

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Ingenieur fakultät Bau Geo Umwelt
Lehrstuhl für Statik

Optimierung in der Fluid-Struktur-Interaktion

Sensitivitätsanalyse für die Formoptimierung
auf Grundlage des partitionierten Verfahrens

Ute Julia Israel

Vollständiger Abdruck der von der Ingenieur fakultät Bau Geo Umwelt der Technischen
Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Fabian Duddeck

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Gerhard Herbert Müller

Die Dissertation wurde am 15.09.2014 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Ingenieur fakultät Bau Geo Umwelt am 31.01.2015 angenommen.

Schriftenreihe des
Lehrstuhls für Statik der
Technischen Universität München

Band 26

Ute Israel

Optimierung in der Fluid-Struktur-Interaktion

**Sensitivitätsanalyse für die Formoptimierung
auf Grundlage des partitionierten Verfahrens**

München 2015

Veröffentlicht durch

Kai-Uwe Bletzinger
Lehrstuhl für Statik
Technische Universität München
Arcisstr. 21
80333 München

Telefon: +49(0)89 289 22422
Telefax: +49(0)89 289 22421
E-Mail: kub@tum.de
Internet: www.st.bgu.tum.de

ISBN: 978-3-943683-25-7

© Lehrstuhl für Statik, TU München

Optimierung in der Fluid-Struktur-Interaktion – Sensitivitätsanalyse für die Formoptimierung auf Grundlage des partitionierten Verfahrens

Zusammenfassung

Thema dieser Arbeit ist die numerische Formoptimierung von Strukturen unter Berücksichtigung der *Fluid-Struktur-Interaktion (FSI)*. Der Schwerpunkt liegt auf der Entwicklung grundlegender mathematischer und algorithmischer Methoden für die Optimierung und Sensitivitätsanalyse von Mehrfeldproblemen. Umströmte schlanke Schalen- und Membranstrukturen stehen dabei im Vordergrund. Die Methoden sollen eine Grundlage für praxisrelevante Fragestellungen der FSI sein. Sie sind für Ingenieurbereiche, in denen der Schwerpunkt auf der Strukturmechanik liegt, ausgelegt und dem entsprechend flexibel bezüglich der Strömungssimulationsprogramme.

Das partitionierte Berechnungsverfahren für die FSI bildet die Basis dieser Arbeit. Dies bedeutet in der Optimierung eine gekoppelte partitionierte Sensitivitätsanalyse.

Der Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz wird sowohl für die FSI-Berechnung als auch für die Sensitivitätsanalyse behandelt. Es werden hierfür algorithmische Methoden entwickelt und in einer Kopplungsschnittstelle umgesetzt.

In der Optimierung werden Gradientenmethoden verwendet. Deren Einsatz erfordert eine gekoppelte Sensitivitätsanalyse, welche die beiden physikalischen Felder Struktur und Fluid einschließt. Behandelt werden numerische und analytische diskrete Verfahren der gekoppelten Sensitivitätsanalyse.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die *kombinierte Sensitivitätsanalyse* entwickelt. Dies ist eine gekoppelte diskrete semianalytische Methode. Hierbei werden strukturseitig analytische Verfahren mit einer Spezialisierung auf Schalen und Membrane eingesetzt, während das Verfahren fluidseitig auf Systemin- und -output der Analyse basiert und damit die Austauschbarkeit der Software gewährleistet. Für die direkte Methode der kombinierten Sensitivitätsanalyse werden eine Algorithmik und Anwendungen vorgestellt. Die Umsetzung basiert dabei auf dem gestaffelten Verfahren des *Nested Analysis and Design*, welches ein modulares Software-Design erlaubt.

Weiterhin wird der Sonderfall der Optimierung vorgespannter umströmter Membrane behandelt. Dabei wird die Formfindung als designgebendes Verfahren in der Optimierung verwendet und in das Optimierungs-Framework integriert.

Optimization in Fluid-Structure-Interaction – Sensitivity Analysis for Shape Optimization using the Partitioned Approach

Abstract

Topic of this thesis is numerical shape optimization of structures undergoing *fluid-structure-interaction* (FSI). The main focus is the development of fundamental mathematical and algorithmic methods for optimization and sensitivity analysis of multi-physics problems. Slender shell and membrane structures in flow are emphasized. These methods shall be a basis for FSI problems in practice. They are designed for the engineering discipline of structural mechanics and therefore flexible with respect to CFD software.

The partitioned approach for FSI is the basis of this thesis. In optimization, this means a coupled partitioned sensitivity analysis.

Data transfer between non-matching meshes is discussed for FSI analysis and for sensitivity analysis. Herefor algorithms are developed and implemented in a coupling interface.

In optimization gradient methods are used. This requires a coupled sensitivity analysis including both physical field structure and fluid. Numerical and analytical discrete methods of coupled sensitivity analysis are treated.

In this thesis the *combined sensitivity analysis* is developed. This is a coupled discrete semianalytical sensitivity approach, for which analytical methods focussing shells and membranes are used on the structure side whereas it is based on system in- and output on the fluid side guaranteeing software compatibility. For the direct approach of the combined sensitivity analysis an algorithm and applications are presented. The implementation is based on the staggered procedure of *Nested Analysis and Design* allowing a modular software design.

Furthermore, the particular case of optimization of prestressed membranes is treated. Here, formfinding is used as design model in optimization and is integrated in the optimization framework.

Vorwort

Diese Arbeit entstand vorwiegend in den Jahren 2006 bis 2009, während meiner Zeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München. Nach meiner Elternpause konnte ich die Arbeit als Stipendiatin der TUM fortsetzen und zu Ende bringen.

Meinen herzlichen Dank möchte ich meinem Doktorvater und Inhaber des Lehrstuhls Prof. Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger aussprechen. Ihm habe ich die vielen wertvollen Anregungen und Diskussionen, die für meine Arbeit richtungsweisend waren, zu verdanken. Er liess mir stets große wissenschaftliche Freiheit und unterstützte die Fortführung der Arbeit während und nach meiner Elternzeit.

Desweiteren will ich Prof. Dr.-Ing. habil. G. Müller für sein Interesse, für die Übernahme des zweiten Gutachtens und für Teilnahme an Prüfungskommission danken. Auch Prof. Dr.-Ing. habil. F. Duddeck danke ich für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Meinen ehemaligen Kollegen am Lehrstuhl für Statik danke ich für die zahlreichen spannenden Diskussionen, die erfolgreiche Zusammenarbeit und das freundliche Miteinander.

Größter Dank gebührt meiner Familie, denn ohne deren Unterstützung wäre die Fertigstellung der Arbeit nicht möglich gewesen: Mein Mann Martin gab mir stets Raum für meine Arbeit. Auch danke ich Ihm für die mentale Unterstützung und die wunderbare Betreuung unseres Sohnes. Unser Sohn Valentin zeigte mir immer wieder aufs Neue, wo das Wesentliche im Leben liegt. Meine Eltern Dorothee und Christoph unterstützten mich stets mit allen Mitteln darin, meine Ziele erfüllen zu können. Sie und meine Schwiegermutter Magda kümmerten sich rührend um unseren Sohn, um mir die Arbeit an meiner Dissertation zu ermöglichen.

Geltendorf, den 23.03.2015

Ute Israel

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Motivation	1
1.2. Ziele	2
1.3. Überblick	5
2. Strukturoptimierung	7
2.1. Mathematische Optimierung	7
2.1.1. Formulierung	7
2.1.2. Existenz des Optimums	8
2.1.3. Lagrange-Methode	9
2.1.4. Eindeutigkeit des Optimums	10
2.1.5. Multikriterielle Optimierung	11
2.2. Optimierung in der Strukturmechanik	11
2.2.1. Optimierungsdisziplinen	12
2.2.2. Designmodelle der Formoptimierung	12
2.3. Numerische Optimierung	15
2.3.1. Optimierungsalgorithmen	15
2.3.2. Lösungsmethoden	18
2.4. Sensitivitätsanalyse	21
3. Fluid-Struktur-Interaktion	25
3.1. Strukturmechanik	25
3.1.1. Differentialgeometrie	26
3.1.2. Kinematik	27
3.1.3. Materialgesetz	28
3.1.4. Gleichgewicht	28
3.1.5. Schwache Form	30
3.1.6. Finite-Elemente-Methode	31
3.2. Strömungsmechanik	33
3.2.1. Kontinuumsmechanische Grundgleichungen	34
3.2.2. Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen	35
3.2.3. Anfangs- und Randbedingungen	36
3.2.4. Laminare und turbulente Strömung	36
3.2.5. Finite-Volumen-Methode	37

3.2.6.	Druckkorrekturmethode	38
3.3.	Fluid-Struktur-Interaktion	38
3.3.1.	Bewegliche Gitter	40
3.3.2.	Kopplungsbedingungen	41
3.3.3.	Partitioniertes Verfahren	42
3.4.	Optimierung in der Fluid-Struktur-Interaktion	45
4.	Datentransfer an nicht-koinzidenten Oberflächennetzen	49
4.1.	Einleitung	49
4.2.	Methoden des Datentransfers	52
4.2.1.	Energiebilanz	53
4.2.2.	Interpolation und lastkonservative Summation	53
4.2.3.	Auf gewichteten Residuen basierende Methode	59
4.2.4.	Approximation der Oberflächennetze	62
4.2.5.	Schlußfolgerung für FSI-Anwendungen	64
4.3.	Datentransfer in der partitionierten Sensitivitätsanalyse	65
4.3.1.	Analogie Analyse und Sensitivitätsanalyse	65
4.3.2.	Datentransfer von Gradienteninformationen	67
4.4.	Algorithmik	69
4.4.1.	Nachbarschaftsbeziehungen	70
4.4.2.	Transfer	72
4.4.3.	Anwendungsbeispiele	73
4.5.	Datentransfer mit CoMA	76
5.	Gekoppelte Sensitivitätsanalyse	81
5.1.	Methoden der Sensitivitätsanalyse	82
5.2.	Notation	83
5.3.	Numerische Sensitivitätsanalyse	85
5.3.1.	Finite-Differenzen-Methode	85
5.3.2.	Numerische Optimierung mit finiten Differenzen	86
5.4.	Direkte diskrete residuumsbasierte Sensitivitätsanalyse	89
5.4.1.	Direkte Sensitivitätsanalyse für die Dreifeldformulierung	89
5.4.2.	Numerische Optimierung mit direkter Sensitivitätsanalyse	91
5.5.	Adjungierte diskrete residuumsbasierte Sensitivitätsanalyse	94
5.5.1.	Lagrange-Methode	94
5.5.2.	Adjungierte Sensitivitätsanalyse für die Dreifeldformulierung	96
5.5.3.	Numerische Optimierung mit adjungierter Sensitivitätsanalyse	99
5.6.	Ansätze zur Bestimmung der Jacobimatrix $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{r}}$	103
5.7.	Gegenüberstellung direkter und adjungierter Methoden	105
5.8.	In- und outputbasierte Sensitivitätsanalyse nach GSE II	107
5.9.	Partitionierte Sensitivitätsanalyse für die Formoptimierung	109
5.9.1.	Formoptimierung	110

5.9.2. Datentransfer in der Sensitivitätsanalyse	111
6. Kombinierte Sensitivitätsanalyse	117
6.1. Ziele und Konzept	119
6.2. Direkte kombinierte Sensitivitätsanalyse	120
6.3. Adjungierte kombinierte Sensitivitätsanalyse	122
6.4. Effiziente gestaffelte Lösung der Sensitivitätsgleichungen bei der direkten Methode	124
6.4.1. Lösung der fluidseitigen Sensitivitätsgleichungen	124
6.4.2. Gestaffelte Lösung der Sensitivitätsgleichungen	127
6.5. Partitionierte kombinierte Sensitivitätsanalyse für die Formoptimierung .	128
6.6. Algorithmik der direkten kombinierten Sensitivitätsanalyse	131
6.6.1. Reduktion der Ordnung der Sensitivitätsgleichungen	131
6.6.2. Sensitivitätsgleichung für lineares Strukturverhalten	132
6.6.3. Ablaufdiagramm der Sensitivitätsanalyse	133
6.7. Berechnungsbeispiele	137
6.7.1. Software-Framework für die gradientenbasierte Optimierung . . .	137
6.7.2. Optimierung einer umströmten Schale	140
6.7.3. Optimierung eines umströmten Profils	149
6.8. Gegenüberstellung der Typen der Sensitivitätsanalyse: Effizienz- und Genauigkeitsaspekte	152
7. Optimierung umströmter Membrane mit Formfindung	155
7.1. Formfindung mit Updated-Reference-Strategy	156
7.2. Formfindung in der Optimierung	158
7.3. Einbettung der Formfindung in das Framework	159
7.4. Berechnungsbeispiel: Optimierung eines umströmten Vierpunktsegels . .	161
7.4.1. Setup	162
7.4.2. Minimierung der vertikalen Verschiebung in Strukturmitte	166
7.4.3. Minimierung der \mathcal{L}^2 -Norm der Verschiebungen	168
8. Resümee	171
8.1. Zusammenfassung	171
8.2. Schlussfolgerung	172
8.3. Ausblick	172
Literaturverzeichnis	184
A. Ergänzungen	185
A.1. Finite Differenzen für mehrdimensionale Funktionen	185
A.2. Anschauliche Erklärung der kombinierten Sensitivitätsanalyse	187

1. Einleitung

1.1. Motivation

Im Bereich des Bauwesens und der Architektur lässt sich ein Trend in Richtung besonders leichter und schlanker Bauwerke mit scheinbar immer gewagter werdenden Spannweiten und Höhen beobachten. Bei diesen Konstruktionen handelt es sich beispielsweise um weit gespannte Membrandächer oder dünne Schalenträgerwerke mit faszinierenden Formen. Sie besitzen die beeindruckende technische Eigenschaft, durch ihre Form optimale Lastabtragung zu gewährleisten. Die große Schlankheit bedeutet oft eine starke Reaktion der Strukturen auf äußere Einwirkungen wie Windlasten. Dabei entstehen so große Verformungen, dass eine deutliche Wechselwirkung zwischen Umströmung und Struktur entsteht, die sog. *Fluid-Struktur-Interaktion (FSI)*. Sowohl die Umströmung hat Einfluss auf die Struktur als auch das Verhalten der Struktur Einfluss auf die Strömung.

Die FSI von schlanken Strukturen und Umströmung findet man in vielen Disziplinen bei unterschiedlichen technischen Anwendungen und auch in der Natur wieder. Weitere Beispiele sind schlanke Brücken, hohe Masten, aufblasbare Strukturen, Flugzeugtragflächen, Airbags, Turbinen oder blutdurchströmte Arterien.

Dünne Schalen- und Membranstrukturen sind Gegenstand aktueller Forschung und können nicht zuletzt deshalb realisiert werden, da sie numerisch immer beherrschbarer werden. Eine korrekte numerische Betrachtung muss die FSI, also die Kopplung der physikalischen Felder Fluid und Struktur, berücksichtigen und hat rechenaufwändige Simulationen zur Folge. In den letzten Jahren sind große Fortschritte auf dem Gebiet der FSI-Simulation zu verzeichnen.

Aus dem Erkennen der Schwachstellen vorhandener Systeme entsteht der Wunsch, die betreffenden Eigenschaften zu verbessern und die Strukturen von vornherein optimal gestalten zu können. Es stellt sich die Frage, durch welche Veränderungen das Systemverhalten beeinflusst und die Struktur verbessert werden kann. Die Variation der Form der Struktur hat offensichtlich große Wirkung. Allerdings ist es schwer intuitiv einzuschätzen, welcher Art und welchen Gewichts der Einfluss ist. Desweiteren ist der Prozess des wiederholten Modellierens mühsam.

Die Möglichkeit, die optimale Form in einem automatisierten Verfahren zu finden, bietet die numerische Optimierung. Technisch bedeutet dies die Berücksichtigung der FSI im

Optimierungsprozess. In der Optimierung müssen dann beide physikalischen Felder und die beidseitige Kopplung berücksichtigt werden. Die Optimierung solcher gekoppelter Systeme ist ein aktuelles und disziplinübergreifendes Thema. Man beschäftigt sich unter anderem in Maschinenbau, Mathematik und Informatik mit denselben Fragestellungen, beispielsweise beim Design von Flugzeugteilen, Klimakanälen oder Turbinen. In Ingenieursparten, in denen traditionell der Schwerpunkt in der Strukturmechanik liegt, wie im Bauwesen, gibt es kaum Forschungsarbeiten. Auch hier findet für technisch komplexe Fragestellungen, bei denen die FSI berücksichtigt werden muss, wie leichte auf Umströmung sensible Tragwerke, eine Vielzahl kommerzieller Strömungssimulationsprogramme Einzug. Es besteht Bedarf an Verfahren zur Optimierung gekoppelter Systeme, welche auf der Basis vorhandener Software verwendet werden können.

Die Formoptimierung von Systemen der FSI ist Thema dieser Dissertation. Es werden grundlegende Methoden entwickelt, während der Blick auf die Ingenieurpraxis gerichtet ist. Dementsprechend wird Flexibilität bezüglich unterschiedlichster Ingenieur Anwendungen angestrebt, welche durch ein modulares Softwaredesign garantiert werden soll. Der Fokus liegt im Bereich der Strukturmechanik, insbesondere auf leichten Schalen- und Membranstrukturen.

1.2. Ziele

Gegenstand dieser Arbeit ist die Entwicklung von Verfahren zur Formoptimierung schlanker Schalen- und Membranstrukturen, die in Wechselwirkung mit der Umströmung stehen. Dabei stehen grundlegende mathematische und algorithmische Methoden im Vordergrund. Sie werden als eine Basis entwickelt, auf die im Hinblick auf ein weites Anwendungsfeld praxisrelevanter Fragestellungen aufgebaut werden kann. Durch die Optimierung soll die Form der Struktur gefunden werden, die hinsichtlich bestimmter Ziele optimal ist. Die Zielfunktionen sind so gewählt, dass sie das Strukturverhalten oder Einflüsse auf dieses wiedergeben. Beispielsweise kann das Ziel eine Minimierung der Strukturverformungen durch Variation der Form sein.

Zunehmend spielt auch im Ingenieurbereich der Strukturmechanik die FSI eine Rolle. Die in dieser Arbeit entwickelten Methoden der Optimierung in der FSI sollen den dortigen Anforderungen nach Flexibilität und Effizienz gerecht werden. In der Ingenieurpraxis wird die Berechnung der Struktur oft durch etablierte Berechnungsprogramme vorgenommen, für welche große Expertise vorhanden ist, während zur Strömungssimulation oft kommerzielle, neu eingeführte Software herangezogen wird. Es ist Ziel dieser Arbeit ein Softwaresetup für praxisrelevante Anwendungen zu entwickeln, in welchem diese vorhandenen Ansätze durch die notwendigen Methoden zur Optimierung ergänzt werden. Dabei ist insbesondere Flexibilität gefordert, um die Behandlung unterschiedlicher Anwendungen zu ermöglichen, während für große technische Probleme mit vielen

Freiheitsgraden Effizienz und gute Performance notwendig sind.

Flexibilität kann durch ein modulares Softwaredesign gewährleistet werden. Dies bietet bei der Berechnung der FSI das partitionierte Verfahren. Dabei werden Berechnungscodes für Struktur und Fluid zur Laufzeit gekoppelt, so dass die FSI wiedergegeben werden kann. Die Software für Struktur und Fluid ist beliebig austauschbar, so dass für unterschiedliche Fragestellungen die jeweils besten spezialisierten Berechnungsprogramme eingesetzt werden können. Die Möglichkeit, einen bewährten Berechnungscode für die Struktur und ein beliebiges kommerzielles Strömungssimulationsprogramm einzusetzen, macht den partitionierten Ansatz für die Systemanalyse praktikabel. Die erforderliche Kopplung der Berechnungscodes wird durch Berechnungssteuerung, Kommunikation und Datentransfer am gemeinsamen Interface realisiert. Das gemeinsame Interface ist die Oberfläche, an der die Berechnungsgebiete von Struktur und Fluid in Kontakt stehen. Da Struktur und Fluid in der Regel auf Basis unterschiedlicher Diskretisierungen berechnet werden, ist das Berechnungsnetz am gemeinsamen Interface struktur- und fluidseitig nicht einheitlich. Daher sind Methoden für den Datentransfer an diesem nicht-koinzidenten Netz erforderlich. Für die Kopplung der Berechnungscodes wird also eine leistungsfähige und flexible Schnittstelle für Kommunikation und Datentransfer benötigt.

Ein modulares Verfahren der Optimierung ist das *Nested Analysis and Design (NAND)*. Dabei handelt es sich um einen iterativen Prozess, bei dem die Systemanalyse als austauschbares Modul in die Optimierungsschleife eingebettet ist. Bei der Optimierung von FSI-Problemen auf Grundlage des partitionierten Verfahrens bietet dieser Ansatz Flexibilität für vielseitige Anwendungen und die Möglichkeit, unterschiedliche Optimierungstechniken flexibel zu nutzen.

Um ausreichend Effizienz für große Anwendungen zu gewährleisten, sind Gradientenmethoden der Optimierung unumgänglich. Dies sind schnell konvergierende Optimierungsalgorithmen, welche auf der Basis von Gradienteninformationen die beste Suchrichtung für den nächsten Optimierungsschritt berechnen. Um die erforderliche Gradienteninformation zu ermitteln, ist in jedem Optimierungsschritt eine Sensitivitätsanalyse erforderlich.

Die Sensitivitätsanalyse ist der entscheidende Punkt und die größte Herausforderung des Optimierungsprozesses. Sie ist für gekoppelte Probleme ebenfalls ein gekoppeltes und komplexes Verfahren, welches als eigenständiges Softwaremodul umgesetzt wird. Im partitionierten Verfahren sind dafür ebenfalls Kommunikation der Berechnungscodes und Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz notwendig. Dabei muss die Kopplungsschnittstelle für das partitionierte Verfahren in der Lage sein, auch die Kopplung für die Sensitivitätsanalyse zu realisieren.

Die Sensitivitätsanalyse kann auf unterschiedliche Weisen erfolgen. Dabei sind auf beliebige Fragestellungen anwendbare, flexible numerische Methoden meist sehr rechen-

intensiv. Hingegen sind effiziente und genaue analytische Methoden stark spezialisiert und wenig flexibel. Generell büßt man mit hoher Flexibilität Effizienz ein, wohingegen effiziente Methoden wenig Flexibilität bieten. Diese Arbeit möchte daher grundlegende, auf den fokussierten Anwendungsbereich zugeschnittene Methoden der Sensitivitätsanalyse entwickeln, welche sowohl die in der Ingenieurpraxis geforderte Flexibilität als auch bestmögliche Performance bieten. Dem soll durch die Implementierung flexibler Methoden und spezialisierter Methoden für anvisierte Fragestellungen gerecht werden. Der Einsatz spezialisierter Methoden soll für die im Vordergrund stehenden Schalen- und Membranstrukturen erfolgen, während bei der Strömungssimulation Flexibilität hinsichtlich der Austauschbarkeit der Software gewahrt werden soll. Weiterhin soll die Ausbaubarkeit für weitere spezielle Fragestellungen gegeben sein. Theoretisch heißt dies, dass man wieder über maximale Flexibilität verfügt, wenn alle möglichen Fragestellungen abgedeckt sind.

In der Formoptimierung definieren die Optimierungsvariablen die Geometrie der Struktur über vorgegebene funktionale Zusammenhänge. Einen Sonderfall stellt die Optimierung von vorgespannten Membranen dar. Hier kann die Form nicht beliebig gewählt werden, da sie sich in Abhängigkeit der Randbedingungen, z.B. der Anordnung der Auflager, nach den Gesetzen der Physik als Gleichgewichtsform einstellt. Die Ermittlung der Gleichgewichtsform von vorgespannten Membranen unter Vorgabe der Randbedingungen wird als *Formfindung* bezeichnet. In der Optimierung erfolgt daher die Variation der Form durch die Veränderung der Randbedingungen, welche die Optimierungsvariablen darstellen. Die numerische Optimierung von Membranstrukturen ist sehr effizient, da die Anzahl der Optimierungsvariablen in der Regel gering ist und dennoch volle Formfreiheit gewährleistet ist.

Die Arbeitspunkte und Ergebnisse aus dieser Dissertation seien hier vorab zusammengefasst:

- Entwicklung der Kernmodule der Kopplungsschnittstelle *CoMA* (*Coupling for Multiphysics Analysis*) für partitionierte Analyse und partitionierte Sensitivitätsanalyse:
 - Entwicklung der Algorithmik für den Datentransfer an nicht-koinzidenten Oberflächennetzen.
 - Algorithmische Umsetzung des Datentransfers an nicht-koinzidenten Oberflächennetzen in CoMA.
- Sensitivitätsanalyse:
 - Mathematische Formulierung der partitionierten Sensitivitätsanalyse für die Formoptimierung.
 - Umsetzung der numerischen Sensitivitätsanalyse.

- Entwicklung der *kombinierten Sensitivitätsanalyse*. Dies ist eine gekoppelte diskrete semianalytische Methode der Sensitivitätsanalyse, für welche strukturseitig analytische Verfahren mit einer Spezialisierung auf Schalen und Membrane eingesetzt werden, während sie fluidseitig auf Systemin- und -output der Analyse basiert und damit die Austauschbarkeit der Software gewährleistet.
 - * Formulierung der direkten und adjungierten kombinierten Sensitivitätsanalyse.
 - * Entwicklung der Algorithmik für die direkte kombinierten Sensitivitätsanalyse.
 - * Algorithmische Umsetzung der direkten kombinierten Sensitivitätsanalyse mit Erstellung eines Berechnungsbeispiels.
- Konzeption und Umsetzung eines modularen Softwareframeworks für die gradientenbasierte Optimierung im partitionierten Ansatz nach Nested Analysis and Design.
- Optimierung von umströmten Membranstrukturen:
 - Integration der Formfindung als designgebendes Verfahren in das Framework.
 - Ausarbeitung eines Berechnungsbeispiels.

1.3. Überblick

Eine Behandlung der Optimierung und der gekoppelten Sensitivitätsanalyse im Bereich der Fluid-Struktur-Interaktion setzt genaue Kenntnisse aller beteiligten Einzeldisziplinen voraus. Kapitel 2 widmet sich daher der Strukturoptimierung mit Schwerpunkt auf den relevanten Themen Formoptimierung, Gradientenmethoden und Sensitivitätsanalyse. Kapitel 3 gibt einen Überblick über die Struktur- und Strömungsmechanik, um auf dieser Basis die FSI mit der Kopplung der physikalischen Felder und den partitionierten Ansatz zu schildern. Ein thematischer Überblick über Strategien der Optimierung von Mehrfeldproblemen und wissenschaftliche Arbeiten auf diesem Gebiets schließt diese einführenden Kapitel ab.

Kapitel 4 widmet sich eingehender dem Thema Kopplung in der FSI. Der Fokus liegt auf dem Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz. Zunächst werden Methoden des Datentransfers theoretisch erörtert und diskutiert, um anschließend die Algorithmik der Interpolationsmethode und der lastkonservativen Summation zu erklären sowie die Kopplungsschnittstelle *CoMA* vorzustellen.

Kapitel 5 behandelt die gekoppelte Sensitivitätsanalyse. Hier wird eine theoretische Auseinandersetzung mit der Kopplung der physikalischen Felder präsentiert, wobei stets der Stand der Wissenschaft mit den wichtigsten Forschungsarbeiten zur gekoppelten Sensitivitätsanalyse geschildert wird. Nach einem Überblick über die Typen der Sensitivitätsanalyse, werden numerische und analytische diskrete Methoden in direkter und adjungierter Form für die FSI detailliert formuliert und deren Einbettung in die numerische Optimierung vorgestellt. Zusätzlich wird eine alternative Methode der Sensitivitätsanalyse, welche auf Systemin- und -output beruht, beschrieben. Die speziellen Belange der Formoptimierung und des partitionierten Ansatzes werden diskutiert und mathematisch formuliert.

In Kapitel 6 wird die *kombinierte Sensitivitätsanalyse*, eine neu entwickelte diskrete semi-analytische Methode der gekoppelten Sensitivitätsanalyse, im Detail vorgestellt. Dabei werden zunächst die Ziele und das Konzept des Verfahrens beschrieben. Die kombinierte Sensitivitätsanalyse wird in der direkten und adjungierten Methode formuliert, insbesondere auch für die Formoptimierung mit dem partitionierten Ansatz. Die Algorithmik wird detailliert behandelt und anhand eines Berechnungsbeispiels veranschaulicht. Das Kapitel schließt mit einer kurzen Diskussion über die Performance der verschiedenen Sensitivitätsanalysemethoden.

Kapitel 7 behandelt die Optimierung vorgespannter Membrane und die Formfindung. Nach einer Einführung in Formfindung werden ihre Vorteile für die Optimierung erklärt und ihre Integration in das Framework beschrieben. Abschließend wird ein Berechnungsbeispiel präsentiert.

Schlussfolgerungen aus dieser Arbeit und einen Ausblick findet man in Kapitel 8.

2. Strukturoptimierung

Für einen kompakten Überblick über die Strukturoptimierung werden zunächst die grundlegenden Themen der mathematischen Optimierung erläutert, nachfolgend die Charakteristiken der Strukturoptimierung behandelt und schließlich die numerischen Verfahren der Optimierung sowie die Sensitivitätsanalyse vorgestellt. Als weiterführende Literatur sei auf [7, 114] verwiesen.

2.1. Mathematische Optimierung

2.1.1. Formulierung

Bei der Optimierung handelt es sich um die Minimierung oder Maximierung einer bestimmten Funktion. Jedes Optimierungsproblem lässt sich in folgende Minimierungsaufgabe überführen, wobei im Falle einer Maximierung ein Vorzeichenwechsel der Zielfunktion stattfindet.

$$\begin{aligned}
 \min(\psi(\mathbf{s})); \quad & \mathbf{s} \in \mathbf{R}^{n_s} \\
 \mathbf{g}(\mathbf{s}) \leq 0; \quad & \mathbf{s} \in \mathbf{R}^{n_g} \\
 \mathbf{h}(\mathbf{s}) = 0; \quad & \mathbf{s} \in \mathbf{R}^{n_h} \\
 \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dabei ist ψ die *Zielfunktion*, die minimiert werden soll. Sie ist abhängig von den *Optimierungsvariablen* $\mathbf{s} = [s_1 \ \dots \ s_{n_s}]^T$. $\mathbf{g} = [g_1 \ \dots \ g_{n_g}]^T$ bezeichnet den Vektor der *Ungleichheitsnebenbedingungen* und $\mathbf{h} = [h_1 \ \dots \ h_{n_h}]^T$ den Vektor der *Gleichheitsnebenbedingungen*, welche am Optimum erfüllt sein müssen. Diese sind ebenfalls Funktionen der Optimierungsvariablen und definieren somit gegenseitige Abhängigkeiten dieser Variablen. Existieren Nebenbedingungen, so spricht man von *beschränkter Optimierung*, entfallen sie, von *unbeschränkter Optimierung*. Handelt es sich bei mindestens einer der Funktionen um eine nichtlineare Funktion, so spricht man von *nichtlinearer Optimierung*. \mathbf{s}_L und \mathbf{s}_U stellen untere und obere Schranken für die Optimierungsvariablen dar.

Die Aufgabe der Optimierung ist, die *optimale Lösung* \mathbf{s}^* zu finden, für welche die Zielfunktion unter Einhaltung der Nebenbedingungen und der Schranken minimal wird.

Eine *zulässige Lösung* nennt man eine Lösung s , welche die Nebenbedingungen erfüllt, aber nicht die optimale Lösung sein muss. Der Lösungsraum der zulässigen Lösungen wird als *Zulässigkeitsbereich* $\mathbf{Z}^{ns} = \{s \mid \mathbf{g}(s) \leq 0, \mathbf{h}(s) = 0\}$ bezeichnet.

Eine Nebenbedingung g_i bzw. h_i heißt *aktiv* in s , wenn $g_i(s) = 0$ bzw. $h_i(s) = 0$ gilt. Ist eine Ungleichheitsnebenbedingung mit $g_i(s) < 0$ erfüllt, so ist sie *nicht aktiv* oder *passiv*. Gilt für eine Gleichheitsnebenbedingung $h_i(s) \neq 0$ oder für eine Ungleichheitsnebenbedingung $g_i(s) > 0$, so nennt man sie *verletzt*.

2.1.2. Existenz des Optimums

Die Optimierung setzt die Existenz eines Optimums voraus. Ist diese Bedingung erfüllt, so hat das Problem mindestens eine Lösung. Existiert keine Lösung, so handelt es sich um ein *schlecht gestelltes Optimierungsproblem*¹

Ein Optimum ist immer ein stationärer Punkt, d.h. ein solcher, an dem die Ableitung der Zielfunktion bzw. der Lagrange-Funktion (siehe 2.1.3) verschwindet. Die notwendige Bedingung für einen stationären Punkt eines unbeschränkten Problems mit einer stetigen und differenzierbaren Zielfunktion ist die (*Stationaritätsbedingung*):

$$\nabla\psi(\mathbf{s}) = \left[\frac{\partial\psi}{\partial s_1} \quad \dots \quad \frac{\partial\psi}{\partial s_{n_s}} \right] = 0 \quad (2.2)$$

Es handelt sich um ein Minimum, wenn die Hessematrix für den stationären Punkt s positiv definit ist. Die Hessematrix lautet:

$$\mathbf{H} = \nabla^2\psi(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\psi}{\partial s_1 s_1} & \dots & \frac{\partial^2\psi}{\partial s_1 s_{n_s}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial s_{n_s} s_1} & \dots & \frac{\partial^2\psi}{\partial s_{n_s} s_{n_s}} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Handelt es sich um eine Aufgabe der beschränkten Optimierung, so sind die Nebenbedingungen zu berücksichtigen. Im einfachsten Fall lassen sich die Nebenbedingungen in expliziter Form darstellen, so dass die abhängigen Optimierungsvariablen als Funktion der unabhängigen Optimierungsvariablen eliminiert und direkt in die Zielfunktion eingesetzt werden können. Damit wird das Problem auf ein unbeschränktes reduziert. Ein typisches Verfahren zur Behandlung beschränkter Optimierungsprobleme ist die *Lagrange-Methode*, welche im folgenden Abschnitt vorgestellt wird.

¹Von einem *gut gestellten Problem* spricht man dann, wenn eine Lösung existiert, die Lösung eindeutig ist und stetig von den Eingangsparametern abhängt. Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, so handelt es sich um ein *schlecht gestelltes Problem*.

2.1.3. Lagrange-Methode

Die *Lagrange-Methode* ist ein bedeutendes Hilfsmittel bei der Behandlung beschränkter Optimierungsprobleme. Durch sie wird das Problem auf ein unbeschränktes Optimierungsproblem reduziert. Die *Lagrange-Funktion* \mathcal{L} wird durch Addition der, mit den *Lagrange-Multiplikatoren* versehenen, Nebenbedingungen gebildet und lautet:

$$\mathcal{L}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \psi(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{g}(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\mu}^T \cdot \mathbf{h}(\mathbf{s}) \quad (2.4)$$

Hierin werden \mathbf{s} als primale, $\boldsymbol{\lambda}$ und $\boldsymbol{\mu}$ als duale Variablen bezeichnet. Die Lagrange-Funktion besitzt am Optimum des Originalproblems \mathbf{s}^* einen stationären Punkt. Zur Bestimmung dieses Punktes werden die Stationaritätsbedingungen gefordert:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial \psi(\mathbf{s}^*)}{\partial \mathbf{s}} + \boldsymbol{\lambda}^{*T} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{s}^*)}{\partial \mathbf{s}} + \boldsymbol{\mu}^{*T} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{s}^*)}{\partial \mathbf{s}} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}(\mathbf{s}^*) = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \mathbf{h}(\mathbf{s}^*) = 0 \quad (2.7)$$

Die Lösung $(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ beschreibt einen Sattelpunkt der Lagrange-Funktion. Es ist zu beachten, dass Bedingung 2.6 nur erfüllt ist, wenn alle Ungleichheitsnebenbedingungen als aktiv angenommen wurden. Dann ist auch sofort zu erkennen, dass $\mathcal{L}(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \psi(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$, da alle Nebenbedingungen am Optimum gleich Null sind. Existieren am Optimum nicht aktive Ungleichheitsnebenbedingungen, können die Bedingungen wie folgt erweitert werden.

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial \psi(\mathbf{s}^*)}{\partial \mathbf{s}} + \boldsymbol{\lambda}^{*T} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{s}^*)}{\partial \mathbf{s}} + \boldsymbol{\mu}^{*T} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{s}^*)}{\partial \mathbf{s}} = 0 \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{*T} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda}^{*T} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{s}^*) = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \mathbf{h}(\mathbf{s}^*) = 0 \quad (2.10)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^* \geq 0 \quad (2.11)$$

Sie stellen notwendige Bedingungen für ein Optimum dar und werden als *Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen* (*KKT-Bedingungen*) bezeichnet. Diese Formulierung ermöglicht die Unterscheidung zwischen aktiven und nicht-aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen. Ist eine Ungleichheitsnebenbedingung g_i am Optimum aktiv so gilt $g_i = 0$ und $\lambda_i > 0$, ist sie nicht-aktiv, so gilt $g_i < 0$ und $\lambda_i = 0$. Für die KKT-Bedingungen gibt es alternative Schreibweisen. Hierfür sei auf [7] verwiesen. Es ist zu beachten, dass die KKT Bedingungen nur an *regulären Punkten* anwendbar sind. Dies sind die Nebenbedingungen erfüllende Punkte, an denen die Zielfunktion differenzierbar ist und die Gradientenvektoren der aktiven Nebenbedingungen linear unabhängig sind.

Bedingung 2.8 läßt folgende geometrische Interpretation zu: Der Gradient der Zielfunktion ist am stationären Punkt eine Linearkombination der Gradienten der Nebenbedingungen. Dabei lassen die Lagrange-Multiplikatoren sich als die skalaren Faktoren der Linearkombination interpretieren. In zahlreichen Optimierungsbüchern finden sich anschauliche Darstellungen [114, 15].

Erwähnenswert ist ebenfalls, dass anhand der Lagrange-Multiplikatoren abgeschätzt werden kann, wie sensitiv das Optimum gegenüber einer Veränderung der Nebenbedingungen ist. Diese Tatsache lässt sich leicht erkennen, wenn die Ableitung der Zielfunktion nach einer Nebenbedingung gebildet wird:

$$\frac{\partial\psi(\mathbf{s}^*)}{\partial g_i(\mathbf{s}^*)} = \frac{\partial\mathcal{L}(\mathbf{s}^*)}{\partial g_i(\mathbf{s}^*)} = \lambda_i \quad \text{und} \quad \frac{\partial\psi(\mathbf{s}^*)}{\partial h_i(\mathbf{s}^*)} = \frac{\partial\mathcal{L}(\mathbf{s}^*)}{\partial h_i(\mathbf{s}^*)} = \mu_i \quad (2.12)$$

Je größer der Wert des Lagrange-Multiplikators ist, desto größer ist der Einfluß auf das Optimum.

2.1.4. Eindeutigkeit des Optimums

Eindeutigkeit des Optimums liegt vor, wenn eine existierende Lösung eindeutig bestimmt ist, es also nur ein einziges Minimum gibt. Ist die Eindeutigkeit nicht erfüllt, so gibt es keine oder mehrere Lösungen und es handelt sich um ein schlecht gestelltes Optimierungsproblem. Ist die Lösung eindeutig, so handelt es sich um ein *globales Minimum*. Dabei wird eine Lösung \mathbf{s}^* als *globales Minimum* bezeichnet, wenn $\psi(\mathbf{s}^*) < \psi(\mathbf{s})$ für alle \mathbf{s} im Zulässigkeitsbereich gilt. Alle anderen Minima werden als *lokale Minima* bezeichnet.

Bei der Lösung einer Optimierungsaufgabe wünscht man das globale Optimum zu finden. Mit der Erfüllung der Stationaritätsbedingung und der positiv Definitheit der Hessematrix kann ein Minimum, jedoch kein globales Minimum sichergestellt werden. Die Eindeutigkeit des Optimums kann sichergestellt werden, wenn der Zulässigkeitsbereich konvex ist. Der Zulässigkeitsbereich ist konvex, wenn die Hesse Matrix der Zielfunktion und aller Nebenbedingungen für alle möglichen Variablenkombinationen positiv semidefinit ist. Allerdings handelt es sich bei der Konvexität um eine hinreichende Bedingung für ein eindeutiges Optimum, da es auch nicht-konvexe Lösungsräume geben kann, die nur ein einziges und somit globales Optimum besitzen.

Bemerkung: In der Ingenieurpraxis kann selten Konvexität garantiert werden. Um bei iterativen Verfahren der numerischen Optimierung die Wahrscheinlichkeit zu erhöhen, das globale Optimums zu finden, führt man die Optimierung mit unterschiedlichen Startwerten durch und vergleicht die Lösungen.

2.1.5. Multikriterielle Optimierung

Multikriterielle Optimierung bezeichnet die simultane Optimierung mehrerer sich gegenseitig widersprechender Optimierungskriterien, welche als Zielfunktionen oder Restriktionen verstanden werden können. Dann ist die Zielfunktion $\boldsymbol{\psi} = [\psi_1 \cdots \psi_{n_\psi}]^T$ vektorwertig. Dabei zieht die Verbesserung eines Optimierungskriteriums ψ_i immer die Verschlechterung mindestens eines anderen Optimierungskriteriums nach sich. Es gibt keine eindeutige Lösung des Optimierungsproblems. Eine Lösung wird als *pareto-optimal* bezeichnet, wenn jede Lösung, welche eine Verbesserung eines Optimierungskriteriums bewirkt, eine Verschlechterung eines anderen Optimierungskriteriums zu Folge hat. Ein klassisches Beispiel aus der Strukturoptimierung ist die Minimierung des Gewichts eines Tragwerks bei gleichzeitiger Minimierung der Konstruktionskosten.

2.2. Optimierung in der Strukturmechanik

Gegenstand der Optimierung in der Strukturmechanik sind oft Bauteile oder Komponenten eines größeren Systems, wie z.B. Teile einer Fahrzeugkarosserie. Im Bereich des Bauwesens ist die Optimierung leichter Flächentragwerke ein typisches Beispiel. Typische Optimierungsziele sind die Minimierung von Gewicht, Spannungen, Verformungen, Konstruktionskosten oder die Optimierung von Eigenfrequenzen. Diese Ziele werden oft auch als Nebenbedingungen angesetzt, wenn man sich eine Minimierung mehrerer Eigenschaften wünscht, beispielsweise eine Gewichtsminimierung bei gleichzeitiger Kostenbeschränkung.

Die Möglichkeiten der Definition der Struktur anhand der Optimierungsvariablen sind vielfältig. So können die Optimierungsvariablen beispielsweise Form, Material oder Topologie einer Struktur beschreiben. Entsprechend der Art der Variablen werden Optimierungsdisziplinen unterschieden. In der Formoptimierung ist für die Formbeschreibung einer Struktur anhand der Optimierungsvariablen, welche auch als *Designvariablen* bezeichnet werden, der Begriff *Design* geläufig. Oft wird auch die Formoptimierung selbst als Design oder Strukturdesign bezeichnet

Dem Begriff Design steht der Begriff der *Analyse* (oder *Systemanalyse*) gegenüber, welche die Berechnung der Systemantwort eines Systems mit festgelegtem Design, also festen Optimierungsvariablen, bedeutet. In der Regel sind die Zielfunktionen Antwortgrößen, deren Ermittlung eine Analyse erfordert. So ist die Analyse auch immer Bestandteil des Optimierungsprozesses. Bei der Verwendung numerischer Methoden ist oft eine Auswertung der Zielfunktion und somit Systemanalyse in jedem Iterationsschritt notwendig. (vgl. Abschnitt 2.3). In der Ingenieurpraxis ist eine Trennung und damit sequentielle Abfolge von Design und Analyse meist von Vorteil oder nicht zu vermeiden, da separate Softwaremodule eingesetzt werden.

2.2.1. Optimierungsdisziplinen

Die Unterteilung in Optimierungsdisziplinen erfolgt nach der Art der Optimierungsvariablen. Beschreiben diese die Geometrie einer Struktur unter vorgegebener Topologie, so spricht man von *Formoptimierung*. Die Formbeschreibung kann über funktionale Zusammenhänge oder direkt am Analysemodell erfolgen.

Abzugrenzen ist die *Querschnittsoptimierung*, bei der nur die Querschnittswerte (z.B. Dicke einer Schalenstruktur) bei vorhandener Geometrie durch die Optimierungsvariablen definiert werden. Der Querschnitt ist zwar eine geometrische Eigenschaft der realen Struktur, jedoch meist nicht durch das Geometrie- und Analysemodell bestimmt. Beispielweise wird die Dicke von Schalenträgwerken durch die Eigenschaften der finiten Elemente und nicht durch das FE-Netz beschrieben.

Soll durch die Optimierungsvariablen die Topologie einer Struktur verändert werden, spricht man von *Topologieoptimierung*. Konkret kann man von einer Optimierung der Materialverteilung im Raum sprechen. Dabei entstehen materialleere und mehr oder weniger dicht materialgefüllte Räume, welche unter bestimmten Vorgaben (Entfernung der materialleeren und dünn gefüllten Räume) die Topologie der Struktur festlegen.

Weiterhin können durch die Optimierungsvariablen Materialkennwerte (z.B. Dichte, E-Modul) beschrieben werden. Man spricht dann von *Materialoptimierung*.

2.2.2. Designmodelle der Formoptimierung

In der Formoptimierung definieren die Optimierungsvariablen die Geometrie einer Struktur. Die Geometriebeschreibung, also die Parametrisierung der Form, kann auf unterschiedliche Weise geschehen.

Geläufig ist die Beschreibung der Form über *CAGD (Computer Aided Geometrical Design)* Methoden, auch als *CAD-Parametrisierung* bezeichnet. Dabei wird die Geometrie mittels sog. *Designelemente* über ein diskretes Modell beschrieben. Ähnlich wie die finiten Elemente sind die Designelemente über n_{nod} Kontrollpunkte \bar{X}_i und zugehörige Formfunktionen N_i definiert. Die gesamte Geometrie \mathbf{X} der Struktur setzt sich aus einem oder mehreren Designelementen zusammen:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i \bar{X}_i \quad (2.13)$$

In der Formoptimierung wird dieses zusätzliche Diskretisierungsmodell als Designmodell bezeichnet. Der funktionale Zusammenhang zwischen Geometrie und Optimierungsvariablen wird hergestellt, indem Koordinaten der Kontrollpunkte als Optimierungsvariablen verwendet werden. Aus dem Designmodell wird das Analysemodell durch Vernetzung

der Designelemente generiert. Ein großer Vorteil der CAGD-Methoden ist die relativ geringe Anzahl der Optimierungsvariablen. Allerdings büßt man durch die vordefinierten funktionalen Zusammenhänge der Designelemente Flexibilität im Design ein. Für Literatur zu diesem Thema sei auf [16] verwiesen.

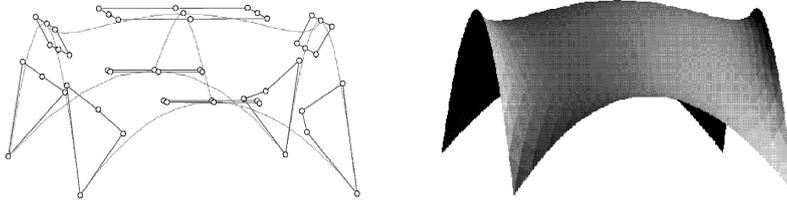


Abbildung 2.1.: Links: CAGD-Modell einer Schalenstruktur mit Kontrollpunkten, welche über Formfunktionen die Geometrie der Struktur beschreiben. Rechts: Geometrie der Schalenstruktur. Quelle: Lehrstuhl für Statik, TU München.

Eine weitere Methode ist die *CAD-freie Methode* (auch *FE-Parametrisierung*), bei der die Geometriebeschreibung direkt durch das Berechnungsmodell erfolgt. Dabei fallen das Designmodell und das Berechnungsmodell zusammen. Die Optimierungsvariablen sind Raumkoordinaten des FE-Netzes. Diese Optimierung direkt am FE-Netz bedeutet eine große Anzahl an Optimierungsvariablen, bietet aber maximale Formfreiheit. Es ist zu beachten, dass nur Koordinatenänderungen normal zur Oberfläche die Form einer Struktur beeinflussen. Koordinatenänderungen tangential zur einer Oberfläche oder auch im Inneren einer Struktur haben keinen Einfluss auf deren Form, jedoch Einfluss auf die Diskretisierung. Eine Veränderung der Diskretisierung derselben Geometrie kann die Netzqualität verschlechtern, weshalb es sinnvoll ist, nur die Koordinatenrichtungen normal zur Oberfläche als Optimierungsvariablen anzusetzen. CAD-freie Methoden erfordern Netzregulierungsmethoden, um die Netzknoten in den Richtungen tangential zur Oberfläche und im Inneren zu kontrollieren. Desweiteren sind Regulierungsmethoden erforderlich, um die Welligkeit einer Oberfläche zu kontrollieren, denn die Ergebnisse der Optimierung mit FE-Parametrisierung zeigen ansonsten sehr strake Oszillationen, welche u.a. auf das Finden lokaler Minima und Locking Effekte zurückzuführen sind. [17, 36, 26, 24] behandeln dieses Thema ausführlich.

Bei CAD-freien Methoden wird der Vorteil der maximalen Formfreiheit durch die Regulierungstechniken, die die Welligkeit einer Struktur kontrollieren, wieder eingeschränkt. Der Vorteil der der FE-Parameterisierung liegt in der Einfachheit der Benutzung: Oft ist das Ergebnis einer Optimierung in der Ingenieurpraxis nicht zufriedenstellend, sei es aus funktionellen oder ästhetischen Gründen. Dies bedeutet meist eine neue Optimierung mit neuen Anfangsbedingungen. Bei CAGD-Methoden ist nun eine Veränderung des Designmodells notwendig, was umständlich ist, da dieses komplett neu erstellt werden muss. CAD-freie Methoden bieten schnellere Lösungen, da die Variablen der Regulierungsmethoden schnell geändert werden können.

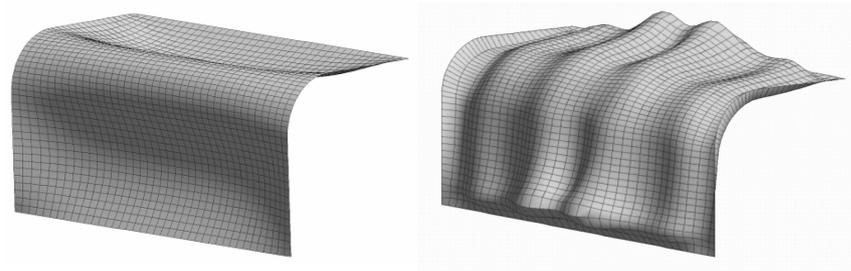


Abbildung 2.2.: CAD-freie Geometriebeschreibung. Links: Struktur in Anfangsgeometrie. Rechts: Struktur mit optimierter Form, wobei die Koordinaten der FE-Knoten als Optimierungsvariablen verwendet wurden. Quelle: Lehrstuhl für Statik, TU München.

In dieser Arbeit wird mit der *Formfindung* eine weitere parameterfreie Methode der Geometriebeschreibung für Membran- und Schalenträgerwerke eingeführt. Bei der Formfindung handelt es sich um die Bestimmung der Gleichgewichtsformen von Membranen unter Vorgabe von Randgeometrie und Zugspannungen. Es handelt sich um ein inverses mechanisches Problem, denn es werden Spannungen vorgegeben, die typischerweise das Ergebnis einer Berechnung sind. Als Verfahren zur Designgebung bietet die Formfindung den Vorteil, dass nur eine sehr geringe Anzahl von Optimierungsvariablen nötig ist, um Freiformflächen optimal zu gestalten. Zudem ist die Methode parameterfrei, d.h. sie benötigt keine Formfunktionen, da das Design durch die Mechanik des Systems unter vorgegebenen Randbedingungen bestimmt ist. Es sei an dieser Stelle auf Kap. 7 hingewiesen, welches dieses Thema ausführlich behandelt und als Literatur auf [18, 19, 20] verwiesen.

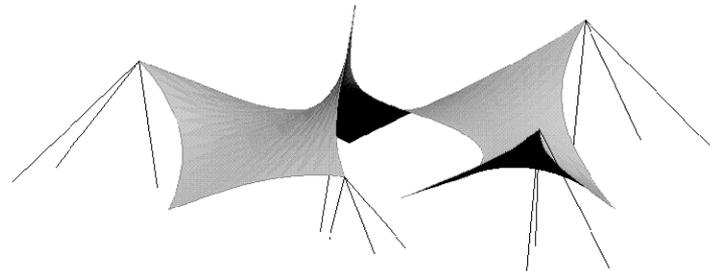


Abbildung 2.3.: Membrantragwerk in Gleichgewichtsform. Die Geometrie wird unter Vorgabe der Randbedingungen durch die *Formfindung* ermittelt. Die Randbedingungen können als Optimierungsvariablen verwendet werden. Quelle: Lehrstuhl für Statik, TU München.

Eine weitere Möglichkeit bieten *Isogeometrische Elemente*. In den letzten Jahren hat der isogeometrische Ansatz große Bedeutung gewonnen. Typisch für ihn ist, dass dieselben Formfunktionen für Geometrie und Berechnung verwendet werden. In der Optimierung können diese Formfunktionen ebenfalls für die Designbeschreibung benutzt werden. Weiterführende Literatur findet man in [58, 71, 72].

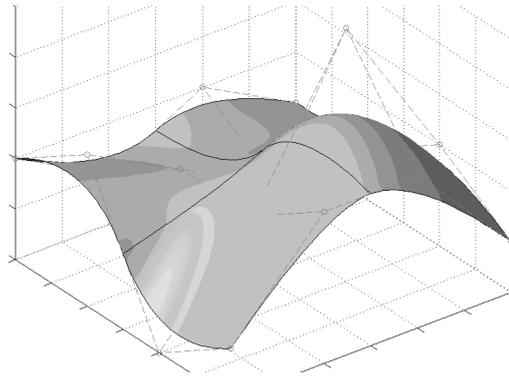


Abbildung 2.4.: Isogemetrisches Konzept. Dasselbe geometrische Modell wird für Analyse und Design verwendet. Quelle: Josef Kiendl, Lehrstuhl für Statik, TU München.

2.3. Numerische Optimierung

2.3.1. Optimierungsalgorithmen

Zur numerischen Lösung des Optimierungsproblems existiert eine große Vielfalt an Optimierungsalgorithmen. Sie lassen sich in *Methoden nullter Ordnung* und *Gradientenmethoden*, welche *Methoden erster und zweiter Ordnung* sind, einteilen. Eine weitere Methode ist das Optimierungsverfahren auf Basis von *Optimalitätskriterien (OC)*. Hier sollen einige wichtige Algorithmen erwähnt werden. Für eine weitere Ausführung und für technische Details sei auf die Fachliteratur verwiesen [7, 114, 113, 51, 54].

2.3.1.1. Methoden nullter Ordnung

Die Methoden nullter Ordnung basieren nur auf Funktionsauswertungen der Optimierungskriterien. Sie lassen sich für diskontinuierliche und diskrete Optimierungsprobleme einsetzen und eignen sich für das Finden des globalen Optimums besser als Gradientenmethoden. Der entscheidende Nachteil ist, dass sehr hohe Rechenzeiten benötigt werden.

Zu den Verfahren nullter Ordnung zählen Stochastische Algorithmen. Hierbei werden mögliche Lösungen nach bestimmten, auf dem Zufallsprinzip beruhenden, Vorgaben ausgewählt. Meist wird zunächst eine globale Suche vorgenommen, um relevante Gebiete zu lokalisieren und dort eine lokale Suche mit höherer Genauigkeit durchzuführen. Bei der *Monte-Carlo Methode* wird die Auswahl der Punkte auf dem Gebiet zufällig getroffen. *Evolutionäre Algorithmen* orientieren sich am Muster der biologischen Evolution [54, 40]. Es wird mit einer zufälligen *Population* möglicher Lösungen begonnen (*Initialisierung*). Diese werden mit der sog. *Fitnessfunktion* bewertet. Die damit bekannten

besten Lösungen werden dann zufällig verändert (*Mutation*). Bei *genetischen Algorithmen*, einer Unterkategorie der evolutionären Algorithmen, werden sie zusätzlich gemischt (*Rekombination*). Der Rest der möglichen Lösungen wird verworfen (*Selektion*). Durch Mutation, ggf. Rekombination und Selektion entsteht eine neue Population, auf deren Basis die Suche erneut durchgeführt wird.

2.3.1.2. Methoden höherer Ordnung

Methoden höherer Ordnung benötigen neben den Funktionsauswertungen die Ableitungen erster und ggf. höherer Ordnung der Optimierungskriterien nach den Optimierungsvariablen, um eine Suchrichtung zu bestimmen. Dabei wird mit einem Startwert \mathbf{s}^0 begonnen und die Lösung in jeder Iteration wie folgt aktualisiert:

$$\mathbf{s}^{(k+1)} = \mathbf{s}^{(k)} + \Delta \mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{s}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{D}^{(k)} \quad (2.14)$$

mit der Suchrichtung $\mathbf{D}^{(k)} = \mathbf{D}(\nabla \psi(\mathbf{s}^{(k)}), \nabla^2 \psi(\mathbf{s}^{(k)}))$, der Schrittweite $\alpha^{(k)}$ und dem Iterationsindex k . Bei Verfahren erster Ordnung, auch als *Gradientenmethoden* bezeichnet, werden nur die ersten Ableitungen verwendet, wohingegen die Verfahren zweiter Ordnung zusätzlich die zweiten Ableitungen benötigen, welche durch die Hessematrix gegeben sind.

Methoden höherer Ordnung benötigen aufgrund der gezielten Suche deutlich weniger Funktionsauswertungen und sind daher in der Regel sehr effizient. Es ist jedoch zu bemerken, dass die Berechnung der Ableitungen – insbesondere der zweiten Ableitungen bei Verfahren zweiter Ordnung – zusätzliche Rechenzeit benötigt und in jedem Optimierungsschritt stattfinden muss. Diese Methoden eignen sich allerdings nur für kontinuierliche Optimierungsprobleme und weisen im Gegensatz zu den Verfahren nullter Ordnung eine geringere Wahrscheinlichkeit für das Finden des globalen Optimums auf. Im Allgemeinen sind Gradientenmethoden aufgrund der schnellen Konvergenz und den damit verbundenen niedrigeren Rechenzeiten gut für die Strukturoptimierung geeignet, da hier meist kontinuierliche Fragestellungen mit vielen Variablen vorkommen und die Strukturanalyse selbst oft schon rechenintensiv ist.

Die Algorithmen zu den Verfahren höherer Ordnung lassen sich in Verfahren für unbeschränkte und beschränkte Optimierungsaufgaben einteilen.

Ein einfacher, beliebter und robuster gradientenbasierter Optimierungsalgorithmus für unbeschränkte Probleme ist das *Verfahren des steilsten Abstiegs*. Als Suchrichtung wird die Richtung des negativen Gradienten $\mathbf{D}^{(k)} = -\nabla \psi(\mathbf{s}^{(k)})$ verwendet, so dass der Funktionswert bei jeder Iteration kleiner werden muss. Die Schrittweite $\alpha^{(k)}$ wird mit einem *Line Search* bestimmt. Dabei wird die Schrittweite $\alpha^{(k)}$ ermittelt, so dass die Stelle mit dem geringsten Wert der Zielfunktion in der Richtung des Gradienten $\mathbf{D}^{(k)}$ als Ausgangspunkt für den nächsten Optimierungsschritt verwendet wird. Das Verfahren des steilsten Abstiegs besteht aus folgenden Schritten:

- i Initialisiere $k = 0 : \mathbf{s}^0$
- ii Berechne $\mathbf{D}^{(k)} = -\nabla\psi(\mathbf{s}^{(k)})$
- iii Berechne $\alpha^{(k)}$
- iv Aktualisiere $\mathbf{s}^{(k+1)} = \mathbf{s}^{(k)} + \alpha^{(k)}\mathbf{D}^{(k)}$
- v IF: Maximale Anzahl an Iterationen erreicht. Stop.
 ELSE: Konvergenzcheck
 IF: Konvergenz. Stop.
 ELSE: $k = k + 1$. Gehe zu ii.

Das *Verfahren der konjugierten Gradienten* für unbeschränkte Probleme berücksichtigt die Krümmung für eine bessere Suchrichtung und erzielt i.A. schnellere Konvergenz als das Verfahren des steilsten Abstieges. Die Suchrichtung bestimmt sich zu

$$\mathbf{D}^{(k)} = -\nabla\psi(\mathbf{s}^{(k)}) + \beta\mathbf{D}^{(k-1)} \quad (2.15)$$

mit

$$\beta = \frac{\nabla\psi(\mathbf{s}^{(k)})^T \cdot \nabla\psi(\mathbf{s}^{(k)})}{\nabla\psi(\mathbf{s}^{(k-1)})^T \cdot \nabla\psi(\mathbf{s}^{(k-1)})}. \quad (2.16)$$

Das *Verfahren der zulässigen Richtungen* ist ein Algorithmus für beschränkte Probleme. Es ähnelt den Verfahren des steilsten Abstieges bzw. der konjugierten Gradienten, mit dem Unterschied, dass bei Verletzung der Nebenbedingung während der Iterationen die Suchrichtung für den nächsten Schritt wieder in den zulässigen Bereich weist.

Es seien hier noch die *Penalty-Methode* und die *Augmented-Lagrange-Methode* für beschränkte Probleme erwähnt. Diese Methoden transformieren das beschränkte Optimierungsproblem durch die Addition eines Strafterms auf ein unbeschränktes.

Die *Newton und Quasi-Newton Verfahren* für unbeschränkte Probleme basieren auf ersten und zweiten Ableitungen der Zielfunktion zur Bestimmung der Suchrichtung. Dabei werden die zweiten Ableitungen beim Quasi-Newton Verfahren durch die ersten Ableitungen genähert, weshalb diese Methode den Verfahren erster Ordnung zuzuordnen ist, wohingegen das Newton Verfahren eines zweiter Ordnung ist.

Ein weiteres Verfahren zweiter Ordnung für beschränkte Optimierungsprobleme ist das *Sequential Quadratic Programming (SQP)*. Es basiert auf der Lagrange Funktion (siehe auch 2.1.3), also der Addition des Produkts von Lagrange-Multiplikatoren und Nebenbedingungen zur Zielfunktion, und der Linearisierung dieser über die Taylorreihe mit Abbruch nach dem Glied zweiter Ordnung.

Für eine detaillierte Ausführung obiger und weiterer Optimierungsalgorithmen sei auf [113, 51, 7] verwiesen.

2.3.1.3. Optimalitätskriterien

Bei diesem Verfahren der Optimierung legt das sog. *Optimalitätskriterium* fest, wann Optimalität eintritt, also wann das Ergebnis als optimal zu betrachten ist. Die Optimalitätskriterien bestimmen die Qualität des Ergebnisses. Da diese ggf. auf Empirie basieren können, kann das Ergebnis vom tatsächlichen Optimum abweichen. Der sog. Redesign-Algorithmus variiert dabei die Parameter, um das Optimalitätskriterium zu erfüllen. Das bekannteste Beispiel ist das sog. *Fully-Stressed-Design (FSD)* für die Optimierung von Fachwerken. Es besagt, dass die Struktur optimal ist, wenn in allen Stäben die maximal zulässige Spannung auftritt. Für Weiterführendes sei auf [7] verwiesen.

2.3.2. Lösungsmethoden

Bei der Optimierung mechanischer Systeme sind die Optimierungsvariablen, welche das System definieren, und die Systemvariablen, welche in der Strukturmechanik die Verschiebungen sind, gekoppelt. In der numerischen Optimierung müssen also beide Größen in Abhängigkeit voneinander bestimmt werden. Dabei wird zwischen den Lösungsmethoden *Simultaneous Analysis and Design (SAND)* und *Nested Analysis and Design (NAND)* unterschieden.

Beim Simultaneous Analysis and Design (SAND) erfolgt die Bestimmung der Systemvariablen und der Optimierungsvariablen simultan [52]. Das bedeutet die Lösung des Optimierungsproblems und die der Systemgleichungen geschieht auf der Basis eines großen Gleichungssystems. Die Systemvariablen und Optimierungsvariablen sind dabei gleichwertig und werden alle als Optimierungsvariablen behandelt. Es handelt sich also um ein Optimierungsproblem mit $n_s + n_d$ Variablen, wobei n_s die Anzahl der, das System definierenden, Optimierungsvariablen und n_d die Anzahl der Systemvariablen ist. Die Optimierungsaufgabe lässt sich

$$\min_{s,d}(\psi(\mathbf{s}, \mathbf{d})) \tag{2.17}$$

schreiben. Bei der Lösung des Gleichungssystems werden alle Variablen gleichzeitig aktualisiert. Die Systemgleichungen sind erst am Optimum - der Lösung des Gleichungssystems - erfüllt, da diese bei SAND innerhalb einer Iterationsschleife nicht auskonvergiert werden.

Beim Verfahren des Nested Analysis and Design (NAND) erfolgt die Lösung der Systemvariablen und der Optimierungsvariablen getrennt voneinander. Hier ist die Systemanalyse in die Optimierung eingebettet. Die Systemgleichungen werden auf der Grundlage der aktuellen Optimierungsvariablen gelöst. Danach kann auf der Basis der Systemantwort die Aktualisierung der Optimierungsvariablen (Designupdate) für die nächste Iteration erfolgen. Die Optimierungsvariablen sind hier nur die, das System kontrollierenden,

Variablen. Die Systemvariablen sind Funktionen dieser Optimierungsvariablen, welche implizit durch die Systemgleichungen $\mathcal{S}(\mathbf{s}, \mathbf{d})$ definiert sind. Die Optimierungsaufgabe lässt sich

$$\min_{\mathbf{s}}(\psi(\mathbf{s}, \mathbf{d})) \tag{2.18}$$

schreiben. Mit n_s Optimierungsvariablen handelt es sich bei Anwendung von NAND um ein kleineres Optimierungsproblem als bei SAND, allerdings findet in jedem Optimierungsschritt eine Systemanalyse statt, bei welcher die Systemgleichung vollständig auskonvergiert werden. In der Praxis bietet die NAND-Methode Vorteile durch die Möglichkeit eines modularen Softwaredesigns. Durch die getrennte Lösung von System und Optimierung ist die Austauschbarkeit der Softwaremodule gegeben.

In dieser Arbeit wird der NAND-Ansatz verfolgt und Gradientenmethoden mit Sensitivitätsanalyse behandelt. Die Sensitivitätsanalyse ist als eigenes Modul nach der Analyse in die Optimierung eingebettet. Abbildung 2.5 zeigt den Ablauf einer numerischen Optimierung nach NAND mit den, in die Optimierungsschleife eingebetteten, Modulen Analyse, Sensitivitätsanalyse und Designupdate.

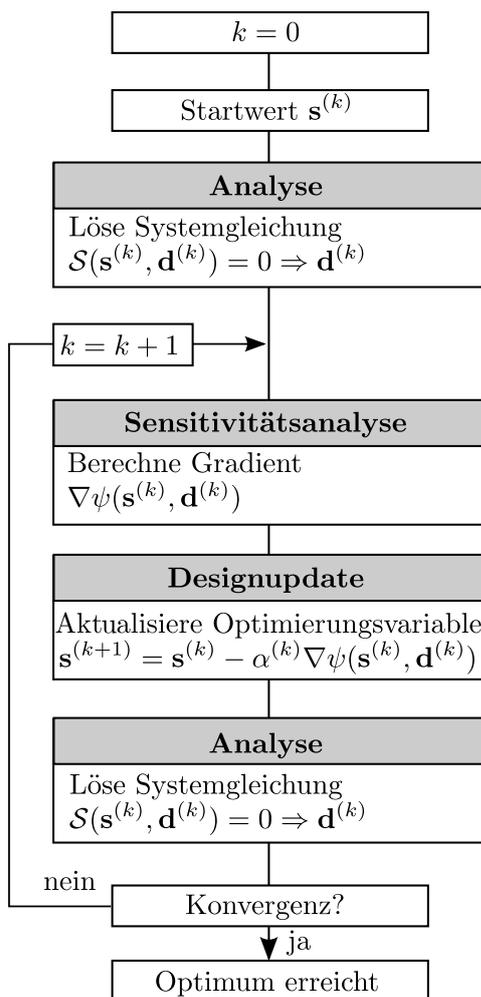


Abbildung 2.5.: Ablauf einer numerischen Optimierung nach NAND: Die Module Sensitivitätsanalyse, Designupdate und Analyse sind die äußere Optimierungsschleife eingebettet. In der Analyse werden die Systemvariablen $\mathbf{d}^{(k)}$ bestimmt. Auf Grundlage der Systemvariablen und der aktuellen Optimierungsvariablen $\mathbf{s}^{(k)}$ wird in der Sensitivitätsanalyse der Gradient $\nabla\psi(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)})$ bestimmt. Daraufhin kann im Modul Designupdate die Aktualisierung der Optimierungsvariablen erfolgen.

2.4. Sensitivitätsanalyse

Gradientenbasierte Optimierungsalgorithmen benötigen den Gradient der Zielfunktion, d.h. den Vektor der Ableitungen der Zielfunktion nach den Optimierungsvariablen $\frac{d\psi}{ds}$. Das Verfahren zur Bestimmung der Gradienten nennt man Sensitivitätsanalyse. In diesem Rahmen werden Gradienten auch als Sensitivitäten bezeichnet. Im folgenden werden die Methoden der *diskreten Sensitivitätsanalyse*, welche auf der diskreter Systemgleichung basiert, beschrieben. Als Literatur zur Sensitivitätsanalyse sei auf [112, 50, 26, 36] verwiesen.

Die *numerische Sensitivitätsanalyse* beruht auf finiten Differenzen. Der Gradient der Zielfunktion wird durch Übergabe einer Perturbation ε der Optimierungsvariablen s_i näherungsweise bestimmt.

$$\frac{d\psi}{ds_i}(\mathbf{s}_0) \approx \frac{\Delta\psi}{\Delta s_i}(\mathbf{s}_0) = \frac{\psi(\mathbf{s}_0 + \varepsilon_i) - \psi(\mathbf{s}_0)}{\varepsilon} \quad (2.19)$$

Dabei gilt $s_0 + \varepsilon_i = [s_{0,1} \ \cdots \ s_{0,i} + \varepsilon \ \cdots \ s_{0,n_s}]^T$. Die Zielfunktion muss pro Optimierungsvariable zwei mal ausgewertet werden. Diese ist in der Regel so geartet, dass zu ihrer Auswertung eine vollständige Systemanalyse notwendig ist, da sie von der Systemantwort abhängig ist. Aufgrund der entstehenden hohen Rechenkosten ist die numerische Sensitivitätsanalyse für lineare Probleme mit wenigen Optimierungsvariablen zu empfehlen. Genauere Erklärungen zum Verfahren der finiten Differenzen, dessen Fehlerquellen und Rechenintensität befinden sich in Abschnitt 5.3.

Für größere nichtlineare Probleme wird die *analytische oder semianalytische Sensitivitätsanalyse* bevorzugt, bei welcher der gesuchte Gradient analytisch oder teilweise analytisch unter Hinzunahme von finiten Differenzen bestimmt wird. Die Zielfunktion ist generell abhängig von den Optimierungsvariablen und in der Regel von der Systemantwort, den Strukturverschiebungen. Die Ableitung nach den Optimierungsvariablen lässt sich gemäß der Kettenregel folgendermaßen schreiben, wobei die Sensitivitäten $\frac{d\mathbf{d}}{ds}$, also die Ableitungen der Strukturverschiebungen die unbekanntenen Größen darstellen.

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{s}} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds} \quad (2.20)$$

Bei der *direkten Sensitivitätsanalyse* wird zur Bestimmung der Verschiebungsableitungen $\frac{d\mathbf{d}}{ds}$ die sog. Sensitivitätsgleichung, die sich aus der diskreten linearen Strukturgleichung $\mathbf{S} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{f} = 0$ mit den unbekanntenen Strukturverschiebungen \mathbf{d} ergibt, herangezogen. Bei der Formoptimierung ist die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} und in vielen Fällen auch der Lastvektor \mathbf{f} von der Optimierungsvariablen \mathbf{s} abhängig. So läßt sich die lineare Strukturgleichung in Abhängigkeit der Optimierungsvariablen folgendermaßen formulieren:

$$\mathbf{S} = \mathbf{K}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{s}) = 0 \quad (2.21)$$

Durch Differenzieren erhält man die Sensitivitätsgleichung, aus der die Verschiebungsableitungen $\frac{d\mathbf{d}}{ds}$ bestimmt werden und zur Berechnung des Gradienten der Zielfunktion durch Gleichung 2.20 herangezogen werden. Die Sensitivitätsgleichung ist linear und lautet

$$\frac{d\mathcal{S}}{ds} = \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial s} + \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds} = 0. \quad (2.22)$$

Mit

$$\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial s} = \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial s} \cdot \mathbf{d} - \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial s}$$

und

$$\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\mathbf{d}} = \mathbf{K}$$

ergibt sich

$$\frac{d\mathbf{d}}{ds} = \mathbf{K}^{-1} \left[-\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial s} \cdot \mathbf{d} + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial s} \right]. \quad (2.23)$$

Für lineares Strukturverhalten gilt $\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial s} = \frac{d\mathbf{K}}{ds}$ und $\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial s} = \frac{d\mathbf{f}}{ds}$. Die Gleichung zeigt Analogie zur Strukturgleichung. Daher wird der Vektor auf der rechten Seite als Pseudolastvektor \mathbf{f}^* bezeichnet:

$$\mathbf{f}^* = -\frac{d\mathbf{K}}{ds} \cdot \mathbf{d} + \frac{d\mathbf{f}}{ds} \quad (2.24)$$

Setzt man $\frac{d\mathbf{d}}{ds}$ in Gleichung 2.20 ein, so erhält man folgenden Ausdruck für den gesuchten Gradienten:

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial\psi}{\partial s} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{d}} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{f}^* \quad (2.25)$$

Wird zur Berechnung des Gradienten nach Gleichung 2.25 zuerst $\frac{d\mathbf{d}}{ds}$ durch Lösung von $\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{f}^*$ bestimmt, spricht man von direkter Sensitivitätsanalyse. Wenn in umgekehrter Reihenfolge zuerst $\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{d}} \cdot \mathbf{K}^{-1}$ gelöst wird, so spricht man von der *adjungierten Sensitivitätsanalyse*. In beiden Fällen handelt es sich um lineare Gleichungssysteme. Die sog. adjungierte Variable $\boldsymbol{\lambda}$ wird durch selbiges Produkt definiert:

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{d}} \cdot \mathbf{K}^{-1} \quad (2.26)$$

Die Herleitung des adjungierten Ansatzes über die Lagrange-Methode, bei welcher die Systemgleichung \mathcal{S} als Nebenbedingung eingeführt wird, wird in Abschnitt 5.5 detailliert erklärt. Man beachte, dass $\boldsymbol{\lambda}$ unabhängig von den Optimierungsvariablen ist und somit nur einmal für alle Gradienten $\frac{d\psi}{ds_i}$ bestimmt werden muss, weshalb dieser Ansatz für

Probleme mit vielen Optimierungsvariablen aber wenigen Nebenbedingungen bevorzugt wird.

Ein Sonderfall, in dem sich die Sensitivitätsanalyse grundlegend vereinfacht, ist die Optimierung der Systemsteifigkeit hinsichtlich einer definierten Belastung. Dies entspricht der Minimierung der Systemnachgiebigkeit (*compliance minimization*), also der Verzerrungsenergie. Die diskrete Form der Verzerrungsenergie lautet:

$$\psi = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{d} \quad (2.27)$$

Daraus können folgende partielle Ableitungen gebildet werden:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{s}} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{d} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{d}} = (\mathbf{K} \cdot \mathbf{d})^T = \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{K} \quad (2.29)$$

Das Einsetzen in Gleichung 2.25 führt zu folgender Form:

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{d}} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \left[-\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{d} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} \right] \quad (2.30)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \left[-\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{d} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} \right] \quad (2.31)$$

$$= -\frac{1}{2} \mathbf{d}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} \quad (2.32)$$

$$= -\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{s}} + \mathbf{d}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} \quad (2.33)$$

In der zweiten Zeile der obigen Formulierung ergibt die Multiplikation der inversen Steifigkeitsmatrix mit der Steifigkeitsmatrix die Einheitsmatrix. Dies bedeutet, dass das Gleichungssystem 2.23, welche in der Regel zu lösen ist, hier nicht gelöst werden muss und sich der Rechenaufwand der Sensitivitätsanalyse, der durch diese Gleichungslösungen dominiert wird, extrem reduziert. In der Optimierungsschleife verbleibt nur das Gleichungssystem zur Lösung der Systemgleichungen.

3. Fluid-Struktur-Interaktion

Fluid-Struktur-Interaktion (FSI) bezeichnet die Wechselwirkung zwischen einer Strömung und einem Festkörper. Die durch die Strömungskräfte hervorgerufenen Deformationen der Struktur verändern die Berandung des Strömungsgebietes und damit das Strömungsverhalten. Für das Verständnis der FSI sind Struktur- und die Strömungsmechanik Voraussetzung. In diesem Kapitel wird daher eine Einführung in die Strukturmechanik für geometrisch nichtlineares Strukturverhalten als Grundlage für die Struktursimulation mit großen Verformungen gegeben. Nach einem Überblick über die Strömungsmechanik für inkompressible viskose Strömungen, wird das gekoppelte Problem der FSI behandelt. Dabei wird die partitionierte Berechnung der FSI fokussiert, welche für diese Arbeit relevant ist.

3.1. Strukturmechanik

Die Strukturmechanik charakterisiert das Verhalten von Festkörpern. Ziel der Struktursimulation ist die Vorhersagbarkeit dieses Verhaltens. Dabei gibt es unterschiedliche Abstrahierungsebenen. Zunächst wird die reale Struktur durch ein *mathematisches Modell* (*Analysemodell*) idealisiert. Das mathematische Modell wird durch Diskretisierung in das *diskrete Modell* (auch *Berechnungsmodell*) überführt. Dabei gibt es unterschiedliche Diskretisierungstechniken. Hier wird die *Finite-Elemente-Methode (FEM)* vorgestellt.

Um eine Struktur mathematisch beschreiben zu können, werden die *kontinuumsmechanischen Grundgleichungen* benötigt. In der Strukturmechanik sind dies die *kinematischen Beziehungen*, das *Materialgesetz* (oder *konstitutive Beziehungen*) und das *Gleichgewicht*. Im Folgenden werden die Grundgleichungen für die geometrisch nichtlineare Statik vorgestellt und die räumliche Diskretisierung mittels der FEM erklärt. Die sich daraus ergebenden diskreten Gleichungen bilden die Grundlage für die Sensitivitätsanalyse, welche in Kapitel 5 detailliert betrachtet wird. Zu den kontinuumsmechanischen Grundgleichungen und der FEM existieren zahlreiche Literaturquellen [56, 11, 57, 118, 125, 123].

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf Schalen- und Membranstrukturen. Wegen der geringen Dicke wird hier eine Idealisierung als 2-dimensionale Struktur vorgenommen. Charakteristisch ist das Auftreten von großen Verformungen und kleinen Dehnungen. Dieses Verhalten erfordert eine geometrisch nichtlineare Behandlung. Aufgrund kleiner Deh-

nungen kann ein lineares Materialgesetz angenommen werden. Bei Membrantragwerken werden wegen der geringen Dicke konstante Dehnungen über den Querschnitt angenommen. Dies führt zu einer konstanten Spannungsverteilung in Dickenrichtung und dazu, dass keine Biegemomente auftreten. Man spricht vom *Membranspannungszustand*. Weiterführendes zu Schalen- und Membrantragwerken findet man in [16, 77, 14].

3.1.1. Differentialgeometrie

Die folgende Einführung in die Differentialgeometrie dient dem Verständnis der darauf folgenden Abschnitte zu den kontinuumsmechanischen Grundgleichungen. Es wird hier die *Lagrange'sche Betrachtungsweise* verwendet, bei der ein Materialpunkt betrachtet wird. Die räumliche Lage eines Materialpunktes im Raum wird als Konfiguration bezeichnet. Die *Referenzkonfiguration* beschreibt dabei die Ausgangslage des Punktes der unverformten Struktur. Seine Lage im Raum wird mit dem Ortsvektor $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\theta^1, \theta^2)$, in Abhängigkeit der krummlinigen Koordinaten θ^i beschrieben. Die *aktuelle Konfiguration* oder *Momentankonfiguration* stellt sich durch die Verformung der Struktur ein. Die Lage des Punktes bei verformter Struktur wird mit $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta^1, \theta^2)$ beschrieben. Es ist üblich, Großbuchstaben für die Referenzkonfiguration und Kleinbuchstaben für die aktuelle Konfiguration zu verwenden. So wird auch im Folgenden verfahren. Es werden krummlinige Koordinaten für 2-dimensionale Strukturen, wie Schalen und Membranstrukturen, zu Grunde gelegt.

Mit \mathbf{G}_i bzw. \mathbf{g}_i werden die *kovarianten Basisvektoren* in der Referenz- bzw. aktuellen Konfiguration bezeichnet. Sie lassen sich durch die partiellen Ableitungen

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \quad (3.1)$$

bestimmen. Die *kontravarianten Basisvektoren* werden mit \mathbf{G}^i bzw. \mathbf{g}^i bezeichnet und erfüllen folgende Bedingung:

$$\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_j^i = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} \quad (3.2)$$

Alternativ lassen sich die kontravarianten Basisvektoren auch durch die partiellen Ableitungen

$$\mathbf{G}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.3)$$

bestimmen. Die *Metrikoeffizienten* setzen sich aus den Skalarprodukten der Basisvektoren zusammen:

$$G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j \quad \text{und} \quad g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (3.4)$$

Der *Einheitstensor* oder *Metriktensor* bezüglich der Basen ist

$$\mathbf{I} = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{I} = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j. \quad (3.5)$$

Nun kann die Verschiebung \mathbf{d} durch die Differenz der Ortsvektoren der aktuellen und der Referenzkonfiguration beschrieben werden:

$$\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (3.6)$$

Abbildung 3.1 veranschaulicht dies. Es ist anzumerken, dass für zeitabhängige Fragestellungen die Ortvektoren von dem weiteren Parameter Zeit \mathbf{t} abhängen. Als weiterführende Literatur zum Thema Differentialgeometrie sei auf [56, 47] verwiesen.

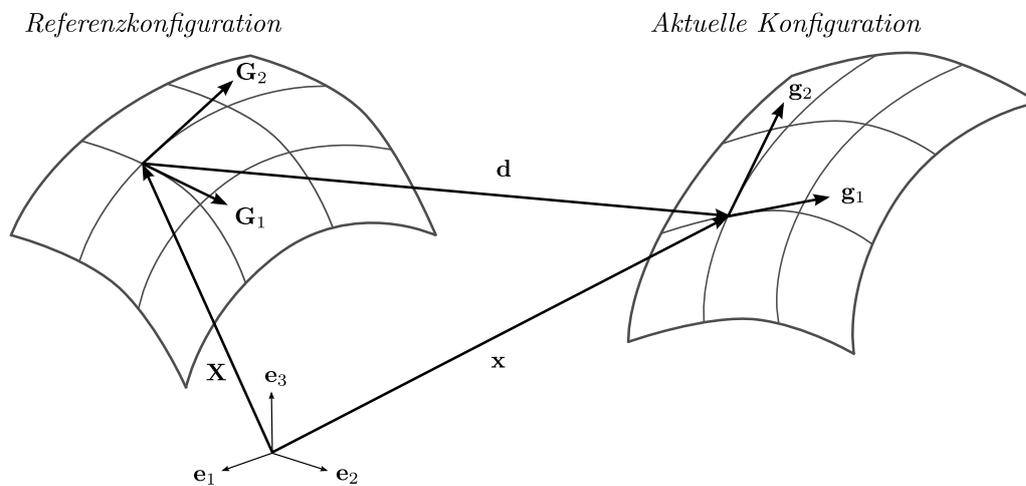


Abbildung 3.1.: Konfigurationen der Differentialgeometrie: Referenzkonfiguration mit kovarianten Basisvektoren $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ und aktuelle Konfiguration mit kovarianten Basisvektoren $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$. Die Verschiebung \mathbf{d} eines Materialpunktes ist die Differenz der Ortsvektoren \mathbf{x} und \mathbf{X} .

3.1.2. Kinematik

Die kinematischen Beziehungen geben den Zusammenhang zwischen Verformungen und Dehnungen wieder. Transformationen vom Referenzzustand in den aktuellen Zustand werden durch den *Deformationsgradient* \mathbf{F} beschrieben:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad (3.7)$$

\mathbf{F} ist ein unsymmetrischer Tensor. Es ist aus der letzten Beziehung auf der rechten Seite von Gleichung 3.7 schnell ersichtlich, dass \mathbf{F} und \mathbf{F}^T nicht identisch sind und der Tensor

daher nicht symmetrisch ist. Der unsymmetrische Deformationsgradient gibt die gesamte Deformation wieder und beinhaltet sowohl Verzerrungs- als auch Starrkörperanteile. So wird der symmetrische *Green-Lagrange Verzerrungstensor* als reines Verzerrungsmaß eingeführt:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (3.8)$$

3.1.3. Materialgesetz

Das Materialgesetz gibt den Zusammenhang zwischen Dehnungen und Spannungen wieder. Die realen und physikalisch messbaren Spannungen werden durch den *Cauchyschen Spannungstensor* $\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$ gegeben, welcher bezüglich der Basis der verformten Konfiguration formuliert ist. Ein anderes Spannungsmaß ist der *zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor (PK2)* \mathbf{S} . Er ist bezüglich der Basis der Referenzkonfiguration formuliert und lässt sich aus dem Cauchyschen Spannungstensor überführen:

$$\mathbf{S} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad \text{mit} \quad \mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \quad (3.9)$$

Der Zusammenhang des energetisch konjugierten Paares \mathbf{S} und \mathbf{E} ist über den *materiellen Elastizitätstensor* \mathbb{C} wie folgt gegeben:

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad \text{mit} \quad \mathbb{C} = C^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l \quad (3.10)$$

Es handelt sich um einen Tensor vierter Stufe.

Das *St. Venant-Kirchhoff Materialgesetz* beschreibt elastisches Materialverhalten für isotrope, homogene Materialien. Für dieses Materialgesetz können die Komponenten des Elastizitätstensors durch die Lamé Konstanten λ und μ oder durch das Elastizitätsmodul E und die Querdehnzahl ν beschrieben werden. In Abhängigkeit der Lamé Konstanten sind sie

$$C^{ijkl} = \lambda G^{ij} G^{kl} + \mu (G^{ik} G^{jl} + G^{il} G^{kj}), \quad (3.11)$$

mit

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (3.12)$$

3.1.4. Gleichgewicht

Der Impulserhaltungssatz besagt, dass äußere, innere, Trägheits- und Volumenkräfte, welche auf einen Körper wirken, im Gleichgewicht stehen müssen. Für den statischen

Fall sind die Trägheitskräfte nicht von Bedeutung. Die globale Form der Gleichgewichtsbedingung lautet für die aktuelle Konfiguration als Integral über das Gebiet Ω :

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}) d\Omega = 0 \quad (3.13)$$

Dabei ist ρ die Dichte des verformten Körpers und \mathbf{b} der Volumenkraftvektor pro Masseneinheit. Da die Gleichung für jedes Gebiet erfüllt sein muss, lässt sich die lokale Form folgendermaßen formulieren:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (3.14)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lassen sich für die Referenzkonfiguration in Abhängigkeit des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors schreiben. Die globale Form als Integral über das unverformte Gebiet Ω_0 lautet

$$\int_{\Omega_0} (\nabla \cdot (\mathbf{FS}) + \rho_0 \mathbf{b}) d\Omega_0 = 0 \quad (3.15)$$

mit der Dichte ρ_0 des unverformten Körpers. Die lokale Form ist dann

$$\nabla \cdot (\mathbf{FS}) + \rho_0 \mathbf{b} = 0. \quad (3.16)$$

Weiterhin werden zur vollständigen Beschreibung die Randbedingungen auf der Oberfläche Γ des Körpers benötigt. Die Dirichlet-Randbedingungen schreiben Verschiebungen $\hat{\mathbf{d}}$ auf dem Randbereich Γ_D vor. Die Neumann-Randbedingungen schreiben den Spannungsvektor $\hat{\mathbf{T}}$ auf dem Randbereich Γ_N vor. Sie schreiben sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \hat{\mathbf{d}} \quad \text{auf } \Gamma_D \\ \mathbf{T} &= \hat{\mathbf{T}} \quad \text{auf } \Gamma_N \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\text{mit } \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset \quad \text{und} \quad \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \quad (3.18)$$

$\mathbf{T} = (\mathbf{FS})\mathbf{N}$ ist der Spannungsvektor in der Referenzkonfiguration mit dem Normalenvektor \mathbf{N} auf der Körperoberfläche.

Durch Gleichungen 3.8, 3.10, 3.16 und 3.17 wird das Gleichgewicht einer Struktur vollständig beschrieben. Man nennt diese Formulierung der gekoppelten Differentialgleichungen die *starke Form* des Gleichgewichts.

Bemerkung: Bei der Impulserhaltungsgleichung für die Strukturmechanik werden Trägheitskräfte berücksichtigt. Dann kommt der Term $-\rho \frac{d^2 \mathbf{d}}{dt^2}$ in Gleichung 3.14 bzw. $-\rho_0 \frac{d^2 \mathbf{d}}{dt^2}$ in Gleichung 3.16 hinzu. Desweiteren werden Initialbedingungen für Verschiebung und Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 0$ benötigt.

3.1.5. Schwache Form

Die Grundlage für die Diskretisierung mit der Finite-Elemente-Methode stellt die *schwache Form* des Gleichgewichts dar. Sie kann über das *Prinzip der virtuellen Arbeit* hergeleitet werden. Es besagt, dass die Summe der virtuellen Arbeit der inneren, äußeren und Trägheitskräfte Null ergibt, wenn sich das System im Gleichgewicht befindet. Für den statischen Fall ist die Arbeit der Trägheitskräfte nicht von Bedeutung und das Prinzip der virtuellen Arbeit besagt:

$$\delta W = \delta W_{int} - \delta W_{ext} = 0 \quad (3.19)$$

Die Anteile innerer und äußerer virtueller Arbeit ergeben sich, indem die tatsächlichen Kräfte bzw. Spannungen mit virtuellen Verschiebungen bzw. daraus resultierenden virtuellen Verzerrungen multipliziert und über das Gebiet integriert werden:

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, d\Omega_0 \quad (3.20)$$

$$\delta W_{ext} = \int_{\Gamma_0} \hat{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{d} \, d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{d} \, d\Omega_0 \quad (3.21)$$

Die virtuellen Verschiebungen sind dabei beliebig, müssen aber die Dirichlet-Randbedingungen erfüllen. Die virtuellen Verzerrungen $\delta \mathbf{E}$ ergeben sich aus den virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{d}$ über die Gleichungen 3.7 und 3.8 wie folgt:

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F} + \delta \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) \quad (3.22)$$

mit

$$\delta \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{d}} \delta \mathbf{d} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \left(\frac{\partial (\mathbf{X} + \mathbf{d})}{\partial \mathbf{X}} \right) \delta \mathbf{d} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \delta \mathbf{d} \quad (3.23)$$

Die schwache Form lässt sich auch über die Methode der gewichteten Residuen herbeiführen. Dann werden die Gleichgewichtsgleichungen 3.16 und die Neumann Randbedingung aus 3.17 mit einer Testfunktion multipliziert und über das Gebiet bzw. den Rand integriert. Diese notwendigen Bedingungen (*Euler-Lagrange-Gleichungen*) sind dann im schwachen bzw. integralen Sinne erfüllt. Setzt man die Testfunktionen den virtuellen Verschiebungen gleich, so entspricht die schwache Form des Gleichgewichts exakt dem Prinzip der virtuellen Arbeit. In [73, 56] ist dies ausführlich nachzulesen.

Die Bezeichnung schwache Form rührt von den geringeren Anforderungen an die Differenzierbarkeit gegenüber der starken Form. Die Kinematik und das Materialgesetz bleiben hierin aber im starken Sinne erfüllt, da sie als Nebenbedingungen eingesetzt werden.

3.1.6. Finite-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode zur Berechnung kontinuumsmechanischer Probleme beruht auf der Diskretisierung. Darunter versteht man die Überführung der kontinuierlichen Grundgleichungen in diskrete Gleichungen, welche ein nichtlineares Gleichungssystem bilden und als solches mit üblichen numerischen Methoden gelöst werden können.

Bei der Finite-Elemente-Methode wird das Berechnungsgebiet Ω in n_{ele} einzelne, sich nicht überlappende Teilgebiete Ω_e , die finiten Elemente, unterteilt.

$$\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \Omega_e \quad (3.24)$$

Das Hochzeichen h bezeichnet hier und im Folgenden durch Diskretisierung genäherte Größen. Die Verschiebung \mathbf{d} , die i.d.R. die unbekannte Größe darstellt, ist eine kontinuierliche Funktion. Die genäherte Funktion \mathbf{d}^h wird über diskrete Funktionswerte $\bar{\mathbf{d}}_i$ an Knoten, welche den finiten Elementen zugeordnet sind, definiert. Der Funktionsverlauf wird durch n_{nod} Formfunktionen $N_i(\theta^i)$, welche auf einem Elementgebiet definiert sind, beschrieben:

$$\mathbf{d}(\theta^i) \approx \mathbf{d}^h(\theta^i) = \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i(\theta^i) \bar{\mathbf{d}}_i = \mathbf{N} \bar{\mathbf{d}} \quad (3.25)$$

Gemäß dem *Bubnov-Galerkin* Konzept wird dieselbe Diskretisierung für die virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{d}$ verwendet:

$$\delta \mathbf{d}(\theta^i) \approx \delta \mathbf{d}^h(\theta^i) = \sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i(\theta^i) \delta \bar{\mathbf{d}}_i = \mathbf{N} \delta \bar{\mathbf{d}} \quad (3.26)$$

Es erfolgt das Einsetzen der diskreten Gleichungen in das Prinzip der virtuellen Arbeit, welches im Folgenden für ein einzelnes Elementgebiet, symbolisiert durch das Hochzeichen e , formuliert ist:

$$\delta W^e = \delta W_{int}^e - \delta W_{ext}^e = 0 \quad (3.27)$$

Die diskrete Form der virtuellen äußere Arbeit ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \delta W_{ext}^e &= \int_{\Gamma_0^e} \hat{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{d}^h d\Gamma_0^e + \int_{\Omega_0^e} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{d}^h d\Omega_0^e \\ &= \int_{\Gamma_0^e} \hat{\mathbf{T}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i(\theta^i) \delta \bar{\mathbf{d}}_i \right) d\Gamma_0^e + \int_{\Omega_0^e} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_{nod}} N_i(\theta^i) \delta \bar{\mathbf{d}}_i \right) d\Omega_0^e \\ &= \sum_{i=1}^{n_{nod}} \left[\int_{\Gamma_0^e} \hat{\mathbf{T}} \cdot N_i(\theta^i) d\Gamma_0^e + \int_{\Omega_0^e} \rho_0 \mathbf{b} \cdot N_i(\theta^i) d\Omega_0^e \right] \cdot \delta \bar{\mathbf{d}}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n_{nod}} \mathbf{r}_{ext}^e \cdot \delta \bar{\mathbf{d}}_i \end{aligned} \quad (3.28)$$

Die Herleitung der diskreten Form der virtuellen inneren Arbeit bedarf aufgrund der Abhängigkeit des Verzerrungstensors von den Verschiebungen mehr Aufmerksamkeit. Die detaillierte Herleitung findet man in [73, 118]. Zur einfachen Darstellung der diskreten Form, wird von genäherten Größen \mathbf{S}^h und \mathbf{E}^h ausgegangen und die Ableitung nach diskreten Knotenwerten $\bar{\mathbf{d}}^e$ vorgenommen.

$$\delta W_{int}^e = \int_{\Omega_0^e} \delta \mathbf{E}^h : \mathbf{S}^h d\Omega_0^e = \int_{\Omega_0^e} \frac{\partial \mathbf{E}^h(\bar{\mathbf{d}})}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} \delta \bar{\mathbf{d}}^e : \mathbf{S}^h d\Omega_0^e \quad (3.29)$$

$$= \delta \bar{\mathbf{d}}^e \int_{\Omega_0^e} \frac{\partial \mathbf{E}^h(\bar{\mathbf{d}})}{\partial \bar{\mathbf{d}}^e} : \mathbf{S}^h d\Omega_0^e = \delta \bar{\mathbf{d}}^e \cdot \mathbf{r}_{int}^e(\bar{\mathbf{d}}) \quad (3.30)$$

Die virtuelle Arbeit für ein Element ergibt sich zu

$$\delta W^e = \delta W_{int}^e - \delta W_{ext}^e = \delta \bar{\mathbf{d}}^e \cdot (\mathbf{r}_{int}^e(\bar{\mathbf{d}}) - \mathbf{r}_{ext}^e) = 0. \quad (3.31)$$

Für das ganze System wird sie durch Assemblierung der Beiträge aller Elemente ermittelt:

$$\delta W^h = \sum_{e=1}^{n_{ele}} \delta W^e = \delta \bar{\mathbf{d}} \cdot (\mathbf{r}_{int}(\bar{\mathbf{d}}) - \mathbf{r}_{ext}) = 0 \quad (3.32)$$

Diese diskreten Gleichungen für geometrisch nichtlineare Statik lassen sich zu diskreten Gleichungen für die lineare Statik vereinfachen. Hierzu wird die virtuelle innere Arbeit für geometrisch nichtlineare Statik in Abhängigkeit linearer und nichtlinearer Anteile formuliert. Zunächst lässt sich der Green-Lagrange Verzerrungstensor \mathbf{E} in einen linearen und einen nichtlinearen Anteil wie folgt aufteilen:

$$\mathbf{E} = \mathbf{D}_\varepsilon \mathbf{d} + \mathbf{E}^{nl}(\mathbf{d}) \quad (3.33)$$

Zur Formulierung der Variation $\delta \mathbf{E}$ wird der Differentialoperator wie folgt in Anteile zerlegt, von denen ein Teil von der Verschiebung abhängig und ein Teil unabhängig ist:

$$\delta \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{d}} \delta \mathbf{d} = \mathbf{D}_\varepsilon \delta \mathbf{d} + \mathbf{D}_\varepsilon^{nl} \delta \mathbf{d} = (\mathbf{D}_\varepsilon + \mathbf{D}_\varepsilon^{nl}) \delta \mathbf{d} \quad (3.34)$$

Dabei ist \mathbf{D}_ε ein konstanter Differentialoperator und $\mathbf{D}_\varepsilon^{nl} = \frac{\partial \mathbf{E}^{nl}(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}}$ von den Deformationen abhängig. Die virtuelle innere Arbeit für geometrisch nichtlineare Statik lässt sich dann unter Berücksichtigung des Materialgesetzes zu

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E} d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} [(\mathbf{D}_\varepsilon + \mathbf{D}_\varepsilon^{nl}) \delta \mathbf{d}] : \mathbb{C} : [\mathbf{D}_\varepsilon \mathbf{d} + \mathbf{E}^{nl}(\mathbf{d})] d\Omega_0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

schreiben. Für die Ausformulierung in Komponentenschreibweise sei auf [73] verwiesen. Für lineare Statik sind die nichtlinearen Anteile $\mathbf{D}_\varepsilon^{nl}$ und $\mathbf{E}^{nl}(\mathbf{d})$ Null. Dann ergibt obige Gleichung die virtuelle innere Arbeit für die lineare Statik:

$$\begin{aligned}\delta W_{int}^{lin} &= \int_{\Omega_0} (\mathbf{D}_\varepsilon \delta \mathbf{d})^T : \mathbb{C} : \mathbf{D}_\varepsilon \mathbf{d} \, d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega_0\end{aligned}\quad (3.36)$$

Dabei wurde der lineare Verzerrungstensor der Momentankonfiguration $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_\varepsilon \mathbf{d}$ und das Materialgesetz $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$ verwendet. Mit der Diskretisierung

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_\varepsilon \mathbf{d} \approx \mathbf{D}_\varepsilon \mathbf{N} \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{B} \bar{\mathbf{d}} \quad (3.37)$$

und

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_\varepsilon \delta \mathbf{d} \approx \mathbf{D}_\varepsilon \mathbf{N} \delta \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{B} \delta \bar{\mathbf{d}} \quad (3.38)$$

mit $\mathbf{B} = \mathbf{D}_\varepsilon \mathbf{N}$, schreibt sich die diskrete virtuelle innere Arbeit für ein Element

$$\begin{aligned}\delta W_{int}^{e,lin} &= \int_{\Omega_0^e} (\delta \mathbf{B} \bar{\mathbf{d}}^e)^T : \mathbb{C} : (\delta \mathbf{B} \bar{\mathbf{d}}^e) \, d\Omega_0^e \\ &= \delta \bar{\mathbf{d}}^{eT} \int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}^T \mathbb{C} \mathbf{B} \, d\Omega_0^e \cdot \bar{\mathbf{d}}^e = \delta \bar{\mathbf{d}}^{eT} \mathbf{k}^e \cdot \bar{\mathbf{d}}^e.\end{aligned}\quad (3.39)$$

\mathbf{k}^e ist die *Elementsteifigkeitsmatrix*. Mit der Forderung $\delta W = \delta W_{int} - \delta W_{ext} = 0$ ergibt sich die diskrete Gleichung für ein Element:

$$\mathbf{k}^e \cdot \bar{\mathbf{d}}^e - \mathbf{f}^e = 0 \quad (3.40)$$

mit $\mathbf{f}^e = \mathbf{r}_{ext}^e$. Die diskrete Gleichung für das ganze System wird durch Assemblierung der Beiträge aller Elemente ermittelt:

$$\mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{d}} - \mathbf{f} = 0 \quad (3.41)$$

mit $\mathbf{f} = \mathbf{r}_{ext}$.

3.2. Strömungsmechanik

Die Strömungsmechanik beschreibt das Verhalten von Flüssigkeiten und Gasen. Wie in der Strukturmechanik wird das Verhalten durch ein mathematisches Modell beschrieben und in ein diskretes Modell zur numerischen Simulation übergeführt. Im folgenden werden die auf Erhaltungssätzen für Masse, Impuls und Energie basierenden kontinuumsmechanischen Grundgleichungen der Strömungsmechanik vorgestellt. In diesem Abschnitt wird die numerische Lösung mittels der Finite-Volumen Methode erläutert. Als Literatur zum Thema Strömungsmechanik sei auf [35, 107, 124] verwiesen.

3.2.1. Kontinuumsmechanische Grundgleichungen

Den folgenden Herleitungen der Grundgleichungen liegt die *Euler'sche Betrachtungsweise* zu Grunde, bei der ein Kontrollvolumen mit fester Position im Raum betrachtet wird. Allen Bilanzgleichungen liegt die Überlegung zu Grunde, dass die zeitliche Änderung einer Strömungsgröße (z.B. Dichte, Impuls) durch die Flüsse durch die Oberfläche des Kontrollvolumens erfolgt. Für isotherme und inerte Strömungen werden die Grundgleichungen über den Massen- und Impulserhaltungssatz hergeleitet.

3.2.1.1. Massenerhaltung

Die Massenerhaltung besagt, dass die Änderung der Masse nach der Zeit t im Kontrollvolumen mit Volumen V gleich dem Massenfluss durch die Oberfläche A ist. Die Massenbilanz nennt man auch *Kontinuitätsgleichung*. Die Integralform lautet:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (3.42)$$

Hierbei bezeichnet ρ die Dichte des Fluids, \mathbf{u} die Geschwindigkeit und \mathbf{n} den Normalenvektor auf der Oberfläche. Wird der Gaußsche Integralsatz auf den konvektiven Term angewandt, ergibt sich:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV = 0 \quad (3.43)$$

Die Differentialform der Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.44)$$

3.2.1.2. Impulserhaltung

Das Gesetz von Newton besagt, dass Trägheitskräfte und äußere Kräfte im Gleichgewicht stehen. Dann ist die zeitliche Änderung des Impulses eines Massenelements im Kontrollvolumen gleich der Summe der äußeren Kräfte. Die Integralform des Impulserhaltungssatzes lautet:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{u} dV + \int_A \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = \int_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \rho \mathbf{b} dV \quad (3.45)$$

Hierbei entspricht die linke Seite der Änderung des Impulses des Massenelements, bestehend aus der lokalen Impulsänderung und dem Impulstransport durch die Oberfläche. Die rechte Seite entspricht den äußeren Kräften, bestehend aus Oberflächenkräften

(Druck, Normal- und Tangentialspannungen) und Volumenkräften (z.B. Gravitationsfeld, elektromagnetische Kräfte). $\boldsymbol{\sigma}$ bezeichnet dabei den Spannungstensor und \mathbf{b} den Volumenkraftvektor pro Masseneinheit. In newtonschen Fluiden ist die Schubspannung proportional zum Geschwindigkeitsgradient. Der Spannungstensor setzt sich aus dem statischen Druck p , welcher immer senkrecht zur Oberfläche wirkt, sowie dem viskosen Teil des Spannungstensors $\boldsymbol{\tau}$ zusammen. Der Spannungstensor kann somit wie folgt geschrieben werden:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} = -(p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (3.46)$$

Hierbei bezeichnet \mathbf{I} den Einheitstensor, μ die dynamische Viskosität und \mathbf{D} den Tensor der Deformationsrate mit

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]. \quad (3.47)$$

Eine weitere Integralform des Impulserhaltungssatzes ergibt sich nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf Gleichung 3.45 zu

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{u} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) dV = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \rho \mathbf{b} dV. \quad (3.48)$$

Daraus erhält man die Differentialform des Impulserhaltungssatzes:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (3.49)$$

Diese Gleichungen werden als *Navier-Stokes-Gleichungen* bezeichnet.

3.2.2. Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen

Bei vielen Fluiden kann in guter Näherung die Dichte als konstant angenommen werden, d.h. die Kompressibilität vernachlässigt werden. Eine Maßzahl für die Kompressibilität von Fluiden ist die *Mach-Zahl* Ma . Das Fluid wird als inkompressibel betrachtet, wenn diese unter 0,3 liegt:

$$Ma = \frac{u_{max}}{c} < 0,3 \quad (3.50)$$

Hierin ist u_{max} die maximal vorkommende Geschwindigkeit und c die Schallgeschwindigkeit im entsprechenden Medium. Massen- und Impulserhaltungsgleichungen vereinfachen sich unter der Annahme konstanter Dichte zu

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.51)$$

und

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}. \quad (3.52)$$

Der Spannungstensor reduziert sich unter Berücksichtigung von Gleichung 3.51 auf

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}. \quad (3.53)$$

Dann geht Gleichung 3.52 über in

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{b} \quad (3.54)$$

mit der kinematischen Viskosität $\nu = \mu/\rho$.

3.2.3. Anfangs- und Randbedingungen

Zur Lösung des Randwertproblems werden Anfangs- und Randbedingungen benötigt. Für inkompressible Fluide sind Geschwindigkeit \mathbf{u} und Druck p die Unbekannten. Für diese müssen die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = t_0$ auf dem Strömungsgebiet Ω eingeführt werden:

$$\mathbf{u}(t = t_0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{und} \quad p(t = t_0) = p_0 \quad \text{auf} \quad \Omega. \quad (3.55)$$

Desweiteren müssen Dirichlet-Randbedingungen, welche die Geschwindigkeit $\hat{\mathbf{u}}$ vorschreiben, auf dem Randbereich Γ_D und Neumann-Randbedingungen, welche den Spannungsvektor $\hat{\mathbf{t}}$ vorschreiben, auf dem Randbereich Γ_N des Strömungsgebietes eingeführt werden. Sie lauten:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \hat{\mathbf{u}} \quad \text{auf} \quad \Gamma_D \\ \mathbf{t} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{auf} \quad \Gamma_N \end{aligned} \quad (3.56)$$

mit $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ und $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$.

3.2.4. Laminare und turbulente Strömung

Man unterscheidet laminare und turbulente Strömungen. Während eine laminare Strömung eine geordnete Strömung ist, erscheint eine turbulente Strömung chaotisch. Eine turbulente Strömung ist immer instationär, dreidimensional und wirbelbehaftet. Ein Maß für das Turbulenzverhalten einer Strömung ist die dimensionslose *Reynoldszahl*

$$Re = \frac{u \cdot d}{\nu}, \quad (3.57)$$

wobei u , d und ν die charakteristische Strömungsgeschwindigkeit, die charakteristische Länge des Körpers und die kinematische Viskosität sind. Die charakteristische Länge eines Körper bestimmt sich aus den Abmessungen eines um- oder durchströmten Körpers.

Beispielsweise kann die Breite eines Widerstandskörpers als charakteristische Länge angesetzt werden. Beim Überschreiten eines kritischen Wertes Re_{krit} ist mit dem Übergang von laminarer in turbulente Strömung zu rechnen. Die Reynoldszahl ist problemabhängig, d.h. der kritische Wert für den Turbulenzumschlag ist für jede Fragestellung unterschiedlich, wie z.B für Rohrströmungen, Gerinne und freie Strömungen.

Die numerische Simulation turbulenter Strömungen ist sehr aufwendig und stellt ein eigenständiges Wissenschaftsgebiet dar. In der Turbulenzmodellierung kann man drei Hauptverfahren unterscheiden: Die *Direkte Numerische Simulation (DNS)* ist die Simulation der turbulenten Strömung mit den Navier-Stokes-Gleichungen. In diesem Fall werden räumliche und zeitliche Auflösungen bis in die kleinsten Skalen benötigt. Dies ist mit sehr hohem Rechenaufwand verbunden und in der Praxis nur für kleinste Fragestellungen möglich. Die *Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (Reynolds-averaged Navier-Stokes equations, RANS)* sind vereinfachte Navier-Stokes-Gleichungen zur Turbulenzmodellierung. Sie beruhen auf der Zerlegung der Turbulenzsignale (wie Geschwindigkeit und Druck) in einen zeitlichen Mittelwert und eine Schwankungsgröße. Diese werden in die Navier-Stokes-Gleichungen eingesetzt. Es ergeben sich zusätzliche unbekannte Terme, welche durch (empirische) *Turbulenzmodelle* beschrieben werden. Die *Large-Eddy Simulation (LES)*, auch *Grobstruktursimulation*, unterscheidet Turbulenzballen verschiedener Größenordnungen. Die großen Skalen, und damit die energiereichen großen Wirbel, werden direkt simuliert, während die kleinen über Modelle dargestellt werden.

3.2.5. Finite-Volumen-Methode

Die *Finite-Volumen-Methode (FV-Methode)* ist eine beliebte und weit verbreitete Diskretisierungsmethode zur Lösung strömungsmechanischer Probleme. Die meisten kommerziellen Programme basieren auf dieser Methode. Sie wird hier verbal erläutert. Für Weiterführendes sei auf die zahlreiche Literatur verwiesen, z.B. auf [35, 107].

Bei der FV-Methode wird das Strömungsgebiet in sich nicht überlappende Teilvolumina, die Kontrollvolumina (KV) unterteilt. Die Oberfläche der KV besteht aus Teilflächen, welche die Form eines Polygons aufweisen. Definierten Punkten werden diskrete Funktionswerte zugeordnet. Dabei werden die Variablenwerte an einem Knoten im Zentrum des KV gespeichert. Diskrete Werte auf der Oberfläche des KV und Werte im Inneren des KV müssen durch Interpolation aus den benachbarten Knotenwerten bestimmt werden.

In jedem KV gelten die Erhaltungsgleichungen. Es wird die Integralform der Navier-Stokes-Gleichungen auf jedes KV angewandt, wobei die Integrale auf der Basis der diskreten Werte numerisch approximiert werden. Das Flächenintegral setzt sich aus der Summe der Integrale der Teilflächen zusammen. Die einfachste und beliebteste Näherung des Integrals einer Teilfläche basiert nur auf einem diskreten Funktionswert in

der Mitte der Teilfläche (*Mittelpunktsregel*) und besteht somit aus dem Produkt dieses Wertes mit dem Flächeninhalt. Es sind auch Näherungen höher Ordnung möglich, für welche dann weitere Variablenwerte auf der Teilfläche benötigt werden. Die einfachste Näherung für das Volumenintegral basiert ebenfalls auf einem diskreten Funktionswert, dem Wert im Schwerpunkt des KV, und ergibt sich somit als Produkt dieses Wertes mit dem KV-Inhalt. Auch hier können Näherungen höher Ordnung unter Verwendung weiterer interpolierter Variablenwerte vorgenommen werden. Die Bestimmung der diskreten Funktionswerte geschieht durch Interpolation aus den Werten im Zentrum der KV, für welches sich verschiedene Interpolationsschemen etabliert haben. Die Bestimmung von diskreten Gradientenwerten geschieht über Differenzenquotienten auf Basis der diskreten Funktionswerte.

Durch die Approximation der Integrale der Erhaltungsgleichungen erhält man eine algebraische Gleichung für jedes KV. Das System aller Gleichungen über alle KV ergibt die genäherte Erhaltungsgleichung für das gesamte Strömungsgebiet in Form eines nicht-linearen algebraischen Gleichungssystems, welches mit den üblichen Methoden gelöst werden kann.

3.2.6. Druckkorrekturmethode

Als Lösungsverfahren für die diskreten Gleichungen finden oft die sog. *Druckkorrekturmethode* Anwendung. Diese sind gestaffelte Verfahren, bei denen die Unbekannten Geschwindigkeit und Druck iterativ gelöst werden und welche nach folgenden Prinzip aufgebaut sind: Aus den diskreten Impulsgleichungen ergibt sich ein Gleichungssystem, dessen Unbekannte die Geschwindigkeitskomponenten der drei Raumrichtungen sind. Der Druck geht hier auf der rechten Seite ein. Er kann durch Lösung des Gleichungssystems also nicht bestimmt werden, ist aber aufgrund der Kopplung von Druck und Geschwindigkeit für die Bestimmung der Geschwindigkeit notwendig. Daher wird im ersten Iterationsschritt eine Druckverteilung vorgegeben. Die daraus errechneten Geschwindigkeiten erfüllen i.d.R. nicht die Kontinuitätsgleichungen. Nun erfolgt die Korrektur der Geschwindigkeiten durch Anpassung des Druckfeldes mit dem Ziel die Impuls- und Kontinuitätsgleichungen zu erfüllen, indem eine spezielle Druckgleichung für eine Näherung des Druckfeldes gelöst wird. Bekannte Algorithmen sind beispielsweise der SIMPLE-Algorithmus und der PISO-Algorithmus [35].

3.3. Fluid-Struktur-Interaktion

Treten Wechselwirkungen zwischen Struktur und Fluid auf, so können diese nicht mehr unabhängig voneinander betrachtet werden. Die Einzelfelder sind über die gemeinsame Berandung, das FSI-Interface, gekoppelt. Sind mehrere physikalische Felder gekoppelt,

so spricht man von einem *Mehrfeldproblem*. In diesem Abschnitt wird ein Überblick über die FSI gegeben und das partitionierte Verfahren beschrieben. Weitere Themen aus dem weiten Feld der FSI werden in [23, 22] behandelt.

Die Position des FSI-Interface bestimmt sich aus den Strukturverschiebungen. Die Berandung des Fluidgebiets ist daher zeitabhängig. Dies steht im Konflikt mit der Formulierung in der Euler'schen Betrachtungsweise für raumfeste Kontrollvolumina und für ein raumfestes Strömungsgebiet. Für FSI-Fragestellungen muss die bewegliche Berandung in der Formulierung des Fluids berücksichtigt werden. Dies kann durch bewegliche Gitter und die *Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE)* Formulierung geschehen, welche in diesem Abschnitt vorgestellt werden. Dabei wird die Berandung des Fluidgebietes aus den Verformungen der Struktur bestimmt. Es handelt sich um eine *Dirichlet-Neumann Kopplung*, welche durch die Dirichlet-Randbedingungen des Fluids (die Strukturverschiebungen am FSI Interface) und die Neumann-Randbedingungen der Struktur (die Fluidlasten am FSI-Interface) charakterisiert ist. Struktur und Fluid werden durch die in Abschnitt 3.1 und 3.2 vorgestellten Grundgleichungen beschrieben. Zusätzlich müssen Massen, Impuls- und Energieerhaltung am gemeinsamen Interface gewährleistet sein, woraus sich die Kopplungsbedingungen (Abschnitt 3.3.2) ergeben. Die ALE-Methode und bewegte Gitter werden in zahlreichen Werken zur Strömungsmechanik beschrieben. Es sei hierbei auf [35] verwiesen.

Zur numerischen Behandlung von Mehrfeldproblemen werden *monolithische* oder *partitionierte* Lösungsverfahren eingesetzt. Der monolithische Ansatz ist ein Analyseverfahren, bei dem die Gleichungen des Gesamtsystems zusammengefasst und simultan gelöst werden. Dabei wird für alle Teilfelder dieselbe räumliche Diskretisierung verwendet. Die Kopplungsbedingungen sind beim monolithischen Ansatz automatisch erfüllt. I.d.R. zeichnet sich der monolithische Ansatz durch hohe Effizienz und Genauigkeit aus. Durch die unterschiedliche Beschaffenheit der Teilfelder ist das Gleichungssystem jedoch oft schlecht konditioniert.

Der partitionierte Ansatz ist ein gestaffeltes Analyseverfahren, bei dem die Einzelfelder unabhängig voneinander modelliert und gelöst werden. Die Kopplung wird in einem iterativen Verfahren über Datenaustausch der Randbedingungen zwischen den Einzelfeldern berücksichtigt. Für die Einzelfelder existieren i.d.R. optimale Diskretisierungen und spezielle bewährte Lösungsstrategien, deren Einsatz im partitionierten Ansatz möglich ist. Aufgrund der hohen Software-Modularität können beliebige individuelle und spezialisierte Berechnungsprogramme eingesetzt werden. Die Genauigkeit und Effizienz des monolithischen Ansatzes wird in der Regel nicht erreicht. In dieser Arbeit wird das partitionierte Verfahren verwendet, auf welches in Abschnitt 3.3.3 genauer eingegangen wird. Als weitere Literatur zur partitionierten Berechnung der FSI sei auf [34, 117, 89] verwiesen.

3.3.1. Bewegliche Gitter

In der Euler'schen Betrachtungsweise sind die Erhaltungsgleichungen für raumfeste Kontrollvolumina formuliert und folglich die diskreten Gleichungen für ein raumfestes Gitter (siehe Abschnitt 3.2). Bei der Lagrange'schen Betrachtungsweise bewegt sich das Gitter mit der Geschwindigkeit des Fluids, weshalb kein Massenfluss durch KV-Seitenflächen stattfindet. Für die Beschreibung des veränderlichen Fluidgebietes der FSI kann die *Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE)* Methode benutzt werden. Die ALE-Formulierung eignet sich für CFD Fragestellungen mit veränderlichem Strömungsgebiet, wie es bei der FSI der Fall ist, und ist auf der Grundlage bewegter Gitter formuliert.

Der ALE-Ansatz ist für eine beliebige Gittergeschwindigkeit \mathbf{u}_g formuliert. In den Erhaltungsgleichungen ist das Kontrollvolumen und dessen Oberfläche nicht mehr raumfest. Es müssen zeitabhängige Volumen $V(t)$ und Oberflächen $A(t)$ berücksichtigt werden. In den Erhaltungsgleichungen hat dies nur Einfluss auf den Term der lokalen Änderung der Erhaltungsgröße für das feste Kontrollvolumen, da nur dieser von der Zeit abhängt. Der Term wird in die lokale Änderung im bewegten Kontrollvolumen und den Fluss durch die bewegte Kontrollvolumen-Seitenfläche zerlegt:

$$\int_{V=konst} \frac{\partial}{\partial t} \rho \phi dV = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \phi dV - \int_{A(t)} (\rho \mathbf{u}_g \phi) \cdot \mathbf{n} dA \quad (3.58)$$

mit $\phi = \mathbf{u}$ für den Impulserhaltungssatz und $\phi = 1$ für den Massenerhaltungssatz. Damit schreiben sich Massen- und Impulserhaltungssatz (Gleichungen 3.42 und 3.45) wie folgt:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV - \int_{A(t)} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{u}_g) \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (3.59)$$

und

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV + \int_{A(t)} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{u}_g) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{A(t)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{V(t)} \rho \mathbf{b} dV. \quad (3.60)$$

Für inkompressible Fluide mit konstanter Masse ergibt sich die linke Seite von Gleichung 3.58 für $\phi = 1$ zu Null, woraus

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV = \int_{A(t)} \mathbf{u}_g \cdot \mathbf{n} dA \quad (3.61)$$

folgt. Diese Gleichung nennt man *Raumerhaltungsgesetz (Geometric Conservation Law, GCL)*. Es besagt, dass die Änderung des Volumens durch die Gittergeschwindigkeit hervorgerufen wird.

Die Position und die Geschwindigkeit der Gitterpunkte im Berechnungsgebiet werden über einen Netzverformungsalgorithmus berechnet, wobei die Verschiebungen und damit die Gitterverformungen am FSI Interface vorgeschrieben werden. Auf diese Weise wird das Fluidgitter dem Fluidgebiet durch Gitterbewegung angepasst, wobei die Topologie des Gitters erhalten bleibt. Es entsteht eine eigene Gleichung für das Fluidgitter, für die i.d.R. ein Gleichungssystem gelöst werden muss. Da nun drei gekoppelte Gleichungen für Fluidgitter, Fluid und Struktur behandelt werden müssen, spricht man bei der Benutzung der ALE-Methode für die FSI von einer *Dreifeldformulierung*.

Es gibt unterschiedliche Ansätze zur Berechnung der Netzverformung: Die einfachste Methode ist die Bestimmung der Position der Gitterpunkte durch Interpolation. Allerdings bewährt sich diese nur für einfache Gittergeometrien, wie strukturierte Gitter. Beim *Pseudo-Strukturmodell* wird das Fluidnetz mit einer fiktiven Steifigkeit \mathbf{K}_g belegt und die Netzverschiebungen \mathbf{y} dieser virtuellen elastischen Struktur berechnet. Es ergibt sich die Systemgleichung $\mathbf{K}_g \cdot \mathbf{y} = \mathbf{f}_g$, wobei \mathbf{f}_g der Lastvektor, welcher sich aus den Dirichlet Randbedingungen am Interface ergibt, ist. Das Modell lässt sich als einfaches *Dreh- und Senkfedernmodell*, welches auf der Verbindung der Gitterpunkte durch ein fiktives Feder-Netzwerk beruht, oder als *Pseudo-Materialmodell*, bei welchem die Steifigkeit auf einem fiktiven Material beruht und für welches die Gefahr von Elementverzerrungen geringer ist, schreiben. Die *Laplace-Methode* beruht auf einem Netzglättungsalgorithmus, um eine möglichst glatte Verteilung der Gitterpunkte zu erreichen.

Falls sehr große Verformungen auftreten, sind Netzverformungsalgorithmen nicht mehr geeignet, da die Elementqualität aufgrund großer Verzerrungen oder Durchdringungen zu schlecht wird. In diesem Fall wird neues Vernetzen notwendig. Neuvernetzen ist allerdings sehr aufwendig und rechenintensiv, da der Prozess für komplexe Geometrien nicht zuverlässig automatisiert werden kann. Die Interaktion und Kontrolle eines Ingenieurs ist dann notwendig. Desweiteren muss ein Datentransfer zwischen altem und neuem Netz stattfinden. Aufgrund der Nachteile ist es sinnvoll, für Fragestellungen, für welche Netzverformungsalgorithmen nicht ausreichen, raumfeste Gitter auf dem Fluidgebiet zu verwenden [116, 41].

3.3.2. Kopplungsbedingungen

Um die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie zu gewährleisten werden Kopplungsbedingungen für das FSI-Interface benötigt. Das FSI-Interface ist der Gebietsrand $\Gamma = \Gamma_{FSI} = \Gamma_S \cap \Gamma_F$, der sowohl Struktur- als auch Fluiddomain begrenzt, wobei Γ_S die Berandung des Strukturgebietes und Γ_F die Berandung des Fluidgebietes bezeichnet. Im Folgenden sind mit S indizierte Größen dem Strukturgebiet und mit F indizierte Größen dem Fluidgebiet zugeordnet. Die Kopplungsbedingungen sind die kinematischen Kontinuitätsbedingungen mit der Kontinuität der Verschiebungen und der Geschwindigkeiten

$$\mathbf{d}_{\Gamma,S} = \mathbf{d}_{\Gamma,F} \quad \text{auf } \Gamma \quad (3.62)$$

und

$$\dot{\mathbf{d}}_{\Gamma,S} = \frac{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,S}}{\partial t} = \mathbf{u}_{\Gamma,F} \quad \text{auf } \Gamma, \quad (3.63)$$

sowie die dynamische Kontinuitätsbedingung mit der Kontinuität der Oberflächenkräfte

$$\mathbf{n}_{\Gamma,S} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\Gamma,S} = \mathbf{n}_{\Gamma,F} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\Gamma,F} \quad \text{auf } \Gamma, \quad (3.64)$$

wobei \mathbf{n} der Normalenvektor auf dem FSI Interface und $\boldsymbol{\sigma}$ der Cauchy Spannungstensor des jeweiligen Feldes ist.

3.3.3. Partitioniertes Verfahren

Im partitionierten Verfahren werden die Einzelfelder Struktur und Fluid unabhängig voneinander modelliert und berechnet, wobei die Kopplung durch den Austausch der Randbedingungen durch einen Kopplungsalgorithmus berücksichtigt wird. Der Kopplungsalgorithmus hat die Kontrolle über die Berechnungsprogramme der Einzelfelder, sowie über den Datenaustausch und befindet sich somit auf einer übergeordneten Ebene. Dabei werden die Strukturverschiebung $\mathbf{d}_{\Gamma,S}$ am FSI Interface als Randbedingung an das Fluid und die Strömungskräfte $\mathbf{f}_{\Gamma,F}$ am FSI Interface als Randbedingung an die Struktur übergeben. Die Berechnung der Einzelfelder auf Basis aktualisierter Randbedingungen zur Erfüllung der Kopplungsbedingungen geschieht in einem iterativen Ablauf. In der Berechnung wird die Erfüllung der Kontinuität der Verschiebungen 3.62 und der Oberflächenkräfte 3.64 gefordert, da die Zeitschrittverfahren auf primalen Variablen, z.B. den Verschiebungen \mathbf{d} , beruhen und daraus die weiteren Variablen, z.B. die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}$, berechnet werden. Die Strömungskräfte werden in der Regel in Form der Oberflächendrücke übergeben. In diesem Fall wird der meist sehr geringe Anteil der tangentialen Schubspannungen auf der Oberfläche vernachlässigt.

Der partitionierte Ansatz bietet aufgrund der unabhängigen Behandlung der Einzelfelder Austauschbarkeit der Softwaremodule und die Möglichkeit, die am besten geeignete Software für die Berechnung von Struktur und Fluid einzusetzen. Somit kann ein weites Feld an Anwendungen behandelt werden. Dahingegen kann der monolithische Ansatz immer nur spezifische Fragestellungen behandeln. Aufgrund des modularen Softwaredesigns ist der partitionierte Ansatz in der Ingenieurpraxis besonders relevant, da vorhandene gut bekannte Software ohne hohen Aufwand gekoppelt werden kann. Der Einsatz spezieller Software bringt auch die Möglichkeit, optimale räumliche Diskretisierung der Gebiete vorzunehmen. Dabei entsteht am FSI-Interface ein Oberflächennetz,

welches auf Struktur- und Fluidseite i.d.R. nicht identisch ist. Man spricht von *nicht-koinzidenten Netzen* (*non-matching meshes*). Zur Handhabung des Datentransfers am nicht-koinzidenten Oberflächennetz sind Datentransfermethoden, wie beispielweise eine Interpolation, nötig. Datentransfermethoden sind ein zentrales Thema der FSI. Sie werden in Kapitel 4 detailliert behandelt.

Bei den Berechnungsverfahren unterscheidet man *sequentiell gestaffelte* und *iterativ gestaffelte Verfahren*. Bei sequentiell gestaffelten Verfahren (auch als *schwach gekoppelte* oder *explizite Verfahren* bezeichnet) findet ein einziger Datenaustausch pro Zeitschritt statt. In Abbildung 3.2 ist das Verfahren schematisch dargestellt. Nach der Übergabe der Verschiebungen \mathbf{d}_Γ an den Fluidlöser zur Zeit t wird die Berechnung des Fluids ausgeführt. Auf Basis der sich dann ergebenden Strömungslasten \mathbf{f}_Γ wird die Berechnung der Struktur für den nächsten Zeitschritt $t + 1$ fortgesetzt. In diesem Fall ist nur die Kontinuität der Verschiebung erfüllt, nicht aber die Kontinuität der Kräfte. Das Verfahren ist wenig stabil und damit für viele Fragestellungen der FSI ungeeignet, aufgrund des unmittelbaren Fortschreitens in der Zeit jedoch sehr effizient.

Bei iterativ gestaffelten Verfahren (auch als *stark gekoppelte* oder *implizite Verfahren* bezeichnet) wird der Datenaustausch in einem Zeitschritt so lange wiederholt, bis die Kontinuität der Verschiebungen und der Kräfte erfüllt ist. In Abbildung 3.2 ist das Verfahren schematisch dargestellt. Nach der Übergabe der Verschiebungen \mathbf{d}_Γ findet die Berechnung des Fluids zum Zeitpunkt t unter diesen Randbedingungen statt. Auf Grundlage der sich ergebenden Strömungskräfte \mathbf{f}_Γ wird die Struktur zum Zeitpunkt t erneut berechnet und die resultierenden Verschiebungen innerhalb desselben Zeitschrittes t erneut übergeben. Die Schleife wird beendet, wenn die Konvergenzkriterien – die Kopplungsbedingungen – erfüllt sind. Iterativ gestaffelte Verfahren zeichnen sich durch hohe Genauigkeit und Stabilität aus, fordern allerdings höhere Rechenkosten. Sie sind Grundlage dieser Arbeit. Für eine detailliertere Beschreibung im Zusammenhang mit dieser Arbeit sei auf die Arbeiten [74, 38, 119] verwiesen.

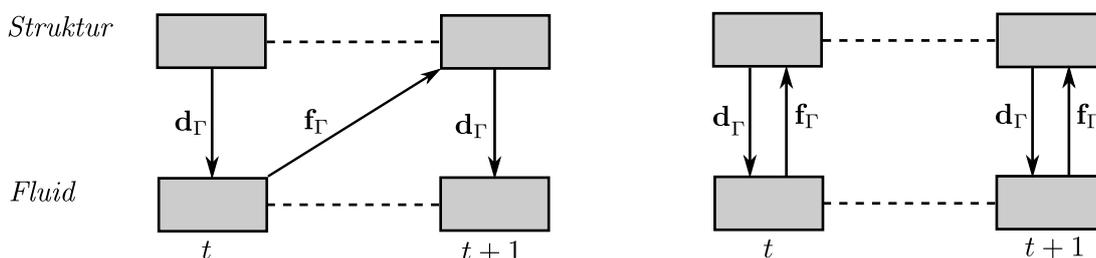


Abbildung 3.2.: Links: Sequentiell gestaffeltes Kopplungsverfahren. Rechts: Iterativ gestaffeltes Kopplungsverfahren.

Die Berechnung des Strukturproblems kann durch die nichtlineare Funktion \mathcal{S} dargestellt werden, durch welche die Strukturverschiebungen am FSI-Interface in Abhängigkeit

der Strömungskräfte am FSI-Interface ausgedrückt werden:

$$\mathbf{d}_\Gamma = \mathcal{S}(\mathbf{f}_\Gamma) \quad (3.65)$$

Equivalent werden die Strömungskräfte am FSI-Interface in Abhängigkeit der Strukturverschiebungen am FSI-Interface über die nichtlineare Funktion \mathcal{F} dargestellt:

$$\mathbf{f}_\Gamma = \mathcal{F}(\mathbf{d}_\Gamma) \quad (3.66)$$

Das gekoppelte Problem läßt sich damit wie folgt darstellen:

$$\mathbf{d}_\Gamma = \mathcal{S} \circ \mathcal{F}(\mathbf{d}_\Gamma) \quad \text{oder} \quad \mathbf{f}_\Gamma = \mathcal{F} \circ \mathcal{S}(\mathbf{f}_\Gamma). \quad (3.67)$$

Die iterativ gestaffelten Kopplungsalgorithmen beruhen auf Iterationen innerhalb jedes Zeitschrittes. Konvergenz ist erreicht, wenn die Kopplungsbedingungen erfüllt sind. Für die Kontinuität der Verschiebungen ist dies der Fall, wenn die Strukturverschiebungen \mathbf{d}_Γ sich durch weitere Iterationen nicht mehr verändern und die Gleichung

$$\mathbf{d}_\Gamma = \mathcal{S} \circ \mathcal{F}(\mathbf{d}_\Gamma) \quad (3.68)$$

erfüllt ist.

Bei der *Fix-Punkt-Iteration* lautet die Iterationsvorschrift entsprechend

$$\mathbf{d}_\Gamma^{(l+1)} = \mathcal{S} \circ \mathcal{F}(\mathbf{d}_\Gamma^{(l)}), \quad (3.69)$$

mit dem Iterationsindex l innerhalb eines Zeitschrittes. Dies bedeutet, dass Struktur- und Fluidproblem mit aktualisierten Randbedingungen in Folge gelöst werden. Der Startwert $\mathbf{d}_\Gamma^{(0)}$ wird über einen Prädiktor vorgegeben, welcher aus den Ergebnissen der letzten Zeitschritte bestimmt wird. Das Inkrement der Verschiebungen ist

$$\Delta \mathbf{d}_\Gamma^{(l+1)} = \mathbf{d}_\Gamma^{(l+1)} - \mathbf{d}_\Gamma^{(l)}. \quad (3.70)$$

Zur Verbesserung von Stabilität und Effizienz empfiehlt sich eine Relaxation anzuwenden. Dabei wird nicht die gesamte Summe $\mathbf{d}_\Gamma^{(l)} + \Delta \mathbf{d}_\Gamma^{(l+1)}$ als neue Randbedingung an das Fluid übergeben, sondern nur ein definierter Bruchteil des Inkrements auf den vorhergehenden Wert der Verschiebung addiert. Durch Relaxation werden kleinere Änderung übergeben, wodurch das Verfahren stabiler wird. Der Relaxationsfaktor, der mit dem Inkrement multipliziert wird, kann konstant oder dynamisch sein. Da für verhältnismäßig kleine Inkremente, also kleine Veränderungen, weniger Relaxation benötigt wird als für große Inkremente, ist ein dynamischer Faktor i.d.R. effizienter. Ein Beispiel für dynamische Unterrelaxation ist die Aitken's Δ^2 -Methode [90, 75].

Weit verbreitet sind ebenfalls Kopplungsalgorithmen, welche auf der Newton-Raphson-Methode als Näherungsverfahren zur Nullstellensuche nichtlinearer Gleichungen, basieren [28]. Sie werden kurz als *Newton-Methoden* bezeichnet. Sie orientieren sich am Residuum der zu erfüllenden Gleichung

$$r(\mathbf{d}_\Gamma) = \mathcal{S} \circ \mathcal{F}(\mathbf{d}_\Gamma) - \mathbf{d}_\Gamma, \quad (3.71)$$

welches bei Konvergenz verschwindet und für welches die Nullstelle gesucht wird. Die Iterationsvorschrift lautet gemäß der Newton-Raphson-Methode:

$$\mathbf{d}_\Gamma^{(l+1)} = \mathbf{d}_\Gamma^{(l)} - \left(\frac{\partial r(\mathbf{d}_\Gamma)}{\partial \mathbf{d}_\Gamma} \right)^{-1} r(\mathbf{d}_\Gamma). \quad (3.72)$$

Die Schwierigkeit dieses Ansatzes ist die Bestimmung der Jacobimatrix $\partial r(\mathbf{d}_\Gamma)/\partial \mathbf{d}_\Gamma$, für deren Näherung unterschiedliche Verfahren existieren [85, 115].

3.4. Optimierung in der Fluid-Struktur-Interaktion

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über die Optimierung in der Fluid-Struktur-Interaktion gegeben und es erfolgt eine Einordnung dieser Arbeit in das wissenschaftliche Umfeld. Die detaillierte Beschreibung der Strategien für die Gradientenmethode und die Sensitivitätsanalyse für den partitionierten Ansatz erfolgt im weiteren Verlauf dieser Arbeit ab Kapitel 5.

Die Optimierung gekoppelter Probleme baut auf umfangreicher Erfahrung im den Gebiet der Optimierung im den Bereichen Struktur- und Strömungsmechanik auf. Bei der Optimierung von FSI-Problemen ist das zu Grunde liegende System gekoppelt, was in der Optimierung auch Einfluss auf die Sensitivitätsanalyse hat. Die Optimierungsmethoden, wie z.B. die Optimierungsalgorithmen sind dieselben wie bei nicht-gekoppelten Problemen. Erwähnenswert sind die Arbeiten von Arora, Haftka, Van Keulen und Vanderplaats im Bereich der Strukturoptimierung. Sie befassen sich mit den grundlegenden Methoden der Optimierung [6], Formoptimierung [114, 50] und Sensitivitätsanalyse [112, 53], die auf Mehrfeldprobleme übertragbar sind. Im Bereich der Optimierung in der Fluidmechanik befassen sich u.a. die Werke von Pironneau, Mohammadi, Jameson, Gunzburger, Othmer, Reuther, Soto, sowie von Thévenin und Janiga mit aerodynamischer Formoptimierung [103, 69, 99, 87, 86, 88, 67, 68, 65] und kontinuierlichen Ansätzen der Sensitivitätsanalyse [66, 111, 110, 48, 49, 95, 96].

Da es sich bei FSI-Fragestellungen typischerweise um große Probleme mit umfangreichen Berechnungen handelt, haben sich schnell konvergierenden Gradientenmethoden durchgesetzt, durch welche der Rechenaufwand eingeschränkt werden kann. Dennoch ist der Aufwand einer Optimierung immer das Vielfache des Aufwandes einer Systemanalyse. Gradientenmethoden erfordern eine Sensitivitätsanalyse, die Herausforderung bei der Behandlung dieses Themas. Gradientenbasierte Optimierung und gekoppelte diskrete Sensitivitätsanalyse von Mehrfeldproblemen behandeln u.a. die Werke von Sobieszanski-Sobieski, Maute und Martins [108, 109, 83, 84, 80, 81]. Die Verfahren der Sensitivitätsanalyse lassen sich hauptsächlich in kontinuierliche und diskrete Ansätze sowie in Ansätze mit algorithmischer Differentiation unterteilen (siehe Kapitel 5). Kontinuierliche Ansätze sind in der Fluidmechanik weit verbreitet. Klassische Vertreter dieses Ansatzes

sind Jameson, Othmer, Löhner und Soto. So fanden kontinuierliche Ansätze auch Einzug in gekoppelte Probleme, z.B. in Reuthers Arbeiten [104]. Diskrete Ansätze für gekoppelte Probleme werden von Sobieszcanski-Sobieski [108, 109], Maute [83, 84, 9, 10, 82], Martins [80, 81] und Bletzinger [61, 55] präsentiert. Automatische bzw. algorithmische Differenziation bietet eine weitere Möglichkeit der Bestimmung von Sensitivitäten. Mohammadi und Pironneau [88, 87, 86] nutzen diese Methode intensiv für die reine CFD-Optimierung. Eine ausführliche Auseinandersetzung mit wissenschaftlichen Arbeiten im Bereich der Sensitivitätsanalyse, insbesondere für die diskrete Methode im partitionierten Ansatz, erfolgt in Kapitel 5.

Bei der Optimierung in der FSI hat das Berechnungsverfahren, welches in die Optimierung integriert wird, Auswirkungen auf die Sensitivitätsanalyse und natürlich auf das Softwaredesign. So zieht ein partitioniertes Verfahren, bei dem unterschiedliche Berechnungsprogramme interagieren, eine partitionierte Sensitivitätsanalyse nach sich, bei der dieselben Programme ebenfalls interagieren müssen. Auch das Diskretisierungsverfahren kann Einfluss auf die diskrete Sensitivitätsanalyse haben. Kapitel 4 und 5 befassen sich eingehend mit diesen Themen.

Desweiteren ist die Größenordnung der Formänderung in der Formoptimierung in der FSI relevant, denn was für große Verformungen in der FSI gilt, gilt in der Optimierung analog für große Formänderungen: Es ist ein leistungsfähiger Algorithmus für die Netzbewegung erforderlich. Wenn die Formänderungen zu groß werden, können diese von Netzverformungsalgorithmen nicht mehr gehandhabt werden. Da Neuvernetzen nicht zweckmäßig ist (vgl. Abschnitt 3.3), kann der Einsatz von festen Netzen (fixed grids) notwendig werden. Formoptimierung bedeutet aber nicht immer große Formvariationen: Oft sind die Schranken eng gesetzt. Bei der Steifigkeitsoptimierung, bei der optimale Welligkeit einer Oberfläche, deren Lage vorgegeben ist, gesucht wird, treten keine großen Formänderungen auf [26, 36]. Ein Sonderfall der Formoptimierung ist die Optimierung von Membranstrukturen (siehe Kap. 7). Hier wird die Form u.a. durch Vorspannung in Membran und Randseilen beeinflusst. Eine kleine Formänderung kann dann großen Einfluß auf das Systemverhalten haben, da sich die Steifigkeit der Struktur verändert.

Im Bereich der Optimierung und Sensitivitätsanalyse von FSI-Problemen ist zu beobachten, dass die meisten wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Bereich der CFD heraus entstanden sind und Anwendungen aus Luft- und Raumfahrt fokussieren. Die Forschergruppen (Sobieszcanski-Sobieski, Maute, Martins) agieren meist im amerikanischen Raum (USA, Kanada). In Europa befasste sich die dänische Gruppe um Lund [79, 78, 91] einige Zeit mit der Optimierung im partitionierten Ansatz. Innerhalb der deutschen DFG geförderten Forschergruppe 493 - Fluid-Struktur-Wechselwirkung: Modellierung, Simulation, Optimierung [23, 55] - aus der auch diese Arbeit hervorgeht - beschäftigt sich noch die Gruppe um Schäfer [12] mit verschiedenartigen Optimierungsmethoden im Bereich der FSI.

Thema dieser Arbeit sind Gradientenmethoden der Optimierung und die diskrete Sensitivitätsanalyse. Für Mehrfeldprobleme muss die Formulierung der Sensitivitätsanalyse entsprechend angepasst werden: Die diskrete Systemgleichung setzt sich dann aus den diskreten Gleichungen der Einzelfelder zusammen. Für die Dreifeldformulierung aus Struktur \mathcal{S} , Fluidnetz \mathcal{M} und Fluid \mathcal{F} schreibt sich das Residuum \mathcal{R} wie folgt:

$$\mathcal{R}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \begin{Bmatrix} \mathcal{S}(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) \\ \mathcal{M}(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) \\ \mathcal{F}(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.73)$$

Dabei ist der Vektor der zugehörigen Systemvariablen $\mathbf{r}^T = [\mathbf{d}^T \quad \mathbf{y}^T \quad \mathbf{q}^T]$, bestehend aus den diskreten Strukturverschiebungen \mathbf{d} , den Netzverschiebungen \mathbf{y} und den Fluidvariablen \mathbf{q} . Die Kopplung des Systems überträgt sich in die Sensitivitätsgleichung, welche sich dann wie folgt schreibt:

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{s}} = 0 \quad (3.74)$$

mit

$$\frac{d\mathcal{R}}{d\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial \mathbf{r}_1} & \dots & \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial \mathbf{r}_{n_r}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{R}_{n_r}}{\partial \mathbf{r}_1} & \dots & \frac{\partial \mathcal{R}_{n_r}}{\partial \mathbf{r}_{n_r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

$\frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial \mathbf{r}_i}$ sind Untermatrizen, die den verschiedenen Feldern zugeordnet sind. Dabei stehen in der Diagonalen Terme, die nur einem Feld zugeordnet sind, und außerhalb gemischte Terme. Die gemischten Terme sind Gradienteninformationen, welche die Änderung eines Feldes bezüglich der Systemvariablen eines anderen Feldes ausdrücken. Die Sensitivitätsgleichung lässt sich daher nicht mehr so leicht vereinfachen wie in der reinen Strukturmechanik, wo der Term $\frac{d\mathcal{R}}{d\mathbf{r}}$ mit $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ und $\mathbf{r} = \mathbf{d}$ der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} (Abschnitt 2.4) entspricht.

4. Datentransfer an nicht-koinzidenten Oberflächennetzen

Die Simulation der Fluid-Struktur-Interaktion beschreibt die beiden physikalischen Felder Struktur und Fluid in ihrer Wechselwirkung. Die Felder können dabei auf der Grundlage unterschiedlicher numerischer Modelle dargestellt werden, welche über eine Schnittstelle verknüpft werden. Diese Methode ist charakteristisch für das partitionierte Verfahren (Abschnitt 3.3.3). Dabei kommen unabhängige Simulationsprogramme zur Berechnung der Einzelfelder Struktur und Fluid zur Anwendung, wobei die Wechselwirkung durch den Datenaustausch in einem iterativen Prozess abgebildet wird. Ein wesentlicher Vorteil des partitionierten Verfahrens ist es, dass für jedes Feld die optimale räumliche Diskretisierung verwendet werden kann. In der Regel ist der Grad der Diskretisierungen von Struktur und Fluid unterschiedlich. Das Berechnungsgitter des Fluidgebietes ist dabei meist wesentlich feiner als das des Strukturgebietes. Am gemeinsamen Interface, an dem die Berechnungsgebiete von Struktur und Fluid in Kontakt stehen, liegen dann Oberflächennetze vor, welche struktur- und fluidseitig nicht einheitlich sind. Man spricht von *nicht-koinzidenten* Oberflächennetzen. Es ist ein Datentransfer an den nicht-koinzidenten Netzen erforderlich, welcher von einer Schnittstellensoftware zur Kopplung der Berechnungscodes übernommen werden kann. In diesem Kapitel werden Methoden des Datentransfers erläutert, auch im Hinblick auf die Sensitivitätsanalyse. Weiterhin wird eine Algorithmik und das Kopplungstool *CoMA* vorgestellt.

4.1. Einleitung

Abbildung 4.1 zeigt ein Schema zweier Berechnungsgebiete Ω_F und Ω_S mit unterschiedlich feiner räumlicher Diskretisierung. Die Oberflächennetze am gemeinsamen Interface $\Gamma = \Gamma_F = \Gamma_S$ sind nicht-koinzident. Weiterhin können die Oberflächennetze *nicht-konform* sein, d.h. die Oberflächen der diskreten Modelle weichen voneinander ab und es können Lücken und Überschneidungen der Netze vorliegen. Es gilt $\Gamma_F \neq \Gamma_S$. Abbildung 4.2 verdeutlicht den Unterschied zwischen nicht-koinzidenten, konformen und nicht-koinzidenten, nicht-konformen Netz in vereinfachter eindimensionaler Darstellung:

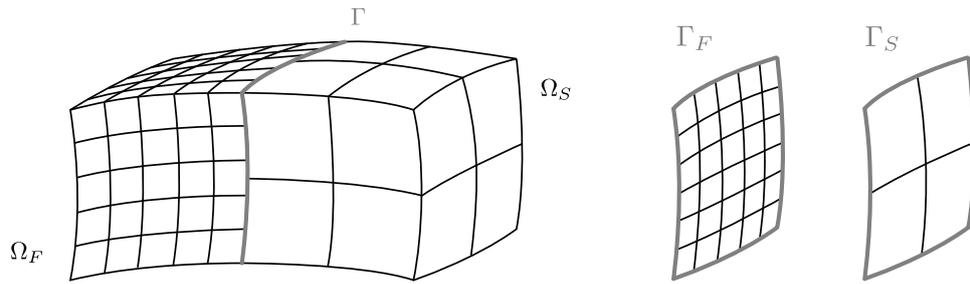


Abbildung 4.1.: Schema zweier Berechnungsgebiete Ω_F und Ω_S mit unterschiedlich feiner räumlicher Diskretisierung und zugehörige Oberflächennetze am gemeinsamen Interface $\Gamma = \Gamma_F = \Gamma_S$.

Beide Oberflächennetze sind Näherung der tatsächlichen Interfacegeometrie. Liegen die Netze aufeinander und besitzen somit dieselbe Geometrie, wie links dargestellt, so werde die Netze als konform bezeichnet. Andernfalls werden sie als nicht-konform bezeichnet. In der Praxis ist das Auftreten von konformen oder nicht-konformen Netzen von der Technik der Vernetzung abhängig. Werden die Berechnungsgebiete unabhängig voneinander auf der Grundlage der tatsächlichen Geometrie vernetzt, so erhält man in der Regel nicht-konforme Netze. Es existieren aber auch Vernetzungstools, welche eine Vernetzung auf der Basis vorhandener Netze bzw. Berandungen ermöglichen, wodurch sich nicht-koinzidente, aber konforme Netze generieren lassen. Allerdings ist zu bemerken, dass bei praxisrelevanten Anwendungen oft nicht-konforme Netze zweckmäßig sind. Dies liegt daran, dass die Berandung des Fluidgebietes für eine korrekte Strömungssimulation möglichst realitätsnah modelliert werden muss und sich somit an der exakten Geometrie orientiert. Für die Struktur ist dagegen meist eine grobe Diskretisierung ausreichend, was bei gekrümmten Oberflächen nicht-konforme Netze zur Folge hat.

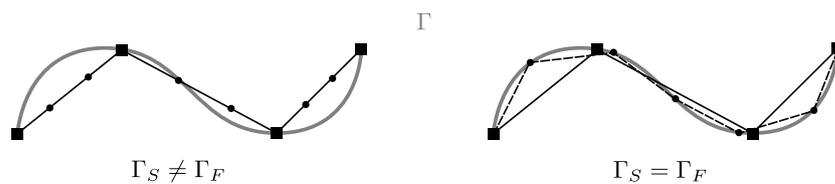


Abbildung 4.2.: Konformes und nicht-konformes Netz: Die graue Linie verdeutlicht die Geometrie des Interface Γ . Die Knoten der beiden Netze werden durch die schwarzen Kreise und Vierecke beschrieben. Links: Nicht-koinzidentes, konformes Netz, bei welchem die Knoten von Netz 1 (schwarze Kreise) auf den Elementen von Netz 2 liegen. Die Netze besitzen somit dieselbe Geometrie. Rechts: Nicht-koinzidentes, nicht-konformes Netz, bei welchem die Knoten der beiden Netze auf der Originalgeometrie liegen und die Netze somit eine leicht unterschiedliche Geometrie besitzen.

Struktur- und Fluidgleichungen sind über die Kopplungsbedingungen (Abschnitt 3.3.2) gekoppelt. Sie besagen, dass Verschiebungen und Kräfte am Interface identisch sind. Beim Datentransfer müssen diese Bedingungen erfüllt werden. Die Daten, welche zwischen den Oberflächennetzen übertragen werden müssen, sind die Position des Interfaces in Form von Strukturverschiebungen und die Strömungslasten in Form von Drücken oder Knotenkräften. Verschiebungen und Drücke werden im Folgenden als *Feldgrößen* bezeichnet. Das Feld – das Verschiebungsfeld oder die Druckverteilung – wird dabei durch die diskreten Knotenwerte und die elementspezifischen Formfunktionen beschrieben. Hier besteht die Aufgabe des Datentransfers in der Übertragung des Feldes vom *Ursprungsnetz* auf das *Zielnetz*, indem die entsprechenden Knotenwerte für das Zielnetz gefunden werden. Kräfte sind dahingegen *aufintegrierte Größen*, welche kein Feld beschreiben und nur an den Elementknoten wirken. Beim Datentransfer müssen die entsprechenden Knotenkräfte des Zielnetzes gefunden werden. Methoden des Datentransfers werden in Abschnitt 4.2 erläutert.

Bei der gradientenbasierten Optimierung von FSI-Problemen findet in der Sensitivitätsanalyse ein Datentransfer statt. Diesem ist besondere Beachtung zu schenken, da hier der Transfer von Sensitivitätsinformationen stattfindet und die Transfervorschrift für bestimmte Gradienten komplexer ist. Für den Transfer der Ableitungen einer netzunabhängigen Größe nach einer netzunabhängigen Größe ist die Transfervorschrift dieselbe wie für den Transfer der netzunabhängigen Größe. Der Transfer der Ableitungen einer netzunabhängigen Größe nach einer netzunabhängigen Größe kann dahingegen nicht nach demselben Schema erfolgen, da hier die Inverse der Transfermatrix benötigt wird. In Abschnitt 4.3 wird darauf genauer eingegangen.

In dieser Arbeit wird der Datentransfer durch eine Kopplungsschnittstelle, welche auch Kommunikation und Prozesssteuerung der partitionierten FSI-Berechnung übernimmt, durchgeführt. Abschnitt 4.4 widmet sich der Algorithmik des Datentransfers. In Abschnitt 4.5 wird die Kopplungsschnittstelle *CoMA* für den Datentransfer in Berechnung und Optimierung vorgestellt.

Bemerkung: Der Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz ist nicht nur für die Fluid-Struktur-Interaktion von Bedeutung. Er muss bei allen Mehrfeldproblemen mit unterschiedlicher Diskretisierung der Felder vorgenommen werden. Bei der FSI handelt es sich um ein oberflächengekoppeltes Problem. Hier stehen die beiden Berechnungsgebiete an einer gemeinsamen Oberfläche in Kontakt und sind über die Variablen an diesem Interface gekoppelt. Volumengekoppelte Probleme, bei denen die Kopplung über die Variablen des gesamten Berechnungsgebietes oder eines Teils dessen besteht, benötigen einen Datentransfer zwischen dreidimensionalen Volumennetzen, welche im selben Gebiet definiert sind.

4.2. Methoden des Datentransfers

Der Zusammenhang zwischen einer Variablenverteilung des Zielnetzes a_Z und derselben Variablenverteilung des Ursprungsnetzes a_U lässt sich allgemein über einen Transferoperator \mathcal{T} ausdrücken:

$$a_Z = \mathcal{T}(a_U) \quad \text{und} \quad a_U = \mathcal{T}^{-1}(a_Z) \quad (4.1)$$

Da die Variablen immer in diskreter Form vorliegen, werden im Folgenden nur diskrete Variablen behandelt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf das Überstreichen dieser verzichtet und die Darstellung erfolgt durch fettgedruckte Buchstaben. Der Zusammenhang der diskreten Variablen \mathbf{a}_Z und \mathbf{a}_U lässt sich über die Transfermatrix \mathbf{T} ausdrücken:

$$\mathbf{a}_Z = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_U \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_U = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{a}_Z \quad (4.2)$$

Für den Datentransfer an nicht-koinzidenten Netzen lassen sich unterschiedliche Methoden in der Literatur finden [45, 32, 62, 63, 27, 21, 29]. Für die Datentransfermethoden bestehen die Anforderungen, die beste Approximation einer Variablenverteilung auf dem Zielnetz zu liefern, die Konservativität sowie die Kopplungsbedingungen nicht zu verletzen.

Die einfachste Methode ist die schlichte Übernahme des Wertes des nächsten Knotens des Ursprungsnetzes für einen Knoten des Zielnetzes. Diese Methode ist allerdings sehr ungenau und daher nur für koinzidente oder nahezu koinzidente Netze sinnvoll. Die Transfermatrix \mathbf{T} ist dann eine binäre Matrix. Gelegentlich findet man hierfür die Bezeichnung „Nearest Neighbor Interpolation“ in der Literatur. Diese einfache Methode ist jedoch unbedingt von der *Interpolationsmethode* zu unterscheiden.

Wesentlich höhere Genauigkeit erzielt man mit der *Interpolationsmethode*, indem man die Netze aufeinander projiziert und damit die gegenseitige Lage der Netzknoten zueinander bestimmt. Der Variablenwert am Projektionspunkt lässt sich dann auf der Grundlage der Formfunktionen interpolieren und für den Knoten des Zielnetzes übernehmen.

Bei der *auf gewichteten Residuen basierenden Methode* wird die Gleichheit der Variablenverteilungen auf den beiden Netzen im schwachen Sinne gefordert. Hieraus resultiert ein Gleichungssystem, welches für die gesuchten diskreten Variablen gelöst wird.

Im Folgenden wird speziell auf Struktur- und Fluidnetz eingegangen und alle Formulierungen bezüglich dieser gemacht. Die Transfervariablen sind hier die Strukturverschiebungen \mathbf{d} , die Kräfte \mathbf{f} oder der Druck \mathbf{p} . Im Falle der Verschiebungen ist das Strukturnetz das Ursprungsnetz und das Fluidnetz das Zielnetz. Im Falle der Kräfte oder Drücke erfolgt der Transfer von Fluid- zu Strukturnetz. Dabei bedeutet der Index F, dass eine Variable dem Fluidnetz zugehörig ist. Der Index S bedeutet, dass die Variable auf dem

Strukturnetz definiert ist. Desweiteren sei bemerkt, dass in diesem Kapitel immer von Variablen auf dem FSI-Interface Γ die Rede ist, welche von den Variablen im Gebietsinneren $\Omega \setminus \Gamma$ zu unterscheiden sind. Auf die Indizierung mit Γ wird zunächst zum Zwecke der einfacheren Darstellung verzichtet. Die Bezeichnung Netz ist im Rahmen dieses Kapitels immer als Oberflächennetz zu verstehen.

4.2.1. Energiebilanz

Im Folgenden sei \mathbf{T}_d für den Transfer der diskreten Verschiebungen \mathbf{d} wie folgt definiert:

$$\mathbf{d}_F = \mathbf{T}_d \cdot \mathbf{d}_S \quad (4.3)$$

Von Farhat [32, 31] wird erstmals die Erhaltung der Energie am Interface beim wechselseitigen Datentransfer gefordert. Diese Forderung ist erfüllt, wenn die virtuelle Arbeit am Interface auf der Strukturseite gleich der virtuellen Arbeit am Interface auf der Fluidseite ist:

$$\delta W_S = \delta W_F \quad (4.4)$$

Die virtuellen Arbeiten sind die Produkte aus den jeweiligen Knotenkräften und Knotenverschiebungen

$$\delta W_S = \mathbf{f}_S^T \cdot \delta \mathbf{d}_S \quad \text{und} \quad \delta W_F = \mathbf{f}_F^T \cdot \delta \mathbf{d}_F, \quad (4.5)$$

mit den Knotenkräften \mathbf{f}_S und \mathbf{f}_F und den Knotenverschiebungen \mathbf{d}_S und \mathbf{d}_F . Mit Gleichung 4.3 wird Gleichung 4.4 zu

$$\delta W_F = \mathbf{f}_F^T \cdot \delta \mathbf{d}_F = \mathbf{f}_F^T \cdot \mathbf{T}_d \cdot \delta \mathbf{d}_S = \mathbf{f}_S^T \cdot \delta \mathbf{d}_S = \delta W_S, \quad (4.6)$$

woraus

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{T}_d^T \cdot \mathbf{f}_F \quad (4.7)$$

folgt. Damit ist aus dem Zusammenhang der Verschiebungen (Gleichung 4.3) der Zusammenhang der Kräfte von Struktur- und Fluidnetz abgeleitet. Gleichungen 4.3 und 4.7 gelten allgemein für alle Datentransfermethoden.

4.2.2. Interpolation und lastkonservative Summation

Der Interpolationsmethode liegt der Gedanke zugrunde, den Knotenwert des Zielnetzes aus der Variablenverteilung auf dem Ursprungsnetz zu interpolieren. Aus der Energiebilanz ergibt sich hieraus die Vorschrift für den Transfer der Kräfte, die lastkonservative Summation. Diese Methode ist sehr beliebt, da sie gute Genauigkeit und Effizienz verspricht. Vorgestellt wird die Interpolationsmethode u. a. in [32, 27, 21]. Die lastkonservative Summation wird zudem in [62, 63] behandelt.

4.2.2.1. Ansatz

Es sei hier ein Knoten j des Fluidnetzes betrachtet, für den es den Knotenwert der Verschiebung $\mathbf{d}_{F,j}$ zu ermitteln gilt. Hierzu muss zunächst das Element des Strukturnetzes, in welchem der Fluidknoten (bzw. sein Projektionspunkt) liegt, bekannt sein. Dann werden die lokalen Koordinaten des Fluidknotens (bzw. seines Projektionspunktes) ξ_j und η_j in diesem Element bestimmt. Auf Grundlage dieser lokalen Koordinaten kann der Wert der Verschiebung an dieser Stelle über die Formfunktionen $N_{S,i}$ der Struktur ermittelt werden. Der Wert wird als Knotenwert für den Fluidknoten übernommen. Dies lässt sich wie folgt schreiben:

$$\mathbf{d}_{F,j} = \sum_{i=1}^{n_S} N_{S,i}(\xi_j, \eta_j) \cdot \mathbf{d}_{S,i} \quad (4.8)$$

Dabei ist $\mathbf{d}_{S,i}$ die Verschiebung des Knotens i auf dem Strukturnetz und n_S die Anzahl der Knoten des Strukturnetzes. Die linke Grafik aus Abbildung 4.3 veranschaulicht das Vorgehen: Hier sind Struktur- und Fluidnetz aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht aufeinanderliegend dargestellt. Man erkennt den Projektionspunkt des Fluidknotens auf dem Element des Strukturnetzes. Der Verschiebungswert an dieser Stelle wird auf das Fluidnetz übertragen. Verfährt man in dieser Weise für alle Knoten $j = 1 \dots n_F$ erhält jeder Knoten des Fluidnetzes einen Verschiebungswert.

Es ist zu bemerken, dass die Gleichheit der Variablenverteilung bei der Interpolationsmethode nicht gegeben ist. Konservativ ist dieses Verfahren nur dann, wenn der aus der Interpolationsmethode gemäß 4.2.1 resultierende Lasttransfer stattfindet.

Wird die Erhaltung der Energie am Interface gefordert erhält man unter Berücksichtigung von Gleichung 4.8

$$\begin{aligned} \delta W_F &= \sum_{j=1}^{n_F} \mathbf{f}_{F,j} \cdot \delta \mathbf{d}_{F,j} = \sum_{j=1}^{n_F} \mathbf{f}_{F,j} \cdot \sum_{i=1}^{n_S} N_{S,i}(\xi_j, \eta_j) \delta \mathbf{d}_{S,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n_S} \sum_{j=1}^{n_F} \mathbf{f}_{F,j} \cdot N_{S,i}(\xi_j, \eta_j) \delta \mathbf{d}_{S,i} = \sum_{i=1}^{n_S} \mathbf{f}_{S,i} \cdot \delta \mathbf{d}_{S,i} = \delta W_S, \end{aligned} \quad (4.9)$$

mit der Anzahl der Fluidknoten n_F . Hieraus ergibt sich dann eine Formulierung für den Transfer der Kräfte \mathbf{f} von Fluid- auf das Strukturnetz:

$$\mathbf{f}_{S,i} = \sum_{j=1}^{n_F} N_{S,i}(\xi_j, \eta_j) \cdot \mathbf{f}_{F,j} \quad (4.10)$$

Diese Vorschrift lässt sich wie folgt interpretieren: Die gesuchte Kraft am Strukturknoten i ist eine, mit dem Funktionswert der zugehörigen Formfunktionen am Projektionspunkt

des Fluidknotens gewichtete, Summe der Kräfte der Fluidknoten. Anhand der rechten Grafik aus Abbildung 4.3 lässt sich dies anschaulich erklären: Betrachtet sei ein Fluidknoten j mit der Kraft $\mathbf{f}_{F,j}$, welche auf die Strukturseite übertragen werden soll. Der Projektionspunkt dieses Knotens mit den lokalen Koordinaten ξ_j und η_j entspricht dem Ort, an welchem die Kraft einwirkt. Diese Kraft muss den Strukturknoten zugeordnet werden. Nach obiger Formulierung geschieht dies durch anteiliges Aufteilen der Kraft auf die Knoten, deren zugehörige Formfunktionen am Projektionspunkt ungleich Null sind. In der Regel ist dies ein Aufteilen auf die Knoten des Strukturelements, in welchem sich der Projektionspunkt befindet. Dies geschieht durch Multiplikation mit dem Wert der Formfunktion des jeweiligen Knotens an der Stelle des Projektionspunktes. Liegt ein Knoten näher an einem Projektionspunkt, so ist der Anteil der Last, der diesem zugeordnet wird, in der Regel höher als der eines Knotens, welcher weiter entfernt vom Projektionspunkt liegt. In dieser Weise wird für jeden Fluidknoten verfahren und die Kräfte der Strukturknoten jeweils aufsummiert.

Bei diesem Verfahren ist die Summe der Kräfte auf Struktur- und Fluidseite identisch. Das Verfahren wird daher als lastkonservativ bezeichnet. Dies lässt sich unter Berücksichtigung von $\sum_{i=1}^{n_S} N_{S,i}(\xi_j, \eta_j) = 1$, also der Tatsache, dass die Summe aller Formfunktionen immer Eins ergibt („Partition of Unity“), leicht zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n_S} \mathbf{f}_{S,i} = \sum_{i=1}^{n_S} \sum_{j=1}^{n_F} \mathbf{f}_{F,j} \cdot N_{S,i}(\xi_j, \eta_j) = \sum_{j=1}^{n_F} \mathbf{f}_{F,j} \quad (4.11)$$

Die lastkonservative Summation wurde in verallgemeinerter Form erstmals von Farhat in [32] veröffentlicht. Der Ausgangspunkt ist hierbei die Interpolationsmethode, welche allgemeingültig für alle Diskretisierungsschemen formuliert wurde, indem \mathbf{d}_F als Linearkombination von \mathbf{d}_S beschrieben wird. Über die Energiebilanz gelangt er zur allgemeinen Form der lastkonservativen Summation, welche auch speziell für die Finite-Elemente-Methode formuliert wird.

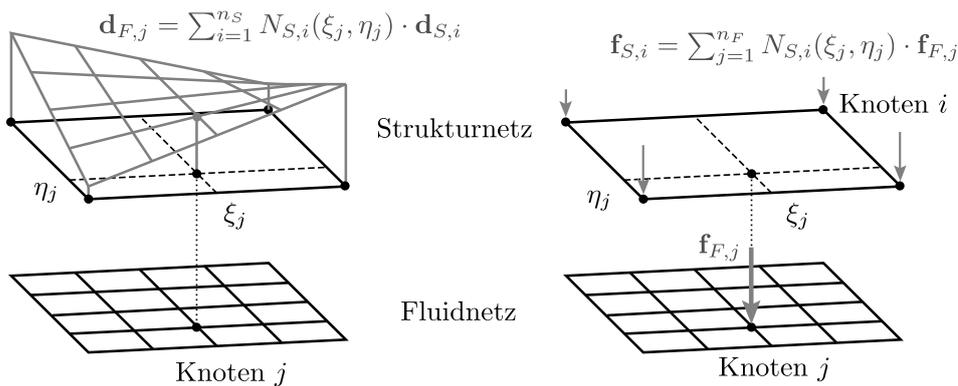


Abbildung 4.3.: Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz. Links: Transfer der Strukturverschiebung mit der Interpolationsmethode, rechts: Transfer der Kräfte mit lastkonservativer Summation.

4.2.2.2. Besonderheiten des Lasttransfers

Die Interpolationsmethode lässt sich uneingeschränkt für alle Oberflächennetze mit unterschiedlichen Feinheiten anwenden. Bei Fragestellungen der FSI ist in der Regel das Oberflächennetz des Fluids feiner als das Oberflächennetz der Struktur. In diesem Fall ist die lastkonservative Summation ein geeignetes Verfahren für den Krafttransfer von Fluid zu Struktur. Liegt jedoch ein feineres Strukturnetz vor, so kann es zu einer ungünstigen Lastverteilung auf diesem kommen. Anhand von Abbildung 4.4 wird schnell ersichtlich, dass in diesem Fall Elemente des Strukturnetzes existieren können, in welchen kein Projektionspunkt eines Fluidknotens liegt: Werden die Kräfte anteilig aufsummiert, so wird nur denjenigen Knoten ein Wert zugewiesen, deren Formfunktion am Projektionspunkt ungleich Null ist. In der Regel sind dies die Knoten der Elemente, in welchen mindestens ein Projektionspunkt liegt. Es kann jedoch auch Knoten im Strukturnetz geben, welchen keine Kräfte zugeordnet werden. In der Grafik sind diese Knoten ohne Füllung gekennzeichnet. Der Datentransfer ist in diesem Sonderfall zwar global immer noch lastkonservativ, führt jedoch zu nicht-glatte Verteilungen, was Ungenauigkeiten in der Berechnung nach sich ziehen kann.

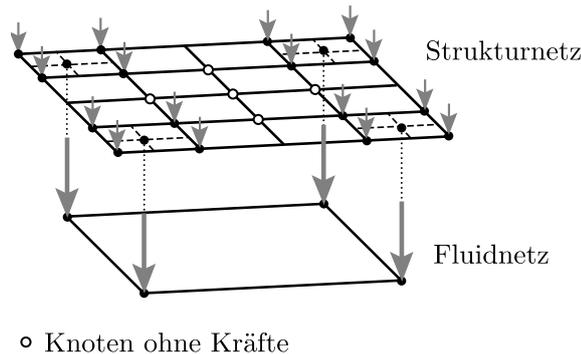


Abbildung 4.4.: Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz. Sonderfall höhere Feinheit des Struktornetzes: Nicht-glatte Lastverteilung

In der FSI tritt dieser Fall in der Regel nicht auf. Benötigt man dennoch einen Krafttransfer von einem groben Fluidnetz auf ein feines Strukturnetz, so lässt sich das Problem umgehen, indem die Drücke \mathbf{p} anstatt der Kräfte übertragen werden. Der Druck ist die direkte Systemantwort der Fluidanalyse und liegt in Form einer Verteilung vor. Diese lässt sich auch über Formfunktionen und diskrete Knotenwerte auf dem Fluidnetz beschreiben. Somit kann die Interpolationsmethode, die auch für den Transfer der Verschiebungen zur Anwendung kommt, verwendet werden. Dann berechnen sich die Drücke auf der Strukturseite zu

$$\mathbf{p}_{S,i} = \sum_{j=1}^{n_F} N_{F,j}(\xi_i, \eta_i) \mathbf{p}_{F,j}. \quad (4.12)$$

Diese Formulierung basiert auf fluidseitigen Formfunktionen und der Projektion der Kno-

ten des Strukturnetzes auf die Fluidelemente. Die Umrechnung von Drücken zu Kräften erfolgt dann auf der Strukturseite auf der Basis der dort definierten Formfunktionen. Da dieser Ansatz auf einem anderen Diskretisierungsschema, also einer anderen Näherung, beruht, ist er nicht exakt identisch zum Transfer der Kräfte nach Gleichung 4.10. Dies lässt sich zeigen, indem die auf die Struktur wirkende Kraft nach beiden Verfahren formuliert und verglichen wird. Hierzu wird die Vorschrift für die Integration der Drücke über dem Gebiet Ω zur Ermittlung der Kräfte berücksichtigt:

$$\mathbf{f}_i = \int_{\Omega} N_i p \, d\Omega = \int_{\Omega} N_i \sum_{j=1}^n N_j \mathbf{p}_j \, d\Omega = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} N_i N_j \, d\Omega \mathbf{p}_j \quad (4.13)$$

mit der Anzahl n der Knoten. Diese Formel gilt sowohl für die Struktur- wie auch für die Fluidseite. Geschieht die Integration der Drücke bereits auf der Fluidseite und werden Kräfte gemäß Gleichung 4.10 auf das Strukturnetz übertragen, so ergeben sich die Kräfte $\mathbf{f}_{S,j}^{\mathbf{f}}$ auf der Strukturseite zu

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{S,i}^{\mathbf{f}} &= \sum_{k=1}^{n_F} N_{S,i}(\xi_k, \eta_k) \cdot \mathbf{f}_{F,k} = \sum_{k=1}^{n_F} N_{S,i}(\xi_k, \eta_k) \cdot \sum_{j=1}^{n_F} \int_{\Gamma} N_{F,k} N_{F,j} \, d\Gamma \cdot \mathbf{p}_{F,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n_F} \sum_{k=1}^{n_F} \int_{\Gamma} N_{F,j} N_{F,k} \, d\Gamma \cdot N_{S,i}(\xi_k, \eta_k) \cdot \mathbf{p}_{F,j}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Wird dahingegen der Druck gemäß Gleichung 4.12 auf das Strukturnetz übertragen und dieser dort integriert, so ergibt sich für die Kräfte $\mathbf{f}_{S,j}^{\mathbf{p}}$ auf der Strukturseite

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{S,i}^{\mathbf{p}} &= \sum_{k=1}^{n_S} \int_{\Gamma} N_{S,i} N_{S,k} \, d\Gamma \cdot \mathbf{p}_{S,k} = \sum_{k=1}^{n_S} \int_{\Gamma} N_{S,i} N_{S,k} \, d\Gamma \cdot \sum_{j=1}^{n_F} N_{F,j}(\xi_k, \eta_k) \mathbf{p}_{F,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n_F} \sum_{k=1}^{n_S} \int_{\Gamma} N_{S,i} N_{S,k} \, d\Gamma \cdot N_{F,j}(\xi_k, \eta_k) \cdot \mathbf{p}_{F,j}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

$\mathbf{f}_{S,j}^{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_{S,j}^{\mathbf{p}}$ gilt nur für koinzidente Netze mit gleichem Diskretisierungsschema, also für $i = j$ und $N_S = N_F$.

Bemerkung 1: Anstatt die Knoten des Strukturnetzes zu projizieren und die Werte dort zu interpolieren, können alternativ die Gaußpunkte der Strukturelemente projiziert werden [32]. An deren Projektionspunkt wird dann durch Interpolation der Druckwert ermittelt und für die Gaußpunkte übernommen. Hierauf geschieht die Integration des Druckes auf der Strukturseite mit Hilfe der Gauß-Quadratur. Zur Ermittlung der Kräfte der Struktur mit numerischer Integration ist dies der direkteste Weg.

Bemerkung 2: Eine weitere Möglichkeit Druck zu übertragen und die Kräfte auf der Struktur zu ermitteln bietet das Bilden von sog. Subelementen [70, 62]. Hierzu werden

die Fluidknoten auf das Strukturnetz projiziert und damit Subelemente gebildet. Dort wird die Druckverteilung bestimmt und es können dann die Kräfte auf das Strukturnetz durch Integration über die Subelemente bestimmt werden, da die Formfunktionen der Struktur und die Druckverteilung des Fluids dort definiert werden können. Die Integrationsvorschrift lautet

$$\mathbf{f}_{S,i} = \sum_{j=1}^{e_{sub}} \int_{\Omega_{sub}} N_{S,i} \cdot p_F d\Omega_{sub}, \quad (4.16)$$

mit der Anzahl e_{sub} der Subelemente und dem Gebiet der Subelemente Ω_{sub} .

4.2.2.3. Transfermatrix

Aus Gleichung 4.8 lässt sich die Transfermatrix \mathbf{T}_d^I für den Verschiebungstransfer mit der Interpolationsmethode ableiten. Gleichung 4.3 lässt sich in Komponenten auch

$$d_{F,j} = \sum_{i=1}^{n_S} T_{d,ji}^I \cdot d_{S,i} = \sum_{i=1}^{n_S} N_{S,i}(\xi_j, \eta_j) \cdot d_{S,i} \quad (4.17)$$

schreiben. Ausführlich lautet die Transfermatrix

$$\mathbf{T}_d^I = \begin{bmatrix} N_{S,1}(\xi_1, \eta_1) & \cdots & N_{S,n_S}(\xi_1, \eta_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{S,1}(\xi_{n_F}, \eta_{n_F}) & \cdots & N_{S,n_S}(\xi_{n_F}, \eta_{n_F}) \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Ebenso lässt sich Gleichung 4.7

$$f_{S,i} = \sum_{j=1}^{n_F} \left[T_d^{IT} \right]_{ij} \cdot f_{F,j} = \sum_{j=1}^{n_F} T_{d,ji}^I \cdot \mathbf{f}_{F,j} = \sum_{j=1}^{n_F} N_{S,i}(\xi_j, \eta_j) \cdot \mathbf{f}_{F,j} \quad (4.19)$$

schreiben.

Bemerkung: Die Komponenten der Transfermatrix für den Übertrag des Druckes nach Gleichung 4.12 von Fluid- zu Strukturnetz lauten dann

$$T_{p,ij}^I = N_{F,j}(\xi_i, \eta_i). \quad (4.20)$$

Wenn strukturseitig dieselben Formfunktionen für Druck und Verschiebung benutzt werden, kann der Transfer des Druckes theoretisch durch \mathbf{T}_d^{I-1} erfolgen. Da das Invertieren numerisch umständlich und rechenintensiv ist, wird in der Praxis die Interpolationsmethode auf Basis der Formfunktionen des Fluids eingesetzt.

4.2.3. Auf gewichteten Residuen basierende Methode

Die auf gewichteten Residuen basierende Methode gründet auf der schwachen Form der Gleichheit der Variablenverteilung auf Struktur- und Fluidinterface [45, 32, 62, 63, 27, 21, 29]. Sie lässt sich für den Datentransfer aller Variablen, welche als Feldgrößen vorliegen, anwenden. Gelegentlich findet man die Bezeichnung Mortar-Methode, welche aus der Kontaktformulierung hervorgeht [122, 101, 100]. Hier wird die Formulierung beispielhaft für den Transfer des Druckes vorgestellt und die Analogie zum Transfer der Verschiebungen für die wichtigsten Schritte aufgezeigt.

4.2.3.1. Ansatz

Die Druckverteilungen auf Struktur- und Fluidseite des FSI-Interface werden durch diskrete Knotenwerte und Formfunktionen genähert:

$$p_s \approx \sum_{i=1}^{n_S} N_{S,i} p_{S,i} \quad \text{und} \quad p_F \approx \sum_{j=1}^{n_F} N_{F,j} p_{F,j} \quad (4.21)$$

Die Forderung der Gleichheit der Druckverteilung auf Struktur- und Fluidnetz $p_s = p_F$ lässt sich durch die Multiplikation mit der Testfunktion ϕ_k und die Integration über dem FSI-Interface Γ in die schwache Form überführen:

$$\int_{\Gamma} \phi_k \cdot (p_s - p_F) d\Gamma \approx \int_{\Gamma} \phi_k \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_S} N_{S,i} p_{S,i} - \sum_{j=1}^{n_F} N_{F,j} p_{F,j} \right) d\Gamma = 0 \quad (4.22)$$

Zur Bestimmung der n_S unbekannt diskreten Druckwerte $\mathbf{p}_{S,i}$, werden n_S unabhängige Testfunktionen mit $k = 1 \dots n_S$ benötigt. Damit erhält man n_S Gleichungen zur Lösung der n_S Unbekannten. Diese Forderung erfüllen die Formfunktionen der Struktur $N_{S,k}$ mit $k = 1 \dots n_S$. Wird die Testfunktion zu $\phi_k = N_{S,k}$ gewählt, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Näherungen für die Druckverteilungen

$$\int_{\Gamma} N_{S,k} \cdot \sum_{i=1}^{n_S} N_{S,i} p_{S,i} d\Gamma = \int_{\Gamma} N_{S,k} \cdot \sum_{j=1}^{n_F} N_{F,j} p_{F,j} d\Gamma. \quad (4.23)$$

Dies lässt sich wie folgt umformulieren und zusammenfassen:

$$\sum_{i=1}^{n_S} \underbrace{\int_{\Gamma} N_{S,k} N_{S,i} d\Gamma}_{M_{\mathbf{p},ki}} \cdot p_{S,i} = \sum_{j=1}^{n_F} \underbrace{\int_{\Gamma} N_{S,k} N_{F,j} d\Gamma}_{B_{\mathbf{p},kj}} \cdot p_{F,j} \quad (4.24)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{f_{\mathbf{p},k}}$$

Obige Form entspricht der k -ten Zeile des Gleichungssystems

$$\mathbf{M}_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{p}_S = \mathbf{f}_{\mathbf{p}}, \quad (4.25)$$

mit dem gesuchten Vektor \mathbf{p}_S und mit obiger Definition der Matrix \mathbf{M}_p und des Vektors \mathbf{f}_p . Für den Transfer des Druckes von Fluid zu Struktur besitzt \mathbf{M}_p n_S Zeilen und n_S Spalten.

Die Integrationen aus Gleichung 4.24 können entweder auf dem Struktur-Interface Γ_S oder dem Fluid-Interface Γ_F erfolgen. Man erkennt, dass durch die Wahl $\phi_k = N_{S,k}$ die Matrix \mathbf{M}_p leicht ermittelbar ist. Die Integration erfolgt hier über dem Struktur-Interface Γ_S , auf welchem die Formfunktionen N_S definiert sind:

$$M_{\mathbf{p},ki} = \int_{\Gamma_S} N_{S,k} N_{S,i} d\Gamma_S \quad (4.26)$$

Das Integral $B_{\mathbf{p},kj}$ enthält Formfunktionen von Struktur- und Fluidseite. Hier müssen die Formfunktionen der beiden Felder aufeinander projiziert werden. Im Abschnitt 4.2.3.2 wird auf dieses Verfahren erklärt.

Für den Transfer der Verschiebungen von Struktur zu Fluid wird die Testfunktion entsprechend $\phi_k = N_{F,k}$ gesetzt, um \mathbf{M}_d in analoger Weise durch Integration über das Fluid-Interface Γ_F zu erhalten. Die entsprechenden Formen von Gleichungen 4.24 und 4.28 für den Transfer der Verschiebungen schreiben sich

$$\sum_{j=1}^{n_F} \underbrace{\int_{\Gamma} N_{F,k} N_{F,j} d\Gamma \cdot d_{F,j}}_{M_{\mathbf{d},kj}} = \sum_{i=1}^{n_S} \underbrace{\int_{\Gamma} N_{F,k} N_{S,i} d\Gamma \cdot d_{S,i}}_{\underbrace{B_{\mathbf{d},kj}}_{\mathbf{f}_{\mathbf{d},k}}} \quad (4.27)$$

und

$$\mathbf{M}_d \cdot \mathbf{d}_F = \mathbf{f}_d, \quad (4.28)$$

\mathbf{M}_d ist eine $n_F \times n_F$ Matrix.

4.2.3.2. Ermittlung des Vektors \mathbf{f}_p

Die Ermittlung des Vektors \mathbf{f}_p bedarf besonderer Aufmerksamkeit, da dieser die Formfunktionen von Struktur- und Fluidseite enthält und so die Frage entsteht, über welches Interface zu integrieren ist [62, 27]. Hier muss eine Projektion auf ein Interface erfolgen, über welches dann integriert werden kann.

Das Integral

$$B_{\mathbf{p},kj} = \int_{\Gamma} N_{S,k} N_{F,j} d\Gamma, \quad (4.29)$$

welches in \mathbf{f}_p enthalten ist, lässt sich mit Hilfe der Gauß-Quadratur errechnen. Die Vorschrift für die numerische Integration einer beliebigen Variablenverteilung $v(x)$ über dem Gebiet Ω mit der Gauß-Quadratur lautet

$$V_i = \int_{\Omega} N_i(x)v(x) dx \approx \sum_{g=1}^{n_g} w_g \cdot N_i(x_g)v(x_g), \quad (4.30)$$

mit der aufintegrierten Größe V_i am Knoten i sowie der Anzahl n_g , der Koordinaten x_g und der Gewichtung w_g der Gaußpunkte.

Die numerische Integration von $B_{p,kj}$ erfolgt auf dem Fluid-Interface Γ_F , wobei die Formfunktionen der Struktur $N_{S,k}$ dann die Variablenverteilung $v(x)$ ersetzen. Die Integration auf dem Struktur-Interface wäre ebenso möglich, wegen der im Allgemeinen groberen Diskretisierung jedoch ungenauer. Für die Gauß-Integration müssen die Funktionswerte von $N_{S,k}$ an den Gauß-Punkten des Fluids mit den Koordinaten x_g bekannt sein. Hierzu erfolgt die Projektion dieser Gaußpunkte auf das Strukturnetz. $\Pi(x_g)$ bezeichnet die Projektion und somit die Koordinaten des Projektionspunktes auf der Strukturseite. Der benötigte Funktionswert ergibt sich zu $N_{S,k}(\Pi(x_g))$. Die Näherung für obiges Integral lautet

$$B_{p,kj} \approx \sum_{g=1}^{n_g} w_g \cdot N_{F,j}(x_g)N_{S,k}(\Pi(x_g)). \quad (4.31)$$

Dann sind die Komponenten des Vektors \mathbf{f}_p

$$f_{p,k} = \sum_{j=1}^{n_F} \int_{\Gamma} N_{S,k}N_{F,j} d\Gamma \cdot p_{F,j} \approx \sum_{j=1}^{n_F} \sum_{g=1}^{n_g} w_g \cdot N_{F,j}(x_g)N_{S,k}(\Pi(x_g)) \cdot p_{F,j}. \quad (4.32)$$

Die Ermittlung des Vektors \mathbf{f}_d für den Transfer der Verschiebungen erfolgt analog durch Projektion der Gaußpunkte der Strukturelemente auf das Fluidnetz und es ergibt sich folgende Vorschrift für die Ermittlung des Lastvektors \mathbf{f}_d :

$$f_{d,k} = \sum_{i=1}^{n_S} \int_{\Gamma} N_{F,k}N_{S,i} d\Gamma \cdot d_{S,i} \approx \sum_{i=1}^{n_S} \sum_{g=1}^{n_g} w_g \cdot N_{S,i}(x_g)N_{F,k}(\Pi(x_g)) \cdot d_{S,i}. \quad (4.33)$$

Hierbei bezeichnet x_g analog die Koordinaten der Gaußpunkte des Strukturnetzes und $\Pi(x_g)$ die Koordinaten der zugehörigen Projektionspunkte.

4.2.3.3. Transfermatrix

Gleichung 4.24 lässt sich auch

$$\mathbf{M}_p \cdot \mathbf{p}_S = \mathbf{B}_p \cdot \mathbf{p}_F \quad (4.34)$$

oder

$$\sum_{i=1}^{n_S} M_{\mathbf{p},ki} \cdot p_{S,i} = \sum_{j=1}^{n_F} B_{\mathbf{p},kj} \cdot p_{F,j} \quad (4.35)$$

schreiben. Dann ist die Transfermatrix für den Übertrag von Druck auf das Strukturnetz durch die auf gewichteten Residuen basierenden Methode

$$\mathbf{T}_{\mathbf{p}}^M = \mathbf{M}_{\mathbf{p}}^{-1} \mathbf{B}_{\mathbf{p}}. \quad (4.36)$$

4.2.4. Approximation der Oberflächennetze

Um die gegenseitige Zuordnung der Netze von Struktur- und Fluid zu bestimmen, werden bestimmte Punkte eines Netzes auf die Elemente des anderen Netzes projiziert. Hier spricht man auch von der Approximation der Oberflächennetze (approximation method). Dieses Verfahren liegt allen Methoden des Datentransfers zu Grunde. Im Falle von konformen Netzen ist der Projektionspunkt eindeutig, da hier die Elemente exakt aufeinander liegen. Liegen nicht-konforme Netze vor, so liegt der zu projizierende Punkt in der Regel nicht exakt auf dem Element, in welches er zu projizieren ist.

Die Vorschrift für die Projektion eines Punktes auf eine ebene Fläche entspricht einem linearen Gleichungssystem. Hier wird die Projektion des Punktes \mathbf{g} auf ein lineares Dreieckselement mit den Knoten \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} und den lokalen Koordinaten ξ und η gezeigt. Der Projektionspunkt wird dabei mit \mathbf{p} , der Normalenvektor des Elements mit \mathbf{n} und der Abstand von \mathbf{g} und \mathbf{p} mit γ bezeichnet.

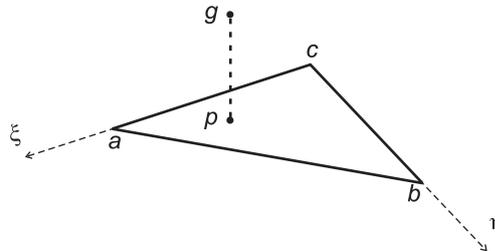


Abbildung 4.5.: Projektion eines Punktes auf ein lineares Dreieckselement.

Für die Projektion gilt

$$\mathbf{g} = \mathbf{p} + \gamma \cdot \mathbf{n}. \quad (4.37)$$

Die Koordinaten von \mathbf{p} können durch die Knotenkoordinaten durch Interpolation mit den Formfunktionen des linearen Dreieckselements ausgedrückt werden:

$$\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 - \xi - \eta \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Die Unbekannten ξ , η and γ lassen sich isolieren und es ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} g_x - c_x \\ g_y - c_y \\ g_z - c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_x - c_x) & (b_x - c_x) & n_x \\ (a_y - c_y) & (b_y - c_y) & n_y \\ (a_z - c_z) & (b_z - c_z) & n_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \gamma \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Ein gekrümmtes Interface bedarf genauer Aufmerksamkeit. Im mathematischen Modell weisen die Normalenvektoren von Fluid- und Strukturinterface in exakt entgegengesetzte Richtung. Im diskreten Modell trifft dies nicht mehr zu, da hier nicht mehr die exakte Geometrieinformation, sondern immer eine geometrische Näherung vorliegt (siehe Abbildung 4.6). Es stellt sich die Frage, an welcher Normalenrichtung sich die Projektion orientieren soll. Durch die Projektion insbesondere bei nicht-konformen Netzen können daher Fehler entstehen. Zur Verringerung dieses Fehlers schlägt Jaiman in [63] eine Mittelung der Normalen vor. Ein solches Verfahren ist dann sinnvoll, wenn nicht-konforme Netze mit großer Krümmung vorliegen.

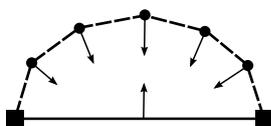


Abbildung 4.6.: Geometrische Näherung durch Diskretisierung am gekrümmten Interface.

Bei dem soeben beschriebenen Projektionsverfahren handelt es sich um die Projektion eines Punktes auf eine ebene Fläche. Die Projektion auf Elemente mit gekrümmten Oberflächen ist komplizierter, da hier die Lösung nicht eindeutig ist. Hier ist die Triangulation eine effiziente Möglichkeit, Projektionspunkte zu finden. Bei der *Delaunay-Triangulation* wird aus einer Punktmenge ein Dreiecksnetz generiert, wozu verschiedene Algorithmen existieren. Bei geringer Krümmung ist das Verfahren genauer als bei hoher Krümmung.

Bemerkung: Eine Projektion auf vierknotige bilineare Elemente ist nicht eindeutig, da mehrere Lösungen existieren. Eine eindeutige Lösung lässt sich durch eine Koordinatentransformation finden, welche das gekrümmte Element auf eine ebene Fläche überführt. Dann kann die Projektion eines Punktes ausgeführt werden. Mit der Rücktransformation ist dessen Projektionspunkt im gekrümmten Element bekannt. Bei wenig gekrümmten Flächen lohnt sich das Verfahren aufgrund der hohen Rechenkosten als Alternative zur Triangulation kaum. Für sehr stark gekrümmte Elementflächen fällt der Fehler jedoch deutlich geringer als bei der Triangulation aus. Das Vorgehen bietet sich nur für diesen Fall an.

4.2.5. Schlußfolgerung für FSI-Anwendungen

Vergleicht man die Interpolationsmethode und die auf gewichteten Residuen basierende Methode, so taucht die Frage der Konservativität auf, also der Erhaltung einer Größe oder der Energie am Interface. Die Interpolationsmethode ist nicht konservativ. Die Gleichheit der zu übertragenden Variablenverteilung ist hier nicht gegeben. Bei der auf gewichteten Residuen basierende Methode ist dies der Fall, da hier die Forderung der Gleichheit im schwachen Sinne Ausgangspunkt der Formulierung ist. Die Methode ist jedoch deutlich komplexer und zieht mehr Implementierungsaufwand nach sich. Farhat stellt in [32, 31] ein Schema für den Datentransfer vor, welches eine einfache Implementierung verspricht und gleichzeitig energieerhaltend ist. Er verfolgt den Ansatz der Energieerhaltung am Interface, wobei er eine beliebige Methode des Datentransfers für die Verschiebungen zu Grunde legt. Auf der Basis der Energiebilanz entwickelt er eine entsprechende Transfermethode für die Kräfte. Für die Verwendung der Interpolationsmethode für die Verschiebungen ergibt sich damit die lastkonservative Summation. Diese Methoden sind in Kombination beim wechselseitigen Datentransfer in der FSI energieerhaltend.

Die Interpolationsmethode wird von Vertretern der Mortar-Methode [45], also der auf gewichteten Residuen basierende Methode, als mathematisch nicht-optimal bezeichnet, da dabei in der Theorie der globale Diskretisierungsfehler (Fehler der Mehrfeldanalyse) größer als der lokale Diskretisierungsfehler (Fehler einer Einfeldanalyse) ist. Es wurde für ein einfaches Modellproblem gezeigt, dass bei Verwendung der Mortar-Methode der globale Diskretisierungsfehler nicht größer als der lokale ist, weshalb die Mortar-Methode als mathematisch optimal bezeichnet wird. Dies sind rein theoretische Genauigkeitsbetrachtungen, deren Bedeutung für die Praxis nicht überschätzt werden sollte. Für praxisrelevante Anwendungen empfiehlt Farhat den „Ingenieur-Ansatz“ der Interpolationsmethode. Er konnte zeigen, dass für diese Anwendungen, bei denen das Fluidnetz viel höhere Feinheiten aufweist, beide Methoden dieselbe Genauigkeit besitzen [32, 31].

Unabhängig von der für den Datentransfer gewählten Methode muss in der Praxis immer die Approximation der Oberflächennetze, also eine Projektion, stattfinden. Dies ist immer eine Näherung. Nur für konforme Netze ist der Fehler unbedeutend, jedoch liegen diese in den wenigsten Fällen vor. Für stark gekrümmte Netze mit sehr unterschiedlichen Diskretisierungen, wie sie bei praxisrelevanten Anwendungen oft auftreten, ist der Fehler am größten und kann weitaus mehr Einfluss haben als der Fehler, der durch die Methode des Datentransfers entsteht. Der entscheidende Punkt bei praxisrelevanten Anwendungen ist eindeutig die Wahl der Netze. In stark gekrümmten Regionen sollte hier darauf geachtet werden, möglichst nah an der Originalgeometrie zu bleiben.

Die Rechenkosten der Interpolationsmethode sind deutlich geringer als die der auf gewichteten Residuen basierenden Methode. Da jedoch das FSI-Interface in der Regel immer nur ein Bruchteil des gesamten Berechnungsgebietes ist, sind auch die Rechen-

kosten für den Datentransfer, unabhängig davon welche Methode gewählt wurde, viel geringer, als die Kosten einer FSI-Analyse. Die Rechenkosten spielen daher nur eine untergeordnete Rolle [62].

4.3. Datentransfer in der partitionierten Sensitivitätsanalyse

4.3.1. Analogie Analyse und Sensitivitätsanalyse

In Abschnitt 3.3.3 wurde das partitionierte Verfahren für die FSI-Analyse eingeführt. Hier wurde die Berechnung des Strukturproblems durch die explizite nichtlineare Funktion \mathcal{S} ausgedrückt, durch welche die Strukturverschiebungen \mathbf{d}_Γ am FSI-Interface in Abhängigkeit der Strömungskräfte \mathbf{f}_Γ am FSI-Interface durch $\mathbf{d}_\Gamma = \mathcal{S}(\mathbf{f}_\Gamma)$ beschrieben werden. Ebenso wurde die Berechnung des Fluids durch die nichtlineare Funktion \mathcal{F} ausgedrückt, indem die Strömungskräfte am FSI-Interface in Abhängigkeit der Strukturverschiebungen am FSI-Interface durch $\mathbf{f}_\Gamma = \mathcal{F}(\mathbf{d}_\Gamma)$ beschrieben werden. Abbildung 4.7 veranschaulicht den iterativen Prozess des partitionierten Verfahrens. Hier ist der Austausch der Variablen \mathbf{f}_Γ und \mathbf{d}_Γ , für welche der Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz durchgeführt wird, dargestellt.

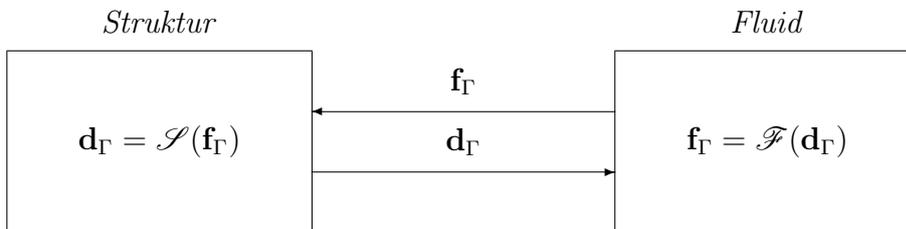


Abbildung 4.7.: Partitionierte FSI-Analyse.

Ab Kapitel 5 dieser Arbeit wird die gekoppelte und die partitionierte Sensitivitätsanalyse detailliert behandelt. Im Vorgriff darauf sei hier auf die Bedeutung des Datentransfers für die partitionierte Sensitivitätsanalyse hingewiesen und die Notwendigkeit des Transfers von Gradienteninformationen erläutert. Für Details zum Datentransfer in der Sensitivitätsanalyse sei auf Abschnitt 5.9.2 verwiesen. Wird eine Optimierung nach NAND (siehe Abschnitt 2.3.2) auf Grundlage des partitionierten Verfahrens durchgeführt, so ist auch die Sensitivitätsanalyse gekoppelt und partitioniert. Diese kann durch die expliziten Funktionen \mathcal{S} und \mathcal{F} ausgedrückt werden, indem nach den Optimierungsvariablen \mathbf{s} differenziert wird. Dafür muss zusätzlich die Abhängigkeit dieser Funktionen von den Optimierungsvariablen berücksichtigt werden. Die strukturseitige Sensitivitätsgleichung

schreibt sich

$$\frac{d\mathbf{d}_\Gamma}{ds} = \mathcal{S}' \left(\frac{d\mathbf{f}_\Gamma}{ds} \right) = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{f}_\Gamma} \cdot \frac{d\mathbf{f}_\Gamma}{ds}, \quad (4.40)$$

wobei $\frac{d\mathbf{d}_\Gamma}{ds}$ der Output und $\frac{d\mathbf{f}_\Gamma}{ds}$ der Input ist. Die fluidseitige Sensitivitätsgleichung ist

$$\frac{d\mathbf{f}_\Gamma}{ds} = \mathcal{F}' \left(\frac{d\mathbf{d}_\Gamma}{ds} \right) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}_\Gamma} \cdot \frac{d\mathbf{d}_\Gamma}{ds}, \quad (4.41)$$

wobei $\frac{d\mathbf{f}_\Gamma}{ds}$ der Output und $\frac{d\mathbf{d}_\Gamma}{ds}$ der Input ist. Abbildung 4.8 veranschaulicht den iterativen Prozess der partitionierten Sensitivitätsanalyse. Die Analogie zwischen partitionierter Analyse und partitionierter Sensitivitätsanalyse ist aus den Abbildungen sofort ersichtlich. Hier werden nicht die Variablen \mathbf{f}_Γ und \mathbf{d}_Γ ausgetauscht, sondern deren Ableitungen $\frac{d\mathbf{f}_\Gamma}{ds}$ und $\frac{d\mathbf{d}_\Gamma}{ds}$. Der Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz muss also für diese Gradienteninformationen durchgeführt werden.

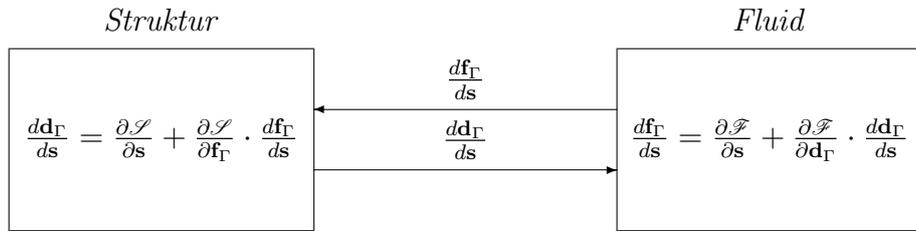


Abbildung 4.8.: Partitionierte FSI-Sensitivitätsanalyse.

Man erkennt, dass in der partitionierten Sensitivitätsanalyse ein gekoppeltes Gleichungssystem gelöst wird, welches sich aus den Sensitivitätsgleichungen 4.40 und 4.41 der beiden Felder zusammensetzt. Nicht immer muss die Lösung nach dem obigen Schema erfolgen. Es ist auch denkbar, dieses Gleichungssystem außerhalb der Berechnungsprogramme zu lösen. Dies kommt beispielsweise in Frage, wenn in einem Black-Box-Berechnungsprogramm, die Lösungen der Sensitivitätsgleichungen nicht zur Verfügung gestellt werden können. Es kann dann auch nötig werden, weitere Gradienteninformationen aus den Sensitivitätsgleichungen auf die andere Diskretisierung zu übertragen.

Um den Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz in die Formulierung mit einzubeziehen, wird im Folgenden die individuelle Diskretisierung der Berechnungsgebiete berücksichtigt. Die Funktionen \mathcal{S} und \mathcal{F} definieren sich dann durch

$$\mathbf{d}_{\Gamma,S} = \mathcal{S}(\mathbf{f}_{\Gamma,S}) \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_{\Gamma,F} = \mathcal{F}(\mathbf{d}_{\Gamma,F}), \quad (4.42)$$

wobei die Indizes S und F für die Diskretisierungen des Struktur- und des Fluidgebietes stehen. Deren Ableitungen lauten

$$\frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,S}}{ds} = \mathcal{S}' \left(\frac{d\mathbf{f}_{\Gamma,S}}{ds} \right) \quad \text{und} \quad \frac{d\mathbf{f}_{\Gamma,F}}{ds} = \mathcal{F}' \left(\frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,F}}{ds} \right). \quad (4.43)$$

Der Transfer der Verschiebungen und Kräfte wird durch die Operatoren \mathcal{T}_d und \mathcal{T}_f ausgedrückt:

$$\mathbf{d}_{\Gamma,F} = \mathcal{T}_d(\mathbf{d}_{\Gamma,S}) \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_{\Gamma,S} = \mathcal{T}_f(\mathbf{f}_{\Gamma,F}) \quad (4.44)$$

Der Transfer der Ableitungen der Verschiebungen und Kräfte wird durch die Operatoren $\mathcal{T}_{d'}$ und $\mathcal{T}_{f'}$ ausgedrückt:

$$\frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,F}}{ds} = \mathcal{T}_{d'} \left(\frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,S}}{ds} \right) \quad \text{und} \quad \frac{d\mathbf{f}_{\Gamma,S}}{ds} = \mathcal{T}_{f'} \left(\frac{d\mathbf{f}_{\Gamma,F}}{ds} \right) \quad (4.45)$$

Dann lassen sich die Verschiebungen $\mathbf{d}_{\Gamma,S}$ und die Kräfte $\mathbf{f}_{\Gamma,F}$ wie folgt schreiben:

$$\mathbf{d}_{\Gamma,S} = \mathcal{S} \circ \mathcal{T}_f(\mathbf{f}_{\Gamma,F}) \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_{\Gamma,F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{T}_d(\mathbf{d}_{\Gamma,S}) \quad (4.46)$$

Für deren Ableitungen gilt dann

$$\frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,S}}{ds} = \mathcal{S}' \circ \mathcal{T}_{f'} \left(\frac{d\mathbf{f}_{\Gamma,F}}{ds} \right) \quad \text{und} \quad \frac{d\mathbf{f}_{\Gamma,F}}{ds} = \mathcal{F}' \circ \mathcal{T}_{d'} \left(\frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,S}}{ds} \right). \quad (4.47)$$

Bemerkung: Die expliziten Funktionen \mathcal{S} und \mathcal{F} sind von den Residuen \mathcal{S} und \mathcal{F} zu unterscheiden, welche in Abschnitt 2.4 und 3.4 eingeführt wurden und implizite Funktionen sind.

4.3.2. Datentransfer von Gradienteninformationen

Die Formulierung des Datentransfers durch den Transferoperator \mathcal{T} gilt allgemein für kontinuierliche und diskrete Variablenverteilungen. Behandelt man diskrete Variablen so lässt sich der Transfer durch Multiplikation mit der Transfermatrix \mathbf{T} ausdrücken (Gleichung 4.2). Um den Transfer diskreter Gradienteninformationen in Form von Vektoren und Matrizen zu veranschaulichen, werden hier die Feldgrößen \mathbf{a} und \mathbf{b} auf dem Ursprungsnetz U und dem Zielnetz Z betrachtet. Der Transfer der Variablen \mathbf{a} von U nach Z und Z nach U wird durch

$$\bar{\mathbf{a}}_Z = \mathbf{T}_{\mathbf{a},U \rightarrow Z} \cdot \mathbf{a}_U \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{a}}_U = \mathbf{T}_{\mathbf{a},Z \rightarrow U} \cdot \mathbf{a}_Z \quad (4.48)$$

beschrieben, wobei die überstrichenen Variablen die transferierten Größen bezeichnen. Es gilt aufgrund des numerischen Fehlers durch die Diskretisierung beim Datentransfer $\bar{\mathbf{a}}_Z \approx \mathbf{a}_Z$ und $\bar{\mathbf{a}}_U \approx \mathbf{a}_U$. Hieraus lassen sich für lineare Transferoperatoren die Beziehungen

$$\frac{d\bar{\mathbf{a}}_Z}{d\mathbf{a}_U} = \mathbf{T}_{\mathbf{a},U \rightarrow Z} \quad \text{und} \quad \frac{d\bar{\mathbf{a}}_U}{d\mathbf{a}_Z} = \mathbf{T}_{\mathbf{a},Z \rightarrow U} \quad (4.49)$$

ableiten. Es lassen sich dann Vorschriften für den Transfer von Gradienten herleiten. Der Transfer der Ableitung von \mathbf{a}_Z nach einer beliebigen Größe (\bullet) von U nach Z schreibt sich

$$\frac{d\bar{\mathbf{a}}_Z}{d(\bullet)} = \frac{d\bar{\mathbf{a}}_Z}{d\mathbf{a}_U} \cdot \frac{d\mathbf{a}_U}{d(\bullet)} = \mathbf{T}_{\mathbf{a},U \rightarrow Z} \cdot \frac{d\mathbf{a}_U}{d(\bullet)}. \quad (4.50)$$

Man erkennt, dass die Transfer-Vorschrift für die Ableitungen dieselbe wie für die Variablen ist. Wenn die Ableitung einer beliebigen Größe (\bullet) nach der Variable \mathbf{a}_U von U nach Z übertragen wird, ist die Vorschrift verschieden. Dann gilt

$$\frac{d(\bullet)}{d\bar{\mathbf{a}}_Z} = \frac{d(\bullet)}{d\mathbf{a}_U} \cdot \frac{d\mathbf{a}_U}{d\bar{\mathbf{a}}_Z} = \frac{d(\bullet)}{d\mathbf{a}_U} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{a},U \rightarrow Z}^{-1}. \quad (4.51)$$

Hier beschreibt die Inverse $\mathbf{T}_{\mathbf{a},U \rightarrow Z}^{-1}$ den Transfer von U nach Z . Wie schon erwähnt, ist das Bilden der inversen Matrix in der Praxis umständlich, weshalb diese durch die Transfermatrix für den Datentransfer in die Gegenrichtung $\mathbf{T}_{\mathbf{a},Z \rightarrow U}$ ersetzt werden kann, denn mit $d\bar{\mathbf{a}}_Z \approx d\mathbf{a}_Z$ und $d\bar{\mathbf{a}}_U \approx d\mathbf{a}_U$ gilt

$$\mathbf{T}_{\mathbf{a},U \rightarrow Z}^{-1} = \frac{d\mathbf{a}_U}{d\bar{\mathbf{a}}_Z} \approx \frac{d\bar{\mathbf{a}}_U}{d\mathbf{a}_Z} = \mathbf{T}_{\mathbf{a},Z \rightarrow U}. \quad (4.52)$$

Dann kann Gleichung 4.51 durch

$$\left[\frac{d(\bullet)}{d\bar{\mathbf{a}}_Z} \right]^T = \mathbf{T}_{\mathbf{a},Z \rightarrow U}^T \cdot \left[\frac{d(\bullet)}{d\mathbf{a}_U} \right]^T \quad (4.53)$$

ersetzt werden.

Nun kann auch der Transfer von Gradienteninformationen in Form von Matrizen formuliert werden. Hierzu wird eine zweite Variable \mathbf{b} eingeführt, deren Transfer durch

$$\bar{\mathbf{b}}_U = \mathbf{T}_{\mathbf{b},Z \rightarrow U} \cdot \mathbf{b}_Z \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{b}}_Z = \mathbf{T}_{\mathbf{b},U \rightarrow Z} \cdot \mathbf{b}_U \quad (4.54)$$

definiert wird. Dann gilt

$$\frac{d\bar{\mathbf{a}}_Z}{d\bar{\mathbf{b}}_Z} = \frac{d\bar{\mathbf{a}}_Z}{d\mathbf{a}_U} \cdot \frac{d\mathbf{a}_U}{d\mathbf{b}_U} \cdot \frac{d\mathbf{b}_U}{d\bar{\mathbf{b}}_Z} = \mathbf{T}_{\mathbf{a},U \rightarrow Z} \cdot \frac{d\mathbf{a}_U}{d\mathbf{b}_U} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{b},U \rightarrow Z}^{-1} \approx \mathbf{T}_{\mathbf{a},U \rightarrow Z} \cdot \frac{d\mathbf{a}_U}{d\mathbf{b}_U} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{b},Z \rightarrow U}. \quad (4.55)$$

Es wurde gezeigt, dass beim Datentransfer von Gradienteninformationen bei Ableitungen einer Variable dieselbe Vorschrift wie beim Transfer der Variable selbst gilt (Gleichung 4.50). Bei Ableitungen nach einer Variable gilt die Vorschrift nach Gleichung 4.51 bzw. 4.53. Diese Vorschrift sei nun am Beispiel der Verschiebungen für den Datentransfer von Struktur- nach Fluidseite mit der Interpolationsmethode formuliert:

$$\left[\frac{d(\bullet)}{d\mathbf{d}_F} \right]^T = \mathbf{T}_{\mathbf{d},F \rightarrow S}^T \cdot \left[\frac{d(\bullet)}{d\mathbf{d}_S} \right]^T \quad (4.56)$$

mit

$$\mathbf{T}_{\mathbf{d},F \rightarrow S} = \begin{bmatrix} N_{F,1}(\xi_1, \eta_1) & \cdots & N_{F,n_F}(\xi_1, \eta_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{F,1}(\xi_{n_S}, \eta_{n_S}) & \cdots & N_{F,n_F}(\xi_{n_S}, \eta_{n_S}) \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

In Komponenten schreibt sich dies

$$\frac{d(\bullet)}{dd_{F,j}} = \sum_{i=1}^{n_S} N_{F,j}(\xi_i, \eta_i) \cdot \frac{d(\bullet)}{dd_{S,i}}. \quad (4.58)$$

ξ_i und η_i sind die lokalen Koordinaten der Projektionspunkte der Strukturknoten auf dem Fluidelement. Hier erkennt man, dass es bei der algorithmischen Umsetzung Unterschiede zum Datentransfer von Variablen gibt. Während hier eine Projektion der Strukturknoten auf die zugehörigen Fluidelemente erfolgen muss, werden beim einfachen Variablentransfer die Fluidknoten auf die zugehörigen Strukturelemente projiziert. Multipliziert man die obige Gleichung mit $dd_{F,j}$ und $dd_{S,i}$, so ergibt sich wiederum die Beziehung für den Transfer von Verschiebungen von Fluid- nach Strukturseite, wie sie für die Interpolationsmethode gilt:

$$dd_{S,i} = \sum_{j=1}^{n_S} N_{F,j}(\xi_i, \eta_i) \cdot dd_{F,j} \quad (4.59)$$

Bemerkung: Der Transfer von adjungierten Variablen in der adjungierten Sensitivitätsanalyse erfolgt durch die transponierten Transfermatrizen analog dem Krafttransfer. Dies wird in Abschnitt 5.9.2.2 erläutert.

4.4. Algorithmik

In diesem Abschnitt wird eine Algorithmik zur Interpolationsmethode und zur lastkonservativen Summation vorgestellt, welche im Rahmen dieser Arbeit entwickelt und umgesetzt wurde. Bei der Umsetzung in Software sind Effizienz, Genauigkeit sowie eine sorgfältige Abstimmung auf die Berechnungscodes gefordert.

Vorraussetzung für das Ausführen des Datentransfers ist das Vorhandensein der geometrischen Informationen der beiden Netze. Weiterhin müssen die zu übertragenden Daten zur Verfügung stehen und die Information bereit gestellt werden, ob es sich hierbei um Feld- oder Kraftgrößen handelt, bzw. nach welchem Verfahren die Daten übertragen werden sollen. Um die entsprechenden Daten vorzuhalten und auf diese zugreifen zu können, wird eine leistungsfähige Datenstruktur für netzbasierte Informationen benötigt.

Bevor der eigentliche Datentransfer stattfinden kann, muss immer die Projektion bestimmter Punkte auf Elemente des anderen Netzes stattfinden (vgl. Abschnitt 4.2). Dabei wird für jeden Punkt die Information benötigt, in welchem Element der zugehörige Projektionspunkt liegt und welches dessen lokale Koordinaten im Element sind. Es muss also eine Zuordnung von Punkten zu Elementen – das Herstellen der *Nachbarschaftsbeziehungen* – stattfinden. In der Algorithmik spielt dies eine zentrale Rolle, da das Verfahren die Hauptrechenkosten verursacht und sorgfältige Implementierung erfordert.

In Abschnitt 4.4.1 wird die Umsetzung erörtert. Desweiteren wurde auch in [59] diese Algorithmik beschrieben.

Der Transfer selbst wird mit Hilfe geschachtelter Schleifen umgesetzt. Dies wird in Abschnitt 4.4.2 für die Interpolationsmethode und die lastkonservative Summation erklärt.

Abbildung 4.9 zeigt den vereinfachten Ablauf des Gesamtprozesses. Im ersten Schritt, der Initialisierung der Netze, werden die geometrischen Informationen der Netze angelegt. Damit können die Nachbarschaftsbeziehungen hergestellt werden. Dieser Schritt muss nur einmal pro Berechnung stattfinden, da sich die Netze relativ zueinander nicht verändern. Nun folgt wiederholt der Datentransfer: Es werden die zu übertragenden Daten des Ursprungsnetzes empfangen, diese auf das Zielnetz übertragen und wieder versendet.

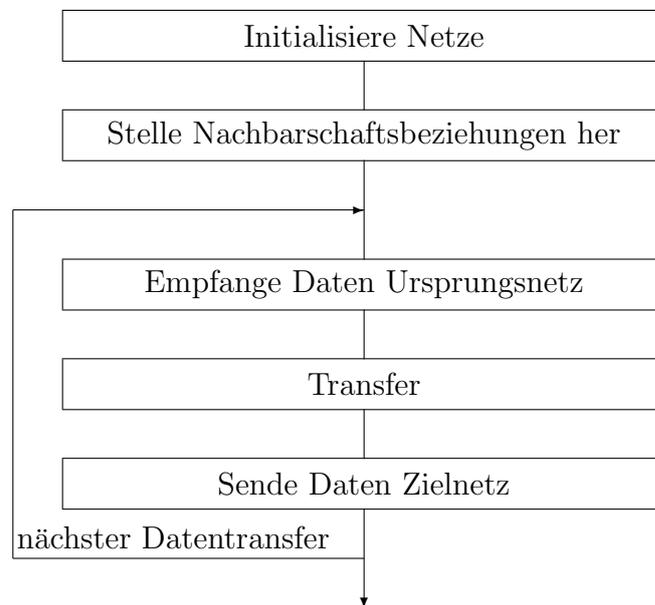


Abbildung 4.9.: Übersicht der Algorithmik des Datentransfers am nicht-koinzidenten Netzen.

4.4.1. Nachbarschaftsbeziehungen

Um festzustellen in welches Element ein Punkt projiziert wird, kann entweder das zugehörige Element zu einem Punkt gesucht werden oder alle Punkte zu einem Element gesucht werden. Die einfachste Methode ist eine Brute-Force-Suche, bei der alle möglichen Kombinationen getestet und die gefundenen Beziehungen gespeichert werden. Der Test beinhaltet jeweils eine Projektion auf die Elementfläche und die Prüfung, ob der Projektionspunkt innerhalb des Elements liegt. Die Brute-Force-Suche ist sehr rechenaufwendig. Für derartige räumliche Suchen bietet sich die Verwendung von Baumstrukturen

(engl: *tree datastructures*) an. Hier werden alle Punkte, welche es später zu suchen gilt, in Abhängigkeit ihrer räumlichen Lage hierarchisch gespeichert. Für dreidimensionale Datensätze wird das *Octree* verwendet.

Das Octree (Abbildung 4.10, links) ist ein spezieller Graph aus hierarchisch geordneten Knoten. Jeder Knoten des Octrees hat acht Nachfolgeknoten. Dies entspricht der Aufteilung eines räumlichen Quaders in acht räumliche Unterelemente (Abbildung 4.10, rechts). Dies geschieht rekursiv für jedes räumliche Element. Das Octree dient zur Speicherung der Punkte im Raum in jedem Endknoten, entsprechend deren Lage in den Quadern. Für einen Quader bzw. Endknoten kann eine maximale Menge an Punkten definiert werden. Wird diese überschritten, wird der Quader weiter unterteilt. Auf der Grundlage dieser Datenspeicherung kann in effizienter Weise eine Umkreissuche um einen definierten Suchpunkt oder eine Suche nach dem nächsten Nachbarn eines bestimmten Suchpunktes ausgeführt werden. Weitere Information zu Baumstrukturen finden sich in zahlreichen Lehrbüchern der Informatik, beispielsweise in [97, 1].

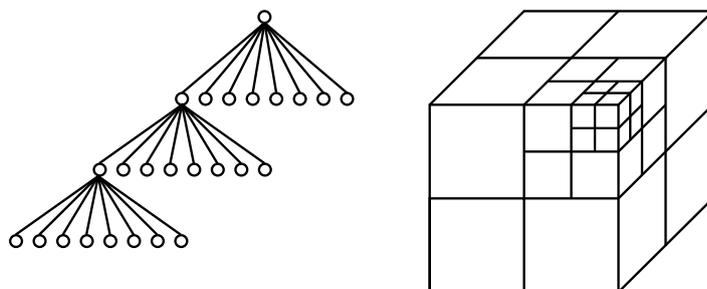


Abbildung 4.10.: Links: Octree-Baumstruktur, rechts: entsprechende Unterteilung des Raums. Jeder Knoten der Baumstruktur entspricht einem Quader im Raum. Nachfolgeknoten bedeuten die Aufteilung des Quaders in Unterelemente.

Abbildung 4.11 stellt eine Algorithmik für das Herstellen der Nachbarschaftsbeziehungen der nicht-koinzidenten Netze dar. Hier werden die zu projizierende Punkte in einem Octree gespeichert. Für den Transfer der Verschiebungen mit der Interpolationsmethode und der Kräfte mit lastkonservativer Summation sind die Fluidknoten, für welche die Projektionspunkte auf den Strukturelementen zu finden sind, in der Baumstruktur zu speichern.

Hierauf erfolgt eine Schleife über die Strukturelemente $k = 1 \dots e_S$ mit der Anzahl e_S der Strukturelemente. Für jedes Strukturelement wird nun ein Suchpunkt festgelegt, von dem aus eine Umkreissuche durchgeführt werden kann. In dieser Arbeit wurde der Mittelpunkt der Dreieckselemente als Suchpunkt gewählt. Der Suchradius wurde so festgelegt, dass sich alle Knoten des Elements innerhalb des Suchraums befinden, um alle relevanten Fluidknoten detektieren zu können. Die durch die nachfolgende Umkreissuche gefundenen p_k Fluidknoten werden als Nachbarn des Suchpunktes bezeichnet. Nun erfolgt eine weitere untergeordnete Schleife über die Nachbarn $l = 1 \dots p_K$, um fest-

zustellen welche tatsächlich auf das Element k projiziert werden. Dies geschieht durch die Projektion auf das Element und die Prüfung, ob der Projektionspunkt im Inneren des Elements liegt. Dies ist bei positiven lokalen Koordinaten des Projektionspunktes der Fall. Liegt der Projektionspunkt im Element, so werden die Nachbarschaftsbeziehungen gespeichert. Dabei wird jedem Fluidknoten das entsprechende Strukturelement zugewiesen.

Bei nicht-konformen Netzen ist es möglich, dass Fluidknoten nicht gefunden werden. Dies kann geschehen, wenn die Entfernung zum Strukturelement groß ist und der Knoten daher außerhalb des Suchraums liegt. Weiterhin ist es möglich, dass Projektionspunkte eines Fluidknotens in mehreren Strukturelementen existieren. Dies kann bei gekrümmtem Interface vorkommen, wenn beispielsweise benachbarte Elemente nicht in derselben räumlichen Ebene liegen. Dann kann es Punkte geben, die Projektionspunkte im Inneren beider Elemente besitzen. Um diese Sonderfälle zu behandeln, müssen die Nachbarschaftsbeziehungen geprüft werden, mit dem Ziel, dass jedem Fluidknoten ein eindeutiges Strukturelement zugeordnet werden kann. Im Falle nicht gefundener Knoten, kann der Suchradius angepasst werden. Für Knoten mit mehreren Projektionspunkten kann beispielsweise der minimale Abstand von Knoten und Projektionspunkt als Kriterium herangezogen werden. Es ist zu bemerken, dass bei sauber modellierten Netzen diese Sonderfälle in der Regel nicht auftreten.

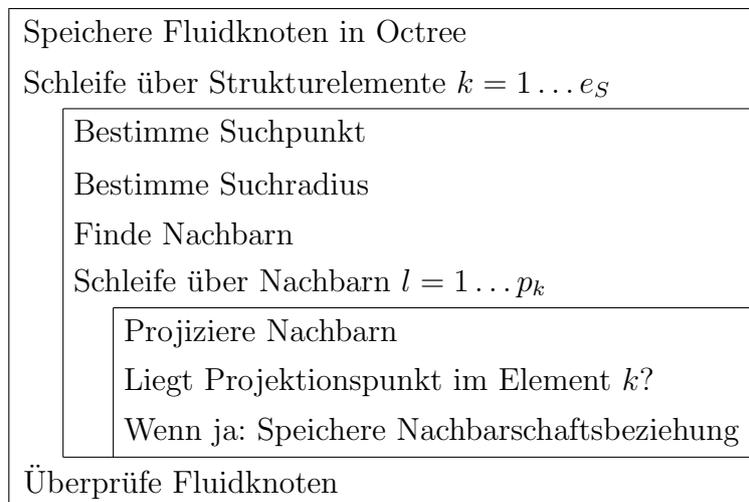


Abbildung 4.11.: Algorithmik der Nachbarschaftssuche beim Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz.

4.4.2. Transfer

Abbildung 4.12 zeigt die Algorithmik der Interpolationsmethode für den Verschiebungstransfer nach Gleichung 4.8, bestehend aus drei geschachtelten Schleifen. Da der Trans-

fer der Verschiebungen für alle drei Raumrichtungen durchgeführt wird, erfolgt hier zunächst eine Schleife über die drei Raumrichtungen $dof = x, y, z$. Diese Schleife muss nicht zwingend die übergeordnete sein und kann auch auf einer anderen Ebene angeordnet werden. Weiterhin wird eine interne Schleife über die Fluidknoten $j = 1 \dots n_F$ ausgeführt. Aus den Nachbarschaftsbeziehungen ist bekannt, welches Strukturelement k dem jeweiligen Fluidknoten zugeordnet ist. Der Wert der Verschiebung am Fluidknoten $d_{F,j}^{dof}$ wird zunächst auf Null gesetzt. Um den neuen Wert zu ermitteln, erfolgt eine weitere untergeordnete Schleife über die Knoten $i = 1 \dots n_k$ des Elements k . Hier wird der Wert der zugehörigen Formfunktion am Projektionspunkt des aktuellen Fluidknotens mit dem Wert $d_{S,i}^{dof}$ des Strukturknotens multipliziert und auf den im vorigen Schleifendurchlauf ermittelten Wert aufsummiert. Auf diese Weise ergibt sich die Summe aus Gleichung 4.8.

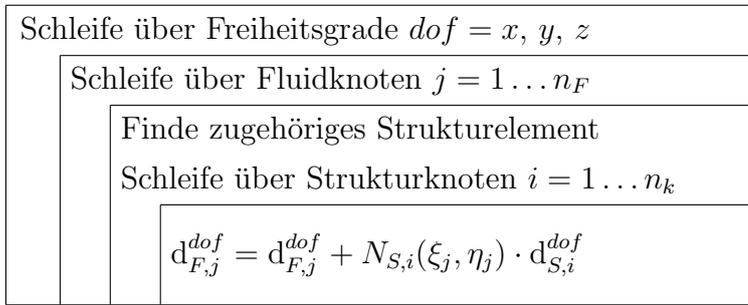


Abbildung 4.12.: Algorithmik des Verschiebungstransfer mit der Interpolationsmethode.

Die Algorithmik der lastkonservativen Summation für den Krafttransfer nach Gleichung 4.10 beruht auf denselben geschachtelten Schleifen. Hier lautet die Vorschrift innerhalb der Schleifen

$$f_{S,i}^{dof} = f_{S,i}^{dof} + N_{S,i}(\xi_j, \eta_j) \cdot f_{F,j}^{dof}. \quad (4.60)$$

Der Wert der Kraft der Strukturelementknoten $f_{S,i}^{dof}$ muss vor der Schleife über die Fluidknoten zu Null gesetzt werden. Die Summe aus Gleichung 4.10 zur Ermittlung des Wertes wird gebildet, indem der Wert der zugehörigen Formfunktion des aktuellen Strukturknotens am Projektionspunkt des aktuellen Fluidknotens mit dem Wert $f_{F,j}^{dof}$ des Fluidknotens multipliziert und das Produkt auf den vorhandenen Wert aufsummiert wird.

4.4.3. Anwendungsbeispiele

Die vorgestellte Algorithmik wurde im Rahmen der Entwicklung der Kopplungsschnittstelle CoMA (Abschnitt 4.5) implementiert und ausführlich getestet. Um den Fehler einer durch die Interpolationsmethode übertragenen Variablenverteilung auf dem Zielnetz bestimmen zu können muss eine Referenzverteilung vorhanden sein. Es stellt sich

die Frage, wie diese Referenzverteilung – wenn nicht durch Datentransfermethoden – auf das Zielnetz abgebildet werden kann. Es besteht die Möglichkeit, die Referenzverteilung als analytische Funktion in Abhängigkeit der globalen Koordinaten für beide Netze zu definieren. Der Fehler kann allerdings nur dann korrekt bestimmt werden, wenn die analytische Funktion auf dem Ursprungsnetz korrekt abgebildet werden kann, um Informationsverluste durch dessen Diskretisierung zu vermeiden. Für lineare Elemente ist dies eine lineare Funktion. Desweiteren muss es sich um konforme Netze handeln, da nur hier die Gleichheit der Geometrie und somit der Funktionswerte gegeben ist.

Zur Veranschaulichung der Interpolationsmethode und der lastkonservativen Summation wird der Transfer an einem einfachen, konformen Elementpatch aus grobem und feinem Netz mit linearen Dreieckselementen gezeigt. Für die Interpolationsmethode wird der Datentransfer der Funktion $f(x, y) = x+y$ auf dem Elementpatch vom groben zum feinen Netz durchgeführt. Diese Funktion kann auf beiden Netzen korrekt abgebildet werden. Das Ergebnis des Datentransfers auf dem feinen Netz wird mit den Referenzwerten aus der analytisch definierten Funktion auf diesem Netz verglichen. Wie zu erwarten, tritt kein Fehler auf. Abbildung 4.13 zeigt die Original-Variablenverteilung auf dem grobem Netz sowie das Ergebnis des Datentransfers und den Fehler auf dem feinen Netz.

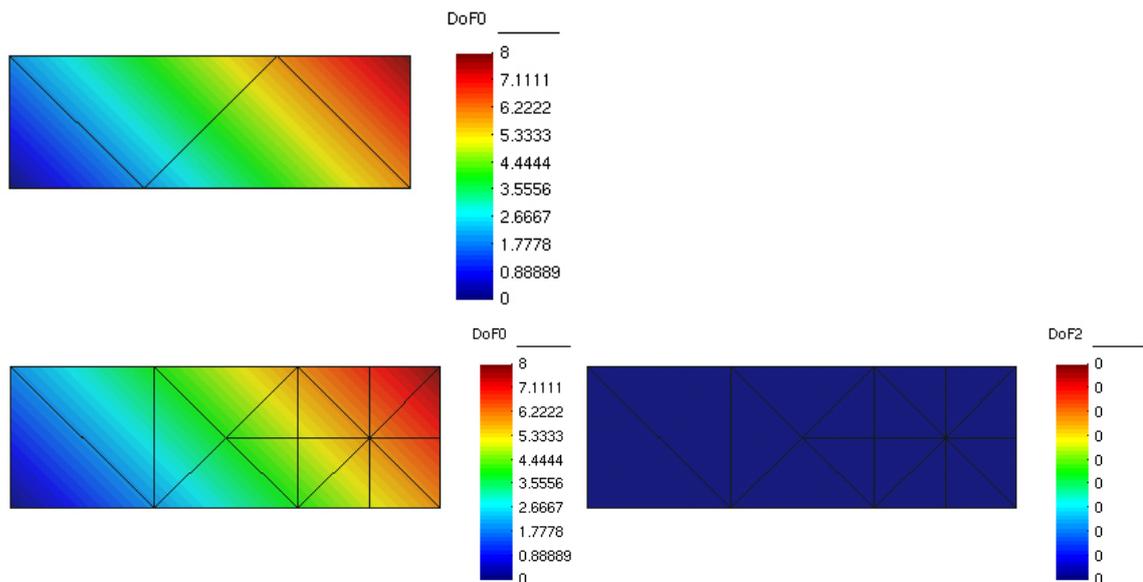


Abbildung 4.13.: Beispiel der Interpolationsmethode am Elementpatch. Oben: Original-Variablenverteilung auf grobem Netz, unten links: Ergebnis des Datentransfers auf feinem Netz, unten rechts: Fehler des Datentransfers.

Nach der lastkonservativen Summation muss die Summe aller Kräfte auf Ziel- und Ursprungsnetz gleich sein. Abbildung 4.14 zeigt die Knotenkräfte auf feinem und grobem Netz. Auf dem feinem Ursprungsnetz erhielt jeder Knoten eine Knotenkraft der Größe $1,0$. Nach dem Datentransfer auf das grobe Netz erkennt man, dass die resultierenden Knotenkräfte auf dem Zielnetz im Bereich des feiner werden Netzes größer werden, da

hier mehr Kraft pro Fläche wirkt. Diese lässt sich durch Anwendung von Gleichung 4.10 nachvollziehen:

$$\begin{aligned}
 f_{g,1} &= 1 \cdot f_{f,1} = 1,0 \\
 f_{g,2} &= 1 \cdot f_{f,2} + 0,5 \cdot f_{f,6} + 0,25 \cdot f_{f,7} + 0,5 \cdot f_{f,3} + 0,25 \cdot f_{f,4} = 2,5 \\
 f_{g,3} &= 1 \cdot f_{f,5} + 0,5 \cdot f_{f,3} + 0,75 \cdot f_{f,4} + 0,25 \cdot f_{f,7} + 0,5 \cdot f_{f,8} + 0,5 \cdot f_{f,9} = 3,5 \\
 f_{g,4} &= 1 \cdot f_{f,10} + 0,5 \cdot f_{f,11} = 1,5 \\
 f_{g,5} &= 1 \cdot f_{f,12} + 0,5 \cdot f_{f,11} + 0,5 \cdot f_{f,6} + 0,5 \cdot f_{f,7} + 0,5 \cdot f_{f,8} + 0,5 \cdot f_{f,13} = 3,5 \\
 f_{g,6} &= 1 \cdot f_{f,14} + 0,5 \cdot f_{f,9} + 0,5 \cdot f_{f,13} = 2,0
 \end{aligned}$$

Die Indizes g und f stehen für grobes und feines Netz. Die Summe der Kräfte auf dem groben Netz ergibt sich zu 14,0, was der Summe der Knotenkräfte auf dem feinen Netz entspricht.

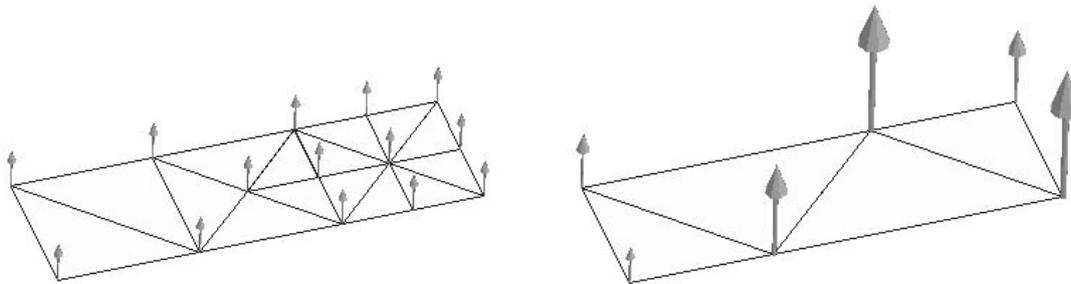


Abbildung 4.14.: Beispiel der lastkonservativen Summation am Elementpatch. Links: Vorgegebene Knotenkräfte auf dem feinen Netz, rechts: Knotenkräfte aus Datentransfer auf dem groben Netz.

Weiterhin wird hier der Transfer einer komplexeren Verteilung auf einer gekrümmten Geometrie gezeigt. Hier kann der Vergleich mit einer analytischen Verteilung nicht zur Kontrolle des Fehlers des Transfers herangezogen werden, da das Ursprungsnetz diese nicht korrekt abbilden kann. Werden die übertragenen Werte mit den Funktionswerten verglichen, so erkennt man hier den Diskretisierungsfehler des Ursprungsnetzes an den Positionen der Knoten des Zielnetzes. Dennoch eignet sich die Methode um grobe Aussagen über die Funktionalität des Datentransfers zu machen. Abbildung 4.15 zeigt die Netze aus linearen Dreieckselementen mit den Variablenverteilungen. Das nicht strukturierte, etwas feinere Netz ist hier das Ursprungsnetz. Darauf wurde eine sinusförmige Verteilung definiert. Diese Funktion kann durch die Netze nur näherungsweise dargestellt werden. Der Transfer auf das strukturierte, gröbere Netz erfolgt mit der Interpolationsmethode. Das Ergebnis wurde mit der analytischen Funktion verglichen und daraus ein Fehler berechnet. Dieser Fehler entsteht durch die Diskretisierung, nicht durch den Transfer und beträgt maximal 0.33 %. Man erkennt, dass der Fehler in Bereichen größerer Krümmung höher ist, da hier das Netz die Funktion schlechter abbilden kann. Er

schwankt in Abhängigkeit der gegenseitigen Lage der Knoten: Bei koinzidenter Knotenlage ist der Fehler geringer, da hier der analytische Funktionswert vom Ursprungsnetz korrekt wiedergegeben wird. Eine wichtiger Schluß aus dem Ergebnis ist, dass der Fehler aus dem Datentransfer in der Regel gegenüber dem Diskretisierungsfehler klein ist.

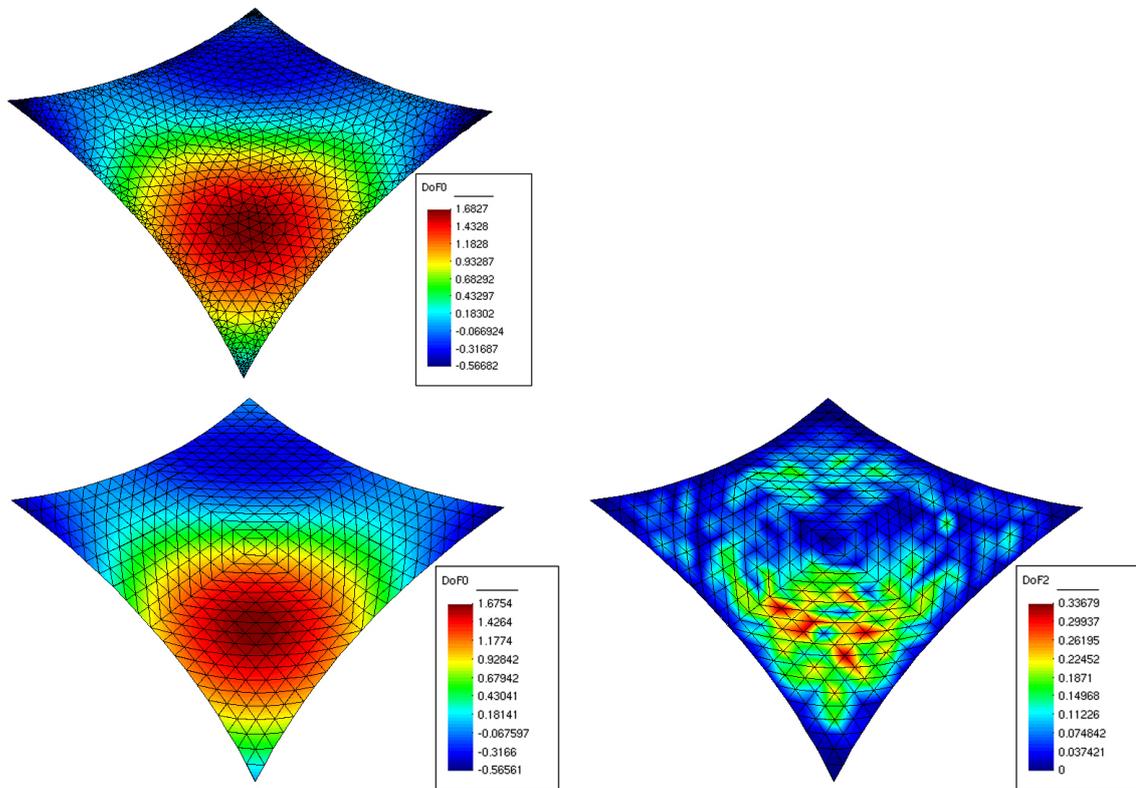


Abbildung 4.15.: Anwendung der Interpolationsmethode am einer gekrümmten Geometrie mit sinusförmiger Variablenverteilung, welche in Abhängigkeit der globalen Koordinaten definiert ist. Oben: Original-Variablenverteilung auf Ursprungsnetz. Unten links: Ergebnis des Datentransfes auf Zielnetz. Unten rechts: Unterschied des Datentransfer-Ergebnisses zur analytischen Variablenverteilung in Prozent.

4.5. Datentransfer mit CoMA



Im partitionierten Berechnungsverfahren der FSI (Abschnitt 3.3.3) werden Struktur und Fluid in einem gestaffelten Verfahren gelöst, wobei der Kopplung der Felder durch den Austausch der Randbedingungen gerecht wird. Hierbei ist es üblich, für jedes Feld ei-

ne spezialisierte Software einzusetzen, also getrennte Software-Tools für Struktur und Fluid. Der Datenaustausch und der Datentransfer am Interface kann dabei von einem dritten Tool – der Kopplungsschnittstelle – übernommen werden. Forderungen an eine solche Schnittstellen-Software sind Flexibilität, Genauigkeit und Effizienz. Insbesondere die Flexibilität spielt eine bedeutende Rolle, wenn die Schnittstelle für die Kopplung unterschiedlichster Berechnungsprogramme eingesetzt werden soll. Da die Rechenkosten für den Datentransfer bei oberflächengekoppelten Problemen in der Regel nur einen Bruchteil der gesamten Rechenzeiten ausmachen und das Herstellen der Nachbarschaftsbeziehungen als rechenintensivster Teil nur einmal zu Anfang der Berechnung geschieht, sind die Anforderungen an die Effizienz nicht von vorrangiger Bedeutung.

CoMA (*Coupling for Multiphysics Analysis*) ist eine Kopplungsschnittstelle für oberflächengekoppelte Probleme, welche am Lehrstuhl für Statik seit 2006 entwickelt wird. CoMA wurde objektorientiert in C++ umgesetzt und zeichnet sich durch hohe Modularität aus. Bei gekoppelten Berechnungen übernimmt *CoMA* die Interprozesskommunikation und den Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz. Es lässt sich für beliebige oberflächengekoppelte Probleme einsetzen und bietet flexiblen Austausch der Berechnungsprogramme. Weiterhin kann CoMA die Berechnungssteuerung der gekoppelten Berechnung übernehmen und für parallele Berechnungen eingesetzt werden. Die interne Programmstruktur wurde modular gestaltet und garantiert eine einfache Erweiterbarkeit auf unterschiedlichen Ebenen. CoMA wurde für die Anwendungen, welche im Rahmen dieser Arbeit entstanden, eingesetzt und soll hier mit den dafür relevanten Funktionen in bündiger Weise vorgestellt werden. In [60] wurde CoMA mit einem Fokus auf das objektorientierte Konzept, die Anwendung und den Datentransfer zwischen nicht-koinzidenten Netzen präsentiert. In [37, 38] wird insbesondere auf die Kommunikation von CoMA via MPI, die Parallelisierungsstrategie und die Berechnungssteuerung eingegangen. Weiterhin befindet sich in [74] eine Beschreibung von CoMA.

Die internen Hierarchieebenen der Kopplungsschnittstelle CoMA sind Berechnungssteuerung, Kommunikation, Datenmanagement und Datentransfer. In Abbildung 4.16 sind diese dargestellt.

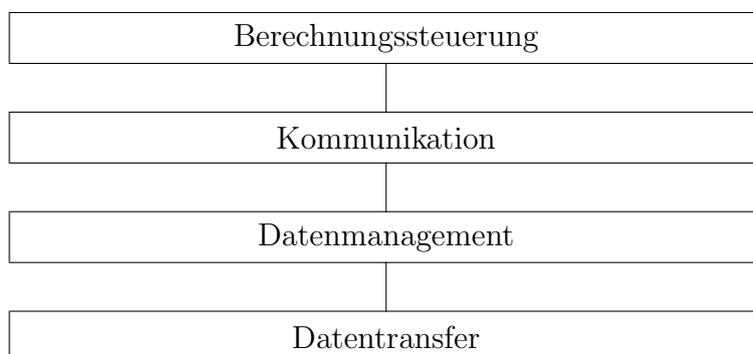


Abbildung 4.16.: Interne Hierarchieebenen von CoMA.

Die *Berechnungssteuerung* ist die übergeordnete Ebene. Hier werden sämtliche, die Berechnungssteuerung betreffende Aufgaben festgelegt und ausgeführt. Die Informationen hierfür werden aus einer benutzerspezifischen Eingabedatei gelesen, in der die Parameter der gekoppelten Berechnung, der Kommunikation und des Datenaustausches sowie Konvergenzkontrolle festgelegt werden. Zur Prozesssteuerung gehören ebenfalls die Kontrolle der Kommunikation und des Datentransfers. Es besteht auch die Möglichkeit, CoMA in reiner Schnittstellenfunktion zu nutzen. Dann wird die Berechnungssteuerung von einem anderen Programm, beispielsweise einem der Berechnungsprogramme, übernommen.

Die Ebene *Kommunikation* regelt die Interprozesskommunikation zwischen den beteiligten Programmen. Dies betrifft Steuerparameter und das Senden und Empfangen der netzbasierten Daten. Die Kommunikation kann dateibasiert oder über die *MPI*-Bibliothek (*Message Passing Interface*) erfolgen. Hierdurch können beliebige Berechnungscodes gekoppelt werden, auch kommerzielle Black-Box-Programme. Unabhängig von der Art der Kommunikation werden die Daten in einem bestimmten Format an das Datenmanagement übergeben und dort in einer Datenstruktur gespeichert.

Der Kern des *Datenmanagement* ist eine objektorientierte Datenstruktur für die netzbasierten Daten. Darüber hinaus werden Funktionen für die Speicherung und den Zugriff zur Verfügung gestellt. Um einen Datentransfer zwischen nicht-koinzidenten Netzen am Interface zu realisieren, müssen netzbasierte Daten – die geometrischen Informationen der Netze und die Knotenwerte – vorgehalten werden. Hierzu ist ein entsprechendes Datenmodell gefordert. Zur Anwendung kommt eine flexible, netzbasierte Datenstruktur (Abbildung 4.17), welche Vorwärts- und Rückwärtsbeziehungen enthält. Die Objekte *Mesh*, *MeshPartition*, *Element* und *Node* bilden die Grundstruktur. Darüber hinaus besitzt ein Objekt des Typs *Node* eine definierte Anzahl an Freiheitsgraden, in denen die Daten für den Transfer gespeichert werden. Es kann bei Bedarf auch eine History an Daten erstellt werden. Dann werden die zu übertragenden Daten nicht bei jedem Transfer überschrieben, sondern gespeichert. Ein Netz kann in Netzpartitionen unterteilt werden. Dies ermöglicht, dass parallele Berechnungen einfach ausgeführt werden können. CoMA kann dann direkt mit den Einzelprozessen kommunizieren. Ein weiteres Beispiel für die Notwendigkeit von Partitionen im Rahmen dieser Arbeit sind beidseitig umströmte dünne Strukturen. Hier sind die Strömungslasten und in der Regel auch das Fluidnetz auf Ober- und Unterseite unterschiedlich. Somit muss auch der Datentransfer an Ober- und Unterseite der Struktur getrennt behandelt werden. Die Partitionen ermöglichen diese separate Behandlung. Sie sind unter anderem auch wichtig, um hier die richtigen Nachbarschaftsbeziehungen herzustellen. Entscheidender Punkt hierbei ist die Handhabung der doppelten Knoten an den gemeinsamen Partitionsrändern. Diese werden von CoMA erkannt. Auf dieser Grundlage kann ein Gesamtnetz als Grundlage für den Datentransfer erstellt werden.

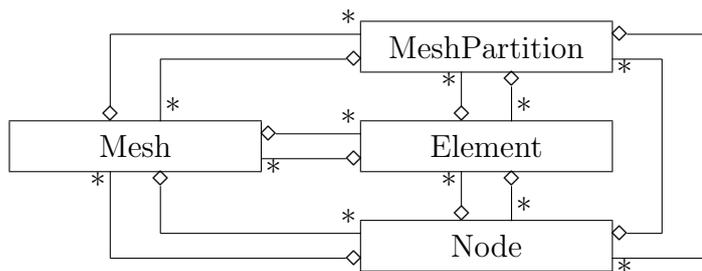


Abbildung 4.17.: Interne Datenstruktur von CoMA für netzbasierte Daten.

Der *Datentransfer* ist der Kern der Kopplungsschnittstelle. Ein effizientes Herstellen der Nachbarschaftsbeziehungen erfolgt über eine Octree-basierte Datenstruktur, den *kd-tree* aus der C++-Bibliothek *ANN* ([2]). Es wurden die Interpolationsmethode und die lastkonservative Summation für lineare Dreieckselemente und in solche triangulierte Elemente implementiert. Die Erweiterbarkeit ist gegeben. Das Datentransfer lässt sich für beliebige oberflächengekoppelte Probleme durchführen. Dabei können beliebige skalar- und vektorwertige Feld- und Kraftgrößen übertragen werden, beispielsweise Temperaturen oder Geschwindigkeiten. Das modulare Konzept erlaubt es, die Nachbarschaftssuche dann auszuführen, wenn sie verlangt ist. Dies geschieht gewöhnlich einmal zu Beginn der gesamten Berechnung, da sich die Oberflächennetze nicht relativ zueinander verändern. CoMA wurde darauf ausgelegt, in der gekoppelten Sensitivitätsanalyse eingesetzt zu werden. Die Struktur erlaubt es Gradienteninformationen zu übertragen. Diese werden wie alle netzbasierten Daten in den Knoten gespeichert. In Abschnitt 4.3.2 wurde der Transfer von Gradienteninformationen behandelt.

Der Ablauf einer FSI-Berechnung, wie sie dieser Arbeit zu Grunde liegt, ist in Abbildung 4.18 dargestellt. Das Softwaresetup besteht aus drei Programmen: Dem Struktur- und Strömungssimulationsprogramm, sowie dem Kopplungstool CoMA. Für den Datentransfer der partitionierten Berechnung müssen dem Kopplungstool die Oberflächennetze am gemeinsamen Interface bekannt sein, damit eine Zuordnung der Netzknoten stattfinden kann. Dies erfolgt in der Initialisierung der Netze. Hierbei schicken die Berechnungscodes die geometrischen Netzinformationen an CoMA und es erfolgt die Herstellung der Nachbarschaftsbeziehungen. Es ist zu bemerken, dass im gesamten Optimierungsprozess das Netz nur einmal initialisiert werden muss, da die gegenseitige Position der Netzknoten während der Optimierung unverändert bleibt. Dies geschieht in der ersten FSI-Analyse mit dem Anfangsdesign. Nach der Initialisierung des Netzes werden die aufeinanderfolgenden Fluid- und Strukturanalysen mit dem wechselseitigen Datentransfer solange durchgeführt, bis Konvergenz innerhalb eines Zeitschrittes erreicht ist. Daraufhin wird in der Zeit fortgeschritten, bis Konvergenzkriterien oder die maximale Zeit erreicht werden. Detaillierte Information zur Algorithmik iterativ gestaffelter Verfahren findet man in [38, 74, 119, 121].

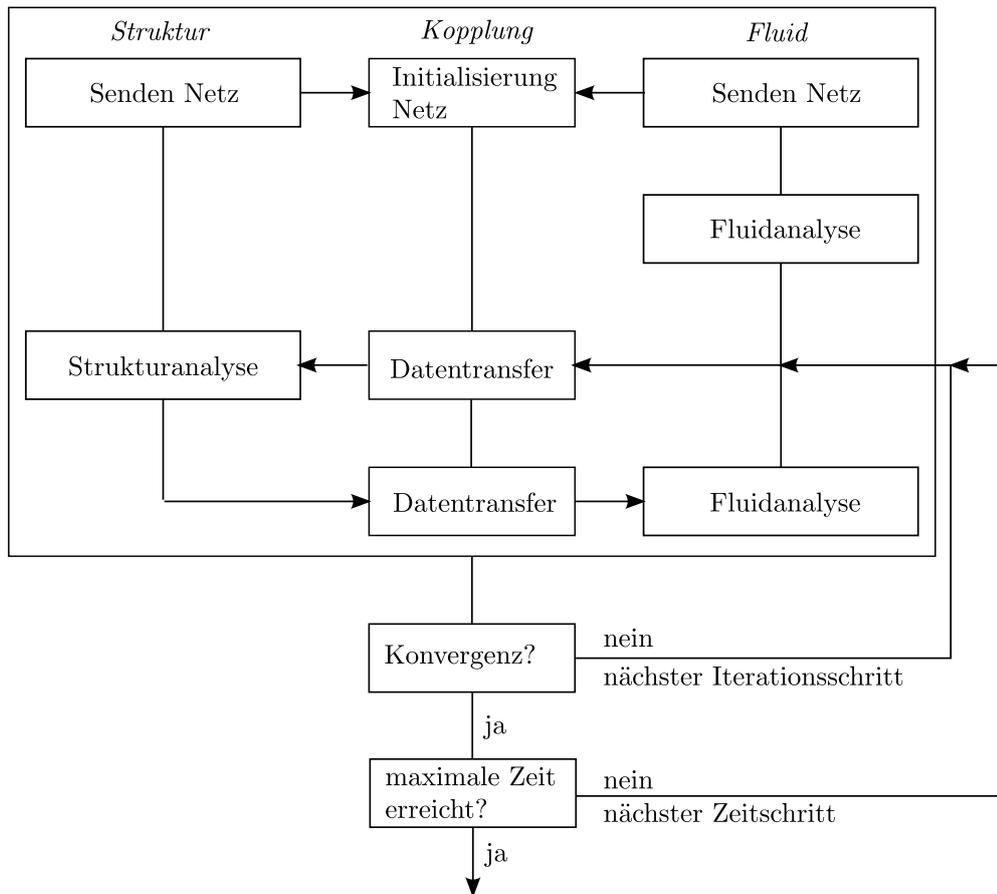


Abbildung 4.18.: Ablaufdiagramm einer partitionierten FSI-Analyse mit den drei Softwaremodulen Struktur, Fluid und Kopplung. Nach der Initialisierung der Netze erfolgt die gestaffelte Berechnung.

5. Gekoppelte Sensitivitätsanalyse

Die Sensitivitätsanalyse bezeichnet die Analyse der Auswirkungen bei Veränderungen in den Inputgrößen eines Systems. Dies geschieht durch die Bestimmung der Änderung des Systemoutputs bei Variation des Systeminputs, also durch die Berechnung der entsprechenden Gradienteninformationen. Diese Informationen dienen der Abschätzung der Robustheit bzw. der Empfindlichkeit eines Systems gegenüber bestimmten Einflüssen oder Unsicherheiten. Die Sensitivitätsanalyse ist in vielen Fachgebieten von Bedeutung und stellt ein eigenständiges Wissenschaftsgebiet dar.

In der Optimierung ist die Sensitivitätsanalyse ein notwendiger Schritt für die Anwendung von Gradientenmethoden. Sie dient der Berechnung der Ableitungen der Optimierungskriterien nach den Optimierungsvariablen, welche als Input für gradientenbasierte Algorithmen benötigt werden. Ebenfalls kann eine Sensitivitätsanalyse Auskunft über die Empfindlichkeit der Zielfunktion gegenüber Designänderungen und die Empfindlichkeit des optimalen Designs gegenüber Systemänderungen geben.

In Abschnitt 2.4 wurde die diskrete Sensitivitätsanalyse für die Strukturoptimierung zur Berechnung der Ableitungen der Zielfunktion nach den Optimierungsvariablen eingeführt. Bei der analytischen Sensitivitätsanalyse war dabei die Systemgleichung der Struktur zu berücksichtigen. Die Sensitivitätsanalyse für Mehrfeldprobleme erfordert entsprechend eine Berücksichtigung der gekoppelten Systemgleichungen. Die Folge ist eine Kopplung der Sensitivitätsgleichungen, was in der Numerik besonderer Behandlung bedarf.

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der gekoppelten diskreten Sensitivitätsanalyse für Mehrfeldprobleme und im Speziellen mit der gekoppelten Sensitivitätsanalyse für den partitionierten Ansatz der Fluid-Struktur-Interaktion. Dabei wird von den diskreten Grundgleichungen der zeitunabhängigen Dreifeldformulierung ausgegangen. Die Formulierung wird zunächst allgemein gehalten und lässt sich daher auf andere Dreifeldprobleme übertragen. Es wird die diskrete Sensitivitätsanalyse im numerischen, direkten, adjungierten und einem alternativen direkten Verfahren beschrieben. Auch die algorithmische Differentiation wird in ihren Grundzügen vorgestellt. Abschließend wird in Abschnitt 5.9 die Formulierung der Sensitivitätsanalyse für die Formoptimierung im partitionierten Ansatz der FSI gemäß Abschnitt 3.3.3 vorgestellt.

5.1. Methoden der Sensitivitätsanalyse

Es gibt unterschiedliche Methoden der Sensitivitätsanalyse, welche sich in Effizienz, Genauigkeit und Komplexität unterscheiden und welche für unterschiedliche Fragestellungen von Relevanz sind.

Zunächst lässt sich zwischen der auf finiten Differenzen beruhenden *numerischen Sensitivitätsanalyse* und der *analytischen Sensitivitätsanalyse* unterscheiden, welche auf der mathematischen Bestimmung der Ableitungen basiert. Werden bei der analytischen Sensitivitätsanalyse zur mathematischen Bestimmung des Gradienten zusätzlich finite Differenzen hinzugezogen, so bezeichnet man das Verfahren als *semianalytisch*. Diese Verfahren wurden bereits in Abschnitt 2.4 vorgestellt und werden in diesem Kapitel für die Dreifeldformulierung erweitert.

Weiterhin unterscheiden sich die *diskrete* und die *kontinuierliche Sensitivitätsanalyse*. Die systembeschreibenden Grundgleichungen sind vor der Diskretisierung von kontinuierlicher Form. Aus diesen Grundgleichungen werden die Sensitivitätsgleichungen durch Differenziation entwickelt, welche für den numerischen Lösungsprozess in diskreter Form vorliegen müssen. Der Unterschied zwischen diskreter und kontinuierlicher Sensitivitätsanalyse liegt in der Reihenfolge von Diskretisierung und Differenziation. Werden zuerst die kontinuierlichen Grundgleichungen diskretisiert und dann aus den diskreten Grundgleichungen die diskreten Sensitivitätsgleichungen durch Differenziation hergeleitet, spricht man von diskreter Sensitivitätsanalyse. Werden dahingegen zuerst kontinuierliche Sensitivitätsgleichungen aus den kontinuierlichen Grundgleichungen durch Differenziation ermittelt und dann diese diskretisiert, so spricht man von kontinuierlicher Sensitivitätsanalyse. Die Verfahren führen letztendlich beide zu den gekoppelten Sensitivitätsgleichungen und besitzen dieselbe Genauigkeit [93, 92]. Unterschiede sind beim Diskretisierungsverfahren möglich.

Unter den kontinuierlichen Ansätzen für reine CFD-Fragestellungen sind Jamesons Arbeiten von Bedeutung. Er präsentierte erstmals den kontinuierlichen adjungierten Ansatz für die Formoptimierung [65]. Dafür benutzt er die Euler-Gleichungen als Basis [64, 65, 66, 67]. Ebenfalls präsentiert er eine Herleitung auf Basis der Navier-Stokes Gleichungen [68]. Jameson beeinflusste ausschlaggebend die Arbeiten von Reuther [105, 104, 103] und Martins [80, 81] zur Sensitivitätsanalyse gekoppelter Probleme, welche später den diskreten Ansatz weiterverfolgen. Löhner und Soto verfolgen ebenfalls den kontinuierlichen Ansatz für CFD Probleme [110]. Er wird für die Formoptimierung umströmter Strukturen eingesetzt [111] und ist durch die Berücksichtigung der Kopplung mit der Fluidnetzbewegung für FSI Probleme von Bedeutung.

Die analytische Methode lässt sich desweiteren in die, auf dem Eliminationsverfahren beruhende, *direkte Sensitivitätsanalyse* und die, auf der Lagrange-Methode basierende, *adjungierte Sensitivitätsanalyse* unterteilen. In der Praxis unterscheiden sich die Ver-

fahren in der Reihenfolge der Multiplikationen und durch die Lösung unterschiedlicher Gleichungssysteme. Sie werden in diesem Kapitel detailliert erklärt.

In dieser Arbeit wird weiterhin zwischen *residuumsbasierter* und *in- und outputbasierter Sensitivitätsanalyse* unterschieden. Diese Einteilung bezieht sich auf die Art der benötigten Ableitungen. Werden Ableitungen der Systemgleichungen benötigt, so wird hier die Bezeichnung residuumsbasiert verwendet. Lassen die Ableitungen sich aus Systemin- und output berechnen, so wird die Bezeichnung in- und outputbasiert verwendet. Diese Einteilung ist im Hinblick auf die Implementierung sinnvoll, da die Berechnungsprogramme in der Regel Systemin- und output zur Verfügung stellen und keine Residuenwerte.

Ergänzend soll hier die Möglichkeit erwähnt werden, Gradienten mithilfe *algorithmischer Differenziation* zu ermitteln. Die algorithmische Differenziation ist ein Verfahren der Informatik, welches die Bestimmung von Ableitungen von Outputgrößen nach Inputgrößen eines Programmcodes ermöglicht. Es handelt sich um ein analytisches Verfahren, welches sich jedoch nicht auf die mathematische Formulierung bezieht, sondern auf den Ablauf des Berechnungscodes. Das Durchlaufen eines kompilierten Programmcodes findet auf Basis von Inputvariablen in kleinsten Einzelschritten, welche jeweils ein Zwischenergebnis produzieren, statt, um schließlich das Endergebnis, den Output, zu ermitteln. Die Bestimmung der Ableitungen von Output- nach Inputvariablen durch algorithmische Differenziation erfolgt durch die systematische Anwendung der Kettenregel auf diese Zwischenergebnisse durch einen zusätzlichen Berechnungscode. Hierbei beruht der sog. *Vorwärtsmodus* auf der Berechnung der Ableitungen der Zwischenergebnisse nach einer spezifizierten Inputvariablen, wohingegen beim sog. *Rückwärts- oder adjungierten Modus* die Ableitungen einer spezifizierten Outputvariable nach den Zwischenergebnissen ermittelt werden. Als weiterführende Literatur zum Thema algorithmische Differenziation sei auf [46] verwiesen.

5.2. Notation

Im Folgenden sei die Notation der wichtigsten Gleichungen und Variablen zur Beschreibung der gekoppelten Sensitivitätsanalyse vorgestellt. Dabei lautet das Residuum der diskreten Systemgleichungen

$$\mathcal{R}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) \\ \mathcal{M}(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) \\ \mathcal{F}(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) \end{array} \right\} = 0, \quad (5.1)$$

mit

$$\mathcal{S} = \begin{Bmatrix} \mathcal{S}_1 \\ \dots \\ \mathcal{S}_{n_s} \end{Bmatrix}, \quad \mathcal{M} = \begin{Bmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \dots \\ \mathcal{M}_{n_y} \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{F} = \begin{Bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \dots \\ \mathcal{F}_{n_q} \end{Bmatrix}. \quad (5.2)$$

Darin bezeichnen \mathcal{S} , \mathcal{M} und \mathcal{F} die Residuen der diskreten Systemgleichungen von Struktur, Fluidnetz und Fluid. \mathbf{s} bezeichnet den Vektor der Optimierungsvariablen, \mathbf{d} den Vektor der Strukturverschiebungen, \mathbf{y} den Vektor der Verschiebungen des Fluidnetzes und \mathbf{q} den Vektor der Systemvariablen des Fluids wie folgt:

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} s_1 \\ \dots \\ s_{n_s} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_{n_d} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_{n_y} \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_{n_q} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

Sie lassen sich zu dem Vektor der Systemvariablen des Gesamtsystems zusammenfassen:

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

Bei den Systemvariablen handelt es sich um diskrete Variablen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird im Folgenden auf das Überstreichen zur Kennzeichnung diskreter Variablen verzichtet.

Die Ableitungen der Systemvariablen nach den Optimierungsvariablen werden als Systemableitungen bezeichnet.

Die Systemvariablen lassen sich in Systemvariablen am FSI-Interface $\Gamma = \Gamma_{FSI}$ und in Systemvariablen des restlichen Struktur- und Fluidgebietes, $\Omega_S \setminus \Gamma$ und $\Omega_F \setminus \Gamma$, aufteilen. Die Variablen werden dann wie folgt mit Γ und Ω indiziert:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{\Gamma,S} \\ \mathbf{d}_{\Omega \setminus \Gamma} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_{\Gamma,F} \\ \mathbf{y}_{\Omega \setminus \Gamma} \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{\Gamma,F} \\ \mathbf{q}_{\Omega \setminus \Gamma} \end{Bmatrix}. \quad (5.5)$$

Diskrete Gleichungen und Variablen, die am FSI-Interface auftreten und sich somit auf unterschiedliche Diskretisierungen beziehen können, werden bezüglich der Diskretisierung indiziert. Der Index F bedeutet, dass die Variable diskret bezüglich der Diskretisierung des Fluidgebietes ist. Der Index S bedeutet, dass die Variable diskret bezüglich der Diskretisierung des Strukturgebietes ist.

Die Zielfunktion wird mit $\psi = \psi(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ bezeichnet. Allgemein lässt sich der Gradient einer vektorwertigen Zielfunktion $\boldsymbol{\psi} = [\psi_1 \ \dots \ \psi_{n_\psi}]^T$ als Funktionalmatrix darstellen:

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{d\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \frac{d\psi_1}{ds_1} & \dots & \frac{d\psi_1}{ds_{n_s}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\psi_{n_\psi}}{ds_1} & \dots & \frac{d\psi_{n_\psi}}{ds_{n_s}} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird in den theoretischen Teilen dieser Arbeit eine skalarwertige Zielfunktion ψ behandelt. Der Gradient wird in Einheitlichkeit zum allgemeinen Fall als Zeilenvektor definiert:

$$\frac{d\psi}{d\mathbf{s}} = \left[\frac{d\psi}{ds_1} \quad \dots \quad \frac{d\psi}{ds_{n_s}} \right] \quad (5.7)$$

Die diskreten Geometriekoordinaten des mechanischen Modells der Struktur, also die FE-Knotenkoordinaten, werden mit \mathbf{x} bezeichnet.

5.3. Numerische Sensitivitätsanalyse

Die numerische Sensitivitätsanalyse wurde schon in Abschnitt 2.4 erwähnt. Sie beruht auf der Bestimmung des Gradienten der Zielfunktion $\frac{d\psi}{ds}$ durch finite Differenzen. Für die Dreifeldformulierung ist die Formulierung des Gradienten durch Gleichung 2.19 identisch. Im folgenden werden die Herleitung, Varianten, Genauigkeits- und Kostenaspekte der numerische Sensitivitätsanalyse erklärt.

5.3.1. Finite-Differenzen-Methode

Die Herleitung der finiten Differenzen erfolgt über die Taylor-Entwicklung. Entwickelt man die Funktion $f(x)$ und substituiert $x = x_0 + \varepsilon$, wobei ε das Intervall zwischen x und der Stelle x_0 beschreibt, so erhält man folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0 + \varepsilon) \\ &= f(x_0) + \frac{1}{1!} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \cdot \varepsilon + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \cdot \varepsilon^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_0) \cdot \varepsilon^n + R_n(x_0) \end{aligned} \quad (5.8)$$

$R_n(x_0)$ ist der Restterm, der die Differenz zwischen der Taylor-Entwicklung n-ten Grades und der Originalfunktion f beschreibt:

$$R_n(x_0) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x_0) \cdot \varepsilon^k \quad (5.9)$$

Entwickelt man die Reihe für die erste Ableitung, lässt sie sich schreiben:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} - \frac{R_1(x_0)}{\varepsilon} \quad (5.10)$$

Für einen genügend kleinen Restterm wird dann folgende Näherung als *Vorwärtsdifferenzenquotient* erster Ordnung bezeichnet:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \quad (5.11)$$

Nach selbiger Formel lässt sich der Vorwärtsdifferenzenquotient zweiter Ordnung in Abhängigkeit der ersten Ableitung schreiben. In einem weiteren Schritt setzt man obige Formel nochmals ein:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \approx \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \varepsilon) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)}{\varepsilon} = \frac{f(x_0 + 2\varepsilon) - 2f(x_0 + \varepsilon) + f(x_0)}{\varepsilon^2} \quad (5.12)$$

Analog lässt sich für die Differenzenquotienten dritter und höherer Ordnung verfahren.

Setzt man in der Taylor-Entwicklung $-\varepsilon$ statt ε ein, so erhält man die *Rückwärtsdifferenzenquotienten*. Der *zentrale Differenzenquotient* lässt sich aus dem Mittelwert des Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzenquotienten bilden. Erster Ordnung lauten Rückwärts- und zentrale Differenzenquotient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon)}{\varepsilon} \quad (5.13)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0 - \varepsilon)}{2\varepsilon}. \quad (5.14)$$

Durch die Vernachlässigung des Restterms wird bei der Bildung von finiten Differenzen ein Fehler verursacht. Da die Differenzenquotienten der Näherung von Ableitung auf einem Gitter dienen, spricht man vom Diskretisierungsfehler. Geht ε gegen Null, so konvergiert die Näherung gegen die korrekte Ableitung. Es lassen sich folglich mit entsprechender Wahl von ε gute Näherungen erzielen.

5.3.2. Numerische Optimierung mit finiten Differenzen

Im Rahmen der numerischen Optimierung der Dreifeldformulierung ist zu berücksichtigen, dass nicht die partielle Ableitung, sondern das totale Differenzial $\frac{d\psi}{ds_i}$ durch die finiten Differenzen ermittelt werden muss. Die Zielfunktion ψ ist in der Regel von den Optimierungsvariablen \mathbf{s} und den Systemvariablen des Gesamtsystems \mathbf{r} abhängig. Diese sind abhängige Variablen, welche über die Systemgleichungen $\mathcal{R}(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ gekoppelt sind. Eine Perturbation der Optimierungsvariablen zieht somit immer eine Veränderung der

Systemvariablen mit sich. Dies lässt sich auch durch die Abhängigkeit $\mathbf{r}(\mathbf{s})$ ausdrücken, welche bei der Ermittlung des totalen Differenzials berücksichtigt werden muss. Die finite Vorwärtsdifferenz erster Ordnung zur Bestimmung einer Komponente des Gradienten $\frac{d\psi}{ds_i}$ mit $i = 1 \dots n_s$ an der Stelle $s^{(k)}$ kann man in Abhängigkeit dieser Variablen wie folgt schreiben:

$$\frac{d\psi}{ds_i}(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{r}(\mathbf{s}^{(k)})) \approx \frac{\psi(\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon \mathbf{e}_i, \mathbf{r}(\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon \mathbf{e}_i)) - \psi(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{r}(\mathbf{s}^{(k)}))}{\varepsilon} \quad (5.15)$$

Dabei ist \mathbf{e}_i der i -te kartesische Basisvektor.

Der Referenzzustand $\mathbf{r}(\mathbf{s}^{(k)})$ ergibt sich aus der Dreifeldanalyse, welche in jeder Optimierungsiteration durchgeführt wird. Der perturbierte Zustand $\mathbf{r}(\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon \mathbf{e}_i)$ wird im Rahmen der rein numerischen Sensitivitätsanalyse durch eine weitere Dreifeldanalyse mit perturbiertem Design $\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon \mathbf{e}_i$ ermittelt. Dabei wird nur die betreffende Optimierungsvariable s_i perturbiert. Zur Bestimmung eines vektorwertigen Gradienten bei n_s Optimierungsvariablen werden n_s zusätzliche Analysen pro Optimierungsiteration benötigt. Der Rechenaufwand steigt also mit der Zahl der Optimierungsvariablen, weshalb die numerische Sensitivitätsanalyse nur für Optimierungsprobleme mit wenigen Variablen zu empfehlen ist. Es ist zu beachten, dass bei der Verwendung zentraler Differenzenquotienten oder von Differenzenquotienten höherer Ordnung entsprechend mehr Auswertungen benötigt werden. Ebenfalls ist der Rechenaufwand für nichtlineare Analysen erheblich höher als für lineare Analysen.

Für die Genauigkeit der numerischen Sensitivitätsanalyse ist die Schrittweite ε entscheidend. Bei der computergestützten Berechnung lässt sich die Genauigkeit durch die Wahl einer möglichst geringen Perturbation jedoch nur in Grenzen steigern. Der Rundungsfehler des Computers fällt für geringe Perturbationen stärker ins Gewicht und verursacht somit Fehler in den Differenzenquotienten. Die Wahl der Schrittweite ist somit unter Berücksichtigung des Diskretisierungs- und des Rundungsfehlers abzuwägen.

Abbildung 5.1 zeigt den Ablauf der numerischen Optimierung nach NAND mit der numerischen Sensitivitätsanalyse. Die vorweggehende Analyse dient der Bestimmung der Systemvariablen im Referenzzustand, welche Eingangswerte für die Sensitivitätsanalyse sind. Im Rahmen der Sensitivitätsanalyse erfolgt eine Schleife über die Optimierungsvariablen. Sie enthält eine weitere Analyse mit perturbiertem Design zur Berechnung des perturbierten Zustandes. Es folgt die Auswertung der Zielfunktion für den Referenz- und den perturbierten Zustand sowie die genäherte Berechnung des Gradienten mit der finiten Differenz. Bei der Umsetzung muss das Vorhalten des Referenzzustandes gewährleistet sein. Diese Daten werden zur Berechnung der finiten Differenzen benötigt und stellen den Ausgangszustand für die nächste Iteration dar. Der Vektor der Gradienten wird an das Designupdate übergeben, wo nach den Methoden des eingesetzten Gradientenalgorithmus die Optimierungsdaten aktualisiert werden.

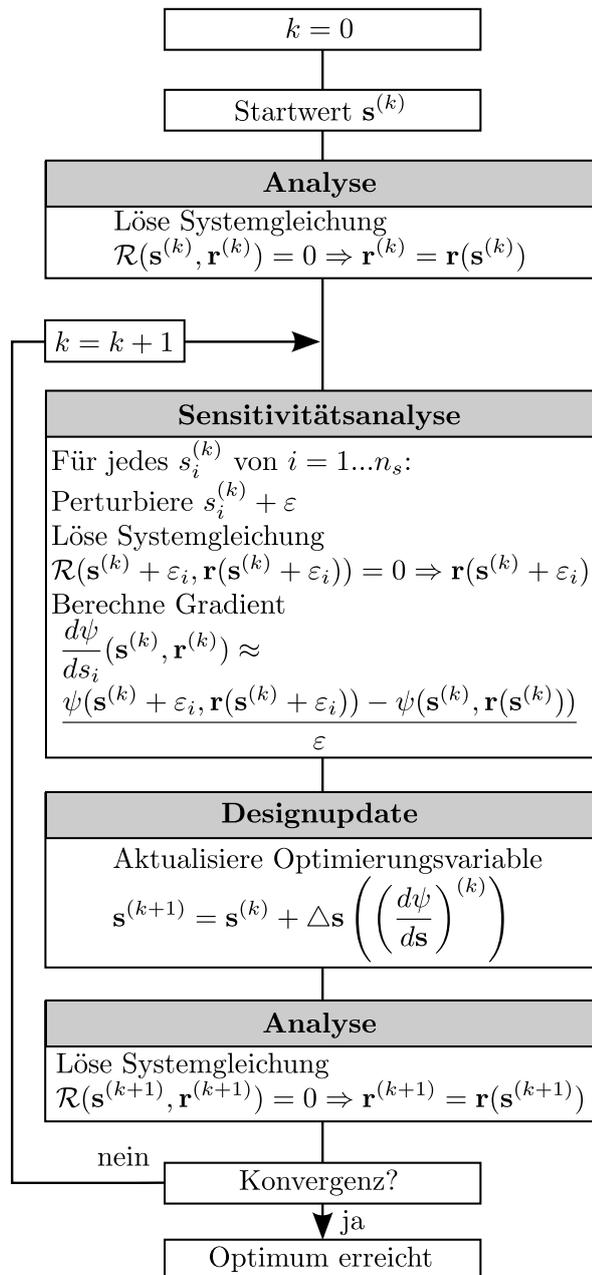


Abbildung 5.1.: Numerische Optimierung nach NAND mit numerischer Sensitivitätsanalyse.

5.4. Direkte diskrete residuumsbasierte Sensitivitätsanalyse

5.4.1. Direkte Sensitivitätsanalyse für die Dreifeldformulierung

Das Verfahren der direkten Sensitivitätsanalyse, welches für die Strukturmechanik schon in Abschnitt 2.4 erläutert wurde, soll nun für das gekoppelte Gesamtsystem \mathcal{R} beschrieben werden. Die zu minimierende Zielfunktion ist im Allgemeinen von den Optimierungsvariablen \mathbf{s} und den Systemvariablen der Einzelsysteme \mathbf{r} abhängig.

$$\psi(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \psi(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) \quad (5.16)$$

Diese Variablen sind nicht unabhängig, sondern über die Systemgleichungen der Einzelsysteme $\mathcal{S} = 0$, $\mathcal{M} = 0$ und $\mathcal{F} = 0$ gekoppelt. Konkret bedeutet das, dass für ein Einzelsystem eine Änderung der Optimierungsvariablen oder eine Änderung der nicht-zugehörigen Systemvariablen eine Änderung der Systemantwort nach sich zieht. Bedingung für einen stationären Punkt der Zielfunktion ist das Verschwinden des Gradienten $\frac{d\psi}{ds}$. Das Differenzial der Zielfunktion lässt sich als Funktion der infinitesimalen Änderungen der Variablen darstellen:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{s}} d\mathbf{s} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{s}} d\mathbf{s} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{d}} d\mathbf{d} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{y}} d\mathbf{y} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{q}} d\mathbf{q} \quad (5.17)$$

Da sich die Differenziale $d\mathbf{d}$, $d\mathbf{y}$ und $d\mathbf{q}$ mit $d\mathbf{s}$ ändern, müssen zur Bestimmung des benötigten Gradienten $\frac{d\psi}{ds}$ diese durch $d\mathbf{s}$ ausgedrückt werden, d.h. die Systemableitungen $\frac{d\mathbf{d}}{ds}$, $\frac{d\mathbf{y}}{ds}$ und $\frac{d\mathbf{q}}{ds}$ müssen bekannt sein. Zur ihrer Bestimmung werden die *Sensitivitätsgleichungen* herangezogen, die auf der Tatsache beruhen, dass die Ableitungen der Systemgleichungen nach den Optimierungsvariablen verschwinden müssen, d.h. mit $\mathcal{R} = 0$ also auch $\frac{d\mathcal{R}}{ds} = 0$ gilt. Die Sensitivitätsgleichungen des gekoppelten Systems lauten:

$$\frac{d\mathcal{S}}{ds} = \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\mathbf{s}} + \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds} + \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{ds} + \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{ds} = 0 \quad (5.18)$$

$$\frac{d\mathcal{M}}{ds} = \frac{\partial\mathcal{M}}{\partial\mathbf{s}} + \frac{\partial\mathcal{M}}{\partial\mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds} + \frac{\partial\mathcal{M}}{\partial\mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{ds} + \frac{\partial\mathcal{M}}{\partial\mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{ds} = 0 \quad (5.19)$$

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathbf{s}} + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds} + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{ds} + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{ds} = 0 \quad (5.20)$$

Die Gleichungen lassen sich in folgendem Gleichungssystem schreiben, welches 1990 erstmals von Sobieszcanski-Sobieski formuliert wurde und für welches der Begriff *Global*

Sensitivity Equation I (GSE I) [108, 109] eingeführt wurde.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{d}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{y}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{q}}{ds} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{s}} \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{s}} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{s}} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Es handelt sich auch hier um gekoppelte Gleichungen. Ein gekoppeltes System zieht also eine gekoppelte Sensitivitätsanalyse nach sich. Diese kann immer nur unter Berücksichtigung des Gesamtsystems erfolgen und ihre Unbekannten können nicht getrennt voneinander bestimmt werden, da für deren Bestimmung die Jacobi-Matrix $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{r}}$ vollständig bekannt sein muss. In Abschnitt 5.4.2 wird die numerische Lösung dieser Gleichungen behandelt.

Auch Sobieszcanski-Sobieski beschreibt allgemein drei Partitionen, die über eine Optimierungsvariable und die von dieser abhängigen Zustandsvariablen gekoppelt sind. In den GSE I (Gleichung 5.21) und in der adjungierten Gleichung (Gleichung 5.44) spiegelt sich die Kopplung der Felder in den Nebendiagonaltermen der Jacobimatrix wieder. Dieser Ansatz prägte die Literatur der 90er Jahre [94, 43, 44] und auch die einschlägige neuere Literatur, wie die der Arbeitsgruppen um Maute [83, 84, 9, 10, 82, 3, 102], Martins [80, 81, 25, 5] und Lund [78, 79, 91]. Sobieskis Ansatz findet sich für direkte und adjungierte Methoden oft wieder, da er eine effiziente und genaue Sensitivitätsberechnung verspricht.

Setzt man die Lösungen der Sensitivitätsgleichungen – die Systemableitungen $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ – in den Gradienten der Zielfunktion ein und fordert dessen Verschwinden, erhält man die Bedingung für einen stationären Punkt. Die Zahl der Bedingungen entspricht der Zahl der Optimierungsvariablen n_s .

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{ds} &= \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{s}} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{d}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{y}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{q}}{ds} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{s}} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{s}} \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{s}} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{s}} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

bzw.

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{s}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{r}} \right]^{-1} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{s}} = 0 \quad (5.23)$$

5.4.2. Numerische Optimierung mit direkter Sensitivitätsanalyse

5.4.2.1. Gradientenmethoden und direkte Sensitivitätsanalyse

Die Formulierung der direkten Sensitivitätsanalyse legt eine iterative Lösung durch Gradientenalgorithmien (Abschnitt 2.3.1.2) nach dem NAND-Konzept (Abschnitt 2.3.2) nahe, denn die Sensitivitätsanalyse kann unabhängig von Analyse und Designupdate als separates Modul stattfinden. Bei diesem Vorgehen wird auf der Grundlage bekannter Optimierungsvariablen $\mathbf{s}^{(k)}$ aus dem letzten Iterationsschritt (oder der Startwerte) eine Systemanalyse durchgeführt, welche als Systemantwort die Systemvariablen \mathbf{r} liefert. Die sich ergebenden Systemvariablen dienen als Eingangswerte zur Sensitivitätsanalyse, denn sie werden zur Bestimmung der Terme der Jacobimatrix der GSE I (Gleichung 5.21) benötigt. Die Sensitivitätsanalyse erfordert zunächst die Lösung dieses Gleichungssystems. Die Lösungen – die Systemableitungen – werden für die Auswertung des Gradienten $\frac{d\psi}{ds}(\mathbf{s}^{(k)})$ an der Stelle $\mathbf{s}^{(k)}$ verwendet. Der Gradient dient als Eingangswert für das Designupdate, in dem nach den Methoden des eingesetzten Algorithmus die Optimierungsvariablen aktualisiert werden. Der Gradient ist ungleich Null solange keine Konvergenz erreicht ist. Er verschwindet am Optimum. In Abbildung 5.2 ist der Ablauf des NAND Ansatzes für das direkte Verfahren schematisch dargestellt.

Alternativ ist das SAND Konzept (2.3.2) möglich. Dann findet eine simultane Lösung der Systemgleichungen und der Gleichungen 5.22 statt. Eine entsprechende Formulierung dieser Gleichungen in Abhängigkeit der Optimierungs- und Systemvariablen ist zur Aufstellung eines großen Gleichungssystems nötig. Dieses Vorgehen ist jedoch für Standardaufgaben der Ingenieurpraxis nicht relevant, da die geläufigen Berechnungsprogramme die Möglichkeit dieser Formulierung meist nicht ermöglichen.

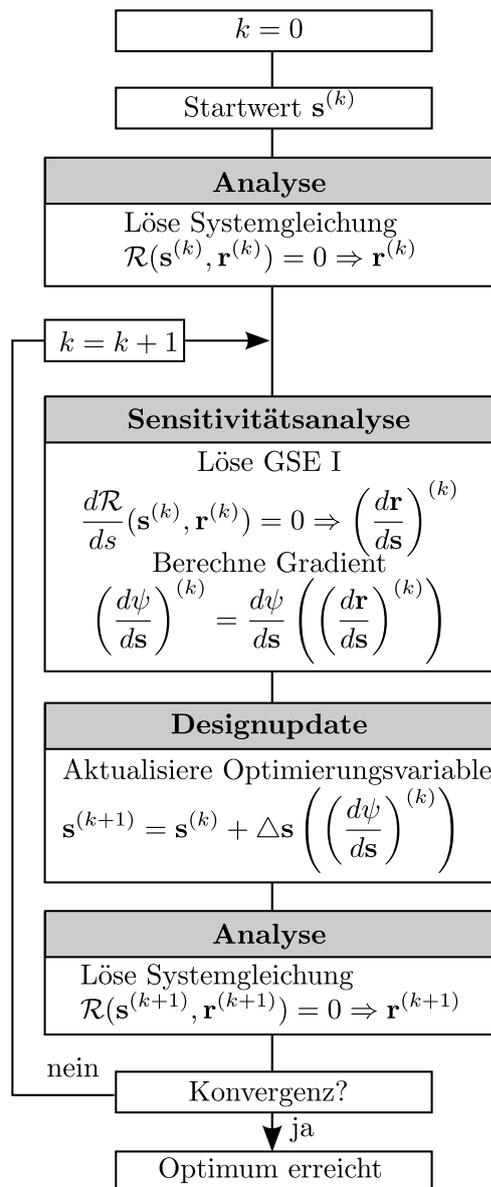


Abbildung 5.2.: Numerische Optimierung nach NAND mit direkter Sensitivitätsanalyse.

5.4.2.2. Lösung der GSE I

Die Lösungsmethoden für die Gleichungen sind ein wesentliches Thema der Sensitivitätsanalyse und werden in der Wissenschaft viel diskutiert. Wie bei der FSI-Analyse, spricht man von einer monolithischen Lösung, wenn die Gleichung simultan gelöst wird. Als partitionierte oder gestaffelte Lösung wird in diesem Zusammenhang die Zerlegung der Gleichungen gemäß der physikalischen Felder – also in struktur- und fluidseitige Sensitivitätsgleichungen – und die damit notwendigen Iterationen, bezeichnet. Dabei werden die zu bestimmenden Größen – die Ableitungen der Zustandsvariablen – entsprechend

der Einzelfelder separiert und die sich ergebenden Gleichungen iterativ gelöst.

Hier sei für die GSE I eine gestaffelte Lösung vorgestellt. Dabei wird die GSE I in die Sensitivitätsgleichungen für die Einzelfelder zerlegt, welche nacheinander gelöst werden. Dies bietet sich an, da die Lösung der Systemableitung nach dem Schema der partitionierten Analyse im jeweiligen Berechnungsprogramm stattfinden kann und hierfür vorhandene Softwarestrukturen (Gleichungslöser) benutzt werden können. Zudem wird das Vorhalten der gesamten Jacobimatrix hinfällig, was für große praxisrelevante Probleme ohnehin nach unrealistischen Speicherkapazitäten verlangen würde. Die Methode verlangt die Interaktion aller beteiligten Simulationsprogramme, da die Lösungen der jeweiligen Sensitivitätsgleichung an die anderen Berechnungsprogramme übergeben werden müssen. Die gestaffelte Lösung wird von vielen Forschergruppen, oft auch in Kombination mit einer Vereinfachung der Jacobimatrix, verfolgt ([83, 80, 104, 42]).

In dem iterativen Verfahren wird innerhalb des Optimierungsschrittes k eine Schleife mit Iterationsindex l zur Lösung nach $\frac{d\mathbf{d}}{ds}^{(k)}$, $\frac{d\mathbf{y}}{ds}^{(k)}$ und $\frac{d\mathbf{q}}{ds}^{(k)}$ bis zur Konvergenz durchlaufen. Die Startwerte für $l = 0$ können dabei auf den Lösungen aus dem letzten Optimierungsschritts $k - 1$ basieren und beispielsweise durch eine Unterrelaxation ermittelt werden. Im Strukturcode wird nach $\frac{d\mathbf{d}}{ds}^{(k,l)}$ gelöst:

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds}^{(k,l)} = -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{s}} - \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{ds}^{(k,l-1)} - \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{ds}^{(k,l-1)} \quad (5.24)$$

Mit der Lösung $\frac{d\mathbf{d}}{ds}^{(k,l)}$ wird nach $\frac{d\mathbf{y}}{ds}^{(k,l)}$ gelöst:

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{ds}^{(k,l)} = -\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{s}} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds}^{(k,l)} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{ds}^{(k,l-1)} \quad (5.25)$$

Mit bekannten $\frac{d\mathbf{d}}{ds}^{(k,l)}$ und $\frac{d\mathbf{y}}{ds}^{(k,l)}$ kann im Fluidcode nun $\frac{d\mathbf{q}}{ds}^{(k,l)}$ bestimmt werden:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{ds}^{(k,l)} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{s}} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds}^{(k,l)} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{ds}^{(k,l)} \quad (5.26)$$

Eine monolithische Lösung der Sensitivitätsgleichungen und Systemgleichungen auf Basis einer kontinuierlichen Sensitivitätsanalyse stellt Étienne in [30] vor. Die Basis ist eine Dreifeldformulierung für Fluid, Struktur und Fluidnetz. Der monolithische Ansatz für System- und Sensitivitätsanalyse erlaubt allgemein gute Genauigkeit aber wenig Flexibilität. Schwierigkeiten beim Lösen bereitet der monolithische Ansatz auch, da die Jacobimatrix i.A. sehr groß und durch die Kopplungsterme eng besetzt ist. Desweiteren kann sie sehr schlecht konditioniert sein. Abhilfe bietet hier der gestaffelte Lösungsansatz in der Sensitivitätsanalyse und der Einsatz spezifischer Diskretisierung in einem partitionierten Berechnungsverfahren der FSI. Auch kann dann für die Lösungen der Sensitivitätsgleichungen dieselbe existierende Software wie für die Systemanalyse der

Einzelfelder eingesetzt werden. Daher hat sich das gestaffelte Verfahren für die Lösung der diskreten Gleichungen durchgesetzt und wird für direkte und adjungierte Methoden eingesetzt. Reuther [104] und Martins [80, 81] bezeichnen die Methode für den adjungierten Ansatz als *lagged coupled adjoint*. Zum Zwecke der numerischen Stabilität empfiehlt es sich eine Unterrelaxation anzuwenden [83, 84]. Üblicherweise wird für die Lösungsprozedur gemäß der Softwaregegebenheiten eine Zweifeldformulierung, bei der das Fluid die Netzbewegung einschließt, verwendet [83].

Ghattas und Li [42] bezeichnen die Partitionierung als *domain decomposition*. Sie legen ebenfalls drei Felder zu Grunde. Diese sind, abweichend von der üblichen Einteilung in Struktur, Fluid und Fluidnetz, als Fluid, Struktur und Interface definiert. Die Abhängigkeiten ergeben sich anders, da es keine direkten Abhängigkeiten von Struktur und Fluid gibt, sondern diese immer über das Interface gekoppelt sind. Die diskreten Gleichungen für Fluid, Struktur und Interface drücken sie entsprechend als

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_F(\mathbf{x}_F, \mathbf{x}_I) &= 0 \\ \mathbf{h}_S(\mathbf{x}_S, \mathbf{x}_I) &= 0 \\ \mathbf{h}_I(\mathbf{x}_F, \mathbf{x}_S, \mathbf{x}_I) &= 0 \end{aligned} \tag{5.27}$$

aus, wobei \mathbf{x}_F , \mathbf{x}_S und \mathbf{x}_I die entsprechenden Systemvariablen sind. In der Jacobimatrix ergeben sich dann die Terme $\mathbf{J}_{FS} = \frac{\partial \mathbf{h}_F}{\partial \mathbf{x}_S}$ und $\mathbf{J}_{SF} = \frac{\partial \mathbf{h}_S}{\partial \mathbf{x}_F}$ zu Null. Das System wird partitioniert gelöst, indem eine Aufteilung in Fluidseite und kombinierte Struktur-Interface-Seite stattfindet. Dann gilt es die Nebendiagonalterme $\mathbf{J}_{FI} = \frac{\partial \mathbf{h}_F}{\partial \mathbf{x}_I}$ und $\mathbf{J}_{IF} = \frac{\partial \mathbf{h}_I}{\partial \mathbf{x}_F}$ auf die rechte Seite der jeweiligen Gleichungen zu bringen.

5.5. Adjungierte diskrete residuumsbasierte Sensitivitätsanalyse

5.5.1. Lagrange-Methode

Die Herleitung des adjungierten Ansatzes beruht auf der Lagrange-Methode, welche im Folgenden unter Verwendung der Methoden der Variationsrechnung erklärt wird.

Sei $\Psi(\boldsymbol{\varsigma}) = \Psi(\varsigma_1, \dots, \varsigma_n)$ ein Funktional, dessen Minimum gesucht ist. Nach den Regeln der Variationsrechnung und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Variation am stationären Punkt verschwindet, lässt sich die Variation von Ψ wie folgt schreiben:

$$\delta\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial\varsigma_1}\delta\varsigma_1 + \dots + \frac{\partial\Psi}{\partial\varsigma_n}\delta\varsigma_n = 0 \tag{5.28}$$

Sind die Variablen $\varsigma_1, \dots, \varsigma_n$ unabhängig, spricht man von einem *freien Variationsproblem*. Da sich die Variablen frei wählen lassen, gilt für alle Koeffizienten $\frac{\partial\Psi}{\partial\varsigma_i} = 0$, mit

$i = 1, \dots, n$. Existieren jedoch gegenseitige Abhängigkeiten der Variablen ς_i , verschwinden die Koeffizienten nicht. Die Abhängigkeiten lassen sich über *Nebenbedingungen* $\rho(\varsigma)$ ausdrücken:

$$\rho(\varsigma) = \left\{ \begin{array}{c} \rho_1(\varsigma_1, \dots, \varsigma_n) \\ \dots \\ \rho_m(\varsigma_1, \dots, \varsigma_n) \end{array} \right\} = 0 \quad \text{mit} \quad m < n \quad (5.29)$$

Für m Nebenbedingung mit n Variablen existieren $n - m$ unabhängige Variablen, die frei gewählt werden können, und m abhängige Variablen, welche sich aus den durch die Nebenbedingungen gegebenen Abhängigkeiten ergeben. Die naheliegendste Möglichkeit ein freies Variationsproblem als Grundlage für das Finden des Minimums zu erzeugen ist die Elimination von m Variablen ς_i oder $\delta\varsigma_i$ aus den Nebenbedingungen ρ oder dessen Variationen $\delta\rho$ und direktes Einsetzen in das Funktional Ψ oder dessen Variation $\delta\Psi$, so dass ein freies Variationsproblem mit $n - m$ Variablen verbleibt.

Die Lagrange-Methode ist ein raffiniertes Verfahren, um ein Variationsproblem mit Nebenbedingungen auf ein freies Variationsproblem zu reduzieren. Dies geschieht durch die Betrachtung der Variation der sog. *Lagrange-Funktion* $\mathcal{L} = \Psi + \boldsymbol{\lambda}^T \rho$ und durch eine geschickte Wahl der *Lagrange-Multiplikatoren* $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \ \dots \ \lambda_m]^T$. Die Lagrange Funktion lautet:

$$\mathcal{L} = \Psi + \boldsymbol{\lambda}^T \rho = \Psi + \lambda_1 \rho_1 + \dots + \lambda_m \rho_m \quad (5.30)$$

Sie darf zur Suche nach einem stationären Punkt des Funktionals Ψ herangezogen werden, da für $i = 1, \dots, m$ $\rho_i = 0$ gilt. $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sind beliebige Multiplikatoren. Am stationären Punkt verschwindet die Variation und es lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{\varsigma}} \delta\boldsymbol{\varsigma} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varsigma_i} \delta\varsigma_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\varsigma_i} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial\rho}{\partial\varsigma_i} \right) \delta\varsigma_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\varsigma_i} + \lambda_1 \frac{\partial\rho_1}{\partial\varsigma_i} + \dots + \lambda_m \frac{\partial\rho_m}{\partial\varsigma_i} \right) \delta\varsigma_i = 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

Nun folgt die Raffinesse der Lagrange-Methode: die Wahl der m Lagrange-Multiplikatoren λ_i . Diese werden so gewählt, dass die Koeffizienten der m abhängigen Variablen $\delta\varsigma_i$ mit $i = n - m + 1, \dots, n$ verschwinden und diese somit aus der Gleichung herausfallen. Es ergeben sich dann folgende m Bedingungen:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varsigma_i} = \frac{\partial\Psi}{\partial\varsigma_i} + \lambda_1 \frac{\partial\rho_1}{\partial\varsigma_i} + \dots + \lambda_m \frac{\partial\rho_m}{\partial\varsigma_i} = 0 \quad \text{mit} \quad i = n - m + 1, \dots, n \quad (5.32)$$

Gleichung 5.31 reduziert sich dann auf

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varsigma_i} \delta\varsigma_i = \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\varsigma_i} + \lambda_1 \frac{\partial\rho_1}{\partial\varsigma_i} + \dots + \lambda_m \frac{\partial\rho_m}{\partial\varsigma_i} \right) \delta\varsigma_i = 0. \quad (5.33)$$

Die verbleibenden unabhängigen Variablen können frei gewählt werden, da es sich nun um ein freies Variationsproblem handelt. Als ein solches behandelt, bedeutet das, dass die Koeffizienten der unabhängigen Variablen $\delta\varsigma_i$ mit $i = 1, \dots, n - m$ verschwinden. Es ergeben sich folgende weitere $n - m$ Bedingungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varsigma_i} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varsigma_i} + \lambda_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \varsigma_i} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \rho_m}{\partial \varsigma_i} = 0 \quad \text{mit } i = 1, \dots, n - m \quad (5.34)$$

Man erkennt, dass mit geeigneter Wahl der Lagrange-Multiplikationen alle Koeffizienten der Summe $\delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varsigma_i} \delta \varsigma_i = 0$ verschwinden, so als ob es sich um freie Variablen $\delta \varsigma_i$ mit $i = 1, \dots, n$ handeln würde.

Aus den n Bedingungen 5.32 und 5.34 und den m Nebenbedingungen 5.29 lassen sich ς_i^* und λ_j^* am stationären Punkt berechnen. Dabei handelt es sich um $n + m$ Freiheitsgrade. Die Lagrange-Methode generiert also aus einem Problem mit $n - m$ Freiheitsgraden ein Problem mit $n + m$ Freiheitsgraden.

Betrachtet man die Lagrange-Multiplikatoren als Variablen, erkennt man, dass die Bedingungen für einen stationären Punkt der Lagrange-Funktion – ein Sattelpunkt – den Bedingungen 5.29, 5.32 und 5.34 entsprechen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varsigma_i} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = \rho_j = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad \text{und} \quad j = 1, \dots, m. \quad (5.35)$$

Die Beschreibung der Lagrange-Methode und deren Verwendung in der Mechanik findet sich auch in [13, 76].

5.5.2. Adjungierte Sensitivitätsanalyse für die Dreifeldformulierung

Nun sei die Lagrange-Methode auf eine Optimierungsfragestellung im Rahmen der Dreifeldformulierung angewandt. Die Zielfunktion ψ stellt das zu minimierende Funktional in Abhängigkeit der Optimierungs- und Systemvariablen dar:

$$\psi(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \psi(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) \quad (5.36)$$

Die Abhängigkeiten der Variablen sind über die Systemgleichungen \mathcal{R} gegeben, welche als Nebenbedingungen behandelt werden:

$$\mathcal{R}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) \\ \mathcal{M}(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) \\ \mathcal{F}(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) \end{array} \right\} = 0 \quad (5.37)$$

Die Optimierungsvariablen \mathbf{s} stellen die unabhängigen und die Systemvariablen \mathbf{d} , \mathbf{y} und \mathbf{q} sind die abhängigen Variablen dar. Zum Zwecke der Minimierung der Zielfunktion wird die Lagrange-Funktion gebildet, indem die Systemgleichungen zur Zielfunktion „adjungiert“ werden:

$$\mathcal{L} = \psi + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathcal{R} = \psi + \boldsymbol{\lambda}_d^T \cdot \mathcal{S} + \boldsymbol{\lambda}_y^T \cdot \mathcal{M} + \boldsymbol{\lambda}_q^T \cdot \mathcal{F} \quad (5.38)$$

Der Vektor der Lagrange-Multiplikatoren wird in diesem Kontext als *adjungierter Vektor* bezeichnet und enthält die *adjungierten Variablen*. Er setzt sich aus Komponenten $\boldsymbol{\lambda}_d$, $\boldsymbol{\lambda}_y$ und $\boldsymbol{\lambda}_q$ zusammen, welche den Feldern Struktur, Fluidnetz und Fluid zugeordnet sind und lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} &= \left[\boldsymbol{\lambda}_d^T \quad \boldsymbol{\lambda}_y^T \quad \boldsymbol{\lambda}_q^T \right]^T \\ &= \left[\lambda_{d,1} \quad \dots \quad \lambda_{d,n_d} \quad \lambda_{y,1} \quad \dots \quad \lambda_{y,n_y} \quad \lambda_{q,1} \quad \dots \quad \lambda_{q,n_q} \right]^T \end{aligned} \quad (5.39)$$

Es wird die erste Variation der Lagrange-Funktion gebildet, welche lautet:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}} \delta \mathbf{s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{d}} \delta \mathbf{d} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{y}} \delta \mathbf{y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = 0 \quad (5.40)$$

Werden nun die Lagrange-Multiplikatoren so gewählt, dass die Koeffizienten der abhängigen Variablen $\delta \mathbf{d}$, $\delta \mathbf{y}$ und $\delta \mathbf{q}$ verschwinden, ergeben sich $n_\lambda = n_r = n_d + n_y + n_q$ Bedingungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{d}} + \boldsymbol{\lambda}_d^T \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} + \boldsymbol{\lambda}_y^T \cdot \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}} + \boldsymbol{\lambda}_q^T \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}} = 0 \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{y}} + \boldsymbol{\lambda}_d^T \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}} + \boldsymbol{\lambda}_y^T \cdot \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{y}} + \boldsymbol{\lambda}_q^T \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}} = 0 \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}} + \boldsymbol{\lambda}_d^T \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}} + \boldsymbol{\lambda}_y^T \cdot \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{q}} + \boldsymbol{\lambda}_q^T \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (5.43)$$

Diese Bedingungen lassen sich auch in folgendem Gleichungssystem schreiben:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_d \\ \boldsymbol{\lambda}_y \\ \boldsymbol{\lambda}_q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{d}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Eliminiert und in bündiger Schreibweise lassen sich die Lagrange-Multiplikatoren wie folgt darstellen:

$$\boldsymbol{\lambda}^T = - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{r}} \right]^{-1} \quad (5.45)$$

Man spricht von der *adjungierten Gleichung*. Es ist wichtig hervorzuheben, dass die Komponenten λ_d , λ_y und λ_q gekoppelt sind und nicht unabhängig voneinander bestimmt werden können. Die Jacobi-Matrix $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{r}}$ muss in die Berechnung jeder Komponente vollständig eingehen. Eine korrekte analytische Sensitivitätsanalyse ist folglich immer nur auf der Basis des gesamten Systems möglich. Diese Tatsache ist ein wesentlicher Aspekt, dem sich numerische Lösungsverfahren der gekoppelten Sensitivitätsanalyse widmen (Abschnitt 5.5.3).

Mit der obigen Wahl verbleiben nun nur noch die freien Variablen $\delta \mathbf{s}$ in Gleichung 5.40, deren Koeffizienten folglich verschwinden müssen. Daraus ergeben sich n_s Bedingungen.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{s}} + \lambda_d^T \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{s}} + \lambda_y^T \cdot \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{s}} + \lambda_q^T \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{s}} = 0 \quad (5.46)$$

Gemeinsam mit den Systemgleichungen $\mathcal{S} = 0$, $\mathcal{M} = 0$ und $\mathcal{F} = 0$ erhält man alle Gleichungen, die zur Bestimmung der Variablen \mathbf{s}^* , \mathbf{d}^* , \mathbf{y}^* , \mathbf{q}^* und λ^* am Optimum notwendig sind. Es handelt sich um ein Problem mit $n_s + n_r + n_\lambda = n_s + 2 \cdot n_r$ Freiheitsgraden.

In den aufgestellten Bedingungen erkennt man die Kuhn-Tucker-Bedingungen wieder (Abschnitt 2.1.3).

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}} = 0 \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{d}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{y}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_d} = \mathcal{S} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_y} = \mathcal{M} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_q} = \mathcal{F} = 0 \quad (5.49)$$

Bemerkung: So wie dem adjungierten Ansatz die Lagrange-Methode zu Grunde liegt, so liegt dem direktem Ansatz der Sensitivitätsanalyse das Eliminationsverfahren zugrunde, welches in Abschnitt 5.5.1 erwähnt wird. Überträgt man die variationelle auf die differenzielle Schreibweise, entspricht die Elimination von m Variablen $\delta \zeta_i$ aus $\delta \boldsymbol{\rho}$ und das Einsetzen in die Variation des Funktionals $\delta \Psi$ nach Abschnitt 5.5.1 der Elimination der Ableitungen der Systemvariablen $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ aus den Sensitivitätsgleichungen $\frac{d\mathbf{R}}{ds}$ und dem Einsetzen in den Gradienten der Zielfunktion $\frac{d\psi}{ds}$.

5.5.3. Numerische Optimierung mit adjungierter Sensitivitätsanalyse

5.5.3.1. Gradientenmethoden und adjungierte Sensitivitätsanalyse

Ziel der numerischen Methoden ist die Bestimmung der Optimierungsvariablen am Optimum. Im adjungierten Ansatz bedeutet das die Bestimmung der Optimierungs-, System- und adjungierten Variablen am Optimum \mathbf{s}^* , \mathbf{d}^* , \mathbf{y}^* , \mathbf{q}^* und $\boldsymbol{\lambda}^*$ unter Verwendung der Kuhn-Tucker-Bedingungen (Gleichungen 5.47 bis 5.49). Werden diese Gleichungen in einem Schritt als großes nichtlineares Gleichungssystem gelöst, entspricht dies dem Prinzip des *Simultaneous Analysis and Design (SAND)*, da Systemanalyse und Optimierung simultan behandelt werden. Technisch ist SAND allerdings nicht immer möglich oder sinnvoll, da beispielsweise Systemgleichungen nicht ohne weiteres in Abhängigkeit der System- und Optimierungsvariablen formuliert werden können.

Alternativ kann man nach der Methodik des *Nested Analysis and Design (NAND)* vorgehen und einen gradientenbasierten Optimierungsalgorithmus (Abschnitt 2.3.1.2) zum Finden des Optimums \mathbf{s}^* einsetzen. In dessen Iterationen werden die zu erfüllenden Kuhn-Tucker-Bedingungen in Form von Systemanalysen zur Bestimmung der Systemvariablen und adjungierten Gleichungen zur Lösung der adjungierten Variablen integriert. Das Verfahren wird im Verlauf dieses Abschnitts noch genauer erklärt.

Es ist insbesondere zu unterscheiden, ob zum iterativen Finden des Optimums die Kuhn-Tucker Bedingungen in einem gestaffelten Verfahren gelöst werden oder ein Optimierungsalgorithmus eingesetzt wird. Grundlage des hier erklärten Lösungsverfahrens ist ein gradientenbasierter Optimierungsalgorithmus und die Lagrangefunktion mit entsprechender Wahl der Lagrange-Multiplikatoren. Dann wird nicht, wie bei einer Lösung der Kuhn-Tucker Bedingungen (gestaffelt oder nach oben erwähntem SAND Verfahren) nach dem stationären Punkt der Lagrangefunktion gesucht, sondern durch den Optimierungsalgorithmus direkt nach dem Minimum der Original-Zielfunktion. Die Lagrangefunktion wird dabei als Hilfsfunktion zur Bestimmung des Gradienten eingesetzt. Dies ist möglich, da der stationäre Punkt der Lagrangefunktion dem Minimum der Zielfunktion entspricht.

Weiterhin ist zu beachten, dass der iterative Algorithmus Informationen an den Iterationspunkten benötigt, die nicht dem Optimum entsprechen, die Kuhn-Tucker Bedingungen jedoch nur am Optimum erfüllt sind und somit nicht uneingeschränkt benutzt werden können. Da jedoch $\boldsymbol{\lambda}$ so gewählt wurde, dass $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} = 0$ gilt, und desweiteren an jedem Iterationspunkt das Gleichgewicht erfüllt sein muss, d.h. $\mathcal{R} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0$ gilt, sind die Bedingungen 5.48 auch an jedem Iterationspunkt gültig. Bedingung 5.47 ist dahingegen nur am Optimum erfüllt.

Das NAND-Verfahren (Abschnitt 2.3.2) lässt sich in die Schritte Analyse, Sensitivitätsanalyse und Designupdate unterteilen: Dabei wird auf der Grundlage bekannter Op-

timierungsvariablen aus dem letzten Iterationsschritt (oder der Startwerte) eine Systemanalyse durchgeführt, welche als Systemantwort die Systemvariablen \mathbf{r} liefert. Die Systemanalyse entspricht der Erfüllung der Bedingungen $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathcal{R} = 0$ (Gleichungen 5.49) des hier beschriebenen Verfahrens. Die sich ergebenden Systemvariablen dienen als Eingangswert zur Sensitivitätsanalyse, denn sie werden zur Bestimmung des Gradienten der Zielfunktion $\frac{d\psi}{ds}$ am aktuellen Iterationspunkt benötigt.

Die Ermittlung des Gradienten im Rahmen der Sensitivitätsanalyse sei im Folgenden genauer erklärt. Da hierzu zusätzlich zu den Optimierungs- und Systemvariablen auch die adjungierten Variablen benötigt werden, erfolgt zunächst deren Bestimmung. Dazu stehen Bedingungen $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{r}} = 0$ (Gleichungen 5.48), also die adjungierte Gleichung zur Verfügung. Es handelt sich um eine gekoppelte Gleichung, deren numerische Lösung im nächsten Abschnitt beschrieben wird. Der Gradient selbst kann nun über die Lagrangefunktion ausgedrückt werden:

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{d\mathcal{L}}{ds} - \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \frac{d\mathcal{R}}{ds} \quad (5.50)$$

Mit Erfüllung der Bedingungen $\mathcal{R} = 0$ (Gleichungen 5.49) und somit $\frac{d\mathcal{R}}{ds} = 0$, sowie $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} = 0$ (Gleichungen 5.48) lässt sich schreiben:

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{d\mathcal{L}}{ds} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}} \quad (5.51)$$

Der gesuchte Gradient ist also:

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{s}} + \boldsymbol{\lambda}_d^T \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{s}} + \boldsymbol{\lambda}_y^T \cdot \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{s}} + \boldsymbol{\lambda}_q^T \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{s}} \quad (5.52)$$

bzw.

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{s}} + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{s}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{r}} \right]^{-1} \cdot \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{s}} \quad (5.53)$$

Es ist zu erkennen, dass dieselbe Formulierung wie bei der direkten Sensitivitätsanalyse erzielt wird (Gleichung 5.23). Der Gradient dient als Eingangswert für das Designupdate, in dem nach den Methoden des eingesetzten Algorithmus die Optimierungsvariablen aktualisiert werden. Der Gradient ist ungleich Null, solange keine Konvergenz erreicht ist. Am Optimum verschwindet er und man erkennt, dass damit die übrige Gleichung 5.47 der Kuhn-Tucker Bedingungen erfüllt wird. In Abbildung 5.3 ist der Ablauf des NAND Ansatzes für das adjungierte Verfahren schematisch dargestellt.

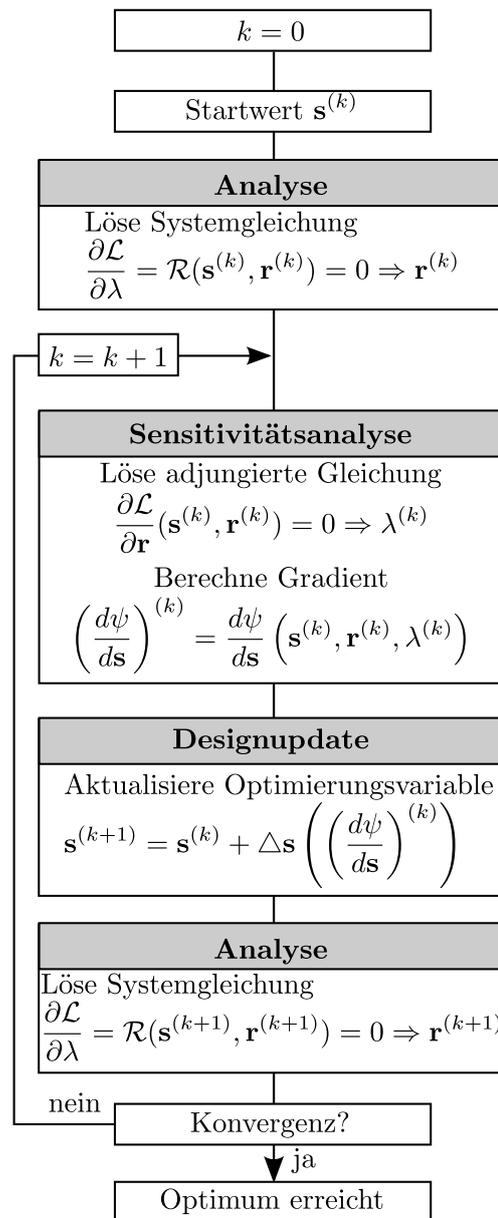


Abbildung 5.3.: Numerische Optimierung nach NAND mit adjungierter Sensitivitätsanalyse.

5.5.3.2. Lösung der adjungierten Gleichung

Wie schon zur Lösung der GSE I im Rahmen der direkten Sensitivitätsanalyse (siehe Abschnitt 5.4.2.2) wird hier die Möglichkeit der gestaffelten Lösung vorgestellt. Für die adjungierte Gleichung 5.44 wird das Gleichungssystem nach demselben Schema in die adjungierten Gleichungen der Einzelfelder zerlegt. Bei der Formulierung ist zu berücksichtigen, dass die Jacobimatrix in der adjungierten Gleichung transponiert ist. Wie in

der partitionierten Systemanalyse werden diese Gleichungen dann im jeweiligen Einzelfeldlöser nacheinander wiederholt gelöst, wobei u.U. vorhandene Softwarestrukturen (adjungierte Löser) genutzt werden können. Es ist kein Vorhalten der gesamten Jacobimatrix notwendig. Eine Kommunikation der Berechnungsprogramme muss zur Übertragung der jeweiligen Ergebnisse stattfinden.

Die gestaffelte Lösung der adjungierten Gleichungen nach den adjungierten Variablen $\lambda_d^{(k)}$, $\lambda_y^{(k)}$ und $\lambda_q^{(k)}$ geschieht durch Schleifendurchläufe l innerhalb eines Optimierungsschrittes k mit Startwerten für $l = 0$, welche auf den Lösungen des letzten Optimierungsschrittes $k - 1$ beruhen. Zunächst wird im Strukturcode nach $\lambda_d^{(k,l)}$ gelöst:

$$\frac{\partial \mathcal{S}^T}{\partial \mathbf{d}} \cdot \lambda_d^{(k,l)} = -\frac{\partial \psi^T}{\partial \mathbf{d}} - \frac{\partial \mathcal{M}^T}{\partial \mathbf{d}} \cdot \lambda_y^{(k,l-1)} - \frac{\partial \mathcal{F}^T}{\partial \mathbf{d}} \cdot \lambda_q^{(k,l-1)} \quad (5.54)$$

Auf Basis dieser Lösung kann nun $\lambda_y^{(k,l)}$ ermittelt werden.

$$\frac{\partial \mathcal{M}^T}{\partial \mathbf{y}} \cdot \lambda_y^{(k,l)} = -\frac{\partial \psi^T}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \mathcal{S}^T}{\partial \mathbf{y}} \cdot \lambda_d^{(k,l)} - \frac{\partial \mathcal{F}^T}{\partial \mathbf{y}} \cdot \lambda_q^{(k,l-1)} \quad (5.55)$$

Schließlich lässt sich im Fluidcode auch nach $\lambda_q^{(k,l)}$ lösen.

$$\frac{\partial \mathcal{F}^T}{\partial \mathbf{q}} \cdot \lambda_q^{(k,l)} = -\frac{\partial \psi^T}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{S}^T}{\partial \mathbf{q}} \cdot \lambda_d^{(k,l)} - \frac{\partial \mathcal{M}^T}{\partial \mathbf{q}} \cdot \lambda_y^{(k,l)} \quad (5.56)$$

Die Besonderheit bei der Lösung der diskreten adjungierten Gleichung ist, dass die Transponierte der Jacobimatrix benötigt wird. Das Transponieren dieser Matrix wird immer wieder diskutiert [103, 84], da die Matrix aufwendig im Voraus zu faktorisieren und vorzuhalten ist, sowie nicht symmetrisch ist. Für das Bilden der Jacobimatrix müssen sämtliche Terme vorgehalten werden, was extremen Speicherbedarf verursacht. Für große Probleme ist dies nicht realistisch. Desweiteren wäre auch direktes Lösen der adjungierten Gleichung für große Probleme sehr komplex. In der Literatur wird diese Problematik daher sehr kritisch diskutiert. Die Herausforderung besteht ausschließlich seitens der CFD, da hier i.A. sehr viele Freiheitsgrade gehandhabt werden müssen und die Fluid-Jacobimatrix i.A. unsymmetrisch ist.

In der reinen CFD-Optimierung ist dies ein bekanntes Problem, weshalb der diskrete Ansatz selten angewandt [8, 98] wird. Die Formulierung für das diskrete adjungierte Verfahren für aerodynamische und gekoppelte Optimierung stellt Reuther in einem Überblick über die NASA Aktivitäten in aerodynamischer Formoptimierung vor und weist dabei auf die Problematik hin [103]. Jameson führte erstmals den kontinuierlichen adjungierten Ansatz für die reine CFD ein und konnte die Problematik somit umgehen [65]: Die Herleitung auf Basis der Differentialgleichungen führt dazu, dass die adjungierte Gleichung und der Gradient der Zielfunktion in kontinuierlicher Form vorliegen und erst daraufhin diskretisiert werden. Die transponierte Jacobimatrix kommt hier

nicht vor. Der kontinuierliche Ansatz ermöglichte die Behandlung großer Probleme aus der Aerodynamik und wird in der Formoptimierung für CFD-Probleme viel verwendet [110, 111, 95, 49, 48]. Die bedeutenden Schwierigkeiten des kontinuierlichen adjungierten Ansatzes liegen in der mathematischen Komplexität der Optimierungstechniken, der Variationsrechnung und der numerischen Methoden zur Diskretisierung und Lösung der Differentialgleichungen.

Für die gekoppelte Sensitivitätsanalyse auf Basis des diskreten adjungierten Ansatzes bleibt dieses Problem natürlich bestehen. Eine gestaffelte Lösung der diskreten adjungierten Gleichung (siehe Abschnitt 5.5.3.2) erlaubt die getrennte Behandlung der Einzelfelder [81]. Der fluidseitige Anteil der Jacobimatrix $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}}$ muss jedoch, wie in der reinen CDF, transponiert werden. So wird der kontinuierliche adjungierte Ansatz auch für einen Einsatz in der gekoppelten Sensitivitätsanalyse diskutiert [33, 39]. Soto und Löhner [110, 111] verfolgen den kontinuierlichen adjungierten Ansatz für die CFD-Formoptimierung, wobei die Bewegung des Fluidnetzes Berücksichtigung findet. Wegen der Vernachlässigung der Netzbewegung im Inneren des Fluidgebietes, wird der Ansatz als *incomplete-gradient adjoint formulation* bezeichnet. Der Ansatz wird für eine CAD-freie Geometriebeschreibung eingesetzt, für die eine Glättungsprozedur diskutiert wird.

5.6. Ansätze zur Bestimmung der Jacobimatrix $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{r}}$

Die Jacobimatrix in den GSE I bzw. der adjungierten Gleichung wird in der Literatur gelegentlich auch als lokale Sensitivitätsmatrix bezeichnet [94]. Die Nebendiagonalterme, welche die Kopplung der Felder ausdrücken, führen zu einer verhältnismässig engen Besetzung der Matrix. Die analytische Bestimmung der partiellen Ableitungen, sowohl der Haupt- als auch der Nebendiagonalterme wird in vielen Arbeiten nicht erwähnt, ist jedoch eine zentrale Fragestellung. Sie verlangt komplizierte und gut entwickelte Lösungsansätze, weshalb meist semianalytische Methoden herangezogen werden.

Besondere Aufmerksamkeit kommt den Termen zu, welche die Abhängigkeit des Fluids von den Interfaceverschiebungen bzw. der Netzbewegung beschreiben - in dieser Arbeit durch $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}}$ ausgedrückt, da die Matrix wegen des Einflusses der Netzbewegung auf das gesamte Fluidgebiet eng besetzt ist.

Ghattas und Li [42], deren Partitionierungsmethode in Abschnitt 5.4.2.2 bereits erläutert wurde, vereinfachen die Systemanalyse durch Vernachlässigung der Terme $\mathbf{J}_{FI} = \frac{\partial \mathbf{h}_F}{\partial \mathbf{x}_I}$ im Newton-Verfahren, welche die Kopplung von Interfaceverschiebung und Fluid wiedergeben, und berücksichtigen somit nur eine einseitige Kopplung. Für die gestaffelte Sensitivitätsanalyse wird die Jacobimatrix durch finite Vorwärtsdifferenzen genähert.

Intensive Beschäftigung mit der Behandlung der Jacobimatrix findet man in den Arbeiten aus Mautes Arbeitsgruppe. Der partitionierte Ansatz der FSI inklusive der Daten-

transferproblematik am nicht-koinzidenten Netz bilden die Grundlage seiner Arbeiten. Die diskrete Sensitivitätsanalyse für direkte und adjungierte Verfahren unter Beachtung der drei Felder Struktur, Fluidnetz und Fluid bilden den Schwerpunkt. Maute hält es für vorstellbar, die Terme, welche die Netzbewegung mit den Fluid- und Strukturgleichungen koppeln, zu vernachlässigen [83]. In einer weiteren Veröffentlichung wird vorgeschlagen, alle von Null verschiedenen Nebendiagonalterme analytisch oder mittels finiter Differenzen oder algorithmischer Differenziation zu lösen [84]. Für die Netzbewegung wird ein Pseudo-Strukturmodell verwendet. Die Hauptdiagonalterme $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}}$ bzw. $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{y}}$ entsprechen, was auch aus Abschnitt 6.6.2 hervorgeht, der Struktursteifigkeitsmatrix bzw. der fiktiven Steifigkeitsmatrix des Pseudo-Strukturmodells.

Barcelos schlägt für diesen Ansatz die Vernachlässigung der Netzbewegung im Inneren des Fluidgebietes unter Inkaufnahme eines geringen Fehlers (<15%) unter dem Begriff *simplified mesh motion* vor. Der entsprechende Anteil der Jacobimatrix $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}_\Omega}$ ist eng besetzt, da eine Interfaceverschiebung Einfluss auf die Netzposition im gesamten Fluidgebiet hat. Die Vernachlässigung der Bewegung des Fluidnetzes im Inneren bringt daher enorme Speichervorteile. Barcelos zeigt ebenfalls, dass sich neben laminaren auch turbulente Strömungen für diesen Ansatz der Sensitivitätsanalyse eignen, wobei er davon ausgeht, dass die Ableitungen der Turbulenzvariablen in der Sensitivitätsanalyse vernachlässigt werden können [10].

Reuther stellt 1999 eine Arbeit auf der Grundlage der Sensitivitätsgleichungen GSE I vor, wobei er die Sensitivitätsanalyse auf Fluid und Strukturseite durchführt, um die Hauptdiagonalterme zu bestimmen, die Nebendiagonalterme aber noch vernachlässigt bleiben [104]. Dabei wird ein Zweifeldproblem bestehend aus Fluid- und Struktursystem zu Grunde gelegt, für welches sich die Jacobimatrix wie folgt schreibt:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Der Term $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}}$ ist aufgrund der Zweifeldformulierung und der direkten Kopplung der Strukturverschiebungen an das Fluid von Null verschieden. Martins ergänzt später die Nebendiagonalterme, wobei er eine Bestimmung durch finite Differenzen der partiellen Ableitungen der Fluidgleichungen $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}}$ und $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}}$ vorstellt [81]. Dabei nimmt er an, dass die Perturbation eines Punktes nur in dessen näherer Umgebung Einfluß im Fluidgebiet hat und erhält so eine nur dünn besetzte Matrix für die Fluidterme. Die partiellen Ableitungen der Strukturgleichungen werden aus den diskreten Systemgleichungen für lineares Strukturverhalten bestimmt und entsprechen der in dieser Arbeit vorgestellten Formulierung (Abschnitt 6.6.2).

In Dänemark arbeitete die Gruppe um E. Lund [79, 78, 91] ebenfalls mit einem partitionierten Ansatz und entwickelte hierfür eine direkte Sensitivitätsanalyse gemäß den GSE I (Gleichung 5.21) für das NAND Konzept. Die hierfür benötigte Fluid-Jacobimatrix

wird für nicht vorhaltbar gehalten und daher wird für ein gestaffeltes Verfahren eine genäherte Matrix benutzt. Darin wird die Abhängigkeit des Fluidnetzes von den Interfaceverschiebungen vernachlässigt, wie es in ähnlicher Weise von Barcelos und Ghattas vorgeschlagen wurde.

Ebenso beschäftigen sich Soto und Löhner [110, 111] mit dem Einfluss der Interfaceverschiebung auf das Fluidnetz. Die Ordnung des Terms $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}}$ wird hier ebenfalls durch die Vernachlässigung der partiellen Ableitungen der Fluidgleichungen nach den inneren Netzverschiebungen $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}_{\Omega \setminus \Gamma}}$ reduziert, um eine Berechnung des Residuums für jeden Punkt zu vermeiden.

5.7. Gegenüberstellung direkter und adjungierter Methoden

Löst man das Gleichungssystem GSE I (Gleichung 5.21) gemäß der direkten Sensitivitätsanalyse und setzt die Lösung, die Systemableitungen $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$, in den Ausdruck für den Gradient $\frac{d\psi}{ds}$ ein, erhält man Gleichung 5.22. Löst man dahingegen die adjungierte Gleichung 5.44 und setzt die Lösung $\boldsymbol{\lambda}$ in den Ausdruck für den Gradienten ein, so erhält man dieselbe Formulierung (siehe Gleichung 5.53). Direkte und adjungierte Methoden unterscheiden sich also in der Reihenfolge des Lösungsprozesses, wie folgende Darstellung verdeutlicht:

$$\frac{d\psi_j}{ds_i} = \frac{\partial \psi_j}{\partial s_i} - \underbrace{\left[\frac{\partial \psi_j}{\partial \mathbf{d}} \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial \mathbf{y}} \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial \mathbf{q}} \right]}_{\text{adjungierte Methode: } = \boldsymbol{\lambda}_j^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s_i} \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial s_i} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_i} \end{bmatrix}}_{\text{direkte Methode: } = \frac{d\mathbf{r}}{ds_i}} \quad (5.58)$$

Um den Vergleich allgemeingültig darstellen zu können, wird hier von einem multi-kriteriellen Optimierungsproblem ausgegangen (siehe Abschnitt 2.1.5). Das bedeutet, die Funktion $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ ist vektorwertig und besteht aus mehreren Optimierungskriterien $\psi_j(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ mit $j = 1, \dots, n_\psi$. Dabei gibt es n_s Optimierungsvariablen s_i mit $i = 1, \dots, n_s$. Der Gradient $\frac{d\boldsymbol{\psi}}{ds}$ verallgemeinert sich zu einer $n_\psi \times n_s$ -Matrix und $\boldsymbol{\lambda}$ zu einer $n_r \times n_\psi$ -Matrix mit den Spalten $\boldsymbol{\lambda}_j$ mit $j = 1, \dots, n_\psi$.

Um den numerischen Aufwand abzuschätzen, lässt sich die Anzahl der notwendigen Gleichungslösungen und Multiplikationen ermitteln, wobei die Anzahl der Gleichungslösungen ausschlaggebend ist. Da die Sensitivitätsgleichungen linear sind, fordert eine Gleichungslösung die Kosten der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit $n_d + n_y + n_q$ Freiheitsgraden.

Bei der direkten Sensitivitätsanalyse wird die GSE I für $\frac{d\mathbf{r}}{ds_i}$ gelöst. Die Lösung muss für jede Optimierungsvariable s_i erfolgen, also insgesamt n_s mal. Dahingegen taucht das Optimierungskriterium ψ_j und damit der Index j in der GSE I nicht auf, d.h. das Ergebnis ist für alle j mit $j = 1, \dots, n_\psi$ dasselbe. Also sind zur Ermittlung des Gradienten $\frac{d\psi_j}{ds}$ diese n_s Gleichungslösungen notwendig. Hierbei werden in jeder Gleichungslösung mindestens $n_r \cdot n_r$ Multiplikationen ausgeführt. Für alle Gleichungslösungen sind also $n_s \cdot n_r \cdot n_r$ Multiplikationen.

Die Vektormultiplikation $\frac{\partial \psi_j}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds_i}$ beinhaltet n_r Multiplikationen und erfolgt für jede Optimierungsvariable und jedes Optimierungskriterium. Es handelt sich hierbei um $n_\psi \cdot n_r \cdot n_s$ zusätzliche Multiplikationen.

Bei der adjungierten Sensitivitätsanalyse wird die adjungierte Gleichung für die Spalte $\boldsymbol{\lambda}_j$ der Matrix $\boldsymbol{\lambda}$ gelöst. Die Lösung muss für jede Spalte $\boldsymbol{\lambda}_j$ und damit für jedes Optimierungskriterium ψ_j erfolgen, also insgesamt n_ψ mal. Die Optimierungsvariable s_i kommt in der adjungierten Gleichung nicht vor, das Ergebnis ist also für alle i mit $i = 1, \dots, n_s$ dasselbe. Die Bestimmung des Gradienten erfordert damit diese n_ψ Gleichungslösungen. Hierbei werden in jeder Gleichungslösung mindestens $n_r \cdot n_r$ Multiplikationen ausgeführt. Für alle Gleichungslösungen sind also $n_\psi \cdot n_r \cdot n_r$ Multiplikationen.

Die Vektormultiplikation $\boldsymbol{\lambda}_j \cdot \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial s_i}$ beinhaltet n_r Multiplikationen und erfolgt für jede Spalte $\boldsymbol{\lambda}_j$ und jede Optimierungsvariable. Ebenfalls handelt es sich hierbei um $n_\psi \cdot n_r \cdot n_s$ zusätzliche Multiplikationen.

In folgender Tabelle werden die Anzahl der Multiplikationen nochmals gelistet.

	direkt	adjungiert
Anzahl der Multiplikationen aus Gleichungslösungen	$n_s \cdot n_r \cdot n_r$	$n_\psi \cdot n_r \cdot n_r$
Anzahl der Multiplikationen aus Vektormultiplikation	$n_\psi \cdot n_r \cdot n_s$	$n_\psi \cdot n_r \cdot n_s$

Man stellt fest, dass die Anzahl der Multiplikationen aus der Vektormultiplikation bei beiden Methoden gleich ist, jedoch die Anzahl der Gleichungslösungen mit jeweils $n_r \cdot n_r$ Multiplikationen n_s für den direkten und n_ψ für adjungierten Ansatz. Die Folgerung ist, dass für Optimierungsprobleme mit $n_s < n_\psi$ der direkte und für Optimierungsprobleme mit $n_s > n_\psi$ der adjungierte Ansatz effizienter ist. Die Gleichungslösung der GSE I oder der adjungierten Gleichung hat dieselbe Ordnung wie eine Systemanalyse.

Vergleichend soll an dieser Stelle noch der numerische Aufwand der numerischen Sensitivitätsanalyse erläutert werden. Hier werden die Komponenten des Gradienten $\frac{d\psi_j}{ds_i}$ durch

finite Differenzen genähert. Dabei können durch je eine zusätzliche Systemanalyse auf der Grundlage der Perturbation einer Optimierungsvariable s_i die Komponenten $\frac{d\psi_j}{ds_i}$ für alle $j = 1, \dots, n_\psi$ bestimmt werden. Zur Bestimmung des Gradienten $\frac{d\psi}{ds}$ werden also n_s zusätzliche Systemanalysen benötigt. Die Kosten einer Systemanalyse entsprechen i.A. dem Aufwand der Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems mit $n_d + n_y + n_q$ Freiheitsgraden, welcher erheblich höher ist, als der Aufwand der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit derselben Anzahl an Freiheitsgraden. Folglich ist die numerische Sensitivitätsanalyse allgemein weniger effizient als die analytische.

5.8. In- und outputbasierte Sensitivitätsanalyse nach GSE II

Zur Ermittlung des Gradienten $\frac{d\psi}{ds}$ nach der direkten Sensitivitätsanalyse (Abschnitt 5.4) werden die Systemableitungen $\frac{d\mathbf{d}}{ds}$, $\frac{d\mathbf{y}}{ds}$ und $\frac{d\mathbf{q}}{ds}$ benötigt. Es wurde bereits erläutert, wie diese mit Hilfe der GSE I (Global Sensitivity Equation I, Gleichung 5.21) ermittelt werden können. Die GSE I basiert auf dem Residuum \mathcal{R} des Gesamtsystems (*residuumsbasierte Sensitivitätsanalyse*), welches sich aus den Residuen der Einzelsysteme zusammensetzt, d.h. der implizit definierten Systemgleichungen. Es wird die Jacobi-Matrix $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{r}}$, welche sich aus den Ableitungen der Residuen der Einzelsysteme nach allen Systemvariablen zusammensetzt, benötigt. In der Ingenieurpraxis bedeutet dies, dass zur Ermittlung dieser Terme die Residuen von den verwendeten Einzelfeldlösern bereitgestellt werden müssen oder der Berechnungscode zugänglich ist. Dies ist jedoch meist nicht der Fall, da kommerzielle Codes i.d.R. nur als Black Box nutzbar sind und lediglich die Systemantwort liefern.

Um dem Problem gerecht zu werden, lässt sich eine alternative Form der Sensitivitätsgleichungen verwenden. Sobieski präsentiert diese als neue Form der System-Sensitivitätsgleichungen, welche keine Residuen benötigen [108], sondern auf Systemin- und Systemoutput beruhen (*in- und outputbasierte Sensitivitätsanalyse*). Die Terme dieser Gleichungen bestehen aus den Ableitungen des individuellen Systemoutputs nach dem Systeminput und lassen sich daher auch bei Verwendung von Black Box Lösern ermitteln, was der Ingenieurpraxis dienlich ist. Der Systemoutput ist dabei die Systemantwort bzw. die Systemvariable des jeweiligen Systems. Der Systeminput sind die Eingabewerte in Form aller unabhängigen Variablen. Konkret sind dies die Optimierungsvariablen und die nicht-systemeigenen Systemvariablen. Daraus wird der Output unter Verwendung der Systemgleichung in einer Black Box berechnet. Diese Abhängigkeiten lassen sich analytisch ausdrücken, indem die implizit definierten Systemgleichungen \mathcal{S} , \mathcal{M} und \mathcal{F} so umformuliert werden, dass die jeweiligen Systemvariablen explizit als Funktionen f_d ,

f_y und f_q des Inputs dargestellt werden:

$$\mathbf{d} = f_d(\mathbf{s}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) \quad (5.59)$$

$$\mathbf{y} = f_y(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \mathbf{q}) \quad (5.60)$$

$$\mathbf{q} = f_q(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \mathbf{y}) \quad (5.61)$$

Die Differenziale sind gekoppelte Gleichungen und schreiben sich als Funktion der Variablen wie folgt:

$$d\mathbf{d} = df_d = \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{s}} d\mathbf{s} + \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{y}} d\mathbf{y} + \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} \quad (5.62)$$

$$d\mathbf{y} = df_y = \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{s}} d\mathbf{s} + \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{d}} d\mathbf{d} + \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} \quad (5.63)$$

$$d\mathbf{q} = df_q = \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{s}} d\mathbf{s} + \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{d}} d\mathbf{d} + \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{y}} d\mathbf{y} \quad (5.64)$$

Die Gleichungen lassen sich zur Ermittlung der Systemableitungen in folgendem gekoppeltem Gleichungssystem darstellen, das von Sobieski als *Global Sensitivity Equation II* (*GSE II*) bezeichnet wurde und die Gleichungen GSE I bei der diskreten direkten Sensitivitätsanalyse ersetzen kann:

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{I} & \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{d}} & -\mathcal{I} & \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{y}} & -\mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{d}}{d\mathbf{s}} \\ \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{s}} \\ \frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{s}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{s}} \\ \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{s}} \\ \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{s}} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

Hierbei bezeichnet \mathcal{I} die Identitätsmatrix. Folgende teilweise in der Literatur vertretene Bezeichnungen für das Gleichungssystem gemäss Olds [94] und Giunta [43] seien der Vollständigkeit halber kurz erläutert: *Local Sensitivity Matrix* (*LSM*) bezeichnet die Sensitivitäts- oder Jacobimatrix, *Total Sensitivity Vector* (*TSV*) den Vektor der Systemableitungen und *Local Sensitivity Vector* (*LSV*) den Vektor der partiellen Ableitungen auf der rechten Seite.

Durch den alternativen Ansatz der GSE II können die in Abschnitt 5.6 diskutierten Schwierigkeiten bei der Ermittlung der partiellen Ableitungen in Nebendiagonaltermen

der Jacobimatrix umgangen werden. Wenn bei der Verwendung von GSE I immer wieder auf finite Differenzen zurückgegriffen werden muss, büßt dieser Ansatz an Effizienz ein und bietet gegenüber der Verwendung von GSE II, immer weniger Vorteile.

Die numerische Optimierung mit der direkten Sensitivitätsanalyse nach den GSE II erfolgt nach den Verfahren aus Abschnitt 5.4.2. Die Lösung nach dem NAND Konzept ist ebenfalls Abbildung 5.2 zu entnehmen, wobei für die Sensitivitätsanalyse nach den GSE II lediglich ein anderes Gleichungssystem gelöst wird. Die entsprechende Jacobimatrix erfordert auch hier Informationen aus der Systemanalyse. Die Lösung des Gleichungssystems GSE II kann ebenfalls gestaffelt erfolgen.

In [43, 44] greift Giunta die Formulierung für die Optimierung eines FSI Problems auf. Ihm erlaubt dieser Ansatz die Entwicklung einer modularen Softwareumgebung, da die Ableitungen, im Gegensatz zu den für GSE I benötigten, sich aus In- und Output unabhängiger Softwaretools numerisch bestimmen lassen. Der numerische Aufwand ist allerdings stark von der Anzahl der Freiheitsgrade der jeweiligen Felder abhängig. Daher diskutiert er eine Methode zur Reduzierung der Ordnung des Systems. Er arbeitet dabei eine eigenvektorbasierte Methode zur Reduktion der Strukturfreiheitsgrade in die Sensitivitätsanalyse ein, bei der die Strukturverformung immer als Superposition einer definierten Anzahl von Eigenvektoren angenommen wird. Giunta zielt auf maximale Modularität für industrielle Anwendungen, und die Benutzbarkeit von Black Box Software auf der Seite der Einzelfelder.

Bemerkung: Es sei darauf hingewiesen, dass die geläufigen Strömungssimulationsprogramme die Berechnung des Fluidnetzes einschließen und die Darstellung der GSE II für FSI Probleme sich somit auf zwei Einzelsysteme für Struktur und Fluid reduziert (siehe Kapitel 6).

5.9. Partitionierte Sensitivitätsanalyse für die Formoptimierung

Dieses Kapitel beschäftigte sich bisher mit der Herleitung der Gleichungen für die analytische Sensitivitätsanalyse sowie mit deren numerischen Lösung. Die Gleichungen wurden dabei durch die Systemgleichungen \mathcal{S} , \mathcal{M} und \mathcal{F} , die Zielfunktion ψ , die System- und Optimierungsvariablen \mathbf{d} , \mathbf{y} , \mathbf{q} und \mathbf{s} bündig formuliert. Legt man der numerischen Formoptimierung den partitionierten Ansatz zu Grunde, sind weitere Zusammenhänge aus Design und Analyse zu berücksichtigen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die mathematische Formulierung unter Berücksichtigung der funktionalen Zusammenhänge, welche aus dem klassischen partitionierten Ansatz nach Abschnitt 3.3.3 resultieren, entwickelt. Diese Zusammenhänge werden direkt in die Formulierung der Sensitivitätsanalyse integriert und ermöglichen eine ausführliche und vollständige mathematische Darstellung,

welche in diesem Abschnitt präsentiert wird. Dabei wird die Formoptimierung berücksichtigt, indem die Beschreibung der Geometrie durch die Optimierungsvariablen in die Formulierung miteinbezogen wird. Insbesondere wird Wert auf die Berücksichtigung des Datentransfers am nicht-koinzidenten Interface in der Formulierung der Sensitivitätsanalyse gelegt.

5.9.1. Formoptimierung

Die für die Formoptimierung charakteristische Abhängigkeit von Geometrie und Optimierungsvariablen soll zunächst eingeführt werden. Die Optimierungsvariablen \mathbf{s} definieren in Abhängigkeit der gewählten Parametrisierung über funktionale Zusammenhänge die Geometrie des Designmodells (vgl. Abschnitt 2.2.2) und somit die Raumkoordinaten \mathbf{x} des diskreten Modells der Struktur, also die FE-Knotenkoordinaten. Der funktionale Zusammenhang

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{s}) \quad (5.66)$$

wird in der Formulierung der Sensitivitätsanalyse eingeführt, indem die Zielfunktion und die Systemgleichungen in Abhängigkeit der Systemvariablen und der FE-Knotenkoordinaten wie folgt dargestellt werden:

$$\psi(\mathbf{r}(\mathbf{s}), \mathbf{x}(\mathbf{s})) \quad \text{und} \quad \mathcal{R}(\mathbf{r}(\mathbf{s}), \mathbf{x}(\mathbf{s})) \quad (5.67)$$

Wird diese Definition berücksichtigt, müssen die partiellen Ableitungen, die bisher mit $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{s}}$ und $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{s}}$ bezeichnet wurden, fortan mit $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{s}}$ und $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{s}}$ bezeichnet werden. Es besteht keine direkte Abhängigkeit der Zielfunktion und der Systemgleichungen von den Optimierungsvariablen, weshalb $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{s}} = 0$ und $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{s}} = 0$ gilt.

Bei CAD-freien Methoden gibt es einen unmittelbaren einfachen Zusammenhang zwischen Optimierungsvariablen und FE-Koordinaten, da die Optimierungsvariablen die Position der FE-Knotenkoordinaten definieren. Somit ist der Term $\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{s}}$ von sehr einfacher Art und leicht bestimmbar. Beim Einsatz von CAGD-Methoden besteht dahingegen ein weiterer funktionaler Zusammenhang aus dem Designmodell. Hier sind die Optimierungsvariablen Kontrollpunkte der Designelemente. Die Koordinaten \mathbf{x} des FE-Netzes leiten sich aus der, durch die Kontrollpunkte \mathbf{X} definierten, Geometrie wie folgt ab:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}(\mathbf{s})) \quad (5.68)$$

Die, bisher mit $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{s}}$ und $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{s}}$ bezeichneten, partiellen Ableitungen schreiben sich unter Berücksichtigung dieses Designmodells $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{s}}$ und $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{s}}$. Die Ableitung $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$ ist aus der Definition der Designelemente zu bestimmen. $\frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{s}}$ ist in der Regel einfacher Art, da die Optimierungsvariablen meist Koordinaten der Kontrollpunkte sind.

In dieser Arbeit wird unter anderem die Formfindung als parameterfreies designgebendes Verfahren angewandt (siehe Kap. 7). In diesem Fall lässt sich der Zusammenhang von FE-Knotenkoordinaten und Optimierungsvariablen nicht analytisch beschreiben, da es sich bei der Formfindung um ein nichtlineares inverses mechanisches Problem handelt. Bei der numerischen Optimierung wird die Ableitung $\frac{d\mathbf{x}}{ds}$ daher in jedem Optimierungsschritt durch eine weitere Formfindung und finite Differenzen genähert.

5.9.2. Datentransfer in der Sensitivitätsanalyse

Die Sensitivitätsanalyse im Rahmen des partitionierten Ansatzes bedarf der Berücksichtigung des Datentransfers am nicht-koinzidenten Netz. In der Formulierung lässt sich dies durch die in Kapitel 4 eingeführte Transfermatrix \mathbf{T} ausdrücken.

Bei FSI handelt es sich um ein oberflächengekoppeltes Problem, d.h. die Systemgleichungen sind über die Systemvariablen am FSI Interface $\Gamma = \Gamma_S \cap \Gamma_F$ gekoppelt. Der Datentransfer betrifft dann auch nur den Teil der Systemvariablen, die am Interface definiert sind. Die Unterteilung in Systemvariablen am Interface und in Systemvariablen im Gebietsinneren nach Gleichung 5.5 muss daher bei der Einführung der Transferoperatoren in der Formulierung der Sensitivitätsanalyse berücksichtigt werden. Auch die Raumkoordinaten des Strukturmodells $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_\Gamma \ \mathbf{x}_{\Omega \setminus \Gamma}]^T$ sind zu berücksichtigen. Um die Zugehörigkeit zu einem Gebiet und dessen Diskretisierung zu kennzeichnen, werden die Systemvariablen am Interface im Folgenden mit S für das Strukturnetz und F für das Fluidnetz indiziert. Werden sämtliche Terme auf diese Weise aufgeteilt und indiziert, sowie die, im vorherigen Abschnitt eingeführte Abhängigkeit der Geometrie von den Optimierungsvariablen $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{s})$ berücksichtigt, so schreibt sich das Gleichungssystem GSE I (Gleichung 5.21) wie folgt:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,S}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}_{\Omega \setminus \Gamma}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}_{\Gamma,F}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}_{\Omega \setminus \Gamma}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}_{\Gamma,F}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}_{\Omega \setminus \Gamma}} \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,S}} & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}_{\Omega \setminus \Gamma}} & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{y}_{\Gamma,F}} & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{y}_{\Omega \setminus \Gamma}} & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{q}_{\Gamma,F}} & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{q}_{\Omega \setminus \Gamma}} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,S}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}_{\Omega \setminus \Gamma}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}_{\Gamma,F}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}_{\Omega \setminus \Gamma}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}_{\Gamma,F}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}_{\Omega \setminus \Gamma}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,S}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{d}_{\Omega \setminus \Gamma}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{y}_{\Gamma,F}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{y}_{\Omega \setminus \Gamma}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{q}_{\Gamma,F}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{q}_{\Omega \setminus \Gamma}}{ds} \end{bmatrix} \\
 & = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,S}} \frac{d\mathbf{x}_{\Gamma,S}}{ds} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{x}_{\Omega \setminus \Gamma}} \frac{d\mathbf{x}_{\Omega \setminus \Gamma}}{ds} \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,S}} \frac{d\mathbf{x}_{\Gamma,S}}{ds} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{x}_{\Omega \setminus \Gamma}} \frac{d\mathbf{x}_{\Omega \setminus \Gamma}}{ds} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,S}} \frac{d\mathbf{x}_{\Gamma,S}}{ds} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}_{\Omega \setminus \Gamma}} \frac{d\mathbf{x}_{\Omega \setminus \Gamma}}{ds} \end{bmatrix} \quad (5.69)
 \end{aligned}$$

Man stellt fest, dass unter den Nebendiagonaltermen der Sensitivitätsmatrix bezüglich

der Diskretisierung gemischte Terme auftreten. Dies sind zum einen partielle Ableitungen nach den Systemvariablen am Interface, wie z.B. $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}_{\Gamma,F}}$ und zum andern partielle Ableitungen nach den Systemvariablen im Gebietsinneren, wie z.B. $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}_{\Omega \setminus \Gamma}}$. Hier ist \mathcal{S} nach dem Strukturmodell und \mathbf{q} nach dem Fluidmodell diskretisiert.

Bei der reinen Oberflächenkopplung verschwinden die gemischten Ableitungen nach den Systemvariablen im Gebietsinneren, da die Kopplung nur über die Systemvariablen am Interface gegeben ist. Eine reine Oberflächenkopplung liegt bei der Kopplung von Struktur und Fluidnetz sowie bei der Kopplung von Struktur und Fluid vor. Es gilt hier $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}_{\Omega \setminus \Gamma}} = 0$, $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}_{\Omega \setminus \Gamma}} = 0$, $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}_{\Omega \setminus \Gamma}} = 0$ und $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}_{\Omega \setminus \Gamma}} = 0$. Hier ist zu beachten, dass es sich jeweils um eine einseitige Kopplung handelt: Die Strukturverschiebungen $\mathbf{d}_{\Gamma,S}$ am gemeinsamen Interface bewirken identische Netzverschiebungen des Fluidnetzes $\mathbf{y}_{\Gamma,F} = \mathbf{d}_{\Gamma,F}$, welche wiederum der Strömungssimulation zu Grunde liegen. Die Systemgleichung des Fluids \mathcal{F} ist daher nur von den Netzverschiebungen \mathbf{y} direkt abhängig und nicht von den Strukturverschiebungen \mathbf{d} . Es gilt daher $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}} = 0$.

Bei der Kopplung von Fluidnetz und Fluid handelt es sich um eine Volumenkopplung, d.h. die beiden Systeme sind über die Systemvariablen des gesamten Gebiets gekoppelt. Auch hier liegt eine einseitige Kopplung vor: Die Position des Fluidnetzes wird über die Systemgleichung des Fluidnetzes \mathcal{M} aus den Strukturverschiebungen am gemeinsamen Interface bestimmt. Da \mathcal{M} ausschließlich von den Strukturverschiebungen abhängt, gilt hier $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{q}} = 0$.

Besondere Beachtung ist den gemischten Ableitungen nach den Systemvariablen am Interface zu schenken. In der Praxis werden diese Terme im Berechnungscode eines Einzelsystems ermittelt und stehen dort nur bezüglich der zugehörigen Diskretisierung zur Verfügung. Um gemischte Terme auszudrücken werden also Informationen über die Diskretisierung der anderen Felder nötig. Diese Informationen lassen sich durch die Transfermatrix \mathbf{T} wiedergeben und in die Formulierung der Sensitivitätsanalyse mit einbeziehen. Hier beschreiben \mathbf{T}_d , \mathbf{T}_y , \mathbf{T}_q und \mathbf{T}_x den Transfer der Systemvariablen und der globalen Knotenkoordinaten. Bei dem Transfer der Verschiebungen \mathbf{d} und der globalen Knotenkoordinaten \mathbf{x} handelt es sich hier um einen Transfer von Struktur- zu Fluidnetz. Beim Transfer der Netzverschiebung \mathbf{y} und der Systemvariablen des Fluids \mathbf{q} handelt es sich dagegen um einen Transfer von Fluid- zu Strukturnetz. Die Abhängigkeit von Systemvariablen und globalen Knotenkoordinaten, die unterschiedlicher Diskretisierung zugeordnet sind, kann folgendermaßen dargestellt werden.

$$\mathbf{d}_{\Gamma,F} = \mathbf{T}_d \cdot \mathbf{d}_{\Gamma,S} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,F}}{d\mathbf{d}_{\Gamma,S}} = \mathbf{T}_d \quad (5.70)$$

$$\mathbf{y}_{\Gamma,S} = \mathbf{T}_y \cdot \mathbf{y}_{\Gamma,F} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{y}_{\Gamma,S}}{d\mathbf{y}_{\Gamma,F}} = \mathbf{T}_y \quad (5.71)$$

$$\mathbf{q}_{\Gamma,S} = \mathbf{T}_q \cdot \mathbf{q}_{\Gamma,F} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{q}_{\Gamma,S}}{d\mathbf{q}_{\Gamma,F}} = \mathbf{T}_q \quad (5.72)$$

$$\mathbf{x}_{\Gamma,F} = \mathbf{T}_x \cdot \mathbf{x}_{\Gamma,S} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{x}_{\Gamma,F}}{d\mathbf{x}_{\Gamma,S}} = \mathbf{T}_x \quad (5.73)$$

Damit können die gemischten Terme unter Verwendung der Transferoperatoren wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}_{\Gamma,F}} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}_{\Gamma,S}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}_{\Gamma,S}}{\partial \mathbf{q}_{\Gamma,F}} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}_{\Gamma,S}} \cdot \mathbf{T}_q \quad (5.74)$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}_{\Gamma,F}} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}_{\Gamma,S}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}_{\Gamma,S}}{\partial \mathbf{y}_{\Gamma,F}} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}_{\Gamma,S}} \cdot \mathbf{T}_y \quad (5.75)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,S}} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,F}} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,F}}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,S}} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_d \quad (5.76)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,S}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,F}} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,F}}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,S}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_d \quad (5.77)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,S}} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,F}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,F}}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,S}} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_x \quad (5.78)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,S}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,F}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,F}}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,S}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_x \quad (5.79)$$

Bemerkung: Die Systemvariablen des Fluids $\mathbf{q}^T = [\mathbf{u}^T \ \mathbf{p}^T]$ sind die Geschwindigkeiten \mathbf{u} und die Drücke \mathbf{p} , welche durch das Lösen von Impuls- und Druckgleichung bestimmt werden (siehe Abschnitt 3.2.6). Entsprechend kann eine Aufteilung der Systemgleichung des Fluids in die Anteile \mathcal{F}_u und \mathcal{F}_p , welche Impuls- und Druckgleichung entsprechen, stattfinden. Mit der Aufteilung der Fluidvariablen in Geschwindigkeiten und Drücke kann die partielle Ableitung des Strukturresiduums nach den Fluidvariablen entsprechend aufgeteilt werden. Da die Systemgleichung der Struktur nur von den Drücken und nicht von den Geschwindigkeiten abhängig ist, gilt $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{u}} = 0$. Eine entsprechende Übersicht über die Terme der Sensitivitätsmatrix gibt folgende Tabelle:

	$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}}$	$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}_{\Gamma}} = 0$	$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}_{\Omega \setminus \Gamma}} = 0$	$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{u}_{\Gamma}} = 0$	$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{u}_{\Omega \setminus \Gamma}} = 0$	$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{p}_{\Gamma}}$	$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{p}_{\Omega \setminus \Gamma}} = 0$
	$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma}}$	$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}_{\Omega \setminus \Gamma}} = 0$	$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{y}}$	$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{u}_{\Gamma}} = 0$	$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{u}_{\Omega \setminus \Gamma}} = 0$	$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{p}_{\Gamma}} = 0$	$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{p}_{\Omega \setminus \Gamma}} = 0$
$\frac{\partial \mathcal{F}_u}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma}} = 0$	$\frac{\partial \mathcal{F}_u}{\partial \mathbf{d}_{\Omega \setminus \Gamma}} = 0$	$\frac{\partial \mathcal{F}_u}{\partial \mathbf{y}_{\Gamma}}$	$\frac{\partial \mathcal{F}_u}{\partial \mathbf{y}_{\Omega \setminus \Gamma}}$	$\frac{\partial \mathcal{F}_u}{\partial \mathbf{u}}$		$\frac{\partial \mathcal{F}_u}{\partial \mathbf{p}_{\Gamma}}$	$\frac{\partial \mathcal{F}_u}{\partial \mathbf{p}_{\Omega \setminus \Gamma}}$
$\frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma}} = 0$	$\frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \mathbf{d}_{\Omega \setminus \Gamma}} = 0$	$\frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \mathbf{y}_{\Gamma}}$	$\frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \mathbf{y}_{\Omega \setminus \Gamma}}$	$\frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \mathbf{u}_{\Gamma}}$	$\frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \mathbf{u}_{\Omega \setminus \Gamma}}$	$\frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \mathbf{p}}$	

5.9.2.1. Datentransfer in der direkten Sensitivitätsanalyse

Das Gleichungssystem GSE I lässt sich in der Formulierung für den partitionierten Ansatz wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,S}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}_{\Omega \setminus \Gamma}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}_{\Gamma,S}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{y}} & 0 & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}_{\Gamma,S}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{q}} & 0 \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{d}} & 0 & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{y}_{\Gamma,F}} & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{y}_{\Omega \setminus \Gamma}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}_{\Gamma,F}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}_{\Omega \setminus \Gamma}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}_{\Gamma,F}} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}_{\Omega \setminus \Gamma}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,S}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{d}_{\Omega \setminus \Gamma}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{y}_{\Gamma,F}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{y}_{\Omega \setminus \Gamma}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{q}_{\Gamma,F}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{q}_{\Omega \setminus \Gamma}}{ds} \end{bmatrix} \\
 & = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,S}} \frac{d\mathbf{x}_{\Gamma,S}}{ds} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{x}_{\Omega \setminus \Gamma}} \frac{d\mathbf{x}_{\Omega \setminus \Gamma}}{ds} \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}_{\Gamma,S}}{ds} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,S}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}_{\Gamma,S}}{ds} \end{bmatrix} \quad (5.80)
 \end{aligned}$$

Bei der Lösung nach dem gestaffelten Verfahren aus Abschnitt 5.4.2.2 werden für die Lösung der Sensitivitätsgleichungen Summen aus Produkten von partiellen Ableitungen mit Systemableitungen gebildet. Beispielsweise wird das Produkt

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}_{\Gamma,S}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}_{\Gamma,F}}{ds} \quad (5.81)$$

für die Sensitivitätsgleichung der Struktur gebildet. Dabei wird die partielle Ableitung $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}_{\Gamma,S}}$ im Strukturlöser ermittelt und die Systemableitung des Fluids $\frac{d\mathbf{q}_{\Gamma,F}}{ds}$ im Fluidlöser berechnet. In der Regel wird die Systemableitung des Fluids an den Strukturlöser geschickt. Dabei wird diese dem Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz unterzogen, wobei das Produkt $\frac{d\mathbf{q}_{\Gamma,S}}{ds} = \mathbf{T}_{\mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}_{\Gamma,F}}{ds}$ gebildet und von der Strukturseite empfangen wird. Hier wird dann die Multiplikation $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}_{\Gamma,S}} \cdot \frac{d\mathbf{q}_{\Gamma,S}}{ds}$ durchgeführt. *Bemerkung:* Die Produkte von partiellen Ableitungen der Residuen nach den Systemvariablen mit Systemableitungen sind unabhängig von der Diskretisierung. Folgende Gleichung zeigt dies beispielhaft:

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}_{\Gamma,F}} \cdot \frac{d\mathbf{q}_{\Gamma,F}}{ds} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}_{\Gamma,S}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{q}}^{-1} \cdot \frac{d\mathbf{q}_{\Gamma,S}}{ds} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}_{\Gamma,S}} \cdot \frac{d\mathbf{q}_{\Gamma,S}}{ds} \quad (5.82)$$

5.9.2.2. Datentransfer in der adjungierten Sensitivitätsanalyse

Die adjungierte Gleichung schreibt sich wie folgt:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,S}}^T & \mathbf{T}_d^T \cdot \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,F}}^T & 0 \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}_{\Omega \setminus \Gamma}}^T & 0 & 0 \\ \mathbf{T}_y^T \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}_{\Gamma,S}}^T & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{y}_{\Gamma,F}}^T & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}_{\Gamma,F}}^T \\ 0 & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{y}_{\Omega \setminus \Gamma}}^T & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}_{\Omega \setminus \Gamma}}^T \\ \mathbf{T}_q^T \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}_{\Gamma,S}}^T & 0 & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}_{\Gamma,F}}^T \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}_{\Omega \setminus \Gamma}}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_d \\ \lambda_y \\ \lambda_q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{d}}^T \\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{y}}^T \\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}}^T \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

Die erste Zeile des obigen Gleichungssystems ist eine strukturseitige adjungierte Gleichung, welche auf der Strukturseite nach λ_d gelöst wird. Für das Aufstellen der Gleichung wird Input von Fluidseite und Datentransfer benötigt. Dieser ist $\mathbf{T}_d^T \cdot \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,F}}^T \cdot \lambda_y$. Der Datentransfer wird hierbei durch die Transfermatrix \mathbf{T}_d^T beschrieben. Der Transfer adjungierter Variablen ist also analog dem Transfer von Kraftgrößen durch die transponierte Transfermatrix durchzuführen (vgl. Abschnitt 4.2.1).

Analoges gilt für die fluidseitigen adjungierten Gleichungen. Auch hier wird der Transfer des Inputs und damit der adjungierten Variablen durch die transponierten Transfermatrizen beschrieben, welche auch den Transfer von Knotenkräften beschreiben.

6. Kombinierte Sensitivitätsanalyse

Die *kombinierte Sensitivitätsanalyse* ist ein neues, für diese Arbeit entwickeltes Verfahren der Sensitivitätsanalyse. Die Besonderheit liegt in der Kombination der residuum-basierten (Abschnitt 5.4 und 5.5) und der in- und outputbasierten Methode (Abschnitt 5.8) der Sensitivitätsanalyse. Dabei wird strukturseitig das residuum-basierte Verfahren eingesetzt, so dass hier maximale Performance und Genauigkeit erzielt werden kann, während fluidseitig die in- und outputbasierte Methode angewandt wird, um die geforderte Flexibilität zu gewährleisten.

Die Stärke der kombinierten Sensitivitätsanalyse liegt in der besseren Effizienz gegenüber der numerischen und der in- und outputbasierte Sensitivitätsanalyse und in der höheren Flexibilität gegenüber der analytischen Sensitivitätsanalyse.

Die Darstellung in Abbildung 6.1 veranschaulicht, wie sich die kombinierte Sensitivitätsanalyse zusammensetzt. Den residuum-basierten Verfahren liegen die Sensitivitätsgleichungen GSE I (Gleichung 5.21) zu Grunde, welche partielle Ableitungen der Systemgleichungen beinhalten. Dahingegen beinhalten die Sensitivitätsgleichungen für die in- und outputbasierten Verfahren GSE II (Gleichung 5.65) partielle Ableitungen der Systemvariablen, also Ableitungen der Systemantwort. Für die kombinierte Sensitivitätsanalyse werden strukturseitig die GSE I zu Grunde gelegt und fluidseitig die GSE II herangezogen.

Die kombinierte Sensitivitätsanalyse wurde nach der direkten Methode für Schalenträgerwerke implementiert. Bei der numerischen Umsetzung der direkten Methode wurde hierzu ein Verfahren entwickelt, welches die Bestimmung der fluidseitigen Systemableitungen wesentlich beschleunigt. Dabei kann durch eine geschickte Wahl der Verhältnisse der Schrittweiten bei den Finiten-Differenzen-Näherungen der fluidseitigen Systemableitungen die FSI-Analyse durch eine reine CFD-Analyse ersetzt werden, was den Rechenaufwand wesentlich reduziert.

Residuumsbasierte Sensitivitätsanalyse nach GSE I	In- und outputbasierte Sensitivitätsanalyse nach GSE II						
Sensitivitätsgleichungen: GSE I (Gleichung 5.21)	Sensitivitätsgleichungen: GSE II (Gleichung 5.65)						
$\frac{dS}{ds} = \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{ds} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{ds} = 0$ $\frac{dM}{ds} = \frac{\partial M}{\partial s} + \frac{\partial M}{\partial \mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds} + \frac{\partial M}{\partial \mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{ds} + \frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{ds} = 0$ $\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{ds} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{ds} = 0$	$\frac{d\mathbf{d}}{ds} = \frac{df_d}{ds} = \frac{\partial f_d}{\partial s} + \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{ds} + \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{ds}$ $\frac{d\mathbf{y}}{ds} = \frac{df_y}{ds} = \frac{\partial f_y}{\partial s} + \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds} + \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{ds}$ $\frac{d\mathbf{q}}{ds} = \frac{df_q}{ds} = \frac{\partial f_q}{\partial s} + \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds} + \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{ds}$						
Die Ableitung der <u>Residuen</u> bzw. Systemgleichungen nach den Optimierungsvariablen verschwinden. Die partiellen Ableitungen der Residuen müssen für die Lösung zur Verfügung stehen bzw. in den Programmcode implementiert werden.	Die Systemvariablen sind Funktionen des Systeminputs und die Systemableitungen werden entsprechend formuliert. Die partiellen Ableitungen der Systemvariablen lassen sich aus dem Standardin- und -output einer Systemanalyse ermitteln.						
Gestaffelte Lösung:	Gestaffelte Lösung:						
<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">Struktur: Residuumsbasierte SA</td> <td style="text-align: center; padding: 0 10px;"> \rightleftarrows </td> <td style="padding: 5px;">Fluid: Residuumsbasierte SA</td> </tr> </table>	Struktur: Residuumsbasierte SA	\rightleftarrows	Fluid: Residuumsbasierte SA	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">Struktur: In- und outputbasierte SA</td> <td style="text-align: center; padding: 0 10px;"> \rightleftarrows </td> <td style="padding: 5px;">Fluid: In- und outputbasierte SA</td> </tr> </table>	Struktur: In- und outputbasierte SA	\rightleftarrows	Fluid: In- und outputbasierte SA
Struktur: Residuumsbasierte SA	\rightleftarrows	Fluid: Residuumsbasierte SA					
Struktur: In- und outputbasierte SA	\rightleftarrows	Fluid: In- und outputbasierte SA					
Literatur: [108, 83, 84, 9, 10, 80, 81], u.a.	Literatur: [108, 43, 44]						

Kombinierte Sensitivitätsanalyse nach GSE I und GSE II				
Strukturseitige Sensitivitätsgleichungen nach GSE I (Gleichung 5.21)	Fluidseitige Sensitivitätsgleichungen nach GSE II (Gleichung 5.65)			
$\frac{dS}{ds} = \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{ds} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{ds} = 0$	$\frac{d\mathbf{y}}{ds} = \frac{df_y}{ds} = \frac{\partial f_y}{\partial s} + \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds} + \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{ds}$ $\frac{d\mathbf{q}}{ds} = \frac{df_q}{ds} = \frac{\partial f_q}{\partial s} + \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds} + \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{ds}$			
Gestaffelte Lösung:				
<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">Struktur: Residuumsbasierte SA</td> <td style="text-align: center; padding: 0 10px;"> \rightleftarrows </td> <td style="padding: 5px;">Fluid: In- und outputbasierte SA</td> </tr> </table>	Struktur: Residuumsbasierte SA	\rightleftarrows	Fluid: In- und outputbasierte SA	
Struktur: Residuumsbasierte SA	\rightleftarrows	Fluid: In- und outputbasierte SA		
Literatur: Keine Veröffentlichungen bekannt				

Abbildung 6.1.: Veranschaulichung der kombinierten Sensitivitätsanalyse, welcher strukturseitig residuumsbasierte und fluidseitig in- und outputbasierte Methoden zu Grunde liegen.

6.1. Ziele und Konzept

Hoher Entwicklungsbedarf nach Sensitivitätsanalysemethoden für FSI-Fragestellungen besteht im Ingenieurbereich der Strukturmechanik. Hier gibt es kaum Forschungsarbeiten. Auch beispielsweise im Bauwesen findet aufgrund von immer leichter werdenden und somit für Strömungslasten anfälligen Tragwerken eine Vielzahl kommerzieller Strömungssimulationsprogramme Einzug. Das Ziel ist es hierbei, physikalisch korrekte Ergebnisse bei Verwendung einer modularen wirtschaftlichen Softwareumgebung, in die eine Strömungssoftware einfach integriert werden kann, auf effizientem Wege zu erlangen. Das Ziel dieser Dissertation ist die Entwicklung grundlegender Methoden der Sensitivitätsanalyse, welche sowohl die in der Ingenieurpraxis geforderte Flexibilität als auch bestmögliche Performance bieten.

Die diskrete residuumsbasierte analytische Sensitivitätsanalyse (Abschnitt 5.4 und 5.5) ist sehr effizient und genau, wenn vollständig auf die Verwendung von finiten Differenzen verzichtet werden kann. Sie bedarf jedoch der Kenntnis der kontinuumsmechanischen Grundgleichungen für die entsprechende Idealisierung und der Kenntnis des Algorithmus, welcher zur Lösung dieser Gleichungen verwendet wird, da Implementierungen auf dieser Ebene erforderlich sind. Dies bedeutet nicht nur eine Spezialisierung auf ein Berechnungsprogramm, sondern auch eine Spezialisierung auf eine kontinuumsmechanische Formulierung, wie z.B. die Formulierung für Schalen. Zudem geht die analytische Sensitivitätsanalyse mit hohem Implementierungsaufwand einher.

Die in- und outputbasierte Sensitivitätsanalyse (Abschnitt 5.8) bietet maximale Modularität. Es werden lediglich Systemin- und Systemoutput verarbeitet, was es ermöglicht, Black Box-Löser für die Berechnungen der Einzelsysteme einzusetzen. Je nach Anforderungen lassen sich diese beliebig austauschen. Darüber hinaus kann die Sensitivitätsanalyse an beliebiger Stelle stattfinden oder auch als separates Softwaremodul gekapselt sein. Da der Einsatz von finiten Differenzen notwendig ist, ist diese Methode deutlich rechenintensiver als die analytische. Es ist jedoch anzumerken, dass durch ordnungsreduzierende Verfahren eine erhebliche Effizienzsteigerung möglich ist [43].

Bei der Wahl der Sensitivitätsanalyse gilt es folglich Modularität gegen Performance abzuwägen. Maximale Performance bedeutet Einbuße bei der Modularität und anders herum. Im Rahmen des partitionierten Ansatzes mag es sinnvoll sein, dessen Modularität zu erhalten und die in- und outputbasierte Sensitivitätsanalyse zu wählen. Beste Performance wird mit monolithischen Berechnungsverfahren der FSI in Kombination mit der residuumsbasierten Sensitivitätsanalyse erreicht.

Da Entwicklungen für Schalen- und Membrantragwerke das Ziel dieser Arbeit sind, findet hier von vorne herein eine Spezialisierung auf die entsprechende Finite-Elemente-Formulierung statt. Dies legt die Verwendung der residuumsbasierten Methode der Sensitivitätsanalyse für diese Elemente nahe. Um die geforderte Flexibilität bezüglich der

Strömungssimulation zu gewährleisten, werden fluidseitig nur In- und Outputgrößen zur Formulierung einer Sensitivitätsanalyse verwendet. Dementsprechend wird ein neuer gemischter Ansatz für die diskrete Sensitivitätsanalyse – die *kombinierte Sensitivitätsanalyse* – formuliert und umgesetzt, der strukturseitig residuumsbasiert und fluidseitig in- und outputbasiert ist. Diese Kombination verspricht einen optimalen und problemspezifischen Kompromiss zwischen Performance und Modularität. Die Bewegung des Fluidnetzes ist dabei der Fluidseite zuzuordnen, da die Netzanpassung i.d.R. durch den Strömungslöser vorgenommen wird.

In diesem Kapitel wird zunächst die mathematische Formulierung der kombinierten Sensitivitätsanalyse nach der direkten und adjungierten Methode vorgestellt (Abschnitt 6.2 und 6.3). Abschnitt 6.4 widmet sich der numerischen Umsetzung der semianalytischen direkten kombinierten Sensitivitätsanalyse. Dabei wird besonders ein Verfahren hervorgehoben, welches die Bestimmung der Systemableitungen $\frac{d\mathbf{q}}{ds}$ durch eine geeignete Wahl der Verhältnisse der Schrittweiten bei der Näherung der partiellen Ableitungen durch finite Differenzen mit geringen Rechenkosten ermöglicht. In Abschnitt 6.5 wird die Formulierung der kombinierten Sensitivitätsanalyse für die Formoptimierung im partitionierten Ansatz weiterentwickelt. Dies bedeutet insbesondere die Berücksichtigung des Datentransfers am nicht-koinzidenten Netz, sowie die Reduktion auf ein Zweifeldproblem gemäß der Softwaregegebenheiten. Weiterhin wird in Abschnitt 6.6 eine Algorithmik zur Umsetzung der direkten kombinierten Sensitivitätsanalyse vorgestellt und in Abschnitt 6.7 anhand von Berechnungen veranschaulicht.

6.2. Direkte kombinierte Sensitivitätsanalyse

In diesem Abschnitt wird die direkte Methode der kombinierten Sensitivitätsanalyse vorgestellt. Es werden nun strukturseitig die Sensitivitätsgleichungen GSE I verwendet werden. Fluidseitig werden die Gleichungen GSE II angesetzt. Die dem direkten Ansatz zu Grunde liegenden Gleichungen lauten dann:

$$d\mathcal{S} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{s}} d\mathbf{s} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} d\mathbf{d} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}} d\mathbf{y} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} = 0 \quad (6.1)$$

$$d\mathbf{y} = df_y = \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{s}} d\mathbf{s} + \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{d}} d\mathbf{d} + \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} \quad (6.2)$$

$$d\mathbf{q} = df_q = \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{s}} d\mathbf{s} + \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{d}} d\mathbf{d} + \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{y}} d\mathbf{y} \quad (6.3)$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der Systemableitungen:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{d}} & -\mathcal{I} & \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{y}} & -\mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{d}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{y}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{q}}{ds} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s} \\ \frac{\partial f_y}{\partial s} \\ \frac{\partial f_q}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Diese Gleichungen ersetzen die Gleichungen GSE I oder GSE II und fügen sich, wie in Abschnitt 5.4 beschrieben, in die weiteren Schritte der Sensitivitätsanalyse und der Optimierung ein.

Bemerkung 1: Die Gleichungen der kombinierten Sensitivitätsanalyse lassen sich alternativ auch analog zur Herleitung der Gleichungen GSE I aufstellen: Die Berechnung von Fluidnetz und Fluid mit Black Box-Lösern wird über die expliziten Funktionen f_y und f_q ausgedrückt (Gleichungen 5.60 und 5.61). Werden diese in impliziter Form formuliert, so ergeben sich wieder die Residuen \mathcal{M} und \mathcal{F} :

$$\mathcal{M} = f_y(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \mathbf{q}) - \mathbf{y} = 0 \quad (6.5)$$

$$\mathcal{F} = f_q(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \mathbf{y}) - \mathbf{q} = 0 \quad (6.6)$$

Deren partielle Ableitungen in Abhängigkeit der expliziten Funktionen f_y und f_q sind wie folgt:

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{s}} \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{d}}, \quad \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{y}} = -\mathcal{I} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{q}}. \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{s}} \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{d}}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{y}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}} = -\mathcal{I}. \quad (6.10)$$

Es muss $d\mathcal{M} = 0$ und $d\mathcal{F} = 0$ gelten. Unter Berücksichtigung obiger Formulierungen lassen sich damit folgende Sensitivitätsgleichungen aufstellen:

$$d\mathcal{M} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{s}} ds + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}} d\mathbf{d} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{y}} \cdot d\mathbf{y} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} = 0 \quad (6.11)$$

$$= \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{s}} ds + \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{d}} d\mathbf{d} - \mathcal{I} \cdot d\mathbf{y} + \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} = 0 \quad (6.12)$$

$$d\mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{s}} d\mathbf{s} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}} d\mathbf{d} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}} \cdot d\mathbf{y} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} = 0 \quad (6.13)$$

$$= \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{s}} d\mathbf{s} + \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{d}} d\mathbf{d} + \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{y}} d\mathbf{y} - \mathcal{I} \cdot d\mathbf{q} = 0 \quad (6.14)$$

Eliminiert man $d\mathbf{y}$ bzw. $d\mathbf{q}$, so sind die Gleichungen identisch mit den Differentialen der Systemvariablen 6.2 und 6.3, welche der kombinierten Sensitivitätsanalyse zu Grunde liegen.

Bemerkung 2: Die kombinierte Sensitivitätsanalyse lässt sich auf beliebige Residuen, also auf beliebige Mehrfeldprobleme übertragen. Je nach Zielsetzung können dann gemischte Ansätze der Sensitivitätsanalyse angesetzt werden. In der FSI könnten beispielsweise auch fluidseitig residuumsbasierte Gleichungen angesetzt werden, während strukturseitig in- und outputbasierte Verarbeitung stattfindet.

6.3. Adjungierte kombinierte Sensitivitätsanalyse

Dieser Abschnitt widmet sich der adjungierten Formulierung der kombinierten Sensitivitätsanalyse, welche nach der Lagrange-Methode (Abschnitt 5.5.1) entwickelt wird. Hier legen die Nebenbedingungen die Abhängigkeiten der Variablen fest. Diese sind die implizit formulierten Systemgleichungen, also die Residuen. Um der Forderung nachzukommen, dass die Systemgleichungen von Fluidnetz und Fluid nur abhängig von In- und Outputvariablen sein dürfen, werden Gleichungen 6.5 und 6.6 als Nebenbedingungen angesetzt. Die Nebenbedingungen lauten dann:

$$\mathcal{S}(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) = 0 \quad (6.15)$$

$$\mathcal{M} = f_y(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \mathbf{q}) - \mathbf{y} = 0 \quad (6.16)$$

$$\mathcal{F} = f_q(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \mathbf{y}) - \mathbf{q} = 0 \quad (6.17)$$

Die Optimierungsvariablen \mathbf{s} werden als unabhängige Variablen behandelt und die Systemvariablen \mathbf{d} , \mathbf{y} und \mathbf{q} als abhängige Variablen. Die Lagrangefunktion wird aus der Zielfunktion ψ und den mit den Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_d$, $\boldsymbol{\lambda}_y$ und $\boldsymbol{\lambda}_q$ versehenen Nebenbedingungen gebildet:

$$\mathcal{L} = \psi + \boldsymbol{\lambda}_d^T \cdot \mathcal{S} + \boldsymbol{\lambda}_y^T \cdot \mathcal{M} + \boldsymbol{\lambda}_q^T \cdot \mathcal{F} \quad (6.18)$$

Am stationären Punkt, wo alle Bedingungen erfüllt sind, muss die erste Variation der Lagrange-Funktion Null werden und lautet:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}} \delta \mathbf{s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{d}} \delta \mathbf{d} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{y}} \delta \mathbf{y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = 0 \quad (6.19)$$

Die Lagrange-Multiplikatoren werden so gewählt, dass die Koeffizienten der abhängigen Variablen $\delta \mathbf{d}$, $\delta \mathbf{y}$ und $\delta \mathbf{q}$ verschwinden. Die sich daraus ergebenden n_λ Bedingungen lauten:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{d}} + \boldsymbol{\lambda}_d^T \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} + \boldsymbol{\lambda}_y^T \cdot \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{d}} + \boldsymbol{\lambda}_q^T \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{d}} = 0 \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{y}} + \boldsymbol{\lambda}_d^T \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}} + \boldsymbol{\lambda}_y^T \cdot \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{y}} + \boldsymbol{\lambda}_q^T \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}} = 0 \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}} + \boldsymbol{\lambda}_d^T \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}} + \boldsymbol{\lambda}_y^T \cdot \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{q}} + \boldsymbol{\lambda}_q^T \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (6.22)$$

Die Koeffizienten der Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_y^T$ und $\boldsymbol{\lambda}_q^T$ können gemäß Gleichungen 6.8 und 6.10 in Abhängigkeit der expliziten Funktionen f_y und f_q ausgedrückt werden. Dann ergibt sich folgendes Gleichungssystem als die gekoppelte adjungierte Gleichung zur Bestimmung des adjungierten Vektors $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{d}} & -\mathcal{I} & \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{y}} & -\mathcal{I} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_d \\ \boldsymbol{\lambda}_y \\ \boldsymbol{\lambda}_q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{d}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix}^T \quad (6.23)$$

Mit den Bedingungen 6.20 bis 6.22 verbleiben in der Variation der Lagrange-Funktion 6.19 nur noch die Koeffizienten $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}}$ der unabhängigen Variablen $\delta \mathbf{s}$, welche dann – da es sich nun um ein freies Variationsproblem handelt – verschwinden müssen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{s}} + \boldsymbol{\lambda}_d^T \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{s}} + \boldsymbol{\lambda}_y^T \cdot \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{s}} + \boldsymbol{\lambda}_q^T \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{s}} = 0 \quad (6.24)$$

Hierin lassen sich die Koeffizienten von $\boldsymbol{\lambda}_y^T$ und $\boldsymbol{\lambda}_q^T$ gemäß Gleichung 6.7 und 6.9 in Abhängigkeit der expliziten Funktionen f_y und f_q darstellen. Bei der Verwendung von Gradientenmethoden muss der Gradient der Zielfunktion $\frac{d\psi}{ds}$ ermittelt werden. Dieser verschwindet am Optimum und kann mit Erfüllung der Nebenbedingungen $\mathcal{S} = 0$, $\mathcal{M} = 0$ und $\mathcal{F} = 0$ und der obigen Wahl der Lagrange-Multiplikatoren wie folgt formuliert

werden:

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{d\mathcal{L}}{ds} - \underbrace{\lambda_d^T \frac{d\mathcal{S}}{ds}}_0 - \underbrace{\lambda_y^T \frac{d\mathcal{M}}{ds}}_0 - \underbrace{\lambda_q^T \frac{d\mathcal{F}}{ds}}_0 \quad (6.25)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds}}_0 + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{ds}}_0 + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{ds}}_0 \quad (6.26)$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{s}} + \lambda_d^T \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{s}} + \lambda_y^T \cdot \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{s}} + \lambda_q^T \cdot \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{s}} \quad (6.27)$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{s}} + \begin{bmatrix} \lambda_d^T & \lambda_y^T & \lambda_q^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{s}} \\ \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{s}} \\ \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{s}} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

6.4. Effiziente gestaffelte Lösung der Sensitivitätsgleichungen bei der direkten Methode

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine kostenreduzierende Lösung der fluidseitigen Sensitivitätsgleichungen entwickelt, welche hier vorgestellt wird. Es handelt sich um ein semianalytisches Verfahren, bei dem die partiellen Ableitungen der fluidseitigen Sensitivitätsgleichungen durch finite Differenzen genähert werden. Besonderheit hierbei ist, dass die Sensitivitätsgleichung des Fluids durch geeignete Wahl der Verhältnisse der Schrittweiten so vereinfacht wird, dass es möglich ist, alle Variablen simultan zu perturbieren. Dann ist für die Lösung nur eine Fluidanalyse anstatt einer FSI-Analyse nötig, was wesentlich geringeren Rechenaufwand bedeutet.

Diese Lösung der fluidseitigen Sensitivitätsgleichungen bildet Teil des gestaffelten Verfahrens zur Lösung der Sensitivitätsgleichungen für die direkte kombinierte Sensitivitätsanalyse.

6.4.1. Lösung der fluidseitigen Sensitivitätsgleichungen

Die Gleichungen 6.1, 6.2 und 6.3 bilden die Grundlage der kombinierten Sensitivitätsanalyse. Die fluidseitigen Gleichungen schreiben sich für eine Optimierungsvariable s_i mit $i = 1 \dots n_s$ wie folgt:

$$\frac{d\mathbf{y}}{ds_i} = \frac{df_y}{ds_i} = \frac{\partial f_y}{\partial s_i} + \sum_{j=1}^{n_d} \frac{\partial f_y}{\partial d_j} \frac{dd_j}{ds_i} + \sum_{j=1}^{n_q} \frac{\partial f_y}{\partial q_j} \frac{dq_j}{ds_i} \quad (6.29)$$

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds_i} = \frac{df_q}{ds_i} = \frac{\partial f_q}{\partial s_i} + \sum_{j=1}^{n_d} \frac{\partial f_q}{\partial d_j} \frac{dd_j}{ds_i} + \sum_{j=1}^{n_y} \frac{\partial f_q}{\partial y_j} \frac{dy_j}{ds_i} \quad (6.30)$$

Während für die strukturseitige Sensitivitätsgleichung eine Gleichungslösung erforderlich ist, sind für die fluidseitigen Sensitivitätsgleichungen keine Gleichungslösungen erforderlich, da die zu bestimmenden Systemableitungen schon isoliert stehen. Allerdings müssen die partiellen Ableitungen der expliziten Funktionen f_y und f_q für die Lösung der Systemableitungen ermittelt werden. Dafür stehen nur Systemin- und -output zur Verfügung. In der Literatur lässt sich dafür das eigenformbasiertes Reduktionsverfahren zur Berechnung der partiellen Ableitungen (siehe Abschnitt 5.8) von Guinta [43] finden. In dieser Arbeit wird ein alternatives und effizientes Näherungsverfahren zur Berechnung der fluidseitigen Systemableitungen vorgestellt.

Zur Erklärung des Verfahrens wird hier beispielhaft die Sensitivitätsgleichung 6.30 verwendet. Die Systemableitung $\frac{d\mathbf{q}}{ds_i}$ kann entweder direkt durch finite Differenzen genähert werden oder durch die Summe der mit den jeweiligen Systemableitungen multiplizierten Finite-Differenzen-Näherungen für die partiellen Ableitungen. An dieser Stelle ist es wichtig, zwischen Finite-Differenzen-Näherungen für totale Ableitungen, wie $\frac{d\mathbf{q}}{ds_i}$, und Finite-Differenzen-Näherungen für partiellen Ableitungen, wie $\frac{\partial f_q}{\partial s_i}$, zu unterscheiden. Für eine detaillierte Erklärung zur Näherung der Ableitungen mehrdimensionaler Funktionen durch finite Differenzen und deren Zusammenhang mit der Kettenregel sei auf Anhang A.1 verwiesen.

Die direkte Näherung des totalen Differenzials $\frac{d\mathbf{q}}{ds_i}$ an der Stelle $(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)})$ lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}}{ds_i}(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}) &= \frac{df_q}{ds_i}(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}) \\ &\approx \frac{f_q(\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon \mathbf{e}_i, f_d(\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon \mathbf{e}_i), f_y(\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon \mathbf{e}_i)) - f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)})}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Hier ist \mathbf{e}_i der i -te kartesische Einheitsvektor und es gilt $\mathbf{d}^{(k)} = f_d(\mathbf{s}^{(k)})$, sowie $\mathbf{y}^{(k)} = f_y(\mathbf{s}^{(k)})$. Hier wird die Variable s_i mit der Schrittweite ε perturbiert. Um die Funktion f_q an der Stelle $\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon \mathbf{e}_i$ auszuwerten, ist es notwendig $f_d(\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon \mathbf{e}_i)$ und $f_y(\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon \mathbf{e}_i)$ auszuwerten. Diese sind wiederum von f_q an der Stelle $\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon$ abhängig. Um dieser Kopplung gerecht zu werden, sind die auskonvergierten Lösungen der Systemvariablen \mathbf{d} , \mathbf{y} und \mathbf{q} für das perturbierte Design notwendig. Um diese zu ermitteln, muss eine FSI-Analyse durchgeführt werden. Für obige Vorwärtsdifferenz erster Ordnung ist also eine vollständige FSI-Analyse notwendig, was beträchtlichen Rechenaufwand bedeutet.

Die Näherungen für die partiellen Ableitungen aus Gleichung 6.30 sind:

$$\frac{\partial f_q}{\partial s_i}(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}) \approx \frac{f_q(\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon \mathbf{e}_i, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}) - f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)})}{\varepsilon} \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial f_q}{\partial d_j}(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}) \approx \frac{f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)} + \delta_j \mathbf{e}_j, \mathbf{y}^{(k)}) - f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)})}{\delta_j} \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial f_q}{\partial y_j}(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}) \approx \frac{f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)} + \gamma_j \mathbf{e}_j) - f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)})}{\gamma_j} \quad (6.34)$$

Hierbei werden die Variablen s_i , \mathbf{d} bzw. \mathbf{y} mit den Schrittweiten ε , $\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \ \dots \ \delta_{n_d}]^T$ und $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1 \ \dots \ \gamma_{n_y}]^T$ perturbiert. Da hier nur eine Optimierungsvariable und alle Systemvariablen betrachtet werden, muss nur eine Schrittweite ε für die Optimierungsvariable und individuelle Schrittweiten δ_j und γ_j mit $j = 1, \dots, n_y$ für die Systemvariablen eingeführt werden. Für die Funktion f_q sind \mathbf{s} , \mathbf{d} und \mathbf{y} unabhängige Variablen. Die Auswertung von f_q erfolgt ohne Berücksichtigung einer Kopplung. Das heißt $f_q(\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon \mathbf{e}_i, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)})$, $f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)} + \delta_j \mathbf{e}_j, \mathbf{y}^{(k)})$ bzw. $f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)} + \gamma_j \mathbf{e}_j)$ können sofort auf Grundlage bekannter Variablen ausgewertet werden. Zur Berechnung eines der obigen Ausdrücke ist also eine Auswertung von f_q , d.h. eine reine CFD-Analyse notwendig.

Nun folgt die Bestimmung von $\frac{d\mathbf{q}}{ds_i}$ nach der Kettenregel durch die Bildung der gewichteten Summe der Näherungen der partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}}{ds_i}(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}) &= \frac{df_q}{ds_i}(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}) \\ &\approx \frac{f_q(\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon \mathbf{e}_i, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}) - f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)})}{\varepsilon} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n_d} \frac{f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)} + \delta_j \mathbf{e}_j, \mathbf{y}^{(k)}) - f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)})}{\delta_j} \frac{dd_j}{ds_i} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n_y} \frac{f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)} + \gamma_j \mathbf{e}_j) - f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)})}{\gamma_j} \frac{dy_j}{ds_i} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Durch die Wahl der Schrittweiten zu

$$\boxed{\delta_j = \frac{dd_j}{ds_i} \varepsilon \quad \text{und} \quad \gamma_j = \frac{dy_j}{ds_i} \varepsilon} \quad (6.36)$$

kann ein gemeinsamer Nenner gebildet werden:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}}{ds_i}(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}) &\approx \frac{f_q(\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon \mathbf{e}_i, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}) - f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)})}{\varepsilon} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n_d} \frac{f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)} + \frac{dd_j}{ds_i} \varepsilon \mathbf{e}_j, \mathbf{y}^{(k)}) - f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)})}{\varepsilon} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n_y} \frac{f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)} + \frac{dy_j}{ds_i} \varepsilon \mathbf{e}_j) - f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)})}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Da für die Finite Differenzen Näherung die Annahme gemacht wurde, dass sich f_q im Bereich der Schrittweiten linear verhält, lässt sich die Formulierung zu

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds_i}(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}) \approx \frac{f_q(\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon \mathbf{e}_i, \mathbf{d}^{(k)} + \frac{d\mathbf{d}}{ds_i} \varepsilon, \mathbf{y}^{(k)} + \frac{d\mathbf{y}}{ds_i} \varepsilon) - f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)})}{\varepsilon} \quad (6.38)$$

zusammenfassen. Man stellt fest, dass Gleichung 6.38 der finiten Differenz der totalen Ableitung (Gleichung 6.31) entspricht, wenn man folgende Näherung (Taylorreihe) berücksichtigt:

$$\mathbf{d}^{(k)} + \boldsymbol{\delta} = \mathbf{d}^{(k)} + \frac{d\mathbf{d}}{ds_i} \varepsilon \approx f_d(\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon) \quad (6.39)$$

$$\mathbf{y}^{(k)} + \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{y}^{(k)} + \frac{d\mathbf{y}}{ds_i} \varepsilon \approx f_y(\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon) \quad (6.40)$$

Es lässt sich zusammenfassen:

Die direkte Näherung der totalen Ableitung (Gleichung 6.31) geschieht durch die Perturbation von s_i . Dies hat die erneute Auswertung der abhängigen Variablen \mathbf{d} und \mathbf{y} zur Folge. Wegen deren Kopplung mit \mathbf{q} , liegt der Rechenaufwand bei einer vollständigen FSI-Analyse pro Optimierungsvariable.

Bei die Näherung der partiellen Ableitungen (Gleichung 6.35) werden die Variablen \mathbf{s} , \mathbf{d} bzw. \mathbf{y} perturbiert. Es ist keine Kopplung der Systemvariablen zu berücksichtigen. Für jede der $1 + n_d + n_y$ finiten Differenzen ergibt sich der Rechenaufwand zu einer Fluidanalyse. Vereinfacht man die Formulierung durch geschickte Wahl der Schrittweiten (Gleichung 6.36) zu Gleichung 6.38, so ist es möglich alle Variablen simultan zu perturbieren. Der Rechenaufwand ergibt sich zu einer einzigen CFD-Analyse, die einen Bruchteil einer FSI-Analyse darstellt.

6.4.2. Gestaffelte Lösung der Sensitivitätsgleichungen

Da zur Bestimmung von $\frac{d\mathbf{q}}{ds_i}$ die Systemableitung $\frac{d\mathbf{d}}{ds_i}$ benötigt wird und diese gekoppelt sind, wird das gestaffelte Verfahren der Sensitivitätsanalyse durchgeführt. Es erfolgt nach dem Schema aus Abschnitt 5.4.2.2 und schreibt sich unter Einbeziehung der obigen Methode wie folgt:

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds_i}^{(l)} = - \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s_i} - \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{ds_i}^{(l-1)} - \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{ds_i}^{(l-1)} \quad (6.41)$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{ds_i}^{(l)} = \frac{f_y(\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon \mathbf{e}_i, \mathbf{d}^{(k)} + \frac{d\mathbf{d}}{ds_i}^{(k,l)} \varepsilon, \mathbf{q}^{(k)} + \frac{d\mathbf{q}}{ds_i}^{(k,l-1)} \varepsilon) - f_y(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{q}^{(k)})}{\varepsilon} \quad (6.42)$$

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds_i}^{(l)} = \frac{f_q(\mathbf{s}^{(k)} + \varepsilon \mathbf{e}_i, \mathbf{d}^{(k)} + \frac{d\mathbf{d}}{ds_i}^{(k,l)} \varepsilon, \mathbf{y}^{(k)} + \frac{d\mathbf{y}}{ds_i}^{(k,l)} \varepsilon) - f_q(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)})}{\varepsilon} \quad (6.43)$$

6.5. Partitionierte kombinierte Sensitivitätsanalyse für die Formoptimierung

In diesem Abschnitt wird die Formulierung der kombinierten Sensitivitätsanalyse für die Formoptimierung und den partitionierten Ansatz entwickelt. Dies betrifft die Berücksichtigung der Geometriedefinition und des Datentransfers am nicht-koinzidenten Netz in der Formulierung (vgl. Abschnitt 5.9). Da die geläufigen Strömungssimulationsprogramme die Berechnung des Fluidnetzes einschließen (ALE Ansatz, vgl. Abschnitt 3.3.1), wird hier gemäß diesen technischen Gegebenheiten die Reduktion auf zwei Systeme, Struktur und Fluid, vorgenommen. Auf dieser Grundlage wird zunächst die Formulierung für die direkte und adjungierte kombinierte Sensitivitätsanalyse entwickelt und weiterhin auf die Lösung der fluidseitigen Sensitivitätsgleichung für die numerische Optimierung eingegangen.

Abbildung 6.2 zeigt eine schematische Darstellung des partitionierten Ansatzes für die FSI-Berechnung als Bestandteil einer numerischen Formoptimierung (vgl. Abschnitt 2.3.2, NAND). Es kommen zwei Berechnungsprogramme, die für Struktur und Fluid, zum Einsatz. Erfolgt die Berechnung durch diese zwei Programme, lässt sich auch die mathematischen Darstellung entsprechend auf zwei Systeme \mathcal{S} und \mathcal{F} reduzieren. So ist im Folgenden die Strömungssimulation immer inklusive der Netzanpassung zu verstehen und dementsprechend umfasst die Systemgleichung \mathcal{F} fortan Strömungsgleichungen und Netzanpassung.

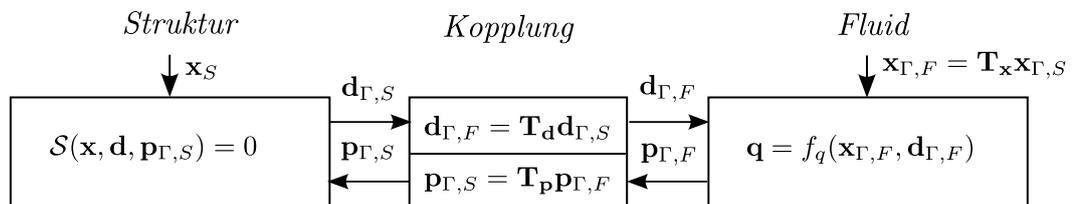


Abbildung 6.2.: Schema der partitionierten FSI Analyse als Bestandteil einer numerischen Optimierung.

Desweiteren können die impliziten und expliziten Systemgleichungen als Funktionen der tatsächlich benötigten In- und Outputgrößen dargestellt werden. Die Eingangswerte der Struktursimulation sind hier die aerodynamischen Lasten in Form der Drücke am Interface $\mathbf{p}_{\Gamma,S}$. Die Strukturverschiebungen \mathbf{d} sind der Output. Der Input der Strömungssi-

mulation inklusive Netzadaption ist dahingegen die Berandung des Strömungsgebietes, die durch die Strukturverschiebungen $\mathbf{d}_{\Gamma,F}$ festgelegt wird. Der Output sind die Drücke am gemeinsamen Interface $\mathbf{p}_{\Gamma,F}$. Die Geometrie $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{s})$ der Struktur ist bei der Einbettung in einen numerischen Optimierungsprozess sowohl Inputgröße für Struktur- also auch für Fluidberechnung. Alle diese Daten unterliegen dem Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz und werden bezüglich der benötigten Diskretisierung durch die Transfermatrizen \mathbf{T}_d , \mathbf{T}_p und \mathbf{T}_x transformiert (vgl. Abschnitt 5.9.2).

Die Systemgleichung des Gesamtsystems kann wie folgt dargestellt werden:

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{p}_{\Gamma,S}) \\ \mathcal{F}(\mathbf{x}_{\Gamma,F}, \mathbf{d}_{\Gamma,F}, \mathbf{q}) \end{array} \right\} = 0 \quad (6.44)$$

Die Systemvariablen \mathbf{r} reduzieren sich auf

$$\mathbf{r} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d} \\ \mathbf{q} \end{array} \right\}. \quad (6.45)$$

Die explizite Schreibweise der Systemgleichungen lautet:

$$\mathbf{d} = f_d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{\Gamma,S}) \quad (6.46)$$

$$\mathbf{q} = f_q(\mathbf{x}_{\Gamma,F}, \mathbf{d}_{\Gamma,F}) \quad (6.47)$$

Damit lassen sich die Sensitivitätsgleichungen wie folgt entwickeln:

$$\begin{aligned} d\mathcal{S} &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} d\mathbf{d} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{p}_{\Gamma,S}} d\mathbf{p}_{\Gamma,S} \\ &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{ds} ds + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} d\mathbf{d} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{p}_{\Gamma,S}} \cdot \mathbf{T}_p \cdot \frac{d\mathbf{p}_{\Gamma,F}}{d\mathbf{q}} d\mathbf{q} = 0 \end{aligned} \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{q} &= \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,F}} d\mathbf{x}_{\Gamma,F} + \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,F}} d\mathbf{d}_{\Gamma,F} \\ &= \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_x \cdot \frac{d\mathbf{x}_{\Gamma,S}}{ds} ds + \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_d \cdot \frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,S}}{d\mathbf{d}} d\mathbf{d} \end{aligned} \quad (6.49)$$

Die zu lösenden Gleichungssysteme für die direkte und die adjungierte Sensitivitätsanalyse werden daraus abgeleitet. Sie stellen die Basis für die technische Umsetzung der

kombinierten Sensitivitätsanalyse in dieser Arbeit dar. Für die direkte Sensitivitätsanalyse ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{p}_{\Gamma,S}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}_{\Gamma,F}}{d\mathbf{q}} \\ \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{d}} \cdot \frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,S}}{d\mathbf{d}} & -\mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{d}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{q}}{ds} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \\ \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}_{\Gamma,S}}{ds} \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

Die adjungierte Gleichung lautet:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{p}_{\Gamma,S}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}_{\Gamma,F}}{d\mathbf{q}} \\ \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{d}} \cdot \frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,S}}{d\mathbf{d}} & -\mathcal{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_d \\ \boldsymbol{\lambda}_q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{d}}^T \\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}}^T \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

Nun wird die Formulierung von Gleichung 6.38 zur Berechnung der fluidseitigen Systemableitungen für den partitionierten Ansatz entwickelt. Die Sensitivitätsgleichung 6.49 lässt sich

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds_i} = \sum_{j=1}^{n_{d_{\Gamma,S}}} \frac{\partial f_q}{\partial d_{\Gamma,S,j}} \cdot \frac{dd_{\Gamma,S,j}}{ds_i} + \sum_{j=1}^{n_{x_{\Gamma,S}}} \frac{\partial f_q}{\partial x_{\Gamma,S,j}} \cdot \frac{dx_{\Gamma,S,j}}{ds_i} \quad (6.52)$$

formulieren. Die Näherungen der darin vorkommenden partiellen Ableitung durch finite Differenzen sind

$$\frac{\partial f_q}{\partial d_{\Gamma,S,j}}(\mathbf{x}_{\Gamma,F}^{(k)}, \mathbf{d}_{\Gamma,F}^{(k)}) \approx \frac{f_q(\mathbf{T}_{\mathbf{x}} \mathbf{x}_{\Gamma,S}^{(k)}, \mathbf{T}_{\mathbf{d}} \cdot (\mathbf{d}_{\Gamma,S}^{(k)} + \delta_j \mathbf{e}_j)) - f_q(\mathbf{T}_{\mathbf{x}} \mathbf{x}_{\Gamma,S}^{(k)}, \mathbf{T}_{\mathbf{d}} \mathbf{d}_{\Gamma,S}^{(k)})}{\delta_j} \quad (6.53)$$

und

$$\frac{\partial f_q}{\partial x_{\Gamma,S,j}}(\mathbf{x}_{\Gamma,F}^{(k)}, \mathbf{d}_{\Gamma,F}^{(k)}) \approx \frac{f_q(\mathbf{T}_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{x}_{\Gamma,S}^{(k)} + \chi_j \mathbf{e}_j), \mathbf{T}_{\mathbf{d}} \mathbf{d}_{\Gamma,S}^{(k)}) - f_q(\mathbf{T}_{\mathbf{x}} \mathbf{x}_{\Gamma,S}^{(k)}, \mathbf{T}_{\mathbf{d}} \mathbf{d}_{\Gamma,S}^{(k)})}{\chi_j}. \quad (6.54)$$

Wählt man die Schrittweiten von Strukturverschiebung und Strukturgeometrie zu

$$\delta_j = \frac{dd_{\Gamma,S,j}}{ds_i} \varepsilon \quad \text{und} \quad \chi_j = \frac{dx_{\Gamma,S,j}}{ds_i} \varepsilon, \quad (6.55)$$

dann kann folgende Näherung für die Systemableitung gemacht werden:

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds_i}(\mathbf{x}_{\Gamma,F}^{(k)}, \mathbf{d}_{\Gamma,F}^{(k)}) \approx \frac{f_q(\mathbf{x}_{\Gamma,F,pert}^{(k)}, \mathbf{d}_{\Gamma,F,pert}^{(k)}) - f_q(\mathbf{x}_{\Gamma,F}^{(k)}, \mathbf{d}_{\Gamma,F}^{(k)})}{\varepsilon} \quad (6.56)$$

mit

$$\mathbf{x}_{\Gamma,F,pert}^{(k)} = \mathbf{x}_{\Gamma,F}^{(k)} + \frac{d\mathbf{x}_{\Gamma,F}}{ds_i} \varepsilon \quad \text{und} \quad \mathbf{d}_{\Gamma,F,pert}^{(k)} = \mathbf{d}_{\Gamma,F}^{(k)} + \frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,F}}{ds_i} \varepsilon. \quad (6.57)$$

$\frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,S}}{ds_i} = \frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,S}}{d\mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds_i}$ und $\frac{d\mathbf{x}_{\Gamma,S}}{ds_i} = \frac{d\mathbf{x}_{\Gamma,S}}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{ds_i}$ sind Komponenten der Systemableitungen der Struktur und der Ableitungen $\frac{d\mathbf{x}}{ds_i}$.

In Anhang A.2 findet sich eine anschauliche und grafisch verdeutlichte Erklärung zur effizienten Ermittlung der fluidseitigen Systemableitungen.

Bemerkung: Die Bestimmung der perturbierten Geometrie muss nicht über die obige Formulierung $\mathbf{x}_{\Gamma,F,pert}^{(k)} = \mathbf{x}_{\Gamma,F}^{(k)} + \frac{d\mathbf{x}_{\Gamma,F}}{ds_i} \varepsilon$ erfolgen. Wenn der Zusammenhang $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ a priori bekannt ist, kann die perturbierte Geometrie auch durch $\mathbf{x}_{\Gamma,pert}^{(k)} = \mathbf{x}_{\Gamma}(\mathbf{s} + \varepsilon \mathbf{e}_i)$ bestimmt werden.

6.6. Algorithmik der direkten kombinierten Sensitivitätsanalyse

In diesem Abschnitt wird eine Algorithmik zur kombinierten Sensitivitätsanalyse vorgestellt. Grundlage sind drei Prozesse: Berechnungsprogramme für Struktur und Fluid und eine Schnittstelle für den Datentransfer. Dabei ist die Optimierung ein Modul des Struktursimulationsprogramms und wird von diesem übernommen. Das Strömungssimulationsprogramm muss nur den üblichen In- und Output liefern, wird also als reiner Black Box Code benutzt. Die Schnittstelle steuert die Kommunikation der Berechnungsprogramme und den Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz.

Die für diese Arbeit relevanten Zielfunktionen sind Funktionen strukturseitiger Variablen, wie Strukturverschiebung und Strukturbelastung. In Abschnitt 6.6.1 wird gezeigt, dass dies eine Reduktion der Ordnung des zu lösenden Gleichungssystems erlaubt, wodurch sich die Rechenkosten reduzieren lassen.

In Abschnitt 6.6.2 wird die Sensitivitätsgleichung für die Struktur formuliert. In der vorgestellten Algorithmik wird diese aus der geometrisch linearen Systemgleichung entwickelt. Die Sensitivitätsgleichung für die Struktur ist ein lineares Gleichungssystem.

6.6.1. Reduktion der Ordnung der Sensitivitätsgleichungen

Die Zielfunktion wurde in Kapitel 5 als Funktion der Optimierungs- und aller Systemvariablen eingeführt. Die Zielfunktionen, die für diese Arbeit von Bedeutung sind, geben das Strukturverhalten oder Einflüsse auf dieses wieder. Sie sind Funktionen der Strukturverschiebungen \mathbf{d} , beispielsweise zur Minimierung der Verformung, oder Funktionen der Strömungslasten auf die Struktur \mathbf{p}_{Γ} , beispielsweise zur Minimierung der Strukturbelastung. Die Drücke $\mathbf{p}_{\Omega \setminus \Gamma}$ innerhalb des Strömungsgebietes und die Geschwindigkeiten \mathbf{u} gehen dann nicht in die Zielfunktion ein. Es werden daher auch nur die Systema-

bleitungen $\frac{d\mathbf{d}}{ds}$ und $\frac{d\mathbf{p}_\Gamma}{ds}$ zur Ermittlung des Gradienten der Zielfunktion benötigt. Dies ermöglicht eine Reduktion der Ordnung des zu lösenden Gleichungssystems 6.50.

Da \mathbf{d} und \mathbf{p}_Γ von $\mathbf{p}_{\Omega \setminus \Gamma}$ und \mathbf{u} entkoppelt sind, ausgedrückt durch $\frac{d\mathbf{d}}{d\mathbf{p}_{\Omega \setminus \Gamma}} = 0$, $\frac{d\mathbf{d}}{d\mathbf{u}} = 0$, $\frac{d\mathbf{p}_\Gamma}{d\mathbf{p}_{\Omega \setminus \Gamma}} = 0$ und $\frac{d\mathbf{p}_\Gamma}{d\mathbf{u}} = 0$, sind auch die jeweiligen Systemableitung entkoppelt. Die Systemableitungen $\frac{d\mathbf{p}_{\Omega \setminus \Gamma}}{ds}$ und $\frac{d\mathbf{u}}{ds}$ werden also nicht zur Bestimmung von $\frac{d\mathbf{d}}{ds}$ und $\frac{d\mathbf{p}_\Gamma}{ds}$ benötigt. Die Entkoppelung lässt sich sofort erkennen, wenn Gleichung 6.50 wie folgt dargestellt wird:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{p}_{\Gamma,S}} \cdot \mathbf{T}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{d\mathbf{p}_{\Gamma,F}}{d\mathbf{q}} \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_d \cdot \frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,S}}{d\mathbf{d}} & -\mathcal{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{d\mathbf{p}_{\Omega \setminus \Gamma}}{d\mathbf{q}} \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_d \cdot \frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,S}}{d\mathbf{d}} & 0 & -\mathcal{I} & 0 \\ \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{q}} \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_d \cdot \frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,S}}{d\mathbf{d}} & 0 & 0 & -\mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{d}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{p}_{\Gamma,F}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{p}_{\Omega \setminus \Gamma}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{u}}{ds} \end{bmatrix} = \\
 & - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{p}_{\Gamma,F}}{d\mathbf{q}} \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_x \cdot \frac{d\mathbf{x}_{\Gamma,S}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{p}_{\Omega \setminus \Gamma}}{d\mathbf{q}} \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_x \cdot \frac{d\mathbf{x}_{\Gamma,S}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{q}} \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_x \cdot \frac{d\mathbf{x}_{\Gamma,S}}{ds} \end{bmatrix} \quad (6.58)
 \end{aligned}$$

Die grau unterlegten Nebendiagonalterme sind die Koeffizienten, über welche $\frac{d\mathbf{p}_{\Omega \setminus \Gamma}}{ds}$ und $\frac{d\mathbf{u}}{ds}$ in die Formulierung von $\frac{d\mathbf{d}}{ds}$ und $\frac{d\mathbf{p}_\Gamma}{ds}$ eingehen. Da sie Null sind, ist das Gleichungssystem für die gesuchten Systemableitungen $\frac{d\mathbf{d}}{ds}$ und $\frac{d\mathbf{p}_\Gamma}{ds}$ entkoppelt und es bleibt folgendes reduziertes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{p}_{\Gamma,S}} \cdot \mathbf{T}_p \\ \frac{d\mathbf{p}_{\Gamma,F}}{d\mathbf{q}} \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_d \cdot \frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,S}}{d\mathbf{d}} & -\mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{d}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{p}_{\Gamma,F}}{ds} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{p}_{\Gamma,F}}{d\mathbf{q}} \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_x \cdot \frac{d\mathbf{x}_{\Gamma,S}}{ds} \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

Es findet eine Reduktion von der Ordnung $n_d + n_q$ auf $n_d + n_{p_\Gamma}$ statt. Das verbleibende Gleichungssystem ist gekoppelt und kann nicht weiter reduziert werden.

6.6.2. Sensitivitätsgleichung für lineares Strukturverhalten

Die residuumbasierte Sensitivitätsgleichung der Struktur beinhaltet die partiellen Ableitungen der Systemgleichung nach den Systemvariablen. Diese Terme können analytisch oder semianalytisch bestimmt werden. Die Ausformulierung auf der Grundlage der linearen Systemgleichung mit konstanter Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} , welche lineares Systemverhalten beschreibt oder sich aus der Linearisierung einer nichtlinearen Systemgleichung ergibt, wird im Folgenden vorgestellt. Die algorithmische Umsetzung dieser Arbeit beinhaltet ausschließlich lineares Systemverhalten.

Die diskrete Systemgleichung schreibt sich für lineares Strukturverhalten in Abhängigkeit der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} , der Strukturverschiebungen \mathbf{d} , des Lastvektors der Strömungslasten \mathbf{f}_{ae} , des Lastvektors aus sonstiger Strukturbelastung \mathbf{f}_0 und der Optimierungsvariablen \mathbf{s} wie folgt:

$$\mathcal{S} = \mathbf{K}(\mathbf{x}(\mathbf{s})) \cdot \mathbf{d} - \mathbf{f}_0(\mathbf{x}(\mathbf{s})) - \mathbf{f}_{ae} = 0 \quad (6.60)$$

Betrachtet man die Sensitivitätsgleichung für die Formoptimierung im partitionierten Ansatz (Gleichung 6.48), so sind mit Gleichung 6.60 die Terme $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{x}}$, $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}}$ und $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{p}_{\Gamma,S}}$ zu formulieren:

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{d} - \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{x}} \quad (6.61)$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{K} \quad (6.62)$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{p}_{\Gamma,S}} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{f}_{ae}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_{ae}}{\partial \mathbf{p}_{\Gamma,S}} = -\frac{\partial \mathbf{f}_{ae}}{\partial \mathbf{p}_{\Gamma,S}} = -\mathbf{U} \quad (6.63)$$

Die Matrix $\mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{f}_{ae}}{\partial \mathbf{p}_{\Gamma,S}}$ transformiert Drücke, die auf der Oberfläche der Struktur wirken in Knotenkräfte. Um den Lastvektor $\mathbf{f}_{ae} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{p}_{\Gamma,S}$ aus den Drücken $\mathbf{p}_{\Gamma,S}$ zu erzeugen, wird sie bei der Strukturanalyse benötigt. Gleichung 6.59 wird mit den obigen Termen

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{U} \cdot \mathbf{T}_p \\ \frac{d\mathbf{p}_{\Gamma,F}}{dq} \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{d}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_d \cdot \frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,S}}{dd} & -\mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{d}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{p}_{\Gamma,F}}{ds} \end{bmatrix} = \\ & - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \mathbf{d} - \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{p}_{\Gamma,F}}{dq} \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{x}_{\Gamma,F}} \cdot \mathbf{T}_x \cdot \frac{d\mathbf{x}_{\Gamma,S}}{ds} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

6.6.3. Ablaufdiagramm der Sensitivitätsanalyse

In diesem Abschnitt soll die gestaffelte Lösung der Sensitivitätsgleichungen durch ein Ablaufdiagramm (Abbildung 6.3) veranschaulicht werden. Die beteiligten Programme sind darin durch Spalten symbolisiert. Spalte 1 entspricht dem Struktursimulationsprogramm, welches das Modul Optimierung enthält. Spalte 2 entspricht dem Datentransfer- und Kopplungstool. In Spalte 3 ist das Strömungssimulationsprogramm dargestellt. Weiterhin sind die Softwaremodule farblich gekennzeichnet: Rot für Optimierung, grün für Struktursimulation inklusive strukturseitige Sensitivitätsanalyse, orange für Datentransfer, blau für Strömungssimulation. Da zur Lösung der strukturseitigen Sensitivitätsgleichungen Informationen aus der Strukturanalyse benötigt werden, ist es sinnvoll, die

entsprechenden Routinen im Struktursimulationsprogramm zu implementieren. Der zeitliche Ablauf erfolgt von oben nach unten. Die Schleife über die Optimierungsvariablen ist mit dem Iterationsindex i , die interne Schleife der Sensitivitätsanalyse mit l und die Iterationen des Optimierungsalgorithmus mit k gekennzeichnet.

Der Ablauf des Verfahrens zur Lösung der Sensitivitätsgleichungen 6.64 und zur Ermittlung des Gradienten der Zielfunktion beginnt mit der Lösung der strukturseitigen Sensitivitätsgleichung. Diese lautet

$$\mathbf{K}^{(k)} \cdot \left(\frac{d\mathbf{d}}{ds_i} \right)^{(k,l)} = - \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} \right)^{(k)} \left(\frac{d\mathbf{x}}{ds_i} \right)^{(k)} \cdot \mathbf{d}^{(k)} - \left(\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{x}} \right)^{(k)} \left(\frac{d\mathbf{x}}{ds_i} \right)^{(k)} + \left(\frac{d\mathbf{f}_{ae}}{ds_i} \right)^{(k,l-1)}. \quad (6.65)$$

Die rechte Seite wird als Pseudolastvektor bezeichnet. Daraufhin werden die Systemableitungen des Fluids über das semianalytische Verfahren durch Gleichung 6.56 bestimmt. Um dabei vorhandene Routinen der FSI-Analyse auszunutzen, wird $\mathbf{p}_{\Gamma,F}$ auf die Strukturdiskretisierung übertragen und dann in Knotenkräfte umgewandelt. So werden die aerodynamischen Kräfte $\mathbf{f}_{ae} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{T}_p \cdot \mathbf{p}_{\Gamma,F}$ empfangen und daraus die Systemableitung $\frac{d\mathbf{f}_{ae}}{ds_i} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{T}_p \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_{\Gamma,F}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{ds_i}$ berechnet. Unter Verwendung von Gleichung 6.56 wird diese zu

$$\left(\frac{d\mathbf{f}_{ae}}{ds_i} \right)^{(k,l)} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{T}_p \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_{\Gamma,F}}{\partial \mathbf{q}} \left(\mathbf{f}_q \left(\mathbf{x}_{\Gamma,F,pert}^{(k,i,l)}, \mathbf{d}_{\Gamma,F,pert}^{(k,i,l)} \right) - \mathbf{f}_q \left(\mathbf{x}_{\Gamma,F}^{(k)}, \mathbf{d}_{\Gamma,F}^{(k)} \right) \right) \quad (6.66)$$

mit

$$\mathbf{d}_{\Gamma,F,pert}^{(k,i,l)} = \mathbf{T}_d \cdot \left(\mathbf{d}_{\Gamma,S}^{(k)} + \frac{d\mathbf{d}_{\Gamma,S}}{d\mathbf{d}} \left(\frac{d\mathbf{d}}{ds_i} \right)^{(k,l)} \cdot \varepsilon \right)$$

und

$$\mathbf{x}_{\Gamma,F,pert}^{(k,i,l)} = \mathbf{T}_x \cdot \left(\mathbf{x}_{\Gamma,S}^{(k)} + \frac{d\mathbf{x}_{\Gamma,S}}{ds_i} \cdot \varepsilon \right).$$

Der Gradient der Zielfunktion wird dann in Abhängigkeit dieser Systemableitungen zu

$$\left(\frac{d\psi}{ds_i} \right)^{(k)} = \frac{\partial \psi}{\partial s_i} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{d}} \cdot \left(\frac{d\mathbf{d}}{ds_i} \right)^{(k,l)} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{f}_{ae}} \cdot \left(\frac{d\mathbf{f}_{ae}}{ds_i} \right)^{(k,l)} \quad (6.67)$$

berechnet. Die Lösungen der Sensitivitätsgleichungen erfolgen wiederholt in einer Schleife bis Konvergenz erreicht wird.

Bemerkung 1: Einen großen Teil der Implementierung im Strukturcode machen die Routinen zur Berechnung der Terme

$$\left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial s_i}\right)^{(k)} = \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}}\right)^{(k)} \left(\frac{d\mathbf{x}}{ds_i}\right)^{(k)} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial s_i}\right)^{(k)} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{x}}\right)^{(k)} \left(\frac{d\mathbf{x}}{ds_i}\right)^{(k)} \quad (6.68)$$

des Pseudolastvektors aus. Die rein analytische Bestimmung der Terme ist sehr komplex [24]. Es bietet sich an, an dieser Stelle auf finite Differenzen zurückzugreifen [36]. Es können die finiten Differenzen $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial s_i} \approx \frac{\mathbf{K}(\mathbf{x}(\mathbf{s} + \Delta s_i \mathbf{e}_i)) - \mathbf{K}(\mathbf{x}(\mathbf{s}))}{\Delta s_i}$ und $\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial s_i} \approx \frac{\mathbf{f}_0(\mathbf{x}(\mathbf{s} + \Delta s_i \mathbf{e}_i)) - \mathbf{f}_0(\mathbf{x}(\mathbf{s}))}{\Delta s_i}$ gebildet werden. Alternativ können die finiten Differenzen $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_j} \approx \frac{\mathbf{K}(\mathbf{x} + \Delta x_j \mathbf{e}_j) - \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\Delta x_j}$ und $\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial x_j} \approx \frac{\mathbf{f}_0(\mathbf{x} + \Delta x_j \mathbf{e}_j) - \mathbf{f}_0(\mathbf{x})}{\Delta x_j}$ gebildet und mit den analytischen Ableitungen $\frac{dx_j}{ds_i}$ multipliziert werden.

Bemerkung 2: Der Startwert für $\frac{d\mathbf{f}_{ae}}{ds_i}$ wird durch einen Prediktor auf der Grundlage vorheriger Optimierungsiterationen vorgegeben.

Bemerkung 3: Die Fluidanalyse mit den perturbierten Variablen $\mathbf{d}_{\Gamma, F, pert}^{(k, i, l)}$ und $\mathbf{x}_{\Gamma, F, pert}^{(k, i, l)}$ wird einmal in jedem Schleifendurchlauf der Sensitivitätsanalyse durchgeführt. In der Regel wird für die Analyse ein implizites Verfahren verwendet, so dass man auch hier automatisch eine konvergierte Fluidlösung erhält. Wird eine explizite FSI-Analyse durchgeführt, wird Konvergenz nicht lokal in jeder Fluidberechnung, sondern erst bei der FSI-Analyse erzielt. Dann ist zu beachten, dass im Rahmen der Sensitivitätsanalyse eine auskonvergierte Lösung der Strömungssimulation erhalten wird. Man kann sich auch damit behelfen, eine weitere Schleife einzuführen, in der die perturbierten Variablen so oft an das Fluid übergeben werden bis Konvergenz erreicht ist. Allerdings ist zu beachten, dass in jedem Durchlauf der Datentransfer unnötigerweise ausgeführt wird.

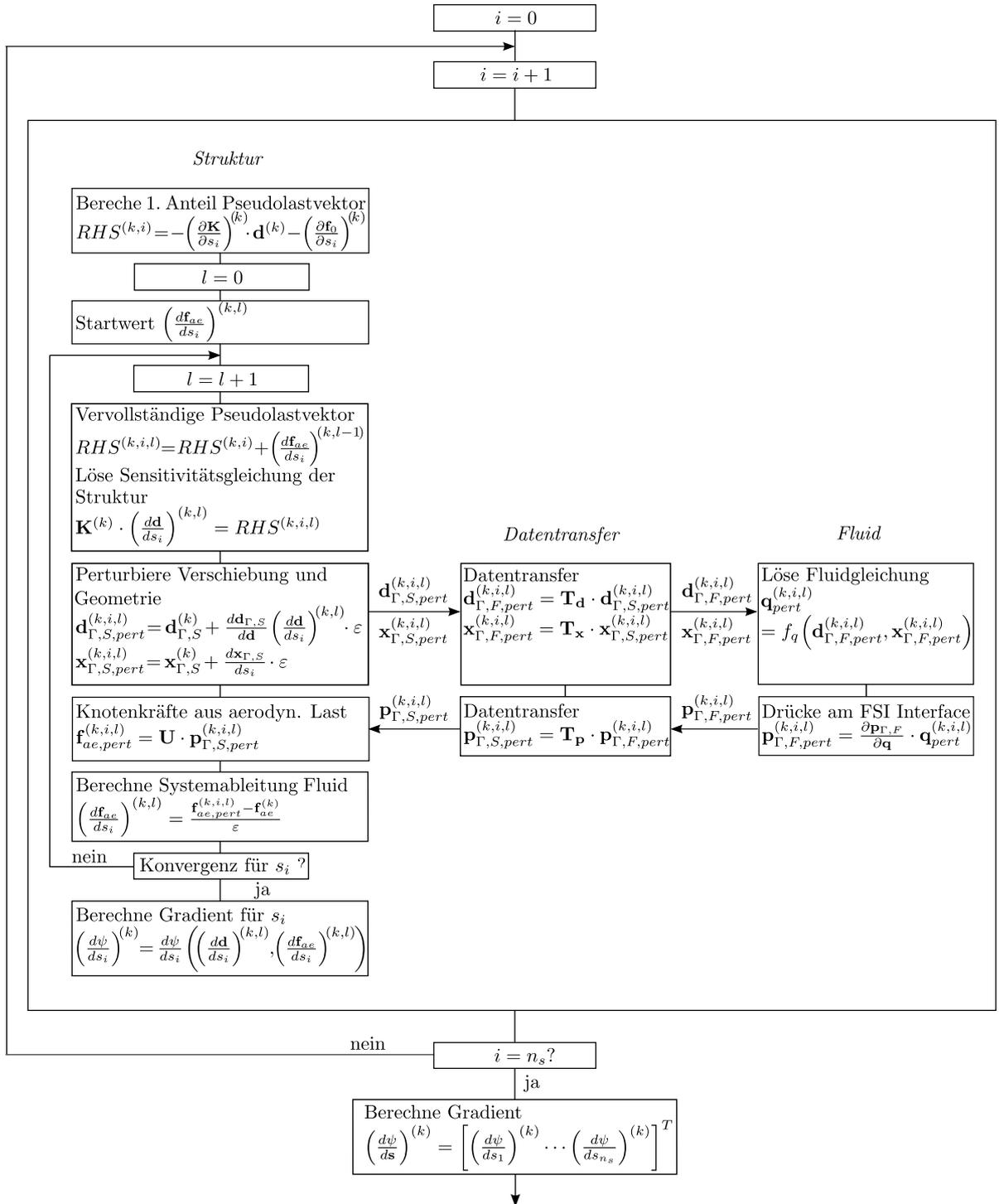


Abbildung 6.3.: Algorithmik der kombinierten Sensitivitätsanalyse im Optimierungsschritt k .

6.7. Berechnungsbeispiele

6.7.1. Software-Framework für die gradientenbasierte Optimierung

Die numerische Optimierung mit der direkten kombinierten Sensitivitätsanalyse erfolgt nach NAND-Verfahren. Im Rahmen dieser Arbeit wird für die gradientenbasierte Optimierung von FSI-Problemen ein modulares Framework auf der Grundlage des partitionierten Ansatzes und des NAND-Verfahrens erstellt, welches maximale Flexibilität für die optimale Behandlung unterschiedlicher technisch relevanter Anwendung ermöglichen soll. Die NAND-Methode in der Optimierung und das partitionierte Verfahren der FSI macht eine modulare Softwarearchitektur möglich. Die Herausforderung dabei ist die Kombination von partitioniertem Ansatz und dem NAND-Verfahren, da neben unterschiedlichen Modulen auch unterschiedliche Software zum Einsatz kommt. Ein wesentliches Thema ist auch die Kopplung der Berechnungscodes und der damit verbundene Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz, welcher für jedes Modul auf individuelle Weise erfolgen muss.

In der Literatur wird oft die Wichtigkeit der Software-Modularität hervorgehoben. So erstreben viele Arbeitsgruppen, die sich mit der Optimierung von FSI-Problemen beschäftigen, ein modulares Framework für unterschiedliche Anwendungen. Die gradientenbasierte Optimierung auf Basis des partitionierten Ansatzes nach dem NAND Konzept wird daher von einigen Forschergruppen verfolgt. Guinta präsentiert Optimierung und Sensitivitätsanalyse mit Black Box-Lösern. Dieser Ansatz ist für die bestmögliche Austauschbarkeit der Berechnungsprogramme konzipiert [43]. In [104] und [81] wird ein modulares Framework für die Optimierung von FSI-Problemen auf Grundlage des partitionierten Verfahrens vorgestellt. Die gestaffelte Sensitivitätsanalyse, die Kopplung der Einzelfeldlöser, der Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz, die FSI-Analyse und die Optimierungstechniken werden hier unabhängig voneinander behandelt. Ausschlaggebende Arbeiten stammen aus K. Mautes Arbeitsgruppe [84, 83], wo Flexibilität und Modularität durch die Anwendung der Methoden in unterschiedlichen Disziplinen gezeigt werden. Dort wird auch ein Framework für die Erweiterung auf eine 5-Feld Formulierung der Elektro-Fluid-Struktur Interaktion [102] und für Robust Design [3] vorgestellt.

In Abschnitt 2.3.2 wurde der NAND-Ansatz vorgestellt und in Kapitel 5 wurde die Einbettung der Sensitivitätsanalyse in einen Optimierungsablauf nach diesem Verfahren dargestellt. Die Module Analyse, Sensitivitätsanalyse und Designupdate sind in die Optimierungsschleife eingebettet und werden in zeitlicher Abfolge nacheinander durchlaufen. Im partitionierten Ansatz kommt unterschiedliche Software für Fluid, Struktur und Kopplung zum Einsatz. Diese Programme laufen zeitlich parallel. In jedem Modul werden Routinen betreffend Struktur, Fluid und Kopplung benötigt. So muss die entsprechende Software in jedem Modul verfügbar sein. Es ist Kommunikation und Daten-

transfer sowohl zwischen den Programmen wie auch zwischen den Modulen notwendig. Die Interprozesskommunikation zwischen den Programmen ist für jedes Modul individuell, da die benötigten Information unterschiedlicher Art sind.

Grafik 6.4 zeigt das Schema des NAND-Verfahrens im partitionierten Ansatz. Dabei sind die Module untereinander dargestellt, wobei der zeitliche Ablauf von oben nach unten erfolgt. In allen Grafiken dieses Kapitels sind die parallel laufenden Programme durch Spalten dargestellt und farblich gekennzeichnet. Die Zugehörigkeit zum Strukturcode ist grün, das Kopplungstool orange und der Fluidcode blau gekennzeichnet. Desweiteren sind die Optimierung betreffenden Routinen rot unterlegt.

Das Modul Analyse beinhaltet eine FSI-Analyse. Der Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz wird durch Übergabe der Strukturverschiebungen an das Fluid und der Strömungslasten an die Struktur vorgenommen. Iterationen sind hier notwendig und ein Konvergenzcheck wird ausgeführt.

Das Modul Sensitivitätsanalyse dient der Berechnung der Gradienteninformation für den gewählten Optimierungsalgorithmus. Die Kopplungsdaten unterscheiden sich nach Typ der Sensitivitätsanalyse. Es handelt es sich um netzbasierte Größen, für welche der Datentransfer am nicht-koinzidenten Interface in der Regel in iterativer Weise durchgeführt werden muss.

Im Modul Designupdate wird die Form der Struktur aktualisiert. Jede Designänderung der Struktur muss an das Fluid als Basis für die nächste FSI-Analyse übergeben werden. Hier wird die Information nur in eine Richtung übergeben und es sind keine Iterationen notwendig. Allerdings muss der Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz berücksichtigt werden.

Dieses Framework ist auf die Behandlung von FSI-Problemen ausgelegt. Es lässt sich für Mehrfeldprobleme verallgemeinern. Mit dem Austausch der Analysesoftware überträgt man das Framework auf andere oberflächengekoppelte Probleme. Für volumengekoppelte Mehrfeldprobleme ist ein anderes Kopplungsverfahren, beispielsweise durch Austausch der Kopplungssoftware nötig.

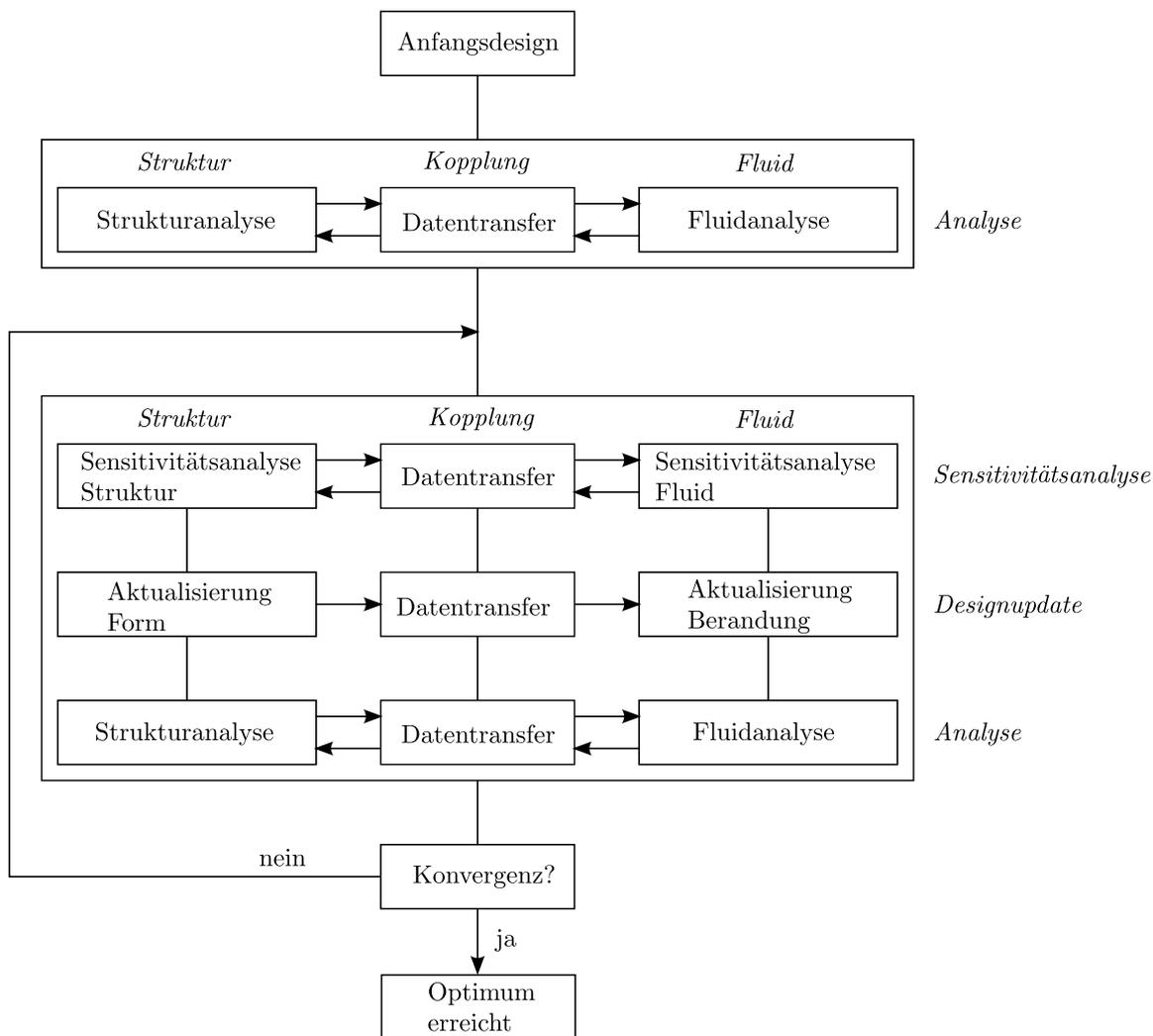


Abbildung 6.4.: Übersicht des Software-Frameworks für NAND und partitioniertes Verfahren.

In dieser Arbeit kamen die Programme *CARAT*, *OpenFOAM* und *CoMA* zu Einsatz. *CARAT* ist eine lehrstuhleigene akademische Software zur Struktursimulation und Strukturoptimierung. Ursprünglich wurde es am Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, in FORTRAN entwickelt. *CARAT* basiert auf der Finite-Elemente-Methode. *CARAT* verfügt über die Möglichkeit der Strukturoptimierung durch Gradientenmethoden. Das Programm beinhaltet auch die Sensitivitätsanalyse für die Strukturoptimierung. Für die Strömungssimulation kommt das quillcodeoffene Programm *OpenFOAM* (*Open Field Operation and Manipulation*) zur Anwendung, welches von der Firma *OpenCFD Ltd.* entwickelt wird (siehe <http://www.openfoam.com>). Die Diskretisierung für die Strömungssimulation erfolgt mit der Finite-Volumen-Methode und es werden Berechnungen auf der Basis unterschiedlicher Strömungsmodelle und Turbulenzmodellierung unterstützt. Die Kopplung der Einzelfeldlöser wird vom Kopplungstool *CoMA* (*Coup-*

ling for Multiphysics Analysis) (siehe Abschnitt 4.5) übernommen.

6.7.2. Optimierung einer umströmten Schale

Die umströmte Schale mit halb elliptischem Profil wurde als akademisches Beispiel entwickelt, um die direkte kombinierte Sensitivitätsanalyse zu testen und das Software-Framework zu verifizieren. Dabei wurde die Aufgabe so gewählt, dass intuitive Ergebnisse und keine lokalen Minima zu erwarten sind, wie die Reduktion der Verformung oder der Summe der horizontalen Kräfte bei Reduktion der Höhe. Eine gut konvergierende FSI-Simulation ist Grundlage für einen reibungslosen Optimierungsablauf, da nur so die Qualität der Gradienten gesichert ist. Weiterhin ist eine unkomplizierte FSI Simulation für das Testen der Optimierungsroutinen von Vorteil. Um diese Forderungen zu erfüllen, wird das Setup des Berechnungsbeispiels in Geometrie und Physik einfach gehalten.

Zur Optimierung der umströmten Schale kommt verschiedene Software für Struktursimulation, Fluidsimulation, Kopplung und Optimierung zu Einsatz. Die Struktursimulation, basierend auf Finiten Elementen, und die Optimierung werden vom Berechnungsprogramm *CARAT* ausgeführt. Die Strömungssimulation erfolgt durch *OpenFoam* und basiert auf der Finiten Volumen Methode. Die Kopplung der Berechnungsprogramme und der Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz wird von *CoMA* übernommen.

6.7.2.1. Setup

Die umströmte Schale mit halb elliptischem Profil und variabler Höhe kann als als 2D-Modell einer langen dreidimensionalen Schalenstruktur verstanden werden (Abbildung 6.5). Die Anfangsgeometrie der Schale hat die Form eines Halbkreises mit 0.5 m Radius. Die Schale ist an den Auflagerpunkten gelenkig gelagert.

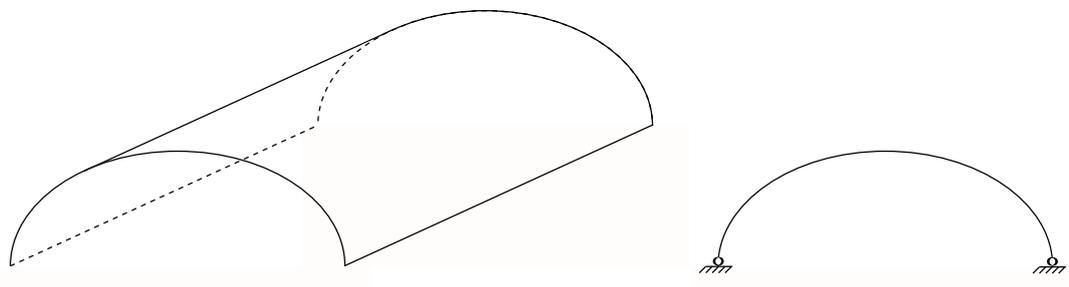


Abbildung 6.5.: lange Schale und 2D-Modell.

Die Definition der Form der Struktur beruht auf dem CADG Konzept. Die Form wird durch ein Designelement elliptischer Form mit einer Optimierungsvariable, welche die Position der Koordinaten des FE-Netzes kontrolliert, definiert. Die initiale Form ist ein Halbkreisprofil, welches zu einer halben Ellipse variiert wird. Das Designelement, welches in Abbildung 6.6 dargestellt ist, hat die Form einer halben Ellipse mit der Gleichung $z^2/b^2 + x^2/a^2 = 1$. Die Variablen a und b bestimmen den Durchmesser der Ellipsenachsen. Für die umströmte Schale bleibt die Variable $a = 0,5 m$, und damit die Breite der Schale, fest. Die Höhe wird durch die Optimierungsvariable $s = b$ variiert. Die z -Koordinaten des FE-Netzes sind im Optimierungsschritt k

$$z^{(k)} = s^{(k)} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{0,25}}. \quad (6.69)$$

Deren Inkrement ergibt sich aus dem Inkrement der Optimierungsvariablen ε zu

$$\Delta z^{(k)} = \varepsilon^{(k)} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{0,25}} = \varepsilon^{(k)} \frac{z^{(k)}}{s^{(k)}}. \quad (6.70)$$

Die Höhe der Schale lässt sich durch untere und oberer Schranken der Optimierungsvariable $s_l \leq s \leq s_u$ eingrenzen. Dies ist nötig, um die Qualität des Fluidnetzes zu wahren.

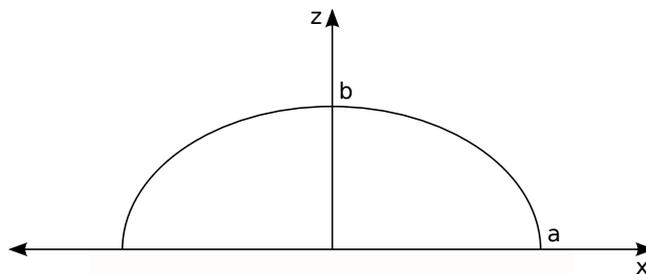


Abbildung 6.6.: Elliptisches Designelement mit Variablen a und b .

Die Geometrie des Systems lässt sich Abbildung 6.7 entnehmen. Das Fluidgebiet hat eine Länge von $10 m$ und eine Höhe von $5 m$. Die Anfangsgeometrie der Struktur ist ein Halbkreis mit einem Radius von $0,5 m$, gemessen bis zur Mittelfläche der Schale. Ihr Mittelpunkt befindet sich auf halber Länge des Fluidfeldes. Da *OpenFoam* ausschließlich dreidimensionale Modellierung erlaubt, wird die Ausdehnung in y -Richtung zu $1 m$ gewählt.

Zur Modellierung der Struktur werden Schalenelemente mit der Dicke $0,01 m$ verwendet. Der Berechnung liegt ein lineares Materialgesetz zu Grunde. An den Auflagerpunkten sind die Strukturverschiebungen in die drei Koordinatenrichtungen behindert (vgl. Abbildung 6.5). Desweiteren sind die Strukturverschiebungen an den Rändern der Struktur

in y -Richtung verhindert, um einem 2D-Modell einer langen Schalenstruktur (linearer Verzerrungszustand) gerecht zu werden. Da eine statische Lösung erwartet wird, erfolgt die Berechnung statisch mit linearer Kinematik und linearem Materialgesetz.

Die Modellierung des Fluids erfolgt durch viskose laminare Strömung. Es ergibt sich für den Anfangszustand der Optimierung eine Reynoldszahl von $Re = 25$. Die kinematische Viskosität beträgt $\nu = 0,02 \text{ m}^2/\text{s}$. *OpenFoam* ermöglicht die Lösung in zwei Dimensionen, so dass keine Variablen in y -Richtung eingeführt werden. An der linken Berandung des Fluidgebietes wird ein konstantes Einströmprofil mit Einströmgeschwindigkeit $u_x = 1 \text{ m/s}$ definiert. Die konstante Geschwindigkeit $u_x = 1 \text{ m/s}$ wird auch an der oberen Wand angesetzt. Der untere Rand und die Oberfläche der Schalenstruktur werden mit *no slip*-Randbedingung, also mit Geschwindigkeiten von Null in allen Richtungen, versehen. Das Gitter ist blockstrukturiert, wobei die Vernetzung im Bereich der Struktur feiner wird (Abbildung 6.8).

Es wurde eine vorbereitende reine CFD Analyse mit fester Berandung durchgeführt. Durch Nutzung der Ergebnisse als Startbedingung für die FSI Analyse werden die Rechenzeiten wesentlich verkürzt. Es wird inkompressible und laminare Strömung angenommen. Der iterativ gestaffelte Kopplungsalgorithmus für die FSI Analyse beruht auf der Fixpunktiteration mit Relaxation nach der Aitken Δ^2 -Methode. Wegen der konstanten Strömungsbedingungen wird eine statische Lösung erwartet. Die FSI Iterationen werden für jeden Optimierungsschritt bis zum Erreichen der stationären Lösung ausgeführt. Die Interface-Diskretisierung im Fluid und Strukturmodell sind unterschiedlich. Die Kopplungsdaten sind Oberflächendrücke und Interface-Verschiebungen in Form von Strukturverschiebungen oder Designänderungen. Für beide Größen wird die bilineare Interpolationsmethode für den Transfer am nicht-koinzidenten Netz eingesetzt.

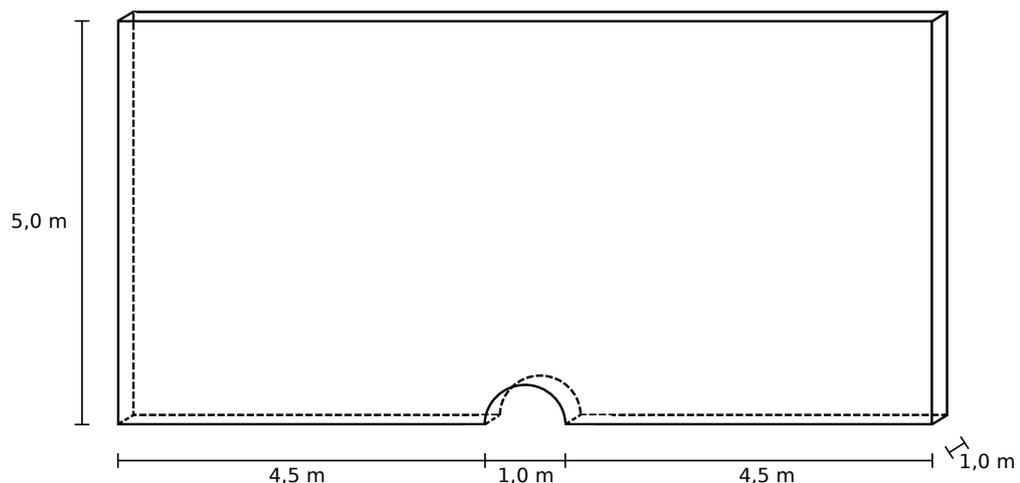


Abbildung 6.7.: Geometrie des Fluidgebietes der umströmten Schale.

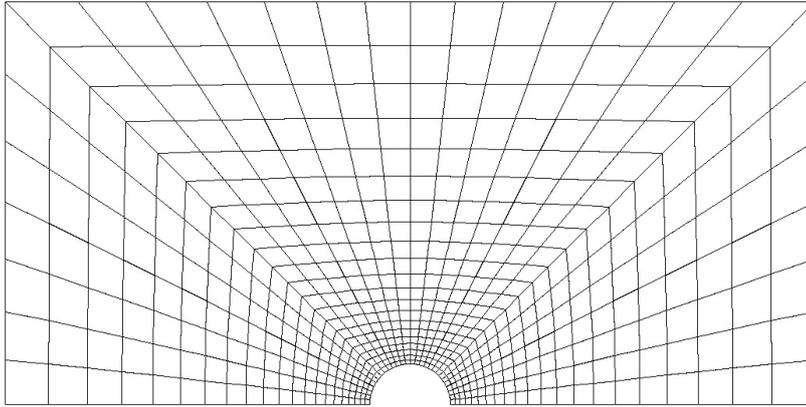


Abbildung 6.8.: Vernetzung des Fluidgebietes der umströmten Schale.

6.7.2.2. Minimierung der Summe der horizontalen Strömungskräfte

Die Optimierung wurde zunächst für die Zielfunktionen „Summe der horizontalen Strömungskräfte“ unter Variation der Höhe durchgeführt. Hier ist das triviale Optimum bei minimaler Höhe zu erwarten, da davon auszugehen ist, dass mit abnehmender Höhe die Summe der horizontalen Strömungskräfte abnimmt. In Abbildung 6.9 ist die Verteilung der horizontalen Kräfte aus der Umströmung, welche auf die Struktur wirken, zu sehen.

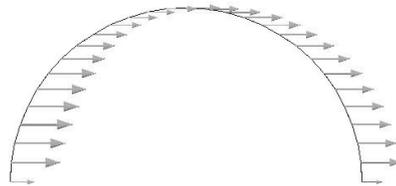


Abbildung 6.9.: Horizontale Kräfte aus Umströmung, welche auf die Struktur wirken.

Die Zielfunktionen „Summe der horizontalen Strömungskräfte“ schreibt sich

$$\psi_{Drag} = \sum_{i=1}^{n_{nod}} f_{i,x} \quad (6.71)$$

mit der Anzahl aller Knoten n_{nod} und den Knotenkräften $f_{i,x}$ in horizontaler Richtung. Der Gradient der Zielfunktion berechnet sich nach Gleichung 6.67 für ψ_{Drag} zu

$$\frac{d\psi_{Drag}}{ds} = \sum_{i=1}^{n_{nod}} \frac{df_{i,x}}{ds}. \quad (6.72)$$

Führt man die Optimierung durch, stellt sich das erwartete Ergebnis ein. Die Optimierung liefert Informationen über die Sensitivitäten der Strömungslasten. Die Umströmung

und Druckverteilung auf der Schalenoberfläche für die Anfangshöhe und bei reduzierten Höhen sind in Abbildung 6.10 dargestellt. Je höher die Struktur ist, desto mehr Angriffsfläche bietet sie für die Umströmung. Dann ist die Summe der Strömungskräfte insgesamt höher. Die Abhängigkeit der Summe der horizontalen Kräfte von der Höhe, welche sich aus den Optimierungsprozessen ergibt, lässt sich Abbildung 6.11 entnehmen. Die Summe der horizontalen Kräfte reduziert sich von 0.26 N bei einer anfänglichen Höhe von 0.5 m auf 0.08 N bei einer Höhe von 0.15 m .

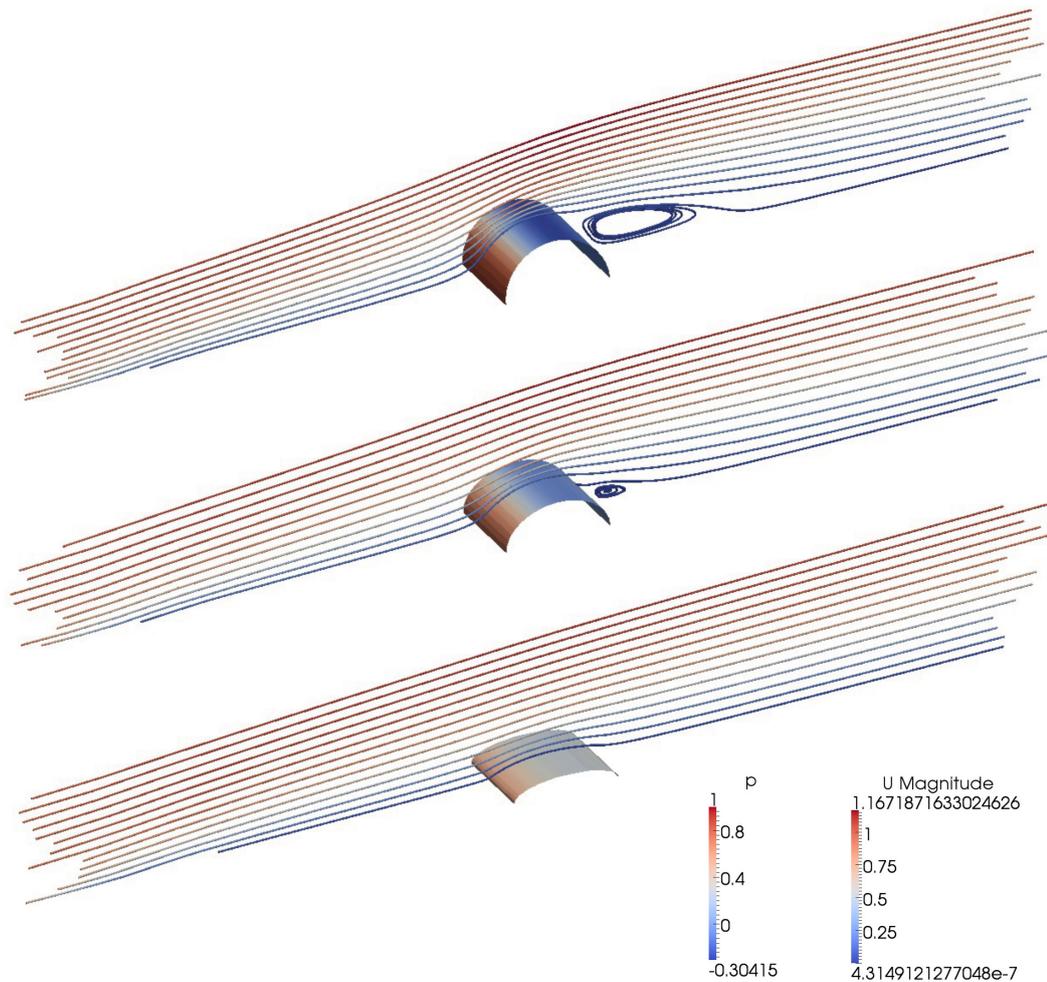


Abbildung 6.10.: Umströmung mit Geschwindigkeit U und Druck p auf Strukturoberfläche: Oben bei Anfangshöhe 0.5 m , mitte bei Höhe 0.3 m , unten bei Höhe 0.15 m

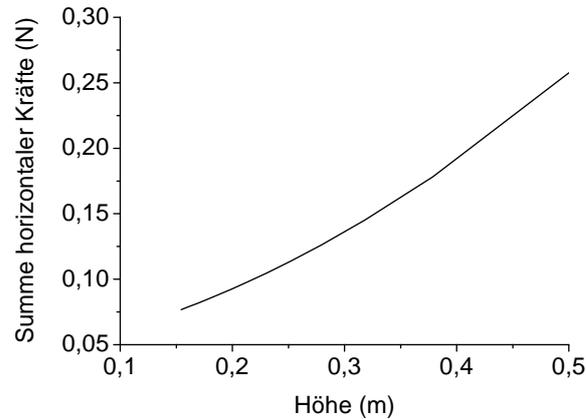


Abbildung 6.11.: Abhängigkeiten der Summe der horizontalen Kräfte von der Höhe.

6.7.2.3. Minimierung der vertikalen Verschiebung am Scheitelpunkt

Auch die Zielfunktionen „vertikale Verschiebung am Scheitelpunkt“ besitzt einen intuitiven Funktionsverlauf, wobei das triviale Optimum wieder bei minimaler Höhe zu erwarten ist. Die Zielfunktion „vertikale Verschiebung am Scheitelpunkt“ wird mit der vertikalen Verschiebung $d_{SP,z}$ am Scheitelpunkt als Betrag dieser Verschiebung zu

$$\psi_{Disp} = |d_{SP,z}| \quad (6.73)$$

definiert, um eine Minimierung der Verformung auch bei negativen Verschiebungswerten sicherzustellen. Der Gradient ist dann

$$\frac{d\psi_{Disp}}{ds} = \begin{cases} \frac{dd_{SP,z}}{ds} & \text{für } d_{SP,z} > 0 \\ -\frac{dd_{SP,z}}{ds} & \text{für } d_{SP,z} < 0 \end{cases} \quad (6.74)$$

Auch hier stellt sich das erwartete Ergebnis ein. In Abbildung 6.12 ist die Verformung der Schale für die Anfangshöhe von 0.5 m und für die Höhen 0.3 m und 0.07 m in 4-facher Überhöhung dargestellt. Man erkennt, dass die Höhe der Struktur die strömungsbedingten Verformungen wesentlich beeinflusst. Reduzieren sich die Strömungslasten bei abnehmender Höhe, so reduzieren sich auch die Verformungen. Die Abhängigkeit der vertikalen Verschiebung am Scheitelpunkt von der Höhe, welche sich aus den Optimierungsprozessen ergibt, lässt sich Abbildung 6.13 entnehmen. Die Verschiebung reduziert sich von 0.0049 m bei einer anfänglichen Höhe von 0.5 m auf $1.7 \cdot 10^{-4}\text{ m}$ bei einer Höhe von 0.07 m .

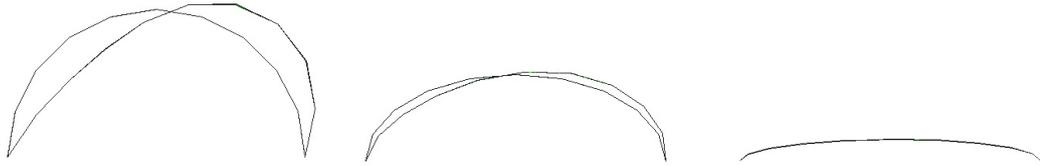


Abbildung 6.12.: Verformung der umströmten Schale für die Höhen 0.5 m , 0.3 m und 0.07 m in 4-facher Überhöhung

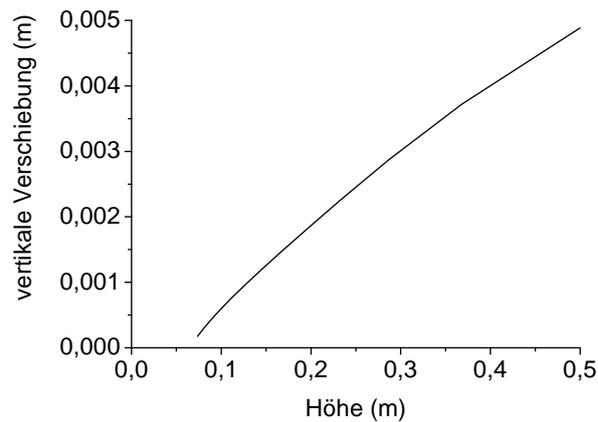


Abbildung 6.13.: Abhängigkeiten der Summe der horizontalen Kräfte und der vertikalen Verschiebung am Scheitelpunkt von der Höhe.

6.7.2.4. Optimierung der Höhe im verformten Zustand

Weiterhin wurde eine Minimierungsaufgabe mit nicht-trivialer Lösung durchgeführt. Hier ist die Höhe der Struktur gesucht, mit welcher sich im verformten Zustand eine Gesamthöhe von $s + d_{SP,z} = 0.4\text{ m}$ ergibt. Diese lässt sich durch eine Optimierung mit geeigneter Formulierung der Zielfunktion bestimmen, welche als Quadrat der Abweichung der Scheitelhöhe im verformten Zustand von der Zielhöhe 0.4 m formuliert wird. Die Abweichung ist am Optimum Null, positiv bei einer höheren und negativ bei einer niedrigeren Struktur. Um eine Minimierungsaufgabe zu generieren, wird daher die quadratische Abweichung von der Zielhöhe als Zielfunktion gewählt. Diese schreibt sich

$$\psi_{Abw} = (s + d_{SP,z} - 0.4)^2 \quad (6.75)$$

mit der Optimierungsvariable s , welche der Scheitelhöhe im unverformten Zustand entspricht, und der vertikalen Verschiebung $d_{SP,z}$ des Scheitelpunkts. Für diese Zielfunktion ist ein nicht-triviales Optimum bei $s^* = 0.4 - d_{SP,z}(s^*)$ zu erwarten. Die Berechnung des Gradienten der Zielfunktion erfolgt auf Basis der Kettenregel und auf Grundlage der Systemableitungen $\frac{dd}{ds}$ und $\frac{df_{ae}}{ds}$ – der Ergebnisse der kombinierten Sensitivitätsanalyse –

gemäß Gleichung 6.67. Für den Gradienten der Zielfunktion ψ_{Abw} ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{Abw}}{ds} &= \frac{\partial\psi_{Abw}}{\partial s} + \frac{\partial\psi_{Abw}}{\partial \mathbf{d}} \cdot \frac{d\mathbf{d}}{ds} + \frac{\partial\psi_{Abw}}{\partial \mathbf{f}_{ae}} \cdot \frac{d\mathbf{f}_{ae}}{ds} \\ &= \frac{\partial\psi_{Abw}}{\partial s} + \frac{\partial\psi_{Abw}}{\partial d_{SP,z}} \cdot \frac{dd_{SP,z}}{ds} = 2 \cdot \sqrt{\psi_{Abw}} \left(1 + \frac{dd_{SP,z}}{ds}\right), \end{aligned} \quad (6.76)$$

wobei $\frac{\partial\psi_{Abw}}{\partial \mathbf{f}_{ae}} = 0$ gilt. Der Term $\frac{dd_{SP,z}}{ds} = \frac{dd_{SP,z}}{d\mathbf{d}} \frac{d\mathbf{d}}{ds}$ ist eine Komponente der Systemableitung der Verschiebung.

Bei der Optimierung konvergiert die Zielfunktion, wie erwartet, gegen den Wert Null. Dieser wird bei einer Höhe von $0,396\text{ m}$ erreicht. Im verformten Zustand erreicht die Höhe dann den Wert 0.4 m . Die Differenz der Höhen im unverformten und verformten Zustand bei 0.4 m ist die vertikalen Verschiebung, welche sich auch aus dem Graph aus Abbildung 6.13 zu 0.004 m entnehmen lässt. Um den Verlauf der Zielfunktion und deren Ableitung nach der Optimierungsvariable zu veranschaulichen wurden die Funktionswerte und Gradienten in einem Intervall von $\pm 0.1\text{ m}$ um das Optimum ausgewertet und dargestellt (Abbildungen 6.14 und 6.15).

Um die Qualität der Gradienten aus der kombinierten Sensitivitätsanalyse zu untersuchen, wurde dieselbe Optimierungsaufgabe unter Verwendung der numerischen Sensitivitätsanalyse, welche auf finiten Differenzen beruht, wiederholt. Zur Berechnung der Gradienten aus finiten Differenzen wurde die Optimierungsvariable um den Wert 10^{-3} m perturbiert. Die Ergebnisse aus der kombinierten und der numerischen Sensitivitätsanalyse sind in den Abbildungen 6.14 und 6.15 zusammengefasst. Die mit einem schwarzen Punkt markierten Werte stammen hierbei aus der Optimierung mit der direkten kombinierten Sensitivitätsanalyse. Den, mit einem grauen Dreieck markierten Werten liegt die numerischen Sensitivitätsanalyse zu Grunde. Die Funktionswerte sind exakt identisch. Bei den Gradientenwerten gibt es eine minimale Abweichung der Größenordnung 10^{-4} , welche auf den Fehler der finiten Differenzen zurückzuführen ist. Der maximale Fehler tritt an der Stelle der größten Krümmung der Zielfunktion, also an deren Minimum, auf und weist eine Abweichung von 10^{-3} vom Gradient aus der kombinierten Sensitivitätsanalyse auf.

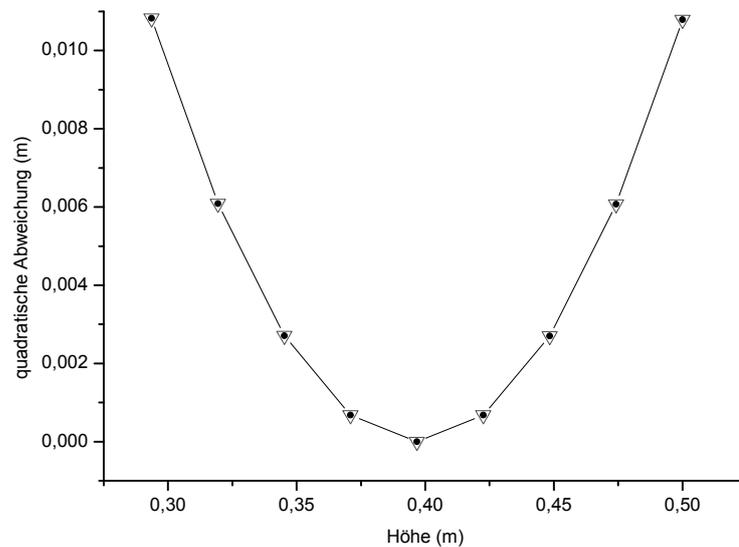


Abbildung 6.14.: Optimierung der Höhe im verformten Zustand: Quadratische Abweichung der Höhe von der Zielhöhe 0.4 m . Kreismarkierung: Ergebnis aus der Optimierung mit der kombinierten Sensitivitätsanalyse, Dreieckmarkierung: Ergebnis aus der Optimierung mit der numerischen Sensitivitätsanalyse.

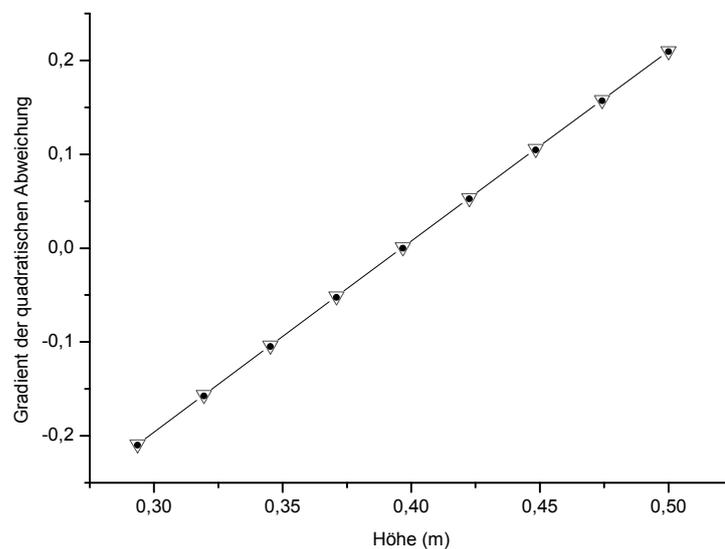


Abbildung 6.15.: Optimierung der Höhe im verformten Zustand: Gradient der quadratischen Abweichung der Höhe von der Zielhöhe 0.4 m . Kreismarkierung: Ergebnis aus der Optimierung mit der kombinierten Sensitivitätsanalyse, Dreieckmarkierung: Ergebnis aus der Optimierung mit der numerischen Sensitivitätsanalyse.

6.7.3. Optimierung eines umströmten Profils

Das umströmte Profil ist ein weiteres akademisches Beispiel für den Einsatz der kombinierten Sensitivitätsanalyse in der Optimierung. Das Ziel hierbei ist das Finden der Querschnittsform der Struktur, welche im Rahmen einer gegebenen Formdefinition den geringsten Strömungswiderstand hat. Es kommt dieselbe Software wie bei der umströmten Schale (Abschnitt 6.7.2) zum Einsatz – *CARAT*, *OpenFoam* und *CoMA*.

6.7.3.1. Setup

Abbildung 6.20 zeigt das umströmte Profil in dreidimensionaler Darstellung in elliptischer Anfangsgeometrie. Es soll die Formoptimierung des Querschnitts für die Zielfunktion „Summe der horizontalen Strömungskräfte“ unter Variation der Form durch die vorgegebene Formdefinition durchgeführt werden. Die Zielfunktion und deren Gradient schreiben sich

$$\psi_{Drag} = \sum_{i=1}^{n_{nod}} f_{i,x} \quad \text{und} \quad \frac{d\psi_{Drag}}{ds} = \sum_{i=1}^{n_{nod}} \frac{df_{i,x}}{ds} \quad (6.77)$$

mit der Anzahl aller Knoten n_{nod} und den Knotenkräften $f_{i,x}$ in horizontaler Richtung.

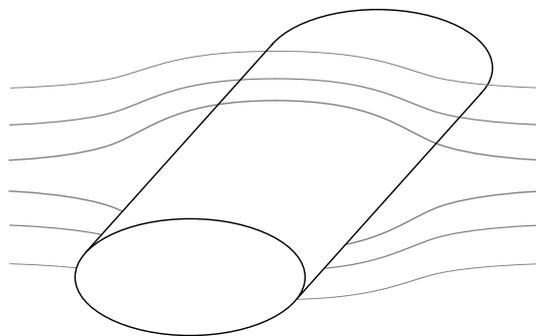


Abbildung 6.16.: Umströmtes Profils im Anfangsdesign.

Die Form wird mit einer festen Höhe und einem festen Flächeninhalt auf der Grundlage des CAGD-Konzepts definiert. Dabei besteht der Querschnitt, wie Abbildung 6.17 zu entnehmen ist, aus zusammengesetzten Viertelellipsen mit variabler Breite. Diese Formen lassen sich durch eine Optimierungsvariable s beschreiben, welche die Position der höchsten Querschnittshöhe und damit die Position und Form der Viertelellipsen festlegt. Die Anfangsgeometrie mit $s = 0$ entspricht einer ganzen Ellipse. Bei negativer Optimierungsvariable liegt die höchste Querschnittshöhe links, auf der der Strömung zugewandten Seite, während bei positiver Optimierungsvariable die höchste Querschnittshöhe rechts, auf der der Strömung abgewandten Seite liegt.

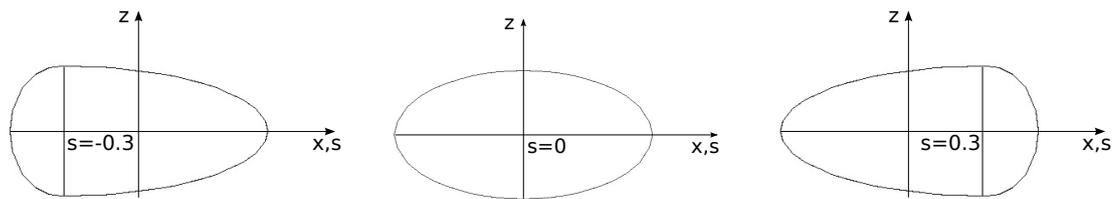


Abbildung 6.17.: Design des umströmten Profils in Abhängigkeit der Optimierungsvariable s . Links: $s = -0.3$, mitte: $s = 0$, rechts: $s = 0.3$.

Die Form lässt sich mathematisch durch in Abhängigkeit der halben Querschnittshöhe b und der halben Querschnittsbreite a wie folgt beschreiben:

$$z = \begin{cases} b \cdot \sqrt{1 - \frac{(x-s)^2}{(a-s)^2}} & \text{für } x \geq s \\ b \cdot \sqrt{1 - \frac{(x-s)^2}{(a+s)^2}} & \text{für } x < s \end{cases} \quad (6.78)$$

Für laminares Strömungsverhalten kann ersatzweise eine zweidimensionale Modellierung wie in Abschnitt 6.7.2) erfolgen und aufgrund der Symmetrie die Reduktion auf das halbe System mit entsprechenden Randbedingungen vorgenommen werden. Als Ersatzsystem wird die Seite der positiven z -Achse gewählt. Die Geometrie des Ersatzsystems im Anfangsdesign ist Abbildung 6.18 zu entnehmen, wobei die Höhe der Halbellipse $b = 0,25 \text{ m}$ und die Breite $2 \cdot a = 0,5$ beträgt. Am unteren Strömungsrand wird entsprechend eine *slip*-Randbedingung eingeführt. Die Modellierung der Struktur erfolgt als Schalenmodell. Es werden die drei Verschiebungen am vorderen Auflagerpunkt, sowie die Verdrehung um die y -Achse behindert. Am hinteren Auflager wird hingegen die Verschiebung in x -Richtung zugelassen. Die Berechnung erfolgt statisch mit linearer Kinematik und linearem Materialgesetz. Die Modellierung des Fluids erfolgt gemäß Abschnitt 6.7.2 mit der zusätzlichen Einführung der *slip*-Randbedingung am unteren Strömungsrand. Die Viskosität des Fluids beträgt $\nu = 0,02 \text{ m}^2/\text{s}$, woraus sich die anfängliche Reynoldszahl zu $Re = 12,5$ errechnen lässt.

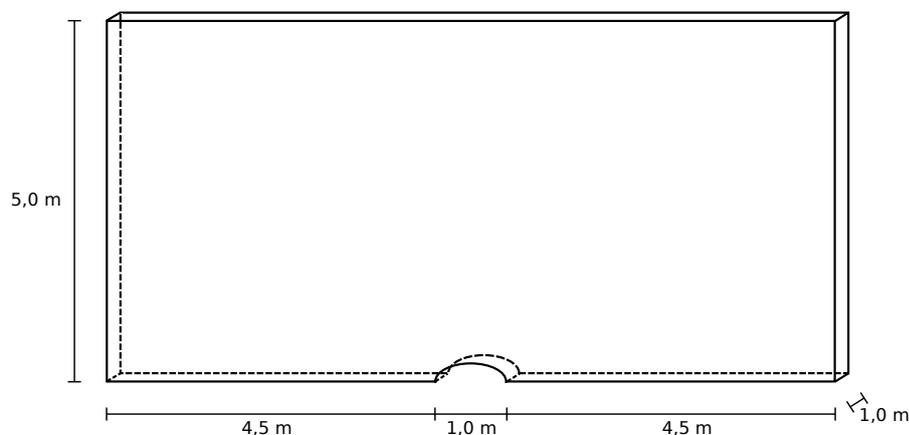


Abbildung 6.18.: Geometrie des Fluidgebietes des umströmten Profils (halbes System).

6.7.3.2. Ergebnisse

Die Summe der horizontalen Kräfte in Abhängigkeit der Form lässt sich Abbildung 6.19 entnehmen. Die durchgehende Linie des linken Diagramms gibt die Zielfunktion in einem Intervall um das Optimum wieder. Es lässt sich erkennen, dass es sich um ein nichttriviales Optimum handelt. Die diskreten Werte im Diagramm sind die Werte, die den Schritten des iterativen Optimierungsprozesses zugeordnet sind. Die zugehörigen Gradienten sind im rechten Diagramm dargestellt. Die mit schwarzen Punkten markierten Gradientenwerte wurden mit der kombinierten Sensitivitätsanalyse ermittelt. Die mit grauen Dreiecken markierten Werte wurden mittels finiter Differenzen mit einer Schrittweite von $10^{-2} m$ zum Zwecke des Vergleichs errechnet. Es ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung. Das Optimum befindet sich bei $s = 0,13 m$. Hier hat die Zielfunktion einen Wert von $0,2522 N$. Die zugehörige Form ist in Abbildung 6.20 dargestellt. Der Bereich der maximalen Profilhöhe liegt auf der der Strömung abgewandten Seite.

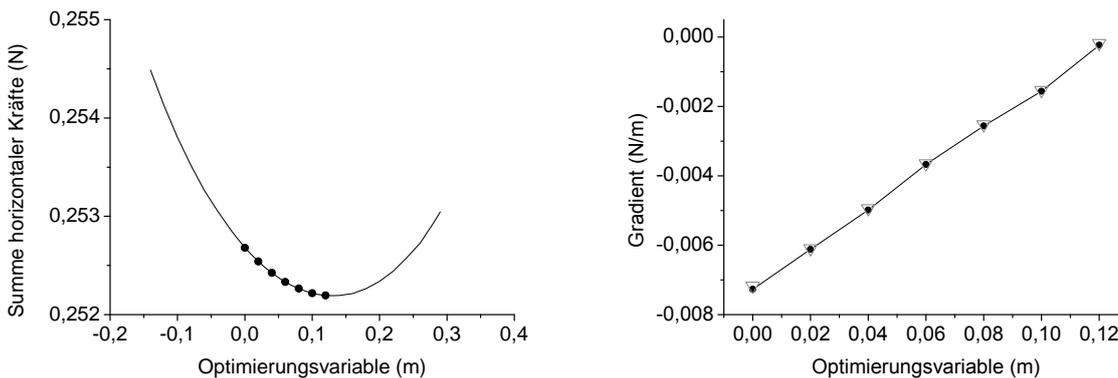


Abbildung 6.19.: Summe der horizontalen Kräfte und deren Gradient in Abhängigkeit von der Optimierungsvariable.

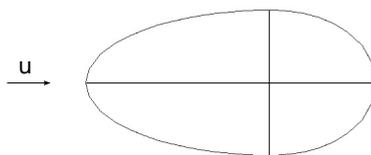


Abbildung 6.20.: Optimale Form des umströmten Profils.

6.8. Gegenüberstellung der Typen der Sensitivitätsanalyse: Effizienz- und Genauigkeitsaspekte

In dieser Arbeit wurden verschiedene Typen der Sensitivitätsanalyse behandelt, welche auf unterschiedlichen Methoden zur Ermittlung des Gradienten beruhen. Sie lassen sich in analytische und numerische, auf finiten Differenzen basierende, Methoden unterteilen. Die analytischen und semianalytischen Methoden können in direktem oder adjungiertem Verfahren umgesetzt werden. Eine Gegenüberstellung von direkter und adjungierter Methode erfolgte in Abschnitt 5.7. Hier wurde gezeigt, dass das Potenzial der direkten Verfahren in der Behandlung von Optimierungsproblemen mit wenigen Optimierungsvariablen und vielen Optimierungskriterien liegt, während die Stärke des adjungierten Verfahrens die Behandlung von Optimierungsproblemen mit vielen Optimierungsvariablen und wenigen Optimierungskriterien ist. In diesem Abschnitt sollen die Typen der Sensitivitätsanalyse bezüglich ihrer Performance untersucht werden. Dabei werden Effizienz und Genauigkeit der rein analytischen, der numerischen und der kombinierten Sensitivitätsanalyse, sowie ergänzend der algorithmischen Differenziation verglichen.

Der numerische Aufwand ergibt sich im wesentlichen aus den Lösungen von Gleichungssystemen im Programmcode [81]. Sonstige Operationen haben vergleichsweise geringen Einfluss und werden daher hier nicht berücksichtigt. Im Optimierungsprozess nach NAND finden Gleichungslösungen in der Analyse und in der Sensitivitätsanalyse statt. Bei der partitionierten Analyse werden die gekoppelten Systemgleichungen von Struktur und Fluid (inklusive Fluidnetz) getrennt in einem iterativen Verfahren gelöst. Diese Gleichungssysteme sind im Allgemeinen nichtlinear. Bei der partitionierten analytischen Sensitivitätsanalyse werden die gekoppelten Sensitivitätsgleichungen von Struktur und Fluid (inklusive Fluidnetz) ebenfalls getrennt in einem iterativen Verfahren gelöst. Die Formulierung der Sensitivitätsgleichungen ist linear. Hier sind also lineare Gleichungssysteme zu lösen, welche die gleiche Anzahl an Freiheitsgraden wie die Gleichungssysteme zur Lösung der Systemgleichungen besitzen. Folglich ist der Aufwand zur Lösung der Sensitivitätsgleichungen geringer als der Aufwand zur Lösung der Systemgleichungen.

Um die folgende Gegenüberstellung der Sensitivitätsanalysemethoden zu veranschaulichen, ist in Abbildung 6.21 die Schachtelung der Schleifen des Optimierungsprozesses nach NAND abgebildet: Die äußerste Schleife ist dabei die Schleife des Optimierungsalgorithmus (Opt.-Schleife), in welcher die Schleifen der Module Analyse und Sensitivitätsanalyse eingebettet sind. In die Schleife der partitionierten Analyse (part. ANA) erfolgt die Lösung der Systemgleichungen für Struktur- und Fluidseite. Die inneren Schleifen stellen diese Gleichungslösungen dar (S-ANA und F-ANA). In der Sensitivitätsanalyse erfolgt beim direkten Ansatz eine Schleife über die Optimierungsvariablen oder beim adjungierten Ansatz eine Schleife über die Optimierungskriterien (OV/OK-Schleife). Hier

ist die Schleife der partitionierten Sensitivitätsanalyse zur Lösung der Gleichungssysteme eingebettet (part. SA). Die inneren Schleifen stellen die Lösung der Gleichungssysteme für Struktur- und Fluidseite dar (S-SA und F-SA). Diese sind für die verschiedenen Typen der Sensitivitätsanalyse verschieden, worauf im Folgenden eingegangen wird.

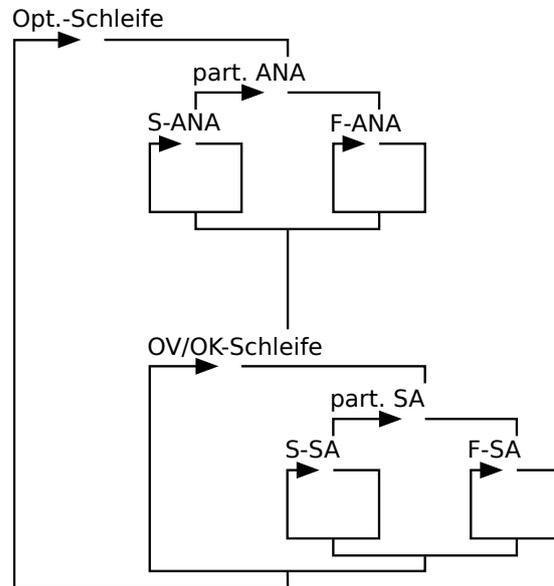


Abbildung 6.21.: Schachtelung der Schleifen im Optimierungsprozess nach NAND.

In der analytischen Sensitivitätsanalyse (Abschnitt 5.4 und 5.5) werden die linearen Sensitivitätsgleichungen für Struktur- und Fluidseite gelöst. Die Gleichungssysteme „S-SA“ und „F-SA“ sind also linear. Der Aufwand ist hier der minimal mögliche. Es wird durch die analytische Formulierung der Gradienten hohe Genauigkeit erzielt. Allerdings ist dieser Ansatz wenig modular, da eine Festlegung auf spezielle Formulierungen der Grundgleichungen stattfindet. Auch der Implementierungsaufwand ist wegen der Komplexität hoch.

In der numerischen Sensitivitätsanalyse (Abschnitt 5.3) findet pro Optimierungsvariable eine zusätzliche FSI-Analyse statt. Die Gleichungssysteme „S-SA“ und „F-SA“ entsprechen hier den nichtlinearen Gleichungssystemen „S-ANA“ und „F-ANA“. Der Aufwand ist folglich wesentlich höher als bei der analytischen Sensitivitätsanalyse. Die Genauigkeit ist aufgrund der Verwendung von finiten Differenzen i.A. ebenfalls geringer. Allerdings bietet die numerische Sensitivitätsanalyse maximale Modularität und minimalen Implementierungsaufwand.

In der kombinierten Sensitivitätsanalyse (Kapitel 6) wird strukturseitig die lineare Sensitivitätsgleichung gelöst, während fluidseitig eine Analyse durchgeführt wird. Das Gleichungssystem „S-SA“ ist also linear, wohingegen das Gleichungssystem „F-SA“ dem nichtlinearen Gleichungssystem „F-ANA“ entspricht. Strukturseitig ist dieser Ansatz effizient und genau, fluidseitig bietet er hohe Modularität. Der Aufwand liegt zwischen dem

für die analytische und dem für die numerische Sensitivitätsanalyse. Auch die Genauigkeit liegt dazwischen. Struktureitig findet eine Festlegung auf spezielle Formulierungen der Grundgleichungen statt, während fluidseitig die maximal mögliche Modularität vorhanden ist. Die Implementierungen sind nur struktureitig komplex, womit der Aufwand hierfür im mittleren Bereich liegt. Die kombinierte Sensitivitätsanalyse stellt einen Kompromiss zwischen Performance und Flexibilität für eine speziellen Benutzergruppe dar.

Wird die Sensitivitätsanalyse mit algorithmischer Differenziation durchgeführt, so wird der gesamte nichtlineare iterative Prozess für die Lösung der Systemgleichungen differenziert. Somit werden nichtlineare Sensitivitätsgleichungen gelöst. Der Aufwand dafür ist mit dem Aufwand der Lösung der Systemgleichungen zu vergleichen. Der Vorwärtsmodus der algorithmischen Differenziation entspricht einer direkten Methode. Hier muss für jede Inputvariable – das sind hier die Optimierungsvariablen – ein Programmdurchlauf stattfinden. Der Rückwärtsmodus entspricht dahingegen einer adjungierten Methode. Hier muss für jede Outputvariable – das sind hier die Optimierungskriterien – ein Programmdurchlauf stattfinden. Der Aufwand durch algorithmische Differenziation ist aufgrund der Nichtlinearität hoch. Es wird hohe Genauigkeit erzielt, da es sich um eine analytische Methode handelt. Der Ansatz ist wenig modular, da auch hier eine Festlegung auf spezielle Formulierungen der Grundgleichungen stattfindet.

Bemerkung: Die Kosten für eine FSI- oder Fluidanalyse auf der Grundlage einer perturbierten Konfiguration sind in der Regel geringer als die Kosten für die Analyse auf der Grundlage der Referenzkonfiguration, da die Berechnung mit den Ergebnissen der vorherigen Lösung (für die Referenzkonfiguration) als Anfangs- und Randbedingungen startet, und diese Lösung sehr nahe an der Lösung für die perturbierte Konfiguration liegt. Daher sind weniger Iterationen bis zum Eintritt von Konvergenz nötig.

7. Optimierung umströmter Membrane mit Formfindung

Membrantragwerke sind eine technisch reizvolle Möglichkeit, um weite Flächen aufzuspannen. Das elegant anmutende Erscheinungsbild macht sie zu eindrucksvollen und beliebten Konstruktionen. Sie sind sehr leicht und schlank und dabei wegen der optimalen Materialausnutzung sehr effizient. Der Querschnitt von Membranen ist im Vergleich zu den sonstigen Abmessungen sehr gering. Das Tragverhalten ist durch den *Membranspannungszustand* charakterisiert: Es treten nur Normal- und Schubspannungen in der Membranebene auf. Biegemomente und Querkräfte können nicht aufgenommen werden. Im idealisierten, zweidimensionalen Membranmodell ist die Spannungsverteilung über die Membrandicke konstant und die Membranspannungen wirken auf die Mittelfläche.

Die Form einer Membranstruktur wird durch die Randbedingungen, wie z.B. die Lage der Auflager, die Verteilung der Vorspannung und die Randseile bestimmt. Die Form ist also nicht a priori bekannt, sondern muss zunächst bestimmt werden. Man spricht dabei von der *Formfindung*. Traditionell wurden Experimentalmodelle wie Seifenhautmodelle oder Modelle aus elastischen Textilien verwendet. Bei der numerischen Formfindung handelt es sich um ein nichtlineares, inverses mechanisches Problem, bei dem unter Vorgabe der Spannungen die Geometrie einer Struktur gesucht wird. Die Formfindung ist ein eigenes separates Verfahren, das der Analyse vorausgeht.

Für die Formoptimierung vorgespannter Membranstrukturen ist die Formfindung zur Ermittlung der Strukturgeometrie unentbehrlich. In dieser Arbeit wird die Formfindung als parameterfreies, designgebendes Verfahren für die Optimierung von Membrantragwerken angewandt. Dies ist sehr attraktiv, da mit einer sehr geringen Anzahl von unabhängigen Optimierungsvariablen optimale und echte Freiformflächen gefunden werden können. Optimierungsvariablen sind beispielsweise die Position der Auflager oder die Vorspannkraft.

Bei der Formoptimierung mit CAGD-Modellen bedeutet eine Reduktion der Optimierungsvariablen dagegen meist auch Einschränkungen in der Formfreiheit. Die feste Vorgabe der Designelemente schränkt den Designraum ein und das Optimum, welches nur innerhalb dieser Grenzen gefunden werden kann, muss nicht dem Optimum entsprechen, welches ohne Einschränkungen gefunden werden könnte. Bei Membrantragwerken gibt es diese Einschränkung nicht, da durch eine Formfindung die mechanisch korrekte und

optimale Form gewährleistet wird.

Die Formfindung wird in den Optimierungsprozess als eigenes Modul eingebunden. Sie beschreibt den Zusammenhang von Geometrie und Optimierungsvariablen. Dieser kann nicht mehr durch bekannte Funktion beschrieben werden, da die Form vorgespannter Membrane nicht analytisch beschrieben werden kann.

Der Fluid-Struktur-Interaktion kommt eine bedeutende Rolle zu, da die leichten Membrantragwerke sehr sensibel auf Strömungslasten reagieren und verhältnismässig große Verformungen auftreten. Die FSI bei Membrantragwerken wird in [106, 119] ausführlich behandelt.



Abbildung 7.1.: Überdachung im Olympiapark in München (Behnisch u.v.a., 1972): Ein Vorgänger der Membrandächer, das Seilnetzwerk.

7.1. Formfindung mit Updated-Reference-Strategy

Die Form einer Membran wird durch das Gleichgewicht der Membran- und Randseilkräfte definiert. Gesucht wird der Gleichgewichtszustand, der sich aufgrund der inneren Kräfte ohne äußere Lasten einstellt. Das Gleichgewicht der inneren Membrankräfte lässt sich über die Integralform der inneren virtuellen Arbeit in der verformten bzw. aktuellen Konfiguration ausdrücken:

$$\delta W_{\sigma} = h \int_a \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{d}_{,\mathbf{x}} \, da = 0 \quad (7.1)$$

Hierbei ist h die Membrandicke, a die Fläche in der verformten Konfiguration, $\boldsymbol{\sigma}$ der Cauchy Spannungstensor und $\mathbf{d}_{,\mathbf{x}}$ die Ableitung des Verschiebungsvektors in der aktu-

ellenen Konfiguration. Unter Berücksichtigung der Zusammenhänge aus Abschnitt 3.1 lässt sich der Gleichgewichtszustand unter Verwendung des Deformationsgradienten \mathbf{F} wie folgt schreiben:

$$\delta W_{\boldsymbol{\sigma}} = h \int_A \det \mathbf{F} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \delta \mathbf{F} \, dA = 0 \quad (7.2)$$

Dieser lässt sich auch in der Referenzkonfiguration zu

$$\delta W_{\mathbf{S}} = h \int_A (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \delta \mathbf{F} \, dA = 0 \quad (7.3)$$

ausdrücken, wobei \mathbf{S} der zweite Piola-Kirchhoff Spannungstensor ist.

Für eine numerische Lösung erfolgt die Diskretisierung mit finiten Elementen. Die Topologie des FE Netzes ist bekannt, wobei die Position der Netzknoten unbekannt und zu bestimmen ist. Aus Gleichung 7.2 lässt sich ein diskretes nichtlineares Gleichungssystem ableiten. Dabei handelt es sich um ein inverses schlecht gestelltes Problem, welches keine eindeutige Lösung besitzt. Dies wird sofort klar, wenn man die Lage der FE-Knoten in der Membranebene betrachtet. Bei derselben Membranform und derselben Topologie des Netzes, gibt es unendlich viele Möglichkeiten für die Lage der Netzknoten in der Membranfläche. Zur numerischen Lösung ist daher ein Stabilisierungsverfahren nötig. Es existieren unterschiedliche Ansätze. Ein Überblick findet sich in [119, 74]).

In dieser Arbeit wird die *Updated-Reference-Strategy (URS)* als Stabilisierungsverfahren verwendet [18]. Die URS basiert auf einem Homotopieverfahren, bei welchem eine Überblendung von einem lösbaaren und einem nicht eindeutig lösbaaren Problem stattfindet [4]. Die URS basiert auf der wiederholten Lösung eines gut gestellten Ersatzproblems, dessen Lösung gegen die Lösung des schlecht gestellten Originalproblems konvergiert.

Als Ersatzproblem wird die Formulierung der virtuellen inneren Arbeit in der Referenzkonfiguration (Gleichung 7.3) herangezogen, wobei als PK2-Spannungen \mathbf{S} die Komponenten der gewünschten Sollspannungen $\boldsymbol{\sigma}_0$ eingesetzt werden, welche eigentlich als Cauchyspannungen in der Momentankonfiguration definiert sind. Als Referenzgeometrie dient eine beliebige Anfangsgeometrie, welche die geometrischen Randbedingungen erfüllt (vgl. Abbildung 7.2). Es wird also für eine bekannte Referenzfläche mit vorgegebenen PK2-Spannungen \mathbf{S} die verformte Geometrie bestimmt. Beim Originalproblem gibt es dagegen keine bekannte Referenzfläche. Da $\boldsymbol{\sigma}_0$ als PK2-Spannungen angesetzt werden, weichen die errechneten Cauchyspannungen in der verformten Geometrie von den Sollspannungen ab. Nun wird in einem weiteren Iterationsschritt diese verformte Geometrie als Referenzgeometrie eingesetzt und erneut $\boldsymbol{\sigma}_0$ als PK2-Spannung angesetzt. Mit jeder Iteration nähern sich die errechneten Cauchyspannungen an $\boldsymbol{\sigma}_0$ an und die Referenzgeometrie konvergiert gegen die entgültige Lösung.

Die Anwendung des Homotopieverfahrens beschleunigt die Konvergenz des Problems. Hierbei wird das Originalproblem durch Überlagerung des Ersatzproblems lösbar ge-

macht. Bei der URS setzt sich die zu lösende Gleichung aus den Gleichgewichtsbedingung für die Momentankonfiguration und für die bekannte Referenzfläche mit gegebenen PK2-Spannungen \mathbf{S} zusammen und lautet:

$$\begin{aligned} \delta W_\lambda &= \lambda \delta W_\sigma + (1 - \lambda) \delta W_S \\ &= \lambda \left[h \int_A \det \mathbf{F} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \delta \mathbf{F} \, dA \right] + (1 - \lambda) \left[h \int_A (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \delta \mathbf{F} \, dA \right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7.4}$$

λ bezeichnet den Homotopiefaktor, welcher zwischen Null und eins liegt. Je näher der Homotopiefaktor an eins liegt, desto näher liegt das Problem am Originalproblem und desto höher ist i.d.R. die Konvergenzrate. Kleine Homotopiefaktoren begünstigen dahingegen die Stabilität. Je näher die Referenzgeometrie an der Lösung liegt, desto näher liegt das Ersatzproblem am Originalproblem und desto größer kann der Homotopiefaktor i.d.R. gewählt werden. Eine detailreiche Schilderung der URS kann [20, 19, 120, 119, 121] entnommen werden.



Abbildung 7.2.: Formfindung mit URS: Anfangsgeometrie und Gleichgewichtsfläche.
Quelle: Lehrstuhl für Statik, TU München.

7.2. Formfindung in der Optimierung

Die Geometrie einer Struktur wird in der Formoptimierung durch die Optimierungsvariablen definiert. Dabei wird ein Designmodell verwendet, welches den Zusammenhang zwischen Optimierungsvariablen und Geometrie beschreibt. In Abschnitt 2.2.2 wurden Designmodelle der Formoptimierung vorgestellt. Eine analytische Geometriebeschreibung durch vorgegebene Formfunktionen bedeutet auch immer eine Einschränkung auf gewisse Geometrieeigenschaften, die durch diese intuitiv gewählten Formfunktionen gegeben werden. Je weniger Designvariablen verwendet werden, desto geringer ist die Formfreiheit und desto weniger optimal fällt das Ergebnis in der Regel aus.

Bei Membrantragwerken wird die Geometrie durch die Formfindung festgelegt. Diese Methode ist parameterfrei, d.h. hier findet keine Einschränkung durch Formfunktion

statt, da das Design durch die Mechanik des Systems bestimmt wird. Volle Formfreiheit ist gegeben und das Finden der optimale Fläche kann gewährleistet werden. Als Optimierungsvariablen können die Kontrollparameter der Formfindung, wie die Vorspannung oder die Position der Auflager, dienen. In der Regel sind dies wenige Optimierungsvariablen. Dahingegen sind die Parameter der Formfindung alle FE-Knotenkoordinaten, was sehr viele Parameter sind. Die Besonderheit der Optimierung von Membranen ist, dass auch mit einer geringen Anzahl an Optimierungsvariablen die volle Formfreiheit gegeben ist.

Typische Optimierungsziele sind die Minimierung von Strömungseinflüssen, wie Verformungen oder Schwingungen. Für die Formoptimierung vorgespannter Membranstrukturen ist die Formfindung nicht nur eine elegante Möglichkeit der Geometriebeschreibung sondern ein notwendiges Verfahren zur Bestimmung der mechanisch korrekten Form. Eine weiter erwähnenswerte Eigenschaft bei der Optimierung von Membrantragwerken ist die Tatsache, dass kleine Formänderung großen Einfluss auf das Systemverhalten haben können. Wird beispielsweise die Vorspannung der Membran variiert, hat dies relativ geringen Einfluss auf die Form jedoch, durch die Änderung der Steifigkeit, großen Einfluss auf das Tragverhalten.

Die Geometrie des FE-Modells \mathbf{x} kann als Funktion $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ der Optimierungsvariablen \mathbf{s} ausgedrückt werden (vgl. Abschnitt 5.9.1). Bei CAGD-Methoden kann der Zusammenhang analytisch beschrieben werden und ist bekannt. Auch die Formfindung definiert den Zusammenhang von Geometrie und Optimierungsvariablen. Dieser kann nicht durch bekannte Funktion analytisch beschrieben werden, da es sich um ein nichtlineares inverses mechanisches Problem handelt. In der Sensitivitätsanalyse werden die Ableitungen $d\mathbf{x}/d\mathbf{s}$ benötigt (siehe Abschnitt 5.9). Diese Ableitung kann numerisch durch eine weitere Formfindung und finite Differenzen genähert werden. Im Vergleich zur gekoppelten Sensitivitäts- und Systemanalyse sind die Rechenkosten gering, da das zu lösende Gleichungssystem nur Strukturfreiheitsgrade besitzt.

7.3. Einbettung der Formfindung in das Framework

In dieser Arbeit wird die Formfindung als eigenständiges Softwaremodul in das Optimierungsframework (Abschnitt 6.7) eingebettet. Nach jeder Aktualisierung der Optimierungsvariablen wird die Formfindung ausgeführt, um die neue Form zu finden und das Design aktualisiert. Im Folgenden findet die Analyse mit der neu erhaltenen Geometrie statt. Der Optimierungsprozess lässt sich als eine Schleife mit vier Modulen darstellen: Formfindung, FSI-Analyse, Sensitivitätsanalyse und Designupdate. Abbildung 7.3 veranschaulicht den Ablauf und stellt eine Erweiterung des Prozesses nach 2.5 um das Modul der Formfindung dar.

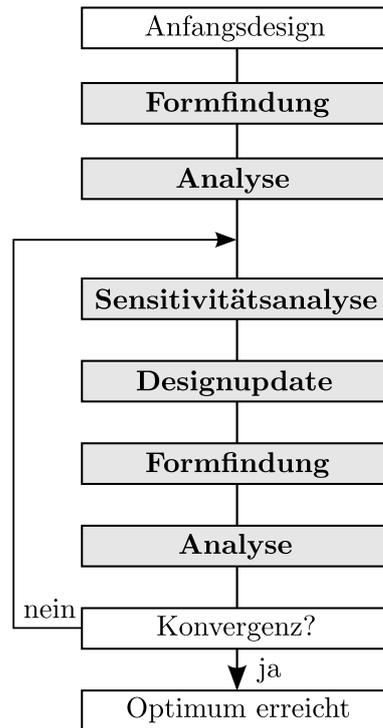


Abbildung 7.3.: Optimierungsprozess für Membrantragwerke nach NAND: Module Formfindung, FSI-Analyse, Sensitivitätsanalyse und Designupdate sind in die Optimierungsschleife eingebettet. Die Formfindung findet nach dem Designupdate statt, um auf der Grundlage der aktualisierten Optimierungsvariablen die Geometrie für den den aktuellen Optimierungsschritt zu ermitteln.

Die Formfindung ist im Programmcode CARAT implementiert. Das übliche Vorgehen bei der Membranberechnung ist nicht automatisiert: Formfindung und nachfolgende Analyse finden als zwei getrennte Berechnungen statt. Zuerst wird eine Formfindung auf der Basis einer durch den Benutzer manuell modellierten Anfangsgeometrie durchgeführt. Mit der gefundenen Form und idealerweise mit dem aus der Formfindung resultierenden Berechnungsnetz wird dann die Analyse durchgeführt. Um einen automatisierten Ablauf der Optimierung zu ermöglichen, wurde eine übergeordnete Steuerungsroutine für den Aufruf von Formfindung und Analyse angelegt. Dabei erfolgt nach der Formfindung ein direkter automatischer Aufruf der Analyse unter Verwendung der Ergebnisse der Formfindung.

Weitere Überlegungen erfordert das automatische Finden von Anfangsgeometrien für die Formfindung. In jedem Optimierungsschritt muss nach der Aktualisierung der Designvariablen die neue Form der Struktur durch eine Formfindung gefunden werden. Für jede Formfindung wird eine Anfangsgeometrie gebraucht. Im automatisierten Prozess

kann jedoch nur die Anfangsgeometrie für den ersten Optimierungsschritt vom Benutzer vorgegeben werden. Eine Aktualisierung der Optimierungsvariablen bedeutet eine Veränderung der Randbedingungen für die Formfindung und für geometrische Randbedingungen eine Veränderung der Anfangsgeometrie. Werden die Vorspannungen variiert, muss die Anfangsgeometrie allerdings nicht verändert werden. Benötigt wird ein Verfahren zu automatischen Aktualisierung der Anfangsgeometrie auf Grundlage veränderter Randbedingungen. Vorstellbar ist die automatische Veränderung der Anfangsgeometrie des ersten Optimierungsschrittes. Wird beispielsweise die Position der Auflager variiert, so lässt sich diese Geometrie entsprechend skalieren. Die Skalierung ist jedoch nicht notwendig, da es genügt, die FE-Knoten am Auflager in die neue Position zu bringen. Die korrekte Position der übrigen FE-Knoten ergibt sich schließlich aus der Formfindung. Besser als die Verwendung der Anfangsgeometrie des ersten Optimierungsschrittes ist jedoch die Verwendung des Ergebnisses der Formfindung aus dem vorhergehenden Optimierungsschritt, d.h. der bekannten Form für ähnliche Optimierungsvariablen. Dann werden dort die benötigten Veränderungen vorgenommen. Die Anfangsgeometrie liegt näher an der gesuchten Form, wodurch schnellere Konvergenz der Formfindung garantiert ist.

7.4. Berechnungsbeispiel: Optimierung eines umströmten Vierpunktsegels

Hier wird die Optimierung eines Vierpunktsegels vorgestellt. Es handelt sich um eine Membran, die zwischen vier Auflagern gespannt ist, wobei zwei gegenüberliegende Auflager erhöht sind. Die Berandung der Membran wird durch vorgespannte Randseile gebildet. In Abbildung 7.4 ist das System dargestellt.

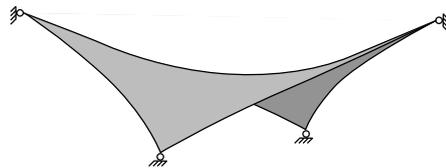


Abbildung 7.4.: Qualitative Darstellung des Vierpunktsegels.

Formfindung und FSI-Analyse des Vierpunktsegels wurden in ähnlicher Ausführung schon in der Arbeit [119] unter Verwendung des kommerziellen Strömungssimulationsprogramms ANSYS CFX vorgestellt. Nun soll die Optimierung dieser Struktur durchgeführt werden. Die Darstellung von Setup und Ergebnissen in dieser Arbeit konzentriert sich daher auf die Optimierung. Für eine detaillierte Darstellung die FSI betreffend sei auf [119] verwiesen.

Das Softwareframework aus Abschnitt 6.7 wird um das Modul Formfindung erweitert

(Abschnitt 7.2). Zur Berechnung werden die schon vorgestellten Programme CARAT, OpenFoam und CoMA benutzt. Die Generierung des Fluidnetzes wurde mit ANSYS ICEM CFD vorgenommen. Die Optimierung beinhaltet eine Formfindung und eine FSI-Analyse in jedem Optimierungsschritt.

Gegenstand der Optimierung ist die Variation der Form um Strömungseinflüsse zu minimieren. Konkret wird die vertikale Position der beiden erhöhten Auflager variiert, um minimale Verformungen durch die Strömung zu erreichen. Die Optimierung wurde mit den Zielfunktionen „vertikale Verschiebung in Strukturmitte“ und „ \mathcal{L}^2 -Norm der Verschiebungen“ durchgeführt. Diese Zielfunktionen wurden zur Veranschaulichung des Verfahrens und der Algorithmik gewählt und nicht nach Relevanz für eine bautechnische Verwirklichung der Struktur. Es kommt eine numerische Sensitivitätsanalyse und das Verfahren des steilsten Abstiegs zu Anwendung.

7.4.1. Setup

Das Vierpunktsegel aus Abbildung 7.4 zeigt die Geometrie, welche als Ergebnis einer Formfindung zu erwarten ist. Diese Geometrie dient als Startgeometrie für die Optimierung. Die Abmessungen sind in beiden Richtungen gleich und es wird ein isotroper Vorspannungszustand vorgegeben. Durch die Formfindung stellt sich so die Minimalfläche zwischen den Randseilen ein. Die Abmessungen sind in Abbildung 7.5 angegeben. Die Höhe der erhöhten Auflager beträgt 4 m , der horizontale Abstand der Auflager 10 m . Es wird eine Formfindung mit der Updated-Reference-Strategy mit der Referenzgeometrie aus Abbildung 7.6 durchgeführt. Dabei wird eine isotrope Vorspannung in der Membran von 1.5 kN/m für die Zielfunktion „vertikale Verschiebung in Strukturmitte“ und von 0.8 kN/m für die Zielfunktion „ \mathcal{L}^2 -Norm der Verschiebungen“ vorgegeben. Die Vorspannung in den Randseilen wird zu 20 kN festgelegt. Die Materialkennzahlen der Membran sind wie folgt: Das E-Modul beträgt $300 \cdot 10^6\text{ N/m}^2$, und die Querdehnzahl 0.2 . Dabei hat die Membran eine Dicke von nur 1 mm . Die Randseile besitzen ein E-Modul von $130 \cdot 10^9\text{ N/m}^2$ und eine Dichte von 8300 kg/m^3 . Der Querschnitt der Randseile beträgt $1.5 \cdot 10^{-4}\text{ m}^2$. Die Membran wird mit Membranelementen mit drei Verschiebungsfreiheitsgraden pro Knoten modelliert, die Randseile mit Stabelementen mit ebenfalls drei Verschiebungsfreiheitsgraden pro Knoten. Es werden große Verformungen erwartet und es wird daher eine geometrisch nichtlinearer Berechnung durchgeführt.

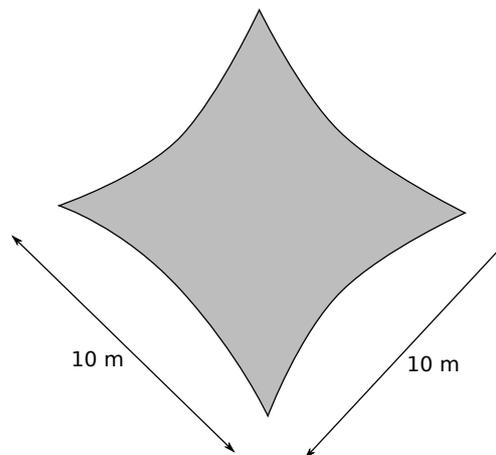


Abbildung 7.5.: Abmessungen des Vierpunktsegels.

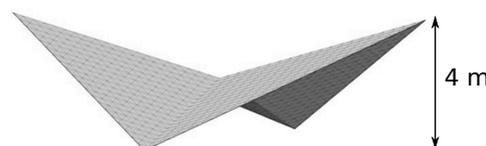


Abbildung 7.6.: Referenzgeometrie für die Formfindung im ersten Optimierungsschritt.

Die Umströmung ist inkompressibel und laminar. Das Strömungsgebiet wird groß genug gewählt, um den Einfluss des Randes zu minimieren. Die Abmessungen sind Abbildung 7.7 zu entnehmen. Der Nullpunkt des Koordinatensystems liegt in der Mitte des Strömungsgebietes. Die Mitte des Vierpunktsegels fällt mit dem Nullpunkt des Koordinatensystems zusammen. Ein konstantes Einströmprofil mit der Einströmgeschwindigkeit $u = 1 \text{ m/s}$ wird vorgegeben. An den Seitenflächen wird eine *slip*-Randbedingung vorgegeben, um eine ungehinderte Umströmung zu simulieren. Die Oberfläche des Vierpunktsegels wird mit *no slip*-Randbedingung belegt, also mit Geschwindigkeiten von Null in allen Richtungen. Die kinematische Viskosität ν beträgt $0.01 \text{ m}^2/\text{s}$. Setzt man die Höhe des Vierpunktsegels als charakteristische Länge d an, so ergibt sich die Reynoldszahl im Anfangszustand der Optimierung zu $Re = 400$. Wegen der konstanten Strömungsbedingungen wird erwartet, dass sich ein stationärer Zustand einstellt.

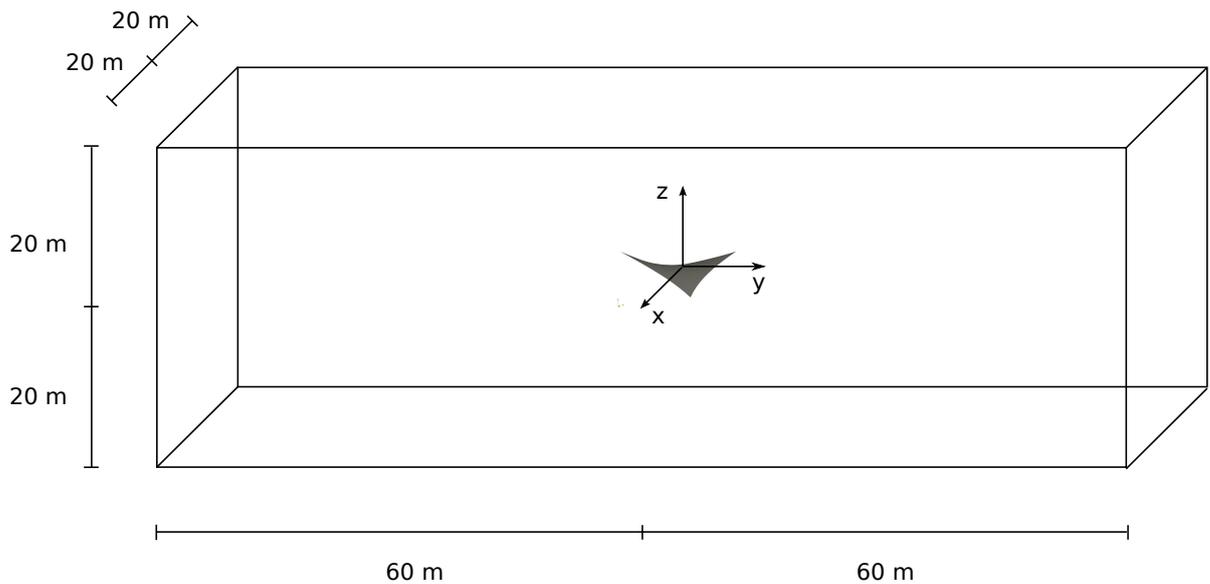


Abbildung 7.7.: Strömungsgebiet mit Vierpunktsegel.

Um optimale Anfangsbedingungen für die erste FSI-Berechnung zu erhalten und somit die Konvergenz wesentlich zu beschleunigen, wurde eine vorbereitende CFD-Analyse mit starrer Struktur in der Anfangsgeometrie durchgeführt. Die FSI-Analyse wird mit einem iterativ gestaffelten Verfahren mit Fixpunktiteration und Relaxation nach der Aitken's Δ^2 -Methode durchgeführt.

Die Kopplung von Struktur und Fluid erfolgt durch Übergabe der Oberflächendrücke und der Strukturverschiebungen. Die Interface-Diskretisierungen sind in Fluid- und Strukturmodell unterschiedlich. Der Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz erfolgt durch die bilineare Interpolationsmethode. Das FSI Interface setzt sich aus Ober- und Unterseite des Vierpunktsegels zusammen. Um Druckunterschiede darstellen zu können, ist eine separate Behandlung von Ober- und Unterseite notwendig. Für den Datentransfer bedeutet dies, dass zwei Netzpaare existieren, welche in CoMA als zwei Netzpartitionen gehandhabt werden. Das Strukturnetz ist an Ober- und Unterseite identisch, wobei auch die Verschiebungen an den Netzknoten identisch sind. Die Drücke aus der Umströmung sind an Ober- und Unterseite unterschiedlich. Aus den Druckunterschieden ergibt sich die Strukturbelastung.

Abbildung 7.8 zeigt die durch die Formfindung in 10 Iterationsschritten erhaltenen Anfangsgeometrie für die Optimierung. Die Verformung und die Umströmung der Anfangsgeometrie sind in den Abbildungen 7.9 und 7.10 qualitativ dargestellt.

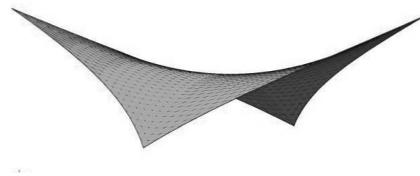


Abbildung 7.8.: Anfangsgeometrie des Vierpunktsegels für die Optimierung.

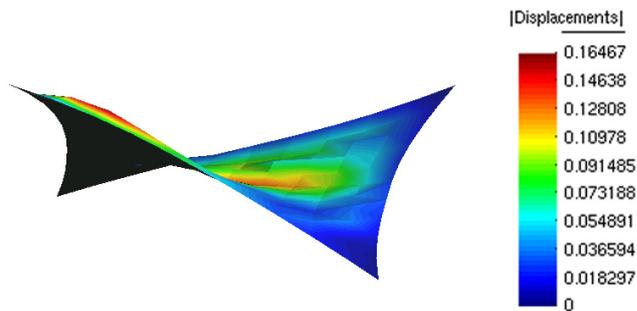


Abbildung 7.9.: Verformung des Vierpunktsegels durch die Umströmung.

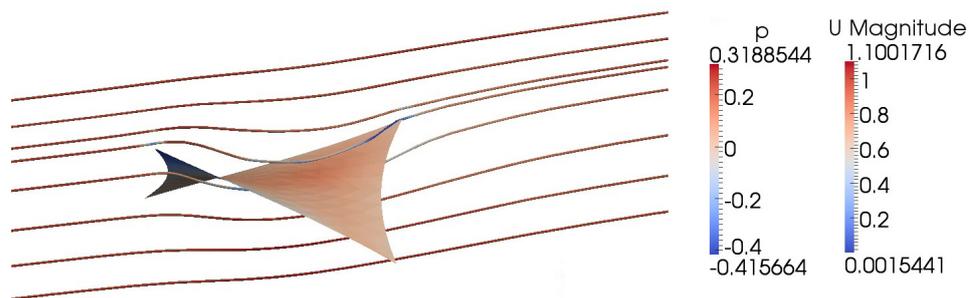


Abbildung 7.10.: Umströmung des Vierpunktsegels: Geschwindigkeiten und Drücke auf der Oberfläche.

Die Optimierung wird mit dem Ziel durchgeführt, die Verformungen durch Variation der Höhe der Struktur zu reduzieren. Als Optimierungsvariable wird die vertikale Position der erhöhten Auflager gewählt.

In jedem Optimierungsschritt muss nach der Aktualisierung der Designvariable die neue Form der Struktur durch eine Formfindung gefunden werden. Für jede Formfindung muss eine Anfangsgeometrie generiert werden. Eine effiziente und unkomplizierte Lösung ist das Verwenden der Geometrie aus dem letzten Optimierungsschritt, wobei die Position der FE-Knoten, die den erhöhten Auflager zugeordnet sind, gemäß dem Designupdate in die neue Position gebracht werden. Mit diesem Vorgehen wird die Höhe der Struktur festgelegt. Alle übrigen FE-Knoten werden identisch übernommen. In Abbildung 7.11 ist eine solche Anfangsgeometrie dargestellt.

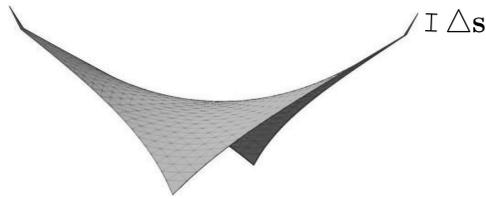


Abbildung 7.11.: Referenzgeometrie für die Formfindung in weiteren Optimierungsschritten.

7.4.2. Minimierung der vertikalen Verschiebung in Strukturmitte

Es wird eine Optimierung mit dem Ziel, die vertikalen Verschiebungen in der Strukturmitte zu minimieren, durchgeführt. Es treten Verschiebungen in negativer z -Richtung auf. Minimiert wird der Betrag dieser Verschiebung, von welchem im Folgenden immer die Rede ist. Die Reduktion der Zielfunktion „vertikale Verschiebungen in Strukturmitte“ ist in Abbildung 7.12 dargestellt. Die Zielfunktion reduziert sich mit zunehmender Höhe. Bei der Ausgangshöhe von 4 m beträgt der Betrag der vertikalen Verschiebung 0.112 m in negativer z -Richtung, während sich dieser bei einer Höhe von 7.22 m auf 0.092 m reduziert. Einflussgebend ist hier die Tatsache, dass mit höherer Krümmung die Steifigkeit zunimmt und somit die Verschiebung in der Mitte reduziert wird. Abbildung 7.13 zeigt das Vierpunktsegel in der Ausgangshöhe von 4 m und mit einer Höhe von 7.2 m . Aus der farblichen Darstellung der vertikalen Verschiebungen erkennt man, dass für das flachere Segel höhere vertikale Verschiebungen auftreten.

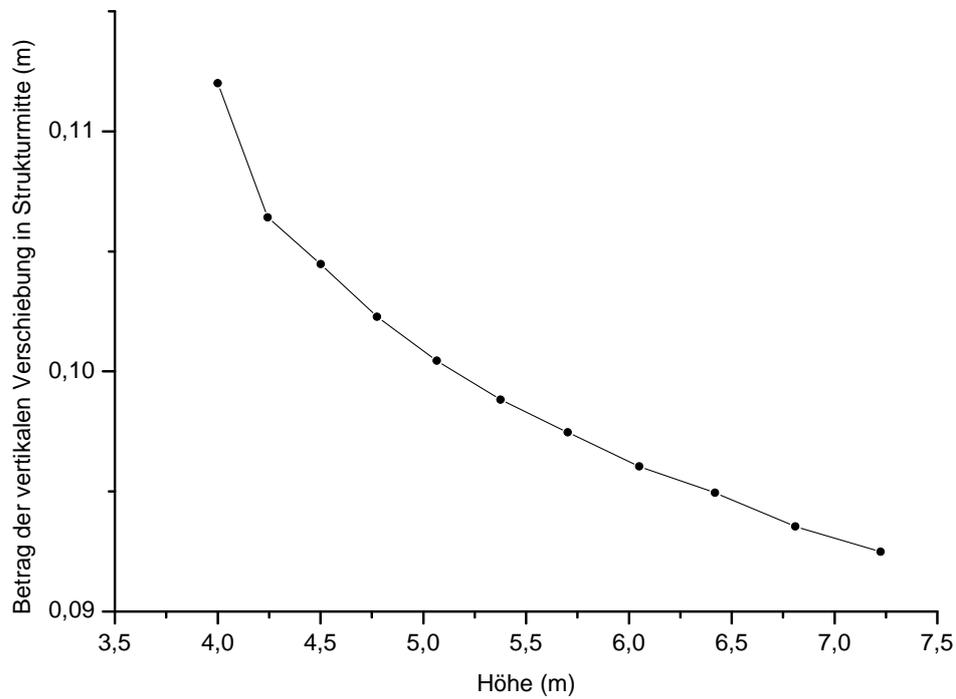


Abbildung 7.12.: Reduktion der vertikalen Verschiebung in Strukturmitte des umströmten Vierpunktsegels.

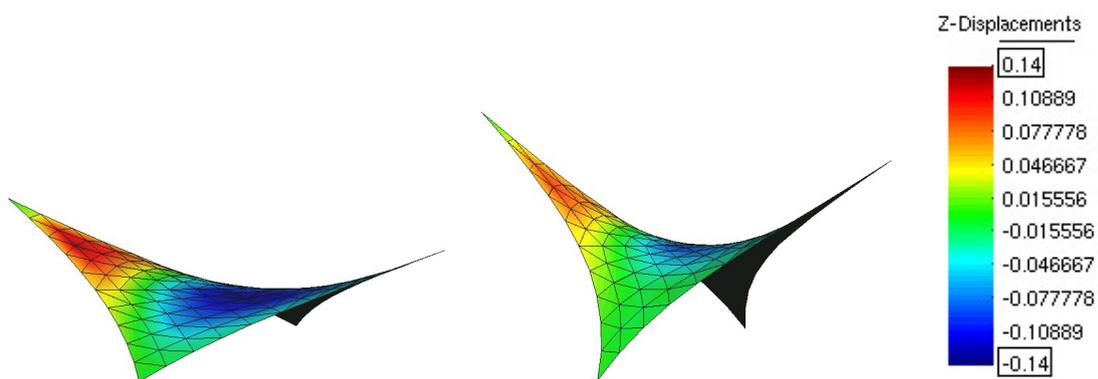


Abbildung 7.13.: vertikale Verschiebungen des Vierpunktsegels. links: Anfangshöhe 4 m, rechts: Höhe 7.2 m.

7.4.3. Minimierung der \mathcal{L}^2 -Norm der Verschiebungen

Weiterhin wird eine Optimierung mit der Zielfunktion „ \mathcal{L}^2 -Norm der Verschiebungen“ durchgeführt. Die \mathcal{L}^2 -Norm der Verschiebungen errechnet sich aus den Verschiebungen aller Koordinatenrichtungen. Sie ist die Quadratwurzel der Summe aller Verschiebungen im Quadrat. Diese Zielfunktion errechnet sich aus der Vorschrift

$$\psi_{\mathcal{L}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_{nod}} (d_{i,x}^2 + d_{i,y}^2 + d_{i,z}^2)} \quad (7.5)$$

mit der Anzahl aller Knoten n_{nod} .

Die Reduktion der Zielfunktion „ \mathcal{L}^2 -Norm der Verschiebungen“ ist in Abbildung 7.14 dargestellt. Auch hier reduziert sich die Zielfunktion mit zunehmender Höhe. Dies lässt sich intuitiv nachvollziehen, da das Strukturverhalten mit höherer Krümmung steifer wird. Man sieht, dass die Lösung gegen ein nicht-triviales Optimum konvergiert und die Verformungen ab einer gewissen Höhe wieder zunehmen. Dies liegt daran, dass die höher werdenden Seitenflächen eine immer größere Angriffsfläche für die Umströmung bieten und so anfällig für Strömungslasten werden. Dann werden die Verformungen in Strömungsrichtung sehr hoch und der Wert der Zielfunktion nimmt daher wieder zu. Die optimale Höhe des Vierpunktsegels liegt für diese Zielfunktion bei 11.3 m . Dann nimmt die \mathcal{L}^2 -Norm der Verschiebungen mit $0,66\text{ m}$ den geringsten Wert an. Dahingegen liegt bei der Ausgangshöhe von 4 m der Wert der \mathcal{L}^2 -Norm der Verschiebungen mit 0.94 m um ca. ein Drittel höher. Abbildung 7.15 zeigt das Vierpunktsegel mit unterschiedlichen Höhen. Die Farbgebung gibt hier den Betrag der Verschiebungen wieder. Es ist festzustellen, dass bei geringer Höhe das Maximum der Verschiebungen im horizontalem hinteren mittleren Bereich des Segel liegen. Je größer die Höhe wird, desto steifer wird die Struktur aufgrund der höheren Krümmung. Allerdings bietet das Segel dann auch mehr frontale Angriffsfläche für die Umströmung. So wandern das Gebiet der stärksten Verformungen mit zunehmender Höhe in den vorderen Bereich des Segels. Die Ergebnisse aus der Optimierung lassen sich unter Berücksichtigung dieser Tatsachen leicht nachvollziehen.

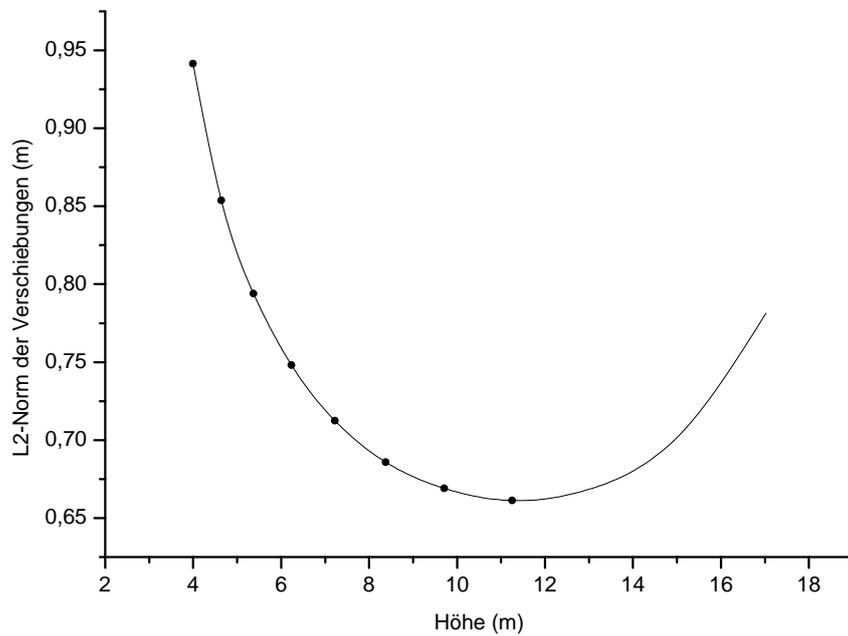


Abbildung 7.14.: Reduktion der \mathcal{L}^2 -Norm der vertikalen Verschiebungen des umströmten Vierpunktsegels.

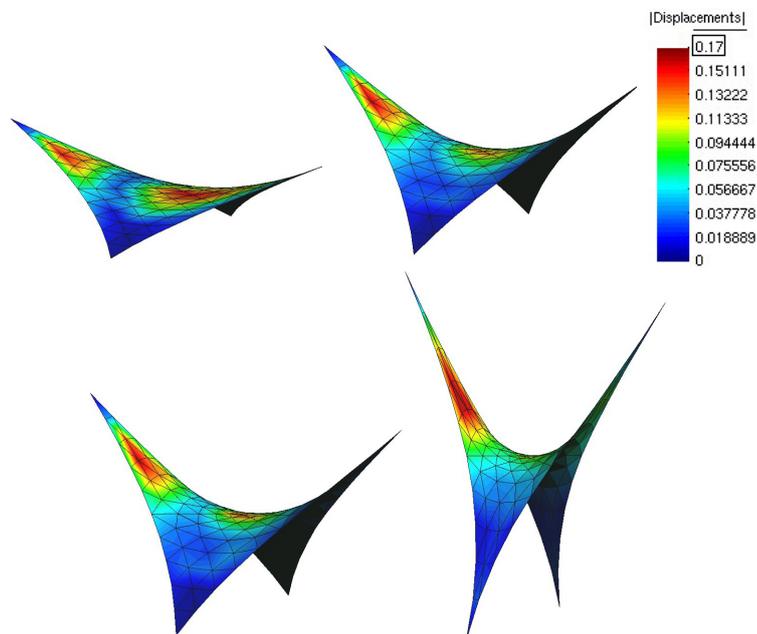


Abbildung 7.15.: Vierpunktsegel mit unterschiedlichen Höhen bei der Minimierung der \mathcal{L}^2 -Norm der Verschiebungen: Anfangshöhe 4 m, Höhe 7 m, Höhe 9 m und Optimum mit Höhe 11.3 m.

8. Resümee

8.1. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die numerische Formoptimierung in der Fluid-Struktur-Interaktion behandelt. Im Vordergrund stehen dabei umströmte schlanke Schalen- und Membranstrukturen. Das partitionierte Berechnungsverfahren für die FSI bildete die Basis der Arbeit. In der Optimierung wurden Gradientenmethoden eingesetzt und das gestaffelte Verfahren Nested Analysis and Design zu Grunde gelegt. Dieses Vorgehen erfordert eine gekoppelte partitionierte Sensitivitätsanalyse, welche die beiden physikalischen Felder Struktur und Fluid einschließt. Im Speziellen wurden grundlegende mathematische und algorithmische Methoden für die Sensitivitätsanalyse von Mehrfeldproblemen behandelt und entwickelt.

Das partitionierte Verfahren garantiert die in der Ingenieurpraxis geforderte Flexibilität und Modularität. Hier sind Kopplung und Datentransfer am nicht-koinzidenten Netz des FSI-Interface notwendig. Im Rahmen dieser Arbeit wurden Datentransfermethoden erörtert und eine Algorithmik für die Interpolationsmethode und die lastkonservative Summation für den Transfer am FSI-Interface entwickelt und umgesetzt. Dies sind die Kernmodule der Kopplungsschnittstelle CoMA, welche in dieser Arbeit vorgestellt wurde.

Die partitionierte, analytische Sensitivitätsanalyse wurde für die Formoptimierung detailliert formuliert. Auch die numerische Sensitivitätsanalyse wurde erklärt und umgesetzt. Der Schwerpunkt der Arbeit lag auf der Entwicklung der kombinierten Sensitivitätsanalyse. Dies ist eine gekoppelte, diskrete, semianalytische Methode der Sensitivitätsanalyse, für welche strukturseitig analytische Verfahren mit einer Spezialisierung auf Schalen und Membrane eingesetzt werden, während sie fluidseitig auf Systemin- und -output der Analyse basiert und damit die Austauschbarkeit der Software gewährleistet. Die kombinierte Sensitivitätsanalyse wurde für die direkte und adjungierte Methode formuliert. Eine Algorithmik wurde für die direkte Methode entwickelt, umgesetzt und anhand von Berechnungsbeispielen präsentiert.

Die Arbeit beschäftigte sich weiterhin mit einem Software-Framework für die gradientenbasierte Optimierung im partitionierten Ansatz nach dem Nested Analysis and Design-Verfahren. Dessen modulare Struktur besteht aus den Modulen Sensitivitätsana-

lyse, Designupdate und Analyse, welche jeweils die drei Prozesse Struktur, Kopplung und Fluid beinhalten. Auch die Kommunikation zwischen den Modulen und Prozessen wurde erörtert.

Desweiteren wurde der Sonderfall der Optimierung vorgespannter, umströmter Membrane behandelt. Für diese Strukturen stellt sich die Form in Abhängigkeit der Randbedingungen als Gleichgewichtsform ein. Numerisch kann diese mit der Methode der Formfindung gefunden werden. In dieser Arbeit wurde die Formfindung als designgebendes Verfahren der Optimierung verwendet und als separates Modul in das Optimierungsframework integriert. Ein Berechnungsbeispiel veranschaulichte dieses Vorgehen.

8.2. Schlussfolgerung

Die in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren können für praxisrelevante Anwendungen auf Basis des partitionierten Ansatzes eingesetzt und ausgebaut werden. Das Optimierungsframework und der Datentransfer an nicht-koinzidenten Netzen ist überall dort relevant, wo gekoppelte Probleme betrachtet werden und optimiert werden sollen. Die Formoptimierung findet oft bei der Auslegung von Leichtbaustrukturen sowohl im Bauwesen wie auch im Maschinenbau Anwendung. Beispiele hierfür sind umströmte weit gespannte Überdachungen, aufblasbare Strukturen sowie Kühl- und Klimasysteme in Maschinen oder Fahrzeugen, Rotorblätter und Turbinenschaufeln. Die kombinierte Sensitivitätsanalyse ist für diejenigen Ingenieurbereiche ausgelegt, in denen man sich vorwiegend mit der Strukturmechanik beschäftigt. Denn hier wird meist vorhandene Software, für welche große Expertise vorhanden ist, für die Berechnung der Struktur eingesetzt, während neue kommerzielle Strömungssimulationsprogramme als Black-Box-Tools hinzugezogen werden. Sicher ist in der Praxis aufgrund der einfachen Implementierung und hohen Flexibilität auch oft eine numerische Sensitivitätsanalyse von Vorteil.

8.3. Ausblick

Mit dem Framework für die gradientenbasierte Optimierung im partitionierten Ansatz steht ein Gerüst zur Verfügung, welches mit Funktionalitäten für unterschiedliche Optimierungs- und Berechnungsverfahren befüllt werden kann. Im Rahmen dieser Arbeit wurden die Softwaretools CARAT, CoMA und OpenFoam integriert. Für die Sensitivitätsanalyse wurde die numerische Methode und die direkte kombinierte Sensitivitätsanalyse für Schalenstrukturen umgesetzt. Dabei wurde die Geometriebeschreibung mit der CAGD-Methode unter Verwendung einer Optimierungsvariable realisiert. Weiterhin wurde die Formfindung als designgebendes Verfahren für die Optimierung von Membranstrukturen in das Framework integriert. Für den weiteren Ausbau des Framework sind

weitere Bereiche im Hinblick auf praxisrelevante Anwendungen interessant. Zunächst ist hier der Ausbau auf der Ebene der Optimierung anzuführen. Hier kann durch die Integration verschiedener Designmodelle (Abschnitt 2.2.2) mit mehreren Optimierungsvariablen größere Formvielfalt gewonnen werden. Auf der Ebene der Sensitivitätsanalyse sind insbesondere die kombinierte Sensitivitätsanalyse für Membranstrukturen und die adjungierte Sensitivitätsanalyse zu nennen.

Bei der kombinierten Sensitivitätsanalyse für Membranstrukturen muss die Formfindung in geeigneter Weise integriert werden. Die Formableitung $\frac{dx}{ds}$, die dabei benötigt wird (vgl. Abschnitt 6.5 und 6.6), ist in der Formfindung nicht analytisch bestimmbar und muss aus finiten Differenzen durch weitere Formfindungen genähert werden. Die Ableitung wird in zwei Verfahrensschritten benötigt: Bei der Lösung der Sensitivitätsgleichung der Struktur (Gleichung 6.65) und bei der Perturbation der Form (Gleichung 6.67). Zur Ermittlung kann dieselbe Formfindung dienen.

Als weiterer Ausblick zu dieser Arbeit ist die technische Umsetzung der adjungierten kombinierten Sensitivitätsanalyse (siehe Abschnitt 6.3) zu nennen. Die adjungierten Gleichung 6.51 kann in einem gestaffelten Verfahren nach den adjungierten Variablen gelöst werden. Der Datentransfer innerhalb der Sensitivitätsanalyse wird durch die transponierten Transfermatrizen \mathbf{T}_d^T und \mathbf{T}_p^T beschrieben. Er geschieht somit nach der Vorschrift des Transfers von Kraftgrößen (vgl. Abschnitt 4.2.1). Zur Ermittlung der partiellen Ableitung der Systemvariablen des Fluids nach den Systemvariablen der Struktur, welche in der strukturseitigen Sensitivitätsgleichung enthalten ist, können Methoden der Ordnungsreduzierung, eingesetzt werden, beispielsweise eigenvektorbasierte Methode zur Reduktion der Strukturfreiheitsgrade nach Guinta [43, 44] (siehe Abschnitt 5.8).

Literaturverzeichnis

- [1] <http://de.wikipedia.org/>.
- [2] <http://www.cs.umd.edu/mount/ANN/>.
- [3] ALLEN, M. und K. MAUTE: *Reliability-based shape optimization of structures undergoing fluid–structure interaction phenomena*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194(30):3472–3495, 2005.
- [4] ALLGOWER, E EUGENE L und KURT GEORG: *Introduction to numerical continuation methods*, Band 45. SIAM, 2003.
- [5] ALONSO, J.J., J. MARTINS, J.J. REUTHER, R. HAIMES und C.A. CRAWFORD: *High-fidelity aero-structural design using a parametric CAD-based model*. AIAA Journal, 3429:1–17, 2003.
- [6] ARORA, J. und Q WANG: *Review of formulations for structural and mechanical system optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 30:251–272, 2005.
- [7] ARORA, J.S.: *Introduction to optimum design*. Academic Press, 2004.
- [8] ASOUTI, V.G., A.S. ZYMARIS, D.I. PAPADIMITRIOU und K.C. GIANNAKOGLU: *Continuous and discrete adjoint approaches for aerodynamic shape optimization with low Mach number preconditioning*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 57(10):1485–1504, 2008.
- [9] BARCELOS, M., H. BAVESTRELLO und K. MAUTE: *A Schur–Newton–Krylov solver for steady-state aeroelastic analysis and design sensitivity analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195(17):2050–2069, 2006.
- [10] BARCELOS, M. und K. MAUTE: *Aeroelastic design optimization for laminar and turbulent flows*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197(19):1813–1832, 2008.
- [11] BATHE, K.J.: *Finite Element Method*. Wiley Online Library, 2007.
- [12] BECKER, G., U. FALK und M. SCHÄFER: *Shape optimization with higher-order surfaces in consideration of fluid-structure interaction*. In: HARTMANN, S., A. MESITER, M. SCHÄFER und S. TUREK (Herausgeber): *International Work-*

- shop on Fluid-Structure Interaction: Theory, Numerics and Application*. Kassel Univ. Press, Kassel, 2009.
- [13] BELEGUNDU, ASHOK D.: *Lagrangian approach to design sensitivity analysis*. Journal of Engineering Mechanics, 111(5), 1985.
- [14] BISCHOFF, M.: *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Doktorarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1999.
- [15] BLETZINGER, K.-U.: *Structural Optimization*. Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München, Vorlesungsmanuskript.
- [16] BLETZINGER, K.U.: *Formoptimierung von Flächentragwerken*. Doktorarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1990.
- [17] BLETZINGER, K.U., M. FIRL, J. LINHARD und R. WÜCHNER: *Optimal shapes of mechanically motivated surfaces*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199(5-8):324–333, 2010.
- [18] BLETZINGER, K.U. und E. RAMM: *A general finite element approach to the form finding of tensile structures by the updated reference strategy*. International Journal of Space Structures, 14(2):131–145, 1999.
- [19] BLETZINGER, K.U. und E. RAMM: *Structural optimization and form finding of light weight structures*. Computers & Structures, 79(22):2053–2062, 2001.
- [20] BLETZINGER, K.U., R. WÜCHNER, F. DAOUD und N. CAMPRUBÍ: *Computational methods for form finding and optimization of shells and membranes*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194(30):3438–3452, 2005.
- [21] BOER, AUKJE DE, ALEXANDER H VAN ZUIJLEN und HESTER BIJL: *Comparison of conservative and consistent approaches for the coupling of non-matching meshes*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197(49):4284–4297, 2008.
- [22] BUNGARTZ, H.J. und M. SCHÄFER: *Fluid-Structure Interaction: Modeling, Simulation, Optimization*. Springer Verlag, 2006.
- [23] BUNGARTZ, H.J. und M. SCHÄFER: *Fluid Structure Interaction II: Modelling, Simulation, Optimization*. Springer Verlag, 2010.
- [24] CAMPRUNI ESTEBO, N.: *Design and Analysis in Shape Optimization of Shells*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München, 2004.
- [25] CHITTICK, I.R. und J.R.R.A. MARTINS: *Aero-structural optimization using adjoint coupled post-optimality sensitivities*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 36(1):59–70, 2008.

- [26] DAOUD, F.: *Formoptimierung von Freiformschalen*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München, 2005.
- [27] DE BOER, A., A.H. VAN ZUIJLEN und H. BIJL: *Review of coupling methods for non-matching meshes*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(8):1515–1525, 2007.
- [28] DEUFLHARD, P.: *Newton methods for nonlinear problems: affine invariance and adaptive algorithms*. Springer Verlag, 2011.
- [29] DUREISSEIX, DAVID und HENRI BAVESTRELLO: *Information transfer between incompatible finite element meshes: application to coupled thermo-viscoelasticity*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(44):6523–6541, 2006.
- [30] ETIENNE, S. und D. PELLETIER: *A general approach to sensitivity analysis of fluid–structure interactions*. *Journal of Fluids and Structures*, 21(2):169–186, 2005.
- [31] FARHAT, C.: *CFD-based nonlinear computational aeroelasticity*. In: STEIN, E., R. DE BORST und T.J.R. HUGHES (Herausgeber): *Encyclopedia of Computational Mechanics*. Wiley Online Library, 2004.
- [32] FARHAT, CHARBEL, MICHAEL LESOINNE und P LE TALLEC: *Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157(1):95–114, 1998.
- [33] FAZZOLARI, A., N.R. GAUGER und J. BREZILLON: *Efficient aerodynamic shape optimization in MDO context*. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 203(2):548–560, 2007.
- [34] FELIPPA, C.A., KC PARK und C. FARHAT: *Partitioned analysis of coupled mechanical systems*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(24):3247–3270, 2001.
- [35] FERZIGER, J.H. und M. PERIĆ: *Computational methods for fluid dynamics*, Band 3. Springer Verlag, 1999.
- [36] FIRL, M.: *Optimal Shape Design of Shell Structures*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München, 2010.
- [37] GALLINGER, T., A. KUPZOK, U. ISRAEL, K.-U. BLETZINGER und R. WUCHNER: *A Computational Environment for Membrane-Wind Interaction*. In: HARTMANN, S., A. MESITER, M. SCHÄFER und S. TUREK (Herausgeber): *International Workshop on Fluid-Structure Interaction. Theory, Numerics and Applications*, Seite 97. Kassel Univ. Press, Kassel, 2009.

- [38] GALLINGER, T.G.: *Effiziente Algorithmen zur partitionierten Lösung stark gekoppelter Probleme der Fluid-Struktur-Wechselwirkung*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München, 2010.
- [39] GAUGER, N. und A. FAZZOLARI: *Adjoint Methods for Coupled CFD-CSM Optimization*. MEGADESIGN and MegaOpt-German Initiatives for Aerodynamic Simulation and Optimization in Aircraft Design, Seiten 237–246, 2009.
- [40] GERDES, INGRID, FRANK KLAWONN und RUDOLF KRUSE: *Evolutionäre Algorithmen*. Springer DE, 2004.
- [41] GERSTENBERGER, A. und W.A. WALL: *Enhancement of fixed-grid methods towards complex fluid–structure interaction applications*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 57(9):1227–1248, 2008.
- [42] GHATTAS, O. und X. LI: *Domain decomposition methods for sensitivity analysis of a nonlinear aeroelasticity problem*. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 11(1-2):113–130, 1998.
- [43] GIUNTA, A.A.: *Sensitivity analysis for coupled aero-structural systems*. National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, 1999.
- [44] GIUNTA, A.A. und J. SOBIESZCZANSKI-SOBIESKI: *Progress toward using sensitivity derivatives in a high-fidelity aeroelastic analysis of a supersonic transport*. AIAA Journal, Seiten 98–4763, 1998.
- [45] GRANDMONT, CÉLINE und YVON MADAY: *Nonconforming grids for the simulation of fluid-structure interaction*. Contemporary Mathematics, 218:262–270, 1998.
- [46] GRIEWANK, A. und A. WALTHER: *Evaluating derivatives: principles and techniques of algorithmic differentiation*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008.
- [47] GRUNDMANN, H.: *Kontinuumsmechanik I & II*, 2002. Lehrstuhl für Baumechnik, Technische Universität München, Vorlesungsmanuskript.
- [48] GUNZBURGER, M.D.: *Sensitivities, adjoints and flow optimization*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 31(1):53–78, 1999.
- [49] GUNZBURGER, M.D.: *Perspectives in flow control and optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2003.
- [50] HAFTKA, R.T. und R.V. GRANDHI: *Structural shape optimization—a survey*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 57(1):91–106, 1986.
- [51] HAFTKA, R.T. und Z. GÜRDAL: *Elements of structural optimization*. Springer Verlag, 1992.

- [52] HAFTKA, R.T. und M.P. KAMAT: *Simultaneous nonlinear structural analysis and design*. Computational mechanics, 4(6):409–416, 1989.
- [53] HAFTKA, R.T., J. SOBIESZCZANSKI-SOBIESKI und S.L. PADULA: *On options for interdisciplinary analysis and design optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 4(2):65–74, 1992.
- [54] HARZHEIM, LOTHAR: *Strukturoptimierung: Grundlagen und Anwendungen*. Harri Deutsch Verlag, 2008.
- [55] HOJJAT, M., E. STAVROPOULOU, T. GALLINGER, U. ISRAEL, R. WÜCHNER und K.U. BLETZINGER: *Fluid-Structure Interaction in the Context of Shape Optimization and Computational Wind Engineering*. In: BUNGARTZ, H.J. und M. SCHÄFER (Herausgeber): *Fluid Structure Interaction II: Modelling, Simulation, Optimization*, Seiten 351–381. Springer Verlag, 2010.
- [56] HOLZAPFEL, G.A.: *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering*. John Wiley & Sons Ltd., 2000.
- [57] HUGHES, T.J.R.: *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Nummer 2. Dover Publications, 2000.
- [58] HUGHES, T.J.R., J.A. COTTRELL und Y. BAZILEVS: *Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194(39-41):4135–4195, 2005.
- [59] ISRAEL, U.: *Data Transfer between Non Matching Meshes*. Diplomarbeit, Technische Universität München, 2006.
- [60] ISRAEL, U., A. KUPZOK, A. LÄHR, T. GALLINGER, R. WÜCHNER und K.-U. BLETZINGER: *Eine flexible Kopplungsschnittstelle für partitionierte Berechnungen von Mehrfeldproblemen*. In: 19. Forum Bauinformatik, Seiten 61–68, 2007.
- [61] ISRAEL, U., E. STAVROPOULOU, M. BARCELOS, T. GALLINGER, K.-U. BLETZINGER und R. WÜCHNER: *Shape Optimization in Partitioned Analysis for Fluid-Structure Interaction*. In: *International Workshop on Fluid-Structure Interaction. Theory, Numerics and Applications*, Seite 155, 2009.
- [62] JAIMAN, R.K., X. JIAO, P.H. GEUBELLE und E. LOTH: *Assessment of conservative load transfer for fluid–solid interface with non-matching meshes*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 64(15):2014–2038, 2005.
- [63] JAIMAN, R.K., X. JIAO, P.H. GEUBELLE und E. LOTH: *Conservative load transfer along curved fluid–solid interface with non-matching meshes*. Journal of Computational Physics, 218(1):372–397, 2006.
- [64] JAMESON, A.: *Aerodynamic design via control theory*. Journal of Scientific Com-

- puting, 3(3):233–260, 1988.
- [65] JAMESON, A.: *Optimum aerodynamic design using CFD and control theory*. AIAA Journal, 1729:124–131, 1995.
- [66] JAMESON, A.: *Aerodynamic shape optimization using the adjoint method*. Technischer Bericht, 2003.
- [67] JAMESON, A.: *Aerodynamics*. In: STEIN, E., R. DE BORST und T.J.R. HUGHES (Herausgeber): *Encyclopedia of Computational Mechanics*. Wiley Online Library, 2004.
- [68] JAMESON, A., L. MARTINELLI und NA PIERCE: *Optimum aerodynamic design using the Navier–Stokes equations*. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 10(1):213–237, 1998.
- [69] JANIGA, G.: *Optimization and computational fluid dynamics*. Springer Verlag, 2007.
- [70] JIAO, XIANGMIN und MICHAEL T HEATH: *Common-refinement-based data transfer between non-matching meshes in multiphysics simulations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 61(14):2402–2427, 2004.
- [71] KIENDL, J., K.U. BLETZINGER, J. LINHARD und R. WUCHNER: *Isogeometric shell analysis with Kirchhoff-Love elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198(49-52):3902–3914, 2009.
- [72] KIENDL, J.M.: *Isogeometric Analysis and Shape Optimal Design of Shell Structures*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Statik, technische Universität München, 2011.
- [73] KUHL, D. und G. MESCHKE: *Finite Elemente Methoden I & II*, 2002. Lehrstuhl für Statik und Dynamik, Ruhr-Universität Bochum, Vorlesungsmanuskript.
- [74] KUPZOK, A.: *Modeling the interaction of wind and membrane structures by numerical simulation*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München, 2009.
- [75] KÜTTLER, U. und W.A. WALL: *Fixed-point fluid–structure interaction solvers with dynamic relaxation*. Computational Mechanics, 43(1):61–72, 2008.
- [76] LANCZOS, C.: *The variational principles of mechanics*. Dover Publications, 1970.
- [77] LINHARD, J.: *Numerisch-mechanische Betrachtung des Entwurfsprozesses von Membrantragwerken*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München, 2009.
- [78] LUND, E., H. MØLLER und L.A. JAKOBSEN: *Shape design optimization of steady fluid-structure interaction problems with large displacements*. AIAA Journal,

- 1624:1–11, 2001.
- [79] LUND, E., H. MØLLER und L.A. JAKOBSEN: *Shape design optimization of stationary fluid-structure interaction problems with large displacements and turbulence*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 25(5):383–392, 2003.
- [80] MARTINS, J.R.R.A.: *A coupled-adjoint method for high-fidelity aero-structural optimization*. Doktorarbeit, Stanford University, 2002.
- [81] MARTINS, J.R.R.A., J.J. ALONSO und J.J. REUTHER: *A coupled-adjoint sensitivity analysis method for high-fidelity aero-structural design*. Optimization and Engineering, 6(1):33–62, 2005.
- [82] MAUTE, K., C. FARHAT, B. ARGROW und M. NIKBAY: *Sonic boom mitigation via shape optimization using an adjoint method and application to a supersonic fighter aircraft*. European Journal of Computational Mechanics, 17:1–2, 2008.
- [83] MAUTE, K., M. NIKBAY und C. FARHAT: *Coupled sensitivity analysis and optimization of three-dimensional non-linear aeroelastic systems*. AIAA Journal, 39:2051–2061, 2001.
- [84] MAUTE, K., M. NIKBAY und C. FARHAT: *Sensitivity analysis and design optimization of three-dimensional non-linear aeroelastic systems by the adjoint method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 56(6):911–933, 2003.
- [85] MICHLER, C.: *Efficient numerical methods for fluid-structure interaction*. Doktorarbeit, Technische Universität Delft, 2005.
- [86] MOHAMMADI, B. und O. PIRONNEAU: *Applied shape optimization for fluids*. Oxford University Press, USA, 2001.
- [87] MOHAMMADI, B. und O. PIRONNEAU: *Applied optimal shape design*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 149(1):193–205, 2002.
- [88] MOHAMMADI, B. und O. PIRONNEAU: *Shape optimization in fluid mechanics*. Annu. Rev. Fluid Mech., 36:255–279, 2004.
- [89] MOK, D.P.: *Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion*. Doktorarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 2001.
- [90] MOK, D.P. und W.A. WALL: *Partitioned analysis schemes for the transient interaction of incompressible flows and nonlinear flexible structures*. Trends in computational structural mechanics, Barcelona, 2001.
- [91] MØLLER, H.: *Analysis and optimization for fluid-structure interaction problems*. Doktorarbeit, Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, 2002.

- [92] NADARAJAH, S. und A. JAMESON: *A comparison of the continuous and discrete adjoint approach to automatic aerodynamic optimization*. AIAA paper, 667:2000, 2000.
- [93] NADARAJAH, S. und A. JAMESON: *Studies of the continuous and discrete adjoint approaches to viscous automatic aerodynamic shape optimization*. AIAA Journal, 2530:2001, 2001.
- [94] OLDS, J.R.: *System sensitivity analysis applied to the conceptual design of a dual-fuel rocket SSTO*. Georgia Institute of Technology, 1994.
- [95] OTHMER, C.: *A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 58(8):861–877, 2008.
- [96] OTHMER, C., E. DE VILLIERS und H.G. WELLER: *Implementation of a continuous adjoint for topology optimization of ducted flows*. In: *18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, 2007.
- [97] OTTMANN, T. und P. WIDMAYER: *Algorithmen und Datenstrukturen*. Springer Verlag, 2012.
- [98] PAPADIMITRIOU, D.I. und K.C. GIANNAKOGLU: *Direct, adjoint and mixed approaches for the computation of Hessian in airfoil design problems*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 56(10):1929–1943, 2008.
- [99] PIRONNEAU, O.: *Optimal shape design for elliptic systems*. System Modeling and Optimization, Seiten 42–66, 1982.
- [100] POPP, A., M. GITTERLE, M.W. GEE und W.A. WALL: *A dual mortar approach for 3D finite deformation contact with consistent linearization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 83(11):1428–1465, 2010.
- [101] PUSO, M.A. und T.A. LAURSEN: *A mortar segment-to-segment frictional contact method for large deformations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193(45):4891–4913, 2004.
- [102] RAULLI, M. und K. MAUTE: *Optimization of fully coupled electrostatic–fluid–structure interaction problems*. Computers & Structures, 83(2):221–233, 2005.
- [103] REUTHER, J.: *Aerodynamic shape optimization*. In: *32th AIAA Fluid Dynamics Conference*, 2002.
- [104] REUTHER, J., J.J. ALONSO, J. MARTINS und S.C. SMITH: *A coupled aero-structural optimization method for complete aircraft configurations*. AIAA Journal, Seiten 99–0187, 1999.
- [105] REUTHER, JAMES und ANTONY JAMESON: *Supersonic wing and wing-body sha-*

- pe optimization using an adjoint formulation*. Research Institute for Advanced Computer Science, NASA Ames Research Center, 1995.
- [106] ROSSI, R.: *Light weight structures: structural analysis and coupling issues*. Doktorarbeit, University of Bologna, 2005.
- [107] SCHÄFER, M.: *Numerik im Maschinenbau*. Springer Verlag, 1999.
- [108] SOBIESZANSKI-SOBIESKI, J.: *Sensitivity of complex, internally coupled systems*. AIAA Journal, 28:153–160, 1990.
- [109] SOBIESZCZANSKI-SOBIESKI, J. und R.T. HAFTKA: *Multidisciplinary aerospace design optimization: survey of recent developments*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 14(1):1–23, 1997.
- [110] SOTO, O. und R. LÖHNER: *CFD shape optimization using an incomplete-gradient adjoint formulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 51(6):735–753, 2001.
- [111] SOTO, O., R. LÖHNER und C. YANG: *An adjoint-based design methodology for CFD problems*. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 14(6):734–759, 2004.
- [112] VAN KEULEN, F., R.T. HAFTKA und N.H. KIM: *Review of options for structural design sensitivity analysis. Part 1: Linear systems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194(30):3213–3243, 2005.
- [113] VANDERPLAATS, G.N.: *Numerical optimization techniques for engineering design: with applications*. McGraw-Hill New York, 1984.
- [114] VANDERPLAATS, G.N.: *Multidiscipline Design Optimization*. Vanderplaats Research & Development, Inc., 2007.
- [115] VIERENDEELS, J., L. LANOYE, J. DEGROOTE und P. VERDONCK: *Implicit coupling of partitioned fluid–structure interaction problems with reduced order models*. Computers & Structures, 85(11):970–976, 2007.
- [116] WALL, W., A. GERSTENBERGER, P. GAMNITZER, C. FÖRSTER und E. RAMM: *Large deformation fluid-structure interaction—advances in ALE methods and new fixed grid approaches*. In: BUNGARTZ, H.J. und M. SCHÄFER (Herausgeber): *Fluid-Structure Interaction: Modeling, Simulation, Optimization*, Seiten 195–232. Springer Verlag, 2006.
- [117] WALL, W.A.: *Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen*. Doktorarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 2000.
- [118] WRIGGERS, P.: *Nonlinear finite element methods*. Springer Verlag, 2008.

-
- [119] WÜCHNER, R.: *Mechanik und Numerik der Formfindung und Fluid-Struktur-Interaktion von Membrantragwerken*. Doktorarbeit, Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München, 2006.
- [120] WÜCHNER, R. und K.U. BLETZINGER: *Stress-adapted numerical form finding of pre-stressed surfaces by the updated reference strategy*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 64(2):143–166, 2005.
- [121] WÜCHNER, R., A. KUPZOK und K.U. BLETZINGER: *A framework for stabilized partitioned analysis of thin membrane–wind interaction*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 54(6-8):945–963, 2007.
- [122] YANG, BIN und TOD A LAURSEN: *A contact searching algorithm including bounding volume trees applied to finite sliding mortar formulations*. Computational Mechanics, 41(2):189–205, 2008.
- [123] ZIENKIEWICZ, O.C. und R.L. TAYLOR: *The finite element method for solid and structural mechanics*, Band 2. Butterworth-Heinemann, 2005.
- [124] ZIENKIEWICZ, O.C., R.L. TAYLOR und P. NITHIARASU: *The finite element method for fluid dynamics*, Band 3. Butterworth-Heinemann, 2005.
- [125] ZIENKIEWICZ, O.C., R.L. TAYLOR und J.Z. ZHU: *The finite element method: its basis and fundamentals*, Band 1. Butterworth-Heinemann, 2005.

A. Ergänzungen

A.1. Finite Differenzen für mehrdimensionale Funktionen

Bei der Näherung der Ableitung durch finite Differenzen wird von Linearität im Bereich der Schrittweite ausgegangen. Geht die Schrittweite gegen Null, trifft dies zu und der Fehler verschwindet.

Zur Veranschaulichung der Näherung von partiellen Ableitungen dient hier die Funktion $f(x, y)$, für welche die finiten Vorwärtsdifferenzen 1. Ordnung an der Stelle (x_0, y_0) in Abbildung A.1 grafisch dargestellt werden. Die Funktion wird als linear im Bereich der Schrittweiten genähert. Der tatsächliche Verlauf ist mit der grauen Strichlinie angedeutet, was deutlich macht, dass aus der linearen Näherung der Ableitung durch finite Differenzen Fehler resultieren.

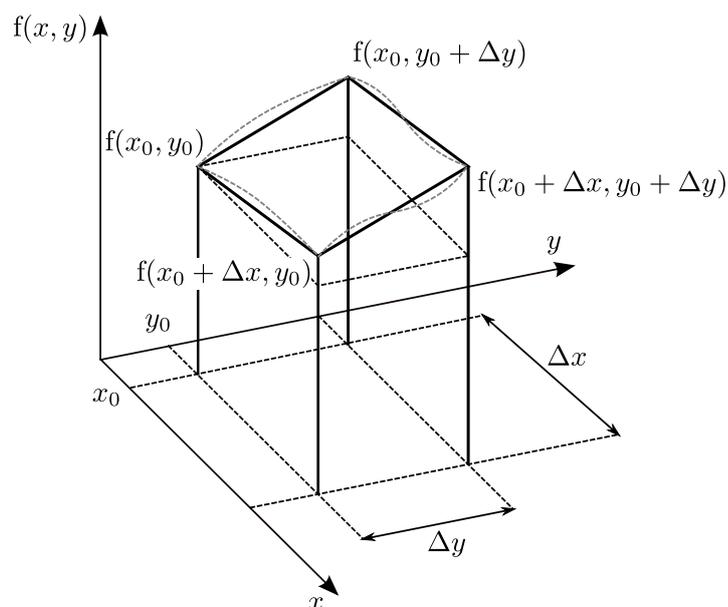


Abbildung A.1.: Grafische Darstellung Finiter Vorwärtsdifferenzen 1. Ordnung.

Die Näherungen für die partiellen Ableitungen ist aus der Grafik schnell ersichtlich:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad (\text{A.2})$$

Besteht nun ein funktionaler Zusammenhang der Variablen, z.B. $y = y(x)$, so ist die totale Ableitung $\frac{df}{dx}$ von den partiellen verschieden. Die Näherung als finite Differenz berechnet sich zu

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x, y(x_0 + \Delta x)) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \quad (\text{A.3})$$

Bei dieser Formulierung besteht folgender Zusammenhang der Schrittweiten Δx und Δy , der aus dem Zusammenhang $y(x)$ resultiert:

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) \quad \Rightarrow \quad y_0 + \Delta y = y(x_0 + \Delta x) \quad (\text{A.4})$$

Alternativ lässt sich die finite Differenz für die Ableitung $\frac{df}{dx}$ als gewichtete Summe der partiellen Ableitungen, mit beliebiger Wahl der Schrittweiten Δx und Δy , schreiben. Um das richtige Verhältnis der partiellen Ableitungen bezüglich des Zusammenhangs $y(x)$ zu erhalten wird die Näherung der partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ mit der Wichtung $\frac{dy}{dx}$ versehen. Diese Formulierung entspricht der Kettenregel für eine gegen Null gehende Schrittweite.

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} + \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (\text{A.5})$$

Wird nun $\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x$ gewählt, lässt sich die Summe auf einen Nenner bringen und unter Berücksichtigung des Zusammenhangs

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0), \quad (\text{A.6})$$

der für den linearen Bereich gilt und aus Abbildung A.1 sofort ersichtlich ist, wie folgt vereinfachen:

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (\text{A.7})$$

Bei linearem Verhalten gilt $y_0 + \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x = y(x_0 + \Delta x)$ (Taylorreihe). Damit ist Gleichung A.7 identisch mit Gleichung A.3.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass bei den obigen Formulierungen das Gleichheitszeichen nur gilt, weil die Annahme gemacht wurde, dass f linear im Bereich der Schrittweiten ist, was tatsächlich nur für einen infinitesimal kleinen Bereich zutrifft. Es handelt sich um Näherungen.

A.2. Anschauliche Erklärung der kombinierten Sensitivitätsanalyse

Hier soll in anschaulicher Weise die Umsetzung der kombinierten Sensitivitätsanalyse erklärt werden.

In der Formoptimierung wird aus den Optimierungsvariablen $\mathbf{s}^{(k)}$ des Optimierungsschrittes k über bekannte Zusammenhänge die resultierende Geometrie der Struktur $\mathbf{x}^{(k)}$ bestimmt (siehe Abschnitt 5.9.1). Bei der numerischen Optimierung nach dem NAND-Konzept findet in jedem Optimierungsschritt vor der Sensitivitätsanalyse eine FSI-Systemanalyse statt (siehe Abschnitt 2.3.2). Für den Optimierungsschritt k werden hier auf der Basis der bekannten Geometrie der Struktur $\mathbf{x}^{(k)}$ die Systemvariablen von Struktur $\mathbf{d}^{(k)}$ und Fluid $\mathbf{q}^{(k)}$ in einem iterativen Verfahren ermittelt. Mit konvergierter FSI-Analyse ist dann auch die Position des FSI-Interfaces $\mathbf{x}_\Gamma^{(k)} + \mathbf{d}_\Gamma^{(k)}$, welches die Strukturoberfläche im verformten Zustand ist, bekannt.

Nun folgt die kombinierte Sensitivitätsanalyse. Zunächst wird die Sensitivitätsgleichung der Struktur (Gleichung 6.41) für die Systemableitung $\frac{d\mathbf{d}}{ds_i}^{(k)}$ gelöst. Dann soll durch Perturbieren der Variablen \mathbf{d} und \mathbf{x} die Systemableitung $\frac{d\mathbf{q}}{ds_i}^{(k)}$ nach Gleichung 6.56 ermittelt werden.

Dies sei nun anhand von Abbildung A.2 in anschaulicher Weise erklärt: Die durchgängige schwarze Linie stellt die Oberflächengeometrie der Struktur am Interface $\mathbf{x}_\Gamma^{(k)}$ für den Optimierungsschritt k dar. Auf die Oberfläche wirkt die Strukturverschiebung $\mathbf{d}_\Gamma^{(k)}$, so dass die verformte Geometrie und Position des FSI Interfaces $\mathbf{x}_\Gamma^{(k)} + \mathbf{d}_\Gamma^{(k)}$ ist. Dies wird durch die gestrichelte schwarze Linie dargestellt. Wird nun die Optimierungsvariable s_i um ε perturbiert, zieht dies eine veränderte Oberflächengeometrie der Struktur nach sich, die als $\mathbf{x}_{\Gamma,pert}^{(k)}$ bezeichnet wird und die graue durchgängige Linie dargestellt wird. Eine Veränderung der Geometrie zieht veränderte Strukturverschiebungen $\mathbf{d}_{\Gamma,pert}^{(k)}$ nach sich. Die gestrichelte graue Linie stellt das resultierende FSI-Interface $\mathbf{x}_{\Gamma,pert}^{(k)} + \mathbf{d}_{\Gamma,pert}^{(k)}$ dar.

Angenommen, die Strukturverschiebung $\mathbf{d}_{\Gamma,pert}^{(k)}$ und damit die Position des FSI Interfaces $\mathbf{x}_{\Gamma,pert}^{(k)} + \mathbf{d}_{\Gamma,pert}^{(k)}$ sei bekannt, so würde zur Bestimmung von $\mathbf{q}_{pert}^{(k)} = \mathbf{f}_q(\mathbf{x}_{\Gamma,pert}^{(k)}, \mathbf{d}_{\Gamma,pert}^{(k)})$ nur eine einzige Strömungssimulation genügen. Zur Ermittlung der veränderten Strukturverschiebungen $\mathbf{d}_{pert}^{(k)}$ ist i.d.R. aber eine FSI-Analyse notwendig. $\mathbf{d}_{pert}^{(k)}$ lässt sich aber auch folgendermaßen über die Taylorreihe nähern:

$$\mathbf{d}_{\Gamma,pert}^{(k)} = \mathbf{d}_\Gamma^{(k)} + \frac{d\mathbf{d}_\Gamma}{ds_i} \varepsilon \tag{A.8}$$

Die Bestimmung von $\mathbf{x}_{\Gamma,pert}^{(k)}$ erfolgt über $\mathbf{x}_{\Gamma,pert}^{(k)} = \mathbf{x}_\Gamma(\mathbf{s} + \varepsilon \mathbf{e}_i)$ oder auch über die Taylorreihe mit $\mathbf{x}_{\Gamma,pert}^{(k)} = \mathbf{x}_\Gamma^{(k)} + \frac{d\mathbf{x}_\Gamma}{ds_i} \varepsilon$. Nun ist die Position des FSI-Interfaces ohne FSI-Analyse

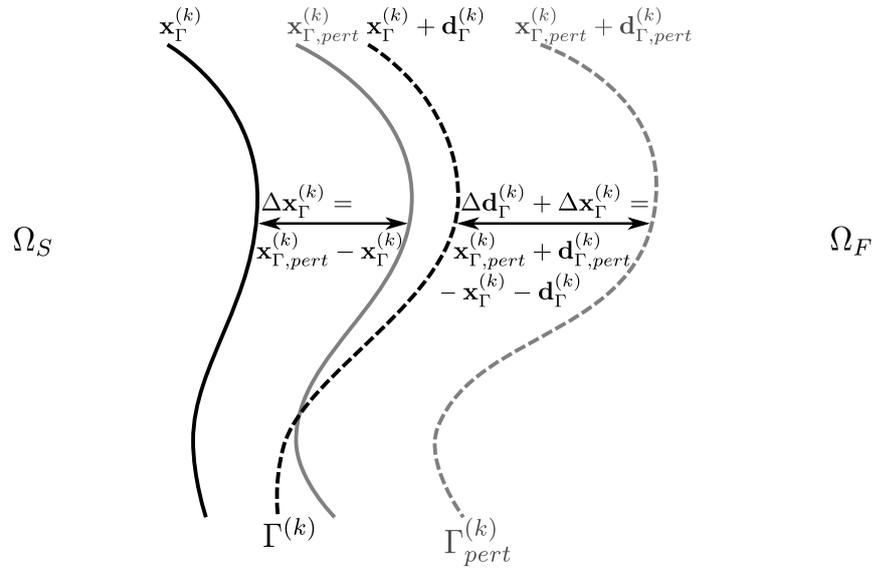


Abbildung A.2.: Unverformte und verformte Strukturgeometrie am FSI-Interface für den Optimierungsschritt k im Referenz- und perturbierten Zustand.

bekannt und $\mathbf{q}_{pert}^{(k)}$ kann durch eine reine Strömungssimulation ermittelt werden. Damit ergibt sich die gesuchte Systemableitung aus der finiten Differenz wie folgt:

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds_i}^{(k)} = \frac{\mathbf{q}_{pert}^{(k)} - \mathbf{q}^{(k)}}{\varepsilon} \quad (\text{A.9})$$

Es ist zu bemerken, dass es sich bei der obigen numerischen Lösung der kombinierten Sensitivitätsanalyse um einen iterativen Prozess handelt, der aus Gründen der Übersichtlichkeit hier unerwähnt bleibt. Dabei wird wiederholt nach $\frac{d\mathbf{d}}{ds_i}^{(k)}$ und $\frac{d\mathbf{q}}{ds_i}^{(k)}$ gelöst, bis die Konvergenzkriterien erfüllt sind.

Bisherige Titel der Schriftenreihe

Band Titel

- 1 Frank Koschnick, *Geometrische Lockingeffekte bei Finiten Elementen und ein allgemeines Konzept zu ihrer Vermeidung*, 2004.
- 2 Natalia Camprubi, *Design and Analysis in Shape Optimization of Shells*, 2004.
- 3 Bernhard Thomee, *Physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlfaserbetonkonstruktionen*, 2005.
- 4 Fernað Daoud, *Formoptimierung von Freiformschalen - Mathematische Algorithmen und Filtertechniken*, 2005.
- 5 Manfred Bischoff, *Models and Finite Elements for Thin-walled Structures*, 2005.
- 6 Alexander Hörmann, *Ermittlung optimierter Stabwerkmodelle auf Basis des Kraftflusses als Anwendung plattformunabhängiger Prozesskopplung*, 2006.
- 7 Roland Wüchner, *Mechanik und Numerik der Formfindung und Fluid-Struktur-Interaktion von Membrantragwerken*, 2006.
- 8 Florian Jurecka, *Robust Design Optimization Based on Metamodeling Techniques*, 2007.
- 9 Johannes Linhard, *Numerisch-mechanische Betrachtung des Entwurfsprozesses von Membrantragwerken*, 2009.
- 10 Alexander Kupzok, *Modeling the Interaction of Wind and Membrane Structures by Numerical Simulation*, 2009.

Band Titel

- 11 Bin Yang, *Modified Particle Swarm Optimizers and their Application to Robust Design and Structural Optimization*, 2009.
- 12 Michael Fleischer, *Absicherung der virtuellen Prozesskette für Folgeoperationen in der Umformtechnik*, 2009.
- 13 Amphon Jrusjrunkiat, *Nonlinear Analysis of Pneumatic Membranes - From Subgrid to Interface*, 2009.
- 14 Alexander Michalski, *Simulation leichter Flächentragwerke in einer numerisch generierten atmosphärischen Grenzschicht*, 2010.
- 15 Matthias Firl, *Optimal Shape Design of Shell Structures*, 2010.
- 16 Thomas Gallinger, *Effiziente Algorithmen zur partitionierten Lösung stark gekoppelter Probleme der Fluid-Struktur-Wechselwirkung*, 2011.
- 17 Josef Kiendl, *Isogeometric Analysis and Shape Optimal Design of Shell Structures*, 2011.
- 18 Joseph Jordan, *Effiziente Simulation großer Mauerwerksstrukturen mit diskreten Rissmodellen*, 2011.
- 19 Albrecht von Boetticher, *Flexible Hangmurenbarrieren: Eine numerische Modellierung des Tragwerks, der Hangmure und der Fluid-Struktur-Interaktion*, 2012.
- 20 Robert Schmidt, *Trimming, Mapping, and Optimization in Isogeometric Analysis of Shell Structures*, 2013.
- 21 Michael Fischer, *Finite Element Based Simulation, Design and Control of Piezoelectric and Lightweight Smart Structures*, 2013.
- 22 Falko Hartmut Dieringer, *Numerical Methods for the Design and Analysis for Tensile Structures*, 2014.

Band Titel

- 23 Rupert Fisch , *Code Verification of Partitioned FSI Environments for Light Weight Structures*, 2014.
- 24 Stefan Sicklinger , *Stabilized Co-Simulation of Coupled Problems including Fields and Signals*, 2014.
- 25 Majid Hojjat, *Node based parameterization for shape optimal design*, 2015.