Prof. Oswald Giering, 5. 10. 2001

X-Wege in und unweit der Mathematikg

von Oswald Giering

Am 24. Juli 2001 hielt Professor Oswald Giering im Fakultätskolloquium der Fakultät für Mathematik der TU München aus Anlass seiner Emeritierung die nachfolgend wiedergegebene Abschiedsvorlesung.

Meine lieben Zuhörer und Zuhörerinnen,

Abschiedsvorlesungen gelten – wie alle Vorlesungen – zuerst den Studierenden. Das sind wir inzwischen alle, seit wir lebenslanges Lernen und Studieren praktizieren. Jedenfalls freue ich mich, dass Sie da sind.

Seien Sie unbesorgt, ich werde Sie nicht strapazieren. Ich möchte nur den für mich schwierigen Versuch wagen, Sie am Ende meines letzten Semesters noch ein wenig zu *unterhalten.* Ein für mich schwieriger Versuch, da ich dafür kein Diplom besitze, keine Erfahrung mitbringe und zu einem anspruchsvollen Publikum spreche.

Was sind „X-Wege in und unweit der Mathematik"? Die Antwort ist einfach: Mathematikern ist es erlaubt, X als Variable zu betrachten und diese Variable feste Werte annehmen zu lassen. Man erhält so Umwege, Abwege, Irrwege, Auswege, Bremswege, Schleichwege, Königswege, Kreuzwege, Sackgassen, verschlungene Pfade usw. Schließlich hat man, wenn X die leere Menge ist, überhaupt keinen Weg.

Man trifft auf all die vielen Wege, die in dieser Welt begangen werden, auch in und unweit der Mathematik. Ich möchte Ihnen gern einen sehr bunten Strauß davon vorführen (Altes und Neues, auch Kurioses), den jeder noch beliebig verschönern kann.

Was führte mich zur Wahl gerade dieses Themas? Die Antwort ist wieder einfach: Wer das Studium der Mathematik beginnt, bekommt zunächst – wie schon im Gymnasium – als Übungs- oder Prüfungsaufgaben nur kleine Aufgaben gestellt, die oft in noch kleinere Teilaufgaben zerlegt sind und folglich nur kleine und meist eingeübte Denk- und Rechenoperationen verlangen. Diese Aufgaben werden eigens so entwickelt. Das Heranführen an größere Aufgaben, die eigene Ideen und längeres Durchhaltevermögen verlangen, ist für Lehrende und Lernende gleichermaßen mühsam. Dabei macht jeder seine ganz *persönlichen* Umwege, Irrwege und auch andere X-Wege. Jeder produziert für den Papierkorb seine eigene Wegwerf-Mathematik!

Manche Anfänger empfinden dies als eine schmerzliche Erfahrung. Es ist aber der normale Weg eines jeden, der die Mathematik wirklich kennenlernen will. Ich möchte unseren Studenten diesen Weg durchaus empfehlen. Und ich möchte sie zugleich ein wenig trösten, indem ich vorführe, dass es nicht nur die ganz *persönlichen* (die *subjektiven*) X-Wege gibt: vielmehr besteht die gesamte Mathematik aus (nahezu *objektiven*) X-Wegen, vor allem aus Um- und Irrwegen, auf die ich besonders abheben möchte, weil man darüber eher selten spricht.

Natürlich bietet die Mathematik auch Königswege, die ich hier aber nicht vorstelle. Die Studenten finden sie ja schon in ihren Vorlesungen – falls die Dozenten sie kennen! Dort beschreiben wir die Mathematik gern als Erfolgsgeschichte (man könnte sagen „semioptimiert"). Nur, bis es soweit ist, sind die Wege der Mathematik weithin ihre Umwege und natürlich die großen Anstrengungen zu ihrer Verkürzung – aber auch zu ihrer bewussten Erfindung.

In loser Folge füge ich nun Beispiel an Beispiel, wohl wissend, dass zu allen Beispielen viel mehr zu sagen wäre. Die Beispiele sind absichtlich einfach und sogar weithin bekannt. Wir beginnen mit zwei berühmten Umwegen:

1. Beispiel

Eine klassische Umwegsituation brachte das Parallelenproblem, also die Frage, ob sich Euklids Parallelenaxiom aus den übrigen Axiomen beweisen lässt. Lange Zeit bemühten sich Koryphäen und Dilettanten um einen Beweis (der ja wissenschaftliche Lorbeeren versprach) – fanden aber keinen. D'Alembert

(1717–1783) nannte es Mitte des 18. Jahrhunderts einen Skandal, dass die Frage, ob es entbehrlich ist, immer noch unentschieden sei. Man fand gelegentlich Teilresultate (Johann Heinrich Lambert (1728–1777), Mitbegründer der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, wäre hier zu nennen). Aber insgesamt war die Idee, das Parallelenaxiom beweisen zu wollen, eine Sackgasse.

Erst nach vielen Fehlversuchen riskierten (nahezu 100 Jahre nach d'Alembert) Johann Bolyai, Carl Friedrich Gauß und Nikolaj Ivanović Lobatschewski, der auch die erste Publikation wagte, eine Änderung des Standpunkts. Sie fanden die Lösung mit der Annahme, dass es von den übrigen Axiomen unabhängig ist – und entdeckten so die erste nichteuklidische Geometrie. Der Wissenschaft – nicht nur der Mathematik – bescherte der Ausweg aus dieser Sackgasse einen ganz beträchtlichen und seither oft beschriebenen Erkenntnisgewinn.

Wir haben hier zugleich ein Beispiel dafür, dass wegweisende mathematische Ideen immer wieder von einzelnen wenigen Mathematikern ausgehen; andere besorgen die Ausarbeitung, manche sogar die Ausbeutung.

2. Beispiel: Behutsamer Themenwechsel

Eine mit der Parallelenfrage vergleichbare Situation entwickelte sich aus dem Grundlagenstreit der Mathematik zu Beginn des 20. Jahrhunderts. Was ich dazu erzähle, ist weithin bekannt; ich darf mich daher kurz fassen. David Hilbert (1862–1943) – damals der führende Vertreter der sogenannten Formalisten – hatte nach seiner axiomatischen Grundlegung der euklidischen Geometrie die Absicht, ihre Widerspruchsfreiheit zu beweisen. Man konnte sie – auf verschiedenen Wegen – auf die Widerspruchsfreiheit der Axiome der Arithmetik der natürlichen Zahlen zurückführen. Für sein Vorhaben entwickelte Hilbert eine eigene mathematische Theorie, seine „Beweistheorie". Mit ihrer Hilfe sollte der Widerspruchs-freiheitsbeweis gelingen.

Aber zwei Resultate von Kurt Gödel (1906–1978) – seine berühmten Unvollständigkeitssätze aus den frühen 1930er Jahren – entzogen Hilberts Programm den Boden. Gödel konnte nämlich zeigen, dass mit Hilberts „Beweistheorie" die Widerspruchsfreiheit einer mathematischen Theorie, die die Arithmetik der natürlichen Zahlen enthält, grundsätzlich nicht nachzuweisen ist.

Übertragen auf die heutige biologische Forschung und die gentechnische Diskussion könnte man spekulieren, dass – analog – ein lebendes Wesen (etwa der Mensch) das Geheimnis des Lebens grundsätzlich nicht lüften kann.

Durch Abänderung der „Beweistheorie" Hilberts ließ sich ein Teil seiner Ziele doch noch erreichen. Aber durch Gödels Resultate zerbrachen damals viele Hoffnungen, und Hilberts Formalismus verlor danach an Boden.

Auch hier lief die Mathematik in eine gewisse Sackgasse, die ihr allerdings beträchtlichen Gewinn einbrachte, darunter die Erkenntnis, dass die Forderung nach einem absolut gesicherten Wissen eben eine überzogene Forderung zu sein scheint.

Die Physik lief in eine ähnliche Sackgasse, und daher verabschieden sich viele Physiker von der Idee, eine einheitliche physikalische Theorie der Welt zu finden. Die Hoffnung des Mittelalters auf eine Universalmedizin führte wohl auf die erste Sackgasse dieser Art.

Dagegen ist die aus dem Grundlagenstreit der Mathematik entstandene *konstruktive Richtung* überaus erfolgreich geworden. Es ist ja meist unbefriedigend, z. B. nur die Existenz einer Konfiguration zu kennen; man möchte mehr, man möchte sie explizit angeben können oder wenigstens durch explizite Konstruktionsschritte (häufig sind es Rechenschritte) möglichst effizient erfassen. Dieser Weg, der in das Zeitalter der Algorithmen geführt hat, steht viel näher an ganz konkreten Anwendungen. Dagegen scheinen auf Visionen gegründete Programme – wie das Hilbertsche – wegen der zum Zeitpunkt ihrer Formulierung nicht überschaubaren Parameter auf risikoreichere Wege zu führen.

Ganz ähnliche Erfahrungen bescheren uns im wirklichen Leben die vielen Fusionen und hochgelobten Reformen (wie Steuer- und Rentenreform, Hochschul- und Dienstrechtsreform, Rechtschreibreform usw.). Sie alle basieren partiell auf Visionen. Und wer weiß schon, ob nicht aus Unkenntnis oder gar bewusst unsachgemäße Parameter eingeschleust und sachgemäße ausgeblendet werden.

3. Beispiel: Zur Abwechslung eine leichte Kost

Unsere jungen Mathematiker sollen lernen, *auch* wirtschaftlich zu denken. Diese Idee ist keineswegs neu, kann aber auf Abwege führen, wie eine Begebenheit zeigt, die sich vor etwa 100 Jahren im US-Staat Indiana zugetragen hat. Dort machte ein junger Mathematiker (zutreffender: Hobby-Mathematiker) seinem Wahlkreisabgeordneten einen Vorschlag. Er sagte: Wenn der Staat Indiana seine – des Mathematikers – Entdeckung, dass nämlich π den Wert 3,2 besitzt, zum Gesetz mache, dann könne die neue Erkenntnis an Indianas Schulen gelehrt werden, ohne dass der Staat dem Entdecker Gebühren bezahlen müsse.

Ein guter Vorschlag, dachte der Abgeordnete (der wirklich glaubte, man könne für mathematische Entdeckungen Gebühren kassieren) und brachte den Gesetzentwurf am 18. Januar 1897 im Repräsentantenhaus ein. Der Entwurf passierte zwei Parlamentsausschüsse und wurde in 3. Lesung mit 67:0 Stimmen angenommen.

Rein zufällig lief am Tag dieses großen Ereignisses ein richtiger Mathematiker (er hieß C. A. Waldo) ins Repräsentantenhaus. Er bekam mit, was die ahnungslosen Volksvertreter einstimmig beschlossen hatten. Es gelang ihm, die Senatoren aufzuklären und zu verhindern, dass der Senat (die 2. Kammer des Parlaments) das Gesetz bestätigte.

Denkt man an die TIMS-Studie, dann läuft es einem kalt über den Rücken, dann überfallen einen gewisse Ahnungen, was mit entsprechenden Gesetzentwürfen hierzulande passieren könnte. Schaden kann es jedenfalls nicht, wenn richtige Mathematiker in den Parlamenten gelegentlich vorbeischauen.

4. Beispiel

Nachdem das Stichwort „Hobby-Mathematiker" bereits gefallen ist, blicken wir kurz auf drei berühmte Probleme der alten Griechen: die Quadratur des Kreises, die Würfelverdoppelung, die Winkeldreiteilung. Ihre Unlösbarkeit ist längst bewiesen, wenn die Lösung allein mit Zirkel und Lineal erfolgen soll.

Es ist erstaunlich, mit welcher Ausdauer „Hobby-Mathematiker" immer wieder versuchen, diese Probleme doch noch zu „lösen". Mein Dienstzimmer beherbergt einen dicken Ordner mit Werken dieser eifrigen Kollegen. Leider wissen sie nicht oder wollen nicht wissen oder können nicht verstehen, auf welchem berühmten Irrweg sie sich bewegen. Ungenügende Ausbildung, Unkenntnis über die genaue Problemstellung und den Stand der Forschung sowie eine gewisse Verbohrtheit sind häufige Ursachen. Im Gegensatz dazu reflektieren ja echte Mathematiker beim Bohren ihrer Bretter immer wieder, ob ihre Bohrversuche in Verbohrtheit umkippen.

Der immer wieder unternommene Versuch – etwa bei der Winkeldreiteilung – das Unmögliche doch noch zu vollbringen, bewirkte allerdings eine ganze Reihe beachtlicher Leistungen, z. B. mit zusätzlichen Hilfsmitteln (etwa einer Trisektrix, also einer Hilfskurve zur Dreiteilung eines Winkels). Auch Näherungskonstruktionen – Urformen von Algorithmen – sind in großer Zahl erfunden worden.

Der Grund dafür, dass wir die Unlösbarkeit dieser klassischen Probleme so leicht durchschauen, liegt – wie wir längst wissen – in ihrem präzisen Zugang über die Algebra.

Die Algebra selbst kennt in den langanhaltenden Bemühungen um *geschlossene Lösungsformeln* für algebraische Gleichungen eine ähnliche Situation. Die Bemühungen waren ja erfolgreich bis zu den Formeln von Cardano und Ferrari (bis zu den algebraischen Gleichungen 4. Grades). Wer diesen Weg weitergehen will (und vielleicht schon von vollständiger Induktion nach dem Grad der Gleichung träumt) gerät in eine Sackgasse, es sei denn, es gelingt ihm – wie einst Niels Henrik Abel (1802–1829) – zu beweisen, dass die allgemeine Auflösung der Gleichungen 5. Grades unmöglich ist.

5. Beispiel: In diesem Beispiel entfernen wir uns von der Mathematik

Das immer wieder aufkeimende Bestreben „doch noch ein Lösung zu finden", zeigte sich auch jahrhundertelang bei allen Versuchen zum Bau eines Perpetuum mobile, also einer Maschine, die nicht nur dauernd läuft, sondern ohne Energiezufuhr auch noch Arbeit abgibt. Man spürt deutlich den Reiz des Unmöglichen. Man weiß, dass auch Leonardo da Vinci (1452–1519) immer wieder versuchte, ein Perpetuum mobile zu bauen. Nun war es damals gar nicht leicht, die Unmöglichkeit einzuschätzen, denn strenge Begriffe von Arbeit, Kraft und Energie fehlten noch. Ob man schließlich auf einem Königsweg oder einem Irrweg landet, war lange Zeit unklar.

Ähnliches gilt heute beim Begriff der *Leistung*, genauer: der von Menschen erbrachten Leistung. Wenn etwa der Vorschlag käme, Bundes- und Landtagsabgeordnete *nach Leistung* zu bezahlen, dann hätte man – auch wenn das Volk darüber noch so hocherfreut wäre – keinen sicheren Begriff zur Messung ihrer Leistung. Die Abgeordneten würden dies bei sich selbst sofort verstehen – bei Professoren allerdings kaum.

Zum Thema „Perpetuum mobile" hat sich auch Max Planck (1858–1947) sehr abwägend geäußert. Er schrieb:

> Das Energieprinzip ist ein Erfahrungssatz. Sollte eines Tages die Anerkennung seiner Allgemeingültigkeit eine Einschränkung erleiden, was in der Atomphysik tatsächlich manchmal vermutet worden ist, so würde das Problem des Perpetuum mobile plötzlich echt werden. Insofern ist seine Sinnlosigkeit keine absolute.

Und wir können ergänzen: So mancher Irrweg ist eben kein absoluter.

Lassen Sie mich noch ein Stück reine Unterhaltung einfügen: Die alte Hoffnung, mit einem klassischen

Perpetuum mobile über eine Mechanik mehr Energie zu erzeugen als eingesetzt wird, war z. B. beim Bau der ersten deutschen Eisenbahn von Nürnberg nach Fürth (Eröffnung 1835) schon nachhaltig enttäuscht worden, spukte aber immer noch in den Köpfen der Ingenieure. Hochgelehrte Männer verfassten damals zu vielen Themen des Eisenbahnprojekts durchaus untaugliche Gutachten. In einem Gutachten des Bayerischen Ärztekollegiums hieß es:

> Die schnelle Fortbewegung muss bei den Reisenden unausweichlich zu einer Gehirnerkrankung führen [sehr modern, man denke an BSE!] [...] Wenn Reisende nichtsdestoweniger entschlossen sind, sich dieser schrecklichen Gefahr auszusetzen, muss der Staat [auch sehr modern!] wenigstens die Zuschauer schützen, denn sonst werden sie beim Anblick der dahinrasenden Dampfwagen von dieser Hirnkrankheit befallen.

Sie sehen, auch Gutachten beanspruchen auf Irrwegen ihren Platz (hoffentlich nur selten in der Mathematik).

Tatsächlich gibt es unweit der Mathematik eine Fülle berühmter Beispiele für Abwege und Irrwege, auch für krumme Wege, die immer wieder beschritten wurden. Dazu gehörte einst der große Tummelplatz der Goldmacher und anderer Scharlatane, die in verschiedenen Varianten nie aussterben und die unlängst sogar zu formulierten Empfehlungen der DFG geführt haben, um wissenschaftliches Fehlverhalten eindämmen zu können.

Wie eng Idealweg und Irrweg beieinander liegen können, zeigt auch mancher technische Flop, etwa der Wankelmotor. Die Grundidee, den Hubkolben durch einen Rotationskolben zu ersetzen, galt als genial. Große Energieeinsparung wurde prophezeit, der Idealweg des Motorenbaus schien gefunden. Die Realisierung zeigte jedoch, dass auch andere Parameter (z. B. Dichtungs- und Abgasfragen) entscheidend mitspielen. So wurde der Weg des Wankelmotors holprig, eine Sackgasse bahnte sich an.

6. Beispiel: Themenwechsel! Wir kehren zurück zur Mathematik

Ganz besonders schwierig ist es – zumindest am Anfang – wenn überhaupt kein Weg zu sehen ist, auf dem ein Problem gelöst werden könnte. Ein Beispiel dafür bietet die Knotentheorie, genauer das Problem der Klassifikation der Knoten, das übrigens zwei Physiker lange vor den Mathematikern erkannten und bearbeiteten. Es war William Thomson (der spätere Lord Kelvin), der bereits 1867 der Royal Society in Edinburgh Modelle von verknoteten Wirbelatomen vorstellte. Dies war zu einer Zeit, als es noch keine anerkannte Theorie der Atomstruktur gab, als der Äther (ein Irrweg der Physik) noch im Schwange und das Vakuum noch völlig suspekt war.

Einige Jahre später (1877) machte Lord Kelvins Schüler Peter Guthrie Tait – der sich auch mit Krümmungskreisen ebener Kurven befasste – erstmals eine Knotentabelle. Kelvin und Tait hatten gehofft, die Knoten würden den Elementen im Periodensystem entsprechen. Sie hatten sich zwar geirrt, aber die Knotentheorie war geboren!

Als Vertreter auch der Darstellenden Geometrie kann ich einflechten, dass man einen Knoten des E^3 (eine geschlossene, topologisch veränderliche Raumkurve) i. a. durch seine Normalprojektion auf eine Ebene darstellt und dass für die Klassifikation der Knoten die in ihrer Projektion auftretenden Kreuzungen unter Beachtung der Sichtbarkeit entscheidend sind, sowie damit verknüpfte topologische Operationen, z. B. die Reidemeister-Bewegungen.

Es reizt mich, weitere Bemerkungen einzufügen. Manche Zeitgenossen sind heutzutage dabei, hochentwickelte klassische Methoden, auch solche, die bei der Darstellung von Knoten mitspielen, zu entrümpeln (oft ohne sie zu kennen oder gar zu beherrschen). Die Architekten gehen da viel werbewirksamer vor: sie lassen markante klassische Bauten nicht entrümpeln, sondern durch die UNESCO zum Weltkulturerbe der Menschheit erklären.

Dazu gehören auch bedeutende Teile der Mathematik, auch solche, die heute nicht gelehrt werden oder mit denen gerade kein Geld zu verdienen ist. Es würde der Deutschen Mathematiker-Vereinigung gut anstehen, in dieser Richtung aktiv zu werden. Was heute zurücktreten muss, um neuen Lehrinhalten Platz zu machen, ist oft hervorragende Mathematik, eben ein Stück Kulturerbe der Menschheit!

Die UNESCO hatte zwar das Jahr 2000 zum „World Mathematical Year" erkoren, aber dies ist ein völlig ungenügendes Strohfeuer.

Man wird nicht erwarten, dass eine breite Öffentlichkeit großen Anteil daran nimmt. Aber angesichts der immer weiter auseinanderdriftenden Mathematik wäre schon viel gewonnen, wenn wenigstens die Mathematiker nichtaktuelle, aber herausragende Teile ihrer Wissenschaft vor der Entrümpelung bewahren würden (etwa mit einer UNESCO-Vitrine vor jeder öffentlichen mathematischen Bibliothek, die Bücher zeigt, die an große mathematische Theorien erinnern).

Zurück zur Knotentheorie. Sie hat große Teilerfolge errungen, aber es gibt keine Direttissima (keinen Weg, der ohne Umwege zum Gipfel führt). Man kann nur stückweise vorpirschen, denn nach wie vor entziehen sich die Knoten einer vollständigen Klassifikation. Ein Grund dafür ist, dass man sehr pathologische Knoten angeben kann. Biologen, Chemiker und Physiker interessieren sich im Rahmen der DNS-Mathematik jedoch brennend dafür. So gibt es zweisträngige DNS mit freien Enden (hier ist man eher bei den Zöpfen), aber auch solche, die zwei geschlossene (eventuell verknotete) Stränge besitzen.

Für unsere jungen Mathematiker und Mathematikerinnen ist vielleicht die folgende Einschätzung interessant: Im Gegensatz zur Knotentheorie lässt sich in einer gut etablierten, aber noch nicht voll ausgebauten Theorie meist risikoärmer forschen. Man hat dann schon einen bewährten Begriffsapparat, man kennt Wege, die erfolgreich waren und kann leichter abschätzen, wo Neues wie zu entdecken ist.

7. Beispiel

Hier beleuchten wir nochmals eine Situation, in der nur unbekanntes Gelände und in diesem kaum gesicherte Wege erkennbar sind. Wir betrachten den Eulerschen Polyedersatz. Leonhard Euler (1707–1783) publizierte ihn 1758 in folgender Form:

> In jedem von ebenen Flächen eingeschlossenen Körper ist die Summe aus der Zahl der Ecken und der Zahl der Seitenflächen um 2 größer als die Zahl der Kanten.

Mathematiker unserer Zeit unterziehen Eulers Beweis des Polyedersatzes immer wieder detaillierter Kritik. Sie bemängeln, dass Euler implizit die Konvexität des Polyeders verwende und dennoch an entscheidender Stelle lückenhaft schließe.[1] Aber Euler hatte den Begriff der Konvexität noch nicht. Er betrat wissenschaftlich kaum beackertes Neuland. Er betrachtete „von ebenen Flächen eingeschlossene Körper“. Man kann darüber spekulieren, welche Körper Euler vorschwebten. Jedenfalls waren Euler und seine Zeit von der Formulierung scharfer, auf einen Beweis zugeschnittener Voraussetzungen noch weit entfernt, und so konnte der Beweis nach heutigen Maßstäben nicht gelingen.

Nun kennen wir die weitere Entwicklung. Sie wird markiert durch Begriffe wie „Euler-Zahl und ihre topologische Invarianz“ und durch Begriffe wie „n-dimensionale geschlossene und orientierbare Mannigfaltigkeit“ u. a. Aber: Ob im Eulerschen Polyedersatz ein topologischer Kern steckt, blieb nach Euler noch lange Zeit ungeklärt. Selbst als diese Frage allmählich aktuell wurde, war das topologische Umfeld noch so unbeackert, dass zunächst *überhaupt kein Weg* zu ihrer Beantwortung führte.

8. Beispiel

Zu den X-Wegen der Mathematik zählen auch die verschlungenen Wege, die schließlich doch zu tragfähigen mathematischen Ideen führen. Dies ist ein interessantes und umfangreiches Thema.

Erwähnen möchte ich hier nur, dass dabei immer wieder anschaulich-geometrische Vorstellungen als Vehikel dienen; sie beflügeln die Phantasie und die Kreativität ganz wesentlich. Und eine Abbildung auf die Sprache der Geometrie fördert nicht nur viele Probleme, sie *leitet* sogar oft den Entstehungsprozess neuer Mathematik.

Das auch heute noch prominenteste Beispiel dafür ist die von Albert Einstein (1879–1955) vor etwa 100 Jahren begonnene Geometrisierung – inzwischen auch Topologisierung – physikalischer Begriffe. Danach wird bekanntlich zur zweckmäßigen mathematischen Beschreibung physikalischer Phänomene in der speziellen Relativitätstheorie (1905) der euklidische Erfahrungsraum durch die 4-dimensionale (pseudoeuklidische) Minkowski'sche Raum-Zeit ersetzt („Zeit“ wird als Raumkoordinate geometrisch interpretiert); in der allgemeinen Relativitätstheorie (1915) tritt an die Stelle des euklidischen Raums ein 4-dimensionaler Riemannscher Raum.

Bei diesem und vielen anderen Beispielen ist eine hochentwickelte Raumanschauung ein überaus nützlicher Wegbegleiter.

Leider glaubt hierzulande so mancher selbsternannte Bildungsexperte, dass man auf die Breitenförderung dieser Erkenntnisquelle (wie in Amerika) großzügig verzichten kann, weil ja in unserer Zeit dem Auge sowieso viel mehr geboten wird als je zuvor (besonders in allen Arten visueller Werbung, oft gesteigert bis zum Werbeschwindel), aber nicht als Methode zur Unterstützung des Denkens. Man kann daher nur hoffen, dass die Fähigkeit zur Raumvorstellung – wie auch das Gespür für Zahlen und Strukturen – in genügend vielen Naturbegabungen *von vornherein* genügend stark ausgeprägt ist.

9. Beispiel

Noch ein Beispiel für ungesicherte Wege, für Wege, die anfangs über dünnes Eis führen und schließlich doch einen Gipfel erreichen. Es ist die Geschichte der

1 Für konvexe Polyeder hat später (1794) A.-M. Legendre einen einfachen Beweis geliefert, indem er die Oberfläche des Polyeders von einem seiner Innenpunkte auf eine um diesen Punkt gelegte Sphäre projiziert und dann abzählt.

Fourier-Reihen. Sie wurden längst verwendet, ehe ihre Handhabung mathematisch geklärt war. Überliefert ist, dass Joseph Fourier 1807 vor der Pariser Académie des Sciences über das Problem der Wärmeleitung in einem dünnen geschlossenen Kreisring (mit Wärmedämmung nach außen) sprach. Fourier hat damals die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung dieses Wärmeleitungsproblems angegeben. Als Lösung stellte er eine Reihe vor, die man heute Fourier-Reihe nennt. Er soll damals erklärt (oder vielleicht auch nur vermutet) haben, dass sich jede periodische Funktion als unendliche Summe von einfachen Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen lässt. Angeblich erhob sich daraufhin Joseph Louis Lagrange und widersprach heftig. Auch andere berühmte Gelehrte, darunter Poisson, hatten erhebliche Bedenken. So dauerte es eine ganze Weile, ehe die Tragweite von Fouriers Idee erkannt wurde und Konvergenzbedingungen bewiesen werden konnten (Dirichlet'sche Regel, Dirichlet'sche Integrale). Heute ist die Fourieranalyse, die auf ganz ungesicherten Wegen ihren Anfang nahm, aus der Mathematik, der Physik und der Technik – wie man so sagt – nicht mehr wegzudenken.

Übrigens wurde auch der Fundamentalsatz der Algebra schon lange verwendet, ehe er bewiesen wurde. Wir streifen ihn im nächsten Beispiel.

10. Beispiel

Der Fundamentalsatz der Algebra, in dem sich viele Probleme konzentrieren, die bei algebraischen Gleichungen auftreten, hat ja eine lange Geschichte. Bedeutende Mathematiker (Jean Baptiste le Rond d'Alembert (1717–1783), Leonhard Euler (1707–1783), Joseph Louis Lagrange (1763–1813) und andere) haben sich um Beweise bemüht. Der erste Beweis gelang Carl Friedrich Gauß (1777–1855). Er hat ab 1799 (dem Jahr seiner Inauguraldissertation) sogar vier verschiedene Beweise veröffentlicht.

Wenn heute ein Problem von der Qualität dieses Satzes auftritt, weisen meist viel zu viele Zeitgenossen darauf hin,

> dass es sich um eine signifikante Herausforderung handelt, dass man zur Lösung eine Vision benötigt, dass man das Problem mit Power angehen muss.

Sie sehen, ich verwende jetzt moderne Sprechweisen. Ich beherrsche sie nicht, ich habe sie – wie auch die folgenden – abgeschrieben:

> dass es einen strukturierten und flexiblen Denkansatz verlangt, dass man das Problem mit dem vorhandenen Vorwissen vernetzen muss, dass man notfalls ein Problem-Management zur Entwicklung einer optimalen und ideengetriebenen Gesamtstrategie und zur Herstellung von Synergien einsetzen muss usw.

Den Fundamentalsatz der Algebra kann man getrost durch anderes ersetzen, etwa durch Radons Pionierarbeit zur Radon-Transformation (einer zentralen Grundlage der Computer-Tomographie) oder durch Keplers Gesetze der Planetenbewegung. Sie zählen zurecht zu den Grundlagen der Satellitenkommunikation. Würde man sie heute suchen, so würde erneut darauf hingewiesen,

> dass es sich um eine signifikante Herausforderung handelt, dass man zur Lösung des Problems eine Vision benötigt, dass man usw., auch dass man beim Lösen des Problems Spaß haben soll (wobei die Spaßgesellschaft gern verdrängt, wie Kepler sich abmühte, um seine Gesetze zu finden).

Wenn die Lösung eines solchen Problems heutzutage längere Zeit nicht gelingt, wird betont,

> dass man nicht nur eine Vision, sondern eine zielfokusierte Supervision benötigt, dass Leistungsanreize und Wirkungskontrollen nötig sind usw.

Bleibt das Problem ungelöst, dann würzt man neue Probleme mit neuen Sprüchen. Schon Kepler und Gauß wussten, dass Phrasen keine Probleme lösen. Auch die Mathematiker unserer Zeit wissen dies sehr wohl. Aber sie sind mehr denn je dem aufgedunsenen, forschungshemmenden Wissenschaftspalaver ausgesetzt, das sich in jüngster Zeit den klassischen *Bremswegen* der Wissenschaft hinzugesellt, den klassischen Bremswegen wie: hoher Verwaltungsaufwand, Unterfinanzierung, Abschottung gegen neue Ideen, Vorurteile, im Mittelalter die Allmacht der Kirche usw.

11. Beispiel

In diesem Beispiel nenne ich Ihnen unweit der Mathematik drei Fälle jenes Bremswegs, den man die „blockierende Wirkung des gesunden Menschenverstandes" nennen kann, den allerdings Mathematiker weniger oft betreten, da sie dem gesunden Menschenverstand weniger trauen und manche auch weniger davon besitzen.

Erstens: Ein Fallschirm, sollte man meinen, darf kein Loch bekommen (etwa durch einen Schuss), weil er dann – nach dem gesunden Menschenverstand – viel schneller zu Boden fällt. Tatsächlich fällt er dann langsamer und bei gleicher Stoffgröße sogar viel langsamer, wenn man ihn als Netz von Bändern (als Bänderfallschirm) ausbildet.

Zweitens: Ein Flugzeug – sagt der gesunde Menschenverstand – kann niemals fliegen, denn es ist schwerer als Luft – basta. Angeblich wurde mit diesem Argument die erste für ein Flugzeug eingereichte Patentschrift ungeprüft zurückgeschickt. Denn der gesunde Menschenverstand kannte damals weder den Auftrieb noch andere Gesetze der Aerodynamik.

Drittens: Die Form von Bauteilen (z. B. für Flugzeuge, für Kräne, für Brücken), die Mathematiker heutzutage aufgrund der vorgegebenen Beanspruchung modellieren und berechnen, widerspricht nicht selten dem gesunden Menschenverstand (vornehmer: der Intuition) der Ingenieure.

Beachtung verdient auch die folgende Sorte von Umwegen, die Sie vielleicht längst erwarten:

12. Beispiel

Nicht jeder, der – wie Christoph Kolumbus – Hinterindien westwärts sucht, entdeckt zum Trost Amerika. Nicht jeder, der – wie Johann Friedrich Böttger – Gold herstellen soll, entdeckt zum Trost das Porzellan. Und nicht jeder, der eine mathematische Idee verfolgt, die er am Ende begraben muss, entdeckt zum Trost doch noch Neues. Aber es gibt Ausnahmen. Auch in der Mathematik. Ich erzähle Ihnen dazu ein weithin bekanntes Beispiel:

William Rowan Hamilton (1805–1865) befasste sich erfolgreich mit komplexen Zahlen (mit Paaren reeller Zahlen). Er hatte – wie Gauß, Wessel, Möbius u. a. – die Idee, eine Addition und eine Multiplikation für Tripel reeller Zahlen so zu definieren, dass diese beiden Operationen dieselben Eigenschaften besitzen wie die entsprechenden der komplexen Zahlen. Nach einigen Jahren vergeblicher Arbeit ging Hamilton (der nicht an Verbohrtheit litt) zwei Kompromisse ein: Der erste war, dass seine neuen Zahlen Quadrupel bildeten, der zweite bestand im Verzicht auf die Kommutativität der Multiplikation. Diese neuen Zahlen nannte er Quaternionen.

Wie auch anderswo führte Hamiltons Versuch, Unmögliches zu vollbringen, zu einer herausragenden, wenn auch zunächst nicht angepeilten mathematischen Leistung.

13. Beispiel

Wir sagten am Anfang: Die Mathematik befasst sich auch mit der bewussten Erfindung von Um- und Irrwegen. Wir können sogar stärker formulieren: mit dem Legen falscher Fährten, mit dem Aufstellen von Barrieren, z. B. in Form sehr großer Zahlen, die in endlicher Zeit kaum zu faktorisieren sind. Sie sehen, wir sind bei der Ver- und Entschlüsselung von Nachrichten, bei der Kryptographie. Hier müssen die Sackgassen, die Um- und Irrwege hochkomplex sein, damit sich möglichst kein potentieller Feind (auch kein Mathematiker) hindurchfinden kann, auch dann nicht, wenn er eine Computeranalyse zu Hilfe nimmt.

14. Beispiel

Unweit der Mathematik steht ihre Didaktik. Zu ihren volkstümlich gewordenen Irrwegen gehört die in den siebziger Jahren des vorigen Jahrhunderts propagierte Einführung der trivialen Mengenlehre in die Schulmathematik. Die Propaganda dafür war enorm, und die damaligen Heilsbringer ließen sich erst durch die Auswirkungen (wie das Absinken des mathematischen Niveaus, besonders der Rechenfertigkeit), nicht durch die Argumente der Fachmathematiker, widerlegen.

14. Beispiel: Letzter Themenwechsel

Wir leben – ganz unbestritten – in einem Zeitalter der Mathematisierung immer weiterer Lebensbereiche. Folglich ist es für Mathematiker so abwegig nicht, nach Gottesbeweisen oder auch Beweisen für die Nichtexistenz Gottes zu suchen. Nahezu jede Disziplin streift dieses Thema. Allerdings wird es heute kaum nachgefragt, lassen sich doch keine Drittmittel damit einwerben. Nichtsdestoweniger sind die Namen großer Mathematiker mit diesem Thema verknüpft. Wir finden René Descartes (1596–1650) und Blaise Pascal (1623–1662), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) und Alfred North Whitehead (1861–1947).

Bitte, finden Sie diese älteren Kollegen nicht komisch, wenn sie an diesem Thema arbeiteten. Sie waren eben – wie man so sagt – „allgemein gebildet“. Sie alle waren zugleich Philosophen.

Es zeigt sich bei diesem Thema schnell, dass sich mathematisch nichts beweisen lässt, weder die Existenz noch die Nichtexistenz Gottes. Es zeigt sich ebenso schnell, dass sich auch nichts beweisen lässt, wenn man über die Existenz hinausgeht und Gott gewisse Eigenschaften (die Philosophen sagen „Attribute“) zuordnet, z. B. annimmt, er sei ein „Wesen“, er sei allgegenwärtig, allwissend, allmächtig, absolutvollkommen usw., wenn man also anfängt, ihn zu modellieren.

Engel, einem Mönch die göttliche Weisheit in die Feder diktierend

Wie steht es nun mit den Gottesbeweisen? Sie arbeiten nicht mit dem scharfen Beweisbegriff der Mathematik; sie sind eher mehr oder weniger überzeugende Begründungen. Neuere Überlegungen dazu sind durchaus anwendungsbezogen, verwenden – wie Richard Swinburne – Sprachanalyse und Wahrscheinlichkeitsrechnung und versuchen, die Existenz Gottes wenigstens hochwahrscheinlich zu machen, oder einfach abzuwägen, ob mehr für oder gegen seine Existenz spricht (was schon Pascal tat) oder einfach Wege und Zugänge zu ihm aufzuzeigen.

Mit diesem letzten Wege-Typ enden meine Beispiele. Allerdings, den Hauptweg, den die Mathematik eingeschlagen hat – heraus aus dem Elfenbeinturm und zunehmend hinein in die Gesellschaft – den habe ich ausgespart. Ich denke, er zählt nicht zu den globalen Um- und Irrwegen, die ja im Vordergrund stehen sollten. Und ich wollte keine Überdosis an Irrwegen anbieten. Ich komme daher zum Schluss.

Ich will ihn einleiten, indem ich Ihnen eine Kleinigkeit aus meiner Schwarzwaldheimat erzähle.

Sie finden dort (zwischen Freiburg und Furtwangen) die ehemalige Benediktinerabtei St. Peter. Die Klosterbibliothek von St. Peter gilt als ein besonderes Kleinod des Rokoko. Der Bilder- und Skulpturenschmuck dieses Raumes wurde von einem der Aufklärung nahestehenden Abt inszeniert – und soll zeigen, dass *menschliche Vernunft* und *göttliche Weisheit* zusammenzuführen sind. Dies symbolisieren u. a. zwei im Bibliotheksraum hängende Bilder.

Das eine Bild zeigt einen wissenschaftlich arbeitenden Mönch, der mit einer Feder in der Hand etwas niederschreibt. Er übt sich in menschlicher Vernunft. Die Mönche von St. Peter nennen ihn liebevoll den „Selbstdenker“.

Das andere Bild unterscheidet sich vom ersten nur dadurch, dass es hinter dem schreibenden Mönch noch einen Engel zeigt, der ihm die göttliche Weisheit in die Feder diktiert.

So wünsche ich zum Schluss meiner Fakultät, dass es ihr an hinreichend kreativen, verantwortungsbewussten und weitsichtigen Selbstdenkern und Selbstdenkerinnen – und falls nötig an unterstützender göttlicher Weisheit – niemals fehlen möge!

Ich wünsche der Fakultät für alle Zeiten alles Gute! Und ich danke Ihnen fürs Zuhören!

Adresse des Autors
Prof. Dr. Oswald Giering
Zentrum Mathematik, SB4
Technische Universität München
80290 München
`giering@mathematik.tu-muenchen.de`

Der „Selbstdenker“