

Lehrveranstaltung

Finite-Element-Methoden

Vorlesungen und Übungen
des Lehrstuhls für Statik der TUM

gehalten WS 1988/89 bis SS 1999
von o. Prof. Dr.-Ing. Walter Wunderlich
und Mitarbeitern

Finite-Element-Methoden

Vorlesungsumdruck

FINITE-ELEMENT-METHODE

Gliederung WS 1996/97

1. Einführung

2. Grundlagen und Rechengang der FEM

- 2.1. Tragwerk und Element
- 2.2. Finite-Elemente-Methode auf der Grundlage des Weggrößenverfahrens
- 2.3. Ermittlung von Elementmatrizen mit Verschiebungsansätzen am Beispiel des gebetteten Balkens
- 2.4. Numerisches Lösungsverhalten am Beispiel eines gebetteten Fundamentbalkens unter Einzellasten
- 2.5. Erweiterung der FEM auf andere Aufgabenstellungen
Theorie II. Ordnung, dynamische Probleme, Balkenelement mit Schubverformungen, Scheiben, Platten, Feldprobleme
Zusammenstellung der lokalen und globalen Grundgleichungen

3. FEM für Scheibenaufgaben (2D)

- 3.1. Rechengang der Methode
 - 3.1.1. Wahl eines Verschiebungsansatzes
 - 3.1.2. Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten
 - 3.1.3. Bildung der Elementsteifigkeitsmatrix
 - 3.1.4. Bildung des Lastvektors
 - 3.1.5. Gesamtsteifigkeitsmatrix
 - 3.1.6. Lastvektor am Gesamtsystem
 - 3.1.7. Knotenverformungen des Gesamtsystems
 - 3.1.8. Berechnung der Spannungen
- 3.2. Verhalten der numerischen Lösungen
- 3.3. Übersicht: Scheibenelemente
- 3.4. Beispiele (mit Gruppenübungen am Rechner):
Stahlbetonwand, Erddamm

4. FEM für Plattenaufgaben (2D)

- 4.1. Vierknoten-Rechteckelement mit Schubverzerrungen (SRI-Element)
- 4.2. Überblick über verschiedene Plattenelemente

5. Ergänzende Kapitel

- 5.1. Interpolation, Wahl von Ansatzfunktionen
- 5.2. Numerische Integration
- 5.3. Isoparametrisches Elementkonzept
- 5.4. Spannungsauswertung

6. Verallgemeinerung der Finite-Element-Methode

- 6.1. Das klassische Galerkin-Verfahren
- 6.2. Beispiel: Balken unter Dreieckslast
- 6.3. Zusammenhang zwischen dem erweiterten Verfahren von Galerkin und dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen

7. Stationäre Feldprobleme

- 7.1. Überblick
- 7.2. Wärmeleitung
 - 7.2.1. Zusammenstellung der charakteristischen Größen
 - 7.2.2. Herleitung der quasiharmonischen Feldgleichung
 - 7.2.3. Beispiel: Fußbodenheizung
- 7.3. Sickerwasserströmung
 - 7.3.1. Zusammenstellung der charakteristischen Größen
 - 7.3.2. Grundgleichungen und Randbedingungen
 - 7.3.3. Beispiel: Unterströmung einer Spundwand
 - 7.3.4. Beispiel: Durchströmung eines Erddamms

8. Ausblick

- 8.1. Nichtlineare Fragestellungen (z.B. Bodenmechanik, Stahlbeton)
- 8.2. Netzverfeinerung (Adaptive Verfahren)
- 8.3. Volumenelemente (3D) (z.B. Tunnelbau, Dämme, Behälter)

1. EINFÜHRUNG

1.3 Literatur

Theorie der ebenen Flächentragwerke

- [1] *Girkmann, K.*: Flächentragwerke. Springer Verlag Wien 1963 (6.Auflage)
- [2] *Gould, Phillip L.*: Analysis of Shells and Plates. Springer Verlag New York 1988
- [3] *Marcus, H.*: Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten unter besonderer Berücksichtigung der trägerlosen Pilzdecken. Springer Verlag Berlin 1932 (2. verb. Auflage)
- [4] *Markus, G.*: Kreis- und Kreisringplatten unter antimetrischer Belastung. W. Ernst Verlag Düsseldorf 1973
- [5] *Markus, G.*: Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke. Werner Verlag Düsseldorf 1978 (3.Auflage)
- [6] *Rabich, R.*: Statik der Platten, Scheiben, Schalen. in: Ingenieur Taschenbuch Bauwesen Band I Pfalz-Verlag Basel 1964
- [7] *Szilard, R.*: Theory and Analysis of Plates. Classical and numerical Methods. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1974
- [8] *Timoshenko, S.P., Woinoswski-Krieger, S.*: Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, 1959.
- [9] *Marguerre, K., Woernle, H.T.*: Elastische Platten, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1975.
- [10] *Worch, G.*: Über Zusammenhänge zwischen der technischen Balkenbiegungslehre und der Scheibentheorie. Bautechnik Archiv (1949) 5
- [11] *Worch, G.*: Elastische Scheiben. Betonkalender 1963 II. Teil S.355
- [12] *Zweiling, K.*: Biharmonische Polynome. Verlag Technik Berlin 1952

Tabellenwerke

- [13] *Bares, R.*: Berechnungstabellen für Platten und Scheiben. Bauverlag Wiesbaden 1979 (3. Auflage)
-> durchlaufende Platten, kreisförmige Platten, elastisch gebettete Platten, orthotrope Platten, Eigenfrequenzen, Stabilität, Rechteckscheiben
- [14] *Bruckner, H.*: Elastische Platten. Vieweg Braunschweig 1977
-> Plattenstreifen, Rechteckplatten, punktgestützte Platten, Halbkreisplatten mit Linien-, Einzel-, Teilflächenlasten
- [15] *Czerny, F.*: Tabellen für vierseitig und dreiseitig gelagerte Rechteckplatten. Betonkalender 1987, 1990, 1993 I. Teil
-> drillsteife Platten mit Gleichlast und linear veränderlicher Last
- [16] *Pfeiffer, G.*: Berechnung und Bemessung von wandartigen Trägern. Werner Verlag Düsseldorf 1968
-> Krafteinleitungsprobleme, wandartige Träger, Kreisscheiben
- [17] *Pieper, K.; Martens, P.*: Durchlaufende vierseitig gestützte Platten im Hochbau. Beton- und Stahlbetonbau 6(1966) S.158-162.
Zuschrift und Erwiderung mit Ergänzung: Beton- und Stahlbetonbau 6(1967) S.150-151
-> Schnelle, überschlägige Berechnung mit Tabellen für Hochbauplatten

- [18] *Pucher, A.*: Einflußfelder elastischer Platten. Springer Verlag Wien 1964 (3.Auflage)
-> Einflußflächen für Rechteck- und Kreisplatten
- [19] *Rüsch, H.*: Berechnungstabellen für rechtwinklige Fahrbahnplatten von Straßenbrücken. Heft 106 DAfStb, Ernst u. Sohn Berlin 1981 (7. Auflage)
-> spezielle Lasten der DIN 1072 (Radlasten)
- [20] *Rüsch, H.*: Berechnungstabellen für schiefwinklige Fahrbahnplatten von Straßenbrücken. Heft 166 DAfStb, Ernst u. Sohn Berlin 1967
-> spezielle Lasten der DIN 1072 (Radlasten)
- [21] *Schleeh, W.*: Bauteile mit zweiachsigem Spannungszustand (Scheiben). Betonkalender 1978, 1983 II. Teil
-> Krafteinleitungsprobleme, wandartige Träger, Kreisscheiben
- [22] *Schleicher, C., Müller, K.*: Schiefe Einfeldplatten. Transpress VEB Verlag für Verkehrswesen Berlin 1962
-> Zustandsflächen für Gleichlast: Maximalwerte, Höhenlinien, Trajektorien; Einflußflächen
- [23] *Schleicher, C., Wegener, B.*: Durchlaufende schiefe Platten. VEB Verlag für Bauwesen Berlin 1968
-> Zustands- und Einflußflächen für Zwei- und Dreifeldplatten (Gleichlasten, Linienlasten)
- [24] *Stiglat, K., Wippel, H.*: Massive Platten. Betonkalender 1989, 1992, 1995 I. Teil
-> Momente und Lagerkräfte für Rechteckplatten mit Gleich- und Einzellasten; Platten mit unterbrochener Stützung, mit Löchern, elastisch gebettete Platten, Bemessung von Bewehrungsnetzen, Vorspannung, Durchstanzen von Flachdecken, deckengleiche Unterzüge
- [25] *Stiglat, K., Wippel, H.*: Platten. Ernst u. Sohn Berlin 1983 (3.Auflage)
-> Momente und Lagerkräfte für drillsteife Rechteckplatten, Plattenstreifen, punktgestützte Platten und drillweiche Platten (Flächen-, Linien- und Einzellasten, Randmomente)

Finite-Element-Methoden (allgemein)

- [26] *Bathe, K.J.*: Finite-Elemente-Methode. Springer-Verlag Berlin 1986
- [27] *Gallagher, R.H.*: Finite-Element-Analysis. Grundlagen. Springer-Verlag Berlin 1976
- [28] *Stein, E. und Wunderlich, W.*: Finite-Element-Methoden als direkte Variationsverfahren der Elastostatik. in: Finite Elemente in der Statik. Verlag v. W.Ernst&Sohn Berlin 1973
- [29] *Zienkiewicz, O.C.*: Methode der Finiten Elemente. 2. erw. Aufl. (Studienausgabe, übersetzt nach der 3. Aufl. 1977). Carl Hanser Verlag 1983
- [30] *Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L.*: The Finite Element Method. 4.th Edition, Vol.1: Basic formulations and linear problems, Vol 2: Solid and fluid mechanics, dynamics and non-linearity. McGraw-Hill (UK) 1991.
- [31] *Hughes, T.J.R.*: The Finite Element Method - Linear static and dynamic analysis. Prentice Hall, Inc. 1987 (paperback).

- [32] *Argyris, J.*: Die Methode der Finiten Elemente. Bd. 1-3, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1986.
- [33] *Thieme, D.*: Einführung in die Finite-Elemente-Methode für Bauingenieure. Verlag für Bauwesen, Berlin 1990.
- [34] *Cook, R.C., Malkus, D.S., Plesha, M.E.*: Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 3rd Edition, Wiley, New York 1989.
- [35] *Werkle, H.*: Finite Elemente in der Baustatik. Vieweg Verlag, Wiesbaden 1995.
- [36] *Knothe, K., Wessels, H.*: Finite Elemente. Springer-Verlag, Berlin 1992. (2.Auflage)
- [37] *Szilard, R.*: Finite Berechnungsmethoden der Strukturmechanik – Band 2: Flächentragwerke im Bauwesen. Verlag Ernst&Sohn, Berlin 1990.
- [38] *Pilkey, W.D., Wunderlich, W.*: Mechanics of Structure: Variational and Computational Methods. CRC Press, 1994.
- [39] *Wunderlich, W., Redanz, W.*: Die Methode der Finiten Elemente. In: Der Ingenieurbau – Grundwissen Band 6: Rechnerorientierte Baumechanik. Verlag Ernst&Sohn, Berlin 1995.

Speziell zu Plattenelementen

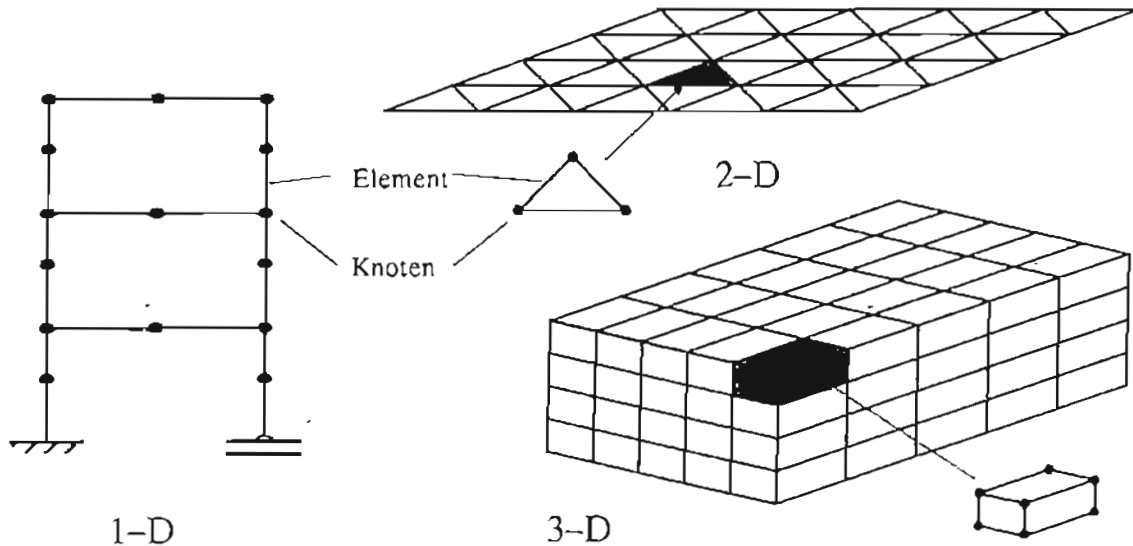
- [40] *Bogner, F.K., Fox, R.L. and Schmit Jr., L.A.*: The Generation of Inter-element Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulas. Proc. Ist. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio 1965.
- [41] *Pestel, E.C.*: Dynamic Stiffness Matrix Formulation by Means of Hermitian Polynomials. Proc. Ist. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio 1965, pp. 479-502.
- [42] *Falk, S.*: Das Verfahren von Rayleigh-Ritz mit Hermiteschen Interpolationspolynomen. Zeitschr. Angew. Math.Mech. 43, 1963, S. 149-166.
- [43] *Batoz, J.-L., Bathe, K.-J., Ho, L.-W.*: A study of three-node triangular plate bending elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 15, 1980, pp. 1771-1812.
- [44] *Bathe, K.-J., Ho, L.-W.*: A simple and effective element for analysis of general shell structures. Computer & Structures 13, 1981, pp. 673-681.
- [45] *Hughes, T.; Taylor, R.; Kanoknukulchai, W.*: A simple and efficient element for plate bending. Int. Journal for numerical Methods in Engineering Vol. 11, 1529-1543 (1977)
- [46] *Withum, D.*: Berechnung von Platten nach dem Ritzschen Verfahren mit Hilfe dreieckförmiger Maschennetze. Mitt. Inst. Statik, Techn. Hochschule Hannover 9, 1966.
- [47] *Bell, K.*: A Refined Triangular Plate Bending Finite Element. Int. J. Num. Meth.Eng. 1. 1969, pp. 101-122.

2. GRUNDLAGEN UND RECHENGANG DER FINITE-ELEMENT-METHODE

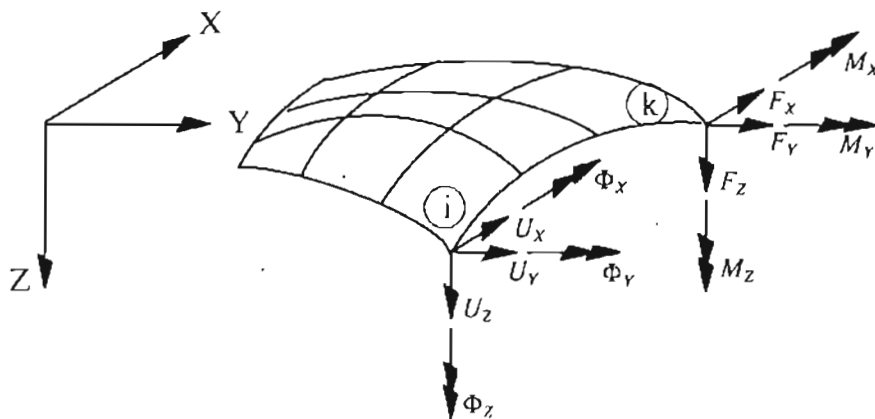
2.1 Tragwerk und Element

Das Finite-Element-Verfahren hat seinen Namen aufgrund des Rechenmodells erhalten:

- Das zu untersuchende Gesamtsystem (Tragwerk, Struktur) wird in eine Anzahl von *Tragelementen* endlicher Größe zerlegt. Diese Elemente sind je nach Tragwerk ein-, zwei- oder dreidimensional.



Die verschiedenen Elemente besitzen eine endliche Anzahl von gemeinsamen Knotenpunkten. Die Knoten und die Lage der Elemente werden in einem globalen Koordinatensystem X,Y,Z beschrieben.



An jedem Knoten werden Verschiebungs- und Kraftgrößen als sogenannte diskrete Zustandsgrößen definiert. Es ist das Ziel mit Hilfe dieser diskreten Größen das mechanische Verhalten des Gesamtsystems näherungsweise (oder evtl. auch exakt) zu beschreiben.

$$\text{Kraftgrößen am Knoten k: } \mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

$$\text{Weggrößen am Knoten k: } \mathbf{V}_k = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \\ \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{bmatrix}$$

2.2 Finite-Element-Methode auf der Grundlage des Weggrößenverfahrens

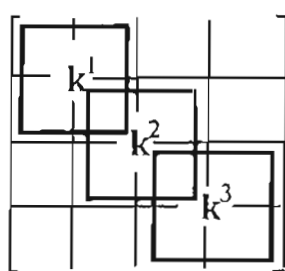
Eine Methode zur Berechnung diskreter Kraft- und Weggrößen an den Tragwerksknoten ist das aus der Statik bekannte Weggrößenverfahren.

Die Elementeigenschaften werden bei diesem Verfahren durch die Steifigkeitsmatrix k beschrieben, die die Knotenkräfte und -verschiebungen miteinander verknüpft.

$$p^j = k^j v^j + p^{j0}$$

$$\begin{bmatrix} p_a \\ p_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix}$$

Die Verknüpfung der Elementeigenschaften geschieht in der Systemberechnung durch Bilden von Knotengleichgewicht. Da die Weggrößen die primären Unbekannten sind, addiert man dabei die Steifigkeiten benachbarter Elemente.

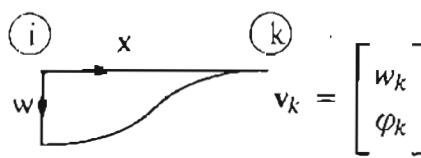


$$K \cdot v = \bar{P}^* - \bar{P}^0 = \bar{P}$$

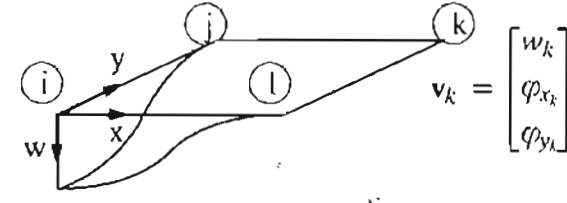
$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ v_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_a^* \\ \bar{P}_b^* \\ \bar{P}_c^* \\ \bar{P}_d^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_a^{10} \\ p_b^{10} + p_b^{20} \\ p_c^{20} + p_c^{30} \\ p_d^{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_a \\ \bar{P}_b \\ \bar{P}_c \\ \bar{P}_d \end{bmatrix}$$

Diese *Elementeigenschaften* nun ganz genau anzugeben, ist schon bei relativ einfachen praktischen Problemen nicht mehr möglich. Es müssen *Näherungen* gemacht werden, und *hier ist die Finite-Element-Methode einzuordnen*.

Sie ist ein Näherungsverfahren, bei dem man für den unbekanntem Verlauf einer gesuchten Zustandsgröße einen Ansatz im Element macht: man rät den qualitativen Verlauf. Die unbekannte Amplitude der Ansatzfunktion berechnet man aus geeigneten Bestimmungsgleichungen, hier den Gleichgewichtsbedingungen an den Knoten. Es ist einzusehen, daß die Näherung umso besser ist, je kleiner der Bereich ist, über den sich der Ansatz erstreckt.



$$v_k = \begin{bmatrix} w_k \\ \varphi_k \end{bmatrix}$$

$$w(x) = N_u \hat{v} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$


$$v_k = \begin{bmatrix} w_k \\ \varphi_{xk} \\ \varphi_{yk} \end{bmatrix}$$

$$w(x,y) = N_u \hat{v} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

Bereichsweise Polynomansätze am Beispiel von Stäben bzw. Platten

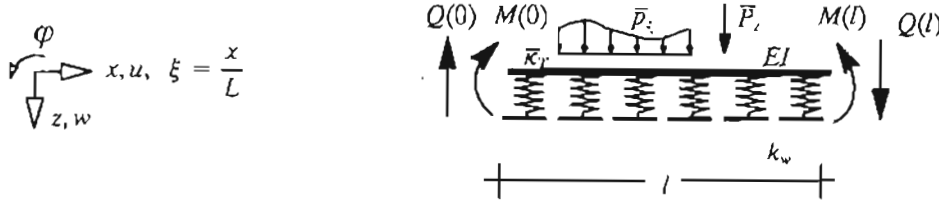
Allgemeiner Ablauf von Berechnungen nach dem Weggrößenverfahren :

(siehe auch Vorlesung Statik IV, Kap. 5)

- (a) System und Belastung → 'Modellbildung'
- (b) Ermittlung der Elementmatrizen \mathbf{k}^i und Lastvektoren \mathbf{p}^{i0} aus Feldbelastung
- (c) Transformation der Elementgrößen vom lokalen ins globale Koordinatensystem
($\mathbf{k}^i, \mathbf{p}^{i0} \rightarrow \mathbf{k}_G^i = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{k}^i \mathbf{T}^i, \mathbf{p}_G^{i0} = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{p}^{i0}$)
- (d) Aufbau des Gleichungssystems :
 - Zusammenstellung der Weggrößen \mathbf{V} der Knoten
 - Zuordnung der Zustandsgrößen an den Elementenden und an den Knoten → Verträglichkeit
 - Aufbau des Gleichungssystems ohne Berücksichtigung der Randbedingungen durch Zusammenbau der Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{k}_G^i zur Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} (Gleichgewicht im globalen Koordinatensystem)
 - Aufbau des Lastvektors $\bar{\mathbf{P}}$ aus Knotenlasten $\bar{\mathbf{P}}$ und Feldbelastungen $\bar{\mathbf{p}}_G^0$
 - Einbringen der Randbedingungen durch Streichen von Zeilen und Spalten
(sofern die Randbedingungen nicht bereits beim Aufbau des Gleichungssystems berücksichtigt wurden)
- (e) Lösung des algebraischen Gleichungssystems zur Ermittlung der unbekanntenen Weggrößen \mathbf{V} der Knoten (im globalen Koordinatensystem)
- (f) Nachlaufberechnung zur Ermittlung der Kraft- und Weggrößen am Element
 - Weggrößen im lokalen Koordinatensystem des Elements : $\mathbf{v}^i = \mathbf{T}^i \mathbf{v}_G^i$
 - Knotenkraftgrößen im lokalen Koordinatensystem des Elements :
 $\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0}$
(Alternative : $\mathbf{p}_G^i = \mathbf{k}_G^i \mathbf{v}_G^i + \mathbf{p}_G^{i0}$ und daraus $\mathbf{p}^i = \mathbf{T}^i \mathbf{p}_G^i$)
 - Berechnung der Zustandsgrößen – insbesondere der Schnittkräfte – im Feld
(Schnittkräfte stimmen nur in Sonderfällen mit den Knotenkraftgrößen überein – z.B. bei Stäben)
 - graphische Darstellung der Zustandslinien
- (g) Kontrollen der Berechnung :
 - Beurteilung der Ergebnisse – Plausibilitätsüberlegungen
 - Kontrolle des globalen Gleichgewichts am Gesamtsystem
 - Kontrolle des Gleichgewichts in einzelnen Knoten
 - Kontrolle von Gleichgewicht und Verträglichkeit an einzelnen Elementen

2.3 Ermittlung von Steifigkeitsmatrizen mit Verschiebungsansätzen am Beispiel des elastisch gebetteten Balkens (mit Linien- und Temperaturbelastung)

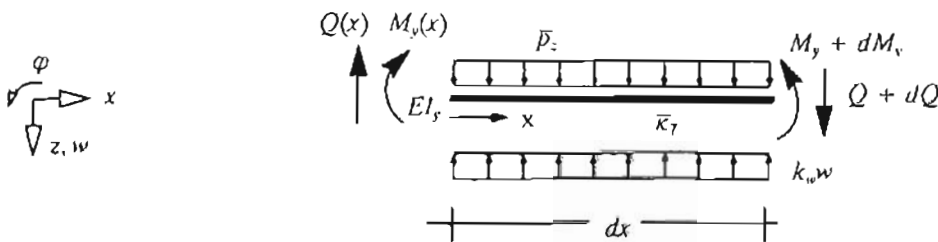
(siehe auch Vorlesung Statik IV, Kap. 6.2)



Bezeichnungen :

EI	Biegesteifigkeit des gebetteten Trägers	[Kraft * Länge ²]
l	Länge des gebetteten Trägers	[Länge]
k_w	Bettungsmodul	[Kraft/Länge ²]
$\bar{\kappa}_T$	vorgegebene Verkrümmung aus Temperatur	
$L = \sqrt[3]{4EI/k_w}$	charakteristische Länge des gebetteten Trägers	[Länge]

Grundlegende Beziehungen am differentiellen Element :



Gleichgewicht: $Q' + \bar{p}_z - k_w w = 0$
 $M' - Q = 0$

Werkstoffgesetz: $M = EJ(\kappa - \bar{\kappa}_T)$; $Q = GA' \gamma$

Kinematik: $\kappa = \varphi'$; $\gamma = \varphi + w'$
 oder
 $\gamma = 0 \rightarrow \varphi = -w'$; $\kappa = -w''$

Randbedingungen:

Kräfte-R.B.: $Q = \bar{Q}$; $M = \bar{M}$
 Verschiebungs-R.B.: $w = \bar{w}$; $\varphi = \bar{\varphi}$

Resultierende Dgl. : $(EI_y w''')' + k_w w - \bar{p}_z + (EI_y \bar{\kappa}_T)' = 0$

(Lösung der Differentialgleichung für den Sonderfall konstanter Steifigkeit EI und konstanter Bettung k_w noch möglich -> Referenzlösung für Näherungen nach der FE-Methode, siehe Statik IV)

Näherungslösung für die Elementmatrizen mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen

(siehe auch Vorlesung Statik IV, Kap. 5.4)

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_a = 0.$$

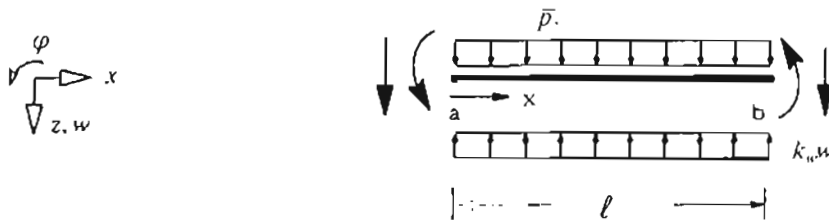
$$\delta W = \sum_{\text{Elemente}} \int_x [\delta \kappa M + \delta \gamma Q - \delta w \bar{p}_z - \delta w (-k_w w)] dx - \sum_{\text{Knoten}} [\delta U_{zk} \bar{P}_{zk} + \delta \Phi_k \bar{M}_k] = 0$$

Einsetzen des Werkstoffgesetzes und der Kinematik führt auf eine reine Weggrößenformulierung als Ausgangspunkt für die Ermittlung der Steifigkeitsmatrizen. Bei Vernachlässigung der Schubverzerrungen ($\gamma = 0, \varphi = -w', \kappa = -w''$) ergibt sich:

$$\delta W = \sum_{\text{Elemente}} \int_x [\delta w'' EI(w'' + \bar{\kappa}_T) - \delta w \bar{p}_z + \delta w k_w w] dx - \sum_{\text{Knoten}} [\delta U_{zk} \bar{P}_z + \delta \Phi_k \bar{M}_k] = 0$$

Wahl eines Verschiebungsansatzes

z. B. ein viergliedriger Polynomansatz (für ein Element mit vier Knotenfreiheitsgraden)



$$w(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 = N_u \hat{w}$$

mit $N_u(x) = [1 \ x \ x^2 \ x^3]$ Ansatzfunktionen und ihre Ableitungen

$$N'_u(x) = [0 \ 1 \ 2x \ 3x^2]$$

$$N''_u(x) = [0 \ 0 \ 2 \ 6x]$$

$$\hat{w}^T = [C_0 \ C_1 \ C_2 \ C_3] \quad \text{Generalisierte Freiwerte}$$

Umrechnung der generalisierten Freiwerte in mechanisch sinnvolle Knotengrößen v

$$v = \begin{bmatrix} w_a(x=0) \\ \varphi_a(x=0) \\ w_b(x=l) \\ \varphi_b(x=l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

$$v = \hat{N}_u \cdot \hat{w} \rightarrow \hat{w} = \hat{N}_u^{-1} \cdot v = Gv$$

$$w(x) = N_u(x) \hat{w} = N_u(x) Gv = N(x) v$$

Einsetzen des Verschiebungsansatzes in die Grundgleichungen

$$w(x) = \mathbf{N}_u(x) \mathbf{G} \mathbf{v} \qquad \varphi(x) = -w'(x) = -\mathbf{N}'_u(x) \mathbf{G} \mathbf{v}$$

$$\kappa(x) = -w''(x) = -\mathbf{N}''_u(x) \mathbf{G} \mathbf{v} \qquad M(x) = EI(\kappa - \bar{\kappa}_T) = -EI \mathbf{N}''_u(x) \mathbf{G} \mathbf{v} - EI\bar{\kappa}_T$$

Da die Matrizen \mathbf{G} und \mathbf{v} nur diskrete Werte enthalten, können die Zustandsgrößen im innern des Elements allein als Funktionen des Verschiebungsansatzes und seiner Ableitungen dargestellt werden. Im allgemeinen müssen insbesondere die Schnittkräfte im Element aus den Verformungsableitungen berechnet werden, da nur in Sonderfällen die Knotenkräfte mit den Schnittkräften übereinstimmen (z. B. beim Stab).

Einsetzen des Verschiebungsansatzes in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\delta W = \sum_{\text{Elemente}} \int_x [\delta w'' EI(w'' + \bar{\kappa}_T) - \delta w \bar{p}_z + \delta w k_w] dx - \sum_{\text{Knoten}} [\delta U_{zk} \bar{P}_{zk} + \delta \Phi_k \bar{M}_k] = 0$$

Die virtuelle Arbeit des Gesamtsystems setzt sich zusammen aus der Arbeit der Einzelemente. Für den Anteil eines Elements ergibt sich also

$$\delta W^i = \underbrace{\delta \mathbf{v}^T \mathbf{G}^T \int_a^b \mathbf{N}''_u^T(x) EI \mathbf{N}''_u(x) dx}_{\mathbf{k}_B^i} \mathbf{G} \mathbf{v} + \underbrace{\delta \mathbf{v}^T \mathbf{G}^T \int_a^b \mathbf{N}_u^T(x) k_w \mathbf{N}_u(x) dx}_{\mathbf{k}_w^i} \mathbf{G} \mathbf{v}$$

$$+ \underbrace{\delta \mathbf{v}^T \mathbf{G}^T \int_a^b \mathbf{N}''_u^T(x) EI \bar{\kappa}_T dx}_{\mathbf{p}_T^{i0}} - \underbrace{\delta \mathbf{v}^T \mathbf{G}^T \int_a^b \mathbf{N}_u^T(x) \bar{p}_z(x) dx}_{-\mathbf{p}_q^{i0}}$$

Lastspalten aus Temperatur und Linienlast

Die Addition aller Arbeitsanteile ("Überlagerung" der Elementmatrizen) liefert das Gleichungssystem des Weggrößenverfahren (Knotengleichgewicht).

$$\delta W = \sum_{\text{Elemente}} \delta W^i + \sum_{\text{Knoten}} \delta W_k = \sum_{\text{Elemente}} \delta \mathbf{v}^{iT} \{ (\mathbf{k}_B^i + \mathbf{k}_w^i) \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0} \} - \delta \mathbf{V}^T \mathbf{P}^*$$

$$= \delta \mathbf{V}^T \{ \mathbf{K} \mathbf{V} + \mathbf{P}^0 - \mathbf{P}^* \} = 0$$

Bezeichnungen

- \mathbf{k}^i Steifigkeitsmatrix des Elements i (Biege- und Bettungsanteil)
- \mathbf{v}^i Spaltenmatrix der Weggrößen an den Stabenden des Elements i
- \mathbf{P}^* Spaltenmatrix der Einzelkräfte und Momente an den Systemknoten
- \mathbf{p}^{i0} Spaltenmatrix der negativen Knotenlasten des Elements i (nach Vorzeichen-Definition 2, enthält Anteile aus Strecken- und Temperaturbelastung)
- $\mathbf{N}_u(x)$ Spaltenmatrix der Ansatzfunktion für die Verschiebung $w(x)$

Berechnung der Biegesteifigkeit k_w^i mit dem gewählten Verschiebungsansatz :

Ansatzfunktion : $w(x) = \mathbf{N}_u(x) \mathbf{G} \mathbf{v}^i$ mit $\mathbf{N}_u(x) = [1 \ x \ x^2 \ x^3]$

$\mathbf{v}^{iT} = [w_a \ \varphi_a \ w_b \ \varphi_b]^T$

$k_w^i = \mathbf{G}^T \int_0^l [\mathbf{N}_u^T k_w \mathbf{N}_u \ dx] \mathbf{G}$

$\mathbf{p}^{iT} = [Q_o \ M_o \ Q_b \ M_b]^T$

für $k_w = \text{konstant}$ gilt :

$\mathbf{N}_u(x) = [1 \ x \ x^2 \ x^3]$

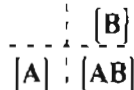
$\mathbf{N}_u^T(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \Rightarrow \int_0^l \mathbf{N}_u^T k_w \mathbf{N}_u \ dx = k_w \int_0^l \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & x^2 & x^3 & x^4 \\ x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\ x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \end{bmatrix} dx$

$\Rightarrow = k_w \begin{bmatrix} l & l^2/2 & l^3/3 & l^4/4 \\ l^2/2 & l^3/3 & l^4/4 & l^5/5 \\ l^3/3 & l^4/4 & l^5/5 & l^6/6 \\ l^4/4 & l^5/5 & l^6/6 & l^7/7 \end{bmatrix}$

$k_w^i = \mathbf{G}^T \int_0^l [\mathbf{N}_u^T k_w \mathbf{N}_u \ dx] \mathbf{G}$

$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & 2/l & 3/l^2 & 1/l \\ 2/l^3 & -1/l^2 & -2/l^3 & -1/l^2 \end{bmatrix}$

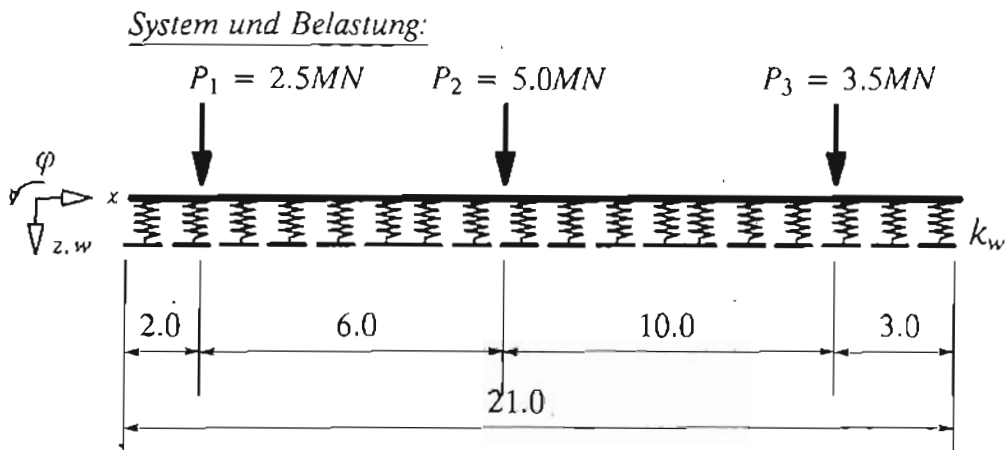
Multiplikationsschema :



$\int_0^l \mathbf{N}_u^T k_w \mathbf{N}_u \ dx = k_w \begin{bmatrix} l & l^2/2 & l^3/3 & l^4/4 \\ l^2/2 & l^3/3 & l^4/4 & l^5/5 \\ l^3/3 & l^4/4 & l^5/5 & l^6/6 \\ l^4/4 & l^5/5 & l^6/6 & l^7/7 \end{bmatrix} \cdot k_w \begin{bmatrix} l/2 & -l^2/12 & l/2 & l^2/12 \\ 3l^2/20 & -l^3/30 & 7l^2/20 & l^3/20 \\ l^3/15 & -l^4/60 & 4l^3/15 & l^4/30 \\ l^4/28 & -l^5/105 & 3l^4/14 & l^5/42 \end{bmatrix}$

$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/l^2 & -2/l^3 \\ 0 & -1 & 2/l & -1/l^2 \\ 0 & 0 & 3/l^2 & -2/l^3 \\ 0 & 0 & 1/l & -1/l^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{k_w l}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ -22l & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ 54 & -13l & 156 & 22l \\ 13l & -3l^2 & 22l & 4l^2 \end{bmatrix} = k_w^i$

2.4 Numerisches Lösungsverhalten am Beispiel eines gebetteten Fundamentbalkens unter Einzellasten

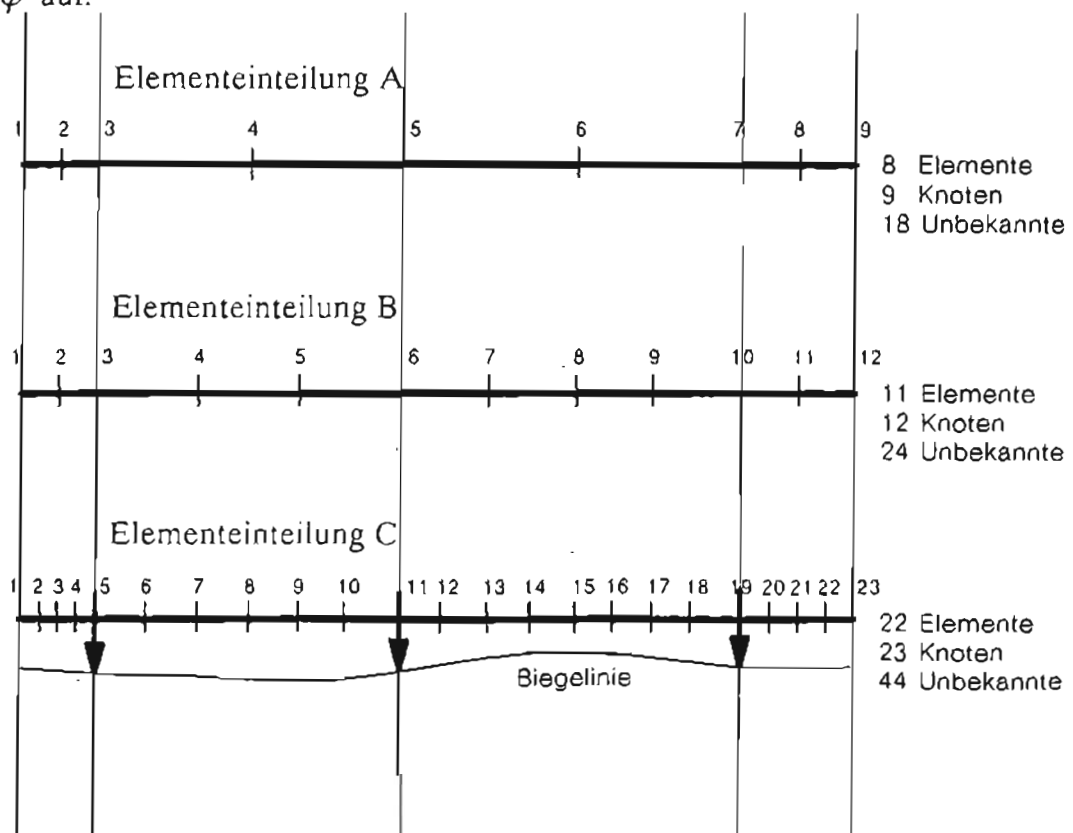


Querschnitts- und Materialkennwerte:

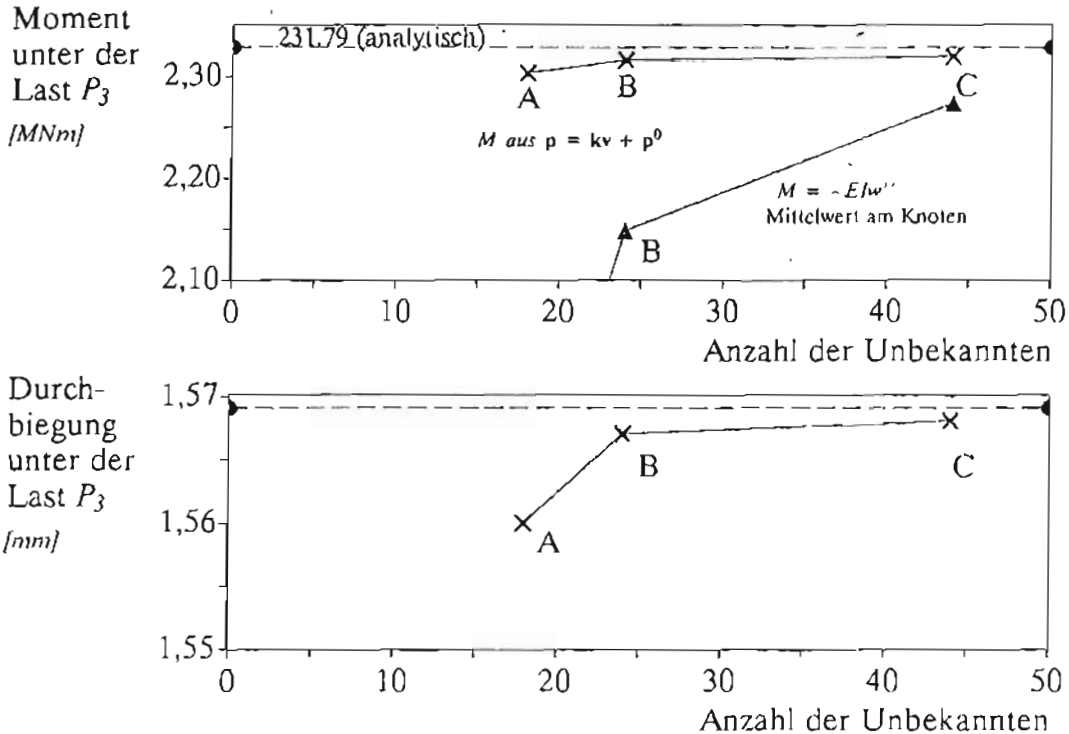
Elastizitätsmodul	$E = 2.1 \cdot 10^4 \text{MN/m}^2$
Trägheitsmoment	$I = 1.08 \text{m}^4$
Bettungsziffer	$k_w = 3.2 \cdot 10^2 \text{MN/m}^2$
charakteristische Länge	$L = \sqrt[4]{4EI/k_w} = 4.10 \text{m}$

Im Folgenden soll das Lösungsverhalten der Finiten Elemente bei verschiedenen Elementeinteilungen untersucht werden.

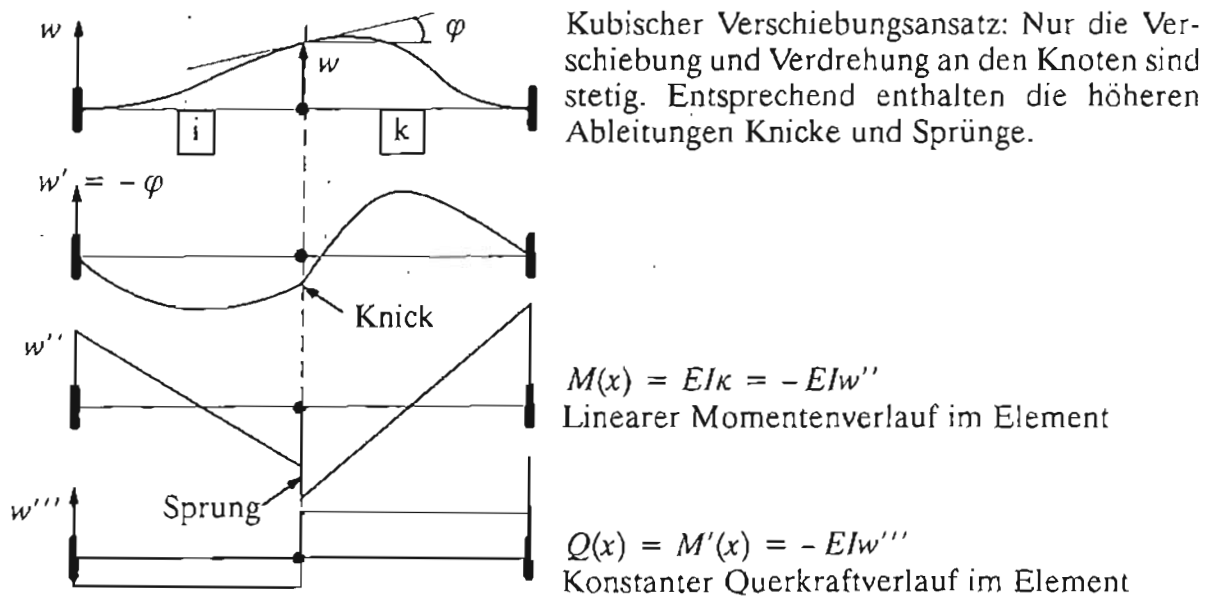
Wegen der Lagerung auf Federn sind keine weiteren Randbedingungen erforderlich. An jedem Knoten treten also zwei unbekannte Verschiebungsfreiheitsgrade w und φ auf.



Die Konvergenz der numerischen Lösung gegen die analytische Lösung bei feinerer Elementeinteilung wird dargestellt, indem man den Wert charakteristischer Zustandsgrößen z.B. über der Zahl der Unbekannten aufträgt. In den folgenden Bildern wurden als charakteristische Zustandsgrößen das Biegemoment und die Durchbiegung unter der Last P_3 gewählt.



Es ist zu beachten, daß Konvergenz bei feinerer Elementeinteilung beim Weggrößenverfahren nur für die Knotenverschiebungen und Knotenkräfte mathematisch gesichert ist! Die Systemgleichungen erfüllen das Gleichgewicht nur an den Knoten!



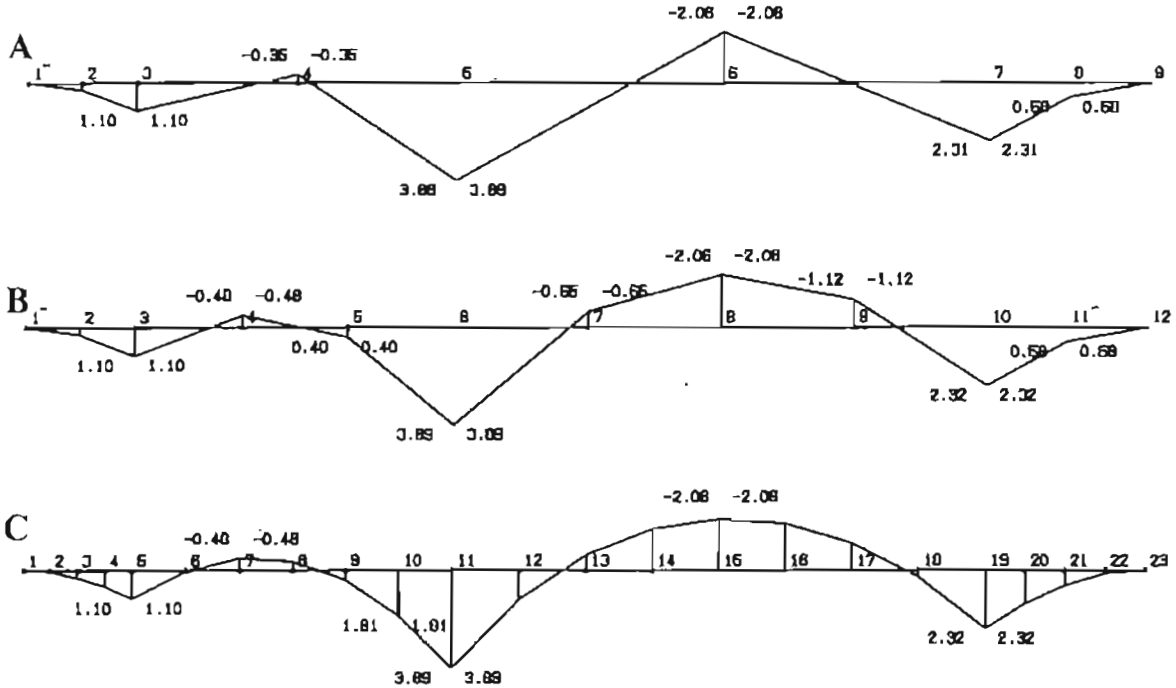
Obwohl die Bettung im Element wie eine negative Linienlast wirkt, und der Momentenverlauf somit parabolisch sein müßte, liefert das Stoffgesetz bei einem kubischen Verschiebungsansatz nur einen linearen Momentenverlauf und Sprünge an den Elementgrenzen, d.h. durch die Ableitungen wird die Approximation der Schnittkräfte schlechter.

Im Element wird das Gleichgewicht nur im Mittel erfüllt!

Biegemomente des elastisch gebetteten Balkens unter Einzellasten

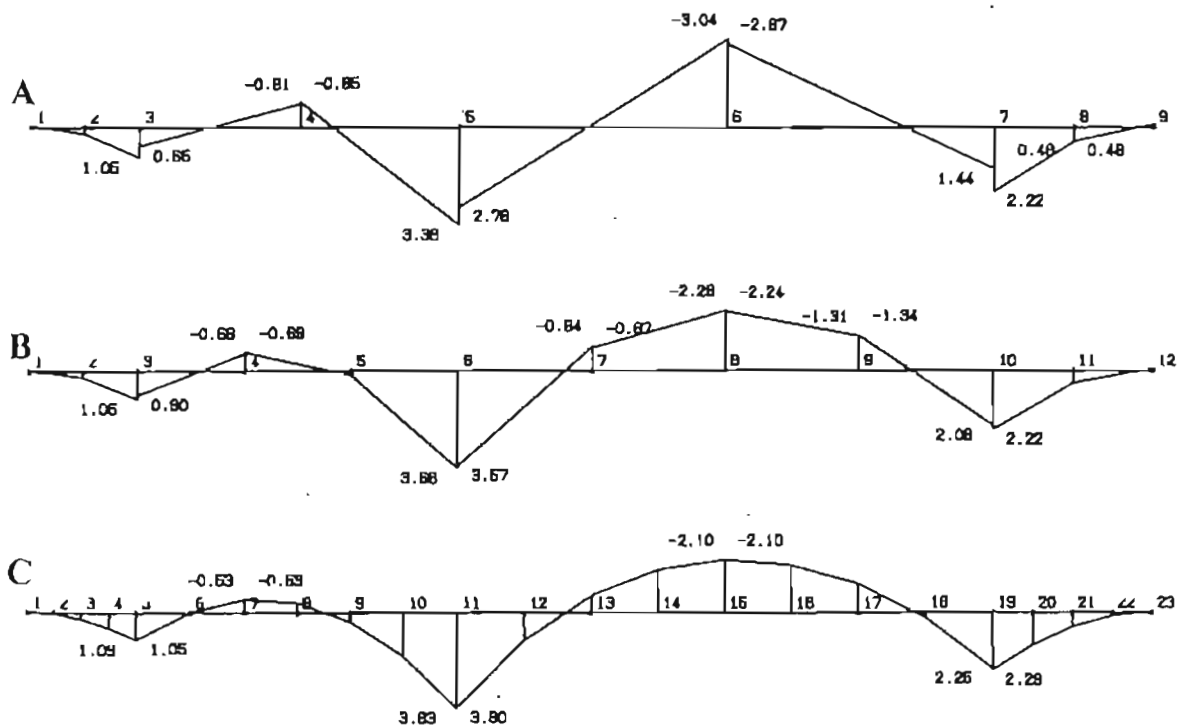
Ermittlung aus den Knotenkräften: $p = kv + p^0$

Die Knotenwerte werden willkürlich linear verbunden, der genaue Verlauf zwischen den Knoten kann nur mit Hilfe des Stoffgesetzes ermittelt werden (s.u.)



Ermittlung aus dem Stoffgesetz: $M = EI \cdot (-w'')$

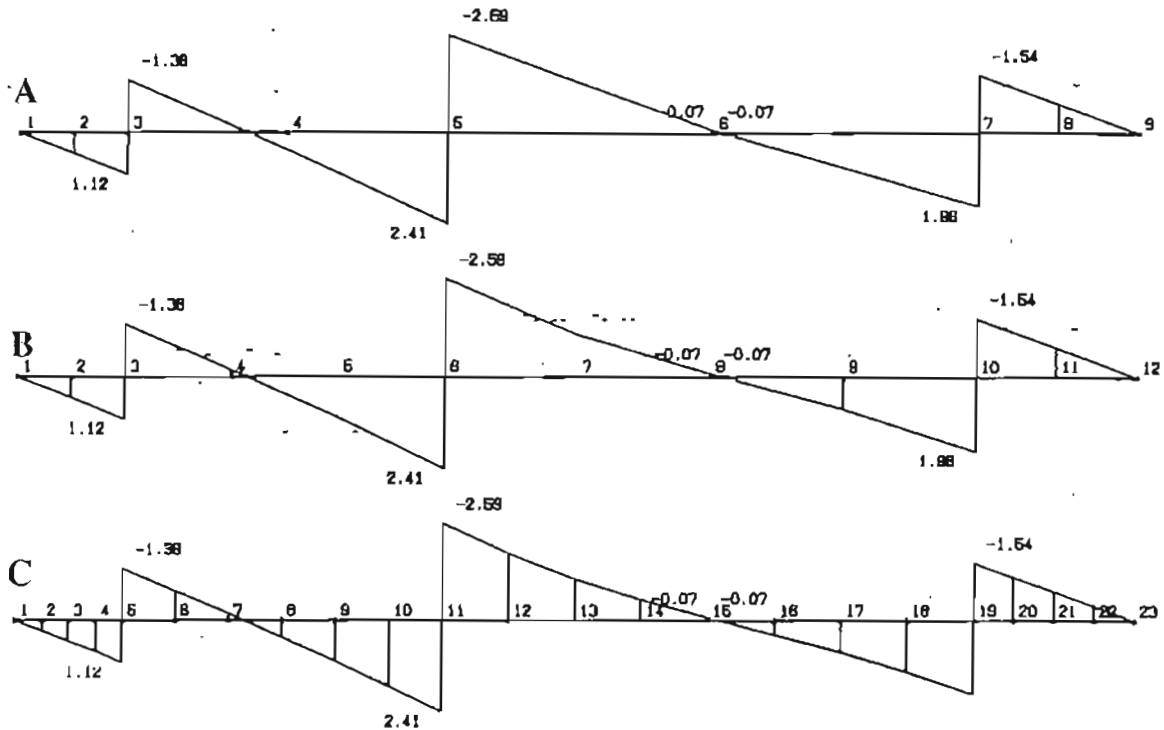
Da für die höheren Verschiebungsableitungen keine Stetigkeit des Verlaufs über die Elementgrenzen gewährleistet wird, treten Sprünge an den Elementgrenzen auf. Insgesamt wird die Approximation der Schnittkräfte mit Hilfe der Verschiebungsableitungen schlechter. Gleichgewicht wird im Element nur im Mittel erfüllt.



Querkräfte des elastisch gebetteten Balkens unter Einzellasten

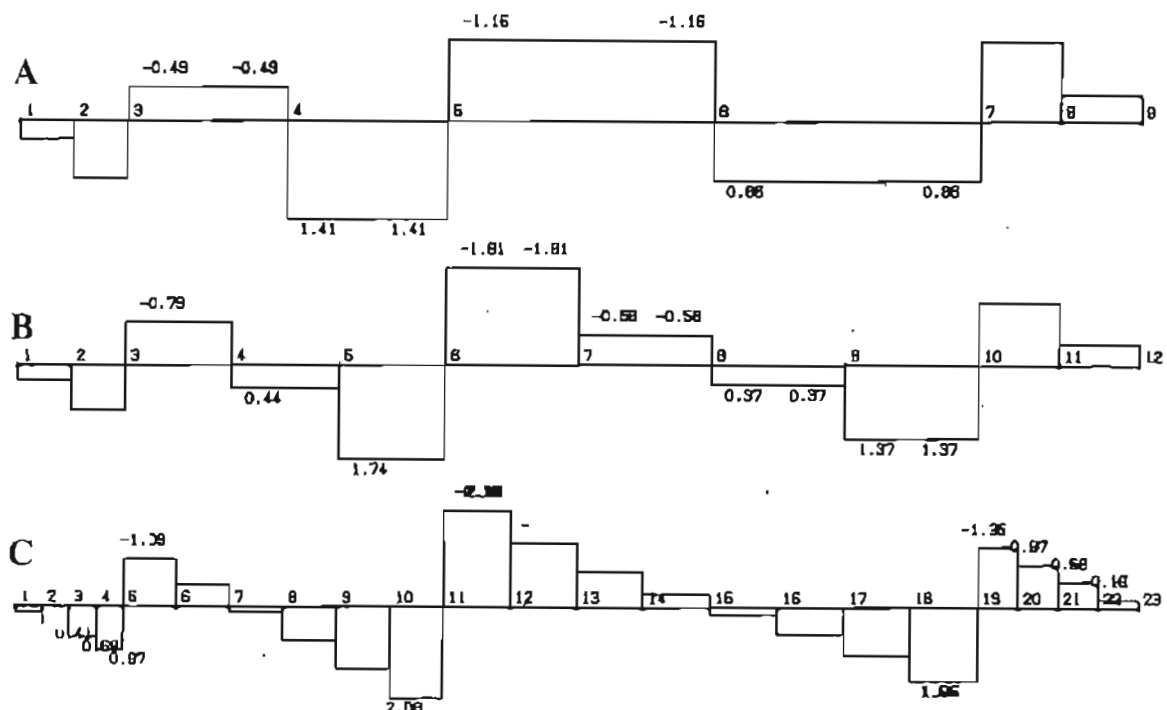
Ermittlung aus den Knotenkräften: $p = kv + p^0$

Die Knotenwerte werden willkürlich linear verbunden, der genaue Verlauf zwischen den Knoten kann nur mit Hilfe des Stoffgesetzes ermittelt werden (s.u.)



Ermittlung aus dem Stoffgesetz: $Q = EI \cdot (-w''')$

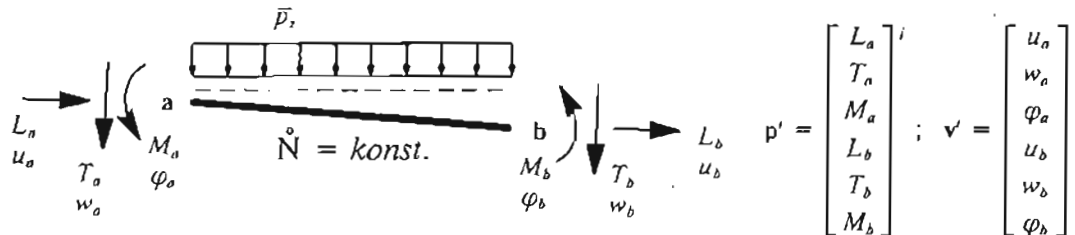
Da für die höheren Verschiebungsableitungen keine Stetigkeit des Verlaufs über die Elementgrenzen gewährleistet wird, treten Sprünge an den Elementgrenzen auf. Insgesamt wird die Approximation der Schnittkräfte mit Hilfe der Verschiebungsableitungen schlechter. Gleichgewicht wird im Element nur im Mittel erfüllt.



2.5 Erweiterung der FEM auf andere Aufgabenstellungen

2.5.1 Näherungslösung für ein Balkenelement nach Theorie II. Ordnung

(siehe auch Statik IV, Kap. 7.3)



Virtuelle Arbeit am verformten System:

$$\delta W = \sum_{\text{Elemente}} \delta W^i + \sum_{\text{Knoten}} \delta W_k = 0 \quad \delta W_k = -[\delta U_{xk} \bar{P}_{xk} + \delta U_{zk} \bar{P}_{zk} + \delta \Phi_k \bar{M}_k]$$

$$\delta W^i = \int_x [\delta \varphi' M + \delta \varphi Q + \delta w' T + \delta u' L - \delta w \bar{p}_z] dx$$

Mit den Näherungen der Theorie II. Ordng. $L \approx N$; $T \approx Q + Nw'$ und bei Vernachlässigung der Schubanteile (Normalenhypothese) folgt:

$$\delta W^i = \int_x [\delta \varphi' M + \delta w' \dot{N} w' + \delta u' N - \delta w \bar{p}_z] dx$$

Durch Einsetzen der Kinematik und des Stoffgesetzes erhält man endgültig das Arbeitsprinzip in Weggrößen:

$$\delta W^i = \int_x [\delta w'' EI w'' + \delta w' \dot{N} w' + \delta u' EA u' - \delta w \bar{p}_z] dx$$

k_B^E k_G k_B^{EA} Lastspalte

Mit einem kubischen Verschiebungsansatz für w und einem linearen Verschiebungsansatz für u erhält man Näherungen für die Steifigkeitsmatrizen (und Lastspalten) der Theorie II. Ordnung:

$$k = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \kappa & 0 & 0 - \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 12 - 6l & 0 - 12 - 6l \\ 0 - 6l & 4l^2 & 0 & 6l & 2l^2 \\ -\kappa & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 0 - 12 & 6l & 0 & 12 & 6l \\ 0 - 6l & 2l^2 & 0 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} + \frac{\dot{N}}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & -0.1l & 0 - 1.2 & -0.1l \\ 0 - 0.1l & 2l^2/15 & 0 & 0.1l & -l^2/30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 - 1.2 & 0.1l & 0 & 1.2 & 0.1l \\ 0 - 0.1l & -l^2/30 & 0 & 0.1l & 2l^2/15 \end{bmatrix} \quad \text{mit } \kappa = \frac{l^3 EA}{EI l}$$

k_B :Anteil Theorie I.
Ordnung

k_G :Anteil Theorie II. Ordnung =
geometrische Steifigkeitsmatrix

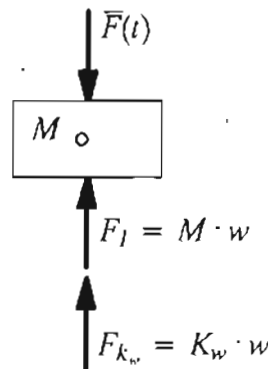
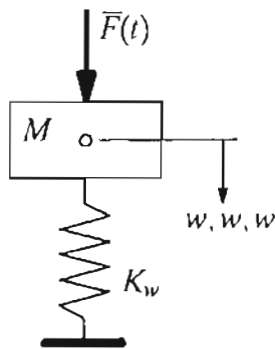
Zusätzlich zu den Näherungen des Stabmodells nach Theorie II. Ordnung (geschätzte Normalkraft N im Stab, kleine Winkel etc.) kommt hier noch die Näherung aus der Diskretisierung mit den Verschiebungsansätzen. Bei feinerer Elemententeilung konvergieren die Ergebnisse jedoch gegen die exakte Lösung der zugehörigen Differentialgleichung.

Vorteilhaft ist die einfachere rechentechnische Handhabung der geometrischen Steifigkeitsmatrix (gilt für Druck und Zug) in allgemeinen FE-Programmen.

2.5.2 Näherungslösung für dynamische Probleme

Das Vorgehen für dynamische Probleme soll am Beispiel des schwingenden Balkens ohne Dämpfung skizziert werden, eine Erweiterung um die Dämpfungsanteile ist problemlos möglich.

Man erhält die Bewegungsdifferentialgleichung von Systemen mit kontinuierlicher Massen- und Steifigkeitsverteilung in derselben Weise wie beim Einmassenschwinger, indem zusätzlich zu den statischen Lasten die Trägheitskräfte gemäß dem D'Alembert'schen Prinzip in die Berechnung einbezogen werden. An jeder Stelle des Tragwerks ist, der positiven Beschleunigungsrichtung entgegenlaufend, eine Kraftwirkung als Streckenlast einzusetzen, die aus dem Produkt Beschleunigung des betrachteten Punktes mal Massenbelegung des Elementes je Längeneinheit gebildet wird.



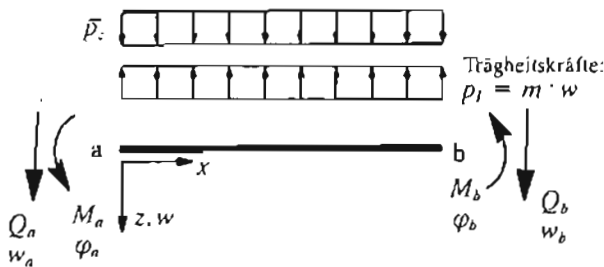
Gleichgewicht:

$$\sum F = \bar{F} - F_I - F_{k_w} = 0$$

$$M \cdot w + K_w \cdot w = \bar{F}(t)$$

Die Bewegungsgleichung schwingender Systeme ist eine Gleichgewichtsbedingung.

Ausgangspunkt für eine Diskretisierung ist dementsprechend das den Gleichgewichtsbedingungen äquivalente Prinzip der virtuellen Verschiebungen, in diesem Fall ergänzt um die Arbeitsanteile der Trägheitskräfte.



$$p' = \begin{bmatrix} Q_a \\ M_a \\ Q_b \\ M_b \end{bmatrix}'; \quad v = \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix}'; \quad \psi = \begin{bmatrix} w_{,1} \\ \varphi_{,1} \\ w_{,2} \\ \varphi_{,2} \end{bmatrix}'$$

$$\delta W^i = \int_x [\delta \varphi' M - \delta w (-m(x)w) - \delta w \bar{p}_z] dx$$

$$\delta W^i = \int_x [\delta w'' EI w'' + \delta w m(x)w - \delta w \bar{p}_z] dx$$

Anders als in der Statik treten als Weggrößen nicht nur die Knotenverschiebungen und -verdrehungen auf, sondern auch noch deren Zeitableitungen. Für eine Näherungslösung müssen also Ansätze für die Verschiebungen *und* für die Beschleunigungen gemacht werden, üblicherweise wählt man für beide denselben Ansatz (z.B. ein kubisches Polynom bei Stäben). Für harmonische Schwingungen ist das noch exakt – die Beschleunigungen als zweite Ableitungen einer Sinusschwingung verlaufen ebenfalls sinusförmig, nicht jedoch bei beliebigen aperiodischen Schwingungsvorgängen. Im allgemeinen Fall wird der Fehler infolge dieser Näherung nur bei feinerer Elemententeilung kleiner werden.

Ansatz für Verschiebungen und Beschleunigungen

$$w(x) = \mathbf{N}_u(x) \mathbf{G} \mathbf{v}$$

$$\dot{w}(x) = \mathbf{N}_u(x) \mathbf{G} \dot{\mathbf{v}}$$

Die Formfunktionen \mathbf{N} sind nur von der Ortskoordinate abhängig, die Zeitableitungen betreffen die unbekanntenen Knotenverschiebungen.

Einsetzen der Ansatzfunktionen in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\begin{aligned} \delta W = & \underbrace{\delta \mathbf{v}^T \mathbf{G}^T \int_a^b \mathbf{N}''^T_u(x) EI \mathbf{N}''_u(x) dx}_{\mathbf{k}^i \text{ Steifigkeitsmatrix}} \mathbf{G} \mathbf{v} + \underbrace{\delta \mathbf{v}^T \mathbf{G}^T \int_a^b \mathbf{N}^T_u(x) m(x) \mathbf{N}_u(x) dx}_{\mathbf{m}^i \text{ Massenmatrix}} \mathbf{G} \mathbf{v} \\ & - \underbrace{\delta \mathbf{v}^T \mathbf{G}^T \int_a^b \mathbf{N}^T_u(x) \bar{p}_z(x) dx}_{\mathbf{p}_q^{i0} \text{ Lastspalte}} \end{aligned}$$

Die Addition aller Arbeitsanteile ("Überlagerung" der Elementmatrizen) liefert die Bewegungsgleichungen eines Stabsystems (Knotengleichgewicht).

$$\begin{aligned} \delta W = & \sum_{\text{Elemente}} \delta W^i + \sum_{\text{Knoten}} \delta W_k = \sum_{\text{Elemente}} \delta \mathbf{v}^T \{ \mathbf{m}^i \dot{\mathbf{v}}^i + \mathbf{k}^i \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0} \} - \delta \mathbf{V}^T \mathbf{P}^* \\ = & \delta \mathbf{V}^T \{ \mathbf{M} \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K} \mathbf{V} + \mathbf{P}^0 - \mathbf{P}^* \} = 0 \end{aligned}$$

Man erhält jetzt statt eines algebraischen Gleichungssystems für die Verschiebungen ein von der Zeit abhängiges Differentialgleichungssystem mit einer Massenmatrix und einer Steifigkeitsmatrix, das als Gleichungssystem eines diskreten Mehrmassenschwingers gedeutet werden kann. Die kontinuierliche Massenbelegung der Stäbe wird durch die Nebendiagonalglieder der Massenmatrix repräsentiert.

Stabendkräfte eines Stabelements mit kubischem Ansatz für Verschiebungen und Beschleunigungen (für konstantes EI und konstante Massenbelegung m)

Beachte: Die Massenmatrix ist bis auf den Vorfaktor identisch mit der Bettungsmatrix

$$\begin{bmatrix} Q_a \\ M_a \\ Q_b \\ M_b \end{bmatrix} = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ -22l & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ 54 & -13l & 156 & 22l \\ 13l & -3l^2 & 22l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w}_a \\ \varphi_a \\ \dot{w}_b \\ \varphi_b \end{bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_a^0 \\ M_a^0 \\ Q_b^0 \\ M_b^0 \end{bmatrix}$$

Die Überlagerung der Massenmatrix erfolgt genauso wie die der Steifigkeitsmatrix. Für freie und erzwungene, harmonische oder transiente Schwingungen können die in der Dynamik üblichen Lösungsverfahren für Mehrmassenschwinger angewandt werden.

2.5.3 Balkenelement mit Schubverformungen

Gleichgewicht: $Q' + \bar{p}_z = 0 \quad M' - Q = 0$

Werkstoffgesetz: $M = EJ\kappa \ ; \ Q = GA'\gamma$

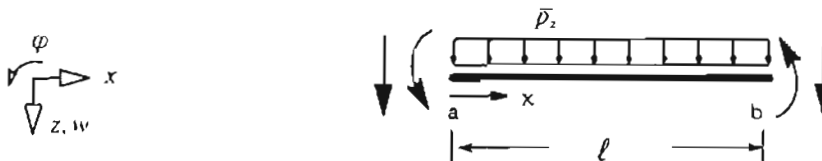
Kinematik: $\kappa = \varphi' \ ; \ \gamma = \varphi + w'$

PVV:

$$\delta W = \int_x [\delta\kappa M + \delta\gamma Q - \delta w \bar{p}_z] dx$$

$$= \int_x [\delta\varphi' EI\varphi' + (\delta\varphi + \delta w') GA'(\varphi + w') - \delta w \bar{p}_z] dx$$

Können die Schubverzerrungen γ nicht mehr vernachlässigt werden, treten w und φ als unabhängige Funktionen auf, für die jeweils eigene Ansatzfunktionen gewählt werden müssen. Da in den kinematischen Grundgleichungen nur erste Ableitungen der Verformungsgrößen auftreten, genügen lineare Ansätze mit zwei Freiwerten pro Element und Funktion. Damit können also Stabelemente erzeugt werden, die wie gewohnt Verschiebungen und Verdrehungen als unbekannte Freiwerte an den Stabenden haben.



$$w(x) = C_0 + C_1 x = \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{w}} \quad \varphi(x) = D_0 + D_1 x = \mathbf{N}_u \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

mit $\mathbf{N}_u(x) = [1 \ x]$ Ansatzfunktionen und ihre Ableitungen

$$\mathbf{N}'_u(x) = [0 \ 1]$$

$$\mathbf{v}_w = \begin{bmatrix} w_a(x=0) \\ w_b(x=l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix} \ ; \ w(x) = \mathbf{N}_u(x) \mathbf{G} \mathbf{v}_w$$

$$\mathbf{v}_\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_a(x=0) \\ \varphi_b(x=l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix} \ ; \ \varphi(x) = \mathbf{N}_u(x) \mathbf{G} \mathbf{v}_\varphi$$

Einsetzen des Verschiebungsansatzes in das Stoffgesetz

$$\kappa(x) = \varphi'(x) = \mathbf{N}'_u(x) \mathbf{G} \mathbf{v}_\varphi$$

$$\gamma(x) = \mathbf{N}_u(x) \mathbf{G} \mathbf{v}_\varphi + \mathbf{N}'_u(x) \mathbf{G} \mathbf{v}_w$$

$$M(x) = EI \mathbf{N}'_u(x) \mathbf{G} \mathbf{v}_\varphi$$

$$Q(x) = GA' (\mathbf{N}_u(x) \mathbf{G} \mathbf{v}_\varphi + \mathbf{N}'_u(x) \mathbf{G} \mathbf{v}_w)$$

Die Momente verlaufen im Element konstant, die Querkräfte sind linear veränderlich!
Diese Approximation widerspricht der gewohnten mechanischen Anschauung. Sie zeigt besonders deutlich den Näherungscharakter der Methode, insbesondere daß das Gleichgewicht im Element nur im Mittel erfüllt wird. Die tatsächlichen Schnittkraftverläufe müssen durch Interpolation geschätzt werden.

Einsetzen des Verschiebungsansatzes in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\begin{aligned} \delta W^i &= \delta v_\varphi^T \underbrace{G^T \int_a^b N_u'^T(x) EI N_u'(x) dx G}_{k_B^i} v_\varphi \\ &+ \delta v_\varphi^T \underbrace{G^T \left\{ \int_a^b N_u^T(x) GA' N_u(x) dx G v_\varphi + \int_a^b N_u^T(x) GA' N_u'(x) dx G v_w \right\}}_{k_Q^i} \\ &+ \delta v_w^T \underbrace{G^T \left\{ \int_a^b N_u'^T(x) GA' N_u(x) dx G v_w + \int_a^b N_u'^T(x) GA' N_u'(x) dx G v_\varphi \right\}}_{k_Q^i} \end{aligned}$$

Durch die Integration der einzelnen Terme erhält man Untermatrizen der Steifigkeitsmatrix, die nach Biege- und Schubanteilen sortiert werden können:

$$\delta W^i = \begin{bmatrix} \delta v_w & \delta v_\varphi \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{B_{\varphi\varphi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{Q_{ww}} & k_{Q_{w\varphi}} \\ k_{Q_{\varphi w}} & k_{Q_{\varphi\varphi}} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} v_w \\ v_\varphi \end{bmatrix}$$

k_B^i k_Q^i

Damit erhält man für die Steifigkeitsmatrix endgültig:

$$k^i = k_B^i + k_Q^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{EI}{\ell} + \begin{bmatrix} 1/\ell^2 & -1/\ell^2 & -1/2\ell & -1/2\ell \\ -1/\ell^2 & 1/\ell^2 & 1/2\ell & 1/2\ell \\ -1/2\ell & 1/2\ell & 1/3 & 1/6 \\ -1/2\ell & 1/2\ell & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} GA' \ell$$

Zugehöriger Vektor der Knotenverschiebungen: $v^{iT} = [w_a \ w_b \ \varphi_a \ \varphi_b]$

Die Addition der Arbeitsanteile aller Elemente ("Überlagerung" der Elementmatrizen) liefert wieder das Gleichungssystem des Weggrößenverfahren (Knotengleichgewicht).

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{\text{Elemente}} \delta W^i + \sum_{\text{Knoten}} \delta W_k = \sum_{\text{Elemente}} \delta v^{iT} \{ (k_B^i + k_Q^i) v^i + p^{i0} \} - \delta V^T P^* \\ &= \delta V^T \{ K V + P^0 - P^* \} = 0 \end{aligned}$$

Wegen der einfachen (nur linearen) Verschiebungsansätze ist das Verhalten dieses Elements nicht besonders gut, d.h. es sind sehr viel Elemente zur Erzielung einer konvergenten Lösung erforderlich. Insbesondere ist das Mißverhältnis zwischen der Abbildung der Querkräfte und Momente dafür verantwortlich. Mit besonderen Maßnahmen läßt sich das Element jedoch verbessern (siehe Kapitel: Numerische Integration).

Zusammenfassung zu den erweiterten Stabmodellen:

- Einfache Modellerweiterung – Arbeitsanteile addieren – beliebige Kombinationen möglich
- Bei mehreren unabhängigen Variablen im Arbeitsprinzip für jede Variable eigenen Verschiebungsansatz verwenden
- Treten nur erste Ableitungen im Arbeitsprinzip auf, reichen Polynome mit niedrigerer Ansatzordnung – weniger Freiwerte pro Element

2.5.4 Allgemeine (matrizielle) Schreibweise der lokalen und globalen Grundgleichungen

Lokale Gleichungen:

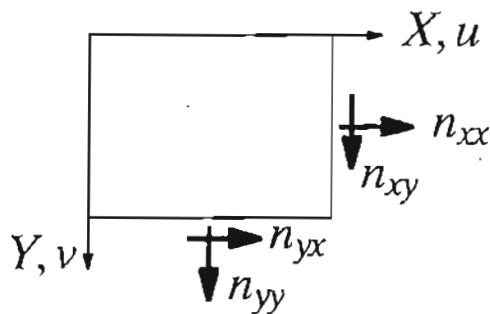
Gleichgewicht	$\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{p}}_v = 0$
statische Randbedingungen	$\mathbf{p} = \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{p}}$
Kinematik	$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{u}$
geom. Randbedingungen	$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$
Werkstoffgesetz	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}$

Globale Gleichungen (PVA):

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}}_v dV - \int_{O_p} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dO = 0$$

mit $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \delta \mathbf{u}$

2.5.5 Scheiben



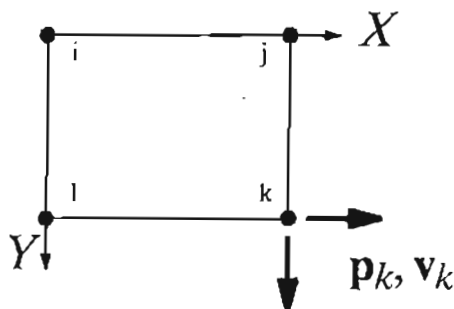
innere Zustandsgrößen:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} n_{xx} \\ n_{yy} \\ n_{xy} \end{bmatrix} \leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

äußere Zustandsgrößen:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \leftrightarrow \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Knotengrößen für die Diskretisierung, z.B.:



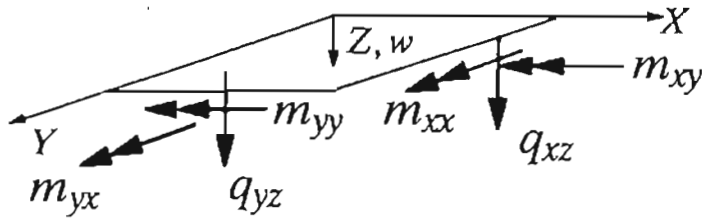
$$\mathbf{p}_k = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \leftrightarrow \mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

Knotenkräfte
p = kv liefert keine Schnittkräfte!

$$PVA: \delta W = \int_V [\delta \varepsilon_{xx} n_{xx} + \delta \varepsilon_{yy} n_{yy} + \delta \gamma_{xy} n_{xy} - \delta u \bar{p}_{V_x} - \delta v \bar{p}_{V_y}] dV - \int_{O_p} [\delta u \bar{p}_x + \delta v \bar{p}_y] dO = 0$$

Die angegebene Diskretisierung ist nur eine von vielen Möglichkeiten. Man kann die Anzahl der Knoten ändern, die Form der Berandung (Dreieck, Viereck, gekrümmte Ränder) und die Art der Knotenfreiwerte (Verschiebungen, Kräfte, höhere Ableitungen etc.).

2.5.6 Platten



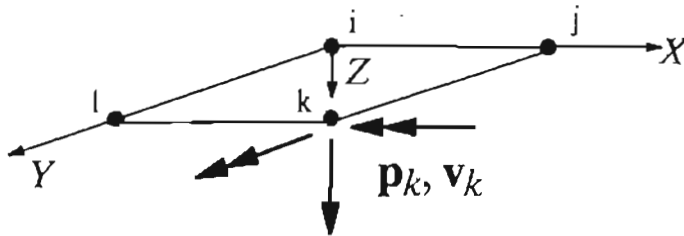
innere Zustandsgrößen:

$$\sigma = \begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{bmatrix} \leftrightarrow K = \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

äußere Zustandsgrößen:

$$p = [p_z] \leftrightarrow u = [w]$$

Knotengrößen für die Diskretisierung, z.B.:



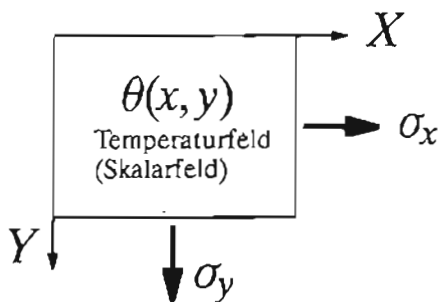
$$p_k = \begin{bmatrix} F_z \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} \leftrightarrow v_k = \begin{bmatrix} w \\ \varphi_x^* \\ \varphi_y^* \end{bmatrix}$$

Knotenkraft
p = kv liefert keine Schnittkräfte!

$$PVV: \delta W = \int_V [\delta \kappa_{xx} m_{xx} + \delta \kappa_{yy} m_{yy} + \delta \kappa_{xy} 2m_{xy} - \delta w \bar{p}_{v,z}] dV - \int_{O_p} [\delta w \bar{p}_z + \delta \varphi_x^* \bar{m}_x + \delta \varphi_y^* \bar{m}_y] dO = 0$$

Randlasten

2.5.7 Feldprobleme (am Beispiel der Wärmeleitung)



innere Zustandsgrößen:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} \leftrightarrow \epsilon = \begin{bmatrix} \theta_{,x} \\ \theta_{,y} \end{bmatrix}$$

Wärmefluß

Temperaturgradient

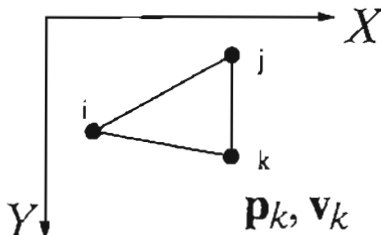
äußere Zustandsgrößen:

$$p = [p_v] \leftrightarrow u = [\theta]$$

im Volumen oder
am Rand zugeführte
Wärme

Temperatur

Knotengrößen für die Diskretisierung, z.B.:



$$p_k = [p] \leftrightarrow v_k = [\theta]$$

Wärmefluß am
Knoten

Temperatur
am Knoten

$$\delta J = \int_V [\delta \theta_{,x} \sigma_x + \delta \theta_{,y} \sigma_y - \delta \theta \bar{p}_v] dV - \text{Randterme} = 0$$

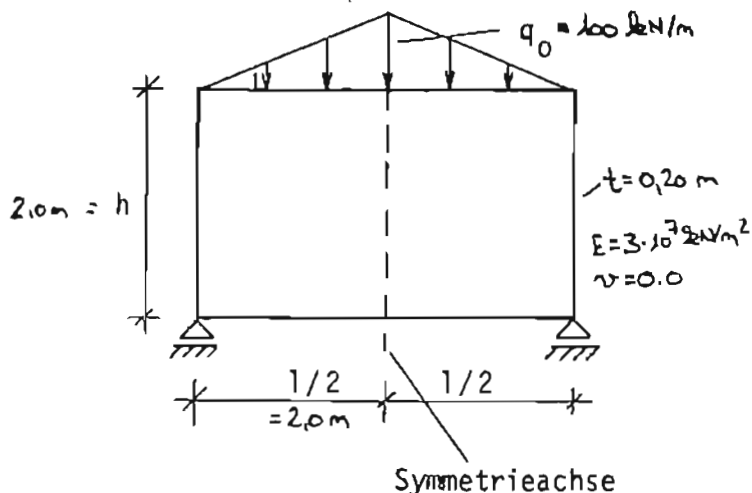
3. FINITE-ELEMENT-METHODE FÜR SCHEIBENPROBLEME

3.1 Rechengang der Methode

Die Herleitung eines Finite-Element-Modells wird am Beispiel eines rechteckigen Scheibenelements nach dem Weggrößenverfahren gezeigt. Grundlage der Methode ist hier das Prinzip der virtuellen Arbeiten.

Der Rechengang der Methode wird für das gegebene System, einer Wandscheibe mit linear veränderlicher Streckenlast, gezeigt. Aus Symmetriegründen ist es ausreichend, bei der Berechnung nur das halbe System zu berücksichtigen.

(a) Problemstellung



(b) Finite-Element-Modell

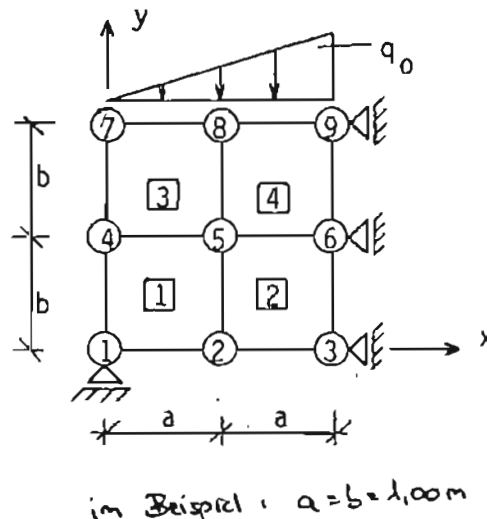


Bild 1 : Idealisierung

Modell eines Rechteckelementes mit 4 Knoten

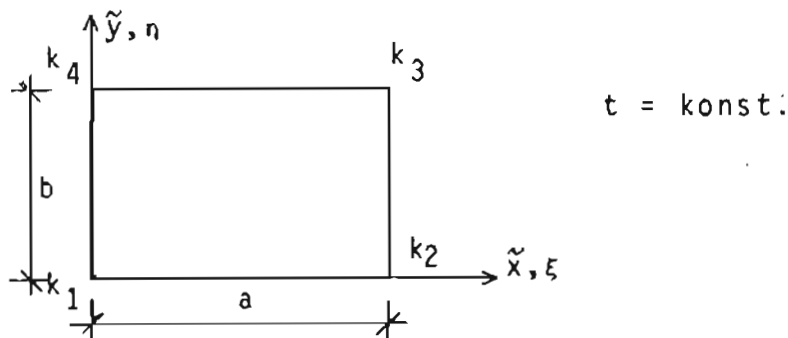


Bild 2 Elementkoordinaten am Rechteckelement

Die gewählten Koordinaten sind auf das lokale Koordinatensystem bezogen und gelten nur für das betreffende Element. k_1 bis k_4 sind die Knotennummern der vier Knoten des Elements.

3.1.1 Wahl des Verschiebungsansatzes

Zur Beschreibung des Verformungszustandes des Elements wird ein Verschiebungsansatz mit 8 Freiheitsgraden eingeführt. Bei gleicher Form des Ansatzes für die Verschiebungen in x- und y-Richtung erhält man unter Verwendung bilinearer Polynomansätze die Beziehung:

$$\underline{u}(x,y) = \underline{N}_u(x,y) \cdot \hat{\underline{u}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{u} = \underline{N}_u \cdot \hat{\underline{u}} \quad (1)$$

$$\left(\text{mit } \xi = \frac{x}{a} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{y}{b} \right)$$

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi\eta & \eta & 0 \\ 0 & & & & 1 & \xi & \xi\eta & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_8 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Die im Vektor $\hat{\underline{u}}$ zusammengefaßten Freiwerte, Unbekannte des Problems, werden auch als generalisierte Verschiebungen bezeichnet. Der durch die Matrix \underline{N}_u beschriebene Verlauf möglicher Verformungen ist parallel zu den Koordinatenachsen linear veränderlich, in anderen Richtungen parabolisch.

An Stelle generalisierter Freiwerte werden in der Finite-Element-Methode üblicherweise mechanisch sinnvolle Größen als diskrete Freiwerte gewählt. Für das Scheibenelement können das z.B. die Knotenverschiebungen u_x und u_y der vier Eckpunkte sein.

Im folgenden wird der Übergang zu den neuen Unbekannten, den 8 Knotenverschiebungen, gezeigt.

Allgemein gilt:

$$\underline{v} = \underline{H} \hat{\underline{u}} \quad ; \quad \underline{v}^T = [u_{x1} \quad u_{x2} \quad \dots \quad u_{y3} \quad u_{y4}] \quad (3)$$

Der Vektor \underline{v} enthält die Knotenverschiebungen, die Matrix \underline{H} stellt die Beziehung zu den generalisierten Größen her. Sie wird aus den diskreten Werten der Ansatzfunktionen der Matrix $\underline{N}_u(x,y)$ an den Knoten abgeleitet:

Die Matrix \underline{H} hat dieselbe Bedeutung wie die Matrix $\hat{\underline{N}}_u$

$$\underline{v} = \underline{H} \underline{\hat{u}} \quad (4)$$

u_{x1}	1	0	0	0						\hat{u}_1
u_{x2}	1	1	0	0						\hat{u}_2
u_{x3}	1	1	1	1						\hat{u}_3
u_{x4}	1	0	0	1						\hat{u}_4
u_{y1}						1	0	0	0	\hat{u}_5
u_{y2}						1	1	0	0	\hat{u}_6
u_{y3}		0				1	1	1	1	\hat{u}_7
u_{y4}						1	0	0	1	\hat{u}_8

Für die einzelnen Verschiebungen des Vektors \underline{v} werden die ξ - und η -Werte des betreffenden Knotens eingesetzt. So erhält man z.B. für u_x am Knoten K_4 (Bild 2) mit $\xi = 0$ und $\eta = 1$:

$$u_{x4} = 1 \cdot \hat{u}_1 + 0 \cdot \hat{u}_2 + 0 \cdot \hat{u}_3 + 1 \cdot \hat{u}_4 \quad (5)$$

Um die Freigrößen \hat{u} in Gl. (1) durch die diskreten Verschiebungen \underline{v} ersetzen zu können, ist die inverse Form der Gl. (3) erforderlich

$$\hat{u} = \underline{H}^{-1} \underline{v} = \underline{G} \underline{v} \quad (6)$$

$$\hat{u} = \underline{G} \underline{v} \quad (7)$$

\hat{u}_1	1	0	0	0						u_{x1}
\hat{u}_2	-1	1	0	0						u_{x2}
\hat{u}_3	1	-1	1	-1						u_{x3}
\hat{u}_4	-1	0	0	1						u_{x4}
\hat{u}_5						1	0	0	0	u_{y1}
\hat{u}_6						-1	1	0	0	u_{y2}
\hat{u}_7		0				1	-1	1	-1	u_{y3}
\hat{u}_8						-1	0	0	1	u_{y4}

Aus Gl. (1) und Gl. (5) folgt die Beziehung

$$\underline{u} = \underline{N}_u \hat{u} = \underline{N}_u \underline{H}^{-1} \underline{v} = \underline{N}_u \underline{G} \underline{v} \quad (8)$$

Die gewählten diskreten Knotenverschiebungen sind über ein Matrizenprodukt mit den Elementverformungen verknüpft. Diese Matrizenoperation wird im folgenden für die in Gl. (2) angegebenen Ansätze ausgeführt

$$\underline{u} = \underline{N}_u \cdot \underline{G} \quad \underline{G} = \underline{H}^{-1} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{N}_u' \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi\eta & \eta & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \xi & \xi\eta & \eta & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\xi)(1-\eta) & \xi(1-\eta) & \xi\eta & \eta(1-\xi) & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & (1-\xi)(1-\eta) & \xi(1-\eta) & \xi\eta & \eta(1-\xi) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \underline{N} \quad (10)$$

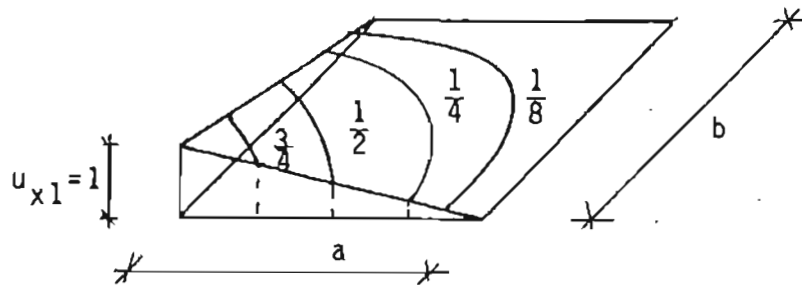
Die Verschiebungen $u_x(\xi, \eta)$, $u_y(\xi, \eta)$ innerhalb des Elementes lauten in Abhängigkeit der Knotenverschiebungen $u_{x1} \dots u_{y4}$:

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{v} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\xi)(1-\eta) & \xi(1-\eta) & \xi\eta & \eta(1-\xi) & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & (1-\xi)(1-\eta) & \xi(1-\eta) & \xi\eta & \eta(1-\xi) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x3} \\ u_{x4} \\ u_{y1} \\ u_{y2} \\ u_{y3} \\ u_{y4} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\underline{u}(\xi, \eta) = \underline{N}(\xi, \eta) \underline{v}$$

Die anschauliche Deutung der Elemente der Ansatzmatrix $\underline{N}(x,y)$ zeigt, daß es sich um die Einheitsverschiebungszustände der Knotenverschiebungen handelt. Werden die in der Scheibenebene liegenden Verschiebungen \underline{u} wegen der besseren Darstellbarkeit senkrecht zur Elementebene aufgetragen, so erhält man z.B. für die Knotenverschiebung u_{x1} das folgende Bild:



Die eingezeichneten Kurven verbinden die Punkte der Scheibe, für die der Einheitsverschiebungszustand N_{x1} den gleichen Wert besitzt. („Höhenschichtlinien“)

Sind bei der Herleitung eines finiten Elementes für ein beliebiges mechanisches Problem Einheitszustände für diskrete Zustandsgrößen-Verformungen, bzw. Spannungen oder Kräfte - bekannt, so können sie direkt verwendet werden. Die hier gezeigte Vorgehensweise (Inversion und Produktbildung) ist dann nicht erforderlich (vgl. Hermite'sche bzw. Lagrange'sche Interpolationspolynome).

3.1.2 Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten

Unter Verwendung von Matrizen lautet das Prinzip der virtuellen Arbeiten:

$$-\delta A = \underbrace{\int_V \delta \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} dV}_I - \underbrace{\int_V \delta \underline{u}^T \underline{\bar{p}}_V dV}_{II} - \underbrace{\int_{O_p} \delta \underline{u}^T \underline{\bar{p}} dO}_{III} = 0 \quad (12)$$

dV ... Volumen eines diff. Elements

dO ... Oberfläche eines diff. Elements

$\underline{\bar{p}}_V$... Volumenlasten

$\underline{\bar{p}}$... Flächenlasten

Im Rahmen dieses Umdrucks werden nur die Integrale I und III behandelt. Entsprechend dem gewählten Variationsprinzip (Weggrößenmethode) müssen die Ansätze für die unbekanntenen Verformungsgrößen geometrisch zulässig sein.

$$\text{Kinematik} \quad : \quad \underline{\epsilon} = \underline{D} \underline{u} \quad \text{in } V, \quad (13)$$

$$\text{Randbedingungen:} \quad \underline{u} = \underline{\bar{u}} \quad \text{auf } O_u.$$

Um eine finite Berechnungsmethode zu erhalten, muß die für einen Gesamtbereich geltende Gl. (12) in eine Aussage für Teilbereiche (finite Elemente) umgeformt werden. Das Integral I kann direkt für ein Element verwendet werden. Das Integral III ist für die Elementränder des untersuchten Tragwerks, auf denen Lasten vorgegeben sind, auszuwerten.

Die finite Übersetzung des Arbeitsprinzips lautet:
(wenn Volumenlasten nicht weiter betrachtet werden)

$$-\delta A = \sum_{e=1}^n \left[\underbrace{\int_{V_e} \delta \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} dV}_I - \underbrace{\int_{O_{pe}} \delta \underline{u}^T \underline{\bar{p}} dO}_{III} \right]_e = 0 \quad ; \quad n: \text{Anzahl der Elemente} \quad (14)$$

Für die Herleitung eines Scheibenelements sind die Vektoren, bzw. Matrizen der Gleichungen (13) und (14) wie folgt einzusetzen:

Kinematik:

$$\underline{\epsilon} = \underline{D} \cdot \underline{u} \quad \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ \\ u_y \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \partial_x &= \frac{\partial}{a \cdot \partial \xi} \\ \partial_y &= \frac{\partial}{b \cdot \partial \eta} \end{aligned} \quad (15)$$

Werkstoffgesetz:

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \cdot \underline{\epsilon} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Unter Verwendung des Werkstoffgesetzes, der Kinematik und der Verschiebungsansätze (Kap. 3.1.1) läßt sich das Volumenintegral I nach Gl. (14) für ein Element e wie folgt umformen:

$$\text{mit } \underline{\epsilon} = \underline{D} \underline{u} \quad \text{und} \quad \underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\epsilon} \quad (\text{bzw. } \underline{\epsilon}^T = \underline{u}^T \cdot \underline{D}^T)$$

$$\begin{aligned} \int_V \delta \underline{\epsilon}^T \cdot \underline{\sigma} \, dV &= \int_V \delta \underline{\epsilon}^T \underline{E} \underline{\epsilon} \, dV \\ &= \int_V \delta \underline{u}^T \underline{D}^T \underline{E} \underline{D} \underline{u} \, dV \end{aligned} \quad (17)$$

Unter der Vereinfachung $\underline{D} \underline{N} = \underline{B}$ erhält man schließlich für die diskreten Knotenverschiebungen die Gleichung (mit $\underline{u} = \underline{N} \cdot \underline{v}$ und $\underline{u}^T = \underline{v}^T \cdot \underline{N}^T$)

$$\int_V \delta \underline{u}^T \underline{D}^T \underline{E} \underline{D} \underline{u} \, dV = \int_V \delta \underline{v}^T \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} \underline{v} \, dV \quad (\text{wobei } \underline{N}^T \cdot \underline{D}^T = \underline{B}^T) \quad (18)$$

Die Matrix \underline{B} , gewonnen aus dem Matrizenprodukt $\underline{D} \underline{N}$, hat für die hier eingeführten Matrizen die Form:

$$\underline{B} = \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \epsilon_x(\xi, \eta) \\ \epsilon_y(\xi, \eta) \\ \gamma_{xy}(\xi, \eta) \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} (\mu_{x1}) & (\mu_{x2}) & (\mu_{x3}) & (\mu_{x4}) & (\mu_{y1}) & (\mu_{y2}) & (\mu_{y3}) & (\mu_{y4}) \\ \begin{bmatrix} -\frac{1-\eta}{a} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{\eta}{a} & -\frac{\eta}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1-\xi}{b} & -\frac{\xi}{b} & \frac{\xi}{b} & \frac{1-\xi}{b} \\ -\frac{1-\xi}{b} & -\frac{\xi}{b} & \frac{\xi}{b} & \frac{1-\xi}{b} & -\frac{1-\eta}{a} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{\eta}{a} & -\frac{\eta}{a} \end{bmatrix} \end{matrix} \end{array} \quad (19)$$

Wie aus Gleichung (17) und (18) ersichtlich, gilt für die Elementspannungen die Beziehung:

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\epsilon} = \underline{E} \underline{B} \underline{v} \quad (20)$$

für die Dehnungen gilt:

$$\underline{\epsilon} = \underline{B} \underline{v}$$

3.1.3 Bildung der Elementsteifigkeitsmatrix

Die Elementsteifigkeitsmatrix wird aus der Auswertung des Integrals I gewonnen. Für das Scheibenproblem muß zuerst das Volumenintegral in ein Flächenintegral umgewandelt werden. Unter Verwendung von

$$dV = t \cdot dA = t \cdot dx \cdot dy = t \cdot a \cdot b \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (21)$$

für Elemente mit konstanter Dicke t kann Gleichung (18) überführt werden in:

$$\delta v^T \underbrace{a b t \int_0^1 \int_0^1 \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} \, d\xi \, d\eta}_{\text{Steifigkeitsmatrix } \underline{k}} \underline{v} \quad (22)$$

Nach Ausführung der Matrizenmultiplikation $\underline{B}^T \underline{E} \underline{B}$ und der anschließenden Integration erhält man als Ergebnis die lokale Elementsteifigkeitsmatrix \underline{k} mit den Abkürzungen $\alpha = \frac{b}{a}$ und $\beta = \frac{a}{b}$. Die Steifigkeitsmatrix ist auf der nächsten Seite als Gleichung (23) aufgeführt.

Die Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix sind so angeordnet, daß in den ersten vier Spalten die Anteile der u -Verschiebungen, in den restlichen die v -Verschiebungen stehen. Für den computerorientierten Rechenablauf ist es günstiger, die Matrix knotenweise aufzubauen.

Die Integration kann für das Beispiel wegen der gegebenen rechteckigen Geometrie des Elements in geschlossener Form erfolgen. Für Elemente mit beliebiger viereckiger Gestalt, bzw. mit mehr Freiheitsgraden, z.B. durch die Einführung weiterer Knoten auf den Rändern, ist eine numerische Integration zu empfehlen.

8α	-8α	-4α	4α	$3(1+\nu)$	$-3(1-3\nu)$	$-3(1+\nu)$	$3(1-3\nu)$
$+4\beta(1-\nu)$	$+2\beta(1-\nu)$	$-2\beta(1-\nu)$	$-4\beta(1-\nu)$	$-3(1-3\nu)$	$-3(1+\nu)$	$-3(1-3\nu)$	$3(1+\nu)$
	8α	4α	-4α				
	$+4\beta(1-\nu)$	$-4\beta(1-\nu)$	$-2\beta(1-\nu)$				
		8α	-8α				
		$+4\beta(1-\nu)$	$+2\beta(1-\nu)$				
			8α				
			$+4\beta(1-\nu)$				
				8β	4β	-4β	-8β
				$+4\alpha(1-\nu)$	$-4\alpha(1-\nu)$	$-2\alpha(1-\nu)$	$+2\alpha(1-\nu)$
					8β	-8β	-4β
					$+4\alpha(1-\nu)$	$+2\alpha(1-\nu)$	$-2\alpha(1-\nu)$
						8β	4β
						$+4\alpha(1-\nu)$	$-4\alpha(1-\nu)$
							8β
							$+4\alpha(1-\nu)$

$$[\begin{array}{c} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x3} \\ u_{x4} \\ u_{y1} \\ u_{y2} \\ u_{y3} \\ u_{y4} \end{array}] \quad 8 \times 8$$

(23)

$$k = \frac{E \cdot t}{24(1-\nu^2)}$$

lokale Steifigkeitsmatrix eines rechteckigen Schalen-Elements bei bilinearem Verschiebungsansatz

$$\alpha = \frac{b}{a} \quad \beta = \frac{a}{b}$$

3.1.4 Bildung des Lastvektors \bar{p}

Die Berechnung der Lastspalte erfolgt für vorgegebene Randlasten durch die Auswertung des Integrals III der Gleichung (14). Wie im Kapitel 6.2.2 erläutert, werden die Randlasten - als eine Möglichkeit des Vorgehens - einem der angrenzenden Elemente zugeordnet. Dadurch kann die Integration elementweise ausgeführt werden.

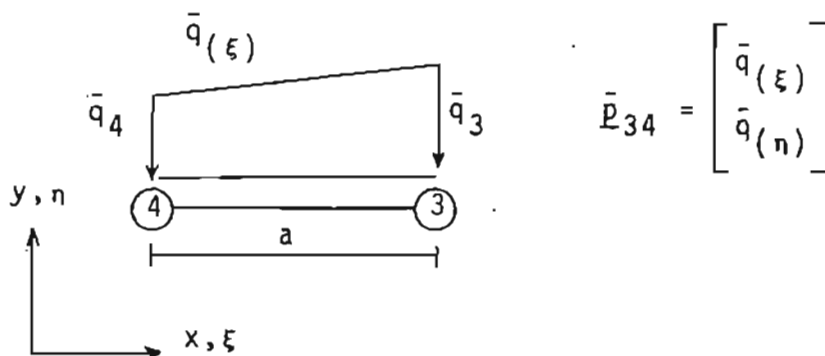
Allgemein gilt für ein Element die Beziehung (ohne Elementindex e geschrieben):

$$\delta \underline{v}^T \bar{P} = \delta \underline{v}^T \int_{O_p} \underline{N}^T \bar{p} \, dO$$

\bar{p} ... Oberflächenbelastung des Elements (24)

Durch die Verwendung von Einheitszuständen für die Knotenverschiebungen sind die durch Gl. (24) wiedergegebenen Gleichungen z.T. entkoppelt. Arbeiten können nur von Randlasten mit den Verschiebungen \underline{v}_k der Knoten geleistet werden, die den jeweiligen Rand begrenzen. Außerdem lassen sich die Anteile der x - und y -Richtung getrennt berechnen. Der Lastvektor eines Elements ergibt sich dann aus der Summe der Einzelergebnisse aller belasteten Ränder.

Die Berechnung wird exemplarisch für einen Rand durchgeführt. Auf dem durch die Knoten ③ und ④ begrenzten Elementrand greift eine Streckenlast in y -Richtung an.



Für den Verlauf der Randlast kann hier direkt ein diskreter Ansatz gewählt werden. Mit den Ordinaten der Last in den Knoten erhält man:

$$\bar{q}_{(\xi)} = \underline{N}_p \bar{q} = \begin{bmatrix} \xi & 1-\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_3 \\ \bar{q}_4 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Aus der Gleichung (25) sind nur die Anteile erforderlich, die den betrachteten Rand, bzw. die Knoten ③ und ④ betreffen. In der Matrix \underline{N} der Verschiebungen ist $n = 1$ zu setzen ($n_3 = n_4 = 1$).
vgl. (24)

$$(\delta \underline{v}^T \bar{P})_{y_{34}} = (\delta \underline{v}^T \int_0^1 \underline{N}^T \underline{N}_p \bar{q} d\xi a)_{y_{34}} \quad (26)$$

$$\delta \begin{bmatrix} u_{y3} & u_{y4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{y3} \\ P_{y4} \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} u_{y3} & u_{y4} \end{bmatrix} \underbrace{\int_0^1 \begin{bmatrix} \xi \\ 1-\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi & 1-\xi \end{bmatrix} d\xi \cdot a \begin{bmatrix} \bar{q}_3 \\ \bar{q}_4 \end{bmatrix}}_{\bar{P}_{y34}}$$

Die Auswertung des Integrals ergibt:

$$\bar{P}_{y34} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{y3} \\ \bar{P}_{y4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} a \begin{bmatrix} \bar{q}_3 \\ \bar{q}_4 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Entsprechend erhält man die Beziehung für den Teillastvektor \bar{P}_{y12} sowie für eine Belastung der Ränder in x-Richtung.

3.1.5 Gesamtsteifigkeitsmatrix

Im folgenden werden die einzelnen Berechnungsschritte dargestellt und parallel dazu am Beispiel des Programms CAL die programmtechnischen Bearbeitungspunkte verfolgt. Die Problemstellung sowie die Knoten- und Elementnumerierungen sind in Bild 1 angegeben. Da für das gewählte Beispiel lokale (elementbezogene) und globale Verschiebungen und Belastungen übereinstimmen, entfällt die sonst erforderliche Transformation der Elementmatrizen und Lastspalten. Für die Berechnung sind folgende Daten erforderlich:

Abmessungen: $a = b = 1.00 \text{ m}$
 $\alpha = \frac{b}{a} = \beta = \frac{a}{b} = 1,0$
 Materialdaten: $t = 0,20 \text{ m}$
 $E = 3.0 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$
 $\nu = 0.0$

Die Scheibensteifigkeit ergibt sich daraus zu

$$E^R = \frac{E \cdot t}{24(1-\nu^2)} = 2.5 \cdot 10^5 \text{ kN/m}$$

Mit den vorgegebenen Abmessungen und der gewählten Netzeinteilung von Bild 1 sind die Koordinaten (x_i, y_i) sämtlicher Knotenpunkte bestimmt. Die Koordinaten sowie die Materialdaten werden zur Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrizen k^i benötigt und müssen zur elektronischen Berechnung in entsprechenden Feldern bereitgestellt werden.

CAL :	
NODES	XYZ NK=9
1	X=0 Y=0 Z=0
2	X=1
.	.
..	..
PROPS	PLANE SMAT NM=1
1	E=3.0E7 NU=.0 T=.20 M=0

Die vier Steifigkeitsmatrizen müssen entsprechend der Anordnung der zugehörigen Elemente im System zur Gesamtsteifigkeitsmatrix überlagert werden. Die hier gewählte Form der Bildung des Gleichungssystems ist dadurch gekennzeichnet, daß:

- a) die Bandbreite des Gleichungssystem nicht ausgenützt wird, und
- b) die geometrischen Randbedingungen als vorgegebene Größen nicht im Gleichungssystem enthalten sind.

Zur Steuerung der Überlagerung sind zwei Inzidenzmatrizen, INZ1 und INZ2, erforderlich.

In der ersten Matrix, INZ1, erfolgt die Zuordnung der globalen Freiheitsgrade (hier: unbekannte Knotenverschiebungen) zu den Systemknotenpunkten. Diese Information ist erforderlich, da die vorgegebenen Randbedingungen im zu erstellenden Gesamtgleichungssystem nicht enthalten sein sollen. Dadurch ist die Zahl der Unbekannten an den einzelnen Knoten unterschiedlich. In der Matrix werden die Freiwerte knotenweise durchnummeriert. Die Randbedingungen werden nicht mitgezählt; um sie zu kennzeichnen, wird hier eine Null gesetzt.

$$\underline{\text{INZ1}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (& u & v &) \\ & & & \text{globale Knoten-} \\ & & & \text{nummer:} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 5 \\ 0 & 9 & 6 \\ 10 & 11 & 7 \\ 12 & 13 & 8 \\ 0 & 14 & 9 \end{array} \right] \end{array}$$

Tafel 1: Fortlaufende Numerierung der Freiwerte entsprechend der Reihenfolge der globalen Knotennummern

Eingabe der 1. Inzidenztafel (Tafel 1) in CAL:

CAL:						
BOUND RANDB						
1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0
...						
	u_x	u_y	u_z	φ_x	φ_y	φ_z
Erläuterung: 0 : fest						
1 : frei						

Jede "1" in diesem Feld wird in eine Gleichungsnummer umgewandelt.

Die Matrix INZ2 enthält die geometrische Anordnung (Topologie) der einzelnen Elemente im Gesamtsystem. Ihre Lage ist durch die 4 globalen Elementknotennummern festgelegt, deren Reihenfolge im negativen Uhrzeigerdreh Sinn verläuft. (vgl. Tafel 2)

globale Knotennummern: Element

	$\{ k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \}$				
<u>INZ2</u> =	1	2	5	4	1
	2	3	6	5	2
	4	5	8	7	3
	5	6	9	8	4

CAL:						
PLANE SCHEIB XYZ RANDB						
SMAT IR=2 IS=2						
1	K=1	2	5	4	M=1	
2	K=2	3	6	5		
...						

Tafel 2 : Globale Knotennummern der Elemente

Aus den Eingabedaten von Tafel 2 werden unter Zuhilfenahme der Knotenkoordinaten und der Materialdaten die Elementmatrizen gebildet.

Bei knotenweiser Anordnung der Elementverschiebungen und der Einführung der Bezeichnungen

$$u = u_x$$

$$v = u_y$$

erhält man nach Gl. (23) die Elementsteifigkeitsmatrix \underline{K}^e , die hier für alle vier Elemente identisch ist:

$$\underline{k}^e \underline{v}^e \equiv \underline{K}^e \underline{V}^e = E^* \quad (29)$$

12	3	-6	-3	-6	-3	0	3	u_1
3	12	3	0	-3	-6	-3	-6	v_1
-6	3	12	-3	0	-3	-6	3	u_2
-3	0	-3	12	3	-6	3	-6	v_2
-6	-3	0	3	12	3	-6	-3	u_3
-3	-6	-3	-6	3	12	3	0	v_3
0	-3	-6	3	-6	3	12	-3	u_4
3	-6	3	-6	-3	0	-3	12	v_4

Durch den Inhalt der Inzidenzmatrizen ist der Ort der Koeffizienten der Elementsteifigkeitsmatrizen im Gesamtgleichungssystem festgelegt.

Die Anordnung der Koeffizienten eines Elements im Gleichungssystem wird hier für das Element 2 gezeigt. Der einzelne Wert ist dabei durch 4 Indizes gekennzeichnet. Die hochgestellten Zahlen geben die Stellung in der Elementmatrix, die tiefgestellten die Stellung im globalen Gleichungssystem an, jeweils in der Reihenfolge Zeile/Spalte

$$k_{nm}^{ij} : K = \text{Koeffizient der Elementmatrix}$$

$$i, j = \text{Zeile/Spalte der Elementmatrix}$$

$$n, m = \text{Zeile/Spalte im Gleichungssystem (Gleichungsnummern)}$$

Ober den laufenden lokalen Knotenindex (K1 bis K4) findet man in Tafel 2 die globale Knotennummer und weiter in Tafel 1 die globalen Freiwerte.

In Bild 3 ist der Einbau des Elements 2 im Gesamtgleichungssystem dargestellt. Die Oberlagerung aller Elemente erfolgt additiv:

$$K_{nm} \Leftarrow K_{nm} + k_{nm}^{ij}$$

Bild 4 zeigt die Gesamtsteifigkeitsmatrix \underline{K} für das gegebene Beispiel

Element ②

INZ2	→	K1	K2	K3	K4
INZ1	→	2	3	6	5
		2 3	0 4	0 9	7 8

Elementknoten
Systemknoten
Gleichungsnummern

K1	2	k_{22}^{11}	k_{23}^{12}		k_{24}^{14}		k_{27}^{17}	k_{28}^{18}
	3	k_{32}^{21}	k_{33}^{22}		k_{34}^{24}		k_{37}^{27}	k_{38}^{28}
K2	0							
	4	k_{42}^{41}	k_{43}^{42}		k_{44}^{44}		k_{47}^{47}	k_{48}^{48}
K3	0							
	9	k_{92}^{61}	k_{93}^{62}		k_{94}^{64}		k_{97}^{67}	k_{98}^{68}
K4	7	k_{72}^{71}	k_{73}^{72}		k_{74}^{74}		k_{77}^{77}	k_{78}^{78}
	8	k_{82}^{81}	k_{83}^{82}		k_{84}^{84}		k_{87}^{87}	k_{88}^{88}

Es sind nur die Koeffizienten eingetragen, der entsprechende Betrag in der Gesamtsteifigkeitsmatrix liefern!

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1														
2		k_{22}^{11}	k_{23}^{12}	k_{24}^{14}			k_{27}^{17}	k_{28}^{18}	k_{29}^{16}					
3		k_{32}^{21}	k_{33}^{22}	k_{34}^{24}			k_{37}^{27}	k_{38}^{28}	k_{39}^{26}					
4		k_{42}^{41}	k_{43}^{42}	k_{44}^{44}			k_{47}^{47}	k_{48}^{48}	k_{49}^{46}					
5														
6														
7		k_{72}^{71}	k_{73}^{72}	k_{74}^{74}			k_{77}^{77}	k_{78}^{78}	k_{79}^{76}					
8		k_{82}^{81}	k_{83}^{82}	k_{84}^{84}			k_{87}^{87}	k_{88}^{88}	k_{89}^{86}					
9		k_{92}^{61}	k_{93}^{62}	k_{94}^{64}			k_{97}^{67}	k_{98}^{68}	k_{99}^{66}					
10														
14														

Bild 3 Einbau des Elements 2 in die Gesamtsteifigkeitsmatrix (Summation über die Elemente)

Knoten: 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Gl-Nr.: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

1	12	-6	-3		0	3	-6	-3												
2	-6	24	0	-3	-6	3	0	0	-3											
3	-3	0	24	0	3	-6	0	-12	-6											
4		-3	0	12			3	-6	-6											
5	0	-6	3		24	0	-12	0		0	3	-6	-3							
6	3	3	-6		0	24	0	0		-3	-6	-3	-6							
7	-6	0	0	3	-12	0	48	0	0	-6	3	0	0	-3						
8	-3	0	-12	-6	0	0	0	48	0	3	-6	0	-12	-6						
9		-3	-6	-6			0	0	24			3	-6	-6						
10					0	-3	-6	3		12	-3	-6	3							
11					3	-6	3	-6		-3	12	-3	0							
12					-6	-3	0	0	3	-6	-3	24	0	3						
13					-3	-6	0	-12	-6	3	0	0	24	0						
14									-3	-6	-6			3	0	12				

IT*

Bild 4 Gesamtsteifigkeitsmatrix K

C A L :

ADDSF , GSTEIF
 Bilden der Gesamtsteifigkeitsmatrix mit Namen GSTEIF.

3.1.6 Lastvektor $\underline{\bar{P}}$ am Gesamtsystem

Als Belastung der zu untersuchenden Scheibe ist eine linear-veränderliche Streckenlast des oberen Randes vorgegeben. (Bild 5).

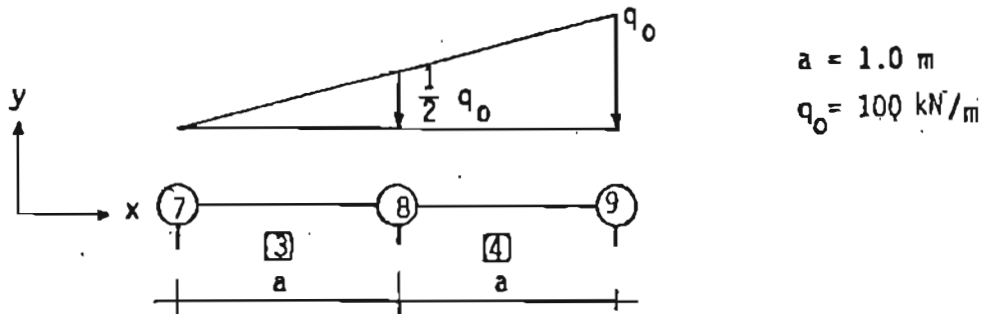


Bild 5: Belastung am Gesamtsystem

Unter Verwendung der Gleichung (27) werden zuerst die Lastvektoren der Elemente $\boxed{3}$ und $\boxed{4}$ ermittelt. Entsprechend den Steifigkeitsmatrizen sind auch die Koeffizienten der Lastvektoren knotenweise anzuordnen.

Elementlastvektoren für das Element \boxed{e} (hochgestellter Index):

$$\underline{\bar{P}}^e = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} \text{K1} & & \text{K2} & & \text{K3} & & \text{K4} & \\ \hline P_x & P_y & P_x & P_y & P_x & P_y & P_x & P_y \\ \hline \end{array} \right]^e \quad (30a)$$

$$\underline{\bar{P}}^3 = - \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \end{array} \right]^3 \frac{a \cdot q_0}{2} \quad (30b)$$

$$\underline{\bar{P}}^4 = - \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]^4 \frac{a \cdot q_0}{2} \quad (30c)$$

Der globale Lastvektor des Gesamtsystems kann analog zur Bildung der Gesamtsteifigkeitsmatrix (vgl. Kap. 3.1.5) aus den Elementlastvektoren aufgestellt werden. Eine Überlagerung der Belastung ist für die globalen Knoten 7, 8 und 9, jeweils in y-Richtung, vorzunehmen. Aus der Tafel 4 erhält man über die entsprechende Unbekannte u_y die gesuchte Gleichungsnummern der Lastkomponenten im Lastvektor $\underline{\bar{P}}$.

Element 3:

$$\begin{array}{rcc}
 K3 & = & 8 & \bar{P}_{13} & = & P_{y8} \\
 K4 & = & 7 & \bar{P}_{11} & = & P_{y7} \\
 \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \\
 \text{lokaler} & & \text{globaler} & \text{globaler} & & \\
 \text{Elementknoten} & & & \text{Freiwert} & & \\
 \text{(Tafel 2)} & & & \text{(Tafel 1)} & &
 \end{array}
 \quad (31)$$

Element 4:

$$\begin{array}{rcc}
 K3 & = & 9 & \bar{P}_{14} & = & \bar{P}_{y9} \\
 K4 & = & 8 & \bar{P}_{13} & = & \bar{P}_{y8}
 \end{array}
 \quad (32)$$

Damit ergibt sich der Gesamtlastvektor zu

$$\begin{array}{l}
 \bar{P} = - \left\{ \begin{array}{cccccccccccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 1 & \frac{5}{6}
 \end{array} \right\} \frac{a \cdot q_0}{2} \\
 = - \left\{ \begin{array}{cccccccccccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{50}{6} & 0 & 50 & \frac{250}{6}
 \end{array} \right\} \text{ kN}
 \end{array}$$

C A L :			
LOADS	PLAST	RANDB	NL=1
7	LC=1	P= 0	-8.33333 0
8	LC=1	P= 0	-50 0
9	LC=1	P= 0	-41.66666 0

Erläuterung:

LOADS: *Bilden des Gesamtlastvektors mit Namen PLAST
(nur Einzellasten möglich)*

3.1.7 Knotenverformungen des Gesamtsystems

Die globalen Knotenverformungen (Verschiebungen und Verdrehungen) erhält man aus der Beziehung

$$\underline{K} \underline{V} = \underline{\bar{P}} \quad (33)$$

Mechanisch gesehen stellen die einzelnen Gleichungen die Gleichgewichtsbedingungen an den Knoten dar. Durch ihre Lösung werden das Gleichgewicht und die statischen Randbedingungen für das Gesamttragwerk im bestmöglichen Sinne approximiert, und zwar bezüglich der gewählten (kinematisch zulässigen) Ansätze und der Berechnungsmethode (hier: Weggrößenverfahren). Die Steifigkeitsmatrix \underline{K} ist symmetrisch und positiv definit (vgl. dazu: Gl. (17) und (18)). Es können somit Lösungsverfahren verwendet werden, die diese Eigenschaft ausnutzen (z.B. Verfahren nach Cholesky, Gauß). Außerdem kann eine normalerweise gegebene Bandstruktur des Gleichungssystems, die von der Reihenfolge der globalen Knotennummern/-freiwerte abhängt, berücksichtigt werden. Bei Bandlösern ist zur Berechnung von Gleichung (33) nur ein Teil der Matrix \underline{K} erforderlich (vgl. Bild 6)

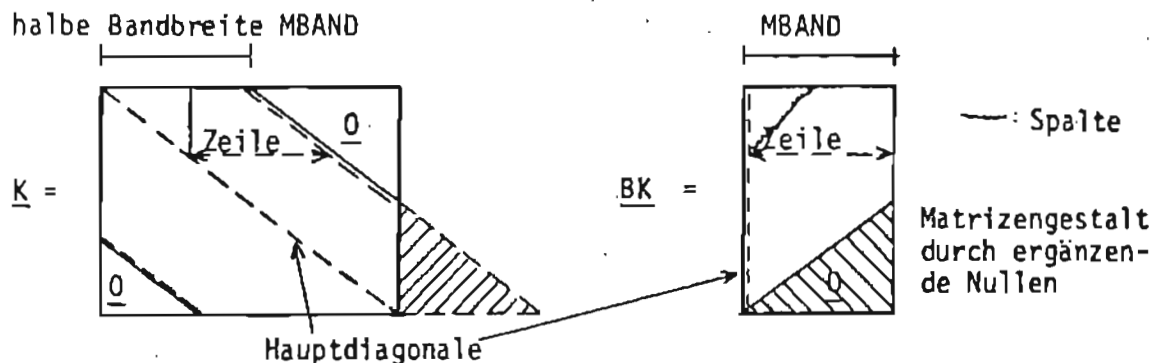


Bild 6 : Gleichungssystem mit Bandstruktur \underline{K} und Bandmatrix \underline{BK}

Die Bestimmung von MBAND erfolgt elementweise mit Tafel 3 aus der maximalen Differenz der Gleichungsnummern plus eins. Für das Beispiel erhält man die größte Bandbreite am Element 3 zwischen u_x am Knoten K1 und u_y am Knoten K3:

$$\text{MBAND} = 13 - 5 + 1 = 9$$

u_y bei K3 u_x bei K1 Hauptdiagonalkoeffizient

Die Berechnung des Beispiels erfolgt mit dem Programm CAL. Die Lösung des Gleichungssystems steht in Tafel 4.

Tafel 4 : Knotenverschiebungen

Knotennummer	u_x	u_y
1	-0.3976E-4	0.0
2	-0.2692E-4	-0.7152E-4
3	0.0	-0.8754E-4
4	0.4568E-5	-0.3287E-4
5	0.1913E-5	-0.7037E-4
6	0.0	-0.9028E-4
7	0.3062E-4	-0.4259E-4
8	0.2309E-4	-0.7757E-4
9	0.0	-0.9951E-4

CAL :
DUP PLAST VGES SOLVE GSTEIF VGES
Erklärung: VGES = PLAST \leftarrow P GSTEIF \leftarrow K Lösung $y \rightarrow$ VGES
DISPL VGES RANDB
Ausgeben der Verschiebungen

Im Bild 7 ist das unverformte und verformte System dargestellt.

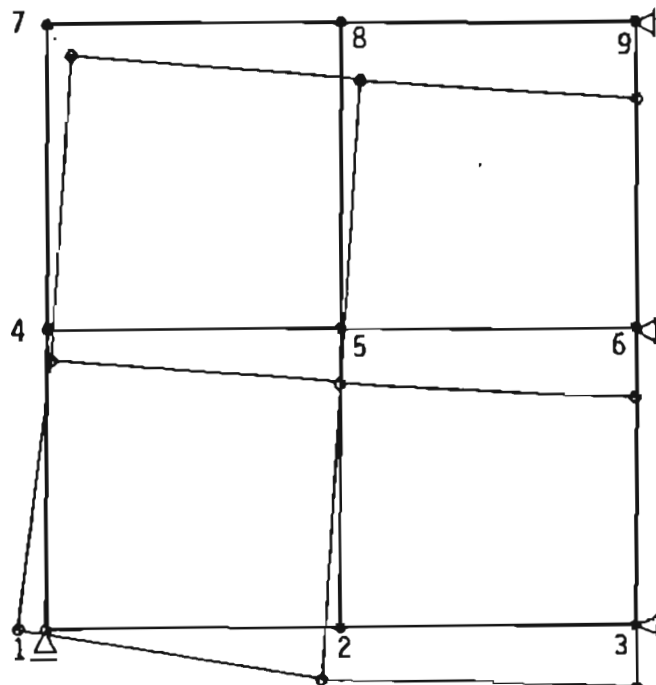


Bild 7 : Verformungsfigur

3.1.8 Berechnung der Spannungen

Die Spannungen können nur unter Verwendung des Werkstoffgesetzes berechnet werden. Auf Elementebene gilt nach Gleichung (20)

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \cdot \underline{\epsilon} = \underline{E} \underline{B} \cdot \underline{v}^e \quad (34)$$

Der Vektor \underline{v} enthält alle Knotenverschiebungen eines Elements e , also auch die Randbedingungen und vorgegebene Verschiebungen \bar{v}_j .

Aus der Matrix \underline{B} , Gleichung (19), ist ersichtlich, daß bei dem gewählten Ansatz \underline{u} für die Verschiebungen der Dehnungsverlauf $\epsilon(x,y) = \epsilon(\xi,\eta)$ durch fünf unabhängige Werte festgelegt ist.

Die Starrkörperanteile des Verschiebungsansatzes gehen nicht in die Rechnung ein. Die Dehnung ϵ_x ist in x -Richtung konstant und in y -Richtung linear veränderlich.

Die Berechnung der Spannungen erfolgt ebenfalls mit dem Programm CAL jeweils für die Elementmitte: $\xi_i = 0,5$ und $\eta_j = 0,5$.

Die entsprechende Beziehung für ϵ lautet dann bei knoterweiser Anordnung der Verschiebungen:

$$\underline{\epsilon} = \underline{B} \cdot \underline{v}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & & 0,5 & & 0,5 & & -0,5 & \\ & -0,5 & & -0,5 & & 0,5 & & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Die Hauptspannungen werden bezogen auf das lokale Koordinatensystem der Elemente. Sie sind in Tafel 5 zusammengestellt und im Bild 8 dargestellt.

CAL:
FORCE SCHEIB VGES SPANN
Berechnung und Ausgabe der Elementspannungen σ_{xx} σ_{yy} σ_{xy}

Tafel 5: Hauptspannungen in Elementmitte

Element	σ -MAX	σ -MIN	Winkel
1	0.2522E+3	-0.5753E+3	-20.28
2	0.3820E+3	-0.3106E+2	- 7.47
3	-0.7267E+1	-0.3992E+3	-37.54
4	-0.1427E+3	-0.4786E+3	-56.27

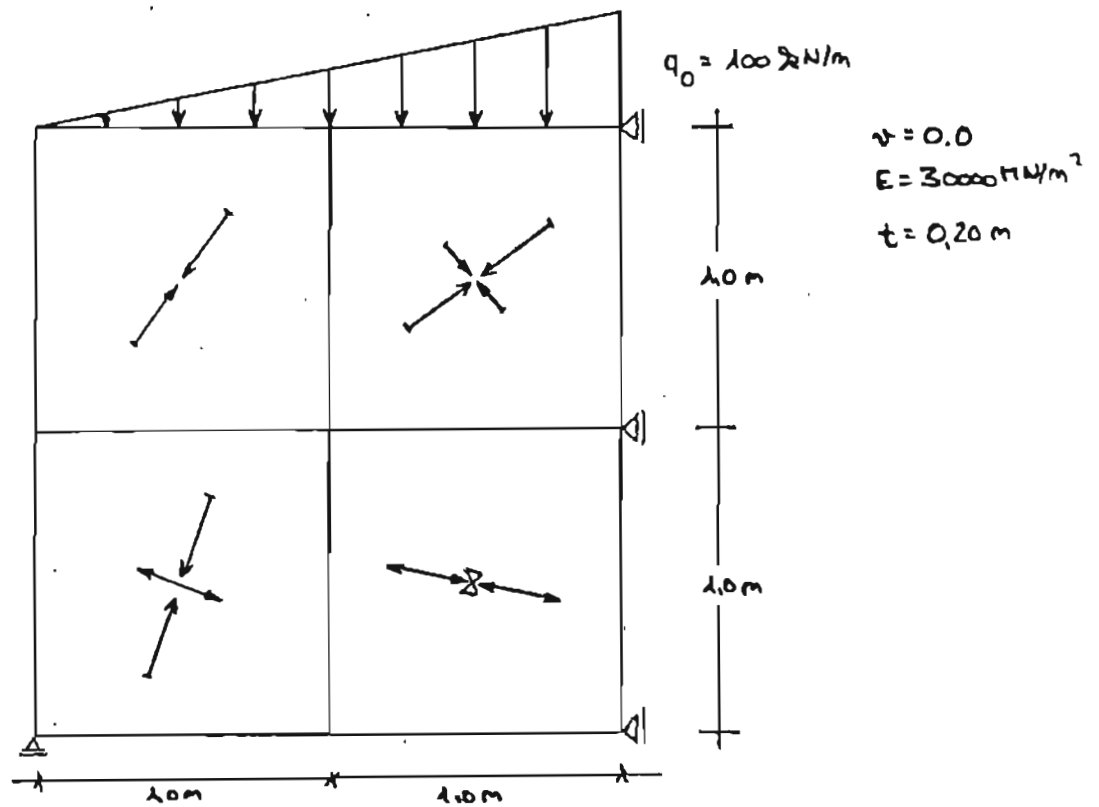
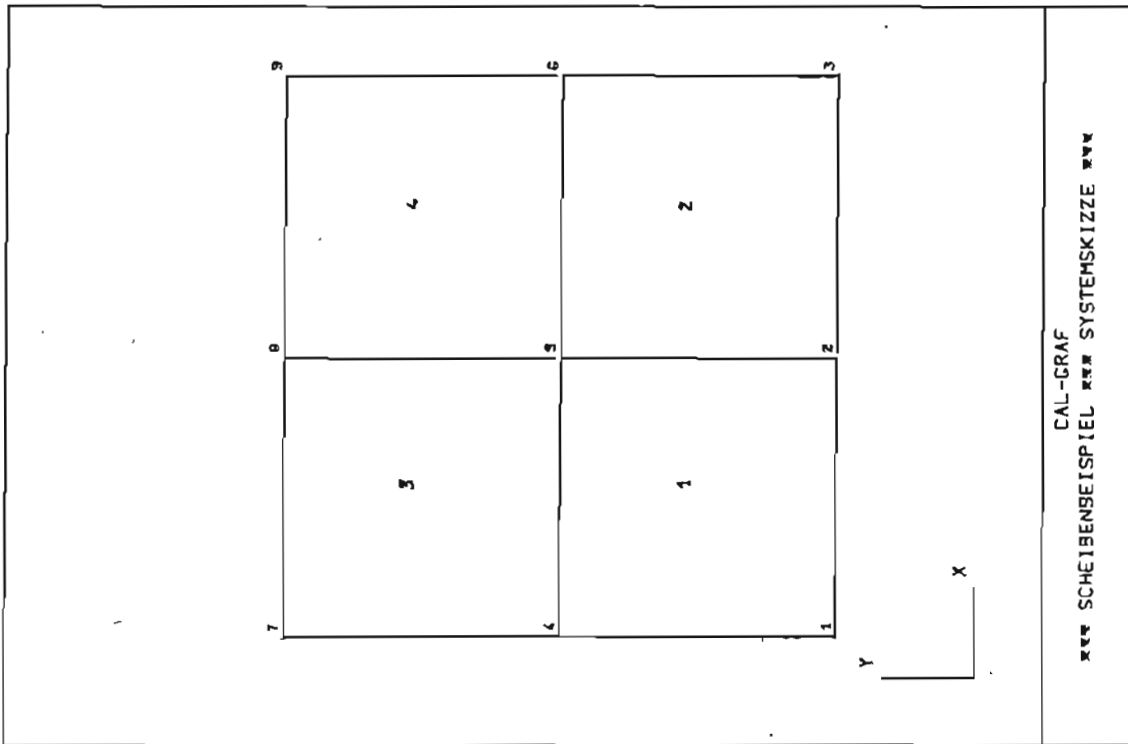
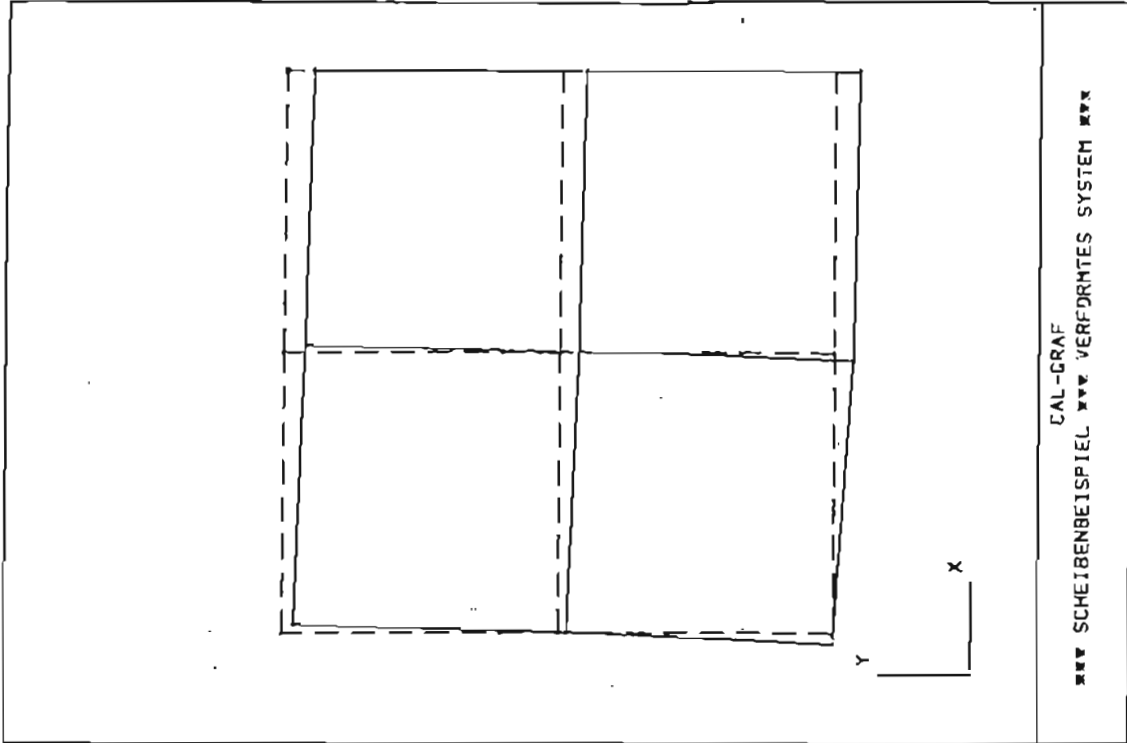


Bild 8: Hauptspannungen

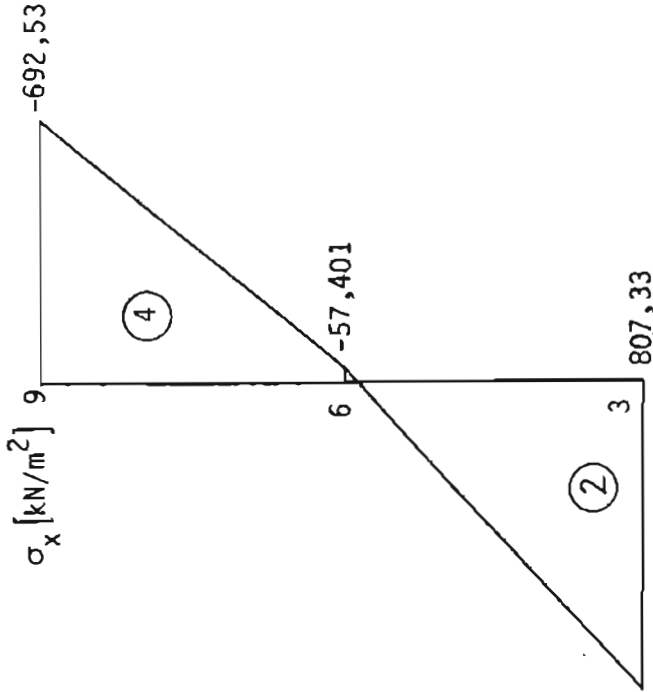
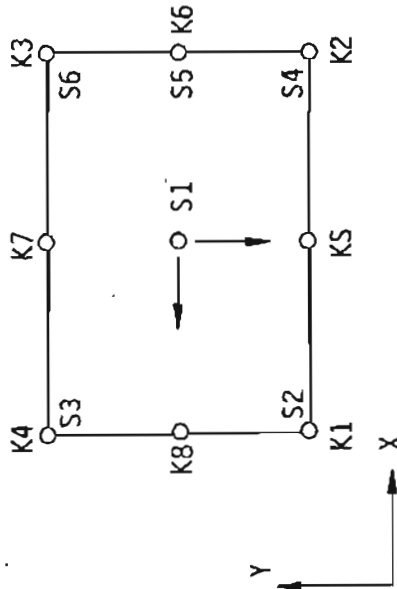
3.2. Verhalten der numerischen Lösungen



KNOTENVERSCHIEBUNGEN DER SCHEIBE

NODE	UX	UY
1	-3.974941E-05	0.000000E+00
2	-2.691115E-05	-7.150541E-05
3	0.000000E+00	-8.752252E-05
4	4.567185E-06	-3.286694E-05
5	1.913370E-06	-7.036361E-05
6	0.000000E+00	-9.026917E-05
7	3.061504E-05	-4.258722E-05
8	2.308441E-05	-7.755515E-05
9	0.000000E+00	-9.949581E-05

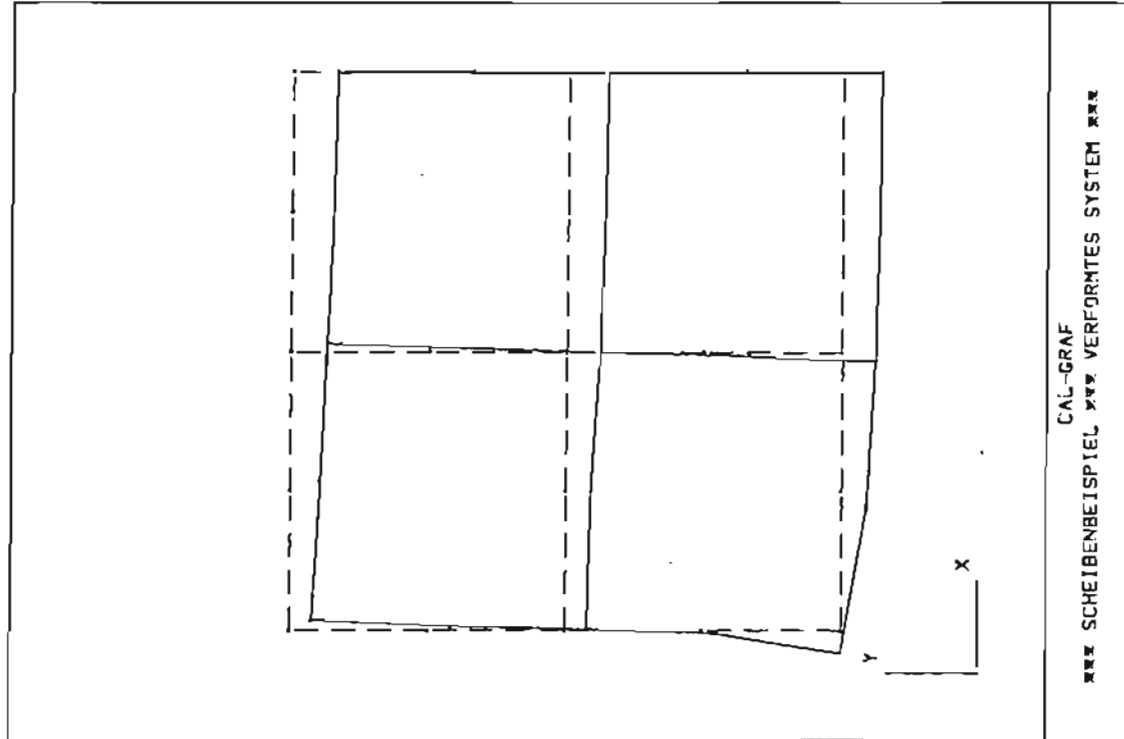
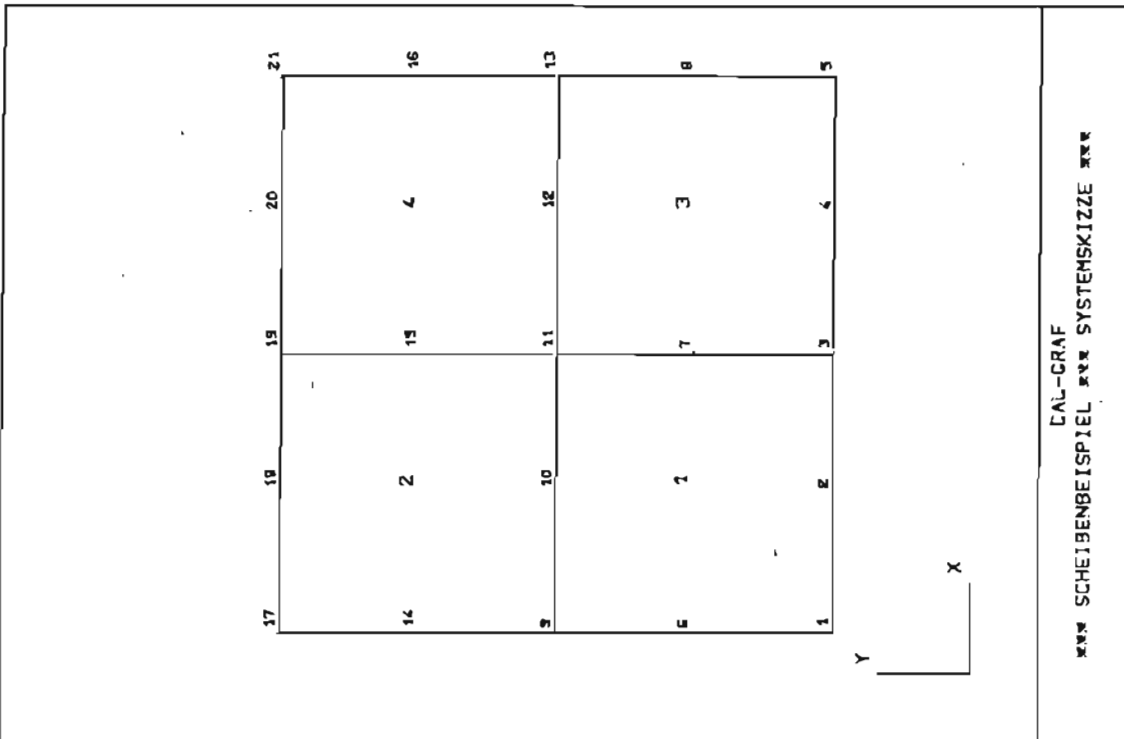
Spannungsausgabepunkte: S1, S2, S3, S4, S5, S6



$$M_{3-9} = \frac{1,0}{2} \cdot 0,2 \left[807,33 \cdot \frac{2}{3} + 692,53 \cdot \frac{2}{3} \right] = 99,99 \text{ kNm}$$

SCHNITTGRÖSSEN DER SCHEIBE

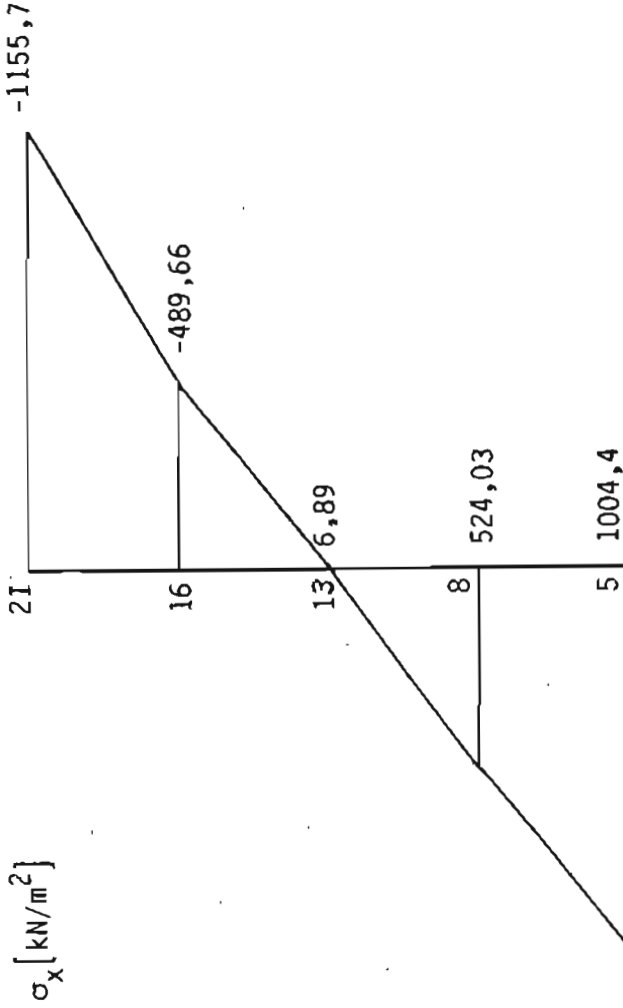
EL-NR	σ_x^1	σ_y^1	τ^1	σ_x^2	σ_y^2	τ^2	σ_x^3	σ_y^3	τ^3
1	1.5277E+02	-4.7588E+02	-2.6896E+02	3.8515E+02	-9.8601E+02	-4.0783E+02	-7.9614E+01	-9.8601E+02	1.0230E+02
3	-1.5277E+02	-2.5368E+02	-1.8934E+02	-7.9614E+01	-2.9161E+02	-1.7173E+02	-2.2592E+02	-2.9161E+02	-1.3380E+02
2	8.0733E+02	-8.2399E+01	-2.4026E+02	3.7497E+02	-8.2399E+01	-2.6942E+02	-5.7401E+01	-8.2399E+01	-2.9858E+02
4	-5.7401E+01	-2.7680E+02	-2.9858E+02	-3.7497E+02	-2.7680E+02	-3.1385E+02	-6.9253E+02	-2.7680E+02	-3.2911E+02



SCHEIBENBEISPIEL IDEALISIERUNG MIT 4 ELLIPSEN MIT ZWISCHENKNOTEN

KNOTENVERSCHIEBUNGEN DER SCHEIBE

NODE	UX	UY
1	-7.904348E-05	0.000000E+00
2	-5.863798E-05	-9.380965E-05
3	-3.111530E-05	-1.230206E-04
4	-1.614897E-05	-1.386140E-04
5	0.000000E+00	-1.427199E-04
6	-8.611140E-06	-4.527438E-05
7	-1.486365E-05	-1.221352E-04
8	0.000000E+00	-1.447858E-04
9	5.428585E-06	-8.186070E-05
10	4.714899E-06	-9.393714E-05
11	2.613210E-06	-1.257796E-04
12	5.958440E-07	-1.407018E-04
13	0.000000E+00	-1.464802E-04
14	1.611491E-05	-8.285623E-05
15	1.371799E-05	-1.262990E-04
16	0.000000E+00	-1.507612E-04
17	3.817124E-05	-7.795647E-05
18	3.649196E-05	-1.067045E-04
19	3.047151E-05	-1.285386E-04
20	1.724860E-05	-1.497769E-04
21	0.000000E+00	-1.574970E-04

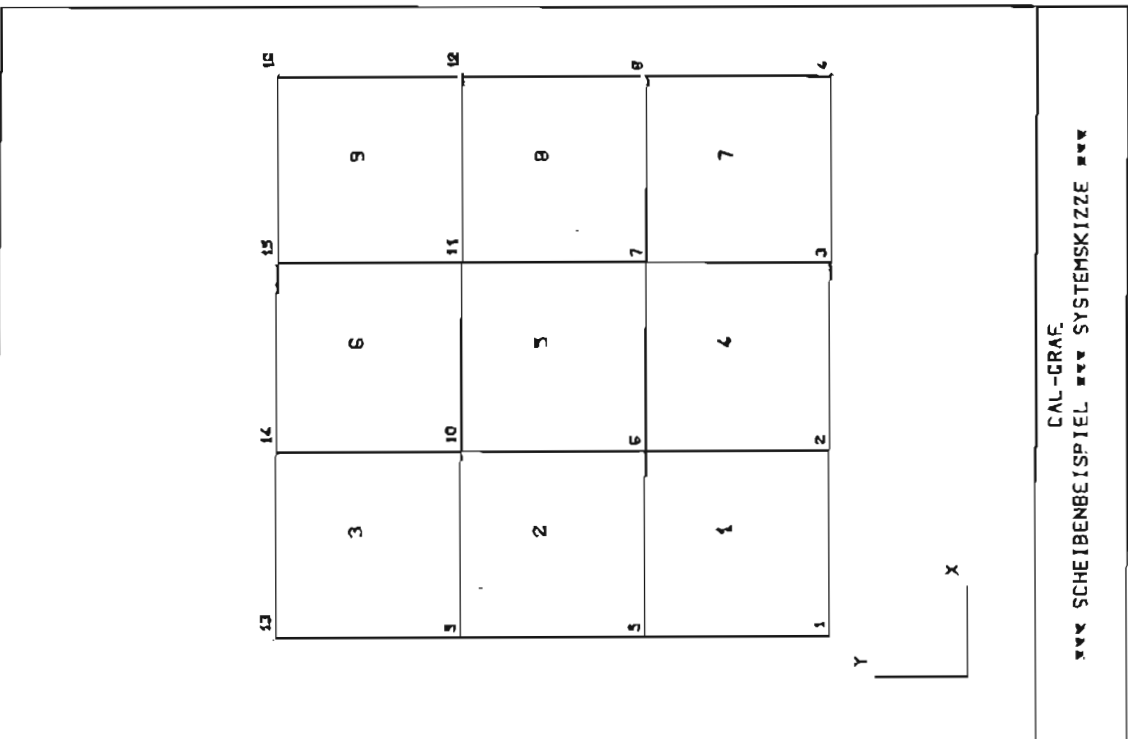
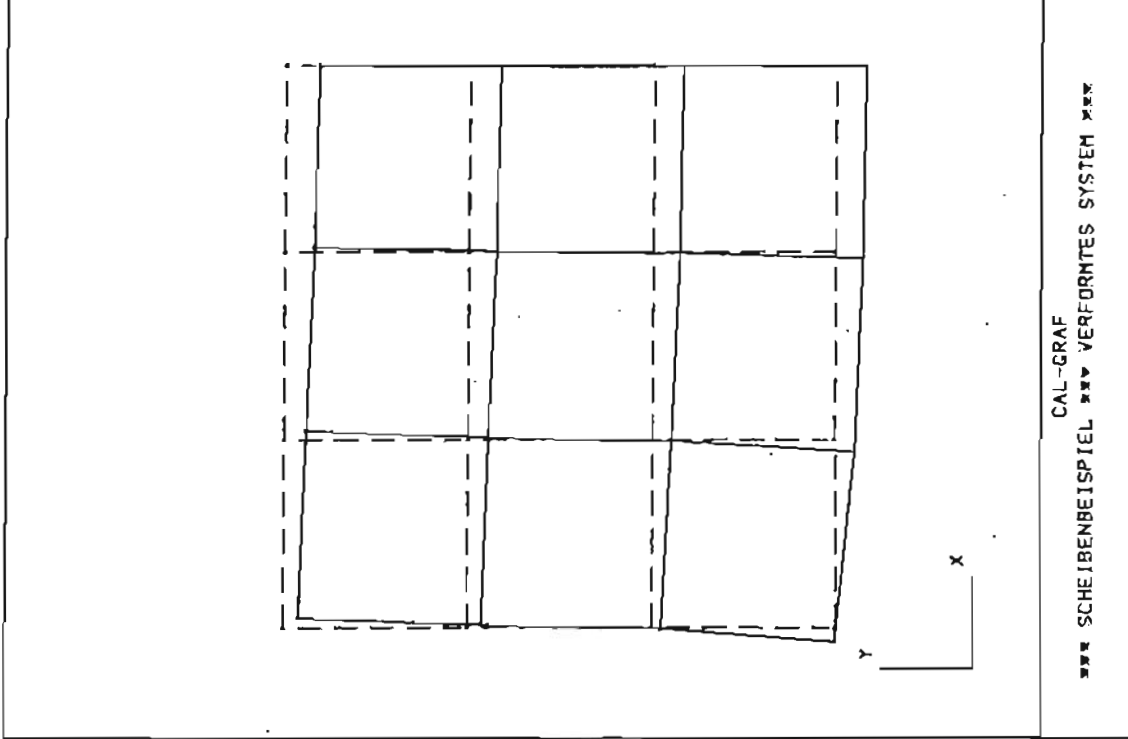


$$M_{5-21} = \frac{0.5}{2} \cdot 0.2 \left[1004.4 \cdot \frac{5}{6} + 524.03 \cdot 1.0 + 489.66 \cdot 1.0 + 1155.7 \cdot \frac{5}{6} \right]$$

$$= 140.688 \text{ kNm}$$

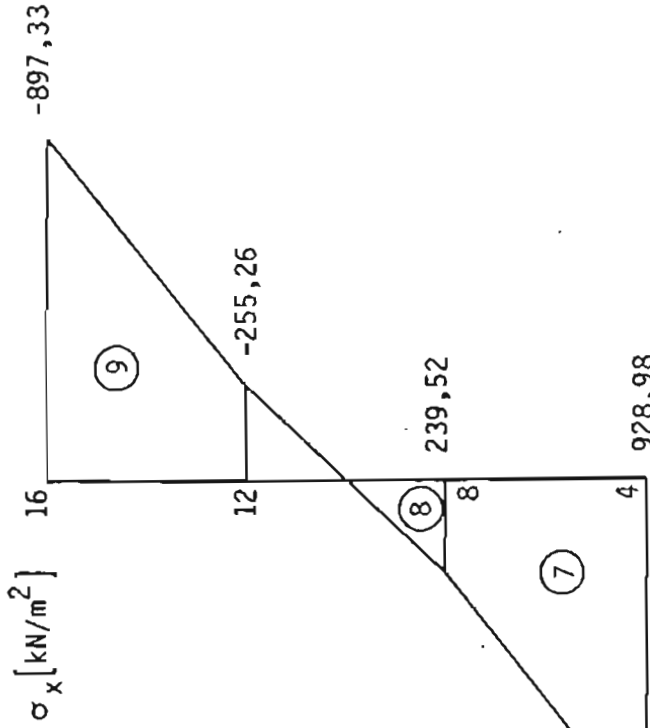
SCHNITTGRÖSSEN DER SCHEIBE

EL-NR	σ_x^1	σ_y^1	τ^1	σ_x^2	σ_y^2	τ^2	σ_x^3	σ_y^3	τ^3
1	-1.8758E+02	-3.8247E+00	-2.0262E+02	1.0108E+03	-2.9771E+03	-8.2441E+02	-1.1811E+00	-1.9345E+03	-4.9050E+02
2	-7.1907E+01	-3.8302E+02	-1.7499E+02	-1.1811E+00	-2.3659E+02	8.4236E+01	2.9478E+01	4.7084E+02	-1.3391E+02
3	1.0044E+03	-1.3510E+02	4.9138E+01	5.2403E+02	-1.1281E+02	-3.0287E+01	6.8950E+00	-9.0521E+01	-3.6194E+01
4	6.8950E+00	-1.8322E+02	-3.6194E+01	-4.8966E+02	-3.3050E+02	-2.7004E+01	-1.1557E+03	-4.7779E+02	-2.8833E+01



KNOTENVERSCHIEBUNGEN DER SCHEIBE

NODE	UX	UY
1	-5.041243E-05	0.000000E+00
2	-4.054973E-05	-7.327326E-05
3	-2.064392E-05	-9.906826E-05
4	0.000000E+00	-1.079367E-04
5	-4.384823E-06	-3.581686E-05
6	-5.977776E-06	-7.114435E-05
7	-5.322675E-06	-9.962904E-05
8	0.000000E+00	-1.085828E-04
9	1.276639E-05	-5.120930E-05
10	1.074598E-05	-7.603116E-05
11	5.672344E-06	-1.018384E-04
12	0.000000E+00	-1.123297E-04
13	3.364109E-05	-5.457063E-05
14	3.100635E-05	-8.080688E-05
15	1.994069E-05	-1.079488E-04
16	0.000000E+00	-1.205279E-04



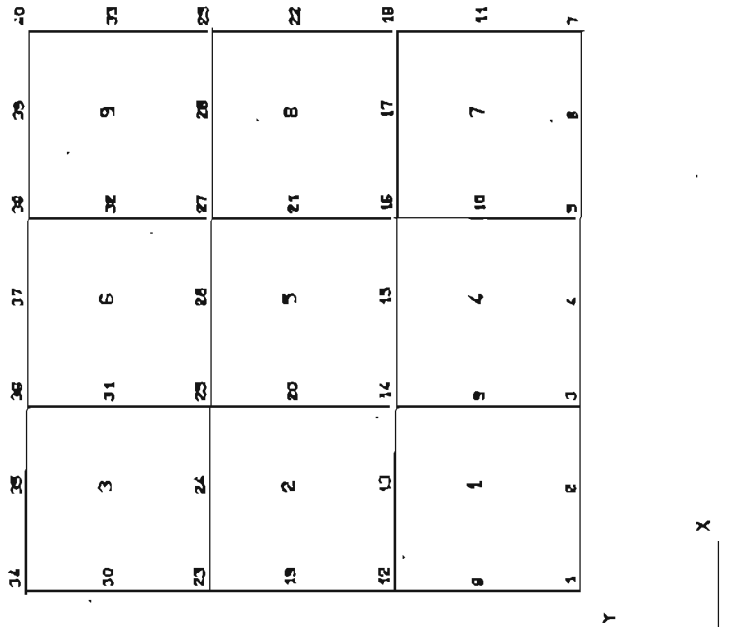
$$M_{4-16} = \frac{0,667}{2} \cdot 0,2 \left[897,33 \cdot \frac{7}{9} + 2 \cdot 55,26 \cdot \frac{2}{3} + 239,52 \cdot \frac{2}{3} + 928,98 \cdot \frac{7}{9} \right]$$

$$= 116,68 \text{ kNm}$$

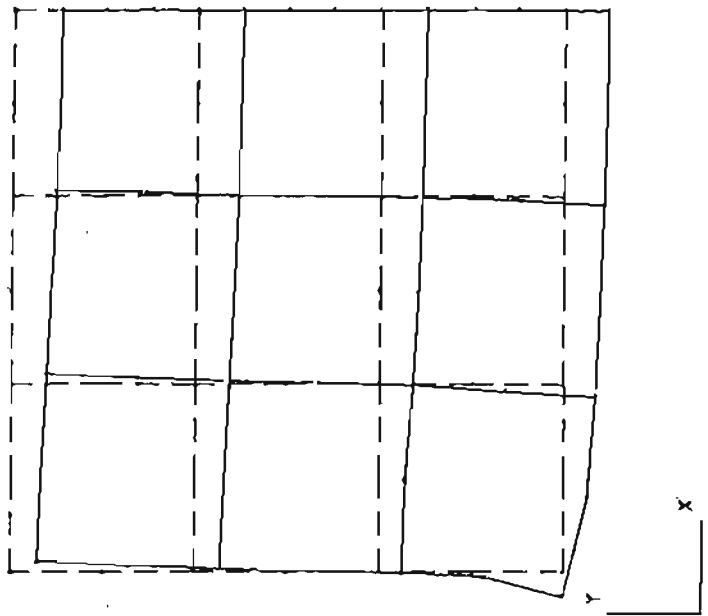
SCHNITTGRÖSSEN DER SCHEIBE

EL-NR	σ_x^1	σ_y^1	τ^1	σ_x^2	σ_y^2	τ^2	σ_x^3	σ_y^3	τ^3
1	1.8607E+02	-7.5805E+02	-3.1492E+02	4.4382E+02	-1.6119E+03	-6.1292E+02	-7.1683E+01	-1.6119E+03	2.4086E+02
2	-8.1301E+01	-4.5626E+02	-2.9561E+02	-7.1683E+01	-6.9263E+02	-4.0899E+02	-9.0919E+01	-6.9263E+02	-1.7261E+02
3	-1.0474E+02	-1.8307E+02	-1.1166E+02	-9.0919E+01	-1.5125E+02	-8.8835E+01	-1.1856E+02	-1.5125E+02	-1.2066E+02
4	4.6262E+02	3.5286E+01	-4.9292E+01	8.9576E+02	9.5810E+01	1.9756E+02	2.9480E+01	9.5810E+01	1.3704E+02
5	-9.9417E+01	-1.5966E+02	-2.9896E+02	2.9480E+01	-2.1990E+02	-2.6464E+02	-2.2831E+02	-2.1990E+02	-2.0440E+02
6	-3.6313E+02	-2.4492E+02	-2.0725E+02	-2.2831E+02	-2.1490E+02	-1.2483E+02	-4.9795E+02	-2.1490E+02	-1.5486E+02
7	9.2898E+02	-2.9076E+01	-1.9954E+02	5.8425E+02	-2.9076E+01	-2.0050E+02	2.3952E+02	-2.9076E+01	-2.0146E+02
8	2.3952E+02	-1.6860E+02	-2.0146E+02	-7.8676E+00	-1.6860E+02	-2.1876E+02	-2.5526E+02	-1.6860E+02	-2.3605E+02
9	-2.5526E+02	-3.6890E+02	-2.3605E+02	-5.7629E+02	-3.6890E+02	-2.5954E+02	-8.9733E+02	-3.6890E+02	-2.8303E+02

*** SCHEIBENBEISPIEL *** SYSTEMSKIZZE ***

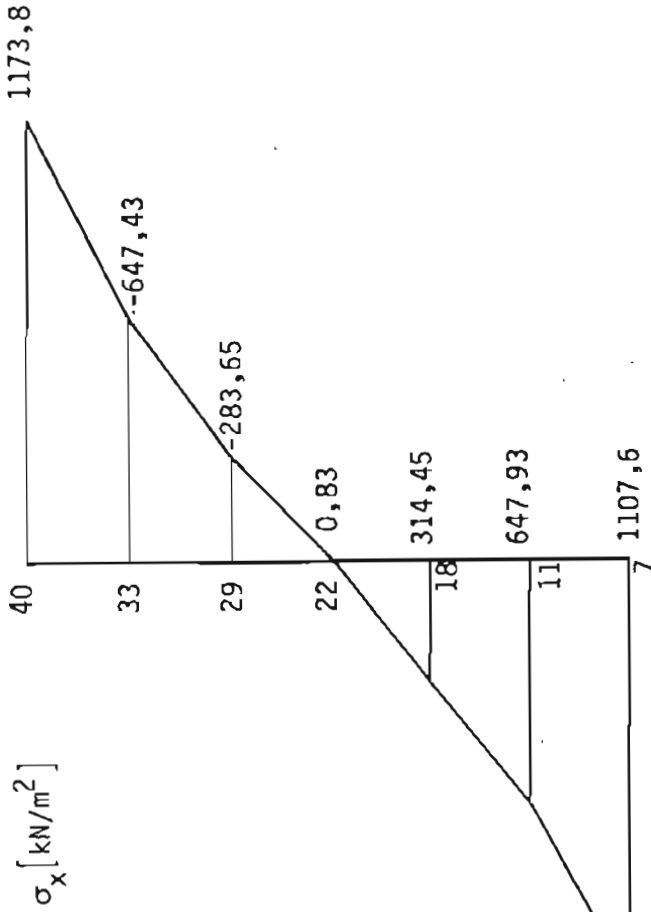


*** SCHEIBENBEISPIEL *** VERFORMTES SYSTEM ***



KNOTENVERSCHIEBUNGEN DER SCHEIBE

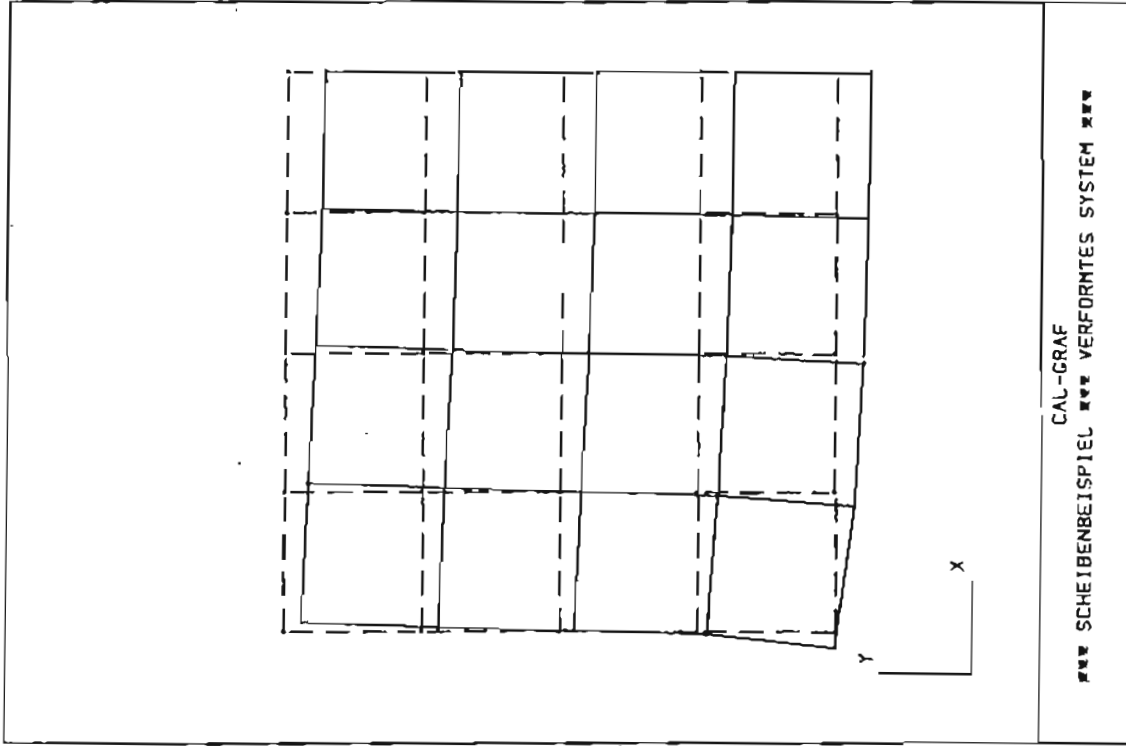
NODE	UX	UY
1	-8.849674E-05	0.000000E+00
2	-6.831694E-05	-9.225222E-05
3	-4.285569E-05	-1.198199E-04
4	-3.357541E-05	-1.368047E-04
5	-2.403316E-05	-1.486836E-04
6	-1.216145E-05	-1.571351E-04
7	0.000000E+00	-1.599823E-04
8	-1.831999E-05	-4.533275E-05
9	-2.588210E-05	-1.189229E-04
10	-1.359712E-05	-1.495535E-04
11	0.000000E+00	-1.596688E-04
12	-4.123886E-06	-8.398096E-05
13	-4.869886E-06	-9.368736E-05
14	-6.505775E-06	-1.217250E-04
15	-7.170446E-06	-1.375757E-04
16	-5.964476E-06	-1.495841E-04
17	-3.238087E-06	-1.574265E-04
18	0.000000E+00	-1.603203E-04



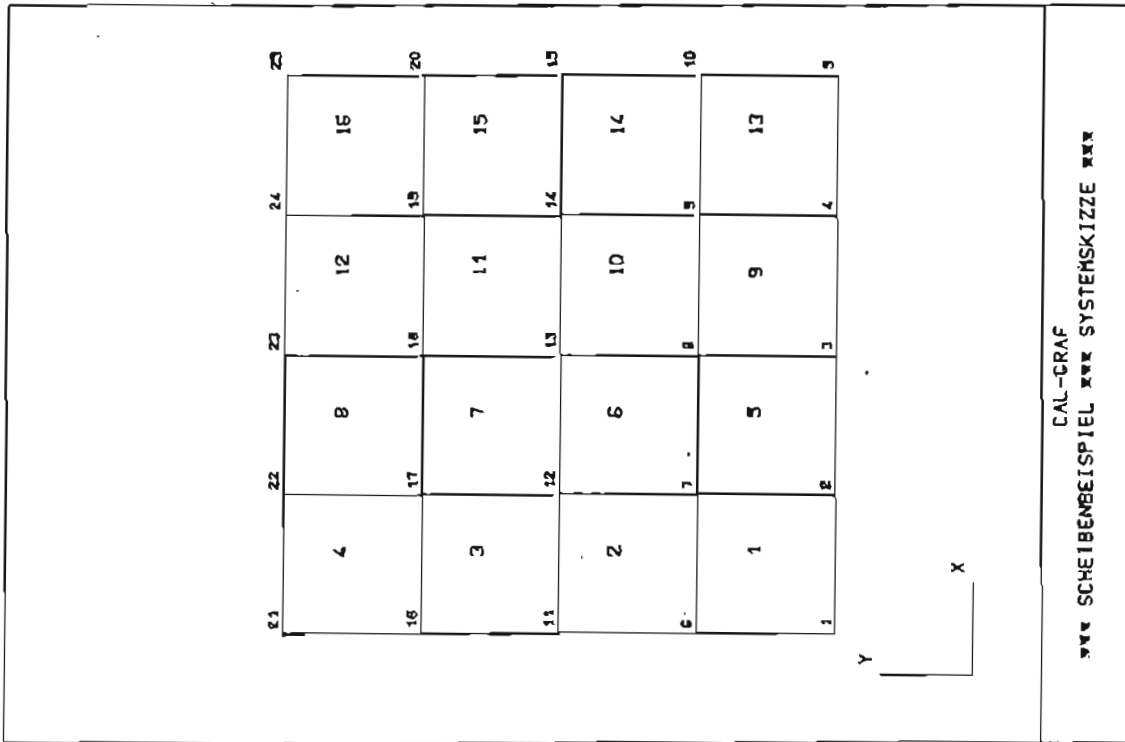
$$M_{7-40} = \frac{0,33}{2} \cdot 0,2 \left[1107,6 \cdot \frac{8}{9} + 647,93 \cdot \frac{4}{3} + 314,45 \cdot \frac{2}{3} + 283,65 \cdot \frac{2}{3} + 647,43 \cdot \frac{4}{3} + 1173,8 \cdot \frac{8}{9} \right] = 138,46 \text{ kNm}$$

SCHNITTGRÖSSEN DER SCHEIBE

EL-NR	σ_x^1	σ_y^1	τ^1	σ_x^2	σ_y^2	τ^2	σ_x^3	σ_y^3	τ^3
1	-3.4030E+02	-6.4587E+01	-2.2808E+02	1.5785E+03	-4.3812E+03	-1.1888E+03	-2.7095E+01	-3.1779E+03	-6.4514E+02
2	3.3590E+01	-6.5016E+02	-2.8358E+02	-2.7095E+01	-9.4841E+02	2.2890E+02	5.5626E+01	1.1860E+02	-1.8534E+02
3	-1.2750E+02	-1.2324E+02	-1.1246E+02	5.5626E+01	-3.4305E+02	-1.5117E+02	1.0127E+02	-1.4905E+01	2.4260E+01
4	5.5282E+02	-3.4698E+01	-9.4994E+01	8.2326E+02	2.4721E+02	-1.6938E+02	-1.4400E+02	-4.1868E+02	1.2635E+02
5	-1.3567E+02	-7.9249E+01	-2.8238E+02	-1.4400E+02	8.0212E+01	-3.0133E+02	-1.8860E+02	-1.8283E+02	-4.9926E+02
6	-3.8083E+02	-2.2609E+02	-1.8086E+02	-1.8860E+02	-2.6017E+02	-4.7883E+02	-3.0289E+02	-1.9727E+02	-2.5554E+01
	σ_x^4	σ_y^4	τ^4	σ_x^5	σ_y^5	τ^5	σ_x^6	σ_y^6	τ^6
7	1.1076E+03	7.1654E+01	-2.0314E+00	6.4793E+02	-1.5210E+01	9.8425E+00	3.1445E+02	-1.0207E+02	-1.8881E+01
8	3.1445E+02	-4.6619E+01	-1.8881E+01	8.3126E-01	-1.6601E+02	-9.4926E+00	-2.8365E+02	-2.8547E+02	-1.1099E+01
9	-2.8365E+02	-3.0826E+02	-1.1099E+01	-6.4743E+02	-4.0181E+02	-1.7564E+01	-1.1738E+03	-4.9531E+02	-3.0743E+01



*** SCHEIBENBEISPIEL *** VERFORMTES SYSTEM ***
 CAL-GRAF

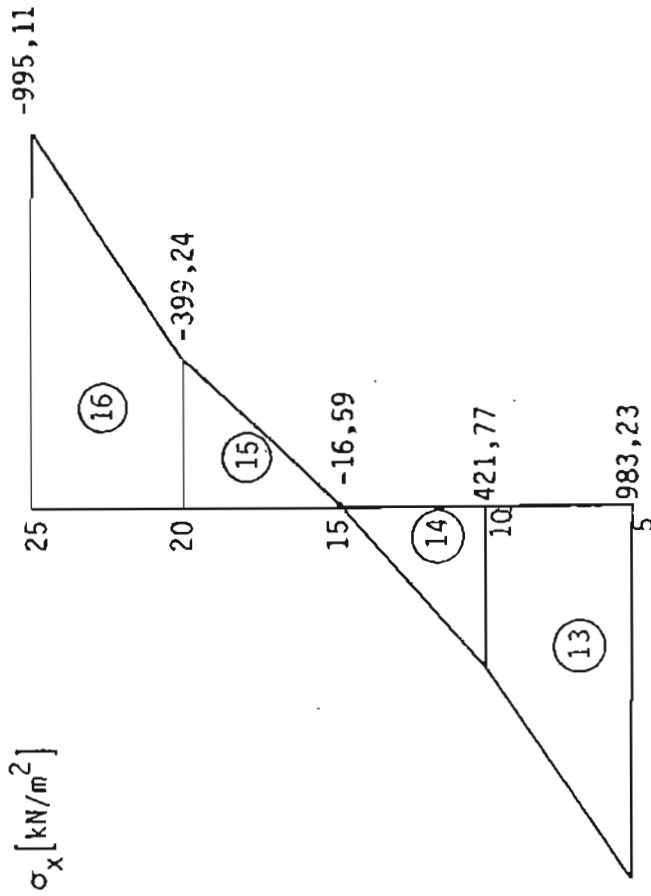


*** SCHEIBENBEISPIEL *** SYSTEMSKIZZE ***
 CAL-GRAF

SCHEIBENBEISPIEL IDEALISIERUNG MIT 16 ELEMENTEN OHNE ZWISCHENKNOTEN

KNOTENVERSCHIEBUNGEN DER SCHEIBE

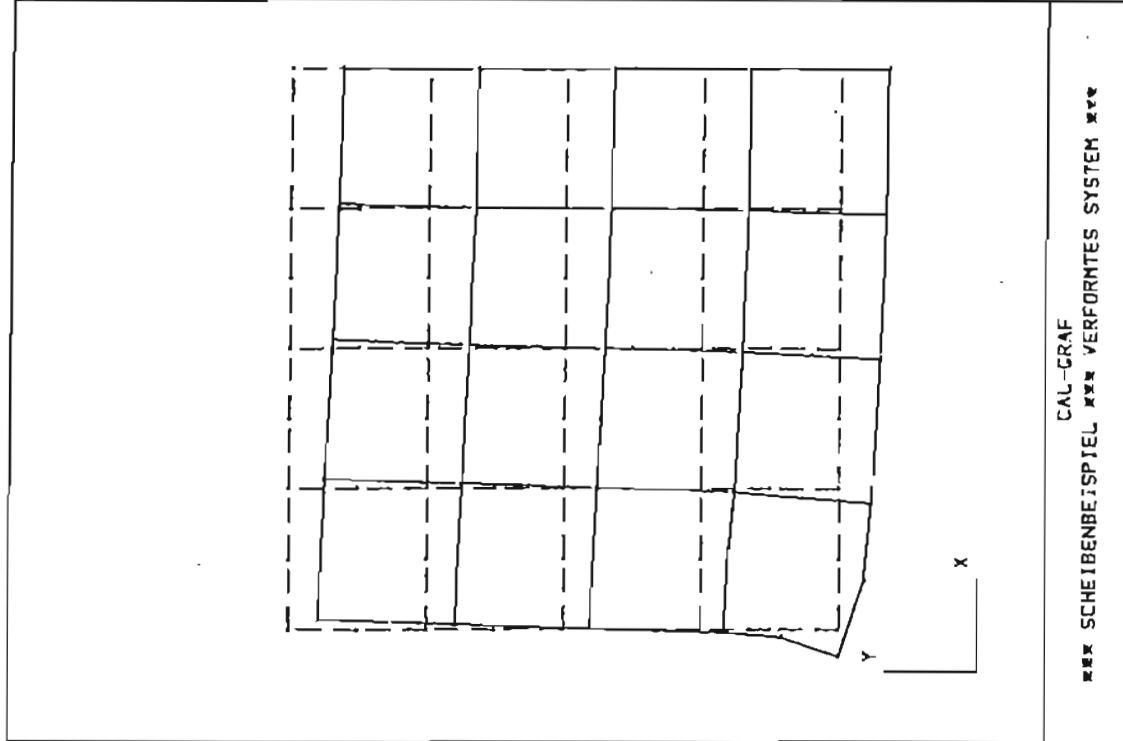
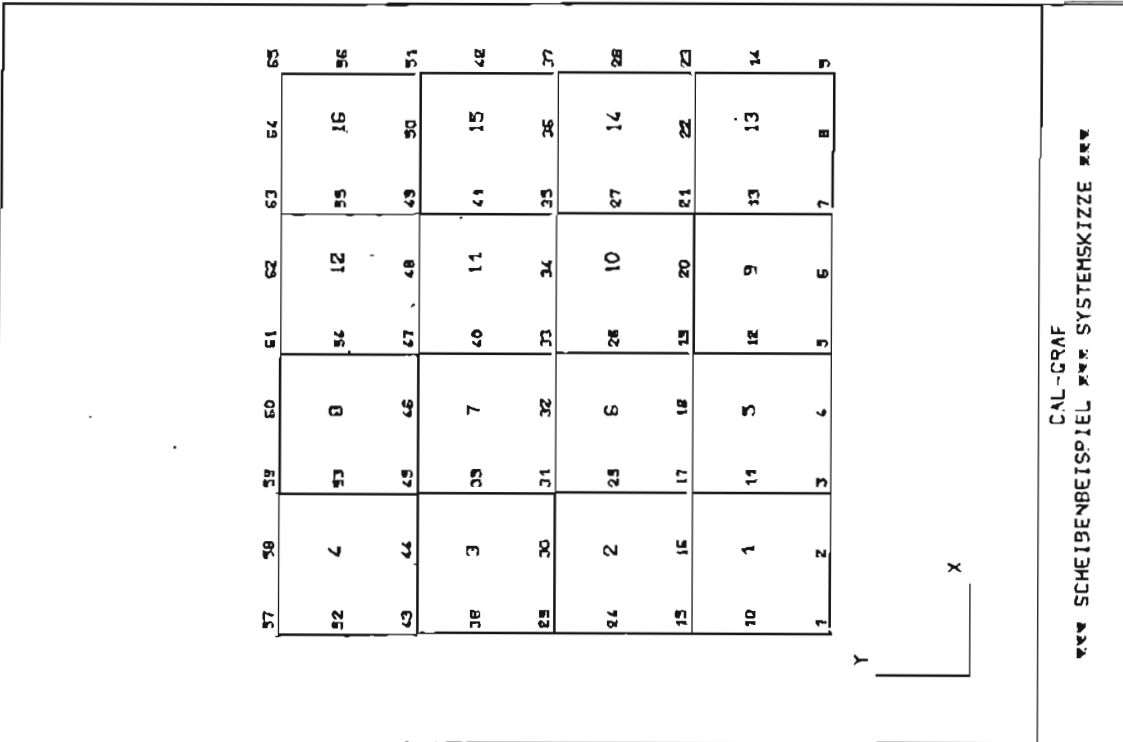
NODE	UX	UY
1	-5.764599E-05	0.000000E+00
2	-4.875655E-05	-7.314254E-05
3	-3.215700E-05	-1.000904E-04
4	-1.638720E-05	-1.156727E-04
5	0.000000E+00	-1.208212E-04
6	-1.105494E-05	-3.683169E-05
7	-1.283460E-05	-7.109081E-05
8	-1.249198E-05	-1.000939E-04
9	-7.029498E-06	-1.158009E-04
10	0.000000E+00	-1.211626E-04
11	4.759767E-06	-5.561552E-05
12	3.869160E-06	-7.608443E-05
13	1.771202E-06	-1.003278E-04
14	2.765055E-07	-1.170337E-04
15	0.000000E+00	-1.227911E-04
16	1.764087E-05	-6.237177E-05
17	1.638189E-05	-8.112397E-05
18	1.253834E-05	-1.031158E-04
19	6.553995E-06	-1.204211E-04
20	0.000000E+00	-1.269380E-04
21	3.495461E-05	-6.372832E-05
22	3.392366E-05	-8.418348E-05
23	2.852188E-05	-1.070622E-04
24	1.658519E-05	-1.259719E-04
25	0.000000E+00	-1.338010E-04



$$M_{5-25} = \frac{0,5}{2} \cdot 0,2 \left[983,25 \cdot \frac{5}{6} + 421,77 + 399,24 + 995,11 \cdot \frac{5}{6} \right] = \frac{123,48 \text{ kNm}}{6}$$

SCHNITTGRÖSSEN DER SCHEIBE

EL-NR	σ_x^4	σ_y^4	τ^4	σ_x^5	σ_y^5	τ^5	σ_x^6	σ_y^6	τ^6
13	9.8323E+02	-2.0486E+01	-1.5445E+02	7.0250E+02	-2.0486E+01	-1.5765E+02	4.2177E+02	-2.0486E+01	-1.6085E+02
14	4.2177E+02	-9.7708E+01	-1.6085E+02	2.0259E+02	-9.7708E+01	-1.6679E+02	-1.6590E+01	-9.7708E+01	-1.7272E+02
15	-1.6590E+01	-2.4882E+02	-1.7272E+02	-2.0792E+02	-2.4882E+02	-1.8412E+02	-3.9924E+02	-2.4882E+02	-1.9551E+02
16	-3.9924E+02	-4.1178E+02	-1.9551E+02	-6.9718E+02	-4.1178E+02	-2.1519E+02	-9.9511E+02	-4.1178E+02	-2.3487E+02



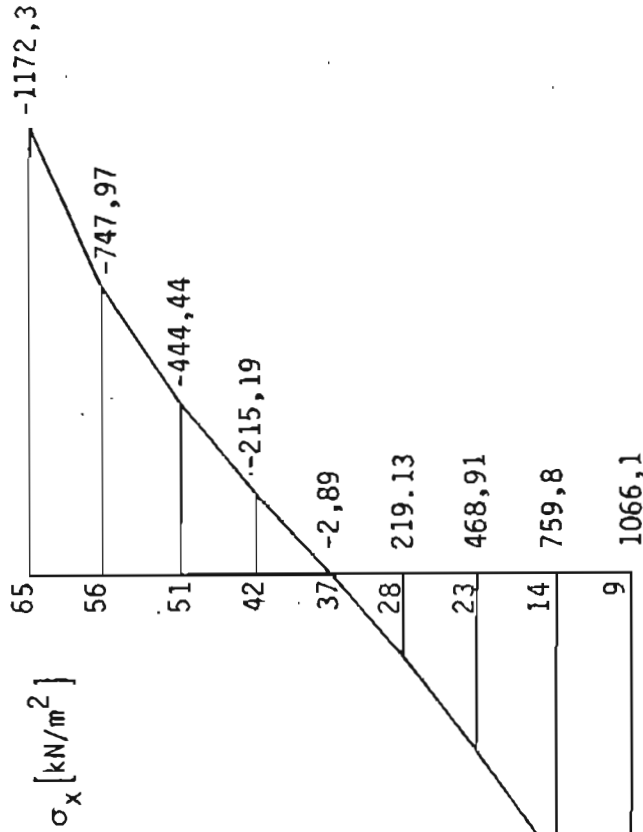
*** SCHEIBENBEISPIEL *** SYSTEMSKIZZE ***

CAL-GRAF
 *** SCHEIBENBEISPIEL *** VERFORMTES SYSTEM ***

SCHEIBENBEISPIEL IDEALISIERUNG MIT 16 ELEMENTEN MIT ZWISCHENKNOTEN

KNOTENVERSCHIEBUNGEN DER SCHEIBE

NODE	UX	UY
1	-9.511179E-05	0.000000E+00
2	-7.493101E-05	-9.156040E-05
3	-4.999029E-05	-1.181979E-04
4	-4.231140E-05	-1.344381E-04
5	-3.520285E-05	-1.467459E-04
6	-2.639809E-05	-1.573774E-04
7	-1.750160E-05	-1.644915E-04
8	-8.817297E-06	-1.685361E-04
9	0.000000E+00	-1.698747E-04
10	-2.519378E-05	-4.530022E-05
11	-3.330772E-05	-1.172998E-04
12	-2.306776E-05	-1.475068E-04
13	-1.232689E-05	-1.642947E-04
14	0.000000E+00	-1.699994E-04
15	-1.092361E-05	-8.446908E-05
16	-1.168844E-05	-9.360732E-05
17	-1.345157E-05	-1.201428E-04
18	-1.434003E-05	-1.350164E-04
19	-1.332282E-05	-1.471909E-04
20	-1.074979E-05	-1.571543E-04
21	-7.408200E-06	-1.644764E-04
22	-3.805858E-06	-1.687554E-04
23	0.000000E+00	-1.701696E-04



$$M_{9-65} = \frac{0,25}{2} \cdot 0,2 \left[1066,1 \cdot \frac{11}{12} + 759,8 \cdot \frac{3}{2} + 468,91 \cdot 1,0 + 219,13 \cdot \frac{1}{2} + 215,19 \cdot \frac{1}{2} + 444,44 \cdot 1,0 + 747,97 \cdot \frac{3}{2} + 1172,3 \cdot \frac{11}{12} \right] = \underline{136,1 \text{ kNm}}$$

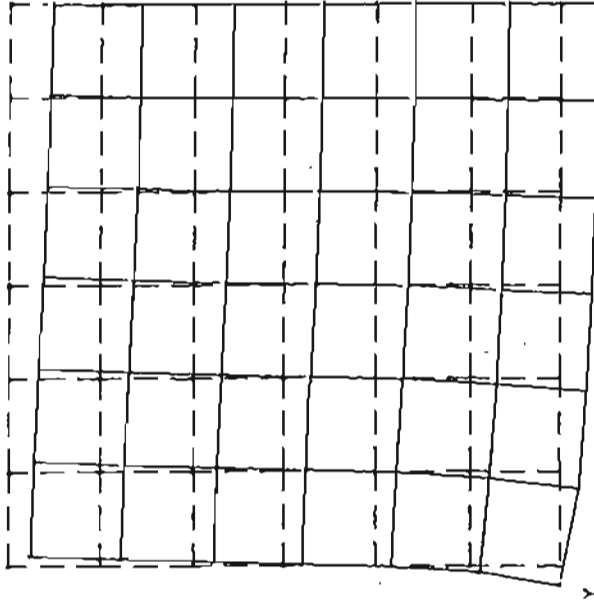
SCHNITTGRÖSSEN DER SCHEIBE

EL-NR	σ_x^4	σ_y^4	τ^4	σ_x^5	σ_y^5	τ^5	σ_x^5	σ_y^5	τ^5
13	1.0661E+03	-1.2225E+01	8.5579E-01	7.5980E+02	-1.7691E+01	-4.0192E+00	4.6891E+02	-2.3158E+01	1.0914E+00
14	4.6891E+02	-3.6567E+01	1.0914E+00	2.1913E+02	-9.9157E+01	-5.6858E-01	-2.8965E+00	-1.6175E+02	-2.4575E+00
15	-2.8965E+00	-1.6471E+02	-2.4575E+00	-2.1519E+02	-2.6102E+02	-3.4911E+00	-4.4444E+02	-3.5732E+02	-9.0341E+00
16	-4.4444E+02	-3.6314E+02	-9.0341E+00	-7.4797E+02	-4.3093E+02	-1.0194E+01	-1.1723E+03	-4.9871E+02	-1.8832E+01

43	44	45	46	47	48	49
5	12	18	24	30	36	36
36	37	38	39	40	41	48
5	11	17	23	29	35	35
29	30	31	32	33	34	35
4	10	16	22	28	34	34
22	23	24	25	26	27	28
3	9	15	21	27	33	33
15	16	17	18	19	20	21
2	8	14	20	26	32	32
8	9	10	11	12	13	14
1	7	13	19	25	31	31
1	2	3	4	5	6	7

Y X

CAL-GRAF
 *** SCHEIBENBEISPIEL *** SYSTEMSKIZZE ***

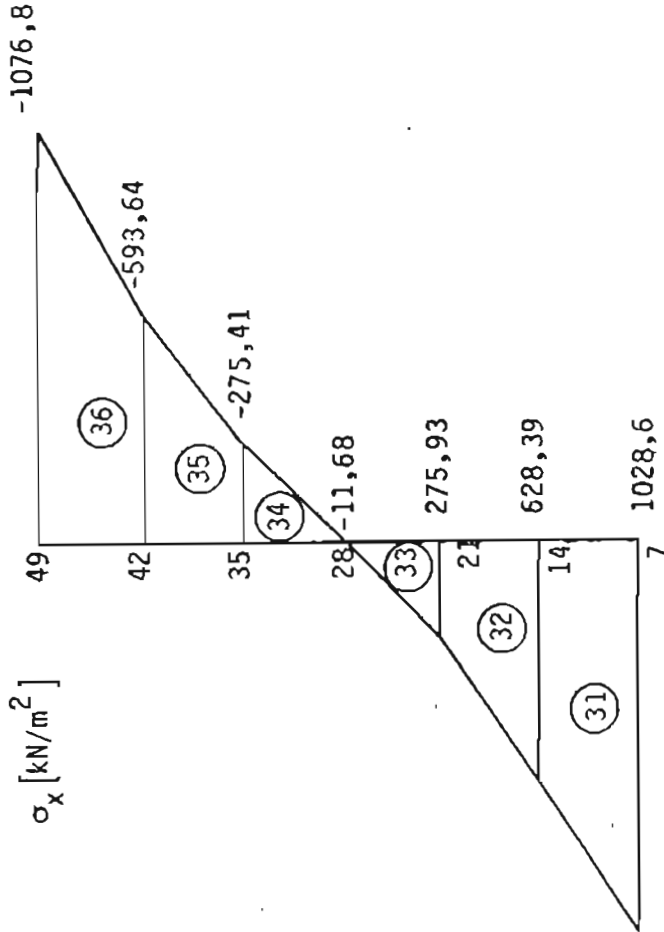


Y X

CAL-GRAF
 *** SCHEIBENBEISPIEL *** VERFORMTES SYSTEM ***

KNOTENVERSCHIEBUNGEN DER SCHEIBE

NODE	UX	UY
1	-6.747980E-05	0.000000E+00
2	-5.907904E-05	-7.262380E-05
3	-4.471132E-05	-9.873432E-05
4	-3.337082E-05	-1.161267E-04
5	-2.254616E-05	-1.279686E-04
6	-1.142879E-05	-1.351555E-04
7	0.000000E+00	<u>-1.375765E-04</u>
8	-2.105812E-05	-3.719106E-05
9	-2.312101E-05	-7.075719E-05
10	-2.361845E-05	-9.859693E-05
11	-1.940547E-05	-1.159144E-04
12	-1.359222E-05	-1.279638E-04
13	-6.982122E-06	-1.352272E-04
14	0.000000E+00	-1.376763E-04



$$M_{7-49} = \frac{0,33}{2} \cdot 0,2 \left[1028,6 \cdot \frac{8}{9} + 628,39 \cdot \frac{4}{3} + 275,93 \cdot \frac{2}{3} + 275,41 \cdot \frac{2}{3} + 593,64 \cdot \frac{4}{3} + 1076,8 \cdot \frac{8}{9} \right] = \underline{128,947 \text{ kNm}}$$

SCHNITTGRÖSSEN DER SCHEIBE

EL-NR	σ_x^4	σ_y^4	τ^4	σ_x^5	σ_y^5	τ^5	σ_x^6	σ_y^6	τ^6
31	<u>1.0286E+03</u>	-9.0730E+00	-1.0895E+02	8.2849E+02	-9.0730E+00	-1.0958E+02	6.2839E+02	-9.0730E+00	-1.1021E+02
32	6.2839E+02	-4.5324E+01	-1.1021E+02	4.5216E+02	-4.5324E+01	-1.1230E+02	2.7593E+02	-4.5324E+01	-1.1440E+02
33	2.7593E+02	-1.1807E+02	-1.1440E+02	1.3212E+02	-1.1807E+02	-1.1788E+02	-1.1685E+01	-1.1807E+02	-1.2137E+02
34	-1.1685E+01	-2.2292E+02	-1.2137E+02	-1.4355E+02	-2.2292E+02	-1.2603E+02	-2.7541E+02	-2.2292E+02	-1.3070E+02
35	-2.7541E+02	-3.4535E+02	-1.3070E+02	-4.3452E+02	-3.4535E+02	-1.3803E+02	-5.9364E+02	-3.4535E+02	-1.4537E+02
36	-5.9364E+02	-4.4945E+02	-1.4537E+02	-8.3524E+02	-4.4945E+02	-1.5875E+02	-1.0768E+03	-4.4945E+02	-1.7213E+02

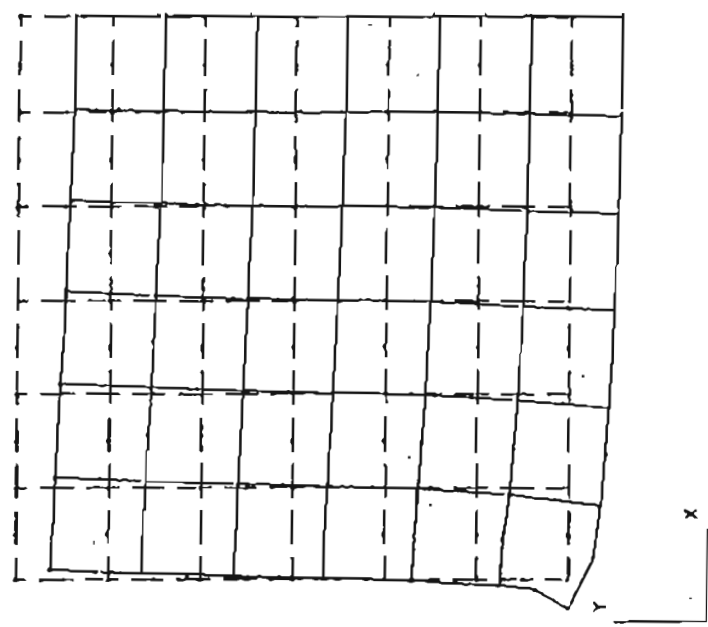
181	182	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133
114	5	115	12	116	18	117	24	118	30	119	36	120
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113
54	5	55	11	56	17	57	23	58	29	59	35	100
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
74	4	75	10	76	16	77	22	78	28	79	34	80
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
54	3	55	9	56	15	57	21	58	27	59	33	60
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
34	2	35	8	36	14	37	20	38	26	39	32	40
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
14	1	15	7	16	13	17	19	18	25	15	31	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

X

Y

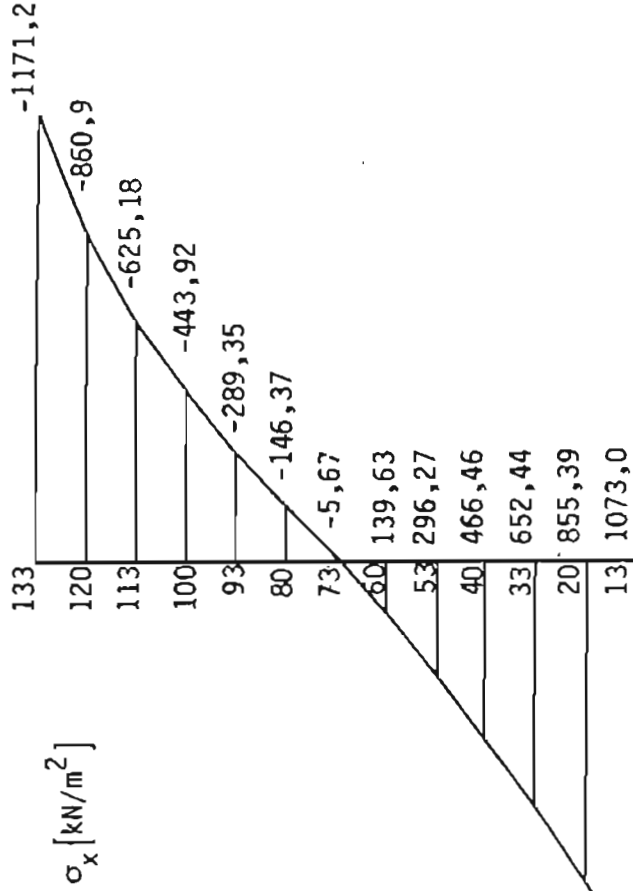
*** SCHEIBENBEISPIEL *** SYSTEMSKIZZE ***

CAL-GRAF
 *** SCHEIBENBEISPIEL *** VERFORMTES SYSTEM ***



KNOTENVERSchieBUNGEN DER SCHEIBE

NOE	UX	UY
1	-1.042850E-04	0.000000E+00
2	-8.407354E-05	-9.087827E-05
3	-5.938417E-05	-1.166302E-04
4	-5.254582E-05	-1.318125E-04
5	-4.693033E-05	-1.433493E-04
6	-4.039311E-05	-1.539499E-04
7	-3.429406E-05	-1.621567E-04
8	-2.882741E-05	-1.687408E-04
9	-2.336045E-05	-1.742490E-04
10	-1.764275E-05	-1.786472E-04
11	-1.182870E-05	-1.817908E-04
12	-5.937808E-06	-1.836722E-04
13	0.000000E+00	-1.843001E-04
14	-3.476060E-05	-4.522893E-05
15	-4.326140E-05	-1.157552E-04
16	-3.471965E-05	-1.440957E-04
17	-2.706698E-05	-1.619373E-04
18	-1.844926E-05	-1.742915E-04
19	-9.407515E-06	-1.817820E-04
20	0.000000E+00	-1.843151E-04

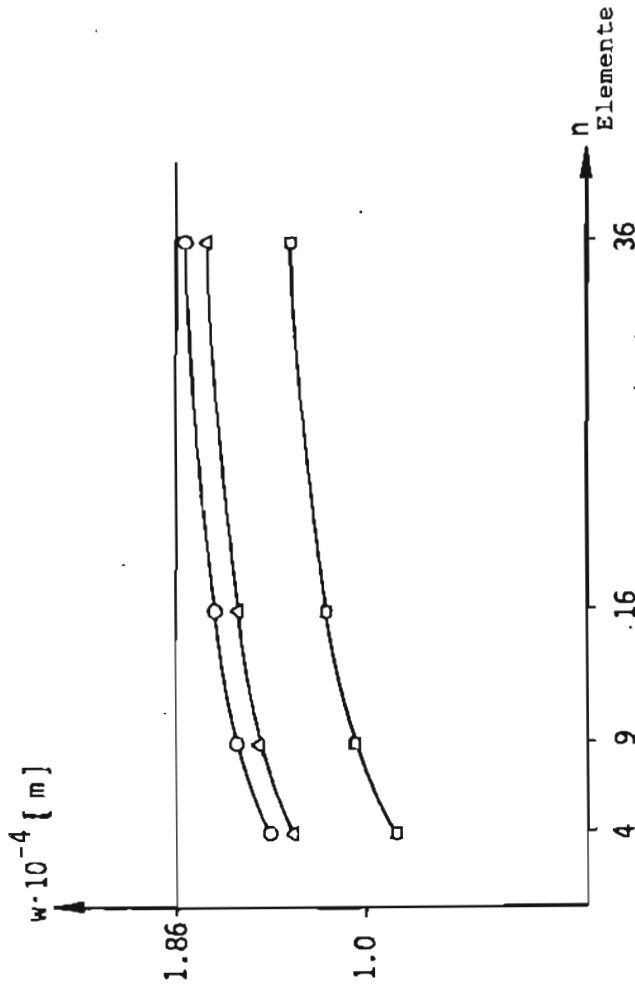


$$M_{13-133} = \frac{0.165}{2} \cdot 0.2 \left[1073.0 \cdot \frac{17}{18} + 855.39 \cdot \frac{5}{3} + 652.44 \cdot \frac{4}{3} + 466.46 \cdot 1.0 + 296.27 \cdot \frac{2}{3} + 139.63 \cdot \frac{1}{3} + 146.37 \cdot \frac{1}{3} + 289.37 \cdot \frac{2}{3} + 443.92 \cdot 1 + 625.18 \cdot \frac{4}{3} + 860.9 \cdot \frac{5}{3} + 1171.2 \cdot \frac{17}{18} \right] = 134.64 \text{ kNm}$$

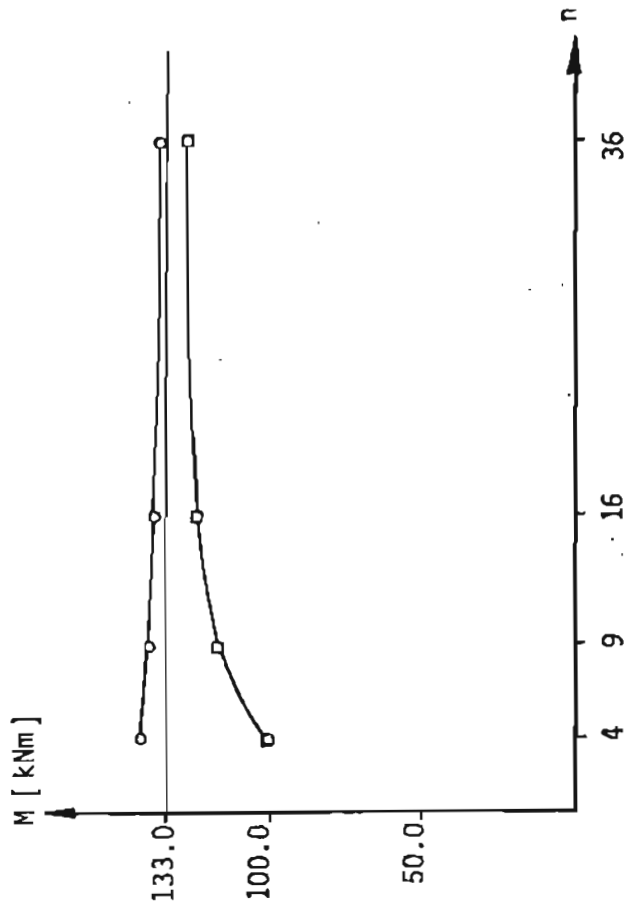
SCHNITTGRÖSSEN DER SCHEIBE

EL-NR	σ_x^4	σ_y^4	τ^4	σ_x^5	σ_y^5	τ^5	σ_x^6	σ_y^6	τ^6
31	1.0730E+03	1.1478E+00	-9.6838E-02	8.5539E+02	-6.5427E+00	-6.0432E-01	6.5244E+02	-1.4242E+01	-4.1633E-01
32	6.5244E+02	-1.4628E+01	-4.1633E-01	4.6646E+02	-4.2516E+01	-2.1405E-01	2.9627E+02	-7.0404E+01	-6.1786E-01
33	2.9627E+02	-6.9830E+01	-6.1786E-01	1.3963E+02	-1.1801E+02	-5.2404E-01	-5.6731E+00	-1.6613E+02	-1.1545E+00
34	-5.6731E+00	-1.6671E+02	-1.1545E+00	-1.4637E+02	-2.2863E+02	-1.0737E+00	-2.8935E+02	-2.9062E+02	-2.0183E+00
35	-2.8935E+02	-2.9137E+02	-2.0183E+00	-4.4392E+02	-3.5433E+02	-1.9237E+00	-6.2518E+02	-4.1728E+02	-4.3877E+00
36	-6.2518E+02	-4.1925E+02	-4.3877E+00	-8.6090E+02	-4.5876E+02	-5.6837E+00	-1.1712E+03	-4.9823E+02	-1.1732E+01

Durchbiegung in der Mitte des unteren Scheibenrandes



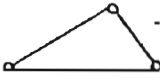
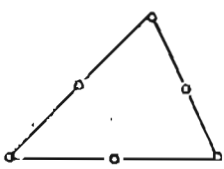
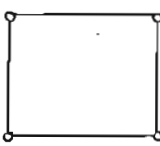
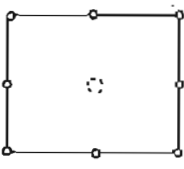
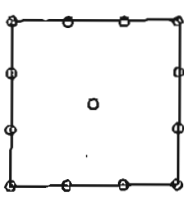
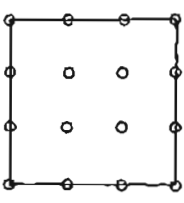
Biegemoment in Scheibenmitte



Elemente ohne Zwischenknoten		Elemente mit Zwischenknoten			
Anzahl der Elemente	Durchbiegung $\cdot 10^{-4}$ [m] \square 2x2 Gauß	Durchbieg. $\cdot 10^{-4}$ [m] \triangle 3x3 Gauß	Durchbieg. $\cdot 10^{-4}$ [m] \circ 2x2 Gauß	Unbekannte	Anzahl der Elemente
4	0.8752	1.3411	1.4273	36	4
9	1.0794	1.5011	1.5998	72	9
16	1.2082	1.6040	1.6987	120	16
36	1.3758	1.7480	1.8430	252	36

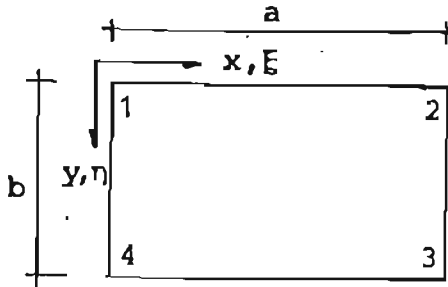
Elemente ohne Zwischenknoten		Elemente mit Zwischenknoten			
Anzahl der Elemente	Unbekannte \square 2x2	Moment [kNm] 3x3	Moment [kNm] \circ 2x2	Unbekannte	Anzahl der Elemente
4	14	141,61	140,69	36	4
9	27	137,95	138,46	72	9
16	44	136,20	136,10	120	16
36	90	134,64	134,64	252	36

3.3 Übersicht: Scheibenelemente

Element	Freiwerte je Knoten	Anzahl je Element	Ansatz (Schema) (für u_x und u_y)	Bemerkungen																
	u_x u_y	6	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>ξ</td></tr> <tr><td>η</td><td></td></tr> </table>	1	ξ	η		CST												
1	ξ																			
η																				
	u_x u_y	12	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>ξ</td><td>ξ^2</td></tr> <tr><td>η</td><td>$\eta \xi$</td><td></td></tr> <tr><td>η^2</td><td></td><td></td></tr> </table>	1	ξ	ξ^2	η	$\eta \xi$		η^2			LST							
1	ξ	ξ^2																		
η	$\eta \xi$																			
η^2																				
	u_x u_y	8	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>ξ</td></tr> <tr><td>η</td><td>$\eta \xi$</td></tr> </table>	1	ξ	η	$\eta \xi$													
1	ξ																			
η	$\eta \xi$																			
	u_x u_y	16 (18)	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>ξ</td><td>ξ^2</td></tr> <tr><td>η</td><td>$\eta \xi$</td><td>$\eta \xi^2$</td></tr> <tr><td>η^2</td><td>$\eta^2 \xi$</td><td>$\eta^2 \xi^2$</td></tr> </table>	1	ξ	ξ^2	η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$	η^2	$\eta^2 \xi$	$\eta^2 \xi^2$								
1	ξ	ξ^2																		
η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$																		
η^2	$\eta^2 \xi$	$\eta^2 \xi^2$																		
	u_x u_y	26	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>ξ</td><td>ξ^2</td><td>ξ^3</td></tr> <tr><td>η</td><td>$\eta \xi$</td><td>$\eta \xi^2$</td><td>$\eta \xi^3$</td></tr> <tr><td>η^2</td><td>$\eta^2 \xi$</td><td>$\eta^2 \xi^2$</td><td></td></tr> <tr><td>η^3</td><td>$\eta^3 \xi$</td><td></td><td></td></tr> </table>	1	ξ	ξ^2	ξ^3	η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$	$\eta \xi^3$	η^2	$\eta^2 \xi$	$\eta^2 \xi^2$		η^3	$\eta^3 \xi$			
1	ξ	ξ^2	ξ^3																	
η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$	$\eta \xi^3$																	
η^2	$\eta^2 \xi$	$\eta^2 \xi^2$																		
η^3	$\eta^3 \xi$																			
	u_x u_y	32	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>ξ</td><td>ξ^2</td><td>ξ^3</td></tr> <tr><td>η</td><td>$\eta \xi$</td><td>$\eta \xi^2$</td><td>$\eta \xi^3$</td></tr> <tr><td>η^2</td><td>$\eta^2 \xi$</td><td>$\eta^2 \xi^2$</td><td>$\eta^2 \xi^3$</td></tr> <tr><td>η^3</td><td>$\eta^3 \xi$</td><td>$\eta^3 \xi^2$</td><td>$\eta^3 \xi^3$</td></tr> </table>	1	ξ	ξ^2	ξ^3	η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$	$\eta \xi^3$	η^2	$\eta^2 \xi$	$\eta^2 \xi^2$	$\eta^2 \xi^3$	η^3	$\eta^3 \xi$	$\eta^3 \xi^2$	$\eta^3 \xi^3$	
1	ξ	ξ^2	ξ^3																	
η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$	$\eta \xi^3$																	
η^2	$\eta^2 \xi$	$\eta^2 \xi^2$	$\eta^2 \xi^3$																	
η^3	$\eta^3 \xi$	$\eta^3 \xi^2$	$\eta^3 \xi^3$																	

4. FINITE-ELEMENT-METHODE FÜR PLATTEN PROBLEME

4.1 Vierknoten-Rechteckelement mit Schubverzerrungen (SRI-Element : shear reduced integration)



normierte Koordinaten:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}$$

Längenverhältnisse:

$$\alpha = \frac{b}{a}, \quad \beta = \frac{a}{b}$$

(analog rechteckigem Scheibenelement mit bilinearem Ansatz)

Knotenfreiheitsgrade :

$$\underline{v}^T = \{ w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4 \mid \varphi_{x1}^* \ \varphi_{x2}^* \ \varphi_{x3}^* \ \varphi_{x4}^* \mid \varphi_{y1}^* \ \varphi_{y2}^* \ \varphi_{y3}^* \ \varphi_{y4}^* \}$$

$$= \{ \quad \underline{\hat{w}} \quad \mid \quad \underline{\hat{\varphi}} \quad \}$$

bilinearer Ansatz:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \varphi_x^* \\ \varphi_y^* \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{v}$$

$$N_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2 = \xi(1 - \eta)$$

$$N_3 = \xi \eta$$

$$N_4 = \eta(1 - \xi)$$

$$\underline{u}(\xi, \eta) = \underline{N}(\xi, \eta) \cdot \underline{v}$$

(s. auch Scheibenelement)

vgl. Gleichung (11) in Kapitel 6.1.1

virtuelle innere Arbeit: (vgl. Kapitel 5.2)

$$\delta W_1 = \int_A \delta \underline{\epsilon}^T \underline{E} \underline{\epsilon} \, dA = \underbrace{\int_A \delta \underline{\kappa}^T \underline{E}_B \underline{\kappa} \, dA}_I + \underbrace{\int_A \delta \underline{Y}^T \underline{E}_Q \underline{Y} \, dA}_II$$

I ergibt Steifigkeitsmatrix aus Biegung \underline{k}_B

II ergibt Steifigkeitsmatrix aus Querkraftverformung \underline{k}_Q

I) Steifigkeitsanteil aus Biegung:

Kinematik:

$$\underline{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & 0 \\ 0 & a_y \\ a_y & a_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_x^* \\ \varphi_y^* \end{bmatrix} = \underline{D}_\kappa \underline{\varphi}^*$$

Operatormatrix \underline{D}_κ wie Operatormatrix \underline{D} der Scheibe
vgl. Umdruck zu Kapitel 3.2

Werkstoffgesetz: (vgl. Kapitel 3.3)

allgemein: $\underline{s} = \underline{E}\underline{\varepsilon}$

zum Vergleich:

Platte (ohne Schubverformungen)

Scheibe (ebener Spannungszustand)

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \underline{B} \begin{bmatrix} x_x \\ x_y \\ 2x_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\underline{s} = \underline{E}_B \cdot \underline{\varepsilon}$$

$$\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$$

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \underline{D} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\underline{s} = \underline{E} \cdot \underline{\varepsilon}$$

Plattensteifigkeit: $\underline{B} = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$

Dehnsteifigkeit: $\underline{D} = \frac{E t}{1-\nu^2}$

$$\Rightarrow \underline{E}_B = \frac{t^2}{12} \underline{E}$$

virtuelle Arbeiten:

Platte

Scheibe

$$\delta W_i = \int_A \delta \underline{\kappa}^T \underline{E}_B \underline{\kappa} dA$$

$$= \frac{t^3}{12} \int_A \delta (\underline{D} \underline{\varphi})^T \underline{E} \underline{D} \underline{\varphi} dA$$

$$t \int_A \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{E} \underline{\varepsilon} dA$$

$$= t \int_A \delta (\underline{D} \underline{u})^T \underline{E} \underline{D} \underline{u} dA$$

$$\underline{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_x^* \\ \varphi_y^* \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

⇒ Steifigkeitsmatrix für
den Biegeanteil \underline{k}_B

⇒ Steifigkeitsmatrix für
die Scheibe \underline{k}_S (vgl. Übung)

$$\underline{k}_B = \frac{t^2}{12} \underline{k}_S$$

Steifigkeitsmatrix aus Biegeverformungen k_B

P_{E4}
 P_{E2}
 P_{E3}
 P_{E4}
 M_{12}
 M_{12}
 M_{23}
 M_{34}
 M_{34}
 M_{12}
 M_{34}
 M_{34}

$$k_B = \frac{E}{24(1-\nu^2)} \frac{t^3}{12}$$

w_1	w_2	w_3	w_4	φ_{11}^e	φ_{22}^e	φ_{33}^e	φ_{44}^e	φ_{11}^e	φ_{22}^e	φ_{33}^e	φ_{44}^e
0	0	0	0	8α $+4\beta(1-\nu)$	-8α $+2\beta(1-\nu)$	-4α $-2\beta(1-\nu)$	4α $-4\beta(1-\nu)$	$3(1+\nu)$	$-3(1-3\nu)$	$-3(1+\nu)$	$3(1-3\nu)$
					8α $+4\beta(1-\nu)$	4α $-2\beta(1-\nu)$	-4α $-2\beta(1-\nu)$	$3(1-3\nu)$	$-3(1+\nu)$	$-3(1-3\nu)$	$3(1+\nu)$
						8α $+4\beta(1-\nu)$	-4α $-2\beta(1-\nu)$	$-3(1+\nu)$	$3(1-3\nu)$	$3(1+\nu)$	$-3(1-3\nu)$
							8α $+4\beta(1-\nu)$	$-3(1-3\nu)$	$3(1+\nu)$	$3(1-3\nu)$	$-3(1+\nu)$
								8β	4β	-4β	-8β
								$+4\alpha(1-\nu)$	$-4\alpha(1-\nu)$	$-2\alpha(1-\nu)$	$+2\alpha(1-\nu)$
									8β	-8β	-4β
										$+4\alpha(1-\nu)$	$-2\alpha(1-\nu)$
											4β
											$+4\alpha(1-\nu)$
											8β
											$+4\alpha(1-\nu)$

vgl. rechteckiges Scheibenelement mit bilinearem Ansatz

! Kräftegrößen in Richtung der unbelasteten positiven UY-Größen! hier spannungsorientiert!

II) Steifigkeitsanteil aus Querkraftverformung:

Kinematik :

$$\underline{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ w \end{bmatrix} = \underline{D}_Y \underline{u}$$

bzw. $\varphi_x = -w_{,x} + \gamma_{xz}$
 $\varphi_y = -w_{,y} + \gamma_{yz}$

$$a_x = \frac{1}{a} a_E, \quad a_y = \frac{1}{b} a_n$$

vgl. Umdruck zu Kapitel 3.2

Querschnittsdrehwinkel :

$$\varphi_x$$

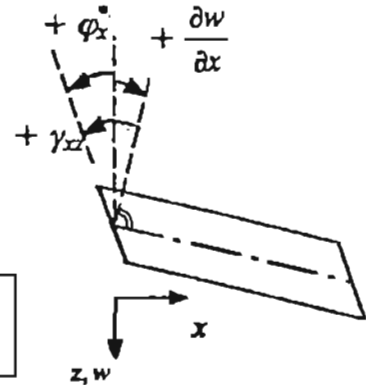
Drehwinkel der Plattenmittelfläche
- Neigung der Biegefläche $w(x,y)$:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w_{,x}$$

Schubverzerrung aus Querkraft :

$$\gamma_{xz}$$

$$\varphi_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_{xz}$$



Werkstoffgesetz :

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \frac{Gt}{1,2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \underline{E}_Q \underline{\gamma}$$

virtuelle Arbeit :

$$\delta W_i = \int_A \delta \underline{\gamma}^T \underline{E}_Q \underline{\gamma} dA = \int_A \delta (\underline{D}_Y \underline{u})^T \underline{E}_Q \underline{D}_Y \underline{u} dA$$

$$= \int_A \delta (\underline{D}_Y \underline{N} \underline{v})^T \underline{E}_Q \underline{D}_Y \underline{N} \underline{v} dA = \underline{v}^T \int_A \underline{B}_Y^T \underline{E}_Q \underline{B}_Y dA \underline{v}$$

$$\underline{k}_Q = \int_A \underline{B}_Y^T \underline{E}_Q \underline{B}_Y dA$$

mit $\underline{B}_Y = \underline{D}_Y \underline{N}$

Formfunktionen der Verzerrungen bzw. Gleichungen $\underline{\underline{\epsilon}}$

$$\underline{\underline{N}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ (1-\epsilon)(1-\eta) & \epsilon(1-\eta) & \eta & (1-\epsilon)\eta \\ (1-\epsilon)(1-\eta) & \epsilon(1-\eta) & \eta & (1-\epsilon)\eta \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}}_{\underline{\underline{y}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{a} \partial_{\epsilon} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} \partial_{\eta} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{N}} \underline{\underline{v}}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{v}}$$

$$\underline{\underline{B}}_{\underline{\underline{y}}} = \underline{\underline{D}}_{\underline{\underline{y}}} \underline{\underline{N}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{v}}$$

$$\underline{\underline{B}}_{\underline{\underline{y}}} = \begin{bmatrix} -(1-\eta)/a & (1-\eta)/a & \eta/a & -\eta/a \\ -(1-\epsilon)/b & \epsilon/b & \eta/b & (1-\epsilon)/b \end{bmatrix}$$

Numerische Integration

1. Integrationschema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ + & \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{x}}$$

+ 1 Integr.-ptk. für γ_{xz}, γ_{yz}
0 4 Integr.-pkt. für $\underline{\underline{\kappa}}$
"exakt"

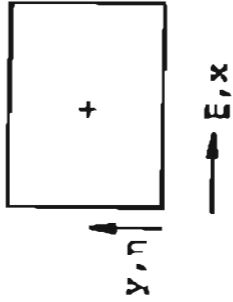
"Reduzierte Integration" der Schubanteile

2. Integrationschema

$$\begin{bmatrix} 0 & + & 0 \\ x & & x \\ 0 & + & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{x}}$$

+ 2 Integr.-Pkte für γ_{xz}
x 2 Integr.-Pkte für γ_{yz}
0 4 Integr.-Pkte für $\underline{\underline{\kappa}}$

"Selektive Integration"



Integrationschema 1: 1 Pkt. - Integration

"Reduzierte Integration" $\hat{=}$ Auswertung von γ_{xz} , γ_{yz} , für $\xi = \eta = 0,5$

$$\hat{\underline{B}}_{\gamma 1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2b} & -\frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

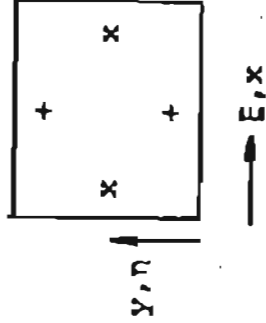
$$\underline{k}_1^Q = \int_A \hat{\underline{B}}_{\gamma 1}^T \underline{E}_Q \hat{\underline{B}}_{\gamma 1} d \quad \longrightarrow \quad \text{Elementmatrix } \underline{k}_1 = \underline{k}_B + \underline{k}_1^Q$$

Integrationschema 2: jeweils zwei Integrationspunkte

"Selektive Integration"

für γ_{xz} zwei in $\eta(y)$ -Richtung $\hat{=}$ Auswertung für $\xi = 0,5$ (+)

für γ_{yz} zwei in $\xi(x)$ -Richtung $\hat{=}$ Auswertung für $\eta = 0,5$ (x)



$$\hat{\underline{B}}_{\gamma 2} = \begin{bmatrix} -\frac{1-\eta}{a} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{\eta}{a} & -\frac{\eta}{a} & \frac{1}{2}(1-\eta) & \frac{1}{2}(1-\eta) & \frac{1}{2}\eta & \frac{1}{2}\eta & 0 \\ -\frac{1-\xi}{b} & -\frac{1-\xi}{b} & \frac{\xi}{b} & \frac{\xi}{b} & 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{2}\xi & \frac{1}{2}\xi & \frac{1}{2}(1-\xi) \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_2^Q = \int_A \hat{\underline{B}}_{\gamma 2}^T \underline{E}_Q \hat{\underline{B}}_{\gamma 2} d \quad \longrightarrow \quad \text{Elementmatrix } \underline{k}_2 = \underline{k}_B + \underline{k}_2^Q$$

Steifigkeitsmatrix aus Querkraftverformungen, Integrationsschema 2 (jeweils 2 Gauß-Pkte.)

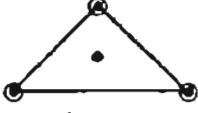
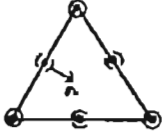
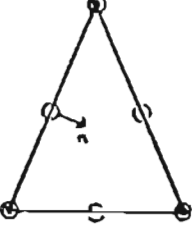


$$[\begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & \varphi_w & \varphi_{x2} & \varphi_{x3} & \varphi_{x4} & \varphi_{y1} & \varphi_{y2} & \varphi_{y3} & \varphi_{y4} \end{matrix}]$$

8α $+8\beta$	-8α $+4\beta$	-4α -4β	4α -8β	-4β	-4β	-2β	-2β	-4α	-2α	-2α	-4α
8α $+8\beta$	8α $+8\beta$	4α -8β	-4α -4β	4β	4β	2β	2β	-2α	-4α	-4α	-2α
	8α $+8\beta$	8α $+8\beta$	-8α $+4\beta$	2β	2β	4β	4β	2α	4α	4α	2α
			8α $+8\beta$	-2β	-2β	-4β	-4β	4α	2α	2α	4α
				$2ab$	$2ab$	ab	ab				
					$2ab$	$2ab$	ab				
						$2ab$	$2ab$				
								$2ab$	ab	ab	$2ab$
									$2ab$	$2ab$	ab
										$2ab$	ab
											$2ab$

$$k_2^Q = \frac{1}{24} \frac{Gt}{l^2}$$

P_{z1}	P_{z2}	P_{z3}	P_{z4}	M_{x1}	M_{x2}	M_{x3}	M_{x4}	M_{y1}	M_{y2}	M_{y3}	M_{y4}
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

4.2 Überblick über verschiedene Plattenelemente

Plattenelemente																																								
Element	Freiwerte je Knoten	Anzahl je Element	Ansatz (Schema)	Bemerkungen																																				
	w $w_{,x}$ $w_{,y}$	9 (10)	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>ξ</td><td>ξ^2</td><td>ξ^3</td></tr> <tr><td>η</td><td>$\eta \xi$</td><td>$\eta \xi^2$</td><td></td></tr> <tr><td>η^2</td><td>$\eta^2 \xi$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η^3</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1	ξ	ξ^2	ξ^3	η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$		η^2	$\eta^2 \xi$			η^3				Der innere Knoten (Schwerpunkt) wird durch Kondensation eliminiert (nicht konformes Element)																				
1	ξ	ξ^2	ξ^3																																					
η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$																																						
η^2	$\eta^2 \xi$																																							
η^3																																								
	w $w_{,x}$ $w_{,y}$ $w_{,n}$	15	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>ξ</td><td>ξ^2</td><td>ξ^3</td><td>ξ^4</td></tr> <tr><td>η</td><td>$\eta \xi$</td><td>$\eta \xi^2$</td><td>$\eta \xi^3$</td><td></td></tr> <tr><td>η^2</td><td>$\eta^2 \xi$</td><td>$\eta^2 \xi^2$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η^3</td><td>$\eta^3 \xi$</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η^4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1	ξ	ξ^2	ξ^3	ξ^4	η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$	$\eta \xi^3$		η^2	$\eta^2 \xi$	$\eta^2 \xi^2$			η^3	$\eta^3 \xi$				η^4																
1	ξ	ξ^2	ξ^3	ξ^4																																				
η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$	$\eta \xi^3$																																					
η^2	$\eta^2 \xi$	$\eta^2 \xi^2$																																						
η^3	$\eta^3 \xi$																																							
η^4																																								
	w $w_{,x}$ $w_{,y}$ $w_{,xx}$ $w_{,yy}$ $w_{,xy}$ $w_{,n}$	21	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>ξ</td><td>ξ^2</td><td>ξ^3</td><td>ξ^4</td><td>ξ^5</td></tr> <tr><td>η</td><td>$\eta \xi$</td><td>$\eta \xi^2$</td><td>$\eta \xi^3$</td><td>$\eta \xi^4$</td><td></td></tr> <tr><td>η^2</td><td>$\eta^2 \xi$</td><td>$\eta^2 \xi^2$</td><td>$\eta^2 \xi^3$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η^3</td><td>$\eta^3 \xi$</td><td>$\eta^3 \xi^2$</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η^4</td><td>$\eta^4 \xi$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η^5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1	ξ	ξ^2	ξ^3	ξ^4	ξ^5	η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$	$\eta \xi^3$	$\eta \xi^4$		η^2	$\eta^2 \xi$	$\eta^2 \xi^2$	$\eta^2 \xi^3$			η^3	$\eta^3 \xi$	$\eta^3 \xi^2$				η^4	$\eta^4 \xi$					η^5						quintisches Element (vgl. Witkin / Bell)
1	ξ	ξ^2	ξ^3	ξ^4	ξ^5																																			
η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$	$\eta \xi^3$	$\eta \xi^4$																																				
η^2	$\eta^2 \xi$	$\eta^2 \xi^2$	$\eta^2 \xi^3$																																					
η^3	$\eta^3 \xi$	$\eta^3 \xi^2$																																						
η^4	$\eta^4 \xi$																																							
η^5																																								
	w $w_{,x}$ $w_{,y}$	12	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>ξ</td><td>ξ^2</td><td>ξ^3</td></tr> <tr><td>η</td><td>$\eta \xi$</td><td>$\eta \xi^2$</td><td>$\eta \xi^3$</td></tr> <tr><td>η^2</td><td>$\eta^2 \xi$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η^3</td><td>$\eta^3 \xi$</td><td></td><td></td></tr> </table>	1	ξ	ξ^2	ξ^3	η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$	$\eta \xi^3$	η^2	$\eta^2 \xi$			η^3	$\eta^3 \xi$			(vgl. SRI-Element bei linearem Ansatz) (nicht konformes Element)!																				
1	ξ	ξ^2	ξ^3																																					
η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$	$\eta \xi^3$																																					
η^2	$\eta^2 \xi$																																							
η^3	$\eta^3 \xi$																																							
	w $w_{,x}$ $w_{,y}$ $w_{,xy}$	16	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>ξ</td><td>ξ^2</td><td>ξ^3</td></tr> <tr><td>η</td><td>$\eta \xi$</td><td>$\eta \xi^2$</td><td>$\eta \xi^3$</td></tr> <tr><td>η^2</td><td>$\eta^2 \xi$</td><td>$\eta^2 \xi^2$</td><td>$\eta^2 \xi^3$</td></tr> <tr><td>η^3</td><td>$\eta^3 \xi$</td><td>$\eta^3 \xi^2$</td><td>$\eta^3 \xi^3$</td></tr> </table>	1	ξ	ξ^2	ξ^3	η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$	$\eta \xi^3$	η^2	$\eta^2 \xi$	$\eta^2 \xi^2$	$\eta^2 \xi^3$	η^3	$\eta^3 \xi$	$\eta^3 \xi^2$	$\eta^3 \xi^3$	(vgl. Schäfer)																				
1	ξ	ξ^2	ξ^3																																					
η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$	$\eta \xi^3$																																					
η^2	$\eta^2 \xi$	$\eta^2 \xi^2$	$\eta^2 \xi^3$																																					
η^3	$\eta^3 \xi$	$\eta^3 \xi^2$	$\eta^3 \xi^3$																																					

5. ERGÄNZENDE KAPITEL

5.1 Interpolation (Wahl von Ansatzfunktionen)

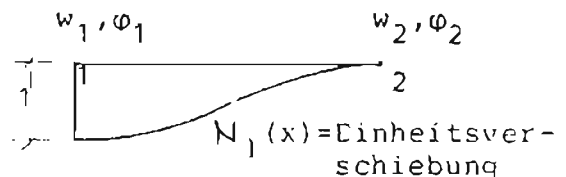
Bei der Aufstellung von Finite-Element-Modellen werden die über das Element verlaufenden Funktionen der Verschiebungen oder Spannungen durch gewählte Ansätze bereichsweise angenähert. Da man bei der FEM mit Knotengrößen operiert, stellt man den jeweiligen Funktionsverlauf durch diskrete Werte an ausgezeichneten Knotenpunkten des Elementes dar. Diese Funktionen, die den Verlauf einer Zustandsgröße in Abhängigkeit von Knotengrößen darstellen, nennt man Interpolationsfunktionen N . Anschaulich sind sie z.B. als Einheitsverschiebung über das Element zu deuten.

Am Knoten i : $N_i(\xi_i, \eta_i) = 1,$

am Knoten $j \neq i$: $N_i(\xi_j, \eta_j) = 0.$

Beispiel: Durchbiegung w

$$w = N_1 w_1 + N_2 \varphi_1 + N_3 w_2 + N_4 \varphi_2$$



An die Interpolationsfunktionen werden folgende Forderungen gestellt:

1. Die Funktion muß bis zum Grad $(m-1)$ stetig differenzierbar sein. Dabei bedeutet m die höchste Ableitung, die im Variationsprinzip auftritt. Ebenso muß auf den Rändern die Ableitung von der Ordnung $m-1$ stetig sein. Erfüllt werden diese Bedingungen z.B. durch vollständige Polynome des Grades m .
2. Der Ansatz muß in der Lage sein, Starrkörperverschiebungen richtig wiederzugeben.
3. Die gewählten Funktionen sollten von so hoher Ordnung sein, daß der Verlauf der Spannungen bzw. Dehnungen wenigstens konstant angenähert wird.
4. Der Ansatz muß vollständig sein, d.h. alle Glieder der Polynome bis zur Ordnung m müssen vorhanden sein.
5. Der Ansatz soll drehinvariant sein, d.h. wenn Terme $\xi^m \eta^n$ verwendet werden, dann müssen auch die Terme $\xi^n \eta^m$ mitgenommen werden.

6. Der Ansatz muß linear unabhängige Funktionen enthalten.
Oft ist die Drehinvarianz der Ansätze wichtiger als die Vollständigkeit, z.B. bei Polynomansätzen für dreieckförmige Elemente. Dann müssen die Ansätze N_i zumindest linear unabhängig sein, d.h. es muß gelten:

$$\sum_i \alpha_i N_i \neq 0 \quad \text{wobei nicht alle } \alpha_i \text{ Null sein dürfen}$$

7. Die Anzahl der Terme sollte durch die Anzahl der Knoten teilbar sein.

Diese Bedingungen können nicht immer befriedigt werden, bzw. werden bewußt verletzt, um eine einfachere Formulierung zu erhalten. Es besteht dann jedoch die Möglichkeit, daß die Lösung nicht mehr gegen den richtigen Wert konvergiert.

5.1.1 Polynomansätze

Die einfachste Methode, Interpolationsfunktionen zu entwickeln, ist durch die Wahl eines Polynomansatzes gegeben. Im weiteren wird das Vorgehen anhand von Ansätzen für Weggrößen veranschaulicht.

1D-dimensionaler Ansatz für die Verschiebung $u(\xi)$

$$u = \hat{u}_1 + \hat{u}_2 \xi + \hat{u}_3 \xi^2 + \hat{u}_4 \xi^3 + \dots$$

$$= \underline{N}_u \hat{u}$$

mit

$$\underline{N}_u = (1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3 \quad \dots)$$

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \end{bmatrix} ; \quad \hat{u}; \text{ generalisierte Parameter (Freiwerte)}$$

Die Anzahl n der generalisierten Freiwerte \hat{u} entspricht in der Regel der Anzahl aller Knotenfreiheitsgrade.

Die generalisierten Freiwerte \hat{u} besitzen keine mechanische Bedeutung. Deshalb werden sie durch die Knotengrößen v_i als neue, mechanisch sinnvolle Unbekannte ersetzt

$$\underline{v} = \underline{H} \hat{\underline{u}}$$

Die Matrix \underline{H} erhält man, indem die Polynome an den Knoten ausgewertet werden. Es ergeben sich so viele Gleichungen, wie Freiheitsgrade (unbekannte Knotengrößen) vorhanden sind. Somit ist \underline{H} von der Größe $(n \times n)$ und mit diskreten Werten belegt.

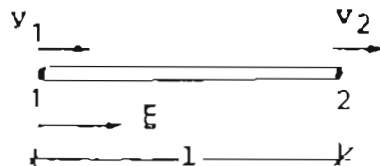
$$\hat{\underline{u}} = \underline{H}^{-1} \underline{v} = \underline{G} \underline{v}$$

Einsetzen in die Ansatzfunktion ergibt:

$$u = \underline{N}_u \underline{H}^{-1} \underline{v} = \underline{N} \underline{v} \quad \text{mit} \quad \underline{N}(\xi, \eta) = \underline{N}_u \underline{H}^{-1} = \underline{N}_u \underline{G}$$

In dieser Gleichung erkennt man die Kopplung zwischen der Verschiebung u und einzelnen Knotengrößen v_i , also ist \underline{N} unsere gesuchte Interpolationsfunktion.

Beispiel: Fachwerkstab



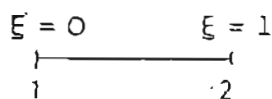
$$\xi = \frac{x}{l}$$

$$\xi = [0, 1]$$

zwei Knoten mit jeweils einer Verschiebung v_i

$$\rightarrow n = 2$$

$$u = \hat{u}_1 + \hat{u}_2 \xi = [1 \quad \xi] \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} = \underline{N}_u \hat{\underline{u}}$$



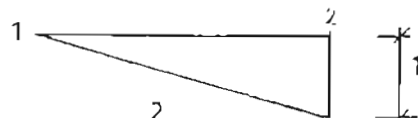
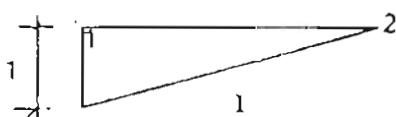
$$u(\xi=0) = u_{x1} = 1 \cdot \hat{u}_1 + 0 \cdot \hat{u}_2$$

$$u(\xi=1) = u_{x2} = 1 \cdot \hat{u}_1 + 1 \cdot \hat{u}_2$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} = \underline{H} \hat{\underline{u}}$$

$$u = [1 \quad \xi] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = [(1-\xi) \quad \xi] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underline{N}(\xi) \underline{v}$$

$$= \underline{H}^{-1}$$



Das Beispiel zeigt, daß die Forderung nach der Darstellbarkeit von Starrkörperverschiebungen durch Polynome erfüllt wird, die konstante und lineare Terme enthalten. Der erforderliche Grad eines Polynoms ist abhängig von der höchsten benötigten Ableitung.

Zweidimensionaler Ansatz für Verschiebung $u(\xi, \eta)$

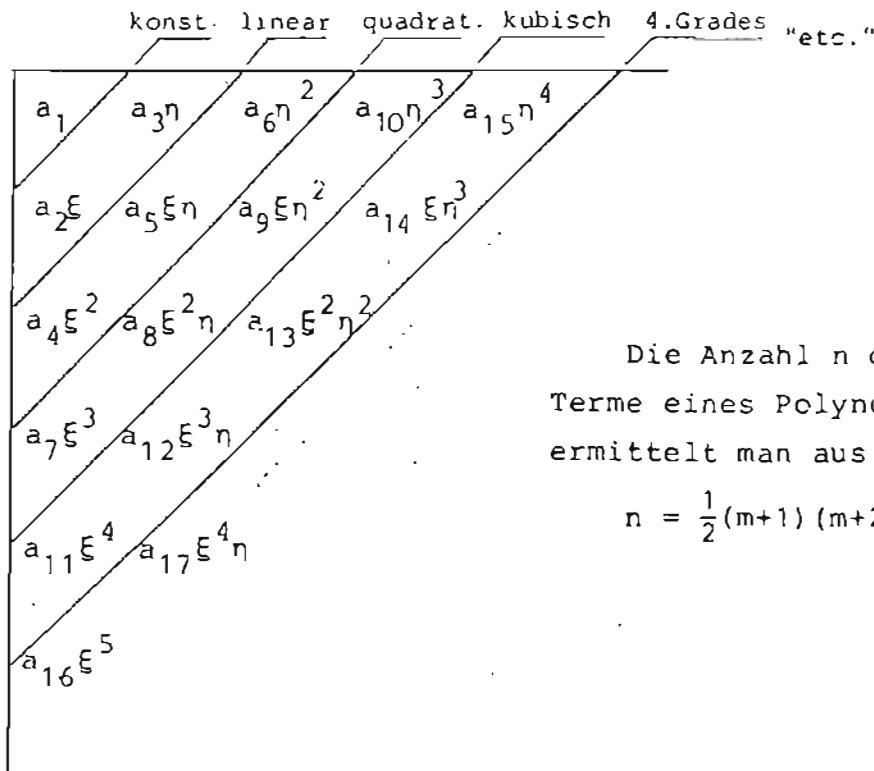
$$u = \hat{u}_1 + \hat{u}_2 \xi + \hat{u}_3 \eta + \hat{u}_4 \xi^2 + \hat{u}_5 \xi\eta + \dots$$

$$= \underline{N}_u \hat{u}$$

mit $\underline{N}_u = (1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \eta\xi \quad \dots)$

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Die Vollständigkeit eines Polynoms in zwei Variablen kann mittels des Pascal'schen Dreiecks verdeutlicht werden:



Die Anzahl n der vorhandenen Terme eines Polynoms vom Grad m ermittelt man aus:

$$n = \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$$

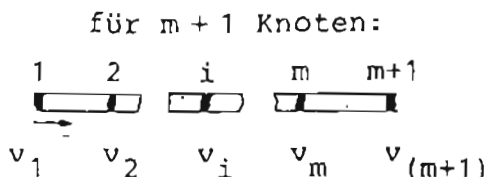
Analog wird für Polynome in Abhängigkeit von drei Variablen ein Pascal'scher Tetraeder entwickelt.

5.1.2 Lagrange'sche Interpolation

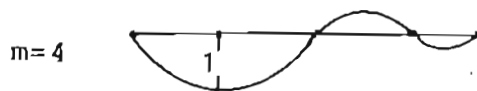
Bei der Lagrange'schen Interpolation wird der Verlauf der Zustandsgrößen direkt in Abhängigkeit von den Knotenfreiheitsgraden definiert

Eindimensionaler Fall in kartesischen Koordinaten:

$$u = \sum_{i=1}^{m+1} N_i(\xi) v_i = \underline{N} \underline{v}$$



$$\text{mit } N_i(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_{m+1})}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \dots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_{m+1})}$$



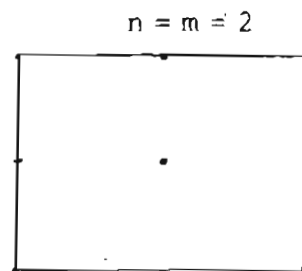
An der Stelle $\xi = \xi_i$ hat $N_i(\xi)$ den Wert 1, an allen übrigen Stützstellen $\xi = \xi_k, k \neq i$ erhält man den Wert 0. $N_i(\xi)$ repräsentiert also wieder die Einheitsverschiebungszustände.

Für rechteckige ebene und prismatische Elemente sind die Interpolationsfunktionen entsprechend zu erweitern:

Zweidimensionaler Fall in kartesischen Koordinaten:

Beispiel: ebenes Element:

$$u = N_{1\xi} N_{1\eta} v_1 + N_{2\xi} N_{1\eta} v_2 + N_{3\xi} N_{1\eta} v_3 + N_{1\xi} N_{2\eta} v_4 + N_{2\xi} N_{2\eta} v_5 + N_{3\xi} N_{2\eta} v_6 + N_{1\xi} N_{3\eta} v_7 + N_{2\xi} N_{3\eta} v_8 + N_{3\xi} N_{3\eta} v_9 = \underline{N} \underline{v}$$



Punkte für biquadratische Form von $\underline{N}(\xi, \eta)$

$$u = \begin{bmatrix} N_{1\xi} & N_{2\xi} & N_{3\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_4 & v_5 & v_6 \\ v_7 & v_8 & v_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1\eta} \\ N_{2\eta} \\ N_{3\eta} \end{bmatrix} = \underline{N}_\xi^T \underline{R} \underline{N}_\eta$$

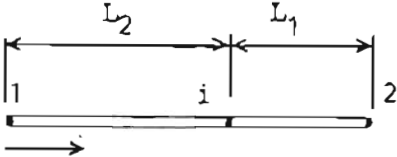
Zweidimensionale Lagrange'sche Interpolationen enthalten das Polynom vom Grad m vollständig, ebenso aber noch weitere Terme bis zum Grad $2m$. Da die Konvergenz des Verfahrens vom vollständigen Polynom mit dem höchsten Grad bestimmt wird, ist es zweckmäßig, entsprechende Terme zu eliminieren (z.B. Innenknoten), so daß die Interpolationsfunktionen nur von Eck- und Randpunkten abhängen.

Da es sinnvoll ist, bei Dreiecks- und Tetraederelementen homogene Koordinaten zu verwenden, sollen die Interpolationsfunktionen auch für diese Fälle angegeben werden.

Eindimensionaler Fall in homogenen Koordinaten:

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2$$

$$1 = L_1 + L_2$$

$$L_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \text{und} \quad L_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$


Im weiteren wird folgende Knotenbezeichnung verwendet:

z.B.: $m = 2$



Damit ergibt sich für die Lagrange'sche Interpolationsfunktion bei äquidistenter Unterteilung:

$$N_i = \frac{mL_1 - 1 + 1}{1} \cdot \frac{mL_1 - 2 + 1}{2} \cdot \frac{mL_1 - 3 + 1}{3} \cdots \frac{mL_1 - i + 1}{i}$$

$$= \prod_{j=1}^i \left(\frac{mL_1 - j + 1}{j} \right) \quad \text{für } i \geq 1$$


$$= 1 \quad \text{für } i = 0$$

$N_i(L_2)$ analog

Wird mit p und q jeweils die Anzahl der Knoten bezeichnet, die rechts bzw. links vom betrachteten Punkt liegen, so erhält man die vollständige Funktion zu:

$$N_{pq}(L_1, L_2) = N_p(L_1) N_q(L_2)$$

Beispiel: $p=2; q=0$ $q=p=1$ $p=0; q=2$

$m = 2$  $u = N_{20}u_{20} + N_{11}u_{11} + N_{02}u_{02}$

$$N_0(L_1) = 1$$

$$N_0(L_2) = 1$$

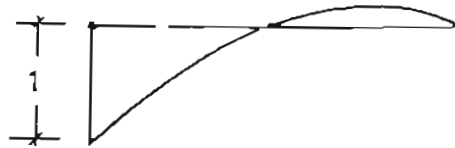
$$N_1(L_1) = 2L_1$$

$$N_1(L_2) = 2L_2$$

$$N_2(L_1) = L_1(2L_1 - 1)$$

$$N_2(L_2) = L_2(2L_2 - 1)$$

$$N_{20}(L_1, L_2) = N_2(L_1) N_0(L_2) \\ = L_1(2L_1 - 1)$$



$$N_{11}(L_1, L_2) = N_1(L_1) N_1(L_2) \\ = 4L_1 L_2$$



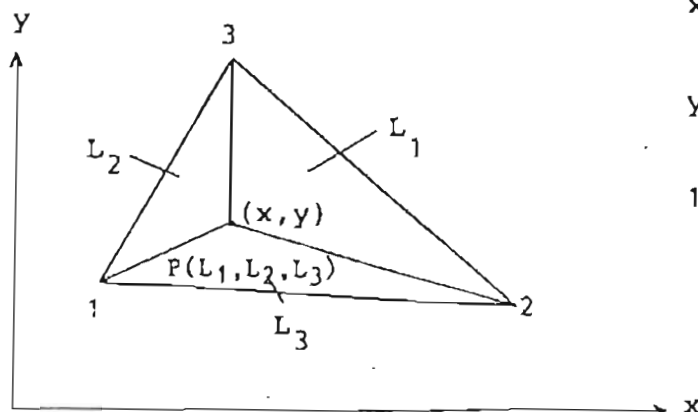
$$N_{02}(L_1, L_2) = N_0(L_1) N_2(L_2) \\ = L_2(2L_2 - 1)$$



$$u(L_1, L_2) = L_1(2L_1 - 1)u_{20} + 4L_1L_2 u_{11} + L_2(2L_2 - 1)u_{02}$$

Zweidimensionaler Fall in homogenen Koordinaten:

Homogene Dreiecks-Koordinaten: Lineare Beziehung zu kartesischen Koordinaten



$$x = L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3$$

$$y = L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3$$

$$\text{Flächeninhalt: } \Delta = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

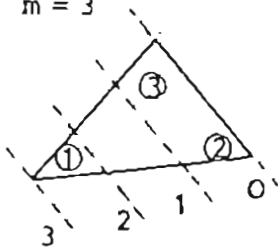
Aus obigem Gleichungssystem folgt:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2\Delta} (a_1 + b_1 x + c_1 y) & \text{mit} & \quad a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ L_2 &= \frac{1}{2\Delta} (a_2 + b_2 x + c_2 y) & & \quad b_1 = y_2 - y_3 \\ L_3 &= \frac{1}{2\Delta} (a_3 + b_3 x + c_3 y) & & \quad c_1 = x_3 - x_2 \\ & & & \quad \vdots \\ & & & \quad \text{zyklisch weiter} \\ & & & \quad \vdots \end{aligned}$$

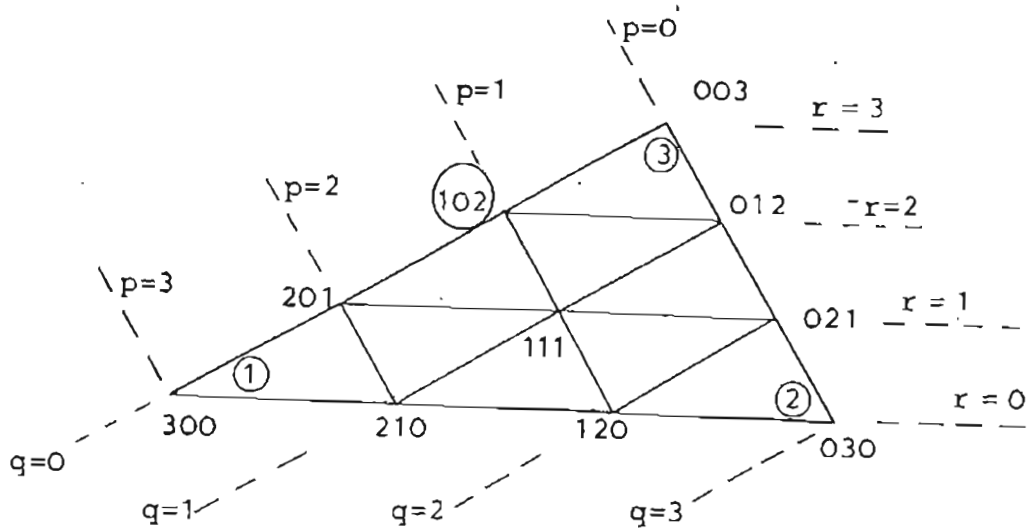
Für Dreieckselemente werden ähnliche Interpolationsfunktionen abgeleitet. Die Knotenbezeichnung wird folgendermaßen aufgebaut: Es werden m äquidistante Parallelen zu einer Seite des Dreiecks gezogen und bei der Dreiecksseite mit Null beginnend durchnummeriert.

z.B. für Seite 1

$m = 3$



Geschieht dies für jede Seite, so ergeben sich die Knoten als Schnittpunkte der Parallelen und Dreiecksseiten und die dreistelligen Knotennummern aus den entsprechenden Einzelziffern.



$$N_{pqr}(L_1, L_2, L_3) = N_p(L_1) N_q(L_2) N_r(L_3)$$

Die Verwendung von Dreieckskoordinaten hat den Vorteil, daß sich immer vollständige Polynome des entsprechenden Grades als Interpolationsfunktionen ergeben. Analoges Vorgehen gilt für Tetraederelemente. Ein weiterer Vorteil bei der Herleitung der Steifigkeitsmatrizen ist, daß die Integrale geschlossen ausgewertet werden können:

$$\int_F L_1^a L_2^b L_3^c dF = \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!} 2F$$

können:

5.1.3 Hermite'sche Interpolation

Die Hermite'sche Interpolation berücksichtigt zusätzlich noch die erste Ableitung an den Stützstellen, desweiteren können aber auch höhere Ableitungen eingeführt werden. So benötigt man z.B. bei Biegeproblemen die Durchbiegung und die Verdrehung als Knotenfreiheitsgrade.

Der Ansatz lautet somit in allgemeiner Form:

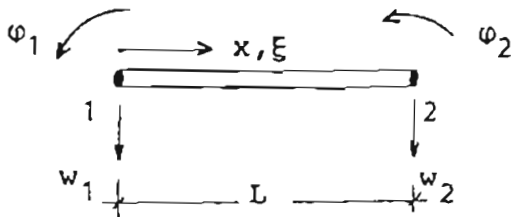
Eindimensionaler Fall in kartesischen Koordinaten:

$$u = N_1 v_1 + N_2 v_1' + N_3 v_1'' + \dots + N_m v_1^{(m-1)} \\ + N_{m+1} v_2 + N_{m+2} v_2' + \dots + N_{2m} v_2^{(m-1)}$$

Für die $2m$ Interpolationsfunktionen N_i wird ein Polynomansatz vom Grad $2m-1$ ($2m$ Koeffizienten) gemacht:

$$N_i = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + \dots + a_{2m} \xi^{(2m-1)}$$

Wird die Verformung u oder eine entsprechende Ableitung als der Einheitsverformungszustand eines bestimmten Freiheitsgrades v_i konstruiert ($u = N_i \cdot v_i$), so muß N_i den Wert 1 annehmen. Gleichzeitig nimmt N_i bei der Entwicklung nach den übrigen $(2m-1)$ Freiheitsgraden den Wert 0 an. Diese $2m$ Gleichungen bestimmen die Interpolationsfunktionen. Die Herleitung soll an einem Biegeelement als Beispiel verdeutlicht werden.



$$\varphi = - \frac{dw}{dx} = -w'$$

$$\xi = \frac{x}{L}$$

$$w(\xi) = N_1 w_1 + N_2 \varphi_1 + N_3 w_2 + N_4 \varphi_2$$

Bestimmung von N_1 :

$$N_1 = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + a_4 \xi^3$$



$$\xi = 0 \quad N_1 = 1 \quad \rightarrow \quad 1 = a_1$$

$$\xi = 0 \quad N_1' = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{a_2}{L}$$

$$\xi = 1 \quad N_1 = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\xi = 1 \quad N_1' = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{1}{L}(a_2 + 2a_3 + 3a_4)$$

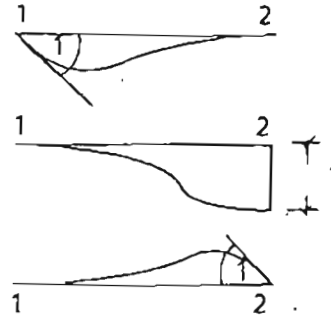
$$a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -3 \quad a_4 = 2$$

$$N_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

analog: $N_2 = -E L (\xi - 1)^2$

$N_3 = 3E^2 - 2E^3$

$N_4 = -E^2 L (\xi - 1)$

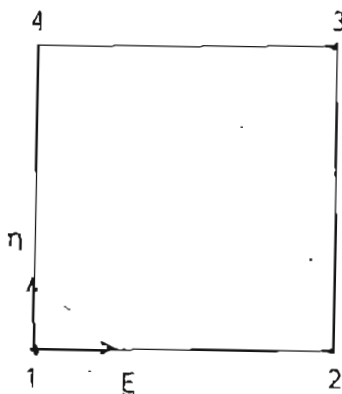


$w(\xi) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)w_1 - E(\xi - 1)^2 L \varphi_1 + (3\xi^2 - 2\xi^3)w_2 - E^2(\xi - 1)L \varphi_2$

Zweidimensionaler Fall in kartesischen Koordinaten:

Ähnlich wie für die Lagrange'sche Interpolation kann auch hier die Erweiterung für Rechteckelemente vorgenommen werden. Der Ansatz lautet dann:

$$u = \begin{bmatrix} N_{1\xi} & N_{2\xi} & N_{3\xi} & N_{4\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_{\eta 1} & v_4 & v_{\eta 4} \\ v_{\xi 1} & v_{\xi \eta 1} & v_{\xi 4} & v_{\xi \eta 4} \\ v_2 & v_{\eta 2} & v_3 & v_{\eta 3} \\ v_{\xi 2} & v_{\xi \eta 2} & v_{\xi 3} & v_{\xi \eta 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1\eta} \\ N_{2\eta} \\ N_{3\eta} \\ N_{4\eta} \end{bmatrix} = \underline{N}_{\xi}^T \underline{R} \underline{N}_{\eta}$$



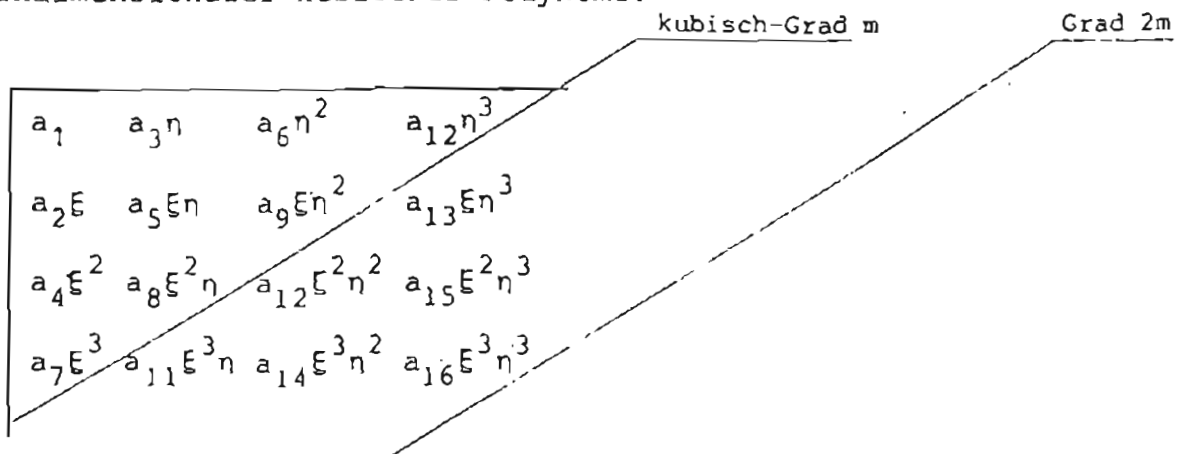
Freiheitsgrade je Knoten:

$v, v_{\xi}, v_{\eta}, v_{\xi\eta}$

$v_{\xi\eta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}$

$v_{\xi} = \frac{\partial v}{\partial \xi}$

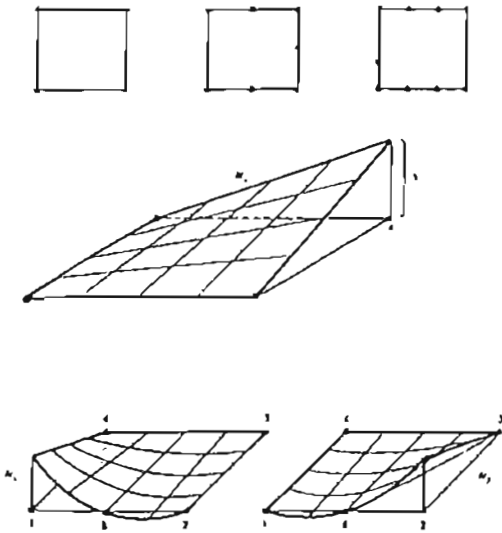
Das zugehörige Polynom enthält 16 Terme und ist eine bi-kubische Entwicklung, d.h., es entsteht durch die Multiplikation zweier eindimensionaler kubischer Polynome.



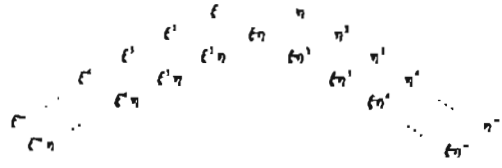
Ansatzfunktionen verschiedener Elementfamilien

(aus: Hughes, Th.: The Finite Element Method. Prentice Hall, 1987)

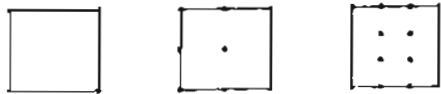
Serendipity family of quadrilateral elements



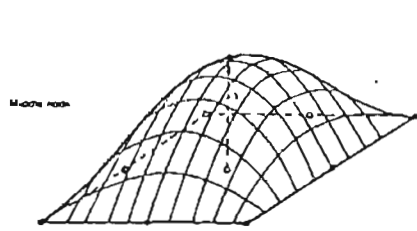
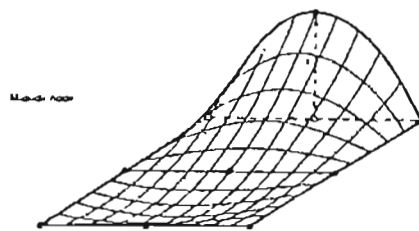
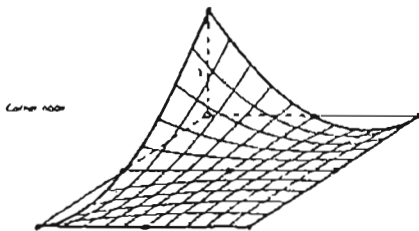
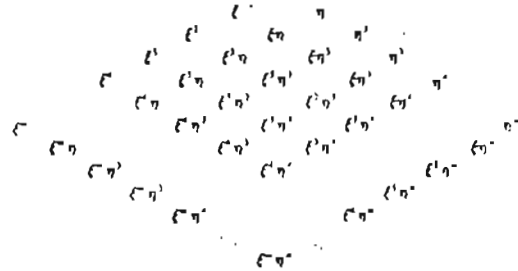
Serendipity quadrilaterals



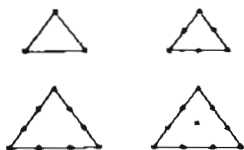
Lagrange family of quadrilateral elements



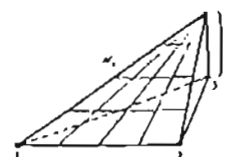
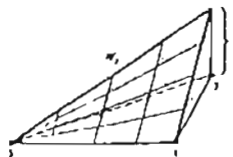
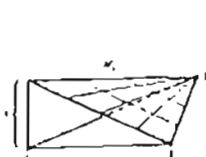
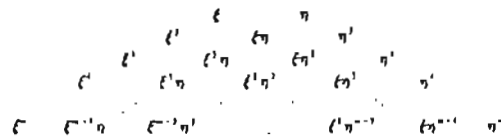
Lagrange quadrilaterals



Standard triangle elements



Triangles (internal nodes) functions included



5.2 Numerische Integration

Die numerische Integration dient der näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale. Da die exakte Integration der Ausdrücke für die Elementsteifigkeitsmatrizen oft Schwierigkeiten aufwirft, wird hier ein zweckmäßiges Verfahren zur numerischen Integration von Funktionen einer oder mehrerer Variablen behandelt.

Gauß'sche Quadraturformel

Bei der Gauß'schen Integrationsmethode wird das Integral einer gegebenen Funktion $f(\xi)$ als Linearkombination von diskreten Funktionswerten $f(\xi_i)$ dargestellt. Dabei wurden die Stützstellen ξ_i aus der Forderung bestimmt, daß ein Polynom von möglichst hohem Grad m exakt integriert wird. Bei n Stützstellen ist $m = 2n - 1$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{+1} f(\xi) dx = w_1^{(n)} f(\xi_1) + w_2^{(n)} f(\xi_2) + \dots + w_n^{(n)} f(\xi_n) + R(f) \\ &= \sum_{i=1}^n w_i^{(n)} f(\xi_i) + R(f) \end{aligned}$$

ξ_i : Stützstellen

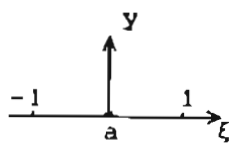
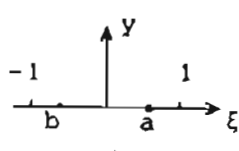

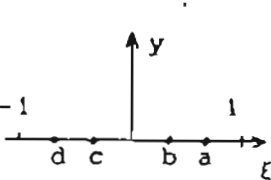
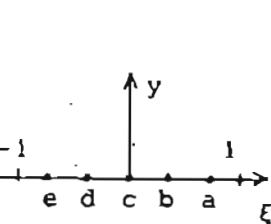
n : gewählte Anzahl der Stützstellen

$w_i^{(n)}$: Gewichtskoeffizienten für n Stützstellen

$R(f)$: Restglied

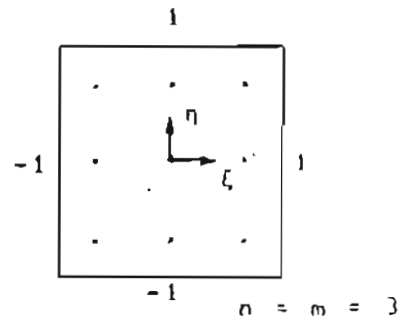
Dabei sind die Stützstellen ξ_i und die Koeffizienten $w_i^{(n)}$ symmetrisch verteilt.

Gauß'sche Quadraturformeln

n	Figur	Pkt.	ξ_i	w_i	Fehler
1		a	0	2	$\frac{1}{3} f^{(2)}(\rho)$
2		a b	$\sqrt{\frac{1}{3}}$ $-\sqrt{\frac{1}{3}}$	1 1	$\frac{1}{135} f^{(4)}(\rho)$
3		a b c	$\sqrt{\frac{3}{5}}$ 0 $-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$	$\frac{1}{15750} f^{(6)}(\rho)$
4		a b c d	0.86113 63116.. .0.33998 10436.. -0.33998 10436.. -0.86113 63116..	0.34785 48451.. 0.65214 51549.. 0.65214 51549.. 0.34785 48451..	$\frac{1}{3472875} f^{(8)}(\rho)$
5		a b c d e	0.90617 98459.. 0.53846 93101.. 0 -0.53846 93101.. -0.90617 98459..	0.23692 68851.. 0.47862 86705.. $\frac{128}{225}$ 0.47862 86705.. 0.23692 68851..	$\frac{1}{1.2377 \cdot 10^9} f^{(10)}(\rho)$

Die Näherungsformel kann auf Integrale über rechteckige Bereiche oder rechteckig begrenzte Volumen übertragen werden:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n w_i w_j f(\xi_i, \eta_j)$$



$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n w_i w_j w_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$$

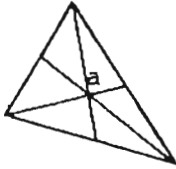
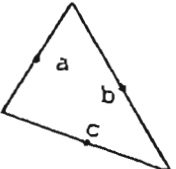
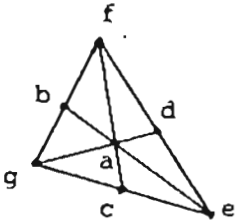
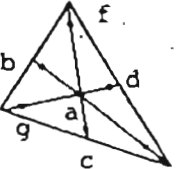
Integrationsformel über Dreiecksbereiche:

$$I = \int_0^1 \int_0^{(1-L_1)} f(L_1, L_2, L_3) dL_1 dL_2 = \sum_{k=1}^n w_k f(L_{1k}, L_{2k}, L_{3k})$$

Für dieses Integral existiert auch eine geschlossene Integrationsformel.

$$\int_1^a L_1^a L_2^b ds = \frac{a!b!}{(a+b+1)!} 1 \quad ; \quad \int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A$$

Numerische Integrationsformeln für Dreiecke

Grad	Figur	Pkt.	Dreiecks- koordinaten	Gewichte	Fehler
Linear		a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1	$R = O(h^2)$
Quadratisch		a b c	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$	$R = O(h^3)$
Kubisch		a b c d e f g	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ $1, 0, 0$ $0, 1, 0$ $0, 0, 1$	$\frac{27}{60}$ $\frac{8}{60}$ $\frac{3}{60}$	$R = O(h^4)$
5. Grades		a b c d e f g mit	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\alpha_1, \beta_1, \beta_1$ $\beta_1, \alpha_1, \beta_1$ $\beta_1, \beta_1, \alpha_1$ $\alpha_2, \beta_2, \beta_2$ $\beta_2, \alpha_2, \beta_2$ $\beta_2, \beta_2, \alpha_2$	0.225 0.13239415 0.12593918	$R = O(h^6)$
			$\alpha_1 = 0.05971587$ $\beta_1 = 0.47014206$ $\alpha_2 = 0.79742699$ $\beta_2 = 0.10128651$		

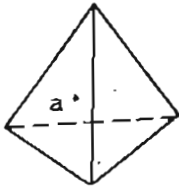
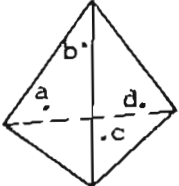
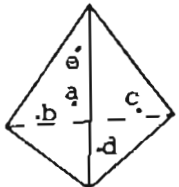
Integrationsformel über Tetraederbereiche

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-L_1-L_2} \int_0^{1-L_1-L_2-L_2} f(L_1, L_2, L_3, L_4) dL_1 dL_2 dL_3 =$$

$$= \sum_{i=1}^n w_i f(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}, L_{4i})$$

Geschlossene Integrationsformel: $\int_V L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dv = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} 6V$

Numerische Integrationsformeln für Tetraeder

Grad	Figur	Pkt.	Tetraeder koordinaten	Gewichte	Fehler
Linear		a	$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	1	$R = O(h^2)$
Quadratisch		a	$\alpha, \beta, \beta, \beta$	$\frac{1}{4}$	$R = O(h^3)$
		b	$\beta, \alpha, \beta, \beta$	$\frac{1}{4}$	
		c	$\beta, \beta, \alpha, \beta$	$\frac{1}{4}$	
		d	$\beta, \beta, \beta, \alpha$	$\frac{1}{4}$	
			$\alpha = 0.58541020$ $\beta = 0.13819660$		
Kubisch		a	$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	$-\frac{4}{5}$	$R = O(h^4)$
		b	$\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{9}{20}$	
		c	$\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{9}{20}$	
		d	$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$	$\frac{9}{20}$	
		e	$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$	$\frac{9}{20}$	

6 DAS VERFAHREN VON GALERKIN ALS EINE BASIS DER METHODE DER FINITEN ELEMENTE

6.1 Das klassische Galerkin-Verfahren

Dieses Verfahren ist auf jedes Problem anwendbar, das in Form von Differentialgleichungen formuliert werden kann, also auch auf die für den Bauingenieur besonders interessante Gebiete wie Elastizitätstheorie oder Feldprobleme (Temperaturausdehnung, Sickerströmung):

So lautet z.B. das Gleichgewicht in allgemeiner matrizieller Darstellung

$$D^T \sigma + \bar{p} = 0 .$$

Mit dem Stoffgesetz und den kinematischen Gleichungen

$$\sigma = E \epsilon = E D u$$

ergibt sich die in Weggrößen formulierte Gleichgewichtsbedingung zu :

$$D^T E D u + \bar{p} = 0 .$$

Diese Beziehung ist nur für bestimmte Funktionen u_{exakt} nämlich für die Lösungen der Differentialgleichung, exakt erfüllt. Beliebige zur Approximation von u_{exakt} verwendete Ansatzfunktionen $u_{\text{approximativ}} = u$ werden also zu einem Residuum führen, welches mit R bezeichnet sei.

$$D^T E D u + \bar{p} = R$$

Um eine optimale Lösung zu erhalten, versucht man, das Integral des Residuums über das gesamte Gebiet des gegebenen Problems zu minimieren. Diese globale Formulierung fordert also:

$$\int_V (D^T E D u + \bar{p}) dV = > Min.$$

Man kann den Bereich der Möglichkeiten zur globalen Erfüllung des Gleichgewichts dadurch erweitern, daß ein gewichteter Wert des Residuums innerhalb des gesamten Bereichs minimiert wird.

$$\int_V \Phi^T (D^T E D u + \bar{p}) dV = 0$$

Grundsätzlich können diese Gewichtsfunktionen Φ beliebig angesetzt werden. Wählt man für Φ und \bar{u} identische Ansätze, so gelangt man zum klassischem Galerkinschen Verfahren, dessen Grundgleichungen im Gebiet mit jenen der herkömmlichen Energiemethode übereinstimmen.

Für

$$\Phi^T = \delta u^T$$

wird diese Übereinstimmung besonders augenfällig:

$$\int_V \delta u^T (D^T E D u + \bar{p}) dV = 0$$

Obige Gleichung bezieht sich auf Punkte innerhalb eines Gebietes, ohne speziell auch Randbedingungen zu berücksichtigen, wie etwa vorgegebene Lasten oder eingeprägte Verschiebungen.

Die gewählten Ansätze:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}}$$

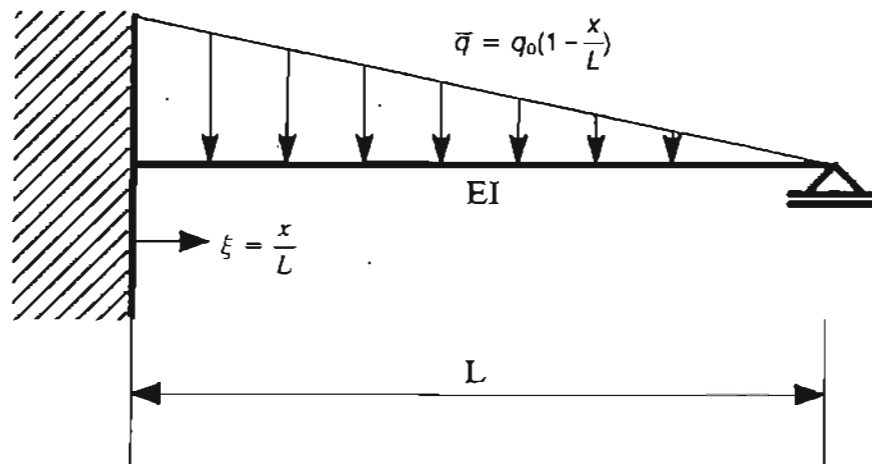
mit

\mathbf{N}_u : generalisierte Ansatzfunktionen

$\hat{\mathbf{u}}$: generalisierte Freiwerte

müssen also im Gegensatz zu den Energieverfahren sämtliche Randbedingungen (statische und kinematische) a priori erfüllen.

6.2 Beispiel : Balken unter Dreieckslast



Zur Erläuterung des Verfahrens soll obiges Beispiel dienen. Zu beachten sind folgende Randbedingungen:

$$\xi = 0 : w = w' = 0$$

$$\xi = 1 : w = w'' = 0$$

Die globale Formulierung der Differentialgleichung (Gleichgewichtsbedingung) der Aufgabenstellung lautet:

$$\int_0^L (EI w'''' - \bar{q}) \delta w \, dx = 0$$

Es sei nochmals explizit darauf hingewiesen, daß der zu wählende Ansatz

$$w = N_u \hat{w}$$

sämtliche Randbedingungen erfüllen muß.

Es ergibt sich:

$$\int_0^L \delta \hat{w}^T N^T \{ EI N_u'''' \hat{w} - q_0 (1 - \xi) \} dx = 0$$

Einsetzen des Ansatzes liefert:

$$\delta \hat{w}^T \left[\int_0^L N_u^T EI N_u'''' \hat{w} \, dx - \int_0^L N_u^T q_0 (1 - \xi) dx \right] = 0$$

Aufgrund der Randbedingungen bei $\xi = 0$ darf der gesuchte Ansatz keine konstanten und linearen Terme enthalten und muß wegen des im obigen Ausdruck auftauchenden Ableitungsgrades mindestens ein Polynom 4. Grades sein.

Als Beispiel soll hier ein solches Polynom 4.Grades verwendet werden:

$$w = \hat{w}_1(a_1\xi^2 + a_2\xi^3 + a_3\xi^4)$$

Mit den zwei restlichen Randbedingungen bei $\xi = 1$ können nur zwei der drei freien Parameter festgelegt werden, der dritte wird beliebig gewählt.

$$w(\xi = 1) = \hat{w}_1(a_1 + a_2 + a_3) = 0 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

$$w''(\xi = 1) = \hat{w}_1(2a_1 + 6a_2 + 12a_3) = 0 \Leftrightarrow 2a_1 + 6a_2 + 12a_3 = 0$$

So folgt z.B. mit $a_1 = 3$

$$a_2 = -5 \text{ und } a_3 = 2$$

und somit

$$w = \hat{w}_1(3\xi^2 - 5\xi^3 + 2\xi^4)$$

Dieser Ansatz erfüllt sämtliche statischen und kinematischen Randbedingungen.

Die zur Bestimmung von \hat{w}_1 notwendige, oben angeschriebene Integration vereinfacht sich mit

$$w''''(\xi) = \hat{w}_1 48$$

zu:

$$\int_0^1 \left[\frac{EI}{L^4} 48\hat{w}_1 - q_0(1-\xi) \right] \left[\delta w_1(3\xi^2 - 5\xi^3 + 2\xi^4) \right] L d\xi = 0.$$

Hieraus folgt nun

$$\hat{w}_1 = q_0 \frac{L^4}{108EI}$$

und als Näherungslösung

$$w = q_0 \frac{L^4}{108EI} (3\xi^2 - 5\xi^3 + 2\xi^4)$$

Zum Vergleich wird an dieser Stelle die exakte Lösung angegeben:

$$w_{\text{exakt}} = q_0 \frac{L^4}{120EI} (4\xi^2 - 8\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5)$$

Die abschließende Gegenüberstellung charakteristischer Systemwerte zeigt, daß die Verschiebungen – analog zur Methode der Finiten Elemente – wesentlich besser approximiert werden als die Schnittgrößen.

Durchbiegung in Feldmitte ($\xi = 0,5$), Skalierungsfaktor $\frac{100EI}{q_0L^4}$:

$$w_m = 0,23148148$$

$$w_{m \text{ exakt}} = 0,234375$$

Einspannmoment ($\xi = 0,0$), Skalierungsfaktor $\frac{1}{q_0L^2}$:

$$M = 0,05555\bar{5}$$

$$M_{\text{exakt}} = -0,066\bar{6}$$

Querkraft am gelenkigem Auflager ($\xi = 1,0$), Skalierungsfaktor $\frac{10}{q_0L}$:

$$Q = -1,6\bar{6}$$

$$Q_{\text{exakt}} = -1,00$$

6.3 Zusammenhang zwischen dem Verfahren von Galerkin und dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Man kann das Galerkinsche Verfahren durch Erweiterung um die statischen Randbedingungen in das PvV überführen. Dies soll analog zum vorigen Abschnitt am Beispiel des Balkens verdeutlicht werden. Die globale Formulierung der grundlegenden Differentialgleichung, erweitert um die statischen Randbedingungen

$$M - \bar{M} = 0 \quad Q - \bar{Q} = 0 \quad \text{auf } O_p$$

lautet:

$$\int_x (EIw''''(x) - \bar{q}(x))\delta w \, dx + (M - \bar{M})\delta\varphi|_{O_p} + (Q - \bar{Q})\delta w|_{O_p} = 0 \quad a < x < b$$

Hierbei sind die Wichtungsfunktionen für die statischen Randbedingungen im mathematischen Sinne als Lagrange-Multiplikatoren aufzufassen, die die näherungsweise Erfüllung eben dieser Bedingungen ermöglichen. Die Deutung der Lagrange-Multiplikatoren als virtuelle Verschiebungsgrößen ergibt sich durch nachstehende Ableitung und wird hier von vornherein vorausgesetzt.

Einmalige partielle Integration liefert:

$$-\int_x EIw''''(x)\delta w' \, dx + EIw''''(x)\delta w|_O - \int_x \bar{q}(x)\delta w \, dx + (M - \bar{M})\delta\varphi|_{O_p} + (Q - \bar{Q})\delta w|_{O_p} = 0$$

Nach nochmaliger partieller Integration ergibt sich:

$$\int_x EIw''(x)\delta w'' \, dx - EIw''(x)\delta w'|_O + EIw''''(x)\delta w|_O - \int_x \bar{q}(x)\delta w \, dx + (M - \bar{M})\delta\varphi|_{O_p} + (Q - \bar{Q})\delta w|_{O_p} = 0$$

Obige Gleichung wird nun unter Berücksichtigung der Zusammenhänge

$$Q = -EIw''''(x) \quad M = -EIw''(x) \quad \varphi = -w'$$

und nach Aufspaltung der Randterme über O in O_u und O_p (d.h Ränder, an denen entweder Verschiebungen oder Kräfte vorgeschrieben werden)

$$(M - \bar{M})\delta\varphi|_O = (M - \bar{M})\delta\varphi|_{O_p} + (M - \bar{M})\delta\varphi|_{O_u}$$

$$(Q - \bar{Q})\delta w|_O = (Q - \bar{Q})\delta w|_{O_p} + (Q - \bar{Q})\delta w|_{O_u}$$

ausgewertet:

$$\int_x (EIw''(x)\delta w'' - q(x)\delta w) \, dx - \cancel{M\delta\varphi|_{O_p}} - \cancel{M\delta\varphi|_{O_u}} - \cancel{Q\delta w|_{O_p}} - \cancel{Q\delta w|_{O_u}} + M\delta\varphi|_{O_p} - \bar{M}\delta\varphi|_{O_p} + Q\delta w|_{O_p} - \bar{Q}\delta w|_{O_p}$$

Hierbei ist zu beachten, daß die kinematischen Randbedingungen von vornherein erfüllt werden:

$$\delta w = 0 \quad \delta w' = 0 \quad \text{auf } O_u$$

Somit zeigt sich die Identität mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen:

$$\delta W = \int_x \delta w'' EI w''(x) - \bar{q}(x) dx - \delta \varphi \bar{M} - \delta w \bar{Q} = 0.$$

In dieser Formulierung brauchen die gewählten Ansätze die statischen Randbedingungen nicht zu erfüllen; diese werden deshalb in diesem Zusammenhang auch als natürliche Randbedingungen bezeichnet. Die kinematischen Randbedingungen, die von den Ansätzen a priori eingehalten werden müssen, sind dagegen auch als wesentliche Randbedingungen definiert.

Zum Vergleich kann das allgemeine Weggrößenverfahren herangezogen werden: Aufgebrachte Lasten und eingeprägte Verzerrungen (Temperaturdehnungen) können direkt in der Lastspalte berücksichtigt werden (☞ natürliche Randbedingungen), während Auflagerbedingungen bzw. vorgegebene Lagerverschiebungen (Stützensenkungen) durch Modifizierung der in der Steifigkeitsmatrix enthaltenen Ansatzpolynome eingearbeitet werden müssen (☞ wesentliche Randbedingungen).

7. STATIONÄRE FELDPROBLEME

7.1 Überblick

Neben Aufgabenstellungen der Tragwerksanalyse sind auch viele andere im Ingenieurwesen häufig vorkommende Anwendungsgebiete für die Methode der Finiten Elemente auf einfachem Weg erschließbar. Dies sind u.a.:

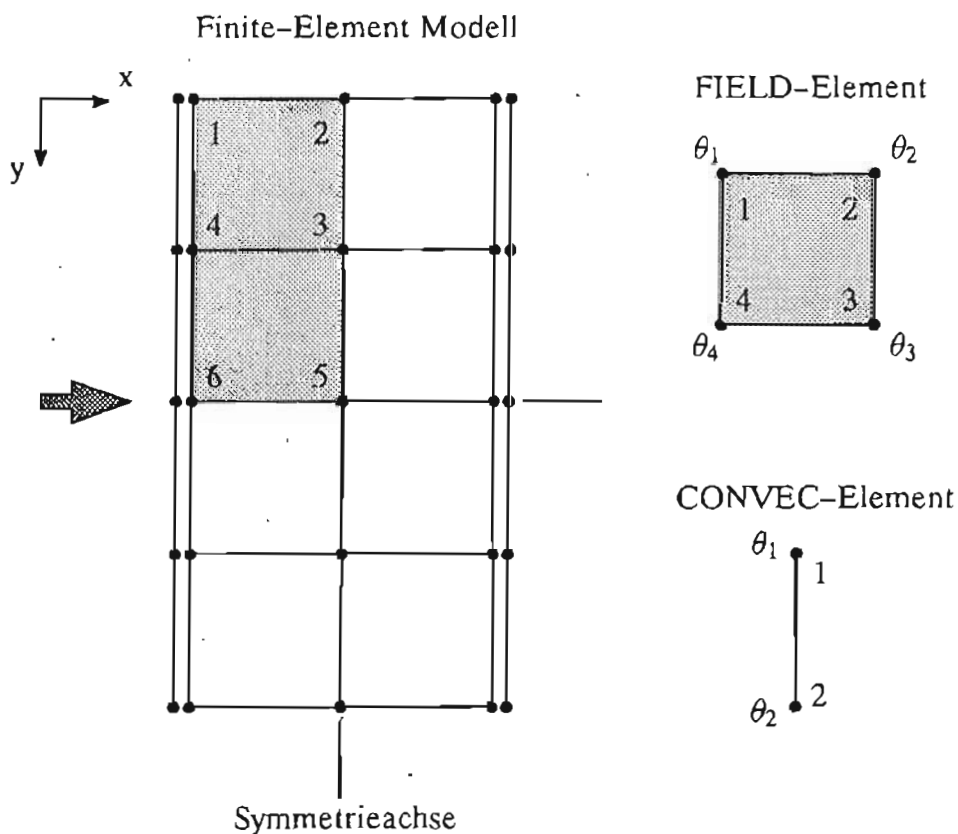
Wärmeleitung

Sickerströmung durch poröse Medien

Strömung idealer Fluide

Verteilung des elektrischen und magnetischen Potentials

Die Lehrveranstaltung soll sich auf stationäre, also von der Zeit als Variable unabhängige, Probleme in homogenen und isotropen Medien beschränken. Hauptunterschied zu der bisherigen Formulierung ist die Tatsache, daß nunmehr jedem Knoten nur eine gesuchte skalare Größe θ zugeordnet ist, während zuvor mehrere, durch den Verschiebungsvektor ausgedrückte Knotenwerte als Unbekannte erforderlich waren.



7.2 Wärmeleitung

7.2.1 Zusammenstellung der charakteristischen Größen

Bevor die globale Formulierung in die Formulierung eines finiten Elementes mündet, sollen zuvor noch die für die Aufgabenstellung relevanten Größen in einer Übersicht zusammengestellt und einige Besonderheiten des Temperaturproblems erläutert werden.

θ	Temperatur des Körpers [°C]
θ'	Temperaturgradient
σ	Wärmefluß im Körper, Wärmestromdichte $\left[\frac{W}{m^2} \right]$
\bar{p}_V	Wärme, die innerhalb des Körpers zugeführt wird $\left[\frac{W}{m^3} \right]$
\bar{p}	der durch die Oberfläche des Körpers zugeführte Wärmestrom $\left[\frac{W}{m^2} \right]$
k_{xx}, k_{yy}, k_{zz}	Wärmeleitfähigkeiten $\left[\frac{W}{m \cdot ^\circ C} \right]$
$h(\theta)$	Wärmeübergangszahl $\left[\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C} \right]$
θ_∞	Temperatur des umgebenden Mediums

Randbedingungen:

Temperaturbedingung: In bestimmten Punkten oder auf bestimmten Oberflächen vorgeschriebene Temperatur

$$\theta = \bar{\theta} \quad \text{auf } O_\theta$$

Wärmestrombedingung: In bestimmten Punkten oder auf bestimmten Oberflächen vorgeschriebener Wärmefluß

$$p = \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} = \bar{p} \quad \text{auf } O_{p_1}$$

Konvektionsbedingung: Vorgeschriebener Wärmefluß in bestimmten Punkten oder auf bestimmten Flächen durch Konvektion:

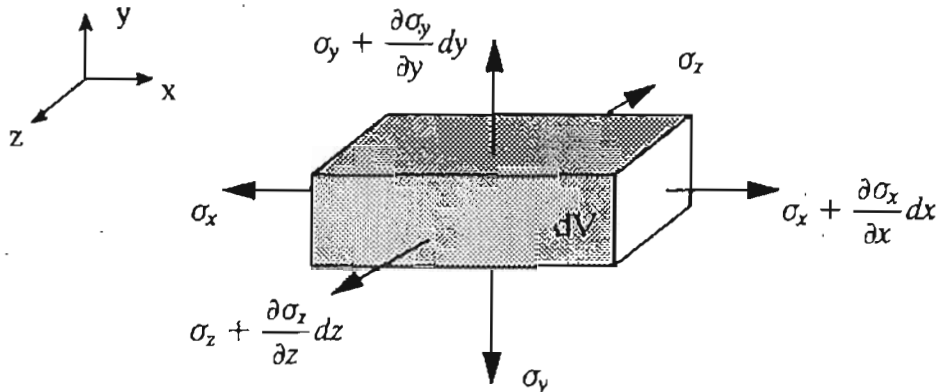
$$\mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} = \bar{p} = h(\theta_\infty - \theta) \quad \text{auf } O_{p_1}$$

Diese natürlichen Randbedingungen existieren nur bei Problemen der Wärmeleitung und der Gasdiffusion.

7.2.2 Die Herleitung der Gleichungen für die Wärmeleitung

Bei vielen Aufgabenstellungen werden wir mit der Diffusion oder dem Fluß irgendeiner physikalischen Größe, z.B. der Wärme konfrontiert. So läßt sich der Wärmefluß σ je Flächeneinheit in kartesischen Koordinaten wie folgt angeben:

$$\underline{\sigma}^T = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z]$$



Bezeichnet man die je Volumeneinheit erzeugte oder verschwindende Wärmemenge mit \bar{p}_V , dann liefert die Energiebilanz nach obenstehender Skizze:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \bar{p}_V = 0 \quad \text{oder} \quad \sigma_{i,i} - \bar{p}_V = 0 \quad (i = x, y, z)$$

Mit Hilfe des Differentialoperators $\nabla^T = [\partial/\partial x \ \partial/\partial y \ \partial/\partial z]$ kann man die Energiebilanz in folgender Form schreiben:

$$\nabla^T \underline{\sigma} - \bar{p}_V = 0$$

In den meisten Fällen werden die Durchflußgrößen σ durch die Gradienten einer Potentialfunktion θ bestimmt, d.h. im konkreten Fall der Wärmeleitung ist der Wärmestrom zwischen zwei Punkten abhängig von der Temperaturdifferenz zwischen eben diesen beiden Punkten. Damit läßt sich das Fourier'sche Gesetz der Wärmeleitung wie folgt formulieren:

$$\underline{\sigma} = -\mathbf{K} \nabla \theta \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & 0 \\ & k_{yy} & 0 \\ & & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \theta / \partial x \\ \partial \theta / \partial y \\ \partial \theta / \partial z \end{bmatrix}$$

wobei \mathbf{K} bei der Temperatur die jeweiligen Leitfähigkeiten enthält. Diese Matrix ist aus energetischen Gründen symmetrisch und nur auf der Diagonalen besetzt. Es sei explizit darauf hingewiesen, daß θ eine skalarwertige Funktion ist.

Nun erhält man die endgültige, die Potentialfunktion θ bestimmende Differentialgleichung:

$$\nabla^T \mathbf{K} \nabla \theta + \bar{p}_V = 0$$

Differentialgleichung der Wärmeleitung

Diese Gleichung muß für ein gewisses Gebiet V gelöst werden. Auf den Rändern eines solchen Gebiets können wir im allgemeinen eine der folgenden Bedingungen formulieren:

a) vorgegebene Randtemperatur

Auf einem Randabschnitt O_θ ist die Temperatur θ vorgegeben:

$$\theta = \bar{\theta}$$

b) vorgegebener Wärmeeinbruch

Auf einem Randabschnitt O_{p_1} ist der Wärmeeinbruch p vorgegeben:

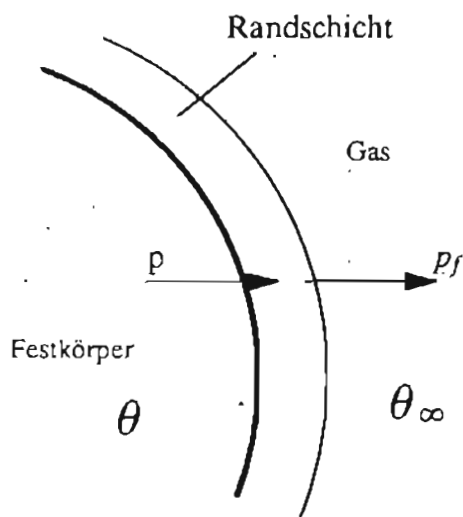
$$p = \bar{p} = \mathbf{n}^T \underline{\sigma}$$

$$\mathbf{n}^T = [n_x \ n_y \ n_z] \quad : \text{Normalenkomponente eines Punktes auf der Oberfläche}$$

c) konvektive Randbedingung

Bei vielen Anwendungen müssen Ränder O_{p_2} berücksichtigt werden, bei denen die Oberfläche des Festkörpers eine angrenzende Flüssigkeit oder ein Gas (z.B. Luft) berührt. An diesen Oberflächen wird Wärme in das Gas, in dem eine mittlere Temperatur von θ_0 herrschen soll, über eine Randschicht abgeführt.

Der Wärmeeinbruch in das Gas wird durch das Newton'sche Gesetz bestimmt ($h =$ Wärmeübergangskoeffizient).

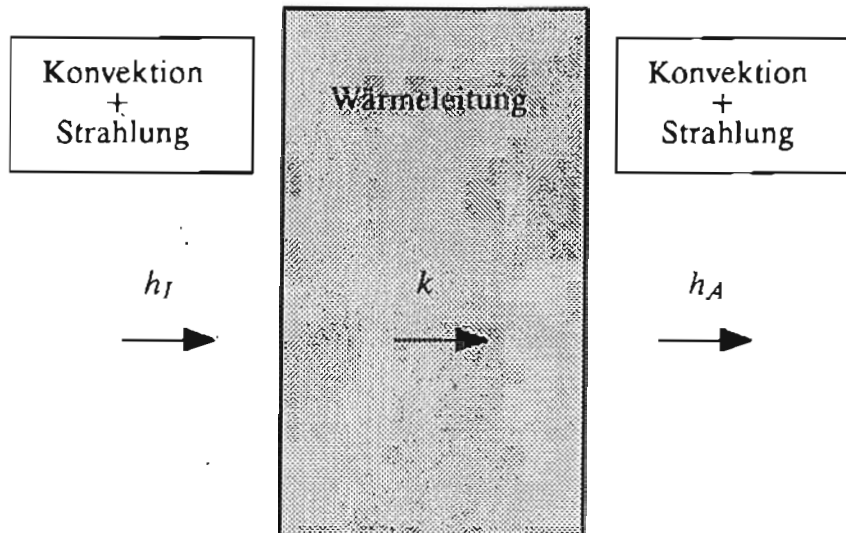


$$p_f = h(\theta - \theta_\infty)$$

Dabei muß die aus dem Festkörper ausströmende Wärme p gleich derjenigen sein, die dem Gas zugeführt wird.

$$p = \mathbf{n}^T \underline{\sigma} = p_f = h(\theta - \theta_\infty)$$

Beispiel: Wärmetransport in einer Wand



Wärmeleitung

$$P = \frac{k}{s} A (\theta_1 - \theta_2) t \quad [Wh] \quad \text{Wattstunden}$$

k Wärmeleitzahl (Beton $k = 2.10 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, Dämmstoff $k = 0.020 \text{ W/m}^\circ\text{C}$)

s Dicke der Wand

A Fläche

θ Temperatur

Konvektion und Strahlung

$$P = h A (\theta_2 - \theta_\infty) t \quad [Wh] \quad \text{Wattstunden}$$

h Wärmeübergangskoeffizient

Wärmeleitung: Temperaturkoeffizient erzeugt einen Wärmestrom

Konvektion: Wärmeinhalt wird mit dem Medium transportiert

Strahlung: Wärmeaustausch durch Emission und Absorption

Diffusion: Konzentrationsgradient erzeugt einen Massenstrom

Analogie zwischen den Grundgleichungen der Wärmeleitung und der Elastizitätstheorie

Die im vorigen Abschnitt hergeleitete Differentialbeziehung setzt sich – vollkommen analog zu den Gleichungen der Elastizitätstheorie – aus einzelnen fundamentalen Bestandteilen zusammen:

Energiebilanz (⇔ Gleichgewicht)

Faßt man den Gradienten ∇ als speziellen Differentialoperator auf, so kann man schreiben:

$$\nabla^T \underline{\sigma} - \bar{p}_V = 0 \quad \bar{p}_V: \text{Quellen oder Senken}$$

Anmerkung: Wegen der erstrebten Kompatibilität mit der gängigen physikalischen Literatur wird im weiteren Verlauf nicht der allgemeine Differentialoperator \mathbf{D} , sondern der spezielle Nabla-Operator ∇ verwendet.

Fourier'sche Wärmeleitung (⇔ Stoffgesetz)

Wie die Spannungen über das Werkstoffgesetz mit den Verzerrungen verknüpft sind, so werden hier die Flüsse $p = \bar{p} = \mathbf{n}^T \underline{\sigma}$ mit den Richtungsableitungen der skalaren Zustandsgröße θ in Verbindung gebracht.

$$\underline{\sigma} = -\mathbf{K} \nabla \theta$$

Temperaturgradient (⇔ Kinematik)

Ebenso wie im Falle der Elastizitätstheorie die Spannungen nicht durch die Verschiebungen, sondern durch die Verschiebungsableitungen – nämlich die Verzerrungen – hervorgerufen werden, resultieren die Flüsse σ (Spannungen) nicht aus den Zustandsgrößen θ (Verschiebungen), sondern aus den Gradienten dieser Zustandsgröße (Verzerrungen).

$$\underline{\theta}' = \nabla \theta$$

Randbedingungen

Die notwendigen Randbedingungen lassen sich ebenso einfach mit schon bekannten Begriffen vergleichen:

geometrische Randbedingung: vorgegebene Temperatur $\theta = \bar{\theta}$ auf O_θ

statische Randbedingungen: vorgegebener Wärmefluß $p = \bar{p} = \mathbf{n}^T \underline{\sigma}$
durch die Oberflächen auf O_{p_1}

gemischte Randbedingungen: konvektiver Wärmefluß $p = h(\theta_\infty - \theta)$
(= Bettung) auf O_{p_2}

7.3 Globale Formulierung mit Hilfe des Galerkinschen Verfahrens bzw. dem Prinzip der virtuellen Arbeiten

Die globale Formulierung des Problems soll hier mit der im vorigen Kapitel kennengelernten Galerkinschen Methode erfolgen, da die Anwendung von Energieprinzipien bei Feldproblemen nicht in jedem Fall möglich ist.

Somit lautet die mit der Gewichtungsfunktion $\delta\theta$ multiplizierte und über das Gebiet V integrierte Differentialgleichung:

$$\int_V \delta\theta [\nabla^T \mathbf{K} \nabla\theta + \bar{p}_V] dV + \int_{O_{p_1}} \delta\theta [\bar{p} - p] dO + \int_{O_{p_2}} \delta\theta [h (\theta_\infty - \theta) - p] dO = 0$$

Hierbei wurden wieder die natürlichen Randbedingungen mit dem Multiplikator $\delta\theta$ eingearbeitet. Die Randbedingungen $\theta = \bar{\theta}$ auf O_θ sind direkt zu erfüllen. Umformung mit dem Satz von Gauß liefert die gleichwertige Form:

$$\int_V \delta\theta [\nabla^T \mathbf{K} \nabla\theta + \bar{p}_V] dV = - \int_V (\delta \nabla\theta)^T \mathbf{K} \nabla\theta dV + \int_O \delta\theta n^T \underline{\sigma} dO + \int_V \delta\theta \bar{p}_V dV + \int_{O_{p_1}} \delta\theta [\bar{p} - p] dO + \int_{O_{p_1}} \delta\theta [h (\theta_\infty - \theta) - p] dO = 0$$

Für die weitere Umformung gilt:

$$p = \bar{p} = \mathbf{n}^T \underline{\sigma} \quad \text{auf } O$$

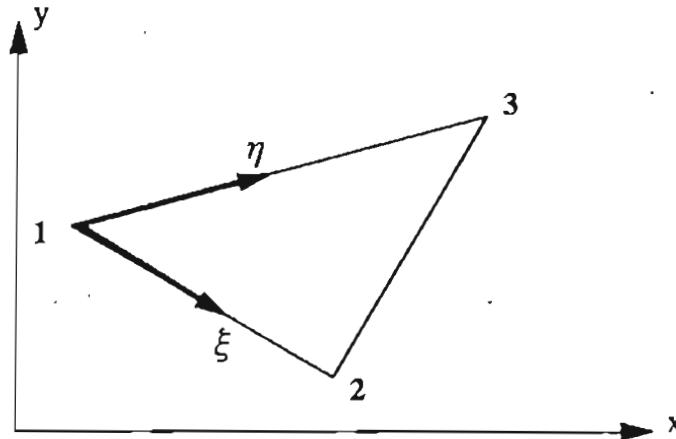
So ergibt sich das Prinzip der virtuellen Arbeiten für das Feldproblem zu:

$$\int_V (\delta \nabla\theta)^T \mathbf{K} \nabla\theta dV - \int_V \delta\theta \bar{p}_V dV - \int_{O_{p_1}} \delta\theta \bar{p} dO + \int_{O_{p_1}} \delta\theta [h (\theta - \theta_\infty)] dO = 0$$

Die wesentlichen Randbedingungen $\theta = \bar{\theta}$ müssen dabei von den gewählten Ansatzfunktionen wieder a priori erfüllt werden.

7.4 Herleitung eines linearen Dreiecks-Elements für Feldprobleme

Für den weiten Bereich der Feldprobleme wurden in den letzten Jahren eine Vielzahl von sehr spezialisierten Elementen entwickelt; hier soll nur ein einfaches Dreieckselement mit linearem Ansatz erläutert werden.



Gewählt wird der lineare Ansatz:

$$\theta(\xi, \eta) = [1 \quad \xi \quad \eta] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{N}_\theta \hat{\mathbf{a}}$$

Auswertung des Ansatzes an den Knoten:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

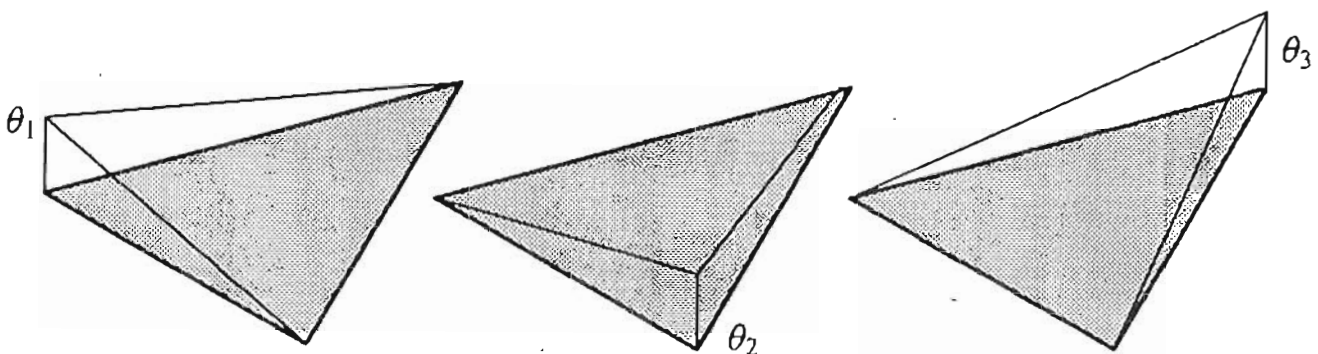
$$\boldsymbol{\theta}_K = \mathbf{H} \hat{\mathbf{a}}$$

Transformationsmatrix $\mathbf{G} = \mathbf{H}^{-1}$:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ansatz bezogen auf die Knoten:

$$\theta(\xi, \eta) = \mathbf{N}_\theta \mathbf{G} \boldsymbol{\theta}_K = \mathbf{N} \boldsymbol{\theta}_K = [1 - \xi - \eta \quad \xi \quad \eta] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$



Transformationsgleichungen zwischen den beiden Koordinatensystemen:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta$$

Partielle Ableitungen des Potentialfeldes θ nach ξ und η mit der Kettenregel:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

In Matrizenform geschrieben erhält man die sogenannte Jakobi-Matrix:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Mit den folgenden Abkürzungen

$$a_a = x_3 - x_2 \qquad b_a = y_2 - y_3$$

$$a_b = x_1 - x_3 \qquad b_b = y_3 - y_1$$

$$a_c = x_2 - x_1 \qquad b_c = y_1 - y_2$$

und

$$a_a + a_b + a_c = 0 \qquad b_a + b_b + b_c = 0$$

vereinfacht sich die Jakobi-Matrix \mathbf{J} und ihre Determinante zu:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_c & -b_c \\ -a_b & b_b \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \det \mathbf{J} = a_c b_b - a_b b_c$$

Die Inverse der Jakobi-Matrix ergibt sich zu:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} b_b & b_c \\ a_b & a_c \end{bmatrix}$$

Sie ist zur Berechnung der Elementmatrizen für die Beziehung zwischen den beiden Koordinatensystemen x,y und ξ,η erforderlich:

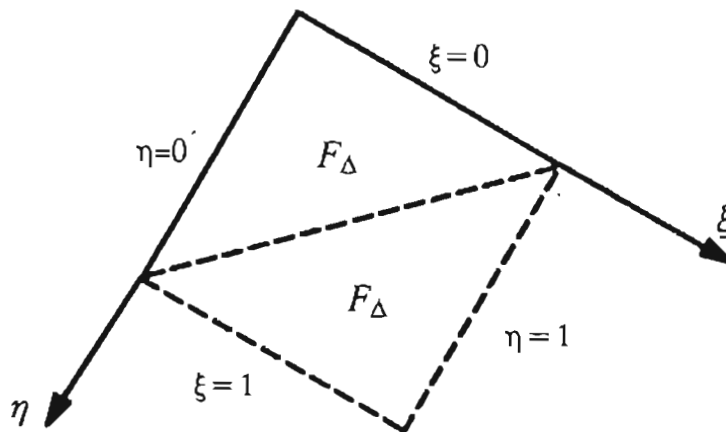
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} b_b & b_c \\ a_b & a_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Für die Integration wird das differentielle Flächenelement dA zu:

$$dA = dx dy = \det \mathbf{J} d\xi d\eta$$

Anschauliche Überlegung zur Berücksichtigung von $\det \mathbf{J}$ bei der Integration:



In ξ - η -Koordinaten ergibt sich der Flächeninhalt des Parallelogramms, das der doppelten Dreiecksfläche entspricht, zu:

$$\int_0^1 \int_0^1 d\xi d\eta = 1$$

Der tatsächliche Flächeninhalt des Parallelogramms läßt sich durch die Koordinatendifferenzen beschreiben und entspricht in der Größe der Determinante der Jakobi-Matrix.

$$\begin{aligned} 2F_{\Delta} &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \\ &= a_c b_b - a_b b_c = \det \mathbf{J} \end{aligned}$$

Die Integrationsgrenzen für ein beliebiges Dreieck vereinfachen im natürlichen Koordinaten zu:

$$\iint_{x,y} dx dy = \iint_{0,0}^{1,1-\eta} \det \mathbf{J} d\xi d\eta$$

Gradient θ' :

$$\theta' = \nabla \theta = \nabla N \theta_K = \mathbf{B} \theta_K$$

Auswertung der Matrix \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \mathbf{N} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} b_b & b_c \\ a_b & a_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 - \xi - \eta) & \xi & \eta \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} b_b & b_c \\ a_b & a_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} b_a & b_b & b_c \\ a_a & a_b & a_c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Volumenintegral der Leitfähigkeiten:

$$\int_V \delta(\theta \nabla^T) \mathbf{K} \nabla \theta \, dV = \delta \boldsymbol{\theta}_k^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} \, dV \boldsymbol{\theta}_k = \delta \boldsymbol{\theta}_k^T \mathbf{k}_L \boldsymbol{\theta}_k$$

$$\mathbf{k}_L = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} \, dV \quad \text{:Konduktivitätsmatrix aus Leitfähigkeit}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_L &= \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} b_a & a_a \\ b_b & a_b \\ b_c & a_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_a & b_b & b_c \\ a_a & a_b & a_c \end{bmatrix} d\xi \, d\eta \\ &= \frac{1}{4F_\Delta} \left[k_{xx} \begin{bmatrix} b_a^2 & b_a b_b & b_a b_c \\ b_b b_a & b_b^2 & b_b b_c \\ b_c b_a & b_c b_b & b_c^2 \end{bmatrix} + k_{yy} \begin{bmatrix} a_a^2 & a_a a_b & a_a a_c \\ a_b a_a & a_b^2 & a_b a_c \\ a_c a_a & a_c a_b & a_c^2 \end{bmatrix} \right] \end{aligned}$$

Volumenintegral der Quellen/Senken:

$$\int_V \delta \theta \bar{p}_V \, dV = \delta \boldsymbol{\theta}_k \bar{p}_V \int_V \mathbf{N}^T \, dV = \delta \boldsymbol{\theta}_k \bar{p}_k$$

$$\bar{p}_k = \bar{p}_V \int_V \mathbf{N}^T \, dV \quad \text{:Elementlastspalte aus Quellen/Senken}$$

$$\bar{p}_k = \bar{p}_V \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \begin{bmatrix} 1-\xi-\eta \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} \det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta = \frac{\bar{p}_V F_\Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oberflächenintegrale des Flusses durch die Oberfläche:

$$\int_{O_p} \delta \theta \bar{p} \, dO = \int_{O_{p1}} \delta \theta \bar{p}_1 \, dO + \int_{O_{p2}} \delta \theta \bar{p}_2 \, dO$$

$$\bar{p}_1 \quad \text{:direkter Fluß} \qquad \bar{p}_2 = h(\theta_\infty - \theta) \quad \text{:Konvektion}$$

Oberfläche O_{p1} für \bar{p}_1 (direkter Fluß):

$$\int_{O_{p1}} \delta \theta \bar{p}_1 \, dO = \delta \boldsymbol{\theta}_k^T \bar{p}_1 \int_{O_{p1}} \mathbf{N}^T \, dO = \delta \boldsymbol{\theta}_k^T \bar{p}_k$$

$$\bar{p}_k = \bar{p}_1 \int_{O_{p1}} \mathbf{N}^T \, dO$$

Auswertung des Integrals für alle drei Kanten des Dreiecks:

Kante 1-2:

Kante 3-1:

Kante 2-3:

$$\bar{p}_k \, 1-2 = \frac{\bar{p}_1}{2} L_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{p}_k \, 3-1 = \frac{\bar{p}_1}{2} L_{31} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{p}_k \, 2-3 = \frac{\bar{p}_1}{2} L_{23} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oberfläche O_{p2} für $\bar{p}_2 = h(\theta - \theta_\infty)$ (Konvektion):

$$\int_{O_{p2}} \delta\theta \bar{p}_2 dO = \int_{O_{p2}} \delta\theta h (\theta_\infty - \theta) dO$$

Die Integrale $\int_{O_{p2}} \delta\theta h \theta_\infty dO$ entsprechen den Integralen für \bar{p}_1 :

Kante 1-2:

Kante 3-1:

Kante 2-3:

$$\bar{p}_{k1-2} = \frac{h\theta_\infty}{2} L_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{p}_{k3-1} = \frac{h\theta_\infty}{2} L_{31} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{p}_{k2-3} = \frac{h\theta_\infty}{2} L_{23} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Das Integral $\int_{O_{p2}} \delta\theta h \theta dO$ wird auch für die Kanten einzeln ausgewertet. Zum Beispiel ist auf der Kante 1-2 die Ansatzfunktion $N_3 = 0$, d.h es sind nur N_1 und N_2 vorhanden.

$$\delta\theta_k^T \int_{O_{p2}} h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dO \theta_k = \delta\theta_k^T \mathbf{k}_K \theta_k$$

$$\mathbf{k}_K = \int_{O_{p2}} h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dO \quad \text{:Konduktivitätsmatrix aus Konvektion}$$

Das Oberflächenintegral wird wieder für alle drei Kanten des Dreiecks ausgewertet:

Kante 1-2:

Kante 3-1:

Kante 2-3:

$$\mathbf{k}_{K1-2} = \frac{h}{6} L_{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_{K3-1} = \frac{h}{6} L_{31} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_{K2-3} = \frac{h}{6} L_{23} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Zusammenfassung:

Elementkonduktivitätsmatrix:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_L + \mathbf{k}_K = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} dV + \int_{O_{p2}} h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dO \quad \Leftrightarrow \text{Steifigkeits- + Bettungsmatrix}$$

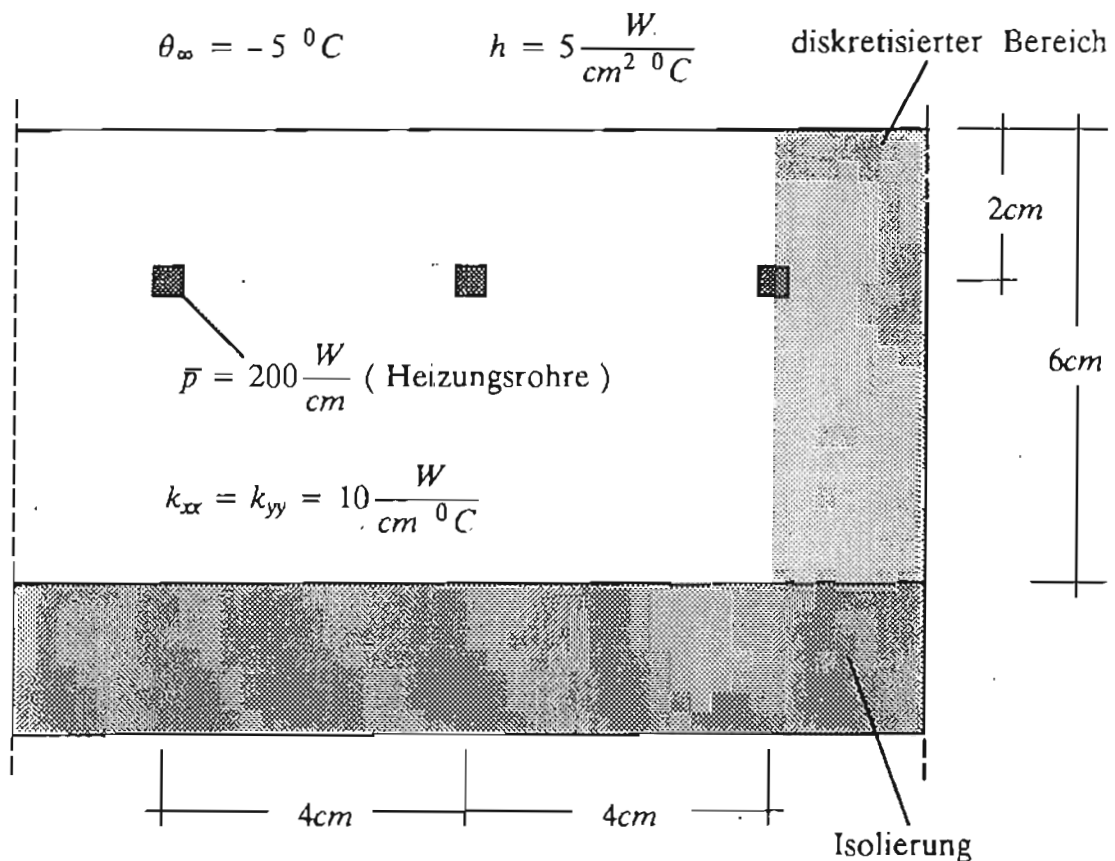
Elementlastspalte:

$$\bar{p}_k = \bar{p}_V \int_V \mathbf{N}^T dV + \bar{p}_1 \int_{O_{p1}} \mathbf{N}^T dO + h\theta_\infty \int_{O_{p2}} \mathbf{N}^T dO \quad \Leftrightarrow \text{Volumen- + Randlasten}$$

7.5 Beispiel : Fußbodenheizung

Als einfaches Einführungsbeispiel soll die Temperaturverteilung in einem beheizten Fußboden mit Hilfe des Programmsystems CAL 88 berechnet werden.

Querschnitt



Hinweise zur FEM-Diskretisierung:

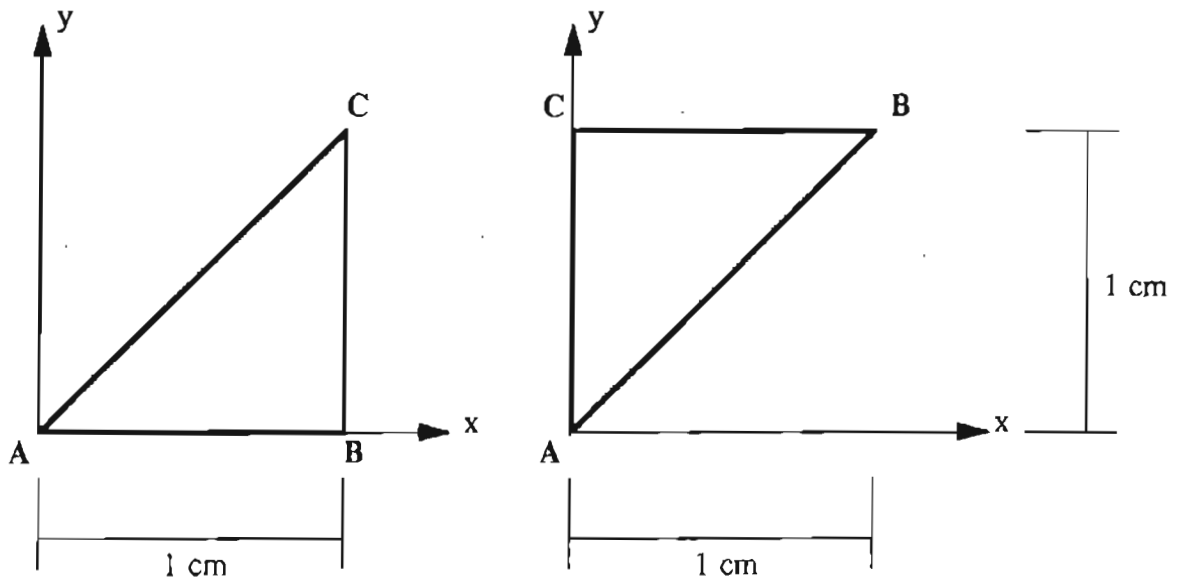
Durch Symmetrieüberlegungen läßt sich der zu berechnende Bereich auf den oben eingetragenen reduzieren.

Der Wärmeübergang durch Konvektion wird bei den Elementen 22 und 24 durch Addition der Elementkonduktivitätsmatrix aus Konvektion k_k auf die Elementkonduktivitätsmatrix aus der Leitfähigkeit k_l berücksichtigt.

Die Wärmezufuhr durch die Heizungsrohre wird durch eine Einzellast $\bar{p} = 100 \frac{\text{W}}{\text{cm}}$ im Knoten 13 eingearbeitet .

Ansonsten ergibt sich der Lösungsweg aus dem unten angegebenen CAL-Programm und den ebenfalls abgedruckten Plots.

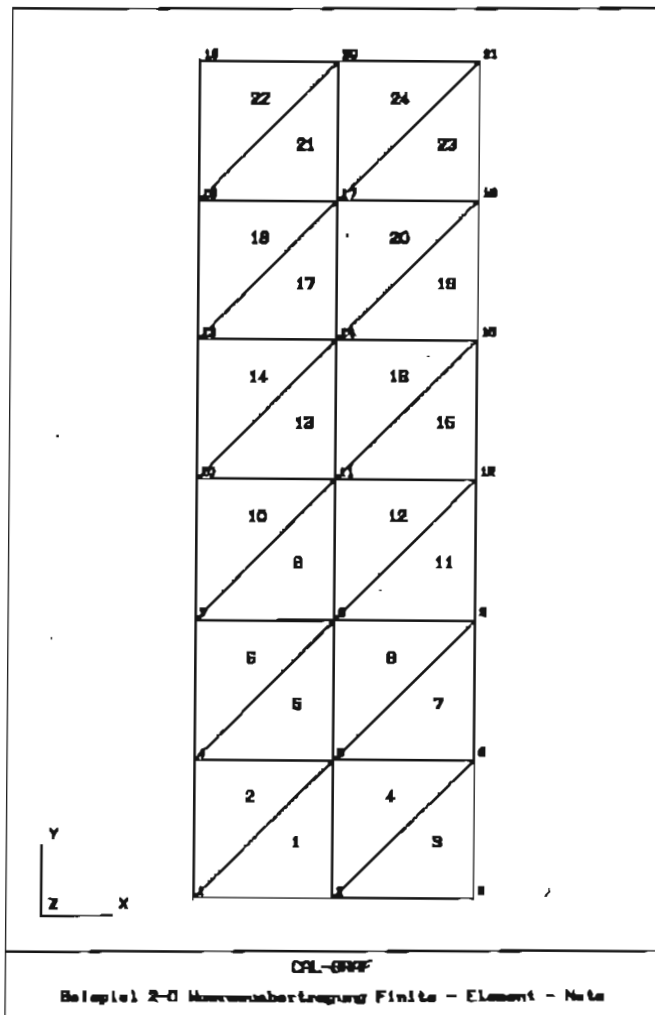
Verwendete Elemente:



ungeradzahlige Elementnummern
1 bis 23

geradzahlige Elementnummern
2 bis 24

Netzeinteilung:



CAL-Programm:

```

START          : Beispiel 2-D Waermeuebertragung
LOAD KL1 Z=3 S=3      : Leitfaehigkeitsmatrix Knoten 1-2-5
5 -5 0
-5 10 -5
0 -5 5
LOAD KL2 Z=3 S=3      : Leitfaehigkeitsmatrix Knoten 1-5-4
5 0 -5
0 5 -5
-5 -5 10
LOAD KK2 Z=3 S=3      : Leitfaehigkeitsmatrix Knoten 12-20-19
0 0 0
0 1.6667 .8333
0 0.8333 1.6667
ADD KK2 KL2
NODES X NK=21        : Knotenkoordinaten des Modells
1 X=0 Y=0 Z=0
19 X=0 Y=6 Z=0 I=3
2 X=1 Y=0 Z=0
20 X=1 Y=6 Z=0 I=3
3 X=2 Y=0 Z=0
21 X=2 Y=6 Z=0 I=3

ITOPOL LN1 NE=12 NEK=3 : Elementtopologie ungerade Elementnummer
1 KN=123 A=1 IK=1,3 NM=2,6 I=2

ITOPOL LN2 NE=12 NEK=3 : Elementtopologie gerade Elementnummer
2 KN=134 A=1 IK=1,3 NM=2,6 I=2

ITOPOL LN4 NE=12 NEK=4 : Elementtopologie fuer Isoliniendarstellung
1 KN=4 A=1 IK=1,3 NM=2,6 I=1

BOUND ID DOF=1
1 F=1 G=21 I=1

IDEST ID LN1 ID1      : Elementweise Zuordnung der Gleichungsnummern
IDEST ID LN2 ID2
PRINT ID1
PRINT ID2
DEFBK KGES           : Gesamtkonvektionsmatrix
GENER 'N' A=1 E=12    : Elemente mit ungeraden Nummern aufaddieren
BADDK KGES KL1 ID1
GENER 'N' A=1 E=10    : Elemente mit ungeraden Nummern aufaddieren
BADDK KGES KL2 ID2
GENER 'N' A=11 E=12   : Elemente am oberen Rand aufaddieren
BADDK KGES KK2 ID2
PRINT KGES
LOADS PGES ID NL=1    : Erstellen der Lastspalte
13 LC=1 P=100.0
19 LC=1 P=-12.5
20 LC=1 P=-25.0
21 LC=1 P=-12.5
PRINT PGES

```

```
BSOLVE KGES PGES      : Gleichungssystem loesen
DUP PGES THETA
DEL PGES
DISPL THETA ID XYZVER LC=1 : Temperatur in den Knotenpunkten ausdrucken
```

```
IDENT '*** Beispiel Fussbodenheizung Finite - Element - Netz ***'
FIGUR X=0.0 Y=0.0
PROJ X XP X=0 Y=0 Z=1
PSCAL XP 4
PNODE XP 2
PGRID XP LN1 1
PGRID XP LN2 1
BOX 1 'Beispiel 2-D Waermeuebertragung Finite - Element - Netz'
ENDJOB
```

```
IDENT '*** Beispiel Fussbodenheizung Temperaturverteilung ***'
FIGUR
LOAD ALFA Z=1 S=1
0.1
SCALE XYZVER ALFA
PROJ X XP X=3.0 Y=-1.5 Z=5.0
PSCAL XP 4 1
PNODE XP 1
PGRID XP LN1 0 1
PGRID XP LN2 0 1
ZERO U 2 3
STOSM U XYZVER 1 3
PROJ U UP X=3.0 Y=-1.5 Z=5.0
PSCAL UP 4 3
ADD XP UP
PNODE XP 2
PGRID XP LN1
PGRID XP LN2 BOX 1 '*** Beispiel 2-D Waermeuebertragung Temperaturverteilung& Theta ***'
ENDJOB
```

```
IDENT 'Bsp. Fussbodenheizung'
FIGUR X=0.0 Y=0.0
PROJ X XP X=0 Y=0 Z=1
PSCAL XP 4 1
PNODE XP 1
PGRID XP LN4 0
LOAD ALFA Z=1 S=1
10.0
SCALE XYZVER ALFA
PLINE XP LN4 XYZVER M=300 N=20 : L=148.0 200.0
BOX 1 '*** Beispiel 2-D Waermeuebertragung Isolinien ***'
ENDJOB
```

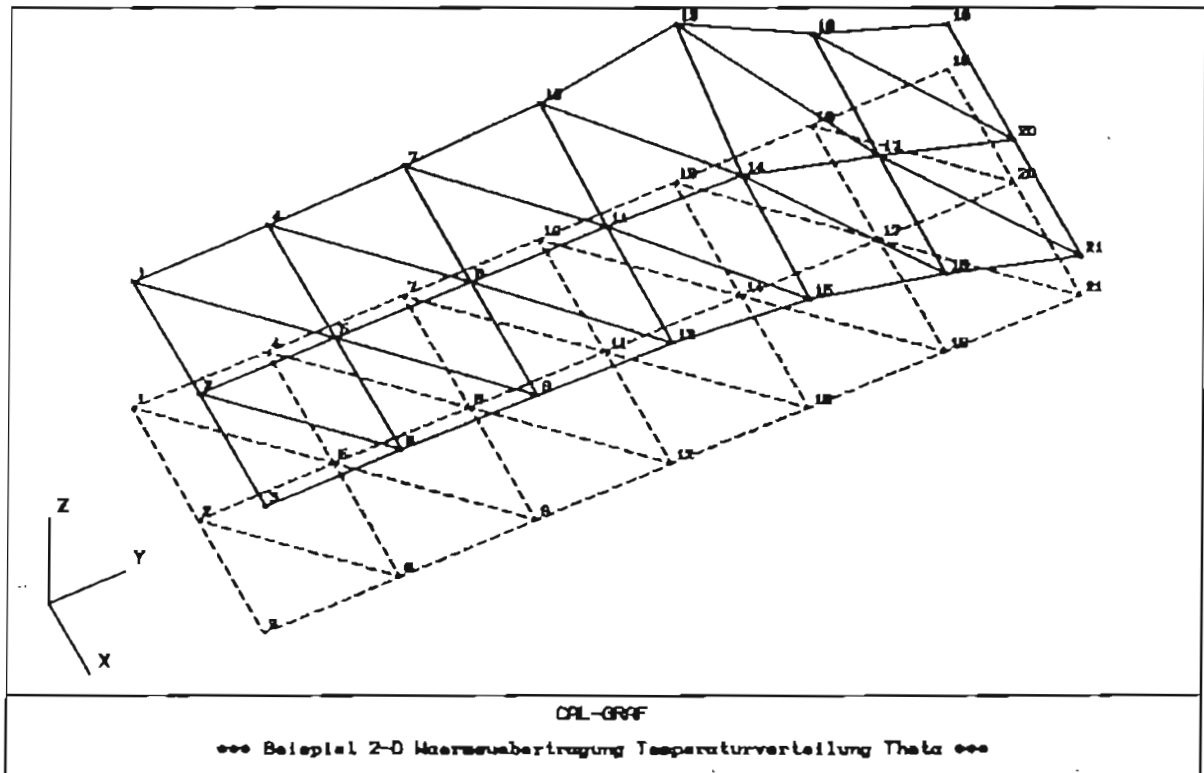
RETURN

Ergebnis:

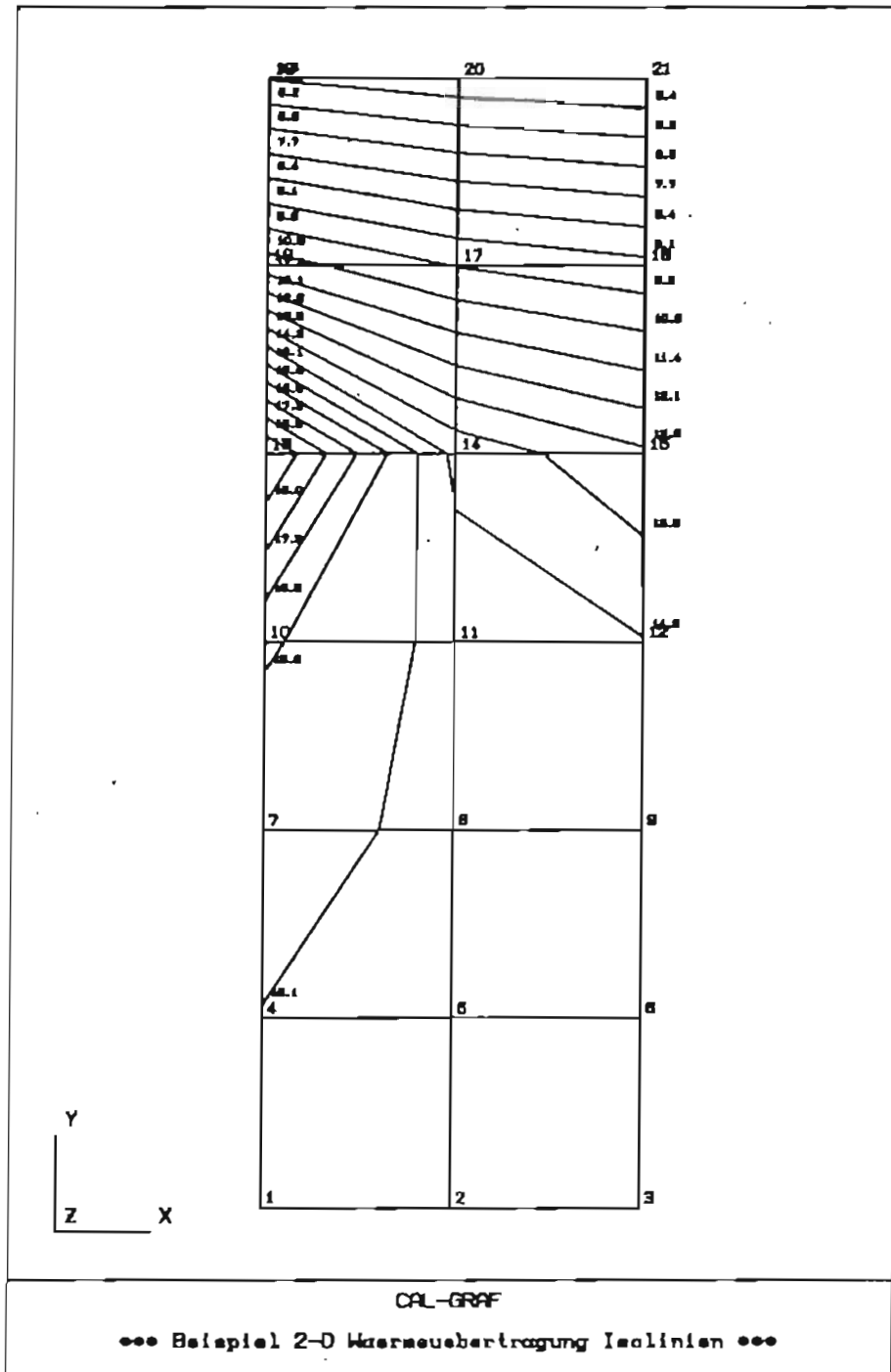
----- KNOTENVERSCHIEBUNGEN -----

Knoten	LFN	1
1	1	1.5031E+01
2	1	1.4998E+01
3	1	1.4972E+01
4	1	1.5064E+01
5	1	1.4995E+01
6	1	1.4945E+01
7	1	1.5235E+01
8	1	1.4974E+01
9	1	1.4817E+01
10	1	1.5928E+01
11	1	1.4848E+01
12	1	1.4375E+01
13	1	1.8781E+01
14	1	1.4115E+01
15	1	1.2988E+01
16	1	1.0967E+01
17	1	9.8444E+00
18	1	9.3445E+00
19	1	5.3968E+00
20	1	4.9509E+00
21	1	4.7015E+00

Graphische Darstellung der Temperaturverteilung:

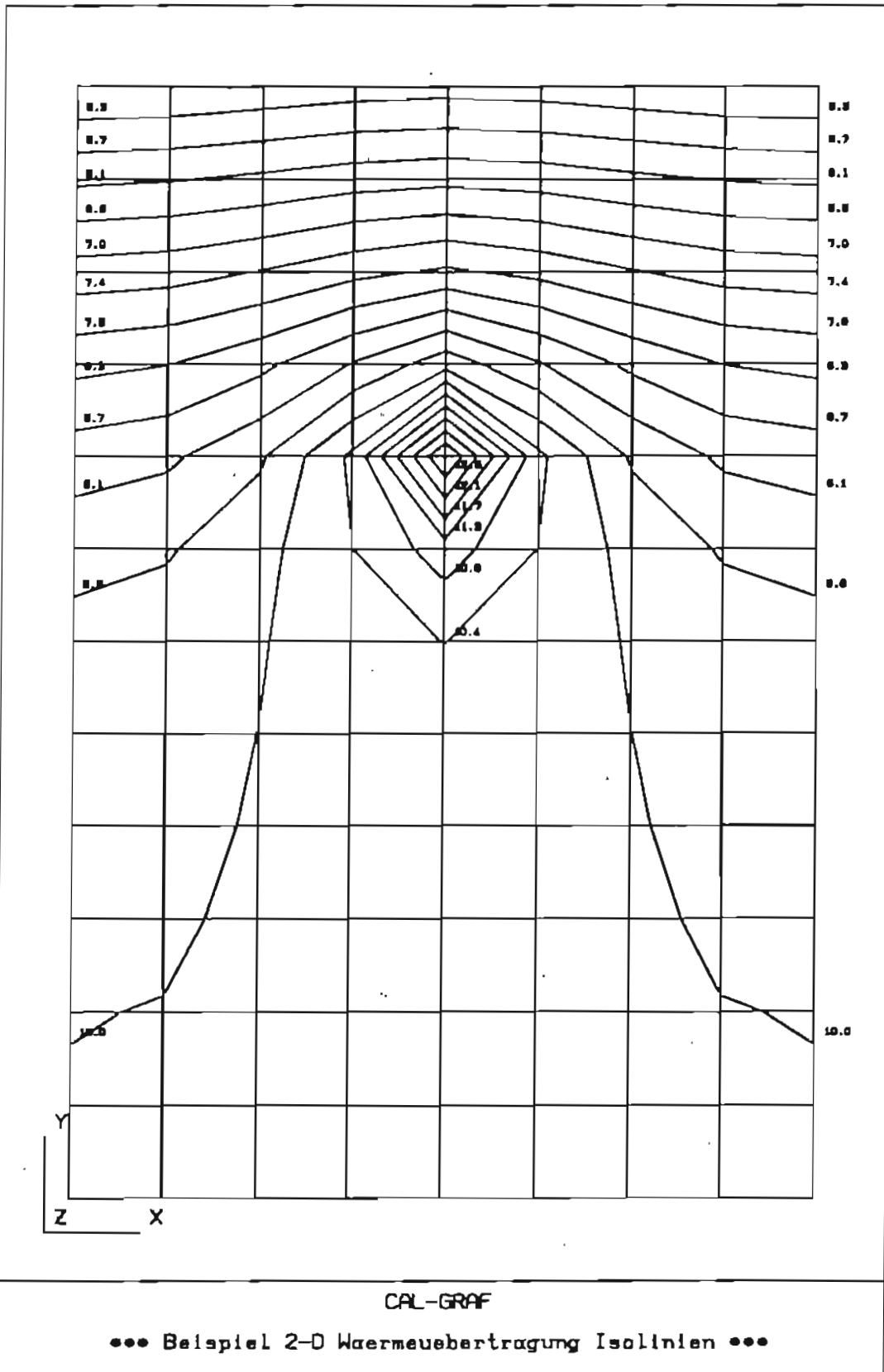


Isoliniendarstellung:



Anmerkung: Die Darstellung der Struktur mit Rechteckelementen wurde nur aufgrund der besseren Übersichtlichkeit der Graphik gewählt.

Isoliniendarstellung einer konvergierten FE-Lösung:



7.6 Sickerwasserströmung

7.6.1 Zusammenstellung der charakteristischen Größen

Die fundamentalen Gleichungen haben die gleiche Struktur wie die der Wärmeleitung. Den einzelnen Variablen müssen nur andere physikalische Größen gemäß nachfolgender Tabelle zugeordnet werden.

θ Standrohrspiegelhöhe
 θ' Gradienten der Standrohrspiegelhöhe

$\underline{\sigma}$ Filtergeschwindigkeiten $\left[\frac{m}{s} \right]$

$\underline{\sigma} = -\mathbf{K} \underline{\theta}'$ lineares Filtergesetz nach Darcy

k_{xx}, k_{yy} Durchlässigkeitsbeiwerte $\left[\frac{m^3}{s \cdot m^2} \right]$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{xx} & \\ & k_{yy} \end{bmatrix}$$

HORIZONTAL

Grundwasserentnahme
gemessen von der Grundwassersohle

\bar{p}_V Grundwasserregenerierung

\bar{p} Zu- oder Abfluß durch die

Seitenflächen des Bodens $\left[\frac{m^3}{s \cdot m} \right]$

VERTIKALEBENE

Dammdurchströmung
gemessen von einem Referenzhorizont

Quellen oder Senken $\left[\frac{m^3}{s} \right]$

Zu- oder Abfluß durch die

Bereichsgrenzen $\left[\frac{m^3}{s \cdot m} \right]$

7.6.2 Grundgleichungen der Sickerströmung

Ähnlich wie bei der Wärmeleitung die Energiebilanz, liefert bei der Sickerströmung die Massenbilanz die Gleichung

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \bar{\rho}_V = 0$$

bzw.

$$\nabla^T \underline{\sigma} - \bar{\rho}_V = 0$$

Hierin beschreiben $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ die Geschwindigkeit (Filtergeschwindigkeit) der durch ein poröses Medium strömenden Flüssigkeit.

Die Flüssigkeit ist als inkompressibel mit konstanter Dichte vorausgesetzt und $\bar{\rho}_V$ stellt die von außen zugeführte Flüssigkeitsmenge dar.

Auch hier sind die Durchflußgrößen (Geschwindigkeiten) wiederum von den Gradienten der Potentialfunktion θ , der hydraulischen Höhe abhängig.

Diese Beziehung wird mit Hilfe der Durchlässigkeiten durch das Gesetz von Darcy angegeben.

$$\underline{\sigma} = -\mathbf{K} \nabla \theta \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & 0 \\ & k_{yy} & 0 \\ & & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \theta / \partial x \\ \partial \theta / \partial y \\ \partial \theta / \partial z \end{bmatrix}$$

Hiermit ergibt sich in analoger Weise zur Wärmeleitung die Differentialgleichung der Sickerströmung:

$$\boxed{\nabla^T \mathbf{K} \nabla \theta + \bar{\rho}_V = 0} \quad \text{Differentialgleichung der Sickerströmung}$$

Diese Differentialgleichung muß wiederum unter Berücksichtigung der Randbedingungen für ein Gebiet gelöst werden.

Zur Verdeutlichung der Randbedingungen soll hier noch auf die Definition der hydraulischen Höhe und der damit zusammenhängenden physikalischen Zusammenhänge eingegangen werden.

Die hydraulische Höhe θ ergibt sich aus dem Flüssigkeitsdruck π (Druck positiv) und dem in (negativer) z-Richtung wirkenden Eigengewicht (Erdbeschleunigung) der Flüssigkeit zu:

$$\gamma \theta = (+ \pi + \gamma z)$$

Eingesetzt in das Gesetz von Darcy ergibt sich nach einer Umformung

$$-\pi_{,x} + \frac{\gamma}{k_{xx}} \sigma_x = 0$$

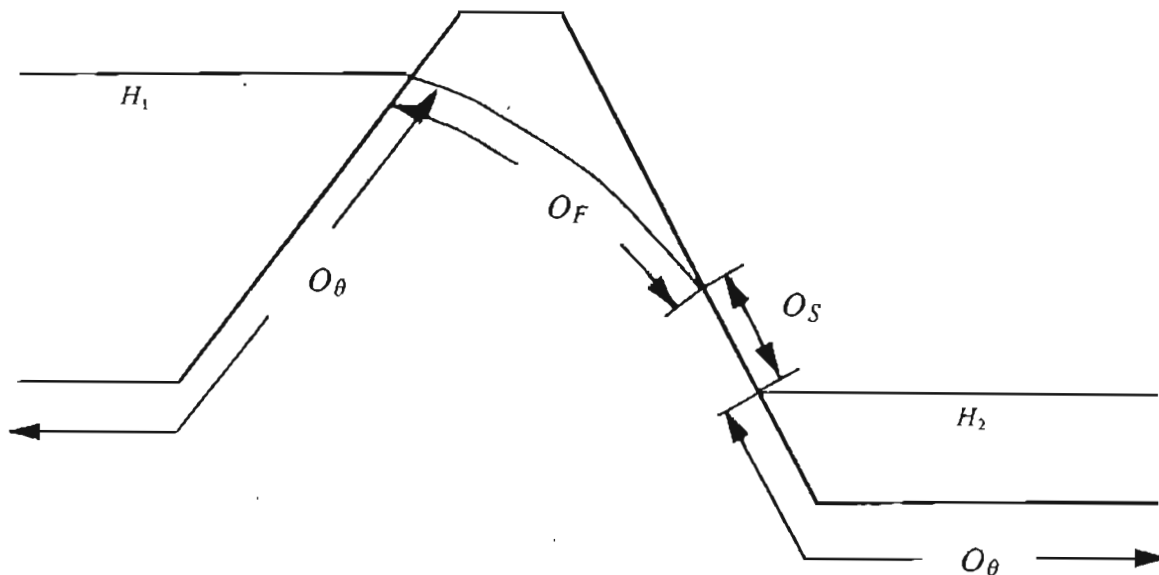
$$-\pi_{,y} + \frac{\gamma}{k_{yy}} \sigma_y = 0$$

$$-\pi_{,z} + \frac{\gamma}{k_{zz}} \sigma_z - \gamma = 0$$

Man erkennt, daß diese Gleichungen als Gleichgewichtsbedingungen deutbar sind mit $\sigma_{ij} = -\pi\delta_{ij}$. Die Anteile $\frac{\gamma}{k_{xx}}\sigma_x$, $\frac{\gamma}{k_{yy}}\sigma_y$ und $\frac{\gamma}{k_{zz}}\sigma_z$ stellen Kräfte dar, die sich aufgrund der Viskosität der Flüssigkeit und der Haftung an dem umgebenden Medium, dem Boden, ergeben.

Die ersten beiden Arten von Randbedingungen, die bei Sickerströmungen auftreten sind wiederum analog zu denen der Wärmeleitung.

- a) Ränder mit vorgegebener hydraulischer Höhe: $\theta = \bar{\theta}$ auf O_θ
 b) Ränder mit vorgegebener Zuführung von Flüssigkeit: $n^T\sigma = p = \bar{p}$ auf O_p



Daneben gibt es noch zwei weitere Arten von Randbedingungen. Diese und die oben angegebenen Randbedingungen sollen am Beispiel der Durchströmung eines Erddammes erläutert werden.

- a) Links und rechts des Damms gibt es je einen Rand O_θ , auf dem die Höhe des Wasserspiegels mit $\theta = H_1$ bzw $\theta = H_2$ gegeben ist.
 b) Zuführung einer Wassermenge von außen tritt hier nicht auf.
 c) Die Flüssigkeit strömt durch den Damm, wobei sich eine von vornherein nicht bekannte freie Oberfläche einstellt, für die gilt:

$$p = n^T\sigma = 0 \quad \text{auf } O_F$$

$$\pi = \gamma(\theta - z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = z$$

Es ist hier zu bemerken, daß hier zwei Bedingungen zu erfüllen sind, wobei die zweite jedoch die zunächst nicht bekannte Berandung des Gebietes festlegt, die dann iterativ bestimmt werden muß. Die erste entspricht dann dem Fall b).

d) Unterhalb der freien Oberfläche kann Sickerwasser auf dem Rand O_s austreten. Hier gilt die Randbedingung

$$\pi = \gamma(\theta - z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = z \text{ auf } O_s$$

wobei jedoch $p = n^T \sigma \geq 0$ erfüllt sein muß, d.h es darf keine Flüssigkeit von außen zugeführt werden.

Diese Randbedingung entspricht mit $\theta = z$ dem Fall a), wobei jedoch mit der Ungleichung nachträglich zu prüfen ist, ob der Fall d) zutrifft. Andernfalls gilt Fall c).

Möglichkeiten zur iterativen Berechnung der freien Oberfläche:

Die freie Oberfläche des Grundwasserleiters ist eine vorgegebene Stromlinie, deren Lage a priori nicht bekannt ist. Der Verlauf der unbekannt Gebietsberandung kann iterativ ermittelt werden: -Im ersten Schritt nimmt man einen Verlauf der freien Oberfläche $z(s)$ an. Als zusätzliche Randbedingung wird $z(s) = \theta$ gesetzt. Damit setzt man die Oberkante des Grundwasserleiters gleich der Standrohrspiegelhöhe. Den Verlauf der Sickerlinie ermittelt man schrittweise: Man gibt sich im Iterationsschritt i entlang der angenommenen freien Oberfläche den Zustrom p vor und berechnet entlang dieser Linie die zugehörige Standrohrspiegelhöhe $\theta(i)$. Daraus folgt die neue Lage der Oberfläche und somit die Gebietsberandung für den nächsten Schritt zu $z(i+1) = \theta(i)$. Die Iteration wird solange fortgesetzt, bis sich die Lage der Oberfläche nicht mehr ändert, d.h. man rechnet in jedem Iterationsschritt mit einem neuen Finite-Element-Netz.

Günstiger ist jedoch eine Formulierung, bei der sich die Diskretisierung des durchströmten Gebiets nicht ändert. Die ermittelte Oberfläche verläuft dann durch das Elementnetz. Dabei darf die Integration des Variationsproblems nicht mehr über die gesamte Elementfläche, sondern nur noch über die benetzte Fläche durchgeführt werden.

Bei linearen Funktionsansätzen im Element kann dies über eine Wichtung der benetzten und freien Elementfläche ausgeführt werden:

$$a(i) = \frac{F(i)_{benetzt}}{F_{Element}}$$

$a = 1$	Element unterhalb freier Oberfläche
$a = 0$	Element oberhalb freier Oberfläche
$0 < a < 1$	Freie Oberfläche verläuft durch das Element

8.2 Netzverfeinerung (Adaptive Verfahren)

Die folgenden Beispiele wurden entnommen aus:

Proceedings of the Third International Conference on Numerical
Methods in Engineering: Theory and Applications (NUMETA 90),
7-11 January, 1990, University College of Swansea, Swansea,
Wales, U.K.

NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING: THEORY AND APPLICATIONS

VOLUME II

Edited by

G.N. PANDE and J. MIDDLETON

University College of Swansea



Elsevier Applied Science
London and New York

- (1) ADAPTIVE MESH REFINEMENT WITH THE MORLEY PLATE
ELEMENT
W. Atmar-Sibal and E. Hinton
- (2) AN ADVANCING FRONT ALGORITHM FOR THREE DIMENSIONAL
MESH GENERATION
H. K. Rudd and S. O. Wilk
- (3) QUALITY CHECKING AND OPTIMIZED MESHES FOR FINITE
ELEMENT COMPUTATIONS
P. Ladewitz, J-P. Pelle and Ph. Rougeot
- (4) ADAPTIVE FE-ANALYSIS PROCEDURE AND ERROR ESTIMATION
FOR 2D LINEAR ELASTIC PROBLEMS
L-F. Zeng and N-E. Wiberg

aus: [1]

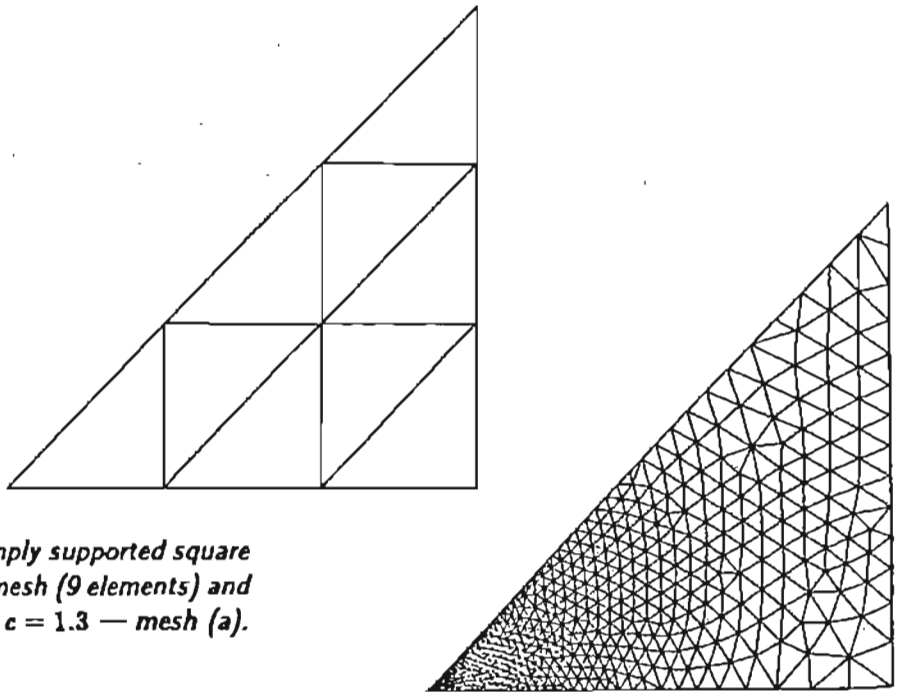


Figure 1(a) Symmetric segment of a simply supported square plate under a central point load: initial mesh (9 elements) and final mesh (1114 elements) — $\bar{\eta} = 5\%$, $c = 1.3$ — mesh (a).

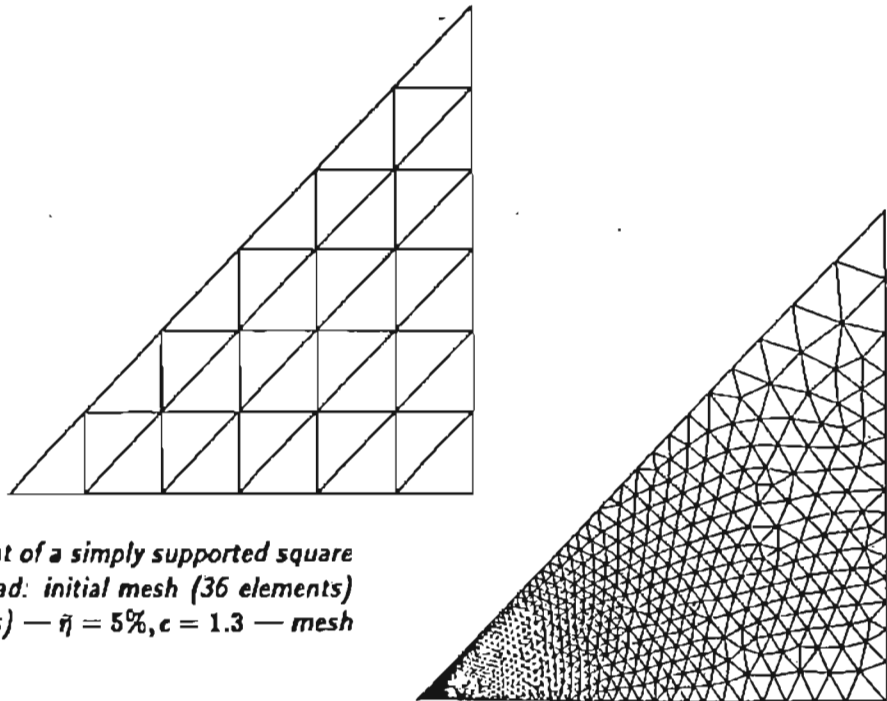


Figure 1(b) Symmetric segment of a simply supported square plate under a central point load: initial mesh (36 elements) and final mesh (1743 elements) — $\bar{\eta} = 5\%$, $c = 1.3$ — mesh (b).

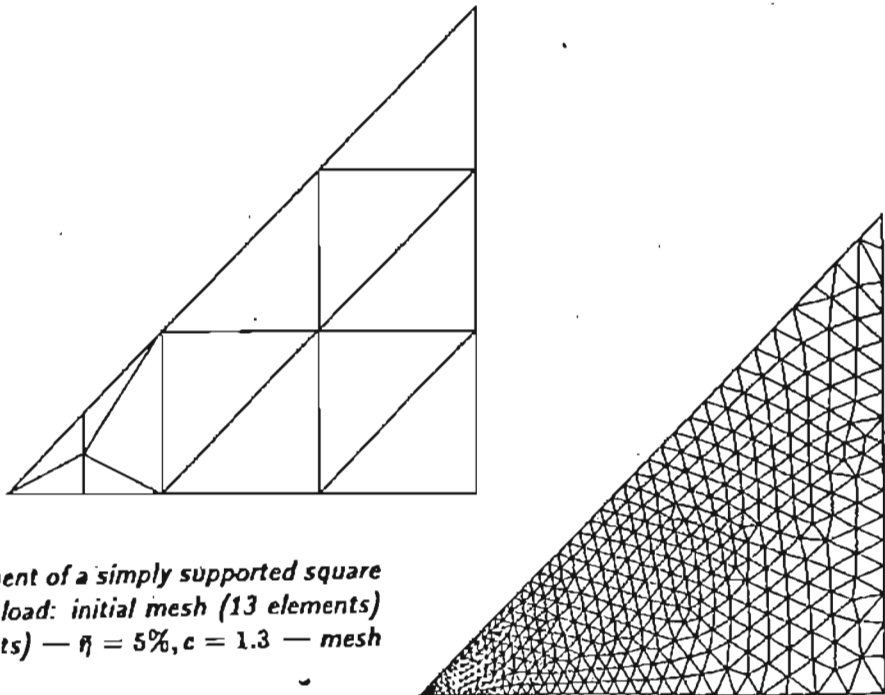


Figure 1(c) Symmetric segment of a simply supported square plate under a central point load: initial mesh (13 elements) and final mesh (859 elements) — $\bar{\eta} = 5\%$, $c = 1.3$ — mesh (c).

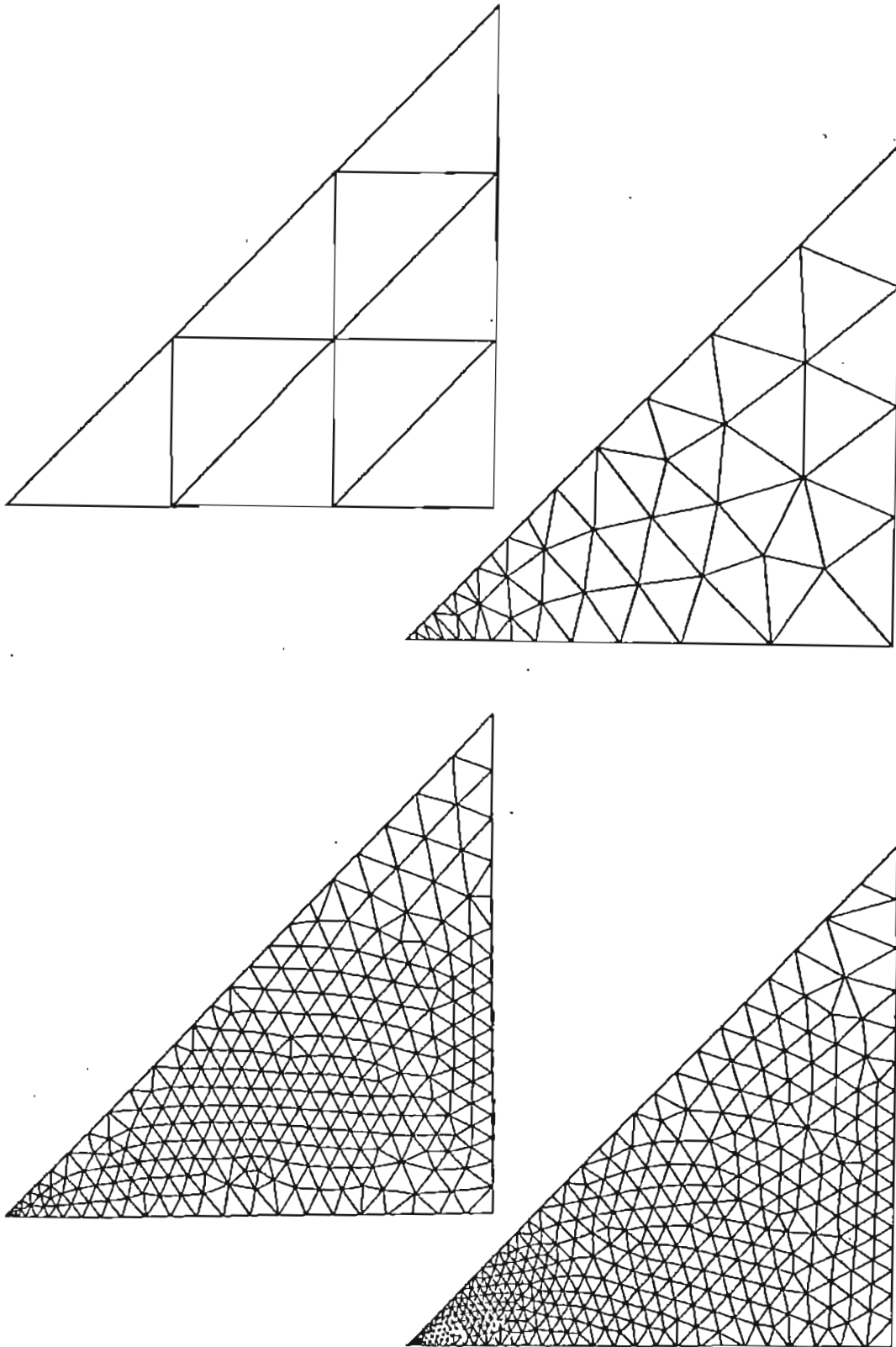


Figure 2 Symmetric segment of a simply supported square plate under a central point load: initial mesh (9 elements), intermediate meshes (67 and 499 elements) and final mesh (711 elements) — $\bar{\eta} = 5\%$, $c = 0.3$ — mesh (a).

aus [1]

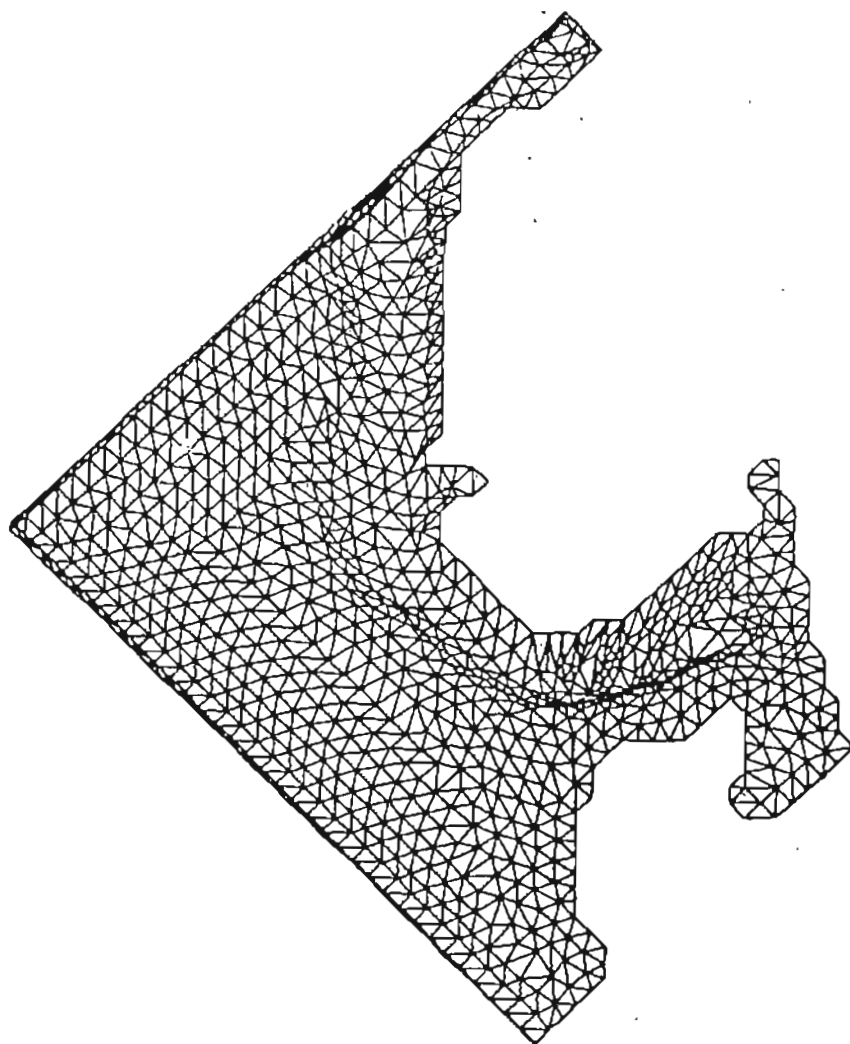


Figure 1.a The initial front and surface mesh for a section of the North Sea, viewed from nearly directly above. The ocean depth is exaggerated by a factor of 200.

cus [2]

5.1 example 1

We consider a circular elastic holed plate submitted to the loading shown in figure 1, and discretized with 6 nodes elements. The initial mesh includes 127 elements and 284 nodes (figure 2). The computed error is $\epsilon = 6.2\%$. Figure 3 shows the local error contributions.

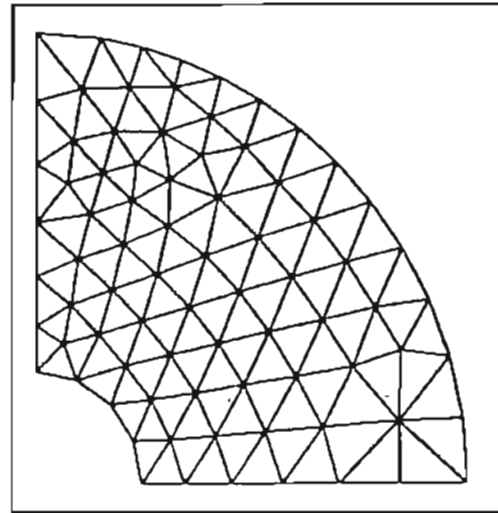
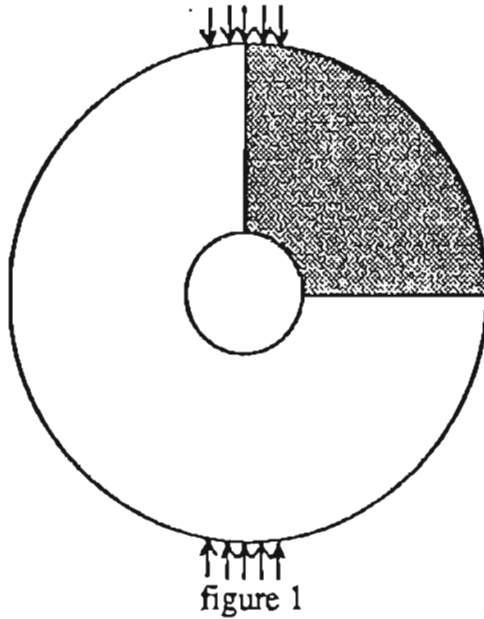


figure 2 : Initial mesh
127 elements , 284 nodes

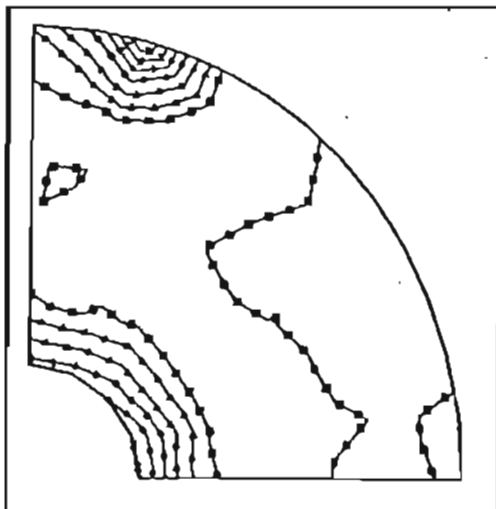


figure 3 : Iso-error map

□ 0.00070	● 0.01120
■ 0.00332	• 0.01382
▲ 0.00595	⊗ 0.01645
△ 0.00857	⊠ 0.01907

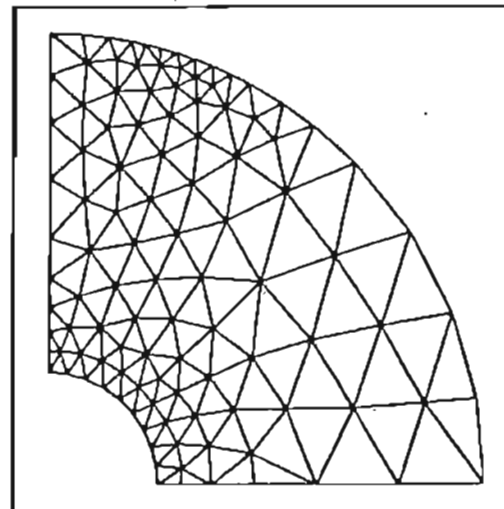


figure 5 : Optimized mesh

5.1 example 2

We consider the thick ring presented in figure 7. The first analysis is carried out on the coarse mesh shown in figure 8 (218 3-node axisymmetric triangles and 133 nodes). The computed error is $\epsilon=23.5\%$, and the error is localized in the strong gradients areas such as the clamped side (figure 9). The optimal mesh is built for a required accuracy $\epsilon_0=10\%$. Figure 10 shows the corresponding size modification factors r_E . The new mesh built from this map includes 849 elements and 473 nodes (figure 11) and leads to an error $\epsilon=11.1\%$. We check the optimality by computing the factors r_E on the new mesh for the obtained error (figure 12).

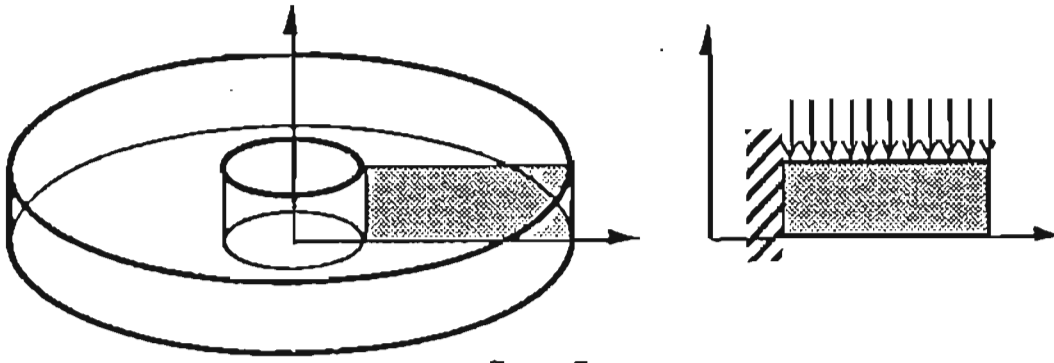


figure 7

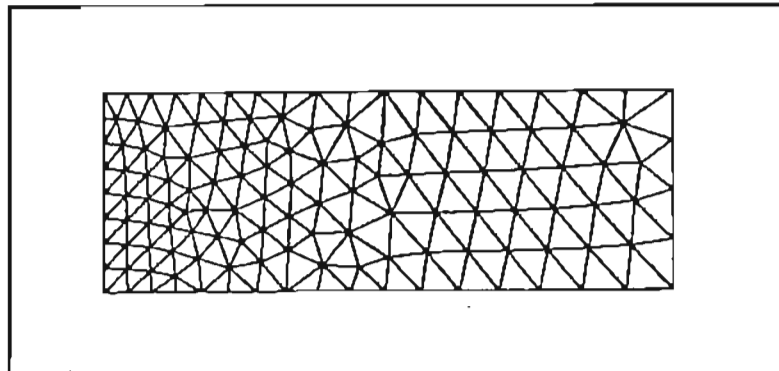


figure 8 : Initial mesh, 218 elements, 133 nodes

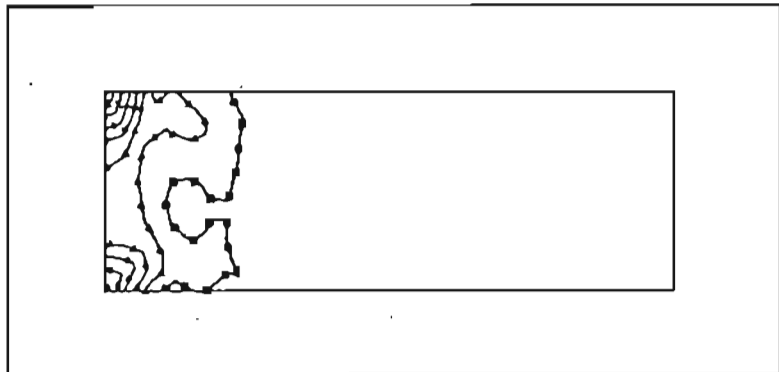


figure 9 : Iso-error map

- 0.0123
- ▲ 0.0192
- ▲ 0.0261
- ◊ 0.0330
- ◊ 0.0400
- × 0.0469
- × 0.0538

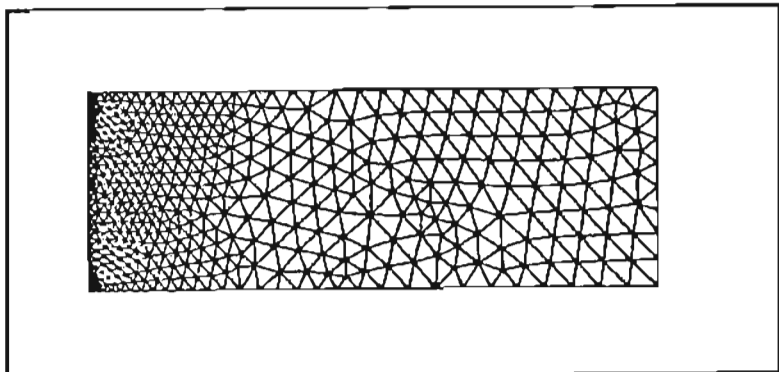


figure 11 : Optimized mesh, 849 elements, 473 nodes

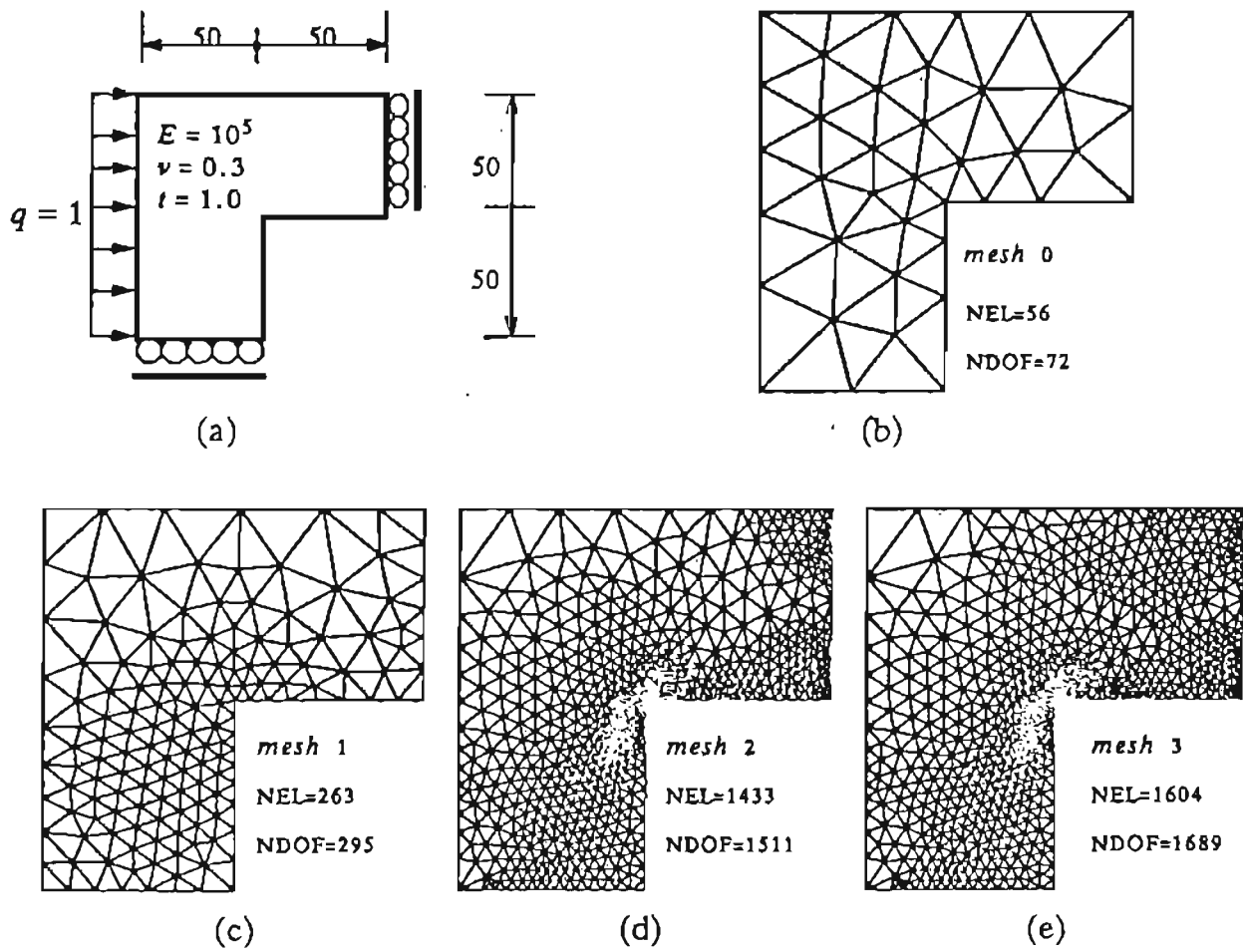
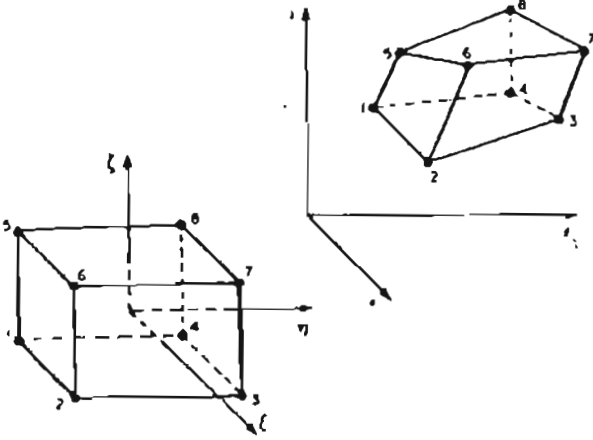
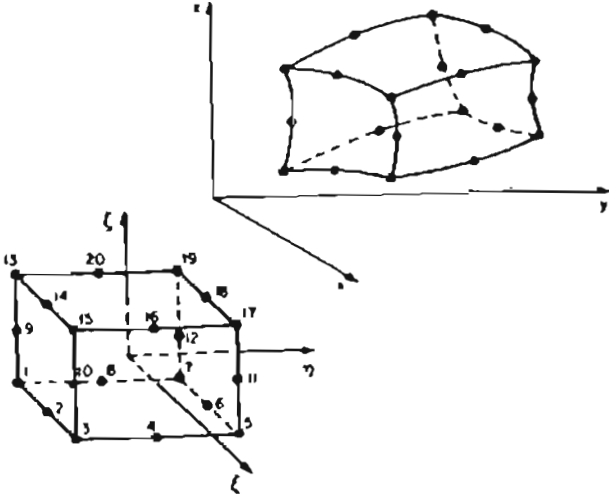
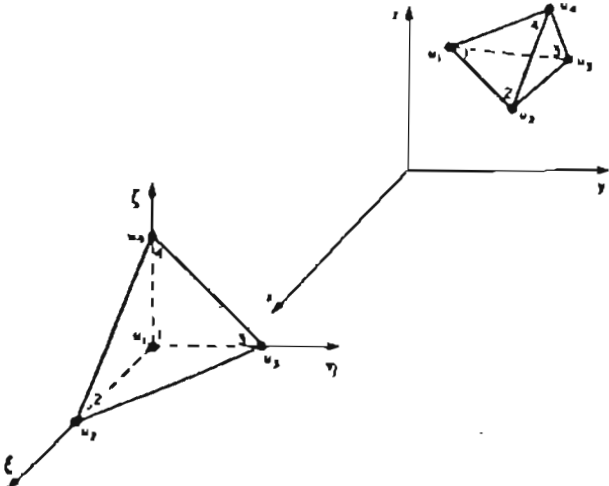
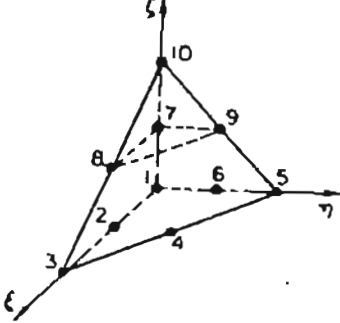
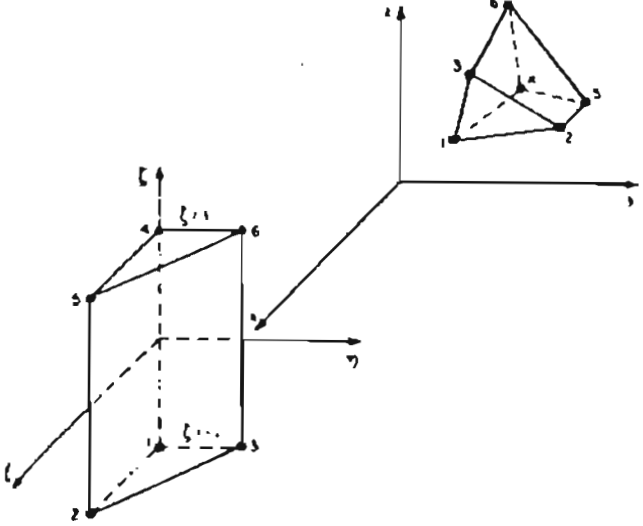
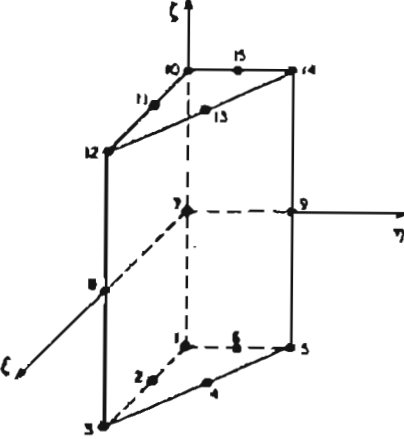


Fig.1 (a) A L-Shape Domain with a Plane Stress Condition; (b) Initial Mesh; (c)-(e) Meshes Obtained in the Computational Process.

aus [4]

8.3 Übersicht: Dreidimensionale Elemente

Element	Knoten- Anzahl	Ansatzpolynom
	8	$P = \{ 1 \ \xi \ \eta \ \xi\eta \\ \zeta \ \xi\zeta \ \eta\zeta \ \xi\eta\zeta \}$
	20	$P = \{ 1 \ \xi \ \eta \ \xi\eta \\ \zeta \ \xi\zeta \ \eta\zeta \ \xi\eta\zeta \\ \xi^2 \ \xi^2\eta \ \xi^2\zeta \ \xi^2\eta\zeta \\ \eta^2 \ \xi\eta^2 \ \eta^2\zeta \ \xi\eta^2\zeta \\ \zeta^2 \ \xi\zeta^2 \ \eta\zeta^2 \ \xi\eta\zeta^2 \}$
	4	$P = \{ 1 \ \xi \ \eta \ \zeta \}$

Element	Knoten- Anzahl	Ansatzpolynom
	10	$P = \{ 1 \ \xi \ \eta \ \zeta \ \xi^2 \ \xi\eta \ \eta^2 \ \eta\zeta \ \zeta^2 \ \xi\zeta \}$
	6	$P = \{ 1 \ \xi \ \eta \ \zeta \ \xi\zeta \ \eta\zeta \}$
	15	$P = \{ 1 \ \xi \ \eta \ \zeta \ \xi\zeta \ \eta\zeta \ \xi^2\zeta \ \xi\eta\zeta \ \eta^2\zeta \ \xi^2 \ \xi\zeta^2 \ \eta\zeta^2 \ \xi^2\zeta^2 \ \xi\eta\zeta^2 \ \eta^2\zeta^2 \}$

Finite Element Methoden I			Vorlesungsplan WS 98/99
Woche	Datum	Vorlesung Mo 10 ¹⁵ -11 ⁴⁵ Raum 2770	Übung/Seminar Mo 10 ¹⁵ -11 ⁴⁵ Raum 2770
1	2. Nov.	1. Einführung 2. Grundlage und Rechengang der FEM Beispiel: Gebetteter Balken	
2	9. Nov.	2.6 Erweiterungen der FEM Übergang auf Flächentragwerke und Feldprobleme	
3	16. Nov.		zu Kap.2:Elementmatrizen des gebetteten Balkens - Steifigkeiten, Lastspalten für Gleichlast und Temperatur
4	23. Nov.	3. Scheiben: Grundgleichungen, Ansatzwahl, Elementsteifigkeiten und Lastspalten	
5	30. Nov.		zu Kap.3: Bilineares Scheibenelement: Elementmatrizen, Spannungsberechnung Beispiel für Handrechnung mit 2 Elementen
6	7. Dez.	Fortsetzung 3. Scheiben: Überlagerung, num. Lösungsverhalten	
7	14. Dez.	!! Woche CAL-Seminar !!	zu Kap.3: Beispiel eingespannte Rechteckscheibe - SEMINAR: CAL-FEM und CAL-GRAF
	21. Dez.	!! Woche CAL-Seminar !!	
	28. Dez.		
	4. Jan.		
8	11. Jan.		zu Kap.5: Isoparametrisches Elementkonzept am Beispiel des Dreieckscheibenelements Beispiel: wandartiger Träger
9	18. Jan.	4. Übersicht Platten - SRI-Element 5. Ergänzende Kapitel: Interpolation, allgemeines zur Ansatzwahl, Numerische Integration	
10	25. Jan.		zu Kap.5: Spannungsauswertung, reduzierte Integration, Locking
11	1. Feb.	6. Verallgemeinerung der FEM - Galerkin Verf. 7. Einführung in stationäre Feldprobleme am Beispiel der Wärmeleitung	
12	8. Feb		zu Kap.7: stationäre Feldprobleme am Beispiel der Wärmeleitung
13	15. Feb.	!! Rosenmontag !!	allg. Vortrag FE
14	22. Feb.	7.3 Stationäre Feldprobleme ,Sickerströmungen 8. Ausblick	Klausur: Dienstag, 23.2.99 AUDIMAX 17.00 - 18.00 Uhr