



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Genauigkeitssimulation von Schwerefeld-Satellitenmissionen

M. Murböck

IAPG / FESG No. 30
Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie
Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie

München 2011

Genauigkeitssimulation von Schwerefeld-Satellitenmissionen

M. Murböck

IAPG / FESG No. 30

München 2011

ISSN 1437-8280

ISBN-13: 978-3-934205-29-1

Hinweis: Eine PDF-Version dieser Arbeit mit farbigen Abbildungen ist erhältlich unter
<http://www.iapg.bv.tum.de/Schriftenreihe/>

Adressen:

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie

Technische Universität München

Arcisstrasse 21

D-80290 München

Germany

Telefon: +49-89-289-23190

Telefax: +49-89-289-23178

<http://www.iapg.bv.tum.de/>

Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie

Technische Universität München

Arcisstrasse 21

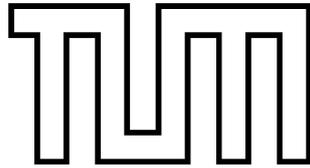
D-80290 München

Germany

Telefon: +49-89-289-23191

Telefax: +49-89-289-23178

<http://www.iapg.bv.tum.de/>



Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie

Genauigkeitssimulation von Schwerefeld-Satellitenmissionen

Diplomarbeit

Michael Murböck

Betreuer: Univ.Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. mult. Reiner Rummel
Abgabe: März 2009

Abstract

This thesis deals with an analysis of a simulator for gravity field determination from space borne observations. The theory behind it is a semi-analytical approach, in which the satellite orbit is defined as a circular orbit with constant inclination. Because of these simplifications the key formular of this approach results from the transformation of the gravity potential, which is developed into spherical harmonics on the sphere, into the reference frame, which moves with the satellite. This formular contains the *lumped coefficients* which appear as *2D Fourier* coefficients. The parameters of the *Fourier* series, which is associated with these coefficients, are the basic coordinates of the satellite orbit. These are the argument of latitude and the longitude of the ascending node.

The *lumped coefficients* are a linear combination of the transfer coefficients and the spherical harmonic coefficients. The design matrix of a least squares estimation system consists of these transfer coefficients. The associated weight matrix is being calculated from the power spectral densities (*PSD*) of the observation noise. These *PSDs* have to be detected for the observation frequencies, which are normalized by the orbit frequency. Thus one gets a normal equation system from which, by inverting it, the variances and covariances of the spherical harmonic coefficients can be estimated.

This thesis starts with explaining the theoretical context of the simulator. It leads through the various elements step by step. A short instruction is included as well. After a validation variations of the starting parameters will be analysed. Eventually upgrade options will be discussed. The appendix contains several case studies which also include combinations of gravity field satellite missions.

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird ein Simulator für Satellitenschwerefeldmissionen untersucht. Die Theorie dahinter ist ein semi-analytischer Ansatz. Die Bahn eines Satelliten wird dabei als kreisförmiger Orbit mit konstanter Inklination definiert. Mit diesen Vereinfachungen entsteht durch die Transformation ins bahnbegleitende System aus der Kugelfunktionsdarstellung des Gravitationspotentials die Ausgangsformel dieses Ansatzes. Darin enthalten sind die *lumped coefficients*, welche als zweidimensionale *Fourier*-Koeffizienten auftauchen. Die Parameter der zugehörigen *Fourier*-Reihe sind die Hauptperioden der Satellitenbahn, das Argument der Breite und die Länge des aufsteigenden Knotens.

Die *lumped coefficients* sind eine Linearkombination der Transfer- und der Schwerefeldkoeffizienten. Erstere dienen als Design-Matrix eines linearen Ausgleichungssystems. Die zugehörige Gewichtsmatrix wird aus den Fehlerspektraldichten (*power spectral density*, *PSD*) der Beobachtungen berechnet. Diese *PSDs* müssen für die auf die Bahnfrequenz normierten Beobachtungsfrequenzen ermittelt werden. Somit ist es möglich, ein Normalgleichungssystem aufzustellen, durch dessen Invertierung dann die Fehler der Schwerefeldkoeffizienten geschätzt werden können.

Zu Beginn dieser Arbeit wird die Theorie des Simulators erläutert. Schrittweise wird durch die einzelnen Elemente des Simulators geführt, eine Kurzanleitung ist ebenso enthalten. Die folgenden Abschnitte untersuchen nach einer Validierung die Variation der verschiedenen Parameter, die in den Simulator einfließen. Zum Schluss werden Erweiterungsmöglichkeiten diskutiert. Der Anhang enthält verschiedene Fallstudien, in denen auch Kombinationen von Schwerefeldmissionen analysiert werden.

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit eigenständig und nur unter Verwendung der genannten Literatur und den aufgeführten Hilfsmitteln verfasst habe.

Datum:

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	7
1.1. Motivation	7
1.2. Ziel	8
2. Semi-analytischer Ansatz	9
2.1. Theorie	9
2.1.1. Parametrisierung des Geopotentials	9
2.1.2. Rotation von Kugelfunktionskoeffizienten	10
2.1.3. Potential im bahnbegleitenden System	11
2.1.4. Nomineller Orbit	13
2.1.5. Spektrale Darstellung	14
2.2. Ausgleichung	15
2.2.1. Funktionales Modell	15
2.2.2. Stochastisches Modell	16
2.3. Funktionale des Potentials und ihre Transferkoeffizienten	19
2.3.1. Erste Ableitungen	19
2.3.2. Zweite Ableitungen	21
2.3.3. Bahnstörungen (high-low-SST)	22
2.3.4. Entfernungen und deren Änderungen (low-low-SST)	23
2.3.5. Tabelle mit verschiedenen Transferkoeffizienten	25
3. Schrittweise durch die Simulation	26
3.1. Eingabeparameter	26
3.2. Normalgleichungssystem	31
3.3. Kurzanleitung	35
3.4. Validierung	36
4. Variation der Eingabeparameter	39
4.1. Missionsdauer	39
4.2. Flughöhe	40

Inhaltsverzeichnis

4.3. PSD	41
4.4. Inklination	44
5. Polarlochproblem	45
5.1. Mediandarstellung	45
5.2. Fehlerfortpflanzung von Kugelfunktionskoeffizientenfehlern aufs Geoid . .	49
6. Ausblick	53
6.1. Bewertung	53
6.2. Erweiterungsmöglichkeiten	53
6.2.1. zeitvariable Schwerefeldgrößen	54
6.2.2. Satellitenkonfiguration	55
A. Fallstudien	57
Literatur	65

1. Einleitung

1.1. Motivation

Die Vermessung des Erdschwerefeldes gehört zu den Hauptzielen der Geodäsie. Die genaue Kenntnis dieses ermöglicht es, terrestrischen Referenzrahmen einen physikalischen Höhenbezug zu geben. Des Weiteren ergeben sich immer höhere Ansprüche an die Navigation und Positionierung mit Hilfe von Satelliten. Dazu sind numerische Integrationen von Satellitenbahnen notwendig, deren Güte auch von der Verfügbarkeit eines hochauflösenden Erdschwerefeldes abhängt. Weitere Anwendungen finden sich in der Ozeanographie bei der Analyse von Massen- und Temperaturtransporten.

Die Beobachtungen, aus denen man das Schwerefeld ermitteln kann, lassen sich in terrestrische und satellitengestützte unterteilen. Erstere sind global nicht in einheitlicher Auflösung und Genauigkeit vorhanden, weswegen die langwelligen Anteile des Schwerefeldes mit diesen schlecht geschätzt werden können. Im Gegensatz dazu erhält man aus einem genügend langen Beobachtungszeitraum mit einem erdnahen Satelliten global gleichmäßig verteilte gleich genaue Beobachtungen. Auf Grund der größeren Entfernung zu den das Potential erzeugenden Massen steckt in den Satellitenbeobachtungen eine geringere Signalstärke. Somit lässt sich erklären, warum sich diese besser für die langwelligen Anteile des Schwerefeldes eignen.

Durch geodätische Satellitenmissionen, in erster Linie durch *CHAMP* und *GRACE*, ist es im letzten Jahrzehnt gelungen, die Genauigkeit der langwelligen Anteile des Gravitationspotentials der Erde erheblich zu steigern. In die Berechnungen fließen hierbei ein: Beobachtungen der Bahn der Satelliten durch höher fliegende GPS-Satelliten (*high-low-SST*), Daten von satelliteninternen Beschleunigungsmessern für nicht-gravitative Kräfte und bei *GRACE* hochgenaue Messungen der Entfernung und deren Änderung zwischen tieffliegenden Satelliten (*low-low-SST*). Diese Schwerefeldberechnungen basieren also auf einer indirekten Methode, bei der aus den durch Gravitationsbeschleunigungen gestörten Bahnen auf Schwerefeldgrößen geschlossen wird. Durch Gradiometriebeobachtungen der *GOCE*-Mission ist es nun erstmals möglich, direkt Schwerefeldgrößen mit einem Satelliten zu beobachten.

1.2. Ziel

In dieser Arbeit soll nun eine Möglichkeit untersucht werden, die Genauigkeit eines Schwerfeldes aus satellitengestützten Beobachtungen zu simulieren. Dazu wird eine analytische Verbindung zwischen Missionsparametern und Schwerfeldkoeffizienten hergeleitet. Aus dieser Verbindung lässt sich dann ein funktionales Modell beschreiben, mit dem man eine Varianz-Kovarianzmatrix für die unbekanntenen Koeffizienten schätzen kann. Das stochastische Modell für diese Schätzung beinhaltet spektrale Informationen zur Genauigkeit der Beobachtungen. Diese Informationen fließen als Fehlerspektraldichten (*power spectral density, PSD*) in die Gewichtsmatrix ein.

Die gerade erwähnte analytische Verbindung ist allerdings eigentlich nur eine semi-analytische, denn in der Herleitung werden einige Vereinfachungen zur Satellitenbahn getroffen, die die Invertierung des Normalgleichungssystems auch mit geringer Rechnerleistung möglich machen. Trotz dieser Vereinfachungen, die die Zeitunabhängigkeit der Exzentrizität und der Inklination betreffen, ergeben sich nützliche Ergebnisse aus den Simulationen, die für die Planung von Satellitenmissionen und die Kombination dieser hervorragend genutzt werden können. Damit kann auch simuliert werden, in welcher Weise und welchen spektralen Bereichen des Schwerfeldes die geodätische Mission *GOCE* ihren Beitrag zur Erforschung des Geopotentials leisten kann. Außerdem können neue Satellitenmissionen, und durch Variation der Eingabeparameter und Beobachtungsarten Szenarien möglicher zukünftiger Missionen kombiniert werden. Abbildung 1.1 zeigt die *RMS*-Werte pro sphärisch-harmonischen (*SH*) Grad bereits bestehender Missionen und eine mögliche neue Kombination mit fiktiven Missionsparametern, wie sie als Ergebnisse aus dem Simulator entstehen.

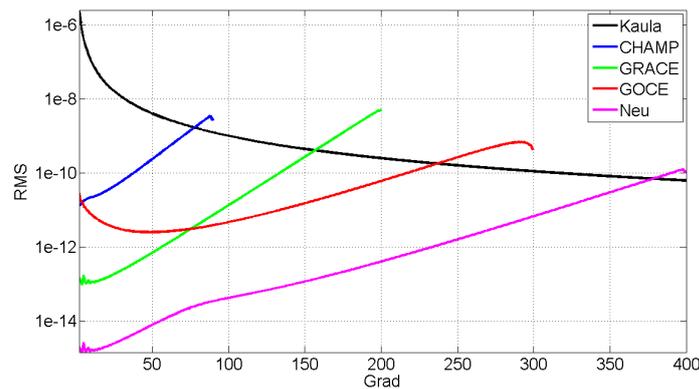


Abbildung 1.1.: *RMS* pro *SH* Grad verschiedener Simulationen

2. Semi-analytischer Ansatz

In diesem ersten Kapitel wird nun schrittweise hingeführt zur Benutzung des Simulators, mit dem es möglich ist, die Fehler in verschiedenen Beobachtungen auf diejenigen der Schwerefeldkoeffizienten fortzuführen. Somit findet hier eine Varianz-Kovarianz-Fortpflanzung statt. Dabei wird im wesentlichen der Vorgehensweise von Sneeuw (2000) gefolgt. Anschließend sehen wir auf die Implementierung des Simulators in *MATLAB*.

2.1. Theorie

Ausgehend von der bekannten Darstellung des Geopotentials durch Kugelfunktionen auf der Kugel verfolgen wir die Transformation ins Bahnsystem und definieren die dabei verwendeten *lumped coefficients*.

2.1.1. Parametrisierung des Geopotentials

Das Schwerefeld der Erde, das sich aus dem Gravitationspotential der Massen der Erde nach Newton ergibt, kann auf einer Kugel dargestellt werden. Dabei ergibt sich die Reihendarstellung über Grad und Ordnung, die für jede Kugelfunktion einen Koeffizienten bereit hält. Somit dienen die sphärischen Koordinaten der Kobreite, der Länge und des radialen Abstandes als Variablen in Formel (2.1). Die bekannte Kugelfunktiosreihendarstellung auf der Kugel wie bei Heiskanen & Moritz (1979) lässt sich durch eine komplexe Schreibweise noch etwas kompakter schreiben. Es gilt

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=-l}^l \bar{K}_{lm} \bar{Y}_{lm}(\theta, \lambda). \quad (2.1)$$

Die einzelnen Terme sind in Tabelle 2.1 erklärt. Die komplexwertigen Kugelflächenfunktionen genügen dabei

$$\bar{Y}_{lm} = \bar{P}_{lm}(\cos \theta) e^{im\lambda} \quad (2.2)$$

als Produkt voll normalisierter Legendre Funktionen mit einer komplexen Exponentialfunktion.

2. Semi-analytischer Ansatz

r, θ, λ	Radius, Kobreite, Länge
R	Äquatorradius der Erde
GM	Gravitationskonstante multipliziert mit der Erdmasse
$\bar{Y}_{lm}(\theta, \lambda)$	normierte Kugelflächenfunktion mit Grad l und Ordnung m
\bar{K}_{lm}	normierter Kugelflächenfunktionskoeffizient, zugeh. zu $\bar{Y}_{lm}(\theta, \lambda)$

Tabelle 2.1.: Komponenten von Formel (2.1)

2.1.2. Rotation von Kugelfunktionskoeffizienten

Der erste Schritt, um Satelliten-Beobachtungen mit dieser Formel in Verbindung zu bringen, ist eine Transformation von Formel (2.1) aus dem erdfesten in ein bahnbegleitendes System. Dafür müssen vorerst einige Regeln festgelegt werden, die eine solche Transformation einer Reihendarstellung mit Kugelfunktionen beschreiben.

Nach Sneeuw (2000) und den darin zitierten Quellen sind Kugelfunktionen im Ausgangssystem eine Linearkombination von solchen des selben Grades im rotierten System. Wir wählen hier eine Transformation mit drei *Euler*-Drehungen, um vom Ausgangssystem mit den Koordinaten der Kobreite θ und der Länge λ ins Zielsystem (θ', λ') zu gelangen. Die Koordinate des radialen Abstandes bleibt erhalten. Die erste Rotation dreht um die ursprüngliche z -Achse mit dem Winkel α , die zweite mit dem Winkel β um die neue y -Achse und die dritte mit γ um die endgültige z -Achse. Damit gilt für Kugelfunktionen

$$\bar{Y}_{lm}(\theta, \lambda) = \sum_{k=-l}^l \bar{D}_{lmk}(\alpha, \beta, \gamma) \bar{Y}_{lk}(\theta', \lambda') \quad (2.3)$$

mit den sogenannten Repräsentationskoeffizienten

$$\bar{D}_{lmk}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{im\alpha} \bar{d}_{lmk}(\beta) e^{ik\gamma}. \quad (2.4)$$

Außerdem sei

$$\bar{d}_{lmk}(\beta) = \left[\frac{(l+k)(l-k)}{(l+m)(l-m)} \right]^{1/2} \sum_{t=t_1}^{t_2} \binom{l+m}{t} \binom{l-m}{l-k-t} (-1)^t c^{2l-a} s^a,$$

mit $c = \cos \frac{\beta}{2}$, $s = \sin \frac{\beta}{2}$, $a = k - m + 2t$, $t_1 = \max(0, m - k)$ und $t_2 = \min(l - k, l + m)$.

Damit ergibt sich für das Potential im rotierten System

$$V(r, \theta', \lambda') = \frac{GM}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{l+1} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=-l}^l \bar{K}_{lm} \bar{D}_{lmk}(\alpha, \beta, \gamma) \bar{Y}_{lk}(\theta', \lambda'). \quad (2.5)$$

2.1.3. Potential im bahnbegleitenden System

Mit diesem Werkzeug können wir nun die gewünschten Rotationen durchführen, die uns von den erdfesten sphärischen Koordinaten zu den raumfesten Satellitenkoordinaten überführen.

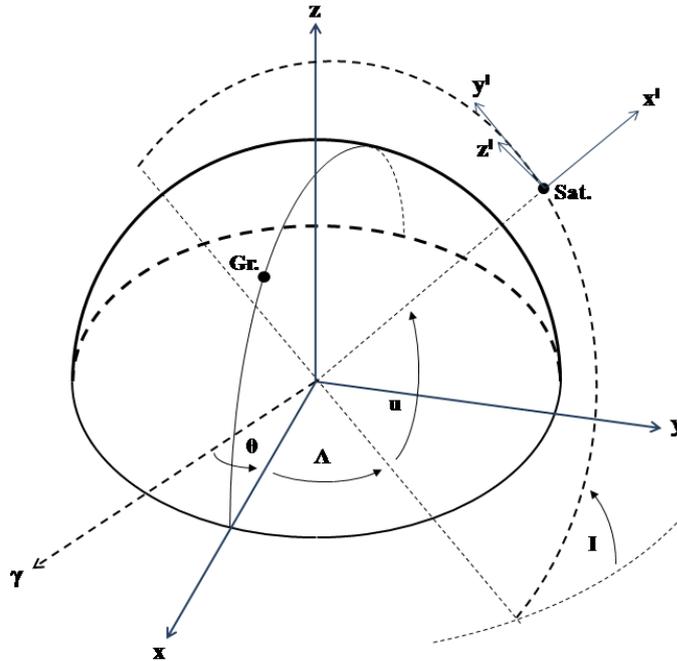


Abbildung 2.1.: Rotation ins Bahnsystem

Aus Abbildung 2.1 ist ersichtlich, in welcher Reihenfolge wir welche Rotationen ausführen müssen. Wir haben unser Ausgangssystem mit dem Äquator in der x - y -Ebene (x -Achse durch Greenwich) und der z -Achse zum Himmelspol. Die Bahnebene des Satelliten ist die x' - y' -Ebene des Zielsystems, dessen x' -Achse zum Satelliten zeigt. Die erste Rotation bringt die neue x -Achse in eine Linie mit der Schnittlinie der Satellitenbahn und der Äquatorebene. Dafür muss um die z -Achse mit dem Winkel Λ , der Länge des aufsteigenden Bahnknotens, in mathematisch positiver Richtung gedreht werden. Nun wollen wir die x - y -Ebene in der Bahnebene des Satelliten haben. Somit ist eine Rotation um die neue x -Achse um die Inklination I erforderlich. Abschließend muss um die neue z -Achse, die jetzt senkrecht auf der Bahnebene steht, mit dem Argument der Breite u gedreht werden, wonach die endgültige x' -Achse nun zum Satelliten zeigt.

2. Semi-analytischer Ansatz

Die Reihenfolge der Drehachsen in dieser Transformation ist z - x - z . Da die Gleichung (2.3) nur für eine *Euler*-Drehung z - y - z gilt, müssen wir hier einen Trick anwenden, damit wir das Formelwerk auf dieses Problem anwenden dürfen. Wir drehen unser System nach der ersten Rotation um die z -Achse mit Λ um einen rechten Winkel zurück ($-\frac{\pi}{2}$), wodurch die zweite Rotation nicht mehr um die neue x - sondern um die neue y -Achse stattfindet. Um aber dasselbe Ergebnis bei der Transformation zu erhalten, muss diese zusätzlich eingeschobene Drehung durch ihre inverse Transformation wieder rückgängig gemacht werden, also durch eine abschließende Rotation um die z' -Achse um $\frac{\pi}{2}$ (vgl. Betti & Sansò (1989)).

Nach Formel (2.4) gilt somit für die Repräsentationskoeffizienten

$$\bar{D}_{lmk}(\alpha, \beta, \gamma) = \bar{D}_{lmk}\left(\Lambda - \frac{\pi}{2}, I, u + \frac{\pi}{2}\right) = i^{k-m} \bar{d}_{lmk}(I) e^{i(ku+m\Lambda)}.$$

Auch aus Abbildung 2.1 ist leicht zu erkennen, dass die Koordinaten θ' und λ' des Satelliten zu jedem Zeitpunkt im rotierten System konstant sind und den Werten $\frac{\pi}{2}$ und 0 entsprechen. Nach Formel (2.2) ist somit $\bar{Y}_{lk}(\theta', \lambda') = \bar{P}_{lk}(0)$, und aus Formel (2.5) ergibt sich für das Potential im bahnbegleitenden System

$$\begin{aligned} V(r, \theta', \lambda') &= V(r, u, \Lambda) = \\ &= \frac{GM}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=-l}^l \bar{K}_{lm} i^{k-m} \bar{d}_{lmk}(I) \bar{P}_{lk}(0) e^{i(ku+m\Lambda)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Inklinationsfunktionen

Durch die Einführung von Inklinationsfunktionen \bar{F} , die Teile der Transformationsvorschrift enthalten, kann Formel (2.6) vereinfacht werden. Sei

$$\bar{F}_{lmk}(I) = i^{k-m} \bar{d}_{lmk}(I) \bar{P}_{lk}(0). \quad (2.7)$$

Damit wird aus (2.6)

$$V(r, u, \Lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=-l}^l \bar{K}_{lm} \bar{F}_{lmk}(I) e^{i(ku+m\Lambda)}. \quad (2.8)$$

2.1.4. Nomineller Orbit

Bevor wir die Darstellung des Potentials noch verfeinern, müssen einige Worte zu der Satellitenbahn gesagt werden. In Formel (2.6) kommen ja schon vier Koordinaten vor, die eine solche beschreiben. Das sind der geozentrische Abstand r , die Inklination I , das Argument der Breite u und die Länge des aufsteigenden Bahnknotens Λ . Diese sind nun einigen Vereinfachungen unterlegen, die die weiteren Formeln um einiges kompakter werden lassen und mit ihren Eigenschaften den nominellen Orbit bilden.

Zum ersten sei r konstant, die Satellitenbahn ist somit als kreisförmig und nicht exzentrisch definiert. Ebenso sei die Inklination konstant. Dagegen sind die beiden Koordinaten u und Λ zeitabhängig und Störungen durch die Erdabplattung unterworfen. Sei n die mittlere Bewegung des Satelliten, für die nach dem dritten *Keplerschen* Gesetz $n^2 r^3 = GM$ gilt. Bei bekanntem Abplattungsterm $J_2 = -\sqrt{5} \bar{K}_{2,0}$ haben die zeitlichen Ableitungen der Kepler Elemente der Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω , des Argumentes des Perigäums ω und der mittleren Anomalie M nach Kaula (1966) folgende Form:

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} &= -\frac{3}{2} n J_2 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos I, \\ \dot{\omega} &= \frac{3}{4} n J_2 \left(\frac{R}{r}\right)^2 (5 \cos^2 I - 1), \\ \dot{M} &= n + \frac{3}{4} n J_2 \left(\frac{R}{r}\right)^2 (3 \cos^2 I - 1).\end{aligned}$$

Darin sind bereits obige Vereinfachungen berücksichtigt. Für \dot{u} und $\dot{\Lambda}$ ergibt sich dann

$$\dot{u} = \dot{\omega} + \dot{M} = n + \frac{3}{2} n J_2 \left(\frac{R}{r}\right)^2 (4 \cos^2 I - 1) \quad (2.9)$$

und wenn θ die Sternzeit Greenwich bezeichnet,

$$\dot{\Lambda} = \dot{\Omega} - \dot{\theta} = -\frac{3}{2} n J_2 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos I - \dot{\theta}. \quad (2.10)$$

Dabei durchläuft θ eine volle Periode an einem Sterntag. Somit sind die beiden Hauptfrequenzen des nominellen Orbits \dot{u} und $\dot{\Lambda}$ definiert.

2. Semi-analytischer Ansatz

2.1.5. Spektrale Darstellung

Wir gehen zurück zu Formel (2.8), vertauschen ihre Summationsreihenfolge und fassen bestimmte Teile zusammen. Dann ist

$$V(r, u, \Lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{mk}^V e^{i(ku+m\Lambda)} \quad (2.11)$$

mit

$$A_{mk}^V = \sum_{l=\max(|m|, |k|)}^{\infty} \underbrace{\frac{GM}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \bar{F}_{lmk}(I) \bar{K}_{lm}}_{H_{lmk}^V}. \quad (2.12)$$

Die Fourierreihe einer Funktion $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist nach Hofmann-Wellenhopf & Moritz (1986)

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{i(mx+ny)}.$$

Somit haben wir mit Formel (2.11) eine Darstellung des Gravitationspotentials als zweidimensionale Fourierreihe gefunden. Die Fourierkoeffizienten A_{mk}^V werden als *lumped coefficients* bezeichnet und gehören, wie der Exponent anzeigt, zu einem bestimmten Funktional des Gravitationspotentials (hier V für das Potential selbst).

Die Terme H_{lmk}^V werden als Transferkoeffizienten bezeichnet und enthalten einen dimensionierenden Faktor mit den Termen GM und R , eine *upward continuation* (Potenz von $\frac{R}{r}$) und die Inklinationsfunktionen $\bar{F}_{lmk}(I)$. Damit haben wir ein Werkzeug, welches das Potential abbildet auf ein zweidimensionales Spektrum. Der Definitionsbereich dieses Spektrums setzt sich zusammen aus den beiden Wertebereichen von u und Λ . Diese sind jeweils $[0; 2\pi)$, aus deren topologischem Produkt sich ein Torus ergibt.

2.2. Ausgleichung

Bis hier her haben wir einen spektralen Zusammenhang hergestellt zwischen dem Gravitationspotential und Koordinaten eines Satelliten, der sich auf einem nominellen Orbit bewegt. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie man dieses Formelwerk nutzen kann, um Beobachtungsfehler eines Satelliten fortpflanzen zu können, damit das Fehlerspektrum des Gravitationspotentials geschätzt werden kann.

In einem Ausgleichungsmodell nach der Methode der kleinsten Quadrate können Unbekannte x aus einem linearen Modell $\underline{y} = Ax$ geschätzt werden. Die Beobachtungen \underline{y} sind dabei von stochastischer Natur, was der Unterstrich anzeigen soll. Das Beobachtungsmodell kann dann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} E \{ \underline{y} \} &= Ax \\ D \{ \underline{y} \} &= Q_{yy} \end{aligned} \tag{2.13}$$

mit dem ersten und zweiten stochastischen Moment von \underline{y} , dem Erwartungswertes E und der Streuung D . Die Matrix Q_{yy} ist die Kovarianzmatrix der Beobachtungen. Ein erwartungstreuer Schätzer für die Unbekannten, der die quadratischen Abweichungen minimiert, ist dann

$$\hat{x} = N^{-1} A' P_{yy} \underline{y}$$

mit der Gewichtsmatrix der Beobachtungen $P_{yy} = Q_{yy}^{-1}$ und der Normalgleichungsmatrix

$$N = A' P_{yy} A. \tag{2.14}$$

Die Streuung der geschätzten Unbekannten \hat{x} ist dann gegeben durch die Inverse von N als der Varianz-Kovarianzmatrix der geschätzten Unbekannten $Q_{\hat{x}\hat{x}} = N^{-1}$ (vgl. Sneeuw (2000)). Aus Formel (2.14) ist ersichtlich, dass für die Berechnung von $Q_{\hat{x}\hat{x}}$ keine Kenntnis über die Beobachtungen nötig ist bis auf deren Kovarianzmatrix.

2.2.1. Funktionales Modell

Als Beobachtungsmodell dient hier die Formel für die *lumped coefficients* (2.12) eines bestimmten Funktionals des Gravitationspotentials. Um weitere Funktionale in dieses Modell mit einzubeziehen, werden in Kapitel 2.3 die dafür notwendigen Transferkoeffizienten hergeleitet. Die *lumped coefficients* A_{mk}^V entsprechen den Beobachtungen. Sie sind das Fourierspektrum der Messungen. Die Unbekannten sind die Potentialkoeffizienten \bar{K}_{lm} , und die Transferkoeffizienten H_{lmk}^V bilden dementsprechend die Design-Matrix der Ausgleichung (vgl. Gerlach (2006)).

2. Semi-analytischer Ansatz

Sei F ein bestimmtes Funktional des Gravitationspotentials. Dann ist analog zu Formel (2.13) das zugehörige funktionale Modell, wenn man bei einem maximalen Entwicklungsgrad L abbricht,

$$A_{mk}^F = \sum_{l=\max(|m|,|k|)}^L H_{lmk}^F \bar{K}_{lm}.$$

Wenn nun $m_1 \neq m_2$, so ist offensichtlich, dass kein Koeffizient \bar{K}_{lm_1} mit \bar{K}_{lm_2} identisch sein kann. Damit ergibt sich ein großer Vorteil, der das Lösen der Normalgleichung betrifft. Wenn man annimmt, dass $A_{m_1k}^F$ und $A_{m_2k}^F$ auch stochastisch unkorreliert sind, so kann man die Normalgleichung für jede Ordnung m separat lösen (vgl. Sneeuw et al. (2001)). Für ein festes m gilt $-L \leq k \leq L$ und $|m| \leq l \leq L$, woraus sich für die Matrix H_{lmk}^F als Dimension $(2L+1) \cdot (L-|m|+1)$ ergibt.

Eine weitere Möglichkeit, die Rechenanforderungen herunter zu drücken, ist innerhalb einer Ordnung m die separate Invertierung für verschiedene Paritäten von $l-k$. Denn H_{lmk}^F verschwindet für ungerade $l-k$. Für bestimmte Funktionale, welche eine andere Inklinationsfunktion benutzen, als in Formel (2.7) definiert, gilt dies für gerade $l-k$. Diese Inklinationsfunktionen werden in Kapitel 2.3 definiert. Somit kann die Dimension von H_{lmk}^F maximal $(L+1) \cdot ((L-|m|+1)/2)$ erreichen. Für alle Tupel (m, k) erhält H_{lmk}^F und somit auch die Normalgleichungsmatrix Block-Diagonal-Struktur. Die einzelnen Blöcke können dann separat invertiert werden (vgl. Sneeuw (2000)).

2.2.2. Stochastisches Modell

Das stochastische Modell besteht aus der Gewichtsmatrix P_{yy} , also der Inversen der Varianz-Kovarianzmatrix der Beobachtungen. Die Beobachtungen sind die *lumped coefficients*, also das Spektrum der Messungen. Deren Fehler müssen also spektral definiert werden durch sogenannte *power spectral densities* (PSD) oder Leistungsdichtespektren. Durch diese wird dann festgelegt, wie stark die betreffende Beobachtung in die Normalgleichung einfließt.

Power Spectral Density

Das Leistungsdichtespektrum $S(f)$ einer Zufallsfunktion $X(t)$ gibt an, wieviel Leistung in einem infinitesimal kleinen spektralen Band df enthalten ist. Es ist definiert durch die *Fouriertransformierte* der Autokovarianzfunktion $s(\tau)$. Diese misst die Kovarianz zwischen eines um τ verschobenen Zufallsprozesses $X(t)$ mit sich selbst. Es ist

$$s(\tau) = cov \{X(t), X(t + \tau)\}.$$

2. Semi-analytischer Ansatz

Damit gilt für die *PSD*

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau.$$

Diese Definition gilt allerdings nur für einen stationären Prozess $X(t)$, also einen Prozess, dessen stochastische Momente erster und zweiter Ordnung endlich und invariant gegenüber Verschiebung sind. Anders gesagt, der Erwartungswert und die Varianz eines solchen Prozesses sind zeitunabhängig (Percival & Walden (1993)).

Wenn der zugehörige Prozess reell ist und die Einheit U hat, dann ist die *PSD* ebenfalls reell und gerade ($S(f) = S(-f)$) und es ist üblich, die positive Quadratwurzel anzugeben mit der Einheit U/\sqrt{Hz} .

Im hier vorliegenden stochastischen Modell werden Fehler-Spektraldichten der Beobachtungen verwendet. Diese geben also den Fehleranteil in einem infinitesimalen Frequenzband an. Außerdem arbeiten wir hier nicht mit kontinuierlichen Prozessen $X(t)$, sondern mit diskreten Werten $X[t_n]$ mit $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Man kann also für diese Reihe eine Abtastrate von Δt annehmen und eine Gesamtdauer von $T = N\Delta t$. Somit werden im Spektralbereich keine größeren Frequenzen auftreten als die *Nyquist*-Frequenz

$$f_{max} = f_{Nyq} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \quad (2.15)$$

und keine kleineren als die spektrale Auflösung

$$f_{min} = \Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t}. \quad (2.16)$$

Die *PSD* besteht dann aus den Werten $P_n = S[f_n]\Delta f$ mit der Einheit U^2 . Die Berechnung der Varianz aus der Fehler-*PSD* liefert ein Integral über $S(f)$ über den gesamten Messbandbereich. Im diskreten Fall gilt dann

$$\sigma^2 = \sum_{n=-N/2}^{N/2} S[f_n]\Delta f = \frac{1}{T} \sum_{n=-N/2}^{N/2} S[n\Delta f] \quad (2.17)$$

(vgl. Frommknecht (2008)). Es ist ersichtlich, dass die gesamte *PSD* bekannt sein muss, im diskreten reellen Fall also von der Null- bis zur maximalen Frequenz, damit man über die Gesamtenergie und damit über die Varianz Aussagen treffen kann.

Beispiel

Ein Beispiel zeigt, wie man für eine einfache Anwendung eine Fehler-*PSD*-Funktion erstellt. Wir wählen Gradiometriebeobachtungen mit einer Abtastrate von $\Delta t = 5$ s. Diese sollen eine Standardabweichung von 1 *mE* besitzen. Wir nehmen an, unsere *PSD*-Funktion hat den für jede Frequenz f_n konstanten Wert $P_n = p\Delta f$ in mE^2 , also die

2. Semi-analytischer Ansatz

Annahme eines weißen Rauschens. Somit folgt aus den Formeln (2.15) bis (2.17)

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \sum_{n=-N/2}^{N/2} p = \frac{Np}{T} = \frac{p}{\Delta t}.$$

Die Varianz entspricht also der Fläche des Rechtecks mit der Breite $\frac{1}{\Delta t} = 2 \cdot f_{max}$ und der Höhe p und damit gilt

$$p = \sigma^2 \cdot \Delta t = 5 \text{ mE}^2/\text{Hz}. \quad (2.18)$$

Beobachtungsfrequenzen

Die Werte der *PSDs* können also berechnet werden. An welchen Stellen, also für welche Frequenzen dies geschehen muss, soll nun beschrieben werden. Die Beobachtungen gehören zu bestimmten Frequenzen, die sich aus dem Winkelargument der Exponentialfunktion in Formel (2.11) ergeben. Die zugehörigen Frequenzen sind

$$\dot{\psi}_{mk} = k\dot{u} + m\dot{\Lambda}.$$

Bei einer Entwicklung bis zu einem endlichen L nehmen m und k alle ganzzahligen Werte aus $[-L; L]$ an. Wenn man mit auf die Bahnfrequenz n normierten Frequenzen $\beta_{mk} = \frac{\dot{\psi}_{mk}}{n}$ arbeitet und man $n = \dot{u}$ annimmt, ergeben sich die Beobachtungsfrequenzen zu

$$\beta_{mk} = \frac{\dot{\psi}_{mk}}{\dot{u}} = k + m \frac{\dot{\Lambda}}{\dot{u}} \quad (2.19)$$

(Gerlach (2006)). Damit ist für jedes m und k die Frequenz β_{mk} eindeutig festgelegt, für welches man dann das Gewicht für die Ausgleichung aus den gegebenen *PSD*-Werten ermitteln muss.

2.3. Funktionale des Potentials und ihre Transferkoeffizienten

Die in Formel 2.12 stehenden Transferkoeffizienten H_{lmk}^V sind, wie der Exponent anzeigt, nur gültig im Falle einer Beobachtung des Potentials selbst, welches in der Praxis nicht beobachtbar ist. In diesem Abschnitt wird nun beschrieben, wie Transferkoeffizienten der Funktionale des Potentials gefunden werden können, welche hauptsächlich als Beobachtungen in die Schwerefeldberechnungen einfließen. Dies sind:

- Bahnstörungen, beobachtet durch *high-low-Satellite-to-Satellite-Tracking* (*high-low-SST*) von hochfliegenden GPS-Satelliten auf tieffliegende *low-earth-orbiter* (*LEOs*)
- Entfernungen und deren Änderungen zwischen zwei *LEOs* (*low-low-SST*)
- Zweite Ableitungen des Potentials, Elemente des Gravitations Tensors, beobachtet durch Gradiometrie

Die Herleitung dieser Transferkoeffizienten erfolgt ausgehend von der Differentiation des Potentials selbst. Es sei wieder auf Sneeuw (2000) verwiesen.

2.3.1. Erste Ableitungen

Die ersten Ableitungen sind die drei Bestandteile des Gradienten ∇ des Potentials, also die Beschleunigungen. Darin stehen also die Ableitungen nach den drei Koordinaten, welche im rotierten System $\{u, \theta', r\}$ entsprechen. Dabei nimmt das Argument der Breite u die Rolle der Länge, θ' die der Kobreite und r die des radialen Abstandes ein. Somit nimmt der Gradient folgende Form an:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial u} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta'} \\ \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix}.$$

Die einzelnen Komponenten, von oben nach unten, sind die Ableitungen in Flugrichtung, quer zu ihr und radial nach außen. Die Transferkoeffizienten der ersten Ableitungen ergeben sich dann aus der Ableitung des Potentials in Formel (2.6). Sei $V = \sum_{lmk} V_{lmk}$ eine Kurzschreibweise dieser Formel. Den Ableitungsoperator darf man in die Summen

2. Semi-analytischer Ansatz

hineinziehen, und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}V &= \frac{1}{r} \frac{GM}{R} \sum_{lmk} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} i^{k-m} \bar{d}_{lmk}(I) \bar{P}_{lk}(0) \frac{\partial}{\partial u} e^{i(ku+m\Lambda)} &= \sum_{lmk} \frac{ik}{r} V_{lmk}, \\ \frac{\partial}{\partial z}V &= \frac{GM}{R} \sum_{lmk} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} i^{k-m} \bar{d}_{lmk}(I) \bar{P}_{lk}(0) e^{i(ku+m\Lambda)} &= \sum_{lmk} -\frac{l+1}{r} V_{lmk}.\end{aligned}$$

Die Ableitung nach θ' erfordert eine Ableitung der Inklinationsfunktion $\bar{F}_{lmk}(I)$, da hierin diese Koordinate versteckt ist. Wir definieren hier eine spezielle Inklinationsfunktion, welche für alle Funktionale verwendet wird, die aus einer Ableitung nach θ' entstehen. Diese ist die negative Ableitung

$$\bar{F}_{lmk}^*(I) = -\frac{\partial \bar{F}_{lmk}(I)}{\partial \theta'} = -i^{k-m} \bar{d}_{lmk}(I) \frac{\partial \bar{P}_{lk}(\cos \theta')}{\partial \theta'}.$$

Diese Ableitung muss an der Stelle $\theta' = \pi/2$ gebildet werden und damit gilt

$$\bar{F}_{lmk}^*(I) = i^{k-m} \bar{d}_{lmk}(I) \bar{P}_{l,k+1}(0). \quad (2.20)$$

Nun können wir die Transferkoeffizienten für alle drei ersten Ableitungen zusammenfassen und dabei noch eine Separation spezifischer Terme vornehmen. So bestehen die Transferkoeffizienten hier aus dem Produkt von vier Faktoren. Diese sind ein dimensionierender Faktor, welcher die Terme GM und R enthält, eine *upward continuation*, also eine Potenz von $\frac{R}{r}$, eine Inklinationsfunktion und ein spezifischer Transfer. Letzterer besteht aus Termen mit l und k , wobei für die Charakteristik des Funktionals die Ordnung dieser Koeffizienten maßgeblich ist. Zusammenfassend gilt

$$\begin{aligned}H_{lmk}^x &= \frac{GM}{R^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+2} \bar{F}_{lmk}(I) \cdot ik, \\ H_{lmk}^y &= \frac{GM}{R^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+2} \bar{F}_{lmk}^*(I) \cdot 1, \\ H_{lmk}^z &= \frac{GM}{R^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+2} \bar{F}_{lmk}(I) \cdot (-(l+1)).\end{aligned} \quad (2.21)$$

Wie erwartet hat der jeweilige spezifische Transfer bezüglich l und k immer die Ordnung 1 ($O(l, k)$), d.h. der Grad der Polynome in l und k des spezifischen Transfers ist

2. Semi-analytischer Ansatz

1. Dies stimmt mit der Ordnung der Ableitungen überein, für die die Formel (2.21) die Transferkoeffizienten darstellen. Dies gilt auch für die y -Komponente, da in $\bar{F}_{lmk}^*(I)$ das um eine Ordnung höhere *Legendre*-Polynom $\bar{P}_{l,k+1}(0)$ steckt.

2.3.2. Zweite Ableitungen

Die zweiten Ableitungen sind die neun Elemente des Gravitationstensors T , von denen aufgrund der Symmetrie sechs unterschiedlich sind. Diese sind durch Satellitengradiometrie beobachtbar (vgl. Rummel (1986a)). Es gilt für die Koordinaten $\{u, \theta', r\}$

$$T = \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{xy} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{xz} & V_{yz} & V_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2}V_{uu} + \frac{1}{r}V_r & -\frac{1}{r^2}V_{\theta'u} & \frac{1}{r}V_{ur} - \frac{1}{r^2}V_u \\ & \frac{1}{r^2}V_{\theta'\theta'} + \frac{1}{r}V_r & -\frac{1}{r}V_{\theta'r} + \frac{1}{r^2}V_{\theta'} \\ \text{symm.} & & V_{rr} \end{pmatrix},$$

wobei die Indizes die Ableitung nach der entsprechenden Variable bedeuten. Somit muss wieder Formel (2.6) nach den entsprechenden Variablen abgeleitet werden, und man gelangt zu den Transferkoeffizienten der zweiten Ableitungen. Von diesen benötigen H_{lmk}^{xy} und H_{lmk}^{yz} wieder die spezielle Inklinationsfunktion $\bar{F}_{lmk}^*(I)$. Bei H_{lmk}^{yy} ist dies nicht der Fall. Denn unter Benutzung der *Laplace*-Gleichung, die ja die Spurfreiheit des Tensors erklärt, kann dessen Term umgeschrieben werden zu

$$V_{yy} = -V_{xx} - V_{zz} = -\frac{1}{r^2}V_{uu} - \frac{1}{r}V_r - V_{rr}.$$

Die Transferkoeffizienten lauten dann

$$\begin{aligned} H_{lmk}^{xx} &= \frac{GM}{R^3} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+3} \bar{F}_{lmk}(I) \cdot (-(k^2 + l + 1)), \\ H_{lmk}^{yy} &= \frac{GM}{R^3} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+3} \bar{F}_{lmk}(I) \cdot (k^2 - (l + 1)^2), \\ H_{lmk}^{zz} &= \frac{GM}{R^3} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+3} \bar{F}_{lmk}(I) \cdot (l + 1)(l + 2), \\ H_{lmk}^{xy} &= \frac{GM}{R^3} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+3} \bar{F}_{lmk}^*(I) \cdot ik, \\ H_{lmk}^{xz} &= \frac{GM}{R^3} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+3} \bar{F}_{lmk}(I) \cdot (-ik(l + 2)), \\ H_{lmk}^{yz} &= \frac{GM}{R^3} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+3} \bar{F}_{lmk}^*(I) \cdot (-(l + 2)). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Auch hier kann man die Ordnung der Ableitung an den Ordnungen bezüglich l und k des spezifischen Transfers ablesen ($O(l^2, lk, k^2)$).

2.3.3. Bahnstörungen (high-low-SST)

Die Herleitung der Transferkoeffizienten für Bahnstörungen geschieht über die *Hill*-Theorie. Ein Körper, der sich im Gravitationsfeld der Erde im freien Fall befindet, bewegt sich nicht exakt auf einem Keplerorbit. Die Differenzen zu diesem tragen Informationen des Gravitationsfeldes. Die linearisierten *Hill*-Gleichungen beschreiben Bewegungsgleichungen im lokalen bahnbegleitenden System

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2n\dot{z} &= f_x = A_x e^{i\dot{\psi}t}, \\ \ddot{y} + n^2 y &= f_y = A_y e^{i\dot{\psi}t}, \\ \ddot{z} - 2n\dot{x} - 3n^2 z &= f_z = A_z e^{i\dot{\psi}t}.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Dabei ist mit der jeweils rechten Seite ein harmonischer Kraftterm eingefügt mit einer Amplitude A und einer Frequenz $\dot{\psi}$. Das bahnbegleitende Dreibein hat hier wieder seine x -Achse in Flugrichtung, die z -Achse in radialer Richtung nach außen und die y -Achse quer zur Flugrichtung und damit senkrecht zur Bahnebene. Die linken Seiten definieren, welche Komponenten der *Hill*-Gleichungen miteinander gekoppelt sind. In der die y -Komponente betreffende Gleichung kommt keine der anderen beiden vor. Somit kann diese separat von den anderen beiden gelöst werden. Die Störkräfte werden durch die Gravitationsbeschleunigungen hervorgerufen. Diese sind also die Elemente des Gradienten, und somit nehmen die Dimensionen der Transferkoeffizienten der ersten Ableitungen die Amplituden der Störkräfte ein. Der spezifische Transfer wird direkt aus den einzelnen Lösungen der Differentialgleichungen (2.23) hergeleitet. Eine wichtige Eigenschaft dieser Lösungen sind Singularitäten für die Umlauffrequenzen.

Auch hier werden die in Formel (2.19) definierten normierten Frequenzen β_{mk} verwendet. Mit diesen lassen sich als Lösung der *Hill*-Gleichungen die Transferkoeffizienten für die Bahnstörungen schreiben als

$$\begin{aligned}H_{lmk}^{\Delta x} &= R \left(\frac{R}{r}\right)^{l-1} \bar{F}_{lmk}(I) \cdot i \frac{2(l+1)\beta_{mk} - k(\beta_{mk}^2 + 3)}{\beta_{mk}^2(\beta_{mk}^2 - 1)}, \\ H_{lmk}^{\Delta y} &= R \left(\frac{R}{r}\right)^{l-1} \bar{F}_{lmk}^*(I) \cdot \frac{1}{1 - \beta_{mk}^2}, \\ H_{lmk}^{\Delta z} &= R \left(\frac{R}{r}\right)^{l-1} \bar{F}_{lmk}(I) \cdot \frac{(l+1)\beta_{mk} - 2k}{\beta_{mk}(\beta_{mk}^2 - 1)}.\end{aligned}\tag{2.24}$$

2. Semi-analytischer Ansatz

In den Termen des spezifischen Transfers erkennt man die Resonanzeigenschaften dieses Funktionals für $\beta_{mk} \in \{-1; 0; 1\}$. Die Ordnungen entsprechen mit $O(l, k)$ denen der ersten Ableitungen.

2.3.4. Entfernungen und deren Änderungen (low-low-SST)

Hier geht es nun um die Entfernung zwischen zwei *LEOs* S_1 und S_2 , die sich auf dem selben nominellen Orbit bewegen. Dadurch sind deren Koordinaten bis auf die Argumente der Breite u_1 und u_2 identisch. Es sei $u_1 - u_2 = 2\alpha > 0$. Abbildung 2.2 stellt die beschriebene Situation schematisch dar. Damit gilt für die nominell Distanz $\rho_0 = 2r \sin \alpha$. Durch

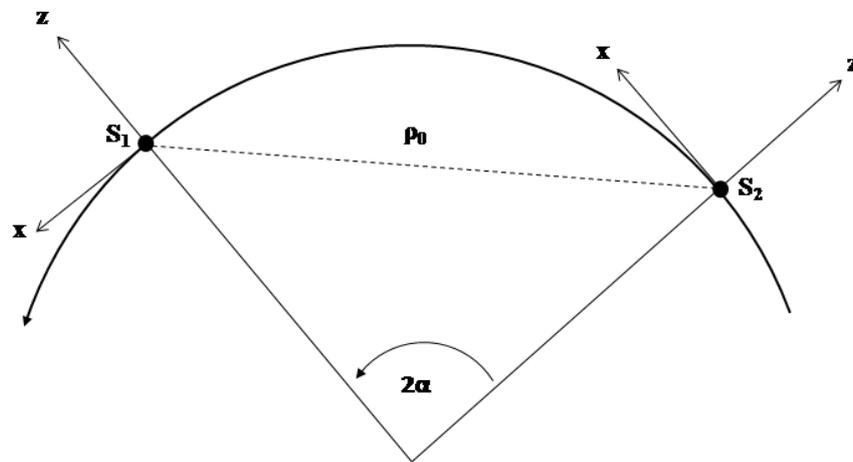


Abbildung 2.2.: Zwei *LEOs* auf dem selben nominellen Orbit

Bahnstörungen befinden sich die beiden Satelliten nicht an ihrer nominellen Position. Dabei spielen die Komponenten quer zum Orbit keine Rolle und die Abweichung von der nominellen Distanz wird zu

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= (\Delta x_1 - \Delta x_2) \cos \alpha + (\Delta z_1 + \Delta z_2) \sin \alpha = \\ &= (\Delta x(t + \tau) - \Delta x(t - \tau)) \cos \alpha + (\Delta z(t + \tau) + \Delta z(t - \tau)) \sin \alpha. \end{aligned}$$

Der Zeitpunkt t betrifft die Position genau zwischen den beiden Satelliten, und τ ist die Zeit, die ein Satellit benötigt für eine Bewegung um den Winkel α . Es gilt $\tau = \alpha/n$. Für

2. Semi-analytischer Ansatz

die Bahnstörungen Δx und Δz sind die Transferkoeffizienten aus dem vorigen Abschnitt bekannt. Aus einer Kombination dieser beiden setzen sich dann die Transferkoeffizienten für die Entfernungänderungen zusammen. Damit ist

$$H_{lmk}^{\Delta\rho} = 2i \cos \alpha \sin(\alpha\beta_{mk}) H_{lmk}^{\Delta x} + 2 \sin \alpha \cos(\alpha\beta_{mk}) H_{lmk}^{\Delta z}. \quad (2.25)$$

Diese enthalten also denselben dimensionierenden Faktor R und dieselbe Potenz für die *upward continuation* ($l - 1$) wie die Bahnstörungen. Da sie nicht von Δy abhängen, benützen sie auch nur die Inklinationsfunktion $\bar{F}_{lmk}(I)$. Für kleine Winkel α kann man $H_{lmk}^{\Delta\rho}$ noch vereinfachen zu

$$H_{lmk}^{\Delta\rho} \approx 2i \sin(\alpha\beta_{mk}) H_{lmk}^{\Delta x}. \quad (2.26)$$

Zeitliche Ableitungen

Die zeitlichen Ableitungen der Abweichungen $\Delta\rho$ sind ebenfalls beobachtbare Funktionale des Gravitationspotentials. Eine Zeitreihe y eines Funktionals F kann mit obiger Notation geschrieben werden als

$$y^F(t) = \sum_{lmk} H_{lmk}^F K_{lm} e^{i\dot{\psi}_{mk}t}.$$

Der Transfer der ersten beiden zeitlichen Ableitungen leitet sich dann her aus der Ableitung der Exponentialfunktion, und es gilt

$$\begin{aligned} H_{lmk}^{\dot{F}} &= i\dot{\psi}_{mk} H_{lmk}^F = in\beta_{mk} H_{lmk}^F, \\ H_{lmk}^{\ddot{F}} &= -\dot{\psi}_{mk}^2 H_{lmk}^F = -n^2\beta_{mk}^2 H_{lmk}^F. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Die Terme mit i und β werden dem jeweiligen spezifischen Transfer zugeordnet. Mit $n = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} = \left(\frac{R}{r}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$ ergeben sich die Terme für die Dimensionierung und die *upward continuation*. Damit lassen sich die Transferkoeffizienten der ersten und zweiten Ableitungen der Bahnstörungen $\Delta\dot{\rho}$ und $\Delta\ddot{\rho}$ herleiten (Sneeuw (2000)).

2. Semi-analytischer Ansatz

2.3.5. Tabelle mit verschiedenen Transferkoeffizienten

In Tabelle 2.2 sind die Transferkoeffizienten verschiedener Funktionale in ihre einzelnen Terme zerlegt auf einer Seite dargestellt.

Funktional	Dimension	<i>upw. cont.</i> (Pot. v. $\frac{R}{r}$)	Ink.- fkt.	Spezifischer Transfer	Formel
V	GM/R	$l + 1$	\bar{F}	1	(2.12)
x	GM/R^2	$l + 2$	\bar{F}	ik	(2.21)
y			\bar{F}^*	1	
z			\bar{F}	$-(l + 1)$	
xx	GM/R^3	$l + 3$	\bar{F}	$-(k^2 + l + 1)$	(2.22)
yy			\bar{F}	$k^2 - (l + 1)^2$	
zz			\bar{F}	$(l + 1)(l + 2)$	
xy			\bar{F}^*	ik	
xz			\bar{F}	$-ik(l + 2)$	
yz			\bar{F}^*	$-(l + 2)$	
Δx	R	$l - 1$	\bar{F}	$i \frac{2(l+1)\beta_{mk} - k(\beta_{mk}^2 + 3)}{\beta_{mk}^2(\beta_{mk}^2 - 1)}$	(2.24)
Δy			\bar{F}^*	$\frac{1}{1 - \beta_{mk}^2}$	
Δz			\bar{F}	$\frac{(l+1)\beta_{mk} - 2k}{\beta_{mk}(\beta_{mk}^2 - 1)}$	
$\Delta \dot{x}$	$\sqrt{\frac{GM}{R}}$	$l + \frac{1}{2}$	\bar{F}	$-\frac{2(l+1)\beta_{mk} - k(\beta_{mk}^2 + 3)}{\beta_{mk}(\beta_{mk}^2 - 1)}$	(2.27)
$\Delta \dot{y}$			\bar{F}^*	$i \frac{\beta_{mk}}{1 - \beta_{mk}^2}$	
$\Delta \dot{z}$			\bar{F}	$i \frac{(l+1)\beta_{mk} - 2k}{\beta_{mk}^2 - 1}$	
$\Delta \ddot{x}$	$\frac{GM}{R^2}$	$l - 1$	\bar{F}	$i \frac{2(l+1)\beta_{mk} - k(\beta_{mk}^2 + 3)}{\beta_{mk}^2(\beta_{mk}^2 - 1)}$	(2.27)
$\Delta \ddot{y}$			\bar{F}^*	$\frac{1}{1 - \beta_{mk}^2}$	
$\Delta \ddot{z}$			\bar{F}	$\frac{(l+1)\beta_{mk} - 2k}{\beta_{mk}(\beta_{mk}^2 - 1)}$	
$\Delta \rho$	$2i \cos \alpha \sin(\alpha \beta_{mk}) H_{lmk}^{\Delta x} + 2 \sin \alpha \cos(\alpha \beta_{mk}) H_{lmk}^{\Delta z}$				(2.26)
$\Delta \dot{\rho}$	$2i \cos \alpha \sin(\alpha \beta_{mk}) H_{lmk}^{\Delta \dot{x}} + 2 \sin \alpha \cos(\alpha \beta_{mk}) H_{lmk}^{\Delta \dot{z}}$				(2.27)
$\Delta \ddot{\rho}$	$2i \cos \alpha \sin(\alpha \beta_{mk}) H_{lmk}^{\Delta \ddot{x}} + 2 \sin \alpha \cos(\alpha \beta_{mk}) H_{lmk}^{\Delta \ddot{z}}$				

Tabelle 2.2.: Transferkoeffizienten verschiedener Funktionale

3. Schrittweise durch die Simulation

Nachdem nun die Theorie erklärt ist, kann mit dem praktischen Teil begonnen werden. Dazu wird in diesem Kapitel schrittweise beschrieben, aus welchen Berechnungen sich welche Zwischenergebnisse ergeben. Als erstes Endergebnis wird dabei ein Satz an Kugelfunktionskoeffizientenfehlern entstehen, welcher dann zur Validierung des Simulators dienen soll. Die einzelnen Programme gehören zu Sneeuw (1995b).

Alle Abbildungen in diesem Kapitel gehören zu der Simulation, die im folgenden beschrieben wird. Dabei dient ein einfaches Szenario als Ausgangspunkt. Die Satellitenparameter gleichen denen der *CHAMP*-Mission und somit dienen *high-low-SST*-Messungen als Beobachtungen. Das sind also Abweichungen im lokalen bahnbegleitenden System von der ungestörten Kepler-Bahn in den drei Komponenten in Flugrichtung (Δx), quer zu ihr (Δy) und in radialer Richtung nach außen (Δz).

3.1. Eingabeparameter

Bevor mit den Berechnungen gestartet wird, müssen einige Größen definiert werden. Diese betreffen die Konfiguration der Satellitenmission und spektrale Parameter mit den spektralen Beobachtungsfehlern als *PSD*-Werte in einem bestimmten Messfrequenzbereich. Daneben werden natürlich auch physikalische Konstanten und Koeffizienten von bestimmten Modellen benötigt.

Bahnparameter

Die Bahnparameter werden an die *CHAMP*-Mission angelehnt und sind in Tabelle 3.1 definiert.

Inklination	$i = 87^\circ$
Missionsdauer	$t_{mis} = 24 \cdot 30 \text{ Tage}$
Flughöhe	$h = 400 \text{ km}$

Tabelle 3.1.: *CHAMP* Bahnparameter

Hauptfrequenzen und Wiederholungsrate

Folgende Werte sind aus *GRS80* entnommen und als konstant definiert

$$\begin{aligned} a_e &= 6378137 \text{ m} \\ GM &= 3.986005 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2 \\ J_2 &= 1.08263 \cdot 10^{-3} \\ \dot{\theta} &= 7.292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s.} \end{aligned}$$

Die Bahnfrequenz ergibt sich dann nach *Kepler* zu

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{(a_e + h)^3}} \approx 1.8 \cdot 10^{-4} \text{ Hz.}$$

Aus den Formeln des nominellen Orbits (2.9) und (2.10) ergeben sich dann die Hauptfrequenzen \dot{u} und $\dot{\Lambda}$ zu

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 1.798 \cdot 10^{-4} \text{ Hz,} \\ \dot{\Lambda} &= -1.162 \cdot 10^{-5} \text{ Hz.} \end{aligned}$$

Die Wiederholungsrate ist dann

$$r_w = -\frac{\dot{u}}{\dot{\Lambda}} = 15.475. \quad (3.1)$$

Die Wiederholungsrate gibt den Quotienten aus der Anzahl an Umläufen durch die Anzahl an Tagen an. Also geschehen an einem Tag genau r_w Umläufe. Eine gleichmäßige Überdeckung mit Bodenspuren erhält man, wenn man zwei ganze Zahlen findet, deren Quotient r_w ergibt. Eine ganze Zahl an Umläufen erhält man zum ersten Mal nach 40 Tagen, nämlich 619. Somit können 40 Tage als Wiederholungszyklus dieser Mission gewählt werden.

Spektrale Parameter

Zu den spektralen Parametern gehört die obere Grenze des Frequenzbereichs, in dem die Messwerte vorliegen können. Diese ergibt sich aus der maximalen *sampling*-Rate, welche die sogenannte *Nyquist*-Frequenz festlegt. Wenn man eine Abtastrate des *GPS*-Empfängers auf *CHAMP* mit 30 Sekunden annimmt, ist mit Formel (2.15)

$$f_{max} = \frac{1}{2 \cdot 30s} = \frac{1}{60} \text{ Hz} \approx 0.0167 \text{ Hz.}$$

3. Schrittweise durch die Simulation

Die gewählte Missionsdauer begrenzt den Frequenzbereich nach unten. Nach Formel (2.16) ist also

$$f_{min} = \frac{1}{t_{miss}} \approx 1.61 \cdot 10^{-8} \text{ Hz}.$$

Der einfachste Fall einer *PSD*-Funktion ist ein konstanter Verlauf für jede Frequenz, ein weißes Rauschen. Dieser Fall wird für diese Simulation leicht an die *CHAMP*-Mission und deren Bahnbestimmung mit *GPS* angepasst. Der Verlauf einer *PSD*-Funktion für die Bahnbestimmung mit *GPS* kann nach Müller (2001) beschrieben werden durch

$$S(\beta) = \frac{w_1 - w_2}{1 + (\beta/\beta_d)^2} + (p - w_1)e^{s(\beta-1)^2} + w_2, \quad (3.2)$$

wobei S die Einheit m/\sqrt{Hz} hat. Die verschiedenen Parameter sind in Tabelle 3.2 erläutert.

β	auf Bahnfrequenz normierte Frequenz (Einheit <i>cpr</i> : <i>cycles per revolution</i>)
w_1	Rauschniveau zwischen 0 und 1 <i>cpr</i>
w_2	Rauschniveau für hohe Frequenzen
β_d	Frequenz des Übergangs von w_1 auf w_2
p	Rauschniveau bei der Umlauffrequenz (1 <i>cpr</i>)
s	Schärfe des Maximums bei der Umlauffrequenz ($s < 0$)

Tabelle 3.2.: Parameter der Formel (3.2)

Aus Wermuth (2008) kann man das Niveau der Fehler-*PSDs* an den Grenzen des Frequenzbereiches entnehmen und auf etwa $1 \text{ m}/\sqrt{Hz}$ für niedrige und $0.01 \text{ m}/\sqrt{Hz}$ für hohe Frequenzen festlegen. Für die beiden Komponenten in Flugrichtung (Δx) und quer zu ihr (Δy) nehmen wir für die Positioniergenauigkeit eine Standardabweichung von 2 cm an und realistischerweise für die radiale Komponente (Δz) den doppelten Wert. An diese Randbedingungen geknüpft kann nun eine analytische Funktion für die Fehlerspektraldichten nach obigem Muster eingeführt werden. Die verschiedenen Parameter dafür werden auf die in Tabelle 3.3 definierten Werte gesetzt.

In Abbildung 3.1 sind die einzelnen *PSD*-Werte über die Frequenz graphisch dargestellt. Nach Formel (2.17) ergeben sich daraus genau die anfangs angenommenen Standardabweichungen für die Positionierung. Die Eigenschaften dieser *PSD*-Funktion können an den drei Summanden in Formel (3.2) abgelesen werden. Für kleine Frequenzen β verschwindet der zentrale Term, da ja $s < 0$. Somit startet die Funktion auf dem Level $S(0) = w_1 - w_2 + w_2 = w_1$. Für hohe Frequenzen verschwinden die ersten beiden Summanden, und es gilt $\lim_{\beta \rightarrow \infty} S(\beta) = w_2$. Der Übergang von w_1 auf w_2 ist durch den

3. Schrittweise durch die Simulation

Komponenten:	$\Delta x, \Delta y$	Δz	Einheit
w_1	0,43	0,55	m/\sqrt{Hz}
w_2	0,02	0,05	m/\sqrt{Hz}
β_d	5	10	cpr
p	0,9	1,9	m/\sqrt{Hz}
s	-10	-10	$1/cpr$

Tabelle 3.3.: Parameter für die analytische *PSD*-Funktion in Formel 3.2

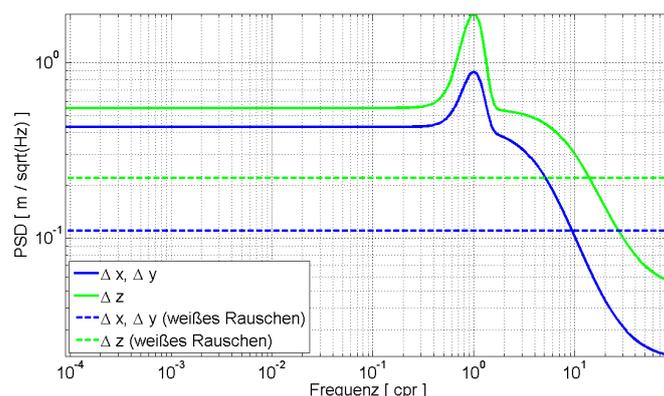


Abbildung 3.1.: Fehler-PSD für GPS-Positionsbestimmung

Nenner des ersten Summanden definiert. Es ist im Falle $w_1 > w_2$ ein quadratisches Abfallen, welches bei $\beta = \beta_d$ den Wert $\frac{w_1+w_2}{2}$ ergibt. Diesen Termen ist durch den zweiten Summanden eine Glockenfunktion überlagert, welche ihr Maximum bei der Umlauffrequenz $\beta = 1$ erreicht. Die Höhe dieses Maximums ist durch den Faktor $(p - w_1)$ definiert und befindet sich bei $S(1) \approx w_1 - w_2 + p - w_1 + w_2 = p$. Die Schärfe dieses Maximums wird durch den Parameter s eingestellt und wächst mit seinem Betrag.

Wenn man für diese Simulation ein weißes Rauschen annimmt und die Standardabweichungen beibehalten will, müssen die Fehlerspektraldichten nach Formel (2.18) konstant auf $p_{x,y} = 2cm \cdot \sqrt{30s} = 10.95 \text{ cm}/\sqrt{Hz}$ bzw. $p_z = 4cm \cdot \sqrt{30s} = 21.91 \text{ cm}/\sqrt{Hz}$ liegen.

Zusammenhang der Spektren

Der Simulator arbeitet mit verschiedenen Spektren, die aufeinander abgebildet werden. Der Zusammenhang dieser Spektren stellt eine Verbindung her zwischen dem maximalen sphärisch-harmonischen Grad L_{max} und der maximalen *sampling*-Rate Δt . Diese begrenzt über die *Nyquist*-Frequenz das Frequenzband der Beobachtungen nach oben. Die

3. Schrittweise durch die Simulation

Definition der *sampling*-Rate legt dadurch den sphärisch-harmonischen Grad fest, bis zu dem das Gleichungssystem lösbar ist. Veranschaulicht ist dies in Abbildung 3.2 auf der rechten Seite.

Es können nur Gewichte für diejenigen Beobachtungen berechnet werden, für welche auch *PSD*-Werte vorliegen. Die außerhalb dieses Bereiches liegenden Beobachtungen bekommen somit einen unendlich großen Fehler und damit das Gewicht 0 zugewiesen.

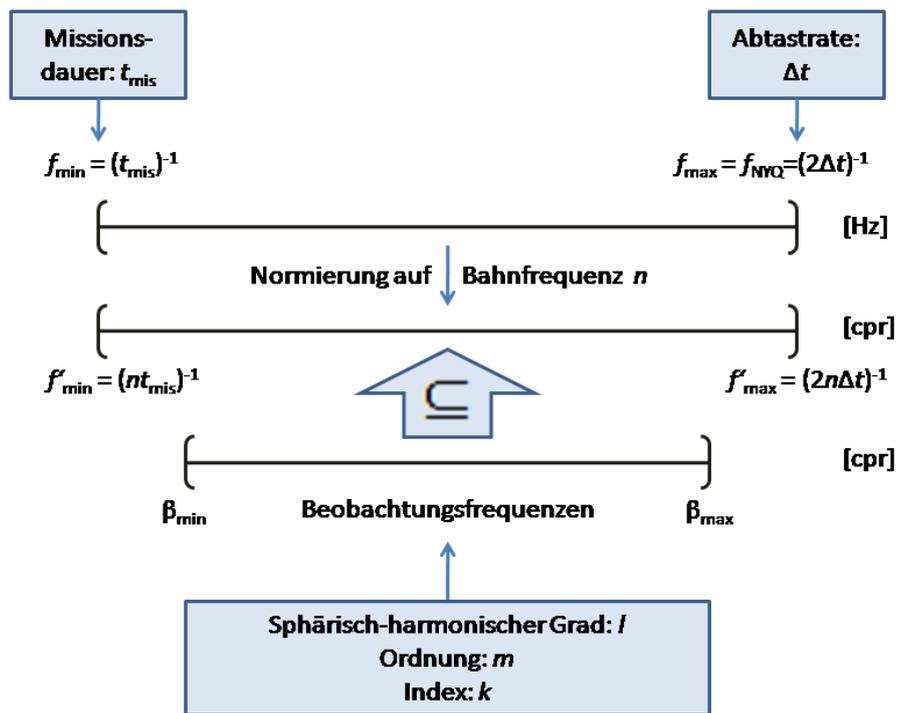


Abbildung 3.2.: Zusammenhang der Spektren

Die Beobachtungsfrequenzen β_{mk} sind positiv definiert und ergeben sich aus Formel (2.19) zu

$$\beta_{mk} = \left| k - \frac{m}{|r_w|} \right|. \quad (3.3)$$

Der Wertebereich der β_{mk} sollte innerhalb des Definitionsbereiches der *PSD*-Funktion liegen. Da β_{mk} nach Formel (3.3) maximal einen Wert von $L_{\text{max}} \left(1 + \frac{1}{|r_w|} \right)$ annehmen

3. Schrittweise durch die Simulation

kann, folgt direkt

$$L_{max} \leq \frac{1}{2n\Delta t \left(1 + \frac{1}{|r_w|}\right)}, \quad (3.4)$$

was in dieser Simulation einen Wert von ungefähr 87 ergibt. Wir wählen einen maximalen Entwicklungsgrad von $L_{max} = 80$.

Die Wahl der Missionslänge t_{mis} kann nicht so klar definiert werden. Aus der linken Seite von obigem Schema folgt $t_{mis} \geq \frac{1}{n \cdot \beta_{min}}$. Da aber für $l = 0$ auch immer β_{mk} den Wert Null annehmen kann, müsste die Missionslänge unendlich groß gewählt werden, um endliche Gewichte für alle β_{mk} berechnen zu können. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, die Normalgleichungsmatrix erst ab einem Grad $L_{min} > 0$ aufzustellen. Hier wird für die Grade 0 und 1 keine Lösung berechnet, also $L_{min} = 2$.

Für ein globales Schwerfeld benötigt man eine gleichmäßige globale Überdeckung der Erdkugel mit Bodenspuren, woraus folgt, dass t_{mis} mindestens dem Wiederholungszyklus des Satelliten von 40 Tagen entsprechen sollte. Theoretisch ist das Gleichungssystem auch für eine kleinere Missionsdauer lösbar. Aber dies ergibt keine realistische Konfiguration für ein globales Schwerfeld. Die Genauigkeit wächst mit steigender Missionsdauer mit ihrer Quadratwurzel, da man mehr Beobachtungen erhält. Mit der Wahl von 2 Jahren vermindert man somit die *aliasing*-Effekte durch zu geringe Überdeckung mit Bodenspuren.

3.2. Normalgleichungssystem

Hier wird nun beschrieben, wie man die einzelnen Blöcke der Normalgleichungsmatrix füllt. In diesem Fall haben wir drei verschiedene Beobachtungen (Δx , Δy und Δz). Es ist möglich, für jede dieser Beobachtungen die Normalgleichungsmatrix separat aufzustellen und hinterher diese aneinander zu hängen. Deswegen sei hier nur die Δx -Komponente beschrieben. Die anderen beiden Normalgleichungsmatrizen werden analog gebildet.

Gewichtsmatrix

Die Aufstellung der Gewichtsmatrizen geschieht für jede Ordnung m separat. Dazu müssen die Gewichte für die zugehörigen normierten Frequenzen β_{mk} berechnet werden. Dabei gilt für jedes m : $k \in \mathbb{N}$ und $k \in [-L_{max}; L_{max}]$.

Der Definitionsbereich der gegebenen *PSD*-Werte S ist vorerst in der Einheit *Hz*. Dieser muss transformiert werden in den Bereich der β_{mk} mit der Einheit *cpr*. Dies geschieht

3. Schrittweise durch die Simulation

durch Division der Frequenzen durch die Bahnfrequenz n . Nun können die Fehler für die betreffenden β_{mk} durch eine lineare Interpolation aus den zugehörigen PSD -Werten ermittelt werden. Dabei muss eine Diskretisierung vorgenommen werden. Diese besteht aus der Multiplikation der interpolierten Fehler mit der Quadratwurzel aus der spektralen Auflösung $df = \frac{1}{t_{mis}}$. Für Bahnstörungen erhalten wir Fehler der Einheit m durch

$$\sigma_{mk} [m] = S [m/\sqrt{Hz}] \cdot \sqrt{df} \approx 1.6075 \cdot 10^{-8} \cdot PSD. \quad (3.5)$$

Der Simulator rechnet mit dimensionslosen Größen. Deswegen fällt bei der Berechnung der Transferkoeffizienten der dimensionierende Faktor aus Tabelle 2.2 weg, und die Gewichte werden durch diesen geteilt. Für Bahnstörungen ist das die große Halbachse der Erde a_e , und es gilt $\sigma_{mk} = \frac{S \cdot \sqrt{df}}{a_e}$.

Nun können die betreffenden Gewichte p aus den dimensionslosen Fehlern berechnet werden. Die Gewichte sind invers proportional zu den Varianzen σ_{mk}^2 und somit

$$p = \frac{1}{\sigma_{mk}^2}. \quad (3.6)$$

Die Beobachtungen werden als unkorreliert angenommen, und so ist die Gewichtsmatrix die Diagonalmatrix mit den Werten von p auf der Diagonalen.

Abbildung 3.3 zeigt die einzelnen Größen, die für das Aufstellen der Gewichte relevant sind für bestimmte Ordnungen m . Der Wertebereich der β_{mk} in dieser Simulation reicht dabei von 0 cpr bis über 80 cpr . Die Werte für die verschiedenen m unterscheiden sich, wie man in Formel (3.3) erkennen kann, in einer Verschiebung in die positive k -Richtung um $\frac{m}{|r_w|}$. Da die Wiederholungsrate für $LEOs$ etwa 16 beträgt, ist der Versatz der β_{mk} für zwei verschiedene Ordnungen m in etwa gleich, und die Abbildungen gleichen sich für verschiedene Missionssimulationen. Diese Ähnlichkeit gilt ebenso für die beiden anderen Beobachtungen.

Da die PSD -Fehlerfunktionen für Bahnstörungenbeobachtungen bei der Bahnfrequenz immer ein Maximum aufweisen, ist auch die Form der σ_{mk} -Funktionen charakteristisch für diese Art mit ihrem *peak* bei $k \approx 0$.

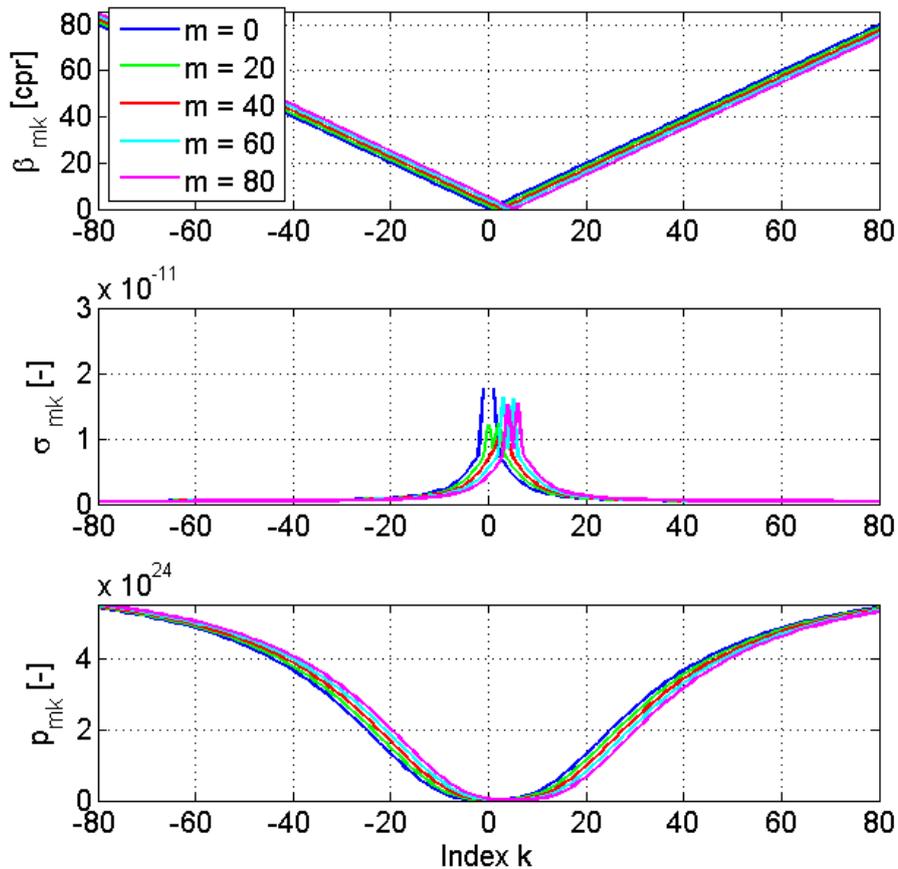


Abbildung 3.3.: β_{mk} , σ_{mk} und p_{mk} für ausgewählte Ordnungen m bezüglich Δx

Transferkoeffizienten

Die Designmatrix enthält die Transferkoeffizienten, vgl. Tabelle 2.2. Bei deren Berechnung entfällt die Anbringung des dimensionierenden Faktors, damit sie zu den dimensionslosen Gewichten passen, und die Designmatrix ist das Produkt aus den drei Faktoren der *upward continuation*, dem spezifischen Transfer und der Inklinationsfunktion. Diese werden für die jeweilige Ordnung m aufgestellt und besitzen als Zeilenindex den Index k und als Spaltenindex den Grad l .

Die Inklinationsfunktionen sind definiert in Formel (2.7) für $\bar{F}_{lmk}(I)$ bzw. (2.20) für $\bar{F}_{lmk}^*(I)$. Die Berechnung der Inklinationsfunktionen erfolgt im Simulator mit der Metho-

3. Schrittweise durch die Simulation

de der *Fourier*-Transformation. Dabei werden Symmetrieeigenschaften der Basisfunktionen P_{lm} , \cos und \sin ausgenutzt. Die *Legendre*-Funktionen werden entlang des Orbits berechnet. Deren Argumente sind sphärische Koordinaten $\{\lambda, \phi, r\}$, welche durch eine Transformation aus den Bahn-Koordinaten $\{u, I\}$ gewonnen werden:

$$\{u, I\} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \cos I \\ \sin u \sin I \end{pmatrix} \rightarrow \{\lambda, \phi, r\}.$$

Die Berechnung erfolgt dann über die *Fourier*-Transformation der Funktion $\bar{P}_{lm}(\theta) \cdot (\cos(m\lambda) + \sin(m\lambda))$ (vgl. Sneeuw (1995b)).

Invertierung der Normalgleichungsmatrix

Nun existiert die Design- und die Gewichtsmatrix für jede Ordnung m . Diese muss nun invertiert werden. Die Invertierbarkeit hängt von den Eingabeparametern, in erster Linie von der Missionsdauer und dem maximalen sphärisch-harmonischen Grad ab. Die Invertierung geschieht auch separat für jede Ordnung m . Dabei kann Speicherplatz gespart werden, indem die Symmetrie der Kovarianzmatrix ausgenutzt wird, so dass nur die untere oder die obere Dreiecksmatrix abgespeichert werden muss. Durch die Invertierung der Normalgleichungsmatrix für ein bestimmtes m erhält man dann die Varianz-Kovarianzmatrix der Koeffizienten der Ordnung m für die Grade m bis L_{max} , wobei deren Varianzen auf der Diagonalen platziert sind.

Die Koeffizientenfehler allein können ebenfalls in platzsparender Weise abgespeichert werden. Dies findet statt in einer quadratischen Matrix der Größe $L_{max} + 1$. Die zonalen C_{n0} -Koeffizienten befinden sich in der ersten Spalte, wobei mit dem Zeilenindex der Grad n wächst. Somit besteht die Diagonale der Ergebnismatrix aus den sektoriellen C_{nn} -Koeffizienten. Die S_{n1} -Koeffizienten sind in der ersten Zeile (S_{11} als zweites Element).

3.3. Kurzanleitung

Die einzelnen Schritte, die in diesem Kapitel beschrieben sind, sollen nun übersichtlich zusammengefasst werden. In Tabelle 3.4 ist erklärt, wie man von den Eingabeparametern bis zu den Fehlern der Schwerefeldkoeffizienten gelangt. Als Referenzen stehen in der letzten Spalte die betreffenden Formeln.

Missions- parameter	Wahl der Inklination und der Flughöhe		
	Missionsdauer (mind. Wiederholungszyklus)		Formel (3.4)
	maximaler Entwicklungsgrad L_{max} bzw. Abtastrate Δt		
	$L_{max} \leq \frac{1}{2n\Delta t(1+1/r_w)}$		
		$f_{min} = 1/t_{mis}$	
		$f_{max} = 1/2\Delta t$	F. (2.15)
	Art der Beob.	GPS, <i>low-low-SST</i> , Grad.	
PSD	weißes Rauschen	$[U/\sqrt{Hz}] = \sigma[U] \cdot \sqrt{\Delta t}$	F. (2.18)
	analytische PSD	Def.-bereich: $[f_{min}; f_{max}]$	
	Kontrolle	$\sigma^2 = 2 \cdot \sum PSD \cdot \Delta f$	F. (2.17)
Berechnung	Norm. der Freq.	$f_0 = f/n$ mit $n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$	
	Wiederholungsrate	$r_w = \frac{\dot{u}}{\Lambda}$	F. (3.1)
	Dimensionierung	dim	Tab. 2.2
Schleife über Ordnung m	$m \in \{0; 1; \dots L_{max}\}$		
	$l \in \{m; m+1; \dots L_{max}\}$		
	$k \in \{-L_{max}; -L_{max}+1; \dots L_{max}\}$		
	Separation für versch. Paritäten von $l-k$ möglich		
	Beobachtungsfreq.	$\beta_{mk} = \left k - \frac{m}{ r_w } \right $	F. (3.3)
	Interp. der <i>PSD</i> -Werte, Diskret. und Dim.		
		$\sigma_{mk} = \frac{psd}{dim \cdot \sqrt{t_{mis}}}$	F. (3.5)
	Gewichtsmatrix	$P = diag(1/\sigma_{mk}^2)$	F. (3.6)
	Designmatrix (dimensionslos)		Tab. 2.2
	$A = (spez. Transf.) \cdot (upw. cont.) \cdot \bar{F}_{lmk}^{(*)}$		
NEQ	$N_{ml} = A^T P A$		
Invertierung	$\sigma_{ml} = \sqrt{diag((N_{ml})^{-1})}$		

Tabelle 3.4.: Kurzanleitung

3.4. Validierung

Die Validierung des Simulators erfolgt über einen Vergleich der Koeffizientenfehler mit dem TUM-2S-Modell (vgl. igem (2009)). Dieses Schwerefeld beinhaltet Bahnstörungen-Beobachtungen des *CHAMP*-Satelliten von zwei Jahren. Darin enthalten sind formale Fehler der Koeffizienten bis zum *SH* Grad 60.

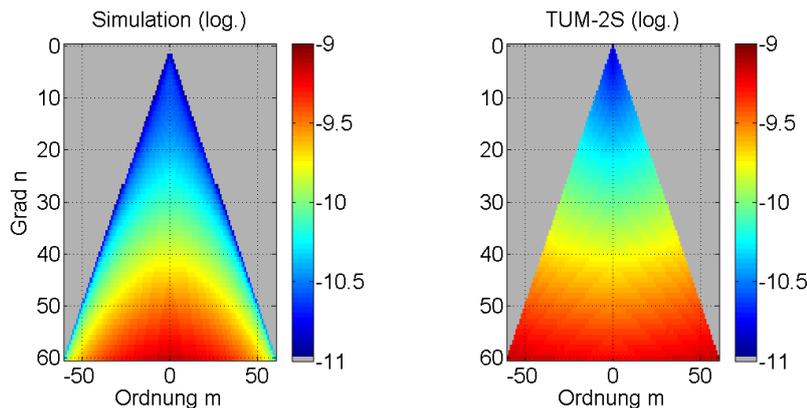


Abbildung 3.4.: Dreiecksplot der Koeffizientenfehler (log. zur Basis 10)

Der erste graphische Vergleich betrifft die Darstellung der Fehler in einem Dreiecksplot (Abbildung 3.4). Der Wertebereich ist für beide Abbildungen identisch gewählt mit den Grenzen 10^{-11} und 10^{-9} . Der farbliche Verlauf mit variierendem Grad ist vergleichbar. Bei variierender Ordnung sind jedoch Unterschiede erkennbar. Während die simulierten Fehler mit sinkender Ordnung zunehmen, verhält sich dies beim Vergleichsmodell umgekehrt. Somit werden die Fehler der sektoriellen Koeffizienten (C_{nn} und S_{nn}) zu gering und die der zonalen Koeffizienten (C_{n0}) zu hoch geschätzt.

Abbildung 3.5 stellt nun den Verlauf der quadratischen Mittelwerte (*RMS*, *root mean square*, Formel 3.7) für jeden Grad dar. Für einen festen Grad n gilt

$$RMS_n = \sqrt{\frac{\sum_{m=0}^n (C_{nm}^2 + S_{nm}^2)}{2n + 1}}. \quad (3.7)$$

Zum Vergleich ist durch die mit Kaula beschriftete Kurve der Signalgehalt des Schwerefelds mit dargestellt. Wie schon aus der Dreiecksdarstellung zu vermuten, stimmt der Verlauf der Fehler mit variierendem Grad bei beiden Fehlersätzen nahezu überein. Die simulierten und die zum Modell gehörenden *RMS*-Fehler steigen mit jedem Grad gleich an. Dabei verläuft die simulierte Kurve etwas nach unten versetzt. Ein Grund dafür könnte eine zu optimistische Annahme bezüglich der Beobachtungsgenauigkeiten sein. Durch

3. Schrittweise durch die Simulation

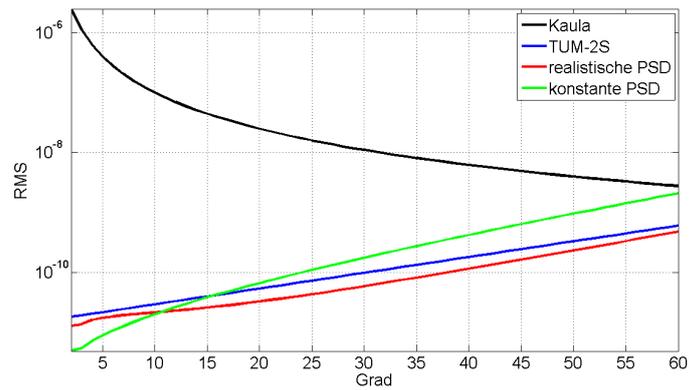


Abbildung 3.5.: RMS pro Grad der Koeffizientenfehler

Versehen der beiden *PSD*-Funktionen in Abbildung 3.1 mit einem konstanten Faktor, der wenig größer als 1 ist, könnte man die Ergebniskurve mit den *RMS*-Werten pro Grad auf die Modellkurve schieben. Damit lässt sich sagen, dass sich mit dem Simulator realistische Aussagen treffen lassen, was den Fehlergehalt pro Grad von Schwerfeldkoeffizienten betrifft.

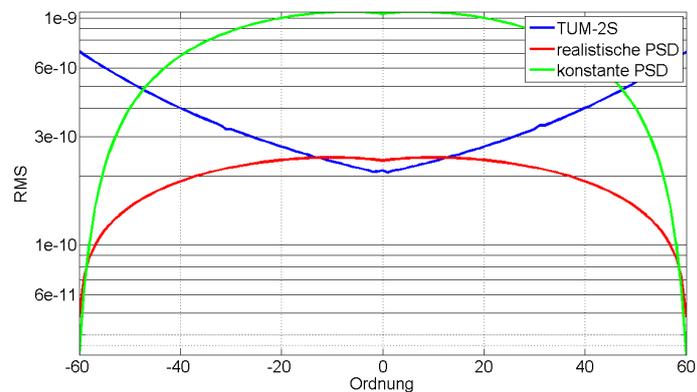


Abbildung 3.6.: RMS pro Ordnung der Koeffizientenfehler

Man muss sich natürlich im Klaren sein, dass der Verlauf der Fehler-*RMS* in Abhängigkeit des Grades gewisse Informationen nicht offen legt. Dies betrifft vor allem den Verlauf der Fehler pro *SH* Ordnung. Dazu ist in Abbildung 3.6 der Verlauf der *RMS*-

3. Schrittweise durch die Simulation

Werte bezüglich der Ordnung m dargestellt, vgl. Formel (3.8). Für ein festes m gilt

$$RMS_m = \left\{ \left(\begin{array}{l} \sqrt{\frac{\sum_{n=m}^{n_{max}} C_{nm}^2}{n_{max}-m+1}}, m \geq 0 \\ \sqrt{\frac{\sum_{n=m}^{n_{max}} S_{nm}^2}{n_{max}-m+1}}, m < 0 \end{array} \right) \right\}. \quad (3.8)$$

Hier werden deutliche Unterschiede zwischen Simulation und Vergleichsmodell sichtbar, was ja schon am Dreiecksplot zu vermuten war.

Die Ursachen für die Unterschiede können in einer falschen Wahl der Eingabeparameter liegen. Deren Einfluss wird im nächsten Kapitel erörtert. Um aber schon einmal klar zu machen, wie wichtig eine genaue Kenntnis der Fehlerspektraldichten der Beobachtungen ist, sind in den Abbildungen 3.5 und 3.6 die RMS -Werte einer weiteren Simulation eingetragen. Diese beinhaltet exakt dieselben Eingabeparameter bis auf die PSD -Funktion. Diese ist hier als konstant eingeführt worden auf einem Level von $10.95 \text{ cm}/\sqrt{Hz}$ für Δx und Δy bzw. $21.91 \text{ cm}/\sqrt{Hz}$ für Δz , um die Gesamtleistung und damit die Varianz der Beobachtungsfehler auf einem Level 2 bzw. 4 cm zu halten. Bei Verwendung der konstanten PSD -Funktionen als Beobachtungsfehler entstehen größere Unterschiede zum Vergleichsmodell, auch wenn die Größenordnung der RMS -Fehler pro Grad in etwa gleich geblieben ist.

4. Variation der Eingabeparameter

Die Güte der Ergebnisse des Simulators ist, wie die letzten Ergebnisse gezeigt haben, abhängig von der Wahl der Eingabeparameter. Die Einflüsse dieser Parameter sollen nun in diesem Kapitel erläutert werden. Gestartet wird mit einer Simulation mit Gradiometriebeobachtungen. Nacheinander werden dann die einzelnen Parameter verändert und die Unterschiede der Koeffizientenfehler in graphischen Darstellungen verglichen. Bei Variation eines Parameters werden die anderen auf den Werten in Tabelle 4.1 gehalten.

Beobachtungen	Gradiometrie (Diagonalelemente T_{xx} , T_{yy} und T_{zz})
Entwicklungsgrad	$L_{max} = 200$
Missionsdauer	$t_{miss} = 12 \cdot 30 \text{ Tage}$
Flughöhe	$h = 300 \text{ km}$
PSD	weißes Rauschen auf $1 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$
Inklination	$i = 90^\circ$

Tabelle 4.1.: Eingabeparameter der Ausgangssimulation

Dabei werden die Art der Beobachtungen und der maximale Entwicklungsgrad für alle Simulationen in diesem Kapitel konstant gehalten. Die Untersuchungen gelten somit der Missionsdauer, der Flughöhe, der Fehlerspektraldichte der Beobachtungen und der Inklination. Die Ergebnisse sind alle durch die *RMS*-Werte der Koeffizientenfehler pro sphärisch-harmonischen Grad dargestellt. Zum Vergleich dient jeweils die Signalstärke, genähert durch Kaula.

4.1. Missionsdauer

Gestartet wird diese Analyse mit der Variation der Missionsdauer. Zu erwarten ist eine Verkleinerung der Koeffizientenfehler mit wachsender Beobachtungsdauer. Die Ergebnisse der einzelnen Simulationen sind in Abbildung 4.1 dargestellt. Dabei läuft die Missionsdauer von *30 Tagen* in logarithmischer Skalierung bis hin zu über *21 Jahren*. Wie

4. Variation der Eingabeparameter

erwartet erhält man die kleinsten Fehler mit der längsten Missionsdauer. Eine Erhöhung der Missionsdauer bewirkt somit einen Versatz der *RMS*-Fehler pro Grad nach unten. Dies wirkt auf jeden Grad in gleicher Weise. Zu beachten ist hier die logarithmische Darstellung, die gleichabständige *RMS*-Fehlerkurven für die verschiedenen Missionszeiträume entstehen lässt. Mit steigender Missionsdauer erhält man mehr Beobachtungen für jede Unbekannte. Somit verbessert sich die Redundanz, und damit verkleinern sich die Varianzen der Unbekannten.

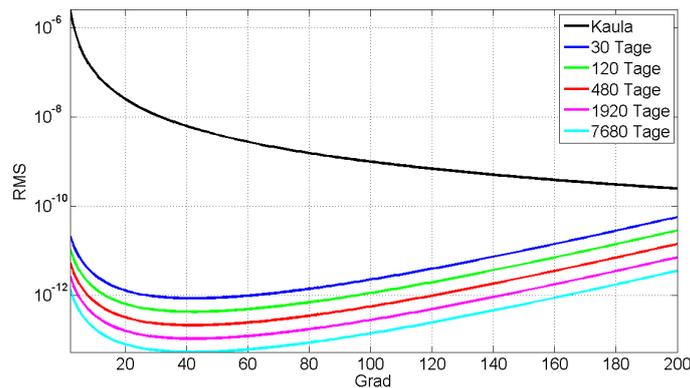


Abbildung 4.1.: Variation der Missionsdauer

4.2. Flughöhe

Als nächstes wird der Einfluß der Flughöhe untersucht. Sie läuft von 100 *km* bis 500 *km* in Abständen von 100 *km*. Die Ergebnisse sind wieder als *RMS*-Fehler pro Grad in Abbildung 4.2 dargestellt. Das Signal der Gravitation nimmt mit der Entfernung ab. Je näher man an den erzeugenden Massen ist, je niedriger also die Flughöhe des Messsystems gewählt ist, desto mehr Details des Schwerefeldes können beobachtet werden. So kann erklärt werden, warum mit geringerer Flughöhe die Fehler der Koeffizienten für höhere Grade niedriger ausfallen. Die Variation der Flughöhe bewirkt keine Verschiebung der *RMS*-Fehlerkurven; die einzelnen Kurven in Abbildung 4.2 starten für Grad 0 alle in etwa auf demselben Niveau von 10^{-11} . Vielmehr dreht man die *RMS*-Kurve um diesen Anfangspunkt im Uhrzeigersinn - also nach unten - bei Verkleinerung und gegen den Uhrzeigersinn bei Vergrößerung der Flughöhe.

4. Variation der Eingabeparameter

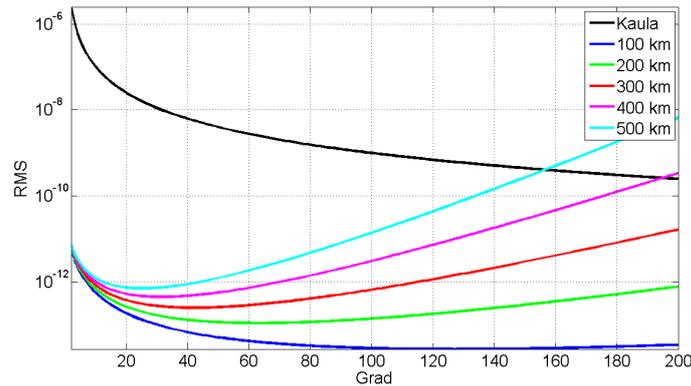


Abbildung 4.2.: Variation der Flughöhe

4.3. PSD

Der Einfluß der Fehler-*PSDs* soll nun etwas detaillierter betrachtet werden. Der erste Abschnitt nimmt ein weißes Rauschen für die Beobachtungsfehler an. Beim zweiten werden verschiedene charakteristische analytische Funktionen als *PSD*-Werte eingeführt.

Konstante PSD

Ausgangspunkt für die Beobachtungsgenauigkeit sind hier nun Fehlerspektraldichten mit konstantem Verlauf (weißes Rauschen) auf logarithmisch versetzten Werten. Die Variation des *PSD*-Levels wirkt in ähnlicher Weise wie die der Missionsdauer (Ergebnisse in Abbildung 4.3). Das Niveau der Fehlerspektraldichten der Beobachtungen ist wieder logarithmisch skaliert und nimmt Werte zwischen 0.1 und 25.6 mE/\sqrt{Hz} an. Wenn man also die Lebenszeit des Satelliten erhöhen will, um durch eine längere Missionsdauer ein genaueres Schwerefeld berechnen zu können, könnte man genauso gut ein Messinstrument mit erhöhter Messgenauigkeit einbauen.

Analytische PSD

Nun werden Ergebnisse verglichen, welche durch verschiedene analytische *PSD*-Funktionen gewichtet worden sind. Im ersten Fall haben die *PSD*-Funktionen alle die Form $PSD_1(f) = a \cdot f^b$, wobei darauf geachtet wird, dass die Gesamtleistung für alle *PSDs* 1 mE beträgt. Fünf verschiedene Fälle werden betrachtet mit $b \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Die zugehörigen Werte für den Faktor a lauten: $\{1.78 \cdot 10^{-8}; 1.53 \cdot 10^{-3}; 2.24; 38.73; 500\}$. Dabei sind die Unstetigkeitsstellen bei $f = 0$ für $b \in \{-2; -1\}$ ersetzt worden durch den Wert von

4. Variation der Eingabeparameter

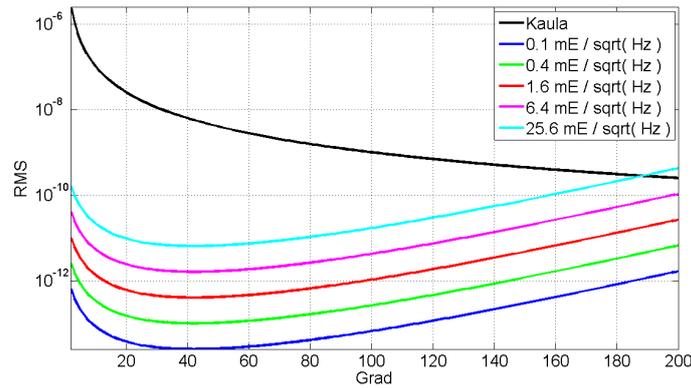


Abbildung 4.3.: Variation der Messgenauigkeit

$f = 10^{-5} \text{ Hz}$. Graphische Darstellungen dieser Funktionen beinhaltet Abbildung 4.4. Die resultierenden Fehler-*RMS*-Kurven sind in Abbildung 4.5 dargestellt. Man erkennt

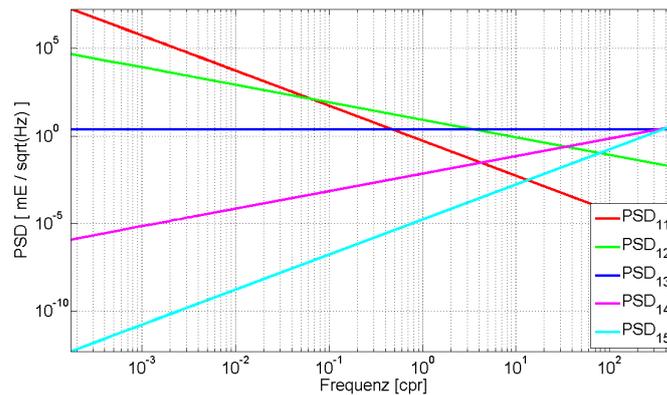


Abbildung 4.4.: analytische PSD ($PSD_1 = a \cdot f^b$)

einen Zusammenhang zwischen dem Exponenten der analytischen *PSD*-Funktionen b und der durchschnittlichen Steigung der Fehler-*RMS*-Werte pro Grad. Während die *RMS*-Werte der Koeffizientenfehler, die zu PSD_{11} gehören, im Mittel pro Grad kaum ansteigen, tun dies diejenigen mit PSD_{15} als Beobachtungsfehler um 4 Größenordnungen von Grad 0 bis 200.

Eine weitere interessante analytische *PSD*-Form ist eine Sprungfunktion $PSD_2(f) = \begin{pmatrix} a, & f \leq c \\ b, & f > c \end{pmatrix}$. Sie weist ab einer bestimmten Frequenz allen Beobachtungen darüber einen größeren Fehler b zu. Die Gesamtvarianz ist mit 1 mE wieder konstant, und alle

4. Variation der Eingabeparameter

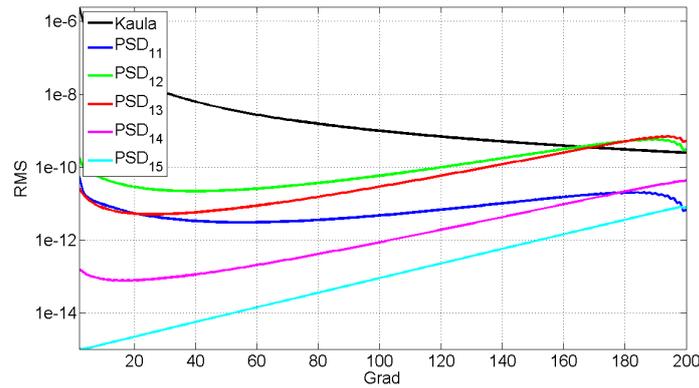


Abbildung 4.5.: *RMS* pro Grad für analytische PSD_1 -Funktionen

fünf Funktionen starten für Frequenzen unter der Sprungfrequenz c mit dem Wert $a = 0.01 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$. Die Sprungfrequenzen sind Vielfache der Umlauffrequenz, also $c = k \cdot n$ mit $k \in \{10; 20; 50; 100; 150\}$. Dazu gehören dann die Werte $b \in \{2.26; 2.28; 2.35; 2.48; 2.63\}$. Abgebildet sind diese Funktionen und die zugehörigen Ergebnis-*RMS*-Kurven in den Abbildungen 4.6 und 4.7. Deutlich zu erkennen sind die Stellen, an denen die *RMS*-Werte

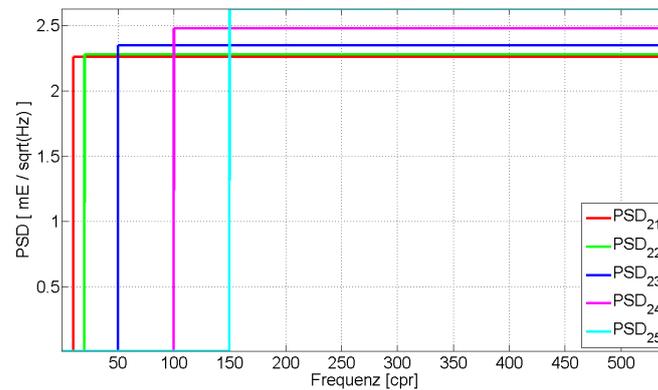


Abbildung 4.6.: PSD als Sprungfunktionen (PSD_2)

der Koeffizientenfehler stark ansteigen. Sie befinden sich genau an den Graden $n = k$, die zu dem Faktor k der jeweiligen Sprungfrequenz passen. Wie schon im vorigen Kapitel theoretisch gezeigt ist hier der Zusammenhang zwischen der Beobachtungsfrequenz und dem sphärisch-harmonischen Grad zu sehen.

4. Variation der Eingabeparameter

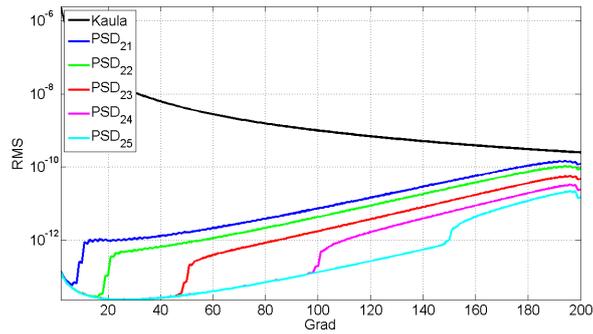


Abbildung 4.7.: *RMS* pro Grad für analytische PSD_2 -Funktionen

4.4. Inklination

Befindet sich ein Satellit auf einer Bahn mit einer Inklination $i \in [0^\circ; 180^\circ]$, so besitzt die geographische Breite seiner Bodenspuren einen Wertebereich von $[-90^\circ - |90^\circ - i|; 90^\circ - |90^\circ - i|]$. Somit sind in Breiten außerhalb dieses Bereiches, also dem nördlichen und südlichen Polarloch, keine Beobachtungen vorhanden. Es ist also zu erwarten, dass auch das Schwerefeld in diesen Bereichen schlecht bestimmbar ist.

Abbildung 4.8 stellt die *RMS*-Werte der Koeffizientenfehler von Simulationen mit verschiedenen Inklinationen i als Eingaben dar ($i \in \{80^\circ; 82^\circ; 84^\circ; 86^\circ; 88^\circ; 92^\circ\}$). Je stärker die gewählte Inklination also von 90° abweicht, umso größer sind die durchschnittlichen Fehler der Schwerekoeffizienten. Dabei macht es keinen Unterschied, ob man eine Inklination größer oder kleiner als 90° wählt.

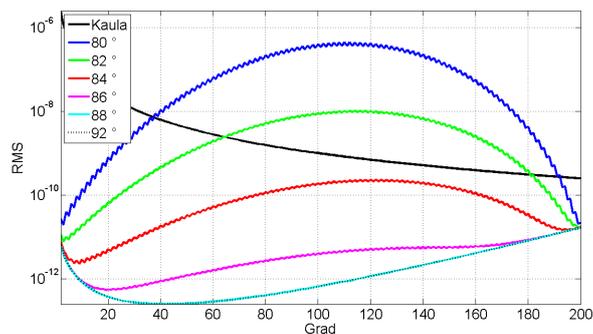


Abbildung 4.8.: Variation der Inklination

5. Polarlochproblem

Aus Abbildung 4.8 würde man vermuten, dass eine nicht polare Satellitenmission im Vergleich zu einer polaren ein in allen Ordnungen viel schlechteres Schwerefeld liefert. Außerhalb der Polarlöcher wird durch eine solche Mission die Erdkugel allerdings gleich oder sogar noch dichter mit Bodenspuren bedeckt. Somit sollten hier die Schwerekoeffizienten mit einem maximal genauso großen Fehler bestimmbar sein. Dabei muss natürlich die Frage gestellt werden, ob sich die Polarlöcher auf bestimmte sphärisch-harmonische Koeffizienten abbilden, oder ob alle Koeffizienten betroffen sind.

Eine theoretische Überlegung bringt uns der Antwort näher. Nehmen wir an, wir haben ein globales Schwerefeld mit zugehörigen Fehlern. Die Fehler sind nur von der geographischen Breite abhängig und zwar mit der Bedingung, dass sie konstant den Wert $a > 0$ besitzen für $|\phi| < \phi_p < 90^\circ$ und den Wert $b > a$ für $|\phi| > \phi_p$. Eine sphärisch-harmonische Synthese transformiert dieses globale Fehlerfeld auf einen Kugelfunktionskoeffizientensatz. Da dieses Feld aber nur breitenabhängig ist, also eine rein zonale Struktur aufweist, müssen alle nicht zonalen Koeffizienten S_{nm} und C_{nm} mit $m \neq 0$ gleich Null sein. Die gesamte Information der Fehlerverteilung muss daher in den zonalen Koeffizienten C_{n0} stecken.

Nach diesen Überlegungen erwartet man aus einer nicht polaren Mission also ein Schwerefeld, bei dem sich die größten Fehler um die zonalen Koeffizienten versammeln. Betrachtet man in Abbildung 5.1 die Dreiecksplots der Koeffizientenfehler der Simulationen mit variierender Inklination, erkennt man genau diesen Effekt. Anhand dieser Abbildung lassen sich auch die sehr hohen *RMS*-Werte in Abbildung 4.8 erklären, bei denen ja die Mittelwerte über alle Ordnungen aufgezeichnet sind. Dabei spielen die um mehrere Größenordnungen kleineren Werte der tesseralen Koeffizienten kaum eine Rolle.

5.1. Mediandarstellung

Bei einer Verteilung der Koeffizientenfehler wie in Abbildung 5.1 vor allem in den oberen beiden Darstellungen bzgl. der Inklinationen 80° und 82° , erhält man also mit der Bildung der *RMS*-Werte pro Grad keine aussagekräftigen Darstellungen. Ein anderes Werkzeug ist der *Median*-Filter, dessen Nutzen in diesem Zusammenhang untersucht werden soll.

5. Polarlochproblem

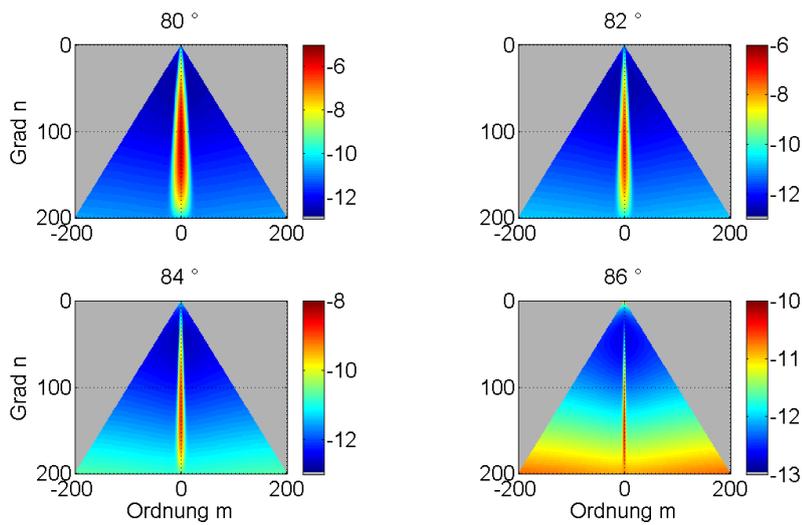


Abbildung 5.1.: Zu Abbildung 4.8 gehörende Dreiecksplots (logarithmisch)

Dabei dienen die der Abbildung 4.8 zugrunde liegenden Simulationen als Datenquelle. Deutlicher wird der Fehlergehalt pro Ordnung (Formel (3.8)) in Darstellung 5.2.

Der *Median* ist ein Mittelungsoperator, der eine Zahlenreihe auf eine Zahl abbildet, indem er die Reihe der Größe nach sortiert und dann den mittleren Wert übergibt. Veranschaulicht ist dies in Abbildung 5.3. Die blaue gestrichelte Linie stellt einen Querschnitt für den Grad $n = 150$ durch den Dreiecksplot von Abbildung 5.1 mit der Inklination $i = 80^\circ$ dar. Man erkennt deutlich die starke Vergrößerung der Fehler für Ordnungen kleiner als etwa 25. Wenn man nun diese Datenreihe der Größe nach sortiert und den Wert in der Mitte herausgreift, kommt man zum *Median*. Der große Unterschied zum *RMS*-Wert wird in der Abbildung ebenfalls deutlich.

Nun muss untersucht werden, wann sich der Einsatz des *Medians* lohnt, also welche Aussagekraft die rote Linie in Abbildung 5.3 bezüglich des Fehlergehaltes pro Grad hat. Dazu wird zum Vergleich ein Datensatz benötigt, welcher diesen Polarlocheffekt nicht in seinen Koeffizientenfehlern trägt. Hier sei die identische Simulation mit einer polaren Konfiguration gewählt. Deren *RMS*-Wert soll dann mit dem *Median* der nicht polaren Simulation verglichen werden.

Abbildung 5.4 soll diesen Vergleich veranschaulichen. Es ist eine Detailansicht der Koeffizientenfehler mit dem auf die „guten“ Koeffizienten eingeschränkten Wertebereich. Gut zu erkennen ist der sehr ähnliche, wenn auch nicht ganz identische Verlauf der Koeffizientenfehler pro Grad mit den verschiedenen Inklinationen für größere Ordnungen als etwa 25. Allein aus dieser Tatsache könnte man zu der Ansicht gelangen, dass man das

5. Polarlochproblem

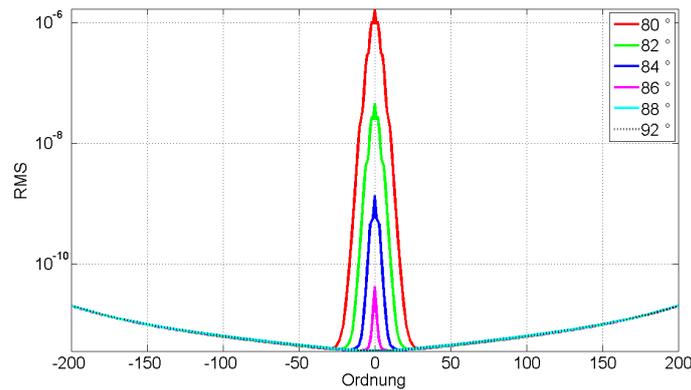


Abbildung 5.2.: *RMS*-Fehler pro Ordnung für verschiedene Inklinationen

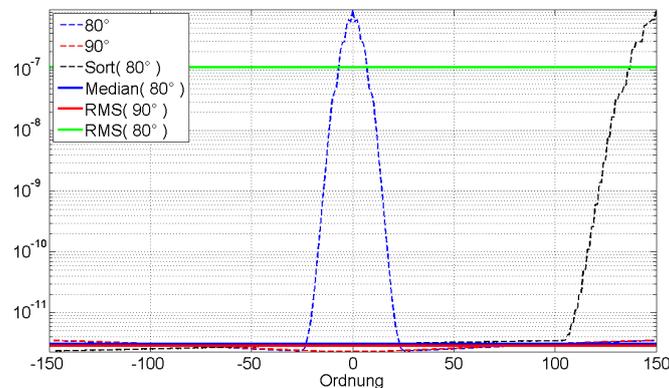


Abbildung 5.3.: Medianfilter

Problem des Polarlochs in den Koeffizienten umgehen könnte, indem man unabhängig von der Inklination der betreffenden Mission eine Inklination von 90° in den Simulator eingibt. Man erhält so durch Bildung der *RMS*-Werte pro Grad sicherlich vergleichbare Werte. Will man diese Vereinfachung jedoch nicht eingehen, kann man auf das Werkzeug des *Medians* zurückgreifen. In diesem Fall liegt die Größenordnung der Differenz der beiden Operatoren bei etwa 10^{-13} . Es ist allerdings leicht vorzustellen, dass dieses Werkzeug keine vergleichbaren Ergebnisse liefert, wenn der Bereich der schlechten Koeffizienten die halbe Breite der Abbildung 5.4 übersteigt.

In Abbildung 5.5 sind die *RMS*-Werte pro Grad für die Inklinationen 80° und 90° und die *Median*-Werte für die Inklination 80° zu sehen. Gut zu erkennen ist der sehr ähnliche Verlauf von *Median*(80°) und *RMS*(90°). In dieser Simulation ist der Einsatz des

5. Polarlochproblem

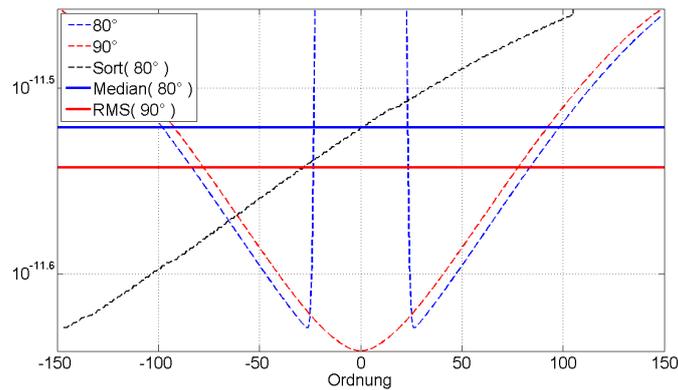


Abbildung 5.4.: Median und RMS

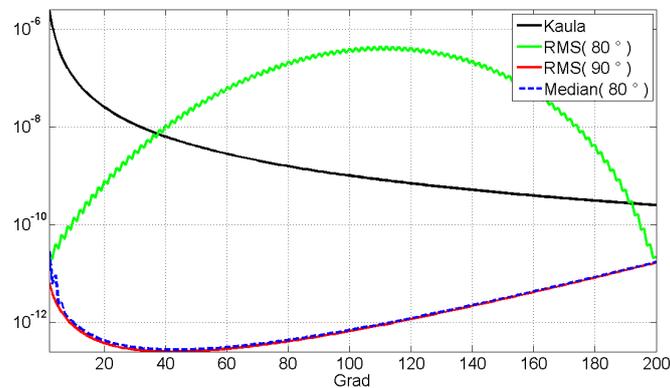


Abbildung 5.5.: Median und RMS pro Grad

Medians somit sinnvoll, um die „schlechten“ Werte um die zonalen Koeffizienten in der Fehlerdarstellung pro Grad auszublenden.

Die Darstellung einer analytisch erzeugten Koeffizientenfehlerreihe zeigt ein Beispiel, in dem der *Median* keine vergleichbaren Ergebnisse liefert. Der Testdatensatz ist auch für den Grad 150 in etwa demselben Wertebereich generiert wie die Werte in Abbildung 5.3. In Abbildung 5.6 sind drei Szenarien gezeigt, in denen der *RMS*-Wert der Koeffizientenfehler für eine Lösung ohne schlechte zonale Koeffizienten ($RMS(90^\circ)$) den *Median*-Wert der Polarlochdaten ($Median(80^\circ)$) um mehr als eine Größenordnung übersteigt. Dabei sind die Fehler jeweils so generiert, dass sie für steigende Ordnung m in etwa einem $1/m$ -Verhalten folgen. In solch angeordneten Fällen würde also der Einsatz des *Medians* einen viel zu geringen Fehlergehalt pro Grad erzeugen. Hier sind nun zwei Möglichkeiten

5. Polarlochproblem

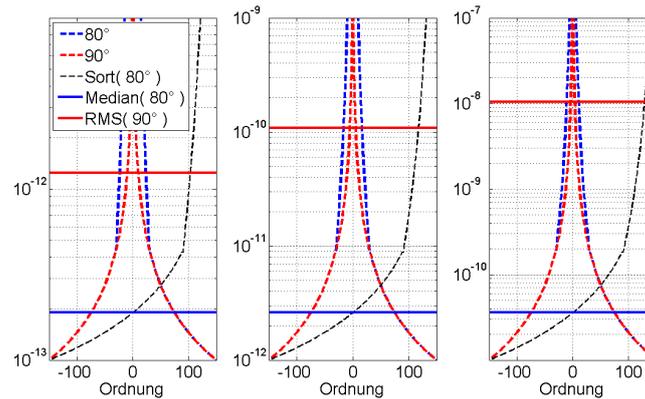


Abbildung 5.6.: Testdatensatz

vorgestellt worden, wie man einer so gearteten Fehlerverteilung (siehe Abbildung 5.1) begegnen soll. Diese sind die Verwendung des *Medians* oder der Übergang zu einer polaren Missionssimulation. Dabei lässt sich im Allgemeinen sagen, dass eine polare Simulation eine Überschätzung des Fehlergehaltes pro Grad herbeiführt. In Abbildung 5.4 ist dies gut an dem Verlauf der beiden gestrichelten Fehlerlinien für Ordnungen größer als 25 zu erkennen und zu begründen mit der Tatsache, dass eine geneigte Bahn in niedrigeren Breiten eine dichtere Abdeckung zur Folge hat als eine polare.

Der Median wird in dieser Anwendung dazu benutzt, hohe Fehler um die zonalen Koeffizienten auszublenden, die durch den Polarlocheffekt entstehen. Sind allerdings neben diesen hohen Fehlern weitere Fehlermaxima, beispielsweise am äußeren Rand eines Dreiecks um die sektoriellen Koeffizienten ($n = m$), würden diese ebenfalls ausgeblendet. Dann gehen durch den Median zu viele Informationen verloren. In jedem Falle ist eine Fehlerfortpflanzung nützlich, um die geographische Verteilung der Fehler zu ermitteln. Diese wird im Folgenden beschrieben.

5.2. Fehlerfortpflanzung von Kugelfunktionskoeffizientenfehlern aufs Geoid

Eine genauere Vorstellung des Fehlergehaltes eines Kugelfunktionskoeffizientensatzes erhält man durch eine volle Fehlerfortpflanzung der Koeffizientenfehler aufs Geoid. Als Eingangsdaten hierfür dienen die in Block-Diagonalgestalt vorliegenden Varianz-Kovarianzmatrizen, die man als Ergebnis einer Simulation erhält. Wir wollen nun für einen Punkt (θ, λ) den resultierenden Geoidfehler berechnen. Die Darstellung in Rummel (2006) für

5. Polarlochproblem

die Fehlerfortpflanzung auf Geoidhöhen N lässt sich für diese Anwendung in die komplexe Schreibweise übersetzen und es gilt

$$N = R \sum_{l=2}^{L_{max}} \sum_{m=-l}^l \bar{Y}_{lm}(\theta, \lambda) \bar{K}_{lm} = YK.$$

Dabei enthält die Matrix Y die Anteile $R\bar{P}_{|m|}(\cos\theta)e^{m\lambda}$ und der Vektor K die Schwerefeldkoeffizienten. Wenn nun Q die Varianz-Kovarianzmatrix der harmonischen Koeffizienten ist, gilt für die Varianz der Geoidhöhe

$$\sigma_N^2 = YQY^T. \quad (5.1)$$

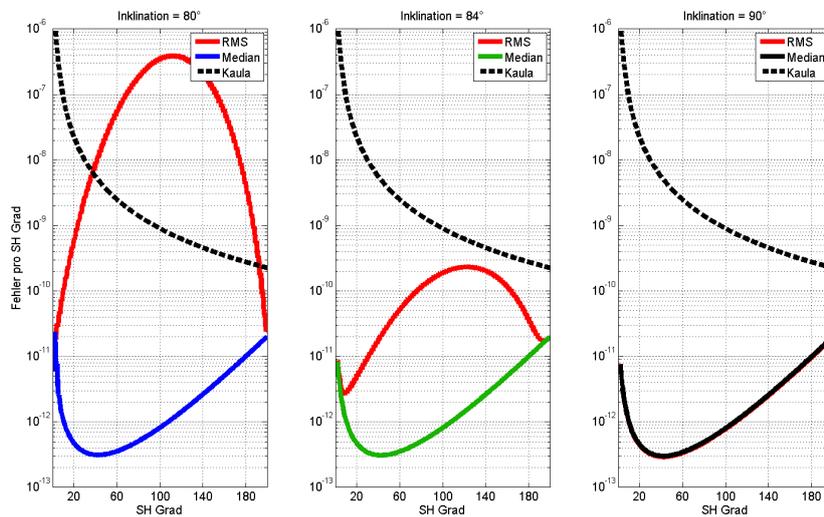


Abbildung 5.7.: Fehler pro SH Grad, Vergleich zwischen RMS und Median

Um diesen Ansatz mit den vorherigen zu vergleichen nehmen wir die Varianz-Kovarianzmatrizen der Simulation der Inklinationsvariationen als Daten (Abbildung 4.8). Die *Median*-Werte dieser Simulationen sind pro *SH* Grad im Vergleich mit den RMS-Werten in Abbildung 5.7 für drei verschiedene Inklinationen dargestellt. Die Fehlerfortpflanzung führt zu kumulativen Fehlern. Um also diese Werte validieren zu können, sind in Abbildung 5.8 kumulative Geoidfehler dargestellt. Kumulative Geoidfehler in Metern ergeben

5. Polarlochproblem

sich aus

$$cum_l = R \sqrt{\sum_{n=2}^l \sum_{m=-n}^n \sigma_{nm}^2}$$

und die zugehörigen Median Werte dann

$$cum_l^{Median} = R \sqrt{\sum_{n=2}^l Median_n^2 \cdot (2n + 1)}.$$

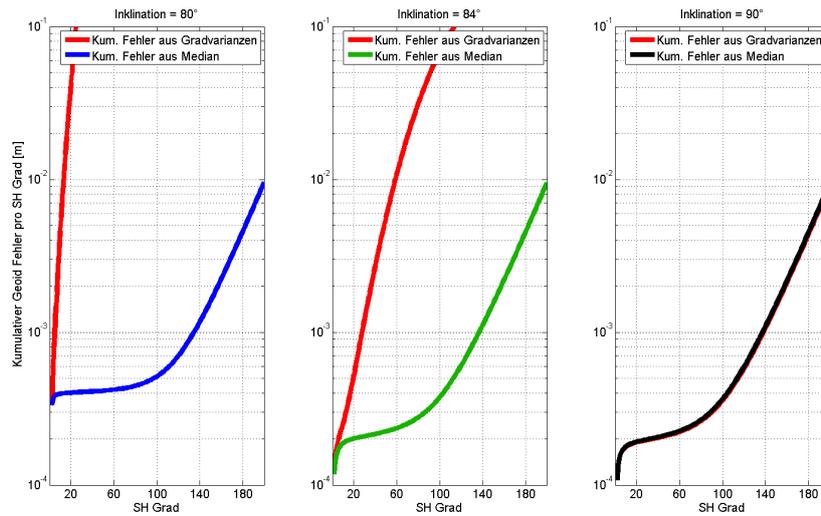


Abbildung 5.8.: Kumulativer Geoidfehler, Vergleich zwischen RMS und Median

Die Ergebnisse der Fehlerfortpflanzung sind längenunabhängige und äquatorsymmetrische Geoidfehlerfelder und sind für vier verschiedene maximale SH Grade in Abbildung 5.9 dargestellt. Man erkennt die erwartete Abbildungseigenschaft. Die großen Fehler um die zonalen Koeffizienten bilden sich um die Polkappen ab und je weiter die Inklination von 90° entfernt ist, desto größer ist dieses Polarloch. Um nun die kumulativen Fehler untereinander zu vergleichen, sind in Tabelle 5.1 die jeweiligen Werte aus Abbildung 5.8 mit den Medianwerten über die geographische Breite aus Abbildung 5.9 aufgelistet. Dabei finden sich auch die übrigen Inklinationen, die nicht in den Abbildungen dargestellt sind. Man erkennt, dass die beiden Methoden im Median sehr gut übereinstimmen, außer für Inklination 80° . Die Medianwerte aus der Fehlerfortpflanzung liegen im Mittel 9 Prozentpunkte unter denen aus den kumulativen Werten, wobei die Übereinstimmung mit dem Entwicklungsgrad zunimmt. Man erkennt, daß diese Ergebnisse mit Vorsicht zu genießen sind und eine genaue Untersuchung in verschiedene Richtungen von nöten

5. Polarlochproblem

ist. Der Median gibt einen ersten Eindruck und lässt relative Aussagen zu. Für absolute Werte und die geographische Verteilung der Fehler ist vor allem die Fehlerfortpflanzung als Hilfsmittel heranzuziehen.

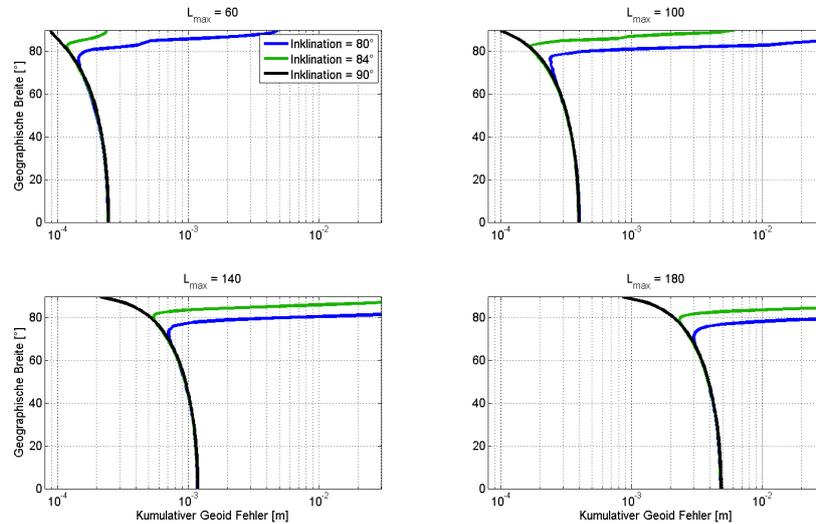


Abbildung 5.9.: Geoidfehler in Abhängigkeit der Breite

Inklination [°]	$L_{max} = 60$		$L_{max} = 100$		$L_{max} = 140$		$L_{max} = 180$	
	KUM	FFP	KUM	FFP	KUM	FFP	KUM	FFP
80	0.42	0.22	0.51	0.36	1.17	1.09	4.55	4.46
82	0.24	0.22	0.38	0.36	1.11	1.07	4.53	4.40
84	0.24	0.22	0.37	0.35	1.11	1.05	4.51	4.33
86	0.23	0.21	0.37	0.34	1.10	1.03	4.47	4.22
88	0.23	0.21	0.36	0.34	1.09	1.00	4.45	4.10
90	0.23	0.21	0.36	0.34	1.09	1.01	4.45	4.10

Tabelle 5.1.: Numerischer Vergleich zwischen Median und Fehlerfortpflanzung [mm], KUM: kum. Geoidfehler aus Median (Abbildung 5.8), FFP: Median der Fehlerfortpflanzung über die Breite (Abbildung 5.9)

6. Ausblick

Zusammenfassend soll hier ein Kapitel stehen, in dem der Missionssimulator besprochen wird, also für welche Art von Simulationen seine Verwendung sinnvoll ist. Dabei geht es vor allem darum, worauf geachtet werden muss, um aussagekräftige Informationen aus dessen Ergebnissen zu erhalten. Außerdem sollen dessen Grenzen erörtert werden. Davon ausgehend werden noch Möglichkeiten analysiert, die Anwendungen noch zu erweitern.

6.1. Bewertung

Bei Verwendung des Simulators fällt zu allererst auf, dass er schnell Ergebnisse liefert. Dies liegt vor allem an der Implementierung, die einige Möglichkeiten ausschöpft, die Rechenzeit zu minimieren. Dazu gehören die Strukturierung der Aufstellung der Normalgleichungsmatrizen mit der separaten Berechnung für jede Ordnung m und verschiedene Paritäten von $l - k$. So ergeben sich nur geringe Matrizengrößen, die leicht zu invertieren sind. Allerdings darf man die Grenzen der Ergebnisse nicht unterschlagen. Durch die Vereinfachungen des nominellen Orbits gehen natürlich Informationen verloren, die sich bis in die Ergebnisse und damit in die Koeffizientenfehler hinein fortpflanzen. Erinnerung sei dabei an Abbildung 3.6, welche die Validierung im Hinblick auf den Fehlergehalt pro Ordnung ungünstig erscheinen lässt. Allerdings erscheinen die Ergebnisse des Fehlergehaltes pro Grad durchaus realistisch. Dies kann auch durch die Ergebnisse im Kapitel 4, welches die Variation der Eingabeparameter untersucht, unterstrichen werden. Somit kann der Simulator sehr brauchbare Informationen liefern, welche Satellitenmissionen, wie kombiniert, die gewünschten Fortschritte in bestimmten spektralen Bereichen liefern können. Dabei müssen natürlich ausreichend Informationen zum Fehlerverhalten der Messsysteme vorhanden sein.

6.2. Erweiterungsmöglichkeiten

Zwei Bereiche für Erweiterungsmöglichkeiten des Simulators sollen hier nun kurz angeschnitten werden. Der erste umfasst die Analyse zeitvariabler Schwerefeldgrößen. Ein

weiterer ist die Implementierung weiterer Transferkoeffizienten, die für bestimmte Missionsszenarien relevant sind.

6.2.1. zeitvariable Schwerefeldgrößen

Zeitvariable Schwerefeldgrößen und die Trennung vom konstanten Anteil sind ein wichtiges Ziel von Schwerefeldmissionen. Eine Möglichkeit diese zu erfassen ist sicherlich die Realisierung von kurzen Missionsintervallen und der Schwerefeldberechnung innerhalb dieser. Wenn man beispielsweise mit Beobachtungen von 30 Tagen ein Schwerefeld bis zu einem bestimmten Grad signifikant lösen kann, ist man in der Lage, monatliche Mittel des Schwerefeldes untereinander zu vergleichen und deren Variationen darzulegen. Dies ist mit *GRACE*-Beobachtungen möglich. Durch eine Kombination mit *GOCE*-Beobachtungen können diese Ergebnisse noch verbessert werden. Eine solche Kombination ist im Anhang als Fallstudie angeführt.

Den Simulator dahingehend zu erweitern, dass eine zeitliche Komponente mitgeführt wird und diese analysiert werden kann, wäre eine weitere Möglichkeit. Der semi-analytische Ansatz stellt ein Schwerefeldfunktional in Abhängigkeit der Koordinaten des nominellen Orbits u und Λ dar (Formel (2.11)). Ein Ansatz wäre die Einführung von zeitvariablen Schwerefeldkoeffizienten $\bar{K}_{lm}(t)$. Dann könnte man schreiben

$$V(u, \Lambda, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=\max(|m|, |k|)}^{\infty} \bar{H}_{lmk}^V \bar{K}_{lm}(t) e^{i(ku+m\Lambda)}.$$

Man könnte annehmen, dass die zeitvariablen Koeffizienten $\bar{K}_{lm}(t)$ gewissen periodischen Variationen unterliegen sind. Dies wären z.B. jährliche und halbjährliche Schwankungen. Dann könnte man diese darstellen als

$$\bar{K}_{lm}(t) = \sum_q \bar{K}_{lmq} e^{iq\omega_0 t},$$

also eine weitere *Fourier*-Zerlegung in Terme, die zu Vielfachen der Grundfrequenz ω_0 gehören. In Formel (2.11) würde dann eine weitere Summe über q und in der Exponentialfunktion ein weiterer Term erscheinen. Dann wäre die Frage zu stellen, welche Frequenzen dann die Beobachtungsfrequenzen bilden und wie sich die Komponenten dieser dreidimensionalen *Fourier*-Zerlegung auf diese abbilden. Dann könnte das Ziel des Simulators sein, die Fehler zu schätzen, mit denen die zeitlichen Änderungen der Koeffizienten bestimmt werden können, genauer die Anteile der Koeffizienten, die zu bestimmten Perioden gehören.

6.2.2. Satellitenkonfiguration

In Zukunft wird die Kombination mehrerer Satellitenmissionen miteinander eine wichtige Rolle spielen. Im Simulator ist es möglich, Normalgleichungsmatrizen für verschiedene Beobachtungen und damit auch für mehrere Missionen zu kombinieren und simultan zu lösen. Dabei ist die Frage zu klären, in welcher Weise die einzelnen Normalgleichungssysteme gewichtet werden müssen.

Erweiterungen könnten auch die Transferkoeffizienten betreffen. Für *low-low-SST* Beobachtungen können nur Missionen simuliert werden, die auf dem selben nominellen Orbit fliegen. Somit bestehen die Transferkoeffizienten dieser Beobachtung aus einer Kombination von Bahnstörungen in Flugrichtung und in radialer Richtung. Liegen nun Entfernungen und deren Änderungen zweier Satelliten als Beobachtungen vor, welche sich auf unterschiedlichen Orbits bewegen, so muss die Bahnstörung quer zur Flugrichtung mit einbezogen werden. Solche Missionsszenarien sind sogenannte Pendel- oder Helixkonfigurationen. Die relative Position der beiden Satelliten ändert sich dabei mit der Bahnfrequenz.

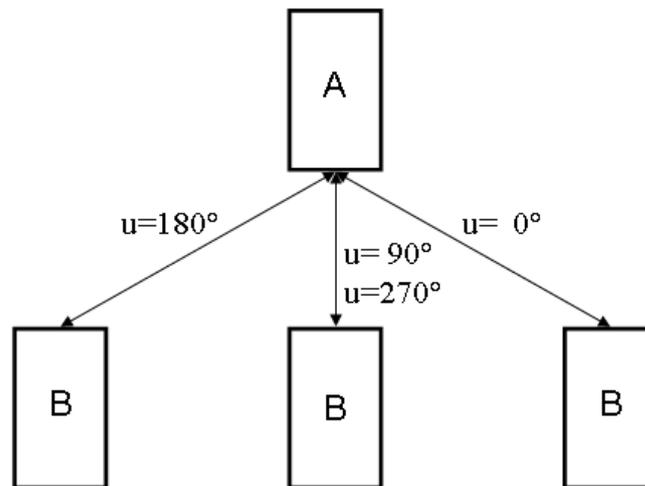


Abbildung 6.1.: Relative Satellitenpositionen einer Pendelmission

Für eine Pendelkonfiguration quer zur Bahnebene zeigt Abbildung 6.1 die relativen Positionen der beiden Satelliten A und B für vier Argumente der Breite. Die Bahnelemente dieser beiden Satelliten unterscheiden sich nur in der Rektaszension des aufsteigenden Knotens ($\Delta\Omega \neq 0$). Dabei wird von außen auf die Situation gesehen, die radiale Kompo-

6. Ausblick

nente also nicht betrachtet. Der Einfluß dieser Komponente und auch der in Flugrichtung wird sich hier genauso verhalten wie im Ausgangsfall (siehe Kapitel 2.3.4). Der Einfluß der Komponente quer zur Flugrichtung ist für $u \in \{0, 180\}$ maximal und abhängig von $\Delta\Omega$. Er verschwindet für $u \in \{90, 270\}$. Ausgehend von Formel 2.25 könnte eine erste Approximation für Transferkoeffizienten in diesem Pendelfall so aussehen:

$$H_{lmk}^{\Delta\rho_{Pendel}} = 2i \cos \alpha \sin(\alpha\beta_{mk}) H_{lmk}^{\Delta x} + 2 \sin \alpha \cos(\alpha\beta_{mk}) H_{lmk}^{\Delta z} + 2i \cos u \cos \Delta\Omega \sin(\alpha\beta_{mk}) H_{lmk}^{\Delta y}.$$

Dabei liefert der Term $\cos u$ die Periodizität der Querkomponente mit der Bahnfrequenz. In Gleichung 2.11 würden dann die zugehörigen *lumped coefficients* diesen selben Term enthalten. Durch die komplexe Schreibung des Kosinus kann man das u in den Exponenten der e -Funktion ziehen. Es gilt

$$\cos u \cdot e^{i(ku+m\Lambda)} = \frac{1}{2} \left(e^{i((k+1)u+m\Lambda)} + e^{i((k-1)u+m\Lambda)} \right).$$

Die betroffenen Beobachtungsfrequenzen sind also $\beta_{mk} \pm 1$. Damit ergeben sich natürlich auch andere Eigenschaften der Inklinationsfunktionen wegen dem Wechsel der Parität. Es muss weiter untersucht werden, wie dieses Missionsszenario und weiter implementiert werden können.

Abschließend lässt sich sagen, dass auch ohne die einfache analytische Struktur dieses Simulators zu verletzen noch Erweiterungspotential vorhanden ist.

A. Fallstudien

Hier befinden sich einige Fallstudien mit verschiedenen Eingabeparametern. Es werden die Ergebnisse einzelner Lösungen und ihrer Kombinationen dargestellt. Dabei werden jeweils vier verschiedene Ergebnispräsentationen gewählt. Diese sind Dreiecksplots der Koeffizientenfehler (**TRI**), Fehler pro SH Grad als RMS und Median (**ERR**) und kumulative Geoidfehler, einmal pro Grad (**KUM**) und zum anderen als Ergebnis einer Fehlerfortpflanzung in Abhängigkeit der geographischen Breite (**FFP**).

GOCE-Simulation

Im Kapitel 4, welches die Variation der Eingabeparameter untersucht, sind den Gradiometriebeobachtungen konstante *PSD*-Werte zu Grunde gelegt. Hier werden nun realistische *PSDs* für diese Beobachtungen verwendet, die aus Messungen mit dem verwendeten Gradiometer berechnet worden sind. Die Fehler-*PSDs* für die Diagonalelemente legen ein $1/f^2$ -Verhalten für niedrige Frequenzen an den Tag und bleiben innerhalb der Messbandbreite unter $10 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$. Darüber steigen sie mit der Frequenz an. In Abbildung A.1 sind die *PSD*-Werte dargestellt.

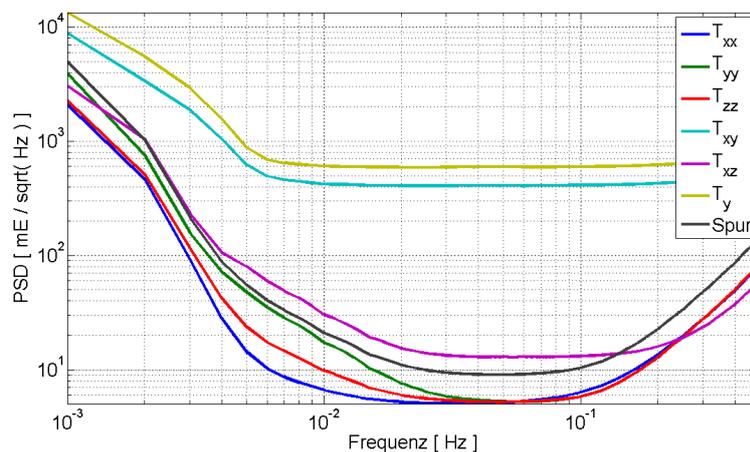


Abbildung A.1.: Fehler-*PSD* für Gradiometrie

A. Fallstudien

Beobachtungen	Gradiometrie (Diagonalelemente T_{xx} , T_{yy} und T_{zz})
Entwicklungsgrad	$l_{max} = 250$
Missionsdauer	$t_{miss} = 12 \cdot 30 \text{ Tage}$
Flughöhe	$h = 250 \text{ km}$
Inklination	$i = 96.5^\circ$

Tabelle A.1.: Eingabeparameter für *GOCE*-Simulation

Weitere Eingabeparameter sind in Tabelle A.1 aufgelistet. In Abbildung A.2 ist deutlich der Einfluß der geneigten Bahn zu sehen. Die Koeffizienten um die zonalen (Ordnung $m = 0$) erhalten um mehrere Größenordnungen größere Fehler (siehe **TRI**). Diese Werte schlagen sich in den RMS Werten pro Grad nieder (**ERR**). Der Median gibt einen realistisch bis optimistischen Eindruck des Fehlerverlaufs pro Grad. Bis zum maximalen Entwicklungsgrad von 250 bleiben die Fehler unter der Signalstärke von *Kaula*. Für niedrige Grade sind die Koeffizienten mit größeren Fehlern behaftet, was durch das $1/f^2$ -Verhalten der Fehler-*PSDs* zu erklären ist.

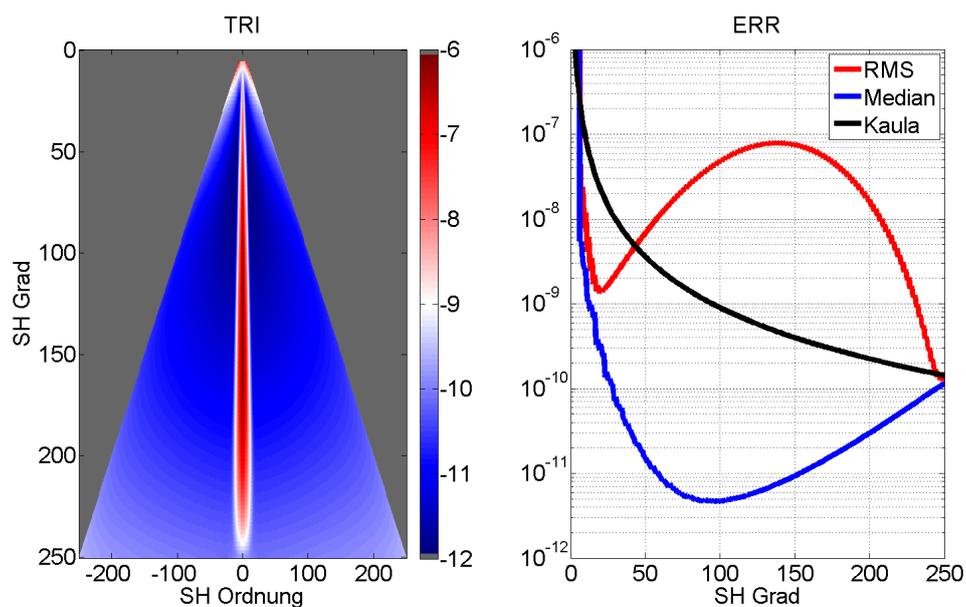


Abbildung A.2.: TRI, ERR: *GOCE* Simulation nur mit Gradiometrie Beobachtungen

Gradiometrie und GPS

Die Bestimmbarkeit der niederen Grade lässt sich mit der Hinzunahme von *GPS*-Beobachtungen verbessern. Die Ergebnisse dieser Kombination aus Gradiometrie und GPS sind in den Abbildungen A.4 und A.5 dargestellt. Für die GPS-Beobachtungen gelten die in Abbildung A.3 definierten *PSD*-Werte (vgl. Müller (2001)).

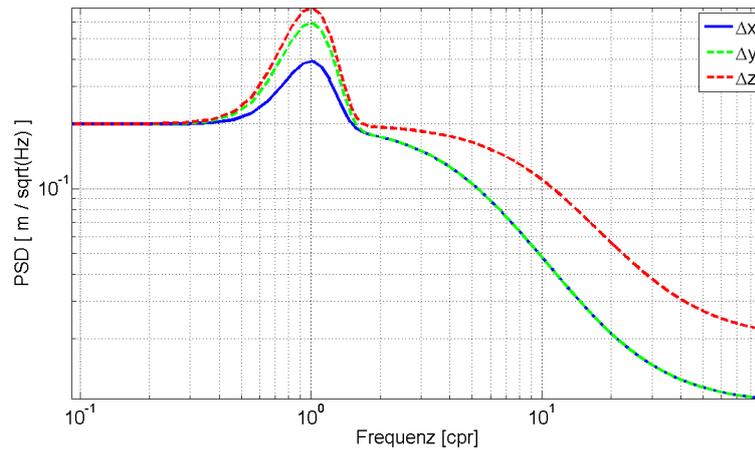


Abbildung A.3.: Fehler-*PSD* für *GOCE-GPS*-Beobachtungen

Durch die Kombination mit *GPS*-Beobachtungen sind die Fehler für niedrige Grade um mehrere Größenordnungen abgesunken (Abbildung A.4). In höheren Graden dominieren die Gradiometrie-Beobachtungen. Für diese Simulation macht es auch Sinn die kumulativen Fehler in Abbildung A.5 zu betrachten, da auch die niedrigen Grade durch GPS angemessen bestimmt sind. Die aus den Gradvarianzen bestimmten kumulativen Geoidfehler (**KUM** rot) sind wieder dominiert durch den Polarlocheffekt. Die aus dem Median geschätzten Werte zeigen an, dass ein *2cm*-Geoid bis zum Grad 200 möglich ist. Dies wird durch die Fehlerfortpflanzung (**FFP**) bestätigt und kann noch präzisiert werden. Für diesen Entwicklungsgrad (zweite Linie von rechts) sind für niedrige Breiten Geoidfehler um *2cm* zu erwarten. In höheren Breiten (70° bis 80°) sinkt der Fehler unter *1cm* und erst darüber steigen sie stark an. Für Grad 250 ist dieses Verhalten im Dezimeterbereich zu beobachten.

A. Fallstudien

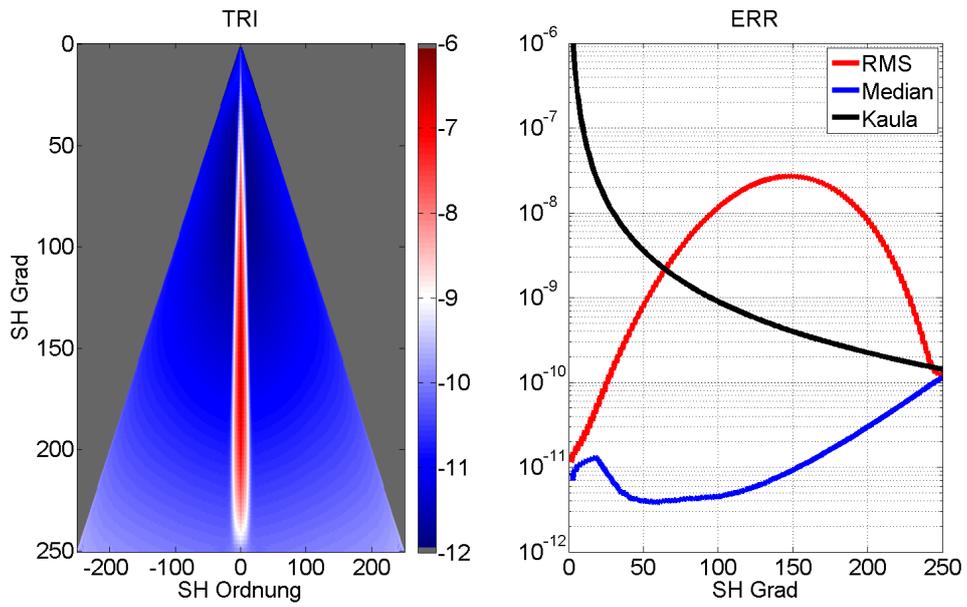


Abbildung A.4.: TRI, ERR: GOCE Simulation mit Gradiometrie- und GPS-Beobachtungen

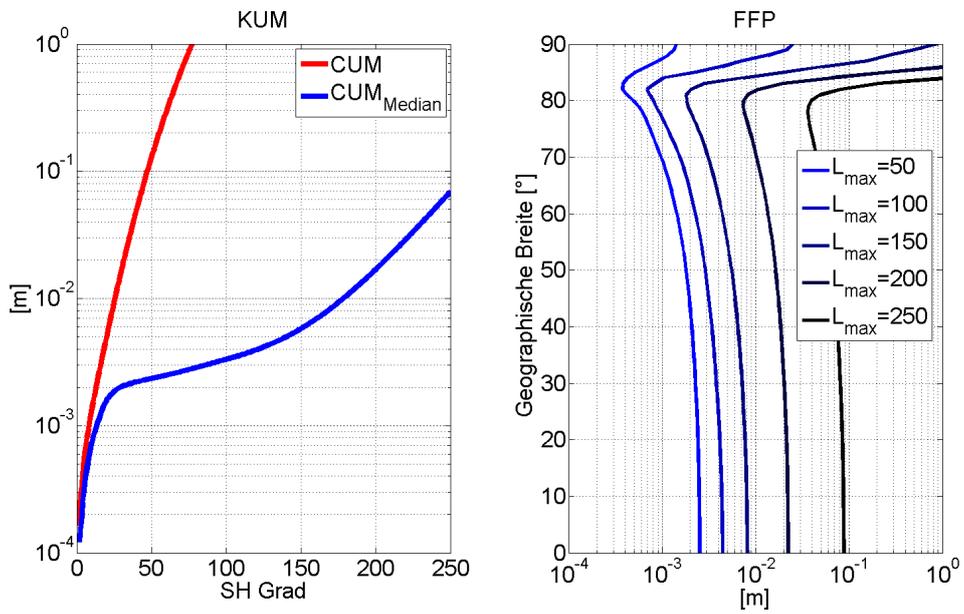


Abbildung A.5.: KUM, FFP: GOCE Simulation mit Gradiometrie- und GPS-Beobachtungen

GRACE-Simulation

Bisher noch nicht betrachtet worden ist eine *GRACE*-Simulation. Dafür werden als Beobachtungen Entfernungen und deren Änderungen zwischen zwei *LEOs* verwendet. Realistische *PSDs* dafür verhalten sich in etwa konstant auf einem Level von $10^{-6} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ für hohe Frequenzen und haben ein $1/f^2$ -Verhalten für niedrige Frequenzen (vgl. Frommknecht (2008)). Abbildung A.6 zeigt den Verlauf der Fehler-*PSDs* der Funktionale für *low-low-SST* ($\Delta\rho$ und $\Delta\dot{\rho}$). Dabei ergeben sich die Werte für die zeitliche Ableitung durch Multiplikation mit $2\pi f$. Daneben gelten folgende Eingangsparameter:

Beobachtungen	<i>low-low-SST</i> ($\Delta\dot{\rho}$)
Entwicklungsgrad	$l_{max} = 200$
Missionsdauer	$t_{miss} = 12 \cdot 30 \text{ Tage}$
Flughöhe	$h = 450 \text{ km}$
Inklination	$i = 89^\circ$
Nominelle Distanz	200 km

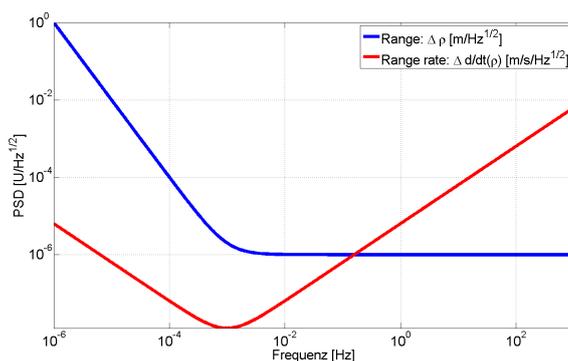


Abbildung A.6.: Fehler-*PSD* für *low-low-SST*

Die Abbildungen A.7 und A.8 zeigen die Ergebnisse dieser *GRACE*-Simulation. Der Polarlocheffekt ist bei weitem nicht so deutlich zu sehen wie in der *GOCE*-Simulation. Die Inklination ist auch viel näher an 90° . Somit liegen natürlich die RMS-Werte viel näher an den Median-Werten. Im Vergleich zur *GOCE*-Simulation steigen die Fehler pro Grad viel stärker an (Abbildung A.7), was durch die größere Flughöhe zu erklären ist. Die Fehler übersteigen bei etwa Grad 175 die Signalstärke. Ein Zentimeter-Geoid ist nur bis zum Grad 150 möglich (Abbildung A.8). Bei Grad 200 sind die Fehler schon in den Meterbereich gestiegen. Auch hier bestätigen die fortgepflanzten Fehler (**FFP**) sehr gut die kumulativen (**KUM**).

A. Fallstudien

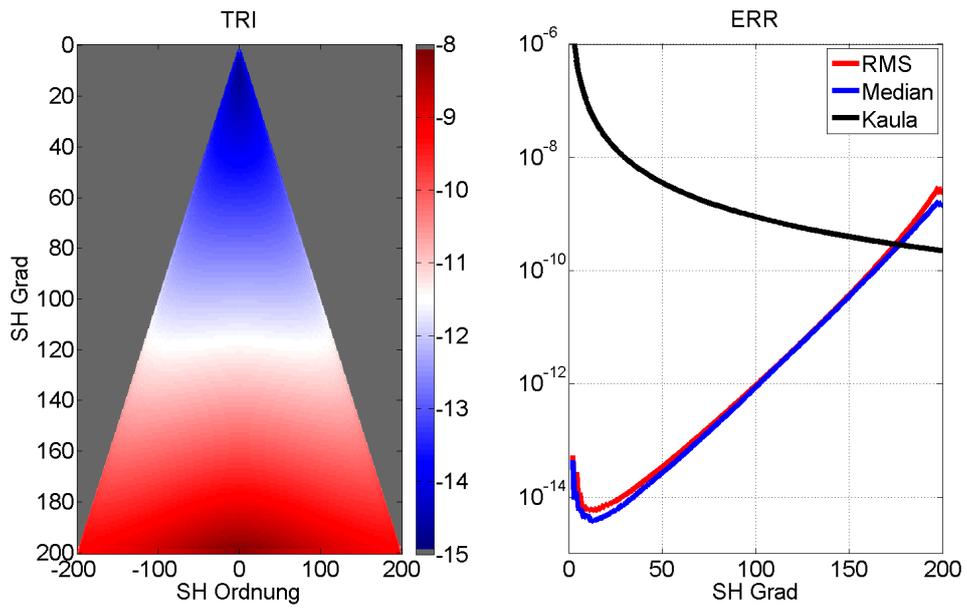


Abbildung A.7.: TRI, ERR: GRACE Simulation mit *range rate* Beobachtungen

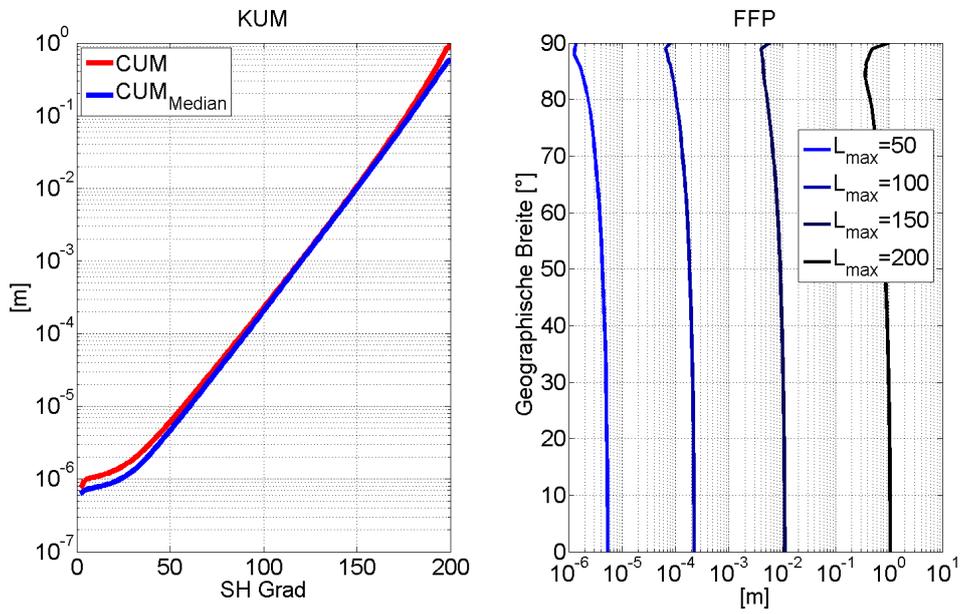


Abbildung A.8.: KUM, FFP: GRACE Simulation mit *range rate* Beobachtungen

GOCE-GRACE-Kombination

Die Kombination von *GRACE* und *GOCE* bringt weitere Fortschritte. Das gute Verhalten des Fehlergehalts für niedrige Grade bei *GRACE* und für hohe Grade bei *GOCE* bleibt bei der Kombination erhalten. Eingabeparameter und *PSD*-Verläufe sind von den vorigen Simulationen übernommen. Somit ergeben sich die Abbildungen A.9 und A.10. Im Dreieck ist der Polarlocheffekt erst ab Grad 150 zu erkennen. Dementsprechend treten auch erst danach größere Unterschiede in den RMS- und Median-Werten auf. In etwa bis zu diesem Grad dominiert *GRACE*, darüber *GOCE*, was in den unterschiedlichen Anstiegen der Fehler pro Grad zu sehen ist (**ERR**). Der Punkt, an dem das Rauschniveau die Signalstärke übersteigt, hat sich im Vergleich mit der ersten Fallstudie nicht verändert (in etwa Grad 250). Die Vorteile der Kombination von *GOCE* mit *GRACE* sind in den kumulativen Fehlern zu sehen (Vergleich der Abbildungen A.5 und A.10). Die größten Verbesserungen liegen in den niedrigen Graden. Für Grad 50 zum Beispiel liegt man bei A.5 im Millimeterbereich, bei A.10 um 2 Größenordnungen darunter. Bis zum Entwicklungsgrad von 250 gleichen sich die kumulativen Fehler allerdings wieder an und erreichen dann das Dezimeterlevel.

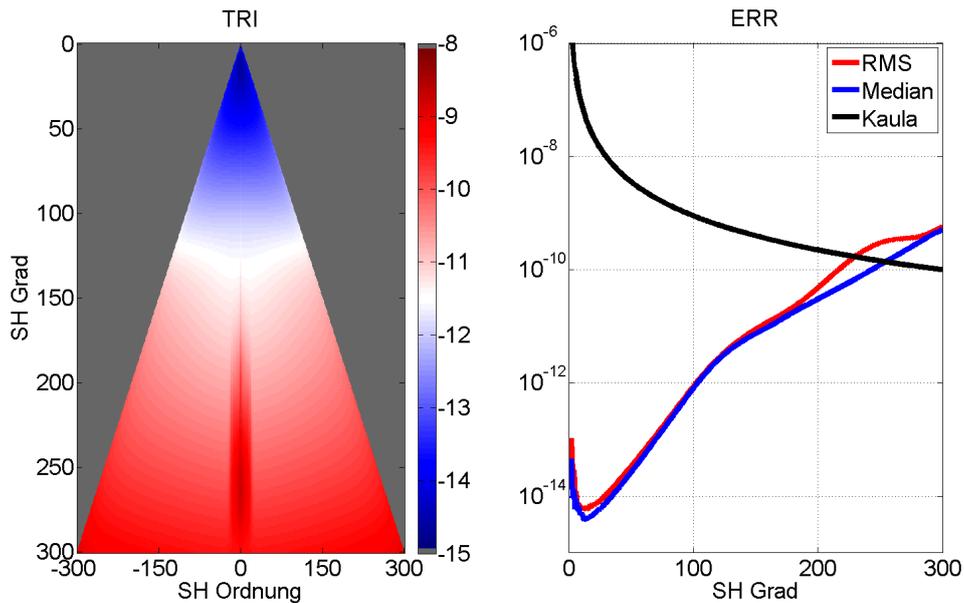


Abbildung A.9.: TRI, ERR: GOCE-GRACE Kombination

A. Fallstudien

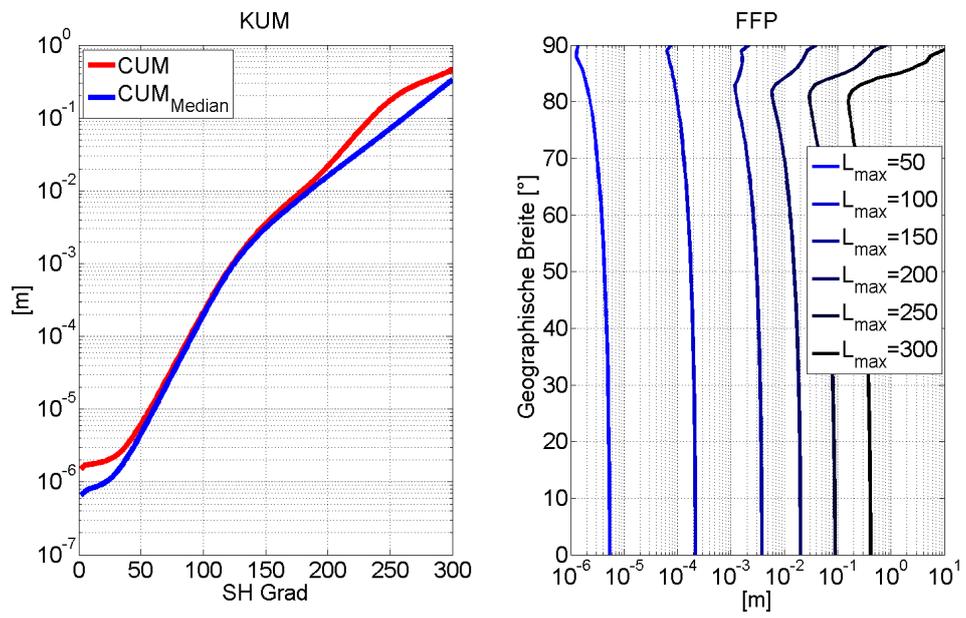


Abbildung A.10.: KUM, FFP: GOCE-GRACE Kombination

Literaturverzeichnis

- Betti B, Sansò F (1989). The Integrated Approach to Satellite Geodesy, in: Sansò F, Rummel R (eds.), Theory of Satellite Geodesy and Gravity Field Determination
- Colombo O (1989). Advanced Techniques for High-Resolution Mapping of the Gravitational Field, in: Sansò F, Rummel R (eds.), Theory of Satellite Geodesy and Gravity Field Determination
- Frommknecht B (2008). Integrated Sensor Analysis of the GRACE Mission
- Gerlach C (2004). Aktuelle GOCE-SSG Fehlersimulationen und Filterung mit mbmsuite
- Gerlach C (2006). Zur Fehlersimulation von Schwerefeldmissionen
- Heiskanen W, Moritz H (1979). Physical Geodesy, corrected reprint of the original edition published by W.H. Freeman and Company San Francisco, 1967
- Hoffmann-Wellenhof B, Moritz H (1986). Introduction to Spectral Analysis, in: Sünkel H (ed.), Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy
- Kaula W (1966). Theory of Satellite Geodesy; Applications of Satellites to Geodesy, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts
- Kay S (1988). Modern Spectral Estimation; Theory and Application, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632
- Meyer U (2006). Möglichkeiten und Grenzen der Hill-Gleichungen für die Schwerefeldbestimmung
- Müller J (2001). Die Satellitengradiometriemission GOCE
- Percival D, Walden A (1993). Spectral Analysis for Physical Applications, Cambridge University Press
- Rummel R (1986a). Satellite Gradiometry, in: Sünkel H (ed.), Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy

Literaturverzeichnis

- Rummel R (1986b). Spherical spectral properties of the Earth's gravitational potential and its first and second derivatives. in: Sansò F, Rummel R (eds.), Geodetic Boundary Value Problems in View of the One Centimeter Geoid
- Rummel R (2006). Vorlesungsskript des IAPG zu Erdmessung (Teil 3)
- Sneeuw N (1995a). Covariance Propagation of Block-diagonal Covariance Matrices from Error Simulations
- Sneeuw N (1995b). mbmsuite. MATLAB-Toolbox zur Fehlersimulation von satellitengestützten Schwerfeldmissionen
- Sneeuw N (2000). A semi-analytical approach to gravity field analysis from satellite observations
- Sneeuw N, IJssel J, Koop R, Visser P, Gerlach C (2001). Validation of fast pre-mission error analysis of the goce gradiometry mission by a full gravity field recovery simulation
- Strang G (1986). Introduction to Applied Mathematics, Wellesley-Cambridge Press
- Stummer C (2006). Analyse der Gradiometergleichungen der GOCE Satellitenmission zur Schwerfeldbestimmung
- TUM-2S-Modell. <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/ICGEM.html>. Datum: 14. Januar 2009
- Wermuth M (2008). Gravity Field Analysis from the Satellite Missions CHAMP and GOCE

Veröffentlichungen in der Schriftenreihe IAPG / FESG (ISSN 1437-8280):
Reports in the series IAPG / FESG (ISSN 1437-8280):

- No. 1:** Müller J., Oberndorfer H. (1999). *Validation of GOCE Simulation*. ISBN-10 3-934205-00-3, ISBN-13 978-3-934205-00-0.
- No. 2:** Nitschke M. (1999). *SATLAB – Ein Werkzeug zur Visualisierung von Satellitenbahnen*. ISBN-10 3-934205-01-1, ISBN-13 978-3-934205-01-7..
- No. 3:** Tsoulis D. (1999). *Spherical harmonic computations with topographic/isostatic coefficients*. ISBN-10 3-934205-02-X, ISBN-13 978-3-934205-02-4..
- No. 4:** Dorobantu R. (1999). *Gravitationsdrehwaage*. ISBN-10 3-934205-03-8, ISBN-13 978-3-934205-03-1.
- No. 5:** Schmidt R. (1999). *Numerische Integration gestörter Satellitenbahnen mit MATLAB*. ISBN-10 3-934205-04-6, ISBN-13 978-3-934205-04-8.
- No. 6:** Dorobantu R. (1999). *Simulation des Verhaltens einer low-cost Strapdown-IMU unter Laborbedingungen*. ISBN-10 3-934205-05-4, ISBN-13 978-3-934205-05-5.
- No. 7:** Bauch A., Rothacher M., Rummel R. (2000). *Bezugssysteme in Lage und Höhe. Tutorial zum Kursus INGENIEURVERMESSUNG 2000*. ISBN-10 3-934205-06-2, ISBN-13 978-3-934205-06-2.
- No. 8:** Rothacher M., Zebhauser B. (2000). *Einführung in GPS. Tutorial zum 3. SAPOS-Symposium 2000 in München*. ISBN-10 3-934205-07-0, ISBN-13 978-3-934205-07-9.
- No. 9:** Ulrich M. (2000). *Vorhersage der Erdrotationsparameter mit Hilfe Neuronaler Netze*. ISBN-10 3-934205-08-9, ISBN-13 978-3-934205-08-6.
- No. 10:** Seitz F. (2000). *Charakterisierung eines bistatischen Rayleigh- und Raman-Lidars zur Bestimmung von höhenaufgelösten Wasserdampfprofilen*. ISBN-10 3-934205-09-7, ISBN-13 978-3-934205-09-3.
- No. 11:** Meyer F. (2000). *Messung von höhenaufgelösten Wasserdampfprofilen unter Verwendung eines bistatischen Raman-Lidars*. ISBN-10 3-934205-10-0, ISBN-13 978-3-934205-10-9.
- No. 12:** Peters T. (2001). *Zeitliche Variationen des Gravitationsfeldes der Erde*. ISBN-10 3-934205-11-9, ISBN-13 978-3-934205-11-6.
- No. 13:** Egger D. (2001). *Astronomie und Java – Objekte der Astronomie*. ISBN-10 3-934205-12-7, ISBN-13 978-3-934205-12-3.
- No. 14:** Steigenberger P. (2002). *MATLAB-Toolbox zur TOPEX/POSEIDON Altimeterdatenverarbeitung*. ISBN-10 3-934205-13-5, ISBN-13 978-3-934205-13-0.
- No. 15:** Schneider M. (2002). *Zur Methodik der Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten*. ISBN-10 3-934205-14-3, ISBN-13 978-3-934205-14-7.
- No. 16:** Dorobantu R., Gerlach C. (2004). *Investigation of a Navigation-Grade RLG SIMU type iNAV-RQH*. ISBN-10 3-934205-15-1, ISBN-13 978-3-934205-15-4.
- No. 17:** Schneider M. (2004). *Beiträge zur Bahnbestimmung und Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten sowie zur Orientierung von Rotationssensoren*. ISBN-10 3-934205-16-X, ISBN-13 978-3-934205-16-1.
- No. 18:** Egger D. (2004). *Astro-Toolbox, Theorie*. ISBN-10 3-934205-17-8, ISBN-13 978-3-934205-17-8.
- No. 19:** Egger D. (2004). *Astro-Toolbox, Praxis*. ISBN-10 3-934205-18-6, ISBN-13 978-3-934205-18-5.
- No. 20:** Fackler U. (2005). *GRACE - Analyse von Beschleunigungsmessungen*. ISBN-10 3-934205-19-4, ISBN-13 978-3-934205-19-2.
- No. 21:** Schneider M. (2005). *Beiträge zur Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten*. ISBN-10 3-934205-20-8, ISBN-13 978-3-934205-20-8.
- No. 22:** Egger D. (2006). *Sinus-Netzwerk*. ISBN-10 3-934205-21-6, ISBN-13 978-3-934205-21-5.
- No. 23:** Schneider M. (2006). *Gravitationsfeldbestimmung unter Verwendung von Bilanzgleichungen für beliebige Observablen*. ISBN-10 3-934205-22-4, ISBN-13 978-3-934205-22-2.
- No. 24:** Mladek F. (2006). *Hydrostatische Isostasie*. ISBN-10 3-934205-23-2, ISBN-13 978-3-934205-23-9.
- No. 25:** Stummer C. (2006). *Analyse der Gradiometergleichungen der GOCE Satellitenmission zur Schwerefeldbestimmung*. ISBN-10 3-934205-24-0, ISBN-13 978-3-934205-24-6.
- No. 26:** Fecher T. (2008). *Methodische Grundlagen von kombinierten Schwerefeldmodellen*. ISBN-13 978-3-934205-25-3.
- No. 27:** Albertella A., Savcenko R., Bosch W., Rummel R. (2008). *Dynamic Ocean Topography - The Geodetic Approach*. ISBN-13 978-3-934205-26-0.
- No. 28:** Svehla D. (2009). *ACES and FUTURE GNSS-Based EARTH OBSERVATION and NAVIGATION*. ISBN-13 978-3-934205-27-7.
- No. 29:** Egger D. (2009). *Numerische Integration von Satellitenbahnen*. ISBN-13 978-3-934205-28-4.
- No. 30:** Murböck M. (2011). *Genauigkeitssimulation von Schwerefeld-Satellitenmissionen*. ISBN-13 978-3-934205-29-1.

Weitere Exemplare können bezogen werden unter / Copies are available from:

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie

Technische Universität München

Arcisstrasse 21, D-80290 München, Germany

Telefon: +49-89-289-23190, Telefax: +49-89-289-23178, Email: rechel@bv.tum.de

Oder im Internet / Or via Internet:

<http://www.iapg.bv.tum.de/Schriftenreihe/>

