$ . Für mehr als drei Dimensionen sind zum globalen Optimum zusätzliche lokale Bestpunkte

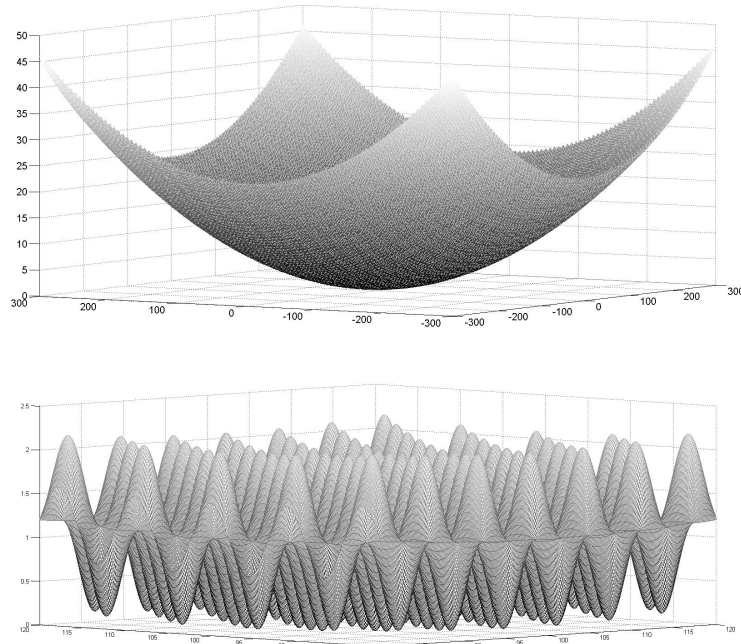


Abb. 3.15.: Griewank-Funktion für zwei Dimensionen - oben: globale Übersicht, unten: Zoom um das globale Optimum

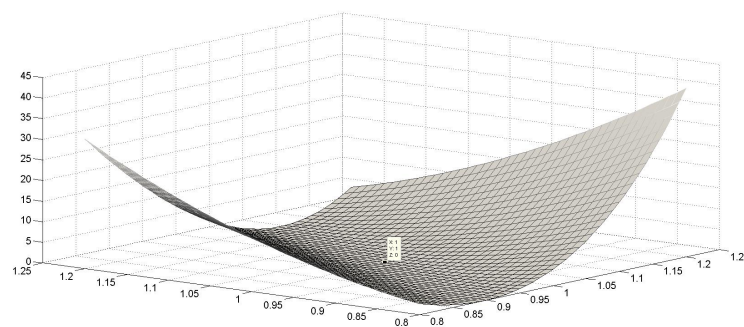


Abb. 3.16.: Rosenbrock-Funktion für zwei Dimensionen: Umgebung des globalen Optimums



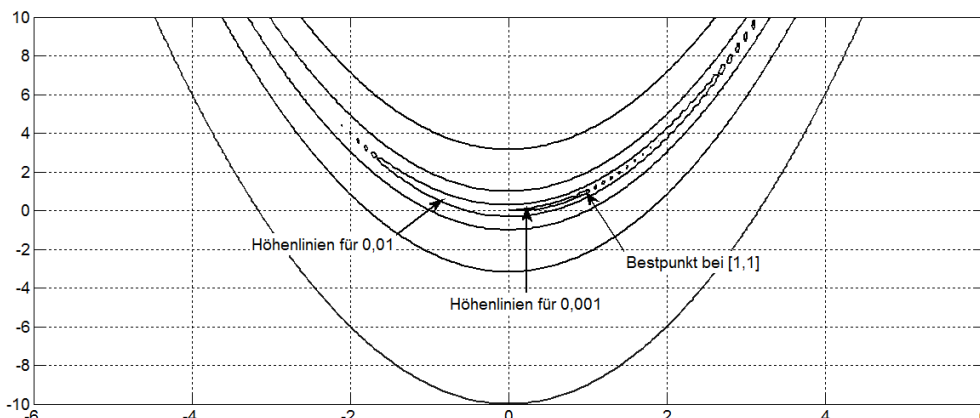


Abb. 3.17.: Höhenlinien der Rosenbrock-Funktion für die Funktionswerte  $[1E-3, \dots, 1E6]$ , erhöht um jeweils eine Zehnerpotenz

vorhanden. Der Suchraum für bis zu 30 Dimensionen ist im Bereich von  $-10$  bis  $10$  aufzuspannen.

$$f(\vec{x}) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (1 - x_i)^2 + 100 \cdot (x_i^2 - x_{i+1})^2 \quad (3.12)$$

Abb. 3.17 zeigt die Höhenlinien der Funktion. Hierbei wird besonders deutlich, wie gering die Abstände voneinander für kleine Funktionswerte sind. Der Optimierer muss also den flachen Verlauf erkennen und zusätzlich das Suchmuster anpassen, um nicht durch zu große stochastische Bewegungen das Ziel immer wieder zu verfehlen. Die Schwierigkeit liegt dabei in einer ausgewogenen Einstellung von Detektionsmechanismen und der Ermittlung der jeweils neuen Geschwindigkeiten, um eine hochqualitative Lösung in möglichst kurzer Zeit zu ermöglichen.

Zur Erkennung von Signifikanzen und zur Steuerung der Konvergenz kommen folgende Methoden zum Einsatz:

**Persönliche Bestwerte - Mittelwert und Median:** Für die persönlichen Bestwerte der einzelnen Partikel werden das arithmetische Mittel und der Median ermittelt. Da es durch die stochastische Unruhe nicht vorkommen kann (außer die Partikelzahl ist sehr klein), dass jedes Partikel in genau einem lokalen Minimum festhängt, kann die Differenz beider Werte gegenüber dem bisher gefundenen Bestwert bereits als Hinweis für eine mögliche Konvergenz verwendet werden:  $\bar{f}_p - f_g < \epsilon \wedge \tilde{f}_p - f_g < \epsilon$ . Als Kriterium hat sich  $\epsilon = f_g/2 \dots f_g$  als geeignet herausgestellt. Kleinere Werte werden nicht detektiert, da die Streuung auf Grund der stochastischen Verteilung zu groß ist. Größere Werte müssen im jeweiligen Fall durch empirische Versuche überprüft werden. Liegen hierbei Median und Mittelwert nahe beieinander, ist dies ein Zeichen für eine eintretende gleichmäßige

Verteilung der persönlichen Bestpunkte. Das Kriterium dient zur Verstärkung anderer Kriterien.

**Persönliche Bestwerte - Standardabweichung:** Als zusätzliches Kriterium zu den Durchschnittswerten der lokalen Mittelwerte dient deren Standardabweichung dazu, festzustellen, ob die Schwankungsbreite dieser Werte signifikant klein ist (z.B.  $\sigma(\mathbf{f}_p) < \tilde{f}_g/2$ ), so dass davon ausgegangen werden kann, dass sich alle Werte auf ungefähr einem Niveau befinden. Zusammen mit der Verteilung der Koordinaten der Punkte kann dann gefolgert werden, ob es sich um eine Konvergenz auf einen Punkt hin handelt oder die Punkte weit verteilt sind. Im zweiten Fall könnte ein ausgedehntes Optimum vorliegen. Als zusätzliches Kriterium muss dann der Verlauf der globalen Bestwerte geprüft werden.

**Persönliche Bestwerte - Standardabweichung der Koordinaten:** Als eigenständiges Kriterium kann die Standardabweichung der einzelnen Koordinaten der persönlichen Bestpunkte herangezogen werden. Zusammen mit den beiden vorherigen Kriterien kann eine signifikante Konvergenz ermittelt werden. Wurde für eine Komponente festgestellt, dass sich die Abweichungen unterhalb von 10% des Suchraums bewegen, wird davon ausgegangen, dass sich das globale Optimum innerhalb dieses Bereichs befindet. Sicherlich birgt dieses Vorgehen das Risiko, sich auf ein lokales Optimum hinzubewegen. Die Tests zeigen jedoch, dass durch Wahl des von-Neumann-Netzes diese Konvergenz langsam genug erfolgt, so dass eine hinreichend gute Suchraumabdeckung gewährleistet wird. Lediglich für sehr eng beisammen liegende Bestpunkte besteht ein gewisses Risiko, das jedoch durch eine moderate Suchraumreduktion umgangen werden kann.

**Globaler Bestwert - Standardabweichung:** Falls für alle betrachteten Iterationsschritte gilt:  $\sigma(f_g) \ll f_g$ , dann folgt daraus unmittelbar, dass eine gewisse Konvergenz vorliegt: entweder in einem lokalen Bestpunkt oder bereits im globalen Bestpunkt. Aufschluss gibt der Vergleich mit der Diversität der persönlichen Bestpunkte. Bei Verdacht auf lokale Konvergenz kann eine Veränderung der Faktoren  $c_1, c_2$  helfen, die Suche in der Umgebung der lokalen Bestpunkte zu verfeinern. Liegt die Vermutung vor, dass es sich um einen globalen Bestpunkt handelt, muss in dessen Umgebung die Suche intensiviert werden. Hier hilft nur eine Einschränkung von Suchraum und Geschwindigkeit und eine Verkleinerung der Werte  $c_1, c_2$  damit die Suche einen stärkeren stochastischen Anteil erhält. Zusätzlich wird hier die Verteilung der lokalen Bestpunkte untersucht. Entfernte Punkte gelten auf Grund der Vermutung für den globalen Bestpunkt als Ausreißer und werden beispielsweise für den Start der verfeinerten Suche direkt auf dem bisherigen Bestpunkt platziert. Falls ein lokaler Bestpunkt als globaler Bestpunkt detektiert wurde, gibt es keine Möglichkeit dies zu erkennen. Vermeiden lässt sich dies nur, indem man die Population sehr groß wählt und/oder mehrfache Suchvorgänge nach erfolgreicher Konvergenz durchführt.

Die genannten Signifikanztests werden erst nach Überschreiten einer vorgegebenen Schrittzahl angewendet, da es sinnvoll ist, eine gewissen „Einschwingphase“ abzuwarten. Dadurch steht zudem eine größere Anzahl auswertbarer Ergebnisse zur Verfügung. Die Anzahl der maximal ausgewerteten Elemente bleibt jedoch immer gleich (z.B. jeweils die aktuellsten 25%). Allgemein zu den bereits gemachten Ausführungen sei darauf hingewiesen, dass flache Steigungen zum globalen Optimum nur durch entsprechende stochastische Suche im Bereich des Bestwerts erfolgreich detektiert werden. Dazu muss spätestens zum Ende der Suche, zumindest wenn es eine begründete Vermutung für ein globales Optimum gibt, der Einfluss der sozialen und kognitiven Parameter verkleinert werden. Weiterhin ist es wichtig zu beachten, dass Änderungen auf Grund einer Einschätzung auf Grundlage globaler Bestpunktwerte nach ihrer Durchführung einer gewissen Beobachtungszeit bedürfen, bevor wieder Änderungen vorgenommen werden.

Als Beispiel für das Verhalten der Partikel bei Anwendung verschiedener Kommunikationsstrukturen werden nachfolgend ausgewählte Zustände bei der Ermittlung des Bestpunkts der Rosenbrock-Funktion für GBest und von Neumann gezeigt. Die Cluster-Struktur hat sich bei den durchgeführten Tests nicht bewährt. Sowohl die Ergebnisqualität als auch die Konvergenzgeschwindigkeit zeigen keinen signifikanten Unterschied zur erheblich einfacher implementierbaren GBest-Struktur. Daher besitzt die Topologie keine weitere Relevanz und wird ab sofort nicht weiter betrachtet.

Abb. 3.18 zeigt zunächst die gleichmäßige Verteilung der Partikel im 2D-Suchraum für beide Topologien. Bereits nach zehn Schritten können Unterschiede in der Entwicklung der Partikel im Suchraum festgestellt werden. Während sich bei von Neumann die lokalen Bestpunkte der Partikel auf Grund der freieren Suchmöglichkeit entlang dem oben beschriebenen Tal ansiedeln, vollzieht sich bei GBest eine Ballung hin zum (bisher bekannten) globalen Bestpunkt. Dessen Position verändert sich auf Grund der - im Vergleich zur Ausdehnung des Tals - vergleichsweise großen Geschwindigkeit nach eintretender Ballung kaum noch. Je nach Ausprägung der Ballung erfolgt u.U. eine Konvergenzdetektion mit anschließender Suchraumeinschränkung. Liegt der bis dahin gefundene Bestpunkt fernab des tatsächlichen globalen Bestpunkts, kann dieser nicht gefunden werden. Dem kann nur durch eine Beibehaltung des Suchraums und einer erheblichen Verringerung der Geschwindigkeit entgegengewirkt werden. Bei von Neumann hingegen richten sich die Partikel aus, wodurch es möglich wird, das Tal als solches zu detektieren und folglich die Gewichte zwischen stochastischer Suche und sozialer und kognitiver Kompetenz bei gleichzeitiger Geschwindigkeitsreduktion so zu verschieben, dass sich die Partikel entlang des Tals auf den Bestpunkt in stetigen Schritten zubewegen. Dies führt dazu, dass vor der Suchraumeinschränkung (Abb. 3.19) bereits eine gute Annäherung des Raumes erfolgt, in dem sich der globale Bestpunkt befindet. Anschließend wird die Suche in der Umgebung verfeinert. Die erzielte Qualität des Ergebnisses nach 50 Schritten (Abb. 3.20) ist für ein heuristisches Suchverfahren hervorragend. Eine weitere Verbesserung ist möglich, bedarf jedoch vieler Schritte,

bis zufällig der Bestpunkt getroffen wird. Bei der erreichten Ergebnisqualität wäre es jedoch zu empfehlen, auf ein deterministisches Verfahren wie Levenberg-Marquart umzusteigen.

Generell zeigt die Analyse der Suche bei Rosenbrock, dass mit Hilfe der von-Neumann-Topologie eine verbesserte Konvergenz erzielt werden kann. Dies äußert sich bei Rosenbrock darin, dass frühzeitig die Talsohle der Funktion erkundet wird. Anschließend kann eine zielgerichtete Abtastung jener erfolgen. Sicherlich lässt sich mit jeglichem Netz durch eine sehr große Anzahl von Iterationen und winzige Schritte eine beliebige Genauigkeit erreichen. Dazu müsste man dann aber auch auf Suchraumreduzierungen verzichten. Allerdings sollen die Algorithmen nicht speziell auf die Erfüllung einer bestimmten Funktion getrimmt, sondern vielmehr eine ausgewogene Einstellung erreicht werden, die in allen Fällen schnell zu einem hochqualitativen Ergebnis führt. Ansonsten könnte man bei vorheriger Kenntnis der Funktion die Geschwindigkeiten oder Gewichte entsprechend anpassen.

Die Abb. 3.21 und 3.22 präsentieren typische Verläufe von Funktionswert und Position des jeweiligen Bestpunkts in Abhängigkeit vom Iterationsschritt für die drei Testfunktionen. Besonders auffällig ist die schnelle Konvergenz bei GBest für die alpine- und Rosenbrock-Funktion. Ein Blick auf die Positionen zeigt jedoch, dass diese nur für die alpine-Funktion auch gleichzeitig nahe dem tatsächlichen Bestpunkt liegen. Bei Griewank führt die große stochastische Unruhe dazu, dass der bereits nach 25 Schritten gefundene Bestpunkt nicht als solcher detektiert wird und der Algorithmus am Ende des Beobachtungszeitraums ein lokales Minimum gefunden hat. Das besondere Problem bei Griewank ist der kleine Bereich um 100, der zu treffen ist. Die Nebenminima haben einen Funktionswert von 0,0074. Nur der Bereich von  $100 \pm 0,1$  weist einen kleineren Funktionswert auf. Diesen bei einem zulässigen Parameterbereich von  $\pm 300$  zu treffen, ist schwierig.

Bei von Neumann zeigt sich für die alpine-Funktion eine auf Grund der langsameren Kommunikation verzögerte Konvergenz mit identisch hochwertigem Ergebnis. Insgesamt erscheint die Konvergenz bei von Neumann erheblich langsamer. Ein Blick auf die Positionen zeigt aber, dass diese immer dem tatsächlichen Optimum entgegenstreben und am Ende der Optimierung hervorragende Qualität aufweisen, wohingegen bei GBest eine erhebliche Abweichung sowohl bei Rosenbrock als auch bei Griewank bleibt.

Die Ergebnisse zeigen, dass der anfängliche Nachteil langsamerer Konvergenz und die vermeintliche Notwendigkeit einer erhöhten Anzahl von Iterationen gegenüber GBest durch die hohe Qualität der Ergebnisse bei Neumann ausgeglichen werden. Letztlich erreicht Neumann den Bestpunkt (besonders bei komplizierten Funktionen) vor dem mit GBest ausgestatteten Optimierer.

Tabelle 3.1 zeigt abschließend die Streuung der Ergebnisse für eine große Anzahl von Suchläufen. Hierzu wurde dem Optimierer kein Konvergenzkriterium zum Abbruch

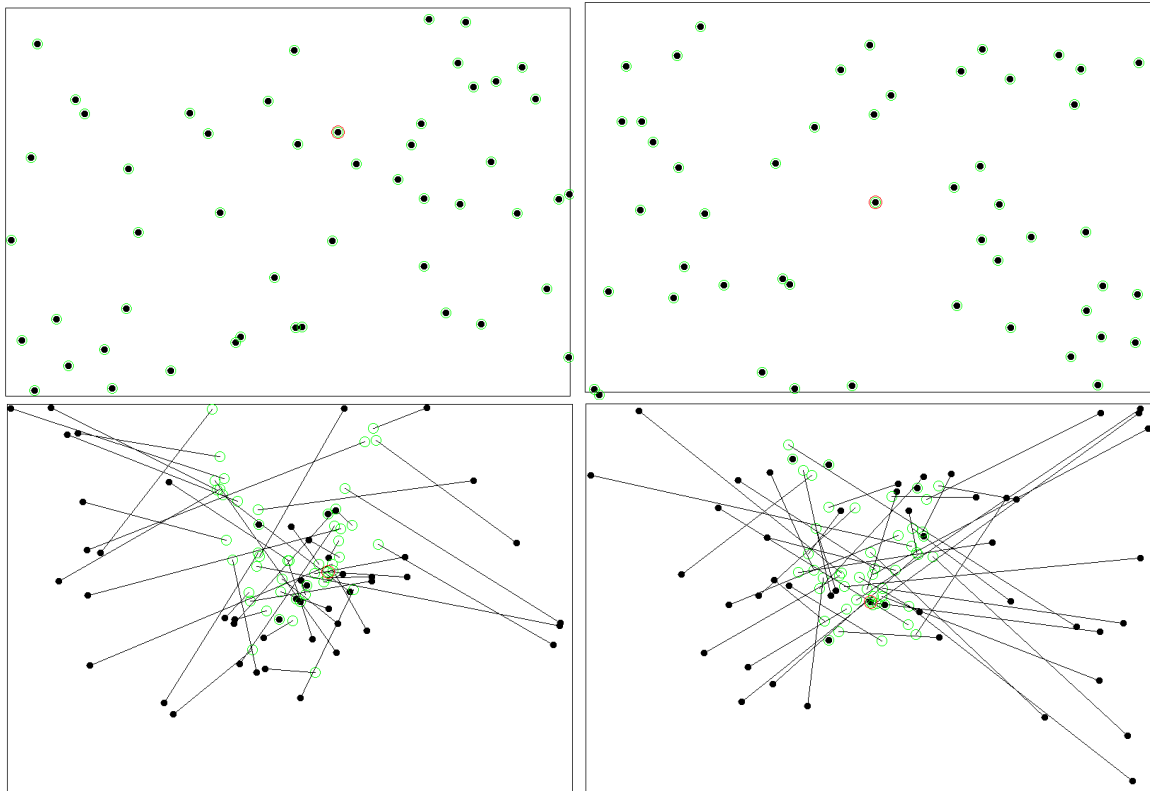


Abb. 3.18.: Startpopulation li: von-Neumann-Netz; re: GBest bei Untersuchung der Rosenbrock-Funktion sowie die jeweilige Entwicklung nach zehn Schritten

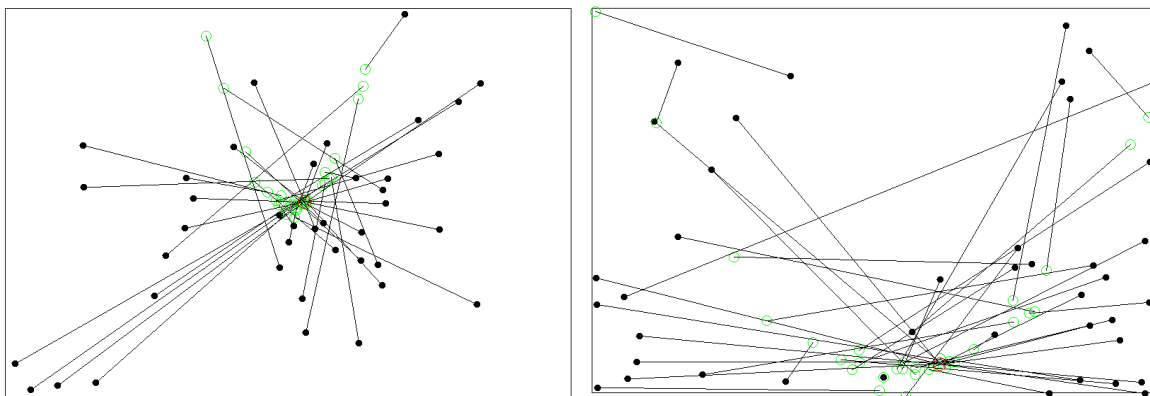


Abb. 3.19.: Suchraumreduktion: Anpassung der Raumgrenzen, da die Standardabweichungen des globalen Bestpunkts und der lokalen Bestpunkte über lange Zeit unverändert sind; zugleich Reduktion der Faktoren  $c_1$ ,  $c_2$  und Beschränkung der Geschwindigkeit auf 5 % der neuen Suchraumlänge.

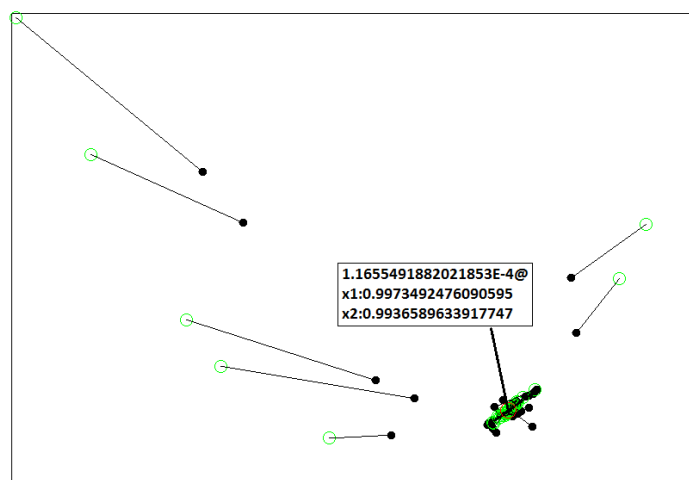


Abb. 3.20.: Konvergenzresultat bei Abbruch der Suche nach 50 Schritten

vorgegeben, sondern die Suche nach 100 Schritten unterbrochen und ausgewertet. Insgesamt wurden jeweils 100 Suchläufe unternommen, um eine ausreichend zuverlässige Aussage über die Ergebnisqualität treffen zu können. Für alle Funktionen zeigt sich generell unter Einsatz der von-Neumann-Topologie, dass diese Ergebnisse geringere Abweichungen zum tatsächlichen Bestpunkt aufweisen und ebenso bei hochmodalen Funktionen wie Griewank die Zuverlässigkeit erheblich höher ist als bei Einsatz von GBest.

Für Rosenbrock ergeben sich hinsichtlich der Positionen unauffällige Verbesserungen, die durchschnittlichen Funktionswerte der Standardabweichung zeigen jedoch deutliche Verbesserungen. Dass GBest hier vergleichsweise gut abschneidet, ist der hohen Anzahl von Iterationen geschuldet. Daher wurde für Rosenbrock eine kleinere Serie mit nur 50 Iterationen untersucht. Die Streuungen steigen für beide Topologien an. Bei GBest jedoch werden alle Partikel zum aktuellen Bestpunkt gezogen. Dies kann bereits als Konvergenz gedeutet werden, weshalb hier mit einer erheblichen Fehlerrate zu rechnen ist. Bei von Neumann hingegen liegt eine große Diversifikation der lokalen Bestpunkte vor, weshalb hier ein Abbruch noch nicht zulässig ist und der Algorithmus ohne die Schrittgrenze in jedem Fall weitersuchen würde.

Bei der alpine-Funktion führt die starke Dominanz des globalen Bestpunkts bei GBest zu Fehlern in der Detektion. Diese Schwäche kann GBest nur durch eine große Zahl Partikel und lange Laufzeiten ausgleichen. Vernachlässigt man die fehlerhaften Ergebnisse, ist die Qualität der Ergebnisse beider Topologien gleichwertig.

Die Fehlerrate spielt auch bei Griewank die größte Rolle bei der Bewertung. Diese stark multimodale Funktion besitzt bezüglich der Suchraumgröße eng nebeneinanderliegende lokale Bestpunkte, deren Funktionswerte sich nur in geringem Maß unterscheiden. Hier

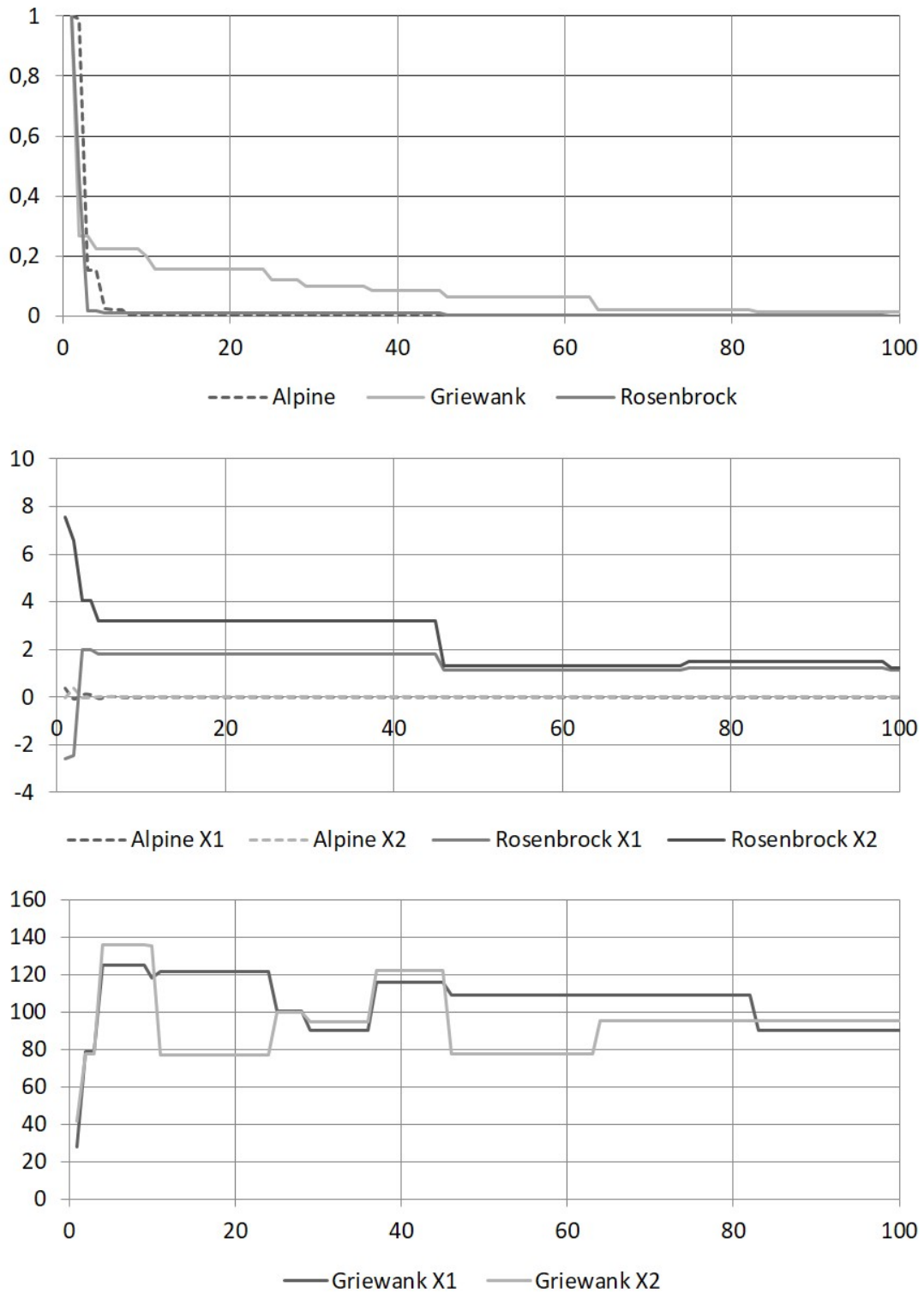


Abb. 3.21.: Oben: Konvergenzverlauf der Funktionswerte des globalen Bestpunkts für GBest. Mitte/unten: Verlauf der Position des globalen Bestpunkts.

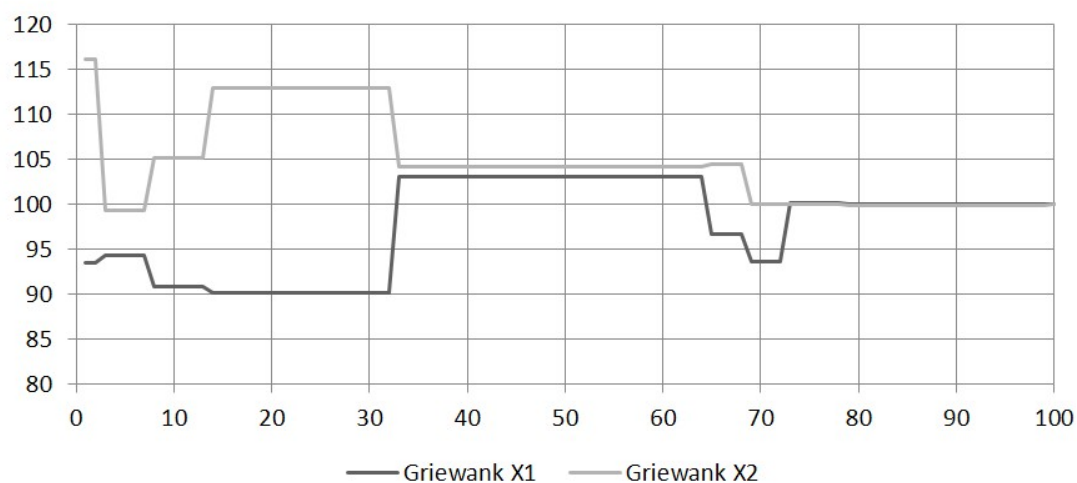
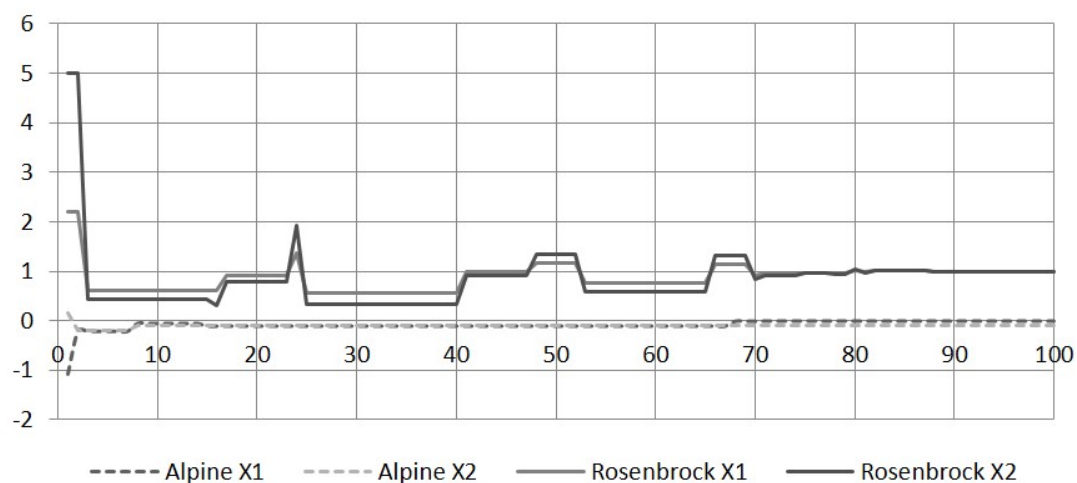
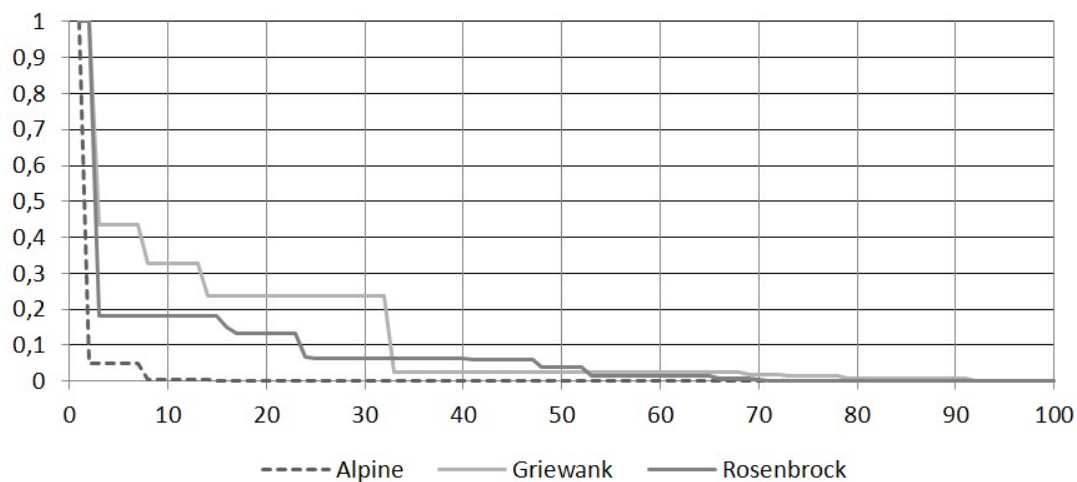


Abb. 3.22.: Oben: Konvergenzverlauf der Funktionswerte des globalen Bestpunkts für von Neumann. Mitte/unten: Verlauf der Position des globalen Bestpunkts.



Netz	Partikel (Fehlerrate)	x		f		f		f	
		$\emptyset x_1$	$\emptyset x_2$	$\Delta$	max	max	$\emptyset$	$\sigma$	$\sigma$
Alpine	GBest	-0,261	0,187	6,38054	1,89470	0,02038	0,00282	0,00557	
		-0,038	0,176	3,24084	0,84930	0,00479	0,00079	0,00117	
	Neumann	0,370	-0,056	6,18344	1,60896	0,00458	0,00079	0,00109	
		-0,013	-0,043	0,11123	0,05224	0,00226	0,00070	0,00083	
		-0,007	-0,015	0,09739	0,03609	0,00090	0,00023	0,00024	
		-0,025	-0,008	0,15128	0,04979	0,00794	0,00079	0,00209	
Griewank	GBest	98,79	99,38	15,7449	6,57140	0,08693	0,04737	0,02408	
		99,44	101,4	13,2365	4,95547	0,05043	0,02648	0,01349	
	Neumann	102,3	99,12	12,6120	6,75221	0,06583	0,03061	0,01853	
		100,2	100,3	13,5777	5,21296	0,08637	0,01812	0,02276	
		99,00	101,4	8,79351	4,20911	0,06443	0,01834	0,02147	
		100,0	99,28	9,55281	3,87017	0,04126	0,00967	0,00916	
100,9	100,7	9,25080	3,04706	0,04738	0,00943	0,01141			
Rosenbrock	GBest	1,054	1,143	1,75448	0,47070	0,93801	0,14011	0,31765	
		1,011	1,029	1,33317	0,57196	0,62834	0,18254	0,30826	
	Neumann	0,983	0,970	1,29145	0,53666	0,42956	0,15347	0,18431	
		1,000	1,053	0,97356	0,44271	0,75115	0,07712	0,20189	
		0,941	0,918	0,95225	0,37956	0,42379	0,05650	0,11620	
		1,019	1,063	1,17624	0,37019	0,22625	0,03126	0,06345	

Tab. 3.1.: Suchgenauigkeit der PSO mit unterschiedlicher Kommunikation; gemittelte und maximale Abweichung für 100 Versuche mit jeweils 100 Iterationen. Dargestellt sind die maximale Abweichung von der tatsächlichen Position des Optimums sowie die größte Standardabweichung der Komponenten und für die Zielgröße der größte gefundene Wert, der Durchschnitt aller Testläufe und die Standardabweichung.

ist es besonders schwer, den kleinen Bereich des Nachbar-Bestpunkts zu treffen, in dem die Funktionswerte besser sind. GBest tendiert dazu, schnell einen lokalen Bestpunkt in der Nähe des globalen Bestpunkts zu finden, in diesem jedoch anschließend zu verharren. Auch eine deutliche Erhöhung der Individuen hilft hierbei nicht weiter. Anders verhält es sich bei von Neumann. Die Fehlerrate fällt grundsätzlich niedriger aus und lässt sich durch eine Erhöhung der Zahl an Individuen deutlich verbessern. Dies ist möglich, da hier die Partikel mit zunehmender Verzögerung Informationen über den Bestpunkt erhalten und daher ihre eigene Umgebung besser erkunden können.

Sicherlich bleibt in jedem Fall eine Anpassung der jeweiligen Algorithmen an die spezielle Funktion als Mittel zur Verbesserung der Ergebnisse. Bei Verzicht auf Suchraumreduktionen ist es durch eine große Anzahl Individuen, lange Suchvorgänge und kleine maximale Schritte auch mit GBest möglich, hochqualitative Lösungen zu erzeugen. Von Neumann kommt dann jedoch mit kleinerer Anzahl Partikel mit weniger Rechenaufwand zum gleichen Ergebnis. Der Einfluss der Faktoren  $c_1, c_2$  hat zu Beginn der Suche vergleichsweise geringen Einfluss. Hier konnte festgestellt werden, dass eine Reduktion nach Konvergenzdetektion jedoch dabei hilft, den Bestpunkt genauer anzunähern.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass bei begrenzter Anzahl an Schritten und Partikeln nicht erwartet werden darf, dass exakt der Bestpunkt getroffen wird. Vielmehr sollen die vorgeschlagenen und untersuchten Eingriffe und Methoden dazu dienen, die von-Neumann-Topologie so zu nutzen, dass in möglichst kurzer Zeit mit geringem Aufwand der Optimierer die Umgebung des globalen Bestpunkts findet. Hierzu ist interessant, dass im Falle von von Neumann für alle Funktionen der Durchschnitt aller Positionen die Lage des Bestpunkts anzeigt. Bei Verdacht auf eine entsprechende Fehlerrate kann also durch eine kleine Serie die Lage und in der Folge der Suchraum eingegrenzt werden.

Die exakte Lage des Bestpunkts kann nach erfolgreicher Detektion des Bestpunkts effizient nur durch Wechsel zu einem deterministischen Verfahren bestimmt werden. Hier empfiehlt sich beispielsweise der Einsatz von Levenberg-Marquart. Damit tragen die vorgestellten Methoden letztlich dazu bei, ein Ergebnis hoher Qualität in kurzer Zeit zu erzielen, das anschließend durch einen lokalen Suchalgorithmus effizient „maximiert“<sup>10</sup> werden kann.

---

<sup>10</sup>Maximal bezieht sich hier auf die Ergebnisqualität.

## 4. Systemmodell

### 4.1. Modell des mechanischen Verbands

Nachdem in den vorhergehenden Kapiteln die Grundlagen für die analytische Auslegung und Nachrechnung sowie allgemein für die Optimierung dargestellt sind, wird nun nach einer Möglichkeit gesucht, elektromechanische Systeme durch ein einfaches Modell zu beschreiben, das schließlich an einen Optimierer gekoppelt werden kann. Das Ziel ist es, mit einer möglichst abstrakten Beschreibung und einer geringen Anzahl an Freiheitsgraden einen Parametersatz zu generieren, aus dem sich im vorliegenden Fall eine Linearmaschine entwerfen lässt, die in Kombination mit dem mechanischen Teil zu einer optimalen Zielerfüllung für den Anwender führt.

Systeme im Sinne dieser Arbeit sind im Allgemeinen dadurch gekennzeichnet, dass sie sich als Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen beschreiben lassen. Mechatronische Systeme im Speziellen beinhalten, wie das Kunstwort bereits vermuten lässt, eine Kopplung von Eingang und Ausgang in Form von mechanischen und elektronischen Komponenten.

Im ersten Schritt der Modellbildung muss der Bezug zwischen den Komponenten beschrieben werden, um eine Kopplung zwischen Eingang und Ausgang überhaupt möglich zu machen. Lineare Zusammenhänge spielen dabei keine wesentliche Rolle. Diese können bei Bedarf direkt mit den Komponenten modelliert werden. Für mechatronische Systeme sind die dynamischen Abläufe von entscheidender Bedeutung. Dabei handelt es sich auf Systemebene um Bewegungsabläufe, die integrale oder differentielle Bestandteile besitzen. Diese können unterschieden werden in lineare und rotierende Bewegungen. Im vorliegenden Fall der Druckkolben-KWK [132] muss thermische Energie (Eingangsgröße) durch eine repetierende Linearbewegung in elektrische Energie (Ausgangsgröße) umgewandelt werden. Ungeachtet der Gewinnung beider Energieformen lässt sich dieser Zusammenhang durch Differentialgleichungen wiedergeben und folglich einer dynamischen Analyse zugänglich machen. Abb. 4.1 zeigt schematisch das Gesamtsystem. In der Abbildung sind ferner wichtige geometrischen Größen abgebildet, die nachfolgend innerhalb dieses Kapitels verwendet werden.

Abgeleitet aus dem dritten Newton'schen Gesetz, dem Wechselwirkungsprinzip („actio est reactio“), ist die Summe aller auf einen Körper wirkenden Kräfte gleich Null. Das Bindeglied für dynamische Vorgänge im betrachteten System stellt die starre

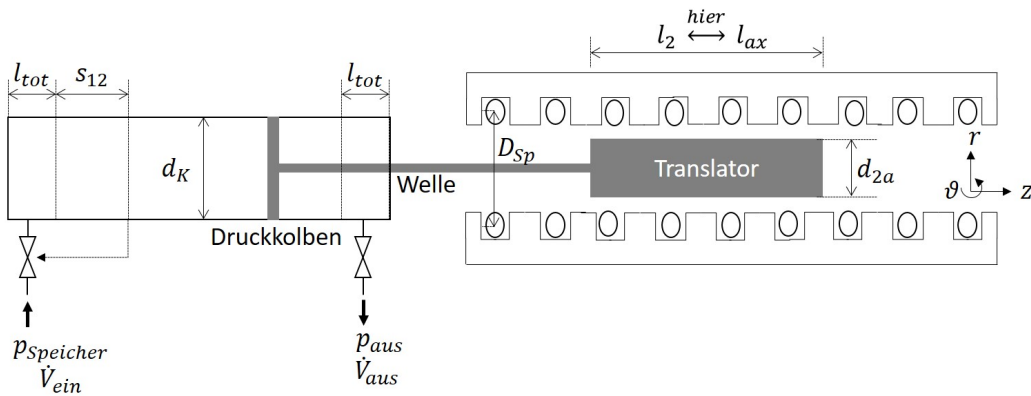


Abb. 4.1.: Übersichtsbild des KWK Gesamtsystem

mechanische Verbindung zwischen Druckkolben und Lineargenerator dar (vgl. Abb. 1.3 S. 8). Komponenten, die selbst auch durch differentielle Vorgänge geprägt sind, spielen für das Systemverhalten zunächst keine Rolle. Dabei wird davon ausgegangen, dass sich alle Zusammenhänge zwischen Eingängen und Ausgängen der Komponenten durch Näherungen oder vereinfachte Beschreibungsformen hinreichend genau darstellen lassen. Durch den oben beschriebenen iterativen Prozess mit Rückkopplung von Informationen aus der Komponentenebene in die Systemebene (vgl. Abb. 1.4 S. 10) lassen sich unzureichende Annahmen nachträglich verbessern. Dies kann insbesondere dann auftreten, wenn das Verhalten oder die Gestaltung von Komponenten direkten Einfluss auf die Dynamik hat oder direkt von dieser beeinflusst wird. Ohne umfassend vorgreifen zu wollen, können bereits hier die Masse des beweglichen Teils und der Wirkungsgrad des Generators als solche Größen genannt werden. Die Masse wirkt sich direkt in der Bewegungsgleichung aus (vgl. unten), und der Wirkungsgrad, welcher vom Betriebspunkt abhängt, bestimmt erheblich die gesamte Effizienz des Systems.

Bei Linearbewegungen stellen die Größen Beschleunigung  $a$ , Geschwindigkeit  $v$  und Ort  $s$  die zu integrierenden bzw. differenzierenden Größen dar. Die dynamische Bewegung folgt aus der Beschleunigung, die auf die Massen der bewegten Teile wirkt:

$$F_{dyn} = m_{dyn} \cdot a = m_{dyn} \cdot \dot{v} = m_{dyn} \cdot \ddot{s} \quad (4.1)$$

Als weitere Kräfte sollen hier die Reibung, die Kraft auf den Druckkolben und die bremsende Kraft des Generators mit aufgenommen werden.

Bei gut dimensionierten Systemen ist die Reibung bezüglich der Nennleistung klein. Zusätzlich darf erwartet werden, dass die Reibung für die beabsichtigte Leistungsklasse generell klein ist. Daher muss keine exakte Nachbildung des Reibkraftverlaufs in Abhängigkeit der Geschwindigkeit (dynamische Reibung) oder der Position (Haftreibung) erfolgen. In erster Näherung ist es ausreichend, die Reibung für kleine Geschwindigkeiten als konstant anzusetzen und ansonsten linear zur Geschwindigkeit ansteigen zu

lassen. Eine exakte Nachbildung der Reibung wurde von Klotzenbach [76] erarbeitet. Das bekannte Modell nach Stribek [142] erfährt eine Erweiterung um sogenannte elastische Oberflächen als Federsystem, wodurch eine Auslenkung und Rückstellung eines Objekts im Rahmen der Haftreibung bis zur Losbrechkraft möglich wird.

Beide Modelle weisen Unstetigkeiten um  $v = 0$  und eine kombinierte Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und der Position auf. Zusätzlich werden Zustandsautomaten benötigt, damit im Stillstand keine Kraft am Objekt angreift und die Reibkraft bei kleinen vorhandenen, wirkenden Kräften nicht zu einer unsinnigen Bewegung des Objekts entgegen der eigentlichen Bewegungsrichtung führt. Die detaillierte Nachbildung bedarf auch Informationen darüber, wozu die Kenntnis zu verwendender Lager erforderlich ist. Für die Untersuchungen auf Systemebene wird daher ähnlich wie bei dem einfachen Modellvorschlag auf die Vorgabe einer maximal zulässigen Reibung  $F_R(v_{Gleit})$  bei einer bestimmten Geschwindigkeit übergegangen („worst-case“-Abschätzung). Um auch die Haftreibung näherungsweise integrieren zu können, wird zum geschwindigkeitsproportionalen Kraftzuwachs ein Polynom, basierend auf der Kloss’schen Gleichung, hinzugefügt (siehe Gl. (4.2)), das für kleine Geschwindigkeiten eine zufriedenstellende Nachbildung der Haftreibung gewährleistet und zudem stetig ist [84]. Die Implementierung gestaltet sich dadurch besonders einfach.

$$F_R = k_{Gleit} \cdot F_R(v_{Gleit}) \cdot v + \frac{k_{Haft} \cdot F_R(v_{Gleit})}{\frac{v}{v_{Haft}} + \frac{v_{Haft}}{v}} \quad (4.2)$$

Die Gleichung setzt sich aus einem linearen Term zusammen (vorderer Teil) dessen Koeffizient  $k_{Gleit}$  festlegt, bei welcher Geschwindigkeit die maximale Reibkraft auftritt. Der zweite Teil beinhaltet eine Konstante  $k_{Haft}$ , mit der die Höhe der genäherten Haftkraft (vgl. Abb. 4.2) eingestellt wird, und einen Geschwindigkeitswert  $v_{Haft}$ , bei dem der Scheitelpunkt liegen soll.

Der Antrieb des Systems ergibt sich aus der Kraft, die der bei Zufuhr thermischer Energie entstehende Druck  $p_{ein}$  auf der Stirnseite des Hubkolbens hervorruft. Für die Betrachtung wird angenommen, dass dieser Druck aus einem Speicher uneingeschränkt zur Verfügung steht. Dieser Druck kann nun durch die Ventile in den Druckkolben geleitet werden, und auf den Kolben wirkt eine konstante Kraft. Nach dem Schließen des Einlassventils (positionsgesteuert bei  $s_{12}$ ) expandiert das Gas. Die Volumenänderung kann als adiabatische Zustandsänderung (isentrop) ohne Wärmeübergang an die Umgebung mit Hilfe der Poisson-Gleichung angegeben werden.

$$F_K = A_K \cdot p_{ein} \quad (4.3)$$

$$p_{ein}(s) = \begin{cases} p_{Speicher} & \text{für: } s \leq s_{12} \\ p_{Speicher} \cdot \left( \frac{V_{12}}{A_K \cdot (s + h_{tot})} \right)^n & \text{für: } s > s_{12} \end{cases} \quad (4.4)$$

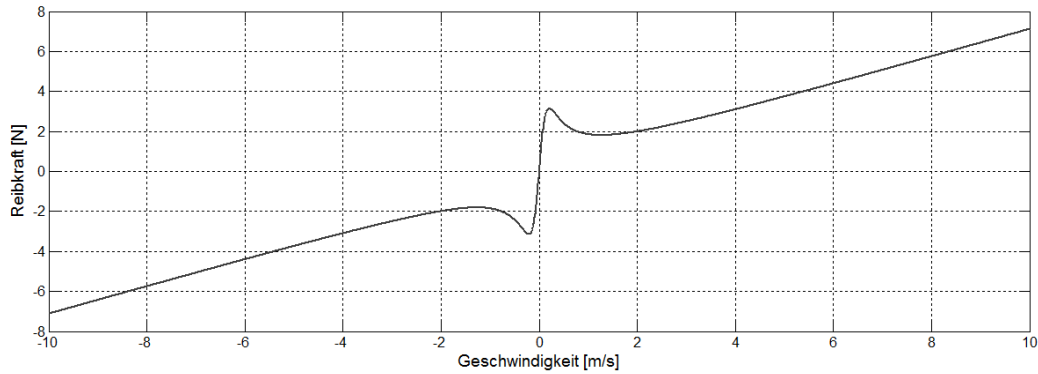


Abb. 4.2.: Geschwindigkeitsabhängige Reibung bei Verwendung von Gleichung (4.2)

Die Kolbenfläche  $A_K$  bestimmt zusammen mit der Weglänge  $s_{12}$  und der Länge  $l_{tot}$  das vorhandene Volumen  $V_{12}$  zum Zeitpunkt des Umschaltens. Die Länge  $l_{tot}$ , um das der Zylinder gegenüber dem Hub länger ist, zusammen mit der Kolbenfläche  $A_K$  ergeben das sogenannte Totvolumen an beiden Enden. Die Stoffkonstante  $n$  ist abhängig vom verwendeten Gasgemisch.

Am Auslass entsteht ein geschwindigkeitsabhängiger Gegendruck. Da für dessen Berechnung keine Näherungen vorliegen, wird angenommen, dass der Gegendruck  $p_G$  bei einer bestimmten Geschwindigkeit  $v_G$  bekannt ist. Mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung kann dann ein einfacher quadratischer Zusammenhang angesetzt werden:

$$p_{aus} = p_{G,v_G} \cdot \left( \frac{v}{v_G} \right)^2 \quad (4.5)$$

Da der Kolbendruck maßgeblich das dynamische Verhalten bestimmt, ist es sinnvoll, an den Ventilen auftretende Verluste<sup>1</sup> näherungsweise zu modellieren, wodurch sich zusätzlich Unstetigkeiten vermeiden lassen. Auf Grundlage von Vergleichen mit dem Schaltverhalten realer Ventile erscheint es gerechtfertigt, den Druckanstieg oder Abfall als Term der Ordnung  $o_V = 4$  auszudrücken. Mit typischen Reaktionszeiten schneller Ventile von  $t_V = 4$  ms kommt folgender Term zur Anwendung:

$$p_{ein,auf} = p_{Speicher} \cdot \left( 1 - \left( \frac{t_V - t}{t_V} \right)^{o_V} \right) \quad (4.6)$$

Damit erhält der Gesamtdruck auf den Kolben eine Abhängigkeit von Ort, Geschwindigkeit und Zeit. Beim Schließen des Ventils wird die Funktion abklingend verwendet und die Ableitung mit derjenigen der Poisson-Gleichung verglichen, um den Wechsel zwischen den Funktionen zu detektieren. Abb. 4.3 zeigt beispielhaft den Verlauf des Drucks am Einlass und Auslass sowie die entsprechenden Kurven der Geschwindigkeit und Position des Kolbens. Hier ist deutlich das Aufklingen des Eingangsdrucks, der

<sup>1</sup>Die erforderliche Energie zum Öffnen oder Schließen wird vernachlässigt.

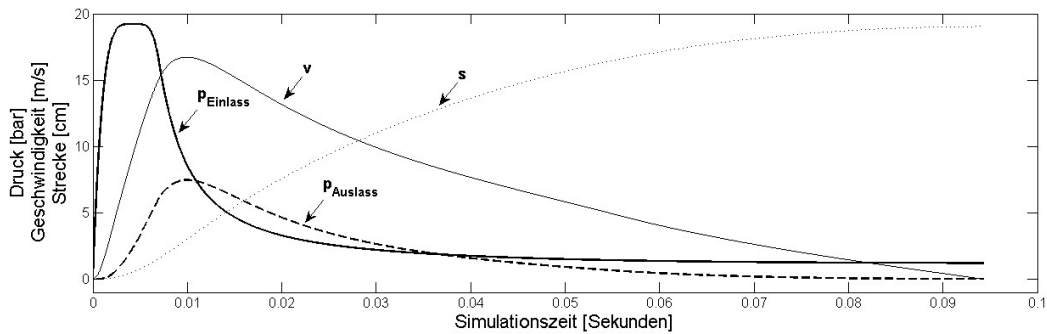


Abb. 4.3.: Beispielhafte Darstellung der zeitlichen Verläufe des Drucks am Einlass- und Auslassventil und der hervorgerufenen Kolben und Transatorbewegung - hier repräsentiert durch die Geschwindigkeit und die zurückgelegte Strecke der bewegten Teile

Übergang in den anliegenden Druck des Speichers und der Übergang beim Schließen des Ventils auf die Kennlinie der Poisson-Gleichung zu erkennen. Der Druck am Ausgang steigt und fällt mit der Geschwindigkeit. Für die Vorwärtsbewegung des Kolbens verbleibt dann die Differenz aus beiden Druckwerten.

Zusätzlich zum beschriebenen Verhalten wäre es denkbar, Einlass und Auslass gezielt zu regeln, um beliebige Bewegungsprofile zu erzeugen. Es ist jedoch sinnvoller, den Typ des Antriebs (hier Druckkolben) als Freiheitsgrad zur Verfügung zu stellen und stattdessen Bewegungsprofile vorzugeben. Der Antrieb könnte dann nachgelagert so entworfen werden, dass er das Profil erfüllt. Folgt man dem in Abschnitt 1.3 vorgestellten Vorgehen, wird das Bewegungsprofil zwangsläufig auf Topologieebene untersucht und liegt daher fest.

Die Energieausbeute wird im Systemmodell durch die Kraft des Lineargenerators repräsentiert, die dieser dem Kolben entgegensetzen kann. Beim patentgemäß vorgesehenen Generator handelt es sich um eine Permanentmagnet(erregte)-Synchronmaschine. Deren Betriebsverhalten kann für den geregelten Fall mit Hilfe einer Kraft-Geschwindigkeits-Kennlinie (analog zur Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie) dargestellt werden. Der Motor befindet sich bis zu einer Eckgeschwindigkeit  $v_{eck}$  im Ankerstellbereich und liefert eine konstante Kraft. Im Feldschwäcbereich oberhalb von  $v_{eck}$  erfolgt ein Rückgang der Kraft reziprok zur Geschwindigkeit (Leistungskonstanz).

$$F_{el}(v) = \begin{cases} F_{max} & \text{für: } v \leq v_{eck} \\ F_{max} \cdot \frac{v_{eck}}{v} & \text{für: } v > v_{eck} \end{cases} \quad (4.7)$$

Beim Start des Systems muss beachtet werden, dass die Kraft des Generators die am Kolben wirkende Kraft nicht übersteigt. In der Simulation würde die Anordnung ansonsten entgegen der geplanten Bewegungsrichtung laufen. Um die Rechenzeit gering zu halten, wird auf einen Regler verzichtet und stattdessen die Kraft zeitgeführt mit einer

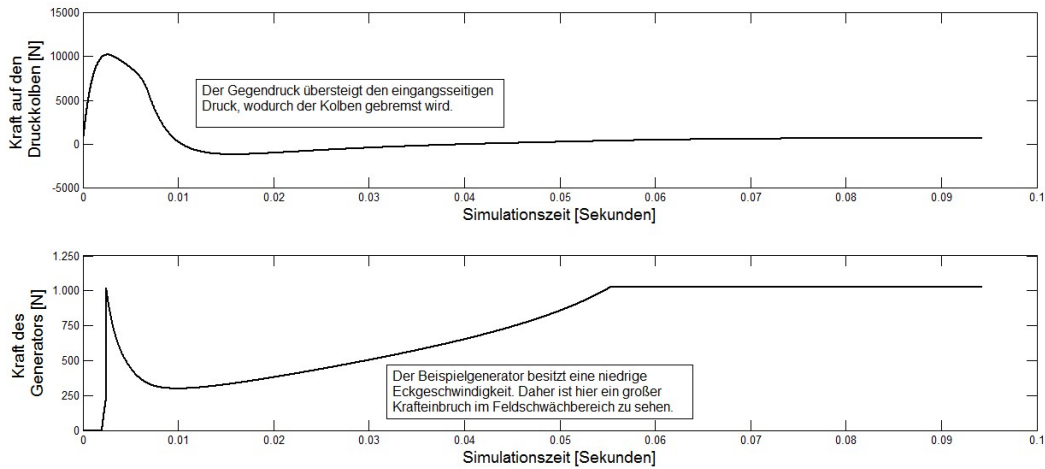


Abb. 4.4.: Zeitlicher Verlauf der im System wirkenden Kräfte am Kolben (oben) und Generator (unten)

Rampe auf den Maximalwert gebracht. Da die Zeitkonstanten auf Systemebene noch nicht bekannt sind, wird vereinbart, dass die maximale Kraft des Generators erst wirken darf, wenn das Einlassventil ganz geöffnet ist. Zusätzlich wird eine Verzögerungszeit  $t_d$  eingeführt.

$$F_{el,start} = F_{max} \cdot \frac{t - t_d}{t_V - t_d} \text{ wenn: } t < t_V \quad (4.8)$$

Abb. 4.4 zeigt für eine beispielhafte Kombination aus Kolben und Generator die am Kolben wirkende Kraft, die der Druckverlauf hervorruft, sowie die vom Generator geschwindigkeitsabhängige entgegengerichtete Kraft. Deutlich ist die steile Rampe zu Beginn des Verlaufs zu erkennen.

Das System insgesamt wird dann durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\dot{v} = \frac{1}{m} \cdot (F_K(s, v, t) - F_R(v) - F_{el}(v, t)) \quad (4.9)$$

Die Differentialgleichung wird mit Hilfe eines Algorithmus nach Bogacki-Shampine gelöst, da er als besonders schnell und geeignet für Differentialgleichungen gilt. Die erforderliche feste Schrittweite erleichtert zusätzlich die Implementierung. Da es sich um ein Standardverfahren handelt, ist es nicht notwendig, hierauf weiter einzugehen. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass es für geringe Rechenzeiten unerlässlich ist, den Solver für das System angepasst zu implementieren. So konnte durch Einsatz eines entsprechenden Codes in der Sprache Java gegenüber dem Paket Matlab/SIMULINK die Berechnungsdauer auf rund 5 % reduziert werden.



## 4.2. Zielgrößen

Um nun das System optimieren zu können, müssen sowohl eine Zielgröße als auch Einflussfaktoren festgelegt werden, die auf diese wirken. Hier soll der Nutzungsgrad  $\zeta$  als Maß für die Effizienz des Systems dienen. Dieser ist für das System besonders gut geeignet, da er sich aus integralen Größen (Energien) ableitet und damit alle im Bewegungsvorgang auftretende Betriebspunkte mit berücksichtigt. Für lineare Bewegungen werden die Energien aus dem Integral über die Leistungen ermittelt, die wiederum dem Produkt aus der jeweils herrschenden Kraft und Geschwindigkeit entspricht.

$$\begin{aligned}
 P_{Lin} &= F_{Lin} \cdot v \\
 E_{Lin} &= \int P_{Lin} dt \\
 \zeta &= \frac{W_{LG}}{W_K}
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

Um nun die Verläufe, wie in Abb. 4.5 gezeigt, zu beeinflussen, soll einseitig kein erheblicher Eingriff erfolgen. Da sich diese Arbeit mit der Einbindung des Entwurfs eines Lineargenerators beschäftigt, wird lediglich der Kolbendurchmesser in die Optimierung mit aufgenommen, um zu zeigen, dass diese mit der vollständigen Systembetrachtung zurecht kommt. Der Durchmesser wirkt sich direkt auf die Kolbenfläche und damit auf die Kraft aus.

Der Generator, dessen Effizienz und somit auch die elektrische Ausgangsleistung hingenommen werden durch eine Vielzahl von Parametern bestimmt. Maßgebliche Einflussgrößen sind jedoch die maximale Leistung  $P_{max}$ , die Kraft  $F_{max}$  oder alternativ die Eckgeschwindigkeit  $v_{eck}$ . Durch Variation von Kraft oder Geschwindigkeit können so unterschiedliche Kennlinien erzeugt werden, die in Kombination mit der antreibenden Kraft  $F_K$  das Bewegungsprofil festlegen und letztlich die Effizienz.

Der Eckpunkt bestimmt weiter über die Ausnutzungsziffer den Bauraum des Generators. Aus dem Bauraum lässt sich die für die Differentialgleichung erforderliche Masse der bewegten Teile abschätzen. Die Masse wiederum kann als Referenzwert für Kosten verwendet werden. Für rotierende Maschinen ist die Verwendung der Ausnutzungsziffer als Esson-Ziffer bekannt und ein verbreitetes Mittel zur Abschätzung elektrischer Maschinen [100, 96]. Hierzu folgt deshalb nun eine grundlegende Betrachtung zur Verwendung der Ausnutzungsziffer bei Linearmaschinen.

Die Baugröße einer Maschine bestimmt die Leistung und folglich die Kraft (analog dem Drehmoment). Die Kraft kann aus dem Schub ermittelt werden, der sich an der Mantelfläche des beweglichen Teils ausbildet. Dieser wiederum berechnet sich aus dem Produkt des Statorstrombelags  $\vec{A}_1$  (hervorgerufen durch die Stromdichte  $\vec{s}$ ) und

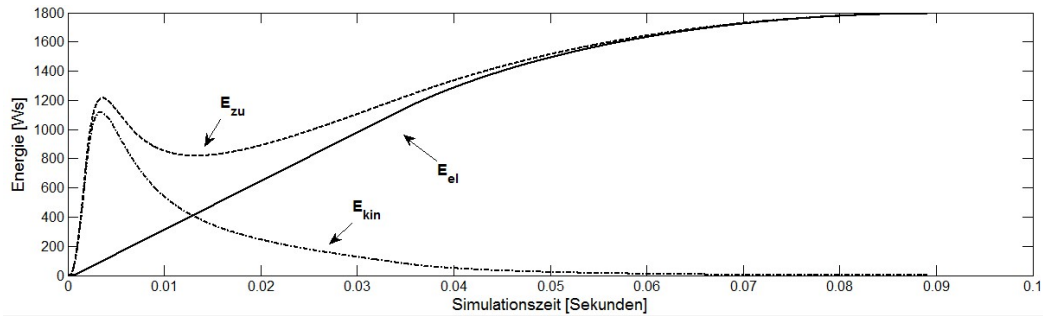


Abb. 4.5.: Im System auftretende Energien: zugeführte Energie (Druck auf Kolben); kinetische Energie des Kolbens, hervorgerufen durch die Bewegung; am Generator wirkende Energie, die für die Energiewandlung zur Verfügung steht.

der Luftspaltflussdichte  $\vec{B}_\delta$ , ohne dass weitere Betriebseigenschaften festzulegen sind [101, 60]. Der Maximalwert entsteht, wenn beide Vektoren zueinander senkrecht stehen.

Zunächst wird geprüft, ob für Linearmaschinen dieselben Grenzwerte für die Nutwandbelastung (Produkt aus Strombelastung und Stromdichte) gelten wie für rotierende Maschinen. Hierzu wird allgemein der Beharrungszustand (kurzzeitige Leistungsspitzen verursachen i.d.R. keine Schäden) einer stationären Wärmeströmung  $\dot{Q}$  verwendet, wobei angenommen wird, dass die Abfuhr der Verlustleistung in den Nuten  $P_{Vn}$  (Kupferverlust) ausschließlich als Wärme über die Oberfläche der Statornuten erfolgt. Das Blechpaket ist thermisch gut leitend und verfügt über ein so großes Volumen, dass es als thermisch unkritisch angesehen werden kann. Der Wärmestrom wird überwiegend durch die Isolierschicht und parasitäre Luftspalte begrenzt. Auf Grund der Annahmen folgt für den Wärmestrom:

$$P_{Vn} = \dot{Q} = s^2 \cdot b_n \cdot h_n \cdot \underbrace{D_{Sp} \cdot \pi \cdot k_n}_{l_n} \cdot \frac{1}{\kappa} \quad (4.11)$$

Die elektrischen Verluste ergeben sich aus der Stromdichte und der elektrischen Leitfähigkeit  $\kappa$  im Volumen der Nut (Breite  $b_n$ , Höhe  $h_n$ , Tiefe  $l_n$ ). Folgende Festlegungen werden getroffen:

Variable	Bemerkung	Koordinate
$b_n$	axiale Richtung $\hat{=}$ Bewegungsrichtung	Z
$h_n$	flache Bauweise Solenoid	Y [kartesisch] R [Zylinder]
$l_n$	flache Bauweise	X [kartesisch]
$D_{Sp}\pi$	Solenoid	$\vartheta$ [Zylinder]

Hier findet sich bereits eine Transformation von rotierenden Maschinen zu Solenoidmaschinen. Bei rotierenden Maschinen entspricht die Tiefe der Nut der Länge der Maschine. Da Flachbettlinearantriebe lediglich eine Abwicklung rotierender Maschinen repräsentieren, kann auch für diese direkt die Tiefe der Maschine verwendet werden. Bei zylinderförmigen Maschinen hingegen erstreckt sich die Tiefe der Nut exakt einmal entlang des Umfangs.

$$\frac{D_{Sp}}{2} \pi \rightarrow l_n \quad (4.12)$$

$D_{Sp}$  steht für den mittleren Durchmesser der Solenoid-Spule und  $k_n$  für den Nutfüllfaktor (rd. 60 % bei Formspulen).

Die wesentliche Transformationsvorschrift besteht folglich darin, dass die axiale Länge der rotierenden Maschine bei der Linearmaschine durch die Länge eines Umfangs ausgedrückt wird. Der Umfang der rotierenden Maschine entspricht demgegenüber der magnetisch wirksamen axialen Länge  $l_{ax}$  einer Linearmaschine, die jeweils dem kürzeren Maschinenteil entspricht ( $l_1$  bei einem Kurzstator bzw.  $l_2$  bei einem Langstator). Es gilt daher folgende geometrische Ersetzung:

$$\begin{aligned} O &= D \cdot \pi \leftrightarrow l_{ax} \\ l_{FE} &\leftrightarrow D_i \cdot \pi \text{ bzw. } D_{Sp} \cdot \pi \end{aligned} \quad (4.13)$$

Mit der Nutteilung  $\tau_n$  kann man dann den auf den Luftspalt bezogenen Strombelag mit einbringen:

$$P_{Vn} = \dot{Q} = s^2 \cdot l_n \cdot \frac{1}{\kappa} \cdot A_1 \cdot \tau_n \quad (4.14)$$

Nimmt man nun an, die Wärme werde an drei Seiten einer rechteckigen Nut an den Stator abgegeben und  $\lambda$  sei die Wärmeleitfähigkeit von Isolierung und Luftspalten (Gesamtdicke  $d$ ), gilt für die Temperaturdifferenz über beide:

$$\Delta\vartheta \approx \frac{A_1 \cdot s \cdot \tau_n \cdot d}{\kappa \cdot \lambda \cdot h_n \cdot 2} \quad (4.15)$$

Das Ergebnis ist identisch zu demjenigen für rotierende Maschinen, weshalb dieselben Werte für zulässige Stromdichte und Strombelag verwendet werden dürfen<sup>2</sup>.

Der Strombelag dient weiter zusammen mit der Ausnutzungsziffer  $C$  als Maß zur Grobdimensionierung der Hauptabmessungen. Diese sind die axiale Länge und der

<sup>2</sup>Für konvektionsgekühlte Maschinen liegt  $A_1 \cdot s$  bei 1000...3000 A/cm A/mm<sup>2</sup>. Für eine Stromdichte von 5 A/mm<sup>2</sup> darf der Strombelag dann 200...600 A/cm erreichen. Bei direkter Leiterkühlung sind auch Werte oberhalb von 3000 A/cm A/mm<sup>2</sup> zulässig. Die maximal zulässigen Werte stellen Rahmendaten für das Programm dar und sind vom Ingenieur entsprechend der geplanten Kühlung mit Bedacht zu wählen [101].

Bohrungsdurchmesser. Zur Herleitung der Ausnutzungsziffer muss die innere mechanische Leistung bestimmt werden. Bei Linearmaschinen kann hier nicht direkt ein Zusammenhang zwischen der Frequenz des Drehfelds  $f_1$  und der Kreisfrequenz  $\omega_2$  des Rotors angewendet werden, da das Drehfeld zum Wanderfeld mit der Geschwindigkeit des Translators  $v_2$  wird:

$$f_1 = \frac{v_2}{2 \cdot \tau_p} \quad (4.16)$$

$$\tau_p = \frac{l_2}{2 \cdot p} \quad (4.17)$$

Die innere Leistung wird durch die induzierte Spannung  $U_i$  in der (für den Energieumsatz maßgeblichen) Statorwicklung mit der Windungszahl  $w = w_1 \cdot \xi_1$  bestimmt ( $w_1$ : Windungszahl je Strang und Pol,  $\xi_1$ : Wicklungsfaktor der Statorwicklung; vgl. Anhang B). Für eine sinusförmige Feldänderung gilt auf Grundlage der zweiten Maxwell-Gleichung:

$$\iint_A \text{rot } \vec{E} \, d\vec{a} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \, d\vec{a} \rightarrow \int_{\partial A} \vec{E} \, d\vec{s} = -w \frac{d\Phi}{dt} \quad (4.18)$$

$$U_i = \int \vec{E} \, d\vec{s} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (4.19)$$

Ursache ist das elektrische Wirbelfeld, das durch die zeitliche Änderung des Magnetfelds hervorgerufen wird. Die Durchtrittsfläche  $A$  des Magnetfelds (entspricht der Luftspaltfläche  $A_{\delta p}$  eines magnetischen Pols) enthält infinitesimale Wirbel, die in der Summe keinen Beitrag zum Integral liefern, weshalb sich dieses zu einem Linienintegral (entlang des Randes  $\partial A$ ) vereinfachen lässt. Weiter weisen die Normalkomponenten von Fläche und Feld in dieselbe Richtung, weshalb das Integral als Skalar den magnetischen Fluss ergibt, dessen zeitliche Änderung zur Spannungsinduktion führt.

Der oben verwendete verkettete Fluss  $\Psi$  folgt aus der zeitlichen Beschreibung des Magnetfelds (Grundwelle) mit der ideellen Polbedeckung  $\alpha_i$ :

$$B_{\delta}(t) = \hat{B}_{\delta(1)} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{v_2}{2 \cdot \tau_p} \cdot t\right) \rightarrow \Psi_{(1)}(t) = w \cdot \alpha_i \cdot B_{\delta}(t) \cdot A_{\delta p} \quad (4.20)$$

Über die induzierte Spannung kann dann die innere Scheinleistung  $P_{Si}$  ermittelt werden:

$$U_{i(1)} = w_1 \cdot \xi_{1(1)} \cdot \alpha_i \cdot \hat{B}_{\delta(1)} \cdot A_{\delta p} \cdot 2\pi \cdot \frac{v_2}{2 \cdot \tau_p} \quad (4.21)$$

$$A_{\delta p} = \tau_p \cdot l_n \quad \text{mit: } l_{n, \text{Solenoid}} = \pi \cdot D_i$$

$$P_{Si} = m \cdot U_i \cdot I_1 = w_1 \cdot \xi_{1(1)} \cdot \alpha_i \cdot \hat{B}_{\delta(1)} \cdot l_n \cdot \pi \cdot v_2 \cdot I_1 \quad (4.22)$$

Wird nun abschließend der Strom durch den oben festgelegten Strombelagwert ausgedrückt, kann analog zur rotierenden Maschine eine Ausnutzungsziffer  $C_{lin}$  definiert werden:

$$\frac{P_{Si}}{v_2} = \pi \cdot l_n \cdot 2p \cdot \tau_p \cdot \xi_{1(1)} \cdot \alpha_i \cdot \hat{B}_{\delta(1)} \cdot A_1 \quad (4.23)$$

$$\text{mit: } A_1 = \frac{m \cdot w_1 \cdot I_1}{l_2}$$

$$C_{lin} = \frac{P_{Si}}{v_2 \cdot \underbrace{(l_n \cdot 2p \cdot \tau_p)}_{A_\delta}} = \pi \cdot \xi_{1(1)} \cdot \alpha_i \cdot \hat{B}_{\delta(1)} \cdot A_1 \quad (4.24)$$

Trotz der starken Ähnlichkeit zur bekannten Form [101, 100] für rotierende Maschinen findet sich hier ein Ausdruck für eine Kraft anstatt für ein Drehmoment sowie eine quadratische Abhängigkeit von Geometriegrößen anstatt einer kubischen. Dies erklärt sich jedoch durch nachfolgende Umformungen, mit deren Hilfe sich auch die wechselseitige Überführung der Ausnutzungsziffer erreichen lässt:

$$P_{Si} = M \cdot \omega = \frac{M}{\frac{D}{2}} \cdot \omega \cdot \frac{D}{2} = F \cdot v \quad (4.25)$$

$$\text{wobei: } T = \frac{2\pi}{\omega}; v = \frac{O}{T} = \frac{D\pi}{2\pi} \cdot \omega = \omega \cdot \frac{D}{2} \leftrightarrow v = D \cdot \pi \cdot n$$

Für die Ausnutzungsziffer folgt nach wenigen Umformungen:

$$C_{lin} = C_{rot} \cdot \frac{1}{\pi^2} \quad (4.26)$$

Gegenüber rotierenden Maschinen entfällt der Hebel  $r_i$  für die Drehmomentbildung, weshalb lediglich die aktive Oberfläche des Luftspalts für die Kraft von Bedeutung ist (bei rotierenden Maschinen das Zylindervolumen). Bemerkenswert ist allerdings, dass die Ausnutzungsziffer in beiden Fällen die selbe Einheit [kVA min/m<sup>3</sup>] besitzt.

Hierzu kann angemerkt werden, dass auch bei rotierenden Maschinen über den Hebel eine Kraft (Schub) an der Mantelfläche des Luftspalts berechnet wird. Formt man die Lorentz-Kraft wie in [102] gezeigt mit Hilfe des Maxwell'schen Spannungstensors um, erhält man für die verwendeten Raumrichtungen Kräfte, die auf das betrachtete Volumen wirken. Für rotierende Maschinen ist die antreibende Kraft die tangential wirkende, für Linearmaschinen die in Richtung der Linearbewegung (hier auch als z-Komponente oder axiale Richtung bezeichnet). Letztlich sind die Spannungstensoren identisch, und man führt identisch zur Berechnung des Drehmoments eine Integration über die Mantelfläche des Luftspalts durch. Für den Maximalwert der Kraft gilt dann:

$$F_{max} = \frac{1}{2} \cdot A_\delta \cdot \hat{A}_{1(1)} \cdot \hat{B}_{\delta(1)} \quad (4.27)$$

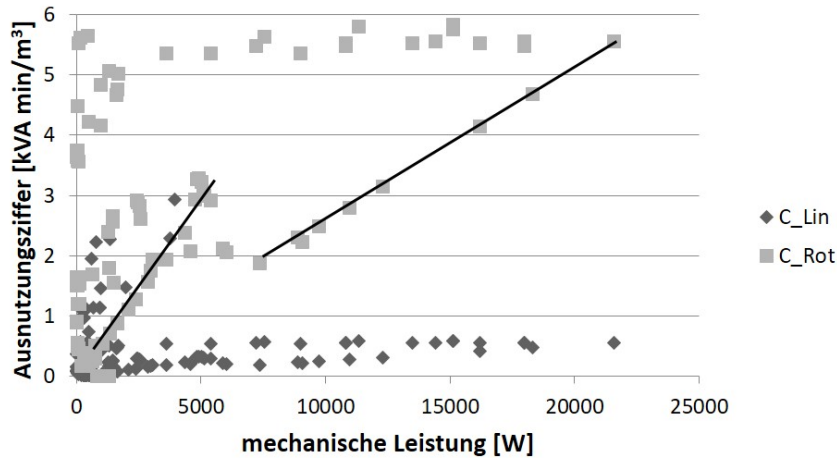


Abb. 4.6.: Ausnutzungsziffern ausgeführter Linearantriebe

Zur Dimensionierung ist es weiter erforderlich, verlässliche Werte für die Ausnutzungsziffer zur Verfügung zu haben. Zu diesem Zweck wurden am Markt verfügbare PMSYN-Linearmaschinen analysiert und ausgewertet. Abb. 4.6 zeigt die Ergebnisse sowie deren Umrechnung auf rotierende Maschinen. Die Werte liegen im Rahmen der Genauigkeit der Datenbasis allesamt in einem sinnvollen Bereich. Besonders zuverlässig sind die Werte von SEW Eurodrive und Ruch (wassergekühlte Maschinen), deren auf rotierende Maschinen umgerechnete Werte zwischen 4 und 5 kVA min/m<sup>3</sup> liegen. Das beste Datenmaterial stand für Maschinen der Firma Oswald zu Verfügung. Die zugehörigen umgerechneten Werte sind durch Linien gekennzeichnet. Es handelt sich hierbei um Polysolenoid-Motoren mit langsamer Verfahrgeschwindigkeit bis 3 m/s, die bei kleinerer Leistung luftgekühlt und bei größerer Leistung wassergekühlt sind. Der im unteren Teil des Diagramms zu sehende Bereich, gebildet durch Rauten, kann als Grundlage für die Abschätzung herangezogen werden.

Bei der Erhebung wurden zugleich auch typische Massen von Linearantrieben aufgenommen, deren Verteilung Abb. 4.7 zeigt. Große Werte bei kleiner Leistung gehören zu wassergekühlten Maschinen mit hoher Nennkraft. Die beiden Linien kennzeichnen die wassergekühlten Maschinen der Firma Oswald (die Kühleinbauten sind berücksichtigt). Diese Massen können als Vergleichsbasis sowie als Bezugsgrößen für die Normierung der Zielgröße im Rahmen der Optimierung verwendet werden. Zudem könnten diese näherungsweise abhängig von der Leistung direkt in die Bewegungsgleichung eingesetzt werden. Da die Datenbasis allerdings klein ist, sollte besser eine bauraumabhängige Abschätzung erfolgen.

Aus der Ausnutzungsziffer folgt die sogenannte aktive Luftspaltfläche für den Translator. Darunter ist die gemeinsame Überdeckung flussführender Teile zwischen Stator und Translator zu verstehen. Diese Fläche setzt sich aus beliebigen Kombinationen von  $l_2$

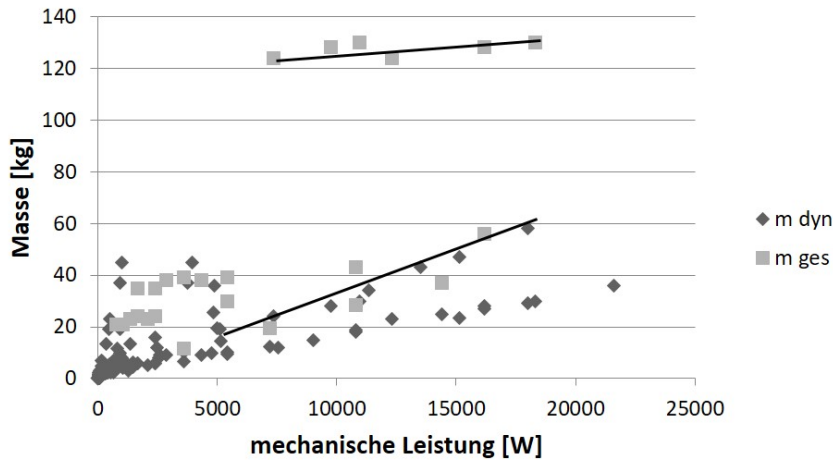


Abb. 4.7.: Massen ausgeführter Linearantriebe

und  $D_{2a}$  zusammen und ergibt gemäß nachfolgender Gleichung unterschiedliche Massen:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{D_{2a}^2}{4} \cdot \pi \cdot l_{ax} \quad (4.28)$$

Die Gleichung geht davon aus, dass es sich um einen massiven Vollzylinder aus Stahl handelt, wodurch eine „worst-case“-Abschätzung gewährleistet ist. Die Verteilung von Länge und Durchmesser erfolgt durch den Optimierer mit Hilfe eines neuen Faktors  $k_{l2D}$ :

$$k_{l2D} = \frac{l_2}{D_{2a}} \quad (4.29)$$

Abhängig von den restlichen Einflussfaktoren und vor allem von der gewünschten Gewichtung von Effizienz und Kosten werden sich bestimmte Verhältnisse als optimal herausstellen. Im Stadium der Systemoptimierung erfolgt keine automatische Prüfung von zulässigen Grenzwerten. Dies kann jedoch durch Hinzufügen von Randbedingungen berücksichtigt werden. Hierzu ist es sinnvoll, die maximale Geschwindigkeit zu überprüfen, da diese die zulässigen Grenzwerte der Lager nicht überschreiten darf. Ebenso sind für Permanentmagnete garantierte Festigkeiten für Beschleunigung bis maximal 80 – 120  $g$  von Herstellern gegeben. Von ausgeführten Linearmaschinen sind Verhältnisse von Länge zu Durchmesser im Bereich 1 . . . 5 typisch. Für den Optimierer wird der Wertebereich entsprechend auf 0,5 . . . 6 eingeschränkt. Weitere mechanische Belastungen, thermische Belastungen oder die Durchbiegung des Translators können erst bei Durchführung des Entwurfs mit ausreichender Genauigkeit überprüft werden.

Bereits mit den drei Eingangsgrößen  $D_K, v_{eck}$  und  $k_{l2D}$  lässt sich eine umfassende Optimierung des Systems hinsichtlich des Nutzungsgrads durchführen. Es ist jedem Nutzer

selbst überlassen, weitere Parameter in die Optimierung mitaufzunehmen oder die Näherungen detaillierter auszuführen. Allerdings stellen die beschriebenen Parameter und Gleichungen die wichtigsten Einflussgrößen dar und sind für die Grobdimensionierung des Systems ausreichend. Dennoch ist es unerlässlich, diese Optimierungsebene mehrfach zu durchlaufen und mit Rückmeldungen aus der Nachrechnung des Entwurfs zu versehen.

Die beiden Größen, die zurückgegeben werden müssen, sind die Masse und der elektrische Wirkungsgrad. Die Masse wirkt sich direkt auf die Differentialgleichung des mechanischen Verbands aus. Zudem wurde oben der Nutzungsgrad als Verhältnis von zwei mechanischen Energien angegeben (Gl. (4.10)). Solange mit einem konstanten elektrischen Wirkungsgrad für den Generator gerechnet wird, ist dieses Vorgehen auch sinnvoll. Allerdings wird sich aus der Nachrechnung ein Geschwindigkeit-Kraft-Kennfeld für den Wirkungsgrad ableiten lassen (sog. Muscheldiagramme) [109, 110]. Für eine umfassende Bewertung des Nutzungsgrads müssen die mechanischen Energien, die dem Generator zur Verfügung stehen, noch mit dem Wirkungsgrad im jeweiligen Arbeitspunkt gewichtet werden. In erster Näherung ist es sinnvoll, vor dem Entwurf auf Systemebene ein Muscheldiagramm einer ausgeführten Maschine (auch rotierend) gleicher Leistungsklasse mit ähnlichen Betriebseigenschaften (z.B. langsam laufend) zu verwenden.

Die Optimierung stellt dem anschließenden Entwurf nun wichtige Eingangsgrößen zur Verfügung. Neben den Hauptabmessungen sind dies alle Größen, die in die Optimierung als Parameter oder Randbedingung miteingegangen sind. Tabelle 4.1 fasst diese Größen abschließend zusammen.

In der Realität zeigt sich die Ergebnisauswertung als anspruchsvoll. Die Abbildungen 4.8 bis 4.12 (jeweils a - c) stellen die Ergebnisse verschiedener Suchen nach der Pareto-Front für das System dar. Die verwendeten Optimierungsziele sind der Nutzungsgrad und die Translatormasse.

Um die Front erzeugen zu können, wurde ein Computerprogramm erstellt, das die dynamische Simulation des gesamten Systems, bestehend aus Druckzylinder und Lineargenerator, vornimmt. Die Implementierung erfolgt gemeinsam mit dem bereits vorher erwähnten Lösungsalgorithmus (vgl. S. 89) in der Programmiersprache Java.

Da sich so jedoch jeweils nur ein Ergebnis für einen Parametersatz ermitteln lässt, wurde zusätzlich auf Grundlage der Erkenntnisse aus dem vorhergehenden Kapitel 3 die dynamische Simulation an einen Optimierungsalgorithmus gekoppelt. Ebenfalls in der Sprache Java wurde daher der Particle Swarm Algorithmus als zusätzliches Modul zur Systemberechnung implementiert.

Trotz idealer Abstimmung von Optimierungsalgorithmus und Systemsimulation aufeinander dauert die Erstellung eines der Datensatzfelder, aus denen sich die Pareto-Fronten ablesen lassen, mehrere Tage bis hin zu Wochen. Für die vorliegenden Grafiken wurde



Variable	Bezeichnung
$D_{2a}$	Außendurchmesser Läufer
$l_2$	axiale Länge Läufer
$v_{eck}$	Eckgeschwindigkeit
$F_{max}$	Eckkraft bzw. maximale Kraft
$\eta$	Wirkungsgrad: durchschnittlich oder $f(F, v)$
$v(t)$	Bewegungsprofil: aus der Optimierung folgt ein Profil für den Bewegungsablauf, dem folgende Größen entnommen werden können: Beschleunigung $a$ , Hub $l_{hub}$ , maximale Geschwindigkeit $v_{max}$
$A_1$	Statorstrombelag
$B_\delta$	Luftspaltflussdichte

Tab. 4.1.: Ergebnisse im Anforderungsprofil

eine CPU mit 2,8 GHz verwendet. Obwohl einige Vereinfachungen angewendet wurden, benötigt die Berechnung je Datensatzfeld rund zwei Wochen. Unter Vereinfachungen ist hier zu verstehen, dass die Zahl der Parameter so klein wie möglich gewählt wurde und bestimmte Größen wie die Ausnutzungsziffer fest vorgegeben waren. Ebenso wurden lediglich zwei Zielgrößen zur Optimierung verwendet und die Zahl der Partikel auf 75 und die Zahl der Wiederholungen für die Schwarmbewegungen auf 150 beschränkt.

Für die erste Bilderfolge 4.8a bis 4.9c wurde als weitere Reduktion von Freiheitsgraden der Wirkungsgrad des Generators als konstant angenommen.

Für alle Bilder gilt allgemein, dass die Ergebnisse, die auf oder nahe der gesuchten Pareto-Front liegen, durch dunkel eingefärbte Rauten gekennzeichnet sind. Ausschlaggebend ist dafür ein möglichst guter Nutzungsgrad bei der jeweiligen Masse. Weitere Ergebnisse mit schlechterem Nutzungsgrad werden durch helle Dreiecke angezeigt. Den Zusammenhang zwischen beiden Zielgrößen zeigt das erste Bild.

Hier sind zwei deutliche Fronten erkennbar. Die Rauten sind hauptsächlich in der oberen, nicht vollständig durchgängigen Front enthalten, die Dreiecke sind darunter in einer zweiten Front aufgereiht. Die Rauten selbst zeigen zwischen fünf und fünfzehn Kilogramm auch nochmals Werte, die nicht ganz an den Nutzungsgrad der anderen Rauten heranreichen. Die oberste Front stellt dabei das allgemeine Optimum dar und ist daher die gesuchte global optimale Pareto-Front. Die beiden anderen Fronten gehören zu Parametersätzen lokaler Optima. Dem Optimierer ist es bei diesen Ergebnissen nicht gelungen, diese lokalen Bestpunkte zu verlassen.

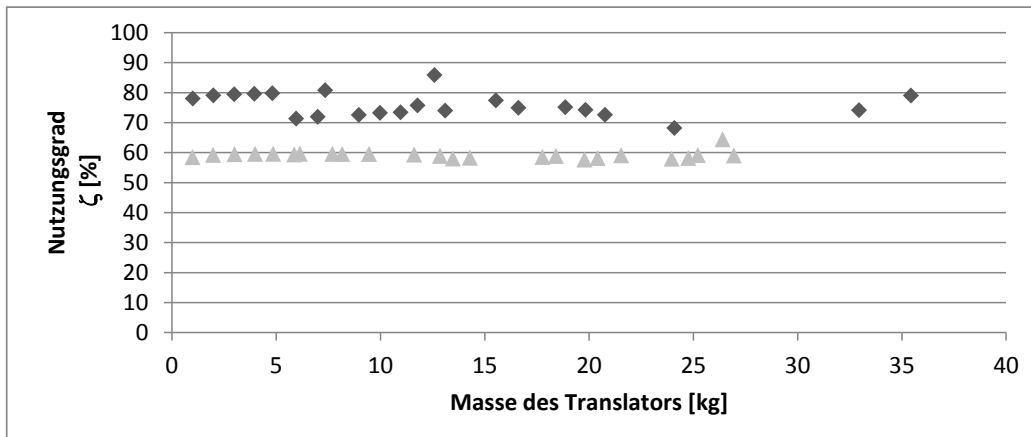
Die Ursachen dafür sind nicht kausal belegbar. Jedoch ist eine schwache Signifikanz der verwendeten Parameter in Bezug auf das Ergebnis ungünstig für die Konvergenz im absoluten Bestwert. Ab einer gewissen Zahl von Partikeln lässt sich dies auch

nicht mehr auf eine zufällige und unglückliche Verteilung der Partikel zurückführen. Unter Verweis auf das Abschnitt 3.4 kann die verwendete Zahl von 75 Partikeln als ausreichend für eine gute Suchraumabdeckung für fünf Parameter angesehen werden. Weiteren Aufschluss darüber geben die in den weiteren Bildern gezeigten Ergebnisse.

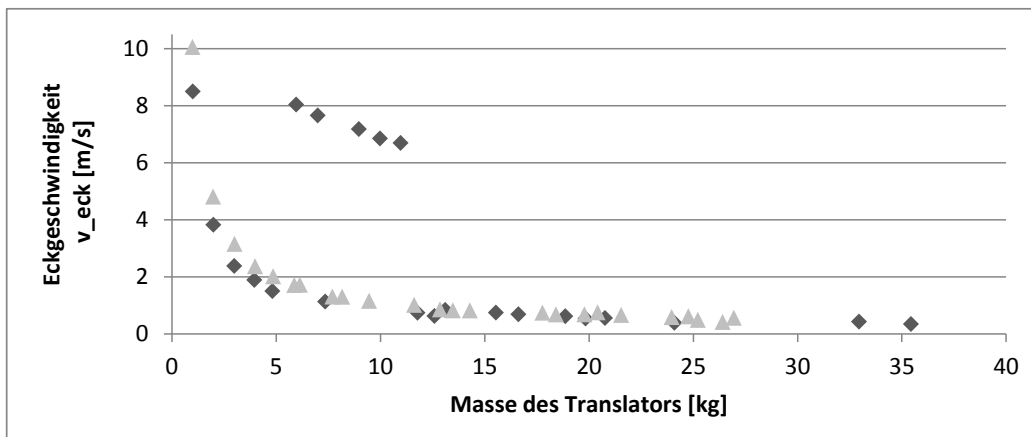
Für die Eck-Geschwindigkeit (Abb. 4.8b) des auszulegenden Generators ergibt sich nahezu für alle pareto-optimalen Ergebnisse eine klare regressive Verteilung in Abhängigkeit von der eingesetzten Masse. Dies ist vor dem Hintergrund der für alle Punkte gleichbleibenden Leistungsanforderung auch korrekt. Einige wenige Geschwindigkeitspunkte, die einher laufen mit der oben genannten dritten Pareto-Front, zeigen sich als Ausreißer bei vergleichsweise hohen Geschwindigkeiten. Der Grund hierfür ist die Konvergenz in einem lokalen Bestpunkt und folglich eine unvollständige Bestpunktermittlung. Der Suchalgorithmus ist hier in sehr gute Nebenoptima gelaufen und hat sich auf diese konzentriert. Als Ursache konnte eine Überdimensionierung des Kolbendurchmessers (vgl. Abb. 4.9c) für diese Punkte ermittelt werden. Da die eingesetzte Masse gegenüber den Ergebnissen mit ähnlichem Nutzungsgrad und kleinerem Kolbendurchmesser jedoch nicht zunimmt, schneiden die Parametersätze mit überdimensioniertem Kolbendurchmesser dennoch verhältnismäßig gut ab. Die mit dem Durchmesser verbundene eingespeicherte Energie wird jedoch, wie die Berechnung zeigt, gegenüber den darüber liegenden Punkten nicht optimal genutzt.

Da die Eckgeschwindigkeit mit der auf den Kolben wirkenden Bremskraft des Generators korreliert, kann im Allgemeinen hier gefolgert werden, dass größere Massen einer größeren Bremswirkung bedürfen. Dabei darf man nicht vergessen, dass in das Modell Reibung implementiert ist, die sich bei kleinen Geschwindigkeiten schon stark bemerkbar macht. Dies ist auch Teil der Erklärung, weshalb es für das System besser ist, höhere Massen stärker zu bremsen, als sie langsam und für einen längeren Zeitraum dahingleiten zu lassen.

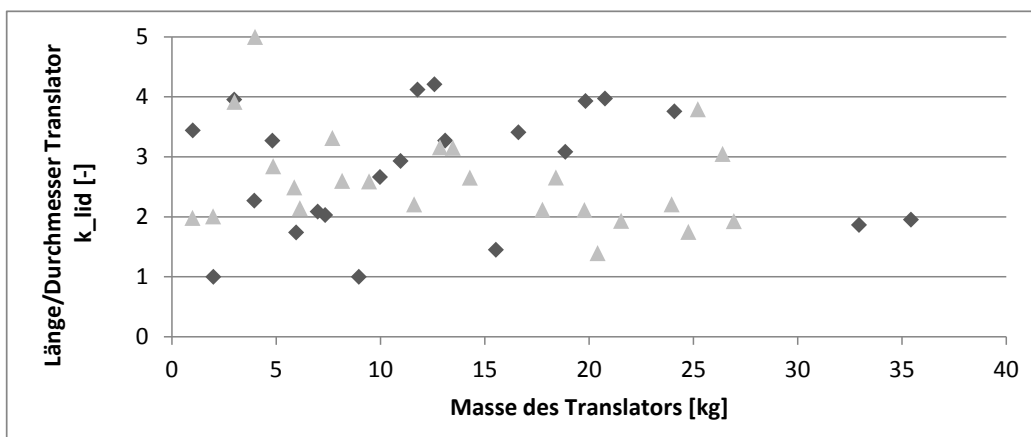
Für das Verhältnis  $k_{lid}$  aus Länge zu Durchmesser des Generators zeigt sich eine recht zufällige Parameterverteilung (Abb. 4.8c). Dies rührt daher, dass zunächst aus der Eckgeschwindigkeit und der Leistung eine Mantelfläche für die Krafterzeugung bestimmt wird und diese durch den Optimierer auf Länge und Durchmesser aufgeteilt wird. Die Masse ist auf Grund der Epsilon Constraint Methode in einem bestimmten  $\varepsilon$  beschränkt. Für dieses stellt sich nun für die jeweilige Mantelfläche ein beliebiges Verhältnis ein. Da das verwendete Systemmodell nur grundlegende Zusammenhänge für die Mantelfläche berücksichtigt, um eine kurze Rechenzeit zu gewährleisten, ist anzunehmen, dass eine Verbesserung der Einflüsse auf die Mantelfläche zu einer höheren Signifikanz führt. Die Geometrie nimmt in der Realität erheblichen Einfluss auf die elektrodynamischen Verhältnisse des Systems. Mit einer detaillierten Nachrechnung wird aber der Weg der möglichst einfachen Modellbildung und der methodischen Analyse auf einer möglichst übergeordneten Ebene verlassen und die detaillierte Nachrechnung direkt in das dynamische Modell und die Optimierung integriert. Eine mögliche Verbesserung



(a) Nutzungsgrad (Zielgröße) in Abhängigkeit der Masse (Zielgröße)

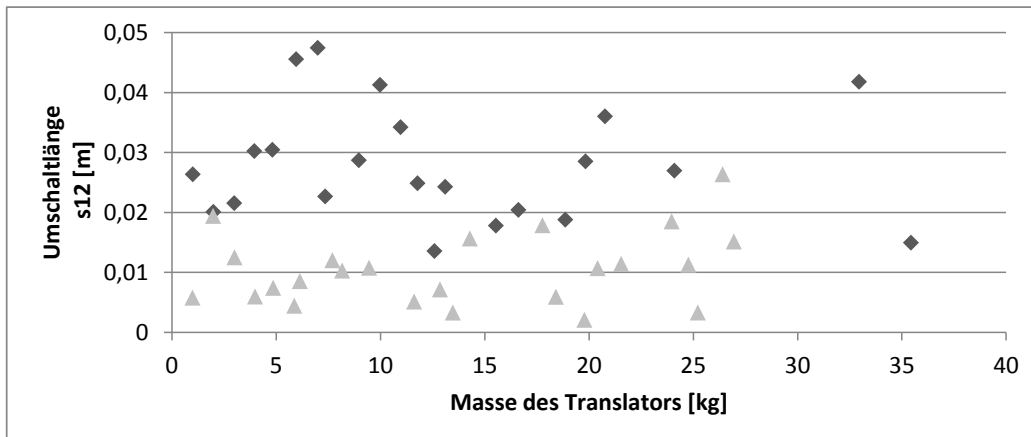


(b) Eck-Geschwindigkeit (Parameter) in Abhängigkeit der Masse (Zielgröße)

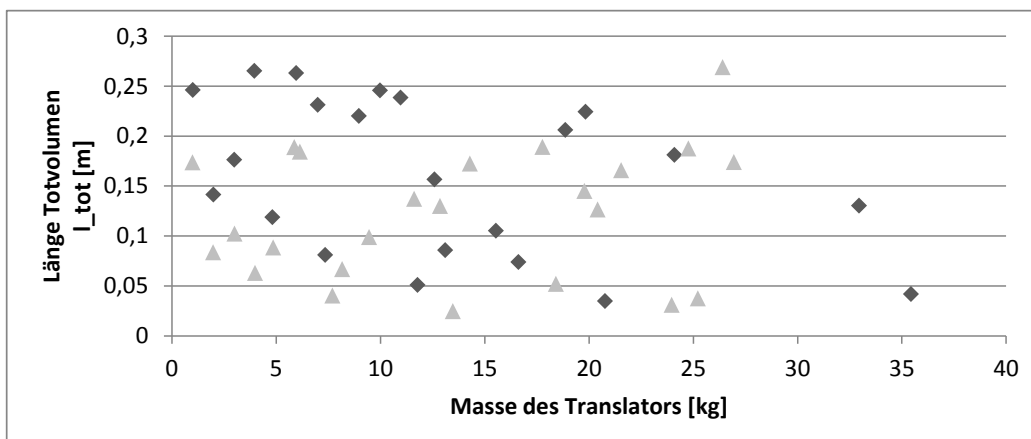


(c) Länge zu Durchmesser (Parameter) in Abhängigkeit der Masse (Zielgröße)

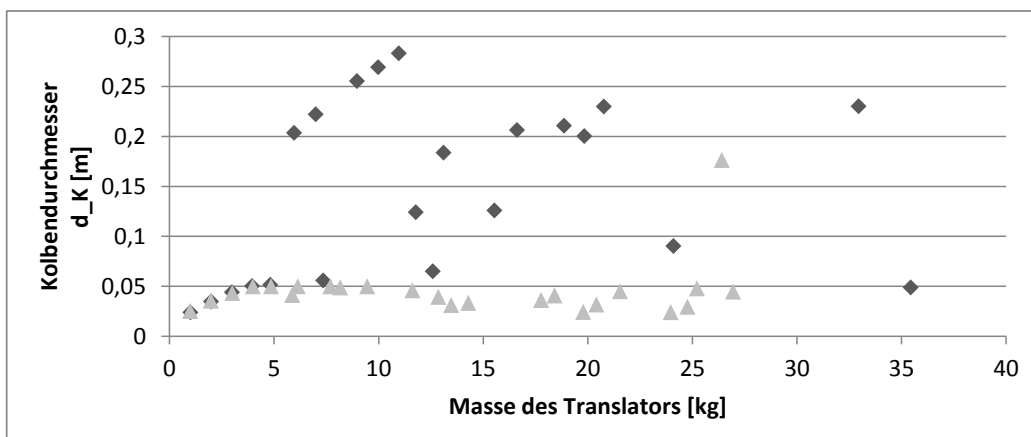
Abb. 4.8.: Ergebnisse einer beispielhaften Optimierung mit konstantem Wirkungsgrad.  
 ◊: Ergebnissen mit Zuordnung zur globalen Pareto-Front (Bild 4.8.a)  
 △: Ergebnissen für lokale Bestpunkte.



(a) Umschaltlänge (Parameter) in Abhängigkeit der Masse (Zielgröße)



(b) Länge des Totvolumens (Parameter) in Abhängigkeit der Masse (Zielgröße)



(c) Kolbendurchmesser (Parameter) in Abhängigkeit der Masse (Zielgröße)

Abb. 4.9.: Ergebnisse einer beispielhaften Optimierung mit konstantem Wirkungsgrad.  
 $\diamond$ : Ergebnissen mit Zuordnung zur globalen Pareto-Front (Bild 4.8.a)  
 $\triangle$ : Ergebnissen für lokale Bestpunkte.

der Modellbildung für die Zusammenhänge zwischen Geometrie und elektrodynamischen Eigenschaften könnten aber in Form einer Kennlinie oder eines Kennfeldes beispielsweise für den Wirkungsgrad der Systemteile gefunden werden.

Die weiteren drei Abbildungen 4.9a - 4.9c zeigen die Parameter Umschaltlänge  $s_{12}$ , also die Dauer der Druckzuführung, die Länge des Totvolumens  $l_{tot}$  und den Kolbendurchmesser  $d_K$ . Alle drei Parameter bestimmen die Einspeisung von Energie in das System. Diese Energie wird auf die zu beschleunigende Masse übertragen, die dann vom Generator abgebremst wird. Das Totvolumen ist zusätzlich ein Maß für die Speicherfähigkeit der Energie im System, vor allem beim Abbremsen.

Um eine entsprechende Dynamik des Systems zu erreichen, folglich einen entsprechenden Hub hervorzurufen, der in elektrische Energie umgesetzt werden kann, und um die Reibung zu überwinden, muss mit steigender Masse auch die aufgebrachte Kraft steigen.

Erstaunlicherweise zeigen sich die Parameter  $s_{12}$  und  $l_{tot}$  nur sehr gering signifikant hinsichtlich der veränderten Geometrie und Masse des Systems. Der Kolbendurchmesser aber steigt, abgesehen von einigen Ausnahmen, in guter Näherung mit der Masse. Das erklärt auch die höhere notwendige Kraft des Generators. Für die beiden anderen Parameter vermitteln die Abbildungen den Eindruck, dass das Totvolumen ohne Signifikanz für die Optimierung ist und der Umschaltzeitpunkt nur eine geringe Signifikanz zeigt. Zumindest ist für diesen jedoch eine klare Unterscheidung von zwei Regionen für Rauten und Dreiecke möglich. Die Ursache für dieses Ergebnis kann jedoch mit der direkten Wirkung von Druck und Kolbenfläche als Kraft für die Beschleunigung des Systems erklärt werden. Das Totvolumen hingegen trägt als Speicher zum System bei. Die Umschaltlänge beeinflusst zwar direkt die Menge der eingespeisten Energie, jedoch ohne dabei besonders auf den Nutzungsgrad Einfluss nehmen zu können. Da aber die größeren Umschaltlängen mit den besseren Nutzungsgraden korrelieren, kann dennoch gefolgert werden, dass es für das vorliegende System günstiger ist, bei jedem Stoß einen höheren Anteil an Energie einzusetzen, als häufiger kleine Mengen einzuspeisen.

Ein weiterer interessanter Aspekt ergibt sich aus der Konzentration der besonders guten und dichten Ergebnisse auf einen nach oben begrenzten Massenbereich. Für besonders kleine Massen ist es nicht möglich, auf Grund von hinterlegten Baugrenzen einen gültigen Entwurf zu generieren. Die linke Grenze ist daher durch die Nutzervorgaben bestimmt. Für höhere Massen gelingt es dem Algorithmus kaum, gültige Ergebnisse zu erzeugen. Die Ursache liegt darin, dass das System überwiegend durch den überdimensionierten Einsatz von Masse (Investitionen) bestimmt wird. Die schwache Signifikanz der verbleibenden Parameter nimmt mit steigender Masse ab.

Die gezeigten Ergebnisse zeigen keine vollkommen einheitliche Ausprägung der Pareto-Front. Dies darf bei einem heuristischen Suchverfahren auch nicht erwartet werden. Mit der gewählten Schwarmgröße und Obergrenze für Iterationen lässt sich jedoch die Lage der vorderen Pareto-Front erkennen. Durch ein kleineres epsilon ( $\varepsilon$ ) können Lücken

teilweise noch geschlossen werden. Zu kleine  $\varepsilon$ -Werte führen jedoch zu einer Häufung ungültiger Ergebnisse, da es dem Algorithmus erschwert wird, Parameterkonfigurationen zu finden, die in das zugelassene  $\varepsilon$  passen. Eine Verbesserung lässt sich in jedem Fall jedoch durch eine massive Erhöhung der Individuen schaffen, da zu Beginn der Suche der Suchraum stochastisch gesehen besser untersucht wird. Diese Erhöhung muss gegenüber dem Bezugsschwarm jedoch deutlich ausfallen. Eine solche liegt bei einer Verdopplung der Zahl der Individuen vor. Dies wirkt sich jedoch ganz erheblich auf die bereits beträchtliche Rechenzeit aus. Dies sollte bei jeder Maßnahme bedacht werden, die getroffen wird, um eine Verbesserung der Ergebnisqualität zu erzielen. Ebenso sollte bedacht werden, dass es heuristischen Verfahren immanent ist, eine gewisse stochastische Streuung der Ergebnisse hervorzurufen. Darauf basieren schließlich Verfahren wie das hier angewendete.

Verfügen einzelne Parameter über keine ausgeprägte Signifikanz, kann diese aber auch durch eine intensivere Suche nicht verbessert werden. Sofern ein signifikanter Zusammenhang zwischen Parameter und Zielgröße besteht und dieser nicht detektiert wird, liegt die Ursache in einer zu ungenauen Modellierung. Entweder müssen also die Parameter gegen andere getauscht werden, was im Kontext dieser Arbeit uninteressant ist, oder es muss eine alternative Modellierung für bestimmte physikalische Zusammenhänge eingesetzt werden.

Daher wurde zur Erstellung der nun nachfolgenden Abbildung der oben bereits dargelegte Vorschlag herangezogen, den jeweiligen Wirkungsgrad der Teilsysteme realitätsnah zu modellieren. Dies geschieht hier am Beispiel des Wirkungsgrades des Generators.

Als Referenz für Kennfelder dienen vorhandene Arbeiten [109, 110]. Auf Basis der darin enthaltenen Erkenntnisse kann in guter Näherung eine Ausgleichskurve, wie in Abb. 4.10 gezeigt, gefunden werden. Der Geschwindigkeitsbereich des Generators wird dafür in einen Teil kleiner und größer einer Eckgeschwindigkeit geteilt. Unterhalb erfolgt eine Approximation in Form eines Polynoms vierter Ordnung und oberhalb durch eine zur Geschwindigkeit umgekehrt proportionale Kurve.

Analog zu den bereits gezeigten sechs Abbildungen folgen nun weitere sechs Abbildungen. Für die dargestellten Werte gilt die gleiche Reihenfolge, für die Darstellung von Dreiecken und Rauten gilt das Gleiche wie oben. Zusätzlich werden jedoch durch Sterne noch Punkte kenntlich gemacht, die in Bezug auf den Nutzungsgrad, von Werten vorhandener Pareto-Fronten nach unten abweichen.

Ähnlich zu den oben diskutierten Ergebnissen sammeln sich die Punkte der Zielgrößen Nutzungsgrad und Masse (Abb. 4.11a) wieder zu unterschiedlichen Pareto-Fronten. Dabei zeigt sich deutlich eine vordere Front für höhere Nutzungsgrade. Diese enthält die global pareto-optimalen Ergebnisse. In der dahinter liegenden Front sammeln sich diejenigen Punkte, für deren Parametersätze es dem Suchalgorithmus nicht gelungen ist, gefundene lokale Bestpunkte zu verlassen und zu verbessern. Hauptursache ist

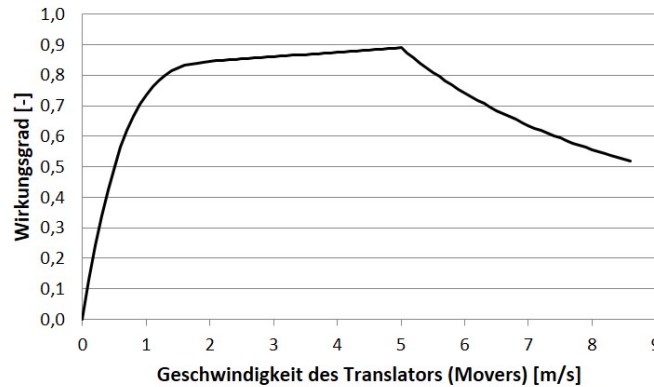


Abb. 4.10.: Geschwindigkeitsabhängiger Wirkungsgrad - hier für  $v_{max} = 5 \text{ m/s}$  und  $\eta_{max} = 0,89$

im vorliegenden Modell die schwache Ausprägung von Signifikanzen. Für mögliche Gegenmaßnahmen gilt dasselbe wie zuvor.

Die Ausprägung der Fronten ist besonders im Bereich unterhalb von fünfzehn Kilogramm klar erkennbar. Jedoch ist es bei sehr kleinen Massen nicht möglich Lösungen zu ermitteln. Zur Erreichung der vorgegebenen Leistungsanforderung wird vom Algorithmus eine notwendige Mantelfläche des Generators ermittelt. Da sich diese nicht ändert, werden die Abmessungen des Generators mit kleinerer Masse zunehmend extremer. Die Länge nimmt zu und der Durchmesser ab. Durch mechanische Randbedingungen (Limitierung der Baugröße) werden zu extreme Entwürfe ausgeschlossen. Deshalb gibt es auch für eine vorgegebene Ausnutzung keine Ergebnisse unterhalb einer bestimmten Masse. Für das Zusammenspiel aller Parameter, die auf die Dimensionen und damit die Masse Einfluss nehmen gilt zudem, dass es dem Algorithmus gelingen muss, im Bereich deren Grenzwerte (vor allem von  $k_{lid}$ ) für das jeweilige  $\varepsilon$  eine Masse zu bestimmen. Vor allem für steigende Massen läuft dies damit einher, dass die Durchmesser von Generator und Kolben bei abnehmender Länge des Generators steigen müssen.

Aus den Ergebnissen wird deutlich, dass sich der Konflikt bei der Optimierung auch in der Qualität der Ergebnisse widerspiegelt. Oberhalb einer gewissen Masse nimmt die vom Algorithmus gefundene Zahl der Ergebnisse ab und die Nutzungsgrade gehen zurück. Hohe gefundene Nutzungsgrade werden durch große Totvolumen bestimmt.

Bis zum Aufstreuen der Ergebnisse lässt sich ein moderater Anstieg des Nutzungsgrads entlang der Fronten erkennen. Da im gleichen Zug mit dem Anstieg der Masse die maximale Geschwindigkeit des Systems sinkt, verringert sich auch die masseunabhängig modellierte Reibung.

Insgesamt dominiert mit zunehmender Masse diese selbst das System. Die Signifikanz der beeinflussenden Parameter nimmt ab. Einen starken Einfluss auf die Ergebnisse hat

für sehr kleine Geschwindigkeiten jedoch die Wirkungsgradkurve des Generators. Mit kleiner werdender Eckgeschwindigkeit wird diese Kurve in axialer Richtung komprimiert. Der vordere ansteigende Teil wird dadurch sehr steil. Bereits kleine Auswirkungen der Parameter auf das Geschwindigkeitsprofil führen dann zu erheblichen Auswirkungen auf die Effizienz entlang des Geschwindigkeitsprofils.

Die Eck-Geschwindigkeit (Abb. 4.11b) zeigt einen eindeutigen Verlauf ohne größere Abweichungen zwischen Punkten der einzelnen Pareto-Fronten. Das Verhalten entspricht in etwa dem bei konstantem Wirkungsgrad. Bei den Rauten liegen zwischen sieben und zwölf Kilogramm einzelne Punkte leicht außerhalb der Kurve. Diese erklären sich nachfolgend aus nach oben abweichenden Werten der Punktwolken für die Länge des Totvolumens und der Umschaltlänge (Abb. 4.12b und 4.12a). Das Verhältnis von Länge zu Durchmesser (Abb. 4.11c) verteilt sich hingegen gleichmäßig über den zur Verfügung stehenden Parameterraum.

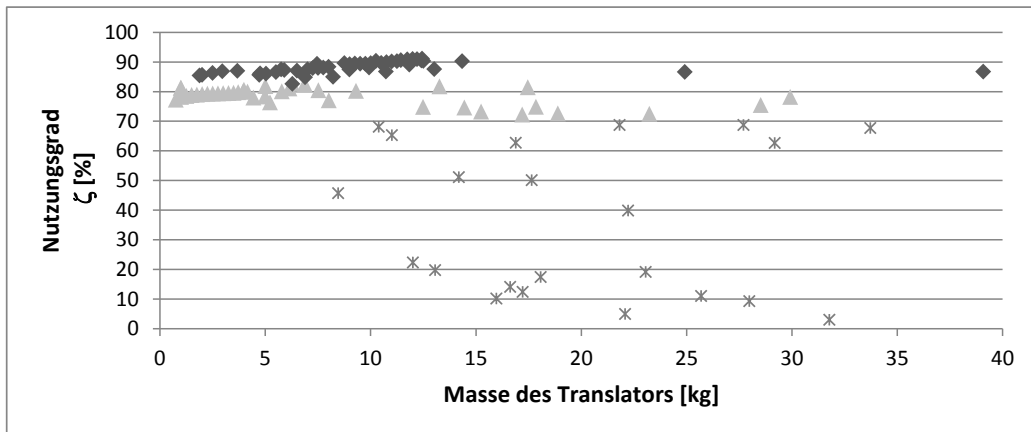
Aus den Ergebnissen der Umschaltlänge lässt sich näherungsweise mit zunehmender Masse ein ansteigendes Verhalten ablesen. Die höhere Masse führt offensichtlich zu einem höheren Bedarf an in das System eingespeicherter Energie. Einige Rauten liegen außerhalb des Kerngebiets der Punktwolke. Ein Vergleich mit den anderen Ergebnissen zeigt, dass zugehörige Ergebnisse für den Wirkungsgrad hinter der vorderen Linie der Pareto-Front zurückbleiben. Auch das Totvolumen (bzw. die entsprechende Länge) weist einen ansteigenden Trend für steigende Massen auf. Ebenfalls korrelieren Rauten am Rand dieser Ergebniswolke mit Nutzungsgraden, die nicht im vorderen Teil der Pareto-Front liegen. Diese Punkte bei Umschaltlänge und Totvolumen hängen mit kleineren Kolbendurchmessern zusammen. Diese Kompensation geht jedoch offensichtlich mit Nachteilen für den Nutzungsgrad einher.

Aus dem letzten Bild der Serie (Abb. 4.12c) für den Kolbendurchmesser ist der bereits angedeutete Zusammenhang zwischen  $d_K$  und der Masse zu erkennen. Zum einen trägt der steigende Kolbendurchmesser zur Erhöhung der Kraft auf den Kolben bei. Zum anderen wie oben beschrieben zur Erhöhung der Masse des Gesamtsystems.

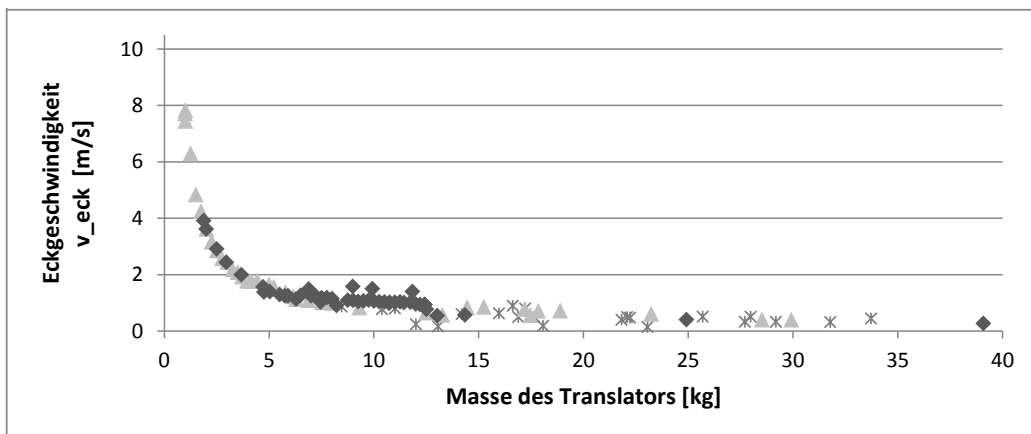
Insgesamt scheinen die schlechteren Nutzungsgrade im Bereich der zurückliegenden Pareto-Front sowie im aufstreuenden Bereich der Ergebnisse von einer Überdimensionierung des Systems durch zu großes Totvolumen und zu große Umschaltlänge bestimmt zu sein. Obwohl sich gegenüber den Ergebnissen für konstanten Wirkungsgrad ein verbesserter Trend ablesen lässt, zeigt sich doch auch, dass nicht alle verwendeten Parameter unbedingt geeignet sind, um zu einer eindeutigen Optimierung des Systems beizutragen. Besonders die Dominanz des Kolbendurchmessers, vor allem in Zusammenhang mit der durch die Zielgröße notwendigen Massenzunahme, führt zu einer deutlichen Unterdrückung der schwach signifikanten weiteren Parameter.

Die Masse selbst entzieht sich im verwendeten Modell, bis auf die Berücksichtigung einer Mantelfläche, einem direkten Einfluss durch elektromagnetischen Verhältnisse. Die

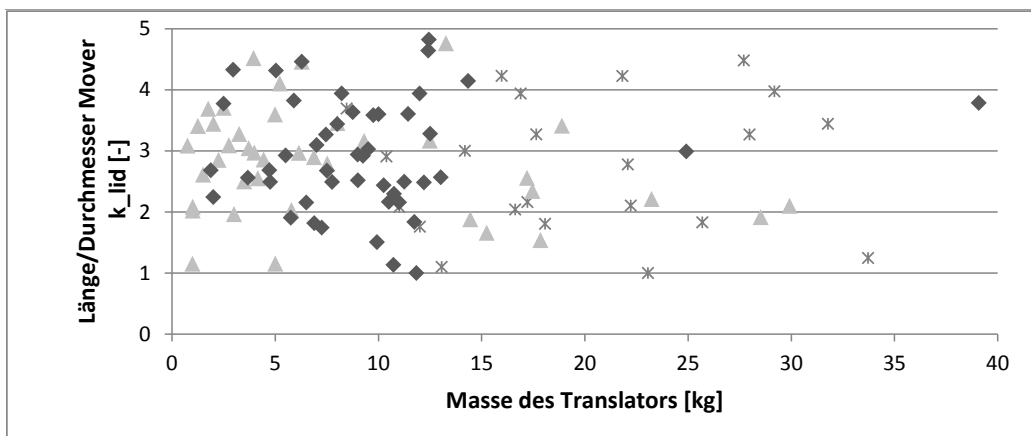




(a) Nutzungsgrad (Zielgröße) in Abhängigkeit der Masse (Zielgröße)

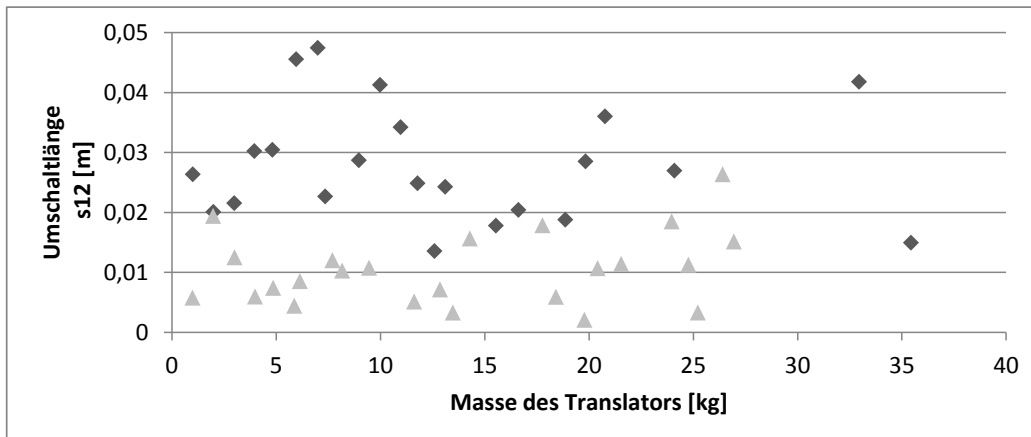


(b) Eck-Geschwindigkeit (Parameter) in Abhängigkeit der Masse (Zielgröße)

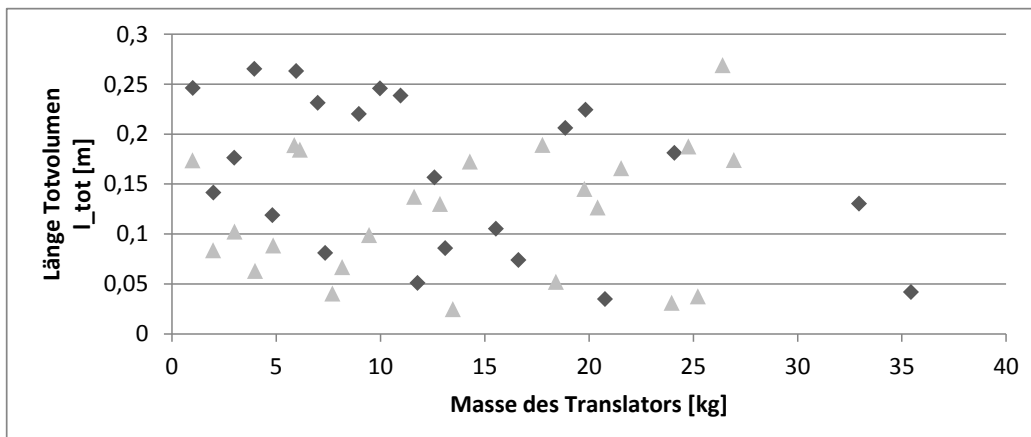


(c) Länge zu Durchmesser (Parameter) in Abhängigkeit der Masse (Zielgröße)

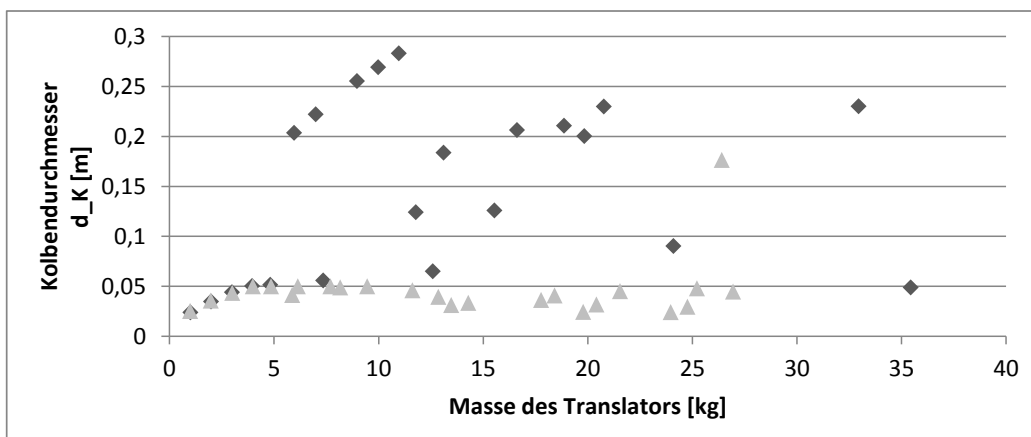
Abb. 4.11.: Ergebnisse einer beispielhaften Optimierung mit variablem Wirkungsgrad.  
 $\diamond$ : Ergebnissen mit Zuordnung zur globalen Pareto-Front (Bild 4.11.a)  
 $\triangle$ : Ergebnissen für lokale Bestpunkte.  
 $*$ : Ergebnissen mit schlechtem Nutzungsgrad ohne Pareto Zuordnung



(a) Umschaltlänge (Parameter) in Abhängigkeit der Masse (Zielgröße)



(b) Länge des Totvolumens (Parameter) in Abhängigkeit der Masse (Zielgröße)



(c) Kolbendurchmesser (Parameter) in Abhängigkeit der Masse (Zielgröße)

Abb. 4.12.: Ergebnisse einer beispielhaften Optimierung mit variablem Wirkungsgrad.

◊: Ergebnissen mit Zuordnung zur globalen Pareto-Front (Bild 4.11.a)

△: Ergebnissen für lokale Bestpunkte.

\*: Ergebnisse mit schlechtem Nutzungsgrad ohne Pareto Zuordnung

Esson-Ziffer und damit der Strombelag werden nicht variiert. Dies reduziert einerseits die Komplexität und erleichtert die Beurteilung von grundlegenden Einflüssen. Andererseits stellt die Ausnutzung und die damit verbundene thermische Belastung des Systems einen vielleicht wichtigen Parameter dar, mit dem das System baugrößenabhängig noch weitere Signifikanzen erfährt. Ob es sinnvoll und gewünscht ist, die Esson-Ziffer zu variieren, muss letztendlich der Anwender entscheiden, da eine geringere Ausnutzung zu Lasten des erforderlichen Materials gehen und höhere Ausnutzungen evtl. einen thermischen Nachteil und erhöhten Kühlbedarf mit sich bringen.

Mit zunehmend leistungsfähigeren Rechnern wird es jedoch möglich sein, exaktere, komplexere und tiefgehendere Detailberechnungen vorzunehmen. Dennoch soll der Anwender darauf achten, einfache Zusammenhänge auch möglichst einfach zu modellieren, um die Rechenkapazität für die komplexen Zusammenhänge zu verwenden. Dies kann durch Approximation gefundener eindeutiger Zusammenhänge in Form von analytischen Funktionen geschehen. Betrachtet man den Verlauf der Eckgeschwindigkeit, erkennt man ein parabelförmiges Absinken entlang der ansteigenden Masse. Durch eine Approximation mittels einer Kurve verringert sich der Parameterraum. Das beschleunigt entweder die Suche oder erlaubt eine solche nach weiteren Parametern ohne zeitlichen Nachteil. Bei ausreichender Signifikanz jedes Parameters ist theoretisch die vollständige Beschreibung des Systemverhaltens durch Kennlinien/Approximationfunktionen möglich. Es muss jedoch eindringlich darauf hingewiesen werden, dass dieser Schritt nur vollzogen werden darf, wenn das Verhalten durch eine ausreichend detaillierte Abtastung des Zielraumes überprüft und bestätigt wird.

Ebenso muss sich der Anwender fragen, ob ein Modell mit einer Regelung hinterlegt werden soll. Die mechanische Anregung des Systems wird hauptsächlich über die Parameter Kolbenfläche ( $f(d_K)$ ) und Umschaltlänge ( $f(s_{12})$ ) bestimmt. Das Modell könnte jedoch sinnvoll um eine Regelung des Einlass- und Auslassventils erweitert werden. Dabei könnte die Regelung des Auslassventils zum gezielten Abbremsen und Einspeichern von Energie in eine Luftfeder interessante Ergebnisse liefern.

Die vorgestellten Berechnungen zeigen jedoch die Leistungsfähigkeit der Methoden, die in dieser Arbeit vorgestellt werden und auf denen das für diese Arbeit erstellte Berechnungsprogramm basiert. Die Ergebnisse zeigen, dass an Systemmodellen, wie dem vorliegenden, Signifikanzen der auf das System Einfluss nehmenden Parameter ermittelt werden können. Ebenso kann zeiteffizient herausgefunden werden, wie sich Optimierungsziele zueinander und in Abhängigkeit der Parameter verhalten.

Erkenntnisse der vereinfachten Modellierung dienen dem Nutzer zu Auswahl (subjektiv) optimal erscheinender Parametersätze. Für diese kann mit Hilfe der im Kapitel 2 gezeigten analytischen Zusammenhänge die Einzelkomponente Lineargenerator exakt ausgelegt und nachgerechnet werden. Dabei kann es möglich sein, dass bei nicht hinreichend genauer Modellierung des Gesamtsystems die Detailauslegung einer Komponente zu Rückwirkungen führt, die eine neuerliche Optimierung erfordern. Für den Generator

kann dies bedeuten, dass sich beispielsweise die abgeschätzte Masse vergrößert, wenn die Auslegung der Magnete dies erfordert, oder die Wirkungsgradkennlinie angepasst werden muss.

## 5. Abschließende Bemerkungen

Diese Arbeit beinhaltet allgemeine Betrachtungen zum methodischen Vorgehen beim Entwurf mechatronischer Systeme. Hierzu erfolgte im ersten Kapitel eine grundlegende Beschreibung des bekannten Vorgehens nach dem V-Modell. Dieses weist jedoch Nachteile bei der Bearbeitung langfristiger Aufgaben auf. Dies ist insbesondere die Gefahr der Nichterfüllung von Systemanforderungen nach dem Zusammenfügen der Komponenten im abschließenden Systemtest. Daher wurde eine neue Methode vorgeschlagen, die ausgehend von einer Idee eine Topologieanalyse ermöglicht und anschließend „top-down“ die Auswahl eines (bestens) geeigneten Systems mit anschließendem Komponentenentwurf beinhaltet, so dass bei sukzessiver Einhaltung der von oben nach unten weitergegebenen Informationen die Produktidee in jedem Fall erfüllt wird. Dazu werden jedoch Werkzeuge und Methoden benötigt, die nicht in ausreichender Form vorhanden sind oder nicht miteinander kombiniert wurden. Zu den Werkzeugen gehört neben einer Systembeschreibung der automatisierte Entwurf der Komponenten und eine Kopplung an einen Optimierer.

Diese Arbeit bietet im Bereich der Optimierung einen Beitrag zur übergreifenden Beurteilung verschiedener Optimierungsalgorithmen und zeigt den effizienten Einsatz der Particle-Swarm-Optimierung (PSO) mit Hilfe einer innovativen Weiterentwicklung. Aus einer umfangreichen Betrachtung bekannter deterministischer und heuristischer Optimierungsalgorithmen kann abgeleitet werden, dass kein Verfahren existent ist, das einem anderen Verfahren hinsichtlich der Ergebnislage überlegen ist. Die Ergebnislage bestimmt sich aus der Nähe zum tatsächlichen Optimum und der benötigten Zeit, um dieses zu finden. Die verwendete Particle-Swarm-Optimierung zeichnet sich durch die besonders einfache Implementierbarkeit und hohe Zuverlässigkeit aus. Im Vergleich mit anerkannten Vergleichsalgorithmen zeigt sie beste Ergebnisse. Die gezeigten, innovativen Modifikationen des Standardalgorithmus' zur Suchraumreduktion und Konvergenzbeschleunigung zeigen in ihrer Anwendung auf Standardtestfunktionen hervorragende Ergebnisse sowohl hinsichtlich der Konvergenzgeschwindigkeit als auch hinsichtlich der Ergebnisgenauigkeit.

Im Zusammenhang mit der Optimierung ergeben sich jedoch allgemeine Fragen, die unabhängig vom Optimierer auftreten. Letztlich zielen diese Fragen darauf ab, für verschiedene Probleme eine Kategorisierung von Algorithmen treffen zu können. Dies schließt die Anwendung verschiedener Zielfunktionen mit ein. Eine entsprechende Analogie ist in der Regelungstechnik zu finden. Dort werden Funktionseinheiten nach ihrem

Übertragungsverhalten klassifiziert. Wäre es möglich, Einflüsse beim Entwurf oder der Nachrechnung in Form von wiederkehrenden Mustern abzubilden, ließe sich die Optimierung wesentlich einfacher gestalten. Hierzu existieren einfache Untersuchungen, um mittels Approximation das Maschinenverhalten in einer einfachen konvexen Funktion abzubilden. Diese Approximation benötigt jedoch einen zuverlässigen Vergleich mit dem Originalverhalten und stellt in der bisherigen Form eine vollständige Analyse des Systems hinsichtlich Parametern und ihrer Wirkung dar. Diese Analyse führt jedoch momentan immer selbst bereits zu einer Optimierung. Bisher fehlen belastbare mathematische Modelle, die dazu geeignet sind, ein System und dessen Entwurf mit Hilfe von etwas ähnlichem wie Übertragungsfunktionen zu beschreiben.

Solche Modelle müssen sowohl die Übertragung vom Parameterraum auf eine Zielgröße zuverlässig ermöglichen - unabhängig davon, welcher Parameter verwendet wird - als auch die Wirkung verschiedener Ziele untereinander. Hinsichtlich der Zielgrößen könnte es eventuell helfen, zunächst zu untersuchen, ob sich stetige Zusammenhänge zwischen Parameterraum und Zielraum finden lassen. Bisher bleibt ungeklärt, ob es möglich ist, durch Kenntnis der Eckpunkte einer Pareto-Front, mit Hilfe entsprechender Übertragungsfunktionen auf die Lage der dazwischen liegenden Punkte schließen zu können.

Bis zur Klärung dieser Fragestellung bleiben die heuristischen Verfahren das Mittel der Wahl. Unter diesen kann die Particle-Swarm-Optimierung als besonders leistungsfähig identifiziert werden, nicht zuletzt auf Grund ihrer universellen Einsetzbarkeit für alle Arten von Problemen. Neben der gezeigten effizienten Erweiterung der Methode wird der Hybridisierung besonderes Potential beigemessen. Zwei besonders interessante Ansätze, die weiterverfolgt werden sollten, sind die Kombination mit einem Scatter-Search-Algorithmus und ein neuer vektorbasierter Ansatz (OMOPSO) [130, 139]. Diese zeigen sich gegenüber dem bis dahin bevorzugten und anerkannten Vergleichsalgorithmus NSGA-II (genetischer Algorithmus) als überlegen und verfügen zusätzlich über die Fähigkeit, anerkannte Standardtestfunktionen mit 30 Zieldimensionen effektiv zu lösen.

An die Optimierung ist aus der Idee des methodischen Vorgehens eine möglichst universelle Beschreibung gekoppelter mechanischer und elektrischer Systeme gebunden. Hier erfolgt die Betrachtung dieser mechatronischen Systeme unter Ausklammern der Regelung nebst notwendiger IT-Infrastruktur. Weiterhin sind thermische Betrachtungen und mechanische Festigkeiten nicht in die Berechnung mit aufzunehmen. Diese Aspekte stellen weitere Werkzeuge dar, die später in die Methodik mit aufgenommen werden müssen, damit eine umfassende Beurteilung von Systemen untereinander möglich ist. Im Sinne eines methodischen Leitfadens zeigt die Arbeit, welche Grundbausteine für eine universelle Beschreibung benötigt werden. Dazu wird am Beispiel einer Linearmaschine beschrieben, wie sich verschiedene Maschinentypen ineinander überführen lassen und welche Annahmen, wie z.B. die Ausnutzungsziffer, als gemeinsame Basis für eine Grobdimensionierung unter Berücksichtigung einfacher Umrechnungsfaktoren dienen

können. Die gemachten Ausführungen dienen dazu, dem Anwender wiederum auf Grundlage einer konkreten Anordnung Hinweise zu geben, welche mechanischen und elektrischen Größen für die Beurteilung des Systems wesentlich sind. Neben dessen Effizienz, letztlich der Wirkungsgrad in Abhängigkeit vom Arbeitspunkt, ist das die Masse in Abhängigkeit der Dimensionierung.

Neben den gezeigten Werkzeugen wird es über diese Arbeit hinausgehend als sinnvoll erachtet, die Beschreibung der mechanischen und elektrischen Maschinendynamik nicht ausschließlich mit einer Kennlinie vorzunehmen, die dem bekannten geregelten Betrieb (Ankerstellbereich und Feldschwäcbereich) entspricht, sondern auf Grundlage der Erkenntnisse weiter zu untersuchen, ob ein als untypisch empfundener Betrieb in Zusammenarbeit mit dem mechanischen Antrieb eine höhere Effizienz liefert. Der Grund für die Vermutung liegt in der repetierenden Bewegung, wodurch sich ein großes Arbeitspunktspektrum ergibt. Eine alternative Betriebsstrategie könnte helfen, wirkungsgradineffiziente Betriebspunkte zu stärken. Diese Überlegungen leiten auf den Entwurf über, der ebenfalls exemplarisch für die Linearmaschine erörtert wird, um Eingriffsmöglichkeiten für den Optimierer aufzuzeigen.

Beim Entwurf stellt die Auswahl der Wicklung und der Permanentmagnete die größten Eingriffsmöglichkeiten dar. Der Entwurfsablauf ist weithin bekannt, dessen Strukturierung für die Einbindung in einen automatisierten Prozess gliedert sich jedoch vor dem Hintergrund der Optimierung in eine leicht modifizierte Reihenfolge. Ausgehend von einer Wicklung muss eine Prüfung erfolgen, welche Wicklungen in den ermittelten Hauptabmessungen untergebracht werden können und welche dieser Wicklungen die beste Kombination mit dem geforderten Bewegungsprofil darstellt. Für klassische Ausführungen kann hier das Oberwellenspektrum zur Prüfung herangezogen werden. Soll jedoch die Wicklung einem vollkommen freien Bewegungsprofil unterworfen werden, bedarf es einer ausführlichen Berechnung der Systemeigenschaften vor der Auswahl oder dem Ausschluss von Wicklungen. Es wäre denkbar, eine Wicklung so auszuführen, dass bei langem Hub diejenigen Spulen nahe der Umkehrpunkte einer anderen Auslegung unterworfen werden, als solche Spulen im Bereich maximaler Geschwindigkeit des Translators. Dann ist die vorgestellte Kraft-Geschwindigkeitskennlinie des Generators nicht mehr allein als Eigenschaft der Maschine geeignet, um das System zu optimieren. Auch hier könnte die weitere Untersuchung der Maschinen hinsichtlich „Übertragungsfunktionen“ dazu dienen, eine allgemeine Systemoptimierung ohne spezielle Kennlinie durchzuführen.

Weitere Optimierungsparameter neben der Wicklung sind die Magnettopologie, die Magnetabmessungen und die Nutschlitzbreite. Ziel dieser Variation ist es, bei einer Auslegung mit klassischen Wicklungen, wie sie hier vorgeschlagen wird, eine möglichst hohe Grundwelle der Feldkurve zu erzielen und gleichzeitig Rastkräfte zu vermeiden. Hierzu geht die Arbeit ausgiebig auf zwei Methoden zur Abschätzung der Rastkraft ein. Dabei zeigt sich, dass die analytischen Modelle dann hervorragende Ergebnisse

liefern können, wenn entweder die Übereinstimmung mit der angenommenen trapezförmigen Feldkurve der Magnete sehr gut ist oder eine Möglichkeit geboten ist, die Feldkurve durch eine geeignete Nachrechnung (z.B. magnetische Netzwerke) in guter Näherung zu ermitteln. Besonders die Verwendung von Fourier-zerlegten Kurven für die Magneto-Motorische-Kraft (MMK) und die Luftspaltleitwerte liefert dann nahezu perfekte Ergebnisse. Weiterhin müssen für den Entwurf eine Nennspannung und eine Nennfrequenz festgelegt werden. Diese Festlegung ist ohne Optimierung nur auf Gerätewohl durchzuführen. Für einen ersten Schritt kann man den Eckpunkt der Generator-Kennlinie heranziehen. Im Rahmen der Optimierung sollte jedoch dem Algorithmus vorbehalten sein, selbst zu prüfen, ob eine „Überdimensionierung“ evtl. bessere Ergebnisse hinsichtlich der Ziele liefert.

Generell bedarf eine umfassende Analyse und Optimierung eines Systems und seiner Komponenten eines erheblichen Zeitaufwandes. Daher sollten weitere Untersuchungen dahingehend betrieben werden, Verlustmechanismen (Eisenverluste), Feldverläufe und Luftspaltleitwerte sowie thermische Aspekte und mechanische Aspekte in analytischer Form darzustellen, um den Zeitaufwand für Berechnungen nicht weiter wachsen zu lassen.

Es mag scheinen, als ob die Arbeit ohne Darstellung eines konkreten Beispiels auskommt. Ausgangspunkt war jedoch allgemein die Frage nach einem optimalen mechatronischen System, die sich aus der Betrachtung des KWK-System nach Schilling ergeben hat. Legt man nun dieses System zu Grunde, zeigt sich aus den in dieser Arbeit vollzogenen Betrachtungen und Berechnungen das Potential der Methode. Die im Patent beschriebene Lösung basiert auf festen Werten für alle Parameter. Besonders sollen hier der Kolbendurchmesser von 6,5 cm, die Umschaltlänge von 15 cm, die Masse von 2,5 kg und der vorgegebene Verfahrweg von 20 cm erwähnt werden.

Aus den, mit dem für diese Arbeit erstellten Computer-Programm, vorgenommenen Berechnungen und Optimierungen, lässt sich erkennen, dass sich für Ergebnisse mit ähnlichem Kolbendurchmesser eine höhere Masse im Bereich von 6 kg einstellt, um Nutzungsgrade zu erzielen, die dann im Bereich der global optimalen Pareto-Front liegen. Die Ergebnisse zeigen folglich, dass ein größerer Investitionsaufwand notwendig ist. Für Ergebnisse mit einer Masse, die den Berechnungen von Schilling entspricht, kann der Kolbendurchmesser kleiner ausfallen. Zusätzlich zeigen die Ergebnisse, dass die maximal erzielbaren Nutzungsgrade mit kleinerer Masse sinken, im vorliegenden Fall im Vergleich der beiden Massen um rd. 1,5 %. Daneben zeigt sich noch für die Umschaltlänge ein deutlicher Unterschied. Der Suchalgorithmus liefert mit maximal ca. 4 cm wesentlich kleinere Umschaltlängen als die genannte. Dies kann für das anregende mechanische System ein erhebliches Einsparpotential bedeuten. Abschließend wird noch darauf hingewiesen, dass im hier verwendeten Modell der Verfahrweg nicht als Parameter eingesetzt wird, sondern sich jeweils individuell auf Basis der Rahmenbedingungen einstellt.



Darüber hinaus ergibt sich aus dieser Arbeit ein Leitfaden. An Hand der Linearmaschine wird das methodische Vorgehen so beschrieben, dass ein Transfer des Wissens auf andere Maschinen leicht möglich ist. Dazu werden auch alle benötigten Zusammenhänge für den Entwurf und die Nachrechnung so ausführlich dargestellt (größtenteils im Anhang), dass alle Überlegungen allgemein logisch nachvollziehbar sind. Insgesamt bietet die Arbeit also einen grundlegenden, methodischen Beitrag zur Automatisierung von Entwürfen elektrischer Maschinen und deren Kombination mit einem Optimierungsalgorithmus.

## A. Herleitung zur Rastmomentberechnung nach Ackermann [2]

Nachfolgend wird die komplette Herleitung der Rastmomentberechnung nach Ackermann dargestellt, da diese in der Quelle nicht aufgeführt, jedoch wesentlich für das Verständnis der Ableitung für die behandelte Linearmaschine ist. Dabei erfolgt eine Anpassung von Formelzeichen an den allgemeinen Gebrauch im Rahmen dieser Arbeit (z.B.  $M$  für Drehmoment statt engl.  $T$  für Torque).

Grundsätzlich ist die Energie durch eine Kraft ausgedrückt, die über einen bestimmten Zeitraum über eine bestimmte Strecke wirkt. Das Bindeglied zur integralen Größe Energie ergibt sich dabei aus der Leistung [83].

$$\left. \begin{array}{l} P = \frac{dW}{dt} \\ F = \frac{P}{v} \\ v = \frac{ds}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow F = \frac{dW}{dt} \frac{1}{v} = \frac{dW}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dW}{ds} \quad (\text{A.1})$$

Ausgehend von den vorangegangenen Ausführungen kann ein Drehmoment als Ableitung der Energie bezüglich des Verdrehwinkels zwischen Stator und Rotor angegeben werden. Hierzu schreibt man die Energie wie folgt:

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV \quad (\text{A.2})$$

Über die Ableitung der Energie nach der Bewegung des Rotors, also dem Drehwinkel  $\vartheta$ , erhält man dann das Drehmoment:

$$M = \frac{dW}{d\vartheta} \quad (\text{A.3})$$

Dasselbe Ergebnis erhält man auch, wenn man den Energiesatz wie in [102] oder [159] anwendet und Einflüsse durch Strom, Masse und Reibung vernachlässigt. Weiter lässt sich nun das Feld im Luftspalt allgemein als Produkt aus Leitwert pro Flächeneinheit und der magneto-motorischen Kraft darstellen (Durchflutungsgesetz):

$$\Phi_\delta = B_\delta \cdot A_\delta = \mu_0 \cdot H \cdot A_\delta = \mu_0 \cdot \underbrace{N \cdot I}_{MMK} \cdot \frac{A_\delta}{l} = \frac{MMK}{R_{mag}} \quad (\text{A.4})$$

$$B(\vartheta, \varphi, z) = \Lambda(\vartheta, \varphi, z) \cdot MMK(\vartheta, \varphi, z) \quad (\text{A.5})$$

$$MMK(\vartheta, \varphi, z) = M(\vartheta, \varphi, z) \cdot h_m \quad (\text{A.6})$$

$$\Lambda(\vartheta, \varphi, z) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{h_m + \delta} & 0 \leq \varphi \leq \alpha_z \frac{\pi}{Q} \\ \frac{\mu_0}{h_m + \delta + x(\varphi)} & \alpha_z \frac{\pi}{Q} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{Q} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Für den Leitwert legt man fest, dass dieser nur von der Umfangskomponente abhängig ist. Für die Magnetisierung von Permanentmagneten ergibt sich [83]:

$$\begin{aligned} M &= \frac{B}{\mu_0} - H \\ M &= \frac{B_r}{\mu_0} \quad | H = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Weiter kann die Energie durch Zusammenführen obiger Gleichungen und Ausführen der Integration ermittelt werden. Dabei wird das Volumenintegral über den Radius, den Umfangswinkel und die axiale Länge ausgeführt. Die Integration entlang des Radius ist abhängig von der geometrischen Ausprägung des Luftspalts. Diese ist konstant ( $h_m + \delta''$ ), wenn man die Nutungseinflüsse durch den Carter-Faktor ausdrückt und nur durch die Leitwerte exakt darstellt (vgl. oben). Daher kann die Integration über die Radiuskomponente einfach wie nachfolgend gezeigt erfolgen.

$$\begin{aligned} W(\vartheta) &= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \Lambda(\varphi)^2 MMK^2(\vartheta, \varphi, z) dV \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \frac{\mu_0}{h_m + \delta(\varphi)} \Lambda(\varphi) MMK^2(\vartheta, \varphi, z) dV \\ &= \frac{1}{2} r_\delta \int_{-l_{FE}/2}^{l_{FE}/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{h_m + \delta(\varphi)} \frac{1}{h_m + \delta(\varphi)} \Lambda(\varphi) MMK^2(\vartheta, \varphi, z) dr d\varphi dz \\ &= \frac{D_\delta}{4} \int_{-l_{FE}/2}^{l_{FE}/2} \int_0^{2\pi} \Lambda(\varphi) MMK^2(\vartheta, \varphi, z) d\varphi dz \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Vor der weiteren Integration wird festgestellt, dass sowohl  $MMK^2$  als auch  $\Lambda$  am Umfang verteilte periodische Funktionen sind, die durch eine Fourier-Zerlegung wiedergegeben werden können. Beide Funktionen sind hierbei achsensymmetrisch. Abbildung A.1 zeigt hierzu ein Beispiel, aus dem dies hervorgeht.

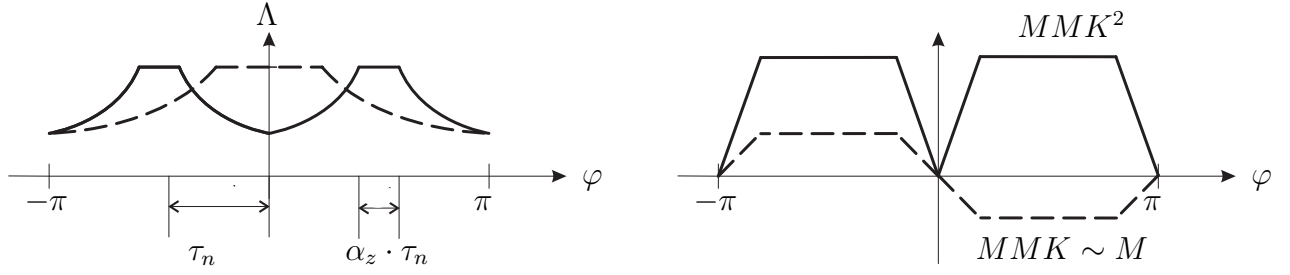


Abb. A.1.: Beispiel für die Form von Luftspaltleitwerten für einen Zahn (gestrichelt) und zwei Zähne (durchgezogen) links sowie für die MMK und deren Quadrat rechts.

Die beiden Funktionen lassen sich dann allgemein wie folgt schreiben (incl. Schrägung  $\gamma$ )[2]:

$$MMK^2(\vartheta, \varphi, z) = \sum_{\nu} a_{MMK} \cdot \cos[\nu(\varphi - \vartheta - 2 \cdot \gamma \cdot z)] \quad (\text{A.10})$$

$$\text{mit: } \nu = 2ip \quad i = 0, 1, \dots$$

$$\Lambda(\varphi) = \sum_{\kappa} a_{\Lambda} \cdot \cos[\kappa \varphi] \quad (\text{A.11})$$

$$\text{mit: } \kappa = Qj \quad j = 0, 1, \dots$$

Die exakte Definition der Fourier-Koeffizienten der Leitwerte  $a_{\Lambda}$  und der MMK  $a_{MMK}$  ist für die Herleitung nicht erforderlich. Es reicht aus, diese zunächst allgemein zu berücksichtigen und später durch entsprechende Ausdrücke zu ersetzen, die sich durch Ausführen der entsprechenden Integrale  $a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(\nu t) dt$  [122] ergeben.

Es folgt weiter die Auflösung des Zweifachintegrals (A.9) durch Einsetzen von (A.10) und (A.11). Es hat sich als zweckmäßig herausgestellt, zunächst über den Umfangswinkel  $\varphi$  zu integrieren. Hierzu werden folgende Umformungen bzw. Festlegungen verwendet [122]:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\text{wobei: } \alpha = \varphi, \beta = -\vartheta - 2\gamma z$$

$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(0) = \cos(2\pi \cdot k) = 1; \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\sin(0) = \sin(2\pi \cdot k) = 0; \quad k = 1, 2, \dots$$

Damit kann der cos-Term der MMK in einen  $\varphi$ -behafteten und einen  $\varphi$ -freien Anteil

zerlegt werden:

$$\begin{aligned}\cos[\nu(\varphi - \vartheta - 2\gamma z)] &= \cos(\nu\varphi) \cos[\nu(-\vartheta - 2\gamma z)] - \sin(\nu\varphi) \sin[\nu(-\vartheta - 2\gamma z)] \\ &= \cos(\nu\varphi) \cos[\nu(\vartheta + 2\gamma z)] + \sin(\nu\varphi) \sin[\nu(\vartheta + 2\gamma z)]\end{aligned}$$

Die Integration wird nachfolgend einmal für  $\nu \neq \kappa$  und anschließend für  $\nu = \kappa$  durchgeführt:

$$\begin{aligned}& \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(\kappa\varphi) \cos(\nu\varphi) \cos[\nu(\vartheta + 2\gamma z)]}_A + \underbrace{\cos(\kappa\varphi) \sin(\nu\varphi) \sin[\nu(\vartheta + 2\gamma z)]}_B d\varphi \\ & \int_0^{2\pi} B d\varphi = \underbrace{\sin[\nu(\vartheta + 2\gamma z)]}_C \cdot \left[ \frac{\nu \cos(\kappa\varphi) \cos(\nu\varphi) + \kappa \sin(\kappa\varphi) \sin(\nu\varphi)}{\kappa^2 - \nu^2} \right]_0^{2\pi} \\ & = C \cdot \left\{ \frac{\overbrace{\nu \cos(\kappa \cdot 2\pi)}^{=1} \overbrace{\cos(\nu \cdot 2\pi)}^{=1} + \kappa \overbrace{\sin(\kappa \cdot 2\pi)}^{=0} \overbrace{\sin(\nu \cdot 2\pi)}^{=0}}{\kappa^2 - \nu^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\overbrace{\nu \cos(0)}^{=1} \overbrace{\cos(0)}^{=1} + \kappa \overbrace{\sin(0)}^{=0} \overbrace{\sin(0)}^{=0}}{\kappa^2 - \nu^2} \right\} \\ & = C \cdot \left\{ \frac{\nu}{\kappa^2 - \nu^2} - \frac{\nu}{\kappa^2 - \nu^2} \right\} \\ & \int_0^{2\pi} B d\varphi = 0\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}& \int_0^{2\pi} A d\varphi = \underbrace{\cos[\nu(\vartheta + 2\gamma z)]}_C \cdot \left[ \frac{\kappa \cos(\nu\varphi) \sin(\kappa\varphi) - \nu \cos(\kappa\varphi) \sin(\nu\varphi)}{\kappa^2 - \nu^2} \right]_0^{2\pi} \\ & = C \cdot \left\{ \frac{\overbrace{\kappa \cos(\nu \cdot 2\pi)}^{=1} \overbrace{\sin(\kappa \cdot 2\pi)}^{=0} - \nu \overbrace{\cos(\kappa \cdot 2\pi)}^{=1} \overbrace{\sin(\nu \cdot 2\pi)}^{=0}}{\kappa^2 - \nu^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\overbrace{\kappa \cos(0)}^{=1} \overbrace{\sin(0)}^{=0} - \nu \overbrace{\cos(0)}^{=1} \overbrace{\sin(0)}^{=0}}{\kappa^2 - \nu^2} \right\} \\ & \int_0^{2\pi} A d\varphi = 0 \quad \text{für: } \kappa \neq \nu\end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\int_0^{2\pi} A d\varphi \stackrel{\kappa=\nu}{=} \int_0^{2\pi} \cos^2(\nu\varphi) d\varphi = \left[ \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(\nu 2\varphi)}{4\nu} \right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2} + \frac{\sin(\nu 4\pi)}{4\nu} - \frac{0}{2} + \frac{\sin(0)}{4\nu}$$

$$\int_0^{2\pi} A d\varphi \stackrel{\kappa=\nu}{=} \pi \quad \text{für: } \kappa = \nu \tag{A.14}$$

Für  $\nu \stackrel{!}{=} \kappa$  kann nun weiter die Integration über  $z$  erfolgen:

$$\int_{-l_{FE}/2}^{l_{FE}/2} \pi \cdot \cos[\nu(\vartheta + 2\gamma z)] dz = \pi \left[ \frac{\sin[\nu(\vartheta + 2\gamma z)]}{\nu \cdot 2\gamma} \right]_{-l_{FE}/2}^{l_{FE}/2}$$

$$= \frac{\pi}{\nu \cdot 2\gamma} \{ [\sin(\nu\vartheta) \cos(\nu\gamma l_{FE}) + \cos(\nu\vartheta) \sin(\nu\gamma l_{FE})]$$

$$- [\sin(\nu\vartheta) \underbrace{\cos(-\nu\gamma l_{FE})}_{\cos(\nu\gamma l_{FE})} + \cos(\nu\vartheta) \underbrace{\sin(-\nu\gamma l_{FE})}_{-\sin(\nu\gamma l_{FE})}] \}$$

$$= \frac{\pi}{\nu \cdot 2\gamma} \cdot 2 \cos(\nu\vartheta) \sin(\nu\gamma l_{FE}) \tag{A.15}$$

Dabei wurde folgendes Additionstheorem verwendet [122]:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

wobei:  $\alpha = \nu\vartheta, \beta = \nu 2\gamma z$

Bringt man nun alle Teilergebnisse zusammen, erhält man für die im Luftspalt gespeicherte Energie:

$$W(\vartheta) = \frac{D_\delta}{4} \sum_{\xi(\nu \stackrel{!}{=} \kappa)} \frac{\pi}{\gamma \xi} \sin(\xi \gamma l_{FE}) a_{MMK,\xi} a_{\Lambda,\xi} \cos(\xi \vartheta) \tag{A.16}$$

Wie oben bereits dargestellt hängen  $\nu$  und  $\kappa$  von der Geometrie und daher von  $p$  und  $Q$  ab (vgl. (A.11) und (A.10)). Es kann daraus gefolgert werden, dass  $\nu = \kappa$  dann gilt, wenn gemeinsame Vielfache von  $2p$  und  $Q$  vorliegen. Dies lässt sich über das kleinste gemeinsame Vielfache ausdrücken:  $c \cdot KGV(2p, Q)$  mit  $c = 1, 2, \dots, c = 0$  ist eine triviale Lösung und entfällt.

Abschließend wird der Term noch modifiziert und nach  $\vartheta$  abgeleitet, um die in [2] gezeigte Form für das Drehmoment (Rastmoment) zu erreichen:

$$M(\vartheta) = \frac{W(\vartheta)}{d\vartheta} = -\frac{\pi}{4} D_\delta l_{FE} \sum_{\xi} \xi \frac{\sin(\xi \gamma l_{FE})}{\xi \gamma l_{FE}} a_{MMK,\xi} a_{\Lambda,\xi} \sin(\xi \vartheta) \tag{A.17}$$

mit:  $\xi = k \cdot KGV(2p, Q), k = 1, 2, \dots$

## B. Systemgleichungen einer Solenoid-Linearmaschine mit Permanentmagneten

### B.1. Strombelag einer in Nuten gebetteten Spule und deren magnetisches Feld

Es wird eine Spule in einer genuteten Linearanordnung nach dem Solenoid-Prinzip betrachtet [60, 89]. Die Tiefe der Nuten erstreckt sich in radiale Richtung (r-Komponente), die Breite der Nuten und des Nutschlitzes am Luftspalt erstreckt sich in axiale Richtung (z-Komponente) und die Länge der Nuten entspricht dem Umfang ( $\vartheta$ -Komponente). Die Spule besteht aus Hin- und Rückleiter. Unter Spulenweite ist die axiale Entfernung der Hin- von den Rückleiter(n) zu verstehen. Die Polteilung ist die axiale Ausdehnung eines Pols. Analog zu Radialflussmaschinen kann von Durchmesserspulen gesprochen werden, wenn die Spulenweite gleich der Polteilung ist. Bei gesehten Spulen ist die Spulenweite kleiner als die Polteilung<sup>1</sup>.

Der Strombelag einer Spule je Nut ist als

$$A_{1Sp} = \frac{Z_{1Sp}}{b_{ns}} \cdot i_{1L} \quad (\text{B.1})$$

definiert.

Im Gegensatz zur Radialflussmaschine kann bei der weiteren Bestimmung des Strombelages über eine Fourieranalyse nicht einfach der mechanische Umfangswinkel für die Periodizität der Maschine und die Spulenweite verwendet werden. Ferner wird nun die Periodizität  $2\pi$  der axialen Länge  $l_2$  des Movers gleichgesetzt. Die axiale Länge des Movers entspricht dem Bohrungsumfang einer rotierenden Maschine. Die Spulenweite und die Nutschlitzbreite werden dann auf diese axiale Länge bezogen. Dadurch wird eine der Radialflussmaschine analoge Darstellung möglich<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Bei den Abmessungen handelt es sich um metrische Abstände.

<sup>2</sup>Bei  $\tau_{up}$  und  $W_{1,Sp}$  handelt es sich bei der Radialflussmaschine um Bogenlängen. Diese können durch Beziehen auf einen Radius direkt in einen Winkel überführt werden. Bei der Linearmaschine muss der Winkel durch einen Bezug von axialen Längen auf eine zu  $2\pi$  analoge Länge erzeugt werden.

Die weitere Ausdehnung der Maschine in axiale Richtung kann dann als Wiederholung dieser Einheit angesehen werden. Zur Gewährleistung der Richtigkeit der Annahme einer periodischen Funktion wird die Wiederholung als ausreichend oft erklärt, damit die Fourier-Analyse zulässig ist<sup>3</sup>.

Da es sich beim Signal des Strombelags um eine ungerade Funktion handelt, ergibt sich aus der Fourier-Analyse folgender Zusammenhang:

$$a_1(z, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{1(\nu)} \cdot \sin(\nu \cdot z) \quad (\text{B.2})$$

Bei Integration über eine halbe Periode ( $[0 \dots \pi]$ ) und Verdopplung des Wertes des Fourier-Koeffizienten erhält man unter Anwendung des Sprungstellenverfahrens [21]:

$$A_{1(\nu)} = \frac{2}{\nu \cdot \pi} \sum_k A \cos(\nu \cdot z_k) \quad (\text{B.3})$$

Dabei gilt für einen Sprung  $S_k$  von 0 auf  $A_{1Sp}$  an der Stelle  $k$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(z_k + 0) = A_{1Sp} \\ f(z_k - 0) = 0 \end{array} \right\} S_k = (A_{1Sp} - 0) \quad (\text{B.4})$$

In obigem Ausdruck werden nun die geometrischen Positionen der Sprünge eingesetzt:

$$A_{1(\nu)} = \frac{2}{\nu \cdot \pi} \cdot \left\{ (A_{1Sp} - 0) \cdot \cos \left[ \nu \cdot \left( \pi \cdot \frac{W_{1Sp}}{l_2} - \pi \cdot \frac{b_{ns}}{l_2} \right) \right] + (0 - A_{1Sp}) \cdot \cos \left[ \nu \cdot \left( \pi \cdot \frac{W_{1Sp}}{l_2} + \pi \cdot \frac{b_{ns}}{l_2} \right) \right] \right\} \quad (\text{B.5})$$

Wir vereinfachen den Ausdruck und stellen ihn anschließend mit einer trigonometrischen Umformung um:

$$\begin{aligned} \alpha &= \nu \cdot \pi \cdot \frac{W_{1Sp}}{l_2} & \beta &= \nu \cdot \pi \cdot \frac{b_{ns}}{l_2} \\ A_{1(\nu)} &= 2 \cdot \frac{A_{1Sp}}{\nu \cdot \pi} \cdot \{ \cos [\alpha - \beta] - \cos [\alpha + \beta] \} \\ \text{mit: } 2 \cdot \sin \alpha \sin \beta &= [ \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) ] \\ A_{1(\nu)} &= 2 \cdot \frac{A_{1Sp}}{\nu \cdot \pi} \cdot 2 \cdot \sin \left( \nu \cdot \pi \cdot \frac{W_{1Sp}}{l_2} \right) \cdot \sin \left( \nu \cdot \pi \cdot \frac{b_{ns}}{l_2} \right) \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Bei rotierenden Maschinen gilt dies automatisch, da sich der Bohrungsumfang unendlich oft und nahtlos wiederholt.



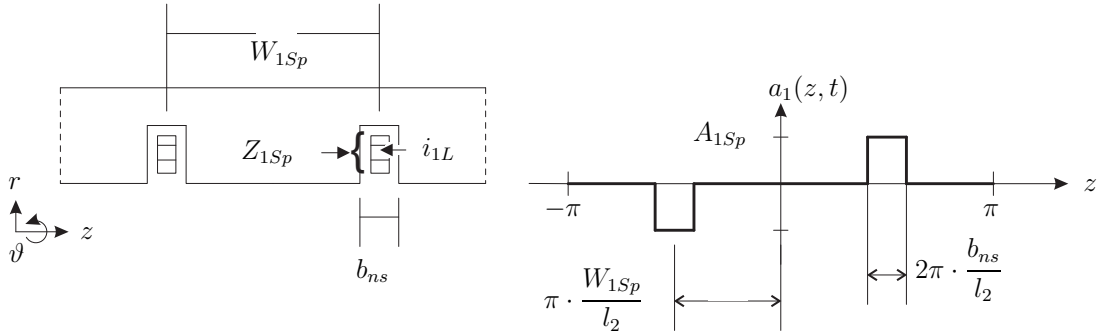


Abb. B.1.: In Nuten gebettete Spule und deren Strombelag

Nach Erweiterung und Anwendung von (B.1) ergibt sich:

$$A_{1(\nu)} = \frac{4}{\nu \cdot \pi} \cdot \frac{Z_{1Sp}}{b_{ns}} \cdot i_{1L} \cdot \nu \cdot \pi \cdot \frac{b_{ns}}{l_2} \cdot \frac{\sin\left(\nu \cdot \pi \cdot \frac{b_{ns}}{l_2}\right)}{\nu \cdot \pi \cdot \frac{b_{ns}}{l_2}} \cdot \sin\left(\nu \cdot \pi \cdot \frac{W_{1Sp}}{2p \cdot \tau_p}\right)$$

Mit Einführung des Nutschlitzbreitenfaktors  $\xi_{1N(\nu)}$  und des Sehnungsfaktors  $\xi_{1S(\nu)}$  lautet der Strombelag der Spule:

$$\begin{aligned} A_{1(\nu)} &= \frac{4 \cdot Z_{1Sp}}{l_2} \cdot i_{1L} \cdot \xi_{1N(\nu)} \cdot \xi_{1S(\nu)} \\ \xi_{1N(\nu)} &= \frac{\sin\left(\nu \cdot \pi \cdot \frac{b_{ns}}{l_2}\right)}{\nu \cdot \pi \cdot \frac{b_{ns}}{l_2}} \\ \xi_{1S(\nu)} &= \sin\left(\nu \cdot \pi \cdot \frac{W_{1Sp}}{2p \cdot \tau_p}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Der Ausdruck (B.6) entspricht dem Ausdruck für rotierende Maschinen mit dem Unterschied, dass der Umfang des Bohrungsdurchmessers  $\pi D_i$  durch die Länge der betrachteten Linearanordnung ersetzt wird. Dabei ist die magnetisch, axial wirksame Länge des Movers  $l_2$  gemeint. Das gleiche gilt für Nutschlitz- und Sehnungsfaktor. Diese sind analog zu rotierenden Maschinen definiert, nur dass hier wieder die axialen Längen anstelle des Umfangs verwendet werden. Der Winkelcharakter wird durch den oben eingeführten Bezug der z-Komponente auf einen Winkel erzwungen. Mit den gewonnenen Erkenntnissen kann die Linearmaschine in Bezug auf Nutung und Sehnung nun analog zu einer rotierenden Maschine behandelt werden.

Für die von der Spule erzeugte Durchflutung kann man nun analog zu [89] folgendem Term ansetzen<sup>4</sup>:

$$\Theta_1(s, t) = - \int_l a_{(\nu)}(s, t) ds \quad (\text{B.7})$$

Dabei ist  $l$  die Länge der Strecke, die mit elektrischen Strömen belegt ist. Im Falle des fein verteilten Strombelags ist das die axiale Länge des Movers. Diese wird nun wieder in einen analogen auf  $2\pi$  abbildbaren Winkel  $z$  überführt.

$$z = 2\pi \cdot \frac{s}{l_2} \leftrightarrow s = z \cdot \frac{l_2}{2\pi} \quad (\text{B.8})$$

$$\Theta_1(z, t) = - \frac{l_2}{2\pi} \int_{\vartheta} a_1(z, t) dz \quad (\text{B.9})$$

$$\Theta_1(z, t) = - \frac{l_2}{2\pi} \int_{\vartheta} \sum_{\nu=1}^{\text{inf}} A_{1(\nu)} \cdot \sin(\nu \cdot z) dz \quad (\text{B.10})$$

Für die Überführung in die Fourier-Darstellung wird festgestellt, dass der Verlauf von (B.10) (Felderregerkurve) keinen Gleichanteil aufweisen darf. Dies kann gewährleistet werden, wenn die Integrationsgrenzen so gewählt werden, dass der Startpunkt der Integration in einem feldfreien Bereich liegt.

$$\begin{aligned} \Theta_1(z, t) &= \frac{l_2}{\nu \cdot 2\pi} \sum_{\nu=1}^{\text{inf}} A_{1(\nu)} \cdot \cos(\nu \cdot z) \\ \Theta_1(z, t) &= \sum_{\nu=1}^{\text{inf}} \Theta_{1(\nu)} \cdot \cos(\nu \cdot z) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \Theta_{1(\nu)} &= \frac{l_2}{\nu \cdot 2\pi} \cdot A_{1(\nu)} = \frac{l_2}{\nu \cdot 2\pi} \cdot \frac{4 \cdot Z_{1Sp}}{l_2} \cdot i_{1L} \cdot \xi_{1N(\nu)} \cdot \xi_{1S(\nu)} \\ \Theta_{1(\nu)} &= \frac{2 \cdot Z_{1Sp}}{\nu \cdot \pi} \cdot i_{1L} \cdot \xi_{1N(\nu)} \cdot \xi_{1S(\nu)} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Damit konnte gezeigt werden, dass sich für die Felderregerkurve gegenüber rotierenden Maschinen keine Änderung ergibt. Die Ableitung des magnetischen Feldes kann nun einfach analog angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} B_1(z, t) &= \frac{\mu_0}{\delta''} \cdot \Theta_1(z, t) \\ B_1(z, t) &= \sum_{\nu=1}^{\text{inf}} B_{1(\nu)} \cdot \cos(\nu \cdot z) \\ B_{1(\nu)} &= \frac{\mu_0}{\delta''} \cdot \frac{2 \cdot Z_{1Sp}}{\nu \cdot \pi} \cdot i_{1L} \cdot \xi_{1N(\nu)} \cdot \xi_{1S(\nu)} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

---

<sup>4</sup>Da bekannt ist, dass sich der Strombelag nur in  $z$ -Richtung analog zur  $\vartheta$ -Richtung der Radialflussmaschine ändert, kann auf eine allgemeine Integration der drei Raumkomponenten verzichtet werden.

Zusammenfassend kann am Ende dieses Abschnitts festgehalten werden, dass sich trotz einer auf den ersten Blick deutlich anderen geometrischen Definition gegenüber rotierenden Maschinen nur unwesentliche Unterschiede in der Berechnung von solenoid förmigen Linearmaschinen ergeben. Es ist davon auszugehen, dass sich dieser Umstand durch die weiteren Berechnungen fortführen lässt.

## B.2. Strombelag von 2p Spulen

Nun erfolgt die Untersuchung von 2p im Abstand von  $\tau_p$  aufeinanderfolgenden Spulen (Spulenfolgwicklung). Dabei stellt p die Polpaarzahl dar. Es wird festgelegt, dass die Bestromung der Spulen abwechselnd mit  $i_{1L}^{(a)}$  (ungeradzahlige Nummerierungen 1, 3, 5, ...) Spulen und  $i_{1L}^{(b)}$  (geradzahlige Nummerierungen 2, 4, 6, ...) erfolgt [89]. Damit bildet jede Spule einen Pol aus. Die Richtung der Pole aus Sicht des Luftspalts alterniert folglich. Für die örtliche Amplitude des Strombelags kann dann direkt folgender Ausdruck angesetzt werden:

$$\left. \begin{matrix} A_{1(\nu)}^{(a)} \\ A_{1(\nu)}^{(b)} \end{matrix} \right\} = \frac{4 \cdot Z_{1Sp}}{l_2} \cdot \xi_{1N(\nu)} \cdot \xi_{1S(\nu)} \cdot \left\{ \begin{matrix} i_{1L}^{(a)} \\ i_{1L}^{(b)} \end{matrix} \right. \quad (\text{B.14})$$

Der zeitabhängige Strombelag für die Summe der Pole ergibt sich bei mathematisch positiver Drehrichtung des Winkels dann zu:

$$a_1(z, t) = \sum_{\nu=1}^{\inf} \sum_{k=1}^p \left\{ A_{1(\nu)}^{(a)} \cdot \sin \left[ \nu \cdot \left( z + \frac{2\pi}{p} \cdot (k-1) \right) \right] + A_{1(\nu)}^{(b)} \cdot \sin \left[ \nu \cdot \left( z + \frac{\pi}{p} \cdot (2k-1) \right) \right] \right\} \quad (\text{B.15})$$

Die Auflösung der doppelten Summe kann nach [91] (Anhang, §2, Trigonometrische Summen) erfolgen, falls die k-abhängigen Terme auf eine äquivalente Form gebracht werden:

$$\sum_{n=1}^N e^{jnx} = e^{j(N+1)\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \left( N \frac{x}{2} \right)}{\sin \left( \frac{x}{2} \right)} \quad [91] \quad (\text{B.16})$$

Mit den trigonometrischen Umformungen

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \text{und} \quad (\text{B.17})$$

$$z = x + iy = r \cos \varphi + i \cdot r \sin \varphi = r \cdot e^{i\varphi} \quad (\text{B.18})$$

ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned}
 \sin \left[ \nu \cdot \left( z + \frac{2\pi}{p} \cdot (k-1) \right) \right] &= \sin \left[ \left( \nu z - \nu \frac{2\pi}{p} \right) + k \cdot \nu \frac{2\pi}{p} \right] = \\
 &= \sin \left[ \nu \left( z - \frac{2\pi}{p} \right) \right] \cdot \cos \left( k \cdot \nu \frac{2\pi}{p} \right) + \cos \left[ \nu \left( z - \frac{2\pi}{p} \right) \right] \cdot \sin \left( k \cdot \nu \frac{2\pi}{p} \right) \\
 &= \sin \left[ \nu \left( z - \frac{2\pi}{p} \right) \right] \cdot \Re \left\{ e^{k \cdot \nu \frac{2\pi}{p}} \right\} + \cos \left[ \nu \left( z - \frac{2\pi}{p} \right) \right] \cdot (-j) \Im \left\{ e^{k \cdot \nu \frac{2\pi}{p}} \right\} \quad (\text{B.19})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin \left[ \nu \cdot \left( z + \frac{\pi}{p} \cdot (2k-1) \right) \right] &= \sin \left[ \left( \nu z - \nu \frac{\pi}{p} \right) + k \cdot \nu \frac{2\pi}{p} \right] = \\
 &= \sin \left[ \nu \left( z - \frac{\pi}{p} \right) \right] \cdot \cos \left( k \cdot \nu \frac{2\pi}{p} \right) + \cos \left[ \nu \left( z - \frac{\pi}{p} \right) \right] \cdot \sin \left( k \cdot \nu \frac{2\pi}{p} \right) \\
 &= \sin \left[ \nu \left( z - \frac{\pi}{p} \right) \right] \cdot \Re \left\{ e^{k \cdot \nu \frac{2\pi}{p}} \right\} + \cos \left[ \nu \left( z - \frac{\pi}{p} \right) \right] \cdot (-j) \Im \left\{ e^{k \cdot \nu \frac{2\pi}{p}} \right\} \quad (\text{B.20})
 \end{aligned}$$

Da die beiden Gleichungen große Ähnlichkeit aufweisen, wird die weitere Berechnung nur an Hand von (B.19) fortgeführt und danach für (B.20) übernommen. Der jeweils von k freigestellte Term bleibt nun unverändert. Der k-behaftete Term besitzt die oben geforderte Form. Der Real- und Imaginärteil kann unverändert übernommen und durch den jeweiligen trigonometrischen Ausdruck ersetzt werden.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^p (\text{B.19}) &= \frac{\sin(\nu\pi)}{\sin\left(\nu\frac{\pi}{p}\right)} \cdot \left\{ \sin \left[ \nu \left( z - \frac{2\pi}{p} \right) \right] \cdot \cos \left[ \nu (p+1) \frac{\pi}{p} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \cos \left[ \nu \left( z - \frac{2\pi}{p} \right) \right] \cdot \sin \left[ \nu (p+1) \frac{\pi}{p} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Der Ausdruck wird nun noch mit

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{B.21})$$

wieder zusammengefasst:

$$\sum_{k=1}^p (\text{B.19}) = \frac{\sin(\nu\pi)}{\sin\left(\nu\frac{\pi}{p}\right)} \cdot \sin \left[ \nu \left( z - \frac{\pi}{p} + \pi \right) \right] \quad (\text{B.22})$$

Der zweite Summenterm wird analog dem ersten umgeformt. Das Endergebnis stellt sich wie folgt dar:

$$\sum_{k=1}^p (\text{B.20}) = \frac{\sin(\nu\pi)}{\sin\left(\nu\frac{\pi}{p}\right)} \cdot \sin [\nu (z + \pi)] \quad (\text{B.23})$$

Um beide Ausdrücke zusammenfassen zu können, muss der Leiterstrom ausgeklammert werden, was durch Erweitern des zweiten Terms mit  $\frac{i_{1L}^{(b)}}{i_{1L}^{(a)}}$  geschieht. Der sogenannte Summenfaktor

$$\varphi = \frac{\sin(\nu\pi)}{\sin\left(\nu\frac{\pi}{p}\right)}$$

beschränkt in Abhängigkeit von der Polpaarzahl analog zur rotierenden Maschine die Ordnungszahlen der Oberfelder. Da der Sinus von  $\pi$  und allen ganzzahligen Vielfachen immer Null ist, entsteht nur für den Fall der unbestimmten Form  $\varphi = \frac{0'}{0'}$  ein Grenzwert durch Anwendung der l'Hospital'schen Regel:

$$\varphi = p \frac{\cos(p\nu'\pi)}{\cos(\nu'\pi)} \quad \text{wenn: } \frac{\nu}{p} = \nu' = 1, 2, 3, \dots$$

Mit (B.21) kann dann für den zweiten Summenterm alternativ folgende Schreibweise verwendet werden, wenn man beachtet, dass bei der Umformung im zweiten Teil des Sinusters für alle  $\nu$  Null wird:

$$S_2 = \frac{i_{1L}^{(b)}}{i_{1L}^{(a)}} \cdot p \frac{\cos(p\nu'\pi)}{\cos(\nu'\pi)} \cdot \cos(\nu\pi) \sin(\nu z) \quad (\text{B.24})$$

Der erste Summenterm wird mit der gleichen Umformung in eine alternative Darstellung überführt, wobei darauf geachtet wird, denselben Kosinusausdruck nach dem Phasenfaktor zu bekommen. Es ist eine zweifache Umformung notwendig.

$$\begin{aligned} S_1 &= p \frac{\cos(p\nu'\pi)}{\cos(\nu'\pi)} \cdot \cos(\nu\pi) \cdot \left[ \sin\left(\nu z - \nu\frac{\pi}{p}\right) \right] \\ S_1 &= p \frac{\cos(p\nu'\pi)}{\cos(\nu'\pi)} \cdot \cos(\nu\pi) \cdot \left[ \sin(\nu z) \cos\left(\nu\frac{\pi}{p}\right) - \cos(\nu z) \sin\left(\nu\frac{\pi}{p}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Es erfolgt nun ein Addition der beiden Ausdrücke und eine Substitution von  $\nu$  durch  $\nu'p$  und anschließend kann das Hochkomma auch fortgelassen werden.

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= p \frac{\cos(\nu p \pi)}{\cos(\nu \pi)} \cdot \cos(\nu p \pi) \cos(\nu \pi) \cdot \\ &\quad \left\{ \sin(\nu p z) \cdot \left[ 1 + \frac{i_{1L}^{(b)}}{i_{1L}^{(a)} \cdot \cos(\nu \pi)} \right] - \cos(\nu p z) \frac{\sin(\nu \pi)}{\cos(\nu \pi)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Abschließend werden die Terme zusammengefasst und es wird festgestellt, dass der letzte Teilausdruck durch den Sinusterm auf Grund der ganzzahligen Vielfachheit zu  $\pi$  jederzeit Null ist. Das selbe gilt für die Umformung

$$\cos^2(\nu p \pi) = 1 - \sin^2(\nu p \pi) = 1 \quad (\text{B.27})$$

woraufhin letztendlich der nun aufgeführte kurze Term für die Summe übrig bleibt:

$$S_1 + S_2 = p \cdot \sin(\nu p z) \cdot \left[ 1 + \frac{i_{1L}^{(b)}}{i_{1L}^{(a)} \cdot \cos(\nu \pi)} \right] \quad (\text{B.28})$$

Setzt man nun anstelle von  $i_{1L}^{(a)}$  den Leiterstrom aus dem vorhergehenden Abschnitt ein, ergibt sich derselbe Ausdruck wie in diesem Abschnitt, nur dass die Amplitude durch den Versatz der Spulen verändert wird, was sich durch den Klammerterm und die veränderten Wicklungsfaktoren ausdrückt. Diese entstehen, da oben  $\nu$  durch  $\nu' p$  ersetzt wurde.

$$\begin{aligned} a_1(z, t) &= \sum_{\nu=1}^{\text{inf}} A_{1(\nu)}(t) \cdot \sin(\nu p z) \\ A_{1(\nu)}(t) &= p \cdot \frac{4 \cdot Z_{1Sp}}{l_2} \cdot i_{1L} \cdot \xi_{1N(\nu)} \cdot \xi_{1S(\nu)} \cdot \left[ 1 + \frac{i_{1L}^{(b)}}{i_{1L}^{(a)} \cdot \cos(\nu \pi)} \right] \\ \xi_{1N(\nu)} &= \frac{\sin\left(\nu \cdot p \cdot \pi \cdot \frac{b_{ns}}{l_2}\right)}{\nu \cdot p \cdot \pi \cdot \frac{b_{ns}}{l_2}} \\ \xi_{1S(\nu)} &= \sin\left(\nu \cdot \pi \cdot \frac{W_{1Sp}}{2 \cdot \tau_p}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

### B.3. Erweiterung der Berechnungen auf einen Wicklungsstrang

Es werden nun die Spulen aus dem vorherigen Abschnitt seriell zu einem Strang zusammengeschaltet. Für die Ströme in den Polen kann damit Folgendes festgelegt werden:

$$\begin{aligned} \text{Pol-Nr.: } 1, 3, 5, 7, \dots, 2p-1 &: i_{1L}^{(a)} = i_{1L,Str} \\ \text{Pol-Nr.: } 2, 4, 6, 8, \dots, 2p &: i_{1L}^{(b)} = -i_{1L,Str} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Mit dieser Vereinbarung folgt für den Klammerterm in (B.29):

$$1 + \frac{i_{1L}^{(b)}}{i_{1L}^{(a)} \cdot \cos(\nu\pi)} = \begin{cases} 2 & \text{wenn: } \nu = 2k + 1 \quad \text{mit: } k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{wenn: } \nu = 2k \quad \text{mit: } k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

Der oben ermittelte Strombelag verändert sich:

$$a_{1Str}(z, t) = \sum_{\nu=1}^{\inf} A_{1Str(\nu)}(t) \cdot \sin(\nu pz) \quad \text{mit: } \nu = 2k + 1; k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$A_{1Str(\nu)}(t) = p \cdot \frac{8 \cdot Z_{1Sp}}{l_2} \cdot i_{1L,Str} \cdot \xi_{1N(\nu)} \cdot \xi_{1S(\nu)}$$

Für die Durchflutung und die magnetische Induktion bedeutet das ebenfalls eine leicht modifizierte Darstellung:

$$\Theta_{1Str}(z, t) = \sum_{\nu=1}^{\inf} \Theta_{1Str(\nu)} \cdot \cos(\nu pz)$$

$$\Theta_{1Str(\nu)} = \frac{4 \cdot Z_{1Sp}}{\nu p \pi} \cdot i_{1L,Str} \cdot \xi_{1N(\nu)} \cdot \xi_{1S(\nu)}$$

$$B_{1Str}(z, t) = \sum_{\nu=1}^{\inf} B_{1Str(\nu)} \cdot \cos(\nu pz)$$

$$B_{1Str(\nu)} = \frac{\mu_0}{\delta''} \cdot \frac{4 \cdot Z_{1Sp}}{\nu p \pi} \cdot i_{1L,Str} \cdot \xi_{1N(\nu)} \cdot \xi_{1S(\nu)}$$

Es wird an dieser Stelle noch der Faktor  $a$  eingeführt. Dieser kennzeichnet die Anzahl paralleler Zweige (Parallelschaltung von Spulen) und muss in  $2p$  ganzzahlig teilbar sein. Dies ergibt sich als logische Folge aus dem Aufbau einer elektrischen Maschine und wird benötigt, wenn Spulen nicht seriell verschaltet werden, sondern parallel. Dies hat Einfluss auf den Strangstrom, die Strangwindungszahl und die Amplituden von Strombelag, Durchflutung und Feld.

$$i_{1Str} = a \cdot i_{1L,Str} \quad \text{Strangstrom} \quad (\text{B.32a})$$

$$w_{1Str} = \frac{2p}{a} \cdot Z_{1Sp} \quad (\text{B.32b})$$

$$A_{1Str(\nu)} = p \cdot \frac{8 \cdot w_{1Str}}{l_2} \cdot i_{1L,Str} \cdot \xi_{1N(\nu)} \cdot \xi_{1S(\nu)} \quad (\text{B.32c})$$

$$\Theta_{1Str(\nu)} = \frac{4 \cdot w_{1Str}}{\nu p \pi} \cdot i_{1L,Str} \cdot \xi_{1N(\nu)} \cdot \xi_{1S(\nu)} \quad (\text{B.32d})$$

$$B_{1Str(\nu)} = \frac{\mu_0}{\delta''} \cdot \frac{4 \cdot w_{1Str}}{\nu p \pi} \cdot i_{1L,Str} \cdot \xi_{1N(\nu)} \cdot \xi_{1S(\nu)} \quad (\text{B.32e})$$

## B.4. Einführung der Spulengruppe

Als Erweiterung zu den bisherigen Betrachtungen wird nun die Spulengruppe eingeführt. Dabei wird die einzelne Spule auf  $q_1$  Teilspulen aufgeteilt. Diese Teilspulen befinden sich in Reihenschaltung<sup>5</sup> und bilden als Einheit eine sogenannte Zone. Bis hierhin treten keine Unterschiede zur rotierenden Maschine auf. Allerdings gibt es Unterschiede in der Definition der Abstände.

Die Nutteilung muss als linearer Abstand zwischen den Teilspulen angegeben werden. Damit kann anschließend durch Bezug auf eine Länge (analog zu den bisherigen Abschnitten) ein Winkel hergeleitet werden. Bei diesem Winkel handelt es sich um einen räumlichen Winkel, weshalb ein Bezug zur Gesamtlänge hergestellt wird.

$$\begin{aligned}\tau_{1n} &= l_{ax}[\text{Teilspule}_N \dots \text{Teilspule}_{N+1}] \quad \text{Einheit: [mm]} \\ \alpha_{1n} &= \frac{\tau_{1n}}{l_2} \cdot 2\pi \quad \text{Einheit: [deg]}\end{aligned}\tag{B.33}$$

Die Breite der Zone kann nun entweder als axiale Länge oder als Winkel angegeben werden:

$$\begin{aligned}b_{q1} &= (q - 1) \cdot \tau_{1n} \quad \text{Einheit: [mm]} \\ \alpha_{q1} &= (q - 1) \cdot \alpha_{1n} \quad \text{Einheit: [deg]}\end{aligned}\tag{B.34}$$

Für die Strombeläge ergibt sich weiter in mathematisch positiver Zählrichtung nachstehend angegebener, allgemeiner Zusammenhang für die n-te Teilspule. Es wird dazu festgelegt, dass sich die erste Teilspule an der Stelle  $z_1$  befindet. Die weiteren Teilspulen sind dann um jeweils  $\alpha_{1n}$  mathematisch positiv verschoben. Der Strombelag wird dabei zunächst in Abhängigkeit der Position der ersten Spule ausgedrückt. Eine Überführung auf die Mitte der Spulengruppe erfolgt später.

$$a_{1Sp}^{(n)}(z_1^{(1)}, t) = \sum_{\nu=1}^{\text{inf}} A_{1Sp(\nu)} \cdot \sin \left[ \nu \left( z_1^{(1)} + (k-1)\alpha_{1n} \right) \right] \quad k = [1 \dots (q_1)] \tag{B.35a}$$

$$a_{1SpGr}(z_1^{(1)}, t) = \sum_{\nu=1}^{\text{inf}} A_{1Sp(\nu)} \sum_{k=1}^{q_1} \sin \left[ \nu \left( z_1^{(1)} + (k-1)\alpha_{1n} \right) \right] \tag{B.35b}$$

$$A_{Sp(\nu)} = \frac{4 \cdot Z_{1Sp}}{l_2} \cdot i_{1L,Str} \cdot \xi_{1N(\nu)} \cdot \xi_{1S(\nu)} \tag{B.35c}$$

Dabei wurde für die Amplitude Gleichung (B.6) herangezogen.  $Z_{1Sp}$  ist hier die Anzahl der Windungen einer Teilspule.

$$\sum_{k=1}^{q_1} \sin \left[ \nu \left( z_1^{(1)} + (k-1)\alpha_{1n} \right) \right] = \sum_{k=1}^{q_1} \sin \left[ \underbrace{\left( \nu z_1 - \nu \alpha_{1n} \right)}_{\alpha} + \underbrace{k \alpha_{1n} \nu}_{\beta} \right] =$$

<sup>5</sup>Die Amplitude der Ströme und Strombeläge ist daher für alle Teilspulen identisch.



$$\begin{aligned}
 \stackrel{(B.17)\underline{(B.16)}}{=} & \frac{\sin\left(q_1 \frac{\alpha_{1n}}{2} \nu\right)}{\sin\left(\frac{\alpha_{1n}}{2} \nu\right)} \cdot \left\{ \sin(z_1 \nu - \alpha_{1n} \nu) \cos\left[\left(q_1 + 1\right) \frac{\alpha_{1n}}{2} \nu\right] + \right. \\
 & \left. + \cos(z_1 \nu - \alpha_{1n} \nu) \sin\left[\left(q_1 + 1\right) \frac{\alpha_{1n}}{2} \nu\right] \right\} \\
 = & \sin\left[\nu \left(z_1^{(1)} + \frac{1}{2}(q_1 - 1)\alpha_{1n}\right)\right]
 \end{aligned}$$

Nun wird noch der Betrachtungspunkt des Strombelags durch die Koordinatentransformation  $z = z_1^{(1)} + \frac{1}{2}(q_1 - 1)\alpha_{1n}$  in die Mitte der Seite der Spulengruppe geschoben. Erweitert man den Ausdruck für den Strombelag um  $\frac{q_1}{q_1}$  kann man noch den Zonenfaktor  $\xi_{1Z}$  einführen und den Scheitelwert des Strombelags der Spulengruppe in Abhängigkeit der Teilspulen angeben.

$$\xi_{1Z(\nu)} = \frac{\sin\left(q_1 \frac{\alpha_{1n}}{2} \nu\right)}{q_1 \cdot \sin\left(\frac{\alpha_{1n}}{2} \nu\right)} \tag{B.36a}$$

$$a_{1SpGr}(z, t) = \sum_{\nu=1}^{\inf} A_{1SpGr(\nu)}(t) \sin[\nu z] \tag{B.36b}$$

$$\begin{aligned}
 A_{1SpGr(\nu)}(t) &= q_1 \cdot \xi_{1Z(\nu)} \cdot A_{1Sp(\nu)}(t) = q_1 \cdot \frac{4Z_{1Sp}}{l_2} \cdot i_{1L,Str}(t) \cdot \xi_{1N(\nu)} \xi_{1S(\nu)} \xi_{1Z(\nu)} \\
 w_{1SpGr} &= q_1 \cdot Z_{1Sp} \tag{B.36c}
 \end{aligned}$$

Mit  $w_{1SpGr}$  wird die gesamte Windungszahl der Spulengruppe beschrieben. Man kann nun noch alle bisherigen Faktoren  $\xi$  zu einer mit Wicklungsfaktor bezeichneten Größe  $\xi_{1(\nu)}$  zusammenfassen. Dadurch lässt sich auch der Strombelag kürzer schreiben.

$$A_{1SpGr(\nu)}(t) = \frac{4 \cdot w_{1SpGr}}{l_2} \cdot i_{1L,Str}(t) \cdot \xi_{1(\nu)} \tag{B.37}$$

$$\xi_{1(\nu)} = \xi_{1N(\nu)} \cdot \xi_{1S(\nu)} \cdot \xi_{1Z(\nu)} \tag{B.38}$$

## B.5. Strombelag und Feld eines Wicklungsstrangs mit Spulengruppen

Zur Vervollständigung der Betrachtungen über den Strombelag eines Stranges werden nun die vorhergehenden Ergebnisse zusammengefasst und die Gleichungen für einen

Wicklungsstrang hergeleitet, der aus beliebig vielen Teilspulen und Polen paralleler und/oder serieller Schaltung besteht. Dazu muss lediglich eine Summation des Strombelag einer Spulengruppe über alle Pole erfolgen. Es werden die bisher getroffenen Vereinbarungen für  $z$  und  $i_{1L,Str}$  beibehalten und auf die Herleitung im Abschnitt B.2 angewendet. Es wird wieder in positiver mathematischer Zählrichtung ausgehend von der ersten Spule aufsummiert.

$$a_{1SpGr}(z, t) = \sum_{\nu=1}^{\inf} A_{1SpGr(\nu)}(t) \sum_{k=1}^p \left\{ \sin \left( \nu \left[ z + \frac{2\pi}{p}(k-1) \right] \right) - \sin \left( \nu \left[ z + \frac{\pi}{p}(2k-1) \right] \right) \right\} \quad (\text{B.39})$$

Ebenso wie oben kann man sich dann mit Hilfe der Umformung (B.16) und den trigonometrischen Umformungen der zweiten Summe entledigen. Vor der Grenzwertbildung bildet sich folgender Term:

$$a_{1SpGr}(z, t) = \sum_{\nu=1}^{\inf} \frac{4 \cdot w_{1SpGr}}{l_2} \cdot i_{1L,Str}(t) \cdot \xi_{1(\nu)} \cdot c_1 \cdot \cos a \cdot \cos c \cdot \left[ \sin b \left( 1 - \frac{1}{\cos c} \right) - \frac{\sin c}{\cos c} \cos b \right]$$

$$a = \nu\pi \quad b = \nu z \quad c = \nu \frac{\pi}{p} \quad c_1 = \frac{\sin(\nu\pi)}{\sin\left(\nu \frac{\pi}{p}\right)}$$

Für  $c_1$  gilt dasselbe wie in Abschnitt B.2, für den Ausdruck  $1 - \frac{1}{\cos c}$  wie in Abschnitt B.3. Letztendlich können (mit  $\sin(\nu\pi) = 0 \forall \nu = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) die bisherigen Ergebnisse zusammengefasst und der Strombelag für einen Strang aus  $2p$  Spulengruppen angegeben werden:

$$a_{1Str}(z, t) = \sum_{\substack{\nu=2k+1 \\ k=0,1,2,3,\dots}}^{\inf} \frac{4 \cdot w_{1SpGr}}{l_2} \cdot i_{1L,Str}(t) \cdot \xi_{1(\nu)} \cdot \underbrace{p \frac{\cos(\nu p \pi)}{\cos(\nu p)}}_{\cos^2(\nu p \pi) = (\pm 1)^2} \cdot \cos(\nu p \pi) \cdot \cos(\nu p) 2 \sin(\nu p z)$$

$$a_{1Str}(z, t) = \sum_{\substack{\nu=2k+1 \\ k=0,1,2,3,\dots}}^{\inf} A_{1Str(\nu)}(t) \cdot \sin(\nu p z) \quad (\text{B.40a})$$

$$A_{1Str(\nu)}(t) = \frac{8p \cdot w_{1SpGr}}{l_2} \cdot i_{1L,Str}(t) \cdot \xi_{1(\nu)} \quad (\text{B.40b})$$

## B. Systemgleichungen einer Solenoid-Linearmaschine mit Permanentmagneten

Unter Berücksichtigung von Parallelschaltungen kann man nun analog und nahezu identisch zu dem Gleichungssatz rotierender Maschinen die Terme für einen Strang einer polysolenoidförmigen Linearmaschine angeben:

$i_{1L,Str}$	Leiterstrom des Strangs
$i_{1Str} = a \cdot i_{1L,Str}$	Gesamter Strangstrom
$w_1 = \frac{2p}{a} w_{1SpGr}$	Gesamte Strangwindungszahl
$w_{1SpGr} = q_1 \cdot Z_{1Sp}$	Windungszahl einer Spulengruppe

$$a_{1Str}(z, t) = \sum_{\substack{\nu=2k+1 \\ k=0,1,2,3,\dots}}^{\inf} A_{1,Str(\nu)}(t) \cdot \sin(\nu pz) \quad (\text{B.41a})$$

$$A_{1Str(\nu)}(t) = \frac{4 \cdot w_1}{b_2} \cdot i_{1Str}(t) \cdot \xi_{1(\nu)} \quad (\text{B.41b})$$

$$\nu = 2k + 1; \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\xi_{1(\nu)} = \xi_{1N(\nu)} \cdot \xi_{1S(\nu)} \cdot \xi_{1Z(\nu)} \quad (\text{B.42a})$$

$$\xi_{1S(\nu)} = \sin\left(\nu \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{W_{1Sp}}{\tau_p}\right) \quad (\text{B.42b})$$

$$\xi_{1N(\nu)} = \frac{\sin\left(\nu p \pi \cdot \frac{b_{ns}}{b_2}\right)}{\nu p \pi \cdot \frac{b_{ns}}{b_2}} \quad (\text{B.42c})$$

$${}^6\xi_{1Z(\nu)} = \frac{\sin\left(q_1 \frac{\alpha_{1n}}{2} \nu p\right)}{q_1 \cdot \sin\left(\frac{\alpha_{1n}}{2} \nu p\right)} \quad (\text{B.42d})$$

$$\Theta_{1Str}(z, t) = \sum_{\nu=1}^{\inf} \Theta_{1Str(\nu)}(t) \cdot \cos(\nu pz) \quad (\text{B.43a})$$

$$\Theta_{1Str(\nu)}(t) = \frac{2 \cdot w_1}{\nu p \pi} \cdot i_{1L,Str}(t) \cdot \xi_{1(\nu)} \quad (\text{B.43b})$$

$$B_{1Str}(z, t) = \sum_{\nu=1}^{\inf} B_{1Str(\nu)}(t) \cdot \cos(\nu pz) \quad (\text{B.44a})$$

$$B_{1Str(\nu)}(t) = \frac{\mu_0}{\delta''} \cdot \frac{2 \cdot w_1}{\nu p \pi} \cdot i_{1L,Str}(t) \cdot \xi_{1(\nu)} \quad (\text{B.44b})$$

<sup>6</sup>Durch die Ersetzung von  $\nu$  durch  $\nu'p$  und das anschließende Weglassen des Strichs entsteht auch in diesem Faktor eine Abhängigkeit von p.

## B.6. Strombelag und Feld einer mehrsträngigen Wicklung

Die Erzeugung der Bewegung erfolgt auch beim Linearantrieb durch eine mehrsträngige Wicklung. Die Anzahl der Wicklungsstränge ist allgemein  $m$ . Ein einsträngiges System erzeugt lediglich ein magnetisches Wechselfeld. Eine mehrsträngige Anordnung erzeugt beim Linearantrieb ein Wanderfeld, das dem Drehfeld einer rotierenden Maschine entspricht.

Üblicherweise sind aus Symmetriegründen die Spulen in Nuten untergebracht, die über den Umfang verteilt bzw. hier auf die axiale Länge gesehen gleichverteilt angeordnet sind. Im Gegensatz zur rotierenden Maschine muss allerdings für die Nutanzahl eine besondere Vereinbarung getroffen werden.  $N_1$  ist nicht die gesamte Nutanzahl im Stator, sondern die Anzahl, die der axialen Länge des Movers entspricht. Die gesamte Nutzahl im Stator sei  $N_{1,ges}$  und  $N_1$  ein entsprechender Teil davon. Aus Symmetriegründen ist es sinnvoll, die axiale Länge des Stators um einen Pol zu erhöhen.

Für die Verteilung der Nuten auf die einzelnen Pole und Teilschichten der Stränge ändert sich aber gegenüber einer rotierenden Maschine durch diese Festlegung nichts. Es ist nun vielmehr möglich, die Nutteilung nicht nur durch den räumlichen Winkel, sondern durch die Anzahl der Nuten, Stränge und Pole auszudrücken.

$$N_1 = m \cdot 2p \cdot q_1 \quad (\text{B.45a})$$

$$\tau_{1n} = \frac{l_2}{N_1} = \frac{2p \cdot \tau_p}{m \cdot 2p \cdot q_1} = \frac{\tau_p}{m \cdot q_1} \quad (\text{B.45b})$$

$$\alpha_{1n} = \frac{\tau_{1n}}{l_2} \cdot 2\pi \quad (\text{B.45c})$$

Es wird nun weiter von einem symmetrischen System ausgegangen. Das bedeutet, dass sich die Achsen der Wicklungen der Stränge nur in der räumlichen Lage unterscheiden. Eine elektrische Periode, also  $360^\circ$ , entspricht der axialen Länge eines Polpaares  $l_2/p$  bzw. als Winkel ausgedrückt  $2\pi/p$ . Abhängig von der Anzahl der Stränge werden sie jeweils um den  $m$ -ten Teil dieser Länge bzw. dieses Winkels verschoben.

$$\gamma_{Str} = \frac{2\pi}{m \cdot p}$$

Elektrisch sind dann die Spulen gegeneinander um jeweils  $\frac{2\pi}{3}$  versetzt.

Mit diesen Festlegungen lassen sich nun Strombeläge für die einzelnen Stränge ansetzen. Dazu wird der Strombelag des Strangs  $A$  auf die Position  $z_1$  gelegt. Die weiteren Beläge

müssen dann um einen entsprechenden Winkel verdreht sein.

$$a_{1\circ}(z_1, t) = \sum_{\nu} A_{1N(\nu)}(t) \cdot \sin \left\{ \nu p \left[ z_1 + (n-1) \frac{2\pi}{m \cdot p} \right] \right\} \quad (\text{B.46a})$$

$$\text{mit: } n = [1 : \diamond = A; 2 : \diamond = B; 3 : \diamond = C; \dots; m : \diamond = \text{Alph}(m)]$$

$$A_{1\circ(\nu)}(t) = \frac{4 \cdot w_1}{b_2} \cdot i_{1\circ}(t) \cdot \xi_{1(\nu)} \quad (\text{B.46b})$$

Es wird nun der Dreher eingeführt. Diesen erhält man durch Zerlegung der Sinusfunktionen.

$$\sin(x) = j \cdot \frac{1}{2} [e^{-jx} - e^{jx}]$$

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$a_1(z_1, t) = \frac{4 \cdot w_1}{b_2} \sum_{\nu} \xi_{1(\nu)} \sum_{\diamond} i_{1\circ}(t) \frac{j}{2} [e^{-j\nu p z_1} e^{-j\nu(n-1)\frac{2\pi}{m}} - e^{j\nu p z_1} e^{j\nu(n-1)\frac{2\pi}{m}}]$$

Mit der Festlegung für den Dreher

$$\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{m}}, \quad \underline{a}^x = \left( e^{j\frac{2\pi}{m}} \right)^x = e^{j \cdot x \cdot \frac{2\pi}{m}}, \quad \frac{1}{\underline{a}} = \underline{a}^{(m-1)} \quad (\text{B.47})$$

folgt dann:

$$a_1(z_1, t) = \underbrace{j \frac{2 \cdot w_1}{b_2}}_f \sum_{\nu} \xi_{1(\nu)} \sum_{\diamond} \underbrace{\left[ i_{1\circ}(t) \left( e^{-j\nu p z_1} \underline{a}^{j\nu(n-1)(m-1)} \right) - i_{1\circ}(t) \left( e^{j\nu p z_1} \underline{a}^{j\nu(n-1)} \right) \right]}_s \quad (\text{B.48})$$

Aus der Betrachtung dreisträngiger Systeme ist an dieser Stelle eine Aufspaltung in drei Terme bekannt. Die Aufspaltung kann allerdings auch allgemein in Abhängigkeit von  $m$  angegeben werden. Es muss aber darauf hingewiesen werden, dass bei gerader Strangzahl eine Aufteilung nicht möglich ist. Bei der Aufteilung muss darauf geachtet werden, dass nur Ordnungszahlen  $\nu \in [1, 3, 5, 7, \dots]$  entstehen. Die drei folgenden Gleichungen zeigen die Aufteilung an. Es ergibt sich auch, dass für geradzahlige Strangzahlen die mittlere Gleichung immer herausfällt.

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N} \\ a_1^{(n)}(z_1, t) &= f \sum_{\substack{\nu=m \cdot 2g+c \\ g=0,1,2,\dots}} \xi_{1(\nu)} \sum_{\diamond} S & : \forall n > \frac{m}{2} \\ c &= [1, 3, 5, \dots, 2k+1] \forall 2k-1 < m; k = [1, 2, 3, \dots] \\ a_1^{(n)}(z_1, t) &= f \sum_{\substack{\nu=m(2g+1) \\ g=0,1,2,\dots}} \xi_{1(\nu)} \sum_{\diamond} S & : \forall n = \frac{\sum m}{m} \\ a_1^{(n)}(z_1, t) &= f \sum_{\substack{\nu=m \cdot 2g+c \\ g'=g+c}} \xi_{1(\nu)} \sum_{\diamond} S & : \forall n < \frac{m}{2} \\ c &= [1, 3, 5, \dots, 2k+1] \forall 2k-1 < m; k = [1, 2, 3, \dots] \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Koeffizienten  $c$  immer positive Vorzeichen haben und bei ungeraden Strangzahlen Werte von 1 bis  $\frac{m}{2}$  oder maximal bis zur nächstkleineren Ganzzahl annehmen. Die Bildung der Terme  $k$  ergibt sich aus der Betrachtung der Strangzahl. Jeweils der erste Strang neben der Mitte erhält  $k = 1$ , der zweite  $k = 2$  und die folgenden werden analog bezeichnet. Daher kann man von einem ähnlichen Bildungsgesetz für den ersten und dritten Ausdruck sprechen (vgl. [89]). Unabhängig von gerade und ungerade gilt  $m \cdot g' + 1 = -(m \cdot g - 1)$  wenn  $g' = -g$ . Dadurch folgt aber für den dritten Ausdruck, dass  $\nu' = -\nu$  ist. Eine Überprüfung der Wicklungsfaktoren, die  $\nu$ -abhängig sind, ergibt jedoch analog zu [89] immer  $\xi_{1(\nu)} = -\xi_{1(\nu')}$ <sup>7</sup>. Letztendlich kann man folgern, dass alle Terme der ersten Gruppe mit einem Term der dritten Gruppe paarweise identisch sind.

Wie erwähnt, muss man beachten, dass die Bildungsgesetze nur für ungeradzahlige Strangzahlen komplett gelten. Bei geradzahligen Systemen entfällt der zweite Ausdruck, da dieser zu geraden Ordnungszahlen führen würde.

---

<sup>7</sup> $\xi_{1N(\nu)}$  und  $\xi_{1Z(\nu)}$  sind nicht vorzeichenempfindlich bzgl.  $\nu$ . Nur  $\xi_{1S(\nu)}$  wechselt mit dem Vorzeichen von  $\nu$  auch sein eigenes.

Der Gesamtstrombelag lässt sich nun wie folgt aufstellen:

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_1(z_1, t) = \sum_{n=1}^m a_1^{(n)}(z_1, t) \quad (\text{B.49a})$$

$$a_1^{(n)}(z_1, t) = f \sum_{\substack{\nu_D = m \cdot 2g + c \\ g=0, \pm 1, \pm 2, \dots}} \xi_{1(\nu)} \sum_{\diamond} S \quad : \forall n \neq \frac{\sum m}{m} \quad (\text{B.49b})$$

$$c = [1, 3, 5, \dots, 2k + 1] \forall 2k - 1 < m; k = [1, 2, 3, \dots]$$

$$a_1^{(n)}(z_1, t) = f \sum_{\substack{\nu_{\sim} = m(2g+1) \\ g=0, 1, 2, \dots}} \xi_{1(\nu)} \sum_{\diamond} S \quad : \forall n = \frac{\sum m}{m} \quad (\text{B.49c})$$

Man sieht deutlich, dass bei ungerader Strangzahl Wechselstromanteile auftreten bzw. bei gerader Strangzahl ausbleiben. Bei  $\nu_D$  und  $\nu_{\sim}$  spricht man allgemein von Drehstromordnungs- und Wechselstromordnungszahlen. Da allgemein für die Dreher gilt, dass Vielfache der Strangzahl bei den Ordnungszahlen zu  $\underline{a}^{n \cdot m \nu} = 1$  führen, kann man allgemein einen Raumzeiger der Statorströme und eine Wechselgröße der Statorströme definieren:

$$\begin{aligned} \vec{i}_1(t) &= \frac{1}{m} \sum_{\diamond} i_{1\diamond}(t) \underline{a}^{n-1} \\ \tilde{i}_1(t) &= \frac{1}{m} \sum_{\diamond} i_{1\diamond}(t) \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

Wendet man nun den Raumzeiger und den konjugiert komplexen Raumzeiger<sup>8</sup> an, erhält man schließlich den allgemeinen Drehstrombelag und den allgemeinen Wechselstrombelag.

$$\begin{aligned} a_1^D(z_1, t) &= j \frac{2m \cdot w_1}{l_2} \sum_{\nu_D} \xi_{1(\nu_D)} \left[ \vec{i}_1(t) e^{-j\nu_D p z_1} - \vec{i}_1^*(t) e^{j\nu_D p z_1} \right] \\ a_1^{\sim}(z_1, t) &= \frac{2 \cdot 2m \cdot w_1}{l_2} \sum_{\nu_{\sim}} \xi_{1(\nu_{\sim})} \tilde{i}_1(t) \sin(\nu p z_1) \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

Die Ergebnisse sind denjenigen rotierender Maschinen sehr ähnlich. Unterschiede zu

<sup>8</sup>Da der erste Strang auf der Realachse liegt, erhält man das konjugiert Komplexe durch Vertauschen der Richtungen der Drehzeiger bei den nachfolgenden Strängen. Die Folge ABC muss dann in ACB oder ABCD in ADCB übergehen. Bei gerader Strangzahl bleibt der Strang, der genau in negativer Realachse liegt unverändert.



[60] und [89] bestehen im veränderten Bezug des geometrischen Winkels auf eine axiale Länge und in der allgemeinen Definition der Stränge.

$$a_1^D(z_1, t) = \sum_{\nu_D} \left[ \vec{a}_{1(\nu)}^D(z_1, t) - \vec{a}_{1(\nu)}^{D*}(z_1, t) \right] \quad (\text{B.52a})$$

$$a_1^{\sim}(z_1, t) = \sum_{\nu_{\sim}} A_{1(\nu_{\sim})}(t) \sin(\nu_{\sim} p z_1) \quad (\text{B.52b})$$

$$\vec{a}_{1(\nu_D)}^D(z_1, t) = \vec{A}_{1(\nu_D)}(t) e^{-j\nu_D p z_1} \quad (\text{B.52c})$$

$$\vec{A}_{1(\nu_D)} = j \frac{2m \cdot w_1}{l_2} \xi_{1(\nu_D)} \vec{i}_1(t) \quad (\text{B.52d})$$

$$A_{1(\nu_{\sim})} = \frac{2 \cdot 2m \cdot w_1}{l_2} \xi_{1(\nu_D)} \tilde{i}_1(t) \quad (\text{B.52e})$$

$$\nu_D = m \cdot 2g + c \quad \nu_{\sim} = m(2g + 1) \quad (\text{B.52f})$$

$$g_D = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad g_{\sim} = 0, 1, 2, \dots$$

$$c = [1, 3, 5, \dots, 2k + 1] \quad \forall 2k - 1 < m; \quad k = [1, 2, 3, \dots]$$

Die gezeigten Ausführungen lassen sich nun gleichermaßen wie für einen Strang auch für m Stränge auf das magnetische Feld anwenden. Es wird wieder die Integration über den Strombelag ausgeführt, um auf die Durchflutung zu kommen und diese dann in das magnetische Feld überführt. Aus den Gleichungen (B.9) und (B.13) sowie den Zusammenhängen  $\int e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax}$ ,  $\frac{1}{j} = -j$  und  $j^2 = -1$  folgt daher:

$$B_1^D(z_1, t) = \sum_{\nu_D} \left[ \vec{B}_{1(\nu)}^D(z_1, t) + \vec{B}_{1(\nu)}^{D*}(z_1, t) \right] \quad (\text{B.53a})$$

$$B_1^{\sim}(z_1, t) = \sum_{\nu_{\sim}} B_{1(\nu_{\sim})}(t) \cos(\nu_{\sim} p z_1) \quad (\text{B.53b})$$

$$\vec{B}_{1(\nu_D)}^D(z_1, t) = \vec{B}_{1(\nu_D)}(t) e^{-j\nu_D p z_1} \quad (\text{B.53c})$$

$$\vec{B}_{1(\nu_D)} = \frac{\mu_0 m \cdot w_1}{\delta'' \nu_D \pi p} \xi_{1(\nu_D)} \vec{i}_1(t) \quad (\text{B.53d})$$

$$B_{1(\nu_{\sim})} = \frac{2m \cdot w_1}{\nu_{\sim} \pi p} \xi_{1(\nu_D)} \tilde{i}_1(t) \quad (\text{B.53e})$$

## B.7. Erregung der Wicklung durch ein symmetrisches Drehspannungssystem

Ein allgemeines Drehspannungssystem wird durch  $m$  Stränge erzeugt. Die Phasenlagen der erregenden Spannungen sind jeweils analog zur räumlichen Verteilung der Spulen zueinander um  $\frac{2\pi}{m}$  versetzt. Das System wird folgendermaßen definiert:

$$u_{1\circ}(t) = U_{1\circ}\sqrt{2}\cos(2\pi f_1 \cdot t + \varphi_{1u} + (n-1)\frac{2\pi}{m}) \quad (\text{B.54})$$

$$\diamond = [A, B, C, D, \dots]$$

$$n = [1 : \diamond = A; 2 : \diamond = B; 3 : \diamond = C; \dots; m : \diamond = Alph(m)]$$

Dabei stellen  $f_1$  die Speisefrequenz,  $U_1$  den Scheitelwert und  $\varphi_{1u}$  eine Phasenkorrektur dar.

Da die Last durch das Wicklungssystem, welches als symmetrisch vorausgesetzt wurde, ebenfalls symmetrisch ist, ergibt sich für die Ströme des Drehstromsystems:

$$i_{1\circ}(t) = I_{1\circ}\sqrt{2}\cos(2\pi f_1 \cdot t + \varphi_{1i} + (n-1)\frac{2\pi}{m}) \quad (\text{B.55})$$

Wie bei der Untersuchung des Wicklungssystems kann wieder eine Aufspaltung in e-Funktionen und die Einführung eines Drehers erfolgen (ohne  $j$  da diesmal der Kosinus aufgespalten wird):

$$i_{1\circ}(t) = I_{1\circ}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{-j(2\pi f_1 \cdot t + \varphi_{1i})}a^{(m-1)(n-1)} + e^{j(2\pi f_1 \cdot t + \varphi_{1i})}a^{(n-1)}\right) \quad (\text{B.56})$$

Es kann nun gezeigt werden, dass für alle Strangzahlen das Einsetzen in die Raumzeigergleichung immer zu einem  $m$ -fachen  $e^{jx}$  Term und einem Nullterm führt. Für den Wechselstromanteil führt das Einsetzen der Stromdefinition immer zu Null. Folglich entfallen  $\tilde{A}_{1(\nu\sim)}(t)$  und  $\tilde{B}_{1(\nu\sim)}(t)$ . Übrig bleibt ein Drehstrom mit zugehörigem Strombelag und Feld:

$$\begin{aligned} \vec{i}_1(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{I}_1 e^{j2\pi f_1 t} \\ \underline{I}_1 &= I_1 e^{j\varphi_{1i}} \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

Mit  $\nu = \nu_D$  ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}_{1(\nu_D)}(z_1, t) &= j\frac{2m \cdot w_1}{b_2}\xi_{1(\nu_D)}\frac{\sqrt{2}}{2}I_1 e^{-j(\nu_D p z_1 + 2\pi f_1 t + \varphi_{1i})} \\ \vec{B}_{1(\nu_D)}(z_1, t) &= \frac{\mu_0 m \cdot w_1}{\delta'' \nu_D p \pi}\xi_{1(\nu_D)}\frac{\sqrt{2}}{2}I_1 e^{-j(\nu_D p z_1 + 2\pi f_1 t + \varphi_{1i})} \end{aligned} \right\} \nu = \nu_D \quad (\text{B.58})$$

Die Strangzahl spielt im Strom keine Rolle mehr. Sie kürzt sich heraus. Die Raumzeigergleichung bringt  $\frac{1}{m}$  mit, und aus dem Einsetzen der Strangströme erhält man  $m \cdot e^{jx}$ .

Abschließend kann man den gesamten Statorstrombelag und das von der Statorwicklung hervorgerufene Feld angeben (Einsetzen von (B.57) in (B.52a)):

$$a_{1(\nu)}(z_1, t) = \sum_{\nu=\nu_D}^{\text{inf}} A_{1(\nu)} \sqrt{2} \sin(\nu\pi pz_1 + 2\pi f_1 t + \varphi_{1i}) \quad (\text{B.59a})$$

$$A_{1(\nu_D)} = 2 \cdot \frac{2m \cdot w_1}{l_2} \xi_{1(\nu_D)} \frac{1}{2} \cdot I_1 = \frac{2m \cdot w_1}{l_2} \xi_{1(\nu_D)} \cdot I_1 \quad (\text{B.59b})$$

$$B_{1(\nu_D)}(z_1, t) = \sum_{\nu=\nu_D}^{\text{inf}} B_{1(\nu)} \sqrt{2} \cos(\nu\pi pz_1 + 2\pi f_1 t + \varphi_{1i}) \quad (\text{B.60a})$$

$$B_{1(\nu_D)} = \frac{\mu_0}{\delta''} \cdot \frac{m \cdot w_1}{\nu p \pi} \xi_{1(\nu_D)} \cdot I_1 \quad (\text{B.60b})$$

## B.8. Ersatzdurchflutung von Permanentmagneten

Die Bestimmung des Permanentmagnetfelds erfolgt ausgehend von der Arbeitspunktfestlegung mit Hilfe einer sogenannten Scherungsgeraden [47]. Hierzu wird zunächst auf Grundlage des Durchflutungsgesetzes  $\oint \vec{H} d\vec{s} = \Theta$  das Umlaufintegral für den magnetischen Kreis aus Sicht des Magneten aufgestellt. Das Umlaufintegral bestimmt sich dabei wesentlich aus dem geometrischen Aufbau von Läufer und Stator und der Anordnung der Magnete.

Für den Lineargenerator werden zwei Konfigurationen betrachtet (vgl. Abb. B.2), die auf Grund ihrer konstruktiven Einfachheit bevorzugt werden. Dies ist einmal die Aufbringung von radial bzw. parallel, nach außen gerichtet magnetisierten Oberflächenmagneten, die wegen mechanischer Stabilität unter Umständen teilweise versenkt oder vergraben werden müssen. Andererseits sind Magnetringe denkbar, deren Innen- und Außendurchmesser dem des Läufers entsprechen und axial magnetisiert sind. Die Nachrechnung für Magnete in Halbacht-Anordnung vollzieht sich dann analog unter Anwendung der vorgestellten Methodik.

In beiden Fällen gibt es bei der Berechnung des magnetischen Kreises Teile, die identisch sind und solche, die voneinander abweichen. Bei Oberflächenmagneten wird der magnetische Rückschluss über zwei gegensinnig magnetisierte Magnete erfolgen, wobei jeweils nur immer die Hälfte eines jeden Magneten (in axialer Richtung) zur

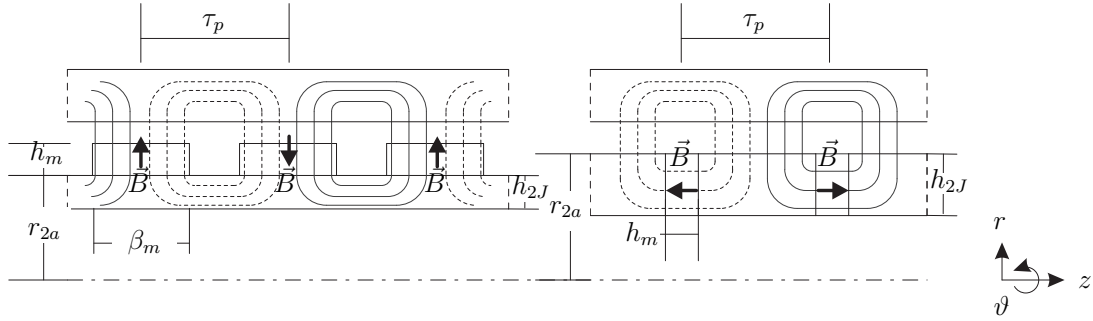


Abb. B.2.: Abmessungen und Flussverläufe grundlegender Magnetanordnungen im Läufer

Ausprägung des Flusses tatsächlich beiträgt. Bei axialer Anordnung hingegen erfolgt die Berechnung basierend auf einem kompletten Ringstück. Dafür schließt sich der Fluss nur über einem Teil des Eisens.

Für magnetische Kreise, die wie oben als Erregung nur Permanentmagnete enthalten, gilt unter Berücksichtigung der geometrischen Anordnung Folgendes:

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \begin{cases} 2 \cdot H_m \cdot h_m + 2 \cdot H_\delta \cdot \delta' + V_{Fe} \\ 1 \cdot H_m \cdot h_m + 2 \cdot H_\delta \cdot \delta' + V_{Fe} \end{cases} = \Theta = \sum I_{ein} = 0 \quad (\text{B.61})$$

Dabei gilt die obere Gleichung für Oberflächenmagnete, die zweite für Magneten in Sammleranordnung.  $\delta'$  ist hierbei der resultierende Luftspalt unter Berücksichtigung des Magneten als Luft sowie des Carter-Faktors.

$$\delta' = k_c \cdot \delta_{geo} + \delta_m \quad (\text{B.62})$$

$\delta_{geo}$  ist die Länge des geometrischen Luftspalts zwischen dem radial äußersten Punkt des Läufers und dem radial innersten des Stators,  $\delta_m$  ist der parasitäre Luftspalt zwischen Magnet und den fließführenden Läuferanteilen. Der Carter-Faktor  $k_c$  beschreibt den Einfluss der Nutung auf den Luftspalt. Genauer gesagt ist dies das Verhältnis aus der maximalen Induktion im Luftspalt und der maximalen Induktion der idealisierten Feldkurve (blockförmiger Verlauf). Letztendlich werden durch den Faktor die Einsattelungen des Feldes über dem Nutschlitz berücksichtigt. Sie lassen sich als Reduktion der mittleren Flussdichte bzw. als eine Vergrößerung des Luftspalts beschreiben.  $k_c$  bestimmt sich in der Polmitte nach [100] aus:

$$k_c = \frac{\tau_n}{\tau_n - \gamma \cdot \delta_{geo}} \quad (\text{B.63})$$

mit:  $\gamma = \frac{\left(\frac{b_{ns}}{\delta_{geo}}\right)^2}{5 + \frac{b_{ns}}{\delta_{geo}}}$

Bei der Verwendung des resultierenden Luftspalts wird davon ausgegangen, dass die Nutzschlitzbreite wesentlich größer als die Luftspaltweite ist, die Nuten unendlich tief sind und der Spannungsabfall im Eisen vernachlässigbar klein ist. Diesen berücksichtigt man entweder durch tatsächliche analytische Abschätzung oder durch den Eisenfaktor  $k_{m Fe}$ . Würde man schließlich noch die sättigungsbedingte Abflachung der Feldkurve durch einen Abflachungsfaktor  $k_{m Abfl}$  berücksichtigen, kann man vom effektiven Luftspalt  $\delta''$  sprechen. Im vorliegenden Fall soll davon ausgegangen werden, dass  $\mu_r$  konstant ist und keine Sättigung eintritt. Daher ist der effektive Luftspalt hier gleich dem resultierenden.

Bleibt man bei der Annahme, dass im Eisen kein magnetischer Spannungsabfall auftritt, wird  $k_{m Fe}$  zu 1, ansonsten größer 1 und damit der effektive Luftspalt größer. In diesem Fall ergibt sich die Spannung im Eisen aus der Vorgabe eines Flusses im Zahn respektive einer maximalen Zahninduktion. Aus der B-H-Kennlinie kann man dann über den gewählten Arbeitspunkt und die mittlere Länge des Flußwegs die Spannung abschätzen.

Es kann nun wie folgt geschrieben werden:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot H_m \cdot h_m + 2 \cdot H_\delta \cdot \delta_{eff} \\ 1 \cdot H_m \cdot h_m + 2 \cdot H_\delta \cdot \delta_{eff} \end{array} \right\} = 0$$

$$\delta_{eff} = k_{m Fe} \cdot \delta' \tag{B.64}$$

mit:  $k_{m Fe} = 1 + \frac{V_{Fe}}{2 \cdot H_\delta \cdot \delta'}$

Umstellen ergibt dann das Feld im Luftspalt:

$$H_\delta = \begin{cases} -\frac{h_m}{\delta_{eff}} H_m \\ -\frac{h_m}{2\delta_{eff}} H_m \end{cases} \tag{B.65}$$

Mit

$$\Phi_\delta = \Phi_m(1 - \sigma) \quad \sigma : \text{Streuziffer} \tag{B.66}$$

folgt

$$A_m B_m (1 - \sigma) = A_\delta \mu_0 \cdot \begin{cases} -\frac{h_m}{\delta_{eff}} H_m \\ -\frac{h_m}{2\delta_{eff}} H_m \end{cases}$$

Wie oben erwähnt, muss ggf. zunächst eine Abschätzung der magnetischen Spannungsabfälle im Eisen erfolgen, bevor  $\delta_{eff}$  angesetzt werden kann.

Durch Umstellen kann nun eine sogenannte Scherungsgerade hergeleitet werden, die das magnetische Verhalten des magnetischen Kreises in Abhängigkeit der Geometrie widerspiegelt. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Entmagnetisierungskurve des Magneten ergibt den Arbeitspunkt des Magneten. Durch Vorgabe einer Wunscharmagnetisierung im Luftspalt zur Erreichung der geforderten maximalen Flußdichte im Zahn kann so der Magnet ausgelegt werden. Auf eine Berücksichtigung von Zahnentlastung und Ankerrückwirkung wird an dieser Stelle verzichtet.

$$B_m = -k_{SG}H_m \quad (\text{B.67a})$$

$$k_{SG} = \mu_0 \frac{A_\delta}{A_m} \left\{ \begin{array}{c} \frac{h_m}{\delta_{eff}} \\ \frac{h_m}{2\delta_{eff}} \end{array} \right\} \cdot \frac{1}{1 - \sigma} \quad (\text{B.67b})$$

Die eigentlich nicht lineare Kennlinie des Magneten kann durch eine Gerade

$$B_m = B_r + \mu_0\mu_r H_m \quad (\text{B.68})$$

abgebildet werden. Die permanente Permeabilität  $\mu_r$  liegt nahe 1. Die Koerzitivfeldstärke  $H_K$  entspricht nicht dem Schnittpunkt der Geraden mit der H-Achse.

Durch Gleichsetzen der Geradengleichung mit derjenigen der Scherungsgeraden kann man den Arbeitspunkt des Permanentmagneten ermitteln, woraus sich die Luftspaltinduktion ergibt. Im Umkehrschluss kann man auch - wie oben eingeführt - diese vorgeben und die Abmessungen des Magneten bestimmen, die notwendig sind, diese hervorzurufen.

$$\begin{aligned} B_m &= -k_{SG}H_m = B_r + \mu_0\mu_r H_m \\ H_{mAP} &= \frac{-B_r}{k_{SG} + \mu_0\mu_r} \\ B_{mAP} &= \frac{k_{SG}B_r}{k_{SG} + \mu_0\mu_r} \\ B_{\delta AP} &= \mu_0 \left\{ \begin{array}{c} -\frac{h_m}{\delta_{eff}} \\ \frac{h_m}{2\delta_{eff}} \end{array} \right\} \frac{-B_r}{k_{SG} + \mu_0\mu_r} \quad \text{aus (B.65)} \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

Zur Vollständigkeit sei nun auch noch der Luftspaltfluss für den Arbeitspunkt des

Magneten angegeben:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\delta AP} &= (1 - \sigma)\Phi_{mAP} \\
 \Phi_{\delta AP} &= (1 - \sigma)B_{mAP}A_m \\
 \Phi_{\delta AP} &= (1 - \sigma)\frac{k_{SG}B_r}{k_{SG} + \mu_0\mu_r} \cdot \begin{cases} 2\pi \cdot (r_{2a} + h_m)\beta_m \\ \pi \cdot [r_{2a}^2 - (r_{2a} - h_{2J})^2] \end{cases} \quad (\text{B.70})
 \end{aligned}$$

Für die spätere Kombination mit dem bereits beschriebenen Statorfeld muss das Feld der Magneten durch Einführung einer mechanischen Verschiebung<sup>9</sup>  $z_m$  in das statorfeste Koordinatensystem überführt werden. Dabei gilt  $z_2 = z_1 - z_m$ . Dadurch kann auch das Läuferfeld in Form eines Drehzeigers in Abhängigkeit von  $z_1$  dargestellt werden.

$$\vec{B}_{\delta m} = B_{\delta AP} e^{-jp\nu(z_1 - z_m)} \quad (\text{B.71})$$

Dabei wurde die Polpaarzahl bereits mit berücksichtigt.

Die bisherige Ableitung der Flussdichte basiert auf der Annahme eines gleichmäßig rechteckigen Verlaufs des Feldes. Bei beiden Magnetanordnungen ist jedoch davon auszugehen, dass der Feldverlauf durch Feldaufweitung eher trapezförmig aussieht. Der reale Verlauf kann jedoch durch eine Fourier-Zerlegung analog zum Statorfeld angenähert werden.

Bei der idealisierten Feldform handelt es sich um eine  $2\pi$ -periodische Funktion, die gerade ist und keinen Gleichanteil besitzt. Damit kann folgendes angesetzt werden, wenn davon ausgegangen wird, dass mit  $\beta_m$  die axiale Länge bezeichnet wird, worüber der Fluss in den Luftspalt tritt. Weiter wird wie im Abschnitt B.1 das Sprungstellenverfahren angewendet.

$$B_2(z, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{\delta m(\nu)} \cdot \cos(\nu pz) \quad (\text{B.72})$$

$$\text{mit: } B_{\delta m(\nu)} = \frac{2}{\nu\pi} \sum_k B_{\delta m} \cdot \sin\left(\nu \frac{z_k}{2}\right)$$

$$\text{und: } z_k = \frac{\beta_m}{l_2} \text{ wobei: } \beta_m \text{ in [m]}$$

Unter Berücksichtigung der vorhandenen Pole folgt daraus:

$$B_{\delta m(\nu)} = \frac{2}{\nu\pi} B_{\delta m} \cdot \sin\left(\nu p \pi \frac{\beta_m}{l_2}\right) \quad \text{für: } p \geq 1$$

$$B_2(z, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{\delta m(\nu)} \cdot \cos(\nu pz) \quad \text{für: } p \geq 1$$

---

<sup>9</sup>Diese entspricht dem Polradwinkel bei rotierenden Maschinen.

Weiter kann man nun die Ergebnisse aus der Arbeitspunktbestimmung des Magneten mit einbinden:

$$\vec{B}_{\delta m(\nu)} = \frac{2}{\nu\pi} \mu_0 \left\{ \begin{array}{c} \frac{h_m}{\delta_{eff}} \\ \frac{h_m}{2\delta_{eff}} \end{array} \right\} \frac{B_r}{k_{SG} + \mu_0\mu_r} \sin(\nu p\pi \frac{\beta_m}{l_2}) \underbrace{e^{-j\nu p(z_1 - z_m)}}_{e^{j\nu p z_m} e^{-j\nu p z_1}}$$

Nach dem Umformen des Ausdrucks sieht dieser folgendermaßen aus:

$$\vec{B}_{\delta m(\nu)} = (1 - \sigma) \frac{A_m}{A_\delta} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{\mu_r(1 - \sigma) \frac{\delta_{eff} A_m}{h_m A_\delta} + 1} \\ \frac{1}{\mu_r(1 - \sigma) \frac{2\delta_{eff} A_m}{h_m A_\delta} + 1} \end{array} \right\} \cdot \frac{2}{\nu\pi} \cdot \sin(\nu p\pi \frac{\beta_m}{l_2}) \cdot B_r e^{j\nu p z_m} e^{-j\nu p z_1}$$

In Anlehnung an die Steigung  $k_{SG}$  der Scherungsgeraden kann man einen neuen Faktor definieren, wodurch sich einerseits der Term kürzer schreiben lässt, der aber auch ein Maß für den Arbeitspunkt des Magneten in Abhängigkeit der geometrischen Größen und der relativen Permeabilität des Magneten darstellt:

$$\chi_m = \left\{ \begin{array}{c} \mu_r(1 - \sigma) \frac{\delta_{eff} A_m}{h_m A_\delta} \\ \mu_r(1 - \sigma) \frac{2\delta_{eff} A_m}{h_m A_\delta} \end{array} \right\} \quad (B.73)$$

$$\vec{B}_{\delta m(\nu)} = (1 - \sigma) \frac{A_m}{A_\delta} \cdot \frac{1}{\chi_m + 1} \cdot \frac{2}{\nu\pi} \cdot \sin(\nu p\pi \frac{\beta_m}{l_2}) \cdot B_r e^{j\nu p z_m} e^{-j\nu p z_1} \quad (B.74)$$

Abschließend wird nun das soeben hergeleitete Feld mit dem Statorfeld überlagert:

$$\vec{B}_{\delta(\nu)}(z_1, t) = \left( \frac{\mu_0}{\delta''} \frac{m \cdot w_1}{\nu p\pi} \xi_{1(\nu)} \cdot \vec{i}_1(t) + (1 - \sigma) \frac{A_m}{A_\delta} \cdot \frac{1}{\chi_m + 1} \cdot \frac{2}{\nu\pi} \cdot \sin(\nu p\pi \frac{\beta_m}{l_2}) \cdot B_r e^{j\nu p z_m} \right) e^{-j\nu p z_1} \quad (B.75)$$

### B.8.1. Ableitung der überlagerten Größen

Zur weiteren Nachrechnung ist die Bestimmung der Induktivitäten respektive zunächst der Flüsse notwendig. Danach kann das 1D-Ersatzschaltbild (Systemgleichungen und stationärer Betrieb) abgeleitet werden und weiter die Schubkraft bzw. die Leistung der Maschine.



Im ersten Schritt erfolgt die Berechnung des magnetische Flusses der Statorwicklung. Wie für Spulen üblich berechnet man also den mit einem Strang verketteten Fluss  $\psi$ . Im Gegensatz zum magnetischen Fluss  $\Phi$ , der bei einer Spule den Fluss darstellt, den eine Windung hervorruft (daher auch Windungsfluss genannt), ist der verkettete Fluss eine Rechengröße zur Abschätzung der Gesamtwirkung aller Windungen [60]. Grundsätzlich wird der verkettete Fluss ähnlich dem magnetischen Fluss als Integral der Induktion über die durchsetzte Fläche ermittelt. Die Verkettung mit der Windungszahl entsteht dadurch, dass man die vom Fluss durchsetzte Querschnittsfläche mit der Anzahl der Windungen der Spule multipliziert.

Im Falle des zylinderförmigen Linearmotors wird aus dem Zweifachintegral  $\psi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$  ein einfaches Integral über eine axiale Länge. Das differentielle Flächenelement vereinfacht sich, da die Fläche vom Durchmesser bzw. Umfang der Bohrung abhängt. Mit  $w_1$  als der Strangwindungszahl und  $q_1$  als der Anzahl der Spulenseiten je Strang kann man für den verketteten Fluss einer Spule Folgendes ansetzen:

$$\psi_{1H} = \frac{2p}{a} \cdot \sum_{n=1}^{q_1} \frac{Z_{1Sp}}{2} \int_{z=z_{links}}^{z_{rechts}} B_1(z, t) \pi D_{1i} dz \quad (\text{B.76})$$

mit:  $dz = dz_{geo} \cdot \frac{l_2}{2\pi}$

Da die Spulen eines Strangs alle zeitgleich mit demselben Strom beaufschlagt werden, reicht die Integration über eine Einzelspule. Durch eine Summation über die Spulen eines Strangs erhält man dann den Fluss durch diesen für einen Pol. Durch Multiplikation mit der Anzahl der Pole ergibt sich der Gesamtfluss in der Maschine. Wenn man mit  $a$  noch die Anzahl paralleler Stränge bezeichnet und das Ergebnis durch diese Größe teilt, sind alle Verschaltungsvarianten mit berücksichtigt. Die parallelen Leiter in einer Nut können implizit in das Produkt  $w \cdot I$  eingehen. Die Festlegung der Integrationsgrenzen erfolgt analog wie bei der Berechnung des Statorstrombelags. Es wird darauf hingewiesen, dass die Beschreibung für gezonte Ganzlochwicklungen gedacht ist. Weitere Wicklungstypen können jedoch durch Auflösen der Summe und Anpassung der Integrationsgrenzen einfach dargestellt werden. Die Grenzen für eine gezonte Ganzlochwicklung sehen wie folgt aus:

$$z_{links} = -\frac{W_{1Sp} \cdot \pi}{l_2} - \frac{1}{2}(q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi + n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \quad (\text{B.77a})$$

$$z_{rechts} = \frac{W_{1Sp} \cdot \pi}{l_2} - \frac{1}{2}(q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi + n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \quad (\text{B.77b})$$

$$n = [1 \dots q_1]$$

Es ist zu beachten, dass alle Abstände metrisch sind und auf die Läuferlänge bezogen werden, um mit Winkeln rechnen zu können. Für  $z$ ,  $z_1$  und  $z_m$  gilt, dass diese einen

Winkel im Bogenmaß darstellen,  $z_{geo}$  hingegen ist die tatsächliche metrische Länge. Auf eine Berücksichtigung der Verschiebung des Winkels zwischen den einzelnen Strängen wurde hier bewusst verzichtet, da diese durch Addieren von  $\frac{2}{3} \frac{\pi}{p} (m-1)$  für den jeweiligen Strang  $m$  leicht erzeugt werden kann. Es sei darauf hingewiesen, dass die Betrachtung von Bruchlochwicklungen durch geeignete Wahl der Integrationsgrenzen der einzelnen Teilsulen analog zur obigen Summendarstellung realisiert werden kann. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich jedoch im weiteren Verlauf mit Einzahnwicklungen, für die keine besondere und aufwändige Integration notwendig ist. Die Beschränkung rührt daher, dass Kern der Arbeit nicht der Entwurf und die allgemeine Beschreibung aller Wicklungsmöglichkeiten ist, sondern vielmehr die Untersuchung der Eignung von Optimierungsalgorithmen für die Betrachtung von Systemoptimierungen. Daher wird für das System die Einzahnwicklung als Randbedingung (Vorgabe) angesehen.

Zur weiteren Berechnung ist die Auswertung des Integrals erforderlich. Das B-Feld im Luftspalt bildet sich aus der Summe von Stator und Rotorfeld. Auf Grund der praktischen Relevanz wird ab sofort auf die allgemeine Mitführung der Strangzahl verzichtet und die Existenz einer dreisträngigen Wicklung angenommen. Mit (B.75) und

$$B = \vec{B} + \vec{B}^* = (c_1 \vec{i}_1 + c_2 e^{j\nu p z_m}) e^{-j\nu p z_1} + (c_1 \vec{i}_1^* + c_2 e^{-j\nu p z_m}) e^{j\nu p z_1} \quad (\text{B.78})$$

$$c_1 = \frac{\mu_0}{\delta''} \frac{3 \cdot w_1}{\nu p \pi} \xi_1(\nu)$$

$$c_2 = (1 - \sigma) \frac{A_m}{A_\delta} \cdot \frac{1}{\chi_m + 1} \cdot \frac{2}{\nu \pi} \cdot \sin(\nu p \pi \frac{\beta_m}{b_2}) \cdot B_r$$

kann man das Integral lösen:

$$\begin{aligned} G &= \int_{z=z_{links}}^{z_{rechts}} B_1(z, t) dz \\ &= \int_{z=z_{links}}^{z_{rechts}} (c_1 \vec{i}_1 + c_2 \cdot e^{j\nu p z_m}) \cdot e^{-j\nu p z_1} + (c_1 \vec{i}_1^* + c_2 \cdot e^{-j\nu p z_m}) \cdot e^{j\nu p z_1} dz \end{aligned}$$

Mit  $\vec{i}_1 \neq f(z_1)$  folgt:

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{1}{-j\nu p} (c_1 \vec{i}_1 + c_2 \cdot e^{j\nu p z_m}) \cdot e^{-j\nu p z_1} \begin{array}{l} z_{rechts} \\ z_{links} \end{array} + \\
 &\quad \frac{1}{j\nu p} (c_1 \vec{i}_1^* + c_2 \cdot e^{-j\nu p z_m}) \cdot e^{-j\nu p z_1} \begin{array}{l} z_{rechts} \\ z_{links} \end{array} \\
 &= \frac{j}{\nu p} \left[ (c_1 \vec{i}_1 + c_2 \cdot e^{j\nu p z_m}) \left( e^{-j\nu p z_{rechts}} - e^{-j\nu p z_{links}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + (c_1 \vec{i}_1^* + c_2 \cdot e^{j\nu p z_m}) \left( e^{j\nu p z_{links}} - e^{j\nu p z_{rechts}} \right) \right] \\
 &= \frac{j}{\nu p} \left[ (c_1 \vec{i}_1 + c_2 \cdot e^{j\nu p z_m}) \left( e^{-j\nu p \left( \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi - \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi + n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - e^{-j\nu p \left( -\frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi - \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi + n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + (c_1 \vec{i}_1^* + c_2 \cdot e^{-j\nu p z_m}) \left( e^{j\nu p \left( -\frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi - \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi + n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - e^{j\nu p \left( \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi - \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi + n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und Betrachten der Terme getrennt nach  $c_1$  und  $c_2$  liefert nun:

$$\begin{aligned}
 F1 &= + c_2 \cdot e^{j\nu p z_m} \cdot e^{-j\nu p \left( \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi - \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi + n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} \\
 &\quad - c_2 \cdot e^{j\nu p z_m} \cdot e^{-j\nu p \left( -\frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi - \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi + n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} \\
 &\quad + c_2 \cdot e^{-j\nu p z_m} \cdot e^{j\nu p \left( -\frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi - \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi + n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} \\
 &\quad - c_2 \cdot e^{-j\nu p z_m} \cdot e^{j\nu p \left( \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi - \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi + n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} \\
 &= + c_2 \cdot e^{-j\nu p z_m} \cdot e^{j\nu p \cdot \left( \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi - n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} \cdot \left[ e^{-j\nu p \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi} - e^{j\nu p \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi} \right] \\
 &\quad + c_2 \cdot e^{j\nu p z_m} \cdot e^{-j\nu p \cdot \left( \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi - n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} \cdot \left[ e^{-j\nu p \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi} - e^{j\nu p \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi} \right] \\
 &= c_2 \cdot \left[ e^{j\nu p \cdot \left( \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi - n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} \cdot e^{-j\nu p z_m} + e^{-j\nu p \cdot \left( \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi - n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} \cdot e^{j\nu p z_m} \right] \\
 &\quad \cdot \left[ e^{-j\nu p \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi} - e^{j\nu p \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F2 &= + c_1 \vec{i}_1 \cdot e^{-j p \nu \left( \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi - \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi + n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} \\
 &\quad - c_1 \vec{i}_1 \cdot e^{-j p \nu \left( -\frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi - \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi + n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} \\
 &\quad + c_1 \vec{i}_1^* \cdot e^{j p \nu \left( -\frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi - \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi + n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} \\
 &\quad - c_1 \vec{i}_1^* \cdot e^{j p \nu \left( \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi - \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi + n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} \\
 &= + c_1 \vec{i}_1 \cdot e^{j p \nu \cdot \left( \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi - n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} \cdot \left[ e^{-j p \nu \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi} - e^{j p \nu \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi} \right] \\
 &\quad + c_1 \vec{i}_1^* \cdot e^{-j p \nu \cdot \left( \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi - n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} \cdot \left[ e^{-j p \nu \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi} - e^{j p \nu \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi} \right] \\
 &= c_1 \cdot \left[ \vec{i}_1 \cdot e^{j p \nu \cdot \left( \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi - n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} + \vec{i}_1^* \cdot e^{-j p \nu \cdot \left( \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi - n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)} \right] \\
 &\quad \cdot \left[ e^{-j p \nu \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi} - e^{j p \nu \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi} \right] \\
 &= c_1 \cdot \left[ \vec{i}'_1 + \vec{i}'_1^* \right] \cdot \left[ e^{-j p \nu \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi} - e^{j p \nu \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi} \right] \\
 &\quad \text{wobei gilt: } \vec{i}'_1 = \vec{i}_1 \cdot e^{j p \nu \cdot \left( \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi - n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi \right)}
 \end{aligned}$$

Unter Anwendung von  $j(e^{-jx} - e^{jx}) = 2 \sin(x)$  folgt schließlich:

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{\overbrace{2 \sin \left( p \nu \frac{W_{1Sp}}{l_2} \cdot \pi \right)}^{\xi_{1s}}}{\nu p} \cdot \left\{ c_1 \cdot \left[ \vec{i}'_1 + \vec{i}'_1^* \right] \right. \\
 &\quad \left. + c_2 \cdot \left[ \underbrace{e^{j p \nu \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi} e^{-j p \nu n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi} \cdot e^{-j p \nu z_m}}_{\vec{c}} + \underbrace{e^{-j p \nu \frac{1}{2} (q_1 + 1) \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi} e^{j p \nu n \frac{\tau_{1n}}{l_2} 2\pi} \cdot e^{j p \nu z_m}}_{\vec{c}^*} \right] \right\} \quad (\text{B.79})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_{1H} &= \frac{2p}{a} \cdot \sum_{n=1}^{q_1} \frac{Z_{1Sp}}{2} G \pi D_{1i} \cdot \frac{l_2}{2\pi} \\
 \psi_{1H} &= \frac{2p}{a} \frac{Z_{1Sp}}{2} D_{1i} \frac{l_2}{2\pi} \cdot \sum_{n=1}^{q_1} G \quad (\text{B.80})
 \end{aligned}$$

Jetzt wird wieder die Summenformel (B.16) angewendet. Zur Vereinfachung erfolgt eine getrennte Umformung für die einzelnen komplexen und konjugiert komplexen Zeiger.

$$\begin{aligned}
 c_1, c_2, \vec{i}_1 &\neq f(n) \quad | \sin(-x) = -\sin(x) \\
 Z_1 &= \sum_{n=1}^{q_1} \vec{i}_1 \cdot e^{jp\nu\frac{1}{2}(q_1+1)\frac{\tau_{1n}}{l_2}2\pi} e^{-jp\nu n\frac{\tau_{1n}}{l_2}2\pi} \\
 &= \vec{i}_1 \cdot e^{jp\nu\frac{1}{2}(q_1+1)\frac{\tau_{1n}}{l_2}2\pi} \sum_{n=1}^{q_1} e^{-jp\nu n\frac{\tau_{1n}}{l_2}2\pi} \\
 &= \vec{i}_1 \cdot e^{jp\nu\frac{1}{2}(q_1+1)\frac{\tau_{1n}}{l_2}2\pi} e^{-jp\nu\frac{1}{2}(q_1+1)\frac{\tau_{1n}}{l_2}2\pi} \frac{\sin\left(-q_1 \frac{p\nu\tau_{1n}}{l_2}\pi\right)}{\sin\left(-\frac{p\nu\tau_{1n}}{l_2}\pi\right)} \\
 &= q_1 \xi_{1Z(\nu)} \vec{i}_1 \\
 \\
 Z_2 &= \sum_{n=1}^{q_1} \vec{i}_1^* \cdot e^{-jp\nu\frac{1}{2}(q_1+1)\frac{\tau_{1n}}{l_2}2\pi} e^{jp\nu n\frac{\tau_{1n}}{l_2}2\pi} \\
 &= q_1 \xi_{1Z(\nu)} \vec{i}_1^* \\
 \\
 Z_3 &= \sum_{n=1}^{q_1} e^{jp\nu\frac{1}{2}(q_1+1)\frac{\tau_{1n}}{l_2}2\pi} e^{-jp\nu n\frac{\tau_{1n}}{l_2}2\pi} e^{-j\nu pz_m} \\
 &= q_1 \xi_{1Z(\nu)} e^{-j\nu pz_m} \\
 \\
 Z_4 &= \sum_{n=1}^{q_1} e^{-jp\nu\frac{1}{2}(q_1+1)\frac{\tau_{1n}}{l_2}2\pi} e^{jp\nu n\frac{\tau_{1n}}{l_2}2\pi} e^{j\nu pz_m} \\
 &= q_1 \xi_{1Z(\nu)} e^{j\nu pz_m} \\
 \\
 \psi_{1H} &= \frac{2p}{a} \cdot \frac{Z_{1Sp}}{2} \cdot \pi \cdot D_{1i} \cdot \frac{2}{\nu p} \cdot \xi_{1S(\nu)} \cdot \frac{l_2}{2\pi} \cdot \\
 &\quad \left\{ \frac{\mu_0}{\delta''} \frac{3 \cdot w_1}{\nu p \pi} \xi_{1(\nu)} \cdot \left[ \vec{i}_1 q_1 \xi_{1Z(\nu)} + \vec{i}_1^* q_1 \xi_{1Z(\nu)} \right] \right. \\
 &\quad + (1 - \sigma) \frac{A_m}{A_\delta} \cdot \frac{1}{\chi_m + 1} \cdot \frac{2}{\nu \pi} \cdot \sin\left(\nu p \pi \frac{\beta_m}{l_2}\right) \cdot B_r \\
 &\quad \left. \cdot \left[ q_1 \cdot \xi_{1Z(\nu)} \cdot e^{-j\nu pz_m} + q_1 \cdot \xi_{1Z(\nu)} \cdot e^{j\nu pz_m} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{1H} = & \frac{2p}{a} \cdot \frac{Z_{1Sp}}{2} \cdot D_{1i} \cdot l_2 \cdot q_1 \cdot \xi_{1S(\nu)} \cdot \xi_{1Z(\nu)} \cdot \frac{1}{\nu p} \\ & \left\{ \frac{\mu_0}{\delta''} \frac{3 w_1}{\nu p \pi} \xi_{1(\nu)} [\vec{i}_1 + \vec{i}_1^*] \right. \\ & \left. + (1 - \sigma) \frac{A_m}{A_\delta} \cdot \frac{1}{\chi_m + 1} \cdot \frac{2}{\nu \pi} \cdot \sin(\nu p \pi \frac{\beta_m}{l_2}) \cdot B_r \cdot (e^{-j\nu p z_m} + e^{j\nu p z_m}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.81})$$

Der Ausdruck (B.81) ist das vorläufige Endergebnis der Berechnung. Im weiteren Verlauf wird nur noch die Grundwelle betrachtet.  $\nu$  wird also gleich 1 gesetzt.

$$\begin{aligned} \psi_{1H} = & \frac{2p}{a} \cdot \frac{Z_{1Sp}}{2} \cdot D_{1i} \cdot l_2 \cdot q_1 \cdot \xi_{1S(1)} \cdot \xi_{1Z(1)} \cdot \frac{1}{p} \\ & \left\{ \frac{\mu_0}{\delta''} \frac{3 w_1}{p \pi} \xi_{1(1)} [\vec{i}_1 + \vec{i}_1^*] \right. \\ & \left. + (1 - \sigma) \frac{A_m}{A_\delta} \cdot \frac{1}{\chi_m + 1} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sin(p \pi \frac{\beta_m}{l_2}) \cdot B_r \cdot (e^{-j p z_m} + e^{j p z_m}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.82})$$

Aus dem Ausdruck (B.81) kann bereits auf die Hauptinduktivität der Maschine geschlossen werden. Für Bestimmung der Koppelinduktivität muss allerdings eine Ersatzdurchflutung abgeleitet werden. Statt Koppelinduktivität könnte man auch permanentmagnetische Induktivität sagen.

Vergleicht man eine bekannte Beschreibung der von dem Erregersystem einer elektrisch erregten Synchronmaschine hervorgerufenen Flussdichte [60] mit dem oben hergeleiteten Term, kann man folgendes ansetzen:

$$\underbrace{\frac{\mu_0}{\delta''} \frac{w_e \xi_{e(\nu)}}{\pi \nu p} i_e(t)}_{el.SYN} = (1 - \sigma) \underbrace{\frac{A_m}{A_\delta} \cdot \frac{1}{\chi_m + 1} \cdot \frac{2}{\nu \pi} \cdot \sin(\nu p \pi \frac{\beta_m}{l_2}) \cdot B_r}_{PMSYN} \quad (\text{B.83})$$

Dabei fällt auf, dass der linke Term dem einer einsträngigen Statorwicklung entspricht. Die Rotorwindungszahl und der Wicklungsfaktor können zu 1 angenommen werden, da sie für Permanentmagnete ohne Bedeutung sind. Weiter kann der effektive Luftspalt gleich dem zweigestrichenen gesetzt werden. Damit lässt sich eine Erregerdurchflutung herleiten, die derjenigen einer elektrisch erregten Synchronmaschine entspricht:

$$\Theta'_m = 2p(1 - \sigma) \frac{A_m \delta''}{A_\delta \mu_0 \chi_m + 1} \frac{1}{\chi_m + 1} \sin\left(p \pi \frac{\beta_m}{l_2}\right) \cdot B_r \cdot e^{j p z_m} \quad (\text{B.84a})$$

$$\Theta_m = 2p(1 - \sigma) \frac{A_m \delta''}{A_\delta \mu_0 \chi_m + 1} \frac{1}{\chi_m + 1} \sin\left(p \pi \frac{\beta_m}{l_2}\right) \cdot B_r \quad (\text{B.84b})$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \psi_{1H} = & w_1 \cdot D_{1i} \cdot l_2 \cdot \xi_{1S(1)} \cdot \xi_{1Z(1)} \cdot \frac{\mu_0}{\delta''} \cdot \frac{1}{p^2\pi} \\ & \cdot \left[ 3 \cdot w_1 \cdot \xi_{1(1)} \cdot \frac{1}{2} (\vec{i}_1 + \vec{i}_1^*) + \Theta_m \cdot \frac{1}{2} (e^{-jpz_m} + e^{jpz_m}) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.85})$$

Die beiden Induktivitäten lauten daher:

$$L_{1H} = 3 \cdot w_1^2 \cdot \frac{\mu_0}{\delta''} \cdot D_{1i} \cdot l_2 \cdot \frac{1}{p^2\pi} \cdot \xi_{1S(1)} \xi_{1Z(1)} \xi_{1(1)} \quad (\text{B.86})$$

$$M_{PM} = w_1 \cdot \frac{\mu_0}{\delta''} \cdot D_{1i} \cdot l_2 \cdot \frac{1}{p^2\pi} \cdot \xi_{1S(1)} \xi_{1Z(1)} \quad (\text{B.87})$$

$$\text{Alternativ: } \xi_{1S(\nu)} \xi_{1Z(\nu)} = \xi_{1(\nu)} \frac{1}{\xi_{1N(\nu)}}$$

Hieraus folgt letztendlich:

$$\psi_{1H} = L_{1H} \cdot \frac{1}{2} [\vec{i}_1 + \vec{i}_1^*] + M_{PM} \cdot \Theta_m \cdot \frac{1}{2} (e^{-jpz_m} + e^{jpz_m}) \quad (\text{B.88})$$

## C. Kraftberechnung

Die Kraftberechnung benötigt die Darstellung von Strombelag und Luftspaltfeld in komplexer Schreibweise:

$$a_{1(1)}(z_1, t) = j \cdot \frac{2 m w_1}{l_2} \cdot \xi_{1(1)} \cdot \left[ \vec{i}_1(t) \cdot e^{-j p z_1} - \vec{i}_1^*(t) \cdot e^{j p z_1} \right] \quad (\text{C.1})$$

$$B_{\delta(1)}(z_1, t) = \left[ \frac{\mu_0}{\delta''} \frac{m w_1}{p \pi} \xi_{1(1)} \cdot \vec{i}_1(t) + \frac{\mu_0}{\delta''} \frac{1}{p \pi} \Theta_m \cdot e^{j p z_m} \right] e^{-j p z_1} \\ + \left[ \frac{\mu_0}{\delta''} \frac{m w_1}{\nu p \pi} \xi_{1(1)} \cdot \vec{i}_1^*(t) + \frac{\mu_0}{\delta''} \frac{1}{p \pi} \Theta_m \cdot e^{-j p z_m} \right] e^{j p z_1} \quad (\text{C.2})$$

Diese werden in das Integral für die Kraft eingesetzt:

$$F_{LM}(t) = -\pi \cdot D \cdot \int_0^{l_2} B_{\delta(1)}(z_1, t) \cdot a(z_1, t) dz_1 \\ = -\pi \cdot D \cdot \underbrace{j \frac{2 m w_1}{l_2} \xi_{1(1)} \frac{\mu_0}{\delta''} \frac{1}{\pi p}}_{\alpha} \cdot \int_0^{l_2} \left[ \vec{i}_1(t) e^{-j p z_1} - \vec{i}_1^*(t) e^{j p z_1} \right] \\ \cdot \left( \left[ \underbrace{m w_1 \xi_{1(1)}}_{\beta} \vec{i}_1(t) + \Theta_m e^{j p z_m} \right] e^{-j p z_1} + \left[ \underbrace{m w_1 \xi_{1(1)}}_{\beta} \vec{i}_1^*(t) + \Theta_m e^{-j p z_m} \right] e^{j p z_1} \right) dz_1 \\ = \alpha \cdot \int_0^{l_2} \left[ \vec{i}_1(t) e^{-j p z_1} - \vec{i}_1^*(t) e^{j p z_1} \right] \\ \cdot \left( \left[ \beta \cdot \vec{i}_1(t) + \Theta_m e^{j p z_m} \right] e^{-j p z_1} + \left[ \beta \cdot \vec{i}_1^*(t) + \Theta_m e^{-j p z_m} \right] e^{j p z_1} \right) dz_1$$



$$\begin{aligned}
 F_{LM}(t) = \alpha \cdot \left\{ \underbrace{\left[ \beta \cdot \vec{i}_1(t)^2 + \vec{i}_1(t) \cdot \Theta_m \cdot e^{jpz_m} \right]}_{=0} \cdot \int_0^{l_2} e^{-j2pz_1} dz_1 + \right. \\
 + \left[ \underbrace{\beta \cdot |\vec{i}_1(t)|^2}_{\Sigma=0} + \vec{i}_1(t) \cdot \Theta_m \cdot e^{-jpz_m} \right] \cdot \int_0^{l_2} dz_1 - \\
 - \left[ \underbrace{\beta \cdot |\vec{i}_1(t)|^2}_{\Sigma=0} + \vec{i}_1(t)^* \cdot \Theta_m \cdot e^{jpz_m} \right] \cdot \int_0^{l_2} dz_1 - \\
 \left. - \left[ \beta \cdot \vec{i}_1(t)^{*2} + \vec{i}_1(t)^* \cdot \Theta_m \cdot e^{-jpz_m} \right] \cdot \underbrace{\int_0^{l_2} e^{j2pz_1} dz_1}_{=0} \right\}
 \end{aligned}$$

Nach [60] (Kapitel 5.5) fallen einige Terme aus dem Integral. Dies ist auch hier der Fall. Der Ausdruck  $e^{-j2pz_1}$  ist immer Null, weil  $z_1$  einem Winkel entspricht. Dieser Winkel stellt somit eine  $2\pi$ -Periodizität dar, die der axialen Länge  $l_2$  gleichgesetzt wird. Das Integral lautet nun:

$$F_{LM}(t) = \alpha \cdot \int_0^{l_2} \Theta_m \left( \vec{i}_1(t) e^{-jpz_m} - \vec{i}_1(t)^* e^{jpz_m} \right) dz_1 \quad (C.3)$$

$$F_{LM}(t) = -\pi D \cdot j \frac{2m w_1}{l_2} \xi_{1(1)} \frac{\mu_0}{\delta''} \frac{1}{\pi p} \cdot \int_0^{l_2} \Theta_m \left( \vec{i}_1(t) e^{-jpz_m} - \vec{i}_1(t)^* e^{jpz_m} \right) dz_1$$

$$F_{LM}(t) = -\pi D \cdot j \frac{2m w_1}{l_2} \xi_{1(1)} \frac{\mu_0}{\delta''} \frac{1}{\pi p} \cdot l_2 \cdot \Theta_m \left( \vec{i}_1(t) e^{-jpz_m} - \vec{i}_1(t)^* e^{jpz_m} \right) \quad (C.4)$$

An dieser Stelle wird die Kraft in Abhängigkeit der Koppelinduktivität  $M_{PM}$  ausgedrückt:

$$M_{PM} = w_1 \cdot \frac{\mu_0}{\delta''} \cdot D \cdot l_2 \cdot \frac{1}{p^2 \pi} \cdot \xi_{1S(1)} \xi_{1Z(1)} \quad (C.5)$$

$$\text{Außerdem gilt: } \xi_{1S(\nu)} \xi_{1Z(\nu)} = \xi_{1(\nu)} \frac{1}{\xi_{1N(\nu)}}$$

Der folgende Ausdruck stellt nun die elektromagnetische Kraft für den allgemeinen, dynamischen Fall dar:

$$F_{LM}(t) = -j \frac{2\pi}{l_2} pm \cdot \xi_{1N(1)} \cdot M_{PM} \cdot \Theta_m \left( \vec{i}_1(t) \cdot e^{-jpz_m} - \vec{i}_1(t)^* \cdot e^{jpz_m} \right) \quad (C.6)$$

## D. Gleichungssystem für den stationären Betrieb

Es gelten folgende Umrechnungen:

$$\begin{aligned}
 U &= 2\pi r = 2\pi \frac{D}{2} \hat{=} l_{ax} \\
 v &= \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{2\pi \frac{d}{2}}{T} \hat{=} v = \frac{2\pi \frac{d}{2}}{T} = \frac{l_2}{T} = \frac{2p \tau_p}{T} = 2p \tau_p f \\
 v &= 2p \tau_p f = l_{FE} \cdot f \\
 \Rightarrow \omega &= \frac{v}{l_{FE}} \cdot 2\pi = \frac{l_{FE} \cdot f}{l_{FE}} \cdot 2\pi = 2\pi f
 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich folgende wechselseitige Bezüge:

rot. Synchronmaschine $\omega_1 = 2\pi f$ $\omega_{syn} = \frac{\omega_1}{p} = 2\pi f \frac{1}{p}$	Linearmaschine $v_1 = 2p f \tau_p$ $v_{syn} = \frac{v_1}{p} = 2 f \tau_p$
--	---

### D.1. Spannungsgleichungen

Aus Gleichung (2.35) folgt durch Darstellung in Amplituden-Phasen-Form:

$$\underline{U}_1 \cdot e^{j\omega_1 t} = R_1 \cdot \underline{I}_1 \cdot e^{j\omega_1 t} + j\omega_1 L_1 \cdot \underline{I}_1 \cdot e^{j\omega_1 t} + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot M_{PM} \cdot \Theta_m \cdot \frac{d}{dt} e^{jpz_m}$$

Der sich darin befindende Ausdruck  $\frac{d}{dt} e^{jpz_m}$  beinhaltet eine zeitliche Abhängigkeit, die nun für den Betrieb mit konstanter Geschwindigkeit überprüft wird. Für konstante Geschwindigkeit muss also gelten:

$$\dot{z}_m \stackrel{!}{=} \omega_{LM0} = const \tag{D.1}$$

Ebenso muss man fordern, dass sich zwischen dem Statorstrom  $\vec{i}_1(t)$  und der PM-Durchflutung  $\Theta_m$  kein zeitlicher Unterschied ergibt, da sonst Oberschwingungen auftreten:

$$\Theta'_m = \Theta_m \cdot e^{jpz_m} = \Theta_m \cdot e^{jp(\omega_{LM0} \cdot t + z_{m0})} = \underline{\Theta}_m \cdot e^{j\omega_1 t} \quad (\text{D.2})$$

Zur wechselseitigen Umrechnung von Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit dienen die Transformationsgleichungen,

$$\begin{aligned} p \cdot v_{LM0} = v_1 &\rightarrow v_{LM0} = v_{syn} = \frac{v_1}{p} \text{ bzw.} \\ p \cdot \omega_{LM0} = \omega_1 &\rightarrow \omega_{LM0} = \omega_{syn} = \frac{\omega_1}{p} \\ &\rightarrow \Theta'_m = \Theta_m \cdot e^{j\omega_1 t} \cdot e^{jpz_{m0}} \end{aligned}$$

die beim Einsetzen in die Spannungsdifferentialgleichung dazu führen, dass die zeitliche Abhängigkeit verschwindet:

$$\underline{U}_1 = (R_1 + j\omega_1 L_1) \underline{I}_1 + j\sqrt{2}\omega_1 M_{PM} \Theta_m \cdot \underbrace{e^{jpz_{m0}}}_{\neq f(t); z_{m0} = const} \quad (\text{D.3})$$

Der darin enthaltene Winkel zwischen PM und Statorfeld kann weiter zur Berechnung der Polradspannung eingesetzt werden, die analog zur rotierenden Maschine aus der Linearbewegung folgt [100]:

$$\underline{U}_{ip} = j \underbrace{\sqrt{2}\omega_1 M_{PM} \Theta_m}_{U_{ip}} \cdot \underbrace{e^{jpz_{m0}}}_{e^{jz'}} \quad (\text{D.4})$$

Aus dem absoluten Polradwinkel  $z' = p z_{m0} + \frac{\pi}{2}$  entsteht dann der als solcher bezeichnete Polradwinkel (zwischen der Polradspannung und der speisenden Spannung):

$$z = z' - \varphi_{1U} \quad (\text{D.5})$$

Aus der vollzogene Berechnung entsteht dann das Zeigerdiagramm für die Spannungen (Abb. D.1). Darin sind die Abhängigkeiten zwischen Strangspannung, Polradspannung und Erregerdurchflutung gezeigt. Die mit  $z$  bezeichneten Winkel sind aus der linearen Geometrie durch Bezüge überführt. Für die Strangspannung wird nun noch die Impedanz benötigt. Diese bestimmt sich identisch zu derjenigen rotierender Maschinen (vgl. [60]), so dass die Strangspannung denselben Ausdruck aufweist:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (R_1 + j\omega_1 L_d) \underline{I}_1 + \underline{U}_{ip} \\ \underline{U}_1 &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{U}_{ip} \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

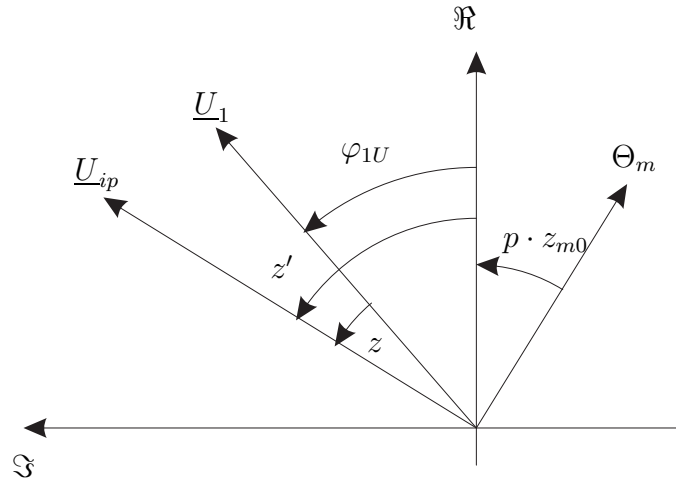


Abb. D.1.: Zeigerdiagramm: Strang- und Polradspannung sowie Erregerdurchflutung

## D.2. Kraft im stationären Betrieb

Aus Gleichung folgt (C.6) durch Einsetzen von

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} - \frac{\underline{U}_{ip}}{\underline{Z}_1} \quad (\text{D.7})$$

ein Ausdruck, aus dem sich die stationäre Kraft ermitteln lässt:

$$\begin{aligned} F_{LM}(t) &= \underbrace{-j \frac{2\pi}{l_2} pm \cdot \xi_{1N(1)} \cdot M_{PM} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}_K (\underline{I}_1 \cdot \Theta_m^* - \underline{I}_1^* \cdot \Theta_m) \quad (\text{D.8}) \\ &= K \cdot \left[ \left( \frac{U_1 \cdot e^{j\varphi_{1U}}}{Z_1 \cdot j \cdot e^{-j\varphi_{z1}}} - \frac{U_{ip} \cdot e^{jz'}}{Z_1 \cdot j \cdot e^{-j\varphi_{z1}}} \right) \cdot \underbrace{\frac{U_{ip} \cdot e^{-jz'}}{j \cdot \sqrt{2} \cdot \omega_1 \cdot M_{PM}}}_\alpha \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{U_1 \cdot e^{-j\varphi_{1U}}}{Z_1 \cdot j \cdot e^{j\varphi_{z1}}} + \frac{U_{ip} \cdot e^{-jz'}}{Z_1 \cdot j \cdot e^{j\varphi_{z1}}} \right) \cdot \underbrace{\frac{U_{ip} \cdot e^{jz'}}{j \cdot \sqrt{2} \cdot \omega_1 \cdot M_{PM}}}_\alpha \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{LM}(t) &= -\frac{K}{\alpha} \cdot \frac{1}{j} \left[ e^{-j(z' - \varphi_{1U} - \varphi_{Z1})} - e^{j(z' - \varphi_{1U} - \varphi_{Z1})} \right] \\
 &\quad - K \cdot \left[ \frac{U_{ip}^2}{Z_1 \cdot j \cdot e^{-j\varphi_{Z1}}} \cdot \frac{1}{\alpha} + \frac{U_{ip}^2}{Z_1 \cdot j \cdot e^{j\varphi_{Z1}}} \cdot \frac{1}{\alpha} \right] \\
 &= - \underbrace{\frac{2\pi}{b_2} \frac{pm}{\omega_1} \cdot \xi_{1N(1)} \cdot \frac{U_1 U_{ip}}{Z_1}}_{F_K} \cdot \sin(z - \varphi_{Z1}) - F_K \cdot \frac{U_{ip}}{U_1} \cdot \sin(\varphi_{Z1}) \quad (D.9)
 \end{aligned}$$

Mit der Kippkraft  $F_k$  als maximaler Kraft der Maschine ergibt sich dann die Kraft der Maschine im stationären Betrieb als:

$$F_{LM} = - F_K \cdot \left[ \sin(z - \varphi_{Z1}) + \frac{U_{ip}}{U_1} \cdot \sin(\varphi_{Z1}) \right] \quad (D.10)$$

Dabei wird nochmals darauf hingewiesen, dass alle mechanischen Winkelgrößen aus Längen abgeleitet werden.

### D.3. Leistungen

Für die Berechnung des Wirkungsgrads ist die Ermittlung der mechanischen und elektrischen Leistung erforderlich. Anstatt aus einem Drehmoment und einer Winkelgeschwindigkeit wird die mechanische Leistung direkt aus der Kraft und der linearen Geschwindigkeit ermittelt. Bei Vernachlässigung der Reibung ist die mechanische Leistung identisch zur Drehfeldleistung:

$$P_m(F_R = 0) = P_\delta = F_{LM} v_{syn} \quad (D.11)$$

Da sich für die Bestimmung des Leistungsfaktors  $\cos(\varphi)$  gegenüber rotierenden Maschinen keine Änderungen ergeben, folgt für die elektrische Leistung direkt:

$$\begin{aligned}
 \text{Netzleistung :} & \quad P_{Netz} = 3 U_1 I_1 \cos \varphi_{Netz} \\
 \text{innere elektrische Leistung :} & \quad P_w = 3 U_1 I_1 \cos \varphi
 \end{aligned} \quad (D.12)$$

## Abbildungsverzeichnis

1.1. V-Methode für die Systementwicklung . . . . .	5
1.2. Innovatives „top-down“-Verfahren für die Systementwicklung . . . . .	7
1.3. KWK-System nach Schilling [132] . . . . .	8
1.4. Optimierter Systementwurf [112] . . . . .	10
2.1. Komponenten des Linearantriebs . . . . .	18
2.2. Linearmotor mit Kurzstator; links als Außenläufer rechts als Innenläufer	19
2.3. Nutformen des Linearantriebs . . . . .	19
2.4. Prinzipielle Anordnung von radial und axial magnetisierten Permanent- magneten; die Pfade zeigen den Hauptfluss. . . . .	20
2.5. Prinzipielle Anordnung eines Halbach-Permanentmagnet-Arrays. . . . .	21
2.6. Struktogramm: Poldetektion . . . . .	26
2.7. Normierte Strombeläge für die Phasenwinkel von Strang 1 bei 0, 30, 45, 60 Grad oben. Darunter die zugehörige Felderregerkurve sowie ganz unten deren Zerlegung in Grundwelle und höhere harmonische Anteile für $\nu = 1 \dots 11$ . . . . .	28
2.8. Flusspfade [152] . . . . .	31
2.9. Exemplarische Ansicht der (mit FEM-Software ermittelten) Luftspaltin- duktion im Bereich des Movers einer vierpoligen Maschine (durchgezogen: offene Nuten; gestrichelt: Stator als Hohlzylinder ohne Nuten. Oben: Oberflächenmagnete - Mitte: Integrierte Magnete - Unten: Halbach Array. 40	
2.10. Parabelfunktion zur Nachbildung der Leitwerte; Trapezfunktion für die Nachbildung der MMK; angenommener Feldverlauf in der Nutöffnung (von links nach rechts) . . . . .	43
2.11. Rastkraftverlauf innerhalb einer Rastperiode für Oberflächenmagnete; durchgezogen: FEM-Berechnung - gestrichelt: analytische Nachrechnung mit Gleichung (2.28) . . . . .	45
3.1. Allgemeine Darstellung des Ablaufs einer PSO . . . . .	56
3.2. Struktogramm der PSO nach Kennedy/Eberhart. . . . .	57
3.3. Zustandekommen der Trajektorie eines Partikels . . . . .	58
3.4. Behandlung von Randüberschreitung der Partikel: a) keine Beschränkung b1) Klebenbleiben (stick) an der Stelle des Auftreffens bzw. b2) Abgleiten entlang des Randes (Absorption) c) Wrap: Wiedereintritt auf der anderen Raumseite d1) Abprallen (bounce) ohne und d2) mit Dämpfung . . . . .	60

3.5. GBest- und LBest-Ring-Nachbarschafts-Topologie. . . . .	61
3.6. Nachbarschaftstopologie mit Clusterbildung (links) und von-Neumann- Topologie(n)(rechts). . . . .	62
3.7. Struktogramm: Erstellen eines GBest-Clusters . . . . .	63
3.8. Struktogramm: Erstellen eines von-Neumann-Netzes . . . . .	63
3.9. Indifferenzkurven zweier Zielfunktionen mit jeweiligem Minimum (schwar- ze Punkte) und Pareto-Menge (gestrichelt). . . . .	65
3.10. Darstellung eines bikriteriellen Problems mit Variablenraum der Größe 2. 66	
3.11. Detektion pareto-optimaler Punkte mit gewichteter Summe (li) und minimax Methode (re). . . . .	68
3.12. Detektion pareto-optimaler Punkte mit der epsilon-constraint-Methode. 68	
3.13. Struktogramm: epsilon-constraint-Methode für die Minimalwertsuche . 70	
3.14. alpine-Funktion für zwei Dimensionen . . . . .	71
3.15. Griewank-Funktion für zwei Dimensionen - oben: globale Übersicht, unten: Zoom um das globale Optimum . . . . .	73
3.16. Rosenbrock-Funktion für zwei Dimensionen: Umgebung des globalen Optimums . . . . .	73
3.17. Höhenlinien der Rosenbrock-Funktion für die Funktionswerte $[1E-3, \dots, 1E6]$ , erhöht um jeweils eine Zehnerpotenz . . . . .	74
3.18. Startpopulation li: von-Neumann-Netz; re: GBest bei Untersuchung der Rosenbrock-Funktion sowie die jeweilige Entwicklung nach zehn Schritten 78	
3.19. Suchraumreduktion: Anpassung der Raumgrenzen, da die Standardab- weichungen des globalen Bestpunkts und der lokalen Bestpunkte über lange Zeit unverändert sind; zugleich Reduktion der Faktoren $c_1, c_2$ und Beschränkung der Geschwindigkeit auf 5 % der neuen Suchraumlänge. . 78	
3.20. Konvergenzergbnis bei Abbruch der Suche nach 50 Schritten . . . . .	79
3.21. Oben: Konvergenzverlauf der Funktionswerte des globalen Bestpunkts für GBest. Mitte/unten: Verlauf der Position des globalen Bestpunkts. . 80	
3.22. Oben: Konvergenzverlauf der Funktionswerte des globalen Bestpunkts für von Neumann. Mitte/unten: Verlauf der Position des globalen Bestpunkts. 81	
4.1. Übersichtsbild des KWK Gesamtsystem . . . . .	85
4.2. Geschwindigkeitsabhängige Reibung bei Verwendung von Gleichung (4.2) 87	
4.3. Beispielhafte Darstellung der zeitlichen Verläufe des Drucks am Einlass- und Auslassventil und der hervorgerufenen Kolben und Translatorbewe- gung - hier repräsentiert durch die Geschwindigkeit und die zurückgelegte Strecke der bewegten Teile . . . . .	88
4.4. Zeitlicher Verlauf der im System wirkenden Kräfte am Kolben (oben) und Generator (unten) . . . . .	89

4.5. Im System auftretende Energien: zugeführte Energie (Druck auf Kolben); kinetische Energie des Kolbens, hervorgerufen durch die Bewegung; am Generator wirkende Energie, die für die Energiewandlung zur Verfügung steht. . . . .	91
4.6. Ausnutzungsziffern ausgeführter Linearantriebe . . . . .	95
4.7. Massen ausgeführter Linearantriebe . . . . .	96
4.8. Ergebnisse einer beispielhaften Optimierung mit konstantem Wirkungsgrad. $\diamond$ : Ergebnissen mit Zuordnung zur globalen Pareto-Front (Bild 4.8.a) $\triangle$ : Ergebnissen für lokale Bestpunkte. . . . .	100
4.9. Ergebnisse einer beispielhaften Optimierung mit konstantem Wirkungsgrad. $\diamond$ : Ergebnissen mit Zuordnung zur globalen Pareto-Front (Bild 4.8.a) $\triangle$ : Ergebnissen für lokale Bestpunkte. . . . .	101
4.10. Geschwindigkeitsabhängiger Wirkungsgrad - hier für $v_{max} = 5$ m/s und $\eta_{max} = 0,89$ . . . . .	104
4.11. Ergebnisse einer beispielhaften Optimierung mit variablem Wirkungsgrad. $\diamond$ : Ergebnissen mit Zuordnung zur globalen Pareto-Front (Bild 4.11.a) $\triangle$ : Ergebnissen für lokale Bestpunkte. *: Ergebnisse mit schlechtem Nutzungsgrad ohne Pareto Zuordnung . . . . .	106
4.12. Ergebnisse einer beispielhaften Optimierung mit variablem Wirkungsgrad. $\diamond$ : Ergebnissen mit Zuordnung zur globalen Pareto-Front (Bild 4.11.a) $\triangle$ : Ergebnissen für lokale Bestpunkte. *: Ergebnisse mit schlechtem Nutzungsgrad ohne Pareto Zuordnung . . . . .	107
A.1. Beispiel für die Form von Luftspaltleitwerten für einen Zahn (gestrichelt) und zwei Zähne (durchgezogen) links sowie für die MMK und deren Quadrat rechts. . . . .	117
B.1. In Nuten gebettete Spule und deren Strombelag . . . . .	122
B.2. Abmessungen und Flussverläufe grundlegender Magnetanordnungen im Läufer . . . . .	141
D.1. Zeigerdiagramm: Strang- und Polradspannung sowie Erregerdurchflutung	157



## E. Wichtige Variablen und Abkürzungen

### Variablen

Neben der Beschreibung der Variablen im laufenden Text, erfolgt hier eine Zusammenstellung der wichtigen Variablen, die in dieser Arbeit verwendet werden. Allgemeine (mathematische) Symbole bedürfen keiner Erklärung. Ebenso wird auf die Beschreibung von Hilfsvariablen verzichtet, da sich diese an der jeweils betreffenden Stelle aus dem Kontext ergeben.

Sofern im laufenden Text nichts Anderes speziell vereinbart wird, bezeichnen Variablen bei gleicher Indexierung ein und die selbe Größe, jedoch unterscheiden sie sich im Besonderen durch Groß- und Kleinschreibung sowie durch Vektorzeichen. Es gilt allgemein:

Darstellungsart	Bedeutung
A - Großbuchstabe	Betrag
a - Kleinbuchstabe	zeitabhängige Größe
<b>a</b> - Fettschrift	Vektor
$\vec{A}$	Zeiger
$a_{max/min}$	maximal/minimal möglichen Wert
<u>A</u> - unterstrichen	komplexe Zahl
hochgestelltes $\star$ -Zeichen	konjugiert komplexe Größe

Auf die Wiedergabe von identischen Variablen in unterschiedlicher Schreibweise wird aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

Variable	Erklärung
$\rho$	Dichte
$\rho_{spez}$	spezifischer Widerstand eines elektrischen Leitermaterials
$\sigma$	Standardabweichung
$\sigma$	Streuzyiffer
$\tau_n$	Nutteilung
$\tau_p$	Polteilung
$\Theta_m$	Ersatzdurchflutung eines Permanentmagneten
$\Theta_1$	Statordurchflutung
$\varepsilon$	Grenze; Intervall
$\varphi_i$	Zufallsgröße (PSO); Winkel
$\varphi_{im}$	Phasenlage des Stroms im Strang $m$
$\varphi_{1u}$	allgemeine Phasenlage der Spannung
$\varphi_{1i}$	allgemeine Phasenlage des Stroms
$\vartheta$	Zylinderkoordinaten: Umfangskoordinate; Temperatur
$\xi_1$	gesamter Wicklungsfaktor der Statorwicklung
$\xi$	Wicklungsfaktor, allgemein
$\xi_{1S}$	Sehnungsfaktor des Stators
$\xi_{1Z}$	Zonungsfaktor des Stators
$\xi_{1N}$	Nutungsfaktor des Stators
$\xi_1$	Statorwicklungsfaktor
$\eta$	Wirkungsgrad
$\zeta$	Nutzungsgrad
$\mathcal{F}$	Raum der Zielfunktionen
$\mathcal{S}$	Suchraum
$\mathcal{X}$	Parameterraum
$\mathcal{Z}$	Zielraum
$a$	Beschleunigung
$\underline{a}$	komplexer Dreher gemäß Anhang
$\mathbf{a}_m$	normierter Strombelagsvektor des Stranges $m$
$A_K$	Stirnfläche eines Druckkolbens
$A_1$	Statorstrombelag

*Fortsetzung auf nächster Seite*

---

Variable	Erklärung
$A$	Fläche, allgemein
$A_{\delta p}$	dem Luftspalt zugewandte Fläche eines magnetischen Pols
$A_{\delta}$	gesamte magnetisch wirksame Fläche des Luftspalts
$A_z$	Luftspaltseitige Fläche der Zähne (hier Stator)
$A_{Luft}$	Luftspaltseitige Fläche der Nuten (hier Stator)
$a_n$	normierter Strombelag einer Nut
$a_1$	im Besonderen: thermisch wirksamer Strombelag, bei Linearmaschinen gemittelt entlang der axialen Länge des Luftspalts
$A_m$	bezeichnet i.d.R. die normal zur Magnetisierungsrichtung angeordnete Oberfläche eines Permanentmagneten
$A_{\sigma}$	vom magnetischen Streufluss durchsetzte Fläche, weiter gekennzeichnet durch Ziffern
$A_{mr}$	normal zur Magnetisierungsrichtung angeordnete Oberfläche eines radial magnetisierten Permanentmagneten
$A_{ma}$	normal zur Magnetisierungsrichtung angeordnete Oberfläche eines axial magnetisierten Permanentmagneten
$a_{par}$	Anzahl parallelerer Zweige
$A_L$	Querschnittsfläche eines elektrischen Leiters
$a_{MMK}$	Fourierkoeffizienten der Magneto-Motorischen-Kraft
$a_{\Lambda}$	Fourierkoeffizienten der magnetischen Leitfähigkeit im Luftspalt
$A_{1Sp}$	Strombelag einer Spule
$B_{\delta}$	Luftspaltflussdichte
$b_n$	Nutbreite
$B$	Flussdichte, allgemein
$B_{\delta m}$	Mittelwert der Luftspaltinduktion (bezogen auf die Polteilung)
$\vec{B}_{\delta m(\nu)}$	Feld eines Permanentmagneten im Luftspalt in Fourierzerlegung
$B_{zsätt}$	Sättigungsinduktion im Material der Zähne (hier Stator)
$B_{zreal}$	tatsächliche Zahninduktion (hier Stator)
$b_{ns}$	Nutslitzbreite (identisch mit $b_n$ bei offenen Nuten)
$b_m$	Breite eines Permanentmagneten (i.d.R. als Ausdehnung entlang des Luftspalts und normal zur Magnetisierungsrichtung)
$b_{ma}$	axiale Ausdehnung eines axial magnetisierten Magneten in einem Halbach Array

*Fortsetzung auf nächster Seite*

---

Variable	Erklärung
$b_{mr}$	axiale Ausdehnung eines radial magnetisierten Magneten in einem Halbach Array
$B_r$	Remanenzflussdichte von Permanentmagneten
$B_{FEsätt}$	Sättigungsinduktion von einem verwendeten Eisen
$B_\sigma$	magnetische Induktion im Bereich von Streuwegen, weiter gekennzeichnet durch Ziffern
$B_1$	vom Statorstrombelag erzeugte magnetische Induktion
$C$	Ausnutzungsziffer
$c_i$	soziale Gewichte (PSO)
$d$	Anzahl Dimensionen; Dicke, allgemein
$D$	Abstand; Durchmesser, allgemein
$D_{Sp}$	mittlerer Durchmesser eine Spule
$D_{1i}$	Bohrungsdurchmesser des Stators einer rotierenden Maschine
$D_{2a}$	Außendurchmesser Rotor/Translator
$D_K$	Durchmesser eines Druckkolbens
$D_W$	Wellendurchmesser
$D_{mi}$	Innendurchmesser eines Oberflächenmagneten
$D_\delta$	mittlerer Durchmesser des Luftspalts
$\mathbf{e}$	Koordinaten der Suchraumunterteilung bei $\epsilon$ -constraint
$\mathbf{E}$	Vektor zur Speicherung von Fitnesswerten
$E_{Lin}$	Energie aus einer Linearbewegung
$E_{el}$	elektrische Energie
$E_{zu}$	einem System zugeführte Energie
$E_{kin}$	kinetische Energie
$E$	Energie, allgemein; Elektrisches Feld, allgemein
$F$	Fitness (auch als Vektor); Kraft, allgemein
$F_{dyn}$	Kraft auf bewegliche Teile
$F_r$	Reibungskraft
$F_K$	Kraft auf einen Druckkolben
$F_{el}$	elektromechanische Kraft
$F$	Kraft, allgemein
$F_{Lin}$	Kraft, die eine Linearbewegung hervorruft

*Fortsetzung auf nächster Seite*

---

Variable	Erklärung
$f_1$	Statorfrequenz (der speisenden Spannung)
$f$	Frequenz, allgemein
$F_p$	Kraft, die ein magnetischer Pol einer elektrischen Maschine hervorruft
$F_{LM}$	Kraft die auf den Translator einer Linearmaschine wirkt
$f_i$	Zielfunktion aus dem Zielvektor
$g$	Trägheit
$h_n$	Nuthöhe
$H_z$	magnetische Feldstärke im Zahn (hier Stator)
$h_n$	Nuthöhe
$h_{1J}$	Statorjochhöhe
$h_z$	Zahnkopfhöhe
$H_m$	Feldstärke in einem Permanentmagneten
$h_m$	Höhe eines Permanentmagneten (i.d.R. gemessen in Magnetisierungsrichtung)
$H_\delta$	Feldstärke im Luftspalt
$H_{1J}$	magnetische Feldstärke im Statorjoch
$H_{1z}$	magnetische Feldstärke im Statorzahn
$h_{2J}$	Höhe des Läuferjochs (hier Translator)
$H_\sigma$	Feldstärke entlang eines Streuwegs, weiter gekennzeichnet durch eine Ziffer
$i$	allgemein Laufvariable
$I_1$	Statorstrom
$i_L$	Strombelastung auf einen elektrischen Leiter
$I_1$	Strangstrom
$i_{1L}$	Strom in einem elektrischen Leiter
$k$	allgemeine Variable; Zähler; Konstante
$k_{Gleit}$	Gleitkraftkoeffizient
$k_{Haft}$	Haftkraftkoeffizient
$k_{nf}$	Nutfüllfaktor
$k_{l2D}$	Verhältnis zwischen axialer Länge und Aussendurchmesser des Rotors/Translators

*Fortsetzung auf nächster Seite*

---

Variable	Erklärung
$k_{nz}$	Verhältnis aus Nutteilung zu Zahnbreite
$k_{FE}$	Eisenfüllfaktor
$k_{mFE}$	Beitrag des magnetischen Spannungsabfalls im Eisen zum effektiven Luftspalt
$k_{\sigma}$	allgemeiner Faktor zur Festlegung der Länge von Streuwegen
$k_{SG}$	zusammenfassender Faktor der Scherungsgerade zur Festlegung des Arbeitspunktes von Permanentmagneten
$k_a$	Faktor zur Reduzierung der Oberfläche axiale magnetisierter Permanentmagneten in einem Halbach-Array
$l_{tot}$	Länge des Totvolumens eines Druckkolbens
$l_n$	Länge einer Nut/ Nuttiefe
$l_{ax}$	axiale Länge (entspricht i.d.R. $l_{FE}$ )
$l_1$	magnetisch wirksame Länge Stator
$l_2$	magnetisch wirksame Länge Translator
$l_{FE}$	Eisenlänge des Stators einer rotierenden Maschine
$l$	allgemein, Länge
$l_{\sigma}$	Länge eines Streuwegs, weiter gekennzeichnet durch eine Ziffer
$l_w$	mittlere Länge einer Windung einer Spule
$L_{1H}$	Stator-Hauptinduktivität
$L_{11}$	Selbstinduktivität
$m_{dyn}$	bewegliche Masse
$m$	Strangzahl; Masse
$M$	Drehmoment, allgemein
$M_{PM}$	Koppelinduktivität eines Permanentmagneten
$m_2$	Masse des Translators/Läufers
$max$	als Index: Maximalwert
$n$	Stoffkonstante von Gasen (Poissongleichung)
$N_1$	Anzahl der für ein Wickelschema benötigten Statornuten
$n_{wh}$	Anzahl Wiederholungen eines Wickelschemas innerhalb der aktiven Länge einer Linearmaschine
$n_{\sigma}$	Anzahl Streupfade
$N \cdot I$	Produkt aus Leiterzahl und Strom

*Fortsetzung auf nächster Seite*

Variable	Erklärung
$o_V$	Ordnungsziffer
$O$	Umfang
$\vec{p}_\nu$	persönlicher Bestpunkt des Partikels $\nu$
$p_{ein}$	Einlassdruck
$\vec{p}_g$	globaler Bestpunkt
$p_{Speicher}$	Druck in einem Druckspeicher
$p_G$	Gegendruck
$P_{Lin}$	Leistung aus einer Linearbewegung
$P$	Leistung, allgemein
$P_{Vn}$	In einer Nut auftretende Verlustleistung
$P_{Si}$	innere Scheinleistung
$p$	Polpaarzahl
$P$	Leistung, allgemein
$PF$	Pareto Front
$Q$	Vektor mit Koordinaten untersuchter Unterräume
$q$	Anzahl Nuten je Pol und Strang
$Q_1$	Gesamte Nutanzahl des Stators
$\dot{Q}$	Wärmestrom
$R$	Widerstand, allgemein; Zylinderkoordinaten: radiale Koordinate
$r_i$	Bohrungsradius des Stators (= Hebel)
$R_1$	Strangwiderstand der Statorwicklung
$r_{ma}$	äußerer Magnetradius
$r_{mi}$	innerer Magnetradius
$r_\delta$	mittlerer Radius des Luftspalts
$R_{mag}$	magnetischer Widerstand
$R^d$	d-dimensionaler (Such)Raum
$s$	Position, Weg; Stromdichte
$s_{12}$	Umschaltposition an der das Einlaßventil geschlossen wird
$s$	Stromdichte
$t$	Zeit; Schrittnummer bei Iterationen
$t_V$	Schaltzeit eines Druckventils
$t_d$	Verzögerungszeit (Delay)

*Fortsetzung auf nächster Seite*

---

Variable	Erklärung
$T$	Periodendauer
$U$	Umfang, allgemein; Spannung, allgemein
$U_i$	induzierte Spannung
$U_1$	Strangspannung
$v$	Geschwindigkeit
$v_{Gleit}$	Bezugsgeschwindigkeit der Gleitreibungskraft
$v_{Haft}$	Geschwindigkeitswert des Scheitels der Haftkraft
$V_{12}$	Volumen auf der Einlaßseite eines Druckkolbens bei Schließen des Einlassventils
$v_G$	Bezugsgeschwindigkeit bei der $p_G$ anliegt
$v_2$	Geschwindigkeit des Translators einer Linearmaschine
$V_\nu$	Geschwindigkeitsvektor des $\nu$ -ten Partikels
$v_k$	$k$ -te Geschwindigkeitskomponente eines Partikels
$V$	Volumen, allgemein; Amplitude der Felderregerkurve
$V_{FE}$	magnetischer Spannungsabfall in Eisen
$V_{2J}$	magnetischer Spannungsabfall im Läuferjoch
$Var$	Varianz
$w$	Gewichtung
$W_{Lin}$	Arbeit/Energie die bei einer Linearbewegung verrichtet/erzeugt wird
$W_K$	Arbeit/Energie die ein Linearkolben verrichtet/erzeugt
$w$	Windungszahl allgemein
$w_1$	Gesamte Strangwindungszahl (im Besonderen auch reduziert für einen Pol)
$W_\delta$	(magnetische) Energie im Luftspalt
$w_\delta$	(magnetische) Energiedichte im Luftspalt
$w_z$	Energiedichte im Luftspalt bei sich gegenüberstehenden Zahn und Permanentmagnet
$w_n$	Energiedichte im Luftspalt bei sich gegenüberstehender Nut und Permanentmagnet
$W$	Energie, allgemein
$X$	Koordinatensysteme: X Koordinate
$X_\nu$	Ortsvektor des $\nu$ -ten Partikels

*Fortsetzung auf nächster Seite*

---



Variable	Erklärung
$x_k$	$k$ -te Ortskomponente eines Partikels
$Y$	Koordinatensysteme: Y Koordinate
$z$	Zufallszahl
$Z$	Koordinatensysteme: Axiale Koordinate; Amplitude der komplexen Amplituden-Phasen-Form
$z_1$	axiale Ausdehnung einer Linearmaschine im Bogenmaß
$z_n$	Leiterzahl je Nut
$z_m$	Verdrehwinkel zwischen Permanentmagnet und Statorfeld
$Z_{1Sp}$	Leiterzahl einer Spule

---

## **Abkürzungen**

**Abb** Abbildung(en)

**ASUE** Arbeitsgemeinschaft für sparsamen und umweltfreundlichen Energieverbrauch e.V.

**BLDC** Brushless Direct Current

**EA** Evolutionärer Algorithmus/Evolutionäre Algorithmen

**EEG** Erneuerbare-Energien-Gesetz

**FEM** Finite-Elemente-Methode

**GA** Genetischer Algorithmus/Genetische Algorithmen

**IKEP** Integriertes Energie- und Klimaprogramm

**KWK** Kraft-Wärme-Kopplung

**KWK-G** Kraft-Wärme-Kopplungs-Gesetz

**LG** Lineargenerator

**LINGEN** Lineargenerator

**MMK** Magneto-Motorische Kraft

**PM** Permanentmagnet

**PKW** Personenkraftwagen

**PMLSYN** Permanentmagneterregte Linear-Synchronmaschine

**PMSYNLG** Permanentmagneterregter Synchron-Lineargenerator

**PSO** Particle-Swarm-Optimierung

**SYN** Synchronmaschine

## Literaturverzeichnis

- [1] Abbass, H. A.: *An Economical Cognitive Approach for Bi-Objective Optimization Using Bliss Points, Visualization and Interaction*. In: *Soft Computing - A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications* Volume 10, Number 8, Springer, 2006.
- [2] Ackermann, B.: *New Technique for Reducing Cogging Torque in a Class of Brushless DC Motors*. In: *IEEE Proceedings-B*, Vol. 139, No. 4, 1992.
- [3] Al-Aawar, N., Hijazi, T.M. und Arkadan, A.A.: *EM-TFL Identification for Particle Swarm Optimization of HEV Powertrain*. In: *Proc. IEEE International Electric Machines and Drives Conference (IEMDC)*, 2009.
- [4] Arbeitsgemeinschaft, ASUE: *Die Strom erzeugende Heizung: Möglichkeiten zur Steigerung der Energieeffizienz*. ASUE Arbeitsgemeinschaft, 2007.
- [5] Arndt, U.: *Optimierung von KWK-Systemem zur Hausenergieversorgung mittels prüfstandsgestützter Simulation*. Technische Universität München, Lehrstuhl für Energiewirtschaft und Anwendungstechnik, Dissertation, 2008.
- [6] Ausderau, D.: *Polysolenoid-Linearantrieb mit genutetem Stator, Dissertation*. Eidgenössische Technische Hochschule ETH Zürich, 2004.
- [7] Bala, C., Fetita, Al. und Lefter, V.: *Handbuch der Wickeltechnik elektrischer Maschinen - Theorie, Konstruktion und Technologie von Wicklungen rotierender elektrischer Maschinen*. VEB Verlag Technik, Berlin, 1969.
- [8] Baumgartner, U., Magele, C. und Renhart, W.: *Pareto Optimality and Particle Swarm Optimization*. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2004.
- [9] Bea, F. B., Friedl, B. und Schweitzer, M.: *Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, Band 1: Grundlagen, Auflage 9*. UTB, Lucius & Lucius, 2009.
- [10] Beckmann, H.-W., Lampe, K., Milde, H., Rohlfing, H., Scheurmann, M., Tornau, F., Machon, W. und Lipsmeier, A.: *Friedrich Tabellenbuch, Elektrotechnik / Elektronik*. Bildungsverlag EINS, 6. Auflage, 2009.
- [11] Berardinelli, A.: *Über den Entwurf eines permanentmagneterregten Linearmotors, Dissertation*. *Berichte aus der Elektrotechnik*, Shaker Verlag, 2008.

- 
- [12] Bianchi, N., Bolognani, S., Dalla Corte, D. und Tonel, F.: *Tubular Linear Permanent Magnet Motors: an Overall Comparison*. Industry Applications, IEEE Transactions on, Vol. 39, Issue:2, 2003.
- [13] Blum, C. und Roli, A.: *Metaheuristics in Combinatorial Optimization: Overview and Conceptual Comparison*. ACM Computing Surveys 35, 2003.
- [14] Boldea, I. und Nasar, S. A.: *Permanent-Magnet Linear Alternators, Part II: Design Guidelines*. IEEE Transactions on Aerospace and Electric Systems, Vol AES-23, No. 1, 1987.
- [15] Bonabeau, E., Dorigo, M. und Theraulaz, G.: *Swarm Intelligence: From Natural to Artificial Systems*. Oxford University Press, USA, 1999.
- [16] Bonabeau, E. und Meyer, C.: *Swarm Intelligence: A Whole New Way to Think About Business*. In: Harvard Business Review, 2001.
- [17] Brakensiek, D.: *Lineares Antriebssystem für ein magnetisch gelagertes Transportfahrzeug, Dissertation*. RWTH Aachen, IEM; Shaker Verlag Aachen, 2004.
- [18] Brasas, F.: *Nachrechnung einer Polysolenoid-Linearmaschine, Studienarbeit*. Technische Universität München, Fachgebiet Energiewandlungstechnik, 2010.
- [19] Brennvall, J.: *Reciprocating Electric Machine*. World Patent 07102742, 2007.
- [20] Brennvall, J. und Nilssen, R.: *Working Machine With an Electromechanical Converter*. World Patent 05072074, 2005.
- [21] Bronstein, I., Semendjajew, K., Musiol, G. und Mühlig, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch; Auflage: 5., 2000.
- [22] Bui, L. T. und Alam, S.: *An Introduction to Multi-Objective Optimization*. In: Multi-Objective Optimization in Computational Intelligence - Theory and Practice; Information Science Reference (IGI Global), New York, 2008.
- [23] Bui Tran, D. M.: *Implementierung und Test eines Particle Swarm Verfahrens, Bachelorarbeit*. Technische Universität München, Fachgebiet Energiewandlungstechnik, 2009.
- [24] Chevallier, S.: *Comparative Study and Selection Criteria of Linear Motors, Dissertation*. Ecole Polytechnique Federale De Lausanne, 2006.
- [25] Clerc, M. und Kennedy, J.: *The Particle Swarm: Explosion, Stability and Convergence in a Multi-Dimensional Complex Space*. In: IEEE Transaction on Evolutionary Computation, Band 6, Heft 1, 2002.
- [26] Clow, B. und White, T.: *An Evolutionary Race: A Comparison of Genetic Algorithms and Particle Swarm Optimization for Training Neural Networks*. In:

- Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence, IC-AI Bd. 2, 2004.
- [27] Cohon, J. L.: *Multi-objective programming and planning*. New York: Academic Press, 1983.
- [28] Dakin, R. J.: *A Tree-Search Algorithm for Mixed Integer Programming Problems*. In: The Computer Journal, Volume 8, 1965.
- [29] Dang, Th. Th., Francois, P., Prevond, L. und Ben Ahmed, H.: *Theoretical and Experimental Results of Tubular Linear Induction Generator for Stirling Cogenerator System*. XIX International Conference on Electrical Machines, ICEM 2010, Rome, 2010.
- [30] Dantzig, G. B.: *Lineare Programmierung und Erweiterungen*. Springer-Verlag, 1966.
- [31] Das, S., Konar, A. und Chakraborty, U. K.: *Improving Particle Swarm Optimization with Differentially Perturbed Velocity*. In: GECCO '05: Proceedings of the 2005 Conference on Genetic and Evolutionary Computation, 2005, 2005.
- [32] Davis, T. E. und Principe, J. C.: *A Simulated Annealing Like Convergence Theory for the Simple Genetic Algorithm*. In: Proceedings of the Fourth International Conference on Genetic Algorithms, Morgan Kaufman, S. 174-182, 1991.
- [33] Deb, K., Agrawal, S., Pratab, A. und Meyarivan, T.: *A Fast Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization: NSGA-II*. Kan-GAL report 200001, Indian Institute of Technology, Kanpur, 2000.
- [34] Deng, Z., Boldea, I. und Nasar, S.: *Fields in Permanent Magnet Linear Synchronous Machines*. IEEE Transactions on Magnetics, Volume 22, Issue 2, 1986.
- [35] Dorigo, M. und Stützle, T.: *Ant Colony Optimization*. MIT Press, Cambridge, 2004.
- [36] Dorsch, M.: *Globale Optimierungsstrategien für mehrschichtige Perzeptronnetze, Diplomarbeit*. Technische Universität München, Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme, 2006.
- [37] Duan, Y., G., Harley, R. und Habetler, T. G.: *A Useful Multi-Objective Optimization Design Method for PM Motors Considering Nonlinear Material Properties*. Energy Conversion Congress and Exposition, ECCE, IEEE, 2009.
- [38] Duan, Y., Harley, R. G. und Habetler, T. G.: *Method for Multi-objective Optimized Designs of Surface Mount Permanent Magnet Motors with Concentrated or Distributed Stator Windings*. International Electric Machines and Drive Conference, Miami, 2009.

- 
- [39] Dubbel, H., Grote, K.-H. und Feldhusen, J.: *Dubbel. Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer, Berlin; 22. Auflage, 2007.
- [40] Eberhart, R. C. und Kennedy, J.: *A New Optimizer Using Particle Swarm Theory*. In: Proceedings of the 6th International Symposium on Micromachine Human Science, 1995.
- [41] Eberhart, R.C. und Shi, Y.: *Comparing Inertia Weights and Constriction Factors in Particle Swarm Optimization*. In: Proceedings of the 2000 Congress on Evolutionary Computation, 2002.
- [42] Ehrgott, M.: *Multicriteria Optimization, 2. Auflage*. Springer Verlag, 2005.
- [43] Engelbrecht, A.: *Computational Intelligence: An Introduction, 2. Auflage*. Chichester et. al., 2007.
- [44] Evers, W.: *Entwicklung von permanenterregten Synchronlinearmotoren mit passivem Sekundärteil für autonome Transportsysteme, Dissertation*. RWTH Aachen, IEM; Shaker Verlag Aachen, 2000.
- [45] Feiler, A.: *Simulation des elektrischen Antriebsstrangs eines Hybridfahrzeugs mit Kurzzeitspeicher, Diplomarbeit*. Fachgebiet Energiewandlungstechnik, Technische Universität München, 2004.
- [46] Fink, A. und Rothlauf, F.: *Heuristische Optimierungsverfahren in der Wirtschaftsinformatik, Working Papers in Information Systems 1*. Universität of Mannheim, Department of Information Systems 1, 2006.
- [47] Fischer, R.: *Elektrische Maschinen*. Hanser, 13. Auflage, 2006.
- [48] Fishburn, P.C.: *Lexicographic Orders, Utilities and Decision Rules: A Survey*. Management Science, 20(11), 1974.
- [49] Fogel, L. J., Owens, A. J. und Walsh, M. J.: *Artificial Intelligence through Simulated Evolution*. Wiley, New York, 1966.
- [50] Gal, T.: *Grundlagen des Operations Research, 1. Einführung, Lineare Optimierung, Nichtlineare Optimierung, Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung*. Springer, Berlin, 1991.
- [51] Glover, F. und Kochenberger, G.A.: *Handbook of Metaheuristics*. Kluwer, Boston, 1997.
- [52] Glover, F. und Laguna, M.: *Tabu Search*. Kluwer, Boston, 1997.
- [53] Haimes, Y. Y., Lasdon, S. und Wismer, D. A.: *On a Bicriterion Formulation of the Problem of Integrated System Identification and System Optimization*. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1(3), 1971.

- 
- [54] Hassan, R., Cohanin, B. und Weck, O.: *A Comparison of Particle Swarm Optimization and the Genetic Algorithm*. 46th Structural Dynamics and Materials Conference, 2005.
- [55] Häberle, H. O., Häberle, G., Heinzelmann, R., Jöckel, H. W., Krall, R., Lücke, Th., Rieger, K., Schiemann, B., Schmitt, S. und Tkotz, K: *Tabellenbuch Elektrotechnik: Tabellen - Formeln - Normenanwendungen*. Europa-Lehrmittel, 23. Auflage, 2009.
- [56] Heinrich, R.: *Vergleich und Bewertung global-stochastischer Optimierungsverfahren, Hauptseminar*. Technische Universität München, Fachgebiet Energiewandlungstechnik, 2009.
- [57] Hellinger, R.: *Theoretische Grundlagen zur Auslegung von eisenbehafteten Langstator-Linearmotoren, Dissertation*. TU Berlin, 1983.
- [58] Helwig, S.: *Particle Swarms for Constrained Optimization, Dissertation*. Technischen Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg, 2010.
- [59] Hendershot, J.R. und Miller, T.: *Design of Brushless Permanent-Magnet Motors*. Magna Physics Publishing, 1994.
- [60] Herzog, H. G.: *Grundzüge elektrischer Energiewandlung (Skriptum zur Vorlesung)*. TUM, FG EWT, 2008/2009.
- [61] Hodgson, R. J. W.: *Partical Swarm Optimization Applied To The Atomic Cluster Optimization Problem*. In: Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference, 2002.
- [62] Horn, M., Ziesing, H.-J., Matthes, F. C., Harthan, R. und Menzler, G.: *Ermittlung der Potenziale für die Anwendung der Kraft-Wärme-Kopplung und der erzielbaren Minderung der CO<sub>2</sub>-Emissionen einschließlich Bewertung der Kosten (Verstärkte Nutzung der Kraft-Wärme-Kopplung)*. Umwelt Bundes Amt: Forschungsbericht 202 41 182 UBA-FB 000943, 2007.
- [63] Hu, X. und Eberhart, R.: *Multiobjective Optimization Using Dynamic Neighborhood Particle Swarm Optimization*. In: Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation CEC2002, 2002.
- [64] Huang, T. und Mohan, A.S.: *A Hybrid Boundary Condition for Robust Particle Swarm Optimization*. In: Antennas and Wireless Propagation Letters 4, 2005.
- [65] Hwang, C. L. und Masud, A. S.: *Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications; A State-of-the-Art Survey*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Berlin: Springer Verlag, 1979.
- [66] Ignizio, J. P.: *Generalized Goal Programming: An overview*. Computer and Operations Research 10(4), 1974.

- [67] Jang, S.M., Choi, J.Y., Cho, H.W., Jang, W.B. und Kim, B.H.: *The Influence of Mechanical Resonance on the Dynamic Performance of a Tubular Linear Actuator with Halbach Array*. Electrical Machines and Systems, ICEMS 2005. Proceedings of the Eighth International Conference on, Vol. 1, 2005.
- [68] Janschek, K.: *Systementwurf mechatronischer Systeme: Methoden Modelle Konzepte*. Springer Verlag, 2009.
- [69] Jian, M.C. und Chen, Y.P.: *Introducing Recombination With Dynamic Linkage Discovery to Particle Swarm Optimization*. In: GECCO '06: Proceedings of the 8th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation, 2006.
- [70] Jin, J.L., Ponnuthurai, N., Kai, Q. und Baskar, S.: *Comprehensive Learning Particle Swarm Optimizer for Global Optimization of Multimodal Functions*. In: IEEE Transactions on Evolutionary Computation 10, 2006.
- [71] Johnson, D. und Mc Geoch, L.: *Experimental Analysis of Heuristic for the STSP*. In: Gutin, G.: The Travelling Salesman Problem and its Variations; Kluver, Boston, 2002.
- [72] Kennedy, J.: *Small Worlds and Mega-Minds: Effects of Neighborhood Topology*. In: 1999 Congress on Evolutionary Computation, 1999.
- [73] Kennedy, J. und Eberhart, R. C.: *Particle Swarm Optimization*. In: Neural Networks, 1995. Proceedings., IEEE International Conference on Vol. 4, 1995.
- [74] Kennedy, J., Eberhart, R. C. und Shi Y.: *Swarm Intelligence*. The Morgan Kaufmann Series in Evolutionary Computation, 2001.
- [75] Kennedy, J. und Mendes, R.: *Population Structure and Particle Swarm Performance*. In: Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation CEC2002, IEEE Press, 2002.
- [76] Klotzenbach, S. und Henrichfreise, H.: *Ein nichtlineares Reibmodell für die numerische Simulation reibungsbehafteter mechatronischer Systeme*. ASIM 2002, 16. Symposium Simulationstechnik. Rostock, 2002.
- [77] Koch, J.: *Entmagnetierungsenergie und Anziehungskraft von Permanentmagneten*. In: Valvo Berichte, Band 20, Philipps GmbH Hamburg, 1976.
- [78] Koch, J.: *Permanentmagnetische Polfühligkeit in Gleichstrommotoren mit Ferrixdure-Segmenten*. In: Valvo Berichte, Band 20 Heft 1, Philipps GmbH Hamburg, 1976.
- [79] Kolbe, J.: *Zur numerischen Berechnung und analytischen Nachbildung des Luftspaltfeldes von Drehstrommaschinen, Dissertation*. Hochschule der Bundeswehr Hamburg, 1983.



- 
- [80] Kott, J.: *Nachrechnung eines Lineargenerators mit Hilfe von 2D FEM*, Bachelorarbeit. Technische Universität München, Fachgebiet Energiewandlungstechnik, 2009.
- [81] Kou, B., Li, L. und Zhang, Ch.: *Analysis and Optimization of Thrust Characteristics of Tubular Linear Electromagnetic Launcher for Space-Use*. In: Magnetics, IEEE Transactions on , vol.45, no.1, 2009.
- [82] Krebs, G., Tounzi, A., Pauwels, B. und Willemot, D.: *General Overview of Integrated Linear Rotary Actuators*. Proceedings of the 2008 International Conference on Electrical Machines, 2008.
- [83] Kuchling, H.: *Taschenbuch der Physik*. Fachbuchverlag Leipzig, 17. Auflage, 2007.
- [84] Kuhn, J.: *Parameteridentifikation und Zustandsregelung eines medizinischen Ergometers*, Diplomarbeit. Fachgebiet Energiewandlungstechnik, Technische Universität München, 2008.
- [85] Laumanns, M., Thiele, L. und Zitzler, E.: *An Efficient, Adaptive Parameter Variation Scheme for Metaheuristics Based on the Epsilon-Constraint Method*. European Journal of Operational Research 169, Elsevier, 2004.
- [86] Laumanns, M., Thiele, L. und Zitzler, E.: *An Adaptive Scheme to Generate the Pareto Front Based on the Epsilon-Constraint Method*. IN: Practical Approaches to Multi-Objective Optimization, Dagstuhl Seminar Proceedings, Internationales Begegnungs- und Forschungszentrum für Informatik (IBFI), 2005.
- [87] Lee, S. Q.: *Halbach-Magnet-Array-Based Focusing Actuator for Small-Form-Factor Optimal Storage Device*. Japanese Journal of Applied Physics, 2006.
- [88] Li, X.: *A Non-Dominated Sorting Particle Swarm Optimizer for Multi-Objective Optimization*. Lecture Notes in Computer Science, 2003.
- [89] Lorenzen, H.W.: *Elektrische Maschinen Grundlagen 1, 2 (Skriptum zur Vorlesung)*. TUM, LEMG, 1985.
- [90] Magele, Ch., Fürntratt, G., Brandstätter, B. und Richter, K.R.: *Self adaptive fuzzy sets in multi objective optimization using genetic algorithm*. ACES Journal, vol. 12, no. 2, 1997.
- [91] Magnus, W. und Oberhettinger, F.: *Formeln und Sätze für die speziellen Formeln der mathematischen Physik*. Springer, 2. Auflage, 1948.
- [92] Mahouf, M., Chen, M. Y. und Linkens, D. A.: *Adaptive Weighted Particle Swarm Optimisation for Multi-Objective Design of Alloy Steels*. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3242, Springer, 2004.

- 
- [93] Meissner, M., Schmucker, M. und Schneider, G.: *Optimized Particle Swarm Optimization (OPSO) and its Application to Artificial Neural Network Training*. In: BMC Bioinformatics, 2006.
- [94] Mendes, R., Kennedy, J. und Neves J.: *Watch Thy Neighbor or How the Swarm Can Learn From its Environment*. In: Proceedings of the IEEE Swarm Intelligence Symposium, 2003.
- [95] Metropolis, N. und Ulam, S.: *The Monte Carlo Method*. In: Journal of the American Statistical Association, Vol. 44, No. 247, 1949.
- [96] Meyer, W.: *Automatisierter Entwurf elektromechanischer Wandler, Dissertation*. Techn. Univ. München, FG EWT; Hieronymus, München, 2009.
- [97] Meyer, W., Oswald, A., Nuscheler, R. und Herzog, H.-G.: *Verfahren zur automatischen Generierung von Reluktanznetzwerken für elektromechanische Wandler*. VDI/VDE-Fachtagung Elektrisch-mechanische Antriebssysteme, Böblingen, VDI Wissensforum, VDI Verlag GmbH, 2006.
- [98] Miettinen, K.: *Nonlinear Multi-Objective Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999.
- [99] Müller, A.: *Evocomp, evolutionary computation*. Webseite, 2010. Verfügbar unter <http://www.evocomp.de>, 30.09.2010.
- [100] Müller, G. und AND Ponick, B., Vogt, K.: *Berechnung elektrischer Maschinen*. Elektrische Maschinen. WILEY-VCH, 6. Auflage, 2008.
- [101] Müller, G. und Ponick, B.: *Grundlagen elektrischer Maschinen*. Elektrische Maschinen. WILEY-VCH, 9. Auflage, 2006.
- [102] Müller, G. und Ponick, B.: *Theorie elektrischer Maschinen*. Elektrische Maschinen. WILEY-VCH, 4. Auflage, 2009.
- [103] Müller-Gritschneider, D.: *Deterministic Performance Space Exploration of Analog Integrated Circuits considering Process Variations and Operating Conditions, Dissertation*. Technische Universität München, Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme, 2009.
- [104] Müller, J., Hahn, I. und Wiezoreck, J.: *Lineargenerator mit einem Primärteil und einem Sekundärteil zur Energiegewinnung in einem Wellenkraftwerk*. World Patent 2008/116621, 2008.
- [105] Mohr, A.: *Die Verringerung der Flußschwankungen in kleinen Gleichstrommotoren*. In: Bosch, Technische Berichte 4, 1973.

- 
- [106] Muetze, A.: *A Neglected Stepchild? Deterministic Global Optimization of Electromechanical Energy Converters*. Industry Applications Magazine, IEEE , vol.14, 2008.
- [107] Muetze, A. und Cheung, M.: *Discussion of Three Different Algebraic Manipulations and Their Influences on Deterministic Optimization*. XIX International Conference on Electrical Machines, ICEM, Rome, 2010.
- [108] Murray, W. D.: *Composite stator concentric linear induction motor*. US Patent 3852627, 1973.
- [109] Oswald, A.: *Modellierung des Betriebsverhaltens einer 3-strängigen Kurzschlussanker Asynchronmaschine in eine Gesamt-Prozess-Analyse, Bachelorarbeit*. Technische Universität München, Fachgebiet Energiewandlungstechnik, 2002.
- [110] Oswald, A.: *Bestimmung des optimalen Wirkungsgrades einer Vollpol-Synchronmaschine, Hauptseminar*. Technische Universität München, Fachgebiet Energiewandlungstechnik, 2003.
- [111] Oswald, A.: *Vermessung von Permanentmagneten, Technische Studie*. Technische Universität München, Fachgebiet Energiewandlungstechnik, 2004.
- [112] Oswald, A. und Herzog, H. G.: *Numerical-analytical coupled optimization of a mechatronic system with particular attention to the embedded linear machine*. COMPUMAG 2009 17th International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, Florianópolis, Brazil, 2009.
- [113] Oswald, B.: *Linearmotor*. DE Patent 4217357, 2002.
- [114] Oswald, J.: *Linearmotor*. DE Patent 102004008688, 2004.
- [115] Oswald, A. und Herzog, H.-G.: *Automated Design of Tubular Linear Generator for Use Within Optimization Tool*. XIX International Conference on Electrical Machines, ICEM 2010, Rome, 2010.
- [116] Page, G.: *Improvement in electro-magnetic engines*. US Patent 10480, 1851.
- [117] Paquet, U. und Engelbrecht A.P.: *A new Particle Swarm Optimiser for linearly constrained Optimisation*. In: Proceedings of 2003 IEEE Congress on evolutionary Computation, 2003.
- [118] Pardalos, P.P. und Resende M.G.C.: *Handbook of Applied Optimization*. Oxford University Press, New York, 2002.
- [119] Parsopoulos, K.E. und Vrahatis, M.N.: *Multi-Objective Particles Swarm Optimization Approaches*. In: Multi-Objective Optimization in Computational Intelligence - Theory and Practice; Information Science Reference (IGI Global), New York, 2008.

- [120] Pompermaier, C., Kalluf, F. J.H., Ferreira da Luz, M.V. und Sadowski, N.: *Study and Optimization of a Small Tubular Linear Motor With Permanent Magnet*. XIX International Conference on Electrical Machines, ICEM 2010, Rome, 2010.
- [121] Projektträger Jülich: *Klimaschutz und Energieeffizienz: Forschung, Entwicklung und Demonstration moderner Energietechnologien*. Bundesministerium für Wirtschaft und Technologie, 2008.
- [122] Rade, L. und Westgren, B.: *Springers Mathematische Formeln*. Springer, 3. Auflage, 200.
- [123] Rechenberg, I.: *Evolutionstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution*. Friedrich Fommann, Stuttgart, 1973.
- [124] Reubner, Ch.: *Berührungsloses Transportsystem mit Synchron-Linearantrieb, Dissertation*. RWTH Aachen, IEM; Shaker Verlag Aachen, 1996.
- [125] Richter, R.: *Die Bruchlochwicklungen (Teillochwicklungen) und ihr Entwurf*. Electrical Engineering (Archiv für Elektrotechnik), Nr. 8, Springer Berlin / Heidelberg, 1919.
- [126] Richter, R.: *Lehrbuch der Wicklungen elektrischer Maschinen*. Wissenschaftliche Bücherei, G. Braun, Karlsruhe, 1952.
- [127] Rinderknecht, F. und Herzog, H.-G.: *Calculation of a Linear Generator for a Hybrid Vehicle Concept*. XIX. International Conference on Electrical Machines, ICEM 2010, Rome, 2010.
- [128] Robinson, J. und Rahmat-Samii, Y.: *Particle Swarm Optimization in Electromagnetics*. In: IEEE Transactions on Antennas and Propagation 52, 2004.
- [129] Rudolph, G.: *Convergence Properties of Evolutionary Algorithms*. In: Schriftenreihe Forschungsergebnisse der Informatik, Bd. 35, Kovac, Hamburg, 1997.
- [130] Santana-Quintero, L.V., Ramirez-Santiago, N. und Coello Coello, C.A.: *Towards a more efficient Multi-Objective Particle Swarm Optimizer*. In: Lam Thu Bui and Sameer Alam; Multi-Objective Optimization in Computational Intelligence - Theory and Practice; Information Science Reference (IGI Global); New York, 2008.
- [131] Sari, A., Dubas, F. und Espanet, C.: *Multi-Objective Design Optimization of PMSM for PEM Fuel Cell Air-Circuit with PSO Algorithms*. In: Proc. IEEE International Electric Machines and Drives Conference (IEMDC), 2009.
- [132] Schiling, G.: *Vorrichtung zur Umwandlung thermodynamischer Energie in elektrische Energie, Offenlegungsschrift DE 10 2006 056 349 A1*. Deutsches Patent- und Markenamt, 2008.

- [133] Schittkowski, K.: *Mathematische Grundlagen von Optimierungsverfahren*. Mathematisches Institut, Universität Bayreuth, 1999.
- [134] Schmid, M.: *Doppelschichtkondensatoren als Kurzzeitspeicher im Hybridfahrzeug, Dissertation*. Fachgebiet Energiewandlungstechnik, Technische Universität München, 2004.
- [135] Schwärzler, P.: *Asynchroner Linearmotor*. DE Patent 3029618, 1980.
- [136] Shen, Q., Jiang, J.H., Jiao, C.X., Lin W.Q., Shen, G.L. und Yu, R.Q.: *Hybridized Particle Swarm Algorithm for Adaptive Structure Training of Multilayer Feed-Forward Neural Networks*. QSAR Studies of Bioactivity of Organic Compounds. In *Comput. Chem.*, 2004.
- [137] Shi, Y. und Eberhart, R. C.: *Parameter Selection in Particle Swarm Optimization*. In: *Proceedings of the Seventh Annual Conference on Evolutionary Programming*, 1998.
- [138] Shung-Hsing, H.: *Tubular linear motor for electrical discharge machine*. US Patent 20060055251, 2006.
- [139] Sierra, M. und Coello Coello, C.A.: *Improving PSO-Based Multi-Objective Optimization Using Crowding, Mutation and Dominance*. In: *EMO 2005*, pages 505–519. LNCS 3410, Springer Verlag, 2005.
- [140] Sierra, M. und Coello Coello, C.A.: *Multi-Objective Particle Swarm Optimizers: A Survey of the State-of-the-Art*. In: *International Journal of Computational Intelligence*, Vol. 2, No. 3, 2006.
- [141] Steuer, R. E.: *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Applications*. Wiley Series in Probability & Mathematical Statistics, Wiley, 1986.
- [142] Stribek, R.: *Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager*. Z. Verein. Deut. Ing. Vol. 46, 1902.
- [143] Suganthan, P. N.: *Particle Swarm Optimizer With Neighborhood Operator*. In: *Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation*, 1998.
- [144] Szabo, L., Oprea, C., Viorel, L.-A. und Biro, K.A.: *Novel Permanent Magnet Tubular Linear Generator for Wave Energy Converters*. Electric Machines & Drives Conference, IEMDC 07. IEEE International, 2007.
- [145] Tam, M.S.W. und Cheung, N.C.: *A High Speed High Precision Linear Drive System for Manufacturing Automation*. Applied Power Electronics Conference and Exposition, IEEE, 2001.

- 
- [146] Tillet, J., Rao, T.M., Sahin, F., Rao, R. und Brockport, S.: *Darwinian Particle Swarm Optimization*. In: Proceedings of the 2nd Indian International Conference on Artificial Intelligence, 2005, 2005.
- [147] Tomczuk, B., Schroder, G. und Waindok, A.: *Finite-Element Analysis of the Magnetic Field and Electromechanical Parameters Calculation for a Slotted Permanent-Magnet Tubular Linear Motor*. In: IEEE Transactions on Magnetics, vol.43, no.7, 2007.
- [148] Ummaneni, R.B., Nilssen, R. und Brennvall, J.E.: *Demonstration Model of a Linear Permanent Magnet Actuator with Gas Springs*. Proceedings of the 2008 International Conference on Electrical Machines, 2008.
- [149] van Laarhoven, P.J.M. und Aarts, E.H.L.: *Simulated Annealing: Theory and Applications*. Reidel, Dordrecht, 1987.
- [150] van Zyl, A.W., Jeans, C.G., Cruise, R.J. und Landy, C.F.: *Comparison of Force to Weight Ratios Between a Single-Sided Linear Synchronous Motor and a Tubular Linear Synchronous Motor*. Electric Machines and Drives, International Conference IEMDC '99, 1999.
- [151] Voß, S.: *Meta-Heuristics: The State of the Art*. In: Local Search for Planning and Scheduling, Lecture Notes in Artificial Intelligence 2148, Springer, 2002.
- [152] Wang, X.: *Automatisierter Entwurf eines Polysolenoid Lineargenerators, Masterarbeit*. Technische Universität München, Fachgebiet Energiewandlungstechnik, 2010.
- [153] Wang, J., Hewell, G. H. und Howe, D.: *Design Optimisation and Comparison of Tubular Permanent Magnet Machine Topologies*. IEE Proceedings of Electric Power Applications, Volume 148, Issue 5, 2001.
- [154] Wang, J., Hewell, G.H. und Howe, D.: *A General Framework for the Analysis and Design of Tubular Linear Permanent Magnet Machines*. IEEE Transactions on Magnetics, Volume 35, Issue 3, 1999.
- [155] Wang, J. und Howe, D.: *Design Optimization of Radially Magnetized, Iron-Cored, Tubular Permanent-Magnet Machines and Drives Systems*. IEEE Transactions on Magnetics, Volume 40, Issue 5, 2004.
- [156] Wang, J., Ibrahim, T. und Howe, D.: *Design Optimization of Short-Stroke, Single Phase Tubular Permanent Magnet Motor for Refrigeration Applications*. Proceedings of the 2008 International Conference on Electrical Machines, 2008.
- [157] Wegener, I.: *Towards a Theory of Randomized Search Heuristics*. In: Rovan, B.: Mathematical Foundations of Computer Science, Lecture Notes in Computer Science 2747, Springer, Berlin, S. 125-141, 2003.

- [158] Werner, R.: *Entwicklung linearer Direktantriebe in physikalischen Grenzbereichen*. Vortrag auf dem Energietag Brandenburg, BTU Cottbus 2004, 2004.
- [159] White, D.C. und Woodson H.: *Electromechanical Energy Conversion*. WILEY, New York, 1959.
- [160] Wiart, A.: *Elektrische Vorrichtung für geradlinigen Antrieb*. DE Patent 2109241, 1970.
- [161] Wierzbiki, A.P.: *Optimization Techniques, Part 1: Methodological Guide to Multi-Objective Optimization*. Lecture Notes in Control and Information Sciences 22. Springer Verlag, 1980.
- [162] Wolpert, D.H. und Macready, W.G.: *No Free Lunch Theorems for Optimization*. In: IEEE Transactions on Evolutionary Computation 1, 1997.
- [163] Yang, B.: *Modified Particle Swarm Optimizers and their Applications to Robust Design and Structural Optimization, Dissertation*. Technische Universität München, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, 2009.
- [164] Youngjun, A., Jiseong, P., Cheol-Gyun, L., Yu-Seok, J., Yong-Jae, K. und Sang-Yong, J.: *Optimal Design of Direct-Driven PM Wind Generator Using Memetic Algorithm Coupled with FEM*. Electrical Machines and Systems, 2009. ICEMS 2009. International Conference on, 2009.
- [165] Zhu, Z.Q.: *Recent Development of Halbach Permanent Magnet Machines and Applications*. Power Conversion Conference - Nagoya, 2007.
- [166] Zitzler, E., Laumanns, M. und Thiele, L.: *SPEA2: Improving the Performance of the Strength Pareto Evolutionary Algorithm*. Technical Report 103, Computer Engineering and Communication Networks Lab (TLK) , Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, 2001.
- [167] Zuser, W., Biffel, St., Grechenig, Th. und Köhle, M.: *Software Engineering: mit UML und dem Unified Process*. Pearson Studium, 2001.