

Zustandsschätzung nach Kalman auf einem bewegten Horizont variabler Länge

Variable length receding horizon state estimation based on the Kalman filter

Matthias Bittner, Michael Buhl, Boris Lohmann
Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München
Boltzmannstr. 15, 85748 Garching
E-Mail: m.bittner@tum.de & buhl@tum.de, lohmann@tum.de

Die Optimalität der Zustandsschätzung nach Kalman basiert auf der Annahme, dass die zu regelnde Strecke ausschließlich durch mittelwertfreies Rauschen gestört wird. In der Praxis ist dies jedoch oftmals nicht zutreffend. In dieser Arbeit wird eine Zustandsschätzung nach Kalman auf einem variabel begrenzten Horizont vorgeschlagen. Neben dem Zustand wird bei der verwendeten Implementierung auch der zeitliche Verlauf der Störung geschätzt. Mit Hilfe dieser Information wird die Länge des Horizonts zu jedem Zeitpunkt so angepasst, dass der Zielkonflikt zwischen dem Unterdrücken von Rauschen und der Wiedergabe von schnellen aber relevanten Zustandsänderungen aufgrund von Störungen gemindert wird. Die Vorteile der sich ergebenden Zustandsschätzung werden beispielhaft im Zusammenspiel mit einer strukturvariablen Regelung anhand eines inversen Pendels im Laborversuch demonstriert.

Keywords: Kalman Filter; Optimale Zustandsschätzung; Zustandsschätzung auf begrenztem Horizont; strukturvariable Regelung.

1 Einleitung

Aus technischen oder wirtschaftlichen Gründen ist es in der Regel nicht möglich alle Zustandsgrößen eines Systems messtechnisch zu erfassen. Die Verwendung einer Zustandsregelung ist daher nahezu immer an die Notwendigkeit einer Zustandsschätzung gekoppelt. In der Kombination aus Zustandsschätzung und Zustandsrückführung ist die Güte der Zustandsschätzung wesentlich für die Güte der gesamten Regelung verantwortlich.

Für lineare Systeme stellt die Zustandsschätzung nach Kalman eine gängige und unter gewissen Annahmen auch optimale Lösung dar. Die Optimalität gilt, wie in [6] gezeigt, bezüglich verschiedener Gütemaße. Soll die optimale Lösung bezüglich eines unendlich langen Zeithorizonts gefunden werden, so hat die Zustandsschätzung nach Kalman die Struktur eines Luenberger-Beobachters [5]. Bemerkenswert hierbei ist, dass die optimale Schätzung rekursiv bestimmt werden kann. Das heißt, die Schätzung zu einem Zeitpunkt basiert ausschließlich auf der Schätzung zum vorherigen Zeitpunkt und der inzwischen angefallenen Mess- bzw. Stellinformation. Eine Speicherung weiter zurückliegender Werte ist nicht nötig, weshalb die Schätzung über einen unendlich langen Zeithorizont sehr attraktiv ist. Durch die Betrachtung eines unendlich langen Horizonts wird auch der Einfluss des Messrauschens auf die Schätzung minimiert, wodurch die Unsicherheit in der Schätzung mit der Zeit abnimmt.

Dieses Verhalten ist jedoch an die Annahme gekoppelt, dass ausschließlich mittelwertfreies, gaußverteiltes weißes Rauschen auf die Strecke und den Ausgang wirken. In der Praxis ist diese Annahme oftmals nicht bzw. nur zeitweise erfüllt. Beispielfhaft könnte man sich vorstellen, dass auf ein ansonsten stochastisch gestörtes System zu einem gewissen Zeitpunkt ein Schlag d.h. eine impulsförmige Störung, wirkt. In diesem Fall kann eine Schätzung bessere Ergebnisse liefern, die bezüglich eines begrenzten Zeithorizonts optimal ist und sämtliche Informa-

tion außerhalb dieses Horizonts ignoriert [7]. Sobald nämlich der Schlag den begrenzten Horizont verlassen hat, sind die zugrundeliegenden stochastischen Annahmen wieder erfüllt und der Schätzer liefert eine optimale Lösung. Bei einem unendlichen Horizont hingegen werden auch die irrelevant gewordenen Signalverläufe von vor dem Störereignis berücksichtigt, was zu entsprechenden Fehlern in der Zustandsschätzung führt.

Im Hinblick auf diese Überlegung kommt in dieser Arbeit eine Zustandsschätzung nach Kalman auf einem begrenzten Horizont zum Einsatz. Eine Herleitung für eine solche Schätzung findet sich z.B. in [7]. Die Herleitung dort basiert auf der bekannten Lösung für einen unendlich langen Horizont und wertet diese nur für die Länge des Horizonts aus. Um die Schätzung dabei nicht durch Werte außerhalb des Horizonts zu beeinflussen, wird die Unsicherheit für den Anfangswert im Horizont als unendlich groß angenommen.

Ein anderer Zugang findet sich in [10]. Dort wird die Schätzung direkt aus der Minimierung eines dem Kalman Filter zugrundeliegenden Gütemaßes bestimmt. Auf diese Weise können auch nichtlineare Systeme betrachtet werden.

In der vorliegenden Arbeit wird der in [10] beschriebene Weg auf lineare Systeme angewandt, wodurch die Lösung des Optimierungsproblems analytisch gefunden werden kann. Anders als bei den Lösungen, die einen unendlich langen Horizont betrachten [6] bzw. sich daraus herleiten [7], liefert die Lösung über die direkte Minimierung des Gütemaßes auch eine Schätzung für den zeitlichen Verlauf der Störungen. Diese Information wird gewöhnlich im Regelgesetz nicht direkt verwendet. Wie sich zeigen wird, kann sie jedoch zur Detektion von signifikanten, nicht stochastischen Störungen genutzt werden. Treten solche Störungen auf, führt ein langer Beobachtungshorizont zu einer schlechten Schätzung. Es wird deshalb vorgeschlagen, die Länge des Horizonts in diesen Phasen auf ein Minimum zu verkürzen, um möglichst schnell den Einfluss der nicht stochastischen Störung auf die Schätzung zu mindern.

Der vorgestellte Ansatz ist somit in der Lage eine impulsartige Störung zu erkennen und im Anschluss daran nach einer sehr kurzen und wohl definierten Zeit wieder eine gute Schätzung zu liefern. Der resultierende Zustandsschätzer harmonisiert aufgrund dieser Eigenschaften sehr gut mit einer strukturvariablen Regelung, bei der laut [8] der klassische Luenberger-Beobachter aus theoretischer Sicht keine befriedigende Lösung darstellt.

Die verbleibende Arbeit gliedert sich wie folgt: Abschnitt 2 beginnt mit der Herleitung des Zustandsschätzers auf einem festen Horizont als Lösung eines Optimierungsproblems. Aufbauend auf der gleichen Kostenfunktion wird in Abschnitt 3 beschrieben, wie impulsartige Störungen detektiert werden können. Dies wird in Abschnitt 4 genutzt um die Länge des Horizonts zu variieren. In Abschnitt 5 finden sich Überlegungen zur Kombination des vorgestellten Zustandsschätzers mit einer strukturvariablen Regelung. Die hiermit erzielten Simulations- und Versuchsergebnisse werden in Abschnitt 6 präsentiert. Abschnitt 7 fasst die wichtigsten Eigenschaften und Ergebnisse des vorgeschlagenen Zustandsschätzers zusammen und gibt einen Ausblick über mögliche Erweiterungen. Zur flüssigeren Darstellung wurden der Nachweis, dass der vorgestellte Zustandsschätzer für beobachtbare Systeme immer entworfen werden kann, sowie eine Beschreibung der verwendeten strukturvariablen Regelung und die Zahlenwerte der Strecke bzw. der Regelung in den Anhang der Arbeit gelegt.

2 Entwurf eines Kalmanfilters auf begrenztem Horizont

2.1 Ausgangspunkt

Betrachtet wird ein diskretes lineares dynamisches System der Ordnung n :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{G}\mathbf{w}_k \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^q$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Das System wird durch unkorreliertes, gaußsches, weißes Rauschen \mathbf{v} und \mathbf{w} gestört. Die zugehörigen Kovarianzmatrizen $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ und $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ sind damit diagonalförmig und positiv definit.

Im weiteren Verlauf soll für obiges System der aktuelle Zustand geschätzt werden. Hierfür werden ausschließlich die Eingangs- und Ausgangsgrößen der letzten j Zeitpunkte benutzt. Zur besseren Darstellung wird im Folgenden der aktuelle Zeitpunkt mit dem Index 0 bezeichnet, so dass der für die Schätzung betrachtete Horizont immer mit dem Index $-j$ beginnt. Geschätzte Größen werden mit einem „ $\hat{\cdot}$ “ kenntlich gemacht.

2.2 Theorie

Dem Zustandsschätzer liegt folgendes Modell der Strecke zugrunde:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{G}\hat{\mathbf{w}}_k, \quad \hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k. \quad (3)$$

Aus (3) ergibt sich für jeden geschätzten Zustand $\hat{\mathbf{x}}_{-i}$ bzw. geschätzten Ausgang $\hat{\mathbf{y}}_{-i}$ im betrachteten Horizont:

$$\hat{\mathbf{x}}_{-i} = \mathbf{A}^{-i}\hat{\mathbf{x}}_0 - \sum_{k=1}^i (\mathbf{A}^{-1-i+k}\mathbf{G}\hat{\mathbf{w}}_{-k} + \mathbf{A}^{-1-i+k}\mathbf{B}\mathbf{u}_{-k})$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{-i} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{-i}$$

mit $-i \in [-j, 0]$. Die Differenz aus der Messung \mathbf{y}_{-i} und $\hat{\mathbf{y}}_{-i}$ bezeichnet den Schätzwert für die Störung auf den Ausgang

$$\hat{\mathbf{v}}_{-i} = \mathbf{y}_{-i} - \hat{\mathbf{y}}_{-i}. \quad (4)$$

Um die weiteren Gleichungen übersichtlicher darstellen zu können, werden Vektoren definiert, die sämtliche Größen innerhalb des betrachteten Horizontes beinhalten:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{-j} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{-j} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_{-1} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{w}}_{-j} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Zusätzlich werden die folgenden, positiv definiten Gewichtungsmatrizen passender Dimensionen eingeführt:

$$\tilde{\mathbf{R}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{Q}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Unter Verwendung von (5) erhält man für die Schätzung der Ausgangsstörung innerhalb des gesamten Horizonts

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{y}} - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}_0 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{y}}_{-j} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{y}} - \left(\tilde{\mathbf{Q}}_B \hat{\mathbf{x}}_0 + \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{w}} \right) \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{Q}}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA}^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{-j} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{G} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{CA}^{-2}\mathbf{G} & \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{G} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{-j}\mathbf{G} & \mathbf{CA}^{-j+1}\mathbf{G} & \dots & \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{CA}^{-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{-j}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{-j+1}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Mit Hilfe der eben eingeführten Vektoren lässt sich das Gütemaß eines Kalman-Filters auf begrenztem Horizont ohne Information über den Startwertes $\hat{\mathbf{x}}_{-j}$ (bzw. mit unendlich großer Kovarianz \mathbf{P}_{-j} oder entsprechend $\mathbf{P}_{-j}^{-1} = \mathbf{0}$) angeben als [10]:

$$J = \sum_{t=0}^j \hat{\mathbf{v}}_{-t}^T \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{v}}_{-t} + \sum_{s=1}^j \hat{\mathbf{w}}_{-s}^T \mathbf{Q}^{-1} \hat{\mathbf{w}}_{-s} = \tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \tilde{\mathbf{w}}. \quad (8)$$

Setzt man in das Gütemaß (8) den Zusammenhang aus Gleichung (6) ein, ergibt sich ein quadratisches Optimierungsproblem in den Variablen $\hat{\mathbf{x}}_0$ und $\tilde{\mathbf{w}}$. Dieses kann analytisch gelöst werden. Zunächst wird das Optimum bezüglich $\hat{\mathbf{x}}_0$ bestimmt:

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\mathbf{x}}_0} = 2 \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_0} \right)^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{v}} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}. \quad (9)$$

Hieraus erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= -\tilde{\mathbf{Q}}_B^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{Q}}_B \hat{\mathbf{x}}_0 - \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{w}} \right) \\ &= -\tilde{\mathbf{Q}}_B^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{Q}}_B^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}_B \hat{\mathbf{x}}_0 + \tilde{\mathbf{Q}}_B^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{Q}}_B^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{w}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Die Ableitung nach $\tilde{\mathbf{w}}$ liefert

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{\mathbf{w}}} = 2 \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{\mathbf{w}}} \right)^T \mathbf{R}^{-1} \tilde{\mathbf{v}} + 2 \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \tilde{\mathbf{w}} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}. \quad (11)$$

woraus sich ein ähnlicher Zusammenhang wie in (10) ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= -\tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{Q}}_B \hat{\mathbf{x}}_0 - \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{w}} \right) + \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \tilde{\mathbf{w}} \\ &= -\tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}_B \hat{\mathbf{x}}_0 + \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{w}} + \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \tilde{\mathbf{w}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Reiht man die Gleichungen (10) und (12) untereinander und stellt sie wie folgt um:

$$\mathbf{0} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_B^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_y} \tilde{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_B^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_u} \tilde{\mathbf{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_B^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}_B & \tilde{\mathbf{Q}}_B^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{G}} \\ \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}_B & \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \tilde{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \quad (13)$$

kann man direkt nach den gesuchten Größen auflösen:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \tilde{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}_y \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}_u \tilde{\mathbf{u}}. \quad (14)$$

Zur Bestimmung der Lösung dieses Gleichungssystems muss die Matrix \mathbf{W} invertiert werden, was immer dann möglich ist, wenn ein ausreichend langer Horizont betrachtet wird und das zugrundeliegende System nach Kalman beobachtbar ist (siehe Anhang 8.1).

Mit den Vektoren $\hat{\mathbf{x}}_0$ und $\tilde{\mathbf{w}}$ lässt sich $\tilde{\mathbf{v}}$ nach (6) und damit der aktuelle Wert für das Gütemaß (8) bestimmen.

Zusammenfassend ist man damit in der Lage, den aktuellen Zustandsvektor und alle Störungen innerhalb des Horizontes zu schätzen. Zusätzlich kann mit Hilfe des in jedem Zeitschritt bestimmbaren Gütemaßes ein Indikator für die Qualität der aktuellen Schätzung gewonnen werden, wie im folgenden Abschnitt detaillierter beschrieben wird.

3 Störungsdetektierung mit Hilfe des Gütemaßes

Erfüllen die Störungen innerhalb eines Horizonts die angenommenen stochastischen Eigenschaften, so erhält man für das Gütemaßes (8) den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E(J) &= \sum_{t=0}^j E(\hat{\mathbf{v}}_{-t}^T \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{v}}_{-t}) + \sum_{s=1}^j E(\hat{\mathbf{w}}_{-s}^T \mathbf{Q}^{-1} \hat{\mathbf{w}}_{-s}) \\ &= (j+1) \cdot E(\hat{\mathbf{v}}_{-t}^T \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{v}}_{-t}) + j \cdot E(\hat{\mathbf{w}}_{-s}^T \mathbf{Q}^{-1} \hat{\mathbf{w}}_{-s}) \\ &= (j+1) \cdot q + j \cdot r. \end{aligned} \quad (15)$$

Nimmt das Gütemaß Werte an, die deutlich über dem Erwartungswert liegen, kann man davon ausgehen, dass nicht-stochastische Störungen (Schläge oder Stöße) auf das System wirken. Der aktuelle Wert des Gütemaßes ist somit ein Indikator, ob die Störungen die angenommenen stochastischen Eigenschaften aufweisen, oder ob nicht-stochastische Störungen angenommen werden müssen. Die Bestimmung eines entsprechenden Schwellwerts kann in einfacher Weise im Versuch oder der Simulation erfolgen.

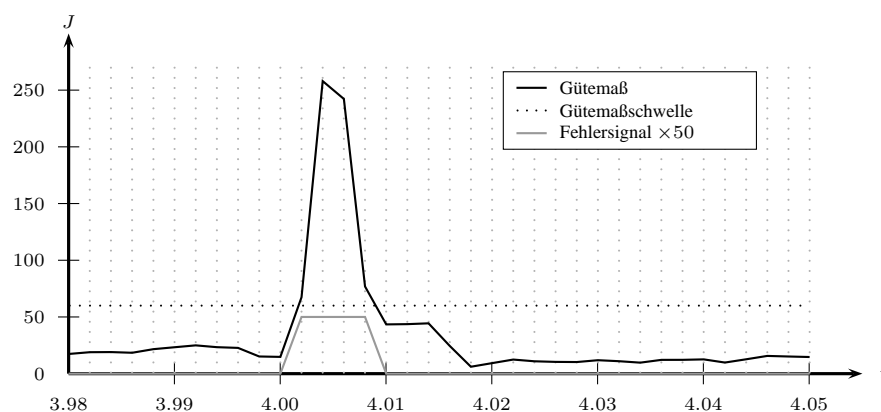


Abbildung 1: Verlauf des Gütemaßes nach einer schlagartigen Störung (Simulation).

Abbildung 1 zeigt den Verlauf des Gütemaßes aus der in Abschnitt 6 vorgestellten Simulation. Dabei wird das zugrundeliegende System sowohl andauernd stochastisch als auch bei $t = 4$ s

mit einem Schlag gestört, der im Betrag um Größenordnungen über dem Rauschen liegt, dafür aber nur einen Zeitschritt andauert. Die Schrittweite wurde zu $\Delta t = 2$ ms gewählt, die Schwelle zur Erkennung des Schlags zu $J_{\text{Schwelle}} = 60$. Zur Reaktion auf erkannte nicht-stochastische Störungen wird ein Fehlersignal eingeführt, dessen Wert im Normalfall 0 ist und das bei Überschreiten der Gütemaßschwelle zu 1 gesetzt wird.

Wie man erkennen kann, überschreitet das Gütefunktional exakt einen Zeitschritt nach auftreten des Schlags, also bei $t = 4,002$ s, die Schwelle und das grau dargestellte Fehlersignal wird zu 1. Nachdem der Schlag den Horizont verlassen hat, treffen die angenommenen Eigenschaften bezüglich der Störungen \hat{w} und \hat{v} wieder zu. Dementsprechend liegt der Wert des Gütemaßes ab $t = 4.01$ s wieder unterhalb der Schwelle und das Fehlersignal wird wieder zu 0.

4 Variation der Horizontlänge

4.1 Prinzipielles Vorgehen

Bei der Auslegung von Zustandsschätzern existiert ein Zielkonflikt bei der Auswahl des für die Schätzung zu berücksichtigenden zeitlichen Horizonts. Wählt man einen kurzen Horizont, so verschwinden Anfangsstörungen (oder auch nicht-stochastische, schlagartige Störungen zur Laufzeit) sehr schnell aus dem Horizont, wodurch nach entsprechend kurzer Zeit eine gute Schätzung möglich wird. Wirkt hingegen nur weißes, gaußsches Rauschen, so verkleinert sich die Kovarianzmatrix (Unsicherheit) der Zustandsschätzung mit länger werdendem Horizont [4], so dass ein langer Horizont in diesem Fall besser in der Lage ist, das Messrausch zu eliminieren und somit zu einer besseren Schätzung führt.

Durch die Verwendung eines Zustandsschätzers nach Kalman mit einem variablen Horizont, kurz *VRHKF* (*Variable Receding Horizon Kalman Filter*), kann dieser Zielkonflikt teilweise entschärft werden. Die Variation findet hierbei auf Basis der in Abschnitt 3 beschriebenen Detektion von signifikanten nicht-stochastischen Störungen nach folgender Strategie statt:

Zu Beginn und jedesmal nachdem der Wert des Gütemaßes über dem in Abschnitt 3 beschriebenen Schwellwert liegt, wird der Horizont auf die minimale Länge verkürzt. Zu allen anderen Zeitpunkten wird die Länge des Horizonts um eins erhöht, bis die maximale Länge erreicht ist.

Zur Veranschaulichung der Strategie sind in Abbildung 2 die Horizontlängen für ein System der Ordnung $n = 3$ dargestellt. Die minimale Horizontlänge beträgt damit 3 Zeitschritte, die maximale wurde zu 6 gewählt. Oben ist der Verlauf des Fehlersignals dargestellt, das während der Überschreitung der Gütemaßschwelle zu 1 gesetzt wird und sonst 0 ist. Die beiden vertikalen Linien markieren Beginn und Ende eines Schlags (einer signifikanten nicht-stochastischen Störung), welcher im Gütemaß erkannt werden kann. Vor und während der Zeitpunkte $t = 1$ und $t = 2$ wirken nur stochastische Störungen auf das System, so dass zu diesen Zeitpunkten die maximale Horizontlänge gewählt wird. Auch im Zeitschritt $t = 3$ findet noch eine Schätzung der Zustände auf vollem Horizont statt, allerdings überschreitet hier das Gütemaß aufgrund des Schlags die festgesetzte Schwelle, so dass das Fehlersignal zu 1 gesetzt wird. Daraufhin wird im nächsten Schritt der kürzestmögliche Horizont gewählt. Ab dem Zeitschritt $t = 7$ hat der Schlag den Horizont verlassen, weshalb das Gütemaß wieder unter die Schwelle fällt. In der Konsequenz daraus wird ab diesem Zeitpunkt die Horizontlänge schrittweise wieder vergrößert, bis ab dem Zeitschritt $t = 10$ erneut die volle Länge erreicht ist.

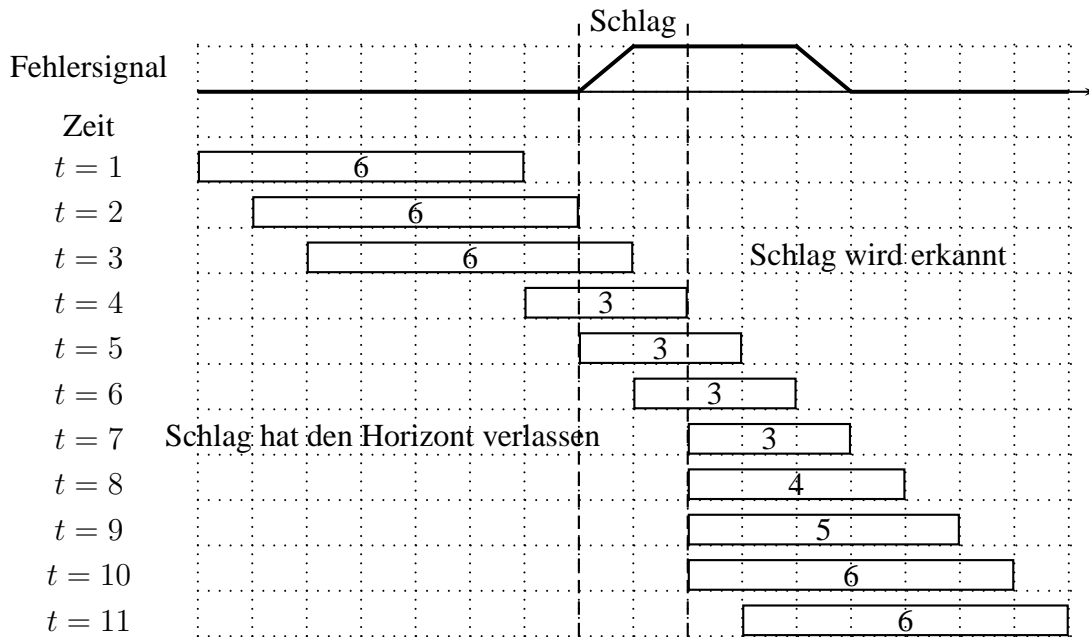


Abbildung 2: Horizontlängen vor und nach einer erkennbaren nicht-stochastischen Störung

4.2 Anpassung des Gütemaßes bei kürzeren Horizonten

Wie an Gleichung (8) erkennbar, ändert sich für kürzere Horizonte aufgrund der kleineren Summe der Wert des Gütemaßes auch bei gleicher Schätzung von \hat{v} und \hat{w} . Daher muss für verkürzte Horizonte entweder der Schwellwert oder die Berechnung des Gütemaßes angepasst werden. Da der Schwellwert empirisch bestimmt wurde, ist eine Anpassung des Gütemaßes mit geringerem Aufwand verbunden:

$$J = k_R \sum_{t=0}^j \hat{v}_{-t}^T \mathbf{R}^{-1} \hat{v}_{-t} + k_Q \sum_{s=1}^j \hat{w}_{-s}^T \mathbf{Q}^{-1} \hat{w}_{-s} \quad (16)$$

mit

$$k_R = \frac{j+1}{\text{aktuelle Horizontlänge} + 1} \quad \text{und} \quad k_Q = \frac{j}{\text{aktuelle Horizontlänge}}$$

Für die Auslegung der Zustandsschätzer auf den verkürzten Horizonten wird das ursprüngliche Gütemaß (8) mit einer entsprechend verkürzten Summe verwendet.

Da eine Schätzung auf verkürztem Horizont andere Werte für \hat{v} und \hat{w} liefert, stimmt der Wert des skalierten Gütemaßes (16) nicht ganz mit dem Wert des originalen Gütemaßes (8) überein. Simulations- und Versuchsergebnisse haben jedoch gezeigt, dass für die angestrebte Verwendung die Näherung (16) ausreichend genau ist.

5 Kombination mit einer strukturvariablen Regelung

Um die aus dem schnellen Einschwingvorgang resultierenden Vorteile des vorgestellten Beobachtungansatzes besonders auszunutzen, wird dieser in einer Anwendung mit einer schnellen, strukturvariablen Regelung kombiniert.

Unter strukturvariablen Regelungen versteht man Regelungen bei welchen zwischen verschiedenen, linearen Zustandsrückführungen in diskreter oder kontinuierlicher Weise geschaltet bzw. variiert wird (siehe hierzu [1]). Die Variation kann hierbei *statisch* d.h. ausschließlich als Funktion des Systemzustands oder *dynamisch* d.h. unter Nutzung zusätzlicher (reglerinterner) Zustände erfolgen. Im Folgenden wird nur die deutlich verbreitetere, statische Variante betrachtet. Gemeinsames Ziel aller strukturvariablen Regelungen ist ein möglichst schnelles Abklingen von Störungen zu erreichen.

Wie in [8] beschrieben existiert allerdings bis jetzt aus theoretischer Sicht noch keine befriedigende Lösung für die Kombination einer strukturvariablen Regelung mit einem Zustandsbeobachter. Der wesentliche Grund hierfür liegt darin, dass die Auswahl der aktuellen Rückführung bei allen strukturvariablen Regelungen immer auf dem tatsächlichen Zustandsvektor basiert. Benutzt man für die Auswahl der Rückführung stattdessen die Zustandsschätzung eines Luenberger-Beobachters so konnte in [2] die asymptotische Stabilität der Ruhelage nachgewiesen werden. Wie in [8] gezeigt, ist in diesem Fall allerdings so gut wie keine praktische Aussage mehr über die Größe des sich ergebenden Einzugsbereichs möglich.

Verwendet man für die strukturvariable Regelung jedoch den vorgeschlagenen Zustandsschätzer, verbessert sich die Situation wesentlich. Dies liegt daran, dass der vorgeschlagene Zustandsschätzer in Abwesenheit von Störungen nach einer sehr kurzen und wohl definierten Zeitspanne T eine richtige Zustandsschätzung liefert. Will man also die Menge aller Punkte bestimmen, welche von der Regelung in die Ruhelage überführt werden können, so kann dies mit Hilfe der folgenden Überlegung geschehen:

Befindet sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ aufgrund einer Anfangswertstörung am Punkt \mathbf{x}_0 , so existiert für ein lineares System mit einem begrenzten Eingangssignal eine Umgebung $\mathbb{D}(\mathbf{x}_0, T)$ um \mathbf{x}_0 , in der sich $\mathbf{x}(T)$ befinden muss. Liegt $\mathbb{D}(\mathbf{x}_0, T)$ vollständig im Einzugsbereich Ω_I der idealen strukturvariablen Regelung (welche den wahren Zustand zur Verfügung hat), so kann \mathbf{x}_0 von der realen Regelung in die Ruhelage überführt werden und liegt folglich innerhalb des Einzugsbereichs Ω_R der realen strukturvariablen Regelung (welche auf Basis der vorgestellten Zustandsschätzung arbeitet). Dies begründet sich einfach damit, dass in Abwesenheit von weiteren Störungen der vorgeschlagene Zustandsschätzer für $t \geq T$ den wahren Zustand ermittelt und somit die reale Regelung genauso wie die ideale Regelung arbeitet. Eine Veranschaulichung dieser Überlegung findet sich Abbildung 3.

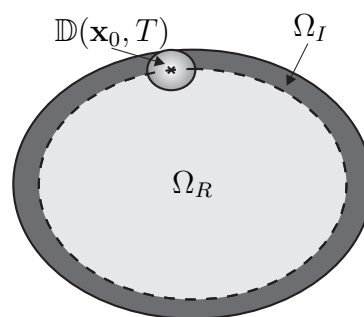


Abbildung 3: Skizze der Einzugsbereiche: Ω_I Einzugsbereich der idealen Regelung (ohne Beobachter), Ω_R Einzugsbereich der realen Regelung (mit vorgeschlagener Zustandsschätzung)

Auf eine genaue Bestimmung der Umgebung $\mathbb{D}(x, T)$ bzw. des Einzugsbereichs Ω_R der realen strukturvariablen Regelung kann verzichtet werden, da für die ideale strukturvariable Regelung in allen bekannten Fällen ebenfalls keine exakte Beschreibung des Einzugsbereichs Ω_I vorhanden ist, sondern bloß eine konservative Abschätzung auf Basis einer Ljapunow-Funktion. Da

T sehr kurz und $\mathbb{D}(x, T)$ entsprechend sehr klein ist, kann man davon ausgehen, dass diese Abschätzung für Ω_I entweder auch für die reale Regelung gilt oder zumindest einen sehr guten Anhaltspunkt darstellt.

6 Ergebnisse

Um die Performance des Beobachters zu beurteilen, wurde der Beobachter in einer Simulation und an einem Versuchsstand getestet. In beiden Fällen wurde ein inverses Pendel betrachtet, welches auf einem beweglichen Schlitten befestigt ist. Abbildung 4 zeigt den schematischen Aufbau.

In der Modellierung wurden x , \dot{x} , φ und $\dot{\varphi}$ als Zustandsgrößen gewählt, die Spannung auf den antreibenden Elektromotor stellt den Eingang u des Systems dar und ist auf ± 30 V beschränkt. Die Dynamik des elektrischen Kreises wurde bei der Modellbildung vernachlässigt. Der Ausgang wird durch die beiden Messgrößen x und φ gebildet. Die Werte für das linearisierte kontinuierliche Zustandsraummodell finden sich im Anhang 8.3.1.

Der Regelkreis wurde über einen leicht modifizierten, strukturvariablen α -Regler geschlossen, welcher im Anhang 8.2 detailliert beschrieben ist.

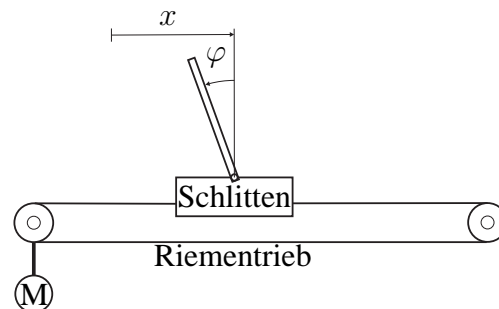


Abbildung 4: Schema des Versuchsstands

Die Rauschprozesse w und v werden in der Simulation künstlich hinzugefügt. Die hierfür gewählten Kovarianzmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} wurden dabei gleich den am Versuchsaufbau empirisch ermittelten Werten gewählt.

Die Gütemaßschwelle wurde in der Simulation zu $J_{\text{Schwelle}} = 60$ und im Versuch zu $J_{\text{Schwelle}} = 900$ gewählt. Der Unterschied zwischen diesen beiden Werten ist damit zu begründen, dass die Annahmen bezüglich der stochastischen Eigenschaften der Störung für das reale System nicht ganz zutreffen. Die gefundenen Werte für \mathbf{Q} und \mathbf{R} erzeugen deshalb im realen System etwas andere Werte für das Gütemaß als in der Simulation.

6.1 Simulationsergebnisse

Zunächst werden die Simulationsergebnisse betrachtet. Neben den stochastischen Störungen wirkt zum Zeitpunkt $t = 4$ s eine impulsartige Störung w^* für die Dauer eines Zeitschrittes auf das Pendel.

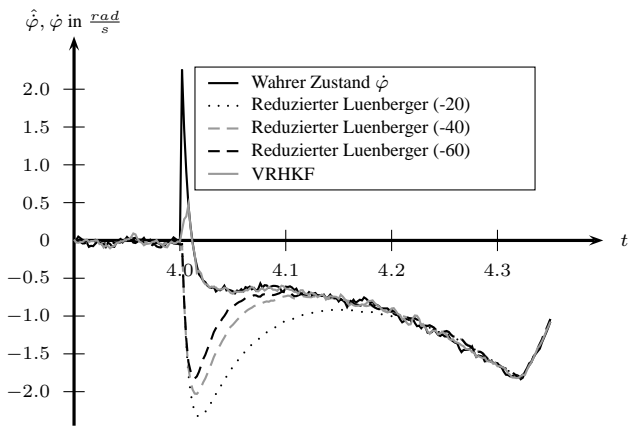


Abbildung 5: Simulationsergebnisse zum Vergleich der Beobachter. Der Regelkreis wurde über die wahren Zustände geschlossen.

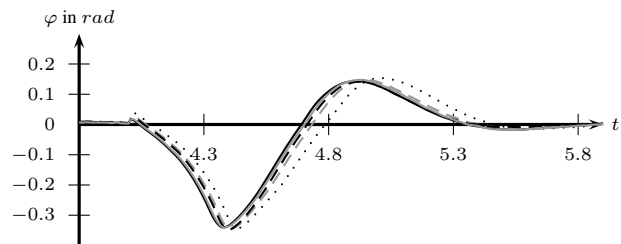


Abbildung 6: Vergleich der Simulationsergebnisse bei Schließung des Regelkreises über die verschiedenen Beobachter.

Um die Zustandsschätzungen unabhängig von der Regelung beurteilen zu können, wurde der Regelkreis über den wahren Zustandsvektor geschlossen. Abbildung 5 zeigt die Zustandsschätzungen $\hat{\varphi}$ der Winkelgeschwindigkeit des Pendels für verschiedene Beobachter in Gegenüberstellung mit dem wahren Wert. Verglichen wurde das VRHKF mit reduzierten Luenberger-Beobachtern unterschiedlicher Polkonfigurationen. Die Zahlen in Klammern geben jeweils den langsamsten Pol der kontinuierlichen Beobachterdynamik an.

Wie zu erwarten klingt der Beobachtungsfehler bei den Luenberger-Beobachtern nach dem Schlag in exponentieller Weise ab. Im Gegensatz dazu liefert der VRHKF nachdem der Schlag den Horizont verlassen hat sofort wieder eine sehr gute Schätzung und ist somit deutlich schneller als alle betrachteten Luenberger-Beobachter.

Um die Auswirkung der Zustandsschätzung auf die Performance der Regelung zu untersuchen, wurde nun der Regelkreis über die bereits erwähnten Beobachter geschlossen. In Abbildung 6 sind die sich ergebenden Verläufe des messbaren Pendelwinkels φ dargestellt. (Die Zuordnung entspricht der Legende aus Abbildung 5.) Es zeigt sich, dass die Regelung auf Basis des VRHKF nahezu dieselben Ergebnisse liefert, wie die Regelung auf Basis der tatsächlichen Zustände. Die Regelungen basierend auf den reduzierten Luenberger-Beobachtern reagiert hingegen etwas langsamer. Da von den 4 Zustandsgrößen 2 direkt gemessen werden, ist der Unterschied in der Performance zwischen dem VRHKF und den reduzierten Luenberger-Beobachtern jedoch nicht so groß, wie man auf Basis von Abbildung 5 erwarten würde.

Bestimmt man die Amplituden der maximal möglichen Schläge (Störungsdauer ein Zeitschritt), so dass der Regler das Pendel trotzdem stabilisieren kann ergeben sich die folgenden Werte:

Kreis geschlossen über	Maximaler Schlag w^*
Wahren Zustand	1390
VRHKF	1380
Red. Luenberger (-60)	1370
Red. Luenberger (-40)	1360
Red. Luenberger (-20)	1320

Man erkennt, dass auch in diesem Fall die Rückführung mit VRHKF zwischen der Rückführung der wahren Zustände und dem schnellsten Luenberger-Beobachter einzuordnen ist.

6.2 Ergebnisse am Versuchsstand

Am realen Versuchsstand wird zunächst das Verhalten für den rein stochastisch gestörten Fall betrachtet. Hierzu wird das Pendel mit Hilfe der bereits erwähnten Zustandsbeobachter stabilisiert. Abbildung 7 zeigt die unterschiedlichen Zeitverläufe für die Position des Wagens (es gilt wieder die Legende aus Abbildung 5).

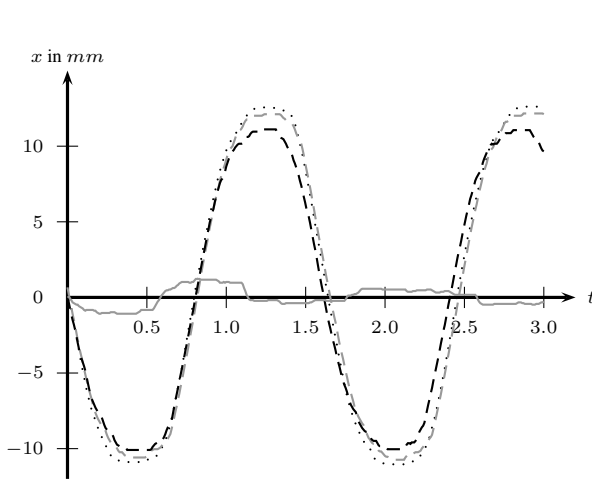


Abbildung 7: Wagenposition x im ungestörten Kreis, geschlossen über verschiedene Beobachter.

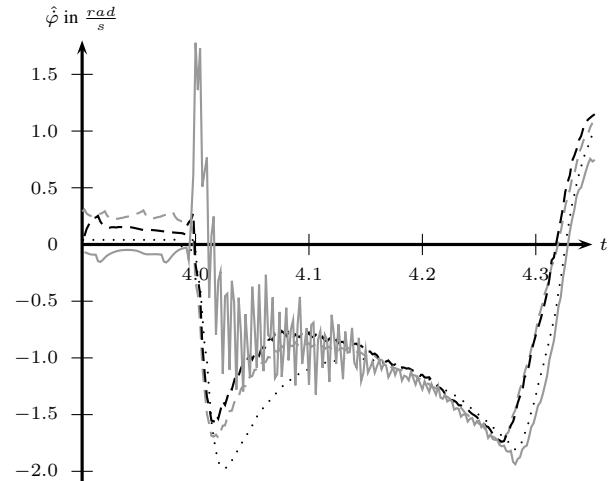


Abbildung 8: $\hat{\phi}$ im Kreis mit Schlag, geschlossen über den jeweiligen Beobachter.

Wie man sehr gut erkennen kann, verhält sich das System mit VRHKF deutlich ruhiger als alle Systeme mit Luenberger-Beobachter. Offensichtlich ist also die gewählte Länge des Horizonts von 20 Zeitschritten bzw. 40ms ausreichend um die Rauschprozesse gut nachzubilden und somit eine bessere Schätzung des Zustands zu erreichen als mit den reduzierten Luenberger-Beobachtern.

Nun wird auch das reale System mit einem Schlag bei $t = 4\text{ s}$ beaufschlagt. Abbildung 8 zeigt die Verläufe der Schätzungen für die Winkelgeschwindigkeiten der unterschiedlichen Beobachter, wobei der Regelkreis nun über den jeweiligen Beobachter geschlossen wurde. Auch hier gilt die Legende aus Abbildung 5.

Wie man durch Vergleich von Abbildung 8 und Abbildung 5 erkennen kann, können die Ergebnisse der Simulation am realen System im Wesentlichen bestätigt werden. Einen Unterschied zur Simulation bildet der deutlich unruhigere Verlauf von $\hat{\phi}$ des VRHKF im Zeitraum zwischen 4,0s und 4,15s. Zur Erklärung dieses Verhaltens sind in Abbildung 9 die Messwerte in diesem Zeitraum sowie eine Approximation der Messwerte mittels einer Fourier-Reihe dargestellt. Hierbei zeigt sich, dass durch den Schlag eine Schwingung (wahrscheinlich des Antriebsriemens) bei ca. 172Hz angeregt wird. Die zeitliche Ableitung der Fourier-Reihe basierten Approximation ist in Abbildung 10 zu sehen. Offensichtlich handelt es sich also bei der Schätzung des VRHKF im Zeitraum von 4,0s und 4,15s nicht um ein fehlerhaft verstärktes Messrauschen, sondern um die geglättete Wiedergabe einer tatsächlich vorhandenen Schwingung.

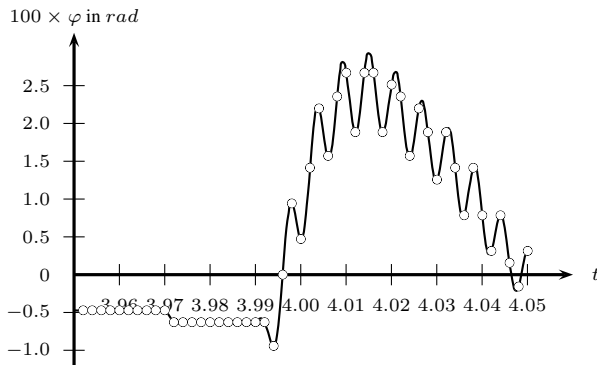


Abbildung 9: Messwerte für φ und Approximation des Verlaufs von φ mittels einer Fourier-Reihe

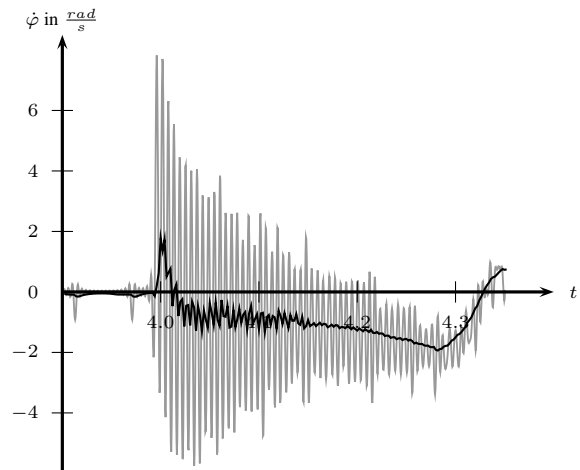


Abbildung 10: Vergleich der Schätzung des VRHKF aus Bild 8 von $\hat{\varphi}$ (schwarz) und der Ableitung der Fourier-Reihen basierten Approximation von φ aus Bild 9 (grau)

Im Gegensatz dazu liefern die Luenberger-Beobachter am realen Versuchsstand einen ähnlich glatten Signalverlauf wie in der Simulation. Genauso wie in der Simulation stimmt dieser Verlauf jedoch im Zeitraum zwischen 4,0 s und 4,15 s mit dem tatsächlichen Verlauf nicht überein. Wie in Abbildung 11 zu sehen, fällt nach dem Abklingen der Strukturschwingung bei ca. 4,13 s der Werte des Gütemaßes dauerhaft unter den festgelegten Schwellwert. In der Folge wird ab 4,15 s der Horizont wieder vergrößert, wodurch der VRHKF ab dann korrekterweise einen deutlich glatteren Verlauf für $\hat{\varphi}$ liefert.

Der Peak im Verlauf des Gütemaßes zwischen 4,3 s und 4,4 s ist durch die starke und schnelle Veränderung der Stellgröße (Abbildung 11 unten) bedingt. Diese wirkt über die Struktur des Versuchstands teilweise in unmodellierter Weise (und somit als Störung) auf die Bewegung des Schlittens bzw. des Pendels. Durch eine geeignete Wahl des Schwellwerts $J_{Schwelle}$ kann verhindert werden, dass in diesen Bereichen die Länge des Horizonts ungewollt verkürzt wird.

7 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurde gezeigt, dass durch die Variation der Horizontlänge eines Zustandsschätzers der Zielkonflikt zwischen der Elimination von Messrauschen und der Abbildung von impulsartigen Störungen verringert werden kann: Trotz einer guten Elimination von Messrauschen ist der vorgestellte VRHKF in der Lage nach dem Auftreten einer impulsartigen Störung innerhalb einer wohl definierten und sehr kurzen Zeitspanne wieder eine korrekte Zustandsschätzung zu liefern. Aus diesem Grund erreicht eine Regelung unter Nutzung des VRHKF nahezu den (idealen) Einzugsbereich, den dieselbe Regelung auf Basis des wahren Zustands hätte. Speziell für strukturvariable Regelungen ist die Schätzung mittels VRHKF daher sehr interessant. Dies konnte anhand von Simulations- und Versuchsergebnissen beispielhaft für ein inverses Pendel gezeigt werden.

Durch die Auswertung des Gütemaßes ist der VRHKF in der Lage zu erkennen, wann eine große Unsicherheit in der Zustandsschätzung besteht. Diese Information könnte in vorteilhafter Weise auch von der Regelung genutzt werden. Denkbar wäre z.B. das Umschalten auf eine statische Ausgangsrückführung oder im Falle von stabilen Strecken das kurzfristige Ausschalten der Regelung bis die Zustandsschätzung wieder als ausreichend zuverlässig eingestuft wird.

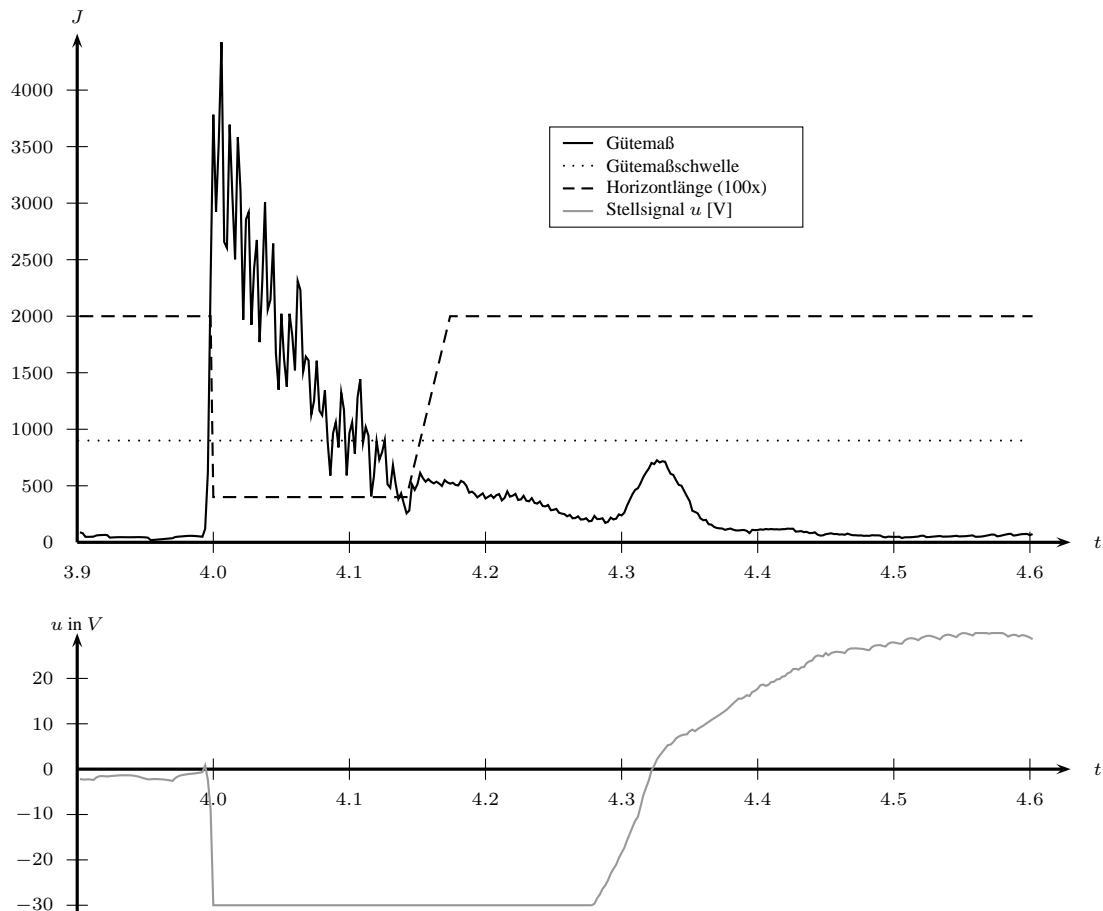


Abbildung 11: Oben: Verlauf des Gütemaßes und der Horizontlänge nach einer schlagartigen Störung des realen Systems. Unten: Verlauf der Stellgröße u . Wie von der strukturvariablen Regelung angestrebt, wird der Stellhub über einen großen Zeitraum vollständig ausgenutzt.

8 Anhang

8.1 Zur Invertierbarkeit von \mathbf{W}

Um die Invertierbarkeit der Matrix \mathbf{W} zu zeigen, wird ein Satz über Inverse von Hypermatrixen benötigt [10]:

Satz 1 (Frobenius Formel) Sind in einer Hypermatrix

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

\mathbf{A} und $\mathbf{F} = \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ regulär, so gilt:

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{I}) & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{F}^{-1} \\ -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{F}^{-1} \end{bmatrix}$$

Damit ist es also ausreichend, wenn Invertierbarkeit der im Satz benutzten Teilmatrizen \mathbf{A} und \mathbf{F} gegeben ist.

Die Matrix W lässt sich wie folgt als Hypermatrix angeben (siehe auch Abschnitt 2):

$$W = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_B^T \tilde{R}^{-1} \tilde{Q}_B & \tilde{Q}_B^T \tilde{R}^{-1} \tilde{G} \\ \tilde{G}^T \tilde{R}^{-1} \tilde{Q}_B & \tilde{G}^T \tilde{R}^{-1} \tilde{G} + \tilde{Q}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Wendet man nun die Frobenius Formel an, ergibt sich, dass die beiden Matrizen

$$\begin{aligned} M_1 &= \tilde{Q}_B^T \tilde{R}^{-1} \tilde{Q}_B & \text{und} \\ M_2 &= \tilde{G}^T \tilde{R}^{-1} \tilde{G} + \tilde{Q}^{-1} - \\ & \quad \tilde{G}^T \tilde{R}^{-1} \tilde{Q}_B \left(\tilde{Q}_B^T \tilde{R}^{-1} \tilde{Q}_B \right)^{-1} \tilde{Q}_B^T \tilde{R}^{-1} \tilde{G} \end{aligned}$$

regulär sein müssen.

Zunächst wird $M_1 = \tilde{Q}_B^T \tilde{R}^{-1} \tilde{Q}_B$ untersucht. Für den Rang einer allgemeinen Matrix A gilt: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^T S A)$, sofern S eine voll besetzte Diagonalmatrix ist, wie \tilde{R}^{-1} . Daraus ergibt sich, dass M_1 genau dann vollen Rang hat, und damit invertierbar ist, wenn \tilde{Q}_B den höchstmöglichen Rang n besitzt. Diese Anforderung deckt sich mit dem Kalmanschen Beobachtbarkeitskriterium, da \tilde{Q}_B – für ausreichend lange Horizonte – eine nach unten erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix des Systems ist.

Um M_2 zu untersuchen, wird diese wie folgt umgeschrieben:

$$\begin{aligned} M_2 &= \tilde{Q}^{-1} + \tilde{G}^T \tilde{R}^{-1} \left(\mathbf{I} - \tilde{Q}_B \left(\tilde{Q}_B^T \tilde{R}^{-1} \tilde{Q}_B \right)^{-1} \right. \\ & \quad \left. \tilde{Q}_B^T \tilde{R}^{-1} \right) \tilde{G}. \end{aligned}$$

Aufgrund der speziellen Struktur von \tilde{R}^{-1} lässt sich M_2 weiter umformen bis man Gleichung (17) erhält. Zusammen mit den Überlegungen zu M_1 sieht man, dass die Matrix S positiv semidefinit ist und genau n Eigenwerte bei 0 und alle anderen bei 1 hat.

$$M_2 = \tilde{Q}^{-1} + \underbrace{\tilde{G}^T \tilde{R}^{-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{I} - \underbrace{\tilde{R}^{-\frac{1}{2}} \tilde{Q}_B \left(\tilde{Q}_B^T \tilde{R}^{-1} \tilde{Q}_B \right)^{-1} \tilde{Q}_B^T \tilde{R}^{-\frac{1}{2}}}_S \right)}_{\text{positiv semidefinit}} \tilde{R}^{-\frac{1}{2}} \tilde{G} \quad (17)$$

Damit erhält man in Klammern eine neue, positiv semidefinite Matrix die genau n Eigenwerte bei 1 und alle verbleibenden bei 0 hat. Auch nach Multiplikation mit den beiden Matrizen von links und rechts bleibt der rechte Summand positiv semidefinit. Durch die Addition zu \tilde{Q}^{-1} , die positiv definit ist, ergibt sich für M_2 eine positiv definite Matrix, die damit vollen Rang besitzt und invertierbar ist.

Somit ist gezeigt, dass W^{-1} genau dann existiert, wenn das System beobachtbar ist und ein ausreichend langer Horizont betrachtet wird. Im allgemeinen ist eine Horizontlänge von n Zeitschritten hinreichend, da \tilde{Q}_B dann der Beobachtbarkeitsmatrix des Systems entspricht. Bei Mehrgrößensystemen kann Beobachtbarkeit auch schon auf kürzeren Horizonten erreicht werden.

8.2 Modifizierter α -Regler

Der in dieser Arbeit verwendete Regler stellt eine leicht modifizierte Version des in [3] vorgestellten α -Reglers dar. Wie in [3] wird auch bei der modifizierten Version zu jedem Zeitschritt

das größte $\alpha \in [\alpha_{min}; \alpha_{max}]$ gewählt, welches mit dem aktuellen \mathbf{x} die Ungleichung:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq \underbrace{\frac{4\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b}}{(2\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b} - \alpha)^2}}_{\eta} u_{max}^2 \quad (18)$$

erfüllt. Die Matrix $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\alpha)$ ist dabei die positiv (semi-)definite Lösung der Riccati Gleichung

$$(\mathbf{A} + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I}) - 2\mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (19)$$

mit \mathbf{A} , \mathbf{b} der Systemmatrix bzw. dem Eingangsvektor des *kontinuierlichen* Systems. In [3] wurde als Regelgesetz

$$u = -\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (20)$$

gewählt.

Solange $|u| < u_{max}$ führt dieses Regelgesetz zu einer exponentiellen Abnahme der Ljapunow-Funktion $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ entsprechend $\dot{V} = -\alpha V$. In den Bereichen des Zustandsraums in denen gilt $|u| > u_{max}$, reduziert sich die Abnahme von V stetig. Die kleinste Niveaufläche von V auf der zum ersten mal $\dot{V} = 0$ auftreten kann, ist mit $V = \eta$ (mit η aus 18) gegeben und stellt daher die Grenze für eine Abschätzung des Einzugsbereichs auf Basis der Ljapunow-Funktion $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ dar.

Um die Dynamik der Regelung zu verbessern, wurden folgende Schritte durchgeführt:

- Auswahl von α wie in [3] entsprechend (18).
- Mit Hilfe des gefundenen α wird

$$u_\alpha = -\mathbf{b}^T \mathbf{P}(\alpha) \mathbf{x} \quad (21)$$

$$u'_\alpha = -\mathbf{b}^T \frac{d\mathbf{P}(\alpha)}{d\alpha} \mathbf{x} \quad (22)$$

bestimmt. Solange $\alpha < \alpha_{max}$ wird zusätzlich auch noch

$$u_{\alpha_{max}} = -\mathbf{b}^T \mathbf{P}(\alpha_{max}) \mathbf{x} \quad (23)$$

berechnet.

- Für die Bestimmung von u können nun 2 Fälle unterschieden werden:
Fall 1: Falls $\alpha < \alpha_{max}$ und $u'_\alpha \cdot (u_{\alpha_{max}} - u_\alpha) > 0$ wird die Steigung

$$u'_{min} = \min \left(u'_\alpha, \frac{u_{\alpha_{max}} - u_\alpha}{\alpha_{max} - \alpha} \right) \quad \text{für } u'_\alpha > 0$$

$$u'_{min} = \max \left(u'_\alpha, \frac{u_{\alpha_{max}} - u_\alpha}{\alpha_{max} - \alpha} \right) \quad \text{für } u'_\alpha < 0$$

ermittelt. Daraus bestimmt sich u_1 zu

$$u_1 = u_\alpha + u'_{min} \cdot (\alpha_{max} - \alpha) \quad (24)$$

Falls

$$\dot{V}(u_1) = 2\mathbf{x}^T (\mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \cdot u_1 \leq -f\alpha V \quad (25)$$

wird $u = u_1$ gewählt, andernfalls wird u zu

$$u = \frac{-f\alpha V - 2\mathbf{x}^T(\mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x}}{2\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{b}} \quad (26)$$

gewählt. Der Parameter $f \in]0; 1]$ stellt den einzigen zusätzlichen Freiheitsgrad der modifizierten Regelung dar.

Fall 2: Ansonsten wird $u = u_\alpha$ gewählt.

Fall 2 entspricht exakt der in [3] beschriebenen Regelung. Die Modifikation findet nur im Fall 1 statt. Dort wird berücksichtigt, dass der schnellste Regler ($u_{\alpha_{max}}$) und der nächst schnellere Regler ($u_{\alpha+d\alpha}$) das Regelgesetz in gleicher Weise verändern. In dieser Situation wird versucht die Stellgröße entsprechend anzupassen (24). Über die Forderung (25) bzw. deren erzwungene Erfüllung (26) wird dabei gewährleistet, dass trotzdem $\dot{V} < 0$ gilt und somit die Stabilität sichergestellt bleibt.

8.3 Verwendete Werte

8.3.1 Strecke mit Störung

Für das *kontinuierliche* Zustandsraummodell des inversen Pendels wurden folgende Matrizen verwendet:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 38.91 & 0 & -0.0423 & -616.2 \\ 0.176 & 0 & -0.002 & -158.2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.6377 \\ 0.1637 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.6377 & 141.1 \\ 0.1637 & 0.6377 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Kovarianzmatrizen der Rauschprozesse für \mathbf{w} und \mathbf{v} wurden zu

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10^{2.66} & 0 \\ 0 & 10^{-4.24} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 10^{-7.11} & 0 \\ 0 & 10^{-7.33} \end{bmatrix}$$

angenommen.

8.3.2 Regelung

Der verwendete strukturvariable Regler variiert den Parameter α im Intervall $[1; 6.72]$. Der Parameter f wurde zu 0.5 gewählt.

Literatur

- [1] J. Adamy; A. Flemming, *Soft variable-structure controls: a survey*, Automatica, 40:1821–1844, 2004.
- [2] J. Adamy; H. Lens, *Stabilitätsnachweis für weiche strukturvariable Regelungen mit Zustandsbeobachter*, at - Automatisierungstechnik 55 (2007), Heft 3, S.107-118.

- [3] M. Buhl; P. Joos; B. Lohmann, *Sättigende weiche strukturvariable Regelung*, at - Automatisierungstechnik 56 (2008), Heft 6, S.316-323.
- [4] K. Brammer; G. Siffing, *Kalman-Bucy-Filter*, R. Oldenbourg Verlag, München 1994.
- [5] O. Föllinger, *Regelungstechnik*, Hüthig, Heidelberg 1994.
- [6] A. H. Jazwinski; R. Bellman, *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Mathematics in Science and Engineering, Volume 64, Academic Press, New York and London 1970.
- [7] W. H. Kwon; P. S. Kim; P. Park, *A Receding Horizon Kalman FIR Filter for Discrete Time-Invariant Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 44:1787–1791, 1999.
- [8] H. Lens, *Schnelle Regelung mit Ausgangsrückführung für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen*, Fortschrittberichte VDI, Düsseldorf 2010, Zugl.: Dissertation, TU Darmstadt, 2009.
- [9] K. R. Muske; B. Rawlings, *Receding Horizon Recursive State Estimation*, Proceedings of the American Control Conference, 1993.
- [10] J. Vortisch, *Zustandsbeobachtung nichtlinearer Systeme auf bewegtem Horizont mit Hilfe des Gauss-Newton-Verfahrens*, Universität Bremen, 2003.