

Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik
Technische Universität München

**Elektromagnetische Nahfeld- und Fernfeld-
Bildgebungsverfahren basierend auf hierarchischen
Felddarstellungen**

Georg Schnattinger

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Elektrotechnik und
Informationstechnik der Technischen Universität München
zur Erlangung
des akademischen Grades eines
- Doktor-Ingenieurs -
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. Bernhard Wolf

Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Thomas Eibert
2. Hon.-Prof. Dr.-Ing. habil. Helmut Süß

Die Dissertation wurde am 24.09.2014 bei der Technischen Universität München eingereicht
und durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik am 19.05.2015
angenommen.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als akademischer Mitarbeiter am Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik der Technischen Universität München. Mein herzlicher Dank gilt

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Thomas Eibert

für die Gelegenheit zur Durchführung meines Promotionsvorhabens. Seine ausgezeichnete fachliche Betreuung mit vielen konstruktiven und Ideen bringenden Diskussionen sowie die interessante und lehrreiche Zeit an seinem Lehrstuhl waren ausgezeichnete Rahmenbedingungen für die Durchführung der Forschungsarbeit. Sein persönlicher Einsatz dabei war außergewöhnlich. Hon.-Prof. Dr.-Ing. habil. Helmut Süß danke ich für die Mitwirkung als Prüfer der Dissertation. Seine umfassende Erfahrung als Radarexperte führten im Rahmen der Abschlusspräsentation zu hochinteressanten Gesprächen mit vielen bereichernden Gedanken und weiterführenden Ideen. Univ.-Prof. Dr. Bernhard Wolf danke ich für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Des weiteren gilt mein Dank allen ehemaligen Kolleginnen und Kollegen am Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik für das nette Umfeld. Im Speziellen bedanke ich mich

- bei Dipl.-Ing. Ole Neitz, Dipl.-Ing. Robert Brem und Dipl.-Ing. Michael Gruber für die Durchsicht des Manuskripts und die konstruktive Kritik,
- bei Dipl.-Ing. Raimund A. M. Mauermayer für die sehr motivierende und produktive Zusammenarbeit sowie die Bereitstellung von Messdaten,
- bei Dr.-Ing. Carsten H. Schmidt für seine Unterstützung beim Einstieg in mein Promotionssthema,
- bei Dr.-Ing. Dennis Schobert, M. Sc. Carlos Lopez, Prof. Dr.-Ing. Uwe Siart und Dr.-Ing. Oliver Wiedenmann für die Unterstützung bei meinen promotionsbegleitenden Aufgaben.

Ein besonders großes Dankeschön spreche ich meinen Eltern und meiner Frau aus. Sie haben mich immer unterstützt und so meine Arbeit erst möglich gemacht.

Inhaltsverzeichnis

Akronyme	v
Symbolverzeichnis	vii
Abstract	xv
Zusammenfassung	xvii
1 Einleitung	1
1.1 Ersatzquellen- und Streuzentrenverteilungen	1
1.2 Übersicht über existierende Algorithmen	4
1.2.1 Radarbildgebung	4
1.2.2 Inverse Quellenprobleme	6
1.3 Formulierung der Themenstellung	8
1.3.1 Rahmenbedingungen und Anforderungen	8
1.3.2 Einsatzmöglichkeiten und Vorteile	9
1.4 Aufbau und Ergebnisse der Arbeit	9
2 Das inverse Quellenproblem	13
2.1 Der Strahlungsoperator	13
2.1.1 Die Maxwell-Gleichungen	13
2.1.2 Die zeitharmonische Wellengleichung für das elektrische Feld	14
2.1.3 Lösung mit der Green'schen Funktion	15
2.2 Formulierung und Lösung des inversen Problems	15
2.2.1 Beobachtung der abgestrahlten Felder	16
2.2.2 Definition der Ersatzquellen	17
2.2.3 Eindeutigkeit der Problemstellung	17
2.2.4 Bestimmung der volumetrischen Ersatzquellen	20
3 Einheitliches Lösungskonzept für inverse Quellen- und Streuprobleme	23
3.1 Definition der elektromagnetischen Abbildungsvorschrift	23
3.1.1 Selbststrahlende Quellen	23
3.1.2 Streuung an unbekanntem Objekten	24
3.2 Vom Raumfrequenzspektrum zur räumlichen Verteilungsfunktion	27
3.3 Physikalische Interpretation des resultierenden Bildinhalts	28
3.3.1 Äquivalente Stromverteilungen	28
3.3.2 Dyadische Streuzentrenverteilungen	29
3.4 Analytische Lösungen der Punktantwortfunktion	34
3.4.1 Schmalbandige Kleinwinkelnäherung	37
3.4.2 Breitbandige Kleinwinkelnäherung	42
3.4.3 Monofrequente Vollkugellösung	45

3.4.4	Breitbandige Vollkugellösung	47
4	Hierarchisches Verfahren zur schnellen Bilderzeugung	51
4.1	Rekursive und spektrale Zerlegung des Bildes	51
4.1.1	Entwicklung des Bildinhalts in Spektren ebener Wellen	51
4.1.2	Rekursive Unterteilung des Bildinhalts	52
4.2	Diskretisierte Spektren ebener Wellen	54
4.2.1	Monofrequente und breitbandige Spektren	54
4.2.2	Sphärische Abtastkriterien	55
4.2.3	Interpolation im Ortsfrequenzbereich	56
4.3	Bilderzeugung	59
4.3.1	Aggregation und Disaggregation	59
4.3.2	Optimierung der Parameter	61
4.4	Komplexitätsanalyse	72
4.4.1	Direkte Bildberechnung	72
4.4.2	Hierarchische Bildberechnung	73
4.5	Vergleich mit anderen Verfahren	74
5	Rekonstruktion von Raumfrequenzspektren aus Beobachtungen	77
5.1	Ein Strahlungsoperator basierend auf hierarchischen Konzepten	78
5.1.1	Nahfeldeffekte	78
5.1.2	Messsonde	84
5.2	Ein lineares Modell des Streuproblems	85
5.2.1	Modellierung im Ortsbereich	85
5.2.2	Bistatische Streuvorgänge mit einer Einfallsrichtung	88
5.2.3	Monostatische Streuvorgänge	88
5.3	Konzepte zur Lösung des Rekonstruktionsproblems	94
5.3.1	Formulierung der Problemstellung als lineares Gleichungssystem	95
5.3.2	Approximative Lösung durch signalangepasstes Filter	97
6	Anwendungsbeispiele	101
6.1	Synthetische Szenarien basierend auf linearen Modellen	101
6.1.1	Dipole im Freiraum	101
6.1.2	Streuzentren im Freiraum	105
6.2	Realistische Szenarien mit Verkopplungen und Mehrfachinteraktionen	109
6.2.1	Breitbandiger Hornstrahler	109
6.2.2	Antennenanordnung mit drei Elementen	122
6.2.3	Perfekt leitender Streukörper	124
6.2.4	Trihedral	127
6.2.5	Dielektrisches Streuobjekt	132
6.2.6	Zweidimensionale Anordnung metallischer Platten	138
7	Schlussbetrachtung und Ausblick	143
A	Anhang	147
A.1	Analytische Integrale	147
A.1.1	Berechnung des Ausdrucks $\mathcal{F}\{w(k) \hat{k}\hat{k}\}$	147
A.1.2	Berechnung des Ausdrucks $\mathcal{F}\{W_n(k) (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k})\}$	148

A.2 Isotrope Punktstrahler und ihre bandbegrenzten Felder	150
A.3 FFT-basierte Inter- und Anterpolation	151
Referenzen	153
Eigene Veröffentlichungen	159
Betreute studentische Arbeiten	161

Akronyme

BIEM	Randintegralgleichungsverfahren (engl.: boundary integral equation method)
FAFFA	Schnelle Fernfeldapproximation (engl.: fast far-field approximation)
FEKO	Feldberechnung für Körper mit beliebiger Oberfläche (Software)
FFT	Schnelle Fouriertransformation (engl.: fast fourier transform)
FIAFTA	Schnelles Transformationsverfahren für unregelmäßige Antennenmessdaten (engl.: fast irregular antenna field transformation algorithm)
FMM	Schnelle Multipol-Methode (engl.: fast multipole method)
GFFT	Verallgemeinerte schnelle Fouriertransformation (engl.: generalized fast fourier transform)
GMRES	Iterativer Gleichungslöser (engl.: generalized minimal residual method)
ISAR	Inverses synthetisches Aperturradar (engl.: inverse synthetic aperture radar)
MATLAB	Matrix Laboratory (Software)
MF	Signalangepasstes Filter oder Optimalfilter (engl.: matched filter)
MLFMM	Schnelle mehrstufige Multipol-Methode (engl.: multi-level fast multipole method)
MoM	Momentenmethode (engl.: method of moments)
NFFT	Unregelmäßige schnelle Fouriertransformation (engl.: nonuniform fast fourier transform)
PEC	Idealer elektrischer Leiter (engl.: perfect electric conductor)
PO	Physikalische Optik
PWTD	Mehrstufige Zeitbereichs-FMM (engl.: plane wave time domain)

RCS	Radarstreuquerschnitt (engl.: radar cross section)
SAR	Radar mit synthetischer Apertur (engl.: synthetic aperture radar)
SNR	Signal-Rausch-Verhältnis (engl.: signal-to-noise ratio)
VSWR	Stehwellenverhältnis der Spannung (engl.: voltage standing wave ratio)

Symbolverzeichnis

Nomenklatur

$(\bullet)^*$	Konjugiert komplex
$(\bullet)^H$	Hermesch
$(\bullet)^T$	Transponiert
$(\bullet)^{-1}$	Invertiert
$*$	Faltungsprodukt
$\overset{\circ}{*}$	Skalarprodukt, bei dem die Multiplikationsterme durch Faltungsprodukte ersetzt wurden
$\overset{\circ}{*}_r$	Anwendung des Operators auf die Variable \mathbf{r}
$\left[\bullet \right]_a^b$	Differenz der an den angegebenen Integralgrenzen ausgewerteten Stammfunktion
\bullet_i	Die zugehörige Größe bezieht sich auf das einfallende Feld.
\bullet_m	Die zugehörige Größe bezieht sich auf die Beobachtung von direkt abgestrahlten Feldern.
\bullet_r	Die zugehörige Größe bezieht sich auf die Beobachtung von gestreuten Feldern.
\bullet_s	Die zugehörige Größe bezieht sich auf das gestreute Feld.
\bullet_t	Die zugehörige Größe bezieht sich auf die Erzeugung von Feldern.
\cdot	Skalarprodukt
$\nabla \cdot$	Divergenz
$\bar{\mathbf{A}}$	Dyade
$\hat{\mathbf{a}}$	Einheitsvektor zum Vektor \mathbf{a}
$[\]$	Gauß'sche Klammerfunktion
$\nabla \times$	Rotation
\times	Kreuzprodukt
\mathbf{a}	Vektor
$\mathbf{A}_{M \times N}$	Dimensionsangabe einer Matrix mit M Zeilen und N Spalten

a	Skalar, Länge des Vektors \mathbf{a}
a^ϕ	ϕ -Komponente des Vektors \mathbf{a}
a^θ	θ -Komponente des Vektors \mathbf{a}
a_{\parallel}	Kopolare Komponente des Vektors \mathbf{a}
a_{\perp}	Kreuzpolare Komponente des Vektors \mathbf{a}
a_{abs}	Norm des Vektors \mathbf{a}
a_x	x -Komponente des Vektors \mathbf{a}
a_y	y -Komponente des Vektors \mathbf{a}
a_z	z -Komponente des Vektors \mathbf{a}

Symbole und Ausdrücke

$\hat{\mathbf{J}}_N(\mathbf{r})$	Nichtstrahlender Anteil der berechneten elektrischen Stromdichte
$\hat{\mathbf{J}}_R(\mathbf{r})$	Strahlender Anteil der berechneten elektrischen Stromdichte
$\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{k}, \omega)$	Zeitharmonische elektrischen Stromdichte im Ortsfrequenzbereich
χ	Parameter zu Kontrolle der Diskretisierungsgenauigkeit
δ	Symbol der Dirac'schen Delta-Distribution
$\Delta\phi$	Azimutwinkelbereich des k -Raum-Sektors, Abtastintervall
$\Delta\theta$	Elevationswinkelbereich des k -Raum-Sektors, Abtastintervall
Δk	Wellenzahlbereich des k -Raum-Sektors, Abtastintervall
$\bar{\mathbf{O}}(\mathbf{r})$	Ortsabhängige dyadische Objektfunktion eines Streuobjekts
$\bar{\sigma}_{\text{PO}}(\mathbf{r}, \omega)$	Dyadische Leitfähigkeitsverteilung im Kontext der physikalischen Optik
$\bar{\mathbf{G}}_J^E(\dots)$	Dyadische Green'sche Funktion bezüglich des elektrischen Stroms und des elektrischen Feldes
$\bar{\mathbf{I}}$	Einheitsdyade
$\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{r})$	Berechnete Verteilung dyadischer Streuzentren
$\bar{\mathbf{R}}$	Dyadische Rotationsmatrix
$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{k})$	Dyadische Streuzentrenverteilung im Ortsfrequenzbereich
$\bar{\mathbf{s}}(\mathbf{r}, \omega)$	Dyadische Streuzentrenverteilung im Ortsbereich
$\bar{\mathbf{s}}_{\text{eq}}(\mathbf{r}, \omega)$	Äquivalente dyadische Streuzentrenverteilung im Ortsbereich
$\bar{\mathbf{V}}(\mathbf{k})$	Monostatisches Streuspektrum in dyadischer Form
$\text{erf}(x)$	Gauß'sche Fehlerfunktion, siehe (3.64)

$\eta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$	Definition in (5.31)
$\eta_S(\mathbf{k})$	Definition in (5.39)
e	Euler'sche Zahl (2, 71...)
\hat{n}	Normalenvektor
$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r})$	Berechnete elektrische Stromdichte
$\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{r})$	Berechnete vektorielle Streuzentrenverteilung
j	Imaginäre Einheit
λ	Wellenlänge
λ_{\min}	Kleinste Wellenlänge
\mathcal{F}	Symbol der Fouriertransformation nach der Definition in (3.53a)
\mathcal{F}^{-1}	Symbol der inversen Fouriertransformation nach der Definition in (3.53b)
$\mathbf{0}$	Nullmatrix / Nullvektor
\mathbf{A}	Koppelmatrix / Systemmatrix des inversen Problems
\mathbf{A}_A	Aggregationsmatrix
\mathbf{A}_D	Disaggregationsmatrix
\mathbf{A}_T	Translationsmatrix
\mathbf{B}	Signalangepasstes Filter in Matrix-Schreibweise
\mathbf{I}	Einheitsmatrix
μ	Magnetische Permeabilität
μ_0	Magnetische Permeabilität des Freiraums
∇	Differentialoperator Nabla
$O(\mathbf{r})$	Ortsabhängige skalare Objektfunktion eines Streuobjekts
ω	Kreisfrequenz
ϕ	Azimutwinkel im sphärischen Koordinatensystem
ϕ_0	Entwicklungspunkt des Azimutwinkels im k -Raum-Sektor
π	Kreiszahl (3, 14...)
$\bar{\mathbf{P}}_b(\mathbf{r})$	Dyadische Punktantwortfunktion für Streuszenarien mit einer Einfallsrichtung
$\bar{\mathbf{P}}_q(\mathbf{r})$	Dyadische Punktantwortfunktion für inverse Quellenprobleme
$\bar{\mathbf{P}}_m(\mathbf{r})$	Dyadische Punktantwortfunktion für monostatische Streuszenarien

$\Psi(\mathbf{k})$	Skalare Ersatzquellenverteilung im Ortsfrequenzbereich
$\psi(\mathbf{r})$	Skalare Ersatzquellenverteilung im Ortsbereich
$\rho(\mathbf{r}, t)$	Elektrische Raumladungsdichte
$S(\mathbf{k})$	Skalare Streuzentrenverteilung im Ortsfrequenzbereich
S_{HH}	Monostatischer Reflexionskoeffizient für horizontal einfallendes und horizontal gestreutes Feld
S_{HV}	Monostatischer Reflexionskoeffizient für vertikal einfallendes und horizontal gestreutes Feld
S_{VH}	Monostatischer Reflexionskoeffizient für horizontal einfallendes und vertikal gestreutes Feld
S_{VV}	Monostatischer Reflexionskoeffizient für vertikal einfallendes und vertikal gestreutes Feld
$\text{Si}(x)$	Integralfunktion basierend auf Spaltfunktion, siehe (3.82)
$\text{si}(x)$	Spaltfunktion, siehe (3.62)
σ	Elektrische Leitfähigkeit
$\text{Ei}(x)$	Exponentialintegralfunktion, siehe (3.73)
$\text{E}(x)$	Exponentialfunktion, siehe (3.72)
θ	Elevationswinkel im sphärischen Koordinatensystem
θ_0	Entwicklungspunkt des Elevationswinkels im k -Raum-Sektor
ε	Elektrische Permittivität
ε_0	Elektrische Permittivität des Freiraums
ε_r	Relative elektrische Permittivität
$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega)$	Zeitharmonische magnetische Flussdichte
$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$	Magnetische Flussdichte
\mathbf{b}	rechte Seite des inversen Problems
$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega)$	Zeitharmonische elektrische Flussdichte
$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t)$	Elektrische Flussdichte
$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$	Zeitharmonisches elektrisches Feld
$\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$	Elektrisches Feld
$\mathbf{E}_0(\mathbf{k})$	Elektrisches Feld am Ursprung des Koordinatensystems
$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$	Zeitharmonisches magnetisches Feld

$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$	Magnetisches Feld
$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega)$	Zeitharmonische elektrische Stromdichte
$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$	Elektrische Stromdichte
$\mathbf{J}_{\text{eq}}(\mathbf{r}, \omega)$	Äquivalente Stromverteilung
$\mathbf{J}_{\text{nonrad}}(\mathbf{r}, \omega)$	Nichtstrahlende Stromverteilung
$\mathbf{J}_{\text{PO}}(\mathbf{r}, \omega)$	Aus der physikalischen Optik resultierende Stromverteilung
$\mathbf{J}_t(\mathbf{r}, \omega)$	Äquivalente Stromverteilung der Sendeantenne
\mathbf{k}	Wellenvektor, Position im k -Raum
\mathbf{r}	Ortskoordinate
\mathbf{r}_b	Gruppenzentrum bei Unterteilung der Beobachtungen
\mathbf{r}_p	Gruppenzentrum bei Unterteilung des Streuobjekts
$\mathbf{r}_{1,\dots,8}^{(q)}$	Relative Position der untergeordneten Gruppenzentren
$\mathbf{V}(\mathbf{k})$	Spektrum ebener Wellen
$\mathbf{V}_s(\mathbf{k})$	Spektrum ebener Wellen des gestreuten Feldes bei einer Einfallrichtung
$\mathbf{W}(\mathbf{k})$	Sondengewichtungsfunktion im Ortsfrequenzraum
$\mathbf{w}(\mathbf{r}, \omega)$	Sondengewichtungsfunktion
$\mathbf{w}'(\mathbf{r}, \omega)$	Sondengewichtungsfunktion im Koordinatensystem der Sonde
\mathbf{x}	Vektor der Unbekannten des inversen Problems
$B^{(q)}$	Breite einer Box in Ebene q des hierarchischen Baums
c	Ausbreitungsgeschwindigkeit im Freiraum
D	Durchmesser der Minimalkugel des Quellbereichs oder Streuobjekts
D_x	Ausdehnung des Quellbereichs oder Streuobjekts in x -Richtung
D_y	Ausdehnung des Quellbereichs oder Streuobjekts in y -Richtung
D_z	Ausdehnung des Quellbereichs oder Streuobjekts in z -Richtung
f	Frequenz
$F_L(\dots)$	Sphärische Filterfunktion des Fernfelds, Definition in (5.48)
$F'_{L,L'}(\dots)$	Sphärische Filterfunktion des Nahfelds, Definition in (5.52)
$g(\dots)$	Skalare Green'sche Funktion
$h(\omega)$	Frequenzabhängige Gewichtungsfunktion zur Kompensation einer unerwünschten Frequenzabhängigkeit in den Streufelddaten

$h_l^{(2)}(x)$	Sphärische Hankelfunktion zweiter Art und l -ter Ordnung
k	Wellenzahl
k_0	Entwicklungspunkt der Wellenzahl im k -Raum-Sektor
k_{\max}	Obere Grenze der Wellenzahl im k -Raum-Sektor
k_{\min}	Untere Grenze der Wellenzahl im k -Raum-Sektor
K_x	Ausdehnung des k -Raum-Bereichs in x -Richtung
K_y	Ausdehnung des k -Raum-Bereichs in y -Richtung
K_z	Ausdehnung des k -Raum-Bereichs in z -Richtung
L	Multipolordnung
$M(\mathbf{k})$	Maskierungsfunktion definiert im k -Raum
$M_K(\mathbf{k})$	Maskierungsfunktion des k -Raum-Sektors K
N	Problemgröße, Anzahl der Unbekannten / Abtastpunkte
N_ϕ	Anzahl der Abtastpunkte in ϕ
n_ϕ	Ordnung eines Terms der Taylorentwicklung bezüglich ϕ
N_ϕ^{global}	Anzahl der Abtastpunkte in ϕ bei Verwendung eines globalen Interpolationsverfahrens
N_ϕ^{lokal}	Anzahl der Abtastpunkte in ϕ bei Verwendung eines lokalen Interpolationsverfahrens
N_θ	Anzahl der Abtastpunkte in θ
n_θ	Ordnung eines Terms der Taylorentwicklung bezüglich θ
N_θ^{global}	Anzahl der Abtastpunkte in θ bei Verwendung eines globalen Interpolationsverfahrens
N_θ^{lokal}	Anzahl der Abtastpunkte in θ bei Verwendung eines lokalen Interpolationsverfahrens
N_K	Anzahl der Abtastpunkte im k -Raum
N_k	Anzahl der Abtastpunkte in k
n_k	Ordnung eines Terms der Taylorentwicklung bezüglich k
N_l	Anzahl der Abtastpunkte pro Subspektrum auf Ebene l
$N_{\mathbf{r}}$	Anzahl der Abtastpunkte im Ortsbereich
O	Interpolationsordnung
O_k	Interpolationsordnung in Frequenzrichtung

$P(\mathbf{r})$	Skalare Punktantwortfunktion
P	Anzahl der Bereiche bei Unterteilung des Streuobjekts
$P_l(x)$	Legendre-Polynom der Ordnung l
r_{\max}	Radius der Minimalkugel
s	Überabtastungsfaktor
T_L	Translationsoperator
U	Spannungswert oder Beobachtung
V	Elektromagnetisch wirksames Volumen des Quellbereichs, des Streukörpers oder einer Sonde
$V_{\text{elektrisch}}$	Volumen des Quellbereichs oder des Streukörpers als elektrische Größe
$W(k)$	Breitbandige Maskierungsfunktion der Wellenzahl
$w(k)$	Schmalbandige Maskierungsfunktion der Wellenzahl
w_n	Quadraturgewicht zum Index n
Z_F	Feldwellenwiderstand
$C_{n_\phi, n_\theta, n_k}$	Koeffizienten einer multivariaten Taylorentwicklung

Abstract

This work deals with efficient numerical algorithms for the computation of inverse source and scattering representations from radiated or scattered fields. The electromagnetic fields originate from an unknown object which either radiates or scatters the fields. The necessary field observation data can be collected in many different ways. These include arbitrary measurement positions located in the far- or near-field using any completely characterized measurement probe.

This problem cannot be solved by using existing methods known in electromagnetic imaging or computational electromagnetics. For example, imaging algorithms for radar imaging or medical applications do not fully model polarimetric effects, and integral equation techniques are typically limited to monofrequent scenarios. In order to overcome these restrictions, a new approach needs to be developed.

The new approach is based on the principles of hierarchical field representations which feature simultaneous localization both in spatial and spectral domain. These principles originate from the multi-level fast multipole method (MLFMM) which is successfully applied in many areas. The hierarchical representation of fields allows to efficiently evaluate the fields at arbitrary locations in space. The underlying principles are applied to computing broadband and volumetric equivalent source or scattering representations. A procedure consisting of two processing steps is proposed. In the first step, a k -space representation of the data is recovered from the near-field observations while considering the characteristics of the probe. In the second step, the k -space representation is transformed into the spatial domain. In order to support physical insight and understanding of the resulting images, dyadic point spread functions are defined and analytically calculated.

The first step is equivalent to a fast near-field far-field transformation which is applicable to both radiated and scattered fields. However, transforming fully polarimetric, monostatic and monofrequent field observations based on a dyadic formulation is a completely novel approach. In the second step, spherically sampled k -space data is transformed into the spatial domain with high accuracy and efficiency by using broadband plane wave spectra.

The presented approach is analyzed using various numerical examples. These include electrically small and large scenarios with antennas and scattering targets. The data is generated synthetically, simulated with full wave simulation techniques or obtained directly from measurements. The results presented for all these scenarios confirm the promoted capabilities under various circumstances.

The techniques proposed in this work enable the computation of volumetric equivalent source and scattering representations with an exceptionally high level of flexibility and efficiency. Potential applications include the investigation of electromagnetic interference emissions, antenna diagnostics and remote sensing. Furthermore, novel and innovative measurement concepts are made possible due to the remarkable flexibility of the presented approach which is unprecedented in existing techniques.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der effizienten Berechnung von volumetrischen Ersatzquellen- und Streuzentrenverteilungen aus abgestrahlten beziehungsweise gestreuten Feldern. Die elektromagnetischen Felder werden dabei von einem unbekanntem Objekt erzeugt oder an diesem gestreut. Bei der Beobachtung der Felder gibt es viele Freiheiten. Erlaubt sind beliebige Messpositionen sowohl im Nah- als auch im Fernfeld. Außerdem gibt es keine Einschränkungen bei der Wahl der Sonde, solange eine vollständige Beschreibung der Sondencharakteristik vorliegt.

Die beschriebene Aufgabe lässt sich mit existierenden Verfahren der elektromagnetischen Bildgebung und numerischen Feldberechnung nicht bewerkstelligen. Abbildungsverfahren aus der Radar- und der Medizintechnik verzichten beispielsweise auf eine vollständige Modellierung polarimetrischer Effekte, und Integralgleichungsverfahren werden vorwiegend für monofrequente Problemstellungen eingesetzt. Um den Anforderungen gerecht zu werden, muss deshalb ein neues Verfahren entworfen werden.

Zentrales Element des vorgestellten Verfahrens sind die Prinzipien hierarchischer Felddarstellungen mit gleichzeitiger Lokalisierung im Orts- und Raumfrequenzbereich, welche durch die rasche Verbreitung der mehrstufigen schnellen Multipol-Methode (engl.: „multi-level fast multipole method“ - MLFMM) große Bedeutung erlangt haben. Diese Darstellungsform erlaubt eine äußerst effiziente Berechnung der Felder an beliebigen Punkten im Raum. In der vorliegenden Arbeit wurden diese Prinzipien erstmals auch für die Berechnung breitbandiger und volumetrischer Ersatzquellen- und Streuzentrenverteilungen eingesetzt. Dies ermöglicht die schnelle Berechnung von Ortsbereichsdarstellungen aus beliebigen Felddaten, indem die Nahfeldbeobachtungen unter Berücksichtigung des Sondereinflusses zuerst in den k -Raum umgerechnet werden und anschließend in den Ortsbereich transformiert werden. Zur besseren physikalischen Interpretation der Ortsbereichsdarstellungen wurden außerdem dyadische Punktantwortfunktionen definiert und analytisch berechnet.

Der erste Berechnungsschritt stellt damit eine schnelle Nahfeld-Fernfeld-Transformation dar, welche für abgestrahlte und gestreute Felder einsetzbar ist. Insbesondere die Transformation von voll polarimetrischen, monostatischen und monofrequenten Feldbeobachtungen, welche auf einer dyadischen Formulierung basiert, ist dabei ein Novum. Im zweiten Schritt wird der sphärisch abgetastete Datensatz im k -Raum in den Ortsbereich transformiert. Die Verwendung breitbandiger Spektren ebener Wellen sorgt dabei für eine ausgezeichnete Bildqualität bei hoher Effizienz.

Die Funktionalität des Verfahrens wird anhand verschiedener numerischer Beispiele untersucht. Berechnungen mit elektrisch kleinen und großen Szenarien, Antennen und Streukörpern sowie Testdaten, welche synthetisch generiert, durch numerische Vollwellensimulationen erzeugt oder direkt gemessen wurden, unterstreichen die Leistungsfähigkeit bei unterschiedlichsten Bedingungen.

Das vorgestellte Verfahren erlaubt die Berechnung von volumetrischen Ersatzquellen- und Streuzentrenverteilungen mit einem außerordentlich hohen Maß an Flexibilität und Effizienz. Potenzielle Anwendungsfelder sind neben der Untersuchung von elektromagnetischen Störaussendungen die Bereiche Antennendiagnostik und Fernerkundung. Außerdem ermöglicht die au-

ßergewöhnliche Flexibilität des Verfahrens neuartige und innovative Messkonzepte, die mit bisherigen Algorithmen bisher nicht umsetzbar waren.

1 Einleitung

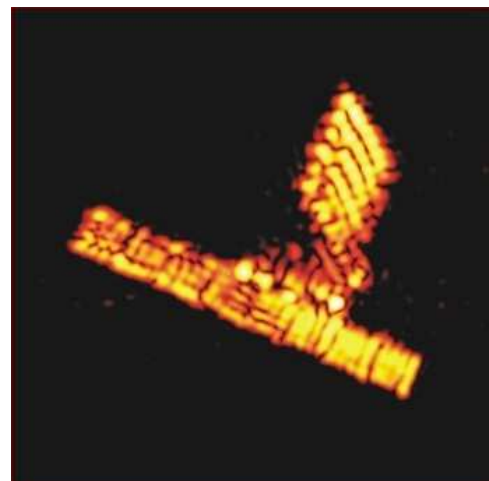
1.1 Ersatzquellen- und Streuzentrenverteilungen

Bei der elektromagnetischen Modellierung von Antennen und Streukörpern bedient man sich oft des Konzepts der äquivalenten Ersatzquellen beziehungsweise Streuzentren. Die elektromagnetischen Eigenschaften werden dabei durch entsprechende räumliche Verteilungsfunktionen beschrieben. Die Erzeugung dieser Ortsbereichsdarstellungen aus der Kenntnis der elektromagnetischen Felder erfordert üblicherweise einen hohen Rechenaufwand, der nur durch effiziente Algorithmen wirksam verringert werden kann. Im Folgenden werden einige Anwendungsszenarien gezeigt, welche die praktische Relevanz dieser Beschreibungsform verdeutlichen.

Radargestützte Abbildungsverfahren sind weit verbreitet und werden als Radar¹ mit synthetischer Apertur (SAR) oder als deren inverse Variante Inverses-SAR (ISAR) bezeichnet [Mensa 1990]. Eine mit dem ISAR-Prinzip erzeugte Streuzentrenverteilung ist in Abb. 1.1b dargestellt. Die Radarantenne einer Bodenstation nimmt einen vorbeifliegenden Satelliten ins Visier und zeichnet fortlaufend Daten auf. Die Bewegung des Satelliten relativ zur Bodenstation ermöglicht die Vermessung des Radarrückstreuquerschnitts aus unterschiedlichen Blickwinkeln. Durch eine intelligente Prozessierung der Daten erhält man die Streuzentrenverteilung im Radarbild. Die Darstellung ähnelt in diesem Fall dem optischen Erscheinungsbild des Satelliten in Abb. 1.1a. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die verwendeten Blickwinkel sich deutlich unterscheiden. Ausschlaggebend für das Aussehen des ISAR-Bildes sind jedoch ausschließlich die elektromagnetischen Eigenschaften.



(a) Foto

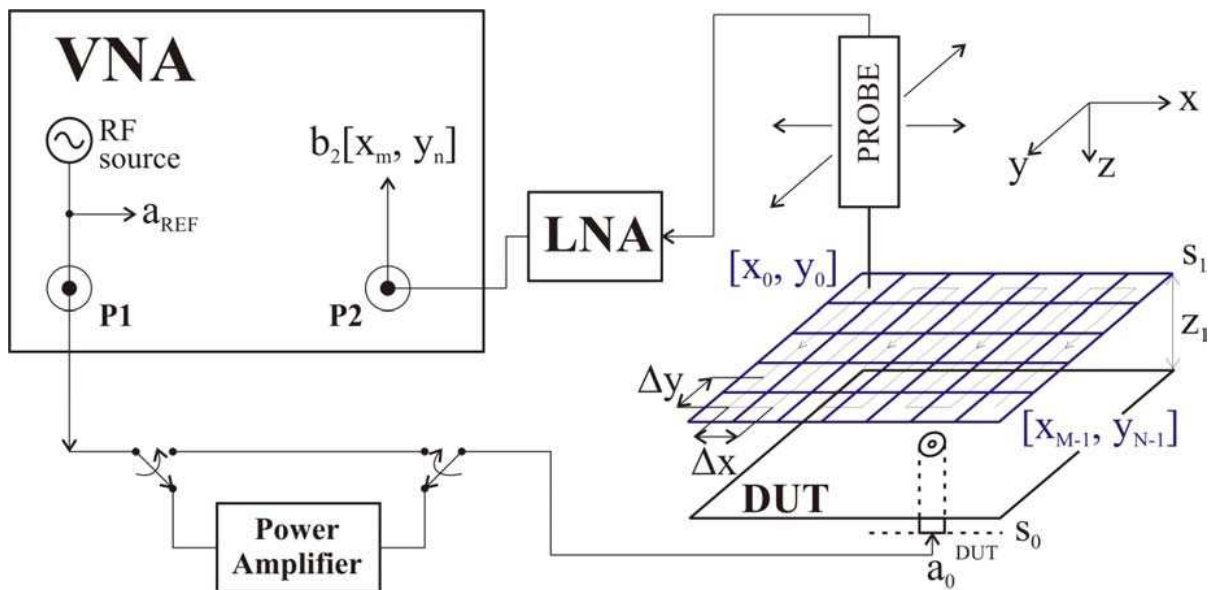


(b) ISAR-Bild

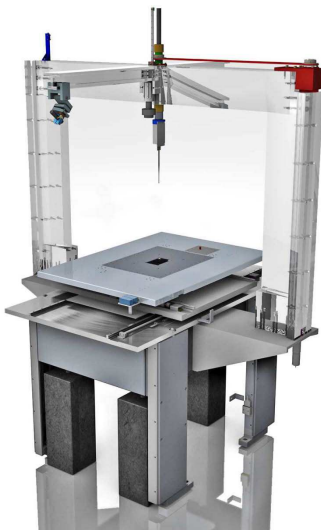
Abbildung 1.1: Optische und radargestützte Darstellungen eines Satelliten aus unterschiedlichen Blickwinkeln. Quelle: Magura [2002].

¹Radar setzt sich aus den Anfangsbuchstaben des Ausdrucks „radio detection and ranging“ zusammen.

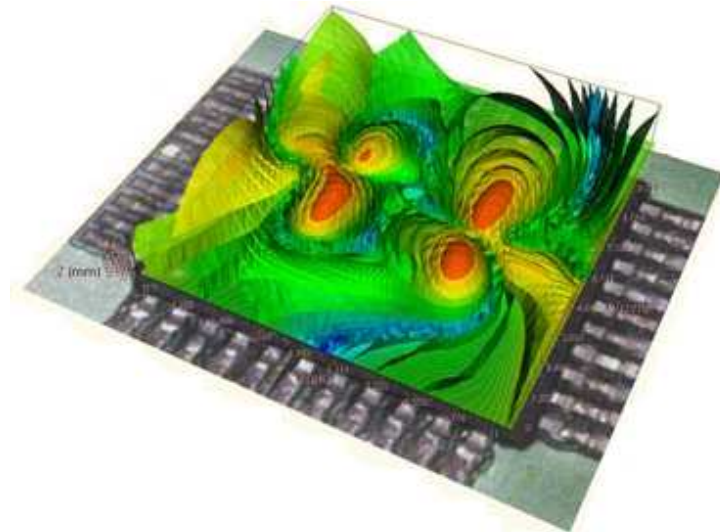
Eine andere Anwendung sind Nahfeldscanner für elektromagnetische Schaltungen [Hacker 2010; Koo et al. 2010; Kraz 1995]. Sie werden meist für Diagnosezwecke im Rahmen der elektromagnetischen Kompatibilität eingesetzt, um Ursache und Ursprung parasitärer Abstrahlungseffekte zu ermitteln. Abb. 1.2a zeigt schematisch den Aufbau eines Nahfeldscanners. Um genaue Ergebnisse zu erzielen, sollte der Messabstand zur Platinenoberfläche möglichst gering sein. Die aufgezeichneten Daten werden meist grafisch dargestellt, wie in Abb. 1.2c zu sehen. Eine visuelle Interpretation der Bilder hilft bei der Erkennung und Lokalisierung von potenziellen Funktionsstörungen.



(a) Schematische Darstellung [Tankielun et al. 2006] © 2006 IEEE



(b) Mechanischer Aufbau [Reinhold 2010]



(c) Beispielhafte Visualisierung von Nahfeldmessdaten [Hacker 2010]

Abbildung 1.2: Nahfeldscanner zur Vermessung von integrierten Schaltungen.

Antennen werden unter anderem vermessen, um ihre Richtcharakteristik zu ermitteln. Die dabei benötigten Nahfelddaten lassen sich auch für die Erzeugung einer äquivalenten Stromverteilung auf einer vorgegeben Hüllfläche nutzen [Eibert et al. 2010]. Abb. 1.3 zeigt eine Mobilfunk-Basisstationsantenne sowie die berechnete Ersatzdarstellung bestehend aus einer Oberflächenstromverteilung auf einem einhüllenden Körper. Der Farbverlauf entspricht den Absolutwerten der äquivalenten Ströme; die Amplitudenverteilung lässt Rückschlüsse auf das Innenleben der Antenne zu. Es ist erkennbar, dass eine Gruppenantenne verwendet wird, deren Elemente vertikal angeordnet sind. Die Abbildungsinformation kann wertvolle Hinweise zur Optimierung der Antenne liefern oder im Fehlerfall zu Diagnosezwecken genutzt werden, beispielsweise zur Lokalisierung eines defekten Gruppenelements.

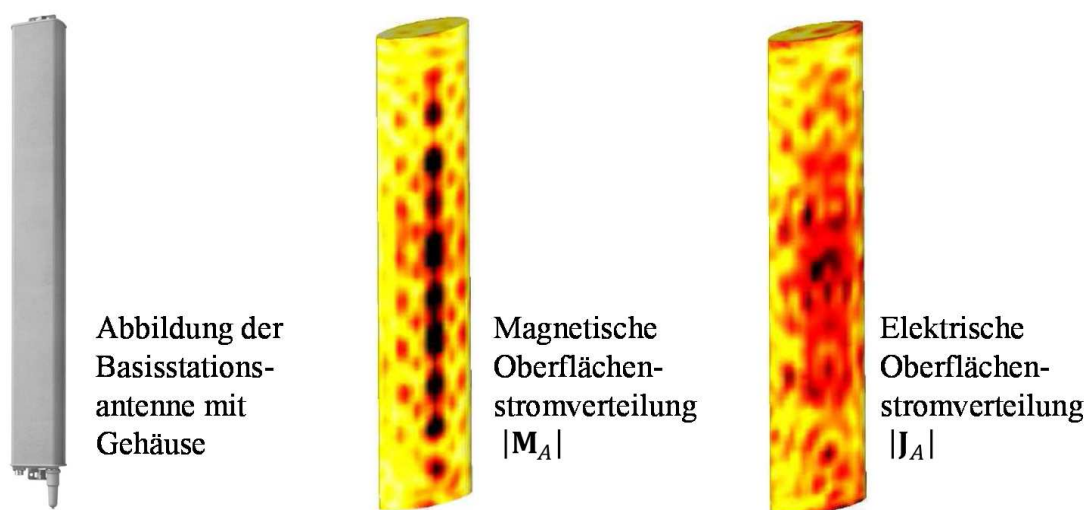


Abbildung 1.3: Berechnete Oberflächenstromverteilung für die Mobilfunk-Basisstationsantenne Kathrein 742 445. Quellen: Antenne siehe offizielles Produktdatenblatt [KATHREIN-Werke KG 2004]; Stromverteilung siehe [Eibert et al. 2010].

Äquivalente Ersatzquellen- und Streuzentrenverteilungen spielen nicht nur bei der Beschreibung von elektromagnetischen Phänomenen eine Rolle, sondern sie werden beispielsweise auch in der Akustik verwendet. In dieser Arbeit liegt der Fokus zwar auf der Bildgebung mit elektromagnetischen Feldern, jedoch weist die Ausbreitung von Schallwellen viele Parallelen zu der von elektromagnetischen Wellen auf. So wird in der optoakustischen Bildgebung menschlichem oder tierischem Gewebe durch kurze Laser-Impulse Energie zugeführt, was durch die thermoelektrische Ausdehnung zu messbaren Druckwellen führt. Werden die emittierten Felder an der Oberfläche des Gewebes mit geeigneten Ultraschalldetektoren aufgezeichnet, so kann ein Bild der äquivalenten akustischen Ersatzquellen erzeugt werden. Dieser Prozess ist in Abb. 1.4 dargestellt. Durch die Verwendung von Laserimpulsen unterschiedlicher Wellenlänge lässt sich so auch die Art des Gewebes unterscheiden. Eine ausführliche Beschreibung der Methode ist in [Ntziachristos und Razansky 2010] zu finden. Besonders interessant an diesem Bildgebungsverfahren ist, dass ähnlich wie in der hier vorliegenden Arbeit ein inverses Quellenproblem mit volumetrischer Quellenverteilung gelöst wird.

Die gezeigten Beispiele verdeutlichen, dass Ersatzquellen- und Streuzentrenverteilungen in verschiedenen Bereichen zur Anwendung kommen und zu einem wichtigen Instrument in den Bereichen Medizintechnik, Fernerkundung, Antennendiagnostik und bei der Untersuchung von elektromagnetischen Emissionen zählen. Die resultierenden Ortsbereichsdarstellungen liefern

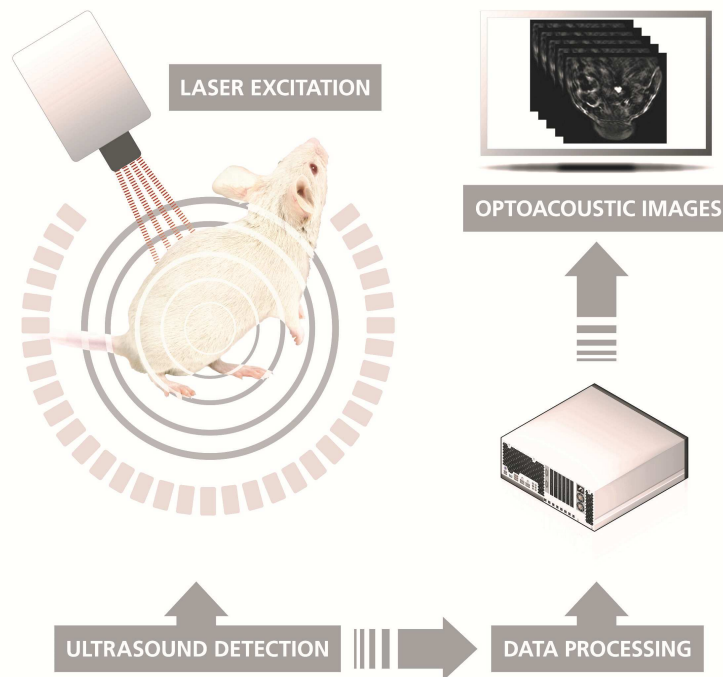


Abbildung 1.4: Prinzip der optoakustischen Bildgebung [iThera Medical GmbH 2015].

Hinweise auf die geometrische Form, die elektromagnetischen Materialeigenschaften oder die eingeprägte Stromverteilung des betrachteten Gegenstands.

1.2 Übersicht über existierende Algorithmen

Die klassischen Verfahren zur Berechnung von äquivalenten Ersatzquellen und Streuzentrenverteilungen sind den zwei Bereichen „Inverse Quellenprobleme“ und „Radarbildgebung“ zuzuordnen. Während die Berechnung von äquivalenten Ersatzquellen üblicherweise als Inversionsproblem verstanden wird, handelt es sich bei der Bestimmung von Streuzentrenverteilungen im Allgemeinen um klassische Verfahren der Radartechnik wie Filterung [Chambers et al. 2004], Kompression [Berizzi et al. 2001] oder Rückprojektion [Na et al. 2004]. Es bietet sich an, den historisch gewachsenen Stand der Technik in beiden Gebieten getrennt zu erörtern, da die jeweiligen Forschungsaktivitäten in der Vergangenheit weitestgehend unabhängig voneinander stattgefunden haben.

1.2.1 Radarbildgebung

Die Notwendigkeit von leistungsfähigen algorithmischen Konzepten in der Radarbildgebung folgt aus dem Bestreben, die Auflösung der Bilder zu erhöhen und die für die Erzeugung benötigte Zeit zu verringern. Dies folgt aus den zugrunde liegenden physikalischen Gesetzmäßigkeiten, welche in [Mensa 1990] ausführlich beschrieben werden. Die Erzeugung von Radarbildern erfordert im einfachsten Fall ein mechanisches Schwenken der Antenne. Bei der Fokussierung ist

man so auf die Richtcharakteristik der Antenne angewiesen, welche damit auch die Auflösung entlang der Azimutwinkelachse bestimmt. In Entfernungsrichtung ist das Auflösungsvermögen von der räumlichen Schärfe der gepulsten Signale abhängig, welche zugleich der zeitlichen Dauer der Impulse entsprechen.

Erst durch eine geeignete Nachverarbeitung der Messwerte kann man diese physikalischen Grenzen umgehen. Beim sogenannten „range processing“ werden Einzelmessungen bei unterschiedlichen Frequenzen rechnerisch zu einem synthetischen Radarimpuls zusammengefasst, um die Entfernungsauflösung zu verbessern. Durch dieses algorithmische Konzept ist nicht mehr die Impulsbreite die limitierende Größe bei der Auflösung, sondern die kombinierte Bandbreite aller Einzelmessungen.

Um einen ähnlichen Effekt bei der Azimutwinkelauflösung zu erzielen, wird das Konzept des synthetischen Aperturradars (SAR) genutzt. Durch die rechnerische Kombination von vielen Einzelmessungen an unterschiedlichen Positionen kann man den Effekt einer sehr großen Antenne mit großer Richtwirkung synthetisieren. Damit ist die Auflösung nur von der Anzahl der Messungen und der Signalverarbeitung abhängig und nicht von den Eigenschaften des verwendeten Radars. Diese algorithmischen Konzepte bilden die Grundlage für fast alle modernen Abbildungssysteme auf Radarbasis.

Ein Kriterium bei der Einordnung der Algorithmen zur Erzeugung von Radarbildern ist, ob die Berechnung der Signale im Orts- oder Spektralbereich erfolgt. Analog wird zwischen Zeit- und Frequenzbereich unterschieden. Im einfachsten Fall werden die Radarsignale durch eine kohärente Fokussierung im Ortsbereich überlagert [Broquetas et al. 1998; Vaupel und Eibert 2006]. Dieser Berechnungsschritt kann auch als signalangepasste Filterung (MF^2) im Zeit- und Ortsbereich aufgefasst werden. Diese Vorgehensweise erlaubt zwar die Berücksichtigung aller systemrelevanten Einflüsse; sie ist jedoch zugleich mit einem sehr hohen Berechnungsaufwand verbunden. Da bei Problemstellungen in der Praxis oft elektrisch große Objekte vorliegen und idealerweise eine echtzeitfähige Darstellung der Bilder gewünscht ist, sind effiziente Algorithmen zur Bilderzeugung von großem Interesse.

Die sogenannten direkten Fouriermethoden nehmen zuerst eine Interpolation der Daten in den k -Raum vor, um anschließend mit einer mehrdimensionalen schnellen Fouriertransformation (FFT) in einem Schritt das Bild zu berechnen [Desai und Jenkins 1992; Sarty et al. 2001]. Man spricht deshalb von Spektralbereichsverfahren. Wie in [Pan und Kak 1983] berichtet, hat der zugrunde liegende Interpolationsschritt oft negative Auswirkungen auf die Bildqualität.³

Die im Rahmen von Tomografieanwendungen entstandenen Rückprojektionsverfahren [Desai und Jenkins 1992; Mensa 1990] besitzen diesen Nachteil nicht. Mit [Yegulalp 1999] und [Bresler und Brokish 2004] gibt es auch einstufige beziehungsweise hierarchische Erweiterungen der Rückprojektionsverfahren, die im besten Fall die Komplexität der Algorithmen auf das Niveau der FFT-Methoden absenken. In diesem Fall müssen die Beobachtungen auf einem regelmäßigen Gitter vorliegen. Der Nachteil von Tomografieverfahren ist, dass sich Nahfeldeffekte und Sondereinflüsse prinzipbedingt nur schwer berücksichtigen lassen [Turbell 2001].

Während die hierarchische Rückprojektion auf einer Unterteilung des Ortsbereichs basiert, liegt dem Verfahren in [Boag 2001] eine hierarchische Unterteilung des Spektralbereichs zugrunde, welcher die monostatischen Nahfeldbeobachtungen des Radars enthält. Die hierarchische Unterteilung erlaubt auch hier eine Unterabtastung des zugehörigen Fourierraums, in diesem Fall des Ortsbereichs. Das resultierende Verfahren erlaubt eine effiziente Berechnung der Bilder

²Diese gebräuchliche Abkürzung entspricht dem englischen Ausdruck „matched filter“.

³Problematisch ist hier vor allem die Interpolation in Frequenzrichtung, welche üblicherweise die größten Fehler verursacht.

aus beliebig positionierten Nahfeldmessdaten. Bei elektrisch großen Radarantennen ist wegen der starken Unterabtastung im Ortsbereich allerdings mit Artefakten im Bild zu rechnen.

Alle bisher diskutierten Verfahren basieren auf einer getrennten Prozessierung der vier Polarisationskomponenten HH, VV, HV und VH. Beliebige Beobachtungen, welche sich einer einzigen Polarisationskomponente nicht klar zuordnen lassen, können nicht berücksichtigt werden. Dazu wäre ein voll polarimetrisches Bilderzeugungsverfahren erforderlich. Obwohl beispielsweise Cown und Ryan [1989] ein voll polarimetrisches Modell der Streuvorgänge beschreiben, wird eine derartige Formulierung in der Radarbildgebung nicht eingesetzt.

Eine weitere Einschränkung bestehender Bildgebungsverfahren ist auf das Fokussierungsprinzip zurückzuführen. Zwar erlaubt die kohärente Überlagerung nach dem MF-Prinzip eine schnelle und bezüglich der Rauschunterdrückung günstige Verarbeitung der Messwerte, doch in manchen Fällen würde eine Inversion des Vorwärtsoperators des Streuproblems zu einer besseren Lösung führen. Dies ist beispielsweise dann zu erwarten, wenn Vorwissen über die Form des Streukörpers eingebracht werden kann oder die Antennencharakteristik des Radars ungünstige Verkopplungen beinhaltet. Ein Prinzip, welches sich dieses Potenzial zu Nutze macht und in den letzten Jahren zunehmend Einzug in die Radarbildgebung erhalten hat, ist „compressive sensing“ [Baraniuk und Steeghs 2007]. Dabei wird ausgenutzt, dass sich die Lösung in einer bestimmten Basisdarstellung durch einen schwach besetzten Vektor darstellen lässt. Das Auflösungsvermögen der so berechneten Streuzentrenverteilung ist normalerweise höher als bei konventionellen Verfahren, vorausgesetzt, die getroffenen Annahmen über die Struktur der Lösung sind zutreffend. Andernfalls können die Verfahren instabil werden, was falsche Ergebnisse zur Folge hat. Insgesamt haben Ansätze, bei denen ein Radarbild durch Lösung eines Inversionsproblems gewonnen wird, viele Vorteile. In der Praxis sind sie bis heute jedoch kaum verbreitet, da zum einen die Gewährleistung einer hohen Zuverlässigkeit in vielen Fällen schwierig ist und zum anderen ein hoher Rechenaufwand bewältigt werden muss.

Wie in [Bhalla und Ling 1993] gezeigt wird, ist eine Interpretation der berechneten Streuzentrenverteilungen mit den Annahmen der physikalischen Optik möglich. Buddendick und Eibert [2011] haben darauf basierend eine erweiterte Formulierung entworfen, welche dem Streuobjekt eine äquivalente Volumenstromverteilung zuordnet. Das Bild wird als Faltung dieser Volumenstromverteilung mit einer Punktantwortfunktion begriffen und lässt sich deshalb in Kombination mit einem strahlbasierten Simulationsverfahren ohne Kenntnis der gestreuten Felder aus der Geometrie des Streukörpers berechnen. Außerdem wird gezeigt, dass die äquivalenten Volumenstromverteilungen auch auf inverse Quellenprobleme anwendbar sind, welche im folgenden Abschnitt diskutiert werden.

1.2.2 Inverse Quellenprobleme

Bei den gebräuchlichsten Algorithmen zur Berechnung von Streuzentrenverteilungen wird die Lösung der Problemstellung durch eine Fokussierung bewerkstelligt, bei der eine phasenrichtige Überlagerung der Messwerte erforderlich ist. Im Gegensatz dazu wird die Bestimmung von äquivalenten Stromverteilungen in der Regel als inverses Quellenproblem verstanden. Dabei treten zwei Probleme auf: Zum einen ist der Berechnungsaufwand zur Lösung eines inversen Problems im Vergleich zu typischen Bildgebungsverfahren relativ hoch und zum anderen ist die Problemstellung nicht eindeutig. Letzteres bedeutet, dass die vollständige Kenntnis der abgestrahlten Felder in einem breitem Frequenzband keine eindeutige Zuordnung von volumetrischen Quellen erlaubt [Bleistein und Cohen 1977]. Wie in [Devaney und Sherman 1982] gezeigt, ist dies selbst für radial symmetrische Volumenstromverteilungen nicht möglich. Ein wichtiges Konzept zum Verständnis dieser Tatsache sind nichtstrahlende Stromverteilungen [Gragani und

Mendez 2010; Marangeo und Ziolkowski 2000]. Daraus folgt, dass Uneindeutigkeiten bei der Rekonstruktion nur durch zusätzliche Bedingungen an die Quellenverteilung vermieden werden können [Porter und Devaney 1982].

Wie bereits erwähnt, basiert die optoakustische Bildgebung auf der Lösung eines inversen Quellenproblems mit volumetrischen Quellen. Auch hier ist daher mit einem Eindeutigkeitsproblem zu rechnen. Da das Prinzip in der Praxis erfolgreich eingesetzt wird, stellt sich die Frage, wie dieses Problem gelöst wurde. Bei einer Analyse der zugrunde liegenden Gleichungen zeigt sich, dass es zwei wichtige Unterschiede gibt. Zum einen handelt es sich hier um ein skalares Feldproblem und zum anderen lässt der verwendete Laserimpuls die Annahme zu, dass alle Quellen impulsartig und synchron angeregt werden [Rosenthal et al. 2010]. Damit sind nichtstrahlende Quellenverteilungen nicht existent und im einfachsten Fall kann das auf dem MF-Prinzip basierende Rückprojektionsverfahren zur Berechnung der Abbildungen verwendet werden. Diese Vorgehensweise berücksichtigt weder die Abschwächung des Laserlichts mit der Eindringtiefe noch den Einfluss von Inhomogenitäten bei der Ausbreitung der Schallwellen. Die Modellierung dieser Effekte durch einen geeigneten Vorwärtsoperator ist zwar möglich, sie führt jedoch auch auf ein deutlich komplexeres inverses Problem, dessen Lösung mit einem vergleichsweise hohen Rechenaufwand verbunden ist.

Da die Lösung inverser Quellenprobleme im Allgemeinen sehr aufwändig sein kann, sind effiziente Algorithmen besonders wichtig. Dabei gibt es zwei Ansätze. Zum einen wird versucht, das Problem mittels eines effizienten Vorwärtsoperators iterativ zu lösen [Álvarez et al. 2010]; zum anderen wird der Ansatz verfolgt, die Lösung mit einem geeigneten Filter direkt zu ermitteln [Álvarez et al. 2011]. Letzteres ähnelt dem MF-Prinzip in der Radarbildgebung, welches sich durch seine Robustheit gegenüber Rauscheinflüssen auszeichnet [Park und Kim 2010]. Wird stattdessen die vollständige Inversion des Vorwärtsoperators angestrebt, so wirkt sich Rauschen typischerweise nachteilig auf die Konvergenz und Stabilität des Verfahrens aus, was unter Umständen eine Regularisierung erforderlich macht [Engl et al. 1996]. Bei Verwendung eines iterativen Verfahrens kann der vorzeitige Abbruch bei Erreichung des Fehlerkriteriums als Regularisierung begriffen werden [Calvetti et al. 2002].

Bei iterativen Verfahren liegt die Hauptschwierigkeit in der effizienten und genauen Auswertung des Vorwärtsoperators. Für Volumenstromverteilungen erweist sich dies als besonders aufwändig, da hier eine deutlich höhere Anzahl an Unbekannten vorliegt. Der Beitrag in [Álvarez et al. 2010] basiert auf einer unbeschleunigten Momentenmethode (MoM) [Harrington 1993], welche für elektrisch große Probleme sehr aufwändig ist. In [Álvarez et al. 2011] verzichten die Autoren auf eine exakte Inversion des Vorwärtsoperators, indem sie Methoden der Radarbildgebung einsetzen. Leistungsfähige und universell einsetzbare Algorithmen zur effizienten Auswertung des Vorwärtsoperators findet man bei der elektromagnetischen Vollwellensimulation. Dort sind solche Eigenschaften durch die große Bandbreite an möglichen Einsatzszenarien besonders gefragt. Randintegralmethoden (BIEM) bieten eine hohe Effizienz, da in vielen Fällen eine Diskretisierung von Oberflächen ausreichend ist, um die Lösung für dreidimensionale, abschnittsweise homogene Simulationsgebiete zu beschreiben. Ein sehr verbreitetes Verfahren zur Lösung von Integralgleichungen ist die Momentenmethode (MoM). Um die Komplexität des Verfahrens zu reduzieren, wird die MoM-Formulierung oft mit einem Beschleunigungsverfahren wie der mehrstufigen schnellen Multipolmethode (MLFMM) [Chew et al. 2001] kombiniert. Die Rechenschritte in der MLFMM können auf anschauliche Art und Weise erklärt werden, was in der Vergangenheit bereits den Entwurf von neuartigen Verfahren begünstigt hat. Beispielsweise ist so ein Verfahren zur schnellen Berechnung von äquivalenten Stromverteilungen auf der Hüllfläche eines unbekanntes Objekts entstanden [Eibert et al. 2010]. Diese äquivalenten Quellen lassen sich anschließend zur Fernfeldberechnung oder für Diagnoseanwendungen einsetzen.

Als Eingangsdaten dienen dabei komplexwertige Messdaten, die aus Beobachtungen von Nah- oder Fernfeldern an beliebigen Positionen gewonnen werden. Auch die Sondencharakteristik wird dabei korrekt berücksichtigt. Für die Fernfeldberechnung lässt sich dieses Verfahren noch effizienter gestalten, indem man als Quellendarstellung keine Ströme mehr verwendet, sondern direkt mit sphärischen Moden oder ebenen Wellen arbeitet [Schmidt et al. 2008; Eibert et al. 2013]. Dies hat im Allgemeinen keinen nachteiligen Effekt auf die Genauigkeit des Algorithmus [Qureshi et al. 2013b]. Vorwissen über die Form der unbekanntes Antenne lässt sich durch die hierarchische Struktur des Algorithmus einfach einbringen [Schmidt und Eibert 2012], und auch der Fehlereinfluss durch beschränkte Beobachtungsgebiete (engl. „truncation error“) wird wirkungsvoll unterdrückt [Schmidt und Eibert 2010]. Ferner lässt sich das Instrumentarium der MLFMM, wie in [Yinusa und Eibert 2013] beschrieben, auch für die Echounterdrückung nutzen. So zählt die MLFMM nicht ohne Grund zu den zehn wichtigsten Algorithmen des 20. Jahrhunderts [Cipra 2000].

1.3 Formulierung der Themenstellung

Ziel dieser Arbeit ist die Konzeption eines universellen Verfahrens zur Berechnung von volumetrischen Ersatzquellen- und Streuzentrenverteilungen aus elektromagnetischen Feldern, welche durch ein unbekanntes Objekt erzeugt oder gestreut werden. Im Gegensatz zu bereits bestehenden Ansätzen sollen die Lösungen der zugrunde liegenden inversen Quellen- und Streuprobleme durch einen einheitlichen Formalismus ermittelt werden. Besonders im Fokus steht dabei eine hohe Flexibilität und Effizienz.

Die Realisierung des neuartigen Berechnungsverfahrens soll mittels hierarchischer Felddarstellungen bewerkstelligt werden, welche sich in vielen anderen Bereichen bereits durchgesetzt haben. Die Berechnung von volumetrischen Ersatzquellen- und Streuzentrenverteilungen auf Basis der MLFMM-Prinzipien wurde bisher nicht untersucht. Hierarchische Felddarstellungen erlauben eine besonders effiziente Auswertung der Feldwerte an beliebigen Positionen und ermöglichen deshalb einen sehr flexiblen Algorithmus.

1.3.1 Rahmenbedingungen und Anforderungen

Die Anforderungen an ein Verfahren zur Berechnung von Ersatzquellen- und Streuzentrenverteilungen hängen vom Anwendungsfall ab. Es muss beispielsweise berücksichtigt werden, welche Daten vorliegen und unter welchen Umständen sie gemessen wurden. Um ein möglichst breites Feld an Einsatzmöglichkeiten abzudecken, wird ein umfangreiches Anforderungsprofil erstellt. Die daraus resultierende Spezifikation repräsentiert eine Idealvorstellung, die vielleicht nicht in allen Punkten umgesetzt werden kann.

Das angestrebte Verfahren soll die Berechnung von räumlichen Ersatzquellen- oder Streuzentrenverteilungen aus beliebigen elektromagnetischen Feldbeobachtungen mit hoher Genauigkeit und Effizienz ermöglichen. Polarimetrische Effekte sollen dabei korrekt berücksichtigt werden. Wichtig ist, dass die elektromagnetischen Felder ihren Ursprung in einem begrenztem Gebiet haben. Dies ist erfüllt, wenn die Strahlung in diesem Gebiet erzeugt oder gestreut wird. Im ersten Fall spricht man üblicherweise von einer Antenne, im zweiten Fall von einem Streukörper. Bei einem Streuobjekt erfolgt die Anregung durch ein einfallendes Feld. Bei der Vermessung muss sich das Objekt außerdem in einer hinsichtlich ihrer Ausbreitungseigenschaften möglichst gut bekannten Umgebung befinden, welche die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen nicht verhindert.

Die Messpositionen können beliebig im Nah- oder Fernfeld verteilt sein. Zusätzlich sollen die Sondereinflüsse korrekt berücksichtigt werden. Die breitbandigen Beobachtungen im Frequenz- oder Zeitbereich können entweder mit Betrag und Phase oder auch als phasenlose Amplitudenwerte vorliegen.

Erstrebenswert ist außerdem eine große Robustheit gegenüber möglichst vielen Fehlereinflüssen. Zum einen sollen Artefakte, die durch die Eingrenzung der Beobachtungen auf einen kleinen Betrachtungswinkelbereich verursacht werden, idealerweise eliminiert werden. Zum anderen sollen Reflexionen in der Messumgebung in den Ergebnissen kompensiert werden.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist die Berücksichtigung von „a priori“-Wissen. Dazu zählen: Vorwissen über die Herkunft der Echos, die geometrische Form der abzubildenden Gegenstände, bekannte Materialeigenschaften, empirische Erfahrungswerte, Simulationsergebnisse oder allgemeine Informationen zur Struktur der Lösung.

1.3.2 Einsatzmöglichkeiten und Vorteile

Die Realisierung eines Verfahrens mit den im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Eigenschaften würde ein bis jetzt nicht dagewesenes Maß an Flexibilität bei der Berechnung von Ersatzquellen- und Streuzentrenverteilungen bieten und ließe sich auf viele Problemstellungen anwenden. Bei der Nahfeld-Fernfeld-Transformation von Antennenmessungen wurde das Potenzial eines neuartigen Verfahrens mit ähnlichen Eigenschaften bereits aufgezeigt.

Im Gegensatz zu vielen bestehenden Algorithmen sollen sich kurze Rechenzeiten und hohe Genauigkeiten bei der Berechnung von äquivalenten Ersatzquellen- oder Streuzentrenverteilungen nicht mehr länger gegenseitig ausschließen. So könnte die vollständige Berücksichtigung von Polarisationsinflüssen und Nahfeldeffekten in manchen Anwendungsfällen zu besseren Ergebnissen führen. Das angestrebte universelle Verfahren bietet zudem mehr Freiheiten bei der Auslegung von neuen Systemen. Beispielsweise könnten aufwändige Hardware-basierte Maßnahmen zur Kompensation von Positionierungsfehlern verringert werden oder sogar entfallen [Fordham et al. 2012; Fritzel et al. 2013]. Auch bei der Wahl der Sonden gibt es mehr Freiheitsgrade, da anders als in bestehenden Algorithmen keine symmetrische Sonde vorausgesetzt wird [Yaghjian 1986; Hald et al. 1988, S.126]. Dank Software-basierter Echounterdrückung kann eine schwächere Reflexionsdämpfung der Messumgebung toleriert werden, um effektiv die gleiche Performance zu erreichen [Yinusa und Eibert 2013]. Alle diese Beispiele zeigen, dass es vielversprechend ist, wichtige Elemente oder Funktionen des Messsystems, die heutzutage in Hardware implementiert sind, teilweise oder vollständig durch algorithmische Konzepte zu ersetzen. Die steigende Verfügbarkeit von Rechenleistung zu immer geringeren Preisen macht den Einsatz komplexerer Algorithmen erst möglich.

Doch nicht nur bestehende Konzepte profitieren von diesen Vorteilen. Die gebotene Flexibilität kann auch dazu genutzt werden, neue Ansätze so wie das in [Fritzel et al. 2013] vorgestellte portable Antennenmesssystem zu verfolgen. Mit bis dato bestehenden Verfahren wäre dies schwierig umsetzbar und ineffizient.

1.4 Aufbau und Ergebnisse der Arbeit

Das neuartige Verfahren zur Berechnung von Ersatzquellen- und Streuzentrenverteilungen wird schrittweise eingeführt. Zunächst wird ein inverses Problem formuliert und diskutiert. Die Lösung wird durch die Verwendung hierarchischer Felddarstellungen ermittelt. Um praxisrelevante Einflussfaktoren bei der Vermessung der Felder berücksichtigen zu können, wird die Formulierung erweitert. Außerdem werden die theoretischen Betrachtungen durch numerische Rechen-

beispiele ergänzt. In den nächsten Absätzen folgt eine detaillierte Zuordnung der Inhalte zu den einzelnen Kapiteln.

Kap. 2 definiert die Berechnung von volumetrischen Ersatzquellen als inverses Problem. Zur mathematischen Formulierung werden Grundlagen der elektromagnetischen Feldtheorie eingeführt. Aufbauend auf den Maxwell'schen Gleichungen wird die Wellengleichung für das elektrische Feld abgeleitet. Diese lässt sich unter Zuhilfenahme der Green'schen Funktionen mit einem Faltungsintegral lösen, welches zur Definition des inversen Problems herangezogen wird. Im letzten Teil des Kapitels wird untersucht, in welchen Fällen das inverse Problem eine eindeutige Lösung besitzt. Eine Anforderung ist die Verwendung einer frequenzunabhängigen Ersatzquellenverteilung. Zusätzlich werden nichtstrahlende Ersatzquellen durch eine Nebenbedingung unterdrückt. Die Berechnung der volumetrischen Ortsbereichsdarstellungen erfolgt im weiteren Verlauf der Arbeit immer auf Basis dieser Definitionen.

Im dritten Kapitel werden drei unterschiedliche Szenarien eingeführt: inverse Quellenprobleme sowie mono- und bistatische Streuprobleme. Die Forderung einer einheitlichen Darstellung der Zusammenhänge für alle drei Fälle führt zur Definition von vektoriellen und dyadischen Ersatzquellen- und Streuzentrenverteilungen, wobei die notwendigen Kriterien für eine eindeutige Lösung aus Kap. 2 berücksichtigt werden. Im Anschluss werden jeweils physikalische Interpretationsmöglichkeiten für die resultierenden Verteilungsfunktionen vorgestellt. Die dabei definierten Punktantwortfunktionen charakterisieren die Leistungsfähigkeit des Abbildungsprozesses. Wo es möglich ist, werden analytische Lösungen dieser Punktantwortfunktionen abgeleitet. Die resultierenden Ausdrücke liefern Erkenntnisse über die inhärenten Gesetzmäßigkeiten des Abbildungsprozesses und ermöglichen dessen Simulation. Außerdem werden die Punktantwortfunktionen für die Implementierung von schnellen strahlbasierten Abbildungsverfahren benötigt [Buddendick und Eibert 2011].

Kap. 4 beschreibt einen rekursiven Algorithmus zur effizienten Prozessierung von diskretisierten Spektren. Zu Beginn wird ein Gitter für die Diskretisierung der spektralen Felddarstellungen eingeführt; darauf aufbauend werden Abtastbedingungen, hierarchische Strukturen sowie Begriffe wie Aggregation und Disaggregation erklärt. Mit diesem Instrumentarium wird ein Algorithmus für die Berechnung von Ersatzquellen- und Streuzentrenverteilungen aus Fernfelddaten vorgestellt, der für alle hier diskutierten Szenarien geeignet ist. Eine Komplexitätsanalyse und ein Vergleich mit anderen Abbildungsverfahren schließen das Kapitel ab. Damit wird gezeigt, wie sich die MLFMM-Darstellung basierend auf ebenen Wellen für die effiziente Bilderzeugung aus breitbandigen Daten nutzen lässt [Schnattinger und Eibert 2012c].

Kap. 5 beschäftigt sich damit, wie praxisrelevante Einflüsse der Wellenausbreitung berücksichtigt werden können. Ersatzquellen- oder Streuzentrenverteilungen können so auch mit Daten aus realistischen Messszenarien ermittelt werden. Dazu ist eine korrekte Modellierung von Nahfeldeffekten und Sondeneinflüssen erforderlich. Außerdem wird eine neuartige MLFMM-basierte Beschreibung von monostatischen Streuproblemen eingeführt. Auf Basis dieser Modelle wird im nächsten Schritt ein inverses Problem formuliert und gelöst. Dazu werden zwei unterschiedliche Lösungsansätze vorgestellt. Im ersten Ansatz wird das inverse Problem mit einem iterativen Verfahren gelöst. Alternativ wird das Prinzip eines Optimalfilters angewendet, um den Vorwärtsoperator analytisch zu invertieren. In jedem Fall ist die Problemstellung so formuliert, dass die Lösung ein Spektrum ebener Wellen darstellt. Dieses kann mit dem rekursiven Algorithmus in Kap. 4 in eine räumliche Ersatzquellen- oder Streuzentrenverteilung umgewandelt werden. Beide Lösungsschritte lassen sich gut miteinander kombinieren, da sie auf der gleichen Diskretisierung der Raumfrequenzspektren basieren.

Die Funktionalität der vorgestellten Verfahren wird in Kap. 6 an einer Reihe von Anwendungsbeispielen unter Beweis gestellt. Die diskutierten Szenarien umfassen im Freiraum strah-

lende Dipole, äquidistant angeordnete Streuzentren, einen breitbandigen Hornstrahler, eine Gruppenantenne mit drei Elementen, einen dielektrischen Streukörper sowie zwei perfekt leitende Streuobjekte. Dabei werden Spektren ebener Wellen aus Nahfeldbeobachtungen rekonstruiert und Ersatzquellen- und Streuzentrenverteilungen berechnet. Aussagekräftige Verteilungsfunktionen lassen sich sowohl mit synthetischen Testdaten, als auch mit Daten, die unter Verwendung realistischer Simulationen oder Messungen zustande gekommen sind, berechnen. Jedes Beispiel verdeutlicht dabei andere Aspekte. Beispielsweise wird gezeigt, dass Ersatzquellenverteilungen mit einer elektrischen Größe von 300λ rekonstruiert werden können. Eine Interpretation der Ergebnisse hilft dabei, vielversprechende Anwendungsmöglichkeiten zu identifizieren.

Kapitel 7 fasst die Arbeit zusammen und leitet Schlussfolgerungen ab.

2 Das inverse Quellenproblem

Ausgangspunkt für die folgenden Überlegungen ist eine unbekannte Quellenverteilung, deren abgestrahlte Felder beobachtet werden. Wird anhand dieser Beobachtungen eine Quellenverteilung rekonstruiert, die nicht notwendigerweise mit der ursprünglichen Verteilung übereinstimmt und trotzdem die gleichen Felder abstrahlt, so bezeichnet man diese als Ersatzquellenverteilung.

Die Berechnung von Ersatzquellen entspricht der Lösung eines inversen Problems. Die Inversion des Vorwärtsoperators ist oft mit einem hohen Berechnungsaufwand verbunden. In manchen Fällen lässt sich die Lösung jedoch auch durch ein vergleichsweise einfaches Verfahren aus der Bildgebung ermitteln. Das SAR-Abbildungsverfahren ist definiert durch eine Berechnungsvorschrift, die ihren Ursprung in einem anschaulichen Modell hat. Die verwendete Signalverarbeitung entspricht der numerischen Synthese von Radarantennen mit sehr hohem Auflösungsvermögen, indem deren Aperturbelegung durch eine geeignete Superposition der Messdaten nachgebildet wird. Diese Methode ist in der Praxis einfach zu implementieren und funktioniert zuverlässig. Um die Qualität der Bilder weiter zu verbessern, sind fortgeschrittene Konzepte der Signalverarbeitung erforderlich. Hier gilt die Bilderzeugung mittels der Lösung inverser Probleme im Bereich der Radarsysteme als vielversprechende Zukunftstechnologie [Friedlander et al. 1978; Cheney und Borden 2009b].

In dieser Arbeit wird ein lineares inverses Problem für die Bestimmung der Ersatzquellen formuliert. Zur Lösung dieses Problems ist die Kenntnis des entsprechenden Vorwärtsoperators nötig, der den Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung beschreibt. Bei der elektromagnetischen Wellenausbreitung spricht man vom Strahlungsoperator. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden zunächst die elektromagnetischen Grundlagen eingeführt, welche zur Definition dieses Operators benötigt werden. Darauf aufbauend werden im zweiten Abschnitt die Problemstellung und ihre Lösbarkeit diskutiert.

2.1 Der Strahlungsoperator

Elektrische oder magnetische Ströme erzeugen elektromagnetische Felder, welche sich im Raum ausbreiten. Diese Ursache-Wirkung-Beziehung wird durch die Maxwell'schen Gleichungen beschrieben. Zur Lösung wird dieses partielle Differenzialgleichungssystem in die zeitharmonische Wellengleichung für das elektrische Feld umgeformt. Der Strahlungsoperator beschreibt die Abbildung von Quellen auf die entsprechenden Felder. Die Lösung eines partiellen Differenzialgleichungssystems kann sehr aufwändig sein. Durch Verwendung der Green'schen Funktion (siehe z.B. [Balanis 2012a, S. 851], [Harrington 1993, S. 123] oder [Selçuk Bayin 2006, S. 567]) lässt sich die Lösung der Differenzialgleichung durch ein Strahlungsintegral ermitteln.

2.1.1 Die Maxwell-Gleichungen

Im Folgenden soll ein allgemeiner Zusammenhang für alle elektromagnetischen Größen angegeben werden, die bei der Erzeugung und Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen eine Rolle spielen. Dabei handelt es sich um das elektrische Feld \mathbf{e} , das magnetische Feld \mathbf{h} , die elektrische Flussdichte \mathbf{d} , die magnetische Flussdichte \mathbf{b} , die elektrische Stromdichte \mathbf{j} , die elektrische

Raumladungsdichte ρ , die ortsabhängige Permittivität ε und die ortsabhängige Permeabilität μ . Die dazu nötigen Maxwell-Gleichungen lauten in der häufig benutzten Darstellung nach [Orfanidis 2002]

$$\nabla \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{b}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t), \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1d)$$

wobei \mathbf{e} und \mathbf{d} beziehungsweise \mathbf{h} und \mathbf{b} über die linearen, isotropen und ortsabhängigen Materialbeziehungen

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{e}(\mathbf{r}, t), \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \mu(\mathbf{r}) \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) \quad (2.2b)$$

verknüpft sind. Dabei sind \mathbf{r} die Ortskoordinate, t die Zeit, $\nabla \times$ der Rotationsoperator und $\nabla \cdot$ der Divergenzoperator.

Für die weitere Analyse werden die zeit-harmonischen Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -j\omega\mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.3a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) + j\omega\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.3b)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)) = \rho(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.3c)$$

$$\nabla \cdot (\mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)) = 0 \quad (2.3d)$$

verwendet. Die Gleichungen (2.3a)-(2.3d) gehen aus einer Transformation von (2.1a)-(2.1d) in den Frequenzbereich hervor. Der Ausdruck $e^{j\omega t}$ verschwindet dabei, was einer Darstellung mittels Phasoren entspricht. Für das elektrische Feld gilt somit $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}(\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t})$. Alle anderen zeitabhängigen Größen in (2.1a)-(2.2b) weisen einen analogen Zusammenhang auf.

2.1.2 Die zeitharmonische Wellengleichung für das elektrische Feld

Mit den Gleichungen (2.3a)-(2.3d) kann direkt die inhomogene Wellengleichung für das elektrische Feld hergeleitet werden. Zunächst wird der Rotationsoperator $\nabla \times$ auf die mit dem Quotienten $1/\mu(\mathbf{r})$ multiplizierte Gleichung (2.3a) angewendet. Anschließendes Einsetzen von (2.3b) führt zum Ergebnis [Jin 1993, S. 8]

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \right) - \omega^2 \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -j\omega \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.4)$$

In einem homogenen Medium gilt $\mu(\mathbf{r}) = \mu$ und $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon$. Diese Annahme führt zu [Stratton 2007, S. 465]

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -j\omega\mu \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.5)$$

einer einfacher zu lösenden Form der Wellengleichung, welche die Definition der Wellenzahl

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon\mu} \quad (2.6)$$

ermöglicht.

2.1.3 Lösung mit der Green'schen Funktion

Die lineare inhomogene Differenzialgleichung in (2.5) soll für beliebige Anregungen \mathbf{J} gelöst werden. Um nur physikalisch korrekte Lösungen zu erhalten, müssen passende Randbedingungen festgelegt werden. Die im Unendlichen definierte Sommerfeld'sche Abstrahlungsbedingung [Stratton 2007, S. 485] dient als Randbedingung, da es sich um ein offenes Problem ohne Rand handelt. Einlaufende Wellen werden damit unterdrückt und Quellen im Unendlichen sind nicht möglich, sodass die gesamte Energie von der Stromverteilung \mathbf{J} ausgeht und bis auf eventuelle Verluste ins Unendliche abgestrahlt wird.

Die Lösung der linearen inhomogenen Differenzialgleichung in (2.5) kann mit Hilfe des Konzepts der Green'schen Funktionen formuliert werden und lautet unter der Annahme von Verschiebungsinvarianz [Balanis 2012a, S. 696]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \iiint_V \bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}' = \bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r}, \omega) \overset{\circ}{*}_{\mathbf{r}} \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.7)$$

was unter Freiraumbedingungen einer dreidimensionalen Faltung entspricht. Das Symbol $\overset{\circ}{*}$ repräsentiert ein Skalarprodukt, bei dem die resultierenden Multiplikationsterme durch Faltungen ersetzt werden. Das tiefgestellte Kürzel \mathbf{r} verdeutlicht, dass die Faltung im Ortsbereich und nicht im Kreisfrequenzbereich ω stattfindet. Die translationsinvariante, dyadische Green'sche Funktion

$$\bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \left(\bar{\mathbf{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.8)$$

beinhaltet die skalare Green'sche Funktion

$$g(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.9)$$

und stellt einen Zusammenhang zwischen den elektrischen Strömen \mathbf{J} und dem elektrischen Feld \mathbf{E} her. Mittels (2.7) kann das abgestrahlte Feld einer Quelle ermittelt werden unter der Annahme, dass sich die Wellen im freien Raum ausbreiten [Jin 2010, S. 43ff.].

Die Bestimmungsgleichung für die Green'sche Funktion

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) - k^2 \bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = -j\omega\mu \bar{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.10)$$

ist die Wellengleichung für das elektrische Feld in (2.5) bei Anregung mit $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, wobei $\bar{\mathbf{I}}$ die Einheitsdyade und δ die Dirac'sche Delta-Distribution [Selçuk Bayin 2006, S. 481] bezeichnet.

2.2 Formulierung und Lösung des inversen Problems

Nachdem der Vorwärtsoperator des inversen Problems bekannt ist, soll nun die Problemstellung diskutiert werden. Die Geometrie der Anordnung ist in Abb. 2.1 dargestellt. Die Quelle ist eine unbekannte vektorielle Stromverteilung $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega)$ in einem begrenzten konvexen Volumen V , die von einem homogenen und verlustlosen Medium umgeben ist. Diese Quellenverteilung verursacht elektromagnetische Felder, die sich ungehindert im Freiraum ausbreiten. Es gilt die Annahme, dass Beobachtungen der Felder außerhalb des Quellvolumens vorliegen. Die Lösung des inversen Problems entspricht somit der Ermittlung einer äquivalenten Stromverteilung, welche die beobachteten Felder erzeugt.

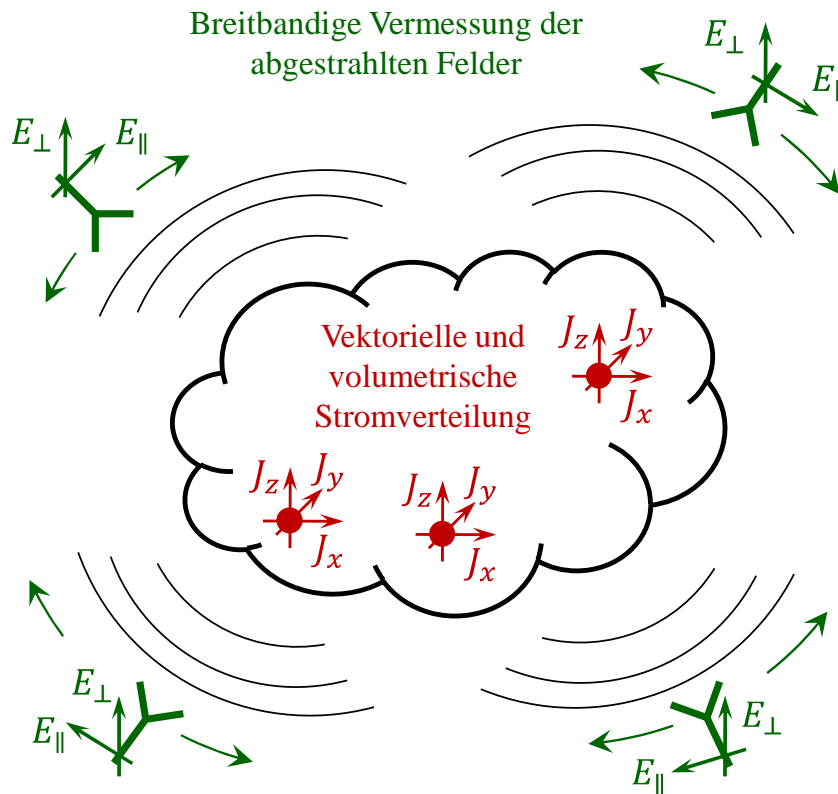


Abbildung 2.1: Inverses Problem mit unbekannter vektorieller Quellenverteilung und vektoriellen Beobachtungen.

2.2.1 Beobachtung der abgestrahlten Felder

Wie in Abschnitt 2.1.3 beschrieben, gilt dank der Sommerfeld'schen Ausstrahlungsbedingung die Annahme, dass Leistung aus der Umgebung nicht in den Quellbereich eindringt, sondern nur von diesem abgestrahlt wird. Aus dem Huygens-Prinzip [Balanis 2012a, S. 329ff.] folgt, dass bereits die Kenntnis der Felder auf einer die Quellen umgebenden und geschlossenen Oberfläche ausreicht, um die Feldverteilung im gesamten Außenraum zu charakterisieren. Wenn die Felder in einem verlustbehafteten oder verlustlosen Medium ihren Ursprung haben und Eigenresonanzen des Quellvolumens nicht auftreten, besitzt zusätzlich das Eindeutigkeitstheorem Gültigkeit [Balanis 2012a, S. 312ff.]. Es besagt, dass in jedem einzelnen Punkt der Hüllfläche die Kenntnis entweder des transversalen elektrischen oder des transversalen magnetischen Feldes ausreichend ist, um die abgestrahlten Felder der eingeschlossenen Quellenverteilung eindeutig zu charakterisieren [Balanis 2012a, S. 314]. Beobachtungen des magnetischen oder elektrischen Feldes sind somit äquivalent. In der Praxis kann es trotzdem vorteilhaft sein, mehr Feldbeobachtungen als nötig vorzusehen, da der Einfluss von Interaktionen mit der Umgebung oder anderen Störquellen besser unterdrückt werden kann [Yinusa und Eibert 2013].

In dieser Arbeit werden die elektromagnetischen Felder durch eine Entwicklung des elektrischen Feldes \mathbf{E} in ebene Wellen verarbeitet. Dies ist äquivalent zu einer Entwicklung des magnetischen Feldes \mathbf{H} , wobei sich die Entwicklungskoeffizienten mit

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z_F} \hat{k} \times \mathbf{E} \quad (2.11)$$

umrechnen lassen. Dabei bezeichnet Z_F den Wellenwiderstand im Freiraum und \hat{k} entspricht der Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle. In dieser Arbeit gilt die Konvention, dass Einheitsvektoren mit einem Dach gekennzeichnet werden. Die Abstrahlungscharakteristik der Sonden wird wie das abgestrahlte Feld in ein Spektrum ebener Wellen entwickelt. Diese Vorgehensweise wird in Abschnitt 5.1.2 eingeführt. Durch die Äquivalenz des magnetischen und elektrischen Feldes können auch Sonden, die hauptsächlich mit den magnetischen Feldkomponenten interagieren, problemlos in einer Formulierung basierend auf elektrischen Feldern berücksichtigt werden. Zunächst soll jedoch der Einfachheit halber davon ausgegangen werden, dass unmittelbar Beobachtungen der elektrischen Feldkomponenten vorliegen. Diese Annahme wird bis zur Einführung der Sondereffekte in Abschnitt 5.1.2 beibehalten.

2.2.2 Definition der Ersatzquellen

Aus dem Volumen- und Oberflächenäquivalenztheorem in [Balanis 2012a, S. 327ff.] geht hervor, dass eine frequenzabhängige elektrische Stromverteilung auf einer geschlossenen Oberfläche um die Quellenregion grundsätzlich ausreicht, um alle möglichen Feldkonfigurationen im Außenraum zu erzeugen. Es handelt sich um eindeutige Lösungen des Volumenintegrals in (2.7). Hier soll jedoch eine volumetrische Stromverteilung berechnet werden. Diese Form der äquivalenten Quellen wird in [Álvarez et al. 2010] dazu verwendet, die Kontur eines Streuobjekts zu rekonstruieren. Durch die volumetrische Ausdehnung der Quellen besitzt die Lösung mehr Freiheitsgrade. Die Feldkonfiguration kann nicht mehr eindeutig einer bestimmten Quellenverteilung zugeordnet werden, d.h. die Ersatzquellen sind nicht in einer eindeutigen Basis definiert. Um den Nullraum des inversen Problems nicht noch weiter zu vergrößern, werden neben den elektrischen keine magnetischen Ströme in der Quellenverteilung berücksichtigt. Alternativ könnten die elektrischen Ströme durch magnetische Ströme ersetzt werden, indem das duale Problem formuliert wird [Balanis 2012a, S. 310ff.]. Damit erhält man eine äquivalente Formulierung, für welche die gleichen Gesetzmäßigkeiten gelten. Vollständigkeit und Eindeutigkeit von unterschiedlich gearteten Quellenverteilungen in Abhängigkeit von Integrationsgebiet, Frequenzabhängigkeit und Art der Quellen sind in Tabelle 2.1 aufgelistet.

2.2.3 Eindeutigkeit der Problemstellung

Nun soll die Lösung des inversen Quellenproblems in (2.7) diskutiert werden, wobei \mathbf{E} die bekannten Beobachtungen bezeichnet und \mathbf{J} die zu ermittelnde Stromverteilung repräsentiert. Dazu soll zunächst analysiert werden, welche Aussagen über die unbekanntes Quellenverteilung sich aus der Kenntnis der Felder ableiten lassen. Es stellt sich heraus, dass zusätzliche Beobachtungen ab einem gewissen Grad der Überabtastung die Lösbarkeit des inversen Problems nicht mehr beeinflussen. Die Menge aller möglichen Feldkonfigurationen besitzt nur eine begrenzte Anzahl an Freiheitsgraden, wenn man davon ausgeht, dass eine Beobachtung der Felder nur mit endlicher Genauigkeit möglich ist [Bucci und Franceschetti 1989]. Diese Annahme ist gerechtfertigt, da jeder Messwert in der Realität mit einem gewissen Rauschanteil behaftet ist.

Zur Lösung des inversen Problems werden zusätzliche Bedingungen formuliert, die die Lösungsvielfalt einschränken. In dieser Arbeit soll der Fokus auf volumetrischen Stromverteilungen und breitbandigen Beobachtungen liegen. Als Einstieg dient das den elektromagnetischen Oberflächenintegralgleichungen zugrunde liegende Äquivalenzprinzip, welches besagt, dass jede Quelle ersetzt werden kann durch entsprechende Ströme auf einer geschlossenen, die Quelle einschließenden Huygensfläche. Für den Fall, dass ausschließlich elektrische Ströme auf dieser Hüllfläche angenommen werden und das Feld im Außenraum bekannt ist, ist die Lösung ein-

Tabelle 2.1: Analyse des Strahlungsoperators zur Erzeugung von breitbandigen Feldern bei unterschiedlichen Quellenverteilungen hinsichtlich Vollständigkeit und Existenz eines Nullraums.

Zeitliche Anregung	Integrationsgebiet	Eingeprägter Strom	Vollständig	Nullraum
frei	Oberfläche	nur elektrisch	ja	nein
		nur magnetisch	ja	nein
		elektrisch und magnetisch	ja	ja
	Volumen	nur elektrisch	ja	ja
		nur magnetisch	ja	ja
		elektrisch und magnetisch	ja	ja
vorgegeben, z.B. durch Dirac- Impuls	Oberfläche	nur elektrisch	nein	nein
		nur magnetisch	nein	nein
		elektrisch und magnetisch	nein	ja
	Volumen	nur elektrisch	ja	ja
		nur magnetisch	ja	ja
		elektrisch und magnetisch	ja	ja

deutig und eine monofrequente Betrachtung ist ausreichend [Quijano und Vecchi 2010]. Wenn die Rekonstruktion der Stromverteilung nicht auf einer Hüllfläche sondern im gesamten Volumen gefordert wird, so existiert im Allgemeinen eine Vielzahl an Lösungen. In [Devaney und Sherman 1982] wird gezeigt, dass selbst radialsymmetrische Stromverteilungen bei Kenntnis der abgestrahlten Felder nicht eindeutig rekonstruiert werden können.

In dieser Arbeit wird eine in allen drei Raumrichtungen unabhängige volumetrische Stromverteilung als unbekannte Quellenverteilung verwendet. Wie die vorangegangenen Betrachtungen gezeigt haben, führt dies zu einem Eindeutigkeitsproblem, welches unter anderem in [Bleistein und Cohen 1977] untersucht wird. Einige Erkenntnisse aus diesem Beitrag werden im Folgenden aufgegriffen.

Da das inverse Problem linear ist, kann die Vielfalt durch eine Bestimmung des Nullraums analysiert werden. Der Nullraum ist definiert durch die Menge aller zulässigen Quellenverteilungen, die der Vorwärtsoperator auf das Nullfeld abbildet. Für das Feld \mathbf{E} der Quelle \mathbf{J} an allen Beobachtungsorten $\mathbf{r} \notin V$ muss daher

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \iiint_V \bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}' = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

gelten. Das Fernfeld lässt sich in eine Multipolreihe [Stratton 2007, S. 431ff.] entwickeln, welche auch im Nahfeld definiert ist. Ist das Fernfeld einer endlich ausgedehnten Quelle bekannt, so lässt sich deshalb auch das Nahfeld außerhalb dieses Quellbereichs berechnen. Durch diesen Zusammenhang ist es hinreichend, die Bedingung in (2.12) allein für das Fernfeld zu fordern. Die Auswertung des normierten elektrischen Felds im Unendlichen führt auf

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r e^{j\frac{\omega}{c}r} \mathbf{E}(r\hat{\mathbf{k}}, \omega) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathfrak{J}\left(\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{k}}, \omega\right) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \mathbf{V}\left(\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{k}}\right), \quad (2.13)$$

wobei die frequenzabhängige, spektrale Quellendarstellung

$$\mathfrak{J}(\mathbf{k}, \omega) = \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}', \omega) e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}' \quad (2.14)$$

durch eine Fouriertransformation aus der Ortsbereichsdarstellung \mathbf{J} hervorgeht. Der Ausdruck

$$\mathbf{V}(\mathbf{k}) = (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) \cdot \mathfrak{J}(\mathbf{k}, ck) \quad (2.15)$$

wird als Spektrum ebener Wellen bezeichnet. Die abgestrahlten Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ außerhalb der Quellenregion können sowohl mit der räumlichen Quellenverteilung $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega)$ als auch mit dem Spektrum $\mathbf{V}(\mathbf{k})$ berechnet werden. Wie in Abb. 2.2 veranschaulicht, ist das Raumfrequenzspektrum $\mathfrak{J}\left(\frac{\omega}{c}\hat{k}, \omega\right)$ eine komprimierte Darstellung der Abstrahlcharakteristik einer Quelle. Während die räumliche Verteilungsfunktion $\mathbf{J}(\mathbf{r}', \omega)$ mit $\mathbf{r}' \in V$ und $\omega \in \mathbb{R}_0^+$ im vierdimensionalen Raum $V \times \mathbb{R}_0^+$ definiert ist, wird das Raumfrequenzspektrum $\mathfrak{J}\left(\frac{\omega}{c}\hat{k}, \omega\right)$ in (2.13) nur in einem dreidimensionalen Unterraum $\{(\mathbf{k}, \omega) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_0^+ \mid ck = \omega\hat{k}\}$ des vierdimensionalen Raums $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_0^+$ ausgewertet, da die Wellenzahl und die Kreisfrequenz über die Ausbreitungsgeschwindigkeit c in Verbindung stehen. Daraus folgt, dass sich die ursprüngliche Quellenverteilung $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega)$ nicht eindeutig aus dem Raumfrequenzspektrum $\mathfrak{J}\left(\frac{\omega}{c}\hat{k}, \omega\right)$ rekonstruieren lässt.

Doch selbst das Raumfrequenzspektrum kann nicht eindeutig aus den abgestrahlten Feldern $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ ermittelt werden. Die Ursache hierfür liegt in den Eigenschaften des Projektors $\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}$ in (2.13). Er sorgt dafür, dass die Vektorkomponente des Raumfrequenzspektrums in Richtung des Vektors \hat{k} für die Feldberechnung keine Rolle spielt. Umgekehrt kann diese Radialkomponente nicht aus den Feldbeobachtungen rekonstruiert werden.

Wenn nun analog zu (2.12) das Fernfeld mit (2.13) und (2.14) zu Null gesetzt wird, so ergibt sich für die Quellenverteilung die Bedingung

$$(\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) \cdot \mathfrak{J}\left(\frac{\omega}{c}\hat{k}, \omega\right) = \mathbf{0}. \quad (2.16)$$

Die Lösungen dieser Gleichung werden als nichtstrahlende Stromverteilungen bezeichnet. Eine Lösung kann beispielsweise mit [Bleistein und Cohen 1977]

$$\mathbf{J}_{\text{nonrad}}(\mathbf{r}, \omega) = \iiint_K f(\mathbf{k}, \omega) \hat{k} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \quad (2.17)$$

konstruiert werden, wobei f eine beliebige skalare Funktion ist. Allerdings wird hierdurch nicht sichergestellt, dass die Quellenverteilung eine endliche Ausdehnung hat. Außerdem hat die Definition keinen Anspruch auf Vollständigkeit, d.h. nicht alle theoretisch möglichen nichtstrahlenden Stromverteilungen können mit dieser Gleichung erzeugt werden. Eine fundierte Abhandlung über nichtstrahlende Stromverteilungen und ihre Eigenschaften ist in [Devaney und Wolf 1973] zu finden.

Aus dem letzten Paragraphen geht hervor, dass die Lösung des inversen Problems nicht eindeutig ist. Deshalb soll das inverse Problem so modifiziert werden, dass es nur eine einzige Lösung besitzt. Dazu werden im Folgenden bestimmte Annahmen getroffen. Tendenziell ändert sich die Stromverteilung in der Praxis nur langsam mit der Frequenz. Beispielsweise verhält sich eine Antenne bei benachbarten Frequenzpunkten im gleichen Band häufig sehr ähnlich. Vereinfachend wird hier angenommen, dass die Stromverteilung frequenzunabhängig ist und deshalb im Folgenden durch

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) := \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \quad (2.18)$$

approximiert werden kann. Im Zeitbereich entspricht dies der Annahme, dass alle Quellen synchron zum Zeitpunkt Null angeregt werden:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) := \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \delta(t) \circ\!\!\!\rightarrow \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) := \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}). \quad (2.19)$$

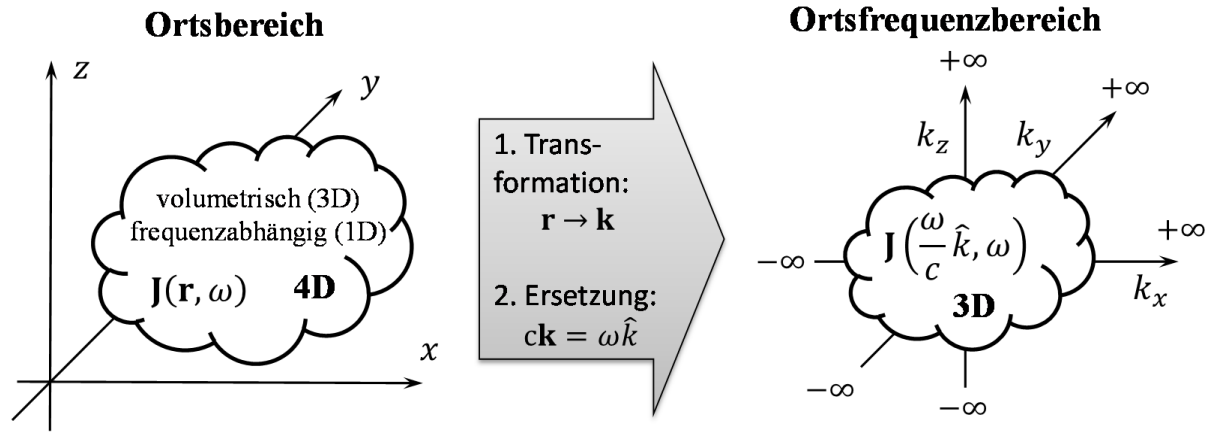


Abbildung 2.2: Eine frequenzabhängige (1D) und ortsabhängige (3D) Verteilung von Ersatzquellen in einem vorgegebenen Volumen spannt einen vierdimensionalen Raum auf. Bei der entsprechenden Darstellung im Ortsfrequenzbereich handelt es sich nur mehr um einen dreidimensionalen Raum, da hier der Zusammenhang $c\mathbf{k} = \omega\hat{\mathbf{k}}$ gilt.

Diese Annahme ist beispielsweise in der optoakustischen Bildgebung anzutreffen, da hier die temporäre Abhängigkeit der erzeugten Schallquellen durch einen Dirac-Impuls modelliert wird [Rosenthal et al. 2010]. Die verbleibende Uneindeutigkeit der Lösung kann durch weitere Maßnahmen eliminiert werden. In [Bleistein und Cohen 1977] wird der Vorschlag gemacht, die Polarisation der Ströme auf eine Ebene zu beschränken. Dies kann jedoch zu einem singulären Strahlungsoperator führen, was in Kombination mit verrauschten Beobachtungen eine Regularisierung erforderlich macht [Schnattinger und Eibert 2012c]. Da sich die Orientierung des Stromflusses im Allgemeinen nicht auf eine Ebene beschränkt, lässt sich dieses Verfahren nur in Spezialfällen einsetzen. Deshalb wird eine andere Lösung favorisiert. Dazu wird das Optimierungsfunktional

$$\min_{\mathbf{j}} \iiint_V \|\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r})\|_2^2 d^3\mathbf{r} \quad (2.20)$$

definiert, das die Energie der Stromverteilung minimiert und zu einer eindeutigen Lösung des inversen Problems führt [Müller 1956]. Durch diese Zusatzbedingung werden nichtstrahlende Stromverteilungen aus der Lösung eliminiert und auch verrauschte Beobachtungen stellen kein Problem dar [Schnattinger und Eibert 2012c]. Die finale Version des inversen Problems kann nun zur Berechnung der Ersatzquellenverteilung verwendet werden und dient deshalb als Basis für das weitere Vorgehen.

2.2.4 Bestimmung der volumetrischen Ersatzquellen

Wie in (2.13) gezeigt, folgt das normierte Spektrum ebener Wellen $\mathbf{V}(\mathbf{k})$ direkt aus den Fernfeldbeobachtungen. Bei der Lösung des inversen Problems wird angenommen, dass diese im gesamten k -Raum vorliegen, d.h. für alle Frequenzen und Beobachtungswinkel. Diese Vereinfachung ist nötig, damit im Folgenden der Integraloperator invertiert werden kann. In der Praxis sind diese Idealvorstellungen leider nicht erfüllt. Die berechnete Ersatzquellenverteilung ist vom Umfang der Beobachtungsdaten abhängig. Dieser Effekt wird in Abschnitt 3.4 genauer untersucht.

Unter der Voraussetzung, dass das Raumfrequenzspektrum $\mathbf{V}(\mathbf{k})$ in (2.15) für alle \mathbf{k} bekannt ist, lautet die zu lösende Problemstellung

$$\min_{\hat{\mathbf{J}}} \iiint_V \|\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r})\|_2^2 d^3\mathbf{r} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{V}(\mathbf{k}) = (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) \cdot \iiint_V \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}. \quad (2.21)$$

Diese Formulierung kombiniert die Fernfeldnäherung des Strahlungsoperators in (2.7) mit den Zusatzbedingungen in (2.18) und (2.20). Die Nebenbedingung basiert auf einer Transformation der Ersatzquellen vom Ortsbereich in den Ortsfrequenzbereich. Die zu ermittelnde Verteilungsfunktion $\hat{\mathbf{J}}$ ist ortsabhängig, komplexwertig und nur innerhalb des dreidimensionalen Quellvolumens V definiert. Sie wird mit

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{J}}_R(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{J}}_N(\mathbf{r}) \quad \circ \longrightarrow \quad \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{J}}_R(\mathbf{k}) + \hat{\mathbf{J}}_N(\mathbf{k}) \quad (2.22)$$

in eine strahlende (R) und eine nichtstrahlende (N) Komponente unterteilt. In der mit (2.14) definierten Spektraldarstellung ist diese Aufspaltung selbstverständlich genauso möglich. Für die nichtstrahlende Komponente gilt Gleichung (2.16), d.h. $\hat{\mathbf{J}}_N$ besitzt ausschließlich einen Radialanteil. Umgekehrt gilt, dass ein Radialanteil nie zur Abstrahlung führt. Die strahlende Komponente $\hat{\mathbf{J}}_R$ enthält deshalb keine Radialanteile und $\hat{k} \cdot \hat{\mathbf{J}}_R(\mathbf{k})$ ist Null. Die Anwendung dieser Erkenntnisse auf die Nebenbedingung des Optimierungsproblems führt in Kombination mit (2.22) zu

$$\mathbf{V}(\mathbf{k}) = (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) \cdot (\hat{\mathbf{J}}_R(\mathbf{k}) + \hat{\mathbf{J}}_N(\mathbf{k})) = \hat{\mathbf{J}}_R(\mathbf{k}). \quad (2.23)$$

Während die strahlende Stromverteilung durch die Nebenbedingung vollständig bestimmt wird, spielt die nichtstrahlende Stromverteilung darin keine Rolle. Die Energieminimierung in (2.21) hat nur einen Einfluss auf die verbleibenden Freiheitsgrade, welche von der Nebenbedingung unangetastet bleiben. Wie durch

$$\min_{\hat{\mathbf{J}}} \iiint_V \|\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r})\|_2^2 d^3\mathbf{r} = \iiint_V \|\hat{\mathbf{J}}_R(\mathbf{r})\|_2^2 d^3\mathbf{r} + \min_{\hat{\mathbf{J}}_N} \iiint_V \|\hat{\mathbf{J}}_N(\mathbf{r})\|_2^2 d^3\mathbf{r} \quad (2.24)$$

ersichtlich, handelt es sich dabei um die nichtstrahlende Komponente der Stromverteilung. Diese Optimierung führt zu $\hat{\mathbf{J}}_N(\mathbf{r}) = 0$ und damit zur Unterdrückung der nichtstrahlenden Ströme. Damit lautet das Ergebnis

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{J}}_R(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{V}(\mathbf{k}) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}. \quad (2.25)$$

Dies ist eine explizite Lösung des ursprünglichen Optimierungsproblems in (2.21), welche sich durch die Anwendung der Fouriertransformation auf beide Seiten des Gleichungssystems in (2.23) ergibt. Dieser Ausdruck kann als signalangepasstes Filter (MF) im Ortsbereich interpretiert werden und liefert deshalb auch für verrauschte Beobachtungen gute Ergebnisse. Der konstante Faktor $1/(2\pi)^3$ wird im Folgenden vernachlässigt, da nur die relativen Verhältnisse der Ströme ausschlaggebend sind, wenn die Ersatzquellenverteilung als Bild dargestellt wird.

3 Einheitliches Lösungskonzept für inverse Quellen- und Streuprobleme

Im letzten Kapitel wurde die Berechnung der Ersatzquellen als Lösung eines inversen Quellenproblems mit Zusatzbedingungen definiert. Die abgestrahlten Felder der Ersatzquellenverteilung und die der ursprünglichen Quellenanordnung sind identisch. Durch die Zusatzbedingungen ist die berechnete Stromverteilung frequenzunabhängig, was der zeitlichen Anregung der Ströme durch einen Dirac-Impuls entspricht. Durch das Kriterium der Energieminimierung wird zudem garantiert, dass die Ersatzquellenverteilung keine nichtstrahlenden Ströme beinhaltet. Außerdem bleibt die resultierende Lösung des inversen Problems für stark verrauschte Beobachtungen stabil.

Die Ersatzquellendarstellung kann als Abbild einer physikalischen Größe interpretiert werden. Die Abbildungseigenschaften hängen dabei maßgeblich vom Frequenz- und Winkelbereich der Beobachtungen ab und sollen mit dem Konzept der Punktantwortfunktionen untersucht werden.

3.1 Definition der elektromagnetischen Abbildungsvorschrift

In diesem Kapitel werden drei unterschiedliche Szenarien vorgestellt. Je nach Szenario handelt es sich bei der gesuchten Größe um eine räumliche Beschreibung der Quellen oder Streuzentren. Der Begriff *Bild* dient dabei immer als Bezeichnung für die berechnete Verteilungsfunktion. In allen drei Fällen wird die Berechnungsvorschrift für die Bilderzeugung mit dem Modell des linearen inversen Quellenproblems hergeleitet. Die resultierenden Ausdrücke folgen deshalb einem einheitlichen Muster.

Im ersten Szenario wird eine Quelle betrachtet, die elektromagnetische Felder abstrahlt. In den beiden anderen Szenarien handelt es sich dagegen um Streuprobleme, wobei in einem Fall eine monostatische und im anderen Fall eine bistatische Streuanordnung verwendet wird.

3.1.1 Selbststrahlende Quellen

Wie bereits in Abschnitt 2.2.2 erörtert, kann jede physikalisch plausible elektromagnetische Abstrahlung durch eine Volumenstromverteilung synthetisiert werden. Diese Größe lässt sich mit (2.25) aus den Feldern berechnen. Der dort hergeleitete Ausdruck

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) = \iiint_K \mathbf{V}(\mathbf{k}) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \quad (3.1)$$

führt auf ein vektorielles und volumetrisches Bild, wobei K dem mit Messdaten gefüllten Teil des k -Raums entspricht. Für Beobachtungen in einem beschränkten Frequenzband und Winkelbereich ist dieser Bereich exemplarisch in Abb. 3.1a dargestellt. Die vorgestellte Gleichung zur Bildberechnung ist immer dann anwendbar, wenn das abgestrahlte Feld in einem endlich ausgedehnten Quellvolumen seinen Ursprung hat. Das Spektrum ebener Wellen $\mathbf{V}(\mathbf{k})$ kann mit (2.13) direkt aus den Fernfeldbeobachtungen gewonnen werden.

Diese Berechnungsvorschrift für die Volumenstromverteilung wird auch in [Buddendick und Eibert 2011] verwendet. In der Optoakustik gibt es ähnliche Ansätze zur Lösung des inversen Quellenproblems, allerdings basieren die dort anzutreffenden Formulierungen auf der skalaren Wellengleichung [Rosenthal et al. 2010]. Existierende vektorielle Verfahren [Álvarez et al. 2007; Eibert et al. 2010; Quijano und Vecchi 2010] beschränken sich auf die Rekonstruktion von Stromverteilungen auf vorgegebenen Oberflächen und liefern deshalb keine volumetrischen Bilder.

3.1.2 Streuung an unbekanntem Objekt

Bei der Abbildung von Objekten, die selbst keine elektromagnetischen Felder erzeugen, ist man auf eine externe Anregung angewiesen. Dabei interagiert das Objekt mit dem einfallenden Feld, sodass sich eine für das Objekt charakteristische Feldverteilung einstellt. Die Subtraktion des ungestörten einfallenden Feldes \mathbf{E}_i vom gestörten Feld \mathbf{E} führt zur Definition des Streufeldes

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.2)$$

und hängt von Objekt und Anregung ab. Da \mathbf{E} der Summe aus einfallendem und gestreutem Feld entspricht, wird es auch als totales Feld bezeichnet. Im Folgenden wird angenommen, dass die ebene Welle

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_{i,0}(\mathbf{k}_i) e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \quad (3.3)$$

auf den Streukörper trifft, wobei Ausbreitungsrichtung und Frequenz durch den Wellenvektor \mathbf{k}_i festgelegt sind.

Die Rekonstruktion von Objekteigenschaften aus Streufeldern stellt im Allgemeinen eine nichtlineare Problemstellung dar, welche oft nur mit großem Aufwand gelöst werden kann [Chew et al. 2004]. Zur Vereinfachung werden in der Praxis häufig linearisierte Modelle eingesetzt [Chew et al. 1994]. In diesem Fall lassen sich die im letzten Abschnitt verwendeten Konzepte zur Bilderzeugung übertragen und die Berechnung von Streuzentrenverteilungen kann durch eine lineare Gleichung erfolgen.

3.1.2.1 Bistatisches Szenario mit einer einzigen Einfallsrichtung

Im Allgemeinen spricht man von einem bistatischen Szenario, wenn Einfallsrichtung und Beobachtungsrichtung nicht übereinstimmen. Hier gilt zusätzlich, dass nur eine Anregung verwendet wird, deren Polarisations- und Einfallsrichtung sich während der Gewinnung der Streufelddaten nicht ändern.

Das bistatische Streufeld kann über die Fernfeldapproximation

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r e^{j\frac{\omega}{c}r} \mathbf{E}_s(r\hat{\mathbf{k}}_s, \omega) = \mathbf{E}_{s,0}(\mathbf{k}_s) = h(\omega) \mathbf{V}_s\left(\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{k}}_s\right) \quad (3.4)$$

mit dem normalisierten Spektrum abgestrahlter ebener Wellen \mathbf{V}_s in Beziehung gesetzt werden, wobei $\mathbf{k}_s = k_s \hat{\mathbf{k}}_s$ den Wellenvektor des gestreuten Feldes repräsentiert und $h(\omega)$ eine beliebige frequenzabhängige Gewichtungsfunktion darstellt. Ausgehend von diesem Spektrum lässt sich die vektorielle Streuzentrenverteilung

$$\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) = \iiint_K \mathbf{V}_s(\mathbf{k}_s) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \quad (3.5)$$

berechnen, wobei durch die Relation

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i \quad (3.6)$$

festgelegt wird, wo die Spektralwerte im Fourierraum anzuordnen sind. Dieser Zusammenhang der k -Raum-Vektoren wird in Abb. 3.1c veranschaulicht. Er trägt den Phasenbeziehungen Rechnung, die durch einfallende und auslaufende ebene Wellen gemeinsam verursacht werden [Bojarski 1972].

Durch die hier vorgestellte Gleichung kann ein volumetrisches, komplexwertiges und vektorielles Bild aus einem bistatischen Streufeldspektrum berechnet werden (siehe auch [Buddendick und Eibert 2011]). Ähnlichkeiten zur ISAR-Methode sind vorhanden, denn die Bildberechnung erfolgt auch dort mit dem MF-Konzept [Bhalla und Ling 1993]. Der wesentliche Unterschied zu dem hier vorgestellten Verfahren liegt in der Behandlung von voll polarimetrischen Beobachtungen. Während dieser Arbeit ein voll vektorieller Ansatz zugrunde liegt, wird beim ISAR-Verfahren jede Polarisationskomponente separat prozessiert [Broquetas et al. 1998; Moll et al. 2012]. In [Álvarez et al. 2010] werden viele äquivalente vektorielle Volumenstromverteilungen berechnet, um die Geometrie eines unbekanntes Streuobjekts zu rekonstruieren. Bei der Definition der Zusammenhänge zwischen Streufeld und Volumenstromverteilung gibt es Ähnlichkeiten mit dem hier vorgestellten Verfahren. Allerdings wird für jede Frequenz ein separates Bild berechnet und die nachträgliche inkohärente Addition liefert Bilder von geringerer Auflösung und Dynamik. Zudem ist der Aufwand für die Bildberechnung hoch, denn das Verfahren erfordert die Lösung eines volumetrischen MoM-Problems. Diese Vorgehensweise erzeugt äquivalente Volumenströme und berücksichtigt deshalb nicht die Art und Richtung der einfallenden Welle, wohingegen in (3.5) und (3.6) durch Berücksichtigung von \mathbf{k}_i eine Phasenkompensation der einfallenden Welle stattfindet. Ein weiterer Nachteil ist die Abhängigkeit des Bildinhalts von der Form des Bildbereichs. Eine verbesserte Variante des Verfahrens basierend auf MLFMM-Fernfeldtranslationen ist in [Álvarez et al. 2011] beschrieben. Zur Bildberechnung werden die Translationen invertiert. Doch auch dieser Ansatz unterscheidet sich von der hier gewählten Vorgehensweise, denn eine Integration des Streuspektrums im k -Raum wie in (3.5) findet nicht statt.

3.1.2.2 Monostatisches Szenario

In der Fernerkundung wird radarbasierte Bildgebung unter anderem dafür eingesetzt, die Beschaffenheit der Erdoberfläche zu untersuchen. Das Radar ist dabei beispielsweise auf einem erdnahen Satelliten oder auf einem Flugzeug angebracht und wird häufig in einer monostatischen Konfiguration verwendet. In diesem Betriebsmodus gilt die Annahme, dass das Radarsignal am gleichen Ort abgestrahlt und empfangen wird. Dies ist insbesondere für die Signalverarbeitung wichtig.

Für den Wellenvektor der einfallenden und gestreuten ebenen Welle gilt im monostatischen Fall

$$\mathbf{k}_i = -\mathbf{k}_s. \quad (3.7)$$

Das Einsetzen dieses Zusammenhangs in (3.6) liefert

$$\mathbf{k} = 2\mathbf{k}_s. \quad (3.8)$$

Zur vollständigen Charakterisierung des Streufeldspektrums muss eine voll polarimetrische Messung erfolgen. Dazu sind zwei linear unabhängige Anregungen nötig. Unter Fernfeldannahmen

handelt es sich bei den beiden einfallenden Feldverteilungen um die ebenen Wellen

$$\mathbf{E}_i^{(1,2)}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_{i,0}^{(1,2)}(\mathbf{k}_i) e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}. \quad (3.9)$$

Das zugehörige Streufeld

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r e^{j\frac{\omega}{c}r} \mathbf{E}_s^{(1,2)}(r\hat{\mathbf{k}}_s, \omega) = \mathbf{E}_{s,0}^{(1,2)}(\mathbf{k}_s) \quad (3.10)$$

wird für jede einfallende Polarisation separat ausgewertet und ist dementsprechend gekennzeichnet. Die gesamte verfügbare Streuinformation wird so mit zwei vektoriiellen Größen pro Radarposition beschrieben. Eine alternative Darstellungsform ist die polarimetrische Streudyade $\bar{\mathbf{V}}_s$, welche wie alle Dyaden in dieser Arbeit durch einen Balken gekennzeichnet ist. Sie wird durch den Zusammenhang

$$\mathbf{E}_{s,0}^{(1,2)}\left(\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{k}}\right) = h(\omega) \bar{\mathbf{V}}_s\left(\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \mathbf{E}_{i,0}^{(1,2)}\left(\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{k}}\right) \quad (3.11)$$

definiert. Analog zu (3.4) können störende Frequenzabhängigkeiten in die Gewichtsfunktion $h(\omega)$ abgespalten werden. So bleiben sie bei der späteren Bilderzeugung basierend auf $\bar{\mathbf{V}}_s$ außen vor. Mit

$$h(\omega) \begin{bmatrix} \hat{\theta}_s \\ \hat{\phi}_s \end{bmatrix} \cdot \bar{\mathbf{V}}_s\left(\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \begin{bmatrix} \hat{\theta}_i \\ \hat{\phi}_i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} S_{VV}\left(\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{k}}\right) & S_{VH}\left(\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{k}}\right) \\ S_{HV}\left(\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{k}}\right) & S_{HH}\left(\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{k}}\right) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

lässt sich die Streudyade in die konventionellen Komponenten der 2×2 Streumatrix nach [Lüneburg et al. 1997; Cown und Ryan 1989] überführen. Die Matrixeinträge bezeichnen dabei das kohärente Verhältnis von Streufeld zu einfallendem Feld und die Indices V und H unterscheiden vertikal beziehungsweise horizontal polarisierte Felder, wobei der erste Index das abgestrahlte Feld betrifft und der zweite Index das einfallende.

Die Berechnung von $\bar{\mathbf{V}}_s$ erfordert die Lösung des Gleichungssystems in (3.11). Bei zueinander orthogonal polarisierten einfallenden Feldern gilt

$$\mathbf{E}_{i,0}^{(1)}(\hat{\mathbf{k}})^* \cdot \mathbf{E}_{i,0}^{(2)}(\hat{\mathbf{k}}) = \mathbf{E}_{i,0}^{(2)}(\hat{\mathbf{k}})^* \cdot \mathbf{E}_{i,0}^{(1)}(\hat{\mathbf{k}}) = 0, \quad (3.13)$$

wobei $()^*$ den komplex konjugierten Wert bezeichnet. Daraus folgt für die Lösung

$$h(\omega) \bar{\mathbf{V}}_s(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{E}_{s,0}^{(1)}(\mathbf{k})}{\mathbf{E}_{i,0}^{(1)}(\mathbf{k})} + \frac{\mathbf{E}_{s,0}^{(2)}(\mathbf{k})}{\mathbf{E}_{i,0}^{(2)}(\mathbf{k})} = \frac{\mathbf{E}_{s,0}^{(1)}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{E}_{i,0}^{(1)}(\mathbf{k})^*}{\|\mathbf{E}_{i,0}^{(1)}(\mathbf{k})\|_2^2} + \frac{\mathbf{E}_{s,0}^{(2)}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{E}_{i,0}^{(2)}(\mathbf{k})^*}{\|\mathbf{E}_{i,0}^{(2)}(\mathbf{k})\|_2^2}. \quad (3.14)$$

Der Beweis kann durch Einsetzen in (3.11) erbracht werden.

Aus dem dyadischen Streuspektrum $\bar{\mathbf{V}}_s$ lässt sich die dyadische Streuzentrenverteilung

$$\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) = \iiint_K \bar{\mathbf{V}}_s(\mathbf{k}_s) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \quad (3.15)$$

berechnen, wobei der zugehörige k -Raum-Bereich K in Abb. 3.1b veranschaulicht ist. Durch die Anwendung der 3D-Fouriertransformation wird die gesamte polarimetrische Streuinformation in eine dyadische Darstellung im Ortsbereich übertragen.

Mit der beschriebenen dyadischen Berechnungsvorschrift ist es möglich, alle Streueigenschaften des Objektes darzustellen. Um ein polarimetrisches monostatisches Streuspektrum vollständig zu charakterisieren, sind zwei einfallende Felder unterschiedlicher Polarisation erforderlich. Dies folgt aus der Tatsache, dass die Polarisation einer ebenen Welle zwei Freiheitsgrade besitzt. Buddendick und Eibert [2011] beschreiben eine Methode, bei der eine vektorielle Streuzentrenverteilung für die monostatische Konfiguration berechnet wird. Im Gegensatz zum dyadischen Modell ist diese Beschreibung nur für eine bestimmte Polarisation des einfallendes Feldes gültig. Die üblicherweise eingesetzten ISAR-Verfahren behandeln die vier Polarisationskombinationen HH, VV, HV und VH unabhängig voneinander [Vaupel und Weinmann 2009; Vaupel und Eibert 2006] und stellen daher keine voll polarimetrische Prozessierung dar.

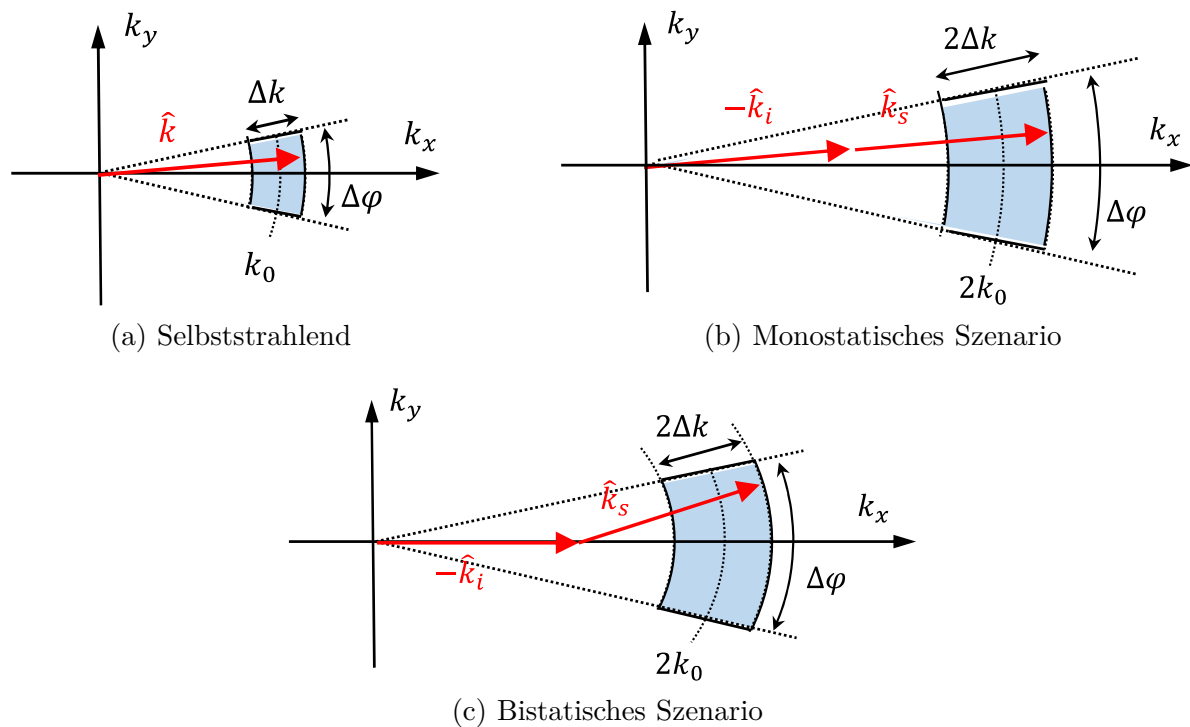


Abbildung 3.1: Vergleich von Antennen- und Streufeldmessdaten anhand der k -Raumdarstellung für das gleiche Frequenzband und für identische Betrachtungswinkel; dabei sind k_0 die Wellenzahl bei der Mittenfrequenz, Δk die Bandbreite, $\Delta\phi$ der Variationsbereich des Betrachtungswinkels, \hat{k} , \hat{k}_i und \hat{k}_s die normierten Wellenvektoren der emittierten, einfallenden beziehungsweise gestreuten Welle und k_x , k_y sind die kartesischen Komponenten des Ortsfrequenzbereichs.

3.2 Vom Raumfrequenzspektrum zur räumlichen Verteilungsfunktion

Die k -Raum-Darstellung ermöglicht eine einheitliche Formulierung für die Bilderzeugung aus Antennen- und Streufelddaten [Mensa 1990; Buddendick und Eibert 2011; Bojarski 1972]. Dazu werden die Beobachtungen, wie in Abb. 3.1 gezeigt, je nach Szenario an verschiedenen Koordinatenpositionen im k -Raum angeordnet, wenn der Frequenzbereich und der Winkelbereich

der Daten jeweils identisch sind. Der k -Raum ist der Fourierraum des Ortsbereichs und wird deshalb auch Ortsfrequenzbereich genannt. Der Wellenvektor \mathbf{k} dient als Koordinate.

Durch die Definition dieser drei unterschiedlichen k -Raum-Bereiche ist es möglich, die in Abschnitt 3.1 eingeführten Gleichungen (3.1), (3.5) und (3.15) zur Bilderzeugung durch den einheitlichen Formalismus

$$\iiint_K \dots e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \quad (3.16)$$

darzustellen, welcher einer 3D-Fouriertransformation entspricht. Die Ausdehnung des k -Raum-Sektors K wird vom Winkel- und Frequenzbereich, in dem der Streukörper beobachtet wurde, bestimmt. Wichtig ist dabei die Definition des Wellenvektors \mathbf{k} in (3.6), welche die einfallende und gestreute Welle berücksichtigt. Dieser Zusammenhang ist schematisch in Abb. 3.1 dargestellt. Aus den Grafiken geht hervor, dass der Wellenvektor der einfallenden Welle \mathbf{k}_i bei inversen Quellenproblemen nicht existiert und deshalb rechnerisch zu Null gesetzt werden muss, während er bei Streuproblemen zu einer Skalierung (monostatisch) oder Verschiebung (bistatisch) der Beobachtungen im k -Raum führt.

Das zu transformierende Spektrum ebener Wellen kann von dyadischer oder von vektorieller Natur sein, je nachdem, um welche Art von Beobachtung es sich handelt. Eine Übersicht dieser Gesetzmäßigkeiten in Abhängigkeit der vorliegenden Szenarien ist in der oberen Hälfte von Tabelle 3.1 gegeben. Die weiteren Zeilen der Tabelle werden in den nachfolgenden Abschnitten erörtert.

3.3 Physikalische Interpretation des resultierenden Bildinhalts

Nun soll geklärt werden, über welche elektromagnetischen Größen die räumliche Verteilungsfunktion Aufschluss liefert und wie Objekteigenschaften und Anregung im Bild dargestellt werden. Hierzu werden Näherungsmodelle für schwach reflektierende Körper sowie eine Näherungslösung aus der physikalischen Optik herangezogen. Tabelle 3.1 am Ende des Abschnitts fasst die Ergebnisse zusammen.

3.3.1 Äquivalente Stromverteilungen

Ohne die Kenntnis der orts- und materialabhängigen Green'schen Funktion ist die Berechnung der abgestrahlten Felder aus der physikalischen Stromverteilung $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega)$ aufwändig. Eine Möglichkeit ist die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen in (2.3a)-(2.3d). Um eine explizite Berechnungsvorschrift für das abgestrahlte Feld abzuleiten, wird mit

$$\bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r}, \omega) \circ \mathbf{J}_{\text{eq}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.17)$$

eine Gleichung basierend auf der Green'schen Funktion des Freiraums in (2.8) eingeführt. Diese Formulierung entspricht der in (2.7) definierten Faltung mit unabhängigen Quellen, wobei die dabei auftretende äquivalente Stromverteilung $\mathbf{J}_{\text{eq}}(\mathbf{r})$ im Freiraum üblicherweise von der physikalischen Stromverteilung $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega)$ im Medium abweicht [Qin und Ciric 1993; Livesay und Chen 1974]. Das Fernfeldspektrum

$$\mathbf{V}(\mathbf{k}) = (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) \cdot \iiint_V \mathbf{J}_{\text{eq}}(\mathbf{r}) e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \quad (3.18)$$

folgt durch Einsetzen von (2.14) in (2.15). Das Ergebnis wird in der Abbildungsvorschrift (3.1) benötigt, was schließlich zum Ausdruck

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) = \iiint_K (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) \cdot \iiint_V e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \mathbf{J}_{\text{eq}}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \quad (3.19)$$

führt. Die Frequenzunabhängigkeit der äquivalenten Stromverteilung ermöglicht eine Vertauschung des inneren und äußeren Dreifachintegrals. Das Ergebnis

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) = \iiint_V \bar{\mathbf{P}}_q(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_{\text{eq}}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \bar{\mathbf{P}}_q(\mathbf{r}) \overset{\circ}{*} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (3.20)$$

entspricht damit einer Faltung, wobei

$$\bar{\mathbf{P}}_q(\mathbf{r}) = \iiint_K (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \quad (3.21)$$

die Punktantwortfunktion für inverse Quellenprobleme darstellt und durch ein tiefgestelltes q gekennzeichnet ist. Das im k -Raum definierte Gebiet K entspricht dem Bereich, in dem Spektraldaten vorliegen. Zur gleichen Definition führen auch die Überlegungen in [Buddendick und Eibert 2011] und [Schnattinger und Eibert 2012c]. Das Ergebnis in (3.20) spiegelt die äquivalente Stromverteilung der Quellenanordnung wider. Wie groß die Ähnlichkeiten mit der physikalischen Stromverteilung ausfallen, wird dabei von den Inhomogenitäten und Verkopplungen im Quellvolumen bestimmt.

3.3.2 Dyadische Streuzentrenverteilungen

Die physikalische Interpretation des Abbildungsprozesses erfolgt an Hand der beiden in Abschnitt 3.1.2 vorgestellten bistatischen und monostatischen Streuszenarien. Das Streuobjekt wird durch eine dyadische Streuzentrenverteilung $\bar{\mathbf{s}}(\mathbf{r}, \omega)$ modelliert, welche mit

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.22)$$

einen Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld am Ort des Streukörpers und der Quellenverteilung herstellt. Analog zum inversen Quellenproblem ist üblicherweise die orts- und materialabhängige Green'sche Funktion nicht bekannt, weshalb die Berechnung der Streufelder aufwändig ist und beispielsweise die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen in (2.3a)-(2.3d) erfordert. Die Berechnung muss außerdem für jede Anregung wiederholt werden. Dies erschwert die physikalische Interpretation des Abbildungsprozesses. Deshalb wird mit

$$\bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r}, \omega) \overset{\circ}{*} (\bar{\mathbf{s}}(\mathbf{r}, \omega) \cdot (\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, \omega))) = \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.23)$$

eine Beschreibung des Streufelds basierend auf der Green'schen Funktion des Freiraums in (2.8) eingeführt. Diese Formulierung orientiert sich an der in (2.7) definierten Faltung mit unabhängigen Quellen, wobei sich die dabei auftretende äquivalente Stromverteilung

$$\mathbf{J}_{\text{eq}}(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{r}, \omega) \cdot (\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, \omega)) \quad (3.24)$$

im Freiraum üblicherweise von der physikalischen Stromverteilung $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega)$ im Medium unterscheidet [Qin und Ciric 1993; Livesay und Chen 1974]. Wird nun das mit (3.23) bestimmte

elektrische Streufeld \mathbf{E}_s für eine gegebene dyadische Streuzentrenverteilung $\bar{\mathbf{s}}$ bestimmt, so kann es in

$$\bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r}, \omega) \overset{\circ}{*} (\bar{\mathbf{s}}_{\text{eq}}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, \omega)) = \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.25)$$

eingesetzt werden, um eine äquivalente Streuzentrenverteilung $\bar{\mathbf{s}}_{\text{eq}}$ zu berechnen. In der SAR-Bildgebung bedeutet die Born'sche Näherung, dass der Zusammenhang zwischen Streufeld und einfallendem Feld beziehungsweise Streuzentrenverteilung linear approximiert wird [Cheney und Borden 2009a, S. 54ff.]. Dadurch kann es in den Bildern zu Geisterzielen und Artefakten kommen [Jain und Patel 1990]. Entsprechend dieser Abweichungen unterscheidet sich die äquivalente Streuzentrenverteilung $\bar{\mathbf{s}}_{\text{eq}}$ von der ursprünglichen Streuzentrenverteilung $\bar{\mathbf{s}}$. Dies bedeutet auch, dass das Definitionsgebiet der äquivalenten Streuzentrenverteilung nicht auf den Bereich des Streukörpers beschränkt bleibt, da Geisterziele nicht direkt die geometrische Beschaffenheit des Streukörpers widerspiegeln.

Die in (3.25) gezeigte Gleichung stellt eine explizite Berechnungsvorschrift für das elektrische Streufeld \mathbf{E}_s dar. Unter Fernfeldannahmen vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\mathbf{E}_{s,0}(\mathbf{k}_s) = (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}_s \hat{k}_s) \cdot \iiint_V \bar{\mathbf{s}}_{\text{eq}}(\mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{E}_{i,0}(\mathbf{k}_i) e^{j(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{r}'} d^3 \mathbf{r}', \quad (3.26)$$

wobei für das einfallende und gestreute Feld die Definition in (3.3) beziehungsweise (3.4) gilt. Das normierte Spektrum ebener Wellen lautet im allgemeinen bistatischen Fall

$$\mathbf{V}_s(\mathbf{k}_s) = \frac{1}{h(\omega)} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}_s \hat{k}_s) \cdot \iiint_V \frac{\bar{\mathbf{s}}_{\text{eq}}(\mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{E}_{i,0}(\mathbf{k}_i)}{h(\omega)} e^{j(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{r}'} d^3 \mathbf{r}', \quad (3.27)$$

während für die monostatische Streudyade¹

$$\bar{\mathbf{V}}_s(\mathbf{k}_s) = (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}_s \hat{k}_s) \iiint_V \frac{\bar{\mathbf{s}}_{\text{eq}}(\mathbf{r}', \omega)}{h(\omega)} e^{j2\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}'} d^3 \mathbf{r}' \quad (3.28)$$

gilt, wobei jeweils die zugehörige bistatische beziehungsweise monostatische Definition in (3.4) und (3.14) ausgewertet wurde und im monostatischen Fall die Vereinfachung

$$(\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}_s \hat{k}_s) \cdot \underbrace{\left(\frac{\mathbf{E}_{i,0}^{(1)}(\mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{E}_{i,0}^{(1)}(\mathbf{k}_i)^*}{\|\mathbf{E}_{i,0}^{(1)}(\mathbf{k}_i)\|_2^2} + \frac{\mathbf{E}_{i,0}^{(2)}(\mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{E}_{i,0}^{(2)}(\mathbf{k}_i)^*}{\|\mathbf{E}_{i,0}^{(2)}(\mathbf{k}_i)\|_2^2} \right)}_{\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}_i \hat{k}_i} = (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}_s \hat{k}_s) \quad (3.29)$$

zur Anwendung kam. Dies kann durch Einsetzen von (3.26) in (3.4) beziehungsweise (3.14) unter Verwendung von (2.13), (2.14) und (3.9) nachvollzogen werden.

Schließlich ergibt sich für das Bild in Abhängigkeit der dyadischen Streuzentrenverteilung der Zusammenhang

$$\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) = \iiint_K (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}_s \hat{k}_s) \cdot \iiint_V \frac{\bar{\mathbf{s}}_{\text{eq}}(\mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{E}_{i,0}(\mathbf{k}_i)}{h(\omega)} e^{j(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{r}'} d^3 \mathbf{r}' e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{k} \quad (3.30)$$

¹Beim Vergleich von (3.27) mit (3.28) stellt sich die Frage, warum die Anregung $\mathbf{E}_{i,0}$ im ersten Fall auftritt. Dies hat den Grund, dass sich die Polarisation der einfallenden Welle dort nicht eliminieren lässt, während diese Möglichkeit im anderen Fall gegeben ist. Auf eine Amplitudennormierung bei $\mathbf{E}_{i,0}$ wird verzichtet, da so keine zusätzlichen Formelzeichen benötigt werden.

im bistatischen Fall für eine Anregung nach der Definition in (3.5) beziehungsweise

$$\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) = \iiint_K (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}_s \hat{k}_s) \cdot \iiint_V \frac{\bar{s}_{\text{eq}}(\mathbf{r}', \omega)}{h(\omega)} e^{j2\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}' e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \quad (3.31)$$

im monostatischen Fall nach der Definition in (3.15). Die resultierenden Gleichungen bringen den Bildinhalt mit der Streuzentrenbeschreibung des Streukörpers in Verbindung, allerdings sind diese in der Praxis wenig hilfreich zur Interpretation der Bilder. Das hat zum einen Grund, dass mit der äquivalenten Streuzentrenbeschreibung \bar{s}_{eq} eine schwer greifbare Zwischengröße eingeführt wird und zum anderen zwei geschachtelte Volumenintegrale ein intuitives Verständnis der Rechenvorschrift fast unmöglich machen. Von großem Nutzen wäre ein Zusammenhang analog zu dem in (3.20), wo die resultierende Abbildung als Faltung mit einer Punktantwortfunktion beschrieben wird. Durch die Anwendung eines Näherungsverfahrens ist eine ähnliche Beschreibung auch für dyadische Streuzentrenverteilungen möglich. Die folgenden zwei Unterabschnitte zeigen dies an zwei verschiedenen Szenarien. Der erste Abschnitt widmet sich Streukörpern aus einem schwach reflektierenden Dielektrikum, während der zweite Abschnitt auf Streukörper eingeht, die elektrisch große und glatte Flächen mit sehr hoher Leitfähigkeit aufweisen. Während die erste Näherung sowohl im bistatischen Fall als auch im monostatischen Fall anwendbar ist, beschränkt sich die Analyse zum zweiten Näherungsmodell aufgrund der dabei notwendigen Annahmen auf das bistatische Szenario mit einer einzigen Einfallrichtung. Tabelle 3.1 stellt die zugehörigen Ergebnisse übersichtlich dar.

3.3.2.1 Schwach reflektierende dielektrische Streukörper

Die inhomogene Wellengleichung des elektrischen Feldes in (2.4) stellt den Ausgangspunkt für die folgenden Überlegungen dar. Da hier ein dielektrisches Streuobjekt betrachtet wird, gilt für die Permittivität

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_r(\mathbf{r}) \varepsilon_0, \quad (3.32)$$

sowie für die Permeabilität $\mu(\mathbf{r}) = \mu_0$. Um Mehrfachinteraktionen ohne größere Fehler vernachlässigen zu können, wird gefordert, dass die relative Permittivität $\varepsilon_r(\mathbf{r})$ nur geringfügig größer als 1 ist. Die Interaktion mit dem einfallenden Feld wird so auf ein Minimum beschränkt.

Im Falle einer externen Anregung des Streuobjekts ist die homogene vektorielle Wellengleichung

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{0} \quad (3.33)$$

zur Beschreibung ausreichend, da das Gebiet des Streukörpers quellenfrei ist. Für das einfallende Feld ohne Streukörper gilt

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, \omega) - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{0}, \quad (3.34)$$

wobei die rechte Seite im Gegensatz zu (2.4) in diesem Fall Null ist. Die Wellengleichung für das Streufeld

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, \omega) - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, \omega) = \omega^2 \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon_r(\mathbf{r}) - 1)}_{O(\mathbf{r})} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.35)$$

ergibt sich aus der Differenz der Gleichungen (3.33) und (3.34), wobei die skalare Funktion $O(\mathbf{r})$ als Objektfunktion bezeichnet wird. Durch

$$\bar{\mathbf{s}}(\mathbf{r}, \omega) = \omega^2 O(\mathbf{r}) \bar{\mathbf{I}} \quad (3.36)$$

kann die Problemstellung auf die dyadische Streuzentrenverteilung in der impliziten Integralgleichung in (3.23) zurückgeführt werden. Wenn das Streuobjekt nur schwach reflektierend ist, gilt die Born'sche Näherung hinreichend genau. In diesem Fall treten auch keine Geisterziele auf und es gilt

$$\bar{\mathbf{s}}_{\text{eq}}(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{r}, \omega). \quad (3.37)$$

Damit wird aus (3.25)

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r}, \omega) \overset{\circ}{*}_{\mathbf{r}} \left(\omega^2 O(\mathbf{r}) \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, \omega) \right) \quad (3.38)$$

und das elektrische Streufeld lässt sich explizit berechnen. Im monostatischen Fall gilt dies getrennt für beide Polarisierungen mit der in (3.9) und (3.10) eingeführten Notation $\mathbf{E}_i^{(1,2)}$ beziehungsweise $\mathbf{E}_s^{(1,2)}$.

Die zugehörigen Abbildungen können, wie in (3.30) und (3.31) gezeigt, mit zwei geschachtelten Dreifachintegralen berechnet werden. Die Gewichtungsfunktion

$$h(\omega) = \frac{\omega^2}{4\pi} \quad (3.39)$$

eliminiert für den schwach reflektierenden Streukörper die Frequenzabhängigkeit des Integranden. Falls die Anregung $\mathbf{E}_{i,0}(\mathbf{k}_i)$ eine Frequenzabhängigkeit aufweist, so kann sie durch einen zusätzlichen Faktor in $h(\omega)$ berücksichtigt werden. Im Folgenden gilt deshalb die Annahme, dass $\mathbf{E}_{i,0}(\mathbf{k}_i) = \mathbf{E}_{i,0}$ frequenzunabhängig und damit konstant ist. Ähnlich wie bei der Abbildung von selbststrahlenden Stromverteilungen in (3.19) lassen sich die zwei Dreifachintegrale unter den getroffenen Annahmen vertauschen. Nach dieser Umformung liegen die Ausdrücke

$$\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{P}}_b(\mathbf{r}, \hat{k}_i) \overset{\circ}{*}_{\mathbf{r}} (O(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{i,0}) \quad \text{und} \quad (3.40)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{P}}_m(\mathbf{r}) * O(\mathbf{r}) \quad (3.41)$$

vor, wobei das resultierende Bild jeweils die Objektfunktion $O(\mathbf{r})$ beinhaltet und aus einer Faltung mit einer Punktantwortfunktion hervorgeht. Das tiefgestellte b bei

$$\bar{\mathbf{P}}_b(\mathbf{r}, \hat{k}_i) = \iiint_K (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}_s \hat{k}_s) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \quad (3.42)$$

kennzeichnet die **b**istatische Geometrie, während das tiefgestellte m bei

$$\bar{\mathbf{P}}_m(\mathbf{r}) = \iiint_K (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k} \hat{k}) e^{-j2\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{k} = 2\bar{\mathbf{P}}_q(2\mathbf{r}). \quad (3.43)$$

die **m**onostatische Punktantwortfunktion identifiziert.² Da es sich in diesem Fall um eine skalare Objektfunktion handelt, entspricht die Beschreibung einer Verteilung isotroper Punktstreuer.

²Die dyadischen Punktantwortfunktionen $\bar{\mathbf{P}}_b$ und $\bar{\mathbf{P}}_m$ unterscheiden sich durch den Faktor $\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}_s \hat{k}_s$ von den entsprechenden skalaren Definitionen [Walterscheid et al. 2006].

Entscheidend hierfür ist die Annahme, dass es sich um einen schwach reflektierenden Streukörper mit isotropen elektromagnetischen Eigenschaften handelt. Die skalare Objektfunktion $O(\mathbf{r})$ kann aber auch als Dyade definiert und damit zur Modellierung anisotroper Materialeigenschaften verwendet werden. Die Faltungsdarstellung der resultierenden Abbildung ändert sich damit in

$$\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{P}}_b(\mathbf{r}, \hat{k}_i) \overset{\circ}{*}_{\mathbf{r}} (\bar{\mathbf{O}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{i,0}) \quad \text{und} \quad (3.44)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{P}}_m(\mathbf{r}) \overset{\circ}{*} \bar{\mathbf{O}}(\mathbf{r}). \quad (3.45)$$

3.3.2.2 Perfekt leitende Streukörper

Die Annahme eines perfekt leitenden Streukörpers trifft in guter Näherung auf viele metallische Objekte zu. Wenn darüber hinaus im Verhältnis zur Wellenlänge hinreichend große und glatte Strukturen vorliegen, findet oft die Näherung der physikalischen Optik (PO) Anwendung. In dieser Näherung wird die Oberfläche des Objekts, wie in Abb. 3.2 zu sehen, unterteilt in einen Reflexions- und einen Schattenbereich [Bhalla und Ling 1993; Buddendick und Eibert 2011]. Ausgehend von dieser Unterteilung wird die Stromverteilung durch

$$\mathbf{J}_{\text{PO}}(\mathbf{r}, \omega) = \begin{cases} 2\hat{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r}, \omega), & \text{falls } \mathbf{r} \text{ auf der beleuchteten Oberfläche} \\ \mathbf{0}, & \text{falls } \mathbf{r} \text{ im Schattenbereich} \end{cases} \quad (3.46)$$

approximiert, wobei \hat{n} der nach außen gerichtete Normalenvektor der Oberfläche ist. Damit wird die Stromverteilung im Schattenbereich zu Null gesetzt, im Reflexionsbereich folgt die Stromverteilung direkt aus dem ungestörten einfallenden Feld am Auftreffpunkt.

Nun sei das einfallende Feld durch die ebene Welle in (3.3) gegeben. Mit der Maxwell'schen Gleichung in (2.3a) wird das magnetische Feld in (3.46) durch das elektrische ersetzt. Ausgehend von der Definition der dyadischen Leitfähigkeitsverteilung

$$\bar{\sigma}_{\text{PO}}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\hat{n}(\mathbf{r}) \times \hat{k}_i \times \bar{\mathbf{I}}, & \text{falls } \mathbf{r} \text{ auf der beleuchteten Oberfläche} \\ \bar{\mathbf{0}}, & \text{falls } \mathbf{r} \text{ im Schattenbereich} \end{cases} \quad (3.47)$$

lässt sich (3.46) durch

$$\mathbf{J}_{\text{PO}}(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\sigma}_{\text{PO}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\sigma}_{\text{PO}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{i,0}(\mathbf{k}_i) e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \quad (3.48)$$

ausdrücken. Die Leitfähigkeitsverteilung ändert sich mit der Einfallsrichtung, da diese auch den Reflexions- und Schattenbereich bestimmt. Eine Bildberechnung ist deshalb nur bei einer Anregung mit konstanter Polarisation und Einfallsrichtung sinnvoll. Aus diesem Grund wird der perfekt leitende Streukörper nicht zusätzlich der monostatischen Bildgebung unterzogen, sondern die zugehörigen Untersuchungen beschränken sich auf den bistatischen Fall.

Unter den Annahmen der PO entsprechen die dyadische Streuzentrenverteilung in (3.24) und die äquivalente Quellenverteilung in (3.25) mit

$$\mathbf{J}_{\text{eq}}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{J}_{\text{PO}}(\mathbf{r}, \omega), \quad (3.49)$$

$$\bar{\mathbf{s}}_{\text{eq}}(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\sigma}_{\text{PO}}(\mathbf{r}) \quad (3.50)$$

direkt den hier eingeführten Größen. Dementsprechend stellt das doppelte Dreifachintegral in (3.30) einen expliziten Ausdruck für die resultierende Abbildung dar. Ein normierter und frequenzunabhängiger Integrand im Ausdruck wird durch die Gewichtungsfunktion

$$h(\omega) = \frac{-j\omega\mu}{4\pi} \quad (3.51)$$

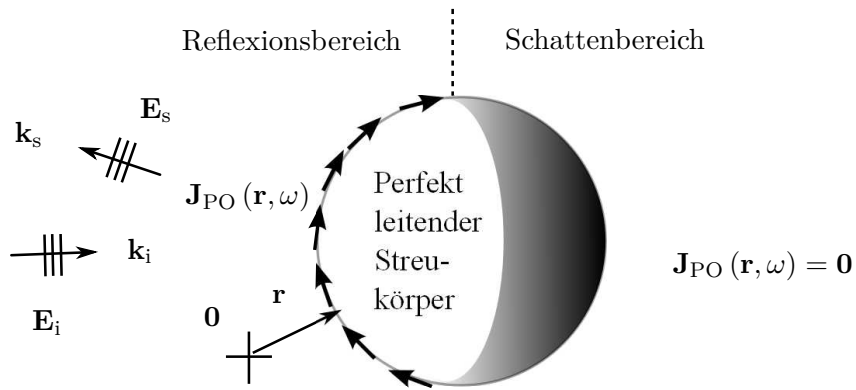


Abbildung 3.2: Nach dem Prinzip der physikalischen Optik wird ein Objekt für jede einfallende Welle in Reflexions- und Schattenbereich unterteilt [Bhalla und Ling 1993].

erreicht. Wie im letzten Abschnitt soll die Frequenzabhängigkeit von $\mathbf{E}_{i,0}(\mathbf{k}_i)$ mit der Funktion $h(\omega)$ kompensiert werden, sodass $\mathbf{E}_{i,0}$ eine Konstante darstellt. Nach Vertauschung der Integrale, wie in (3.19), folgt

$$\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) = \iint_{\mathcal{S}} \bar{\mathbf{P}}_b(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \hat{\mathbf{k}}_i) \cdot \bar{\sigma}_{\text{PO}}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_{i,0} d^2\mathbf{r}' = \bar{\mathbf{P}}_b(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}_i) \overset{\circ}{*}_{\mathbf{r}} (\bar{\sigma}_{\text{PO}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{i,0}), \quad (3.52)$$

wobei die resultierende Punktantwortfunktion dem Ausdruck in (3.42) entspricht und die Fläche \mathcal{S} den Reflexionsbereich des Streukörpers darstellt. Das Bild ist damit eine Abbildung der dyadischen Leitfähigkeitsverteilung $\bar{\sigma}_{\text{PO}}$ und der in der Anregung $\mathbf{E}_{i,0}$ enthaltenen Polarisationsinformation. Dieser Zusammenhang ist auch in Tabelle 3.1 aufgeführt und ähnelt (3.40).

Dieses Modell basiert auf den Näherungen der PO, welche in der Realität natürlich nie exakt erfüllt sind. Deshalb ist es nicht ungewöhnlich, dass das berechnete Bild entgegen des Zusammenhangs in (3.52) nicht immer den Reflexionsbereich wiedergibt, der sich aus den Prinzipien der PO ergibt. Zusätzlich verursachen Mehrfachreflexionen und Inhomogenitäten Artefakte im Bild. Im Allgemeinen wird das berechnete Bild deshalb als eine im Volumen definierte Abbildung der dyadischen Leitfähigkeitsverteilung betrachtet, welche dem Beobachter Informationen über das Streuobjekt liefert. Die größten Amplituden des Bildes entsprechen typischerweise dem Reflexionsbereich des Streuobjekts und die vektoriellen Einträge der Dyade geben die Orientierung der Oberfläche wieder. So lässt sich beispielsweise die Lage und Orientierung eines metallischen Drahtes erkennen, wie später in Abschnitt 6.2.3 gezeigt wird. Bei der Interpretation der Bilder ist die Polarisation des einfallenden Feldes wichtig. Es ist zu beachten, dass nur die vektoriellen Komponenten der dyadischen Leitfähigkeitsverteilung wiedergegeben werden, die durch die Polarisation des einfallenden Feldes angeregt werden. Damit sind die vektoriellen Anteile in Ausbreitungsrichtung typischerweise Null.

3.4 Analytische Lösungen der Punktantwortfunktion

Wie in Abschnitt 3.3 erläutert, kann der Bildinhalt als Abbild einer physikalischen Größe begriffen werden. Die Abbildungseigenschaften werden von Bandbreite und Beobachtungswinkelbereich bestimmt und hängen vom Szenario ab (vgl. Abb. 3.1). Durch die Berechnung der Punktantwortfunktion kann dies genau quantifiziert werden. Das Konzept der Punktantwort-

Tabelle 3.1: Übersicht über die in dieser Arbeit behandelten Szenarien.

	Selbststrahlende Quellen	Bistatisches Szenario	Monostatisches Szenario
Wellenvektor	\mathbf{k}	$\mathbf{k} = \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i$	$\mathbf{k} = 2\mathbf{k}_s$
Spektrum ebener Wellen	abgestrahltes Feld (vektoriell) $\mathbf{V}(\mathbf{k}) \sim \begin{pmatrix} E^\phi \\ E^\theta \end{pmatrix}$	gestreutes Feld (vektoriell) $\mathbf{V}_s(\mathbf{k}_s) \sim \begin{pmatrix} E_s^\phi \\ E_s^\theta \end{pmatrix}$	Streumatrix (dyadisch) $\bar{\mathbf{V}}_s(\mathbf{k}_s) \sim \begin{pmatrix} \frac{E_s^\phi}{E_i^\phi} & \frac{E_s^\phi}{E_i^\theta} \\ \frac{E_s^\theta}{E_i^\phi} & \frac{E_s^\theta}{E_i^\theta} \end{pmatrix}$
Bilderzeugung	$\iiint_K \dots e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}$		
Bild	$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r})$	$\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{r})$	$\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{r})$
Physikalische Modelle	Äquivalente Quellenverteilung: $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{P}}_q(\mathbf{r}) \overset{\circ}{*}_{\mathbf{r}} \mathbf{J}_{\text{eq}}(\mathbf{r})$	Schwache Streuung: $\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{P}}_b(\mathbf{r}, \mathbf{k}_i) \overset{\circ}{*}_{\mathbf{r}} (\bar{\mathbf{O}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{i,0})$ PO-Näherung: $\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{P}}_b(\mathbf{r}, \mathbf{k}_i) \overset{\circ}{*}_{\mathbf{r}} (\bar{\sigma}_{\text{PO}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{i,0})$	Schwache Streuung: $\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{P}}_m(\mathbf{r}) \overset{\circ}{*} \bar{\mathbf{O}}(\mathbf{r})$
Punktantwortfunktion	$\bar{\mathbf{P}}_q(\mathbf{r}) = \iiint_K (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}$	$\bar{\mathbf{P}}_b(\mathbf{r}, \mathbf{k}_i) = \iiint_K (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}_s\hat{k}_s) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}$	$\bar{\mathbf{P}}_m(\mathbf{r}) = 2\bar{\mathbf{P}}_q(2\mathbf{r}) = \iiint_K (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}$

funktionen hat in Optik und Bildverarbeitung eine große Bedeutung, kommt jedoch auch in der Radartechnik zum Einsatz.

Im Folgenden werden für die in (3.21) definierte Punktantwortfunktion $\bar{\mathbf{P}}_q$ analytische Lösungen hergeleitet, wo dies möglich ist. Wie in (3.43) festgestellt, lässt sich jedes Ergebnis durch eine Skalierung und Stauchung auch als monostatische Punktantwortfunktion $\bar{\mathbf{P}}_m$ verwenden. Im Gegensatz dazu müssen Lösungen der bistatischen Punktantwortfunktion separat berechnet werden.

Die Lösung des Integrals in (3.21) hängt von der k -Raum-Belegung K ab. In bestimmten Fällen lässt sich das Integral analytisch lösen. Um die mathematischen Ausdrücke zu vereinfachen, soll die kompakte Schreibweise

$$\mathcal{F}\{\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{k})\} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{k}) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{r}), \quad (3.53a)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{r})\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{r}) e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{k}) \quad (3.53b)$$

für die 3D-Fouriertransformation eingeführt werden.³ Um die Punktantwortfunktion mit Hilfe dieser Definition darzustellen, wird die Maskierungsfunktion $M(\mathbf{k})$ verwendet. Sie ist immer genau in den Bereichen des k -Raums ungleich Null, in denen Beobachtungen vorliegen. Außerdem erlaubt der Wertebereich der Funktion eine Gewichtung der Messwerte. In kompakter Schreibweise lautet die Punktantwortfunktion somit

$$\bar{\mathbf{P}}_q(\mathbf{r}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} M_K(\mathbf{k}) (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} = \mathcal{F}\{M_K(\mathbf{k}) (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k})\}. \quad (3.54)$$

Durch eine Koordinatentransformation können die Beobachtungen beliebig im k -Raum angeordnet werden. Es ist damit ausreichend, das Integral in (3.54) in einer beliebig gedrehten Konfiguration analytisch zu lösen. Dies folgt aus dem Rotationsinvarianzprinzip der Fouriertransformation [Woods 2011], welches besagt, dass eine Rotation im Spektralraum einer Rotation im Ortsbereich entspricht. Für die dyadische Punktantwortfunktion bedeutet dies

$$\bar{\mathbf{P}}_q(\bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{r}) = \mathcal{F}\{M_K(\bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{k}) (\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{R}} \cdot \hat{k}\bar{\mathbf{R}} \cdot \hat{k})\}, \quad (3.55)$$

wobei $\bar{\mathbf{R}}$ eine Rotationsmatrix in dyadischer Notation bezeichnet.

In den folgenden Abschnitten wird die Punktantwortfunktion für elementare Maskierungsfunktionen analytisch gelöst. In der Realität fallen die Maskierungsfunktionen oft komplizierter aus. Deshalb soll ein Zerlegungsansatz entwickelt werden, mit dessen Hilfe auch für viele praxisrelevante Szenarien analytische Lösungen konstruiert werden können. Dabei wird eine im k -Raum definierte Maskierungsfunktion M_K approximiert durch

$$M_K(\mathbf{k}) \approx M_{K_1}(\mathbf{k}) + M_{K_2}(\mathbf{k}) + \dots + M_{K_{N_K}}(\mathbf{k}), \quad (3.56)$$

wobei für alle Maskierungsfunktionen M_{K_1} bis $M_{K_{N_K}}$ die Punktantwortfunktion analytisch gelöst werden kann. Eine komplizierte Punktantwortfunktion kann somit als Summe analytischer Funktionen approximiert werden.

³Wie in der Fouriertransformation üblich, erfolgt die Hintransformation mit dem Kern $e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ und Rücktransformation mit dem Kern $e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$. Diese Definition führt dazu, dass nicht der Ortsfrequenzbereich sondern der Ortsbereich dem Fourierraum entspricht.

Bei einer sphärischen Antennenmessung sind Beobachtungen beispielsweise nicht auf der gesamten Kugelschale verfügbar, da die Befestigungsvorrichtung des Positionierers die Antenne aus mindestens einer Blickrichtung verdeckt. Üblicherweise werden deshalb keine Messungen um den Südpol des sphärischen Koordinatensystems durchgeführt, was bedingt, dass die Daten im k -Raum auf einer Kugelschale mit Loch liegen. Eine analytische Punktantwortfunktion für dieses Szenario lässt sich durch die Kombination existierender Lösungen nachbilden. Dieses Vorgehen wird in Abb. 3.3 veranschaulicht.

3.4.1 Schmalbandige Kleinwinkelnäherung

3.4.1.1 Allgemeine Herleitung

In vielen Szenarien müssen Bilder mit Beobachtungen erstellt werden, die aus einem schmalen Winkelbereich stammen. Als Beispiel sei hier ein vorbeifliegendes Flugzeug genannt, das vom Radar einer Bodenplattform nur aus einem begrenzten Blickwinkelbereich erfasst werden kann.

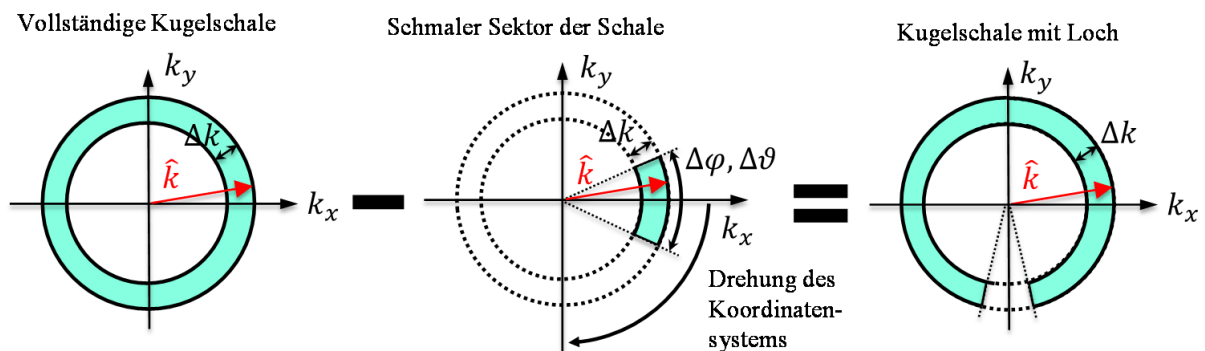


Abbildung 3.3: Nachbildung einer kugelförmigen k -Raum-Belegung ohne Polregion durch Subtraktion zweier elementarer Punktantwortfunktionen unter Anwendung geeigneter Koordinatentransformationen.

Mit der Koordinatentransformation in (3.55) können die Beobachtungen immer um die positive x -Achse des k -Raums angeordnet werden. Die Daten befinden sich damit in einem Kugelsektor des Spektralraums, der auf der positiven x -Achse seinen Mittelpunkt hat und durch die Winkel $\Delta\phi$, $\Delta\theta$ und die Frequenzbandbreite Δk beschrieben ist. Dieser Bereich entspricht der Maskierungsfunktion

$$M_K(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{k} \in K \\ 0, & \mathbf{k} \notin K \end{cases}, \quad (3.57)$$

wobei der k -Raum-Bereich

$$K = \left\{ \mathbf{k} = k \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 2|\phi - \phi_0| \leq \Delta\phi, \\ 2|\theta - \theta_0| \leq \Delta\theta, \\ 2|k - k_0| \leq \Delta k \end{array} \right\} \quad (3.58)$$

einem Kugelsektor mit dem Mittelpunkt $\theta_0 = \pi/2$ und $\phi_0 = 0$ entspricht. Die Ergebnisse in [Buddendick und Eibert 2011] basieren auf dem gleichen Definitionsbereich. Für die weitere Herleitung wird angenommen, dass der Öffnungswinkel und die Dicke des Kugelsektors gering sind.

Um die Punktantwortfunktion für diese Wahl von $M(\mathbf{k})$ analytisch zu lösen, wird das Integral folgendermaßen ausgedrückt:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{P}}_q(\mathbf{r}) &= \int_{-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}} \int_{-\frac{\Delta \phi}{2}}^{\frac{\Delta \phi}{2}} \int_{-\frac{\Delta \theta}{2}}^{\frac{\Delta \theta}{2}} e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) k^2 \sin\theta d\theta d\phi dk \\ &= \int_{-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}} \int_{-\frac{\Delta \phi}{2}}^{\frac{\Delta \phi}{2}} \int_{-\frac{\Delta \theta}{2}}^{\frac{\Delta \theta}{2}} e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\bar{\mathbf{I}} - \mathbf{k}\mathbf{k}) \sin\theta d\theta d\phi dk.\end{aligned}\quad (3.59)$$

Im nächsten Schritt wird eine multivariate Taylor-Entwicklung erster Ordnung für den Exponenten $-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ sowie den Faktor $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\bar{\mathbf{I}} - \mathbf{k}\mathbf{k}$ im Integral durchgeführt. Als Entwicklungsvariablen dienen dabei ϕ , θ und k , wobei um die Werte ϕ_0 , θ_0 und k_0 entwickelt wird. Anschließend werden die ursprünglichen Terme durch ihre Taylor-Entwicklung ersetzt. Das resultierende Integral kann mit Computeralgebrasystemen⁴ analytisch gelöst werden. Nach anschließenden Umformungen erhält man den dyadischen Ausdruck

$$\bar{\mathbf{P}}_q(\mathbf{r}) = k_0^2 \Delta\phi \Delta\theta \Delta k e^{-jk_0 r_x} \begin{pmatrix} 0 & g_2(\mathbf{r}, k_0) & g_3(\mathbf{r}, k_0) \\ g_2(\mathbf{r}, k_0) & g_1(\mathbf{r}, k_0) & 0 \\ g_3(\mathbf{r}, k_0) & 0 & g_1(\mathbf{r}, k_0) \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

der von den Hilfsfunktionen

$$g_1(\mathbf{r}, k_0) = \text{si}\left(\frac{\Delta\phi k_0 r_y}{2}\right) \text{si}\left(\frac{\Delta\theta k_0 r_z}{2}\right) \left[\left(1 - \frac{j^2}{k_0 r_x}\right) \text{si}\left(\frac{\Delta k r_x}{2}\right) + \frac{j^2}{k_0 r_x} \cos\left(\frac{\Delta k r_x}{2}\right) \right], \quad (3.61a)$$

$$g_2(\mathbf{r}, k_0) = \frac{j}{k_0 r_y} \text{si}\left(\frac{\Delta k r_x}{2}\right) \text{si}\left(\frac{\Delta\theta k_0 r_z}{2}\right) \left[\text{si}\left(\frac{\Delta\phi k_0 r_y}{2}\right) - \cos\left(\frac{\Delta\phi k_0 r_y}{2}\right) \right], \quad (3.61b)$$

$$g_3(\mathbf{r}, k_0) = \frac{j}{k_0 r_z} \text{si}\left(\frac{\Delta k r_x}{2}\right) \text{si}\left(\frac{\Delta\phi k_0 r_y}{2}\right) \left[\text{si}\left(\frac{\Delta\theta k_0 r_z}{2}\right) - \cos\left(\frac{\Delta\theta k_0 r_z}{2}\right) \right]. \quad (3.61c)$$

abhängt und mit $\mathbf{r} = r_x \hat{x} + r_y \hat{y} + r_z \hat{z}$ in Abhängigkeit von den kartesischen Ortskoordinaten ausgedrückt wird. Der sogenannten Spaltfunktion

$$\text{si}(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad (3.62)$$

kommt vor allem als Interpolationskern große Bedeutung zu. Die analytische Punktantwortfunktion kann in Simulationen eingebaut werden und ist für Berechnungen hilfreich.

Abb. 3.4 zeigt eine Visualisierung der Punktantwortfunktion in (3.60) für einen bestimmten Satz an Parametern. Jede dyadische Komponente wird in einem separaten Plot dargestellt, dessen Position in der 3×3 Anordnung dem jeweiligen Element der Dyade entspricht. Die Farbcodierung in den Grafiken wird durch die Amplitude der komplexwertigen Funktion in Dezibel bestimmt. Die volumetrische Information der Funktion wird durch eine Projektion der Maximalwerte entlang der kartesischen Koordinatenachsen auf die Oberfläche eines Quaders

⁴In diesem Fall wurde dazu das Programm MuPAD [SciFace Software 2012] eingesetzt, welches ein Teil von MATLAB [The MathWorks Inc. 2012] ist.

sichtbar gemacht. Es ist leicht erkennbar, dass die Amplitude im Ursprung für die signalführenden diagonalen Einträge am größten ist. Vom Ursprung aus fällt der Pegel in alle Richtungen ab, aber die Ausdehnung des Hauptmaximums variiert.

Eine Analyse der Gleichung in (3.61a) offenbart zwei Gesetzmäßigkeiten. Zum einen wird die Ausdehnung in der Beobachtungsrichtung (engl. *range direction*) von der Bandbreite Δk bestimmt. Hierbei handelt es sich um die x -Achse. Zum anderen sind die beiden Ausdehnungen der Funktion senkrecht zur Blickrichtung (engl. *cross range*) abhängig vom erfassten Blickwinkelbereich und der Trägerfrequenz. Im Speziellen sind dies die y - und z -Achse, welche von der Frequenz k_0 und den Winkelbereichen $\Delta\phi$ und $\Delta\theta$ bestimmt werden.

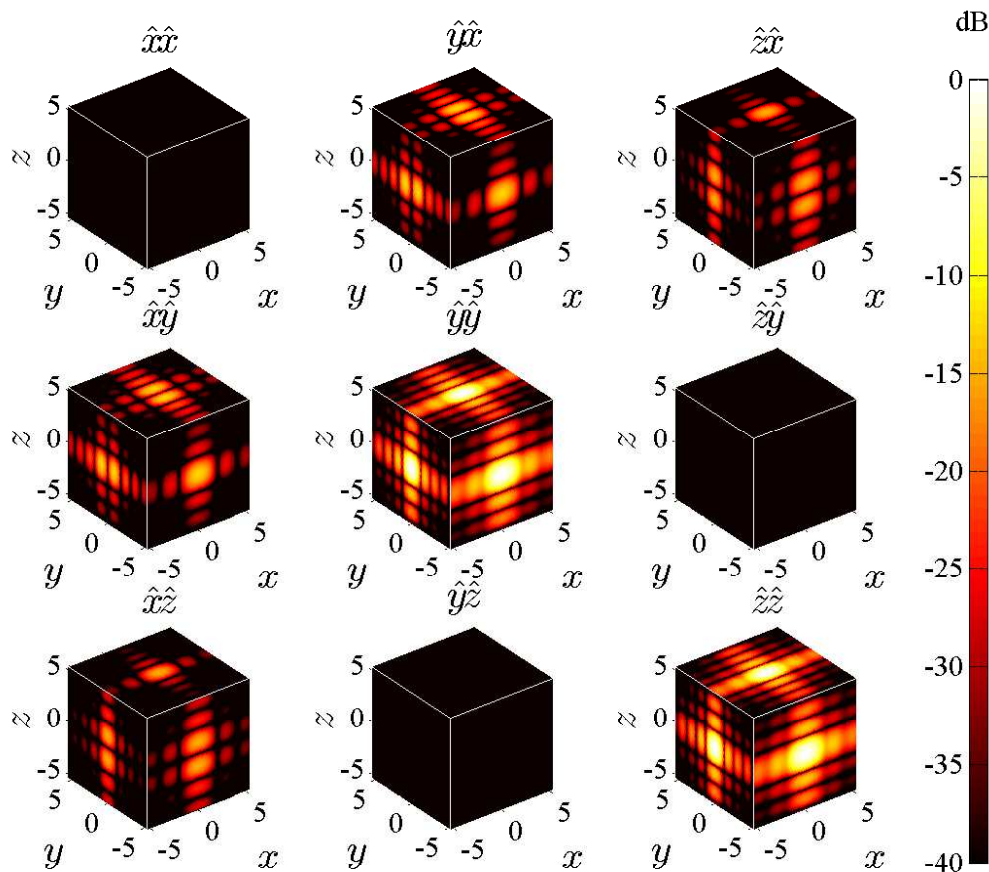


Abbildung 3.4: Punktantwortfunktion in (3.60) basierend auf schmalbandiger Kleinwinkelnäherung für $\Delta\phi = \pi/3$, $\Delta\theta = \pi/4$, $\lambda_{\max} = 2$ m und $\lambda_{\min} = 1$ m, wobei x , y und z relativ zur minimalen Wellenlänge λ_{\min} angegeben und deshalb einheitenlos sind.

Die Gleichung in (3.60) basiert auf einer multivariaten Taylor-Entwicklung erster Ordnung. Natürlich können auch andere Ordnungen verwendet werden, wenn sich passende Stammfunktionen für das resultierende Integral finden lassen. In Tabelle 3.2 ist eine Übersicht aller Lösungen dargestellt, die mit der gleichen Vorgehensweise abgeleitet werden konnten. Die Spalten des Vorfaktors in der Tabelle geben Auskunft über die verwendete Taylor-Ordnung zur Approximation des Produktterms sowie des Exponentialterms im Integral. Dabei ist N die

Maximalordnung der Taylor-Entwicklung

$$f(\phi, \theta, k) \approx \sum_{w_\phi n_\phi + w_\theta n_\theta + w_k n_k \leq N} C_{n_\phi, n_\theta, n_k} (\phi - \phi_0)^{n_\phi} (\theta - \theta_0)^{n_\theta} (k - k_0)^{n_k} \quad (3.63)$$

mit den Taylor-Koeffizienten $C_{n_\phi, n_\theta, n_k}$. Die Abbruchbedingung $w_\phi n_\phi + w_\theta n_\theta + w_k n_k \leq N$ in der Summe verhindert, dass die gewichteten Exponenten der Summanden eine vorgegebene Maximalordnung N überschreiten, was die Unterdrückung von ausgewählten Monomen erlaubt. Dies ist vorteilhaft, da das Integral in (3.59) bei Verwendung der herkömmlichen Abbruchbedingung $n_\phi + n_\theta + n_k \leq N$ nicht zu einem analytischen Ergebnis führt. Die resultierenden Ausdrücke mit Ordnungen von 2 oder höher lassen sich mit dem eingesetzten Computeralgebrasystem nicht analytisch lösen. Die Definition des erweiterten Abbruchkriteriums bietet zusätzliche Freiheitsgrade, die dazu führen, dass auch für höhere Ordnungen analytische Lösungen gefunden werden können. Die Gewichtsparameter w_ϕ, w_θ, w_k wurden mit 1 initialisiert und nur bei Bedarf erhöht. Bei w_ϕ und w_θ war keine Anpassung nötig; das Gewicht w_k musste in manchen Fällen auf 2 gesetzt werden. Im Allgemeinen scheint es vorteilhaft, Taylor-Terme mit höheren Ordnungen von k zu unterdrücken, um die analytische Lösbarkeit zu gewährleisten. Trotz der Parameterwahl $w_k = 2$ führt die Erhöhung der Maximalordnung N im Exponenten auf 2 dazu, dass die resultierenden Formeln in den Zeilen drei, sechs und acht im Datenteil der Tabelle auf der nicht geschlossenen lösbaren Integralfunktion

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (3.64)$$

basieren. Dies ist ein Nachteil, denn die Auswertung dieses Ausdrucks ist im Allgemeinen zeitintensiv.⁵

Die Anwendung der Taylorentwicklung entspricht einer Schmalband- und Kleinwinkelnäherung. In manchen Fällen sind diese Näherungen jedoch nicht gerechtfertigt, beziehungsweise ungenau. Eine Folge sind Fehler in der Punktantwortfunktion. Dabei hat sich herausgestellt, dass höhere Taylor-Ordnungen in diesem Fall nicht immer zu genaueren Ergebnissen führen. Dies erscheint im ersten Moment widersprüchlich. Der Grund hierfür ist, dass der Approximationsfehler nur in der Nähe des Entwicklungspunktes verringert wird, während weit vom Entwicklungspunkt entfernt eher größere Fehler zu erwarten sind. Dort wird die Taylorentwicklung vom Term mit der höchsten Ordnung dominiert, welcher rasch zu einer Divergenz der Reihe führt.

3.4.1.2 Bistatische Lösung

Bei der Berechnung der bistatischen Punktantwortfunktion ist zusätzlich die Anregung zu berücksichtigen, welche durch eine ebene Welle erfolgt. Eine analytische Lösung der bistatischen Punktantwortfunktion soll nun für die Einfallrichtung

$$\hat{k}_i = -\hat{x} \quad (3.65)$$

erfolgen, während die durch den Wellenvektor \mathbf{k}_s beschriebene gestreute Welle mit (3.58) in einem schmalen Frequenzband und für kleine bistatische Winkel betrachtet wird. Die damit abgeleitete analytische Lösung kann durch Rotation auch für andere Ein- und Ausfallrichtungen ausgewertet werden.

⁵In MATLAB ist die Auswertung mit der Funktion *erf* möglich.

Tabelle 3.2: Einfluss multivariater Taylor-Entwicklungen mit unterschiedlichen Ordnungen N und unterschiedlichen Gewichtskoeffizienten w_k, w_ϕ, w_θ auf den geschätzten Rechenaufwand der Lösung.

Vorfaktor		Exponent		Relativer Rechenaufwand
N	$[w_k, w_\phi, w_\theta]$	N	$[w_k, w_\phi, w_\theta]$	
1	[2, 1, 1]	1	[1, 1, 1]	375
1	[1, 1, 1]	1	[1, 1, 1]	457
1	[1, 1, 1]	2	[2, 1, 1]	2165
2	[1, 1, 1]	1	[1, 1, 1]	2234
3	[1, 1, 1]	1	[1, 1, 1]	14860
2	[1, 1, 1]	2	[2, 1, 1]	16548
4	[1, 1, 1]	1	[1, 1, 1]	56160
3	[1, 1, 1]	2	[2, 1, 1]	69688

Zur Lösung des Integrals in (3.42) wird genau wie in Abschnitt 3.4.1.1 zunächst eine multivariate Taylorentwicklung erster Ordnung verwendet, um anschließend das Integral analytisch lösen zu können. Diese Vorgehensweise führt zum Ergebnis

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_b(\mathbf{r}, -\hat{x}) &= \mathcal{F} \left\{ M(\mathbf{k}) e^{-jkr_x} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) \right\} \\ &= k_0^2 \Delta\phi \Delta\theta \Delta k e^{-j2k_0 r_x} \begin{pmatrix} 0 & g'_2(\mathbf{r}, k_0) & g'_3(\mathbf{r}, k_0) \\ g'_2(\mathbf{r}, k_0) & g'_1(\mathbf{r}, k_0) & 0 \\ g'_3(\mathbf{r}, k_0) & 0 & g'_1(\mathbf{r}, k_0) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

wobei die Hilfsvariablen

$$g'_1(\mathbf{r}, k_0) = \text{si} \left(\frac{\Delta\phi k_0 r_y}{2} \right) \text{si} \left(\frac{\Delta\theta k_0 r_z}{2} \right) \left[\left(1 - \frac{j}{k_0 r_x} \right) \text{si}(\Delta k r_x) + \frac{j}{k_0 r_x} \cos(\Delta k r_x) \right], \quad (3.67a)$$

$$g'_2(\mathbf{r}, k_0) = \frac{j}{k_0 r_y} \text{si}(\Delta k r_x) \text{si} \left(\frac{\Delta\theta k_0 r_z}{2} \right) \left[\text{si} \left(\frac{\Delta\phi k_0 r_y}{2} \right) - \cos \left(\frac{\Delta\phi k_0 r_y}{2} \right) \right], \quad (3.67b)$$

$$g'_3(\mathbf{r}, k_0) = \frac{j}{k_0 r_z} \text{si}(\Delta k r_x) \text{si} \left(\frac{\Delta\phi k_0 r_y}{2} \right) \left[\text{si} \left(\frac{\Delta\theta k_0 r_z}{2} \right) - \cos \left(\frac{\Delta\theta k_0 r_z}{2} \right) \right] \quad (3.67c)$$

definiert werden. Die Gleichung weist deutliche Parallelen zu (3.60) auf. Die zwei verschiedenen Punktantwortfunktionen unterscheiden sich in ihrer x -Abhängigkeit. Die entlang der x -Achse einfallende Welle verursacht hier zusätzliche Phasenterme, die zu einer Stauchung der Punktantwortfunktion in x -Richtung führen. Dies hat eine Verdopplung der Auflösung in x -Richtung zur Folge. Abb. 3.4 spiegelt damit auch das Aussehen der bistatischen Punktantwortfunktion wider, allerdings entspricht das Bild in diesem Fall nicht wie angegeben einem Wellenlängenbereich von 1 m bis 2 m sowie einem Winkelbereich von $\Delta\phi = \pi/3$ und $\Delta\theta = \pi/4$, sondern beschreibt das Aussehen der bistatischen Punktantwortfunktion für einen Wellenlängenbereich von 0,5 m bis 1 m in Verbindung mit den beiden Winkelbereichen $\Delta\phi = \pi/6$ und $\Delta\theta = \pi/8$.

Für schmalbandige Kleinwinkelsektoren kann die Näherungslösung der bistatischen Punktantwortfunktion durch eine einfache Koordinatentransformation aus einer Punktantwortfunktion für selbststrahlende Quellen berechnet werden. Dabei muss der k -Raum-Bereich von $\bar{\mathbf{P}}_q$ in Abb. 3.1a zur Deckung mit seinem bistatischem Äquivalent $\bar{\mathbf{P}}_b$ in Abb. 3.1c gebracht werden. Dies gelingt näherungsweise durch Verdopplung der Bandbreite und der Frequenz sowie einer Halbierung des Winkelbereichs. Dies wird in Abb. 3.5 veranschaulicht. Im Falle der Gleichun-

gen in (3.60) und (3.66), welche beide mit einer Taylorentwicklung erster Ordnung abgeleitet wurden, stimmt dieser Zusammenhang exakt.

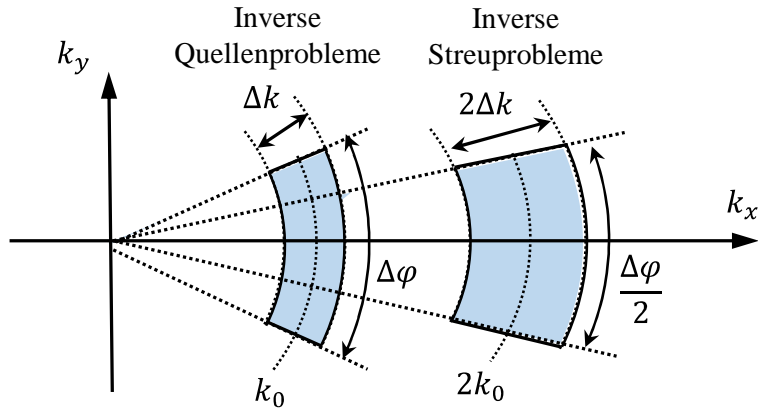


Abbildung 3.5: Veranschaulichung der relevanten k -Raum-Bereiche für inverse Streu- und Quellenprobleme bei Benutzung der schmalbandigen Kleinwinkelnäherung, wobei k_0 , Δk und $\Delta\phi$ in beiden Szenarien den Parametern Frequenz, Bandbreite und Winkelbereich des Abbildungssystems entspricht.

3.4.2 Breitbandige Kleinwinkelnäherung

Im vorangegangenen Abschnitt wurde eine analytische Lösung der Punktantwortfunktion für schmalbandige k -Raum-Sektoren vorgestellt. Wenn die Lösung auf breitbandige Sektoren angewendet wird, so führt dies im Allgemeinen zu ungenauen Approximationen und fehlerhaften Bildern. Es ist jedoch möglich, einen breitbandigen Sektor, wie in (3.56) beschrieben, in viele schmalbandige Sektoren aufzuspalten und damit die Lösung akkurat als Summe vieler schmalbandiger Punktantwortfunktionen darzustellen. In diesem Abschnitt soll eine breitbandige Lösung vorgestellt werden, die ohne Aufspaltung in schmalbandige Abschnitte auskommt. Die daraus resultierende Punktantwortfunktion hängt im Gegensatz zu den im letzten Abschnitt gezeigten Lösungen immer von einer nicht geschlossenen lösbaren Integralfunktion ab.

Im letzten Abschnitt wurden Produktfaktor und Exponent im Integral in (3.59) mittels einer multivariaten Taylor-Entwicklung in den Variablen ϕ , θ und k angenähert. Um eine breitbandige Lösung der Punktantwortfunktion zu erhalten, wird die k -Abhängigkeit von diesem Vorgang ausgenommen. Für die Ableitung der neuen Ergebnisse gelte die k -Raum-Belegung in (3.57) und (3.58), wobei zur einfacheren Notation die Definition von minimaler und maximaler Wellenzahl mit

$$k_{\min} \leq k \leq k_{\max} \quad (3.68)$$

eingeführt wird. Zur Lösung des resultierenden Integrals wurde die Methodik aus dem letzten Abschnitt angewendet. Die multivariate Taylor-Entwicklung nach ϕ und θ für den Produkt- und Exponentialterm in (3.59) wurde unter Verwendung der Maximalordnung $N = 1$ ausgewertet. Die beste Entsprechung im letzten Abschnitt findet dieses Vorgehen in den Zeilen 1 und 2 der Tabelle 3.2, weil dort die Ordnungen für ϕ und θ übereinstimmen. Das Ergebnis fällt aber durch

die exakte Berücksichtigung der Wellenzahlabhängigkeit anders aus und lautet

$$\bar{\mathbf{P}}_q(\mathbf{r}) = \left[\begin{pmatrix} 0 & f_2(\mathbf{r}, k) & f_3(\mathbf{r}, k) \\ f_2(\mathbf{r}, k) & f_1(\mathbf{r}, k) & 0 \\ f_3(\mathbf{r}, k) & 0 & f_1(\mathbf{r}, k) \end{pmatrix} \right]_{k_{\min}}^{k_{\max}}, \quad (3.69)$$

wobei die Hilfsfunktionen

$$f_1(\mathbf{r}, k) = \frac{k}{r_y r_z} F_E(\Delta\phi r_y, \Delta\theta r_z, k, r_x), \quad (3.70a)$$

$$f_2(\mathbf{r}, k) = \frac{\Delta\phi k}{2r_y r_z} G_E(\Delta\phi r_y, \Delta\theta r_z, k, r_x) + \frac{j}{r_y^2 r_z} F_{\text{Ei}}(\Delta\phi r_y, \Delta\theta r_z, k, r_x), \quad (3.70b)$$

$$f_3(\mathbf{r}, k) = \frac{\Delta\theta k}{2r_y r_z} G_E(\Delta\theta r_z, \Delta\phi r_y, k, r_x) + \frac{j}{r_y r_z^2} F_{\text{Ei}}(\Delta\theta r_z, \Delta\phi r_y, k, r_x) \quad (3.70c)$$

definiert wurden, die wiederum von den parameterabhängigen Ausdrücken

$$\begin{aligned} G_E(a, b, k, r_x) = & -E\left(j\frac{k}{2}(-2r_x + a + b)\right) + E\left(j\frac{k}{2}(-2r_x - a - b)\right) \\ & + E\left(j\frac{k}{2}(-2r_x + a - b)\right) - E\left(j\frac{k}{2}(-2r_x - a + b)\right), \end{aligned} \quad (3.71a)$$

$$\begin{aligned} F_E(a, b, k, r_x) = & -E\left(j\frac{k}{2}(-2r_x + a + b)\right) - E\left(j\frac{k}{2}(-2r_x - a - b)\right) \\ & + E\left(j\frac{k}{2}(-2r_x + a - b)\right) + E\left(j\frac{k}{2}(-2r_x - a + b)\right) \end{aligned} \quad (3.71b)$$

abhängen. Die Ausdrücke G_E und F_E beinhalten dabei die Funktion

$$E(x) = \frac{e^x}{x}. \quad (3.72)$$

Der Ausdruck F_{Ei} in (3.70b) und (3.70c) bezieht sich auf die Definition in (3.71b), wobei das tiefgestellte Kürzel Ei bedeutet, dass die Funktion E durch die Exponentialintegralfunktion

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt \quad (3.73)$$

ersetzt wurde. Diese Integralfunktion hat keine analytische Lösung und muss mittels numerischer Verfahren berechnet werden.⁶

Abb. 3.6 zeigt die Punktantwortfunktion in (3.69) unter Verwendung der Parameter aus dem letzten Abschnitt, sodass ein direkter Vergleich mit Abb. 3.4 möglich ist. Es wird ersichtlich, dass für die hohe Bandbreite von ca. 50%, die in beiden Darstellungen gewählt wurde, ein deutlicher Unterschied vorhanden ist. Die Differenz zwischen den Punktantwortfunktionen erklärt sich aus den prinzipbedingten Berechnungsfehlern der Schmalbandnäherung, welche die Breitbandlösung nicht betreffen. Bei dieser Parameterwahl ist die Breitbandlösung deshalb im Vorteil.

⁶ Zur Auswertung wird die Funktion *expint* aus dem Programmpaket MATLAB genutzt.

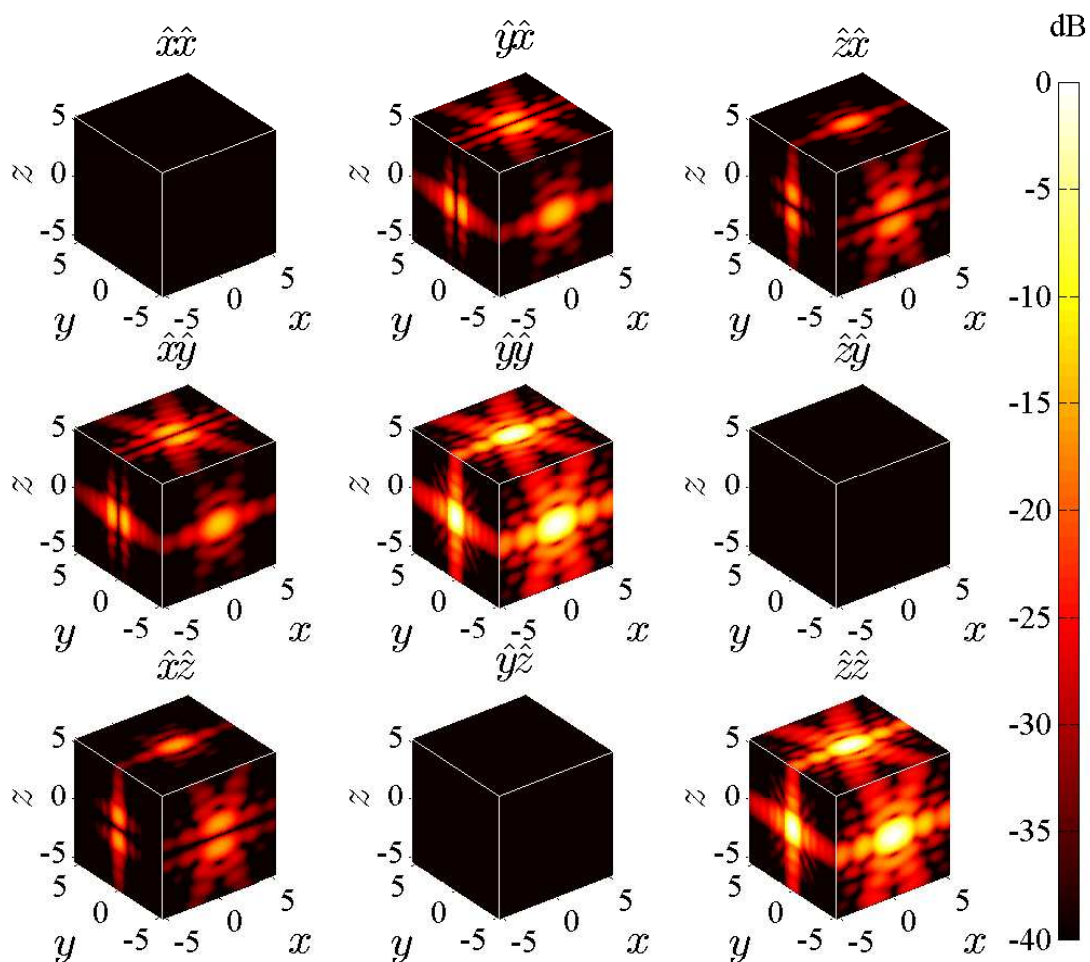


Abbildung 3.6: Punktantwortfunktion in (3.69) basierend auf breitbandiger Kleinwinkelnäherung für $\Delta\phi = \pi/3$, $\Delta\theta = \pi/4$, $\lambda_{\max} = 2$ m und $\lambda_{\min} = 1$ m, wobei x , y und z relativ zur minimalen Wellenlänge λ_{\min} angegeben sind.

3.4.3 Monofrequente Vollkugellösung

In den vorangegangenen Abschnitten wurden Lösungen für k -Raum-Belegungen vorgestellt, die nur einen kleinen sphärischen Winkelbereich umfassen. Durch die Vereinigung vieler kleiner Bereiche kann die Oberfläche einer kompletten Kugel abgedeckt werden, so wie das auch bei der facettierten Kugel der Fall ist. Die Punktantwortfunktionen der Teilstücke können mit einer Koordinatentransformation aus den bisherigen Ergebnissen berechnet werden. Der resultierende Gesamtausdruck ist eine Summe aus vielen Teillösungen. Die Anzahl der Summenelemente hängt von der gewünschten Genauigkeit ab. Dies führt schnell zu sehr komplexen Ausdrücken. Eine geschlossene Lösung dagegen weist diesen Nachteil nicht auf.

Die k -Raum-Maskierungsfunktion wird definiert als

$$M_K(\mathbf{k}) = w(k) = \frac{\delta(k - k_0)}{k^2}. \quad (3.74)$$

Die Gleichung in (3.54) wird unter Benutzung von (3.74) umgeformt zu

$$\bar{\mathbf{P}}_q(\mathbf{r}) = \mathcal{F}\{w(k)\} \bar{\mathbf{I}} - \mathcal{F}\{w(k) \hat{k} \hat{k}\}. \quad (3.75)$$

Der erste Term besitzt, wie in [Schnattinger und Eibert 2012c] gezeigt, die vergleichsweise einfache Lösung

$$\mathcal{F}\{w(k)\} = 4\pi \operatorname{si}(k_0 r). \quad (3.76)$$

Die Berechnung des zweiten Terms $\mathcal{F}\{w(k) \hat{k} \hat{k}\}$ wird im Anhang A.1.1 ausführlich behandelt. Es ergibt sich ein exaktes Ergebnis, das im Gegensatz zu den Lösungen in den vorhergehenden Abschnitten ohne eine Näherung auskommt. Durch die Kombination der Teilergebnisse in (3.75) folgt schließlich

$$\bar{\mathbf{P}}_q(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{(k_0 r)^3} \left[\left((k_0^2 r^2 - 1) \sin(k_0 r) + k_0 r \cos(k_0 r) \right) \bar{\mathbf{I}} + \left((3 - k_0^2 r^2) \sin(k_0 r) - 3k_0 r \cos(k_0 r) \right) \hat{r} \hat{r} \right]. \quad (3.77)$$

Die Grenzwertbildung

$$\lim_{r \rightarrow 0} \bar{\mathbf{P}}_q(\mathbf{r}) = 4\pi \frac{2}{3} \bar{\mathbf{I}}. \quad (3.78)$$

zeigt, dass (3.77) lediglich eine hebbare Definitionslücke im Ursprung aufweist. Schwierigkeiten bei der Auswertung der Punktantwortfunktion sind deshalb nicht zu erwarten. Interessant ist außerdem, dass die störenden Nebendiagonaleinträge der Dyade am Ursprung $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ verschwinden. Hohe Amplitudenwerte in den Nebendiagonaleinträgen sind unerwünscht, da sie zu polarimetrischen Fehlabbildungen führen. Ein Strom in \hat{x} -Richtung verursacht so beispielsweise auch Bildanteile in der \hat{y} - und \hat{z} -Komponente. Eine Visualisierung der Punktantwortfunktion in (3.77) ist in Abb. 3.7 dargestellt. Obwohl nur monofrequente Beobachtungen einfließen, kann das Auflösungsvermögen deutlich besser sein als bei Ergebnissen, welche durch die Auswertung eines Frequenzbands mit endlicher Bandbreite gewonnen wurden. Beispiele hierfür sind Abb. 3.4 und Abb. 3.6. Dies wird durch die Berücksichtigung eines größeren Winkelbereiches erreicht, welcher die gesamte Kugeloberfläche umfasst.

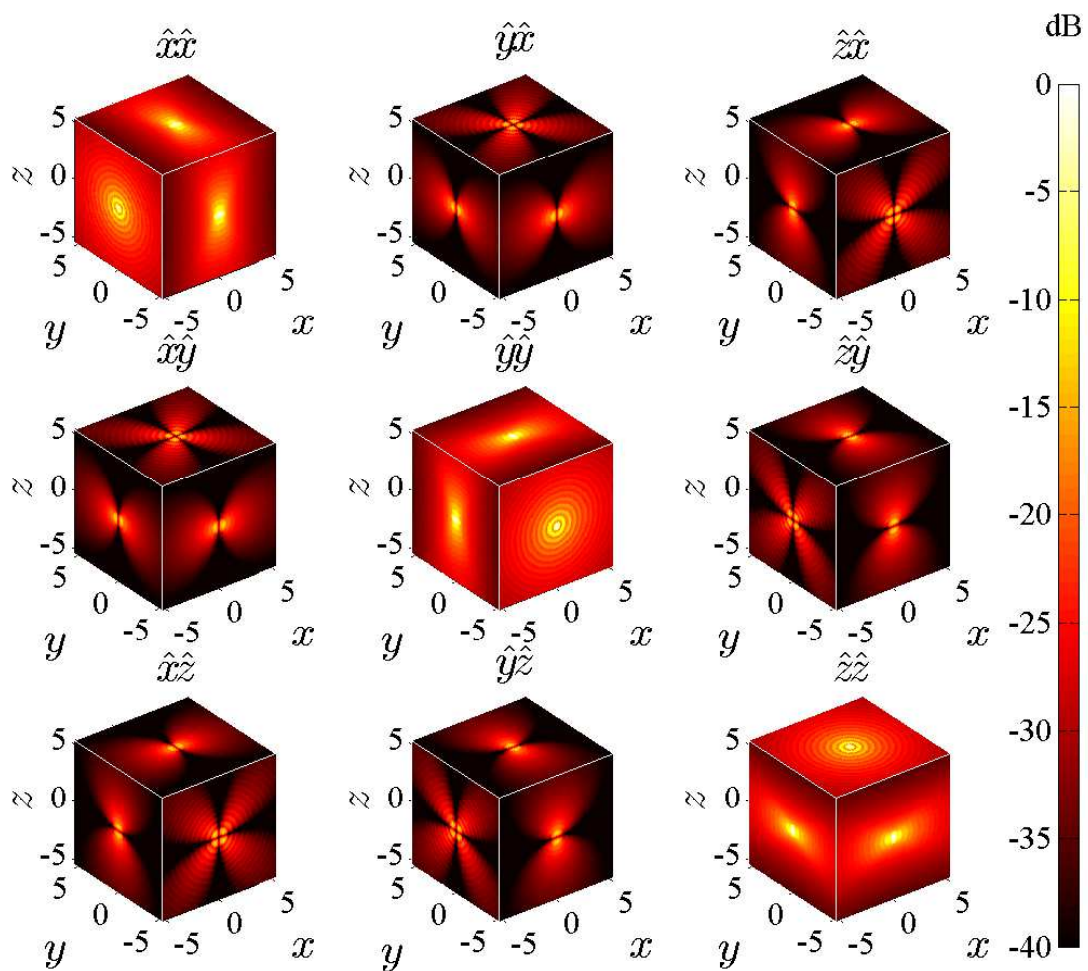


Abbildung 3.7: Punktantwortfunktion in (3.77) basierend auf monofrequenter Vollkugellösung für $\lambda_{\max} = 2$ m und $\lambda_{\min} = 1$ m, wobei x , y und z relativ zur Wellenlänge λ_{\min} angegeben sind.

3.4.4 Breitbandige Vollkugellösung

Im vorhergehenden Abschnitt wurde die Punktantwortfunktion für die k -Raum-Belegung einer Kugeloberfläche vorgestellt. Nun soll die Lösung für eine Kugelschale erarbeitet werden. Die zugehörige Maskierungsfunktion lautet

$$M_K(\mathbf{k}) = W_n(k) = k^{-n} \begin{cases} 1, & \text{falls } k_{\min} \leq k \leq k_{\max} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.79)$$

und hängt vom Parameter n ab. Der Parameter n bestimmt den Exponenten der Potenzfunktion und beeinflusst damit, welches Gewicht Beobachtungen unterschiedlicher Frequenzen bei der Bildgebung haben. Für $n \in [0, 1, 2]$ ist eine analytische Lösung möglich. Die ausführliche Herleitung der Punktantwortfunktion

$$\bar{\mathbf{P}}_q(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{r^3} n^{-\frac{n}{2}} \left[h_1(r) \bar{\mathbf{I}} + h_2(r) \hat{r} \hat{r} \right]_{k_{\min}}^{k_{\max}} \quad (3.80)$$

mit

$$h_1(r, k) = k^{-n} \begin{cases} -\text{Si}(kr) + 2 \sin(kr) - kr \cos(kr), & n = 0 \\ \sin(kr) - kr \cos(kr), & n = 1 \\ k^2 r^2 \text{Si}(kr) - kr \cos(kr) + \sin(kr), & n = 2, \end{cases} \quad (3.81a)$$

$$h_2(r, k) = k^{-n} \begin{cases} 3 \text{Si}(kr) - 4 \sin(kr) + kr \cos(kr), & n = 0 \\ -3 \sin(kr) + kr \cos(kr), & n = 1 \\ k^2 r^2 \text{Si}(kr) - 3 \sin(kr) + 3kr \cos(kr), & n = 2 \end{cases} \quad (3.81b)$$

ist im Anhang A.1.2 zu finden. Die Punktantwortfunktion für $n = 0$ und $n = 2$ hängt von der nicht geschlossen lösbaren Integralfunktion

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (3.82)$$

ab, die auf der Spaltfunktion basiert.⁷ Das Ergebnis in (3.80) besitzt am Ort $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ eine Definitionslücke, da der Nenner durch die r -Abhängigkeit an diesem Punkt Null wird. Durch die Grenzwertrechnung

$$\lim_{r \rightarrow 0} \bar{\mathbf{P}}_q(\mathbf{r}) = 4\pi \frac{1}{3-n} \frac{2}{3} \bar{\mathbf{I}} \left[k^{3-n} \right]_{k_{\min}}^{k_{\max}} \quad (3.83)$$

lässt sich zeigen, dass die Definitionslücke hebbar ist und die Punktantwortfunktion somit eine stetige Fortsetzung besitzt. Eine Visualisierung der Punktantwortfunktion für die Parameter $\lambda_{\max} = 2 \text{ m}$ und $\lambda_{\min} = 1 \text{ m}$ und $n \in [0, 2]$ ist in Abb. 3.8 beziehungsweise Abb. 3.9 dargestellt. Für $n = 1$ ergibt sich eine Mischung aus beiden Grafiken. Da sich schon die Lösungen für $n = 0$ und $n = 2$ wenig unterscheiden, wurde hier auf eine weitere Abbildung verzichtet. Im Vergleich zu Abb. 3.7 ist die Punktantwortfunktion insgesamt steiler und besitzt deshalb einen größeren Dynamikbereich. Um trotzdem eine ähnliche Darstellung in der Grafik zu erreichen, wurde der Dynamikbereich der Farbskala von 40 dB auf 60 dB vergrößert. Daraus lässt sich folgern, dass der Bandbreitenzuwachs den Dynamikbereich des Bildes vergrößert. Gleichzeitig führt dies zu einer schmäleren Hauptkeule, was auch dem Auflösungsvermögen des zugrunde liegenden Abbildungssystems zugute kommt.

⁷In MATLAB kann dieser Ausdruck mit der Funktion *sinint* ausgewertet werden.

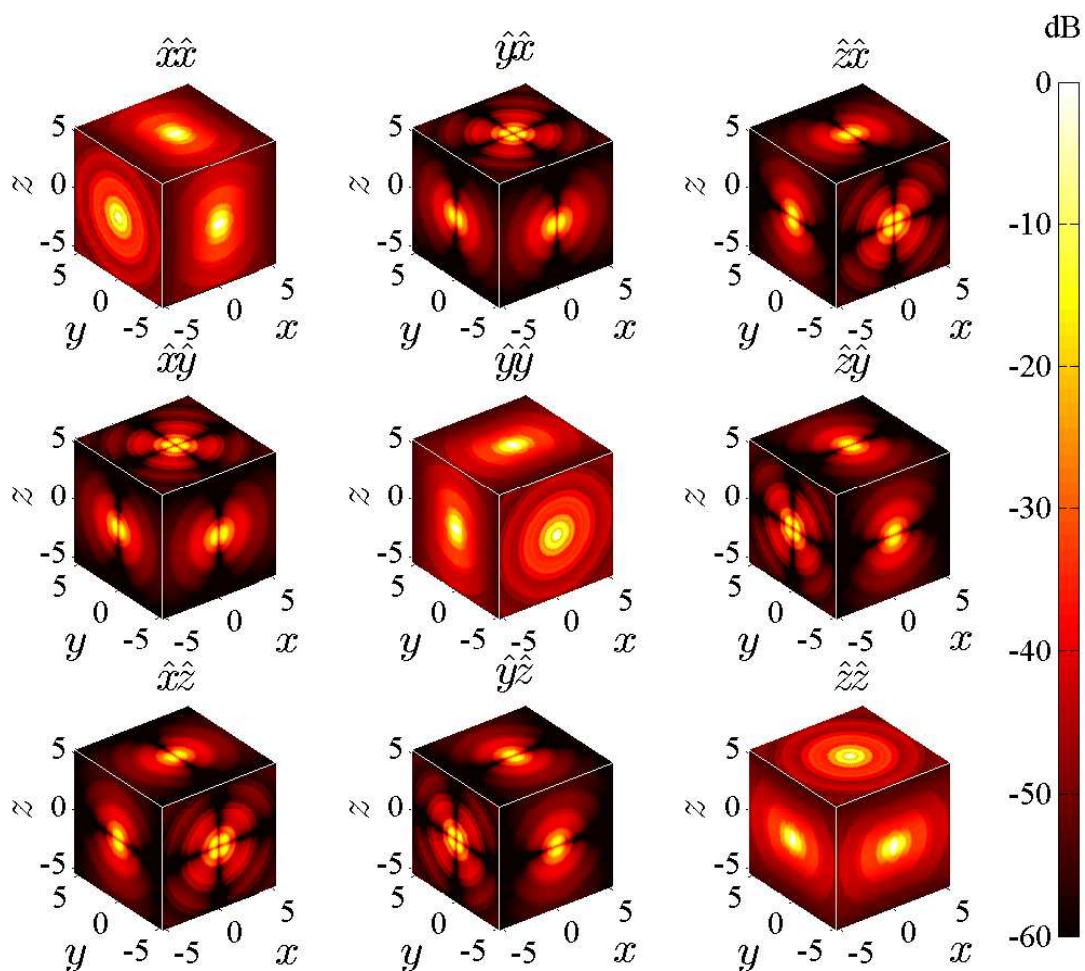


Abbildung 3.8: Punktantwortfunktion in (3.80) basierend auf breitbandiger Vollkugellösung für $\lambda_{\max} = 2\text{ m}$, $\lambda_{\min} = 1\text{ m}$ und $n = 0$, wobei x , y und z relativ zur minimalen Wellenlänge λ_{\min} angegeben sind.

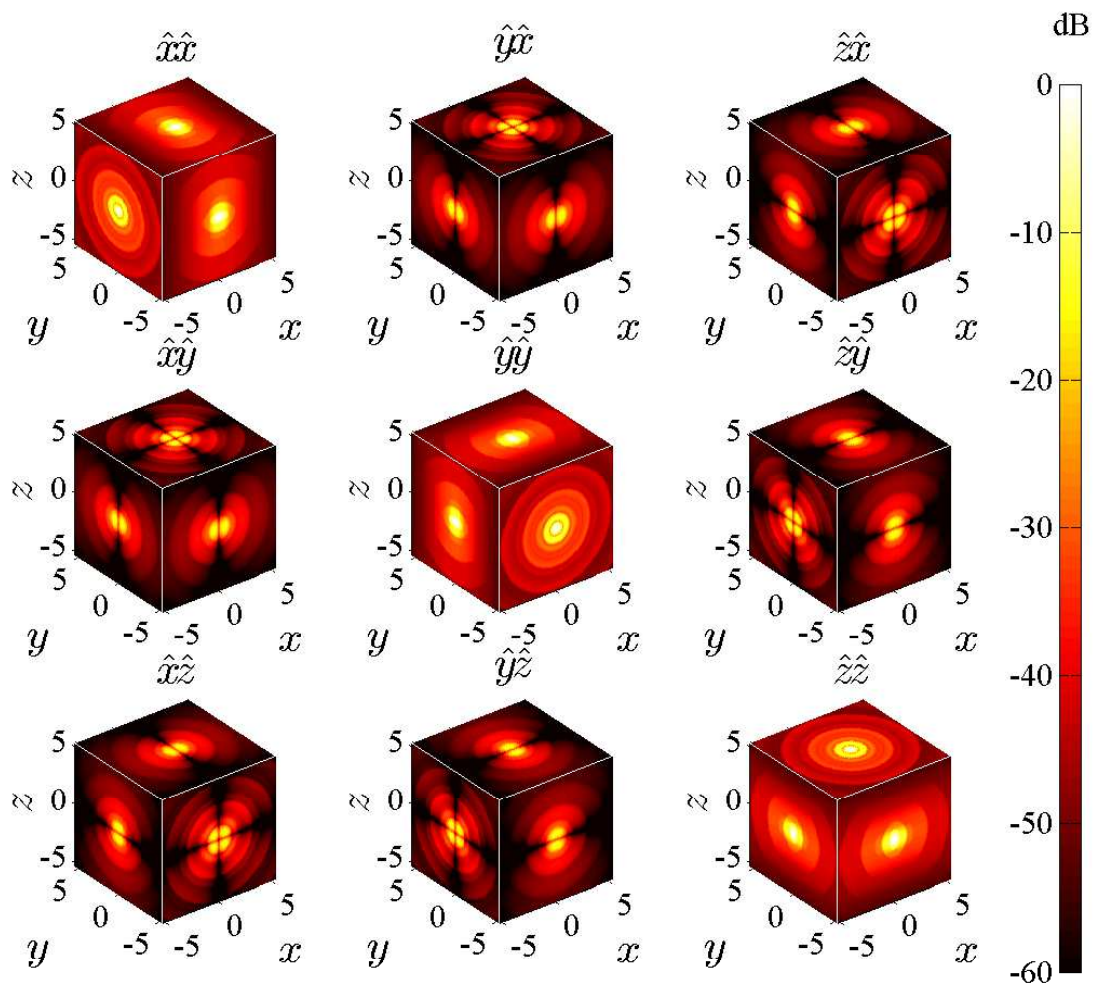


Abbildung 3.9: Darstellung der Punktantwortfunktion in (3.80) für $\lambda_{\max} = 2$ m, $\lambda_{\min} = 1$ m und $n = 2$, wobei x , y und z relativ zur Wellenlänge λ_{\min} angegeben sind.

4 Hierarchisches Verfahren zur schnellen Bilderzeugung

Bei der Berechnung der Ersatzquellen- und Streuzentrenverteilungen in (3.1), (3.5) und (3.15) ist eine Auswertung von mehrdimensionalen Fourierintegralen im k -Raum erforderlich. Um den Berechnungsaufwand für elektrisch große Abbildungsobjekte zu reduzieren, wird ein effizienter Algorithmus benötigt. Dabei ist zu beachten, dass die Messdaten im Ortsfrequenzbereich häufig auf einem sphärischen Gitter angeordnet sind. Der bekannteste Algorithmus zur effizienten Auswertung der Fouriertransformation und zugleich einer der wichtigsten Algorithmen in der digitalen Signalverarbeitung ist die schnelle Fouriertransformation (FFT) [Cipra 2000]. Dieser Algorithmus basiert allerdings auf einem lückenlosen kartesischen Gitter an Abtastwerten, welches nur durch eine Interpolation aus den sphärischen Beobachtungsdaten gewonnen werden kann. Dabei entstehen normalerweise Fehler. Maßnahmen zur Verringerung von Interpolationsfehlern wirken sich typischerweise negativ auf Messdauer, Speicherverbrauch oder Rechenzeit aus. Im Folgenden soll ein Verfahren vorgestellt werden, das im Gegensatz zur üblicherweise kartesischen Diskretisierung direkt eine sphärische Abtastung nutzt und trotzdem die gleiche Komplexität in Bezug auf die Anzahl der Rechenoperationen aufweist. Dies wird ähnlich wie bei der FFT durch eine hierarchische Struktur der Berechnung erreicht. Damit wird die schnelle Auswertung der Fouriertransformation für sphärische Abtastwerte direkt ohne ein kartesisches Hilfsgitter möglich.

4.1 Rekursive und spektrale Zerlegung des Bildes

Grundlage des vorgestellten Verfahrens ist eine hierarchische Darstellung der elektrischen Felder mittels ebener Wellen, welche in ähnlicher Weise auch in der MLFMM [Chew et al. 2001] und beim Prinzip „Plane Wave Time Domain“ (PWTD) [Chew et al. 2001, S. 815 ff.] verwendet wird.

4.1.1 Entwicklung des Bildinhalts in Spektren ebener Wellen

Die auf ebenen Wellen basierende Darstellung findet sowohl in der Akustik als auch in der elektromagnetischen Feldtheorie Anwendung. Je nach Szenario besitzt die zu entwickelnde Größe bis zu neun Komponenten. Letztere sind bei der Erfassung der vollpolarimetrischen monostatischen Streumatrizen in kartesischen Koordinaten zu berücksichtigen, da es sich hierbei um 3×3 Matrizen handelt. Da die Feldkomponenten immer separat betrachtet werden können, wird das Verfahren im Folgenden nur für die skalare Komponente Ψ beschrieben. Das zugehörige Bild

$$\psi(\mathbf{r}) = \iiint \Psi(\mathbf{k}) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \quad (4.1)$$

entspricht damit der Überlagerung von ebenen Wellen $e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\Psi(\mathbf{k})$ aller Richtungen \hat{k} und Frequenzen k , wobei der Wellenvektor \mathbf{k} sich nach (3.6) aus dem Wellenvektor des einfallenden \mathbf{k}_i und des gestreuten Feldes \mathbf{k}_s zusammensetzt. Bei der Wahl des Koordinatensystems wird

berücksichtigt, dass die Messdaten häufig auf einem sphärischen Gitter vorliegen. Bistatische Beobachtungen im k -Raum sind nicht um den Ursprung angeordnet, sondern sie sind, wie in Abb. 3.1c dargestellt, um den Wellenvektor des einfallenden Feldes \mathbf{k}_i verschoben. Aus diesem Grund ist eine sphärische Abtastung nur durch einen Wechsel des Koordinatensystems möglich. Das Spektrum Ψ wird deshalb im Raum des gestreuten Wellenvektors \mathbf{k}_s abgetastet und nicht im konventionellen k -Raum. Der Wellenvektor des einfallenden Feldes \mathbf{k}_i wird so erst bei der Bildberechnung berücksichtigt.

Das Koordinatensystem des gestreuten Feldvektors ist nicht nur für die bistatische Anordnung geeignet, sondern es kann auch in den anderen Szenarien eingesetzt werden, was eine einheitliche Vorgehensweise ermöglicht. Dabei ist der Wellenvektor der einfallenden Welle \mathbf{k}_i im Fall von selbststrahlenden Quellen gleich Null. In den folgenden Überlegungen wird deshalb immer davon ausgegangen, dass die Spektren auf einem sphärischen Gitter vorliegen.

4.1.2 Rekursive Unterteilung des Bildinhalts

Der Bildbereich wird mit Hilfe eines sogenannten Octrees hierarchisch unterteilt. Der Octree ist die dreidimensionale Erweiterung des binären Baums, was bedeutet, dass jeder Knoten acht Nachfolger besitzt. Die würfelförmigen Bereiche überschneiden sich dabei nicht. Die höchste Hierarchieebene besteht nur aus einer Box, die den gesamten Bildbereich beinhaltet, das entsprechende Bild in diesem Quader wird mit $\psi^{(0)}(\mathbf{r})$ bezeichnet. Der Zusatz (0) beschreibt die Ebene, wobei der Zähler mit zunehmender Rekursionstiefe steigt. In den untergeordneten Boxen soll die Ortskoordinate \mathbf{r} relativ zum Zentrum der jeweiligen Box angegeben werden. Die in Abb. 4.1 veranschaulichte hierarchische Zerlegung erfolgt mit

$$\psi_j^{(q)}(\mathbf{r}) = \sum_{i \in I_j^{(q)}} \psi_i^{(q+1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^{(q+1)}), \quad (4.2)$$

wobei j ein Index auf der Ebene q ist; $I_j^{(q)}$ beinhaltet die acht Indizes aller zugeordneten Teilbereiche, i ist einer dieser Indizes auf Ebene $q+1$ und $\mathbf{r}_i^{(q+1)}$ ist die Position des i -ten Teilbereichs relativ zum Zentrum der übergeordneten Box. Durch die Bedingung

$$\psi_j^{(q)}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{für} \quad |r_{x,y,z}| > \frac{B^{(q)}}{2} \quad (4.3)$$

ist die den Teilbereichen zugeordnete Feldfunktion außerhalb des Quaders Null, wobei $B^{(q)}$ die Breite der Boxen auf Ebene q ist. So wird sichergestellt, dass sich die Feldfunktionen $\psi_j^{(q)}$ einer Hierarchieebene nicht überschneiden. Bei der Berechnung des Bildes an einem beliebigen Punkt \mathbf{r} ist es deshalb ausreichend, nur die dem betreffenden Bereich zugeordnete Feldfunktion $\psi_j^{(q)}$ auszuwerten.

Die rekursive Zerlegung kann auch im Ortsfrequenzbereich dargestellt werden. Diese Darstellung entspricht den Spektren ebener Wellen

$$\Psi_j^{(q)}(\mathbf{k}_s) = \mathcal{F}^{-1} \{ \psi_j^{(q)} \} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \psi_j^{(q)}(\mathbf{r}) e^{j(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r}, \quad (4.4)$$

welche durch eine inverse Fouriertransformation aus den Ortsbereichsdarstellungen hervorgehen. Angewendet auf die Rekursionsformel in (4.2) führt diese zur Ortsfrequenzdarstellung

$$\Psi_j^{(q)}(\mathbf{k}_s) = \sum_{i \in I_j^{(q)}} e^{j(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{r}_i^{(q+1)}} \Psi_i^{(q+1)}(\mathbf{k}_s). \quad (4.5)$$

Jedes Subspektrum ist, wie in Abb. 4.2 zu sehen, einer separaten Subbox zugeordnet.

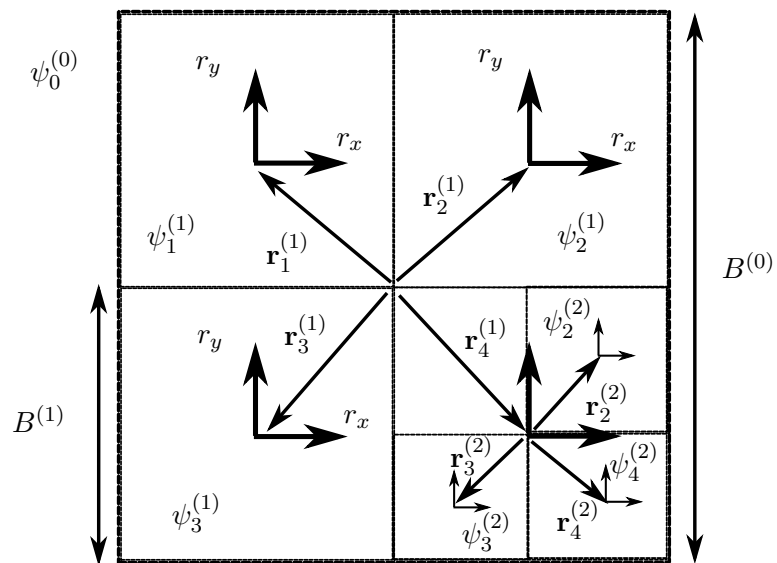
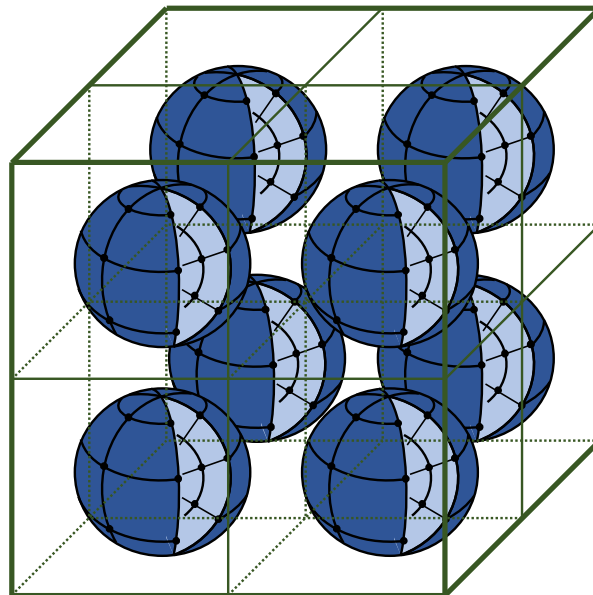


Abbildung 4.1: Rekursive Unterteilung des Bildbereichs in 2D.

Abbildung 4.2: Räumliche Zuordnung der k -Raum-Spektren bei einer Unterteilung des Bildbereichs mit einem Octree.

4.2 Diskretisierte Spektren ebener Wellen

Numerische Berechnungen erfordern eine Diskretisierung kontinuierlicher Größen. Dieser Schritt hat häufig große Auswirkungen auf Genauigkeit und Effizienz. Dies gilt auch für das hier vorgestellte Verfahren, welches auf einer Diskretisierung der Spektren ebener Wellen basiert.

4.2.1 Monofrequente und breitbandige Spektren

Die FMM basiert auf diskretisierten Spektren ebener Wellen und wird zur Beschleunigung von Frequenzbereichsverfahren eingesetzt. Dabei werden die Spektren, wie in Abb. 4.3 dargestellt, monofrequent abgetastet, wobei die Abtastung mit der Notation $\Psi(k_s \hat{k}_s^{(1,2,\dots)})$ verdeutlicht wird. Die Abtastpunkte sind dabei in einem regelmäßigen Schema auf einer Kugel angeordnet. Im Gegensatz dazu wird bei breitbandigen Spektren $\Psi(k_s^{(1,2,\dots)})$ zusätzlich in Radialrichtung abgetastet. Die Abtastpunkte $k_s^{(1,2,\dots)}$ liegen damit nicht mehr auf einer Kugel, sondern in einer Kugelschale, welche sich von der minimalen bis zur maximalen Grenzfrequenz erstreckt. Dies wird in Abb. 4.4 deutlich. Diese breitbandigen Spektren von ebenen Wellen im Ortsfrequenzbereich sind eine alternative Darstellungsform für die frequenzinvarianten, volumetrischen Feldverteilungen des Bildes.

Die breitbandige Abtastung ist den Prinzipien der PWTB [Chew et al. 2001, S. 815 ff.] ähnlich. Während die breitbandigen Spektren in der PWTB eher den in der Medizintechnik verbreiteten Sinogrammen [Basu und Bresler 2000] entsprechen, wird hier die Abtastung vollständig im Ortsfrequenzraum durchgeführt. Das Sinogramm wird aus der Ortsfrequenzbereichsdarstellung gewonnen, indem das Frequenzspektrum in Radialrichtung durch eine inverse Fouriertransformation in einen im Ortsbereich definierten Projektionsschnitt überführt wird.¹ Durch die Radontransformation [Deans 2007] lässt sich das Sinogramm auch direkt aus der Ortsbereichsdarstellung berechnen.

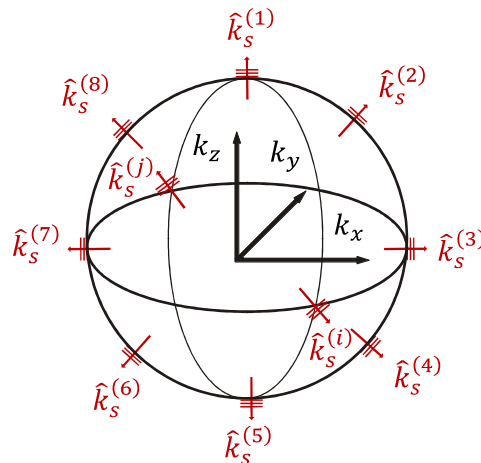


Abbildung 4.3: Abtastpunkte für das monofrequente Spektrum ebener Wellen bestehend aus den Koeffizienten $\Psi(k_s \hat{k}_s^{(1,2,\dots)})$.

¹Im Englischen wird diese Äquivalenz als „projection slice theorem“ bezeichnet [Mensa 1990, S. 201ff.].

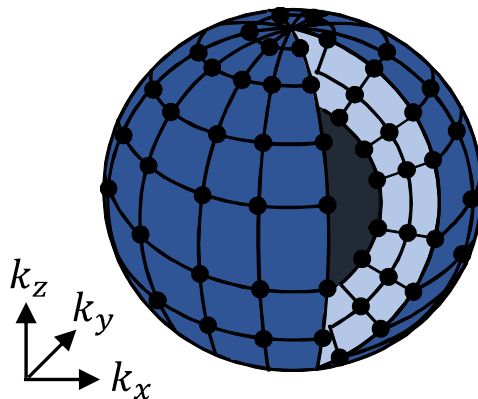


Abbildung 4.4: Abtastpunkte eines breitbandigen Spektrums ebener Wellen.

4.2.2 Sphärische Abtastkriterien

Die Genauigkeit und Effizienz der Spektraldarstellung

$$\psi(\mathbf{r}) = \mathcal{F}\{\Psi(\mathbf{k}_s)\} \approx \sum_{n=1}^{N_K} w_n \Psi(\mathbf{k}_s^{(n)}) e^{-j(\mathbf{k}_s^{(n)} - \mathbf{k}_i^{(n)}) \cdot \mathbf{r}} \quad (4.6)$$

wird maßgeblich durch die Wahl der Abtastpunkte $\mathbf{k}_s^{(n)}$ und der Quadraturgewichte w_n des Spektrums ebener Wellen Ψ beeinflusst, wobei $\mathbf{k}_i^{(n)}$ im Falle eines Streuspektrums der jeweiligen Richtung der einfallenden Welle entspricht.

In der Praxis liegt die Spektralinformation häufig in einem sphärischen Abtastraster vor. Bei der Definition des sphärischen Koordinatensystems verwenden wir die Konvention

$$\mathbf{k}_s = \underbrace{\frac{2\pi f}{c}}_k \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

In der FMM wird üblicherweise ein einheitliches Gitter in θ und ϕ verwendet, da die sphärische Interpolation damit einfacher und effizienter zu implementieren ist. Um Aliasing-Effekte zu verhindern, müssen die Abtastintervalle klein genug sein.

Die notwendige Abtastdichte wird vom spektralen Gehalt der Spektren bestimmt. Für isotrope Strahler in einer Minimalkugel werden die Abtastbedingungen in Anhang A.2 hergeleitet und lauten

$$\Delta f \leq \frac{c}{D}, \quad \Delta \theta \leq \frac{c}{Df}, \quad \Delta \phi \leq \frac{c}{Df \sin \theta}, \quad (4.8)$$

wobei D den maximalen Durchmesser des Quellbereichs festlegt. Ähnliche Ergebnisse werden in [Fortuny 2001, S. 42] bei der Analyse von isotropen Streuzentren in einem quaderförmigen Volumen erzielt, was die in (4.8) angegebenen Werte bestätigt. Im Falle eines Streuspektrums, bei dem sich die Phasendifferenzen durch ein- und ausgehende Wellen addieren, müssen die Abtastintervalle halbiert werden.

Für vektorielle Stromverteilungen gestaltet sich die Analyse - im Gegensatz zu isotropen Strahlern - etwas aufwändiger. Im Beitrag [Bucci und Franceschetti 1987] wird untersucht, welcher Fehler sich durch die Approximation vektorieller Felder in einem bandbegrenzten Funktionsraum ergibt, wenn sich die Quellen innerhalb einer Minimalkugel befinden. Es wird gezeigt,

dass die Bandbreite in ϕ und θ nur abhängig von der Ausdehnung der Quellenverteilung ist. Außerdem fällt der Approximationsfehler exponentiell ab, wenn die in (4.8) gegebenen Abtastbedingungen eingehalten werden. Um einen vernachlässigbaren Fehler von ungefähr 1% zu erhalten, lautet die genauigkeitsabhängige Abtastbedingung für ein monofrequentes Spektrum

$$\Delta\theta \leq \frac{c}{\chi Df}, \quad \Delta\phi \leq \frac{c}{\chi Df \sin\theta}, \quad (4.9)$$

wobei der Parameter χ den Wert

$$\chi \approx 1 + 2 \left(\frac{\pi f D}{c} \right)^{-2/3} \quad (4.10)$$

hat. Der Diskretisierungsfehler kann durch eine Erhöhung der Abtastrate weiter reduziert werden. Dies entspricht einer Vergrößerung des Parameters χ .

Für die spätere Komplexitätsbetrachtung ist es außerdem wichtig, wie die Anzahl der Abtastpunkte mit der Größe D skaliert. Die mit (4.8) ermittelte Gesamtzahl der Abtastwerte

$$N_K = N_f N_\phi N_\theta \sim (Df)^3 \sim \left(\frac{D}{\lambda} \right)^3 \quad (4.11)$$

gilt für das breitbandige Ortsfrequenzspektrum einer kugelförmigen Quellenregion mit Radius D , wobei N_f , N_ϕ und N_θ die Anzahl der Abtastpunkte in den jeweiligen sphärischen Koordinaten bezeichnen.

4.2.3 Interpolation im Ortsfrequenzbereich

Damit im Folgenden eine effiziente Bildberechnung basierend auf der hierarchischen Darstellung der Spektren möglich ist, muss die Abtastdichte der Spektren durch ein Interpolationsverfahren im Verlauf der Berechnungen abhängig von der Hierarchieebene angepasst werden.

Die in Abb. 4.5 veranschaulichte Interpolation kann durch lokale oder globale Verfahren bewerkstelligt werden. Ein lokales Interpolationsverfahren für ein monofrequentes und zweidimensionales Spektrum ist in Abb. 4.6 schematisch dargestellt. Für jeden Interpolationspunkt werden geeignete Basispunkte gesucht, mit Gewichten multipliziert und superponiert. Eines der verbreitetsten lokalen Interpolationsverfahren in MLFMM-Implementierungen basiert auf Lagrange-Polynomen. Die Abtastung in der θ -Koordinate wird üblicherweise durch die Gauß-Legendre-Quadratur festgelegt und für ϕ ist ein äquidistantes Raster üblich. Die Integrationsgewichte in (4.6) sind damit durch die Gauß-Legendre-Quadraturgewichte festgelegt [Rokhlin 1993].

Der Rechenaufwand pro Interpolationspunkt ist unabhängig von der Größe des Spektrums, da die Anzahl der Basispunkte bei einem lokalen Interpolationsverfahren fest vorgegeben ist. Dies ist wichtig, damit die Gesamtkomplexität des Algorithmus nicht durch die Interpolation bestimmt wird. Alternativ kann ein beschleunigtes globales Interpolationsverfahren eingesetzt werden. In diesem Fall steigt der Rechenaufwand linear-logarithmisch mit der Anzahl der Interpolationspunkte, während die lokale Interpolation zu einem linearen Zusammenhang führt.

Für breitbandige Spektren ist auch eine Interpolation entlang der Frequenz notwendig. Hierzu wird, wie in Abb. 4.7 veranschaulicht, eine äquidistante Abtastung verwendet. Die Interpolationskoeffizienten werden mit den Lagrange-Polynomen berechnet. Eine lokale Interpolation ist hier sinnvoll, denn das Fehlen von Abtastpunkten im Bereich zwischen $-k_{\min}$ und k_{\min} bereitet beim Einsatz von globalen Interpolationsverfahren Probleme. Häufig werden die Lücken dabei mit Nullwerten aufgefüllt. Dies reduziert die Effizienz und führt zu Interpolationsfehlern.

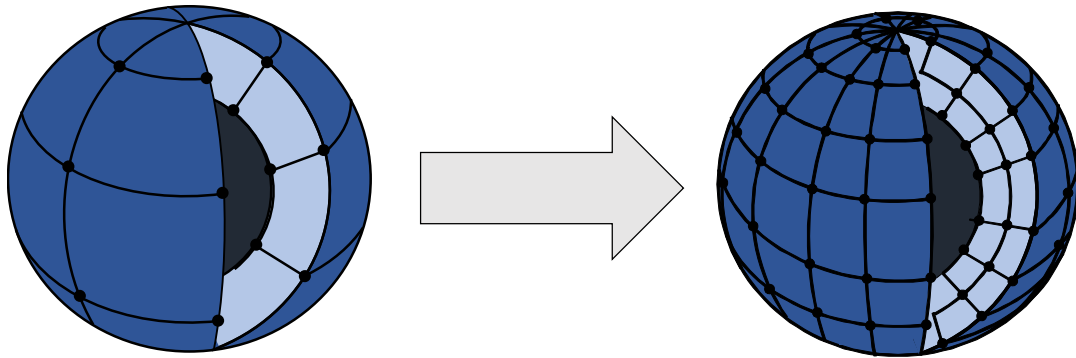


Abbildung 4.5: Bei der Interpolation des Spektrums ebener Wellen wird das zur Abtastung verwendete Raster durch ein feineres ersetzt.

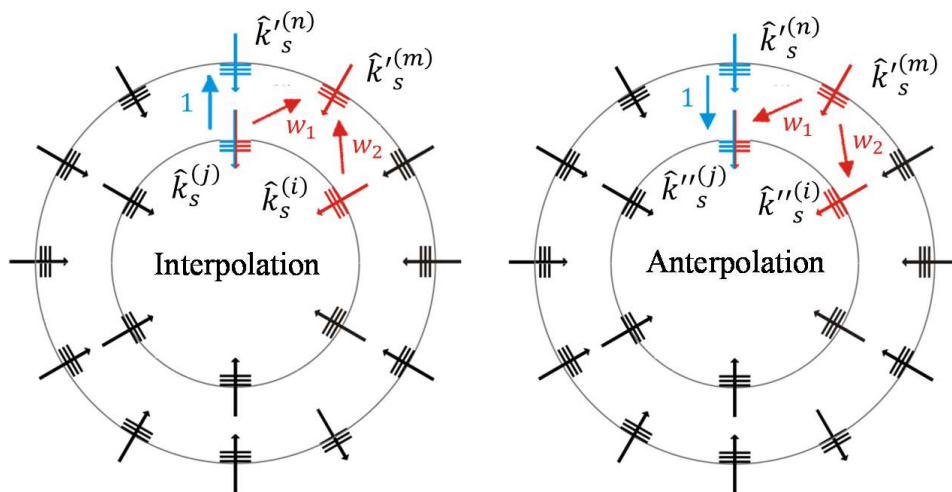


Abbildung 4.6: Exemplarische Gegenüberstellung von Interpolation und Anterpolation.

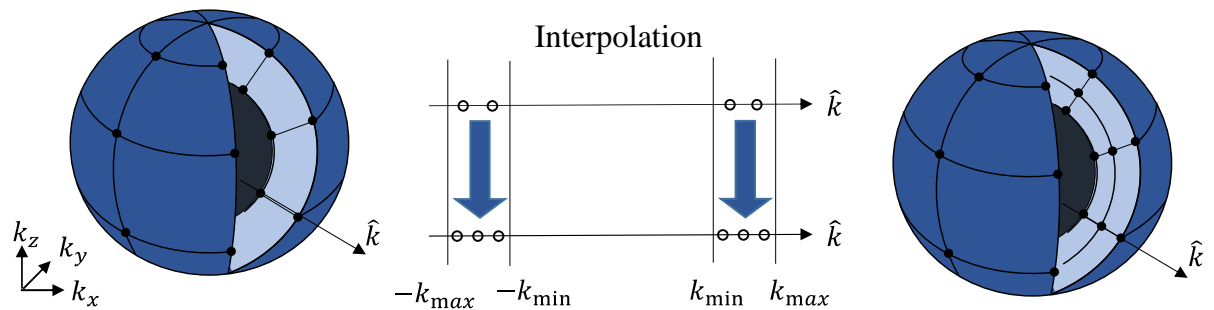


Abbildung 4.7: Interpolation entlang der Wellenzahl, welche im Ortsfrequenzbereich der Radi-
alrichtung entspricht.

4.2.3.1 Lokale Interpolation

Bei der Wahl eines lokalen Interpolationsverfahrens muss zur Gewährleistung einer vorgegebenen Genauigkeit eine unter Aspekten der Rechenzeit vorteilhafte Abstimmung zwischen der Anzahl der Basispunkte pro Interpolationspunkt und der gewünschten Überabtastung vorgenommen werden. In üblichen Implementierungen ist die verwendete Abtastdichte mehr als doppelt so groß wie der Wert, der durch das theoretische Minimum in (4.8) vorgegeben wird. Dies liegt an der Tatsache, dass nicht die Gruppengröße, sondern der Translationsoperator der jeweiligen Ebene den Spektralbedarf bestimmt, da dessen Bandbreite von der Summe aus Quell- und Zielboxgröße abhängt [Chew et al. 2001]. Die starke Überabtastung führt dazu, dass im Allgemeinen nur Interpolationsordnungen im einstelligen Bereich nötig sind, um eine hohe Genauigkeit zu erreichen.

Zwar legt der Umstand, dass der Translationsoperator bei der eigentlichen Bildberechnung durch die hierarchische Zerlegung nicht verwendet wird, die Vermutung nahe, dass man die Überabtastung deutlich verringern könnte, doch dem sind zur Gewährleistung einer hohen Genauigkeit und Effizienz enge Grenzen gesetzt. Um die Genauigkeit nicht zu beeinträchtigen, muss die Interpolationsordnung erhöht werden und dies geht schnell zu Lasten der Effizienz. In der Praxis wird die Überabtastung deshalb nur moderat verringert.

4.2.3.2 Globale Interpolation

In [Sarvas 2003] wurde gezeigt, wie sich die sphärische Interpolation durch Verwendung der FFT umsetzen lässt. Die Grundlagen der 1D-FFT-Interpolation werden in Anhang A.3 erklärt. Die Abtastpunkte in ϕ und θ müssen dabei auf einem äquidistanten Raster liegen. Für die Bildberechnung ist dieses Verfahren ideal, da der Bandbreitenbedarf nicht durch die Translationsoperatoren bestimmt wird und eine geringe Überabtastung in Kombination mit einer exakten Interpolation möglich ist.

Die Herausforderung beim Einsatz dieses Verfahrens besteht darin, eine hohe Genauigkeit bei der Quadratur zu erzielen. Es wäre beispielsweise naheliegend, die Quadraturgewichte w_n in (4.6) mit der Funktionaldeterminante des sphärischen Volumenelements $k^2 \sin \theta$ gleichzusetzen. Zwar konvergiert das Integral im Grenzfalle auf den richtigen Wert, jedoch ist die Genauigkeit bei grob abgetasteten Spektren nicht zufriedenstellend. In [Sarvas 2003] wird gezeigt, dass die Approximation von $\sin \theta$ durch eine abgebrochene Fourierreihe bessere Ergebnisse liefert.

Voraussetzung für die FFT-Interpolation ist eine äquidistante Diskretisierung in θ und ϕ , welche einen Fixpunkt besitzt. So wird hier ein Abtastpunkt bezeichnet, der sich unabhängig davon, welche Abtastdichte gewählt wird, immer an der gleichen Position befindet. Oft werden die Fixpunkte $\theta = 0$ (Nordpol) und $\phi = 0$ (Nullmeridian) gewählt. Allerdings führt diese Wahl immer zu einer unerwünschten Häufung der Abtastpunkte exakt an den Polen. Aus diesem Grund wurde das Gitter für θ so gewählt, dass der Fixpunkt am Äquator liegt. Dies entspricht dem Koordinatenwert $\theta = \pi/2$ und die zugehörigen Abtastpunkte können durch

$$\theta_m = \frac{m}{N_\theta + 1} \pi, \quad m = 1, 2, \dots, N_\theta \quad (4.12)$$

berechnet werden, wobei N_θ nur ungerade sein darf und ϕ von 0 bis 2π läuft. Die Gewichte

$$w_n = k^2 \Delta\theta \Delta\phi \Delta k \sum_{i=-N_\theta}^{N_\theta} a_i e^{ji\theta_m} \quad \text{mit} \quad a_i = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{1-i^2}, & \text{falls } i \text{ gerade} \\ 0, & \text{falls } i \text{ ungerade} \end{cases} \quad (4.13)$$

entsprechen einer abgebrochenen Fourierreihe der Funktion $\sin \theta$ [Sarvas 2003].

4.3 Bilderzeugung

Die Berechnung eines Bildes beginnt üblicherweise mit einer Vorprozessierung der Beobachtungen, sodass im Anschluss ein korrekt abgetastetes Spektrum im k -Raum vorliegt. Die Abtastung wird bestimmt durch die Abmessungen des Bildbereichs, wobei der genaue Zusammenhang in (4.8) gegeben ist.

Die grundsätzliche Funktionsweise des hier vorgestellten Verfahrens besteht darin, ein Spektrum ebener Wellen mit der im Folgenden noch genauer zu erklärenden Disaggregation rekursiv in lokalisierte Subspektren zu unterteilen, um dann das Bild aus den Subspektren auf der feinsten Ebene zu berechnen. Die Auswertung des Bildes erfolgt durch Anwendung der Feldberechnungsformel in (4.1) auf die disaggregierte Spektraldarstellung.

4.3.1 Aggregation und Disaggregation

Je nach Größe des Bildbereichs führt die rekursive Unterteilung mit einem Octree zu mehreren Hierarchieebenen. Um abgetastete Spektren von verschiedenen Ebenen ineinander überzuführen, werden spezielle Verfahren verwendet. Mit der Aggregation werden die Spektren der ungeordneten Knotenelemente entsprechend der hierarchischen Struktur kombiniert, der umgekehrte Prozess wird als Disaggregation bezeichnet. Die Aggregation ist demnach eine effiziente Implementierung der Gleichung in (4.5). Der rekursive Prozess ist in Abb. 4.8 schematisch dargestellt. Die Grafik lässt auch erkennen, dass die Abtastdichte der Spektren von der elektrischen Größe der jeweiligen Box abhängt. Aus diesem Grund ist beim Übergang zwischen den verschiedenen Hierarchieebenen eine Anpassung der Abtastdichte erforderlich.

Der Ausdruck in (4.5) beinhaltet eine Exponentialfunktion, die dazu führt, dass sich der spektrale Gehalt der Spektren vor der Summation verdoppelt. Dies trägt der Tatsache Rechnung, dass die Abmessungen der übergeordneten Knotenelemente doppelt so groß sind wie ihre Nachfolger. Aus (4.11) folgt, dass die Anzahl der Abtastpunkte für das zugehörige Spektrum um den Faktor 8 steigt, wobei sich aber gleichzeitig die Anzahl der Boxen um den Faktor 8 verringert, da jeder Knoten bei der Aggregation acht Nachfolger ersetzt. Dieser Zusammenhang wird in Abb. 4.8 veranschaulicht. Die Gesamtanzahl der Abtastpunkte pro Unterteilungsebene bleibt so nahezu konstant, was unter anderem die Effizienz des Algorithmus begründet.

4.3.1.1 Aggregation

Die Aggregation besteht aus mehreren Schritten. Zuerst muss, wie in Abb. 4.5 gezeigt, das Spektrum der Nachfolgerboxen auf das Samplingraster des übergeordneten Knotenelements interpoliert werden. Dies ermöglicht die Multiplikation mit dem Exponentialausdruck in (4.5), ohne dass Aliasingfehler entstehen. Dieser Rechenschritt entspricht einer Verschiebung des Koordinatenursprungs im Ortsbereich, so wie in Abb. 4.9 veranschaulicht. Im letzten Schritt müssen alle interpolierten und multiplizierten Spektren superponiert werden. Verschiebung und Superposition sind klar definiert und stellen bei einer Implementierung deshalb keine besondere Schwierigkeit dar. Die Interpolation hingegen lässt sich, wie in Abschnitt 4.2.3 erörtert, mit verschiedenen Verfahren bewerkstelligen, die üblicherweise an ein spezielles Diskretisierungsraaster gebunden sind.

4.3.1.2 Disaggregation

Die Aggregation setzt sich aus linearen Teiloperationen zusammen und kann deshalb als Matrix-Vektor-Multiplikation dargestellt werden, wobei \mathbf{A} im Folgenden die zugehörige Matrix

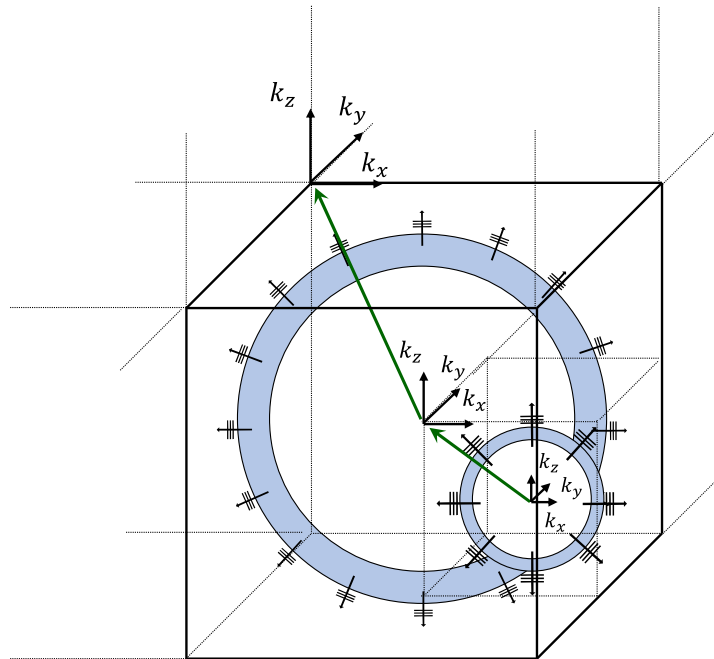


Abbildung 4.8: Die Aggregation ist ein rekursiver Prozess, bei dem die Subspektralebenen sukzessive zusammengefasst werden.

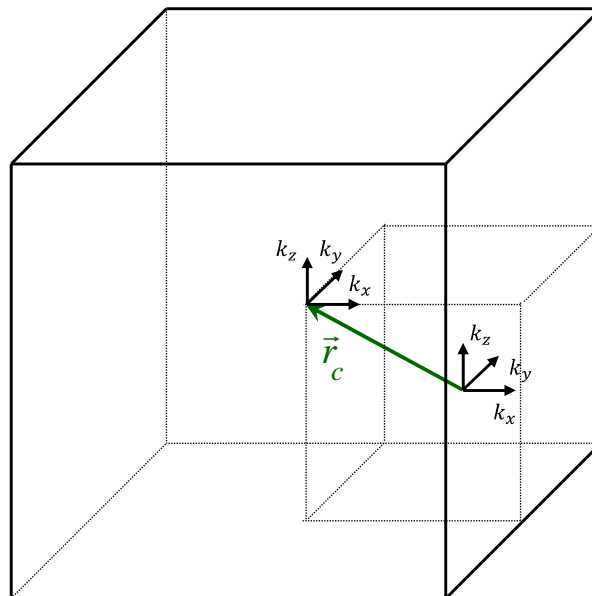


Abbildung 4.9: Bei der Verschiebung eines Spektrums ebener Wellen ändert sich der Koordinatenursprung im Ortsbereich.

bezeichnet. Diese Feststellung ist hilfreich bei der Definition der Disaggregation, die somit als Multiplikation mit der adjungierten Matrix \mathbf{A}^H interpretiert werden kann. Die Ausgangsgrößen bei der Aggregation stellen damit die Eingangsgrößen für die Disaggregation dar und umgekehrt. Abb. 4.10 stellt anschaulich dar, wie ein Spektrum durch die Disaggregation in mehrere Subspektren zerlegt wird, die wegen einer geringeren Signalbandbreite gröber abgetastet werden können.

Die Berechnung des adjungierten Operators kann auch ohne Kenntnis der Matrix erfolgen. Dazu müssen die Einzeloperationen separat adjungiert und anschließend in ihrer Reihenfolge umgekehrt werden. Die Aggregation besteht aus drei Berechnungsschritten: 1. Interpolation der Spektren, 2. Verschiebung der Spektren und 3. Superposition der Spektren. Damit besteht die Disaggregation zuerst aus einer adjungierten Superposition, dann aus einer adjungierten Verschiebung der Spektren und zum Schluss aus einer adjungierten Interpolation. Die adjungierte Superposition entspricht einer Initialisierung aller Subspektren mit dem Spektrum am übergeordneten Knoten; die Richtung der Verschiebung kehrt sich im adjungierten Operator um, und die in Abb. 4.6 veranschaulichte adjungierte Interpolation wird Anterpolation genannt.

Für die Anterpolation werden die gleichen Gewichte wie für die Interpolation benutzt, was eine Tiefpassfilterung bewirkt. Eine wichtige Eigenschaft der Anterpolation ist, dass das Ergebnis der Summe in (4.6) für kleine Werte von r nahezu gleich bleibt. Aus diesem Grund werden die Quadraturgewichte w_n auf der höchsten Ebene direkt auf die Abtastwerte aufmultipliziert, da die Anterpolation bei der Disaggregation dafür sorgt, dass die Integrale beziehungsweise Summen ihren korrekten Wert beibehalten. Die Disaggregation wird somit auf die gewichteten Spektren angewendet.

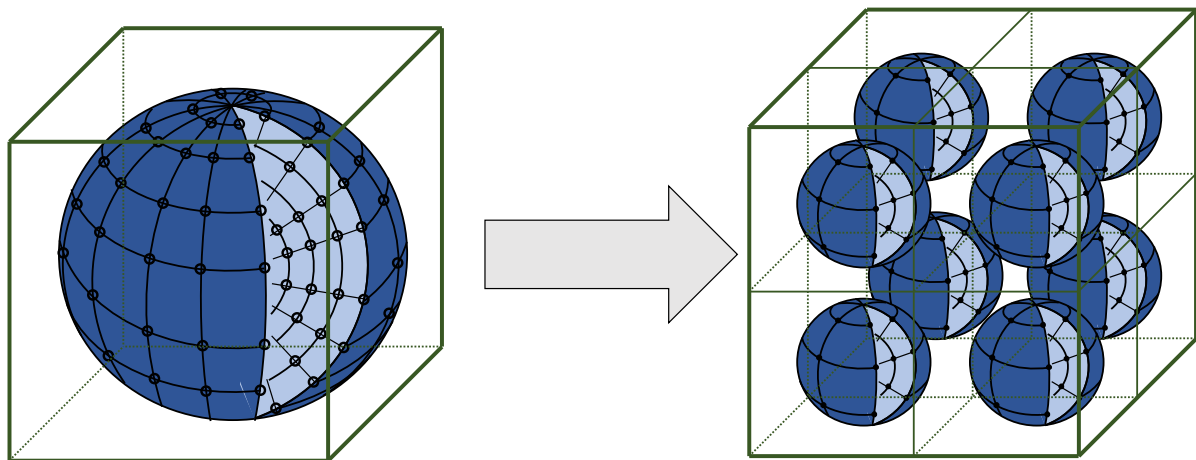


Abbildung 4.10: Bei der Disaggregation wird jedes Spektrum ebener Wellen beim Übergang auf die hierarchisch untergeordneten Bildbereiche in acht Subspektren unterteilt.

4.3.2 Optimierung der Parameter

Es gibt zahlreiche Parameter und Implementierungsdetails, die einen Einfluss auf die Rechenzeit sowie die Genauigkeit des Verfahrens haben. Deshalb wird hier nicht versucht, einen allgemein gültigen Satz an optimalen Parametern zu bestimmen, sondern es sollen Untersuchungen angestellt werden, die zu einem grundlegenden Verständnis der Abhängigkeiten führen. Die Disaggregation von breitbandigen Spektren stellt im Gegensatz zur Disaggregation von monofrequenten Spektren ein Novum dar. Durch die Erweiterung auf breitbandige Spektren ändern

sich manche Zusammenhänge oder werden durch andere Gesetzmäßigkeiten ergänzt. Um diese Unterschiede feststellen zu können, soll sowohl ein monofrequentes als auch ein breitbandiges Szenario untersucht werden.

Ausgangspunkt ist ein Szenario mit acht skalaren Streuzentren, die mit $r_x, r_y, r_z = \pm 0,25$ m auf den Eckpunkten eines Würfels angeordnet sind. Zur Berechnung der Abbildung $\psi(\mathbf{r})$ mit (4.1) wird das monostatische Streuspektrum

$$\Psi(\mathbf{k}_s) = (2\pi)^3 \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^8 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right\} = \sum_{i=1}^8 e^{j2\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_i} \quad (4.14)$$

verwendet, welches durch eine Fouriertransformation aus der Streuzentrenanordnung hervorgeht. Dabei bezeichnet \mathbf{r}_i die Position des jeweiligen Streuzentrums. Im breitbandigen Szenario erstreckt sich der Frequenzbereich von 1 GHz bis 2 GHz, während im anderen Fall monofrequente Daten bei 2 GHz verwendet werden. Je nach zur Verfügung stehender Bandbreite ergibt sich ein anderes Bild. Dies ist jedoch in (4.1) nicht direkt ersichtlich. Deutlicher wird dies im Ausdruck

$$\psi(\mathbf{r}) = \mathcal{F} \{ M_K(\mathbf{k}_s) \Psi(\mathbf{k}_s) \}, \quad (4.15)$$

welcher sich die Maskierungsfunktionen

$$M_K(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } k_{\min} \leq k \leq k_{\max} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.16)$$

und

$$M_K(\mathbf{k}) = \frac{\delta(k - k_0)}{k^2} \quad (4.17)$$

in (3.79) beziehungsweise (3.74) zu Nutze macht.²

In Abschnitt 3.4.3 und Abschnitt 3.4.4 wurde gezeigt, dass eine dyadische Abbildung aus monofrequenten beziehungsweise breitbandigen, sphärischen Beobachtungsdaten durch das Konzept der Punktantwortfunktionen analytisch lösbar ist. Dies gilt auch für den vorliegenden skalaren Fall. Die zugehörige Punktantwortfunktion für den monofrequenten und breitbandigen Fall geht durch eine Stauchung aus (3.76) beziehungsweise [Schnattinger und Eibert 2014]

$$P(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{r^3} \left[\sin(kr) - kr \cos(kr) \right]_{k_{\min}}^{k_{\max}} \quad (4.18)$$

hervor. Die erforderliche Stauchung ist in (3.43) quantifiziert. Durch Verwendung der Punktantwortfunktionen lässt sich die analytische Lösung des Abbildungsproblems mit

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^8 \frac{1}{2} P(2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)) \quad (4.19)$$

für beide Szenarien direkt angeben. Abb. 4.11 zeigt eine grafische Auswertung dieser Lösungen. Diese Ergebnisse werden nun im Folgenden als Referenz für die mit dem hierarchischen

²Um die resultierende Verteilungsfunktion mit dem Ergebnis aus (4.1) zur Übereinstimmung zu bringen, muss der Parameter n im breitbandigen Szenario (vgl. (3.79)) zu Null gesetzt werden.

Algorithmus berechneten Bilder verwendet. Das verwendete Genauigkeitsmaß ist der mittlere Fehler pro Pixel, welcher mit der Formel

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{V} \iiint_V \left| \frac{\psi(\mathbf{r})}{\max_{\mathbf{r}} |\psi(\mathbf{r})|} - \frac{\psi_{\text{ref}}(\mathbf{r})}{\max_{\mathbf{r}} |\psi_{\text{ref}}(\mathbf{r})|} \right|^2 d^3\mathbf{r} \right) \quad (4.20)$$

in Dezibel ermittelt wird. Für die Auswertung dieses Ausdrucks werden Bilder mit $64 \times 64 \times 64$ volumetrischen Pixeln berechnet.

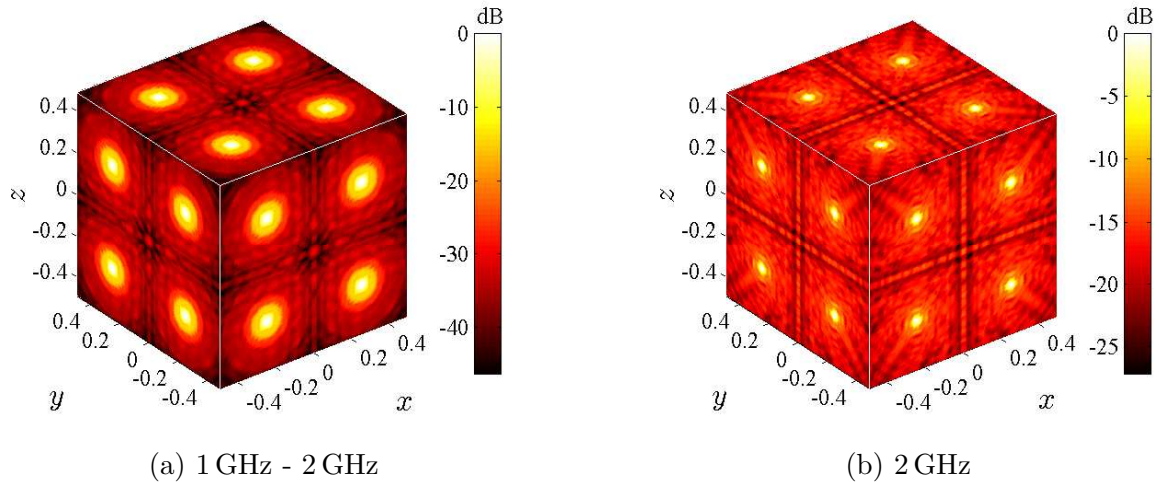


Abbildung 4.11: Mit analytischen Punktantwortfunktionen berechnete Referenzbilder der vorliegenden Streuzentrenanordnung.

4.3.2.1 Monofrequente Disaggregation

Im ersten Teil der Untersuchungen wird der monofrequente Datensatz für die Berechnung der Bilder herangezogen. Die zugehörige Referenzlösung ist in Abb. 4.11b dargestellt. Wie bereits ausführlich diskutiert, gibt es zwei grundsätzlich unterschiedliche Interpolationsverfahren, die jeweils eine andere Abtastung der Kugelspektren erforderlich machen. Dies betrifft nicht nur die Anordnung der Abtastpunkte, sondern auch die benötigte Überabtastung. Bei globalen Verfahren reicht eine geringe Überabtastung, um eine hohe Genauigkeit zu erreichen. Lokale Interpolationsverfahren erfordern ein Abwägen zwischen Interpolationsordnung und Überabtastung, wobei die Überabtastung bei lokalen im Vergleich zu globalen Interpolationsverfahren nahezu verdoppelt werden muss. Bei Verwendung des gleichen Diskretisierungsgitters sind die unterschiedlichen Verfahren somit schlecht vergleichbar. Um die Vergleichbarkeit trotzdem gewährleisten zu können, wird ein Überabtastungsfaktor s eingeführt, welcher die Überabtastung in beiden Verfahren unterschiedlich definiert. Mit

$$N_{\theta}^{\text{global}} = \left\lceil s \left(\frac{kD}{2} + 1 \right) \right\rceil_{\text{ungerade}}, \quad N_{\phi}^{\text{global}} = \left\lceil s \left(2 \frac{kD}{2} + 2 \right) \right\rceil_{\text{gerade}} \quad (4.21)$$

für die globale Interpolation und

$$N_{\theta}^{\text{lokal}} = \left\lceil 2s \left(\frac{kD}{2} + 1 \right) \right\rceil, \quad N_{\phi}^{\text{lokal}} = \left\lceil 2s \left(2 \frac{kD}{2} + 2 \right) \right\rceil \quad (4.22)$$

für die lokale Interpolation unterscheidet sich die Anzahl der Abtastpunkte in ϕ und θ für ein bestimmtes s um den Faktor 2, wobei D der maximale Durchmesser der zugrunde liegenden Ortsbereichsdarstellung ist. Das Ergebnis der Gauß'schen Klammerfunktion $\lceil \cdot \rceil$ ist die kleinste ganze Zahl, welche nicht kleiner als das Argument ist. Der tiefgestellte Text weist darauf hin, ob außerdem gefordert wird, dass die Zahl gerade oder ungerade ist.

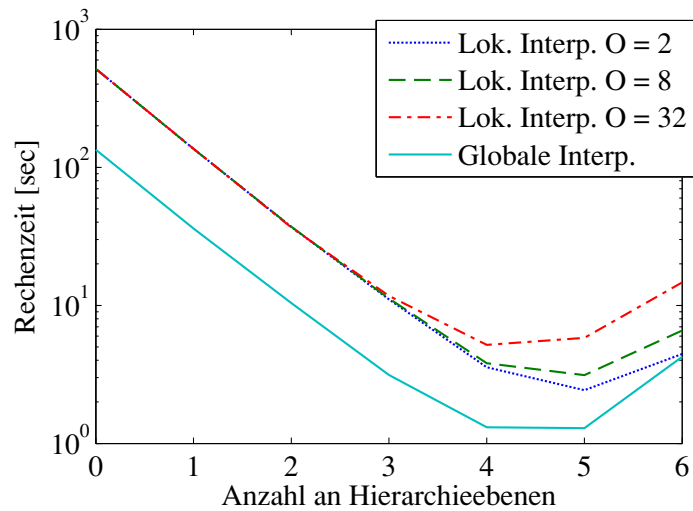
In Abb. 4.12a ist die Zeit für die Berechnung des Bildes in Abhängigkeit der Disaggregationsschritte angegeben, wobei Null dem vollständigen Verzicht auf eine Disaggregation entspricht. Die einzelnen Kurven im Diagramm kommen jeweils durch eine andere Interpolationsordnung oder ein anderes Interpolationsverfahren zustande. Bei den ersten drei Kurven handelt es sich um das in Abschnitt 4.2.3.1 beschriebene lokale Interpolationsverfahren in den Ordnungen 2, 8 und 32, und die vierte Kurve basiert auf dem globalen Interpolationsverfahren in Abschnitt 4.2.3.2. Wenn die Anzahl der Hierarchieebenen gering ist, hat die Interpolationsordnung demnach fast keine Auswirkung auf die Rechenzeit. Wie bereits erörtert, bestimmt die Wahl des Interpolationsverfahrens das zugrunde liegende sphärische Gitter. So kann die Lagrange-Interpolation mit dem Gauß-Legendre-Gitter kombiniert werden, während die FFT-Interpolation eine äquidistante Abtastung benötigt.

Alle Kurven im Diagramm zeigen qualitativ das gleiche Verhalten. Während eine geringe oder hohe Anzahl an Disaggregationsschritten die längste Berechnungszeit zur Folge hat, stellt sich immer bei einer mittleren Anzahl an Disaggregationsschritten ein Minimum ein. Der Anstieg bei sehr vielen Hierarchieebenen hängt mit dem in der Software nötigen Verwaltungsaufwand zusammen, der durch eine steigende Zahl an Subspektren verursacht wird und ab einer gewissen Hierarchieebene die Ausführungszeit dominiert. Unter dem alleinigen Gesichtspunkt der Berechnungszeit entspricht die optimale Wahl der Disaggregationsschritte daher dem Minimum der Kurve. Allerdings wird der Einfluss auf die Genauigkeit dabei nicht berücksichtigt. In Abb. 4.12b wird der nach (4.20) berechnete mittlere Fehler pro Pixel in Abhängigkeit von der Anzahl an Hierarchieebenen dargestellt. Es ist erkennbar, dass jeder zusätzliche Disaggregationsschritt den Gesamtfehler vergrößert. Aus Sicht des Fehlerzusammenhangs gilt daher: je weniger Disaggregationsschritte, desto besser. Ein Abwägen dieser gegensätzlichen Vorgaben führt schließlich zur optimalen Anzahl an Disaggregationsschritten.

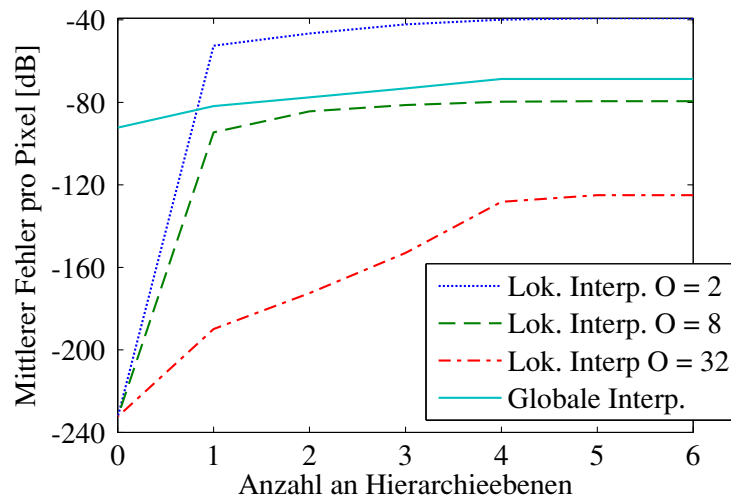
Bei gleichem Abtastgitter ist das globale Interpolationsverfahren genauer als das lokale, es besitzt jedoch auch die größere Komplexität. Dies steht nicht im Widerspruch zu Abb. 4.12b, da dort der in (4.22) und (4.21) definierte Überabtastungsfaktor s dafür sorgt, dass die Abtastung des lokalen Interpolationsverfahrens im Vergleich zum globalen verdoppelt wird.

Die Überabtastung ist somit ein wichtiges Instrument zur Erhöhung der Genauigkeit. Abb. 4.13b verdeutlicht, wie die Genauigkeit mit der Überabtastung ansteigt, wobei sechs Hierarchieebenen verwendet werden. Falls das Interpolationsverfahren eine Wahl der Interpolationsordnung zulässt, so kann die Steigung der Kurven beeinflusst werden, wie im Diagramm zu sehen. Abb. 4.13a zeigt, dass sich die Überabtastung negativ auf die Rechenzeit auswirkt.

Eine mehrdimensionale Darstellung der Abhängigkeiten erleichtert die Optimierung der Parameter. Im Folgenden beschränkt sich die Analyse auf das globale Interpolationsverfahren, welches den Vorteil hat, dass die Wahl der Interpolationsordnung entfällt. Abb. 4.14 beschreibt die Zusammenhänge zwischen den Zielvorgaben Rechenzeit und Genauigkeit sowie den Parametern Überabtastung und Anzahl an Hierarchieebenen. Nun soll exemplarisch gezeigt werden, wie diese Diagramme zur Bestimmung eines Parametersatzes genutzt werden können. Ausgangspunkt ist ein zulässiger mittlerer Pixelfehler, der durch den Benutzer vorgegeben ist. Anschließend wird die Kurve im Genauigkeitsdiagramm ermittelt, die diesem Fehler entspricht. Die Koordinaten dieser Kurve werden nun in die Grafik für die Rechenzeit übertragen. Die Lösung entspricht schließlich dem Ort des Minimums entlang dieser Kurve. Dadurch lassen sich

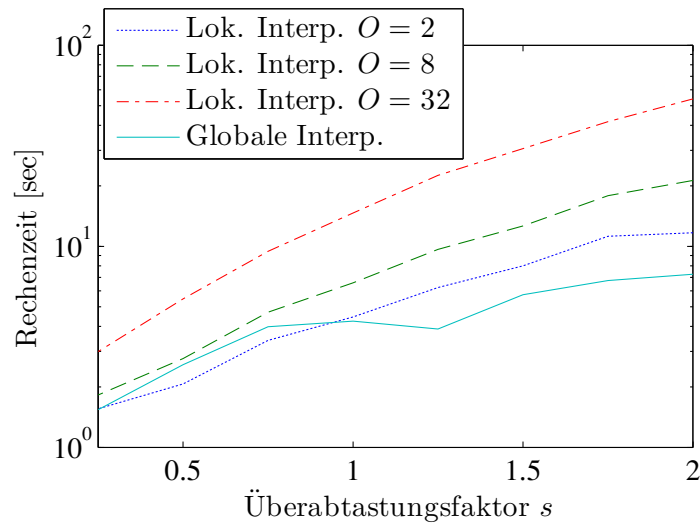


(a) Rechenzeit

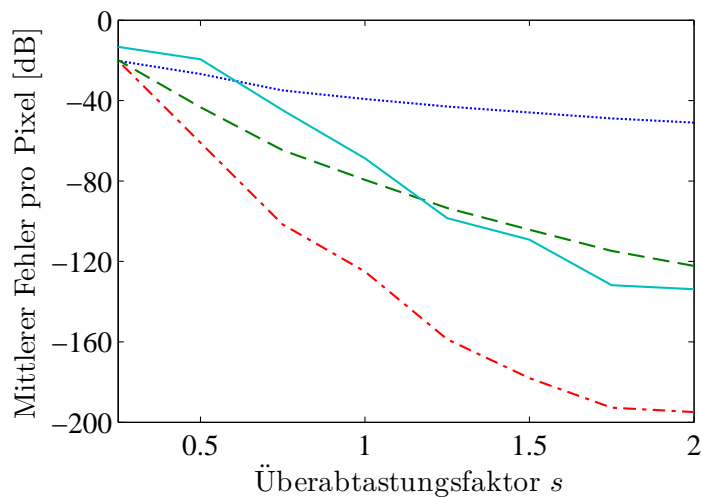


(b) Genauigkeit

Abbildung 4.12: Lokales Verfahren mit verschiedenen Interpolationsordnungen O im Vergleich mit einem globalen Verfahren in Abhängigkeit von der Anzahl an Hierarchieebenen bei der Prozessierung von monofrequenten Daten, wobei der Überabtastungsfaktor 1 ist.



(a) Rechenzeit



(b) Genauigkeit

Abbildung 4.13: Lokales Verfahren mit verschiedenen Interpolationsordnungen O im Vergleich mit einem globalen Verfahren in Abhängigkeit vom Überabtastungsfaktor bei der Prozessierung von monofrequenten Daten, wobei sechs Hierarchieebenen verwendet werden.

die zwei Parameter Überabtastung und Anzahl an Hierarchieebenen so bestimmen, dass sie für einen vorgegebenen Fehler die Rechenzeit minimieren.

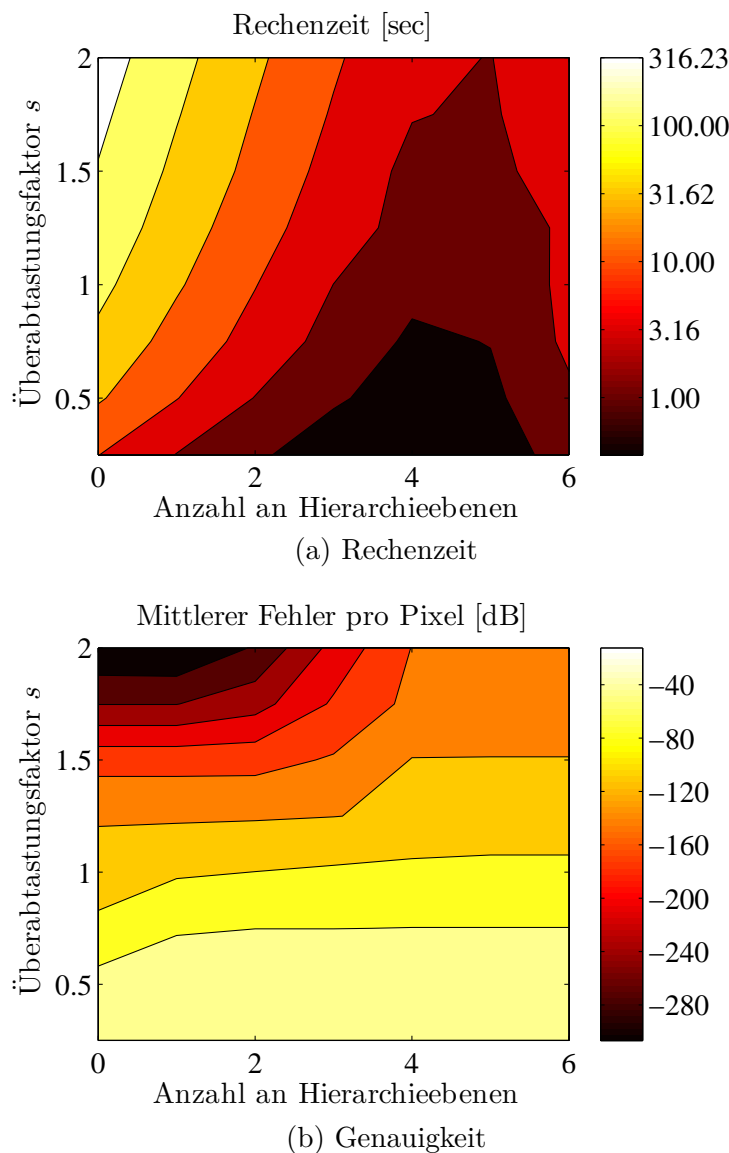


Abbildung 4.14: Abhängigkeiten des globalen Interpolationsverfahrens von Überabtastungsfaktor und Anzahl an Hierarchieebenen bei der Prozessierung von monofrequenten Daten.

In der Praxis wird die Anzahl der Disaggregationschritte sinnvollerweise durch die Angabe einer unteren Grenze für die Anzahl der spektralen Abtastpunkte auf der untersten Hierarchieebene festgelegt. Diese Vorgabe stellt gleichzeitig sicher, dass die Anzahl der Disaggregationschritte im richtigen Maß mit der Problemgröße skaliert.

4.3.2.2 Breitbandige Disaggregation

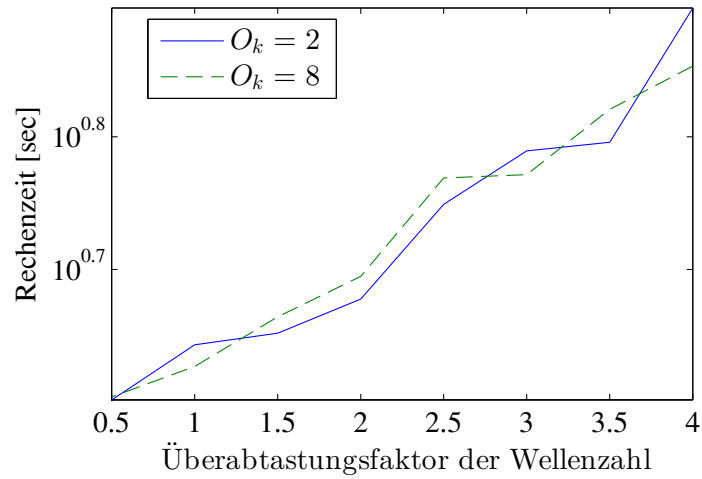
Die vorangegangene Analyse zeigt, dass die monofrequente Disaggregation bei der richtigen Wahl der Parameter sowohl schnell als auch sehr genau ist. Die globale Interpolation scheint

besonders vorteilhaft, da eine Wahl der Interpolationsordnung entfällt und auch der Speicher-
verbrauch durch die tendenziell geringere Überabtastung sinkt. Für die Komponenten ϕ und
 θ gilt dieser Zusammenhang auch bei der Disaggregation von breitbandigen Spektren. In den
weiteren Untersuchungen soll deshalb das globale Interpolationsverfahren verwendet werden.
Für die Frequenzkomponente k kommt jedoch prinzipbedingt immer ein lokales Interpolations-
verfahren zur Anwendung (vgl. Abschnitt 4.2.3).

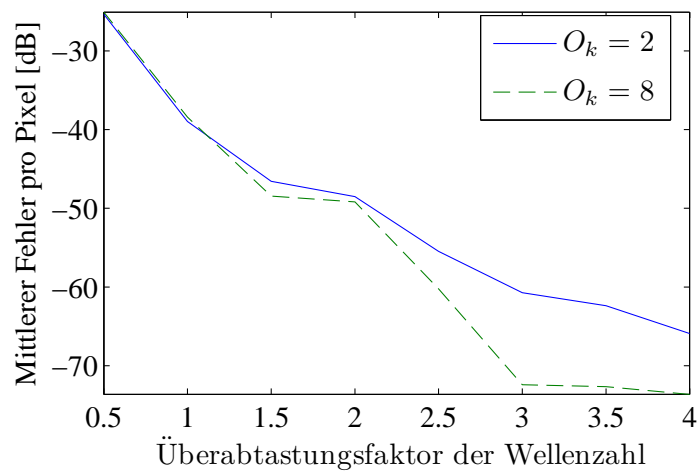
Der nun folgende zweite Teil der Untersuchungen zeigt, was bei der Disaggregation von
breitbandigen Spektren zusätzlich zu beachten ist. Die numerischen Berechnungen erfolgen im
Frequenzbereich von 1 GHz bis 2 GHz, wobei jedes Ergebnis mit der analytisch berechneten
Referenzlösung in Abb. 4.11a verglichen wird. Zur Untersuchung des Einflusses der Überabtas-
tung in Richtung der Frequenzkomponente k auf die Genauigkeit und Rechenzeit des hierarchi-
schen Abbildungsprozesses wurden die Diagramme in Abb. 4.15 angefertigt, wobei die Anzahl
der Disaggregationsschritte mit 6 maximal gewählt wurde. Sie zeigen, dass die Überabtas-
tung erwartungsgemäß einen großen Einfluss auf beide Größen hat. Die verschiedenen Kurven
entsprechen dabei unterschiedlichen Interpolationsordnungen für die Lagrange-Interpolation
in Frequenzrichtung. Die Genauigkeit kann durch die Überabtastung zwar beliebig eingestellt
werden, doch im Vergleich zu den Winkelkomponenten muss die Überabtastung für die Fre-
quenzkomponente deutlich höher gewählt werden, um ein ähnliches Fehlermaß zu erzielen (vgl.
Abb. 4.13). Der Fehler wird für die getesteten Überabtastungsfaktoren durch die Interpolation
in Frequenzrichtung dominiert. Für die Winkelkomponenten θ and ϕ ist ein Überabtastungs-
faktor s von lediglich 1 nach der Definition in (4.22) deshalb ausreichend. Es sei hier erwähnt,
dass ein mittlerer Fehler pro Pixel von unter -25 dB für den Betrachter kaum zu unterscheiden
ist. In der Praxis ist häufig nur eine geringe Überabtastung in Frequenzrichtung notwendig und
die Effizienz wird kaum beeinträchtigt.

Der Vollständigkeit halber werden analog zu Abb. 4.13 und Abb. 4.14 Laufzeiten und Ge-
nauigkeiten in Abhängigkeit von beziehungsweise in Kombination mit der Anzahl an Disag-
gregationsschritten untersucht. Im Gegensatz zum monofrequenten Fall wird hier der Überab-
tastungsfaktor nur in Frequenzrichtung variiert, für die Winkelkomponenten bleibt er 1. Die
Diagramme in Abb. 4.16 und Abb. 4.17 zeigen die resultierenden Laufzeiten und Genauigkeiten.
In Abb. 4.16 beträgt der Überabtastungsfaktor in Frequenzrichtung 3.

Grundsätzlich verhält sich die Interpolation in Frequenzrichtung sehr ähnlich wie in den
Winkelkoordinaten. Allerdings erfordert sie zur Erreichung ähnlicher Genauigkeitsmaße wie im
monofrequenten Fall deutlich höhere Überabtastungsfaktoren. Dies muss bei der Wahl der Pa-
rameter berücksichtigt werden. In der Praxis ist eine hohe Genauigkeit bei der Bildberechnung
jedoch nur selten nötig und die Überabtastungsfaktoren können entsprechend niedrig gewählt
werden.

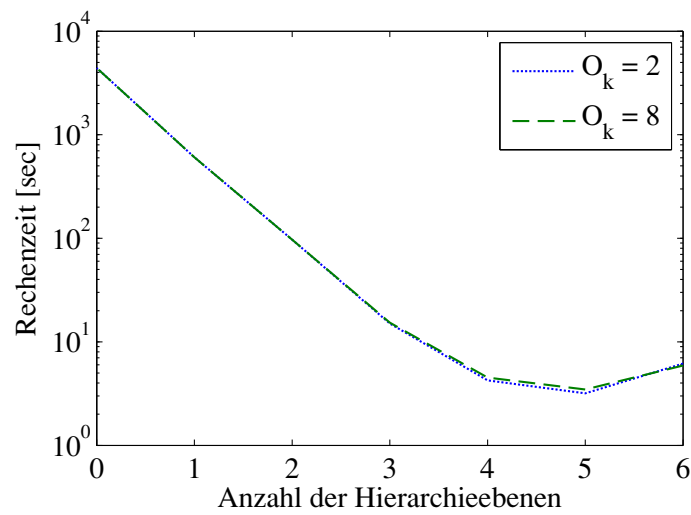


(a) Rechenzeit

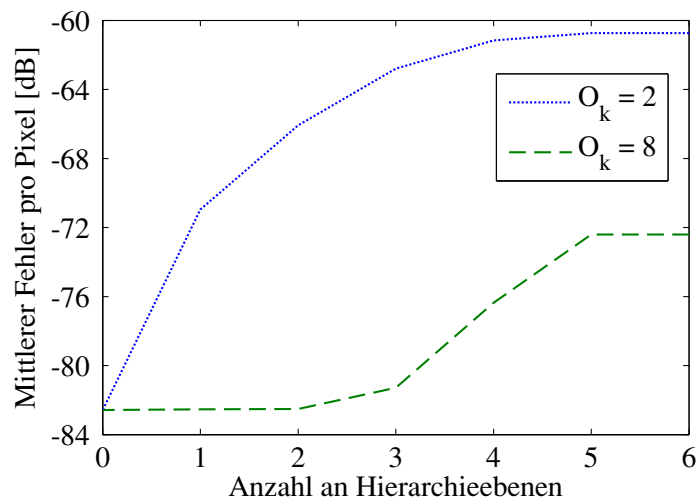


(b) Genauigkeit

Abbildung 4.15: Prozessierung von breitbandigen Daten mit unterschiedlichen Interpolationsordnungen O_k für die Wellenzahl in Abhängigkeit vom Überabtastungsfaktor der Wellenzahl, wobei die Anzahl an Hierarchieebenen 6 beträgt.

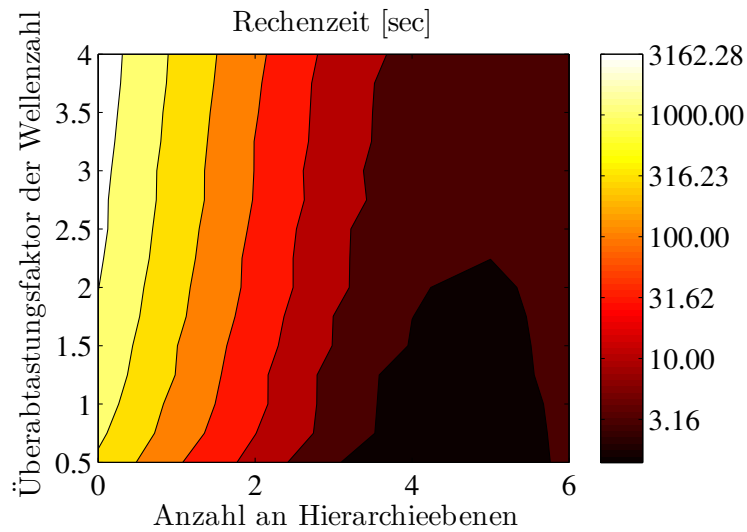


(a) Rechenzeit

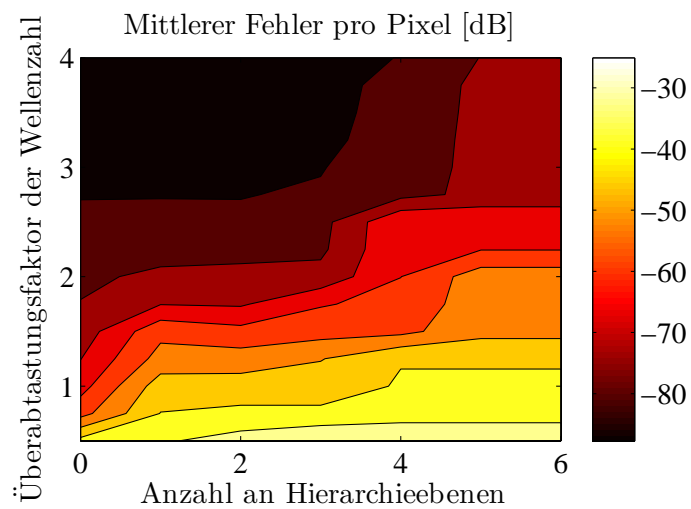


(b) Genauigkeit

Abbildung 4.16: Prozessierung von breitbandigen Daten mit unterschiedlichen Interpolationsordnungen O_k für die Wellenzahl in Abhängigkeit von der Anzahl an Hierarchieebenen, wobei der Überabtastungsfaktor der Wellenzahl 3 beträgt.



(a) Rechenzeit



(b) Genauigkeit

Abbildung 4.17: Abhängigkeiten des breitbandigen Interpolationsverfahrens von der Anzahl an Hierarchieebenen und vom Überabtastungsfaktor der Wellenzahl, wobei die zugehörige Interpolationsordnung O_k 8 beträgt.

4.4 Komplexitätsanalyse

4.4.1 Direkte Bildberechnung

Prinzipiell kann das Bild an beliebigen Punkten ausgewertet werden; für eine einfache Visualisierung ist jedoch ein kartesisches Gitter vorteilhaft. Die Abtastung ist vom Detailinhalt abhängig und das Bild ist eine ortsabhängige Funktion bestehend aus tiefpassbegrenzten Signalen, da es der Fouriertransformation eines endlich ausgedehnten k -Raum-Sektors entspricht. Auf den Ortsbereich übertragen besagt das Nyquist-Shannon'sche Abtasttheorem, dass das Abtastintervall im Ortsbereich mit

$$\Delta r \leq \frac{\pi}{k_{\max}} = \frac{\lambda_{\min}}{2} \quad (4.23)$$

durch die maximale Wellenzahl k_{\max} beziehungsweise durch die kleinste Wellenlänge λ_{\min} beschränkt ist.

Die Zahl der Bildpunkte $D/\Delta r$ pro Bilddimension ist linear abhängig von der maximalen Ortsfrequenz k_{\max} sowie von der Ausdehnung des Bildes D im Ortsbereich. Für ein dreidimensionales Bild ist die Gesamtzahl der Bildpunkte mit

$$N_r \geq 8 \frac{D_x}{\lambda_{\min}} \frac{D_y}{\lambda_{\min}} \frac{D_z}{\lambda_{\min}} = 8V_{\text{elektrisch}} \quad (4.24)$$

proportional zum elektrischen Volumen $V_{\text{elektrisch}}$ des Bildbereichs, wobei $D_{x,y,z}$ die Abmessungen des Bildbereichs darstellt und das elektrische Volumen analog zur elektrischen Länge definiert ist.

Für die Abtastung im Ortsfrequenzbereich kann durch ähnliche Überlegungen ein umgekehrter Zusammenhang angegeben werden. Die endliche Ausdehnung im Ortsbereich führt auf das Abtastkriterium

$$\Delta k \leq \frac{\pi}{r_{\max}} \quad (4.25)$$

für den Ortsfrequenzbereich, wobei r_{\max} der Radius der Minimalkugel im Ortsbereich ist. Damit ergibt sich schlussendlich für die Gesamtzahl der Abtastpunkte im k -Raum die Proportionalität

$$N_K = \frac{K_x}{\Delta k} \frac{K_y}{\Delta k} \frac{K_z}{\Delta k} \geq \frac{r_{\max}^3}{\pi^3} K_x K_y K_z, \quad (4.26)$$

wobei $K_{x,y,z}$ die Abmessungen der Beobachtungen im kartesischen k -Raum darstellen. Mit $K_{x,y,z} = 2k_{\max}$ und $D_{x,y,z} = 2r_{\max}$ lässt sich zeigen, dass die Anzahl der Abtastpunkte im Orts- und Ortsfrequenzbereich in (4.24) und (4.26) proportional ist. Aus diesem Grund werden die folgenden Komplexitätsbetrachtungen mit der Problemgröße N durchgeführt, welche mit

$$N_K \sim N \quad \text{und} \quad N_r \sim N, \quad (4.27)$$

auch proportional zu den zuvor definierten Größen ist. Eine explizite Auswertung der Fouriertransformation in (4.1) für jeden einzelnen Bildpunkt führt somit zur quadratischen Komplexität $\mathcal{O}(N_K N_r) = \mathcal{O}(N^2)$.

4.4.2 Hierarchische Bildberechnung

Die Komplexität des Verfahrens bezüglich der Problemgröße N soll im Folgenden berechnet werden. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass der Octree vollständig ist und damit auch alle Boxen angelegt sind. Da das Ausgangslevel $l = 0$ nur aus einer Box besteht, lässt sich die Anzahl der Boxen auf der l -ten Ebene berechnen durch 8^l . Mit (4.27) gilt, dass die Anzahl der Abtastpunkte auf dem Ausgangslevel sowie die Anzahl der zu berechnenden Bildpunkte jeweils proportional zu N sind.

Wie im vorhergehenden Kapitel erklärt, nimmt der spektrale Gehalt auf den feineren Hierarchieebenen ab, was dazu führt, dass für ein Subspektrum in der l -ten Hierarchieebene näherungsweise

$$N_l = \frac{N}{8^l} \quad (4.28)$$

Abtastpunkte benötigt werden. Die Überführung der Spektren auf die jeweils untergeordnete Ebene durch die Disaggregation ist in Abb. 4.10 für eine einzige Box dargestellt und basiert auf einer sphärisch abgetasteten Spektraldarstellung. Dieser rekursive Prozess wird abgebrochen, wenn die Anzahl der Abtastpunkte in einem einzelnen Subspektrum den konstanten Wert N_{\min} unterschreitet. Wie in Abschnitt 4.3.2 erörtert, beeinflusst diese Größe Genauigkeit und Geschwindigkeit des Algorithmus. Außerdem sollte dieser Wert für jede Kombination aus Hard- und Software speziell angepasst werden, um die bestmögliche Performance zu erreichen.

Die Anzahl an Hierarchieebenen beträgt abgerundet $\lfloor \log_8(N/N_{\min}) \rfloor$ und folgt aus der Forderung $N_l \geq N_{\min}$, wobei N_l in (4.28) gegeben ist. Ein globales Inter- oder Anterpolationsverfahren besitzt die Komplexität $\mathcal{O}(N_l \log N_l)$, ein lokales Verfahren dagegen nur $\mathcal{O}(N_l)$. Die Komplexitätsabschätzung erfolgt daher für die aufwändigere Methode mit Komplexität $\mathcal{O}(N_l \log N_l)$. Neben der Anterpolation besteht die Disaggregation auch aus den Berechnungsschritten zur Verschiebung und Initialisierung der Spektren. Allerdings besitzen diese nur die Komplexität $\mathcal{O}(N)$, da jeder Abtastwert separat prozessiert wird. Auf der l -ten Ebene müssen damit 8^l Boxen mit jeweils N_l Abtastpunkten disaggregiert werden. Bei Benutzung der globalen Interpolation lautet die mathematische Komplexität der gesamten Disaggregation daher

$$\mathcal{O} \left(\sum_l^{\lfloor \log_8(N/N_{\min}) \rfloor} 8^l N_l \log N_l \right) = \mathcal{O}(N \log^2 N). \quad (4.29)$$

Zur Vereinfachung dieser Formel wird die Gaußsche Summenformel [Råde und Westergren 2004, S. 192] benötigt. Es sei hier angemerkt, dass in der Herleitung keine Überabtastung verwendet wurde. Ein konstanter Überabtastungsfaktor kann aber leicht mit berücksichtigt werden und führt zum gleichen Ergebnis. Wenn ein lokales Interpolationsverfahren benutzt wird, nimmt die Komplexität formal auf $\mathcal{O}(N \log N)$ ab. Dies geht tendenziell mit einer höheren Überabtastung einher, was wiederum einen negativen Einfluss auf die Effizienz hat. Dieser Zusammenhang wurde in Abschnitt 4.3.2 ausführlich untersucht. Lokale und globale Interpolationsverfahren haben aus diesem Grund - trotz des nominellen Unterschieds in der Komplexität - eine ähnliche Gesamtbilanz, wenn die Genauigkeitsunterschiede beim Vergleich mit berücksichtigt werden.

Um die Bildberechnung abzuschließen, steht im Anschluss an die Disaggregation noch eine Auswertung der Quellenverteilung im Ortsbereich an. Für jeden einzelnen Bildpunkt wird das zugehörige Subspektrum ebener Wellen mit (4.1) aufsummiert. Da es sich um N Bildpunkte handelt und da jeweils die konstante Anzahl von N_{\min} Punkten aufsummiert wird, ist die Gesamtkomplexität dieses Vorgangs linear. Die Auswertung der Quellenverteilung im Ortsbereich

kann demnach bezüglich der Komplexität gegenüber dem Berechnungsschritt der hierarchischen Disaggregation vernachlässigt werden, da dieser nach (4.29) eine höhere Komplexität besitzt.

4.5 Vergleich mit anderen Verfahren

Eine verbreitete Möglichkeit zur Berechnung der Bilder ist die Verwendung der FFT. Dabei ist eine Interpolation der k -Raum-Daten auf ein äquidistantes kartesisches Gitter notwendig. Die Problematik wird in Abb. 4.18 für den Fall eines sphärisch abgetasteten Spektrums illustriert und kann zu Fehlern führen, die sich negativ bei der Bilderzeugung auswirken [Pan und Kak 1983; Desai und Jenkins 1992]. Dies hängt unter anderem damit zusammen, dass das kartesische Raster nicht nur die Interpolation von Zwischenwinkeln, sondern auch von Zwischenfrequenzen erfordert. Es kann beispielsweise zu Problemen kommen, wenn das Frequenzraster der Fernfelddaten große Abstände aufweist. Besonders die Interpolation bei höheren Frequenzen ist fehleranfällig. Um die Fehler zu verringern, ist eine hohe Überabtastung im k -Raum nötig. Das hier vorgestellte hierarchische Verfahren besitzt diesen Nachteil nicht, da der komplette Algorithmus direkt mit der sphärischen Diskretisierung arbeitet. Dies erlaubt eine unabhängige Abtastung in Frequenz- und Winkelkoordinaten. Trotzdem ist die mathematische Komplexität identisch zur FFT.

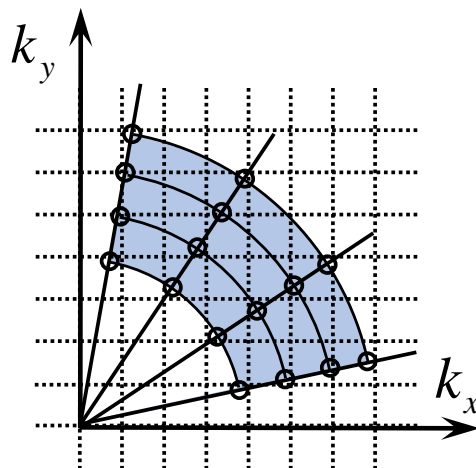


Abbildung 4.18: Interpolation von Spektraldaten auf ein äquidistantes Raster zur Prozessierung mit der FFT.

Die eben beschriebene Kombination aus Interpolation und FFT ähnelt der Funktionsweise der im Englischen als „nonuniform“ FFT (NFFT) oder „generalized“ FFT (GFFT) bezeichneten Methode für unregelmäßige Abtastintervalle. Die hierbei zugrunde liegende Interpolation entspricht einer Faltung mit der Gauß’schen Glockenkurve als Integralkern [Sarty et al. 2001]. Genauso wie die FFT ist die NFFT damit auch von den Problemen betroffen, die die Interpolation im k -Raum mit sich bringt.

Die im Rahmen von Tomografieanwendungen entstandenen Rückprojektionsverfahren [Desai und Jenkins 1992; Mensa 1990] liefern eine ausgezeichnete Bildqualität, da eine Interpolation in Frequenzrichtung nicht erforderlich ist. Die Methode ist damit besonders für sphärische Beobachtungsdaten geeignet. Nachteilig wirkt sich die hohe Komplexität des Algorithmus aus; vor allem bei Problemstellungen in 3D kommt dies am deutlichsten zum Tragen. Zur Verringerung der Komplexität wird in [Yegulalp 1999] eine räumliche Unterteilung der Messoberfläche

vorgeschlagen. Dies entspricht einer Zerlegung der synthetischen Apertur in viele Segmente, welche unabhängig voneinander prozessiert werden können. Allerdings ist die Komplexität mit $\mathcal{O}(N^{3/2})$ immer noch höher als bei der hierarchischen Disaggregation, die die Komplexität $\mathcal{O}(N \log^2 N)$ aufweist.

In [Boag 2001] wird ein hierarchisches Verfahren vorgestellt, das zur schnellen Abbildung von Streuobjekten mittels monostatischer Beobachtungen konzipiert wurde. Dessen Funktionsweise basiert auf einer hierarchischen Unterteilung des k -Raums und damit der Messapertur, während bei dem im letzten Absatz beschriebenen Verfahren aus [Yegulalp 1999] nur eine einstufige Unterteilung vorgenommen wurde. Bei der in dieser Arbeit vorgestellten hierarchischen Disaggregation wird nicht der k -Raum, sondern der Bildbereich unterteilt. Beide Konzepte haben unterschiedliche Stärken und Schwächen. Die hierarchische Disaggregation basiert auf einer Fernfelddarstellung und erlaubt deshalb keine direkte Prozessierung von Nahfelddaten. Dieser Nachteil wird durch eine Erweiterung basierend auf MLFMM-Prinzipien aufgewogen, die die schnelle Prozessierung von Felddaten aller Art erlaubt. Diese Erweiterung ermöglicht auch eine genaue Sondenkorrektur, welche beispielsweise für Anwendungen in der Antennendiagnostik gefordert wird. Die Leistungsfähigkeit der Sondenkorrektur in [Boag 2001] bleibt jedoch hinter dem MLFMM-Pendant zurück, da eine hierarchische Unterabtastung des Bildbereichs nur eine ungenaue Kompensation der Antennencharakteristik erlaubt. Einen weiteren Unterschied gibt es beim Verhalten im Fall von unvollständigen Spektral- oder Bilddaten. Die Methode von Boag erweist sich als vorteilhaft, wenn das Spektrum nur unvollständig vorliegt, da eine Interpolation von Zwischenwerten in diesem Fall nicht erforderlich ist. Wenn hingegen das Bild nur in ausgewählten Bereichen berechnet werden soll, so kann dies sehr effizient mit der hierarchischen Disaggregation geschehen. Die Boxen in den nicht betrachteten Bildbereichen können von der Berechnung ausgenommen werden.

Ähnlichkeiten mit der hierarchischen Disaggregation weist auch das hierarchische Rückprojektionsverfahren in [Bresler und Brokish 2004] auf, das für die schnelle Berechnung von Bildern für Tomografieverfahren mit konusförmiger Strahlenausbreitung entwickelt wurde. In diesem Verfahren wird der Bildbereich, ähnlich wie in der hier vorgestellten Methode, hierarchisch zerlegt und berechnet. Dabei werden die mit der FFT erzeugten Projektionsschnitte, sogenannte Sinogramme, hierarchisch auf die Teilbilder verteilt. Die Sinogramme werden während des Prozesses verschoben, gekürzt und dezimiert³. Die Bilderzeugung erfolgt schließlich durch die Anwendung eines normalen Rückprojektionsverfahrens auf die Sinogramme der tiefsten Hierarchieebene. Im Vergleich zur hierarchischen Disaggregation besteht der Hauptunterschied in der Wahl des Abtastraums für die Spektralinformation. Während die Abtastung bei der hierarchischen Disaggregation im k -Raum stattfindet, entsprechen die beim hierarchischen Rückprojektionsverfahren verwendeten Sinogramme in Radialrichtung einer Abtastung der Projektionsschnitte im Ortsbereich. Die radiale Position im Ortsfrequenzbereich entspricht direkt der Wellenzahl. Damit unterscheidet sich in beiden Verfahren auch das rekursive Vorgehen zur Verteilung der Spektralinformation. Für die Wellenzahl ist bei der Disaggregation eine Interpolation erforderlich, die Projektionsschnitte im zugehörigen Fourierraum werden lediglich gekürzt. Dies ist jedoch kein Nachteil, denn durch das Wissen aus der MLFMM sind geeignete Interpolationsverfahren verfügbar und der resultierende Fehler wird kontrollierbar [Chew et al. 2001]. Außerdem ist die Wellenzahl-basierte Darstellung, wie in Abb. 4.7 zu sehen, bei monofrequenten oder schmalbandigen Daten sehr effizient, da ausschließlich die Bandbreite die Anzahl an Abtastpunkten bestimmt. Die Abtastdichte der Projektionsschnitte wird dagegen im Normalfall nur

³Die Abtastratenverringering erfordert häufig eine Tiefpassfilterung zur Verringerung des Alias-Effekts.

von der Maximalfrequenz bestimmt.⁴ Das bedeutet, dass die Sinogramme für schmalbandige Daten nicht weniger Abtastwerte erfordern als für breitbandige. Im Vergleich zum hierarchischen Rückprojektionsverfahren ist die hierarchische Disaggregation bei niedrigen Bandbreiten demnach effizienter.

⁴Es gibt Rückprojektionsverfahren, welche diesen Nachteil nicht besitzen, da sie das Trägersignal aus den Schnitten entfernen [Vaupel und Eibert 2006].

5 Rekonstruktion von Raumfrequenzspektren aus Beobachtungen

Die Erzeugung von Ersatzquellen- und Streuzentrenverteilungen erfolgt mit Beobachtungen von elektromagnetischen Feldern. Die Gewinnung der Daten ist schematisch in den Abbildungen 5.1 und 5.2 dargestellt. Die Beobachtung der Felder erfolgt demnach an vielen Punkten im Raum. Wenn sich alle Punkte im Fernfeld der Anordnung befinden, so kann das im letzten Kapitel vorgestellte Verfahren zur schnellen Prozessierung von im k -Raum vorliegenden Beobachtungen direkt angewendet werden, denn Fernfelddaten lassen sich durch eine einfache Normierung in den k -Raum überführen; die notwendigen Gleichungen sind in (2.13), (3.4) und (3.10) gegeben. Falls die Daten noch nicht an einem geeigneten Gitter ausgerichtet sind, kann allerdings eine Interpolation erforderlich sein. Somit lassen sich Ortsbereichsdarstellungen aus Fernfeldern relativ einfach berechnen. Im Gegensatz dazu erfordern Nahfeldbeobachtungen im Allgemeinen die Lösung eines inversen Problems, welches Gegenstand dieses Kapitels ist.

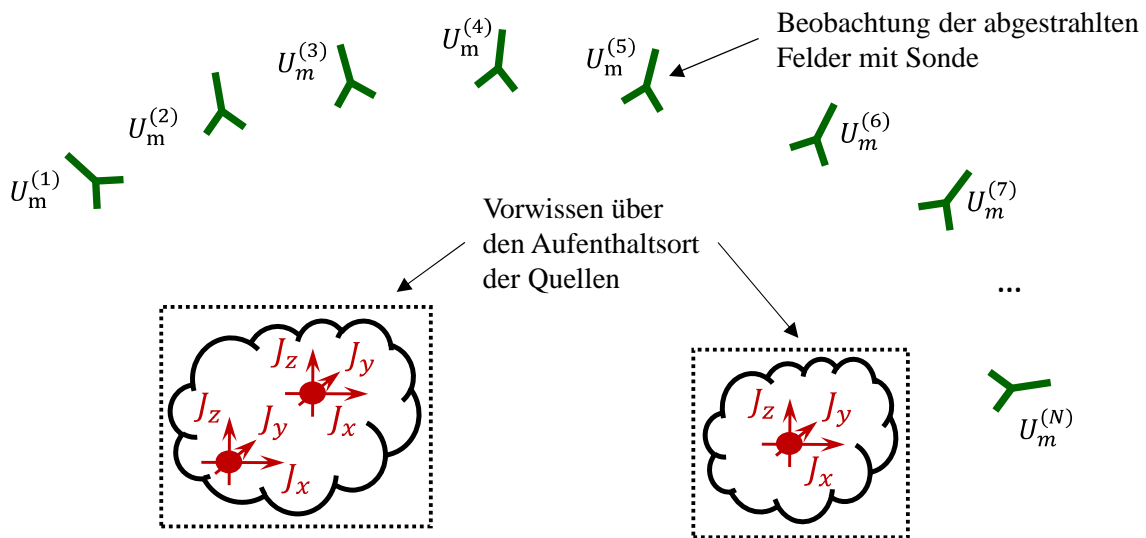


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung des inversen Quellenproblems, wobei die Lage und Größe des Quellenbereichs bekannt sind und N die Anzahl an Beobachtungen beziffert.

Für jedes der drei bereits in Abschnitt 3.1 beschriebenen Szenarien wird nun unter Berücksichtigung von realistischen Einflussfaktoren ein Zusammenhang zwischen dem Spektrum ebener Wellen und den Beobachtungen hergestellt. Die Modellbildung geschieht auf Basis der Maxwell'schen Gleichungen und resultiert schließlich in effizienten Darstellungen der Vorwärtsoperatoren. Darauf aufbauend lässt sich ein Transformationsproblem formulieren, welches üblicherweise schlecht konditioniert ist. Gründe hierfür sind zum Beispiel Näherungsfehler im Vorwärtsoperator, unvollständige Beobachtungen oder verrauschte Messdaten. Zur Lösung dieses Problems werden zwei unterschiedliche Lösungsansätze präsentiert. Wie in den Abbildungen

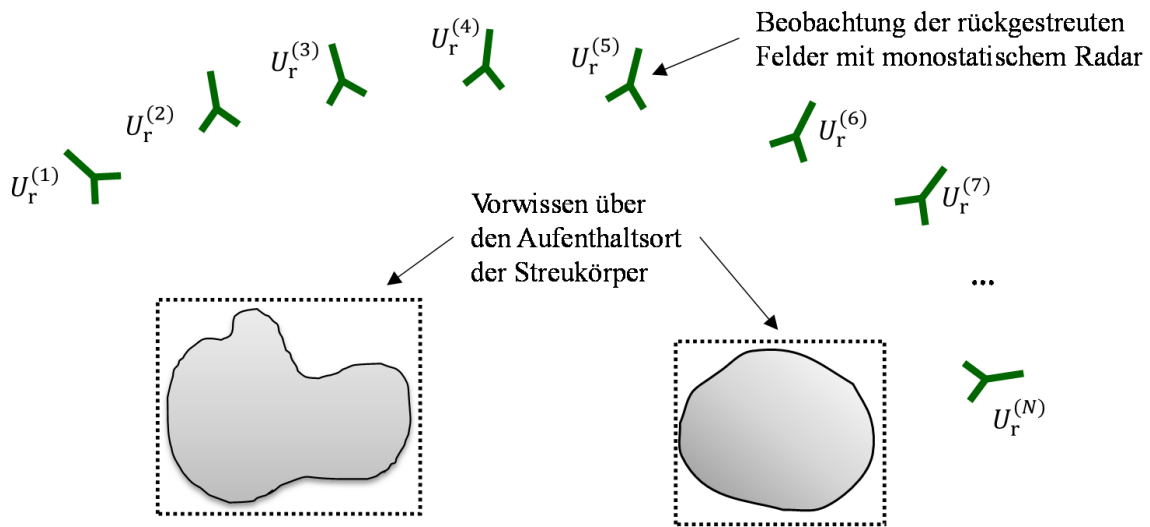


Abbildung 5.2: Schematische Darstellung des inversen Streuproblems, wobei die Lage und Größe der Streuobjekte bekannt sind und N die Anzahl an Beobachtungen beziffert.

5.1 und 5.2 skizziert, werden Kenntnisse über Position und Abmessung der Quellen beziehungsweise der Streukörper bei der Berechnung mit eingebracht.

5.1 Ein Strahlungsoperator basierend auf hierarchischen Konzepten

Das Feld einer Quellenverteilung lässt sich, wie in Abb. 5.3 gezeigt, in drei Bereiche gliedern. Im ersten Bereich spricht man vom reaktiven Nahfeld, im zweiten vom strahlenden Nahfeld und im dritten und letzten Bereich vom Fernfeld. Im direkten Umfeld der Antenne ist das Nahfeld reaktiv. Jede Beeinflussung in diesem Bereich, z.B. mit einer Messsonde, hat starke Rückwirkungen auf die Quellenverteilung zur Folge. Durch die möglichen Wechselwirkungen sind Beobachtungen des Feldes in diesem Bereich problematisch. Erst im Abstand von einigen Wellenlängen können reaktive Verkopplungen vernachlässigt werden, weil die Felder durch abgestrahlte Feldanteile dominiert werden. Diese Zone heißt strahlendes Nahfeld und die Grenze zum Bereich des reaktiven Nahfelds wird normalerweise bei [Balanis 2012b, S. 34 ff.]

$$0.62\sqrt{\frac{D^3}{\lambda}} \quad (5.1)$$

gezogen. Allerdings ändert sich die Richtwirkung der Quelle in diesem Bereich mit dem Abstand. Diese Entfernungsabhängigkeit wird üblicherweise ab der Fernfelddistanz [Balanis 2012b, S. 34 ff.]

$$\frac{2D^2}{\lambda} \quad (5.2)$$

vernachlässigt. Für Streuprobleme sind diese Werte zu verdoppeln, da der Weg zwischen Streukörper und Beobachtung zweimal zurückgelegt wird.

5.1.1 Nahfeldeffekte

Die in Kap. 4 vorgestellte hierarchische Disaggregation ermöglicht die Berechnung von Ersatzquellenverteilungen mit Fernfelddaten. Beobachtungen im Nahfeld werden durch das Verfahren

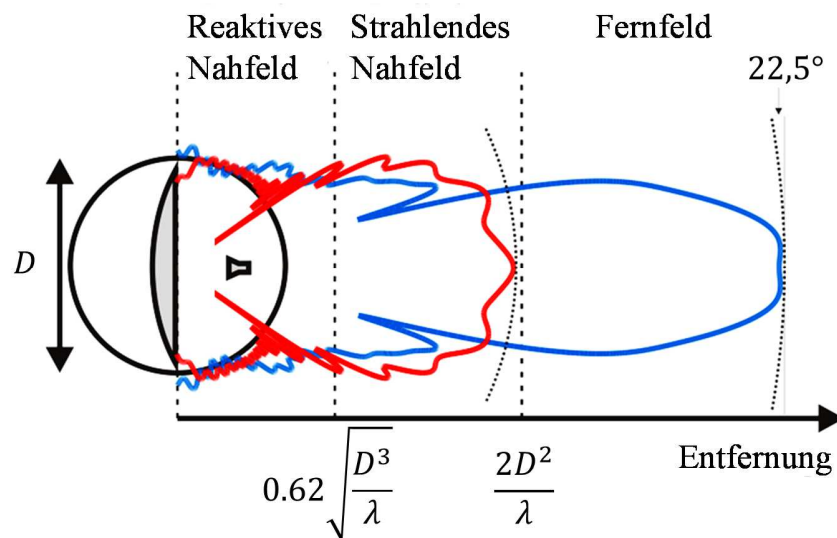


Abbildung 5.3: Das abgestrahlte Feld einer Antenne wird in drei Bereiche mit unterschiedlichen Eigenschaften aufgeteilt.

nicht unterstützt. Hier soll die Lösung eines inversen Quellenproblems, wie in Abb. 5.1 skizziert, Abhilfe schaffen. Dabei ist man auf die effiziente Berechnung des Strahlungsoperators angewiesen. Ausgangspunkt für die folgenden Herleitungen und Ergebnisse ist der unbeschleunigte Strahlungsoperator in (2.7), (2.8) und (2.9).

Die Beschleunigung von Nahfeldinteraktionen in der MLFMM basiert auf der Faktorisierung der vollbesetzten Koppelmatrix \mathbf{A} gemäß [Álvarez et al. 2011]

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_D \mathbf{A}_T \mathbf{A}_A \quad (5.3)$$

in die hierarchisch zerlegbaren Aggregations- und Disaggregationsmatrizen $\mathbf{A}_{A,D}$ sowie in die diagonale Translationsmatrix \mathbf{A}_T . Um zu dieser Darstellung zu gelangen, wird die Green'sche Dyade mit [Chew et al. 2001, p. 80]

$$\bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \oint\!\!\!\oint (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} T_L(\mathbf{k}, \mathbf{r}) d^2\hat{k}, \quad (5.4)$$

durch ein Integral über die sogenannte Ewaldkugel [Ewald 1969] dargestellt, wobei $|\mathbf{r}| > |\mathbf{r}'|$ zwingend erfüllt sein muss. Die Multipolordnung L hat in der numerischen Implementierung nur einen endlichen Wert und bestimmt daher die Genauigkeit [Ohnuki und Chew 2003]. Die Darstellung der Green'schen Funktion in (5.4) basiert auf dem Translationsoperator

$$T_L(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{jk}{4\pi} \sum_{l=0}^L (-j)^l (2l+1) h_l^{(2)}(kr) P_l(\hat{k} \cdot \hat{r}), \quad (5.5)$$

wobei $h_l^{(2)}$ die sphärischen Hankelfunktionen zweiter Art und l -ter Ordnung und P_l die Legendre-Polynome l -ter Ordnung sind. Abb. 5.4 zeigt, wie das Hauptmaximum des rotationsymmetrischen Translationsoperators mit der Translationsdistanz größer wird. Gleichzeitig schrumpfen die Nebenkeulen. Die Translationsdistanz wird hier analog zur FMM-Konvention in Pufferboxen bemessen. Wie der Name besagt, entspricht dies der Anzahl an Boxen, welche sich bei einer Translation zwischen Quell- und Zielbox befinden. Abb. 5.5 zeigt den Einfluss der Multipolordnung auf das Translationsoperatorspektrum. Mit steigender Multipolordnung werden die

Haupt- und Nebenkeulen schmäler. Dies führt zu einem Anstieg der spektralen Bandbreite und erfordert damit eine feinere Diskretisierung des Translationsoperatorspektrums.

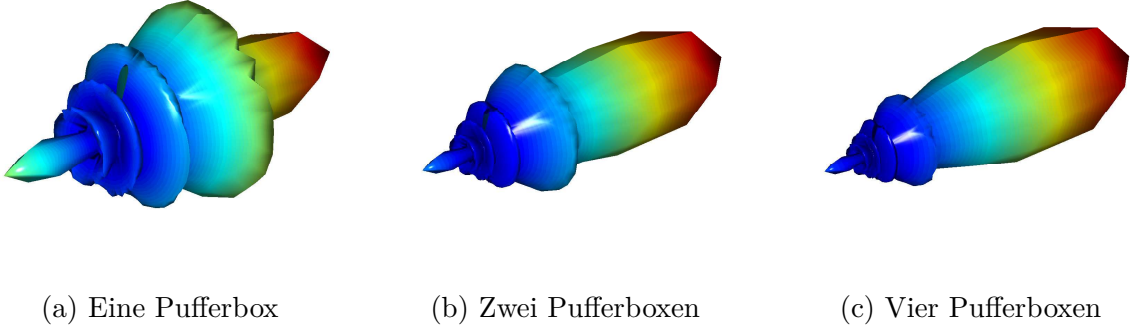


Abbildung 5.4: Lineare Darstellung des Translationsoperatorspektrums für die Multipolordnung $L = 5$; die Pufferboxen haben eine Seitenlänge 0.4λ und die Translationsrichtung \hat{r} korrespondiert mit dem Maximum des Spektrums.

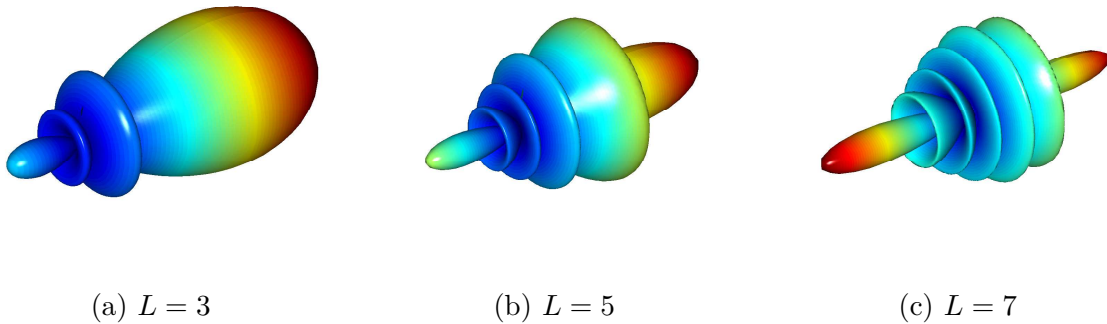


Abbildung 5.5: Lineare Darstellung des Translationsoperatorspektrums für verschiedene Multipolordnungen, der Translationsdistanz $r = 0.4\lambda$; die Translationsrichtung \hat{r} korrespondiert mit dem Maximum des Spektrums.

Der Strahlungsoperator in (2.7) kann mit (5.4) umgeformt werden zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \oint T_L(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \mathbf{V}(\mathbf{k}) d^2\hat{k}, \quad (5.6)$$

wobei das Fernfeldspektrum \mathbf{V} der Quellenverteilung \mathbf{J} in (2.14) und (2.15) definiert ist. Wie in Abb. 5.6 gezeigt, entspricht die Multiplikation mit T_L im Integranden einer Verschiebung des Spektrums ebener Wellen \mathbf{V} zum Punkt \mathbf{r} . Anschließend wird das Feld aus der Summe der Beiträge aller einfallenden ebenen Wellen bestimmt. Die kleinstmögliche Translationsdistanz $|\mathbf{r}| > D/2$ folgt aus dem Durchmesser D des Quellvolumens. Eine obere Grenze für diesen Abstand existiert nicht. Der Translationsoperator lässt sich damit nicht nur im Nahfeld sondern auch im Fernfeld auswerten. Letzteres führt mit einer Grenzwertrechnung auf [Chew et al. 2002]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r e^{jk_r r} T_L(k\hat{k}, r\hat{r}) = \delta(\hat{k} - \hat{r}), \quad (5.7)$$

wobei δ die als Dirac-Impuls bezeichnete Distribution darstellt. Unter Fernfeldbedingungen lässt sich (5.6) damit zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \approx -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk r}}{r} \mathbf{V}(k\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.8)$$

vereinfachen. Die Verwendung dieses Ausdrucks in der MLFMM wird als schnelle Fernfeldapproximation (FAFFA) [Chew et al. 2002] bezeichnet. Wie in Abb. 5.7 zu sehen, lässt sich das elektrische Feld mit den schnellen Nah- und Fernfeldtranslationen an beliebigen Punkten auswerten. Bei diesen sogenannten „direkten“ Translationen wird jeder Empfangspunkt getrennt berücksichtigt. Allerdings ist die Berechnung vieler Nahfeldpunkte auf diese Weise sehr aufwändig, da jeder Empfangspunkt die Berechnung eines anderen Translationsoperators erfordert.

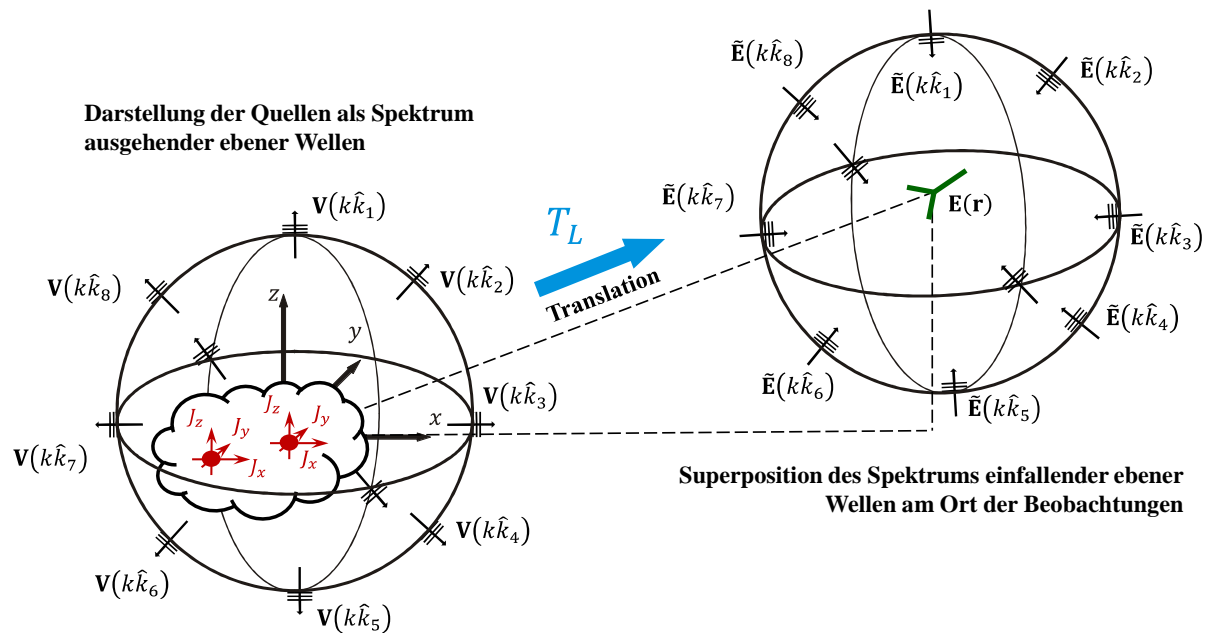


Abbildung 5.6: Der Translationsoperator wandelt das Spektrum der ausgehenden ebenen Wellen des Quellbereichs in ein Spektrum einfallender Wellen im Beobachtungsbereich um.

Um die Feldberechnung zu beschleunigen, wird, wie in Abb. 5.8 gezeigt, eine hierarchische Unterteilung des Beobachtungsgebiets vorgenommen. Analog zur hierarchischen Disaggregation in Abschnitt 4.1.2 wird das Beobachtungsgebiet mit einem Octree aufgeteilt. Ausgehend von (5.6) wird der Empfangspunkt \mathbf{r} mit

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_b + \mathbf{r}'_b \quad (5.9)$$

aufgespalten in ein Gruppenzentrum \mathbf{r}_b und einen Offset \mathbf{r}'_b . Bei der Auswertung der Green'schen Funktion in (5.4) wird der Offset \mathbf{r}'_b dem Parameter \mathbf{r}' in der Exponentialfunktion zugeordnet und \mathbf{r}_b entspricht \mathbf{r} im Translationsoperator. Der resultierende Ausdruck

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \oint\!\!\!\oint T_L(\mathbf{k}, \mathbf{r}_b) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'_b} \mathbf{V}(\mathbf{k}) d^2\hat{\mathbf{k}} \quad (5.10)$$

ermöglicht es, den Translationsoperator T_L für alle Empfangspunkte \mathbf{r} in der gleichen Gruppe lediglich einmal auszuwerten, und zwar für das gemeinsame Gruppenzentrum \mathbf{r}_b . Es gilt

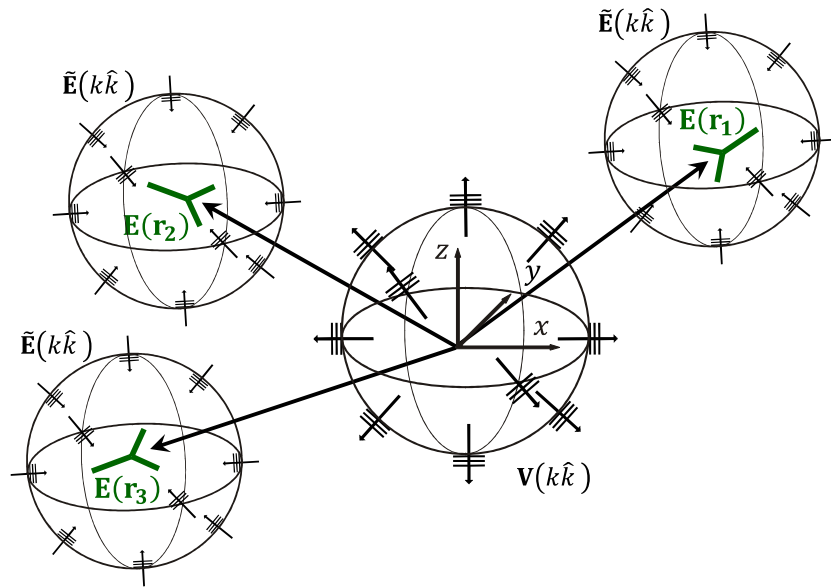


Abbildung 5.7: Bei Benutzung direkter Translationen wird das Spektrum ausgehender, ebener Wellen für jeden Beobachtungspunkt separat mit dem Translationsoperator multipliziert.

zu beachten, dass sich die Minimalkugeln von Quellenverteilung und Empfängergruppe nicht überschneiden dürfen, da sonst die Folge in (5.5) für $L \rightarrow \infty$ divergiert [Chew et al. 2001, S. 155]. Nach Durchführung einer Translation lässt sich das elektrische Feld an jedem Punkt in der Empfängerbox auswerten, indem das Spektrum der einfallenden Wellen phasenrichtig überlagert wird.

Das Spektrum einfallender Wellen in der Empfängergruppe wird durch die hierarchische Disaggregation an die untergeordneten Gruppen weitergereicht. Dies garantiert eine hohe Effizienz in elektrisch großen Empfängerboxen. Für einzelne isolierte Beobachtungspunkte kann es sinnvoll sein, die Translationen auf Gruppenebene mit direkten Translationen zu kombinieren.

Die MLFMM basiert auf einer hierarchischen Unterteilung des Quell- und Beobachtungsgebiets. Bisher wurden lediglich die Empfangspunkte hierarchisch gruppiert. Eine rekursive Aufteilung der Ersatzquellen steht noch aus. Dies ist insbesondere dann vorteilhaft, wenn das Beobachtungsgebiet nahe an die Ersatzquellen rückt. Große Gruppen im Empfangsbaum überschneiden sich dabei mit den Quellen, weshalb Translationen nur mit hinreichend kleinen Gruppen möglich sind. In diesem Fall sind viele Translationen erforderlich, was zu einem unnötigen Anstieg der Rechenzeit führt. Im Extremfall kann der Abstand zwischen Ersatzquellen und Beobachtungen so gering sein, dass Translationen zwischen den zugehörigen Gruppen nicht möglich sind. Abb. 5.9 zeigt, dass eine Unterteilung des Quellbereichs auch in diesem Fall Abhilfe schafft, da der minimal erforderliche Abstand der Beobachtungen verringert wird.

Um eine hohe Effizienz für beliebige Abstände zwischen Ersatzquellen und Beobachtungen zu ermöglichen, sollen deshalb auch die Ersatzquellen unterteilt werden. Haben sowohl die Quellen als auch die Beobachtungen eine hierarchische Struktur, so folgt die Organisation der Translationen dem Schema in Abb. 5.10. Der Berechnungsaufwand wird minimiert, indem die Interaktionen zwischen Quell- und Beobachtungsbaum so effizient wie möglich gestaltet werden. Die Translationen werden beginnend bei den übergeordneten Hierarchieebenen erzeugt, bei Bedarf werden sukzessive die kleineren Gruppen genutzt. Eine effiziente Lösung erfordert außerdem,

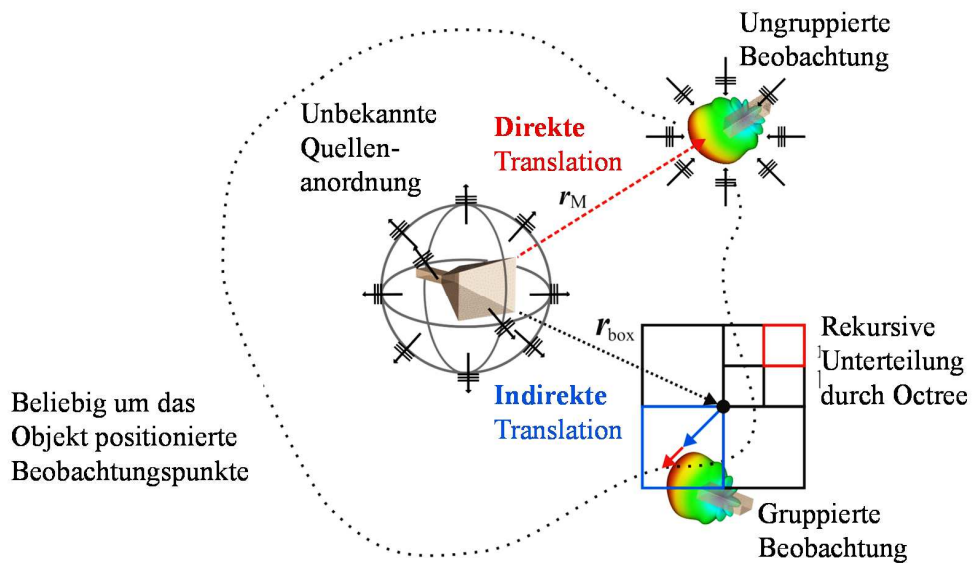


Abbildung 5.8: Reduzierung der benötigten Translationen durch eine hierarchische Unterteilung der Beobachtungen mittels eines Octrees.

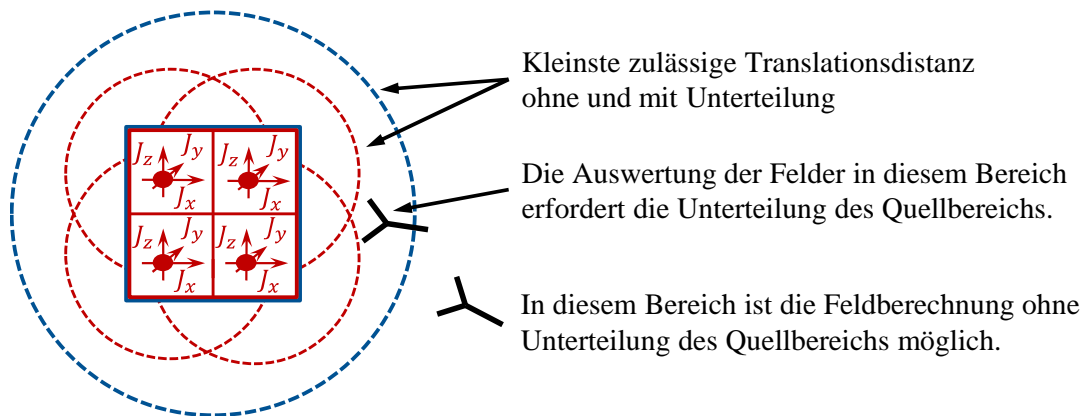


Abbildung 5.9: Eine Unterteilung der Ersatzquellen verringert den kleinstmöglichen Abstand von Beobachtungen bei Verwendung des Translationsoperators.

dass die Translationen vorrangig zwischen ähnlich großen Gruppen stattfinden. Andernfalls steigt die Zahl der Rechenoperationen unnötig an. Direkte Translationen beispielsweise können sehr ineffizient sein, da hier die gesamte Quellenanordnung direkt mit den kleinsten Elementen in der Hierarchie – den Beobachtungspunkten – interagiert. In der MLFMM werden aus diesem Grund nur Translationen zwischen Boxen gleicher Größe zugelassen.

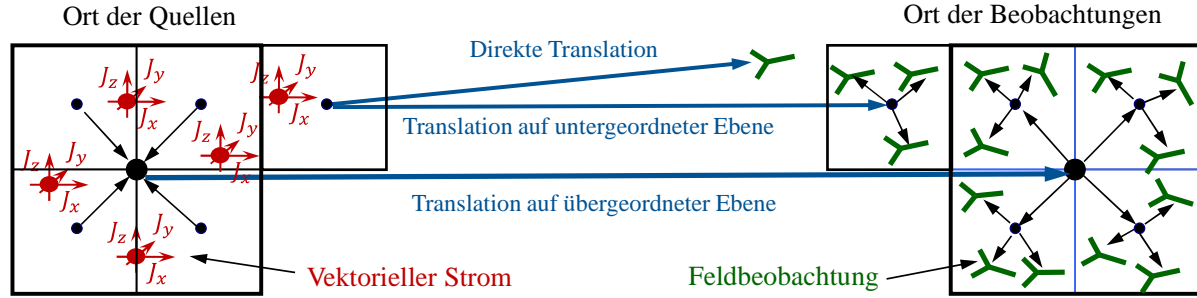


Abbildung 5.10: Eine hierarchische Strukturierung der Interaktionen führt zu einer effizienten Auswertung des Strahlungsoperators.

5.1.2 Messsonde

In der Praxis erfolgt die Vermessung von Feldern mit einer Messsonde, welche in der Formulierung berücksichtigt werden sollte. Im Allgemeinen ist dazu eine genaue elektromagnetische Beschreibung der Sonde nötig. Nur bei elektrisch sehr kleinen Messantennen oder bei sehr großen Messentfernungen kann das Modell so vereinfacht werden, dass sich das Empfangssignal mit dem Skalarprodukt

$$U_m = \mathbf{w}_m(\omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_m, \omega) \quad (5.11)$$

berechnen lässt. Dabei wird ein komplexwertiger und frequenzabhängiger Gewichtungsvektor \mathbf{w}_m mit dem einfallenden Feld \mathbf{E} an der Position der Antenne \mathbf{r}_m multipliziert.

Im allgemeinen Fall kann das Ausgangssignal einer Sonde durch

$$U_m = \iiint_{V_m} \mathbf{w}_m(\mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_m + \mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}' \quad (5.12)$$

berechnet werden, wobei \mathbf{w}_m im Volumenintegral nun eine Gewichtungsfunktion darstellt, welche über die Reziprozitätsbeziehung [Harrington 1993, S.118; Balanis 2012a, S.323] mit der Quellenverteilung der Sonde im Sendefall zusammenhängt. Die Ausgangsspannung entspricht demnach einer gewichteten Feldverteilung. Das Oberflächenäquivalenztheorem in [Balanis 2012a, S.327ff.] besagt, dass eine vollständige Beschreibung der Abstrahlcharakteristik auch durch die sogenannten Huygens-Ströme auf einer geschlossenen Hüllfläche um die Sonde möglich ist. Bei Aperturantennen wie der Rechteckhohlleitersonde in Abb. 5.11 ist eine Beschränkung auf die Aperturfläche ausreichend. Die sondenabhängige Gewichtungsfunktion \mathbf{w}'_m wird durch eine Koordinatentransformation an die Messposition \mathbf{r}_m mit Orientierung $\mathbf{\Omega}_m$ verschoben, was dem Ausdruck

$$\mathbf{w}_m(\mathbf{r}', \omega) = \bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{\Omega}_m}^T \cdot \mathbf{w}'_m(\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{\Omega}_m} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_m), \omega) \quad (5.13)$$

entspricht. Dabei ist $\bar{\mathbf{R}}_{\Omega_m}$ eine Rotationsdyade, welche im globalen Koordinatensystem definierte Vektoren ins Bezugssystem der Sonde umsetzt. Im Dreidimensionalen lässt sich die Orientierung eindeutig durch drei Rotationen aus einem Referenzkoordinatensystem beschreiben. Der Vektor Ω_m beinhaltet diese Rotationswinkel.

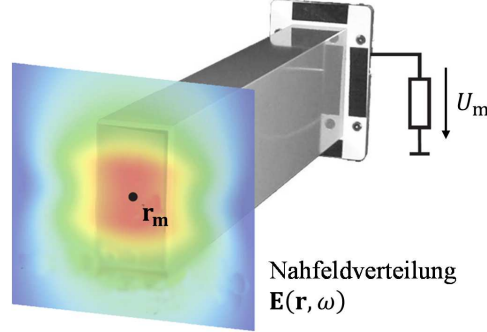


Abbildung 5.11: Modellierung der Sonde durch Gewichtung der einfallenden Felder im Ortsbereich. Bildquelle: Schmidt et al. [2011].

Die Auswertung des Integrals in (5.12) kann effizient über die spektrale Darstellung der MLFMM erfolgen. Das Einsetzen von (5.10) in (5.12) ergibt

$$U_m = -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \oint\!\!\!\oint T_L(\mathbf{k}, \mathbf{r}_b) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'_m} \mathbf{W}_m(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}) d^2\hat{\mathbf{k}}, \quad (5.14)$$

wobei $\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_b + \mathbf{r}'_m$ gilt und die spektrale Darstellung

$$\mathbf{W}_m(\mathbf{k}) = \iiint_{V_m} \mathbf{w}_m(\mathbf{r}', kc) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}' \quad (5.15)$$

der Fernfeldcharakteristik der Messantenne entspricht. Damit ist es ausreichend, eine Sonde im Fernfeld zu charakterisieren, um auch ihr Verhalten im Nahfeld exakt zu beschreiben.

5.2 Ein lineares Modell des Streuproblems

5.2.1 Modellierung im Ortsbereich

Die Herleitung einer bistatischen Formulierung erfolgt mit dem Modell in Abb. 5.12. Eine ähnliche Modellierung des Streuverhaltens wird in [Cown und Ryan 1989] vorgenommen. Die Radarantenne im Sendefall wird durch die im Freiraum strahlende äquivalente Volumenstromverteilung

$$\mathbf{J}_t(\mathbf{r}, \omega) = U_t \mathbf{w}_t(\mathbf{r}, \omega) \quad (5.16)$$

beschrieben, wobei \mathbf{w}_t analog zu \mathbf{w}_m in (5.13) die Antennengewichtungsfunktion im Sendefall („transmit“) darstellt und U_t sowohl den Einfluss der Speisespannung als auch der Fehlanpassung berücksichtigt. Die Gewichtungsfunktion \mathbf{w}_t entspricht dabei der Quellenverteilung der Radarantenne im Sendefall.

Das einfallende Feld am Ort des Streukörpers kann mit der Green'schen Funktion in (2.8) berechnet werden und lautet

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, \omega) = \iiint_{V_t} \bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r} - (\mathbf{r}_t + \mathbf{r}'_t), \omega) \cdot \mathbf{J}_t(\mathbf{r}_t + \mathbf{r}'_t, \omega) d^3\mathbf{r}'_t, \quad (5.17)$$

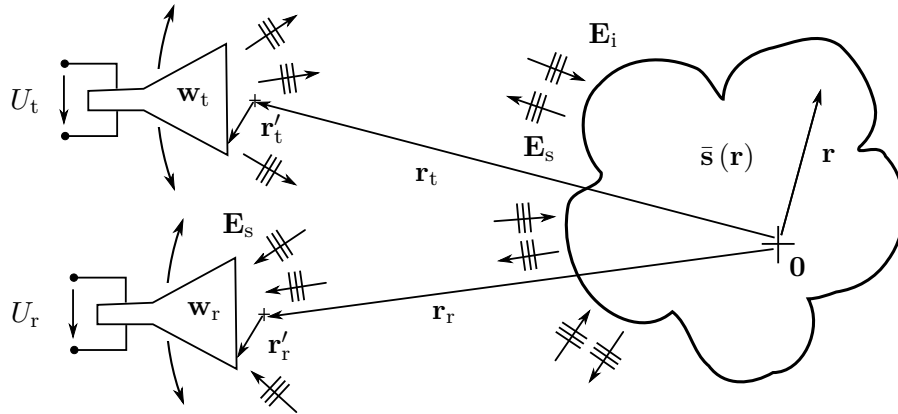


Abbildung 5.12: Ausgehende und einfallende Wellen bei einem linearen Streuvorgang, wobei die tiefgestellten Zeichen t und r die gesendeten beziehungsweise gestreuten Größen bezeichnen.

wobei V_t das Volumen beschreibt, in dem die äquivalenten Ströme der Sendeantenne definiert sind. Der Streukörper selbst wird durch die dyadische Reflektivitätsverteilung $\bar{s}(\mathbf{r}, \omega)$ im Ortsbereich beschrieben, die jedem Punkt im Volumen des Streukörpers ein dyadisches Streuzentrum zuordnet. Dabei geben die dyadischen Einträge in $\bar{s}(\mathbf{r}, \omega)$ für jede Polarisation des einfallenden Feldes das entsprechende Streufeld an. Mehrfachinteraktionen werden nicht berücksichtigt, damit die Formulierung linear bleibt. Diese Einschränkung wird als Born-Approximation bezeichnet [Cheney und Borden 2009a, S. 54ff.]. Für das gestreute Feld ergibt sich so

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, \omega) = \iiint_V \bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) \cdot \bar{s}(\mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}', \quad (5.18)$$

wobei V das Volumen des Streukörpers bezeichnet. Das Ausgangssignal der Empfangsantenne berechnet sich analog zu (5.12) aus dem gewichteten Feld am Ort der Antenne. Ohne spezielle Vorkehrungen kann auch das direkt vom Sender ausgestrahlte Feld zu einem Signal in der Sonde führen. Dieses Übersprechen lässt sich aber häufig durch spezielle Maßnahmen wie „time gating“¹ eliminieren, sodass nur das vom Streukörper ausgehende Feld an der Messsonde zum Empfangssignal

$$U_r = \iiint_{V_r} \mathbf{w}_r(\mathbf{r}_r + \mathbf{r}'_r, \omega) \cdot \mathbf{E}_s(\mathbf{r}_r + \mathbf{r}'_r, \omega) d^3\mathbf{r}'_r \quad (5.19)$$

führt, wobei das Kürzel r – für „receive“ – die relevanten Größen am Empfänger kennzeichnet.

Alle Schritte im Streuprozess sind nun durch lineare Operatoren beschrieben und können zu einem linearen Gesamtausdruck kombiniert werden. Nach schrittweisem gegenseitigem Einsetzen von (5.16)-(5.19) lautet das Endergebnis

$$U_r = U_t \iiint_V \gamma_r(\mathbf{r}, \omega) \cdot \bar{s}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \gamma_t(\mathbf{r}, \omega) d^3\mathbf{r}, \quad (5.20)$$

¹Entfernung von unerwünschten Signalen im Zeitbereich [De Jough et al. 1997]

wobei

$$\boldsymbol{\gamma}_r(\mathbf{r}, \omega) = \iiint_{V_r} \mathbf{w}_r(\mathbf{r}_r + \mathbf{r}'_r, \omega) \cdot \bar{\mathbf{G}}_J^E((\mathbf{r}_r + \mathbf{r}'_r) - \mathbf{r}, \omega) d^3\mathbf{r}'_r \quad (5.21a)$$

und

$$\boldsymbol{\gamma}_t(\mathbf{r}, \omega) = \iiint_{V_t} \bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r} - (\mathbf{r}_t + \mathbf{r}'_t), \omega) \cdot \mathbf{w}_t(\mathbf{r}_t + \mathbf{r}'_t, \omega) d^3\mathbf{r}'_t \quad (5.21b)$$

gilt. Bei elektrisch kleinen Radarantennen ist eine Vereinfachung der Gleichungen möglich, da sich der Streukörper im Fernfeld der Radarantenne befindet und $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{t,r}\| \gg \|\mathbf{r}'_{t,r}\|$ gilt. Die Green'schen Funktionen in (5.21a)-(5.21b) können in diesem Fall durch

$$\bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r} - (\mathbf{r}_t + \mathbf{r}'_t), \omega) \approx \bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r} - \mathbf{r}_t, \omega) e^{jk \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_t}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_t\|} \cdot \mathbf{r}'_t}, \quad (5.22a)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_J^E((\mathbf{r}_r + \mathbf{r}'_r) - \mathbf{r}, \omega) \approx \bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r}_r - \mathbf{r}, \omega) e^{-jk \frac{\mathbf{r}_r - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_r - \mathbf{r}\|} \cdot \mathbf{r}'_r} \quad (5.22b)$$

approximiert werden und führen auf den Gesamtausdruck

$$U_r = U_t \iiint_V \mathbf{W}_r \left(k \frac{\mathbf{r}_r - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_r - \mathbf{r}\|} \right) \cdot \bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r}_r - \mathbf{r}, \omega) \cdot \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r} - \mathbf{r}_t, \omega) \cdot \mathbf{W}_t \left(k \frac{\mathbf{r}_t - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_t - \mathbf{r}\|} \right) d^3\mathbf{r}, \quad (5.23)$$

wobei die Radarantennen durch die bereits in (5.15) verwendete Spektraldarstellung

$$\mathbf{W}_{r,t}(\mathbf{k}) = \iiint_{V_{r,t}} \mathbf{w}_{r,t}(\mathbf{r}, \omega) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \quad (5.24)$$

beschrieben werden. Wie in Abschnitt 5.1.2 erwähnt, lässt sich die Antennenkorrektur in diesem Fall durch je ein Skalarprodukt mit den Richtcharakteristiken von Sende- und Empfangsantenne bewerkstelligen.

Weitere Vereinfachungen werden möglich, wenn sich die Beobachtungen im Fernfeld des Streukörpers befinden und $\|\mathbf{r}_{t,r}\| \gg \|\mathbf{r}\|$ gilt. Unter Fernfeldbedingungen kann die verbleibende Green'sche Funktion analog zu (5.22a) und (5.22b) approximiert werden. Der Zusammenhang in (5.23) vereinfacht sich damit zu

$$U_r = -U_t \frac{\omega^2 \mu^2}{4^2 \pi^2} \frac{e^{-jk(r_r + r_t)}}{r_r r_t} \mathbf{W}_r(k\hat{r}_r) \cdot (\bar{\mathbf{I}} - \hat{r}_r \hat{r}_r) \cdot \bar{\mathbf{S}}(k(\hat{r}_r + \hat{r}_t), \omega) \cdot (\bar{\mathbf{I}} - \hat{r}_t \hat{r}_t) \cdot \mathbf{W}_t(k\hat{r}_t), \quad (5.25)$$

wobei

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{k}, \omega) = \iiint_V \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{r}, \omega) e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \quad (5.26)$$

die frequenzabhängige Spektraldarstellung der dyadischen Streuzentrenverteilung ist. Durch

$$(\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}_s \hat{k}_s) \cdot \bar{\mathbf{S}}\left(2\frac{\omega}{c}\hat{k}_s, \omega\right) \cdot (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}_s \hat{k}_s) = h(\omega) \bar{\mathbf{V}}_s\left(\frac{\omega}{c}\hat{k}_s\right) \quad (5.27)$$

kann ein Zusammenhang mit dem monostatischen Streuspektrum $\bar{\mathbf{V}}_s$ in (3.11) hergestellt werden. Die Antennencharakteristik der Sende- und Empfangsantenne wird durch zwei Skalarprodukte mit dieser dyadischen Streucharakteristik berücksichtigt und entspricht dem Vorgehen in [Mott 2006].

5.2.2 Bistatische Streuvorgänge mit einer Einfallrichtung

Nun soll das Szenario aus Abschnitt 3.1.2.1 untersucht werden. Dabei fällt eine ebene Welle mit bekannter Richtung auf den Streukörper ein. In diesem Fall scheint das Streufeld von der konstanten äquivalenten Ersatzquellenverteilung

$$\bar{\mathbf{s}}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \boldsymbol{\gamma}_t(\mathbf{r}, \omega) \quad (5.28)$$

in (5.20) auszugehen. Ein Streuproblem mit einer einzigen Einfallrichtung lässt sich somit auf das inverse Quellenproblem in Abb. 5.1 zurückführen, welches auf dem Strahlungsoperator in (2.7) basiert. Die Gleichungen (5.8) und (5.14) in Abschnitt 5.1 zeigen, wie sich dieser effizient auswerten lässt.

5.2.3 Monostatische Streuvorgänge

Die Rekonstruktion des im Fernfeld definierten Radarrückstreuquerschnitts aus Nahfelddaten ist nur dann exakt und eindeutig möglich, wenn die vollständige bistatische Streucharakteristik bekannt ist [LaHaie 2003]. Eine Messung dieser Daten wäre technisch schwierig umzusetzen und extrem zeitintensiv. Eine weit verbreitete Vorgehensweise, welche auch hier zur Anwendung kommt, ist die Beschränkung auf monostatische Nahfelddaten, wie in Abb. 5.2 skizziert.

Bei einem monostatischen Radar bilden Sender und Empfänger eine Einheit (vgl. Abb. 5.13). Als Ausgangspunkt für eine monostatische Formulierung dient wieder das in Abschnitt 5.2.1 hergeleitete, lineare Streumodell, welches durch die Gleichungen in (5.20), (5.23) und (5.25) beschrieben ist. Die Anpassung für den monostatischen Fall erfolgt mit

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_t = \mathbf{r}_r. \quad (5.29)$$

Die in Abschnitt 5.2.2 vorgestellte Möglichkeit zur Beschleunigung des Vorwärtsoperators für bistatische Streuvorgänge basiert auf der Definition von konstanten Ersatzquellen. Unter monostatischen Bedingungen ändern sich die Ersatzquellen jedoch bei jeder Ortsänderung des Radars.

Zur Beschleunigung des Operators in (5.20)-(5.21b) unter monostatischen Bedingungen werden zwei verschiedene Ansätze entwickelt und kombiniert. Zum einen wird eine Unterteilung des Streukörpers vorgenommen, welche die Verwendung von Fernfeldnäherungen ermöglicht. Zum anderen wird das gestreute Feld des Streukörpers durch eine geeignete Verteilung punktförmiger Strahlungszentren modelliert, was schließlich zur Definition eines äquivalenten Quellenproblems führt.

In herkömmlichen Verfahren werden die verschiedenen Polarisierungen üblicherweise getrennt prozessiert [LaHaie 2003; Eyraud et al. 2011; Cheney und Borden 2009a, S. 89]. Deshalb werden Wechselwirkungen zwischen unterschiedlich polarisierten Signalen nicht vollständig erfasst. Die hier beschriebene dyadische Formulierung lässt eine vollständige Beschreibung der polarimetrischen Effekte zu. Außerdem basieren die in den Referenzen aufgeführten Transformationsverfahren auf einem Vorverarbeitungsschritt, der breitbandige Nahfeldbeobachtungen erfordert. Bei breitbandigen Daten lässt sich die $1/R^2$ -Abhängigkeit schon vor der Transformation in eine $1/R$ -Abhängigkeit abmildern, indem die Frequenzabhängigkeit in den Ortsbereich transformiert und dort mit der Entfernung R multipliziert wird. In dem hier vorgestellten Verfahren wird der quadratische Ausbreitungsterm stattdessen direkt im Modell berücksichtigt, weshalb auch monofrequente Nahfelddaten transformiert werden können.

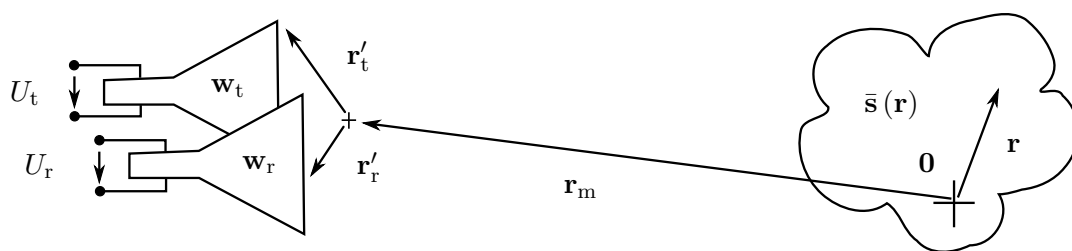


Abbildung 5.13: Monostatische Beobachtung eines Streukörpers.

5.2.3.1 Unterteilung des Streukörpers

Unter Fernfeldbedingungen kann die Krümmung der Wellenfronten im Bereich des Streukörpers vernachlässigt werden. Dies erlaubt die Verwendung der in (5.25) eingeführten Fernfeldapproximation

$$U_r \approx -U_t \frac{\omega^2 \mu^2}{4^2 \pi^2} \frac{e^{-j2kr_m}}{r_m^2} \eta_{\bar{\mathbf{S}}}(k \hat{\mathbf{r}}_m), \quad (5.30)$$

wobei die Definition des Ausdrucks

$$\eta_{\bar{\mathbf{S}}}(\mathbf{k}) = \mathbf{W}_r(\hat{\mathbf{k}}) \cdot (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \bar{\mathbf{S}}(2\mathbf{k}, \omega) \cdot (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{W}_t(\hat{\mathbf{k}}) \quad (5.31)$$

im Folgenden eine kompaktere Notation ermöglicht.

Wird das Streuobjekt als eine Einheit betrachtet, so ist die Fernfeldbedingung für Beobachtungen im Nahbereich normalerweise nicht erfüllt. Durch eine ausreichende Unterteilung des Streukörpers wie in Abb. 5.14 kann die Näherung jedoch auf die Teilbereiche angewendet werden. Abb. 5.15 verdeutlicht, wie sich der erforderliche Mindestabstand der Beobachtungen bei Verwendung der Fernfeldapproximation durch eine Unterteilung verringert.

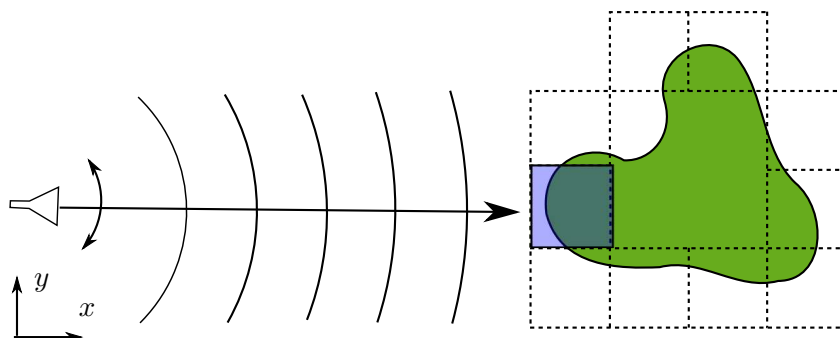


Abbildung 5.14: Fernfeldannahmen sind legitim, wenn die Krümmung der Wellenfronten vernachlässigt werden kann. Dies gilt für kleine Teilbereiche des Streukörpers, da die Wellen dort in guter Näherung eben sind.

Da Mehrfachinteraktionen nicht berücksichtigt werden, kann das Verhalten des gesamten Streukörpers durch eine Überlagerung der Wirkung aller Teilgebiete beschrieben werden, was der Berechnungsvorschrift

$$U_r \approx -U_t \frac{\omega^2 \mu^2}{4^2 \pi^2} \sum_{p=1}^P \frac{e^{-j2k\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p\|}}{\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p\|^2} \eta_{\bar{\mathbf{S}}_p} \left(k \frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p}{\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p\|} \right) \quad (5.32)$$

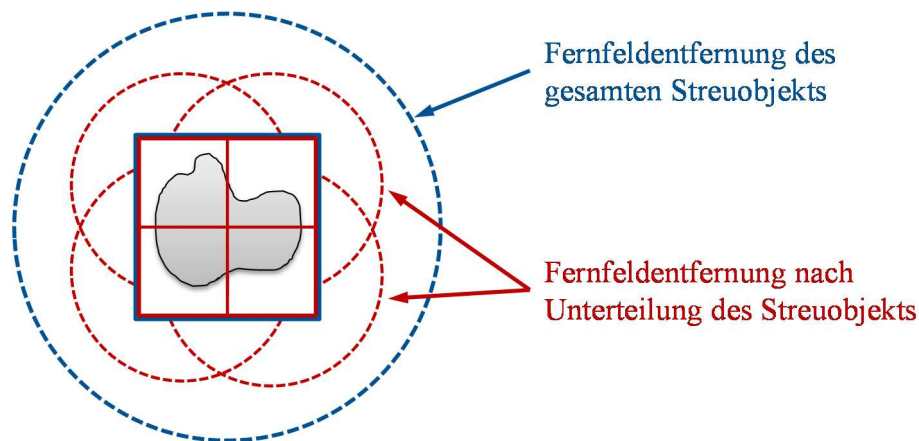


Abbildung 5.15: Der Minimalabstand für Fernfeldbeobachtungen kann durch eine Unterteilung des Streukörpers verringert werden.

entspricht. Dabei ist P die Anzahl der Bereiche, und \mathbf{r}_p und $\bar{\mathbf{S}}_p(\mathbf{k}, \omega)$ sind der Mittelpunkt beziehungsweise die dyadische Streumatrix der p -ten Domäne. Zum besseren Verständnis veranschaulicht Abb. 5.16 die Wechselwirkungen eines einzelnen Bereichs mit den Messpunkten.

Der Fernfeldabstand wächst quadratisch mit den Abmaßen des Streuobjekts. Deshalb erfordert ein größeres Streuobjekt sehr viele Unterteilungen. Dies führt dazu, dass ein Algorithmus, der ausschließlich auf Fernfeldtranslationen basiert, für elektrisch große Streukörper ineffizient ist. Im nächsten Abschnitt wird dieses Problem durch die Verwendung von Nahfeldtranslationen umgangen.

5.2.3.2 Modellierung mit strahlenden Reflektoren

Durch die Verwendung von schnellen Nahfeldtranslationen ist es möglich, auf eine feine Unterteilung des Streuobjektes zu verzichten. Allerdings muss der in (5.20)-(5.21b) definierte Vorwärtsoperator zur Anwendung der MLFMM-Prinzipien umgeformt werden. Das Ziel ist dabei eine Darstellung ähnlich dem Strahlungsoperator in (2.7), welcher durch das zugehörige MLFMM-Äquivalent in (5.6) ausgedrückt werden kann.

Dazu soll das aus der Geophysik stammende Konzept der explodierenden Reflektoren [Claerbout 1985] verwendet werden. Streuzentren werden nun als Quellen betrachtet, was zur Folge hat, dass statt der Zweiwegeausbreitung zwischen Radar und Streukörper nur mehr eine einzige Ausbreitungsrichtung betrachtet wird. Zur Gewährleistung der korrekten Phasenbeziehung wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit halbiert [Fortuny 2001, S. 5].

Ohne das Modell der explodierenden Reflektoren stellt jede einzelne Messung mit dem Radar ein separat zu lösendes elektromagnetisches Problem dar. Jedes dieser separaten Teilprobleme ist unterbestimmt, da jeweils nur eine Beobachtung des Streufeldes vorliegt. Im Modell der explodierenden Reflektoren werden alle Teilprobleme zu einem einzigen inversen Quellenproblem vereint, welches eine eindeutige Lösung hat [Fortuny 2001, S. 5].

Zuerst sollen die Gleichungen für das skalare Streuproblem hergeleitet werden. Dazu werden die Ausdrücke in (5.20)-(5.21b) durch ihr skalares Äquivalent ersetzt. Nach dem Umsortieren

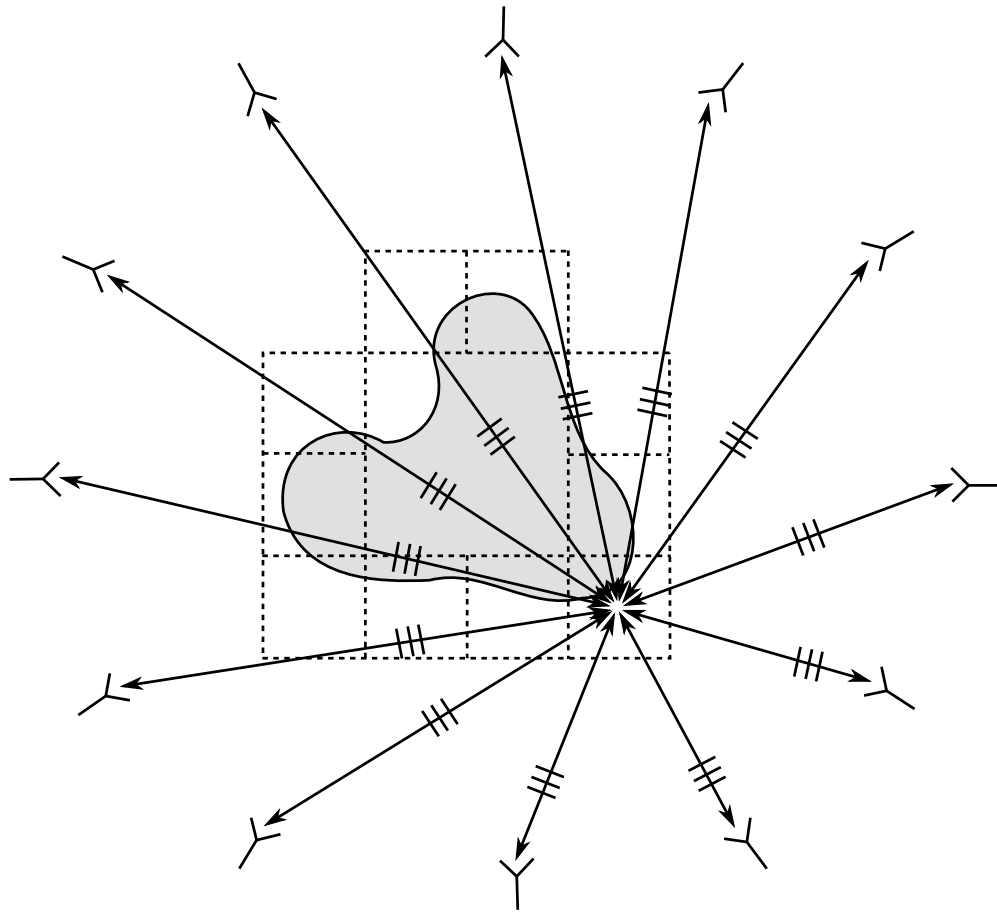


Abbildung 5.16: Das Streuverhalten eines ausreichend kleinen Teilbereichs des Streukörpers kann durch die Fernfeldnäherung berechnet werden.

der Integrationsterme ergibt sich die skalare Formulierung

$$U_r = -U_t \omega^2 \mu^2 \iiint_V \iiint_{V_R} \iiint_{V_T} s(\mathbf{r}, \omega) w_r(\mathbf{r}_m + \mathbf{r}'_r, \omega) w_t(\mathbf{r}_m + \mathbf{r}'_t, \omega) g((\mathbf{r}_m + \mathbf{r}'_r) - \mathbf{r}, \omega) g(\mathbf{r} - (\mathbf{r}_m + \mathbf{r}'_t), \omega) d^3\mathbf{r}'_t d^3\mathbf{r}'_r d^3\mathbf{r}, \quad (5.33)$$

wobei g die skalare Green'sche Funktion in (2.9) darstellt. Das resultierende Produkt der Green'schen Funktionen wird durch

$$g((\mathbf{r}_m + \mathbf{r}'_r) - \mathbf{r}, \omega) g(\mathbf{r} - (\mathbf{r}_m + \mathbf{r}'_t), \omega) \approx \frac{g(\mathbf{r} - (\mathbf{r}_m + \mathbf{r}'_m), 2\omega)}{4\pi \|\mathbf{r}_m\|} \quad (5.34)$$

approximiert und beinhaltet die Definition der virtuellen Ortskoordinate

$$\mathbf{r}'_m = \frac{\mathbf{r}'_r + \mathbf{r}'_t}{2}. \quad (5.35)$$

Die Auswirkungen dieser Umformung werden in Abb. 5.17a und Abb. 5.17b veranschaulicht. Grundlage ist das Modell der strahlenden Streuzentren, bei dem der Hin- und Rückweg der Wellenausbreitung von einem Punkt am Sender $\mathbf{r}_m + \mathbf{r}'_t$ zu einem Streuzentrum \mathbf{r} und zurück zu einem Punkt am Empfänger $\mathbf{r}_m + \mathbf{r}'_r$ ersetzt wird durch den Weg von einer strahlenden Quelle \mathbf{r} zum virtuellen Empfangspunkt $\mathbf{r}_m + \mathbf{r}'_m$ bei halbiertem Ausbreitungsgeschwindigkeit. Zur Nachbildung des quadratischen Dämpfungsterms wird im Nenner zusätzlich die von \mathbf{r} unabhängige Wegstrecke $\|\mathbf{r}_m\|$ berücksichtigt. Passend zur MLFMM-Formulierung der Green'schen Funktion weist der Gesamtterm mit Bezug zu \mathbf{r} nur mehr eine $1/R$ -Abhängigkeit auf, im Gegensatz zum ursprünglich quadratischen Term [Cafforio et al. 1991]. Damit lässt sich das Ergebnis aus (5.34) durch Einsetzen der skalaren FMM-Entwicklung, welche aus der dyadischen Formulierung in (5.4) hervorgeht, ausdrücken als

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \oint \frac{T_L(2\mathbf{k}, \mathbf{r}_m)}{4\pi \|\mathbf{r}_m\|} e^{j2\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'_r} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'_t} d^2\hat{k}, \quad (5.36)$$

wobei die Ungleichung

$$\frac{\|\mathbf{r}'_t\|}{2} + \frac{\|\mathbf{r}'_r\|}{2} + \|\mathbf{r}\| < \|\mathbf{r}_m\| \quad (5.37)$$

erfüllt sein muss. Durch Benutzung dieser Umformungen wird (5.33) zu

$$U_r \approx -U_t \frac{\omega^2 \mu^2}{4^2 \pi^2} \lim_{L \rightarrow \infty} \oint \frac{T_L(2\mathbf{k}, \mathbf{r}_m)}{\|\mathbf{r}_m\|} W_r(\hat{k}) S(2\mathbf{k}) W_t(\hat{k}) d^2\hat{k}, \quad (5.38)$$

wobei S und $W_{r,t}$ die skalaren Entsprechungen der dyadischen Strahlungscharakteristiken $\bar{\mathbf{S}}$ und $\bar{\mathbf{W}}_{r,t}$ in (5.24) und (5.26) sind. Natürlich lässt sich diese Gleichung auch mit der Strategie zur Unterteilung des Streuobjekts in (5.32) kombinieren. Das Ergebnis lautet

$$U_r \approx -U_t \frac{\omega^2 \mu^2}{4^2 \pi^2} \sum_{p=1}^P \lim_{L \rightarrow \infty} \oint \frac{T_L(2\mathbf{k}, \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p)}{\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p\|} \underbrace{W_r(\hat{k}) S_p(2\mathbf{k}) W_t(\hat{k})}_{\eta_{S_p(\mathbf{k})}} d^2\hat{k}. \quad (5.39)$$

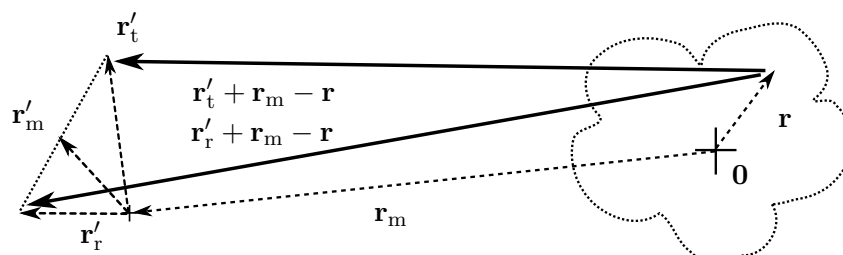
Wie in Abb. 5.17c veranschaulicht, werden die Ausbreitungsverluste der einfallenden und reflektierten Signale durch die Unterteilung genauer approximiert, da der für die Amplitudenskalierung verantwortliche Term im Nenner nun nicht mehr dem Abstand des Messpunkts vom

Ursprung ($\|\mathbf{r}_m\|$), sondern dem Abstand vom Zentrum der Teilbereiche ($\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p\|$) entspricht. Je feiner die Unterteilung, desto höher ist die Genauigkeit der Approximation. Mit dieser Formulierung ist eine genaue und effiziente Berechnung des skalaren Vorwärtsoperators möglich.

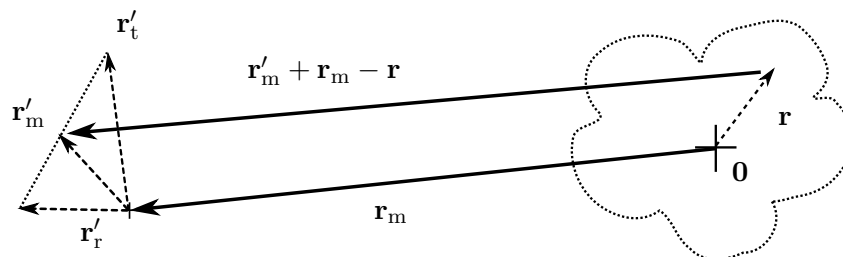
Für vektorielle Felder wird η_{S_p} in (5.39) durch die vektorielle Entsprechung $\eta_{\bar{S}_p}$ in (5.31) ersetzt. Dies führt zum Ausdruck

$$U_r \approx -U_t \frac{\omega^2 \mu^2}{4^2 \pi^2} \sum_{p=1}^P \lim_{L \rightarrow \infty} \oint \frac{T_L(2\mathbf{k}, \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p)}{\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p\|} \eta_{\bar{S}_p}(\mathbf{k}) d^2 \hat{k}. \quad (5.40)$$

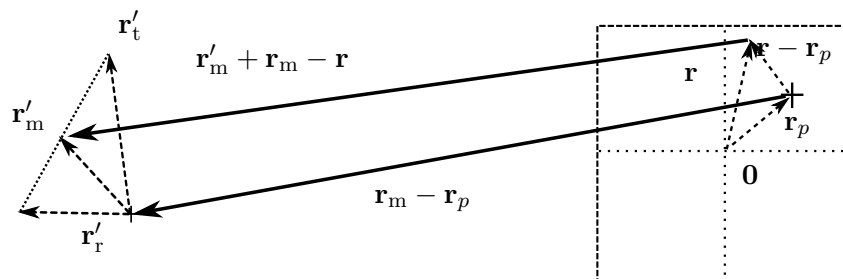
Eine Überprüfung dieser Gleichung erfolgt durch Einsetzen des Fernfeldtranslationsoperators in (5.7). Dies führt, wie erwartet, zu einem Ergebnis, das mit (5.32) übereinstimmt.



(a) Einstufiger Operator ohne Fehler



(b) Einstufiger Operator mit Fehler



(c) Mehrstufiger Operator

Abbildung 5.17: Resultierender Amplitudenfehler bei verschiedenen Implementierungen des Vorwärtsoperators.

5.2.3.3 Implementierungsspezifische Details

Um die effiziente Implementierung der skalaren und vektoriellen Formulierung in (5.39) beziehungsweise (5.40) zu ermöglichen, sollen zunächst die Beobachtungen analog zu (5.14) in

Gruppen mit dem Zentrum \mathbf{r}_b gebündelt werden. Dazu wird (5.40) umgeformt zu

$$U_r \approx -U_t \frac{\omega^2 \mu^2}{4^2 \pi^2} \sum_{p=1}^P \lim_{L \rightarrow \infty} \iint \frac{T_L(2\mathbf{k}, \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_p)}{\|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_p\|} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'_m} \frac{\|\mathbf{r}_b\|}{\|\mathbf{r}_m\|} \eta_{\bar{S}_p}(\mathbf{k}) d^2 \hat{k}. \quad (5.41)$$

Wie schon in (5.14) ist eine hierarchische Zerlegung der Quell- und Beobachtungsregionen erforderlich, um einen effizienten Algorithmus zu erhalten.

In der konventionellen MLFMM-Implementierung für elektromagnetische Probleme werden die Spektren ebener Wellen mit den zwei Komponenten E_ϕ und E_θ beschrieben. Bei der monostatischen Formulierung nehmen die kartesischen Komponenten der dyadischen Streumatrix in (3.12) diese Rolle ein, im skalaren Fall ist eine einzige Komponente ausreichend. Bei der Interpolation der Spektren ist normalerweise zu berücksichtigen, dass die Einheitsvektoren an den Polen ihre Orientierung sprunghaft ändern. Bei Komponenten der Streumatrix ist dies nicht der Fall. Außerdem wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Freiraum entsprechend dem Modell halbiert. Dies bedingt die Verdopplung der Wellenzahl, welche wiederum die Abtastdichte der Spektren, die Multipolordnung des Translationsoperators sowie die Auswertung der Exponentialfunktionen bei der Aggregation und der Disaggregation beeinflusst.

Aus (5.41) geht hervor, dass jede Translation neben dem Translationsoperator T_L eine Division mit der Translationsdistanz $\|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_p\|$ beinhaltet. Außerdem sollte der Faktor $\|\mathbf{r}_b\|/\|\mathbf{r}_m\|$ bei der Disaggregation berücksichtigt werden, indem das Empfangsspektrum mit dem Abstand $\|\mathbf{r}_b\|$ der Empfangsgruppe zum Mittelpunkt des Streuobjekts multipliziert wird und durch den Abstand $\|\mathbf{r}_m\|$ des hierarchisch untergeordneten Koordinatenpunkts zum Mittelpunkt geteilt wird. Diese Vorgehensweise ist in Abb. 5.18 veranschaulicht, wobei die Amplitude vor und nach der Korrektur mit r_{old} beziehungsweise r_{new} bezeichnet wird. Diese Maßnahme hat das Ziel, die Genauigkeit der Amplitude an den Beobachtungspunkten zu verbessern.

Die Dämpfung der Zweivegeausbreitung wird durch den verwendeten Operator grob approximiert. Die Genauigkeit kann dabei über die minimal erforderliche Anzahl an Pufferboxen gesteuert werden. Je größer diese Zahl, desto genauer ist die Näherung. Obwohl sich gleichzeitig die Laufzeit des Algorithmus erhöht, bleibt die mathematische Komplexität gleich. Man erhält so eine effiziente und schnelle Möglichkeit, den Vorwärtsoperator für monostatische Streuprobleme mit beliebigen Nah- und Fernfeldbeobachtungen auszuwerten.

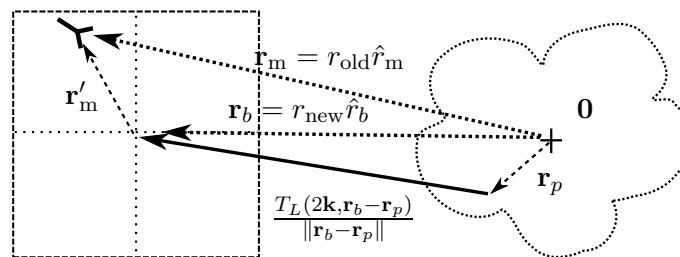


Abbildung 5.18: Amplitudenkorrektur bei der hierarchischen Disaggregation zur Verbesserung der Genauigkeit.

5.3 Konzepte zur Lösung des Rekonstruktionsproblems

Die Berechnung einer Ersatzquellen- oder Streuzentrenverteilung aus beliebigen Beobachtungen im Nah- oder Fernfeld läuft in zwei Schritten ab. Im ersten Schritt wird ein Spektrum ebener

Wellen berechnet, welches im zweiten Schritt der hierarchischen Disaggregation in Kap. 4 als Eingangsgröße dient.

Die Rekonstruktion des Spektrums ebener Wellen aus den Beobachtungen kann als inverses Problem betrachtet werden, für welches im Folgenden zwei verschiedene Lösungsansätze aufgezeigt werden. Als gegeben gilt in beiden Fällen der lineare Vorwärtsoperator, die Beobachtungen sowie ein Diskretisierungsgitter für das gesuchte Spektrum. Auf die Herleitung des Vorwärtsoperators wird hier nicht erneut eingegangen, da diese bereits in Abschnitt 5.1 und Abschnitt 5.2 ausführlich behandelt wurde. In der Numerik wird diese Problemstellung typischerweise als lineares Gleichungssystem formuliert und mit einem Standardverfahren gelöst. Dies entspricht dem ersten Lösungsansatz. Für die weitere Unterscheidung ist wichtig, dass dabei der Vorwärtsoperator direkt diskretisiert und erst danach adjungiert angewendet wird.

Im zweiten Lösungsansatz wird kein Gleichungssystem formuliert. Stattdessen wird der kontinuierliche Vorwärtsoperator, angelehnt an das MF-Prinzip², analytisch umgekehrt, ähnlich wie die inverse Fouriertransformation aus der konventionellen Fouriertransformation hervorgeht. Das Beiwort „analytisch“ wird hier als Abgrenzung zu numerisch verstanden. Bei der analytischen Inversion der Fouriertransformation wird aus dem Zeitbereichsintegral ein Integral im Frequenzbereich. Ganz ähnlich verhält es sich auch mit dem kontinuierlichen Vorwärtsoperator des vorliegenden Transformationsproblems, denn während der Vorwärtsoperator selbst, wie in (5.14) ersichtlich, ein Integral über den k -Raum beinhaltet, weist der analytisch umgekehrte Vorwärtsoperator, wie später noch gezeigt wird, stattdessen ein Integral im Ortsbereich auf. Dies ist für die Diskretisierung wichtig. Das Resultat unterscheidet sich somit vom direkt im k -Raum diskretisierten und anschließend adjungierten Vorwärtsoperator, so wie er im ersten Lösungsansatz verwendet wird. Dies ist ein Grund, warum die Lösung des inversen Problems in beiden Ansätzen unterschiedlich ausfällt. Wird die Problemstellung als lineares Gleichungssystem verstanden, so entspricht das Ergebnis bis auf ein geduldetes Fehlermaß der exakten Lösung des inversen Problems. Wenn dagegen der analytisch umgekehrte Operator zur Anwendung kommt, so wird ähnlich wie auch beim MF eine signalangepasste Filterung durchgeführt, mit der die Lösung approximiert wird.

In der Praxis verhalten sich beide Ansätze teilweise sehr unterschiedlich. Bei der Lösung des Gleichungssystems werden auch lineare Abhängigkeiten im Vorwärtsoperator entflochten wie sie beispielsweise bei nicht orthogonal polarisierten Messsonden entstehen, während die signalangepasste Filterung auch mit sehr verrauschten Beobachtungen und einem schlecht konditionierten Vorwärtsoperator nicht zu numerischen Instabilitäten führt [Schnattinger und Eibert 2012a; Schnattinger und Eibert 2012c]. Besonders vorteilhaft ist deshalb eine Kombination beider Ansätze. Bei Verwendung eines iterativen Gleichungslösers kann das signalangepasste Filter zur Erzeugung eines geeigneten Startwerts genutzt werden. Alternativ wird das gesamte Gleichungssystem von links mit dem signalangepassten Filter multipliziert, was bei iterativer Lösung des Gleichungssystems die Konvergenz verbessert und damit einer Vorkonditionierung entspricht.

5.3.1 Formulierung der Problemstellung als lineares Gleichungssystem

In diesem Abschnitt soll das inverse Problem durch ein iteratives Verfahren gelöst werden. Die Modelle in Abschnitt 5.1 und Abschnitt 5.2 lassen sich durch eine Diskretisierung der Ersatzquellen und Beobachtungen in ein lineares Gleichungssystem überführen, wobei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ die Systemmatrix bezeichnet, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ die Unbekannten und $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^M$ die Beobachtungen. Das

²Wenn es sich nicht um zeitabhängige, sondern um ortsabhängige Signale handelt, wird im Englischen oft der Ausdruck „spatial matched filter“ zur Differenzierung genutzt.

resultierende Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (5.42)$$

ist im Allgemeinen nicht quadratisch. Da viele Lösungsverfahren jedoch ein quadratisches Gleichungssystem erfordern, wird stattdessen die Normalengleichung

$$\mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^H \mathbf{b} \quad (5.43)$$

verwendet. Jede Lösung dieser Gleichung minimiert die Norm des Fehlervektors $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$. Dabei kann nicht ausgeschlossen werden, dass die Systemmatrix \mathbf{A} singulär ist. Die vollständige Lösung des vollbesetzten quadratischen Gleichungssystems erfordert im Allgemeinen den Rechenaufwand $\mathcal{O}(N^3)$ [Meister 2005, S. 43].

Unter bestimmten Umständen bietet die Wahl eines iterativen Lösers Vorteile. Durch das iterative Vorgehen stellen singuläre Systemmatrizen kein Problem dar, weil eine Abbruchbedingung dafür sorgt, dass singuläre Anteile des Operators ausgeblendet werden [Vorst 2003, S. 147]. Ein iterativer Gleichungslöser wird üblicherweise beim Erreichen eines bestimmten Residuums terminiert. Dieser vorzeitige Abbruch des Verfahrens kann als Regularisierung interpretiert werden [Calvetti et al. 2002]. Außerdem lässt sich durch die Wahl des Residuums zwischen Genauigkeit und Rechenzeit abwägen. Schließlich verringert sich die mathematische Komplexität von iterativen Verfahren, wenn die Matrix \mathbf{A} dünn besetzt ist, oder, wie in (5.3), in dünn besetzte Teilmatrizen faktorisiert werden kann.

Durch die hierarchische Formulierung der Modelle in Abschnitt 5.1 und Abschnitt 5.2 lässt sich das Produkt $\mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{x}$ laut (4.29) mit der Komplexität $\mathcal{O}(N \log^2 N)$ oder geringer auswerten [Bosch et al. 2007; Cecka und Darve 2011]. Dies entspricht auch der Gesamtkomplexität des Verfahrens, da in den meisten Situationen wenige Iterationen zum Erreichen des gewünschten Residuums ausreichen.

Nicht immer sind die Transformationsprobleme gut gestellt. Der Einfluss von Messfehlern und verrauschten Beobachtungen auf das Transformationsergebnis wurde in [Schmidt 2009, S. 69f. Qureshi et al. 2013b] ausführlich untersucht. Um die Lösbarkeit in schwierigen Fällen zu verbessern, sollte das Verhältnis zwischen der Anzahl an Beobachtungen und Unbekannten möglichst groß sein. Da die Beobachtungen typischerweise als gegeben betrachtet werden müssen, verbleibt nur eine Verringerung der Anzahl an Unbekannten. Der Schlüssel dazu liegt in einer effizienten Diskretisierung der Ersatzquellen. Dabei hat sich sowohl die Abtastung mit ebenen Wellen als auch die Darstellung durch sphärische Modenkoeffizienten als geeignet erwiesen [Eibert et al. 2013].

Potenzial für weitere Maßnahmen zur Verbesserungen der Lösbarkeit birgt die Vorkonditionierung des Gleichungssystems mit der im nächsten Abschnitt vorgestellten signalangepassten Filterung. Ausgehend von (5.42) lautet das resultierende Gleichungssystem dann

$$\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{B} \mathbf{b}, \quad (5.44)$$

wobei \mathbf{B} dem signalangepassten Filter entspricht. Diese Vorkonditionierung funktioniert erwartungsgemäß dann besonders gut, wenn die resultierende Systemmatrix mit

$$\mathbf{B} \mathbf{A} \approx \mathbf{I} \quad (5.45)$$

nah an der Einheitsmatrix ist. Ein vorgegebenes Fehlermaß wird so nach wenigen Iterationen des Gleichungslösers erreicht.

5.3.2 Approximative Lösung durch signalangepasstes Filter

Die Ermittlung signalangepasster Filter für inverse Quellen- und Streuprobleme erfolgt hier durch die analytische Umkehrung der zugehörigen Vorwärtsoperatoren. Der resultierende Ausdruck entspricht nur in Ausnahmefällen dem inversen Operator. Die Vorgehensweise soll trotzdem zuerst an einem derartigen Fall gezeigt werden, da dies zusätzliche Einsichten erlaubt.

Wenn skalare Fernfeldbeobachtungen vorliegen, lässt sich das Spektrum ebener Wellen durch Umstellen der Gleichungen in (2.13), (3.4) und (3.10) berechnen. Für $r \rightarrow \infty$ gilt somit

$$\Psi(\mathbf{k}) = -\frac{4\pi}{j\omega\mu} r e^{jkr} E(r\hat{k}, \omega), \quad (5.46)$$

wobei E dem beobachteten Feldwert entspricht. Der Ausdruck wurde durch die analytische Umkehrung des Vorwärtsoperators gewonnen und entspricht in diesem Fall auch dem inversen Operator. Bei vektoriellen Feldern gilt die Gleichung jeweils für die transversalen Komponenten.

Im Fall von Nahfeldbeobachtungen ist der Zusammenhang zwischen Spektrum und Beobachtung komplexer. Wird die Fernfeldnäherung unter diesen Bedingungen trotzdem für die Rekonstruktion des Spektrums verwendet, so führt dies zu Fehlern. Um diese Fehler genauer zu untersuchen, wird der Nahfeldausdruck (5.6) in (5.46) eingesetzt. Dabei ergibt sich der Integralausdruck

$$\Psi(\mathbf{k}) \approx -\frac{4\pi}{j\omega\mu} r e^{jkr} E(r\hat{k}, \omega) = \lim_{L \rightarrow \infty} \oint\!\!\!\!\!\oint F_L(\hat{k} \cdot \hat{k}', k, r) V(\mathbf{k}') d^2\hat{k}', \quad (5.47)$$

welcher verdeutlicht, dass jeder Abtastwert im rekonstruierten Spektrum durch eine Filterung des Spektrums V mit der Funktion

$$F_L(\hat{k} \cdot \hat{k}', kr) = r e^{jkr} T_L(\mathbf{k}', r\hat{k}) \quad (5.48)$$

hervorgeht. Abb. 5.19 vermittelt einen Eindruck von dieser Funktion, indem verschiedene Richtcharakteristiken für die Messentfernung $r = 0.4\lambda$ dargestellt werden. Diese Grafiken lassen sich als sphärische Punktantwortfunktionen interpretieren, welche das Spektrum V glätten. Die Farbskala der Richtcharakteristik entspricht dem Phasenwert. Die Multipolordnungen und Abstände wurden wie in Abb. 5.5 gewählt. Für eine fehlerlose Rekonstruktion müsste die Punktantwortfunktion einem Dirac-Impuls entsprechen. Dies ist nicht der Fall. Des Weiteren variiert die Funktion stark mit der Multipolordnung und der Messentfernung, womit auch das Rekonstruktionsergebnis im gleichen Maße von diesen Parametern beeinflusst wird. Dies ist auch ein Nachteil, denn die resultierenden Fehler sind so von Art und Lage der verfügbaren Beobachtungen abhängig.

Bisher wurde für die Rekonstruktion des Spektrums der analytisch invertierte Fernfeldoperator verwendet, obwohl dies unter Nahfeldbedingungen zu erheblichen Fehlern führt. Durch die Umkehrung des zugehörigen Nahfeldoperators kann ein signalangepasstes Filter abgeleitet werden, welches eine genauere Rekonstruktion des Spektrums aus Nahfeldbeobachtungen ermöglicht. Dazu wird, wie bei der inversen Fouriertransformation, der Integralkern komplex konjugiert. Angewendet auf (5.6) ergibt sich der Ausdruck

$$\Psi(\mathbf{k}) \approx -\frac{4\pi}{j\omega\mu} \lim_{L \rightarrow \infty} \oint\!\!\!\!\!\oint T_L^*(\mathbf{k}, \mathbf{r}) r^2 E(\mathbf{r}, ck) d^2\hat{r}. \quad (5.49)$$

Im Gegensatz zu (5.46) wird das Spektrum Ψ an einem einzigen Punkt \mathbf{k} nun aus allen bei der Frequenz k verfügbaren Beobachtungen E berechnet. Wie bereits erörtert, führt die analytische

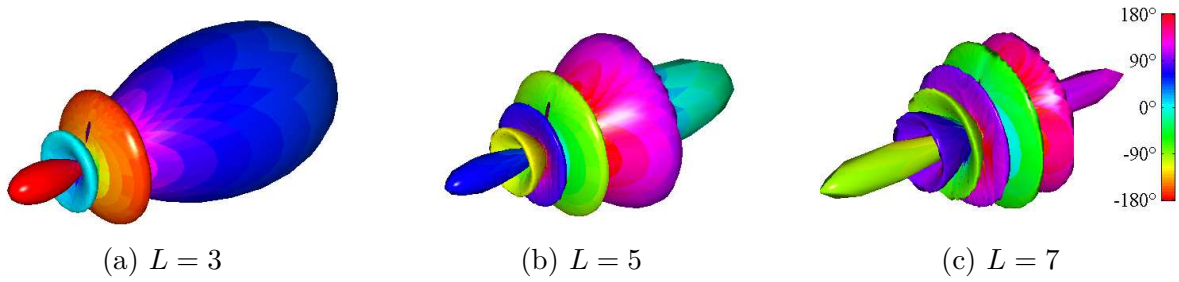


Abbildung 5.19: Phasenverlauf der Filterungsfunktion in (5.48), aufgetragen auf einer linearen Darstellung des Spektrums für verschiedene Multipolordnungen L und der Translationsdistanz $r = 0.4\lambda$; die Translationsrichtung stimmt mit dem Maximum überein.

Umkehrung des Vorwärtsoperators dazu, dass das k -Raum-Integral durch ein Ortsbereichsintegral ersetzt wird. Dieses Integral bewirkt eine Gewichtung der Beobachtungen mit dem jeweiligen Flächenelement $d^2\hat{r}$, was tendenziell die Genauigkeit des rekonstruierten Spektrums bei ungleichmäßiger Häufung der Messpunkte verbessert. Die Verwendung des konjugierten Translationsoperators wird in Abb. 5.20 als ein Vorgang begriffen, bei dem ein einfallendes Spektrum ebener Wellen durch einen Optimalfilter in ein ausgehendes Spektrum an der Quelle umgewandelt wird. Um die Sinnhaftigkeit dieser Formulierung zu überprüfen, wird durch Einsetzen des Ausdrucks E in (5.6) mit

$$\Psi(\mathbf{k}) \approx \lim_{L \rightarrow \infty} \oint T_L^*(\mathbf{k}, \mathbf{r}) r^2 \lim_{L' \rightarrow \infty} \oint T_{L'}(\mathbf{k}', \mathbf{r}) V(\mathbf{k}') d^2\hat{k}' d^2\hat{r} \quad (5.50)$$

eine zu (5.47) analoge Formulierung abgeleitet. Das Vertauschen der Integralgrenzen führt zu

$$\Psi(\mathbf{k}) \approx \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{L' \rightarrow \infty} \oint F'_{L,L'}(\hat{k} \cdot \hat{k}', k, r) V(\mathbf{k}') d^2\hat{k}', \quad (5.51)$$

wobei die Filterungsfunktion oder Punktantwortfunktion durch

$$F'_{L,L'}(\hat{k} \cdot \hat{k}', k, r) = r^2 \oint T_L^*(\mathbf{k}, \mathbf{r}) T_{L'}(\mathbf{k}', \mathbf{r}) d^2\hat{r} \quad (5.52)$$

definiert ist. Das Einsetzen der in (5.7) definierten Fernfeld-Translationsoperatoren führt zu

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F'_{L,L'}(\hat{k} \cdot \hat{k}', k, r) = \oint \delta(\hat{k} - \hat{r}) e^{jk'r} \delta(\hat{k}' - \hat{r}) e^{-jk'r} d^2\hat{r} = \delta(\hat{k} - \hat{k}'). \quad (5.53)$$

Damit lässt sich zeigen, dass Fernfeldbeobachtungen auch in diesem Fall eine perfekte Rekonstruktion des Spektrums zur Folge haben. Im Fall von Nahfeldbeobachtungen erfolgt die Berechnung der Filterfunktion $F_{L,L'}$ numerisch. Die daraus hervorgehenden Punktantwortfunktionen in Abb. 5.21 besitzen im Vergleich zu den Ergebnissen in Abb. 5.19 die Eigenschaften, dass zum einen die Funktion im Bereich der Hauptkeule fast ausschließlich reell ist und zum anderen die Nebenkeulen kleiner ausfallen. Damit ist die Rekonstruktion des Spektrums nach dem MF-Prinzip in (5.46) im Vergleich zur Rekonstruktion in (5.47) basierend auf der Fernfeldapproximation genauer.

Um zu untersuchen, ob sich dieser Vorteil auch als geringerer Fehler im Bild niederschlägt, wurde die Bildberechnung mit der Formulierung in (5.49) für verschiedene Abstände durchgeführt. Als Quellenverteilung dient eine im Freiraum strahlende Anordnung Hertz'scher Dipole in einem Frequenzbereich von 0,31 GHz bis 10 GHz. Zur Berechnung des mittleren Pixelfehlers wird ein Referenzbild aus Fernfelddaten verwendet. Weitere Details dieser numerischen Analyse sind in [Schnattinger und Eibert 2012b] beschrieben. Für den mittleren Pixelfehler nach (4.20) ergibt sich dabei der Verlauf in Abb. 5.22. Bei Benutzung der Fernfeldapproximation in (5.46) skaliert der Fehler direkt mit der Entfernung. Dies führt bei großen Abständen zu entsprechend kleinen Fehlern. Im Gegensatz dazu stellt sich bei der Prozessierung mit dem konjugierten Translationsoperator über einen weiten Entfernungsbereich eine konstante Genauigkeit ein, die von der gewählten Multipolordnung abhängt. Die adjungierten Nahfeldtranslationen sind deshalb vor allem bei kleinen Abständen von Vorteil.

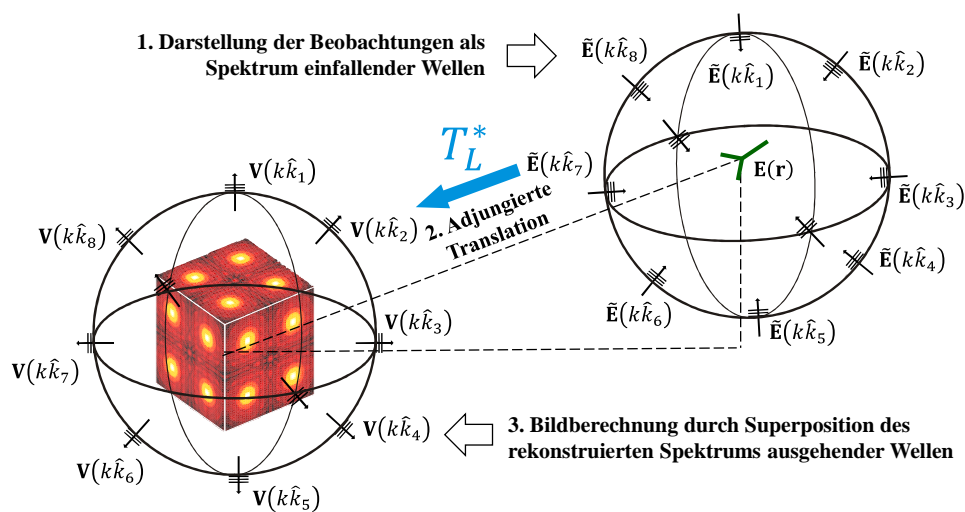


Abbildung 5.20: Der adjungierte Translationsoperator ermittelt aus den einfallenden ebenen Wellen am Zielort nach den Prinzipien des MF das ausgehende Spektrum an der Quelle.

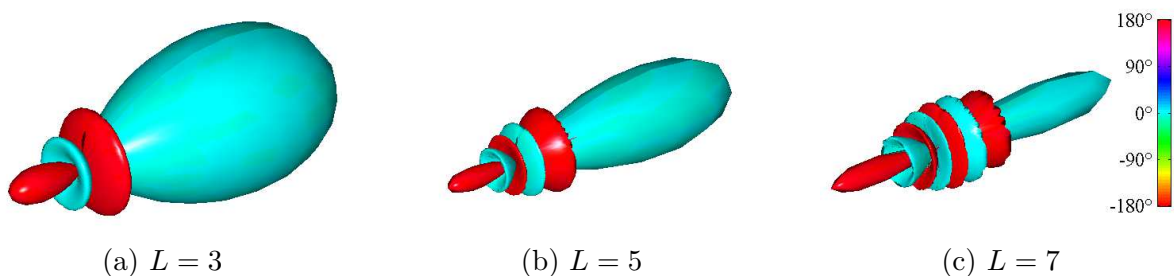


Abbildung 5.21: Phasenverlauf der Filterungsfunktion in (5.52), aufgetragen auf einer linearen Darstellung des Spektrums für verschiedene Multipolordnungen L und der Translationsdistanz $r = 0.4\lambda$; die Translationsrichtung stimmt mit dem Maximum überein.

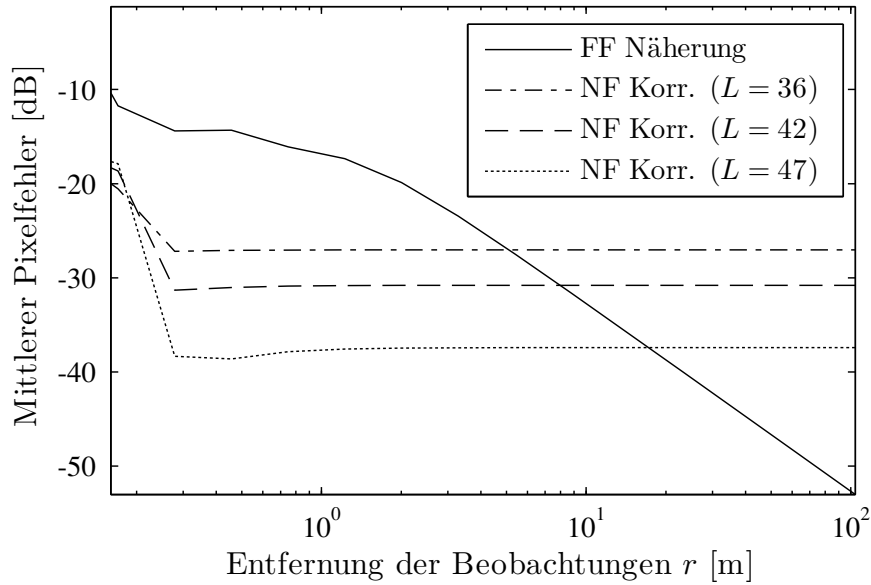


Abbildung 5.22: Vergleich des mittleren Pixelfehlers bei der Benutzung von Fernfeld- (FF) beziehungsweise Nahfeldmodellen (NF) in Abhängigkeit des Abstands r von den Feldbeobachtungen; L ist die Multipolordnung. Quelle: Schnattinger und Eibert [2012b].

Die analytische Approximation der Lösung durch adjungierte Translationen lässt sich auch auf die Formulierung inklusive Sondenkorrektur in (5.14) anwenden und lautet dann

$$\Psi(\mathbf{k}) \approx -\frac{4\pi}{j\omega\mu} \lim_{L \rightarrow \infty} \oint T_L^*(\mathbf{k}, \mathbf{r}_b) e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'_m r^2} U(\mathbf{r}_m) W_m(\mathbf{k}) d^2 \hat{r}_m, \quad (5.54)$$

wobei W_m eine skalare Sondenkorrektur darstellt. Da das Integral eine aus der MLFMM bekannte Struktur aufweist, lässt es sich mit den gleichen hierarchischen Methoden beschleunigen.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die analytische Umkehrung des Vorwärtsoperators ein flexibles und schnelles Lösungsverfahren für das Inversionsproblem darstellt, welches sich das MF-Prinzip zu Nutze macht. In vielen Fällen wird eine sehr gute Approximation der Lösung erzielt. Wie bereits erörtert, hat auch eine Kombination mit dem iterativen Lösungsverfahren in Abschnitt 5.3.1 Vorteile.

6 Anwendungsbeispiele

Durch Anwendung der aufeinander aufbauenden Berechnungsschritte in den Kapiteln 3 bis 5 lassen sich beliebige Feldbeobachtungen je nach Szenario in eine Ersatz- oder Streuquellendarstellung überführen. Die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Verfahren soll nun anhand einiger Beispiele untersucht werden.

6.1 Synthetische Szenarien basierend auf linearen Modellen

Zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit des Verfahrens im Optimalfall werden Testdaten genutzt, für die sichergestellt ist, dass die zugrunde liegenden Quellen oder Streuzentren linear in die Beobachtungen eingehen. Damit werden unerwünschte Beeinträchtigungen durch Verkopplungen und Mehrfachinteraktionen vermieden. Eine Analyse dieser Effekte findet erst im nächsten Abschnitt statt.

6.1.1 Dipole im Freiraum

Jede elektrische Stromverteilung kann durch eine diskrete Verteilung Hertz'scher Dipole approximiert werden. Ein Hertz'scher Dipol ist ein infinitesimal kurzes Stromelement im Freiraum. Auf dieser Grundlage basiert das Szenario in Abb. 6.1a, wobei die Anordnung der Ströme der Zeichenfolge „TUM“¹ folgt. Die Dipole befinden sich in einem Quader mit den Abmessungen $40 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$. Die Anordnung befindet sich im Vakuum, sodass die Abstrahlung unter Freiraumbedingungen erfolgt.

Da die zeitliche Anregung der Stromelemente durch einen Dirac-Impuls fest vorgegeben ist, wird eine gegenseitige Beeinflussung benachbarter Dipole nicht modelliert. Diese Annahme entspricht dem Ansatz in (2.19), welcher für die Rekonstruktion verwendet wird. Eine impulsförmige Anregung der Quellen erzeugt Feldanteile bei allen Frequenzen. Beobachtungen liegen im Frequenzbereich von 0 GHz bis 10 GHz vor. Die Abmessungen der Stromverteilung werden mit $13.3\lambda_{\min} \times 3.3\lambda_{\min} \times 6.7\lambda_{\min}$ in elektrischen Größen ausgedrückt, wobei λ_{\min} die Freiraumwellenlänge bei 10 GHz ist.

Die Berechnung der Ersatzquellendarstellung soll getrennt mit Fern- und Nahfeldbeobachtungen erfolgen. In beiden Fällen werden die Transversalkomponenten der Felder auf einem Gauß-Legendre-Gitter sphärisch abgetastet, wobei sich die Nahfeldbeobachtungen auf einer Kugel mit dem Radius 57 cm befinden. Die Transversalkomponenten werden durch ihren ϕ - und θ -Anteil charakterisiert. Die punktuelle Beobachtung der Felder entspricht der Verwendung eines Hertz'schen Dipols als Sonde. Wenn die Anzahl der Abtastpunkte durch $N_f = 29$, $N_\theta = 89$ und $N_\phi = 178$ festgelegt wird, dann ist das Abtasttheorem in (4.8) für die beschriebene Quellenverteilung und den gegebenen Frequenzbereich genau erfüllt. Das entspräche dem Verzicht auf eine Überabtastung und hätte damit einen gewissen Approximationsfehler zur Folge. Um eine höhere Genauigkeit gewährleisten zu können, wird die Diskretisierung auf $N_f = 32$, $N_\theta = 128$ und $N_\phi = 256$ erhöht. Dies führt zu einer Gesamtzahl von 1 048 576 Punkten.

¹Das Kürzel „TUM“ steht für Technische Universität München.

Im ersten Schritt wird das Spektrum der ebenen Wellen aus den Beobachtungen rekonstruiert, wie in Kap. 5 beschrieben. Im zweiten Schritt wird die hierarchische Disaggregation in Kap. 4 eingesetzt, welche ein sphärisches Abtastgitter verlangt. Während die Fernfelddaten lediglich analog zu (5.46) skaliert werden müssen, um diese Voraussetzung zu erfüllen, erfordert die Rekonstruktion des Spektrums ebener Wellen aus den Nahfelddaten einen deutlich größeren Aufwand und erfolgt mit dem Einschnittverfahren in Abschnitt 5.3.2. Der Einfachheit halber wird dabei die Formulierung in (5.49) basierend auf direkten Translationen eingesetzt.

Die Berechnung der volumetrischen Ersatzquellendarstellungen im Ortsbereich erfolgt mit dem hierarchischen Verfahren in Kap. 4. Für die Prozessierung der vorliegenden Daten werden vier Hierarchieebenen und das lokale Interpolationsverfahren mit Ordnung 4 verwendet. Die aus den Fernfeldbeobachtungen berechneten Ersatzquellen sind in Abb. 6.1b dargestellt. Dabei werden die Maximalwerte der Volumenverteilung mit

$$\max_{r_x} |\psi(\mathbf{r})|, \quad \max_{r_y} |\psi(\mathbf{r})|, \quad \max_{r_z} |\psi(\mathbf{r})| \quad (6.1)$$

entlang der kartesischen Koordinatenachsen auf die Seitenflächen eines Würfels projiziert. Dies gilt mit $\psi = \hat{J}_{x,y,z}$ separat für jede kartesische Komponente der Ersatzquellenverteilung. Diese Klarstellung ist wichtig für die Interpretation der Ergebnisse und hat auch für alle bereits gezeigten volumetrischen Verteilungsfunktionen Gültigkeit. Zusätzlich wird der volumetrische Absolutwert

$$\psi(\mathbf{r}) = \|\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r})\|_2 = \sqrt{|\hat{J}_x(\mathbf{r})|^2 + |\hat{J}_y(\mathbf{r})|^2 + |\hat{J}_z(\mathbf{r})|^2} \quad (6.2)$$

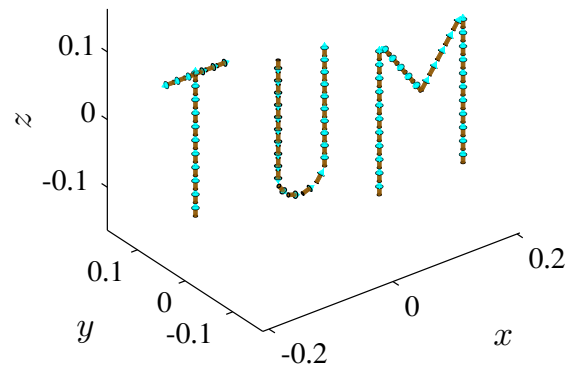
berechnet und analog visualisiert. Bei Betrachtung dieser Komponente lässt sich die Anordnung der Dipole in Form der Zeichenfolge „TUM“ besonders einfach entziffern.

Die Orientierung der Dipole setzt sich entsprechend der Intensität aus den kartesischen Komponenten zusammen. Interessanterweise ist die y -Komponente der Ersatzquellen in Abb. 6.1b nicht Null. Dies folgt aus den Nebendiagonaleinträgen der Punktantwortfunktion in Abb. 3.8 und Abb. 3.9. Alternativ lässt sich das Phänomen damit erklären, dass der nichtstrahlende Anteil der Quellenverteilung keinen Beitrag zum ausgestrahlten Feld liefert und damit auch im Bild fehlt. Dies lässt sich zeigen, indem der nichtstrahlende Radialanteil des Quellenspektrums entgegen der bisherigen Vorgehensweise bei der Bildberechnung mit berücksichtigt wird. In diesem Fall verschwinden die Signalanteile in der y -Komponente des Bildes.

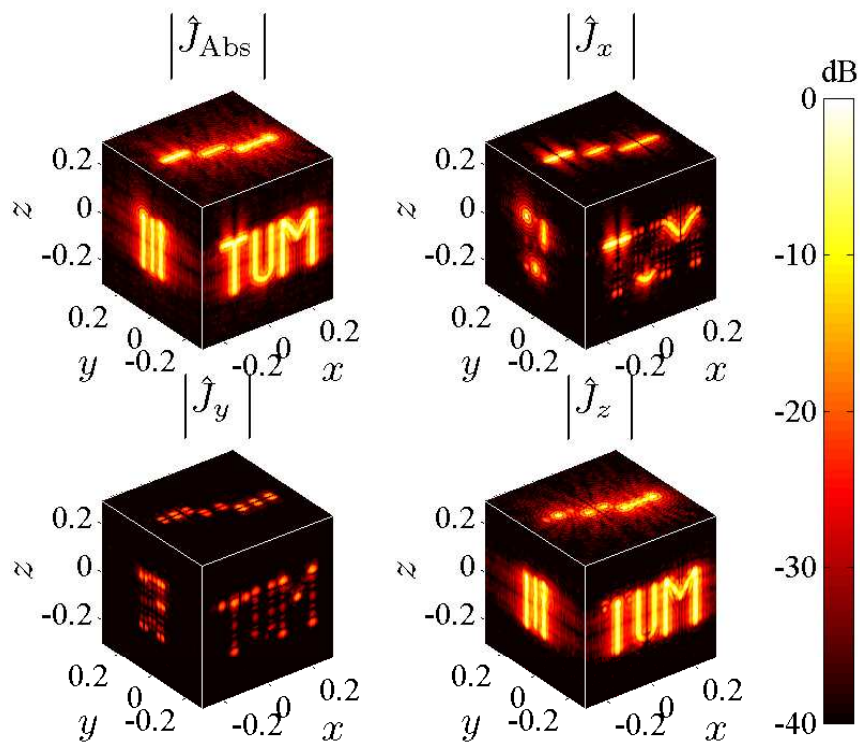
Die Bildberechnung wird nun mit Nahfelddaten wiederholt. Im Optimalfall unterscheidet sich das Ergebnis nicht. Wenn allerdings auf eine Kompensation der Nahfeldeffekte verzichtet wird, führt dies zu Fehlern und Abweichungen. Werden Nahfelddaten zum Test wie Fernfelddaten prozessiert, so zeigt sich, dass das berechnete Bild der Ersatzquellen in Abb. 6.2a deutlich von der Referenz in Abb. 6.1b abweicht. Im Gegensatz dazu führt eine Kompensation der Nahfeldeffekte durch den Rekonstruktionsschritt in (5.49) zum Ergebnis in Abb. 6.2b. Die Abweichungen der berechneten Verteilungsfunktion reduzieren sich deutlich, sodass die Ersatzquellendarstellungen aus Nah- und Fernfelddaten kaum zu unterscheiden sind.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass der Einfluss von Rauschen in den beobachteten Feldern hier vernachlässigbar ist, da das eingesetzte Verfahren auf den MF-Prinzipien basiert und damit in dieser Hinsicht sehr robust ist. Die numerischen Untersuchungen in [Schnattinger und Eibert 2012c] haben beispielsweise gezeigt, dass bei einem Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) von 0 dB keine visuellen Abweichungen in den resultierenden Bildern feststellbar sind.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die in Abschnitt 5.3.2 vorgestellten adjungierten Nahfeldtranslationen bei der Berechnung der Ersatzquellen eine wirksame Kompensation der

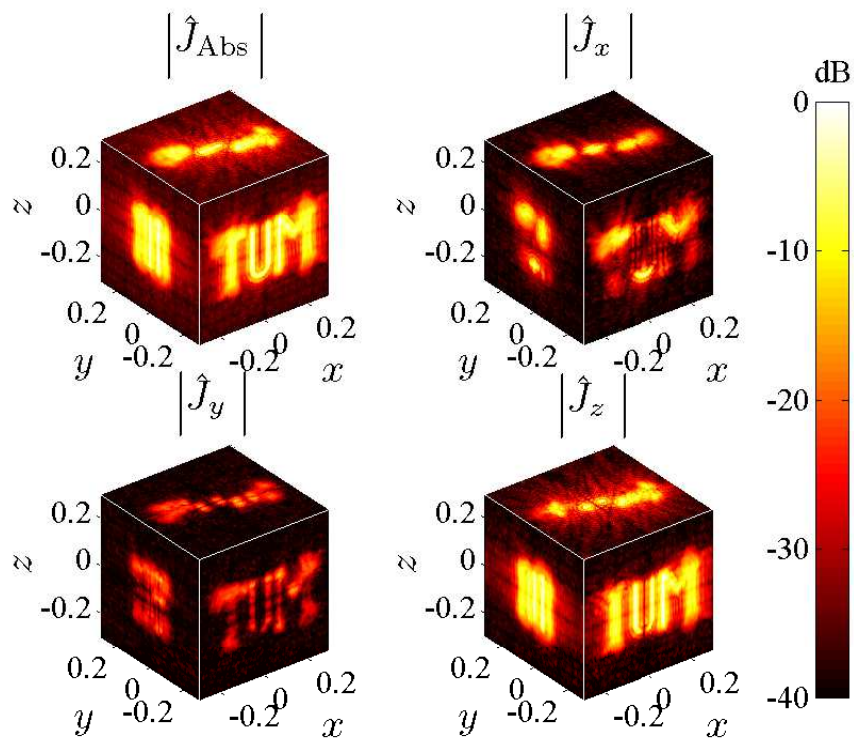


(a) Räumliche Darstellung der Zeichenfolge „TUM“ als diskrete Dipolverteilung

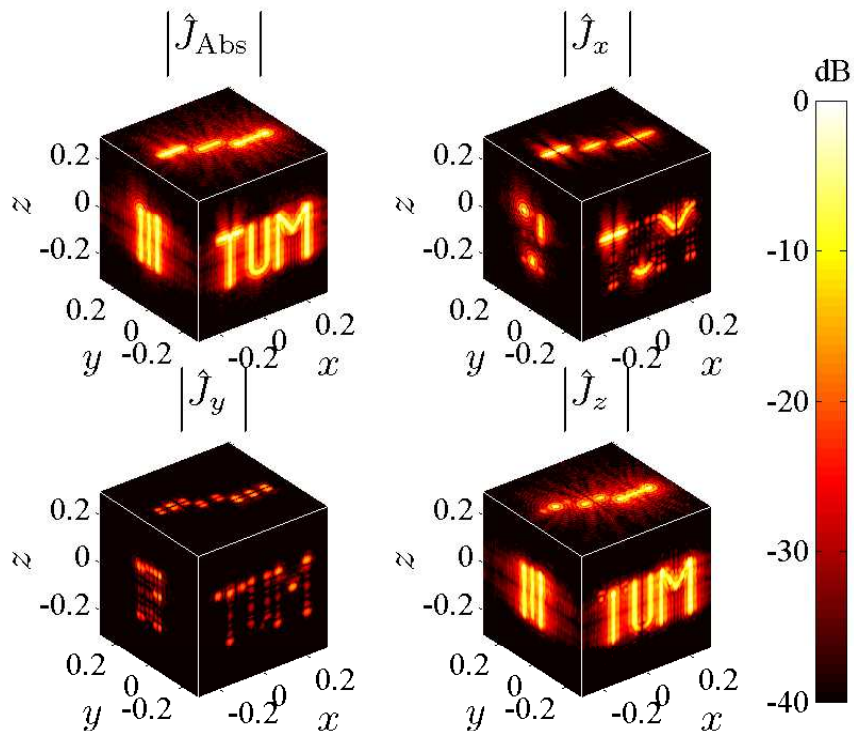


(b) Projektionen der aus dem Fernfeld berechneten volumetrischen Ersatzquellenverteilung

Abbildung 6.1: Im Freiraum strahlende Hertz'sche Dipole mit der aus den zugehörigen Feldern berechneten Ersatzquellenverteilung.



(a) Mit der Fernfeldnäherung berechnete Ersatzquellenverteilung



(b) Berechnete Ersatzquellenverteilung bei Berücksichtigung von Nahfeldausbreitungseffekten

Abbildung 6.2: Vergleich der aus Nahfelddaten berechneten Ersatzquellenverteilungen mit und ohne Berücksichtigung der Nahfeldausbreitungseffekte.

Nahfeldeinflüsse bewirken. Das Ergebnis ist damit kaum vom Abstand der Beobachtungen abhängig. Außerdem ermöglicht das volumetrische Bild eine dreidimensionale Lokalisierung der vektoriellen Quellen. Je nachdem, wie groß der Einfluss des nichtstrahlenden Anteils der Stromverteilung ist, geht auch die Orientierung der Quellen aus der Verteilungsfunktion hervor.

6.1.2 Streuzentren im Freiraum

Bei den weit verbreiteten SAR-Verfahren wird der Streukörper als Ansammlung von unabhängigen Streuzentren dargestellt. Dabei wird das einfallende Feld an jedem Streuzentrum mit einem Streukoeffizienten multipliziert und isotrop gestreut. Wechselwirkungen zwischen benachbarten Streuzentren werden nicht berücksichtigt. Dieses Streumodell soll nun im folgenden Beispiel Anwendung finden.

An den Kreuzungspunkten eines $6 \times 6 \times 6$ Gitters befinden sich isotrope Streuzentren mit zufälligen komplexwertigen Streukoeffizienten. Die Anordnung mit den Abmessungen $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ soll mit einem monostatischen Radar bei 1 GHz untersucht werden. Die elektrische Größe des Objekts, welche ausschlaggebend für die Dimension des resultierenden Gleichungssystems ist, bemisst sich somit auf $3.3\lambda \times 3.3\lambda \times 3.3\lambda$. Ein exemplarisches Bild dieser Streuzentrenverteilung ist in Abb. 6.3a dargestellt. Das mit dem SAR-Streumodell ermittelte Streuspektrum der Gesamtanordnung entspricht dem normierten Radarrückstreuquerschnitt und ist in Abb. 6.3b zu sehen.

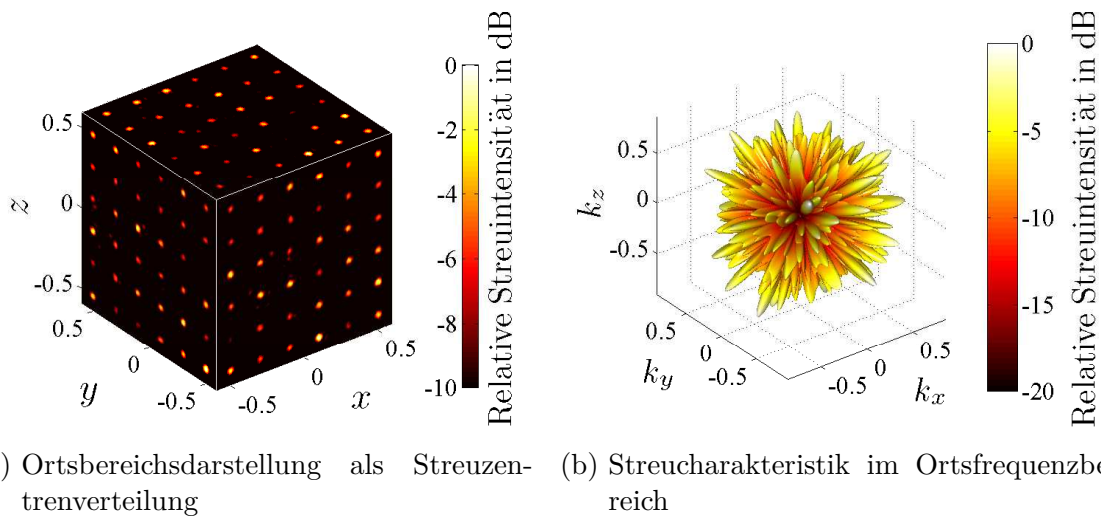


Abbildung 6.3: Regelmäßig angeordnete isotrope Streuzentren mit komplexwertigen Reflexionskoeffizienten, dargestellt im Ortsbereich und im k -Raum.

Der Radarrückstreuquerschnitt (radar cross section, RCS) ist eine wichtige praxisrelevante Größe, deren messtechnische Erfassung eine häufige Aufgabenstellung darstellt. Besonders schwierig ist die direkte und genaue Messung von Fernfeldgrößen bei elektrisch großen Objekten. In diesem Fall ist es von Vorteil, eine andere Vorgehensweise zu wählen. In Abschnitt 5.2.3 wurde ein Verfahren vorgestellt, das es erlaubt, den Radarrückstreuquerschnitt aus Nahfeldbeobachtungen zu berechnen. Die Gewinnung von Nahfelddaten ist in vielen Fällen kostengünstiger und einfacher als die direkte Vermessung von Fernfelddaten. Für elektrisch große Streuobjekte wiegt dies den zusätzlichen Aufwand für die Transformation in der Regel auf.

Um die Flexibilität des Algorithmus zu verdeutlichen, sind 14 400 monostatische Streufeldmesspunkte zufällig in der Umgebung des Streukörpers verteilt. Wie in Abb. 6.4 veranschaulicht, befinden sie sich zwischen zwei Kugeln mit dem Radius 13λ beziehungsweise 26λ um die Streuzentrenverteilung, was einer deutlichen Unterschreitung der Fernfelddistanz bei $4D^2/\lambda = 133\lambda$ entspricht. Abb. 6.5 zeigt die Abweichungen der normierten Nahfeldbeobachtungen vom normierten RCS bei einer Entfernung von 20λ am Beispiel des sphärischen Schnitts $\theta = 90^\circ$. Neben den beiden normierten Kurven für das Streuspektrum im Nah- und Fernfeld enthält das Diagramm auch eine Fehlerkurve. Darüber hinaus ist der Maximalwert der Fehlerkurve zusammen mit den Maximalfehlern in den Schnitten $\phi = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ und $\phi = 150^\circ$ in Tabelle 6.1 aufgelistet, um sie später mit dem Transformationsergebnis vergleichen zu können.

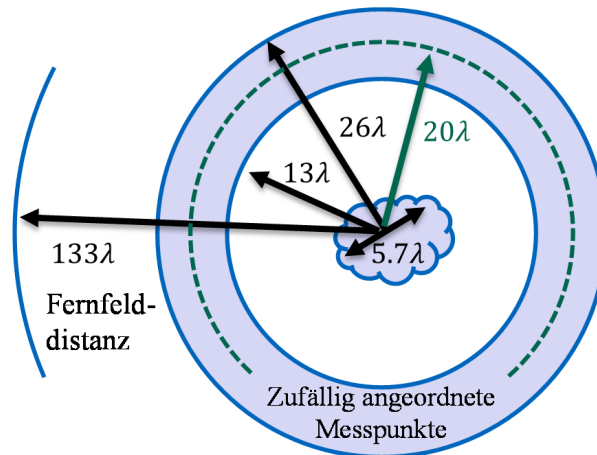


Abbildung 6.4: Entfernung der Streufeldbeobachtungen und Fernfeldabstand in Relation zum Streuobjekt; Angabe in elektrischen Größen.

Da Nahfeldeffekte in diesem Fall einen großen Einfluss auf die Beobachtungen haben, müssen sie bei der Berechnung des RCS berücksichtigt werden. Dies geschieht mit der Formulierung in (5.39), welche eine Unterteilung des Streukörpers mit dem Modell strahlender Reflektoren verbindet. Der kubische Bereich der Streuanordnung wird mit vier Hierarchieebenen in 4096 Bereiche unterteilt. Jedem Teilbereich wird ein Streuspektrum mit der Diskretisierung $N_\theta = 3$ und $N_\phi = 4$ zugeordnet. Da es sich um eine skalare Problemstellung handelt, bei der polarimetrische Effekte nicht berücksichtigt werden müssen, resultiert daraus eine Gesamtanzahl von 49 152 Unbekannten. Um eine hohe Genauigkeit zu erreichen, wird die Anzahl an erforderlichen FMM-Pufferboxen auf 10 festgelegt. Außerdem finden Translationen in der höchsten Hierarchieebene des hierarchisch unterteilten Streuobjekts zu Gunsten einer besseren Genauigkeit nicht statt. Damit beträgt der Speicherbedarf für alle Translationsoperatoren 32 GB.

Zur Ermittlung der Fernfeldstreucharakteristik wird das iterative Verfahren in Abschnitt 5.3.1 basierend auf der „Generalized minimal residual method“ (GMRES) [Dongarra 1998, S. 159 ff.] eingesetzt. Nach 1444 Iterationen beträgt der relative Fehler an den Beobachtungen

$$\frac{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2} = 7,97 \times 10^{-4}, \quad (6.3)$$

wobei die Matrix-Vektor-Nomenklatur aus (5.42) übernommen wurde. Die mittlere Dauer einer Iteration liegt bei 27 Sekunden, wobei zehn Threads auf einem Intel Prozessor mit 3,47 GHz Taktfrequenz verwendet wurden. Abb. 6.6 zeigt den relativen Fehler des Transformationsergebnisses im Vergleich zum normalisierten RCS. Es wird ersichtlich, dass der Transformationsfehler

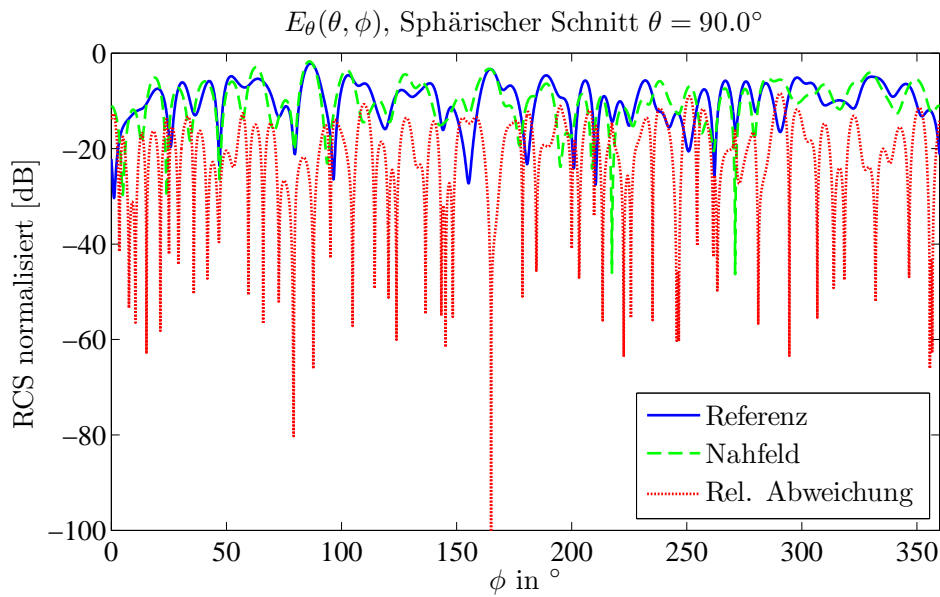


Abbildung 6.5: Abweichung des Nahfeldstreuenspektrums vom Fernfeldstreuenspektrum (dient als Referenz) bei einer Entfernung von 20λ nach einer Normalisierung beider Kurvensätze.

deutlich geringer als in Abb. 6.5 ist, wo die untransformierten Nahfeldbeobachtungen im Abstand von 20λ mit der Referenz verglichen wurden. Die Gegenüberstellung der maximalen Fehler vor und nach der Transformation in Tabelle 6.1 verdeutlicht die Wirksamkeit des eingesetzten Verfahrens.

Tabelle 6.1: Wie an den maximalen Abweichungen der Schnitte erkennbar ist, geben die transformierten Messdaten die Fernfeldreferenz deutlich besser wieder als unprozessierte Nahfelder dies tun.

Schnitt	Nahfeld	Transformiert
$\theta = 90^\circ$	-8,4 dB	-49,2 dB
$\phi = 0^\circ$	-7,8 dB	-49,7 dB
$\phi = 30^\circ$	-8,4 dB	-47,4 dB
$\phi = 60^\circ$	-8,2 dB	-45,3 dB
$\phi = 90^\circ$	-9,5 dB	-47,5 dB
$\phi = 120^\circ$	-8,4 dB	-45,5 dB
$\phi = 150^\circ$	-7,1 dB	-48,1 dB
Mittelwert	-8,3 dB	-47,6 dB
Maximum	-7,1 dB	-45,3 dB

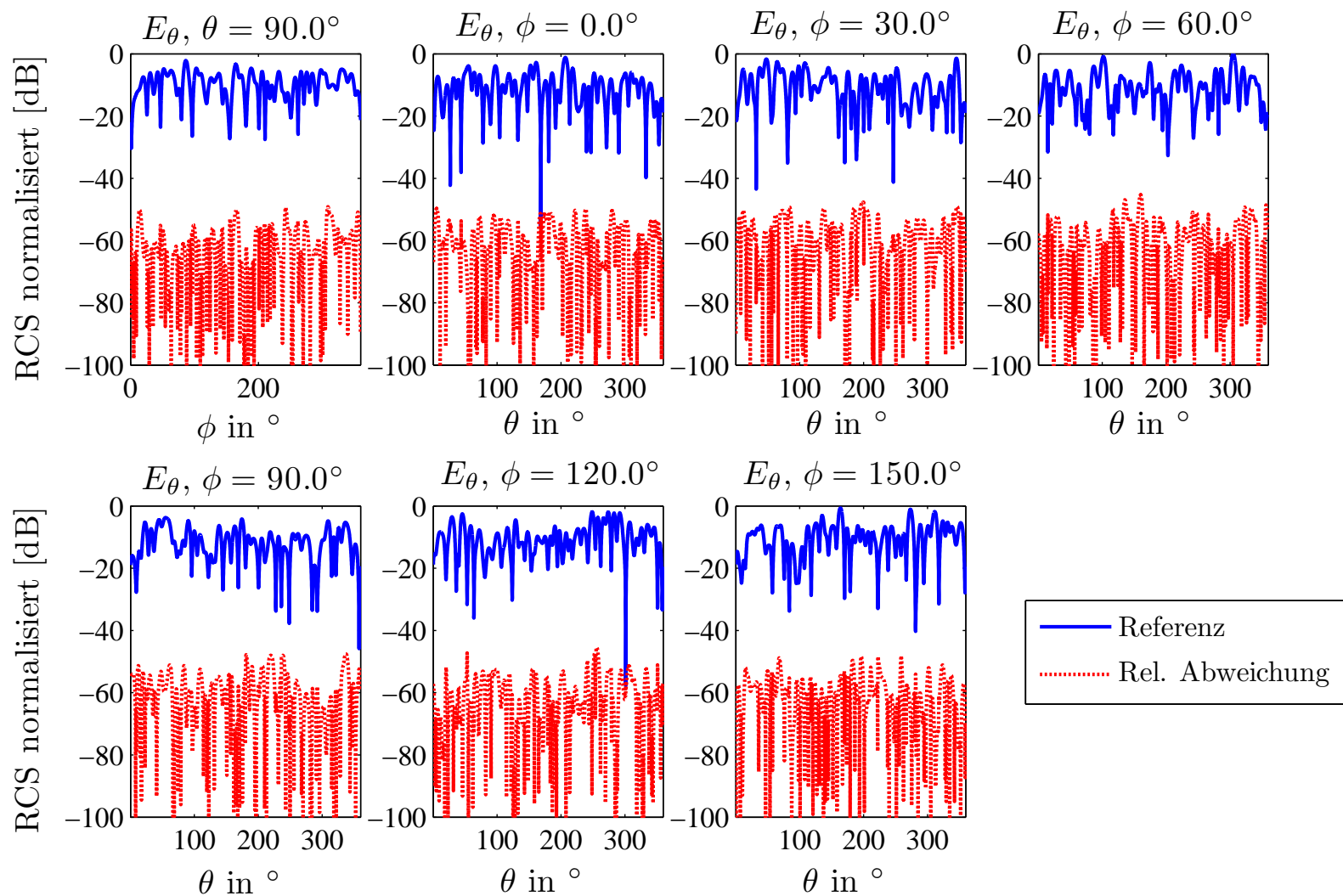


Abbildung 6.6: Abweichung des Transformationsergebnisses vom Fernfeldstreuungsspektrum (dient als Referenz) nach einer Normalisierung beider Kurvensätze.

6.2 Realistische Szenarien mit Verkopplungen und Mehrfachinteraktionen

Für die Berechnung der Ersatzquellen oder Streuzentren wird ein Modell verwendet, bei dem die Beobachtungen linear von der zu bestimmenden Verteilung abhängen. Zusätzlich gilt die Annahme, dass die Wellenausbreitung im Freiraum stattfindet und nichtstrahlende Ströme nicht berücksichtigt werden. Diese notwendigen Vereinfachungen können bei der Berechnung der Ersatzquellen- oder Streuzentrenverteilungen zu Artefakten führen, wenn Verkopplungen oder Mehrfachinteraktionen auftreten. Im Rahmen der folgenden Szenarien soll genauer untersucht werden, wie sich die erwähnten Berechnungsfehler in der Praxis bemerkbar machen.

6.2.1 Breitbandiger Hornstrahler

Bei der Vermessung von breitbandigen Signalen mit einer einzigen Antenne ist es hilfreich, wenn die elektromagnetischen Eigenschaften der Antenne im gesamten relevanten Frequenzbereich sehr ähnlich sind. Der breitbandige Hornstrahler HF907 von Rohde & Schwarz², welcher in Abb. 6.7 dargestellt ist, besitzt im Frequenzbereich von 800 MHz bis 18 GHz ein Stehwellenverhältnis (VSWR) von unter 3 : 1 sowie einen hohen Gewinn mit flachem Frequenzverlauf. Im Folgenden soll die Berechnung von äquivalenten Volumenströmen einen Eindruck von der Funktionsweise der Antenne liefern.

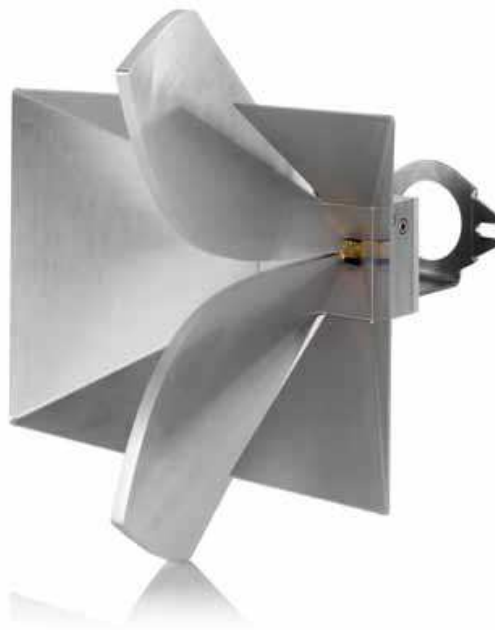


Abbildung 6.7: Offizielles Produktbild der Rohde & Schwarz Antenne „HF907 Double-Ridged Waveguide Horn“ [Rohde & Schwarz GmbH & Co. KG 2015].

Ausgangspunkt bei der Berechnung von Ersatzquellendarstellungen sind abgestrahlte Felder. Die Charakterisierung des Strahlungsdiagramms wurde in der Antennenmesskammer des Lehrstuhls für Hochfrequenztechnik an der Technischen Universität München durchgeführt.

²Rohde & Schwarz GmbH & Co. KG, München, Deutschland

Der grundsätzliche Messaufbau zur Ermittlung der Nahfelder ist in Abb. 6.8 zu sehen. Zur Abdeckung des Frequenzbereichs von 1,15 GHz bis 18 GHz wurden die Rechteckhohlleitersonden WR650, WR430, WR284, WR187, WR137, WR90 und WR62 eingesetzt. Abb. 6.9 und Abb. 6.10 zeigen die ermittelten ko- und kreuzpolaren Komponenten der sphärischen Nahfeldmessung für 1,15 GHz beziehungsweise 18 GHz, wobei die kreuzpolare Komponente durch Drehung der Sonde um 90° zustande kommt. Aus den Diagrammen geht hervor, dass sich die linear polarisierte Hauptkeule bei $\theta = 0^\circ$ befindet.

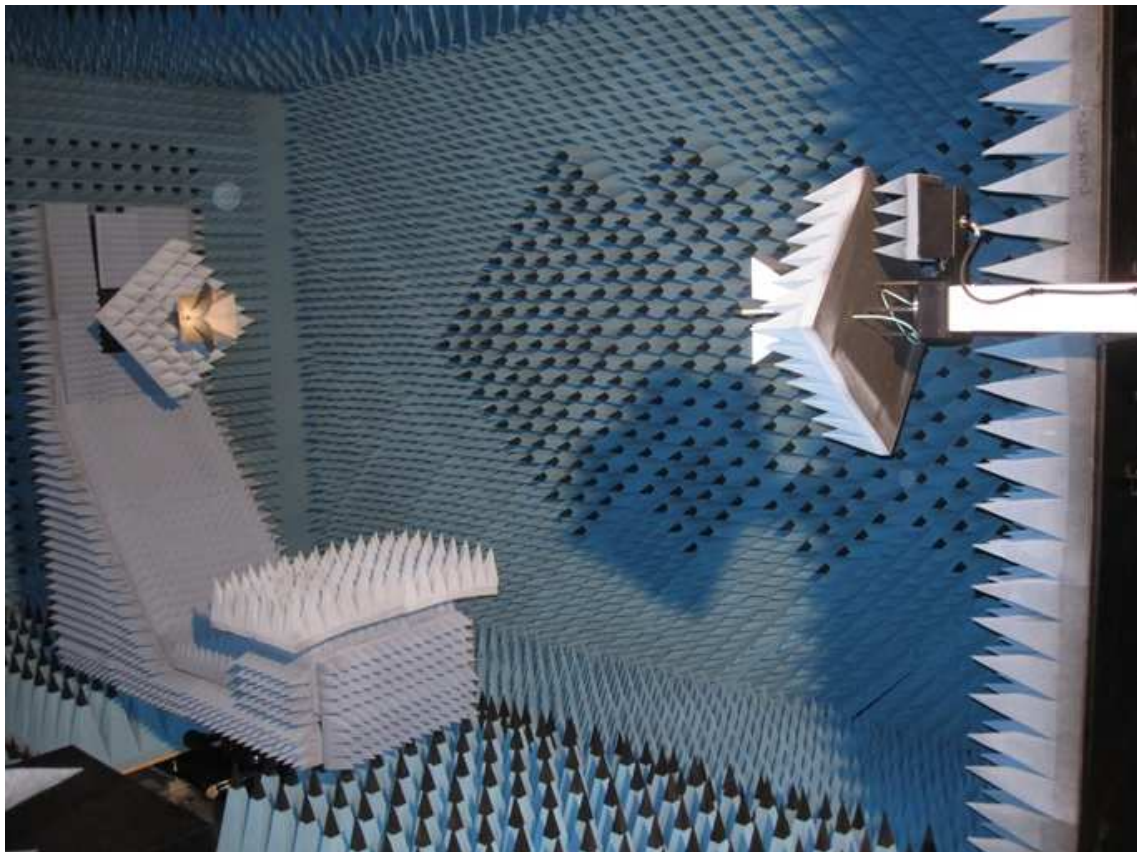


Abbildung 6.8: Die Antenne HF907 in der Antennenmesskammer am Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Technische Universität München.

Das hierarchische Verfahren zur Erzeugung der Volumenstromverteilung erfordert Fernfeld-daten. Daher wird zuerst eine Nahfeld-Fernfeld-Transformation der Messdaten durchgeführt. Jede Frequenz wird separat prozessiert und der zugehörige Rechenaufwand hängt von der elektrischen Größe der Antenne ab. Für die niedrigeren Frequenzen können deshalb die direkten Translationen aus Abb. 5.7 eingesetzt werden, während dies bei den höheren Frequenzen durch den starken Anstieg bei Speicherbedarf und Rechenzeit nicht sinnvoll ist. Die Verwendung von direkten Translationen führt bei 1,15 GHz zu einem Speicherverbrauch von insgesamt 56 MB, während bei 18 GHz bereits 31,7 GB alleine für die vorberechneten Translationsoperatoren benötigt werden. Durch die hierarchische Unterteilung der Nahfeldmessungen basierend auf einem Octree (siehe Abb. 5.8) sinkt der insgesamt benötigte Speicherverbrauch bei 18 GHz hingegen auf 12,7 GB, wobei eine Iteration des Gleichungslösers im Mittel 363 Sekunden auf einem Intel Prozessor mit 4 Kernen und einer nominellen Taktfrequenz von 3,47 GHz benötigt. Eine stabile Lösung stellt sich bereits bei einem Residuum von 10^{-2} nach der Definition in (6.3) ein. Zur

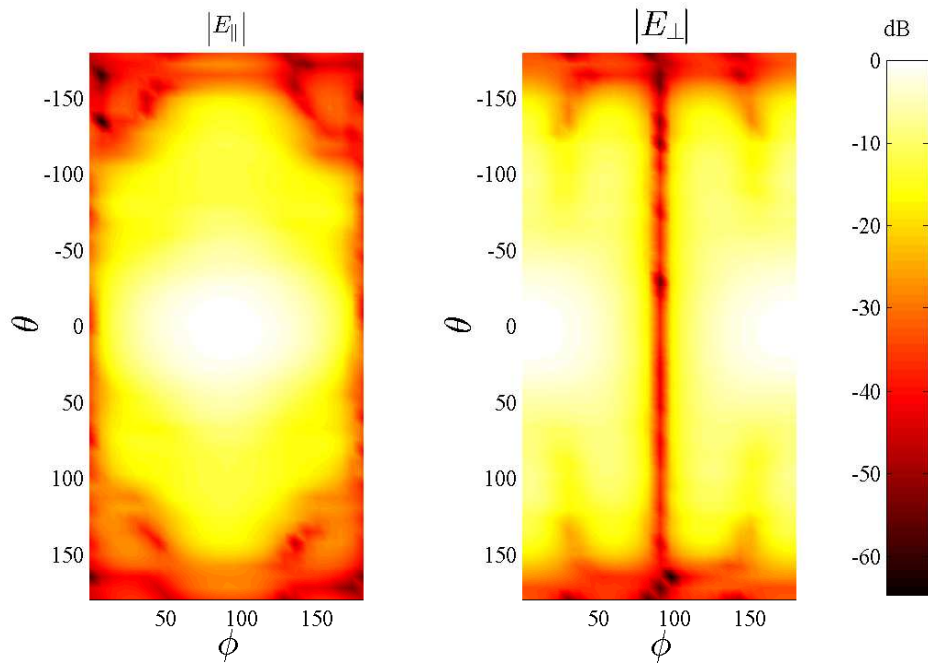


Abbildung 6.9: Mit Rechteckhohlleitersonde WR650 gemessene ko- und kreuzpolare Nahfeldamplitude in der sphärischen Messfläche im Abstand 2,06 m bei 1,15 GHz.

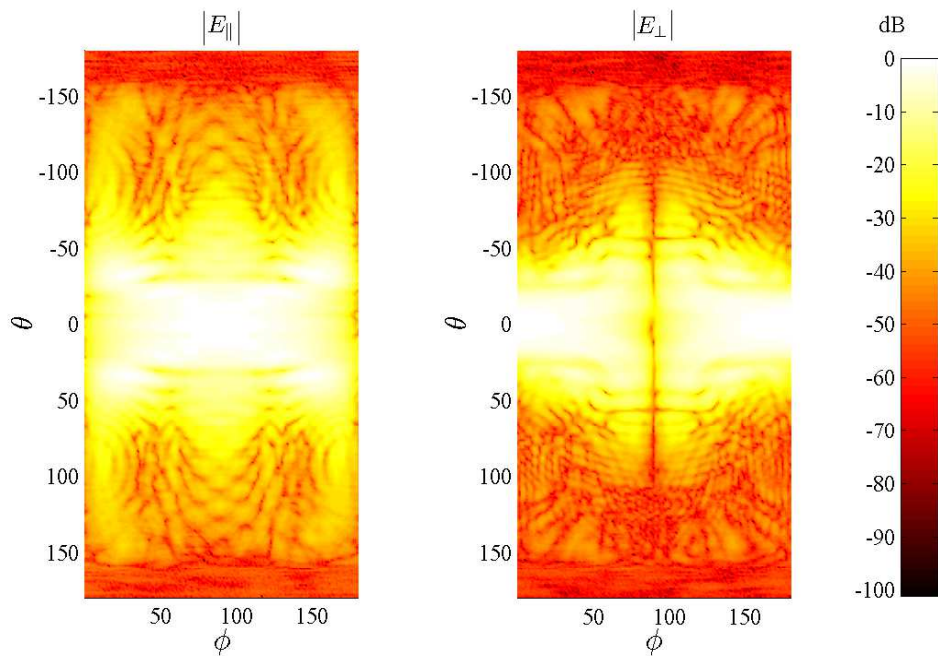


Abbildung 6.10: Mit Rechteckhohlleitersonde WR62 gemessene ko- und kreuzpolare Nahfeldamplitude in der sphärischen Messfläche im Abstand 2,72 m bei 18 GHz.

Erreichung dieses Residuums werden für die Messdaten bei der Frequenz 1,15 GHz 11 Iterationen oder 9,1 Sekunden benötigt, bei 18 GHz sind es 21 Iterationen oder etwas mehr als zwei Stunden. Das zugrunde liegende Gleichungssystem besitzt im ersten Fall 160 Unbekannte und 2450 Messwerte, im zweiten Fall 23 760 Unbekannte und 90 902 Messwerte.

Um die Genauigkeit des rekonstruierten Fernfeldspektrums abschätzen zu können, wurde das Nahfeld in zwei unterschiedlichen Konfigurationen vermessen. Durch einen Versatz der Sonde um 180 mm entlang der Ausbreitungsrichtung wirken sich Interaktionen mit der Messumgebung in den beiden Messdatensätzen unterschiedlich aus. Dies gilt natürlich auch für andere Einflussfaktoren wie Rauschen. Abweichungen zwischen den aus den jeweiligen Messdatensätzen rekonstruierten Fernfeldern können damit als grobe Abschätzung des Messfehlers interpretiert werden. Die Gegenüberstellung ausgewählter Fernfeldschnitte bei den Frequenzen 1,15 GHz und 18 GHz ist in Abb. 6.11 und Abb. 6.12 zu finden. Bei den dargestellten Diagrammen handelt es sich um orthogonale Schnitte durch die Hauptkeule, welche die ko- und kreuzpolaren Komponenten zeigen. Der relativ hohe Pegel in der kreuzpolaren Komponente ist dabei darauf zurückzuführen, dass der breitbandige Hornstrahler mit einem Winkelversatz von $1,2^\circ$ auf dem Positionierer montiert war. Zur Rekonstruktion der Fernfelddaten kommt dabei das in dieser Arbeit vorgestellte Transformationsverfahren zum Einsatz, welches durch die Abkürzung FIAFTA (fast irregular antenna field transformation algorithm) [Schnattinger et al. 2014a; Schnattinger et al. 2014b] gekennzeichnet ist.

Zum Vergleich wurden die Fernfelddaten zusätzlich noch mit einer Software der Firma NSI³ rekonstruiert, welche auf der etablierten sphärischen Nahfeld-Fernfeld-Transformation basiert [Hald et al. 1988]. Abb. 6.13 und Abb. 6.14 zeigen wiederum die zugehörigen Ergebnisse, welche ein sehr ähnliches Fehlerniveau wie beim hierarchischen Transformationsverfahren aufweisen.

³ Nearfield Systems Inc., Torrance, CA, USA

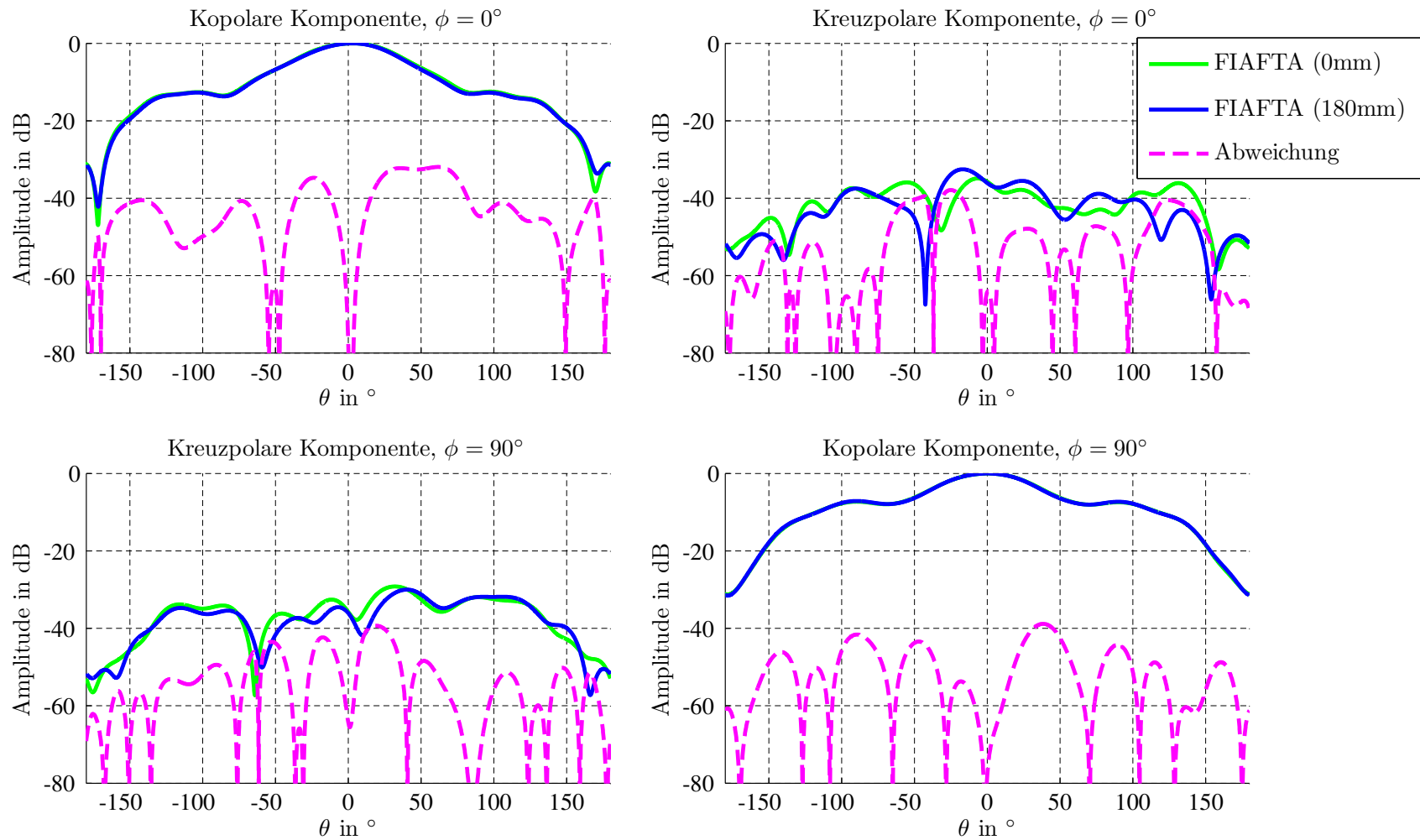


Abbildung 6.11: Mit FIAFTA berechnete Fernfeldschnitte bei 1,15 GHz für unterschiedliche Messentfernungen im Vergleich.

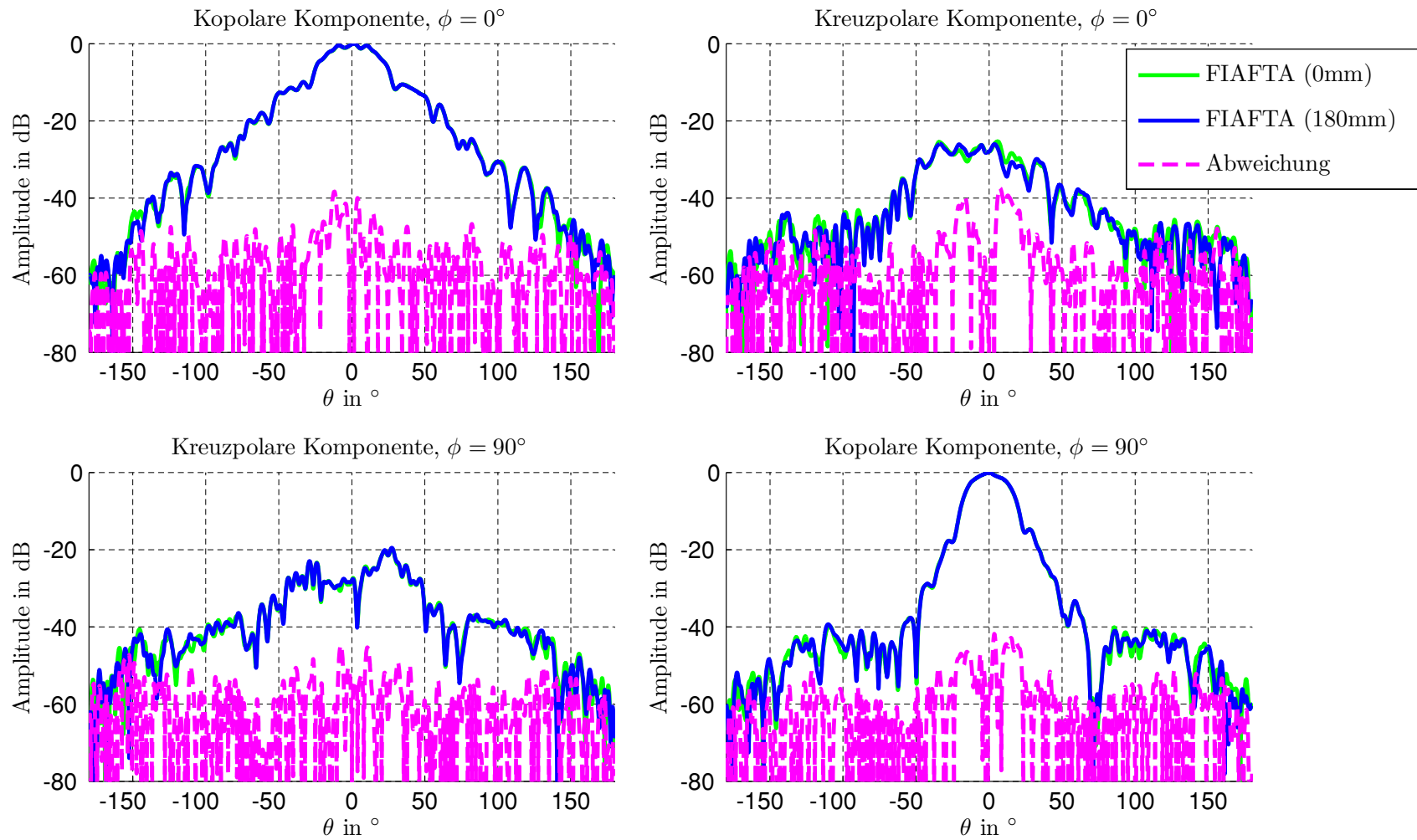


Abbildung 6.12: Mit FIAFTA berechnete Fernfeldschnitte bei 18 GHz für unterschiedliche Messentfernungen im Vergleich.

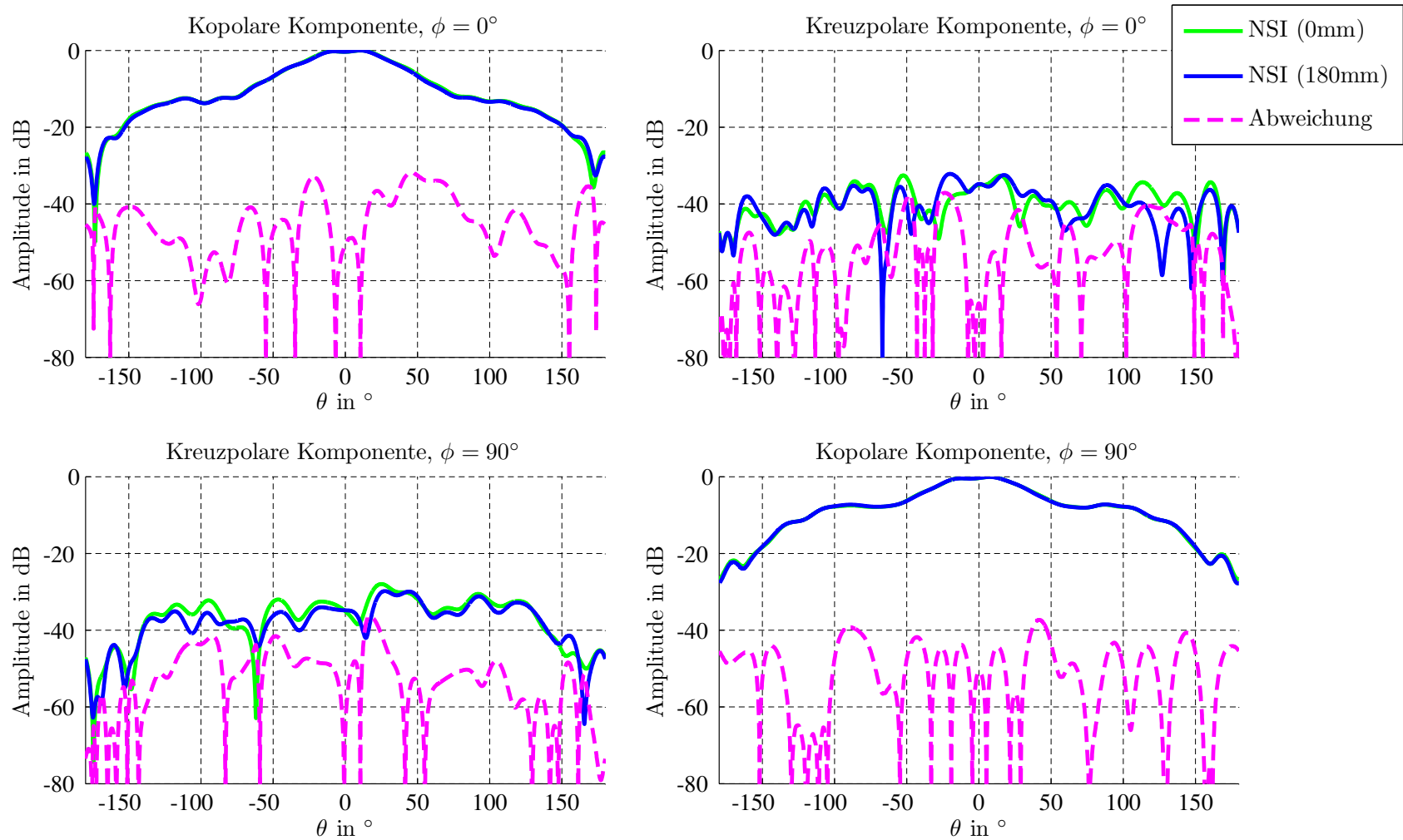


Abbildung 6.13: Mit der NSI-Software berechnete Fernfeldschnitte bei 1,15 GHz für unterschiedliche Messentfernungen im Vergleich.

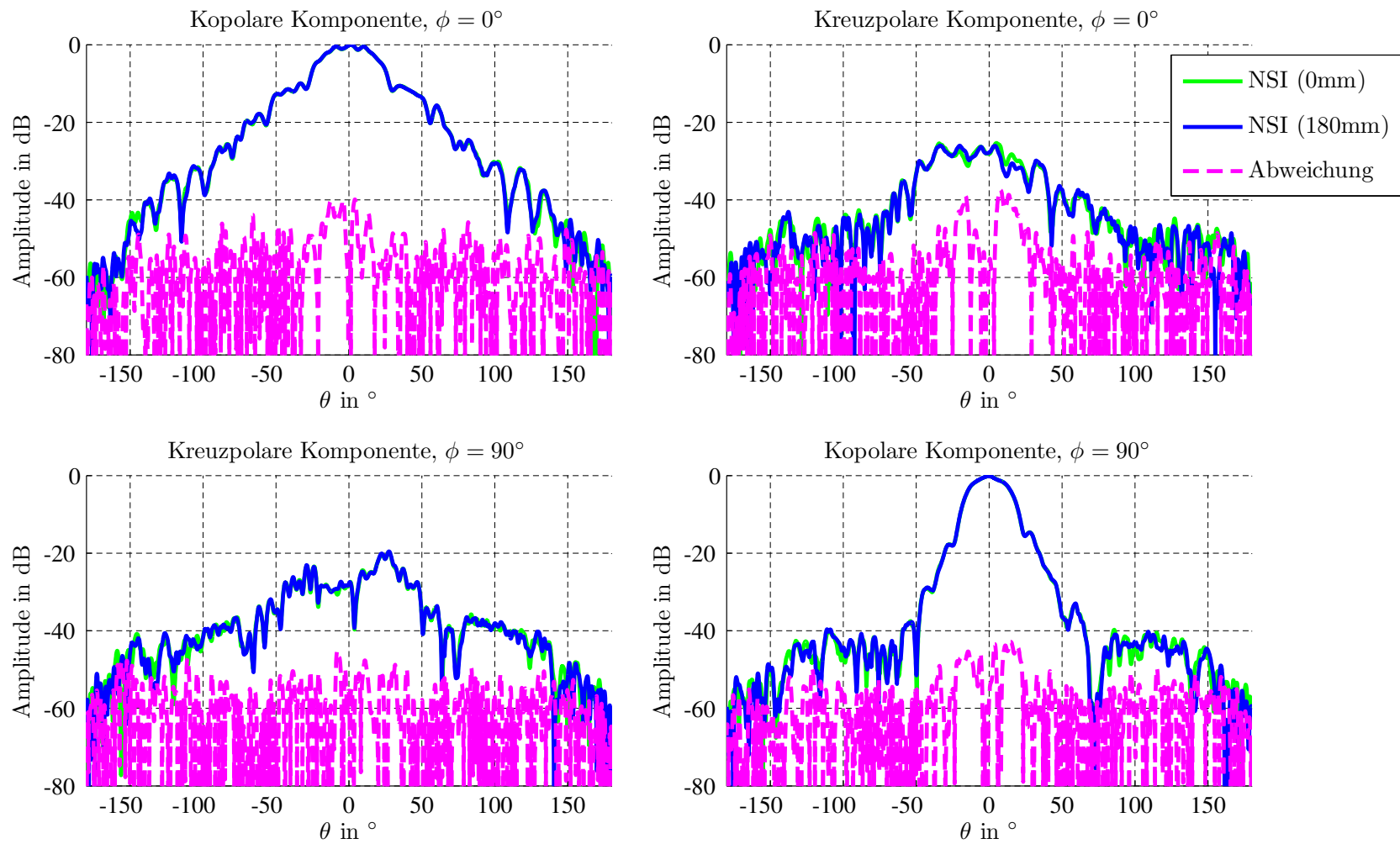


Abbildung 6.14: Mit der NSI-Software berechnete Fernfeldschnitte bei 18 GHz für unterschiedliche Messentfernungen im Vergleich.

Abschließend werden noch die rekonstruierten Fernfeldschnitte beider Transformationsverfahren in Abb. 6.15 und Abb. 6.16 verglichen, wobei der Messdatensatz ohne Sondenversatz zur Anwendung kommt. Die resultierenden Abweichungen sind hauptsächlich darauf zurückzuführen, dass sich Messungenauigkeiten, wie unerwünschte Reflexionen und Rauschen, in den beiden Verfahren unterschiedlich auswirken. In der hierarchischen Transformation führt der Abbruch des iterativen Löser bei der Erreichung des gewünschten Residuums zu einer Regularisierung der Lösung, was im Optimalfall mit der Unterdrückung von Fehlereinflüssen einhergehen kann [Schmidt und Eibert 2010]. Außerdem wäre es möglich, ein einziges Rekonstruktionsergebnis aus allen verfügbaren Daten zu bestimmen, anstatt für jeden Datensatz ein separates Ergebnis zu berechnen. In diesem Fall existiert jedoch kein Referenzergebnis zur Fehleranalyse, da die NSI-Software eine Kombination verschiedener Messdatensätze nicht zulässt.

Bei der Bilderzeugung wird der Bildinhalt hauptsächlich von dominanten Signalanteilen in der Hauptstrahlrichtung bestimmt. Die geringen Unterschiede in den Transformationsergebnissen haben somit keinen merklichen Einfluss auf die erzeugten Bilder. Für die weiteren Berechnungen werden ausschließlich die mit der NSI-Software rekonstruierten Daten verwendet. Die vorliegenden Fernfeldspektren im Frequenzbereich 1,15 GHz bis 18 GHz werden zur Bilderzeugung in zwei Bereiche unterteilt: 1,15 GHz bis 8 GHz und 8 GHz bis 18 GHz. Die Berechnung erfolgt jeweils mit der hierarchischen Disaggregation in Kap. 4. Diese Vorgehensweise führt im unteren Frequenzbereich zu den Abbildungen 6.17 und 6.18 sowie im oberen Frequenzbereich zu den Abbildungen 6.19 und 6.20. Im Gegensatz zum Produktabbild in Abb. 6.7 wird das Koordinatensystem so definiert, dass die Hauptkeule nach oben zeigt und damit entlang der z -Achse ausgerichtet ist. Während aus den Flächen mit konstanter Amplitude - auch genannt Isoflächen - nur die grobe Form der Hornapertur hervor geht, gibt die vektorielle Darstellung auch die lineare Polarisierung korrekt wieder. Da sich die Antenne in einem weiten Frequenzbereich sehr ähnlich verhält, gelten diese Beobachtungen sowohl für den unteren als auch für den oberen Frequenzbereich. Die Intensität der Ersatzquellen konzentriert sich vor allem im Zentrum des Hornstrahlers, da sich dort der Speisepunkt befindet. Damit lässt die Darstellung mit volumetrischen Ersatzquellen einige grundsätzliche Aussagen über die Eigenschaften einer breitbandigen Antenne zu, ohne dass Vorwissen über die Geometrie erforderlich wäre.

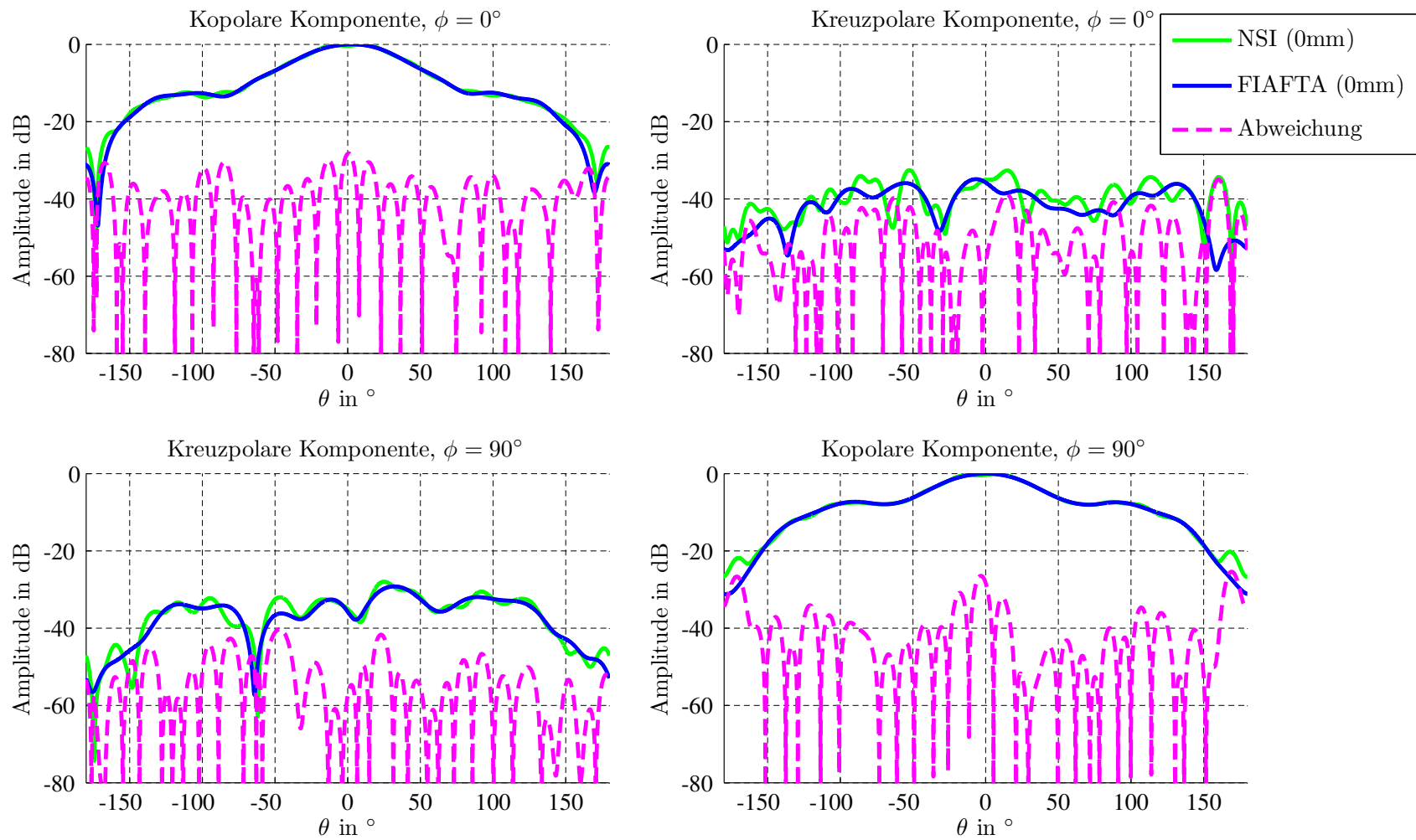


Abbildung 6.15: Vergleich der unterschiedlichen Transformationsverfahren bei Verwendung der 1,15 GHz Messdaten ohne Versatz ($z = 0$ mm).

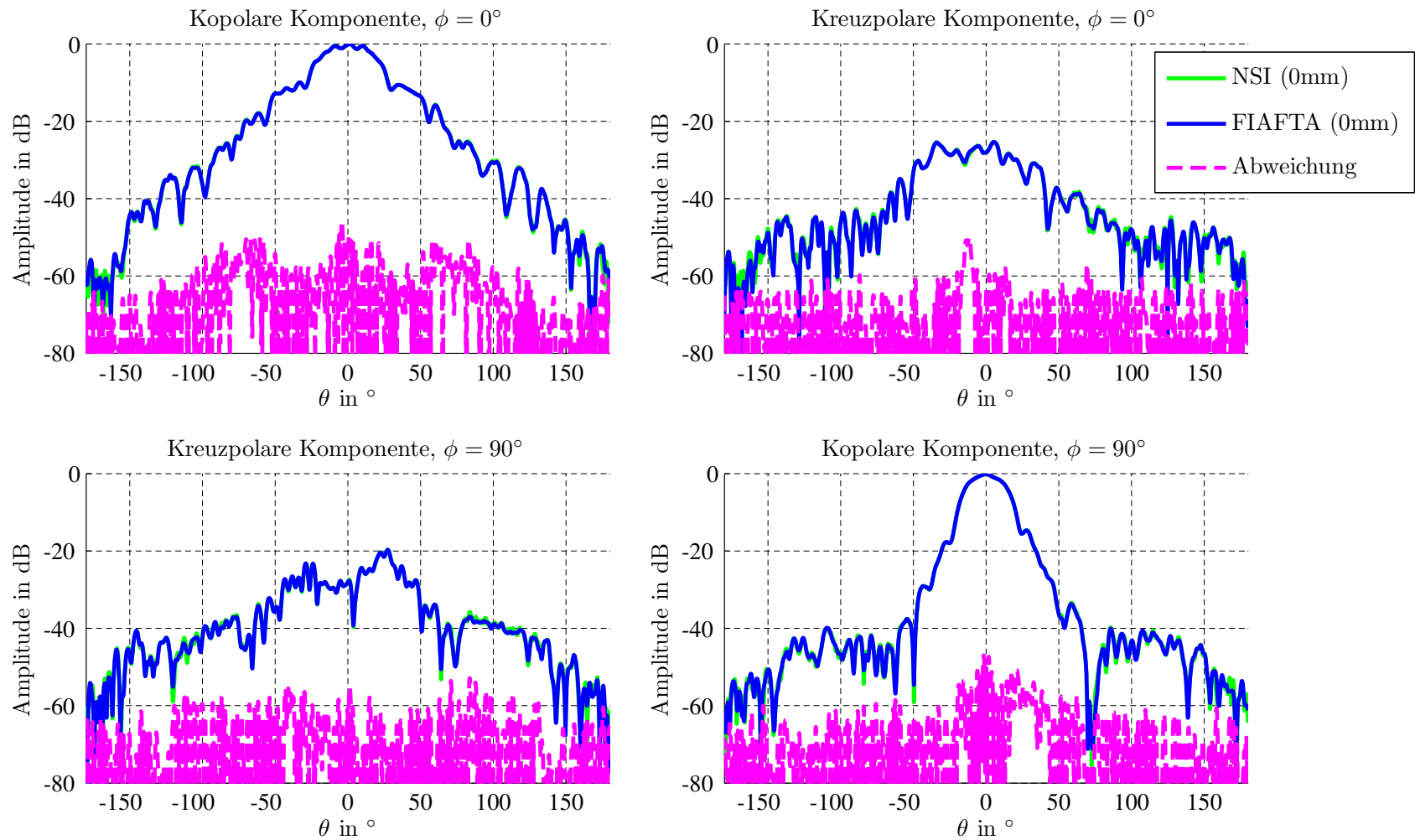


Abbildung 6.16: Vergleich der unterschiedlichen Transformationsverfahren bei Verwendung der 18 GHz Messdaten ohne Versatz ($z = 0$ mm).

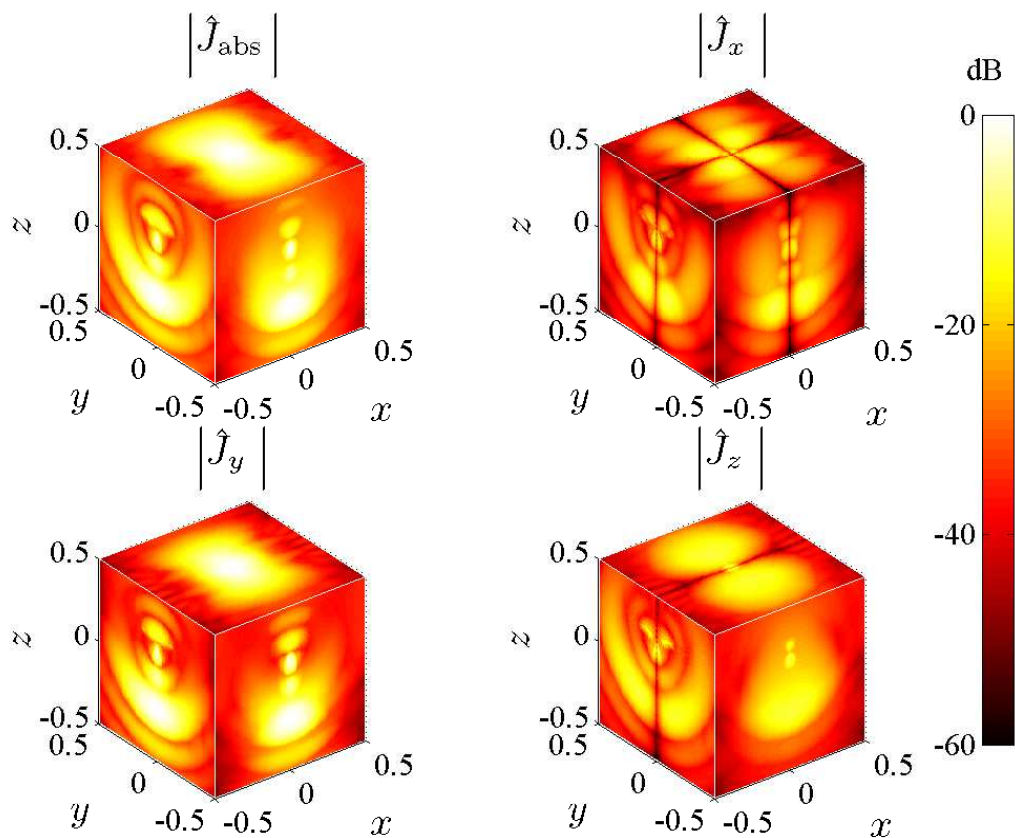


Abbildung 6.17: Projektionen der äquivalenten vektoriiellen Volumenstromdichte für einen Frequenzbereich von 1,15 GHz bis 8 GHz.

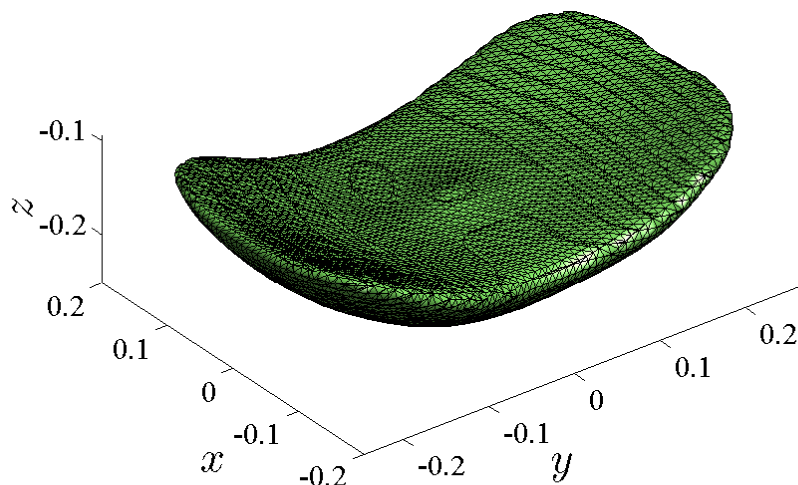


Abbildung 6.18: Isofläche der absoluten äquivalenten Volumenstromdichte für einen Frequenzbereich von 1,15 GHz bis 8 GHz.

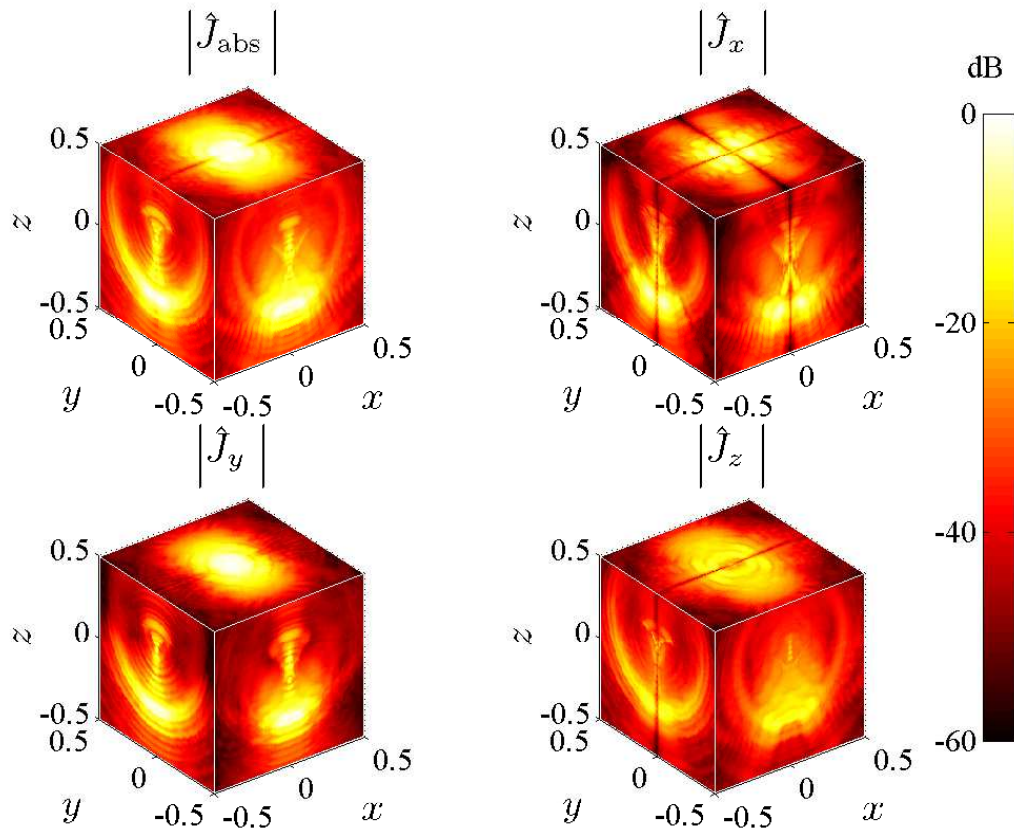


Abbildung 6.19: Projektionen der äquivalenten vektoruellen Volumenstromdichte für einen Frequenzbereich von 8 GHz bis 19 GHz.

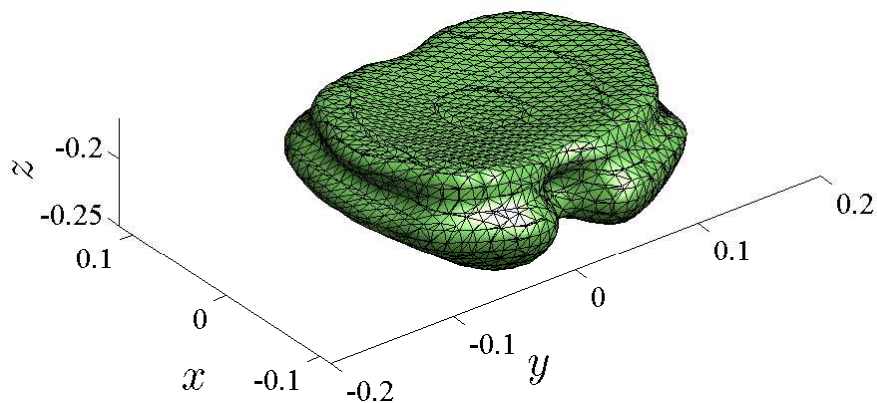


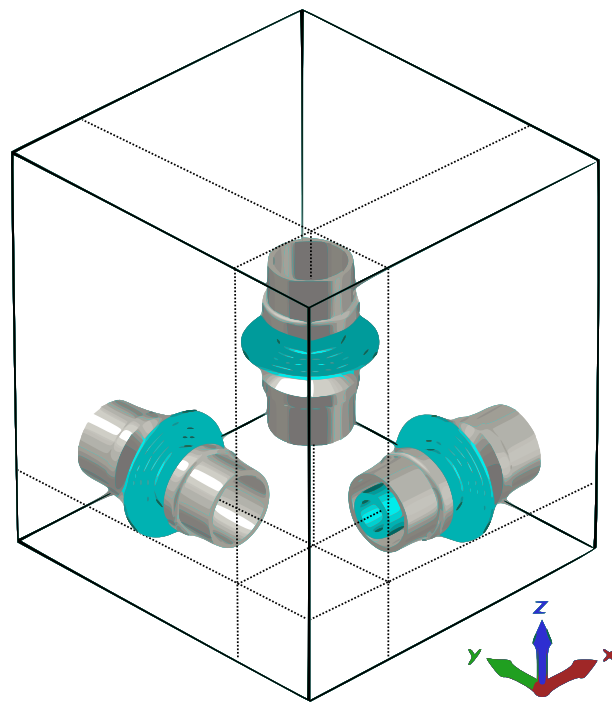
Abbildung 6.20: Isofläche der absoluten äquivalenten Volumenstromdichte für einen Frequenzbereich von 8 GHz bis 19 GHz.

6.2.2 Antennenanordnung mit drei Elementen

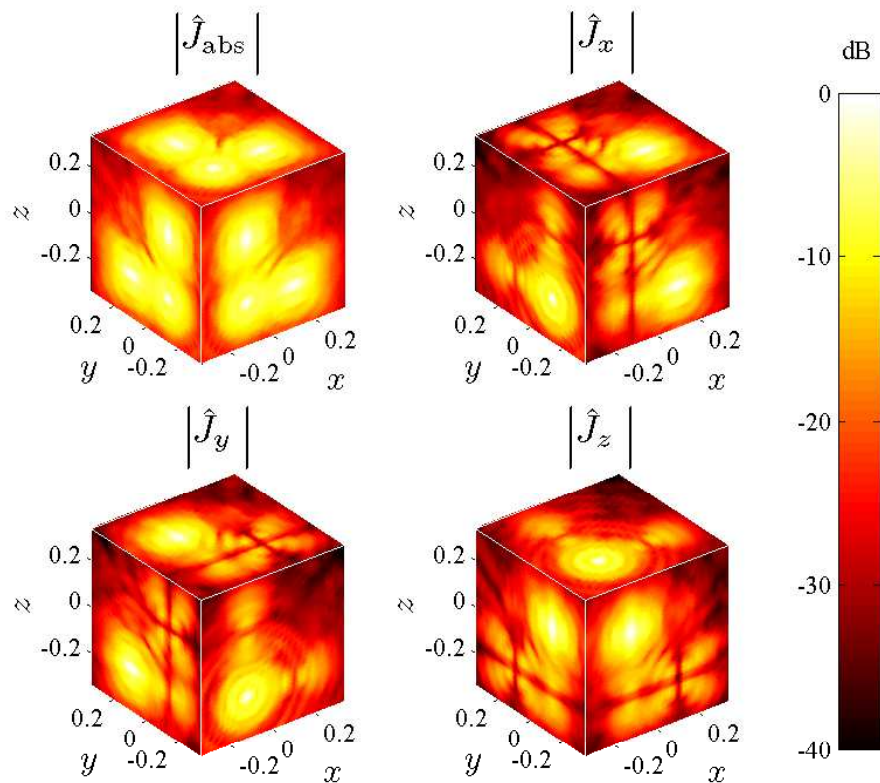
Im Folgenden wird eine Anordnung mit drei unterschiedlich orientierten Antennen im Abstand von 31 cm untersucht. Dabei kommt die von Ott und Eibert [2010] entworfene bikonische Ultrabreitbandantenne mit einem Frequenzbereich von 400 MHz bis über 10 GHz zum Einsatz. Die drei Antennen sind, wie in Abb. 6.21a zu sehen, an den kartesischen Koordinatenachsen ausgerichtet. Die Berechnung der Fernfelder erfolgt mit dem Zeitbereichslöser in CST MWS [Computer Simulation Technology 2011], wobei für alle Antennen die gleiche Anregung mit einem Frequenzbereich von 400 MHz bis 3 GHz verwendet wird. Auch bei einer Gruppenantenne erfolgt die Anregung an den einzelnen Elementen synchron. Der Phasenbezug dient dort zur Einstellung der gewünschten Abstrahlcharakteristik. Die durch die Simulation ermittelten Fernfelder werden auf einem äquidistanten Gitter mit $N_f = 16$, $N_\phi = 180$ und $N_\theta = 91$ ausgewertet und anschließend durch eine sphärische Interpolation in ein Gauß-Legendre-Gitter mit $N_\phi = 128$ und $N_\theta = 64$ konvertiert. Jeder einzelne Abtastpunkt beinhaltet dabei ϕ - und θ -Komponenten.

Die Fernfelder liegen nun auf einem sphärischen Gitter vor, welches sich für die hierarchische Disaggregation in Kap. 4 direkt verwenden lässt. Parameter wie die Anzahl der verwendeten Hierarchieebenen und die Interpolationsordnung haben dank der zugrunde liegenden Überabtastung keinen merklichen Einfluss auf die Bildqualität. Eine Visualisierung der resultierenden Verteilungsfunktion ist in Abb. 6.21b dargestellt. Im Bild können die drei Gruppenelemente eindeutig identifiziert und anhand ihrer Position und Orientierung unterschieden werden. Allerdings geht die Geometrie der Antennen aus der diffusen Verteilung der Ersatzquellen nicht hervor. Ein Grund hierfür ist, dass die realen Quellen im Gegensatz zum Modell nicht unter Freiraumbedingungen strahlen. Außerdem werden die über die Antenne verteilten Ströme aufgrund von Dispersionseffekten nicht zeitgleich angeregt. Analog zum linearen Problem in Abschnitt 6.1.1 wirkt sich auch die Vernachlässigung von nichtstrahlenden Strömen negativ im Bild aus.

Die Berechnung von Ersatzquellen mit einer höheren physikalischen Aussagekraft wäre beispielsweise durch die Verwendung einer angepassten Green'schen Funktion, welche die Wellenausbreitung im vorliegenden Szenario genauer modelliert, möglich. Diese problemangepasste Vorgehensweise wurde hier jedoch nicht näher verfolgt, da der Schwerpunkt in dieser Arbeit auf dem Entwurf eines universell einsetzbaren Verfahrens liegt.



(a) Anordnung bikonischer Antennenelemente



(b) Ersatzquellenverteilung, berechnet aus breitbandigen Fernfeldbeobachtungen

Abbildung 6.21: Anordnung breitbandiger Antennen mit zugehöriger Ersatzquellendarstellung.

6.2.3 Perfekt leitender Streukörper

Um die an einem idealen elektrischen Leiter (PEC) gestreuten Felder mit einem Integralgleichungsverfahren zu berechnen, müssen alle Oberflächen mit einem Gitter diskretisiert werden. Die Flächenelemente werden für die Definition von Basisfunktionen benötigt, deren Koeffizienten die Unbekannten im zu lösenden Gleichungssystem darstellen. Unter der Voraussetzung, dass die Diskretisierungsdichte unverändert bleibt, steigt die Anzahl dieser Unbekannten bei flächigen Körpern quadratisch mit der elektrischen Größe des Streuobjekts. Im Gegensatz dazu schlägt sich die elektrische Größe bei Drahtgittermodellen nur linear in der Dimension des Gleichungssystems nieder.

Abb. 6.22 zeigt das Drahtgittermodell eines gedrehten Würfels mit der Kantenlänge 2 m, bei dem drei Kanten entfernt wurden. Zur besseren Vorstellung sind die entfernten Kanten gestrichelt eingezeichnet. Eine zirkular polarisierte ebene Welle in Richtung der negativen x -Achse dient als Anregung. Der simulierte Frequenzbereich umfasst 500 MHz bis 1 GHz, d.h. die Kantenlänge des Würfels entspricht der elektrischen Größe $6.7\lambda_{\min}$.

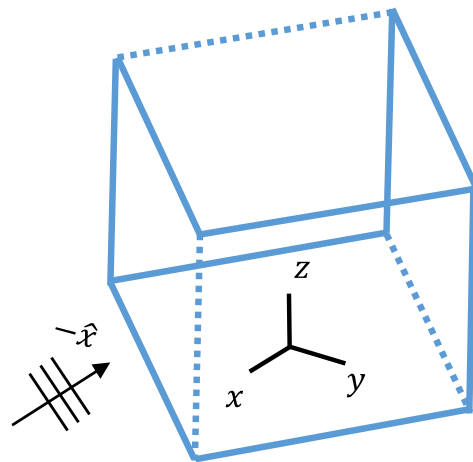
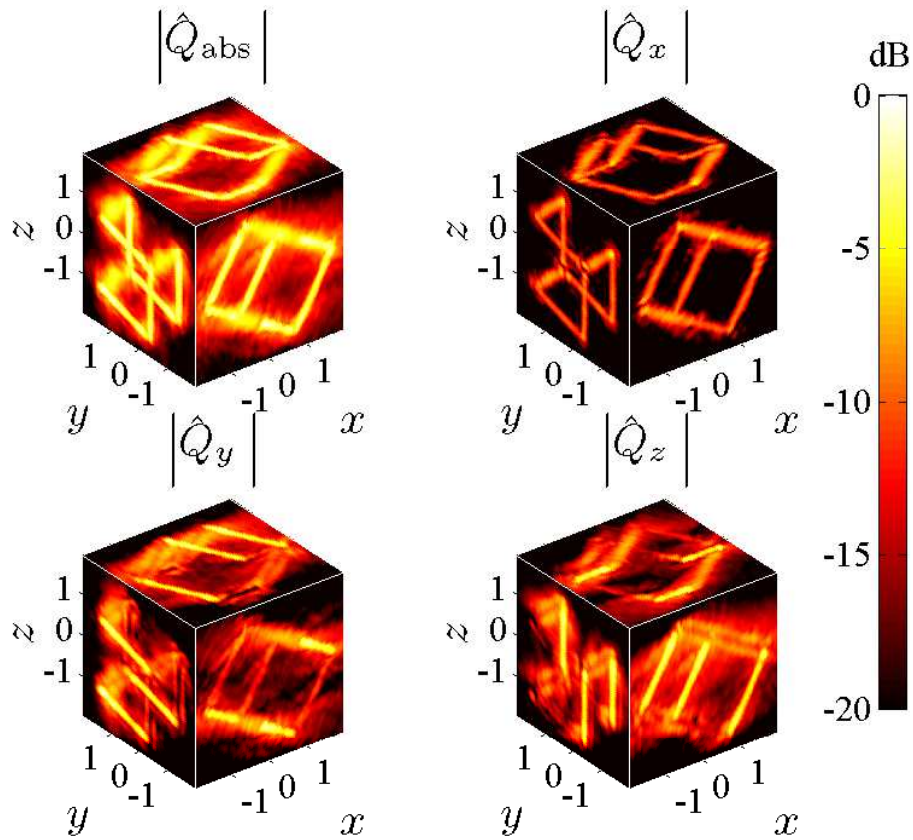


Abbildung 6.22: Drahtgittermodell eines gedrehten Würfels, bei dem drei Kanten entfernt wurden.

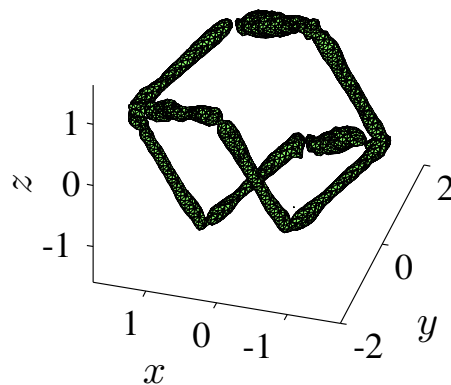
Zur Berechnung des gestreuten Feldes wird EMSS FEKO [EM Simulation Software 2013] verwendet, wobei die unbeschleunigte Momentenmethode zum Einsatz kommt. Die ϕ - und θ -Komponenten des Fernfelds werden auf einem regelmäßigen sphärischen Gitter mit $N_f = 10$, $N_\phi = 360$ und $N_\theta = 181$ abgetastet. Die Berechnung der Streuzentrenverteilung erfolgt mit der hierarchischen Zerlegung in Kap. 4. Das resultierende Bild in Abb. 6.23a zeigt den zugrunde liegenden Drahtwürfel, wobei die fehlenden Kanten leicht zu identifizieren sind. Noch deutlicher wird dies in Abb. 6.23b bei der Darstellung einer Isofläche, einer Fläche mit konstanter Amplitude.

Obwohl die Polarisation der einfallenden Welle in die Berechnung nicht mit einfließt, lässt sich an den vektoriellen Komponenten der Streuzentren die Richtung der Ersatzströme ablesen. Aus dem Bild folgt, dass die Ströme hauptsächlich in y - und z -Richtung angeregt werden. Dies stimmt mit der Polarisationssebene der einfallenden Welle überein.

Zur Berechnung der Darstellungen in Abb. 6.23 wurden zehn Frequenzen zwischen 500 MHz und 1 GHz verwendet. Um zu untersuchen, wie sich eine verminderte Bandbreite auf die berechnete Streuzentrenverteilung auswirkt, wird das Verfahren auch auf reduzierte Datensätze angewendet. Abb. 6.24 zeigt, wie sich die erzeugten Bilder mit der Anzahl der verwendeten



(a) Projektionen der Maximalamplituden



(b) Darstellung einer Isofläche

Abbildung 6.23: Visualisierung der Ersatzquellenverteilung aus den bistatischen Beobachtungen eines Drahtwürfels.

Frequenzpunkte ändern. Die Quellen im linken Bild werden beispielsweise nur mit den Beobachtungen an einer einzigen Frequenz berechnet. Die Form des Streukörpers bleibt erkennbar. Daraus folgt, dass die Berechnung von volumetrischen Ersatzquellendarstellungen nicht unbedingt breitbandige Signale erfordert, sondern auch monofrequent erfolgen kann. Ein Vergleich mit den anderen Grafiken in Abb. 6.24 zeigt, dass eine steigende Anzahl an Frequenzpunkten für ein kontrastreiches Bild sorgt. Daraus folgt, dass breitbandige Punktantwortfunktionen tendenziell eine genauere Abbildung des unbekanntes Objekts liefern.

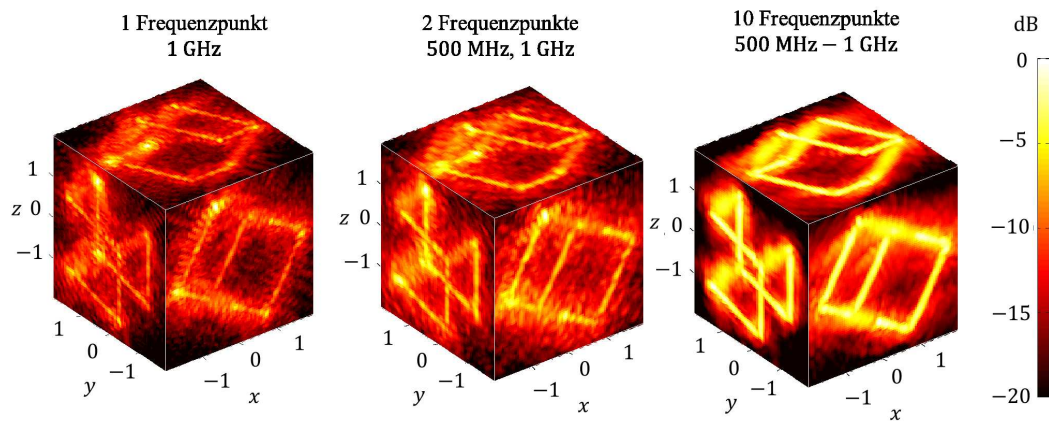


Abbildung 6.24: Einfluss von Bandbreite und Frequenzraster auf die Ersatzquellendarstellung.

6.2.4 Trihedral

Ein Tripelspiegel oder Trihedral zeichnet sich durch einen konstant hohen Rückstreuquerschnitt in einem großen Winkelbereich aus. Im Folgenden soll das Streuobjekt durch eine volumetrische Ersatzquellenverteilung dargestellt werden.

Das Simulationsmodell des Trihedrals besteht aus PEC und ist in Abb. 6.25 dargestellt. Die Apertur wird durch ein gleichschenkliges Dreieck beschrieben und ist senkrecht zur z -Achse ausgerichtet, wobei sich der Fluchtpunkt am Ursprung des Koordinatensystems befindet. Eine in y -Richtung polarisierte ebene Welle, die entlang der z -Achse und damit senkrecht zur Apertur bei $z = 0,6$ m einfällt, dient als Anregung. Bei der Frequenz 64 GHz entspricht die längste Kante des Tripelspiegels 302λ . Die elektromagnetische Simulation wird mit einem schnellen Integralgleichungslöser durchgeführt. Die transversalen Feldkomponenten E_x und E_y des gestreuten Feldes werden in der Ebene $z = 1$ m auf einer Fläche mit den Abmessungen $1,3$ m \times $1,3$ m ausgewertet. Die Amplitude des komplexen Feldvektors ist in Abb. 6.26 aufgetragen.

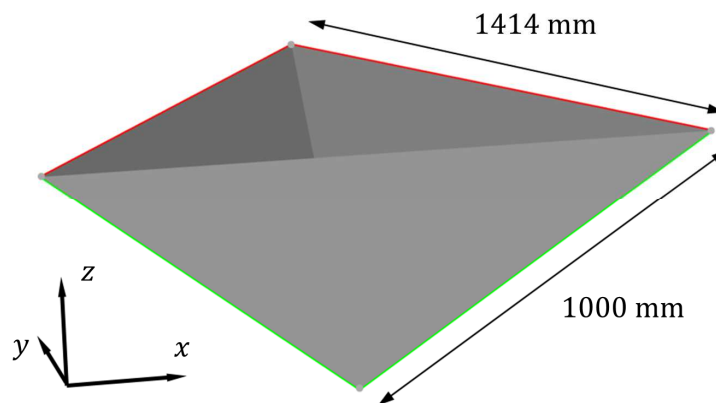


Abbildung 6.25: Geometrie des Tripelspiegels, wobei die z -Achse senkrecht auf der Aperturebene steht.

Zur effizienten Berechnung einer Ersatzquellenverteilung werden die 6,4 Mio. Beobachtungen des gestreuten Feldes zuerst ins Fernfeld transformiert. Das dabei zugrunde liegende inverse Problem mit 8,0 Mio. Unbekannten wird iterativ gelöst. Der Speicherbedarf bei der Transformation beträgt 104 GB und die mittlere Iterationszeit mit zehn CPU-Threads liegt bei 544 Sekunden.

Das resultierende Fernfeldspektrum ist in Abb. 6.27 dargestellt. Es lässt sich gut erkennen, dass der Hauptanteil der Leistung entgegengesetzt zur Einfallsrichtung zurückgestreut wird. Dabei werden die einfallenden Strahlen im zentralen hexagonalen Bereich, welcher in Abb. 6.26 deutlich erkennbar ist, dreimal reflektiert. An den Ecken des Trihedrals sind nur zwei Reflexionen möglich, welche den Strahl schließlich in eine andere Richtung lenken. Dies erklärt die drei Nebenkeulen in Abb. 6.27.

Das Transformationsergebnis soll nun mit dem Referenzergebnis aus dem Integralgleichungsverfahren verglichen werden. Abb. 6.28a zeigt Schnitte durch Haupt- und Nebenkeule, welche dem Ergebnis nach einer Iteration beziehungsweise beim Abbruch des iterativen Löser nach 100 Iterationen⁴ entsprechen. Dabei erleichtert der vergrößerte Ausschnitt der Hauptkeule in Abb. 6.28b die Analyse der Ergebnisse. Es wird ersichtlich, dass die Abweichungen der Kurven im zentralen Bereich äußerst gering sind. Dies ist wichtig, damit die Ersatzquellendarstellung

⁴Das Residuum beim Abbruch bemisst sich auf $4,1 \times 10^{-2}$ nach der Definition in (6.3).

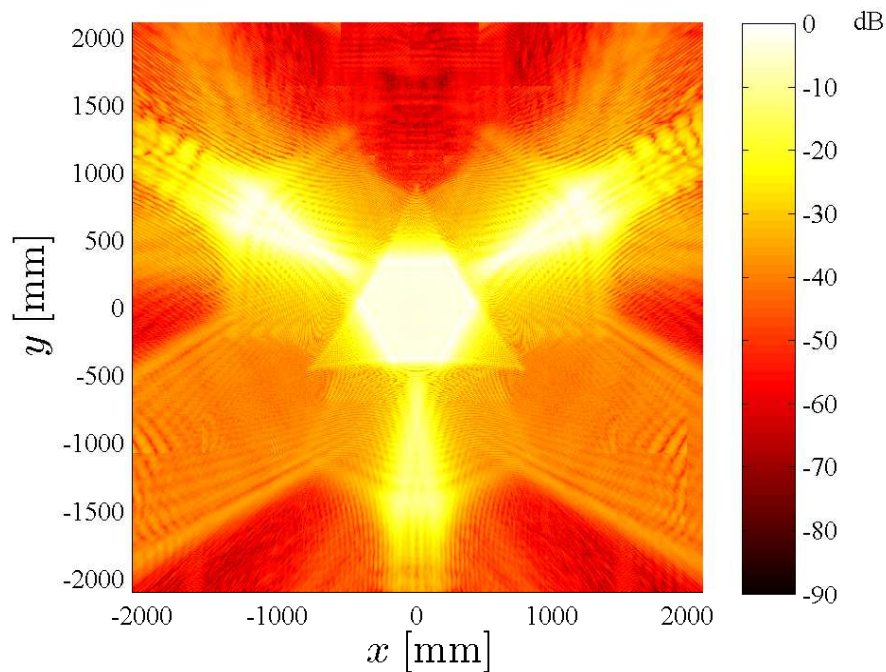


Abbildung 6.26: Amplitude des elektrischen Feldes in der Messfläche.

mit hoher Genauigkeit berechnet werden kann. Die Abweichungen der Kurven an den Rändern des Diagramms in Abb. 6.28a werden durch die endlichen Abmessungen der Messfläche verursacht.

Die Berechnung der Ersatzquellenverteilung erfolgt durch die hierarchische Methode in Kap. 4. Abb. 6.29 zeigt die Bilder, welche aus den vektoriellen Komponenten der volumetrischen Verteilung erzeugt wurden. Die Isofläche in Abb. 6.30 vermittelt einen plastischen Eindruck der Absolutwertverteilung der Quellen. Die Quellen mit der größten Amplitude befinden sich in einer Röhre entlang der z -Achse, deren Durchmesser ungefähr der Größe des Hexagons in Abb. 6.26 entspricht. Weitere Quellen befinden sich in drei dünneren Seitenarmen, welche in Richtung der Nebenkeulen ausgerichtet sind. Die Ersatzquellenverteilung gibt damit nicht die geometrische Form des Trihedrals wieder. Dies hat zwei Gründe. Zum einen werden hier nur monofrequente Streudaten in einem schmalen Winkelbereich benutzt und zum anderen entstehen fast alle reflektierten Signalanteile durch Mehrfachreflexionen, welche sich im Bild durch physikalisch unplausible Ersatzquellen bemerkbar machen.

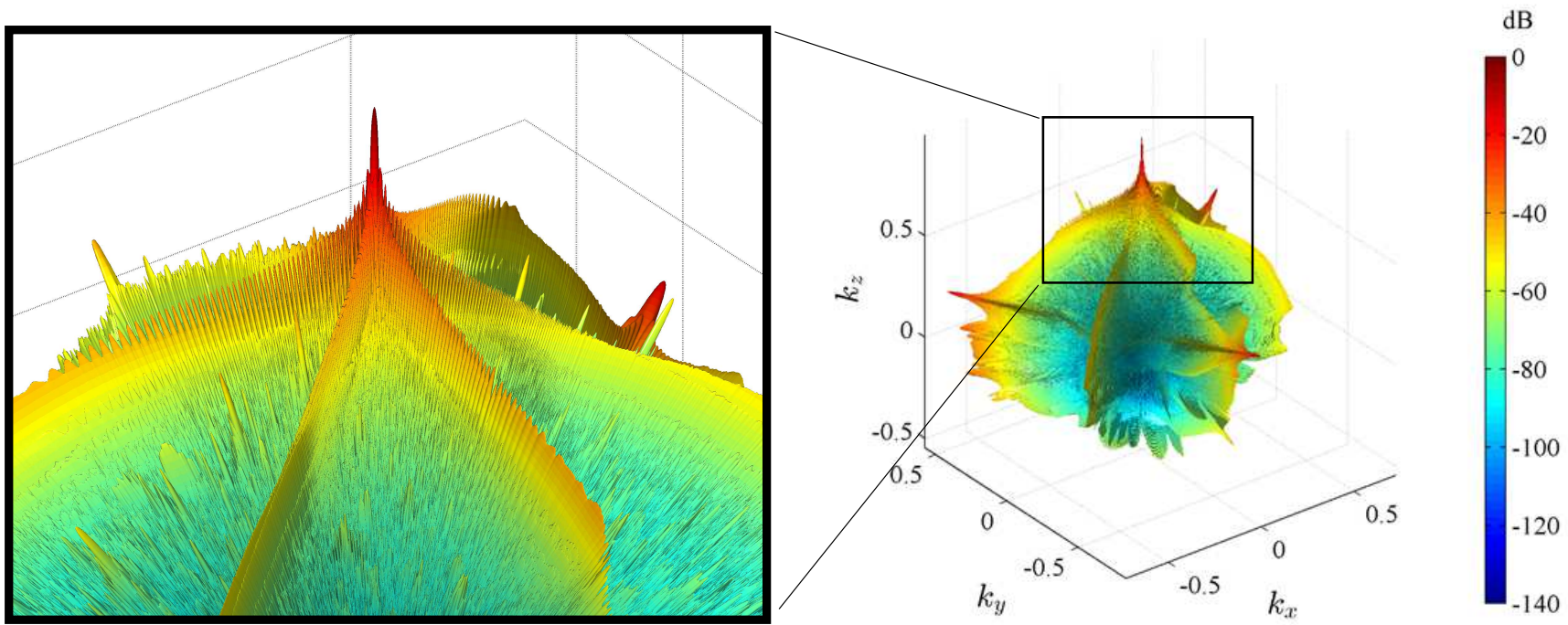
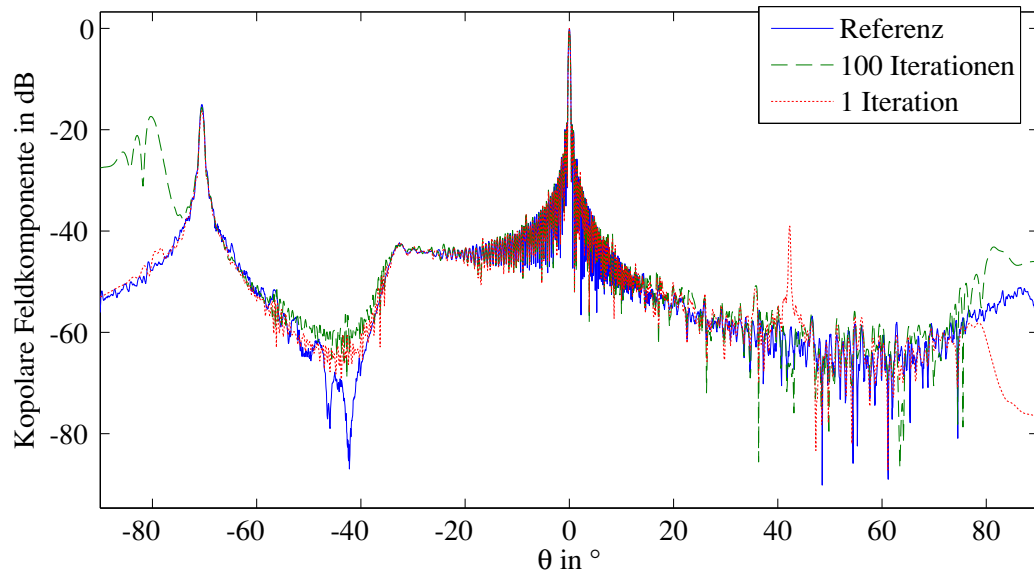
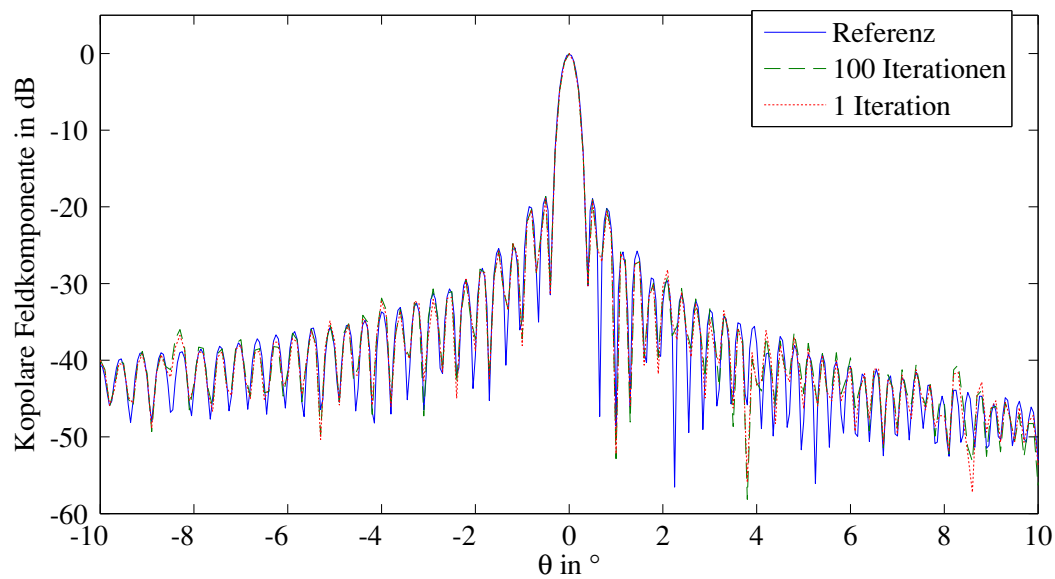


Abbildung 6.27: Aus Nahfeldbeobachtungen rekonstruiertes Fernfeldspektrum des gestreuten Feldes mit Detailausschnitt.



(a) Übersicht



(b) Detailausschnitt

Abbildung 6.28: Vergleich der transformierten Nahfeldbeobachtungen mit einer Referenzlösung aus dem Integralgleichungsverfahren.

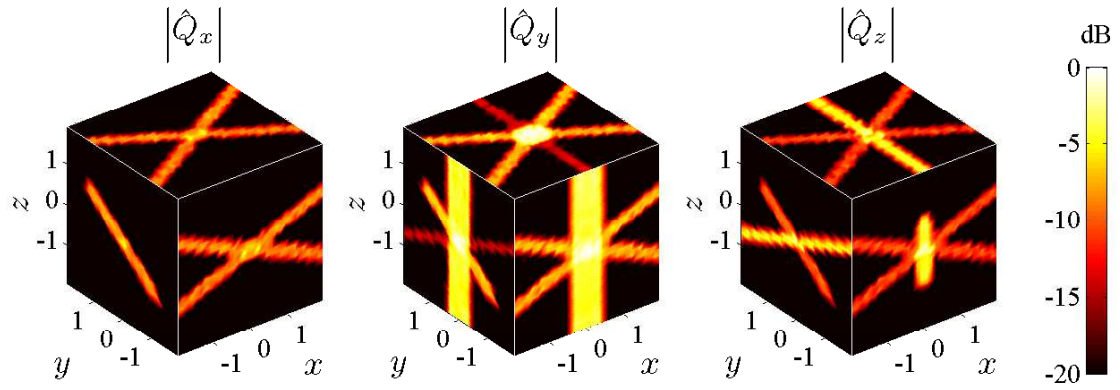


Abbildung 6.29: Projizierte Absolutwerte der volumetrischen Ersatzquellenverteilung des Trihedrals.

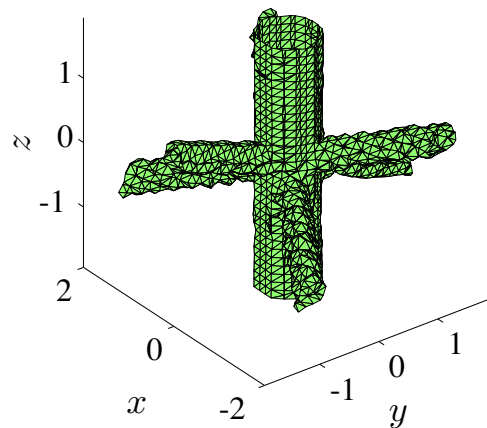


Abbildung 6.30: Isofläche der volumetrischen Ersatzquellenverteilung des Trihedrals.

6.2.5 Dielektrisches Streuobjekt

Dielektrika sind in vielen Anwendungen unersetzlich, da sie eine gezielte Beeinflussung der elektromagnetischen Felder erlauben. Die Permittivität bestimmt dabei, wie stark die Wechselwirkung mit dem elektrischen Feld ausfällt.

Im Folgenden soll das Streufeld eines dielektrischen Körpers unter Fernfeldbedingungen berechnet und für die Bildgebung verwendet werden. Um zu gewährleisten, dass die einfallende Welle das Streuobjekt ohne größere Beeinträchtigungen durchdringen kann, wird für die relative Permittivität der Wert $\varepsilon_r = 1.01$ verwendet. Dadurch sind nichtlineare Effekte wie Mehrfachinteraktionen vernachlässigbar.

Als Inspiration für die Geometrie dient das Buchstabenkürzel „HFT“.⁵ Abb. 6.31 stellt das Modell in der Konstruktionsansicht von FEKO [EM Simulation Software 2013] dar. Die Buchstaben haben eine Höhe von 0,5 m und das Profil des Querschnitts hat die Abmessungen 5 mm \times 5 mm.

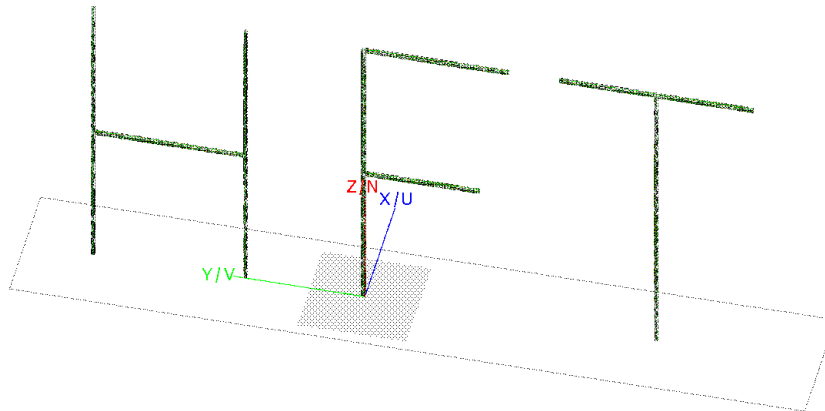


Abbildung 6.31: Das Buchstabenkürzel „HFT“ als dielektrisches Streuobjekt in der Konstruktionsansicht von FEKO [EM Simulation Software 2013].

Bei der Berechnung des bistatischen Streufeldes dient eine zirkular polarisierte ebene Welle als Anregung, die entlang der negativen x -Achse auf den Streukörper einfällt. Der simulierte Frequenzbereich erstreckt sich von 2 GHz bis 3 GHz sowie von 8 GHz bis 9 GHz. Bei höheren Frequenzen muss die Diskretisierung entsprechend verfeinert werden. Für den niedrigeren Frequenzbereich wird $N_f = 11$, $N_\phi = 180$ und $N_\theta = 91$ verwendet und für den höheren Frequenzbereich $N_f = 9$, $N_\phi = 1439$ und $N_\theta = 179$. In der Simulation werden die ϕ - und θ -Komponenten der Fernfelder ermittelt. Dies sind auch die Eingangsgrößen für das hierarchische Verfahren in Kap. 4.

Die resultierenden Ersatzquellenverteilungen sind in Abb. 6.32 und Abb. 6.33 dargestellt. Die Buchstaben in beiden Bildern lassen sich zweifelsfrei erkennen. Bei Verwendung der höheren Frequenzen sind die Quellen noch stärker lokalisiert und ermöglichen deshalb eine exaktere Rekonstruktion der Geometrie. Besonders deutlich wird dies beim Vergleich der entsprechenden Isoflächen in Abb. 6.34. Während die Geometrie bei niedrigen Frequenzen in weiten Teilen eher grob approximiert wird, ist die Übereinstimmung bei hohen Frequenzen deutlich besser.

Das gleiche Modell wird nun auch genutzt, um monostatische Streuquellenverteilungen zu erzeugen. Diese Berechnungen finden im Frequenzbereich von 2 GHz bis 3 GHz statt, da eine

⁵HFT ist das Kürzel des Lehrstuhls für Hochfrequenztechnik an der Technischen Universität München.

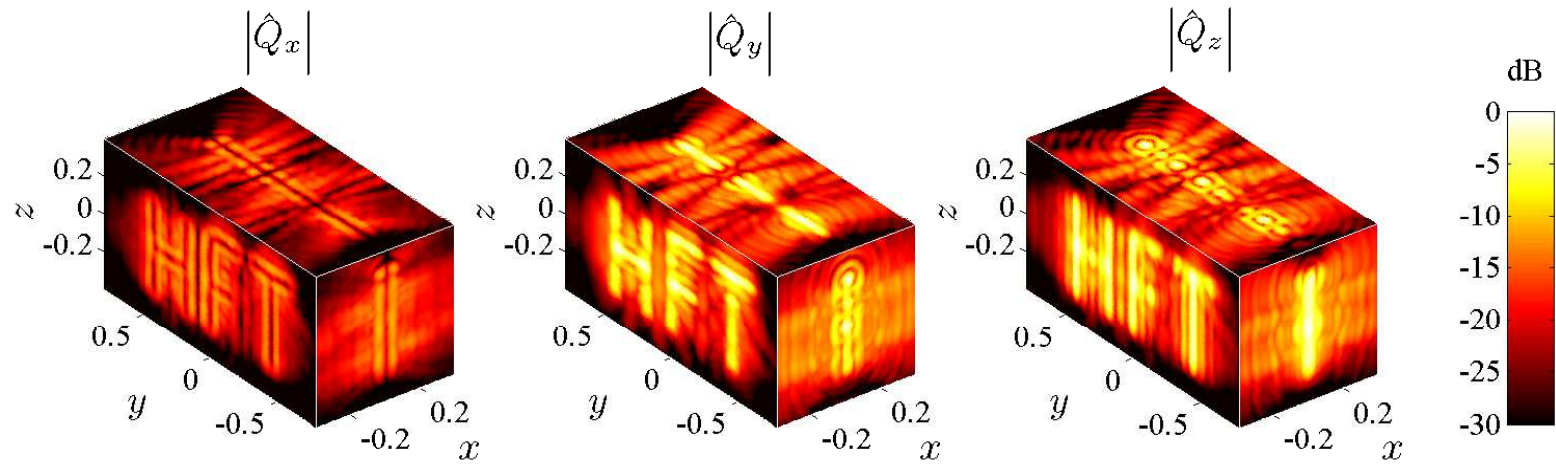


Abbildung 6.32: Projektionen der Ersatzquellen, welche aus bistatischen Beobachtungen zwischen 2 GHz und 3 GHz berechnet wurden.

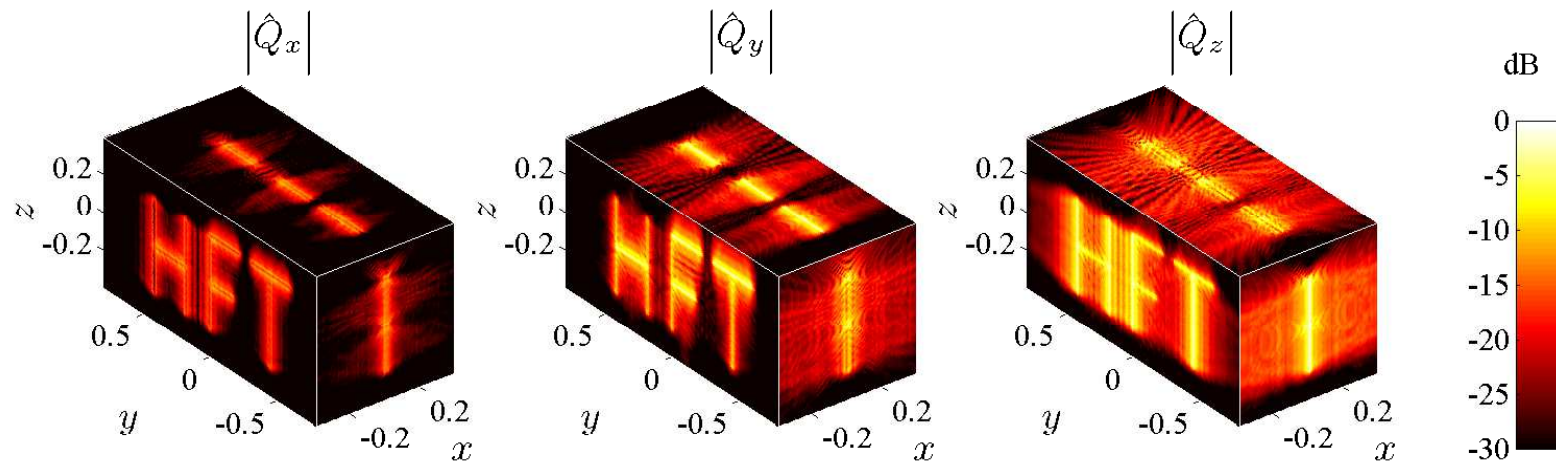


Abbildung 6.33: Projektionen der Ersatzquellen, welche aus bistatischen Beobachtungen zwischen 8 GHz und 9 GHz berechnet wurden.

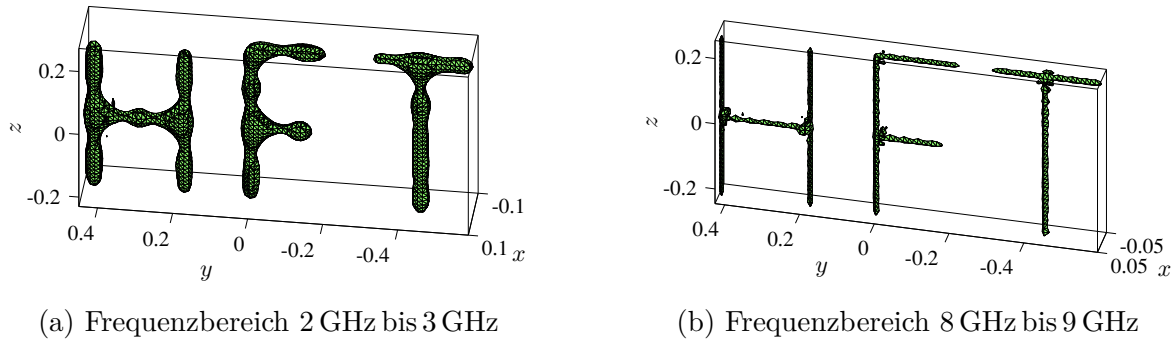


Abbildung 6.34: Isoflächen der Ersatzquellenverteilungen, welche aus bistatischen Datensätzen in unterschiedlichen Frequenzbereichen berechnet wurden.

monostatische Simulation zu höheren Frequenzen hin deutlich aufwändiger wird. Im Gegensatz zur bistatischen Betrachtung besitzt die Streuquellenverteilung nun neun kartesische Komponenten, wobei durch die Reziprozität des Streuobjekts sechs Komponenten zur Beschreibung ausreichend sind. Die resultierenden Verteilungsfunktionen sind in Abb. 6.35 dargestellt. Wie erwartet, weisen die Diagonalkomponenten der Dyade die stärksten Signalanteile auf. Unter den Nebendiagonaleinträgen der Dyade besitzt die $\hat{y}\hat{z}$ -Komponente eine besonders geringe Amplitude. Eine Erklärung hierfür ist die Geometrie, welche nur in der $\hat{y}\hat{z}$ -Ebene eine Ausdehnung besitzt, aber entlang der z -Achse sehr flach ist.

Analog zu (6.2) können alle vektoriellen Komponenten zur Berechnung einer Absolutwertverteilung herangezogen werden, welche in Abb. 6.36a durch eine Isofläche veranschaulicht wird. Die Verteilungsfunktion liefert im Vergleich zum bistatischen Ergebnis in Abb. 6.34a, welchem der gleiche Frequenzbereich zugrunde liegt, über weite Strecken ein genaueres Bild der Kontur. Lediglich an den Unstetigkeiten der Geometrie scheint der bistatische Datensatz weniger Artefakte im Bild zu verursachen.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Berechnung von äquivalenten Ersatzquellen- oder Streuzentrenverteilungen Rückschlüsse auf die Kontur eines schwach reflektierenden Streuobjekts sowohl bei bistatischen als auch bei monostatischen Streufelddaten erlaubt. In Abschnitt 3.3.2.1 wurde dieser Zusammenhang theoretisch hergeleitet. Das Ergebnis in (3.41) besagt, dass das aus monostatischen Streudaten berechnete Bild dem Faltungsprodukt aus Punktantwortfunktion und Objektfunktion entspricht. Im vorliegenden Beispiel soll dies nachvollzogen werden. Nach der Definition in (3.35) folgt die Objektfunktion mit

$$O(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon_r(\mathbf{r}) - 1) \quad (6.4)$$

direkt aus der relativen Permittivitätsverteilung $\varepsilon_r(\mathbf{r})$ und damit den Geometriedaten des Streuobjekts. Bei der Berechnung der Ortsfunktion auf dem Computer wird das Volumen mit einem gleichmäßigen kartesischen Gitter abgetastet. Die Objektfunktion $O(\mathbf{r})$ kann in diesem Fall als Summe vieler Dirac-Impulse dargestellt werden. Diese Formulierung erleichtert die Auswertung des Faltungsprodukts, da das Ergebnis der Summe verschobener Punktantwortfunktionen entspricht. Die Punktantwortfunktion kann in diesem Szenario als analytischer Ausdruck angegeben werden.

Bei der Berechnung der monostatischen Streuzentrenverteilung liegt das Streufeld zwischen 2 GHz bis 3 GHz an elf Frequenzpunkten vor, welche nun zur Auswertung der monofrequenten

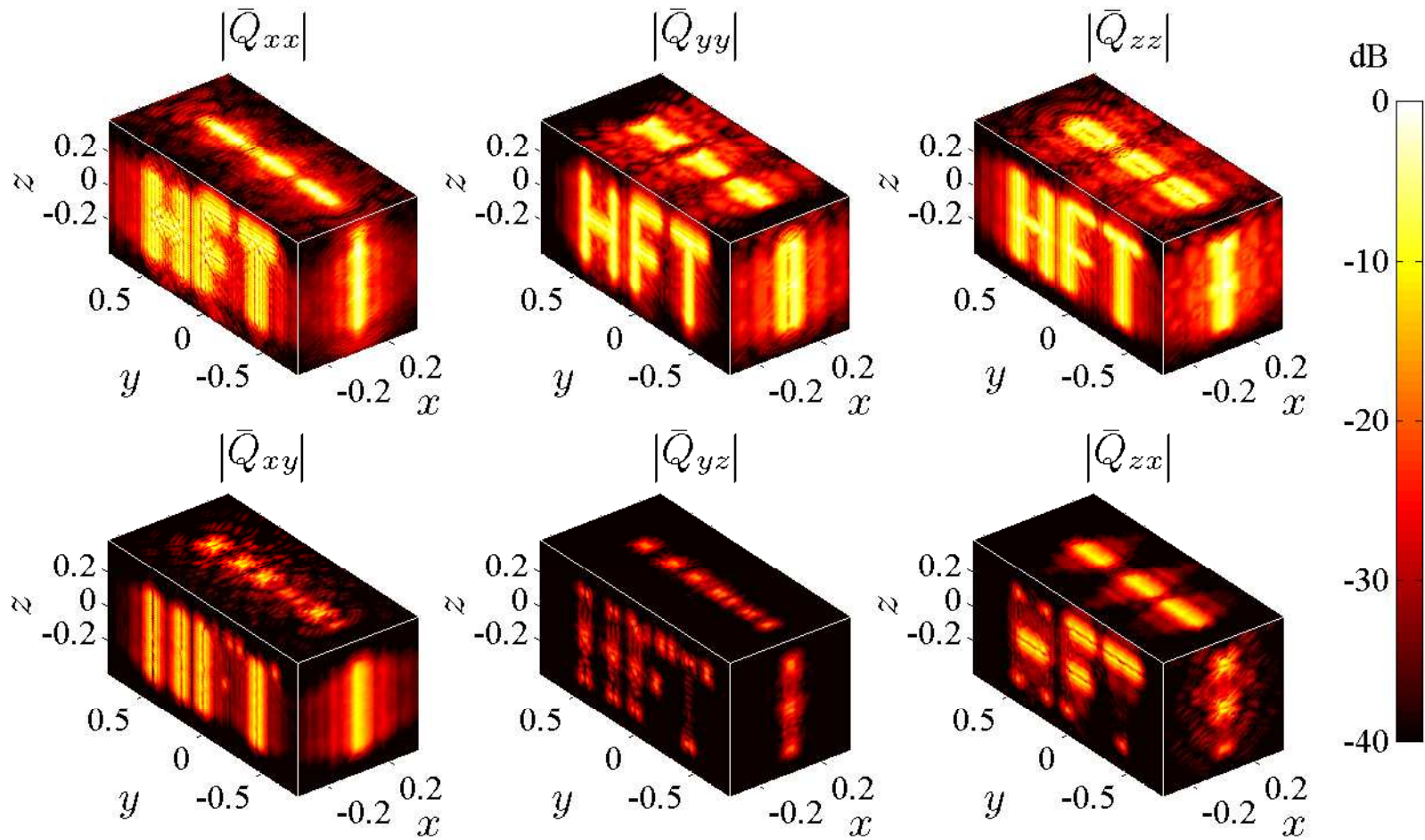


Abbildung 6.35: Projizierte Maximalamplituden der dyadischen Streuzentrenverteilung, welche aus monostatischen Daten im Frequenzbereich 2 GHz bis 3 GHz berechnet wurde.

Punktantwortfunktion in (3.77) genutzt werden. Die breitbandige Punktantwortfunktion entsteht durch eine Addition der elf resultierenden Ausdrücke. Wie im letzten Absatz beschrieben, geht die Streuzentrenverteilung durch eine Faltung von Punktantwortfunktion und Objektfunktion hervor. Die resultierende Verteilungsfunktion ist in Abb. 6.37 dargestellt. Diese Lösung stimmt sehr gut mit der aus den Streudaten berechneten Version in Abb. 6.35 überein. Dies zeigt sich auch beim Vergleich der Isoflächen in Abb. 6.36.

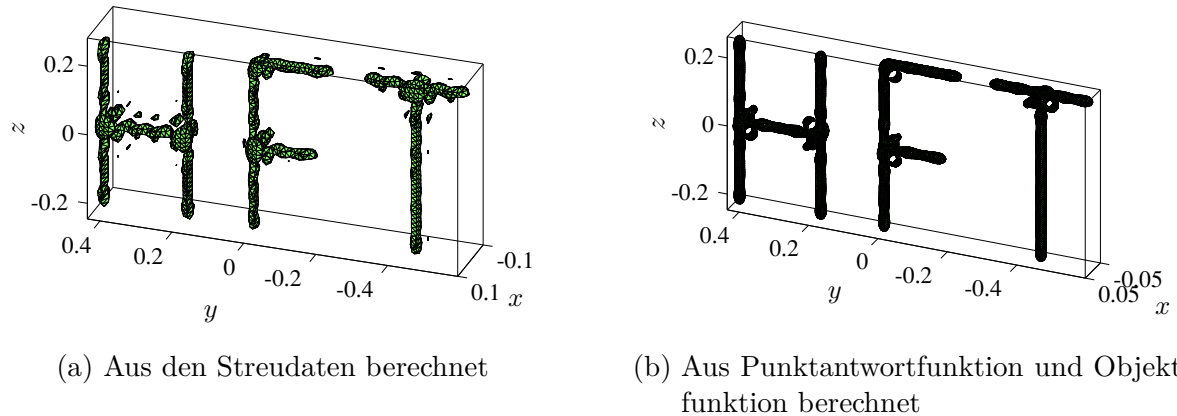


Abbildung 6.36: Isoflächen der Ersatzquellenverteilungen, die einem Frequenzbereich von 2 GHz bis 3 GHz und einem monostatischen Szenario entsprechen.

Eine sehr ähnliche Streuzentrenverteilung lässt sich berechnen, indem die breitbandige Punktantwortfunktion in (3.80) für $n = 2$ verwendet wird. Auf eine Darstellung der Ergebnisse wird hier verzichtet, da keine Unterschiede zu Abb. 6.37 bemerkbar sind. Die zuvor verwendete Abtastung mit elf Frequenzstützstellen führt somit zum gleichen Ergebnis wie ein kontinuierliches Frequenzband.

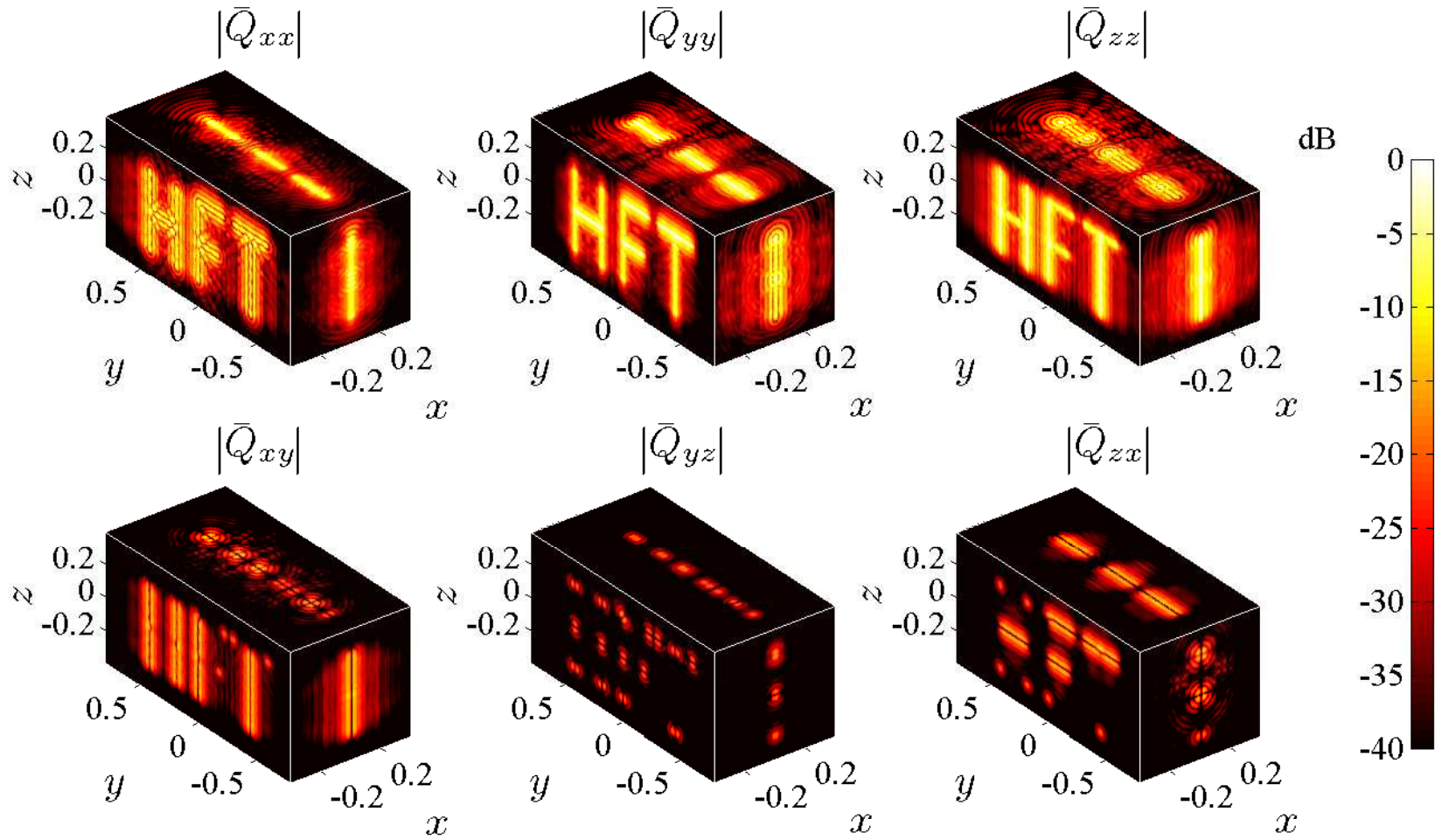


Abbildung 6.37: Projizierte Maximalamplituden der dyadischen Streuzentrenverteilung, welche aus der Punktantwortfunktion hervorgeht.

6.2.6 Zweidimensionale Anordnung metallischer Platten

In diesem Beispiel soll die voll polarimetrische Transformation monostatischer Streufeldmessungen ins Fernfeld gezeigt werden. Dazu wird das dyadische Streumodell in Abschnitt 5.2.3 verwendet, welches die polarimetrischen Effekte vollständig berücksichtigt. Das zugrunde liegende Streuobjekt ist in Abb. 6.38 dargestellt. Es besteht aus mehreren metallischen Platten, die in der y - z -Ebene positioniert sind. Der Durchmesser der gesamten Anordnung beträgt 1,25 m. Zur Erzeugung polarimetrischer Testdaten wurde FEKO genutzt. Bei einer Simulationsfrequenz von 1 GHz entspricht dies einer elektrischen Größe von $4,16\lambda$.

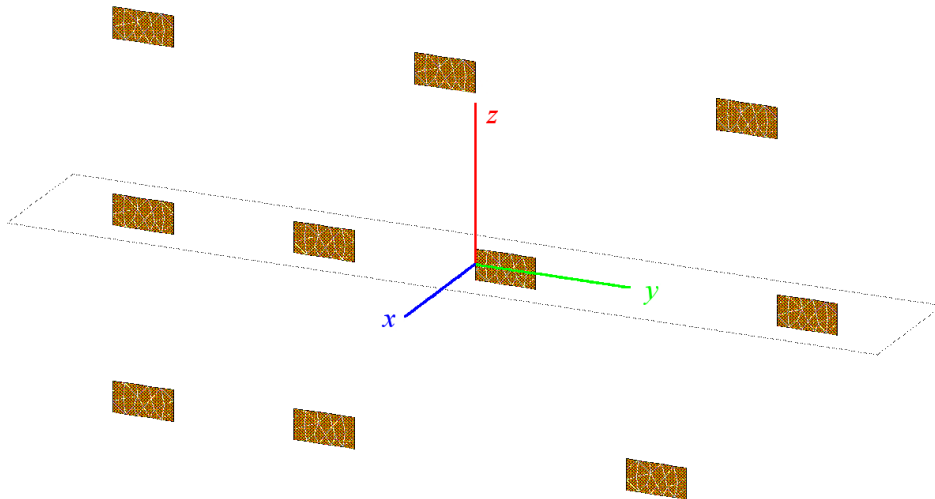


Abbildung 6.38: Streuobjekt bestehend aus mehreren metallischen Platten, die in der yz -Ebene angeordnet sind.

Anhand dieses Szenarios soll nun gezeigt werden, dass das vorgestellte Verfahren in der Lage ist, beliebig angeordnete und orientierte Beobachtungen des monostatischen Streufelds vom Nahfeld ins Fernfeld zu transformieren. Abb. 6.39 zeigt den Radarrückstreuquerschnitt, welcher im Folgenden als Referenz für die transformierten Ergebnisse dienen soll. Dazu werden die Schnitte für $\phi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ und $\theta = 90^\circ$ ausgewertet und auf das gemeinsame Maximum normiert.

Im zweiten Schritt wird das monostatische Streufeld im Nahbereich simuliert. Die Beobachtungspunkte sind, wie in Abb. 6.40 angedeutet, zufällig im Raum zwischen zwei Kugeln mit den Radien 10λ beziehungsweise $11,7\lambda$ verteilt. Damit wird der zugehörige Fernfeldabstand $4D^2/\lambda = 70\lambda$ deutlich unterschritten. Als Sende- und Empfangsantenne dienen Hertz'sche Dipole. Um die Feldkomponenten des gestreuten Feldes möglichst vollständig zu erfassen, wird ein Sendedipol mit drei orthogonalen Empfangsdipolen kombiniert. Eine Pseudozufallsfolge bestimmt die Orientierung des Sendedipols, wobei das Strahlungsmaximum immer auf das Zentrum des Streuobjekts ausgerichtet wird. So werden insgesamt 1,5 Mio. Beobachtungen des gestreuten Feldes berechnet.

Bei der Transformation wird die Formulierung in (5.41) mit dem iterativen Ansatz in Abschnitt 5.3.1 mit 103 680 Unbekannten gelöst. Das Residuum $4,8 \times 10^{-3}$ nach Definition (6.3) wird nach 132 Iterationen erreicht. Anschließend wird der geschätzte Radarrückstreuquerschnitt mit den Referenzdaten verglichen, so wie in Abb. 6.39 dargestellt. Eine Übersicht über die dabei auftretenden Maximalfehler ist in Tabelle 6.2 zu finden. Im Vergleich zum Beispiel in Abschnitt 6.1.2 unterscheidet sich das Transformationsergebnis deutlich stärker von der Referenz.

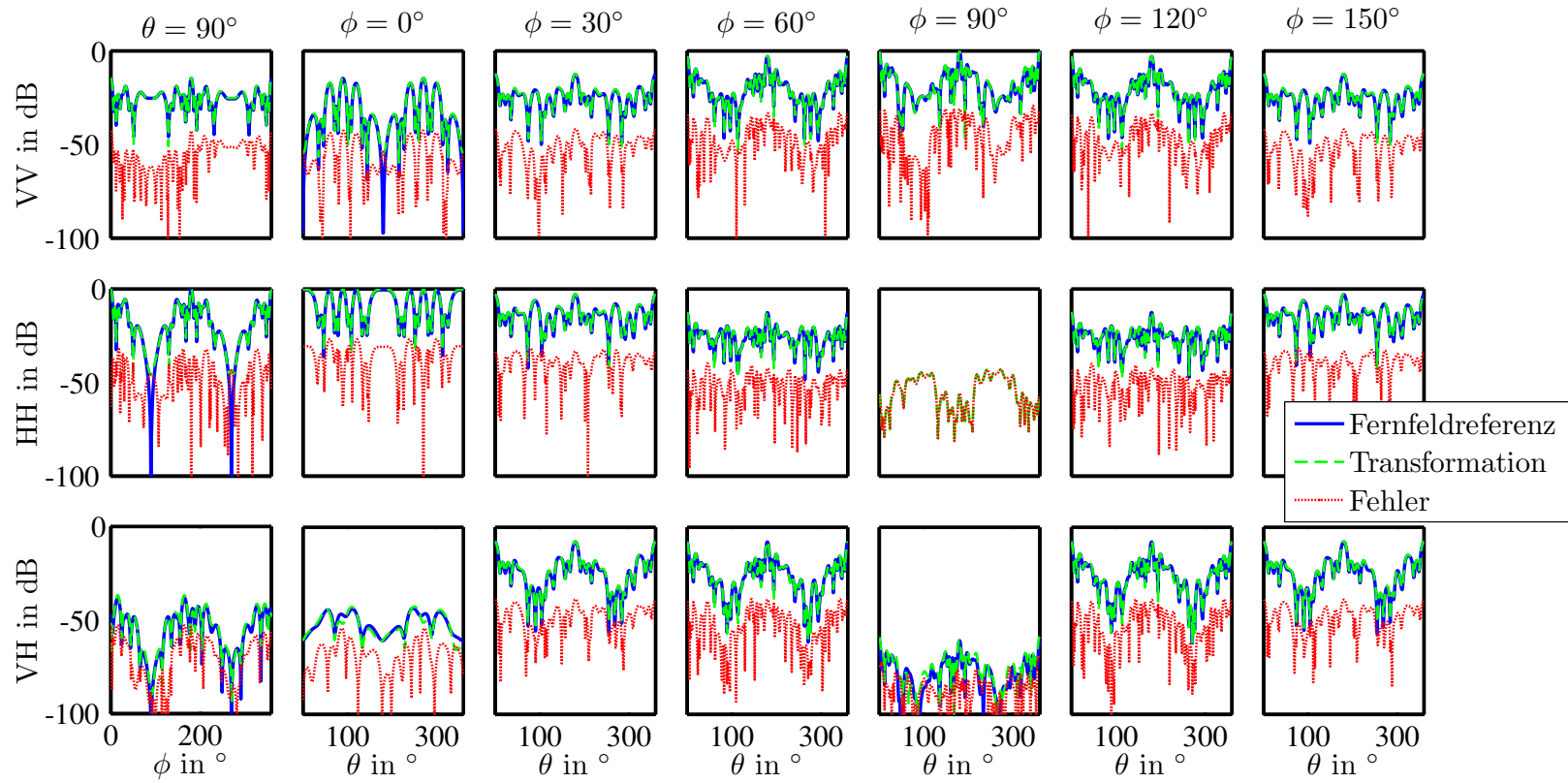


Abbildung 6.39: Fehleranalyse des Transformationsergebnisses zeigt geringe Abweichung von der Fernfeldreferenz in allen Schnitten.

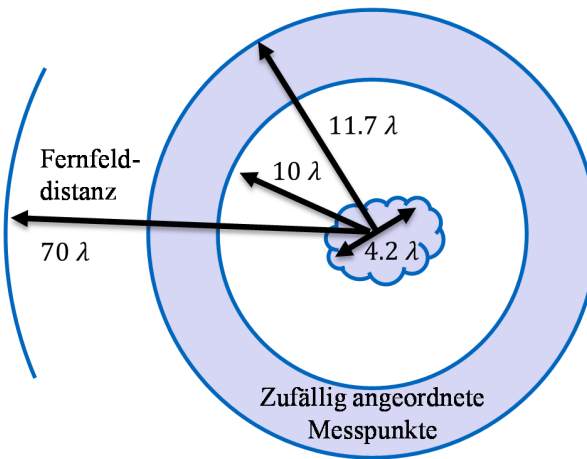


Abbildung 6.40: Messentfernung und Fernfelddistanz im Fall der metallischen Plattenanordnung.

Die Abweichungen sind den Verkopplungen und Abschattungseffekten zuzuschreiben, welche in allen ISAR-ähnlichen Transformationsverfahren – und damit auch in dem hier verwendeten – nicht berücksichtigt werden. Fehler in dieser Größenordnung sind jedoch für viele Anwendungen akzeptabel.

Tabelle 6.2: Maximalfehler in den Schnitten des aus Nahfelddaten berechneten Rückstreuquerschnitts.

Schnitt	VV	HH	HV
$\theta = 90^\circ$	-42,6 dB	-33,9 dB	-52,6 dB
$\phi = 0^\circ$	-42,4 dB	-27,6 dB	-53,3 dB
$\phi = 30^\circ$	-45,3 dB	-32,4 dB	-41,0 dB
$\phi = 60^\circ$	-31,2 dB	-41,8 dB	-35,8 dB
$\phi = 90^\circ$	-25,9 dB	-39,1 dB	-60,6 dB
$\phi = 120^\circ$	-31,0 dB	-41,6 dB	-35,6 dB
$\phi = 150^\circ$	-44,5 dB	-31,9 dB	-40,1 dB
Mittelwert	-37,6 dB	-35,5 dB	-45,6 dB
Maximum	-25,9 dB	-27,6 dB	-35,6 dB

Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich das Fehlen von Daten in einem begrenzten Winkelbereich auswirkt. Die bereits gezeigten Ergebnisse basieren auf einem zufälligen aber vollständigen Satz an sphärischen Abtastwerten. Um einen Datensatz mit begrenztem Winkelbereich zu erzeugen, werden alle Beobachtungen im Bereich

$$\phi \in [80^\circ, 100^\circ] \cup [260^\circ, 280^\circ] \vee \theta \in [0^\circ, 10^\circ] \cup [170^\circ, 180^\circ] \quad (6.5)$$

von der Transformation ausgeschlossen. Dies betrifft sowohl die Polregionen als auch die Datenpunkte im Bereich $\phi = 90^\circ$ und $\phi = 270^\circ$. Die Schätzung des Streuquerschnitts mit diesem reduzierten Datensatz verursacht die geringfügig anderen Maximalfehler in Tabelle 6.3. Aus einem Vergleich mit Tabelle 6.2 geht hervor, dass die damit einhergehenden Genauigkeitseinbußen gering sind. Diese positive Eigenschaft ist dem iterativen Transformationsansatz, basierend auf ebenen Wellen, geschuldet. Ähnliche Beobachtungen bei der Transformation von Antennen-

messdaten bestätigen diese Sichtweise [Schmidt und Eibert 2010]. Beim Einsatz eines klassischen, kanonischen Transformationsverfahrens, wie es beispielsweise für planare und sphärische Geometrien verfügbar ist, zeigt sich, dass eine Unempfindlichkeit gegenüber unvollständigen Daten nicht selbstverständlich ist. Die größeren Fehler im Transformationsergebnis sind dort der Tatsache geschuldet, dass fehlende Datenpunkte wie künstlich ergänzte Nullwerte wirken.

Tabelle 6.3: Maximalfehler in den Schnitten des aus den reduzierten Nahfelddaten berechneten Rückstreuquerschnitts.

Schnitt	VV	HH	HV
$\theta = 90^\circ$	-42,4 dB	-34,0 dB	-53,8 dB
$\phi = 0^\circ$	-42,2 dB	-26,8 dB	-54,2 dB
$\phi = 30^\circ$	-40,0 dB	-30,6 dB	-36,7 dB
$\phi = 60^\circ$	-31,7 dB	-42,5 dB	-39,4 dB
$\phi = 90^\circ$	-28,3 dB	-38,3 dB	-66,8 dB
$\phi = 120^\circ$	-31,7 dB	-42,4 dB	-39,4 dB
$\phi = 150^\circ$	-39,9 dB	-30,6 dB	-36,5 dB
Mittelwert	-36,6 dB	-35,0 dB	-46,7 dB
Maximum	-28,3 dB	-26,8 dB	-36,5 dB

7 Schlussbetrachtung und Ausblick

Das Ziel der hier vorliegenden Arbeit war die Erarbeitung grundlegender Formulierungen und Modelle, um die aus der Feldnumerik bekannten Prinzipien der mehrstufigen schnellen Multipolmethode für die Lösung inverser Quellen- und Streuprobleme einsetzen zu können. Dabei sollte ein Algorithmus entstehen, der die aus der Feldnumerik bekannte Flexibilität und Effizienz von schnellen Integralgleichungsverfahren auch für Problemstellungen der elektromagnetischen Bildgebung nutzbar macht. Abbildungen lassen sich damit aus beliebig angeordneten Beobachtungen der abgestrahlten oder gestreuten Felder erzeugen, wobei die Messsonde und ihre Orientierung am Messpunkt korrekt in die Berechnung eingehen. Dies eröffnet neuartige Einsatzmöglichkeiten im Bereich der Antennendiagnose und Radarfernerkundung.

Für die Bilderzeugung aus elektromagnetischen Beobachtungen existieren eine Vielzahl von Algorithmen, die häufig auf bestimmte Anwendungen zugeschnitten sind. Besonders leistungsfähige und komplexe Algorithmen sind typischerweise dann erforderlich, wenn es sich um elektrisch große Szenarien handelt. Ohne Beschleunigungsmaßnahmen steigt die Anzahl der Rechenoperationen quadratisch mit der elektrischen Größe des Abbildungsbereichs. Maßnahmen zur Verringerung der quadratischen Komplexität haben oft den Nachteil, dass sie spezielle Anforderungen an Diskretisierung und Messabstand stellen und damit die Flexibilität einschränken. Dies führt bisher zu einem Kompromiss zwischen Flexibilität und Effizienz in der Bilderzeugung. Das vielfach eingesetzte Rückprojektionsverfahren beispielsweise wird wegen seiner Einfachheit und Genauigkeit in der Medizin- und Radartechnik eingesetzt [Desai und Jenkins 1992; Rosenthal et al. 2010]. In seiner üblichen Variante gehört es nicht zu den effizientesten Algorithmen, doch es gibt eine hierarchische Variante, die zu dieser Gattung zählt [Bresler und Brokish 2004]. Wenn die mehrdimensionale schnelle Fouriertransformation (FFT) auch als hierarchisches Konzept aufgefasst wird, so lassen sich alle besonders effizienten Algorithmen auf eine hierarchische Struktur zurückführen. Neben den hierarchischen Rückprojektionsverfahren und der mehrdimensionalen schnellen Fouriertransformation ist noch ein mehrstufiger Zerlegungsansatz im Fourierraum zu nennen [Boag 2001]. Auch das hier vorgestellte Verfahren zählt zu dieser Gattung und wird daher hinsichtlich Komplexität und Flexibilität mit diesen etablierten Algorithmen verglichen. Es zeigt sich, dass konventionelle Verfahren entweder nicht die gleiche Flexibilität bieten oder aber deutlich ineffizienter sind, da sie regelmäßige Messdaten voraussetzen oder keine Möglichkeit der Sondenkorrektur liefern.

Die vorliegende Arbeit beginnt mit einer Analyse inverser Quellenprobleme. Es zeigt sich, dass bei der Lösung volumetrischer Problemstellungen mit Mehrdeutigkeiten zu rechnen ist. Nur durch das Einbringen von Vorwissen oder durch die Berücksichtigung zusätzlicher Nebenbedingungen ist eine eindeutige Lösung möglich. Für das weitere Vorgehen wird eine Beschränkung auf nichtstrahlende Ströme und eine synchrone Anregung der volumetrischen Ströme angenommen. Dies ermöglicht die Definition einer universellen Abbildungsvorschrift für inverse Streu- und Quellenprobleme. Die resultierenden Darstellungen lassen sich durch geeignete Punktwortfunktionen mit den zugrunde liegenden physikalischen Eigenschaften der Abbildungsobjekte in Verbindung bringen. Zur effizienten Berechnung der Bilder aus beliebigen elektromagnetischen Beobachtungen wurde ein neuartiges Verfahren entworfen, das von erfolgreichen Algorithmen der Feldnumerik, wie zum Beispiel der schnellen mehrstufigen Multipolmethode

(MLFMM) [Chew et al. 2001] inspiriert ist. Es ermöglicht eine korrekte Modellierung polarimetrischer Nahfeld- und Sondereffekte für Abstrahlungs- und Streuprobleme. Die Berechnung der Bilder erfolgt in zwei Schritten: Zuerst wird das Spektrum ebener Wellen aus den Beobachtungen der abgestrahlten oder gestreuten Felder rekonstruiert. Dieser Schritt entspricht dabei einer schnellen Nahfeld-Fernfeld-Transformation basierend auf ebenen Wellen [Schmidt et al. 2008]. Für Streuprobleme ist dieses Verfahren ein Novum, Abstrahlungsprobleme dagegen wurden bereits eingehend untersucht [Schnattinger et al. 2014b; Qureshi et al. 2013a]. Anschließend wird die Ersatzquellen- oder Streuzentrenverteilung im Ortsbereich mit einer hierarchischen Zerlegung berechnet. Der Algorithmus orientiert sich dabei an den Prinzipien der MLFMM, welche für monofrequente Felder definiert ist. Durch eine Erweiterung der Disaggregation auf breitbandige Spektren ebener Wellen wurde diese Einschränkung aufgehoben. Beide Berechnungsschritte des neuartigen Verfahrens besitzen die Komplexität $\mathcal{O}(N \log^2 N)$ und sind somit in ihrem Rechenaufwand mit anderen schnellen Algorithmen vergleichbar.

Bei der Erprobung mit simulativen Daten wurden zwei Fälle unterschieden. Im ersten Fall werden die bei der Herleitung des Lösungsansatzes getroffenen Annahmen vollständig erfüllt. Die daraus resultierenden Beispiele mit synthetischen Dipol- beziehungsweise Streuzentrenverteilungen zeigen, wie genau und leistungsfähig der vorgestellte Ansatz im Optimalfall ist. In der Praxis werden diese Bedingungen jedoch nicht erreicht. Deshalb beschäftigt sich der zweite Teil der Erprobung mit den Auswirkungen realistischer Einflüsse auf die berechneten Ergebnisse. Die untersuchten Beispiele umfassen eine breitbandige Hornantenne, eine Anordnung mit drei breitbandigen Antennen, einen Drahtwürfel, einen Tripelspiegel, einen dielektrischen Körper sowie eine zweidimensionale Anordnung metallischer Platten. Bei der Abbildung der breitbandigen Hornantenne konnte auf Messdaten zurückgegriffen werden, in den anderen Fällen wurden die Testdaten durch eine elektromagnetische Vollwellensimulation erzeugt. Bei der Hornantenne spiegelt die berechnete Ersatzquellenverteilung die Abmessungen der Hornapertur sowie die Polarisation der Anregung eindeutig wider. Das aus den abgestrahlten Feldern der dreiteiligen Antennenanordnung erzeugte Bild zeigt auf Grund von Dispersionseffekten nur eine diffuse Darstellung der zugrunde liegenden Stromverteilung. Trotzdem lässt sich die Orientierung und Position der einzelnen Antennenelemente eindeutig erkennen. Bei der Abbildung des Drahtwürfels wird deutlich, dass die Breitbandigkeit der Beobachtungen ein kontrastreicheres Bild ermöglicht. Nichtsdestotrotz lässt sich die Form des Würfels auch bei Beschränkung auf monofrequente Daten erkennen. Die Effizienz des Algorithmus zeigt sich ganz besonders am Beispiel des Tripelspiegels. Hier werden die bistatischen Nahfelder eines Streukörpers mit einer elektrischen Größe von 302λ ins Fernfeld transformiert. Da bei einem Tripelspiegel naturgemäß die problematischen Mehrfachreflexionen dominieren, spiegelt sich dessen geometrische Form nicht in der Abbildung wider. Das Bild lässt sich stattdessen mit dem Streuspektrum in Verbindung bringen. Im Gegensatz dazu lässt sich aus den mono- und bistatischen Streufeldbeobachtungen des dielektrischen Untersuchungsobjekts dessen Geometrie eindeutig erkennen. Der Zusammenhang zwischen Geometrie und Bild wird dabei durch eine analytische Punktantwortfunktion beschrieben. Zuletzt wird anhand einer Anordnung metallischer Platten gezeigt, wie sich monostatische Nahfeldmessungen beliebiger Polarität durch eine voll polarimetrische Prozessierung auch bei lückenhaften Beobachtungsdaten mit hoher Genauigkeit und Effizienz ins Fernfeld transformieren lassen.

Die Erprobung des vorgestellten Ansatzes mit verschiedenen simulativ gewonnenen Daten hat gezeigt, dass das Verfahren besonders für Anwendungen geeignet ist, welche prinzipbedingt zu unregelmäßig angeordneten Feldbeobachtungen führen. Auch die Konzepte in [Fritzel et al.

2005; Fritzel et al. 2013] machen sich dies zu Nutze. Der nächste wichtige Schritt ist daher eine Erprobung der Algorithmen mit derartigen Messdaten.

Für die Weiterentwicklung und Verbesserung des Verfahrens gibt es zahlreiche aussichtsreiche Anknüpfungspunkte. Aus den Parallelen zur Nahfeld-Fernfeld-Transformation basierend auf ebenen Wellen folgt, dass der Einfluss störender Reflexionssignale im Ergebnis unterdrückt werden kann [Yinusa und Eibert 2013]. Auch die Lösung eines Transformationsproblems mit phasenlosen und damit skalaren Beobachtungen ist möglich [Schnattinger et al. 2014a]. Auf Streuprobleme wurde dies noch nicht übertragen, und auch eine Untersuchung dieser Möglichkeiten im Rahmen der Bildgebung steht noch aus.

Ein weiterer Aspekt ist die Effizienz bei der Transformation von Daten, welche Beobachtungen an vielen Frequenzpunkten beinhalten. Während die hierarchische Zerlegung zur Berechnung der Ortsbereichsdarstellung aus dem Spektrum ebener Wellen auch für breitbandige Daten effizient ist, gilt dies für den Transformationsschritt bisher nicht, da jede Frequenz separat prozessiert wird. Das Simulationsprinzip „Plane Wave Time Domain“ (PWTD) [Chew et al. 2001, S. 815 ff.] zeigt, dass sich Spektraldarstellungen im Ortsfrequenzbereich und Berechnungsverfahren im Zeitbereich nicht ausschließen. Aus diesem Grund ist zu erwarten, dass der Entwurf eines breitbandigen Transformationskonzepts weitere Effizienzvorteile mit sich bringt. Zudem wären die Beobachtungen damit nicht mehr an ein festes Frequenzraster gebunden, sondern könnten stattdessen bei beliebigen Frequenzen durchgeführt werden.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Prinzipien schneller Integralgleichungsverfahren ein erfolgversprechender Ansatz zur Berechnung von Ersatzquellen- oder Streuzentrenverteilungen sind, welcher sich durch ein besonders hohes Maß an Flexibilität und Effizienz auszeichnet. Außerdem bieten sich viele Möglichkeiten, die Leistungsfähigkeit des Verfahrens weiter zu steigern. Schlussendlich würde dies die Prozessierung von fast beliebig gearteten Messdaten erlauben und eine Kompensation verschiedenster Störeinflüsse möglich machen. Die weitere Erforschung des vorgestellten Konzepts ist deshalb sehr aussichtsreich.

A Anhang

A.1 Analytische Integrale

A.1.1 Berechnung des Ausdrucks $\mathcal{F}\{w(k)\hat{k}\hat{k}\}$

Die Definition von $w(k)$ ist in (3.74) zu finden und lautet

$$w(k) = \frac{\delta(k - k_0)}{k^2}. \quad (\text{A.1})$$

Das Ergebnis der Berechnungen

$$\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \mathcal{F}\{w(k)\hat{k}\hat{k}\} \quad (\text{A.2})$$

ist eine im Ortsbereich definierte Dyade. Zur Auswertung werden die sphärischen Koordinatenvektoren

$$\mathbf{r} = r \begin{bmatrix} \cos \Phi \sin \Theta \\ \sin \Phi \sin \Theta \\ \cos \Theta \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{k} = k \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

im Orts- und Ortsfrequenzbereich benötigt. Das Rotationsinvarianzprinzip der Fouriertransformation besagt, dass die Koordinatentransformation mit der Rotationsmatrix \mathbf{R}

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\mathbf{r}', \quad \hat{\Theta} = \mathbf{R}\hat{\Theta}', \quad \hat{\Phi} = \mathbf{R}\hat{\Phi}', \quad \hat{r} = \mathbf{R}\hat{r}', \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{R}\mathbf{k}', \quad \hat{\theta} = \mathbf{R}\hat{\theta}', \quad \hat{\phi} = \mathbf{R}\hat{\phi}', \quad \hat{k} = \mathbf{R}\hat{k}'. \quad (\text{A.5})$$

im Orts- und Frequenzbereich die Gültigkeit von (A.2) nicht verletzt [Woods 2011]. Werden die sphärischen Einheitsvektoren im Ortsbereich mit

$$\begin{bmatrix} \hat{\Theta} \\ \hat{\Phi} \\ \hat{r} \end{bmatrix} \cdot \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \cdot \begin{bmatrix} \hat{\Theta} \\ \hat{\Phi} \\ \hat{r} \end{bmatrix}^T = \mathcal{F} \left\{ w(k) \begin{bmatrix} \hat{\Theta} \cdot \hat{k}\hat{k} \cdot \hat{\Theta} & \hat{\Theta} \cdot \hat{k}\hat{k} \cdot \hat{\Phi} & \hat{\Theta} \cdot \hat{k}\hat{k} \cdot \hat{r} \\ \hat{\Phi} \cdot \hat{k}\hat{k} \cdot \hat{\Theta} & \hat{\Phi} \cdot \hat{k}\hat{k} \cdot \hat{\Phi} & \hat{\Phi} \cdot \hat{k}\hat{k} \cdot \hat{r} \\ \hat{r} \cdot \hat{k}\hat{k} \cdot \hat{\Theta} & \hat{r} \cdot \hat{k}\hat{k} \cdot \hat{\Phi} & \hat{r} \cdot \hat{k}\hat{k} \cdot \hat{r} \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{A.6})$$

von links und rechts an die dyadische Darstellung multipliziert, so erhält man eine Matrixdarstellung der Dyade in sphärischen Komponenten, welche im weiteren Verlauf mit der Notation $[\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{r})]_{\hat{\Theta}, \hat{\Phi}, \hat{r}}$ gekennzeichnet wird. Diese Darstellung hat den Vorteil, dass sie mit

$$[\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{R}\mathbf{r}')]_{\hat{\Theta}, \hat{\Phi}, \hat{r}} = [\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{r}')]_{\hat{\Theta}, \hat{\Phi}, \hat{r}} \quad (\text{A.7})$$

im Gegensatz zur kartesischen Form invariant gegenüber Rotationen ist. Der Beweis kann durch das Einsetzen in (A.6) erbracht werden. Aus diesem Grund ist es auch möglich, die Punktantwortfunktion im gesamten Ortsbereich mit

$$[\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{r})]_{\hat{\Theta}, \hat{\Phi}, \hat{r}} = [\bar{\mathbf{q}}(r\hat{z})]_{\hat{\Theta}, \hat{\Phi}, \hat{r}} \quad (\text{A.8})$$

auf die positive z -Koordinatenachse abzubilden. Auf der z -Achse werden kartesische und sphärische Einheitsvektoren bei $\phi = 0$ durch

$$\hat{\theta} = \hat{x}, \quad \hat{\phi} = \hat{y}, \quad \hat{r} = \hat{z} \quad (\text{A.9})$$

in Beziehung gesetzt. Nun wird die 3D-Fouriertransformation auf alle kartesischen Komponenten des dyadischen Ausdrucks angewendet. Die kartesischen Komponenten der Dyade $\hat{k}\hat{k}$ im Integrand der Fouriertransformation lauten

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \phi \sin^2 \theta & \cos \phi \sin \phi \sin^2 \theta & \cos \phi \sin \theta \cos \theta \\ \cos \phi \sin \phi \sin^2 \theta & \sin^2 \phi \sin^2 \theta & \sin \phi \sin \theta \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \theta & \sin \phi \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Die analytischen Berechnungen führen schließlich zu

$$\begin{aligned} [\bar{\mathbf{q}}(r\hat{z})]_{\hat{x},\hat{y},\hat{z}} &= \mathcal{F} \left\{ w(k) \hat{k}\hat{k} \right\} \Big|_{\mathbf{r}=r\hat{z}} \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi k_0 r)^3} \left[(\sin(k_0 r) - k_0 r \cos(k_0 r)) (\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y}) + \right. \\ &\quad \left. \left((k_0^2 r^2 - 2) \sin(k_0 r) + 2k_0 r \cos(k_0 r) \right) \hat{z}\hat{z} \right] \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi k_0 r)^3} \left[(\sin(k_0 r) - k_0 r \cos(k_0 r)) \bar{\mathbf{I}} + \right. \\ &\quad \left. \left((k_0^2 r^2 - 3) \sin(k_0 r) + 3k_0 r \cos(k_0 r) \right) \hat{z}\hat{z} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Das Endergebnis

$$\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{(2\pi k_0 r)^3} \left[(\sin(k_0 r) - k_0 r \cos(k_0 r)) \bar{\mathbf{I}} + \left((k_0^2 r^2 - 3) \sin(k_0 r) + 3k_0 r \cos(k_0 r) \right) \hat{r}\hat{r} \right] \quad (\text{A.12})$$

lässt sich ableiten, indem die kartesischen Komponenten nach (A.9) auf der z -Achse durch ihr sphärisches Äquivalent ersetzt werden. Dies entspricht einer Ersetzung von \hat{z} durch \hat{r} . Damit ist der Ausdruck im gesamten Ortsbereich gültig.

A.1.2 Berechnung des Ausdrucks $\mathcal{F} \left\{ W_n(k) (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) \right\}$

Die Definition von $W_n(k)$ ist in (3.79) zu finden und lautet

$$W_n(k) = k^{-n} \begin{cases} 1, & \text{falls } k_{\min} \leq k \leq k_{\max} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Zur Lösung wird der Ausdruck mit

$$\mathcal{F} \left\{ W_n(k) (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k}) \right\} = \mathcal{F} \{ W_n(k) \} \bar{\mathbf{I}} - \mathcal{F} \left\{ W_n(k) \hat{k}\hat{k} \right\} \quad (\text{A.14})$$

aufgespalten.

A.1.2.1 Berechnung des Ausdrucks $\mathcal{F}\{W_n(k)\}$

Das vorliegende 3D-Fourierintegral wird in sphärischen Koordinaten analytisch gelöst. Das Ergebnis lautet

$$\mathcal{F}\{W_n(k)\} = \frac{4\pi}{r^3} n^{-\frac{n}{2}} \left[\alpha_1(r, k) \right]_{k_{\min}}^{k_{\max}}, \quad (\text{A.15})$$

wobei

$$\alpha_1(r, k) = k^{-n} \begin{cases} \sin(kr) - kr \cos(kr), & n = 0 \\ -kr \cos(kr), & n = 1 \\ 2k^2 r^2 \text{Si}(kr), & n = 2 \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

und

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt. \quad (\text{A.17})$$

gilt. Die Lösung für $\mathcal{F}\{W_0(k)\}$ ist auch in [Råde und Westergren 2004, p. 324] angegeben. Für $n = 2$ lässt sich die Gewichtungsfunktion durch

$$w(k) = \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta k} W_2(k) \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} k_{\max} = k_0 + \Delta k, \\ k_{\min} = k_0 \end{array} \quad (\text{A.18})$$

auf das monofrequente Äquivalent $w(k)$ in (3.74) zurückführen. Aus dem gleichen Zusammenhang geht die zugehörige Punktantwortfunktion

$$\mathcal{F}\{w(k)\} = \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta k} \mathcal{F}\{W_2(k)\} = 4\pi \text{si}(k_0 r) \quad (\text{A.19})$$

in (3.76) hervor.

A.1.2.2 Berechnung des Ausdrucks $\mathcal{F}\{W_n(k) \hat{k} \hat{k}\}$

Die Lösung wird analytisch mit einer zu Anhang A.1.1 analogen Vorgehensweise hergeleitet. Das Endergebnis lautet

$$\mathcal{F}\{W_n(k) \hat{k} \hat{k}\} = \frac{4\pi}{r^3} n^{-\frac{n}{2}} \left[\alpha_2(r, k) \bar{\mathbf{I}} + \alpha_3(r, k) \hat{r} \hat{r} \right]_{k_{\min}}^{k_{\max}}, \quad (\text{A.20})$$

wobei

$$\alpha_2(r, k) = k^{-n} \begin{cases} \text{Si}(kr) - \sin(kr), & n = 0 \\ (-\sin(kr)), & n = 1 \\ k^2 r^2 \text{Si}(kr) - \sin(kr) + kr \cos(kr), & n = 2, \end{cases}$$

$$\alpha_3(r, k) = k^{-n} \begin{cases} -3 \text{Si}(kr) + 4 \sin(kr) - kr \cos(kr), & n = 0 \\ 3 \sin(kr) - kr \cos(kr), & n = 1 \\ -k^2 r^2 \text{Si}(kr) + 3 \sin(kr) - 3kr \cos(kr), & n = 2. \end{cases}$$

Der Ausdruck

$$\mathcal{F}\{W_n(k) (\bar{\mathbf{I}} - \hat{k}\hat{k})\} = \frac{4\pi}{r^3} n^{-\frac{n}{2}} \left[(\alpha_1(r, k) - \alpha_2(r, k)) \bar{\mathbf{I}} - \alpha_3(r, k) \hat{r}\hat{r} \right]_{k_{\min}}^{k_{\max}} \quad (\text{A.21})$$

ergibt sich nach (A.14) aus (A.15) und (A.20), wobei

$$\alpha_1(r, k) - \alpha_2(r, k) = k^{-n} \begin{cases} -\text{Si}(kr) + 2 \sin(kr) - kr \cos(kr), & n = 0 \\ \sin(kr) - kr \cos kr, & n = 1 \\ k^2 r^2 \text{Si}(kr) - kr \cos(kr) + \sin(kr), & n = 2, \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

ist.

A.2 Isotrope Punktstrahler und ihre bandbegrenzten Felder

Das skalare Fernfeld von isotropen Punktstrahlern in einer Minimalkugel mit dem Radius ρ_{max} kann mit

$$E(\mathbf{k}) = -\frac{jkZ_F}{4\pi} \iiint_{|\mathbf{r}'| < \rho_{max}} e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} J(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{A.23})$$

berechnet werden, wobei

$$\mathbf{k} = 2\pi \frac{f}{c} \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

der im sphärischen Koordinatensystem definierte Wellenvektor ist. Die Bandbreite der abgestrahlten Felder wird wie in [Vaupel und Eibert 2006] durch Benutzung des Zusammenhangs

$$m(x) \sim e^{j2\pi n(x)} \implies f_{x,max}^m = \max \frac{\partial n(x)}{\partial x} \quad (\text{A.25})$$

ermittelt. Der Zusammenhang beschreibt, wie die Bandbreite einer Exponentialfunktion anhand ihres Exponenten abgeschätzt werden kann. Angewendet auf die sphärischen Komponenten führt dies zu

$$f_{f,max}^E = \max \frac{\partial \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}{\partial f} \frac{1}{2\pi} = \max_{|\mathbf{r}'| < \rho_{max}} \frac{1}{c} \hat{k} \cdot \mathbf{r}' = \frac{\rho_{max}}{c}, \quad (\text{A.26a})$$

$$f_{\theta,max}^E = \max \frac{\partial \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}{\partial \theta} \frac{1}{2\pi} = \max_{|\mathbf{r}'| < \rho_{max}} \frac{f}{c} \hat{\theta} \cdot \mathbf{r}' = \rho_{max} \frac{f}{c}, \quad (\text{A.26b})$$

$$f_{\phi,max}^E = \max \frac{\partial \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}{\partial \phi} \frac{1}{2\pi} = \max_{|\mathbf{r}'| < \rho_{max}} \frac{f}{c} \sin \theta \hat{\phi} \cdot \mathbf{r}' = \rho_{max} \frac{f}{c} \sin \theta. \quad (\text{A.26c})$$

Aus der Bandbegrenzung der sphärischen Komponenten folgen die maximal zulässigen Abtastintervalle

$$\Delta f \leq \frac{c}{2\rho_{max}}, \quad \Delta \theta \leq \frac{c}{2\rho_{max}f}, \quad \Delta \phi \leq \frac{c}{2\rho_{max}f \sin \theta}. \quad (\text{A.27})$$

In der Praxis wird häufig ein regelmäßiges Gitter in ϕ , θ und k verwendet, was der Festlegung

$$\Delta f \leq \frac{c}{2\rho_{max}}, \quad \Delta \theta \leq \frac{c}{2\rho_{max}f_{max}}, \quad \Delta \phi \leq \frac{c}{2\rho_{max}f_{max}} \quad (\text{A.28})$$

entspricht und zu einer Überabtastung führt. In [Fortuny 2001, p. 42] werden die sphärischen Abtastintervalle für einen quaderförmigen Quellbereich und isotrope Streuzentren bestimmt. Die Ergebnisse unterscheiden sich nur geringfügig, was den unterschiedlichen Annahmen zuzuschreiben ist.

A.3 FFT-basierte Inter- und Anterpolation

Die 1D-Interpolation mit der FFT kann durch das Matrix-Vektor-Produkt

$$\mathbf{y} = \frac{1}{M} \mathbf{F}_N^H \mathbf{G}_{N \times M} \mathbf{F}_M \mathbf{x} = \mathbf{A}_{N \times M} \mathbf{x} \quad (\text{A.29})$$

ausgedrückt werden, wobei $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^M$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$ der Quell- beziehungsweise Zielvektor sind und $N > M$ gilt. Die zugehörige Anterpolationsvorschrift lautet $\mathbf{A}_{N \times M}^H$. Die Multiplikation mit den Matrizen

$$\mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi \frac{1}{N}} & \dots & e^{-j2\pi \frac{N-1}{N}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j2\pi \frac{N-1}{N}} & \dots & e^{-j2\pi \frac{(N-1)(N-1)}{N}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

und $\frac{1}{N} \mathbf{F}_N^H$ entspricht der diskreten Fouriertransformation beziehungsweise ihrer Inversen. Bei der Interpolation wird der Datenvektor im Frequenzbereich mit Nullen aufgefüllt. Dies wird durch die Matrix

$$\mathbf{G}_{N \times M} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{M+1}{2} \times \frac{M+1}{2}} & \mathbf{0}_{(\frac{M+1}{2}) \times (\frac{M-1}{2})} \\ \mathbf{0}_{(N-M) \times M} \\ \mathbf{0}_{\frac{M-1}{2} \times \frac{M+1}{2}} & \mathbf{I}_{\frac{M-1}{2} \times \frac{M-1}{2}} \end{bmatrix}, & \text{falls } M \text{ ungerade} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(\frac{M}{2}+1) \times (\frac{M}{2}+1)} & \mathbf{0}_{(\frac{M}{2}+1) \times (\frac{M}{2}-1)} \\ \mathbf{0}_{1 \times (\frac{M}{2}+1)} & \frac{1}{2} & \mathbf{0}_{1 \times (\frac{M}{2}-2)} \\ & \mathbf{0}_{(N-M-1) \times M} \\ \mathbf{0}_{1 \times (\frac{M}{2}+1)} & \frac{1}{2} & \mathbf{0}_{1 \times (\frac{M}{2}-2)} \\ \mathbf{0}_{(\frac{M}{2}-2) \times (\frac{M}{2}+2)} & \mathbf{I}_{(\frac{M}{2}-2) \times (\frac{M}{2}-2)} \end{bmatrix}, & \text{falls } M \text{ gerade} \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

erreicht. Bei der effizienten Implementierung der Inter- und Anterpolation kommt die FFT zum Einsatz. Außerdem wird ausgenutzt, dass $\mathbf{G}_{N \times M}$ dünn besetzt ist. Die resultierenden Algorithmen weisen so die Komplexität $\mathcal{O}(N \log N)$ auf.

Referenzen

- C. Balanis (2012a). *Advanced Engineering Electromagnetics*. CourseSmart Series. Wiley.
- C. Balanis (2012b). *Antenna Theory: Analysis and Design*. Wiley.
- R. Baraniuk und P. Steeghs (2007). “Compressive radar imaging”. In: *IEEE Radar Conference*, S. 128–133.
- S. Basu und Y. Bresler (2000). “An $O(N^2 \log_2 N)$ filtered back-projection reconstruction algorithm for tomography”. In: *IEEE Trans. Image Process.* S. 1760–1773.
- F. Berizzi, E. Mese, M. Diani und M. Martorella (2001). “High-resolution ISAR imaging of maneuvering targets by means of the range instantaneous Doppler technique: modeling and performance analysis”. In: *IEEE Trans. Image Process.* 10.12, S. 1880–1890.
- B. Bhalla und R. Ling (1993). “ISAR image formation using bistatic data computed from the shooting and bouncing ray technique”. In: *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* 7.9, S. 1271–1287.
- N. Bleistein und J. K. Cohen (1977). “Nonuniqueness in the inverse source problem in acoustics and electromagnetics”. In: *J. Math. Phys.* 18.2, S. 194–201.
- A. Boag (2001). “A fast multilevel domain decomposition algorithm for radar imaging”. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 49.4, S. 666–671.
- N. N. Bojarski (1972). *K-Space Formulation of the Electromagnetic Scattering Problem*. Techn. Ber. DTIC Document.
- I. van den Bosch, M. Acheroy und J.-P. Marcel (2007). “Design, implementation, and optimization of a highly efficient multilevel fast multipole algorithm”. In: *Computational Electromagnetics Workshop, Izmir, Turkey*.
- Y. Bresler und J. Brokish (2004). “A hierarchical algorithm for fast backprojection in helical cone-beam tomography”. In: *Proc. 2nd IEEE Int. Symp. Biomedical Imaging (ISBI)*, S. 1420–1423.
- A. Broquetas, J. Palau, L. Jofre und A. Cardama (1998). “Spherical wave near-field imaging and radar cross-section measurement”. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 46.5, S. 730–735.
- O. M. Bucci und G. Franceschetti (1987). “On the spatial bandwidth of scattered fields”. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 35.12, S. 1445–1454.
- O. M. Bucci und G. Franceschetti (1989). “On the degrees of freedom of scattered fields”. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 37.7, S. 918–926.
- H. Buddendick und T. F. Eibert (2011). “Bistatic image formation from shooting and bouncing rays simulated current distributions”. In: *Progress In Electromagnetics Research* 119, S. 1–18.
- C. Cafforio, C. Prati und E. Rocca (1991). “SAR data focusing using seismic migration techniques”. In: *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 27, S. 194–207.
- D. Calvetti, B. Lewis und L. Reichel (2002). “On the regularizing properties of the GMRES method”. In: *Numerische Mathematik* 91, S. 605–625.
- C. Cecka und E. Darve (2011). “Fourier-based fast multipole method for the Helmholtz equation”. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 35.1, A79–A103.
- D. H. Chambers, J. V. Candy, S. K. Lehman, J. S. Kallman, A. J. Poggio und A. W. Meyer (2004). “Time reversal and the spatio-temporal matched filter (1)”. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 116.3, S. 1348–1350.

- M. Cheney und B. Borden (2009a). *Fundamentals of Radar Imaging*. Society for Industrial und Applied Mathematics (SIAM).
- M. Cheney und B. Borden (2009b). “Problems in synthetic-aperture radar imaging”. In: *Inverse Problems* 25.12, S. 1–18.
- W. C. Chew, Y. M. Wang, G. Otto, D. Lesselier und J. C. Bolomey (1994). “On the inverse source method of solving inverse scattering problems”. In: *Inverse Problems* 10, S. 547–553.
- W. C. Chew, G. L. Wang und A. A. Aydiner (2004). “Recent advances in nonlinear inverse scattering”. In: *Proceedings of the URSI EMT-S, Pisa, Italy* 2, S. 697–699.
- W. C. Chew, J.-M. Jin, E. Michielssen und J. Song (2001). *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*. Artech House.
- W. C. Chew, T. J. Cui und J. M. Song (2002). “A FAFFA-MLFMA algorithm for electromagnetic scattering”. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 50.11, S. 1641–1649.
- B. A. Cipra (2000). “The best of the 20th century: editors name top 10 algorithms”. In: *SIAM News* 33.4, S. 1–2.
- J. F. Claerbout (1985). *Imaging the Earth’s Interior*. Blackwell Science Inc, S. 412.
- Computer Simulation Technology (2011). *MWS (MICROWAVE STUDIO)*. Darmstadt, Germany: Computer Simulation Technology (CST), www.cst.com.
- B. J. Cown und C. E. Ryan (1989). “Near-field scattering measurements for determining complex target RCS”. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 37.5, S. 576–585.
- R. De Jough, M. Hajian und L. Lighthart (1997). “Antenna time-domain measurement techniques”. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 39.5, S. 7–11.
- S. Deans (2007). *The Radon Transform and Some of Its Applications*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications.
- M. D. Desai und W. K. Jenkins (1992). “Convolution backprojection image reconstruction for spotlight mode synthetic aperture radar”. In: *IEEE Trans. Image Process.* 4.4, S. 505–517.
- A. J. Devaney und G. C. Sherman (1982). “Nonuniqueness in inverse source and scattering problems”. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 30.5, S. 1034–1037.
- A. J. Devaney und E. Wolf (1973). “Radiating and nonradiating classical current distributions and the fields they generate”. In: *Phys. Rev. D* 8.4, S. 1044–1047.
- J. Dongarra (1998). *Numerical Linear Algebra on High-Performance Computers*. Software, Environments and Tools. Society for Industrial und Applied Mathematics.
- T. F. Eibert, Ismatullah, E. Kaliyaperumal und C. H. Schmidt (2010). “Inverse equivalent surface current method with hierarchical higher order basis functions, full probe correction and multilevel fast multipole acceleration (invited paper)”. In: *Progress In Electromagnetics Research* 106, S. 377–394.
- T. F. Eibert, R. A. M. Mauermayer, G. Schnattinger, A. Qureshi, O. Wiedenmann, T. Fritzel, A. Geise, C. H. Schmidt, H.-J. Steiner und M. Paquay (2013). “Inverse equivalent current methods based on equivalent currents, equivalent plane waves, and equivalent spherical harmonics”. In: *35th ESA Antenna Workshop on Antenna and Free Space RF Measurements*. Noordwijk, The Netherlands.
- EM Simulation Software (2013). *FEKO (Feldberechnung für Körper mit beliebiger Oberfläche)*. Stellenbosch, South Africa: EM Simulation Software, www.feko.info.
- H. Engl, M. Hanke und A. Neubauer (1996). *Regularization of Inverse Problems*. Mathematics and Its Applications. Springer.
- P. P. Ewald (1969). “Introduction to the dynamical theory of X-ray diffraction”. In: *Acta Crystallographica Section A* 25.1, S. 103–108.

- C. Eyraud, J.-M. Geffrin, A. Litman, O. Merchiers und R. Vaillon (2011). “Effects of polarization on microwave imaging reconstructions”. In: *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, S. 998–1001.
- J. Fordham, T. Schwartz, G. Cawthon, Y. Netzov, S. McBride, M. Awadalla und D. Wayne (2012). “Achieved accuracy of a spherical near-field arch positioning system”. In: *6th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP)*, S. 3195–3199.
- J. Fortuny (2001). “Efficient Algorithms for Three-Dimensional Near-Field Synthetic Aperture Radar Imaging”. Diss. Faculty of Electrical Engineering, University of Karlsruhe.
- B. Friedlander, R. V. Denton und A. Rockmore (1978). “The inverse problem in radar and optical imaging”. In: *IEEE Conference on Decision and Control including the 17th Symposium on Adaptive Processes*. Bd. 17, S. 413–418.
- T. Fritzel, H.-J. Steiner, J. Habersack, H. Schippers und J.-G. Ferrante (2005). “Antenna pattern measurements of full-size air vehicles with an airborne near-field test facility (ANTF)*”. In: *European Test & Telemetry Conference*.
- T. Fritzel, A. Geise, C. H. Schmidt, H.-J. Steiner, T. F. Eibert, O. Wiedenmann und M. Paquay (2013). “Concept of a portable antenna measurement system for large-scale and multi-contour near-field measurements”. In: *35th ESA Antenna Workshop on Antenna and Free Space RF Measurements, Noordwijk, The Netherlands*.
- G. L. Gagnani und M. D. Mendez (2010). “An improved electromagnetic imaging procedure using non-radiating sources”. In: *Mediterranean Microwave Symposium (MMS)*, S. 188–191.
- J. Hacker (2010). *Surface Scan on IC Level with High Resolution*. Techn. Ber. Langer EMV-Technik GmbH.
- J. Hald, J. Hansen, F. Jensen und F. H. Larsen (1988). *Spherical Near-Field Antenna Measurements*. Hrsg. von J. Hansen. Peter Peregrinus Ltd., London, United Kingdom.
- R. Harrington (1993). *Field Computation by Moment Methods*. IEEE/OUP Series on Electromagnetic Wave Theory. Oxford University Press, USA.
- iThera Medical GmbH (2015). *iThera Brochure: MSOT Technology*. München, Deutschland: iThera Medical GmbH, www.ithera-medical.com.
- A. Jain und I. Patel (1990). “Simulation of ISAR image errors”. In: *IEEE Trans. Instrum. Meas.* 39.1, S. 212–218.
- J.-M. Jin (2010). *Theory and Computation of Electromagnetic Fields*. John Wiley & Sons, Inc.
- J. Jin (1993). *The Finite Element Method in Electromagnetics*. A Wiley-Interscience publication. Wiley-IEEE Press.
- KATHREIN-Werke KG (2004). *790 - 2500 MHz Base Station Antennas for Mobile Communications | Catalogue Issue 02/04*. Rosenheim, Deutschland: KATHREIN-Werke KG, www.kathrein.de.
- J. Koo, J. Mix und K. Slattey (2010). “Limit and use of near-field scan for platform RFI analysis”. In: *IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC)*, S. 233–238.
- V. Kraz (1995). *Near-Field Methods of Locating EMI Sources*. Techn. Ber. Credence Technologies, Inc.
- I. J. LaHaie (2003). “Overview of an image-based technique for predicting far-field radar cross section from near-field measurements”. In: *IEEE Antennas Propag. Mag.* 45.6, S. 159–169.
- D. Livesay und K. Chen (1974). “Electromagnetic fields induced inside arbitrarily shaped biological bodies”. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* 22.12, S. 1273–1280.
- E. Lüneburg, S. R. Cloude und W.-M. Boerner (1997). “On the proper polarimetric scattering matrix formulation of the forward propagation versus backscattering radar systems descrip-

- tion". In: *Geosceince and Remote Sensing (IGARSS), Chicago, IL, USA*. Bd. 4, S. 1591–1593.
- K. Magura (2002). "Enhancement of high-resolution ISAR images for non-cooperative target identification". In: *4th European Conference on Synthetic Aperture Radar (EUSAR), Cologne, Germany*. 4-6. Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (FGAN). Cologne, Germany: VDE Verlag, S. 381–384.
- E. A. Marangeo und R. W. Ziolkowski (2000). "Nonradiating and minimum energy sources and their fields: generalized source inversion theory and applications". In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 48.10, S. 1553–1562.
- A. Meister (2005). *Numerik linearer Gleichungssysteme*. Vieweg.
- D. L. Mensa (1990). *High Resolution Radar Cross-Section Imaging*. Revised. Artech House Inc.
- J. Moll, P. Schöps und V. Krozer (2012). "Towards three-dimensional millimeter-wave radar with the bistatic fast-factorized back-projection algorithm – potential and limitations". In: *IEEE Trans. Terahertz Sci. Technol.* 2.4, S. 432–440.
- H. Mott (2006). *Remote Sensing with Polarimetric Radar*. Wiley-IEEE Press.
- C. Müller (1956). "Electromagnetic radiation patterns and sources". In: *IRE Trans. Antennas Propagat.* 4.3, S. 224–232.
- Y. Na, H. Sun, Y. H. Lee, L. C. Tai und H. L. Chan (2004). "Performance evaluation of back-projection and range migration algorithms in foliage penetration radar imaging". In: *International Conference on Image Processing (ICIP)*.
- V. Ntziachristos und D. Razansky (2010). "Molecular imaging by means of multispectral optoacoustic tomography (MSOT)". In: *Chem. Rev.* 110.5, S. 2783–2794.
- S. Ohnuki und W. C. Chew (2003). "Truncation error analysis of multipole expansion". In: *SIAM J. Sci. Comput.* 25.4, S. 1293–1306.
- S. J. Orfanidis (2002). *Electromagnetic Waves and Antennas*. Rutgers University.
- A. T. Ott und T. F. Eibert (2010). "A 433 MHz–22 GHz reconfigurable dielectric loaded biconical antenna". In: *European Conf. on Antennas and Propagation (EuCAP), Berlin, Germany*.
- S. X. Pan und A. C. Kak (1983). "A computational study of reconstruction algorithms for diffraction tomography: interpolation versus filtered backpropagation". In: *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.* 31.5, S. 1262–1275.
- J.-I. Park und K.-T. Kim (2010). "A comparative study on ISAR imaging algorithms for radar target identification". In: *Progress In Electromagnetics Research* 108, S. 155–175.
- R. P. Porter und A. J. Devaney (1982). "Holography and the inverse source problem". In: *Journal of the Optical Society of America* 72.3, S. 327–330.
- Y. Qin und I. Ciric (1993). "Inverse scattering solution with current modeling and Tikhonov regularization". In: *Antennas and Propagation Society International Symposium (AP-S)*, 492–495 vol.1.
- J. L. A. Quijano und G. Vecchi (2010). "Field and source equivalence in source reconstruction on 3D surfaces". In: *Progress In Electromagnetics Research* 103, S. 67–100.
- M. Qureshi, C. Schmidt und T. Eibert (2013a). "Efficient near-field far-field transformation for nonredundant sampling representation on arbitrary surfaces in near-field antenna measurements". In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 61.4, S. 2025–2033.
- M. A. Qureshi, C. H. Schmidt und T. F. Eibert (2013b). "Near-field error analysis for arbitrary scanning grids using fast irregular antenna field transformation algorithm". In: *Progress In Electromagnetics Research B* 48, S. 192–220.
- C. Reinhold (2010). "Presentation of a new 3D nearfield scanner system for the analysis of emission and immunity in electronic systems". In: *EPOSS Annual Forum*. Lisbon, Portugal.

- Rohde & Schwarz GmbH & Co. KG (2015). *HF - VHF/UHF - SHF Antennas | Catalog 2014/2015*. München, Deutschland: Rohde & Schwarz GmbH & Co. KG, www.rohde-schwarz.de.
- V. Rokhlin (1993). “Diagonal forms of translation operators for the Helmholtz equation in three dimensions”. In: *Applied and Computational Harmonic Analysis* 1.1, S. 82–93.
- A. Rosenthal, D. Razansky und V. Ntziachristos (2010). “Fast semi-analytical model-based acoustic inversion for quantitative optoacoustic tomography”. In: *IEEE Trans. Image Process.* 29.6, S. 1275–1285.
- L. Råde und B. Westergren (2004). *Mathematics Handbook for Science and Engineering*. 5. Aufl. Springer.
- G. E. Sarty, R. Bennet und R. W. Cox (2001). “Direct reconstruction of non-Cartesian k -space data using a nonuniform fast Fourier transform”. In: *Magnetic Resonance in Medicine* 45, S. 908–915.
- J. Sarvas (2003). “Performing interpolation and anterpolation entirely by fast Fourier transform in the 3-D multilevel fast multipole algorithm”. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 41.6, S. 2180–2196.
- C. H. Schmidt und T. F. Eibert (2010). “Near-field to far-field transformation utilising multi-level plane wave representation for planar and quasi-planar measurement contours”. In: *IET Microwaves, Antennas & Propagation* 4.11, S. 1829–1837.
- C. H. Schmidt, M. M. Leibfritz und T. F. Eibert (2008). “Fully probe-corrected near-field far-field transformation employing plane wave expansion and diagonal translation operators”. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 56.3, S. 737–746.
- C. H. Schmidt (2009). “Effiziente Nahfeldmesstechnik für große Antennen, beliebige Messoberflächen und echobehaftete Messumgebungen”. Diss. Fakultät für Informatik, Elektrotechnik und Informationstechnik der Universität Stuttgart.
- C. H. Schmidt und T. F. Eibert (2012). “Sub spectra representation of antennas for plane wave based near-field far-field transformation at short measurement distances”. In: *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (AP-S), Chicago, IL, USA*.
- C. Schmidt, D. Schobert und T. Eibert (2011). “Electric dipole based synthetic data generation for probe-corrected near-field antenna measurements”. In: *Proceedings of the 5th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP)*, S. 3269–3273.
- G. Schnattinger und T. F. Eibert (2012a). “3D image generation from arbitrary antenna measurement data by solving the full vectorial inverse source problem”. In: *AMTA 35th Annual Meeting & Symposium*. Bellevue, WA, USA.
- G. Schnattinger und T. F. Eibert (2014). “Dyadic point spread functions for 3D inverse source imaging based on analytical integral solutions”. In: *Progress In Electromagnetics Research B* 58, S. 1–17.
- G. Schnattinger, C. Lopez, E. Kılıç und T. F. Eibert (2014a). “Fast near-field far-field transformation for phaseless and irregular antenna measurement data”. In: *Advances in Radio Science* 12, S. 171–177.
- G. Schnattinger, R. A. M. Mauermayer und T. F. Eibert (2014b). “Monostatic radar cross section near-field far-field transformations by multilevel plane wave decomposition”. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 62.8, S. 4259–4268.
- G. Schnattinger und T. F. Eibert (2012b). “Solution of the full vectorial 3D inverse source problem by adjoint near-field fast multipole translations”. In: *IEEE Antennas and Propagation International Symposium*. Chicago, USA.
- G. Schnattinger und T. F. Eibert (2012c). “Solution to the full vectorial 3D inverse source problem by multi-level fast multipole method inspired hierarchical disaggregation”. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 60.7, S. 3325–3335.

- SciFace Software (2012). *MuPAD (Multi Processing Algebra Data Tool)*. Paderborn, Germany: SciFace Software, www.mupad.de.
- Ş. Selçuk Bayin (2006). *Mathematical Methods in Science and Engineering*. John Wiley & Sons.
- J. A. Stratton (2007). *Electromagnetic Theory*. Hrsg. von M. E. El-Hawary. IEEE Press.
- A. Tankielun, H. Garbe und J. Werner (2006). “Calibration of electric probes for post-processing of near-field scanning data”. In: *IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC)*. Bd. 1, S. 119–124.
- The MathWorks Inc. (2012). *MATLAB (Matrix Laboratory)*. Natick, Massachusetts, USA: The MathWorks Inc., www.mathworks.com.
- H. Turbell (2001). “Cone-Beam Reconstruction Using Filtered Backprojection”. Diss. Department of Electrical Engineering, Linköpings universitet.
- T. Vaupel und T. F. Eibert (2006). “Comparison and application of near-field ISAR imaging techniques for far-field radar cross section determination”. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 54.1, S. 144–151.
- T. Vaupel und F. Weinmann (2009). “Validation of a 3-D near-field ISAR imaging technique with far-field RCS extraction by means of a hybrid GO-PO/PTD ray tracing algorithm”. In: *3rd European Conference on Antennas and Propagation, Berlin, Germany*, S. 691–695.
- H. van der Vorst (2003). *Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems*. Cambridge monographs on applied and computational mathematics. Cambridge University Press.
- I. Walterscheid, J. Klare, A. Brenner, H. H. G. Ender und O. Loffeld (2006). “Challenges of a bistatic spaceborne/airborne SAR experiment”. English. In: *6th European Conference on Synthetic Aperture Radar, Dresden, Germany*. Center for Sensor Systems, University of Siegen.
- J. W. Woods (2011). *Multidimensional Signal, Image, and Video Processing and Coding*. Academic Press.
- A. D. Yaghjian (1986). “An overview of near-field antenna measurements”. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 34.1, S. 30–45.
- A. Yegulalp (1999). “Fast backprojection algorithm for synthetic aperture radar”. In: *The Record of the IEEE Radar Conference*, S. 60–65.
- K. Yinusa und T. Eibert (2013). “A multi-probe antenna measurement technique with echo suppression capability”. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 61.10, S. 5008–5016.
- Y. Álvarez, F. Las-Heras und M. Pino (2007). “Reconstruction of equivalent currents distribution over arbitrary three-dimensional surfaces based on integral equation algorithms”. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 55.12, S. 3460–3468.
- Y. Álvarez, B. A. D. Casas, C. García und F. Las-Heras (2010). “The volumetric sources reconstruction method and its applications to geometry reconstruction”. In: *4th European Conference on Antennas and Propagation, Barcelona, Spain*, S. 1–5.
- Y. Álvarez, J. Ángel Martínez, F. Las-Heras und C. M. Rappaport (2011). “An inverse fast multipole method for imaging applications”. In: *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.* 10, S. 1259–1262.

Eigene Veröffentlichungen

- T. F. Eibert, R. A. M. Mauermayer und G. Schnattinger (2014). “Fast irregular electromagnetic field transformation utilizing spatial or spectral equivalent sources representations together with hierarchical radiation operator evaluation”. In: *31st URSI General Assembly and Scientific Symposium*. Beijing, China.
- T. F. Eibert, R. A. M. Mauermayer, G. Schnattinger, A. Qureshi, O. Wiedenmann, T. Fritzel, A. Geise, C. H. Schmidt, H.-J. Steiner und M. Paquay (2013). “Inverse equivalent current methods based on equivalent currents, equivalent plane waves, and equivalent spherical harmonics”. In: *35th ESA Antenna Workshop on Antenna and Free Space RF Measurements*. Noordwijk, The Netherlands.
- T. F. Eibert, E. Kılıç, C. Lopez, R. A. M. Mauermayer, O. Neitz und G. Schnattinger (2015a). “Electromagnetic field transformations for measurements and simulations (invited paper)”. In: *Progress In Electromagnetics Research* 151, S. 127–150.
- T. F. Eibert, E. Kılıç, C. Lopez, R. A. M. Mauermayer, O. Neitz und G. Schnattinger (2015b). “Electromagnetic field transformations with spectral field representations on the Ewald sphere”. In: *36th Progress In Electromagnetics Research Symposium (PIERS)*. Prague, Czech Republic.
- R. A. M. Mauermayer, G. Schnattinger und T. Eibert (2013). “Antenna diagnostics, echo suppression and equivalent sources representation capabilities of the fast irregular antenna field transformation algorithm”. In: *AMTA 35th Annual Meeting & Symposium*. Columbus, OH, USA.
- R. A. M. Mauermayer, G. Schnattinger und T. F. Eibert (2014). “Multi-spectral representation of measurement probes for antenna field transformations”. In: *8th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP)*. The Hague, Netherlands.
- G. Schnattinger und T. F. Eibert (2012a). “3D image generation from arbitrary antenna measurement data by solving the full vectorial inverse source problem”. In: *AMTA 35th Annual Meeting & Symposium*. Bellevue, WA, USA.
- G. Schnattinger und T. F. Eibert (2012b). “Integral equation solutions for the inverse source problem”. In: *VI LEMA-EPFL Workshop on Integral Techniques for Electromagnetics*. Sevilla, Spain.
- G. Schnattinger und T. F. Eibert (2013a). “Analytic point spread functions for 3D full vectorial inverse source imaging”. In: *URSI International Symposium on Electromagnetic Theory*. Hiroshima, Japan.
- G. Schnattinger und T. F. Eibert (2013b). “Iterative solution of the 3D full vectorial inverse source problem”. In: *7th European Conference on Antennas and Propagation*. Gothenburg, Sweden.
- G. Schnattinger und T. F. Eibert (2014). “Dyadic point spread functions for 3D inverse source imaging based on analytical integral solutions”. In: *Progress In Electromagnetics Research B* 58, S. 1–17.
- G. Schnattinger, C. H. Schmidt und T. F. Eibert (2011a). “3-D imaging by hierarchical disaggregation”. In: *German Microwave Conference (GeMiC)*. Darmstadt, Germany, S. 1–4.

- G. Schnattinger, R. A. M. Mauermayer und T. F. Eibert (2013a). “Fast monostatic RCS prediction from monofrequent near-field data performing plane wave based near-field far-field transformation”. In: *35th ESA Antenna Workshop on Antenna and Free Space RF Measurements*. Noordwijk, The Netherlands.
- G. Schnattinger, C. Lopez, E. Kılıç und T. F. Eibert (2013b). “Fast near-field far-field transformation for phaseless and irregular antenna measurement data”. In: *Kleinheubacher Tagung*. Miltenberg, Germany.
- G. Schnattinger, R. A. M. Mauermayer und T. F. Eibert (2013c). “Transformation of monostatic near-field scattering data by fast irregular field transformation algorithms”. In: *35th Annual Antenna Measurement Techniques Association (AMTA) Symposium*. Columbus, Ohio.
- G. Schnattinger, C. Lopez, E. Kılıç und T. F. Eibert (2014a). “Fast near-field far-field transformation for phaseless and irregular antenna measurement data”. In: *Advances in Radio Science* 12, S. 171–177.
- G. Schnattinger, R. A. M. Mauermayer und T. F. Eibert (2014b). “Monostatic radar cross section near-field far-field transformations by multilevel plane wave decomposition”. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 62.8, S. 4259–4268.
- G. Schnattinger und T. F. Eibert (2012c). “Fast monostatic radar imaging by hierarchical disaggregation”. In: *IEEE Antennas and Propagation International Symposium*. Chicago, IL, USA.
- G. Schnattinger und T. F. Eibert (2012d). “Solution of the full vectorial 3D inverse source problem by adjoint near-field fast multipole translations”. In: *IEEE Antennas and Propagation International Symposium*. Chicago, USA.
- G. Schnattinger und T. F. Eibert (2012e). “Solution to the full vectorial 3D inverse source problem by multi-level fast multipole method inspired hierarchical disaggregation”. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 60.7, S. 3325–3335.
- G. Schnattinger, C. H. Schmidt und T. F. Eibert (2011b). “Analysis of 3-D images generated by hierarchical disaggregation”. In: *Proc. Int. Radar Symp. (IRS)*. Leipzig, Germany, S. 365–370.

Betreute studentische Arbeiten

F. Zhao (2012). “Analysis of Scalar Inverse Source Imaging by Utilizing the Concept of Point Spread Functions”. Magisterarb. Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Technische Universität München.