



Lehrstuhl für Regelungstechnik



Technische Universität München

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Lehrstuhl für Regelungstechnik

# **Energiebasierte Lage- und Positionsfolgeregelung für einen Quadrocopter**

Oliver Fritsch

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der  
Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Manfred Hajek

Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann

2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Florian Holzapfel

Die Dissertation wurde am 23.06.2014 bei der Technischen Universität München  
eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 20.10.2014 angenommen.



*Für meine Eltern und für Britta*



# Kurzfassung

Diese Arbeit behandelt den Entwurf energiebasierter Lage- und Positionsfolgeregler für einen Quadrocopter. Es werden neue Lösungen für das vollständige und das reduzierte Lageregelungsproblem eines Starrkörpers präsentiert, welche auf die spezifischen Anforderungen des Quadrocopters zugeschnitten sind. Die entworfenen Regler priorisieren die Schubrichtung, führen durch gezielte Stellgrößensättigung zu schnellem Einschwingverhalten und garantieren fast global asymptotische Stabilität. Zur Lösung des Positionsfolgeproblems wird eine Kaskade aus übergeordneter Positions- und untergeordneter Lageregelung vorgeschlagen. In diesem Zusammenhang wird ein Stabilitätskriterium für eine Klasse nichtautonomer nichtlinearer Kaskadensysteme entwickelt. Simulationen und Flugversuche illustrieren die Leistungsfähigkeit der Ansätze.

# Abstract

This thesis deals with the design of energy based attitude and position tracking controllers for a quadrotor. New solutions to the complete and the reduced attitude control problem of a rigid body are presented, which are tailored to the specific requirements of the quadrotor. The developed controllers prioritize the thrust direction, lead to a fast transient response by purposefully saturating the controls and guarantee almost global asymptotic stability. To solve the position tracking problem a cascade consisting of an outer loop position controller and an inner loop attitude controller is proposed. In this context a stability result for a class of nonautonomous nonlinear cascade systems is developed. Simulations and flight experiments illustrate the performance of the approaches.



# Danksagung

Mein herzlicher Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Boris Lohmann, der mir die Möglichkeit gegeben hat als Teil seiner Forschungsgruppe am Lehrstuhl für Regelungstechnik zu promovieren. Besonders das unerschütterliche Vertrauen, mit welchem er mir weitgehende Freiheit bei der Wahl und Bearbeitung meines Themas gewährt hat, verdient meine tiefe Anerkennung. Seine immerwährende Aufgeschlossenheit und Gesprächsbereitschaft schufen eine offene Atmosphäre, die ich stets sehr geschätzt habe.

Weiterhin danke ich Prof. Florian Holzapfel für das Interesse an meiner Arbeit sowie deren sorgfältige Begutachtung. Besonders möchte ich mich jedoch für die wohlwollende Bereitwilligkeit bedanken, mit der er mir den Flugversuchsprüfstand seines Lehrstuhls für Experimente zur Verfügung gestellt hat. Mein Dank gilt auch Prof. Manfred Hajek für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Ein ganz besondereres Dankeschön gebührt Thomas Raffler, dessen Entwicklungsarbeiten an der Hard- und Firmware des Quadrocopters den Grundstein für das Gelingen des Experimentalteils dieser Arbeit gelegt haben und dessen uneigennützig und kompetente Hilfsbereitschaft unbedingt erwähnt werden muss. Darüber hinaus möchte ich all meinen ehemaligen Studenten danken, die mit ihren Arbeiten wesentlich zur Qualität der Forschungsergebnisse beigetragen haben. Vor allem Bernd Henze, Guillermo Falconí und David Tromba verdienen meine tiefe Dankbarkeit.

Meinen langjährigen und sehr angenehmen Bürokollegen Dr. Michael Buhl und Paul De Monte danke ich für die vielen fruchtbaren fachlichen und nicht fachlichen Diskussionen sowie ihre wertvollen Hinweise und Anregungen zu meiner Arbeit. Für das gewissenhafte Lektorat dieser Dissertation bin ich besonders Nils Pletschen und Dr. Tobias Kloiber zu Dank verpflichtet, die mit Ihren Anmerkungen zu einer deutlichen Verbesserung der Lesbarkeit beigetragen haben. Weiterhin möchte ich mich bei sämtlichen Kollegen, die mich während meiner Zeit am Lehrstuhl begleitet haben, für die einzigartige und freundschaftliche Atmosphäre bedanken, in welcher sich das Arbeiten nicht nur produktiv, sondern zumeist auch sehr kurzweilig gestaltet hat.

Meinen wundervollen Eltern, Karin und Werner Fritsch, bin ich dankbar für ihre bedingungslose Unterstützung und ihre fortwährenden Ermutigungen, meinen Weg zu gehen. Den größten Dank schulde ich meiner großen Liebe Britta Udelhoven, die mich mit schier grenzenlosem Verständnis durch die letzten Jahre begleitet hat und es stets vermochte mir Ruhe, Kraft und Rückhalt zu geben.

München, im Herbst 2014

Oliver Fritsch



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Zielsetzung der Arbeit . . . . .	3
1.2	Energiebasierte Regelung . . . . .	6
1.3	Fast global asymptotische Stabilität . . . . .	9
1.4	Beitrag der Arbeit . . . . .	11
1.5	Aufbau der Arbeit . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Der Quadcopter</b>	<b>17</b>
2.1	Dynamisches Modell des Quadrocopters . . . . .	18
2.1.1	Verwendete Schreibweisen und Koordinatensysteme . . . . .	19
2.1.2	Statisches Antriebsmodell . . . . .	22
2.1.3	Starrkörpergleichungen . . . . .	25
2.2	Bestehende Regelungskonzepte . . . . .	27
2.2.1	Lageregelung . . . . .	27
2.2.1.1	Der Konfigurationsraum $SO(3)$ und die Problematik alternativer Lageparametrierungen . . . . .	27
2.2.1.2	Lageregelung am Quadcopter . . . . .	29
2.2.1.3	Lageregelungskonzepte mit besonderem Bezug zur Arbeit . . . . .	32
2.2.2	Positionsregelung . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Reduzierte Lageregelung - Regelung der Schubrichtung</b>	<b>37</b>
3.1	Folgedynamik und Regelziel . . . . .	38
3.2	Festwertregelung - Ein schneller und sättigender Ansatz . . . . .	40
3.2.1	Entwurf der Potentialfunktion . . . . .	42
3.2.2	Entwurf der Dämpfungsstrategie . . . . .	46
3.2.3	Stabilitätseigenschaften der Ruhelagen . . . . .	55
3.2.3.1	Lokale Stabilitätseigenschaften . . . . .	59
3.2.3.2	Globale Stabilitätseigenschaften . . . . .	62
3.3	Erweiterung zur Folgeregelung . . . . .	64
3.4	Simulationsergebnisse . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Vollständige Lageregelung mit Priorisierung der Schubrichtung</b>	<b>77</b>
4.1	Folgedynamik und Regelziel . . . . .	78
4.2	Zerlegung und alternative Darstellung des Lagefehlers . . . . .	80
4.3	Festwertregelung - Ein schneller und sättigender Ansatz . . . . .	85
4.3.1	Entwurf der Potentialfunktion . . . . .	87
4.3.2	Entwurf der Dämpfungsstrategie . . . . .	91

4.3.3	Stabilitätseigenschaften der Ruhelagen . . . . .	96
4.3.3.1	Lokale Stabilitätseigenschaften . . . . .	97
4.3.3.2	Globale Stabilitätseigenschaften . . . . .	104
4.4	Erweiterung zur Folgeregelung . . . . .	108
4.5	Simulationsergebnisse . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Kaskadierte Trajektorienfolgeregelung für die Position und das Heading</b>	<b>119</b>
5.1	Spezifikation des Headingkommandos . . . . .	123
5.2	Die Folgefehlerdynamik - Ein kaskadiertes System . . . . .	125
5.3	Ein Stabilitätskriterium für eine Klasse nichtautonomer, nichtlinearer kaskadierter Systeme . . . . .	131
5.4	Entwurf der Positionsregelung . . . . .	137
5.4.1	Entwurf der Potentialfunktion . . . . .	139
5.4.2	Entwurf der Dämpfungsstrategie . . . . .	141
5.4.3	Stabilitätseigenschaften der Ruhelage . . . . .	143
5.5	Entwurf des Schubgesetzes . . . . .	144
5.6	Flugversuche . . . . .	147
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>159</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>163</b>
A.1	Formaler Nachweis der Eigenschaft $\dot{\mathbf{e}}_\varphi = \mathbf{0}$ unter der Annahme 3.2 . . . . .	163
A.2	Bestimmung der Schaltlinie $s_\varphi(\varphi)$ . . . . .	164
A.3	Darstellung der Drehratenkomponente $\omega_{Az}^{DA}$ in Abhängigkeit von $\mathbf{z}_{d,B}$ und $\omega_B^{DB}$ . . . . .	165
A.4	Berechnungsvorschriften für $\dot{\mathbf{x}}_{d,I}$ und $\ddot{\mathbf{x}}_{d,I}$ . . . . .	169
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>171</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>181</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Den unbemannten Flugsystemen, die umgangssprachlich häufig als Drohnen bezeichnet werden, wird unlängst eine bisher ungekannte mediale Aufmerksamkeit zuteil. Dabei beherrscht nicht mehr nur der zweifelhafte Einsatz militärischer Drohnen die Schlagzeilen, sondern zunehmend rücken die zivilen Anwendungen in den Fokus der Berichterstattung. Nicht zuletzt die Ankündigung namhafter Logistikunternehmen und Versandhändler, ihre Pakete mittelfristig per Drohne ausliefern zu wollen, hat der Thematik reichlich Aufmerksamkeit beschert [74, 110, 164]. Die Wochenzeitung Die Zeit wäht die Wirtschaft deshalb schon im „Im Drohnenfieber“ [103], die Frankfurter Allgemeine Zeitung titelt „Döner-Drohne, Umweltwächter oder Lebensretter“ [126], DER SPIEGEL berichtet vom „Drohnenballett“ [153] und auch die Süddeutsche Zeitung widmet sich dem Spannungsfeld zwischen „Lebensretter und Spion“ [148]. Es wird geschätzt, dass der globale Umsatz mit zivilen unbemannten Flugsystemen von derzeit etwa 100 Millionen Dollar auf jährlich 3.5 Milliarden Dollar bis zum Jahr 2017 anwachsen wird [103]. Verdient werden soll dieses Geld in den unterschiedlichsten Anwendungsbereichen. Neben neuen Dienstleistungen, die erst mit der Entwicklung unbemannter Flugsysteme ermöglicht wurden, besteht für den Einsatz von Flugrobotern überall dort Potential, wo kostenintensive bemannte Flugzeit günstig ersetzt, oder Gefahr für Leib und Leben vermieden werden kann. Bereits bestehende und angedachte Anwendungen umfassen Felder wie Kartographie, geophysikalische, luftchemische und meteorologische Messungen, Zivil- und Katastrophenschutz, Überwachung, Luftbildarchäologie, Schadensbegutachtung und Inspektionsaufgaben an schwer zugänglichen Stellen, Gebäudevermessung und Photogrammetrie, Luftaufnahmen für Film und Fernsehen sowie den Warentransport [83]. Viele Hersteller erwarten, dass sich zunächst die Landwirtschaft zum größten Kunden für unbemannte Flugsysteme entwickeln wird. Dort werden sie bereits jetzt unter anderem zum Ausbringen von Unkrautvernichtungsmitteln eingesetzt [148].

Wesentliche Triebfedern für die rasante Entwicklung der letzten Jahre waren zum

einen die technologischen Fortschritte in den Bereichen des Leichtbaus, der Aerodynamik, der Antriebs- und Energiespeichertechnik sowie der Mikroelektronik. Zum anderen verhalfen neue Methoden der Flugführung und -regelung den unbemannten Flugsystemen zum Durchbruch [83]. Dabei gewinnt besonders die Systemklasse der Drehflügler zunehmend an Bedeutung. Während im Jahr 2010 noch vier Fünftel der unbemannten Flugsysteme Flächenflugzeuge waren, werden es bis 2017 zu vier Fünfteln Hubschrauber sein [126]. Der entscheidende Vorzug von Hubschraubern gegenüber Flächenflugzeugen besteht in deren Eigenschaft auch ohne Relativgeschwindigkeit Auftrieb erzeugen zu können. Die damit verbundenen Fähigkeiten senkrecht zu starten und auf der Stelle schweben zu können sind für viele Anwendungsszenarien interessant, insbesondere wenn ein Einsatz innerhalb von Gebäuden oder in anderen beengten Umgebungen erwogen wird.

Aus regelungstechnischer Sicht stellen Hubschrauber eine Herausforderung dar, da sie im Gegensatz zu vielen Starrflüglern eine instabile und stark verkoppelte nichtlineare Flugdynamik besitzen [83, 145]. Dies gilt auch für den in Abbildung 1.1 dargestellten *Quadrocopter*, einen vierrotorigen Drehflügler in Kreuzkonfiguration, der aufgrund seines simplen mechanischen Aufbaus und den damit einhergehenden vergleichsweise niedrigen Anschaffungskosten weite Verbreitung im Bereich der unbemannten Flugsysteme gefunden hat. Insbesondere im wissenschaftlichen Umfeld dient der Quadrocopter heute vielen Forschern als Experimentierplattform. Dabei sind speziell Fragestellungen aus den unterschiedlichen Ebenen der Flugführung und -regelung ein aktives Forschungsfeld, wie die Fülle an Publikationen zu diesem Thema beweist (siehe hierzu Abschnitt 2.2). Dieser Fachbereich profitiert durch die hohe Verfügbarkeit von Quadrocoptersystemen, was zu dem (aus Sicht des Regelungstechnikers) glücklichen Umstand geführt hat, dass am Quadrocopter nicht ausschließlich anwendungsgetrieben sondern auch methodengetrieben geforscht werden kann. So konnte sich der Quadrocopter in



Abbildung 1.1: Ein Quadrocopter der Ascending Technologies GmbH.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup><http://www.asctec.de/>

den letzten Jahren als attraktives Benchmarksystem für regelungstechnische Methoden etablieren und bildet auch in dieser Arbeit den anwendungsbezogenen Rahmen für die Betrachtung zweier grundsätzlicher regelungstheoretischer Problemstellungen.

## 1.1 Zielsetzung der Arbeit

Je nach eingesetztem Flugführungskonzept muss der Quadrocopter unterschiedlich autonom agieren und benötigt entsprechende Regelungssysteme. Die rudimentärste Form der Flugführung bildet die Fernführung, bei der ein menschlicher Bediener das Fluggerät mittels Sichtkontakt und Funkfernsteuerung lenkt [83]. Aufgrund der instabilen Dynamik des Quadrocopters ist selbst in diesem Fall eine regelungstechnische Unterstützung des Piloten zwingend erforderlich, welche mindestens die Drehraten, häufig sogar die Fluglage und die Flughöhe des Drehflüglers stabilisiert. Mit zunehmender Automatisierung der Führungsaufgabe muss die Flugregelung weitere Aufgaben übernehmen. Sogenannte Autopilotensysteme kontrollieren üblicherweise die Geschwindigkeit und die Höhe der bodenbezogenen Flugbahn. Von *Flight Control Systems* spricht man wiederum, wenn die gesamte nach Ort und Zeit vorgegebene Flugbahn autonom eingeregelt wird. Der höchste Grad der Autonomie ist erreicht, wenn auch die Flugwegplanung mit allen Randbedingungen wie Verkehrs- und Wettersituation sowie Flugsicherungsvorgaben an das Flugregelungssystem abgegeben wird [16, 83].

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Entwicklung einer neuartigen *energiebasierten* Flugregelung auf der Autonomieebene eines Flight Control Systems. Sie mündet in der Synthese einer kaskadierten Trajektorienfolgeregelung für die *Position* des Quadrocopters, wobei energiebasierte Entwurfsmethoden zum Einsatz kommen, die im nachfolgenden Abschnitt vorgestellt werden. Den Kern der Arbeit bilden jedoch zwei regelungstechnische Problemstellungen, welche als Teilschritte auf dem Weg zum Gesamtregler gelöst werden müssen. Zum einen wird das *Lageregelungsproblem für den Starrkörper* umfassend thematisiert und ein Regelungskonzept entwickelt, welches speziell auf die dynamische Struktur des Quadrocopters zugeschnitten ist. Zum anderen werden Ergebnisse zur *Stabilitätsanalyse nichtautonomer nichtlinearer Kaskadensysteme* erarbeitet.

Um zu verstehen, wie sich die genannten Problemstellungen in den Kontext der Positionsfolgeregelung einordnen lassen, muss man sich zunächst der kaskadierten Struktur der Quadrocopterdynamik bewusst werden. Diese Kaskadenstruktur resultiert maßgeblich aus der Unteraktuiertheit des Flugsystems, also der Tatsache, dass lediglich vier Rotordrehzahlen als Stellgrößen zur Verfügung stehen, um die sechs Starrkörperfreiheitsgrade zu bedienen. Hieraus ergibt sich zwangsläufig, dass die drei rotatorischen

Freiheitsgrade, die gewöhnlich als *Fluglage* (kurz: *Lage*) oder *Orientierung* des Quadrocopters bezeichnet werden, und die drei translatorischen Freiheitsgrade, welche die *Position* des Körpers angeben, nicht gleichzeitig und unabhängig voneinander eingestellt werden können. Diese Tatsache wird anschaulich, wenn man sich bewusst macht, dass die vier Stellgrößen als Drehmomente um die drei Starrkörperachsen sowie eine in ihrer Richtung an die Körperorientierung gebundene Schubkraft aufgefasst werden können (vgl. Abbildung 2.2b, S. 24). Für die angestrebte Trajektorienfolgeregelung ergibt sich hieraus, dass die Fluglage des Quadrocopters über die Stellmomente fortwährend so eingestellt werden muss, dass die resultierende Ausrichtung der Schubkraft dazu geeignet ist, die Position in der gewünschten Weise zu kontrollieren. Die vorliegende Systemstruktur legt deshalb intuitiv eine hierarchisch organisierte Regelung nahe, bei der ein übergeordneter Positionsregler eine geeignete Stellkraft ermittelt und ein untergeordneter unabhängiger Lageregler dafür sorgt, dass die erforderliche Schubkrafttrichtung eingeregelt wird. Hierbei muss berücksichtigt werden, dass sich keine definierte Schubkrafttrichtung ableiten lässt, wenn der Positionsregler eine verschwindende Stellkraft kommandiert. Die Problematik, die mit einem verschwindenden Schubkommando verbunden ist, stellt ein systemimmanentes Hindernis für den Entwurf einer Trajektorienfolgeregelung für den Quadrocopter dar, welches unabhängig vom gewählten Regelungskonzept überwunden werden muss.

Da die Positionsfolgeaufgabe offensichtlich nur die Ausrichtung einer einzelnen Körperachse, nämlich der Schubrichtung, erfordert, besteht bezüglich der Fluglage noch ein unspezifizierter Freiheitsgrad, der bei Bedarf zusätzlich vorgegeben werden kann. Dieser Freiheitsgrad, der die Orientierung des Quadrocopters um seine Schubrichtung beschreibt, wird im Folgenden als *Heading* bezeichnet. Ein weiteres Ziel dieser Arbeit besteht darin eine Möglichkeit aufzuzeigen, wie eine Headingvorgabe sinnvoll in die Trajektorienfolgeaufgabe integriert werden kann, wenn dies für die Mission erforderlich ist. Umgekehrt wird aufgezeigt, wie das Heading nutzbringend aus der Regelungsaufgabe ausgeklammert werden kann, wenn eine Vorgabe dieses Freiheitsgrads überflüssig ist.

Bedingt durch die in dieser Arbeit gewählte kaskadierte Herangehensweise an das Trajektorienfolgeproblem, treten unter anderem zwei grundlegende regelungstheoretische Fragestellungen auf, die nicht nur im Kontext der Flugregelung bedeutsam sind:

1. Wie lässt sich eine vorgegebene konstante oder zeitvariante Solllage für einen Starrkörper so einregeln, dass
  - eine einzelne Körperachse klar priorisiert wird oder sogar ausschließlich bestimmend ist,

- die eingesetzten Stellmomente beschränkt bleiben,
  - die Regelabweichung trotzdem möglichst schnell abklingt und
  - der Einzugsbereich maximal wird?
2. Welche Voraussetzungen müssen die Teilsysteme einer bestimmten Klasse *nichtlinearer, nichtautonomer, kaskadierter Systeme* erfüllen, sodass die Nullruhelage der Kaskade nachweislich *asymptotisch stabil* ist?

Wesentliche Beiträge dieser Arbeit entstammen der ausführlichen Betrachtung und Beantwortung dieser allgemeinen regelungstheoretischen Probleme am Beispiel des Quadropters und nehmen einen Großteil der Abhandlungen in Anspruch.

Die erste Fragestellung betrifft das weite Feld der Lageregelung eines Starrkörpers, welches in zahlreichen Luft- und Raumfahrtanwendungen, im Bereich der Unterwasserfahrzeuge sowie generell in der Robotik von großer Relevanz ist [8]. Motiviert durch die herausragende Bedeutung der Schubrichtung des Quadropters, liegt eine Besonderheit der formulierten Fragestellung in der priorisierten Ausrichtung einer einzelnen Starrkörperachse. In diesem Zusammenhang wird im Folgenden zwischen *reduzierter* und *vollständiger* Lageregelung unterschieden. Während eine reduzierte Lageregelung ausschließlich für die Ausrichtung einer einzelnen Körperachse sorgt und den Drehfreiheitsgrad um diese Achse unberücksichtigt lässt, garantiert eine vollständige Lageregelung stets die Ausrichtung der gesamten Körperorientierung [46]. Die Forderung nach beschränktem Stellgrößeneinsatz bei schnellem Einschwingverhalten rückt die Fragestellung darüber hinaus in den Kontext der *zeitoptimalen Regelung*. Weiterhin erfordert der formulierte Anspruch auf einen maximalen Einzugsbereich eine globale Betrachtung des Problems und damit die Berücksichtigung der nichttrivialen geometrischen Eigenschaften, die der Zustandsraum der Lage aufweist. Der natürliche Konfigurationsraum der Starrkörperorientierung ist die Menge der  $3 \times 3$  Rotationsmatrizen, die auch als spezielle orthogonale Gruppe  $SO(3)$  bezeichnet wird. Dieser Raum unterscheidet sich in seinen Eigenschaften von den gewohnten Euklidischen Räumen [46]. Insbesondere ist er nicht kontraktiv, was zur Folge hat, dass es unmöglich ist eine gewünschte Lage mit einer kontinuierlichen zeitinvarianten Zustandsrückführung global asymptotisch zu stabilisieren [15, 46, 99, 172, 152]. Im Kontext der Lageregelung motiviert diese Tatsache die Ablösung des Konzepts der *global asymptotischen Stabilität* durch das in Abschnitt 1.3 vorgestellte Konzept der *fast global asymptotischen Stabilität* als zulässige Maximalanforderung an eine Ruhelage.

Die zweite Fragestellung resultiert unmittelbar aus der gewählten hierarchischen Reglerstruktur, bei der Positions- und Lageregler getrennt und unabhängig voneinander

entworfen werden. Es ergibt sich ein geschlossener Gesamtregelkreis, der sich als *nicht-lineare nichtautonome Kaskade* bestehend aus einer autonomen Lagefehlerdynamik und einer nachgelagerten, sprich vom Lagefehler abhängigen, Positionsfehlerdynamik darstellen lässt. Da beim Entwurf des Positionsregelkreises die Kopplung des Lagefehlers in die Positionsfehlerdynamik unberücksichtigt bleibt, stellt sich die Frage, ob der angestrebte Arbeitspunkt tatsächlich eine asymptotisch stabile Ruhelage des gekoppelten Gesamtsystems ist. Anders als bei linearen Kaskaden leiten sich die Stabilitätseigenschaften nichtlinearer (zumal nichtautonomer) Kaskaden nicht unmittelbar aus den Stabilitätseigenschaften der ungekoppelten Teilsysteme ab [112]. Folglich ist es von Interesse welche weiteren Anforderungen an die Teilsysteme zu stellen sind, damit auf asymptotische Stabilität des angestrebten Arbeitspunkts geschlossen werden kann. Da der Entwurf kaskadierter Regelungen weit verbreitet ist und sich darüber hinaus auch viele anders strukturierte Regelkreise als Kaskaden auffassen lassen [111], besitzt die Stabilitätsanalyse nichtlinearer kaskadierter Systeme grundsätzliche regelungstheoretische Bedeutung.

Ungeachtet der weitgehend theoretischen Ausrichtung der Arbeit, soll auch dem anwendungsbezogenen Aspekt hinreichend Rechnung getragen werden. Erklärtes Ziel der Arbeit ist es deshalb, die Funktionstüchtigkeit der entwickelten Trajektorienfolgeregelung nicht nur simulativ, sondern auch in realen Flugversuchen nachzuweisen.

## 1.2 Energiebasierte Regelung

Sämtliche (Teil-)Regler, die in dieser Arbeit entworfen werden, basieren auf Energiebetrachtungen. Dabei erfolgt der Entwurf so, dass dem geschlossenen Regelkreis zunächst eine künstlich geformte Energiefunktion  $V$  aufgeprägt wird, die ihr einziges und globales Minimum am gewünschten Arbeitspunkt des Systems aufweist. Im Anschluss daran wird gezielt Dämpfung in das System eingebracht, um über die Dissipation zu gewährleisten, dass die Energie stets abnimmt und der Zustand dem gewünschten Arbeitspunkt entgegen strebt. Dieses Vorgehen wird in der vorliegenden Arbeit als *energiebasierte Regelung* bezeichnet und wird im Englischen unter den Begriffen *energy shaping* und *damping assignment* zusammengefasst [135, 136]. Streng genommen gehört dieser Regelungsansatz zu den *passivitätsbasierten Regelungen*, wie sie beispielsweise in [135, 156] ausführlich präsentiert werden. Für die Reglersynthese, wie sie in dieser Arbeit vorgenommen wird, ist es jedoch nicht erforderlich den Begriff der Passivität detailliert einzuführen. Besonders leicht lässt sich das Entwurfsverfahren auf vollaktuierte Systeme anwenden, für die es erstmals von Takegaki und Arimoto [161] im Zusammenhang mit

vollaktuierten Robotersystemen vorgestellt wurde. Der herausragende Vorteil des energiebasierten Regelungsansatzes liegt in der direkten physikalischen Interpretierbarkeit des Stelleingriffs. Diese Eigenschaft ist nicht nur unter ästhetischen Gesichtspunkten gefällig, sondern ermöglicht erst eine systematische Parametrierung der Regelung. Damit wird ein Entwurfsschritt erleichtert, der sich bei anderen nichtlinearen Regelungskonzepten häufig intransparent gestaltet [135].

Obwohl der Quadrocopter als Ganzes ein unteraktuiertes System darstellt, kann durch eine Kaskadierung der Regelung in Positions- und Lageteil erreicht werden, dass der Entwurf der Teilregler ausschließlich für (z.T. virtuelle) vollaktuierte Regelstrecken erfolgt. Diese Regelstrecken leiten sich aus dem translatorischen oder rotatorischen Teil einer Starrkörperdynamik ab und besitzen die allgemeine Struktur

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\nu} \quad (1.1a)$$

$$\mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\nu}} = -\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} + \mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} + \mathbf{u} , \quad (1.1b)$$

wobei  $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{M}$  einen Positions- oder Lagezustand,  $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^3$  die zugehörige Geschwindigkeit oder Drehrate und  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  die Stellkraft bzw. das Stellmoment bezeichnet. Im translatorischen Fall entspricht die glatte Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ , auf der die Zustandsvariable  $\boldsymbol{\xi}$  lebt, dem dreidimensionalen Euklidischen Raum  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$ . Im rotatorischen Fall gilt je nach erforderlicher Modellierungstiefe (vollständig oder reduziert)  $\dim(\mathcal{M}) = n$ ,  $n \in \{2, 3\}$  und abhängig von der gewählten Lageparametrierung  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^p$ , wobei  $p \geq n$ . Die positiv definite<sup>2</sup> Matrix  $\mathbf{M} > 0$  charakterisiert eine Masse bzw. einen Trägheitstensor und die positiv semidefinite Matrix  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}) \geq 0$  bestimmt die Dämpfung im System. Die nichtsinguläre Matrix  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\xi})$ , deren Spalten an jedem Punkt den Tangentialraum von  $\mathcal{M}$  aufspannen, sowie die schiefsymmetrische Matrix  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) = -\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu})^T$  treten nur für rotatorische Systeme explizit in Erscheinung. Im translatorischen Fall gilt  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\xi}) \equiv \mathbf{I}_3$ , wobei  $\mathbf{I}_3$  die  $3 \times 3$ -Einheitsmatrix bezeichnet, und  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \equiv \mathbf{0}$ .

Möchte man einen Arbeitspunkt  $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) = (\boldsymbol{\xi}_d, \mathbf{0})$  des Systems (1.1) mit einer energiebasierten Regelung asymptotisch stabilisieren, so formt man zunächst eine Energiefunktion

$$V(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) = E_{kin}(\boldsymbol{\nu}) + E_{pot}(\phi_1(\boldsymbol{\xi}), \dots, \phi_q(\boldsymbol{\xi})) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^T \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} + E_{pot}(\phi_1(\boldsymbol{\xi}), \dots, \phi_q(\boldsymbol{\xi})) , \quad (1.2)$$

welche die kinetische Energie des Systems  $E_{kin}$  um ein künstliches Potential  $E_{pot}$  erweitert. Eine geeignete Potentialfunktion  $E_{pot}$  ist dabei so beschaffen, dass sie auf  $\mathcal{M}$  stetig

---

<sup>2</sup>Im Rahmen dieser Arbeit wird ohne gesonderte Erwähnung davon ausgegangen, dass positiv (semi)definite Matrizen stets auch symmetrisch sind.

differenzierbar ist und ihr einziges und globales Minimum  $E_{pot} = 0$  an der Stelle  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_d$  besitzt. Somit wird auch der Gesamtenergiefunktion  $V$  ihr einziges und globales Minimum  $V = 0$  bei  $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) = (\boldsymbol{\xi}_d, \mathbf{0})$  zugewiesen. Oft wird man  $E_{pot}$  nicht direkt als Funktion von  $\boldsymbol{\xi}$ , sondern über einen Zwischenschritt in Abhängigkeit eines oder mehrerer Fehlermaße  $\phi_i$ ,  $i \in \{1, \dots, q\}$ , konstruieren, um ggf. bestimmte Aspekte der Abweichung zwischen  $\boldsymbol{\xi}$  und  $\boldsymbol{\xi}_d$  zu betonen. Als einfaches Beispiel für ein solches Fehlermaß sei hier die Euklidische Norm  $\phi(\boldsymbol{\xi}) = \|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_d\|$  angeführt. Das gesuchte Regelgesetz, welches dem geschlossenen Regelkreis die geformte Energiefunktion (1.2) aufprägt, erschließt sich unmittelbar aus der Betrachtung ihrer zeitlichen Ableitung. Mit (1.1) und unter Ausnutzung der Schiefsymmetrie von  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu})$  ergibt sich

$$\dot{V} = \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\nu}} + \left( \sum_{i=1}^k \frac{\partial E_{pot}}{\partial \phi_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) \dot{\boldsymbol{\xi}} = -\boldsymbol{\nu}^T \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{u} + \underbrace{\frac{\partial E_{pot}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \mathbf{S}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\nu}}_{-\mathbf{F}_{pot}^T}.$$

Hierin ist  $\mathbf{F}_{pot} = -(\partial E_{pot} / \partial \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{S}(\boldsymbol{\xi}))^T$  das Potentialfeld, welches durch das entworfene Potential auf  $\mathcal{M}$  induziert wird. Es entspricht der negativen Ableitung von  $E_{pot}$  auf der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ . Wählt man nun die Zustandsrückführung

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}_{pot}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{D}_u(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu}, \quad (1.3)$$

welche das Potentialfeld  $\mathbf{F}_{pot}$  über die Stellgröße realisiert und zusätzlich einen Dämpfungsterm  $-\mathbf{D}_u(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu}$  mit  $\mathbf{D}_u(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \geq 0$  einbringt, so ergibt sich

$$\dot{V}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) = -\boldsymbol{\nu}^T (\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}) + \mathbf{D}_u(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu})) \boldsymbol{\nu} \leq 0.$$

$V$  ist somit eine Lyapunovfunktion des durch (1.1) und (1.3) definierten geschlossenen Regelkreises und es folgt unmittelbar die Stabilität von  $(\boldsymbol{\xi}_d, \mathbf{0})$  [95, Theorem 4.1]. Um asymptotische Stabilität nachzuweisen, kann das Invarianzprinzip von LaSalle [95, Theorem 4.4] herangezogen werden. Demnach streben alle Lösungen, die in einer kompakten unteren Niveaumenge  $\mathcal{N} = \{(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \mid V(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \leq \bar{V}\}$  von  $V$  starten, gegen die größte invariante Teilmenge  $\mathcal{I}$  von  $\mathcal{E} = \{(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \mid (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathcal{N}, \dot{V}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) = 0\}$ . Die Menge  $\mathcal{I}$  beinhaltet alle in  $\mathcal{N}$  gelegenen Ruhelagen sowie alle weiteren möglicherweise enthaltenen Lösungen des Systems, entlang derer  $\dot{V} = 0$  gilt. Lässt sich durch verkleinern der Konstante  $\bar{V}$  die untere Niveaumenge  $\mathcal{N}$  so einschnüren, dass  $\mathcal{I}$  ausschließlich die angestrebte Ruhelage  $(\boldsymbol{\xi}_d, \mathbf{0})$  enthält, so ist der Arbeitspunkt asymptotisch stabil und eine konservative Abschätzung seines Einzugsbereiches ist durch  $\mathcal{N}$  gegeben.

Besonders einfach gestaltet sich der Nachweis asymptotischer Stabilität, wenn für alle  $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathcal{N}$  gilt, dass  $(\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}) + \mathbf{D}_u(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu})) > 0$  ist. In diesem Fall ist  $\mathcal{E} = \{(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \mid (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathcal{N}, \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}\}$ . Die darin enthaltene größte invariante Menge  $\mathcal{I}$  umfasst somit alle Punkte in denen auch  $\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{0}$  gilt und ist folglich äquivalent mit der Menge der in  $\mathcal{E}$  enthaltenen Ruhelagen. Setzt man das Regelgesetz (1.3) und  $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$  in (1.1b) ein, so erkennt man, dass alle Ruhelagen dadurch gekennzeichnet sind, dass in ihnen das Potentialfeld  $\mathbf{F}_{pot}$  verschwindet. An diesen Punkten ist folglich die Ableitung von  $E_{pot}$  auf der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  gleich Null. Da  $E_{pot}$  ein isoliertes Minimum bei  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_d$  besitzt, ist es nun immer möglich  $\bar{V}$  so klein zu wählen, dass, abgesehen vom angestrebten Arbeitspunkt  $(\boldsymbol{\xi}_d, \mathbf{0})$ , keine weiteren Ruhelagen in  $\mathcal{N}$  enthalten sind und es folgt die asymptotische Stabilität.

### 1.3 Fast global asymptotische Stabilität

In der Regel ist man nicht nur daran interessiert einen Arbeitspunkt asymptotisch zu stabilisieren, sondern man möchte ihn gleichzeitig mit einem möglichst großen Einzugsbereich ausstatten. Besonders erstrebenswert ist deshalb der Fall, in dem global asymptotische Stabilität erzielt werden kann und der Einzugsbereich somit den gesamten Zustandsraum umfasst. Selbst wenn man davon ausgeht, dass ein System asymptotische Stabilisierung eines Arbeitspunkts zulässt, stellt die Forderung nach global asymptotischer Stabilität einen Anspruch dar, der sicher nicht für beliebige Systeme erfüllt werden kann. Insbesondere kann allein die Topologie des Zustandsraums so geartet sein, dass global asymptotische Stabilität für Systeme mit kontinuierlichem Vektorfeld grundsätzlich ausgeschlossen ist, zum Beispiel weil weitere (unerwünschte) Ruhelagen auftreten müssen [15, 98, 152]. Dies betrifft speziell alle nicht kontraktiven Mannigfaltigkeiten, wie sie als Zustandsraum für sämtliche mechanische Systeme mit mindestens einem unbeschränkten Rotationsfreiheitsgrad in Erscheinung treten [15]. Für solche Systeme kann als Maximalanforderung an die Stelle der global asymptotischen Stabilität eine aus Ingenieurssicht gleichwertige Stabilitätseigenschaft treten, die *fast global asymptotische Stabilität*.<sup>3</sup> Ist ein Arbeitspunkt fast global asymptotisch stabil, so umfasst sein Einzugsbereich den gesamten Zustandsraum abgesehen von einer vernachlässigbar kleinen Menge. Vernachlässigbar klein bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Menge ein Lebesgue-Maß von Null besitzt. Eine solche Situation liegt beispielsweise vor, wenn  $\boldsymbol{\xi}_d$  eine asymptotisch stabile Ruhelage im  $\mathbb{R}^3$  ist und ihr Einzugsbereich den gesamten Zustandsraum mit Ausnahme einer eindimensionalen Kurve oder einer zweidimensionalen

---

<sup>3</sup>Häufig wird der Begriff *fast globale Stabilität* (engl. *almost global stability*) synonym verwendet.

Fläche umfasst. Die Menge, die nicht im Einzugsbereich des Arbeitspunkts enthalten ist, muss also salopp gesagt von niedrigerer Dimension sein als der Zustandsraum selbst.

Unter den Ersten, die den Stabilitätsbegriff der fast global asymptotischen Stabilität im Zusammenhang mit Lageregelungsproblemen geprägt haben, war Koditschek [98, 99]. Der Begriff wurde später u. a. von Angeli [9] aufgegriffen und von Rantzer [142] in einem dualen Ergebnis zur Lyapunovtheorie in den Zusammenhang mit der Existenz bestimmter Dichtefunktionen gesetzt. Neben den Folgepublikationen der genannten Autoren [10, 11, 144, 141, 143] lieferten auch die Veröffentlichungen von Monzón u. a. [130, 133, 131, 134, 132] Beiträge zur Anwendung und Erweiterung der Theorie. Die vorliegende Arbeit bedient sich der formalen Definition fast global asymptotischer Stabilität wie sie von Monzón in [132] gegeben wird. Dabei wird im Folgenden die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen der dynamischen Systeme sowie deren stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten vorausgesetzt.

**Definition 1.1 (Fast global asymptotische Stabilität [132])** *Eine Ruhelage  $\xi_d$  eines dynamischen Systems  $\dot{\xi} = f(\xi)$  ist fast global asymptotisch stabil, wenn fast alle Trajektorien gegen  $\xi_d$  konvergieren. Dies bedeutet, dass die Menge der Punkte, die nicht im Einzugsbereich von  $\xi_d$  liegt, ein Lebesgue-Maß von Null besitzt.*

In bestimmten Sonderfällen ist das folgende Theorem anwendbar. Es formuliert entsprechend der Vorgehensweise, die in [132] auf sinusförmig gekoppelte Oszillatoren angewendet wird, hinreichende Bedingungen für das Vorliegen fast global asymptotischer Stabilität.

**Theorem 1.1 ([132])** *Sei  $\dot{\xi} = f(\xi)$  ein dynamisches System mit mehreren Ruhelagen. Eine Ruhelage  $\xi_d$  des Systems ist fast global asymptotisch stabil, wenn*

1. *sämtliche Lösungen des Systems beschränkt sind und für  $t \rightarrow \infty$  gegen eine der Ruhelagen streben,*
2.  *$\xi_d$  asymptotisch stabil ist*
3. *und alle weiteren Ruhelagen instabil sind, wobei dies durch einen Eigenwert des linearisierten Systems in der offenen rechten Halbebene nachweisbar ist.*

Sind alle Bedingungen aus Theorem 1.1 erfüllt, so streben fast alle Lösungen des Systems gegen die Ruhelage  $\xi_d$ . Die Menge an Trajektorien die nicht gegen  $\xi_d$  strebt ist gegeben durch die instabilen Ruhelagen selbst sowie deren invariante stabile Mannigfaltigkeiten.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>Ggf. können noch Zentrumsmannigfaltigkeiten hinzutreten.

Wie man intuitiv erwartet, sind diese „Einzugsbereiche“ der instabilen Ruhelagen von niedrigerer Dimension als der Zustandsraum selbst und besitzen somit ein Lebesgue-Maß von Null [102, Appendix B].

## 1.4 Beitrag der Arbeit

Entsprechend der Zielsetzung, die in Abschnitt 1.1 beschrieben wurde, befasst sich diese Arbeit mit dem Entwurf eines nichtlinearen Trajektorienfolgereglers für die Position eines Quadrocopters. Das Regelungskonzept soll es gestatten den Headingfreiheitsgrad wahlweise in die Trajektorienfolgeaufgabe einzubinden oder vollständig unberücksichtigt zu lassen. Im Fokus der Arbeit stehen zwei regelungstechnische Problemstellungen, deren Lösung Teilschritte auf dem Weg zum kaskadierten Gesamtregler darstellen, die aber auch außerhalb des hier präsentierten Kontextes bedeutsam sind. Zum einen wird die Lageregelung starrer Körper unter den in Abschnitt 1.1 beschriebenen Randbedingungen betrachtet und zum anderen werden Ergebnisse zur Stabilitätsanalyse nichtautonomer nichtlinearer Kaskadensysteme erarbeitet. Flugversuche, welche die Leistungsfähigkeit des Gesamtreglers nachweisen, runden den Entwurf des Trajektorienfolgereglers ab. Im Einzelnen lassen sich die Beiträge dieser Arbeit wie folgt zusammenfassen:

- **Eine neuartige reduzierte Lageregelung (Kapitel 3):** Obwohl für die translatorische Bewegung des Quadrocopters ausschließlich die Schubrichtung bedeutsam ist, finden sich so gut wie keine Arbeiten zur reduzierten Lageregelung dieses Flugsystems. Die vorliegende Arbeit präsentiert eine reduzierte Lageregelung für den Quadrocopter, welche ausschließlich die Schubrichtung ausrichtet und damit eine *unnötige Vorgabe des Headings vermeidet*. Die Regelung kombiniert darüber hinaus eine Reihe vorteilhafter Eigenschaften auf neuartige Weise. Durch eine entsprechende Gestaltung des Potentials und der Dämpfung ermöglicht die *energiebasierte Entwurfsmethodik* eine *effektive Beschränkung der Stellmomente*. Gleichzeitig liegt der Fokus der Regelung auf einem möglichst *schnellen Einschwingvorgang*. Dies wird wesentlich durch eine von der *zeitoptimalen Regelung* inspirierte *Dämpfungsstrategie* ermöglicht, welche zielführende Bewegungen gewähren lässt und unerwünschte Bewegungen unterbindet. Darüber hinaus ist die Regelung im Falle konstanter Sollschubrichtungen *robust* gegenüber unbekanntem Trägheitstensor und imstande das Stellmoment gezielt zu *sättigen*. Es wird nachgewiesen, dass der entworfene Regler die angestrebte Schubrichtung *fast global asymptotisch stabilisiert* und damit den größtmöglichen Einzugsbereich gewährleistet.

- **Eine vollständige Lageregelung mit Priorisierung der Schubrichtung (Kapitel 4):** Um neben der Schubrichtung auch eine Headingvorgabe einregeln zu können, wird eine vollständige Lageregelung benötigt. Die beiden Teilaspekte der Regelungsaufgabe sollten allerdings nicht gleichwertig behandelt werden, denn im Gegensatz zum Heading besitzt die Schubrichtung durch ihren Einfluss auf das translatorische Verhalten des Quadrocopters sicherheitskritische Bedeutung. In dieser Arbeit wird deshalb eine neuartige vollständige Lageregelung präsentiert, welche als konsequente Weiterentwicklung der reduzierten Lageregelung *die Schubrichtung klar priorisiert*. Dabei bleiben alle günstigen Eigenschaften hinsichtlich *beschränkter Stellmomente, schnellem Einschwingverhalten, Robustheit gegenüber Trägheitsunsicherheiten, sättigendem Stellgrößeneinsatz* und *fast global asymptotischer Stabilität* uneingeschränkt erhalten. Die Synthese des Regelgesetzes wird entscheidend von einer *unkonventionellen Aufspaltung des Lagefehlers* getragen.
- **Ein Stabilitätskriterium für eine Klasse nichtautonomer, nichtlinearer kaskadierter Systeme (Kapitel 5):** Löst man das Trajektorienfolgeproblem für die Position des Quadrocopters mit Hilfe eines hierarchisch strukturierten Reglers aus übergeordneter Positions- und untergeordneter Lageregelung, so resultiert unabhängig von den gewählten Entwurfsmethoden eine nichtautonome, nichtlineare kaskadierte Fehlerdynamik mit einer charakteristischen Struktur. Die Stabilitätsanalyse solcher Systeme ist keineswegs trivial, insbesondere gehen die Stabilitätseigenschaften nicht direkt aus denen der ungekoppelten Teilsysteme der Kaskade hervor. Die existierenden Arbeiten zur Stabilitätsanalyse kaskadierter Systeme, decken die vorliegende Systemklasse nicht unmittelbar ab, weshalb die Ergebnisse in der vorliegenden Arbeit entsprechend erweitert werden. Es resultiert *ein hinreichendes Kriterium für die asymptotische Stabilität der Nullruhelage einer Klasse nichtautonomer, nichtlinearer kaskadierter Systeme*.
- **Eine neuartige kaskadierte Trajektorienfolge­regelung für die Position und das Heading (Kapitel 5):** Die entworfenen Lageregelungen lassen sich mit einem übergeordneten Positionsregler zu einer kaskadierten Regelungsstruktur komplettieren, die das Positionsfolgeproblem für den Quadrocopter löst. Eine Headingvorgabe kann in das Trajektorienfolgeproblem integriert werden, wenn der vollständige Lageregler eingebunden wird. Mit Blick auf methodische Stringenz werden in der vorliegenden Arbeit erneut *energiebasierte Entwurfsverfahren* herangezogen, um einen geeigneten Positionsregler zu synthetisieren. Die resultierende Regelung erlaubt eine wirkungsvolle Beschränkung der angeforderten (vir-

tuellen) Stellkräfte, die sich in mehrfacher Hinsicht positiv auswirkt. Der angeforderte Schubkraftbetrag kann auf Werte größer Null begrenzt werden, wodurch sich *stets eine wohldefinierte Sollschubrichtung* für die Lageregelung ableiten lässt. Hierdurch wird ein systemimmanentes Hindernis für die Positionsfolgeregelung am Quadrocopter effektiv umgangen. Weiterhin lässt sich die kommandierte Schubkrafttrichtung in einem Kegel eindämmen und damit *der maximale Kippwinkel vorherbestimmen*, der potenziell an die Lageregelung kommandiert wird. Diese Eigenschaften stellen bemerkenswerte Unterschiede zu den meisten Regelungsverfahren dar, die bisher auf den Quadrocopter angewendet wurden. Mit Hilfe des erarbeiteten Kriteriums für die Stabilität der vorliegenden Klasse kaskadierter Systeme wird *fast global asymptotische Stabilität* der Zieltrajektorie nachgewiesen. Die Funktionstüchtigkeit des kaskadierten Gesamtreglers wird durch *experimentelle Flugversuche* belegt.

Im Rahmen dieser Arbeit entstanden diverse Publikationen, die unterschiedliche Teilaspekte der hier präsentierten Inhalte thematisieren:

- [73] FRITSCH, O. ; TROMBA, D. ; LOHMANN, B.: Cascaded energy based trajectory tracking control of a quadrotor. In: *at - Automatisierungstechnik* 62 (2014), Nr. 6, S. 408–422
- [68] FRITSCH, O.: Energy based attitude tracking control for a quadrotor helicopter prioritizing the thrust direction / Technische Universität München. 2013. – Forschungsbericht. – <https://mediatum.ub.tum.de/node?id=1160783>
- [71] FRITSCH, O. ; HENZE, B. ; LOHMANN, B.: Fast and saturating attitude control for a quadrotor helicopter. In: *Proceedings of the European Control Conference*, 2013
- [69] FRITSCH, O.: Fast tracking control for the thrust direction of a quadrotor helicopter. In: ROPPENECKER, G. (Hrsg.) ; LOHMANN, B. (Hrsg.): *Methoden und Anwendungen der Regelungstechnik, Erlangen-Münchener Workshops 2011 und 2012*. Aachen : Shaker, 2013, S. 33–47. – <https://mediatum.ub.tum.de/node?id=1160829>
- [61] FALCONÍ, G. ; FRITSCH, O. ; LOHMANN, B. ; HOLZAPFEL, F.: Admissible thrust control laws for quadrotor position tracking. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2013

- [72] FRITSCH, O. ; HENZE, B. ; LOHMANN, B.: Fast and saturating thrust direction control for a quadrotor helicopter. In: *at - Automatisierungstechnik* 61 (2013), Nr. 3, S. 172–182
- [70] FRITSCH, O. ; DE MONTE, P. ; BUHL, M. ; LOHMANN, B.: Quasi-static feedback linearization for the translational dynamics of a quadrotor helicopter. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2012
- [29] BUHL, M. ; FRITSCH, O. ; LOHMANN, B.: Exakte Ein-/Ausganglinearisierung für die translatorische Dynamik eines Quadrocopters. In: *at - Automatisierungstechnik* 59 (2011), Nr. 6, S. 374–381

## 1.5 Aufbau der Arbeit

Es wurde versucht die Arbeit so zu strukturieren, dass sich eine logische und für die Präsentation der Inhalte zuträgliche Ordnung ergibt. Generell wurde eine Gliederung vom Einfachen hin zum Komplexen vorgenommen und wo immer möglich eine gleichbleibende Kapitelstruktur aufrechterhalten. Speziell im Lageregelungsteil wurde viel Wert auf geometrische Anschaulichkeit gelegt, um die Verständlichkeit der teils komplexen Zusammenhänge zu fördern. Die Inhalte der Arbeit verteilen sich wie folgt auf die nachfolgenden Kapitel:

Der erste Teil des Kapitels 2 beschäftigt sich mit der dynamischen Modellbildung des Quadrocopters. Hierzu werden zunächst wichtige Schreibweisen eingeführt und alle erforderlichen Koordinatensysteme definiert. Es folgt die Herleitung eines statischen Antriebsmodells und darauf aufbauend die Einführung der dynamischen Starrkörpergleichungen, welche das Streckenmodell für den Reglerentwurf bilden. Der zweite Teil des Kapitels präsentiert den Stand der Technik bezüglich Lage- und Positionsfolgeregelung am Quadrocopter.

Kapitel 3 befasst sich mit der reduzierten Lageregelung des Quadrocopters, also dem Einregeln einer gewünschten Schubkrafttrichtung. Nach der Herleitung der allgemeinen Folgedynamik wird zunächst der Sonderfall der Festwertregelung betrachtet, bei dem eine konstante Wunschrichtung vorliegt. Die energiebasierte Reglersynthese gliedert sich in die Gestaltung eines geeigneten Potentials und den Entwurf einer zweckmäßigen Dämpfungsstrategie. Es folgt eine detaillierte Analyse der Stabilitätseigenschaften, die mit dem Nachweis fast global asymptotischer Stabilität der Sollschubrichtung schließt. Im Anschluss wird das erarbeitete Regelungskonzept auf den Folgefall verallgemeinert und die Funktionsweise des Reglers in Simulationen analysiert.

Die vollständige Lageregelung mit Priorisierung der Schubrichtung ist Inhalt des Kapitels 4. Es beginnt mit der Herleitung der Folgedynamik und der Einführung einer elementaren Aufspaltung des Lagefehlers. Diese Zerlegung der Fehlerrotation, bringt eine nützliche alternative Zustandsdarstellung hervor und bildet damit die Grundlage des Regelungsentwurfs. Der Rest des Kapitels ist analog zu Kapitel 3 strukturiert. Nach dem Reglerentwurf für den Festwertfall und der anschließenden Stabilitätsanalyse folgt die Verallgemeinerung zum Folgeregler und die Analyse von Simulationsstudien.

Kapitel 5 ist dem Trajektorienfolgeproblem für die Position und das Heading des Quadcopters gewidmet. Zu Beginn wird die Frage nach einer sinnvollen Möglichkeit zur Spezifikation des Headingfreiheitsgrads beantwortet. Ausgehend von der Annahme, dass eine kaskadierte Gesamtregelung aus einem übergeordneten Positionsregler und einem untergeordneten Lageregler zum Einsatz kommt, wird im Anschluss die Gesamtfolgefehlerdynamik hergeleitet. Diese erweist sich als nichtautonome nichtlineare Kaskade, deren Nullruhelage stabilisiert werden muss. Für die vorliegende Klasse kaskadierter Systeme wird dann ein hinreichendes Kriterium erarbeitet, welches asymptotische Stabilität der Zielruhelage garantiert. Es folgt der Entwurf eines energiebasierten Positionsreglers, der mit dem vollständigen Lageregler aus Kapitel 4 zu einem kaskadierten Gesamtregler zusammengeschlossen wird. In diesem Zusammenhang wird auch ein bislang unerwähnter Entwurfsfreiheitsgrad behandelt, welcher bestimmt wie der Betrag des virtuellen Schubkraftkommandos aus dem Positionsregler in einen realen Schubkraftbetrag übersetzt wird. Für den resultierenden kaskadierten Gesamtregler wird mit Hilfe des zuvor hergeleiteten Stabilitätskriteriums fast global asymptotische Stabilität der Zieltrajektorie nachgewiesen. Abschließend werden Ergebnisse aus Flugversuchen präsentiert, welche die Funktionstüchtigkeit der Regelung belegen.

Ein Resümee der Arbeit wird in Kapitel 6 gezogen. Darüber hinaus werden weiterführende Forschungsthemen angeregt, die sich aus den Ergebnissen dieser Arbeit ableiten. Der Anhang A vereint schließlich einige Herleitungen und Beweise, die dorthin verschoben wurden, um den Fluss der Arbeit nicht zu unterbrechen.



# Kapitel 2

## Der Quadrocopter

Ein Quadrocopter ist ein besonders agiles unbemanntes Flugsystem, welches als Drehflügler zusätzlich die Fähigkeit zum Schwebeflug mitbringt. Wie man Abbildung 2.1 entnehmen kann, besteht er im Wesentlichen aus einem kreuzförmigen starren Rahmen, an dessen vier Enden je ein Rotor angeordnet ist. Alle vier Rotoren liegen dabei in einer gemeinsamen Ebene, parallel zu der des Rahmens. Im Unterschied zu herkömmlichen Helikoptern mit nur einem Hauptrotor können bei dieser Rotorkonfiguration starre Rotoren mit konstantem Anstellwinkel der Blätter zum Einsatz kommen. Komplizierte Mechanismen, wie die Taumelscheibe, die bei gewöhnlichen Hubschraubern benötigt wird, um über eine zyklische Verstellung der Blattneigung den Schubvektor zu schwenken, können damit entfallen [16]. Dies führt zu einem sehr einfachen mechanischen Aufbau, bei dem der Stelleingriff allein über die differentielle Ansteuerung der vier Motoren erfolgt. Durch gezielte Drehzahlvariation der paarweise entgegengesetzt drehenden Rotoren können beliebige Momente zum Einstellen der Fluglage und eine in ihrer Ausrichtung an die Fluglage gekoppelte Schubkraft erzeugt werden. Da lediglich vier Stellgrößen zur Verfügung stehen, um die sechs Starrkörperfreiheitsgrade des Quadrocopters zu bedienen, handelt es sich um ein unteraktuiertes System. Aufgrund des symmetrischen Aufbaus liegt ein weiterer Vorteil des Quadrocopters gegenüber herkömmlichen Hubschrauber- oder Starrflüglersystemen in seinen weitgehend isotropen Flugeigenschaften. Allerdings ist der Quadrocopter ein Fluggerät mit einer instabilen nichtlinearen Dynamik, welches selbst im ferngesteuerten Flug nicht ohne die Unterstützung von Regelungssystemen zur Stabilisierung beherrscht werden kann. Üblicherweise ist mindestens eine Lage- oder Drehratenregelung vorhanden, die den Piloten unterstützt. Dieser Umstand hat u. a. dazu beigetragen, dass sich der Quadrocopter in den letzten Jahren zu einer beliebten Experimentierplattform im Bereich der Regelungstechnik entwickelt hat.

Typische Quadrocopter, wie sie zur Erforschung und Erprobung von Regelalgorith-

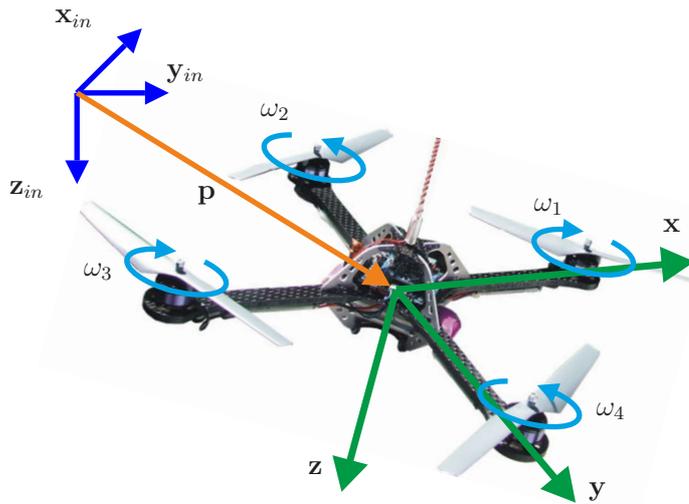


Abbildung 2.1: Quadrocopter mit paarweise gegenläufigen Rotoren, körperfestem Koordinatensystem  $B = \{x, y, z\}$ , Inertialsystem  $I = \{x_{in}, y_{in}, z_{in}\}$  und Position  $\mathbf{p}$ .

men und autonomem Verhalten eingesetzt werden, bewegen sich in der Gewichtsklasse zwischen 0.3kg und 4.0kg [86]. Sie besitzen im Allgemeinen separate Drehzahlregler für jeden Motor, sodass aus Sicht übergeordneter Regelungsstrukturen die Drehzahlkommandos die Stellgrößen darstellen. Da zumeist leistungsstarke bürstenlose Motoren leichte Kunststoffrotoren antreiben, ergibt sich eine extrem schnelle Motordynamik, die bei der Modellbildung in der Regel vernachlässigt wird. In der Mitte des Aufbaus befindet sich üblicherweise der Großteil der Elektronik, welche insbesondere die Hauptplatine mit Prozessor, die inertielle Messeinheit (engl. *inertial measurement unit (IMU)*), Funkmodule zur Kommunikation sowie die Energieversorgung umfasst. Eine gebräuchliche Sensorausstattung der IMU besteht aus Beschleunigungs- und Drehratensensoren für alle Raumachsen, einem Kompass sowie Sensorik für die Erfassung der Flughöhe. Gegebenenfalls wird die Sensorik um weitere Komponenten wie zum Beispiel GPS-Module oder Kameras ergänzt. Insbesondere bei Flugversuchen innerhalb von Gebäuden ist es üblich, Messungen aus externer Sensorik, wie beispielsweise kamerabasierten Tracking-Systemen, per Funk an den Quadrocopter zu übermitteln und für die Regelung zur Verfügung zu stellen.

## 2.1 Dynamisches Modell des Quadrocopters

Für die Entwicklung modellbasierter Regler ist zunächst ein ausreichend genaues Streckenmodell erforderlich. Dabei sollte die Modellierungstiefe so gewählt werden, dass wesentliche Einflüsse auf das System wiedergegeben werden, gleichzeitig aber die Mo-

dellkomplexität für den Reglerentwurf so gering wie möglich gehalten wird. In dieser Arbeit wird das gängigste Quadrocoptermodell verwendet, welches das Fluggerät als Starrkörper modelliert, auf welchen die Rotorkräfte und -momente sowie die Gravitation einwirken. Das dynamische Modell des Starrkörpers wird in Unterabschnitt 2.1.3 vorgestellt. Als Vorbereitung hierfür wird zuvor in Unterabschnitt 2.1.2 ein statischer Zusammenhang zwischen den Rotordrehzahlen und den erzeugten Auftriebskräften und Widerstandsmomenten hergeleitet. Der Abschnitt beginnt jedoch mit einer Einführung der grundlegenden Schreibweisen und Konventionen sowie der verwendeten Koordinatensysteme.

### 2.1.1 Verwendete Schreibweisen und Koordinatensysteme

Die zentralen geometrischen Objekte, die zur Beschreibung der Konfiguration eines Starrkörpers dienen, sind physikalische Vektoren und damit Elemente des euklidischen Vektorraums  $\mathbb{R}^3$ . Als solche besitzen sie aus sich selbst heraus zunächst keine numerischen Werte, sondern erst in Verbindung mit anderen Vektoren, den Basisvektoren eines Koordinatensystems, können Ihnen konkrete Zahlenwerte zugewiesen werden. Die Wahl unterschiedlicher Koordinatensysteme führt dabei zu unterschiedlichen Darstellungen desselben Vektors. Die elementarsten Eigenschaften von Vektoren, die algebraischen Rechengesetze,<sup>1</sup> die einen Vektorraum definieren, hängen jedoch nicht vom gewählten Koordinatensystem ab. Somit können physikalische Zusammenhänge grundsätzlich auf abstrakter Ebene, also koordinatenfrei ausgedrückt werden [157]. Ein Vektor, der eine physikalische Größe beschreibt (z. B. eine Position oder Geschwindigkeit), für den aber keine Koordinatendarstellung festgelegt wurde, soll deshalb als abstrakter Vektor bezeichnet werden. Soweit eine konkrete Koordinatendarstellung nicht von Nutzen ist, wird im Folgenden auf abstrakte Vektoren zurückgegriffen. Sollte der Kontext die Darstellung in einem bestimmten Koordinatensystem erfordern, so handelt es sich stets um ein rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem.

Um die Darstellung eines abstrakten Vektors  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  im Koordinatensystem  $K = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  mit den orthonormalen Basisvektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  zu kennzeichnen, wird die Schreibweise  $\mathbf{a}_K$  verwendet. Für einige Vektoren, die ausschließlich in einem Koordinatensystem dargestellt werden, wird die Kennzeichnung des Koordinatensystems fallen gelassen und somit auf eine Unterscheidung zwischen dem abstrakten Vektor und seiner Koordinatendarstellung verzichtet. Die einzelnen Einträge eines Vektors  $\mathbf{a}_K$  werden referenziert, indem dasselbe Symbol kursiv, nicht fett gedruckt und mit einem

---

<sup>1</sup>Für den euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  sind dies, neben den grundlegenden acht Rechengesetzen abstrakter Vektorräume (siehe z. B. [27, 122]), die Existenz eines Skalar- und eines Vektorproduktes [157].

Achsenindex versehen benutzt wird, d. h.  $\mathbf{a}_K = [a_{Kx} \ a_{Ky} \ a_{Kz}]^T$ . Mit der Schreibweise  $\mathbf{a}_{Kxy} = [a_{Kx} \ a_{Ky}]^T$  ist der Teilvektor aus den ersten beiden Elementen gemeint. Verwendet werden außerdem die *basisunabhängigen* „Vektoren“  $\mathbf{e}_x \equiv [1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{e}_y \equiv [0 \ 1 \ 0]^T$  und  $\mathbf{e}_z \equiv [0 \ 0 \ 1]^T$ , die lediglich die konkreten numerischen Werte symbolisieren und damit streng genommen keine Vektoren im obigen Sinne sind.

Die Transformation von einem Koordinatensystem  $K$  in ein anderes Koordinatensystem  $K'$  wird durch die Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_{K'K} \in SO(3)$  geleistet, wobei  $SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_3, \det(\mathbf{R}) = 1\}$  die spezielle orthogonale Gruppe bezeichnet. In manchen Fällen ist es nützlich eine Rotationsmatrix als Spaltenvektor zu schreiben. Für eine beliebige Matrix  $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3] \in SO(3)$  sei im Folgenden durch die Schreibweise  $\vec{\mathbf{R}} = [\mathbf{r}_1^T \ \mathbf{r}_2^T \ \mathbf{r}_3^T]^T$  der zugehörige Spaltenvektor definiert. Die Drehrate eines Koordinatensystems  $K'$  gegenüber einem Koordinatensystem  $K$  angegeben im Koordinatensystem  $K''$  wird mit  $\boldsymbol{\omega}_{K''}^{KK'} \in \mathbb{R}^3$  bezeichnet. Weiterhin wird der *Schiefsymmetrisch-Operator*  $\langle\langle \cdot \rangle\rangle : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$  definiert, der einen Vektor  $\mathbf{a} = [a_x \ a_y \ a_z]^T$  in den Raum der schiefssymmetrischen Matrizen  $\mathfrak{so}(3) = \{\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{G}^T = -\mathbf{G}\}$  entsprechend der Vorschrift

$$\langle\langle \mathbf{a} \rangle\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

abbildet. Folglich kann durch die Schreibweise  $\langle\langle \mathbf{a} \rangle\rangle \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  das Vektorprodukt zweier Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  ausgedrückt werden. Die inverse Abbildung vom Raum der schiefssymmetrischen Matrizen in den  $\mathbb{R}^3$  wird durch den Operator  $\rangle\rangle \cdot \langle\langle : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$  geleistet. Um den Definitionsbereich des oben eingeführten Operators  $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$  auch auf Vektoren  $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_1^T \ \mathbf{a}_2^T \ \mathbf{a}_3^T]^T \in \mathbb{R}^9$  mit  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^3$  zu erweitern, wird in dieser Arbeit zusätzlich die Vorschrift

$$\langle\langle \mathbf{a} \rangle\rangle = \left[ \langle\langle \mathbf{a}_1 \rangle\rangle^T \ \langle\langle \mathbf{a}_2 \rangle\rangle^T \ \langle\langle \mathbf{a}_3 \rangle\rangle^T \right]^T \quad (2.2)$$

definiert.

In [157] findet sich eine ausführliche Präsentation von Rechenregeln und Eigenschaften, die im Zusammenhang mit dem (vorzeichenverkehrt definierten) Operator (2.1) gelten. Auf einige der dort genannten Beziehungen wird in dieser Arbeit zurückgegriffen, weshalb sie im Folgenden gelistet werden. Dabei bezeichnen  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  beliebige Vektoren und  $\mathbf{R} \in SO(3)$  eine beliebige Rotationsmatrix. Der Operator (2.1) erfüllt die

Beziehungen

$$\langle\langle \mathbf{a} \rangle\rangle^T = -\langle\langle \mathbf{a} \rangle\rangle, \quad (2.3)$$

$$\langle\langle \mathbf{a} \rangle\rangle \mathbf{b} = -\langle\langle \mathbf{b} \rangle\rangle \mathbf{a}, \quad (2.4)$$

$$\langle\langle \mathbf{a} \rangle\rangle \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (2.5)$$

$$\langle\langle \mathbf{a} \rangle\rangle \langle\langle \mathbf{b} \rangle\rangle = -\mathbf{a}^T \mathbf{b} \cdot \mathbf{I}_3 + \mathbf{b} \mathbf{a}^T, \quad (2.6)$$

$$\langle\langle \langle\langle \mathbf{a} \rangle\rangle \mathbf{b} \rangle\rangle = \mathbf{b} \mathbf{a}^T - \mathbf{a} \mathbf{b}^T, \quad (2.7)$$

$$\langle\langle \mathbf{a} \rangle\rangle (\langle\langle \mathbf{b} \rangle\rangle \mathbf{c}) = (\mathbf{a}^T \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a}^T \mathbf{b}) \mathbf{c}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{R} \langle\langle \mathbf{a} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{R} \mathbf{a} \rangle\rangle \mathbf{R}, \quad (2.9)$$

$$\langle\langle \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{a} \rangle\rangle + \langle\langle \mathbf{b} \rangle\rangle. \quad (2.10)$$

Im Verlauf der Arbeit werden etliche Zustandsdarstellungen, Fehlermaße und Zwischengrößen eingeführt, deren Informationsgehalt zum Teil redundant ist. Es wird deshalb häufig der Fall sein, dass sich ein und dieselbe physikalische Größe als Funktion verschiedener Argumente angeben lässt. Sei beispielsweise  $a$  eine (skalare, vektorielle oder matrixwertige) Größe, die sich einerseits als Funktion  $\mathbf{f}(\cdot)$  des Argumentenvektors  $\mathbf{b}$  angeben lässt, d. h.  $a = \mathbf{f}(\mathbf{b})$ , und andererseits als Funktion  $\hat{\mathbf{f}}(\cdot)$  des Argumentenvektors  $\mathbf{c}$  ausgedrückt werden kann, d. h.  $a = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{c})$ . In einer etwas ungezwungenen Verwendung der mathematischen Notation, wird im Folgenden  $a(\mathbf{b})$  geschrieben, wenn der Bezug zu  $\mathbf{f}(\mathbf{b})$  hervorgehoben werden soll, und  $a(\mathbf{c})$  wenn auf  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{c})$  referenziert wird. Hierdurch soll einerseits einem übermäßigen Anwachsen der verwendeten Symbolik entgegen gewirkt und andererseits das Verständnis der physikalischen Zusammenhänge unterstützt werden, indem stets die Tatsache in den Vordergrund gerückt wird, dass es sich um die Größe  $a$  handelt. Wenn die bestehenden Abhängigkeiten aus dem Kontext bekannt sind und nicht ausdrücklich betont werden sollen, wird häufig darauf verzichtet die Argumente explizit anzugeben. Dies gilt insbesondere für die Abhängigkeit von der Zeit  $t$ .

In dieser Arbeit werden im Wesentlichen drei Koordinatensysteme unterschieden. Ein inertiales, ein körperfestes und ein Sollkoordinatensystem. Per Definition ist ein Inertialsystem, indem die Newtonschen Gesetze gelten, unbeschleunigt [76]. Für ein erdfestes Koordinatensystem, wie es in dieser Arbeit als inertial betrachtet wird, gilt dies zwar nur näherungsweise, jedoch sind die Fehler durch die Rotation der Erde oder gar durch deren beschleunigte Bewegung im All vernachlässigbar gering. Aufgrund des eingeschränkten Flugbereichs des Quadrocopters, können auch die Effekte der Erdkrümmung sowie die Höhenabhängigkeit der Gravitation unberücksichtigt bleiben, sodass angenommen wird,

dass Wirkrichtung und Betrag der Gravitationskraft im erdfesten System konstant sind. Im Folgenden wird ein am Boden erdfest fixiertes Koordinatensystem, dessen  $z$ -Achse zum Erdmittelpunkt zeigt, als Inertialsystem  $I = \{\mathbf{x}_{in}, \mathbf{y}_{in}, \mathbf{z}_{in}\}$  betrachtet. Das körperfeste Koordinatensystem  $B = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$  ist so definiert, dass sein Ursprung im Zentrum des kreuzförmigen Quadrocopterrahmens liegt, die Basisvektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  je entlang eines Auslegers zeigen und  $\mathbf{z}$  senkrecht dazu von der Rahmenunterseite weg gerichtet ist. Die Koordinatensysteme  $I$  und  $B$  sind in Abbildung 2.1 schematisch dargestellt. Aufgrund der nahezu symmetrischen Massenverteilung des Quadrocopters wird angenommen, dass sich sein Schwerpunkt im Ursprung des Körpersystems  $B$  befindet. Das Sollkoordinatensystem  $D = \{\mathbf{x}_d, \mathbf{y}_d, \mathbf{z}_d\}$  repräsentiert die gewünschte Solllage des Quadrocopters, die durch die Lageregelung eingestellt werden soll. Seine Ausrichtung ergibt sich entweder aus den Fernsteuerungskommandos eines Piloten oder aus den Vorgaben einer übergeordneten Regelungsebene.

### 2.1.2 Statisches Antriebsmodell

Die in den folgenden Kapiteln entworfenen Flugregelungsalgorithmen fordern Stellkräfte und -momente, die über die Rotoren erzeugt werden müssen. Da lediglich Drehzahlkommandos an die entsprechenden Motorregler weitergegeben werden können, ist es erforderlich den Zusammenhang zwischen Rotordrehzahl und den erzeugten Kraft- und Momentenwirkungen zu modellieren. Hierfür wird im Folgenden ein statisches Antriebsmodell hergeleitet, wie es in der Literatur weite Verbreitung gefunden hat (siehe u.a. [37, 50, 66, 87, 93, 114, 121, 123, 162]). Die Modellierung des Rotors erfolgt dabei in idealisierter Weise auf Basis der Stromfadentheorie nach Bernoulli sowie der Blattelementenmethode [16, 109]. Nur sehr vereinzelt finden sich Quellen, die versuchen auch komplexere aerodynamische Rotoreffekte im Antriebsmodell zu berücksichtigen. Diesbezüglich sei auf [86, 88, 26] verwiesen.

Ein Rotor erfährt im Wesentlichen zwei Wirkungen. Erstens wirkt eine Schubkraft senkrecht zur Rotorebene und zweitens erfährt der drehende Rotor ein Moment aus dem Strömungswiderstand, das seiner Drehung entgegenwirkt. Die Schubkraft entsteht, indem der Impuls der Luftmasse erhöht wird, die den Rotor durchströmt. Die hierfür erforderliche Rotorleistung ist

$$P_{Imp} = \frac{1}{\eta} f v_{ind}, \quad (2.11)$$

wobei  $f$  die senkrecht zur Rotorebene wirkende Schubkraft und  $v_{ind}$  die induzierte Geschwindigkeit ist, die der Rotor auf den Luftstrom überträgt. Die Konstante  $\eta$  bezeichnet den Wirkungsgrad des Rotors, der das Verhältnis zwischen idealer und realer Leistung

abbildet und bei optimierten Rotoren zwischen 0,6 und 0,8 liegt [16]. Nach [16, 109] gilt für Bedingungen, die nicht signifikant vom stationären Schwebeflug abweichen,

$$v_{ind} = \sqrt{\frac{f}{2\rho A_{Rot}}} . \quad (2.12)$$

Hierin ist  $\rho$  die Dichte der Luft und  $A_{Rot}$  die von den Rotorblättern überstrichene Fläche. Mit (2.12) und unter der Annahme idealer Blattverwindung, kann man mit der Blattelementenmethode ableiten, dass das Lastmoment  $\tau$ , welches durch den Strömungswiderstand auf den Rotor ausgeübt wird, proportional zum erzeugten Schub ist [16]. Man erhält

$$\tau = \kappa_\tau f , \quad (2.13)$$

wobei  $\kappa_\tau$  eine von der Blattgeometrie abhängige Konstante ist. Dreht der Rotor mit der Drehzahl  $\omega$ , so ist die vom Motor erbrachte mechanische Leistung  $P_{Mot} = \tau\omega$ . Setzt man diese gleich mit der erforderlichen Leistung zur Erhöhung des Strömungsimpulses (2.11) und nutzt außerdem die Zusammenhänge (2.12) und (2.13), so ergibt sich schließlich die gesuchte Beziehung zwischen Schub und Rotordrehzahl

$$\tau\omega = \frac{1}{\eta} f v_{ind} \implies \kappa_\tau f \omega = \frac{1}{\eta} f \sqrt{\frac{f}{2\rho A_{Rot}}} \implies f = 2\eta^2 \rho A_{Rot} \kappa_\tau^2 \omega^2 = \kappa_f \omega^2 . \quad (2.14)$$

Geht man weiterhin davon aus, dass die Luftdichte  $\rho$  im Flugbereich konstant angenommen werden kann, so ist  $\kappa_f$  eine Konstante und der Schub nur abhängig vom Drehzahlquadrat. Das Widerstandsmoment  $\tau$  kann folglich mit Hilfe von (2.13) als

$$\tau = \kappa_\tau \kappa_f \omega^2 \quad (2.15)$$

in Abhängigkeit der Drehzahl ausgedrückt werden. Für einen einzelnen Rotor lassen sich die Konstanten  $\kappa_\tau$  und  $\kappa_f$  leicht experimentell ermitteln.

Die Rotoren üben demnach die in Abbildung 2.2a dargestellten Kräfte und Momente auf den Quadrocopter aus. Unter der Annahme, dass die Rotorebenen parallel zur körperfesten  $xy$ -Ebene liegen und alle vier Rotoren gleichartig sind, erhält man mit Hilfe von (2.14) für den Schubkraftvektor  $\mathbf{f}_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  am  $i$ -ten Rotor

$$\mathbf{f}_i = f_i \cdot (-\mathbf{z}) = \kappa_f \omega_i^2 \cdot (-\mathbf{z}) . \quad (2.16)$$

Das Widerstandsmoment  $\tau_i$  am  $i$ -ten Rotor wirkt entgegen seiner Drehrichtung (vgl.

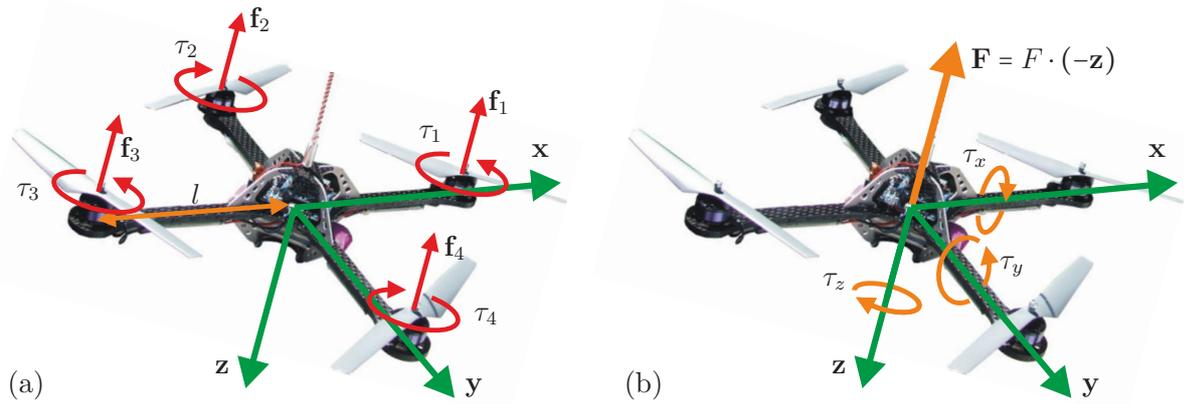


Abbildung 2.2: (a) Quadrocopter mit Einzelwirkungen der Rotoren und Länge der Ausleger  $l$ . (b) Quadrocopter mit Ersatzwirkungen im Schwerpunkt.

Abbildungen 2.1 und 2.2a) und lautet entsprechend (2.15)

$$\tau_i = (-1)^i \kappa_\tau \kappa_f \omega_i^2. \quad (2.17)$$

Hierbei wird ein Moment dann als positiv angesehen, wenn es entsprechend der „Rechter- Daumen-Regel“ um die körperfeste  $z$ -Achse orientiert ist. Man kann nun die Wirkungen der einzelnen Rotoren zu äquivalenten Ersatzwirkungen im Ursprung des körperfesten Koordinatensystems zusammenfassen. Wie in Abbildung 2.2b dargestellt, erhält man dadurch einen Gesamtschub  $F$  sowie Drehmomente  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $\tau_z$  um die drei Körperachsen. Der Gesamtschubvektor  $\mathbf{F}$  entspricht der Summe der Einzelschubvektoren

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{f}_i = \left( \sum_{i=1}^4 \kappa_f \omega_i^2 \right) \cdot (-\mathbf{z}) = F \cdot (-\mathbf{z}) \implies F = \sum_{i=1}^4 \kappa_f \omega_i^2. \quad (2.18)$$

Für den Momentenvektor  $\boldsymbol{\tau}_B = [\tau_x \ \tau_y \ \tau_z]^T$  berechnet man unter Ausnutzung von (2.16) und (2.17)

$$\boldsymbol{\tau}_B = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \left( \langle \mathbf{r}_{i,B} \rangle \mathbf{f}_{i,B} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_i \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & l\kappa_f & 0 & -l\kappa_f \\ l\kappa_f & 0 & -l\kappa_f & 0 \\ -\kappa_\tau \kappa_f & \kappa_\tau \kappa_f & -\kappa_\tau \kappa_f & \kappa_\tau \kappa_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

wobei  $\mathbf{r}_i$  den Ortsvektor vom Ursprung zur Nabe des  $i$ -ten Rotors repräsentiert und  $l$  die Länge der symmetrisch angeordneten Ausleger bezeichnet, wie sie in Abbildung 2.2a eingezeichnet ist. Im Folgenden wird beim Momentenvektor auf den Index  $B$  verzichtet, da er ausschließlich in seiner körperfesten Darstellung Verwendung findet. Es gilt somit

$\boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{\tau}_B$ . Kombiniert man nun (2.18) und (2.19), so erhält man schließlich die statische Beziehung

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \\ F \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & l\kappa_f & 0 & -l\kappa_f \\ l\kappa_f & 0 & -l\kappa_f & 0 \\ -\kappa_\tau\kappa_f & \kappa_\tau\kappa_f & -\kappa_\tau\kappa_f & \kappa_\tau\kappa_f \\ \kappa_f & \kappa_f & \kappa_f & \kappa_f \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Wie man leicht verifizieren kann, besitzt die Matrix  $\mathbf{K}$  vollen Rang. Somit kann (2.20) invertiert werden und es wird zumeist gelingen aus Vorgaben für  $\boldsymbol{\tau}$  und  $F$  die erforderlichen Drehzahlquadrate und hieraus die erforderlichen Motordrehzahlen zu bestimmen. Dieses Vorgehen scheitert jedoch, wenn negative Werte für die Drehzahlquadrate ermittelt werden. Dies entspräche einer Schubumkehr an den entsprechenden Rotoren, was mit den üblicherweise eingesetzten Blattprofilen, selbst bei Umkehr der Drehrichtung, nicht möglich ist. Man kann aber unschwer erkennen, dass die mittleren Drehzahlquadrate und damit der Spielraum für umsetzbare Drehmomente zunimmt, je größer der geforderte Gesamtschub  $F$  ist. Da  $F$  im üblichen Flugbetrieb dazu benötigt wird, die Gewichtskraft mindestens teilweise zu kompensieren, kann in der Regel davon ausgegangen werden, dass moderate angeforderte Momente  $\boldsymbol{\tau}$  auch umgesetzt werden können. Dementsprechend werden im Folgenden  $F$  und  $\boldsymbol{\tau}$  als Stellgrößen betrachtet und es wird davon ausgegangen, dass sie mit Hilfe von (2.20) in Drehzahlkommandos umgerechnet und verzögerungsfrei realisiert werden. Die vorangegangenen Überlegungen zeigen deutlich, dass die angesprochene Problematik entschärft werden kann, wenn Regelgesetze zum Einsatz kommen, die mit beschränkten Stellmomenten auskommen und deren Schubanforderung ein Mindestmaß nicht unterschreitet. Für die in den Abschnitten 3.2 und 4.3 vorgestellten Lageregler können die angeforderten Stellmomente beliebig beschränkt werden und trotzdem geringe Einschwingzeiten durch Stellgrößensättigung erreicht werden. Der in Kapitel 5 präsentierte kaskadierte Trajektorienfolgeregler wiederum garantiert eine untere Schranke für  $F$ .

### 2.1.3 Starrkörpergleichungen

Betrachtet man den Quadrocopter als Starrkörper, dann ist sein Ort beschrieben durch den in Abbildung 2.1 dargestellten Positionsvektor  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ , der vom Ursprung des inertialen Koordinatensystems  $I$  zum Ursprung des körperfesten Koordinatensystems  $B$  zeigt. Der Lagezustand des Starrkörpers kann in geeigneter Weise durch die Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_{BI} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_I & \mathbf{y}_I & \mathbf{z}_I \end{bmatrix}^T \in SO(3)$  charakterisiert werden. Sie ist zeilenweise aus den

inertialen Koordinatendarstellungen der Basisvektoren des Körpersystems aufgebaut [157]. Unter der getroffenen Annahme, dass der Körperschwerpunkt mit dem Ursprung von  $B$  zusammenfällt, lautet die zugehörige Starrkörperdynamik

$$m\ddot{\mathbf{p}}_I = -\mathbf{D}\dot{\mathbf{p}}_I + mg\mathbf{e}_z - F\mathbf{z}_I, \quad (2.21a)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_{BI} = -\langle\langle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rangle\rangle \mathbf{R}_{BI}, \quad (2.21b)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_B^{IB} = \langle\langle \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} + \boldsymbol{\tau}. \quad (2.21c)$$

Hierin ist (2.21a) das im Inertialsystem  $I$  ausgewertete zweite Newtonsche Gesetz, welches die translatorische Dynamik beschreibt. Es wird davon ausgegangen, dass die Quadcopter­masse  $m$  eine Beschleunigung aus drei Kräften erfährt. Diese umfassen die Gravitationskraft  $mg\mathbf{e}_z$  mit der Erdbeschleunigung  $g$ , die Schubkraft  $\mathbf{F}_I = F \cdot (-\mathbf{z}_I)$ , deren Betrag  $F$  eine Stellgröße darstellt, sowie eine viskos modellierte Dämpfungskraft  $-\mathbf{D}\dot{\mathbf{p}}_I$  mit konstanter Matrix  $\mathbf{D} \geq 0$ . Die Gleichungen (2.21b) und (2.21c) beschreiben den rotatorischen Teil der Dynamik, der im körperfesten Koordinatensystem  $B$  angegeben ist. Während (2.21b) den kinematischen Teil der Rotationsdynamik repräsentiert, wie er beispielsweise in [157] hergeleitet wird, beschreibt (2.21c) den um den Schwerpunkt ausgewerteten Drehimpulssatz. Darin bezeichnet  $\mathbf{J} > 0$  den Trägheitstensor des Quadcopters und  $\boldsymbol{\tau}$  das wirkende Stellmoment. Für die in den folgenden Kapiteln durchgeführten Regelungsentwürfe wird angenommen, dass die Zustandsvariablen  $\mathbf{p}_I$ ,  $\dot{\mathbf{p}}_I$ ,  $\mathbf{R}_{BI}$ , und  $\boldsymbol{\omega}_B^{IB}$  entweder direkt messbar sind, oder der Regelung durch eine geeignete Datenfusion zur Verfügung gestellt werden.

Eine wesentliche Eigenschaft der Bewegungsgleichungen (2.21) ist ihre Kaskadenstruktur, welche in Abbildung 2.3 veranschaulicht wird. Die Auswirkungen dieses Systemaufbaus zeigen sich, wenn man analysiert was geschehen muss, damit der Quadcopter einer gewünschten Positionstrajektorie  $\mathbf{p}_d$  folgt, also  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}_d$  für  $t \rightarrow \infty$  erreicht wird. Hierfür ist es offensichtlich erforderlich die Schubkraft  $\mathbf{F}_I = F \cdot (-\mathbf{z}_I)$  gezielt zu be-

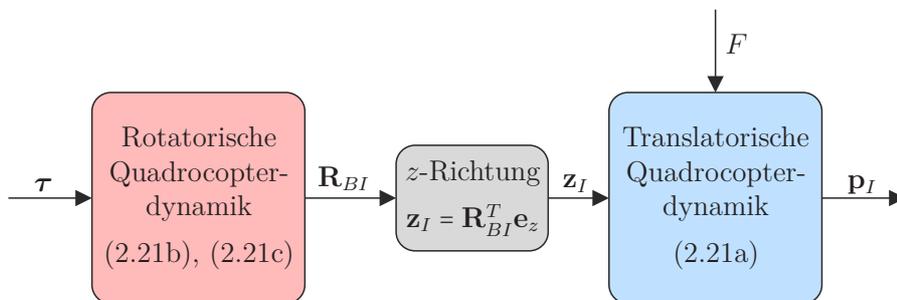


Abbildung 2.3: Kaskadenstruktur der Quadcopterdynamik.

einflussen, wobei nur deren Betrag  $F$  direkt gesteuert werden kann. Der Richtungsvektor  $\mathbf{z}_I$  hingegen ist durch die aktuelle Fluglage des Quadrocopters bestimmt. Dies zeigt die inhärente Kaskadenstruktur der Quadrocopterdynamik. Sie besteht aus der positionsunabhängigen Lagedynamik (2.21b) und (2.21c), die direkt über  $\boldsymbol{\tau}$  beeinflusst werden kann, und der nachgelagerten translatorischen Dynamik (2.21a), die über  $\mathbf{z}_I = \mathbf{R}_{BI}^T \mathbf{e}_z$  von der Fluglage  $\mathbf{R}_{BI}$  abhängt. In Kapitel 5 wird diese Struktur ausgenutzt, indem ein kaskadierter Regler entworfen wird. Er besteht aus einem äußeren Positionsregler, der eine virtuelle Schubkraft  $\mathbf{F}_d = F_d \cdot (-\mathbf{z}_d)$  als Stellgröße betrachtet und einem inneren Lageregler, der dafür verantwortlich ist die gewünschte  $z$ -Achsenrichtung  $\mathbf{z}_d$  einzuregeln. Da für die reine Positionsfolgeaufgabe offensichtlich nur die  $z$ -Achse eine Rolle spielt, ist es ausreichend eine reduzierte Lageregelung zu verwenden. Optional kann man ein vollständiges Sollkoordinatensystem  $D = \{\mathbf{x}_d, \mathbf{y}_d, \mathbf{z}_d\}$  definieren, indem man zusätzlich eine Wunschorientierung um  $\mathbf{z}_d$ , das sogenannte *Heading*, vorgibt. In diesem Fall wird eine vollständige Lageregelung benötigt.

## 2.2 Bestehende Regelungskonzepte

Um die Beiträge dieser Arbeit in den aktuellen Stand der Forschung einzuordnen, gibt dieser Abschnitt einen Überblick über ausgewählte Publikationen aus dem Feld der Lage- und Positionsregelung am Quadrocopter. Die Zusammenstellung wird durch Veröffentlichungen ergänzt, welche zwar aus anderen Themenfeldern stammen, jedoch eine besondere Bedeutung für die Arbeit haben oder mit ihr in enger Beziehung stehen.

### 2.2.1 Lageregelung

Im Folgenden werden zunächst parametrierungsbedingte Aspekte des Lageregelungsproblems beleuchtet, welche aus den besonderen geometrischen Eigenschaften des Konfigurationsraums  $SO(3)$  resultieren. Anschließend wird ein Überblick über bestehende Lageregelungskonzepte mit Bezug zum Quadrocopter oder dieser Arbeit gegeben. Für einen generellen Einblick in das Lageregelungsproblem des Starrkörpers sei der unlängst erschienene Übersichtsaufsatz von Chaturvedi u. a. [46] empfohlen.

#### 2.2.1.1 Der Konfigurationsraum $SO(3)$ und die Problematik alternativer Lageparametrierungen

Häufig wird die rotatorische Starrkörperdynamik (2.21b) und (2.21c), welche die Entwicklung der Körperorientierung in ihrem natürlichen Konfigurationsraum  $SO(3)$  be-

schreibt, für zu komplex befunden, um direkt mit ihr zu arbeiten [172]. Es erscheint übertrieben, eine Bewegungsform mit drei Freiheitsgraden über eine  $3 \times 3$  Rotationsmatrix zu beschreiben, deren Elemente über sechs Nebenbedingungen verkoppelt sind. Tatsächlich existiert eine Vielzahl alternativer Darstellungen mit weniger Parametern zur Beschreibung der Lage, wie die ausführliche Übersicht von Shuster [157] darlegt. Die wohl populärsten Vertreter sind Eulerwinkel und Quaternionen, weitaus seltener werden Parametrierungen wie die Rodrigues-Parameter, die modifizierten Rodrigues-Parameter, oder die Achse-Winkel-Parametrierung genutzt. Im Gegensatz zur Rotationsmatrix vermag es jedoch keine alternative Parametrierung die Lage *global und eindeutig* zu beschreiben [46]. Mit den drei Eulerwinkeln zum Beispiel können zwar sämtliche Körperorientierungen dargestellt werden, manche allerdings nicht eindeutig. Für diese Körperlagen weisen die Eulerwinkel darüber hinaus eine kinematische Singularität auf, weshalb sie auch keine globale Beschreibungsform verkörpern. Diese als *kardanische Blockade* (engl. *gimbal lock*) bezeichnete Singularität beschreibt die Tatsache, dass die Zeitableitungen der Eulerwinkel an den fraglichen Orientierungen nicht jede physikalisch mögliche Drehrate repräsentieren können [46]. Quaternionen wiederum beschreiben die Lage mittels vier Parametern, die sich in einen Skalarteil und einen dreikomponentigen Vektorteil gliedern. Beide Teile werden häufig in einem einzigen vierkomponentigen Vektor der Länge eins zusammengefasst. Quaternionen sind zwar eine globale, also singularitätenfreie Lageparametrierung, allerdings deckt ihr Zustandsraum den physikalischen Raum  $SO(3)$  der Orientierungen doppelt ab [157, 46]. Quaternionen sind dementsprechend nicht eindeutig, sondern jede reale Starrkörperlage wird jeweils durch ein Paar vorzeichenverkehrter Quaternionen repräsentiert.

Im Zusammenhang mit Lageregelungen, die auf Basis alternativer Lageparametrierungen entworfen werden, treten verschiedene Probleme auf: Werden nichtglobale Parametrierungen wie Eulerwinkel verwendet, so muss dafür gesorgt werden, dass die singularitätsbehafteten Orientierungen nicht auftreten. Dies erfordert eine künstliche Limitierung der zulässigen Bewegungen, welche aus rein mathematischen Gründen geschieht und keine physikalischen Einschränkungen widerspiegelt [172]. Es ist offensichtlich, dass auf Basis solcher Beschreibungsformen keine global gültigen Regelgesetze entworfen werden können.

Parametrierungen wie Quaternionen, die den Raum der physikalischen Orientierungen mehrfach abdecken, können hingegen zu einem Phänomen führen, das im Englischen als *Unwinding* bezeichnet wird [15]. Da jede physikalische Lage durch die Parametrierung mehrfach abgebildet wird, bedeutet die Stabilisierung einer Wunschorientierung bezogen auf den gewählten Parametrierungsraum die *gleichzeitige Stabilisierung aller*

*Repräsentanten der Wunschlage.* Wird dieser Zusammenhang mit dem physikalischen Zustandsraum ignoriert und ein Regelgesetz entworfen, welches nur einen einzelnen Repräsentanten asymptotisch stabilisiert, so führt dies zu instabilem Verhalten. Denn selbst wenn sich die physikalischen Anfangsbedingungen des auszurichtenden Körpers in unmittelbarer Nachbarschaft der Zielorientierung befinden, können sie im Parameterraum in der Nähe eines nicht stabilisierten Repräsentanten liegen. Während nun die Regelung dafür sorgt, dass die Lageparametrierung gegen den asymptotisch stabilisierten Repräsentanten der Wunschlage konvergiert, vollführt der Starrkörper große Rotationen, die ihn zunächst von der Zielorientierung wegführen, nur um anschließend wieder dorthin zurückzukehren. Es liegt auf der Hand, das Unwinding in jedem Falle vermieden werden sollte.

In der Konsequenz bedingt der Entwurf eines global gültigen Lageregelgesetzes, die Verwendung einer globalen Lageparametrierung. Die Vermeidung von Unwinding wiederum erfordert zwingend die Nutzung der eindeutigen Rotationsmatrix oder zumindest eine sorgsame Interpretation des Regelgesetzes im  $SO(3)$  [46].

Auf die besondere geometrische Struktur des Raums  $SO(3)$  und die Folgen für die Stabilisierung wurde bereits in Abschnitt 1.1 hingewiesen. Insbesondere sei nochmals erwähnt, dass es unmöglich ist eine Zielorientierung mit einer kontinuierlichen zeitinvarianten Zustandsrückführung global asymptotisch zu stabilisieren [15, 46, 99, 172, 152]. Fast global asymptotische Stabilität, wie sie in Abschnitt 1.3 eingeführt wurde, ist unter diesen Umständen das Optimum, das erreicht werden kann.

### 2.2.1.2 Lageregelung am Quadrocopter

Die nachfolgende Aufstellung gliedert die Lageregelungskonzepte nach ihrem Gültigkeitsbereich und damit implizit nach der verwendeten Lageparametrierung. Zum Teil enthalten die angegebenen Quellen neben der zentralen Synthese einer Lageregelung auch unabhängig entworfene Beobachterstrukturen oder einfache und unabhängige Positionsregler. In Abgrenzung zum nachfolgenden Unterabschnitt 2.2.2 werden hier jedoch keine Quellen zitiert, welche geschlossenen Regelkonzepte für die Positionsfolge präsentieren und analysieren.

**Lageregelung in unmittelbarer Umgebung der Schwebelage:** Die Mehrzahl der Arbeiten zur Lageregelung am Quadrocopter nutzt Eulerwinkel zur Parametrierung. Viele Autoren wenden zusätzlich die Kleinwinkelnäherung an, um das resultierende nichtlineare Modell der Lagedynamik weiter zu vereinfachen. Damit wird das parametrierungsbedingt ohnehin nur lokal gültige Dynamikmodell in seiner Anwendbarkeit

zusätzlich eingeschränkt. Sämtliche analytischen Betrachtungen und Aussagen beziehen sich dann nur noch auf eine kleine Umgebung einer spezifischen Schwebelage des Quadrocopters.

Unter den geschilderten Voraussetzungen sowie der zugespitzten restriktiven Annahme kleiner Drehraten entwerfen Bouabdallah u. a. in [17] einen simplem PD-Regler zur Stabilisierung der Schwebelage. Das Konzept wird in [18] auf einen PID-Regler erweitert und mit einem Riccati-Regler, welcher für das linearisierte System entworfen wurde, simulativ und experimentell verglichen. Eine entsprechende Gegenüberstellung von Backstepping- und Sliding-mode-Reglern nehmen sowohl Bouabdallah u. Siegwart [19] als auch Adigbli [2] vor. Um die Stellgrößen zu beschränken, integrieren Castillo u. a. [34, 35, 36, 37] zusätzlich geschachtelte Sättigungsfunktionen in ihre Reglerentwürfe. Während in [35, 36, 37] die Strecke als simple Integrator-kette angenähert wird, um die Entwurfsmethoden aus [163] anwenden zu können, wird in [34] ein Backstepping-Regler mit beschränktem Stellgrößeneinsatz entwickelt. Mit ähnlicher Zielsetzung entwerfen Al-Younes u. a. [3] einen Backstepping-Regler, der das Quadrat der Stellmomente minimiert, indem die Entwurfparameter nicht konstant gewählt, sondern online angepasst werden. Zur Verkürzung der Einschwingzeit wird angeregt, die Parameter über einen Fuzzy-Algorithmus zu adaptieren. Bouabdallah u. Siegwart [20] sowie Hoffmann u. a. [85] wiederum schlagen einen Backstepping-Ansatz mit Integralverhalten zur Bekämpfung stationärer Regelabweichungen vor. Bouadi u. a. [21] hingegen ergänzen einen Backstepping-Regler zu Gunsten höherer Robustheit um einen Sliding-mode. Der Aufsatz von Bouchoucha u. a. [24] kann als Kombination der beiden zuvor genannten Konzepte betrachtet werden. Ähnlich gelagert ist auch die Arbeit von Seghour u. a. [154], welche Backstepping- und Sliding-mode-Regler mit Integralverhalten vergleicht. Problematisch bei gewöhnlichen Sliding-mode-Ansätzen ist das hochfrequente Schalten des Stellglieds. Dem begegnen Sliding-mode-Regler zweiter Ordnung, indem das Schalten in die Ableitung der Stellgröße verlagert wird. Dieses Konzept greifen sowohl Bouchoucha u. a. [23] als auch Tony u. Mackunis [165] für ihre Lageregler auf. In [22] wird von Bouadi u. a. ein adaptiver Sliding-mode-Regler präsentiert. Die robusten modellprädiktiven Regelungen von Alexis u. a. [5, 6, 4, 7] basieren auf schaltenden linearisierten Modellen und berücksichtigen Zustands- und Stellgrößenbeschränkungen.

**Lokale Lageregelungskonzepte:** Nutzt man Eulerwinkel zur Lageparametrierung, verzichtet aber auf die Kleinwinkelnäherung, so lassen sich Regelgesetze ableiten, deren Gültigkeitsbereich weiter gefasst ist als die unmittelbare Umgebung der Schwebelage. Naturgemäß bleibt der zulässige Winkelbereich aber durch die Singularität der Eulerwinkel begrenzt. Für den Quadrocopter bedeutet dies, dass die Regelgesetze Definiti-

onslücken aufweisen, wenn die Schubachse um  $90^\circ$  aus der Senkrechten verkippt ist. Darüber hinaus wachsen die kommandierten Stellgrößen in der Umgebung der Definitionslücken häufig unbegrenzt an.

In diese Rubrik der Lageregelungen fallen die passivitätsbasierten Regleransätze von Kottenstette u. Porter [101] sowie Corona-Sánchez u. Rodríguez-Cortés [47, 48]. Eine robuste Eingangs-Ausgangslinearisierung basierend auf der Eulerwinkelparametrierung stellen Guerrero u. a. in [77] vor. Derafa u. a. [57, 56] entwerfen robuste Regelungen auf Basis eines Sliding-mode-Ansatzes zweiter Ordnung. Diese Methode wird von Mokhtari u. Cherki [129] erweitert, um zusätzlich die Konvergenz der Regelabweichung zu Null in endlicher Zeit zu garantieren.

**Globale Lageregelungskonzepte:** Mit Hilfe globaler Parametrierungen wie Quaternionen oder Rotationsmatrizen lassen sich global definierte Regelgesetze entwerfen.

Ein einfaches global definiertes Lageregelgesetz auf Quaternionenbasis entsteht, indem eine konstante negative Rückführung aus dem Vektorteil des Fehlerquaternions und der Fehlerdrehrate implementiert wird. Dies kommt in gewisser Weise einer PD-Struktur gleich, da die Fehlerdrehrate die Zeitableitung des Fehlerquaternions bestimmt (jedoch nicht mit ihr identisch ist). Ohne weitere Modifikationen weist eine solche Lageregelung allerdings Unwinding auf. PD-Regler dieser Art wurden beispielsweise von Stingu u. Lewis [160], Fresk u. Nikolakopoulos [67] und Tayebi u. McGilvray [162] am Quadrocopter implementiert. In [162] wird ein weiteres Stellgesetz vorgeschlagen, welches zusätzlich eine Rückführung der tatsächlichen Zeitableitung des Fehlerquaternions vorsieht und dadurch exponentielle Stabilität im gesamten Einzugsbereich sicherstellt. Guerrero-Castellanos u. a. [78, 79] realisieren die PD-Struktur innerhalb geschachtelter Sättigungsfunktionen und ermöglichen so eine Berücksichtigung von Stellgrößenstran-ken. Einen erweiterten Backstepping-Ansatz auf Basis der Quaternionenparametrierung präsentieren Bouhired u. a. in [25]. Allerdings führt auch dieses Konzept zu Unwinding, genau wie der ereignisbasierte Lageregler von Guerrero-Castellanos u. a. [80].

Einige der oben genannten Autoren schlagen vor das Vorzeichen des Quaternions in den Rückführungen bei  $180^\circ$  Fehlstellung umzuschalten, um damit dem Unwinding zu begegnen und auf diese Weise eine global asymptotische Stabilisierung der Wunschlage zu erreichen. Dabei muss beachtet werden, dass die abrupte Änderung des Vorzeichens zu einem diskontinuierlichen Regelgesetz führt. Die in den obigen Arbeiten angewendeten Analysemethoden für kontinuierliche Systeme lassen jedoch ohne weiteres keine Rückschlüsse auf die Stabilitätseigenschaften des schaltenden geschlossenen Regelkreises zu. Vielmehr zeigen Sanfelice u. a. [151], dass solche „gedächtnislosen“ schaltenden Regelgesetze eine besondere Sensitivität gegenüber Messrauschen aufweisen, sodass die

realen Stabilitätseigenschaften nie über fast global asymptotische Stabilität hinausgehen können. Abhilfe kann die Einführung eines komplexen Hystereseverhaltens in ein diskontinuierliches Regelgesetz schaffen, wie Mayhew u. a. in ihrem Beitrag [119] ohne Bezug zum Quadrocopter darlegen.

Aufbauend auf der Arbeit von Lee [105], entwerfen Fernando u. a. [64] sowie Lee [106] global definierte Lageregelungen für den Quadrocopter, welche die Rotationsmatrix zur Lageparametrierung nutzen. Es handelt sich um differentialgeometrische Regelungsansätze, welche mit einer adaptiven Komponente die Robustheit gegenüber einem unsicheren Trägheitstensor verbessern. Die Wunschrhelage wird durch die Regelgesetze fast global asymptotisch stabilisiert.

Keines der aufgeführten Regelungskonzepte vereint die Eigenschaften des Lagereglers, der in dieser Arbeit vorgestellt wird: Eine Berücksichtigung von Stellgrößenschranken bei gleichzeitigem schnellem Einschwingverhalten und nachweislicher fast global asymptotischer Stabilität der Wunschorientierung sowie (im Festwertfall) Robustheit gegenüber beliebig unsicheren Trägheitstensoren. Insbesondere existiert bis dato kein reduziertes Lageregelungskonzept für den Quadrocopter, welches ausschließlich die Schubrichtung einregelt. Auch eine Priorisierung der Schubrichtung im Rahmen einer vollständigen Lageregelung wird in keiner dem Autor bekannten Quelle vorgenommen.

### 2.2.1.3 Lageregelungskonzepte mit besonderem Bezug zur Arbeit

Der energiebasierte Lageregelungsentwurf, der in dieser Arbeit präsentiert wird, betrachtet die Lage in ihrem natürlichen Konfigurationsraum  $SO(3)$ . Er steht in der Tradition der frühen Arbeiten von Koditschek [98, 99], in welchen der erste fast global asymptotisch stabilisierende Lageregler präsentiert wurde, und ist insbesondere inspiriert durch die Beiträge von Chaturvedi u. a. [38, 39, 40, 41, 45, 42, 44] zur Stabilisierung des 3D-Pendels. Ähnlich wie beim Quadrocopter erfordert die Stabilisierung des 3D-Pendels in der aufrechten Position die Ausrichtung einer einzelnen Starrkörperachse und es handelt sich demzufolge um ein reduziertes Lageregelungsproblem unter dem zusätzlichen Einfluss eines Gravitationsmomentes. Die genannten Arbeiten von Chaturvedi u. a. befassen sich mit der fast global asymptotischen Stabilisierung des Pendels mittels kontinuierlicher Regelgesetze auf Basis von Energiebetrachtungen. In [41] werden zusätzlich Stellgrößenbeschränkungen berücksichtigt. Eklatante Unterschiede zu den Regelungskonzepten der vorliegenden Arbeit sind jedoch die mangelnde Fähigkeit die Stellmomente gezielt zu sättigen und die fehlende Unterscheidung zielführender und schädlicher Bewegungen.

Weitere bedeutende Beiträge zur reduzierten Lageregelung finden sich in [168], [31] und [43].

### 2.2.2 Positionsregelung

Dieser Abschnitt fasst anhand ausgewählter Arbeiten den Stand der Technik zur Positionsfolgeregelung für den Quadrocopter zusammen. Die aufgeführten Quellen sind nach den (maßgeblichen) angewendeten Entwurfsmethoden gegliedert. Da jedoch nicht wenige Arbeiten Teilaspekte unterschiedlicher Ansätze nutzen und somit methodische Mischformen darstellen, bleibt die Einteilung zu einem gewissen Grad subjektiv.

Im Zuge der Einführung des Quadrocoptermodells (2.21) wurde bereits erläutert, dass das Abfliegen einer Positionstrajektorie ein stetiges kontrolliertes Ausrichten der körperfesten Schubkraftrichtung voraussetzt. Jede Positionsfolgeregelung beinhaltet demzufolge (mindestens implizit) eine (reduzierte) Lagefolgeregelung. Die methodische Bandbreite für Lageregelungen und insbesondere ihre parametrierungsbedingten Probleme hinsichtlich Singularitäten und Unwinding wurden bereits im vorausgegangenen Unterabschnitt erläutert. Es versteht sich von selbst, dass diese Phänomene auch in den Positionsfolgeregelungen präsent sind, wenn entsprechende Lageparametrierungen gewählt werden. Im Folgenden wird deshalb nicht mehr gesondert auf die Wahl der Parametrierung eingegangen.

**Exakte Eingangs-Ausgangslinearisierung:** Die Durchführung einer exakten *Eingangs-Ausgangslinearisierung* (siehe z. B. [90]) für den Quadrocopter erweist sich als problematisch, da die Position als Ausgangsgröße nicht den erforderlichen relativen Grad aufweist. Wie aus (2.21a) unmittelbar hervorgeht, tritt der Schubkraftbetrag  $F$  als einzige Stellgröße bereits in der zweiten Ableitung jeder der drei Positionskomponenten in Erscheinung. Es ist offensichtlich, dass mit einer einzelnen Stellgröße nicht gleichzeitig drei Ausgangsdynamiken linearisiert werden können. Um dieses Problem zu umgehen, kann der relative Grad erhöht werden, indem man die Strecke bezüglich des Schubs zweifach dynamisch erweitert und  $\ddot{F}$  statt  $F$  als Stellgröße betrachtet. Für die erweiterte Strecke lässt sich anschließend mit Hilfe der Stellgrößen  $(\ddot{F}, \tau_x, \tau_y, \tau_z)$  eine exakte Eingangs-Ausgangslinearisierung für die Position sowie das Heading durchführen. Diesen Ansatz verfolgen Mistler u. a. [125], Lee u. a. [104] sowie in ähnlicher Weise Driessen u. Robin [59].

Eine quasistatische Eingangs-Ausgangslinearisierung, welche ohne dynamische Erweiterung auskommt, gelingt, wenn der Schubkraftbetrag  $F$  exklusiv für die Linearisierung der Höhendynamik genutzt wird. Unter der stark vereinfachenden Annahme kleiner

Winkel wird dieses Vorgehen erstmals von Beji u. Abichou [13] vorgeschlagen. Die Arbeiten von Buhl, Fritsch, u. Lohmann [29] sowie Fritsch u. a. [70] erweitern den Ansatz auf den allgemeinen Fall und betrachten darüber hinaus das eingebettete Lageregelungsproblem in seiner reduzierten Form. Hierdurch kann das Positionsfolgeproblem isoliert gelöst und eine unnötige Headingvorgabe vermieden werden. Am quasistatischen Ansatz wirkt sich nachteilig aus, dass im Regelgesetz eine zusätzliche Singularität auftritt, wenn der Quadrocopter um  $90^\circ$  aus der Schwebelage verkippt ist.

Benallegue u. a. [14] sowie Mokhtari u. a. [128] erhöhen die Robustheit ihrer Eingangs-Ausgangslinearisierungen durch die Integration eines Sliding-mode-Beobachters, der insbesondere als Störgrößenschätzer agiert.

**Backstepping:** Das rekursive Backstepping-Verfahren (siehe z. B. [156, 95, 1]) stellt vergleichbare Anforderungen an die Systemstruktur wie die exakte Eingangs-Ausgangslinearisierung. Deshalb lässt sich Backstepping am Quadrocopter ohne weitere Kunstgriffe nur unter Zuhilfenahme einer dynamischen Erweiterung bezüglich des Schubs durchführen. Madani u. Benallegue [113, 114], Cunha u. a. [49] sowie De Monte u. Lohmann [53] entwerfen Backstepping-Regler unter Zuhilfenahme einer zweifachen dynamischen Erweiterung. Falconí u. Holzapfel [62] sowie Cabecinhas u. a. [33] zeigen, dass auch eine einfache dynamische Erweiterung zielführend ist. Durch eine geschickte Wahl der Fehlerzustände kann die dynamische Erweiterung schließlich vollständig vermieden werden. Derartige Backstepping-Regelungen präsentieren Roberts u. Tayebi [149, 150], Wang u. a. [171] sowie Cabecinhas u. a. [32]. In den beiden zuletzt genannten Arbeiten wird jedoch durch eine projektive Berechnung des Schubkommandos  $F$  eine zusätzliche Singularität in das Regelgesetz eingebracht, die bei  $90^\circ$  Fehlstellung zwischen Soll- und Itschubrichtung auftritt. In den Arbeiten [32, 33, 49, 149, 150] werden außerdem Sättigungsfunktionen in die Berechnung der Sollschubrichtung integriert, wodurch sich die kommandierte Verkippung des Quadrocopters begrenzen lässt. In [33] sowie [49] wird darüber hinaus die Kompensation konstanter Störkräfte thematisiert.

Das Backstepping-Regelgesetz erfordert die Berechnung der Ableitungen virtueller Stellgesetze, welche in den einzelnen Rekursionsschritten entworfen werden. Die analytische Berechnung dieser Ableitungsterme unter Berücksichtigung der Systemdynamik kann mitunter sehr unübersichtlich und kompliziert sein. Madani u. Benallegue schlagen deshalb in [115] vor die Ableitungen mittels eines Sliding-mode-Verfahrens zu schätzen und damit die Implementierbarkeit zu vereinfachen. Sogenannte *Command Filter* (siehe [63]) werden mit demselben Ziel beispielsweise in [171] eingesetzt.

**Kaskadierte Regelungen:** Unter kaskadierten Positionsfolgeregelungen sollen in dieser Arbeit solche verstanden werden, die aus *unabhängig entworfenen* Teilreglern für die

Position und die Lage bestehen. Der Begriff *kaskadierte Regelung* bezieht sich damit nicht auf die angewendeten Entwurfsmethoden, sondern auf die hierarchisch organisierte Struktur des Gesamtreglers. Da die Synthese des übergeordneten Positionsreglers und des untergeordneten Lagereglers unabhängig voneinander erfolgt, bieten kaskadierte Regelungen mehr Entwurfsfreiheiten als geschlossene Regelungskonzepte. Im Gegenzug kann nicht auf *konstruktive* Stabilitätsnachweise wie bei der exakten Eingangs-Ausgangslinearisierung oder dem Backstepping-Verfahren zurückgegriffen werden. Die Stabilitätseigenschaften des Regelkreises können somit erst im Nachhinein unter Berücksichtigung der Kopplung beider Teilsysteme analysiert werden.

Mit dem Hinweis auf eine ausreichende Zeitskalentrennung zwischen einem sehr schnellen Lageregelkreis und einem deutlich langsameren Positionsregelkreis unterbleibt ein analytischer Stabilitätsbeweis häufig ganz. Ein solches Vorgehen findet sich beispielsweise in [20, 66, 171]. Die Annahme der Zeitskalentrennung ist jedoch speziell bei modernen technologischen Anwendungen mit hohen Performanzanforderungen fragwürdig [138].

Deshalb kombinieren andere Autoren Lyapunovfunktionen, die ihnen aus dem Entwurf der Teilregelkreise bekannt sind, zu einer Gesamtlyapunovfunktion. Anhand dieser Funktion parametrieren sie dann ihre Regler und schätzen den Einzugsbereich der Nullruhelage des kaskadierten Fehlersystems konservativ ab. Diesen Weg schlagen Hamel u. a. [82], Lee u. a. [107, 108] sowie Goodarzi u. a. [75] ein. Dabei kommen in [82] Kaskaden aus Backstepping-Reglern zum Einsatz, wohingegen in [75, 107, 108] differentialgeometrische Regelungsmethoden verwendet werden. Das Vorgehen auf Basis einer kombinierten Gesamtlyapunovfunktion zielt darauf ab, ihrer Zeitableitung negative Definitheit aufzuprägen, wofür in der Regel ein hoher Stellaufwand erforderlich ist. Des Weiteren müssen für beide Teilregelkreise Lyapunovfunktionen bekannt sein, deren Zeitableitungen negativ definit sind. Dies ist nicht immer der Fall, beispielsweise wenn der Stabilitätsbeweis eines Teilregelkreises mit einer Lyapunovfunktion mit lediglich negativ semidefiniter Zeitableitung und unter Zuhilfenahme des Invarianzprinzips von LaSalle geführt wurde.

Eine wichtige Alternative zur Betrachtung einer Gesamtlyapunovfunktion stellt deshalb die eigens entwickelte Stabilitätstheorie für kaskadierte nichtlineare Systeme dar (siehe z. B. [112, 137, 156]). Diese zielt darauf ab, Aussagen über die Stabilitätseigenschaften der Kaskade aus den Stabilitätseigenschaften der Teilsysteme sowie deren Kopplungsstruktur abzuleiten, ohne dass eine Gesamtlyapunovfunktion gefunden werden muss. Diesen Weg, der auch in dieser Arbeit eingeschlagen wird, gehen Kendoul u. a. [92, 93, 94], Falconí u. a. [61] sowie Raptis u. a. [146, 145, 147]. Während in [92, 93, 94, 61] linearisierende Teilregler entworfen werden, kommen in [146, 145, 147]

sättigende Positionsregler kombiniert mit Backstepping-Reglern für die Lagedynamik zum Einsatz.

**Weitere Regelungsverfahren:** Vereinzelt werden rein robuste Regelungsmethoden zur Lösung des Positionsfolgeproblems vorgeschlagen. Von Lee u. a. wird in [104] ein *Sliding-mode-Regler* entworfen. Mokhtari u. a. [127] sowie Raffo u. a. [139] bringen dagegen  $H_\infty$ -Ansätze zur Anwendung. In [140] kombinieren Raffo u. a. das  $H_\infty$ -Verfahren mit *modellprädiktiven Methoden*.

In zunehmendem Maße werden auch adaptive Regelungsverfahren am Quadrocopter implementiert. Huang u. a. [89] nutzen das sogenannte *Adaptive Backstepping*, um unsichere Streckenparameter zu kompensieren. Zur Kompensation unstrukturierter Modellunsicherheiten schlagen Madani u. Benallegue [116] ein neuronales Netz vor und kombinieren es mit einem Backstepping-Ansatz. Dydek u. a. [60] entwerfen eine adaptive Positionsfolgeregelung unter Ausnutzung der *CMRAC*-Methode<sup>2</sup>. Regelungen auf Basis der  $\mathcal{L}_1$ -*adaptiven Regelungstheorie* werden von Michini u. How [124] sowie De Monte u. Lohmann [52, 54] vorgestellt. Einen ausführlichen Überblick über die Anwendung adaptiver Verfahren am Quadrocopter gibt De Monte [51].

---

<sup>2</sup>CMRAC: Combined/Composite Model Reference Adaptive Control

# Kapitel 3

## Reduzierte Lageregelung - Regelung der Schubrichtung

Der Zugriff auf die translatorische Dynamik des Quadrocopters (2.21a) erfolgt über den Schubkraftvektor  $\mathbf{F}$ , der entsprechend (2.18) immer in Richtung  $-\mathbf{z}$  zeigt. Somit ist die Ausrichtung des Schubs gekoppelt an die Ausrichtung der körperfesten  $z$ -Achse. Kommandiert nun eine übergeordnete Regelungsebene oder ein Pilot über die Fernsteuerung eine Vorgabe für die Schubkraft, so muss die gewünschte  $z$ -Achsenrichtung  $\mathbf{z}_d$  eingeregelt werden. Die Regelungsaufgabe, die im Folgenden behandelt wird, besteht darin, mit Hilfe der Stellmomente  $\boldsymbol{\tau}$  eine Trajektorie  $\mathbf{z}_d$  einzuregeln, d. h. es soll  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_d$  für  $t \rightarrow \infty$  sichergestellt werden. Allerdings ist durch dieses Regelziel der Sollzustand der Drehrate noch nicht eindeutig definiert, denn selbst wenn  $\mathbf{z} \equiv \mathbf{z}_d$  gilt, kann der Quadrocopter noch beliebig um seine  $z$ -Achse rotieren. Es wird daher zusätzlich gefordert, dass die Rotation um  $\mathbf{z}$  abklingt, d.h. es soll  $\boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rightarrow \begin{bmatrix} \omega_{Bx}^{IB} & \omega_{By}^{IB} & 0 \end{bmatrix}^T$  für  $t \rightarrow \infty$  erreicht werden. Die Struktur des angestrebten Regelkreises ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

Die in den folgenden Abschnitten vorgestellte reduzierte Lageregelung basiert auf den von Fritsch u. a. bereits veröffentlichten Beiträgen [72, 69]. Die Besonderheit dieses energiebasiert entworfenen Reglers liegt in seiner Ausrichtung auf schnelle Einschwingvorgänge bei gleichzeitiger Beschränkung der auftretenden Stellgrößen. Dies wird durch den gezielten Entwurf der potentiellen Energie und insbesondere über eine durchdachte Dämpfungsstrategie ermöglicht, welche unerwünschte Bewegungen maximal bedämpft und zielführende Bewegungen gewähren lässt. Ein solches an der zeitoptimalen Regelung orientiertes Vorgehen im Rahmen einer energiebasierten Lageregelung wird nach bestem Wissen des Autors erstmals in dieser Arbeit vorgestellt. Dabei sind die Einsatzmöglichkeiten der präsentierten Regelung durchaus nicht auf den Quadrocopter beschränkt, sondern umfassen sämtliche Anwendungen, bei denen eine einzelne Starrkörperachse gezielt über Stellmomente eingeregelt werden muss.

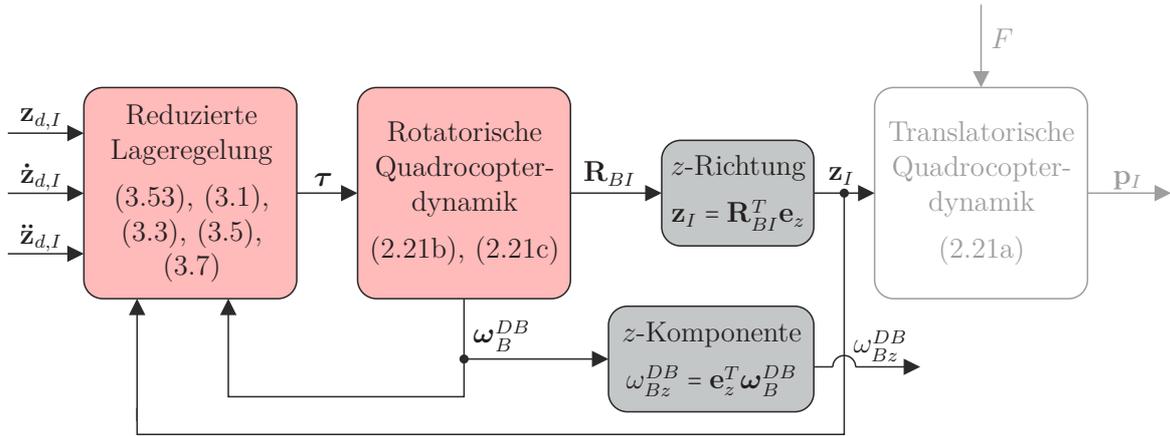


Abbildung 3.1: Strukturbild des Lageregelkreises mit reduzierter Lageregelung. Die Regelgrößen sind die körperfeste  $z$ -Achsenrichtung  $\mathbf{z}$  sowie die  $z$ -Komponente  $\omega_{Bz}^{DB}$  der Drehrate  $\omega_B^{DB}$ .

Im nachfolgenden Abschnitt 3.1 wird zunächst die Folgedynamik hergeleitet und das Regelziel in Abhängigkeit der gewählten Zustandsvariablen angegeben. Abschnitt 3.2 befasst sich dann mit dem Sonderfall der Festwertregelung, bei dem die Vorgabe der Achsrichtung  $\mathbf{z}_d$  konstant ist. Die Erweiterung auf den allgemeinen Fall der Folgeregelung wird in Abschnitt 3.3 durchgeführt und in Abschnitt 3.4 wird die Leistungsfähigkeit der Regelung mit Simulationsergebnissen untermauert.

### 3.1 Folgedynamik und Regelziel

Die zeitliche Entwicklung der gewünschten  $z$ -Achsenrichtung wird beschrieben durch die Trajektorie des Einheitsvektors  $\mathbf{z}_d$ . Es gilt folglich  $\mathbf{z}_d \in \mathcal{S}^2$  mit  $\mathcal{S}^2 = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{a}^T \mathbf{a} = 1\}$ , d. h.  $\mathbf{z}_d$  beschreibt eine Bahn auf der Mantelfläche der dreidimensionalen Einheitskugel. Ausgehend von der Annahme, dass die Solltrajektorie  $\mathbf{z}_d$  zweifach stetig nach der Zeit differenzierbar und in ihrer inertialen Darstellung  $\mathbf{z}_{d,I}$  vorliegt, wird in diesem Abschnitt die Folgedynamik der reduzierten Lage hergeleitet. Entsprechend [46] ist die Darstellung der gewünschten  $z$ -Achsenrichtung  $\mathbf{z}_d$  in Körperkoordinaten

$$\mathbf{z}_{d,B} = \mathbf{R}_{BI} \mathbf{z}_{d,I} \quad (3.1)$$

eine geeignete Zustandsvariable, welche den reduzierten Lagefehler global und eindeutig charakterisiert. Da man in der Regel dazu neigt, die Zusammenhänge aus dem Inertialsystem heraus zu deuten, sei darauf hingewiesen, dass sich durch die Darstellung in Körperkoordinaten ein Anschauungswechsel vollzieht. Mit  $B$  als Bezugssystem er-

scheinen alle körperfesten Vektoren konstant, selbst wenn der Körper im Inertialsystem rotiert. Umgekehrt erscheinen alle nicht körperfesten Vektoren (auch die Inertialfesten) bewegt. Aus dieser Warte heraus muss deshalb das primäre Regelziel  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_d$  für  $t \rightarrow \infty$  besser in der Form  $\mathbf{z}_{d,B} \rightarrow \mathbf{z}_B = \mathbf{e}_z$  für  $t \rightarrow \infty$  angeschrieben werden.

Zur Herleitung der Folgedynamik berechnet man zunächst die Zeitableitung von  $\mathbf{z}_{d,B}$ . Hierzu wird die Identität  $\dot{\mathbf{z}}_{d,I} = \langle\langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle\rangle \dot{\mathbf{z}}_{d,I} \mathbf{z}_{d,I}$  benötigt, die sich aus (2.8) ableitet, wenn man berücksichtigt, dass auf der Kugeloberfläche  $\dot{\mathbf{z}}_{d,I} \perp \mathbf{z}_{d,I}$  gilt. Nutzt man weiterhin die Gleichungen (2.21b) sowie die Rechenregeln (2.9) und (2.10), so erhält man

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_{d,B} &= \dot{\mathbf{R}}_{BI} \mathbf{z}_{d,I} + \mathbf{R}_{BI} \dot{\mathbf{z}}_{d,I} = -\langle\langle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rangle\rangle \mathbf{R}_{BI} \mathbf{z}_{d,I} + \mathbf{R}_{BI} \langle\langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle\rangle \dot{\mathbf{z}}_{d,I} \mathbf{z}_{d,I} = \\ &= -\langle\langle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rangle\rangle \mathbf{R}_{BI} \mathbf{z}_{d,I} + \langle\langle \mathbf{R}_{BI} \langle\langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle\rangle \dot{\mathbf{z}}_{d,I} \rangle\rangle \mathbf{R}_{BI} \mathbf{z}_{d,I} = \\ &= \langle\langle -\boldsymbol{\omega}_B^{IB} + \mathbf{R}_{BI} \langle\langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle\rangle \dot{\mathbf{z}}_{d,I} \rangle\rangle \mathbf{z}_{d,B} . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Durch Einführung der Größen

$$\boldsymbol{\omega}_{d,B} = \mathbf{R}_{BI} \langle\langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle\rangle \dot{\mathbf{z}}_{d,I} \quad \text{und} \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B = \boldsymbol{\omega}_B^{IB} - \boldsymbol{\omega}_{d,B} \quad (3.3)$$

sowie Ausnutzung der Eigenschaft (2.4) kann man (3.2) weiter umformen und es ergibt sich schließlich

$$\dot{\mathbf{z}}_{d,B} = -\langle\langle \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \rangle\rangle \mathbf{z}_{d,B} = \langle\langle \mathbf{z}_{d,B} \rangle\rangle \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B . \quad (3.4a)$$

Die Folgedynamik wird komplettiert durch die Gleichung

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_B = \dot{\boldsymbol{\omega}}_B^{IB} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{d,B} = \mathbf{J}^{-1} \left( \langle\langle \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} + \boldsymbol{\tau} \right) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{d,B} , \quad (3.4b)$$

welche durch Einsetzen von (2.21c) entsteht. Für die darin enthaltene Größe  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{d,B}$  folgt aus (3.3), (2.21c) und  $\langle\langle \dot{\mathbf{z}}_{d,I} \rangle\rangle \dot{\mathbf{z}}_{d,I} = \mathbf{0}$  die Beziehung

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{d,B} = -\langle\langle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rangle\rangle \mathbf{R}_{BI} \langle\langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle\rangle \dot{\mathbf{z}}_{d,I} + \mathbf{R}_{BI} \langle\langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle\rangle \ddot{\mathbf{z}}_{d,I} . \quad (3.5)$$

Bezüglich der gewählten Zustandsvariablen  $(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) \in \mathbb{W} = \mathcal{S}^2 \times \mathbb{R}^3$  besteht das angestrebte Regelziel nun darin den Arbeitspunkt  $\mathbf{w}_d = (\mathbf{e}_z, \mathbf{0})$  durch einen kontinuierlichen Stelleingriff  $\boldsymbol{\tau}$  asymptotisch zu stabilisieren. Im Einzelnen garantiert das im Folgenden entworfene Regelgesetz zwei wesentliche Stabilitätseigenschaften, die im Zusammenhang mit der in Kapitel 5 diskutierten kaskadierten Positionsfolgeregelung eine entscheidende Rolle spielen:

1. *Lokal exponentielle Stabilität* des angestrebten Arbeitspunkts  $\mathbf{w}_d$ .
2. *Fast global asymptotische Stabilität* des angestrebten Arbeitspunkts  $\mathbf{w}_d$ .

**Anmerkung 3.1** Im angestrebten Arbeitspunkt  $\mathbf{w}_d$  gilt  $\omega_{Bz}^{IB} = 0$ , was der auf S. 37 formulierten Anforderung an die Drehrate entspricht. Dies wird ersichtlich, wenn man  $\omega_{d,B}$  mit Hilfe von (2.9) umformt. Es gilt  $\omega_{d,B} = \mathbf{R}_{BI} \langle\langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle\rangle \dot{\mathbf{z}}_{d,I} = \langle\langle \mathbf{z}_{d,B} \rangle\rangle \dot{\mathbf{z}}_{d,B}$ . Im angestrebten Arbeitspunkt ist  $\mathbf{z}_{d,B} = \mathbf{e}_z$  und da  $\mathbf{z}_{d,B} \perp \dot{\mathbf{z}}_{d,B}$  gilt, folgert man  $\omega_{d,Bz} = 0$ . Somit folgt aus  $\tilde{\omega}_B = \omega_B^{IB} - \omega_{d,B} = \mathbf{0}$  direkt, dass auch  $\omega_{Bz}^{IB} = 0$  gelten muss.

**Anmerkung 3.2** Man beachte, dass die Drehrate  $\omega_{d,B} = \mathbf{R}_{BI} \langle\langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle\rangle \dot{\mathbf{z}}_{d,I}$  keine Drehrate zwischen zwei vollständig bestimmten Koordinatensystemen darstellt, obwohl man geneigt sein könnte  $\omega_{d,B}$  als Drehrate eines Sollsystems  $D = \{\mathbf{x}_d, \mathbf{y}_d, \mathbf{z}_d\}$  gegenüber dem Inertialsystem  $I$  zu interpretieren,  $\omega_{d,B} = \omega_B^{ID}$ . Ein solches virtuelles Sollsystem  $D$  ist aber nicht eindeutig definiert, da nur etwas über seine  $z$ -Achsenrichtung  $\mathbf{z}_d$  bekannt ist. Somit definiert jede Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_{ID}$ , die die Gleichung  $\mathbf{z}_{d,I} = \mathbf{R}_{ID} \mathbf{e}_z$  erfüllt, ein zulässiges Sollkoordinatensystem  $D$ . (Die beiden verbleibenden Basisvektoren ergeben sich zu  $\mathbf{x}_{d,I} = \mathbf{R}_{ID} \mathbf{e}_x$  und  $\mathbf{y}_{d,I} = \mathbf{R}_{ID} \mathbf{e}_y$ .) Darüber hinaus ist selbst die Drehrate eines solchen virtuellen Koordinatensystems  $D$  nicht eindeutig. Denn ersetzt man  $\omega_{d,B}$  in (3.4a) durch  $\omega_B^{ID} = \omega_{d,B} + a \cdot \mathbf{z}_{d,B}$  mit beliebigem Skalar  $a$ , so führt dies zum gleichen  $\dot{\mathbf{z}}_{d,B}$ . Folglich beschreibt die Differenzdrehrate  $\tilde{\omega}_B = \omega_B^{IB} - \omega_{d,B}$  keine Relativedrehbewegung zwischen zwei eindeutig definierten Koordinatensystemen. Trotz dieses „Defizits an Anschaulichkeit“ beschreibt  $\tilde{\omega}_B$  eine geeignete Fehlerdrehrate für die vorliegende Regelungsaufgabe.

## 3.2 Festwertregelung - Ein schneller und sättigender Ansatz

Dieser Abschnitt behandelt den Sonderfall, dass die inertielle Darstellung der gewünschten  $z$ -Achsenrichtung  $\mathbf{z}_{d,I}$  konstant ist oder konstant angenommen wird, weil kein Wissen über die Ableitungen  $\dot{\mathbf{z}}_{d,I}$  und  $\ddot{\mathbf{z}}_{d,I}$  vorliegt. Dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn  $\mathbf{z}_{d,I}$  per Fernsteuerung von einem Piloten kommandiert wird.

Unter der Annahme, dass  $\dot{\mathbf{z}}_{d,I} = \ddot{\mathbf{z}}_{d,I} = \mathbf{0}$  gilt, ergibt sich  $\omega_{d,B} = \dot{\omega}_{d,B} = \mathbf{0}$ . Damit vereinfacht sich die Folgedynamik (3.4) zu

$$\dot{\mathbf{z}}_{d,B} = \langle\langle \mathbf{z}_{d,B} \rangle\rangle \tilde{\omega}_B \quad (3.6a)$$

$$\mathbf{J} \dot{\tilde{\omega}}_B = \langle\langle \mathbf{J} \tilde{\omega}_B \rangle\rangle \tilde{\omega}_B + \boldsymbol{\tau}, \quad (3.6b)$$

wobei ausgenutzt wurde, dass im betrachteten Sonderfall  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B = \boldsymbol{\omega}_B^{IB}$  gilt. Man beachte, dass (3.6) ein System der Form (1.1) darstellt, für das nun eine energiebasierte Regelung entsprechend dem in Abschnitt 1.2 vorgestellten allgemeinen Vorgehen entworfen wird. Hierzu soll dem geschlossenen Regelkreis eine Energiefunktion

$$V(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^T \mathbf{J} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B + E_\varphi(\varphi(\mathbf{z}_{d,B}))$$

zugewiesen werden, wobei  $\varphi$  den Winkel zwischen  $\mathbf{z}_d$  und  $\mathbf{z}$  bezeichnet und somit ein geeignetes Fehlermaß darstellt. Unter Berücksichtigung der Streckendynamik (3.6) erhält man für die zeitliche Ableitung der Energiefunktion

$$\dot{V} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^T \boldsymbol{\tau} + \dot{E}_\varphi = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^T \boldsymbol{\tau} + \underbrace{\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{z}_{d,B}} \langle \mathbf{z}_{d,B} \rangle}_{-(\mathbf{T}_\varphi^\varphi)^T} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B .$$

Aus  $\dot{E}_\varphi$  extrahiert man das Stellmoment  $\mathbf{T}_\varphi^\varphi$ , welches aus dem zugewiesenen Potential resultiert. Das Regelgesetz

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}_\varphi^\varphi(\mathbf{z}_{d,B}) - \mathbf{D}_\tau(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B , \quad (3.7)$$

mit  $\mathbf{D}_\tau(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) \geq 0$  führt schließlich zur angestrebten Abnahme der Energie

$$\dot{V}(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^T \mathbf{D}_\tau(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \leq 0 . \quad (3.8)$$

Der nachfolgende Unterabschnitt 3.2.1 ist dem Entwurf eines geeigneten Potentials  $E_\varphi$  und der Identifikation des zugehörigen Momentenfeldes  $\mathbf{T}_\varphi^\varphi$  gewidmet. Im Unterabschnitt 3.2.2 wird dann eine geeignete Dämpfung  $\mathbf{D}_\tau$  festgelegt. Die Reglersynthese erfolgt dabei so, dass neben den erforderlichen Stabilitätseigenschaften des gewünschten Arbeitspunktes  $\mathbf{w}_d$ , die in 3.2.3 nachgewiesen werden, zusätzlich die Stellgrößenbeschränkungen

$$\|\boldsymbol{\tau}_{xy}\| \leq \bar{\tau}_{xy} , \quad |\tau_z| \leq \bar{\tau}_z , \quad (3.9)$$

eingehalten werden. Hierin bezeichnet  $\boldsymbol{\tau}_{xy} = \begin{bmatrix} \tau_x & \tau_y \end{bmatrix}^T$  den Teilvektor aus den ersten beiden Komponenten von  $\boldsymbol{\tau}$  und  $\bar{\tau}_{xy}$  und  $\bar{\tau}_z$  sind beliebige positive Konstanten. Die Möglichkeit, die Stellmomente entsprechend (3.9) zu begrenzen, entschärft die in Abschnitt 2.1.2 diskutierte Problematik, die bei der Umrechnung der Momente in Drehzahlkommandos auftreten kann. Mit Hilfe der getrennten Behandlung der Momente in der  $xy$ -Ebene und der  $z$ -Richtung wird dabei auf die speziellen Symmetrieeigenschaften

der Quadrocopteraktuatorik eingegangen. Wie aus (2.19) hervorgeht, sind in der  $xy$ -Ebene große Stellmomente verfügbar, die aus den Schubkräften der einzelnen Rotoren multipliziert mit ihren Hebelarmen resultieren. Um die  $z$ -Achse hingegen wirken nur die im Verhältnis geringen aerodynamischen Widerstandsmomente. Somit gilt beim Quadrocopter  $\bar{\tau}_{xy} \gg \bar{\tau}_z$ . Um trotz der Stellgrößenbeschränkungen (3.9) möglichst schnelle Einschwingvorgänge zu realisieren, müssen die verfügbaren Momente weitgehend ausgenutzt und im Idealfall gesättigt werden. Dies wird durch den gezielten Entwurf der potentiellen Energie und insbesondere durch die entwickelte Dämpfungsstrategie geleistet, welche unerwünschten Bewegungen entgegenwirkt und zielführende Bewegungen uneingeschränkt zulässt.

### 3.2.1 Entwurf der Potentialfunktion

Der gedankliche Ausgangspunkt für den Entwurf der Energiefunktion  $E_\varphi$  ist das Potential eines zylindrischen 3D-Pendels, welches in einem Kugelgelenk<sup>1</sup> gelagert und der Gravitation der Erde ausgesetzt ist. Wie in Abbildung 3.2 dargestellt, wird in diesem Gedankenexperiment die tatsächliche  $z$ -Achsenrichtung  $\mathbf{z}$  des Quadrocopters durch die Pendelachse und die gewünschte  $z$ -Achsenrichtung  $\mathbf{z}_d$  durch die hängende Lage des Pendels repräsentiert. Ist Dämpfung im System vorhanden, so schwingt das Pendel aus fast

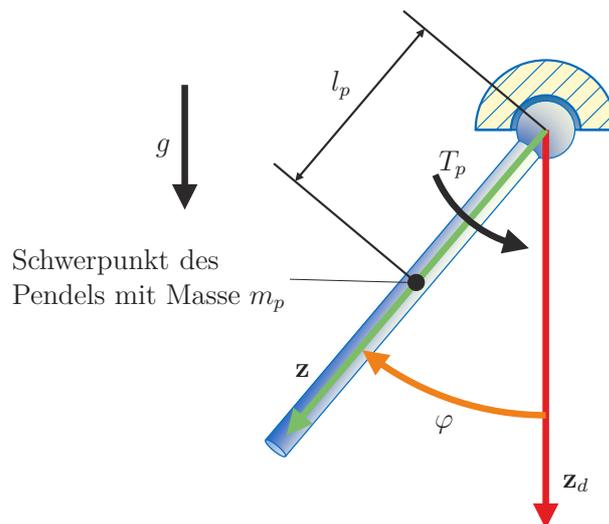


Abbildung 3.2: Analogon 3D-Pendel: Die Pendelachse entspricht  $\mathbf{z}$ , die hängende Ruhelage entspricht  $\mathbf{z}_d$ . Das ausrichtende Moment  $T_p$  resultiert aus der potentiellen Energie des Pendels im Gravitationsfeld der Erde. Dämpfungsmomente sind nicht dargestellt.

---

<sup>1</sup>Es wird hier eine idealisierte Lagerung angenommen, welche eine uneingeschränkte Drehung des Körpers um den Lagerpunkt zulässt.

jeder Ausgangslage in die hängende Lage ein, es strebt  $\mathbf{z}$  gegen  $\mathbf{z}_d$ . Wenn es gelingt, mit den Stellmomenten des Quadrocopters die Momente aus dem Pendelpotential und der Dämpfung zu emulieren, so wird der Schubvektor in gleicher Weise wie das Pendel in seine Zielausrichtung einschwingen. Dabei wird die ausrichtende Wirkung durch das Moment aus dem Potential erbracht, die Dämpfung hingegen gestaltet wesentlich den Ablauf des Einschwingvorgangs.

Bezeichnet man im Pendelbeispiel mit  $\varphi$  den Winkel zwischen  $\mathbf{z}_d$  und  $\mathbf{z}$ , mit  $l_p$  den Abstand zwischen Drehpunkt und Schwerpunkt und mit  $m_p$  die Masse des Pendels, so wirkt abhängig vom Winkel  $\varphi$  ein aus dem Potential stammendes rückstellendes Moment mit Betrag

$$T_p(\varphi) = m_p g l_p \sin(\varphi)$$

um den Drehpunkt. Das zugehörige Pendelpotential ergibt sich durch Integration über den Winkel von 0 bis  $\varphi$  zu

$$E_p(\varphi) = \int_0^\varphi T_p(a) da = \int_0^\varphi m_p g l_p \sin(a) da = m_p g l_p (1 - \cos(\varphi)).$$

Der qualitative Verlauf von Moment und Potential ist in Abbildung 3.3 in grün dargestellt. Es fällt auf, dass der Momentenverlauf im Hinblick auf die „Stellgrößenausnutzung“ ungünstig ist, da das maximale Moment nur bei  $\varphi = \pi/2$  auftritt und die Kurve zu beiden Seiten schnell abfällt. Wünschenswert wäre hingegen ein Verlauf wie der in rot dargestellte, der sein Maximum über einen großen Winkelbereich beibehält. Die energiebasierte Regelung lässt dem Entwerfer an dieser Stelle große Freiheit den Momentenverlauf nach seinen Vorstellungen zu gestalten. Dabei gilt es lediglich zwei

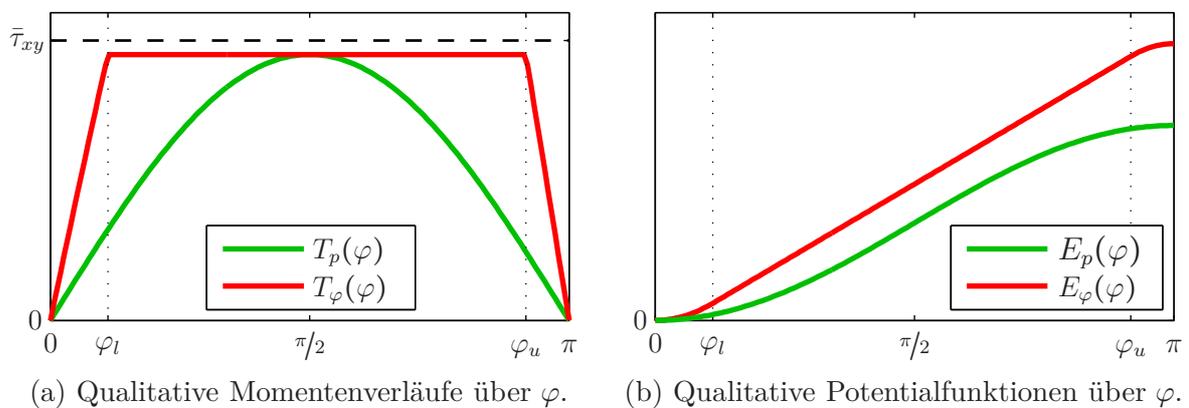


Abbildung 3.3: Qualitative Momentenverläufe mit zugehörigen Potentialfunktionen für das Pendel (Index  $p$ ) und die reduzierte Lageregelung (Index  $\varphi$ ).

Randbedingungen zu beachten. Zum einen muss das Moment für  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \pi$  verschwinden, sodass das resultierende Momentenfeld im gesamten Zustandsraum kontinuierlich wird.<sup>2</sup> Zum anderen muss der Momentenverlauf im restlichen Bereich positiv sein, sodass das resultierende Potential mit zunehmendem Fehlerwinkel ansteigt. Diese Anforderung erzwingt das notwendige isolierte Minimum des Potentials bei  $\varphi = 0$  und zielt weiterhin darauf ab, die unteren Niveaumengen des Potentials und damit auch die der Energiefunktion  $V$  kompakt und zusammenhängend zu gestalten.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Momentenverlauf vorgeschlagen, wie er in Abbildung 3.3a in rot qualitativ dargestellt ist. Mit Hilfe der Funktion  $\Lambda_{a_l}^{a_u} : [0, \pi] \rightarrow [0, \sin(a_l)]$

$$\Lambda_{a_l}^{a_u}(a) = \begin{cases} \sin(a) & \text{if } 0 \leq a \leq a_l, \\ \sin(a_l) & \text{if } a_l < a \leq a_u, \\ \frac{\sin(a_l)}{\sin(a_u)} \sin(a) & \text{if } a_u < a \leq \pi, \end{cases} \quad (3.10)$$

lässt sich der abgebildete Momentenverlauf anschreiben als

$$T_\varphi(\varphi) = c_\varphi \cdot \Lambda_{\varphi_l}^{\varphi_u}(\varphi). \quad (3.11)$$

Hierbei ist  $c_\varphi$  eine positive Konstante, die insbesondere die Anfangssteigung des Momentenverlaufs und damit die Linearisierung um die Ziellage bestimmt (vgl. Unterabschnitt 3.2.3.2). Die Konstanten  $\varphi_l$  und  $\varphi_u$  hingegen legen den Bereich fest in dem der Betrag des Stellmoments maximal ist. Durch Integration erhält man das zugehörige Potential

$$E_\varphi(\varphi) = \int_0^\varphi T_\varphi(a) da = c_\varphi \int_0^\varphi \Lambda_{\varphi_l}^{\varphi_u}(a) da, \quad (3.12)$$

welches in Abbildung 3.3b qualitativ dargestellt ist.

Wie zu Beginn des Abschnitts 3.2 gezeigt wurde, leitet sich die vektorielle Darstellung des Potentialmoments  $\mathbf{T}_\varphi^\varphi$  aus der zeitlichen Ableitung der potentiellen Energie ab, es gilt  $\dot{E}_\varphi = -(\mathbf{T}_\varphi^\varphi)^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B$ . Um die Ableitung bilden zu können, muss zunächst der Fehlerwinkel  $\varphi$  durch die Zustandsvariable  $\mathbf{z}_{d,B}$  ausgedrückt werden. Der Kosinus von  $\varphi$  ist durch das Skalarprodukt aus  $\mathbf{z}$  und  $\mathbf{z}_d$  bestimmt,  $\cos(\varphi) = \mathbf{z}^T \mathbf{z}_d$ . Somit gilt angeschrieben im

---

<sup>2</sup>Die Analyse von Systemen, die durch Differentialgleichungen mit *diskontinuierlicher* rechter Seite beschrieben werden, stellt ein eigenes systemtheoretisches Forschungsfeld dar. Gewohnte mathematische Konzepte, wie die Lösung einer Differentialgleichung, sind in diesem Zusammenhang nicht mehr unverändert anwendbar, sondern müssen zunächst generalisiert werden [65]. Die Betrachtung solcher Systeme geht weit über die Zielsetzung dieser Arbeit hinaus.

körperfesten Koordinatensystem  $B$

$$\cos(\varphi) = \mathbf{z}_B^T \mathbf{z}_{d,B} = \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} = z_{d,Bz} \iff \varphi = \arccos(z_{d,Bz}). \quad (3.13)$$

Mit Hilfe der letzten Zeile aus (3.6a) und unter Ausnutzung der Einheitslänge von  $\mathbf{z}_{d,B}$  erhält man für die zeitliche Ableitung von  $\varphi$

$$\dot{\varphi} = \frac{-\dot{z}_{d,Bz}}{\sqrt{1 - z_{d,Bz}^2}} = -\frac{1}{\sqrt{z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2}} \begin{bmatrix} -z_{d,By} & z_{d,Bx} & 0 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B = -\mathbf{e}_{\varphi,B}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B, \quad (3.14)$$

worin  $\mathbf{e}_{\varphi}$  offensichtlich ein Einheitsvektor ist. Mit (3.12) und (3.14) ergibt sich schließlich

$$\dot{E}_{\varphi} = \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = -T_{\varphi}(\varphi) \cdot \mathbf{e}_{\varphi,B}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B$$

und der Vergleich mit  $\dot{E}_{\varphi} = -(\mathbf{T}_{\varphi}^{\varphi})^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B$  liefert

$$\mathbf{T}_{\varphi}^{\varphi} = T_{\varphi}(\varphi) \cdot \mathbf{e}_{\varphi,B} = c_{\varphi} \cdot \Lambda_{\varphi_l}^{\varphi_u}(\varphi) \cdot \mathbf{e}_{\varphi,B}. \quad (3.15)$$

Es handelt sich also um ein Drehmoment mit dem entworfenen Betragsverlauf  $T_{\varphi}$ , welches um die Achse  $\mathbf{e}_{\varphi}$  wirkt. Wie man aus der physikalischen Anschauung unmittelbar erwartet, steht der Achsvektor  $\mathbf{e}_{\varphi}$  senkrecht auf  $\mathbf{z}$  und  $\mathbf{z}_d$ . Genauer gesagt, entspricht er dem normierten Vektorprodukt aus  $\mathbf{z}$  und  $\mathbf{z}_d$ . Angeschrieben im Körpersystem  $B$  gilt

$$\mathbf{e}_{\varphi,B} = \frac{1}{\|\langle \mathbf{z}_B \rangle \mathbf{z}_{d,B}\|} \cdot \langle \mathbf{z}_B \rangle \mathbf{z}_{d,B} = \frac{1}{\|\langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{z}_{d,B}\|} \cdot \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{z}_{d,B} = \frac{1}{\sqrt{z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2}} \begin{bmatrix} -z_{d,By} \\ z_{d,Bx} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Somit liegt  $\mathbf{T}_{\varphi}^{\varphi}$  immer in der körperfesten  $xy$ -Ebene. Um die Stellgrößenbeschränkung (3.9) einzuhalten, müssen deshalb  $c_{\varphi}$  und  $\varphi_l$  so aufeinander abgestimmt werden, dass stets

$$T_{\varphi} = \|\mathbf{T}_{\varphi}^{\varphi}\| < \bar{\tau}_{xy} \quad (3.17)$$

gilt. Dies ist auch in Abbildung 3.3a angedeutet. Man beachte, dass die Ungleichung streng erfüllt sein muss, damit jederzeit eine Stellgrößenreserve verfügbar ist, mit der unerwünschte Bewegungen bedämpft werden können.

**Anmerkung 3.3** *Es mag verwundern, dass die Flanken der Funktion (3.10) proportional zur Sinusfunktion ansteigen und abfallen und nicht schlicht rampenförmig gestaltet sind. Obwohl problemlos auch lineare (oder anders geformte) Flanken verwendet werden*

können, hat die verwendete Funktion den Vorteil, dass sie die lokale Stabilitätsanalyse in Unterabschnitt 3.2.3.1 erheblich vereinfacht, indem einige Grenzwertbetrachtungen entfallen können. Gleichzeitig ist die Abweichung vom rampenförmigen Verlauf gering, wenn der durch  $\varphi_l$  und  $\varphi_u$  definierte Maximalbereich, wie in Abbildung 3.3a, ausgeprägt gestaltet ist.

**Anmerkung 3.4** Der in (3.16) angegebene Einheitsvektor  $\mathbf{e}_\varphi$  und auch der im folgenden Unterabschnitt in (3.18) definierte Einheitsvektor  $\mathbf{e}_\perp$  weisen für  $\varphi \in \{0, \pi\} \Leftrightarrow \mathbf{z}_{d,B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}^T$  Definitionslücken auf. Ihre Richtung ist dann unbestimmt. Es wird deshalb konsequent darauf geachtet, dass sich diese Definitionslücken nicht in das Regelgesetz fortpflanzen. Beispielsweise ist  $\mathbf{T}_\varphi^\varphi$  in (3.15) ein global Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf  $\mathcal{S}^2$ . Die undefinierte Richtung von  $\mathbf{e}_\varphi$  für  $\varphi \in \{0, \pi\}$  wirkt sich nicht auf  $\mathbf{T}_\varphi^\varphi$  aus, da dort  $T_\varphi = 0$  gilt.

### 3.2.2 Entwurf der Dämpfungsstrategie

Um das Regelgesetz (3.7) zu vervollständigen, muss noch die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}_\tau$  festgelegt werden. Im Hinblick auf (3.8) kann man den Eindruck gewinnen, dass die Dämpfung grundsätzlich möglichst groß gewählt werden sollte, da sich dadurch die Abnahme der Lyapunovfunktion verstärken lässt. Die so verstärkte Abnahme würde dadurch erzielt, dass vorliegende Drehraten  $\tilde{\omega}$  stark bekämpft und schnell reduziert würden. Ein solches Systemverhalten repräsentiert aber im Allgemeinen keine hohe Regelgüte, denn insbesondere wenn auf schnelle Einschwingvorgänge abgezielt wird, soll der Quadrocopter schließlich möglichst lange mit hoher Drehrate auf die gewünschte Ziellage zurotieren. Dieser Vorgang sollte also möglichst ungedämpft ablaufen. Trotzdem muss genug Dämpfung im System vorhanden sein, um die Bewegung rechtzeitig abzufangen und Überschwingen zu vermeiden. Die zentrale Erkenntnis aus diesem scheinbaren Widerspruch ist, dass die Bedämpfung der Drehraten nicht undifferenziert erfolgen sollte. Vielmehr sollte mit Blick auf das Regelziel zwischen erwünschten und unerwünschten Drehratenrichtungen und -beträgen unterschieden und deren Bedämpfung individuell gestaltet werden. Im Folgenden wird deshalb eine durchdachte Dämpfungsstrategie entwickelt, die sich an den Ergebnissen der zeitoptimalen Regelung orientiert.

Um die Drehrate  $\tilde{\omega}$  in die problemrelevanten Richtungen zerlegen zu können, definiert

man zunächst den zu  $\mathbf{e}_\varphi$  senkrechten Einheitsvektor

$$\mathbf{e}_{\perp,B} = \langle \mathbf{e}_{\varphi,B} \rangle \mathbf{z}_B = \langle \mathbf{e}_{\varphi,B} \rangle \mathbf{e}_z = \frac{1}{\sqrt{z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2}} \begin{bmatrix} z_{d,Bx} \\ z_{d,By} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Er resultiert aus dem Vektorprodukt von  $\mathbf{e}_\varphi$  und  $\mathbf{z}$  und liegt somit wie  $\mathbf{e}_\varphi$  stets in der körperfesten  $xy$ -Ebene. Wie in Abbildung 3.4 veranschaulicht, definieren die drei Vektoren  $\{\mathbf{e}_\perp, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{z}\}$  eine orthonormale Basis des  $\mathbb{R}^3$ . Da diese Basis im Folgenden ausschließlich in ihrer körperfesten Darstellung  $\{\mathbf{e}_{\perp,B}, \mathbf{e}_{\varphi,B}, \mathbf{z}_B\} = \{\mathbf{e}_{\perp,B}, \mathbf{e}_{\varphi,B}, \mathbf{e}_z\}$  Verwendung findet, wird der Index  $B$  fallen gelassen und es gilt ab sofort  $\mathbf{e}_\varphi \equiv \mathbf{e}_{\varphi,B}$  und  $\mathbf{e}_\perp \equiv \mathbf{e}_{\perp,B}$ . Zerlegt man nun die Drehrate  $\tilde{\omega}_B$  entsprechend, so ergibt sich

$$\tilde{\omega}_B = \mathbf{e}_\perp^T \tilde{\omega}_B \mathbf{e}_\perp + \mathbf{e}_\varphi^T \tilde{\omega}_B \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z^T \tilde{\omega}_B \mathbf{e}_z = \omega_\perp \mathbf{e}_\perp + \omega_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \omega_z \mathbf{e}_z. \quad (3.19)$$

Ein Blick auf (3.14) verrät, dass  $\omega_\varphi = -\dot{\varphi}$  gilt und dass die anderen beiden Komponenten  $\omega_\perp$  und  $\omega_z = \tilde{\omega}_{Bz}$  den Fehlerwinkel  $\varphi$  nicht unmittelbar beeinflussen. Eine Dämpfungsmatrix, die eine differenzierte Wirksamkeit bezüglich dieser drei Drehratenkomponenten besitzt, kann man aus den dyadischen Produkten der Basisvektoren  $\mathbf{e}_\perp$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  und  $\mathbf{e}_z$  aufbauen. Folglich bestimmen in der Dämpfungsmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\tau(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\omega}_B) &= \kappa_{xy}(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\omega}_B) (d_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi^T + d_\perp \mathbf{e}_\perp \mathbf{e}_\perp^T) + \kappa_z(\tilde{\omega}_B) d_z \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z^T \\ &= \begin{bmatrix} \kappa_{xy}(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\omega}_B) \mathbf{D}_{xy}(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\omega}_B) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \kappa_z(\tilde{\omega}_B) d_z \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

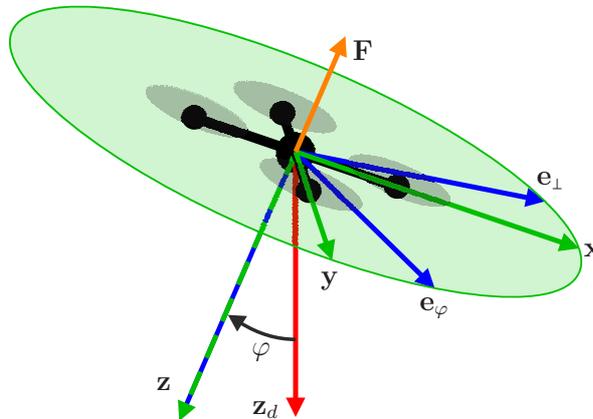


Abbildung 3.4: Darstellung der Vektoren  $\mathbf{e}_\varphi$  und  $\mathbf{e}_\perp$  im Bezug zum Körpersystem  $B = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ . Die Vektoren  $\{\mathbf{e}_\perp, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{z}\}$  bilden eine alternative orthonormale Basis des  $\mathbb{R}^3$ .

die Koeffizienten  $d_\varphi$ ,  $d_\perp$  und  $d_z$  die Dämpfung bezüglich  $\omega_\varphi$ ,  $\omega_\perp$  und  $\omega_z$ . Man beachte, dass zu Gunsten einer kompakten Notation zumeist darauf verzichtet wird, die Abhängigkeiten der Größen  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{e}_\perp$  vom Zustand  $(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B)$  explizit zu kennzeichnen. Aus den Definitionen von  $\mathbf{e}_\varphi$  und  $\mathbf{e}_\perp$  leitet man leicht die Struktur der Untermatrix

$$\mathbf{D}_{xy}(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) = \frac{d_\varphi(\varphi, \dot{\varphi})}{z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2} \begin{bmatrix} z_{d,By}^2 & -z_{d,Bx}z_{d,By} \\ -z_{d,Bx}z_{d,By} & z_{d,Bx}^2 \end{bmatrix} + \frac{d_\perp}{z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2} \begin{bmatrix} z_{d,Bx}^2 & z_{d,Bx}z_{d,By} \\ z_{d,Bx}z_{d,By} & z_{d,By}^2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

ab. Die Verstärkungsfaktoren  $\kappa_{xy}$  und  $\kappa_z$  in (3.20) dienen dazu, die Stellmomente zu sättigen und dadurch die Stellgrößenbeschränkung (3.9) einzuhalten. Sie sind definiert als die Lösungen der Optimierungsprobleme

$$\kappa_{xy} = \min_{\kappa > 0, \|\mathbf{T}_{\varphi,xy}^\varphi - \kappa \cdot \mathbf{D}_{xy} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{Bxy}\| = \bar{\tau}_{xy}} (1, \kappa), \quad \kappa_z = \min_{\kappa > 0, |-\kappa \cdot d_z \tilde{\omega}_{Bz}| = \bar{\tau}_z} (1, \kappa),$$

und können auch analytisch angegeben werden. Sie lauten dann

$$\kappa_{xy} = \min \left( 1, \frac{(\mathbf{T}_{\varphi,xy}^\varphi)^T \mathbf{D}_{xy} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{Bxy} + \sqrt{((\mathbf{T}_{\varphi,xy}^\varphi)^T \mathbf{D}_{xy} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{Bxy})^2 + (\bar{\tau}_{xy}^2 - T_\varphi^2) \|\mathbf{D}_{xy} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{Bxy}\|^2}}{\|\mathbf{D}_{xy} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{Bxy}\|^2} \right), \quad (3.22)$$

$$\kappa_z = \min \left( 1, \frac{\bar{\tau}_z}{d_z |\omega_{Bz}|} \right). \quad (3.23)$$

Die Wirkungsweise von  $\kappa_{xy}$  und  $\kappa_z$  ist in Abbildung 3.5 dargestellt.

Da die Drehraten  $\omega_\perp$  und  $\omega_z$  nie zum Abbau von  $\varphi$  beitragen können, repräsentieren sie im Hinblick auf das Regelziel überflüssige Bewegungen, die immer bedämpft werden sollten. Daher bietet es sich an, als Koeffizienten  $d_\perp$  und  $d_z$  positive Konstanten zu wählen. Zur Festlegung des Koeffizienten  $d_\varphi$  lohnt es sich hingegen mehr Aufwand zu treiben. Um die Auslegungsaufgabe zu vereinfachen, werden zunächst die nachfolgend gelisteten Annahmen getroffen, die das Problem auf einen Freiheitsgrad, den Fehlerwinkel  $\varphi$ , reduzieren. Diese Annahmen dienen ausschließlich als Hilfsmittel zur Auslegung von  $d_\varphi$  und werden für die Stabilitätsanalyse im Unterabschnitt 3.2.3 nicht vorausgesetzt. Man beachte, dass sich der Winkel  $\varphi$  entsprechend seiner Definition in (3.13) nur

---

<sup>3</sup>Es sei an die in Abschnitt 2.1.1 eingeführte Notation erinnert, wonach der Index  $(\cdot)_{xy}$  angewendet auf einen Vektor aus  $\mathbb{R}^3$  anzeigt, dass es sich um den Teilvektor bestehend aus den ersten beiden Komponenten handelt.

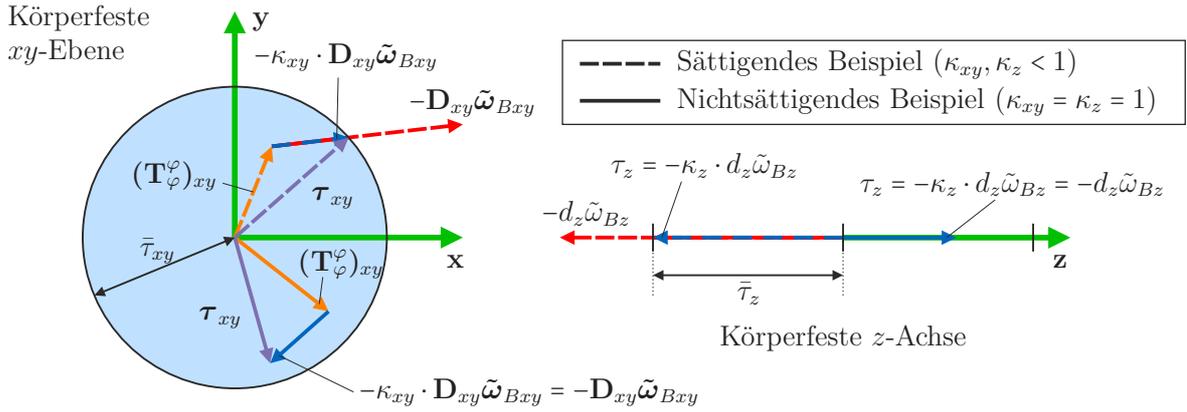


Abbildung 3.5: Prinzipskizze zur Wirkungsweise der Verstärkungsfaktoren  $\kappa_{xy}$  und  $\kappa_z$ . Abgebildet sind je ein sättigendes und ein nichtsättigendes Beispiel.

im Intervall  $[0, \pi]$  bewegt. Dies führt zu Diskontinuitäten in den Zeitableitungen an den Stellen  $\varphi \in \{0, \pi\} \Leftrightarrow \mathbf{z}_{d,B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}^T$ . Ohne weitere Erwähnung liegt den folgenden Ausführungen deshalb das Selbstverständnis zu Grunde, dass die Punkte  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \pi$  aus den *dynamischen* Betrachtungen ausgeklammert sind.

**Annahme 3.1** Der Trägheitstensor  $\mathbf{J}$  ist identisch mit einer diagonal besetzten Abschätzung  $\hat{\mathbf{J}} = \text{diag}(\hat{J}_1, \hat{J}_1, \hat{J}_2) > 0$ , d. h.  $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}}$ .

**Annahme 3.2** Der Starrkörper dreht ausschließlich um die Achse  $\mathbf{e}_\varphi$ , d. h.  $\tilde{\omega}_B = \omega_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ .

Aufgrund der weitgehend symmetrischen Massenverteilung des Quadropters ist die Annahme 3.1 immer näherungsweise erfüllt. Annahme 3.2 ist plausibel, da die Drehratenrichtungen  $\omega_\perp$  und  $\omega_z$  stets bedämpft werden und daher klein sind oder schnell klein werden. Mit Hilfe von Abbildung 3.4 kann man sich leicht veranschaulichen, wie die durch Annahme 3.2 beschriebene Bewegung aussieht. Da  $\mathbf{e}_\varphi$  stets senkrecht auf  $\mathbf{z}$  und  $\mathbf{z}_d$  steht, ist unmittelbar einsichtig, dass der Vektor  $\mathbf{e}_\varphi$  seine Richtung nicht verändern wird, solange Annahme 3.2 erfüllt ist, d. h. es gilt  $\dot{\mathbf{e}}_\varphi = \mathbf{0}$ .<sup>4</sup> Bezogen auf das Analogon des 3D-Pendels (vgl. Abbildung 3.2) folgt daraus, dass das Pendel ausschließlich um die räumlich fixierte Achse  $\mathbf{e}_\varphi$  schwingt und somit als einfaches planares Pendel mit Drehfreiheitsgrad  $\varphi$  betrachtet werden kann. Konsequenterweise muss

$$\dot{\tilde{\omega}}_B = \dot{\omega}_\varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (3.24)$$

gelten, solange die Annahme 3.2 erfüllt ist. Es stellt sich jedoch die Frage, ob (3.24) mit der Systemdynamik (3.6b) verträglich ist. Wertet man (3.6b) mit dem Regelgesetz (3.7)

<sup>4</sup>Der analytische Nachweis, dass  $\dot{\mathbf{e}}_\varphi = \mathbf{0}$  gilt, wird im Anhang A.1 geführt.

aus, wobei man (3.15), (3.20), (3.22) sowie die Annahmen 3.1 und 3.2 berücksichtigt, so folgt daraus

$$\dot{\tilde{\omega}}_B = \hat{J}_1^{-1} (T_\varphi(\varphi) - \kappa_{xy}(\varphi, d_\varphi(\varphi, \dot{\varphi})) \cdot d_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}) \cdot \omega_\varphi) \mathbf{e}_\varphi . \quad (3.25)$$

Setzt man nun (3.24) in (3.25) ein, multipliziert von links mit  $\mathbf{e}_\varphi^T$  und nutzt die Identitäten  $\dot{\varphi} = -\omega_\varphi$ ,  $\ddot{\varphi} = -\dot{\omega}_\varphi$ , die aus (3.14) und  $\dot{\mathbf{e}}_\varphi = \mathbf{0}$  folgen, so erhält man schließlich die skalare Differentialgleichung

$$\hat{J}_1 \ddot{\varphi} = -T_\varphi(\varphi) - \kappa_{xy}(\varphi, d_\varphi(\varphi, \dot{\varphi})) \cdot d_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}) \cdot \dot{\varphi} . \quad (3.26)$$

Diese Differentialgleichung besitzt eine eindeutige Lösung unter der sehr milden Annahme, dass  $d_\varphi$  so gewählt wird, dass die rechte Seite der Differentialgleichung lokal Lipschitz-stetig in  $(\varphi, \dot{\varphi})$  ist. Setzt man dies voraus, so ist die Verträglichkeit von Annahme 3.2 mit der Systemdynamik nachgewiesen. Je besser die realen Verhältnisse mit den Annahmen 3.1 und 3.2 übereinstimmen, desto besser approximiert (3.26) die Fehlerdynamik. Die Aufgabe besteht nun darin,  $d_\varphi$  so zu gestalten, dass die Lösungen der Differentialgleichung zufriedenstellend im Sinne des Regelziels sind. Da die Stellgrößenbegrenzung im nachfolgenden Entwurf der Dämpfungsstrategie bereits weitgehend berücksichtigt wird, kann vereinfachend davon ausgegangen werden, dass stets der ungesättigte Fall, d. h.  $\kappa_{xy} = 1$ , vorliegt. Der Auslegung liegt somit die Differentialgleichung

$$\hat{J}_1 \ddot{\varphi} = -T_\varphi(\varphi) - d_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}) \cdot \dot{\varphi} \quad (3.27)$$

zu Grunde.

Der aus dem Potential resultierende Momentenverlauf  $T_\varphi$ , welcher durch Gleichung (3.11) beschrieben ist, wurde so entworfen, dass er drei Bereiche besitzt. Es ist daher naheliegend den Entwurf von  $d_\varphi$  in dieselben drei Bereiche zu gliedern. Für sehr kleine und sehr große Winkel  $\varphi$  bietet es sich an  $d_\varphi$  konstant zu wählen. Durch die Festlegung

$$d_\varphi = \delta_\varphi \quad \text{für } \varphi \leq \varphi_l \text{ und } \varphi \geq \varphi_u ,$$

wobei  $\delta_\varphi$  eine positive Konstante ist, erreicht man Zweierlei: Zum einen wird die Dynamik (3.27) in den betreffenden Winkelbereichen näherungsweise linear, da  $T_\varphi$  dort einen annähernd linearen Verlauf aufweist (vgl. Abbildung 3.3a). Insbesondere im Nahbereich der gewünschten  $z$ -Achsenrichtung  $\mathbf{z}_d$  erhält man mit Hilfe der Kleinwinkelnäherung

$\sin(\varphi) \approx \varphi$

$$\hat{J}_1 \ddot{\varphi} = -c_\varphi \varphi - \delta_\varphi \cdot \dot{\varphi} \quad \text{für } \varphi < \varphi_l. \quad (3.28)$$

Die Festlegung der Reglerparameter  $c_\varphi$  und  $\delta_\varphi$  reduziert sich somit auf die vertraute Auslegung einer PT2-Dynamik. Mit Blick auf ein schnelles Einschwingverhalten bietet es sich an für  $\delta_\varphi$  Werte nahe der kritischen Dämpfung  $\sqrt{4\hat{J}_1 c_\varphi}$  zu wählen. Zum anderen trägt die konstante Wahl von  $d_\varphi$  dazu bei, Singularitäten in der Dämpfungssubmatrix (3.21) zu vermeiden, die sonst durch die in Anmerkung 3.4 diskutierten Definitionslücken von  $\mathbf{e}_\varphi$  und  $\mathbf{e}_\perp$  für  $\varphi \in \{0, \pi\}$  auftreten würden. Indem man zusätzlich

$$d_\perp = \delta_\varphi \quad (3.29)$$

festlegt, ergibt sich aus (3.21) unmittelbar die konstante Submatrix

$$\mathbf{D}_{xy} = \delta_\varphi \mathbf{I}_2 > 0 \quad \text{für } \varphi \leq \varphi_l \text{ und } \varphi \geq \varphi_u. \quad (3.30)$$

Im weitaus größten Teil des Zustandsraums, charakterisiert durch  $\varphi_l < \varphi < \varphi_u$ , soll eine Art zeitoptimale Dämpfungsstrategie auf Basis der Differentialgleichung (3.27) zum Einsatz kommen. In diesem Bereich weist das Potentialmoment sein konstantes Maximum  $T_\varphi = c_\varphi \sin(\varphi_l)$  auf. Bleibt man bei der Analogie des Pendels, so besteht die Zielsetzung darin, das Pendel nach möglichst kurzer Zeit mit einer vorgegebenen Drehrate  $\dot{\varphi} = -v_{\varphi_l} < 0$  in den Gültigkeitsbereich  $\varphi \leq \varphi_l$  der linearen Dynamik (3.28) eintreten zu lassen. Hierzu muss das Pendel solange wie möglich mit dem maximal verfügbaren Moment in Richtung seiner Ziellage beschleunigt werden, bevor schließlich auf einen Bremsvorgang umgeschaltet wird. Der optimale Umschaltzeitpunkt ist gekommen, wenn das Maximalmoment dauerhaft zum Bremsen aufgewendet werden muss, damit das Pendel den Winkel  $\varphi = \varphi_l$  mit der Zielgeschwindigkeit  $\dot{\varphi} = -v_{\varphi_l}$  erreicht. Wie bei der zeitoptimalen Regelung, kann der Umschaltzeitpunkt durch eine Kurve im Phasenraum, die sogenannte Schaltlinie  $s_\varphi(\varphi)$ , charakterisiert werden [1]. Um sie zu bestimmen, betrachtet man zunächst den beschriebenen Bremsvorgang ( $\ddot{\varphi} > 0$ ), während dem naturgemäß  $\dot{\varphi} < 0$  gelten muss. Aus (3.27) liest man ab, dass in dieser Situation das Moment  $-T_\varphi < 0$  aus dem Potential durch das Dämpfungsmoment  $-d_\varphi \dot{\varphi} \geq 0$  so überkompensiert werden kann, dass das Maximalmoment  $\bar{\tau}_{xy}$  zum Bremsen ausgenutzt wird. Indem man  $d_\varphi = d_{\varphi,dec}^*(\dot{\varphi})$  mit

$$d_{\varphi,dec}^*(\dot{\varphi}) = -\frac{T_\varphi}{\dot{\varphi}} - \frac{\bar{\tau}_{xy}}{\dot{\varphi}} \quad (3.31)$$

wählt, wird (3.27) zur Dynamik eines einfachen Doppelintegrators,

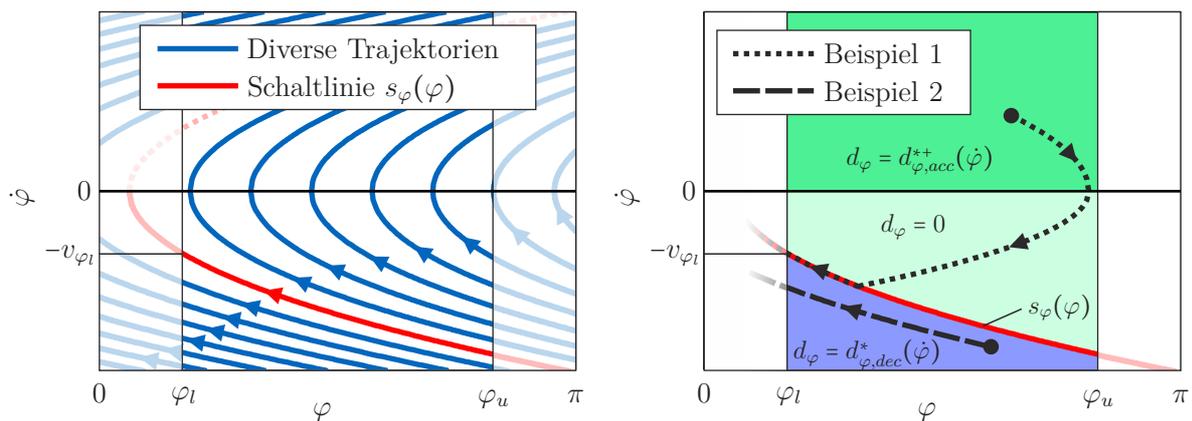
$$\hat{J}_1 \ddot{\varphi} = \bar{\tau}_{xy} .$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung lassen sich leicht bestimmen und die zugehörigen Trajektorien können wie in Abbildung 3.6a im Phasenraum dargestellt werden [1]. In der gewählten Anordnung der Achsen ergeben sich nach rechts geöffnete liegende Parabeln. Die rot dargestellte Trajektorie führt durch den Zielpunkt  $(\varphi, \dot{\varphi}) = (\varphi_l, -v_{\varphi_l})$ , und kennzeichnet somit die gesuchte Schaltlinie, welche durch die in Anhang A.2 hergeleitete Gleichung

$$s_\varphi(\varphi) = -\sqrt{v_{\varphi_l}^2 + 2\hat{J}_1^{-1}\bar{\tau}_{xy}(\varphi - \varphi_l)} < 0 \quad (3.32)$$

beschrieben ist. Befindet sich der Zustand oberhalb von  $s_\varphi(\varphi)$ , so bewegt sich das Pendel noch nicht schnell genug auf seine Ziellage zu (oder sogar von ihr weg) und es kann weiter beschleunigt werden, wobei mit *beschleunigen* im Folgenden  $\ddot{\varphi} < 0$  gemeint ist. Liegt der Zustand auf oder unterhalb von  $s_\varphi(\varphi)$ , so muss maximal gebremst werden, wobei mit *bremsen* im Folgenden  $\ddot{\varphi} > 0$  gemeint ist. Man beachte, dass die Begriffe *beschleunigen* und *bremsen* damit nicht mehr in jedem Fall mit der umgangssprachlichen Verwendung, sprich der (betragsmäßigen) Zu- bzw. Abnahme der Geschwindigkeit, übereinstimmen, sondern lediglich die Wirkrichtung von  $\ddot{\varphi}$  charakterisieren.

Die bremsoptimale Dämpfung  $d_{\varphi,dec}^*$  wurde bereits in (3.31) angegeben und aus den



(a) Qualitative Phasenraumtrajektorien zur Differentialgleichung  $\hat{J}_1 \ddot{\varphi} = \bar{\tau}_{xy}$ . (b) Qualitative Beispieltrajektorien zur schaltenden Dämpfungsstrategie (3.33) und (3.34).

Abbildung 3.6: Qualitative Phasenraumtrajektorien.

durchgeführten Betrachtungen leitet man für  $d_\varphi$  die Forderung

$$d_\varphi = d_{\varphi,dec}^*(\dot{\varphi}) \quad \text{für } \dot{\varphi} \leq s_\varphi(\varphi) \quad (3.33)$$

ab.

Um die beschleunigungsoptimale Dämpfung zu bestimmen, müssen die Fälle  $\dot{\varphi} > 0$  und  $\dot{\varphi} \leq 0$  unterschieden werden. Im Falle  $\dot{\varphi} > 0$  bewegt sich das Pendel von seiner Ziellage weg. Indem man  $d_\varphi = d_{\varphi,acc}^{*+}(\dot{\varphi})$  mit

$$d_{\varphi,acc}^{*+}(\dot{\varphi}) = -\frac{T_\varphi}{\dot{\varphi}} + \frac{\bar{\tau}_{xy}}{\dot{\varphi}}$$

wählt, ist es in diesem Fall möglich das Moment aus dem Potential  $-T_\varphi < 0$  mit Hilfe des Dämpfungsmoments  $-d_\varphi \dot{\varphi} \leq 0$  so aufzustocken, dass das Maximalmoment  $-\bar{\tau}_{xy}$  zum Beschleunigen ausgenutzt wird. Es resultiert die Differentialgleichung  $\hat{J}_1 \dot{\varphi} = -\bar{\tau}_{xy}$ , deren Lösungen im Phasenraum nach links geöffnete liegende Parabeln beschreiben. Liegt hingegen der Fall  $\dot{\varphi} \leq 0$  vor, so wirkt jegliches Dämpfungsmoment  $-d_\varphi \dot{\varphi} \geq 0$  der beschleunigenden Wirkung des Potentialmoments  $-T_\varphi < 0$  entgegen. Die größtmögliche Beschleunigung erzielt man in diesem Fall, indem die Dämpfung zu Null gesetzt wird, d. h.  $d_\varphi = 0$ . Da im relevanten Zustandsraumbereich für das Potentialmoment  $-T_\varphi = -c_\varphi \sin(\varphi_l) > -\bar{\tau}_{xy}$  gilt, ergibt sich die Differentialgleichung  $\hat{J}_1 \dot{\varphi} = -c_\varphi \sin(\varphi_l)$ , deren Phasenraumtrajektorien durch etwas gestauchtere, nach links geöffnete liegende Parabeln gegeben sind. Für den Beschleunigungsfall leitet man folglich die Dämpfungsanweisung

$$d_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}) = \begin{cases} d_{\varphi,acc}^{*+}(\dot{\varphi}) & \text{für } \dot{\varphi} > 0 \\ 0 & \text{für } 0 \geq \dot{\varphi} > s_\varphi(\varphi) \end{cases} \quad (3.34)$$

ab. In Abbildung 3.6b sind für beispielhafte Anfangszustände qualitative Trajektorien eingezeichnet, die aus der Dämpfungsstrategie bestehend aus (3.33) und (3.34) resultieren würden.

Die bis hierher vorgeschlagene schaltende Dämpfungsstrategie charakterisiert das Wunschverhalten des vereinfachten Systems, führt aber naturgemäß zu diskontinuierlichen Dämpfungsmomenten  $-d_\varphi \dot{\varphi}$ . Um zu einem möglichst vergleichbaren kontinuierlichen Regelgesetz zu kommen, werden im Folgenden die diskontinuierlichen Übergänge des Dämpfungsmoments über kleine Bereiche verschliffen. Die Diskontinuität, die im Beschleunigungsfall bei  $\dot{\varphi} = 0$  auftritt, kann beseitigt werden, indem verhindert wird,

dass  $d_\varphi$  gegen Unendlich strebt für  $\dot{\varphi} \rightarrow +0$ . Definiert man

$$d_{\varphi,acc}^*(\dot{\varphi}) = \begin{cases} d_{\varphi,acc}^{*+}(\dot{\varphi}) & \text{für } \dot{\varphi} > v_\varphi \\ -\frac{T_\varphi}{v_\varphi} + \frac{\bar{\tau}_{xy}}{v_\varphi} & \text{für } v_\varphi \geq \dot{\varphi} > 0 \\ 0 & \text{für } 0 \geq \dot{\varphi}, \end{cases}$$

wobei  $v_\varphi > 0$  eine kleine Konstante ist, so wird das Dämpfungsmoment  $-d_\varphi \dot{\varphi}$  bei  $\dot{\varphi} = 0$  kontinuierlich, wenn man  $d_\varphi = d_{\varphi,acc}^*(\dot{\varphi})$  wählt. Die verbleibenden Diskontinuitäten, die an der Schaltlinie  $s_\varphi(\varphi)$  und an den Übergängen zu den Bereichen  $\varphi \leq \varphi_l$  und  $\varphi \geq \varphi_u$  auftreten, werden durch Überblenden des Dämpfungskoeffizienten aufgelöst. Hierzu wird allgemein das Überblendfunktional

$$\chi_{a_1}^{a_2}(a, \mathbf{f}_1(a, \mathbf{b}), \mathbf{f}_2(a, \mathbf{b})) = \begin{cases} \mathbf{f}_1(a, \mathbf{b}) & \text{für } a \leq a_1 \\ \frac{(a_2-a)\mathbf{f}_1(a_1, \mathbf{b}) + (a-a_1)\mathbf{f}_2(a_2, \mathbf{b})}{a_2-a_1} & \text{für } a_1 < a \leq a_2 \\ \mathbf{f}_2(a, \mathbf{b}) & \text{für } a_2 < a \end{cases} \quad (3.35)$$

definiert. Es überblendet die skalaren Funktionen  $\mathbf{f}_1(a, \mathbf{b})$  und  $\mathbf{f}_2(a, \mathbf{b})$ , im durch  $a_1$  und  $a_2$  festgelegten Bereich, bezüglich des skalaren Arguments  $a$  linear ineinander über. Weiterhin sei für beliebige  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$  die Schreibweise

$${}_{a_1}^{a_2} \chi_{a_3}^{a_4}(a, \mathbf{f}_1(a, \mathbf{b}), \mathbf{f}_2(a, \mathbf{b})) = \chi_{a_1}^{a_2}(a, \mathbf{f}_1(a, \mathbf{b}), \chi_{a_3}^{a_4}(a, \mathbf{f}_2(a, \mathbf{b}), \mathbf{f}_1(a, \mathbf{b}))) \quad (3.36)$$

definiert, die ein lineares Überblenden von  $\mathbf{f}_1(a, \mathbf{b})$  zu  $\mathbf{f}_2(a, \mathbf{b})$  und zurück zu  $\mathbf{f}_1(a, \mathbf{b})$  beschreibt. Bezeichnet man mit  $r_\varphi < 1$  eine positive Konstante, so kann nun mit Hilfe von (3.35) die Funktion

$$d_\varphi^*(\varphi, \dot{\varphi}) = \chi_{s_\varphi(\varphi)}^{r_\varphi \cdot s_\varphi(\varphi)}(\dot{\varphi}, d_{\varphi,dec}^*(\dot{\varphi}), d_{\varphi,acc}^*(\dot{\varphi}))$$

festgelegt werden, die einen kontinuierlichen Übergang des Dämpfungskoeffizienten an der Schaltlinie realisiert. Die endgültige Funktion, die auch die Diskontinuitäten bei  $\varphi = \varphi_l$  und  $\varphi = \varphi_u$  beseitigt und damit den Dämpfungskoeffizienten  $d_\varphi$  im gesamten Zustandsraum beschreibt, lautet

$$d_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}) = {}_{\varphi_l}^{\varphi_l + \Delta_\varphi} \chi_{\varphi_u - \Delta_\varphi}^{\varphi_u}(\varphi, \delta_\varphi, d_\varphi^*(\varphi, \dot{\varphi})), \quad (3.37)$$

worin  $\Delta_\varphi \ll (\varphi_u - \varphi_l)/2$  eine kleine positive Konstante ist. In dieser Form findet  $d_\varphi$  in der Dämpfungsmatrix (3.20) Verwendung. Abbildung 3.7 visualisiert die für den Dämp-

fungskoeffizienten  $d_\varphi$  gewählte Dämpfungsstrategie in der Phasebene.

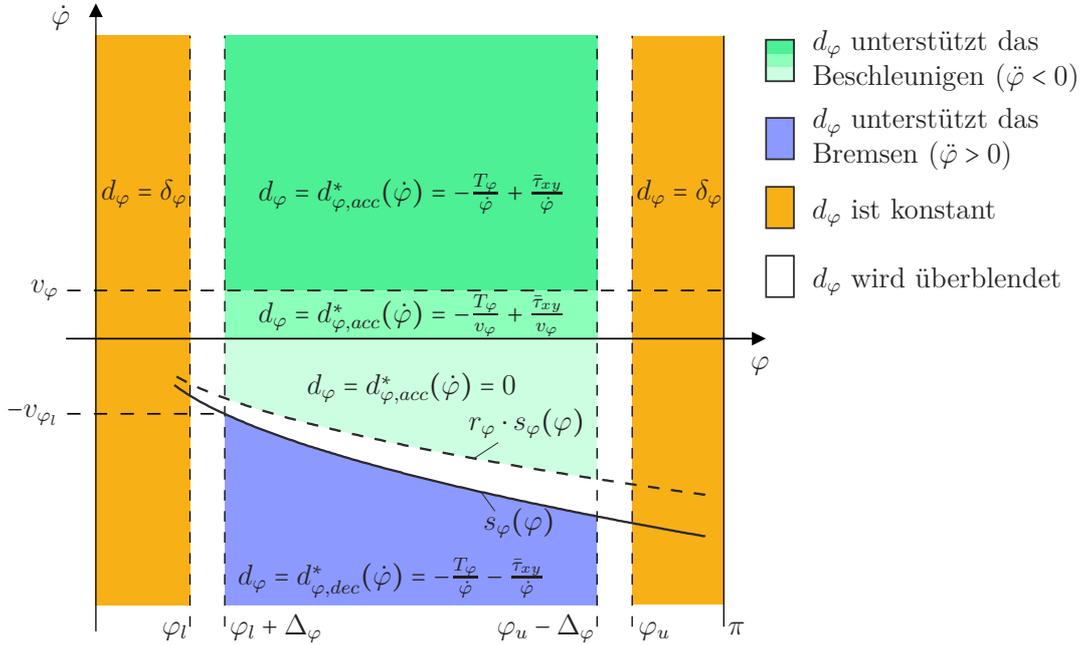


Abbildung 3.7: Dämpfungskoeffizient  $d_\varphi$  in der Phasebene. In den weißen Bereichen wird  $d_\varphi$  zwischen den Randwerten der benachbarten farbigen Bereiche überblendet.

### 3.2.3 Stabilitätseigenschaften der Ruhelagen

In diesem Unterabschnitt werden die Ruhelagen des geschlossenen Regelkreises hinsichtlich ihrer Stabilität analysiert und nachgewiesen, dass der angestrebte Arbeitspunkt  $\mathbf{w}_d$  sowohl lokal exponentiell stabil, als auch fast global asymptotisch stabil ist. Dabei soll im Folgenden unter *geschlossenem Regelkreis* die Folgedynamik (3.6) unter Einfluss der entworfenen Zustandsrückführung (3.7) verstanden werden. Im betrachteten Regelgesetz ist  $\mathbf{T}_\varphi^\varphi$  durch (3.15) und  $\mathbf{D}_\tau$  durch (3.20) definiert. Für die einzelnen Dämpfungskoeffizienten  $d_\varphi$ ,  $d_\perp$ ,  $d_z$  gilt (3.37), (3.29) sowie  $d_z = konst. > 0$  und die sättigenden Verstärkungsfaktoren  $\kappa_{xy}$  und  $\kappa_z$  sind über (3.22) und (3.23) definiert. Setzt man die linke Seite des geschlossenen Regelkreises zu Null, so identifiziert man leicht seine beiden Ruhelagen

$$\mathbf{w}_d = (\mathbf{e}_z, \mathbf{0}), \quad \mathbf{w}_u = (-\mathbf{e}_z, \mathbf{0}),$$

von denen  $\mathbf{w}_d$  den gewünschten Arbeitspunkt und  $\mathbf{w}_u$  eine unerwünschte Ruhelage bezeichnet. Da in der unerwünschten Ruhelage  $\mathbf{z}_{d,B} = -\mathbf{e}_z$  und somit  $\varphi = \pi$  gilt, repräsentiert sie eine Situation, in der die Schubrichtung antiparallel zu ihrer Zielausrichtung

ist. Bezogen auf das Pendelanalogon stellt  $\mathbf{w}_u$  folglich die aufgerichtete Ruhelage dar. Die lokale Analyse der Ruhelagen wird zeigen, dass  $\mathbf{w}_d$  lokal exponentiell stabil und  $\mathbf{w}_u$  instabil ist. Bei der anschließenden globalen Analyse wird nachgewiesen, dass für die Zielruhelage  $\mathbf{w}_d$  darüber hinaus fast global asymptotische Stabilität vorliegt. Wie in [15] gezeigt wurde, kann es für beliebige Lageregelungsprobleme aus topologischen Gründen nie gelingen, die Wunschlage mit einem stetigen Regelgesetz global asymptotisch zu stabilisieren. Fast global asymptotische Stabilität, wie sie in Definition 1.1 beschrieben wurde, garantiert folglich unter den gegebenen Voraussetzungen den größtmöglichen Einzugsbereich der Wunschruhelage.

Für die lokale Stabilitätsanalyse wird der geschlossene Regelkreis um seine Ruhelagen linearisiert. Zur Beurteilung der Stabilität der linearisierten Systeme wird dann das folgenden Theorem herangezogen, welches das Theorem II aus [174] leicht modifiziert und ergänzt. Letzteres Theorem ist selbst eine Erweiterung und Konkretisierung des bekannten Kelvin-Tait-Chetaev Theorems [174, Theorem I].

**Theorem 3.1** *Eine reelle Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  der Form*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

*mit positiv definiten Matrizen  $\mathbf{J}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$  und einer symmetrischen Matrix  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , besitzt genau so viele Eigenwerte in der offenen rechten komplexen Halbebene, wie  $\mathbf{C}$  negative Eigenwerte besitzt und genau so viele Eigenwerte in Null, wie  $\mathbf{C}$  Eigenwerte in Null besitzt. Die verbleibenden Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  liegen in der offenen linken komplexen Halbebene.*

**Beweis:** Es wird zunächst eine Ähnlichkeitstransformation gesucht, die  $\mathbf{J}$  aus der Dynamikmatrix entfernt und gleichzeitig  $\mathbf{C}$  diagonalisiert. Da  $\mathbf{J}$  positiv definit ist, existiert eine reelle nichtsinguläre Matrix  $\mathbf{L}$ , sodass  $\mathbf{J} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$  gilt. Mit Hilfe von  $\mathbf{L}$  kann man nun die reelle symmetrische Matrix  $\mathbf{N} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{L}^{-T}$  definieren. Zu dieser Matrix existiert eine reelle orthogonale Matrix  $\mathbf{P}$ , die sie diagonalisiert,  $\mathbf{N} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T$ , wobei  $\mathbf{\Lambda}$  die Diagonalmatrix mit den reellen Eigenwerten von  $\mathbf{N}$  ist. Definiert man nun die nichtsinguläre reelle Matrix  $\mathbf{Q} = \mathbf{L}\mathbf{P}$ , so gilt zum einen  $\mathbf{C} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T$  und zum anderen  $\mathbf{J} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$ . Man kann nun auf  $\mathbf{A}$  die Ähnlichkeitstransformation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{-T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{\Lambda} & -\tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}}$$

anwenden, worin  $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-T} > 0$  gilt. Die transformierte Matrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  weist dieselben Eigenwerte auf wie  $\mathbf{A}$  und da  $\mathbf{C} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T$  gilt, muss die Diagonalmatrix  $\mathbf{\Lambda}$  laut Trägheitssatz von Sylvester (siehe z. B. [12, Proposition 6.15]) die identische Anzahl negativer, positiver und Nulleigenwerte wie  $\mathbf{C}$  aufweisen. Das weitere Vorgehen basiert deshalb auf der Analyse von  $\tilde{\mathbf{A}}$ .

Hierzu wird  $\tilde{\mathbf{A}}$  allerdings nicht direkt betrachtet, sondern es wird stattdessen eine Folge von Matrizen analysiert. Ausgehend von einem einfachen Sonderfall, für den die Aussage des Theorems leicht bestätigt werden kann, lässt man die Matrix kontinuierlich in das vorliegende  $\tilde{\mathbf{A}}$  übergehen. Die Eigenwerte beschreiben dabei kontinuierliche Kurven in der komplexen Ebene. Es wird dann gezeigt, dass sich alle Nulleigenwerte bei diesem Vorgang nicht bewegen, sondern im Ursprung liegen bleiben und alle Eigenwerte in den offenen Halbebenen die imaginäre Achse nicht überqueren können.

Betrachtet wird die parameterabhängige Hilfsmatrix

$$\tilde{\mathbf{A}}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{\Lambda} & -\tilde{\mathbf{B}}_\alpha \end{bmatrix},$$

deren Abhängigkeit vom Parameter  $\alpha \in [0, 1]$  sich in der Matrix

$$\tilde{\mathbf{B}}_\alpha = \alpha\tilde{\mathbf{B}} + (1 - \alpha)\mathbf{\Lambda}_{\tilde{\mathbf{B}}}$$

verbirgt. Die darin enthaltene Diagonalmatrix  $\mathbf{\Lambda}_{\tilde{\mathbf{B}}}$  erhält man durch Null setzen aller Nichtdiagonaleinträge von  $\tilde{\mathbf{B}}$ . Ein kontinuierlicher Übergang des Parameters  $\alpha$  von 0 nach 1 überführt somit die Matrix  $\tilde{\mathbf{B}}_\alpha$  kontinuierlich von  $\mathbf{\Lambda}_{\tilde{\mathbf{B}}}$  nach  $\tilde{\mathbf{B}}$  und entsprechend  $\tilde{\mathbf{A}}_\alpha$  nach  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Man beachte, dass  $\tilde{\mathbf{B}}_\alpha$  für beliebige zulässige  $\alpha$  positiv definit ist, da sowohl  $\tilde{\mathbf{B}} > 0$  als auch  $\mathbf{\Lambda}_{\tilde{\mathbf{B}}} > 0$  gilt und weiterhin  $\alpha$  und  $(1 - \alpha)$  nicht gleichzeitig Null sein können.

Für ein frei wählbares, zulässiges  $\alpha$  sei  $(\lambda, \mathbf{v})$  ein beliebiges Paar aus Eigenwert und Eigenvektor zur Matrix  $\tilde{\mathbf{A}}_\alpha$ . Strukturiert man den Eigenvektor entsprechend  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T & \mathbf{v}_2^T \end{bmatrix}^T \neq \mathbf{0}$  mit  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{C}^n$ , so wird durch  $\tilde{\mathbf{A}}_\alpha \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$  impliziert, dass  $\mathbf{v}_2 = \lambda \mathbf{v}_1$  und  $\tilde{\mathbf{B}}_\alpha \mathbf{v}_2 + \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}_1 = -\lambda \mathbf{v}_2$  gilt. Durch Einsetzen der ersten der Gleichungen in die Zweite erhält man

$$(\lambda^2 \mathbf{I}_n + \lambda \tilde{\mathbf{B}}_\alpha + \mathbf{\Lambda}) \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}. \quad (3.38)$$

Somit sind alle Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\det(\lambda^2 \mathbf{I}_n + \lambda \tilde{\mathbf{B}}_\alpha + \mathbf{\Lambda}) = 0. \quad (3.39)$$

Eigenwerte von  $\tilde{\mathbf{A}}_\alpha$ . Für ein beliebiges, zulässiges  $\alpha$  kann ohne weiteres keine Aussage

zur Lage der Eigenwerte getroffen werden. Für den Sonderfall  $\alpha = 0$  degeneriert  $\tilde{\mathbf{B}}_\alpha$  jedoch zur Diagonalmatrix  $\mathbf{\Lambda}_{\tilde{\mathbf{B}}}$  und die charakteristische Gleichung (3.39) lässt sich angeben als

$$\prod_{i=1}^n (\lambda^2 + \lambda \Lambda_{\tilde{\mathbf{B}},ii} + \Lambda_{ii}) = 0 ,$$

worin  $\Lambda_{\tilde{\mathbf{B}},ii} > 0$  und  $\Lambda_{ii}$  die Elemente der Diagonalmatrizen  $\mathbf{\Lambda}_{\tilde{\mathbf{B}}}$  und  $\mathbf{\Lambda}$  bezeichnen. Mit Hilfe der Nullstellenformel für Polynome zweiter Ordnung erkennt man leicht, dass jedes positive Element  $\Lambda_{ii} > 0$  ausschließlich auf Lösungen in der offenen linken komplexen Halbebene führt. Jedes Nullelement  $\Lambda_{ii} = 0$  liefert einen negativen Eigenwert und einen weiteren in Null. Jedes negative Element  $\Lambda_{ii} < 0$  hat einen Eigenwert in der offenen rechten und einen in der offenen linken komplexen Halbebene zur Folge. Für den Sonderfall  $\alpha = 0$  sind die Aussagen des Theorems somit bewiesen.

Als Nächstes wird gezeigt, dass die Anzahl der Nulleigenwerte unabhängig von  $\alpha$  ist. Dies geht unmittelbar aus der Analyse der linearen Unabhängigkeit der Spalten von  $\tilde{\mathbf{A}}_\alpha$  hervor. Die rechten  $n$  Spalten sind aufgrund der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}_n$  im rechten oberen Block stets linear unabhängig voneinander. Weiterhin sind sie immer linear unabhängig von den linken  $n$  Spalten, da der linke obere Block durch die Nullmatrix  $\mathbf{0}$  gegeben ist. Demnach ist die Anzahl der Eigenwerte von  $\tilde{\mathbf{A}}_\alpha$  in Null durch die Anzahl der Nulleigenwerte von  $\mathbf{\Lambda}$  und damit von  $\mathbf{C}$  eindeutig festgelegt.

Es lässt sich weiterhin leicht zeigen, dass, abgesehen von den Nulleigenwerten, keine weiteren Eigenwerte auf der imaginären Achse existieren können, wobei die Aussage unabhängig vom gewählten  $\alpha$  ist. Hierzu multipliziert man Gleichung (3.38) von links mit dem hermiteschen Eigenvektor  $\mathbf{v}_1^H$ . Dies führt auf

$$\mathbf{v}_1^H \mathbf{v}_1 \lambda^2 + \mathbf{v}_1^H \tilde{\mathbf{B}}_\alpha \mathbf{v}_1 \lambda + \mathbf{v}_1^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}_1 = a \lambda^2 + b \lambda + c = 0 ,$$

worin  $a, b > 0$  gilt. Aus  $b > 0$  folgt, dass, abgesehen von Lösungen in Null, keinerlei Lösungen auf der imaginären Achse existieren können.

Lässt man nun den Parameter  $\alpha$  kontinuierlich von 0 auf 1 übergehen, so beschreiben die Lösungen von (3.39) kontinuierliche Kurven in der komplexen Ebene. Da gezeigt wurde, dass, unabhängig von  $\alpha$ , die Anzahl der Eigenwerte in Null konstant ist und keine weiteren Lösungen auf der imaginären Achse möglich sind, kann keine Lösung von einer Seite der imaginären Achse auf die andere Seite hinüberwechseln. Der Fall  $\alpha = 1$ , in dem  $\tilde{\mathbf{A}}_\alpha = \tilde{\mathbf{A}}$  gilt, führt, bezüglich der Lage der Eigenwerte, somit auf dieselben Aussagen, wie der Fall  $\alpha = 0$ . □

### 3.2.3.1 Lokale Stabilitätseigenschaften

Um die lokalen Stabilitätseigenschaften zu betrachten, wird der geschlossene Regelkreis um seine Ruhelagen linearisiert. Da die Zustandsvariable  $\mathbf{z}_{d,B}$  auf dem Einheitskugelmantel  $\mathcal{S}^2$  lebt und somit nur zwei Freiheitsgrade besitzt, kann sie lokal durch zwei Minimalkoordinaten dargestellt werden. In ausreichend kleinen Umgebungen der Ruhelagen, stellen ihre ersten beiden Komponenten  $z_{d,Bx}$  und  $z_{d,By}$  geeignete Minimalkoordinaten dar. Im Folgenden werden deshalb zunächst alle von  $z_{d,Bz}$  abhängigen Terme, die in der Dynamik des geschlossenen Kreises auftreten, durch  $z_{d,Bx}$  und  $z_{d,By}$  ausgedrückt, bevor im Anschluss die Linearisierung des Systems erfolgt. Man erhält in der Nähe von  $\mathbf{w}_d$ , wo  $z_{d,Bz} > 0$  ist,  $z_{d,Bz} = \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)}$  und nahe  $\mathbf{w}_u$ , wo  $z_{d,Bz} < 0$  gilt,  $z_{d,Bz} = -\sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)}$ .

**Theorem 3.2 (Lokale Stabilitätseigenschaften der Ruhelage  $\mathbf{w}_d$ )** *Die Ruhelage  $\mathbf{w}_d$  des geschlossenen Regelkreises ist lokal exponentiell stabil.*

**Beweis:** Mit  $z_{d,Bz} = \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)}$  lauten die ersten beiden Zeilen von (3.6a)

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{d,Bx} \\ \dot{z}_{d,By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{Bz} z_{d,By} - \tilde{\omega}_{By} \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)} \\ -\tilde{\omega}_{Bz} z_{d,Bx} + \tilde{\omega}_{Bx} \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)} \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Unter Ausnutzung der Beziehung  $\sqrt{z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2} = \sin(\varphi)$ , die aufgrund des Wertebereiches  $\varphi \in [0, \pi]$  stets erfüllt ist, erhält man aus (3.15) und (3.16) für das Moment  $\mathbf{T}_\varphi^\varphi$  in einer ausreichend kleinen Umgebung von  $\mathbf{w}_d$

$$\mathbf{T}_\varphi^\varphi = c_\varphi \sin(\varphi) \cdot \mathbf{e}_\varphi = c_\varphi \sin(\varphi) \cdot \frac{1}{\sin(\varphi)} \begin{bmatrix} -z_{d,By} \\ z_{d,Bx} \\ 0 \end{bmatrix} = c_\varphi \begin{bmatrix} -z_{d,By} \\ z_{d,Bx} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

In einer solchen Umgebung, ergibt sich aus der gewählten Dämpfungsstrategie weiterhin die konstante Dämpfungsmatrix

$$\mathbf{D}_\tau = \text{diag}(\delta_\varphi, \delta_\varphi, d_z). \quad (3.42)$$

Wählt man nun für die Linearisierung um  $\mathbf{w}_d$  den minimalen Zustandsvektor  $\mathbf{w}_d = \begin{bmatrix} \mathfrak{z}_d^T & \tilde{\omega}_B^T \end{bmatrix}^T$  mit  $\mathfrak{z}_d = \begin{bmatrix} z_{d,By} & -z_{d,Bx} \end{bmatrix}^T$ , so liegt die Ruhelage  $\mathbf{w}_d$  bezüglich des Minimalzustands in Null. Unter Berücksichtigung der Vorzeichenwahl in  $\mathfrak{z}_d$  führt die Linearisierung

von (3.40) um  $\mathbf{w}_d = \mathbf{0}$  auf

$$\dot{\mathbf{z}}_d = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{Bxy} \quad (3.43)$$

und die Linearisierung von (3.6b), unter Berücksichtigung von (3.7), (3.41) und (3.42) ergibt

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_B = -\mathbf{J}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} c_\varphi & 0 \\ 0 & c_\varphi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_d} \mathbf{z}_d - \mathbf{J}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \delta_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & d_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B. \quad (3.44)$$

Durch Kombination von (3.43) und (3.44) erhält man schließlich

$$\dot{\mathbf{w}}_d = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}_d & -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_d} \mathbf{w}_d.$$

Um die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}_d \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  zu analysieren, wird zunächst die Hilfsmatrix

$$\mathbf{A}_{d0} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}_{d0} & -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$

definiert, in der  $\mathbf{C}_{d0} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \text{diag}(c_\varphi, c_\varphi, 0)$  die um eine Nullspalte erweiterte Matrix  $\mathbf{C}_d$  ist. Die Laplace-Entwicklung der Matrix  $(\lambda \mathbf{I}_6 - \mathbf{A}_{d0})$  nach ihrer dritten Spalte führt auf  $\det(\lambda \mathbf{I}_6 - \mathbf{A}_{d0}) = \lambda \det(\lambda \mathbf{I}_5 - \mathbf{A}_d)$ . Somit sind alle Eigenwerte von  $\mathbf{A}_d$  auch Eigenwerte von  $\mathbf{A}_{d0}$ , aber  $\mathbf{A}_{d0}$  besitzt zusätzlich einen Eigenwert in Null. Nach Theorem 3.1 besitzt  $\mathbf{A}_{d0}$  exakt einen Eigenwert in Null und alle weiteren Eigenwerte liegen in der offenen linken Halbebene. Es folgt, dass die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_d$  des linearisierten Systems ausschließlich Eigenwerte mit negativem Realteil aufweist, womit lokal exponentielle Stabilität der Zielruhelage  $\mathbf{w}_d$  bewiesen ist [95, Corollary 4.3].  $\square$

**Theorem 3.3 (Lokale Stabilitätseigenschaften der Ruhelage  $\mathbf{w}_u$ )** Die Ruhelage  $\mathbf{w}_u$  des geschlossenen Regelkreises ist instabil.

**Beweis:** In einer ausreichend kleinen Umgebung von  $\mathbf{w}_u$  kann  $z_{d,Bz}$  über den Zusammenhang  $z_{d,Bz} = -\sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)}$  dargestellt werden. Führt man diese Ersetzung in (3.6a) durch, so lassen sich die ersten beiden Zeilen der Gleichung in der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{d,Bx} \\ \dot{z}_{d,By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{Bz} z_{d,By} + \tilde{\omega}_{By} \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)} \\ -\tilde{\omega}_{Bz} z_{d,Bx} - \tilde{\omega}_{Bx} \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

angeben. Analog zum Beweis von Theorem 3.2 erhält man durch Ausnutzen der Beziehung  $\sqrt{z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2} = \sin(\varphi)$  für das Moment  $\mathbf{T}_\varphi^\varphi$  nahe  $\mathbf{w}_u$

$$\mathbf{T}_\varphi^\varphi = c_\varphi \frac{\sin(\varphi_l)}{\sin(\varphi_u)} \sin(\varphi) \cdot \mathbf{e}_\varphi = c_\varphi \frac{\sin(\varphi_l)}{\sin(\varphi_u)} \begin{bmatrix} -z_{d,By} \\ z_{d,Bx} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

und die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}_\tau$  ist in einer entsprechend kleinen Umgebung konstant,

$$\mathbf{D}_\tau = \text{diag}(\delta_\varphi, \delta_\varphi, d_z). \quad (3.47)$$

Für die Linearisierung um  $\mathbf{w}_u$  wird nun der minimale Zustandsvektor  $\mathbf{w}_u = [\mathfrak{z}_u^T \quad \tilde{\omega}_B^T]^T$  mit  $\mathfrak{z}_u = [-z_{d,By} \quad z_{d,Bx}]^T$  gewählt, wobei gegenüber  $\mathfrak{z}_d$  die Vorzeichen vertauscht sind. Bezüglich des minimalen Zustands  $\mathbf{w}_u$  liegt die zu untersuchende Ruhelage  $\mathbf{w}_u$  wiederum in Null. Die Linearisierung von (3.45) sowie von (3.6b), unter Berücksichtigung von (3.7), (3.46) und (3.47) um den Punkt  $\mathbf{w}_u = \mathbf{0}$  liefert entsprechend

$$\dot{\mathbf{w}}_u = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & [\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{0}] \\ -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}_u & -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_u} \mathbf{w}_u, \quad (3.48)$$

wobei  $\mathbf{C}_u = \begin{bmatrix} -c_\varphi \frac{\sin(\varphi_l)}{\sin(\varphi_u)} & 0 \\ 0 & -c_\varphi \frac{\sin(\varphi_l)}{\sin(\varphi_u)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  und  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \delta_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \delta_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & d_z \end{bmatrix}$  gilt. Wie zuvor wird  $\mathbf{C}_u$  um eine Nullspalte zur Matrix  $\mathbf{C}_{u0} = [\mathbf{C}_u \quad \mathbf{0}] = \text{diag}(-c_\varphi \frac{\sin(\varphi_l)}{\sin(\varphi_u)}, -c_\varphi \frac{\sin(\varphi_l)}{\sin(\varphi_u)}, 0)$  erweitert und damit die Hilfsmatrix

$$\mathbf{A}_{u0} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}_{u0} & -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$

aufgebaut. Mit Hilfe der Laplace-Entwicklung der Matrix  $(\lambda \mathbf{I}_6 - \mathbf{A}_{u0})$  nach ihrer dritten Spalte, kann wie im Beweis von Theorem 3.2 gezeigt werden, dass alle Eigenwerte von  $\mathbf{A}_u$  auch Eigenwerte von  $\mathbf{A}_{u0}$  sind, aber  $\mathbf{A}_{u0}$  einen zusätzlichen Eigenwert in Null besitzt. Da  $\mathbf{C}_{u0}$  zwei negative und einen Nulleigenwert besitzt, weist  $\mathbf{A}_{u0}$  nach Theorem 3.1 exakt einen Eigenwert in Null, zwei Eigenwerte in der offenen rechten und drei Eigenwerte in der offenen linken Halbebene auf. Abgesehen vom Nulleigenwert sind dies die Eigenwerte der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_u$  des linearisierten Systems und es folgt unmittelbar die Instabilität der Ruhelage  $\mathbf{w}_u$  aus den Eigenwerten mit positivem Realteil [95,

Theorem 4.7]. □

### 3.2.3.2 Globale Stabilitätseigenschaften

Im Folgenden wird gezeigt, dass die Zielruhelage  $\mathbf{w}_d$  fast global asymptotisch stabil ist. Hierzu weist man zunächst mit Hilfe des Invarianzprinzips von LaSalle nach, dass sämtliche Lösungen des geschlossenen Regelkreises beschränkt sind und entweder gegen  $\mathbf{w}_d$  oder gegen  $\mathbf{w}_u$  streben. Berücksichtigt man weiterhin die bereits ermittelten lokalen Stabilitätseigenschaften von  $\mathbf{w}_d$  und  $\mathbf{w}_u$ , so folgt die fast global asymptotische Stabilität der Zielruhelage aus Theorem 1.1.

**Theorem 3.4** *Die Zielruhelage  $\mathbf{w}_d$  des geschlossenen Regelkreises ist fast global asymptotisch stabil.*

**Beweis:** Man kann zunächst feststellen, dass die gewählte Potentialfunktion  $E_\varphi$  gewährleistet, dass sämtliche untere Niveaumengen von  $V$  kompakt sind. Weiterhin ist aufgrund von  $\dot{V} \leq 0$  sichergestellt, dass sie überdies positiv invariant sind. Nach dem Invarianzprinzip von LaSalle (siehe z. B. [95, Theorem 4.4]) streben deshalb alle Lösungen des geschlossenen Regelkreises gegen die größte invariante Menge  $\mathcal{I}$  innerhalb  $\mathcal{E} = \{(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) \in \mathbb{W} = \mathcal{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \mid \dot{V}(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) = 0\}$ . Um  $\mathcal{E}$  zu bestimmen setzt man die Dämpfungsmatrix (3.20) und die Zerlegung (3.19) in (3.8) ein und erhält

$$\dot{V}(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) = -\kappa_{xy}(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) (d_\varphi(\varphi, \dot{\varphi})\omega_\varphi^2 + d_\perp\omega_\perp^2) - \kappa_z(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B)d_z\omega_z^2 .$$

Berücksichtigt man dass  $\kappa_{xy}, \kappa_z > 0$  gilt, so wird klar, dass  $\dot{V}$  nur verschwindet, wenn  $d_\varphi(\varphi, \dot{\varphi})\omega_\varphi^2 = d_\perp\omega_\perp^2 = d_z\omega_z^2 = 0$  erfüllt ist. Auch außerhalb der Ruhelagen, in der Menge  $\tilde{\mathbb{W}} = \mathbb{W} \setminus \{\mathbf{w}_d, \mathbf{w}_u\}$  existieren Bereiche, in denen  $\dot{V} = 0$  gilt. Im Folgenden werden diese Zustandsraumbereiche in die beiden disjunkten Teilmengen  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  unterteilt, sodass insgesamt  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \{\mathbf{w}_d, \mathbf{w}_u\}$  gilt. Die Menge  $\mathcal{E}_1$  umfasst alle Zustände, in denen  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B = \mathbf{0}$  ist. Innerhalb der Menge  $\mathcal{E}_2$  gilt hingegen  $\omega_\perp = \omega_z = d_\varphi(\varphi, \dot{\varphi})\omega_\varphi^2 = 0$ , wobei gleichzeitig  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \neq \mathbf{0}$  erfüllt ist. Somit umfasst die Teilmenge  $\mathcal{E}_2$  alle Zustände in denen nur die Drehratenkomponente  $\omega_\varphi$  auftritt und gleichzeitig  $d_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}) = 0$  erfüllt ist, (vgl. Abbildung 3.7). Explizit angeschrieben lauten die Mengen  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \{(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) \in \tilde{\mathbb{W}} \mid \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B = \mathbf{0}\}, \\ \mathcal{E}_2 &= \{(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) \in \tilde{\mathbb{W}} \mid \varphi_l + \Delta_\varphi \leq \varphi \leq \varphi_u - \Delta_\varphi, r_\varphi s_\varphi(\varphi) \leq \dot{\varphi} < 0, \omega_\perp = 0, \omega_z = 0\} . \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wird gezeigt, dass die Ruhelagen  $\mathbf{w}_d$  und  $\mathbf{w}_u$  die einzigen invarianten Mengen in  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \{\mathbf{w}_d, \mathbf{w}_u\}$  sind.

Betrachtet wird zunächst der Fall  $(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) \in \mathcal{E}_1$ . Unter dieser Annahme ist  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}_\varphi^\varphi \neq \mathbf{0}$  und da  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B = \mathbf{0}$  gilt, leitet man aus (3.6b) ab, dass  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_B \neq \mathbf{0}$  sein muss. Folglich verlässt der Zustand die Menge  $\mathcal{E}_1$  unmittelbar und sie kann deshalb keine invarianten Mengen enthalten.

Nun wird angenommen, der Zustand könne für alle Zeiten in der Menge  $\mathcal{E}_2$  verweilen. Da bekanntermaßen  $\omega_\varphi = -\dot{\varphi}$  und innerhalb  $\mathcal{E}_2$  außerdem  $\dot{\varphi} < 0$  gilt, folgt aus (3.19) direkt

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \neq \mathbf{0} .$$

Nachdem in  $\mathcal{E}_2$  kein Dämpfungsmoment auftritt, kann das Stellmoment (3.7) unter Berücksichtigung von (3.15) in der Form  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}_\varphi^\varphi = k_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi$  dargestellt werden, wobei  $k_\varphi > 0$  ist. Hieraus ergibt sich, dass die kinetische Energie  $E_{kin} = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^T \mathbf{J} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B$  kontinuierlich zunimmt, da für die Zeitableitung  $\dot{E}_{kin} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^T \boldsymbol{\tau} = -\dot{\varphi} k_\varphi > 0$  gilt. Somit lässt sich eine für alle positiven Zeiten gültige untere Schranke  $\underline{\omega} > 0$  für den Betrag der Drehrate finden, indem die Gleichung

$$E_{kin,0} = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B,0}^T \mathbf{J} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B,0} = \frac{1}{2} \bar{\lambda}(\mathbf{J}) \underline{\omega}^2 > 0$$

nach  $\underline{\omega}$  aufgelöst wird. Darin bezeichnet  $\bar{\lambda}(\mathbf{J})$  den größten Eigenwert von  $\mathbf{J}$ ,  $E_{kin,0}$  die kinetische Energie und  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B,0}$  die Drehrate zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Es gilt folglich

$$\underline{\omega}^2 \leq \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B = \dot{\varphi}^2 \quad \forall t \geq 0 . \quad (3.49)$$

Innerhalb von  $\mathcal{E}_2$  gilt  $r_\varphi s_\varphi(\varphi) \leq \dot{\varphi} < 0$ , weshalb sich mit Hilfe der Schaltlinie (3.32) eine untere Schranke

$$-L = s_\varphi(\pi) < \dot{\varphi} < 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (3.50)$$

für  $\dot{\varphi}$  ableiten lässt. Unter Ausnutzung von (3.50) kann man nun (3.49) erweitern und erhält

$$\underline{\omega}^2 \leq \dot{\varphi}^2 < -L\dot{\varphi} \quad \forall t \geq 0 . \quad (3.51)$$

Die getroffene Annahme, dass der Zustand für alle Zeiten in  $\mathcal{E}_2$  verweilen kann, ist widerlegt, wenn sich zu jedem Anfangsfehlerwinkel  $\varphi_0 \in [\varphi_l + \Delta_\varphi, \varphi_u - \Delta_\varphi]$  eine Zeit  $\bar{t}$  finden lässt zu der  $\varphi$  das Intervall  $[\varphi_l + \Delta_\varphi, \varphi_u - \Delta_\varphi]$  verlassen muss. Eine solche Zeit  $\bar{t}$  ist zweifellos gefunden, wenn sie die Gleichung

$$\varphi_l + \Delta_\varphi = \varphi_0 + \int_0^{\bar{t}} \dot{\varphi} dt \quad (3.52)$$

löst. Durch Einsetzen von (3.51) in (3.52) und Auswertung der Integrals ergibt sich die Ungleichung

$$\varphi_l + \Delta_\varphi \leq \varphi_0 - \frac{\omega^2}{L} \bar{t},$$

aus der man erkennt, dass  $\bar{t}$  selbst durch

$$\bar{t} \leq L \frac{\varphi_0 - (\varphi_l + \Delta_\varphi)}{\omega^2}$$

nach oben beschränkt ist. Somit ist die Annahme widerlegt und man folgert, dass  $\mathcal{E}_2$  keine invarianten Mengen enthalten kann. Darüber hinaus kann auch die Vereinigung aus  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  keine invarianten Mengen enthalten, da der Zustand zwar von  $\mathcal{E}_1$  nach  $\mathcal{E}_2$  übertreten kann, der umgekehrte Übergang aber ausgeschlossen ist. Folglich stellt  $\mathcal{I} = \{\mathbf{w}_d, \mathbf{w}_u\}$  die größte invariante Menge in  $\mathcal{E}$  dar und entsprechend dem Invarianzprinzip von LaSalle muss jede Lösung entweder gegen  $\mathbf{w}_d$  oder gegen  $\mathbf{w}_u$  konvergieren.

Die fast global asymptotische Stabilität der Wunschruhelage  $\mathbf{w}_d$  folgt schließlich aus Theorem 1.1, wenn man berücksichtigt, dass die asymptotische Stabilität von  $\mathbf{w}_d$  in Theorem 3.2 und die Instabilität von  $\mathbf{w}_u$  in Theorem 3.3 mittels Linearisierung nachgewiesen wurde.  $\square$

### 3.3 Erweiterung zur Folgeregelung

Bisher wurde ausschließlich der Sonderfall der Festwertregelung betrachtet, in dem die gewünschte  $z$ -Achsenrichtung  $\mathbf{z}_d$  konstant ist. Das hierfür entworfene Regelungskonzept kann leicht auf den allgemeineren Fall der Folgeregelung erweitert werden, in dem  $\mathbf{z}_d$  mit der Zeit variiert. Unter der Voraussetzung, dass  $\mathbf{z}_d$  zweifach stetig nach der Zeit differenzierbar ist, in der inertialen Darstellung  $\mathbf{z}_{d,I}$  vorliegt und darüber hinaus die ersten beiden Zeitableitungen  $\dot{\mathbf{z}}_{d,I}$  und  $\ddot{\mathbf{z}}_{d,I}$  bekannt sind, kann zunächst eine Eingangstransformation durchgeführt werden, die die Stellgröße  $\boldsymbol{\tau}$  durch die neue (virtuelle) Stellgröße  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  ersetzt. Wählt man für das Stellmoment

$$\boldsymbol{\tau} = -\Gamma(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) \langle\langle \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} - (1 - \Gamma(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B)) \left( \langle\langle \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{d,B} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} + \langle\langle \mathbf{J} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_{d,B} \right) + \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{d,B} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}, \quad (3.53)$$

worin  $\Gamma(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B)$  eine beliebige skalare und auf  $\mathbb{W}$  lokal Lipschitz-stetige Funktion ist, und setzt dies in die Folgedynamik (3.4) ein, so führt dies auf

$$\dot{\mathbf{z}}_{d,B} = \langle\langle \mathbf{z}_{d,B} \rangle\rangle \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \quad (3.54a)$$

$$\mathbf{J} \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_B = (1 - \Gamma(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B)) \langle\langle \mathbf{J} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \rangle\rangle \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B + \tilde{\boldsymbol{\tau}}. \quad (3.54b)$$

Die Dynamik (3.54) stellt wiederum ein System der Form (1.1) dar, auf welches die in Abschnitt 1.2 vorgestellte energiebasierte Methodik anwendbar ist. Insbesondere ist das System bis auf den Faktor  $(1 - \Gamma(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B))$  identisch mit der Streckendynamik (3.6) des Festwertfalls, was den Schluss nahe legt, dass (3.54) mit einer Zustandsrückführung ähnlich wie im Festwertfall geregelt werden kann. In der Tat lässt sich die Zielruhelage  $\mathbf{w}_d = (\mathbf{e}_z, \mathbf{0})$  fast global asymptotisch und lokal exponentiell stabilisieren, wenn man für  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  das unveränderte Regelgesetz (3.7) verwendet, welches im vorangegangenen Abschnitt 3.2 entworfen wurde. Ausschlaggebend hierfür ist einerseits, dass sich der Faktor  $(1 - \Gamma(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B))$  der schiefsymmetrischen Matrix  $\langle\langle \mathbf{J} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \rangle\rangle$  zuschlagen lässt, woraus folgt, dass für die Ableitung der Energiefunktion  $V(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^T \mathbf{J} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B + E_\varphi(\varphi(\mathbf{z}_{d,B}))$  weiterhin  $\dot{V}(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^T \mathbf{D}_\tau(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \leq 0$  gilt. Andererseits bleiben sowohl die Ruhelagen selbst, als auch die Linearisierungen um sie herum vom zusätzlichen Faktor unbeeinflusst. Somit können sämtliche Stabilitätsbetrachtungen aus Unterabschnitt 3.2.3 unverändert auf den neuen geschlossenen Regelkreis übertragen werden.

**Anmerkung 3.5** Die frei wählbare Funktion  $\Gamma(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B)$  stellt einen zusätzlichen Freiheitsgrad im Stellgesetz (3.53) dar, auf den hier explizit hingewiesen sei. Dieser Freiheitsgrad lässt sich in analoger Weise zu vielen Lageregelungsgesetzen der einschlägigen Literatur hinzufügen, was aber entweder nicht erkannt wird oder unerwähnt bleibt. Dies mag daran liegen, dass nicht unmittelbar einsichtig ist, wie der Freiheitsgrad sinnvoll genutzt werden kann. Denkbar wäre möglicherweise eine Reduzierung der aufzuwendenden Stellgröße anzustreben. Um das hier vorgeschlagene Stellgesetz nicht zusätzlich zu verkomplizieren, wird  $\Gamma(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B)$  für Simulationen und Experimente konstant gewählt. Man beachte, dass sich die Streckendynamik (3.54) des Folgefalls für  $\Gamma = 0$  derjenigen des Festwertfalls (3.6) angleicht. Wählt man hingegen  $\Gamma = 1$ , so führt dies dazu, dass der gyroskopische Term  $\langle\langle \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{IB}$  in (3.4b) kompensiert wird.

**Anmerkung 3.6** Bei der Erweiterung zur Folgeregelung müssen zwei vorteilhafte Eigenschaften der Festwertregelung aufgegeben werden. Zum einen bezieht sich nun die Stellgrößenbeschränkung (3.9) auf  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  und nicht mehr auf  $\boldsymbol{\tau}$ . Für den verbleibenden Anteil des Stellgesetzes (3.53) können a priori keine Schranken angegeben werden. Zum anderen ist aus (3.53) ersichtlich, dass nun der Trägheitstensor  $\mathbf{J}$  bekannt sein muss.

### 3.4 Simulationsergebnisse

Um die Wirkungsweise der vorgeschlagenen reduzierten Lageregelung zu demonstrieren, werden in diesem Abschnitt einige Simulationsergebnisse präsentiert und analysiert. Die betrachteten Szenarien beschränken sich dabei aus mehreren Gründen auf den Festwertfall, in dem die gewünschte  $z$ -Achsenrichtung  $\mathbf{z}_d$  konstant ist. Ein Motiv für die Betrachtung dieses Falles liegt in der leichteren Interpretierbarkeit der Simulationsergebnisse begründet. Besonders anschaulich werden die Ergebnisse dadurch, dass im Folgenden  $\mathbf{z}_d$  gleich der inertialen  $z$ -Achsenrichtung  $\mathbf{z}_{in}$  gewählt wird, sodass das Regelziel stets darin besteht, den Quadrocopter in die Schwebelage zu überführen. Des Weiteren wurde bereits im vorangegangenen Abschnitt erläutert, dass der Unterschied in der Fehlerdynamik, der sich zwischen einer bewegten und einer konstanten Zielausrichtung  $\mathbf{z}_d$  ergibt, nur durch den Faktor  $\Gamma(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B)$  bestimmt ist, wenn das Stellgesetz (3.53) verwendet wird. Für den Spezialfall  $\Gamma = 0$  ist das Fehlerverhalten für Folge- und Festwertfall sogar identisch. Deshalb lassen sich die wesentlichen Charakteristika der hier präsentierten Simulationen unmittelbar auf den Folgefall übertragen. Zu guter Letzt, können anhand einer konstanten Zielvorgabe  $\mathbf{z}_d$  die Vorzüge der Festwertregelung herausgearbeitet werden. Diese umfassen die strikte Einhaltung der vorgegebenen Stellgrößenbeschränkungen  $\bar{\tau}_{xy}$  und  $\bar{\tau}_z$  (siehe (3.9)) sowie Robustheit gegenüber einem unbekanntem Trägheitstensor  $\mathbf{J}$ .

Für die Simulationen wurde der rotatorische Teil der Streckendynamik, gegeben durch (2.21b) und (2.21c), implementiert und der Regelkreis über die Zustandsrückführung (3.7) aus Abschnitt 3.2 geschlossen. Die beiden betrachteten Anfangsbedingungen, die kommandierte Zielausrichtung für die körperfeste  $z$ -Achse sowie die verwendeten Regler- und Streckenparameter sind in Tabelle 3.1 aufgelistet.

Für die in den folgenden Abbildungen gezeigten Ergebnisse, wurden je Anfangsbedingung 101 Simulationen durchgeführt, wobei bei jedem Simulationslauf der Trägheitstensor  $\mathbf{J}$  variiert wurde. Jeweils ein Simulationslauf wurde mit dem diagonalen Nominalträgheitstensor  $\hat{\mathbf{J}} = \text{diag}(\hat{J}_1, \hat{J}_1, \hat{J}_2)$  durchgeführt. Dieser wurde nach der in [58] beschriebenen Vorgehensweise mittels Torsionsschwingungsversuchen in Mehrfadenaufhängung an jenem Quadrocopter identifiziert, der auch für die Flugversuche in Abschnitt 5.6 verwendet wurde. Die Simulationsergebnisse für den Nominalfall sind in den Abbildungen 3.8, 3.9, 3.11 und 3.12 durch die eingezeichneten Linien repräsentiert. Für die verbleibenden 100 Simulationsläufe wurden symmetrische Unsicherheitsmatrizen  $\Delta_{\mathbf{J}}$  zum Nominalträgheitstensor addiert, d. h.  $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}} + \Delta_{\mathbf{J}}$ . Für die Elemente jeder Matrix  $\Delta_{\mathbf{J}}$  wurden gleichverteilte und auf das Intervall  $]-0.1 \cdot \hat{J}_1, 0.1 \cdot \hat{J}_1[$  beschränkte

Tabelle 3.1: Strecken- und Reglerparameter sowie Zielausrichtung und Anfangsbedingungen für sämtliche Simulationen mit reduzierter Lageregelung.

Parameter des Streckenmodells			
Nominalfall:	$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}}$	$\hat{\mathbf{J}} = \text{diag}(\hat{J}_1, \hat{J}_1, \hat{J}_2)$ $= \text{diag}(6.4, 6.4, 12.5) \cdot 10^{-3} \text{ m}^2\text{kg}$	
Nichtnominalfall:	$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}} + \Delta_{\mathbf{J}}$	$\Delta_{\mathbf{J}}$ : Symmetrische Zufallsmatrix mit Elementen $\Delta_{\mathbf{J},ii} \in ]-0.1 \cdot \hat{J}_1, 0.1 \cdot \hat{J}_1[$	
Parameter der reduzierten Lageregelung			
$c_\varphi = 1.5 \text{ Nm/rad}$	$\varphi_l = 0.151 \text{ rad}$	$\varphi_u = 178 \cdot \pi/180 \text{ rad}$	$\Delta_\varphi = 2 \cdot \pi/180 \text{ rad}$
$\delta_\varphi = 0.176 \text{ Nms/rad}$	$v_\varphi = 0.1 \text{ rad/s}$	$v_{\varphi_l} = 3.64 \text{ rad/s}$	$r_\varphi = 0.75$
$\delta_z = 0.0885 \text{ Nms/rad}$	$\bar{\tau}_{xy} = 0.25 \text{ Nm}$	$\bar{\tau}_z = 0.05 \text{ Nm}$	
Zielausrichtung der körperfesten $z$ -Achse für sämtliche Simulationen			
$\mathbf{z}_{d,I} \equiv \mathbf{z}_{in,I} \equiv \mathbf{e}_z \equiv [0 \ 0 \ 1]^T$			
Anfangsbedingung 1			
$\boldsymbol{\omega}_{B,0}^{IB} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ rad/s}$	$\mathbf{R}_{BI,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\varphi_0) & \sin(-\varphi_0) \\ 0 & -\sin(-\varphi_0) & \cos(-\varphi_0) \end{bmatrix}$ mit $\varphi_0 = 175 \cdot \pi/180 \text{ rad}$		
Anfangsbedingung 2			
$\boldsymbol{\omega}_{B,0}^{IB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ rad/s}$	$\mathbf{R}_{BI,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\varphi_0) & \sin(-\varphi_0) \\ 0 & -\sin(-\varphi_0) & \cos(-\varphi_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_0) & \sin(\vartheta_0) & 0 \\ -\sin(\vartheta_0) & \cos(\vartheta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mit $\varphi_0 = 175 \cdot \pi/180 \text{ rad}$ und $\vartheta_0 = 60 \cdot \pi/180 \text{ rad}$		

Zufallszahlen verwendet.<sup>5</sup> Die schattierten Flächen in den Abbildungen 3.8, 3.9, 3.11 und 3.12 kennzeichnen die Bereiche, in denen sämtliche Ergebnisse dieser 100 Simulationen verlaufen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde in den Abbildungen 3.8c und 3.11c darauf verzichtet die schattierten Bereiche für die Stellmomentenkomponenten  $\tau_x$  und  $\tau_y$  anzugeben. Gleiches gilt für die Schaltlinie  $s_\varphi$  in den Abbildungen 3.8b und 3.11b.

Folgende Erwägungen fanden Eingang in die Wahl der Reglerparameter: Der Stei-

<sup>5</sup>Man beachte, dass in einem physikalisch sinnvollen Modell  $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}} + \Delta_{\mathbf{J}} > 0$  gelten muss. Durch die gewählte Beschränkung der Unsicherheitsmatrizen  $\Delta_{\mathbf{J}}$  ist dies hier stets gewährleistet, was beispielsweise mit der Methode der Gerschgorin-Kreise (siehe z. B. [169]) nachgewiesen werden kann.

figkeitsparameter  $c_\varphi$ , der das Potentialfeld im Nahbereich der Zielausrichtung  $\mathbf{z}_d$  charakterisiert, wurde empirisch gewählt und hat sich in diversen Flugversuchen als geeignet erwiesen. Ausgehend von  $c_\varphi$  wurde der Maximalbetrag des Potentialmoments auf 90 % der angesetzten Betragsschranke  $\bar{\tau}_{xy}$  begrenzt, indem der Parameter  $\varphi_l$  zu  $\varphi_l = \arcsin(0.9 \cdot \bar{\tau}_{xy} / c_\varphi)$  gewählt wurde (vgl. (3.11) und Abbildung 3.3a). Damit stehen stets mindestens 10 % des verfügbaren Stellmoments in der körperfesten  $xy$ -Ebene für Dämpfungszwecke zur Verfügung. Um im Nahbereich der Zielausrichtung  $\mathbf{z}_d$ , d. h. für  $\varphi < \varphi_l$ , ein schnelles Einschwingen der Schubrichtung zu gewährleisten, wurde mit Blick auf die PT2-Auslegungsdynamik (3.28) der Dämpfungskoeffizient  $\delta_\varphi$  auf 90 % der kritischen Dämpfung  $\sqrt{4\hat{J}_1 c_\varphi}$  festgelegt. Damit wird zu Gunsten einer hohen Ausregelgeschwindigkeit ein geringes Überschwingen bewusst in Kauf genommen. Die erwünschte Eintrittsgeschwindigkeit in den Bereich  $\varphi \leq \varphi_l$ , welche durch  $-v_{\varphi_l}$  gegeben ist und welche die Schaltlinie  $s_\varphi(\varphi)$  in (3.32) parametrisiert, wurde so gewählt, dass die rechte Seite von (3.27) für  $\varphi = \varphi_l$  und  $\dot{\varphi} = -v_{\varphi_l} / 1.35$  die Gleichung  $-c_\varphi \cdot \sin(\varphi_l) + \delta_\varphi \cdot v_{\varphi_l} / 1.35 = \bar{\tau}_{xy}$  erfüllt. Die Schaltlinie ist damit so aggressiv ausgelegt, dass die angestrebte Eintrittsgeschwindigkeit 35 % über derjenigen Geschwindigkeit liegt, die am Eintrittspunkt bereits zur Ausnutzung des vollen verfügbaren Bremsmoments führen würde. Erfolgt der Übertritt in den Bereich  $\varphi < \varphi_l$  wie anvisiert entlang der Schaltlinie (vgl. Abbildung 3.6b), so kann folglich davon ausgegangen werden, dass sich der Bremsvorgang im Anschluss noch für eine gewisse Zeit unvermindert, d. h. mit gesättigtem Stellmoment  $\|\boldsymbol{\tau}_{xy}\| = \bar{\tau}_{xy}$ , fortsetzt. Der Dämpfungskoeffizient  $d_z$ , welcher die Drehratenkomponente  $\omega_z$  bedämpft, wurde für die Simulationen konsistent zur vollständigen Lageregelung gewählt, die im folgenden Kapitel vorgestellt wird. Die Schranke  $\bar{\tau}_z$ , die das Moment um die körpereigene  $z$ -Achse begrenzt, wurde auf ein Fünftel der Schranke  $\bar{\tau}_{xy}$  festgesetzt. Dies spiegelt die stark verminderte Eingriffsmöglichkeit der Quadrocopteraktuatorik um die körperfeste  $z$ -Achse wider, die bereits im Nachgang zu Gleichung (3.9) besprochen wurde. Für die verbleibenden Parameter wurden Werte gewählt, die sich in Simulationen und Flugversuchen als zweckmäßig erwiesen haben.

Durch die Festlegung auf die konstante Zielausrichtung  $\mathbf{z}_d \equiv \mathbf{z}_{in}$  ergeben sich zwischen den rotatorischen Zuständen  $(\mathbf{R}_{BI}, \boldsymbol{\omega}_B^{IB})$  der Streckendynamik (2.21) und den Zuständen  $(\mathbf{z}_{d,B}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B)$  der reduzierten Lagefolgedynamik (3.4) die anschaulichen Zusammenhänge

$$\mathbf{R}_{BI} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{in,B} & \mathbf{y}_{in,B} & \mathbf{z}_{in,B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{in,B} & \mathbf{y}_{in,B} & \mathbf{z}_{d,B} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_B^{IB} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B.$$

Bezogen auf die Zustandsvariablen  $(\mathbf{R}_{BI}, \boldsymbol{\omega}_B^{IB})$  stellt sich folglich in der Zielruhelage

$\mathbf{w}_d = (\mathbf{e}_z, \mathbf{0})$  die Situation

$$\mathbf{R}_{BI} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{in,B} & \mathbf{y}_{in,B} & \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{in,Bxy} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{in,Bxy} \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{e}_z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_B^{IB} = \mathbf{0}$$

ein.

Aus Tabelle 3.1 entnimmt man, dass sich die Initialfluglage  $\mathbf{R}_{BI,0}$  der Anfangsbedingung 1 ergibt, indem ausgehend vom Inertialsystem um  $-175 \cdot \pi/180$  rad um die  $x$ -Achse rotiert wird. Bei der Anfangsbedingung 2 wird ausgehend vom Inertialsystem zuerst eine Drehung von  $60 \cdot \pi/180$  rad um die  $z$ -Achse und anschließend eine Rotation von  $-175 \cdot \pi/180$  rad um die  $x$ -Achse ausgeführt. In beiden Fällen beträgt der anfängliche Fehlerwinkel  $\varphi_0$  zwischen der körperfesten  $z$ -Achse  $\mathbf{z}$  und ihrer Wunschausrichtung  $\mathbf{z}_d$  somit  $175 \cdot \pi/180$  rad. Die initialen Drehraten  $\boldsymbol{\omega}_{B,0}^{IB}$  der Anfangsbedingungen wurden unterschiedlich gewählt und führen auch zu verschiedenen, anfänglichen Winkelfehlerraten  $\dot{\varphi}_0$ , wie aus den Abbildungen 3.8b und 3.11b hervorgeht.

**Anfangsbedingung 1:** Für die Anfangsbedingung 1 sind die Simulationsergebnisse in den Abbildungen 3.8 und 3.9 dargestellt. Zu Beginn liegt eine negative Anfangsdrehrate um die  $x$ -Achse vor, welche  $\mathbf{z}$  auf direktem Weg von der Zielausrichtung  $\mathbf{z}_d$  wegrotiert. Wie in Abbildung 3.8c zu sehen ist, wirkt das Stellmoment dieser Bewegung voll entgegen, kann sie aber nicht zum Stillstand bringen, bevor  $\varphi$  den Wert  $\pi$  erreicht. Folglich führt der Quadrocopter einen Überschlag aus. Ab diesem Zeitpunkt trägt die negative Drehrate um die  $x$ -Achse zu einem Abbau von  $\varphi$  bei, was sich im sprunghaften Vorzeichenwechsel von  $\dot{\varphi}$  äußert. Indem die Dämpfung  $d_\varphi$  zu Null gesetzt wird (vgl. Abbildung 3.9a), beschleunigt der Regler im Folgenden diese Rotation über ein negatives Stellmoment  $\tau_x$  bis sich  $\dot{\varphi}$  der Schaltlinie  $s_\varphi$  soweit genähert hat, dass der Bremsvorgang mit Hilfe zunehmender Dämpfung  $d_\varphi$  eingeleitet wird. Wie in Abbildung 3.8b zu sehen, schwingt  $\dot{\varphi}$  auf die Schaltlinie  $s_\varphi$  ein und es erfolgt schließlich nach etwa 0.55 s der Eintritt in den Nahbereich der Zielausrichtung  $\mathbf{z}_d$ , der durch  $\varphi \leq \varphi_l$  gegeben ist. Ab dann ist das Fehlerverhalten annähernd durch die PT2-Auslegungsdynamik (3.28) beschrieben. Man erkennt in Abbildung 3.8a, dass ein sanfter Übergang in die Zielruhelage folgt, wobei minimales Überschwingen auftritt. Nach spätestens 0.8 s kann der Regelvorgang als abgeschlossen betrachtet werden.

Es sei darauf hingewiesen, dass im Nominalfall die Annahmen 3.1 und 3.2 erfüllt sind und folglich die skalare Differentialgleichung (3.26) für alle Zeiten (mit Ausnahme des Überschlagszeitpunkts, bei dem  $\dot{\varphi}$  impulsiv das Vorzeichen wechselt) exakt gilt. Konsequenterweise ergibt sich im Nominalfall für die Drehratenkomponenten  $\omega_{By}^{IB} \equiv \omega_{Bz}^{IB} \equiv 0$ ,

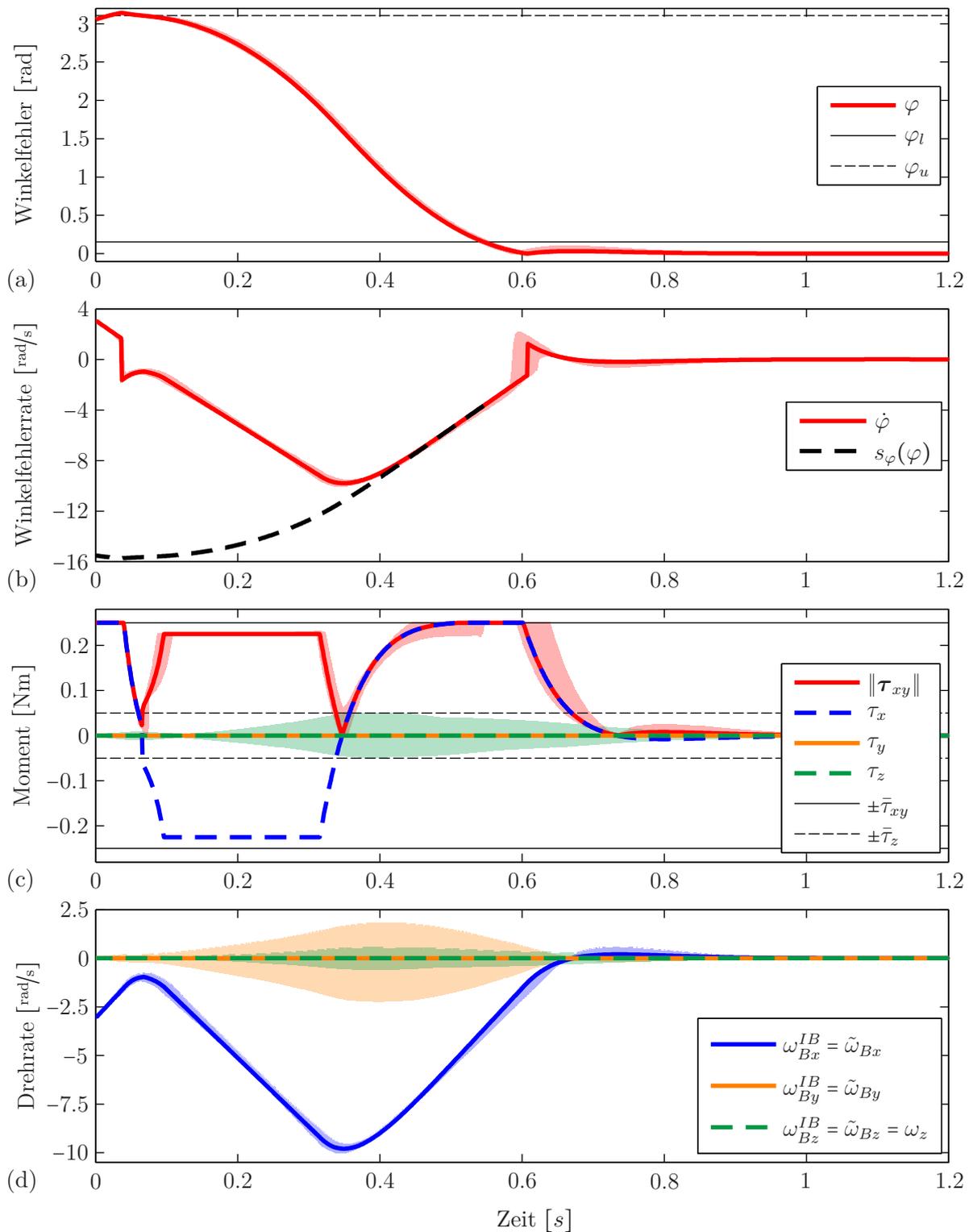


Abbildung 3.8: Simulationen mit reduzierter Lageregelung. Erster Teil der Ergebnisse für Anfangsbedingung 1 aus Tabelle 3.1. Linien markieren die Ergebnisse im Nominalfall ( $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}}$ ). Schattierte Flächen kennzeichnen die Bereiche, in welchen die Ergebnisse aller Nichtnominalfälle ( $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}} + \Delta_{\mathbf{J}}$ ) verlaufen.

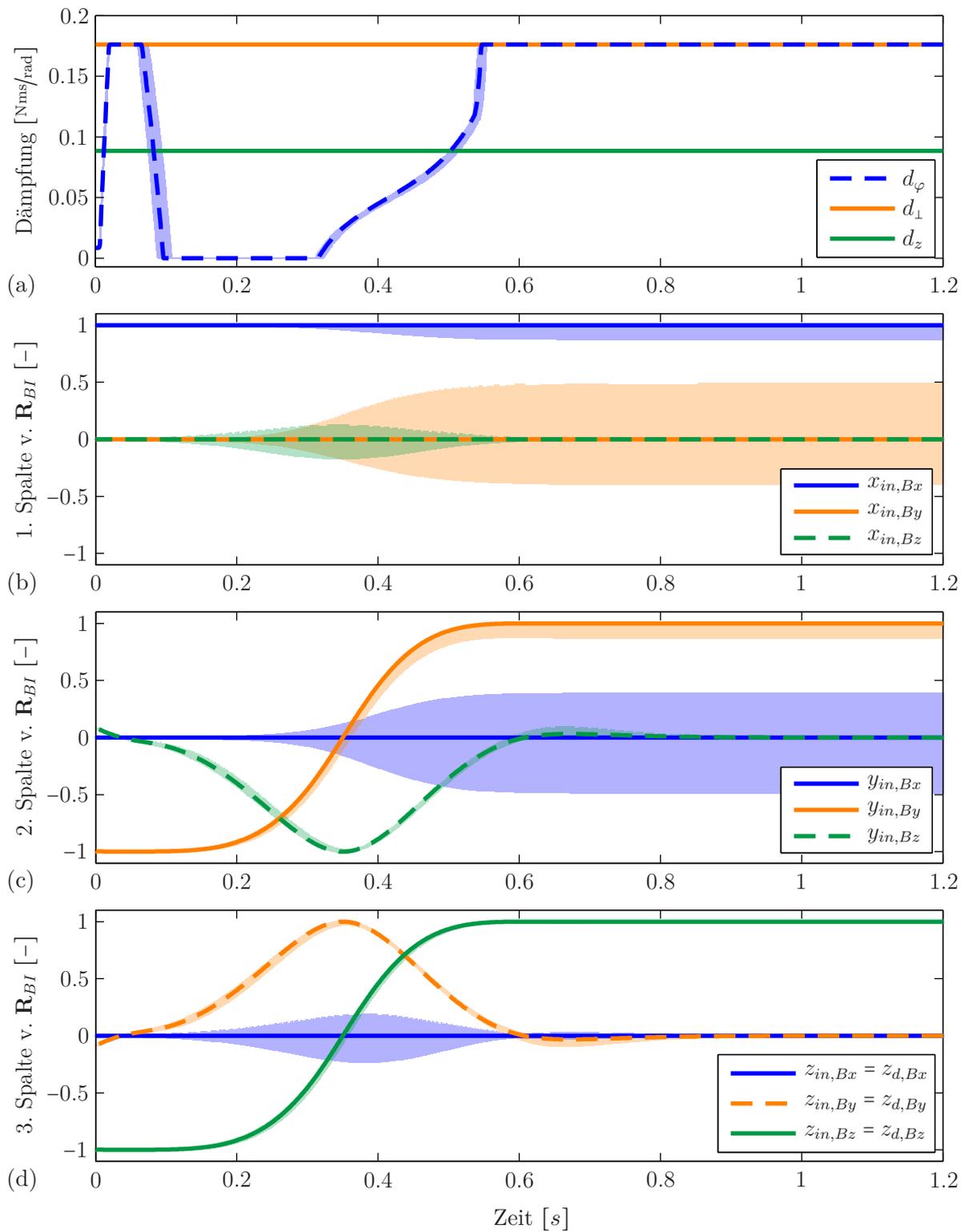


Abbildung 3.9: Simulationen mit reduzierter Lageregelung. Zweiter Teil der Ergebnisse für Anfangsbedingung 1 aus Tabelle 3.1. Linien markieren die Ergebnisse im Nominalfall ( $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}}$ ). Schattierte Flächen kennzeichnen die Bereiche, in welchen die Ergebnisse aller Nichtnominalfälle ( $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}} + \Delta_{\mathbf{J}}$ ) verlaufen.

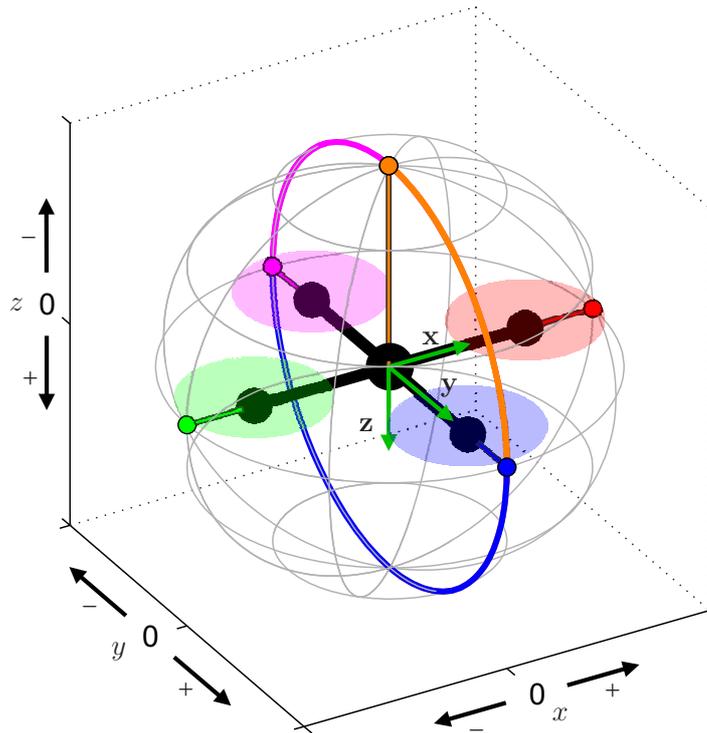


Abbildung 3.10: Bewegungsablauf im Nominalfall für die Anfangsbedingung 1. Der äußere Rahmen gibt die inertialen Koordinatenrichtungen wieder, das körperfeste Koordinatensystem ist in grün eingezeichnet. Die farbigen Kurven markieren die Bereiche, welche durch die zugehörigen körperfesten Ausleger während des Einschwingvorgangs überstrichen wurden. Im vorliegenden Fall überdecken sich die Kurven zu großen Teilen gegenseitig, da die Rotation ausschließlich um die körperfeste  $x$ -Achse abläuft.

d. h. die Rotation findet ausschließlich um die körperfeste  $x$ -Achse statt. Abbildung 3.10 vermittelt einen räumlichen Eindruck der ablaufenden Bewegung.

An den schattierten Flächen in Abbildung 3.8d kann abgelesen werden, dass  $\omega_{By}^{IB}$  und  $\omega_{Bz}^{IB}$  in den nichtnominalen Fällen durchaus Werte ungleich Null annehmen, was dazu führt, dass unterschiedliche Endlagen  $\mathbf{R}_{BI}$  erreicht werden. Dies ist in den Abbildungen 3.9b - 3.9d deutlich zu erkennen und illustriert nochmals das Wesen der reduzierten Lageregelung, bei der lediglich eine einzelne Körperachse (hier die  $z$ -Achse) eingeregelt wird. Es sei darauf hingewiesen, dass in sämtlichen Fällen die Stellgrößenbeschränkungen nicht nur eingehalten werden, sondern die verfügbare Stellgröße auch in hohem Maße ausgeschöpft wird. In weiten Teilen tritt sogar Stellgrößensättigung auf. Hierdurch kann der angestrebte hochdynamische Einschwingvorgang realisiert werden. Um einen besseren Eindruck von den ablaufenden Bewegungen zu erhalten

**Anfangsbedingung 2:** Die Abbildungen 3.11 und 3.12 zeigen Simulationsergebnisse für die Anfangsbedingung 2. Zu Beginn liegt eine Drehratenkomponente um die

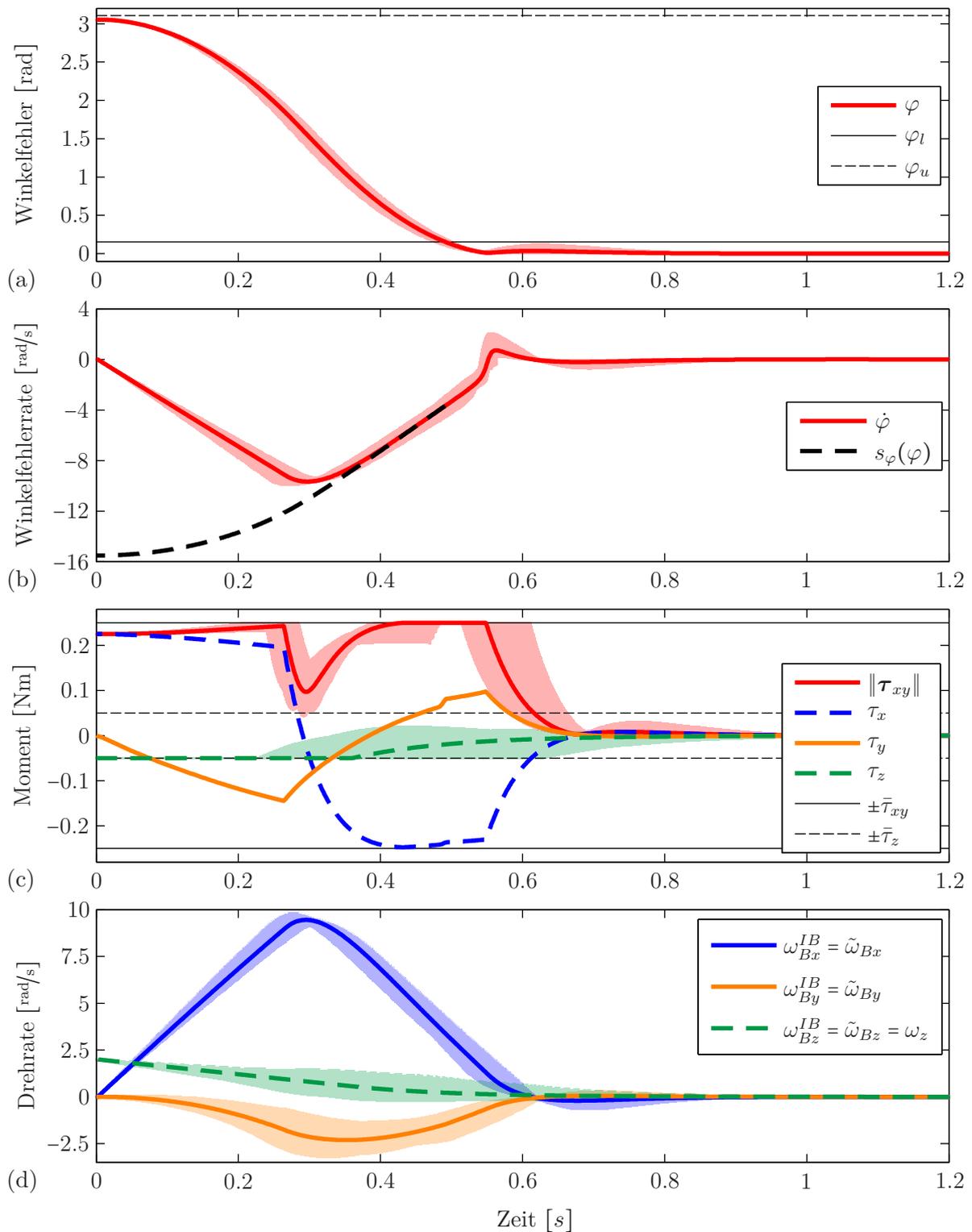


Abbildung 3.11: Simulationen mit reduzierter Lageregelung. Erster Teil der Ergebnisse für Anfangsbedingung 2 aus Tabelle 3.1. Linien markieren die Ergebnisse im Nominalfall ( $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}}$ ). Schattierte Flächen kennzeichnen die Bereiche, in welchen die Ergebnisse aller Nichtnominalfälle ( $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}} + \Delta_{\mathbf{J}}$ ) verlaufen.

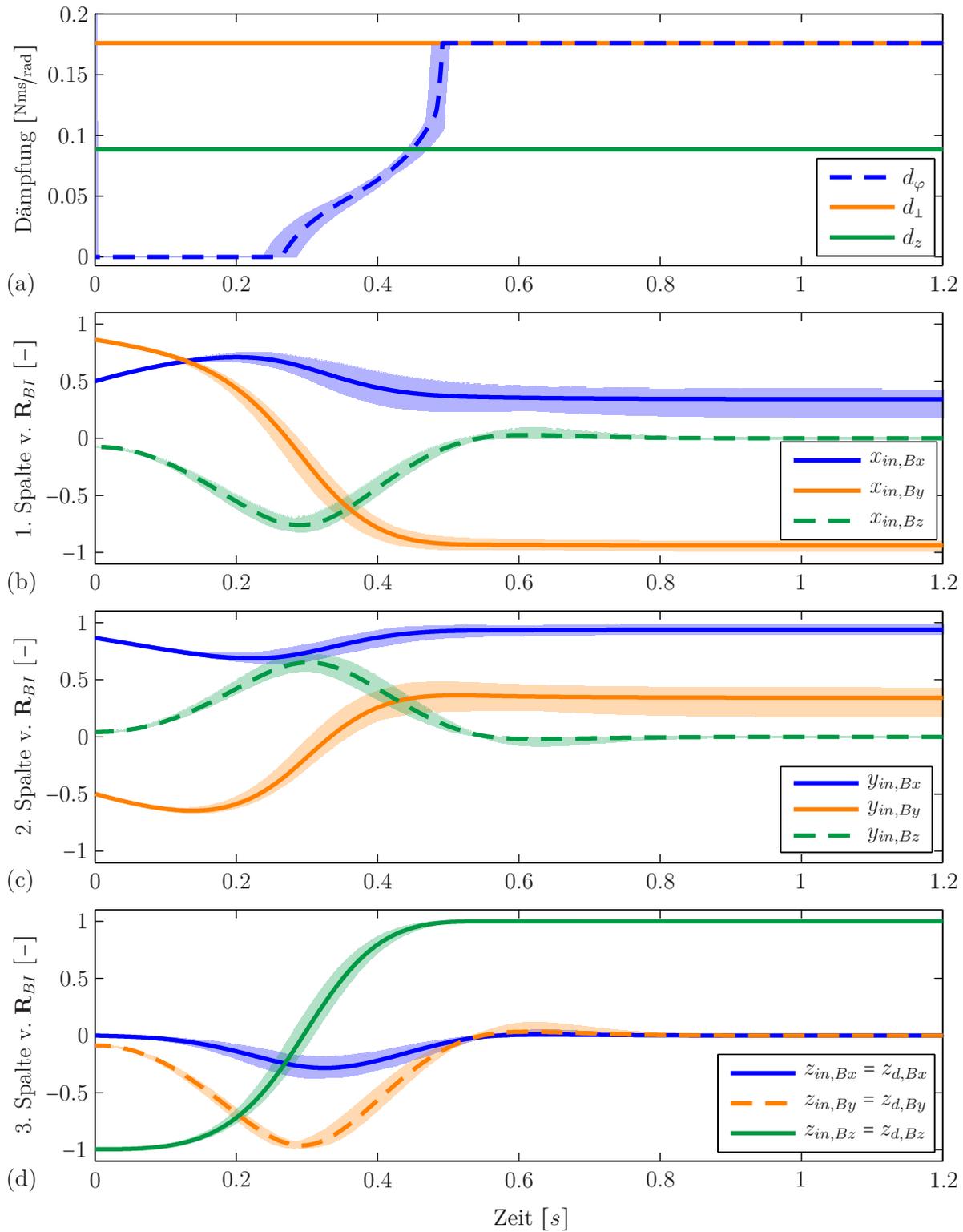


Abbildung 3.12: Simulationen mit reduzierter Lageregelung. Zweiter Teil der Ergebnisse für Anfangsbedingung 2 aus Tabelle 3.1. Linien markieren die Ergebnisse im Nominalfall ( $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}}$ ). Schattierte Flächen kennzeichnen die Bereiche, in welchen die Ergebnisse aller Nichtnominalfälle ( $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}} + \Delta_{\mathbf{J}}$ ) verlaufen.

$z$ -Achse vor, die durch den Regelvorgang auf Null zurückgeführt werden muss. Man erkennt in Abbildung 3.11c, dass hierfür das verfügbare Stellmoment  $\bar{\tau}_z$  vollständig aufgewendet wird. Solange eine Drehratenkomponente  $\omega_{B,z}^{IB} = \tilde{\omega}_{B,z}$  vorliegt, hat dies für den Ablauf des Regelvorgangs verschiedene Auswirkungen. Zum einen entsteht selbst im Nominalfall eine Drehratenkomponente  $\omega_{\perp} = \mathbf{e}_{\perp}^T \tilde{\omega}_B$  über den Coriolis-Term in (2.21c) bzw. (3.6b). Dies hat zur Folge, dass entsprechende Dämpfungsmomente um die Achse  $\mathbf{e}_{\perp}$  auftreten. Zum anderen führt die Drehratenkomponente  $\omega_{B,z}^{IB}$  bzw.  $\tilde{\omega}_{B,z}$  dazu, dass der Achsvektor  $\mathbf{e}_{\varphi}$  (und entsprechend auch  $\mathbf{e}_{\perp}$ ) in der körperfesten  $xy$ -Ebene rotiert und mit ihm das Potentialmoment  $\mathbf{T}_{\varphi}^{\varphi} = T_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}$ . Dieser Effekt kann vor allem zu Beginn in Abbildung 3.11c beobachtet werden, wo  $d_{\varphi}$  noch Null ist und auch der Dämpfungseinfluss durch  $\omega_{\perp}$  noch vernachlässigt werden kann. Im Übrigen verläuft der Regelvorgang ähnlich wie im ersten Simulationsfall. Durch den anfänglichen Verzicht auf eine Dämpfung  $d_{\varphi}$ , wird das Potentialmoment  $\mathbf{T}_{\varphi}^{\varphi}$  voll ausgeschöpft, um die körperfeste  $z$ -Achse zu beschleunigen. Hat sich schließlich die Winkelfehlerrate  $\dot{\varphi}$  der Schaltlinie hinreichend genähert, so erfolgt das Einsetzen des Bremsvorgangs, indem über  $d_{\varphi}$  ent-

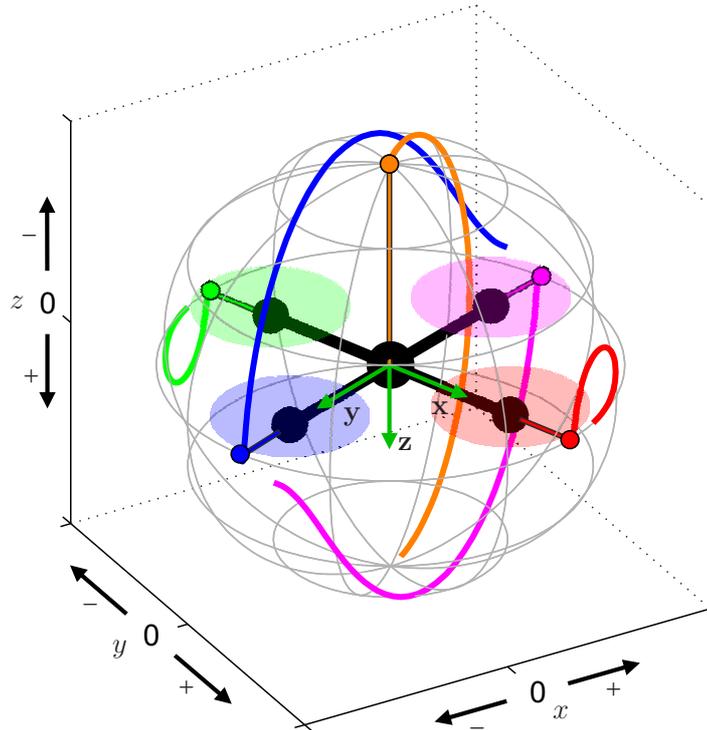


Abbildung 3.13: Bewegungsablauf im Nominalfall für die Anfangsbedingung 2. Der äußere Rahmen gibt die inertialen Koordinatenrichtungen wieder, das körperfeste Koordinatensystem ist in grün eingezeichnet. Die farbigen Kurven markieren die Bereiche, welche durch die zugehörigen körperfesten Ausleger während des Einschwingvorgangs überstrichen wurden.

sprechend Dämpfung in das System eingebracht wird (vgl. Abbildung 3.12a). Wie in Abbildung 3.11b zu sehen, setzt sich der Abbremsvorgang dann entlang der Schaltlinie  $s_\varphi$  fort und  $\mathbf{z}$  schwingt schließlich sanft in die Zielausrichtung ein, wodurch der Fehlerwinkel  $\varphi$  zu Null abklingt. In sämtlichen Fällen ist der Regelvorgang nach etwa 0.8s abgeschlossen. Wie erwartet, lässt sich aus den Abbildungen 3.12b - 3.12d herauslesen, dass der Quadrocopter am Ende der Simulation je nach Trägheitstensor unterschiedlich um seine  $z$ -Achse orientiert ist. Für den Nominalfall vermittelt Abbildung 3.13 einen räumlichen Eindruck vom Bewegungsablauf, den der Quadrocopter während des Einschwingvorgangs vollführt. Man beachte, dass die orange Kurve, welche die Spur der Schubrichtung markiert, trotz der verhältnismäßig komplexen Rotationsbewegung einen ausgesprochen geradlinigen Verlauf aufweist.

# Kapitel 4

## Vollständige Lageregelung mit Priorisierung der Schubrichtung

Im vorangegangenen Kapitel wurde die reduzierte Lageregelung behandelt, die lediglich sicherstellt, dass die körperfeste  $z$ -Achsenrichtung  $\mathbf{z}$  einer vorgegebenen Trajektorie  $\mathbf{z}_d$  folgt. Der Rotationsfreiheitsgrad um die  $z$ -Achse blieb dabei in seiner Ausrichtung unbestimmt. In diesem Kapitel wird nun die vollständige Lageregelung betrachtet, bei der alle Rotationsfreiheitsgrade eingeregelt werden. Die Zielsetzung besteht darin, für den Stellmomentenvektor  $\boldsymbol{\tau}$  ein kontinuierliches Regelgesetz zu entwerfen, sodass das körperfeste Koordinatensystem  $B = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$  einem rotierenden Sollkoordinatensystem  $D = \{\mathbf{x}_d, \mathbf{y}_d, \mathbf{z}_d\}$  folgt. Ausgedrückt in Rotationsmatrizen ergibt sich daraus die Forderung  $\mathbf{R}_{BI} \rightarrow \mathbf{R}_{DI} = \mathbf{R}_{ID}^T$  für  $t \rightarrow \infty$ . Abbildung 4.1 gibt die Struktur des angestrebten Regelkreises wieder.

Ein zentrales Entwurfsziel besteht darin, den Einschwingvorgang nicht beliebig ablaufen zu lassen, sondern die Konvergenz der Schubrichtung, gleichbedeutend mit  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_d$ , aufgrund ihres Einflusses auf die translatorische Quadrocopterdynamik klar zu priorisieren. Weiterhin soll auch der zeitoptimale Gedanke, der in die Entwicklung der reduzierten Lageregelung eingeflossen ist, für die vollständige Lageregelung aufgegriffen werden und die damit einhergehende Beschränkung der Stellmomente erhalten bleiben. Das im Folgenden entworfene Regelgesetz, weist daher die zuvor genannten Eigenschaften auf und unterscheidet sich damit grundlegend von anderen Lageregelungskonzepten. Obwohl speziell die Priorisierung einer Körperachse durch die dynamischen Eigenheiten des Quadrocopters motiviert ist, beschränkt sich die Anwendbarkeit des vorgeschlagenen Regelungskonzepts keineswegs auf diesen Einsatzbereich. Vielmehr stellt das entworfene Stellgesetz eine allgemeine Lösung des Lageregelungsproblems eines Starrkörpers dar.

Die nachfolgenden Abschnitte sind größtenteils analog zum vorangegangenen Kapitel

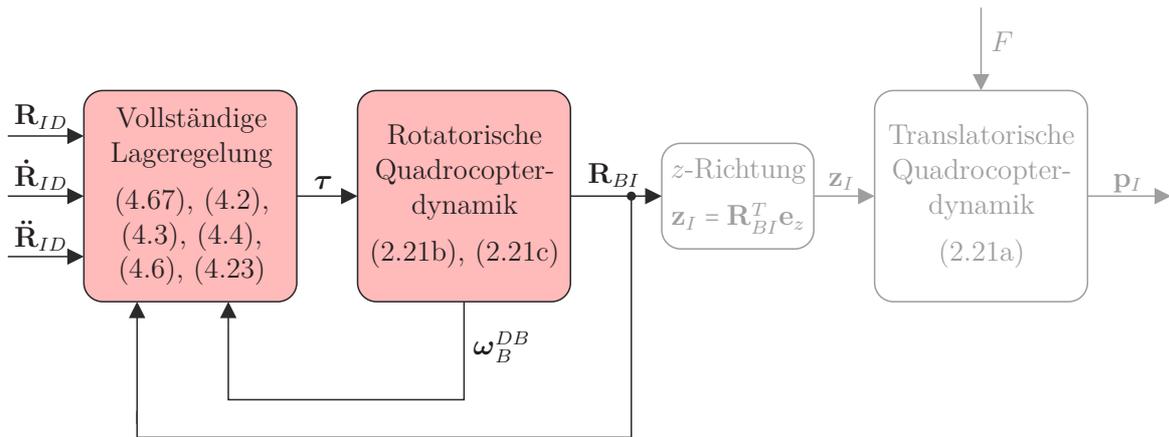


Abbildung 4.1: Strukturbild des Lageregelkreises mit vollständiger Lageregelung. Die Regelgröße ist die Fluglage  $\mathbf{R}_{BI}$  des Quadcopters.

gegliedert und detaillieren die von Fritsch u. a. bereits veröffentlichten Beiträge [71] und [68]. Zunächst wird im Abschnitt 4.1 die Folgedynamik hergeleitet und das Regelziel in den gewählten Zustandsvariablen spezifiziert. Es folgt in Abschnitt 4.2 die Einführung einer elementaren Aufspaltung des Lagefehlers, die zu einer nützlichen, alternativen Darstellung des Fehlerzustands führt und den Reglerentwurf vorbereitet. Im Anschluss behandelt Abschnitt 4.3 den Spezialfall der Festwertregelung, bevor in Abschnitt 4.4 die Erweiterung auf den allgemeinen Fall der Folgeregelung durchgeführt wird. Abschließend werden in Abschnitt 4.5 Simulationsergebnisse präsentiert und analysiert.

## 4.1 Folgedynamik und Regelziel

Die Bewegung des Sollkoordinatensystems  $D$  kann durch die Trajektorie der Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_{ID} = \mathbf{R}_{DI}^T \in SO(3)$  beschrieben werden. Es wird angenommen, dass die Solltrajektorie  $\mathbf{R}_{ID} = [\mathbf{x}_{d,I} \quad \mathbf{y}_{d,I} \quad \mathbf{z}_{d,I}]$  zweifach stetig nach der Zeit differenzierbar ist, und implizit als verträgliches Trajektorienpaar der Vektoren  $\mathbf{z}_{d,I} \in \mathcal{S}^2$  und  $\mathbf{x}_{d,I} \in \mathcal{S}^2$  vorliegt. Dabei bedeutet Verträglichkeit in diesem Zusammenhang, dass die Vektoren  $\mathbf{z}_{d,I}$  und  $\mathbf{x}_{d,I}$  stets senkrecht aufeinander stehen müssen. Für die Lageregelung des Quadcopters ist die Festlegung von  $\mathbf{R}_{ID}$  über  $\mathbf{z}_{d,I}$  und  $\mathbf{x}_{d,I}$  sinnvoll, da sich  $\mathbf{z}_{d,I}$  direkt aus der gewünschten Schubkraftrichtung ableitet und sich  $\mathbf{x}_{d,I}$  als Vorgabe für den verbleibenden Rotationsfreiheitsgrad um die  $z$ -Achse eignet. In Abschnitt 5.1 wird eine Vorgehensweise beschrieben, die aufzeigt wie sich der angesprochene Heading-Freiheitsgrad sinnvoll spezifizieren lässt und daraus ein entsprechendes  $\mathbf{x}_{d,I}$  abgeleitet werden kann.

Unter den getroffenen Annahmen erhält man für die Matrix  $\mathbf{R}_{ID}$  und deren Ablei-

tungen

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ID} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{dI} & \langle\langle \mathbf{z}_{dI} \rangle\rangle \mathbf{x}_{dI} & \mathbf{z}_{dI} \end{bmatrix}, & \dot{\mathbf{R}}_{ID} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{dI} & \langle\langle \dot{\mathbf{z}}_{dI} \rangle\rangle \mathbf{x}_{dI} + \langle\langle \mathbf{z}_{dI} \rangle\rangle \dot{\mathbf{x}}_{dI} & \dot{\mathbf{z}}_{dI} \end{bmatrix}, \\ \ddot{\mathbf{R}}_{ID} &= \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{dI} & \langle\langle \ddot{\mathbf{z}}_{dI} \rangle\rangle \mathbf{x}_{dI} + 2\langle\langle \dot{\mathbf{z}}_{dI} \rangle\rangle \dot{\mathbf{x}}_{dI} + \langle\langle \mathbf{z}_{dI} \rangle\rangle \ddot{\mathbf{x}}_{dI} & \ddot{\mathbf{z}}_{dI} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Eine geeignete Zustandsvariable zur Beschreibung des Lagefehlers ist die Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}_{BD} = \mathbf{R}_{BI} \mathbf{R}_{ID}, \quad (4.2)$$

welche die Fehlerrotation zwischen dem körperfesten System  $B$  und dem Sollsystem  $D$  beschreibt. Bezüglich dieser Darstellung lautet das Regelziel  $\mathbf{R}_{BD} \rightarrow \mathbf{I}_3$  für  $t \rightarrow \infty$ . Zur Herleitung der Dynamik von  $\mathbf{R}_{BD}$  bildet man zunächst unter Verwendung von (2.21b) die Zeitableitung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_{BD} &= \dot{\mathbf{R}}_{BI} \mathbf{R}_{ID} + \mathbf{R}_{BI} \dot{\mathbf{R}}_{ID} = -\langle\langle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rangle\rangle \mathbf{R}_{BI} \mathbf{R}_{ID} + \mathbf{R}_{BI} \dot{\mathbf{R}}_{ID} \mathbf{R}_{ID}^T \mathbf{R}_{BI}^T \mathbf{R}_{BI} \mathbf{R}_{ID} \\ &= -\langle\langle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rangle\rangle \mathbf{R}_{BD} + \mathbf{R}_{BI} \dot{\mathbf{R}}_{ID} \mathbf{R}_{ID}^T \mathbf{R}_{BI}^T \mathbf{R}_{BD} = -\left( \langle\langle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rangle\rangle - \mathbf{R}_{BI} \dot{\mathbf{R}}_{ID} \mathbf{R}_{ID}^T \mathbf{R}_{BI}^T \right) \mathbf{R}_{BD}. \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich mit der kinematischen Gleichung  $\dot{\mathbf{R}}_{BD} = -\langle\langle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \rangle\rangle \mathbf{R}_{BD}$  kann man nun  $\boldsymbol{\omega}_B^{DB}$  als

$$\boldsymbol{\omega}_B^{DB} = \langle\langle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rangle\rangle - \mathbf{R}_{BI} \dot{\mathbf{R}}_{ID} \mathbf{R}_{ID}^T \mathbf{R}_{BI}^T \langle\langle \quad \rangle\rangle \quad (4.3)$$

identifizieren, wobei  $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$  den inversen Schiefsymmetrisch-Operator bezeichnet, der in Abschnitt 2.1.1 eingeführt wurde. Da weiterhin  $\boldsymbol{\omega}_B^{DB} = \boldsymbol{\omega}_B^{IB} - \boldsymbol{\omega}_B^{ID}$  gilt, liest man aus (4.3) auch die Beziehung

$$\boldsymbol{\omega}_B^{ID} = \langle\langle \mathbf{R}_{BI} \dot{\mathbf{R}}_{ID} \mathbf{R}_{ID}^T \mathbf{R}_{BI}^T \rangle\rangle \quad (4.4)$$

ab. Die gesamte Folgedynamik besteht nun aus dem kinematischen Teil

$$\dot{\mathbf{R}}_{BD} = -\langle\langle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \rangle\rangle \mathbf{R}_{BD} \quad (4.5a)$$

und dem kinetischen Teil, der durch die Zeitableitung der Differenzdrehrate  $\boldsymbol{\omega}_B^{DB}$  zwischen dem körperfesten Koordinatensystem  $B$  und dem Sollkoordinatensystem  $D$  beschrieben ist. Es ergibt sich unter Ausnutzung von (2.21c)

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_B^{DB} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_B^{IB} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_B^{ID} = \mathbf{J}^{-1} \left( \langle\langle \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} + \boldsymbol{\tau} \right) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_B^{ID}. \quad (4.5b)$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}}_B^{ID} = \rangle\rangle - \langle\langle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rangle\rangle \mathbf{R}_{BI} \dot{\mathbf{R}}_{ID} \mathbf{R}_{ID}^T \mathbf{R}_{BI}^T + \mathbf{R}_{BI} \ddot{\mathbf{R}}_{ID} \mathbf{R}_{ID}^T \mathbf{R}_{BI}^T + \mathbf{R}_{BI} \dot{\mathbf{R}}_{ID} \dot{\mathbf{R}}_{ID}^T \mathbf{R}_{BI}^T \\ + \mathbf{R}_{BI} \dot{\mathbf{R}}_{ID} \mathbf{R}_{ID}^T \mathbf{R}_{BI}^T \langle\langle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rangle\rangle \langle\langle , \end{aligned} \quad (4.6)$$

wie man leicht durch Ableiten von (4.4) ermittelt.

Bezüglich der gewählten Zustandsdarstellung  $(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) \in \mathcal{W} = SO(3) \times \mathbb{R}^3$  besteht das angestrebte Regelziel nun darin den Arbeitspunkt  $\mathbf{W}_d = (\mathbf{I}_3, \mathbf{0})$  durch einen kontinuierlichen Stelleingriff  $\boldsymbol{\tau}$  asymptotisch zu stabilisieren. Wie schon bei der reduzierten Lageregelung gewährleistet das nachfolgend entworfene Regelgesetz darüber hinaus die beiden wichtigen Stabilitätseigenschaften, die für den in Kapitel 5 vorgestellten kaskadierten Regelungsentwurf entscheidend sind:

1. *Lokal exponentielle Stabilität* des angestrebten Arbeitspunkts  $\mathbf{W}_d$ .
2. *Fast global asymptotische Stabilität* des angestrebten Arbeitspunkts  $\mathbf{W}_d$ .

**Anmerkung 4.1** *Es ist gelegentlich von Vorteil die Matrix  $\mathbf{R}_{BD} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{d,B} & \mathbf{y}_{d,B} & \mathbf{z}_{d,B} \end{bmatrix}$  als Vektor  $\vec{\mathbf{R}}_{BD} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{d,B}^T & \mathbf{y}_{d,B}^T & \mathbf{z}_{d,B}^T \end{bmatrix}^T$  darzustellen. Gleichung (4.5a) lässt sich dann umschreiben zu*

$$\dot{\vec{\mathbf{R}}}_{BD} = \begin{bmatrix} -\langle\langle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \rangle\rangle \mathbf{x}_{d,B} \\ -\langle\langle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \rangle\rangle \mathbf{y}_{d,B} \\ -\langle\langle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \rangle\rangle \mathbf{z}_{d,B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle\langle \mathbf{x}_{d,B} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \\ \langle\langle \mathbf{y}_{d,B} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \\ \langle\langle \mathbf{z}_{d,B} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle\langle \mathbf{x}_{d,B} \rangle\rangle \\ \langle\langle \mathbf{y}_{d,B} \rangle\rangle \\ \langle\langle \mathbf{z}_{d,B} \rangle\rangle \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_B^{DB} = \langle\langle \vec{\mathbf{R}}_{BD} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{DB}, \quad (4.7)$$

worin die in (2.2) eingeführte Schreibweise  $\langle\langle \vec{\mathbf{R}}_{BD} \rangle\rangle = \begin{bmatrix} \langle\langle \mathbf{x}_{d,B} \rangle\rangle^T & \langle\langle \mathbf{y}_{d,B} \rangle\rangle^T & \langle\langle \mathbf{z}_{d,B} \rangle\rangle^T \end{bmatrix}^T$  benutzt wurde.

## 4.2 Zerlegung und alternative Darstellung des Lagefehlers

Der erste Teil dieses Abschnitts ist der Definition geeigneter Fehlermaße gewidmet, in deren Abhängigkeit die potentielle Energie des geschlossenen Regelkreises geformt werden kann. Hierzu wird der vorliegende Lagefehler in Teildrehungen zerlegt und es entstehen Zwischengrößen, die eine nützliche, alternative Darstellung des Lagefehlers ermöglichen. Im zweiten Teil des Abschnitts wird diese alternative Darstellung analysiert und ihre Einschränkungen herausgearbeitet. Die verwendete Aufspaltung des Lagefehlers geht zurück auf die Beiträge von Buhl, Fritsch, u. Lohmann [29] bzw. Fritsch u. a.

[70], in denen die betreffende Zerlegung im Kontext einer exakt linearisierenden Regelung erstmals vorgestellt wurde.

Da die Lageregelung die Ausrichtung der  $z$ -Achse priorisiert vorantreiben soll, ist es in jedem Fall sinnvoll am Fehlerwinkel  $\varphi$  zwischen  $\mathbf{z}$  und  $\mathbf{z}_d$  festzuhalten. Hinzutreten muss aber noch ein zweites Fehlermaß  $\vartheta$ , das zusammen mit  $\varphi$ , den vorliegenden Lagefehler zweckmäßig charakterisiert. Hierzu wird der Lagefehler, beschrieben durch  $\mathbf{R}_{DB} = \mathbf{R}_{BD}^T$ , in zwei Teildrehungen zerlegt,  $\mathbf{R}_{DB} = \mathbf{R}_{DA}\mathbf{R}_{AB}$ . Wie in Abbildung 4.2 illustriert wird, ist die erste Teildrehung mit Drehwinkel  $\varphi$  um den Achsvektor  $\mathbf{e}_\varphi$  gerichtet, der bereits in (3.16) eingeführt wurde. Diese erste Drehung, beschrieben durch die Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_{AB}$ , überführt das Körpersystem  $B = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$  in ein Zwischensystem  $A = \{\mathbf{x}_a, \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a\}$ , dessen  $z$ -Achsenrichtung  $\mathbf{z}_a$  bereits mit der Wunschrichtung  $\mathbf{z}_d$  übereinstimmt. Die zweite Teildrehung, charakterisiert durch  $\mathbf{R}_{DA}$ , beschreibt die verbleibende Rotation mit Drehwinkel  $\vartheta$  von  $A$  nach  $D$ . Wie man leicht erkennt, ist der Achsvektor der zweiten Drehung durch  $\pm\mathbf{z}_a$  gegeben, wobei das Vorzeichen die Drehrichtung angibt. Der Winkel  $\vartheta$  ist damit offensichtlich ein geeignetes Fehlermaß, das den Winkel  $\varphi$  sinnvoll ergänzt. Während  $\varphi$  nur den Fehler der  $z$ -Achsenrichtung beschreibt, charakterisiert  $\vartheta$  die verbleibende Abweichung von der Ziellage und wird im Folgenden auch als Headingfehler bezeichnet.

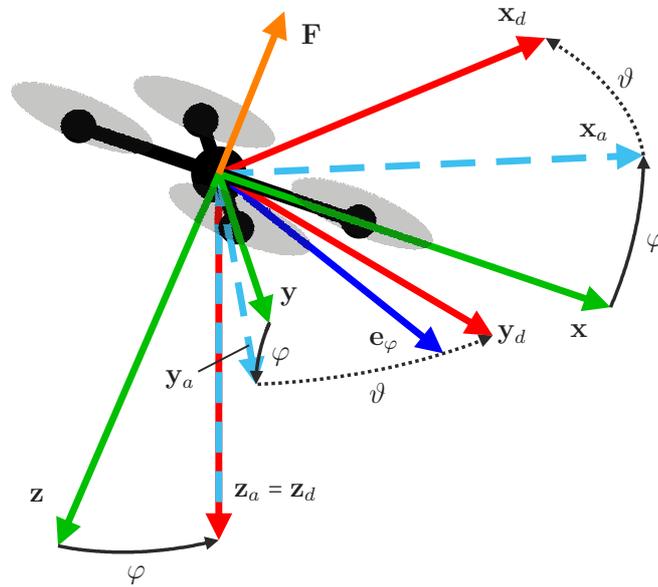


Abbildung 4.2: Zerlegung des vorliegenden Lagefehlers in zwei aufeinanderfolgende Teildrehungen. Die erste Teildrehung mit Winkel  $\varphi$  und Drehachse  $\mathbf{e}_\varphi$  dreht vom körperfesten System  $B = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$  in das Zwischensystem  $A = \{\mathbf{x}_a, \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a\} = \{\mathbf{x}_a, \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_d\}$ . Die zweite Teildrehung mit Winkel  $\vartheta$  und Drehachse  $-\mathbf{z}_a$  überführt  $A$  in das Wunschkoordinatensystem  $D = \{\mathbf{x}_d, \mathbf{y}_d, \mathbf{z}_d\}$ .

Nachdem eine anschauliche Interpretation der Fehlerwinkel  $\varphi$  und  $\vartheta$  gegeben wurde, muss nun noch deren explizite Abhängigkeit vom Lagefehler  $\mathbf{R}_{BD}$  geklärt werden. Man kann zunächst feststellen, dass  $\vartheta$  offensichtlich die Beziehungen

$$\cos(\vartheta) = \mathbf{x}_{d,A}^T \mathbf{x}_{d,A} = \mathbf{e}_x^T \mathbf{x}_{d,A} = x_{d,Ax} \iff \vartheta = \arccos(x_{d,Ax}) \quad (4.8)$$

erfüllt. Wie aus dem Vergleich mit (3.13) hervorgeht, hängt  $\vartheta$  damit auf analoge Weise von  $\mathbf{x}_{d,A}$  ab, wie  $\varphi$  von  $\mathbf{z}_{d,B}$ . Das weitere Vorgehen besteht nun darin  $\mathbf{x}_{d,A}$  und  $\mathbf{z}_{d,B}$  auf  $\mathbf{R}_{BD}$  zurückzuführen. Zuvor sei angemerkt, dass es ausreicht statt  $\mathbf{x}_{d,A}$  den Vektor seiner ersten beiden Komponenten  $\mathbf{x}_{d,Axy}$  zu betrachten. Dies hängt damit zusammen, dass die Koordinatensysteme  $A$  und  $D$  die gleiche  $z$ -Achse besitzen und somit  $\mathbf{x}_{d,A}$  nie eine  $z$ -Komponente besitzen kann,  $\mathbf{x}_{d,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{d,Axy}^T & 0 \end{bmatrix}^T$ .

Der Vektor  $\mathbf{z}_{d,B}$  hängt auf triviale Weise mit  $\mathbf{R}_{BD}$  zusammen. Da

$$\mathbf{R}_{BD} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{d,B} & \mathbf{y}_{d,B} & \mathbf{z}_{d,B} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

gilt, ist  $\mathbf{z}_{d,B}$  einfach die letzte Spalte von  $\mathbf{R}_{BD}$ ,  $\mathbf{z}_{d,B} = \mathbf{R}_{BD} \mathbf{e}_z$ . Die Matrix  $\mathbf{R}_{AB}$  der ersten Teildrehung lässt sich nun vollständig durch  $\mathbf{z}_{d,B}$  parametrieren. Um dies zu sehen, stellt man die Rotationsmatrix in Abhängigkeit von Drehachse und Drehwinkel dar. Wie man beispielsweise [157] entnehmen kann gilt

$$\mathbf{R}_{AB} = \cos(\varphi) \cdot \mathbf{I}_3 + (1 - \cos(\varphi)) \cdot \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi^T - \sin(\varphi) \cdot \langle\langle \mathbf{e}_\varphi \rangle\rangle.$$

Mit (3.16), der Einheitslänge von  $\mathbf{z}_{d,B}$  sowie der Beziehungen  $\cos(\varphi) = z_{d,Bz} = \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}$  und  $\sin(\varphi) \mathbf{e}_\varphi = \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \mathbf{z}_{d,B}$  kann man die obige Gleichung umformulieren und erhält

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{AB} &= \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} \cdot \mathbf{I}_3 + \frac{1 - \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}}{\|\langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \mathbf{z}_{d,B}\|^2} \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{z}_{d,B}^T \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle^T - \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \mathbf{z}_{d,B} \\ &= z_{d,Bz} \cdot \mathbf{I}_3 + \frac{1 - z_{d,Bz}}{1 - z_{d,Bz}^2} \begin{bmatrix} -z_{d,By} \\ z_{d,Bx} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z_{d,By} & z_{d,Bx} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & z_{d,Bx} \\ 0 & 0 & z_{d,By} \\ -z_{d,Bx} & -z_{d,By} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10) \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{z_{d,Bx}^2}{1+z_{d,Bz}} & \frac{-z_{d,Bx} z_{d,By}}{1+z_{d,Bz}} & -z_{d,Bx} \\ \frac{-z_{d,Bx} z_{d,By}}{1+z_{d,Bz}} & 1 - \frac{z_{d,By}^2}{1+z_{d,Bz}} & -z_{d,By} \\ z_{d,Bx} & z_{d,By} & z_{d,Bz} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von  $\mathbf{R}_{AB}$  lässt sich nun über die Beziehung

$$\mathbf{R}_{AD} = \mathbf{R}_{AB}\mathbf{R}_{BD} \quad (4.11)$$

die Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_{AD} = \mathbf{R}_{DA}^T$  der zweiten Teildrehung bestimmen. Man erhält den Vektor  $\mathbf{x}_{d,A}$  und somit auch der Teilvektor  $\mathbf{x}_{d,Axy}$  schließlich über den Zusammenhang

$$\mathbf{x}_{d,A} = \mathbf{R}_{AD}\mathbf{e}_x. \quad (4.12)$$

Der rote Pfad in Grafik 4.3 fasst die Zusammenhänge nochmal anschaulich zusammen.

Im zweiten Teil dieses Abschnitts wird zunächst gezeigt, dass die Vektoren  $\mathbf{z}_{d,B}$  und  $\mathbf{x}_{d,Axy}$ , abgesehen von einem Sonderfall, die gleiche Information tragen wie  $\mathbf{R}_{BD}$  und folglich eine alternative Darstellung des Lagefehlers repräsentieren. Bei der lokalen Stabilitätsanalyse in Unterabschnitt 4.3.3 wird auf diese Darstellung zurückgegriffen, weshalb im Folgenden auch die Rotationskinematik in Abhängigkeit von  $\mathbf{z}_{d,B}$  und  $\mathbf{x}_{d,Axy}$  hergeleitet wird.

Hat man den Vektor  $\mathbf{x}_{d,Axy}$  gegeben, so kann man die Matrix  $\mathbf{R}_{AD}$  rekonstruieren, da

$$\mathbf{R}_{AD} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{d,A} & \mathbf{y}_{d,A} & \mathbf{z}_{d,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{d,Axy} \\ 0 \end{bmatrix} & \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle & \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{d,Axy} \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{d,Ax} & -x_{d,Ay} & 0 \\ x_{d,Ay} & x_{d,Ax} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

gilt. Aus  $\mathbf{z}_{d,B}$  lässt sich ferner die Matrix  $\mathbf{R}_{AB}$  entsprechend (4.10) aufbauen. Über die

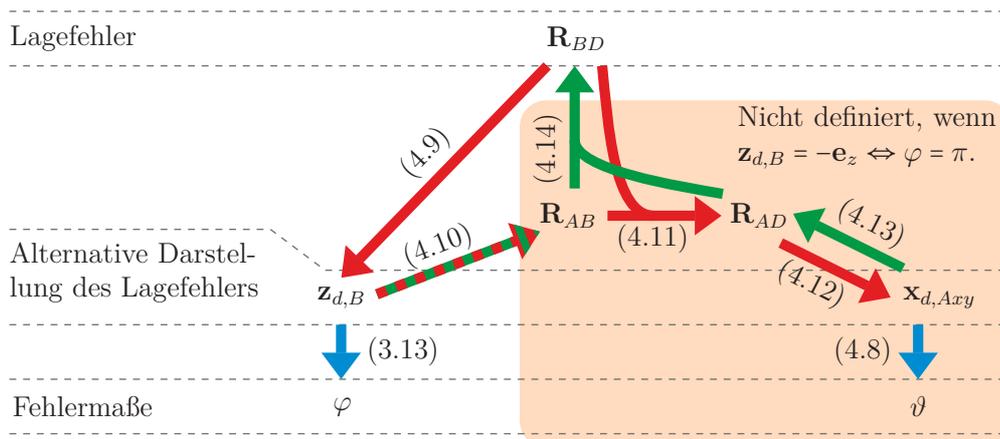


Abbildung 4.3: Zusammenhang zwischen dem Lagefehler  $\mathbf{R}_{BD} \in SO(3)$ , der alternativen Darstellung des Lagefehlers  $(\mathbf{z}_{d,B}, \mathbf{x}_{d,Axy}) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^1$  und den Fehlermaßen  $\varphi$  und  $\vartheta$ . Die Größen im farbig hinterlegten Kasten sind für  $\mathbf{z}_{d,B} = -\mathbf{e}_z \Leftrightarrow \varphi = \pi$  nicht definiert.

Beziehung

$$\mathbf{R}_{BD} = \mathbf{R}_{BA}\mathbf{R}_{AD} = \mathbf{R}_{AB}^T\mathbf{R}_{AD} \quad (4.14)$$

gewinnt man schließlich  $\mathbf{R}_{BD}$ . Somit sind  $\mathbf{z}_{d,B}$  und  $\mathbf{x}_{d,Axy}$  (fast global) eine zu  $\mathbf{R}_{BD}$  gleichwertige Beschreibung des Lagefehlers. Der grüne Pfad in Abbildung 4.3 visualisiert nochmals die beschriebenen Zusammenhänge. In Anmerkung 4.2 wird schließlich erläutert, warum beide Darstellungen nur fast global gleichwertig sind.

Die kinematische Beziehung für  $\mathbf{z}_{d,B}$  lässt sich in der letzten Spalte von (4.5a) ablesen, da  $\mathbf{z}_{d,B}$  identisch mit der letzten Spalte von  $\mathbf{R}_{BD}$  ist. Sie lautet folglich

$$\dot{\mathbf{z}}_{d,B} = -\langle\langle\boldsymbol{\omega}_B^{DB}\rangle\rangle\mathbf{z}_{d,B} = \langle\langle\mathbf{z}_{d,B}\rangle\rangle\boldsymbol{\omega}_B^{DB}. \quad (4.15)$$

Um die Rotationskinematik bezüglich  $\mathbf{x}_{d,Axy}$  anzugeben, leitet man zunächst (4.12) ab, und erhält

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{d,A} &= \dot{\mathbf{R}}_{AB}\mathbf{R}_{BD}\mathbf{e}_x + \mathbf{R}_{AB}\dot{\mathbf{R}}_{BD}\mathbf{e}_x = \dot{\mathbf{R}}_{AB}\mathbf{R}_{BA}\mathbf{R}_{AD}\mathbf{e}_x + \mathbf{R}_{AB}(-\langle\langle\boldsymbol{\omega}_B^{DB}\rangle\rangle)\mathbf{R}_{BA}\mathbf{R}_{AD}\mathbf{e}_x \\ &= \dot{\mathbf{R}}_{AB}\mathbf{R}_{AB}^T\mathbf{x}_{d,A} - \mathbf{R}_{AB}\langle\langle\boldsymbol{\omega}_B^{DB}\rangle\rangle\mathbf{R}_{AB}^T\mathbf{x}_{d,A} = (\dot{\mathbf{R}}_{AB}\mathbf{R}_{AB}^T - \mathbf{R}_{AB}\langle\langle\boldsymbol{\omega}_B^{DB}\rangle\rangle\mathbf{R}_{AB}^T)\mathbf{x}_{d,A}. \end{aligned}$$

Der letzte Klammersausdruck kann unter Zuhilfenahme von  $\dot{\mathbf{R}}_{AB} = -\langle\langle\boldsymbol{\omega}_A^{BA}\rangle\rangle\mathbf{R}_{AB}$  und (2.9) umgeformt werden zu

$$\dot{\mathbf{R}}_{AB}\mathbf{R}_{AB}^T - \mathbf{R}_{AB}\langle\langle\boldsymbol{\omega}_B^{DB}\rangle\rangle\mathbf{R}_{AB}^T = -\langle\langle\boldsymbol{\omega}_A^{BA}\rangle\rangle - \langle\langle\boldsymbol{\omega}_A^{DB}\rangle\rangle = -\langle\langle\boldsymbol{\omega}_A^{DA}\rangle\rangle, \quad (4.16)$$

sodass

$$\dot{\mathbf{x}}_{d,A} = -\langle\langle\boldsymbol{\omega}_A^{DA}\rangle\rangle\mathbf{x}_{d,A} = \langle\langle\mathbf{x}_{d,A}\rangle\rangle\boldsymbol{\omega}_A^{DA} \quad (4.17)$$

folgt. Da die Relativbewegung der Koordinatensysteme  $A$  und  $D$  nur um ihre gemeinsame  $z$ -Achse stattfinden kann, muss stets  $\boldsymbol{\omega}_A^{DA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_{Az}^{DA} \end{bmatrix}^T$  gelten. Dies eingesetzt in (4.16) führt auf

$$\dot{\mathbf{R}}_{AB}\mathbf{R}_{AB}^T - \mathbf{R}_{AB}\langle\langle\boldsymbol{\omega}_B^{DB}\rangle\rangle\mathbf{R}_{AB}^T = -\langle\langle\boldsymbol{\omega}_A^{DA}\rangle\rangle = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{Az}^{DA} & 0 \\ -\omega_{Az}^{DA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Wertet man die linke Seite dieser Gleichung mit Hilfe der Zusammenhänge (4.10) und (4.15) aus, so lässt sich nach länglicher Rechnung (siehe Anhang A.3)  $\omega_{Az}^{DA}$  als

$$\omega_{Az}^{DA} = \begin{bmatrix} \frac{z_{d,Bx}}{1+z_{d,Bz}} & \frac{z_{d,By}}{1+z_{d,Bz}} & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \quad (4.19)$$

identifizieren. Einsetzen dieses Ergebnisses in (4.17) und Auswertung der ersten beiden Zeilen führt schließlich auf

$$\dot{\mathbf{x}}_{d,Axy} = \begin{bmatrix} x_{d,Ay} \\ -x_{d,Ax} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{z_{d,Bx}}{1+z_{d,Bz}} & \frac{z_{d,By}}{1+z_{d,Bz}} & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_B^{DB} = \begin{bmatrix} x_{d,Ay} \\ -x_{d,Ax} \end{bmatrix} \left( \frac{\sqrt{z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2}}{1+z_{d,Bz}} \mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_z^T \right) \boldsymbol{\omega}_B^{DB}, \quad (4.20)$$

wobei  $\mathbf{e}_\perp$  bereits in (3.18) definiert wurde. Die Gleichungen (4.15) und (4.20) repräsentieren (fast global) eine gleichwertige Beschreibung der Rotationskinematik (4.5a).

**Anmerkung 4.2** *Wie an Gleichung (4.10) deutlich wird, weist die Matrix  $\mathbf{R}_{AB}$  der ersten Teildrehung eine Definitionslücke auf, wenn  $\mathbf{z}_{d,B} = -\mathbf{e}_z \Leftrightarrow \varphi = \pi$  gilt. Dies beschreibt die Situation, in der die körperfeste  $z$ -Achse entgegengesetzt zu ihrer Sollausrichtung steht und sich die Drehachse  $\mathbf{e}_\varphi$  folglich nicht eindeutig aus dem Kreuzprodukt von  $\mathbf{z}$  und  $\mathbf{z}_d$  bestimmen lässt. In der Konsequenz kann (4.11) nicht ausgewertet werden, was dazu führt, dass  $\mathbf{x}_{d,Axy}$  und in der Folge auch der Headingfehler  $\vartheta$  nicht definiert sind. Abgesehen von diesem Sonderfall, repräsentieren die Vektoren  $\mathbf{z}_{d,B}$  und  $\mathbf{x}_{d,Axy}$  eine zu  $\mathbf{R}_{BD}$  gleichwertige Darstellung des Lagefehlers. Formal ausgedrückt heißt dies, dass ein lokaler (aber fast globaler) Diffeomorphismus zwischen  $(\mathbf{z}_{d,B}, \mathbf{x}_{d,Axy})$  und  $\mathbf{R}_{BD}$  vorliegt.*

**Anmerkung 4.3** *In den folgenden Abschnitten werden viele Funktionen und Ausdrücke in Abhängigkeit von  $\mathbf{z}_{d,B}$ ,  $\mathbf{x}_{d,Axy}$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{e}_\perp$ ,  $\varphi$ ,  $\vartheta$  und deren Zeitableitungen angegeben. Diese Größen lassen sich über die zuvor hergeleiteten Zusammenhänge auf die Zustandsvariable  $\mathbf{R}_{BD}$  (vgl. Abbildung 4.3) und, im Falle der Zeitableitungen, auf  $(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{BD})$  zurückführen. Zu Gunsten einer kompakten Notation wird im Folgenden größtenteils darauf verzichtet diese Abhängigkeit von  $(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{BD})$  explizit zu kennzeichnen.*

Beim Entwurf eines Stellgesetzes in Abhängigkeit der oben genannten Größen ist darauf zu achten, dass die in Anmerkung 3.4 diskutierten Singularitäten von  $\mathbf{e}_\varphi$  und  $\mathbf{e}_\perp$ , sowie die in Anmerkung 4.2 diskutierte Singularität bezüglich  $\mathbf{x}_{d,Axy}$  bzw.  $\vartheta$  sich nicht auf das Stellgesetz auswirken. Im Hinblick auf die Singularität von  $\mathbf{x}_{d,Axy}$  bzw.  $\vartheta$  bedeutet dies beispielsweise, dass im Stellgesetz keinerlei Abhängigkeiten von  $\mathbf{x}_{d,Axy}$ ,  $\vartheta$  oder deren Ableitungen auftreten dürfen, wenn  $\mathbf{z}_{d,B} = -\mathbf{e}_z \Leftrightarrow \varphi = \pi$  gilt.

## 4.3 Festwertregelung - Ein schneller und sättigender Ansatz

Für den Fall, dass eine konstante Wunschlage  $\mathbf{R}_{ID}$  eingeregelt werden soll, gilt  $\dot{\mathbf{R}}_{ID} = \ddot{\mathbf{R}}_{ID} = \mathbf{0}$ , woraus mit (4.4) und (4.6) wiederum  $\boldsymbol{\omega}_B^{ID} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_B^{ID} = \mathbf{0}$  folgt. Die Folgedynamik

(4.5) vereinfacht sich dadurch zu

$$\dot{\mathbf{R}}_{BD} = -\langle\langle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \rangle\rangle \mathbf{R}_{BD} \quad (4.21a)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_B^{DB} = \langle\langle \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_B^{DB} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} + \boldsymbol{\tau}, \quad (4.21b)$$

wobei die Identität  $\boldsymbol{\omega}_B^{DB} = \boldsymbol{\omega}_B^{IB}$  ausgenutzt wurde, die im betrachteten Sonderfall gilt. Berücksichtigt man, dass (4.21a) ebenso in der vektoriellen Schreibweise (4.7) ausgedrückt werden kann, so erkennt man, dass das vorliegende System (4.21) die allgemeine Struktur (1.1) aufweist. Folglich kann ein energiebasierter Regelungsentwurf entsprechend Abschnitt 1.2 durchgeführt werden. Formt man die potentielle Energie auf Basis der Fehlerwinkel  $\varphi$  und  $\vartheta$ , die im vorangegangenen Abschnitt eingeführt wurden, so erhält man eine Gesamtenergiefunktion

$$V(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_B^{DB})^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_B^{DB} + E(\varphi(\mathbf{R}_{BD}), \vartheta(\mathbf{R}_{BD})).$$

Die zeitliche Ableitung von  $V$  ergibt unter Berücksichtigung der Streckendynamik (4.21)

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}_B^{DB})^T \boldsymbol{\tau} + \dot{E} = (\boldsymbol{\omega}_B^{DB})^T \boldsymbol{\tau} + \underbrace{\left( \frac{\partial E}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\mathbf{R}}_{BD}} + \frac{\partial E}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \vec{\mathbf{R}}_{BD}} \right) \langle\langle \vec{\mathbf{R}}_{BD} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{DB}}_{-\mathbf{T}^T}, \quad (4.22)$$

wobei (4.7) benutzt wurde. Mit dem Potentialmoment  $\mathbf{T}$ , welches man aus  $\dot{E}$  extrahiert, und einer Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}_\tau(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) \geq 0$  kann nun das Regelgesetz

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}(\mathbf{R}_{BD}) - \mathbf{D}_\tau(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \quad (4.23)$$

angeschrieben werden, welches eine Abnahme der Energie realisiert. Einsetzen von (4.23) in (4.22) liefert

$$\dot{V}(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) = -(\boldsymbol{\omega}_B^{DB})^T \mathbf{D}_\tau(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \leq 0. \quad (4.24)$$

Wie zuvor die reduzierte Lageregelung, soll auch die vollständige Lageregelung mit einem beschränkten Stellmoment entsprechend (3.9) auskommen. Erneut besteht die Zielsetzung darin, die geforderten Schranken nicht nur einzuhalten, sondern das verfügbare Moment im Sinne eines schnellen Einschwingvorgangs möglichst gut auszunutzen. Dem Einschwingen der  $z$ -Achsenrichtung soll dabei eine höhere Priorität beigemessen werden als der Ausrichtung der anderen beiden Achsen.

Der nachfolgende Unterabschnitt 4.3.1 behandelt den Entwurf eines geeigneten Po-

tentials  $E$  und die Identifikation des zugehörigen Momentenfeldes  $\mathbf{T}$ . Die Definition einer geeigneten Dämpfungsstrategie erfolgt anschließend in Unterabschnitt 4.3.2 bevor im Unterabschnitt 4.3.3 die lokal exponentielle und die fast global asymptotische Stabilität des angestrebten Arbeitspunkts  $\mathbf{W}_d$  nachgewiesen wird.

### 4.3.1 Entwurf der Potentialfunktion

Es bietet sich an, die Potentialfunktion  $E$  der vollständigen Lageregelung zu konstruieren, indem man die Potentialfunktion  $E_\varphi$  der reduzierten Lageregelung um eine weitere Komponente  $E_\vartheta$  erweitert, die den in Abschnitt 4.2 eingeführten Headingfehler  $\vartheta$  berücksichtigt. Durch dieses Vorgehen erhält man

$$E(\varphi, \vartheta) = E_\varphi(\varphi) + E_\vartheta(\varphi, \vartheta) ,$$

worin  $E_\varphi$  in (3.12) definiert wurde und

$$E_\vartheta(\varphi, \vartheta) = \begin{cases} \frac{(\cos(\frac{\varphi}{2}) - \cos(\frac{\varphi_u}{2}))^2}{(1 - \cos(\frac{\varphi_u}{2}))^2} \cdot c_\vartheta \int_0^\vartheta \Lambda_{\vartheta_l}^{\vartheta_u}(a) da & \text{für } \varphi \leq \varphi_u \\ 0 & \text{für } \varphi > \varphi_u \end{cases} \quad (4.25)$$

mit  $c_\vartheta > 0$  gewählt wird. Die qualitative Gestalt der Funktion  $E_\vartheta$  ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Wie man sieht, ist  $E_\vartheta$  in der Abhängigkeit von  $\vartheta$  analog aufgebaut wie  $E_\varphi$  in der Abhängigkeit von  $\varphi$ . Zusätzlich besitzt  $E_\vartheta$  aber auch eine Abhängigkeit von  $\varphi$ , die sich im Vorfaktor äußert und dafür sorgt, dass der Einfluss von  $E_\vartheta$  mit zunehmendem Fehler in der  $z$ -Achsenrichtung abnimmt und für  $\varphi > \varphi_u$  sogar vollständig verschwindet. Hierdurch wird zweierlei erreicht: Erstens besteht keine Abhängigkeit von  $\vartheta$  für  $\varphi = \pi$ ,

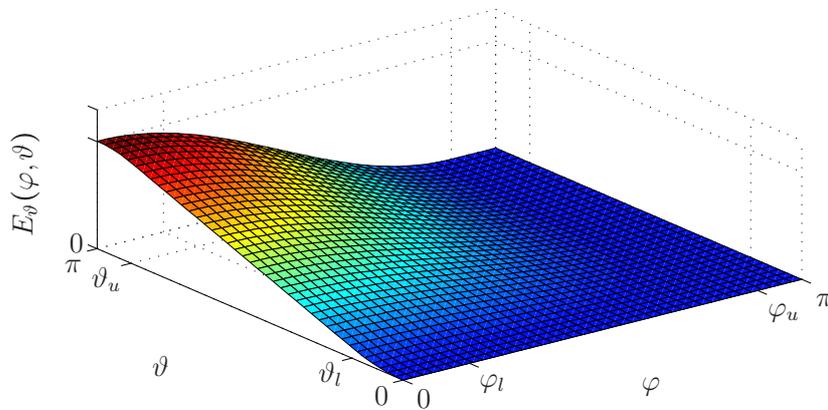


Abbildung 4.4: Qualitative Gestalt des Teilpotentials  $E_\vartheta(\varphi, \vartheta)$ .

wodurch sich die in Anmerkung 4.2 diskutierte Singularität nicht auswirkt. Zweitens unterstützt dieses Verhalten die angestrebte Priorisierung der Schubrichtung, da bei großen Schubrichtungsfehlern  $\varphi$  die Potentialfunktion  $E$  durch  $E_\varphi$  dominiert wird.

Aus dem gewählten Aufbau von  $E$  ergibt sich automatisch ein globales Minimum  $E = 0$  in  $(\varphi, \vartheta) = (0, 0)$ . Um sicherzustellen, dass es sich auch um das einzige Minimum handelt, darf die Abnahme von  $E_{\vartheta}$  über  $\varphi$  die Zunahme von  $E_\varphi$  nirgendwo überwiegen. Vielmehr soll im Bereich  $(\varphi, \vartheta) \in ]0, \pi[ \times ]0, \pi[$  überall  $\partial E / \partial \varphi > 0$  gelten.<sup>1</sup> Notwendig und hinreichend hierfür ist, dass dies am Rand bei  $\vartheta = \pi$  zutrifft, was auf die Forderung

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \varphi}(\varphi, \pi) &= \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}(\varphi) + \frac{\partial E_{\vartheta}}{\partial \varphi}(\varphi, \pi) = \\ &= \Lambda_{\varphi_l}^{\varphi_u}(\varphi) - \frac{\sin(\frac{\varphi}{2}) (\cos(\frac{\varphi}{2}) - \cos(\frac{\varphi_u}{2}))}{(1 - \cos(\frac{\varphi_u}{2}))^2} \cdot c_{\vartheta} \int_0^\pi \Lambda_{\vartheta_l}^{\vartheta_u}(a) da > 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

führt. Weiterhin wird gefordert, dass

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2}(0, \pi) = c_\varphi - \frac{c_{\vartheta}}{2(1 - \cos(\frac{\varphi_u}{2}))} \cdot \int_0^\pi \Lambda_{\vartheta_l}^{\vartheta_u}(\xi) d\xi > 0 \quad (4.27)$$

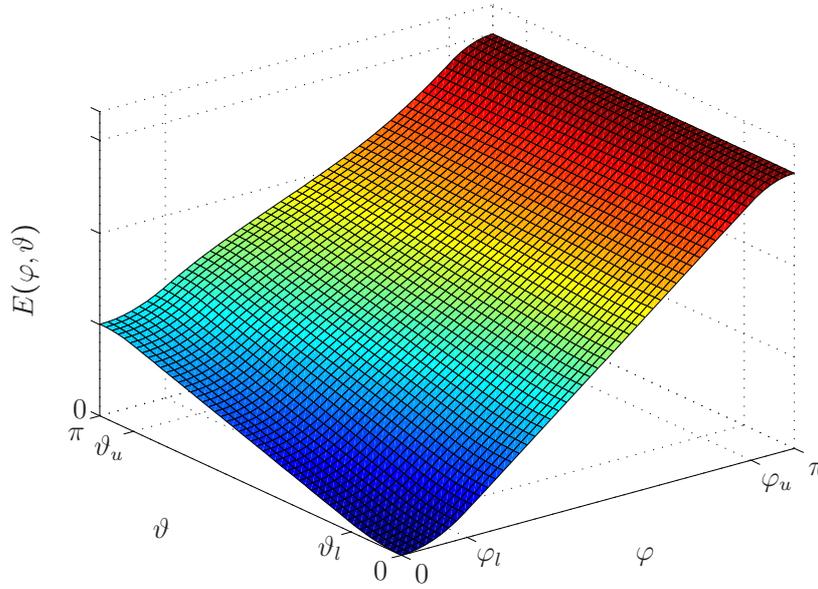
erfüllt ist. Diese Bedingung ist im Hinblick auf eine aussagekräftige Linearisierung von Bedeutung, wie sie im Rahmen der lokalen Stabilitätsanalyse in Unterabschnitt 4.3.3.1 durchgeführt wird. Entscheidend ist, dass sich stets ein geeigneter Parametersatz  $(c_\varphi, c_{\vartheta}, \varphi_l, \varphi_u, \vartheta_l, \vartheta_u)$  finden lässt, der die Forderungen (4.26) und (4.27) erfüllt. Allein die Wahl eines ausreichend kleinen  $c_{\vartheta}$  führt notwendigerweise zur Verträglichkeit mit den Bedingungen.

Es ergibt sich eine Potentialfunktion  $E$ , deren qualitative Gestalt in Abbildung 4.5 dargestellt ist. Man beachte, dass auf dem Rand des Definitionsbereichs die Ableitungskomponente von  $E$ , die zum Rand hin gerichtet ist, verschwindet. Dies garantiert ein kontinuierliches Potentialmoment  $\mathbf{T}$  über dem gesamten Zustandsraum (vgl. hierzu auch Anmerkung 4.5). Weiterhin erkennt man, dass neben dem Minimum weitere kritische Punkte bei  $(\varphi, \vartheta) = (0, \pi)$  und  $(\varphi, \vartheta) \in \{(\varphi, \vartheta) \mid \varphi = \pi\}$  auftreten. Diese Punkte definieren Ruhelagen des geschlossenen Regelkreises, da dort das Moment  $\mathbf{T}$  verschwindet.

Um das Moment  $\mathbf{T}$  explizit anzugeben, welches durch das Potential  $E$  generiert wird,

---

<sup>1</sup>Der Rand des Definitionsbereichs bei  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \pi$  ist aus der Betrachtung ausgenommen, da hier ohnehin  $\partial E / \partial \varphi = 0$  gelten muss, um ein kontinuierliches Stellgesetz zu ermöglichen.


 Abbildung 4.5: Qualitative Gestalt der Potentialfunktion  $E(\varphi, \vartheta)$ .

bildet man zunächst die Zeitableitung

$$\dot{E} = \frac{\partial E}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial E}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} = \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta}, \quad (4.28)$$

aus der man  $\mathbf{T}$  über den Vergleich mit  $\dot{E} = -\mathbf{T}^T \boldsymbol{\omega}_B^{DB}$  extrahiert. Während sich  $\dot{\varphi}$  mit Hilfe von (4.15) als

$$\dot{\varphi} = \frac{-\dot{z}_{dBz}}{\sqrt{1 - z_{dBz}^2}} = -\mathbf{e}_\varphi^T \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \quad (4.29)$$

angeben lässt, erhält man die Zeitableitung von  $\vartheta$  durch Ableiten von (4.8) und Einsetzen von (4.20). Es ergibt sich

$$\dot{\vartheta} = \frac{-\dot{x}_{d,Ax}}{\sqrt{1 - x_{d,Ax}^2}} = \frac{-x_{d,Ay}}{\sqrt{1 - x_{d,Ax}^2}} \left( \frac{\sqrt{z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2}}{1 + z_{d,Bz}} \mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_z^T \right) \boldsymbol{\omega}_B^{DB}. \quad (4.30)$$

Mit (4.29) und (4.30) lässt sich nun (4.28) umschreiben zu

$$\dot{E} = - \overbrace{\left( \underbrace{\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi^T}_{(\mathbf{T}_\varphi^\varphi)^T} + \underbrace{\frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi^T}_{(\mathbf{T}_\varphi^\vartheta)^T} + \underbrace{\frac{\partial E_\vartheta}{\partial \vartheta} \frac{x_{d,Ay} \sqrt{z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2}}{\sqrt{1 - x_{d,Ax}^2} (1 + z_{d,Bz})} \mathbf{e}_1^T}_{(\mathbf{T}_1^\vartheta)^T} + \underbrace{\frac{\partial E_\vartheta}{\partial \vartheta} \frac{x_{d,Ay}}{\sqrt{1 - x_{d,Ax}^2}} \mathbf{e}_z^T}_{(\mathbf{T}_z^\vartheta)^T} \right)}^{\mathbf{T}^T} \boldsymbol{\omega}_B^{DB},$$

worin das Potentialmoment  $\mathbf{T}$  in die vier Komponenten  $\mathbf{T}_\varphi^\varphi$ ,  $\mathbf{T}_\varphi^\vartheta$ ,  $\mathbf{T}_\perp^\vartheta$ ,  $\mathbf{T}_z^\vartheta$  aufgeteilt wurde, deren oberer Index angibt, ob die Komponente aus  $E_\varphi$  oder  $E_\vartheta$  stammt und deren unterer Index die Wirkachse entsprechend  $\mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{e}_\perp$  und  $\mathbf{e}_z$  kennzeichnet. Es gilt

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_\varphi^\varphi + \mathbf{T}_\varphi^\vartheta + \mathbf{T}_\perp^\vartheta + \mathbf{T}_z^\vartheta. \quad (4.31)$$

Unter Ausnutzung der Definitionen von  $E_\varphi$  und  $E_\vartheta$  in (3.12) und (4.25) lassen sich die Momentenkomponenten weiter konkretisieren. Es gilt

$$\mathbf{T}_\varphi^\varphi = \Lambda_{\varphi_l}^{\varphi_u}(\varphi) \mathbf{e}_\varphi, \quad (4.32a)$$

$$\mathbf{T}_\varphi^\vartheta = \begin{cases} \frac{-(\cos(\frac{\varphi}{2}) - \cos(\frac{\varphi_u}{2})) \sin(\frac{\varphi}{2})}{(1 - \cos(\frac{\varphi_u}{2}))^2} c_\vartheta \int_0^\vartheta \Lambda_{\vartheta_l}^{\vartheta_u}(a) da \cdot \mathbf{e}_\varphi & \text{für } \varphi \leq \varphi_u \\ \mathbf{0} & \text{für } \varphi > \varphi_u \end{cases}, \quad (4.32b)$$

$$\mathbf{T}_\perp^\vartheta = \begin{cases} \frac{(\cos(\frac{\varphi}{2}) - \cos(\frac{\varphi_u}{2}))^2}{(1 - \cos(\frac{\varphi_u}{2}))^2} c_\vartheta \Lambda_{\vartheta_l}^{\vartheta_u}(\vartheta) \frac{x_{d,Ay} \sqrt{z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2}}{\sqrt{1 - x_{d,Ax}^2} (1 + z_{d,Bz})} \mathbf{e}_\perp & \text{für } \varphi \leq \varphi_u \\ \mathbf{0} & \text{für } \varphi > \varphi_u \end{cases}, \quad (4.32c)$$

$$\mathbf{T}_z^\vartheta = \begin{cases} \frac{(\cos(\frac{\varphi}{2}) - \cos(\frac{\varphi_u}{2}))^2}{(1 - \cos(\frac{\varphi_u}{2}))^2} c_\vartheta \Lambda_{\vartheta_l}^{\vartheta_u}(\vartheta) \frac{x_{d,Ay}}{\sqrt{1 - x_{d,Ax}^2}} \mathbf{e}_z & \text{für } \varphi \leq \varphi_u \\ \mathbf{0} & \text{für } \varphi > \varphi_u \end{cases}. \quad (4.32d)$$

Für die angestrebte Lageregelung des Quadcopters wäre es wünschenswert, die Stellmomente in der körperfesten  $xy$ -Ebene ausschließlich zur Bekämpfung des Schubrichtungsfehlers  $\varphi$  zu verwenden und die Reduzierung des Headingfehlers  $\vartheta$  über das Stellmoment um die körperfeste  $z$ -Achse und damit entkoppelt zu realisieren. Wie man sieht, induziert  $E_\vartheta$  jedoch drei Momentenkomponenten  $\mathbf{T}_\varphi^\vartheta$ ,  $\mathbf{T}_\perp^\vartheta$  und  $\mathbf{T}_z^\vartheta$ , von denen nur  $\mathbf{T}_z^\vartheta$  in der erwünschten Weise um die  $z$ -Achse wirkt. Für konstante Winkel  $\varphi$  ist der Betragverlauf von  $\mathbf{T}_z^\vartheta$  analog zum bereits aus der reduzierten Lageregelung bekannten Moment  $\mathbf{T}_\varphi^\varphi$ . Die beiden anderen Momente  $\mathbf{T}_\varphi^\vartheta$  und  $\mathbf{T}_\perp^\vartheta$ , die aus  $E_\vartheta$  resultieren, können als parasitär betrachtet werden. Ihr Auftreten ist unerwünscht, kann aber nicht vermieden werden. Beide Momentenkomponenten wirken in der körperfesten  $xy$ -Ebene, ohne zur Reduzierung von  $\varphi$  beizutragen. Während das Moment  $\mathbf{T}_\varphi^\vartheta$  dem rückstellenden Moment  $\mathbf{T}_\varphi^\varphi$  sogar entgegenwirkt, induziert  $\mathbf{T}_\perp^\vartheta$  eine Drehrate um  $\mathbf{e}_\perp$ , welche entsprechend (4.29) nicht zu einem Abbau von  $\varphi$  beitragen kann. Gleichzeitig verringert das Auftreten von  $\mathbf{T}_\perp^\vartheta$  das verfügbare Stellmoment für  $\mathbf{T}_\varphi^\varphi$ , da im Hinblick auf die Stellgrößenbeschränkung (3.9)

$$\|\mathbf{T}_{xy}\| = \sqrt{(\|\mathbf{T}_\varphi^\varphi\| - \|\mathbf{T}_\varphi^\vartheta\|)^2 + \|\mathbf{T}_\perp^\vartheta\|^2} < \bar{\tau}_{xy} \quad (4.33)$$

eingehalten werden muss. Genau wie die Einhaltung der Bedingung (4.26) (die im Übrigen gleichbedeutend mit  $\|\mathbf{T}_\varphi^\varphi\| - \|\mathbf{T}_\varphi^\vartheta\| > 0 \forall (\varphi, \vartheta) \in ]0, \pi[ \times ]0, \pi[$  ist) eine Frage der Parametrierung des Potentials  $E$  ist, so kann auch die Verträglichkeit mit (4.33) über eine geeignete Parametrierung stets gewährleistet werden. Dies wird offensichtlich, wenn man sich vergegenwärtigt, dass (4.33) mit abnehmendem  $c_\vartheta$  in die Bedingung (3.17) der reduzierten Lageregelung übergeht. Die zweite Stellgrößenbeschränkung, die in (3.9) angegeben ist, führt auf die Bedingung

$$|T_z| = \|\mathbf{T}_z^\vartheta\| < \bar{\tau}_z, \quad (4.34)$$

die sich einhalten lässt, indem  $c_\vartheta < \frac{\bar{\tau}_z}{\sin(\vartheta_l)}$  gewählt wird. Wie zuvor bei der reduzierten Lageregelung in (3.17), wurden die Ungleichungen (4.33) und (4.34) strikt formuliert, um zu gewährleisten, dass stets Stellmoment zu Dämpfungszwecken verfügbar ist.

**Anmerkung 4.4** Die  $\varphi$ -Abhängigkeit von  $E_\vartheta$  kann selbstverständlich auch anders gestaltet werden, als in (4.25) vorgeschlagen. Dabei muss, mit Rücksicht auf die in Anmerkung 4.2 diskutierte Singularität, darauf geachtet werden, dass  $E_\vartheta$  für  $\varphi = \pi$  keine Abhängigkeit von  $\vartheta$  aufweist. Weiterhin muss im Hinblick auf ein kontinuierliches Stellmoment  $\frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi}(0, \vartheta) = \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi}(\pi, \vartheta) = 0$  gewährleistet sein. Die hier gewählte Gestalt der  $\varphi$ -Abhängigkeit begünstigt die lokale Stabilitätsanalyse in Unterabschnitt 4.3.3.

**Anmerkung 4.5** In den Gleichungen (4.32c) und (4.32d) der Momentenkomponenten  $\mathbf{T}_\perp^\vartheta$  und  $\mathbf{T}_z^\vartheta$  tritt der Faktor  $\frac{x_{d,Ay}}{\sqrt{1-x_{d,Ax}^2}}$  auf. Da  $\|\mathbf{x}_{d,Axy}\| = \sqrt{x_{d,Ax}^2 + x_{d,Ay}^2} = 1$  gilt, ist der Faktor für  $x_{d,Ay} \neq 0$  identisch mit  $\text{sgn}(x_{d,Ay})$  und nimmt damit lediglich Einfluss auf das Vorzeichen der Momente. Im Falle  $x_{d,Ay} = 0 \Leftrightarrow \vartheta \in \{0, \pi\}$  ist das Vorzeichen allerdings unbestimmt. Die Momente bleiben von dieser Singularität jedoch unbeeinflusst, da ihr Betrag dort, aufgrund von  $\frac{\partial E_\vartheta}{\partial \vartheta}(\varphi, 0) = \Lambda_{\vartheta_l}^{\vartheta_u}(0) = \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \vartheta}(\varphi, \pi) = \Lambda_{\vartheta_l}^{\vartheta_u}(\pi) = 0$ , verschwindet. Auch die in Anmerkung 3.4 diskutierten Singularitäten von  $\mathbf{e}_\varphi$  und  $\mathbf{e}_\perp$  für  $\varphi \in \{0, \pi\}$  wirken sich weder auf  $\mathbf{T}_\varphi^\vartheta$  noch auf  $\mathbf{T}_\perp^\vartheta$  aus, da  $\frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi}(0, \vartheta) = \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi}(\pi, \vartheta) = 0$  gilt und die Momente an den betreffenden Stellen folglich Null sind. Die Singularitätenfreiheit von  $\mathbf{T}_\varphi^\varphi$  wurde bereits in Anmerkung 3.4 festgestellt. Es lässt sich somit leicht überprüfen, dass sämtliche Momentenkomponenten in (4.32) global Lipschitz-stetige Vektorfelder auf  $SO(3)$  darstellen.

### 4.3.2 Entwurf der Dämpfungsstrategie

Der gewählte Aufbau der Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}_\tau$ , die das Regelgesetz (4.23) vervollständigt, orientiert sich stark an der Struktur, die bereits für die reduzierte Lageregelung in

Unterabschnitt 3.2.2 vorgestellt wurde. Im Unterschied zu (3.20) wird nun aber auch der Dämpfungskoeffizient  $d_z$  zustandsabhängig gestaltet. Dies dient dem Zweck, den zeitoptimalen Gedanken ebenfalls in die Bekämpfungsstrategie des Headingfehlers  $\vartheta$  einfließen zu lassen. Die verwendete Dämpfungsmatrix besitzt die Struktur

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\tau(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) &= \kappa_{xy}(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) (d_\varphi(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi^T + d_\perp \mathbf{e}_\perp \mathbf{e}_\perp^T) \\ &\quad + \kappa_z(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) d_z(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z^T \\ &= \begin{bmatrix} \kappa_{xy}(\mathbf{z}_{d,B}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) \mathbf{D}_{xy}(\mathbf{z}_{d,B}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \kappa_z(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) d_z(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Die enthaltenen Dämpfungskoeffizienten  $d_\varphi$ ,  $d_\perp$  und  $d_z$  entfalten ihre Wirkung im Zusammenspiel mit den Drehratenkomponenten  $\omega_\varphi$ ,  $\omega_\perp$  und  $\omega_z$ , die nun durch

$$\boldsymbol{\omega}_B^{DB} = \mathbf{e}_\perp^T \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \mathbf{e}_\perp + \mathbf{e}_\varphi^T \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z^T \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \mathbf{e}_z = \omega_\perp \mathbf{e}_\perp + \omega_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \omega_z \mathbf{e}_z$$

definiert sind. Während  $d_\varphi$  und  $d_z$  zustandsabhängig gewählt werden, wird für  $d_\perp$  wieder eine konstante positive Dämpfung angesetzt, um die unerwünschte Drehratenkomponente  $\omega_\perp$  ständig zu bedämpfen.

Die Verstärkungsfaktoren  $\kappa_{xy}$  und  $\kappa_z$ , die in (4.35) enthalten sind, dienen einmal mehr zur Umsetzung der Stellgrößensättigung. Ihre Wirkungsweise wurde für die reduzierte Lageregelung bereits in Abbildung 3.5 veranschaulicht, wobei in  $z$ -Richtung nun zusätzlich ein Moment aus dem Potential berücksichtigt werden muss. Definiert sind die Faktoren als die Lösungen der Optimierungsprobleme

$$\kappa_{xy} = \min_{\kappa > 0, \|\mathbf{T}_{xy} - \kappa \cdot \mathbf{D}_{xy} \boldsymbol{\omega}_{Bxy}^{DB}\| = \bar{\tau}_{xy}} (1, \kappa), \quad \kappa_z = \min_{\kappa > 0, |T_z - \kappa \cdot d_z \omega_z| = \bar{\tau}_z} (1, \kappa),$$

deren analytische Lösungen

$$\kappa_{xy} = \min \left( 1, \frac{\mathbf{T}_{xy}^T \mathbf{D}_{xy} \boldsymbol{\omega}_{Bxy}^{DB} + \sqrt{(\mathbf{T}_{xy}^T \mathbf{D}_{xy} \boldsymbol{\omega}_{Bxy}^{DB})^2 + (\bar{\tau}_{xy}^2 - \|\mathbf{T}_{xy}\|^2) \|\mathbf{D}_{xy} \boldsymbol{\omega}_{Bxy}^{DB}\|^2}}{\|\mathbf{D}_{xy} \boldsymbol{\omega}_{Bxy}^{DB}\|^2} \right), \quad (4.36)$$

$$\kappa_z = \min \left( 1, \frac{T_z d_z \omega_z + \sqrt{(T_z d_z \omega_z)^2 + (\bar{\tau}_z^2 - T_z^2) (d_z \omega_z)^2}}{(d_z \omega_z)^2} \right) \quad (4.37)$$

lauten.

In Anlehnung an die Notation in Kapitel 3 wird im Folgenden mit  $T_\varphi$  der Betrag des

Potentialmoments bezeichnet, der um die Achse  $\mathbf{e}_\varphi$  wirkt. Es gilt somit

$$T_\varphi = \|\mathbf{e}_\varphi^T \mathbf{T}\| = \|\mathbf{T}_\varphi^\varphi + \mathbf{T}_\varphi^\vartheta\| = \|\mathbf{T}_\varphi^\varphi\| - \|\mathbf{T}_\varphi^\vartheta\| \geq 0, \quad (4.38)$$

wobei für die letzte Umformung ausgenutzt wurde, dass  $\mathbf{T}_\varphi^\vartheta$  entgegengesetzt zu  $\mathbf{T}_\varphi^\varphi$  wirkt und aufgrund von (4.26) stets  $\|\mathbf{T}_\varphi^\varphi\| \geq \|\mathbf{T}_\varphi^\vartheta\|$  gilt. Mit dieser Definition können die funktionalen Zusammenhänge für den Dämpfungskoeffizienten  $d_\varphi$  nun unverändert von der reduzierten Lageregelung übernommen werden. Dahinter steht die Annahme, dass die in Unterabschnitt 3.2.2 durchgeführten Betrachtungen zur Auslegung von  $d_\varphi$  nach wie vor näherungsweise gültig sind. Dies ist plausibel, da aufgrund der Priorisierung der Schubrichtung davon ausgegangen werden kann, dass die Momentenkomponente  $\mathbf{T}_\varphi^\varphi$  die anderen Komponenten  $\mathbf{T}_\varphi^\vartheta$ ,  $\mathbf{T}_\perp^\vartheta$  und  $\mathbf{T}_z^\vartheta$  klar dominiert. Folglich wählt man

$$d_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}, \vartheta) = \frac{\varphi_l + \Delta_\varphi}{\varphi_l} \chi_{\varphi_u - \Delta_\varphi}^{\varphi_u}(\varphi, \delta_\varphi, d_\varphi^*(\varphi, \dot{\varphi}, \vartheta)), \quad (4.39a)$$

worin wiederum

$$d_\varphi^*(\varphi, \dot{\varphi}, \vartheta) = \chi_{s_\varphi(\varphi)}^{r_\varphi \cdot s_\varphi(\varphi)}(\dot{\varphi}, d_{\varphi, dec}^*(\dot{\varphi}, \varphi, \vartheta), d_{\varphi, acc}^*(\dot{\varphi}, \varphi, \vartheta)), \quad (4.39b)$$

$$s_\varphi(\varphi) = -\sqrt{v_{\varphi_l}^2 + 2\hat{J}_1^{-1} \bar{\tau}_{xy}(\varphi - \varphi_l)}, \quad (4.39c)$$

$$d_{\varphi, dec}^*(\dot{\varphi}, \varphi, \vartheta) = -\frac{T_\varphi(\varphi, \vartheta)}{\dot{\varphi}} - \frac{\bar{\tau}_{xy}}{\dot{\varphi}}, \quad (4.39d)$$

und

$$d_{\varphi, acc}^*(\dot{\varphi}, \varphi, \vartheta) = \begin{cases} -\frac{T_\varphi(\varphi, \vartheta)}{\dot{\varphi}} + \frac{\bar{\tau}_{xy}}{\dot{\varphi}} & \text{für } \dot{\varphi} > v_\varphi \\ -\frac{T_\varphi(\varphi, \vartheta)}{v_\varphi} + \frac{\bar{\tau}_{xy}}{v_\varphi} & \text{für } v_\varphi \geq \dot{\varphi} > 0 \\ 0 & \text{für } 0 \geq \dot{\varphi}, \end{cases} \quad (4.39e)$$

gilt. Man beachte, dass  $T_\varphi$  entsprechend (4.38) nun auch eine Abhängigkeit von  $\vartheta$  aufweist, die sich in  $d_\varphi$  niederschlägt. Davon abgesehen bleibt  $d_\varphi$  gegenüber der reduzierten Lageregelung unverändert und Abbildung 3.7 stellt weiterhin eine sinngemäße Veranschaulichung in der Phasenebene dar.

Auch der konstante Dämpfungskoeffizient  $d_\perp$  wird wie bei der reduzierten Lageregelung zu

$$d_\perp = \delta_\varphi \quad (4.40)$$

gewählt. In Unterabschnitt 3.2.2, S. 51 wurde dargelegt, dass durch diese spezielle Wahl die in Anmerkung 3.4 diskutierten Definitionslücken von  $\mathbf{e}_\varphi$  und  $\mathbf{e}_\perp$  keinen Einfluss auf die Dämpfungsmatrix (4.35) nehmen.

Der verbleibende Dämpfungskoeffizient  $d_z$  soll analog zu  $d_\varphi$  gestaltet werden, um den zeitoptimalen Gedanken auch in die Abbaustrategie für  $\vartheta$  aufzugreifen. Die Zielsetzung besteht wiederum darin, nach möglichst kurzer Zeit, mit einer vorgegebenen Drehrate  $\dot{\vartheta} = -v_{\vartheta_l} < 0$  in einen vorgegebenen Bereich  $\vartheta \leq \vartheta_l$  einzutreten. Es wird im weiteren Verlauf zunächst das Ergebnis für  $d_z$  vorweggenommen, bevor die zu Grunde liegende Auslegung im Anschluss daran erläutert wird. Obwohl die Struktur von  $d_z$  weitgehend analog zu der von  $d_\varphi$  ist, ergibt sich doch ein etwas komplexerer funktionaler Zusammenhang. Insbesondere wird die Größe

$$\dot{\vartheta}_z = \frac{-x_{d,Ay}}{\sqrt{1-x_{d,Ax}^2}} \mathbf{e}_z^T \boldsymbol{\omega}_B^{DB} = \frac{-x_{d,Ay}}{\sqrt{1-x_{d,Ax}^2}} \omega_{Bz}^{DB} = \frac{-x_{d,Ay}}{\sqrt{1-x_{d,Ax}^2}} \omega_z \quad (4.41)$$

benötigt, die, wie aus dem Vergleich mit (4.30) hervorgeht, den durch  $\omega_z$  beeinflussten Anteil von  $\dot{\vartheta}$  repräsentiert. Weiterhin wird die Schreibweise  $T_z^+$  für den Betrag der  $z$ -Komponente von  $\mathbf{T}$  eingeführt. Es gilt somit

$$T_z^+(\varphi, \vartheta) = |T_z| = \|\mathbf{T}_z^\vartheta\| = \begin{cases} \frac{(\cos(\frac{\varphi}{2}) - \cos(\frac{\varphi_u}{2}))^2}{(1 - \cos(\frac{\varphi_u}{2}))^2} c_\vartheta \Lambda_{\vartheta_l}^{\vartheta_u}(\vartheta) & \text{für } \varphi \leq \varphi_u, \\ 0 & \text{für } \varphi > \varphi_u. \end{cases} \quad (4.42)$$

Mit (4.41) und (4.42) kann nun  $d_z$  angegeben werden als

$$d_z(\varphi, \vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{\vartheta}_z) = \chi_{\varphi_u - \Delta_\varphi}^{\varphi_u} \left( \varphi, \vartheta_l + \Delta_\vartheta \chi_{\vartheta_u - \Delta_\vartheta}^{\vartheta_u} \left( \vartheta, \delta_z, d_z^*(\varphi, \vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{\vartheta}_z) \right), \delta_z \right), \quad (4.43a)$$

worin  $\Delta_\vartheta < \frac{\vartheta_u - \vartheta_l}{2}$  und  $\delta_z$  positive Konstanten sind und die Funktion  $d_z^*(\varphi, \vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{\vartheta}_z)$  durch

$$d_z^*(\varphi, \vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{\vartheta}_z) = \chi_{s_\vartheta(\vartheta)}^{r_\vartheta \cdot s_\vartheta(\vartheta)} \left( \dot{\vartheta}, d_{z,dec}^*(\varphi, \vartheta, \dot{\vartheta}_z), d_{z,acc}^*(\varphi, \vartheta, \dot{\vartheta}_z) \right) \quad (4.43b)$$

gegeben ist. Hierin bestimmt die Konstante  $0 < r_\vartheta < 1$  den, der Schaltlinie

$$s_\vartheta(\vartheta) = -\sqrt{v_{\vartheta_l}^2 + 2\hat{J}_2^{-1} \bar{\tau}_z (\vartheta - \vartheta_l)} < 0 \quad (4.43c)$$

vorgelagerten Überblendbereich. Weiterhin ist die bremsoptimale Dämpfung durch

$$d_{z,dec}^*(\varphi, \vartheta, \dot{\vartheta}_z) = \begin{cases} -\frac{T_z^+(\varphi, \vartheta)}{\dot{\vartheta}_z} - \frac{\bar{\tau}_z}{\dot{\vartheta}_z} & \text{für } \dot{\vartheta}_z < -v_\vartheta, \\ -\frac{T_z^+(\varphi, \vartheta)}{-v_\vartheta} - \frac{\bar{\tau}_z}{-v_\vartheta} & \text{für } -v_\vartheta \leq \dot{\vartheta}_z < 0, \\ 0 & \text{für } 0 \leq \dot{\vartheta}_z, \end{cases} \quad (4.43d)$$

und die Beschleunigungsoptimale durch

$$d_{z,acc}^*(\varphi, \vartheta, \dot{\vartheta}_z) = \begin{cases} -\frac{T_z^+(\varphi, \vartheta)}{\dot{\vartheta}_z} + \frac{\bar{\tau}_z}{\dot{\vartheta}_z} & \text{für } \dot{\vartheta}_z > v_\vartheta, \\ -\frac{T_z^+(\varphi, \vartheta)}{v_\vartheta} + \frac{\bar{\tau}_z}{v_\vartheta} & \text{für } v_\vartheta \geq \dot{\vartheta}_z > 0, \\ 0 & \text{für } 0 \geq \dot{\vartheta}_z, \end{cases} \quad (4.43e)$$

definiert. Mit  $v_\vartheta$  wird in den Ausdrücken (4.43d) und (4.43e) eine kleine positive Konstante bezeichnet, die das unbegrenzte Anwachsen des Dämpfungskoeffizienten für  $\dot{\vartheta}_z \rightarrow 0$  verhindert. Abbildung 4.6 veranschaulicht, die gewählte Dämpfungsstrategie für  $d_z$  im Phasenraum.

Folgende Überlegungen führen auf die angegebene Struktur der Dämpfung: Durch die priorisierte Ausrichtung des Schubs, aufgrund des dominanten Moments  $\mathbf{T}_\varphi^\varphi$ , im Zusammenspiel mit der zeitoptimal inspirierten Dämpfung  $d_\varphi$ , ist davon auszugehen, dass der Einschwingvorgang zumeist annähernd sequentiell ablaufen wird. Damit ist gemeint, dass in einer ersten Phase  $\varphi$  zu Null gemacht wird, während  $\vartheta$  sich nur wenig verändert. Erst anschließend, in einer zweiten Phase, wird dann  $\vartheta$  abgebaut. Geht man davon aus, dass die Annahme 3.1 (S. 49) bezüglich des Trägheitstensors erfüllt ist und die erste Phase bereits abgeschlossen ist, so gilt  $\varphi \equiv 0$  und es folgt, dass alle

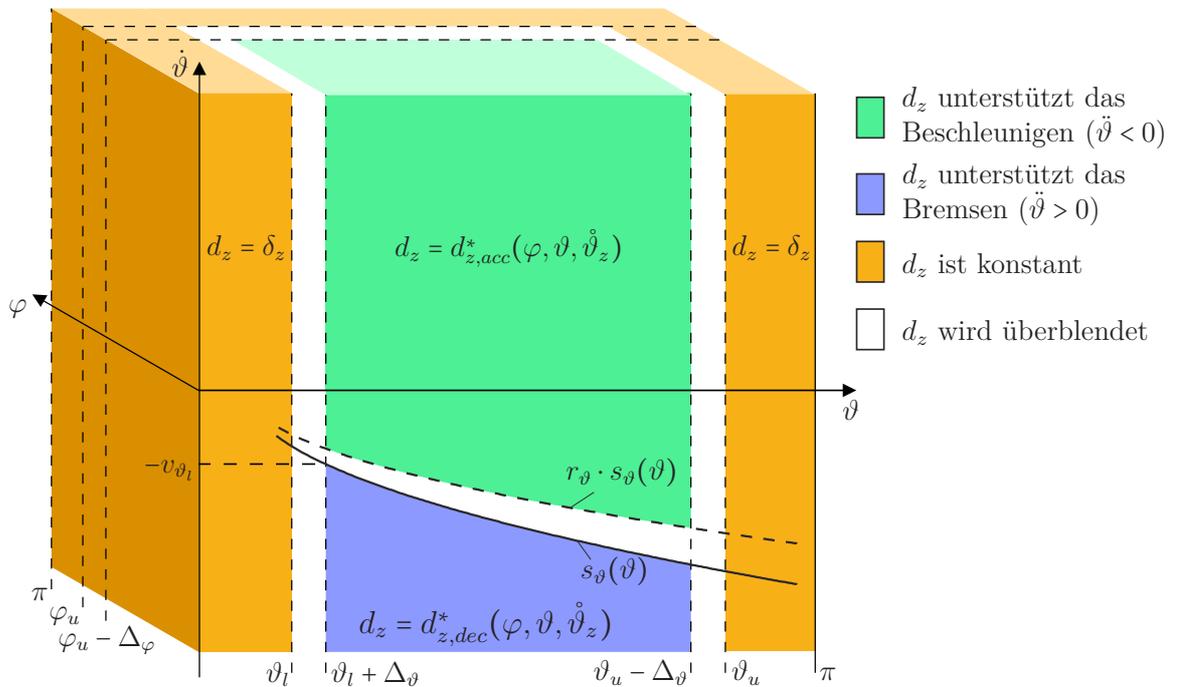


Abbildung 4.6: Dämpfungskoeffizient  $d_z$  im Phasenraum. In den weißen Bereichen wird  $d_z$  zwischen den Randwerten der benachbarten farbigen Bereiche überblendet.

weiteren Bewegungen ausschließlich um die Achse  $\mathbf{e}_z$  ablaufen, d. h.  $\boldsymbol{\omega}_B^{DB} = \omega_z \cdot \mathbf{e}_z$  und  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_B^{DB} = \dot{\omega}_z \cdot \mathbf{e}_z$ . Die resultierende Dynamik lässt sich dann (für  $\vartheta \notin \{0, \pi\}$  und  $\kappa_z = 1$ ) durch die skalare Differentialgleichung

$$\hat{J}_2 \ddot{\vartheta} = -T_z^+(0, \vartheta) - d_z(0, \vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{\vartheta}_z) \cdot \dot{\vartheta} \quad (4.44)$$

angeben. Ihre Struktur ist analog zur Differentialgleichung (3.27) auf deren Basis  $d_\varphi$  in Unterabschnitt 3.2.2 entworfen wurde. Aus (4.30) geht hervor, dass  $\dot{\vartheta}_z = \dot{\vartheta}$  gilt, wenn  $\varphi = 0 \Leftrightarrow \mathbf{z}_{d,B} = \mathbf{e}_z$  oder  $\omega_1 = 0$  erfüllt ist. Beides trifft im betrachteten Fall zu, wodurch der Gleichungssatz (4.43) strukturell identisch zum Gleichungssatz (4.39) wird. Um dies zu sehen, beachte man, dass aufgrund von (4.43b) die Funktion  $d_{z,dec}^*(\varphi, \vartheta, \dot{\vartheta}_z)$  nur aktiv ist, wenn  $\dot{\vartheta} < s_\vartheta(\vartheta) < 0$  gilt. Da im betrachteten Fall  $\dot{\vartheta}_z$  identisch mit  $\dot{\vartheta}$  ist, wirken sich die, in (4.43d) gegenüber (4.39d) zusätzlich vorhandenen, Fallunterscheidungen nicht aus. Weiterhin bleibt auch, die in (4.43a) zusätzlich vorhandene, äußere Blendfunktion für  $\varphi \equiv 0$  ohne Wirkung.

Die strukturellen Änderungen in (4.43) gegenüber (4.39) sind dann ausschlaggebend, wenn die vorliegenden Verhältnisse signifikant vom Auslegungsfall abweichen. Das äußere  $\varphi$ -abhängige Überblendfunktional in (4.43a) sorgt dafür, dass für  $\varphi > \varphi_u$  eine konstante Dämpfung  $d_z = \delta_z$  wirkt und vermeidet so die unzulässige  $\vartheta$ -Abhängigkeit für  $\varphi = \pi$  (vgl. Anmerkungen 4.2 und 4.3). Weiterhin muss der Tatsache Rechnung getragen werden, dass  $d_z$  nur im Zusammenhang mit  $\omega_z$  wirksam ist, die zeitliche Entwicklung des Fehlers  $\dot{\vartheta}$  aber im Allgemeinen auch von  $\omega_1$  beeinflusst wird (vgl. (4.30)). Dies geschieht zum einen dadurch, dass in den Fallunterscheidungen in (4.43d) und (4.43e), anstatt  $\dot{\vartheta}$ , nur der von  $\omega_z$  beeinflusste Teil  $\dot{\vartheta}_z$  genutzt wird. Zum anderen muss nun die Möglichkeit berücksichtigt werden, dass  $\dot{\vartheta}$  und  $\dot{\vartheta}_z$  unterschiedliche Vorzeichen besitzen können. Dies geschieht durch die zusätzlichen Fallunterscheidungen in (4.43d). Zum besseren Verständnis sei hier ein Beispiel aufgeführt: Angenommen es gilt  $\dot{\vartheta} < s_\vartheta(\vartheta)$ , was bedeutet, dass der Fehlerwinkel  $\vartheta$  so schnell abnimmt, dass maximales Abbremsen ( $\dot{\vartheta} > 0$ ) erwünscht ist. Falls nun gleichzeitig  $\dot{\vartheta}_z > 0$  gilt, so trägt  $\omega_z$  bereits positiv zu  $\dot{\vartheta}$  bei und entsprechend wäre jegliche Dämpfung von  $\omega_z$  kontraproduktiv. Deshalb stellt  $d_z = 0$  in diesem Fall die sinnvollste Wahl dar.

### 4.3.3 Stabilitätseigenschaften der Ruhelagen

Im Verlauf der vorangegangenen Abschnitte wurden alle Bestandteile des energiebasiereten Regelgesetzes zur vollständigen Lageregelung zusammengetragen. In diesem Unterabschnitt erfolgt nun die Stabilitätsanalyse der Ruhelagen des geschlossenen Regelkrei-

ses. Für den verbleibenden Teil des Abschnitts wird unter dem *geschlossenen Regelkreis* die Folgedynamik (4.21) im Zusammenwirken mit der Zustandsrückführung (4.23) verstanden. Dabei ist das Potentialmoment  $\mathbf{T}$  durch (4.31) und (4.32) und die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}_\tau$  durch (4.35) bestimmt. Die Dämpfungskoeffizienten  $d_\varphi$ ,  $d_\perp$ ,  $d_z$  erfüllen (4.39), (4.40) und (4.43) und die Verstärkungsfaktoren  $\kappa_{xy}$  und  $\kappa_z$  sind über (4.36) und (4.37) definiert.

Indem die linke Seite des geschlossenen Regelkreises gleich Null gesetzt wird, ermittelt man seine Ruhelagen. Sie sind bestimmt durch diejenigen Stellen des Zustandsraums, an denen das Potential  $E$  seine kritischen Punkte aufweist. Man ermittelt für  $(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB})$  die beiden isolierten Ruhelagen

$$\mathbf{W}_d = (\mathbf{I}_3, \mathbf{0}) , \quad \mathbf{W}_{u1} = \left( \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_x & -\mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \end{bmatrix}, \mathbf{0} \right)$$

sowie die Ruhelagenmenge

$$\mathcal{W}_{u2} = \{ (\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) \in \mathcal{W} \mid \mathbf{R}_{BD} \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_z, \boldsymbol{\omega}_B^{DB} = \mathbf{0} \} .$$

Damit existieren, neben der erwünschten Ruhelage  $\mathbf{W}_d$ , noch weitere unerwünschte Ruhelagen, wie es bei einer Lageregelung mit kontinuierlichem Regelgesetz unvermeidlich ist [15]. Die unerwünschte Ruhelage  $\mathbf{W}_{u1}$  zeichnet sich dadurch aus, dass zwar die Schubrichtung korrekt ausgerichtet ist ( $\mathbf{z}_{d,B} = \mathbf{e}_z \Leftrightarrow \varphi = 0$ ), die körperfeste  $x$ -Achse (und damit auch die  $y$ -Achse) jedoch antiparallel zu ihrer Wunschausrichtung steht ( $\mathbf{x}_{d,B} = -\mathbf{e}_x, \mathbf{y}_{d,B} = -\mathbf{e}_y \Rightarrow \vartheta = \pi$ ). Die unerwünschte Ruhelagenmenge  $\mathcal{W}_{u2}$  umfasst sämtliche Orientierungen des Quadrocopters, in denen  $\mathbf{z}_{d,B} = -\mathbf{e}_z \Leftrightarrow \varphi = \pi$  gilt und somit die Schubrichtung antiparallel zur Zielausrichtung ist.

In der anschließenden lokalen Stabilitätsanalyse wird gezeigt, dass es sich bei  $\mathbf{W}_d$  um eine lokal exponentiell stabile Ruhelage handelt und das sämtliche unerwünschten Ruhelagen instabil sind. Durch die globale Analyse wird schließlich fast global asymptotische Stabilität der Zielruhelage  $\mathbf{W}_d$  nachgewiesen.

### 4.3.3.1 Lokale Stabilitätseigenschaften

Der Nachweis der lokalen Stabilitätseigenschaften der isolierten Ruhelagen erfolgt durch die Analyse der Linearisierung in Minimalkoordinaten. In Abschnitt 4.2 wurde hergeleitet, dass  $(\mathbf{z}_{d,B}, \mathbf{x}_{d,Axy})$ , fast überall im Zustandsraum, eine zu  $\mathbf{R}_{BD}$  gleichwertige Darstellung des Lagefehlers repräsentiert. Dies gilt insbesondere an den Ruhelagen  $\mathbf{W}_d$  und  $\mathbf{W}_{u1}$ , wo  $(\mathbf{z}_{d,B}, \mathbf{x}_{d,Axy}) = (\mathbf{e}_z, \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T)$  und  $(\mathbf{z}_{d,B}, \mathbf{x}_{d,Axy}) = (\mathbf{e}_z, \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}^T)$  gilt, sowie

in deren Umgebung. Dort kann die kinematische Gleichung (4.21a) folglich durch die Gleichungen (4.15) und (4.20) gleichwertig ersetzt werden. Da  $\mathbf{R}_{BD} \in SO(3)$  ist und somit drei Freiheitsgrade aufweist, besitzt die Darstellung  $(\mathbf{z}_{d,B}, \mathbf{x}_{d,Axy}) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^1$  immer noch zwei Koordinaten mehr, als die gesuchte Minimaldarstellung. Um zu einer solchen zu gelangen, wird die Tatsache ausgenutzt, dass  $\mathbf{z}_{d,B}$  auf der Einheitskugel und  $\mathbf{x}_{d,Axy}$  auf dem Einheitskreis lebt. In geeigneten Umgebungen der Ruhelagen  $\mathbf{W}_d$  und  $\mathbf{W}_{u1}$ , wo  $z_{d,Bz} > 0$  gilt, kann deshalb  $z_{d,Bz}$  über die Beziehung  $z_{d,Bz} = \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)}$  durch  $z_{d,Bx}$  und  $z_{d,By}$  ersetzt werden. In analoger Weise kann man  $x_{d,Ax}$ , in der Nähe von  $\mathbf{W}_d$ , durch  $x_{d,Ax} = \sqrt{1 - x_{d,Ay}^2}$  und, in der Nähe von  $\mathbf{W}_{u1}$ , durch  $x_{d,Ax} = -\sqrt{1 - x_{d,Ay}^2}$  darstellen. Für die Linearisierung um die Ruhelagen  $\mathbf{W}_d$  und  $\mathbf{W}_{u1}$  werden deshalb sämtliche, von der Lage  $\mathbf{R}_{BD}$  abhängigen Terme, durch die Minimaldarstellung  $(z_{d,Bx}, z_{d,By}, x_{d,Ay})$  ersetzt.

Um mit der Ruhelagenmenge  $\mathcal{W}_{u2}$  umzugehen, wird der Umstand ausgenutzt, dass, in einer Umgebung von  $\mathcal{W}_{u2}$ , charakterisiert durch  $\varphi > \varphi_u$ , die Dynamik von  $\mathbf{z}_{d,B}$  und  $\boldsymbol{\omega}_B^{DB}$  entkoppelt betrachtet werden kann. Dort verhält sich der geschlossene Regelkreis folglich wie bei einer reduzierten Lageregelung. Dies ist leicht nachzuvollziehen, da alle Terme des Regelgesetzes ausschließlich von  $(\mathbf{z}_{d,B}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB})$  abhängen, sobald  $\varphi > \varphi_u$  gilt. Im Hinblick auf diese entkoppelte Dynamik des geschlossenen Regelkreises, die durch (4.15) und (4.21b) zusammen mit dem Regelgesetz definiert wird, reduziert sich die Ruhelagenmenge  $\mathcal{W}_{u2}$  auf die isolierte Ruhelage  $(\mathbf{z}_{d,B}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) = (-\mathbf{e}_z, \mathbf{0})$ . Dadurch kann die Stabilitätsuntersuchung analog zur reduzierten Lageregelung, wie in Theorem 3.3, durchgeführt werden. Dazu wird erneut ausgenutzt, dass  $\mathbf{z}_{d,B} \in \mathcal{S}^2$  nur zwei Freiheitsgrade besitzt und  $z_{d,Bz}$ , in einer Umgebung der Ruhelage, somit über die Beziehung  $z_{d,Bz} = -\sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)}$  ersetzt werden kann.

**Theorem 4.1 (Lokale Stabilitätseigenschaften der Ruhelage  $\mathbf{W}_d$ )** *Die Ruhelage  $\mathbf{W}_d$  des geschlossenen Regelkreises ist lokal exponentiell stabil.*

**Beweis:** Mit  $z_{d,Bz} = \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)}$  lauten die ersten beiden Zeilen von (4.15)

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{d,Bx} \\ \dot{z}_{d,By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{Bz}^{DB} z_{d,By} - \omega_{By}^{DB} \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)} \\ -\omega_{Bz}^{DB} z_{d,Bx} + \omega_{Bx}^{DB} \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)} \end{bmatrix}. \quad (4.45a)$$

Die zweite Zeile von (4.20) wird mit  $x_{d,Ax} = \sqrt{1 - x_{d,Ay}^2}$  zu

$$\dot{x}_{d,Ay} = -\sqrt{1 - x_{d,Ay}^2} \left( \frac{z_{d,Bx} \omega_{Bx}^{DB}}{1 + \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)}} + \frac{z_{d,By} \omega_{By}^{DB}}{1 + \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)}} + \omega_{Bz}^{DB} \right). \quad (4.45b)$$

Als nächstes werden die Bestandteile des Potentialmoments  $\mathbf{T}$  durch  $(z_{d,Bx}, z_{d,By}, x_{d,Ay})$  dargestellt. Unter Ausnutzung der Beziehung  $\sqrt{z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2} = \sin(\varphi)$ , die aufgrund des Wertebereiches  $\varphi \in [0, \pi]$  stets erfüllt ist, erhält man aus (4.32a) für das Moment  $\mathbf{T}_\varphi^\varphi$  in einer ausreichend kleinen Umgebung von  $\mathbf{W}_d$

$$\mathbf{T}_\varphi^\varphi = c_\varphi \sin(\varphi) \cdot \mathbf{e}_\varphi = c_\varphi \sin(\varphi) \cdot \frac{1}{\sin(\varphi)} \begin{bmatrix} -z_{d,By} \\ z_{d,Bx} \\ 0 \end{bmatrix} = c_\varphi \begin{bmatrix} -z_{d,By} \\ z_{d,Bx} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.46a)$$

Die Momentenkomponente  $\mathbf{T}_\varphi^\vartheta$  aus (4.32b) kann mit Hilfe der Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(\varphi))}, \\ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi))}, \\ \sin(\varphi) &= \sqrt{1 - \cos(\varphi)^2} = \sqrt{(1 + \cos(\varphi))} \sqrt{(1 - \cos(\varphi))} \quad \text{und} \\ z_{d,Bz} &= \cos(\varphi) \end{aligned}$$

umformuliert werden. Man erhält

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\varphi^\vartheta &= c_\vartheta \int_0^\vartheta \Lambda_{\vartheta_l}^{\vartheta_u}(a) da \cdot \frac{-\left(\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi))} - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right)\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos(\varphi)}}{(1 - \cos(\frac{\varphi_u}{2}))^2} \cdot \mathbf{e}_\varphi = \\ &= \int_0^\vartheta \Lambda_{\vartheta_l}^{\vartheta_u}(a) da \cdot \frac{\frac{-c_\vartheta}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi))} - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right)\right) \sqrt{1 - \cos(\varphi)}}{(1 - \cos(\frac{\varphi_u}{2}))^2 \sqrt{1 + \cos(\varphi)} \sqrt{1 - \cos(\varphi)}} \begin{bmatrix} -z_{d,By} \\ z_{d,Bx} \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \int_0^{\arccos(x_{d,Ax})} \Lambda_{\vartheta_l}^{\vartheta_u}(a) da \cdot \frac{\frac{-c_\vartheta}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{2}(1 + z_{d,Bz})} - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right)\right)}{(1 - \cos(\frac{\varphi_u}{2}))^2 \sqrt{1 + z_{d,Bz}}} \begin{bmatrix} -z_{d,By} \\ z_{d,Bx} \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \int_0^{\arccos(\sqrt{1 - x_{d,Ay}^2})} \Lambda_{\vartheta_l}^{\vartheta_u}(a) da \cdot \frac{\frac{-c_\vartheta}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)}\right)} - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right)\right)}{(1 - \cos(\frac{\varphi_u}{2}))^2 \sqrt{1 + \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)}}} \begin{bmatrix} -z_{d,By} \\ z_{d,Bx} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.46b) \end{aligned}$$

Nutzt man die Beziehung  $\sqrt{1 - x_{d,Ax}^2} = \sin(\vartheta)$ , die aufgrund  $\vartheta \in [0, \pi]$  stets gilt, sowie weitere der oben eingeführten Zusammenhänge, so kann man  $\mathbf{T}_\perp^\vartheta$  aus (4.32c), in einer entsprechend kleinen Umgebung der Ruhelage, angeben als

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_\perp^\vartheta &= \frac{\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right)\right)^2}{\left(1 - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right)\right)^2} \cdot c_\vartheta \sin(\vartheta) \cdot \frac{x_{d,Ay} \sqrt{z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2}}{\sin(\vartheta) (1 + z_{d,Bz})} \cdot \mathbf{e}_\perp = \\
 &= \frac{c_\vartheta \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right)\right)^2}{\left(1 - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right)\right)^2} \cdot \frac{x_{d,Ay} \sqrt{z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2}}{1 + z_{d,Bz}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2}} \begin{bmatrix} z_{d,Bx} \\ z_{d,By} \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{c_\vartheta \left(\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)}\right)} - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right)\right)^2}{\left(1 - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right)\right)^2 \left(1 + \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)}\right)} x_{d,Ay} \begin{bmatrix} z_{d,Bx} \\ z_{d,By} \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.46c}$$

Für die letzte Komponente  $\mathbf{T}_z^\vartheta$  aus (4.32d) ergibt sich, nahe der Ruhelage, mit den eingeführten Beziehungen, schließlich

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_z^\vartheta &= \frac{\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right)\right)^2}{\left(1 - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right)\right)^2} \cdot c_\vartheta \sin(\vartheta) \cdot \frac{x_{d,Ay}}{\sin(\vartheta)} \mathbf{e}_z = \\
 &= \frac{c_\vartheta \left(\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)}\right)} - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right)\right)^2}{\left(1 - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right)\right)^2} x_{d,Ay} \mathbf{e}_z.
 \end{aligned} \tag{4.46d}$$

Aus der, in Unterabschnitt 4.3.2, festgelegten Dämpfungsstrategie geht hervor, dass die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}_\tau$  in einer ausreichend kleinen Umgebung von  $\mathbf{W}_d$  konstant wird. Es gilt dort

$$\mathbf{D}_\tau = \text{diag}(\delta_\varphi, \delta_\varphi, \delta_z). \tag{4.47}$$

Wählt man nun für die Linearisierung um  $\mathbf{W}_d$ , den minimalen Zustandsvektor  $\mathbf{w}_d = \left[ \mathbf{x}_d^T \quad (\boldsymbol{\omega}_B^{DB})^T \right]^T$  mit  $\mathbf{x}_d = \begin{bmatrix} z_{d,By} & -z_{d,Bx} & -x_{d,Ay} \end{bmatrix}^T$ , so liegt die Ruhelage  $\mathbf{W}_d$  bezüglich des Minimalzustands in Null. Unter Berücksichtigung der Vorzeichenwahl in  $\mathbf{x}_d$  führt die Linearisierung der Gleichungen (4.45) um  $\mathbf{w}_d = \mathbf{0}$  auf

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \boldsymbol{\omega}_B^{DB}. \tag{4.48}$$

Die Linearisierung von (4.21b), unter Berücksichtigung des Regelgesetzes (4.23) mit den Momentenkomponenten (4.46) und der Dämpfung (4.47), ist langwierig aber unkom-

pliziert und ergibt

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_B^{DB} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}_d\boldsymbol{\kappa}_d - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{\omega}_B^{DB}, \quad (4.49)$$

wobei  $\mathbf{C}_d = \text{diag}(c_\varphi, c_\varphi, c_\theta) > 0$  und  $\mathbf{B} = \text{diag}(\delta_\varphi, \delta_\varphi, \delta_z) > 0$  gilt. Durch Kombination von (4.48) und (4.49) erhält man schließlich

$$\dot{\mathbf{w}}_d = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}_d & -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_d} \mathbf{w}_d.$$

Da alle Eigenwerte von  $\mathbf{C}_d$  positiv sind, besitzt  $\mathbf{A}_d$  nach Theorem 3.1 ausschließlich Eigenwerte in der offenen linken Halbebene. Hieraus folgt unmittelbar die lokal exponentielle Stabilität der Zielruhelage  $\mathbf{W}_d$  [95, Corollary 4.3].

**Theorem 4.2 (Lokale Stabilitätseigenschaften der Ruhelage  $\mathbf{W}_{u1}$ )** *Die Ruhelage  $\mathbf{W}_{u1}$  des geschlossenen Regelkreises ist instabil.*

**Beweis:** Der Beweis erfolgt analog zu dem von Theorem 4.1. In einer ausreichend kleinen Umgebung von  $\mathbf{W}_{u1}$  gilt  $z_{d,Bz} = \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)}$  und  $x_{d,Ax} = -\sqrt{1 - x_{d,Ay}^2}$ . Hieraus folgt für die ersten beiden Zeilen von (4.15) und für die erste Zeile von (4.20)

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{d,Bx} \\ \dot{z}_{d,By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{Bz}^{DB} z_{d,By} - \omega_{By}^{DB} \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)} \\ -\omega_{Bz}^{DB} z_{d,Bx} + \omega_{Bx}^{DB} \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)} \end{bmatrix}, \quad (4.50a)$$

$$\dot{x}_{d,Ay} = \sqrt{1 - x_{d,Ay}^2} \left( \frac{z_{d,Bx} \omega_{Bx}^{DB}}{1 + \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)}} + \frac{z_{d,By} \omega_{By}^{DB}}{1 + \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)}} + \omega_{Bz}^{DB} \right). \quad (4.50b)$$

In gleichartiger Weise, wie im Beweis zu Theorem 4.1, können die Bestandteile des Potentialmoments  $\mathbf{T}$  ermittelt werden. Man erhält

$$\mathbf{T}_\varphi^\varphi = c_\varphi \begin{bmatrix} -z_{d,By} \\ z_{d,Bx} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.51a)$$

$$\mathbf{T}_\varphi^\theta = \int_0^{\arccos(-\sqrt{1-x_{d,Ay}^2})} \Lambda_{\theta_l}^{\vartheta_u}(a) da \cdot \frac{\frac{-c_\theta}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)} \right)} - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right) \right)}{\left( 1 - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right) \right)^2 \sqrt{1 + \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)}}} \begin{bmatrix} -z_{d,By} \\ z_{d,Bx} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.51b)$$

$$\mathbf{T}_\perp^\vartheta = \frac{c_\vartheta \frac{\sin(\vartheta_l)}{\sin(\vartheta_u)} \left( \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)} \right)} - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right) \right)^2 x_{d,Ay}}{\left( 1 - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right) \right)^2 \left( 1 + \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)} \right)} \begin{bmatrix} z_{d,Bx} \\ z_{d,By} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.51c)$$

$$\mathbf{T}_z^\vartheta = \frac{c_\vartheta \frac{\sin(\vartheta_l)}{\sin(\vartheta_u)} \left( \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)} \right)} - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right) \right)^2 x_{d,Ay}}{\left( 1 - \cos\left(\frac{\varphi_u}{2}\right) \right)^2} \mathbf{e}_z. \quad (4.51d)$$

Durch die festgelegte Dämpfungsstrategie wird die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}_\tau$  in einer Umgebung von  $\mathbf{W}_{u1}$  konstant. Dort ist

$$\mathbf{D}_\tau = \text{diag}(\delta_\varphi, \delta_\varphi, \delta_z) \quad (4.52)$$

erfüllt.

Zur Durchführung der Linearisierung wählt man nun den minimalen Zustandsvektor  $\mathbf{w}_{u1} = \left[ \mathbf{x}_{u1}^T \quad (\boldsymbol{\omega}_B^{DB})^T \right]^T$ , mit  $\mathbf{x}_{u1} = \left[ z_{d,By} \quad -z_{d,Bx} \quad -x_{d,Ay} \right]^T$ , bezüglich dem die Ruhelage  $\mathbf{W}_{u1}$  in Null liegt. Unter Berücksichtigung der Vorzeichenwahl in  $\mathbf{x}_{u1}$  führt die Linearisierung der Gleichungen (4.50) um  $\mathbf{w}_{u1} = \mathbf{0}$  auf

$$\dot{\mathbf{x}}_{u1} = \boldsymbol{\omega}_B^{DB}. \quad (4.53)$$

Aus der Linearisierung von (4.21b), unter Berücksichtigung des Regelgesetzes (4.23) mit den Momentenkomponenten (4.51) und der Dämpfung (4.52), resultiert schließlich

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_B^{DB} = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{C}_{u1} \mathbf{x}_{u1} - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}_B^{DB}, \quad (4.54)$$

wobei  $\mathbf{B} = \text{diag}(\delta_\varphi, \delta_\varphi, \delta_z) > 0$  und  $\mathbf{C}_{u1} = \text{diag}(c_{u1}, c_{u1}, -c_\vartheta \frac{\sin(\vartheta_l)}{\sin(\vartheta_u)})$  mit  $c_{u1} = c_\varphi - \frac{c_\vartheta}{2(1 - \cos(\frac{\varphi_u}{2}))}$ .  $\int_0^\pi \Lambda_{\vartheta_l}^{\vartheta_u}(a) da$  gilt. Die Kombination von (4.53) und (4.54) liefert schließlich die lineare Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{\mathbf{w}}_{u1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{C}_{u1} & -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{u1}} \mathbf{w}_{u1}.$$

Da aufgrund der Forderung (4.27) stets  $c_{u1} > 0$  gilt und  $\mathbf{C}_{u1}$  folglich zwei positive und einen negativen Eigenwert besitzt, weist die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_{u1}$ , entsprechend Theorem 3.1, fünf Eigenwerte in der offenen linken und einen Eigenwert in der offenen rechten Halbebene auf. Nach [95, Theorem 4.7] ist somit die Instabilität der Ruhelage

$\mathcal{W}_{u1}$  nachgewiesen. □

**Theorem 4.3 (Lokale Stabilitätseigenschaften der Ruhelagenmenge  $\mathcal{W}_{u2}$ )**

Die Ruhelagenmenge  $\mathcal{W}_{u2}$  besteht ausschließlich aus instabilen Ruhelagen.

**Beweis:** Zu Beginn des Unterabschnitts 4.3.3.1 wurde bereits darauf hingewiesen, dass in einer Umgebung von  $\mathcal{W}_{u2}$ , genauer gesagt im Bereich  $\mathcal{U} = \{(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) \in \mathcal{W} \mid \varphi \geq \varphi_u\}$ , die Dynamik der reduzierten Lage, gegeben durch  $\mathbf{z}_{d,B}$  und  $\boldsymbol{\omega}_B^{DB}$ , entkoppelt betrachtet werden kann. Bezüglich dieser Teildynamik wird die Ruhelagenmenge  $\mathcal{W}_{u2}$  vollständig durch die isolierte Ruhelage  $(\mathbf{z}_{d,B}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) = (-\mathbf{e}_z, \mathbf{0})$  repräsentiert. Indem gezeigt wird, dass diese Ruhelage der entkoppelten Teildynamik instabil ist, kann auf die Instabilität sämtlicher in  $\mathcal{W}_{u2}$  enthaltener Ruhelagen der vollständigen Lagedynamik geschlossen werden.

In einer ausreichend kleinen Umgebung von  $\mathcal{W}_{u2}$  kann  $z_{d,Bz}$  mit Hilfe der Gleichung  $z_{d,Bz} = -\sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)}$  ersetzt werden. Damit ergibt sich für die ersten beiden Zeilen von (4.15)

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{d,Bx} \\ \dot{z}_{d,By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{Bz}^{DB} z_{d,By} + \omega_{By}^{DB} \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)} \\ -\omega_{Bz}^{DB} z_{d,Bx} - \omega_{Bx}^{DB} \sqrt{1 - (z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2)} \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Für  $(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) \in \mathcal{U}$  trägt die Potentialkomponente  $E_\vartheta$  nichts zum Gesamtpotential  $E$  bei. Infolgedessen verschwinden dort sämtliche Momentenkomponenten, die durch  $E_\vartheta$  induziert werden und es gilt entsprechend (4.32)

$$\mathbf{T}_\varphi^\vartheta = \mathbf{T}_\perp^\vartheta = \mathbf{T}_z^\vartheta = \mathbf{0}. \quad (4.56a)$$

Die verbleibende Komponente  $\mathbf{T}_\varphi^\varphi$  des Potentialmoments  $\mathbf{T}$  kann mit obiger Ersetzung von  $z_{d,Bz}$  und unter Ausnutzung der Beziehung  $\sqrt{z_{d,Bx}^2 + z_{d,By}^2} = \sin(\varphi)$  in einer ausreichend kleinen Umgebung von  $\mathcal{W}_{u2}$  durch

$$\mathbf{T}_\varphi^\varphi = c_\varphi \frac{\sin(\varphi_l)}{\sin(\varphi_u)} \sin(\varphi) \cdot \mathbf{e}_\varphi = c_\varphi \frac{\sin(\varphi_l)}{\sin(\varphi_u)} \begin{bmatrix} -z_{d,By} \\ z_{d,Bx} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.56b)$$

ausgedrückt werden. Weiterhin folgt aus der in Unterabschnitt 4.3.2 entworfenen Dämpfungsstrategie, dass für  $\mathbf{D}_\tau$  nahe  $\mathcal{W}_{u2}$

$$\mathbf{D}_\tau = \text{diag}(\delta_\varphi, \delta_\varphi, \delta_z) \quad (4.57)$$

erfüllt ist.

Im Gültigkeitsbereich der Gleichungen (4.56) und (4.57) kann das Regelgesetz (4.23) folglich in Abhängigkeit des minimalen Zustandsvektors  $\mathbf{w}_{u2} = \left[ \mathfrak{z}_u^T \quad (\boldsymbol{\omega}_B^{DB})^T \right]^T$  mit  $\mathfrak{z}_u = \left[ -z_{d,By} \quad z_{d,Bx} \right]^T$  dargestellt werden. Die Dynamik des Minimalzustands  $\mathbf{w}_{u2}$  ist dort durch (4.55) und (4.21b) zusammen mit dem Regelgesetz vollständig definiert und demnach gänzlich analog zur Dynamik von  $\mathbf{w}_u$  im Beweis zu Theorem 3.3. Die Linearisierung der Dynamik um die Ruhelage  $\mathbf{w}_{u2} = \mathbf{0}$  liefert folglich

$$\dot{\mathbf{w}}_{u2} = \mathbf{A}_u \mathbf{w}_{u2} ,$$

wobei die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_u$  in (3.48) definiert wurde. Im Beweis zu Theorem 3.3 wurde gezeigt, dass  $\mathbf{A}_u$  zwei Eigenwerte in der offenen rechten und drei Eigenwerte in der offenen linken Halbebene besitzt. Aus den rechts gelegenen Eigenwerten folgt die Instabilität von  $\mathbf{w}_{u2} = \mathbf{0}$  und damit die Instabilität sämtlicher in  $\mathcal{W}_{u2}$  enthaltener Ruhelagen [95, Theorem 4.7].  $\square$

#### 4.3.3.2 Globale Stabilitätseigenschaften

Mit Hilfe globaler Betrachtungen wird nun fast global asymptotische Stabilität der Zielruhelage  $\mathbf{W}_d$  nachgewiesen. Wie bereits bei der reduzierten Lageregelung, wird dafür zunächst das Invarianzprinzip von LaSalle benutzt, um zu zeigen, dass sämtliche Lösungen des geschlossenen Regelkreises beschränkt sind und gegen eine seiner Ruhelagen streben. Fast global asymptotische Stabilität folgt dann auf Basis des Theorems 1.1 aus der Tatsache, dass  $\mathbf{W}_d$  asymptotisch stabil ist und alle weiteren Ruhelagen instabil sind.

**Theorem 4.4** *Die Zielruhelage  $\mathbf{W}_d$  des geschlossenen Regelkreises ist fast global asymptotisch stabil.*

**Beweis:** Die Potentialfunktion  $E$  wurde so konstruiert, dass sämtliche untere Niveaumengen von  $V$  kompakt sind. Zudem sind sie positiv invariant, da das Regelgesetz sicherstellt, dass stets  $\dot{V} \leq 0$  gilt. Es folgt aus dem Invarianzprinzip von LaSalle (siehe z. B. [95, Theorem 4.4]), dass alle Lösungen des geschlossenen Regelkreises gegen die größte invariante Menge  $\mathcal{I}$  in  $\mathcal{E} = \{(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) \in \mathcal{W} = SO(3) \times \mathbb{R}^3 \mid \dot{V}(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) = 0\}$  streben. Die Menge  $\mathcal{E}$  kann ermittelt werden, indem man die Dämpfungsmatrix (4.35)

und die Drehratenzerlegung (4.3.2) in (4.24) einsetzt. Man erhält

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) &= -\kappa_{xy}(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) (d_\varphi(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB})\omega_\varphi^2 + d_\perp\omega_\perp^2) \\ &\quad - \kappa_z(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) d_z(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB})\omega_z^2. \end{aligned}$$

Wenn man berücksichtigt, dass  $\kappa_{xy}, \kappa_z > 0$  gilt, so wird klar, dass  $\dot{V}$  nur verschwindet, wenn

$$d_\varphi(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB})\omega_\varphi^2 = d_\perp\omega_\perp^2 = d_z(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB})\omega_z^2 = 0 \quad (4.58)$$

erfüllt ist. Abgesehen von der Menge der Ruhelagen  $\{\mathbf{W}_d, \mathbf{W}_{u1}\} \cup \mathcal{W}_{u2}$ , in der dies sicher gilt, gibt es weitere Bereiche des Zustandsraums, in welchen  $\dot{V} = 0$  ist. Im Folgenden werden diese Zustandsraumbereiche, die sämtlich in der Menge  $\tilde{\mathcal{W}} = \mathcal{W} \setminus (\{\mathbf{W}_d, \mathbf{W}_{u1}\} \cup \mathcal{W}_{u2})$  liegen, die den Zustandsraum ohne die Ruhelagen beschreibt, in vier disjunkte Teilmengen  $\mathcal{E}_1$  bis  $\mathcal{E}_4$  unterteilt. Es folgt  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_4 \cup (\{\mathbf{W}_d, \mathbf{W}_{u1}\} \cup \mathcal{W}_{u2})$ . Dabei umfasst  $\mathcal{E}_1$  jene Zustände in denen  $\boldsymbol{\omega}_B^{DB} = \mathbf{0}$  ist. In der Vereinigungsmenge  $\mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_4$  gilt hingegen  $\boldsymbol{\omega}_B^{DB} \neq \mathbf{0}$  und es folgt, dass  $\omega_\perp = d_\varphi(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB})\omega_\varphi^2 = d_z(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB})\omega_z^2 = 0$  erfüllt sein muss, um der Bedingung (4.58) zu genügen. Die Teilmengen  $\mathcal{E}_2$ ,  $\mathcal{E}_3$  und  $\mathcal{E}_4$  decken somit diejenigen Zustandsraumbereiche ab, in denen mindestens einer der beiden Dämpfungskoeffizienten  $d_\varphi$  und  $d_z$  zu Null wird, denn die zugehörigen Drehratenkomponenten  $\omega_\varphi$  und  $\omega_z$  dürfen nicht gleichzeitig verschwinden. Im Hinblick auf (4.39) ist eine notwendige Voraussetzung für  $d_\varphi = 0$  durch  $\varphi \in \Phi = \{\varphi \mid \varphi_l + \Delta_\varphi \leq \varphi \leq \varphi_u - \Delta_\varphi\}$  gegeben. Laut (4.43) ist eine notwendige Voraussetzung für  $d_z = 0$ , dass  $\vartheta \in \Theta = \{\vartheta \mid \vartheta_l + \Delta_\vartheta \leq \vartheta \leq \vartheta_u - \Delta_\vartheta\}$  gilt. Mit den soeben definierten Intervallen  $\Phi$  und  $\Theta$  lassen sich die Mengen  $\mathcal{E}_1$  bis  $\mathcal{E}_4$  anschreiben als

$$\mathcal{E}_1 = \{(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) \in \tilde{\mathcal{W}} \mid \boldsymbol{\omega}_B^{DB} = \mathbf{0}\}, \quad (4.59a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 = \{(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) \in \tilde{\mathcal{W}} \mid \varphi \in \Phi, \vartheta \in \Theta, r_\varphi s_\varphi(\varphi) \leq \dot{\varphi} \leq 0, r_\vartheta s_\vartheta(\vartheta) \leq \dot{\vartheta}_z \leq 0, \dot{\varphi} + \dot{\vartheta}_z \neq 0, \\ \omega_\perp = 0\}, \end{aligned} \quad (4.59b)$$

$$\mathcal{E}_3 = \{(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) \in \tilde{\mathcal{W}} \mid \varphi \in \Phi, \vartheta \notin \Theta, r_\varphi s_\varphi(\varphi) \leq \dot{\varphi} < 0, \omega_\perp = 0, \omega_z = 0\}, \quad (4.59c)$$

$$\mathcal{E}_4 = \{(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) \in \tilde{\mathcal{W}} \mid \varphi < \varphi_l + \Delta_\varphi, \vartheta \in \Theta, r_\vartheta s_\vartheta(\vartheta) \leq \dot{\vartheta}_z < 0, \omega_\perp = 0, \omega_\varphi = 0\}. \quad (4.59d)$$

Man beachte, dass aus (4.29) unmittelbar

$$\omega_\varphi = -\dot{\varphi} \quad (4.60)$$

und aus (4.41) direkt  $\omega_z = -\frac{\sqrt{1-x_{d,Ax}^2}}{x_{d,Ay}}\dot{\vartheta}_z$  folgt und somit  $\boldsymbol{\omega}_B^{DB} \neq \mathbf{0}$  in den Mengen  $\mathcal{E}_2$  bis

$\mathcal{E}_4$  gewährleistet ist. Weiterhin sei darauf hingewiesen, dass in  $\mathcal{E}_2$  bis  $\mathcal{E}_4$  die Identität  $\dot{\vartheta}_z = \dot{\vartheta}$  gilt, die sich aus (4.41) und (4.30) unter Berücksichtigung von  $\omega_1 = 0$  ergibt. Entsprechend gilt dort

$$\omega_z = -\frac{\sqrt{1-x_{d,Ax}^2}}{x_{d,Ay}}\dot{\vartheta}_z = -\frac{\sqrt{1-x_{d,Ax}^2}}{x_{d,Ay}}\dot{\vartheta}. \quad (4.61)$$

Im nächsten Schritt wird gezeigt, dass die größte invariante Menge  $\mathcal{I}$ , die in  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_4 \cup (\{\mathbf{W}_d, \mathbf{W}_{u1}\} \cup \mathcal{W}_{u2})$  enthalten ist, ausschließlich durch die Menge der Ruhelagen  $\{\mathbf{W}_d, \mathbf{W}_{u1}\} \cup \mathcal{W}_{u2}$  gegeben ist. Dazu wird zunächst der Fall  $(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) \in \mathcal{E}_1$  betrachtet.

In diesem Fall ist  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T} \neq \mathbf{0}$  und da weiterhin  $\boldsymbol{\omega}_B^{DB} = \mathbf{0}$  gilt, leitet man aus (4.21b) ab, dass  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_B^{DB} \neq \mathbf{0}$  sein muss. Folglich verlässt der Zustand die Menge  $\mathcal{E}_1$  unmittelbar und sie kann deshalb keine invarianten Mengen enthalten.

Es folgt der Nachweis, dass auch  $\mathcal{E}_2$  keine invarianten Mengen enthält. Hierzu wird zunächst das Gegenteil angenommen und anschließend gezeigt, dass die Annahme auf einen Widerspruch führt. Nimmt man also an, dass eine Lösung existiert, die für alle Zeiten in  $\mathcal{E}_2$  bleiben kann, so gilt entsprechend (4.59b) zusammen mit (4.60) und (4.61)

$$\boldsymbol{\omega}_B^{DB} = \omega_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \omega_z \mathbf{e}_z = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - \frac{\sqrt{1-x_{d,Ax}^2}}{x_{d,Ay}}\dot{\vartheta} \mathbf{e}_z \neq \mathbf{0}. \quad (4.62)$$

Nachdem innerhalb  $\mathcal{E}_2$  keinerlei Dämpfungsmoment auftritt, kann das Stellmoment (4.23) unter Berücksichtigung von (4.31) und (4.32) als  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T} = \mathbf{T}_\varphi^\varphi + \mathbf{T}_\varphi^\vartheta + \mathbf{T}_1^\vartheta + \mathbf{T}_z^\vartheta = k_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi + k_\perp \cdot \mathbf{e}_\perp + \frac{x_{d,Ay}}{\sqrt{1-x_{d,Ax}^2}}k_z \cdot \mathbf{e}_z$  dargestellt werden, wobei  $k_\varphi > 0$  und  $k_z > 0$  erfüllt ist. Hieraus und aus (4.62) folgert man, dass die kinetische Energie  $E_{kin} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_B^{DB})^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_B^{DB}$  kontinuierlich zunimmt, da für deren Zeitableitung  $\dot{E}_{kin} = (\boldsymbol{\omega}_B^{DB})^T \boldsymbol{\tau} = -\dot{\varphi}k_\varphi - \dot{\vartheta}k_z > 0$  gilt. Dementsprechend lässt sich eine untere Schranke  $\underline{\omega} > 0$  für den Betrag der Drehrate angeben, indem die Beziehung

$$E_{kin,0} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{B,0}^{DB})^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{B,0}^{DB} = \frac{1}{2}\bar{\lambda}(\mathbf{J})\underline{\omega}^2$$

nach  $\underline{\omega}$  aufgelöst wird. Darin bezeichnet  $\bar{\lambda}(\mathbf{J})$  den größten Eigenwert von  $\mathbf{J}$ ,  $E_{kin,0}$  die kinetische Energie und  $\boldsymbol{\omega}_{B,0}^{DB}$  die Drehrate zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Es gilt folglich

$$\underline{\omega}^2 \leq (\boldsymbol{\omega}_B^{DB})^T \boldsymbol{\omega}_B^{DB} = \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 \quad \forall t \geq 0. \quad (4.63)$$

Da innerhalb  $\mathcal{E}_2$  einerseits  $r_\varphi s_\varphi(\varphi) \leq \dot{\varphi} \leq 0$  und andererseits  $r_\vartheta s_\vartheta(\vartheta) \leq \dot{\vartheta}_z = \dot{\vartheta} \leq 0$  erfüllt ist, lässt sich auf Basis der Schaltlinien (4.39c) und (4.43c) eine untere Schranke

$$-L = \min(s_\varphi(\pi), s_\vartheta(\pi)) < \min(\dot{\varphi}, \dot{\vartheta}) < 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (4.64)$$

angeben, die sowohl  $\dot{\varphi}$  als auch  $\dot{\vartheta}$  nach unten abschätzt. Unter Ausnutzung von (4.64) kann nun die Ungleichung (4.63) erweitert werden, woraus

$$\underline{\omega}^2 \leq \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 < -L(\dot{\varphi} + \dot{\vartheta}) \quad \forall t \geq 0 \quad (4.65)$$

resultiert. Die getroffene Annahme, dass der Zustand für alle Zeiten in  $\mathcal{E}_2$  verweilen kann, ist widerlegt, wenn sich zu jedem Anfangsfehlerwinkelpaar  $(\varphi_0, \vartheta_0) \in \Phi \times \Theta$  eine Zeit  $\bar{t}$  finden lässt, zu der wenigstens einer der Fehlerwinkel  $\varphi$  oder  $\vartheta$  sein zugehöriges Intervall  $\Phi$  oder  $\Theta$  verlassen muss. Eine solche Zeit  $\bar{t}$  ist zweifellos gefunden, wenn sie die Gleichung

$$(\varphi_l + \Delta_\varphi) + (\vartheta_l + \Delta_\vartheta) = \varphi_0 + \vartheta_0 + \int_0^{\bar{t}} (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta}) dt \quad (4.66)$$

löst. Durch Einsetzen von (4.65) in (4.66) und Auswertung der Integrals ergibt sich die Ungleichung

$$(\varphi_l + \Delta_\varphi) + (\vartheta_l + \Delta_\vartheta) \leq \varphi_0 + \vartheta_0 - \frac{\underline{\omega}^2}{L} \bar{t},$$

aus der man erkennt, dass  $\bar{t}$  selbst durch

$$\bar{t} \leq L \frac{(\varphi_0 - (\varphi_l + \Delta_\varphi))(\vartheta_0 - (\vartheta_l + \Delta_\vartheta))}{\underline{\omega}^2}$$

nach oben beschränkt ist. Somit ist die Annahme widerlegt und man folgert, dass  $\mathcal{E}_2$  keine invarianten Mengen enthalten kann.

Indem man vollständig analog vorgeht, kann auch für die Mengen  $\mathcal{E}_3$  und  $\mathcal{E}_4$  gezeigt werden, dass sie keine invarianten Mengen enthalten. Weiterhin kann auch die Vereinigung  $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_4$  keine invarianten Mengen enthalten. Die Ursache hierfür liegt darin begründet, dass der Zustand zwar von  $\mathcal{E}_1$  in jede der anderen Mengen übergehen kann und darüber hinaus auch ein Übertritt von  $\mathcal{E}_2$  nach  $\mathcal{E}_3$  oder  $\mathcal{E}_4$  denkbar ist, jedoch keine weiteren Übergänge möglich sind. Um dies zu sehen, beachte man, dass in den Mengen  $\mathcal{E}_2$  bis  $\mathcal{E}_4$  für die Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\varphi} \leq 0$  und  $\dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_z \leq 0$  gilt und somit ein Anwachsen der Fehlerwinkel  $\varphi$  und  $\vartheta$  stets ausgeschlossen ist. Folglich repräsentiert allein die Menge der Ruhelagen die größte invariante Menge  $\mathcal{I}$  in  $\mathcal{E}$ , d. h.  $\mathcal{I} = \{\mathbf{W}_d, \mathbf{W}_{u1}\} \cup \mathcal{W}_{u2}$ , und entsprechend dem Invarianzprinzip von LaSalle konvergieren

sämtliche Lösungen gegen eine der Ruhelagen.

Zum Nachweis der fast global asymptotischen Stabilität der Zielruhelage  $\mathbf{W}_d$ , werden nun die lokalen Stabilitätseigenschaften der Ruhelagen ausgenutzt. Laut Theorem 4.1 ist  $\mathbf{W}_d$  eine asymptotisch stabile Ruhelage und den Theoremen 4.2 und 4.3 zufolge sind sämtliche weiteren Ruhelagen instabil, wobei dies durch in der offenen rechten Halbebene gelegene Eigenwerte des linearisierten Systems gezeigt wurde. Damit sind alle Bedingungen des Theorems 1.1 erfüllt und es folgt die fast global asymptotische Stabilität der Zielruhelage  $\mathbf{W}_d$ .  $\square$

## 4.4 Erweiterung zur Folgeregelung

Auf analoge Weise wie in Abschnitt 3.3 kann die bisher entworfene Festwertregelung zur Folgeregelung erweitert werden. Damit wird es möglich, die Orientierung des Quadropters einer zeitvarianten Solllage folgen zu lassen. Unter der Voraussetzung, dass  $\mathbf{R}_{ID}$  zweifach stetig nach der Zeit differenzierbar ist und die Zeitableitungen  $\dot{\mathbf{R}}_{ID}$  und  $\ddot{\mathbf{R}}_{ID}$  bekannt sind, wird zunächst eine Eingangstransformation durchgeführt, welche das Stellmoment  $\boldsymbol{\tau}$  durch die (virtuelle) Stellgröße  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  substituiert. Indem man das Stellgesetz

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & -\Gamma(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) \langle \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rangle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} - (1 - \Gamma(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB})) (\langle \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_B^{ID} \rangle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} + \langle \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \rangle \boldsymbol{\omega}_B^{ID}) \\ & + \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_B^{ID} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

worin  $\Gamma(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB})$  eine beliebige skalare und auf  $\mathcal{W}$  lokal Lipschitz-stetige Funktion ist, in die Folgedynamik (4.5) einsetzt, erhält man

$$\dot{\mathbf{R}}_{BD} = -\langle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \rangle \mathbf{R}_{BD} \quad (4.68a)$$

$$\mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_B^{DB} = (1 - \Gamma(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB})) \langle \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \rangle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}. \quad (4.68b)$$

Man beachte, dass die Dynamik (4.68) bis auf den Faktor  $(1 - \Gamma(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}))$  der Streckendynamik (4.21) des Festwertfalls entspricht. Wählt man nun für die neue Stellgröße  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  das gleiche Regelgesetz (4.23) wie im Festwertfall, so lässt sich dadurch die Wunschruhelage  $\mathbf{W}_d = (\mathbf{I}_3, \mathbf{0})$  auch im Folgefall lokal exponentiell und fast global asymptotisch stabilisieren. Alle in Unterabschnitt 4.3.3 geführten Beweise können dabei unverändert übernommen werden, da sich der Faktor  $(1 - \Gamma(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}))$  weder auf die Ableitung der Energiefunktion  $\dot{V}$  noch auf die Ruhelagen oder die Linearisierungen um sie herum auswirkt. Die Anmerkungen 3.5 und 3.6 aus Unterabschnitt 3.3 gelten sinngemäß auch für die hier vorgestellte vollständige Lagefolgeregelung.

## 4.5 Simulationsergebnisse

In diesem Abschnitt werden Simulationsergebnisse vorgestellt, welche die Funktionsweise der vollständigen Lageregelung mit Priorisierung der Schubrichtung illustrieren. Wie bereits im Simulationsabschnitt 3.4 zur reduzierten Lageregelung, beschränken sich die Betrachtungen auf den Festwertfall, um einerseits die Anschaulichkeit und Interpretierbarkeit der Ergebnisse zu fördern und andererseits die Einhaltung der Stellgrößenschranken sowie die Robustheit gegenüber Unsicherheiten im Trägheitstensor demonstrieren zu können. Aufgrund der starken Ähnlichkeit (für  $\Gamma = 0$  Identität) der dynamischen Systeme (4.21) und (4.68), bleiben die charakteristischen Merkmale, die für das Fehlverhalten im Festwertfall festgestellt werden, auch im Folgefall erhalten, sodass sich alle grundlegenden Aussagen übertragen lassen.

Zur Durchführung der Simulationen wurde der rotatorische Anteil des Streckenmodells (2.21b) und (2.21c) unter der Wirkung des in Abschnitt 4.3 entworfenen Regelgesetzes (4.23) implementiert. Die verwendeten Regler- und Streckenparameter, die kommandierte Ziellage sowie die betrachteten Anfangsbedingungen sämtlicher Simulationen sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst. Wo immer möglich, wurden dieselben Werte gewählt, die auch für die Simulationsstudien zur reduzierten Lageregelung zum Einsatz kamen. Insbesondere wurden dieselben Anfangsbedingungen betrachtet.

In gleicher Weise wie in Abschnitt 3.4 wurden für die in den Abbildungen 4.7 - 4.10 gezeigten Ergebnisse jeweils 101 Simulationen durchgeführt, die sich durch den verwendeten Trägheitstensor unterscheiden. Während die Linien in den Abbildungen 4.7 - 4.10 die Ergebnisse des Nominalfalls markieren, der sich dadurch auszeichnet, dass  $\mathbf{J}$  gleich dem identifizierten Trägheitstensor  $\hat{\mathbf{J}}$  gewählt wurde, kennzeichnen die schattierten Flächen jene Bereiche in denen die restlichen 100 Simulationsergebnisse verlaufen. In diesen Nichtnominalfällen wurde der Trägheitstensor  $\hat{\mathbf{J}}$  jeweils durch eine zufällige Unsicherheitsmatrix  $\Delta_{\mathbf{J}}$  verfälscht, d. h.  $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}} + \Delta_{\mathbf{J}}$ . Es sei angemerkt, dass für die hier präsentierten Ergebnisse dieselben Unsicherheitsmatrizen verwendet wurden wie schon im Abschnitt 3.4. Um die Übersichtlichkeit in den Abbildungen zu gewährleisten, wurde bei manchen Größen darauf verzichtet die schattierten Bereiche anzugeben. Dies betrifft die Stellmomentenkomponenten  $\tau_x$  und  $\tau_y$  in den Abbildungen 4.7c und 4.9c sowie die Schaltlinien  $s_\varphi$  und soweit vorhanden  $s_\vartheta$  in den Abbildungen 4.7b und 4.9b.

Gut die Hälfte aller Parameter, die bei der vollständigen Lageregelung festzulegen sind, beziehen sich auf die Dynamik des Schubrichtungsfehlers  $\varphi$  und sind bereits von der reduzierten Lageregelung aus Kapitel 3 bekannt. Diese Parameter wurden deshalb unverändert aus Tabelle 3.1 in Abschnitt 3.4 übernommen, wo ihre Spezifikation

Tabelle 4.1: Strecken- und Reglerparameter sowie Zielausrichtung und Anfangsbedingungen für sämtliche Simulationen mit vollständiger Lageregelung.

Parameter des Streckenmodells			
Nominalfall:	$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}}$	$\hat{\mathbf{J}} = \text{diag}(\hat{J}_1, \hat{J}_1, \hat{J}_2)$ $= \text{diag}(6.4, 6.4, 12.5) \cdot 10^{-3} \text{ m}^2\text{kg}$	
Nichtnominalfall:	$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}} + \Delta_{\mathbf{J}}$	$\Delta_{\mathbf{J}}$ : Symmetrische Zufallsmatrix mit Elementen $\Delta_{\mathbf{J},ii} \in ]-0.1 \cdot \hat{J}_1, 0.1 \cdot \hat{J}_1[$	
Parameter der vollständigen Lageregelung			
$c_\varphi = 1.5 \text{ Nm/rad}$	$\varphi_l = 0.151 \text{ rad}$	$\varphi_u = 178 \cdot \pi/180 \text{ rad}$	$\Delta_\varphi = 2 \cdot \pi/180 \text{ rad}$
$c_\vartheta = 0.109 \text{ Nm/rad}$	$\vartheta_l = 0.426 \text{ rad}$	$\vartheta_u = 178 \cdot \pi/180 \text{ rad}$	$\Delta_\vartheta = 2 \cdot \pi/180 \text{ rad}$
$\delta_\varphi = 0.176 \text{ Nms/rad}$	$v_\varphi = 0.1 \text{ rad/s}$	$v_{\varphi_l} = 3.64 \text{ rad/s}$	$r_\varphi = 0.75$
$\delta_z = 0.0885 \text{ Nms/rad}$	$v_\vartheta = 0.1 \text{ rad/s}$	$v_{\vartheta_l} = 1.31 \text{ rad/s}$	$r_\vartheta = 0.75$
$\bar{\tau}_{xy} = 0.25 \text{ Nm}$	$\bar{\tau}_z = 0.05 \text{ Nm}$		
Ziellage für sämtliche Simulationen			
$\mathbf{R}_{ID} \equiv \mathbf{R}_{II} \equiv \mathbf{I}_3$			
Anfangsbedingung 1			
$\boldsymbol{\omega}_{B,0}^{IB} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ rad/s}$		$\mathbf{R}_{BI,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\varphi_0) & \sin(-\varphi_0) \\ 0 & -\sin(-\varphi_0) & \cos(-\varphi_0) \end{bmatrix}$ mit $\varphi_0 = 175 \cdot \pi/180 \text{ rad}$	
Anfangsbedingung 2			
$\boldsymbol{\omega}_{B,0}^{IB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ rad/s}$		$\mathbf{R}_{BI,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\varphi_0) & \sin(-\varphi_0) \\ 0 & -\sin(-\varphi_0) & \cos(-\varphi_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_0) & \sin(\vartheta_0) & 0 \\ -\sin(-\vartheta_0) & \cos(\vartheta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mit $\varphi_0 = 175 \cdot \pi/180 \text{ rad}$ und $\vartheta_0 = 60 \cdot \pi/180 \text{ rad}$	

auch motiviert wurde. Die verbleibenden Parameter beziehen sich auf die Dynamik des Headingfehlers  $\vartheta$ . Sie müssen in jedem Fall so gewählt werden, dass die Bedingungen (4.26) und (4.27), die an eine zulässige Potentialfunktion  $E$  zu stellen sind, eingehalten werden. Hinsichtlich der Stellgrößenbeschränkung  $\bar{\tau}_{xy}$  ist weiterhin nachzuweisen, dass die bereits in (4.33) formulierte Bedingung  $\|\mathbf{T}_{xy}\| = \sqrt{(\|\mathbf{T}_\varphi^\varphi\| - \|\mathbf{T}_\varphi^\vartheta\|)^2 + \|\mathbf{T}_1^\vartheta\|^2} < \bar{\tau}_{xy}$  im gesamten Zustandsraum erfüllt ist. Unter diesen Rahmenbedingungen wurde ein geeigneter Parametersatz bestimmt, der auch die Einhaltung der Stellgrößenbeschränkung in  $z$ -Richtung sicherstellt. Hierzu wurde der Parameter  $\vartheta_l$  auf Basis der Gleichung (4.32d)

zu  $\vartheta_l = \arcsin(0.9\bar{\tau}_z/c_\vartheta)$  gewählt und somit der Betrag der  $z$ -Komponente  $T_z^+ = |T_z| = \|\mathbf{T}_z^\vartheta\|$  des Potentialmoments  $\mathbf{T}$  auf maximal 90% der angesetzten Schranke  $\bar{\tau}_z$  begrenzt. Die übrigen Parameter wurden teils empirisch und teils unter Einbeziehung der approximierenden Differentialgleichung (4.44) ausgelegt. Diese kann im Nahbereich von  $\vartheta = 0$  durch die PT2-Dynamik

$$\hat{J}_2\ddot{\vartheta} = -c_\vartheta \cdot \vartheta - \delta_z \cdot \dot{\vartheta} \quad (4.69)$$

angenähert werden. Basierend hierauf wurde  $\delta_z$  auf 120% der kritischen Dämpfung  $\sqrt{4\hat{J}_2c_\vartheta}$  festgelegt. Das somit eher konservativ angesetzte Dämpfungsmaß führt im Bereich  $\vartheta \leq \vartheta_l$  zu einer Dynamik mit moderaten Einschwingzeiten und trägt damit der Tatsache Rechnung, dass die Differentialgleichung (4.44) und folglich auch (4.69) die reale  $\vartheta$ -Dynamik nur unter den auf S. 95 f. diskutierten Einschränkungen hinreichend gut approximiert. Bei der Wahl der Konstante  $v_{\vartheta_l}$  wurde darauf abgezielt, dass bei einer angestrebten Bewegung entlang der Schaltlinie  $s_\vartheta(\vartheta)$  der Übertritt in den Bereich  $\vartheta \leq \vartheta_l$  so erfolgt, dass der Bremsvorgang auch im Anschluss noch eine gewisse Zeit gesättigt, d. h. mit  $|\tau_z| = \bar{\tau}_z$ , fortgeführt wird. Hierzu wurde  $v_{\vartheta_l}$  so festgelegt, dass die rechte Seite der Auslegungsdifferentialgleichung (4.44) für  $\vartheta = \vartheta_l$  und  $\dot{\vartheta} = -v_{\vartheta_l}/1.22$  die Gleichung  $-c_\vartheta \cdot \sin(\vartheta_l) + \delta_z \cdot v_{\vartheta_l}/1.22 = \bar{\tau}_z$  erfüllt. Die Schaltlinie ist damit so ausgelegt, dass die angestrebte Eintrittsgeschwindigkeit 22% über derjenigen Geschwindigkeit liegt, die am Eintrittspunkt bereits zur Ausnutzung des vollen verfügbaren Bremsmoments führen würde.

Um ein Höchstmaß an Anschaulichkeit zu erreichen, wurde das Zielkoordinatensystem  $D$  gleich dem Inertialsystem  $I$  gewählt. Folglich gilt in diesem Sonderfall die Identität

$$(\mathbf{R}_{BI}, \boldsymbol{\omega}_B^{IB}) = (\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB})$$

zwischen den rotatorischen Zustandsvariablen  $(\mathbf{R}_{BI}, \boldsymbol{\omega}_B^{IB})$  der Streckendynamik (2.21) und den Zuständen  $(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB})$  der Lagefolgedynamik (4.5). In der angestrebten Zielruhelage  $\mathbf{W}_d$  ergibt sich demnach

$$(\mathbf{R}_{BI}, \boldsymbol{\omega}_B^{IB}) = (\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) = \mathbf{W}_d = (\mathbf{I}_3, \mathbf{0}) .$$

**Anfangsbedingung 1:** Die Abbildungen 4.7 und 4.8 zeigen die Simulationsergebnisse für die Anfangsbedingung 1. Die Ergebnisse illustrieren, dass der vollständige Lageregler identisch zum reduzierten Lageregler agiert, solange weder ein Headingfehler  $\vartheta$ , noch eine Headingfehlerrate  $\dot{\vartheta}$  vorliegt. Da dies im Nominalfall dauerhaft zutrifft, ergeben sich hier dieselben Verläufe wie in den Abbildungen 3.8 und 3.9. Der zugehörige

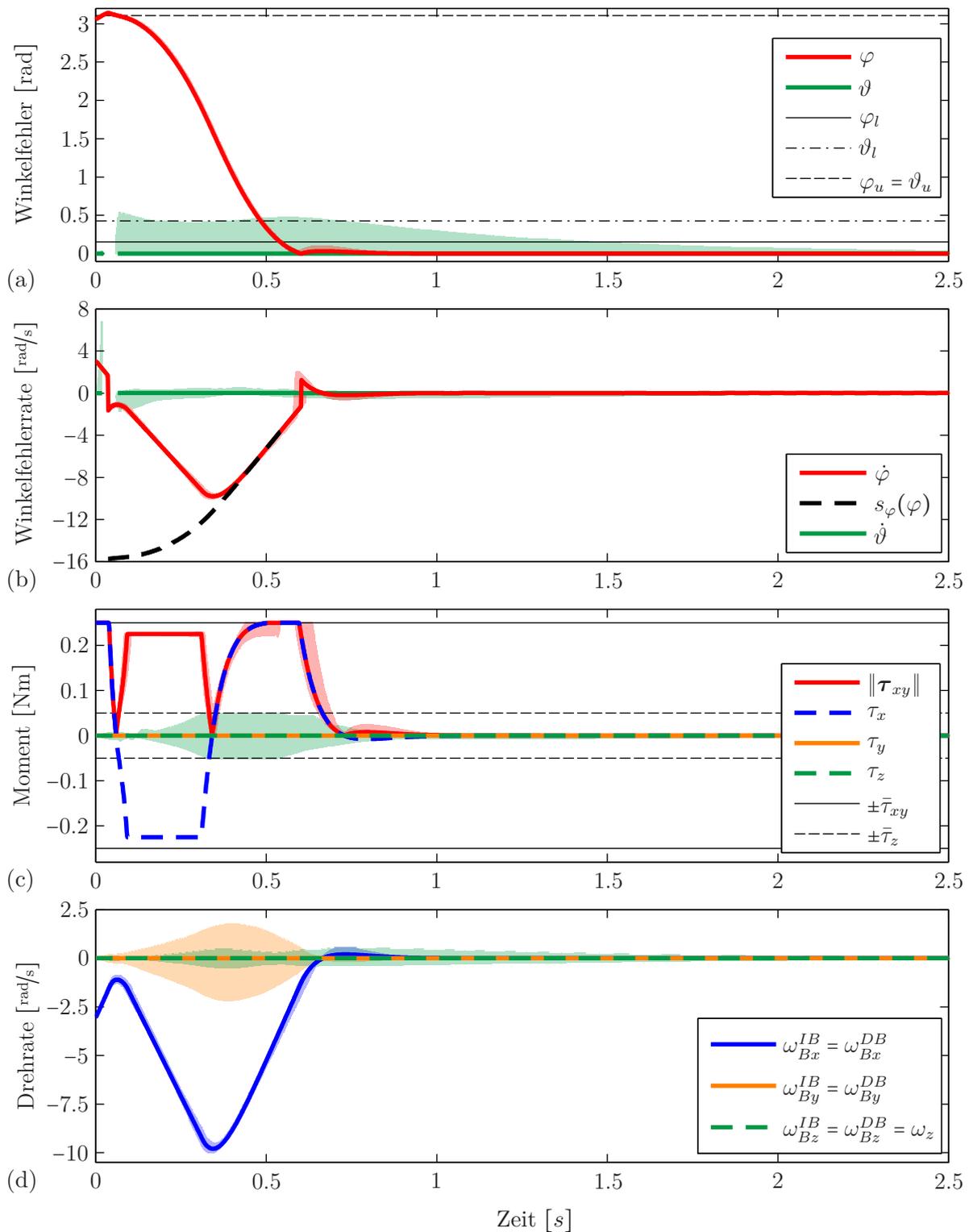


Abbildung 4.7: Simulationen mit vollständiger Lageregelung. Erster Teil der Ergebnisse für Anfangsbedingung 1 aus Tabelle 4.1. Linien markieren die Ergebnisse im Nominalfall ( $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}}$ ). Schattierte Flächen kennzeichnen die Bereiche, in welchen die Ergebnisse aller Nichtnominalfälle ( $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}} + \Delta_{\mathbf{J}}$ ) verlaufen.

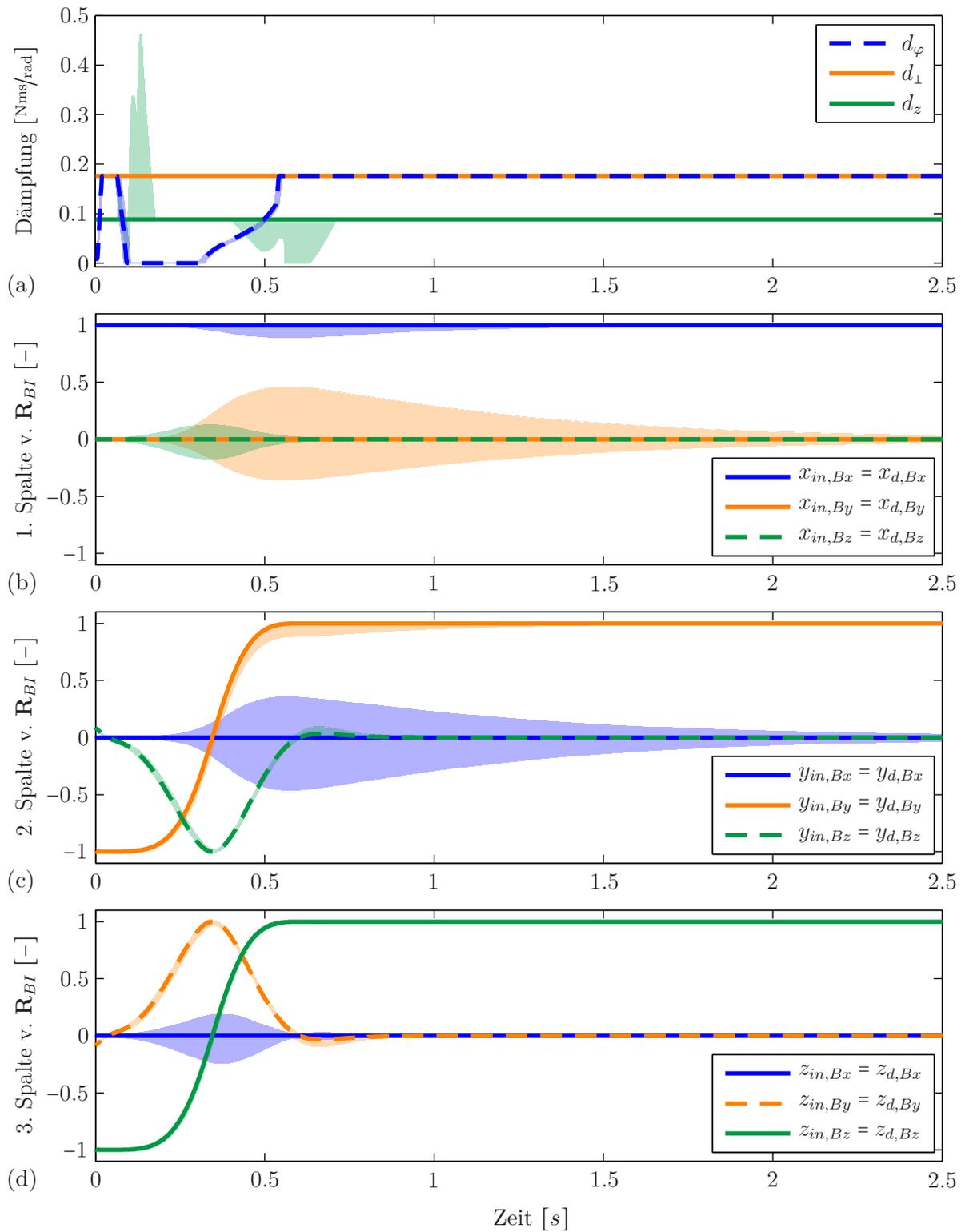


Abbildung 4.8: Simulationen mit vollständiger Lageregelung. Zweiter Teil der Ergebnisse für Anfangsbedingung 1 aus Tabelle 4.1. Linien markieren die Ergebnisse im Nominalfall ( $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}}$ ). Schattierte Flächen kennzeichnen die Bereiche, in welchen die Ergebnisse aller Nichtnominalfälle ( $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}} + \Delta_{\mathbf{J}}$ ) verlaufen.

Bewegungsablauf wurde bereits in Abbildung 3.10 veranschaulicht.

Man beachte, dass in den Abbildungen 4.7a und 4.7b nicht durchgängig Werte für  $\vartheta$  und  $\dot{\vartheta}$  angegeben sind. Die Verläufe sind unterbrochen, wenn gerade  $\varphi \geq \varphi_u$  gilt. Hierdurch wird der Tatsache Rechnung getragen, dass der Headingfehler  $\vartheta$  für  $\varphi = \pi$  nicht eindeutig definiert ist (vgl. Anmerkung 4.2) und seine Berechnung infolgedessen auch in der unmittelbaren Umgebung von  $\varphi = \pi$  numerisch schlecht konditioniert ist. Es sei daran erinnert, dass das Regelgesetz aus genau diesem Grunde so gestaltet wurde, dass für  $\varphi \geq \varphi_u$  keinerlei Abhängigkeit von den fraglichen Größen besteht.

Aus den schattierten Bereichen der Abbildungen 4.8b - 4.8d geht hervor, dass der vollständige Lageregler im Unterschied zum reduzierten Lageregler dafür sorgt, dass auch in den Nichtnominalfällen sämtliche Körperachsen eingeregelt werden. Folglich stimmt das körperfeste Koordinatensystem  $B$  am Ende des Regelvorgangs stets mit dem Wunschkoordinatensystem  $D = I$  überein. Deutlich erkennbar ist auch die klare Priorisierung der Schubrichtung, welche im Hinblick auf die translatorische Dynamik des Quadropters von elementarer Bedeutung ist. Während der Schubrichtungsfehler  $\varphi$  in sämtlichen Fällen nach ca. 0.8s vollständig abgeklungen ist, nimmt das Ausregeln des Headingfehlers bis zu 2s in Anspruch. Der vorgestellte Regler nutzt damit auf vorteilhafter Weise die guten Eingriffsmöglichkeiten der Aktuatorik in der  $xy$ -Ebene, um den flugbahnbestimmenden und damit sicherheitskritischen Schubrichtungsfehler  $\varphi$  schnell zu beseitigen. Das Einregeln des gewünschten Headings, wofür lediglich das deutlich geringere Stellmoment um die  $z$ -Achse zur Verfügung steht, kann erheblich langsamer gestaltet werden, ohne dass der Abbau des Schubrichtungsfehlers dadurch negativ beeinflusst wird.

**Anfangsbedingung 2:** Die zur Anfangsbedingung 2 gehörenden Simulationsergebnisse sind in den Abbildungen 4.9 und 4.10 dargestellt. In diesem Szenario tritt auch im Nominalfall ein Headingfehler  $\vartheta$  auf, der ausgeregelt werden muss. In Abbildung 4.9a erkennt man sehr deutlich, wie die Priorisierung der Schubausrichtung dazu führt, dass sich das Einschwingverhalten in zwei Phasen aufgliedert. In der ersten Phase, die nach etwa 0.8s abgeschlossen ist, wird der Schubrichtungsfehler  $\varphi$  ausgeregelt, während sich  $\vartheta$  kaum verändert. In der zweiten Phase wird schließlich der Headingfehler  $\vartheta$  abgebaut ohne dass sich dies auf  $\varphi$  auswirkt. Dieser sequentielle Charakter des Einschwingvorgangs geht auch aus Abbildung 4.11 deutlich hervor, welche den räumlichen Bewegungsablauf für den Nominalfall veranschaulicht.

Die Simulationsverläufe der ersten Phase sind nahezu identisch mit den Simulationsergebnissen aus den Abbildungen 3.11 und 3.12, die mit der reduzierten Lageregelung erzielt wurden. Damit verhält sich die vorgeschlagene vollständige Lageregelung beim

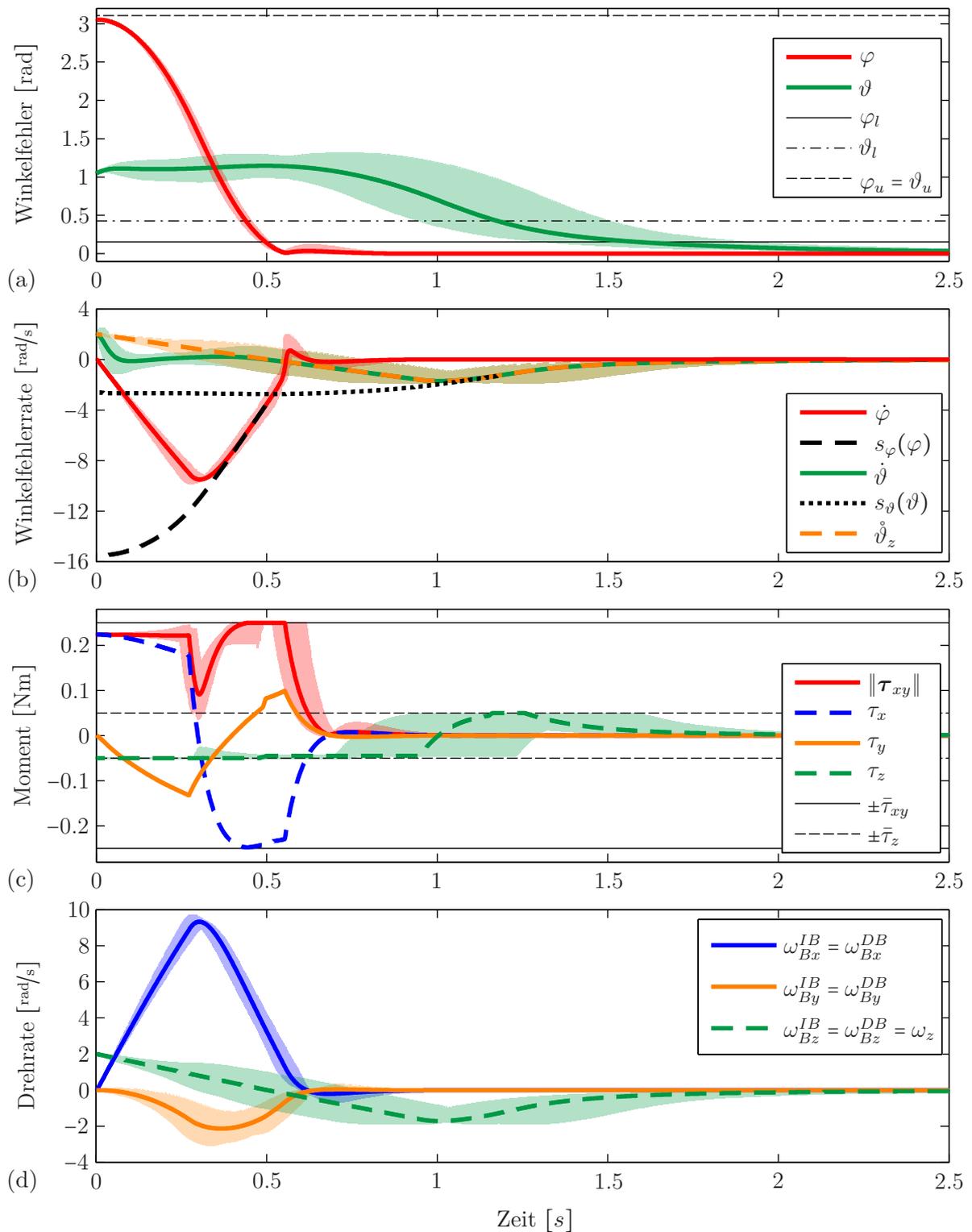


Abbildung 4.9: Simulationen mit vollständiger Lageregelung. Erster Teil der Ergebnisse für Anfangsbedingung 2 aus Tabelle 4.1. Linien markieren die Ergebnisse im Nominalfall ( $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}}$ ). Schattierte Flächen kennzeichnen die Bereiche, in welchen die Ergebnisse aller Nichtnominalfälle ( $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}} + \Delta_{\mathbf{J}}$ ) verlaufen.

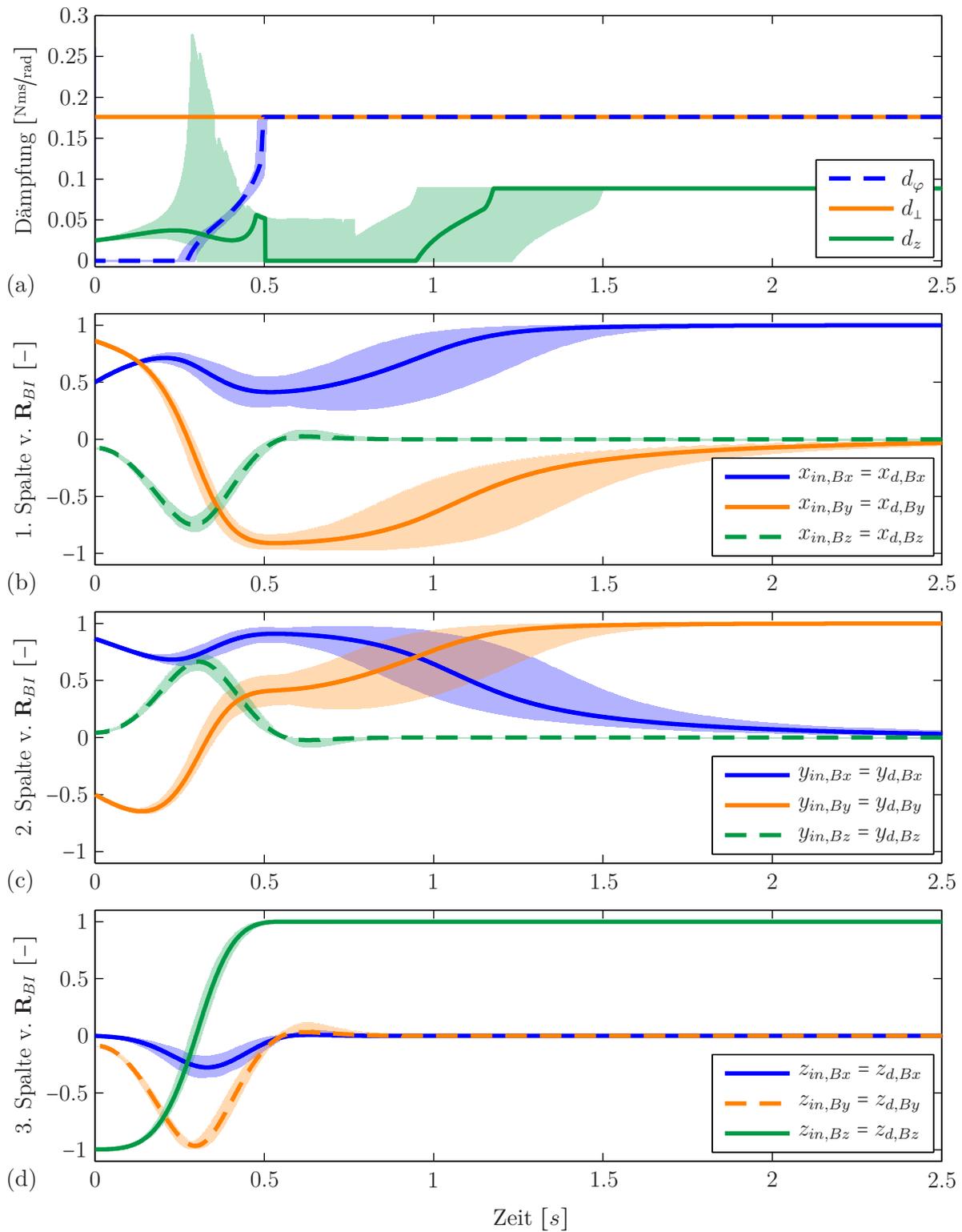


Abbildung 4.10: Simulationen mit vollständiger Lageregelung. Zweiter Teil der Ergebnisse für Anfangsbedingung 2 aus Tabelle 4.1. Linien markieren die Ergebnisse im Nominalfall ( $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}}$ ). Schattierte Flächen kennzeichnen die Bereiche, in welchen die Ergebnisse aller Nichtnominalfälle ( $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}} + \Delta_{\mathbf{J}}$ ) verlaufen.

Einregeln der gewünschten Schubrichtung ähnlich performant. Wie bereits in Abschnitt 3.4 beschrieben, erfolgt zunächst eine Beschleunigungsphase, in der sich  $\dot{\varphi}$  der Schaltlinie  $s_\varphi$  bis auf  $r_\varphi \cdot s_\varphi = 0.75 \cdot s_\varphi$  nähert (siehe Abbildung 4.9b). Daraufhin ändert sich das Verhalten und es folgt ein scharfer Bremsvorgang unter Ausnutzung des vollen verfügbaren Stellmoments  $\bar{\tau}_{xy}$ . Die Bewegung läuft dabei entlang der Schaltlinie, bis der Eintritt in den Bereich  $\varphi \leq \varphi_l$  erfolgt und sich ein Einschwingvorgang anschließt, der im Wesentlichen durch die PT2-Dynamik (3.28) beschrieben werden kann.

Aufgrund der Tatsache, dass um die körpereigene  $z$ -Achse nur ein deutlich geringeres Stellmoment zur Verfügung steht, benötigt der Ausregelvorgang für den Headingfehler  $\vartheta$  erheblich mehr Zeit als der Abbau von  $\varphi$ . Wie man in Abbildung 4.9b ablesen kann, liegt zu Beginn sogar eine positive Headingfehler rate  $\dot{\vartheta}$  vor, die durch die anfängliche Drehrate um die körpereigene  $z$ -Achse verursacht wird. In Abbildung 4.9c ist zu sehen, dass von Beginn an der volle verfügbare Stellmomentenbetrag  $\bar{\tau}_z$  abgerufen wird, um diese Drehrate zu bekämpfen. Dies wird möglich durch die in Abbildung 4.10a dargestellte fortwährende Anpassung des Dämpfungskoeffizienten  $d_z$ , die dafür sorgt, dass

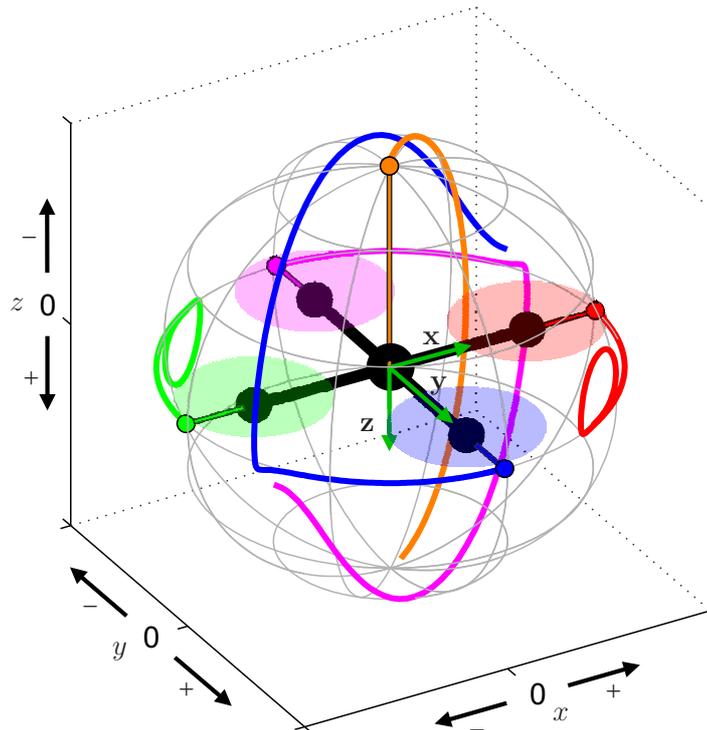


Abbildung 4.11: Bewegungsablauf im Nominalfall für die Anfangsbedingung 2. Der äußere Rahmen gibt die inertialen Koordinatenrichtungen wieder, das körperfeste Koordinatensystem ist in grün eingezeichnet. Die farbigen Kurven markieren die Bereiche, welche durch die zugehörigen körperfesten Ausleger während des Einschwingvorgangs überstrichen wurden.

die Wirkung des Potentialmoments  $\mathbf{T}_z^\vartheta$  durch ein entsprechendes Dämpfungsmoment  $-d_z\omega_z\mathbf{e}_z = -d_z\omega_{Bz}^{DB}\mathbf{e}_z$  so verstärkt wird, dass stets der volle Stellmomentenbetrag  $\bar{\tau}_z$  anliegt. Dieser Vorgang setzt sich bis etwa 0.5s fort. Dann erfährt  $\omega_z = \omega_{Bz}^{DB}$  einen Vorzeichenwechsel, was dazu führt, dass nun jegliche Dämpfung  $d_z$  dem Abbau von  $\vartheta$  entgegenwirken würde. Konsequenterweise folgt eine Phase in der  $d_z = 0$  gilt. Angetrieben durch das Potentialmoment  $\mathbf{T}_z^\vartheta$  nähert sich  $\dot{\vartheta}$  schließlich der Schaltlinie  $s_\vartheta$  und es setzt ein Bremsvorgang ein, der über die gezielte Anhebung der Dämpfung  $d_z$  realisiert wird. Unter Einsatz des vollen verfügbaren Stellmomentes erfolgt der Drehratenabbau so, dass die Bewegung entlang der Schaltlinie abläuft, bis der Eintritt in den Bereich  $\vartheta \leq \vartheta_l$  erfolgt. Ab diesem Zeitpunkt wird die Dynamik näherungsweise durch die PT2-Dynamik (4.69) beschrieben. Nach spätestens 2.5s kann der Regelvorgang in allen Fällen als abgeschlossen betrachtet werden.

Es sei darauf hingewiesen, dass in Abbildung 4.9b zusätzlich zu  $\dot{\vartheta}$  auch die in (4.41) eingeführte Größe  $\dot{\vartheta}_z$  angegeben wurde. Sie bezeichnet denjenigen Anteil von  $\dot{\vartheta}$ , der durch  $\omega_z$  verursacht wird. Es kann hier gut beobachtet werden, dass grundsätzlich eine Diskrepanz zwischen  $\dot{\vartheta}$  und  $\dot{\vartheta}_z$  auftreten kann. Dies ist immer dann der Fall, wenn eine Drehratenkomponente  $\omega_1 = \mathbf{e}_1^T \boldsymbol{\omega}_B^{DB}$  vorliegt. Weiterhin kann man erkennen, dass beide Größen mit abnehmendem Schubrichtungsfehler  $\varphi$  zunehmend deckungsgleich werden. Für  $\varphi = 0$  sind  $\dot{\vartheta}$  und  $\dot{\vartheta}_z$  grundsätzlich identisch. Es sei daran erinnert, dass die in Unterabschnitt 4.3.2 entwickelte Dämpfungsstrategie für  $d_z$  so gestaltet wurde, dass die übergeordnete Auswahl, welche festlegt, ob die bremsoptimale Dämpfung (4.43d) oder die beschleunigungsoptimale Dämpfung (4.43e) zum Einsatz kommt, auf Basis von  $\dot{\vartheta}$  erfolgt. Die untergeordnete Fallunterscheidung basiert hingegen auf  $\dot{\vartheta}_z$ , da die Dämpfung  $d_z$  ihre Wirkung nur im Zusammenspiel mit der Drehrate  $\omega_z$  entfalten kann.

# Kapitel 5

## Kaskadierte Trajektorienfolgeregelung für die Position und das Heading

Während in den vorangegangenen Kapiteln Lageregler präsentiert wurden, die das Trajektorienfolgeproblem in seiner reduzierten und allgemeinen Form lösen, wird das Hauptaugenmerk nun auf das Einregeln einer Positionstrajektorie gerichtet. Es soll gewährleistet werden, dass der Quadcopter einer gewünschten Positionstrajektorie  $\mathbf{p}_d$  autonom folgt und somit  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}_d$  für  $t \rightarrow \infty$  erfüllt ist. Um diese Aufgabe zu lösen, wird eine kaskadierte Regelungsstruktur vorgeschlagen, welche den Aufbau der Regelstrecke (2.21) widerspiegelt, deren Gleichungen für den Leser an dieser Stelle wiederholt werden:

$$m\ddot{\mathbf{p}}_I = -\mathbf{D}\dot{\mathbf{p}}_I + mg\mathbf{e}_z - F\mathbf{z}_I, \quad (2.21a)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_{BI} = -\langle\langle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rangle\rangle \mathbf{R}_{BI}, \quad (2.21b)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_B^{IB} = \langle\langle \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} + \boldsymbol{\tau}. \quad (2.21c)$$

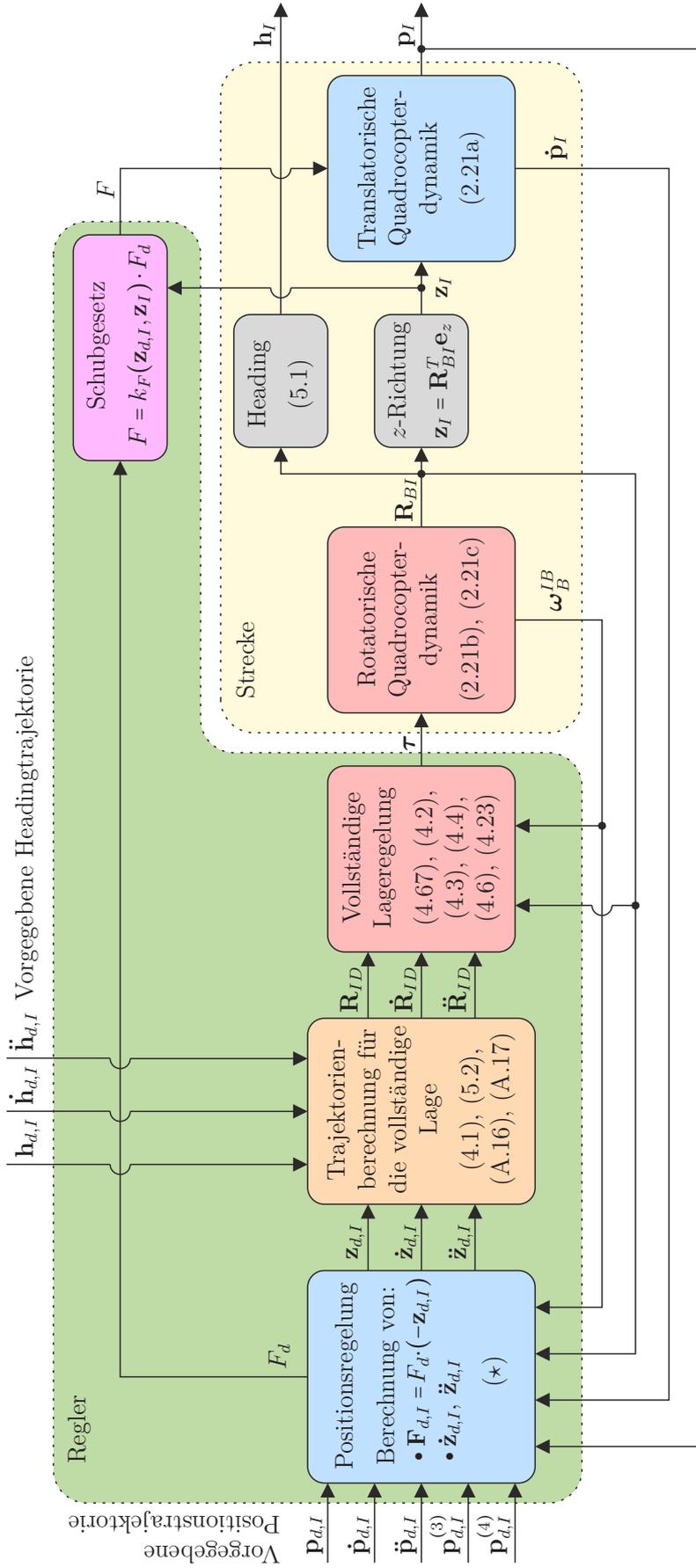
Wie in Unterabschnitt 2.1.3 bereits erläutert wurde, setzt sich die Streckendynamik aus der positionsunabhängigen Lagedynamik (2.21b), (2.21c) sowie aus der nachgelagerten translatorischen Dynamik (2.21a) zusammen. Konsequenterweise ist die kaskadierte Regelung aus einer äußeren Positionsschleife und einer inneren Lageschleife aufgebaut. Charakteristisch für den verfolgten Ansatz ist, dass für den Entwurf des Positionsregelgesetzes die Lagedynamik unberücksichtigt bleibt. Dies geschieht, indem eine virtuelle Schubkraft  $\mathbf{F}_d = F_d \cdot (-\mathbf{z}_d)$  als Stellgröße angenommen wird, deren Wirkrichtung  $-\mathbf{z}_d$  nicht an die reale Fluglage gekoppelt ist. Das Einregeln der gewünschten  $z$ -Achsenrichtung ( $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_d$ ) übernimmt die unterlagerte Lageregelung. Bezüglich der körperfesten  $z$ -Achse fungiert die Positionsregelung somit als Trajektoriengenerator und stellt neben  $\mathbf{z}_d$  auch die erforderlichen Zeitableitungen von  $\mathbf{z}_d$  zur Verfügung. Ein

Strukturbild des resultierenden Gesamtregelkreises ist in Abbildung 5.1 dargestellt.

Der wesentliche Vorteil der kaskadierten Regelungsstruktur besteht darin, dass beide Teilregler *unabhängig voneinander* und mit *beliebigen Entwurfsmethoden* gestaltet werden können. Zusätzlich reduziert die Aufspaltung des Gesamtproblems in zwei kleinere Teilprobleme die Komplexität und erleichtert dadurch auch die Reglerparametrierung. Da jedoch die Kopplung der Teilsysteme beim Reglerentwurf unberücksichtigt bleibt, kann man nicht a priori von den Stabilitätseigenschaften der ungekoppelten Teilregelkreise auf die Stabilitätseigenschaften des gekoppelten Gesamtregelkreises schließen. Um den Einsatz kaskadierter Regelungssysteme trotzdem zu rechtfertigen, beruft man sich deshalb häufig auf die Annahme einer Zeitskalentrennung zwischen einem schnellen inneren und einem langsamen äußeren Regelkreis. Dies impliziert, dass der Effekt der Kopplung nur schwach ausgeprägt ist und eine Abschätzung von Stabilitätsgrenzen beispielsweise mit Hilfe der Theorie der *singular perturbations* [100] durchgeführt werden kann. Die Annahme der Zeitskalentrennung ist jedoch speziell bei modernen technologischen Anwendungen mit hohen Performanzanforderungen fragwürdig. Deshalb wird in dieser Arbeit ein Kriterium erarbeitet, anhand dessen a posteriori eine Stabilitätsaus­sa­ge getroffen werden kann, die den Einfluss des Kopplungsterms strikt berücksichtigt. Somit kann für den Quadrocopter asymptotische Trajektorienfolge nachgewiesen werden, indem gezeigt wird, dass die resultierende Gesamtfolgedynamik einer Reihe von Annahmen genügt.

Wie bereits oben erwähnt wurde, erfordert die Positionsfolgeaufgabe vom Lageregler lediglich, dass die Konvergenz der  $z$ -Achsenrichtung  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_d$  in geeigneter Weise sichergestellt ist. Hierfür ist es ausreichend eine reduzierte Lageregelung zu verwenden. Wird hingegen ein vollständiger Lageregler eingesetzt, so kann zusätzlich eine Headingtrajektorie eingeregelt werden. Um den allgemeinsten Fall abzudecken, wird deshalb im Folgenden ausschließlich eine kaskadierte Regelungsstruktur aus Positions- und vollständigem Lageregler betrachtet, so wie sie auch in Abbildung 5.1 dargestellt ist. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass sich sämtliche nachfolgenden Betrachtungen zur Positionsfolge auch für eine kaskadierte Regelung aus Positions- und reduziertem Lageregler durchführen lassen und auf analoge Aussagen führen. Bezüglich des Strukturbilds 5.1 müsste in diesem Fall die vollständige Lageregelung durch die reduzierte ersetzt werden (vgl. auch Abbildung 3.1) und der orange Block, welcher die Headingvorgabe verarbeitet, würde entfallen.

Ein geeigneter vollständiger Lageregler ist bereits aus dem vorangegangenen Kapitel bekannt. In diesem Kapitel wird er durch einen energiebasiert entworfenen Positionsregler zu einer kaskadierten Regelungsstruktur ergänzt. Der vorgeschlagene Positionsregler



( $\star$ )  $F_d$  und  $\mathbf{z}_{d,I}$  werden aus der virtuellen Schubkraft  $\mathbf{F}_{d,I} = F_d \cdot (-\mathbf{z}_{d,I})$  gewonnen, welche entsprechend (5.6) bestimmt wird. Die explizite Berechnung der Zeitableitungen  $\dot{\mathbf{z}}_{d,I}$  und  $\ddot{\mathbf{z}}_{d,I}$  erfolgt auf Basis des Modells der Quadropterdynamik (2.21) sowie durch Differentiation der entworfenen analytischen Ausdrücke für das Schubgesetz (z. B. (5.45)) und die virtuelle Schubkraftkomponente  $\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p)$  (z. B. (5.30)), welche den von der Regelabweichung abhängigen Anteil von  $\mathbf{F}_{d,I}$  repräsentiert. (Vgl. auch Anmerkung 5.2.)

Abbildung 5.1: Strukturbild des Gesamtregelkreises. Zur Lösung des Trajektorienfolgeproblems für die Position  $\mathbf{p}_I$  und das Heading  $\mathbf{h}_I$  wird eine kaskadierte Reglerstruktur aus Positions- und Lageregelung eingesetzt.

erlaubt eine betragsmäßige Beschränkung der (virtuellen) resultierenden Gesamtkraft, welche auf den Quadrocopter wirkt. Dies bringt zwei entscheidende Vorteile mit sich. Zum einen lässt sich der Betrag  $F_d$  der virtuellen Schubkraft  $\mathbf{F}_d = F_d \cdot (-\mathbf{z}_d)$  auf Werte größer Null begrenzen. Dies gewährleistet, dass die kommandierte  $z$ -Achsenrichtung  $\mathbf{z}_d$  stets definiert ist und löst damit ein systemimmanentes Problem der Trajektorienfolgeregelung am Quadrocopter. Zum anderen kann der virtuelle Schubkraftvektor über die Wahl der Schranke in einem vorgegebenen Kegel gehalten werden. Somit lässt sich der maximale Kippwinkel vorhersagen, der potenziell an die Lageregelung kommandiert wird. Diese Eigenschaften tragen wesentlich dazu bei, dass der kaskadierte Gesamtregler Positionswechsel zwischen beliebig weit entfernten Zielpunkten direkt verarbeiten kann, ohne dass die Konvergenz des Systems zur gewünschten Ruhelage durch unbeschränkte Stellgrößenanforderungen beeinträchtigt oder gar gefährdet wird. Dies ist bemerkenswert, da die meisten Regelungsverfahren, die bisher auf den Quadrocopter angewendet wurden nur über einen eingeschränkten Einzugsbereich bezüglich der translatorischen Zustände verfügen und/oder mit zunehmender Regelabweichung unbeschränkt wachsende Stellgrößen erfordern. Aus diesem Grund eignet sich der vorgeschlagene Regler insbesondere für Anwendungen, bei denen weit voneinander entfernte Wegpunkte angefliegen werden müssen. Diese können somit ohne aufwändige Generierung einer interpolierenden Trajektorie direkt an die Regelung kommandiert werden.

Ein bisher unerwählter Entwurfsfreiheitsgrad, der weitgehend unabhängig von der Wahl der Positions- und Lageregelung besteht, betrifft die Festlegung eines Schubgesetzes. Dieses bestimmt, welcher Zusammenhang zwischen dem Betrag  $F_d$  der virtuellen Schubkraft  $\mathbf{F}_d = F_d \cdot (-\mathbf{z}_d)$  und dem tatsächlich kommandierten Schubkraftbetrag  $F$  besteht. Die sicher trivialste Möglichkeit das Schubgesetz festzulegen ist durch  $F = F_d$  gegeben, jedoch sind auch komplexe Zustandsrückführungen denkbar. In dieser Arbeit werden Schubgesetze der Form  $F = k_F \cdot F_d$  betrachtet, wobei der Schubübersetzungsfaktor  $k_F$  in Abhängigkeit des Schubrichtungsfehlers  $\varphi$  entworfen wird und somit wie in Abbildung 5.1 dargestellt als Funktion  $k_F(\mathbf{z}_I, \mathbf{z}_{d,I})$  der aktuellen und der gewünschten  $z$ -Achsenrichtung aufgefasst werden kann. Da das Schubgesetz einen nicht unerheblichen Einfluss auf die Dynamik des geschlossenen Regelkreises hat, muss es bestimmte Bedingungen erfüllen, die sich aus den erarbeiteten Stabilitätskriterien ableiten. Beispielsweise muss bei verschwindendem Schubrichtungsfehler sicherlich  $k_F = 1$  gelten, was der intuitiven Erwartungshaltung entspricht, dass in diesem Fall  $F = F_d$  gewährleistet sein sollte. Ein Vergleich zulässiger Schubgesetze im Kontext einer linearisierenden kaskadierten Trajektorienfolgeregelung wurde von Falconí u. a. in [61] durchgeführt.

Die nachfolgenden Abschnitte dieses Kapitels greifen Inhalte des von Fritsch u. a.

veröffentlichten Beitrags [73] auf. Zunächst wird in Abschnitt 5.1 eine Möglichkeit zur Spezifikation des Headingkommandos vorgeschlagen. Es resultiert eine Vorgabe  $\mathbf{x}_d$  für die Ausrichtung der körperfesten  $x$ -Achse. Mit deren Hilfe kann die Sollschubrichtung  $-\mathbf{z}_d$ , die sich aus dem Positionsregelgesetz ableitet, zu einer vollständigen Solllage  $\mathbf{R}_{ID}$  komplettiert werden. Es folgt in Abschnitt 5.2 die Herleitung der gesamten Folgefehlerdynamik, welche sich als nichtautonome, nichtlineare Kaskadenstruktur erweist. Für die vorliegende Klasse kaskadierter Systeme wird dann in Abschnitt 5.3 gezeigt, dass unter bestimmten Annahmen Aussagen zu den Stabilitätseigenschaften der Nullruhe-lage getroffen werden können. Daran anknüpfend erfolgt die Synthese eines kaskadierten Reglers, welcher zu einem geschlossenen Regelkreis führt, der mit den abgeleiteten Annahmen verträglich ist. Während der Teilregler für die Lage direkt aus Kapitel 4 übernommen werden kann, findet der Entwurf eines geeigneten Positionsreglers und die Festlegung eines geeigneten Schubgesetzes in den Abschnitten 5.4 und 5.5 statt. Abschließend werden in Abschnitt 5.6 Ergebnisse aus Flugversuchen präsentiert und besprochen.

## 5.1 Spezifikation des Headingkommandos

Durch die Verwendung eines vollständigen Lagereglers wird es möglich, Vorgaben für den Headingfreiheitsgrad einzuregeln. Dabei stellt sich die Frage, wozu der Freiheitsgrad genutzt wird und wie er infolgedessen sinnvoll spezifiziert werden sollte. Sehr häufig werden Quadrocopter dazu benutzt Luftaufnahmen anzufertigen. Hierfür werden sie mit einer oder mehreren Kameras ausgestattet, deren Blickrichtung im einfachsten Fall fest mit dem Quadrocopterrahmen gekoppelt ist. Denkbar wäre beispielsweise, dass eine einzelne Kamera so angebracht wird, dass sie entlang der körperfesten  $x$ -Achse blickt. In einem solchen Szenario kann der Headingfreiheitsgrad dazu genutzt werden, die Blickrichtung der Kamera bezüglich der horizontalen Ebene zu führen. Zu diesem Zweck wird die Trajektorie der gewünschten Blickrichtung mit Hilfe des Sollheadingvektors  $\mathbf{h}_{d,I} = \begin{bmatrix} h_{d,Ix} & h_{d,Iy} & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathcal{S}^2$  spezifiziert, der stets in der horizontalen Ebene liegt. Das tatsächlich vorliegende Heading soll über den Vektor  $\mathbf{h}_I = \begin{bmatrix} h_{Ix} & h_{Iy} & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathcal{S}^2$  beschrieben werden. Wie man in Abbildung 5.2b sehen kann, beschreibt  $\mathbf{h}$  die normalisierte senkrechte Projektion von  $\mathbf{x}$  in die horizontale Ebene und genügt damit der Berechnungsvorschrift

$$\mathbf{h}_I = \frac{1}{\|\langle\langle \mathbf{z}_{in,I} \rangle\rangle \mathbf{x}_I \rangle\rangle \mathbf{z}_{in,I}\|} \langle\langle \mathbf{z}_{in,I} \rangle\rangle \mathbf{x}_I \rangle\rangle \mathbf{z}_{in,I} = \frac{1}{\|\langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \mathbf{x}_I \rangle\rangle \mathbf{e}_z\|} \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \mathbf{x}_I \rangle\rangle \mathbf{e}_z . \quad (5.1)$$

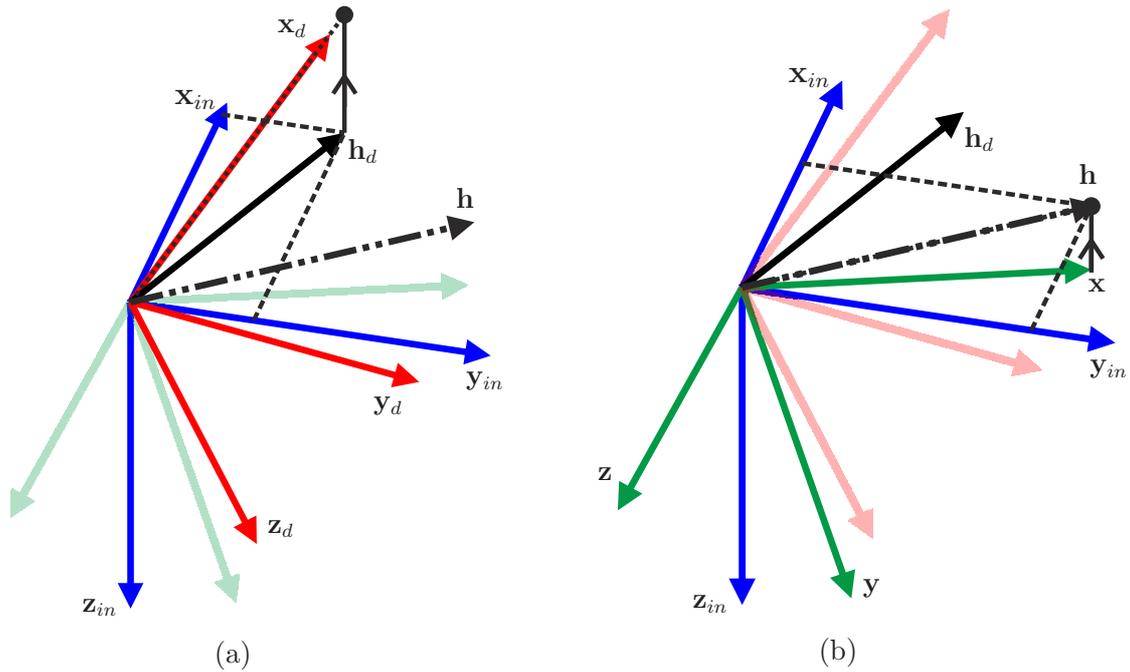


Abbildung 5.2: Konstruktive Bestimmung von  $\mathbf{x}_d$  und  $\mathbf{h}$ . Beide Abbildungen zeigen dieselbe Situation. (a) Bestimmung von  $\mathbf{x}_d$  durch Projektion von  $\mathbf{h}_d$  entlang  $\mathbf{z}_{in}$  in die Ebene senkrecht zu  $\mathbf{z}_d$  und anschließende Normalisierung. (b) Konstruktion von  $\mathbf{h}$  durch normalisierte senkrechte Projektion von  $\mathbf{x}$  in die horizontale Ebene.

Das Ziel besteht nun darin, aus dem Sollheadingvektor  $\mathbf{h}_d$  die Sollausrichtung  $\mathbf{x}_d$  der körperfesten  $x$ -Achse so zu bestimmen, dass  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{h}_d$  erreicht wird, wenn der Lageregler die Sollausrichtung  $D = \{\mathbf{x}_d, \mathbf{y}_d, \mathbf{z}_d\}$  einregelt.

Wenn man berücksichtigt, dass die inertielle  $z$ -Achse  $\mathbf{z}_{in}$  senkrecht zur horizontalen Ebene steht, so lässt sich eine geeignete Vorgabe  $\mathbf{x}_d$  bestimmen, indem der Vektor  $\mathbf{h}_d$  zuerst entlang  $\mathbf{z}_{in}$  in die Ebene senkrecht zu  $\mathbf{z}_d$  projiziert und anschließend normalisiert wird. Dieser Projektions- und Normalisierungsvorgang ist in Abbildung 5.2a veranschaulicht. Die Rechenvorschrift zur Bestimmung von  $\mathbf{x}_d$  in inertialer Darstellung lautet entsprechend

$$\mathbf{x}_{d,I} = \frac{1}{\|\langle\langle\mathbf{z}_{in,I}\rangle\rangle\mathbf{h}_{d,I}\rangle\mathbf{z}_{d,I}\|} \langle\langle\langle\mathbf{z}_{in,I}\rangle\rangle\mathbf{h}_{d,I}\rangle\mathbf{z}_{d,I} = \frac{1}{\|\langle\langle\mathbf{e}_z\rangle\rangle\mathbf{h}_{d,I}\rangle\mathbf{z}_{d,I}\|} \langle\langle\langle\mathbf{e}_z\rangle\rangle\mathbf{h}_{d,I}\rangle\mathbf{z}_{d,I}. \quad (5.2)$$

Der in Kapitel 4 vorgestellte Lageregler benötigt die einzuregelnde Lagetrajektorie in Form der Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_{ID}$ . In (4.1) wurde bereits angegeben, wie sich  $\mathbf{R}_{ID}$  aus der Sollausrichtung der  $x$ -Achse  $\mathbf{x}_d$  und der Sollausrichtung der  $z$ -Achse  $\mathbf{z}_d$  (welche aus dem Positionsregelgesetz resultiert) bestimmen lässt. Da neben  $\mathbf{R}_{ID}$  auch die Zeitableitungen  $\dot{\mathbf{R}}_{ID}$  und  $\ddot{\mathbf{R}}_{ID}$  benötigt werden, müssen  $\dot{\mathbf{x}}_{d,I}$  und  $\ddot{\mathbf{x}}_{d,I}$  ebenfalls bestimmt werden

(vgl. (4.1)). Die expliziten Berechnungsvorschriften hierfür wurden aus Platzgründen in den Anhang A.4 verschoben und erfordern die Kenntnis der Größen  $\dot{\mathbf{h}}_{d,I}$  und  $\ddot{\mathbf{h}}_{d,I}$ . Im Folgenden wird deshalb davon ausgegangen, dass die Headingtrajektorie  $\mathbf{h}_{d,I}$  zweifach stetig nach der Zeit differenzierbar vorliegt. Gleiches gilt für die Sollausrichtung der körperfesten  $z$ -Achse  $\mathbf{z}_{d,I}$ .

**Anmerkung 5.1** Die in Abbildung 5.2a veranschaulichte normalisierte Projektion schlägt fehl, wenn der Vektor  $\mathbf{z}_d$  in der horizontalen Ebene liegt. In Abschnitt 5.4 wird der Positionsregler deshalb so entworfen, dass dieser Fall ausgeschlossen ist und somit gewährleistet werden kann, dass sich  $\mathbf{x}_d$  stets über die Vorschrift (5.2) bestimmen lässt.

In ähnlicher Weise lässt sich der Headingvektor  $\mathbf{h}$  nicht aus (5.1) bestimmen, wenn  $\mathbf{x}$  senkrecht zur horizontalen Ebene steht. Dies stellt jedoch kein Problem dar, da  $\mathbf{h}$  lediglich eine Hilfsgröße repräsentiert, die nicht vom Regelalgorithmus verarbeitet wird. Darüber hinaus kann diese Situation nicht dauerhaft vorliegen, wenn man voraussetzt, dass  $\mathbf{x}_d$  stets definiert ist. Da im Zuge des Einschwingvorgangs  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_d$  konvergiert, existiert immer ein Zeitpunkt ab dem  $\mathbf{h}$  durchgängig berechnet werden kann und ab dem  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{h}_d$  konvergiert.

## 5.2 Die Folgefehlerdynamik - Ein kaskadiertes System

Man kann zeigen, dass die Gesamtfolgefehlerdynamik, bestehend aus der geregelten Positions- und der geregelten Lagefolgefehlerdynamik, eine nichtautonome nichtlineare Kaskadenstruktur bildet. Hierfür ist es von Vorteil den Lagefolgefehler, der bisher über die Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_{BD}$  parametrisiert wurde, vektoriell zu definieren. Die Vektordarstellung für Rotationsmatrizen, die bereits in Unterabschnitt 2.1.1 eingeführt wurde, ist dabei von Nutzen. Mit Hilfe der Zustandsvariable

$$\boldsymbol{\xi}_R = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{R,1} \\ \boldsymbol{\xi}_{R,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_{BD} - \bar{\mathbf{I}}_3 \\ \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \end{bmatrix} \in \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^{12}, \quad (5.3)$$

worin  $\boldsymbol{\xi}_{R,1} = \bar{\mathbf{R}}_{BD} - \bar{\mathbf{I}}_3 \in \mathbb{R}^9$  und  $\boldsymbol{\xi}_{R,2} = \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \in \mathbb{R}^3$  gilt, lässt sich der rotatorische Folgefehler vektoriell darstellen und es wird zusätzlich erreicht, dass die angestrebte Ruhelage im Ursprung zu liegen kommt. Man beachte, dass  $\boldsymbol{\xi}_R$  auf der glatten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{R}$  lebt, die topologisch äquivalent zu  $SO(3) \times \mathbb{R}^3$  ist und damit  $\dim(\mathcal{R}) = 6$  erfüllt. Mit dem Fehlervektor  $\boldsymbol{\xi}_R$  lässt sich nun (4.68) umformulieren und die rotatorische Folgefeh-

lerdynamik kann in der Form

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_R = \underbrace{\begin{bmatrix} \langle\langle \tilde{\mathbf{R}}_{BD} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \\ \mathbf{J}^{-1}(1 - \Gamma(\boldsymbol{\xi}_R)) \langle\langle \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} + \tilde{\boldsymbol{\tau}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_R(\boldsymbol{\xi}_R, \tilde{\boldsymbol{\tau}})} \quad (5.4)$$

angegeben werden. Wie schon in Abschnitt 4.4 beschrieben, repräsentiert  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  darin die (virtuelle) Stellgröße, die einem geeigneten Lageregelgesetz  $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi}_R)$  zur Verfügung steht, um die Ruhelage  $\boldsymbol{\xi}_R = \mathbf{0}$  asymptotisch zu stabilisieren. An gleicher Stelle wurde ausgeführt, dass mit dem in Abschnitt 4.3 entworfenen Regelgesetz (4.23) bereits ein Regler bekannt ist, der diese Aufgabe löst. Es sei daran erinnert, dass für die Herleitung von (4.68) die Eingangstransformation (4.67) angewendet wurde. Somit berechnet sich das reale Stellmoment  $\boldsymbol{\tau}$  aus der Vorschrift

$$\boldsymbol{\tau} = -\Gamma(\boldsymbol{\xi}_R) \langle\langle \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_B^{IB} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} - (1 - \Gamma(\boldsymbol{\xi}_R)) (\langle\langle \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_B^{ID} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{IB} + \langle\langle \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{ID}) + \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_B^{ID} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}, \quad (5.5)$$

für deren Darstellung nun die neue Zustandsvariable  $\boldsymbol{\xi}_R$  genutzt wurde.

Der translatorische Folgefehler

$$\boldsymbol{\xi}_p = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_I - \mathbf{p}_{d,I} \\ \dot{\mathbf{p}}_I - \dot{\mathbf{p}}_{d,I} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

beschreibt die Abweichung zwischen der tatsächlichen und der gewünschten Position und Geschwindigkeit des Quadrocopters. Durch Einführung des virtuellen Schubkraftvektors

$$\mathbf{F}_{d,I} = F_d \cdot (-\mathbf{z}_{d,I}) = \mathbf{D} \dot{\mathbf{p}}_{d,I} - m g \mathbf{e}_z + m \ddot{\mathbf{p}}_{d,I} + \tilde{\mathbf{F}} \quad (5.6)$$

und Berücksichtigung der Streckendynamik (2.21a) kann man die translatorische Folgefehlerdynamik

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_p = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \\ -\frac{1}{m} \mathbf{D} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \frac{1}{m} \tilde{\mathbf{F}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \tilde{\mathbf{F}})} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1}{m} (F_d \mathbf{z}_{d,I} - F \mathbf{z}_I) \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_p} \quad (5.7)$$

aufstellen. Darin beschreibt  $\mathbf{g}_p$  die Beschleunigung, die durch die Abweichung zwischen der realen Schubkraft  $\mathbf{F} = F \cdot (-\mathbf{z})$  und der virtuellen Schubkraft  $\mathbf{F}_d = F_d \cdot (-\mathbf{z}_d)$  verursacht wird und charakterisiert somit die Kopplung zwischen der Positionsfolgefehlerdynamik (5.7) und der Lagefolgefehlerdynamik (5.4). Die Größe  $\tilde{\mathbf{F}}$ , die bis hierhin noch nicht spezifiziert wurde, wird im Folgenden als neue (virtuelle) Stellgröße eines

Positions(fehler)reglers aufgefasst, wobei der Entwurf des Regelgesetzes  $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p)$  für die ungekoppelte Teildynamik  $\dot{\boldsymbol{\xi}}_p = \mathbf{f}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \tilde{\mathbf{F}})$  erfolgt.

Die Gleichungen (5.4) und (5.7) beschreiben im Zusammenspiel mit den Teilreglern für die Lage und die Position die Gesamtfolgefehlerdynamik. Diese bildet ein kaskadiertes System, welches in Abbildung 5.3 veranschaulicht ist. Der vorgelagerte, unabhängige Lageregelkreis wirkt über den Kopplungsterm  $\mathbf{g}_p$  in den nachgelagerten Positionsregelkreis ein. Aus der vorliegenden Systemstruktur wird die grundsätzliche Funktionsweise des vorgeschlagenen Regelungskonzepts deutlich, wenn man von den folgenden drei Annahmen ausgeht:

1. Es wird ein Positionsregelgesetz  $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p)$  so entworfen, dass der Punkt  $\boldsymbol{\xi}_p = \mathbf{0}$  zu einer asymptotisch stabilen Ruhelage des ungekoppelten Systems  $\dot{\boldsymbol{\xi}}_p = \mathbf{f}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p))$  gemacht wird.
2. Der Kopplungsterm  $\mathbf{g}_p$ , der als eine Art Störung auf das ungekoppelte Positionsteilsystem einwirkt, erfüllt  $\mathbf{g}_p \rightarrow \mathbf{0}$  für den Fall, dass  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_d$  konvergiert.
3. Das Lageregelgesetz  $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi}_R)$  stellt die Konvergenz  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_d$  und  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{h}_d$  sicher, indem es  $\boldsymbol{\xi}_R \rightarrow \mathbf{0}$  garantiert.

Sollten diese Voraussetzungen erfüllt sein, so erscheint es plausibel, dass asymptotische Positions- und Headingfolge erzielt wird. Im nachfolgenden Abschnitt wird nachgewiesen, dass dies in der Tat zutrifft, wenn man die etwas salopp formulierten Annahmen weiter präzisiert.

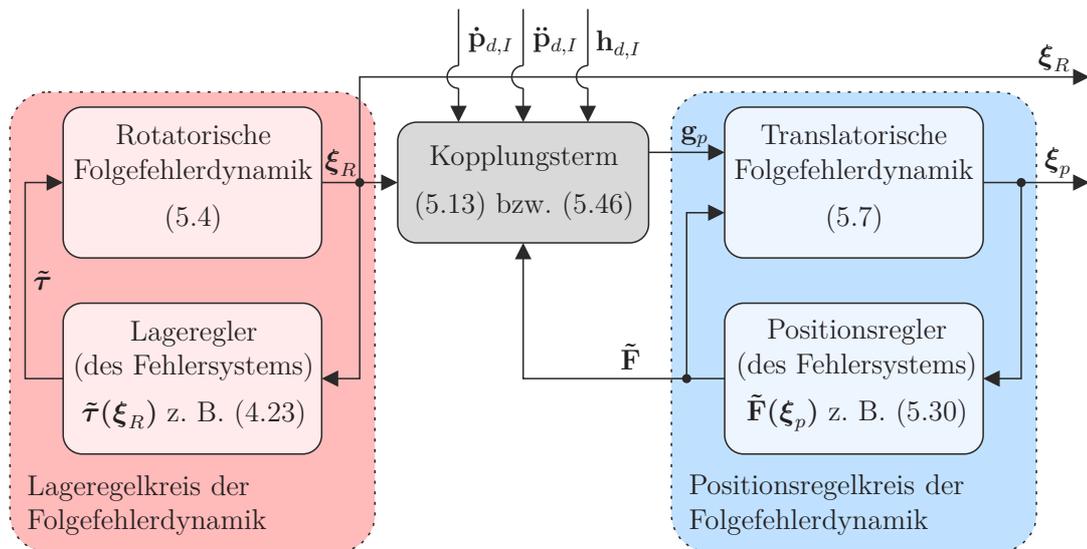


Abbildung 5.3: Strukturbild der Gesamtfolgefehlerdynamik. Regelziel ist die Stabilisierung der Ruhelage  $(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_R) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ .

In Vorbereitung hierfür wird nun die Abhängigkeit des Kopplungsterms  $\mathbf{g}_p$  von den Fehlerzuständen  $\boldsymbol{\xi}_R$  und  $\boldsymbol{\xi}_p$  sowie von den Solltrajektorien  $\mathbf{p}_{d,I}$  und  $\mathbf{h}_{d,I}$  analysiert. Da von einem Positionsregelgesetz  $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p)$  ausgegangen wird, ergibt sich aus (5.6) für die virtuelle Schubkraft eine Abhängigkeit der Form  $\mathbf{F}_{d,I} = \mathbf{F}_{d,I}(\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p), \dot{\mathbf{p}}_{d,I}, \ddot{\mathbf{p}}_{d,I})$ . Berücksichtigt man weiterhin, dass  $F_d = \|\mathbf{F}_{d,I}\|$  und  $\mathbf{z}_{d,I} = -\mathbf{F}_{d,I}/\|\mathbf{F}_{d,I}\|$  gilt, so folgt daraus für den Betrag der virtuellen Schubkraft

$$F_d = F_d(\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p), \dot{\mathbf{p}}_{d,I}, \ddot{\mathbf{p}}_{d,I}) \quad (5.8)$$

und für die Sollausrichtung der  $z$ -Achse

$$\mathbf{z}_{d,I} = \mathbf{z}_{d,I}(\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p), \dot{\mathbf{p}}_{d,I}, \ddot{\mathbf{p}}_{d,I}) . \quad (5.9)$$

Die tatsächliche Ausrichtung der körperfesten  $z$ -Achse  $\mathbf{z}_I$  kann über die Beziehung  $\mathbf{z}_I = \mathbf{R}_{ID}\mathbf{R}_{BD}^T\mathbf{e}_z$  dargestellt werden. Die darin enthaltene Matrix  $\mathbf{R}_{ID}$  wiederum kann als Funktion von  $\mathbf{h}_{d,I}$  und  $\mathbf{z}_{d,I}$  aufgefasst werden, also

$$\mathbf{R}_{ID} = \mathbf{R}_{ID}(\mathbf{h}_{d,I}, \mathbf{z}_{d,I}) . \quad (5.10)$$

Dies wird ersichtlich, wenn man berücksichtigt, dass  $\mathbf{R}_{ID} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{d,I} & \langle\langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle\rangle \mathbf{x}_{d,I} & \mathbf{z}_{d,I} \end{bmatrix}$  gilt (vgl. (4.1)) und für  $\mathbf{x}_{d,I}$  in Folge der Beziehung (5.2) eine Abhängigkeit der Form

$$\mathbf{x}_{d,I} = \mathbf{x}_{d,I}(\mathbf{h}_{d,I}, \mathbf{z}_{d,I})$$

besteht. Weiterhin schließt man aus (5.3), dass  $\mathbf{R}_{BD}$  einer funktionalen Beziehung der Form  $\mathbf{R}_{BD} = \mathbf{R}_{BD}(\boldsymbol{\xi}_{R,1})$  genügt. Hieraus kann man nun zusammen mit (5.10) und (5.9) ableiten, dass sich  $\mathbf{z}_I = \mathbf{R}_{ID}\mathbf{R}_{BD}^T\mathbf{e}_z$  als Funktion

$$\mathbf{z}_I = \mathbf{z}_I(\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p), \boldsymbol{\xi}_{R,1}, \dot{\mathbf{p}}_{d,I}, \ddot{\mathbf{p}}_{d,I}, \mathbf{h}_{d,I}) \quad (5.11)$$

darstellen lässt. Beschränkt man sich schließlich auf den Fall, dass der reale Schub  $F$  über ein Schubgesetz der allgemeinen Form

$$F = k_F(\boldsymbol{\xi}_{R,1}) \cdot F_d^1 \quad (5.12)$$

---

<sup>1</sup>Um die Notation einfach zu halten, wurde an dieser Stelle eine beliebige Abhängigkeit des Schubübersetzungsfaktors  $k_F$  vom Lagefehler  $\boldsymbol{\xi}_{R,1}$  zugelassen. Die in dieser Arbeit vorrangig behandelte Abhängigkeit vom Schubrichtungsfehler  $\varphi$  kann dagegen allein mit den letzten drei Elementen von  $\boldsymbol{\xi}_{R,1}$  vollständig beschrieben werden.

aus dem Betrag der virtuellen Schubkraft  $F_d$  hervorgeht, so folgert man aus der Definition von  $\mathbf{g}_p$  in (5.7) sowie den Abhängigkeiten (5.8), (5.9), (5.11) und (5.12), dass der Kopplungsterm als Funktion

$$\mathbf{g}_p = \mathbf{g}_p(\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p), k_F(\boldsymbol{\xi}_{R,1}), \boldsymbol{\xi}_{R,1}, \dot{\mathbf{p}}_{d,I}, \ddot{\mathbf{p}}_{d,I}, \mathbf{h}_{d,I}) \quad (5.13)$$

aufgefasst werden kann.

**Anmerkung 5.2** Um das in (5.5) angegebene Stellmoment  $\boldsymbol{\tau}$  zu realisieren, müssen insbesondere die Größen  $\boldsymbol{\omega}_B^{ID}$  und  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_B^{ID}$  bestimmt werden. Wie aus (4.4) und (4.6) hervorgeht, ist hierfür die Berechnung der Ableitungen  $\dot{\mathbf{R}}_{ID}$  und  $\ddot{\mathbf{R}}_{ID}$  erforderlich. Unter Zuhilfenahme der translatorischen und der rotatorischen Folgefehlerdynamik (5.4), (5.7) (bzw. des Streckenmodells (2.21)) sowie durch Differentiation der gewählten analytischen Ausdrücke für das Positionsregelgesetz  $\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p)$  und den Schubübersetzungsfaktor  $k_F(\boldsymbol{\xi}_{R,1})$  ist es stets möglich, die benötigten Ableitungen explizit zu berechnen. Allerdings müssen hierfür sowohl die Solltrajektorien  $\mathbf{p}_{d,I}(t)$  und  $\mathbf{h}_{d,I}(t)$  als auch die Funktionen  $\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p)$  und  $k_F(\boldsymbol{\xi}_{R,1})$  gewisse Glattheitseigenschaften aufweisen, die im Folgenden diskutiert werden. Da die resultierenden Ausdrücke für  $\dot{\mathbf{R}}_{ID}$  und  $\ddot{\mathbf{R}}_{ID}$  extrem groß werden, (weshalb sich für die Implementierung die Nutzung symbolverarbeitender Mathematiksoftware empfiehlt,) wird in dieser Arbeit darauf verzichtet sie explizit anzugeben. Um dennoch die Glattheitsanforderungen analysieren zu können, konzentriert sich die nachfolgende Diskussion auf die grundsätzlichen funktionalen Abhängigkeiten.

Die stärksten Glattheitsanforderungen entspringen aus der Berechnungsvorschrift für die zweite Ableitung  $\ddot{\mathbf{R}}_{ID}$ , welche im Hinblick auf ein kontinuierliches Stellmoment  $\boldsymbol{\tau}$  selbst kontinuierlich sein muss. Aus (5.10) (vgl. auch (4.1) und (A.17)) geht hervor, dass  $\ddot{\mathbf{R}}_{ID}$  einer Beziehung  $\ddot{\mathbf{R}}_{ID} = \ddot{\mathbf{R}}_{ID}(\mathbf{h}_{d,I}, \dot{\mathbf{h}}_{d,I}, \ddot{\mathbf{h}}_{d,I}, \mathbf{z}_{d,I}, \dot{\mathbf{z}}_{d,I}, \ddot{\mathbf{z}}_{d,I})$  genügt und daher Stetigkeit der Funktionsargumente erforderlich ist. Dies führt unmittelbar auf die folgenden (hinreichenden) Glattheitsanforderungen:

- Stetigkeit des Arguments  $\ddot{\mathbf{h}}_{d,I}$  erfordert  $\mathbf{h}_{d,I}(t) \in \mathcal{C}^2$ .
- Ausgehend von (5.9) folgert man, dass  $\ddot{\mathbf{z}}_{d,I} = \ddot{\mathbf{z}}_{d,I}(\tilde{\mathbf{F}}, \dot{\tilde{\mathbf{F}}}, \ddot{\tilde{\mathbf{F}}}, \dot{\mathbf{p}}_{d,I}, \ddot{\mathbf{p}}_{d,I}, \mathbf{p}_{d,I}^{(3)}, \mathbf{p}_{d,I}^{(4)})$  gilt. Somit muss  $\mathbf{p}_{d,I}(t) \in \mathcal{C}^4$  und  $\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p) \in \mathcal{C}^2$  gewährleistet werden.
- Darüber hinaus erfordert ein kontinuierlicher Zeitverlauf von  $\ddot{\mathbf{z}}_{d,I}$ , dass auch der Verlauf von  $\ddot{\tilde{\mathbf{F}}} = \ddot{\tilde{\mathbf{F}}}(\boldsymbol{\xi}_p, \dot{\boldsymbol{\xi}}_p, \ddot{\boldsymbol{\xi}}_p)$  stetig ist, woraus wiederum folgt, dass Stetigkeit von  $\ddot{\boldsymbol{\xi}}_p$  vorliegen muss. Aus der translatorischen Folgefehlerdynamik (5.7) schließt man, dass  $\ddot{\boldsymbol{\xi}}_p = \ddot{\boldsymbol{\xi}}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \dot{\boldsymbol{\xi}}_p, \ddot{\boldsymbol{\xi}}_p, \tilde{\mathbf{F}}, \dot{\tilde{\mathbf{F}}}, \mathbf{g}_p, \dot{\mathbf{g}}_p)$  gilt und basierend auf (5.13) ergibt sich der

Zusammenhang  $\dot{\mathbf{g}}_p = \dot{\mathbf{g}}_p(\tilde{\mathbf{F}}, \dot{\tilde{\mathbf{F}}}, k_F, \dot{k}_F, \boldsymbol{\xi}_{R,1}, \dot{\boldsymbol{\xi}}_{R,1}, \dot{\mathbf{p}}_{d,I}, \ddot{\mathbf{p}}_{d,I}, \dot{\mathbf{p}}_{d,I}^{(3)}, \mathbf{h}_{d,I}, \dot{\mathbf{h}}_{d,I})$ . Hieraus kann schließlich abgeleitet werden, dass  $k_F(\boldsymbol{\xi}_{R,1}) \in C^1$  erforderlich ist.

**Anmerkung 5.3** Man beachte, dass die Sollausrichtung der  $z$ -Achse  $\mathbf{z}_{d,I} = -\mathbf{F}_{d,I}/\|\mathbf{F}_{d,I}\|$  nur definiert ist, wenn  $\|\mathbf{F}_{d,I}\| \neq 0$  gilt. Aus der Definition der virtuellen Schubkraft (5.6) leitet man ab, dass  $\|\mathbf{F}_{d,I}\| \neq 0$  garantiert werden kann, wenn

$$\hat{F} = \sup_t \|\mathbf{D}\dot{\mathbf{p}}_{d,I} + m\ddot{\mathbf{p}}_{d,I} + \tilde{\mathbf{F}}\| < mg \quad (5.14)$$

sichergestellt ist. In Abschnitt 5.4 wird ein Positionsregelgesetz  $\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p)$  entworfen, welches  $\|\tilde{\mathbf{F}}\| \leq \bar{F}$  für eine gegebene Schranke  $\bar{F}$  erfüllt. Indem man  $\bar{F} < mg$  wählt und die Positionstrajektorie  $\mathbf{p}_{d,I}$  so entwirft, dass

$$\sup_t \|\mathbf{D}\dot{\mathbf{p}}_{d,I} + m\ddot{\mathbf{p}}_{d,I}\| < mg - \bar{F}$$

erfüllt ist, kann gewährleistet werden, dass die Bedingung (5.14) eingehalten wird. Ist schließlich  $\hat{F}$  (oder eine obere Schranke) bekannt, so lässt sich zudem der maximale Kippwinkel  $\Upsilon$  berechnen, der potenziell an die Lageregelung kommandiert wird. Abbildung 5.4 veranschaulicht, dass die Einhaltung der Bedingung (5.14) bedeutet, dass die

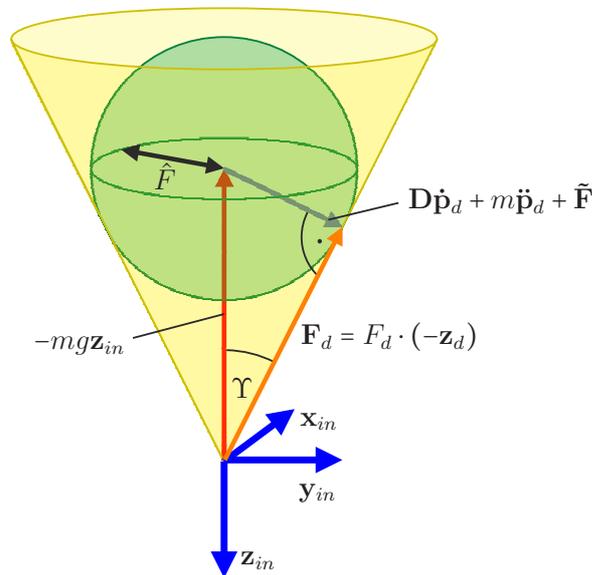


Abbildung 5.4: Auswirkung der Bedingung (5.14) auf die erreichbaren Ausrichtungen der virtuellen Schubkraft  $\mathbf{F}_d$ . Der Richtungsvektor  $-\mathbf{z}_d$  der virtuellen Schubkraft ist durch den gelben Kegel begrenzt, da die Spitze von  $\mathbf{F}_d$  in der grünen Kugel zum liegen kommen muss. Beispielhaft ist ein Extremfall eingezeichnet, für den der maximale Kippwinkel  $\Upsilon$  resultiert, welcher unter Bedingung (5.14) kommandiert werden kann.

Spitze von  $\mathbf{F}_d$  entsprechend (5.6) nur in der grünen Kugel zum liegen kommen kann. Damit ist die virtuelle Schubkrafttrichtung  $-\mathbf{z}_{d,I}$  stets durch den gelben Kegel begrenzt und es ergibt sich für den Maximalwinkel  $\Upsilon = \arcsin(\hat{F}/mg)$ . Es folgt unmittelbar, dass die Bedingung (5.14) ebenfalls garantiert, dass  $\mathbf{z}_{d,I}$  nie in der horizontalen Ebene liegen kann. Dies führt dazu, dass die normalisierte Projektion (5.2) zur Bestimmung von  $\mathbf{x}_{d,I}$  stets ausgeführt werden kann.

## 5.3 Ein Stabilitätskriterium für eine Klasse nichtautonomer, nichtlinearer kaskadierter Systeme

Im vorangegangenen Abschnitt wurde gezeigt, dass die Gesamtfolgefehlerdynamik des Quadrocopters ein kaskadiertes System der Form

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_p = \mathbf{f}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p)) + \mathbf{g}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_R, \mathbf{d}) \quad (5.15a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_R = \mathbf{f}_R(\boldsymbol{\xi}_R, \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi}_R)) \quad (5.15b)$$

bildet. In der hier gewählten Darstellung wurden die Signale  $\dot{\mathbf{p}}_{d,I}$ ,  $\ddot{\mathbf{p}}_{d,I}$  und  $\mathbf{h}_{d,I}$  im vektoriiellen Systemeingang  $\mathbf{d} = [\dot{\mathbf{p}}_{d,I}^T \ \ddot{\mathbf{p}}_{d,I}^T \ \mathbf{h}_{d,I}^T]^T$  zusammengefasst.

In diesem Abschnitt werden nun Ergebnisse vorgestellt, die sich auf allgemeine kaskadierte Systeme der Form (5.15) beziehen. Es wird davon ausgegangen, dass  $\mathbf{f}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p))$  ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf  $\mathbb{R}^{n_p}$  beschreibt für das  $\mathbf{f}_p(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{0})) = \mathbf{0}$  erfüllt ist. Weiterhin sei  $\mathbf{f}_R(\boldsymbol{\xi}_R, \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi}_R))$  ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^{n_R}$ ,  $\mathbf{0} \in \mathcal{M}$ , für das  $\mathbf{f}_R(\mathbf{0}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{0})) = \mathbf{0}$  gilt. Von der Funktion  $\mathbf{g}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_R, \mathbf{d})$  wird angenommen, dass sie stetig in allen ihren Argumenten ist. Weiterhin sei der Zeitverlauf des Systemeingangs  $\mathbf{d}$  kontinuierlich. Basierend auf diesen Voraussetzungen werden im Folgenden hinreichende Bedingungen für die asymptotische Stabilität des Ursprungs  $(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_R) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  formuliert und bewiesen.

Während aus der vorliegenden Kaskadenstruktur (5.15) notwendigerweise folgt, dass die Ruhelage  $\boldsymbol{\xi}_R = \mathbf{0}$  des autonomen Teilsystems (5.15b) asymptotisch stabil sein muss, lässt sich für das Teilsystem (5.15a) nicht unmittelbar erkennen, welche Bedingungen es erfüllen sollte. Vielmehr ist bekannt, dass ein solches System selbst dann durch  $\mathbf{g}_p$  destabilisiert werden kann, wenn die Ruhelage  $\boldsymbol{\xi}_p = \mathbf{0}$  des ungekoppelten Systems  $\dot{\boldsymbol{\xi}}_p = \mathbf{f}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p))$  global asymptotisch stabil ist und darüber hinaus der Kopplungsterm  $\mathbf{g}_p \rightarrow \mathbf{0}$  für  $\boldsymbol{\xi}_R \rightarrow \mathbf{0}$  erfüllt. Es ist jedoch auch bekannt, dass die erwünschte Konvergenz  $\boldsymbol{\xi}_p \rightarrow \mathbf{0}$  für  $t \rightarrow \infty$  eintritt, wenn zusätzlich die Beschränktheit sämtlicher Trajektorien  $\boldsymbol{\xi}_p$

nachgewiesen werden kann [159]. Hierin liegt der Schlüssel für den Stabilitätsnachweis bei kaskadierten Systemen.

Zahlreiche Veröffentlichungen beschäftigen sich unter verschiedenen Voraussetzungen mit Stabilitätsuntersuchungen zu kaskadierten Systemen. Das vorliegende System (5.15) lässt sich jedoch keiner der behandelten Systemklassen uneingeschränkt zuordnen. Für eine kompakte Übersicht über die bestehende Literatur sei auf Loría u. Panteley [112] verwiesen. Die Mehrheit der klassischen Ergebnisse, wie z. B. [158, 155, 91, 120, 156], bezieht sich auf autonome Kaskaden. Da (5.15) jedoch vom externen Systemeingang  $\mathbf{d}$  angeregt wird und es sich folglich um ein nichtautonomes System handelt, lässt sich die dort vorgestellte Theorie nicht auf den vorliegenden Fall anwenden. In [137] und noch detaillierter in [112] werden nichtautonome Kaskaden behandelt. Allerdings sind die Ergebnisse primär auf Kopplungsterme der Form  $\mathbf{g}_p = \mathbf{g}(t, \boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_R) \boldsymbol{\xi}_R$  zugeschnitten, was hier nicht zutrifft. Darüber hinaus wird die Analyse in den genannten Quellen auf Kaskaden beschränkt, deren Teilsysteme globale Stabilitätseigenschaften aufweisen. Im Gegensatz dazu wird im Folgenden der Fall berücksichtigt, dass die Stabilitätseigenschaften von  $\boldsymbol{\xi}_R = \mathbf{0}$  des Teilsystems (5.15b) nur lokal gültig sein könnten. Es wird gezeigt, dass sich der Einzugsbereich  $\mathcal{A}_R$  von  $\boldsymbol{\xi}_R = \mathbf{0}$  direkt in den Einzugsbereich von  $(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_R) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  überträgt. Die vorgestellten Ergebnisse basieren auf den drei nachfolgend gelisteten Annahmen, die es ermöglichen den Beschränktheitsnachweis für  $\boldsymbol{\xi}_p$  ähnlich wie in [156][Theorem 4.7] zu führen. Weiterhin wird im Stabilitätsbeweis eine Systemeigenschaft ausgenutzt, die erstmals von Sontag in [158] unter dem Namen *converging input converging state (CICS)* vorgestellt wurde und die er später in [159] verallgemeinerte.

**Definition 5.1 (Converging input converging state (CICS) [158, 159])** *Ein System*

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}), \quad (5.16)$$

*dessen Vektorfeld die lokale Lipschitz-Bedingung bezüglich  $\boldsymbol{\xi}$  erfüllt, ist CICS, wenn für einen beliebigen Anfangswert  $\boldsymbol{\xi}_0$  und für ein beliebiges stetiges und beschränktes<sup>2</sup> Eingangssignal  $\mathbf{u}(t)$  mit  $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ , welches  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$  erfüllt, gilt, dass die Lösung  $\boldsymbol{\xi}(t)$  von (5.16) für alle  $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$  existiert und gegen Null konvergiert, d. h.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{0}$ .*

**Annahme 5.1 (Stabilitätseigenschaften der Teilsysteme)** *Die Ruhelage  $\boldsymbol{\xi}_p = \mathbf{0}$  des ungekoppelten Teilsystems  $\dot{\boldsymbol{\xi}}_p = \mathbf{f}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p))$  ist global asymptotisch stabil. Die Ru-*

---

<sup>2</sup>Entsprechend [159] können die Annahmen bezüglich  $\mathbf{u}(t)$  auf Lebesgue-Messbarkeit und Wesentliche Beschränktheit gelockert werden.

helage  $\xi_R = \mathbf{0}$  des Teilsystems  $\dot{\xi}_R = \mathbf{f}_R(\xi_R, \tilde{\tau}(\xi_R))$  ist lokal exponentiell stabil und besitzt den Einzugsbereich  $\mathcal{A}_R$ .

**Annahme 5.2 (Wachstumsbeschränkung des Kopplungsterms  $\mathbf{g}_p$ )** Es existiert eine in  $\|\xi_R\| = 0$  differenzierbare Funktion  $\gamma(\|\xi_R\|)$  der Klasse  $\mathcal{K}$  [95, Definition 4.2], sodass

$$\|\mathbf{g}_p(\xi_p, \xi_R, \mathbf{d})\| \leq \gamma(\|\xi_R\|) \quad (5.17)$$

erfüllt ist.

**Annahme 5.3 (Wachstumsbeschränkung der Funktion  $V_p$ )** Es existieren eine positiv semidefinite, radial unbeschränkte Funktion  $V_p(\xi_p)$  sowie positive Konstanten  $c_1$  und  $c_2$ , sodass für  $\|\xi_p\| \geq c_1$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_p}{\partial \xi_p} \mathbf{f}_p(\xi_p, \tilde{\mathbf{F}}(\xi_p)) &\leq 0, \\ \left\| \frac{\partial V_p}{\partial \xi_p} \right\| &\leq c_2 \cdot V_p(\xi_p) \end{aligned} \quad (5.18)$$

erfüllt sind.

Auf Basis der eingeführten Annahmen, lässt sich nun folgendes Stabilitätskriterium für das vorliegende nichtautonome, nichtlineare kaskadierte System formulieren:

**Theorem 5.1 (Stabilität des kaskadierten Systems)** Sind die Annahmen 5.1-5.3 erfüllt, so ist die Ruhelage  $(\xi_p, \xi_R) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  des kaskadierten Systems (5.15) asymptotisch stabil und besitzt den Einzugsbereich  $\mathbb{R}^{n_p} \times \mathcal{A}_R$ .

**Beweis:** Der Beweis umfasst zwei Schritte. Zunächst wird ähnlich wie in [156][Theorem 4.7] bewiesen, dass jede Lösung des Systems (5.15) mit Anfangszustand  $(\xi_{p,0}, \xi_{R,0}) \in \mathbb{R}^{n_p} \times \mathcal{A}_R$  beschränkt ist. Auf Basis der Beschränktheit wird anschließend mit Hilfe der in Definition 5.1 eingeführten CICS-Eigenschaft gezeigt, dass der Ursprung sowohl attraktiv als auch stabil ist und somit die Bedingungen für asymptotische Stabilität erfüllt. Im gesamten Beweis wird davon ausgegangen, dass die Anfangswerte  $(\xi_{p,0}, \xi_{R,0}) \in \mathbb{R}^{n_p} \times \mathcal{A}_R$  erfüllen und die Betrachtungen werden auf positive Zeiten beschränkt, d. h.  $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ . Um den Rand des Einzugsbereichs  $\mathcal{A}_R$  zu bezeichnen, wird die Notation  $\partial\mathcal{A}_R$  verwendet.

Aus den Annahmen 5.3 und 5.2 folgt für  $\|\boldsymbol{\xi}_p\| \geq c_1$ , dass

$$\begin{aligned} \dot{V}_p &= \frac{\partial V_p}{\partial \boldsymbol{\xi}_p} \mathbf{f}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p)) + \frac{\partial V_p}{\partial \boldsymbol{\xi}_p} \mathbf{g}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_R, \mathbf{d}) \\ &\leq \frac{\partial V_p}{\partial \boldsymbol{\xi}_p} \mathbf{g}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_R, \mathbf{d}) \leq \left\| \frac{\partial V_p}{\partial \boldsymbol{\xi}_p} \right\| \|\mathbf{g}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_R, \mathbf{d})\| \\ &\leq \left\| \frac{\partial V_p}{\partial \boldsymbol{\xi}_p} \right\| \gamma(\|\boldsymbol{\xi}_R\|) \end{aligned} \quad (5.19)$$

erfüllt ist. Die Funktion  $\gamma(\|\boldsymbol{\xi}_R\|)$  soll nun weiter nach oben abgeschätzt werden. Durch die Differenzierbarkeit von  $\gamma(\|\boldsymbol{\xi}_R\|)$  an der Stelle  $\|\boldsymbol{\xi}_R\| = \mathbf{0}$  existieren zwei Konstanten  $c_3, \epsilon_1 > 0$ , sodass in einer Umgebung  $\|\boldsymbol{\xi}_R\| < \epsilon_1$  die Beziehung

$$\gamma(\|\boldsymbol{\xi}_R\|) < c_3 \|\boldsymbol{\xi}_R\| \quad (5.20)$$

gilt. Aus der lokal exponentiellen Stabilität von  $\boldsymbol{\xi}_R = \mathbf{0}$  schließt man wiederum auf die Existenz einer positiven Konstante  $\alpha$  und einer stetigen Funktion  $h : \mathcal{A}_R \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ , welche  $h(\mathbf{0}) = 0$  und  $\lim_{\boldsymbol{\xi}_R \rightarrow \partial \mathcal{A}_R} h(\boldsymbol{\xi}_R) = \infty$  erfüllt, sodass

$$\|\boldsymbol{\xi}_R(t)\| \leq h(\boldsymbol{\xi}_{R,0}) e^{-\alpha t} \quad \forall t \quad (5.21)$$

gilt. Entsprechend ist für alle Zeiten, die größer sind als

$$T(\boldsymbol{\xi}_{R,0}) = \max\left(0, -\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\epsilon_1}{h(\boldsymbol{\xi}_{R,0})}\right)\right),$$

die Ungleichung  $\|\boldsymbol{\xi}_R\| < \epsilon_1$  erfüllt und es folgt aus (5.20) und (5.21) unmittelbar

$$\begin{aligned} \gamma(\|\boldsymbol{\xi}_R(t)\|) &\leq \gamma(h(\boldsymbol{\xi}_{R,0})) e^{\alpha T(\boldsymbol{\xi}_{R,0})} e^{-\alpha t} \quad \forall t \leq T(\boldsymbol{\xi}_{R,0}) \\ \gamma(\|\boldsymbol{\xi}_R(t)\|) &< c_3 h(\boldsymbol{\xi}_{R,0}) e^{-\alpha t} \quad \forall t > T(\boldsymbol{\xi}_{R,0}). \end{aligned}$$

Durch Definition der stetigen Funktion  $C : \mathcal{A}_R \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ ,

$$C(\boldsymbol{\xi}_R) = \max\left(\gamma(h(\boldsymbol{\xi}_R)) e^{\alpha T(\boldsymbol{\xi}_R)}, c_3 h(\boldsymbol{\xi}_R)\right),$$

welche  $C(\mathbf{0}) = 0$  und  $\lim_{\boldsymbol{\xi}_R \rightarrow \partial \mathcal{A}_R} C(\boldsymbol{\xi}_R) = \infty$  erfüllt, kann man nun  $\gamma(\|\boldsymbol{\xi}_R(t)\|)$  durch

$$\gamma(\|\boldsymbol{\xi}_R(t)\|) \leq C(\boldsymbol{\xi}_{R,0}) e^{-\alpha t} \quad \forall t$$

nach oben abschätzen. Setzt man dieses Ergebnis in (5.19) ein und nutzt (5.18), so erhält man für alle Zeiten  $t \in \mathcal{T} = \{t \mid \|\xi_p(t)\| \geq c_1\}$

$$\dot{V}_p \leq \left\| \frac{\partial V_p}{\partial \xi_p} \right\| C(\xi_{R,0}) e^{-\alpha t} \leq c_2 C(\xi_{R,0}) e^{-\alpha t} V_p. \quad (5.22)$$

Betrachtet man den Fall  $\mathcal{T} \neq \emptyset$ , so lässt sich die Menge  $\mathcal{T}$  in ihre größtmöglichen zusammenhängenden Teilintervalle  $\mathcal{T}_i = [t_{i,0}, t_{i,1}]$ ,  $i \in \{1, 2, \dots\}$  aufteilen, wobei mindestens ein Intervall existiert und das letzte Intervall bis  $\infty$  laufen darf (und damit entgegen der verwendeten Notation nicht abgeschlossen wäre). Aus der Differentialungleichung (5.22) folgt nun unmittelbar, dass für  $t \in \mathcal{T}_i$  die Funktion  $V_p(\xi_p(t))$  der Ungleichung

$$\begin{aligned} V_p(\xi_p(t)) &\leq V_p(\xi_p(t_{i,0})) e^{\int_{t_{i,0}}^t c_2 C(\xi_{R,0}) e^{-\alpha s} ds} \\ &\leq V_p(\xi_p(t_{i,0})) \cdot e^{\int_0^\infty c_2 C(\xi_{R,0}) e^{-\alpha s} ds} \\ &\leq V_p(\xi_p(t_{i,0})) \cdot e^{c_2 C(\xi_{R,0}) \frac{1}{\alpha}} \end{aligned} \quad (5.23)$$

genügt. Lässt man das erste Zeitintervall  $\mathcal{T}_1$  außen vor, so muss vor jedem Eintritt in den Bereich  $\|\xi_p\| \geq c_1$  ein Aufenthalt im Bereich  $\|\xi_p\| < c_1$  liegen. Demnach gilt für die Anfangszeitpunkte der Intervalle  $\mathcal{T}_i$ ,  $i \in \{2, 3, \dots\}$  der Zusammenhang  $\|\xi_p(t_{i,0})\| = c_1$ . Ein Sonderfall liegt für das erste Zeitintervall  $\mathcal{T}_1$  vor, wenn  $\|\xi_{p,0}\| \geq c_1$  gilt. Nur in diesem Fall ist  $t_{1,0} = 0$  und es kann  $\|\xi_p(t_{1,0})\| = \|\xi_{p,0}\| > c_1$  auftreten. Sollte hingegen  $t_{1,0} > 0$  sein, so gilt auch für den Anfangszeitpunkt des ersten Zeitintervalls  $\|\xi_p(t_{1,0})\| = c_1$ . Aus diesen Überlegungen folgt nun, dass eine obere Schranke für sämtliche  $V_p(\xi_p(t_{i,0}))$  durch

$$\bar{V}_p(\xi_{p,0}) = \max \left( V_p(\xi_{p,0}), \max_{\|\xi_p\|=c_1} V_p(\xi_p) \right) \geq V_p(\xi_p(t_{i,0})) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots\} \quad (5.24)$$

angegeben werden kann. Setzt man (5.24) in (5.23) ein, so erhält man schließlich die Ungleichung

$$V_p(\xi_p(t)) \leq \bar{V}_p(\xi_{p,0}) \cdot e^{c_2 C(\xi_{R,0}) \frac{1}{\alpha}},$$

die nun für alle  $t \in \mathcal{T}$  gilt. Da die Funktion  $V_p(\xi_p)$  entsprechend Annahme 5.3 radial unbeschränkt ist, impliziert die Beschränktheit von  $V_p(\xi_p(t))$  die Beschränktheit von  $\|\xi_p(t)\|$  für alle  $t \in \mathcal{T}$ . Hieraus folgt unmittelbar, dass  $\|\xi_p(t)\|$  für alle  $t$  beschränkt sein muss, denn im komplementären Fall  $t \notin \mathcal{T}$  ist per Konstruktion  $\|\xi_p(t)\| < c_1$  erfüllt.

In einem zweiten Schritt wird nun die asymptotische Stabilität der Ruhelage  $(\xi_p, \xi_R) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  bewiesen. Hierzu wird der Kopplungsterm  $\mathbf{g}_p$  in (5.15a) zunächst als externes

Eingangssignal aufgefasst und das System in der Form

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_p = \tilde{\mathbf{f}}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p), \mathbf{g}_p) \quad (5.25)$$

angeschrieben. Gemäß Annahme 5.1 ist die Ruhelage  $\boldsymbol{\xi}_p = \mathbf{0}$  des nicht angeregten Systems  $\dot{\boldsymbol{\xi}}_p = \tilde{\mathbf{f}}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p), \mathbf{0})$  global asymptotisch stabil. Aus [158] ist bekannt, dass unter diesen Umständen eine glatte Funktion  $\beta(\boldsymbol{\xi}_p) \neq 0, \forall \boldsymbol{\xi}_p$  existiert, sodass das System

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_p = \tilde{\mathbf{f}}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p), \beta(\boldsymbol{\xi}_p)\mathbf{v}) \quad (5.26)$$

bezüglich des neuen Eingangs  $\mathbf{v}$  die CICS-Eigenschaft (vgl. Definition 5.1) aufweist. Durch die lokal exponentielle Stabilität von  $\boldsymbol{\xi}_R = \mathbf{0}$ , die in Annahme 5.1 gefordert wurde, und die Wachstumsbeschränkung (5.17) ergibt sich, dass der Kopplungsterm  $\mathbf{g}_p$  beschränkt ist. Da weiterhin die Beschränktheit von  $\|\boldsymbol{\xi}_p\|$  bereits gezeigt wurde und  $\mathbf{g}_p$  einen stetigen Zeitverlauf besitzt, muss ein stetiges beschränktes Eingangssignal

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{g}_p}{\beta(\boldsymbol{\xi}_p)} \quad (5.27)$$

existieren, sodass die Lösungen von (5.25) und (5.26) übereinstimmen. Aufgrund der Tatsache, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\xi}_R(t) = \mathbf{0}$  gilt und (5.17) die Eigenschaft  $\mathbf{g}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \mathbf{0}, \mathbf{d}) = \mathbf{0}$  impliziert, muss auch  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{g}_p(t) = \mathbf{0}$  und schließlich  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}(t) = \mathbf{0}$  gelten. Aus der CICS-Eigenschaft folgt dann  $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\xi}_p(t) = \mathbf{0}$  und somit die Attraktivität der Ruhelage  $(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_R) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ .

Um zu zeigen, dass  $(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_R) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  auch stabil ist, muss bewiesen werden, dass die Lösung  $(\boldsymbol{\xi}_p(t), \boldsymbol{\xi}_R(t))$  in einer beliebig kleinen Umgebung der Ruhelage gehalten werden kann, wenn die Anfangswerte nur nahe genug an  $(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_R) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  liegen. Aus [158] ist bekannt, dass die CICS-Eigenschaft die Existenz positiver Konstanten  $\delta_p > 0$  und  $v_{max} > 0$  garantiert, sodass für ein beliebiges  $\epsilon_2 > 0$

$$\|\boldsymbol{\xi}_p(t)\| < \epsilon_2 \quad \forall t$$

sichergestellt ist, wenn zum einen  $\|\boldsymbol{\xi}_{p,0}\| < \delta_p$  erfüllt ist und zum anderen  $\|\mathbf{v}(t)\| < v_{max}$  für alle Zeiten gilt. Indem man

$$\beta_{min} = \inf_{\|\boldsymbol{\xi}_p\| < \epsilon_2} |\beta(\boldsymbol{\xi}_p)|$$

definiert, kann man mit Hilfe der Beziehung (5.27) schließen, dass eine Konstante  $g_{max} = \beta_{min}v_{max} > 0$  existiert, sodass  $\|\mathbf{v}(t)\| < v_{max}$  für alle Zeiten sichergestellt ist,

wenn wiederum  $\|\mathbf{g}_p(t)\| < g_{max}, \forall t$  garantiert werden kann. Durch die asymptotische Stabilität von  $\boldsymbol{\xi}_R = \mathbf{0}$  und die Wachstumsbeschränkung des Kopplungsterms (5.17) ist sichergestellt, dass zu jedem beliebigen  $g_{max}$  eine Konstante  $\delta_R > 0$  existiert, so dass  $\|\mathbf{g}_p(t)\| < g_{max}$  für alle Zeiten gilt, sofern der Anfangswert  $\|\boldsymbol{\xi}_{R,0}\| < \delta_R$  erfüllt. Somit ist gezeigt, dass die Lösung  $(\boldsymbol{\xi}_p(t), \boldsymbol{\xi}_R(t))$  eine beliebig kleine Umgebung  $\mathcal{U} = \{(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_R) \mid \|\boldsymbol{\xi}_p\| < \epsilon_1, \|\boldsymbol{\xi}_R\| < \gamma^{-1}(g_{max})\}$  der Ruhelage  $(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_R) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  nicht verlässt, wenn der Anfangswert  $(\boldsymbol{\xi}_{p,0}, \boldsymbol{\xi}_{R,0})$  in der Umgebung  $\mathcal{U}_0 = \{(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_R) \mid \|\boldsymbol{\xi}_p\| < \delta_p, \|\boldsymbol{\xi}_R\| < \delta_R\}$  liegt.

Es folgt, dass der Ursprung unter den Annahmen 5.1 - 5.3 eine asymptotisch stabile Ruhelage des Systems (5.15) mit Einzugsbereich  $\mathbb{R}^{n_p} \times \mathcal{A}_R$  darstellt.  $\square$

Aus Theorem 5.1 leitet man ab, dass jeder Gesamtregler, der aus einem Positionsregelgesetz  $\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p)$ , einem Schubgesetz  $F = k_F(\boldsymbol{\xi}_{R,1}) \cdot F_d$  und einem Lageregelgesetz  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi}_R)$  besteht und der die Einhaltung der Annahmen 5.1 - 5.3 gewährleistet, das Trajektorienfolgeproblem löst, das zu Beginn des Kapitels definiert wurde. Dabei muss der Lageregler lediglich die in Annahme 5.1 geforderten Stabilitätseigenschaften für das Lageteilsystem  $\dot{\boldsymbol{\xi}}_R = \mathbf{f}_R(\boldsymbol{\xi}_R, \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi}_R))$  sicherstellen. Mit dem Regelgesetz (4.23), das bekanntermaßen lokal exponentielle und fast global asymptotische Stabilität für die kommandierte Lage trajektorie garantiert (siehe Unterabschnitt 4.3.3 in Verbindung mit Abschnitt 4.4), ist bereits ein geeignetes Lageregelgesetz bekannt, weshalb die folgenden Abschnitte dem Entwurf eines passenden Positionsregelgesetzes und eines entsprechenden Schubgesetzes gewidmet sind.

## 5.4 Entwurf der Positionsregelung

Die Aufgabe besteht nun darin, ein Positionsregelgesetz  $\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p)$  für das ungekoppelte System  $\dot{\boldsymbol{\xi}}_p = \mathbf{f}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \tilde{\mathbf{F}})$  zu entwerfen und nachzuweisen, dass der resultierende fiktive geschlossene Regelkreis die ihn betreffenden Anforderungen aus den Annahmen 5.1 und 5.3 erfüllt. Hierfür kann grundsätzlich ein beliebiges Reglerentwurfsverfahren eingesetzt werden. Da das betrachtete System

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_p = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ -\frac{1}{m}\mathbf{D}\dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{m}\tilde{\mathbf{F}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \tilde{\mathbf{F}})} \quad (5.28)$$

abermals vom Typ (1.1) ist, wird in dieser Arbeit ein energiebasierter Regelungsentwurf entsprechend Abschnitt 1.2 durchgeführt.<sup>3</sup>

Hierzu betrachten wir eine radial unbeschränkte Energiefunktion

$$V_p(\boldsymbol{\xi}_p) = E_{kin}(\dot{\tilde{\mathbf{p}}}) + E_{pot}(\tilde{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2}m\dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T \dot{\tilde{\mathbf{p}}} + E_r(r(\tilde{\mathbf{p}})), \quad (5.29)$$

deren potentieller Energieanteil  $E_r$  als Funktion der euklidischen Norm des Positionsfehlers

$$r = \|\tilde{\mathbf{p}}\|$$

entworfen wird. Entsprechend der Dynamik (5.28) erhält man daraus die Zeitableitung

$$\dot{V}_p(\boldsymbol{\xi}_p) = m\dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T \ddot{\tilde{\mathbf{p}}} + \dot{E}_r = -\dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T \mathbf{D}\dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T \tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{F}_r^T \dot{\tilde{\mathbf{p}}},$$

worin  $\mathbf{F}_r(\tilde{\mathbf{p}}) = -(\partial E_r / \partial \tilde{\mathbf{p}})^T = -\partial E_r / \partial r \cdot (\partial r / \partial \tilde{\mathbf{p}})^T$  als resultierende Kraft aus dem geformten Potential  $E_r$  identifiziert werden kann. Wählt man die Stellgröße  $\tilde{\mathbf{F}}$  in der bekannten Weise zu

$$\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p) = \mathbf{F}_r(\tilde{\mathbf{p}}) - \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\boldsymbol{\xi}_p)\dot{\tilde{\mathbf{p}}}, \quad (5.30)$$

worin die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{F}}} > 0$  positiv definit entworfen wird, so resultiert unmittelbar die angestrebte Energieabnahme

$$\dot{V}_p(\boldsymbol{\xi}_p) = \frac{\partial V_p}{\partial \boldsymbol{\xi}_p} \mathbf{f}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p)) = -\dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T (\mathbf{D} + \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\boldsymbol{\xi}_p))\dot{\tilde{\mathbf{p}}} \leq 0. \quad (5.31)$$

Die folgenden beiden Unterabschnitte widmen sich dem Entwurf der potentielle Energie  $E_r$  sowie der zustandsabhängigen Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\boldsymbol{\xi}_p)$ . Daran anschließend werden die Stabilitätseigenschaften der Zielruhelage analysiert. Im Verlauf dieser Abschnitte wird gezeigt, dass der durchgeführte Reglerentwurf die folgenden Eigenschaften des resultierenden fiktiven geschlossenen Regelkreises  $\dot{\boldsymbol{\xi}}_p = \mathbf{f}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p))$  gewährleistet:

- P1** Die Ruhelage  $\boldsymbol{\xi}_p = \mathbf{0}$  ist global asymptotisch stabil.
- P2** Es existieren positive Konstanten  $c_1$  und  $c_2$ , sodass die Energiefunktion  $V_p$  für  $\|\boldsymbol{\xi}_p\| \geq c_1$  die Bedingung  $\|\partial V_p / \partial \boldsymbol{\xi}_p\| \leq c_2 \cdot V_p(\boldsymbol{\xi}_p)$  erfüllt.
- P3** Die Stellgröße erfüllt  $\|\tilde{\mathbf{F}}\| \leq \bar{F}$ , worin  $\bar{F} > 0$  eine beliebig wählbare Schranke ist.
- P4** Das Regelgesetz ist zweifach stetig differenzierbar, d. h.  $\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p) \in \mathcal{C}^2$ .

---

<sup>3</sup>Als Beispiel für ein alternatives Positionsregelgesetz auf Basis der sättigenden strukturvariablen Regelung nach Buhl [28, 30] sei auf die Arbeit [167] verwiesen, die unter Betreuung und Anleitung des Autors entstand.

Man beachte, dass die Eigenschaft **P1** gemeinsam mit der lokal exponentiellen Stabilität der Ruhelage  $\boldsymbol{\xi}_R = \mathbf{0}$ , die durch den Lageregler gewährleistet wird, sicherstellt, dass Annahme 5.1 erfüllt ist. Da  $\boldsymbol{\xi}_R = \mathbf{0}$  darüber hinaus fast global asymptotisch stabil ist, umfasst der Einzugsbereich  $\mathcal{A}_R$  der Ruhelage den gesamten Zustandsraum, mit Ausnahme einer Menge mit Lebesgue-Maß Null. Aus Gleichung (5.31) zusammen mit der Eigenschaft **P2** schließt man wiederum, dass auch Annahme 5.3 erfüllt ist. Der Nachweis, dass der verbleibenden Annahme 5.2 ebenso entsprochen wird, ist erst im Zusammenhang mit dem Entwurf des Schubgesetzes in Abschnitt 5.5 möglich und wird dort erbracht. Der Vorzug der Eigenschaft **P3** war Thema der Anmerkung 5.3 und die Notwendigkeit der Eigenschaft **P4** wurde bereits in Anmerkung 5.2 besprochen.

### 5.4.1 Entwurf der Potentialfunktion

Die Gestalt der potentiellen Energie  $E_r$  bestimmt die rückstellende Kraftkomponente  $\mathbf{F}_r$  im Regelgesetz (5.30). Im Folgenden wird ein Kraftverlauf angestrebt, der dem einer radialsymmetrisch wirkenden, sättigenden Feder gleichkommt. Hierzu wird die einseitige  $\mathcal{C}^2$ -Sättigungsfunktion  $\bar{\sigma}_{\Delta_a}^{\bar{a}} : \mathbb{R} \rightarrow ]-\infty, \bar{a}]$  eingeführt, die durch

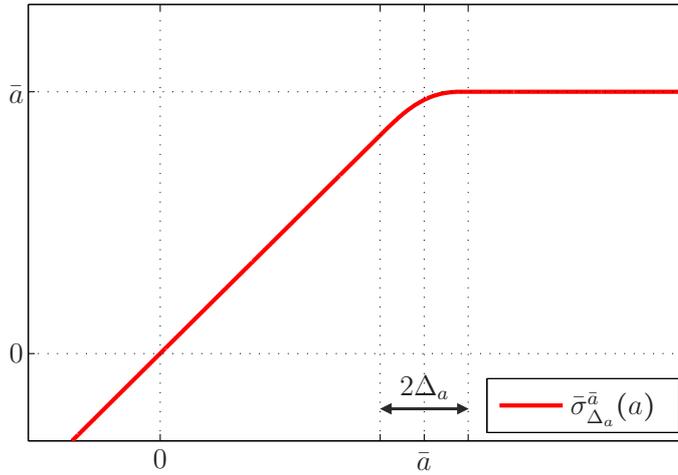
$$\bar{\sigma}_{\Delta_a}^{\bar{a}}(a) = \begin{cases} a & \text{für } a \leq \bar{a} - \Delta_a \\ P_4(a) & \text{für } \bar{a} - \Delta_a < a \leq \bar{a} + \Delta_a \\ \bar{a} & \text{für } a > \bar{a} + \Delta_a \end{cases} \quad (5.32)$$

definiert ist und die Eigenschaften  $\bar{\sigma}_{\Delta_a}^{\bar{a}}(a) \leq a$  und  $\bar{\sigma}_{\Delta_a}^{\bar{a}}(a) \leq \bar{a}$  aufweist. Wie in Abbildung 5.5 zu sehen ist, bestimmt die Konstante  $\Delta_a > 0$  das Übergangsintervall zwischen dem ungesättigten und dem gesättigten Bereich. Der Übergangsverlauf ist durch das Polynom vierter Ordnung

$$P_4(a) = \frac{\bar{a}}{\bar{a}^3} \left( \frac{3}{48} \left( \frac{a}{\bar{a}} \right)^4 - \frac{3}{12} \left( \frac{a}{\bar{a}} \right)^3 - \frac{3\bar{a}^2 - 3}{8} \left( \frac{a}{\bar{a}} \right)^2 - \frac{2\bar{a}^3 + 3\bar{a}^2 - 1}{4} \frac{a}{\bar{a}} + \frac{3\bar{a}^4 - 8\bar{a}^3 + 6\bar{a}^2 - 1}{16} \right)$$

festgelegt, worin  $\bar{\alpha} = \Delta_a/\bar{a}$  gilt. Mit Hilfe der eingeführten Sättigungsfunktion und der Schreibweise  $r = \|\tilde{\mathbf{p}}\|$  ist es nun möglich das Potential

$$E_r(r) = \int_0^r c_r \bar{\sigma}_{\Delta_r}^{\bar{r}}(a) da \quad (5.33)$$


 Abbildung 5.5: Einseitige Sättigungsfunktion  $\bar{\sigma}_{\Delta_a}^{\bar{a}}(a)$ .

zu definieren, welches über die positiven Konstanten  $c_r$ ,  $\bar{r}$  und  $\Delta_r$  parametrisiert wird. Aus dieser Energiefunktion geht die radialsymmetrische Potentialkraft

$$\mathbf{F}_r = -\left(\frac{\partial E_r}{\partial \tilde{\mathbf{p}}}\right)^T = -\frac{\partial E_r}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial \tilde{\mathbf{p}}}\right)^T = -c_r \bar{\sigma}_{\Delta_r}^{\bar{r}}(r) \frac{1}{r} \tilde{\mathbf{p}} \quad (5.34)$$

hervor. Unter der Voraussetzung, dass man  $\Delta_r < \bar{r}$  wählt, ist leicht einzusehen, dass  $\mathbf{F}_r$  nahe  $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$  wie eine radialsymmetrische lineare Federkraft wirkt, d. h.  $\mathbf{F}_r = -c_r \tilde{\mathbf{p}}$ . Mit zunehmendem Fehler  $r$  setzt dann die Sättigung des Kraftbetrags ein, sodass  $\|\mathbf{F}_r\| = c_r \bar{r}$  für  $r > \bar{r} + \Delta_r$  gilt. Indem  $c_r < \bar{F}/\bar{r}$  festgelegt wird, erreicht man, dass eine selbst gesetzte Betragsgrenze  $\bar{F} > 0$  nie überschritten wird und somit stets  $\|\mathbf{F}_r\| < \bar{F}$  gilt. Dies ist im Hinblick auf die Eigenschaft **P3** notwendig.

Man beachte, dass die gewählte potentielle Energie  $E_r$  dazu führt, dass die vorausgesetzte radiale Unbeschränktheit der Gesamtenergiefunktion  $V_p$  in (5.29) erfüllt ist. Es wird nun gezeigt, dass  $V_p$  darüber hinaus die Eigenschaft **P2** aufweist. Hierzu stellt man zunächst unter Ausnutzung von  $\bar{\sigma}_{\Delta_r}^{\bar{r}}(a) \leq \bar{r}$  fest, dass die Abschätzung

$$V_p(\boldsymbol{\xi}_p) = \frac{1}{2} m \dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T \dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \int_0^r c_r \bar{\sigma}_{\Delta_r}^{\bar{r}}(a) da > \frac{1}{2} m \|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\|^2 + c_r \bar{r} (r - (\bar{r} + \Delta_r)) = \underline{V}(\boldsymbol{\mu}) \quad (5.35)$$

gilt, worin  $\boldsymbol{\mu}$  den Vektor  $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} r & \|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\| \end{bmatrix}^T$  bezeichnet. Darüber hinaus gilt die Ungleichung

$$\left\| \frac{\partial V_p}{\partial \boldsymbol{\xi}_p} \right\| = \sqrt{\left\| c_r \bar{\sigma}_{\Delta_r}^{\bar{r}}(r) \frac{1}{r} \tilde{\mathbf{p}} \right\|^2 + m^2 \|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\|^2} \leq \sqrt{c_r^2 \bar{r}^2 + m^2 \|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\|^2} = \left\| \frac{\partial \underline{V}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right\|. \quad (5.36)$$

Da es sich bei  $\underline{V}(\boldsymbol{\mu})$  um eine polynomiale Funktion handelt, kann man aus dem Beweis zu [156][Proposition 4.8]<sup>4</sup> schließen, dass positive Konstanten  $c_1^*$  und  $c_2$  existieren, sodass

$$\left\| \frac{\partial \underline{V}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right\| \|\boldsymbol{\mu}\| < c_2 \underline{V}(\boldsymbol{\mu}) \quad \forall \|\boldsymbol{\mu}\| \geq c_1^* \quad (5.37)$$

erfüllt ist. Unter Ausnutzung der Tatsache, dass

$$\|\boldsymbol{\mu}\| = \sqrt{r^2 + \|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\|^2} = \sqrt{\|\tilde{\mathbf{p}}\|^2 + \|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\|^2} = \|\boldsymbol{\xi}_p\|$$

gilt, kann man aus (5.35), (5.36) und (5.37) weiterhin folgern, dass für  $\|\boldsymbol{\xi}_p\| \geq c_1 = \max(1, c_1^*)$  die Ungleichung

$$\left\| \frac{\partial V_p}{\partial \boldsymbol{\xi}_p} \right\| \leq \left\| \frac{\partial V_p}{\partial \boldsymbol{\xi}_p} \right\| \|\boldsymbol{\xi}_p\| \leq \left\| \frac{\partial \underline{V}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right\| \|\boldsymbol{\mu}\| < c_2 \underline{V}(\boldsymbol{\mu}) < c_2 V_p(\boldsymbol{\xi}_p)$$

gültig ist. Somit ist bewiesen, dass  $V_p$  die Eigenschaft **P2** besitzt.

## 5.4.2 Entwurf der Dämpfungsstrategie

Die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}}$  bestimmt die zweite Komponente  $-\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}}(\boldsymbol{\xi}_p)\dot{\tilde{\mathbf{p}}}$  des Positionsregelgesetzes (5.30). Durch den Entwurf einer zustandsabhängigen Dämpfung wird im Folgenden darauf abgezielt in der Nähe des Ursprungs  $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$  ein gut gedämpftes Verhalten zu realisieren, wohingegen für große Positionsfehler  $\|\tilde{\mathbf{p}}\| \gg 0$  die Dämpfung verringert wird, um das Einschwingverhalten nicht unnötig zu verlangsamen. Im Vergleich mit der Lageregelung wird das umgesetzte Dämpfungskonzept bewusst einfacher ausgeführt, obwohl eine weitgehend analoge Dämpfungsstrategie prinzipiell umgesetzt werden könnte. Es muss jedoch berücksichtigt werden, dass das Positionsregelgesetz entsprechend der Glattheitsforderung **P4** bis zur zweiten Ableitung auswertbar sein muss. Eine zur Lageregelung analoge Dämpfungsstrategie würde durch diese Anforderung nochmals erheblich verkompliziert, weshalb im Sinne einer übersichtlicheren Darstellung darauf verzichtet wird. Mit Blick auf einen einfacheren Stabilitätsnachweis wird weiterhin davon abgesehen die Matrix  $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}}$  positiv semidefinit zu gestalten und stattdessen strikte positive Definitheit gewährleistet. Neben der schon erwähnten Eigenschaft **P4** muss auch die geforderte Eigenschaft **P3** im Dämpfungsentwurf berücksichtigt werden.

Durch Einsetzen des in (5.30) angegebenen Regelgesetzes  $\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p)$  in die ungekoppelte

<sup>4</sup>Es sei angemerkt, dass  $\underline{V}(\boldsymbol{\mu})$  die in [156][Proposition 4.8] vorausgesetzte positive Definitheit nicht besitzt. Gleichwohl folgt aus dem Beweis unmittelbar, die angestrebte Eigenschaft (5.37), wenn man berücksichtigt, dass  $\underline{V}(\boldsymbol{\mu})$  nicht auf  $\mathbb{R}^2$  sondern auf  $\mathbb{R}^{\geq 0} \times \mathbb{R}^{\geq 0}$  definiert ist.

Positionsfehlerdynamik  $\dot{\boldsymbol{\xi}}_p = \mathbf{f}_p(\boldsymbol{\xi}_p, \tilde{\mathbf{F}})$  erhält man

$$\ddot{\mathbf{p}} = -\frac{1}{m}(\mathbf{D} + \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{F}}})\dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{m}\mathbf{F}_r. \quad (5.38)$$

Um den Dämpfungsentwurf überschaubar zu halten, sollen hier ausschließlich positiv definite, diagonal besetzte Dämpfungsmatrizen der Form

$$\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\boldsymbol{\xi}_p) = \bar{\sigma}_{\Delta_{\kappa_r}}^{-1}(\kappa_r(\boldsymbol{\xi}_p)) \cdot d_r(r(\tilde{\mathbf{p}})) \cdot \mathbf{I}_3 > 0 \quad (5.39)$$

betrachtet werden. Mit dem Ziel den Entwurf noch weiter zu vereinfachen, wird die Sättigungsfunktion in einem ersten Schritt vernachlässigt, indem  $\bar{\sigma}_{\Delta_{\kappa_r}}^{-1}(\kappa_r) = 1$  angenommen wird. Weiterhin wird davon ausgegangen, dass die Dämpfung der Streckendynamik  $\mathbf{D}$  verglichen mit der Dämpfung aus dem Regelgesetz  $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{F}}}$  eher klein ist und somit  $\mathbf{D} + \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{F}}} \approx \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{F}}}$  gilt. Zusätzlich werden für den Entwurf alle Betrachtungen auf radiale Bewegungen beschränkt, d. h. es gelte  $\tilde{\mathbf{p}} \parallel \dot{\tilde{\mathbf{p}}}$ . Wendet man alle getroffenen Annahmen auf die Dynamik (5.38) an und berücksichtigt auch die bereits entworfene Potentialkraft (5.34), so erhält man die skalare, nichtlineare Schwingungsdifferentialgleichung

$$\ddot{r} = -\frac{d_r(r)}{m}\dot{r} - \frac{1}{m}c_r \bar{\sigma}_{\Delta_r}^{\bar{r}}(r).$$

Fasst man den hierin enthaltenen Potentialkraftbetrag  $\|F_r\| = c_r \bar{\sigma}_{\Delta_r}^{\bar{r}}(r)$  als Wirkung einer virtuellen nichtlinearen Feder mit degressiver Steifigkeitskennlinie  $c_{virt}(r) = c_r \bar{\sigma}_{\Delta_r}^{\bar{r}}(r)/r$  auf, so kann man die Differentialgleichung in der Form

$$\ddot{r} = -\frac{d_r(r)}{m}\dot{r} - \frac{1}{m}c_{virt}(r)r \quad (5.40)$$

anschreiben. Im Gegensatz zu einem harmonischen Oszillator ist das Lehrsche Dämpfungsmaß

$$\zeta = \frac{d_r}{2\sqrt{m c_{virt}(r)}} = \frac{d_r \sqrt{r}}{2\sqrt{m c_r \bar{\sigma}_{\Delta_r}^{\bar{r}}(r)}}$$

hier nicht konstant, wenn  $d_r$  konstant gewählt wird. Stattdessen nimmt es mit  $\sqrt{r}$  zu, wenn die Sättigung aktiv ist. Indem man

$$d_r = 2\zeta_r \sqrt{m \frac{c_r \bar{\sigma}_{\Delta_r}^{\bar{r}}(r)}{r}} \quad (5.41)$$

wählt, worin  $\zeta_r > 0$  eine positive Konstante bezeichnet, ist es möglich das Dämpfungs-

maß für alle  $r$  auf einem gleichbleibenden Niveau zu halten und auf diese Weise exzessives Dämpfungsverhalten für  $r = \|\dot{\mathbf{p}}\| \gg 0$  zu vermeiden. Entsprechend stellt  $\zeta_r$  den Hauptentwurfparameter bezüglich der Dämpfung dar.

Um schließlich, die in Eigenschaft **P3** formulierte Bedingung  $\|\tilde{\mathbf{F}}\| \leq \bar{F}$  sicher einzuhalten, wird der Faktor  $\kappa_r$  als Lösung des Optimierungsproblems

$$\kappa_r = \max_{\|\mathbf{F}_r - \kappa d_r \dot{\mathbf{p}}\| = \bar{F}} \kappa, \quad (5.42)$$

eingeführt, dessen analytische Lösung

$$\kappa_r = \frac{\mathbf{F}_r^T \dot{\mathbf{p}} + \sqrt{(\mathbf{F}_r^T \dot{\mathbf{p}})^2 + (\bar{F}^2 - \|\mathbf{F}_r\|^2) \|\dot{\mathbf{p}}\|^2}}{d_r \|\dot{\mathbf{p}}\|^2} \quad (5.43)$$

lautet. Man beachte, dass  $\kappa_r$  stets positiv ist, da die Potentialkraft so entworfen wurde, dass ausnahmslos  $\|\mathbf{F}_r\| < \bar{F}$  gilt. Es sei auch darauf hingewiesen, dass  $\kappa_r$ , im Gegensatz zu den Entsprechungen  $\kappa_{xy}$  und  $\kappa_z$  der Lageregelungsentwürfe (vgl. (3.22), (3.23), (4.36) und (4.37)), mittels der Sättigungsfunktion  $\bar{\sigma}_{\Delta\kappa_r}^1(\kappa_r)$  in die Dämpfungsmatrix (5.39) eingeht. Deshalb kann im hier formulierten Optimierungsproblem (5.42) darauf verzichtet werden, den Wertebereich für  $\kappa_r$  auf Werte kleiner Eins zu beschränken. Der Grund für die Verwendung der Sättigungsfunktion liegt in der geforderten Glattheitseigenschaft **P4**. Man kann leicht verifizieren, dass die in (5.39) angegebene zustandsabhängige Dämpfungsmatrix mit  $\kappa_r$  entsprechend (5.43) und  $d_r$  entsprechend (5.41) zweifach stetig differenzierbar ist. Dies hat zur Folge, dass auch das gesamte zuvor entwickelte Regelgesetz  $\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p)$  in (5.30), bestehend aus dem Potentialkraftanteil (5.34) und dem soeben entworfenen Dämpfungsanteil, wie gefordert eine  $\mathcal{C}^2$ -Funktion darstellt.

### 5.4.3 Stabilitätseigenschaften der Ruhelage

Nachdem in den vorangegangenen Unterabschnitten ein Regelgesetz  $\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p)$  entworfen wurde, muss nun der Nachweis geführt werden, dass diese Zustandsrückführung den Punkt  $\boldsymbol{\xi}_p = \mathbf{0}$  tatsächlich global asymptotisch stabilisiert und somit die Eigenschaft **P1** erfüllt ist. Wie schon im einleitenden Abschnitt 1.2 allgemein angemerkt, ist dabei von Vorteil, dass die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{F}}}$  positiv definit gewählt wurde.

**Theorem 5.2** *Der virtuelle geschlossene Regelkreis, bestehend aus der Streckendynamik (5.28) und dem Regelgesetz  $\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p)$  in (5.30), dessen Potentialkraftanteil  $\mathbf{F}_r$  durch (5.34) und dessen Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{F}}}$  durch (5.39), (5.41) sowie (5.43) bestimmt ist, besitzt eine global asymptotisch stabile Ruhelage in  $\boldsymbol{\xi}_p = \mathbf{0}$ .*

**Beweis:** Bei der Energiefunktion  $V_p$ , die durch (5.29) zusammen mit (5.33) festgelegt ist, handelt es sich um eine stetig differenzierbare, positiv definite, radial unbeschränkte Funktion. Unter Verwendung des Regelgesetzes (5.30) ergibt sich, wie in (5.31) gezeigt, für die Zeitableitung  $\dot{V}_p \leq 0$ . Hieraus folgt unmittelbar, dass  $V_p$  eine Lyapunovfunktion des geschlossenen Regelkreises darstellt und somit die Ruhelage  $\boldsymbol{\xi}_p = \mathbf{0}$  stabil ist [95, Theorem 4.1]. Aus der radialen Unbeschränktheit von  $V_p$  folgt weiterhin, dass sämtliche unteren Niveaumengen kompakt und aufgrund von  $\dot{V}_p \leq 0$  auch positiv invariant sind. Nach dem Invarianzprinzip von LaSalle (siehe z. B. [95, Theorem 4.4]) streben deshalb alle Lösungen des geschlossenen Regelkreises gegen die größte invariante Menge  $\mathcal{I}$  in  $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{\xi}_p \mid \dot{V}_p(\boldsymbol{\xi}_p) = 0\}$ . Aufgrund der positiven Definitheit von  $\mathbf{D} + \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{F}}}$  schließt man aus  $\dot{V}_p(\boldsymbol{\xi}_p) = -\dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T (\mathbf{D} + \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{F}}}) \dot{\tilde{\mathbf{p}}}$  direkt, dass  $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{\xi}_p \mid \dot{\tilde{\mathbf{p}}} = \mathbf{0}\}$  gilt. Für alle  $\boldsymbol{\xi}_p \in \mathcal{E}$  ergibt sich somit im geschlossenen Regelkreis  $\ddot{\tilde{\mathbf{p}}} = 1/m \cdot \mathbf{F}_r$ , weshalb die größte invariante Untermenge durch  $\mathcal{I} = \{\boldsymbol{\xi}_p \mid \dot{\tilde{\mathbf{p}}} = \mathbf{0}, \ddot{\tilde{\mathbf{p}}} = 1/m \cdot \mathbf{F}_r = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{F}_r = \mathbf{0}\}$  bestimmt ist. Da die Potentialkraft  $\mathbf{F}_r = -c_r \bar{\sigma}_{\Delta_r}^r(r) \frac{1}{r} \tilde{\mathbf{p}}$  nur für  $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$  verschwindet, enthält die Menge  $\mathcal{I}$  als einziges Element den Punkt  $\boldsymbol{\xi}_p = \mathbf{0}$ . Dies beweist die global asymptotische Stabilität von  $\boldsymbol{\xi}_p = \mathbf{0}$ .  $\square$

## 5.5 Entwurf des Schubgesetzes

Zu Beginn des Abschnitts 5.4 auf S. 138 f. wurde erläutert, dass die Anwendung der in Kapitel 4 entworfenen Lageregelung in Kombination mit dem Positionsregler des vorangegangenen Abschnitts, bereits garantiert, dass die Annahmen 5.1 und 5.3 bezüglich der kaskadierten Folgefehlerdynamik (5.15) erfüllt sind. Um asymptotische Stabilität der Zielruhelage  $(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_R) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  entsprechend Theorem 5.1 zu erzielen, muss nun noch ein Schubgesetz  $F = k_F(\boldsymbol{\xi}_{R,1}) \cdot F_d$  entworfen werden, sodass auch Annahme 5.2 bezüglich des Kopplungsterms  $\mathbf{g}_p$  erfüllt wird. Da der Betrag  $F_d$  der virtuellen Schubkraft bereits über (5.6) definiert ist, gilt es lediglich noch einen geeigneten Schubübersetzungsfaktor  $k_F(\boldsymbol{\xi}_{R,1})$  festzulegen.

Es ist offensichtlich, dass die erwünschte virtuelle Schubkraft  $\mathbf{F}_d = F_d \cdot (-\mathbf{z}_d)$  nur dann eins zu eins in die reale Schubkraft  $\mathbf{F} = F \cdot (-\mathbf{z})$  umgesetzt werden kann, wenn  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_d$  gilt. Somit läuft die Wahl von  $k_F(\boldsymbol{\xi}_{R,1})$  auf die Frage hinaus, wie  $F_d$  auf  $F$  übertragen werden soll, wenn eine Abweichung zwischen der realen Ausrichtung der körperfesten  $z$ -Achse  $\mathbf{z}$  und ihrer Sollausrichtung  $\mathbf{z}_d$  vorliegt. Eine intuitive Herangehensweise an diese Problemstellung ist durch die in Abbildung 5.6 dargestellte orthogonale Projektion von  $\mathbf{F}_d$  auf  $-\mathbf{z}$  gegeben.<sup>5</sup> Hierdurch wird immer derjenige Anteil der virtuellen Schubkraft

---

<sup>5</sup>Für eine vergleichende Diskussion alternativer Schubgesetze im Kontext einer exakt linearisierenden Teilreglerauslegung sei auf [61] verwiesen.

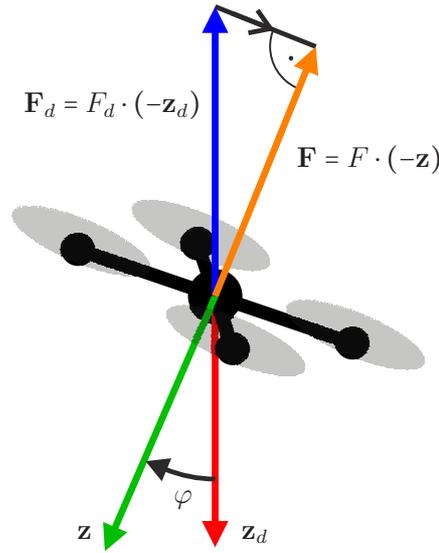


Abbildung 5.6: Bestimmung des Schubs durch orthogonale Projektion.

realisiert, der aktuell in die körperfeste Schubkrafttrichtung des Quadrocopters zeigt. Das zugehörige Schubgesetz lautet entsprechend

$$F = -\mathbf{z}_B^T \mathbf{F}_{d,B} = \mathbf{z}_B^T \mathbf{z}_{d,B} \cdot F_d = \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} \cdot F_d = \cos(\varphi) \cdot F_d.$$

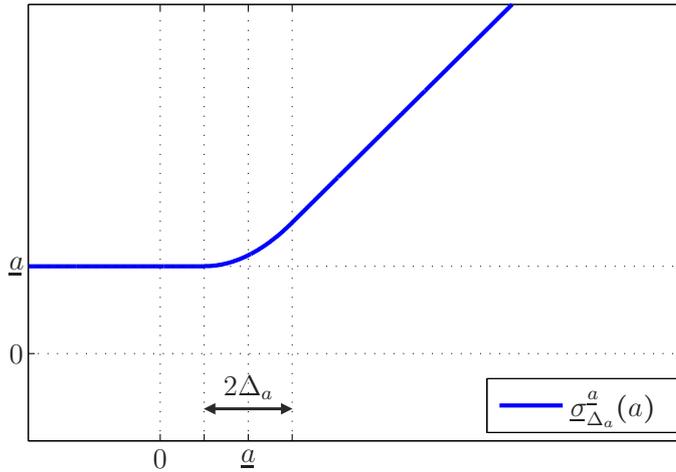
In dieser Form lässt sich das Schubgesetz jedoch nicht in jeder Situation umsetzen, da der Schubkraftbetrag  $F$  stets positiv sein muss, der Projektionsterm  $\mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}$  aber auch negative Werte annehmen kann. Deshalb wird der Projektionsterm im Folgenden auf Werte größer Null gesättigt, indem die einseitige  $\mathcal{C}^1$ -Sättigungsfunktion  $\underline{\sigma}_{\Delta_a}^a : \mathbb{R} \rightarrow [\underline{a}, \infty[$ ,

$$\underline{\sigma}_{\Delta_a}^a(a) = \begin{cases} \underline{a} & \text{für } a \leq \underline{a} - \Delta_a \\ P_2(a) & \text{für } \underline{a} - \Delta_a < a \leq \underline{a} + \Delta_a \\ a & \text{für } a > \underline{a} + \Delta_a \end{cases} \quad (5.44)$$

verwendet wird. Diese wird über die positiven Konstanten  $\Delta_a$  und  $\underline{a}$  parametrisiert, besitzt die Eigenschaften  $\underline{\sigma}_{\Delta_a}^a(a) \geq a$  und  $\underline{\sigma}_{\Delta_a}^a(a) \geq \underline{a}$  und ist in Abbildung 5.7 veranschaulicht. Die in (5.44) enthaltene Funktion  $P_2(a)$  definiert den Übergangsverlauf vom gesättigten in den ungesättigten Bereich und ist durch das Polynom zweiter Ordnung

$$P_2(a) = \frac{\underline{a}}{\underline{\alpha}} \left( \frac{1}{4} \left( \frac{a}{\underline{a}} \right)^2 + \frac{\underline{\alpha} - 1}{2} \left( \frac{a}{\underline{a}} \right) + \frac{\underline{\alpha}^2 + 2\underline{\alpha} + 1}{4} \right)$$

beschrieben, worin die Schreibweise  $\underline{\alpha} = \Delta_a / \underline{a}$  benutzt wurde. Mit Hilfe der eingeführten


 Abbildung 5.7: Einseitige Sättigungsfunktion  $\underline{\sigma}_{\Delta_a}^a(a)$ .

Sättigungsfunktion kann man nun das Schubgesetz

$$F = \underbrace{\underline{\sigma}_{\Delta_k}^k(\mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})}_{k_F(\boldsymbol{\xi}_{R,1})} \cdot F_d = \underline{\sigma}_{\Delta_k}^k(\cos(\varphi)) \cdot F_d \quad (5.45)$$

angeben, durch das der Schub  $F$  auf Werte größer als  $\underline{k} \cdot F_d$  beschränkt wird. Dabei ist darauf zu achten, dass die positiven konstanten  $\underline{k}$  und  $\Delta_k$  so gewählt werden, dass  $\underline{k} + \Delta_k < 1$  gilt, damit  $F = F_d$  im Falle  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_d \Leftrightarrow \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} = 1$  gewährleistet ist.

Es steht noch aus zu zeigen, dass der resultierende Kopplungsterm  $\mathbf{g}_p$  die Annahme 5.2 erfüllt. Setzt man (5.45) in die translatorische Folgefehlerdynamik (5.7) ein, so ergibt sich der Kopplungsterm

$$\mathbf{g}_p = \frac{1}{m} (F_d \cdot \mathbf{z}_{d,I} - k_F(\boldsymbol{\xi}_{R,1}) \cdot F_d \cdot \mathbf{z}_I) = \frac{F_d}{m} (\mathbf{z}_{d,I} - k_F(\boldsymbol{\xi}_{R,1}) \cdot \mathbf{z}_I). \quad (5.46)$$

Der Betrag von  $\mathbf{g}_p$  kann nach oben abgeschätzt werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}_p\| &= \frac{F_d}{m} \|\mathbf{z}_{d,I} - k_F(\boldsymbol{\xi}_{R,1}) \cdot \mathbf{z}_I\| = \frac{F_d}{m} \|\mathbf{z}_{d,B} - k_F(\boldsymbol{\xi}_{R,1}) \cdot \mathbf{e}_z\| = \\ &= \frac{F_d}{m} \|\mathbf{z}_{d,B} - \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z(1 - k_F(\boldsymbol{\xi}_{R,1}))\| \leq \frac{F_d}{m} (\|\mathbf{z}_{d,B} - \mathbf{e}_z\| + |k_F(\boldsymbol{\xi}_{R,1}) - 1|) = \\ &= \frac{F_d}{m} (\|\mathbf{z}_{d,B} - \mathbf{e}_z\| + |\underline{\sigma}_{\Delta_k}^k(\mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}) - 1|) \leq \frac{F_d}{m} (\|\mathbf{z}_{d,B} - \mathbf{e}_z\| + |\mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} - 1|) = \\ &= \frac{F_d}{m} (\|\mathbf{z}_{d,B} - \mathbf{e}_z\| + |z_{d,Bz} - 1|) \leq 2 \frac{F_d}{m} \|\mathbf{z}_{d,B} - \mathbf{e}_z\|. \end{aligned}$$

Weiterhin schließt man aus (5.14) und (5.6), dass stets  $F_d < 2mg$  gilt. Erkennt man

darüber hinaus, dass der Vektor  $\mathbf{z}_{d,B} - \mathbf{e}_z$  identisch mit den letzten drei Elementen von  $\boldsymbol{\xi}_{R,1} = \vec{\mathbf{R}}_{BD} - \vec{\mathbf{I}}_3$  ist, so folgt schließlich

$$\|\mathbf{g}_p\| < 4g\|\vec{\mathbf{R}}_{BD} - \vec{\mathbf{I}}_3\| \leq 4g\|\boldsymbol{\xi}_{R,1}\| \leq 4g\|\boldsymbol{\xi}_R\| = \gamma(\|\boldsymbol{\xi}_R\|),$$

worin  $\gamma(\|\boldsymbol{\xi}_R\|) = 4g\|\boldsymbol{\xi}_R\|$  eine in  $\|\boldsymbol{\xi}_R\| = \mathbf{0}$  differenzierbare Funktion der Klasse  $\mathcal{K}$  ist.

Damit ist der Nachweis erbracht, dass auch Annahme 5.2 erfüllt ist. Entsprechend Theorem 5.1 löst somit der Gesamtregler bestehend aus dem in (5.30) angegebenen Positionsregelgesetz  $\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_p)$ , dem Schubgesetz (5.45) und dem Lageregelgesetz  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi}_R)$  entsprechend (4.23) das betrachtete Trajektorienfolgeproblem für den Quadrocopter. Der Einzugsbereich der Zielruhelage  $(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_R) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  ist durch  $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{A}_R$  gegeben, woraus fast global asymptotische Stabilität entsprechend Definition 1.1 folgt.

## 5.6 Flugversuche

Der vorgeschlagene kaskadierte Gesamtregler wurde mit Hilfe von Flugversuchen validiert. Hierfür wurde ein Quadrocopter des Herstellers *Ascending Technologies GmbH*<sup>6</sup> vom Typ *Hummingbird* verwendet. Gegenüber der Basiskonfiguration, wie sie in [81] beschrieben ist, wurde die Hardware zusätzlich um einen ARM Cortex-A8 Prozessor erweitert, auf dem sowohl der Regler als auch die Datenfusion mit einer Taktrate von 1 kHz ausgeführt wurden. Abbildung 5.8 zeigt den Quadrocopter während eines Versuchs. Die Durchführung der Flugexperimente erfolgte am Multicopterprüfstand des *Lehrstuhls für Flugsystemdynamik der Technischen Universität München*. Dieser verfügt über einen nutzbaren Flugraum von etwa 0.8 m Breite, 1.4 m Länge und 1.5 m Höhe in einer abgeschlossenen Umgebung. Der Prüfstand ist mit einem markerlos arbeitenden Trackingsystem ausgestattet, welches Positions- und Gierwinkelmessungen bereitstellt, die unter Verwendung zweier Standardwebcams gewonnen werden [96]. Die ermittelten Messwerte wurden zusammen mit den kommandierten Führungsgrößen per Funk bei einer Frequenz von 50 Hz vom Prüfstandsrechner an den Quadrocopter übermittelt. Dort wurden die Messdaten des Trackingsystems mit den Messungen der IMU fusioniert,<sup>7</sup> um die vollständige Zustandsinformation für die Regelung zur Verfügung zu stellen. Die Ausführung des gesamten Softwareprozesses an Bord des Quadrocopters, einschließlich Kommunikation, Datenfusion, Reglerauswertung und Datenaufzeichnung,

<sup>6</sup><http://www.asctec.de/>

<sup>7</sup>Die Datenfusion wurde dankenswerter Weise von Dipl.-Ing. Thomas Raffler vom Lehrstuhl für Flugsystemdynamik zur Verfügung gestellt. Die Fusion der Fluglage basiert im Wesentlichen auf den in [117] vorgeschlagenen nichtlinearen Komplementärfilteransätzen.

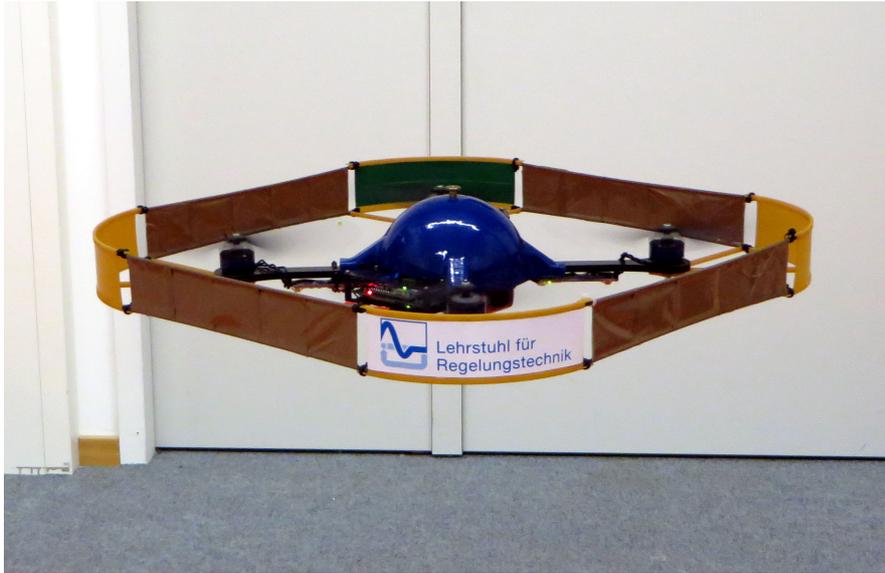


Abbildung 5.8: Quadrocopter während eines Flugversuchs.

benötigte etwa 30% der verfügbaren Prozessorleistung.

Die präsentierten Flugversuche wurden mit den in Tabelle 5.1 angegebenen Parameterwerten durchgeführt. Dabei wurden die Parameter der Lageregelung unverändert aus Tabelle 4.1 in Abschnitt 4.5 übernommen, wo deren Auslegung bereits motiviert wurde. Da die Lageregelung in der Kaskadenstruktur als Trajektorienfolge-  
regelung betrieben wird, muss im Gegensatz zur Festwertregelung zusätzlich die Funktion  $\Gamma(\boldsymbol{\xi}_R)$  bzw.  $\Gamma(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB})$  spezifiziert werden. Für die Versuche wurde  $\Gamma = 1$  gewählt, was dazu führt, dass der Coriolis-Term in der rotatorischen Folgefehlerdynamik (5.4) bzw. (4.68) durch das Stellgesetz kompensiert wird. Der Parametrierung des Positionsreglers sowie des Schubgesetzes lagen die folgenden Überlegungen zugrunde, sofern die Parameterwahl nicht rein empirisch erfolgte: Die Schranke  $\bar{F}$ , welche den Betrag von  $\tilde{\mathbf{F}}$  begrenzt, wurde auf 40% der wirkenden Gewichtskraft  $mg$  festgesetzt. Für den Fall, dass eine feste Sollposition  $\mathbf{p}_{d,I}$  vorgegeben wird (und für die Zeitableitungen entsprechend  $\dot{\mathbf{p}}_{d,I} \equiv \ddot{\mathbf{p}}_{d,I} \equiv 0$  gilt), lässt sich aus (5.6) unmittelbar ableiten, dass über  $\bar{F}$  auch der Maximalwinkel  $\Upsilon$  zwischen der kommandierten  $z$ -Achsenrichtung  $\mathbf{z}_d$  und der inertialen  $z$ -Achsenrichtung  $\mathbf{z}_{in}$  begrenzt wird. Wie in Anmerkung 5.3 beschrieben, ergibt sich, dass die kommandierte Schubrichtung höchstens um  $\Upsilon = \arcsin(0.4mg/mg) = 0.412 \text{ rad} \approx 23.6^\circ$  aus der Vertikalen verkippt sein kann. Der Steifigkeitskoeffizient  $c_r$  wurde empirisch festgelegt. Darauf aufbauend wurde die Schranke  $\bar{r}$  so gewählt, dass für die Potentialkraft  $\max(\|\mathbf{F}_r\|) = c_r \cdot \bar{r} = 0.9 \cdot \bar{F}$  erfüllt ist. Damit stehen stets 10% von  $\bar{F}$  für Dämpfungszwecke zur Verfügung. Im Hinblick auf die Auslegungsdynamik (5.40) wurde das Dämpfungsmaß  $\zeta_r$  auf 0.9 festgelegt. Der Fokus liegt damit auf einem raschen Ein-

Tabelle 5.1: Im Flugversuch verwendete Parameter des Strecken- und Antriebsmodells, der Positions- und Lageregelung sowie des Schubgesetzes.

Parameter des Streckenmodells			
$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}} = \text{diag}(6.4, 6.4, 12.5) \cdot 10^{-3} \text{ m}^2\text{kg}$	$m = 0.585 \text{ kg}$	$g = 9.805 \text{ m/s}^2$	
$\mathbf{D} = \text{diag}(0.3, 0.3, 0.3) \text{ Ns/m}$			
Parameter des Antriebsmodells			
$l = 0.17 \text{ m}$	$\kappa_\tau = 1.6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$\kappa_f = 7.98 \cdot 10^{-6} \text{ Ns}^2/\text{rad}^2$	
Parameter des Schubgesetzes			
$\underline{k} = 0.15$	$\Delta_k = 0.05$		
Parameter der Positionsregelung			
$c_r = 5.3 \text{ N/m}$	$\Delta_r = 0.039 \text{ m}$	$\bar{r} = 0.39 \text{ m}$	$\bar{F} = 2.29 \text{ N}$
$\zeta_r = 0.9$	$\Delta_{\kappa_r} = 0.1$		
Parameter der vollständigen Lageregelung			
$c_\varphi = 1.5 \text{ Nm/rad}$	$\varphi_l = 0.151 \text{ rad}$	$\varphi_u = 178 \cdot \pi/180 \text{ rad}$	$\Delta_\varphi = 2 \cdot \pi/180 \text{ rad}$
$c_\vartheta = 0.109 \text{ Nm/rad}$	$\vartheta_l = 0.426 \text{ rad}$	$\vartheta_u = 178 \cdot \pi/180 \text{ rad}$	$\Delta_\vartheta = 2 \cdot \pi/180 \text{ rad}$
$\delta_\varphi = 0.176 \text{ Nms/rad}$	$v_\varphi = 0.1 \text{ rad/s}$	$v_{\varphi_l} = 3.64 \text{ rad/s}$	$r_\varphi = 0.75$
$\delta_z = 0.0885 \text{ Nms/rad}$	$v_\vartheta = 0.1 \text{ rad/s}$	$v_{\vartheta_l} = 1.31 \text{ rad/s}$	$r_\vartheta = 0.75$
$\bar{\tau}_{xy} = 0.25 \text{ Nm}$	$\bar{\tau}_z = 0.05 \text{ Nm}$	$\Gamma = 1$	

schwingverhalten, wobei moderates Überschwingen toleriert wird. Bezüglich des Schubgesetzes ist vor allem der Parameter  $\underline{k}$  bedeutsam. Er bestimmt, ab welchem Wert der Schubrichtungsfehler  $\varphi$ , welcher der Projektion zugrunde liegt, als gesättigt betrachtet wird. Da  $\underline{k} = 0.15 \approx \cos(1.420 \text{ rad})$  gewählt wurde, tritt die Sättigung ab einem Winkel von  $1.420 \text{ rad} \approx 81.4^\circ$  ein. Die Parameter  $\Delta_r$ ,  $\Delta_{\kappa_r}$  und  $\Delta_k$ , welche die Übergangsintervalle der Sättigungsfunktionen bestimmen, wurden so festgesetzt, dass Verträglichkeit mit den jeweiligen Sättigungsgrenzen gewährleistet ist.

Nachfolgend werden die Ergebnisse zweier Flugversuche präsentiert: Im ersten Versuch wurde ein periodischer Festwertwechsel in Position und Heading durchgeführt. Der zweite Versuch umfasste eine Trajektorienfolgeaufgabe bezüglich Position und Heading. Um die Darstellung des Headings für die folgenden Abbildungen zu vereinfachen, werden die Headingvektoren  $\mathbf{h}_d$  und  $\mathbf{h}$ , die in Abschnitt 5.1 eingeführt wurden und welche definitionsgemäß nur einen Freiheitsgrad besitzen, in Winkeldarstellungen transformiert.

Hierzu werden die Headingwinkel

$$\psi_d = \text{atan2}(h_{d,Iy}, h_{d,Ix}) \quad \text{und} \quad \psi = \text{atan2}(h_{Iy}, h_{Ix}) \quad (5.47)$$

eingeführt. Die dabei angewendete Funktion  $\text{atan2} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus (0, 0) \rightarrow [-\pi, \pi[$

$$\text{atan2}(b, a) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{für } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{für } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{für } a < 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

ermittelt den Polarwinkel eines Vektors  $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$  im korrekten Quadranten.

Die Ergebnisse des Festwertwechsels sind in den Abbildungen 5.9 und 5.10 dargestellt. Die Sollposition  $\mathbf{p}_{d,I}$  und der Sollheadingwinkel  $\psi_d$  wurden jeweils alle 12.5 s zwischen zwei Festwerten umgeschaltet. Die Positionsfestwerte unterschieden sich um 1.25 m in der inertialen  $x$ -Richtung und 0.6 m in der inertialen  $z$ -Richtung. Die Vorgabe für die inertielle  $y$ -Richtung wurde konstant auf Null belassen. Phasenverschoben zum Positionskommando änderte das Headingkommando  $\psi_d$  seinen Wert sprunghaft um jeweils  $\pi/2$  rad. Der Quadcopter führte die Festwertwechsel schnell und robust aus ohne signifikantes Überschwingen zu zeigen. Neben den Systemantworten für die Position und das Heading sind in den Abbildungen 5.9 und 5.10 die Zeitverläufe weiterer Systemgrößen angegeben. In Abbildung 5.9d sind die Komponenten der virtuellen Stellgröße  $\tilde{\mathbf{F}}$  des Positionsreglers sowie deren Betrag  $\|\tilde{\mathbf{F}}\|$  dargestellt. Entsprechend dem Regelungsentwurf in Abschnitt 5.4 kann der Betrag  $\|\tilde{\mathbf{F}}\|$  die festgelegte Schranke  $\bar{F}$  nie überschreiten. Man erkennt, dass zu Beginn jedes Positionswechsels Kraftspitzen auftreten, die den Quadcopter aus dem Schwebestand heraus beschleunigen. Da die Geschwindigkeit im Schwebestand annähernd Null ist und somit praktisch keine translatorische Dämpfung auftritt, resultieren diese Kraftspitzen so gut wie ausschließlich aus der Potentialkraft  $\mathbf{F}_r$ , deren Maximalbetrag  $c_r \cdot \bar{r} = 2.06$  N durch den Regler vollständig ausgenutzt wird. Abbildung 5.10a gibt Auskunft über den Betrag  $F_d$  der virtuellen Schubkraft  $\mathbf{F}_d$  und den tatsächlich kommandierten Schub  $F$ . Es sei zunächst darauf hingewiesen, dass im vorliegenden Festwertfall, in dem sämtliche Zeitableitungen der Sollposition  $\mathbf{p}_d$  gleich Null sind, ein sehr einfacher Zusammenhang zwischen der virtuellen Schubkraft  $\mathbf{F}_d$  und der Stellgröße  $\tilde{\mathbf{F}}$  des Positionsreglers besteht. Entsprechend

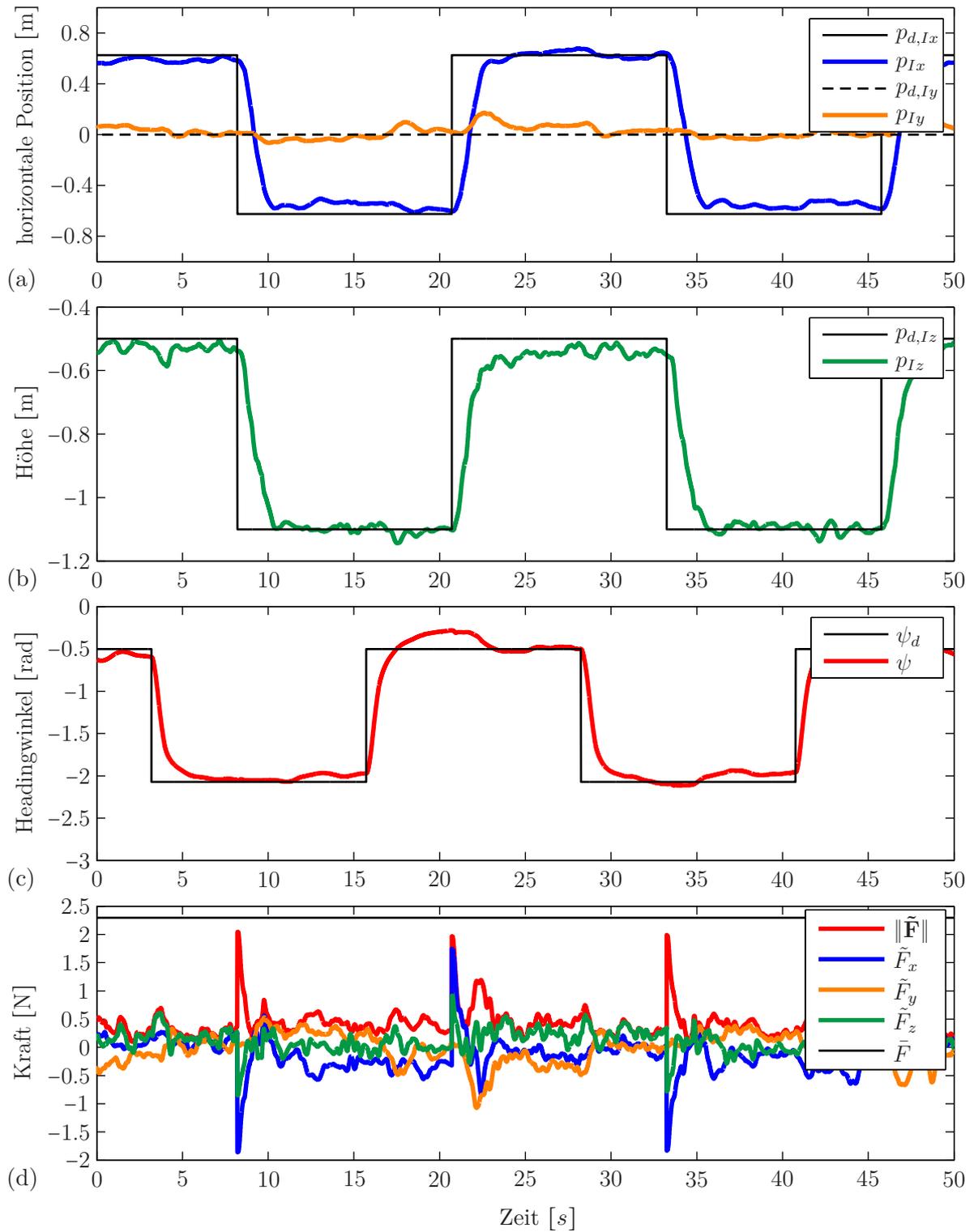


Abbildung 5.9: Erster Teil der Flugversuchsergebnisse für den Festwertwechsel.

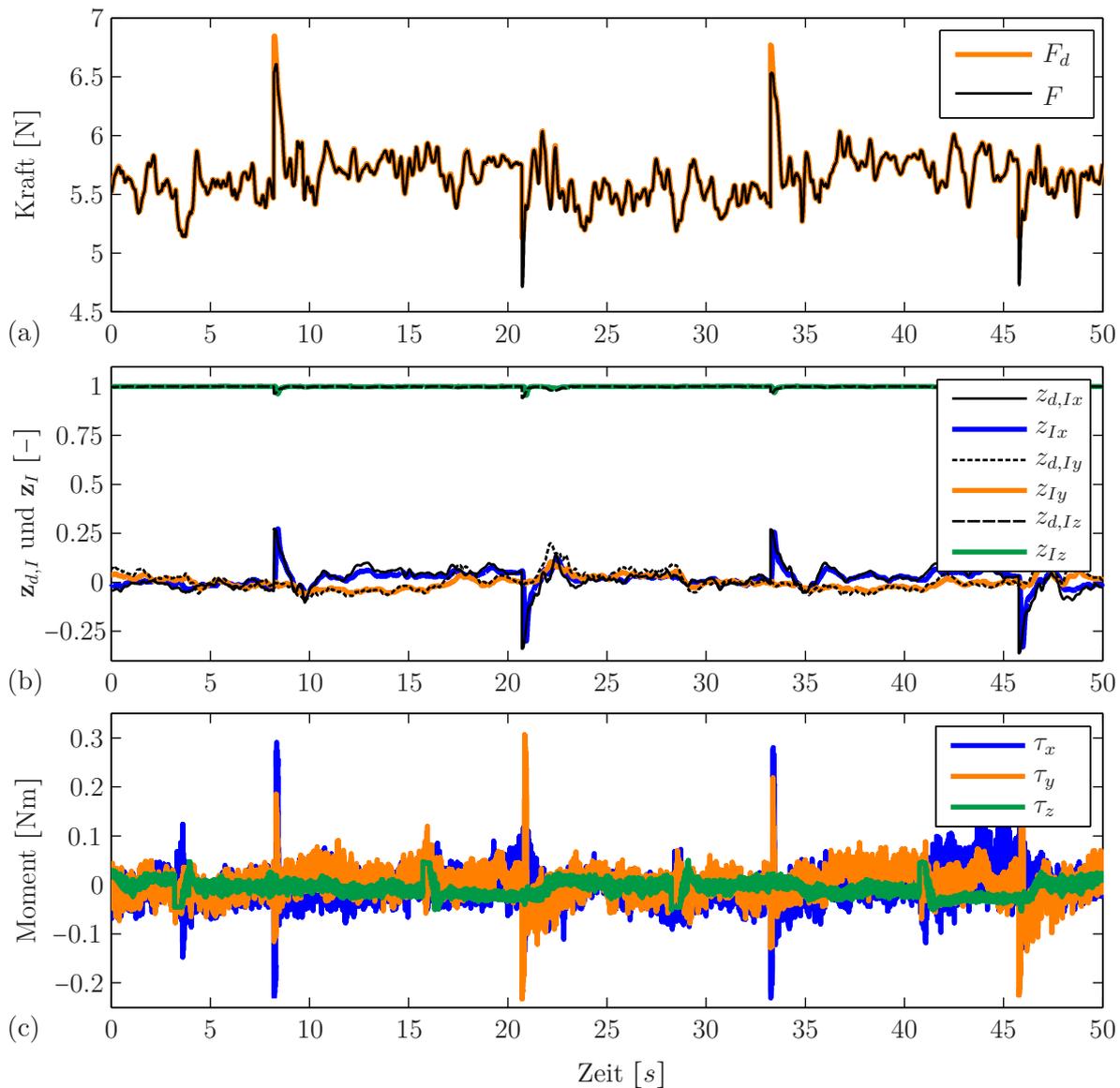


Abbildung 5.10: Zweiter Teil der Flugversuchsergebnisse für den Festwertwechsel.

(5.6) unterscheiden sich beide Größen nur um den Kraftanteil, der die Gewichtskraft kompensiert. Aus (5.6) ist auch ersichtlich, dass die negative Richtung der virtuellen Schubkraft  $\mathbf{F}_d$  die Sollausrichtung der körperfesten  $z$ -Achse  $\mathbf{z}_d$  bestimmt, während ihr Betrag  $F_d$  entsprechend dem festgelegten projizierenden Schubgesetz (5.45) in den realen Schub  $F$  umgesetzt wird. Folglich fällt der Schub  $F$  im Verhältnis zu  $F_d$  umso geringer aus, je größer die Abweichung zwischen  $\mathbf{z}$  und  $\mathbf{z}_d$  ist. Besonders augenfällig ist dieser Effekt in Abbildung 5.10a zu den Umschaltzeitpunkten der Sollposition, wo sich  $\mathbf{z}_d$  sprunghaft ändert. Diese Sprünge können wiederum in Abbildung 5.10b gut nachvollzogen werden, wo dargestellt ist, wie die unterlagerte Lageschleife der Regelung die

Sollausrichtung der körperfesten  $z$ -Achse  $\mathbf{z}_d$  erfolgreich einregelt. Die Stellmomentenverläufe, die der Lageregler kommandiert, um das geforderte Heading und die gewünschte  $z$ -Achsenrichtung herzustellen, sind in Abbildung 5.10c dargestellt. Deutlich erkennbar ist der Einfluss des Messrauschens. Die vom Regler angeforderten Stellgrößen  $\boldsymbol{\tau}$  und  $F$  wurden im Versuch mit Hilfe des statischen Antriebsmodells (2.20) in entsprechende Drehzahlkommandos gewandelt, die dann an die Drehzahlregler der einzelnen Rotoren weitergegeben wurden. Es sei angemerkt, dass die im Antriebsmodell vernachlässigte Motordynamik den Einfluss des hochfrequenten Messrauschens abmildert und zu deutlich glatteren Drehzahlverläufen führt.

Es soll nochmals hervorgehoben werden, dass der vorgestellte kaskadierte Regler grundsätzlich in der Lage ist beliebig große Festwertwechsel in der Position zu verarbeiten, ohne dass die Konvergenz des Systems zur gewünschten Ruhelage beeinträchtigt oder gar gefährdet wird und ohne dass dabei unbeschränkte Stellgrößen auftreten können. Wie zuvor beschrieben, ist es sogar möglich über die Schranke  $\bar{F}$  den maximalen kommandierten Kippwinkel des Quadrocopters exakt zu spezifizieren. Damit eignet sich der vorgeschlagene Regler insbesondere für Anwendungen, bei denen weit voneinander entfernte Wegpunkte angefliegen werden müssen. Im Unterschied zu anderen Regelungskonzepten können die Sollpositionen direkt an die Regelung kommandiert werden. Eine aufwändige Generierung interpolierender Trajektorien kann entfallen.

Die Zielsetzung des zweiten Flugversuchs bestand darin den Quadrocopter die in Abbildung 5.11 dargestellte Positionstrajektorie in Form einer dreidimensionalen Acht abfliegen zu lassen und gleichzeitig eine oszillierende Headingtrajektorie einzuregeln. Aufgrund der limitierten Anzahl an Übertragungskanälen der Funkstrecke zum Quadrocopter, konnten die Trajektorien  $\mathbf{p}_{d,I}(t)$  und  $\mathbf{h}_{d,I}(t)$  nicht direkt zusammen mit allen erforderlichen Zeitableitungen übertragen werden. Deshalb wurden die Trajektorien  $\mathbf{p}_{d,I}(t)$  und  $\mathbf{h}_{d,I}(t)$  (zusammen mit den benötigten Ableitungen) bordseitig durch Filterung der ersatzweise übertragenen Kommandosignale  $\mathbf{p}_{c,I}(t)$  und  $\psi_c(t)$  generiert. Mithilfe des Filters fünfter Ordnung, der durch die Übertragungsfunktion

$$G_5(s) = \frac{1}{(0.1s + 1)(0.01s^2 + 0.22s + 1)^2}$$

spezifiziert ist, lässt sich die erzeugte Positionstrajektorie im Frequenzbereich über den Zusammenhang

$$\mathbf{p}_{d,I}(s) = \text{diag}(G_5(s), G_5(s), G_5(s)) \cdot \mathbf{p}_{c,I}(s) \quad (5.48)$$

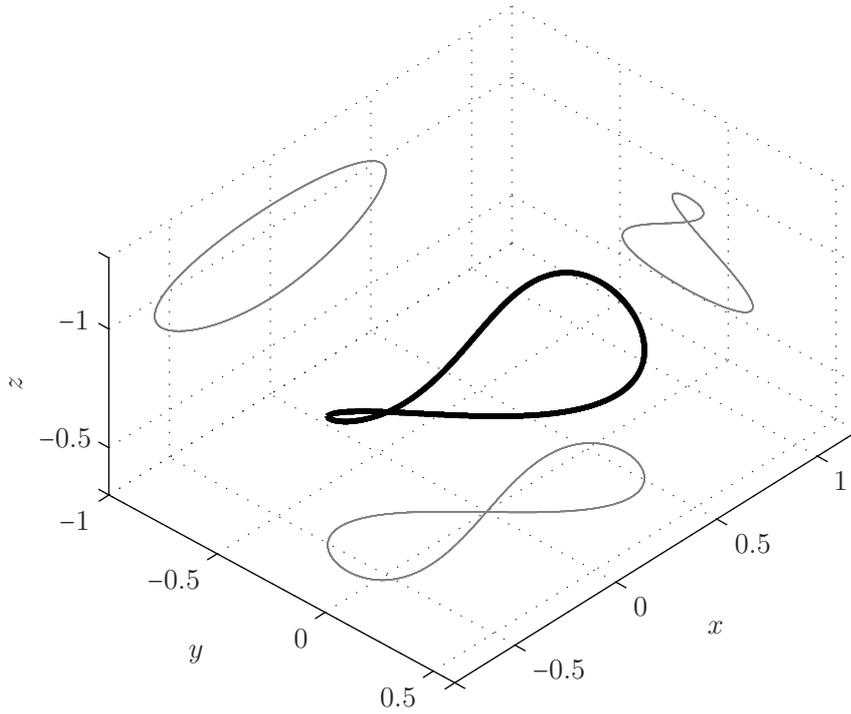


Abbildung 5.11: Räumliche Darstellung der vorgegebenen Positionstrajektorie  $\mathbf{p}_{d,I}(t)$ . Die grauen Kurven kennzeichnen orthogonale Projektionen der Trajektorie.

angeben. Die Headingtrajektorie wurde über die Beziehung

$$\begin{aligned}\psi_d^*(s) &= G_5(s)\psi_c(s) \\ \mathbf{h}_{d,I}(t) &= \begin{bmatrix} \cos(\psi_d^*(t)) & \sin(\psi_d^*(t)) & 0 \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

generiert. Man beachte, dass der Winkel  $\psi_d^*$  identisch mit dem in (5.47) eingeführten Winkel  $\psi_d$  ist, solange  $\psi_d^* \in [-\pi, \pi[$  gilt. Dies ist im Folgenden gewährleistet.

Für den präsentierten Flugversuch wurden die Kommandosignale

$$\mathbf{p}_{c,I}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(1.287 \text{ rad}) & \sin(1.287 \text{ rad}) & 0 \\ -\sin(1.287 \text{ rad}) & \cos(1.287 \text{ rad}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_z} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0.2 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \text{ rad/s} \cdot t\right) \\ 0.6 \text{ m} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \text{ rad/s} \cdot t\right) \\ -0.2 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \text{ rad/s} \cdot t\right) - 0.9 \text{ m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_c^*(t)}$$

und

$$\psi_c(t) = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10} \text{ rad/s} \cdot t\right) - 1.287 \text{ rad}$$

an den Quadrocopter übertragen. Somit wiederholt sich die Positionstrajektorie alle 8 s

und die Headingtrajektorie besitzt eine Periodendauer von 20s. Für eine gute Einpassung der translatorischen Bahnkurve in den vorhandenen Flugraum, wurde die durch  $\mathbf{p}_c^*(t)$  beschriebene Grundform der Bahn zusätzlich mit Hilfe der konstanten Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_z$  um 1.287rad um die inertielle  $z$ -Achse gedreht. Derselbe Winkel wurde vom sinusförmigen Headingkommando  $\psi_c(t)$  entsprechend abgezogen. Abbildung 5.11 zeigt eine räumliche Darstellung der resultierenden (eingeschwungenen) Positionstrajektorie  $\mathbf{p}_{d,I}(t)$ , die durch Filterung entsprechend (5.48) aus  $\mathbf{p}_{c,I}(t)$  hervorgeht.

Die Ergebnisse des zweiten Flugversuchs sind in den Abbildungen 5.12 und 5.13 zusammengefasst. Wie man den Abbildungen 5.12a - 5.12d entnehmen kann, wird die Trajektorienfolgeaufgabe durch die verwendete kaskadierte Regelung zuverlässig bewältigt, was in Anbetracht der bestehenden Modellunsicherheiten und der diversen Störungen denen der Quadrocopter ausgesetzt war, unterstreicht, dass das vorgeschlagene Regelungskonzept die in der Praxis erforderliche Robustheit aufweist. Um die Performanz des Systems weiter aufzuschlüsseln, wurden die Mittelwerte und die Standardabweichungen der Folgefehler  $\tilde{\mathbf{p}} = [\tilde{p}_x \quad \tilde{p}_y \quad \tilde{p}_z]^T = \mathbf{p}_I - \mathbf{p}_{d,I}$  und  $\tilde{\psi} = \psi - \psi_d$  für das abgebildete Zeitintervall berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.2 angegeben und zeigen Standardabweichungen von maximal 6 cm in der Position und 0.0835rad im Heading.

Tabelle 5.2: Statistische Kennwerte der Folgefehler.

	$\tilde{p}_x$ [m]	$\tilde{p}_y$ [m]	$\tilde{p}_z$ [m]	$\tilde{\psi}$ [rad]
Mittelwert	0.0039	0.0062	-0.0015	0.0046
Standardabweichung	0.0608	0.0457	0.0257	0.0835

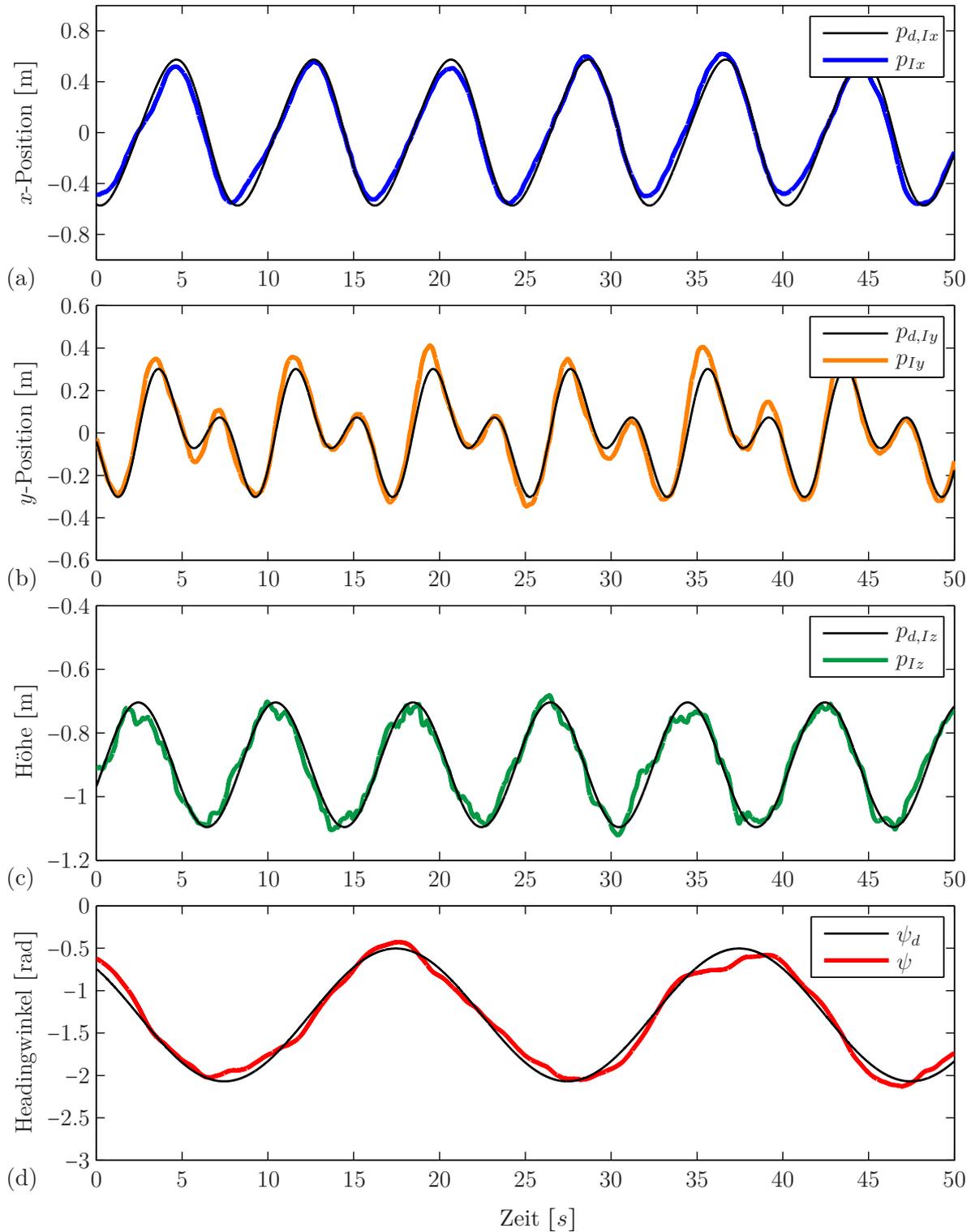


Abbildung 5.12: Erster Teil der Flugversuchsergebnisse für die Trajektorienfolgeaufgabe.

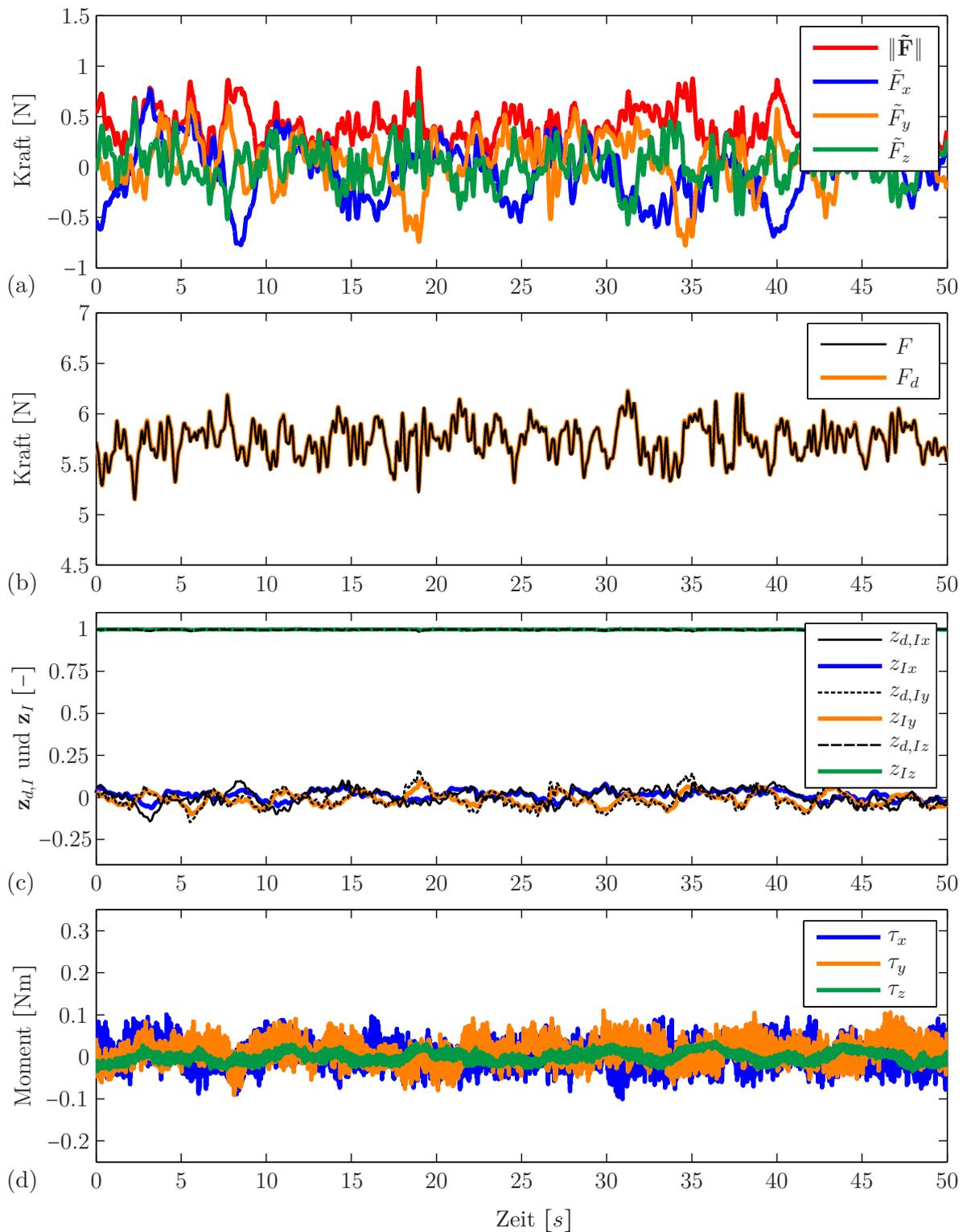


Abbildung 5.13: Zweiter Teil der Flugversuchsergebnisse für die Trajektorienfolgeaufgabe.



# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde das Trajektorienfolgeproblem für die Position eines Quadrocopters betrachtet und mit Hilfe eines nichtlinearen kaskadierten Reglers gelöst. Es wurde aufgezeigt, wie der Headingfreiheitsgrad des Flugsystems wahlweise in die Trajektorienfolgeaufgabe eingebunden oder aus dieser ausgeklammert werden kann. Die angewendeten energiebasierten Entwurfsmethoden ermöglichen dabei eine physikalisch transparente Interpretation der Stellgesetze und erleichtern damit die Parametrierung der Regelung. Die gewählte kaskadierte Reglerstruktur aus übergeordneter Positions- und untergeordneter Lageregelung führte auf zwei grundsätzliche regelungstheoretische Problemstellungen, die im Mittelpunkt der Arbeit standen. Zum einen wurde das Lageregelungsproblem starrer Körper auf die spezifischen Anforderungen des Quadrocopters hin analysiert und entsprechend gelöst. Zum anderen wurde ein Stabilitätskriterium für eine Klasse nichtautonomer nichtlinearer Kaskadensysteme formuliert.

Beim Manövrieren eines Quadrocopters kommt der gezielten und schnellen Ausrichtung der Schubkraft eine zentrale Rolle zu. Der Headingfreiheitsgrad, welcher die Orientierung des Flugsystems um die Schubrichtung herum beschreibt, ist für das translatorische Verhalten des Quadrocopters dagegen bedeutungslos. Konsequenterweise wurde in dieser Arbeit eine neuartige reduzierte Lageregelung entwickelt, welche ausschließlich die Schubrichtung des Quadrocopters einregelt und damit eine unnötige Vorgabe des Headings vermeidet. Der Reglerentwurf erfolgte mittels energiebasierter Entwurfsmethoden, welche darauf abzielen, die potentielle Energie des Fehlersystems in adäquater Weise zu formen und die Dissipation der Gesamtenergie über das gezielte Einbringen von Dämpfung zu steuern. Der vorgeschlagene Regler garantiert die Einhaltung vorgegebener Stellmomentenschranken und fokussiert gleichzeitig ein möglichst schnelles Einschwingverhalten. Letzteres wird durch eine durchdachte Dämpfungsstrategie ermöglicht, welche danach strebt zielführende Bewegungen gewähren zu lassen und unerwünschte Bewegungen zu unterbinden. Das resultierende Reglerverhalten ähnelt jenem

der zeitoptimalen Regelung und zeichnet sich insbesondere durch die Fähigkeit zur gezielten Stellgrößensättigung aus. Für den Fall konstanter Sollschubrichtungen wurde Robustheit gegenüber beliebigen Unsicherheiten im Trägheitstensor nachgewiesen.

Soll neben der Schubrichtung auch eine Headingvorgabe eingeregelt werden, so wird eine vollständige Lageregelung benötigt. In der vorliegenden Arbeit wurde deshalb eine neuartige vollständige Lageregelung entworfen, welche eine konsequente Weiterentwicklung des reduzierten Lageregelungsansatzes darstellt. Die Motivation bestand darin, das Einregeln der Schubkrafttrichtung klar gegenüber dem Einstellen der Headingvorgabe zu priorisieren, um damit der sicherheitskritischen Bedeutung der Schubausrichtung gerecht zu werden. Die entwickelte vollständige Lageregelung erfüllt diese Anforderung und bewahrt darüber hinaus alle günstigen Eigenschaften der reduzierten Lageregelung hinsichtlich beschränkter Stellmomente, schnellem Einschwingverhalten und Robustheit gegenüber Trägheitsunsicherheiten.

Bei der Entwicklung der Regelgesetze wurde besonderer Wert auf die globale Betrachtung des Lageregelungsproblems gelegt. Dies erfordert die Berücksichtigung der nichttrivialen geometrischen Eigenschaften der speziellen orthogonalen Gruppe  $SO(3)$ , welche die Menge der  $3 \times 3$  Rotationsmatrizen beschreibt und damit den Konfigurationsraum der Starrkörperorientierung bildet. Durch den Verzicht auf alternative Lageparametrierungen wie Eulerwinkel oder Quaternionen und die konsequente sorgsame Interpretation aller Regelgesetze im Konfigurationsraum  $SO(3)$  wurden global definierte Rückführungen entworfen, welche frei von jeglichen parametrierungsbedingten Singularitäten und Unwinding-Phänomenen sind. Die kontinuierlichen Stellgesetze garantieren darüber hinaus fast global asymptotische Stabilität und erschließen damit den größtmöglichen Einzugsbereich, welcher im Hinblick auf den vorliegenden nichtkontraktiven Zustandsraum gewährleistet werden kann.

Durch den gewählten kaskadierten Regelungsansatz zur Bewältigung der Positionsfolgeaufgabe am Quadrocopter resultiert unabhängig von den angewendeten Entwurfsmethoden eine nichtautonome, nichtlineare kaskadierte Fehlerdynamik mit einer spezifischen Struktur. Bestehende Arbeiten zur Stabilitätsanalyse kaskadierter Systeme decken die vorliegende Systemklasse nicht unmittelbar ab, weshalb die Ergebnisse in der vorliegenden Arbeit entsprechend erweitert wurden. Dies resultierte in der Formulierung eines hinreichenden Kriteriums für die asymptotische Stabilität der Nullruhelage einer Klasse nichtautonomer, nichtlinearer kaskadierter Systeme.

Im letzten Teil der Arbeit wurde ein Positionsregler entworfen, der sich mit den entwickelten Lageregelungskonzepten zu einem geeigneten kaskadierten Trajektorienfolge-regler kombinieren lässt. Für die Synthese des Positionsregelkreises wurden wiederum

---

die energiebasierten Entwurfsmethoden herangezogen. Die vorgeschlagene Positionsregelung erlaubt eine wirkungsvolle Beschränkung der angeforderten (virtuellen) Stellkräfte. Hierdurch lässt sich zum einen der angeforderte Schubkraftbetrag auf Werte größer Null beschränken, wodurch das Problem undefinierter Sollschubrichtungen vermieden wird. Zum anderen kann die kommandierte Schubkraft in einem vorgegebenen Kegel eindämmt und somit der maximale Kippwinkel begrenzt werden, der potenziell an die Lageregelung kommandiert wird. Mit Hilfe des erarbeiteten Stabilitätskriteriums für die vorliegende Klasse kaskadierter Systeme wurde fast global asymptotische Stabilität für den geschlossenen Gesamtregelkreis nachgewiesen. Die Funktionstüchtigkeit des kaskadierten Regelungskonzepts wurde schließlich durch Flugversuche belegt.

Angeregt durch die Ergebnisse dieser Arbeit, können folgende Fragestellungen die Grundlage für weiterführende Forschungstätigkeiten bilden:

**Sondierung der Entwurfswfreiheitsgrade  $\Gamma$  und  $k_F$ :** Der Faktor  $\Gamma$  bestimmt in den Lagefolgeregelungen inwieweit der Coriolis-Term kompensiert wird (siehe (3.53) bzw. (4.67)). Der Schubübersetzungsfaktor  $k_F$  legt fest wie sich der virtuelle Schubkraftbetrag in den realen Schubkraftbetrag überträgt (siehe (5.12)). Beide Entwurfswfreiheitsgrade können weitgehend frei gestaltet werden, ohne dass die geführten Stabilitätsnachweise beeinträchtigt werden. Gleichzeitig darf angenommen werden, dass ihr Einfluss auf die Dynamik der geschlossenen Regelkreise und den zu treibenden Stellaufwand nicht zu vernachlässigen ist. Eine Optimierung der angesetzten funktionalen Zusammenhänge für beide Größen hinsichtlich aussagekräftiger Kriterien wie Stellaufwand oder Einschwingzeiten könnte die Leistungsfähigkeit der Regelungen weiter verbessern. Erste Untersuchungen hinsichtlich  $k_F$ , die den Einfluss des Parameters belegen, wurden bereits in [61] durchgeführt.

**Integration von Mechanismen zur Kompensation von Störungen und Modellunsicherheiten:** Die präsentierten Regelungen besitzen aktuell keine Mechanismen zur aktiven Kompensation von Störungen und Modellunsicherheiten. Es wäre wünschenswert mindestens Integralverhalten in die Regler aufzunehmen oder sogar das vorteilhafte Nominalverhalten der hier präsentierten geschlossenen Regelkreise als Referenzdynamik für adaptive Regelungsentwürfe zu nutzen. Ein Hemmnis, welches es bei diesen Anliegen zu überwinden gilt, resultiert aus der Tatsache, dass die verwendeten energiebasierten Entwurfsverfahren per Konstruktion keine Lyapunovfunktionen mit negativ definiten Zeitableitung, sondern lediglich solche mit negativ semidefiniten Zeitableitung hervorbringen.

**Kaskadierte Regelungen aus alternativen Teilreglern:** Das entwickelte Stabilitätskriterium für die vorliegende Klasse nichtautonomer nichtlinearer kaskadierter Systeme ermöglicht es, den Stabilitätsnachweis für Kombinationen aus verschiedensten Positions- und Lagereglern zu führen. Damit ergibt sich eine große Bandbreite potenzieller kaskadierter Gesamtregler, für die man sich modular aus unterschiedlichsten Entwurfsverfahren bedienen kann. Es bietet sich daher an, alternative Reglerkombinationen zu bilden, zu analysieren und gegenüberzustellen.

# Anhang A

## A.1 Formaler Nachweis der Eigenschaft $\dot{\mathbf{e}}_\varphi = \mathbf{0}$ unter der Annahme 3.2

Folgende Betrachtungen gelten im Fall  $\mathbf{z}_{d,B} \neq \pm \mathbf{e}_z$ , der für die Überlegungen in Abschnitt 3.2.2 relevant ist. Definiert man  $\mathbf{v} = \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \mathbf{z}_{d,B}$  so gilt laut (3.16)

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \mathbf{v}$$

und entsprechend

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \right) \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mathbf{v}^T \dot{\mathbf{v}}}{\|\mathbf{v}\|^3} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \dot{\mathbf{v}}. \quad (\text{A.1})$$

Für  $\dot{\mathbf{v}}$  ergibt sich mit (3.6a)

$$\dot{\mathbf{v}} = \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \dot{\mathbf{z}}_{d,B} = \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \langle\langle \mathbf{z}_{d,B} \rangle\rangle \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B.$$

Annahme 3.2 besagt, dass  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B = \omega_\varphi \mathbf{e}_\varphi$  gilt. Setzt man dies in die vorige Gleichung ein, so erhält man

$$\dot{\mathbf{v}} = \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \langle\langle \mathbf{z}_{d,B} \rangle\rangle \omega_\varphi \mathbf{e}_\varphi = \omega_\varphi \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \langle\langle \mathbf{z}_{d,B} \rangle\rangle \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \mathbf{v} = \frac{\omega_\varphi}{\|\mathbf{v}\|} \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \langle\langle \mathbf{z}_{d,B} \rangle\rangle \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \mathbf{z}_{d,B}. \quad (\text{A.2})$$

Mit Hilfe der Identität (2.6) lässt sich der Zusammenhang (A.2) weiter umformen zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= \frac{\omega_\varphi}{\|\mathbf{v}\|} (-\mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} \cdot \mathbf{I}_3 + \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{e}_z^T) \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \mathbf{z}_{d,B} = \frac{\omega_\varphi}{\|\mathbf{v}\|} \left( -\mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} \cdot \underbrace{\langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \mathbf{z}_{d,B}}_{\mathbf{v}} + \mathbf{z}_{d,B} \underbrace{\mathbf{e}_z^T \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \mathbf{z}_{d,B}}_{\mathbf{0}^T} \right) \\ &= -\frac{\omega_\varphi \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Setzt man dies in (A.1) ein, so ergibt sich schließlich

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{\omega_\varphi \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{v}^T \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^4} \cdot \mathbf{v} - \frac{\omega_\varphi \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \mathbf{v} = \left( \frac{\omega_\varphi \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}}{\|\mathbf{v}\|^2} - \frac{\omega_\varphi \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}}{\|\mathbf{v}\|^2} \right) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} .$$

## A.2 Bestimmung der Schaltlinie $s_\varphi(\varphi)$

Die relevante Differentialgleichung

$$\hat{J}_1 \ddot{\varphi} = \bar{\tau}_{xy}$$

beschreibt eine konstant positiv beschleunigte Bewegung, deren Lösung durch

$$\varphi = \frac{\bar{\tau}_{xy}}{2\hat{J}_1} \cdot t^2 + \dot{\varphi}_0 \cdot t + \varphi_0$$

gegeben ist, wobei  $\dot{\varphi}_0$  die Winkelgeschwindigkeit und  $\varphi_0$  den Winkel zum Zeitpunkt  $t = 0$  repräsentiert. Entsprechend gilt für die Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi} = \frac{\bar{\tau}_{xy}}{\hat{J}_1} \cdot t + \dot{\varphi}_0 .$$

Gesucht ist die Phasenraumdarstellung all jener Lösungen, für die zu einem beliebigen Zeitpunkt  $(\varphi, \dot{\varphi}) = (\varphi_l, -v_{\varphi_l})$  gilt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass dies zum Zeitpunkt Null der Fall ist und es folgt

$$\varphi = \frac{\bar{\tau}_{xy}}{2\hat{J}_1} \cdot t^2 - v_{\varphi_l} \cdot t + \varphi_l , \tag{A.3}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\bar{\tau}_{xy}}{\hat{J}_1} \cdot t - v_{\varphi_l} . \tag{A.4}$$

Durch Auflösen der Gleichung (A.4) nach  $t$  und Einsetzen in (A.3) erhält man

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\hat{J}_1}{2\bar{\tau}_{xy}} (\dot{\varphi} + v_{\varphi_l})^2 - \frac{\hat{J}_1}{\bar{\tau}_{xy}} v_{\varphi_l} \dot{\varphi} - \frac{\hat{J}_1}{\bar{\tau}_{xy}} v_{\varphi_l}^2 + \varphi_l \\ &= \frac{\hat{J}_1}{2\bar{\tau}_{xy}} \dot{\varphi}^2 - \frac{\hat{J}_1}{2\bar{\tau}_{xy}} v_{\varphi_l}^2 + \varphi_l . \end{aligned}$$

Löst man diese Gleichung schließlich nach  $\dot{\varphi}$  auf so ergibt sich

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{v_{\varphi_l}^2 + 2\hat{J}_1^{-1} \bar{\tau}_{xy} (\varphi - \varphi_l)} ,$$

wobei jedes Vorzeichen einen Ast derselben Phasenraumtrajektorie beschreibt (vgl. Abbildung 3.6). Als Schaltlinie von Interesse ist nur derjenige Ast, der in der negativen Halbebene ( $\dot{\varphi} < 0$ ) liegt und es folgt

$$s_\varphi(\varphi) = -\sqrt{v_{\varphi_l}^2 + 2\hat{J}_1^{-1}\bar{\tau}_{xy}(\varphi - \varphi_l)} .$$

### A.3 Darstellung der Drehratenkomponente $\omega_{Az}^{DA}$ in Abhängigkeit von $\mathbf{z}_{d,B}$ und $\omega_B^{DB}$

Ausgehend von Gleichung (4.18) wird im Folgenden gezeigt, dass sich  $\omega_{Az}^{DA}$  über den in Abschnitt 4.2 angegebenen Zusammenhang (4.19) in Abhängigkeit der Größen  $\mathbf{z}_{d,B}$  und  $\omega_B^{DB}$  darstellen lässt.

Man stellt zunächst fest, dass zur Bestimmung von  $\omega_{Az}^{DA}$  nur das zweite Element in der ersten Zeile der Matrixgleichung (4.18) betrachtet werden muss. Selektiert man dieses Element, indem man die Matrixgleichung von links mit  $\mathbf{e}_x^T$  und von rechts mit  $\mathbf{e}_y$  multipliziert, so erhält man

$$\mathbf{e}_x^T \dot{\mathbf{R}}_{AB} \mathbf{R}_{AB}^T \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_x^T \mathbf{R}_{AB} \langle\langle \omega_B^{DB} \rangle\rangle \mathbf{R}_{AB}^T \mathbf{e}_y = \omega_{Az}^{DA} . \quad (\text{A.5})$$

Um die Umformung der linken Seite dieser Gleichung vorzubereiten, werden zunächst vorteilhafte Darstellungen für  $\mathbf{R}_{AB}$ ,  $\mathbf{R}_{AB}^T$  und  $\dot{\mathbf{R}}_{AB}$  gebildet. Dabei wird im Folgenden häufig und ohne gesonderte Erwähnung von der Schiefsymmetrie des Operators  $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$  (siehe (2.3)) Gebrauch gemacht.

Aus (4.10) ist bekannt, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{AB} &= \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} \cdot \mathbf{I}_3 + \frac{1 - \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}}{\|\langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \mathbf{z}_{d,B}\|^2} \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{z}_{d,B}^T \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle^T - \langle\langle \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \mathbf{z}_{d,B} \rangle\rangle \\ &= \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} \cdot \mathbf{I}_3 - \frac{1 - \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}}{\|\langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \mathbf{z}_{d,B}\|^2} \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{z}_{d,B}^T \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle - \langle\langle \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \mathbf{z}_{d,B} \rangle\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

gilt. Der letzte Summand dieser Gleichung lässt sich mit Hilfe der Eigenschaft (2.7) in der Form

$$-\langle\langle \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \mathbf{z}_{d,B} \rangle\rangle = -\mathbf{z}_{d,B} \mathbf{e}_z^T + \mathbf{e}_z \mathbf{z}_{d,B}^T \quad (\text{A.7})$$

angeben. Weiterhin kann die quadratische Norm im mittleren Summanden als Skalar-

produkt geschrieben werden. Führt man dies durch, so erhält man

$$\|\langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{z}_{d,B}\|^2 = \mathbf{z}_{d,B}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \langle \mathbf{e}_z \rangle^T \mathbf{z}_{d,B} = -\mathbf{z}_{d,B}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle^2 \mathbf{z}_{d,B} . \quad (\text{A.8})$$

Der Ausdruck  $\mathbf{z}_{d,B}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle^2 \mathbf{z}_{d,B}$ , der im Laufe der Herleitung mehrfach auftreten wird, lässt sich wiederum mit Hilfe der Eigenschaft (2.6) und der Einheitslänge der Vektoren  $\mathbf{e}_z$  und  $\mathbf{z}_{d,B}$  weiter umformen, was schließlich auf

$$\mathbf{z}_{d,B}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle^2 \mathbf{z}_{d,B} = \mathbf{z}_{d,B}^T (\mathbf{I}_3 + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z^T) \mathbf{z}_{d,B} = \underbrace{-\mathbf{z}_{d,B}^T \mathbf{z}_{d,B}}_{=1} + \mathbf{z}_{d,B}^T \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} = -(1 - \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}) \quad (\text{A.9})$$

führt. Setzt man (A.7) sowie (A.8) und (A.9) in (A.6) ein, so ergibt sich

$$\mathbf{R}_{AB} = \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} \cdot \mathbf{I}_3 - \frac{1}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})} \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{z}_{d,B}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle - \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{e}_z^T + \mathbf{e}_z \mathbf{z}_{d,B}^T . \quad (\text{A.10})$$

Entsprechend gilt für die transponierte Matrix

$$\mathbf{R}_{AB}^T = \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} \cdot \mathbf{I}_3 - \frac{1}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})} \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{z}_{d,B}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle + \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{e}_z^T - \mathbf{e}_z \mathbf{z}_{d,B}^T \quad (\text{A.11})$$

und für die Zeitableitung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_{AB} &= \mathbf{e}_z^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B} \cdot \mathbf{I}_3 - \frac{1}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})} \left( \langle \mathbf{e}_z \rangle \dot{\mathbf{z}}_{d,B} \mathbf{z}_{d,B}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle + \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{z}_{d,B} \dot{\mathbf{z}}_{d,B}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \right) \\ &\quad + \frac{\mathbf{e}_z^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B}}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})^2} \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{z}_{d,B}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle - \dot{\mathbf{z}}_{d,B} \mathbf{e}_z^T + \mathbf{e}_z \dot{\mathbf{z}}_{d,B}^T . \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Mit den gewonnenen Darstellungen (A.11) und (A.12) werden nun der Zeilenvektor  $\mathbf{e}_x^T \dot{\mathbf{R}}_{AB}$  und den Spaltenvektor  $\mathbf{R}_{AB}^T \mathbf{e}_y$  gebildet, welche im ersten Summanden von (A.5) auftreten. Unter Ausnutzung der Orthogonalität der Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_z$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x^T \dot{\mathbf{R}}_{AB} &= \mathbf{e}_z^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B} \cdot \mathbf{e}_x^T - \frac{1}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})} \left( \mathbf{e}_x^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \dot{\mathbf{z}}_{d,B} \mathbf{z}_{d,B}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle + \mathbf{e}_x^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{z}_{d,B} \dot{\mathbf{z}}_{d,B}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \right) \\ &\quad + \frac{\mathbf{e}_z^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B}}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})^2} \mathbf{e}_x^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{z}_{d,B}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle - \mathbf{e}_x^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B} \cdot \mathbf{e}_z^T \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{R}_{AB}^T \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} \cdot \mathbf{e}_y - \frac{1}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})} \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{z}_{d,B}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z \mathbf{z}_{d,B}^T \mathbf{e}_y .$$

Nutzt man erneut der Orthogonalität der Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_z$ , die Eigenschaft (2.5) sowie die Identitäten  $\mathbf{e}_x^T \langle \mathbf{e}_z \rangle = \mathbf{e}_y^T$  und  $\langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_x$ , so berechnet man für den ersten Summanden aus (A.5)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_x^T \dot{\mathbf{R}}_{AB} \mathbf{R}_{AB}^T \mathbf{e}_y &= -\frac{\mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})} \left( \mathbf{e}_y^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B} \mathbf{z}_{d,B}^T \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y^T \mathbf{z}_{d,B} \dot{\mathbf{z}}_{d,B}^T \mathbf{e}_x \right) \\
 &+ \left( \frac{\mathbf{e}_z^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B} \cdot \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})^2} - \frac{\mathbf{e}_z^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B}}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})} \right) \mathbf{e}_y^T \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{z}_{d,B}^T \mathbf{e}_x \\
 &+ \frac{1}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})^2} \mathbf{e}_y^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B} \underbrace{\mathbf{z}_{d,B}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle^2 \mathbf{z}_{d,B}}_{=a} \mathbf{z}_{d,B}^T \mathbf{e}_x \\
 &+ \frac{1}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})^2} \mathbf{e}_y^T \mathbf{z}_{d,B} \underbrace{\dot{\mathbf{z}}_{d,B}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle^2 \mathbf{z}_{d,B}}_{=b} \mathbf{z}_{d,B}^T \mathbf{e}_x \\
 &- \frac{\mathbf{e}_z^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B}}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})^3} \mathbf{e}_y^T \mathbf{z}_{d,B} \underbrace{\mathbf{z}_{d,B}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle^2 \mathbf{z}_{d,B}}_{=a} \mathbf{z}_{d,B}^T \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_x^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B} \underbrace{\mathbf{e}_z^T \mathbf{e}_z}_{=1} \mathbf{z}_{d,B}^T \mathbf{e}_y .
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

Das hierin enthaltene Skalar  $a$  kann über die Beziehung (A.9) ersetzt werden. Für das Skalar  $b$  leitet man auf analoge Weise mit Hilfe der Eigenschaft (2.6) sowie der Orthogonalität zwischen  $\mathbf{z}_{d,B}$  und  $\dot{\mathbf{z}}_{d,B}$  her, dass

$$b = \dot{\mathbf{z}}_{d,B}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle^2 \mathbf{z}_{d,B} = \dot{\mathbf{z}}_{d,B}^T (\mathbf{I}_3 + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z^T) \mathbf{z}_{d,B} = \underbrace{-\dot{\mathbf{z}}_{d,B}^T \mathbf{z}_{d,B}}_{=0} + \dot{\mathbf{z}}_{d,B}^T \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} = \mathbf{e}_z^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B} \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}$$

gilt. Führt man die Ersetzungen  $a = -(1 - \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})$  und  $b = \dot{\mathbf{z}}_{d,B}^T \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}$  in (A.13) durch und fasst die Terme weiter zusammen, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_x^T \dot{\mathbf{R}}_{AB} \mathbf{R}_{AB}^T \mathbf{e}_y &= -\frac{1}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})} \mathbf{e}_y^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B} \mathbf{z}_{d,B}^T \mathbf{e}_x - \frac{\mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})} \mathbf{e}_y^T \mathbf{z}_{d,B} \dot{\mathbf{z}}_{d,B}^T \mathbf{e}_x \\
 &+ \frac{\mathbf{e}_z^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B}}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})^2} \underbrace{\left( 2\mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} - (1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}) + (1 - \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}) \right)}_{=0} \mathbf{e}_y^T \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{z}_{d,B}^T \mathbf{e}_x \\
 &+ \mathbf{e}_x^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B} \mathbf{z}_{d,B}^T \mathbf{e}_y \\
 &= \frac{1}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})} \left( -\mathbf{z}_{d,B}^T \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B} - \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{z}_{d,B}^T \mathbf{e}_y \mathbf{e}_x^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B} \right) + \mathbf{z}_{d,B}^T \mathbf{e}_y \mathbf{e}_x^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B} \\
 &= \frac{1}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})} \left( -\mathbf{z}_{d,B}^T \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B} + \mathbf{z}_{d,B}^T \mathbf{e}_y \mathbf{e}_x^T \dot{\mathbf{z}}_{d,B} \right) \\
 &= \frac{1}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})} \mathbf{z}_{d,B}^T \left( \mathbf{e}_y \mathbf{e}_x^T - \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y^T \right) \dot{\mathbf{z}}_{d,B} .
 \end{aligned}$$

Durch Substitution von  $\dot{\mathbf{z}}_{d,B}$  mit Hilfe der Dynamikgleichung (4.15) und ein erneutes

Anwenden der Eigenschaft (2.7) erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x^T \dot{\mathbf{R}}_{AB} \mathbf{R}_{AB}^T \mathbf{e}_y &= \frac{1}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})} \mathbf{z}_{d,B}^T \underbrace{\langle\langle \mathbf{e}_x \rangle\rangle \langle\langle \mathbf{e}_y \rangle\rangle}_{=\mathbf{e}_z} \langle\langle \mathbf{z}_{d,B} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \\ &= \frac{1}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})} \mathbf{z}_{d,B}^T \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \langle\langle \mathbf{z}_{d,B} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

für den ersten Summanden aus (A.5). Der zweite Summand lässt sich vergleichsweise leicht umformen. Unter Ausnutzung der Rechenregeln (2.4) und (2.9) folgert man

$$\begin{aligned} -\mathbf{e}_x^T \mathbf{R}_{AB} \langle\langle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \rangle\rangle \mathbf{R}_{AB}^T \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_x^T \mathbf{R}_{AB} \langle\langle \mathbf{R}_{AB}^T \mathbf{e}_y \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} = \mathbf{e}_x^T \mathbf{R}_{AB} \langle\langle \mathbf{R}_{AB}^T \mathbf{e}_y \rangle\rangle \underbrace{\mathbf{R}_{AB}^T \mathbf{R}_{AB}}_{\mathbf{I}_3} \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \\ &= \mathbf{e}_x^T \underbrace{\mathbf{R}_{AB} \mathbf{R}_{AB}^T}_{\mathbf{I}_3} \langle\langle \mathbf{e}_y \rangle\rangle \mathbf{R}_{AB} \boldsymbol{\omega}_B^{DB} = \underbrace{\mathbf{e}_x^T \langle\langle \mathbf{e}_y \rangle\rangle}_{=\mathbf{e}_z^T} \mathbf{R}_{AB} \boldsymbol{\omega}_B^{DB}. \end{aligned}$$

Ersetzt man hierin  $\mathbf{R}_{AB}$  mit (A.10) und berücksichtigt  $\mathbf{e}_z^T \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle = \mathbf{0}^T$ , so erhält man

$$-\mathbf{e}_x^T \mathbf{R}_{AB} \langle\langle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \rangle\rangle \mathbf{R}_{AB}^T \mathbf{e}_y = \left( \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{e}_z^T - \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{e}_z^T + \underbrace{\mathbf{e}_z^T \mathbf{e}_z}_{=1} \mathbf{z}_{d,B}^T \right) \boldsymbol{\omega}_B^{DB} = \mathbf{z}_{d,B}^T \boldsymbol{\omega}_B^{DB}. \quad (\text{A.15})$$

Mit (A.14) und (A.15) lässt sich nun die ursprüngliche Gleichung (A.5) in der Form

$$\begin{aligned} \omega_{Az}^{DA} &= \frac{1}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})} \mathbf{z}_{d,B}^T \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \langle\langle \mathbf{z}_{d,B} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} + \mathbf{z}_{d,B}^T \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \\ &= \frac{1}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})} \mathbf{z}_{d,B}^T \left( \langle\langle \mathbf{e}_z \rangle\rangle \langle\langle \mathbf{z}_{d,B} \rangle\rangle \boldsymbol{\omega}_B^{DB} + (1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}) \cdot \mathbf{I}_3 \right) \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \end{aligned}$$

angeben. Wendet man schließlich die Rechenregel (2.6) ein letztes Mal an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega_{Az}^{DA} &= \frac{1}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})} \mathbf{z}_{d,B}^T \left( -\mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B} \cdot \mathbf{I}_3 + \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{e}_z^T + (1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B}) \cdot \mathbf{I}_3 \right) \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \\ &= \frac{1}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})} \mathbf{z}_{d,B}^T \left( \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{e}_z^T + \mathbf{I}_3 \right) \boldsymbol{\omega}_B^{DB} = \frac{1}{(1 + \mathbf{e}_z^T \mathbf{z}_{d,B})} \left( \underbrace{\mathbf{z}_{d,B}^T \mathbf{z}_{d,B} \mathbf{e}_z^T}_{=1} + \mathbf{z}_{d,B}^T \right) \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \\ &= \frac{1}{(1 + z_{d,Bz})} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{d,Bx} & z_{d,By} & z_{d,Bz} \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{\omega}_B^{DB} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{z_{d,Bx}}{(1+z_{d,Bz})} & \frac{z_{d,By}}{(1+z_{d,Bz})} & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_B^{DB}. \end{aligned}$$

Dies entspricht der in Abschnitt 4.2 angegebenen Beziehung (4.19).

## A.4 Berechnungsvorschriften für $\dot{\mathbf{x}}_{d,I}$ und $\ddot{\mathbf{x}}_{d,I}$

Durch Ableiten der Berechnungsvorschrift (5.2) und Anwendung der Eigenschaften (2.4) und (2.3) erhält man

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{d,I} = & \frac{-1}{\sqrt{\mathbf{h}_{d,I}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle^2 \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{h}_{d,I}}} \left( \langle \dot{\mathbf{z}}_{d,I} \rangle \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{h}_{d,I} + \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle \langle \mathbf{e}_z \rangle \dot{\mathbf{h}}_{d,I} \right) \\ & + \left( \mathbf{h}_{d,I}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle^2 \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{h}_{d,I} \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left( \mathbf{h}_{d,I}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle^2 \langle \mathbf{e}_z \rangle \dot{\mathbf{h}}_{d,I} \right. \\ & \left. + \mathbf{h}_{d,I}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle \langle \dot{\mathbf{z}}_{d,I} \rangle \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{h}_{d,I} \right) \cdot \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{h}_{d,I} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

sowie

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_{d,I} = & \frac{-1}{\sqrt{\mathbf{h}_{d,I}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle^2 \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{h}_{d,I}}} \left( \langle \ddot{\mathbf{z}}_{d,I} \rangle \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{h}_{d,I} + 2 \langle \dot{\mathbf{z}}_{d,I} \rangle \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{h}_{d,I} + \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle \langle \mathbf{e}_z \rangle \ddot{\mathbf{h}}_{d,I} \right) \\ & - 3 \left( \mathbf{h}_{d,I}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle^2 \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{h}_{d,I} \right)^{-\frac{5}{2}} \cdot \left( \mathbf{h}_{d,I}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle^2 \langle \mathbf{e}_z \rangle \dot{\mathbf{h}}_{d,I} \right. \\ & + \mathbf{h}_{d,I}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle \langle \dot{\mathbf{z}}_{d,I} \rangle \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{h}_{d,I} \left. \right)^2 \cdot \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{h}_{d,I} + \left( \mathbf{h}_{d,I}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle^2 \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{h}_{d,I} \right)^{-\frac{3}{2}} \\ & \cdot \left[ \left( \dot{\mathbf{h}}_{d,I}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle^2 \langle \mathbf{e}_z \rangle \dot{\mathbf{h}}_{d,I} + 2 \mathbf{h}_{d,I}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \langle \dot{\mathbf{z}}_{d,I} \rangle \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle \langle \mathbf{e}_z \rangle \dot{\mathbf{h}}_{d,I} \right. \right. \\ & + 2 \mathbf{h}_{d,I}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle \langle \dot{\mathbf{z}}_{d,I} \rangle \langle \mathbf{e}_z \rangle \dot{\mathbf{h}}_{d,I} + \mathbf{h}_{d,I}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle^2 \langle \mathbf{e}_z \rangle \ddot{\mathbf{h}}_{d,I} \\ & + \mathbf{h}_{d,I}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \langle \dot{\mathbf{z}}_{d,I} \rangle^2 \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{h}_{d,I} + \mathbf{h}_{d,I}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle \langle \ddot{\mathbf{z}}_{d,I} \rangle \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{h}_{d,I} \left. \right) \cdot \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{h}_{d,I} \\ & + 2 \left( \mathbf{h}_{d,I}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle^2 \langle \mathbf{e}_z \rangle \dot{\mathbf{h}}_{d,I} + \mathbf{h}_{d,I}^T \langle \mathbf{e}_z \rangle \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle \langle \dot{\mathbf{z}}_{d,I} \rangle \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{h}_{d,I} \right) \\ & \cdot \left( \langle \dot{\mathbf{z}}_{d,I} \rangle \langle \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{h}_{d,I} + \langle \mathbf{z}_{d,I} \rangle \langle \mathbf{e}_z \rangle \dot{\mathbf{h}}_{d,I} \right) \left. \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$



# Symbolverzeichnis

## Abkürzungen

- CICS     Converging input converging state.  
IMU     Inertiale Messeinheit (engl. inertial measurement unit).

## Lateinische Buchstaben

- $A$      Hilfskoordinatensystem, welches bei der Zerlegung des Lagefehlers in Erscheinung tritt,  $A = \{\mathbf{x}_a, \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a\}$ .
- $A_{Rot}$     Von den Rotorblättern überstrichene Fläche.
- $\mathcal{A}_R$     Einzugsbereich der Ruhelage  $\boldsymbol{\xi}_R = \mathbf{0}$ .
- $B$      Körperfestes Koordinatensystem,  $B = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ .
- $c_r$      Lokale Steifigkeit des Positionsregelkreises bzgl. des betragsmäßigen Positionsfehlers  $r$  um  $r = 0$ .
- $c_\varphi$     Lokale Steifigkeit des Lageregelkreises bzgl. des Schubrichtungsfehlers  $\varphi$  um  $\varphi = 0$ .
- $c_\vartheta$     Lokale Steifigkeit des Lageregelkreises bzgl. des Headingfehlers  $\vartheta$  um  $\vartheta = \varphi = 0$ .
- $\mathcal{C}^i$     Klasse der  $i$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen.
- $d_r$      Durch den Positionsregler induzierte und richtungsunabhängig wirksame Dämpfung der translatorischen Fehlergeschwindigkeit.
- $d_z$      Durch den Lageregler induzierte Dämpfung der Drehratenkomponente  $\omega_z$ .
- $d_\varphi$     Durch den Lageregler induzierte Dämpfung der Drehratenkomponente  $\omega_\varphi$ .
- $d_1$      Durch den Lageregler induzierte Dämpfung der Drehratenkomponente  $\omega_1$ .
- $\mathbf{d}$      Systemeingang des Kaskadensystems.
- $D$      Sollkoordinatensystem,  $D = \{\mathbf{x}_d, \mathbf{y}_d, \mathbf{z}_d\}$ .
- $\mathbf{D}$      Dämpfungsmatrix der translatorischen Starrkörperdynamik. (In Abschnitt 1.2 allg. Dämpfungsmatrix.)
- $\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{f}}}$     Durch den Positionsregler induzierte Dämpfungsmatrix.
- $\mathbf{D}_{xy}$     Obere linke Blockmatrix der Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}_\tau$ .
- $\mathbf{D}_\tau$     Durch den Lageregler induzierte Dämpfungsmatrix.
- $\mathbf{e}_x$     Basisunabhängiger Einheitsvektor,  $\mathbf{e}_x = [1 \ 0 \ 0]^T$ .

$\mathbf{e}_y$	Basisunabhängiger Einheitsvektor, $\mathbf{e}_y = [0 \ 1 \ 0]^T$ .
$\mathbf{e}_z$	Basisunabhängiger Einheitsvektor, $\mathbf{e}_z = [0 \ 0 \ 1]^T$ .
$\mathbf{e}_\varphi$	Einheitsvektor, welcher die Drehachse der Rotation angibt, die $\mathbf{z}$ auf kürzestem Weg in $\mathbf{z}_d$ überführt.
$\mathbf{e}_\perp$	Einheitsvektor, welcher die Vektoren $\mathbf{e}_\varphi$ und $\mathbf{z}$ so ergänzt, dass $\{\mathbf{e}_\perp, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{z}\}$ ein rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem darstellt.
$E$	Potentialfunktion der vollständigen Lageregelung.
$E_p$	Potentialfunktion des 3D-Pendels.
$E_r$	Potentialfunktion der Positionsregelung.
$E_\varphi$	Potentialfunktion der reduzierten Lageregelung sowie vom Schubrichtungsfehler $\varphi$ abhängige Komponente der Potentialfunktion $E$ .
$E_\theta$	Vom Headingfehler $\vartheta$ abhängige Komponente der Potentialfunktion $E$ .
$\mathcal{E}$	Teilmenge des Zustandsraums, in der die Zeitableitung der Lyapunovfunktion verschwindet.
$f, f_i$	Schubkraftbetrag eines Rotors bzw. Schubkraftbetrag des $i$ -ten Rotors.
$\mathbf{f}_i$	Schubkraft des $i$ -ten Rotors.
$\mathbf{f}_p$	Vektorfeld des ungekoppelten Positionsteilsystems.
$\mathbf{f}_R$	Vektorfeld des autonomen Lageteilsystems.
$F$	Betrag der Schubkraft, $F = \ \mathbf{F}\ $ . Stellgröße des Quadrocopters.
$\bar{F}$	Obere Schranke für den Betrag der virtuellen Stellkraft des Positionsreglers, $\ \tilde{\mathbf{F}}\  \leq \bar{F}$ .
$F_d$	Betrag der virtuellen Schubkraft, $F_d = \ \mathbf{F}_d\ $ .
$\mathbf{F}$	Schubkraft.
$\tilde{\mathbf{F}}$	Virtuelle Stellkraft des Positionsreglers.
$\mathbf{F}_d$	Virtuelle Schubkraft.
$\mathbf{F}_r$	Durch das Potential $E_r$ induzierte Kraft.
$g$	Erdbeschleunigung.
$\mathbf{g}_p$	Kopplungsterm des Kaskadensystems.
$\mathbf{h}$	Headingvektor.
$\mathbf{h}_d$	Sollheadingvektor.
$I$	Inertiales Koordinatensystem, $I = \{\mathbf{x}_{in}, \mathbf{y}_{in}, \mathbf{z}_{in}\}$ .
$\mathcal{I}$	Größe in $\mathcal{E}$ enthaltene invariante Menge.
$\mathbf{I}_i$	Einheitsmatrix der Dimension $i \times i$ .
$\hat{J}_1$	Eintrag der ersten beiden Diagonalelemente von $\hat{\mathbf{J}}$ .
$\hat{J}_2$	Letztes Diagonalelement von $\hat{\mathbf{J}}$ .

---

<b>J</b>	Trägheitstensor des Quadrocopters.
$\hat{\mathbf{J}}$	Diagonal besetzte Abschätzung des Trägheitstensors des Quadrocopters, $\hat{\mathbf{J}} = \text{diag}(\hat{J}_1, \hat{J}_1, \hat{J}_2)$ .
$\underline{k}$	Untere Schranke des Schubübersetzungsfaktors $k_F$ .
$k_F$	Schubübersetzungsfaktor.
$\mathcal{K}$	Klasse der streng monoton wachsenden Vergleichsfunktionen. Siehe z. B. [95, Definition 4.2].
<b>K</b>	Matrix, welche die Transformation von den quadrierten Rotordrehzahlen $\omega_i^2$ in den Stellmomentenvektor $\boldsymbol{\tau}$ sowie den Schubkraftbetrag $F$ leistet.
$l$	Länge eines Auslegers des Quadrocopters.
$l_p$	Abstand zwischen Drehpunkt und Schwerpunkt des 3D-Pendels.
$m$	Masse des Quadrocopters.
$m_p$	Masse des 3D-Pendels.
<b>p</b>	Position des Quadrocopters.
$\tilde{\mathbf{p}}$	Positionsfehler des Quadrocopters.
$\mathbf{p}_c$	Im Flugversuch an den Quadrocopter übermitteltes Positionskommando.
$\mathbf{p}_d$	Sollposition des Quadrocopter.
$P_{Imp}$	Vom Rotor erbrachte Leistung zur Erhöhung des Luftmassenimpulses.
$P_{Mot}$	Vom Motor erbrachte mechanische Leistung.
$r$	Betrag des Positionsfehlers, $r = \ \tilde{\mathbf{p}}\ $ .
$\bar{r}$	Parameter des Positionsreglers, welcher zusammen mit $c_r$ die betragsmäßige Sättigungsgrenze der Potentialkraft $\mathbf{F}_r$ bestimmt.
$r_\varphi$	Parameter des reduzierten und vollständigen Lagereglers, welcher die Ausdehnung des Überblendbereichs zwischen beschleunigungs- und bremsoptimaler Dämpfung $d_\varphi$ bestimmt.
$r_\vartheta$	Parameter des vollständigen Lagereglers, welcher die Ausdehnung des Überblendbereichs zwischen beschleunigungs- und bremsoptimaler Dämpfung $d_z$ bestimmt.
$\mathbf{r}_i$	Verbindungsvektor vom Ursprung des körperfesten Koordinatensystems zur Nabe des $i$ -ten Rotors.
$\mathcal{R}$	Zustandsraum der Zustandsvariablen $\boldsymbol{\xi}_R$ .
$\mathbf{R}_{K'K}$	Rotationsmatrix, welche die Transformation von einem Koordinatensystem $K$ in ein Koordinatensystem $K'$ leistet.
$\vec{\mathbf{R}}_{K'K}$	Vektorielle Darstellung der Rotationsmatrix $\mathbf{R}_{K'K}$ .
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen.
$\mathbb{R}^{\geq 0}$	Menge der positiven reellen Zahlen einschließlich Null, $\mathbb{R}^{\geq 0} = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\}$ .
$\mathbb{R}^i$	Euklidischer Vektorraum der Dimension $i$ .

$s$	Laplace-Variable.
$s_\varphi$	Schaltlinie, welche die $(\varphi, \dot{\varphi})$ -Phasenebene in einen Beschleunigungs- und einen Bremsbereich unterteilt.
$s_\vartheta$	Schaltlinie, welche die $(\vartheta, \dot{\vartheta})$ -Phasenebene in einen Beschleunigungs- und einen Bremsbereich unterteilt.
$\mathfrak{so}(3)$	Menge der schiefsymmetrischen $3 \times 3$ -Matrizen, $\mathfrak{so}(3) = \{\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{G}^T = -\mathbf{G}\}$ .
$\mathcal{S}^i$	Mantelfläche der $i+1$ -dimensionalen Einheitskugel, $\mathcal{S}^i = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{i+1} \mid \mathbf{a}^T \mathbf{a} = 1\}$ .
$SO(3)$	Spezielle orthogonale Gruppe, $SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_3, \det(\mathbf{R}) = 1\}$ .
$t$	Zeit.
$T_p$	Betrag des Moments, welches durch das Pendelpotential $E_p$ induziert wird.
$T_z^+$	Betrag der $z$ -Komponente $T_z$ des Potentialmoments $\mathbf{T}$ , $T_z^+ =  T_z  =  \mathbf{e}_z^T \mathbf{T} $ .
$T_\varphi$	Betrag des Potentialmoments $\mathbf{T}_\varphi^\varphi$ , $T_\varphi = \ \mathbf{T}_\varphi^\varphi\ $ .
$\mathbf{T}$	Durch das Potential $E$ induziertes Moment.
$\mathbf{T}_\varphi^\varphi$	Durch das Potential $E_\varphi$ induziertes Moment, welches um die Achse $\mathbf{e}_\varphi$ wirkt.
$\mathbf{T}_\varphi^\vartheta$	Um die Achse $\mathbf{e}_\varphi$ wirksamer Anteil des durch die Potentialkomponente $E_\vartheta$ induzierten Moments.
$\mathbf{T}_\perp^\vartheta$	Um die Achse $\mathbf{e}_\vartheta$ wirksamer Anteil des durch die Potentialkomponente $E_\vartheta$ induzierten Moments.
$\mathbf{T}_z^\vartheta$	Um die Achse $\mathbf{e}_z$ wirksamer Anteil des durch die Potentialkomponente $E_\vartheta$ induzierten Moments.
$v_{ind}$	Durch den Rotor induzierte Geschwindigkeit des Luftstroms.
$v_{\varphi_l}$	Betragsmäßige Geschwindigkeit, welche für $\dot{\varphi}$ beim Eintritt in den Bereich $\varphi \leq \varphi_l$ angestrebt wird.
$v_{\vartheta_l}$	Betragsmäßige Geschwindigkeit, welche für $\dot{\vartheta}$ beim Eintritt in den Bereich $\vartheta \leq \vartheta_l$ angestrebt wird.
$V$	Lyapunovfunktion des reduzierten bzw. vollständigen Lageregelkreises. (In Abschnitt 1.2 allgemeine Lyapunovfunktion.)
$V_p$	Lyapunovfunktion des ungekoppelten Positionsregelkreises.
$\mathbf{w}_d$	Angestrebte Ruhelage des reduzierten Lageregelkreises, $\mathbf{w}_d = (\mathbf{e}_z, \mathbf{0})$ .
$\mathbf{w}_u$	Unerwünschte Ruhelage des reduzierten Lageregelkreises, $\mathbf{w}_u = (-\mathbf{e}_z, \mathbf{0})$ .
$\mathbb{W}$	Zustandsraum der reduzierten Lagefolgedynamik, $\mathbb{W} = \mathcal{S}^2 \times \mathbb{R}^3$ .
$\mathbf{W}_d$	Angestrebte Ruhelage des vollständigen Lageregelkreises, $\mathbf{W}_d = (\mathbf{I}_3, \mathbf{0})$ .
$\mathbf{W}_{u1}$	Isolierte, unerwünschte Ruhelage des vollständigen Lageregelkreises, $\mathbf{W}_{u1} = ([-\mathbf{e}_x \quad -\mathbf{e}_y \quad \mathbf{e}_z], \mathbf{0})$ .

---

$\mathcal{W}_{u2}$	Zusammenhängende Menge unerwünschter Ruhelagen des vollständigen Lageregelkreises, $\mathcal{W}_{u2} = \{(\mathbf{R}_{BD}, \boldsymbol{\omega}_B^{DB}) \in \mathcal{W} \mid \mathbf{R}_{BD}\mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_z, \boldsymbol{\omega}_B^{DB} = \mathbf{0}\}$ .
$\mathcal{W}$	Zustandsraum der vollständigen Lagefolgedynamik, $\mathcal{W} = SO(3) \times \mathbb{R}^3$ .
$\mathbf{x}$	Einheitsvektor der $x$ -Achse des körperfesten Koordinatensystems $B$ .
$\mathbf{x}_a$	Einheitsvektor der $x$ -Achse des Hilfskoordinatensystems $A$ .
$\mathbf{x}_d$	Einheitsvektor der $x$ -Achse des Sollkoordinatensystems $D$ .
$\mathbf{x}_{in}$	Einheitsvektor der $x$ -Achse des inertialen Koordinatensystems $I$ .
$\mathbf{y}$	Einheitsvektor der $y$ -Achse des körperfesten Koordinatensystems $B$ .
$\mathbf{y}_a$	Einheitsvektor der $y$ -Achse des Hilfskoordinatensystems $A$ .
$\mathbf{y}_d$	Einheitsvektor der $y$ -Achse des Sollkoordinatensystems $D$ .
$\mathbf{y}_{in}$	Einheitsvektor der $y$ -Achse des inertialen Koordinatensystems $I$ .
$\mathbf{z}$	Einheitsvektor der $z$ -Achse des körperfesten Koordinatensystems $B$ .
$\mathbf{z}_a$	Einheitsvektor der $z$ -Achse des Hilfskoordinatensystems $A$ .
$\mathbf{z}_d$	Sollausrichtung des Vektors $\mathbf{z}$ und damit im Falle der vollständigen Lage- regelung Einheitsvektor der $z$ -Achse des Sollkoordinatensystems $D$ .
$\mathbf{z}_{in}$	Einheitsvektor der $z$ -Achse des inertialen Koordinatensystems $I$ .

### Griechische Buchstaben

$\Gamma$	Kompensationsfaktor für den Coriolis-Term.
$\delta_z$	Konstanter Wert, welchen der Dämpfungskoeffizient $d_z$ in einer Umgebung sämtlicher Punkte annimmt, in denen für die Winkelfehler $\varphi$ und $\vartheta$ mindestens eine der Aussagen $\varphi = \pi$ , $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$ gilt.
$\delta_\varphi$	Konstanter Wert, welchen der Dämpfungskoeffizient $d_\varphi$ in einer Umgebung sämtlicher Punkte annimmt, in denen für den Winkelfehler $\varphi$ entweder $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ gilt.
$\Delta_k$	Parameter des Schubgesetzes. Bestimmt das Übergangsintervall der Sättigungsfunktion, welche im Schubübersetzungsfaktor $k_F$ enthalten ist.
$\Delta_r$	Parameter des Positionsreglers. Bestimmt das Übergangsintervall der Sättigungsfunktion, welche in der Potentialkraft $\mathbf{F}_r$ enthalten ist.
$\Delta_{\kappa_r}$	Parameter des Positionsreglers. Bestimmt das Übergangsintervall der Sättigungsfunktion, welche in der Dämpfungsmatrix $\mathbf{D}_{\mathbf{F}}$ enthalten ist.
$\Delta_\varphi$	Parameter des reduzierten und vollständigen Lagereglers. Bestimmt das Überblendintervall zwischen den Bereichen konstanter und variabler Dämpfung $d_\varphi$ sowie im Falle des vollständigen Lagereglers das $\varphi$ -abhängige Überblendintervall zwischen konstanter und variabler Dämpfung $d_z$ .
$\Delta_\vartheta$	Parameter des vollständigen Lagereglers. Bestimmt das $\vartheta$ -abhängige Überblendintervall zwischen konstanter und variabler Dämpfung $d_z$ .

$\zeta_r$	Parameter des Positionsreglers. Bestimmt das Lehrsche Dämpfungsmaß der in Radialrichtung genäherten ungekoppelten Positionsfehlerdynamik.
$\eta$	Wirkungsgrad eines Rotors.
$\vartheta$	Headingfehler.
$\vartheta_l$	Parameter des vollständigen Lagereglers. Bestimmt die $\vartheta$ -abhängige Ausdehnung des Bereichs konstanter Dämpfung $d_z$ um sämtliche Punkte an denen $\vartheta = 0$ gilt.
$\vartheta_u$	Parameter des vollständigen Lagereglers. Bestimmt die $\vartheta$ -abhängige Ausdehnung des Bereichs konstanter Dämpfung $d_z$ um sämtliche Punkte an denen $\vartheta = \pi$ gilt.
$\dot{\vartheta}_z$	Durch $\omega_z$ bestimmter Anteil der Zeitableitung $\dot{\vartheta}$ .
$\kappa_f$	Proportionalitätsfaktor zwischen der Schubkraft eines Rotors und dem Drehzahlquadrat.
$\kappa_r$	Für die Stellgrößensättigung verantwortlicher Faktor im Positionsregelgesetz.
$\kappa_{xy}$	Für die Stellgrößensättigung in der körperfesten $xy$ -Ebene verantwortlicher Faktor im Lageregelgesetz.
$\kappa_z$	Für die Stellgrößensättigung in der körperfesten $z$ -Richtung verantwortlicher Faktor im Lageregelgesetz.
$\kappa_\tau$	Proportionalitätsfaktor zwischen dem Widerstandsmoment eines Rotors und seiner Schubkraft.
$\Lambda_{a_i}^{a_u}(\cdot)$	Auf- und wieder abklingende Verlaufsfunction zur Potentialkonstruktion der Lageregelungen. Definition in (3.10).
$\xi_p$	Zustandsvariable der translatorischen Folgefehlerdynamik.
$\xi_R$	Zustandsvariable der rotatorischen Folgefehlerdynamik.
$\rho$	Dichte der Luft.
$\bar{\sigma}_{\Delta_a}^{\bar{a}}(\cdot)$	Nach oben sättigende, einseitige Sättigungsfunktion. Definition in (5.32).
$\underline{\sigma}_{\Delta_a}^{\underline{a}}(\cdot)$	Nach unten sättigende, einseitige Sättigungsfunktion. Definition in (5.44).
$\tau, \tau_i$	Widerstandsmoment eines Rotors bzw. des $i$ -ten Rotors.
$\bar{\tau}_{xy}$	Stellmomentenbeschränkung in der körperfesten $xy$ -Ebene.
$\bar{\tau}_z$	Stellmomentenbeschränkung in der körperfesten $z$ -Richtung.
$\tau$	Stellmoment.
$\tilde{\tau}$	Virtuelles Stellmoment. Stellgröße im Folgefall.
$\Upsilon$	Maximaler Kippwinkel der potentiell an die Lageregelung kommandiert wird.
$\varphi$	Schubrichtungsfehler. Entspricht dem Winkel zwischen $\mathbf{z}$ und $\mathbf{z}_d$ .

---

$\varphi_l$	Parameter des reduzierten und vollständigen Lagereglers. Bestimmt die Ausdehnung des Bereichs konstanter Dämpfung $d_\varphi$ um sämtliche Punkte an denen $\varphi = 0$ gilt.
$\varphi_u$	Parameter des reduzierten und vollständigen Lagereglers. Bestimmt die Ausdehnung des Bereichs konstanter Dämpfung $d_\varphi$ um sämtliche Punkte an denen $\varphi = \pi$ gilt. Im Falle des vollständigen Lagereglers bestimmt der Parameter zusätzlich den Bereich konstanter Dämpfung $d_z$ um diese Punkte.
$\chi_{a_1}^{a_2}(\cdot)$	Überblendfunktional. Definition in (3.35).
$\frac{a_2}{a_1}\chi_{a_3}^{a_4}(\cdot)$	Geschachteltes Überblendfunktional. Definition in (3.36).
$\psi$	Headingwinkel.
$\tilde{\psi}$	Headingwinkelfehler.
$\psi_c$	Im Flugversuch an den Quadrocopter übermitteltes Headingwinkelkommando.
$\psi_d$	Sollheadingwinkel des Quadrocopters.
$\omega, \omega_i$	Drehzahl eines Rotors, bzw. Drehzahl des $i$ -ten Rotors.
$\omega_z$	Anteil von $\tilde{\omega}_B$ bzw. $\omega_B^{DB}$ in Richtung $\mathbf{e}_z$ .
$\omega_\varphi$	Anteil von $\tilde{\omega}_B$ bzw. $\omega_B^{DB}$ in Richtung $\mathbf{e}_\varphi$ .
$\omega_\perp$	Anteil von $\tilde{\omega}_B$ bzw. $\omega_B^{DB}$ in Richtung $\mathbf{e}_\perp$ .
$\tilde{\omega}$	Fehlerdrehrate der reduzierten Lagefolgedynamik.
$\omega_d$	Solldrehrate für die reduzierte Lageregelung.
$\omega_{K''}^{KK'}$	Drehrate eines Koordinatensystems $K'$ gegenüber einem Koordinatensystem $K$ angegeben im Koordinatensystem $K''$ .

### Weitere Symbole

$\mathbf{0}$	Nullvektor bzw. Nullmatrix. Die Dimension folgt aus dem Kontext.
$\ \cdot\ $	Euklidische Norm / Betrag eines Vektors.
$ \cdot $	Euklidische Norm für skalare Größen / Betrag einer reellen Zahl.
$\langle\cdot\rangle$	Schiefsymmetrisch-Operator. Definition in (2.1) bzw. (2.2).
$\rangle\rangle\langle\langle$	Inverser Schiefsymmetrisch-Operator.

### Spezielle Schreibweisen für Vektoren $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$

$\mathbf{a}_K$	Darstellung des Vektors $\mathbf{a}$ bezüglich des Koordinatensystems $K$ . Es gilt $\mathbf{a}_K = [a_{Kx} \ a_{Ky} \ a_{Kz}]^T$ .
$\mathbf{a}_{Kxy}$	Teilvektor aus den ersten beiden Elementen von $\mathbf{a}_K$ . Es gilt $\mathbf{a}_{Kxy} = [a_{Kx} \ a_{Ky}]^T$ .



# Verzeichnis betreuter Studienarbeiten

Im Rahmen dieser Dissertation entstanden am Lehrstuhl für Regelungstechnik in den Jahren 2010 bis 2013 unter wesentlicher wissenschaftlicher, fachlicher und inhaltlicher Anleitung des Autors die im Folgenden aufgeführten Studienarbeiten.

- [55] DELGADO, S.: *Realisierung eines quaternionen-basierten Lagereglers für einen Quadrocopter*, Technische Universität München, Semesterarbeit, Mai 2010
- [84] HENZE, B.: *Stabilitätsbeweis und Implementierung eines schnellen, sättigenden Lagereglers für einen Quadrocopter*, Technische Universität München, Diplomarbeit, Mai 2012
- [97] KNOBLACH, A.: *Identifikation von linearen parameterveränderlichen Grey Box Modellen der Achsen 2 und 3 eines Industrieroboters*, Technische Universität München, Diplomarbeit, März 2010
- [118] MAIER, M.: *Recherche, Implementierung und simulativer Vergleich schneller Lageregler für einen Quadrocopter*, Technische Universität München, Semesterarbeit, August 2012
- [166] TROMBA, D.: *Entwurf einer nichtlinearen kaskadierten Positionsfolgeregelung für einen Quadrocopter*, Technische Universität München, Semesterarbeit, Oktober 2012
- [167] TROMBA, D.: *Real-Time-Capable Realisation of a Quadrotor-Control-System with Validation in Flight Tests*, Technische Universität München, Diplomarbeit, Mai 2013
- [170] VENJAKOB, C.: *Erstellung eines Simulationsmodells für einen Quadrocopter*, Technische Universität München, Semesterarbeit, März 2010
- [173] WITTMANN, D.: *Aufbau eines optischen Echtzeit-Positionsmesssystems*, Technische Universität München, Semesterarbeit, November 2012
- [175] ZIEGLTRUM, S.: *Hardware-Entwicklung und Konstruktion einer neuartigen Fernsteuerung für einen Quadrocopter*, Technische Universität München, Bachelor's Thesis, Dezember 2011
- [176] ZIEGLTRUM, S.: *Software-Entwurf und Implementierung der Firmware für eine bewegungssensitive Multicopterfernsteuerung*, Technische Universität München, Semesterarbeit, Juni 2013



# Literaturverzeichnis

- [1] ADAMY, J.: *Nichtlineare Regelungen*. Berlin : Springer, 2009
- [2] ADIGBLI, P.: Nonlinear attitude and position control of a micro quadrotor using sliding mode and backstepping techniques. In: *3rd US-European Competition and Workshop on Micro Air Vehicle Systems & European Micro Air Vehicle Conference and Flight Competition*, 2007
- [3] AL-YOUNES, Y. ; AL-JARRAH, M. ; JHEMI, A.: Linear vs. nonlinear control techniques for a quadrotor vehicle. In: *7th International Symposium on Mechatronics and its Applications*, 2010
- [4] ALEXIS, K. ; NIKOLAKOPOULOS, G. ; TZES, A.: Constrained optimal attitude control of a quadrotor helicopter subject to wind-gusts: Experimental studies. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2010
- [5] ALEXIS, K. ; NIKOLAKOPOULOS, G. ; TZES, A.: Design and experimental verification of a constrained finite time optimal control scheme for the attitude control of a quadrotor helicopter subject to wind gusts. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2010
- [6] ALEXIS, K. ; NIKOLAKOPOULOS, G. ; TZES, A.: Experimental model predictive attitude tracking control of a quadrotor helicopter subject to wind-gusts. In: *Proceedings of the 18th Mediterranean Conference on Control & Automation*, 2010
- [7] ALEXIS, K. ; NIKOLAKOPOULOS, G. ; TZES, A.: Model predictive quadrotor control: Attitude, altitude and position experimental studies. In: *IET Control Theory and Applications* 6 (2012), Nr. 12, S. 1812–1827
- [8] ALI, I.: *Spacecraft nonlinear attitude control with bounded control input*, University of Glasgow, Diss., 2009
- [9] ANGELI, D.: Almost global stabilization of the inverted pendulum via continuous state feedback. In: *Automatica* 37 (2001), Nr. 7, S. 1103–1108
- [10] ANGELI, D.: An almost global notion of input-to-state stability. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 49 (2004), Nr. 6, S. 866–874
- [11] ANGELI, D. ; DE LEENHEER, P. ; SONTAG, E.: A small-gain theorem for almost global convergence of monotone systems. In: *Systems & Control Letters* 52 (2004), Nr. 5, S. 407–414
- [12] ANTOULAS, A.: *Approximation of large-scale dynamical systems*. Philadelphia : Siam, 2005

- [13] BEJI, L. ; ABICHOUE, A.: Streamlined rotors mini rotorcraft : Trajectory generation and tracking. In: *International Journal of Control, Automation, and Systems* 3 (2005), Nr. 1, S. 87–99
- [14] BENALLEGUE, A. ; MOKHTARI, A. ; FRIDMAN, L.: High-order sliding-mode observer for a quadrotor UAV. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 18 (2008), S. 427–440
- [15] BHAT, S. ; BERNSTEIN, D.: A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon. In: *Systems & Control Letters* 39 (2000), Nr. 1, S. 63–70
- [16] BITTNER, W.: *Flugmechanik der Hubschrauber*. 2., aktualisierte Auflage. Berlin : Springer, 2005
- [17] BOUABDALLAH, S. ; MURRIERI, P. ; SIEGWART, R.: Design and control of an indoor micro quadrotor. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2004
- [18] BOUABDALLAH, S. ; NOTH, A. ; SIEGWART, R.: PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor. In: *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2004
- [19] BOUABDALLAH, S. ; SIEGWART, R.: Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2005, S. 2247 – 2252
- [20] BOUABDALLAH, S. ; SIEGWART, R.: Full control of a quadrotor. In: *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2007
- [21] BOUADI, H. ; BOUCHOUCHA, M. ; TADJINE, M.: Sliding mode control based on backstepping approach for an UAV type-quadrotor. In: *World Academy of Science, Engineering and Technology* Bd. 26, 2007, S. 22 – 27
- [22] BOUADI, H. ; SIMOES CUNHA, S. ; DROUIN, A. ; MORA-CAMINO, F.: Adaptive sliding mode control for quadrotor attitude stabilization and altitude tracking. In: *Proceedings of the 12th IEEE International Symposium on Computational Intelligence and Informatics*, 2011
- [23] BOUCHOUCHA, M. ; SEGHOUE, S. ; TADJINE, M.: Classical and second order sliding mode control solution to an attitude stabilization of a four rotors helicopter: From theory to experiment. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics*, 2011
- [24] BOUCHOUCHA, M. ; TADJINE, M. ; TAYEBI, A. ; MULLHAUPT, P.: Step by step robust nonlinear PI for attitude stabilisation of a four-rotor mini-aircraft. In: *Proceedings of the 16th Mediterranean Conference on Control & Automation*, 2008

- 
- [25] BOUHIRE, S. ; BOUCHOUCHA, M. ; TADJINE, M.: Quaternion-based global attitude tracking controller for a quadrotor UAV. In: *Proceedings of the 3rd International Conference on Systems and Control*, 2013
- [26] BRISTEAU, P. ; MARTIN, P. ; SALAÜN, E. ; PETIT, N.: The role of propeller aerodynamics in the model of a quadrotor UAV. In: *Proceedings of the European Control Conference*, 2009
- [27] BRONSTEIN, I. ; SEMENDJAJEW, K. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. 6. Ausgabe. Zürich : Deutsch, 2005
- [28] BUHL, M.: *Sättigende strukturvariable Regelungen*, Technische Universität München, Diss., 2008
- [29] BUHL, M. ; FRITSCH, O. ; LOHMANN, B.: Exakte Ein-/Ausganglinearisierung für die translatorische Dynamik eines Quadropters. In: *at - Automatisierungstechnik* 59 (2011), Nr. 6, S. 374–381
- [30] BUHL, M. ; LOHMANN, B.: Control with exponentially decaying Lyapunov functions and its use for systems with input saturation. In: *Proceedings of the European Control Conference*, 2009
- [31] BULLO, F. ; MURRAY, R. ; SARTI, A.: Control on the sphere and reduced attitude stabilization / California Institute of Technology. 1995. – Forschungsbericht
- [32] CABECINHAS, D. ; CUNHA, R. ; SILVESTRE, C.: Saturated output feedback control of a quadrotor aircraft. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2012
- [33] CABECINHAS, D. ; CUNHA, R. ; SILVESTRE, C.: Experimental validation of a nonlinear quadrotor controller with wind disturbance rejection. In: *Proceedings of the European Control Conference*, 2013
- [34] CASTILLO, P. ; ALBERTOS, P. ; GARCIA, P. ; LOZANO, R.: Simple real-time attitude stabilization of a quad-rotor aircraft with bounded signals. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 2006
- [35] CASTILLO, P. ; DZUL, A. ; LOZANO, R.: Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 12 (2004), Nr. 4, S. 510–516
- [36] CASTILLO, P. ; LOZANO, R. ; DZUL, A.: Stabilization of a mini-rotorcraft having four rotors. In: *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2004
- [37] CASTILLO, P. ; LOZANO, R. ; DZUL, A.: Stabilization of a mini rotorcraft with four rotors. In: *IEEE Control Systems Magazine* 25 (2005), Nr. 6, S. 45–55
- [38] CHATURVEDI, N. ; BACCONI, F. ; BERNSTEIN, D. ; MCCLAMROCH, N. H.: Stabilization of a 3D axially symmetric rigid pendulum. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference*, 2005

- [39] CHATURVEDI, N. ; BACCONI, F. ; SANYAL, A. ; BERNSTEIN, D. ; MCCLAMROCH, N. H.: Stabilization of a 3D rigid pendulum. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2005
- [40] CHATURVEDI, N. ; MCCLAMROCH, N. H.: Stabilization of underactuated 3D pendulum using partial angular velocity feedback. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2005
- [41] CHATURVEDI, N. ; MCCLAMROCH, N. H.: Global stabilization of an inverted 3D pendulum including control saturation effects. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 2006
- [42] CHATURVEDI, N. ; MCCLAMROCH, N. H.: Asymptotic stabilization of the hanging equilibrium manifold of the 3D pendulum. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 17 (2007), Nr. 16, S. 1435–1454
- [43] CHATURVEDI, N. ; MCCLAMROCH, N. H.: Asymptotic stabilization of the inverted equilibrium manifold of the 3-D pendulum using non-smooth feedback. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 54 (2009), Nr. 11, S. 2658–2662
- [44] CHATURVEDI, N. ; MCCLAMROCH, N. H. ; BERNSTEIN, D.: Asymptotic smooth stabilization of the inverted 3D pendulum. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 54 (2009), Nr. 6, S. 1204 – 1215
- [45] CHATURVEDI, N. ; SANTILLO, M. ; MCCLAMROCH, N. H. ; BERNSTEIN, D.: Experimental results for almost global asymptotic and locally exponential stabilization of the natural equilibria of a 3D pendulum. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2006
- [46] CHATURVEDI, N. ; SANYAL, A. ; MCCLAMROCH, N. H.: Rigid body attitude control. In: *IEEE Control Systems Magazine* 31 (2011), S. 30 – 51
- [47] CORONA-SÁNCHEZ, J. ; RODRÍGUEZ-CORTÉS, H.: Experimental real-time validation of an attitude nonlinear controller for the quadrotor vehicle. In: *Proceedings of the International Conference on Unmanned Aircraft Systems*, 2013
- [48] CORONA-SÁNCHEZ, J. ; RODRÍGUEZ-CORTÉS, H.: Trajectory tracking control for a rotary wing vehicle powered by four rotors. In: *Journal of Intelligent and Robotic Systems* 70 (2013), S. 39–50
- [49] CUNHA, R. ; CABECINHAS, D. ; SILVESTRE, C.: Nonlinear trajectory tracking control of a quadrotor vehicle. In: *Proceedings of the European Control Conference*, 2009
- [50] DAS, A. ; LEWIS, F. ; SUBBARAO, K.: Backstepping approach for controlling a quadrotor using Lagrange form dynamics. In: *Journal of Intelligent and Robotic Systems* 56 (2009), S. 127–151

- 
- [51] DE MONTE, P.: *Adaptive Trajektorienfolgeregelung für Quadropter basierend auf der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelungstheorie*, Technische Universität München, Diss., 2014 (eingereicht)
- [52] DE MONTE, P. ; LOHMANN, B.: Position trajectory tracking of a quadrotor helicopter based on L1 adaptive control. In: *Proceedings of the European Control Conference*, 2013
- [53] DE MONTE, P. ; LOHMANN, B.: Trajectory tracking control for a quadrotor helicopter based on backstepping using a decoupling quaternion parametrization. In: *Proceedings of 21st the Mediterranean Conference on Control & Automation*, 2013
- [54] DE MONTE, P. ; LOHMANN, B.: Position Trajectory Tracking of a Quadrotor based on L1 Adaptive Control. In: *at - Automatisierungstechnik* 62 (2014), Nr. 3, S. 188–202
- [55] DELGADO, S.: *Realisierung eines quaternionen-basierten Lagereglers für einen Quadropter*, Technische Universität München, Semesterarbeit, Mai 2010
- [56] DERAFA, L. ; BENALLEGUE, A. ; FRIDMAN, L.: Super twisting control algorithm for the attitude tracking of a four rotors UAV. In: *Journal of the Franklin Institute* 349 (2012), Nr. 2, S. 685–699
- [57] DERAFA, L. ; FRIDMAN, L. ; BENALLEGUE, A. ; OULDALI, A.: Super twisting control algorithm for the four rotors helicopter attitude tracking problem. In: *Proceedings of the 11th International Workshop on Variable Structure Systems*, 2010
- [58] DRESIG, H. ; HOLZWEISSIG, F.: *Maschinendynamik*. 7. Auflage. Berlin : Springer, 2005
- [59] DRIESSEN, B. ; ROBIN, A.: A globally convergent tracking controller for the X4 flyer rotor craft for reference trajectories with positive thrust. In: *Robotica* 22 (2004), Nr. 4, S. 375–388
- [60] DYDEK, Z. ; ANNASWAMY, A. ; LAVRETSKY, E.: Adaptive control of quadrotor UAVs: A design trade study with flight evaluations. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 21 (2013), Nr. 4, S. 1400–1406
- [61] FALCONÍ, G. ; FRITSCH, O. ; LOHMANN, B. ; HOLZAPFEL, F.: Admissible thrust control laws for quadrotor position tracking. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2013
- [62] FALCONÍ, G. ; HOLZAPFEL, F.: Position tracking of a multicopter using a geometric backstepping control law. In: *Proceedings of the EuroGNC, 2nd CEAS Specialist Conference on Guidance, Navigation and Control*, 2013

- [63] FARRELL, J. ; POLYCARPOU, M. ; SHARMA, M. ; DONG, W.: Command filtered backstepping. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 54 (2009), Nr. 6, S. 1391 – 1395
- [64] FERNANDO, T. ; CHANDIRAMANI, J. ; LEE, T. ; GUTIERREZ, H.: Robust adaptive geometric tracking controls on  $SO(3)$  with an application to the attitude dynamics of a quadrotor UAV. In: *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control, and European Control Conference, 2011.* – ISSN 0743–1546
- [65] FILIPPOV, A.: *Differential equations with discontinuous righthand sides.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1988
- [66] FORMENTIN, S. ; LOVERA, M.: Flatness-based control of a quadrotor helicopter via feedforward linearization. In: *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, 2011*
- [67] FRESK, E. ; NIKOLAKOPOULOS, G.: Full quaternion based attitude control for a quadrotor. In: *Proceedings of the European Control Conference, 2013*
- [68] FRITSCH, O.: Energy based attitude tracking control for a quadrotor helicopter prioritizing the thrust direction / Technische Universität München. 2013. – Forschungsbericht. – <https://mediatum.ub.tum.de/node?id=1160783>
- [69] FRITSCH, O.: Fast tracking control for the thrust direction of a quadrotor helicopter. In: ROPPENECKER, G. (Hrsg.) ; LOHMANN, B. (Hrsg.): *Methoden und Anwendungen der Regelungstechnik, Erlangen-Münchener Workshops 2011 und 2012.* Aachen : Shaker, 2013, S. 33–47. – <https://mediatum.ub.tum.de/node?id=1160829>
- [70] FRITSCH, O. ; DE MONTE, P. ; BUHL, M. ; LOHMANN, B.: Quasi-static feedback linearization for the translational dynamics of a quadrotor helicopter. In: *Proceedings of the American Control Conference, 2012*
- [71] FRITSCH, O. ; HENZE, B. ; LOHMANN, B.: Fast and saturating attitude control for a quadrotor helicopter. In: *Proceedings of the European Control Conference, 2013*
- [72] FRITSCH, O. ; HENZE, B. ; LOHMANN, B.: Fast and saturating thrust direction control for a quadrotor helicopter. In: *at - Automatisierungstechnik* 61 (2013), Nr. 3, S. 172–182
- [73] FRITSCH, O. ; TROMBA, D. ; LOHMANN, B.: Cascaded energy based trajectory tracking control of a quadrotor. In: *at - Automatisierungstechnik* 62 (2014), Nr. 6, S. 408–422
- [74] FROMM, T.: Vom Himmel hoch. In: *Süddeutsche Zeitung* 69 (2013), Nr. 285, S. 19
- [75] GOODARZI, F. ; LEE, D. ; LEE, T.: Geometric nonlinear PID control of a quadrotor UAV on  $SE(3)$ . In: *Proceedings of the European Control Conference, 2013*

- 
- [76] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHRÖDER, J. ; WALL, W.: *Technische Mechanik 3*. 10. Auflage. Berlin : Springer, 2008
- [77] GUERRERO, J. ; LOZANO, R. ; ROMERO, G. ; ALCORTA, E.: Attitude robust stabilization of a mini-rotorcraft UAV: Simulation and experimental results. In: *Proceedings of the 37th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, 2011
- [78] GUERRERO-CASTELLANOS, J. ; HABLY, A. ; MARCHAND, N. ; LESECQ, S.: Bounded attitude stabilization: Application on four-rotor helicopter. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2007
- [79] GUERRERO-CASTELLANOS, J. ; MARCHAND, N. ; LESECQ, S. ; DELAMARE, J.: Bounded attitude stabilization: Real-time application on four-rotor mini-helicopter. In: *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, 2008
- [80] GUERRERO-CASTELLANOS, J. ; TELLEZ-GUZMAN, J. ; DURAND, S. ; MARCHAND, N. ; ALVAREZ-MUNOZ, J.: Event-triggered nonlinear control for attitude stabilization of a quadrotor. In: *Proceedings of the International Conference on Unmanned Aircraft Systems*, 2013
- [81] GURDAN, D. ; STUMPF, J. ; ACHELNIK, M. ; DOTH, K.-M. ; HIRZINGER, G. ; RUS, D.: Energy-efficient autonomous four-rotor flying robot controlled at 1 kHz. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2007
- [82] HAMEL, T. ; MAHONY, R. ; LOZANO, R. ; OSTROWSKI, J.: Dynamic modelling and configuration stabilization for an X4-Flyer. In: *Proceedings of the 15th IFAC World Congress*, 2002
- [83] HECKER, P. ; BRETSCHNEIDER, L. ; BESTMANN, U. ; SCHACHTEBECK, P.: Flugroboter. Ein Überblick über technologische und operationelle Entwicklungen und Trends. In: *at - Automatisierungstechnik* 61 (2013), Nr. 4, S. 245–258
- [84] HENZE, B.: *Stabilitätsbeweis und Implementierung eines schnellen, sättigenden Lagereglers für einen Quadrocopter*, Technische Universität München, Diplomarbeit, Mai 2012
- [85] HOFFMANN, F. ; GODDEMEIER, N. ; BERTRAM, T.: Attitude estimation and control of a quadcopter. In: *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2010
- [86] HOFFMANN, G. ; HUANG, H. ; WASLANDER, S. ; TOMLIN, C.: Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment. In: *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 2007
- [87] HUA, M.: *Contributions to the automatic control of aerial vehicles*, Université de Nice-Sophia Antipolis, Diss., 2009

- [88] HUANG, H. ; HOFFMANN, G. ; WASLANDER, S. ; TOMLIN, C.: Aerodynamics and control of autonomous quadrotor helicopters in aggressive maneuvering. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2009
- [89] HUANG, M. ; XIAN, B. ; DIAO, C. ; YANG, K. ; FENG, Y.: Adaptive tracking control of underactuated quadrotor unmanned aerial vehicles via backstepping. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2010
- [90] ISIDORI, A.: *Nonlinear control systems*. 3rd edition. Berlin : Springer, 1996
- [91] JANKOVIĆ, M. ; SEPULCHRE, R. ; KOKOTOVIĆ, P.: Constructive Lyapunov stabilization of nonlinear cascade systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 41 (1996), Nr. 12, S. 1723–1735
- [92] KENDOUL, F. ; FANTONI, I. ; LOZANO, R.: Asymptotic stability of hierarchical inner-outer loop-based flight controllers. In: *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, 2008, S. 6–11
- [93] KENDOUL, F. ; YU, Z. ; NONAMIALI, K.: Guidance and nonlinear control system for autonomous flight of minirotorcraft unmanned aerial vehicles. In: *Journal of Field Robotics* 27 (2010), Nr. 3, S. 311–334
- [94] KENDOUL, F. ; ZHENYU, Y. ; NONAMI, K.: Embedded autopilot for accurate waypoint navigation and trajectory tracking: Application to miniature rotorcraft UAVs. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2009
- [95] KHALIL, H.: *Nonlinear systems*. 3rd edition. Upper Saddle River : Prentice Hall, 2002
- [96] KLOSE, S. ; WANG, J. ; ACHELNIK, M. ; PANIN, G. ; HOLZAPFEL, F. ; KNOLL, A.: Markerless, vision-assisted flight control of a quadcopter. In: *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2010
- [97] KNOBLACH, A.: *Identifikation von linearen parameterveränderlichen Grey Box Modellen der Achsen 2 und 3 eines Industrieroboters*, Technische Universität München, Diplomarbeit, März 2010
- [98] KODITSCHKEK, D.: Application of a new Lyapunov function to global adaptive attitude tracking. In: *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, 1988
- [99] KODITSCHKEK, D.: The application of total energy as a Lyapunov function for mechanical control systems. In: *Dynamics and Control of Multibody Systems* Bd. 97. American Mathematical Society, 1989, S. 131–157
- [100] KOKOTOVIĆ, P. ; KHALIL, H. ; O'REILLY, J.: *Singular Perturbation Methods in Control : Analysis and Design*. London : Academic Press, 1986

- 
- [101] KOTTENSTETTE, N. ; PORTER, J.: Digital passive attitude and altitude control schemes for quadrotor aircraft. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Control and Automation*, 2009
- [102] KRSTIĆ, M. ; DENG, H.: *Stabilization of nonlinear uncertain systems*. London : Springer, 1998
- [103] LACHMAN, J.: Im Drohnenfieber. In: *Die Zeit* (2014), Januar, Nr. 2, S. 21
- [104] LEE, D. ; KIM, H. J. ; SASTRY, S.: Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter. In: *International Journal of Control, Automation, and Systems* 7 (2009), Nr. 3, S. 419–428
- [105] LEE, T.: Geometric tracking control of the attitude dynamics of a rigid body on  $SO(3)$ . In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2011
- [106] LEE, T.: Robust adaptive attitude tracking on  $SO(3)$  with an application to a quadrotor UAV. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 21 (2013), Nr. 5, S. 1924–1930
- [107] LEE, T. ; LEOK, M. ; MCCLAMROCH, N. H.: Geometric tracking control of a quadrotor UAV on  $SE(3)$ . In: *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*, 2010
- [108] LEE, T. ; LEOK, M. ; MCCLAMROCH, N. H.: Nonlinear robust tracking control of a quadrotor UAV on  $SE(3)$ . In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2012
- [109] LEISHMAN, J. G.: *Principles of helicopter aerodynamics*. 2nd edition. Cambridge : Cambridge University Press, 2006
- [110] LINDNER, R.: In dreißig Minuten ans Ziel. In: *Frankfurter Allgemeine Zeitung* (2013), Nr. 281, S. 14
- [111] LORÍA, A.: From feedback to cascade-interconnected systems: Breaking the loop. In: *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2008
- [112] LORÍA, A. ; PANTELEY, E.: Cascaded nonlinear time-varying systems: Analysis and design. In: LAMNABHI-LAGARRIGUE, F. (Hrsg.) ; LORÍA, A. (Hrsg.) ; PANTELEY, E. (Hrsg.): *Advanced topics in control systems theory* Bd. 311. London : Springer, 2005, S. 23–64
- [113] MADANI, T. ; BENALLEGUE, A.: Backstepping control for a quadrotor helicopter. In: *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2006
- [114] MADANI, T. ; BENALLEGUE, A.: Control of a quadrotor mini-helicopter via full state backstepping technique. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 2006

- [115] MADANI, T. ; BENALLEGUE, A.: Backstepping control with exact 2-sliding mode estimation for a quadrotor unmanned aerial vehicle. In: *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2007
- [116] MADANI, T. ; BENALLEGUE, A.: Adaptive control via backstepping technique and neural networks of a quadrotor helicopter. In: *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, 2008
- [117] MAHONY, R. ; HAMEL, T. ; PFLIMLIN, J.-M.: Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 53 (2008), Nr. 5, S. 1203–1218
- [118] MAIER, M.: *Recherche, Implementierung und simulativer Vergleich schneller Lageregerler für einen Quadrocopter*, Technische Universität München, Semesterarbeit, August 2012
- [119] MAYHEW, C. ; SANFELICE, R. ; TEEL, A.: Quaternion-based hybrid control for robust global attitude tracking. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 56 (2011), Nr. 11, S. 2555 – 2566
- [120] MAZENC, F. ; PRALY, L.: Adding integrations, saturated controls, and stabilization for feedforward systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 41 (1996), Nr. 11, S. 1559–1578
- [121] MELLINGER, D. ; MICHAEL, N. ; KUMAR, V.: Trajectory generation and control for precise aggressive maneuvers with quadrotors. In: *The International Journal of Robotics Research* 31 (2012), Nr. 5, S. 664–674
- [122] MEYBERG, K. ; VACHENAUER, P.: *Höhere Mathematik 1*. 6., korrigierte Auflage. Berlin : Springer, 2001
- [123] MICHAEL, N. ; MELLINGER, D. ; LINDSEY, Q. ; KUMAR, V.: The GRASP Multiple Micro-UAV Testbed. In: *IEEE Robotics & Automation Magazine* 17 (2010), Nr. 3, S. 56–65
- [124] MICHINI, B. ; HOW, J.:  $\mathcal{L}_1$  adaptive control for indoor autonomous vehicles: Design process and flight testing. In: *Proceeding of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2009
- [125] MISTLER, V. ; BENALLEGUE, A. ; M’SIRDI, N.: Exact linearization and noninteracting control of a 4 rotors helicopter via dynamic feedback. In: *Proceedings of the 10th IEEE International Workshop on Robot and Human Interactive Communication*, 2001
- [126] MÜLLER, C.: Döner-Drohne, Umweltwächter oder Lebensretter. In: *Frankfurter Allgemeine Zeitung* (2013), Nr. 281, S. 14
- [127] MOKHTARI, A. ; BENALLEGUE, A. ; DAACHI, B.: Robust feedback linearization and  $GH_\infty$  controller for a quadrotor unmanned aerial vehicle. In: *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2005

- 
- [128] MOKHTARI, A. ; BENALLEGUE, A. ; ORLOV, Y.: Exact linearization and sliding mode observer for a quadrotor unmanned aerial vehicle. In: *International Journal of Robotics and Automation* 21 (2006), Nr. 1, S. 39–49
- [129] MOKHTARI, M. R. ; CHERKI, B.: Robust control for attitude tracking problem for a quadrotor unmanned aerial vehicle. In: *Proceedings of the 3rd International Conference on Systems and Control*, 2013
- [130] MONZÓN, P.: On necessary conditions for almost global stability. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 48 (2003), Nr. 4, S. 631–634
- [131] MONZÓN, P.: Almost global attraction in planar systems. In: *Systems & Control Letters* 54 (2005), Nr. 8, S. 753–758
- [132] MONZÓN, P.: *Almost Global Stability of Dynamical Systems*, Universidad de la República, Diss., 2006
- [133] MONZÓN, P. ; PAGANINI, F.: Global considerations on the Kuramoto model of sinusoidally coupled oscillators. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2005
- [134] MONZÓN, P. ; POTRIE, R.: Local and global aspects of almost global stability. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 2006
- [135] ORTEGA, R. ; LORÍA, A. ; NICKLASSON, P. ; HEBERTT, S.-R.: *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: Mechanical, electrical and electromechanical applications*. London : Springer, 1998
- [136] ORTEGA, R. ; VAN DER SCHAFT, A. ; MAREELS, I. ; MASCHKE, B.: Putting energy back in control. In: *IEEE Control Systems Magazine* 21 (2001), Nr. 2, S. 18–33
- [137] PANTELEY, E. ; LORÍA, A.: Growth rate conditions for uniform asymptotic stability of cascaded time-varying systems. In: *Automatica* 37 (2001), Nr. 3, S. 453–460
- [138] PANTELEY, E. ; ORTEGA, R.: Cascaded control of feedback interconnected nonlinear systems: Application to robots with AC drives. In: *Automatica* 33 (1997), Nr. 11, S. 1935–1947
- [139] RAFFO, G. ; ORTEGA, M. ; RUBIO, F.: An underactuated  $H_\infty$  control strategy for a quadrotor helicopter. In: *Proceedings of the European Control Conference*, 2009
- [140] RAFFO, G. ; ORTEGA, M. ; RUBIO, F.: An integral predictive/nonlinear  $H_\infty$  control structure for a quadrotor helicopter. In: *Automatica* 46 (2010), Nr. 1, S. 29 – 39
- [141] RANTZER, A.: Almost global stability of phase-locked loops. In: *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, 2001

- [142] RANTZER, A.: A dual to Lyapunov's stability theorem. In: *Systems & Control Letters* 42 (2001), Nr. 3, S. 161–168
- [143] RANTZER, A.: An converse theorem for density functions. In: *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, 2002
- [144] RANTZER, A. ; CERAGIOLI, F.: Smooth blending of nonlinear controllers using density functions. In: *Proceedings of European Control Conference*, 2001
- [145] RAPTIS, I.: *Linear and nonlinear control of unmanned rotorcraft*, University of South Florida, Diss., 2009
- [146] RAPTIS, I. ; VALAVANIS, K. ; MORENO, W.: Nonlinear backstepping control design for miniature helicopters using the rotation matrix. In: *Proceedings of the 17th Mediterranean Conference on Control & Automation*, 2009
- [147] RAPTIS, I. ; VALAVANIS, K. ; MORENO, W.: A novel nonlinear backstepping controller design for helicopters using the rotation matrix. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 19 (2011), Nr. 2, S. 465–473
- [148] RICHTER, N.: Lebensretter und Spion. In: *Süddeutsche Zeitung* 69 (2013), Nr. 189, S. 9
- [149] ROBERTS, A. ; TAYEBI, A.: Position control of VTOL UAVs using IMU and GPS measurements. In: *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2011
- [150] ROBERTS, A. ; TAYEBI, A.: Position control of VTOL UAVs using inertial vector measurements. In: *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, 2011
- [151] SANFELICE, R. ; MESSINA, M. J. ; EMRE TUNA, S. ; TEEL, A.: Robust hybrid controllers for continuous-time systems with applications to obstacle avoidance and regulation to disconnected set of points. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 2006
- [152] SCHMIDT, G. ; MICHALOWSKY, S. ; EBENBAUER, C. ; ALLGÖWER, F.: Global output regulation for the rotational dynamics of a rigid body. In: *at - Automatisierungstechnik* 61 (2013), Nr. 8, S. 567–581
- [153] SCHMUNDT, H.: Drohnenballet. In: *DER SPIEGEL* (2012), Nr. 2, S. 110–111
- [154] SEGHOOR, S. ; BOUCHOUCHA, M. ; OSMANI, H.: From integral backstepping to integral sliding mode attitude stabilization of a quadrotor system: Real time implementation on an embedded control system based on a dsPIC  $\mu$ C. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics*, 2011
- [155] SEIBERT, P. ; SUAREZ, R.: Global stabilization of nonlinear cascade systems. In: *Systems & Control Letters* 14 (1990), Nr. 4, S. 347–352
- [156] SEPULCHRE, R. ; JANKOVIĆ, M. ; KOKOTOVIĆ, P.: *Constructive Nonlinear Control*. Berlin : Springer, 1997

- 
- [157] SHUSTER, M.: A survey of attitude representations. In: *The Journal of the Astronautical Sciences* 41 (1993), Nr. 4, S. 439–517
- [158] SONTAG, E.: Remarks on stabilization and input-to-state stability. In: *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, 1989
- [159] SONTAG, E.: A remark on the converging-input converging-state property. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 48 (2003), Nr. 2, S. 313–314
- [160] STINGU, E. ; LEWIS, F.: Design and implementation of a structured flight controller for a 6DoF quadrotor using quaternions. In: *Proceedings of the 17th Mediterranean Conference on Control & Automation*, 2009
- [161] TAKEGAKI, M. ; ARIMOTO, S.: A new feedback method for dynamic control of manipulators. In: *ASME Journal of Dynamical Systems, Measurement, and Control* 103 (1981), Nr. 2, S. 119–125
- [162] TAYEBI, A. ; MCGILVRAY, S.: Attitude stabilization of a VTOL quadrotor aircraft. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 14 (2006), Nr. 3, S. 562–571
- [163] TEEL, A.: Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. In: *Systems & Control Letters* 18 (1992), Nr. 3, S. 165 – 171
- [164] THOMAS, P.: Die Post fliegt vor. In: *Frankfurter Allgemeine Sonntagszeitung* (2013), Nr. 50, S. V11
- [165] TONY, C. ; MACKUNISY, W.: Robust attitude tracking control of a quadrotor helicopter in the presence of uncertainty. In: *Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control*, 2012
- [166] TROMBA, D.: *Entwurf einer nichtlinearen kaskadierten Positionsfolgeregelung für einen Quadrocopter*, Technische Universität München, Semesterarbeit, Oktober 2012
- [167] TROMBA, D.: *Real-Time-Capable Realisation of a Quadrotor-Control-System with Validation in Flight Tests*, Technische Universität München, Diplomarbeit, Mai 2013
- [168] TSOTRAS, P. ; LONGUSKI, J. M.: Spin-axis stabilization of symmetric spacecraft with two control torques. In: *Systems & Control Letters* 23 (1994), Nr. 6, S. 395 – 404
- [169] VARGA, R.: *Geršgorin and his circles*. Berlin : Springer, 2004
- [170] VENJAKOB, C.: *Erstellung eines Simulationsmodells für einen Quadrocopter*, Technische Universität München, Semesterarbeit, März 2010

- [171] WANG, J. ; RAFFLER, T. ; HOLZAPFEL, F.: Nonlinear position control approaches for quadcopters using a novel state representation. In: *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2012
- [172] WEN, J. ; KREUTZ-DELGADO, K.: The attitude control problem. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 36 (1991), Nr. 10, S. 1148–1162
- [173] WITTMANN, D.: *Aufbau eines optischen Echtzeit-Positionsmesssystems*, Technische Universität München, Semesterarbeit, November 2012
- [174] ZAJAC, E.: The Kelvin-Tait-Chetaev Theorem and extensions. In: *The Journal of the Astronautical Sciences* 11 (1964), Nr. 2, S. 46–49
- [175] ZIEGLTRUM, S.: *Hardware-Entwicklung und Konstruktion einer neuartigen Fernsteuerung für einen Quadrocopter*, Technische Universität München, Bachelor's Thesis, Dezember 2011
- [176] ZIEGLTRUM, S.: *Software-Entwurf und Implementierung der Firmware für eine bewegungssensitive Multicopterfernsteuerung*, Technische Universität München, Semesterarbeit, Juni 2013