TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Entwurf einer Resonanztheorie basierend auf Integralgleichungen

M. Schneider

IAPG / FESG No. 32
Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie
Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie

München 2011

Entwurf einer Resonanztheorie basierend auf Integralgleichungen

M. Schneider

IAPG / FESG No. 32

München 2011

ISSN 1437-8280
ISBN-13: 978-3-934205-31-4

Adressen:
Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie
Technische Universität München
Arcisstrasse 21
D-80290 München
Germany
Telefon: +49-89-289-23190
Telefax: +49-89-289-23178
http://www.iapg.bv.tum.de/

Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie
Technische Universität München
Arcisstrasse 21
D-80290 München
Germany
Telefon: +49-89-289-23191
Telefax: +49-89-289-23178
http://www.iapg.bv.tum.de/

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung **1**

1. Randwertaufgabe zur Bewegungsgleichung des Oszillators **2**

2. Lösung der Randwertaufgabe nach der Methode der unendlich vielen Variablen **3**

3. Beispiele zur Behandlung der Randwertaufgabe **4**
- 3.1 Freier ungedämpfter Oszillator **5**
- 3.2 Erzwungene Schwingungen des linearen Oszillators **7**
- 3.3 Übergang zum linear erweiterten Newton-Operator Δ_N **11**
  - 3.3.1 Freier Oszillator **12**
  - 3.3.2 Erzwungene Schwingungen des linearen Oszillators **14**

4. Gedämpfter linearer harmonischer Oszillator **17**
- 4.1 Freier gedämpfter harmonischer Oszillator **17**
- 4.2 Gedämpfter linearer Oszillator mit äußerer Erregung **20**

5. Quasiperiodische Bewegungen **21**
- 5.1 Freier ungedämpfter linearer Oszillator **22**
- 5.2 Freier gedämpfter linearer Oszillator **27**

6. Übertragung des Lösungskonzeptes auf Systeme mit drei Freiheitsgraden **29**

Zusammenfassung und Ausblick **35**

Literaturhinweise **38**

Danksagung **39**

Anhang A Formelzusammenstellung **40**

Anhang B Oszillatorgleichungen im Falle des Dreikörperproblems **43**

Vorbemerkung

Die von William Kaula ausgearbeitete Theorie (Kaula 1961) der Umlaufbewegung eines Erdsatelliten unter der Einwirkung des anisotropen Gravitationsfeldes der rotierenden Erde wird unbrauchbar, wenn die mittlere Bewegung des Satelliten kommensurabel mit der Erddrehung ist. Es treten dann verschwindende Nenner auf. Die Darstellung der Bewegung weist Singularitäten auf. Es kommt zu resonanzartig überhöhten Störungen in den beschreibenden Bahnelementen.
Wie in *(Mai&Schneider&Cui 2008)* gezeigt worden ist, können die Singularitäten vermieden werden, wenn man von der Zeit auf eine andere unabhängige Variable wechselt. Nach einer solchen Renormierung erhält man eine Darstellung der gestörten Bahnelemente, die auch bei Vorliegen von Kommensurabilitäten brauchbar bleibt und ins Unendliche wachsende Störungen vermeidet. Die Wirkung der resonanten Harmonischen des anisotropen Außenraumpotentials wird so beseitigt. In Bezug auf die renormierte unabhängige Variable erscheinen die Störungen nichtresonant.

Die Renormierung beseitigt die mathematische Singularität der Lösungsdarstellung. Die Resonanz scheint eine Folge einer ungeeigneten mathematischen Variablenwahl zu sein, also nicht notwendig physikalisch begründet zu sein. Die Renormierung zeigt einen Weg auf, wie man bei Vorliegen von Kommensurabilitäten in der Lösungsdarstellung singuläre Terme vermeiden kann, die Singularitäten mathematisch hebbar sind. Aber man bekommt so keine Aussage darüber, ob es nur eine mathematisch bedingte Singularität ist oder eine physikalisch verursachte Singularität.

Eine ähnliche Situation ist vom harmonischen Oszillator her bekannt. Wenn dieser durch eine äußere Kraft mit einer Frequenz angeregt wird, die gegen die Eigenfrequenz des Oszillators geht, dann wird die Lösungsdarstellung ebenfalls unbrauchbar, es liegt eine (jedenfalls mathematische) Singularität vor.

In der vorliegenden Studie wird am Beispiel des linearen Oszillators eine Resonanztheorie entwickelt, die die Behandlung des Bewegungsverlaufs im Resonanzfall erlaubt.
Die auf der Verwendung von Integralgleichungen basierende Resonanztheorie wird am Beispiel des linearen harmonischen Oszillators zwar entwickelt und illustriert, sie kann aber auf nichtlineare dynamische Systeme mit mehreren

Freiheitsgraden übertragen werden, sie wird aber i. allg. nicht mehr in analytischer Form durchführbar sein.

1. Randwertaufgabe zur Bewegungsgleichung des Oszillators

Die **Bewegungsgleichung** des linearen ungedämpften Oszillators

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x + K_0 \cos(\omega t) &= 0 \\ \ddot{x} + f\left(x(t_n)\right) &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$\omega_0^2 > 0$ konstant
ω Erregerfrequenz
K_0 Konstante

Danach erfährt der Oszillator eine rücktreibende (bezogene) Kraft

$$-\omega_0^2 x(t) \tag{1.2}$$

und eine periodisch mit der Frequenz ω auf den Oszillator einwirkende (bezogene) Kraft

$$-K_0 \cos(\omega t) \tag{1.3}$$

Gesucht wird eine Lösung $x(t)$, die **ganzperiodischen Randbedingungen** genügt, d.h., ein Bewegungsablauf, der sich nach einer Zeitspanne T, der **Periode**, exakt wiederholt

$$x(t) = x(t+T) \;\; und \;\; \dot{x}(t) = \dot{x}(t+T) \tag{1.4}$$

Die Lösung lässt sich darstellen in der Form

$$x(t_n) = const \; x_0 + \bar{x}(t_n), \tag{1.5}$$

Es wird im Folgenden eine **normierte Zeitzählung**

$$t \to t/T \to 0 \le t_n \le 1 \tag{1.6}$$

verwendet, mit T als der **Periode** der gesuchten periodischen Lösung.

In (1.5) ist $\bar{x}(t_n)$ Lösung der **Integralgleichung**

$$\bar{x}(t_n) = T^2 \int_0^1 \bar{K}^B(t_n, \tau_n)\, f\left(x(\tau_n)\right) d\tau_n \tag{1.7}$$

Zu beachten ist, daß im Integranden

$$f(x) = f\left(x_0(t_n) + \bar{x}(t_n)\right) \tag{1.8}$$

steht, hingegen auf der linken Seite der Integralgleichung $\bar{x}(t_n)$.

Weiter ist

$$\bar{K}^B(t_n, \tau_n) = -\frac{1}{2}\left|t_n - \tau_n\right| + \frac{1}{2}\left(t_n - \tau_n\right)^2 + \frac{1}{12} \tag{1.9}$$

der **Integralgleichungskern**.

$x_0(t_n)$ ist eine **Eigenlösung** der gestellten Randwertaufgabe , die **orthogonal** zu $x(t_n)$ sein muß, d.h. die **Orthogonalitätsbedingung**

$$\int_0^1 x(\tau_n) \cdot x_0(\tau_n)\, d\tau_n = 0\,. \tag{1.10}$$

erfüllt werden muß, und zudem die **Lösbarkeitsbedingung**

$$\int_0^1 x_0(\tau_n)\, f\left(x_0(\tau_n) + \bar{x}(\tau_n)\right) d\tau_n = 0 \tag{1.11}$$

einzuhalten ist.

2. Lösung der Randwertaufgabe nach der Methode der unendlich vielen Variablen

Als Lösungsverfahren werde die **Methode der unendlich vielen Variablen** *(Hammerstein 1930)* verwendet. Danach ergeben sich die Koeffizienten $x_\nu^{s,c}$ der Lösungsdarstellung

$$\bar{x}(t_n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(x_\nu^s \bar{\varphi}_\nu^s(t_n) + x_\nu^c \bar{\varphi}_\nu^c(t_n) \right) \tag{2.1}$$

aus den **Bedingungsgleichungen**

$$x_\nu^{s,c} = \frac{T^2}{\lambda_\nu} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}\left(\tau_n\right) f\left(x_0\left(\tau_n\right) + x\left(\tau_n\right)\right) d\tau_n \ . \qquad (2.2)$$

Eigenwerte und **Eigenfunktionen** sind

$$\lambda_\nu = \left(2\nu\pi\right)^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} \overline{\varphi}_\nu^s\left(t_n\right) = \sqrt{2}\sin\left(\sqrt{\lambda}_\nu t_n\right) \\ \overline{\varphi}_\nu^c\left(t_n\right) = \sqrt{2}\cos\left(\sqrt{\lambda}_\nu t_n\right) \end{cases} \textit{für} \ \ \nu = 1(1)\infty \ . \qquad (2.3)$$

Der Integralgleichungskern hat die **Bilinear-** oder **Selbstdarstellung**

$$\overline{K}^B\left(t_n, \tau_n\right) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{\overline{\varphi}_\sigma^s\left(t_n\right)\overline{\varphi}_\sigma^s\left(\tau_n\right) + \overline{\varphi}_\sigma^c\left(t_n\right)\overline{\varphi}_\sigma^c\left(\tau_n\right)}{\lambda_\sigma} \ . \qquad (2.4)$$

Gesucht werden die Wurzeln $x_\nu^{s,c}$ der Bedingungsgleichungen (2.2) sowie die Eigenlösung $x_0\left(t_n\right)$. Diese muß die Lösbarkeitsbedingung (1.11) erfüllen, d.h. orthogonal zur Inhomogenität $f\left(x\left(t_n\right)\right)$ sein und überdies nach (1.10) orthogonal zur gesuchten Lösung $x\left(t_n\right)$ sein.

3. Beispiele zur Behandlung der Randwertaufgabe

Es soll nach zunehmender Kompliziertheit der Inhomogenität $f\left(x\left(t_n\right)\right)$ in der Bewegungsgleichung (1.1) vorgegangen werden Zunächst wird der **Newton - Operator** $L_N := d^2/dt^2$ als primärer Differentialausdruck angenommen.

Behandelt werden die Fälle

1. freier ungedämpfter Oszillator (s. § 3.1)
2. erregter ungedämpfter Oszillator (s. § 3.2)

Daran anschließend sollen diese Fälle unter Zugrundelegung eines **linear erweiterten Newton-Operators** Δ_N behandelt werden, um auftretende Singularitäten behandeln zu können. Aus der Literatur bekannte strenge Lösungen sind im ANHANG A zusammengestellt.

Schließlich wird die Bewegungsgleichung um ein **Dämpfungsglied** erweitert und die vorgenannten Fälle nochmals behandelt.

3.1 Freier, ungedämpfter Oszillator

Die Bewegungsgleichung des freien ungedämpften Oszillators lautet

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0 \quad \Leftrightarrow \ddot{x}+f\left(x\left(t_n\right)\right)=0 \tag{3.1}$$

und damit die Integralgleichung (1.7)

$$\overline{x}\left(t_n\right)=T^2\omega_0^2\int_0^1 \overline{K}^B\left(t_n,\tau_n\right)\left\{x_0\left(\tau_n\right)+\overline{x}\left(\tau_n\right)\right\}d\tau_n$$

Die Bedingungsgleichungen (2.2) ergeben sich hier zu

$$x_\nu^{s,c}=\omega_0^2\frac{T^2}{\lambda_\nu}\int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}\left(\tau_n\right)\left\{x_0\left(\tau_n\right)+\overline{x}\left(\tau_n\right)\right\}d\tau_n \;\Rightarrow\; \left(1-\omega_0^2\frac{T^2}{\lambda_\nu}\right)x_\nu^{s,c}=0$$

Die **Orthogonalitätsbedingung** lautet

$$\int_0^1 x\left(\tau_n\right)\cdot x_0\left(\tau_n\right)d\tau_n=0 \tag{3.1}$$

und die **Lösbarkeitsbedingung**

$$\int_0^1 x_0\left(\tau_n\right)\cdot x\left(\tau_n\right)d\tau_n=0\,. \tag{3.2}$$

Beide Bedingungen laufen hier auf dasselbe hinaus.

Da im Falle ganzperiodischer Randbedingungen gilt

$$x_0\left(t_n\right)=x_0=const\;, \tag{3.3}$$

folgt

$$x_0^{s,c}=0\;. \tag{3.4}$$

Die Auflösung der Bedingungsgleichungen (2.2)

$$\left(1-\omega_0^2\frac{T^2}{\lambda_\nu}\right)x_\nu^{s,c}=0 \qquad (3.5)$$

ergibt eine nichttriviale Lösung

$$x_\nu^{s,c}\neq 0 \qquad \textit{für} \quad \nu=1,2,\ldots\infty \qquad (3.7)$$

genau dann, wenn

$$\left(1-\omega_0^2\frac{T^2}{\lambda_\nu}\right)=0\,. \qquad (3.8)$$

Da die Eigenwerte $\lambda_\nu>0$, können ganzperiodische Lösungen nur im Falle $\omega_0^2>0$ existieren. Weiter können ω_0^2 und die Periode T nicht unabhängig voneinander gewählt werden. Es folgt ja aus (3.8)

$$T=\nu\frac{2\pi}{\omega_0}=:\nu T_1 \quad . \qquad (3.9)$$

Eine mögliche Periode T ist demnach ein bestimmtes Vielfaches von T_1. Umgekehrt kann nicht gleichzeitig

$$T=\nu T_1 \quad \textit{und} \quad T=\mu T_1 \qquad (3.10)$$

sein, wenn $\nu\neq\mu$, Somit existieren keine Lösungen , in denen verschiedene Indizes ν in der Lösungsdarstellung auftreten. Da zufolge der Orthogonalitäts- und Lösbarkeitsbedingung $x_0^{s,c}=0$, lautet die Lösungsdarstellung

$$x(t_n)=\overline{x}(t_n)=x_1^s\overline{\varphi}_1^s(t_n)+x_1^x\overline{\varphi}_1^c(t_n) \qquad (3.11)$$

wofür man mit

$$x_1^s=:\frac{A}{\sqrt{2}}\cos\gamma \quad \textit{und} \quad x_1^c=:\frac{A}{\sqrt{2}}\sin\gamma \qquad (3.12)$$

und unter Beachtung der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen schreiben kann

$$x(t_n)=\overline{x}(t_n)=A\sin(2\pi t_n+\gamma) \qquad (3.13)$$

Dieses Ergebnis ist aus der Literatur bekannt *(Macke,1960, Landau&Lifshiz,1962).*

3.2 Erzwungene Schwingungen des linearen Oszillators

Die Bewegungsgleichung (1.1) lautet jetzt

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + K_0 \cos(\omega t) = 0 \quad \Leftrightarrow \; \ddot{x} + f\left(x(t_n)\right) = 0 \tag{3.14}$$

und damit die Integralgleichung

$$\overline{x}(t_n) = T^2 \int_0^1 \overline{K}^B(t_n, \tau_n)\left\{\omega_0^2 x + K_0 \cos(\hat{\omega}\tau_n)\right\} d\tau_n \tag{3.15}$$

worin $\hat{\omega} := \omega T$. Die Bedingungsgleichungen (2.2) für ganzperiodische Lösungen ergeben sich zu

$$x_\nu^{s,c} = \frac{T^2}{\lambda_\nu} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau_n)\left\{\omega_0^2 x + K_0 \cos(\hat{\omega}\tau_n)\right\} d\tau_n \tag{3.16}$$

Beachtet man die Bedingungen (3.1)-(3.2), so erhält man

$$x_\nu^{s,c} = \frac{T^2}{\lambda_\nu}\left\{\omega_0^2 x_\nu^{s,c} + K_0 C_\nu^{s,c}(\hat{\omega})\right\} \tag{3.17}$$

bzw. umgestellt

$$\left(1 - \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu}\right) x_\nu^{s,c} = \frac{K_0 T^2}{\lambda_\nu} C_\nu^{s,c}(\hat{\omega}) \quad \Rightarrow \quad x_\nu^{s,c} = \frac{K_0 T^2}{\left(\lambda_\nu - \omega_0^2 T^2\right)} C_\nu^{s,c}(\hat{\omega}) \tag{3.18}$$

Im Unterschied zum freien linearen Oszillator ist jetzt mit mehreren Koeffizienten $x_\nu^{s,c} \;\; \nu \geq 1$ in der Lösungsdarstellung

$$x(t_n) = \overline{x}(t_n) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(x_\nu^s \overline{\varphi}_\nu^s(t_n) + x_\nu^c \overline{\varphi}_\nu^c(t_n)\right) \tag{2.1}$$

zu rechnen. Die Integrale $C_\nu^{s,c}\left(\hat{\omega}\right)$ in (3.18) ergeben sich zu

$$C_\nu^s\left(\hat{\omega}\right)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2\lambda_\nu}\left(1-\cos\hat{\omega}\right)}{\lambda_\nu-\hat{\omega}^2} & wenn\ \ \hat{\omega}^2\neq\lambda_\nu\\ 0 & wenn\ \hat{\omega}^2=\lambda_\nu\end{cases}\tag{3.19}$$

$$C_\nu^c\left(\hat{\omega}\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}\hat{\omega}\sin\hat{\omega}}{\lambda_\nu-\hat{\omega}^2} & wenn\ \ \hat{\omega}^2\neq\lambda_\nu\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & wenn\ \hat{\omega}^2=\lambda_\nu\end{cases}\tag{3.20}$$

Aus (3.17) erhält man für die Periode der ganzperiodischen Schwingung

$$T^2=\frac{\lambda_\nu x_\nu^{s,c}}{\omega_0^2 x_\nu^{s,c}+K_0 C_\nu^{s,c}\left(\hat{\omega}\right)}\tag{3.17a}$$

Betrachtet seien nun die **Sonderfälle:**

a) Freier Oszillator

Der freie Oszillator ist definiert durch $\hat{\omega}\to 0\ \ und\,/\,oder\ \ K_0=0$. Für ihn folgt aus (3.17a) die Beziehung (3.8)

$$T^2=\frac{\lambda_\nu x_\nu^{s,c}}{\omega_0^2 x_\nu^{s,c}}=\frac{\lambda_\nu}{\omega_0^2}.$$

Danach ist die Periode unabhängig von der Schwingungsamplitude (s. (3.12))

$$x_1^{s,c}\ \ bzw.\ \ A\ ,$$

ein bekanntes Ergebnis. Weitere Fälle sind

- $\hat{\omega}\to 0\,und\ \hat{\omega}^2\neq\lambda_\nu \Rightarrow\ C_\nu^{s,c}\left(\hat{\omega}\right)=0\ \ für\ \ alle\ \ \nu=1(1)\infty$ (3.21)
  Das hat nach (3.18) zur Folge $x_\nu^{s,c}=0$ .d.h. die Ruhestellung des Oszillators.

- Der Fall $\hat{\omega}\to 0\,und\ \hat{\omega}^2=\lambda_\nu=0$ tritt nicht ein, weil $\lambda_\nu>0$ für alle $\nu=1,\ldots\infty$.

b) Erregerfrequenz nahe der Eigenfrequenz des freien Oszillators

Zu betrachten sind die Fälle:

$$\textbf{(1)} \quad \hat{\omega} \to \omega_0,\ \hat{\omega}^2 = \omega_0^2 \neq \lambda_\nu \tag{3.22}$$

$$\textbf{(2)} \quad \hat{\omega} \to \omega_0,\ \hat{\omega}^2 = \lambda_\nu = \omega_0^2 \quad \textit{für ein } \nu = \nu_c \tag{3.23}$$

Resonanzfall (1)

$$\hat{\omega} \to \omega_0,\ \hat{\omega}^2 = \omega_0^2 \neq \lambda_\nu$$

Bei einer Anregung mit einer Frequenz

$$\hat{\omega} \to \omega_0 \ , \tag{3.24}$$

also der **Eigenfrequenz** ω_0 des freien linearen harmonischen Oszillators, ergeben sich die Amplituden aus (3.18), d.h. aus

$$\left(1 - \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu}\right) x_\nu^{s,c} = \frac{K_0 T^2}{\lambda_\nu} C_\nu^{s,c}\left(\hat{\omega}\right) \tag{3.18}$$

mit

$$C_\nu^s\left(\omega_0\right) = \frac{2\sqrt{2\lambda_\nu}\left(1 - \cos\omega_0\right)}{\lambda_\nu - \omega_0^2} \quad \text{und} \quad C_\nu^c\left(\omega_0\right) = \frac{\sqrt{2}\omega_0 \sin\omega_0}{\lambda_\nu - \omega_0^2} \ , \tag{3.25}$$

oder umgestellt

$$x_\nu^{s,c} = \frac{1}{\left(1 - \omega_0^2 \dfrac{T^2}{\lambda_\nu}\right)} \frac{K_0 T^2}{\lambda_\nu} C_\nu^{s,c}\left(\omega_0\right) \quad \Rightarrow \quad x_\nu^{s,c} = \frac{K_0}{\left(\dfrac{\lambda_\nu}{T^2} - \omega_0^2\right)} C_\nu^{s,c}\left(\omega_0\right) \tag{3.26}$$

Die Periode ergibt sich aus

$$T^2 = \frac{\lambda_\nu x_\nu^{s,c}}{\omega_0^2 x_\nu^{s,c} + K_0 C_\nu^{s,c}\left(\omega_0\right)} \tag{3.17b}$$

Sie ist abhängig von der Eigenfrequenz, der mit dieser übereinstimmenden Erregerfrequenz, sowie der Amplitude der harmonischen Anregung und der Schwingungsweite

$$T = f\left(\omega_0, \hat{\omega} = \omega_0, K_0, x_\nu^{s,c}\right) \tag{3.17c}$$

Resonanzfall (2)

$$\hat{\omega} \to \omega_0, \ \hat{\omega}^2 = \lambda_\nu = \omega_0^2 \quad \textit{für ein} \quad \nu = \nu_c$$

In diesem Fall stimmt die Eigenfrequenz mit einem der Eigenwerte überein.

Für die Amplituden erhält man jetzt

$$x_\nu^{s,c} = \frac{K_0 T^2}{\left(\lambda_\nu - \lambda_c T^2\right)} C_\nu^{s,c}\left(\lambda_{\nu_c}\right) \tag{3.27}$$

Nach (3.9) ist

$$T = \nu \frac{2\pi}{\omega_0} =: \nu T_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_\nu - \omega_0^2 T^2 = \lambda_\nu - \omega_0^2 \left(\nu_c \frac{2\pi}{\omega_0}\right)^2 = \lambda_\nu - \lambda_{\nu_c} \tag{3.28}$$

Damit folgt

$$x_{\nu_c}^{s,c} = \frac{K_0 T^2}{\left(\lambda_{\nu_c} - \lambda_{\nu_c}\right)} C_{\nu_c}^{s,c}\left(\omega_0\right) \quad \Rightarrow \quad x_{\nu_c}^{s,c} = \frac{K_0 T^2}{0} C_{\nu_c}^{s,c}\left(\omega_0\right) \tag{3.29}$$

mit

$$C_\nu^s = 0 \quad \text{und} \quad C_\nu^c = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3.30}$$

so daß

$$x_{\nu_c}^s = 0 \quad \text{und} \quad x_{\nu_c}^c = \frac{1}{0}\frac{K_0 T^2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{0}\frac{K_0}{\sqrt{2}}\left(\nu_c \frac{2\pi}{\omega_0}\right)^2 = \frac{1}{0}\frac{K_0}{\sqrt{2}}\frac{\lambda_{\nu_c}}{\omega_0^2} = \frac{1}{0}\frac{K_0 \lambda_{\nu_c}}{\sqrt{2}} \tag{3.31}$$

Die Lösungsdarstellung (2.1)

$$\overline{x}\left(t_n\right) = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \nu_c}}^{\infty} \left(x_\nu^s \overline{\varphi}_\nu^{B,c}\left(t_n\right) + x_\nu^{B,c} \overline{\varphi}_\nu^c\left(t_n\right)\right) + \frac{1}{0}\frac{K_0}{\sqrt{2}} \overline{\varphi}_{\nu_c}^{B,c}\left(t_n\right) \tag{3.31a}$$

weist danach eine **Singularität** auf. Auch die aus (3.17) erhältliche Periode wird wegen (3.31) unbestimmt.

Zu Untersuchung der Singularität im Resonanzfall **(2)** wird im Folgenden ein **linear erweiterter Newton-Operator** Δ_N als primärer Differentialausdruck herangezogen.

3.3 Übergang zum linear erweiterten Newton-Operator Δ_N

Die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + K_0 \cos(\omega t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + f\left(x(t_n)\right) = 0 \tag{3.32}$$

kann mit dem **linear erweiterten Newton-Operator**

$$\Delta_N\left(x(t)\right) := L_N\left(x(t)\right) + \tilde{\lambda} m x(t) \qquad mit \quad \tilde{\lambda} > 0 \tag{3.33}$$

umgeschrieben werden in

$$\begin{aligned} &\Delta_N\left(x(t_n)\right) + \hat{f}\left(x(t_n)\right) = 0 \\ &mit \quad \hat{f}\left(x(t_n)\right) := f\left(x(t_n)\right) - \tilde{\lambda} x(t_n) \qquad \tilde{\lambda} > 0 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Die Integralgleichung ist somit zu ersetzen durch

$$x(t_n) = \hat{x}(t_n) + T^2 \int_0^1 \bar{K}^B\left(t_n, \tau_n; \lambda\right) \hat{f} d\tau_n \qquad \lambda := \tilde{\lambda} T^2 \tag{3.35}$$

Der Integralgleichungskern lautet für ganzperiodische Randbedingungen

$$\bar{K}^B\left(t_n, \tau_n; \lambda\right) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}\left(1 - t_n - \tau_n\right) + \sin\sqrt{\lambda}\left(t_n - \tau_n\right)}{2\sqrt{\lambda}\left(\cos\sqrt{\lambda} - 1\right)} & t_n \leq \tau_n \\ & \text{für} \\ \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}\left(1 - \tau_n - t_n\right) + \sin\sqrt{\lambda}\left(\tau_n - t_n\right)}{2\sqrt{\lambda}\left(\cos\sqrt{\lambda} - 1\right)} & \tau_n \leq t_n \end{cases} \tag{3.36}$$

und er besitzt die **Selbstdarstellung (Bilineardarstellung)**

$$\bar{K}^B\left(t_n, \tau_n; \lambda\right) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{\bar{\Phi}_\sigma^B(t_n)\,\bar{\Phi}_\sigma^B(\tau_n)}{\bar{\lambda}_\sigma - \lambda} \tag{3.37}$$

vorausgesetzt, der Parameter λ stimmt mit keinem der Eigenwerte

$$\bar{\lambda}_0 = 0 \qquad \bar{\lambda}_\nu = (2\nu\pi)^2 \quad \nu = 1(1)\infty \tag{3.38}$$

überein. D.h., es muß gelten

$$\lambda \neq \bar{\lambda}_0 = 0 \quad und \quad \lambda \neq \lambda_\nu = (2\nu\pi)^2 \quad \nu = 1(1)\infty \tag{3.39}$$

Wenn hingegen

$$\lambda = \bar{\lambda}_0 = 0 \quad oder \quad \lambda \in \left\{ \bar{\lambda}_\nu = (2\nu\pi)^2 \quad \nu = 1(1)\infty \right\}, \tag{3.40}$$

dann lautet die Selbstdarstellung des Kerns

$$\bar{K}^B(t_n, \tau_n; \lambda) = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu\neq\sigma}}^{\infty} \frac{\bar{\Phi}_\nu^B(t_n)\bar{\Phi}_\nu^B(\tau_n)}{\bar{\lambda}_\nu - \lambda} \qquad wenn \quad \lambda = \bar{\lambda}_\sigma \tag{3.41}$$

In (3.35) ist

$$\hat{x}(t_n) = 0 \ , \tag{3.42}$$

so daß eine Lösung der Integralgleichung

$$\bar{x}(t_n) = T^2 \int_0^1 \bar{K}^B(t_n, \tau_n; \lambda)\, \hat{f} d\tau_n \qquad \lambda := \tilde{\lambda} T^2 \tag{3.43}$$

zu bestimmen ist.

3.3.1 Freier Oszillator

Der freie Oszillator ist definiert durch $\hat{\omega} \to 0 \ und \ K_0 = 0$.

Es ist

$$\hat{f}(x(t_n)) := \omega_0^2 x(t_n) - \tilde{\lambda} x(t_n) \qquad \omega_0^2, \tilde{\lambda} > 0 \tag{3.44}$$

und damit folgt

$$
\begin{aligned}
\bar{x}(t_n) &= T^2 \int_0^1 \bar{K}^B(t_n,\tau_n;\lambda)\left\{\omega_0^2 x(t_n) - \tilde{\lambda} x(t_n)\right\} d\tau_n \\
&= \omega_0^2 T^2 \int_0^1 \bar{K}^B(t_n,\tau_n;\lambda)\, x(\tau_n)\, d\tau_n - \tilde{\lambda} T^2 \int_0^1 \bar{K}^B(t_n,\tau_n;\lambda)\, x(t_n)\, d\tau_n \\
&= \left(\omega_0^2 - \tilde{\lambda}\right) T^2 \int_0^1 \bar{K}^B(t_n,\tau_n;\lambda)\, x(t_n)\, d\tau_n
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

In diese Integralgleichung sind einzutragen

- die **Lösungsdarstellung** als Reihe nach den Eigenfunktionen

$$\bar{x}(t_n) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{x_\nu^s \bar{\Phi}_\nu^{B,s}(t_n) + x_\nu^c \bar{\Phi}_\nu^{B,c}(t_n)\right\} \tag{3.46}$$

Die Eigenfunktionen und Eigenwerte lauten

$$\bar{\Phi}_0^s(t_n) = 1 \qquad \text{zum } \textbf{einfachen} \text{ Eigenwert } \quad \bar{\lambda}_0 = 0 \tag{3.47}$$

und

$$\bar{\Phi}_\nu^{B,s,c}(t_n) = \begin{cases} \sqrt{2}\sin(2\nu\pi t_n - \varphi) \\ \\ \sqrt{2}\cos(2\nu\pi t_n - \varphi) \end{cases} \quad \varphi \text{ beliebige Phasenkonstante} \tag{3.48}$$

$$\text{zum } \textbf{zweifachen} \text{ Eigenwert} \qquad \lambda \neq \bar{\lambda}_\nu = (2\nu\pi)^2 \quad \nu = 1(1)\infty \tag{3.49}$$

und

- **die Bilineardarstellung** des Integralgleichungskerns

$$\bar{K}^B(t_n,\tau_n;\bar{\lambda}_\sigma) = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu\neq\sigma}}^{\infty} \frac{\bar{\Phi}_\nu^{B,s}(t_n)\bar{\Phi}_\nu^{B,s}(\tau_n) + \bar{\Phi}_\nu^{B,c}(t_n)\bar{\Phi}_\nu^{B,c}(\tau_n)}{\bar{\lambda}_\nu - \bar{\lambda}_\sigma} \tag{3.50}$$

Nach Koeffizientenvergleich zu gleichen Eigenfunktionen erhält man das System der Bedingungsgleichungen für $\lambda = \bar{\lambda}_\sigma$ zu

$$x_\nu^{s,c} = \frac{T^2}{\bar{\lambda}_\nu - \bar{\lambda}_\sigma}\int_0^1 \bar{\Phi}_\nu^{B,s,c}(\tau_n)\, \hat{f}\left(x(\tau_n);\bar{\lambda}_\sigma\right) d\tau_n \qquad \nu = 1(1)\infty \tag{3.51}$$

Die Koeffizienten $x_0^{s,c}$ müssen zusätzlich der Orthogonalitäts- und der Lösbarkeitsbedingung genügen.

Setzt man in (3.51) entsprechend (3.44) ein, so bekommt man

$$\begin{aligned} x_\nu^{s,c} &= \frac{T^2}{\bar{\lambda}_\nu - \bar{\lambda}_\sigma} \int_0^1 \bar{\Phi}_\nu^{B,s,c}(\tau_n)\left(\omega_0^2 - \tilde{\lambda}_\sigma\right) x(\tau_n)\, d\tau_n \\ &= \frac{T^2\left(\omega_0^2 - \tilde{\lambda}_\sigma\right)}{\bar{\lambda}_\nu - \bar{\lambda}_\sigma} \int_0^1 \bar{\Phi}_\nu^{B,s,c}(\tau_n)\, x(\tau_n)\, d\tau_n \end{aligned} \quad , \tag{3.52}$$

und es folgt daraus

$$\left(\frac{T^2\left(\omega_0^2 - \tilde{\lambda}_\sigma\right)}{\bar{\lambda}_\nu - \bar{\lambda}_\sigma} - 1\right) x_\nu^{s,c} = 0 \xrightarrow{\tilde{\lambda} \square \bar{\lambda}_\sigma \to 0} \left(\frac{T^2 \omega_0^2}{\lambda_\nu} - 1\right) x_\nu^{s,c} = 0 \tag{3.53}$$

Wie im Falle des nicht erweiterten Newton-Operators resultiert eine nichttriviale Lösung nur dann, wenn

$$\left(\frac{T^2\left(\omega_0^2 - \tilde{\lambda}_\sigma\right)}{\bar{\lambda}_\nu - \bar{\lambda}_\sigma} - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad T^2\left(\omega_0^2 - \tilde{\lambda}_\sigma\right) - \left(\bar{\lambda}_\nu - \bar{\lambda}_\sigma\right) = 0 \tag{3.54}$$

bzw. wenn man $\lambda = \tilde{\lambda} T^2$ beachtet

$$T^2 = \frac{\bar{\lambda}_\nu}{\omega_0^2} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_\nu}{\omega_0^2}} = \frac{2\pi\nu}{\omega_0} \quad . \tag{3.55}$$

3.3.2 Erzwungene Schwingungen des linearen Oszillators

Mit

$$\hat{f}\left(x(\tau_n); \tilde{\lambda}\right) = \omega_0^2 x(t_n) + K_0 \cos(\hat{\omega} t_n) - \tilde{\lambda} x(t_n) \tag{3.56}$$

lauten die Bedingungsgleichungen

$$x_\nu^{s,c} = \frac{T^2}{\bar{\lambda}_\nu - \tilde{\lambda}_\sigma}\left\{\left(\omega_0^2 - \tilde{\lambda}_\sigma\right) x_\nu^{s,c} + K_0 \int_0^1 \bar{\Phi}_\nu^{B,s,c}(\tau_n) \cos(\hat{\omega}\tau_n)\, d\tau_n\right\} \tag{3.57}$$

oder umgestellt

$$x_\nu^{s,c}\left[1-\frac{T^2\left(\omega_0^2-\tilde{\lambda}_\sigma\right)}{\bar{\lambda}_\nu-\tilde{\lambda}_\sigma}\right]=\frac{T^2K_0}{\bar{\lambda}_\nu-\tilde{\lambda}_\sigma}\int_0^1\bar{\Phi}_\nu^{B,s,c}\left(\tau_n\right)\cos\left(\hat{\omega}\tau_n\right)d\tau_n\,, \tag{3.58}$$

woraus folgt

$$x_\nu^{s,c}\left[1-\frac{T^2\left(\omega_0^2-\tilde{\lambda}_\sigma\right)}{\bar{\lambda}_\nu-\tilde{\lambda}_\sigma}\right]=\frac{T^2K_0}{\bar{\lambda}_\nu-\tilde{\lambda}_\sigma}C_\nu^{s,c}\left(\hat{\omega}\right) \tag{3.59}$$

bzw.

$$x_\nu^{s,c}=\frac{T^2K_0}{\left[\left(\bar{\lambda}_\nu-\tilde{\lambda}_\sigma\right)-T^2\left(\omega_0^2-\tilde{\lambda}_\sigma\right)\right]}C_\nu^{s,c}\left(\hat{\omega}\right) \tag{3.60}$$

Sonderfälle: **1.** $\tilde{\lambda}\to 0$: Dieser Fall ist wegen der Voraussetzung $\tilde{\lambda}>0$ Ausgeschlossen!

2. Resonanzfall (1) $\hat{\omega}\to\omega_0$ **und** $\omega_0^2\neq\tilde{\lambda}_\sigma$**:** Man erhält

$$x_\nu^{s,c}=\frac{T^2K_0}{\left[\left(\bar{\lambda}_\nu-\tilde{\lambda}_\sigma\right)-T^2\left(\omega_0^2-\tilde{\lambda}_\sigma\right)\right]}C_\nu^{s,c}\left(\omega_0\right) \tag{3.61}$$

oder wegen $T^2=\dfrac{\bar{\lambda}_\sigma}{\omega_0^2}\Leftrightarrow T^2\omega_0^2=\bar{\lambda}_\sigma$

$$x_\nu^{s,c}=\frac{\bar{\lambda}_\nu K_0}{\left[\omega_0^2\left(\bar{\lambda}_\nu-\tilde{\lambda}_\sigma\right)-\left(\omega_0^2\bar{\lambda}_\nu-\tilde{\lambda}_\sigma\right)\right]}C_\nu^{s,c}\left(\omega_0\right) \tag{3.62}$$

Als Periode der ganzperiodischen Schwingung des angeregten ungedämpften harmonischen Oszillators ergibt sich im Resonanzfall **(1)**

$$T^2=\frac{\lambda_\nu x_\nu^{s,c}}{\omega_0^2x_\nu^{s,c}+K_0C_\nu^{s,c}\left(\omega_0\right)}$$

3. Resonanzfall (2) $\hat{\omega}\to\omega_0$ **und** $\omega_0^2=\tilde{\lambda}_\sigma$

Es ist jetzt

$$
\begin{aligned}
x_\nu^{s,c} &= \frac{\bar{\lambda}_\nu K_0}{\left[\tilde{\lambda}_\sigma\left(\bar{\lambda}_\nu - \tilde{\lambda}_\sigma\right) - \left(\bar{\lambda}_\sigma \bar{\lambda}_\nu - \tilde{\lambda}_\sigma\right)\right]} C_\nu^{s,c}\left(2\pi\sigma\right) \\
&= \frac{\bar{\lambda}_\nu K_0}{\tilde{\lambda}_\sigma\left(1 - \tilde{\lambda}_\sigma\right)} C_\nu^{s,c}\left(2\pi\sigma\right)
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

Wegen

$$
C_\nu^s\left(2\pi\sigma\right) = \frac{2\sqrt{2\bar{\lambda}_\nu}\left(1 - \cos 2\pi\sigma\right)}{\bar{\lambda}_\nu - \left(2\pi\sigma\right)^2} = \frac{2\sqrt{2\bar{\lambda}_\nu}\Box 0}{\bar{\lambda}_\nu - \tilde{\lambda}_\sigma} = 0 \tag{3.64}
$$

$$
C_\nu^c\left(2\pi\sigma\right) = \frac{\sqrt{2}\left(2\pi\sigma\right)\sin\left(2\pi\sigma\right)}{\bar{\lambda}_\nu - \tilde{\lambda}_\sigma} = \frac{\sqrt{2}\left(2\pi\sigma\right)\Box 0}{\bar{\lambda}_\nu - \tilde{\lambda}_\sigma} = 0 \tag{3.65}
$$

folgt für die Amplituden des kritischen Terms

$$
x_\sigma^{s,c} = \frac{\bar{\lambda}_\sigma K_0}{\tilde{\lambda}_\sigma\left(1 - \tilde{\lambda}_\sigma\right)} C_\sigma^{s,c}\left(2\pi\sigma\right) = 0 \ . \tag{3.66}
$$

In der Lösungsdarstellung

$$
x\left(t_n\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{x_\nu^s \bar{\Phi}_\nu^{B,s}\left(t_n\right) + x_\nu^c \bar{\Phi}_\nu^{B,c}\left(t_n\right)\right\} \tag{3.67}
$$

fehlt danach der kritische Term $\nu = \sigma$, d.h., es ist

$$
x\left(t_n\right) = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu\neq\sigma}}^{\infty}\left\{x_\nu^s \bar{\Phi}_\nu^{B,s}\left(t_n\right) + x_\nu^c \bar{\Phi}_\nu^{B,c}\left(t_n\right)\right\} \tag{3.68}
$$

Die Amplituden $x_\nu^{s,c}$ *für* $\nu \neq \sigma$ ergeben sich nach (3.19)-(3.20) zu

$$
x_\nu^{s,c} = \frac{T^2 K_0}{\left[\left(\bar{\lambda}_\nu - \tilde{\lambda}_\sigma\right) - T^2\left(\omega_0^2 - \tilde{\lambda}_\sigma\right)\right]} C_\nu^{s,c}\left(\hat{\omega}\right) \qquad \bar{\lambda}_\nu \neq \omega_0^2 \tag{3.69}
$$

Für die Periode der ganzperiodischen Schwingung des angeregten ungedämpften harmonischen Oszillators erhält man aus (3.17b)

$$
T^2 = \frac{\lambda_\nu x_\nu^{s,c}}{\omega_0^2 x_\nu^{s,c} + K_0 C_\nu^{s,c}\left(\omega_0\right)} \text{ für } \nu \neq \sigma \tag{3.70}
$$

4. Gedämpfter linearer harmonischer Oszillator

Die Bewegungsgleichung (1.1) soll um eine **geschwindigkeitsproportionale Dämpfung** erweitert werden

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x - \beta \dot{x} + K_0 \cos(\omega t) &= 0 \qquad \beta > 0 \\ \ddot{x} + \qquad f\left(x(t_n)\right) \qquad &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Wieder werden ganzperiodische Lösungen gesucht.

4.1 Freier gedämpfter harmonischer Oszillator

Es ist zu erwarten, daß zufolge der Dämpfung **keine(!)** ganzperiodische Lösung existiert. Denn Dämpfung führt bekanntlich zu einem Abklingen der Schwingungsamplitude, d.h., es liegt keine ganzperiodische Lösung im Sinne von (1.4) vor. Das soll bestätigt werden.

Die Bewegungsgleichung (4.1) vereinfacht sich im Fall des freien Oszillators zu

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x - \beta \dot{x} \quad &= 0 \qquad \beta > 0 \\ \ddot{x} + \quad f\left(x(t_n)\right) &= 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die Integralgleichung lautet

$$\bar{x}(t_n) = T^2 \left\{ \int_0^1 \bar{K}^B(t_n, \tau_n) \omega_0^2 \left\{ x_0(\tau_n) + \bar{x}(\tau_n) \right\} - \beta \int_0^1 \bar{K}^B(t_n, \tau_n) \dot{x} d\tau_n \right\} \tag{4.3}$$

Geht man in diese Gleichung mit einer Entwicklung nach den Eigenfunktionen des Integralgleichungskerns als Lösungsansatz ein, so resultieren analog wie in § 3.1 die Bedingungsgleichungen

$$x_\nu^{s,c} = \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau_n)\left\{x_0(\tau_n) + \overline{x}(\tau_n)\right\} d\tau_n$$
$$- \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau_n) \frac{d\left\{x_0(\tau_n) + \overline{x}(\tau_n)\right\}}{d\tau} d\tau_n \tag{4.4}$$

oder wegen

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{d\overline{x}(t_n)}{dt} = 0 + \frac{1}{T}\frac{d}{dt_n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(x_\nu^s \overline{\varphi}_\nu^s(t_n) + x_\nu^x \overline{\varphi}_\nu^c(t_n)\right)$$
$$= \frac{2\nu\pi}{T}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(x_\nu^s \overline{\varphi}_\nu^c(t_n) - x_\nu^c \overline{\varphi}_\nu^s(t_n)\right) \tag{4.5}$$

als Bedingungsgleichungen

$$x_\nu^{s,c} = \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau_n)\left\{x_\nu^s \overline{\varphi}_\nu^s(\tau_n) + x_\nu^c \overline{\varphi}_\nu^c(\tau_n)\right\} d\tau_n$$
$$- \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau_n)\left\{x_\nu^s \overline{\varphi}_\nu^c(\tau_n) - x_\nu^c \overline{\varphi}_\nu^s(\tau_n)\right\} d\tau_n \tag{4.6}$$

Zufolge der Orthogonalität der Eigenfunktionen ergibt sich

$$x_\nu^{s,c} = \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau_n)\left\{x_\nu^s \overline{\varphi}_\nu^s(\tau_n) + x_\nu^c \overline{\varphi}_\nu^c(\tau_n)\right\} d\tau_n$$
$$- \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau_n)\left\{x_\nu^s \overline{\varphi}_\nu^c(\tau_n) - x_\nu^c \overline{\varphi}_\nu^s(\tau_n)\right\} d\tau_n \tag{4.7}$$

bzw.

$$x_\nu^s = \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} x_\nu^s + \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} x_\nu^c$$
$$x_\nu^c = \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} x_\nu^c - \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} x_\nu^s \tag{4.8}$$

In Matrixdarstellung lautet (4.8)

$$\begin{pmatrix} 1 - \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} & +\beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} \\ -\beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} & 1 - \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\nu^s \\ x_\nu^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

und bei verschwindender Dämpfung $\beta = 0$

$$\begin{pmatrix} 1-\omega_0^2\dfrac{T^2}{\lambda_\nu} & 0 \\ 0 & 1-\omega_0^2\dfrac{T^2}{\lambda_\nu} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_\nu^s \\ x_\nu^c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

Die Gleichung (4.9) bzw. (4.10) besitzt nur dann eine nichttriviale Lösung

$$\begin{pmatrix} x_\nu^s \\ x_\nu^c \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{für wenigstens ein } \nu \geq 1\text{ ,} \tag{4.11}$$

wenn die jeweilige Koeffizientendeterminante verschwindet

$$\begin{vmatrix} 1-\omega_0^2\dfrac{T^2}{\lambda_\nu} & +\beta\dfrac{T^2}{\lambda_\nu}\dfrac{2\nu\pi}{T} \\ -\beta\dfrac{T^2}{\lambda_\nu}\dfrac{2\nu\pi}{T} & 1-\omega_0^2\dfrac{T^2}{\lambda_\nu} \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \left(1-\omega_0^2\frac{T^2}{\lambda_\nu}\right)^2+\left(\beta\frac{T^2}{\lambda_\nu}\frac{2\nu\pi}{T}\right)^2=0 \tag{4.12}$$

Löst man

$$\left(1-\omega_0^2\frac{T^2}{\lambda_\nu}\right)^2=-\left(\beta\frac{T^2}{\lambda_\nu}\frac{2\nu\pi}{T}\right)^2 \tag{4.13}$$

bzw.

$$\frac{\lambda_\nu}{\omega_0^2}-T^2=j\frac{\beta 2\nu\pi T}{\omega_0^2} \qquad mit\ \ j=\sqrt{-1} \tag{4.14}$$

oder umgestellt

$$T^2+j\frac{\beta 2\nu\pi T}{\omega_0^2}-\frac{\lambda_\nu}{\omega_0^2}=0 \tag{4.15}$$

nach T auf , so erhält man

$$T=j\frac{\beta 2\nu\pi}{2\omega_0^2}\pm\sqrt{\frac{\lambda_\nu}{\omega_0^2}-j\frac{\beta 2\nu\pi}{2\omega_0^2}} \tag{4.16}$$

Danach wäre T **komplex**, d.h., es existiert keine ganzperiodische Lösung! Wenn hingegen keine Dämpfung vorliegt, also $\beta=0$, dann existiert eine ganzperiodische Lösung. Jede noch so geringe Dämpfung verhindert die Existenz einer ganzperiodischen Lösung.

4.2 Gedämpfter linearer Oszillator mit äußerer Erregung

Die Bewegungsgleichung lautet jetzt

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x} + \omega_0^2 x - \beta\dot{x} + K_0\cos(\omega t) = 0 \qquad \beta > 0 \\
&\ddot{x} + \qquad f\left(x(t_n)\right) \qquad = 0
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

und damit die Integralgleichung

$$
\overline{x}(t_n) = T^2\left\{\int_0^1 \overline{K}^B(t_n,\tau_n)\,\omega_0^2 x\,d\tau_n - \beta\int_0^1 \overline{K}^B(t_n,\tau_n)\,\dot{x}\,d\tau_n + K_0\int_0^1 \overline{K}^B(t_n,\tau_n)\cos(\tau_n)\,d\tau_n\right\} \tag{4.18}
$$

Die Bedingungsgleichungen (2.2) ergeben sich zu

$$
\begin{aligned}
x_\nu^{s,c} &= \omega_0^2\frac{T^2}{\lambda_\nu}\int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau_n)\,x(\tau_n)\,d\tau_n - \beta\frac{T^2}{\lambda_\nu}\int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau_n)\,\dot{x}(\tau_n)\,d\tau_n + K_0\frac{T^2}{\lambda_\nu}\int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau_n)\cos(\omega\tau_n)\,d\tau_n \\
&= \omega_0^2\frac{T^2}{\lambda_\nu}\sum_{\nu\mu=1}^{\infty}\int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau_n)\left\{x_\mu^s\overline{\varphi}_\mu^s(\tau_n) + x_\mu^c\overline{\varphi}_\mu^s(\tau_n)\right\}d\tau_n \\
&\quad - \beta\frac{T^2}{\lambda_\nu}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{2\mu\pi}{T}\int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau_n)\left\{x_\mu^s\overline{\varphi}_\mu^c(\tau_n) - x_\mu^c\overline{\varphi}_\mu^s(\tau_n)\right\}d\tau_n \\
&\quad + \frac{K_0 T^2}{\lambda_\nu}C_\nu^{s,c}(\hat{\omega})
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

und nach Auswertung der Integrale

$$
x_\nu^s = \omega_0^2\frac{T^2}{\lambda_\nu}x_\nu^s + \beta\frac{T^2}{\lambda_\nu}\frac{2\nu\pi}{T}x_\nu^c + \frac{K_0T^2}{\lambda_\nu}C_\nu^s(\hat{\omega}) \tag{4.20}
$$

$$
x_\nu^c = \omega_0^2\frac{T^2}{\lambda_\nu}x_\nu^c - \beta\frac{T^2}{\lambda_\nu}\frac{2\nu\pi}{T}x_\nu^s + \frac{K_0T^2}{\lambda_\nu}C_\nu^c(\hat{\omega}) \tag{4.21}
$$

bzw. in Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} \left(1-\omega_0^2\frac{T^2}{\lambda_\nu}\right) & +\beta\frac{T^2}{\lambda_\nu}\frac{2\nu\pi}{T} \\ -\beta\frac{T^2}{\lambda_\nu}\frac{2\nu\pi}{T} & \left(1-\omega_0^2\frac{T^2}{\lambda_\nu}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_\nu^s \\ x_\nu^c \end{pmatrix} = \frac{K_0T^2}{\lambda_\nu}\begin{pmatrix} C_\nu^s(\hat{\omega}) \\ C_\nu^c(\hat{\omega}) \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

Die Auflösung dieses inhomogenen linearen Gleichungssystems nach der Cramerschen Regel ergibt

$$\begin{aligned} x_\nu^s &= \frac{K_0T^2}{\lambda_\nu}\frac{C_\nu^s(\hat{\omega})\left(1-\omega_0^2\frac{T^2}{\lambda_\nu}\right)+C_\nu^c(\hat{\omega})\left(\beta\frac{T2\nu\pi}{\lambda_\nu}\right)}{\left(1-\omega_0^2\frac{T^2}{\lambda_\nu}\right)^2+\left(\beta\frac{T2\nu\pi}{\lambda_\nu}\right)^2} \\ x_\nu^c &= \frac{K_0T^2}{\lambda_\nu}\frac{C_\nu^c(\hat{\omega})\left(1-\omega_0^2\frac{T^2}{\lambda_\nu}\right)+C_\nu^s(\hat{\omega})\left(\beta\frac{T2\nu\pi}{\lambda_\nu}\right)}{\left(1-\omega_0^2\frac{T^2}{\lambda_\nu}\right)^2+\left(\beta\frac{T2\nu\pi}{\lambda_\nu}\right)^2} \end{aligned} \tag{4.23}$$

Im **dämpfungsfreien Fall** ergibt sich daraus

$$x_\nu^{s,c} = \frac{K_0T^2}{\lambda_\nu}\frac{C_\nu^{s,c}(\hat{\omega})}{\left(1-\omega_0^2\frac{T^2}{\lambda_\nu}\right)} \tag{4.24}$$

in Übereinstimmung mit (3.18)

5. Quasiperiodische Bewegungen

Es seien jetzt Randbedingungen für **quasiperiodische Bewegungen** gestellt

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t+T)+b_1 \\ \dot{x}(t) &= \dot{x}(t+T)+\frac{1}{T}b_2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Nach der Periode T unterscheiden sich Ort und Geschwindigkeit um jeweils feste Werte b_1 *bzw.* $\frac{1}{T}b_2$.

Die Lösung ist als Lösung der folgenden Integralgleichung $(0 \le t, \tau \le 1)$

$$x(t)=\hat{\bar{x}}(t)-T^2\int_0^1 \bar{K}^B(t,\tau)\, f(x,\dot{x},\tau)\, d\tau \tag{5.2}$$

zu bestimmen *(Schneider I,1992)*. Sie kann dargestellt werden in der Form

$$x(t)=\bar{x}(t)+const\ x_0 \tag{5.3}$$

mit
$$\bar{x}(t)=\hat{\bar{x}}(t)+\sum_{\sigma=1}^{\infty}\left(x_\sigma^s\bar{\varphi}_\sigma^s(t)+x_\sigma^c\bar{\varphi}_\sigma^c(t)\right) \tag{5.4}$$

und
$$\hat{\bar{x}}(t)=\frac{b_1}{2}-\frac{b_2}{12}+(b_2-2b_1)\frac{t}{2}-\frac{b_2}{2}t^2 \tag{5.5}$$

Die Koeffizienten $x_\nu^{s,c}$ müssen als Lösungen der Bedingungsgleichungen

$$x_\nu^{s,c}=\frac{T^2}{\lambda_\nu}\int_0^1 \bar{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau)\, f(x(\tau))d\tau \tag{5.6}$$

bestimmt werden.

Außerdem müssen die **Lösbarkeitsbedingung**

$$\int_0^1 x(\tau)x_0(\tau)\, d\tau=0 \tag{5.7}$$

und die **Orthogonalitätsbedingung**

$$\int_0^1 x_0(\tau)\, f(x(\tau))d\tau=0 \tag{5.8}$$

erfüllt werden.

5.1 Freier ungedämpfter linearer Oszillator

Für

$$f(x):=\omega_0^2 x \tag{5.9}$$

ergeben sich die Bedingungsgleichungen (5.6) zu

$$x_\nu^{s,c} = \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau) \left\{ const \;\; x_0 + \hat{\overline{x}}(\tau) + \sum_{\sigma=1}^{\infty} x_\sigma^s \overline{\varphi}_\sigma^s(\tau) + x_\sigma^c \overline{\varphi}_\sigma^c(\tau) \right\} d\tau$$

$$= \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} \left[\int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau) const \;\; x_0 d\tau + \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau) \hat{\overline{x}}(\tau) \; d\tau + \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau) \sum_{\sigma=1}^{\infty} x_\sigma^s \overline{\varphi}_\sigma^s(\tau) + x_\sigma^c \overline{\varphi}_\sigma^c(\tau) \right] d\tau \tag{5.10}$$

oder umgestellt

$$x_\nu^{s,c} = \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} \left\{ \begin{aligned} &\int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau) const \;\; x_0 d\tau + \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau) \hat{\overline{x}}(\tau) d\tau \\ &\qquad + \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau) \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau) \left(\sum_{\sigma=1}^{\infty} x_\sigma^s \overline{\varphi}_\sigma^s(\tau) + x_\sigma^c \overline{\varphi}_\sigma^c(\tau) \right) d\tau \end{aligned} \right\} \tag{5.11}$$

$$= \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} \left\{ 0 + N_{RB}^{s,c} + x_\nu^{s,c} \right\}$$

oder

$$x_\nu^{s,c} \left(\omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} - 1 \right) = \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} N_{RB}^{s,c} \tag{5.12}$$

und aufgelöst nach den gesuchten Koeffizienten

$$x_\nu^{s,c} = N_{RB}^{s,c} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\lambda_\nu}{\omega_0^2 T^2} \right)} = N_{RB}^{s,c} \frac{\omega_0^2 T^2}{\omega_0^2 T^2 - \lambda_\nu} \tag{5.13}$$

Für den Faktor $N_{RB}^{s,c}$ erhält man

$$N_{RB}^{s,c} = \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau) \left[\frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{12} + (b_1 - 2b_2) \frac{\tau}{2} - \frac{b_2}{2} \tau^2 \right] d\tau$$

$$= \left[\frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{12} \right] \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau) d\tau + \frac{(b_1 - 2b_2)}{2} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau) \tau d\tau - \frac{b_2}{2} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau) \tau^2 d\tau \tag{5.14}$$

$$= \qquad 0 \qquad + \frac{(b_1 - 2b_2)}{2} \quad {}^1I_\nu^{s,c} \qquad - \frac{b_2}{2} \; {}^2I_\nu^{s,c}$$

so dass folgt

$$x_\nu^{s,c} \left(\omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} - 1 \right) = \left[\frac{(b_2 - 2b_1)}{2} \, {}^1I_\nu^{s,c} - \frac{b_2}{2} \, {}^2I_\nu^{s,c} \right] =: \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} K_\nu^{s,c} \tag{5.15}$$

Im **Sonderfall** der ganzperiodischen Bewegungen ist

$$b_{1,2} = 0 \Rightarrow K_\nu^{s,c} = 0 \tag{5.16}$$

womit die schon bekannte Bedingung folgt

$$x_\nu^{s,c}\left(\omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} - 1\right) = 0 \tag{5.17}$$

Die Integrale in (5.14) ergeben sich zu

$${}^1I_\nu^{s,c} = \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau)\tau d\tau = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \int_0^1 \sin(2\nu\pi\tau) \\ \int_0^1 \cos(2\nu\pi\tau) \end{pmatrix}\tau d\tau = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{(2\nu\pi)^2} \\ 0 \end{cases} \tag{5.18a}$$

$${}^2I_\nu^{s,c} = \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau)\tau^2 d\tau = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \int_0^1 \sin(2\nu\pi\tau) \\ \int_0^1 \cos(2\nu\pi\tau) \end{pmatrix}\tau^2 d\tau = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}\left(2-(2\nu\pi)^2\right)}{(2\nu\pi)^3} \\ \dfrac{\sqrt{2}\left(2-(2\nu\pi)^2\right)}{(2\nu\pi)^3} \end{cases} \tag{5.18b}$$

Das Gleichungssystem (5.15), d.h.

$$\begin{aligned} x_\nu^s\left(\omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} - 1\right) &= \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} K_\nu^s \\ x_\nu^c\left(\omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} - 1\right) &= \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} K_\nu^c \end{aligned} \tag{5.19}$$

lautet in Matrixschreibweise

$$\left(1 - \frac{\lambda_\nu}{\omega_0^2 T^2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_\nu^s \\ x_\nu^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_\nu^s \\ K_\nu^c \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

und hat die Lösung

$$x_\nu^{s,c} = \frac{\omega_0^2 \dfrac{T^2}{\lambda_\nu} K_\nu^{s,c}}{\left(\omega_0^2 \dfrac{T^2}{\lambda_\nu} - 1\right)} \tag{5.21}$$

Sie ist **unbestimmt,** wenn entweder

a) der **Nenner** verschwindet

$$\left(\omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} - 1\right) = 0 \Rightarrow \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} = 1 \Leftrightarrow \lambda_\nu = \omega_0^2 T^2 \tag{5.22}$$

Dazu sei auf die Diskussion im Fall ganzperiodischer Bewegungen verwiesen (§ 3.1).

b) oder wenn **Zähler und Nenner** verschwinden

$$\frac{K_\nu^{s,c}}{\left(\omega_0^2 \dfrac{T^2}{\lambda_\nu} - 1\right)} = \frac{0}{0} \tag{5.23}$$

Die Zähler

$$K_\nu^{s,c} := \left[\frac{(b_2 - 2b_1)}{2} \, {}^1I_\nu^{s,c} - \frac{b_2}{2} \, {}^2I_\nu^{s,c}\right] \tag{5.24}$$

verschwinden im Falle ganzperiodischer Bewegungen, d.h. für $b_{1,2} = 0$.

Mit den Integralen (5.18a-b) folgt

$$\begin{aligned} K_\nu^s &:= \frac{(b_2 - 2b_1)}{2} \frac{\sqrt{2}}{(2\nu\pi)^2} - \frac{b_2}{2} \frac{\sqrt{2}\left(2 - (2\nu\pi)^2\right)}{(2\nu\pi)^3} \\ K_\nu^c &:= -\frac{b_2}{2} \frac{\sqrt{2}\left(2 - (2\nu\pi)^2\right)}{(2\nu\pi)^3} \end{aligned} \tag{5.25}$$

bzw.

$$K_\nu^s := \frac{(b_2 - 2b_1)}{2}\frac{\sqrt{2}}{(2\nu\pi)^2} + K_\nu^c$$
$$K_{\nu c} := -\frac{b_2}{2}\frac{\sqrt{2\left(2-(2\nu\pi)^2\right)}}{(2\nu\pi)^3} \tag{5.26}$$

Die Bedingungsgleichungen lauten damit

$$x_\nu^s = \frac{\omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu}}{\left(\omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} - 1\right)}\left(\frac{(b_2 - 2b_1)}{2}\frac{\sqrt{2}}{(2\nu\pi)^2} - \frac{b_2}{2}\frac{\sqrt{2}\left(2-(2\nu\pi)^2\right)}{(2\nu\pi)^3}\right) \tag{5.27}$$

$$x_\nu^c = \frac{\omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu}}{\left(\omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} - 1\right)}\frac{b_2}{2}\frac{\sqrt{2}\left(2-(2\nu\pi)^2\right)}{(2\nu\pi)^3} \tag{5.28}$$

Man erkennt wiederum, dass die oben angesprochene Unbestimmtheit nur auftritt, wenn $b_{1,2} = 0$, also die Randbedingungen für ganzperiodische Bewegungen gestellt sind. Ist dann noch die Periode durch

$$\left(\omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} - 1\right) = 0 \Rightarrow \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} = 1 \Leftrightarrow \lambda_\nu = \omega_0^2 T^2 \tag{5.29}$$

festgelegt, dann liegt der obige Fall b) der Unbestimmtheit vor. Wiederum kommt nur ein Index in Frage, so daß etwa

$$T^2 = \frac{\lambda_1}{\omega_0^2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad . \tag{5.30}$$

Es verbleiben noch die weiteren Bedingungen:

1. Lösbarkeitsbedingung

$$\int_0^1 x(\tau)\cdot x_0(\tau)d\tau = 0 \tag{5.31}$$

$$\int_0^1 \left(\hat{\hat{x}}(\tau) + \sum_{\sigma=!}^{\infty} \left(x_\sigma^s \overline{\varphi}_\sigma^s(\tau) + x_\sigma^c \overline{\varphi}_\sigma^c(\tau) \right) + const\ x_0(\tau) \right) \cdot x_0(\tau) d\tau = 0$$

bzw.

$$\int_0^1 \left(\hat{\hat{x}}(\tau) + const\ x_0(\tau) \right) \cdot x_0(\tau) d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \hat{\hat{x}}(\tau) \cdot x_0(\tau) d\tau = -const \int_0^1 x_0(\tau) x_0(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow const = -\int_0^1 \left(\frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{12} + (b_2 - 2b_1) \frac{\tau}{2} - \frac{b_2}{2} \tau^2 \right) d\tau$$

(5.32)

also

$$\begin{aligned} const &= -\int_0^1 \left(\frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{12} + (b_2 - 2b_1) \frac{\tau}{2} - \frac{b_2}{2} \tau^2 \right) d\tau \\ &= \left[-\frac{b_1}{2} t + \frac{b_2}{12} t - (b_2 - 2b_1) \frac{t^2}{4} + \frac{b_2}{2} \frac{t^3}{3} \right] \Bigg|_0^1 = 0 \end{aligned} \tag{5.33}$$

2. Orthogonalitätsbedingung

$$\int_0^1 x_0(\tau) \cdot f(x(\tau)) d\tau = 0 \tag{5.34}$$

d.h. für $f(x) := \omega_0^2 x$

$$\omega_0^2 \int_0^1 x_0 x(\tau) d\tau = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{12} + (b_2 - 2b_1) \frac{\tau}{2} - \frac{b_2}{2} \tau^2 \right) d\tau = 0 \tag{5.35}$$

Es werden zwar beide Bedingungen erfüllt. Dennoch existiert keine **quasiperiodische** Bewegung im Fall des freien ungedämpften harmonischen Oszillators.

5.2 Freier gedämpfter linearer Oszillator

Die Bewegungsgleichung lautet jetzt

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} \;+\; \omega_0^2 x - \beta \dot{x} \; &= 0 \quad mit \quad \beta > 0 \\
\ddot{x} \;+\quad f\left(x(t)\right) \; &= 0
\end{aligned}
$$

(5.36)

Die Bedingungsgleichungen folgen damit in der Gestalt

$$
\begin{aligned}
x_\nu^{s,c} = {} & \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau)\, x_0 \, d\tau + \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau)\, \hat{x}(\tau)\, d\tau + \\
& \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau) \sum_{\sigma=1}^{\infty} \left(x_\sigma^s \overline{\varphi}_\sigma^s(\tau) + x_\sigma^c \overline{\varphi}_\sigma^c(\tau) \right) d\tau \\
& - \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau)\, \dot{\hat{x}}(\tau)\, d\tau - -\beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau) \sum_{\sigma=1}^{\infty} \left(x_\sigma^s \overline{\varphi}_\sigma^s(\tau) + x_\sigma^c \overline{\varphi}_\sigma^c(\tau) \right)^{\square} d\tau
\end{aligned}
\qquad (5.37)
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
x_\nu^{s,c} = {} & \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} \square 0 \\
& + \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau) \dot{\hat{x}}(\tau)\, d\tau \\
& + \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} x_\nu^{s,c} \\
& - \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau) \dot{\hat{x}}(\tau)\, d\tau \\
& - \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau) \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{2\sigma\pi}{T} \left(x_\sigma^s \overline{\varphi}_\sigma^c(t_n) - x_\sigma^c \overline{\varphi}_\sigma^s(t_n) \right) d\tau
\end{aligned}
\qquad (5.38)
$$

Wertet man die rechte Seite weiter aus, so resultiert

$$
\begin{aligned}
x_\nu^{s,c} \left(1 - \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} \right) = {} & \left(\omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} - \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} \right) \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau) \dot{\hat{x}}(\tau)\, d\tau \\
& - \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau) \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{2\sigma\pi}{T} \left(x_\sigma^s \overline{\varphi}_\sigma^c(\tau) - x_\sigma^c \overline{\varphi}_\sigma^s(\tau) \right) d\tau
\end{aligned}
\qquad (5.39)
$$

bzw.

$$x_\nu^s = \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} x_\nu^s - \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} x_\nu^c + \left(\omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} - \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} \right) \left\{ \left(\frac{(b_2 - 2b_1)}{2} \right) \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^s(\tau) d\tau - b_2 \int_0^1 \tau \overline{\varphi}_\nu^s(\tau) d\tau \right\}$$
$$x_\nu^c = \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} x_\nu^c - \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} x_\nu^s + \left(\omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} - \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} \right) \left\{ \left(\frac{(b_2 - 2b_1)}{2} \right) \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^c(\tau) d\tau - b_2 \int_0^1 \tau \overline{\varphi}_\nu^c(\tau) d\tau \right\}$$

(5.40)

bzw. nach Auswertung der Integrale

$$\begin{aligned} x_\nu^s &= \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} x_\nu^s - \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} x_\nu^c - b_2 \left(\omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} - \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} \right) {}^1 I_\nu^s \\ x_\nu^c &= \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} x_\nu^c - \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} x_\nu^s - b_2 \left(\omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} - \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} \right) {}^1 I_\nu^c \end{aligned} \tag{5.41}$$

Die Integrale ${}^1 I_\nu^{s,c}$ sind durch (5.18a) gegeben, so daß

$$\begin{aligned} x_\nu^s &= \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} x_\nu^s - \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} x_\nu^c - b_2 \left(\omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} - \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} \right) {}^1 I_\nu^s \\ x_\nu^c &= \omega_0^2 \frac{T^2}{\lambda_\nu} x_\nu^c - \beta \frac{T^2}{\lambda_\nu} \frac{2\nu\pi}{T} x_\nu^s \end{aligned} \tag{5.42}$$

Ist $b_2 = 0$, so gehen diese Beziehungen in (4.8) über. b_1 geht nicht in (5.42) ein.

Eine Erweiterung um eine äußere Erregung soll hier nicht vorgenommen werden. Es wird dazu auf § 4.2 verwiesen.

6. Übertragung des Lösungskonzeptes auf Systeme mit (drei) Freiheitsgraden

Mit dem **Newtonschen Differentialausdruck** *(Schneider I, 1992)*

$$L_N := \frac{d}{dt}\left(m \frac{d}{dt} \right) \tag{6.1}$$

lautet die Newton-Eulersche Bewegungsgleichung eines Massenpunktes der Masse *m*, der sich unter der Kraft $\mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) =: -\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)$ bewegt

$$L_N\mathbf{r}+\mathbf{F}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t)=\mathbf{0} \tag{6.2}$$

Bestimmt werden sollen Lösungen $\mathbf{r}(t)$ dieser Bewegungsgleichung, die **zeitliche Randbedingungen vom Sturmschen Typ B** *(Schneider I, 1992)*

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &:= \mathbf{r}_A - k_3\mathbf{r}_B &&= \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{U}_2 &:= k_3 m\dot{\mathbf{r}}_A - m\dot{\mathbf{r}}_B &&= \frac{m}{T}\mathbf{B}_2 \end{aligned} \tag{6.3}$$

erfüllen. Die Bewegungen sind für $k_3=1$

- **quasiperiodisch (bedingt-periodisch)**
- **ganzperiodisch,** wenn zusätzlich $\mathbf{B}_1=\mathbf{B}_2=\mathbf{0}$.

In diesen Fällen ist

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_B &= \mathbf{r}_A-\mathbf{B}_1 & & \mathbf{r}_A=\mathbf{r}_B \\ & & \textit{bzw.} & \\ \dot{\mathbf{r}}_B &= \dot{\mathbf{r}}_A-\frac{1}{T}\mathbf{B}_2 & & \dot{\mathbf{r}}_A=\dot{\mathbf{r}}_B \end{aligned} \tag{6,4}$$

Da wegen $k_3=1$ die **kritische Determinante**

$$D_B^N:=(1-k_3)^2 \tag{6.5}$$

verschwindet, muß zu einer Integraldarstellung der Lösung eine **erweiterte Greensche Funktion** *(Schneider I, 1992)*

$$\bar{G}^B(t,\tau)=\frac{T}{m}\bar{K}^B(t,\tau) \tag{6.6}$$

konstruiert werden. Die **Integraldarstellung** der Lösung $\mathbf{r}(t)$ lautet mit der erweiterten Greenschen Funktion

$$\bar{K}^B(t,\tau)=-\frac{1}{2}|t-\tau|+\frac{1}{2}(t-\tau)^2+\frac{1}{12} \tag{6.7}$$

$$\mathbf{r}(t)=\hat{\mathbf{r}}(t)+\frac{T^2}{m}\int_0^1\bar{K}^B(t,\tau)\mathbf{F}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},\tau)\,d\tau\ , \tag{6.8}$$

worin

$$\hat{\mathbf{r}}(t)=\frac{\mathbf{B}_1}{2}-\frac{\mathbf{B}_2}{12}+(\mathbf{B}_2-2\mathbf{B}_1)\frac{t}{2}-\frac{\mathbf{B}_2}{2}t^2 \tag{6.9}$$

den Randbedingungen vom Typ B Rechnung trägt.

Dieser Lösung kann eine den (homogenen) Randbedingungen genügende nichttriviale Lösung der homogenen Bewegungsgleichung

$$L_N\mathbf{r}=\mathbf{0} \tag{6.10}$$

überlagert werden. Eine solche existiert für den **Eigenrandparameter**

$$\bar{k}_3=1\ . \tag{6.11}$$

Bezeichnet man diese Lösung mit $\mathbf{r}_{10}(t)$, so lautet die allgemeine Lösung der gestellten Randwertaufgabe

$$\mathbf{r}(t)=\bar{\mathbf{r}}(t)+k_{(0)}\mathbf{r}_{10}(t) \tag{6.12}$$

Zur eindeutigen Lösungsdarstellung separiert man $\mathbf{r}_{10}(t)$ durch die **Orthogonalitätsbedingung** *(Schneider I, 1992)*

$$\int_0^1 \bar{\mathbf{r}}(\tau)\cdot\mathbf{r}_{10}(\tau)\,d\tau=0. \tag{6.13}$$

Da bei den hier interessierenden Randbedingungen für quasi-/ganzperiodische Bewegungen $\mathbf{r}_{10}(t)$ zeitunabhängig ist, lässt sich die Bedingung (6.13) schreiben

$$\mathbf{r}_{10}\cdot\int_0^1 \bar{\mathbf{r}}(\tau)\,d\tau=0 \tag{6.14}$$

Zusätzlich muß die **Lösbarkeitsbedingung**

$$\mathbf{r}_{10}\cdot\int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},\tau)\,d\tau=0 \tag{6.15}$$

erfüllt werden. Wegen der Zeitunabhängigkeit von $\mathbf{r}_{10}(t)$ lässt sich die Lösbarkeitsbedingung schreiben in der Gestalt

$$\mathbf{r}_{10}\cdot\int_0^1 \mathbf{F}\left(\bar{\mathbf{r}}+k_{(0)}\mathbf{r}_{10},\dot{\bar{\mathbf{r}}},\tau\right)d\tau=0 \tag{6.16}$$

woraus die Konstante $k_{(0)}$ berechenbar ist.

Ergebnis: Die Bestimmung einer im zeitlichen Grundgebiet quasiperiodischen/ ganzperiodischen Lösung läuft darauf hinaus, das Gefüge von Bedingungen

- **Integralgleichung**
- **Orthogonalitätsbedingung**
- **Lösbarkeitsbedingung**

zu erfüllen.

Anstatt vom newtonschen Differentialausdruck L_N kann man auch von seiner **linearen Erweiterung** Λ_N ausgehen, also von der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} &\Lambda_N + \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \mathbf{0} \\ &mit \quad \hat{\mathbf{F}} := \mathbf{F} - \tilde{\lambda} m \mathbf{r} \quad (\tilde{\lambda} \geq 0) \end{aligned} \tag{6.17}$$

und damit von der Integraldarstellung

$$\mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{r}}(t) + \frac{T^2}{m} \int_0^1 \bar{K}^B(t, \tau; \lambda) \hat{\mathbf{F}} d\tau \qquad \left(\lambda := \tilde{\lambda} T^2\right) \tag{6.18}$$

der gesuchten Lösung, einer Integralgleichung vom Fredholmschen Typ. Der Integralgleichungskern ist für $\bar{k}_3 = 1$ gegeben zu

$$\bar{K}^B(t, \tau; \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}(1 - t - \tau) + \sin\sqrt{\lambda}(t - \tau)}{2\sqrt{\lambda}\left(\cos\sqrt{\lambda} - 1\right)} & t \leq \tau \\ & \textit{für} \\ \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}(1 - \tau - t) + \sin\sqrt{\lambda}(\tau - t)}{2\sqrt{\lambda}\left(\cos\sqrt{\lambda} - 1\right)} & \tau \leq t \end{cases} \tag{6.19}$$

Die **Eigenwerte** sind Nullstellen der Determinante *(Schneider I,1992)*

$$\Delta_B^N = 1 - k_3^2 \cos\sqrt{\lambda} - 2k_3 \tag{6.20}$$

für $\bar{k}_3 = 1$, also aus der Eigenwertgleichung

$$\cos\sqrt{\lambda} = 1 \tag{6.21}$$

zu bestimmen.

$$\begin{array}{ccc} \bar{\lambda}_0 = 0 & \bar{\lambda}_\nu = (2\nu\pi)^2 & \nu = 1(1)\infty \\ \text{einfacher} & \text{zweifacher} & \\ & \text{Eigenwert} & \end{array} \tag{6.22}$$

Die zugehörigen auf dem zeitlichen Grundgebiet $[t_A, t_B] \square [0,1]$ **orthonormierten Eigenfunktionen** sind

$$\bar{\Phi}_0^B = 1$$
$$\bar{\Phi}_\nu^B(t_n) = \begin{cases} \sqrt{2}\cos(2\nu\pi t_n - \alpha) & \nu = 1(1)\infty \\ \sqrt{2}\sin(2\nu\pi t_n - \alpha) & \alpha \text{ beliebige Phasenkonstante} \end{cases} \tag{6.23}$$

Der Eigenwert $\bar{\lambda}_0 = 0$ bedeutet, daß nicht nur eine Eigenlösung von Λ_N, sondern auch zu L_N vorliegt. Diese ist mit der Lösung $\mathbf{r}_{10}(t)$ für den Eigenrandparameter $\bar{k}_3 = 1$ identisch.

Der Integralgleichungskern lässt sich nach den vorgenannten Eigenfunktionen entwickeln. Man erhält die **Bilineardarstellung** *(Schneider I, 1992)*

$$\bar{K}^B(t_n, \tau_n; \lambda) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{\bar{\Phi}_\sigma^B(t_n)\bar{\Phi}_\sigma^B(\tau_n)}{\bar{\lambda}_\sigma - \lambda} \tag{6.24}$$

vorausgesetzt, der Parameter λ stimmt mit keinem der Eigenwerte überein. D.h. , es muß gelten

$$\lambda \neq \bar{\lambda}_0 \quad \lambda \neq \bar{\lambda}_\nu \quad \nu = 1(1) \tag{6.25}$$

Andernfalls, und das ist für die Behandlung von Resonanzen wichtig, tritt in der Bilineardarstellung des Kerns ein verschwindende Nenner auf. In diesem Fall ist eine **erweiterte Greensche Funktion** mit Hilfe der zugehörigen Eigenfunktion zu konstruieren. Stimmt λ beispielsweise mit dem Eigenwert $\bar{\lambda}_\sigma$ überein, so ist die (**einfach**) erweiterte Greensche Funktion $\bar{\Gamma}(t_n, \tau_n; \bar{\lambda}_\sigma)$ als Lösung der vereinfachten Differentialgleichung

$$\Lambda_N\left[\bar{\Gamma}(t_n, \tau_n; \bar{\lambda}_\sigma)\right] = -\delta(t_n, \tau_n) + \bar{\Phi}_\sigma^B(t_n)\bar{\Phi}_\sigma^B(\tau_n) \tag{6.26}$$

zu bestimmen. In der Bilineardarstellung der erweiterten Greenschen Funktion fehlt dann der Term mit der Eigenfunktion $\bar{\Phi}_\sigma^B(t_n)$, d.h., es resultiert als **Bilineardarstellung** des Integralgleichungskerns

$$\bar{K}^B\left(t_n,\tau_n;\bar{\lambda}_\sigma\right)=\sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq\sigma}}^{\infty}\frac{\bar{\Phi}_\nu^B(t_n)\bar{\Phi}_\nu^B(\tau_n)}{\bar{\lambda}_\nu-\lambda} \tag{6.27}$$

Damit stehen alle Mittel zur Verfügung, um die Fredholmsche Integralgleichung nach der auf Hammerstein *(Hammerstein 1930)* zurückgehenden **Methode der unendlich vielen Variablen** zu lösen.

Danach wird als Lösungsansatz eine Entwicklung der gesuchten Lösung nach dem auf dem zeitlichen Grundgebiet orhonormierten System der Eigenfunktionen des Integralgleichungskerns verwendet

$$\bar{\mathbf{r}}(t)=\hat{\mathbf{r}}(t)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\mathbf{r}_\nu^s\bar{\varphi}_\nu^s(t_n)+\mathbf{r}_\nu^c\bar{\varphi}_\nu^c(t_n)\right) \tag{6.28}$$

Zusammen mit der Bilineardarstellung des Integralgleichungskerns in die zu lösende Integralgleichung eingetragen erhält man nach dem Vergleich der Koeffizienten zu gleichen Eigenfunktionen das unendliche System von **Bedingungsgleichungen**

$$\mathbf{r}_\nu^{s,c}=\frac{T^2}{\lambda_\nu}\int_0^1\bar{\varphi}_\nu^{s,c}(\tau_n)\mathbf{F}\left(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};\tau_n\right)d\tau_n \qquad \nu=1(1)\infty \tag{6.29}$$

für die Entwicklungskoeffizienten des Lösungsansatzes. Eine Lösung $\mathbf{r}_\nu^{s,c}$ $\nu=1(1)\infty$ dieses Gleichungssystems beschreibt, vorausgesetzt es werden auch die **Lösbarkeits-** und die **Orhogonalitätsbedingung** erfüllt, eine periodische Lösung des vorgelegten Bewegungsproblems. Diese Lösung hat die Darstellung

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t_n)&=\bar{\mathbf{r}}(t_n)+k_{(0)}\mathbf{r}_{10}(t_n)\\ &=\hat{\mathbf{r}}(t_n)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\mathbf{r}_\nu^s\bar{\varphi}_\nu^s(t_n)+\mathbf{r}_\nu^c\bar{\varphi}_\nu^c(t_n)\right)+k_{(0)}\mathbf{r}_{10}(t_n)\end{aligned} \tag{6.30}$$

Anm.: 1. Die obere Summationsgrenze wird aus praktischen Gründen in der Regel eine endliche natürliche Zahl sein

$$\mathbf{r}(t_n)=\hat{\mathbf{r}}(t_n)+\sum_{\nu=1}^{N}\left(\mathbf{r}_\nu^s\bar{\varphi}_\nu^s(t_n)+\mathbf{r}_\nu^c\bar{\varphi}_\nu^c(t_n)\right)+\sum_{\nu=N=+1}^{\infty}\left(\mathbf{r}_\nu^s\bar{\varphi}_\nu^s(t_n)+\mathbf{r}_\nu^c\bar{\varphi}_\nu^c(t_n)\right)+k_{(0)}\mathbf{r}_{10}(t_n) \tag{6.31}$$

Die zweite Summe der rechten Seite wird als vernachlässigbar klein angenommen.

2.Die Zeitvariable t ist normiert gemäß

$$t \equiv t_n := \frac{t - t_A}{T} \Leftrightarrow 0 \le t \le 1 \quad T := t_B - t_A \tag{6.32}$$

3. Die vorstehenden Ausführungen gelten sinngemäß auch dann, wenn mit einer erweiterten Greenschen Funktion zu arbeiten ist.

4. ***Beispiel:*** *Ist*

$$\begin{aligned} &\Lambda_N + \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM_\otimes}{a^3}\mathbf{r} \\ &\textit{mit} \quad \hat{\mathbf{F}} := +\frac{GM_\otimes}{a^3}\mathbf{r} - \tilde{\lambda} m \mathbf{r} \quad (\tilde{\lambda} \ge 0) \\ &\textit{und} \quad \Lambda_N = L_N + \tilde{\lambda} m \mathbf{r} \end{aligned} \tag{6.33}$$

so liegt die Bewegungsgleichung für eine Keplersche Kreisbahn vor. Die Gleichung (3.55) bedeutet dann

$$\begin{aligned} &T = \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_\nu}{GM_\otimes / a^3}} = \frac{2\pi\nu}{n} \\ &\textit{mit} \quad \omega_0 =: n = \sqrt{\frac{GM_\otimes}{a^3}} \qquad \textit{mittlere Bewegung} \end{aligned} \tag{6.34}$$

bzw. für $\nu = 1$

$$\frac{T^2}{a^3} = GM_\otimes \tag{6.35}$$

Für den kleinsten Eigenwert $\bar{\lambda}_1 = (2\pi)^2$ *erhält man das 3.Keplergesetz für eine ganzperiodische Keplersche Kreisbahn. Dieses Ergebnis trifft auch noch für elliptische Keplerbahnen zu!*

Zusammenfassung und Ausblick

Am Beispiel des linearen harmonischen Oszillators wurde ein Weg aufgezeigt, auf dem der Resonanzfall beherrschbar ist. Ausgehend von der Fredholmschen Integralgleichung, die die (quasi-/ganz-)periodische Bewegung beschreibt, wurde nach dem Verfahren der unendlich vielen Variablen die Lösung der Integralgleichung aufgesucht. Dazu war ein System von unendlich vielen Bedingungsgleichungen für die Reihenkoeffizienten einer Entwicklung der gesuchten Lösung nach den Eigenfunktionen des Integralgleichungskerns aufzulösen. Die Lösung musste noch einer Orthogonalitätsbedingung genügen sowie einer Lösbarkeitsbedingung. Erstere fordert, daß die Eigenlösung zur Inhomogenität der Bewegungsgleichung orthogonal ist, letztere, daß die Lösung des Bewegungsproblems orthogonal zur Eigenlösung ist.

Wenn in der Bilineardarstellung des Integralgleichungskerns

$$\bar{K}^B(t_n,\tau_n)=\sum_{\sigma=1}^{\infty}\frac{\bar{\varphi}_\sigma^s(t_n)\bar{\varphi}_\sigma^s(\tau_n)+\bar{\varphi}_\sigma^c(t_n)\bar{\varphi}_\sigma^c(\tau_n)}{\lambda_\sigma} \tag{2.4}$$

einer der Eigenwerte $\bar{\lambda}_\sigma$ mit dem Parameter λ in der Bewegungsgleichung (3.34) übereinstimmt, dann tritt ein verschwindender Nenner auf. In diesem Fall ist eine erweiterte Greensche Funktion zu konstruieren

$$\bar{K}^B(t_n,\tau_n;\bar{\lambda}_\sigma)=\sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq\sigma}}^{\infty}\frac{\bar{\Phi}_\nu^{B,s}(t_n)\bar{\Phi}_\nu^{B,s}(\tau_n)+\bar{\Phi}_\nu^{B,c}(t_n)\bar{\Phi}_\nu^{B,c}(\tau_n)}{\bar{\lambda}_\nu-\bar{\lambda}_\sigma} \tag{6.27}$$

Darin fehlt der Term mit der Eigenfunktion zum Eigenwert $\bar{\lambda}_\sigma$.
Diese Situation liegt im Resonanzfall des mit einer periodischen Kraft angeregten Oszillators vor.

Anm.: Die Lösbarkeitsbedingungen stellen sicher, daß die Lösungsdarstellung keine unbestimmten Terme enthält und dadurch unbrauchbar wird.

Im Resonanzfall **(1)** also für $\hat{\omega}\to\omega_0$ und $\hat{\omega}^2=\omega_0^2\neq\lambda_\nu$, sind die Reihen-Koeffizienten durch (3.61) bzw. (3.62) gegeben

$$x_\nu^{s,c}=\frac{\bar{\lambda}_\nu K_0}{\left[\omega_0^2\left(\bar{\lambda}_\nu-\bar{\lambda}_\sigma\right)-\left(\omega_0^2\bar{\lambda}_\nu-\bar{\lambda}_\sigma\right)\right]}C_\nu^{s,c}(\omega_0)\xrightarrow{(3.19-3.20))}$$

$$x_\nu^{s,c}=\frac{\bar{\lambda}_\nu K_0}{\left[\omega_0^2\left(\bar{\lambda}_\nu-\bar{\lambda}_\sigma\right)-\left(\omega_0^2\bar{\lambda}_\nu-\bar{\lambda}_\sigma\right)\right]}\begin{pmatrix}\dfrac{2\sqrt{2\lambda_\nu}\left(1-\cos\hat{\omega}\right)}{\lambda_\nu-\hat{\omega}^2}\\[2ex] \dfrac{2\sqrt{2}\hat{\omega}\left(1-\cos\hat{\omega}\right)}{\lambda_\nu-\hat{\omega}^2}\end{pmatrix}\qquad \textit{für}\ \hat{\omega}^2\neq\lambda_\nu$$

durch

$$x_\nu^{s,c}=\frac{\bar{\lambda}_\nu K_0}{\left[\omega_0^2\left(\bar{\lambda}_\nu-\bar{\lambda}_\sigma\right)-\left(\omega_0^2\bar{\lambda}_\nu-\bar{\lambda}_\sigma\right)\right]}\begin{pmatrix}\dfrac{2\sqrt{2\lambda_\nu}\left(1-\cos\omega_0\right)}{\lambda_\nu-\omega_0^2}\\[2ex] \dfrac{2\sqrt{2}\hat{\omega}\left(1-\cos\omega_0\right)}{\lambda_\nu-\omega_0^2}\end{pmatrix}.$$

Im Resonanzfall **(2)** ist $\hat{\omega}^2 = \lambda_{\nu_c} \equiv \lambda_\sigma = \omega_0^2$, so daß verschwindende Nenner in den Ausdrücken für die Reihenkoeffizienten auftreten (s. (3.31)), was zu Singularitäten führt. Das ist im Einklang mit dem aus der Literatur bekannten Ergebnis *(Macke 1960, Landau & Lifshiz 1962).*
Wenn man die Lösungsdarstellung vermittels der erweiterten Greenschen Funktion verwendet, dann gelangt man zu folgendem Ergebnis

$$x_\sigma^{s,c} = \frac{\bar{\lambda}_\sigma K_0}{\tilde{\lambda}_\sigma \left(1 - \tilde{\lambda}_\sigma\right)} C_\sigma^{s,c}\left(2\pi\sigma\right) = 0 \quad . \tag{3.66}$$

dieser kritische Term **fehlt** in der Lösungsdarstellung bei Verwendung der erweiterten Greenschen Funktion

$$x\left(t_n\right) = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu\neq\sigma}}^{\infty} \left\{ x_\nu^s \bar{\Phi}_\nu^{B,s}\left(t_n\right) + x_\nu^c \bar{\Phi}_\nu^{B,c}\left(t_n\right) \right\} \tag{3.68}$$

Danach tritt **keine Singularität** in der Lösungsdarstellung auf.

Das vorgestellte Verfahren kann übertragen (s. ANHANG B) werden auf gekoppelte Bewegungsgleichungen, wie sie etwa auftreten bei der Suche periodischer Lösungen in einem konstant rotierenden Bezugssystem beispielsweise im eingeschränkten Dreikörperproblem *(Schneider II, 1993).* In solchen Fällen ist ein Greenscher Tensor zu konstruieren *(Fröhlich 1994, Schneider I, 1992),* bei Auftreten von Singularitäten (Kommensurabilitäten) erweiterte Greensche Tensoren.

Die periodischen Lösungen können nach Poincare auch als intermediäre Lösungen interessant sein - und weiter nach Poincare:

> *„Darüber hinaus aber gibt es ein Faktum, das ich nicht streng beweisen kann, das mir aber dennoch sehr wahrscheinlich richtig zu sein scheint: Wenn zu einem System von (kanonischen) Differentialgleichungen eine partikuläre Lösung gegeben ist, so wird man immer eine periodische Lösung finden können – deren Periode allerdings sehr lang sein wird -, so daß die Differenz dieser beiden Lösungen während eines beliebig langen Zeitraums beliebig klein bleibt. ...“*

Es bleibt zu untersuchen, ob man auf diese Weise eine genäherte Lösung etwa einer Zielbewegung – entsprechend der Vorgabe von Randörtern zu zwei Zeitpunkten - durch eine periodische Lösung angeben kann und damit die Lösung der zugehörigen Fredholmschen Integralgleichung, die eine I. Randwertaufgabe *(Schneider I, 1992)* beschreibt. Damit könnte der Beweis der Vermutung von Poincare geführt werden.

Literaturhinweise

Bartsch, H.J. (2004): *Taschenbuch Mathematischer Formeln*
Fachbuchverlag Leipzig, 20.Auflage

Fröhlich, H. (1994): *Bestimmung von Modellparametern der Erde durch Analyse ihrer Drehbewegung*
Veröff. d .Dt. Geod. Komm., Reihe C, Heft Nr. 420, Frankfurt

Gröbner W. ,Hofreither N. (1965): *Integraltafel I+II*
Springer Verlag Berlin

Hammerstein, A. (1930): *Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen.*
Acta mathematica 54

Landau, L.D. Lifshiz, E.M.(1962-1967): *Lehrbuch der theoretischen Physik I-VIII.*
Akademie-Verlag Berlin

Macke, W. (1960-1962): *Ein Lehrbuch der theoretischen Physik I-VI*
Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig.

Mai, E. M. Schneider,M. Cui (2008): *Zur Entwicklung von Bahntheorien – Methodik und Anwendung –*
Veröff. d .Dt. Geod. Komm., Reihe A, Heft Nr. 122, München

Schneider,M. Cui, Ch.(2005): *Theoreme über Bewegungsintegrale und ihre Anwendung in Bahntheorien*
Veröff. d .Dt. Geod. Komm., Reihe A, Heft Nr. 121, München

Schneider, M. (1992-1999): *Himmelsmechanik I-IV.*
Bibliographisches Institut Mannheim und Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg

Danksagung

Für die Aufnahme der vorliegenden Studie in die Schriftenreihe des Instituts für Astronomische und Physikalische Geodäsie sowie der Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie bedanke ich mich bei Prof. Dr. mult. Reiner Rummel und Prof. Dr. Urs Hugentobler. Herrn Dipl.-Inform. (FH) Martin Ettl danke ich für die Durchführung einiger Kontrollrechnungen mit Hilfe seines Programmsystems zur hochgenauen numerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Schließlich bedanke ich mich bei Herrn Dr.-Ing. Enrico Mai, TU Berlin für Kontrollrechnungen mit Mathematica.

Anhang A

Aus der Literatur sind folgende analytischen Lösungen der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \tag{A.1}$$

des harmonischen Oszillators bekannt:

1) **freier, ungedämpfter harmonischer Oszillator**

$$\begin{gathered} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \quad x(t) = a\cos(\omega_0 t + \alpha) \\ \alpha \;\; \textit{Phasenlage} \quad \omega_0 \;\; \textit{Eigenkreisfrequenz} \end{gathered} \tag{A.2}$$

2) **angeregter ungedämpfter harmonischer Oszillator**

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

$$f(t) = f_0\cos(\gamma t + \beta) \Rightarrow \begin{cases} x(t) = a\cos(\omega_0 t + \alpha) + \dfrac{f_0}{\left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)}\cos(\gamma t + \beta) \quad \gamma \neq \omega_0 \;\; \textit{nichtresonant} \\ x(t) = a\cos(\omega_0 t + \alpha) + \dfrac{f_0}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t + \beta) \;\; \textit{im} \;\; \textbf{Resonanzfall} \;\; \gamma \to \omega_0 \end{cases}$$

β Phasenlage γ Erregerkreisfrequenz

(A.3)

Anm.: Die Formel im **Resonanzfall** ist nur für kleine t brauchbar.

3) **freier gedämpfter harmonischer Oszillator**

$$\begin{gathered} \ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\lambda\dot{x} = 0 \Rightarrow \quad x(t) = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) \quad \textit{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \\ \lambda \;\; \text{Dämpfungskonsstante} \end{gathered} \tag{A.4}$$

Alternative

$$\begin{gathered} x(t) = ae^{-\lambda t}\sin(\omega t + \alpha) \quad \textit{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \\ \textit{mit} \quad a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\lambda x_0 + \dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \quad \textit{und} \quad \tan\alpha = \frac{x_0\omega}{\lambda x_0 + \dot{x}_0} \\ \textit{Anfangswerte} \;\; x_0 = x(t=0) \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(t=0) \end{gathered} \tag{A.5}$$

Anm.: Die Lösung wird u.a. in (Mai et al. 2008) hergeleitet und diskutiert.

4) angeregter gedämpfter harmonischer Oszillator

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\lambda\dot{x} = f(t) = f_0 \cos\gamma t$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\gamma t + \delta) \tag{A.6}$$

$$mit \quad b := \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}} \quad und \quad tg\delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Sonderfall (Anregungsfrequenz γ nahe der Eigenfrequenz ω_0)

Ist $\gamma = \omega_0 + \varepsilon \; mit \; \varepsilon \ll 1$ und nimmt man an $\lambda \ll \omega_0$, so folgt

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma + \omega_0)(\gamma - \omega_0) \approx 2\omega_0\varepsilon \tag{A.7}$$

und damit

$$b := \frac{f_0}{2\omega_0\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}} \quad und \quad tg\delta = \frac{\lambda}{\varepsilon} \tag{A.8}$$

Überlagerung von Schwingungen

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \alpha) + b\cos(\omega t + \beta) \tag{A.9}$$

Fälle **1.** $\omega \approx \omega_0$ **und** $a = b$ **reine Schwebung**

$$\begin{aligned} x(t) &= a\left(\cos(\omega_0 t + \alpha) + \cos(\omega t + \beta)\right) \\ &= 2a\cos\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right) \end{aligned} \tag{A.10}$$

Schwebungsfrequenz $$\omega_S := \frac{\omega_0 - \omega}{2} \tag{A.11}$$

Schwebungsdauer $$T_S = \frac{2\pi}{\omega_0 - \omega} \tag{A.12}$$

Grundschwingungsfrequenz $$\omega_G := \frac{\omega_0 + \omega}{2} \tag{A.13}$$

2. $\omega \approx \omega_0$ **und** $a \neq b$ **unreine Schwebung**

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \alpha) + b\cos(\omega t + \beta) \tag{A.14}$$

Mit $$A := \frac{a+b}{2} \quad \bar{A} := \frac{a-b}{2} \quad \omega_G := \frac{\omega_0 + \omega}{2} \quad \omega_S := \frac{\omega_0 - \omega}{2} \tag{A.15}$$

und $$\varphi := \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \bar{\varphi} := \frac{\alpha-\beta}{2} \tag{A.16}$$

erhält man $$x(t) = 2A\cos(\omega_S t + \bar{\varphi})\cos(\omega_G t + \varphi) \tag{A.17}$$

Gleichwertig zur Darstellung

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\cos(\omega t) \tag{A.18}$$

ist der Ausdruck

$$x(t) = (a-b)\cos\omega_0 t + 2b\cos\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right). \tag{A.19}$$

Anhang B

Oszillatorgleichungen im Falle des Dreikörperproblems

B.1 Bewegungsgleichungen

Für die Relativbewegungen in einem Dreikörperproblem lauten die Bewegungsgleichungen bei newtonscher Gravitationswechselwirkung

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\mathbf{r}}_{ik} = -M \frac{\mathbf{r}_{ik}}{\left|\mathbf{r}_{ik}\right|^3} + M_v \mathbf{X} \\
&mit \quad \mathbf{X} = \left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{\left|\mathbf{r}_{12}\right|^3} + \frac{\mathbf{r}_{23}}{\left|\mathbf{r}_{23}\right|^3} + \frac{\mathbf{r}_{31}}{\left|\mathbf{r}_{31}\right|^3} \right) \\
&und \;\; M_v \;\; f\ddot{u}r \left(ikv \right) = (123),(231),(312) \\
&oder \quad M_v \quad f\ddot{u}r \;\left(ikv \right) = \left(ikv \right), \left(kvi \right), \left(vki \right) \\
&M := \sum_{n=1}^{3} M_n \qquad mit \quad G = 1
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

also

$$
\left.\begin{matrix} \ddot{\mathbf{r}}_{12} \\ \ddot{\mathbf{r}}_{23} \\ \ddot{\mathbf{r}}_{31} \end{matrix}\right\} = \begin{cases}
-M \dfrac{\mathbf{r}_{12}}{\left|\mathbf{r}_{12}\right|^3} + M_3 \left(\dfrac{\mathbf{r}_{12}}{\left|\mathbf{r}_{12}\right|^3} + \dfrac{\mathbf{r}_{23}}{\left|\mathbf{r}_{23}\right|^3} + \dfrac{\mathbf{r}_{31}}{\left|\mathbf{r}_{31}\right|^3} \right) \\
-M \dfrac{\mathbf{r}_{23}}{\left|\mathbf{r}_{23}\right|^3} + M_1 \left(\dfrac{\mathbf{r}_{12}}{\left|\mathbf{r}_{12}\right|^3} + \dfrac{\mathbf{r}_{23}}{\left|\mathbf{r}_{23}\right|^3} + \dfrac{\mathbf{r}_{31}}{\left|\mathbf{r}_{31}\right|^3} \right) \\
-M \dfrac{\mathbf{r}_{31}}{\left|\mathbf{r}_{31}\right|^3} + M_2 \left(\dfrac{\mathbf{r}_{12}}{\left|\mathbf{r}_{12}\right|^3} + \dfrac{\mathbf{r}_{23}}{\left|\mathbf{r}_{23}\right|^3} + \dfrac{\mathbf{r}_{31}}{\left|\mathbf{r}_{31}\right|^3} \right)
\end{cases}
\tag{B.2}
$$

B.2. Bewegungsintegrale

Multipliziert man (B.1) vektoriell mit $\mathbf{r}_{ik}$

$$\left.\begin{matrix}\ddot{\mathbf{r}}_{12}\\ \ddot{\mathbf{r}}_{23}\\ \ddot{\mathbf{r}}_{31}\end{matrix}\right\}\times\mathbf{r}_{ik}=\begin{cases}\left[-M\dfrac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+M_3\left(\dfrac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+\dfrac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}+\dfrac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^3}\right)\right]\times\mathbf{r}_{12}\\ \left[-M\dfrac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}+M_1\left(\dfrac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+\dfrac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}+\dfrac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^3}\right)\right]\times\mathbf{r}_{23}\\ \left[-M\dfrac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^3}+M_2\left(\dfrac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+\dfrac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}+\dfrac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^3}\right)\right]\times\mathbf{r}_{31}\end{cases}\tag{B.3}$$

Mit

$$\mathbf{N}_{ik}:=\mathbf{r}_{ik}\times M_\nu\dot{\mathbf{r}}_{ik}\tag{B.4}$$

lautet (B.3)

$$\left.\begin{matrix}\dot{\mathbf{N}}_{12}\\ \dot{\mathbf{N}}_{23}\\ \dot{\mathbf{N}}_{31}\end{matrix}\right\}=\begin{cases}\left[M_3\left(\dfrac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}+\dfrac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^3}\right)\right]\times\mathbf{r}_{12}\\ \left[M_1\left(\dfrac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+\dfrac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^3}\right)\right]\times\mathbf{r}_{23}\\ \left[M_2\left(\dfrac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+\dfrac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}\right)\right]\times\mathbf{r}_{31}\end{cases}\tag{B.5}$$

Anm.: Die obige Drehimpulsdefinition weicht von der üblichen ab, und zwar durch den Massefaktor

$$\mathbf{N}_{ik}:=\mathbf{r}_{ik}\times M_\nu\dot{\mathbf{r}}_{ik}\quad vs.\ \mathbf{N}_{ik}:=\mathbf{r}_{ik}\times M_{?}\dot{\mathbf{r}}_{ik}\tag{B.6}$$

Skalare Multiplikation mit ergibt (Spatprodukt!) weiter

$$\left.\begin{matrix}\dot{\mathbf{N}}_{12}\cdot\mathbf{r}_{12}\\ \dot{\mathbf{N}}_{23}\cdot\mathbf{r}_{23}\\ \dot{\mathbf{N}}_{31}\cdot\mathbf{r}_{23}\end{matrix}\right\}=\begin{cases}M_3\left(\dfrac{\mathbf{r}_{23}\times\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}+\dfrac{\mathbf{r}_{31}\times\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{31}|^3}\right)\cdot\mathbf{r}_{12}=0\\ M_1\left(\dfrac{\mathbf{r}_{12}\times\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+\dfrac{\mathbf{r}_{31}\times\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{31}|^3}\right)\cdot\mathbf{r}_{23}=0\\ M_2\left(\dfrac{\mathbf{r}_{12}\times\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+\dfrac{\mathbf{r}_{23}\times\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}\right)\cdot\mathbf{r}_{23}=0\end{cases}\tag{B.7}$$

Danach steht jeweils die zeitliche Änderungsrate des oben definierten Bahndrehimpulses der Relativbewegung der Teilchen i und k senkrecht auf derem Abstandsvektor $\mathbf{r}_{ik}$ als Folge der obigen Definition des Bahndrehimpulses der Relativbewegung.

Multipliziert man (B.1) skalar mit $\dot{\mathbf{r}}_{ik}$

$$\left.\begin{matrix}\ddot{\mathbf{r}}_{12}\cdot\dot{\mathbf{r}}_{12}\\ \ddot{\mathbf{r}}_{23}\cdot\dot{\mathbf{r}}_{23}\\ \ddot{\mathbf{r}}_{31}\cdot\dot{\mathbf{r}}_{31}\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\left[-M\dfrac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+M_3\left(\dfrac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+\dfrac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}+\dfrac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^3}\right)\right]\cdot\dot{\mathbf{r}}_{12}\\ \left[-M\dfrac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}+M_1\left(\dfrac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+\dfrac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}+\dfrac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^3}\right)\right]\cdot\dot{\mathbf{r}}_{23}\\ \left[-M\dfrac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^3}+M_2\left(\dfrac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+\dfrac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}+\dfrac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^3}\right)\right]\cdot\dot{\mathbf{r}}_{31}\end{matrix}\right. \tag{B.8}$$

so folgt

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\frac{d\dot{\mathbf{r}}_{12}^2}{dt}\right)&=-M\frac{\mathbf{r}_{12}\cdot\dot{\mathbf{r}}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+M_3\left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+\frac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}+\frac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^3}\right)\cdot\dot{\mathbf{r}}_{12}\\ \left(\frac{1}{2}\frac{d\dot{\mathbf{r}}_{23}^2}{dt}\right)&=-M\frac{\mathbf{r}_{23}\cdot\dot{\mathbf{r}}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}+M_1\left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+\frac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}+\frac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^3}\right)\cdot\dot{\mathbf{r}}_{23}\\ \left(\frac{1}{2}\frac{d\dot{\mathbf{r}}_{31}^2}{dt}\right)&=-M\frac{\mathbf{r}_{31}\cdot\dot{\mathbf{r}}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^3}+M_2\left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+\frac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}+\frac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^3}\right)\cdot\dot{\mathbf{r}}_{31}\end{aligned} \tag{B.9}$$

und nach unbestimmter Integration über die Zeit

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\frac{d\dot{\mathbf{r}}_{12}^2}{dt}\right)&=-M\frac{\mathbf{r}_{12}\cdot\dot{\mathbf{r}}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+M_3\left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+\frac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}+\frac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^3}\right)\cdot\dot{\mathbf{r}}_{12}\\ \frac{\dot{\mathbf{r}}_{12}^2}{2}&=-M\int^t\frac{\mathbf{r}_{12}\cdot\dot{\mathbf{r}}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}dt+M_3\int^t\left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+\frac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}+\frac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^3}\right)\cdot\dot{\mathbf{r}}_{12}dt\\ \frac{\dot{\mathbf{r}}_{12}^2}{2}&=-M\int^t\frac{\mathbf{r}_{12}\cdot d\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+M_3\int^t\left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+\frac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^3}+\frac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^3}\right)\cdot d\mathbf{r}_{12}\\ \frac{\dot{\mathbf{r}}_{12}^2}{2}&=-M\int^{\mathbf{r}_{12}}\frac{\partial U_{12}}{\partial\mathbf{r}_{12}}\cdot d\mathbf{r}_{12}+M_3\int^{\mathbf{r}_{12}}\left(\frac{\partial U_{12}}{\partial\mathbf{r}_{12}}+\frac{\partial U_{23}}{\partial\mathbf{r}_{23}}+\frac{\partial U_{31}}{\partial\mathbf{r}_{31}}\right)\cdot d\mathbf{r}_{12}\end{aligned} \tag{B.10}$$

oder umgestellt

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}_{12}^2}{2} + M \int^{\mathbf{r}_{12}} \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_{12}} \cdot d\mathbf{r}_{12} = M_3 \int^{\mathbf{r}_{12}} \left(\frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_{12}} + \frac{\partial U_{23}}{\partial \mathbf{r}_{23}} + \frac{\partial U_{31}}{\partial \mathbf{r}_{31}} \right) \cdot d\mathbf{r}_{12}$$

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}_{12}^2}{2} + M U_{12}\left(\mathbf{r}_{12}\right) = M_3 \int^{\mathbf{r}_{12}} \left(\frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_{12}} + \frac{\partial U_{23}}{\partial \mathbf{r}_{23}} + \frac{\partial U_{31}}{\partial \mathbf{r}_{31}} \right) \cdot d\mathbf{r}_{12} \tag{B.11}$$

bzw.

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}_{12}^2}{2} + M U_{12}\left(\mathbf{r}_{12}\right) - M_3 U_{12}\left(\mathbf{r}_{12}\right) = M_3 \int^{\mathbf{r}_{12}} \left(\frac{\partial U_{23}}{\partial \mathbf{r}_{23}} + \frac{\partial U_{31}}{\partial \mathbf{r}_{31}} \right) \cdot d\mathbf{r}_{12} \tag{B.11a}$$

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}_{12}^2}{2} + \left(M_1 + M_2\right) U_{12}\left(\mathbf{r}_{12}\right) = M_3 \int^{\mathbf{r}_{12}} \left(\frac{\partial U_{23}}{\partial \mathbf{r}_{23}} + \frac{\partial U_{31}}{\partial \mathbf{r}_{31}} \right) \cdot d\mathbf{r}_{12}$$

Analog bekommt man

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}_{23}^2}{2} + \left(M_2 + M_3\right) U_{12}\left(\mathbf{r}_{23}\right) = M_1 \int^{\mathbf{r}_{23}} \left(\frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_{12}} + \frac{\partial U_{31}}{\partial \mathbf{r}_{31}} \right) \cdot d\mathbf{r}_{23} \tag{B.11b}$$

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}_{31}^2}{2} + \left(M_1 + M_2\right) U_{31}\left(\mathbf{r}_{31}\right) = M_2 \int^{\mathbf{r}_{31}} \left(\frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_{12}} + \frac{\partial U_{23}}{\partial \mathbf{r}_{23}} \right) \cdot d\mathbf{r}_{31} \tag{B.11c}$$

Anm.: Auf der rechten Seite wird über einen anderen Weg integriert als üblich!*!*

Multipliziert man schließlich (B.1) vektoriell mit dem Vektor **X**

$$\ddot{\mathbf{r}}_{ik} \times \mathbf{X} = -M \frac{\mathbf{r}_{ik} \times \mathbf{X}}{\left|\mathbf{r}_{ik}\right|^3} \tag{B.12}$$

und anschließend skalar mit **X,** so erhält man

$$\left(\ddot{\mathbf{r}}_{ik} \times \mathbf{X}\right) \cdot \mathbf{X} = -M \frac{\mathbf{r}_{ik} \times \mathbf{X}}{\left|\mathbf{r}_{ik}\right|^3} \cdot \mathbf{X} = 0 \tag{B.13}$$

woraus folgt

$$\left(\ddot{\mathbf{r}}_{ik} \times \mathbf{X}\right) \cdot \mathbf{X} = 0 \tag{B.14}$$

und daraus weiter

$$\frac{d\left(\dot{\mathbf{r}}_{ik} \times \mathbf{X}\right)}{dt} \cdot \mathbf{X} = 0$$

$$\rightarrow \left[\left(\ddot{\mathbf{r}}_{ik} \times \mathbf{X}\right) + \left(\dot{\mathbf{r}}_{ik} \times \dot{\mathbf{X}}\right)\right] \cdot \mathbf{X} = 0 \rightarrow \left(\dot{\mathbf{r}}_{ik} \times \dot{\mathbf{X}}\right) \cdot \mathbf{X} = 0 \tag{B.15}$$

Danach stehen die Vektorprodukte $\ddot{\mathbf{r}}_{ik} \times \mathbf{X}$ und $\dot{\mathbf{r}}_{ik} \times \mathbf{X}$ senkrecht auf dem für alle Relativbewegungen gemeinsamen Vektor **X.** Die Vektorprodukte ähneln einer **Momentenbildung** (!) mit dem Vektor **X** und dürften physikalisch bezogene Drehmomente sein.

B.3 Oszillatorgleichungen

Sei $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ in Reihe um die Relativbewegungen $\mathbf{r}_{ik}(t)$ – genähert Keplerbewegungen(!) – entwickelt. Dazu ersetzt man in

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}\big(\mathbf{r}_{12}(t), \mathbf{r}_{23}(t), \mathbf{r}_{31}(t)\big) \tag{B.16}$$

die Relativbewegungen entsprechend

$$\begin{gathered} \mathbf{r}_{ik}(t) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} \left(\frac{d^{\sigma} \mathbf{r}_{ik}}{dt^{\sigma}} \right)_{\mathbf{r}_{ik}^{0}(t)} (t - t_0)^{\sigma} \\ mit\ \mathbf{r}_{ik}^{0}(t)\ \ ungestörte\ \ Keplerbewegung\ \Leftrightarrow\ \mathbf{X} \equiv \mathbf{0} \end{gathered} \tag{B.17}$$

und erhält

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \mathbf{X}\big(\mathbf{r}_{12}(t), \mathbf{r}_{23}(t), \mathbf{r}_{31}(t)\big) \\ &= \mathbf{X}\left[\sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} \left(\frac{d^{\sigma} \mathbf{r}_{12}}{dt^{\sigma}} \right)_{\mathbf{r}_{12}^{0}(t)} (t - t_0)^{\sigma}, \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} \left(\frac{d^{\sigma} \mathbf{r}_{23}}{dt^{\sigma}} \right)_{\mathbf{r}_{23}^{0}(t)} (t - t_0)^{\sigma}, \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} \left(\frac{d^{\sigma} \mathbf{r}_{31}}{dt^{\sigma}} \right)_{\mathbf{r}_{31}^{0}(t)} (t - t_0)^{\sigma} \right] \end{aligned} \tag{B.18}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \mathbf{X}\big(\mathbf{r}_{12}(t), \mathbf{r}_{23}(t), \mathbf{r}_{31}(t)\big) \\ &= \mathbf{X}\big(\mathbf{r}_{12}^{0}(t), \mathbf{r}_{23}^{0}(t), \mathbf{r}_{31}^{0}(t)\big) + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{r}_{12}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{12} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{r}_{23}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{23} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{r}_{31}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{31} + \ldots. \end{aligned} \tag{B.19}$$

oder

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{X}\left(\mathbf{r}_{12}^{0}(t), \mathbf{r}_{23}^{0}(t), \mathbf{r}_{31}^{0}(t)\right) \\
&+ \frac{\partial\left(\left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^{3}} + \frac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^{3}} + \frac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^{3}}\right)\right)}{\partial \mathbf{r}_{12}} \cdot \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma!}\left(\frac{d^{\sigma}\mathbf{r}_{12}}{dt^{\sigma}}\right)_{\mathbf{r}_{12}^{0}(t)} (t-t_0)^{\sigma} \\
&+ \frac{\partial\left(\left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^{3}} + \frac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^{3}} + \frac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^{3}}\right)\right)}{\partial \mathbf{r}_{23}} \cdot \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma!}\left(\frac{d^{\sigma}\mathbf{r}_{23}}{dt^{\sigma}}\right)_{\mathbf{r}_{23}^{0}(t)} (t-t_0)^{\sigma} \\
&+ \frac{\partial\left(\left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^{3}} + \frac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^{3}} + \frac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^{3}}\right)\right)}{\partial \mathbf{r}_{31}} \cdot \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma!}\left(\frac{d^{\sigma}\mathbf{r}_{31}}{dt^{\sigma}}\right)_{\mathbf{r}_{31}^{0}(t)} (t-t_0)^{\sigma}
\end{aligned}
\tag{B.19a}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}\left(\mathbf{r}_{12}(t), \mathbf{r}_{23}(t), \mathbf{r}_{31}(t)\right) &= \mathbf{X}\left(\mathbf{r}_{12}^{0}(t), \mathbf{r}_{23}^{0}(t), \mathbf{r}_{31}^{0}(t)\right) \\
&+ \frac{\partial\left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^{3}}\right)}{\partial \mathbf{r}_{12}} \cdot \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma!}\left(\frac{d^{\sigma}\mathbf{r}_{12}}{dt^{\sigma}}\right)_{\mathbf{r}_{12}^{0}(t)} (t-t_0)^{\sigma} \\
&+ \frac{\partial\left(\frac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^{3}}\right)}{\partial \mathbf{r}_{23}} \cdot \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma!}\left(\frac{d^{\sigma}\mathbf{r}_{23}}{dt^{\sigma}}\right)_{\mathbf{r}_{23}^{0}(t)} (t-t_0)^{\sigma} \\
&+ \frac{\partial\left(\frac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^{3}}\right)}{\partial \mathbf{r}_{31}} \cdot \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma!}\left(\frac{d^{\sigma}\mathbf{r}_{31}}{dt^{\sigma}}\right)_{\mathbf{r}_{31}^{0}(t)} (t-t_0)^{\sigma}
\end{aligned}
\tag{B.19b}
$$

$$
\frac{\partial\left(\frac{\mathbf{r}_{ik}}{|\mathbf{r}_{ik}|^{3}}\right)}{\partial \mathbf{r}_{ik}} = \frac{1}{|\mathbf{r}_{ik}|^{3}} \frac{\partial \mathbf{r}_{ik}}{\partial \mathbf{r}_{ik}} + \frac{\partial |\mathbf{r}_{ik}|^{-3}}{\partial \mathbf{r}_{ik}} \mathbf{r}_{ik} = \frac{\mathbf{I}}{|\mathbf{r}_{ik}|^{3}} - \frac{3}{|\mathbf{r}_{ik}|^{4}} \frac{\partial |\mathbf{r}_{ik}|}{\partial \mathbf{r}_{ik}}
$$

und mit

$$
\frac{\partial\left(\frac{\mathbf{r}_{ik}}{|\mathbf{r}_{ik}|^{3}}\right)}{\partial \mathbf{r}_{ik}} = \frac{\mathbf{I}}{|\mathbf{r}_{ik}|^{3}} - \frac{3}{|\mathbf{r}_{ik}|^{4}} \frac{\mathbf{r}_{ik} \otimes \mathbf{r}_{ik}}{|\mathbf{r}_{ik}|^{3}}
\tag{B.20}
$$

$\otimes$ *steht für* dyadisches Produkt

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{X}\big(\mathbf{r}_{12}(t),\mathbf{r}_{23}(t),\mathbf{r}_{31}(t)\big)= \\
&\quad \mathbf{X}\big(\mathbf{r}_{12}^{0}(t),\mathbf{r}_{23}^{0}(t),\mathbf{r}_{31}^{0}(t)\big) \\
&\qquad +\left[\frac{\mathbf{I}}{|\mathbf{r}_{12}|^{3}}-\frac{3}{|\mathbf{r}_{12}|^{4}}\frac{\mathbf{r}_{12}\otimes\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^{3}}\right]\cdot\sum_{\sigma=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma!}\left(\frac{d^{\sigma}\mathbf{r}_{12}}{dt^{\sigma}}\right)_{\mathbf{r}_{12}^{0}(t)}(t-t_{0})^{\sigma} \\
&\qquad +\left[\frac{\mathbf{I}}{|\mathbf{r}_{23}|^{3}}-\frac{3}{|\mathbf{r}_{23}|^{4}}\frac{\mathbf{r}_{23}\otimes\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^{3}}\right]\cdot\sum_{\sigma=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma!}\left(\frac{d^{\sigma}\mathbf{r}_{23}}{dt^{\sigma}}\right)_{\mathbf{r}_{23}^{0}(t)}(t-t_{0})^{\sigma} \\
&\qquad +\left[\frac{\mathbf{I}}{|\mathbf{r}_{31}|^{3}}-\frac{3}{|\mathbf{r}_{31}|^{4}}\frac{\mathbf{r}_{31}\otimes\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^{3}}\right]\cdot\sum_{\sigma=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma!}\left(\frac{d^{\sigma}\mathbf{r}_{31}}{dt^{\sigma}}\right)_{\mathbf{r}_{31}^{0}(t)}(t-t_{0})^{\sigma}+\ldots
\end{aligned}
\tag{B.19c}
$$

Zu Oszillatorgleichungen gelangt man mit einem Ansatz

$$
\mathbf{r}_{ik}=\mathbf{R}_{ik}^{kep}+\mathbf{d}_{ik} \tag{B.20}
$$

für die Abweichungen von den ungestörten Keplerbewegungen. Eingetragen in die Bewegungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}}_{12}+M\frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^{3}}&=M_{3}\left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^{3}}+\frac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^{3}}+\frac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^{3}}\right) \\
\ddot{\mathbf{r}}_{23}+M\frac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^{3}}&=M_{1}\left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^{3}}+\frac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^{3}}+\frac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^{3}}\right) \\
\ddot{\mathbf{r}}_{31}+M\frac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^{3}}&=M_{2}\left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^{3}}+\frac{\mathbf{r}_{23}}{|\mathbf{r}_{23}|^{3}}+\frac{\mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{31}|^{3}}\right)
\end{aligned}
\tag{B.21}
$$

und jeweils um $\mathbf{R}_{ik}^{kep}(t)$ in Taylorreihe entwickelt, bekommt man

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\mathbf{R}}_{12}^{kep}+\ddot{\mathbf{d}}_{12}+M\frac{\ddot{\mathbf{R}}_{12}^{kep}+\ddot{\mathbf{d}}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}^{kep}+\mathbf{d}_{12}|^{3}}=M_{3}\left(\frac{\mathbf{R}_{12}^{kep}+\mathbf{d}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}^{kep}+\mathbf{d}_{12}|^{3}}+\frac{\mathbf{R}_{23}^{kep}+\mathbf{d}_{23}}{|\mathbf{R}_{23}^{kep}+\mathbf{d}_{23}|^{3}}+\frac{\mathbf{R}_{31}^{kep}+\mathbf{d}_{31}}{|\mathbf{R}_{31}^{kep}+\mathbf{d}_{31}|^{3}}\right) \\
&\ddot{\mathbf{R}}_{12}^{kep}+\ddot{\mathbf{d}}_{12}+M\frac{\ddot{\mathbf{R}}_{12}^{kep}}{|\mathbf{R}_{12}^{kep}+\mathbf{d}_{12}|^{3}}+M\frac{\ddot{\mathbf{d}}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}^{kep}+\mathbf{d}_{12}|^{3}}=M_{3}\left(\frac{\mathbf{R}_{12}^{kep}+\mathbf{d}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}^{kep}+\mathbf{d}_{12}|^{3}}+\frac{\mathbf{R}_{23}^{kep}+\mathbf{d}_{23}}{|\mathbf{R}_{23}^{kep}+\mathbf{d}_{23}|^{3}}+\frac{\mathbf{R}_{31}^{kep}+\mathbf{d}_{31}}{|\mathbf{R}_{31}^{kep}+\mathbf{d}_{31}|^{3}}\right) \\
&\ddot{\mathbf{R}}_{12}^{kep}\left(1+M\frac{1}{|\mathbf{R}_{12}^{kep}+\mathbf{d}_{12}|^{3}}\right)+\ddot{\mathbf{d}}_{12}+M\frac{\ddot{\mathbf{d}}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}^{kep}+\mathbf{d}_{12}|^{3}}=\ldots..
\end{aligned}
$$

(B.22)

bzw.

$$\ddot{\mathbf{R}}_{12}^{kep}\left(1+M\frac{1}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}+\mathbf{d}_{12}\right|^3}\right)+\ddot{\mathbf{d}}_{12}+M\frac{\ddot{\mathbf{d}}_{12}}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}+\mathbf{d}_{12}\right|^3}$$

$$\approx\ddot{\mathbf{R}}_{12}^{kep}\left(1+M\frac{1}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}\right|^3}\right)+\ddot{\mathbf{d}}_{12}+M\frac{\ddot{\mathbf{d}}_{12}}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}\right|^3}=M_3\left(\frac{\mathbf{R}_{12}^{kep}+\mathbf{d}_{12}}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}+\mathbf{d}_{12}\right|^3}+\frac{\mathbf{R}_{23}^{kep}+\mathbf{d}_{23}}{\left|\mathbf{R}_{23}^{kep}+\mathbf{d}_{23}\right|^3}+\frac{\mathbf{R}_{31}^{kep}+\mathbf{d}_{31}}{\left|\mathbf{R}_{31}^{kep}+\mathbf{d}_{31}\right|^3}\right)$$

(B.22a)

Wegen

$$\ddot{\mathbf{R}}_{12}^{kep}\left(1+M\frac{1}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}\right|^3}\right)=\mathbf{0} \tag{ B.23}$$

erhält man als Bestimmungsgleichung für die Abweichung von der ungestörten relativen Keplerbewegung

$$\ddot{\mathbf{d}}_{12}+M\frac{\ddot{\mathbf{d}}_{12}}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}\right|^3}=M_3\left(\frac{\mathbf{R}_{12}^{kep}+\mathbf{d}_{12}}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}+\mathbf{d}_{12}\right|^3}+\frac{\mathbf{R}_{23}^{kep}+\mathbf{d}_{23}}{\left|\mathbf{R}_{23}^{kep}+\mathbf{d}_{23}\right|^3}+\frac{\mathbf{R}_{31}^{kep}+\mathbf{d}_{31}}{\left|\mathbf{R}_{31}^{kep}+\mathbf{d}_{31}\right|^3}\right) \tag{B.24a}$$

und analog für die beiden anderen Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\mathbf{d}}_{23}+M\frac{\ddot{\mathbf{d}}_{23}}{\left|\mathbf{R}_{23}^{kep}\right|^3}=M_1\left(\frac{\mathbf{R}_{12}^{kep}+\mathbf{d}_{12}}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}+\mathbf{d}_{12}\right|^3}+\frac{\mathbf{R}_{23}^{kep}+\mathbf{d}_{23}}{\left|\mathbf{R}_{23}^{kep}+\mathbf{d}_{23}\right|^3}+\frac{\mathbf{R}_{31}^{kep}+\mathbf{d}_{31}}{\left|\mathbf{R}_{31}^{kep}+\mathbf{d}_{31}\right|^3}\right) \tag{B 24b}$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{31}+M\frac{\ddot{\mathbf{d}}_{31}}{\left|\mathbf{R}_{31}^{kep}\right|^3}=M_2\left(\frac{\mathbf{R}_{12}^{kep}+\mathbf{d}_{12}}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}+\mathbf{d}_{12}\right|^3}+\frac{\mathbf{R}_{23}^{kep}+\mathbf{d}_{23}}{\left|\mathbf{R}_{23}^{kep}+\mathbf{d}_{23}\right|^3}+\frac{\mathbf{R}_{31}^{kep}+\mathbf{d}_{31}}{\left|\mathbf{R}_{31}^{kep}+\mathbf{d}_{31}\right|^3}\right) \tag{B.24c}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen können in der hier angestrebten Näherung geschrieben werden in der Gestalt

$$M_v\left(\frac{\mathbf{R}_{12}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}\right|^3}+\frac{\mathbf{R}_{23}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{23}^{kep}\right|^3}+\frac{\mathbf{R}_{31}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{31}^{kep}\right|^3}\right), \tag{B.25}$$

so daß sich ergibt

$$\ddot{\mathbf{d}}_{12} + M\frac{\ddot{\mathbf{d}}_{12}}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}\right|^3} = M_3\left(\frac{\mathbf{R}_{12}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}\right|^3} + \frac{\mathbf{R}_{23}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{23}^{kep}\right|^3} + \frac{\mathbf{R}_{31}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{31}^{kep}\right|^3}\right) \tag{B.26a}$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{23} + M\frac{\ddot{\mathbf{d}}_{23}}{\left|\mathbf{R}_{23}^{kep}\right|^3} = M_1\left(\frac{\mathbf{R}_{12}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}\right|^3} + \frac{\mathbf{R}_{23}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{23}^{kep}\right|^3} + \frac{\mathbf{R}_{31}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{31}^{kep}\right|^3}\right) \tag{B.26b}$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{31} + M\frac{\ddot{\mathbf{d}}_{31}}{\left|\mathbf{R}_{31}^{kep}\right|^3} = M_2\left(\frac{\mathbf{R}_{12}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}\right|^3} + \frac{\mathbf{R}_{23}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{23}^{kep}\right|^3} + \frac{\mathbf{R}_{31}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{31}^{kep}\right|^3}\right) \tag{B,26c}$$

Das sind Schwingungsgleichungen für die Abweichungen von den ungestörten Keplerbewegungen,

Die Eigenfrequenzen

$$n_{ik} := \frac{GM}{\left|\mathbf{R}_{ik}^{kep}\left(t\right)\right|^3} \tag{B.27}$$

sind zeitveränderlich und es wirken zeitveränderliche – im Rhythmus der ungestörten Keplerbewegungen – Kepler-Kräfte auf die Oszillatoren $\mathbf{d}_{ik}\left(t\right)$ ein.

Sonderfälle

1. Eingeschränktes Dreikörperproblem $M_3 \to 0$

$$\begin{aligned}&\ddot{\mathbf{d}}_{12} + M\frac{\mathbf{d}_{12}}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}\right|^3} = \mathbf{0} \;\; mit \;\; M = M_1 + M_2\\ &\Rightarrow \mathbf{d}_{12}\left(t\right) \to \mathbf{r}_{12}\left(t\right) = \mathbf{R}_{12}^{kep}\left(t\right) + \mathbf{d}_{12}\left(t\right) + O\left(\left(\mathbf{d}_{12}\left(t\right)\right)^2\right)\end{aligned} \tag{B.28}$$

Bei $\mathbf{R}_{12}^{kep}\left(t\right) = Kreisbahn \Rightarrow \left|\mathbf{R}_{12}^{kep}\left(t\right)\right| = a_{12} = const$

2. Zweizentrenproblem $\mathbf{r}_{12}\left(t\right) = const \equiv \mathbf{r}_{12}^0$

3. Lagrangesche Dreieckslösung $\mathbf{r}_{ik}\left(t\right) = const \equiv \mathbf{r}_{ik}^0 \equiv a_{ik}$

4.

$$\ddot{\mathbf{d}}_{12} + M\frac{\mathbf{d}_{12}}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}\right|^3} = M_3\left(\frac{\mathbf{R}_{12}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}\right|^3} + \frac{\mathbf{R}_{23}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{23}^{kep}\right|^3} + \frac{\mathbf{R}_{31}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{31}^{kep}\right|^3}\right) \tag{B.29a}$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{23} + M \frac{\mathbf{d}_{23}}{\left|\mathbf{R}_{23}^{kep}\right|^3} = M_1 \left(\frac{\mathbf{R}_{12}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}\right|^3} + \frac{\mathbf{R}_{23}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{23}^{kep}\right|^3} + \frac{\mathbf{R}_{31}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{31}^{kep}\right|^3} \right) \tag{B.29b}$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{31} + M \frac{\mathbf{d}_{31}}{\left|\mathbf{R}_{31}^{kep}\right|^3} = M_2 \left(\frac{\mathbf{R}_{12}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}\right|^3} + \frac{\mathbf{R}_{23}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{23}^{kep}\right|^3} + \frac{\mathbf{R}_{31}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{31}^{kep}\right|^3} \right) \tag{B.29c}$$

oder wegen

$$M_3 \left(\frac{\mathbf{R}_{12}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{12}^{kep}\right|^3} + \frac{\mathbf{R}_{23}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{23}^{kep}\right|^3} + \frac{\mathbf{R}_{31}^{kep}}{\left|\mathbf{R}_{31}^{kep}\right|^3} \right) = \frac{M_3}{a_{12}^3} \left(\mathbf{R}_{12}^{kep} + \mathbf{R}_{23}^{kep} + \mathbf{R}_{31}^{kep} \right) = \mathbf{0} \tag{B.30}$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{12} + M \frac{\mathbf{d}_{12}}{a_{12}^3} = \mathbf{0} \tag{B.31a}$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{23} + M \frac{\mathbf{d}_{23}}{a_{23}^3} = \mathbf{0} \tag{B.31b}$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{31} + M \frac{\mathbf{d}_{31}}{a_{31}^3} = \mathbf{0} \tag{B.31c}$$

Wenn alle Seiten gleich sind

$$a_{ik} = a \tag{B.32}$$

dann ergibt sich einheitlich

$$\ddot{\mathbf{d}}_{ik} + M \frac{\mathbf{d}_{ik}}{a^3} = \mathbf{0} \quad M = M_1 + M_2 + M_3 \quad mit \;\; M_3 \neq 0 \tag{B.33}$$

Frage: Ist eine nichttriviale Lösung $\mathbf{d}_{ik}(t) \neq \mathbf{0}$ verträglich mit der Konstanz von a ?

Zu lösen sind drei Oszillatorgleichungen für die Abweichungen $\mathbf{d}_{ik}(t)$ der Relativbewegungen $\mathbf{r}_{ik}(t)$ von deren ungestörten Keplerbewegungen $\mathbf{R}_{ik}^{kep}(t)$. Gesucht sind insbesondere Lösungen von Gleichungen, die ungedämpfte harmonische Oszillatoren mit periodischen Eigenfrequenzen und (periodischen) Erregungen beschreiben. Dabei werden kommensurable Bewegungen besonders interessieren, wie sie beispielsweise im planetaren Mehrkörperproblemen auftreten.

Veröffentlichungen in der Schriftenreihe IAPG / FESG (ISSN 1437-8280):
Reports in the series IAPG / FESG (ISSN 1437-8280):

No. 1: Müller J., Oberndorfer H. (1999). *Validation of GOCE Simulation.* ISBN-10 3-934205-00-3, ISBN-13 978-3-934205-00-0.

No. 2: Nitschke M. (1999). SATLAB – *Ein Werkzeug zur Visualisierung von Satellitenbahnen.* ISBN-10 3-934205-01-1, ISBN-13 978-3-934205-01-7..

No. 3: Tsoulis D. (1999). *Spherical harmonic computations with topographic/isostatic coefficients.* ISBN-10 3-934205-02-X, ISBN-13 978-3-934205-02-4..

No. 4: Dorobantu R. (1999). *Gravitationsdrehwaage.* ISBN-10 3-934205-03-8, ISBN-13 978-3-934205-03-1.

No. 5: Schmidt R. (1999). *Numerische Integration gestörter Satellitenbahnen mit* MATLAB. ISBN-10 3-934205-04-6, ISBN-13 978-3-934205-04-8.

No. 6: Dorobantu R. (1999). *Simulation des Verhaltens einer low-cost Strapdown-IMU unter Laborbedingungen.* ISBN-10 3-934205-05-4, ISBN-13 978-3-934205-05-5.

No. 7: Bauch A., Rothacher M., Rummel R. (2000). *Bezugssysteme in Lage und Höhe. Tutorial zum Kursus INGENIEURVERMESSUNG 2000.* ISBN-10 3-934205-06-2, ISBN-13 978-3-934205-06-2.

No. 8: Rothacher M., Zebhauser B. (2000). *Einführung in GPS. Tutorial zum 3. SAPOS-Symposium 2000 in München.* ISBN-10 3-934205-07-0, ISBN-13 978-3-934205-07-9.

No. 9: Ulrich M. (2000). *Vorhersage der Erdrotationsparameter mit Hilfe Neuronaler Netze.* ISBN-10 3-934205-08-9, ISBN-13 978-3-934205-08-6.

No. 10: Seitz F. (2000). *Charakterisierung eines bistatischen Rayleigh- und Raman-Lidars zur Bestimmung von höhenaufgelösten Wasserdampfprofilen.* ISBN-10 3-934205-09-7, ISBN-13 978-3-934205-09-3.

No. 11: Meyer F. (2000). *Messung von höhenaufgelösten Wasserdampfprofilen unter Verwendung eines bistatischen Raman-Lidars.* ISBN-10 3-934205-10-0, ISBN-13 978-3-934205-10-9.

No. 12: Peters T. (2001). *Zeitliche Variationen des Gravitationsfeldes der Erde.* ISBN-10 3-934205-11-9, ISBN-13 978-3-934205-11-6.

No. 13: Egger D. (2001). *Astronomie und Java – Objekte der Astronomie.* ISBN-10 3-934205-12-7, ISBN-13 978-3-934205-12-3.

No. 14: Steigenberger P. (2002). MATLAB-*Toolbox zur TOPEX/POSEIDON Altimeterdatenverarbeitung.* ISBN-10 3-934205-13-5, ISBN-13 978-3-934205-13-0.

No. 15: Schneider M. (2002). *Zur Methodik der Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten.* ISBN-10 3-934205-14-3, ISBN-13 978-3-934205-14-7.

No. 16: Dorobantu R., Gerlach C. (2004). *Investigation of a Navigation–Grade RLG SIMU type iNAV–RQH.* ISBN-10 3-934205-15-1, ISBN-13 978-3-934205-15-4.

No. 17: Schneider M. (2004). *Beiträge zur Bahnbestimmung und Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten sowie zur Orientierung von Rotationssensoren.* ISBN-10 3-934205-16-X, ISBN-13 978-3-934205-16-1.

No. 18: Egger D. (2004). *Astro-Toolbox, Theorie.* ISBN-10 3-934205-17-8, ISBN-13 978-3-934205-17-8.

No. 19: Egger D. (2004). *Astro-Toolbox, Praxis.* ISBN-10 3-934205-18-6, ISBN-13 978-3-934205-18-5.

No. 20: Fackler U. (2005). *GRACE - Analyse von Beschleunigungsmessungen.* ISBN-10 3-934205-19-4, ISBN-13 978-3-934205-19-2.

No. 21: Schneider M. (2005). *Beiträge zur Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten.* ISBN-10 3-934205-20-8, ISBN-13 978-3-934205-20-8.

No. 22: Egger D. (2006). *Sinus-Netzwerk.* ISBN-10 3-934205-21-6, ISBN-13 978-3-934205-21-5.

No. 23: Schneider M. (2006). *Gravitationsfeldbestimmung unter Verwendung von Bilanzgleichungen für beliebige Observablen .* ISBN-10 3-934205-22-4, ISBN-13 978-3-934205-22-2.

No. 24: Mladek F. (2006). *Hydrostatische Isostasie.* ISBN-10 3-934205-23-2, ISBN-13 978-3-934205-23-9.

No. 25: Stummer C. (2006). *Analyse der Gradiometergleichungen der GOCE Satellitenmission zur Schwerefeldbestimmung.* ISBN-10 3-934205-24-0, ISBN-13 978-3-934205-24-6.

No. 26: Fecher T. (2008). *Methodische Grundlagen von kombinierten Schwerefeldmodellen.* ISBN-13 978-3-934205-25-3.

No. 27: Albertella A., Savcenko R., Bosch W., Rummel R. (2008). *Dynamic Ocean Topography - The Geodetic Approach.* ISBN-13 978-3-934205-26-0.

No. 28: Svehla D. (2009). *ACES and FUTURE GNSS-Based EARTH OBSERVATION and NAVIGATION.* ISBN-13 978-3-934205-27-7.

No. 29: Egger D. (2009). *Numerische Integration von Satellitenbahnen.* ISBN-13 978-3-934205-28-4.

No. 30: Murböck M. (2011). *Genauigkeitssimulation von Schwerefeld-Satellitenmissionen.* ISBN-13 978-3-934205-29-1.

No. 31: Tuttas S. (2011). *Joint gravimetric and geometric survey of geophysical signals - Feasibility study for the TERENO alpine and prealpine Ammer observatory.* ISBN-13 978-3-934205-30-7.

No. 32: Schneider M. (2011). *Entwurf einer Resonanztheorie basierend auf Integralgleichungen.* ISBN-13 978-3-934205-31-4.

Weitere Exemplare können bezogen werden unter / Copies are available from:
Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie
Technische Universität München
Arcisstrasse 21, D-80290 München, Germany
Telefon: +49-89-289-23190, Telefax: +49-89-289-23178, Email: rechel@bv.tum.de

Oder im Internet / Or via Internet:
http://www.iapg.bv.tum.de/Schriftenreihe/

ISSN 1437-8280, ISBN-13 978-3-934205-31-4