TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Beiträge zur Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten

M. Schneider

IAPG / FESG No. 21

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie
Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie

München 2005

Beiträge zur Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten

M. Schneider

IAPG / FESG No. 21

München 2005

ISSN 1437-8280
ISBN 3-934205-20-8

Aktualisierte Version vom August 2005

Adressen:
Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie
Technische Universität München
Arcisstrasse 21
D-80290 München
Germany
Telefon: +49-89-289-23190
Telefax: +49-89-289-23178
http://tau.fesg.tu-muenchen.de/~iapg/

Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie
Technische Universität München
Arcisstrasse 21
D-80290 München
Germany
Telefon: +49-89-289-23191
Telefax: +49-89-289-23178
http://tau.fesg.tu-muenchen.de/~fesg/

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Bahn- und Parameterbestimmung nach einem verallgemeinerten Gauß -Verfahren

1.Vorbemerkung

Die Gravitationsfeldbestimmung kann direkten Gebrauch machen von den gekoppelten Integralgleichungen *(Schneider 1992,§ 14.4.1, 2002, §6)*

$$\begin{aligned} n_A(t_n) &= 1 - t_n - T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) A d\tau_n \\ n_B(t_n) &= t_n - T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) B d\tau_n \\ n_S(t_n) &= - T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) S d\tau_n \end{aligned} \qquad (1.1)$$

mit den Randwerten

$$\begin{array}{llll} Rand & n_A(t_n) & n_S(t_n) & n_B(t_n) \\ \hline t_n = 0 & 1 & 0 & 0 \\ t_n = 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad (1.2)$$

Hier können die Funktionen

$$n_A(t_n), \quad n_S(t_n), \quad n_B(t_n)$$

bei bekannter Bahnbewegung $\mathbf{r}(t_n)$ berechnet werden aus der Zerlegung

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t_n) &=: n_A(t_n)\mathbf{r}_A + n_S(t_n)\mathbf{r}_S + n_B(t_n)\mathbf{r}_B \\ &= n_A(t_n)\left(1+\frac{\mathbf{r}_A\cdot\mathbf{r}_B}{r_A^2}\right)\mathbf{r}_A + n_S(t_n)\mathbf{r}_S + n_B(t_n)\mathbf{r}_M\end{aligned} \tag{1.3}$$

nach den linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_B$. Dabei ist

$$\mathbf{r}_S := \mathbf{r}_A \times \mathbf{r}_B \quad . \tag{1.4}$$

Vorausgesetzt ist, daß die Randvektoren nicht kollinear sind.

2. Feldbestimmung: CHAMP - Fall

Die Komponenten $A,\ S,\ B$ der Kräftefunktion

$$\frac{1}{m}\mathbf{K} =: A\mathbf{r}_A + S\mathbf{r}_S + B\mathbf{r}_B \tag{2.1}$$

bezüglich der Basis $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_B$

bzw. bezüglich der Basis $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_M$

$$\frac{1}{m}\mathbf{K} = \left(A + B\frac{\mathbf{r}_A\cdot\mathbf{r}_B}{r_a^2}\right)\mathbf{r}_A + S\mathbf{r}_S + B\mathbf{r}_M \quad , \tag{2.2}$$

also

$$A = \frac{1}{r_A^2}\frac{\mathbf{K}}{m}\cdot\left(\mathbf{r}_A - \frac{\mathbf{r}_A\cdot\mathbf{r}_B}{r_M^2}\mathbf{r}_M\right) \qquad S = \frac{1}{m}\frac{\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}_S}{r_S^2} \qquad B = \frac{1}{m}\frac{\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}_M}{r_M^2} \tag{2.3}$$

sind mit der Darstellung der Kraft

$$\mathbf{K}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n) = \underbrace{\sum_{i=0}^{I} g_i\mathbf{G}_i(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n)}_{\text{Gravitation der Erde}} + \underbrace{\mathbf{z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n)}_{\text{sonstige Kräfte}} + \underbrace{\mathbf{u}(t_n)}_{\text{nicht modellierte Kräfte}} \tag{2.4}$$

zu parametrisieren.

Man erhält

$$A = \frac{1}{r_A^2}\left(\mathbf{r}_A - \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{r_M^2}\mathbf{r}_M\right) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{I} g_i \mathbf{G}_i(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n) + \mathbf{z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n) + \mathbf{u}(t_n)}{m} =: A_G + A_z + A_u \qquad (2.5)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
A_G &:= \sum_{i=0}^{\infty} g_i \mathbf{G}_i(\mathbf{r},t_n) \cdot \frac{1}{m r_A^2}\left(\mathbf{r}_A - \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{r_M^2}\mathbf{r}_M\right) =: \sum_{i=0}^{\infty} g_i A_G^i \\
A_z &:= \mathbf{z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n) \cdot \frac{1}{m r_A^2}\left(\mathbf{r}_A - \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{r_M^2}\mathbf{r}_M\right) \\
A_u &:= \mathbf{u}(t_n) \cdot \frac{1}{m r_A^2}\left(\mathbf{r}_A - \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{r_M^2}\mathbf{r}_M\right)
\end{aligned} \qquad (2.6)$$

und analog

$$S = \frac{1}{m}\frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_S}{r_S^2} =: S_G + S_z + S_u \qquad (2.7)$$

mit

$$\begin{aligned}
S_G &:= \sum_{i=0}^{\infty} g_i \mathbf{G}_i(\mathbf{r},t_n) \cdot \frac{\mathbf{r}_S}{m r_S^2} =: \sum_{i=0}^{\infty} g_i S_G^i \\
S_z &:= \mathbf{z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n) \cdot \frac{\mathbf{r}_S}{m r_S^2} \\
S_u &:= \mathbf{u}(t_n) \cdot \frac{\mathbf{r}_S}{m r_S^2}
\end{aligned} \qquad (2.8)$$

sowie

$$B = \frac{1}{m}\frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_M}{r_M^2} =: B_G + B_z + B_u \qquad (2.9)$$

mit

$$\begin{aligned} B_G &:= \sum_{i=0}^{\infty} g_i \mathbf{G}_i(\mathbf{r}, t_n) \cdot \frac{\mathbf{r}_S}{m r_M^2} =: \sum_{i=0}^{\infty} g_i B_G^i \\ B_z &:= \mathbf{z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t_n) \cdot \frac{\mathbf{r}_S}{m r_M^2} \\ B_u &:= \mathbf{u}(t_n) \cdot \frac{\mathbf{r}_S}{m r_M^2} \end{aligned} \quad . \tag{2.10}$$

Eingetragen in die gekoppelten Integralgleichungen (1.1) ergibt sich

$$\begin{aligned} n_A(t_n) &= 1 - t_n - T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} g_i \, A_G^i + A_z + A_u \right\} d\tau_n \\ n_B(t_n) &= t_n - T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} g_i \, B_G^i + B_z + B_u \right\} d\tau_n \\ n_S(t_n) &= -T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} g_i \, S_G^i + S_z + S_u \right\} d\tau_n \end{aligned} \tag{2.11}$$

oder wenn man (2.11) umstellt

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} g_i \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) A_G^i d\tau_n &= -\int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \left(A_z + A_u \right) d\tau_n - \frac{n_A(t_n) + 1 - t_n}{T^2} \\ \sum_{i=0}^{\infty} g_i \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) B_G^i d\tau_n &= -\int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \left(B_z + B_u \right) d\tau_n - \frac{n_B(t_n) + t_n}{T^2} \\ \sum_{i=0}^{\infty} g_i \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) S_G^i d\tau_n &= -\int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \left(S_z + S_u \right) d\tau_n - \frac{n_S}{T^2} \end{aligned} \quad . \tag{2.12}$$

Dieses Tripel von Gleichungen ist für jeden Meßzeitpunkt t_n^σ aufzuschreiben. Es entsteht so ein System von (3xAnzahl der Meßzeitpunkte) linearen Gleichungen zur Bestimmung der Feldparameter g_i.

Die Koeffizientenmatrix dieses Systems wird aus den bestimmten Integralen

$$\int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \begin{Bmatrix} A_G^i \\ B_G^i \\ S_G^{ii} \end{Bmatrix} d\tau_n \tag{2.13}$$

gebildet, die rechten Seiten der Gleichungen (2.12)enthalten die Integrale

$$\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\begin{Bmatrix} A_z^i + A_u^i \\ B_z^i + B_u^i \\ S_z^i + S_u^i \end{Bmatrix} d\tau_n \ , \tag{2.14}$$

die ebenfalls für alle $t_n^\sigma \quad \sigma = 1,2,...$ zu berechnen sind. Das kann ausgehend von den aus der Bahnbestimmung bekannten Bahnen $\mathbf{r}(t_n)$ erfolgen. $K^I(t_n,\tau_n)$ ist der Dreieckskern.
Zur Berechnung der rechten Seiten sind außer der Bahn $\mathbf{r}(t_n)$ des Satelliten die gemessenen Störkräfte und Modelle der sonstigen Kräfte heranzuziehen.

---

3. Feldbestimmung mit GRACE

Die Basisvektoren $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_B$ sind linear unabhängig, die Basisvektoren $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_M$ sind orthogonal, vorausgesetzt die Randvektoren $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ sind nicht kollinear.
Der **Mertonsche Vektor** $\mathbf{r}_M$ *(Schneider I 1992)* ist orthogonal zur $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B -$Ebene, so daß die Zerlegung des momentanen Ortsvektors $\mathbf{r}(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_n) &=: n_A(t_n)\mathbf{r}_A + n_S(t_n)\mathbf{r}_S + n_B(t_n)\mathbf{r}_B = \\ &= n_A(t_n)\left(1 + \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{r_A^2}\right)\mathbf{r}_A + n_S(t_n)\mathbf{r}_S + n_B(t_n)\mathbf{r}_M \end{aligned} \tag{3.1}$$

eine Zerlegung in eine Komponente in der $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B -$Ebene und eine dazu orthogonale Komponente bedeutet. Die erstere Zerlegung in (3.1) ist die nach den i.allg. linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_B$, wobei

$$\mathbf{r}_S := \mathbf{r}_A \times \mathbf{r}_B \quad , \tag{3.2}$$

während die zweite Zerlegung eine nach den orthogonalen Vektoren $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_M$ ist.
Nach der Definition des Mertonschen Vektors gilt nämlich

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{r}_A \times \mathbf{r}_M \ \Rightarrow \ \mathbf{r}_M \perp \mathbf{r}_A \ \ und \ \ \mathbf{r}_M \perp \mathbf{r}_S \tag{3.3}$$

Das kann bei der Nutzung der Abstandsmessungen bei GRACE gezielt genutzt werden. Die Integralgleichung

$$\mathbf{r}(t_n) = \overline{\mathbf{r}}(t_n) - \frac{T^2}{m}\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\mathbf{K}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};\tau_n)d\tau_n \tag{3.4}$$

werde dazu nach der Basis $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_M$ zerlegt. Das führt zu drei zwar gekoppelten, aber orthogonalen Komponentengleichungen. Man erhält sie wie folgt:

Schreibt man die Gleichungen (2.12)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} g_i \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) A_G^i d\tau_n &= -\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\left(A_z + A_u\right) d\tau_n - \frac{n_A(t_n)+1-t_n}{T^2} \\
\sum_{i=0}^{\infty} g_i \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) B_G^i d\tau_n &= -\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\left(B_z + B_u\right) d\tau_n - \frac{n_B(t_n)+t_n}{T^2} \\
\sum_{i=0}^{\infty} g_i \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) S_G^i d\tau_n &= -\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\left(S_z + S_u\right) d\tau_n - \frac{n_S}{T^2}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

für beide GRACE - Satelliten A und B auf und bildet die Differenz B-A, so folgt das gesuchte Tripel gekoppelter, orthogonaler Bestimmungsgleichungen im GRACE - Fall

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{\infty} g_i \left(\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) A_G^i d\tau_n \bigg|_B - \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) A_G^i d\tau_n \bigg|_A \right) = \\
&\quad \left(\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\left(A_z + A_u\right) d\tau_n - \frac{n_A(t_n)+1-t_n}{T^2} \Bigg|_B - \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\left(A_z + A_u\right) d\tau_n - \frac{n_A(t_n)+1-t_n}{T^2} \Bigg|_A \right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{\infty} g_i \left(\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) B_G^i d\tau_n \bigg|_B - \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) B_G^i d\tau_n \bigg|_A \right) = \\
&\quad \left(\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\left(B_z + B_u\right) d\tau_n - \frac{n_B(t_n)+t_n}{T^2} \Bigg|_B - \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\left(B_z + B_u\right) d\tau_n - \frac{n_B(t_n)+t_n}{T^2} \Bigg|_A \right)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} g_i \left(\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) S_G^i d\tau_n \Big|_B - \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) S_G^i d\tau_n \Big|_A \right) =$$
$$\left(\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\left(S_z + S_u\right) d\tau_n - \frac{n_S}{T^2} \Big|_B - \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\left(S_z + S_u\right) d\tau_n - \frac{n_S}{T^2} \Big|_A \right) \tag{3.8}$$

Bemerkungen zu den Gleichungen (3.6) **-** (3.8)**:**

a) Würde allein eine Kepler-Kraft wirken, so wäre $S_G \equiv 0$, so daß die linke Seite der Gleichung (3.8) verschwinden würde.

b) Der Zentralanteil des Gravitationsfeldes *(Schneider IV 1999)* ändert die Bahnebene nicht, der dazu orthogonale Anteil – die Anisotropie des Feldes – ändert sie – im Einklang mit den Störungsgleichungen für die Kepler-Elemente $i \;\, und \;\, \Omega$, also Bahnneigung und Knotenlage *(Schneider II 1993).*
Das bedeutet, daß aufeinanderfolgende Bahnbögen nicht in einer Ebene liegen, sondern die durch die jeweiligen Randvektoren $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ aufgespannten Ebenen gegeneinander verschwenkt sind. Denkt man die Bahnbögen infinitesimal kurz, so variieren die Lageelemente $i \;\, und \;\, \Omega$ der oskulierenden Bahnebenen kontinuierlich.

c) Die Gleichungen (3.6)-(3.8) können der Feldbestimmung im GRACE – Fall zugrundegelegt werden. Führt man die Matrizen

$$\mathbf{P} := \left(g_1, g_2, ... g_N\right)^T \qquad \text{Spalte der } \textbf{Feldparameter}$$

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \left(\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) A_G^i d\tau_n \Big|_B - \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) A_G^i d\tau_n \Big|_A \right) \\ \left(\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) B_G^i d\tau_n \Big|_B - \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) B_G^i d\tau_n \Big|_A \right) \\ \left(\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) S_G^i d\tau_n \Big|_B - \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) S_G^i d\tau_n \Big|_A \right) \\ \end{pmatrix} \qquad \textbf{Koeffizientenmatrix}$$

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} \left(\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\left(A_z + A_u\right) d\tau_n - \frac{n_A(t_n)+1-t_n}{T^2} \Big|_B - \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\left(A_z + A_u\right) d\tau_n - \frac{n_A(t_n)+1-t_n}{T^2} \Big|_A \right) \\ \left(\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\left(B_z + B_u\right) d\tau_n - \frac{n_B(t_n)+t_n}{T^2} \Big|_B - \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\left(B_z + B_u\right) d\tau_n - \frac{n_B(t_n)+t_n}{T^2} \Big|_A \right) \\ \left(\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\left(S_z + S_u\right) d\tau_n - \frac{n_S}{T^2} \Big|_B - \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\left(S_z + S_u\right) d\tau_n - \frac{n_S}{T^2} \Big|_A \right) \end{pmatrix}$$

Rechte Seiten

so erhält man das Gleichungssystem (3.6) - (3.8) in der Gestalt

$$\mathbf{A}(3K \times N)\mathbf{P}(1 \times N) = \mathbf{B}(3K \times 1) \qquad (3.9)$$

Es ist dabei angenommen, daß N Feldparameter zu bestimmen sind. Die Dimension der Koeffizientenmatrix **A** wird festgelegt durch N und die Zahl K der Meßzeitpunkte $t_n \in \left\{t_n^1, t_n^2, \ldots t_n^K\right\}$. Zu jedem Meßzeitpunkt fallen drei Zeilen der Matrix **A** an, ebenso in der Matrix B der rechten Seiten. Das System ist durch Ausgleichung nach den Feldparametern aufzulösen.

Zur Berechnung der Elemente der Matrizen $\mathbf{A}$ *und* $\mathbf{B}$ werden benötigt: die Bahnen der GRACE – Satelliten sowie die gemessenen nichtgravitativen Störkräfte und die Modelle der gravitativen Störkräfte. Die GRACE – Bahnen werden in der Darstellung (3.12) benötigt und sollten unter Berücksichtigung der genauen Abstandsmessungen

$$\left|\vec{\Delta}_{12}(t_n)\right|$$

bestimmt sein.

d) Das Gleichungssystem (3.9) ist ausgelegt für die Feldbestimmung aus den Bahnbestimmungen der beiden GRACE – Satelliten. Es korrespondiert der Feldbestimmung nach dem JACOBI- Integral je angewendet auf die beiden GRACE – Satelliten.
e) Das Verfahren ist zunächst nicht ausgelegt zur gezielten Nutzung der hochgenauen Abstandsmessungen zwischen den GRACE- Satelliten. Dieser Aspekt bleibt noch zu untersuchen. Vorbereitend dazu ist der folgende Abschnitt zu bewerten.

4. Ergänzungen im Hinblick auf die Bahn- und Feld- bestimmung im GRACE- Fall

Der Verbindungsvektor

$$\vec{\Delta}_{12} := \mathbf{r}^{(2)} - \mathbf{r}^{(1)} \quad , \tag{3.10}$$

worin $\mathbf{r}^{(i)}(t_n)$ die Bahn des GRACE-Satelliten $i \in \{1,2\}$ bedeutet, soll nach der Orthogonalbasis $\mathbf{r}_A^{(1)}, \mathbf{r}_S^{(1)}, \mathbf{r}_M^{(1)}$, die durch die Bahn des ersten GRACE – Satelliten definiert wird, zerlegt werden

$$\begin{aligned} \vec{\Delta}_{12}(t_n) &:= \vec{\Delta}_1^{(A)}(t_n) + \vec{\Delta}_{12}^{(S)}(t_n) + \vec{\Delta}_{12}^{M}(t_n) \\ &= \left(\vec{\Delta}_{12}(t_n)\bullet\mathbf{r}_A^{(1)}\right)\mathbf{r}_A^{(1)} + \left(\vec{\Delta}_{12}(t_n)\bullet\mathbf{r}_S^{(1)}\right)\mathbf{r}_S^{(1)} + \left(\vec{\Delta}_{12}(t_n)\bullet\mathbf{r}_M^{(1)}\right)\mathbf{r}_M^{(1)} \quad . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dazu wird für jeden der Vektoren $\mathbf{r}^{(i)}(t_n)$ die Zerlegung (3.1), also

$$\mathbf{r}^{(i)}(t_n) = n_A^{(i)}(t_n)\left(1 + \frac{\mathbf{r}_A^{(i)} \cdot \mathbf{r}_B^{(i)}}{\left(r_A^{(i)}\right)^2}\right)\mathbf{r}_A^{(i)} + n_S^{(i)}(t_n)\mathbf{r}_S^{(i)} + n_B^{(i)}(t_n)\mathbf{r}_M^{(i)} \quad , \tag{3.12}$$

herangezogen. Das führt auf

$$\begin{aligned} \vec{\Delta}_{12}(t_n) := &\left\{ n_A^{(2)}(t_n)\left(1 + \frac{\mathbf{r}_A^{(2)} \cdot \mathbf{r}_B^{(2)}}{\left(r_A^{(2)}\right)^2}\right)\mathbf{r}_A^{(2)} + n_S^{(2)}(t_n)\mathbf{r}_S^{(2)} + n_B^{(2)}(t_n)\mathbf{r}_M^{(2)} \right\} \\ &- \left\{ n_A^{(1)}(t_n)\left(1 + \frac{\mathbf{r}_A^{(1)} \cdot \mathbf{r}_B^{(1)}}{\left(r_A^{(1)}\right)^2}\right)\mathbf{r}_A^{(1)} + n_S^{(1)}(t_n)\mathbf{r}_S^{(1)} + n_B^{(1)}(t_n)\mathbf{r}_M^{1} \right\} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Damit können die Skalarprodukte in (3.11) berechnet werden

$$\vec{\Delta}_{12}(t_n)\bullet\mathbf{r}_{A,S,M}^{(1)} = \left[\begin{aligned} &\left\{ n_A^{(2)}(t_n)\left(1 + \frac{\mathbf{r}_A^{(2)} \cdot \mathbf{r}_B^{(2)}}{\left(r_A^{(2)}\right)^2}\right)\mathbf{r}_A^{(2)} + n_S^{(2)}(t_n)\mathbf{r}_S^{(2)} + n_B^{(2)}(t_n)\mathbf{r}_M^{(2)} \right\} \\ &- \left\{ n_A^{(1)}(t_n)\left(1 + \frac{\mathbf{r}_A^{(1)} \cdot \mathbf{r}_B^{(1)}}{\left(r_A^{(1)}\right)^2}\right)\mathbf{r}_A^{(1)} + n_S^{(1)}(t_n)\mathbf{r}_S^{(1)} + n_B^{(1)}(t_n)\mathbf{r}_M^{1} \right\} \end{aligned} \right]\bullet\mathbf{r}_{A,S,M}^{(1)}$$

Auf (3.13) kann ein Verfahren der Feldbestimmung aufgebaut werden, formuliert man eine Bewegungsgleichung für die Relativbewegung der GRACE – Satelliten.

5. Konzept einer (kinematischen) Bahnbestimmung

Es soll die Bahn, die durch die Örter $\mathbf{r}_A$ *und* $\mathbf{r}_B$ in der Zeitspanne T hindurchläuft, dargestellt werden durch

$$\mathbf{r}(t_n) =: n_A(t_n)\mathbf{r}_A + n_S(t_n)\mathbf{r}_S + n_B(t_n)\mathbf{r}_B \tag{5.1}$$

Für die Geschwindigkeit erhält man daraus

$$\dot{\mathbf{r}} := \frac{d\mathbf{r}(t_n)}{dt} = \dot{n}_A(t_n)\mathbf{r}_A + \dot{n}_S(t_n)\mathbf{r}_S + \dot{n}_B(t_n)\mathbf{r}_B \tag{5.2}$$

Damit kann man in die Darstellung der Observablen *(Schneider 2004))* eingehen, beispielsweise in die Darstellung des Doppler-Effektes

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{ES} &= -\frac{\tilde{\omega}_{SE}}{\gamma_S} + (\mathbf{A}+\mathbf{B})\bullet\mathbf{v}_S + \left(-\frac{\tilde{\omega}_{SE}}{\gamma_E} - \mathbf{C}\bullet\mathbf{v}_E\right) \\ &= -\frac{\gamma_E+\gamma_S}{\gamma_E\gamma_S}\tilde{\omega}_{SE} + (\mathbf{A}+\mathbf{B})\bullet\mathbf{v}_S - \mathbf{C}\bullet\mathbf{v}_E\end{aligned} \quad . \tag{5.3}$$

Darin ist zu setzen

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \left[\dot{n}_A(t_n)\mathbf{r}_A + \dot{n}_S(t_n)\mathbf{r}_S + \dot{n}_B(t_n)\mathbf{r}_B\right]_i \quad mit \;\; i \in \{S, E\} \tag{5.4}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{ES} &= -\frac{\gamma_E+\gamma_S}{\gamma_E\gamma_S}\tilde{\omega}_{SE} + (\mathbf{A}+\mathbf{B})\bullet\mathbf{v}_S - \mathbf{C}\bullet\mathbf{v}_E \\ &= -\frac{\gamma_E+\gamma_S}{\gamma_E\gamma_S}\tilde{\omega}_{SE} + (\mathbf{A}+\mathbf{B})\bullet\left[\dot{n}_A(t_n)\mathbf{r}_A + \dot{n}_S(t_n)\mathbf{r}_S + \dot{n}_B(t_n)\mathbf{r}_B\right]_S \\ &\qquad - \mathbf{C}\bullet\left[\dot{n}_A(t_n)\mathbf{r}_A + \dot{n}_S(t_n)\mathbf{r}_S + \dot{n}_B(t_n)\mathbf{r}_B\right]_E\end{aligned} \tag{5.5}$$

Anm: 1. S steht für Sender, E für Empfänger im Symbol ω_{SE} *bzw.* $\tilde{\omega}_{SE}$

Als Index von n_S weist S auf die Basis $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_B$ hin.

2. In *(Schneider 2004)* sind verschiedene Szenarien und damit Identifikationen von *S und E* diskutiert. Dort ist auch die Verarbeitung von Phasenvergleichsmessungen behandelt.

Ausgehend von dieser Gleichung soll ein Verfahren zur **(kinematischen** oder **dynamischen) Bahnbestimmung** skizziert werden:

5.1 Kinematische Bahnbestimmung

Um aus (5.5) eine Grundgleichung für die kinematische Bahnbestimmung zu entwickeln, müssen die Koeffizientenfunktionen

$$\dot{n}_{A,S,B}(t_n) \tag{5.6}$$

hypothesenfrei als Funktionen der Zeit t_n bekannt sein. Dazu seien die Funktionen $n_{A,S,B}(t_n)$ nach den Eigenfunktionen $\bar{\varphi}_\nu^I(t_n) := \sqrt{2}\sin(\nu\pi t_n)$ des Dreieckskerns $K^I(t_n, \tau_n)$ entwickelt

$$n_{A,S,B}(t_n) = \bar{n}_{A,S,B}(t_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} n_\nu^{(A,S,B)} \bar{\varphi}_\nu^I(t_n) \tag{5.7}$$

worin

$$\bar{n}_{A,S,B}(t_n) = \begin{cases} 1 - t_n \\ 0 \\ t_n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dot{\bar{n}}_{A,S,B}(t_n) = \begin{cases} -1 & & A \\ 0 & \textit{für} & S \\ 1 & & B \end{cases} \tag{5.8}$$

Differenziert man nach der Zeit, so folgt mit *(Schneider I 1992)*

$$\bar{\Phi}_\nu^{II}(t_n) := \sqrt{2}\cos(\nu\pi t_n) \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} \dot{n}_{A,S,B}(t_n) &= \dot{\bar{n}}_{A,S,B}(t_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} n_\nu^{(A,S,B)} \dot{\bar{\varphi}}_\nu^I(t_n) \\ \dot{n}_{A,S,B}(t_n) &= \dot{\bar{n}}_{A,S,B}(t_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\pi n_\nu^{(A,S,B)} \bar{\Phi}_\nu^{II}(t_n) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Trägt man das ein in (5.5) und beachtet man (5.8), so resultiert

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{ES} &= -\frac{\gamma_E+\gamma_S}{\gamma_E\gamma_S}\tilde{\omega}_{SE} + (\mathbf{A}+\mathbf{B})\bullet\left[\dot{n}_A(t_n)\mathbf{r}_A + \dot{n}_S(t_n)\mathbf{r}_S + \dot{n}_B(t_n)\mathbf{r}_B\right]_S \\ &\qquad - \mathbf{C}\bullet\left[\dot{n}_A(t_n)\mathbf{r}_A + \dot{n}_S(t_n)\mathbf{r}_S + \dot{n}_B(t_n)\mathbf{r}_B\right]_E \\ &= -\frac{\gamma_E+\gamma_S}{\gamma_E\gamma_S}\tilde{\omega}_{SE} + \left(\left[\dot{n}_A(t_n)(\mathbf{A}+\mathbf{B})\right]_S - \left[\dot{n}_B(t_n)\mathbf{C}\right]_E\right)\bullet\mathbf{r}_A \\ &\qquad + \left(\left[\dot{n}_A(t_n)(\mathbf{A}+\mathbf{B})\right]_S - \left[\dot{n}_B(t_n)\mathbf{C}\right]_E\right)\bullet\mathbf{r}_B\end{aligned} \tag{5.11}$$

Diese Gleichung ist für alle Meßzeitpunkte aufzuschreiben. Aus dem entstehenden Gleichungssystem sind als Unbekannte zu bestimmen $\mathbf{r}_{A,S,B}$ sowie die Amplituden $n_\nu^{(A,S,B)}$ der Koeffizientenfunktionen $n_{A,S,B}(t_n)$ - nötigenfalls **iterativ**. Mit diesem Ergebnis ist dann der Bahnverlauf

$$\mathbf{r}(t_n) =: n_A(t_n)\mathbf{r}_A + n_S(t_n)\mathbf{r}_S + n_B(t_n)\mathbf{r}_B \tag{5.12}$$

im Zeitraum $T := [t_A, t_B] \triangleq [0,1]$ bekannt. Vermutlich stellt sich wie in der ursprünglichen Gauß-Methode die Konvergenzfrage *(Schneider IV 1999).*

5.2 Dynamische Bahnbestimmung

Im Unterschied zur kinematischen Bahnbestimmung werden bei der dynamischen Bahnbestimmung die Amplituden $n_\nu^{(A,S,B)}$ durch die Bedingungsgleichungen aus der **Methode der unendlich vielen Variablen** *(Schneider I 1992)* festgelegt , also durch

$$\begin{Bmatrix} n_\nu^A \\ n_\nu^B \\ n_\nu^S \end{Bmatrix} = -\frac{T^2}{\lambda_\nu}\sum_{i=0}^{\infty} g_i \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^I(\tau_n) \begin{Bmatrix} A_G^i + A_z + A_u \\ B_G^i + B_z + B_u \\ S_G^i + S_z + S_u \end{Bmatrix} d\tau_n \qquad \nu = 1(1)\infty \tag{5.13}$$

Damit kommt die Bewegungsgleichung als dynamischer Zusammenhang ins Spiel, also die Kräfte. ***Die Methode der unendlich vielen Variablen*** leistet die Lösung der drei gekoppelten Integralgleichungen (1.1). Das könnte auch ein auf dem Satz von Helge von Koch *(Schneider I 1992)* basierendes Verfahren leisten. Praktisch würde dabei die im ersteren Verfahren erforderliche numerische Quadratur ersetzt durch die Auflösung linearer Gleichungssysteme, die allerdings von Schritt zu Schritt rasch sehr verwickelt aufgebaut sind *(Schneider I 1992)*.

Die zwangsläufig iterative Auflösung der Gleichungen (5.13) muß man mit einer Ausgangsnäherung einleiten

$$\begin{Bmatrix} n_\nu^A(t_n) \\ n_\nu^B(t_n) \\ n_\nu^S(t_n) \end{Bmatrix} := \begin{Bmatrix} \left(n_{\nu,0}^A(t_n)\right) \\ \left(n_{\nu,0}^B(t_n)\right) \\ \left(n_{\nu,0}^S(t_n)\right) \end{Bmatrix} \tag{5.14}$$

Das Verfahren basiert auf zwei Grundgleichungen, nämlich (5.11) und (5.13). Sie enthalten die Observablen und die Kräfte sowie als Unbekannte die Randörter $\mathbf{r}_{A,B}$ und die Amplituden $n_\nu^{(A,S,B)}$.

Die Auflösung der Bedingungsgleichungen (5.13) korrespondiert dem **Sektor-zu-Dreieck-Verfahren** der **Gauß-Methode** *(Schneider I 1992)* zur **vorläufigen Bahnbestimmung**, die Gleichung (5.11) der **geometrischen Grundgleichung** bei der Verarbeitung von Richtungsmessungen in der Gauß - Methode.

Das hier dargelegte Verfahren der **(dynamischen**) Bahnbestimmung verallgemeinert die Gauß - Methode in zweierlei Hinsicht:

1. Umfassendere Kräftefunktion (in der ursprünglichen Gauß - Methode ist allein eine **Kepler - Kraft** angenommen!)

2. Andere Observablen - Typen (in der ursprünglichen Gauß - Methode der **vorläufigen Bahnbestimmung** können nur **Richtungsmesssungen** verarbeitet werden) sind verwendbar.

Beide Einschränkungen bestehen auch noch in der Modifikation der Gauß - Methode durch Bucerius für gestörte Kepler-Bewegungen *(Schneider IV 1999)*.

Literaturhinweise

Schneider, M (2002): Zur Methodik der Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten
IAPG/FESG No. 15 , München

Schneider, M. (1992-1999): Himmelsmechanik Bände I-IV
Bibliographisches Insitut Mannheim, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg

Anhang A

Feldbestimmung basierend auf der diskretisierten Integralgleichung

Die lineare Fredholmsche Integralgleichung 2.Art

$$y(x)-\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt = h(x) \tag{0.1}$$

läßt sich approximieren durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &y_i - \sum_{j=1}^{n} K(x_i, x_j)\, y_j\,(b-a)/n = h(x_i) \quad i=1,\dots,n \\ &mit \qquad x_j = a + j(b-a)/n \qquad y_j = y(x_j) \quad j=1,\dots,n \end{aligned}, \tag{0.2}$$

das für $n \to \infty$ in die Integralgleichung übergeht.

Diese sog. **Riemann-Summen-Methode** *(Springers Math. Formeln 2000)* soll auf die i.allg. nichtlineare Integralgleichung ($t := t_n$ und analog $\tau := \tau_n$)

$$\mathbf{r}(t) = \overline{\mathbf{r}}(t) - \frac{T^2}{m}\int_0^1 K^I(t,\tau)\,\mathbf{K}(\mathbf{r}(\tau),\dot{\mathbf{r}}(\tau);\tau)\,d\tau \tag{0.3}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t) = \underbrace{\mathbf{G}(\mathbf{r},t)}_{\text{Gravitation der Erde}} + \underbrace{\mathbf{Z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t)}_{\text{sonstige Kräfte}}, \tag{0.4}$$

übertragen werden. Das ergibt das Gleichungssystem (diskretisierte Integralgleichung)

$$\mathbf{r}(t_i) = \overline{\mathbf{r}}(t_i) - \frac{T^2}{m}\sum_{j=1}^{n} K^I(t_i,\tau_j)\left\{ \mathbf{G}(\mathbf{r}(\tau_j),\tau_j) + \mathbf{Z}(\mathbf{r}(\tau_j),\dot{\mathbf{r}}(\tau_j);t_j)\right\}\frac{1}{n} \tag{0.5}$$

Mit der Parametrisierung

$$\frac{1}{m}\mathbf{G}(\mathbf{r},t) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i\, \nabla_{\mathbf{r}} U_{G,i}(\mathbf{r},t) \tag{0.6}$$

folgt ein System von **Bestimmungsgleichungen für die Feldbestimmung**

$$\mathbf{r}(t_i) = \overline{\mathbf{r}}(t_i) - T^2 \sum_{k=0}^{\infty} P_k \sum_{j=1}^{n} K^I(t_n, \tau_j) \left\{ \nabla_{\mathbf{r}} U_{G,k}\left(\mathbf{r}(\tau_j), t_j\right) + \mathbf{z}(\mathbf{r}(\tau_j), \dot{\mathbf{r}}(\tau_j); t_j) \right\} \frac{1}{n} \tag{0.7}$$

das auch zur Bestimmung der Lösung $\mathbf{r}(t)$ herangezogen werden kann, **K** gegeben vorausgesetzt.Das Gleichungssystem (0.7) ist ein in den Feldparametern P_i lineares Gleichungssystem, das umgestellt lautet

$$\sum_{k=0}^{K} P_k \sum_{j=1}^{n} K^I(t_i, \tau_j) \nabla_{\mathbf{r}} U_{G,k}\left(\mathbf{r}(\tau_j), t_j\right) = \frac{\overline{\mathbf{r}}(t_i) - \mathbf{r}(t_i)}{T^2} n - K^I(t_i, \tau_j)\, \mathbf{z}\left(\mathbf{r}(\tau_j), \dot{\mathbf{r}}(\tau_j), t_j\right) \tag{0.8}$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\underset{(n\times K)}{\mathbf{A}} \; \underset{(K\times 1)}{\mathbf{P}} = \underset{(n\times 1)}{\mathbf{B}} \tag{0.9}$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{A} := \left(\sum_{j=1}^{n} K^I(t_i, \tau_j) \nabla_{\mathbf{r}} U_{G,k}\left(\mathbf{r}(\tau_j), t_j\right) \right)$$

$$\mathbf{P} := (P_k) \tag{0.10}$$

$$\mathbf{B} := \left(\frac{\overline{\mathbf{r}}(t_i) - \mathbf{r}(t_i)}{T^2} n - K^I(t_i, \tau_j)\, \mathbf{z}\left(\mathbf{r}(\tau_j), \dot{\mathbf{r}}(\tau_j), t_j\right) \right)$$

Mit *n* treibt man die **Approximation der Integralgleichung** hoch

(für n $\to \infty$ erhält man die Integralgleichung)

mit *K* die **Approximation des Feldes**

(für $K \to \infty$ erhält man die vollständige Entwicklung).

Anhang B

Gravitationsfeldbestimmung basierend auf der Nutzung von Amplitudenspektren der Kraft

Voraussetzungen:

Bekannt seien der

- Zeitverlauf der Bewegung aus einer kinematischen Bahnbestimmung

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}(t) \;\; und \;\; \dot{\mathbf{r}}(t) \;\; für \;\; Zeitpunkte \;\; t_i \\ &\qquad im\ Zeitraum\ \ t_A \le t_i \le t_B \\ &(Alle\ Zeiten\ normiert!) \end{aligned} \tag{0.1}$$

sowie

- Der Zeitverlauf der Kräfte $\mathbf{Z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t_i)$ aus Messung und/oder Modellierung

Verfahrensschritte:

1. Umsetzung der Bewegung $\mathbf{r}(t)$ *und* $\dot{\mathbf{r}}(t)$ in das Amplitudenspektrum der Bewegung

$$\mathbf{r}(t),\dot{\mathbf{r}}(t) \;\; t_A \le t_i \le t_B \;\Rightarrow\; \mathbf{r}_A,\mathbf{r}_\nu,\mathbf{r}_B \Leftrightarrow \mathbf{r}(t) = \overline{\mathbf{r}}(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}_\nu \overline{\varphi}_\nu^I(t) \tag{0.2}$$

2. Umrechnung des Amplitudenspektrums der Bewegung in das des Zeitverlaufs der Kräfte

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A,\mathbf{r}_\nu,\mathbf{r}_B \rightarrow \mathbf{K}_A,\mathbf{K}_\nu,\mathbf{K}_B \Leftrightarrow \mathbf{K}(t) &= \mathbf{G}(t) + \mathbf{Z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) \\ &= \overline{\mathbf{K}}(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{K}_\nu \overline{\varphi}_\nu^I(t) \end{aligned} \tag{0.3}$$

sowie

$$\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_\nu, \mathbf{r}_B \to \mathbf{Z}_A, \mathbf{Z}_\nu, \mathbf{Z}_B \Leftrightarrow \mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}\big(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t\big)$$
$$= \bar{\mathbf{Z}}(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{Z}_\nu \bar{\varphi}_\nu^I(t) \qquad (0.4)$$

3. Daraus bekommt man die Darstellung des Zeitverlaufs der Gravitationskraft der Erde längs der Bahn

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{K} - \mathbf{Z} = \bar{\mathbf{K}}(t) - \bar{\mathbf{Z}}(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathbf{K}_\nu - \mathbf{Z}_\nu) \bar{\varphi}_\nu^I(t)$$
$$\bar{\mathbf{G}}(t) \quad + \sum_{\nu=1}^{\infty} \quad \mathbf{G}_\nu \quad \bar{\varphi}_\nu^I(t) \qquad (0.5)$$
$$\Rightarrow \mathbf{G}_A = \mathbf{K}_A - \mathbf{Z}_A, \mathbf{G}_B = \mathbf{K}_B - \mathbf{Z}_B, \ \mathbf{G}_\nu = \mathbf{K}_\nu - \mathbf{Z}_\nu$$

Bestimmung der Feldparameter (CHAMP-Fall)

Es besteht folgender Zusammenhang der Amplitudenspektren der Bewegung und der Kraft, der sich aus der Fredholmschen Integralgleichung der gestellten Randwertaufgabe ergibt *(Schneider 1988, §18.2.3)*

$$\frac{\lambda_\nu}{T^2} \mathbf{r}_\nu = N_\nu \mathbf{K}_A + K_\nu (\mathbf{K}_B - \mathbf{K}_A) + \mathbf{K}_\nu \qquad (0.6)$$

oder umgestellt

$$\mathbf{K}_\nu = \frac{\lambda_\nu}{T^2} \mathbf{r}_\nu - N_\nu \mathbf{K}_A - K_\nu (\mathbf{K}_B - \mathbf{K}_A) \qquad (0.7)$$

mit den geschlossen berechenbaren Integralen

$$N_\nu = \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^I(\tau) d\tau \;=\; \begin{cases} 0 & \nu \;\; gerade \\ 2\sqrt{\dfrac{2}{\lambda_\nu}} & \nu \;\; ungerade \end{cases}$$

und . (0.8)

$$K_\nu = \int_0^1 \tau \overline{\varphi}_\nu^I(\tau) d\tau = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{2}{\lambda_\nu}} & \nu \;\; gerade \\ \sqrt{\dfrac{2}{\lambda_\nu}} & \nu \;\; ungerade \end{cases}$$

Trägt man darin das Ergebnis der Bahnbestimmung etc. ein, so folgt

$$\left(\mathbf{G}_\nu + \mathbf{Z}_\nu\right) = \frac{\lambda_\nu}{T^2}\mathbf{r}_\nu - N_\nu\left(\mathbf{G}_A + \mathbf{Z}_A\right) - K_\nu\left(\left(\mathbf{G}_B + \mathbf{Z}_B\right) - \left(\mathbf{G}_A + \mathbf{Z}_A\right)\right) \tag{0.9}$$

oder umgestellt

$$\mathbf{G}_\nu = \frac{\lambda_\nu}{T^2}\mathbf{r}_\nu - \mathbf{Z}_\nu - N_\nu\left(\mathbf{G}_A + \mathbf{Z}_A\right) - K_\nu\left(\left(\mathbf{G}_B + \mathbf{Z}_B\right) - \left(\mathbf{G}_A + \mathbf{Z}_A\right)\right) \tag{0.10}$$

Ausgehend von der Parametrisierung der Gravitationskraft

$$\mathbf{G}\left(\mathbf{r}(t), t\right) = \sum_{i=0}^{\infty} G_i \mathbf{G}_i\left(\mathbf{r}(t), t\right) \tag{0.11}$$

bekommt man mit

$$\mathbf{G}(t) = \overline{\mathbf{G}}(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{G}_\nu \overline{\varphi}_\nu^I(t) \tag{0.12}$$

eine in den Parametern G_i lineare Bestimmungsgleichung

$$\sum_{i=0}^{\infty} G_i \mathbf{G}_i\left(\mathbf{r}(t), t\right) = \overline{\mathbf{G}}(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{G}_\nu \overline{\varphi}_\nu^I(t) \tag{0.13}$$

bzw. ein lineares Gleichungssystem , schreibt man diese Gleichung für die Zeitpunkte $t_A \le t_k \le t_B$ auf

$$\sum_{i=0}^{\infty} G_i \mathbf{G}_i\left(\mathbf{r}(t_k), t_k\right) = \overline{\mathbf{G}}(t_k) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{G}_\nu \overline{\varphi}_\nu^I(t_k) \quad f\ddot{u}r \;\; k = 1, \ldots K \tag{0.14}$$

Die Feldparameter werden über diese Gleichungen aus dem Amplitudenspektrum $\mathbf{G}_\nu$ des Zeitverlaufs der Gravitationskraft längs der Bahn berechenbar

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t) & \rightarrow & \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_\nu, \mathbf{r}_B & \rightarrow & \mathbf{K}_A, \mathbf{K}_\nu, \mathbf{K}_B & \rightarrow & \mathbf{G}_A, \mathbf{G}_\nu, \mathbf{G}_B & \Rightarrow & G_i \\ \textit{Bahnbestimmung} & & \textit{Amplitudenspektrum der Bewegung} & & \textit{Kraft} & & \textit{Gravitation} & & \textit{Parameter} \end{array} \quad (0.15)$$

Die bei der direkten Nutzung der Integralgleichung wie auch in der Methode Eigenfunktionen erforderlichen Quadraturen können vermieden werden. Sie werden geleistet durch die Abbildung des Amplitudenspektrums $\mathbf{r}_\nu$ der Bewegung auf das Spektrum $\mathbf{K}_\nu$ des Kraftverlaufs, vermittelt durch die Fredholmsche Integralgleichung der I. Randwertaufgabe *(Schneider 1988, § 18.1).*

Übertragung auf SST-Messungen (GRACE-Fall)

Voraussetzungen:

wie oben, aber zusätzlich aus Messungen verfügbar die Abstandsvektoren

$$\mathbf{\Delta}_{12}(t_i) = \Delta_{12}(t_i)\mathbf{\Delta}_{12}^0(t_i) \quad (0.16)$$

Verfahrensschritte:

1. Berechnung der Amplituden $\mathbf{\Delta}_{12,\nu}$ des Zeitverlaufs der Abstandsvektoren (0.16) aus den Gleichungen

$$\mathbf{\Delta}_{12}(t_i) = \overline{\mathbf{\Delta}}_{12}(t_i) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{\Delta}_{12,\nu} \overline{\varphi}_\nu^I(t_i) \quad \textit{für alle } t_i \quad (0.17)$$

2. Umrechnung der Amplituden $\mathbf{\Delta}_{12,\nu}$ in Amplituden des Kraftunterschiedes an den momentanen Satellitenörtern

$$\Delta\mathbf{K} := \Delta\mathbf{G} + \Delta\mathbf{Z} \quad , \quad (0.18)$$

der die Relativbewegung über die Bewegungsgleichung

$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 - m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \Delta\mathbf{K} \Rightarrow \ddot{\mathbf{\Delta}}_{12} = \mu\Delta\mathbf{K} \quad mit \quad \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{0.19}$$

bedingt, mit Hilfe der Gleichungen

$$\frac{\lambda_\nu}{T^2}\mathbf{\Delta}_{12,\nu} = N_\nu \Delta\mathbf{K}_A + K_\nu\left(\Delta\mathbf{K}_B - \Delta\mathbf{K}_A\right) + \Delta\mathbf{K}_\nu \tag{0.20}$$

bzw. umgestellt

$$\Delta\mathbf{K}_\nu = \frac{\lambda_\nu}{T^2}\mathbf{\Delta}_{12,\nu} - N_\nu \Delta\mathbf{K}_A - K_\nu\left(\Delta\mathbf{K}_B - \Delta\mathbf{K}_A\right) \tag{0.21}$$

nimmt man aus den Werten diejenigen der Kräfte $\mathbf{Z}$ heraus, so folgt

$$\Delta\mathbf{G}_\nu = \frac{\lambda_\nu}{T^2}\mathbf{\Delta}_{12,\nu} - \Delta\mathbf{Z}_\nu - N_\nu \Delta\left(\mathbf{G}+\mathbf{Z}\right)_A - K_\nu\left(\Delta\left(\mathbf{G}+\mathbf{Z}\right)_B - \Delta\left(\mathbf{G}+\mathbf{Z}\right)_A\right) \tag{0.22}$$

Feldbestimmung

Mit einer Parametrisierung des Gravitationsfeldes der Gestalt (0.11) folgt

$$\Delta\mathbf{G}\left(\mathbf{r}(t),t\right) = \sum_{i=0}^{\infty} G_i \Delta\mathbf{G}_i\left(\mathbf{r}(t),t\right) \tag{0.23}$$

und damit analog zu (0.14)

$$\sum_{i=0}^{\infty} G_i \Delta\mathbf{G}_i\left(\mathbf{r}(t_k),t_k\right) = \Delta\,\bar{\mathbf{G}}(t_k) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta\mathbf{G}_\nu \bar{\varphi}_\nu^I(t_k) \quad für \quad k = 1,\ldots K \tag{0.24}$$

Literaturhinweis

Rade, L., Westergren, B. (2000): Springers Mathematische Formeln, 3. Auflage
Springer Verlag Berlin

Teil II

Zur Analyse der range-rate - Daten bei GRACE

1 Aufspaltung der Bewegungsgleichung der Relativbewegung

Die Relativbewegung $\mathbf{\Delta}_{12}(t) := \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)$ der beiden Satelliten A=1 und B =2 werde beschrieben durch die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{\Delta}_{12}(t)}{dt^2} &= \qquad \delta\,\mathbf{g} \qquad\qquad + \qquad \delta\mathbf{z} \\ &= \underbrace{\mathbf{g}_2(\mathbf{r}_2,t) - \mathbf{g}_2(\mathbf{r}_2,t)}_{\textit{Gravitation der Erde}} + \underbrace{\mathbf{z}_2(\mathbf{r}_2,\dot{\mathbf{r}}_2,t) - \mathbf{z}_1(\mathbf{r}_1,\dot{\mathbf{r}}_1,t)}_{\textit{sonstige Kräfte}}\end{aligned} \tag{1.1}$$

Sie soll zerlegt werden in zwei Gleichungen für die beiden Faktoren der Darstellung des Abstandsvektors **(projektive Aufspaltung**)

$$\mathbf{\Delta}_{12}(t) =: \Delta_{12}(t)\,\mathbf{U}_{12}(t) \qquad \textit{mit}\ \ \mathbf{U}_{12}\ \textit{Einheitsvektor von}\ 1\,\textit{nach}\ 2 \tag{1.2}$$

Wie in *(Schneider IV, § 52.2.1 1999)* am Beispiel des Ortsvektors gezeigt, erhält man analog für den Abstand $\Delta_{12}(t)$ die Gleichung

$$\frac{d^2\Delta_{12}(t)}{dt^2} = \mathbf{U}_{12}\bullet\mathbf{F} + \frac{\mathbf{N}_{12}^2}{\Delta_{12}^3}\ , \tag{1.3}$$

worin bedeuten

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &:= \delta\mathbf{g} + \delta\mathbf{z} \\ \mathbf{N}_{12} &:= \mathbf{\Delta}_{12} \times \frac{d\mathbf{\Delta}_{12}}{dt}\ .\end{aligned} \tag{1.4}$$

Weiter gilt *(Schneider a. a. O)*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\mathbf{U}_{12}\\ \mathbf{V}\\ \mathbf{W}\end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega}\times\begin{pmatrix}\mathbf{U}_{12}\\ \mathbf{V}\\ \mathbf{W}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\mathbf{U}_{12}\\ \mathbf{V}\\ \mathbf{W}\end{pmatrix} \text{ \textit{begleitendes Dreibein}} \tag{1.5}$$

mit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &:= \frac{C}{\Delta_{12}^2}\mathbf{W} + \frac{\Delta_{12}}{C}(\mathbf{W}\bullet\mathbf{F})\mathbf{U}_{12}\\ \mathbf{N}_{12} &= C\mathbf{W} = N_{12}\mathbf{W}\end{aligned} \tag{1.6}$$

Alternativ zu dieser Gleichung 1.Ordnung kann auch eine Differentialgleichung 2.Ordnung angegeben werden. Dazu wählt man zweckmäßig die wahre Anomalie *f* anstelle der Zeit *t* als unabhängige Variable *(Schneider a.a.O.)*

$$\left(\frac{d^2}{df^2}+1\right)\mathbf{U}_{12} = (\mathbf{W}\bullet\mathbf{F}^*)\mathbf{W} \quad \textbf{mit} \;\; \mathbf{F}^* := \frac{\Delta_{12}^3}{C^2}\mathbf{F}\,. \tag{1.7}$$

Auf den Differentialgleichungen für die Faktoren der projektiven Aufspaltung des Abstandsvektors kann man die Integralgleichungsmethode aufbauen (s. Abschnitt 3)

Bevorzugt man die Zeit als unabhängige Variable, so sind das die Gleichungen

$$\frac{d^2\Delta_{12}(t)}{dt^2} = \mathbf{U}_{21}\bullet\mathbf{F} + \frac{\mathbf{N}_{12}^2}{\Delta_{12}^3} \tag{1.8}$$

für den Abstand $\Delta_{12}(t)$ der beiden Satelliten und die Gleichungen für die begleitende ON-Basis $\mathbf{U}_{12}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$, deren erster Vektor vom ersten zum zweiten Satelliten zeigt

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\mathbf{U}_{12}\\ \mathbf{V}\\ \mathbf{W}\end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega}\times\begin{pmatrix}\mathbf{U}_{12}\\ \mathbf{V}\\ \mathbf{W}\end{pmatrix} \tag{1.9}$$

(1.8) und (1.9) bilden ein Paar von Differentialgleichungen 2. und 1. Ordnung.

Ein Paar von Differentialgleichungen je zweiter Ordnung ergibt sich, wählt man die wahre Anomalie *f* als unabhängige Variable, und zwar für den Abstand wie bisher

$$\frac{d^2\Delta_{12}(t)}{dt^2} = \mathbf{U}_{21} \bullet \mathbf{F} + \frac{\mathbf{N}_{12}^2}{\Delta_{12}^3} \tag{1.10}$$

und für den Richtungsvektor

$$\left(\frac{d^2}{df^2} + 1\right)\mathbf{U}_{21} = (\mathbf{W} \bullet \mathbf{F}^*)\,\mathbf{W}\,. \tag{1.11}$$

Bei dieser Wahl von Gleichungen muß man noch eine Beziehung zwischen der Winkel- und der Zeitzählung formulieren!!

Anm.: Die Gleichung (1.11) *kann in ein Paar von Differentialgleichungen zerlegt werden für die die Richtung* $\mathbf{U}_{12}$ *definierenden Richtungswinkel (Schneider a.a.O.).*

Eine Alternative zu der hier vorgestellten Aufspaltung der Bewegungsgleichung der Relativbewegung dürfte sich ergeben, wenn man analog wie in *(Schneider 1988, § 23.3.2)* verfährt.

2 Aufspaltung der Relativgeschwindigkeit

Für die Relativgeschwindigkeit der Satelliten folgt aus (1.2) nach Zeitableitung

$$\frac{d\boldsymbol{\Delta}_{12}}{dt} = \frac{d\Delta_{12}}{dt}\mathbf{U}_{12} + \Delta_{12}\frac{d\mathbf{U}_{12}}{dt} \tag{2.1}$$

Mit (s. (1.5))

$$\frac{d\mathbf{U}_{12}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U}_{12} \tag{2.2}$$

erhält man

$$\frac{d\boldsymbol{\Delta}_{12}}{dt} = \frac{d\Delta_{12}}{dt}\mathbf{U}_{12} + \Delta_{12}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U}_{12} \tag{2.3}$$

worin die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ gegeben ist durch (1.6).

Für das Skalarprodukt der Relativgeschwindigkeit mit sich selbst bekommt man damit wegen

$$\mathbf{U}_{12}^2 = 1 \;\Rightarrow\; \mathbf{U}_{12} \bullet \frac{d\mathbf{U}_{12}}{dt} = 0 \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{\Delta}_{12}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\Delta_{12}}{dt}\right)^2 + \left(\Delta_{12}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{U}_{12}\right)^2 \tag{2.5}$$

Diese Gleichung verbindet

- das Quadrat der Relativgeschwindigkeit $\left(\frac{d\mathbf{\Delta}_{12}}{dt}\right)^2$

mit dem

- Quadrat der Relativgeschwindigkeit $\left(\frac{d\Delta_{12}}{dt}\right)^2$ in der Verbindungslinie $\mathbf{U}_{12}$, also der meßbaren range - rate.

Als Alternative zur Gleichung (2.2) kann man auf die Gleichung *(Schneider IV, § 52.2.1)* zurückgreifen

$$\frac{d\mathbf{U}_{12}}{dt} = \Delta_{12}^2\left(\mathbf{\Delta}_{12}\times\frac{d\mathbf{\Delta}_{12}}{dt}\right)\times\mathbf{U}_{12} = \Delta_{12}^2\mathbf{N}_{12}\times\mathbf{U}_{12} = \Delta_{12}\mathbf{N}_{12}\times\mathbf{\Delta}_{12} \tag{2.6}$$

3 Feldbestimmung im SST - Fall

Der Anwendung der Integralgleichungsmethode seien die folgenden beiden Differentialgleichungen zugrunde gelegt, die durch die projektive Aufspaltung gewonnen wurden,

$$\frac{d^2\Delta_{12}(t)}{dt^2} = \mathbf{U}_{21}\bullet\mathbf{F} + \frac{\mathbf{N}_{12}^2}{\Delta_{12}^3} \tag{3.1}$$

und

$$\frac{d\mathbf{U}_{12}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{U}_{12} \tag{3.2}$$

oder alternativ dazu

$$\frac{d\mathbf{U}_{12}}{dt} = \Delta_{12}\mathbf{N}_{12}\times\mathbf{\Delta}_{12} \tag{3.3}$$

Für die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ gilt

$$\boldsymbol{\omega} := \frac{C}{\Delta_{12}^2}\mathbf{W} + \frac{\Delta_{12}}{C}\left(\mathbf{W}\bullet\mathbf{F}\right)\mathbf{U}_{12} \tag{3.4}$$

Mit einer Parametrisierung der bezogenen Kraft entsprechend

$$\begin{array}{llll} \mathbf{F} := \sum\limits_{i=0}^{I} c_i & \delta\mathbf{g}_i\left(\mathbf{r},t\right) & + & \delta\mathbf{z} \\ \phantom{\mathbf{F} :=} \sum\limits_{i=0}^{I} c_i & \left\{\mathbf{g}_i^{(2)}\left(\mathbf{r}_2,t\right) - \mathbf{g}_i^{(1)}\left(\mathbf{r}_1,t\right)\right\} & + & \left\{\mathbf{z}\left(\mathbf{r}_2,\dot{\mathbf{r}}_2,t\right) - \mathbf{z}\left(\mathbf{r}_1,\dot{\mathbf{r}}_1,t\right)\right\} \end{array} \tag{3.5}$$

erhält man als **Grundgleichung** für die Feldbestimmung die Integralgleichung

$$\Delta_{12}\left(t_n\right) = \bar{\Delta}_{12}\left(t_n\right) + \sum_{i=0}^{I} c_i \int_0^1 K^I\left(t_n,\tau_n\right)\left\{\mathbf{U}_{21}\bullet\delta\mathbf{g}_i\left(\mathbf{r},\tau_n\right) + \frac{\mathbf{N}_{12}^2}{\Delta_{12}^3} + \frac{1}{c_i}\delta\mathbf{z}\right\} d\tau_n \tag{3.6}$$

zu. Differenziert man die Gleichung (3.3) nach der Zeit

$$\frac{d^2\mathbf{U}_{12}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{U}_{12}\right) \tag{3.7}$$

mit

$$\boldsymbol{\omega} := \frac{C}{\Delta_{12}^2}\mathbf{W} + \left(\sum_{i=0}^{I} c_i \frac{\Delta_{12}}{C}\mathbf{W}\bullet\delta\mathbf{g}_i\left(\mathbf{r},t\right) + \mathbf{W}\bullet\delta\mathbf{z}\right)\mathbf{U}_{12} \tag{3.8}$$

so erhält man für die Feldbestimmung die weitere Integralgleichung

$$\mathbf{U}_{12}\left(t_n\right) = \bar{\mathbf{U}}_{12}\left(t_n\right) + \int_0^1 K^I\left(t_n,\tau_n\right)\frac{d}{d\tau_n}\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{U}_{12}\right)d\tau_n \tag{3.9}$$

Aus (3.6) und (3.9) ist abzulesen, daß die Verarbeitung

- der Abstandsmessungen (SST-GRACE) die Kenntnis der Richtung $\mathbf{U}_{12}\left(t\right)$ erfordert und umgekehrt
- der Richtungen die Kenntnis von Abstandsmessungen.

Der Term $\frac{1}{c_i}\delta\mathbf{z}$ ist vom Parameter c_i frei, weil der Parameter als Faktor vor dem Integral steht, so daß effektiv $c_i\frac{1}{c_i}\delta\mathbf{z} = \delta\mathbf{z}$ zu bilden ist.

Will man die Integralgleichungen (3.6) und (3.9) nicht direkt nutzen, sondern die **Methode der unendlich vielen Variablen** anwenden, so stehen dafür die folgenden Bedingungsgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten zur Verfügung *(Schneider 1988, §18.2).*

Für die Verarbeitung der **Abstandsmessungen**

$$\Delta_{12}\left(t_n\right)=\bar{\Delta}_{12}\left(t_n\right)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\Delta_{12,\nu}\bar{\varphi}_{\nu}^{I}\left(t_n\right) \tag{3.10}$$

ergeben sich als Bedingungsgleichungen für die Amplituden $\Delta_{12,\nu}$

$$\Delta_{12,\nu}=\frac{T^2}{\lambda_\nu}\sum_{i=0}^{I}c_i\int_0^1 \bar{\varphi}_{\nu}^{I}\left(\tau_n\right)\left\{\mathbf{U}_{21}\bullet\delta\mathbf{g}_i\left(\mathbf{r},\tau_n\right)+\frac{\mathbf{N}_{12}^2}{\Delta_{12}^3}+\frac{1}{c_i}\delta\mathbf{z}\right\}d\tau_n \tag{3.11}$$

und für die Verarbeitung der **Richtungsmessungen**

$$\mathbf{U}_{12}\left(t_n\right)=\bar{\mathbf{U}}_{12}\left(t_n\right)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\mathbf{U}_{12,\nu}\bar{\varphi}_{\nu}^{I}\left(t_n\right) \tag{3.12}$$

die Bedingungsgleichungen für die Amplituden $\mathbf{U}_{12,\nu}$

$$\mathbf{U}_{12,\nu}=-\frac{T}{\sqrt{\lambda_\nu}}\int_0^1\bar{\Phi}^{II}\left(\tau_n\right)\left\{\frac{C}{\Delta_{12}^2}\mathbf{W}\times\mathbf{U}_{12}\right\}d\tau_n \tag{3.13}$$

oder wegen

$$\mathbf{W}\times\mathbf{U}_{12}=\mathbf{V} \tag{3.14}$$

die Bedingungsgleichungen

$$\mathbf{U}_{12,\nu}=-\frac{T}{\sqrt{\lambda_\nu}}\int_0^1\bar{\Phi}^{II}\left(\tau_n\right)\left\{\frac{C}{\Delta_{12}^2}\mathbf{V}\right\}d\tau_n \tag{3.15}$$

mit den orthonormierten Eigenfunktionen der zweiten Randwertaufgabe *(Schneider 1988 § 18.2.2)*

$$\bar{\Phi}_{\nu}^{II}\left(t_n\right):=\sqrt{2}\cos\left(\nu\pi t_n\right)\quad \textit{für}\quad \nu=1(1)\infty \tag{3.16}$$

In (3.15) bedeutet $\mathbf{V}$ eine Richtung senkrecht zur Verbindung der beiden Satelliten, d.h. es ist $\mathbf{V}\perp\mathbf{U}_{12}$ *und* $\mathbf{V}\perp\mathbf{W}$.

4 Punktuelle Gravitationsfeldbestimmung aus SST-Daten

Ausgehend von den Integralgleichungen für den **Abstand**

$$\Delta_{12}(t_n) = \bar{\Delta}_{12}(t_n) + \sum_{i=0}^{I} c_i \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \left\{ \mathbf{U}_{21} \bullet \delta \mathbf{g}_i(\mathbf{r}, \tau_n) + \frac{\mathbf{N}_{12}^2}{\Delta_{12}^3} + \frac{1}{c_i} \delta \mathbf{z} \right\} d\tau_n \tag{4.1}$$

bzw. für die **Richtung** $\mathbf{U}_{12}(t)$

$$\mathbf{U}_{12}(t_n) = \bar{\mathbf{U}}_{12}(t_n) + \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \frac{d}{d\tau_n}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U}_{12}) d\tau_n \tag{4.2}$$

soll eine punktuelle Gravitationsfeldbestimmung aus den SST - Daten der GRACE - Mission vorgestellt werden. Analog zum Vorgehen in *(Schneider 2004)* wird man hier auf folgende Bestimmungsgleichungen geführt, und zwar

- für die Verarbeitung **der Abstände**

$$-\sum_{i=0}^{I} c_i \mathbf{U}_{21} \bullet \delta \mathbf{g}_i \left(\mathbf{r}\left(\xi_n^{(\sigma)}\right), \xi_n^{(\sigma)} \right) = \frac{\Delta_{12}(t_n) - \bar{\Delta}_{12}(t_n)}{T_\sigma^2 \int_0^1 K^I\left(t_n^{(\sigma)}, \tau_n\right) d\tau_n} + \left. \left(\frac{\mathbf{N}_{12}^2}{\Delta_{12}^3} + \frac{1}{c_i} \delta \mathbf{z} \right) \right|_{\xi_n^{(\sigma)}} \tag{4.3}$$

und

- für die Verarbeitung der **Richtungen**

$$\left. \left(\frac{d}{d\tau_n}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U}_{12}) \right) \right|_{\xi_n^{(\sigma)}} = \frac{\mathbf{U}_{12}\left(t_n^{(\sigma)}\right) - \bar{\mathbf{U}}_{12}\left(t_n^{(\sigma)}\right)}{T_\sigma^2 \int_0^1 K^I\left(t_n^{(\sigma)}, \tau_n\right) d\tau_n}. \tag{4.4}$$

Darin bedeuten

$$T_\sigma^2 \int_0^1 K^I\left(t_n^{(\sigma)}, \tau_n\right) d\tau_n = \frac{T_\sigma^2 t_n (1 - t_n)}{2} \tag{4.5}$$

und $T_\sigma := \left[t_A^\sigma, t_B^\sigma\right] \triangleq 0 \le t_n^{(\sigma)} \le 1$ sowie $\xi_n^{(\sigma)} \in \left[t_A^\sigma, t_B^\sigma\right]$.

Die Gleichung (4.4) kann umgeformt werden. Dazu trägt man für die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ ein und erhält

$$\left(\frac{d}{d\tau_n}\left(\frac{C}{\Delta_{12}^2}\mathbf{V}\right)\right)\Bigg|_{\xi_n^{(\sigma)}} = \frac{\mathbf{U}_{12}\left(t_n^{(\sigma)}\right) - \overline{\mathbf{U}}_{12}\left(t_n^{(\sigma)}\right)}{T_\sigma^2 \int_0^1 K^I\left(t_n^{(\sigma)}, \tau_n\right) d\tau_n} \tag{4.6}$$

Die Gleichung (4.2) soll ebenfalls noch umgeformt werden, und zwar indem die Parametrisierung vermieden wird. Man bekommt

$$-\mathbf{U}_{21} \bullet \delta\mathbf{g}\left(\mathbf{r}\left(\xi_n^{(\sigma)}\right), \xi_n^{(\sigma)}\right) = \frac{\Delta_{12}\left(t_n\right) - \overline{\Delta}_{12}\left(t_n\right)}{T_\sigma^2 \int_0^1 K^I\left(t_n^{(\sigma)}, \tau_n\right) d\tau_n} + \left(\frac{\mathbf{N}_{12}^2}{\Delta_{12}^3} + \frac{1}{c_i}\delta\mathbf{z}\right)\Bigg|_{\xi_n^{(\sigma)}} \tag{4.7}$$

Daraus läßt sich punktuell die Projektion des Unterschiedes

$$\delta\mathbf{g} := \mathbf{g}_2\left(\mathbf{r}_2, t\right) - \mathbf{g}_2\left(\mathbf{r}_2, t\right) \tag{4.8}$$

der Gravitationsfeldstärken an den Orten der beiden Satelliten auf die Richtung $\mathbf{U}_{12}$ bestimmen. $\delta\mathbf{g}$ selbst ist dann aus den

$$-\mathbf{U}_{21} \bullet \delta\mathbf{g}\left(\mathbf{r}\left(\xi_n^{(\sigma)}\right), \xi_n^{(\sigma)}\right) \tag{4.9}$$

und den gemessenen Richtungen $\mathbf{U}_{12}$ sowie deren Verarbeitung nach (4.6), also aus

$$\left(\frac{d}{d\tau_n}\left(\frac{C}{\Delta_{12}^2}\mathbf{V}\right)\right)\Bigg|_{\xi_n^{(\sigma)}} \tag{4.10}$$

zu rekonstruieren.

Zur Frage der Bestimmung der Zeitpunkte $\xi_n^{(\sigma)}$ wird auf *(Schneider 2004, S. 37-39)* verwiesen.

5 Einarbeitung der gemessenen Daten in die Bewegungsgleichung

Die SST-Daten der GRACE – Mission sind genauer als die aus der GPS-Bahnverfolgung erhaltenen Bahnen. Wie in *(Schneider 1988, § 22.4.1)* ausgeführt, kann man die Methode der unendlich vielen Variablen mit dem Verfahren der differentiellen Korrektion von Parametern verknüpfen, um die SST- und Sternsensor-Daten zur Verbesserung der aus der GPS-Bahnverfolgung der GRACE- Satelliten bestimmten Bahnen heranzuziehen.

Im Folgenden soll eine Alternative aufgezeigt werden:

Um die höhere Genauigkeit der SST-Daten für die Feldbestimmung nutzbar zu machen, könnte man auf die Relativbewegung der Satelliten A und B

$$\Delta_{AB}(t) := \mathbf{r}_B(t) - \mathbf{r}_A(t) \tag{5.1}$$

das GAUSSsche Prinzip des kleinsten Zwanges anwenden beispielsweise durch Verwendung des genau gemessenen Zeitverlaufs des Abstandes der Satelliten

$$\begin{aligned} N(\Delta_{AB}, t) &:= \left|\Delta_{AB}\right| - \left|\mathbf{r}_B(t) - \mathbf{r}_A(t)\right| = 0 \\ &=: \left|\Delta_{AB}\right| - \delta(t) = 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

oder

$$N(\Delta_{AB}, t) := \frac{1}{2}\left(\left|\Delta_{AB}\right|^2 - \delta^2(t)\right) = 0 \tag{5.3}$$

als holonom-rheonome Nebenbedingung. Man müßte dann versuchen, zwei Bahnen als Lösungen der Bewegungsgleichungen der beiden Satelliten so zu bestimmen, daß deren Zeitverlauf gerade die Nebenbedingung einhält. Die Bewegungsgleichungen der Satelliten in einem geozentrischen **Newton-System** lauten

$$\begin{aligned} m_a \ddot{\mathbf{r}}_a &= \mathbf{K}(\mathbf{r}_a, \dot{\mathbf{r}}_a; t) \quad a = A, B \\ &= \mathbf{K}_a^{(e)} + \mathbf{K}_a^{(i)} + \mathbf{F}_a \end{aligned} \tag{5.4}$$

mit

$\mathbf{K}_a^{(e)}$ äußere Volumenkräfte
$\mathbf{K}_a^{(i)}$ innere Volumenkräfte
$\mathbf{F}_a$ Flächenkräfte

Wenn für die inneren Volumenkräfte ein Reaktionsprinzip

$$\mathbf{K}_A^{(i)} = -\mathbf{K}_B^{(i)} =: \mathbf{K}^{(i)} \tag{5.5}$$

gilt, wie es zum Beispiel bei Gravitationswechselwirkung der Satelliten A und B der Fall ist, dann folgt durch Subtraktion der Bewegungsgleichungen der Satelliten

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{\Delta}}_{AB} &= \ddot{\mathbf{r}}_B - \ddot{\mathbf{r}}_A = \frac{\mathbf{K}_B}{m_B} - \frac{\mathbf{K}_A}{m_A} = \\ &= \frac{m_A + m_B}{m_A m_B}\mathbf{K}^{(i)} + \frac{\mathbf{K}_B^{(e)}}{m_B} - \frac{\mathbf{K}_A^{(e)}}{m_A} + \frac{\mathbf{F}_B}{m_B} - \frac{\mathbf{F}_A}{m_A} \end{aligned} \tag{5.6}$$

oder mit der **reduzierten Masse**

$$\mu_{(AB)} := \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \tag{5.7}$$

als Bewegungsgleichung der Relativbewegung

$$\mu_{(AB)} \ddot{\mathbf{\Delta}}_{AB} = \mathbf{K}^{(i)} + \mu_{(AB)} \left(\frac{\mathbf{K}_B^{(e)}}{m_B} - \frac{\mathbf{K}_A^{(e)}}{m_A} + \frac{\mathbf{F}_B}{m_B} - \frac{\mathbf{F}_A}{m_A} \right) =: \mathbf{K}_{relativ} \,. \tag{5.8}$$

bzw. wenn man die Gravitationswechselwirkung der Satelliten vernachlässigt

$$\mu_{(AB)} \ddot{\mathbf{\Delta}}_{AB} = \mu_{(AB)} \left(\frac{\mathbf{K}_B^{(e)}}{m_B} - \frac{\mathbf{K}_A^{(e)}}{m_A} + \frac{\mathbf{F}_B}{m_B} - \frac{\mathbf{F}_A}{m_A} \right) =: \mathbf{K}_{relativ} \tag{5.9}$$

Um die Nebenbedingung an die Lösung $\Delta_{AB}(t)$ dieser Gleichung einzuhalten, muß nach dem GAUSSschen Prinzip des kleinsten Zwanges eine Zwangskraft

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{NB}} := \lambda \nabla_{\Delta_{AB}} N(\Delta_{AB}(t)) \tag{5.10}$$

hinzugefügt werden. Der LAGRANGE- Multiplikator λ ergibt sich im hier betrachteten Fall einer holonom - rheonomen Nebenbedingung zu

$$\lambda = -\frac{\mathbf{\Delta} \cdot \dfrac{\mathbf{K}_{relativ}}{\mu_{(AB)}} + \left|\dot{\mathbf{\Delta}}\right|^2 - (\dot{\delta}^2 - \delta\ddot{\delta})}{\left|\mathbf{\Delta}\right|^2} \tag{5.11}$$

und damit als Zwangskraft

$$\mathbf{Z}_{NB} = -\frac{\mathbf{\Delta} \cdot \dfrac{\mathbf{K}_{relativ}}{\mu_{(AB)}} + \left|\dot{\mathbf{\Delta}}\right|^2 - (\dot{\delta}^2 - \delta\ddot{\delta})}{\left|\mathbf{\Delta}\right|^2} \mathbf{\Delta} \tag{5.12}$$

und als Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{\Delta}} =: \frac{\mathbf{K}_{relativ}}{\mu_{(AB)}} - \frac{\mathbf{\Delta} \cdot \dfrac{\mathbf{K}_{relativ}}{\mu_{(AB)}} + \left|\dot{\mathbf{\Delta}}\right|^2 - (\dot{\delta}^2 - \delta\ddot{\delta})}{\left|\mathbf{\Delta}\right|^2} \mathbf{\Delta} \quad . \tag{5.13}$$

Sie ist einer Bahnbestimmung für das Satellitenpaar GRACE zugrunde zu legen, wenn man ein Paar von geozentrischen Umlaufbahnen bestimmen will unter

Verwendung der GPS-gestützten Bahnverfolgung und der SST-Abstands-messungen und dabei deren höhere Genauigkeit nutzen will.

Sonderfall: Ändert sich der gegenseitige Abstand der beiden Satelliten nicht, wie es beispielsweise bei einer starren Hantel der Fall ist, dann ergibt sich bei Abwesenheit von Kräften, also $\mathbf{K}_{relativ} = \mathbf{0}$, wegen

$$\ddot{\delta} \equiv 0 \; und \;\; \dot{\delta} = 0 \rightarrow \; \delta(t) = const \tag{5.14}$$

(es ist i.allg. $\dot{\mathbf{\Delta}} \neq \mathbf{0}$) als Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{\Delta}} = -\frac{\left|\dot{\mathbf{\Delta}}\right|^2}{\left|\mathbf{\Delta}\right|^2}\mathbf{\Delta} \tag{5.15}$$

wie sie in *(Baumgarte 1972)* zur numerischen Stabilisierung der Bewegungs-gleichung der Kepler- Bewegung angegeben ist. Der Fall der starren Hantel im Gravitationsfeld eines kugelförmigen Zentralkörpers wird u.a. in *(Schneider IV 1999)* behandelt.

Um auch eine gemessene Richtung $\mathbf{\Delta}_0(t)$ bei der Bestimmung der Bahnen des Satellitenpaars zu berücksichtigen, hätte man eine weitere Nebenbedingung in die Bewegungsgleichung einzuarbeiten.

Anhang

Geozentrische Radialgeschwindigkeit

Skalare Multiplikation der Bewegungsgleichung mit dem Ortsvektor ergibt

$$\mathbf{r}\bullet\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}\bullet\mathbf{K} \;\;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\bullet\dot{\mathbf{r}}\right) - \dot{\mathbf{r}}^2 = \mathbf{r}\bullet\mathbf{K} \;\Rightarrow\; \mathbf{r}\bullet\dot{\mathbf{r}} = \int\left(\mathbf{r}\bullet\mathbf{K} + \dot{\mathbf{r}}^2\right)dt$$

bzw.

$$\mathbf{r}\bullet\dot{\mathbf{r}} = \int \mathbf{r}\bullet\mathbf{K}\; dt + \int \dot{\mathbf{r}}\bullet d\mathbf{r} \tag{0.1}$$

oder mit der Zerlegung der Kraft

$$\mathbf{K} = \mathbf{G} + \mathbf{Z} \tag{0.2}$$

$$\mathbf{r}\bullet\dot{\mathbf{r}} = \int \mathbf{r}\bullet\mathbf{G}\; dt + \int \mathbf{r}\bullet\mathbf{Z}\; dt + \int \dot{\mathbf{r}}\bullet d\mathbf{r} \tag{0.3}$$

Wegen

$$\mathbf{r}^2 = r^2 \;\Rightarrow\; \mathbf{r}\bullet\dot{\mathbf{r}} = r\dot{r} \tag{0.4}$$

folgt

$$r\dot{r} = \int \mathbf{r}\bullet\mathbf{G}\; dt + \int \mathbf{r}\bullet\mathbf{Z}\; dt + \int \dot{\mathbf{r}}\bullet d\mathbf{r} \tag{0.5}$$

oder mit der Parametrisierung der Kraftkomponente **G**

$$\mathbf{G}(\mathbf{r},t) = \sum_{i=0}^{\infty} G_i \mathbf{G}_i(\mathbf{r},t) \tag{0.6}$$

$$r\dot{r} = \sum_{i=0}^{\infty} G_i \int \mathbf{r}\bullet\mathbf{G}_i(\mathbf{r},t)\; dt + \int \mathbf{r}\bullet\mathbf{Z}\; dt + \int \dot{\mathbf{r}}\bullet d\mathbf{r} \tag{0.7}$$

und daraus für die **geozentrische Radialgeschwindigkeit des Satelliten**

$$\dot{r} = \frac{1}{r}\left[\sum_{i=0}^{\infty} G_i \int \mathbf{r}\bullet\mathbf{G}_i(\mathbf{r},t)\; dt + \int \mathbf{r}\bullet\mathbf{Z}\; dt + \int \dot{\mathbf{r}}\bullet d\mathbf{r}\right] \tag{0.8}$$

Literaturhinweise

Baumgarte, J. (1972): Numerical Stabilisation of the Differential Equations of Kaplerian Motion. Cel. Mech. Vol. 5, No. 4

Schneider, M. (1988) : Satellitengeodäsie . Bibliographisches Institut Mannheim

Schneider, M. (1992-1999): Himmelsmechanik Bände I-IV. Bibliographisches Institut Mannheim und Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg

Schneider, M. (2004): Beiträge zur Bahnbestimmung und Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten sowie zur Orientierung von Rotationssensoren
Schriftenreihe des Instituts für Astronomische und Physikalische Geodäsie und der Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie der TU München, IAPG/FESG No.17, München 2004

Teil III

Gravitationsfeldbestimmung basierend auf Bilanzgleichungen

0 Vorbemerkung

Mit den Satellitenmissionen CHAMP und GRACE konnte erstmals die Gravitationsfeldbestimmung auf der Grundlage von Energiebilanzen praktisch durchgeführt werden. Dazu wurde das aus dem Dreikörperproblem bekannte JACOBI- Integral auf die Bewegung der Satelliten übertragen, diese von einem terrestrischen Bezugssystem aus betrachtet. Die im JACOBI-Integral getroffenen Annahmen, nämlich die **Stationarität des Schwerefeldes** im **gleichförmig rotierenden terrestrischen** Bezugssystem, werden durch Zusatzterme im Jacobi-Integral umgangen. Entscheidend für das Gelingen der Feldbestimmung ist, daß die Bahnen der Satelliten weitgehend hypothesenfrei aus der fortlaufenden Bahnverfolgung mit GPS- Satelliten bestimmt werden können und die nichtgravitativen Kräfte im Flugbereich durch genaue Beschleunigungsmessungen erfaßbar sind.

Auf diesem Wege konnten Modelle für das Außenraumpotential bis zu Entwicklungsgraden gewonnen werden, die mit früheren Methoden (z.B. der Analyse der Bahnstörungen und/oder der differentiellen Korrektur von Feldparametern) nicht erreicht worden sind. Hinzukommt, daß erstmals ein einziger Erdsatellit zur Feldbestimmung ausreichte, während es früher einer Reihe von Satelliten mit unterschiedlichen mittleren Bahnelementen bedurfte. Besonders vorteilhaft wirkt sich die nahezu kontinuierliche Bahnbedeckung der niedrig fliegenden Satelliten aus.

Den geschilderten Weg kann man möglicherweise verbessern , wenn man weitere unabhängige Bewegungsintegrale bzw. Bilanzgleichungen heranziehen kann. Es ist nämlich aus der Himmelsmechanik bekannt *(Schneider I § 11.5, 1992, Schneider & Cui 2005)*, daß jedes Bewegungsintegral eines dynamischen Systems eine Schar von Hyperflächen im Phasenraum erzeugt. Eine konkrete Bewegung ist dann an je eine Hyperfläche eines jeden Bewegungsintegrals gebunden und damit Schnittgebilde der Hyperflächen der Bewegungsintegrale.

Da das gestellte Bewegungsproblem im Fall der Erdsatelliten **nichtintegrabel** ist, findet man leider keine ausreichende Anzahl von Bewegungsintegralen, von einigen Sondersituationen abgesehen, die jedoch eher von theoretischem Interesse sind. Auch das Jacobi - Integral besteht nur unter den oben genannten Einschränkungen.Es soll gezeigt werden, daß man zusätzlich zur Energiebilanz eine Drehimpulsbilanz angeben kann und damit im obigen Sinne eine einschränkende Bedingung für die Feldbestimmung. Während in der Energiebilanz das skalarwertige Gravitations-(Schwere-)potential auftritt, geht in die Drehimpulsbilanz die Gravitations-(Schwere-)feldstärke ein, also eine vektorielle Größe. Eine Feldbestimmung basierend auf einer Kombination von Energie- und Drehimpulsbilanz bedeutet demnach, daß Potentialflächen und deren Orhogonaltrajektorien, die Feldlinien des Gravitations- bzw. Schwerefeldes) im Spiel sind.

Ein Teilchen der Masse $m=1$ bewege sich unter der auf die Masseneinheit bezogenen Kraft

$$\mathbf{K} := \sum_{i=1}^{3} F_i \mathbf{e}_i \qquad \mathbf{e}_i \quad \textit{Orthonormalbasis} \quad . \tag{0.1}$$

Für die **kinetische Energie** des Teilchens $T = \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2}$ besteht folgende Bilanz-gleichung

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{K} \bullet \dot{\mathbf{r}} \;\Rightarrow\; dT = \mathbf{K} \bullet \dot{\mathbf{r}} dt \Rightarrow dT = \mathbf{K} \bullet d\mathbf{r} \quad , \tag{0.2}$$

woraus nach unbestimmter Integration über die Zeit folgt

$$T(t) = \int \mathbf{K} \bullet \dot{\mathbf{r}} dt = \int \mathbf{K} \bullet d\mathbf{r} + C \quad C \text{ Integrationskonstante } . \tag{0.3}$$

Ist ein Teil der Kraft von einer Potentialfunktion $U(\mathbf{r},t)$ ableitbar, d.h. gilt

$$\mathbf{K} = \nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r},t) + \mathbf{Z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) \quad , \tag{0.4}$$

dann lautet die **integrale Energiebilanz**

$$\begin{aligned} T(t) &= \int \left(\nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r},t) + \mathbf{Z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) \right) \bullet \dot{\mathbf{r}} dt + C \\ &= \int \nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r},t) \bullet \dot{\mathbf{r}} dt + \int \mathbf{Z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) \bullet \dot{\mathbf{r}} dt + C \\ &= \int \left(\frac{dU}{dt} - \frac{\partial U}{\partial t} \right) dt + \int \mathbf{Z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) \bullet d\mathbf{r} + C \\ &= U(\mathbf{r},t) \; - \int \frac{\partial U}{\partial t} dt + \int \mathbf{Z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) \bullet d\mathbf{r} + C \end{aligned} \tag{0.5}$$

bzw. umgestellt

$$T(t) - U(\mathbf{r},t) = -\int \frac{\partial U}{\partial t} dt + \int \mathbf{Z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) \bullet d\mathbf{r} + C\,. \tag{0.6}$$

Im Sonderfall: $\dfrac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad und \quad \mathbf{Z} = \mathbf{0}$ ergibt sich

$$T + V = C \quad mit \;\; V := -U \;\; potentielle \;\; Energie\,, \tag{0.7}$$

also der **Erhaltungssatz für die Gesamtenergie** $E := T + V$ der klassischen Mechanik für die Teilchenbewegung in einem **konservativen** Kraftfeld.

Er wird verletzt, wenn die Kraft Komponenten enthält, die explizit zeitabhängig sind oder nicht von einem zeitunabhängigen Potential ableitbar sind, beispielsweise dissipative Kräfte.

Betrachtet seien nun die Projektionen der Bewegung $\mathbf{r}(t)$ auf die Basisrichtungen $\mathbf{e}_i$

$$x_i(t) = \mathbf{r}(t) \bullet \mathbf{e}_i \quad i = 1,2,3 \qquad . \tag{0.8}$$

Es soll untersucht werden, ob die Ausdrücke

$$N_i(x_i, \dot{x}_i) := \frac{\dot{x}_i^2}{2} - \int F_i dx_i \tag{0.9}$$

Bewegungsintegrale sind, wie es numerische Tests mit simulierten Bahnen am Institut für Theoretische Geodäsie der Universität Bonn nahe legen. Ausdrücke der genannten Form werden dort seit 2003 im Rahmen eines Dissertationsvorhabens untersucht und auf ihre Eignung zur Validierung von Schwerefeldern überprüft *(Löcher 2005).*

Um den theoretischen Nachweis zu führen, wird das **Gaußsche Prinzip des kleinsten Zwangs** *(Schneider 1979 § 4.5)* herangezogen.

1 Zeitunabhängige konservative Kraft

Die **Kraft** sei zunächst als **konservativ** und **zeitunabhängig** angenommen, d.h., sie sei darstellbar durch eine Potentialfunktion $U(\mathbf{r})$

$$\mathbf{K} := \nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) \Leftrightarrow F_i = F_i(x_1, x_2, x_3) \quad . \tag{1.1}$$

Nach dem Gaußschen Prinzip muß, zugeschnitten auf die eindimensionale Bewegung , die Bedingung *(Schneider 1979 § 4.5 und 2002 § 3.2)*

$$\dot{x}_i \frac{\partial N_i}{\partial x_i} = -F_i \frac{\partial N_i}{\partial \dot{x}_i} \tag{1.2}$$

erfüllt werden. Wenn man (0.9) einträgt, dann folgt

$$\dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2} - \int F_i dx_i\right) = -F_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2} - \int F_i dx_i\right) \tag{1.3}$$

bzw.

$$-\dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \int F_i dx_i = -F_i \dot{x}_i + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \int F_i dx_i = -F_i \dot{x}_i \ , \tag{1.4}$$

beachtet man (1.1),oder mit

$$F_i = \frac{\partial U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} \tag{1.5}$$

$$-\dot{x}_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \dot{x}_i \tag{1.6}$$

Hat also die Funktion N_i die Gestalt

$$N_i := \frac{\dot{x}_i^2}{2} - \int F_i dx_i \tag{1.7}$$

dann ist sie jedenfalls dann ein Bewegungsintegral, wenn

$$\frac{\partial N_i}{\partial x_i} = F_i \, . \tag{1.8}$$

Das ist der Fall, wenn

$$\frac{\partial N_i}{\partial x_i} = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x_i} =: F_i \, . \tag{1.9}$$

Demnach sind wie behauptet die Ausdrücke

$$N_i := \frac{\dot{x}_i^2}{2} - \int F_i dx_i = \frac{\dot{x}_i^2}{2} - \int \frac{\partial U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} dx_i \, . \tag{1.10}$$

Bewegungsintegrale des gestellten Bewegungsproblems. Sie bestehen neben dem Energiesatz

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - U(\mathbf{r}) = E \tag{1.11}$$

für die Gesamtbewegung $\mathbf{r}(t)$ (s. § 5).

2 Bestätigung im Rahmen der Hamilton-Mechanik

Die Ergebnisse des vorangehenden Abschnitts lassen sich im Rahmen der Hamilton-Mechanik bestätigen:

Die Hamilton-Funktion des gestellten Bewegungsproblems lautet

$$H = T - U = \frac{\mathbf{p}^2}{2} - U(\mathbf{q}), \tag{2.1}$$

bezeichnen $\mathbf{q}$ *bzw.* $\mathbf{p}$ die generalisierten Koordinaten bzw. Impulse

$$\mathbf{q} = (x_1, x_2, x_3) \;\; bzw. \;\; \mathbf{p} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \, . \tag{2.2}$$

Die Ausdrücke

$$N_i(x_i, \dot{x}_i) := \frac{\dot{x}_i^2}{2} - \int F_i dx_i \tag{2.3}$$

lauten in diesen kanonischen Variablen

$$N_i := \frac{p_i^2}{2} - U_i(q_i) \;\; mit \;\; U_i(q_i) := \int F_i dq_i \tag{2.4}$$

Wenn sie Bewegungsintegrale sind, dann verschwinden *(Schneider 1992,§ 11.6)* ihre **Poisson-Klammern** mit der Hamilton-Funktion, d.h., es gilt dann

$$\left(N_i;H\right)=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial N_i}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial N_i}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=0\,, \tag{2.5}$$

was man durch Eintragen von (2.4) und (2.1) bestätigt.

3 Poisson-Klammern der Bewegungsintegrale

Sind $f_1 \; und \; f_2$ zwei Bewegungsintegrale, so gilt *(Schneider 1992 § 11.6)*

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}+\left(f_i;H\right)=0 \quad für \;\; i=1,2 \tag{3.1}$$

und nach der **JACOBI-Identität** *(Schneider I, § 11.6, 1992)*

$$\frac{\partial\left(f_1;f_2\right)}{\partial t}+\left(\left(f_1;f_2\right);H\right)=0 \quad für \;\; i=1,2\,. \tag{3.2}$$

Danach wäre auch $\left(f_1;f_2\right)$ ein Bewegungsintegral, falls es nicht ein aus $f_1 \; und \; f_2$ zusammengesetztes triviales ist.

Das soll für die vermuteten Bewegungsintegrale untersucht werden.

Es sei also

$$f_i:=N_i=\frac{p_i^2}{2}-U_i\left(q_i\right) \tag{3.3}$$

in (3.2) zusammen mit der Hamilton-Funktion (2.1) eingesetzt

$$\frac{\partial\left(\frac{p_1^2}{2}-U_1\left(q_1\right);\frac{p_2^2}{2}-U_2\left(q_2\right)\right)}{\partial t}+\left(\left(\frac{p_1^2}{2}-U_1\left(q_1\right);\frac{p_2^2}{2}-U_2\left(q_2\right)\right);H\right)=0 \tag{3.4}$$

Wegen der Zeitunabhängigkeit der Potentialfunktion folgt

$$\frac{\partial\left(\frac{p_1^2}{2}-U_1\left(q_1\right);\frac{p_2^2}{2}-U_2\left(q_2\right)\right)}{\partial t}=0 \quad , \tag{3.5}$$

so daß $\left(N_1;N_2\right)=\left(\frac{p_1^2}{2}-U_1\left(q_1\right);\frac{p_2^2}{2}-U_2\left(q_2\right)\right)$ als Lösung von

$$\left(\left(\frac{p_1^2}{2}-U_1\left(q_1\right);\frac{p_2^2}{2}-U_2\left(q_2\right)\right);H\right)=0 \tag{3.6}$$

zu bestimmen ist. Demnach ist auszuwerten

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial N_1}{\partial q_i}\frac{\partial N_2}{\partial p_i}-\frac{\partial N_1}{\partial p_i}\frac{\partial N_2}{\partial q_i}\right)=0\,. \tag{3.7}$$

Mit

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_1}{\partial p_1}=p_1 \quad \frac{\partial N_2}{\partial p_2}=p_2 \qquad \frac{\partial N_1}{\partial p_{2,3}}=\frac{\partial N_2}{\partial p_{1,3}}=0\\
&\frac{\partial N_1}{\partial q_1}=-\frac{\partial U_1\left(q_1\right)}{\partial q_1} \qquad \frac{\partial N_2}{\partial q_2}=-\frac{\partial U_2\left(q_2\right)}{\partial q_2}\\
&\frac{\partial N_{1,2}}{\partial q_i}=-\frac{\partial U_{1,2}\left(q_{1,2}\right)}{\partial q_i}\neq 0 \quad \mathit{für}\ \ i\neq 1,2
\end{aligned} \tag{3.8}$$

erhält man

$$\frac{\partial N_1}{\partial q_1}\frac{\partial N_2}{\partial p_1}-\frac{\partial N_1}{\partial p_1}\frac{\partial N_2}{\partial q_1}+\frac{\partial N_1}{\partial q_2}\frac{\partial N_2}{\partial p_2}-\frac{\partial N_1}{\partial p_2}\frac{\partial N_2}{\partial q_2}+\frac{\partial N_1}{\partial q_3}\frac{\partial N_2}{\partial p_3}-\frac{\partial N_1}{\partial p_3}\frac{\partial N_2}{\partial q_3}=0 \tag{3.9}$$

Aus den Bewegungsintegralen entstehen hier durch Poisson-Klammerbildung **keine** neuen nichttrivialen Bewegungsintegrale.

4 Liegen die Integrale in Involution?

Es soll jetzt untersucht werden, ob die gefundenen Bewegungsintegrale in **Involution** liegen. Das ist dann der Fall, wenn *(Schneider I, § 17.2.3.2 , 1992)*

$$\begin{aligned}
&\left(H;N_j\right)=0 \quad \mathit{für}\ \ j=1,2\\
&\left(N_i;N_j\right)=0 \quad \mathit{für}\ \ i,j=1,2\ \ i\neq j
\end{aligned}\,. \tag{4.1}$$

Trägt man entsprechend (2.1) und (3.3) ein , so bestätigt man diese Bedingungen.

5 Existieren Bewegungsintegrale im Falle nichtkonservativer Kraftkomponenten?

Bisher wurde angenommen, daß die Kraft konservativ ist, d.h. von einer zeitunabhängigen Potentialfunktion $U(\mathbf{r})$ ableitbar ist

$$\mathbf{K} = \nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}).$$

Diese Annahme soll jetzt fallengelassen werden.

5.1 Bewegung in einem zeitabhängigen Kraftfeld

Die Bewegung erfolge in einem Kraftfeld, das durch ein **zeitabhängiges Potential** dargestellt

$$\mathbf{K}(\mathbf{r},t) = \nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r},t). \tag{5.1}$$

werden kann. Einschränkend soll aber angenommen werden: In einem gleichförmig um eine feste Achse rotierenden Bezugsystem B sei diese wirksame Kraft durch ein in B **zeitunabhängiges (!) Schwerepotential** $U_S(\mathbf{x})$ darstellbar. d.h.

$$\mathbf{K} = \nabla_{\mathbf{x}} U_S(\mathbf{x}) \quad \textit{mit} \;\; \mathbf{x} \;\; \textit{Ortsvektor in } B, \tag{5.2}$$

so daß das Gaußsche Prinzip die Bedingung liefert

$$\dot{\mathbf{r}} \bullet \nabla_{\mathbf{r}} N = \mathbf{K} \bullet \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} N \Rightarrow \dot{\bar{\mathbf{x}}} \bullet \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} N = \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} U_S(\mathbf{x}) \bullet \nabla_{\dot{\bar{\mathbf{x}}}} N \;\; \textit{mit} \;\; \dot{\bar{\mathbf{x}}} := \frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}. \tag{5.3}$$

Trägt man sowie das **Jacobi-Integral**

$$N\left(\bar{\mathbf{x}}, \frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}\right) := \frac{1}{2}\left(\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}\right)^2 - U_S(\bar{\mathbf{x}}) + C = 0 \tag{5.4}$$

ein, so wird das Jacobi-Integral als Bewegungsintegral bestätigt.

Bleibt noch zu untersuchen, ob auch die Ausdrücke

$$N_i\left(x_i, \frac{Dx_i}{Dt}\right) := \frac{1}{2}\left(\frac{Dx_i}{Dt}\right)^2 - U_S(x_i) + C = 0 \tag{5.5}$$

Bewegungsintegrale sind. Sie müssen die Bedingung

$$\dot{x}_i \frac{\partial N_i}{\partial x_i} = -F_i \frac{\partial N_i}{\partial \dot{x}_i} \tag{5.6}$$

erfüllen. D.h., es ist zu prüfen, ob gilt

$$\dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{Dx_i}{Dt}\right)^2 - U_S(x_i) + C\right] = -F_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{Dx_i}{Dt}\right)^2 - U_S(x_i) + C\right] \tag{5.7}$$

bzw.

$$\dot{x}_i \frac{\partial U_S(x_i)}{\partial x_i} = -\frac{\partial U_S(x_i)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial (Dx_i / Dt)}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{Dx_i}{Dt}\right)^2 - U_S(x_i) + C\right] \tag{5.8}$$

oder

$$\frac{Dx_i}{Dt} \frac{\partial U_S(x_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial U_S(x_i)}{\partial x_i} \frac{Dx_i}{Dt}, \tag{5.9}$$

was offenkundig der Fall ist.

Daneben existiert das Jacobi - Integral für die Gesamtbewegung $\overline{\mathbf{x}}(t)$. Somit gäbe es drei weitere Bewegungsintegrale, d.h. insgesamt also vier Bewegungs-integrale, ein analoge Situation wie in § 1. Die Bewegungsintegrale sind aber abhängig.

Grund: Das Bewegungsintegral

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - U(\mathbf{r}) = E \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\dot{x}_i^2}{2} - \int F_i dx_i\right] = E \tag{5.10}$$

entspricht der Addition der drei Bewegungsintegrale

$$\frac{\dot{x}_i^2}{2} - \int F_i dx_i = E_i, \tag{5.11}$$

die je eine Energieerhaltung in den drei Koordinatenrichtungen bedeuten., d.h. das Ergebnis von Energiebilanzen (Energiekonstanten E_i)

$$\ddot{x}_i \dot{x}_i = F_i \dot{x}_i \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\dot{x}_i^2}{2} = F_i \dot{x}_i \;\Rightarrow\; \int \frac{d}{dt}\frac{\dot{x}_i^2}{2} dt = \int F_i \dot{x}_i dt \;\Rightarrow\; \frac{\dot{x}_i^2}{2} - \int F_i dx_i = E_i \tag{5.12}$$

in den drei Koordinatenrichtungen sind.

Anm.: In diesem Ergebnis kommt zum Ausdruck, daß nur die Summe

$$\sum_{i=1}^{3} \int F_i dx_i = \int \mathbf{K} \bullet d\mathbf{r} = \int \nabla_{\mathbf{r}} U \bullet d\mathbf{r} = \int dU \tag{5.13}$$

aus den drei Beiträgen $\int F_i dx_i$ *zu einem vollständigen Differential* dU *führt.*

Obwohl dieses Ergebnis trivial erscheint, könnte es für die Gravitationsfeld-bestimmung von Interesse sein *(Löcher 2005).* Analog würde für das **Jacobi-Integral** bzw. die ihm korrespondierenden Bewegungsintegrale

$$N_i\left(\overline{x}_i, \frac{D\overline{x}_i}{Dt}\right) := \frac{1}{2}\left(\frac{D\overline{x}_i}{Dt}\right)^2 - U_S\left(\overline{x}_i\right) + C = 0 \tag{5.14}$$

gelten, die man einer Feldbestimmung anstelle der alleinigen Verwendung des Jacobi-Integrals

$$N\left(\overline{\mathbf{x}}, \frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\right) := \frac{1}{2}\left(\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\right)^2 - U_S\left(\overline{\mathbf{x}}\right) + C = 0 \tag{5.15}$$

zugrunde legen könnte. Entsprechende Untersuchungen werden am Institut für Theoretische Geodäsie der Universität Bonn durchgeführt *(Löcher 2005).*

5.2 Berücksichtigung dissipativer Kräfte

Die wirksame Kraft enthalte auch **dissipative** Komponenten

$$\mathbf{K}(\mathbf{r},t) = \nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r},t) + \mathbf{Z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) \Leftrightarrow F_i = F_i(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t). \tag{5.16}$$

In diesem Fall ist damit zu rechnen, daß das Bewegungsintegral zeitabhängig ist, d.h. die Funktionsstruktur

$$N = N(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t) \tag{5.17}$$

anzunehmen ist. Die genannten numerischen Untersuchungen scheinen es nahe zu legen, daß solche Bewegungsintegrale von der Gestalt

$$N_i := \frac{\dot{x}_i^2}{2} - \int F_i dx_i \tag{5.18}$$

sein könnten. Zum theoretischen Nachweis soll wiederum das Gaußsche Prinzip herangezogen werden. Es führt auf die Bedingung *(Schneider 1979 § 4.5 und 2002 § 3.2.1)*

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \bullet \nabla_{\mathbf{r}} N_i = -\mathbf{K} \bullet \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} N_i \qquad . \tag{5.19}$$

Trägt man in ein , so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2} - \int F_i dx_i\right) + \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2} - \int F_i dx_i\right) = -F_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2} - \int F_i dx_i\right) \tag{5.20}$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int F_i dx_i - \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\int F_i dx_i = -F_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2} - \int F_i dx_i\right) \tag{5.21}$$

oder, wenn man sich zunächst auf zeitunabhängige Kräfte beschränkt, mit

$$F_i = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x_i} \tag{5.22}$$

die Bestätigung, daß

$$N_i := \frac{\dot{x}_i^2}{2} - \int F_i dx_i \tag{5.23}$$

ein Bewegungsintegral ist, wie schon in § 1 gezeigt.

Bleibt der Fall der zeitabhängigen Kräfte

$$F_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{\partial U}{\partial x_i} + Z_i \tag{5.24}$$

zu untersuchen. Die zu erfüllende Bedingung würde jetzt lauten

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \bullet \nabla_{\mathbf{r}} N_i = -\mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \bullet \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} N_i \quad . \tag{5.25}$$

Für den Fall des in einem gleichförmig rotierenden Bezugssystems unververänderlichen Potentials ist das in § 5.1 gezeigt worden. Auf den Allgemeinfall soll hier nicht eingegangen werden.

6 Relativbewegung von Satelliten im Gravitationsfeld

Für jeden der beteiligten Satelliten $m_i \ (i=1,2)$ besteht in einem terrestrischen Bezugssystem B_{terr} (Winkelgeschwindigkeit $\mathbf{d}(t)$ gegen das astronomische Bezugssystem, $\mathbf{R}(t)$ translatorische Bewegung von B_{terr}) eine Bewegungsgleichung

$$m_i \frac{D^2\overline{\mathbf{x}}_i}{Dt^2} = \overline{\mathbf{K}}_i\left(\overline{\mathbf{x}}_i, \frac{D\overline{\mathbf{x}}_i}{Dt}; t\right) + \overline{\mathbf{F}}_i + \overline{\mathbf{C}}_i \quad . \tag{6.1}$$

Darin bedeuten (Querstriche weisen auf B_{terr} hin)

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{F}}_i &:= -m_i \ddot{\overline{\mathbf{R}}} + \overline{\mathbf{Z}}_i + \overline{\mathbf{T}}_i && \text{Führungskraft} \\ \overline{\mathbf{Z}}_i &:= -m_i \overline{\mathbf{d}} \times (\overline{\mathbf{d}} \times \overline{\mathbf{x}}_i) && \text{Zentrifugalkraft} \\ \overline{\mathbf{T}}_i &:= -m_i \frac{D\overline{\mathbf{d}}}{Dt} \times \overline{\mathbf{x}}_i && \text{Euler-(Kreisel-)Kraft} \\ \mathbf{C}_i &:= -2m_i \overline{\mathbf{d}} \times \frac{D\overline{\mathbf{x}}_i}{Dt} && \text{Coriolis-Kraft} \end{aligned} \quad . \tag{6.2}$$

Durch Differenzbildung erhält man als Bewegungsgleichung der Relativbewegung der beiden Satelliten ($\ddot{\overline{\mathbf{R}}}$ ist indexfrei!)

$$\begin{aligned} \frac{D^2\overline{\mathbf{x}}_2}{Dt^2} - \frac{D^2\overline{\mathbf{x}}_1}{Dt^2} &= \frac{\overline{\mathbf{K}}_2}{m_2} - \frac{\overline{\mathbf{K}}_1}{m_1} + \left(\frac{\overline{\mathbf{F}}_2 + \overline{\mathbf{C}}_2}{m_2}\right) - \left(\frac{\overline{\mathbf{F}}_1 + \overline{\mathbf{C}}_1}{m_1}\right) \\ &= \frac{\overline{\mathbf{K}}_2}{m_2} - \frac{\overline{\mathbf{K}}_1}{m_1} + \left(\frac{\overline{\mathbf{Z}}_2 + \overline{\mathbf{T}}_2 + \mathbf{C}_2}{m_2}\right) - \left(\frac{\overline{\mathbf{Z}}_1 + \overline{\mathbf{T}}_1 + \mathbf{C}_1}{m_1}\right) \end{aligned} \quad . \tag{6.3}$$

Die Kräfte werden sich aus verschiedenen Komponenten zusammensetzen

$$\overline{\mathbf{K}}_i(\overline{\mathbf{x}}_i, \overline{\mathbf{v}}_i; t) = \underbrace{m_i \nabla_{\overline{\mathbf{x}}_i} U_G(\overline{\mathbf{x}}_i, t)}_{\text{Erde}} + \underbrace{\overline{\mathbf{Z}}_{Gi}(\overline{\mathbf{x}}_i; t)}_{\text{dritte Körper}} + \mathbf{Z}_{Ni}(\overline{\mathbf{x}}_i, \overline{\mathbf{v}}_i; t) \tag{6.4}$$

Gravitationskräfte nichtgravitative Kräfte ,

so daß folgt

$$\frac{D^2\overline{\mathbf{x}}_2}{Dt^2}-\frac{D^2\overline{\mathbf{x}}_1}{Dt^2}=\nabla_{\overline{\mathbf{x}}_2}U_G(\overline{\mathbf{x}}_2,t)-\nabla_{\overline{\mathbf{x}}_1}U_G(\overline{\mathbf{x}}_1,t)$$
$$+\frac{\overline{\mathbf{Z}}_{G2}(\overline{\mathbf{x}}_2;t)}{m_2}-\frac{\overline{\mathbf{Z}}_{G1}(\overline{\mathbf{x}}_1;t)}{m_1}+\frac{\mathbf{Z}_{N2}(\overline{\mathbf{x}}_2,\overline{\mathbf{v}}_2;t)}{m_2}-\frac{\mathbf{Z}_{N1}(\overline{\mathbf{x}}_1,\overline{\mathbf{v}}_1;t)}{m_1}\quad . \tag{6.5}$$
$$+\left(\frac{\overline{\mathbf{Z}}_2+\overline{\mathbf{T}}_2+\mathbf{C}_2}{m_2}-\frac{\overline{\mathbf{Z}}_1+\overline{\mathbf{T}}_1+\mathbf{C}_1}{m_1}\right)$$

Mit

$$\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}:=\overline{\mathbf{x}}_2-\overline{\mathbf{x}}_1 \tag{6.6}$$

läßt sich (6.5) schreiben in der Form

$$\frac{D^2\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt^2}=\nabla_{\overline{\mathbf{x}}_2}U_G(\overline{\mathbf{x}}_2,t)-\nabla_{\overline{\mathbf{x}}_1}U_G(\overline{\mathbf{x}}_1,t)$$
$$+\frac{\overline{\mathbf{Z}}_{G2}(\overline{\mathbf{x}}_2;t)}{m_2}-\frac{\overline{\mathbf{Z}}_{G1}(\overline{\mathbf{x}}_1;t)}{m_1}+\frac{\mathbf{Z}_{N2}(\overline{\mathbf{x}}_2,\overline{\mathbf{v}}_2;t)}{m_2}-\frac{\mathbf{Z}_{N1}(\overline{\mathbf{x}}_1,\overline{\mathbf{v}}_1;t)}{m_1}\quad . \tag{6.7}$$
$$+\left(\frac{\overline{\mathbf{Z}}_2+\overline{\mathbf{T}}_2+\mathbf{C}_2}{m_2}-\frac{\overline{\mathbf{Z}}_1+\overline{\mathbf{T}}_1+\mathbf{C}_1}{m_1}\right)$$

Trägt man die Darstellungen der **Trägheitskräfte** ein, so ergibt sich

$$\frac{D^2\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt^2}=\nabla_{\overline{\mathbf{x}}_2}U_G(\overline{\mathbf{x}}_2,t)-\nabla_{\overline{\mathbf{x}}_1}U_G(\overline{\mathbf{x}}_1,t)$$
$$+\frac{\overline{\mathbf{Z}}_{G2}(\overline{\mathbf{x}}_2;t)}{m_2}-\frac{\overline{\mathbf{Z}}_{G1}(\overline{\mathbf{x}}_1;t)}{m_1}+\frac{\mathbf{Z}_{N2}(\overline{\mathbf{x}}_2,\overline{\mathbf{v}}_2;t)}{m_2}-\frac{\mathbf{Z}_{N1}(\overline{\mathbf{x}}_1,\overline{\mathbf{v}}_1;t)}{m_1}\quad . \tag{6.8}$$
$$-\overline{\mathbf{d}}\times(\overline{\mathbf{d}}\times\overline{\mathbf{\Delta}}_{12})-\frac{D\overline{\mathbf{d}}}{Dt}\times\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}-2\overline{\mathbf{d}}\times\frac{D\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt}$$

6.1 Existenz eines Bewegungsintegrals im SST-Fall (1)

Mit den Annahmen

(1) $$\frac{\overline{\mathbf{Z}}_{G2}(\overline{\mathbf{x}}_2;t)}{m_2}-\frac{\overline{\mathbf{Z}}_{G1}(\overline{\mathbf{x}}_1;t)}{m_1}+\frac{\mathbf{Z}_{N2}(\overline{\mathbf{x}}_2,\overline{\mathbf{v}}_2;t)}{m_2}-\frac{\mathbf{Z}_{N1}(\overline{\mathbf{x}}_1,\overline{\mathbf{v}}_1;t)}{m_1}=\mathbf{0} \tag{6.9}$$

(2) $$\frac{D\overline{\mathbf{d}}}{Dt}=\mathbf{0} \tag{6.10}$$

folgt in der vereinfachten Fassung

$$\frac{D^2\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt^2} = \nabla_{\overline{\mathbf{x}}_2} U_G(\overline{\mathbf{x}}_2, t) - \nabla_{\overline{\mathbf{x}}_1} U_G(\overline{\mathbf{x}}_1, t) + \nabla_{\mathbf{\Delta}_{12}} U_{Z_{12}} - 2\overline{\mathbf{d}} \times \frac{D\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt} \tag{6.11}$$

mit dem **Potential der Fliehkraft**

$$U_{Z\ 12} := \left(\frac{1}{2}(\overline{\mathbf{d}} \times \overline{\Delta}_{12})^2\right). \tag{6.12}$$

Definiert man durch

$$\nabla_{\overline{\mathbf{x}}_2} U_G(\overline{\mathbf{x}}_2, t) - \nabla_{\overline{\mathbf{x}}_1} U_G(\overline{\mathbf{x}}_1, t) =: \frac{D\mathbf{\Delta}_{12}}{Dt} \bullet \nabla_{\mathbf{\Delta}_{12}} V_{12\oplus} = \frac{DV_{12\oplus}}{Dt} - \frac{\partial V_{\oplus 12}}{\partial t} \tag{6.13}$$

ein **Gezeitenpotential** $V_{12\oplus}(\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2; t)$, so folgt

$$\frac{D\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt} \bullet \frac{D^2\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt^2} = \frac{DV_{12\oplus}}{Dt} - \frac{\partial V_{1,2\oplus}}{\partial t} + \frac{D\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt} \bullet \left(\nabla_{\mathbf{\Delta}_{12}} U_{Z_{12}} - 2\overline{\mathbf{d}} \times \frac{D\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt}\right). \tag{6.14}$$

Unbestimmte Integration über die Zeit führt auf das Beziehung

$$\left(\frac{D\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt}\right)^2 = 2(V_{12\oplus} + U_{Z_{12}}) - C - \int\left(\frac{\partial V_{12\oplus}}{\partial t}\right) Dt \tag{6.15}$$

Hier ist dem zeitveränderlichen Gezeitenpotential $V_{12\oplus}(\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2; t)$ Rechnung getragen.Sieht man vom letzten Term auf der rechten Seite ab, so weist es die Gestalt eines **Jacobi-Integrals** auf.

Daß die aus dem Gaußprinzip folgende Bedingung erfüllt wird, soll noch nachgewiesen werden. Trägt man (6.15) sowie für die Kraft entsprechend (6.11) ein, so folgt für die linke Seite der Bedingung

$$\begin{aligned} L.S. = &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{D\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt}\right)^2 - (V_{\otimes 12} + U_{Z_{12}}) + C + \int\left(\frac{\partial V_{12\oplus}}{\partial t}\right) Dt\right) + \\ &\frac{D\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt} \bullet \nabla_{\mathbf{\Delta}_{12}} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{D\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt}\right)^2 - (V_{\otimes 12} + U_{Z_{12}}) + C + \int\left(\frac{\partial V_{12\oplus}}{\partial t}\right) Dt\right) \end{aligned} \tag{6.16}$$

und für die rechte Seite

$$R.S. = -\left(\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_2} U_G(\bar{\mathbf{x}}_2, t) - \nabla_{\bar{\mathbf{x}}_1} U_G(\bar{\mathbf{x}}_1, t) + \nabla_{\mathbf{\Delta}_{12}} \left(U_{Z_{12}} + \Phi \right) \right) \bullet$$
$$\nabla_{\dot{\mathbf{\Delta}}_{12}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{D\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt} \right)^2 - (V_{\otimes 12} + U_{Z_{12}}) + C + \int \left(\frac{\partial V_{12\oplus}}{\partial t} \right) Dt \right) \tag{6.17}$$

Wertet man die beiden Seiten aus, wobei zu beachten ist, daß $t, \mathbf{\Delta}_{12}, D\mathbf{\Delta}_{12}/Dt$ die unabhängigen Variablen hinsichtlich der partiellen Ableitungen sind, so ergibt sich, beachtet man noch $\partial U_{Z_{12}} / \partial t = 0$,

$$L.S. = -\frac{\partial (V_{\otimes 12} + U_{Z_{12}})}{\partial t} + \frac{\partial V_{12\oplus}}{\partial t} + \frac{D\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt} \bullet \left(-\nabla_{\mathbf{\Delta}_{12}} (V_{\otimes 12} + U_{Z_{12}}) + \nabla_{\mathbf{\Delta}_{12}} \int \left(\frac{\partial V_{12\oplus}}{\partial t} \right) Dt \right)$$
$$= \frac{D\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt} \bullet \left(-\nabla_{\mathbf{\Delta}_{12}} (V_{\otimes 12} + U_{Z_{12}}) + \nabla_{\mathbf{\Delta}_{12}} \int \left(\frac{\partial V_{12\oplus}}{\partial t} \right) Dt \right) \tag{6.18}$$

und

$$R.S. = -\left(\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_2} U_G(\bar{\mathbf{x}}_2, t) - \nabla_{\bar{\mathbf{x}}_1} U_G(\bar{\mathbf{x}}_1, t) + \nabla_{\mathbf{\Delta}_{12}} U_{Z_{12}} \right) \bullet \frac{D\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt}$$
$$= -\frac{D(V_{\otimes 12} + U_{Z_{12}})}{Dt} + \frac{\partial V_{12\oplus}}{\partial t} \tag{6.19}$$

bekommt man

$$\frac{D\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt} \bullet \left(-\nabla_{\mathbf{\Delta}_{12}} (V_{\otimes 12} + U_{Z_{12}}) + \nabla_{\mathbf{\Delta}_{12}} \int \left(\frac{\partial V_{12\oplus}}{\partial t} \right) Dt \right) = -\frac{D(V_{\otimes 12} + U_{Z_{12}})}{Dt} + \frac{\partial V_{12\oplus}}{\partial t} \tag{6.20}$$

Beachtet man wiederum (6.13) und $\partial U_{Z_{12}} / \partial t = 0$, so erhält man daraus

$$\frac{D\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt} \bullet \nabla_{\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}} \int \frac{\partial V_{\oplus(12)}}{\partial t} Dt = 0 \Rightarrow \frac{D}{Dt} \int \frac{\partial V_{\oplus(12)}}{\partial t} Dt - \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\partial V_{\oplus(12)}}{\partial t} Dt = 0 \tag{6.21}$$

Demnach ist die aus dem Gaußschen Prinzip (**rheonomer** Fall!) folgende Bedingung erfüllt.

Anm.: Der Term Φ herrührend von der Corioliskraft kann in allen vorangehenden Formeln weggelassen werden, weil diese Kraft zur Energiebilanz keinen Beitrag leistet.

6.2 Existenz eines Bewegungsintegrals im SST-Fall (2)

Es soll noch eine alternative Definition des Gezeitenpotentials verwendet werden.

Mit dem durch

$$U_S := \underbrace{U_G}_{Gravitations-} + \underbrace{U_Z}_{Fliehkraft-} + \underbrace{\Phi}_{Coriolis-} \quad \text{Potential} \tag{6.22}$$

definierten **Schwerepotential** $U_S(\bar{\mathbf{x}})$, das im konstant rotierenden Bezugssystem B **zeitunabhängig** ist, läßt sich die Bewegungsgleichung (6.11) schreiben in der Form

$$\frac{D^2\bar{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt^2} = \nabla_{\bar{\mathbf{x}}_2} U_S - \nabla_{\bar{\mathbf{x}}_1} U_S \,. \tag{6.23}$$

Führt man durch

$$\nabla_{\mathbf{x}_2} U_S(\mathbf{x}_2) - \nabla_{\mathbf{x}_1} U_S(\mathbf{x}_1) := \nabla_{\mathbf{\Delta}_{12}} U^S_{12\oplus} \tag{6.24}$$

eine **Gezeitenkraft, bezogen auf das in B (!) als zeitunabhängig angenommene Schwerkraftfeld** und **nicht** bezogen auf das Gravitationskraftfeld, das in K zeitveränderlich ist, ein - , so lautet (6.23)

$$\frac{D^2\bar{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt^2} = \nabla_{\mathbf{\Delta}_{12}} U^S_{12\oplus} \quad . \tag{6.25}$$

Skalare Multiplikation dieser Bewegungsgleichung mit der Relativgeschwindigkeit der Satelliten in B führt auf

$$\frac{D\bar{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt} \bullet \frac{D^2\bar{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt^2} = \frac{D\bar{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt} \bullet \nabla_{\mathbf{\Delta}_{12}} U^S_{12\oplus} \tag{6.26}$$

und nach unbestimmter Integration über die Zeit auf

$$\frac{1}{2}\left(\frac{D\bar{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt}\right)^2 = U^S_{12\oplus} + C \tag{6.27}$$

bzw. mit auf

$$\frac{1}{2}\left(\frac{D\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt}\right)^2 = U_G + U_Z + \Phi + C \tag{6.28}$$

*Anm.: Das Bezugssystem rotiert konstant. so daß keine **Eulerkraft** auftritt und es ist von der Gravitation dritter Körper sowie von allen nichtgravitativen Kräften abgesehen.*

Es ist bekannt, daß die Corioliskraft keine Arbeit verrichtet. Daher kann der Term Φ in einer Energiebilanz, weggelassen werden und das **Bewegungs-integral** lautet damit

$$\frac{1}{2}\left(\frac{D\overline{\mathbf{\Delta}}_{12}}{Dt}\right)^2 = U_G + U_Z + C \quad . \tag{6.29}$$

Es entspricht dem Bewegungsintegral

$$\left(\frac{D\overline{\Delta}_{12}}{Dt}\right)^2 = 2(V_{12\oplus} + U_{Z_{12}}) - C - \int\left(\frac{\partial V_{12\oplus}}{\partial t}\right)Dt \quad . \tag{6.30}$$

Anm.: Der Term $-\int\frac{\partial V_{12\oplus}}{\partial t}Dt$ *rührt her von der Definition der Gezeitenkraft als Unterschied der Gravitationskräfte* $\nabla_{\mathbf{r}}U(\mathbf{r},t)$ *an den Satellitenörtern, die i.allg. zeitabhängig sind, im Unterschied zur Definition einer Gezeitenkraft als Unterschied der Schwerkräfte* $\nabla_{\mathbf{x}}U_S(\mathbf{x})$ *an den Satellitenörtern.*

6.3 Projektive Aufspaltung der Geschwindigkeit $D\mathbf{\Delta}_{12}/Dt$

Mit der **projektiven Aufspaltung** der Relativgeschwindigkeit erhält man

$$\left(\frac{D\mathbf{\Delta}_{12}}{Dt}\right)^2 = \left(\frac{\Delta_{12}}{Dt}\right)^2 + \left(\Delta_{12}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{U}_{12}\right)^2 \tag{6.31}$$

und damit

$$\left(\frac{D\Delta_{12}}{Dt}\right)^2 + \left(\Delta_{12}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{U}_{12}\right)^2 = 2(V_{\otimes 12} + U_{Z_{12}}) - C \tag{6.32}$$

oder aufgelöst nach der meßbaren Relativgeschwindigkeit

$$\left(\frac{D\Delta_{12}}{Dt}\right)^2 = 2(V_{\otimes 12} + U_{Z_{12}}) - \left(\Delta_{12}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U}_{12}\right)^2 - C\,. \tag{6.33}$$

Das ist ein funktionaler Zusammenhang zwischen der **Meßgröße** $\left|\frac{D\Delta_{12}}{Dt}\right|$ und dem **Gezeitenpotential** $V_{\otimes 12}$ **,** in dem sich das Satellitenpaar bewegt. Um das Gezeitenpotential aus (6.33), aufgeschrieben für hinreichend viele Zeitpunkte und damit Positionen des Satellitenpaars, bestimmen zu können, muß bekannt sein

$$U_{Z_{12}} - \left(\Delta_{12}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U}_{12}\right)^2, \tag{6.34}$$

also die Orientierung der Verbindungslinie $\mathbf{U}_{12}(t)$ der Satelliten als Funktion der Zeit sowie das Potential der Fliehkraft $U_{Z\,12} := \left(\frac{1}{2}(\bar{\mathbf{d}} \times \bar{\boldsymbol{\Delta}}_{12})^2\right)$, wozu die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung sowie der Verbindungsvektor $\bar{\boldsymbol{\Delta}}_{12}(t)$ der Satelliten benötigt werden. Die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ ist definiert durch

$$\boldsymbol{\omega} := \frac{C}{\Delta_{12}^2}\mathbf{W} + \frac{\Delta_{12}}{C}\left(\mathbf{W}\bullet\mathbf{F}\right)\mathbf{U}_{12} \tag{6.35}$$

mit dem Bahnnormalenvektor $\mathbf{W}$ und der Kraft $\mathbf{F}$. Die Feldparameter gelangen in die Gleichung also nicht nur über das Gezeitenpotential $V_{\otimes 12}$, sondern auch über $\mathbf{F}$, allerdings in beiden Fällen in linearer Form, wird beispielsweise die Entwicklung des Gravitationspotentials $U_G(\mathbf{r},t)$ nach Kugelflächenfunktionen angenommen.

6.4 Bewegungsintegrale in verallgemeinerter Gestalt

Bisher wurde vorausgesetzt, daß sich die Satelliten allein unter der Wirkung der Gravitation einer gleichförmig rotierenden Erde bewegen und sich das Gravitationsfeld im terrestrischen Bezugssystem nicht ändert.

Diese Voraussetzung soll jetzt fallengelassen werden, d.h., es soll von der Gleichung

$$\frac{D^2\bar{\boldsymbol{\Delta}}_{12}}{Dt^2} = \mathbf{F} \tag{6.36}$$

mit

$$\mathbf{F} := \nabla_{\bar{\mathbf{x}}_2} U_G(\bar{\mathbf{x}}_2, t) - \nabla_{\bar{\mathbf{x}}_1} U_G(\bar{\mathbf{x}}_1, t)$$
$$+ \frac{\bar{\mathbf{Z}}_{G2}(\bar{\mathbf{x}}_2; t)}{m_2} - \frac{\bar{\mathbf{Z}}_{G1}(\bar{\mathbf{x}}_1; t)}{m_1} + \frac{\mathbf{Z}_{N2}(\bar{\mathbf{x}}_2, \bar{\mathbf{v}}_2; t)}{m_2} - \frac{\mathbf{Z}_{N1}(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{v}}_1; t)}{m_1} \tag{6.37}$$
$$- \bar{\mathbf{d}} \times (\bar{\mathbf{d}} \times \bar{\boldsymbol{\Delta}}_{12}) - \frac{D\bar{\mathbf{d}}}{Dt} \times \bar{\boldsymbol{\Delta}}_{12} - 2\bar{\mathbf{d}} \times \frac{D\bar{\boldsymbol{\Delta}}_{12}}{Dt}$$

ausgegangen werden

Ein Bewegungsintegral dieser Bewegungsgleichung kann man analog wie in § 1 angeben,

$$N\left(\boldsymbol{\Delta}_{12}, \frac{D\boldsymbol{\Delta}_{12}}{Dt}\right) := \frac{1}{2}\left(\frac{D\boldsymbol{\Delta}_{12}}{Dt}\right)^2 - \int \mathbf{F} \bullet d\boldsymbol{\Delta}_{12} . \tag{6.38}$$

Trägt man diesen Ausdruck zusammen mit der Kräftefunktion **F** in die aus dem Gaußschen Prinzip folgende Bedingung (**skleronomer** Fall!)

$$\frac{D\boldsymbol{\Delta}_{12}}{Dt} \bullet \nabla_{\boldsymbol{\Delta}_{12}} N = -\mathbf{F} \bullet \nabla_{D\boldsymbol{\Delta}_{12}/Dt} N \tag{6.39}$$

ein , so bestätigt man die Behauptung, (6.38) sei ein Bewegungsintegral. In der Tat erhält man

$$-\frac{D\boldsymbol{\Delta}_{12}}{Dt} \bullet \nabla_{\boldsymbol{\Delta}_{12}} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{D\boldsymbol{\Delta}_{12}}{Dt}\right)^2 - \int \mathbf{F} \bullet d\boldsymbol{\Delta}_{12} \right] = -\mathbf{F} \bullet \nabla_{D\boldsymbol{\Delta}_{12}/Dt} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{D\boldsymbol{\Delta}_{12}}{Dt}\right)^2 - \int \mathbf{F} \bullet d\boldsymbol{\Delta}_{12} \right]. \tag{6.40}$$

Wertet man die beiden Seiten aus

$$\text{L.S.=} \quad -\frac{D\boldsymbol{\Delta}_{12}}{Dt} \bullet \nabla_{\boldsymbol{\Delta}_{12}} \int \mathbf{F} \bullet d\boldsymbol{\Delta}_{12} \tag{6.41}$$

$$\text{R.S.=} \quad -\mathbf{F} \bullet \left[\frac{D\boldsymbol{\Delta}_{12}}{Dt} - \nabla_{D\boldsymbol{\Delta}_{12}/Dt} \int \mathbf{F} \bullet d\boldsymbol{\Delta}_{12} \right], \tag{6.42}$$

so folgt zunächst

$$-\frac{D\boldsymbol{\Delta}_{12}}{Dt} \bullet \nabla_{\boldsymbol{\Delta}_{12}} \int \mathbf{F} \bullet d\boldsymbol{\Delta}_{12} = -\mathbf{F} \bullet \left[\frac{D\boldsymbol{\Delta}_{12}}{Dt} - \nabla_{D\boldsymbol{\Delta}_{12}/Dt} \int \mathbf{F} \bullet d\boldsymbol{\Delta}_{12} \right]. \tag{6.43}$$

Ist die Kraft **F** vollständig von einem Potential ableitbar

$$\mathbf{F} = \nabla_{\Delta_{12}} \tilde{U}\left(\mathbf{\Delta}_{12}\right) \quad mit \; \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = 0\,, \tag{6.44}$$

so resultiert

$$\begin{aligned} L.S.= \quad & -\frac{D\mathbf{\Delta}_{12}}{Dt} \bullet \nabla_{\Delta_{12}} \int \nabla_{\Delta_{12}} \tilde{U} \bullet d\mathbf{\Delta}_{12} = -\frac{D\tilde{U}}{Dt} \\ R.S.= \quad & -\mathbf{F} \bullet \frac{D\mathbf{\Delta}_{12}}{Dt} = \nabla_{\Delta_{12}} \tilde{U} \bullet \frac{D\mathbf{\Delta}_{12}}{Dt} = -\frac{D\tilde{U}}{Dt} \end{aligned} \quad , \tag{6.45}$$

w. z .b. w. Es ist also

$$\left(\frac{D\mathbf{\Delta}_{12}}{Dt}\right)^2 = 2\tilde{U} - 2C \tag{6.46}$$

das behauptete Bewegungsintegral. Es hat die formale Gestalt des Jacobi-Integrals. Danach sollten auch Bewegungsintegrale der Gestalt

$$\begin{aligned} & N_i := \left(\frac{D\Delta_{12}^i}{Dt}\right)^2 - 2\int \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x_i} d\Delta_{12}^i + 2C \\ & mit \\ & \qquad \mathbf{\Delta}_{12} := \left\{\Delta_{12}^1, \Delta_{12}^2, \Delta_{12}^3\right\} \end{aligned} \tag{6.47}$$

existieren. Man bestätigt das, indem man in die Bedingung einträgt.

7 Bilanz des Bahndrehimpulses

Für den Bahndrehimpuls $\mathbf{N} := \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ *mit* $\mathbf{p} := m\dot{\mathbf{r}}$ besteht die Bilanzgleichung *(Schneider I, § 2.3, 1992)*

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M} \quad mit \;\; \mathbf{M} := \mathbf{r} \times \mathbf{K} \; . \tag{7.1}$$

Die Kraft sei zerlegbar gemäß

$$\mathbf{K} = f\left(\mathbf{r},t\right)\mathbf{r} + g\left(\mathbf{r},t\right)\mathbf{k} + h\left(\mathbf{r},t\right)\mathbf{h} \quad , \tag{7.2}$$

wobei die Vektoren $\mathbf{k}$ *und* $\mathbf{h}$ noch festzulegen sein werden,

Trägt man (7.2) in (7.1) ein , so erhält man als Drehimpulsbilanz

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt}=\mathbf{r}\times\left(g\left(\mathbf{r},t\right)\mathbf{k}+h\left(\mathbf{r},t\right)\mathbf{h}\right) \tag{7.3}$$

und nach unbestimmter Integration über die Zeit

$$\mathbf{N}\left(t\right)=\int\ \mathbf{r}\times\left(g\left(\mathbf{r},t\right)\mathbf{k}+h\left(\mathbf{r},t\right)\mathbf{h}\right)dt+\mathbf{N}_0 \quad . \tag{7.4}$$

Zusätzlich zur Energiebilanz kann diese Drehimpulsbilanz der Gravitationsfeldbestimmung zugrunde gelegt werden. Da im Falle einer Zentralkraft der Bahndrehimpuls konstant bleibt, beschreibt

$$\mathbf{N}\left(t\right)-\mathbf{N}_0=\int\ \mathbf{r}\times\left(g\left(\mathbf{r},t\right)\mathbf{k}+h\left(\mathbf{r},t\right)\mathbf{h}\right)dt \tag{7.5}$$

die Änderung des Bahndrehimpulses zufolge der Drehmomente

$$\mathbf{r}\times\left(g\left(\mathbf{r},t\right)\mathbf{k}+h\left(\mathbf{r},t\right)\mathbf{h}\right), \tag{7.6}$$

die auf **nichtzentralsymmetrische** Kraftkomponenten zurückzuführen sind.

7.1 Bahndrehimpulsbilanz der Satellitenbewegung

Auf den Satelliten wirke nur die Gravitationskraft einer konstant rotierenden, starren Erde. Deren Gravitationfeldstärke läßt sich wie folgt darstellen *(Gleixner 1982, Ilk 1983, Schneider IV, § 44.3, 1999),* nimmt man den Massenmittelpunkt der Erde als Ursprung des Bezugssystems an

$$\begin{aligned}\mathbf{g}\left(\mathbf{r},t\right)=\frac{GM_\oplus}{r}\Bigg\{&-\frac{\mathbf{r}}{r^2}+\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l C_{l0}\left[\mathbf{a}_l-\frac{l+1}{r^2}P_l\left(\cos\vartheta\right)\mathbf{r}\right]\\&+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l\left[Q_{lm}\mathbf{b}_{lm}+P_{lm}\left(\cos\vartheta\right)\left(\mathbf{c}_{lm}-\frac{l+1}{r^2}Q_{lm}\mathbf{r}\right)\right]\Bigg\}\end{aligned}\quad , \tag{7.7}$$

worin bedeutet

$$Q_{lm}:=C_{lm}\cos m\lambda+S_{lm}\sin m\lambda \quad , \tag{7.8}$$

sowie den Vektoren

$$\mathbf{a}_l:=\frac{1}{r^3}\frac{dP_l^0\left(\cos\vartheta\right)}{d\cos\vartheta}\begin{pmatrix}-xz\\-yz\\x^2+y^2\end{pmatrix} \tag{7.9}$$

$$\mathbf{b}_{lm} := \frac{1}{r^3}\frac{dP_l^m(\cos\vartheta)}{d\cos\vartheta}\begin{pmatrix}-xz\\-yz\\x^2+y^2\end{pmatrix} \tag{7.10}$$

und

$$\mathbf{c}_{lm} := \frac{m}{x^2+y^2}\left(C_{lm}\sin m\lambda - S_{lm}\cos m\lambda\right)\begin{pmatrix}y\\-x\\0\end{pmatrix}. \tag{7.11}$$

Für deren Skalarprodukte gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_l \bullet \mathbf{c}_{lm} &= 0\\ \mathbf{b}_{lm} \bullet \mathbf{c}_{lm} &= 0\end{aligned} \tag{7.12}$$

sowie

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}_l \bullet \mathbf{b}_{lm} \neq 0\\ &\mathbf{r}\bullet\mathbf{a}_l = 0 \quad \mathbf{r}\bullet\mathbf{b}_{lm} = 0 \quad \mathbf{r}\bullet\mathbf{c}_{lm} = 0\end{aligned} \tag{7.13}$$

In der Darstellung (7.7) ist die Gravitationsfeldstärke zerlegt in einen

- **zentralsymmetrischen** Anteil $\sim \mathbf{r}$. Er definiert die Funktion $f(\mathbf{r},t)$.
- einen nur von den **Zonalen** herrührenden Anteil $\sim \mathbf{a}_l$. Er definiert die Funktion $g(\mathbf{r},t)$.

sowie

- von den **Nichtzonalen** herrührende Anteile $\sim \mathbf{b}_{lm}$ *und* $\sim \mathbf{c}_{lm}$, die die Funktion $h(\mathbf{r},t)$ definieren.

Der zentralsymmetrische Anteil $f(\mathbf{r},t)$ trägt zur Drehimpulsbilanz nichts bei. Der zonale Anteil $g(\mathbf{r},t)$ hat eine Bahndrehimpulsänderung zur Folge, bei der die Bahndrehimpulskomponente in Richtung der z-Achse $\hat{=}\,\mathbf{k}$-Achse erhalten bleibt *(Schneider I, § 2.3.4, 1992)*. Der auf die Nichtzonalen zurückzuführende Anteil $h(\mathbf{r},t)$ läßt keine der Bahndrehimpulskomponenten ungeändert.

In der Drehimpulsbilanz wie auch in der Energiebilanz treten die Feldparameter immer linear auf.

Im Gegensatz zur Energiebilanz, in der das Gravitationspotential auftritt, enthält die Drehimpulsbilanz die Gravitationskraft und diese ist **vektorieller Natur**.

Bei einer Gravitationsfeldbestimmung, die sich auf die Drehimpulsbilanz und auf die Energiebilanz gleichzeitig stützt, kommen demnach die Schar der Äquipotentialflächen einerseits und deren Orthogonaltrajektorien, die Feldlinienschar des Gravitationsfeldes, andererseits ins Spiel.

Vergleicht man (7.7) bzw. umgestellt

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\mathbf{K} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{r},t) = &-\frac{GM_\oplus}{r}\left(\frac{1}{r^2}+\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l C_{l0}\frac{l+1}{r^2}P_l(\cos\vartheta)+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l P_l^m(\cos\vartheta)\frac{l+1}{r^2}Q_{lm}\right)\mathbf{r}\\ &+\frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l C_{l0}\mathbf{a}_l\\ &+\frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l\left(Q_{lm}\mathbf{b}_{lm}+P_l^m(\cos\vartheta)\mathbf{c}_{lm}\right)\end{aligned} \tag{7.14}$$

mit (7.2) , so folgt

$$f(\mathbf{r},t)\mathbf{r} = -\frac{GM_\oplus}{r}\left(\frac{1}{r^2}+\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l C_{l0}\frac{l+1}{r^2}P_l(\cos\vartheta)+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l P_l^m(\cos\vartheta)\frac{l+1}{r^2}Q_{lm}\right)\mathbf{r} \tag{7.15}$$

$$g(\mathbf{r},t)\mathbf{k}(\mathbf{r},t) = \frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l C_{l0}\mathbf{a}_l \tag{7.16}$$

$$h(\mathbf{r},t)\mathbf{h}(\mathbf{r},t) = +\frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l\left(Q_{lm}\mathbf{b}_{lm}+P_l^m(\cos\vartheta)\mathbf{c}_{lm}\right) \tag{7.17}$$

Die Drehimpulsbilanz (7.3) lautet damit

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{r}\times\left(g\left(\mathbf{r},t\right)\mathbf{k}+h\left(\mathbf{r},t\right)\mathbf{h}\right)$$

$$= \mathbf{r}\times\left(\frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l2}^{\infty}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l C_{l0}\mathbf{a}_l\right) \tag{7.18}$$

$$+\mathbf{r}\times\left(\frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l\left(Q_{lm}\mathbf{b}_{lm}+P_l^m\left(\cos\vartheta\right)\mathbf{c}_{lm}\right)\right)$$

bzw.

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l2}^{\infty}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l C_{l0}\mathbf{r}\times\mathbf{a}_l$$

$$+\frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l\left(Q_{lm}\mathbf{r}\times\mathbf{b}_{lm}+P_l^m\left(\cos\vartheta\right)\mathbf{r}\times\mathbf{c}_{lm}\right) \tag{7.19}$$

mit den Vektorprodukten

$$\mathbf{r}\times\mathbf{a}_l = \frac{1}{r}\frac{dP_l^0\left(\cos\vartheta\right)}{d\cos\vartheta}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.20}$$

$$\mathbf{r}\times\mathbf{b}_{lm} = \frac{1}{r}\frac{dP_l^m\left(\cos\vartheta\right)}{d\cos\vartheta}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.21}$$

$$\mathbf{r}\times\mathbf{c}_{lm} = \frac{m}{x^2+y^2}\left(C_{lm}\sin m\lambda - S_{lm}\cos m\lambda\right)\begin{pmatrix} xz \\ yz \\ -\left(x^2+y^2\right) \end{pmatrix} \quad . \tag{7.22}$$

Integriert man (7.19) über die Zeit, so erhält man

$$\mathbf{N}\left(t\right)-\mathbf{N_0} = \int \frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l C_{l0}\mathbf{r}\times\mathbf{a}_l dt$$

$$+\int \frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l\left(Q_{lm}\mathbf{r}\times\mathbf{b}_{lm}+P_l^m\left(\cos\vartheta\right)\mathbf{r}\times\mathbf{c}_{lm}\right)dt \quad . \tag{7.23}$$

Darin ist $\mathbf{N_0}$ eine Integrationskonstante.

Die Gleichungen (7.19) oder (7.23) können einer Bestimmung der Feldparameter C_{lm}, S_{lm} zugrunde gelegt werden. Sie sind noch zu erweitern um die Auswirkungen der sonstigen Kraftkomponenten $\mathbf{Z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t)$ auf den Bahndrehimpuls (s. § 7.5).

Die **Gravitationsfeldbestimmung** kann demnach aufbauen auf der

- **Energiebilanz** einerseits

und der

- **Bahndrehimpulsbilanz** andererseits.

Beide dürften sich vorteilhaft ergänzen, weil es sich um unabhängige Bilanzgleichungen handelt.

7.2 Projektionen der Bahndrehimpulsbilanz

Im Hinblick auf die Feldbestimmung soll die Bahndrehimpulsbilanz auf die Vektoren $\mathbf{r}, \mathbf{a}_l, \mathbf{b}_{lm}$ *und* $\mathbf{c}_{lm}$ projiziert werden:

Skalare Multiplikation von (7.19) mit diesen Vektoren ergibt

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{N}}{dt}\bullet\mathbf{r} &= \left(\frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l C_{l0}\mathbf{r}\times\mathbf{a}_l + \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l Q_{lm}\mathbf{r}\times\mathbf{b}_{lm}\right)\bullet\mathbf{r} \\ &\quad + \left(\frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l\left(Q_{lm}\mathbf{r}\times\mathbf{b}_{lm} + P_l^m(\cos\vartheta)\mathbf{r}\times\mathbf{c}_{lm}\right)\right)\bullet\mathbf{r}\end{aligned} \qquad . \qquad (7.24)$$

Daraus folgt

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt}\bullet\mathbf{r} = 0 \rightarrow \frac{d(\mathbf{r}\times\mathbf{p})}{dt}\bullet\mathbf{r} = \frac{d}{dt}\left((\mathbf{r}\times\mathbf{p})\bullet\mathbf{r}\right) = 0 \; wegen \; (\mathbf{r}\times\mathbf{p})\bullet\mathbf{r} = 0 \qquad (7.25)$$

Der Bahndrehimpuls steht danach senkrecht auf der momentanen Bahnebene, die von $\mathbf{r}$ *und* $\dot{\mathbf{r}}$ aufgespannt wird. Das entspricht der Definition des Bahndrehimpulses.

Die weiteren Projektionen ergeben sich zu

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt}\bullet\mathbf{a}_\lambda = \frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l Q_{lm}P_l^m\left(\cos\vartheta\right)\left(\mathbf{r}\times\mathbf{c}_{lm}\right)\bullet\mathbf{a}_\lambda\,, \tag{7.26}$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt}\bullet\mathbf{b}_{\lambda\mu} = \frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l Q_{lm}P_l^m\left(\cos\vartheta\right)\left(\mathbf{r}\times\mathbf{c}_{lm}\right)\bullet\mathbf{b}_{\lambda\mu}\,, \tag{7.27}$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt}\bullet\mathbf{c}_{\lambda\mu} = \frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l C_{l0}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{a}_l\right)\bullet\mathbf{c}_{\lambda\mu} + \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l Q_{lm}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{b}_{lm}\right)\bullet\mathbf{c}_{\lambda\mu}\,, \tag{7.28}$$

Diese Gleichungen sollen noch umgeformt werden. Es gilt für alle Projektionen

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{N}}{dt}\bullet\mathbf{a}_\lambda &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{N}\bullet\mathbf{a}_\lambda\right) - \mathbf{N}\bullet\frac{d\mathbf{a}_\lambda}{dt}\\
\frac{d\mathbf{N}}{dt}\bullet\mathbf{b}_{\lambda\mu} &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{N}\bullet\mathbf{b}_{\lambda\mu}\right) - \mathbf{N}\bullet\frac{d\mathbf{b}_{\lambda\mu}}{dt}\quad .\\
\frac{d\mathbf{N}}{dt}\bullet\mathbf{c}_{\lambda\mu} &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{N}\bullet\mathbf{c}_{\lambda\mu}\right) - \mathbf{N}\bullet\frac{d\mathbf{c}_{\lambda\mu}}{dt}
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Damit erhält man die Gleichungen (7.26) - (7.28) in der Gestalt

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{N}\bullet\mathbf{a}_\lambda\right) = \mathbf{N}\bullet\frac{d\mathbf{a}_\lambda}{dt} + \frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l Q_{lm}P_l^m\left(\cos\vartheta\right)\left(\mathbf{r}\times\mathbf{c}_{lm}\right)\bullet\mathbf{a}_\lambda\ , \tag{7.30}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{N}\bullet\mathbf{b}_{\lambda\mu}\right) = \frac{d\mathbf{b}_{\lambda\mu}}{dt}\bullet\mathbf{N} + \frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l Q_{lm}P_l^m\left(\cos\vartheta\right)\left(\mathbf{r}\times\mathbf{c}_{lm}\right)\bullet\mathbf{b}_{\lambda\mu}\ , \tag{7.31}$$

$$\frac{d\left(\mathbf{N}\bullet\mathbf{c}_{\lambda\mu}\right)}{dt} = \mathbf{N}\bullet\frac{d\mathbf{c}_{\lambda\mu}}{dt} + \left(\frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l C_{l0}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{a}_l\right)\bullet\mathbf{c}_{\lambda\mu} + \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l Q_{lm}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{b}_{lm}\right)\bullet\mathbf{c}_{\lambda\mu}\right) \tag{7.32}$$

Nach unbestimmter Integration über die Zeit folgen daraus

$$\left(\mathbf{N}\bullet\mathbf{a}_\lambda\right) = \int \left\{\mathbf{N}\bullet\frac{d\mathbf{a}_\lambda}{dt} + \frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l Q_{lm}P_l^m\left(\cos\vartheta\right)\left(\mathbf{r}\times\mathbf{c}_{lm}\right)\bullet\mathbf{a}_\lambda\right\}dt + \left(\mathbf{N}\bullet\mathbf{a}_\lambda\right)\Big|_0\,, \tag{7.33}$$

$$\left(\mathbf{N}\bullet\mathbf{b}_{\lambda\mu}\right) = \int \left\{\frac{d\mathbf{b}_{\lambda\mu}}{dt}\bullet\mathbf{N} + \frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l Q_{lm}P_l^m\left(\cos\vartheta\right)\left(\mathbf{r}\times\mathbf{c}_{lm}\right)\bullet\mathbf{b}_{\lambda\mu}\right\}dt + \left(\mathbf{N}\bullet\mathbf{b}_{\lambda}\right)\Big|_0 \tag{7.34}$$

$$\left(\mathbf{N}\bullet\mathbf{c}_{\lambda\mu}\right)=\int\ \mathbf{N}\bullet\frac{d\mathbf{c}_{\lambda\mu}}{dt}dt$$
$$\int\left\{\frac{GM_{\oplus}}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{a_{\oplus}}{r}\right)^{l}C_{l0}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{a}_{l}\right)\bullet\mathbf{c}_{\lambda\mu}+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_{\oplus}}{r}\right)^{l}Q_{lm}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{b}_{lm}\right)\bullet\mathbf{c}_{\lambda\mu}\right\}dt \quad . \tag{7.35}$$
$$+\left(\mathbf{N}\bullet\mathbf{c}_{\lambda\mu}\right)\Big|_{0}$$

Subtrahiert man von (7.32) die Gleichung(7.30), so bekommt man noch

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt}\bullet\left(\mathbf{c}_{\lambda\mu}-\mathbf{b}_{\lambda\mu}\right)=\frac{GM_{\oplus}}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{a_{\oplus}}{r}\right)^{l}C_{l0}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{a}_{l}\right)\bullet\mathbf{c}_{\lambda\mu}$$
$$+\frac{GM_{\oplus}}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_{\oplus}}{r}\right)^{l}\left(1-P_{l}^{m}\left(\cos\vartheta\right)\right)Q_{lm}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{b}_{lm}\right)\bullet\mathbf{c}_{\lambda\mu} \quad . \tag{7.36}$$

Subtrahiert man analog von (7.32) die Gleichung (7.31), so folgt weiter

$$\frac{d\left(\mathbf{N}\bullet\left(\mathbf{c}_{l\lambda\mu}-\mathbf{b}_{\lambda\mu}\right)\right)}{dt}=\mathbf{N}\bullet\frac{d\left(\mathbf{c}_{\lambda\mu}-\mathbf{b}_{\lambda\mu}\right)}{dt}+\frac{GM_{\oplus}}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{a_{\oplus}}{r}\right)^{l}C_{l0}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{a}_{l}\right)\bullet\mathbf{c}_{\lambda\mu}$$
$$+\frac{GM_{\oplus}}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_{\oplus}}{r}\right)^{l}\left(1-P_{l}^{m}\left(\cos\vartheta\right)\right)Q_{lm}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{b}_{lm}\right)\bullet\mathbf{c}_{\lambda\mu}$$

und nach unbestimmter Integration

$$\mathbf{N}\bullet\left(\mathbf{c}_{\lambda\mu}-\mathbf{b}_{\lambda\mu}\right)=\int\mathbf{N}\bullet\frac{d\left(\mathbf{c}_{\lambda\mu}-\mathbf{b}_{\lambda\mu}\right)}{dt}dt$$
$$+\int\ \left\{\frac{GM_{\oplus}}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{a_{\oplus}}{r}\right)^{l}C_{l0}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{a}_{l}\right)\bullet\mathbf{c}_{\lambda\mu}\right\}dt \quad . \tag{7.37}$$
$$+\int\left\{\frac{GM_{\oplus}}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_{\oplus}}{r}\right)^{l}\left(1-P_{l}^{m}\left(\cos\vartheta\right)\right)Q_{lm}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{b}_{lm}\right)\bullet\mathbf{c}_{\lambda\mu}\right\}dt$$
$$+\mathbf{N}\bullet\left(\mathbf{c}_{\lambda\mu}-\mathbf{b}_{\lambda\mu}\right)\Big|_{0}$$

Im Hinblick auf die Feldbestimmung ist von Interesse, daß die zeitliche Ableitung der Projektion des Drehimpulses **N**

- auf den Vektor $\mathbf{a}_{\lambda}$ keine Zonalen enthält,
- auf $\mathbf{b}_{\lambda\mu}$ ebenfalls keine Zonalen enthält,
- auf $\mathbf{c}_{\lambda\mu}$ sowohl Zonale als auch Nichtzonale enthält,
- auf $\mathbf{r}$ keinerlei Harmonische enthält.

Entsprechendes gilt für die Projektionen des Drehimpulses **N** selbst.
Die Projektionen der Bahndrehimpulsbilanz, sind mit dem Ergebnis der kinematischen Bahnbestimmung berechenbar. Im Hinblick auf die Feld-bestimmung stehen die Gleichungen (7.30) - (7.32) oder die Gleichungen (7.26) - (7.28) oder die Gleichungen (7.33) - (7.35) zur Verfügung. Welcher Satz vorzuziehen ist, bleibt zu untersuchen, wobei wesentlich sein wird, ob man aus der kinematischen Bahnbestimmung auch zuverlässig Beschleunigungen bekommen kann, die zur Berechnung von $d\mathbf{N}/dt$ benötigt werden.

Die Nichtzonalen treten nur über die Spatprodukte auf!

7.3 Axialsymmetrisches Gravitationsfeld

$$C_{lm}, S_{lm} = 0 \quad für \quad m > 0 \qquad . \tag{7.38}$$

Es entfallen jedenfalls die Terme $\sim \mathbf{c}_{lm}$, so daß aus (7.26) - (7.28) folgen

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} \bullet \mathbf{a}_\lambda = 0 \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{N}}{dt} \perp \mathbf{a}_\lambda \;, \tag{7.39}$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} \bullet \mathbf{b}_{\lambda 0} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{N}}{dt} \perp \mathbf{b}_{\lambda 0} \;, \tag{7.40}$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} \bullet \mathbf{c}_{\lambda 0} = \frac{d\mathbf{N}}{dt} \bullet \mathbf{0} = 0 \;. \tag{7.41}$$

Daraus entnimmt man, daß sich die dritte Komponente der Bahndrehimpulses nicht ändert: **partielle Drehimpulserhaltung im axialsymmetrischen Feld** *(Schneider I, § 2.3.4, 1992).* Das erkennt man auch, wenn man die Bilanzgleichung (7.3) mit den Vektoren $\mathbf{h}$ *bzw.* $\mathbf{k}$ skalar multipliziert

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{r} \times \left(g(\mathbf{r},t)\mathbf{k} + h(\mathbf{r},t)\mathbf{h} \right) \Big|_{\bullet \mathbf{h}}^{\bullet \mathbf{k}} . \tag{7.42}$$

Man bekommt so

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} \bullet \mathbf{k} = h(\mathbf{r},t)(\mathbf{r} \times \mathbf{h}) \bullet \mathbf{k} \;, \tag{7.43}$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt}\bullet\mathbf{h} = g(\mathbf{r},t)(\mathbf{r}\times\mathbf{k})\bullet\mathbf{h} \quad . \tag{7.44}$$

Beachtet man (7.19) ff. sowie $m = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_\lambda = \mathbf{b}_{\lambda 0},\ Q_{\lambda 0} = C_{l0}\ \ und\ \ \mathbf{c}_{\lambda 0} = \mathbf{0}$, so folgt

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt}\bullet\mathbf{k} = \left(\frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty} P_l^0(\cos\vartheta)\,\mathbf{r}\times\mathbf{c}_{l0}\right)\bullet\mathbf{k} = 0 \ , \tag{7.45}$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt}\bullet\mathbf{h} = \left(\frac{GM_\oplus}{r}2\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l C_{l0}\,\mathbf{r}\times\mathbf{a}_l\right)\bullet\mathbf{h} = 0 \quad . \tag{7.46}$$

Beide Gleichungen beinhalten die partielle Drehimpulserhaltung im axialsymmetrischen Gravitationsfeld in Richtung der **k**-Achse.

Die Drehimpulsänderungen sind im Falle polnaher Bahnen sehr gering. Es ist z.B. bekannt, daß die durch gerade Zonale bedingten Säkularstörungen der Knotenlage für eine Bahnneigung $i \approx 90^0$ praktisch verschwinden.

7.4 Drehimpulsbilanz im SST-Fall

Bildet man das Vektorprodukt der Bewegungsgleichung der Relativbewegung des Satellitenpaares mit dem Verbindungsvektor $\boldsymbol{\Delta}_{12}(t)$, so folgt

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Delta}_{12}\times\frac{D^2\overline{\boldsymbol{\Delta}}_{12}}{Dt^2} = \boldsymbol{\Delta}_{12}\times\nabla_{\Delta_{12}}U^S_{12\oplus} \Rightarrow \frac{D\tilde{\mathbf{N}}_{12}}{Dt} = \boldsymbol{\Delta}_{12}\times\nabla_{\Delta_{12}}U^S_{12\oplus} \\ mit\ \ \tilde{\mathbf{N}}_{12} := \boldsymbol{\Delta}_{12}\times\frac{D\overline{\boldsymbol{\Delta}}_{12}}{Dt}\end{gathered} \quad . \tag{7.47}$$

Die Projektion dieser Gleichung auf den Verbindungsvektor $\boldsymbol{\Delta}_{12}(t)$ ergibt

$$\frac{D\tilde{\mathbf{N}}_{12}}{Dt}\bullet\boldsymbol{\Delta}_{12} = \left(\boldsymbol{\Delta}_{12}\times\nabla_{\Delta_{12}}U^S_{12\oplus}\right)\bullet\boldsymbol{\Delta}_{12} = 0 \Rightarrow \frac{D\tilde{\mathbf{N}}_{12}}{Dt}\perp\boldsymbol{\Delta}_{12} \quad . \tag{7.48}$$

Danach steht die zeitliche Änderungsrate des Drehimpulses senkrecht auf dem Verbindungsvektor, hat also keine Komponente in dessen Richtung.

7.5 Berücksichtigung sonstiger Kraftkomponenten

Enthält die Kraft K über die Gravitation **G** der Erde hinaus weitere Komponenten **Z,** ist also

$$\mathbf{K} = \underbrace{\mathbf{G}}_{\substack{Gravitation \\ der\ \ Erde}} + \underbrace{\mathbf{Z}}_{sonstige\ Kräfte} , \tag{7.49}$$

so lautet die Bahndrehimpulsbilanz (7.1)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{N}}{dt} &= \mathbf{r}\times\mathbf{G} + \mathbf{r}\times\mathbf{Z} \\ &=: \frac{d\mathbf{N}_G}{dt} + \frac{d\mathbf{N}_Z}{dt} \end{aligned} \tag{7.50}$$

bzw. umgestellt

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} - \frac{d\mathbf{N}_Z}{dt} = \frac{d\mathbf{N}_G}{dt} \tag{7.51}$$

Um die durch die sonstigen Kraftkomponenten bedingten Drehimpulsänderungen zu berücksichtigen, hat man in den Gleichungen (7.24) ff. zu ersetzen

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} \rightarrow \frac{d\mathbf{N}_G}{dt} := \frac{d\mathbf{N}}{dt} - \frac{d\mathbf{N}_Z}{dt} \tag{7.52}$$

Beispielsweise ist dann anstelle von (7.26)

$$\left(\frac{d\mathbf{N}}{dt} - \frac{d\mathbf{N}_Z}{dt}\right)\bullet\mathbf{a}_\lambda = \frac{d\mathbf{N}_G}{dt}\bullet\mathbf{a}_\lambda = \frac{GM_\oplus}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^l Q_{lm}P_l^m\left(\cos\vartheta\right)\left(\mathbf{r}\times\mathbf{c}_{lm}\right)\bullet\mathbf{a}_\lambda \tag{7.53}$$

zu verwenden.

Literaturhinweise

Gleixner, H. (1982): Gravitationswechselwirkung ausgedehnter Körper.
Veröff. d. Dt. Geod. Komm., A 95, München

Ilk, K.H. (1983): Ein Beitrag zur Dynamik ausgedehnter Körper – Gravitationswechselwirkung
Veröff. d. Dt. Geod. Komm., C288, München

Löcher, A. (2005) Bewegungsintegrale und ihre Rolle zur Konsistenzprüfung von Kräftefunktionen und Bahnen (in Vorbereitung)

Schneider, M. (1992-1999): Himmelsmechanik I-IV
Bibliographisches Institut Mannheim und Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg

Schneider, M. (1979): Himmelsmechanik
Bibliographisches Institut Mannheim

Schneider, M. (2002):Zur Methodik der Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten
IAPG/FESG No. 15 , München

Schneider, M. & Cui, Ch. (2005): Theoreme über Bewegungsintegrale und ihre Anwendung in Bahntheorien. Veröff. d. Dt. Geod. Komm., Reihe A, München (im Druck)

Danksagung

Für die Aufnahme der „Beiträge zur Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten“ in die gemeinsame Schriftenreihe des Instituts für Astronomische und Physikalische Geodäsie (IAPG) und der Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie (FESG) der Technischen Universität München danke ich den Herren Prof. Dr. Dr. Reiner Rummel und Prof. Dr. Markus Rothacher. Weiter gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. Karlheinz Ilk, Universität Bonn für zahlreiche Diskussionen wie auch Herrn Dr. Christian Gerlach (IAPG).

Veröffentlichungen in der Schriftenreihe IAPG / FESG (ISSN 1437-8280):
Reports in the series IAPG / FESG (ISSN 1437-8280):

No. 1: Müller J., Oberndorfer H. (1999) *Validation of GOCE Simulation.* ISBN 3-934205-00-3.

No. 2: Nitschke M. (1999) Satlab – *Ein Werkzeug zur Visualisierung von Satellitenbahnen.* ISBN 3-934205-01-1.

No. 3: Tsoulis D. (1999) *Spherical harmonic computations with topographic/isostatic coefficients.* ISBN 3-934205-02-X.

No. 4: Dorobantu R. (1999) *Gravitationsdrehwaage.* ISBN 3-934205-03-8.

No. 5: Schmidt R. (1999) *Numerische Integration gestörter Satellitenbahnen mit* Matlab. ISBN 3-934205-04-6.

No. 6: Dorobantu R. (1999) *Simulation des Verhaltens einer low-cost Strapdown-IMU unter Laborbedingungen.* ISBN 3-934205-05-4.

No. 7: Bauch A., Rothacher M., Rummel R. (2000) *Bezugssysteme in Lage und Höhe. Tutorial zum Kursus INGENIEURVERMESSUNG 2000.* ISBN 3-934205-06-2.

No. 8: Rothacher M., Zebhauser B. (2000) *Einführung in GPS. Tutorial zum 3. SAPOS-Symposium 2000 in München.* ISBN 3-934205-07-0.

No. 9: Ulrich M. (2000) *Vorhersage der Erdrotationsparameter mit Hilfe Neuronaler Netze.* ISBN 3-934205-08-9.

No. 10: Seitz F. (2000) *Charakterisierung eines bistatischen Rayleigh- und Raman-Lidars zur Bestimmung von höhenaufgelösten Wasserdampfprofilen.* ISBN 3-934205-09-7.

No. 11: Meyer F. (2000) *Messung von höhenaufgelösten Wasserdampfprofilen unter Verwendung eines bistatischen Raman-Lidars.* ISBN 3-934205-10-0.

No. 12: Peters T. (2001) *Zeitliche Variationen des Gravitationsfeldes der Erde.* ISBN 3-934205-11-9.

No. 13: Egger D. (2001) *Astronomie und Java – Objekte der Astronomie.* ISBN 3-934205-12-7.

No. 14: Steigenberger P. (2002) Matlab-*Toolbox zur TOPEX/POSEIDON Altimeterdatenverarbeitung.* ISBN 3-934205-13-5.

No. 15: Schneider M. (2002) *Zur Methodik der Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten.* ISBN 3-934205-14-3.

No. 16: Dorobantu R., Gerlach C. (2004) *Investigation of a Navigation–Grade RLG SIMU type iNAV–RQH.* ISBN 3-934205-15-1.

No. 17: Schneider M. (2004) *Beiträge zur Bahnbestimmung und Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten sowie zur Orientierung von Rotationssensoren.* ISBN 3-934205-16-X.

No. 18: Egger D. (2004) *Astro-Toolbox, Theorie.* ISBN 3-934205-17-8.

No. 19: Egger D. (2004) *Astro-Toolbox, Praxis.* ISBN 3-934205-18-6.

No. 20: Fackler U. (2005) *GRACE - Analyse von Beschleunigungsmessungen.* ISBN 3-934205-19-4.

No. 21: Schneider M. (2005) *Beiträge zur Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten.* ISBN 3-934205-20-8.

Weitere Exemplare können bezogen werden unter:
Copies are available from:

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie
Technische Universität München
Arcisstrasse 21
D-80290 München
Germany
Telefon: +49-89-289-23190
Telefax: +49-89-289-23178
Email: gerlach@bv.tum.de

Oder im Internet:
Or via Internet:

http://tau.fesg.tu-muenchen.de/~iapg/web/veroeffentlichung/schriftenreihe/schriftenreihe.php

ISSN 1437-8280, ISBN 3-934205-20-8