

Lehrveranstaltungen
Flächentragwerke II
(Schalen)

Vorlesungen und Übungen
des Lehrstuhls für Statik der TUM

gehalten SS 1988 bis SS 1999
von o. Prof. Dr.-Ing. Walter Wunderlich
und Mitarbeitern

Flächentragwerke II (Schalen)

Teil 1: Vorlesungsumdruck und Manuskriptseiten

Teil 2: Übungsumdruck

Teil 3: Formelsammlung

Flächentragwerke II

Gliederung SS 1998

1. Einführung

- 1.1. Begriff Schale
- 1.2. Beispiele aus verschiedenen Bereichen
- 1.3. Schalenformen und Tragwerke
- 1.4. Literatur

2. Tragverhalten der Schalen

- 2.1. Grundlagen und Spezialfälle
- 2.2. Klassifikation nach Krümmung
- 2.3. Lösungsverfahren
- 2.4. Beispiele zum Tragverhalten

3. Geometrische Grundlagen

- 3.1. Koordinaten und Tangentenvektoren
- 3.2. Krümmung einer Fläche
- 3.3. Änderung der Tangentenvektoren
- 3.4. Spezielle Geometrien (Übung)
 - 3.4.1. Differentielles Element und Krümmungsradien bei Drehschalen
 - 3.4.2. Allg. Rotationsschalen in θ - z -Koordinaten
 - 3.4.3. Allg. Rotationsschalen in θ - ϕ -Koordinaten
- 3.5. Schalenkontinuum

4. Membrantheorie

- 4.1. Voraussetzungen
- 4.2. Definition der Resultierenden
- 4.3. Kräftegleichgewicht an der Membranschale
- 4.4. Membrantheorie der Rotationsschalen
- 4.5. Spezielle Geometrien
- 4.6. Beispiele

5. Kinematische Beziehungen

- 5.1. Struktur der Grundgleichungen
- 5.2. Verschiebungsgrößen
- 5.3. Verzerrungs-Verschiebungs- Beziehungen im Schalenraum
 - 5.3.1. Anmerkungen zu den Verzerrungsgrößen
 - 5.3.2. Herleitung der kinematischen Beziehungen im Schalenraum
 - 5.3.3. Zusammenfassung
- 5.4. Verzerrungs-Verschiebungs- Beziehungen bezogen auf die Schalenmittelfläche (S_{mf})
 - 5.4.1. Zusammenfassung
 - 5.4.2. Anmerkungen zur Schreibweise

- 5.5. Matrizenielle Darstellung der kinematischen Beziehungen
 - 5.5.1. Sonderfall Platte / Scheibe
 - 5.5.2. Sonderfall Rotationsschale mit rotationssymmetrischer Last
- 5.6. Integration am Beispiel der Rotationsschalen
- 5.7. Beispiele

6. Werkstoffgesetz

7. Biegetheorie der Schalen

- 7.1. Allgemeines
- 7.2. Definition der Spannungsresultierenden
- 7.3. Momentengleichgewicht
- 7.4. Matrizendarstellung der Gleichgewichtsgleichungen
- 7.5. Biegetheorie kreiszylindrischer Behälter
- 7.6. Beispiel

8. Numerisches Berechnungsverfahren für Rotationsschalen

- 8.1. Grundgleichungen
- 8.2. Halbanalytische Berechnungsverfahren
- 8.3. Ermittlung der Elementmatrizen durch Integration des Differentialsystems
 - 8.3.1. Differentialgleichungssystem für den Spezialfall des Kreiszylinders
 - 8.3.2. Integration des Differentialsystems
 - 8.3.3. Differentialgleichungssystem allgemeiner Rotationsschalen
- 8.4. Strukturberechnung mit Ringelementen

9. Finite-Element-Modelle für Schalen

- 9.1. Grundlagen
- 9.2. Gekrümmtes Schalenelement
- 9.3. Theorie für flache Schalen
- 9.4. Ebene Schalenelemente
- 9.5. Degenerierte Schalenelemente

10. Stabilität von Schalen

- 10.1. Einführung
- 10.2. Beulen am Beispiel des Kreiszylinders

11. Der dünne Kreisringbalken (Übung)

Anhang: Herleitung der Gleichgewichtsbeziehungen aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten (PVA)

1. EINFÜHRUNG

(z. T. Tafelanschrieb)

1.4 LITERATUR

Theorie der gekrümmten Flächentragwerke (Schalen)

- [1] *Axelrad, E.*: Schalentheorie. Teubner Stuttgart 1983
- [2] *Basar, Y., Krätzig, W.B.*: Mechanik der Flächentragwerke. Vieweg Braunschweig 1985
- [3] *Flügge, W.*: Statik und Dynamik der Schalen. Springer Berlin 1962 (3.Aufl.)
- [4] *Flügge, W.*: Stresses in Shells. Springer Berlin 1973 (2.Aufl.)
- [5] *Girkmann, K.*: Flächentragwerke. Springer Verlag Wien 1963 (6.Auflage)
- [6] *Gould, Phillip L.*: Analysis of Shells and Plates. Springer Verlag New York 1988
- [7] *Hampe E.*: Stabilität rotationssymmetrischer Flächentragwerke. W.Ernst & Sohn Berlin 1983
- [8] *Kollár, L.*: Schalenkonstruktionen. Betonkalender 1984 Teil II.
- [9] *Markus, G.*: Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke. Werner Verlag Düsseldorf 1978 (3.Auflage)
- [10] *Pflüger, A.*: Elementare Schalenstatik. Springer Berlin 1967 (4.Aufl.)
- [11] *Pflüger, A.*: Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Springer Berlin 1964 (2.Aufl.)
- [12] *Rabich, R.*: Statik der Platten, Scheiben, Schalen. in: Ingenieur Taschenbuch Bauwesen Band I Pfalz-Verlag Basel 1964
- [13] *Worch, G.*: Elastische Schalen. Betonkalender 1968 II. Teil
- [14] *Wunderlich, W.*: Differentialsystem und Übertragungsmatrizen der Biegetheorie allgemeiner Rotationsschalen. Techn. Hochschule Hannover, Lehrstuhl für Stahlbau, Schriftenreihe Heft 4, Hannover 1966

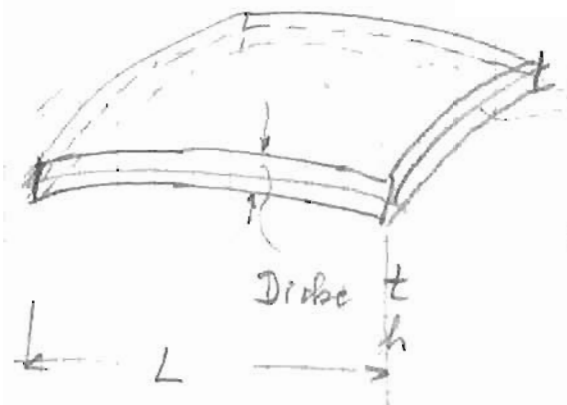
Finite-Element-Methoden

Allgemeine Einführungen siehe Literaturangabe zur Vorlesung Flächentragwerke I

1. Einführung

1.1. Begriff: Schale

Vergleiche: Stab	1-D
Scheibe, Platte	2-D eben
Schale	2-D gekrümmt



Schalenmittelfläche
gekürvtes dünnes
Flächenelement

$t \ll L$ dünn
Kleinste elast. Lage-
betriebe ~~Abmessung~~

1.2 Beispiele aus verschiedenen Bereichen

Muschel, Krebs

Natur: Ei, Schnecke, Bambusrohr,
Walnuß (Nußknochen \rightarrow Ed.-Knochen), etc.

Bauwesen: Silo, (Füll)Behälter, Kühlturm, Sheds
Stammhaus, Wasserturm, etc.

Maschinenbau: Rohr, Autoschalen,

Flugzeugbau: Flugzeuge, Raketen

Wie geht Schale kaputt?

Einknicken

Beulen

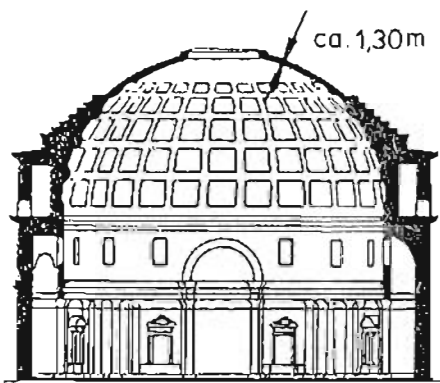
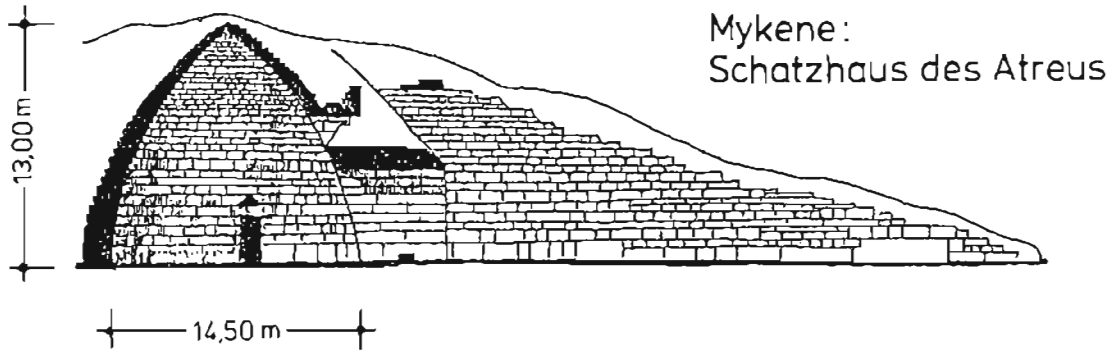
große Verformung

\rightarrow Folien

1.3 Schalenformen und Tragwerke

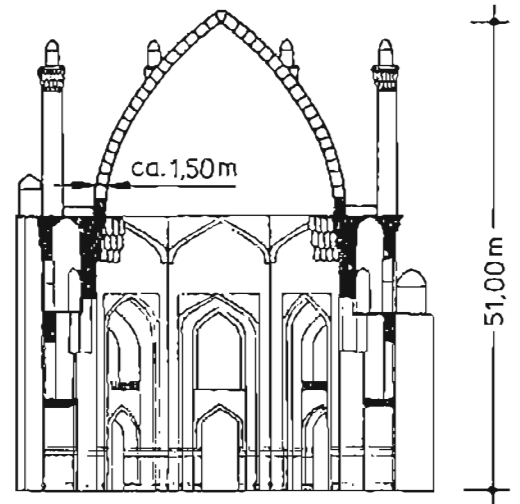
1.2 Beispiele für Schalentragwerke

1.2.1 Baugeschichte



Rom: Pantheon 115 - 125

$$h/R = 1/17$$

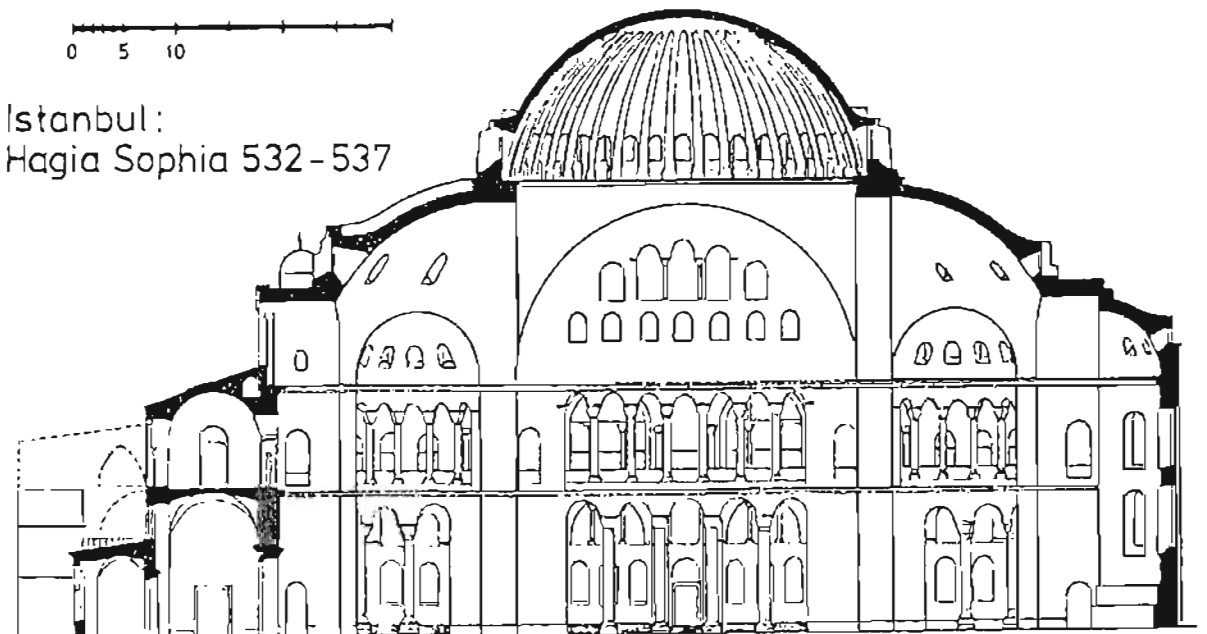


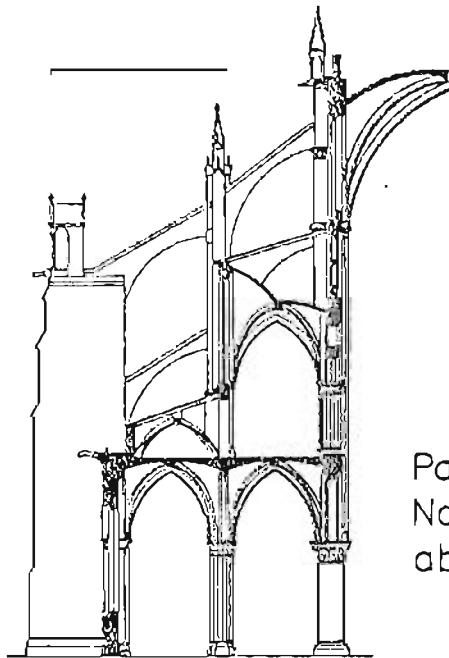
Sultanijeh/Iran 1304-1316

(Ziegelmauerwerk)

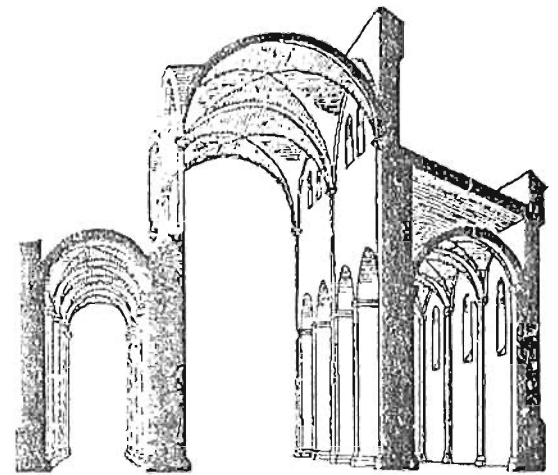


Istanbul:
Hagia Sophia 532 - 537

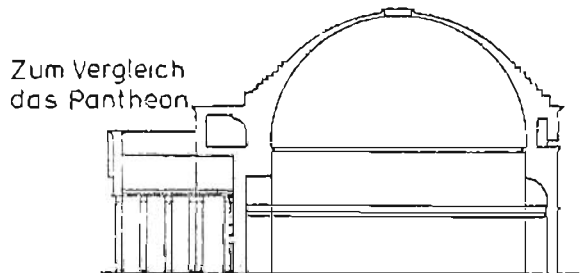




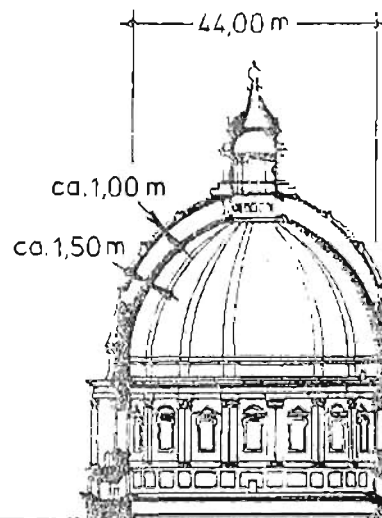
Paris:
Notre - Dame
ab 1180



Romanisches Gewölbesystem
um 1000

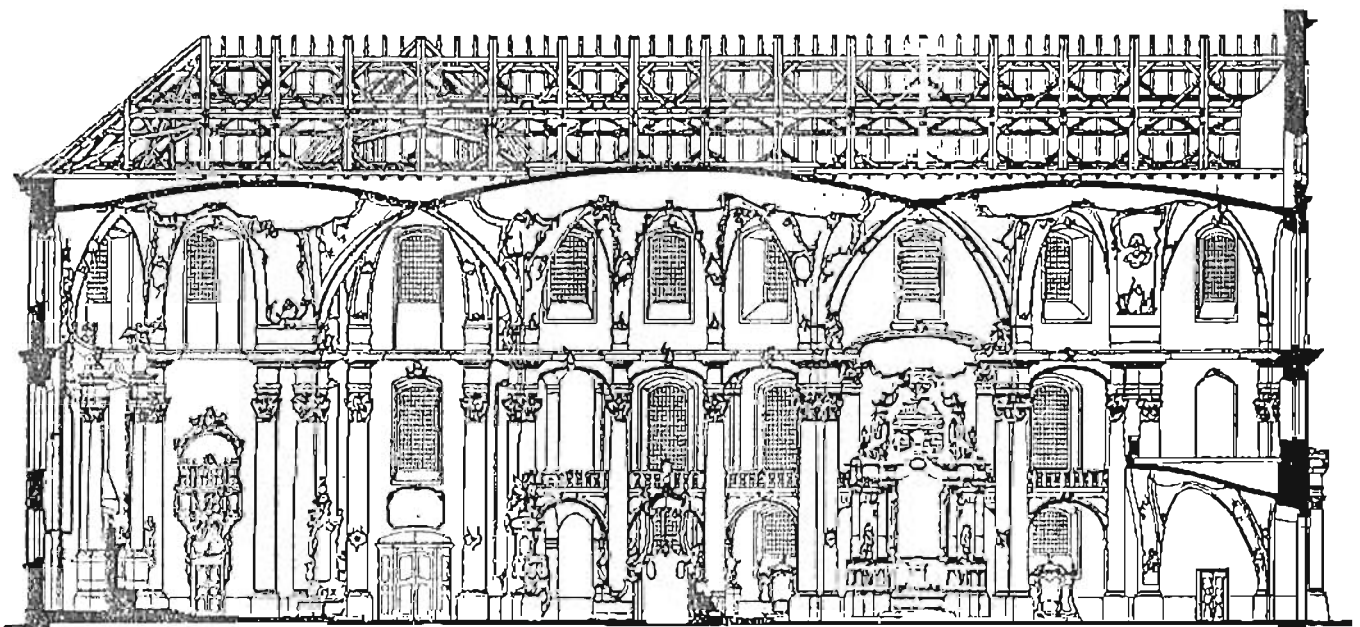
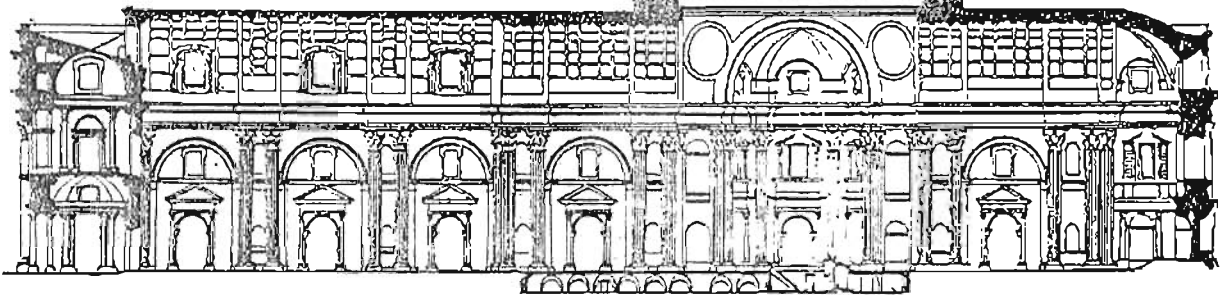


Zum Vergleich
das Pantheon



Rom: St. Peter
1506 - 1626

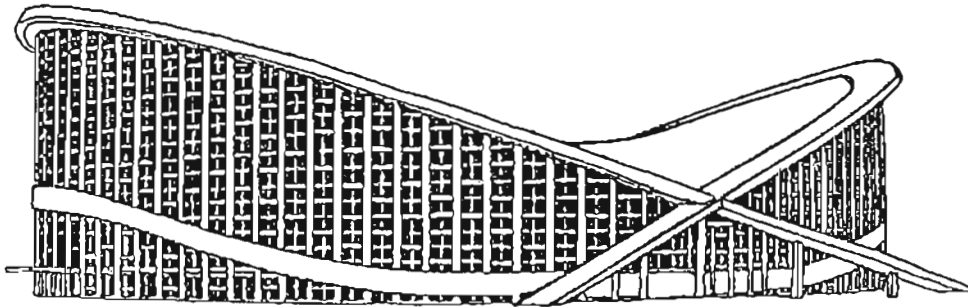
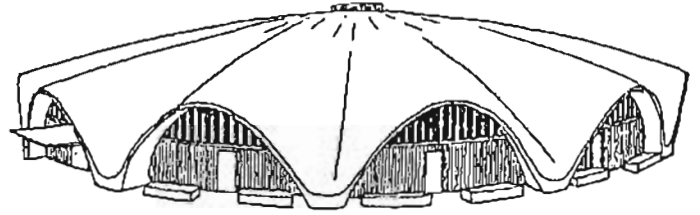
$$h/R = 1/7$$



Vierzehnheiligen: Wallfahrtskirche 1743 - 1772

1.2.2 Moderne Architektur

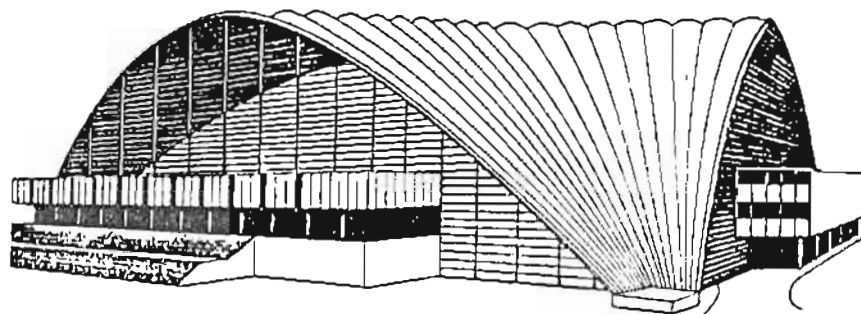
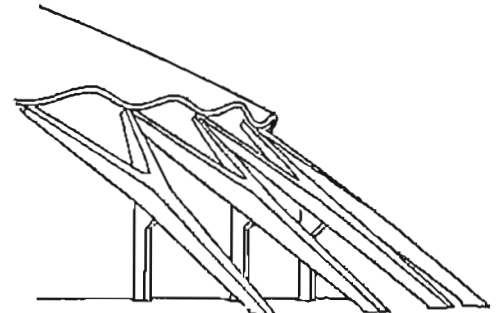
Royan: Markthalle
(R. Sarger)



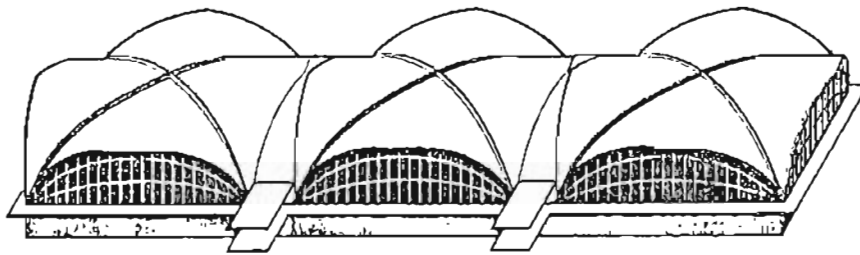
Raleigh: Sporthalle
(M. Novicki)



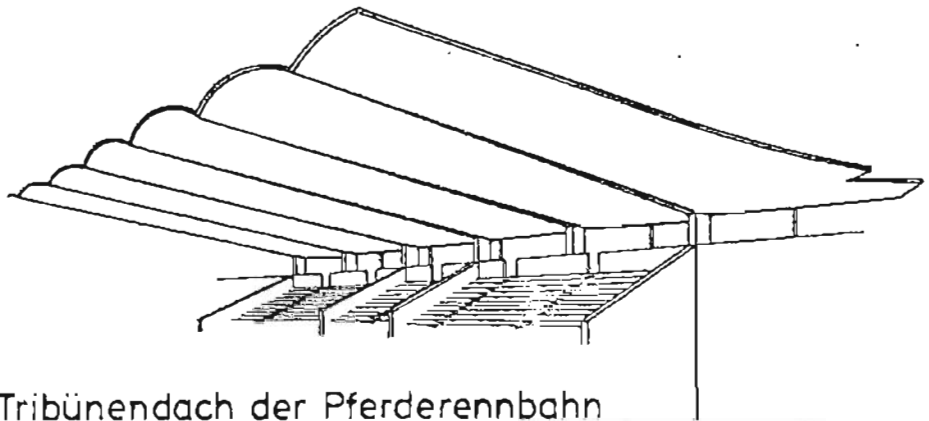
Rom: Kleiner Olympiapalast (P.L. Nervi 1960)



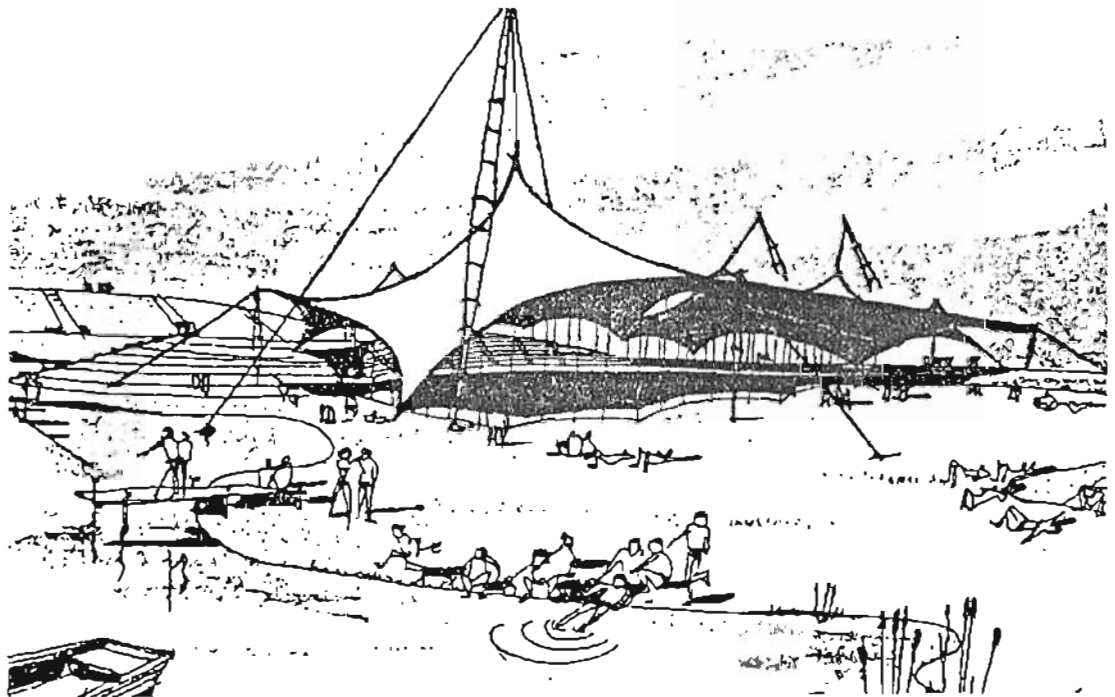
Paris: Ausstellungshalle (N. Esquillan 1957 - 1958)



Flughafen St. Louis ,Empfangsgebäude

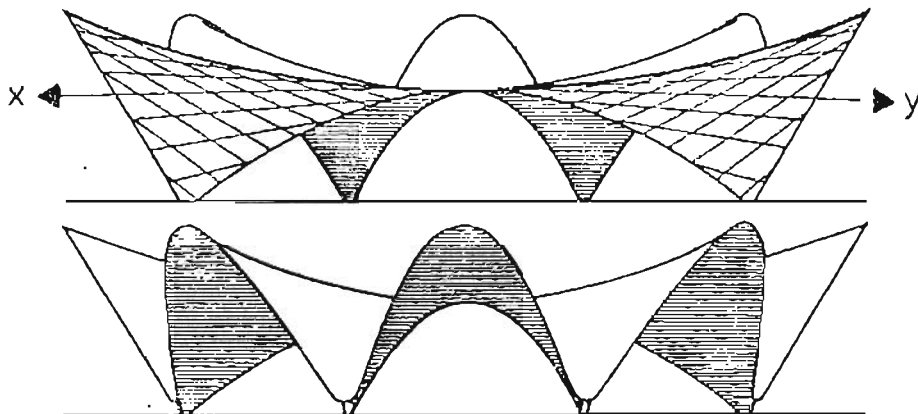
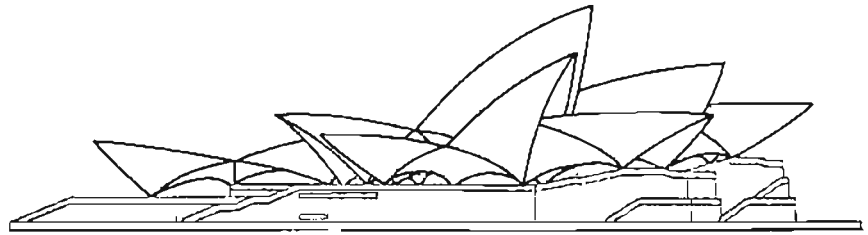


Spanien: Tribürendach der Pferderennbahn
la Zarzuéla



Olympiastadion München

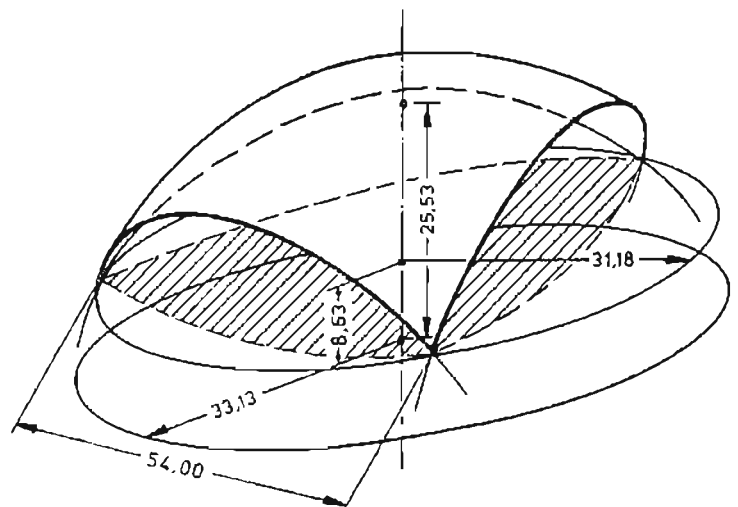
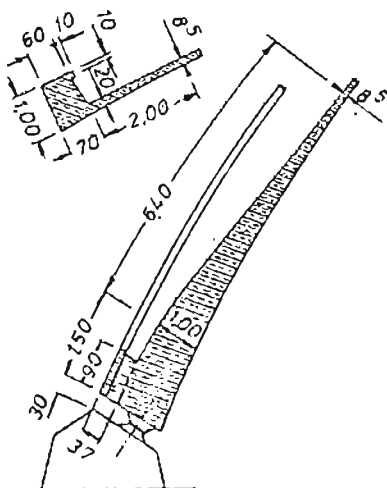
Sydney: Oper



Schnitt entlang einer Scheitelkurve

Ansicht

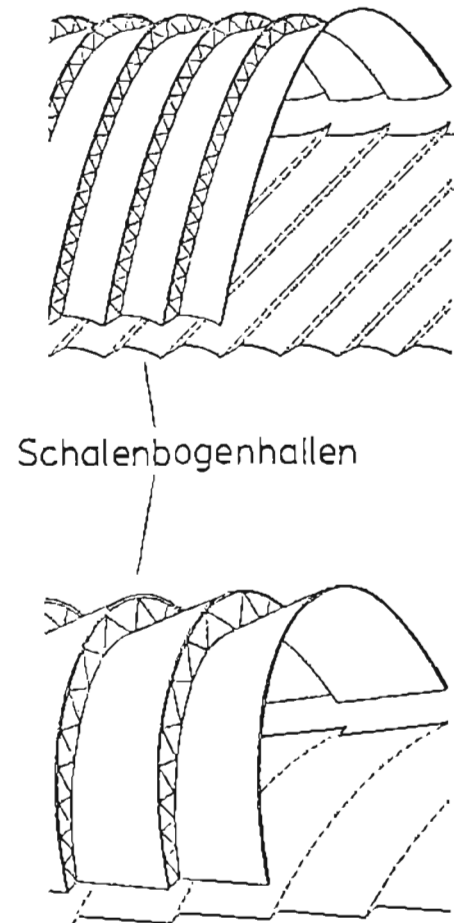
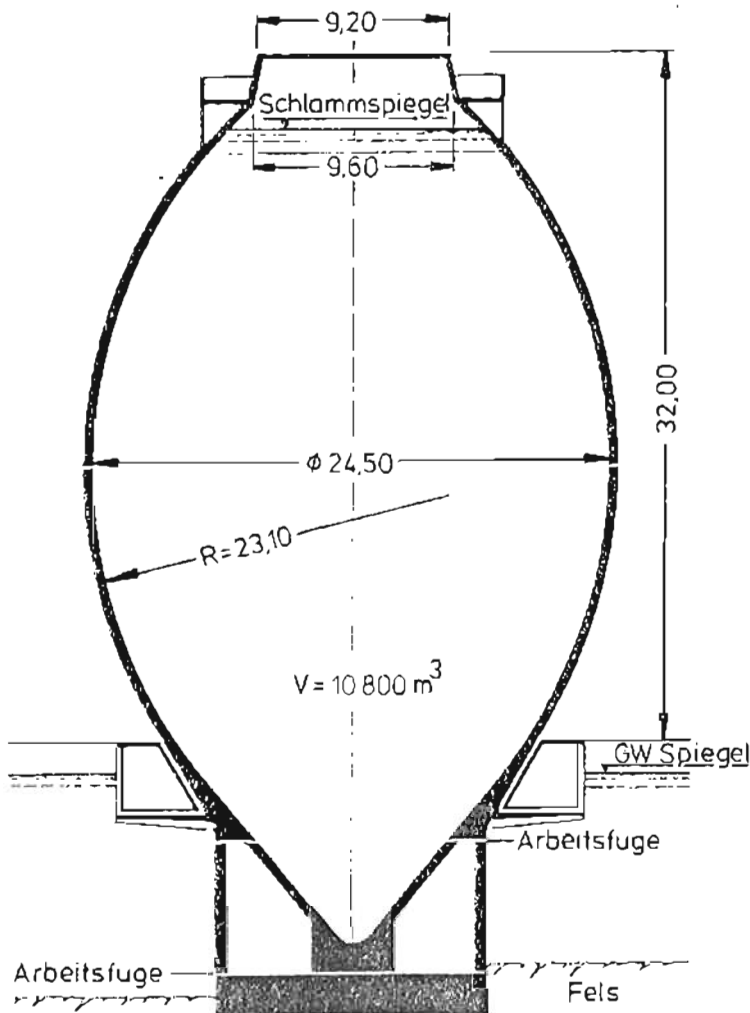
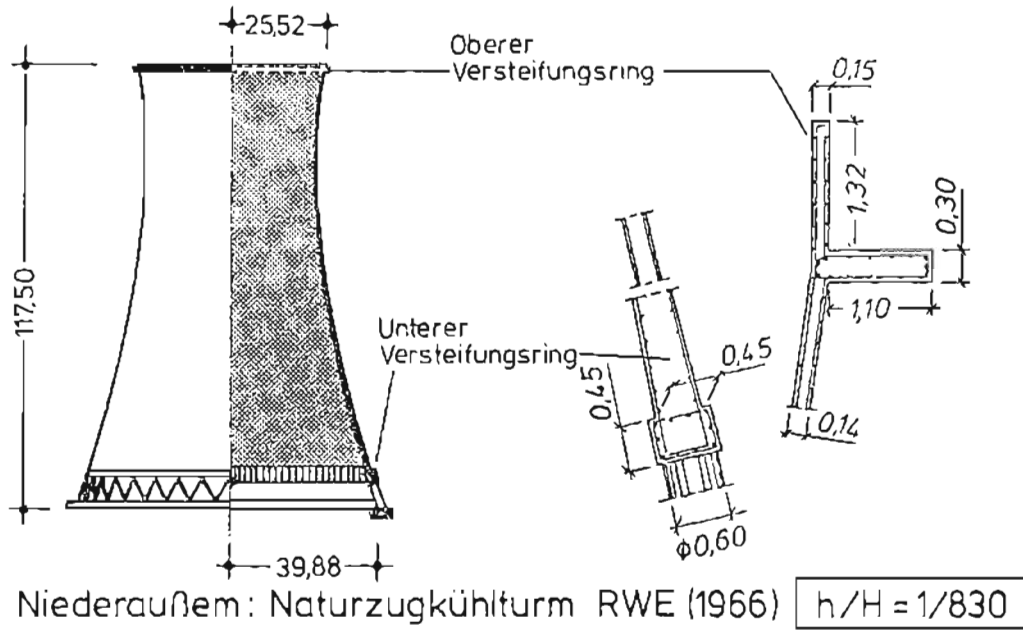
Xochimilco/Mexico: Restaurant (F.Candela 1958)



Dortmund: Städt. Bühnen (Rosskotten / Tritthart 1964)

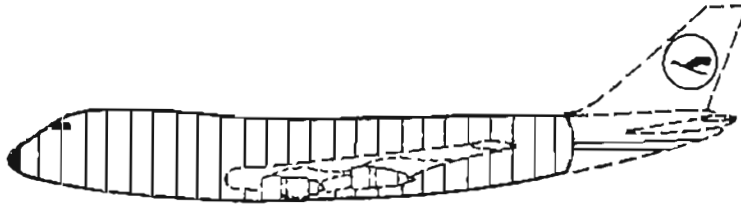
$h/R = 1/540$

1.2.3 Konstruktiver Ingenieurbau



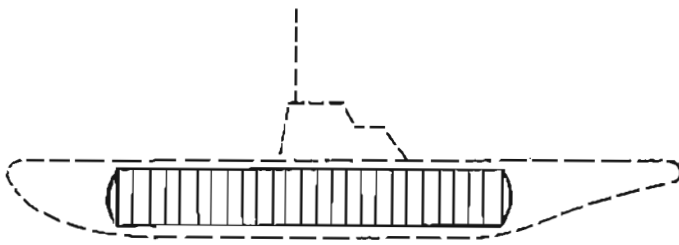
Faulbehälter

1.2.4 Fahrzeugbau



Flugzeug (Druckkabine)

$$h/R = 1/1200 \div 1/1600$$



U - Boot (Druckkörper)

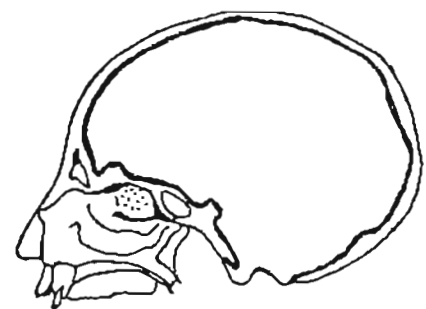
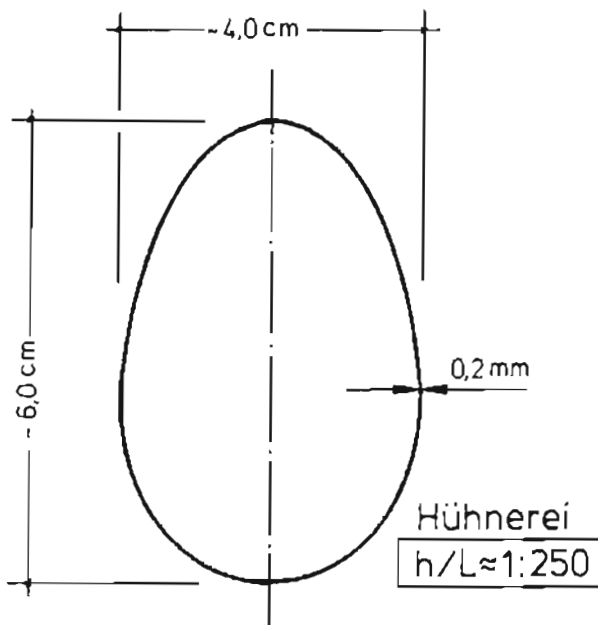
$$h/R = 1/50 \div 1/200$$



Rakete

$$h/R = 1/2000 \div 1/3000$$

1.2.5 Natur



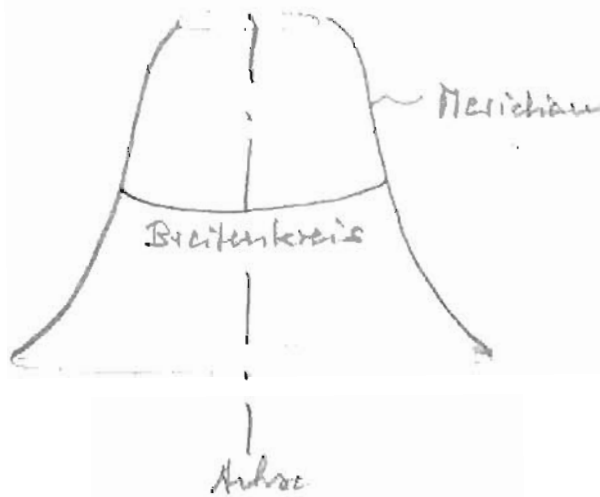
menschl. Schädel

Weitere Beispiele aus der Natur:
Schildkröten, Schnecken, Muscheln, ...

1.3 Scheinformen und Tragwerke

Aufgabe: Lasten abtragen + Raum abkriegen

Rotationsflächen



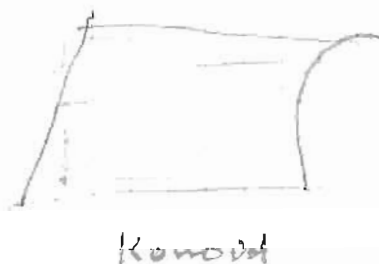
Kugel
Kegel
Paraboloid
Hyperboloid
Torus
etc.

Translationflächen



entsteht durch
Verschiebung (Translation)
des Erzeugenden entlang
einer Leitkurve

Regelflächen



Eine Gerade wird
entlang von einer
Leitkurve bewegt

hyperb. Paraboloid
(Hypar)

BEZEICHNUNGEN BEI SCHALEN

1. Allgemeines

- Vektoren werden fettgedruckt (bei Handschrift unterstrichen)
- ein oberer Querstrich kennzeichnet Größen, die auf Punkte außerhalb der Schalenmittelfläche (SMF) bezogen sind.
- Ortsvektor der Mittelfläche in Parameterdarstellung: $\mathbf{r} = \mathbf{r} (\Theta^1, \Theta^2)$
- Partielle Ableitungen: $(\)_{,1} = \frac{\partial(\)}{\partial \Theta^1}$ und $(\)_{,2} = \frac{\partial(\)}{\partial \Theta^2}$
- Schreibweise zur Unterscheidung oberer Index / Exponent:

Θ^2	oberer Index
$(u_1)^2$	Basis des Exponenten bei Verwechslungsgefahr eingeklammert
-
- Summationskonvention:
Über gleiche Indizes in einem Produkt wird automatisch summiert, wenn ein Index oben und der andere unten steht. Griechische Indizes (α, β) laufen von 1 bis 2, lateinische Indizes von 1 bis 3. Beispiel Ortsvektor eines Punktes:

$$\mathbf{r} = X^i \mathbf{i}_i = X^1 \mathbf{i}_1 + X^2 \mathbf{i}_2 + X^3 \mathbf{i}_3$$
- Bei Rotationsschalen wird grundsätzlich die globale X^3 -Achse als Drehachse und der Umfangswinkel als erster Flächenparameter Θ^1 gewählt.

2. Geometrie

	<i>allgem. Schalen</i>	<i>Rotationsschalen</i>
<i>globale Koordinaten (kartesisch)</i>	X^1, X^2, X^3	
<i>zugehörige globale Einheitsvektoren</i>	$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_3 = \text{Rotationsachse}$
<i>Koordinatenlinien auf der SMF</i>	Θ^1, Θ^2	$\Theta^1 = \vartheta$ <i>Umfangswinkel</i> φ <i>Meridianw. von unten</i> $\tilde{\varphi} = \pi - \varphi$ $\varphi^* = \pi/2 - \varphi$
<i>Ortsvektor unverformte SMF</i>	$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\Theta^1, \Theta^2)$	
<i>Ortsvektor verformte SMF</i>	\mathbf{R}	
<i>begleitendes Dreibein (keine Einheitsvektoren)</i>	$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$	
<i>lokale Einheitsvektoren :</i>		
<i>Tangentenvektoren an SMF</i>	$\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$	
<i>Normalenvektor auf SMF</i>	$\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_n$	+ \mathbf{t}_3 <i>nach außen</i>
<i>Definition der Maßzahlen als</i> <i>Bogenlängen eines diff. Flächenelementes</i>	$ds_1 = A \cdot d\Theta^1$ $ds_2 = B \cdot d\Theta^2$	
<i>daraus folgt :</i>	$A = \mathbf{a}_1 $ $B = \mathbf{a}_2 $	
<i>Maßzahl in Richtung Θ^1</i>	A	$A = R(\Theta^2)$ <i>Breitenkreisradius</i>
<i>Maßzahl in Richtung Θ^2</i>	B	
<i>Krümmung längs Θ^1</i>	R_1	$R_1 = \text{zugleich}$ <i>Hauptkrümmungsradius</i> <i>in Umfangsrichtung</i>
<i>Krümmung längs Θ^2</i>	R_2	$R_2 = \text{Meridianradius}$ <i>zugleich zweiter</i> <i>Hauptkrümmungsradius</i>
<i>Hauptkrümmungsradien</i>	R_{\max} R_{\min}	
<i>Gauß'sche Krümmung</i>	$K = \frac{1}{R_{\max} \cdot R_{\min}}$	

3. Verschiebungen, Verdrehungen

	allgem. Schalen	Rotationsschalen
Verschiebungsvektor eines beliebigen Punktes auf der SMF	$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{bmatrix}$	
Komponenten :		
Verschiebungen in der SMF		u^1, u^2
Verschiebung normal zur SMF		u^3
Verdrehungen der SMF	φ^1, φ^2	
Radiale Aufweitung		ΔR
Meridianverdrehung		χ in Richtung φ

4. Dehnungen, Gleitungen eines beliebigen Punktes außerhalb der SMF

Dehnung eines beliebigen Punktes

$$\bar{\epsilon}_u$$

Gleitung eines beliebigen Punktes

$$2 \bar{\epsilon}_{ij} = \bar{\gamma}_{ij}$$

5. Verzerrungen $\underline{\epsilon}$ der SMF

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \alpha_{\alpha\beta} \\ \beta_{\alpha\beta} \\ \gamma_\alpha \end{bmatrix}$$

	allgem. Schalen	Rotationsschalen
Dehnungen und Gleitung der Mittelfläche (mit $\alpha_{12} = 2\epsilon_{12} = \gamma_{12}$)	$\alpha_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} = \alpha_{11} \\ \epsilon_{22} = \alpha_{22} \\ \gamma_{12} = \alpha_{12} \end{bmatrix}$	Umfangs - (Ring-)dehnung ϵ_{11} Meridiandehnung ϵ_{22} Gleitung der Smf in ihrer Ebene $\gamma_{12} = \gamma_{21}$
Verkrümmungen der Smf	$\beta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} = \beta_{11} \\ \kappa_{22} = \beta_{22} \\ \kappa_{12} = \beta_{12} \end{bmatrix}$	Ringverkrümmung κ_{11} Meridianverkrümmung κ_{22} Verwindung (Verdrillung) $\kappa_{12} = \kappa_{21}$
Schubverzerrungen aus Querkraften(Gleitungen)	$\gamma_\alpha = \gamma_{\alpha 3} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$	Ringgleitung γ_1 Meridiangleitung γ_2

6. Schnittgrößen (Spannungsergebnisse) s

$$S = \begin{bmatrix} n_{\alpha\beta} \\ m_{\alpha\beta} \\ q_{\alpha} \end{bmatrix}$$

	<i>allgem. Schalen</i>	<i>Rotationsschalen</i>
<i>Membrankräfte</i>	$\mathbf{n}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{22} \\ n_{12} \end{bmatrix}$	<i>Ringnormalkraft</i> n_{11} <i>Meridiannormalkraft</i> n_{22} <i>Membranschubkraft</i> $n_{12} ; n_{21}$
<i>Momente</i>	$\mathbf{m}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{bmatrix}$	<i>Ringmoment</i> m_{11} <i>Meridianmoment</i> m_{22} <i>Drillmoment</i> $m_{12} ; m_{21}$
<i>Querkräfte</i>	$\mathbf{q}_{\alpha} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$	<i>Ringquerkraft</i> q_1 <i>Meridianquerkraft</i> q_2

2. TRAGVERHALTEN DER SCHALEN

2.1 Grundlagen und Spezialfälle (Tafelanschrieb)

2.2 Klassifikation nach Krümmung (Tafelanschrieb)

2.3 Lösungsverfahren (Tafelanschrieb)

2. Tragverhalten von Schalen

2.1 Grundlagen und Spezialfälle

Grundgleichungen

lokal:

Chiridgewicht

Werkstoffgesetz

Verformungs-
gesetze

Mul. R.B.

geom. R.B.

\cong Poisson'sche
Verdrillbarkeit

(gleiches Achsenkreuz)

Verformungs- zustand:

Verschiebungszustand: $\underline{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \varphi_1 \ \varphi_2]$
 Verschiebung- Verschiebung-

Spannungszustand:

$\underline{s} = \{ \underbrace{n_{11} \ n_{22} \ n_{12}}_{\substack{n_{\alpha\beta} \\ \text{Normalkräfte}}} \quad \underbrace{q_1 \ q_2}_{\substack{q_\alpha \\ \text{Querkräfte}}} \quad \underbrace{m_{11} \ m_{12} \ m_{22}}_{\substack{m_{\alpha\beta} \\ \text{Momente}}} \}$

Dehnungen:

$\underline{\epsilon} = \{ \underbrace{\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{12}}_{\substack{\epsilon_{\alpha\beta} \\ \text{Dehnung}}} \quad \underbrace{\gamma_{13} \ \gamma_{23}}_{\substack{\gamma_\alpha \\ \text{Gleitung}}} \quad \underbrace{\alpha_{11} \ \alpha_{22} \ \alpha_{12}}_{\substack{\alpha_{\alpha\beta} \\ \text{Verdrillung}}} \}$

Spezialfall Membrantheorie

$m_{\alpha\beta} \sim 0$; $q_\alpha \sim 0$ (denn durch
 Membrantheorie)

es fordert spezielle R.B. um bzgl. $m_{\alpha\beta}$

(Membrantheorie)
 an-der Tragwerks

§ 11.1

Spezialfall drehungslose Verbiegung

$$E_{\alpha\beta} \sim 0$$

eingewinkelte Tragwirkung \rightarrow große Verschiebungs-
Werte

Spezialfall Randdrehung

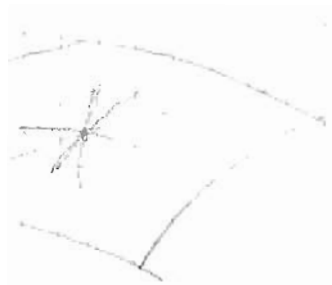
Randdrehungen führen stark ab

wie gebettete Balken



speziell bei Schub $K > 0$

2.2 Klassifikation nach Krümmung



Durch jeden Punkt gehen zwei Hauptkrümmungsdirectionen, die senkrecht aufeinander stehen

$$\frac{1}{R_{max}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{R_{min}}$$

Produkt: $\frac{1}{R_{max}} \cdot \frac{1}{R_{min}} = K$

Gauß-Krümmung (Koordinaten-invariant)

$K > 0$

$K < 0$

$K = 0$

elliptisches

hyperbolisches

parabolisches

Flächenpunkt



Kugel

Ellipsoid

Hyperboloid

Zylinder

Kegel

(abwickelbare Fläche)

glatte

Tragwirkung

Membranstruktur oft

an-schließen!

(siehe Folien)

2.3 Lösungsverfahren

2-D \rightarrow partielle Dgl.

1. Trennung der Variablen \rightarrow gewöhnliche Dgl.
z.B. Finite-Elemente

2. Lösung 2D

a) in analytischen Funktionen
nur für Sonderfälle (Membrantheorie, Zylinder)

b) numerisch (häufig)
computerorientierte Verfahren
Finite-Elemente-Methoden
(Finite Differenzen)

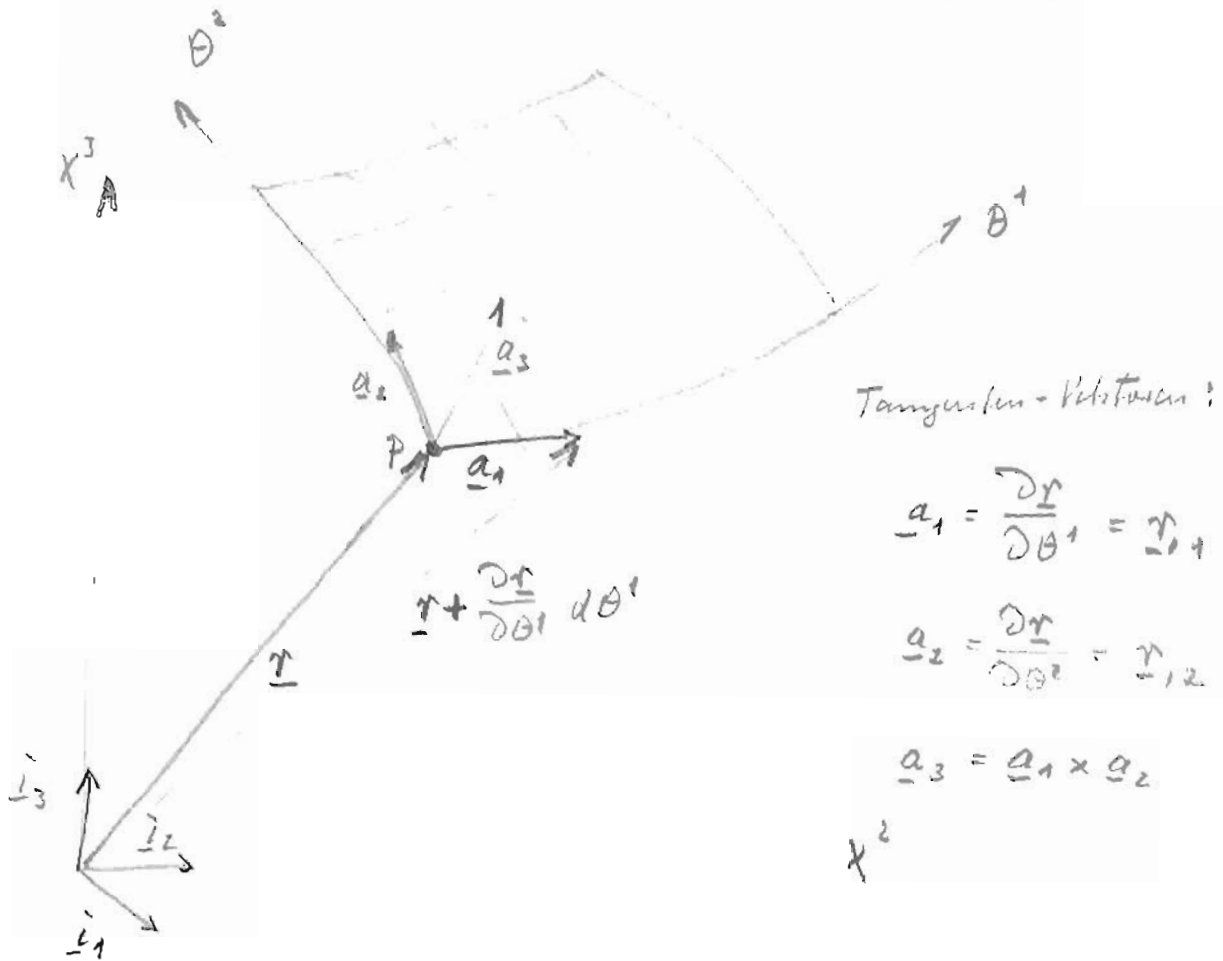
c) Modellversuche (kaum wenig verwendet)

2.4 Beispiele zum Freigelesen

\rightarrow Übung \rightarrow

3. Geometrische Grundlagen

3.1 Koordinaten und Tangentensystem



$\hookrightarrow x^1$

$$P(x^1, x^2, x^3) = 0 = P(x^i)$$

oder

$$P(\theta^1, \theta^2) = 0 = P(\theta^a)$$

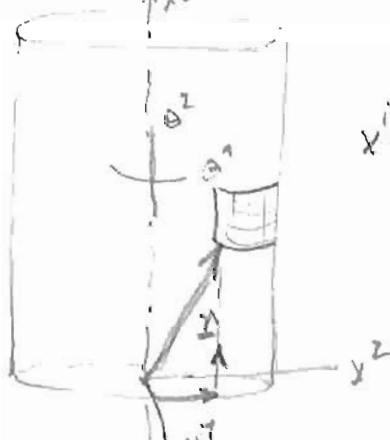
$$x^i = x^i(\theta^a) = \begin{bmatrix} x^1(\theta^1, \theta^2) \\ x^2(\theta^1, \theta^2) \\ x^3(\theta^1, \theta^2) \end{bmatrix}$$

$$\underline{r} = x^1 \underline{i}_1 + x^2 \underline{i}_2 + x^3 \underline{i}_3 = x^k \underline{i}_k$$

Summationskonvention

Beispiel: Zylinder

vgl. Vorlesung
S. 10



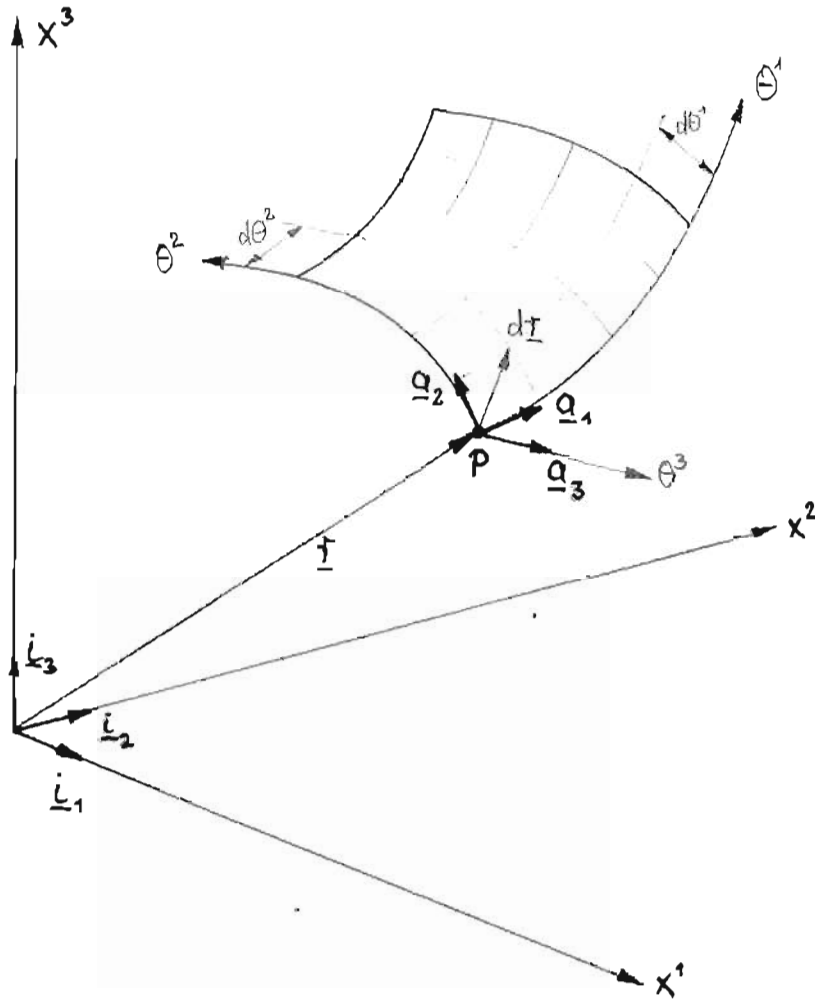
$$x^i = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos \theta^1 \\ R \sin \theta^1 \\ \theta^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_1 = -R \sin \theta^1 \underline{i}_1 + R \cos \theta^1 \underline{i}_2$$

$$\underline{a}_2 = 1 \cdot \underline{i}_3$$

3. Geometrische Grundlagen

3.1 Koordinaten und Tangentenvektoren



Darstellung von Flächen im Euklidischen Raum:

Ein Punkt P auf der Fläche kann dargestellt werden durch

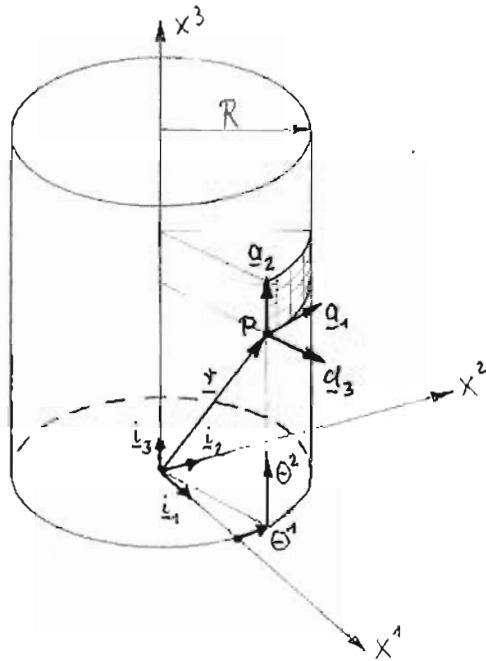
$$P(x^1, x^2, x^3) = P(x^i) = \phi \quad \text{implizite Darst.}$$

oder

$$P(\theta^1, \theta^2) = P(\theta^k) = \phi \quad \text{Parameterdarstellung}$$

$$x^i = x^i(\theta^k) = \begin{bmatrix} x^1(\theta^1, \theta^2) \\ x^2(\theta^1, \theta^2) \\ x^3(\theta^1, \theta^2) \end{bmatrix}$$

Beispiel: Zylinderfläche



$$x^i = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos \Theta^1 \\ R \sin \Theta^1 \\ \Theta^2 \end{bmatrix}$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

Ein Punkt P auf der Fläche F wird beschrieben durch den Ortsvektor \underline{r} :

$$\underline{r} = x^1 \underline{i}_1 + x^2 \underline{i}_2 + x^3 \underline{i}_3 = x^i \underline{i}_i$$

$$\text{mit } x^i = x^i(\Theta^k)$$

Der Ortsvektor ist also letztendlich von den Flächenkoordinaten Θ^k abhängig.

Summationskonvention:

$$x^i \underline{i}_i = \sum_{i=1}^3 (x^i \underline{i}_i) ; \quad n^{\alpha\beta} \alpha_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 (n^{\alpha\beta} \cdot \alpha_{\alpha\beta})$$

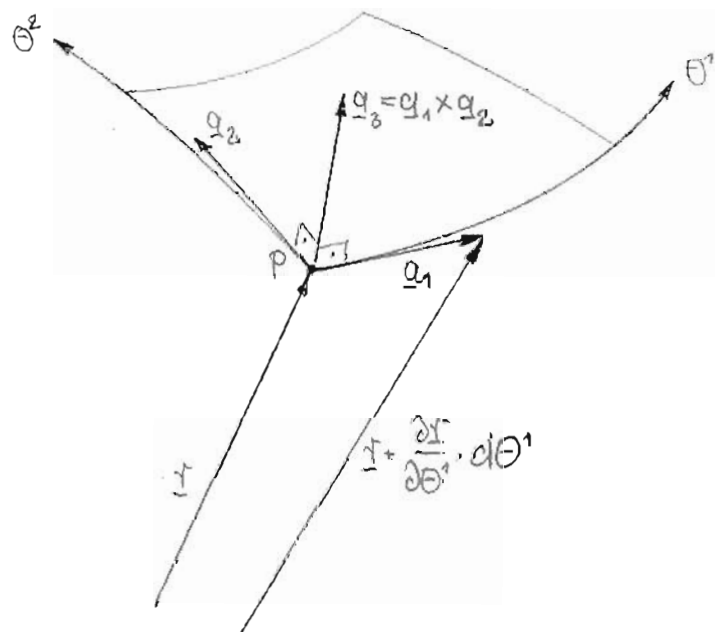
Wertebereich der Indizes:

$$\begin{array}{ll} \text{griechische Indizes} & \alpha = 1, 2 \\ \text{lateinische "} & a = 1, 2, 3 \end{array}$$

Lokales Koordinatensystem im Punkt P

Zur Orientierung der Fläche im Raum und zur Festlegung von Richtungen auf der Fläche:

Tangentenvektoren an die Fläche in Richtung der Flächenkoordinaten θ^k :



für infinitesimal kleine Zuwächse $d\theta^k$:

$$\underline{a}_1 = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta^1} = \underline{r}_{,1}$$

$$\underline{a}_2 = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta^2} = \underline{r}_{,2} \quad \text{bzw.} \quad \underline{a}_\alpha = \underline{r}_{,\alpha}$$

dritter Basisvektor senkrecht (normal) zur Fläche:

$$\underline{a}_3 = \underline{a}_1 \times \underline{a}_2$$

Normierte Tangentenvektoren (Einheitsvektoren):

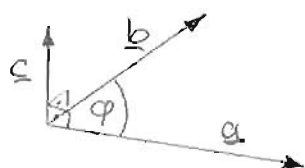
$$\underline{t}_1 = \frac{\underline{a}_1}{|\underline{a}_1|} = \frac{\underline{a}_1}{\sqrt{\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_1}} = \frac{\underline{r}_{1,1}}{\sqrt{\underline{r}_{1,1} \cdot \underline{r}_{1,1}}}$$

$$\underline{t}_2 = \frac{\underline{a}_2}{|\underline{a}_2|} = \frac{\underline{a}_2}{\sqrt{\underline{a}_2 \cdot \underline{a}_2}} = \frac{\underline{r}_{1,2}}{\sqrt{\underline{r}_{1,2} \cdot \underline{r}_{1,2}}}$$

$$\underline{t}_3 = \frac{\underline{a}_1 \times \underline{a}_2}{|\underline{a}_1 \times \underline{a}_2|} = \underline{t}_1 \times \underline{t}_2$$

Voraussetzung:
Orthogonale Flächenkoord.
 $\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 = 0$

Rück Erinnerung Vektorrechnung:



Skalarprodukt $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \varphi$

Vektorprodukt $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{c}$

$$|\underline{c}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin \varphi$$

Orth. Koord: $\varphi = 90^\circ$; $\sin \varphi = 1$; $\cos \varphi = 0$

$$|\underline{t}_1| = 1; |\underline{t}_2| = 1$$

$$\underline{t}_1 \times \underline{t}_2 = \underline{t}_3$$

$$|\underline{t}_3| = |\underline{t}_1| \cdot |\underline{t}_2| \cdot \sin \varphi = 1$$

Voraussetzung:

Im Rahmen dieser Vorlesung werden nur orthogonale Koordinatensysteme (und keine schiefwinkligen) zur Beschreibung der Flächengeometrie verwendet.

Bogenlängen längs der Koordinatenlinien:

$$ds_1 = |d\theta^1 \underline{q}_1| = \sqrt{d\theta^1 \underline{q}_1 \cdot d\theta^1 \underline{q}_1} = d\theta^1 \sqrt{g_1 \cdot g_1}$$

$$= d\theta^1 \sqrt{\Gamma_{11} \cdot \Gamma_{11}} = A \cdot d\theta^1$$

$$ds_2 = d\theta^2 \sqrt{\Gamma_{22} \cdot \Gamma_{22}} = B \cdot d\theta^2$$

Infinitesimales Flächenelement dF

Aus der Definition des Vektorprodukts ergibt sich:

$$dF = \overset{ds_1}{|d\theta^1 \underline{q}_1|} \times \overset{ds_2}{|d\theta^2 \underline{q}_2|}$$

$$= |d\theta^1 \underline{q}_1| \cdot |d\theta^2 \underline{q}_2| \cdot \overset{1}{\sin \varphi} \quad (\text{bei orth. Koord.})$$

$$= ds_1 \cdot ds_2$$

$$dF = AB \, d\theta^1 d\theta^2$$

$$A = \sqrt{\Gamma_{11} \cdot \Gamma_{11}} \quad ; \quad B = \sqrt{\Gamma_{22} \cdot \Gamma_{22}}$$

Die Parameter A und B werden als Lamé-Parameter oder Metrikkoeffizienten der Flächentheorie bezeichnet. Sie beschreiben die Änderung der Bogenlänge in Bezug auf einen infinitesimalen Zuwachs der krummlinigen Flächenkoordinaten. Daher auch der Name Metrikkoeffizienten.

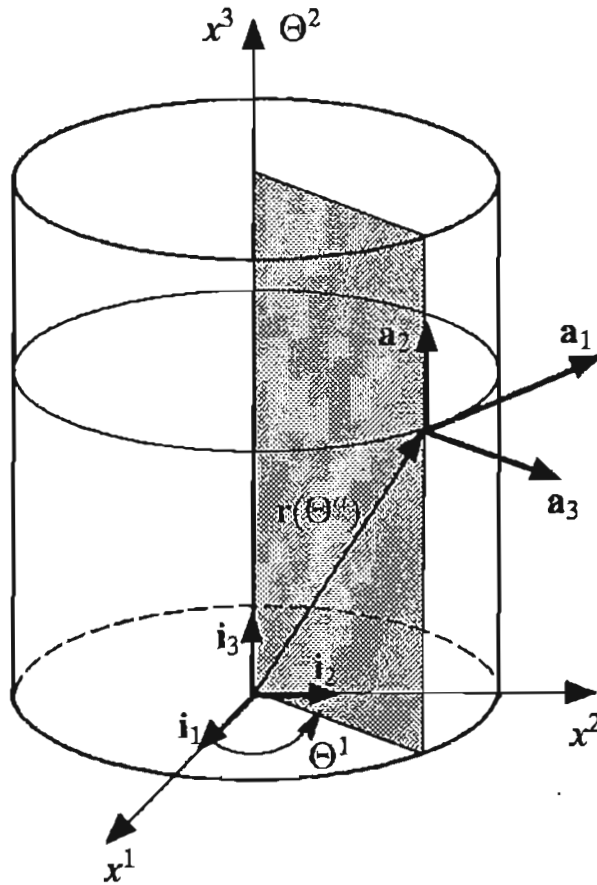
Aus dem totalen Differential der Ortsvektors \underline{r}

$$d\underline{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta^1} d\theta^1 + \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta^2} d\theta^2 = \underline{\Gamma}_{11} d\theta^1 + \underline{\Gamma}_{12} d\theta^2$$

kann man folgende quadratische Form bilden, die als erste Grundform der Flächentheorie bezeichnet wird:

$$d\underline{r} \cdot d\underline{r} = ds^2 = A^2 d\theta^1 d\theta^1 + B^2 d\theta^2 d\theta^2.$$

Beispiel Zylinderfläche



Ortsvektor:

$$\mathbf{r} = x^1(\Theta^a) \mathbf{i}_1 + x^2(\Theta^a) \mathbf{i}_2 + x^3(\Theta^a) \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{r} = R \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \Theta^2 \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} R \cos \Theta^1 \\ R \sin \Theta^1 \\ \Theta^2 \end{bmatrix}$$

Ableitung:

$$\mathbf{r}_{,1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Theta^1} = -R \sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{r}_{,1} = \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -R \sin \Theta^1 \\ R \cos \Theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{,2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Theta^2} = \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{r}_{,2} = \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{,11} = -R \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - R \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{r}_{,11} = \begin{bmatrix} -R \cos \Theta^1 \\ -R \sin \Theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{,22} = 0$$

Skalarprodukt:

$$\mathbf{r}_{,1} \cdot \mathbf{r}_{,1} = R^2 \sin^2 \Theta^1 + R^2 \cos^2 \Theta^1 = R^2$$

$$\mathbf{r}_{,1} \cdot \mathbf{r}_{,1} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = R^2 = A^2$$

$$\mathbf{r}_{,2} \cdot \mathbf{r}_{,2} = 1$$

$$\mathbf{r}_{,2} \cdot \mathbf{r}_{,2} = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = 1 = B^2$$

$$\mathbf{r}_{,1} \cdot \mathbf{r}_{,2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Orthogonale Koordinaten}$$

Vektorprodukt:

$$\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & -R \sin \Theta^1 & 0 \\ \mathbf{i}_2 & R \cos \Theta^1 & 0 \\ \mathbf{i}_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2} = R \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2} = \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} R \cos \Theta^1 \\ R \sin \Theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Flächenparameter:

$$A^2 = R^2 \quad ; \quad B^2 = 1$$

$$R_1 = -\frac{R^3}{-R^2 \cos^2 \Theta^1 - R^2 \sin^2 \Theta^1} = \frac{R^3}{R^2} = R \quad (R_{\max})$$

$$R_2 = -\frac{R}{0} = -\infty \quad (R_{\min})$$

Gauß'sche Krümmung:

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = 0$$

Die Zylinderfläche wird Differentialgleichungen vom parabolischen Typ liefern.

Flächen beschreibbar durch:

$$R_1 = -\frac{A^2}{\mathbf{r}_{,11} \cdot \mathbf{t}_3} = -\frac{A^2 AB}{\mathbf{r}_{,11} \cdot (\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2})}$$

Tangentenvektor: $\mathbf{t}_3 = \frac{\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2}}{AB}$

Flächenparameter: $A^2 = R^2$; $B^2 = 1$

Ableitung: $\mathbf{r}_{,11} = \begin{bmatrix} -R \cos \Theta^1 \\ -R \sin \Theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$

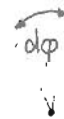
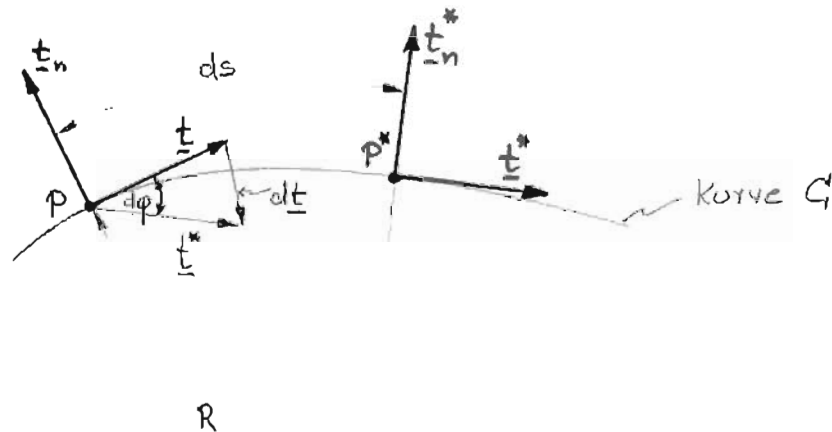
Vektorprodukt: $\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2} = \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} R \cos \Theta^1 \\ R \sin \Theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Krümmungsradius:

$$R_1 = -\frac{R^3}{-R^2 \cos^2 \Theta^1 - R^2 \sin^2 \Theta^1} = \frac{R^3}{R^2} = R$$

3.2 Krümmung einer Fläche

Betrachte eine Ebene im Euklidischen Raum, die die Fläche F längs einer Kurve G schneidet.



Definition der Krümmung: $\kappa = -\frac{1}{R}$

Der Radiusvektor R , der immer senkrecht zur Fläche F bzw. zur Kurve G steht, darf nicht mit dem Ortsvektor \underline{r} eines Punktes P verwechselt werden.

Ortsvektor von P : \underline{r}

Tangentenvektor $\underline{t} = \underline{r}_{,s}$

Änderung des Tangentenvektors $d\underline{t} = \underline{r}_{,ss}$ (entspricht der Krümmung)

Für infinitesimale Zuwächse ist der Vektor $d\underline{t}$ parallel zum Einheitsnormalenvektor \underline{t}_n . Die Krümmung wird als Betrag dieses Vektors $d\underline{t}$ definiert, wobei der Krümmungsradius R positiv sein soll, wenn $d\underline{t}$ entgegengesetzt zu \underline{t}_n gerichtet ist

$$\boxed{d\underline{t} = -\frac{1}{R} \cdot \underline{t}_n = \Gamma_{155} = \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2}} \quad \text{Frenet-Serret Formel}$$

Wegen $|\underline{t}_n| = 1$ gilt $|d\underline{t}| = -\frac{1}{R}$

Die skalare Multiplikation der Frenet-Serret-Formel mit dem Normalenvektor \underline{t}_n liefert die Definitionsgleichung für den Krümmungsradius R :

$$d\underline{t} \cdot \underline{t}_n = -\frac{1}{R} \underbrace{\underline{t}_n \cdot \underline{t}_n}_{=1} = \frac{d^2 \underline{r} \cdot \underline{t}_n}{ds^2}$$

Ortsvektor $\underline{r} = \underline{r}(\theta^1, \theta^2)$

Totales Differential des Ortsvektors ergibt den Tangentenvektor

$$\begin{aligned} d\underline{r} &= \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta^1} \cdot d\theta^1 + \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta^2} \cdot d\theta^2 \\ &= \underline{r}_{,1} d\theta^1 + \underline{r}_{,2} d\theta^2 \end{aligned}$$

Totales Differential des Tangentenvektors

$$\begin{aligned} d^2 \underline{r} &= d(d\underline{r}) = d\underline{r}_{,1} d\theta^1 + d\underline{r}_{,2} d\theta^2 \\ &= \underline{r}_{,11} d\theta^1 d\theta^1 + \underline{r}_{,22} d\theta^2 d\theta^2 \\ &\quad + 2\underline{r}_{,12} d\theta^1 d\theta^2 \end{aligned}$$

(bei orth. Koord. sind die gemischten Ableitungen Null)

Mit der ersten Grundform der Flächentheorie

$$ds^2 = A^2 d\theta^1 d\theta^1 + B^2 d\theta^2 d\theta^2$$

ergibt sich endgültig für die Krümmung:

$$\kappa = -\frac{1}{R} = \frac{d^2 \underline{r} \cdot \underline{t}_n}{ds^2} = \frac{\gamma_{111} \underline{t}_n d\theta^1 d\theta^1 + \gamma_{122} \underline{t}_n d\theta^2 d\theta^2}{A^2 d\theta^1 d\theta^1 + B^2 d\theta^2 d\theta^2}$$

$$\boxed{\kappa = \frac{L d\theta^1 d\theta^1 + N d\theta^2 d\theta^2}{A^2 d\theta^1 d\theta^1 + B^2 d\theta^2 d\theta^2}}$$

Die bisherige Ableitung galt für Kurven auf beliebigen Schnitten durch die Fläche. Schneidet man die Fläche längs der Koordinatenlinien θ^k , so erhält man für die entsprechenden Krümmungsradien:

$$\text{Längs } \theta^1: d\theta^2 = 0; \quad \frac{1}{R_1} = -\frac{\gamma_{111} \underline{t}_n}{A^2} \Rightarrow L = \gamma_{111} \cdot \underline{t}_n = -\frac{A^2}{R_1}$$

$$\text{Längs } \theta^2: d\theta^1 = 0; \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{\gamma_{122} \underline{t}_n}{B^2} \Rightarrow N = \gamma_{122} \cdot \underline{t}_n = -\frac{B^2}{R_2}$$

Den Zähler der allg. Formel für die Krümmung κ

$$L d\theta^1 d\theta^1 + N d\theta^2 d\theta^2$$

nennt man zweite Grundform der Flächentheorie, die wegen des Auftretens der Krümmungsradien R_1, R_2 die Form der Fläche charakterisiert.

Bemerkung: Der Normalenvektor \underline{t}_n ist identisch mit dem Vektor $\underline{t}_3 = \underline{t}_1 \times \underline{t}_2$ des begleitenden Dreibeins.

Hauptkrümmungsrichtungen $\tilde{\Theta}^\alpha$

Man kann über jeder Fläche ein Koordinatennetz $\tilde{\Theta}^\alpha$ aufspannen, für das die Krümmungsradien extremal sind (und zwar in jedem Punkt):

$$\tilde{\Theta}^\alpha : R_1 = R_{\max}; R_2 = R_{\min}$$

Klassifikation von Flächen

Die Form der Fläche bestimmt den Kraftfluß in der Schale und damit auch den Differentialgleichungstyp der Gleichgewichtsbedingungen. Eine Einteilung ist mit Hilfe der Hauptkrümmungsradien möglich:

$$K = \frac{1}{R_{\max} \cdot R_{\min}} \quad \text{Gauß'sche Krümmung}$$

$K > 0$: Elliptische Krümmung (Kugel, Ellipsoid, ellipt. Paraboloid)

$K = 0$: Parabolische Krümmung; R_{\max} oder $R_{\min} = \infty$
(Abwickelbare Flächen: Zylinder, Kegel, Platte)

$K < 0$: Hyperbolische Krümmung (Rotationshyperboloid, hyperbol. Paraboloid)

Zusammenfassung

- Die Darstellung der Fläche erfolgt mit zweidimensionalen, orthogonalen Flächenkoordinaten Θ^α (Parameterdarst.)
- Ein Punkt auf der Fläche wird durch seinen Ortsvektor $\underline{r} = \underline{r}(x^i(\Theta^\alpha))$ beschrieben.
- Die Orientierung auf der Fläche erfolgt mit einem normierten, „begleitenden Dreibein“

$$\underline{t}_\alpha = \underline{r}_{, \alpha} / |\underline{r}_{, \alpha}|$$

$$\underline{t}_3 = \underline{t}_1 \times \underline{t}_2$$

- Die Form der Fläche und die Entfernungen auf der Fläche werden durch vier skalare Parameter eindeutig festgelegt:

$$A^2 = \underline{r}_{,1} \cdot \underline{r}_{,1}$$

$$B^2 = \underline{r}_{,2} \cdot \underline{r}_{,2}$$

$$R_1 = -A^2 / (\underline{r}_{,11} \cdot \underline{t}_3)$$

$$R_2 = -B^2 / (\underline{r}_{,22} \cdot \underline{t}_3)$$

Die Ableitung der Schalengleichungen kann mit Hilfe dieser Parameter für beliebige Flächen in allgemeiner Form erfolgen. Die Spezialisierung dieser Gleichungen auf bestimmte Geometrien kann somit vollständig durch den Ortsvektor und seine Ableitungen erfolgen:

$$\underline{t}_1 = \frac{\underline{r}_{,1}}{A} \quad ; \quad \underline{t}_2 = \frac{\underline{r}_{,2}}{B} \quad ; \quad \underline{t}_3 = \frac{\underline{r}_{,1} \times \underline{r}_{,2}}{AB}$$

$$R_1 = -\frac{A^3 B}{\underline{r}_{,11} (\underline{r}_{,1} \times \underline{r}_{,2})} \quad ; \quad R_2 = -\frac{AB^3}{\underline{r}_{,22} (\underline{r}_{,1} \times \underline{r}_{,2})}$$

$$= -\frac{A^2 AB}{r_{,11} (\underline{r}_{,1} \times \underline{r}_{,2})} \quad ; \quad R_2 = \frac{B^2 AB}{r_{,22} (\underline{r}_{,1} \times \underline{r}_{,2})}$$

Beispiel: Zylinderfläche

Ortsvektor: $\underline{r} = x^1(\theta^1) \underline{i}_1 + x^2(\theta^2) \underline{i}_2 + x^3(\theta^3) \underline{i}_3 = R \cos \theta^1 \underline{i}_1 + R \sin \theta^1 \underline{i}_2 + \theta^2 \underline{i}_3$

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} R \cos \theta^1 \\ R \sin \theta^1 \\ \theta^2 \end{bmatrix}$$

Ableitungen: $\underline{r}_{,1} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta^1} = -R \sin \theta^1 \underline{i}_1 + R \cos \theta^1 \underline{i}_2$

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} -R \sin \theta^1 \\ R \cos \theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{r}_{,2} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta^2} = 1 \cdot \underline{i}_3$

$$\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{r}_{,11} = -R \cos \theta^1 \underline{i}_1 - R \sin \theta^1 \underline{i}_2$

$$\underline{r}_{,11} = \begin{bmatrix} -R \cos \theta^1 \\ -R \sin \theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{r}_{,12} = \phi$

$\underline{r}_{,12} = \phi$

Skalarprodukte: $\underline{r}_{,1} \cdot \underline{r}_{,1} = R^2 \sin^2 \theta^1 + R^2 \cos^2 \theta^1 = R^2$

$\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_1 = R^2 = A^2$

$\underline{r}_{,2} \cdot \underline{r}_{,2} = 1$

$\underline{a}_2 \cdot \underline{a}_2 = 1 = B^2$

$\underline{r}_{,1} \cdot \underline{r}_{,2} = \phi \Rightarrow$ Orthogonale Koordinaten

Vektorprodukt:

$$\underline{r}_{,1} \times \underline{r}_{,2} = \begin{vmatrix} \underline{i}_1 & -R \sin \theta^1 & 0 \\ \underline{i}_2 & R \cos \theta^1 & 0 \\ \underline{i}_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{a}_3 = \begin{bmatrix} R \cos \theta^1 \\ R \sin \theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$= R \cos \theta^1 \underline{i}_1 + R \sin \theta^1 \underline{i}_2 - \phi \underline{i}_3$

Flächenparameter:

$A^2 = R^2 ; B^2 = 1$

$R_1 = -\frac{R^3}{-R^2 \cos^2 \theta^1 - R^2 \sin^2 \theta^1} = \frac{R^3}{R^2} = R (\hat{=} R_{max})$

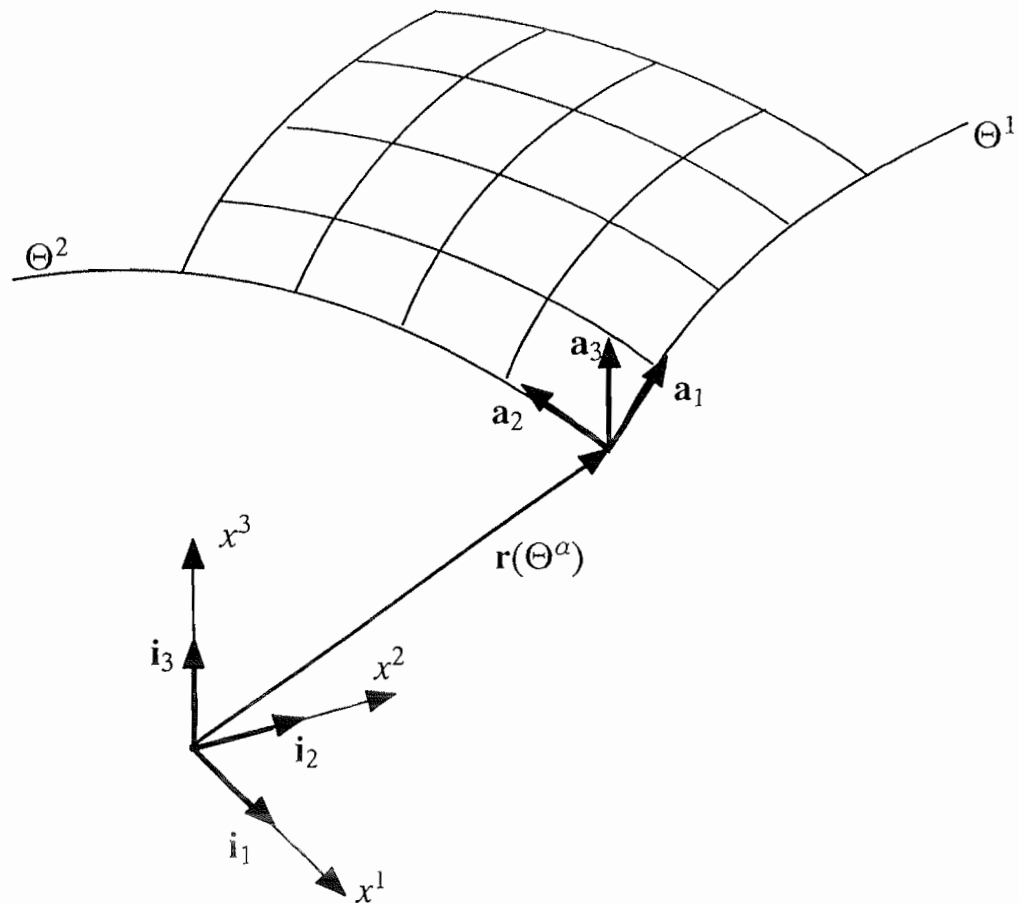
$R_2 = -\frac{R}{\phi} = -\infty (\hat{=} R_{min})$

Gauß'sche Krümmung:

$K = \frac{1}{R_1 \cdot R_2} = \phi$

Die Zylinderfläche wird Differentialgleichungen vom parabolischen Typ liefern.

3. Geometrische Grundlagen (im lokalen Koordinatensystem) (z. T. Tafelanschrieb)



Zusammenfassung (nur orthogonale Koordinaten)

Koordinaten: $P(x^1, x^2, x^3) = P(x^i)$ Kartesische Koordinaten

$P(\Theta^1, \Theta^2) = P(\Theta^a)$ Parameterdarstellung

Ortsvektor: $\mathbf{r} = x^k \mathbf{i}_k = x^1 \mathbf{i}_1 + x^2 \mathbf{i}_2 + x^3 \mathbf{i}_3$

oder

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\Theta^a) = x^{k(\Theta^a)} \mathbf{i}_k$

Begleitendes Dreibein:

$\mathbf{a}_a = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Theta^a} = \mathbf{r}_{,a} \quad a = 1, 2$

$\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$

Normierte Vektoren:

$\mathbf{t}_a = \frac{\mathbf{a}_a}{|\mathbf{a}_a|} \quad \text{z.B. } |a_1| = \sqrt{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}$

$\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2$

Bogenlänge: $ds_1 = \sqrt{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1} d\Theta^1 = A d\Theta^1$

$ds_2 = \sqrt{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2} d\Theta^2 = B d\Theta^2$
A, B = Metrikkoeffizienten

Fläche: $dA = ds_1 \cdot ds_2 = AB d\Theta^1 d\Theta^2$

Erste Grundform der Fläche: $ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = A^2 d\Theta^1 d\Theta^1 + B^2 d\Theta^2 d\Theta^2$

Krümmung: $\kappa = -\frac{1}{R} = \frac{d^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{t}_3}{ds^2}$
 $\left(dt = -\frac{1}{R} \mathbf{t}_3 = r_{,ss} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right)$

$$\kappa = \frac{r_{,11} \mathbf{t}_3 d\Theta^1 d\Theta^1 + r_{,22} \mathbf{t}_3 d\Theta^2 d\Theta^2}{A^2 d\Theta^1 d\Theta^1 + B^2 d\Theta^2 d\Theta^2}$$

$$\kappa = \frac{L d\Theta^1 d\Theta^1 + N d\Theta^2 d\Theta^2}{A^2 d\Theta^1 d\Theta^1 + B^2 d\Theta^2 d\Theta^2}$$

Zweite Grundform der Fläche: $L d\Theta^1 d\Theta^1 + N d\Theta^2 d\Theta^2$
L, N = Koeffizienten der 2. Grundform der Fläche

längs Θ^1 : $d\Theta^2 = 0$: $L = r_{,11} \mathbf{t}_3 = -\frac{A^2}{R_1} \Rightarrow R_1 = -\frac{A^2}{r_{,11} \cdot \mathbf{t}_3}$

längs Θ^2 : $d\Theta^1 = 0$: $N = r_{,22} \mathbf{t}_3 = -\frac{B^2}{R_2} \Rightarrow R_2 = -\frac{B^2}{r_{,22} \cdot \mathbf{t}_3}$

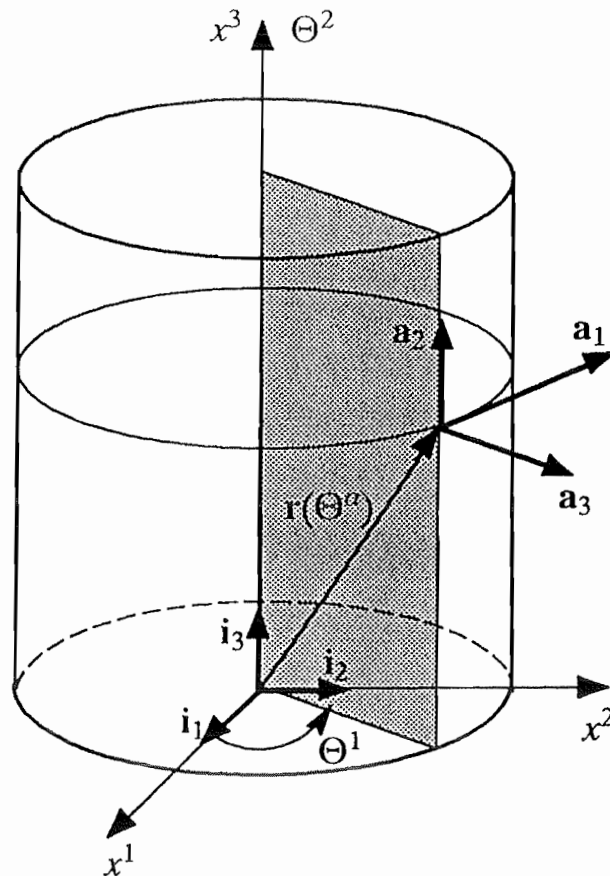
Gauß'sche Krümmung: $K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}$

K > 0 Elliptische Krümmung (Kugel, Ellipse)
K = 0 Parabolische Krümmung (Zylinder, Kegel)
K < 0 Hyperbolische Krümmung (Hyperboloid)

Flächen beschreibbar durch: $\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{r}_{,1}}{A}$; $\mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{r}_{,2}}{B}$; $\mathbf{t}_3 = \frac{\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2}}{AB}$

$$R_1 = -\frac{A^2 AB}{r_{,11} \cdot (\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2})}; \quad R_2 = -\frac{B^2 AB}{r_{,22} \cdot (\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2})}$$

Beispiel Zylinderfläche



Ortsvektor:

$$\mathbf{r} = x^1(\Theta^a) \mathbf{i}_1 + x^2(\Theta^a) \mathbf{i}_2 + x^3(\Theta^a) \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{r} = R \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \Theta^2 \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} R \cos \Theta^1 \\ R \sin \Theta^1 \\ \Theta^2 \end{bmatrix}$$

Ableitung:

$$\mathbf{r}_{,1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Theta^1} = -R \sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{r}_{,1} = \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -R \sin \Theta^1 \\ R \cos \Theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{,2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Theta^2} = \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{r}_{,2} = \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r_{,11} = -R \cos \Theta^1 i_1 - R \sin \Theta^1 i_2$$

$$r_{,11} = \begin{bmatrix} -R \cos \Theta^1 \\ -R \sin \Theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_{,22} = 0$$

Skalarprodukt:

$$r_{,1} \cdot r_{,1} = R^2 \sin^2 \Theta^1 + R^2 \cos^2 \Theta^1 = R^2$$

$$r_{,1} \cdot r_{,1} = a_1 \cdot a_1 = R^2 = A^2$$

$$r_{,2} \cdot r_{,2} = 1$$

$$r_{,2} \cdot r_{,2} = a_2 \cdot a_2 = 1 = B^2$$

$$r_{,1} \cdot r_{,2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Orthogonale Koordinaten}$$

Vektorprodukt:

$$r_{,1} \times r_{,2} = \begin{vmatrix} i_1 & -R \sin \Theta^1 & 0 \\ i_2 & R \cos \Theta^1 & 0 \\ i_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$r_{,1} \times r_{,2} = R \cos \Theta^1 i_1 + R \sin \Theta^1 i_2$$

$$r_{,1} \times r_{,2} = a_3 = \begin{bmatrix} R \cos \Theta^1 \\ R \sin \Theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Flächenparameter:

$$A^2 = R^2 \quad ; \quad B^2 = 1$$

$$R_1 = -\frac{R^3}{-R^2 \cos^2 \Theta^1 - R^2 \sin^2 \Theta^1} = \frac{R^3}{R^2} = R \quad (R_{\max})$$

$$R_2 = -\frac{R}{0} = -\infty \quad (R_{\min})$$

Gauß'sche Krümmung:

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = 0$$

Die Zylinderfläche wird Differentialgleichungen vom parabolischen Typ liefern.

Flächen beschreibbar durch:

$$R_1 = -\frac{A^2}{\mathbf{r}_{,11} \cdot \mathbf{t}_3} = -\frac{A^2 AB}{\mathbf{r}_{,11} \cdot (\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2})}$$

Tangentenvektor: $\mathbf{t}_3 = \frac{\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2}}{AB}$

Flächenparameter: $A^2 = R^2$; $B^2 = 1$

Ableitung: $\mathbf{r}_{,11} = \begin{bmatrix} -R \cos \Theta^1 \\ -R \sin \Theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$

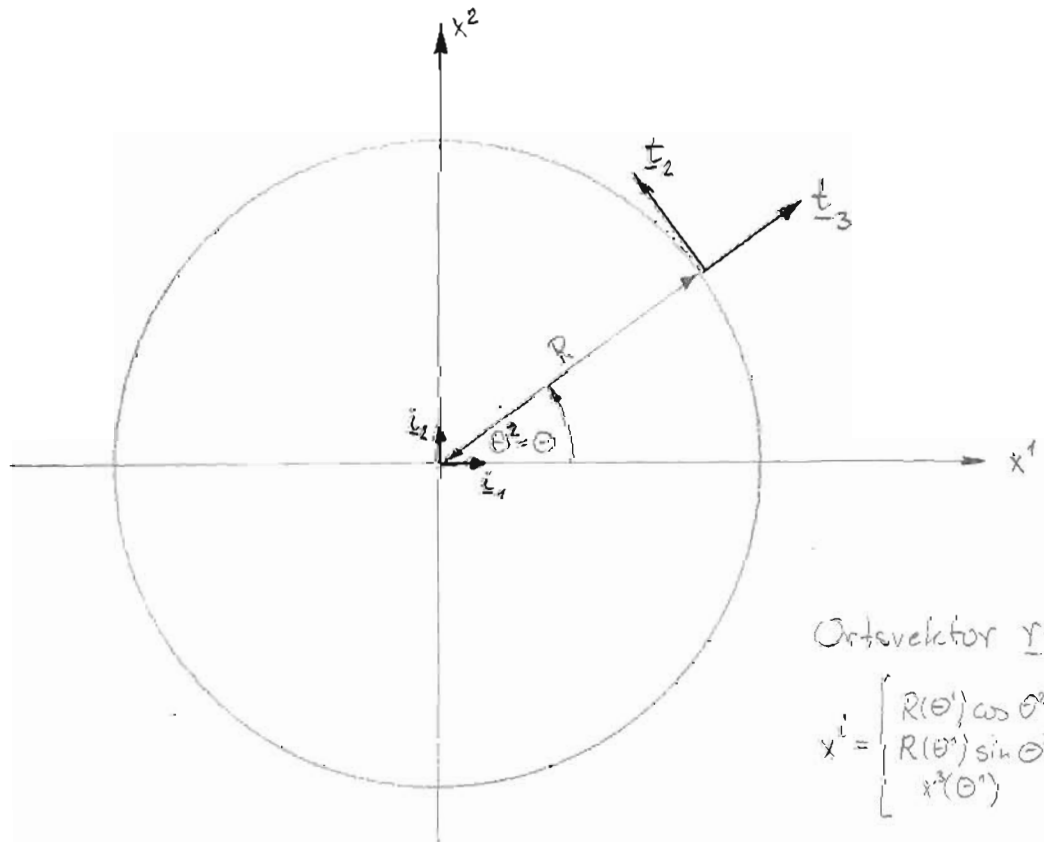
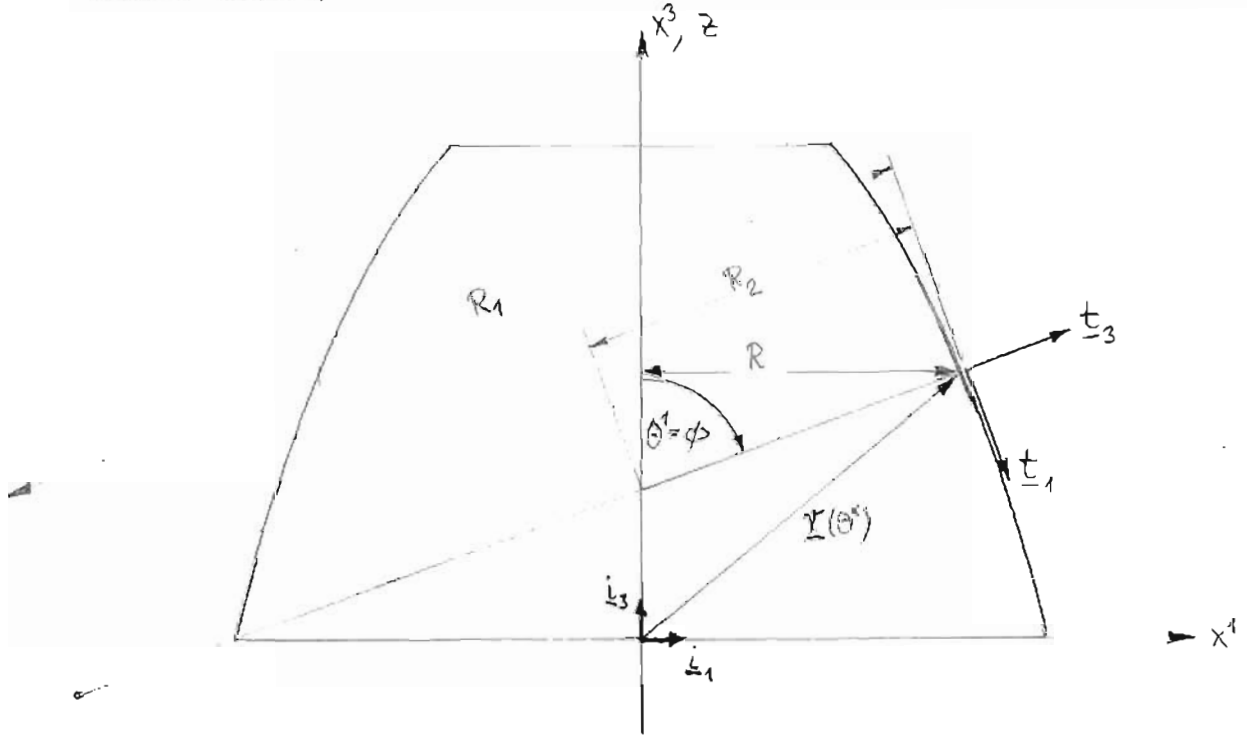
Vektorprodukt: $\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2} = \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} R \cos \Theta^1 \\ R \sin \Theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Krümmungsradius:

$$R_1 = -\frac{R^3}{-R^2 \cos^2 \Theta^1 - R^2 \sin^2 \Theta^1} = \frac{R^3}{R^2} = R$$

Alternative Darstellung allg. Rotationsflächen

in der klassischen Form mit dem Meridianwinkel $\phi = \theta^1$ und dem Umfangswinkel $\theta = \theta^2$ als unabhängige Flächenkoordinaten,



Ortsvektor $\underline{r} = x^i \underline{i}_i$

$$x^i = \begin{bmatrix} R(\theta^1) \cos \theta^2 \\ R(\theta^1) \sin \theta^2 \\ x^3(\theta^1) \end{bmatrix}$$

Die Parameterdarstellung beliebiger Rotationsflächen in allgemeiner Form ist mit den Meridian- und Umfangswinkeln ϕ und Θ nicht möglich. Der Zusammenhang zwischen dem Meridianwinkel ϕ und der x^3 -Koordinate bzw. dem Breitenkreisradius $R(x^3)$, der die Meridiankurve definiert, kann nur für spezielle, einfache Geometrien analytisch angegeben werden, insbesondere dann, wenn die Hauptkrümmungsradien bekannt sind.

Der historische Ausgangspunkt für diese Darstellungsform war die Kugelschale, für die man in dieser Form wegen der konstanten Hauptkrümmungsradien besonders einfach zu lösende Gleichungen erhält.

Bei bekannten Hauptkrümmungsradien erhält man die Metrikkoeffizienten direkt aus der Definition der Bogenlänge:

$$ds_1 = A d\Theta^1 = R_\phi d\phi$$

$$A = R_\phi$$

$$ds_2 = B d\Theta^2 = R_\theta \sin\phi d\Theta^2 \text{ (Horizontal-} \\ \text{projektion)}$$

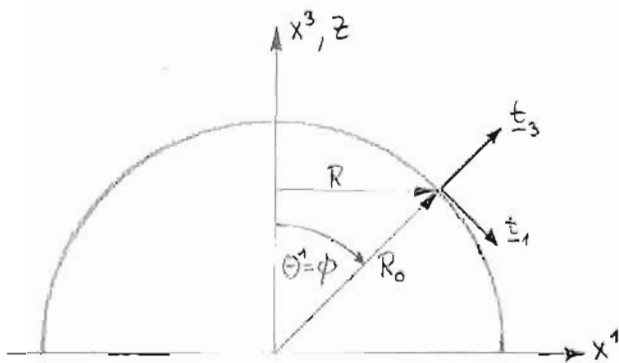
$$B = R_\theta \cdot \sin\phi = R$$

Für die Kugel gilt: $R_\phi = R_\theta = R_0$. Mit den allgemeineren Koordinaten ($x^3 = \Theta^2$) erhält man für die Kugel:

$$A^2 = R_0^2 - (\Theta^2)^2 = R^2; \quad B^2 = R_0^2 / (R_0^2 - (\Theta^2)^2) = \frac{R_0^2}{R^2} \text{ (s. S. 18)}$$

was zu komplizierteren Gleichungen führen kann,

Kugelfläche in ϕ - θ -Koordinaten



$$x_3 = z$$

$$R^2(z) = R_0^2 - z^2$$

$$R^2(\theta^1) = R_0^2 \sin^2 \theta^1$$

$$z = R_0 \cos \theta^1, \quad R = R_0 \sin \theta^1$$

Ortsvektor:
$$\underline{r} = R(\theta^1) \cdot \cos \theta^2 \underline{i}_1 + R(\theta^1) \sin \theta^2 \underline{i}_2 + R_0 \cos \theta^1 \underline{i}_3$$

$$= R_0 [\sin \theta^1 \cos \theta^2 \underline{i}_1 + \sin \theta^1 \sin \theta^2 \underline{i}_2 + \cos \theta^1 \underline{i}_3]$$

Ableitungen:
$$\underline{r}_{,1} = R_0 [\cos \theta^1 \cos \theta^2 \underline{i}_1 + \cos \theta^1 \sin \theta^2 \underline{i}_2 - \sin \theta^1 \underline{i}_3]$$

$$\underline{r}_{,2} = R_0 [\sin \theta^1 \sin \theta^2 \underline{i}_1 + \sin \theta^1 \cos \theta^2 \underline{i}_2]$$

$$\underline{r}_{,11} = R_0 [-\sin \theta^1 \cos \theta^2 \underline{i}_1 - \sin \theta^1 \sin \theta^2 \underline{i}_2 - \cos \theta^1 \underline{i}_3]$$

$$\underline{r}_{,22} = R_0 [-\sin \theta^1 \cos \theta^2 \underline{i}_1 - \sin \theta^1 \sin \theta^2 \underline{i}_2]$$

Skalarprodukte:
$$\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_1 = R_0^2 [\cos^2 \theta^1 \cos^2 \theta^2 + \cos^2 \theta^1 \sin^2 \theta^2 + \sin^2 \theta^1] = R_0^2$$

$$\underline{r}_2 \cdot \underline{r}_2 = R_0^2 [\sin^2 \theta^1 \sin^2 \theta^2 + \sin^2 \theta^1 \cos^2 \theta^2] = R_0^2 \cdot \sin^2 \theta^1 = R^2$$

$$\boxed{A = R_0; \quad B = R_0 \sin \theta^1 = R}$$

Vektorprodukt:

$$\underline{r}_1 \times \underline{r}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i}_1 & \cos \theta^1 \cos \theta^2 & -\sin \theta^1 \sin \theta^2 \\ \underline{i}_2 & \cos \theta^1 \sin \theta^2 & \sin \theta^1 \cos \theta^2 \\ \underline{i}_3 & -\sin \theta^1 & 0 \end{vmatrix} R_0$$

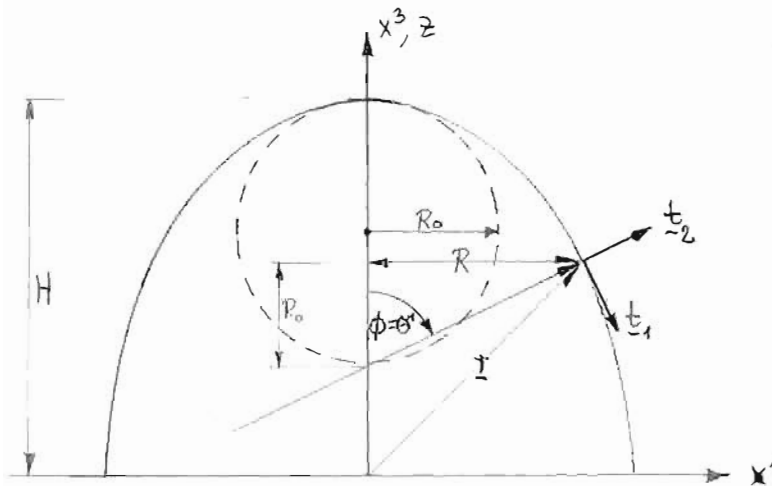
$$= (\sin^2 \theta^1 \cos \theta^2 \underline{i}_1 + \sin^2 \theta^1 \sin \theta^2 \underline{i}_2 + \cos \theta^1 \sin \theta^1 \underline{i}_3) R_0^2$$

Krümmungsradien:
$$R_1 = \frac{-A^3 B}{\underline{r}_{,11} (\underline{r}_1 \times \underline{r}_{,2})} = \frac{-R_0^4 \sin \theta^1}{-R_0^3 \sin \theta^1} = R_0$$

$$R_2 = \frac{-A B^3}{\underline{r}_{,22} (\underline{r}_1 \times \underline{r}_{,2})} = \frac{-R_0^4 \sin^3 \theta^1}{-R_0^3 \sin^3 \theta^1} = R_0$$

$$\boxed{R_1 = R_2 = R_0}$$

Paraboloid in ϕ - θ -Koordinaten



$$x^3 = z$$

$$R^2 = 2R_0(H-z) \Rightarrow z = H - \frac{R^2}{2R_0}$$

$$R = R_0 \tan \theta^1$$

$$\left[\text{aus: } R_{,2} = \tan \alpha = -\cot \left(\underbrace{90^\circ + \alpha}_{\theta^1} \right) \right]$$

$$R_{,2} = -R_0/R$$

$$2R_0(H-z) = R_0^2 \tan^2 \theta^1$$

$$z = -R_0/2 \cdot \tan^2 \theta^1 + H$$

Krümmungsradien:

Aus den allgemeinen Gleichungen von S. 18 folgt für R_1 :

$$R_1 = R_\phi = - \frac{[1 + R_{,2}^2]^{3/2}}{R_{,22}}$$

$$R_{,2} = - \frac{R_0}{\sqrt{2R_0H - 2R_0z}} = - \frac{R_0}{R}$$

$$R_{,22} = \frac{R_0}{R^2} \cdot R_{,2} = - \frac{R_0^2}{R^3}$$

$$R_1 = + \frac{R_0}{\cos^3 \theta^1}$$

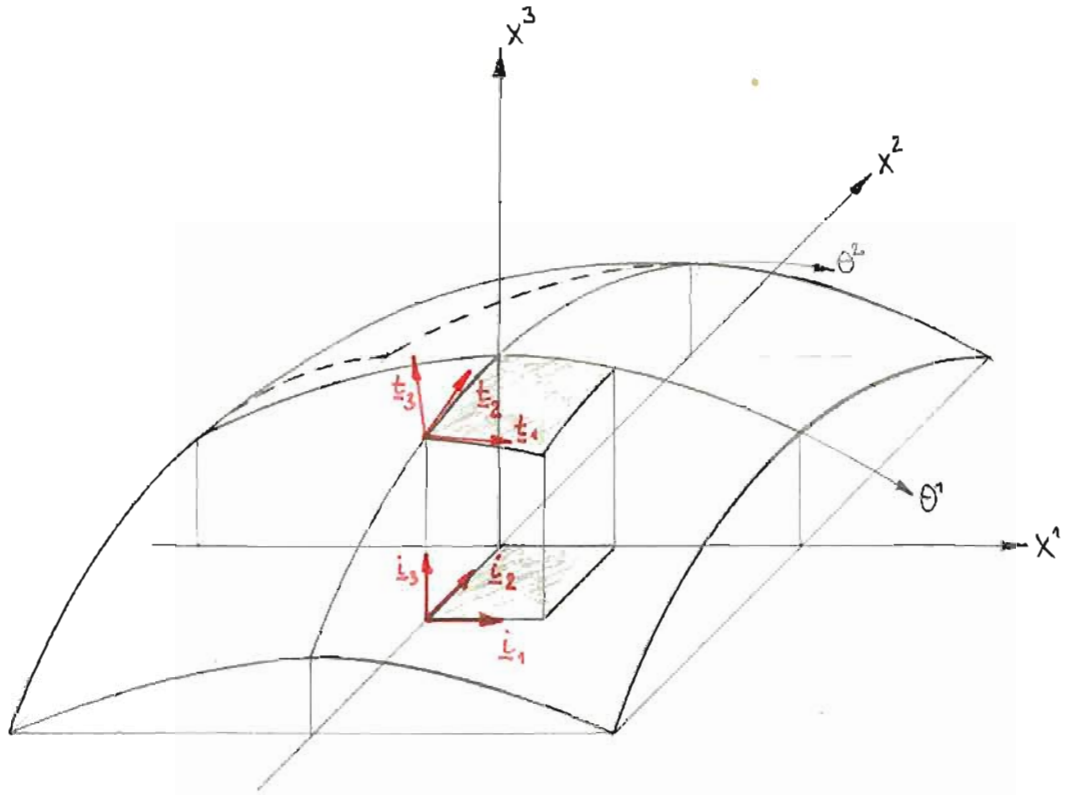
$$R_2 = R_\theta = \frac{R}{\sin \theta^1} = \frac{R_0}{\cos \theta^1}$$

$$A = R_1 = R_\phi$$

$$B = R_2 \cdot \sin \theta^1 = R \\ = R_0 \cdot \tan \theta^1$$

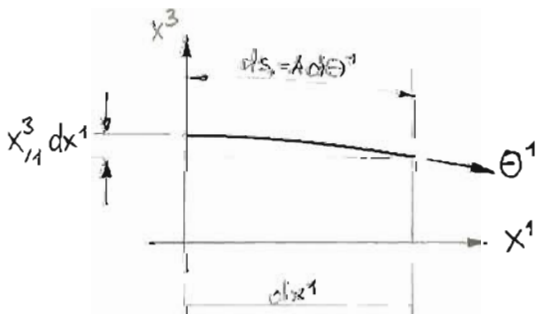
direkt anschaulich
s. S. 20

Flache Schalen



Schalen können als „flach“ bezeichnet werden, wenn der maximale Schalenstich kleiner als ein Fünftel der kürzeren Seitenlänge ist.

Dann kann die Bogenlänge der Flächenkoordinaten näherungsweise der auf die Grundrißebene projizierten Länge gleichgesetzt werden:



$$\theta^\alpha \approx x^\alpha ; \underline{t}_i \approx \underline{l}_i$$

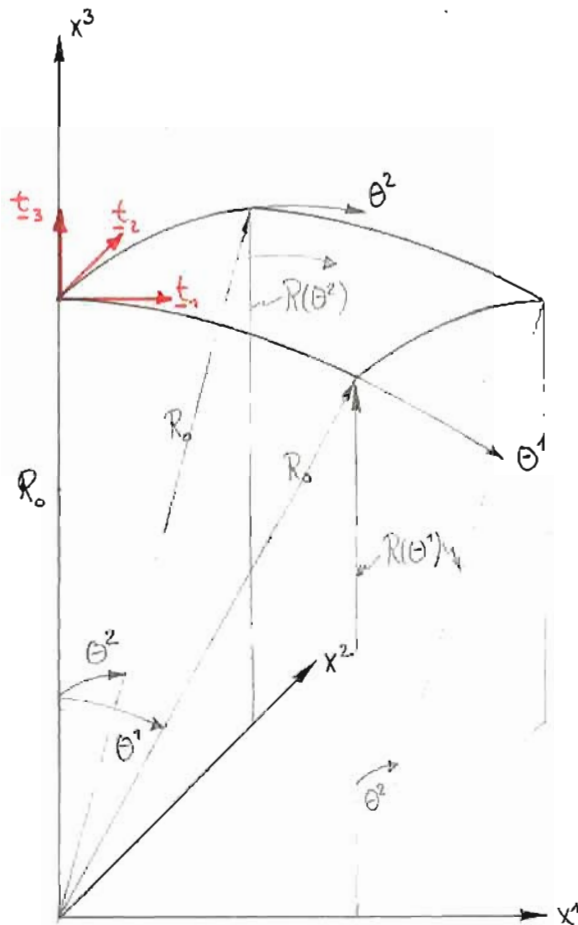
$$ds_\alpha \approx dx^\alpha \Rightarrow \underline{A=B=1}$$

$$(ds_\alpha)^2 = (dx^\alpha)^2 + (x^3_{,\alpha} \cdot dx^\alpha)^2 \quad (A_{,\alpha} = B_{,\alpha} = \phi)$$

$$= (1 + (x^3_{,\alpha})^2) (dx^\alpha)^2 \Rightarrow \underline{(x^3_{,\alpha})^2 \approx \phi}$$

$$R_\alpha = - \frac{[1 + (x^3_{,\alpha})^2]^{3/2}}{x^3_{,\alpha\alpha}} \Rightarrow \underline{R_\alpha \approx - \frac{1}{x^3_{,\alpha\alpha}}}$$

Flache Kugelschale über Rechteckgrundriß



$$x^3 = \sqrt{R_0^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2}$$

Ortsvektor $\underline{r} = x^i \underline{e}_i$

$$x^i = \begin{bmatrix} R_0 \cos \theta^2 \sin \theta^1 \\ R_0 \cos \theta^1 \sin \theta^2 \\ R_0 \sqrt{1 - \cos^2 \theta^2 \sin^2 \theta^1 - \cos^2 \theta^1 \sin^2 \theta^2} \end{bmatrix}$$

Die Vernachlässigung aller Terme mit $\sin^2 \theta \approx 0$ für flache Schalen (d.h. für kleine Winkel θ) ergibt

$$A = B \approx R_0$$

$$ds_1 = A d\theta^1 \approx dx^1; ds_2 \approx dx^2$$

$$R_{,1} \approx -\frac{1}{x^3} : (x^3)_{,1}^2 = \frac{(-x^1)^2}{R_0^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2} \approx 0 \text{ für } R_0 \gg x^1$$

$$x^3_{,1} = -\frac{x^1}{x^3} \Rightarrow x^3_{,11} = -\frac{1}{x^3} \left(1 + \frac{(x^1)^2}{x^3^2}\right) = -\frac{1}{x^3} \left(1 + \frac{(x^1)^2}{x^3^2}\right)$$

$$R_{,1} \approx x^3 = \sqrt{R_0^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2} \approx R_0 \text{ für kleine } x^1$$

Kugelschalen werden auch näherungsweise als Rotationsparaboloiden abgebildet, die analytisch etwas leichter zu behandeln sind.

$$x^3 = (x^1/a)^2 + (x^2/b)^2$$

Der Krümmungsradius im Zenit wird dann über die ganze Fläche als konstant angenommen.

Zu 3. Beschreibung der Geometrie einer Fläche

Zusammenfassung

nur orthogonale Koordinaten

Koordinaten: $P(x_1, x_2, x_3)$ kartesische Koordin.

$P(\theta^1, \theta^2)$ Parameter-Darstellung

Ortsvektor: $\underline{r} = x_k \underline{e}_k = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$

Begleitendes Dreibein:

$$\underline{a}_\alpha = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta^\alpha} = \underline{r}_{,\alpha} \quad \alpha = 1, 2$$

$$\underline{a}_3 = \underline{a}_1 \times \underline{a}_2$$

Normiert: $\underline{t}_\alpha = \underline{a}_\alpha / |\underline{a}_\alpha|$ z.B.: $|\underline{a}_1| = \sqrt{\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_1}$

$$\underline{t}_3 = \underline{t}_1 \times \underline{t}_2$$

Bogenlänge:

$$ds_1 = \sqrt{\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_1} d\theta^1 = A d\theta^1$$

$$ds_2 = \sqrt{\underline{a}_2 \cdot \underline{a}_2} d\theta^2 = B d\theta^2$$

Fläche: $dF = ds_1 \cdot ds_2 = AB d\theta^1 d\theta^2$

Feste Grundform
einer Fläche

$$ds^2 = d\underline{r} \cdot d\underline{r} = A^2 d\theta^1 d\theta^1 + B^2 d\theta^2 d\theta^2$$

Krümmung

$$\kappa = -\frac{1}{R} = \frac{d^2 \underline{r} \cdot \underline{t}_3}{ds^2}$$

$$\left(d\underline{t} = \left[\frac{1}{R} \underline{t}_3 = \underline{r}_{,111} = \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \right] \right) \quad \underline{t} = \underline{t}_{,1} \underline{t}_3$$

$$\kappa = \frac{\underline{r}_{,11} \underline{t}_3 d\theta^1 d\theta^1 + \underline{r}_{,22} \underline{t}_3 d\theta^2 d\theta^2}{A^2 d\theta^1 d\theta^1 + B^2 d\theta^2 d\theta^2} \quad \leftarrow \text{zweite Grundform}$$

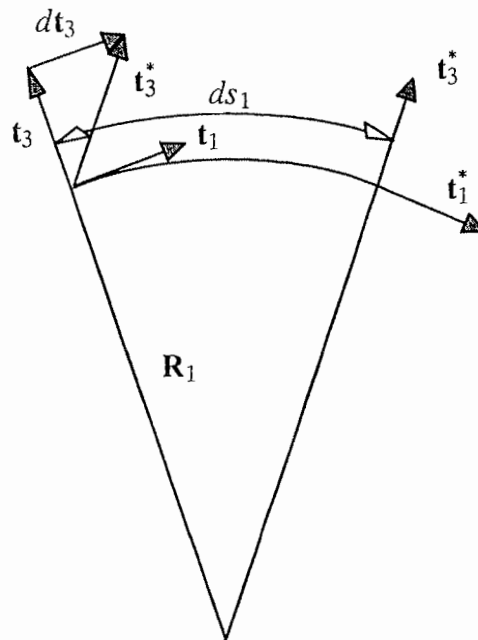
längs θ^1 : $d\theta^2 = 0$: $L = \underline{r}_{,11} \underline{t}_3 = -\frac{A^2}{R_1} \rightarrow R_1 = -\frac{A^2}{\underline{r}_{,11} \underline{t}_3}$

längs θ^2 : $d\theta^1 = 0$: $N = \underline{r}_{,22} \underline{t}_3 = -\frac{B^2}{R_2} \rightarrow R_2 = -\frac{B^2}{\underline{r}_{,22} \underline{t}_3}$

Gauß'sche Krümmung: $K = \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2}$

3.3 Änderung der Tangentenvektoren (z. T. Tafelanschrieb)

3.3.1 Berechnung des Vektors $\mathbf{t}_{3,1}$



Für infinitesimale Zuwächse gilt: $d\mathbf{t}_3 = |d\mathbf{t}_3| \mathbf{t}_1$

$$\frac{|d\mathbf{t}_3|}{|\mathbf{t}_3|} = |\Delta\mathbf{t}_3| = \frac{ds_1}{R_1} = \frac{A d\theta^1}{R_1}$$

mit $|\mathbf{t}_3| = 1$ folgt

$$|d\mathbf{t}_3| \mathbf{t}_1 = d\mathbf{t}_3 = \frac{A d\theta^1}{R_1} \mathbf{t}_1$$

$\mathbf{t}_{3,2}$:

(analog)

$$\frac{d\mathbf{t}_3}{d\theta^1} = \frac{A}{R_1} \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_{3,1}$$

$$\frac{d\mathbf{t}_3}{d\theta^2} = \frac{B}{R_2} \mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_{3,2}$$

(1)

3.3.2 Berechnung des Vektors $t_{1,1}$

a) Komponente in θ^2 - Richtung

$$t_1 \cdot t_2 = 0$$

$$(t_1 \cdot t_2)_{,1} = t_{1,1} \cdot t_2 + t_1 \cdot t_{2,1} = 0$$

$$\underbrace{t_{1,1} \cdot t_2}_{\text{(Projektion von } t_{1,1} \text{ auf } t_2)} = -t_1 \cdot t_{2,1}$$

(Projektion von $t_{1,1}$ auf t_2)

aus $r_{,12} = r_{,21}$ folgt eine Bestimmungsgleichung für $t_{2,1}$

$$r_{,1} = A t_1 \quad ; \quad r_{,12} = A_{,2} t_1 + A t_{1,2}$$

$$r_{,2} = B t_2 \quad ; \quad r_{,21} = B_{,1} t_2 + B t_{2,1}$$

$$t_{2,1} = \frac{1}{B} (A_{,2} t_1 + A t_{1,2} - B_{,1} t_2)$$

$$t_{1,1} \cdot t_2 = -\frac{1}{B} (A_{,2} \underbrace{t_1 \cdot t_1}_1 + A \underbrace{t_{1,2} \cdot t_1}_{\text{(senkrecht zu } t_1)}} - B_{,1} \cancel{t_2 \cdot t_1})$$

b) Komponente in θ^3 - Richtung

$$t_1 \cdot t_3 = 0$$

$$(t_1 \cdot t_3)_{,1} = t_{1,1} \cdot t_3 + t_1 \cdot t_{3,1}$$

$$t_{1,1} \cdot t_3 = -t_1 \cdot t_{3,1} = -t_1 \cdot t_1 \frac{A}{R_1} \quad (\text{siehe (1)})$$

$$t_{2,2} : (\text{analog}) \quad \boxed{\begin{aligned} t_{1,1} &= -\frac{A_{,2}}{B} t_2 - \frac{A}{R_1} t_3 \\ t_{2,2} &= -\frac{B_{,1}}{A} t_1 - \frac{B}{R_2} t_3 \end{aligned}} \quad (2)$$

3.3.3 Berechnung des Vektors $t_{2,1}$

Komponente in θ^1 - Richtung

$$t_1 \cdot t_2 = 0$$

$$(t_1 \cdot t_2)_{,1} = t_{1,1} \cdot t_2 + t_1 \cdot t_{2,1}$$

$$t_{2,1} \cdot t_1 = -t_{1,1} \cdot t_2$$

$$= + \frac{A_{,2}}{B} \underbrace{t_2 \cdot t_2}_1 + \frac{A}{R_1} t_3 \cdot t_2$$

$t_{1,2} : (analog)$

$$\boxed{\begin{aligned} t_{2,1} &= \frac{A_{,2}}{B} t_1 \\ t_{1,2} &= \frac{B_{,1}}{A} t_2 \end{aligned}} \quad (3)$$

3.3.4 Zusammenfassung:

$$\begin{bmatrix} t_{1,1} \\ t_{1,2} \\ t_{2,1} \\ t_{2,2} \\ t_{3,1} \\ t_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -A_{,2}/B & -A/R_1 \\ 0 & B_{,1}/A & 0 \\ A_{,2}/B & 0 & 0 \\ -B_{,1}/A & 0 & -B/R_2 \\ A/R_1 & 0 & 0 \\ 0 & B/R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

3.3.5 Herleitung der Gauß-Codazzi Gleichungen

Bei orthogonalen Koordinaten ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschbar :

$$t_{3,12} = t_{3,21}$$

$$(t_{3,1})_{,2} = \left(\frac{A}{R_1} t_1 \right)_{,2} = \left(\frac{B}{R_2} t_2 \right)_{,1} = (t_{3,2})_{,1}$$

Anwendung der Kettenregel und Einsetzen der Ableitungsgleichungen liefert:

$$\left[\left(\frac{A}{R_1} \right)_{,2} - \frac{A_{,2}}{R_2} \right] t_1 = \left[\left(\frac{B}{R_2} \right)_{,1} - \frac{B_{,1}}{R_1} \right] t_2$$

Da t_1 und t_2 orthogonal sind, muß gelten :

$$\boxed{\left(\frac{A}{R_1} \right)_{,2} = \frac{A_{,2}}{R_2} ; \left(\frac{B}{R_2} \right)_{,1} = \frac{B_{,1}}{R_1}}$$

Auf analoge Weise erhält man aus

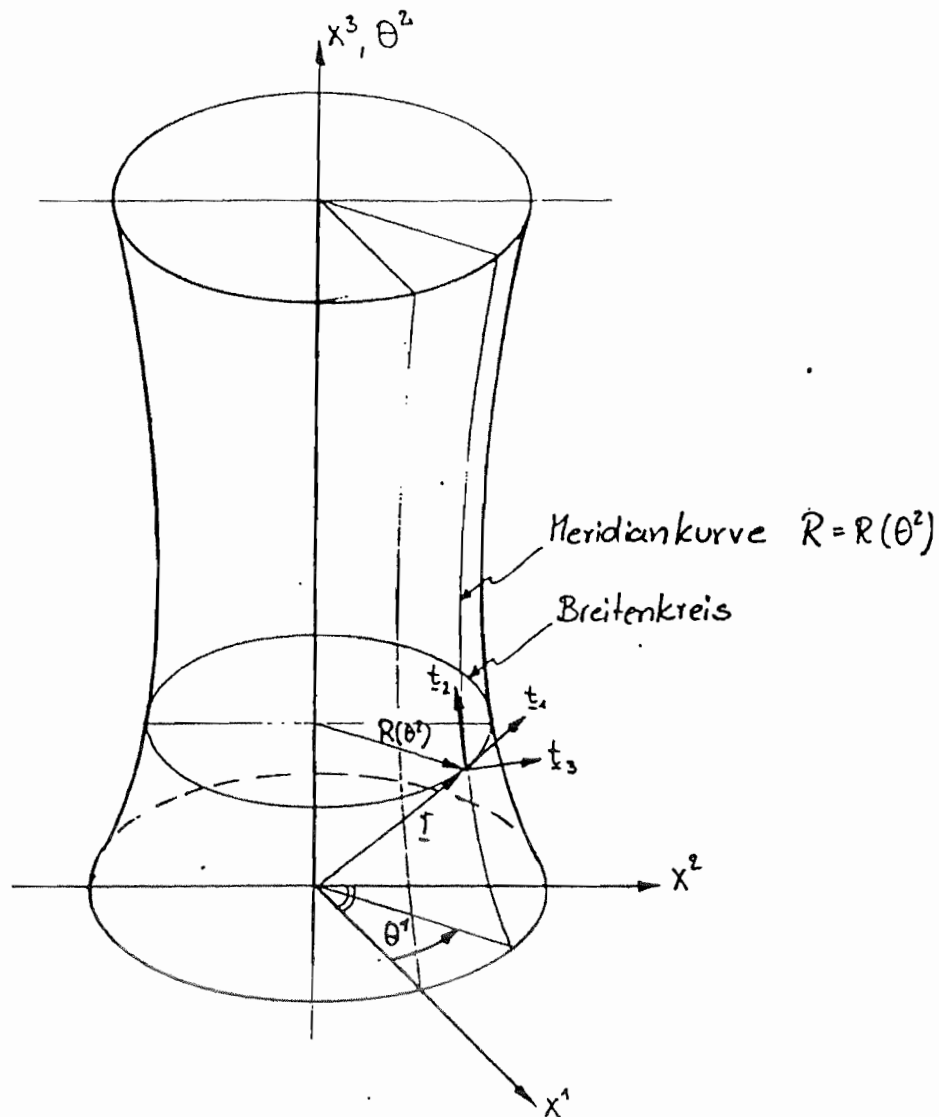
$$t_{1,12} = t_{1,21} \text{ oder } t_{2,12} = t_{2,21}$$

die dritte Beziehung :

$$\boxed{\left(\frac{B_{,a}}{A} \right)_{,a} + \left(\frac{A_{,\beta}}{B} \right)_{,\beta} = -\frac{A_{,a} B_{,a}}{R_1 R_2}}$$

zu 3.4 Spezielle Geometrien

Allgemeine Rotationsflächen



Ortsvektor $\underline{r} = R(\theta^2) \cos \theta^1 \underline{i}_1 + R(\theta^2) \sin \theta^1 \underline{i}_2 + \theta^2 \underline{i}_3$

Ableitungen $\underline{r}_{,1} = -R(\theta^2) \sin \theta^1 \underline{i}_1 + R(\theta^2) \cos \theta^1 \underline{i}_2$

$\underline{r}_{,2} = R_{,2} \cos \theta^1 \underline{i}_1 + R_{,2} \sin \theta^1 \underline{i}_2 + \underline{i}_3$

$\underline{r}_{,11} = -R(\theta^2) \cos \theta^1 \underline{i}_1 - R(\theta^2) \sin \theta^1 \underline{i}_2$

$\underline{r}_{,22} = R_{,22} \cos \theta^1 \underline{i}_1 + R_{,22} \sin \theta^1 \underline{i}_2$

Skalarprodukte: $\underline{r}_{,1} \cdot \underline{r}_{,1} = R^2(\theta^2)$

$\underline{r}_{,12} \cdot \underline{r}_{,12} = 1 + (R_{,2})^2$

Vektorprodukt: $\underline{t}_{1,1} \times \underline{t}_{1,2} = \begin{vmatrix} \underline{i}_1 & -R \sin \theta^1 & R_{1,2} \cos \theta^1 \\ \underline{i}_2 & R \cos \theta^1 & R_{1,2} \sin \theta^1 \\ \underline{i}_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ -2-

$$= (-R \cdot R_{1,2} \sin^2 \theta^1 - R R_{1,2} \cos^2 \theta^1) \underline{i}_3$$

$$+ (R \cos \theta^1 - 0) \underline{i}_1 - (-R \sin \theta^1 - 0) \underline{i}_2$$

$$= R \cos \theta^1 \underline{i}_1 + R \sin \theta^1 \underline{i}_2 - R R_{1,2} \underline{i}_3$$

Flächenparameter: $A^2 = R^2$; $B^2 = 1 + (R_{1,2})^2$

$$R_1 = \frac{-R^3 \sqrt{1 + R_{1,2}^2}}{-R^2} = R \sqrt{1 + (R_{1,2})^2}$$

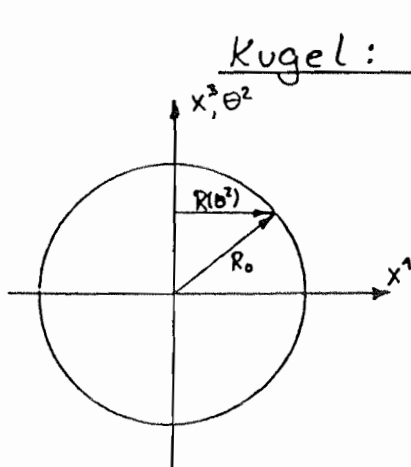
$$R_2 = \frac{-R [1 + (R_{1,2})^2]^{\frac{3}{2}}}{R \cdot R_{1,2}} = -\frac{[1 + (R_{1,2})^2]^{\frac{3}{2}}}{R_{1,2}}$$

Basisvektoren: $\underline{t}_1 = -\sin \theta^1 \underline{i}_1 + \cos \theta^1 \underline{i}_2$

$$\underline{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (R_{1,2})^2}} \left[R_{1,2} \cos \theta^1 \underline{i}_1 + R_{1,2} \sin \theta^1 \underline{i}_2 + \underline{i}_3 \right]$$

$$\underline{t}_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + (R_{1,2})^2}} \left[\cos \theta^1 \cdot \underline{i}_1 + \sin \theta^1 \underline{i}_2 - R_{1,2} \underline{i}_3 \right]$$

Gauß'sche Krümmung: $K = \frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{R_{1,2}}{R [1 + (R_{1,2})^2]^2}$



$$R(\theta^2) = \sqrt{R_0^2 - (\theta^2)^2} \quad (A = R)$$

$$R_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{-2\theta^2}{\sqrt{R_0^2 - (\theta^2)^2}} = -\frac{\theta^2}{R} \quad (B = \frac{R_0}{R})$$

$$R_{1,2,2} = -\frac{R - \theta^2 R_{1,2}}{R^2} = -\frac{R^2 + (\theta^2)^2}{R^3}$$

$$R_1 = R_2 = R_0 \Rightarrow K = \frac{1}{R_0^2} > 0$$

für alle θ^2

aber für $\theta^2 = R_0 \Rightarrow R = 0, R_{1,2} = R_{1,2,2} = \infty$

(numerisch ungünstig)

4. Membrantheorie (Tafelanschrieb)

4.1 Voraussetzungen

4.2 Definition der Resultierenden

4.3 Kräftegleichgewicht an der Membranschale

4.4 Membrantheorie der Rotationsschalen

4.5 Spezielle Geometrien

4. Membrantheorie

Eine äußere Belastung wird nur durch Normal- und Schubkräfte in der Schalenebene aufgenommen.

$$m_{\alpha\beta} = q_{\alpha} = 0$$

Aus dem Momentengleichgewicht um die Schalennormale (sog. 6. Gleichgewichtsbedg.) erhält man

$$n_{12} = n_{21}$$

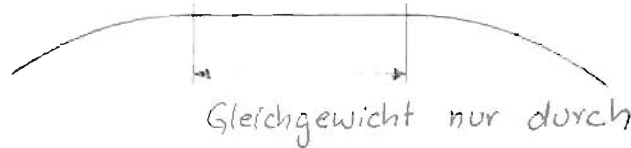
Damit reduzieren sich die allgemeinen Membrangleichgewichtsbedingungen auf die folgende Form:

$$\begin{matrix} ! \\ \circ \end{matrix}
 \begin{bmatrix}
 B_{,1} + B\partial_1 & 2A_{,2} + A\partial_2 & -B_{,1} \\
 -A_{,2} & 2B_{,1} + B\partial_1 & A_{,2} + A\partial_2 \\
 -\frac{AB}{R_1} & \emptyset & -\frac{AB}{R_2}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 n_{11} \\
 n_{12} \\
 n_{22}
 \end{bmatrix}
 + AB
 \begin{bmatrix}
 \bar{p}_1 \\
 \bar{p}_2 \\
 \bar{p}_3
 \end{bmatrix}
 = \emptyset$$

Für die drei unbekanntten Schnittkräfte stehen drei Gleichungen zur Verfügung, von denen die dritte eine einfache algebraische Gleichung ist. Es verbleibt also ein partielles DGL-System 2. Ordnung, das mit den entsprechenden Randbedingungen für die meisten Schalengeometrien relativ einfach gelöst werden kann.

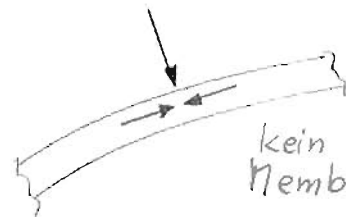
Bemerkungen zum Gültigkeitsbereich der Membrantheorie

Geometrie: Die SMF muß stetig gekrümmt sein und darf nicht eben sein



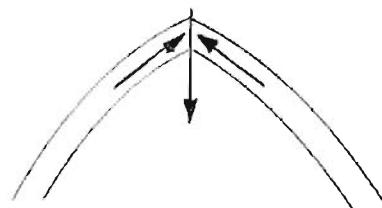
Gleichgewicht nur durch Querkräfte und Momente möglich.

Lasten: Die Belastung muß stetig über SMF verteilt sein. Einzellasten senkrecht zur SMF können nur über Querkräfte abgetragen werden

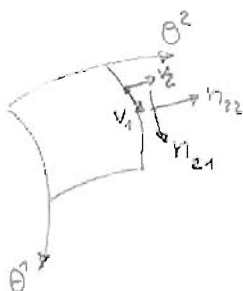


kein Gleichgewicht mit Membrankräften möglich

Die Abtragung von Einzellasten auf Kuppeln ist möglich



Randbedingungen: An den Schalenrändern sind tangentielle und normale Randkräfte oder die korrespondierenden Verschiebungen vorschreibbar.



$$n_{21} = \bar{n}_{21} \quad \text{oder} \quad v_1 = \bar{v}_1$$

$$\text{und} \quad n_{22} = \bar{n}_{22} \quad \text{oder} \quad v_2 = \bar{v}_2 \quad \text{für } \theta^2 = \text{konst}$$

(An anderen Rändern analog)

zu 4.3 Koppel-Gleichgewicht:

$$\begin{bmatrix} D_1 & \frac{A_{1,2}}{B} & D_2 & -\frac{B_{1,1}}{A} & \frac{A}{R_1} & 0 \\ -\frac{A_{1,2}}{B} & D_1 & \frac{B_{1,1}}{A} & D_2 & 0 & \frac{B}{R_2} \\ -\frac{A}{R_1} & 0 & 0 & -\frac{B}{R_2} & D_1 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B m_{11} \\ B m_{12} \\ A m_{21} \\ A m_{22} \\ B q_1 \\ A q_2 \end{bmatrix} + AB \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Annahmen der Mindlintheorie

$$m_{12} = q_2 = 0 \quad ; \quad m_{11} = m_{21}$$

$$\begin{bmatrix} B_{1,1} + BD_1 & 2A_{1,2} + AD_2 & -B_{1,1} \\ -A_{1,2} & 2B_{1,1} + BD_1 & A_{1,2} + AD_2 \\ -\frac{AB}{R_1} & 0 & -\frac{AB}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \end{bmatrix} + AB \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

algebraisch

Gültigkeitsbereich:

Geometrie nicht eben

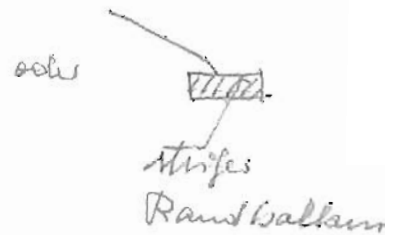
Lasten nicht verteilt

R.B.:

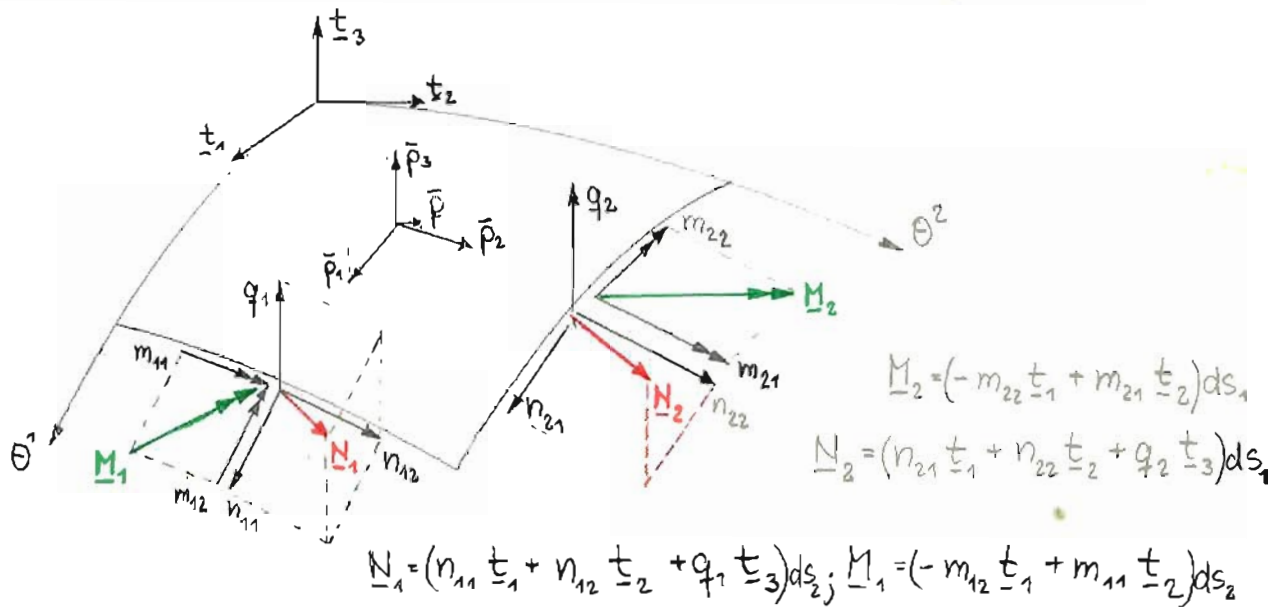
$$m_{21} = \bar{m}_{21} \quad \text{oder} \quad v_1 = \bar{v}_1$$

$$m_{22} = \bar{m}_{22} \quad \text{oder} \quad v_2 = \bar{v}_2$$

bei $D^2 = \text{const.}$



Spannungsergebnisse am unverformten Schalenelement
 → Lineare Theorie mit „kleinen“ Verformungen



(Die Vektoren $\underline{N}_\alpha, \underline{M}_\alpha$ ^{Maß, Maß} haben die Dimension Kraft/Länge bzw. Moment/Länge)

Die Momente drehen nur um die Schalenmittelfläche, deshalb liegen die Momentenvektoren in der Schalenebene.

Vorzeichenkonvention:

Die Richtungen der Biegemomente und Normalkräfte sind so gewählt, daß positive Schnittkräfte für positive Θ^3 -Werte positive Spannungen im Schalenraum liefern. Diese Definition wird üblicherweise auch in der Plattentheorie verwendet (Zug auf der Unterseite).

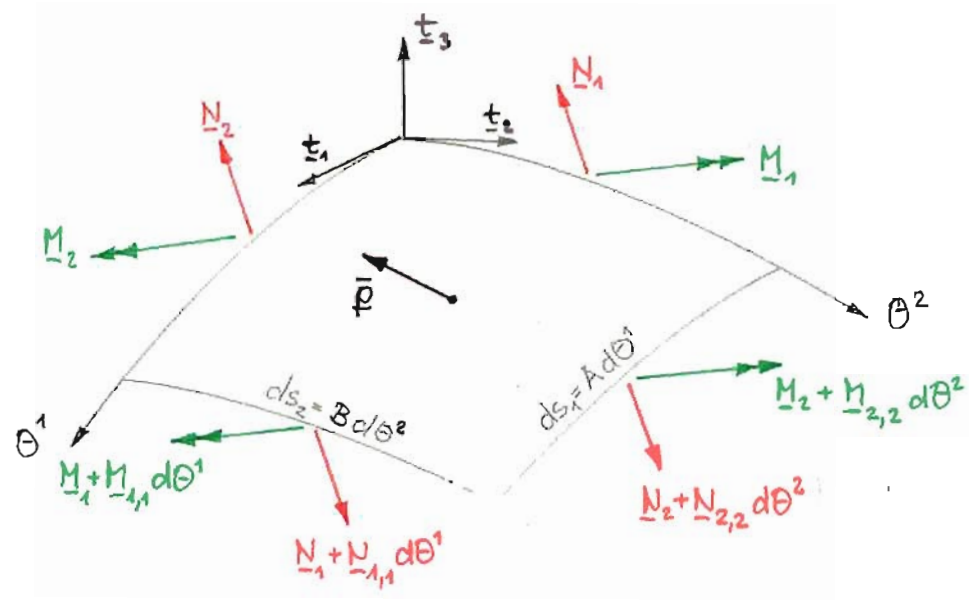
Die äußere Belastung der Schale wird als Last pro Flächeneinheit zu dem Kraftvektor

$$\underline{\bar{p}} = (\bar{p}_i \underline{t}_i) ds_1 ds_2$$

zusammengefaßt,

4.3 Kräfte - Gleichgewicht

Gleichgewicht am Element zwischen inneren und äußeren Kräften:



Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned} \sum \underline{N} = 0 &= (-\underline{N}_1 + \underline{N}_1 + \underline{N}_{1,1} d\theta^1) + (-\underline{N}_2 + \underline{N}_2 + \underline{N}_{2,2} d\theta^2) + \bar{p} \\ &= \underline{N}_{1,1} d\theta^1 + \underline{N}_{2,2} d\theta^2 + \bar{p} \end{aligned}$$

$\underline{N}_1 = (n_{11} \underline{t}_1 + \dots) ds_2$
 $\underline{N}_2 = (n_{21} \underline{t}_1 + \dots) ds_1$

Division durch $d\theta^1 d\theta^2$ und Einsetzen der Vektorkomponenten:

$$\begin{aligned} [B(n_{11} \underline{t}_1 + n_{12} \underline{t}_2 + q_1 \underline{t}_3)]_{,1} + [A(n_{21} \underline{t}_1 + n_{22} \underline{t}_2 + q_2 \underline{t}_3)]_{,2} + \\ + AB(\bar{p}_1 \underline{t}_1 + \bar{p}_2 \underline{t}_2 + \bar{p}_3 \underline{t}_3) = 0 \end{aligned}$$

Differentiation der Schnittkräfte und der Tangentenvektoren mit Hilfe der Ableitungsgleichungen:

$$\begin{aligned} (B n_{11})_{,1} \underline{t}_1 + B n_{11} \underline{t}_{1,1} + (B n_{12})_{,1} \underline{t}_2 + B n_{12} \underline{t}_{2,1} + (B q_1)_{,1} \underline{t}_3 + B q_1 \underline{t}_{3,1} \\ + (A n_{21})_{,2} \underline{t}_1 + A n_{21} \underline{t}_{1,2} + (A n_{22})_{,2} \underline{t}_2 + A n_{22} \underline{t}_{2,2} + (A q_2)_{,2} \underline{t}_3 + A q_2 \underline{t}_{3,2} \\ + AB(\bar{p}_1 \underline{t}_1 + \bar{p}_2 \underline{t}_2 + \bar{p}_3 \underline{t}_3) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B n_{1\alpha})_{,1} \underline{t}_\alpha + B n_{1\alpha} \underline{t}_{\alpha,1} + (B q_1)_{,1} \underline{t}_3 + B q_1 \underline{t}_{3,1} \\ + (A n_{2\alpha})_{,2} \underline{t}_\alpha + A n_{2\alpha} \underline{t}_{\alpha,2} + (A q_2)_{,2} \underline{t}_3 + A q_2 \underline{t}_{3,2} \\ + AB(\bar{p}_\alpha \underline{t}_\alpha + \bar{p}_3 \underline{t}_3) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (B_{n_{11}})_{11} \underline{t}_1 + B_{n_{11}} \left(-\frac{A_{12}}{B} \underline{t}_2 - \frac{A}{R_1} \underline{t}_3 \right) + (B_{n_{12}})_{11} \underline{t}_2 + B_{n_{12}} \frac{A_{12}}{B} \underline{t}_1 \\
 & + (B_{q_1})_{11} \underline{t}_3 + B_{q_1} \frac{A}{R_1} \underline{t}_1 + (A_{n_{21}})_{12} \underline{t}_1 + A_{n_{21}} \frac{B_{11}}{A} \underline{t}_2 \\
 & + (A_{n_{22}})_{12} \underline{t}_2 + A_{n_{22}} \left(-\frac{B_{11}}{A} \underline{t}_1 - \frac{B}{R_2} \underline{t}_3 \right) + (A_{q_2})_{12} \underline{t}_3 + A_{q_2} \frac{B}{R_2} \underline{t}_2 \\
 & + AB (\bar{p}_1 \underline{t}_1 + \bar{p}_2 \underline{t}_2 + \bar{p}_3 \underline{t}_3) = \phi
 \end{aligned}$$

Zusammenfassen der Komponenten der Tangentenvektoren liefert die gesuchten Kräftegleichgewichtsbedingungen für die drei orthogonalen Richtungen:

$$\begin{aligned}
 & \left[(B_{n_{11}})_{11} + (A_{n_{21}})_{12} + (B_{n_{12}}) \frac{A_{12}}{B} - (A_{n_{22}}) \frac{B_{11}}{A} + (B_{q_1}) \frac{A}{R_1} + AB \bar{p}_1 \right] \underline{t}_1 \quad \text{(I)} \\
 & + \left[(B_{n_{12}})_{11} + (A_{n_{22}})_{12} + (A_{n_{21}}) \frac{B_{11}}{A} - (B_{n_{11}}) \frac{A_{12}}{B} + (A_{q_2}) \frac{B}{R_2} + AB \bar{p}_2 \right] \underline{t}_2 \quad \text{(II)} \\
 & + \left[(B_{q_1})_{11} + (A_{q_2})_{12} - (B_{n_{11}}) \frac{A}{R_1} - (A_{n_{22}}) \frac{B}{R_2} + \bar{p}_3 AB \right] \underline{t}_3 = \phi \quad \text{(III)}
 \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} \partial_1 & \frac{A_{12}}{B} & \partial_2 & -\frac{B_{11}}{A} & \frac{A}{R_1} & \phi \\ -\frac{A_{12}}{B} & \partial_1 & \frac{B_{11}}{A} & \partial_2 & \phi & \frac{B}{R_2} \\ -\frac{A}{R_1} & \phi & \phi & -\frac{B}{R_2} & \partial_1 & \partial_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{n_{11}} \\ B_{n_{12}} \\ A_{n_{21}} \\ A_{n_{22}} \\ B_{q_1} \\ A_{q_2} \end{bmatrix} + AB \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \end{bmatrix} = \phi$$

4.4 Membrantheorie der Rotationsstrukturen

Geometrie vgl. 3.5.1: $A^2 = R^2$; $B^2 = 1 + (R_{,2})^2$

$$R_{,1} = R \sqrt{1 + (R_{,2})^2} = AB$$

$$R_{,2} = - \frac{[1 + (R_{,2})^2]^{1/2}}{R_{,22}} = - \frac{B^3}{R_{,22}}$$

$$A_{,2} = R_{,2} \quad ; \quad B_{,1} = 0$$

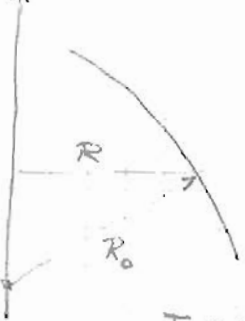
Gleichgewicht:

$$\begin{bmatrix} B D_1 & 2R_{,2} + R D_2 & 0 \\ -R_{,2} & B D_1 & R_{,2} + R D_2 \\ -\frac{AB}{R_1} & 0 & -\frac{AB}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{22} \end{bmatrix} + AB \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \end{bmatrix} = 0$$

oder:

$$\begin{bmatrix} m_{11,1} + \frac{1}{B} (2R_{,2} + R D_2) m_{12} + R \bar{p}_1 = 0 \\ -\frac{R_{,2}}{B} m_{11} + m_{12,1} + \frac{1}{B} (R_{,2} + R D_2) m_{22} + R \bar{p}_2 = 0 \\ -\frac{1}{R_1} m_{11} - \frac{AB}{R_2} m_{22} + AB \bar{p}_3 = 0 \end{bmatrix}$$

$$A B^2 = z$$



$$R^2 = R_0^2 - \alpha z^2$$

- $\alpha > 1$ Ellipsoid
- $\alpha = 0$ Zylinder
- $\alpha < 1$ Hyperboloid

Typus der Dgl.

$$\alpha > 0$$

$$\alpha = 0$$

$$\alpha < 0$$

elliptisch

parabolisch

hyperbolisch

(„Bestimmte Strukturformen“)

4.5 Spezielle Annahmen

-6-

Beispiel Zylinderschale

4.5.1

$$R(\theta^2) = R_0 = \text{konst.}$$

$$R_{,2} = R_{,22} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \tan \phi &= 0 \\ \cos \phi &= 1 \end{aligned}$$

Geometrieparameter

$$A = R_0; \quad B = 1$$

$$A_{,2} = B_{,2} = 0$$

$$R_1 = R_0; \quad R_2 = \infty$$

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} n_{12,2} + \frac{1}{R_0} n_{11,1} + \bar{p}_1 &= 0 \\ n_{22,2} + \frac{1}{R_0} n_{12,1} + \bar{p}_2 &= 0 \\ n_{11} &= \bar{p}_3 \cdot R_0 \end{aligned}$$

Rotationsymmetrische Belastung:

Konstante Last in Umfangsrichtung

\Rightarrow konstante Spannungen in Umfangsrichtung

$$\frac{\partial}{\partial \theta^1} = 0$$

$$n_{12} = \int_{\theta^2} \bar{p}_1 d\theta^2 + C_1 \quad (\text{Torsion})$$

$$n_{22} = \int_{\theta^2} \bar{p}_2 d\theta^2 + C_2 \quad (\text{Achslast})$$

$$n_{11} = \bar{p}_3 \cdot R_0 \quad (\text{Kesselformel, für Ringkraft aus Flächenlast, z.B. Innendruck für } \bar{p}_3 > 0)$$

Die Bestimmung der freien Konstanten C_0, C_1 erfolgt mit Hilfe der Randbedingungen.

Nichtrotationsymmetrische Belastung

Die Lösung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für die Zylinderschale ist möglich, wenn man die Gleichungen in einer bestimmten Reihenfolge bearbeitet:

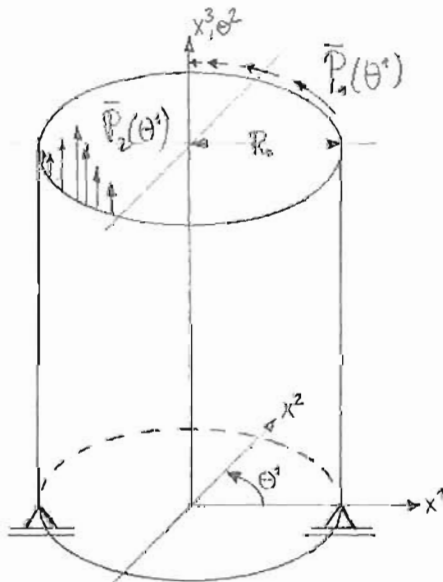
$$(i) \quad n_{11} = \bar{p}_3 \cdot R_0 \quad \Rightarrow \quad n_{11,1} = \bar{p}_{3,1} \cdot R_0$$

$$(ii) \quad n_{12} = -\int \left(\frac{1}{R_0} n_{11,1} + \bar{p}_1 \right) d\theta^2 + C_{1,1}$$

$$= -\int (\bar{p}_{3,1} + \bar{p}_1) d\theta^2 + C_{1,1} \quad \Rightarrow \quad n_{12,1}$$

$$(iii) \quad n_{22} = -\int \left(\frac{1}{R_0} n_{12,1} + \bar{p}_2 \right) d\theta^2 + C_{2,1}$$

A) Fall 1 Linienlasten am oberen Rand (Homogene Lösung)



$$\bar{p}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_{11} = n_{11,1} = 0$$

$$\bar{p}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_{12} = C_{1,1}$$

oberer Rand $\theta^2 = H$:

$$\underline{n_{12} = \bar{P}_1 = C_{1,1} = \text{konstant über die Höhe}}$$

$$\bar{p}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_{22} = -\frac{\bar{P}_{1,1}}{R_0} \int d\theta^2 + C_{2,1}$$

$$= -\bar{P}_{1,1} \cdot \theta^2 / R_0 + C_{2,1}$$

$$n_{22}(H) = \bar{P}_2 = \bar{P}_{1,1} H / R_0 + C_{2,1}$$

$$\Rightarrow C_{2,1} = \bar{P}_2 - \bar{P}_{1,1} H / R_0$$

$$\underline{n_{22} = \bar{P}_{1,1} (\theta^2 - H) / R_0 + \bar{P}_2}$$

für $\bar{P}_{1,1} = 0 \Rightarrow n_{22} = \bar{P}_2 = \text{konstant über die Höhe.}$

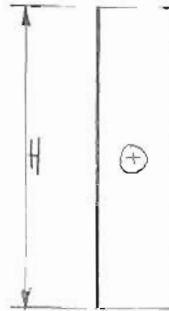
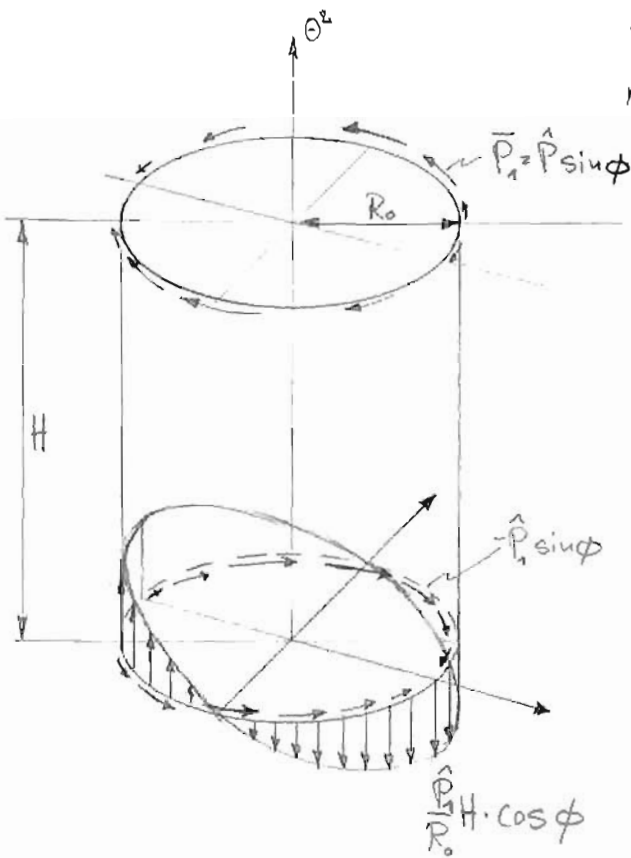
Linienlasten am Rand pflanzen sich ohne Lastausbreitung fort! Grenze der Membrantheorie \rightarrow Lasten möglichst gleichmäßig bzw. großflächig verteilen.

Randschubkraft

$$\bar{P}_1 = \hat{P}_1 \sin \Theta^1 \rightarrow \bar{P}_{1,1} = \hat{P}_1 \cos \Theta^1$$

$$n_{12} = \hat{P}_1 \cdot \sin \Theta^1 = \text{konst.}$$

$$n_{22} = \hat{P}_1 / R_0 \cdot \cos \Theta^1 \cdot (\Theta^2 - H)$$



$n_{12}(\theta^1)$



$n_{22}(\theta^2)$

Als Auflagerreaktion auf die Randschubkraft oben ergeben sich zusätzlich Längskräfte, die das Momentengleichgewicht herstellen.

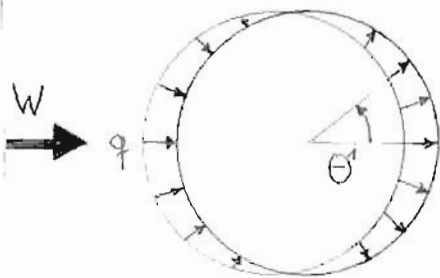
Fall 2: Windbelastung

(als Beispiel für eine nicht-rotationssymmetrische Flächenlast)

a) Einfachste Approximation:

$$\bar{p}_3 = q \cdot \cos \Theta^1$$

Dabei ist q der Staudruck im Nullpunkt nach DIN 1055

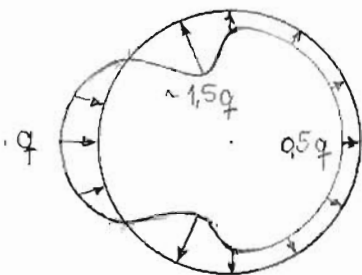


b) Gemessene Winddruckverteilung in eine Fourierreihe entwickeln:

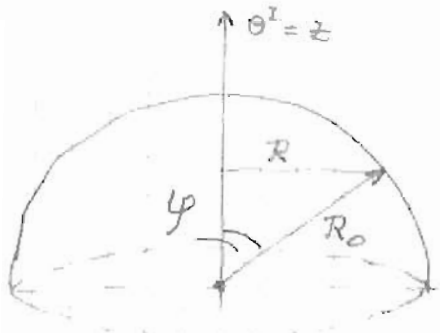
$$\bar{p}_3(\theta^1) = q (a_0 + a_1 \cos \theta^1 + a_2 \cos 2\theta^1 + \dots)$$

- $a_0 = -0,655$
- $a_1 = 0,280$
- $a_2 = 1,115$
- $a_3 = 0,400$
- $a_4 = -0,113$
- $a_5 = -0,027$

Die Gleichgewichtsbedingungen können für jeden Fourierkoeffizienten einzeln gelöst werden. Ergebnisse überlagern!



4.5.2 Kugelkappe unter Eigengewicht



$$\theta^1 = \varphi ; \quad \theta^2 = z$$

$$R^2 = R_0^2 - z^2$$

$$(2R R_{,2} = -2z)$$

$$A_{,2} = R_{,2} = -\frac{z}{R}$$

$$B = \sqrt{1 + (R_{,2})^2} = \sqrt{1 + \frac{z^2}{R^2}}$$

$$A = R = \sqrt{R_0^2 - z^2}$$

$$B = \frac{R_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{R_0^2 - z^2}$$

$$R_1 = R_2 = R_0$$

Belastung:

$$\underline{\bar{p}} = \frac{g}{R_0} \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ -z \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix}$$

g [MN/m²]
= konstant

Membrantheorie (Gleichgewicht) $\bar{p}_1 = m_{11} = \bar{\sigma}_1 = 0$

$$-A_{,2} m_{11} + (A m_{22})_{,2} + AB \bar{p}_2 = 0$$

$$-m_{11} / R_1 - m_{22} / R_2 + \bar{p}_3 = 0 \rightarrow m_{11} = -zg - m_{22}$$

$$\rightarrow -R_{,2}(-zg - m_{22}) + (R m_{22})_{,2} - g \cdot R = 0$$

$$\text{mit } R_{,2} m_{22} + R_{,2} m_{22} + R m_{22,2} = \frac{1}{R} (R^2 m_{22})_{,2}$$

$$\rightarrow (R^2 m_{22})_{,2} = g(R^2 - R R_{,2} z) = g(R^2 + z^2) = g R_0^2$$

Lösung: $R^2 m_{22} = g R_0^2 (z + C)$

$$D = 4\pi R_0^2$$

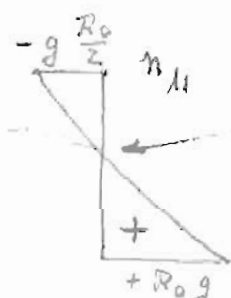
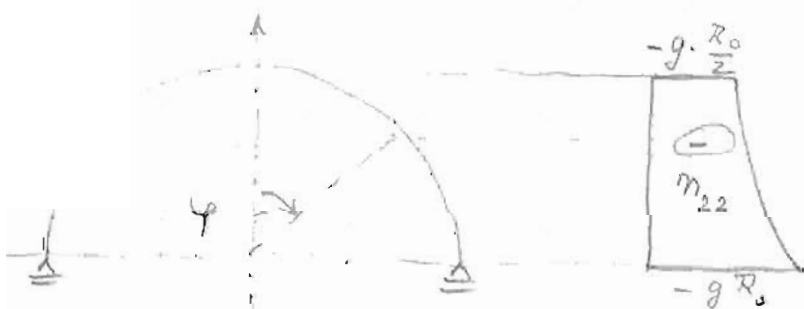
aus $E=0$: $R = R_0$

$$m_{22} = g \cdot C$$

$$= -\frac{2\pi R_0^2 g}{3\pi R_0} \left(\frac{\text{Gewicht}}{\text{Umfang}} \right)$$

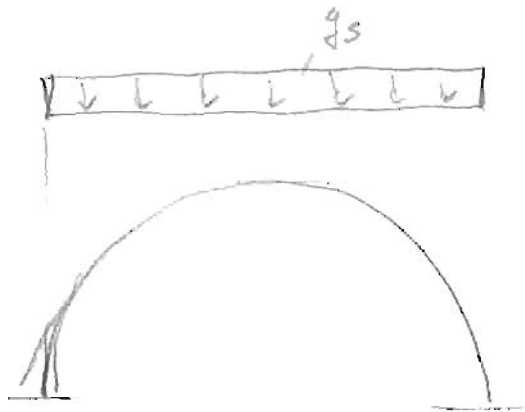
$$C = -R_0$$

$$\left| \begin{array}{l} m_{22} = -g \frac{R_0^2}{R^2} (R_0 - z) = -g \frac{R_0^2}{R_0 + z} \\ m_{11} = -m_{22} + g z \end{array} \right|$$

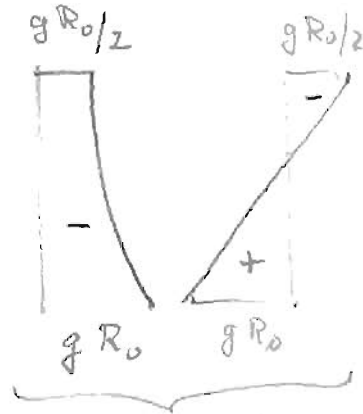


Bruchfuge $\varphi = 51,8^\circ$

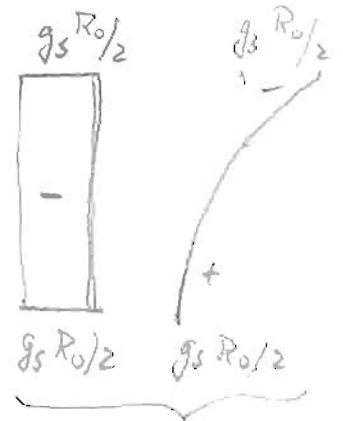
Risse bei gewöhnlichen Kuppeln



Halbkreis



Linksfall
Eingewand



Linksfall
Schnur

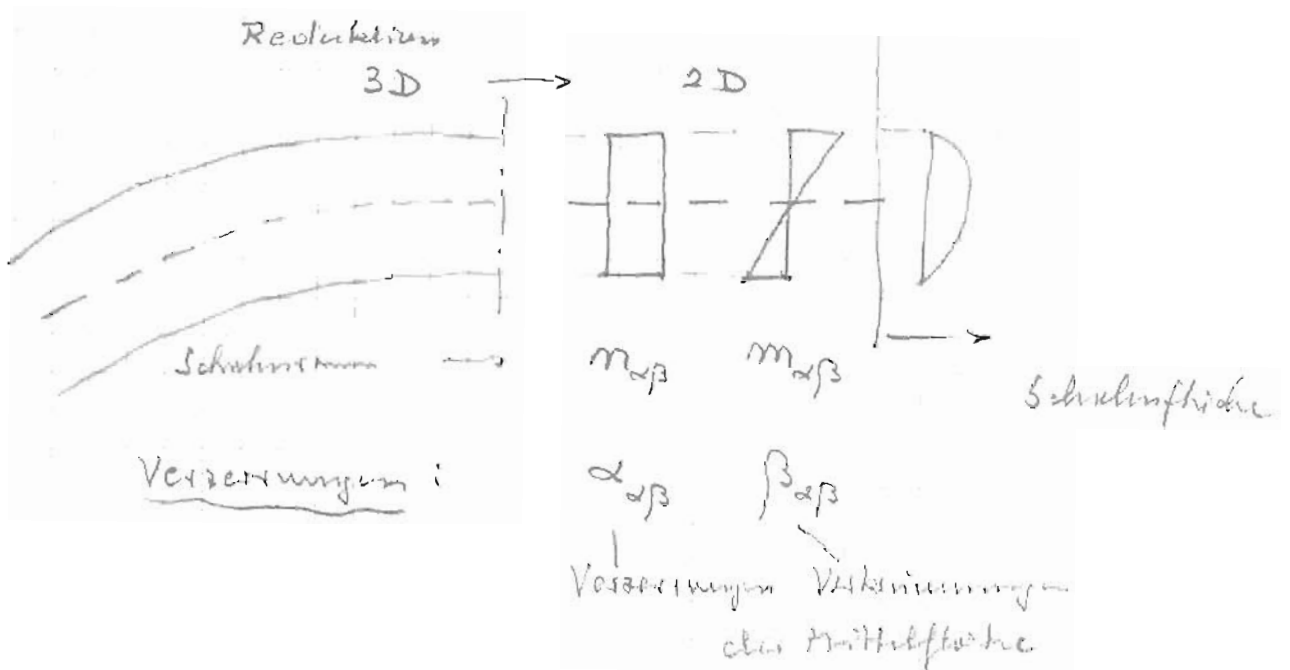
$$M_{11} = -M_{22} - qz \quad \left(-M_{11} - M_{22} \frac{AB}{R_2} + AB \bar{p}_3 = 0 \right)$$

5. Kinematische Beziehungen (Versetzung - Verdrehung)

5.1 Struktur der Grundgleichungen

\bar{p}	$\underline{\sigma}$	$\underline{\epsilon}$	\underline{u}
Lasten	Schnittkräfte	Verformungen	Verdrillungen
$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}$
Gleichgewicht	Stoffgesetz	Kinematisch	
$\underline{D} \underline{\sigma} + \bar{p} = 0$	$\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\epsilon}$	$\underline{\epsilon} = \underline{D} \underline{u}$	

Hier für Membrantheorie
 „statisch kritisch“



5.3 Verzerrungs- Verschiebungs- Beziehungen im Skalarraum

Beziehungen eines Volumenelements im Skalarraum:

unverformt

verformt

$$d\bar{s}_1 = \bar{A} d\theta^1 = \sqrt{\bar{\Gamma}_{11} \cdot \bar{\Gamma}_{11}} d\theta^1$$

$$d\bar{s}_1 = \sqrt{\bar{R}_{11} \cdot \bar{R}_{11}} d\theta^1 = \bar{a} d\theta^1$$

$$d\bar{s}_2 = \bar{B} d\theta^2 = \dots$$

$$d\bar{s}_2 = \dots$$

$$d\bar{s}_3 = 1 d\theta^3 = \dots$$

$$d\bar{s}_3 = \dots$$

$$d\bar{s}_i = \sqrt{\bar{\Gamma}_{ii} \cdot \bar{\Gamma}_{ii}} d\theta^i$$

$$d\bar{s}_i = \sqrt{\bar{R}_{ii} \cdot \bar{R}_{ii}} d\theta^i$$

$$\bar{R}_{ii} = \bar{\Gamma}_{ii} + \bar{u}_{,i}^2$$

vgl. Mindesche

$$\bar{R}_{11} \cdot \bar{R}_{11} = \bar{A}^2 \left[(1 + \epsilon_{11}^2)^2 + \epsilon_{12}^2 + \psi_{11}^2 \right]$$

$$\bar{R}_{12} \cdot \bar{R}_{12} = \bar{B}^2 \left[(1 + \epsilon_{22}^2)^2 + \epsilon_{21}^2 + \psi_{12}^2 \right]$$

$$\bar{R}_{13} \cdot \bar{R}_{13} = (\bar{u}_{,13}^1)^2 + (\bar{u}_{,13}^2)^2 + (1 + \bar{u}_{,13}^3)^2$$

Lineare Theorie

$$\rightarrow \bar{\epsilon}_{11}, \bar{\epsilon}_{22}, \bar{\epsilon}_{33}$$

$$\quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel$$

$$\quad a^1 \quad b^1 \quad \bar{u}_{,13}^1$$

vgl. Mindesche

analog

$$\bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2 = \bar{\gamma}_{12}$$

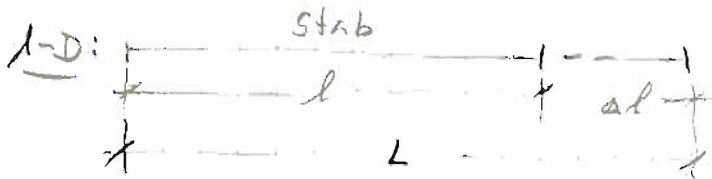
$$\bar{T}_1 \cdot \bar{T}_3 = \bar{\gamma}_{13}$$

$$\bar{T}_2 \cdot \bar{T}_3 = \bar{\gamma}_{23}$$

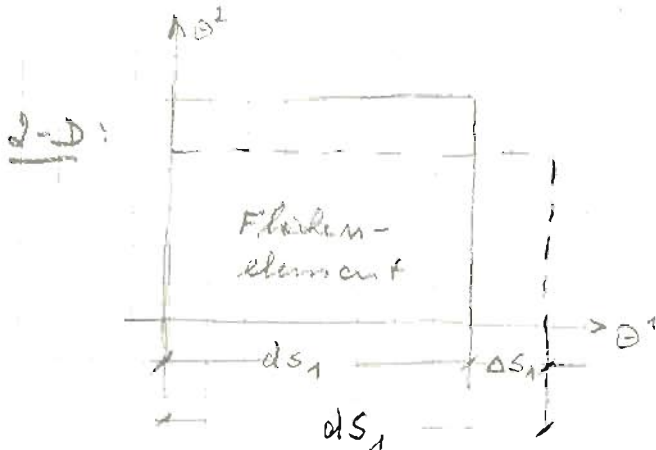
siehe auch $\bar{R}_{1i} \cdot \bar{R}_{1k}$

Definitionen der Verzerrungen

Dehnungen:

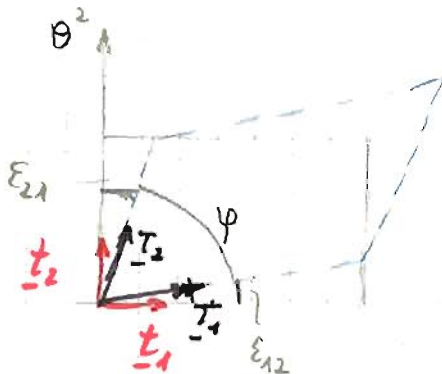


$$\varepsilon = \frac{L - l}{l} = \frac{\Delta l}{l}$$



$$\varepsilon_{ii} = \frac{ds_i - ds_i}{ds_i}$$

Gleitungen (Schubverzerrungen)



Ingenieurgleichung:

$$\gamma_{ik} = \varepsilon_{i\alpha} + \varepsilon_{\alpha i}$$

$i \neq k$

$= \theta^1$

$$\cos \varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \delta_{ik} \right) = \sin \delta_{ik} \approx \delta_{ik}$$

Skalarprodukt:

$$\underline{T}_1 \cdot \underline{T}_2 = |\underline{T}_1| \cdot |\underline{T}_2| \cos \varphi$$

$$\rightarrow \gamma_{ik} \approx \cos \varphi = \underline{T}_1 \cdot \underline{T}_2 \quad i \neq k \quad | \quad (T_i) \text{ normiert}$$

5. Kinematische Beziehungen der Schalentheorie

Die kinematischen Beziehungen stellen in allgemeiner Form den Zusammenhang zwischen den Verzerrungen ε und den Verschiebungen u her. Sie werden zunächst für den Schalenraum entwickelt und anschließend durch die Verschiebungen der Schalenmittelfläche (Smf) ausgedrückt.

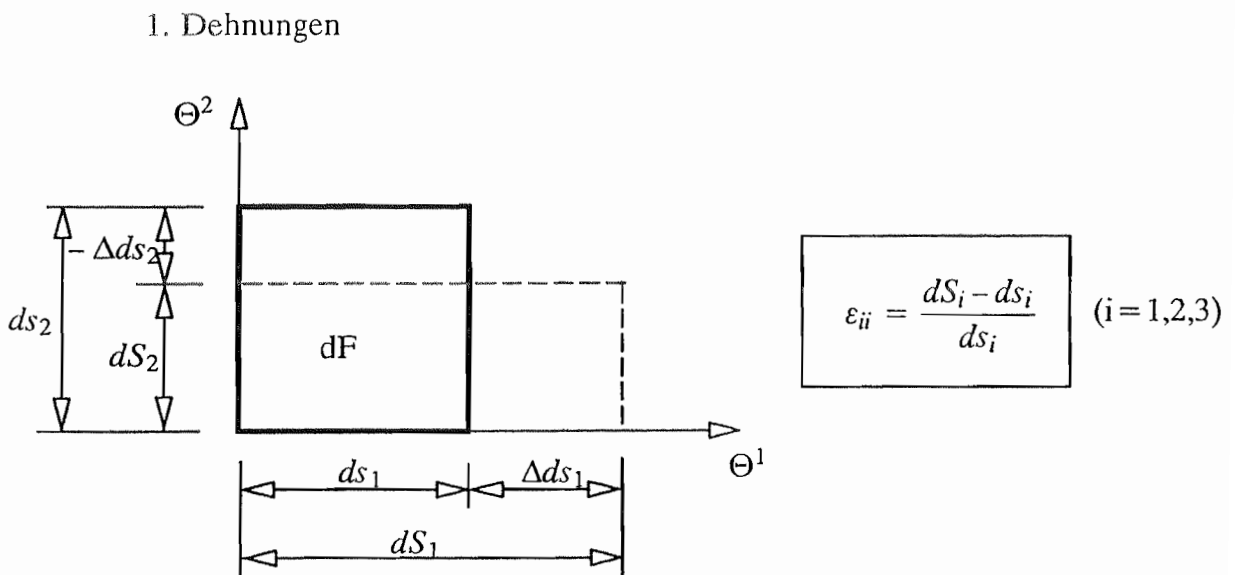
Dabei wird eine lineare Theorie zugrunde gelegt. Das bedeutet, daß die Produkte aus Verschiebungen und ihren Ableitungen vernachlässigt werden.

5.1 Struktur der Grundgleichungen (Tafelanschrieb)

5.2 Verschiebungsgrößen (Tafelanschrieb)

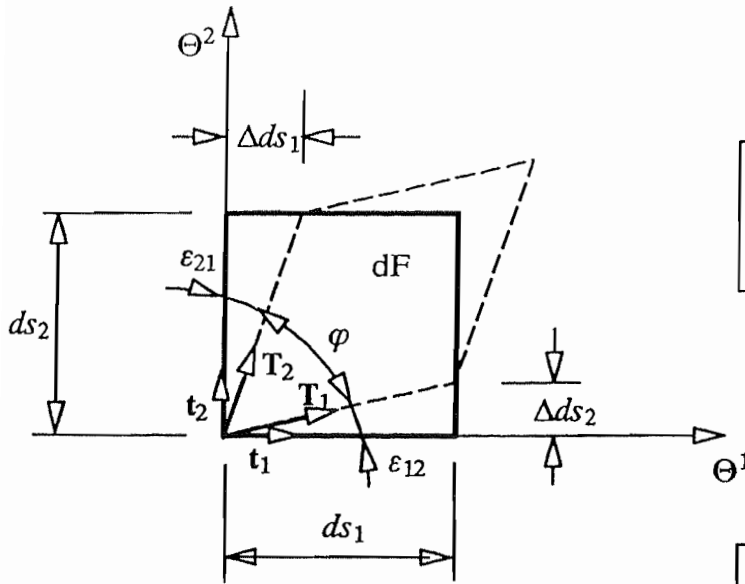
5.3 Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen im Schalenraum

5.3.1 Anmerkungen zu den Verzerrungsgrößen



Die Dehnungen beschreiben die bezogene Abstandsänderung infinitesimal benachbarter Punkte des Schalenkontinuums.

2. Gleitungen / Schubverzerrungen



$$\gamma_{ik} = \epsilon_{ik} + \epsilon_{ki} \quad (i,k = 1,2,3)$$

$$\gamma_{ik} \cong \cos \varphi = T_i * T_k \quad i \neq k$$

wegen:

$$\cos \varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) = \sin \gamma_{12} \approx \gamma_{12}$$

Für kleine Winkel gilt :

$$\tan \epsilon_{ik} \cong \sin \epsilon_{ik} \cong \epsilon_{ik}$$

Die Gleitungen beschreiben eine Winkeländerung.

5.3.2 Herleitung der kinematischen Beziehungen im Schalenraum

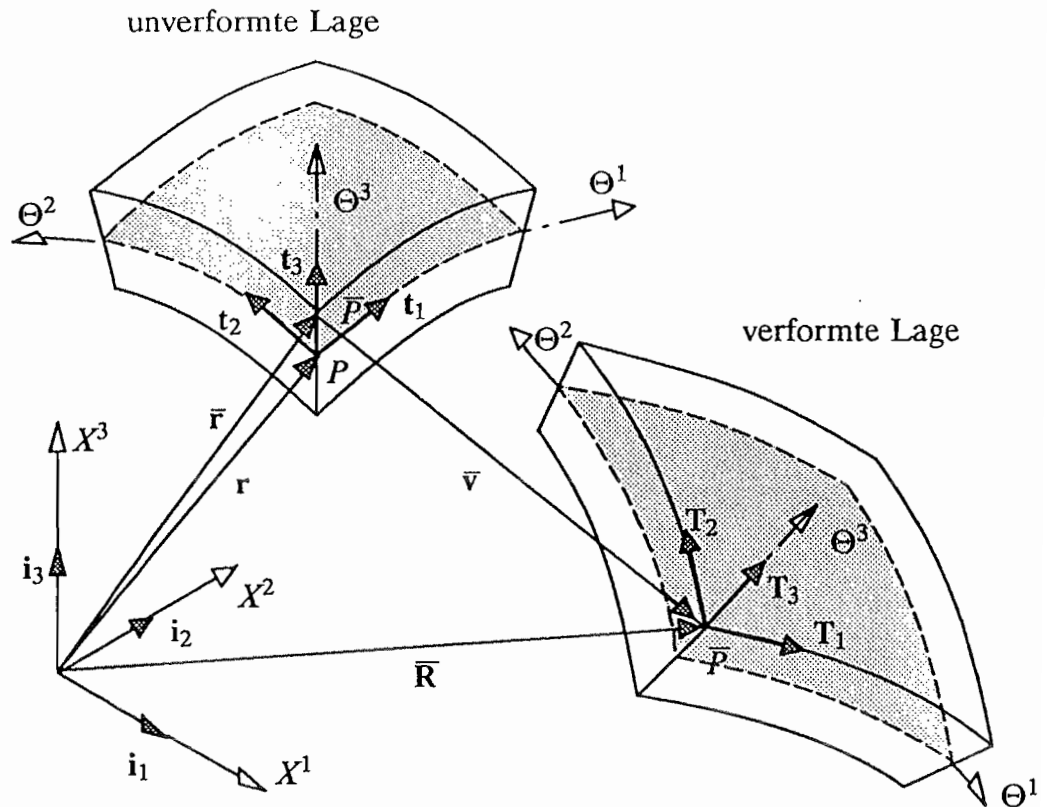


Abb.1

Der Ortsvektor eines Punktes P der unverformten Schalenmittelfläche (Smf) lässt sich wie folgt darstellen :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\Theta^\alpha) \quad (\alpha = 1, 2)$$

Mit einem Querstrich bezeichnet man den Ortsvektor eines Punktes \bar{P} der unverformten Schalenfläche im Abstand Θ^3 von der Schalenmittelfläche (Smf) :

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(\Theta^\alpha) = \mathbf{r} + \Theta^3 \mathbf{t}_3$$

Mit dem Großbuchstaben $\bar{\mathbf{R}}$ wird der Ortsvektor eines Punktes \bar{P} des verformten Schalenkontinuums bezeichnet :

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}(\Theta^\alpha) = \bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{v}} = (\mathbf{r} + \Theta^3 \mathbf{t}_3) + \bar{\mathbf{v}}$$

Für den Verschiebungsvektor $\bar{\mathbf{v}}$ der den Punkt \bar{P} mit seiner verschobenen Position verbindet gilt :

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}^1 \mathbf{t}_1 + \bar{v}^2 \mathbf{t}_2 + \bar{v}^3 \mathbf{t}_3$$

Zur Beschreibung der Bogenlängen $d\bar{s}_i$ und $d\bar{S}_i$ im Schalenraum wird die Ableitungen des Ortsvektors $\bar{\mathbf{r}}$ benötigt.

Es gilt :

$$d\bar{s}_i = \sqrt{\bar{\mathbf{r}}_{,i} \bar{\mathbf{r}}_{,i}} d\Theta^i$$

$$d\bar{S}_i = \sqrt{\bar{\mathbf{R}}_{,i} \bar{\mathbf{R}}_{,i}} d\Theta^i$$

Ableitungen des Ortsvektors $\bar{\mathbf{r}}$ der unverformten Schale (vgl. Umdruck 3.3)

$$\bar{\mathbf{r}}_{,1} = A \mathbf{t}_1 + \Theta^3 \frac{A}{R_1} \mathbf{t}_1$$

$$\bar{\mathbf{r}}_{,1} = A \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_1} \right) \mathbf{t}_1 = \bar{A} \mathbf{t}_1$$

Analog gilt für $\bar{\mathbf{r}}_{,2}$ und $\bar{\mathbf{r}}_{,3}$:

$$\bar{\mathbf{r}}_{,2} = B \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_2} \right) \mathbf{t}_2 = \bar{B} \mathbf{t}_2$$

$$\bar{\mathbf{r}}_{,3} = \mathbf{t}_3$$

Ableitungen des Verschiebungsvektors $\bar{\mathbf{v}}$

$$\bar{\mathbf{v}}_{,1} = \bar{\mathbf{v}}^1_{,1} \mathbf{t}_1 + \bar{\mathbf{v}}^1 \left[-\frac{A_{,2}}{B} \mathbf{t}_2 - \frac{A}{R_1} \mathbf{t}_3 \right]$$

$$+ \bar{\mathbf{v}}^2_{,1} \mathbf{t}_2 + \bar{\mathbf{v}}^2 \left[\frac{A_{,2}}{B} \mathbf{t}_1 \right]$$

$$+ \bar{\mathbf{v}}^3_{,1} \mathbf{t}_3 + \bar{\mathbf{v}}^3 \left[\frac{A}{R_1} \mathbf{t}_1 \right]$$

$$\bar{\mathbf{v}}_{,1} = \bar{A} \left[\bar{\mathbf{a}}^1 \mathbf{t}_1 + \bar{\mathbf{a}}^2 \mathbf{t}_2 + \bar{\mathbf{a}}^3 \mathbf{t}_3 \right]$$

Einführung der Abkürzungen $\bar{\mathbf{a}}^i$:

$$\bar{\mathbf{a}}^1 = \frac{1}{\bar{A}} \left[\bar{\mathbf{v}}^1_{,1} + \bar{\mathbf{v}}^2 \frac{A_{,2}}{B} + \bar{\mathbf{v}}^3 \frac{A}{R_1} \right]$$

$$\bar{\mathbf{a}}^2 = \frac{1}{\bar{A}} \left[\bar{\mathbf{v}}^2_{,1} - \bar{\mathbf{v}}^1 \frac{A_{,2}}{B} \right]$$

$$\bar{\mathbf{a}}^3 = \frac{1}{\bar{A}} \left[\bar{\mathbf{v}}^3_{,1} - \bar{\mathbf{v}}^1 \frac{A}{R_1} \right]$$

Daraus ergibt sich mit der Umordnung nach den Tangentenvektoren t_i :

$$\bar{v}_{,1} = \bar{A} [\bar{a}^1 t_1 + \bar{a}^2 t_2 + \bar{a}^3 t_3]$$

Analog gilt für $\bar{v}_{,2}$ und $\bar{v}_{,3}$ mit \bar{b}^i :

$$\bar{b}^1 = \frac{1}{\bar{B}} [\bar{v}^2_{,2} + \bar{v}^1 \frac{B_{,1}}{A} + \bar{v}^3 \frac{B}{R_2}]$$

$$\bar{v}_{,2} = \bar{B} [\bar{b}^1 t_1 + \bar{b}^2 t_2 + \bar{b}^3 t_3] \quad \bar{b}^2 = \frac{1}{\bar{B}} [\bar{v}^1_{,2} - \bar{v}^2 \frac{B_{,1}}{A}]$$

$$\bar{v}_{,3} = \bar{v}^1_{,3} t_1 + \bar{v}^2_{,3} t_2 + \bar{v}^3_{,3} t_3 \quad \bar{b}^3 = \frac{1}{\bar{B}} [\bar{v}^3_{,2} - \bar{v}^2 \frac{B}{R_2}]$$

Ableitungen des Ortsvektors \bar{R} der verformten Schale

$$\bar{R}_{,1} = \bar{A} [(1 + \bar{a}^1) t_1 + \bar{a}^2 t_2 + \bar{a}^3 t_3]$$

$$\bar{R}_{,2} = \bar{B} [(1 + \bar{b}^1) t_1 + \bar{b}^2 t_2 + \bar{b}^3 t_3]$$

$$\bar{R}_{,3} = \bar{v}^1_{,3} t_1 + \bar{v}^2_{,3} t_2 + (1 + \bar{v}^3_{,3}) t_3$$

Dehnungen im Schalenraum

Bogenlängen der unverformten und der verformten Schale :

$$d\bar{s}_1 = \sqrt{\bar{F}_{,1} \bar{F}_{,1}} d\Theta^1 = \bar{A} d\Theta^1$$

$$d\bar{S}_1 = \sqrt{\bar{R}_{,1} \bar{R}_{,1}} d\Theta^1 = \bar{A} (1 + \bar{a}^1) d\Theta^1$$

Dehnungen im Schalenraum :

$$\bar{\epsilon}_{11} = \frac{d\bar{S}_1 - d\bar{s}_1}{d\bar{s}_1} = \frac{\bar{A} (1 + \bar{a}^1) d\Theta^1 - \bar{A} d\Theta^1}{\bar{A} d\Theta^1} = \bar{a}^1$$

$$\bar{\epsilon}_{11} = \bar{a}^1 = \frac{1}{\bar{A}} [\bar{v}^1_{,1} + \bar{v}^2 \frac{A_{,2}}{B} + \bar{v}^3 \frac{A}{R_1}]$$

Analog gilt für $\bar{\epsilon}_{22}$ und $\bar{\epsilon}_{33}$:

$$\bar{\epsilon}_{22} = \frac{1}{\bar{B}} [\bar{v}^2_{,2} + \bar{v}^1 \frac{B_{,1}}{A} + \bar{v}^3 \frac{B}{R_2}] = \bar{b}^1$$

$$\bar{\epsilon}_{33} = \bar{v}^3_{,3}$$

Gleitungen im Schalenraum

$$\bar{T}_i = \frac{\bar{R}_{,i}}{\sqrt{\bar{R}_{,i} \bar{R}_{,i}}}$$

$$\bar{\gamma}_{12} = T_1 \cdot T_2 = \frac{\bar{a}^2}{(1 + \bar{a}^1)} + \frac{\bar{b}^2}{(1 + \bar{b}^1)} + \frac{\bar{a}^3 \bar{b}^3}{(1 + \bar{a}^1)(1 + \bar{b}^1)}$$

$$\bar{a}^1 \cong \bar{b}^1 \cong 0 ; \quad \bar{a}^3 \cong \bar{b}^3 \cong 0$$

$$\bar{\gamma}_{12} \cong \bar{a}^2 + \bar{b}^2$$

Analog gilt für $\bar{\gamma}_{13}$ und $\bar{\gamma}_{23}$:

$$\bar{\gamma}_{13} = \bar{v}^1_{,3} + \bar{a}^3$$

$$\bar{\gamma}_{23} = \bar{v}^2_{,3} + \bar{b}^3$$

5.3.3 Zusammenfassung (Schalenraum)

Beziehungen zwischen den Verzerrungen im Schalenraum und den Verschiebungen im Schalenraum :

1. Dehnungen

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{1}{A} \left[\bar{v}^1_{,1} + \bar{v}^2 \frac{A_{,2}}{B} + \bar{v}^3 \frac{A}{R_1} \right]$$

$$\bar{\varepsilon}_{22} = \frac{1}{B} \left[\bar{v}^2_{,2} + \bar{v}^1 \frac{B_{,1}}{A} + \bar{v}^3 \frac{B}{R_2} \right]$$

$$\bar{\varepsilon}_{33} = \bar{v}^3_{,3}$$

2. Gleitungen / Schubverzerrungen

$$\bar{\gamma}_{12} = \frac{1}{A} \left[\bar{v}^2_{,1} - \bar{v}^1 \frac{A_{,2}}{B} \right] + \frac{1}{B} \left[\bar{v}^1_{,2} - \bar{v}^2 \frac{B_{,1}}{A} \right]$$

$$\bar{\gamma}_{13} = \frac{1}{A} \left[\bar{v}^3_{,1} - \bar{v}^1 \frac{A}{R_1} \right] + \bar{v}^1_{,3}$$

$$\bar{\gamma}_{23} = \frac{1}{B} \left[\bar{v}^3_{,2} - \bar{v}^2 \frac{B}{R_2} \right] + \bar{v}^2_{,3}$$

5.4 Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen bezogen auf die Schalenmittelfläche

Die kinematischen Beziehungen der Schalenmittelfläche (Smf) gehen von der grundlegenden Annahme der Normalenhypothese (Kirchhoff-Love Hypothese) aus. Diese besagt, daß die Normale zur unverformten Schalebene auch im verformten Zustand normal zur Mittelfläche der Schale steht.

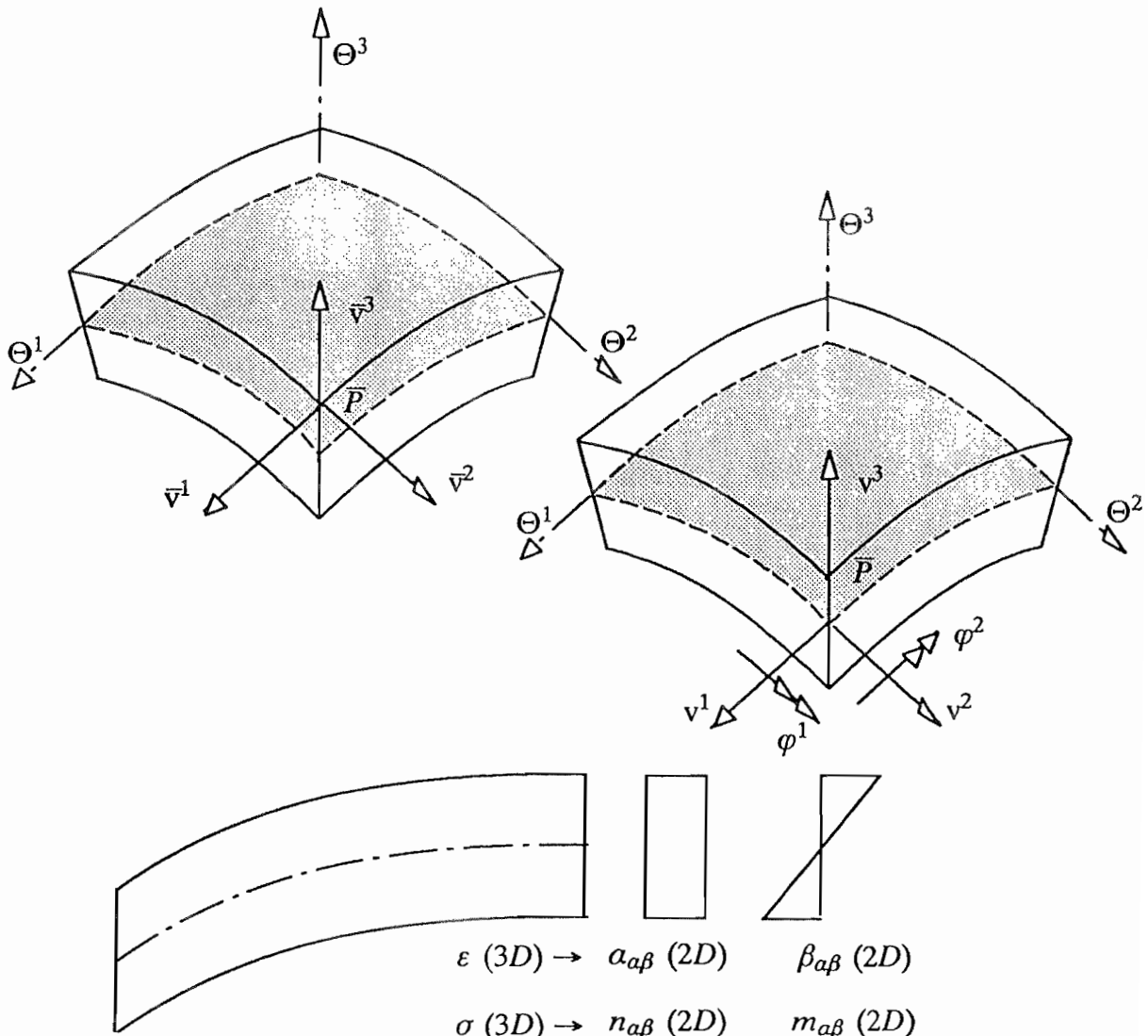
Mit dieser Annahme werden die Gleitungen (Schubverzerrungen) $\bar{\gamma}_{13}$ und $\bar{\gamma}_{23}$ vernachlässigt.

Weiterhin wird angenommen, daß die Schale in Θ^3 Richtung dehnungsfrei ist, das heißt die Schale erfährt keine Änderung der Dicke.

Mit der Kirchhoff-Love Hypothese lassen sich die Verschiebungen des Schalenraums durch die Verschiebungen der Smf ausdrücken.

$$\bar{v}^a = v^a + \Theta^3 \varphi^a \quad (a = 1, 2)$$

$$\bar{v}^3 = v^3$$



Dehnungen und Verkrümmungen in der Schalenmittelfläche (Smf)

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{1}{A} \left[\bar{v}^1_{,1} + \bar{v}^2 \frac{A_{,2}}{B} + \bar{v}^3 \frac{A}{R_1} \right]$$

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{1}{A} \left[v^1_{,1} + v^2 \frac{A_{,2}}{B} + v^3 \frac{A}{R_1} \right] + \frac{\Theta^3}{A} \left[\varphi^1_{,1} + \varphi^2 \frac{A_{,2}}{B} \right]$$

Einführung der Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$ und $\beta_{\alpha\beta}$:

$$a_{11} = \frac{1}{A} \left[v^1_{,1} + v^2 \frac{A_{,2}}{B} + v^3 \frac{A}{R_1} \right] \quad -$$

$$\beta_{11} = \frac{1}{A} \left[\varphi^1_{,1} + \varphi^2 \frac{A_{,2}}{B} \right]$$

$$\bar{\varepsilon}_{11} = a_{11} + \Theta^3 \beta_{11}$$

Analog gilt für $\bar{\varepsilon}_{22}$ und $\bar{\varepsilon}_{33}$:

$$\bar{\varepsilon}_{22} = \frac{1}{B} \left[v^2_{,2} + v^1 \frac{B_{,1}}{A} + v^3 \frac{B}{R_2} \right] + \frac{\Theta^3}{B} \left[\varphi^2_{,2} + \varphi^1 \frac{B_{,1}}{A} \right]$$

$$= a_{22} + \Theta^3 \beta_{22}$$

$$\bar{\varepsilon}_{33} = 0$$

Gleitungen und Verwindungen der Schalenmittelfläche (Smf)

$$\bar{\gamma}_{12} = \frac{1}{B} \left[v^1_{,2} - v^2 \frac{B_{,1}}{A} \right] + \frac{\Theta^3}{B} \left[\varphi^1_{,2} - \varphi^2 \frac{B_{,1}}{A} \right]$$

$$+ \frac{1}{A} \left[v^2_{,1} - v^1 \frac{A_{,2}}{B} \right] + \frac{\Theta^3}{A} \left[\varphi^2_{,1} - \varphi^1 \frac{A_{,2}}{B} \right]$$

$$= a_{12} + \Theta^3 \beta_{12} + a_{21} + \Theta^3 \beta_{21}$$

Analog gilt für $\bar{\gamma}_{13}$ und $\bar{\gamma}_{23}$ gemäß Kirchhoff-Love Hypothese :

$$\bar{\gamma}_{13} = 0$$

$$\bar{\gamma}_{23} = 0$$

5.4.1 Zusammenfassung

Beziehungen zwischen den Verzerrungen im Schalenraum und den Verschiebungen in der Schalenmittelfläche (Smf) :

1. Dehnungen und Verkrümmungen

$$\bar{\epsilon}_{11} = \frac{1}{A} \left[v^{1,1} + v^2 \frac{A_{,2}}{B} + v^3 \frac{A}{R_1} \right] + \frac{\Theta^3}{A} \left[\varphi^{1,1} + \varphi^2 \frac{A_{,2}}{B} \right]$$

$$\bar{\epsilon}_{22} = \frac{1}{B} \left[v^{2,2} + v^1 \frac{B_{,1}}{A} + v^3 \frac{B}{R_2} \right] + \frac{\Theta^3}{B} \left[\varphi^{2,2} + \varphi^1 \frac{B_{,1}}{A} \right]$$

$$\bar{\epsilon}_{33} = 0$$

$$\bar{\epsilon}_{11} = a_{11} + \Theta^3 \beta_{11}$$

$$\bar{\epsilon}_{22} = a_{22} + \Theta^3 \beta_{22}$$

2. Gleitungen / Schubverzerrungen und Verwindungen

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{12} = & \frac{1}{B} \left[v^{1,2} - v^2 \frac{B_{,1}}{A} \right] + \frac{\Theta^3}{B} \left[\varphi^{1,2} - \varphi^2 \frac{B_{,1}}{A} \right] \\ & + \frac{1}{A} \left[v^{2,1} - v^1 \frac{A_{,2}}{B} \right] + \frac{\Theta^3}{A} \left[\varphi^{2,1} - \varphi^1 \frac{A_{,2}}{B} \right] \end{aligned}$$

$$\bar{\gamma}_{12} = a_{12} + \Theta^3 \beta_{12} + a_{21} + \Theta^3 \beta_{21}$$

$$\bar{\gamma}_{13} = 0$$

$$\bar{\gamma}_{23} = 0$$

5.4.2 Anmerkungen zur Schreibweise

$$\alpha_{a\beta} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{12} \end{bmatrix}$$

Dehnungen und Gleitung in der Smf

$$\beta_{a\beta} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{12} \end{bmatrix}$$

Verkrümmungen und Verwindung der Smf

$$\gamma_{a3} = \begin{bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix}$$

Schubverzerrungen senkrecht zur Smf

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha_{a\beta} \\ \beta_{a\beta} \\ \gamma_{a3} \end{bmatrix}$$

Verzerrungen allgemein

6. Werkstoffgesetz

Allgemeine Beziehung des dreidimensionalen Kontinuums (Verallgemeinertes Hooke'sches Gesetz)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & & & \\ \nu & (1-\nu) & \nu & & & \\ \nu & \nu & (1-\nu) & & & \\ & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) & & \\ & & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) & \\ & & & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \\ 2\bar{\varepsilon}_{23} \\ 2\bar{\varepsilon}_{31} \end{bmatrix}$$

$$2\bar{\varepsilon}_{12} = \gamma_{12} = \alpha_{12}$$

Inverse Beziehung

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \\ 2\bar{\varepsilon}_{23} \\ 2\bar{\varepsilon}_{31} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ & & & 2(1+\nu) & & \\ & & & & 2(1+\nu) & \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}$$

Bei orthogonalen Koordinaten treten die Metrikoeffizienten gekrümmter Flächen oder Volumina im Stoffgesetz nicht auf. Für Schalen wird üblicherweise ein ebener Spannungszustand in Flächen parallel zur Mittelebene angenommen:

$$\sigma_{33} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{33} = f(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & & & \\ \nu & 1 & & & \\ & & \frac{1}{2}(1-\nu) & & \\ & & & \frac{1}{2}(1-\nu) & \\ & & & & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \\ 2\bar{\varepsilon}_{23} \\ 2\bar{\varepsilon}_{31} \end{bmatrix}$$

Man erhält ein Werkstoffgesetz für Schalen, wenn man die Gleichungen des ebenen Spannungszustands des Kontinuums in die Schnittkraftdefinition (Spannungsergebnierende) einsetzt:

$$\text{z.B.} \quad n_{11} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{11} \left(1 + \frac{\Theta}{R_2} \right) d\Theta^3 \cong \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E}{(1-\nu^2)} [\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}] d\Theta^3$$

$$\text{Verzerrungen der Smf:} \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \alpha_{\alpha\beta} + \Theta^3 \beta_{\alpha\beta}$$

$$n_{11} = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E}{(1-\nu^2)} [(\alpha_{11} + \Theta^3 \beta_{11}) + \nu (\alpha_{22} + \Theta^3 \beta_{22})] d\Theta^3$$

$$n_{11} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left\{ (\alpha_{11} + \nu \alpha_{22}) \underbrace{\int_{-t/2}^{t/2} d\Theta^3}_{=t} + (\beta_{11} + \nu \beta_{22}) \underbrace{\int_{-t/2}^{t/2} \Theta^3 d\Theta^3}_{=0} \right\}$$

$$n_{11} = \frac{Et}{(1-\nu^2)} (\alpha_{11} + \nu \alpha_{22})$$

$$\text{z.B.} \quad m_{11} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{11} \Theta^3 \left(1 + \frac{\Theta}{R_2} \right) d\Theta^3$$

$$m_{11} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left\{ (\alpha_{11} + \nu \alpha_{22}) \underbrace{\int_{-t/2}^{t/2} \Theta^3 d\Theta^3}_{=0} + (\beta_{11} + \nu \beta_{22}) \underbrace{\int_{-t/2}^{t/2} \Theta^3 \Theta^3 d\Theta^3}_{=t^3/12} \right\}$$

$$m_{11} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} (\beta_{11} + \nu \beta_{22})$$

$$\text{z.B.} \quad n_{12} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{12} \left(1 + \frac{\Theta}{R_2} \right) d\Theta^3$$

$$\text{mit} \quad \bar{\varepsilon}_{12} = \bar{\alpha}_{12} + \Theta^3 \bar{\beta}_{12} \quad \text{bzw.}$$

$$\text{bzw.} \quad \gamma_{12} = \alpha_{12} + \Theta^3 \beta_{12} = (\bar{\alpha}_{12} + \bar{\alpha}_{21}) + \Theta^3 (\bar{\beta}_{12} + \bar{\beta}_{21}) = \bar{\varepsilon}_{12} + \bar{\varepsilon}_{21} = 2\bar{\varepsilon}_{12}$$

$$n_{12} = \frac{E(1-\nu)}{2(1-\nu^2)} \left\{ \alpha_{12} \underbrace{\int_{-t/2}^{t/2} d\Theta^3}_{=t} + \beta_{12} \underbrace{\int_{-t/2}^{t/2} \Theta^3 d\Theta^3}_{=0} \right\}$$

$$\quad \quad \quad = G$$

$$n_{12} = G t \alpha_{12}$$

Zusammenfassung in matrizieller Form:

$$\begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{22} \\ n_{12} \\ m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \\ \\ \\ B \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \\ \\ \\ Gt \begin{bmatrix} 5/6 & 0 \\ 0 & 5/6 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \\ \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix}$$

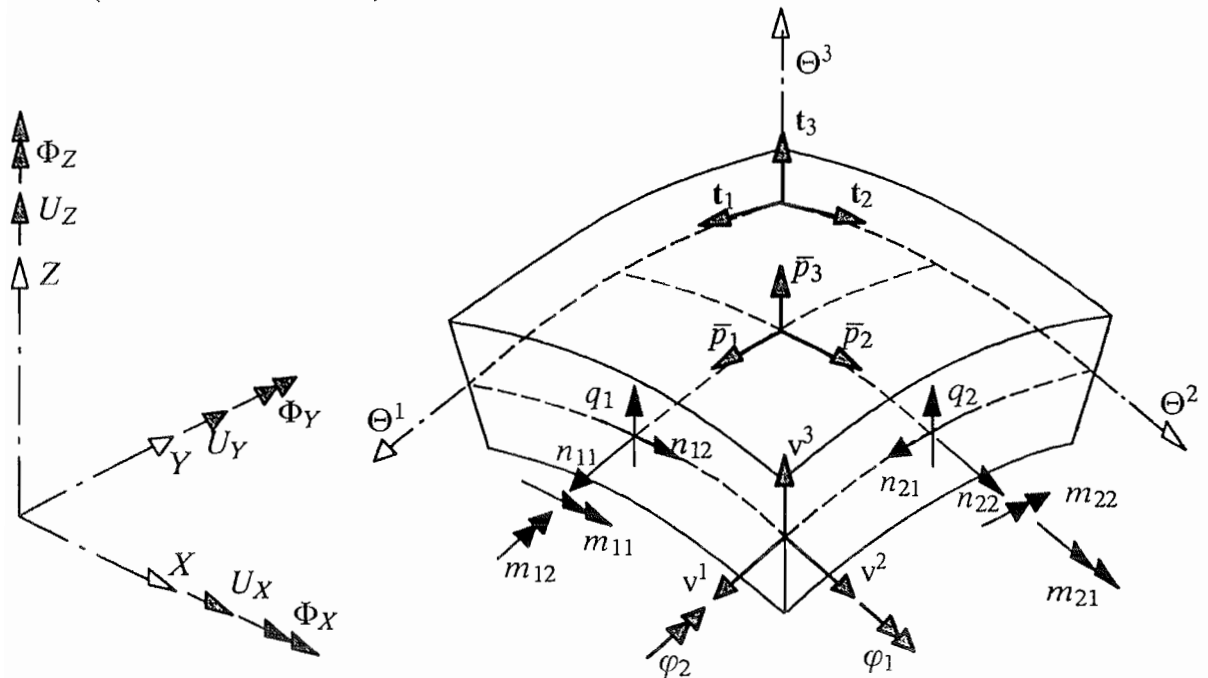
mit $D = \frac{Et}{(1-\nu^2)}$; $B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

- Aufgrund der Vernachlässigung der Terme $\left(1 + \frac{\Theta^3}{R_a}\right)$ sind Längskraft- und Biegeanteil (wie in der Scheiben- und Plattentheorie) entkoppelt.
- Der Faktor 5/6 im Stoffgesetz für die Querschubverzerrung $\gamma_{\alpha 3}$ ist der, auch in der Stab- und Plattentheorie übliche, Korrekturfaktor für Rechteckquerschnitte, zur Berücksichtigung der quadratischen Spannungsverteilung über die Querschnittsdicke.

7. BIEGETHEORIE DER SCHALEN

7.1 Allgemeines (Tafelansrieb)

7.2 Definition der positiven Schnittgrößen (z. T. Tafelansrieb)



7.3 Momentengleichgewicht

(z. T. Tafelanschrieb)

$$\begin{aligned} \sum M = 0 = & (-B m_{12} \mathbf{t}_1 + B m_{11} \mathbf{t}_2)_{,1} \cdot d\Theta^2 d\Theta^1 \\ & + (-A m_{22} \mathbf{t}_1 + A m_{21} \mathbf{t}_2)_{,2} \cdot d\Theta^1 d\Theta^2 \\ & + A d\Theta^1 \mathbf{t}_1 \times (B n_{11} \mathbf{t}_1 + B n_{12} \mathbf{t}_2 + B q_1 \mathbf{t}_3) d\Theta^2 \\ & + B d\Theta^2 \mathbf{t}_2 \times (A n_{21} \mathbf{t}_1 + A n_{22} \mathbf{t}_2 + A q_2 \mathbf{t}_3) d\Theta^1 \end{aligned}$$

Differentiale dritter Ordnung können gegenüber solchen zweiter Ordnung vernachlässigt werden. D. h. daß die Flächenbelastung und die Normalkraftzuwächse keinen Beitrag zum Momentenzuwachs liefern.

Ausschreiben der Kreuzprodukte:

$$\begin{aligned} & A \mathbf{t}_1 \times (B n_{11} \mathbf{t}_1 + B n_{12} \mathbf{t}_2 + B q_1 \mathbf{t}_3) \\ & = AB [n_{11} (\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_1) + n_{12} (\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2) + q_1 (\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_3)] \\ & = AB [n_{12} \mathbf{t}_3 - q_1 \mathbf{t}_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & B \mathbf{t}_2 \times (A n_{21} \mathbf{t}_1 + A n_{22} \mathbf{t}_2 + A q_2 \mathbf{t}_3) \\ & = AB [n_{21} (\mathbf{t}_2 \times \mathbf{t}_1) + n_{22} (\mathbf{t}_2 \times \mathbf{t}_2) + q_2 (\mathbf{t}_2 \times \mathbf{t}_3)] \\ & = AB [-n_{21} \mathbf{t}_3 + q_2 \mathbf{t}_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M = 0 = & (-B m_{12} \mathbf{t}_1 + B m_{11} \mathbf{t}_2)_{,1} \cdot d\Theta^1 d\Theta^2 \\ & + (-A m_{22} \mathbf{t}_1 + A m_{21} \mathbf{t}_2)_{,2} \cdot d\Theta^1 d\Theta^2 \\ & + (AB n_{12} \mathbf{t}_3 - AB q_1 \mathbf{t}_2) \cdot d\Theta^1 d\Theta^2 \\ & - (AB n_{21} \mathbf{t}_3 - AB q_2 \mathbf{t}_1) \cdot d\Theta^1 d\Theta^2 \\ = & -(B m_{12})_{,1} \mathbf{t}_1 - (B m_{12}) \mathbf{t}_{1,1} + (B m_{11})_{,1} \mathbf{t}_2 + (B m_{11}) \mathbf{t}_{2,1} \\ & - (A m_{22})_{,2} \mathbf{t}_1 - (A m_{22}) \mathbf{t}_{1,2} + (A m_{21})_{,2} \mathbf{t}_2 + (A m_{21}) \mathbf{t}_{2,2} \\ & + AB n_{12} \mathbf{t}_3 - AB q_1 \mathbf{t}_2 \\ & - AB n_{21} \mathbf{t}_3 + AB q_2 \mathbf{t}_1 \end{aligned}$$

Einsetzen der Ableitungsgleichungen für die Tangentenvektoren (vergleiche Abschnitt 3.3) und Zusammenfassen der Richtungen ergibt die endgültige Momentengleichgewichtsbedingungen der technischen Schalenbiegetheorie:

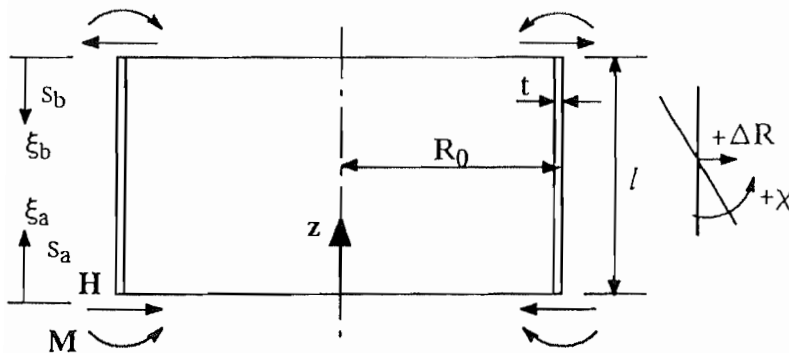
$$(B m_{12})_{,1} + (A m_{22})_{,2} + (A m_{21}) \frac{B_{,1}}{A} - (B m_{11}) \frac{A_{,2}}{B} - AB q_2 = 0$$

$$(B m_{11})_{,1} + (A m_{21})_{,2} + (B m_{12}) \frac{A_{,2}}{B} - (A m_{22}) \frac{B_{,1}}{A} - AB q_1 = 0$$

$$(B m_{12}) \frac{A}{R_1} - (A m_{21}) \frac{B}{R_2} + (B n_{12}) A - (A n_{21}) B = 0$$

7.5 Biegetheorie rotationssymmetrischer Behälter

7.5.1 Lange Kreiszylinderschale



$$\frac{l}{L} \geq 4$$

$$R_1 = R_0$$

$$R_2 \Rightarrow \infty$$

$$L = \frac{\sqrt{R_1 t}}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}$$

$$\xi_i = \frac{s_i}{L} \quad (i = a, b)$$

	Randkraft H	Randmoment M
$n_{11}(\xi)$	$\frac{2HR}{L} D_\xi$ (-) / (+)	$\frac{2MR}{L^2} C_\xi$ (-) / (+)
$n_{22}(\xi)$	0	0
$q_2(\xi)$	$H C_\xi$ (+) / (-)	$\frac{2M}{L} B_\xi$ (-) / (+)
$m_{11}(\xi)$	$\nu HL B_\xi$ (+) / (-)	$\nu M A_\xi$ (+) / (-)
$m_{22}(\xi)$	$HL B_\xi$ (+) / (-)	$M A_\xi$ (+) / (-)
$\Delta R(\xi)$	$\frac{HL^3}{2B} D_\xi$ (-) / (+)	$\frac{ML^2}{2B} C_\xi$ (-) / (+)
$\chi(\xi)$	$\frac{HL^2}{2B} A_\xi$ (-) / (+)	$\frac{ML}{B} D_\xi$ (-) / (+)

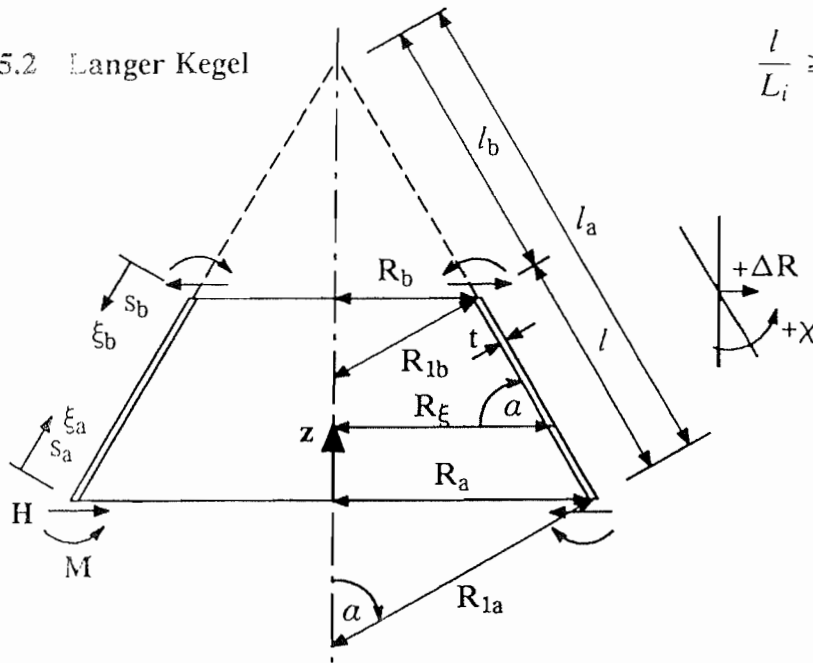
Randverformungen der Einheitsspannungszustände : $B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

$$H = X_i = 1, M = 0 \quad f_{ii} = \frac{L^3}{2B} \quad f_{ki} = \frac{L^2}{2B}$$

$$H = 0, M = X_k = 1 \quad f_{kk} = \frac{L}{B} \quad f_{ik} = \frac{L^2}{2B}$$

Die Vorzeichen von $f_{ik} = f_{ki}$ sind im Sinne des Kraftgrößenverfahrens festzulegen. Die Vorzeichen sind für Belastungen am Schalenrand $\xi_a = 0$ angegeben, für Belastungen am Schalenrand $\xi_b = 0$ sind die in Klammern angegebenen Vorzeichen zu verwenden, außerdem ist ξ_a durch ξ_b zu substituieren.

7.5.2 Langer Kegel



$$\frac{l}{L_i} \geq 4 \quad a \geq 30^\circ = \text{const.}$$

$$R_1 = R_\xi \frac{1}{\sin a}$$

$$R_2 \Rightarrow \infty$$

$$L_i = \frac{\sqrt{l_i t \cot a}}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}$$

$$L_i = \frac{\sqrt{R_{1i} t}}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}$$

$$\xi_i = \frac{s_i}{L_i} \quad (i = a, b)$$

	Randkraft H	Randmoment M
$n_{11}(\xi)$	$\begin{matrix} - \\ (+) \end{matrix} 2H \cos a \left(\frac{l_i}{L_i} \begin{matrix} - \\ (+) \end{matrix} \xi_i \right) D_\xi$	$\begin{matrix} - \\ (-) \end{matrix} \frac{2M \cot a}{L_i} \left(\frac{l_i}{L_i} \begin{matrix} - \\ (+) \end{matrix} \xi_i \right) C_\xi$
$n_{22}(\xi)$	$\begin{matrix} - \\ (-) \end{matrix} H \cos a C_\xi$	$\begin{matrix} + \\ (-) \end{matrix} \frac{2M \cot a}{L_i} B_\xi$
$q_2(\xi)$	$\begin{matrix} + \\ (+) \end{matrix} H \sin a C_\xi$	$\begin{matrix} - \\ (+) \end{matrix} \frac{2M}{L_i} B_\xi$
$m_{11}(\xi)$	$= \nu m_{22} + \dots$	$= \nu m_{22} + \dots$
$m_{22}(\xi)$	$\begin{matrix} + \\ (-) \end{matrix} H L_i \sin a B_\xi$	$\begin{matrix} + \\ (+) \end{matrix} M A_\xi$
$\Delta R(\xi)$	$\begin{matrix} - \\ (+) \end{matrix} \frac{H L_i^5 \sin^2 a}{2B l_i^2} \left(\frac{l_i}{L_i} \begin{matrix} - \\ (+) \end{matrix} \xi_i \right)^2 D_\xi$	$\begin{matrix} - \\ (-) \end{matrix} \frac{M L_i^4 \sin a}{2B l_i^2} \left(\frac{l_i}{L_i} \begin{matrix} - \\ (+) \end{matrix} \xi_i \right)^2 C_\xi$
$\chi(\xi)$	$\begin{matrix} - \\ (-) \end{matrix} \frac{H L_i^2}{2B} \sin a A_\xi$	$\begin{matrix} - \\ (+) \end{matrix} \frac{M L_i}{B} D_\xi$

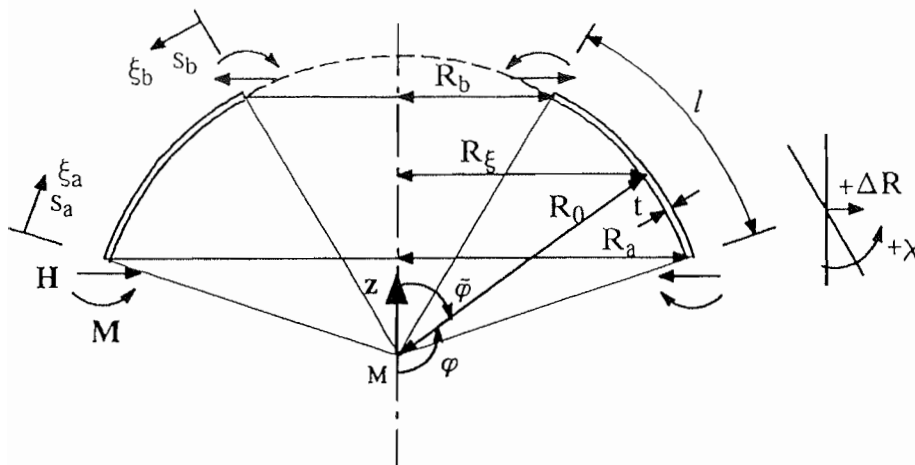
Randverformungen der Einheitsspannungszustände : $B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

$$H = X_i = 1, M = 0 \quad f_{ii} = \frac{L_i^3}{2B} \sin^2 a \quad f_{ki} = \frac{L_i^2}{2B} \sin a$$

$$H = 0, M = X_k = 1 \quad f_{kk} = \frac{L_i}{B} \quad f_{ik} = \frac{L_i^2}{2B} \sin a$$

Die Vorzeichen von $f_{ik} = f_{ki}$ sind im Sinne des Kraftgrößenverfahrens festzulegen. Die Vorzeichen sind für Belastungen am Schalenrand $\xi_a = 0$ angegeben, für Belastungen am Schalenrand $\xi_b = 0$ sind die in Klammern angegebenen Vorzeichen zu verwenden, außerdem ist ξ_a durch ξ_b zu substituieren.

7.5.3 Kugel



$$\frac{l}{L} \geq 4 \quad \bar{\varphi}_i \geq 30^\circ$$

$$R_1 = R_0$$

$$R_2 = R_0$$

$$R_\xi = R_0 \sin \bar{\varphi}_\xi$$

$$L = \frac{\sqrt{R_1 t}}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}$$

$$\xi_i = \frac{s_i}{L} \quad (i = a, b)$$

	Randkraft H	Randmoment M
$n_{11}(\xi)$	$\frac{2HR_0}{L} \sin \bar{\varphi}_i D_\xi$	$\frac{2MR_0}{L^2} C_\xi$
$n_{22}(\xi)$	$H \sin \bar{\varphi}_i \cot \bar{\varphi}_\xi C_\xi$	$\frac{2M \cot \bar{\varphi}_\xi}{L} B_\xi$
$q_2(\xi)$	$H \sin \bar{\varphi}_i C_\xi$	$\frac{2M}{L} B_\xi$
$m_{11}(\xi)$	$= \nu m_{22} + \dots$	$= \nu m_{22} + \dots$
$m_{22}(\xi)$	$HL \sin \bar{\varphi}_i B_\xi$	$M A_\xi$
$\Delta R(\xi)$	$\frac{H L^3 \sin \bar{\varphi}_i \sin \bar{\varphi}_\xi}{2B} D_\xi$	$\frac{M L^2}{2B} \sin \bar{\varphi}_\xi C_\xi$
$\chi(\xi)$	$\frac{H L^2}{2B} \sin \bar{\varphi}_i A_\xi$	$\frac{ML}{B} D_\xi$

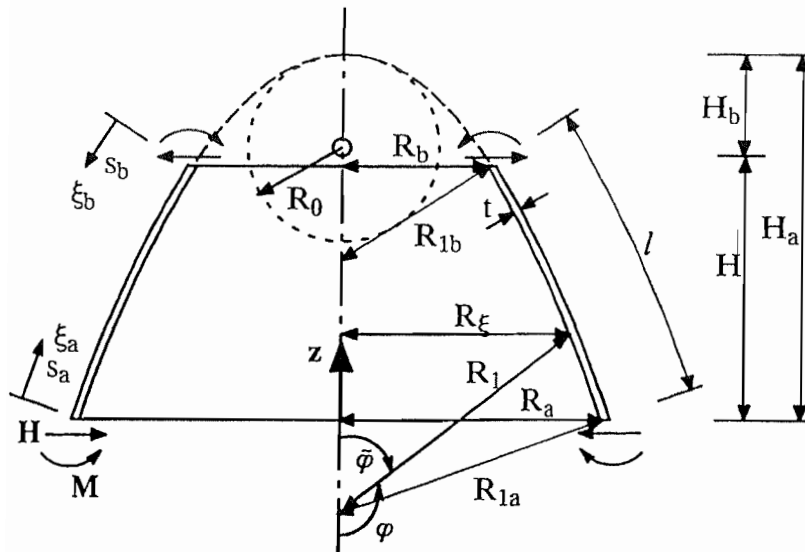
Randverformungen der Einheitsspannungszustände : $B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

$$H = X_i = 1, M = 0 \quad f_{ii} = \frac{L^3}{2B} \sin^2 \bar{\varphi}_i \quad f_{ki} = \frac{L^2}{2B} \sin \bar{\varphi}_i$$

$$H = 0, M = X_k = 1 \quad f_{kk} = \frac{L}{B} \quad f_{ik} = \frac{L^2}{2B} \sin \bar{\varphi}_i$$

Die Vorzeichen von $f_{ik} = f_{ki}$ sind im Sinne des Kraftgrößenverfahrens festzulegen. Die Vorzeichen sind für Belastungen am Schalenrand $\xi_a = 0$ angegeben, für Belastungen am Schalenrand $\xi_b = 0$ sind die in Klammern angegebenen Vorzeichen zu verwenden, außerdem ist ξ_a durch ξ_b zu substituieren.

7.5.4 Paraboloid



$$\frac{l}{L_i} \geq 4 \quad \bar{\varphi}_i \geq 30^\circ$$

$$R_1 = \frac{R_0}{\cos \bar{\varphi}_\xi}$$

$$R_2 = \frac{R_0}{\cos^3 \bar{\varphi}_\xi}$$

$$R_\xi = R_0 \tan \bar{\varphi}_\xi = \sqrt{2R_0 \cdot (H_a - z)}$$

$R_0 =$ Halbparameter der Parabel

$$L_i = \frac{\sqrt{R_1 t}}{4\sqrt{3} (1 - \nu^2)}$$

$$\xi_i = \frac{s_i}{L} \quad (i = a, b)$$

	Randkraft H	Randmoment M
$n_{11}(\xi)$	$\frac{2HR_0 \sin \bar{\varphi}_i}{L_i \cos \bar{\varphi}_\xi} D_\xi$ (+)	$\frac{2MR_0}{L_i^2 \cos \bar{\varphi}_\xi} C_\xi$ (-)
$n_{22}(\xi)$	$H \sin \bar{\varphi}_i \cot \bar{\varphi}_\xi C_\xi$ (-)	$\frac{2M \cot \bar{\varphi}_\xi}{L_i} B_\xi$ (+)
$q_2(\xi)$	$H \sin \bar{\varphi}_i C_\xi$ (+)	$\frac{2M}{L_i} B_\xi$ (+)
$m_{11}(\xi)$	$= \nu m_{22} + \dots$	$= \nu m_{22} + \dots$
$m_{22}(\xi)$	$HL_i \sin \bar{\varphi}_i B_\xi$ (-)	$M A_\xi$ (+)
$\Delta R(\xi)$	$\frac{H L_i^3 \cos^2 \bar{\varphi}_i}{2B \cos^2 \bar{\varphi}_\xi} \sin \bar{\varphi}_i \sin \bar{\varphi}_\xi D_\xi$ (+)	$\frac{M L_i^2 \sin \bar{\varphi}_\xi}{2B \cos^2 \bar{\varphi}_\xi} \cos^2 \bar{\varphi}_i C_\xi$ (-)
$\chi(\xi)$	$\frac{H L_i^2}{2B} \sin \bar{\varphi}_i A_\xi$ (-)	$\frac{ML_i}{B} D_\xi$ (+)

Randverformungen der Einheitsspannungszustände : $B = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$

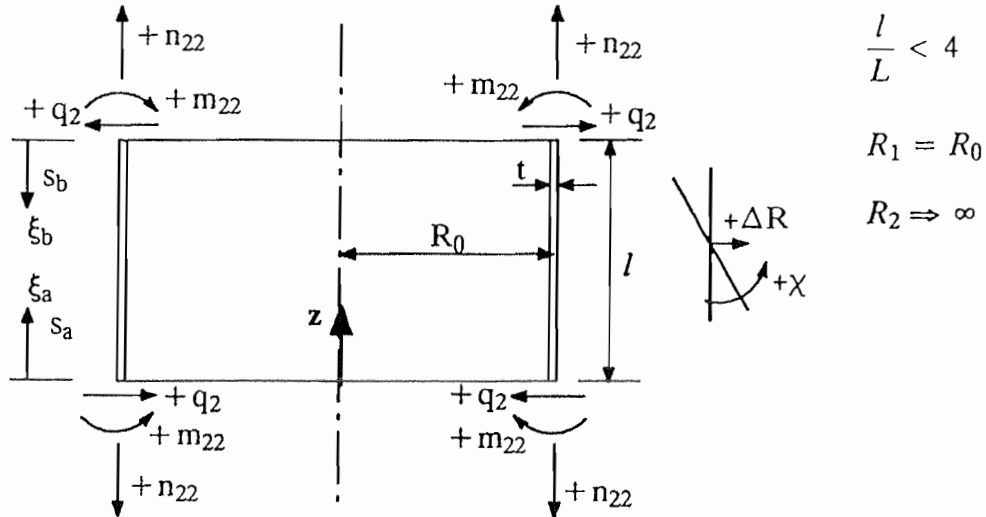
$$H = X_i = 1, M = 0 \quad f_{ii} = \frac{L_i^3}{2B} \sin^2 \bar{\varphi}_i \quad f_{ki} = \frac{L_i^2}{2B} \sin \bar{\varphi}_i$$

$$H = 0, M = X_k = 1 \quad f_{kk} = \frac{L_i}{B} \quad f_{ik} = \frac{L_i^2}{2B} \sin \bar{\varphi}_i$$

Die Vorzeichen von $f_{ik} = f_{ki}$ sind im Sinne des Kraftgrößenverfahrens festzulegen. Die Vorzeichen sind für Belastungen am Schalenrand $\xi_a = 0$ angegeben, für Belastungen am Schalenrand $\xi_b = 0$ sind die in Klammern angegebenen Vorzeichen zu verwenden, außerdem ist ξ_a durch ξ_b zu substituieren.

7.5.5 Der kurze Kreiszyylinder ($l/L < 4$) unter antimetrischen und symmetrischen Randlasten (Biegetheorie)

Die Randstörungen beeinflussen sich.



L = charakteristische Länge

$$L = \frac{\sqrt{R t}}{\sqrt[4]{3 (1 - \nu^2)}}$$

$$\lambda = \frac{l}{L} \quad ; \quad \xi_a = \frac{s_a}{L} \quad ; \quad \xi_b = \frac{s_b}{L} \quad ; \quad \xi_b = \lambda - \xi_a$$

für ($i = a, b$)

$$A_{\xi_i} = e^{-\xi_i} (\cos \xi_i + \sin \xi_i)$$

$$B_{\xi_i} = e^{-\xi_i} \sin \xi_i$$

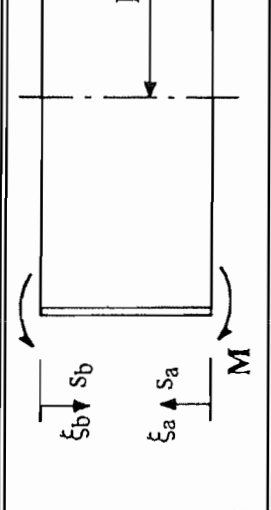
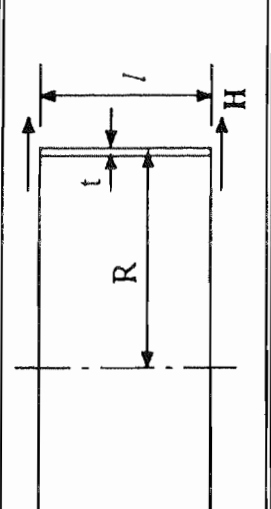
siehe Diagramme für den geraden
Träger auf elastischer Bettung

$$C_{\xi_i} = e^{-\xi_i} (\cos \xi_i - \sin \xi_i)$$

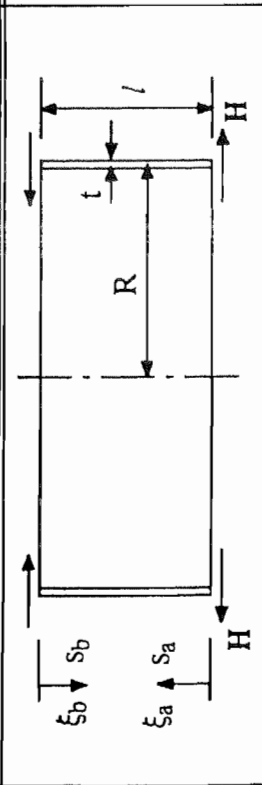
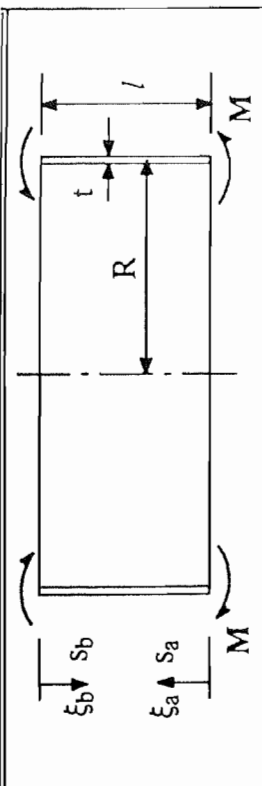
$$D_{\xi_i} = e^{-\xi_i} \cos \xi_i$$

Für $\lambda \rightarrow \infty$ und $\xi_i \rightarrow \infty$ gehen die nachfolgenden Formeln in die des einseitig belasteten Kreiszyinders über.

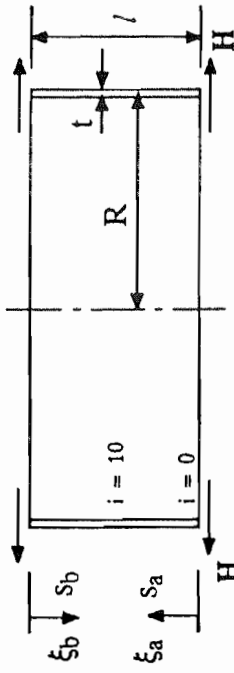
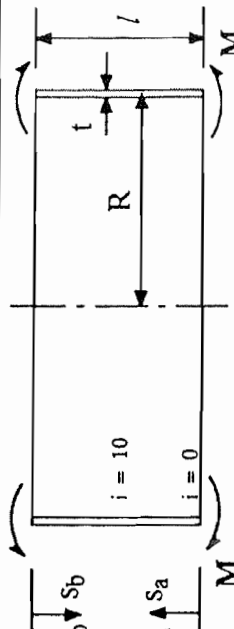
Symmetrische Belastung

Lastfall		
$n_{11} (\xi_a, \xi_b)$	$\frac{2HR}{LN_s} [(1 + D_\lambda)(D_{\xi_a} + D_{\xi_b}) + B_\lambda (B_{\xi_a} + B_{\xi_b})]$	$\frac{2MR}{L^2 N_s} [(1 - A_\lambda)(D_{\xi_a} + D_{\xi_b}) - (1 - C_\lambda)(B_{\xi_a} + B_{\xi_b})]$
$n_{22} (\xi_a, \xi_b)$	0	0
$q_2 (\xi_a, \xi_b)$	$-\frac{H}{N_s} [(1 + D_\lambda)(C_{\xi_a} - C_{\xi_b}) + B_\lambda (A_{\xi_a} - A_{\xi_b})]$	$-\frac{M}{LN_s} [(1 - A_\lambda)(C_{\xi_a} - C_{\xi_b}) - (1 - C_\lambda)(A_{\xi_a} - A_{\xi_b})]$
$m_{11} (\xi_a, \xi_b)$	νm_{22}	νm_{22}
$m_{22} (\xi_a, \xi_b)$	$-\frac{HL}{N_s} [(1 + D_\lambda)(B_{\xi_a} + B_{\xi_b}) - B_\lambda (D_{\xi_a} + D_{\xi_b})]$	$-\frac{M}{N_s} [(1 - A_\lambda)(B_{\xi_a} + B_{\xi_b}) + (1 - C_\lambda)(D_{\xi_a} + D_{\xi_b})]$
$\Delta R (\xi_a, \xi_b)$	$\frac{HL^3}{2BN_s} [(1 + D_\lambda)(D_{\xi_a} + D_{\xi_b}) + B_\lambda (B_{\xi_a} + B_{\xi_b})]$	$\frac{ML^2}{2BN_s} [(1 - A_\lambda)(D_{\xi_a} + D_{\xi_b}) - (1 - C_\lambda)(B_{\xi_a} + B_{\xi_b})]$
$\chi (\xi_a, \xi_b)$	$\frac{HL^2}{2BN_s} [(1 + D_\lambda)(A_{\xi_a} - A_{\xi_b}) - B_\lambda (C_{\xi_a} - C_{\xi_b})]$	$\frac{ML}{2BN_s} [(1 - A_\lambda)(A_{\xi_a} - A_{\xi_b}) + (1 - C_\lambda)(C_{\xi_a} - C_{\xi_b})]$
$\lambda = \frac{l}{L}$; $\xi_a = \frac{s_a}{L}$; $\xi_b = \frac{s_b}{L}$	$N_s = B_\lambda (1 - A_\lambda) + (1 + D_\lambda)(1 - C_\lambda)$	für symmetrische Belastung

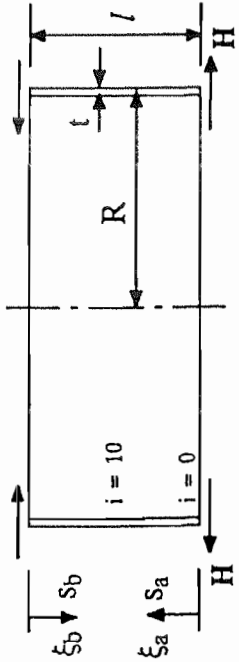
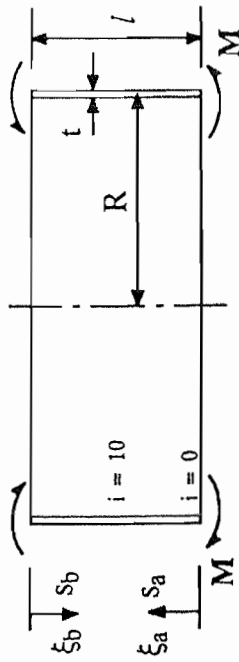
Antimmetrische Belastung

Lastfall		
$n_{11} (\xi_a, \xi_b)$	$\frac{2HR}{LN_a} [(1 - D_\lambda)(D_{\xi_a} - D_{\xi_b}) - B_\lambda (B_{\xi_a} - B_{\xi_b})]$	$\frac{2MR}{L^2 N_a} [(1 + A_\lambda)(D_{\xi_a} - D_{\xi_b}) - (1 + C_\lambda)(B_{\xi_a} - B_{\xi_b})]$
$n_{22} (\xi_a, \xi_b)$	0	0
$q_2 (\xi_a, \xi_b)$	$-\frac{H}{N_a} [(1 - D_\lambda)(C_{\xi_a} + C_{\xi_b}) - B_\lambda (A_{\xi_a} + A_{\xi_b})]$	$-\frac{M}{LN_a} [(1 + A_\lambda)(C_{\xi_a} + C_{\xi_b}) - (1 + C_\lambda)(A_{\xi_a} + A_{\xi_b})]$
$m_{11} (\xi_a, \xi_b)$	νm_{22}	νm_{22}
$m_{22} (\xi_a, \xi_b)$	$-\frac{HL}{N_a} [(1 - D_\lambda)(B_{\xi_a} - B_{\xi_b}) + B_\lambda (D_{\xi_a} - D_{\xi_b})]$	$-\frac{M}{N_a} [(1 + A_\lambda)(B_{\xi_a} - B_{\xi_b}) + (1 + C_\lambda)(D_{\xi_a} - D_{\xi_b})]$
$\Delta R (\xi_a, \xi_b)$	$\frac{HL^3}{2BN_a} [(1 - D_\lambda)(D_{\xi_a} - D_{\xi_b}) - B_\lambda (B_{\xi_a} - B_{\xi_b})]$	$\frac{ML^2}{2BN_a} [(1 + A_\lambda)(D_{\xi_a} - D_{\xi_b}) - (1 + C_\lambda)(B_{\xi_a} - B_{\xi_b})]$
$\chi (\xi_a, \xi_b)$	$\frac{HL^2}{2BN_a} [(1 - D_\lambda)(A_{\xi_a} + A_{\xi_b}) + B_\lambda (C_{\xi_a} + C_{\xi_b})]$	$\frac{ML}{2BN_a} [(1 + A_\lambda)(A_{\xi_a} + A_{\xi_b}) + (1 + C_\lambda)(C_{\xi_a} + C_{\xi_b})]$
$\lambda = \frac{l}{L}$; $\xi_a = \frac{s_a}{L}$; $\xi_b = \frac{s_b}{L}$	$N_a = -B_\lambda (1 + A_\lambda) + (1 - D_\lambda)(1 + C_\lambda)$	für antimmetrische Belastung

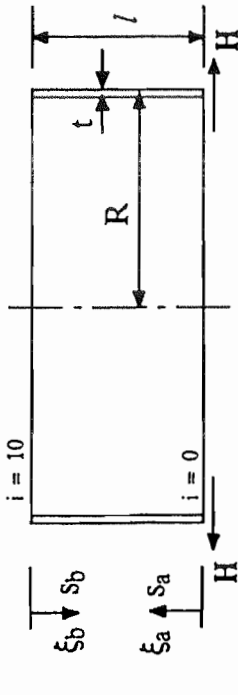
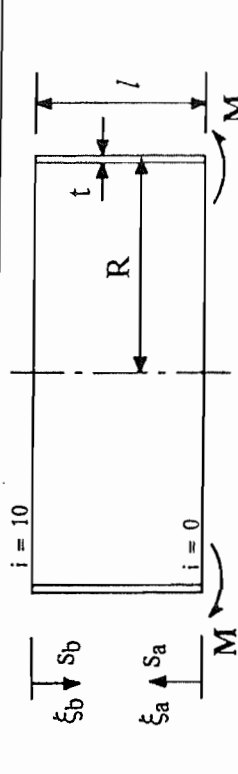
Symmetrische Belastung

Lastfall		
$n_{11} (\xi_a, \xi_b)$	$\frac{2HR}{L} \cdot [W - PS]$	$\frac{2MR}{L^2} \cdot [W - MS]$
$n_{22} (\xi_a, \xi_b)$	0	0
$q_2 (\xi_a, \xi_b)$	$-H \cdot [Q - PS]$	$-\frac{M}{L} \cdot [Q - MS]$
$m_{11} (\xi_a, \xi_b)$	νm_{22}	νm_{22}
$m_{22} (\xi_a, \xi_b)$	$-HL \cdot [M - PS]$	$-M \cdot [M - MS]$
$\Delta R (\xi_a, \xi_b)$	$\frac{HL^3}{2B} \cdot [W - PS]$	$\frac{ML^2}{2B} \cdot [W - MS]$
$\chi (\xi_a, \xi_b)$	$\frac{HL^2}{2B} \cdot [PHI - PS]$	$\frac{ML}{2B} \cdot [PHI - MS]$
$\lambda = \frac{l}{L}$	$\xi_a = \frac{s_a}{L}$	$\xi_b = \frac{s_b}{L}$

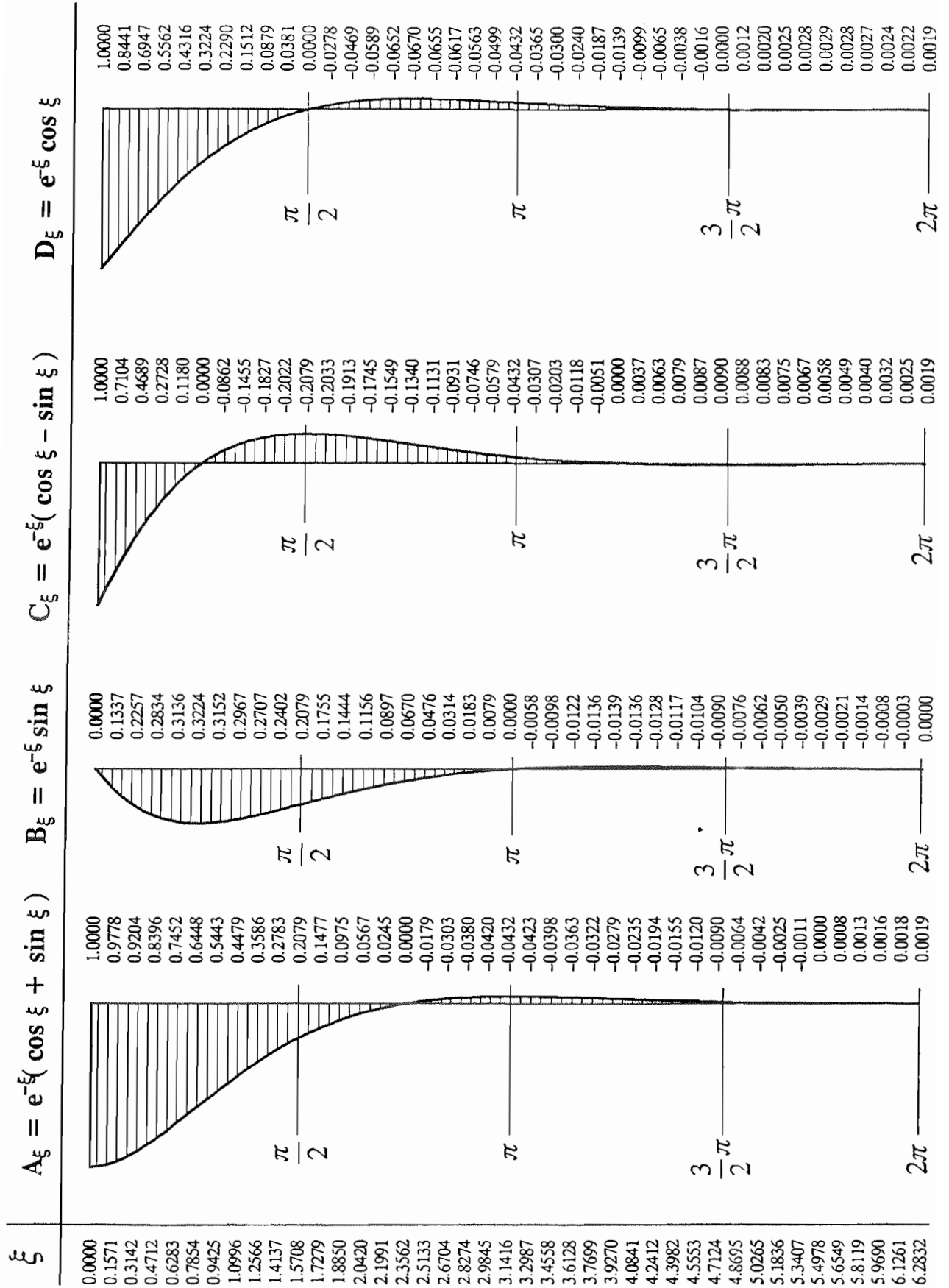
Antisymmetrische Belastung

Lastfall		
$n_{11} (\xi_a, \xi_b)$	$\frac{2HR}{L} \cdot [W - PA]$	$\frac{2MR}{L^2} \cdot [W - MA]$
$n_{22} (\xi_a, \xi_b)$	0	0
$q_2 (\xi_a, \xi_b)$	$-H \cdot [Q - PA]$	$-\frac{M}{L} \cdot [Q - MA]$
$m_{11} (\xi_a, \xi_b)$	νm_{22}	νm_{22}
$m_{22} (\xi_a, \xi_b)$	$-HL \cdot [M - PA]$	$-M \cdot [M - MA]$
$\Delta R (\xi_a, \xi_b)$	$\frac{HL^3}{2B} \cdot [W - PA]$	$\frac{ML^2}{2B} \cdot [W - MA]$
$\chi (\xi_a, \xi_b)$	$\frac{HL^2}{2B} \cdot [PHI - PA]$	$\frac{ML}{2B} \cdot [PHI - MA]$
$\lambda = \frac{l}{L} ; \xi_a = \frac{s_a}{L} ; \xi_b = \frac{s_b}{L}$		

Einseitige Randbelastung

Lastfall		
$n_{11} (\xi_a, \xi_b)$	$\frac{2HR}{L} \cdot [W - PR]$	$\frac{2MR}{L^2} \cdot [W - MR]$
$n_{22} (\xi_a, \xi_b)$	0	0
$q_2 (\xi_a, \xi_b)$	$-H \cdot [Q - PR]$	$-\frac{M}{L} \cdot [Q - MR]$
$m_{11} (\xi_a, \xi_b)$	νm_{22}	νm_{22}
$m_{22} (\xi_a, \xi_b)$	$-HL \cdot [M - PR]$	$-M \cdot [M - MR]$
$\Delta R (\xi_a, \xi_b)$	$\frac{HL^3}{2B} \cdot [W - PR]$	$\frac{ML^2}{2B} \cdot [W - MR]$
$\chi (\xi_a, \xi_b)$	$\frac{HL^2}{2B} \cdot [PHI - PR]$	$\frac{ML}{2B} \cdot [PHI - MR]$
$\lambda = \frac{l}{L}$; $\xi_a = \frac{s_a}{L}$; $\xi_b = \frac{s_b}{L}$	Für Lasten am oberen Rand sind die Vorzeichen von q_2 und χ zu wechseln.	

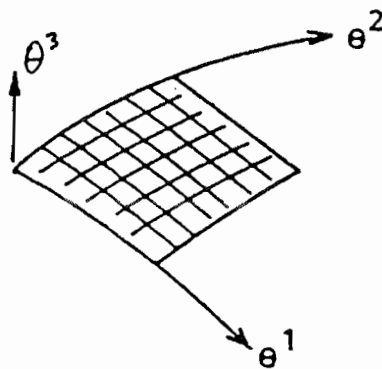
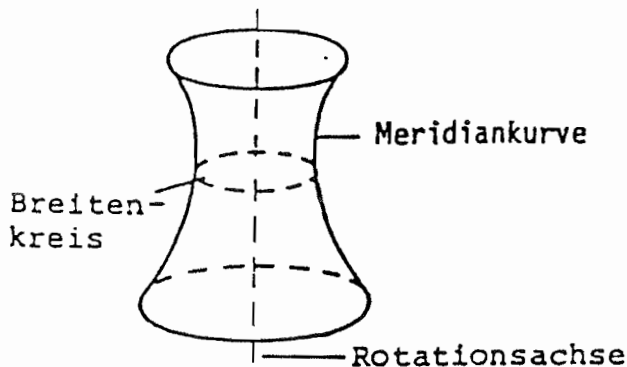
Funktionen zur Berechnung der Randstörungen



8. Numerisches Berechnungsverfahren für Rotationsschalen
 =====
 (z.T. Tafelanschrieb)

8.1. Grundgleichungen

Die Grundgleichungen für allgemeine Rotationsschalen können aus Variationsprinzipien bestimmt werden. Diesen Variationsaussagen liegen dabei verschiedene Schalentheorien zugrunde. Im weiteren werden das Gleichgewicht, die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen und das Werkstoffgesetz für eine Theorie angegeben:



Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung

θ^1, θ^2 : konvektive Koordinaten

Verschiebungen $\underline{u} = \{u \quad v \quad w \quad \varphi_2 \quad \varphi_1\}$

Verzerrungen $\underline{\varepsilon} = \{\alpha_{11} \quad \alpha_{12} \quad \alpha_{21} \quad \alpha_{22} \quad \beta_{11} \quad \beta_{12} \quad \beta_{21} \quad \beta_{22} \quad \gamma_1 \quad \gamma_2\}$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & \Gamma & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\Gamma & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & -\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & d_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & d_2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}$$

$\alpha_{\alpha\beta}$: Dehnungen
 $\beta_{\alpha\beta}$: Verkrümmungen
 γ_α : Gleitungen

$\Gamma = \frac{A_{,2}}{A \cdot B} = \frac{A_{,2}}{R_1}$
 mit $A = R(\theta^2)$

$\underline{\varepsilon} = \underline{D}_u \underline{u}$

d_1, d_2 : Ableitungen in Richtung der Koordinaten s^1 und s^2

	Kreiszylinder	Kegel	Kugel
Γ	0	$1/\theta^2$	$\cot \theta^2/R$
$\frac{1}{R_1}$	$1/R$	$1/R(\theta^2)$	$1/R$
$\frac{1}{R_2}$	0	0	$1/R$

$$\frac{\partial}{\partial s^1} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \theta^1}; \quad \frac{\partial}{\partial s^2} = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \theta^2}$$

Werkstoffgesetz (isotrope, homogene Schalen)

Schnittgrößen $\underline{s} = \{n_{11} \ n_{12} \ n_{21} \ n_{22} \ m_{11} \ m_{12} \ m_{21} \ m_{22} \ q_1 \ q_2\}$

Verzerrungen $\underline{\epsilon} = \{\alpha_{11} \ \alpha_{12} \ \alpha_{21} \ \alpha_{22} \ \beta_{11} \ \beta_{12} \ \beta_{21} \ \beta_{22} \ \gamma_1 \ \gamma_2\}$

$$\begin{array}{c}
 \alpha_{11} \\
 \alpha_{12} \\
 \alpha_{21} \\
 \alpha_{22} \\
 \beta_{11} \\
 \beta_{12} \\
 \beta_{21} \\
 \beta_{22} \\
 \gamma_{13} \\
 \gamma_{23}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccccccc|cc}
 1/D_e & 0 & 0 & -\nu/D_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & \frac{1+\nu}{D_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & \frac{1+\nu}{D_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 -\nu/D_e & 0 & 0 & 1/D_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1/B_e & 0 & 0 & -\nu/B_e & 0 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{B_e} & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{B_e} & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu/B_e & 0 & 0 & 1/B_e & 0 & \\
 \hline
 & & & \Omega & & & & & \frac{6}{5Gt} & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & \frac{6}{5Gt}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 n_{11} \\
 n_{12} \\
 n_{21} \\
 n_{22} \\
 m_{11} \\
 m_{12} \\
 m_{21} \\
 m_{22} \\
 q_1 \\
 q_2
 \end{array}$$

$$\underline{\epsilon} = \underline{E}^{-1} \cdot \underline{s} \quad ; \quad D_e = Et \quad ; \quad B_e = \frac{Et^3}{12} \quad ; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Gleichgewicht

$$\text{Schnittgrößen} \quad \underline{s} = \{n_{11} \ n_{12} \ n_{21} \ n_{22} \ m_{11} \ m_{12} \ m_{21} \ m_{22} \ q_1 \ q_2\}$$

$$\text{Belastung} \quad \underline{\bar{p}} = \{\bar{p}_1 \ \bar{p}_2 \ \bar{p}_3\}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & \Gamma & d_2+\Gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} & 0 \\ -\Gamma & d_1 & 0 & d_2+\Gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2+\Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & \Gamma & d_2+\Gamma & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Gamma & d_1 & 0 & d_2+\Gamma & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\underline{D}_S^T \underline{s} + \underline{\bar{p}}_V = \underline{0}$$

Prinzip der virtuellen Arbeiten

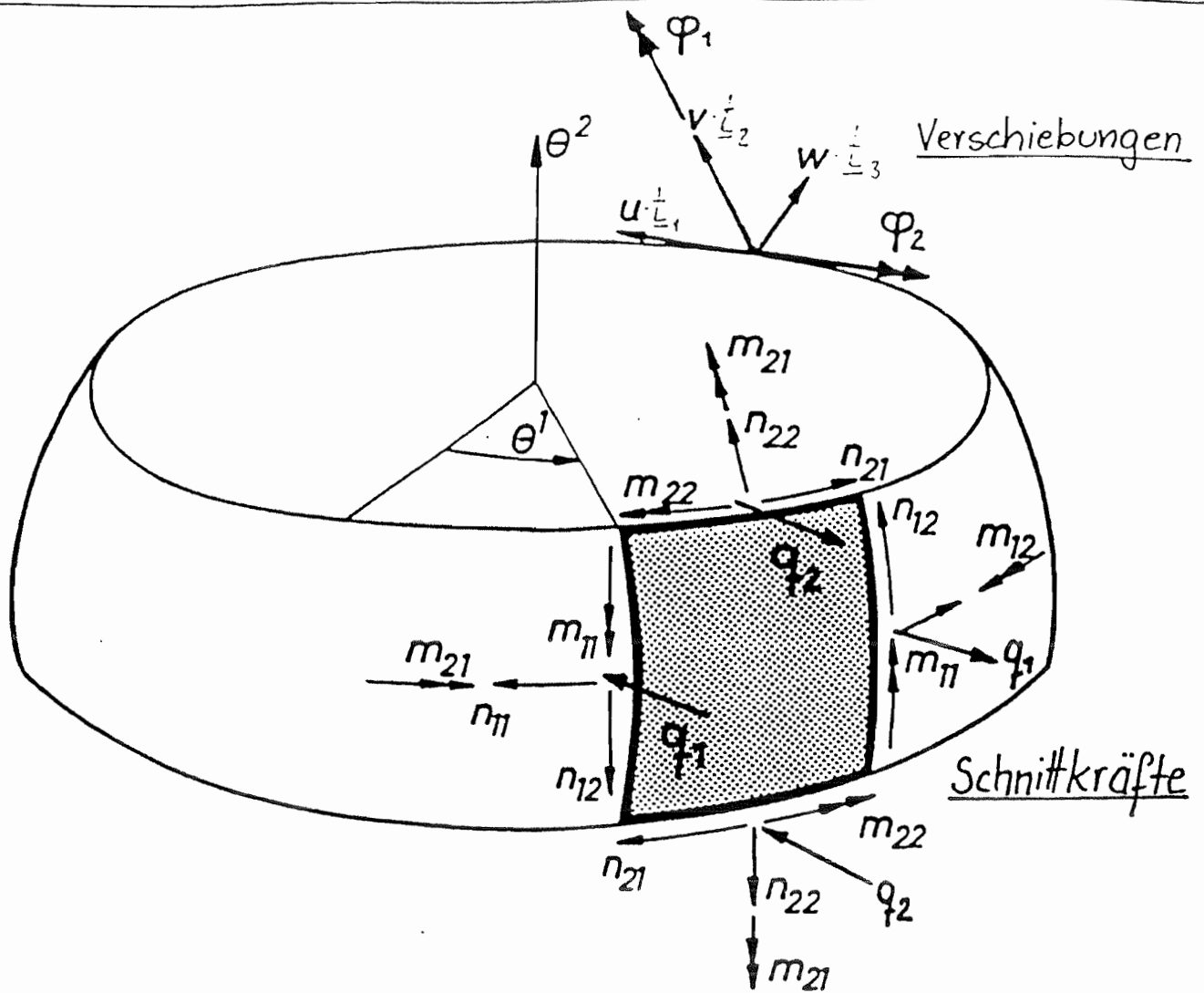
Das Prinzip der virtuellen Arbeiten δA entspricht dem Gleichgewicht in globaler Formulierung.

$$\delta A = - \int_S \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{s} \, dS + \int_S \delta \underline{u}^T \underline{\bar{p}}_V \, dS + \int_S \delta \underline{u}^T \underline{\bar{p}} \, ds = 0$$

mit: $\underline{\varepsilon} = \underline{D}_V \underline{u}$ auf der Fläche S

$\underline{u} - \bar{\underline{u}} = 0$ über den Rand s

Die Bedeutung der in abkürzender Matrixschreibweise angegebenen Größen \underline{u} , $\underline{\varepsilon}$, \underline{s} und $\underline{\bar{p}}$ ist den Abschnitten 1.1 und 1.3 zu entnehmen.



Zustandsgrößen bei $\theta^2 = \text{konst}$:

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} \underline{v} \\ \dots \\ \underline{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cdot \sin n\theta^1 \\ v \cdot \cos n\theta^1 \\ w \cdot \cos n\theta^1 \\ \varphi_2 \cdot \cos n\theta^1 \\ N_{21} \cdot \sin n\theta^1 \\ N_{22} \cdot \cos n\theta^1 \\ Q_2 \cdot \cos n\theta^1 \\ M_{22} \cdot \cos n\theta^1 \end{bmatrix}$$

Ersatzkräfte
am Schalenrand

9.2 Halbanalytisches Berechnungsverfahren

Aufgrund der speziellen, rotationssymmetrischen Geometrie kann durch Einführen von globalen Ansatzfunktionen über den Umfang die Veränderlichkeit der unbekannt Schnittgrößen in Ringrichtung beschrieben und somit das zweidimensionale Problem auf ein eindimensionales zurückgeführt werden. Als orthogonale Ansatzfunktionen eignen sich trigonometrische Funktionen (Fourier-Zerlegung), wobei für den Verlauf rotationssymmetrischer Größen der cosinus als Ansatz gewählt wird und für antimetrische Größen der sinus. Damit erhalten die Ansätze für die Verschiebungen der Schalenmittelfläche folgende Form:

$$u(\theta^1, \theta^2) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\theta^2) \sin n \theta^1$$

$$v(\theta^1, \theta^2) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\theta^2) \cos n \theta^1$$

$$w(\theta^1, \theta^2) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\theta^2) \cos n \theta^1$$

Entsprechend ist auch für die Belastung die gleiche Zerlegung durchzuführen:

$$p_z(\theta^1, \theta^2) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{z_n}(\theta^2) \cos n \theta^1$$

Dabei ist θ^1 die Koordinate der Ring- und θ^2 die Koordinate der Meridianrichtung.

Für jedes n der Fourierentwicklung ergibt sich somit ein eindimensionales Problem (Meridianrichtung, Unbekannte u_n, v_n etc.) für deren Lösung zwei unterschiedliche Konzepte zur Verfügung stehen. Entweder werden für die unbekannt Verschiebungen lokale Ansätze in Meridianrichtung gewählt und mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeiten n Steifigkeitsmatrizen \underline{k}_n abgeleitet. Oder aus dem vollständigen Differentialgleichungssystem der Schale werden durch Integration n Übertragungsmatrizen \underline{U}_n erzeugt, welche abschließend in Steifigkeitsmatrizen umgeformt werden können.

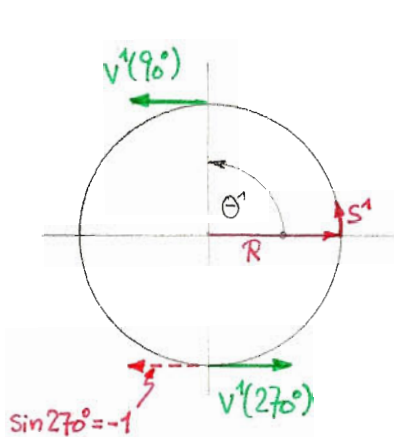
Bemerkungen zu der Fourier-Zerlegung:

Für die Verschiebungen wird ein Produktansatz gemacht:

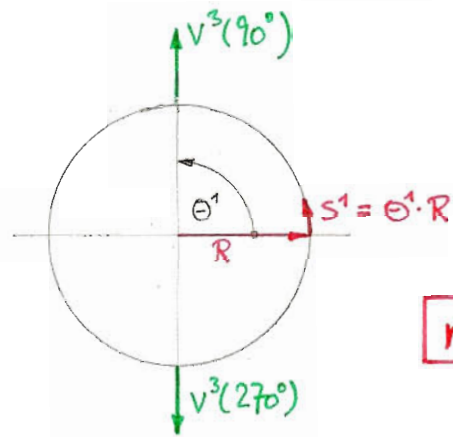
$$v^1(\theta^1) = \sum_n v_n^1(\theta^2) \cdot \sin n\theta^1$$

$$v^2(\theta^1) = \sum_n v_n^2(\theta^2) \cdot \cos n\theta^1$$

$$v^3(\theta^1) = \sum_n v_n^3(\theta^2) \cdot \cos n\theta^1 = \sum_n v_n^3 \cos \frac{n}{R} s^1$$



antimetrisch \rightarrow sin



n=1

symmetrisch \rightarrow cos

Die trigonometrischen Funktionen sind so gewählt, daß sich eine einfache Symmetrie bzgl. $\theta^1=0^\circ$ ergibt.

Im Verlauf der weiteren Herleitung erfolgt ein Übergang von den Koordinaten θ^1 auf die Bogenlängen s^1 , da die Gleichungen dadurch etwas einfacher werden:

$$ds^1 = A d\theta^1 \Rightarrow (\dots)_{,1} = \frac{\partial}{\partial \theta^1} = A \frac{\partial}{\partial s^1} \quad (A=R \text{ für Rot. Sch.})$$

2-Richtung analog

Für die Verdrehungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \underline{\varphi^1} &= -v_{11}^3 \frac{1}{A} + \frac{1}{R_1} v^1 = -v_{1s^1}^3 + \frac{1}{R_1} v^1 = \sum_n \left(v_n^3 \cdot \frac{n}{R} \sin \frac{n}{R} s^1 + \frac{1}{R_1} v_n^1 \sin \frac{n}{R} s^1 \right) \\ &= \sum_n \left(\frac{n}{R} v_n^3 + \frac{1}{R_1} v_n^1 \right) \sin \frac{n}{R} s^1 = \underline{\sum_n \varphi_n^1 \sin \frac{n}{R} s^1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\varphi^2} &= -v_{12}^3 \frac{1}{B} + \frac{1}{R_2} v^2 = -v_{1s^2}^3 + \frac{1}{R_2} v^2 = \sum_n \left(v_{n,s^2}^3 \cdot \cos \frac{n}{R} s^1 + \frac{1}{R_2} v_n^2 \cos \frac{n}{R} s^1 \right) \\ &= \underline{\sum_n \left(v_{n,s^2}^3 + \frac{1}{R_2} v_n^2 \right) \cos \frac{n}{R} s^1 = \sum_n \varphi_n^2 \cos \frac{n}{R} s^1} \end{aligned}$$

Ähnlich wie bei den Verdrehungen ergänzen sich die Trigonometrischen Funktionen und ihre Ableitungen in allen Grundgleichungen so, daß sie ausgeklammert und eliminiert werden können. Dies soll exemplarisch am Beispiel der ersten Gleichgewichtsbedingung gezeigt werden:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha_{11}} &= v_{,1}^1 + \Gamma v^2 + \frac{1}{R_1} v^3 \\ &= \sum_n \left[v_n^1 \frac{n}{R} \cos \frac{n}{R} s^1 + \Gamma v_n^2 \cos \frac{n}{R} s^1 + \frac{1}{R_1} v_n^3 \cos \frac{n}{R} s^1 \right] \\ &= \sum_n \left[v_n^1 \frac{n}{R} + \Gamma v_n^2 + \frac{1}{R_1} v_n^3 \right] \cos \frac{n}{R} s^1 = \underline{\alpha_n^1} \cos \frac{n}{R} s^1 \end{aligned}$$

$$\underline{\alpha_{12}} = -\Gamma v^1 + v_{,1}^2 = \sum_n \left[-\Gamma v_n^1 - v_n^2 \frac{n}{R} \right] \sin \frac{n}{R} s^1 = \underline{\alpha_n^2} \sin \frac{n}{R} s^1$$

$$\underline{\alpha_{21}} = v_{,1}^2 = \sum_n v_n^2 \frac{n}{R} \sin \frac{n}{R} s^1 = \underline{\alpha_n^2} \sin \frac{n}{R} s^1$$

$$\underline{\alpha_{22}} = v_{,2}^2 + \frac{1}{R_2} v^3 = \sum_n \left(v_n^2 + \frac{1}{R_2} v_n^3 \right) \cos \frac{n}{R} s^1 = \underline{\alpha_n^2} \cos \frac{n}{R} s^1$$

$$\begin{aligned} \underline{n_{11}} &= \frac{D_e}{1-\nu^2} (\alpha_{11} + \nu \alpha_{22}) = \frac{D_e}{1-\nu^2} \sum_n \left[\alpha_n^1 + \nu \alpha_n^2 \right] \cos \frac{n}{R} s^1 \\ &= \sum_n \underline{n_{11}^n} \cos \frac{n}{R} s^1 \end{aligned}$$

$$\underline{n_{12}} = \frac{D_e}{1+\nu} \alpha_{12} = \frac{D_e}{1+\nu} \sum_n \alpha_n^2 \sin \frac{n}{R} s^1 = \sum_n \underline{n_{12}^n} \sin \frac{n}{R} s^1$$

$$\underline{n_{21}} = \frac{D_e}{1+\nu} \alpha_{21} = \sum_n \underline{n_{21}^n} \sin \frac{n}{R} s^1$$

$$\underline{q_1} \text{ aus } \gamma_{12} \text{ aus } \varphi_1 \Rightarrow \underline{q_1} = \sum_n \underline{q_1^n} \sin \frac{n}{R} s^1$$

Gleichgewichtsbedingung:

$$n_{11,1} + \Gamma n_{12} + n_{21,2} + \Gamma n_{21} + \frac{1}{R_1} q_1 + \bar{p}_1 = 0$$

$$\sum_n \left[\underline{n_{11}^n} \frac{n}{R} + \Gamma n_{12}^n + n_{21,2}^n + \Gamma n_{21}^n + \frac{1}{R_1} q_1^n + \bar{p}_1^n \right] \sin \frac{n}{R} s^1 = 0$$

Die Gleichgewichtsbedng. muß für jedes n für sich erfüllt sein. Man erhält n Gleichgewichtsbedingungen, die nur noch von θ^2 bzw. s^2 abhängig sind. Die Umfangskoordinate tritt nur durch die Ableitungen $\frac{n}{R}$ in Erscheinung.

Die Grundgleichungen der Rotationsschalen sind für jeden Fourier-Koeffizienten n entkoppelt und getrennt zu lösen.

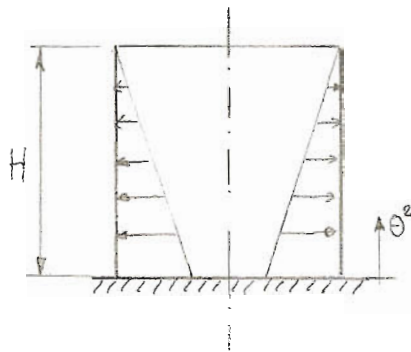
Besonders vorteilhaft ist die Methode dann, wenn sich die äußeren Lasten durch wenige Reihenglieder beschreiben lassen:

Beispiele:

A) Wasserlast in stehendem Zylinder:

$n=0$

$\cos 0 = 1$

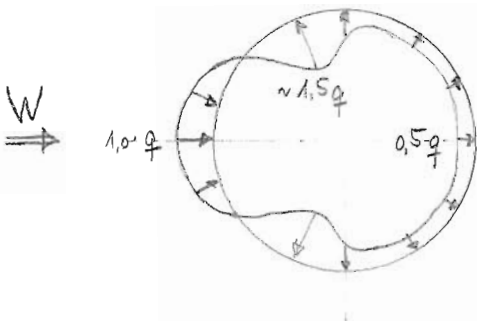


$\bar{p}_3(\theta^2) = \gamma_w \cdot (H-z)$

Eigengewicht analog:

$\bar{p}_2(\theta^2) = \gamma_s \cdot t = \text{konst}$

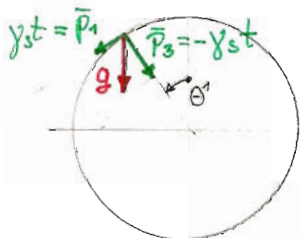
B) Windlast



$\bar{p}_3 = q(-0,655 + 0,28 \cos \theta^1 + 1,115 \cos 2\theta^1 + 0,4 \cos 3\theta^1 - 0,113 \cos 4\theta^1 - 0,027 \cos 5\theta^1)$

Die relativ komplizierte Umfangsverteilung kann man mit 5 Reihengliedern bereits genau genug abbilden.

C) Liegende zylindrische Behälter

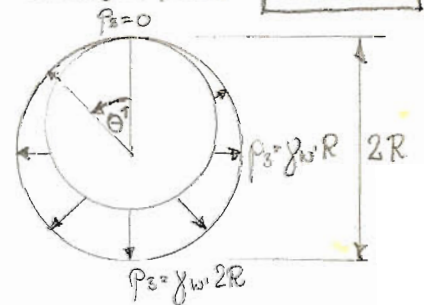


Eigengewicht

$g = \gamma_s \cdot t \cdot \sin \theta^1 + -\gamma_s t \cdot \cos \theta^1$

$n=1$

Wasserlast $n=0, +1,$



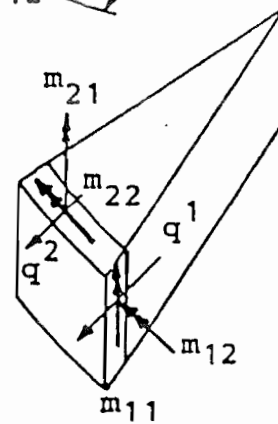
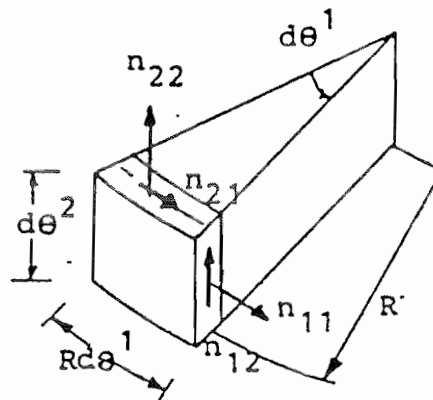
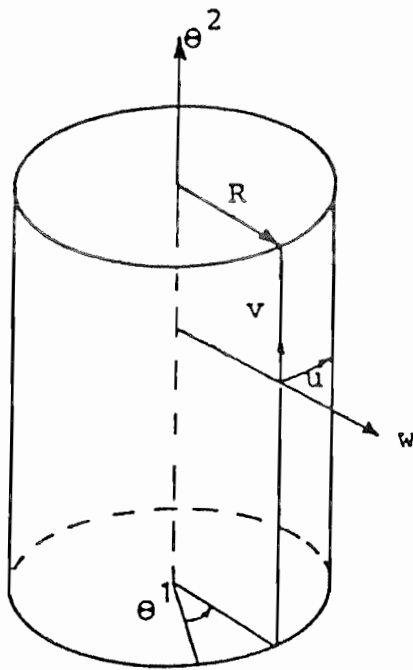
$\bar{p}_3 = (\underbrace{\gamma_w R}_{p_3^{(0)}}) + (\underbrace{-\gamma_w R}_{p_3^{(1)}}) \cos \theta^1$

8.3 Ermittlung der Elementmatrizen durch Integration des Differentialsystems (für Zylinderschalen)

Grundlage: lokale Grundgleichungen

Eine Möglichkeit zur Ableitung der Elementmatrizen besteht in der Integration des Differentialgleichungssystems, in dem Grundgleichungen wie Gleichgewicht, Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung und Werkstoffgesetz enthalten sind.

$$\begin{bmatrix} \text{Verzerrungs-} \\ \text{Verschiebungs-} \\ \text{Beziehung} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Werkstoffgesetz} \\ \underline{u} \\ \text{Gleichgewicht} \\ \underline{s} \end{bmatrix} = \underline{0}$$



mit: $\underline{u} = [u \quad v \quad w \quad \varphi_1 \quad \varphi_2]$

$\underline{s} = [n_{11}, n_{21}, n_{12}, n_{22}, m_{11}, m_{21}, m_{12}, m_{22}, q_1, q_2]$

8.31 Differentialgleichungssystem für den Spezialfall des Kreiszylinders

Durch Einführen der Geometriegrößen $\frac{1}{R_\alpha}$ und Γ des Kreiszylinders in die allgemeinen Grundgleichungen ergibt sich in übersichtlicher Form folgendes matrizielles Gleichungssystem.

Kinematik					Werkstoffgesetz											
d_2	0	0	0	0	$-\frac{1+\nu}{D_e}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u
0	d_2	0	0	0	0	$-\frac{1}{D_e}$	0	0	0	0	$\frac{\nu}{D_e}$	0	0	0	0	v
0	0	d_2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	w
0	0	0	d_2	0	0	0	0	$-\frac{1}{B_e}$	0	$\frac{\nu}{B_e}$	0	0	0	0	0	φ_2
0	0	0	0	d_2	0	0	0	0	$-\frac{1+\nu}{B_e}$	0	0	0	0	0	0	φ_1
0	0	0	0	d_1	0	0	0	$\frac{\nu}{B_e}$	0	$-\frac{1}{B_e}$	0	0	0	0	0	n_{21}
d_1	0	$\frac{1}{R}$	0	0	0	$\frac{\nu}{D_e}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{D_e}$	0	0	0	0	n_{22}
0	0	0	d_1	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1+\nu}{B_e}$	0	0	0	$q_2 = 0$
0	d_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1+\nu}{D_e}$	0	0	m_{22}
$-\frac{1}{R}$	0	d_1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	m_{21}
					d_2	0	0	0	0	0	d_1	0	0	$\frac{1}{R}$	0	m_{11}
					0	d_2	0	0	0	0	0	0	0	d_1	0	n_{11}
					0	0	d_2	0	0	0	$-\frac{1}{R}$	0	0	d_1	0	m_{12}
					0	0	-1	d_2	0	0	0	d_1	0	0	0	n_{12}
					0	0	0	0	d_2	d_1	0	0	0	-1	0	q_1
															= 0	

Gleichgewicht

Das Gleichungssystem hat die Eigenschaft, daß die Ableitungen in θ^1 und θ^2 -Richtung getrennt werden können, so daß sich für den Kreiszylinder folgendes Differentialsystem ergibt: (Der Übergang auf die angeführten modifizierten Schnittgrößen sowie die Einführung der Normalenhypothese ist dabei schon vollzogen)

8.3.2 Integration des Differentialsystems

In abgekürzter Schreibweise hat das (8x8) - Differentialsystem die Form:

$$\underline{z}'_2 = \underline{A} \underline{z}$$

Die Koeffizientenmatrix \underline{A} des Differentialgleichungssystems enthält die Ableitungen in θ^1 -Richtung. Bevor die Integration in θ^2 -Richtung vorgenommen werden kann, sind diese zu ersetzen. Dazu werden für den Verlauf der Zustandsgrößen Ansätze in Ringrichtung gemacht, die entsprechend differenziert werden können. Für den Verlauf rotations-symmetrischer Zustandsgrößen wählt man cos-Ansätze und für anti-metrischen Funktionenverlauf sin-Ansätze

$$\underline{z}^a(\theta^1, \theta^2) = \sum_{n=1}^N \underline{z}_n^a(\theta^2) \sin n \theta^1$$

$$\underline{z}^s(\theta^1, \theta^2) = \sum_{n=1}^N \underline{z}_n^s(\theta^2) \cos n \theta^1$$

$$\underline{z}^a = \{u \quad \bar{n}_{21}\} \quad \underline{z}^s = \{v \ w \ \varphi_2 \quad \bar{n}_{22} \quad \bar{q}_2 \quad \bar{m}_{22}\}$$

Damit ist die Integration des Systems auf die Integration in eine Richtung (θ^2 -Richtung) zurückgeführt. Für jeden Term des Reihenansatzes kann das Differentialsystem mittels einer Reihenentwicklung von $e^{\underline{A}x}$ gelöst werden. Dabei wird das Differentialgleichungssystem als Anfangswertproblem betrachtet, d.h. die gesuchte Lösung wird aus der Menge der allgemeinen Lösungen durch Vorgabe von Anfangsbedingungen bestimmt.

$$\begin{aligned} \text{für homogene Dgl. } \underline{z}_h(x) &= \underline{U} \underline{z}(0) & \underline{z}(x) &: \text{Lösungsvektor} \\ & & \underline{z}(0) &: \text{Anfangsvektor} \\ & & \underline{U}(x) &: \text{Integralmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Lösungsansatz: } \underline{z}_h(x) &= e^{\underline{A}x} \underline{z}(0) \\ &+ \underline{U}(x) = e^{\underline{A}x} \end{aligned}$$

Somit ist die Integralmatrix \underline{U} durch die konvergente Matrizenreihe $e^{\underline{A}x}$ definiert:

$$e^{\underline{A}x} = \underline{I} + \underline{A} \frac{x}{1!} + \underline{A}^2 \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \underline{A}^i \frac{x^i}{i!} = \underline{U}(x)$$

Bei genügend feiner Unterteilung x empfiehlt sich hier die näherungsweise Berechnung durch einige der Reihenglieder.

Dabei ist zu beachten, daß die Übertragungsmatrix nur die Lösung für einen Wert n der Reihenentwicklung enthält.

Somit ergibt sich:

$$\underline{z}_b = \underline{U}_a^{b(n)} \underline{z}_a + \underline{\bar{z}}_p \quad \begin{array}{l} \underline{z}_i: \text{ Zustandsgrößen an der Stelle } i \\ \underline{\bar{z}}_p: \text{ Partikularanteil, z.B. aus} \\ \quad \quad \quad \underline{f}_p: \text{ Flächenbelastung} \end{array}$$

Übergang auf die Steifigkeitsmatrix \underline{k}

Die Steifigkeitsmatrix \underline{k} kann aus der Übertragungsmatrix durch einfache Matrizenmultiplikationen gewonnen werden.

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_b \\ \underline{s}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{uu} & | & \underline{U}_{us} \\ \underline{U}_{su} & | & \underline{U}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}_a \\ \underline{s}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\bar{u}}_p \\ \underline{\bar{s}}_p \end{bmatrix}$$

Aus der obersten Gleichung erhält man:

$$\underline{s}_a = -\underline{U}_{us}^{-1} \underline{U}_{uu} \underline{u}_a + \underline{U}_{us}^{-1} \underline{u}_b - \underline{U}_{us}^{-1} \underline{\bar{u}}_p$$

und durch Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} \underline{s}_a \\ \underline{s}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{U}_{us}^{-1} \underline{U}_{uu} & | & \underline{U}_{us}^{-1} \\ \underline{U}_{su} & | & \underline{U}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}_a \\ \underline{u}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\underline{U}_{us}^{-1} \underline{\bar{u}}_p \\ \underline{\bar{s}}_p - \underline{U}_{ss} \underline{U}_{us}^{-1} \underline{\bar{u}}_p \end{bmatrix}$$

$$\underline{s} = \underline{k} \cdot \underline{v} + \underline{\bar{s}}$$

(Vollspannkraft)

8.33 Differentialgleichungssystem allgemeiner Rotationschalen

In vorangegangenen Abschnitt wurde das IGL-System für Zylinderschalen abgeleitet, daß sich durch besondere Einfachheit auszeichnet, da viele Terme entfallen.

Man erhielt ein DGL-System 1. Ordnung mit einer konstanten Koeffizientenmatrix A , das durch die Reihenentwicklung für $e^{\Delta x}$ integriert werden konnte.

Auf den nächsten Seiten sind die DGL-Systeme allgemeiner Rotationschalen für dicke Schalen ($\gamma_{23} \neq 0$) und für dünne Schalen ($\gamma_{23} = 0$) zusammengestellt.

Die Gleichungen für dünne Schalen lassen sich aus den allgemeineren Gleichungen der dicken Schalen als Sonderfall ableiten, durch Elimination von φ^1 und φ_1 und Einführen der Ersatzschnittkräfte als Folge der Normalenhypothese.

Es ergeben sich jetzt DGL-Systeme mit nichtkonstanten Koeffizienten, die auch durch eine, etwas aufwendigere Reihenentwicklung elementweise integriert werden können.

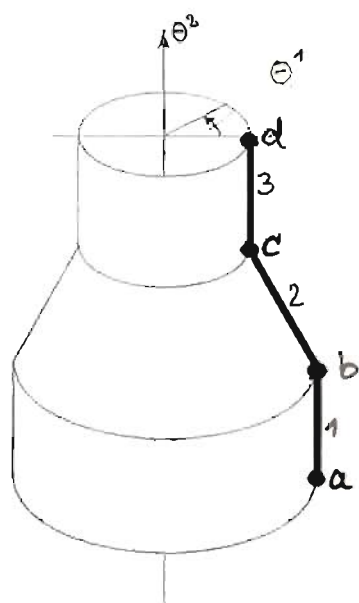
9.3 Strukturberechnung mit Ringelementen

(Elementkonzept auf der Basis des Weggrößenverfahrens)

Ziel: Berechnung der Zustandsgrößen der Schale (Schnittkräfte, Verschiebungen) an diskreten Knotenpunkten (bzw. Knotenlinien)

Erläuterung am Beispiel einer zusammengesetzten Behälterschale: Eindimensionale Diskretisierung

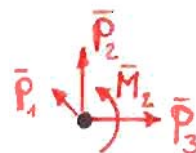
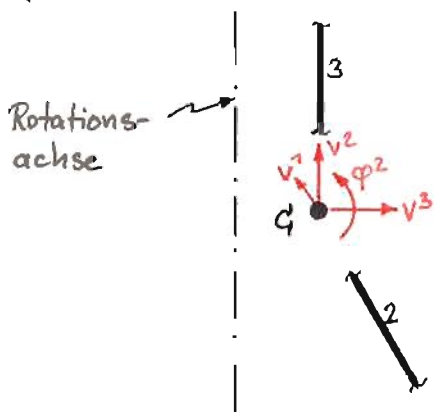
längs des Meridians:



3 (Ring-)Elemente: 1, 2, 3

4 Knoten(-linien): a, b, c, d

Definition der Zustandsgrößen an einem Knoten:



Zylinderkoordinaten als globales Koordinatensystem!

Weggrößen (als primäre Unbekannte):

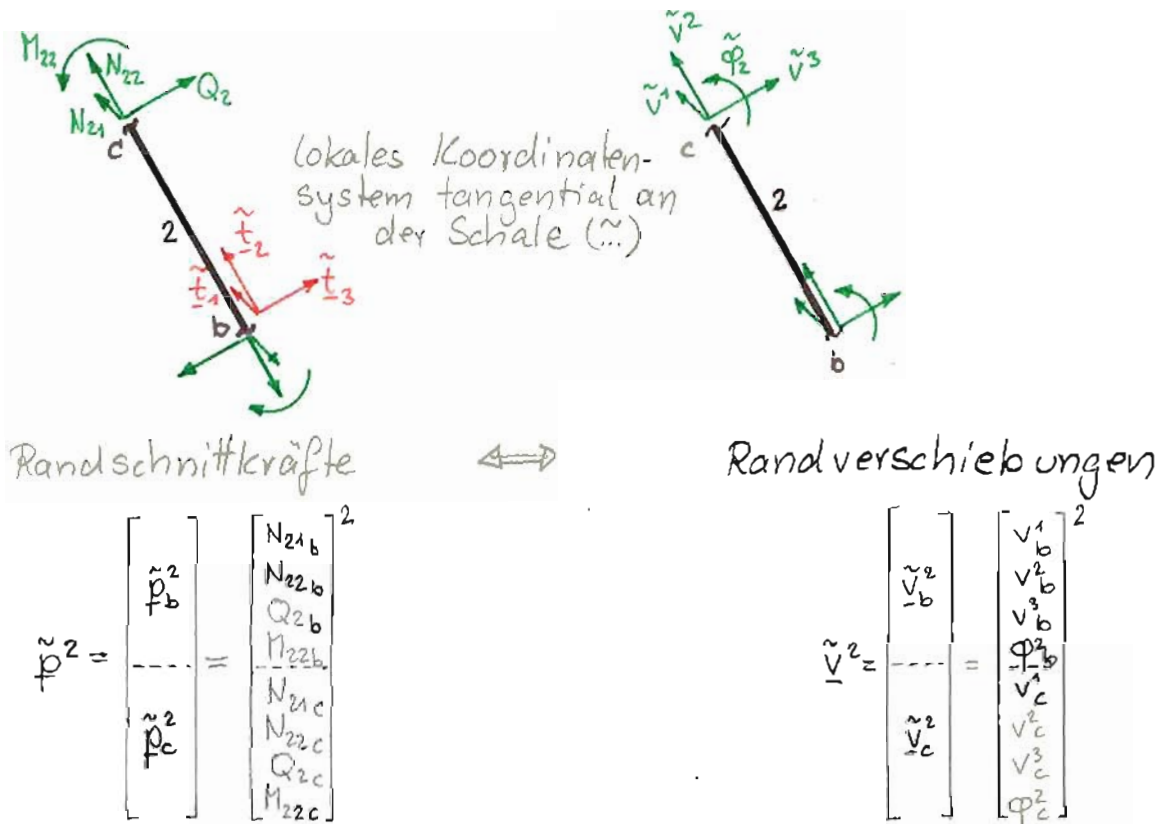
$$\underline{V}_c = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ \varphi^2 \end{bmatrix}_c$$



korrespondierende Kraftgrößen

$$\underline{\bar{P}}_c = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix}_c$$

Definition der Zustandsgrößen an den Elementrändern:



Bemerkung: Wegen der Kirchhoff-Love Hypothese sind die Randschnittkräfte nicht identisch mit den echten Schnittkräften! Für die Spannungsnachweise ist eine Umrechnung erforderlich.

Kennt man den Verlauf der Zustandsgrößen im Element, so kann man den Zusammenhang der Randgrößen zahlenmäßig berechnen und in matrixieller Form darstellen. Dabei sind verschiedene Anordnungen der Kraft- und Verschiebungsvektoren möglich:

A)

$$\underline{\tilde{z}}_c^2 = \begin{bmatrix} \tilde{v}_c^2 \\ \tilde{p}_c^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{U}_{11} & \underline{U}_{12} \\ \underline{U}_{21} & \underline{U}_{22} \end{bmatrix}}_{\text{Übertragungsmatrix}} \begin{bmatrix} \tilde{v}_b^2 \\ \tilde{p}_b^2 \end{bmatrix} = \underline{U}^2 \cdot \underline{\tilde{z}}_b^2$$

Kennt man die Zustandsgrößen am Elementanfang, so kann man die vom Elementende berechnen.

B)

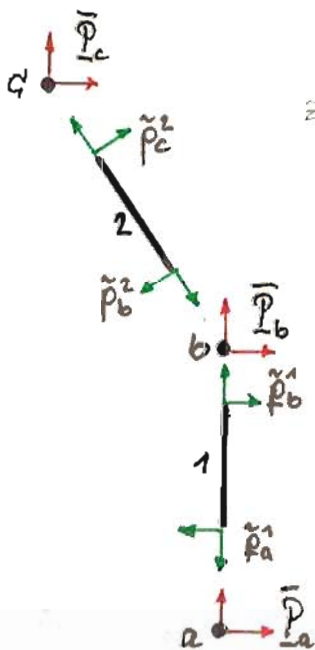
$$\bar{p}^2 = \begin{bmatrix} \tilde{p}_b^2 \\ \tilde{p}_c^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{k}_{bb} & \tilde{k}_{bc} \\ \tilde{k}_{cb} & \tilde{k}_{cc} \end{bmatrix}}_{\text{Steifigkeitsmatrix}} \begin{bmatrix} \tilde{v}_b^2 \\ \tilde{v}_c^2 \end{bmatrix} = \tilde{k}^2 \cdot \tilde{v}^2$$

Die Randschnittkräfte werden aus den Randverschiebungen berechnet.

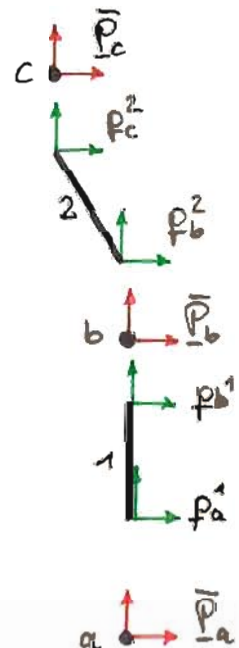
Die Ermittlung des Verlaufs der Zustandsgrößen im Element und die Berechnung der Elementmatrizen ist ein Kernpunkt der numerischen Berechnungsmethoden. Er wird deshalb im Anschluß an die allgemeine Herleitung des WGV detailliert behandelt.

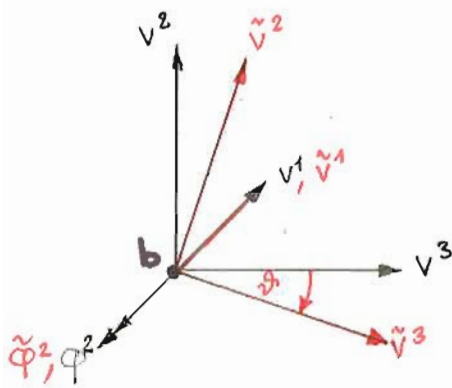
Die Systemberechnung nach dem WGV erfolgt durch Bilden des Gleichgewichts zwischen den Knotenkraftgrößen.

Die Zustandsgrößen der Elemente sind auf das lokale Koordinatensystem bezogen und müssen zur Bildung des Knotengleichgewichts transformiert werden:



z.B.: $\tilde{p}_b^2 = \underline{\Sigma}_b p_b^2$
 $\tilde{p}_c^2 = \underline{\Sigma}_c p_c^2$
 analog:
 $\tilde{v}_b^2 = \underline{\Sigma}_b \cdot v_b^2$
 $\tilde{v}_c^2 = \underline{\Sigma}_c \cdot v_c^2$



Koordinatentransformation:

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \\ \tilde{\varphi}^2 \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \varphi^2 \end{bmatrix}_b$$

$$\underline{\tilde{v}}_b = \underline{C}_b \underline{v}_b \iff \underline{v}_b = \underline{C}_b^T \underline{\tilde{v}}_b$$

Orthogonale Transformation

Transformation der Steifigkeitsbeziehung:

$$\underline{\tilde{p}}^i = \underline{\tilde{k}}^i \cdot \underline{\tilde{v}}^i \Rightarrow \underline{\tilde{v}}^i = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{v}}_a \\ \underline{\tilde{v}}_b \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \underline{I}_a & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{C}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_a \\ \underline{v}_b \end{bmatrix}^i = \underline{I} \underline{v}^i$$

$$\underline{p}^i = \begin{bmatrix} p_a \\ p_b \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \underline{I}_a^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{C}_b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\tilde{p}}_a \\ \underline{\tilde{p}}_b \end{bmatrix}^i = \underline{I}^T \underline{\tilde{p}}^i$$

$$\underline{p}^i = \underline{I}^T \underline{\tilde{p}}^i = \underline{I}^T (\underline{\tilde{k}}^i \underline{\tilde{v}}^i) = \underline{I}^T \underline{\tilde{k}}^i \underline{I} \underline{v}^i = \underline{k} \underline{v}^i$$

$$\underline{\tilde{p}}^i = \underline{k}^i \underline{v}^i \text{ mit } \underline{k}^i = \underline{I}^T \underline{\tilde{k}}^i \underline{I}$$

Bilden von Knotengleichgewicht:

Knoten a: $\underline{\tilde{p}}_a = p_a^1$

" b: $\underline{\tilde{p}}_b = p_b^1 + p_b^2$

" c: $\underline{\tilde{p}}_c = p_c^2 + p_c^3$

" d: $\underline{\tilde{p}}_d = p_d^3$

äußere
Kräfte
(Knotenlasten)

innere Kräfte: werden mit Hilfe der Steifigkeitsbeziehung durch die (unbekannten) Verschiebungen ausgedrückt.

Einsetzen der Steifigkeitsbeziehungen:

$$\bar{P}_a = \underline{k}_{aa}^1 \underline{v}_a^1 + \underline{k}_{ab}^1 \underline{v}_b^1$$

$$\bar{P}_b = \underline{k}_{ba}^1 \underline{v}_a^1 + \underline{k}_{bb}^1 \underline{v}_b^1 + \underline{k}_{bb}^2 \underline{v}_b^2 + \underline{k}_{bc}^2 \underline{v}_c^2$$

$$\bar{P}_c = \underline{k}_{cb}^2 \underline{v}_b^2 + \underline{k}_{cc}^2 \underline{v}_c^2 + \underline{k}_{cc}^3 \underline{v}_c^2 + \underline{k}_{cd}^3 \underline{v}_d^3$$

$$\bar{P}_d = \underline{k}_{dc}^3 \underline{v}_c^3 + \underline{k}_{dd}^3 \underline{v}_d^3$$

Knotenverträglichkeit: Gleichheit der Verschiebungen

benachbarter Elemente:

$$\underline{v}_a = \underline{v}_a^1$$

$$\underline{v}_b = \underline{v}_b^1 = \underline{v}_b^2$$

$$\underline{v}_c = \underline{v}_c^2 = \underline{v}_c^3$$

$$\underline{v}_d = \underline{v}_d^3$$

$$\bar{P}_a = \underline{k}_{aa}^1 \underline{v}_a + \underline{k}_{ab}^1 \underline{v}_b$$

$$\bar{P}_b = \underline{k}_{ba}^1 \underline{v}_a + (\underline{k}_{bb}^1 + \underline{k}_{bb}^2) \underline{v}_b + \underline{k}_{bc}^2 \underline{v}_c$$

$$\bar{P}_c = \underline{k}_{cb}^2 \underline{v}_b + (\underline{k}_{cc}^2 + \underline{k}_{cc}^3) \underline{v}_c + \underline{k}_{cd}^3 \underline{v}_d$$

$$\bar{P}_d = \underline{k}_{dc}^3 \underline{v}_c + \underline{k}_{dd}^3 \underline{v}_d$$

In Matrizenform:

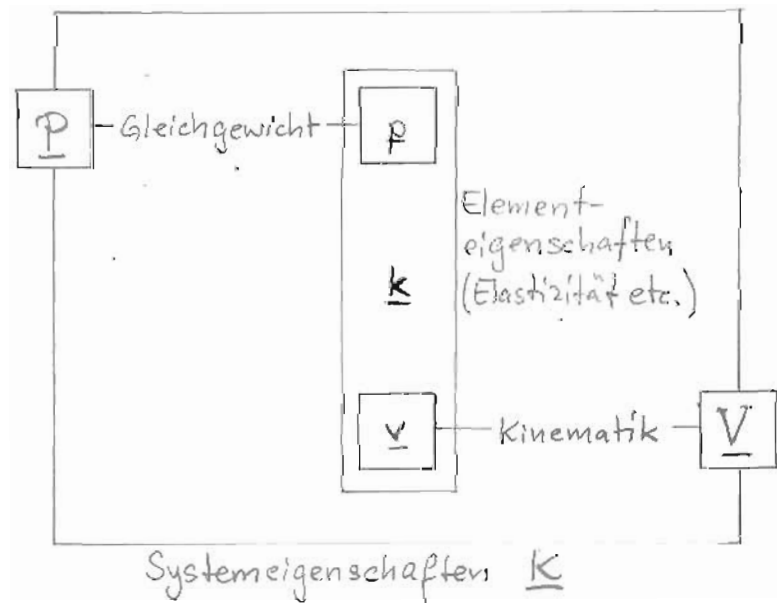
$$\begin{bmatrix} \bar{P}_a \\ \bar{P}_b \\ \bar{P}_c \\ \bar{P}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{aa}^1 & \underline{k}_{ab}^1 & & \\ \underline{k}_{ba}^1 & \underline{k}_{bb}^1 + \underline{k}_{bb}^2 & \underline{k}_{bc}^2 & \\ & \underline{k}_{cb}^2 & \underline{k}_{cc}^2 + \underline{k}_{cc}^3 & \underline{k}_{cd}^3 \\ & & \underline{k}_{dc}^3 & \underline{k}_{dd}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_a \\ \underline{v}_b \\ \underline{v}_c \\ \underline{v}_d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{P} = \underline{K} \underline{V}$$

Das Knotengleichgewicht stellt sich als Überlagerung der Steifigkeitsmatrizen benachbarter Elemente dar.

Nach dem Einsetzen der (Verschiebungs-) Randbedingungen (z.B. $\underline{v}_a=0$) kann das Gleichungssystem $\underline{P}=\underline{K}\underline{V}$ nach den verbleibenden Unbekannten aufgelöst werden.

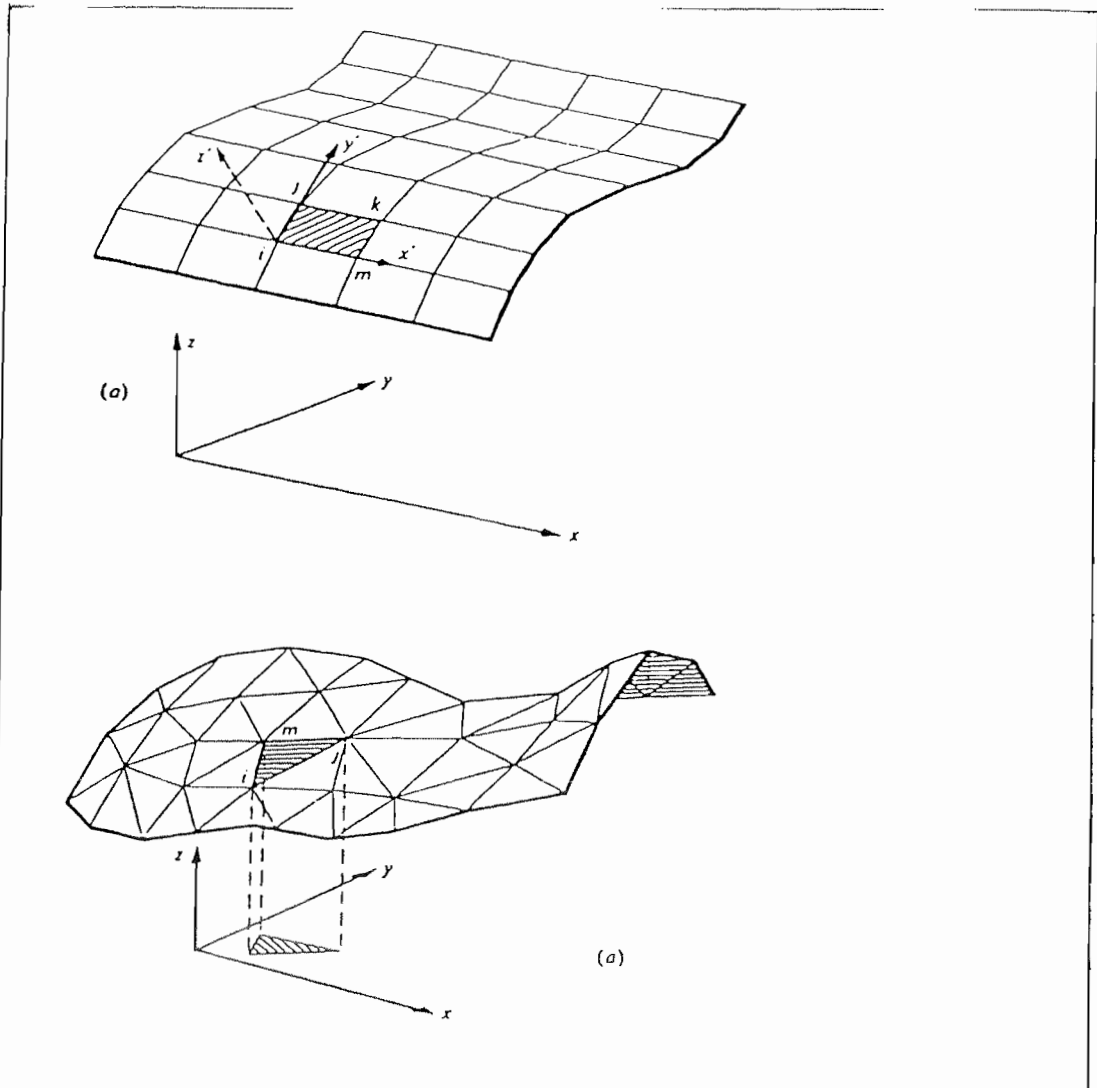
Für die Bemessung sind dann die Schnittkräfte über eine Nachlaufrechnung aus den Verschiebungen \underline{V} zu bestimmen.

Den mit der Systemberechnung erfaßten Zusammenhang der Knoten-Kraftgrößen mit den Knoten-Weggrößen durch Überlagerung der Elementsteifigkeiten zur Systemsteifigkeitsmatrix \underline{K} kann schematisch wie folgt darstellen:

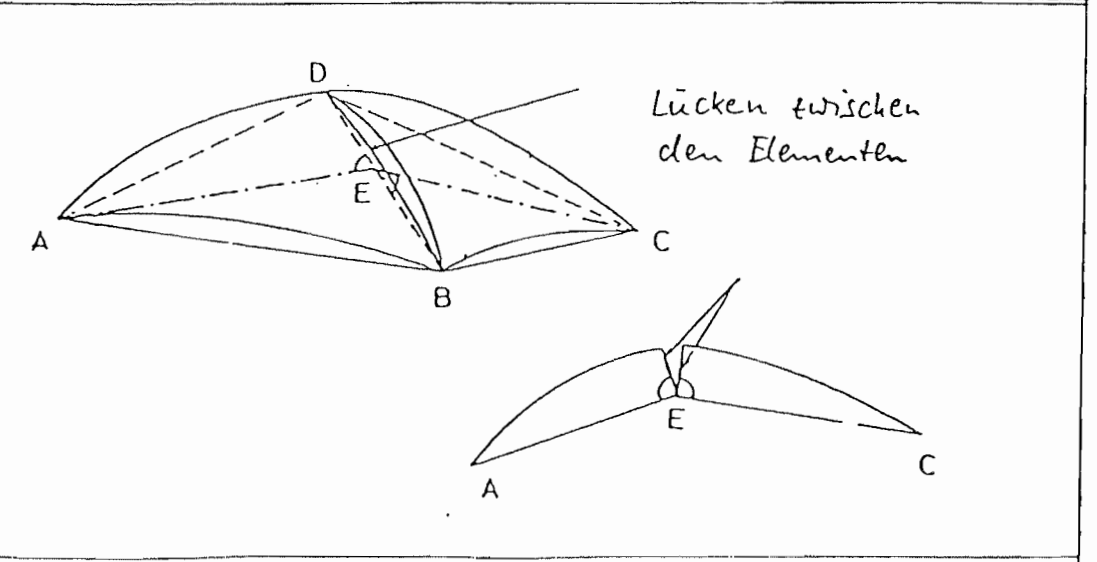


9. Finite-Element-Modelle für Schalen

(z.T. Tafelanschieb)



Ebene Schalenelemente



Flach gekrümmte Schalenelemente

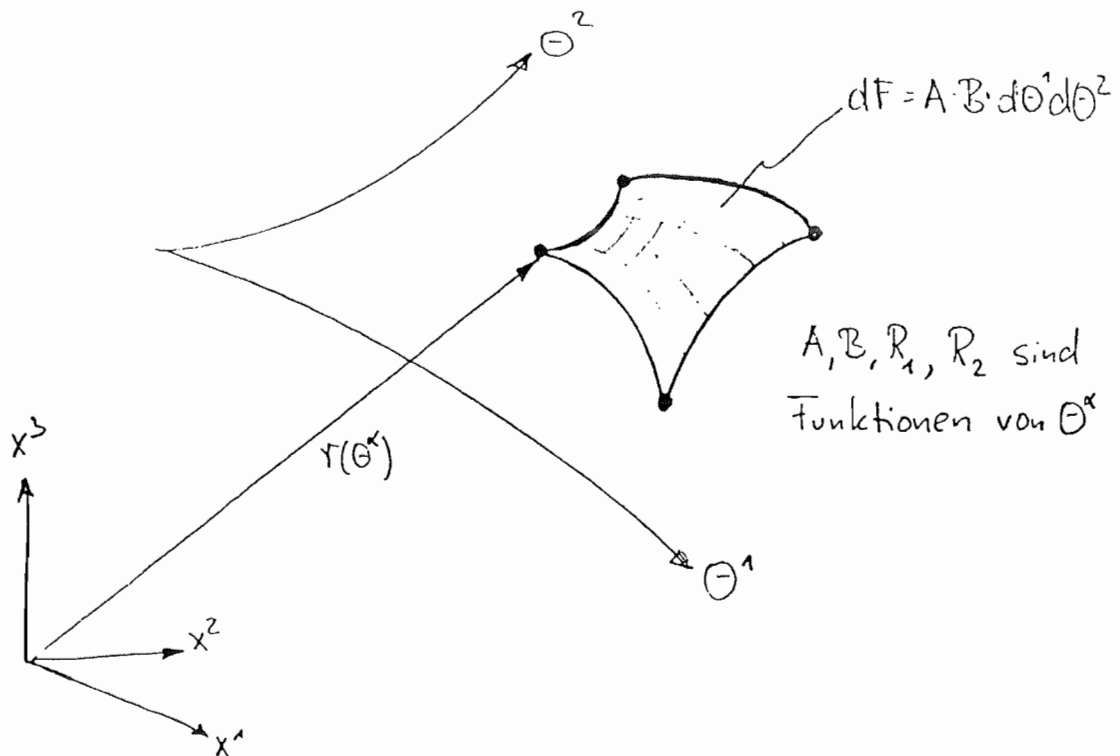
Inkrümmte Schalenelemente

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial_1}{A} & \frac{A_{12}}{AB} & \frac{1}{R_1} \\ \frac{B_1}{AB} & \frac{\partial_2}{B} & \frac{1}{R_2} \\ \left(\frac{\partial_2}{B} - \frac{A_{12}}{AB}\right) & \left(\frac{\partial_1}{A} - \frac{B_1}{AB}\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial_1}{A} \cdot \frac{1}{R_1} & \frac{A_{12}}{AB} \cdot \frac{1}{R_2} & \left[-\frac{A_{12}}{AB} \cdot \frac{\partial_2}{B} - \frac{\partial_1}{A} \cdot \frac{\partial_1}{A} \right] \\ \frac{B_1}{AB} \cdot \frac{1}{R_1} & \frac{\partial_2}{B} \cdot \frac{1}{R_2} & \left[-\frac{B_1}{AB} \cdot \frac{\partial_1}{A} - \frac{\partial_2}{B} \cdot \frac{\partial_2}{B} \right] \\ \left(\frac{\partial_2}{B} - \frac{A_{12}}{AB}\right) \frac{1}{R_1} & \left(\frac{\partial_1}{A} - \frac{B_1}{AB}\right) \frac{1}{R_2} & \left[-\left(\frac{\partial_1}{A} - \frac{B_1}{AB}\right) \frac{\partial_2}{B} - \left(\frac{\partial_2}{B} - \frac{A_{12}}{AB}\right) \frac{\partial_1}{A} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

Kirchhoff-Theorie:

2. Ableitung der Durchbiegung v^3



eine "Flaches" Schalen

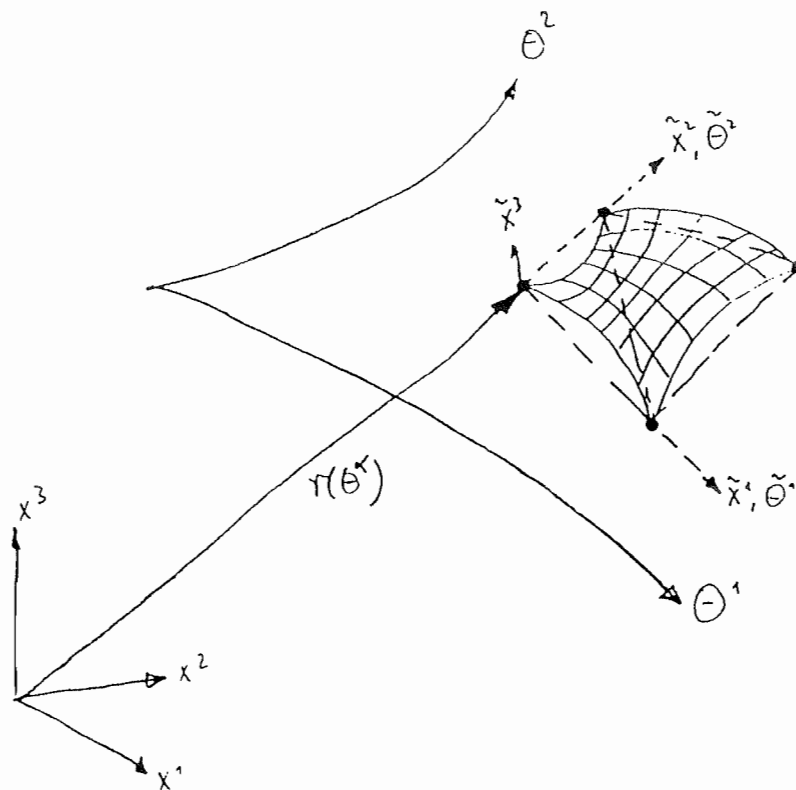
$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & \frac{1}{R_1} \\ 0 & \partial_2 & \frac{1}{R_2} \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

Scheibe

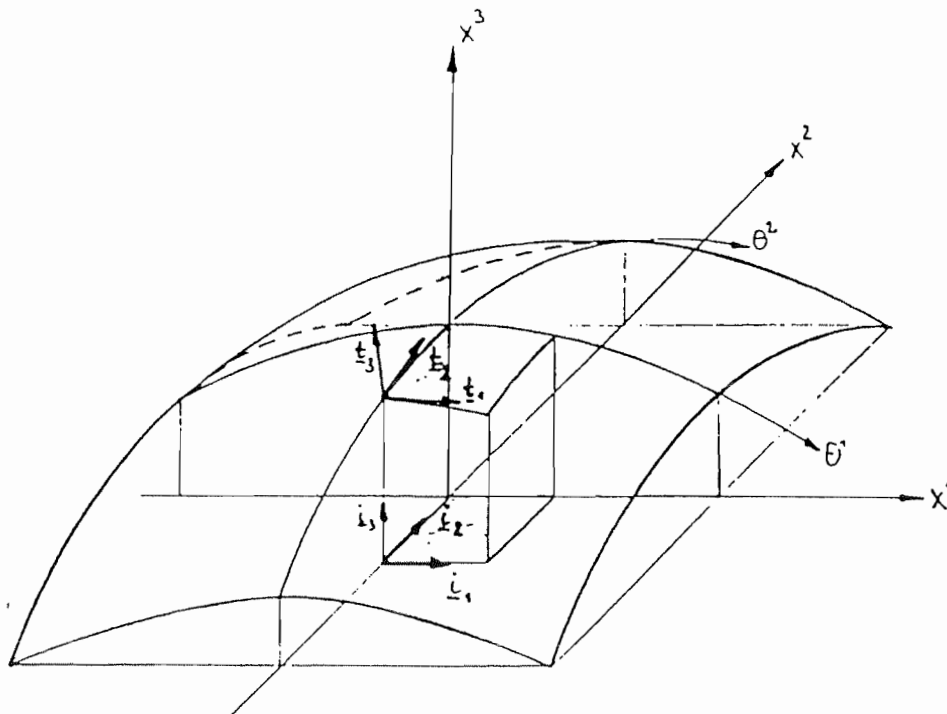
Kopplung Scheibe/Platte
nur über die Haupt-
krümmungsradien R_α

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 \frac{1}{R_1} & 0 & -\partial_{11} \\ 0 & \partial_2 \frac{1}{R_2} & -\partial_{22} \\ \partial_2 \frac{1}{R_1} & \partial_1 \frac{1}{R_2} & -2\partial_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

Platte

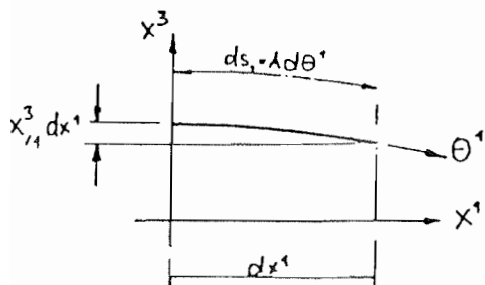


Flache Schalen



Schalen können als „flach“ bezeichnet werden, wenn der maximale Schalenstich kleiner als ein Fünftel der kürzeren Seitenlänge ist.

Dann kann die Bogenlänge der Flächenkoordinaten näherungsweise der auf die Grundrißebene projizierten Länge gleichgesetzt werden:



$$e^{\alpha} \approx x^{\alpha} ; \underline{t}_i \approx \underline{i}_i$$

$$ds_s \approx dx^{\alpha} \rightarrow$$

$$\underline{A} = \underline{B} = 1$$

$$(ds_s)^2 = (dx^{\alpha})^2 + (x^3_{,\alpha} \cdot dx^{\alpha})^2 \quad (\underline{A}_{,\alpha} = \underline{B}_{,\alpha} = 0)$$

$$= (1 + (x^3_{,\alpha})^2) (dx^{\alpha})^2 \Rightarrow \underline{(x^3_{,\alpha})^2} \ll 1$$

$$R_{\alpha} = - \frac{[1 + (x^3_{,\alpha})^2]^{3/2}}{x^3_{,\alpha\alpha}} \rightarrow$$

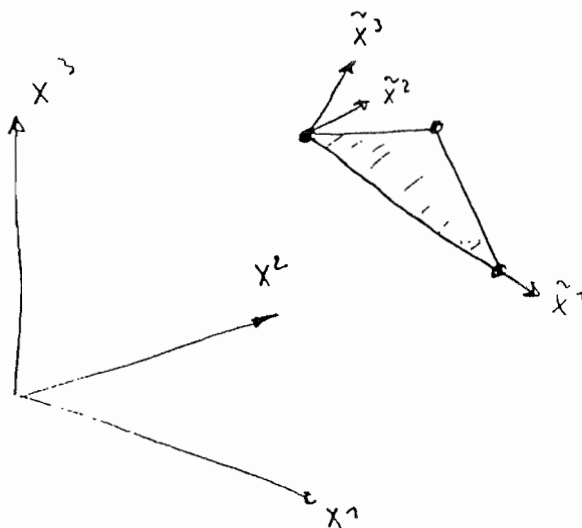
$$\underline{\underline{R_{\alpha} \approx - \frac{1}{x^3_{,\alpha\alpha}}}}$$

Ebene Schalenelemente

$$A = B = 1, \quad \frac{1}{\rho_\alpha} = 0 \Rightarrow \text{Scheibe / Platte}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_2 \\ \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Scheibe}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_{11} \\ -\partial_{22} \\ -2\partial_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^3 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Platte}$$

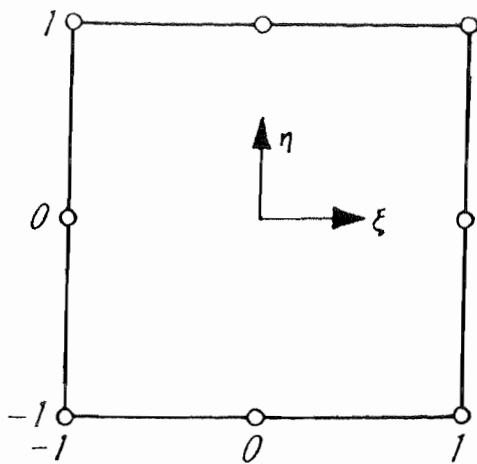
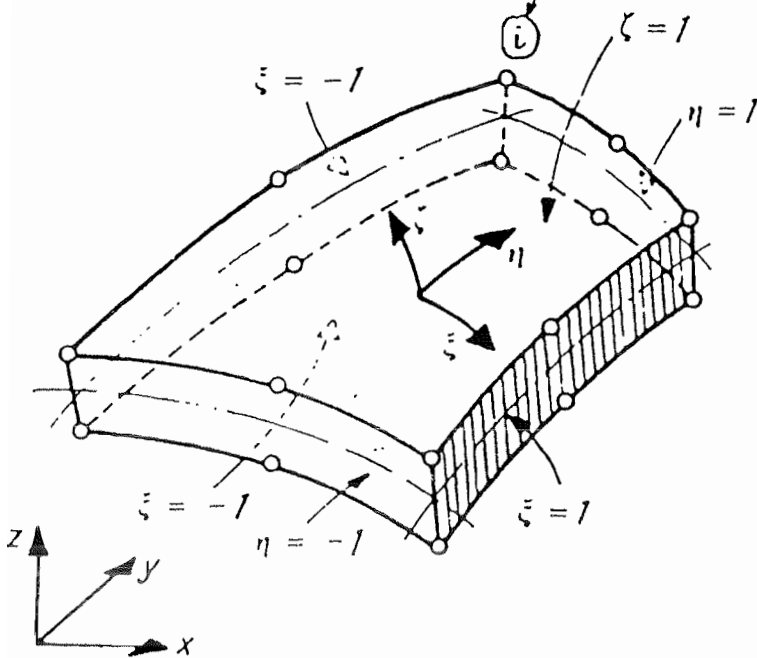


Kartesische Koord. \rightarrow $\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$

Formfunktion \rightarrow $\sum N(\xi, \eta)$

Knotenpunkt-Koord. \rightarrow $\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum N(\xi, \eta) \underbrace{\frac{(1+\xi)}{2}}_{N(\xi)} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{oben}} + \sum N(\xi, \eta) \underbrace{\frac{(1-\xi)}{2}}_{N(\xi)} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{unten}}$$



Dimensionslose Elementkoordinaten ξ, η
 Integration über Rechteck

Isoparametrisches Elementkonzept

Bewertung verschiedener Schalenelementtypen

	Gekrümmte Schalen- elemente	Gekrümmte "flache" Elemente	Ebene Schalen- elemente	Degenerierte isoparametr. Elemente
Theorie	kompliziert	mittel	einfach	einfach
Geometrie	exakt	gute Nähe- rung	grobe Nähe- rung	gute Nähe- rung
Lastmodell (Flächenlast)	exakt	gute Nähe- rung	nur Knoten- lasten	gute Nähe- rung
Kompatibili- tät	ja	nein	i.A. keine v-w Kompa- tibilität	ja
Starrkörper- bewegungen	Näherung	ja	ja	ja
Diskretisie- rungsauf- wand	hoch	mittel	niedrig	hoch
Integrations- aufwand zur Elementer- zeugung	hoch	mittel	niedrig	hoch

Alle zur Zeit verfügbaren Schalenelemente haben Vor- und Nachteile, die bei der Auswahl bzw. Anwendung gegeneinander abzuwägen sind! Ebenso sind die verschiedenen Elementeigenschaften bei der Interpretation der Ergebnisse zu berücksichtigen.

10. Stabilität von Schalen

(z.T. Tafelanschrift)

10.2. Beulen von Schalen am Beispiel der

Zylinderschale

Voraussetzungen:

- Theorie flacher Schalen (Vereinfachung)
- Theorie II. Ordnung: Nichtlineare Anteile werden nur bei den Dehnkräften berücksichtigt

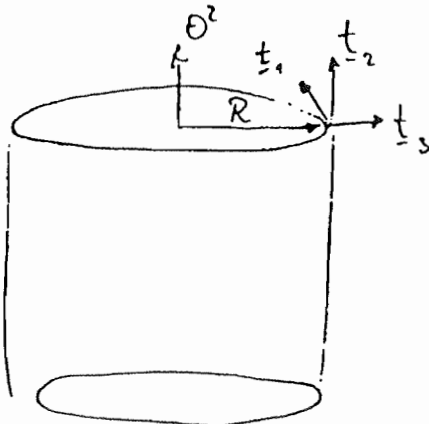
P.V.A. als Grundlage der FEM-Formulierung

$$\int_F \{ n_{\alpha\beta} \delta d_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta} \delta \beta_{\alpha\beta} - \bar{p}_i \delta v_i \} dF = 0$$

Einsetzen:

- des Werkstoffgesetzes (geometrieunabhängig)
- der Kinematik:

Zylinderschale: $A = R, B = 1, R_1 = R, R_2 = \infty$



Theorie flacher Schalen

$$A = B = 1$$

Kinematik

$$3\text{-D-Kontinuum: z.B. } \epsilon_{11} = u_{1,1} + \frac{1}{2} (u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} \cdot u_{k,j})$$

Transformation auf die Schalenmittelfläche mit entsprechenden Ansätzen ergibt:

$$\alpha_{11} = \underline{\underline{v_{,1}^1 + \frac{v^3}{R}}} + \frac{1}{2} \left[\left(v_{,1}^1 + \frac{1}{R} v^3 \right)^2 + \left(v_{,1}^2 \right)^2 + \left(v_{,1}^3 \right)^2 \right]$$

$$\alpha_{22} = \underline{\underline{v_{,2}^2}} + \frac{1}{2} \left[\left(v_{,2}^1 \right)^2 + \left(v_{,2}^2 \right)^2 + \left(v_{,2}^3 \right)^2 \right]$$

$$\alpha_{12} = \underline{\underline{v_{,2}^1 + v_{,1}^2}} + \left[v_{,2}^1 \left(v_{,1}^1 + \frac{1}{R} v^3 \right) + v_{,2}^2 \cdot v_{,1}^2 + \underline{\underline{v_{,1}^3 \cdot v_{,2}^3}} \right]$$

lineare
Anteile

nichtlineare Anteile
Th. II. Ordnung

Mögliche Näherung: Von den nichtlinearen Anteilen werden nur die unterstrichenen Terme verwendet

→ Technische Näherung nach DONELL

Es werden nur die nichtlinearen Terme aus Biegung (v^3) berücksichtigt!

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \partial_1 & 0 & -\partial_{11} \\ 0 & 0 & -\partial_{22} \\ \frac{1}{R} \partial_2 & 0 & -2\partial_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Verkrümmungen bleiben} \\ \text{linear (wie bisher)!} \end{array}$$

Die DONELI-Näherung war sinnvoll zur Erzielung analytischer Lösungen (von Hand).

Für die numerische Lösung können die vollständigen Gleichungen weiterverarbeitet werden:

Aufspaltung der Dehnungen in lineare und nichtlineare Anteile

$$\begin{aligned} \alpha_{\alpha\beta} &= \alpha_{\alpha\beta}^L + \alpha_{\alpha\beta}^{NL} \\ \delta \alpha_{\alpha\beta} &= \delta \alpha_{\alpha\beta}^L + \alpha_{\alpha\beta}^{NL} \end{aligned}$$

Für eine reine Weggrößenformulierung sind im PVA, die Schnittkräfte mit Hilfe des Werkstoffgesetzes zu eliminieren:

$$\begin{aligned} \text{z.B. } n_{12} &= D \frac{1-\nu}{2} \alpha_{12} = D \frac{1-\nu}{2} \alpha_{12}^L + D \frac{1-\nu}{2} \alpha_{12}^{NL} \\ &= n_{12}^L + \cancel{n_{12}^{NL}} \end{aligned}$$

Vernachlässigung im Sinne der Th. II Ordnung

PVA:

$$SA = \int_{\Gamma} \left\{ \underbrace{\delta \alpha_{\alpha\beta}^L n_{\alpha\beta}^L + \delta \beta_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}}_{\text{Lineare Steifigkeitsmatrix}} + \underbrace{\delta \alpha_{\alpha\beta}^{NL} n_{\alpha\beta}^{NL}}_{\substack{\text{geom.} \\ \text{matrix}}} - \delta v^i \bar{p}_i \right\} dF$$

wird im Rahmen der Theorie II. Ordnung als bekannt vorausgesetzt
Ermittlung von $n_{\alpha\beta}^L$ nach der Membrantheorie

Einsetzen von Verschiebungsansätzen
in das PVA

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{v}$$

Liefert $\left[\underline{S} \underline{v}^T \left\{ (\underline{k}_L - \underline{k}_G(\dot{n}_{\alpha\beta}^L)) \underline{v} - \bar{\underline{P}} \right\} = 0 \right]$

Theorie II Ordnung

i) Lösen des linearen Problems

$$\underline{k}_L \underline{v} = \bar{\underline{P}} \Rightarrow \underline{v} \rightarrow \alpha_{\alpha\beta}^L = \underline{D} \underline{v}$$

\downarrow
 $\dot{n}_{\alpha\beta}^L$

ii) zweiter Durchlauf: Spannungsproblem

$$(\underline{k}_L - \underline{k}_G(\dot{n}_{\alpha\beta}^L)) \underline{v} = \bar{\underline{P}} \Rightarrow \underline{v} \Rightarrow \dot{n}_{\alpha\beta}^L$$

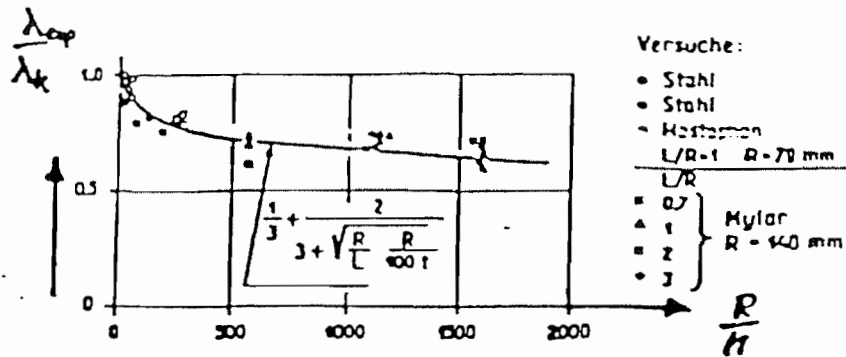
$\hat{=}$ Gleichgewicht am verformten System
ev. iterieren, bis sich \underline{v} nicht mehr
ändert

iii) oder Eigenwertproblem

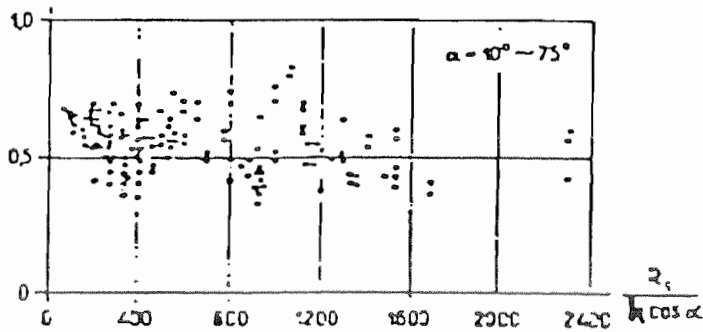
$$[\underline{k}_L - \lambda \underline{k}_G(\dot{n}_{\alpha\beta}^L)] \underline{v} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Beulast } P_{cr} = \lambda \bar{P}$$

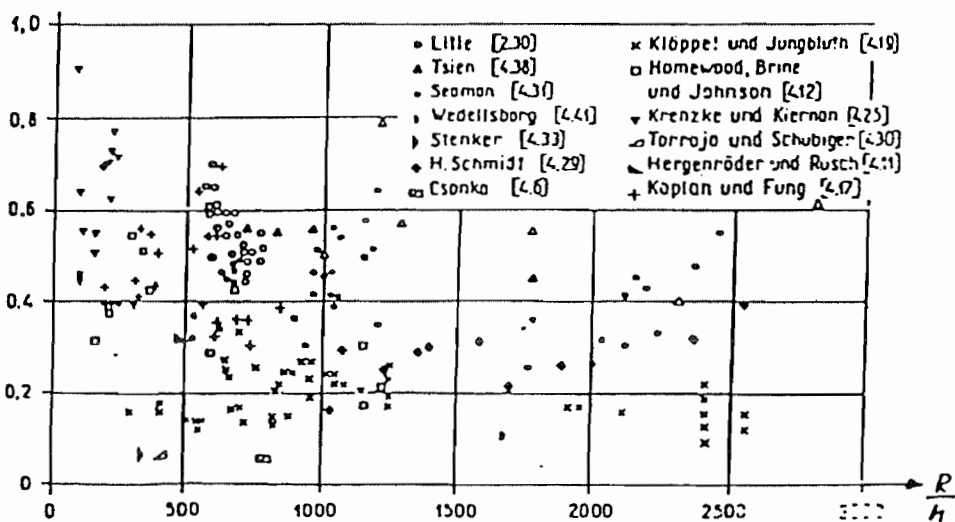
Versuchsergebnisse zu:



KZS unter Mantelndruck



Kegelschale unter Axiallast



Kugelschale unter Aussendruck

2 Vorgehen beim Beulsicherheitsnachweis

(201) Ideale Beulspannungen

Es sind die idealen Beulspannungen σ_{xS_i} , $\sigma_{\varphi S_i}$ und τ_{S_i} mit den in den Abschnitten 4 bis 7 angegebenen Gleichungen zu ermitteln.

Die idealen Beulspannungen dürfen auch durch geeignete Berechnungsverfahren (z.B. Finite-Element-Methode) ermittelt werden, sofern sichergestellt ist, daß diese die kritischen Beulmuster (das heißt die zum niedrigsten Eigenwert führenden Eigenformen) zuverlässig auffinden.

Anmerkung: Die in den Abschnitten 4 bis 7 angegebenen Gleichungen für die idealen Beulspannungen wurden überwiegend mit der klassischen linearen Beultheorie ermittelt. Berechnungen, die den zur Gleichgewichtsverzweigung führenden Beanspruchungszustand der perfekten Schale (Vorbeulzustand) genauer erfassen, können auch kleinere ideale Beulspannungen liefern. Diese brauchen nicht angesetzt zu werden, da die Differenz zu den mit den Gleichungen der Norm ermittelten idealen Beulspannungen mit den Abminderungsfaktoren nach Element 204 abgedeckt ist.

(202) Bezogene Schalenschlankheitsgrade

Mit den idealen Beulspannungen sind die bezogenen Schalenschlankheitsgrade $\bar{\lambda}_S$ mit den Gleichungen (1) bis (3) zu bestimmen.

$$\bar{\lambda}_{Sx} = \sqrt{\frac{f_{x,k}}{\sigma_{xS_i}}} \quad (1)$$

$$\bar{\lambda}_{S\varphi} = \sqrt{\frac{f_{\varphi,k}}{\sigma_{\varphi S_i}}} \quad (2)$$

$$\bar{\lambda}_{Sr} = \sqrt{\frac{f_{r,k}}{13 \cdot \tau_{S_i}}} \quad (3)$$

(203) Reale Beulspannungen

In Abhängigkeit von den bezogenen Schalenschlankheitsgraden $\bar{\lambda}_S$ sind Abminderungsfaktoren κ zu bestimmen. Die realen Beulspannungen $\sigma_{xS,R,k}$, $\sigma_{\varphi S,R,k}$ und $\tau_{S,R,k}$ ergeben sich durch Multiplikation der Abminderungsfaktoren mit dem charakteristischen Wert der Streckgrenze nach den Gleichungen (4) bis (6).

$$\sigma_{xS,R,k} = \kappa \cdot f_{y,k} \quad (4)$$

mit $\kappa = f(\bar{\lambda}_{Sx})$

$$\sigma_{\varphi S,R,k} = \kappa \cdot f_{y,k} \quad (5)$$

mit $\kappa = f(\bar{\lambda}_{S\varphi})$

$$\tau_{S,R,k} = \kappa \cdot \frac{f_{y,k}}{13} \quad (6)$$

mit $\kappa = f(\bar{\lambda}_{Sr})$

Anmerkung: Die Vorgehensweise mit Abminderungsfaktoren, die auf die Streckgrenze bezogen sind und in Abhängigkeit von bezogenen Schlankheitsgraden bestimmt werden, stimmt mit der Vorgehensweise bei anderen Stabilitätsfällen in Stahlbauten überein (siehe DIN 18 800 Teile 2 und 3).

(205) Grenzbeulspannungen

Die Grenzbeulspannungen sind nach den Gleichungen (9) bis (11) zu ermitteln:

$$\sigma_{xS,R,d} = \sigma_{xS,R,k} / \gamma_M \quad (9)$$

$$\sigma_{\varphi S,R,d} = \sigma_{\varphi S,R,k} / \gamma_M \quad (10)$$

$$\tau_{S,R,d} = \tau_{S,R,k} / \gamma_M \quad (11)$$

mit γ_M nach Element 206

(204) Abminderungsfaktoren

Die Abminderungsfaktoren κ ergeben sich je nach Schalenart und Beanspruchungsfall aus den Gleichungen (7) oder (8). Die Zuordnung erfolgt in den Abschnitten 4.3, 5.4, 6.3 und 7.3.

Normal imperfektionsempfindliche Schalenbeulfälle:

$$\bar{\lambda}_S \leq 0,4: \kappa_1 = 1 \quad (7a)$$

$$0,4 < \bar{\lambda}_S < 1,2: \kappa_1 = 1,274 - 0,686 \bar{\lambda}_S \quad (7b)$$

$$1,2 \leq \bar{\lambda}_S: \kappa_1 = 0,65 / \bar{\lambda}_S^2 \quad (7c)$$

Sehr imperfektionsempfindliche Schalenbeulfälle:

$$\bar{\lambda}_S \leq 0,25: \kappa_2 = 1 \quad (8a)$$

$$0,25 < \bar{\lambda}_S \leq 1,0: \kappa_2 = 1,233 - 0,933 \bar{\lambda}_S \quad (8b)$$

$$1,0 < \bar{\lambda}_S \leq 1,5: \kappa_2 = 0,3 / \bar{\lambda}_S^3 \quad (8c)$$

$$1,5 < \bar{\lambda}_S: \kappa_2 = 0,2 / \bar{\lambda}_S^3 \quad (8d)$$

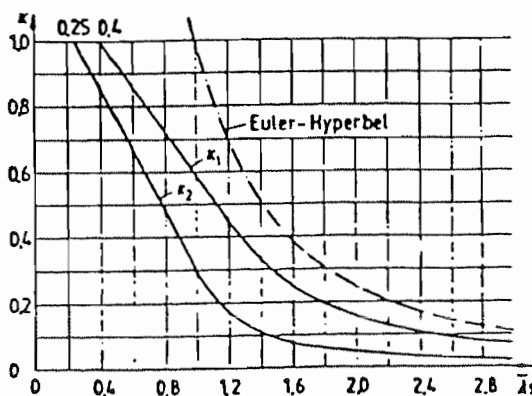


Bild 2. Abminderungsfaktoren κ (bezogene reale Beulspannungen) für Schalenbeulen (Grundbeulkurven)

(207) Einzelnachweise

Es sind je nach Beanspruchungsfall einer oder mehrere der folgenden Einzelnachweise zu führen:

$$\frac{\sigma_k}{\sigma_{xS,R,d}} \leq 1 \quad (14)$$

$$\frac{\sigma_{\varphi k}}{\sigma_{\varphi S,R,d}} \leq 1 \quad (15)$$

$$\frac{\tau}{\tau_{S,R,d}} \leq 1 \quad (16)$$

Hierin bedeuten:

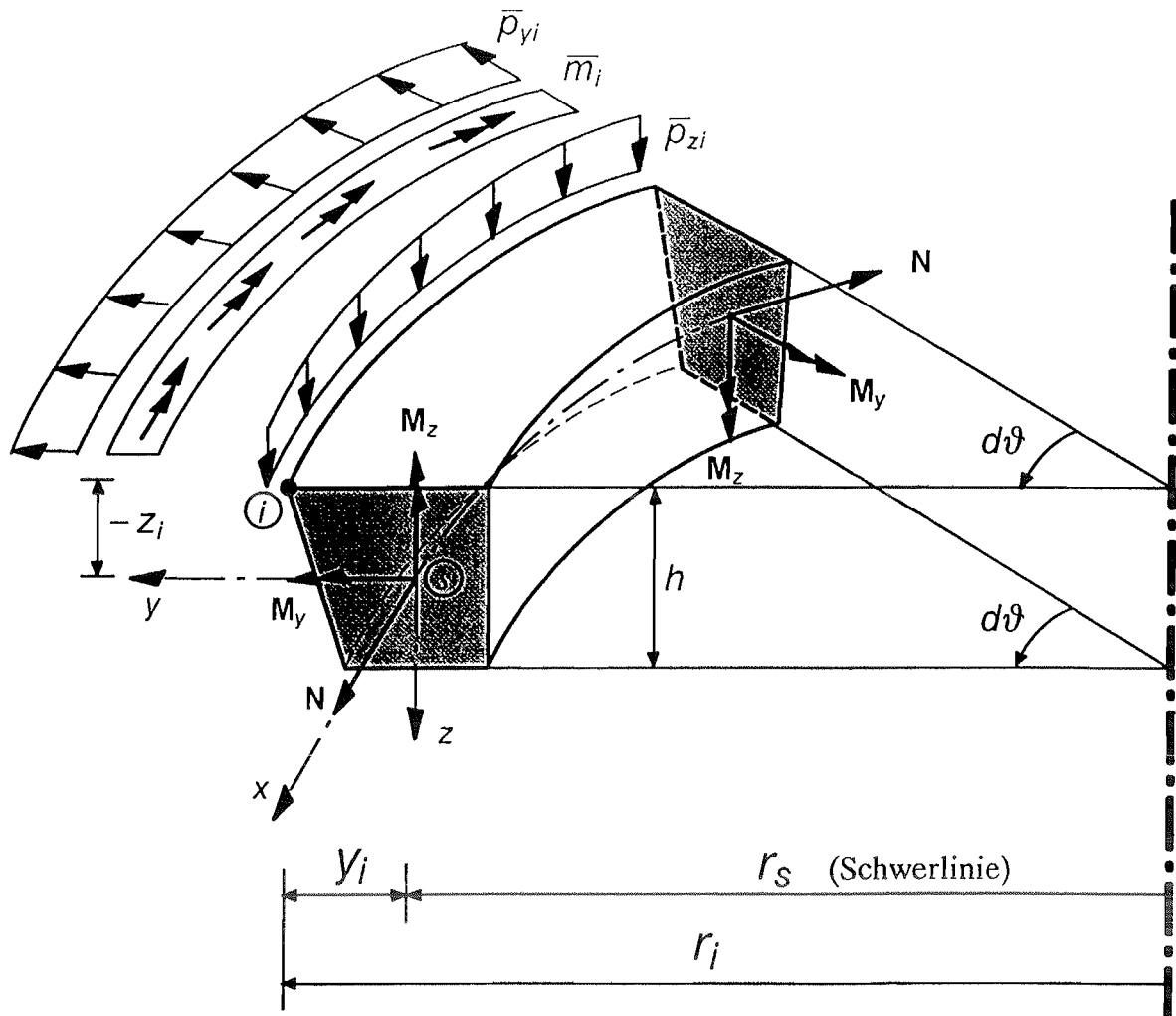
σ_k , $\sigma_{\varphi k}$, τ maßgebende Membrandruck- und -schubspannungen infolge der Bemessungswerte der Einwirkungen, berechnet nach der Elastizitätstheorie

(208) Nachweis bei kombinierter Beanspruchung

Bei Vorhandensein von mehr als einer der drei beulauflösenden Membranspannungen (Druck in Axial- bzw. Meridianrichtung, Druck in Umfangsrichtung, Schub) ist außer den Einzelnachweisen ein Nachweis unter kombinierter Beanspruchung mit den jeweils angegebenen maßgebenden Membranspannungen und Interaktionsbedingungen zu führen (siehe Abschnitte 4.5, 5.6, 6.5, 7.5).

11. Der dünne Kreisringbalken unter rotationssymmetrischer Belastung

11.1 Lasten und Schnittgrößen am differentiellen Element



11.2 Allgemeines

Voraussetzungen:

$$b \ll r_s \quad r_s = \text{Schwerpunktradius}$$

$$h \ll r_s \quad ([h, b] < r_s / 5 \div r_s / 10)$$

⇒ Berechnung als Balken

Die Verschiebungen und Verzerrungen sind klein im Sinne der Theorie I. Ordnung.

Rotationssymmetrie:

$$\Rightarrow N = \text{const} \quad ; \quad M_y, M_z = \text{const} \quad ; \quad Q_y, Q_z, M_T = 0 \quad ; \quad \bar{p}_i, \bar{m}_i = \text{const}$$

$$v_x = 0 \quad ; \quad v_z = \text{const} \quad ; \quad \varphi_y, \varphi_z = 0$$

11.3 Lasten

$$\text{Randlasten: } p_{ys} = \sum_i \bar{p}_{yi} \frac{r_i}{r_s} \cong \sum_i \bar{p}_{yi}$$

$$\text{Momente: } m_s = \sum_i \bar{m}_i \frac{r_i}{r_s} + \sum_i \bar{p}_{yi} \cdot z_i \frac{r_i}{r_s} - \sum_i \bar{p}_{zi} \cdot y_i \frac{r_i}{r_s}$$

$$T(y, z) = T_s + \frac{\Delta T_y}{b} \cdot y + \frac{\Delta T_z}{h} \cdot z$$

$$\Delta T_y = T_a - T_i$$

$$\Delta T_z = T_u - T_o$$

r_i = Radius am Lastangriffspunkt

11.4 Schnittgrößen

$$N = \sum_i \bar{p}_{yi} \cdot r_i = p_{ys} \cdot r_s \quad (\text{Kesselformel})$$

$$M_y = \sum_i (\bar{p}_{yi} \cdot z_i \cdot r_i) - \sum_i (\bar{p}_{zi} \cdot y_i \cdot r_i) + \sum_i (\bar{m}_i \cdot r_i) = m_s \cdot r_s$$

$$M_z = -EI_z \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T_y}{b}$$

Wegen der Rotationssymmetrie des geschlossenen Ringes und der Voraussetzung kleiner Verschiebungen sind die Spannungen infolge Lasten auch bei unsymmetrischen Stabquerschnitten in radialer Richtung (y -Richtung) konstant. Es ist keine Transformation auf die Hauptachsen erforderlich. (Es wird ein Moment $M_z = M_y \cdot I_{yz}/I_y$ erzwungen). Ebenso ist immer das Torsionsmoment $M_x = 0$.

11.5 Dehnungen

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta r(z)}{r_s} = \frac{\Delta r_s}{r_s} + \frac{\chi}{r_s} \cdot z$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha_T \cdot T(y, z) \quad (\text{Materialgesetz})$$

$$\varepsilon_x = \frac{p_{ys} \cdot r_s}{EA} + \frac{m_s \cdot r_s}{EI_y} \cdot z + \alpha_T \cdot T_s + \frac{\alpha_T \cdot \Delta T_z}{h} \cdot z$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0 \quad , \quad \gamma_{yz} = 0$$

Durch eine in radialer Richtung veränderliche Temperatur ΔT_y entstehen nur Zwängungsspannungen, jedoch keine Verschiebungen oder Verdrehungen.

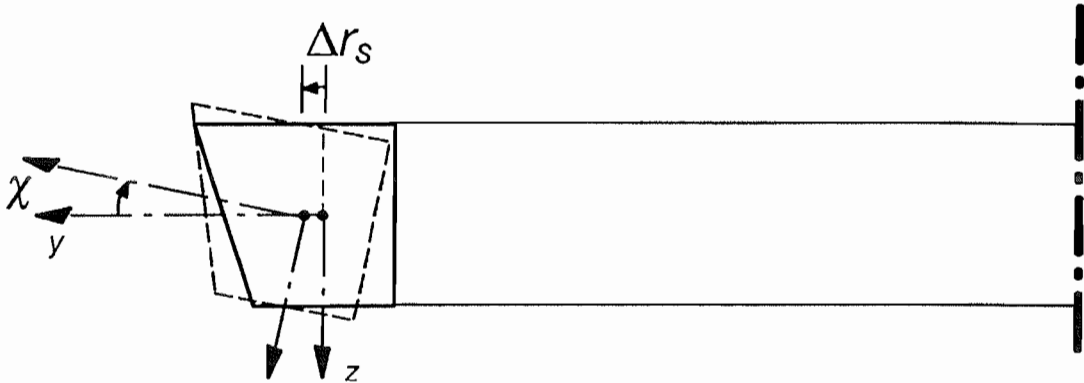
11.6 Spannungen

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - E \cdot \frac{\alpha_T \cdot \Delta T_y}{b} \cdot y$$

$$\sigma_x = \frac{p_{ys} \cdot r_s}{A} + \frac{m_s \cdot r_s}{I_y} \cdot z - E \cdot \frac{\alpha_T \cdot \Delta T_y}{b} \cdot y$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0 \quad , \quad \tau_{yz} = 0$$

11.7 Verformungen



$$\Delta r(z) = \Delta r(s) + \chi \cdot z$$

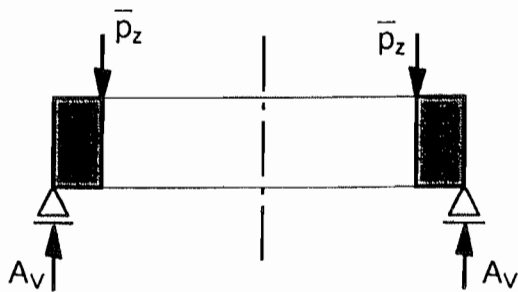
$$\Delta r(s) = \frac{N \cdot r_s}{EA} + \alpha_T \cdot T_s \cdot r_s = \frac{p_{ys} \cdot r_s^2}{EA} + \alpha_T \cdot T_s \cdot r_s$$

$$\chi = -\varphi_x = \frac{\partial \Delta r}{\partial z} = \frac{M_y \cdot r_s}{EI_y} + \frac{\alpha_T \cdot \Delta T_z}{h} \cdot r_s = \frac{m_s \cdot r_s^2}{EI_y} + \frac{\alpha_T \cdot \Delta T_z}{h} \cdot r_s$$

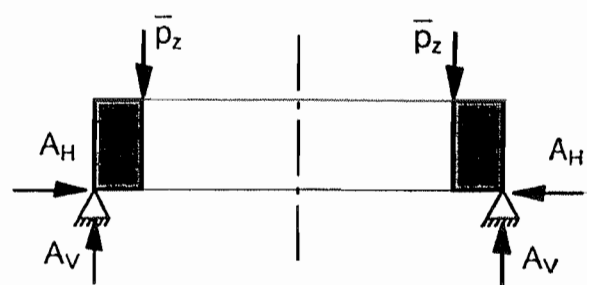
11.8 Auflagerkräfte

$$\sum V = 0: \quad A_V \cdot r_V = \sum_i (\bar{p}_{zi} \cdot r_i)$$

$$\Rightarrow A_V = \sum_i (\bar{p}_{zi} \cdot r_i) / r_V \equiv \sum_i \bar{p}_{zi}$$



statisch bestimmte Lagerung



statisch unbestimmte Lagerung

Flächentragwerke II			Vorlesungsplan SS 1999
Woche	Datum	Vorlesung Mi 8 ³⁰ –10 ⁰⁰ Raum 2760	Übung Mi 10 ¹⁵ –11 ⁴⁵ Raum 2760
1	5. Mai	1. Einführung 2. Tragverhalten der Schalen 3.1 Geometrie, Tangentenvektoren	Ü 8.1 (FTW I): Kreis(ring)platten – Zusammengesetzte Platten mit KGV unter Gleichlast und Temperatur
2	12. Mai	3. Geometrische Grundlagen 3.2 Krümmung einer Fläche 3.3 Änderung der Tangentenvektoren	Ü 3.4 Spezielle Geometrien/ Rotationsflächen
3	19. Mai	4. Membrantheorie 4.1 Voraussetzungen 4.3 Kräftegleichgewicht Membran	Ü 4.4 Membrantheorie (Schnittgrößen) Kegel mit Wasserfüllung, Lösung mit Hilfe der GG–DGL
4	26. Mai	Pfingstferien	Pfingstferien
5	2. Juni	4. Membrantheorie 4.4 Membrantheorie der Rotationsschale	Ü 4.4 Membrantheorie (Spitzkuppel)
6	9. Juni	5. Kinematische Beziehungen 5.1 Struktur der Grundgleichungen 5.4 Verzerrungs–Verschiebungs– Bez.	Ü 4.4 Nicht–rotationssymm. Belastg. Zylinder unter Randlasten, Wind
7	16. Juni	5. Kinematische Beziehungen (5.5) 6. Werkstoffgesetz , 7. Biegetheorie, (Kap. 7.1 Momentengleichgew..)	Ü 5.Verformungen von Membransch Zylinderbehälter unter Innendruck Kegel mit Wasserfüllung
8	23. Juni	7. Biegetheorie der Schalen 7.4 Matrizendarst. Gleichgewichtsgl. 7.5 Biegetheorie kreiszyl. Behälter	Ü 7.6 Biegetheorie Formelsammlung für Rot.Schalen Zylinder mit Wasserfüllung
9	30. Juni	8. Numerische Berechnungsverfahren für Rotationsschalen	Ü 7.6 Zusammengesetzte Schale Zylinder unter Temperatur, abgestufte Wanddicke
10	7. Juli	9. Finite Element Modelle für Schalen 9.1 Grundlagen , Schalenelemente Anhang: Herleitung GG–bez.: PvV	Ü 7.6 Zusammengesetzte Schale Näherungslösung f. Kugel– u. Kegelschale, Kegel unter Randlast
11	14. Juli	10. Beulen von Schalen am Beispiel der Zylinderschale	Ü Berechnung mit dem im CAL implementierten Ringelement Kegelschale mit Randlast
12	21. Juli	10. Beulen von Schalen (Film)	Ü Zusammengesetzte Behälterschale Kugel / Zylinder, Lastfälle EG, Füllung, Temperatur, Vorspannung
13	28. Juli	Ü Zus.gesetzte Schale, Kreisringbalken Berechnung mit dem Ringelement (CAL) Wasserbehälter, Silo	Ü Beulen von Schalen Zylinder unter Axiallast u. Manteldruck Anwendung der DIN 18800 Teil 4

Flächentragwerke II

Vorlesungsplan
SS 1994

Woche	Datum	Vorlesung Mi 8 ³⁰ -10 ⁰⁰ Raum 0606	Übung Do 8 ¹⁵ -9 ⁴⁵ Raum 2120B
1	4. Mai 5. Mai	1. Einführung 2. Tragverhalten der Schalen 3.1 Geometrie, Tangentenvektoren	3. Geometrische Grundlagen 3.2 Krümmung einer Fläche 3.3 Änderung der Tangentenvektoren
2	11. Mai 12. Mai	Ü 3.4 Spezielle Geometrien/ Rotationsflächen	Chr. Himmelfahrt
3	18. Mai 19. Mai	4. Membrantheorie 4.1 Voraussetzungen 4.3 Kräftegleichgewicht Membran	4. Membrantheorie 4.4 Membrantheorie der Rotationssch.
4	25. Mai 26. Mai	Pfingsten	Ü 4.4 Membrantheorie (Schnittgrößen) Kegel mit Wasserfüllung "Baustatische Methode"
5	1. Juni 2. Juni	Ü 4.4 Membrantheorie (Schnittgrößen) Spitzkuppel	Fronleichnam
6	8. Juni 9. Juni	5. Kinematische Beziehungen 5.1 Struktur der Grundgleichungen 5.4 Verzerrungs-Verschiebungs- Bez.	Ü 4.4 Nicht-rotationssymm. Belastg. Zylinder unter Randlasten Windbelastung
7	15. Juni 16. Juni	5. Kinematische Beziehungen (5.5) 6. Werkstoffgesetz	Ü 5. Verformungen von Membransch Zylinderbehälter unter Innendruck Kegel mit Wasserfüllung
8	22. Juni 23. Juni	7. Biegetheorie der Schalen 7.1 Momenten-Gleichgewichtsgl. 7.4 Matrizendarst. Gleichgewichtsgl.	7. Biegetheorie der Schalen 7.5 Biegetheorie kreiszyl. Behälter
9	29. Juni 30. Juni	Ü 7.6 Biegetheorie Formelsammlung für Rot.Schalen Zylinder mit Wasserfüllung	Ü 7.6 Zusammengesetzte Schale Zylinder unter Temperatur, abgestufte Wanddicke
10	6. Juli 7. Juli	8. Herleitung der Gleichgewichtsbeziehungen aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten (PVA)	9. Numerisches Berechnungsverfahren für Rotationsschalen
11	13. Juli 14. Juli	10. Finite Element Modelle für Schalen	Ü Zusammengesetzte Behälterschale Kugel / Zylinder, Lastfälle EG, Füllung, Temperatur, Vorspannung
12	20. Juli 21. Juli	Ü Zusammengesetzte Behälterschale Fortsetzung, Modellergänzung mit Kreisringbalken	Ü CAL88 Berechnung eines Stahlwasserbehälters,
13	27. Juli 28. Juli	11. Beulen von Schalen am Beispiel der Zylinderschale	11. Beulen von Schalen

Anhang: Systematische Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen und der statischen Randbedingungen aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten (PvA)

$$\delta W = \underbrace{\int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - \bar{k}_i \delta u^i) dV}_{\delta W^i} - \underbrace{\int_{O_p} \bar{p}_i \delta u^i dO}_{\delta W^a} = 0$$

innere Arbeit *äußere Arbeit*

Das Prinzip der virtuellen Arbeiten ist das globale Äquivalent der Gleichgewichtsbedingungen (= lokale Differentialgleichungen für einen Punkt des Kontinuums).

Durch partielle Integration des Volumenintegrals für die innere Arbeit und Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung kann man das PvA direkt in die Gleichgewichtsbedingungen überführen. Als Nebenprodukt erhält man zusätzlich die Definitionsgleichungen für die statischen Randbedingungen.

Beispiel: Gleichgewichtsbedingungen des dreidimensionalen Kontinuums (in kartesischen Koordinaten):

$$\delta W^i = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\delta W^i = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \delta (u_{i,j} + u_{j,i}) dV$$

Partielle Integration:

$$\int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV = \int_{O_p + O_u} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dO - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV = 0$$

Einsetzen:

$$\delta W = \int_{O_p} \underbrace{\sigma_{ij} n_j}_{p_i} \delta u_i dO + \int_{O_u} \cancel{\sigma_{ij} n_j} \delta u_i dO - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV - \int_V \bar{k}_i \delta u_i dV - \int_{O_p} \bar{p}_i \delta u_i dO = 0$$

Der zweite Integrand entfällt unter der Voraussetzung, daß die geometrischen Randbedingungen erfüllt sind: $\delta u_i = 0$ auf O_u .

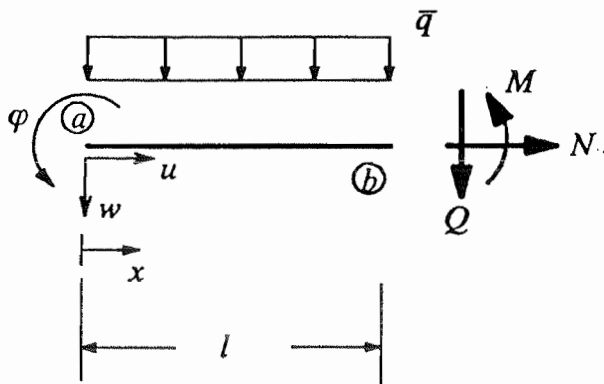
$$\delta W = \int_{O_p} (\underbrace{\sigma_{ij} n_j - \bar{p}_i}_{p_i}) \delta u_i dO - \int_V (\sigma_{ij,j} + \bar{k}_i) \delta u_i dV = 0$$

Fundamentallemma der Variationsrechnung:

$\delta W = 0$ für beliebige virtuelle Verschiebungen δu_i (die allerdings die geometrischen Randbedingungen erfüllen), ist nur erfüllt, wenn die Klammerausdrücke im Integranden selber Null sind;

$\sigma_{ij,j} + \bar{k}_i = 0$	in V	Gleichgewicht
$\sigma_{ij} n_j = p_i = \bar{p}_i$	auf O_p	stat. Randbedgn.

Beispiel: Gleichgewichtsbedingungen des Stabes für Biegung und Längskraft



$$\text{PvA: } \delta W = \int_l (M \delta \kappa + Q \delta \gamma + N \delta \epsilon - \bar{q} \delta w) dl - [\bar{M} \delta \varphi + \bar{Q} \delta w + \bar{N} \delta u]_a^b = 0$$

$$\text{Kinematik: } \gamma = \varphi + w' \cong 0 \Rightarrow \varphi = -w'$$

(Vernachlässigung der Schubverzerrungen)

$$\text{Krümmung: } \kappa = \varphi' = -w''$$

$$\text{Längsdehnung: } \epsilon = u'$$

$$\delta W^i = \int_l (-M \delta w'' + N \delta u') dl$$

$$\delta W^a = - \int_l \bar{q} \delta w dl - [\bar{M} \delta w' + \bar{Q} \delta w + \bar{N} \delta u]_a^b$$

Partielle Integration:

$$a) \int_l -M\delta w'' dl = [-M\delta w']_a^b - \underbrace{\int_l -M'\delta w' dl}_{[-M'\delta w]_a^b} - \int_l -M''\delta w dl$$

$$b) \int_l N\delta u' dl = [N\delta u]_a^b - \int_l N'\delta u dl$$

Einsetzen:

$$\delta W = [-M\delta w']_a^b - [-M'\delta w]_a^b + \int_l -M''\delta w dl$$

$$+ [N\delta u]_a^b - \int_l N'\delta u dl - \int_l \bar{q}\delta w dl$$

$$+ [\bar{M}\delta w']_a^b - [\bar{Q}\delta w]_a^b - [\bar{N}\delta u]_a^b = 0$$

$$\delta W = \int_l (-M'' - \bar{q})\delta w dl - \int_l N'\delta u dl$$

$$+ [\bar{M} - M]_a^b \delta w' - [\bar{Q} - M']_a^b \delta w + [\bar{N} - N]_a^b \delta u = 0$$

Für beliebige Variationen von δw , δu muß gelten:

$\left. \begin{aligned} M'' + \bar{q} &= 0 \\ N' &= 0 \end{aligned} \right\}$	<i>Gleichgewicht im Stab</i>
$\left. \begin{aligned} M &= \bar{M} \\ M' &= \bar{Q} \\ N &= \bar{N} \end{aligned} \right\}$	<i>Stat. Randbedingungen an den Stabenden</i>

Werkstoffgesetz: $\kappa = \frac{M}{EI} \Rightarrow M'' = EI\kappa'' = -EIw''''$

$$EIw'''' = -\bar{q}$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeiten ist wegen seiner globalen Form (Integral über das gesamte Körpervolumen) besonders geeignet zur näherungsweise Lösung der Gleichgewichtsbedingungen:

Das Fundamentallemma der Variationsrechnung sagt, daß der Arbeitsausdruck $\delta W = 0$ für beliebige virtuelle Verschiebungen erfüllt werden kann, wenn der Klammerausdruck, der die Gleichgewichtsbedingungen enthält, zu Null gesetzt wird. Setzt man nun für die Verschiebungen eine Näherung ein, z.B. einen Polynomansatz, so erhält man damit eine Näherung für die Gleichgewichtsbedingungen, die umso besser ist, je mehr der Ansatz mit den wirklichen Verschiebungen übereinstimmt.

Dieser Sachverhalt wird ausgenutzt, wenn

- a) die Lösung der Differentialgleichungen des Gleichgewichts analytisch zu schwierig ist:
(Bereichsweise) Verschiebungsansätze für die ganze Struktur \Rightarrow (Finite)- Element Methoden
- b) das Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen an einem infinitesimalen (gekrümmten Schalen-) Element zu kompliziert und unübersichtlich wird:
Ausgehend von bekannten Gleichungen (z.B. für das Kontinuum) wird ein Verschiebungsansatz in nur eine Richtung gemacht (z.B. über die Schalendicke).
 \Rightarrow Herleitung der Schalengleichungen direkt aus den Kontinuumsgleichungen.

Voraussetzung der Näherungsverfahren auf der Basis des Prinzips der virtuellen Verschiebungen:

- Die Verschiebungsansätze müssen die geometrischen Randbedingungen und die kinematischen Grundgleichungen ($\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{u}$) erfüllen.
- Bei den numerischen Lösungsverfahren (FEM) wird auch die Kenntnis des Werkstoffgesetzes ($\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}$) vorausgesetzt.

Für die Schalen wurden die kinematischen Grundgleichungen bereits in allgemeiner Form aus den Verzerrungen des Kontinuums durch Verschiebungsansätze über die Schalendicke hergeleitet (Kap. 5).

Damit stehen alle wesentlichen Informationen zur Verfügung, um die Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen der technischen Schalenbiegetheorie auf der Basis des PVA zu wiederholen. Als Nebenprodukte ergeben sich auf natürliche Weise die Definitionsgleichungen für die zu den Verzerrungen korrespondierenden Schnittkräfte, und die statischen Randbedingungen.

Prinzip der virtuellen Arbeiten (im Kontinuum):

$$\delta W = \int_V (\bar{\sigma}_{11} \delta \bar{\epsilon}_{11} + \bar{\sigma}_{22} \delta \bar{\epsilon}_{22} + \bar{\sigma}_{33} \delta \bar{\epsilon}_{33} + \bar{\sigma}_{12} \delta \bar{\gamma}_{12} + \bar{\sigma}_{13} \delta \bar{\gamma}_{13} + \bar{\sigma}_{23} \delta \bar{\gamma}_{23}) dV \quad \left. \vphantom{\int_V} \right\} \delta W^i$$

$$- \int_V \bar{k}_i \delta \bar{v}^i dV - \int_{O_p} \bar{p}_i \delta \bar{v}^i dO = 0 \quad \left. \vphantom{\int_V} \right\} \delta W^a$$

Volumenelement im (gekrümmten) Schalenkontinuum:

$$dV = \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_1}\right) A d\Theta^1 \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_2}\right) B d\Theta^2 d\Theta^3$$

$$= \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_2}\right) AB d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3$$

Massenkraft pro Volumeneinheit (z.B. Eigengewicht): \bar{k}_i

Vorschreibbare Randkräfte: $\bar{p}_i = \sigma_{ij} n_j$

(mit n_j = Normalenvektor senkr. zum Schalenrand)

Verschiebungsansatz über die Schalendicke:

$$\bar{v}^\alpha = v^\alpha + \Theta^3 \varphi^\alpha$$

$$\bar{v}^3 = v^3$$

Verzerrungen:

$$\bar{\epsilon}_{\alpha\beta} = \alpha_{\alpha\beta} + \Theta^3 \beta_{\alpha\beta}$$

$$\bar{\gamma}_{\alpha 3} = \gamma_{\alpha 3}$$

$$\bar{\epsilon}_{33} = 0$$

Kinematische Grundgleichungen:

$$\bar{\alpha}_{11} = \left(\frac{1}{A} v^1_{,1} + \frac{A_{,2}}{AB} v^2 + \frac{1}{R_1} v^3\right) / \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_1}\right)$$

$$\bar{\alpha}_{22} = \left(\frac{1}{B} v^2_{,2} + \frac{B_{,1}}{AB} v^1 + \frac{1}{R_2} v^3\right) / \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_2}\right)$$

$$\bar{\alpha}_{12} = \frac{\frac{1}{A} v^2_{,1} - \frac{A_{,2}}{AB} v^1}{1 + \frac{\Theta^3}{R_1}} + \frac{\frac{1}{B} v^1_{,2} - \frac{B_{,1}}{AB} v^2}{1 + \frac{\Theta^3}{R_2}} \quad (= \bar{\alpha}_{12} + \bar{\alpha}_{21})$$

$$\bar{\beta}_{11} = \left(\frac{1}{A} \varphi^{1,1} + \frac{A_{,2}}{AB} \varphi^2 \right) / \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_1} \right)$$

$$\bar{\beta}_{22} = \left(\frac{1}{B} \varphi^{2,2} + \frac{B_{,1}}{AB} \varphi^1 \right) / \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_2} \right)$$

$$\bar{\beta}_{12} = \frac{\frac{1}{A} \varphi^{2,1} - \frac{A_{,2}}{AB} \varphi^1}{1 + \frac{\Theta^3}{R_1}} + \frac{\frac{1}{B} \varphi^{1,2} - \frac{B_{,1}}{AB} \varphi^2}{1 + \frac{\Theta^3}{R_2}} \quad (= \bar{\beta}_{12} + \bar{\beta}_{21})$$

$$\bar{\gamma}_{13} = \left(\varphi^1 + \frac{1}{A} v^{3,1} - \frac{1}{R_1} v^1 \right) / \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_1} \right)$$

$$\bar{\gamma}_{23} = \left(\varphi^2 + \frac{1}{B} v^{3,2} - \frac{1}{R_2} v^2 \right) / \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_2} \right)$$

(Kirchhoff-Love Hypothese : $\gamma_{a3} \approx 0$)

Einsetzen der Schalenverzerrungen in die innere virtuelle Arbeit:

$$\begin{aligned} \delta W^i = & \int_V \left[\bar{\sigma}_{11} \frac{\delta a_{11}}{\left(1 + \frac{\Theta^3}{R_1} \right)} + \bar{\sigma}_{11} \Theta^3 \frac{\delta \beta_{11}}{\left(1 + \frac{\Theta^3}{R_1} \right)} \right. \\ & + \bar{\sigma}_{22} \frac{\delta a_{22}}{\left(1 + \frac{\Theta^3}{R_2} \right)} + \bar{\sigma}_{22} \Theta^3 \frac{\delta \beta_{22}}{\left(1 + \frac{\Theta^3}{R_2} \right)} \\ & + \bar{\sigma}_{12} \left[\frac{\delta \bar{a}_{12}}{\left(1 + \frac{\Theta^3}{R_1} \right)} + \frac{\delta \bar{a}_{21}}{\left(1 + \frac{\Theta^3}{R_2} \right)} \right] + \bar{\sigma}_{12} \Theta^3 \left[\frac{\delta \bar{\beta}_{12}}{\left(1 + \frac{\Theta^3}{R_1} \right)} + \frac{\delta \bar{\beta}_{21}}{\left(1 + \frac{\Theta^3}{R_2} \right)} \right] \\ & \left. + \bar{\sigma}_{13} \frac{\delta \gamma_{13}}{\left(1 + \frac{\Theta^3}{R_1} \right)} + \bar{\sigma}_{23} \frac{\delta \gamma_{23}}{\left(1 + \frac{\Theta^3}{R_2} \right)} \right] A \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_1} \right) B \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_2} \right) d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3 \end{aligned}$$

Integration über die Schalendicke:

$$\begin{aligned}
\delta W^i = & \int_A \left\{ B \int \underbrace{\bar{\sigma}_{11} \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_2}\right) d\Theta^3 \delta a_{11}}_{n_{11}} A + B \int \underbrace{\bar{\sigma}_{11} \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_2}\right) \Theta^3 d\Theta^3 \delta \beta_{11}}_{m_{11}} A \right. \\
& + A \int \underbrace{\bar{\sigma}_{22} \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_1}\right) d\Theta^3 \delta a_{22}}_{n_{22}} B + A \int \underbrace{\bar{\sigma}_{22} \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_1}\right) \Theta^3 d\Theta^3 \delta \beta_{22}}_{m_{22}} B \\
& + B \int \underbrace{\bar{\sigma}_{12} \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_2}\right) d\Theta^3 \delta \bar{a}_{12}}_{n_{12}} A + B \int \underbrace{\bar{\sigma}_{12} \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_2}\right) \Theta^3 d\Theta^3 \delta \bar{\beta}_{12}}_{m_{12}} A \\
& + A \int \underbrace{\bar{\sigma}_{21} \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_1}\right) d\Theta^3 \delta \bar{a}_{21}}_{n_{21}} B + A \int \underbrace{\bar{\sigma}_{21} \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_1}\right) \Theta^3 d\Theta^3 \delta \bar{\beta}_{21}}_{m_{21}} B \\
& \left. + B \int \underbrace{\bar{\sigma}_{13} \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_2}\right) d\Theta^3 \delta \gamma_{13}}_{q_1} A + A \int \underbrace{\bar{\sigma}_{23} \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_1}\right) d\Theta^3 \delta \gamma_{23}}_{q_2} B \right\} d\Theta^2 d\Theta^3
\end{aligned}$$

Die aus dem Volumenelement dV resultierenden Geometrieparameter müssen bei der Integration über Θ^3 mitberücksichtigt werden. Damit erhält man exakt dieselbe Schnittkraftdefinition wie im Kap. 3 bei der anschaulichen Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen.

$$\begin{aligned}
\delta W^i = & \int_A \left\{ B n_{11} A \delta a_{11} + B m_{11} A \delta \beta_{11} \right. \\
& + A n_{22} B \delta a_{22} + A m_{22} B \delta \beta_{22} \\
& + B n_{12} A \delta \bar{a}_{12} + B m_{12} A \delta \bar{\beta}_{12} \\
& + A n_{21} B \delta \bar{a}_{21} + A m_{21} B \delta \bar{\beta}_{21} \\
& \left. + B q_1 A \delta \gamma_{13} + A q_2 B \delta \gamma_{23} \right\} d\Theta^1 d\Theta^2
\end{aligned}$$

Einsetzen der kinematischen Grundgleichungen:

$$\begin{aligned} \delta W^i = \int_A \{ & Bn_{11} \delta[v^1_{,1} + \frac{A_{,2}}{B} v^2 + \frac{A}{R_1} v^3] + Bm_{11} \delta[\varphi^1_{,1} + \frac{A_{,2}}{B} \varphi^2] \\ & + An_{22} \delta[v^2_{,2} + \frac{B_{,1}}{A} v^1 + \frac{B}{R_2} v^3] + Am_{22} \delta[\varphi^2_{,2} + \frac{B_{,1}}{A} \varphi^1] \\ & + Bn_{12} \delta[v^2_{,1} - \frac{A_{,2}}{B} v^1] & + Bm_{12} \delta[\varphi^2_{,1} - \frac{A_{,2}}{B} \varphi^1] \\ & + An_{21} \delta[v^1_{,2} - \frac{B_{,1}}{A} v^2] & + Am_{21} \delta[\varphi^1_{,2} - \frac{B_{,1}}{A} \varphi^2] \\ & + Bq_1 \delta[A\varphi^1 + v^3_{,1} - \frac{A}{R_1} v^1] + Aq_2 \delta[B\varphi^2 + v^3_{,2} - \frac{B}{R_2} v^2] \} \underbrace{d\Theta^1 d\Theta^2}_{dA^*} \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und partielle Integration der Terme, die Ableitungen der virtuellen Verschiebungen enthalten:

z.B.:

$$\int_A (Bn_{\alpha\beta}) \delta v^{\beta}_{, \alpha} dA^* = \int_S \underbrace{(Bn_{\alpha\beta}) n^*_\alpha}_{\text{Randkräfte } p_\beta} \delta v^\beta ds^* - \int_A (Bn_{\alpha\beta})_{, \alpha} \delta v^\beta dA^*$$

Randkräfte p_β

$$dA^* = d\Theta^1 d\Theta^2$$

Normaleneinheitsvektor n^*_α

$$n^*_\alpha ds^* = d\Theta^\alpha$$

(senkrecht zum Rand)

(Flächen- und Linienelemente ohne Metrik !)

(weil $\delta v^j = 0$ auf (S_u))

($S = S_p$)

(d.h. Erfüllen der geom. RB.)

$$\begin{aligned}
 \delta W^i = \int_A \{ & -(Bn_{11})_{,1} \delta v^1 + (Bn_{11}) \frac{A_{,2}}{B} \delta v^2 + (Bn_{11}) \frac{A}{R_1} \delta v^3 \\
 & - (Bn_{12})_{,1} \delta v^2 - (Bn_{12}) \frac{A_{,2}}{B} \delta v^1 - (An_{21})_{,2} \delta v^1 - (An_{21}) \frac{B_{,1}}{A} \delta v^2 \\
 & - (An_{22})_{,2} \delta v^2 + (An_{22}) \frac{B_{,1}}{A} \delta v^1 + (An_{22}) \frac{B}{R_2} \delta v^3 \\
 & - (Bm_{11})_{,1} \delta \varphi^1 + (Bm_{11}) \frac{A_{,2}}{B} \delta \varphi^2 - (Am_{22})_{,2} \delta \varphi^2 + (Am_{22}) \frac{B_{,1}}{A} \delta \varphi^1 \\
 & - (Bm_{12})_{,1} \delta \varphi^2 - (Bm_{12}) \frac{A_{,2}}{B} \delta \varphi^1 - (Am_{21})_{,2} \delta \varphi^1 - (Am_{21}) \frac{B_{,1}}{A} \delta \varphi^2 \\
 & - (Bq_1)_{,1} \delta v^3 + (Bq_1) A \delta \varphi^1 - (Bq_1) \frac{A}{R_1} \delta v^1 \\
 & - (Aq_2)_{,2} \delta v^3 + (Aq_2) B \delta \varphi^2 - (Aq_2) \frac{B}{R_2} \delta v^2 \} \underbrace{d\Theta^1 d\Theta^2}_{dA^*} \\
 & + \oint_S \{ (Bn_{11}) n_1^* \delta v^1 + (Bn_{12}) n_1^* \delta v^2 + (An_{21}) n_2^* \delta v^1 + (An_{22}) n_2^* \delta v^2 \\
 & + (Bm_{11}) n_1^* \delta \varphi^1 + (Bm_{12}) n_1^* \delta \varphi^2 + (Am_{21}) n_2^* \delta \varphi^1 + (Am_{22}) n_2^* \delta \varphi^2 \\
 & + (Bq_1) n_1^* \delta v^3 + (Aq_2) n_2^* \delta v^3 \} ds^*
 \end{aligned}$$

Faßt man in dem Flächenintegral die Terme mit gleichen virtuellen Verschiebungen zusammen, so erhält man mit Hilfe des Fundamentallemmas die Gleichgewichtsbedingungen.

Aus dem Randintegral ergeben sich zusammen mit den Anteilen aus der äußeren Arbeit die stat. Randbedingungen.

$$\delta W^a = - \int_A \left(\int_{\Theta^3} \underbrace{\bar{k}_i d\Theta^3}_{\text{Volumenkräfte}} \right) \delta v^i A \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_1} \right) B \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_2} \right) d\Theta^1 d\Theta^2 - \int_{S_p} \int_{\Theta^3} \underbrace{\bar{p}_i d\Theta^3}_{\text{Flächenlasten}} \delta v^i ds$$

Volumenkräfte und Flächenlasten auf die Schalenlaibungen werden zu Flächenlasten \bar{p}_i auf die S_{mf} zusammengefaßt.

$$\bar{p}_i = \bar{\sigma}_{ji} n_j$$

Am Schalenrand sollen äußere Lasten über Momente Quer- und Normalkräfte in die Schale eingeleitet werden.

Zunächst wird das Flächenintegral der äußeren Arbeit δW^a weiterverarbeitet:

$$\delta W^a_I = - \int_A \left\{ \int_{\Theta^3} \bar{k}_i \delta v^i d\Theta^3 \right\} \bar{A} \bar{B} d\Theta^1 d\Theta^2$$

$$\text{Verschiebungsansatz: } \delta \bar{v}^a = \delta v^a + \Theta^3 \delta \varphi^a$$

$$\delta \bar{v}^3 = \delta v^3$$

$$\begin{aligned} \int_{\Theta^3} \bar{k}_i \delta \bar{v}^i d\Theta^3 &= \int_{\Theta^3} [\bar{k}_a (\delta v^a + \Theta^3 \delta \varphi^a) + \bar{k}_3 \delta v^3] d\Theta^3 \\ &= \underbrace{\int_{\Theta^3} \bar{k}_i d\Theta^3 \delta v^i}_{\bar{p}_i = \bar{k}_i t} + \underbrace{\int_{\Theta^3} \bar{k}_a \Theta^3 d\Theta^3 \delta \varphi^a}_{\bar{m}_i = 0} \end{aligned}$$

Voraussetzung: $\bar{k}_i = \text{konstant über die Schalendicke}$
(konstantes Kraftfeld, z.B. Schwerkraft)

$$\bar{A} \cong A; \bar{B} \cong B: \text{ Vernachlässigung von } \left(1 + \frac{\Theta^3}{R_a}\right)$$

Damit ergibt sich endgültig:

$$\delta W^a_I = - \int_A \bar{p}_i \delta v^i AB d\Theta^1 d\Theta^2$$

d.h. Eigengewichtslasten werden über die Dicke integriert und auf die Smf wirkend angenommen. Tangentiale und normale Flächenlasten auf die Schalenlaibungen (Reibkräfte, Schnee etc.) werden näherungsweise hier miterfaßt.

Zusammenfassung der Flächenintegrale aus äußerer und innerer Arbeit und Sortieren nach Termen mit gleichen virtuellen Verschiebungen:

$$\begin{aligned} \delta W^i &= \int_A \{ \delta v^1 [-(Bn_{11})_{,1} - (Bn_{12}) \frac{A_{,2}}{B} - (An_{21})_{,2} + (An_{22}) \frac{B_{,1}}{A} - (Bq_1) \frac{A}{R_1} - AB\bar{p}_1] \\ &\quad + \delta v^2 [-(An_{22})_{,2} - (An_{21}) \frac{B_{,1}}{A} - (Bn_{12})_{,1} + (Bn_{11}) \frac{A_{,2}}{B} - (Aq_2) \frac{B}{R_2} - AB\bar{p}_2] \\ &\quad + \delta v^3 [(Bn_{11}) \frac{A}{R_1} + (An_{22}) \frac{B}{R_2} - (Bq_1)_{,1} - (Aq_2)_{,2} - AB\bar{p}_3] \\ &\quad + \delta \varphi^1 [-(Bm_{11})_{,1} + (Am_{22}) \frac{B_{,1}}{A} - (Bm_{12}) \frac{A_{,2}}{B} - (Am_{21})_{,2} + (Bq_1)A] \\ &\quad + \delta \varphi^2 [-(Am_{22})_{,2} + (Bm_{11}) \frac{A_{,2}}{B} - (Am_{21}) \frac{B_{,1}}{A} - (Bm_{12})_{,1} + (Aq_2)B] \} dA \\ &\quad - \text{Randintegrale} = 0 \end{aligned}$$

Nach dem Fundamentallema der Variationsrechnung müssen für beliebige virtuelle Verschiebungen δv^i , $\delta \varphi^i$ die Ausdrücke in den eckigen Klammern jeder für sich zu Null werden, damit $\delta W = 0$ gilt.

Diese Ausdrücke stellen, auf der Basis des Verschiebungsansatzes über die Schalendicke, optimale Näherungen der exakten Gleichgewichtsbedingungen des dreidimensionalen

Schalenkontinuums dar.

Die ersten drei Gleichungen sind die Kräftegleichgewichtsbedingungen und die beiden letzten sind die Momentengleichgewichtsbedingungen, die in diesem Fall identisch sind mit den im Kap. 3 auf anschauliche Weise hergeleiteten Gleichungen.

Als Nebenprodukte ergeben sich, ganz automatisch, die Definitionen für die Resultierenden der Spannungen und Verzerrungen, bezogen auf die Smf.

Es ist offensichtlich, daß durch andere Zuordnungen der Metrikkoeffizienten aus dem Volumenelement dV andere Definitionen für die Schnittkräfte $n_{\alpha\beta}$, $m_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$ und die Verzerrungen $\alpha_{\alpha\beta}$, $\beta_{\alpha\beta}$ möglich sind.

Diese Zuordnungsvielfalt und die unterschiedliche Behandlung der Terme $(1 + \Theta^3/R_\alpha)$, die in der technischen Schalentheorie vernachlässigt werden, sind die Ursache für eine Vielfalt existierender Schalentheorien, auf die im Rahmen dieser Vorlesung jedoch nicht weiter eingegangen wird.

Als weiteres Nebenprodukt ergeben sich aus den Randintegralen die Definitionsgleichungen für die vorschreibbaren Randgrößen (d.h. für die statischen Randbedingungen). Dies ist vor allem wichtig, wenn die Querschubverzerrungen vernachlässigt werden sollen (Kirchhoff-Love Hypothese). Dann kommt man, ähnlich wie bei dünnen Platten, auf sogenannte Kirchhoff'sche Ersatzquerkräfte, deren Herleitung bei beliebig gekrümmten Schalen praktisch nur über die virtuellen Arbeiten möglich ist.

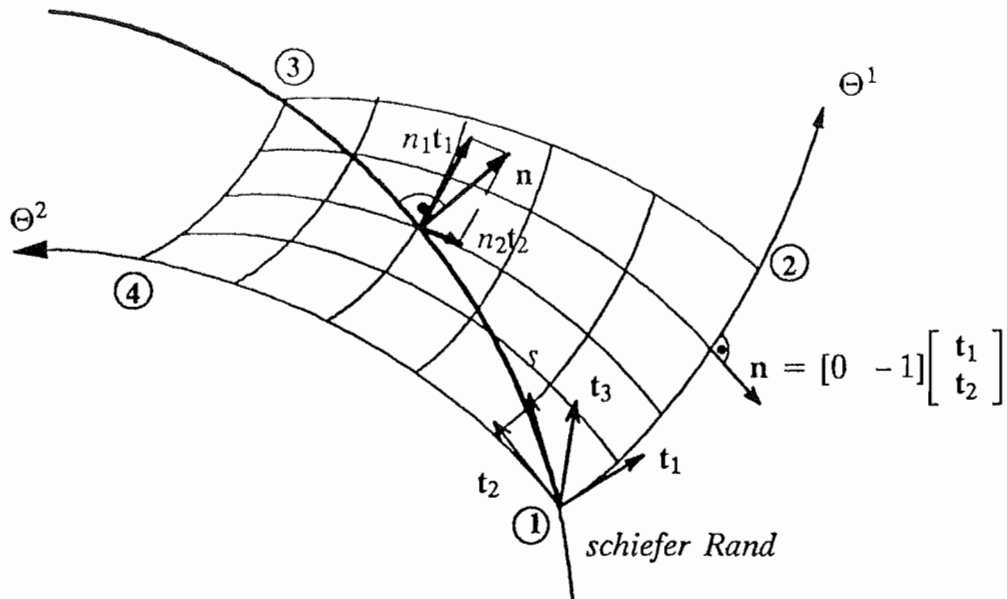
Statische Randbedingungen, Randkräfte und Randintegrale

Aus der partiellen Integration einiger Terme der inneren Arbeit δW^i ergab sich formal ein Linienintegral über die Berandung der Schalenmittelfläche:

$$\delta W_{II}^i = \oint_S \{ (Bn_{11})n_1^* \delta v^1 + (Bn_{12})n_1^* \delta v^2 + (An_{21})n_2^* \delta v^1 + (An_{22})n_2^* \delta v^2 \\ + (Bm_{11})n_1^* \delta \varphi^1 + (Bm_{12})n_1^* \delta \varphi^2 + (Am_{21})n_2^* \delta \varphi^1 + (Am_{22})n_2^* \delta \varphi^2 \\ + (Bq_1)n_1^* \delta v^3 + (Aq_2)n_2^* \delta v^3 \} ds^*$$

mit $\mathbf{n} = n_\alpha \mathbf{t}_\alpha$ Normalenvektor, senkrecht zum

Rand, tangential an die Smf



$$\text{Normalenvektor: } \underline{n} = [n_1 \quad n_2] \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

Sonderfall: Ränder parallel zu den Koordinatenlinien Θ^α

$$\text{z.B. Rand } \textcircled{1} - \textcircled{2} : \underline{n} = [0 \quad -1] \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} : \underline{n} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

etc.

Definition von Randkräften

Ähnlich wie bei der anschaulichen Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen werden die Schnittkräfte zu Kraftvektoren zusammengefaßt, diesmal jedoch für beliebige, schiefe Ränder:

$$\underline{p} = p_i t_i ds = (n_{a\beta} n_a t_\beta + q_a n_a t_3) ds$$

$$p_1 t_1 = (n_{11} n_1 + n_{21} n_2) t_1$$

$$p_2 t_2 = (n_{12} n_1 + n_{22} n_2) t_2$$

$$p_3 t_3 = (q_1 n_1 + q_2 n_2) t_3$$

Sonderfall: Ränder parallel zu Θ^α

z.B. pos. Schnittufer - $\Theta^1 = \text{konst.}$:

$$n_a = [n_1 \quad n_2] = [1 \quad 0]$$

$$p_1 = (n_{11} t_1 + n_{12} t_2 + q_1 t_3) ds_2 = N_1 \quad (\text{siehe Kap. 3, S. 4})$$

Gleichgewichtsbedgn.

Für die Randmomente ergeben sich analoge Gleichungen:

$$\mathbf{m} = m_{\alpha\beta} n_{\alpha} (t_{\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma}) ds \Rightarrow \varepsilon_{\beta\gamma} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m_1 t_1 = (-m_{12} n_1 - m_{22} n_2) t_1 \quad (\beta = 2)$$

$$m_2 t_2 = (m_{11} n_1 + m_{21} n_2) t_2 \quad (\beta = 1)$$

Sonderfall wie vor : $\Theta^1 = \text{konst.}$:

$$n_{\alpha} = [1 \quad 0]$$

$$\mathbf{m}_1 = (-m_{12} t_1 + m_{11} t_2) ds_2 = M_1 \quad (\text{für } \Theta^1 = \text{konst.})$$

$$\mathbf{m}_2 = (-m_{22} t_1 + m_{21} t_2) ds_1 = M_2 \quad (\text{für } \Theta^2 = \text{konst.})$$

(Bei den Momenten ist die unterschiedliche Vorzeichenkonvention zu beachten, die hier formal durch die Matrix $\varepsilon_{\beta\gamma}$ berücksichtigt wird !)

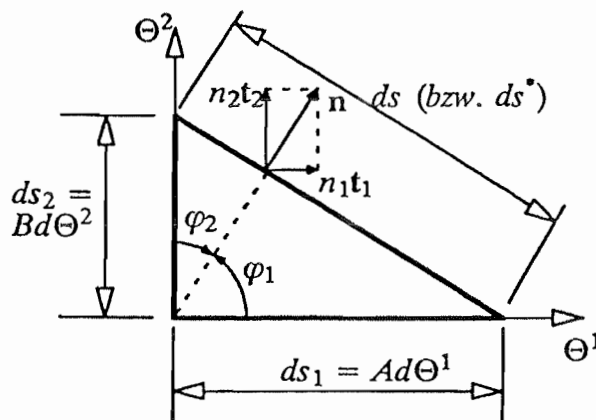
Allgemein lassen sich also die Randkräfte bzw. Randmomente für beliebige schiefe Ränder mit Hilfe des Normalenvektors $\mathbf{n} = n_{\alpha} t_{\alpha}$ durch die Schnittkräfte ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} p_{\beta} &= n_{\alpha\beta} n_{\alpha} \\ p_3 &= q_{\alpha} n_{\alpha} \\ m_{\beta} &= m_{\alpha\beta} n_{\alpha} \end{aligned} \right\} \text{Komponenten der Vektoren}$$

Dies wurde durch die Reduktion auf orthogonale, koordinatenparallele Ränder als Sonderfall verifiziert.

Bogenelement längs einer schiefen Randkurve

In dem Linienintegral aus der inneren Arbeit δW_{II}^i ersetzt man zweckmäßigerweise die Bogenlänge in dimensionslosen Koordinaten $n_{\alpha} ds^*$ durch die echte Bogenlänge $n_{\alpha} ds$:



$$n_1^* = \frac{d\Theta^2}{ds^*} \Leftrightarrow n_1 = \cos \varphi_1 = \frac{ds_2}{ds} = \frac{Bd\Theta^2}{ds}$$

$$n_1^* ds^* = d\Theta^2 = \frac{1}{B} n_1 ds$$

$$n_2^* = \frac{d\Theta^1}{ds^*} \Leftrightarrow n_2 = \cos \varphi_2 = \frac{ds_1}{ds} = \frac{Ad\Theta^1}{ds}$$

$$n_2^* ds^* = d\Theta^1 = \frac{1}{A} n_2 ds$$

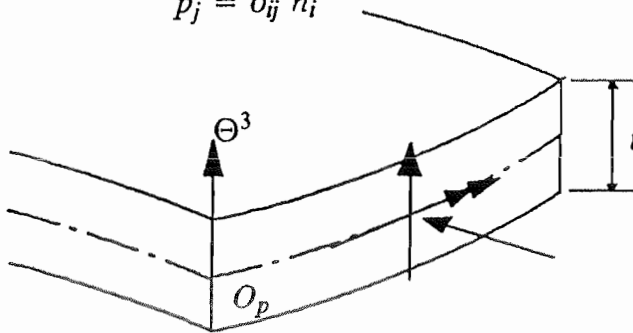
$$\delta W_{II}^i = \oint_S \{ n_{11}n_1\delta v^1 + n_{12}n_1\delta v^2 + n_{21}n_2\delta v^1 + n_{22}n_2\delta v^2 \\ + m_{11}n_1\delta\varphi^1 + m_{12}n_1\delta\varphi^2 + m_{21}n_2\delta\varphi^1 + m_{22}n_2\delta\varphi^2 \\ + q_1n_1\delta v^3 + q_2n_2\delta v^3 \} ds$$

Durch die Transformation auf die echte Bogenlänge ds entfallen die Metrikkoeffizienten in dem Linienintegral.

Ein Vergleich der Randkräftedefinition mit dem Linienintegral aus der inneren Arbeit zeigt, daß mit diesem Integral die Arbeit der (inneren) Schnittkräfte längs der Berandung der Schale beschrieben wird.

Die inneren Kräfte müssen ins Gleichgewicht gesetzt werden durch von außen einwirkende Randlasten. Der entsprechende Arbeitsanteil lautet:

$$\delta W_{II}^a = - \int_{O_p} \underbrace{\bar{p}_j}_{\bar{p}_j = \bar{\sigma}_{ij} n_i} \delta \bar{v}^j dO = - \int_{S_p} \left(\int_{\Theta^3} \bar{\sigma}_{ij} \delta \bar{v}^j d\Theta^3 \right) n_i ds$$



Die Kraft in einem Punkt auf der endlich ausgedehnten Fläche $O_p : \bar{p}_j dO$ setzt sich zusammen aus den Komponenten des Spannungstensors : $\bar{\sigma}_{ij} n_i dO$

Durch Integration über die Dicke werden die von außen einwirkenden Randspannungen wieder zu Resultierenden zusammengefaßt, d.h. am Schalenrand werden äußere Einwirkungen (Auflagerkräfte, Linienlasten) durch Momente, Quer- und Normalkräfte in die Schale eingeleitet.

Mit $\delta \bar{v}^a = \delta v^a + \Theta^3 \delta \varphi^a$, $\delta \bar{v}^3 = \delta v^3$ folgt :

$$\delta W_{II}^a = - \int_{S_p} \left\{ \underbrace{\left(\int_{\Theta^3} \bar{\sigma}_{a\beta} d\Theta^3 \right) n_a}_{\bar{n}_{a\beta}} \delta v^\beta + \underbrace{\left(\int_{\Theta^3} \bar{\sigma}_{a\beta} \Theta^3 d\Theta^3 \right) n_a}_{\bar{m}_{a\beta}} \delta \varphi^\beta + \underbrace{\left(\int_{\Theta^3} \bar{\sigma}_{a3} d\Theta^3 \right) n_a}_{\bar{q}_a} \delta v^3 \right\} ds$$

$$\delta W_{II}^a = - \int_{S_p} \{ \bar{n}_{11}n_1\delta v^1 + \bar{n}_{12}n_1\delta v^2 + \bar{n}_{21}n_2\delta v^1 + \bar{n}_{22}n_2\delta v^2 \\ + \bar{m}_{11} n_1\delta\varphi^1 + \bar{m}_{12} n_1\delta\varphi^2 + \bar{m}_{21} n_2\delta\varphi^1 + \bar{m}_{22} n_2\delta\varphi^2 \\ + \bar{q}_1 n_1\delta v^3 + \bar{q}_2 n_2\delta v^3 \} ds$$

Zusammenfassung der Randintegrale aus innerer und äußerer Arbeit und Sortieren:

$\delta V = \text{Volumenintegral}$

$$\begin{aligned}
 & + \oint_{S_p} \{ \delta v^1 [(n_{11} - \bar{n}_{11})n_1 + (n_{21} - \bar{n}_{21})n_2] \\
 & + \delta v^2 [(n_{12} - \bar{n}_{12})n_1 + (n_{22} - \bar{n}_{22})n_2] \\
 & + \delta v^3 [(q_1 - \bar{q}_1)n_1 + (q_2 - \bar{q}_2)n_2] \\
 & + \delta \varphi^1 [(m_{11} - \bar{m}_{11})n_1 + (m_{21} - \bar{m}_{21})n_2] \\
 & + \delta \varphi^2 [(m_{12} - \bar{m}_{12})n_1 + (m_{22} - \bar{m}_{22})n_2] \} ds = 0
 \end{aligned}$$

stat. Randbedingungen
(für schiefe Ränder)
=> Umrechnen in Tangential- und Normal-
komponenten

v^t, v^n bzw. n_t, n_n
 φ^t, φ^n m_t, m_n
 v^3 q_t, q_n

Sonderfall: Ränder parallel zu den Koordinatenlinien

$$n_i = [1 \ 0] \text{ bzw. } [0 \ 1]$$

Vorschreibbare Randgrößen einer allg. Schalentheorie mit Querschubverzerrungen:

$$n_{11} = \bar{n}_{11} \text{ oder } v^1 = \bar{v}^1$$

$$n_{12} = \bar{n}_{12} \text{ oder } v^2 = \bar{v}^2$$

$$q_1 = \bar{q}_1 \text{ oder } v^3 = \bar{v}^3$$

$$m_{11} = \bar{m}_{11} \text{ oder } \varphi^1 = \bar{\varphi}^1$$

$$m_{12} = \bar{m}_{12} \text{ oder } \varphi^2 = \bar{\varphi}^2$$

Vernachlässigung der Querschubverzerrungen (Kirchhoff-Love Hypothese)

$$\begin{aligned}
 \gamma_{13} = \varphi^1 + \frac{1}{A} v^{3,1} - \frac{1}{R_1} v^1 \approx 0 & \Rightarrow \varphi^1 = -\frac{1}{A} v^{3,1} + \frac{1}{R_1} v^1 \\
 \gamma_{23} = \varphi^2 + \frac{1}{B} v^{3,2} - \frac{1}{R_2} v^2 \approx 0 & \Rightarrow \varphi^2 = -\frac{1}{B} v^{3,2} + \frac{1}{R_2} v^2
 \end{aligned}$$

Die Verdrehungen sind keine unabhängigen Freiheitsgrade mehr, sondern abhängig von den Verschiebungen und Verschiebungsableitungen.

Zur Vereinfachung erfolgt die weitere Herleitung nur für Ränder parallel zu den Koordinatenlinien, und zwar speziell für den Rand $\Theta^2 = \text{konst.}$ Damit sind wichtige Anwendungsfälle abgedeckt, eine Verallgemeinerung auf schiefe Ränder ist problemlos möglich.

Schale über Rechteckgrundriß:

$$\begin{array}{lll}
 \text{Rand } \Theta^2 = \text{konst.} & n_1 = 0 & \delta W = \text{Volumenintegral} \\
 & n_2 = 1 & - \oint \left\{ \delta v^1 [(n_{21} - \bar{n}_{21})] \right. \\
 & & \quad \left. + \delta v^2 [(n_{22} - \bar{n}_{22})] \right. \\
 & & \quad + \delta v^3 [(q_2 - \bar{q}_2)] \\
 & & \quad + \delta \varphi^1 [(m_{21} - \bar{m}_{21})] \\
 & & \quad \left. + \delta \varphi^2 [(m_{22} - \bar{m}_{22})] \right\} n_2 ds = 0
 \end{array}$$

Transformation des Linienelements: s.S. 13 $n_2 ds = A n_2^* ds^* = A d\Theta^1$

Einsetzen der Gleichungen für φ^1 :

$$\begin{aligned}
 \delta \varphi_1 &= -\frac{1}{A} \delta v^3_{,1} + \frac{1}{R_1} \delta v^1 \\
 &\oint \left\{ \delta v^1 [(n_{21} - \bar{n}_{21})] + \delta v^2 [(n_{22} - \bar{n}_{22})] + \delta v^3 [(q_2 - \bar{q}_2)] \right. \\
 &\quad \left. + \left(-\frac{1}{A} \delta v^3_{,1} + \frac{1}{R_1} \delta v^1\right) [(m_{21} - \bar{m}_{21})] + \delta \varphi^2 [(m_{22} - \bar{m}_{22})] \right\} A d\Theta^1 \\
 &= \oint \left\{ \delta v^1 \left[(n_{21} + \frac{1}{R_1} m_{21}) - (\bar{n}_{21} + \frac{1}{R_1} \bar{m}_{21}) \right] + \delta v^2 [(n_{22} - \bar{n}_{22})] \right. \\
 &\quad \left. + \delta v^3 [(q_2 - \bar{q}_2)] - \delta v^3_{,1} \left[\frac{1}{A} (m_{21} - \bar{m}_{21}) \right] - \delta \varphi^2 [(m_{22} - \bar{m}_{22})] \right\} A d\Theta^1 \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}} \\
 &\quad v^3_{,1} \text{ ist eine abhängige} \\
 &\quad \text{Größe} \rightarrow \text{part. integrieren}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \oint \delta v^3_{,1} \frac{1}{A} [m_{21} - \bar{m}_{21}] A d\Theta^1 \\
 & = - \delta v^3 [m_{21} - \bar{m}_{21}] \Big|_{\Theta_1^a}^{\Theta_2^b} + \oint \delta v^3 [m_{21} - \bar{m}_{21}]_{,1} d\Theta^1 \frac{A}{A}
 \end{aligned}$$

Zusammenfassung:

$$\delta W = \text{Volumenintegral}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int \left\{ \delta v^1 \left[\left(n_{21} + \frac{1}{R_1} m_{21} \right) - \bar{N}_{21} \right] \right. && \text{- Ersatzschubkraft} \\
 & \quad + \delta v^2 \left[\left(n_{22} \right) - \bar{n}_{22} \right] && \text{- Ersatznormalkraft} \\
 & \quad + \delta v^3 \left[\left(q_2 + \frac{1}{A} m_{21,1} \right) - \bar{Q}_2 \right] && \text{- Ersatzquerkraft} \\
 & \quad + \delta \varphi^2 \left[\left(m_{22} \right) - \bar{m}_{22} \right] \} A \, d\Theta^1 && \text{- Randmoment} \\
 & \quad - \delta v^3 \left[m_{21} - \bar{m}_{21} \right]_{\substack{b \\ a}} = 0 && \text{- Eckkraft (bei Schalen} \\
 & && \text{mit Ecken, nicht bei} \\
 & && \text{Rotationsschalen)}
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeiten werden die fünf wirklichen Randkraftgrößen in ein energetisch äquivalentes Ersatzsystem transformiert. Als Folge der Abhängigkeit der Verdrehung φ^1 von den Randverschiebungen läßt sich auch das Drillmoment m_{21} nicht mehr unabhängig vorschreiben, es kann nur implizit in den Ersatzkräften berücksichtigt werden.

Korrespondierende Randgrößen einer Schalentheorie mit vernachlässigbaren Schubverzerrungen :

$$\bar{N}_{21} = n_{21} + \frac{1}{R_1} m_{21} \quad \text{oder} \quad v^1 = \bar{v}^1$$

$$\bar{n}_{22} = n_{22} \quad v^2 = \bar{v}^2$$

$$\bar{Q}_2 = q_2 + \frac{1}{A} m_{21,1} \quad v^3 = \bar{v}^3$$

$$\bar{m}_{22} = m_{22} \quad \varphi^2 = \bar{\varphi}^2$$

Typische Randbedingungen für Rotationsschalen:

$\varphi_2 \hat{=} v^3_{,2}$

1. Eingespannter Rand				
	$\bar{v}^1 = 0$	$\bar{v}^2 = 0$	$\bar{v}^3 = 0$	$\varphi^2 = 0$
2. Gelenkig gelagerter Rand				$\bar{M}_{22} = 0$
	$\bar{v}^1 = 0$	$\bar{v}^2 = 0$	$\bar{v}^3 = 0$	
3. Membrangelagerter Rand			$\bar{Q}_2 = 0$	$\bar{M}_{22} = 0$
	$\bar{v}^1 = 0$	$\bar{v}^2 = 0$		
4. Tangential verschieblich		$\bar{N}_{22} = 0$		$\bar{M}_{22} = 0$
	$\bar{v}^1 = 0$		$\bar{v}^3 = 0$	
5. Freier Rand	$\bar{N}_{21} = 0$	$\bar{N}_{22} = 0$	$\bar{Q}_2 = 0$	$\bar{M}_{22} = 0$

10. Ermittlung von Elementmatrizen für Rotationsschalen

Zusammenstellung der Grundgleichungen:

A) Werkstoffgesetz

$$\gamma_{13} = \frac{6}{5} \cdot \frac{2(1+\nu)}{Et} \cdot q_1 \approx 0$$

$$\gamma_{23} = \frac{6}{5} \cdot \frac{2(1+\nu)}{Et} \cdot q_2 \approx 0$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} \\ \sim d_{12} \\ \sim d_{21} \\ d_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{Et} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\nu \\ 0 & (1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\nu) & 0 \\ -\nu & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{21} \\ n_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \sim \beta_{12} \\ \sim \beta_{21} \\ \beta_{22} \end{bmatrix} = \frac{12}{Et^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\nu \\ 0 & (1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\nu) & 0 \\ -\nu & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \\ m_{22} \end{bmatrix}$$

B) Kinematische Beziehungen

$$\begin{bmatrix}
 \partial_1 & \frac{A_{12}}{B} & \frac{A}{R_1} & 0 & 0 \\
 -\frac{A_{12}}{B} & \partial_1 & 0 & 0 & 0 \\
 \partial_2 & \frac{B_{12}}{A} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{B_{12}}{A} & \partial_2 & \frac{B}{R_2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{A_2}{B} & \partial_1 \\
 0 & 0 & 0 & \partial_1 & -\frac{A_{12}}{B} \\
 0 & 0 & 0 & \frac{B_{12}}{A} & \partial_2 \\
 0 & 0 & 0 & \partial_2 & \frac{B_{12}}{A}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ \varphi^2 \\ \varphi^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \alpha_{11} \\ A \tilde{\alpha}_{12} \\ B \tilde{\alpha}_{21} \\ B \alpha_{22} \\ A \beta_{11} \\ A \tilde{\beta}_{12} \\ B \tilde{\beta}_{21} \\ B \beta_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{A}{R_1} v^1 + v_{,11}^3 + A \varphi^1 &= A \gamma_{13} \approx 0 \Rightarrow \varphi^1 = -v_{,11}^3 \frac{1}{A} + \frac{1}{R_1} v^1 \\
 -\frac{B}{R_2} v^2 + v_{,12}^3 + B \varphi^2 &= B \gamma_{23} \approx 0 \Rightarrow \varphi^2 = -v_{,12}^3 \frac{1}{B} + \frac{1}{R_2} v^2
 \end{aligned}$$

Elimination von φ^1 mit Hinblick auf das DGL-System 1. Ordnung für eine Schalentheorie mit $\gamma_{\alpha 3} \approx 0$:

$$\begin{bmatrix}
 \partial_1 & \frac{A_{12}}{B} & \frac{A}{R_1} & 0 & 0 \\
 -\frac{A_{12}}{B} & \partial_1 & 0 & 0 & 0 \\
 \partial_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \partial_2 & \frac{B}{R_2} & 0 & 0 \\
 \frac{\partial_1}{R_1} & 0 & -\frac{\partial_{11}}{A} & \frac{A_2}{B} & 0 \\
 -\frac{A_{12}}{BR_1} & 0 & \frac{A_{12} \partial_1}{AB} & \partial_1 & 0 \\
 \left(\frac{\partial_2}{R_1} - \frac{R_{1,2}}{R_1 R_1}\right) & 0 & \left(-\frac{\partial_{12}}{A} + \frac{\partial_1 A_{12}}{A^2}\right) & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \partial_2 & 0
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ \varphi^2 \\ \varphi^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \alpha_{11} \\ A \tilde{\alpha}_{12} \\ B \tilde{\alpha}_{21} \\ B \alpha_{22} \\ A \beta_{11} \\ A \tilde{\beta}_{12} \\ B \tilde{\beta}_{21} \\ B \beta_{22} \end{bmatrix}$$

mit $\varphi_{,11}^1 = -\frac{1}{A} v_{,11}^3 + \frac{1}{R_1} v_{,21}^1$ (Geometrie ist konst über den Umfang Θ^1)

$$\varphi_{,12}^1 = -\frac{1}{A} v_{,12}^3 + \frac{A_{12}}{A^2} \cdot v_{,11}^3 + \frac{1}{R_1} v_{,12}^1 - \frac{R_{1,2}}{R_1^2} \cdot v^1$$

c) Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{bmatrix}
 \partial_1 & \frac{A_2}{B} & \partial_2 & \frac{B_1}{A} & \frac{A}{R_1} & 0 \\
 -\frac{A_2}{B} & \partial_1 & \frac{B_1}{A} & \partial_2 & 0 & \frac{B}{R_2} \\
 -\frac{A}{R_1} & 0 & 0 & -\frac{B}{R_2} & \partial_1 & \partial_2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -B & -\frac{A_2}{B} \partial_1 & \frac{B_1}{A} \partial_2 \\
 -A & 0 & \partial_1 & \frac{A_2}{B} \partial_2 & -\frac{B_1}{A} & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 B_{n_{11}} \\
 B_{n_{12}} \\
 A_{n_{21}} \\
 A_{n_{22}} \\
 B_{q_1} \\
 A_{q_2} \\
 B_{m_{11}} \\
 B_{m_{12}} \\
 A_{m_{21}} \\
 A_{m_{22}}
 \end{bmatrix}
 + AB
 \begin{bmatrix}
 \bar{p}_1 \\
 \bar{p}_2 \\
 \bar{p}_3 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 = 0$$

Elimination von q_1 mit Hilfe der 5. Gleichung:

$$ABq_1 = (B_{m_{11}})_{11} + \frac{A_2}{B} (B_{m_{12}}) + (A_{m_{21}})_{12}$$

$$\begin{bmatrix}
 \partial_1 & \frac{A_2}{B} & \partial_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial_1}{R_1} & \frac{A_2}{BR_1} & \frac{\partial_2}{R_1} & 0 \\
 -\frac{A_2}{B} & \partial_1 & 0 & \partial_2 & 0 & \frac{B}{R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{A}{R_1} & 0 & 0 & -\frac{B}{R_2} & 0 & \partial_2 & \frac{1}{A} \partial_{11} & \Gamma \partial_1 & \frac{\partial_{12}}{A} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B & -\frac{A_2}{B} \partial_1 & 0 & \partial_2 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 B_{n_{11}} \\
 B_{n_{12}} \\
 A_{n_{21}} \\
 A_{n_{22}} \\
 B_{q_1} \\
 A_{q_2} \\
 B_{m_{11}} \\
 B_{m_{12}} \\
 A_{m_{21}} \\
 A_{m_{22}}
 \end{bmatrix}
 + AB
 \begin{bmatrix}
 \bar{p}_1 \\
 \bar{p}_2 \\
 \bar{p}_3 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

mit $\Gamma = \frac{A_{12}}{AB}$

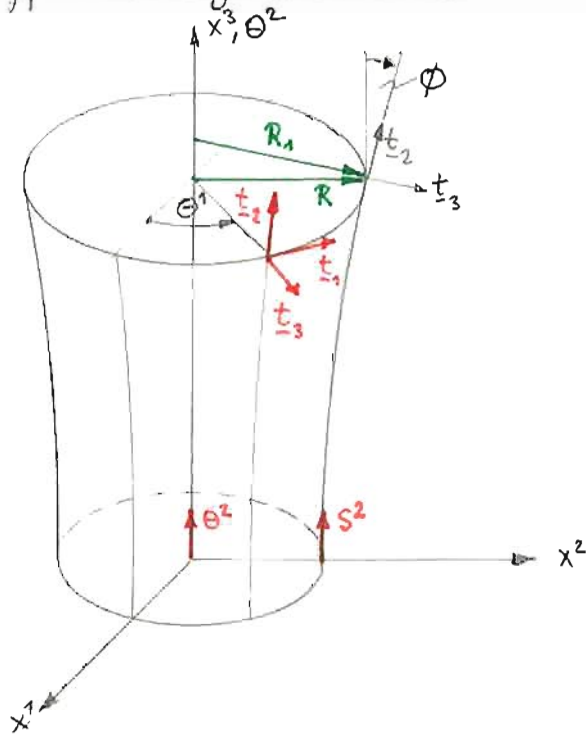
6. Gleichgewichtsbedingung: $n_{12} + \frac{m_{12}}{R_1} = \bar{n}_{21} + \frac{m_{21}}{R_2} \Rightarrow n_{12}$

Elimination von n_{12} und Gleichsetzen von $m_{12} \approx m_{21}$:

$$\begin{bmatrix}
 \partial_1 & (\partial_2 + \frac{A_2}{A}) & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} \partial_1 & (\frac{1}{R_1} \partial_2 + \frac{A_2}{AR_2}) & 0 \\
 -\frac{A_2}{B} & \frac{B}{A} \partial_1 & \partial_2 & \frac{B}{R_2} & 0 & (\frac{B}{AR_2} - \frac{B}{AR_1}) \partial_1 & 0 \\
 -\frac{A}{R_1} & 0 & -\frac{B}{R_2} & \partial_2 & \frac{1}{A} \partial_{11} & (\frac{B}{A} \Gamma \partial_1 + \frac{1}{A} \partial_{12}) & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -B & -\frac{A_2}{B} \partial_1 & \frac{B}{A} \partial_1 & \partial_2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 B_{n_{11}} \\
 A_{n_{21}} \\
 A_{n_{22}} \\
 A_{q_2} \\
 B_{m_{11}} \\
 A_{m_{21}} \\
 A_{m_{22}}
 \end{bmatrix}
 + AB
 \begin{bmatrix}
 \bar{p}_1 \\
 \bar{p}_2 \\
 \bar{p}_3 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Formelsammlung für allg. Rotationsschalen

Differentialgeometrie:



$$A = R$$

$$B = \sqrt{1 + R_{12}^2}$$

$$R_1 = R \sqrt{1 + R_{12}^2} = AB$$

$$R_2 = -\frac{[1 + R_{12}^2]^{3/2}}{R_{122}} = -\frac{B^3}{R_{122}}$$

konst. Geometrie über den Umfang

$$A_{,1} = B_{,1} = R_{1,1} = R_{2,1} = 0$$

Gauss-Codazzi-Gl.:

$$\left(\frac{A}{R_1}\right)_{,2} = \frac{A_{,2}}{R_2}; \quad \left(\frac{A_{,2}}{R_2}\right)_{,1} = -\frac{AB}{R_1 R_2} = -\frac{1}{R_2}$$

Abkürzungen für DGL-System 1. Ordnung $\Gamma = \frac{A_{,2}}{AB} = \frac{A_{,2}}{R_1}$

Koordinatentransformation von θ^α auf s^α :

$$ds^1 = A d\theta^1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s^1} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \theta^1} \quad \text{bzw.} \quad \partial_1 = A \partial_{s^1}$$

$$ds^2 = B d\theta^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s^2} = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \quad \text{bzw.} \quad \partial_2 = B \partial_{s^2}$$

$$\text{Damit gilt: } R_{12} = B \cdot R_{1s^2} \Rightarrow R_{1s^2} = \frac{R_{12}}{B} = \frac{A_{,2}}{B} \cdot \frac{A}{A} = \Gamma A = \Gamma R$$

$$\text{bzw. } R_{12} = A_{,2} = AB\Gamma$$

Aufstellen eines DGL-Systems 1. Ordnung für $y_{13} = 0$

1. Gleichung

$$\tilde{\alpha}_{12} = -\frac{A_{12}}{AB} v^1 + v_{,1}^2 \frac{1}{A}$$

$$\tilde{\alpha}_{21} = v_{,12}^1 \cdot \frac{1}{B}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= \frac{1}{B} v_{,12}^1 - \frac{A_{12}}{AB} v^1 + v_{,1}^2 \cdot \frac{1}{A} \\ &= \frac{1}{B} v_{,12}^1 - \Gamma v^1 + v_{,1}^2 \cdot \frac{1}{A} \end{aligned}$$

Stoffgesetz: $\alpha_{12} = \frac{2(1+\nu)}{Et} \cdot m_{12} = \frac{2(1+\nu)}{Et} \cdot (N_{12} - \frac{1}{R_1} m_{12})$

$$m_{12} = \frac{Et^3}{12(1+\nu)^2} \cdot \beta_{12}$$

$$\tilde{\beta}_{12} = -\frac{A_{12}}{AB} \cdot \frac{1}{R_1} v^1 + \frac{A_{12}}{AB} \cdot \frac{1}{A} \cdot v_{,1}^3 + \frac{1}{A} \varphi_{,1}^2$$

$$\tilde{\beta}_{21} = \frac{1}{R_1 B} v_{,12}^1 - \frac{R_{12}}{BR_1 R_1} v^1 - \frac{1}{AB} v_{,12}^3 + \frac{A_{12}}{AB} \cdot \frac{1}{A} v_{,1}^3$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{R_1 B} v_{,12}^1 - \left(\frac{\Gamma}{R_1} + \frac{R_{12}}{BR_1 R_1} \right) v^1 - \frac{1}{AB} v_{,12}^3 + \frac{\Gamma}{A} v_{,1}^3 + \frac{\Gamma}{A} v_{,1}^3 + \frac{1}{A} \varphi_{,1}^2$$

$$-v_{,12}^3 \cdot \frac{1}{B} = \varphi^2 - \frac{1}{R_2} v^2$$

$$\left(-v_{,12}^3 \cdot \frac{1}{B} \right)_{,1} = \varphi_{,1}^2 - \frac{1}{R_2} v_{,1}^2 = -\frac{1}{B} v_{,12}^3$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{v_{,12}^1}{B} - \left(\frac{\Gamma}{R_1} + \frac{R_{12}}{BR_1 R_1} \right) v^1 + \frac{\varphi_{,1}^2}{A} - \frac{1}{R_2} \frac{v_{,1}^2}{A} + \Gamma \frac{v_{,1}^3}{A} \cdot 2 + \frac{\varphi_{,1}^2}{A}$$

Gauss-Coolazzi: $\frac{A_{12}}{R_2} = \left(\frac{A}{R_1} \right)_{,12} = \frac{A_{12}}{R_1} - \frac{A}{R_1} \cdot \frac{R_{12}}{R_1}$

$$\frac{R_{12}}{R_1 R_1} = \frac{A_{12}}{A} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$\left(\frac{\Gamma}{R_1} + \frac{R_{12}}{BR_1 R_1} \right) = \frac{\Gamma}{R_1} + \frac{\Gamma}{R_2} - \frac{\Gamma}{R_1} = \frac{\Gamma}{R_2}$$

Koordinaten Transformation $\Theta^2 \rightarrow \zeta^2$

$$\beta_{12} = \frac{1}{R_1} v_{,152}^1 - \frac{\Gamma}{R_2} v^1 + 2 \varphi_{,151}^2 - \frac{1}{R_2} v_{,151}^2 + 2\Gamma v_{,151}^3$$

$$\alpha_{12} = v_{,152}^1 - \Gamma v^1 + v_{,151}^2$$

Zusammenfassung der 1. Gleichung:

$$\begin{aligned}
 v_{1s2}^1 &= \Gamma v^1 - v_{1s1}^2 + \alpha_{12} \\
 &= \Gamma v^1 - v_{1s1}^2 + \frac{2(1+\nu)}{Et} N_{12} - \frac{t^2}{12} \frac{1}{R_1} \beta_{12} \\
 &= \Gamma v^1 - v_{1s1}^2 + \frac{2(1+\nu)}{Et} N_{12} \\
 &\quad - \frac{t^2}{12} \frac{1}{R_1 R_2} v_{1s2}^1 + \frac{t^2}{12} \frac{1}{R_1 R_2} \Gamma v^1 + \frac{t^2}{12} \frac{1}{R_1 R_2} v_{1s1}^2 - \frac{t^2}{12} \frac{1}{R_1} \cdot 2\Gamma v_{1s1}^3 - \frac{t^2}{12} \frac{1}{R_1} 2\varphi_{1s1}^2
 \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{t^2}{12} \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_1}\right) v_{1s2}^1 = \left(1 + \frac{t^2}{12} \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2}\right) \Gamma v^1 - \left(1 - \frac{t^2}{12} \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2}\right) v_{1s1}^2 - 2\Gamma \frac{t^2}{12} \frac{1}{R_1} v_{1s1}^3 - 2 \frac{t^2}{12} \frac{1}{R_1} \varphi_{1s1}^2$$

Mit $D = \frac{Et}{1-\nu^2}$; $B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \Rightarrow \frac{B}{D} = \frac{t^2}{12}$ ergibt sich endgültig:

$$v_{1s2}^1 = \Gamma v^1 - v_{1s1}^2 - 2\Gamma \frac{B}{D} \cdot \frac{1}{R_1} v_{1s1}^3 - 2 \frac{B}{D} \frac{1}{R_1} \varphi_{1s1}^2 + \frac{2(1+\nu)}{Et} N_{12} \quad (1)$$

$$(\dots)_{, \alpha} = \frac{\partial}{\partial S^\alpha}$$

2. Gleichung

$$\alpha_{22} = \frac{1}{B} v_{1s2}^2 + \frac{1}{R_2} v^3 \quad ; \quad \alpha_{11} = \frac{1}{A} v_{1s1}^1 + \Gamma v^2 + \frac{1}{R_1} v^3$$

$$n_{22} = D(\alpha_{22} + \nu \alpha_{11}) = N_{22} - \frac{1}{R_2} M_{22}$$

$$D \alpha_{22} = -\nu D \alpha_{11} + N_{22} - \frac{1}{R_2} M_{22}$$

$$\alpha_{22} = -\nu \left(\frac{v_{1s1}^1}{A} + \Gamma v^2 + \frac{1}{R_1} v^3 \right) + \frac{1}{D} N_{22} - \frac{1}{R_2 D} M_{22}$$

Zusammen setzen und Koordinatentransformation

$$v_{1s2}^2 = \alpha_{22} - \frac{1}{R_2} v^3$$

$$= -\nu v_{1s1}^1 - \nu \Gamma v^2 - \frac{\nu}{R_1} v^3 - \frac{1}{R_2} v^3 + \frac{1}{D} N_{22} - \frac{1}{R_2 D} M_{22}$$

$$v_{1s2}^2 = -\nu v_{1s1}^1 - \nu \Gamma v^2 - \left(\nu \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v^3 + \frac{1}{D} N_{22} - \frac{1}{R_2} \frac{1}{D} M_{22} \quad (2)$$

$$(\dots)_{, \alpha} = \frac{\partial}{\partial S^\alpha}$$

3. Gleichung $\varphi^2 = -v_{12}^3 \frac{1}{B} + \frac{1}{R_2} v^2$

$$\Rightarrow \boxed{v_{12}^3 = \frac{1}{R_2} v^2 - \varphi^2} \quad (\dots)_{,d} = \frac{\partial}{\partial s^d} \quad (3)$$

4. Gleichung $\beta_{22} = \varphi_{12}^2 \cdot \frac{1}{B} \quad ; \quad \beta_{11} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{v_{11}^1}{A} - \frac{v_{11}^3}{A^2} + \Gamma \varphi^2$

$$m_{22} = B(\beta_{22} + v\beta_{11}) = M_{22}$$

$$\begin{aligned} \beta_{22} &= \frac{1}{B} M_{22} - v\beta_{11} \\ &= \frac{1}{B} M_{22} - \frac{v}{R_1} \frac{v_{11}^1}{A} + v \frac{v_{11}^3}{A^2} - v\Gamma \varphi^2 \end{aligned}$$

nach Koordinatentransformation:

$$\boxed{\varphi_{12}^2 = -\frac{v}{R_1} v_{11}^1 + v v_{11}^3 - v\Gamma \varphi^2 + \frac{1}{B} M_{22}} \quad (4)$$

(\dots)_{,d} = \frac{\partial}{\partial s^d}

5. Gleichung

$$(Bn_m)_{,1} + (An_{21})_{,2} + \frac{A_{12}}{A} (An_{21}) + \frac{1}{R_1} (Bm_{11})_{,1} + \frac{1}{R_1} (Am_{21})_{,2} + \frac{A_{12}}{A} \cdot \frac{1}{R_2} (Am_{21}) + AB\bar{p}_1 = 0$$

Ersatzkraft: $An_{21} = AN_{21} - \frac{1}{R_1} Am_{21}$

$$\begin{aligned} (An_{21})_{,2} &= (AN_{21})_{,2} - \left(\frac{Am_{21}}{R_1} \right)_{,2} \\ &= \frac{(Am_{21})_{,2}}{R_1} + \frac{A_{12}}{A} \cdot \frac{1}{R_2} (Am_{21}) - \frac{A_{12}}{A} \frac{1}{R_1} (Am_{21}) \end{aligned}$$

$$(Bn_m)_{,1} + (AN_{21})_{,2} - \frac{1}{R_1} (Am_{21})_{,2} + \frac{A_{12}}{A} \frac{1}{R_2} (Am_{21}) - \frac{A_{12}}{A} \frac{1}{R_1} (Am_{21}) + \frac{A_{12}}{A} (AN_{21})$$

$$- \frac{A_{12}}{A} \frac{1}{R_1} (Am_{21}) + \frac{1}{R_1} (Bm_{11})_{,1} + \frac{1}{R_1} (Am_{21})_{,2} + \frac{A_{12}}{A} \frac{1}{R_2} (Am_{21}) + AB\bar{p}_1 = 0$$

$$n_{11} = Et \left(\frac{1}{A} v_{11}^1 + \Gamma v^2 + \frac{1}{R_1} v^3 \right) + v N_{22}$$

$$m_{11} = \frac{Et^3}{12} \left(\frac{1}{AR_1} v_{11}^1 - \frac{1}{A^2} v_{11}^3 + \Gamma \varphi^2 \right) + v M_{22}$$

Einsetzen von n_m und m_{21} und Koordinatentransformation $\Theta^k \rightarrow S^k$ (mit Division durch \mathcal{B}):

$$\begin{aligned} (AN_{21})_{12} &= -\Gamma(AN_{21}) - 2\Gamma\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)(Am_{21}) \\ &\quad - AEt\left(v_{111}^1 + \Gamma v_{11}^2 + \frac{1}{R_1} v_{111}^3\right) - A \nu N_{22,1} \\ &\quad - \frac{A}{R_1} \frac{Et^3}{12} \left(\frac{1}{R_1} v_{111}^1 - v_{1111}^3 + \Gamma \varphi_{11}^2\right) - \frac{A}{R_1} \nu M_{22,1} - A \bar{p}_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (AN_{21})_{12} &= -\Gamma(AN_{21}) - \nu(AN_{22})_{11} - \nu \frac{1}{R_1} (Am_{22})_{11} \\ &\quad - AEt\left(1 + \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{D}} \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_1}\right) v_{111}^1 + AEt \Gamma v_{11}^2 - AEt\left(\frac{1}{R_1} v_{111}^3 - v_{1111}^3\right) \\ &\quad - AEt \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{D}} \cdot \frac{1}{R_1} \Gamma \varphi_{11}^2 - A \bar{p}_1 \end{aligned} \quad (5)$$

(\dots)_{12} = \frac{\partial}{\partial S^k}}

6. Gleichung

$$-\frac{A_2}{\mathcal{B}} (\mathcal{B}n_m) + \frac{\mathcal{B}}{A} An_{21,1} + (AN_{22})_{12} + \frac{\mathcal{B}}{R_2} (Aq_2) + \frac{\mathcal{B}}{A} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) (Am_{21})_{11} + A \mathcal{B} \bar{p}_2 = 0$$

$$An_{21,1} = AN_{21,1} - \frac{1}{R_1} Am_{21,1}$$

$$\frac{\mathcal{B}}{R_2} Aq_2 = \frac{\mathcal{B}}{R_2} AQ_2 - \frac{\mathcal{B}}{R_2} A \cdot \frac{1}{A} m_{21,1}$$

$$n_m = Et\left(\frac{1}{A} v_{111}^1 + \Gamma v_{11}^2 + \frac{1}{R_1} v_{111}^3\right) + \nu N_{22}$$

Einsetzen und gleichzeitig Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned} (AN_{22})_{12} &= \Gamma A Et\left(v_{111}^1 + \Gamma v_{11}^2 + \frac{1}{R_1} v_{111}^3\right) + \Gamma A \nu N_{22} - AN_{21,1} + \frac{1}{R_1} Am_{21,1} \\ &\quad - \frac{1}{R_2} AQ_2 + \frac{1}{R_2} A m_{21,1} - \frac{1}{R_2} A m_{21,1} + \frac{1}{R_1} Am_{21,1} - A \bar{p}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (AN_{22})_{12} &= \Gamma A Et\left(v_{111}^1 + \Gamma v_{11}^2 + \frac{1}{R_1} v_{111}^3\right) + \Gamma A \nu N_{22} - AN_{21,1} + \frac{2}{R_1} Am_{21,1} \\ &\quad - \frac{1}{R_2} AQ_2 - A \bar{p}_2 \end{aligned}$$

7. Gleichung

$$-\frac{A}{R_1} B n_{11} - \frac{B}{R_2} A n_{22} + (A q_2)_{,12} + \frac{1}{A} B m_{11,11} + \frac{1}{A} B \Gamma A m_{21,1} + \frac{1}{A} (A m_{21})_{,112} + A B \bar{p}_3 = 0$$

$$n_{11} = Et \left(\frac{1}{A} v_{,11}^1 + \Gamma v^2 + \frac{1}{R_1} v^3 \right) + \nu N_{22}, \quad n_{22} = N_{22}$$

$$m_{11} = Et \frac{B}{D} \left(\frac{1}{A R_1} v_{,11}^1 - \frac{1}{A^2} v_{,111}^3 + \Gamma \varphi_{,11}^2 \right) + \nu M_{22}; \quad m_{22} = M_{22}$$

$$A q_2 = A Q_2 - \frac{1}{A} (A m_{21,1})$$

$$(A q_2)_{,12} = (A Q_2)_{,12} - m_{21,12}; \quad \frac{1}{A} (A m_{21,1})_{,12} = \frac{1}{A} \cdot A_{,12} m_{21,1} + \frac{1}{A} A m_{21,12}$$

Koordinatentransformation und Einsetzen:

$$\begin{aligned} (A Q_2)_{,12} &= \cancel{A m_{21,12}} + \frac{1}{R_2} (A N_{22}) + \frac{A}{R_1} Et \left(v_{,11}^1 + \Gamma v^2 + \frac{1}{R_1} v^3 \right) + \frac{A}{R_1} \nu N_{22} \\ &\quad - A Et \frac{B}{D} \left(\frac{1}{R_1} v_{,111}^1 - \frac{v_{,1111}^3}{11111} + \Gamma \varphi_{,11}^2 \right) - A \nu M_{22,11} - \Gamma A m_{21,1} \cdot 2 \\ &\quad - \cancel{\Gamma A m_{21,1}} - \cancel{A m_{11,12}} - A \bar{p}_3 \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen mit dem dritten Term der ersten Gleichung muß gelten:

$$2 \Gamma A m_{21,1} \approx 2 \Gamma \frac{B}{D} \frac{1}{R_1} N_{21,1}$$

Diese Beziehung wird ohne weitere Herleitung zunächst als richtig unterstellt.

$$\begin{aligned} (A Q_2)_{,12} &= -2 \Gamma \frac{B}{D} \frac{1}{R_1} A N_{21,1} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\nu}{R_1} \right) A N_{22} - \nu A M_{22,11} + A Et \frac{1}{R_1} \left(v_{,11}^1 - \frac{B}{D} v_{,1111}^1 \right) \\ &\quad + A Et \Gamma \frac{1}{R_1} v^2 + A Et \left(\frac{1}{R_1 R_1} v^3 + \frac{B}{D} v_{,1111}^3 \right) - A Et \frac{B}{D} \Gamma \varphi_{,11}^2 - A \bar{p}_3 \end{aligned} \quad (7)$$

$$(\dots)_{,11} = \frac{\partial}{\partial s^k}$$

8. Gleichung:

$$-B A q_2 - \frac{A_{,12}}{B} \cdot B m_{11} + \frac{B}{A} (A m_{21})_{,11} + (A m_{22})_{,12} = 0$$

$$\begin{aligned} (A m_{22})_{,12} &= B A Q_2 - \frac{B}{A} (A m_{21})_{,11} + \frac{A_{,12}}{B} \cdot B Et \frac{B}{D} \left(\frac{1}{A R_1} v_{,11}^1 - \frac{1}{A^2} v_{,111}^3 + \Gamma \varphi_{,11}^2 \right) \cdot \frac{A}{A} \\ &\quad + \frac{A_{,12}}{B} \cdot B \nu M_{22} \cdot \frac{A}{A} - \frac{B}{A} A m_{21,1} \end{aligned}$$

Koordinatentransformation $\partial_2 = B \frac{\partial}{\partial \theta^2}$; $\partial_1 = A \frac{\partial}{\partial \theta^1}$

$$(AM_{22})_{,2} = AQ_2 - Am_{21,1} + A\Gamma E t \frac{B}{D} \left(\frac{1}{R_1} v_{,1}^1 - v_{,11}^3 + \Gamma \varphi^2 \right) + \nu \Gamma AM_{22} - Am_{21,1}$$

Wie bei der 7. Gleichung muß aus Symmetriegründen gelten:

$$2Am_{21,1} \cong 2 \frac{B}{D} \frac{1}{R_1} N_{21,1}$$

$$(AM_{22})_{,2} = AQ_2 - 2 \frac{B}{D} \frac{1}{R_1} N_{21,1} + \nu \Gamma AM_{22} + \Gamma A E t \frac{B}{D} \left(\frac{v_{,1}^1}{R_1} - v_{,11}^3 + \Gamma \varphi^2 \right) \quad (8)$$

$$(\dots)_{,2} = \frac{\partial}{\partial \theta^2}$$

Das DGL-System 1. Ordnung der techn. Schalentheorie wurde aus den allgemeinen partiellen DGL'n unter folgenden Voraussetzungen und Annahmen hergeleitet:

- Rotationssymmetrische Geometrie : $A_{,1} = B_{,1} = 0$
- Vernachlässigung der Schubverzerrungen \Rightarrow Die Schnittkräfte wurden durch die Ersatzschnittkräfte am Schalenrand ersetzt.
- Die Schubkraft n_{12} wurde mit Hilfe der 6. Gleichgewichtsbedingung durch n_{21} ausgedrückt
- Bei der Ableitung der Gleichungen wurden Terme der Größenordnung $\frac{m_{12}}{R_2}$ zur Vereinfachung der Ausdrücke vernachlässigt \rightarrow geringe Fehler.

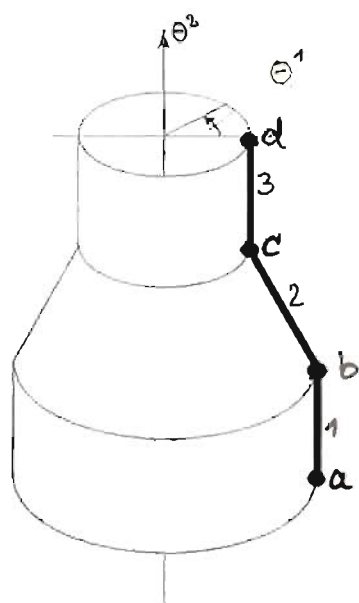
9.3 Strukturberechnung mit Ringelementen

(Elementkonzept auf der Basis des Weggrößenverfahrens)

Ziel: Berechnung der Zustandsgrößen der Schale (Schnittkräfte, Verschiebungen) an diskreten Knotenpunkten (bzw. Knotenlinien)

Erläuterung am Beispiel einer zusammengesetzten Behälterschale: Eindimensionale Diskretisierung

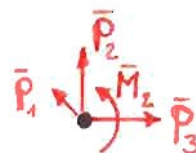
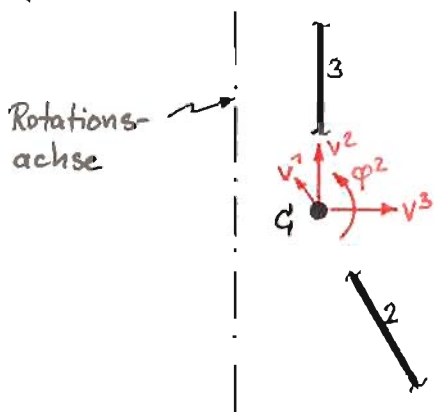
längs des Meridians:



3 (Ring-)Elemente: 1, 2, 3

4 Knoten(-linien): a, b, c, d

Definition der Zustandsgrößen an einem Knoten:



Zylinderkoordinaten als globales Koordinatensystem!

Weggrößen (als primäre Unbekannte):

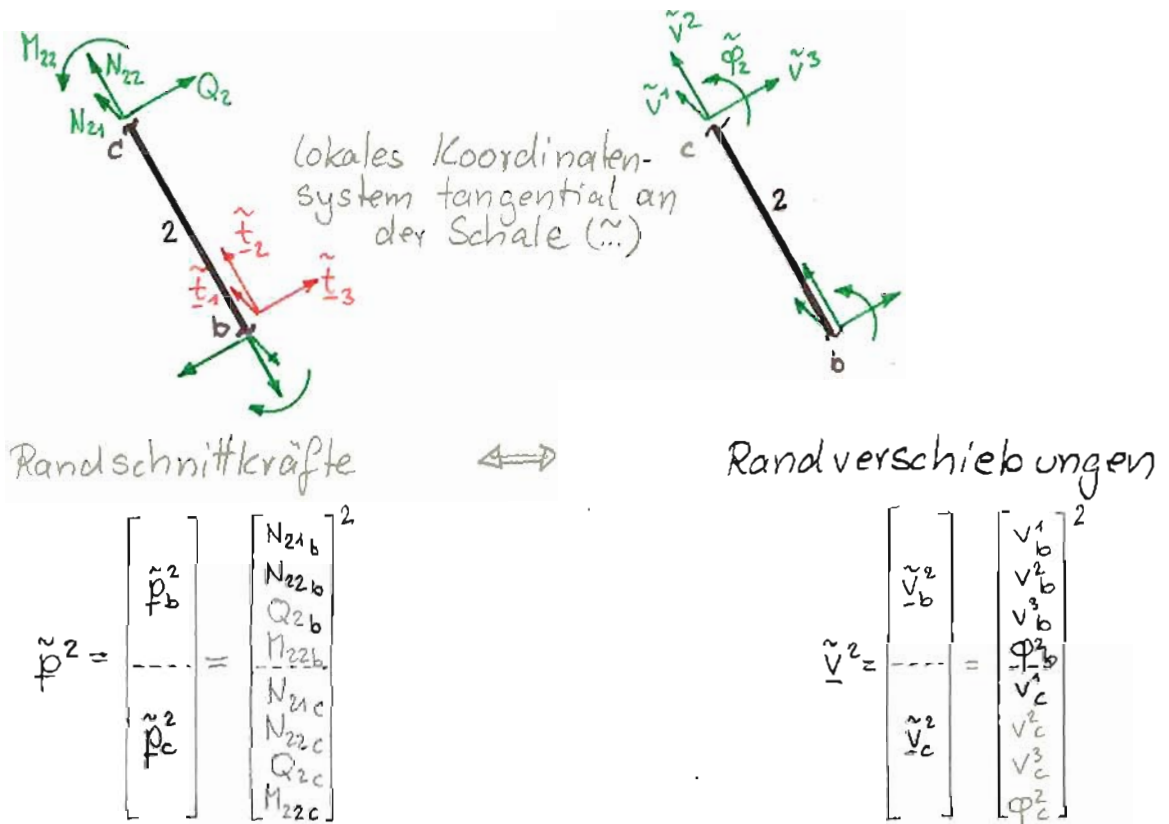
$$\underline{V}_c = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ \varphi^2 \end{bmatrix}_c$$



korrespondierende Kraftgrößen

$$\underline{\bar{P}}_c = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix}_c$$

Definition der Zustandsgrößen an den Elementrändern:



Bemerkung: Wegen der Kirchhoff-Love Hypothese sind die Randschnittkräfte nicht identisch mit den echten Schnittkräften! Für die Spannungsnachweise ist eine Umrechnung erforderlich.

Kennt man den Verlauf der Zustandsgrößen im Element, so kann man den Zusammenhang der Randgrößen zahlenmäßig berechnen und in matrixieller Form darstellen. Dabei sind verschiedene Anordnungen der Kraft- und Verschiebungsvektoren möglich:

A)
$$\underline{\tilde{z}}_c^2 = \begin{bmatrix} \tilde{v}_c^2 \\ \tilde{p}_c^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{U}_{11} & \underline{U}_{12} \\ \underline{U}_{21} & \underline{U}_{22} \end{bmatrix}}_{\text{Übertragungsmatrix}} \begin{bmatrix} \tilde{v}_b^2 \\ \tilde{p}_b^2 \end{bmatrix} = \underline{U}^2 \cdot \underline{\tilde{z}}_b^2$$

Kennt man die Zustandsgrößen am Elementanfang, so kann man die vom Elementende berechnen.

B)

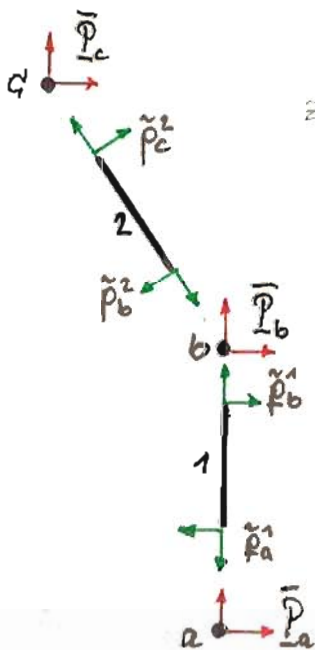
$$\bar{p}^2 = \begin{bmatrix} \tilde{p}_b^2 \\ \tilde{p}_c^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{k}_{bb} & \tilde{k}_{bc} \\ \tilde{k}_{cb} & \tilde{k}_{cc} \end{bmatrix}}_{\text{Steifigkeitsmatrix}} \begin{bmatrix} \tilde{v}_b^2 \\ \tilde{v}_c^2 \end{bmatrix} = \tilde{k}^2 \cdot \tilde{v}^2$$

Die Randschnittkräfte werden aus den Randverschiebungen berechnet.

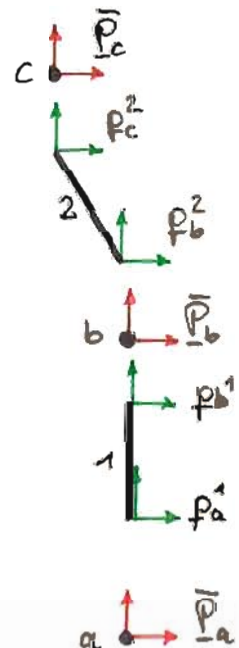
Die Ermittlung des Verlaufs der Zustandsgrößen im Element und die Berechnung der Elementmatrizen ist ein Kernpunkt der numerischen Berechnungsmethoden. Er wird deshalb im Anschluß an die allgemeine Herleitung des WGV detailliert behandelt.

Die Systemberechnung nach dem WGV erfolgt durch Bilden des Gleichgewichts zwischen den Knotenkraftgrößen.

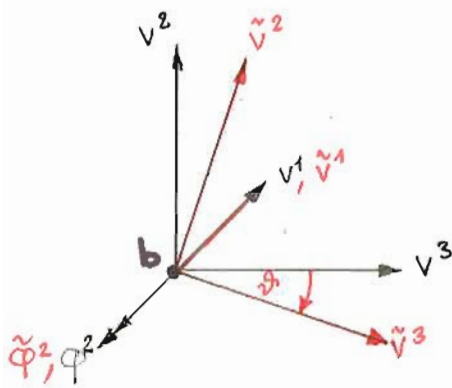
Die Zustandsgrößen der Elemente sind auf das lokale Koordinatensystem bezogen und müssen zur Bildung des Knotengleichgewichts transformiert werden:



z.B.: $\tilde{p}_b^2 = \underline{\Sigma}_b p_b^2$
 $\tilde{p}_c^2 = \underline{\Sigma}_c p_c^2$
 analog:
 $\tilde{v}_b^2 = \underline{\Sigma}_b^T v_b^2$
 $\tilde{v}_c^2 = \underline{\Sigma}_c^T v_c^2$



Koordinatentransformation:



$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \\ \tilde{\varphi}^2 \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \varphi^2 \end{bmatrix}_b$$

$$\underline{\tilde{v}}_b = \underline{C}_b \underline{v}_b \iff \underline{v}_b = \underline{C}_b^T \underline{\tilde{v}}_b$$

Orthogonale Transformation

Transformation der Steifigkeitsbeziehung:

$$\underline{\tilde{p}}^i = \underline{\tilde{k}}^i \cdot \underline{\tilde{v}}^i \Rightarrow \underline{\tilde{v}}^i = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{v}}_a \\ \underline{\tilde{v}}_b \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \underline{I}_a & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{C}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_a \\ \underline{v}_b \end{bmatrix}^i = \underline{I} \underline{v}^i$$

$$\underline{p}^i = \begin{bmatrix} p_a \\ p_b \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \underline{I}_a^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{C}_b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\tilde{p}}_a \\ \underline{\tilde{p}}_b \end{bmatrix}^i = \underline{I}^T \underline{\tilde{p}}^i$$

$$\underline{p}^i = \underline{I}^T \underline{\tilde{p}}^i = \underline{I}^T (\underline{\tilde{k}}^i \underline{\tilde{v}}^i) = \underline{I}^T \underline{\tilde{k}}^i \underline{I} \underline{v}^i = \underline{k} \underline{v}^i$$

$$\underline{\tilde{p}}^i = \underline{k}^i \underline{v}^i \text{ mit } \underline{k}^i = \underline{I}^T \underline{\tilde{k}}^i \underline{I}$$

Bilden von Knotengleichgewicht:

Knoten a: $\underline{\tilde{p}}_a = p_a^1$

" b: $\underline{\tilde{p}}_b = p_b^1 + p_b^2$

" c: $\underline{\tilde{p}}_c = p_c^2 + p_c^3$

" d: $\underline{\tilde{p}}_d = p_d^3$

äußere
Kräfte
(Knotenlasten)

innere Kräfte: werden mit Hilfe der Steifigkeitsbeziehung durch die (unbekannten) Verschiebungen ausgedrückt.

Einsetzen der Steifigkeitsbeziehungen:

$$\bar{P}_a = \underline{k}_{aa}^1 \underline{v}_a^1 + \underline{k}_{ab}^1 \underline{v}_b^1$$

$$\bar{P}_b = \underline{k}_{ba}^1 \underline{v}_a^1 + \underline{k}_{bb}^1 \underline{v}_b^1 + \underline{k}_{bb}^2 \underline{v}_b^2 + \underline{k}_{bc}^2 \underline{v}_c^2$$

$$\bar{P}_c = \underline{k}_{cb}^2 \underline{v}_b^2 + \underline{k}_{cc}^2 \underline{v}_c^2 + \underline{k}_{cc}^3 \underline{v}_c^2 + \underline{k}_{cd}^3 \underline{v}_d^3$$

$$\bar{P}_d = \underline{k}_{dc}^3 \underline{v}_c^3 + \underline{k}_{dd}^3 \underline{v}_d^3$$

Knotenverträglichkeit: Gleichheit der Verschiebungen

benachbarter Elemente:

$$\underline{v}_a = \underline{v}_a^1$$

$$\underline{v}_b = \underline{v}_b^1 = \underline{v}_b^2$$

$$\underline{v}_c = \underline{v}_c^2 = \underline{v}_c^3$$

$$\underline{v}_d = \underline{v}_d^3$$

$$\bar{P}_a = \underline{k}_{aa}^1 \underline{v}_a + \underline{k}_{ab}^1 \underline{v}_b$$

$$\bar{P}_b = \underline{k}_{ba}^1 \underline{v}_a + (\underline{k}_{bb}^1 + \underline{k}_{bb}^2) \underline{v}_b + \underline{k}_{bc}^2 \underline{v}_c$$

$$\bar{P}_c = \underline{k}_{cb}^2 \underline{v}_b + (\underline{k}_{cc}^2 + \underline{k}_{cc}^3) \underline{v}_c + \underline{k}_{cd}^3 \underline{v}_d$$

$$\bar{P}_d = \underline{k}_{dc}^3 \underline{v}_c + \underline{k}_{dd}^3 \underline{v}_d$$

In Matrizenform:

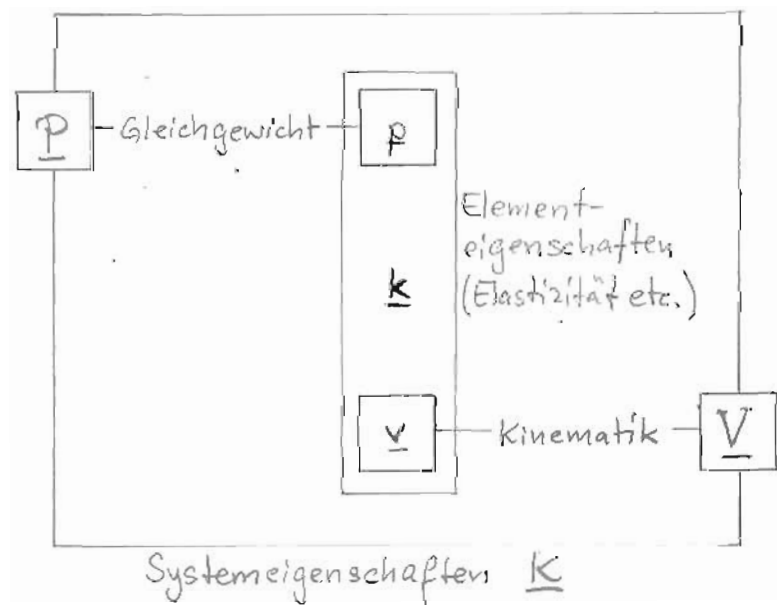
$$\begin{bmatrix} \bar{P}_a \\ \bar{P}_b \\ \bar{P}_c \\ \bar{P}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{aa}^1 & \underline{k}_{ab}^1 & & \\ \underline{k}_{ba}^1 & \underline{k}_{bb}^1 + \underline{k}_{bb}^2 & \underline{k}_{bc}^2 & \\ & \underline{k}_{cb}^2 & \underline{k}_{cc}^2 + \underline{k}_{cc}^3 & \underline{k}_{cd}^3 \\ & & \underline{k}_{dc}^3 & \underline{k}_{dd}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_a \\ \underline{v}_b \\ \underline{v}_c \\ \underline{v}_d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{P} = \underline{K} \underline{V}$$

Das Knotengleichgewicht stellt sich als Überlagerung der Steifigkeitsmatrizen benachbarter Elemente dar.

Nach dem Einsetzen der (Verschiebungs-) Randbedingungen (z.B. $\underline{v}_a=0$) kann das Gleichungssystem $\underline{P}=\underline{K}\underline{V}$ nach den verbleibenden Unbekannten aufgelöst werden.

Für die Bemessung sind dann die Schnittkräfte über eine Nachlaufrechnung aus den Verschiebungen \underline{V} zu bestimmen.

Den mit der Systemberechnung erfaßten Zusammenhang der Knoten-Kraftgrößen mit den Knoten-Weggrößen durch Überlagerung der Elementsteifigkeiten zur Systemsteifigkeitsmatrix \underline{K} kann schematisch wie folgt darstellen:



10. Finite-Element-Modelle für Schalen

Ausgangspunkt für eine Weggrößenformulierung ist das Prinzip der virtuellen Arbeiten (s. Kap. 8):

$$\delta A = \int_{\mathbb{F}} \left\{ n_{\alpha\beta} \delta x_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta} \delta \beta_{\alpha\beta} + \overset{\approx 0 \text{ bei Bedarf}}{q_{\alpha}} \delta \gamma_{\alpha\beta} - \bar{p}_i \delta v^i \right\} AB d\theta^1 d\theta^2 = 0$$

Dabei sind die vorgegebenen Volumenkraft (Eigengewicht) und Lasten auf die Schalenlaibungen zu Flächentasten \bar{p}_i zusammengefasst.

Ersetzen der Schnittkräfte durch Verzerrungen mit Hilfe des Stoffgesetzes (s. Kap. 6)

$$\underline{n} = \underline{E}_D \underline{\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \underline{m} = \underline{E}_B \underline{\beta}$$

$$\begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{22} \\ n_{12} \end{bmatrix} = \underline{D}_e \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{bmatrix} = \underline{B}_e \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{12} \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_e = \frac{Et}{1-\nu^2}; \quad \underline{B}_e = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \underline{D}_e \cdot \frac{t^2}{12} \dots \text{Dehn- bzw. Biegesteifigkeit der Schale}$$

Querkraftschub: $q = G \cdot \gamma$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{5}{6} G t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \dots \text{Schubsteifigkeit}$$

PVA. in matrizieller Schreibweise:

$$\delta A = \int_{\Gamma} \left\{ \underline{s}_\alpha^T \underline{n} + \underline{s}_\beta^T \underline{m} + \underline{s}_\gamma^T \underline{q} - \underline{s}_v^T \underline{\bar{p}} \right\} AB d\theta^1 d\theta^2$$

A, B sind die geometrischen Kenngrößen der gekrümmten Fläche, die bei der Integration berücksichtigt werden müssen.

Einsetzen des Stoffgesetzes:

$$\delta A = \int_{\Gamma} \left\{ \underline{s}_\alpha^T \underline{E}_\alpha \underline{\alpha} + \underline{s}_\beta^T \underline{E}_\beta \underline{\beta} + \underline{s}_\gamma^T \underline{G} \underline{\gamma} - \underline{s}_v^T \underline{\bar{p}} \right\} AB d\theta^1 d\theta^2 = 0$$

Die Verzerrungen können mit Hilfe der kinematischen Grundgleichungen durch Verschiebungen und ihre Ableitungen ersetzt werden.

$$\underline{\alpha} = \underline{D}_\alpha \cdot \underline{u}$$

$$\underline{\beta} = \underline{D}_\beta \cdot \underline{u}$$

$$\underline{\gamma} = \underline{D}_\gamma \cdot \underline{u}$$

Die Ableitungsmatrizen \underline{D} beziehen sich dabei auf den Verschiebungsvektor

$$\underline{u}^T = [v^1 \ v^2 \ v^3 \ \varphi^2 \ \varphi^3]$$

Durch die Aktivierung der Kirchhoff-Love-Hypothese kann man den Arbeitsanteil $\underline{s}_\gamma^T \underline{q}$ vernachlässigen und die Verdrehungen φ^k eliminieren.

Kinematische Gleichungen nach Kap. 5;

-3-

$$\begin{bmatrix} A\alpha_{11} \\ A\tilde{\alpha}_{12} \\ B\tilde{\alpha}_{21} \\ B\alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 & \frac{A_{12}}{B} & \frac{A}{R_1} \\ -\frac{A_{12}}{B} & \partial_1 & 0 \\ \partial_2 & -\frac{B_{11}}{A} & 0 \\ \frac{B_{11}}{A} & \partial_2 & \frac{B}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A\beta_{11} \\ A\tilde{\beta}_{12} \\ B\beta_{21} \\ B\beta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{12}}{B} & \partial_1 \\ \partial_1 & -\frac{A_{12}}{B} \\ -\frac{B_{11}}{A} & \partial_2 \\ \partial_2 & \frac{B_{11}}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^2 \\ \varphi^1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{A}{R_1} & 0 & \partial_1 & 0 & A \\ 0 & -\frac{B}{R_2} & \partial_2 & B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ \varphi^2 \\ \varphi^1 \end{bmatrix}$$

Zusammenfassen der Schubtome $\alpha_{12} = \tilde{\alpha}_{12} + \alpha_{21}$, $\beta_{12} = \tilde{\beta}_{12} + \beta_{21}$ und umsordern der Geometrieparameter A, B:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial_1}{A} & \frac{A_{12}}{AB} & \frac{1}{R_1} \\ \frac{B_{11}}{AB} & \frac{\partial_2}{B} & \frac{1}{R_2} \\ \frac{\partial_2}{B} - \frac{A_{12}}{AB} & \frac{\partial_1}{A} - \frac{B_{11}}{AB} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{12}}{AB} & \frac{\partial_1}{A} \\ \frac{\partial_2}{B} & \frac{B_{11}}{AB} \\ \left(\frac{\partial_1}{A} - \frac{B_{11}}{AB}\right) & \left(\frac{\partial_2}{B} - \frac{A_{12}}{AB}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^2 \\ \varphi^1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 & \frac{\partial_1}{A} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{\partial_2}{B} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ \varphi^2 \\ \varphi^1 \end{bmatrix}$$

Kirchhoff-Love-Hypothese: $\gamma_{\alpha 3} \approx 0$

-4-

$$\begin{bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 & \frac{\partial_1}{A} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{\partial_2}{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^2 \\ \varphi^1 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Es gilt: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \varphi^2 \\ \varphi^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +\frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{\partial_1}{A} \\ 0 & +\frac{1}{R_2} & -\frac{\partial_2}{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \varphi^2 \\ \varphi^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} & -\frac{\partial_2}{B} \\ \frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{\partial_1}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}}$$

Einsetzen in die Gleichungen für $\beta = \underline{D}_\beta u$

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial_1}{A} \cdot \frac{1}{R_1} & \frac{A_{12}}{AB} \cdot \frac{1}{R_2} \\ \frac{B_{11}}{AB} \cdot \frac{1}{R_1} & \frac{\partial_2}{B} \cdot \frac{1}{R_2} \\ \left(\frac{\partial_2}{B} - \frac{A_{12}}{AB}\right) \frac{1}{R_1} & \left(\frac{\partial_1}{A} - \frac{B_{11}}{AB}\right) \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{A_{12}}{AB} \cdot \frac{\partial_2}{B} - \frac{\partial_1}{A} \cdot \frac{\partial_1}{A} \\ -\frac{B_{11}}{AB} \cdot \frac{\partial_1}{A} - \frac{\partial_2}{B} \cdot \frac{\partial_2}{B} \\ -\left(\frac{\partial_1}{A} - \frac{B_{11}}{AB}\right) \frac{\partial_2}{B} - \left(\frac{\partial_2}{B} - \frac{A_{12}}{AB}\right) \frac{\partial_1}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$



Typisch für Kirchhoff-Theorie:
2. Ableitungen der Durchbiegung v^3 !

Sonst treten nur 1. Ableitungen auf.

- Die Ableitungsmatrizen \underline{D} enthalten neben den Differentialoperatoren ∂_x noch die Geometrieparameter A, B, R_1, R_2 , die auch Funktionen von Θ^k sein können.
- Dies ist bei der 'Integration' des Arbeitsintegrals zu berücksichtigen
- Berücksichtigt man die Schubverzerrungen, so treten nur 1. Ableitungen der Verschiebungen und Verdrehungen auf. Als Ansatzfunktionen für Finite Elemente genügen lineare Polynome, die sowohl für Verschiebungen als auch Verdrehungen unabhängig voneinander verwendet werden können.
- Vernachlässigt man die Schubverzerrungen, so kann man die Verdrehungen eliminieren. Dafür treten zweite Ableitungen der v^3 -Verschiebungen auf, die mindestens quadratische Polynome als Ansatzfunktionen erfordern.

Verschiebungsansatz $\underline{u} = \underline{N}_u \hat{\underline{v}}$
 $\underline{u}^T = [v^1 \ v^2 \ v^3 \ ; \ \varphi^2 \ \varphi^1]$

Knotenverschiebungen bzw. Verdrehungen $\underline{v} = \hat{\underline{N}}_u \hat{\underline{v}} \Rightarrow \hat{\underline{v}} = \hat{\underline{N}}_u^{-1} \underline{v} = \underline{G} \underline{v}$

Verzerrungen $\underline{\epsilon} = \underline{D} \underline{u} = \underline{D} \underline{N}_u \underline{G} \underline{v} = \underline{D} \underline{N} \underline{v} = \underline{B} \underline{v}$

Steifigkeitsmatrix $\underline{k} = \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} \ AB d\Theta^1 d\Theta^2$

Wegen der komplizierten Ausdrücke in den kinematischen Gleichungen versucht man bei Finiten Elementen für Schalen nicht nur das Verschiebungsfeld, sondern auch die Schalen-geometrie zu approximieren:

- a) Ableitung von Finiten Schalenelementen für spezielle, einfache Geometrien (Zylinder, Kugel etc.)
- b) Vereinfachung der Schalengleichungen durch die Anwendung der Theorie flacher Schalen
- c) Weitere Vereinfachung durch den Übergang von flachen Schalen auf ebene Schalenelemente (Facettenapproximation)

Ein alternativer Ansatz zur Approximation der Geometrie besteht darin, die kartesischen Koordinaten ebener Elemente mit Hilfe von Interpolationsfunktionen räumlich zu verzerren → isoparametrisches Konzept:

- d) räumliche Verzerrung von ebenen Scheiben/Platten-Elementen
- e) räumliche Verzerrung dreidimensionaler Kontinuums-elemente → „degenerierte“ Schalenelemente

zu a) Beispiel: Kinematik für Zylinderelem. -7-

Differentialgeometrie $A=R, B=1, R_1=R, R_2=\infty$

$$A_{12}=0, B_{11}=0, \underline{R=\text{konst.}}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \partial_1 & 0 & \frac{1}{R} \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ \partial_2 & \frac{1}{R} \partial_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma^{13} \\ \gamma^{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 0 & \frac{1}{R} \partial_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \partial_2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ \varphi^2 \\ \varphi^1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} \partial_1 \\ \partial_2 & 0 \\ \frac{1}{R} \partial_1 & \partial_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^2 \\ \varphi^1 \end{bmatrix}$$

Kirchhoff - Theorie $\gamma = \underline{0}$

α wie vor

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2} \partial_1 & 0 & -\frac{1}{R^2} \partial_1 \partial_1 \\ 0 & 0 & -\partial_2 \partial_2 \\ \frac{1}{R} \partial_2 & 0 & -\frac{2}{R} \partial_1 \partial_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

Zylinderschalenelement (für beliebige Krümmung)

$$x^3 = R \cos \Theta^1$$

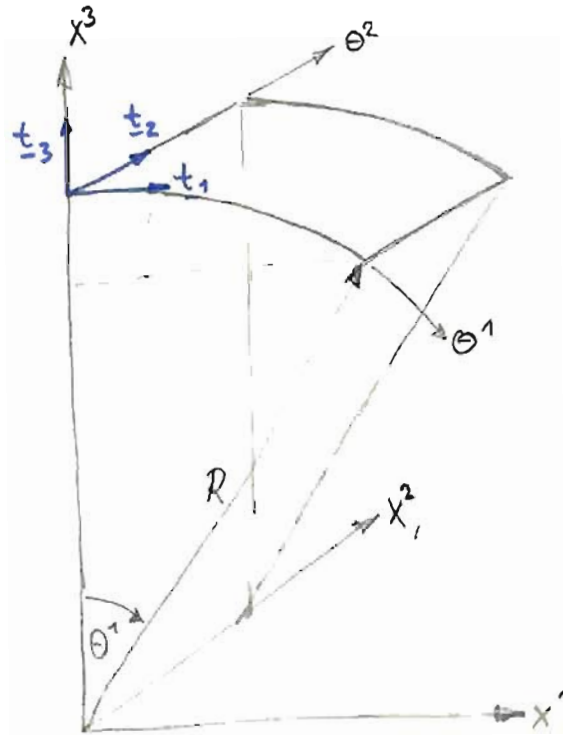
$$x^2 = \Theta^2$$

$$x^1 = R \sin \Theta^1$$

Ortsvektor $\underline{r} = x^i \underline{i}_i$

$$A=R ; B=1$$

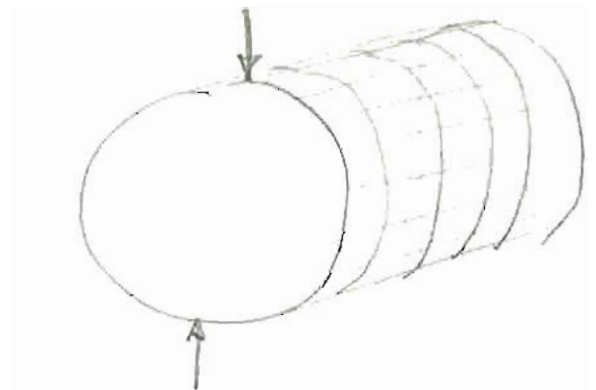
$$R_1=R , R_2=\infty$$



Anwendungen



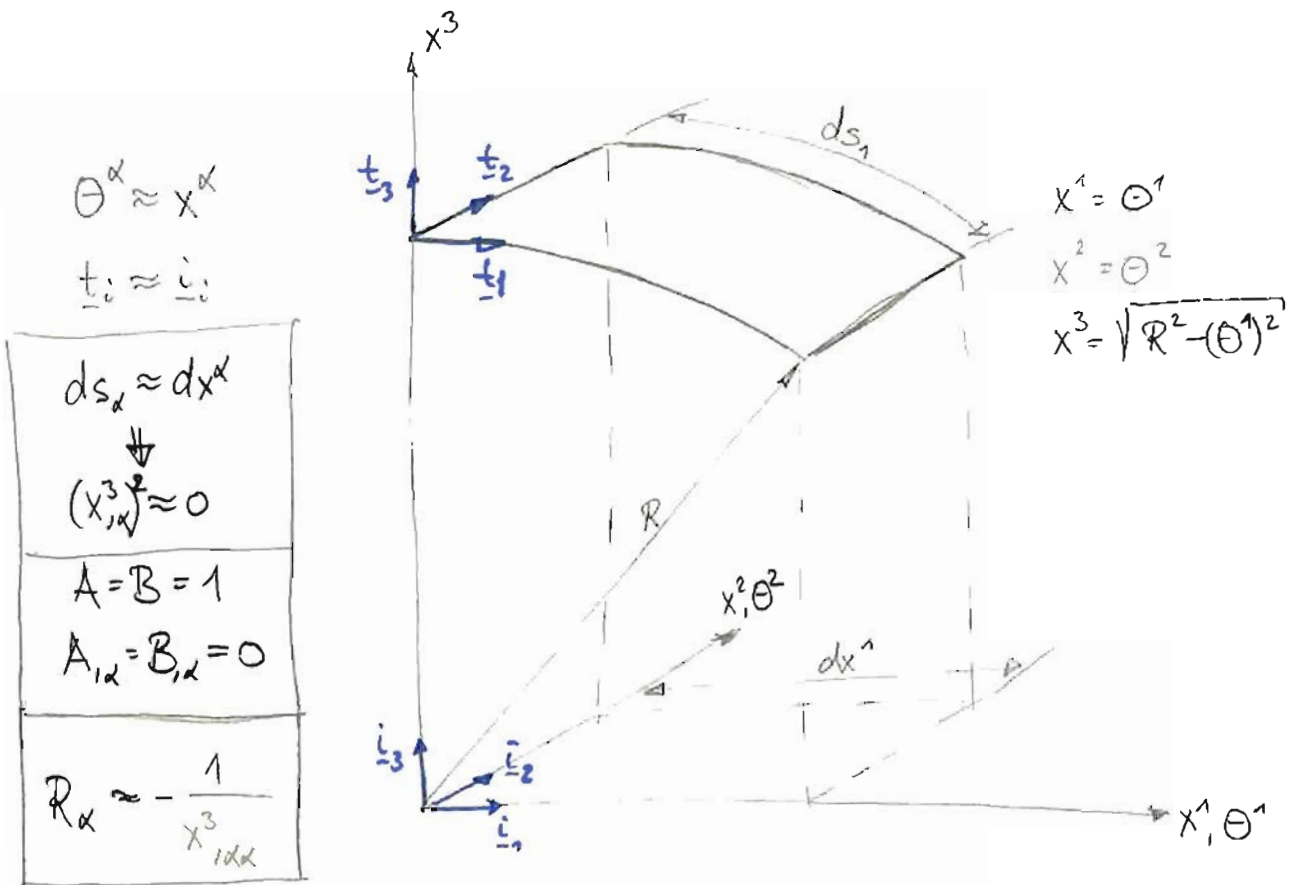
Tonnendächer



Einzellasten

(Fourieransatz würde sehr viele Reihenglieder erfordern)

zu b) Theorie flacher Schalen



$$\theta^\alpha \approx x^\alpha$$

$$\underline{t}_i \approx \underline{i}_i$$

$$ds_\alpha \approx dx^\alpha$$

$$(x^3_{,11})^2 \approx 0$$

$$A=B=1$$

$$A_{1,2}=B_{1,2}=0$$

$$R_\alpha \approx -\frac{1}{x^3_{,11}}$$

$$x^1 = \theta^1$$

$$x^2 = \theta^2$$

$$x^3 = \sqrt{R^2 - (\theta^1)^2}$$

Einsetzen: $x^3_{,11} = \frac{-2\theta^1}{\sqrt{R^2 - (\theta^1)^2}} = -\frac{\theta^1}{x^3} \Rightarrow x^3_{,11} = -\frac{1}{x^3} \left[1 + \left(\frac{\theta^1}{x^3} \right)^2 \right] = -\frac{1}{x^3} \left[1 + (x^3_{,11})^2 \right] \approx 0$

$$R_1 = -\frac{1}{x^3_{,11}} \approx x^3 \stackrel{!}{=} R \quad ; \quad R_2 = \infty \quad \text{exakt wegen } x^3_{,12} = x^3_{,122} = 0$$

(für kleine θ^1)

Der Hauptunterschied gegenüber der vollständigen Theorie besteht darin, daß die Metrikkoeffizienten A, B zu Eins gesetzt werden. Die Integration des Arbeitsintegrals erfolgt über die projizierte Grundfläche.

Die Hauptkrümmungsradien R_1, R_2 lassen sich für den Zylinder (und auch für die Kugel) relativ leicht exakt ausrechnen. Bei komplizierten Geometrien kann man näherungsweise $R_\alpha \approx x^3$ im ganzen Element konstant ansetzen, wobei x^3 z.B. in Elementmitte gemessen wird.

kinematische Gleichungen für flache Zylinderschalen

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & | & \frac{1}{R} \\ 0 & \partial_2 & | & 0 \\ \partial_2 & \partial_1 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

← bis auf den Term $\frac{v^3}{R}$
reine Scheibenkinematik

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & 0 \\ \partial_1 & \partial_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^2 \\ \varphi^1 \end{bmatrix}$$

← keine Krümmungsterme
mehr, reine Platte

$$\begin{bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 0 & \partial_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \partial_2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ \varphi^2 \\ \varphi^1 \end{bmatrix}$$

↑ Koppelterm

$$\Rightarrow \begin{aligned} \varphi^1 &= -v^3_{,1} + \frac{v^1}{R} \\ \varphi^2 &= -v^3_{,2} \end{aligned}$$

Platte Koppelterm Schale

Kirchhoff - Theorie $f = 0$

vergleiche mit S. 7

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \partial_1 & 0 & | & -\partial_{11} \\ 0 & 0 & | & -\partial_{22} \\ \frac{1}{R} \partial_2 & 0 & | & -2\partial_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

↑ Koppelterme ↑ reine Platte

Durch die Annahmen der Theorie flacher Schalen erfolgt eine weitestgehende Reduktion der Koppelterme zwischen „Platten“- und „Scheiben“-Anteilen

(Vorteil: Weniger Probleme mit Ansatzfunktionen zur Beschreibung der Starrkörperbewegungen)

Letzte Stufe bei der Approximation der Schalen-
 geometrie: Ebene Elemente
 (Scheibe/Platte) -11-

- Vollständige Vernachlässigung der Krümmung
 $\frac{1}{R_k} \rightarrow 0$, d.h. Entkopplung von Membran- und
 Biegewirkung im Element

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & | & 0 \\ 0 & \partial_2 & | & 0 \\ \partial_2 & \partial_1 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \leftarrow \text{reine Scheibe}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{44} \\ \beta_{22} \\ \beta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & 0 \\ \partial_1 & \partial_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^2 \\ \varphi^1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{schubweiche Platte}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & \partial_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & | & \partial_2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ \varphi^2 \\ \varphi^1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Kopplung } v^3 \leftrightarrow \varphi^k$$

Kirchhoff-Theorie γ_{20}

$$\begin{bmatrix} \beta_{44} \\ \beta_{22} \\ \beta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & -\partial_{11} \\ 0 & 0 & | & -\partial_{22} \\ 0 & 0 & | & -2\partial_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \leftarrow \text{reine Platte (schubstarr)}$$

Umdrucke zur Übung Flächentragwerke II

Sommersemester 1999

(S. 1 - 102)

2.5 Einheitsspannungszustand $X_2 = 1$

2.5.1 Kreisplatte



$$\Rightarrow \delta_{12}^{KP} = 0$$

2.5.2 Kreisringplatte \rightarrow Skript FTW I, Kap. 10 Seite 3



$g = 1:$

$$m_r = 0$$

$$m_y = - \frac{1,0 \cdot b}{2} (1 + \nu) \cdot \left(2x - \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \right) = 4,890$$

$$W_{1r} = - \frac{1,0 \cdot a \cdot b}{2B \cdot (1 + \nu)} \left(1 - 2x \cdot \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) = -4,890 \cdot 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \delta_{12}^{KR} = -4,890 \cdot 10^{-4}$$

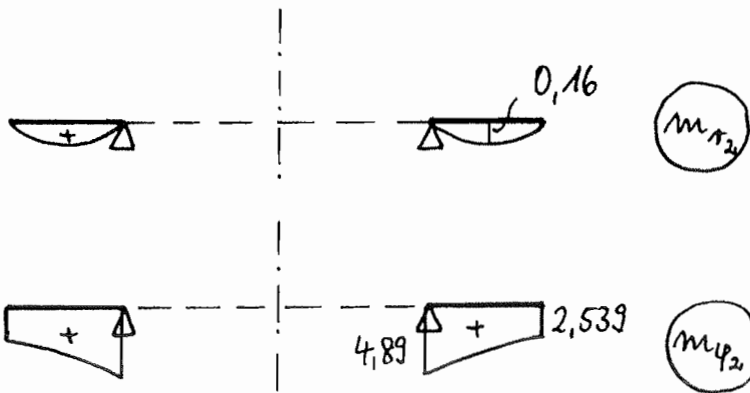
$\beta = \beta = 1,75:$

$m_x = 0$

$m_\varphi = 2,539$

$w = \frac{1,0 \cdot a^2 b}{8B} \cdot \left[\left(\frac{3+\nu}{1+\nu} - 2\alpha \right) \phi_1 + 4 \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \phi_3 + 2 \phi_2 \right] = -6,966 \cdot 10^{-4}$

$\rightarrow \delta_{22}^{KR} = 6,966 \cdot 10^{-4}$



2.6, Verträglichkeit

$$\delta_{10} = \delta_{10}^{kP} + \delta_{10}^{kR} = 4,0 \cdot 10^{-4} + 3,258 \cdot 10^{-3} = 3,658 \cdot 10^{-3}$$

$$\delta_{20} = 0 + (-4,54 \cdot 10^{-3}) = -4,534 \cdot 10^{-3}$$

$$\delta_{11} = 8,0 \cdot 10^{-5} + 2,170 \cdot 10^{-4} = 2,97 \cdot 10^{-4}$$

$$\delta_{12} = 0 + (-4,89 \cdot 10^{-4}) = -4,89 \cdot 10^{-4}$$

$$\delta_{22} = 6,966 \cdot 10^{-4}$$

$$\delta_{21} = 0 + (-2,795 \cdot 10^{-4}) = -2,795 \cdot 10^{-4}$$

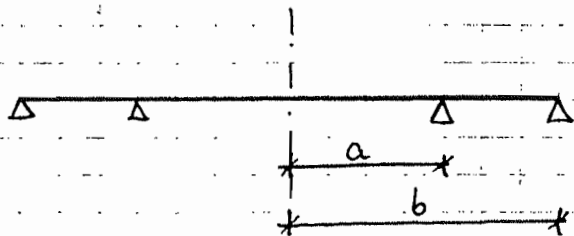
Beachte:

→ Satz von Maxwell-Betti: (Skript Baustatik 2, Kap. 11.4 Seite 5 ff)

$$\delta W_{12} = \delta W_{21}$$

$$\delta F_1 \cdot \delta_{12} = \delta F_2 \cdot \delta_{21}$$

$$\begin{matrix} X_1 \cdot (2\pi a) \cdot \delta_{12} & = & X_2 \cdot (2\pi b) \cdot \delta_{21} & \rightarrow & \frac{\delta_{12}}{\delta_{21}} = \frac{b}{a} = 1,75 & (v) \\ \uparrow & & \uparrow & & & \\ 1 & & 1 & & & \\ \left[\frac{kNm}{m} \right] \cdot [m] \cdot [-] & & \left[\frac{kNm}{m} \right] \cdot [m] \cdot [m] & & & \end{matrix}$$

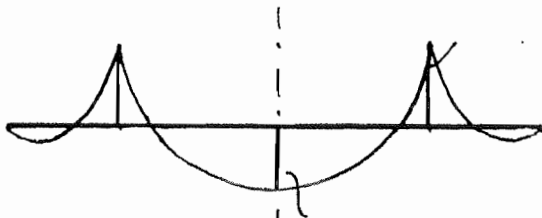


$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 = 0$$

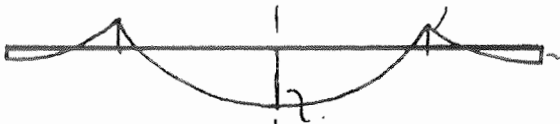
$$\delta_{20} + \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2,970 & -4,890 \\ -2,795 & 6,966 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36,58 \\ 45,34 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{\underline{X_1 = -4,71}} \\ \underline{\underline{X_2 = 4,62}} \end{array}$$

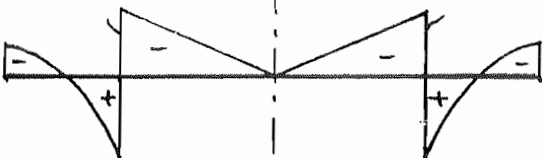
2.7.) Momenten- und Querkraftverlauf



$$\underline{\underline{m_T}} = m_{T0} + X_1 \cdot m_{T1} + X_2 \cdot m_{T2}$$

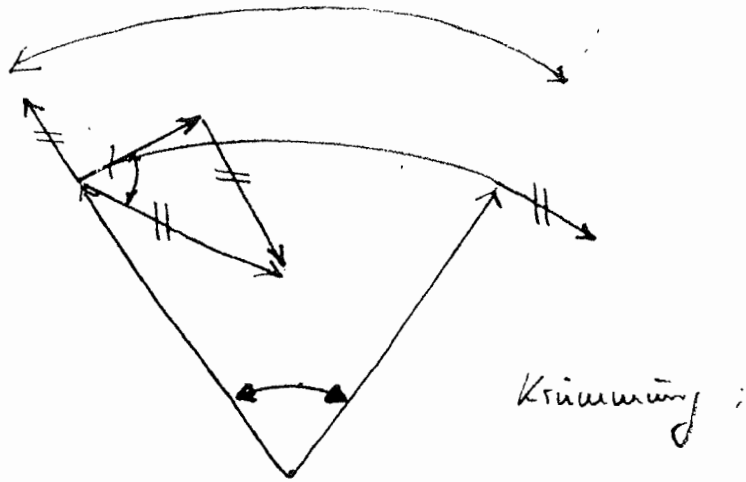


$$\underline{\underline{m_\varphi}}$$



$$\underline{\underline{q_T}}$$

3 Krümmung - zweite Grundform der Fläche



$$\begin{aligned} \cdot \underline{dt} &= -|dt| \cdot \underline{t}_3 \quad | \cdot \underline{t}_3 \\ \underline{dt} \cdot \underline{t}_3 &= -|dt| \cdot \underbrace{\underline{t}_3 \cdot \underline{t}_3}_1 = -|dt| \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

$$\cdot d\varphi = \frac{ds}{R} = \frac{|dt|}{\underbrace{|\underline{t}|}_{=1}} = |dt| \Rightarrow \frac{1}{R} = \quad (\text{II})$$

$$\cdot \underline{t} = \frac{d\underline{r}}{ds} \Rightarrow \frac{d\underline{t}}{ds} = \quad (\text{III})$$

Krümmung

$$\kappa = - \frac{1}{R} \stackrel{\uparrow}{(\text{II})} - \frac{|dt|}{ds} \stackrel{\uparrow}{(\text{I})} \frac{d\underline{t} \cdot \underline{t}_3}{ds} \stackrel{\uparrow}{(\text{III})}$$

$$d\underline{r}^2 = \underline{r}_{111} \cdot d\theta^1 d\theta^1 + \underline{r}_{112} d\theta^1 d\theta^2 + \underline{r}_{121} d\theta^2 d\theta^1 + \underline{r}_{122} d\theta^2 d\theta^2$$

ds^2 ... 1. Grundform

für Rot.-strahlen gilt

$$\underline{r}_{112} \cdot \underline{t}_3 = 0$$

$$\underline{r}_{121} \cdot \underline{t}_3 = 0$$

$\underline{r}_{122} \parallel \underline{r}_{111}$
mit Längenänderung
in θ^2 -Richtg.

$$\Rightarrow \kappa = \frac{\overbrace{\underline{r}_{111} \cdot \underline{t}_3}^L d\theta^1 d\theta^1 + \overbrace{\underline{r}_{122} \cdot \underline{t}_3}^N d\theta^2 d\theta^2}{A^2 d\theta^1 d\theta^1 + B^2 d\theta^2 d\theta^2}$$

zweite Grundform der Fläche



• Krümmung in θ^1 -Richtg., $d\theta^2 = 0$

$$\kappa_1 = \frac{\underline{r}_{111} \cdot \underline{t}_3}{A^2} = \frac{\underline{r}_{111} (\underline{r}_{11} \times \underline{r}_{12})}{A^2 \cdot A \cdot B}; \quad R_1 =$$

• Krümmung in θ^2 -Richtg., $d\theta^1 = 0$

$$\kappa_2 = \frac{\underline{r}_{122} \cdot \underline{t}_3}{B^2} = \frac{\underline{r}_{122} (\underline{r}_{11} \times \underline{r}_{12})}{B^2 \cdot A \cdot B}; \quad R_2 =$$

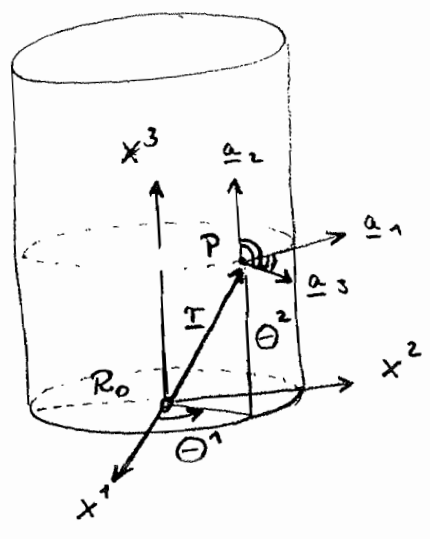
Beim

- bei Rot.-strahlen sind R_1 u. R_2 Hauptkr.-radien

- Gauß'sche Krümmung:

$$K =$$

Beispiel: Zylinder (FOSA, S. 9 ff)



$$r(\theta^k) = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

Tangentenvektoren $\underline{a}_\alpha = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta^\alpha}$; $\underline{a}_3 = \underline{a}_1 \times \underline{a}_2$

$$\underline{a}_1 = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta^1} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} ; \underline{a}_2 = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta^2} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} ; \underline{a}_3 = \underline{a}_1 \times \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

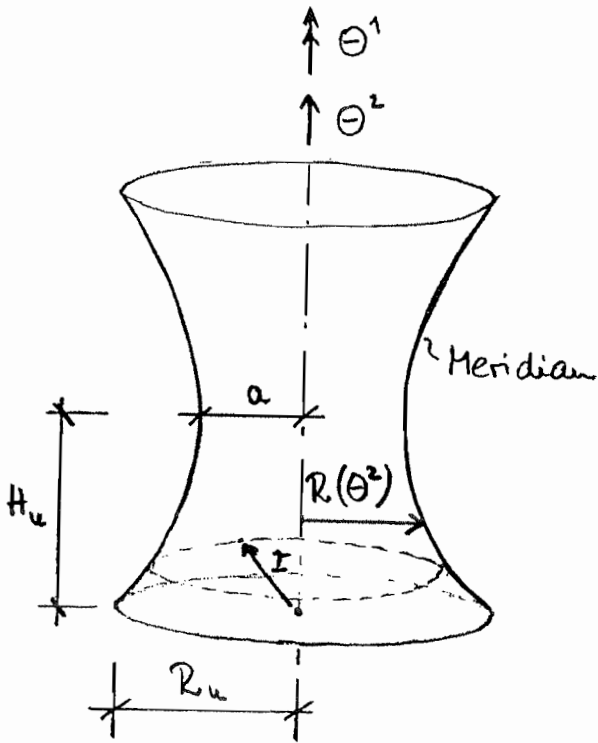
Metrik

$$A = \sqrt{\dots} ; B = \sqrt{\dots}$$

Krümmung

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{1}{R_0} & \Rightarrow R_1 &= R_0 \\ \kappa_2 &= \frac{1}{\infty} & \Rightarrow R_2 &= -\infty \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{aligned}} \right\} K =$$

3. Beispiel: Einseitiges Rotationshyperboloid
(Kühlturm)



Eigenwerte der Hyperbel:

$$\alpha = \frac{a^2 - R_u^2}{H_u^2}$$

$\alpha < 0$:

$\alpha = 0$:

$\alpha > 1$:

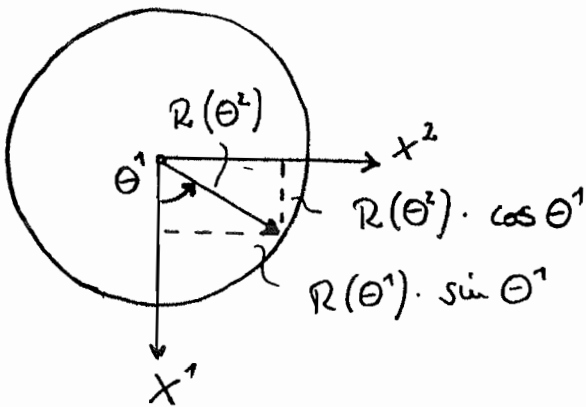
$\alpha = 1$:

Gleichung der Meridiankurve:

$$R^2 + \alpha (\theta^2)^2 = a^2 \quad \Rightarrow$$

$$R(\theta^2) = \sqrt{a^2 - \alpha (\theta^2)^2}$$

• Ortsvektor r:



$$\underline{r} = \begin{bmatrix} \sqrt{a^2 - \alpha (\theta^2)^2} \cdot \cos \theta^1 \\ \sqrt{a^2 - \alpha (\theta^2)^2} \cdot \sin \theta^1 \\ \theta^2 \end{bmatrix}$$

• Tangentenvektoren (Ableitungen)

$$\underline{r}_{11} = \underline{a}_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} ; \quad \underline{r}_{12} = \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\underline{t}_1 = \frac{\underline{a}_1}{|\underline{a}_1|} \qquad \underline{t}_2 = \frac{\underline{a}_2}{|\underline{a}_2|}$$

$$\underline{a}_3 = \underline{a}_1 \times \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} -R \sin \Theta^1 \\ R \cos \Theta^1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{\alpha \Theta^2}{R} \cos \Theta^1 \\ -\frac{\alpha \Theta^2}{R} \sin \Theta^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$|\underline{a}_3| = \sqrt{R^2 + (\alpha \Theta^2)^2}$$

$$\underline{t}_3 = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\alpha \Theta^2)^2}} \begin{bmatrix} R \cos \Theta^1 \\ R \sin \Theta^1 \\ \alpha \Theta^2 \end{bmatrix}$$

• Metrik (Skalarprodukte)

$$A^2 = \underline{r}_{11} \cdot \underline{r}_{11} = \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_1 = R^2 \sin^2(\Theta^1) + R^2 \cos^2(\Theta^1) = R^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A = R}} \quad (\text{gilt immer für Rotationschalen})$$

$$B^2 = \underline{r}_{12} \cdot \underline{r}_{12} = \underline{a}_2 \cdot \underline{a}_2 = \left(\frac{-\alpha \Theta^2}{R}\right)^2 [\cos^2(\Theta^1) + \sin^2(\Theta^1)] + 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha \Theta^2}{R}\right)^2}}}$$

$$\underline{r}_{11} \cdot \underline{r}_{12} = \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 = 0, \quad \text{da } \underline{a}_1 \perp \underline{a}_2$$

• Flächenparameter, Krümmungen

$$\Gamma_{111} = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right] ; \quad \Gamma_{122} = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right]$$

$\Gamma_{112} \neq 0$; $\Gamma_{121} \neq 0$... werden jedoch nicht benötigt!

- Krümmung in Θ^1 -Richtung:

$$\Gamma_{111} \cdot \underline{t}_3 = \frac{-R^2}{\sqrt{R^2 + (\kappa \Theta^2)^2}} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\Gamma_{111} \cdot \underline{t}_3}{A^2} = \frac{-1}{\sqrt{R^2 + (\kappa \Theta^2)^2}}$$

$$\Rightarrow R_1 = -\frac{1}{\alpha_1} = \underline{\underline{\sqrt{R^2 + (\kappa \Theta^2)^2}}}$$

- Krümmung in Θ^2 -Richtung:

$$\Gamma_{122} \cdot \underline{t}_3 = \frac{-\kappa a^2 / R^2}{\sqrt{R^2 + (\kappa \Theta^2)^2}} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\Gamma_{122} \underline{t}_3}{B^2} = \frac{-\kappa a^2}{(R^2 + (\kappa \Theta^2)^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow R_2 = -\frac{1}{\alpha_2} = \underline{\underline{\frac{(R^2 + (\kappa \Theta^2)^2)^{3/2}}{\kappa a^2}}}$$

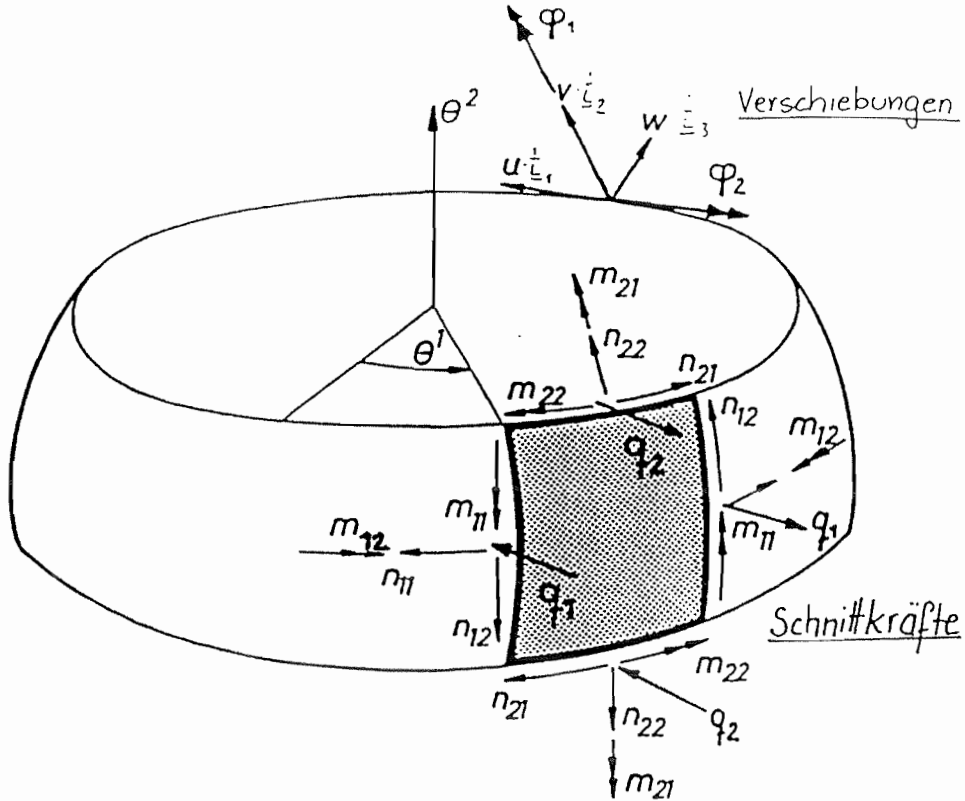
• Gauß'sche Krümmung:

$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \underline{\underline{\frac{\kappa a^2}{(R^2 + (\kappa \Theta^2)^2)^2}}}$$

$\kappa < 0 \rightarrow K < 0 \Rightarrow$ hyperbolischer Schalentyp

Membrantheorie

1.) Allgemeines



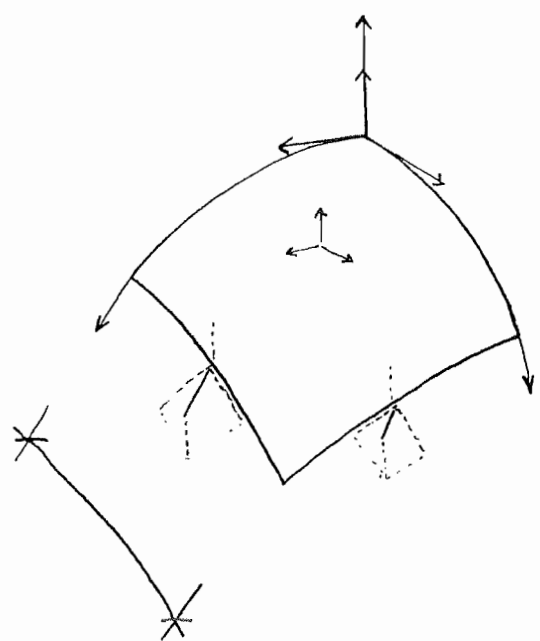
Membrantheorie als Sonderfall der allg. Schalentheorie :

⇒

	allg. Schalentheorie	allg. MSZ	rotationssym. MSZ
Schnittgrößen als Unbekannte			
Gleichgewichts- bedingungen			

↑

4. GG im Membranspannungszustand



- Resultierende : $\underline{N}_1 =$
 $\underline{N}_2 =$
 $\underline{\bar{p}} =$

- GG in Vektorform :
 $\Sigma \underline{N} = \underline{\sigma} =$
 \Rightarrow

- einsetzen der Resultierenden :

$$\left[\left(n_{21} \cdot \underline{t}_1 + n_{22} \cdot \underline{t}_2 + q_2 \cdot \underline{t}_3 \right) \cdot A \right]_{,1} d\theta^1 d\theta^2 +$$

$$+ \left(\bar{p}_1 \cdot \underline{t}_1 + \bar{p}_2 \cdot \underline{t}_2 + \bar{p}_3 \cdot \underline{t}_3 \right) A \cdot B \cdot d\theta^1 d\theta^2 = \underline{\sigma}$$

- Differenzieren, Umformen, Umordnen nach $\underline{t}_1, \underline{t}_2, \underline{t}_3$
 \rightarrow z.B. $\underline{t}_{1,1} = \frac{-A_2}{B} \cdot \underline{t}_2 - \frac{A}{R_1} \underline{t}_3$ (FTW II, Kap. 3.3, S. 2, 3)

\Rightarrow Kräfte - GG im Membranspannungszustand
 (sh. FOSA S. 1)

$$\Sigma V: n_{22} = \frac{+ F_z}{2 \bar{u} R \sin \varphi} = \frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi + (\varphi_0 - \varphi) \sin \varphi_0}{(\sin \varphi - \sin \varphi_0) \cdot \sin \varphi} \cdot g \cdot R_0$$

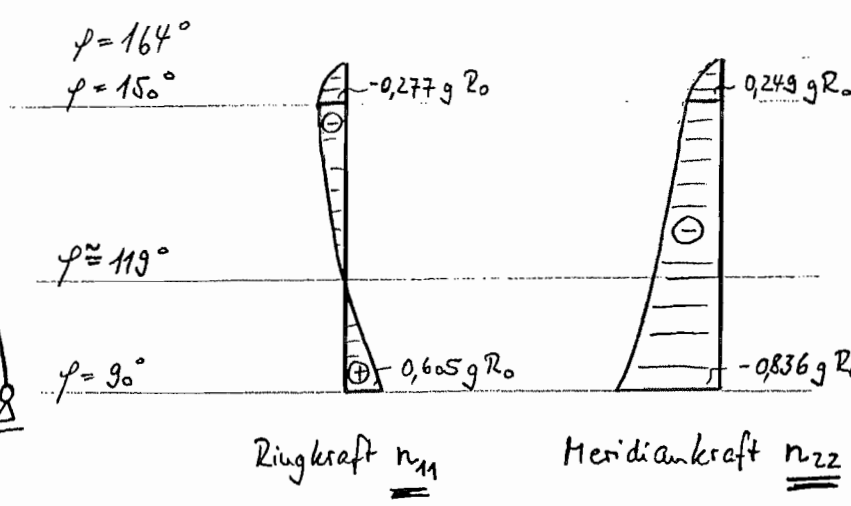
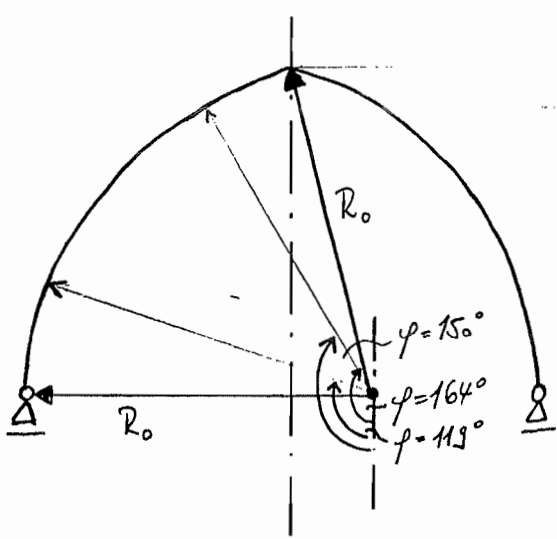
$$\Rightarrow n_{22} = g \cdot R_0 \frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi + (\varphi_0 - \varphi) \sin \varphi_0}{(\sin \varphi - \sin \varphi_0) \cdot \sin \varphi}$$

$$FOGA: n_{11} = R_1 \cdot \bar{p}_3 - \frac{R_1}{R_2} \cdot n_{22} =$$

$$= \underbrace{R_0 \left(1 - \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi}\right)}_{R_1} g \cdot \cos \varphi - \underbrace{\left(1 - \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi}\right)}_{R_1/R_2} g \cdot R_0 \cdot \frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi + (\varphi_0 - \varphi) \sin \varphi_0}{(\sin \varphi - \sin \varphi_0) \sin \varphi}$$

$$\Rightarrow n_{11} = \frac{g \cdot R_0}{\sin^2 \varphi} \left[(\sin \varphi - \sin \varphi_0) \sin \varphi \cos \varphi - \cos \varphi_0 + \cos \varphi - (\varphi_0 - \varphi) \sin \varphi_0 \right]$$

► Schnittgrößenverlauf: für $\varphi_0 = 164^\circ$, Auflager bei $\varphi = 90^\circ$



5. Bsp.: Kugelschale unter Eigengewicht

... wie 4. Bsp. : $\varphi_0 = 180^\circ \rightarrow \sin \varphi_0 = 0, \cos \varphi_0 = -1 ; R_e = 0$

$\rightarrow n_{11} =$

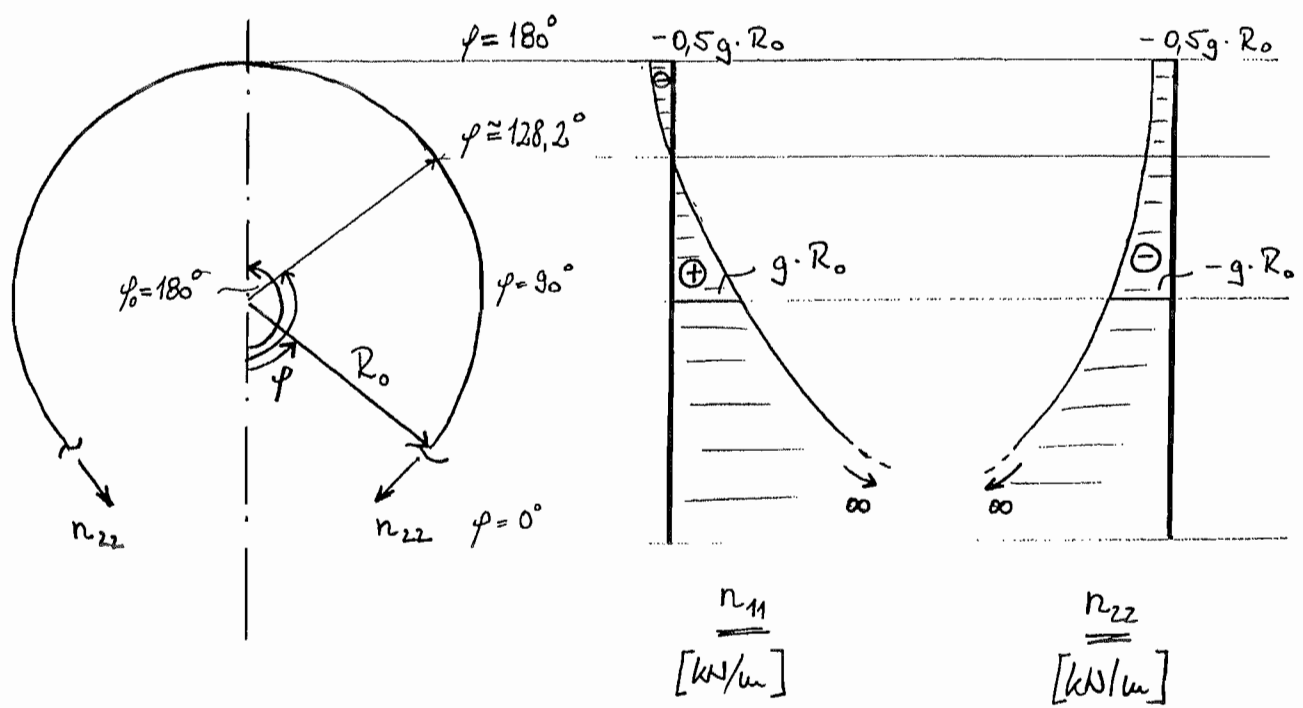
$n_{11} = g \cdot R_0 \left[\cos \varphi + \frac{1}{1 - \cos \varphi} \right]$... mit $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$

$n_{22} = g \cdot R_0 \frac{-1 - \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = -g \cdot R_0 \frac{1}{1 - \cos \varphi}$

$\rightarrow n_{11} = 0$ (Bruchfuge) : $\cos \varphi + \frac{1}{1 - \cos \varphi} = 0$

$\rightarrow \varphi \approx 128,2^\circ$

► Schnittkraftverlauf :



Membrantheorie für Rotationschalen unter nicht
rotationsymmetrischer Belastung

- GG - DGL'n für die allgemeine Rotationschale
(FOSA, Membrantheorie, S.1)

$$\begin{aligned} n_{11,1} + \frac{1}{R \cdot \beta} (R^2 n_{12})_{,2} + R \cdot \bar{p}_1 &= \sigma & (\text{I}) \\ -R_{,2} n_{11} + \beta \cdot n_{12,1} + (R \cdot n_{22})_{,2} + R \cdot \beta \cdot \bar{p}_2 &= \sigma & (\text{II}) \\ -\frac{1}{R_1} n_{11} - \frac{1}{R_2} n_{22} + \bar{p}_3 &= \sigma & (\text{III}) \end{aligned}$$

aus Gleichung (III) folgt:

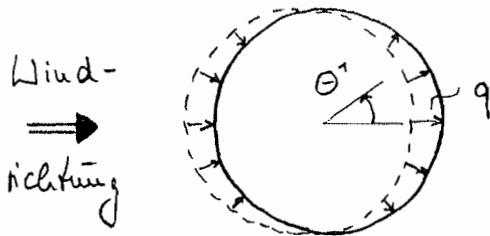
einsetzen in (1) und (2):

$$\begin{aligned} -\frac{R_1}{R_2} \cdot n_{22,1} + \frac{1}{R \cdot \beta} (R^2 n_{12})_{,2} + R \cdot \bar{p}_1 + R_1 \bar{p}_{3,1} &= \sigma & (\text{I}') \\ R_{,2} \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot n_{22} + (R \cdot n_{22})_{,2} + \beta \cdot n_{12,1} + R \cdot \beta \cdot \bar{p}_2 - R_{,2} R_1 \bar{p}_3 &= \sigma & (\text{II}') \end{aligned}$$

... perstelltes DGL-System

4.) Bemerkungen zur Windbelastung

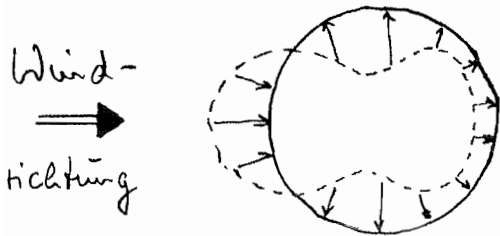
- einfachste Abschätzung der Windbelastung



$$\bar{p}_3 = q \cdot \cos \theta' \quad [kN/m^2]$$

q ... Staudruck im Auströmpunkt

- gemessene Winddruckverteilung in Fourier-Reihe entwickeln
(s. DIN 1055, T4 : Tabelle 15)



$$\bar{p}_3 = \bar{p}_3^{(0)} + \sum_{(k)} \bar{p}_3^{(k)} \cdot \cos(k \cdot \theta')$$

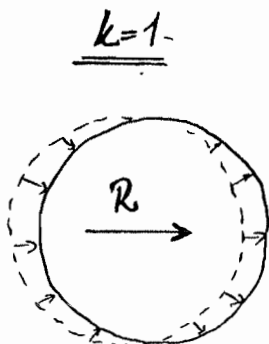
Schnittgrößen für jedes Reihenglied \rightarrow Überlagerung

- Grenzen der Membrantheorie

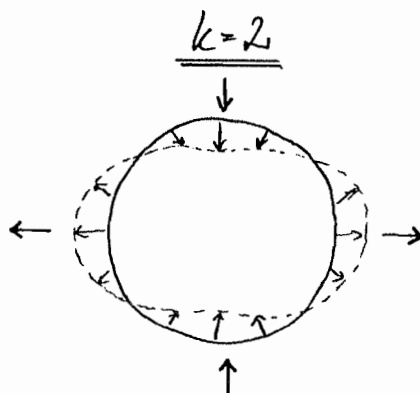
Wegen großer Gradienten in der Belastung verliert die Membrantheorie u.a. bei den höheren Reihengliedern ihre Gültigkeit

\rightarrow nur für breite, flache Schalen anwendbar

- Bemerkung zu Reihengliedern $k \geq 1$



... bildet Resultierende



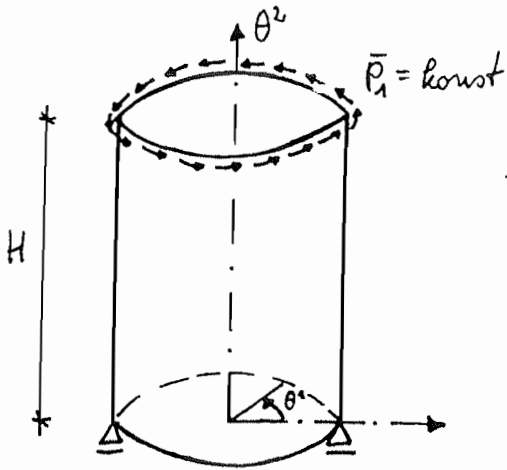
... bildet Gleichgewichtsgruppe

etc.

Beispiel:

Membranzelagerter Zylinder unter Schubkraftbelastung am oberen Rand

a) konstante Linienlast \bar{P}_1



$$(1^*) \quad \underline{m_{11}} = R_0 \cdot \vec{p}_3^0 = \underline{0}$$

$$(2^*) \quad m_{12} = - \int_0^{\theta^2} (\vec{p}_1^0 + \vec{p}_{3,1}^0) d\theta^2 + C_1 = C_1$$

$$R.B.: \theta^2 = H \rightarrow m_{12} = \bar{P}_1 = C_1$$

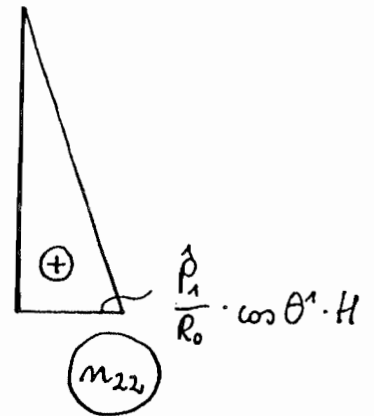
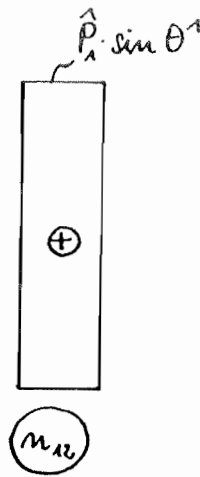
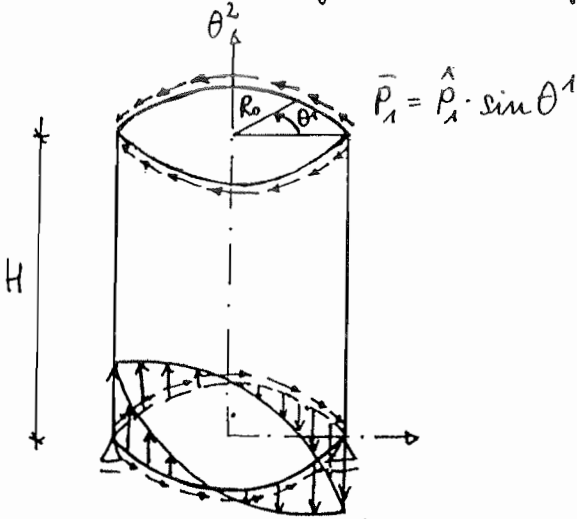
$\rightarrow \underline{m_{12} = \bar{P}_1}$, konstant über die Höhe θ^2

$$(3^*) \quad m_{22} = - \int_0^{\theta^2} \left(\frac{m_{22,1}}{R_0} + \vec{p}_2^0 \right) d\theta^2 + C_2 = C_2$$

$$R.B.: \theta^2 = H \rightarrow m_{22} = 0 = C_2$$

$$\rightarrow \underline{m_{22} = 0}$$

b) Linienlast - symmetrisch bzgl. $\theta^1 = 0$



$$(1^*) \quad \underline{m_{11}} = R_0 \cdot \vec{p}_3^0 = \underline{0}$$

$$(2^*) \quad m_{12} = C_1 \quad (\text{keine Flächenlasten})$$

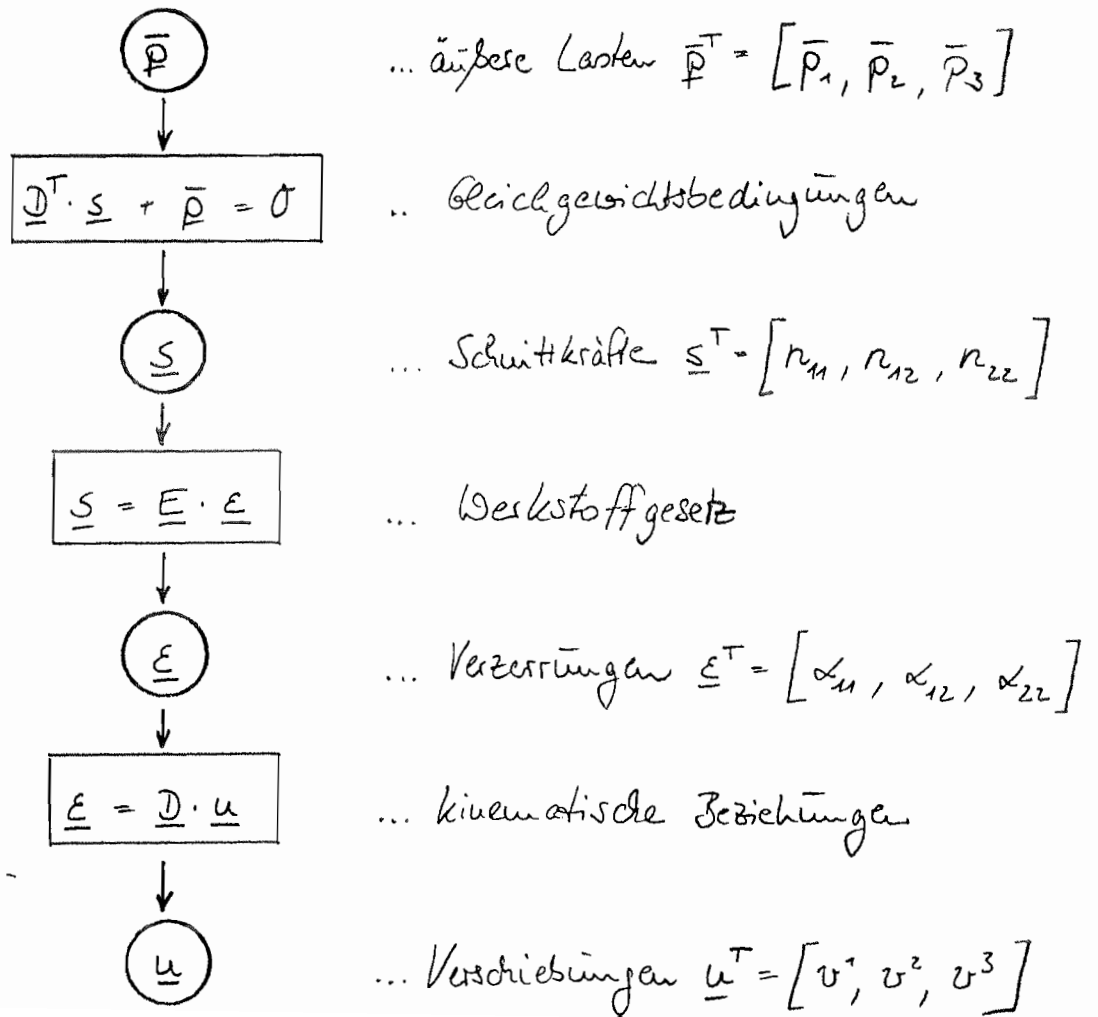
$$R.B.: \theta^2 = H \rightarrow \underline{m_{12} = \bar{P}_1 = \hat{P}_1 \cdot \sin \theta^1}$$

$$(3^*) \quad m_{22} = - \int_0^{\theta^2} \left(\frac{m_{22,1}}{R_0} + \vec{p}_2^0 \right) d\theta^2 + C_2 = - \frac{1}{R_0} \int_0^{\theta^2} \hat{P}_1 \cdot \cos \theta^1 d\theta^2 + C_2 = \frac{-\hat{P}_1}{R_0} \cdot \theta^2 \cdot \cos \theta^1 + C_2$$

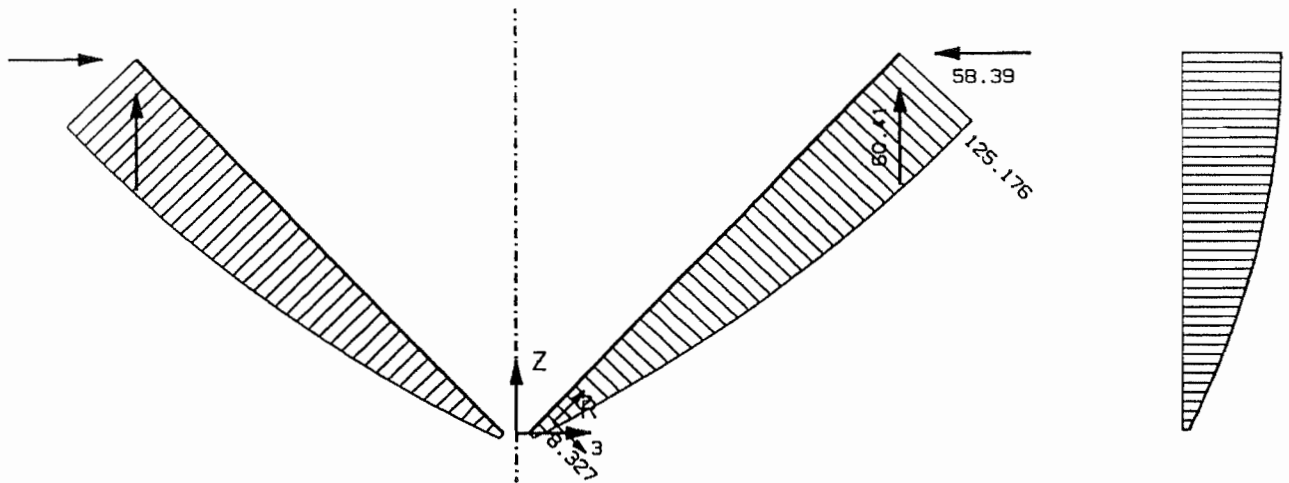
$$R.B.: \theta^2 = H \rightarrow m_{22} = 0 \rightarrow C_2 = \frac{\hat{P}_1 \cdot H}{R_0} \cdot \cos \theta^1 \rightarrow \underline{m_{22} = \frac{\hat{P}_1}{R_0} \cdot \cos \theta^1 \cdot (H - \theta^2)}$$

Berechnung der Verschiebungen von Membranschalen

- Bei der Membrantheorie können die Schnittgrößen direkt aus den äußeren Lasten berechnet werden.
 ⇒ Gleichgewichtsbedingungen ausreichend („innerlich stat. best.“)
- Die Verzerrungen und Verschiebungen ergeben sich dann aus dem Werkstoffgesetz und den kinematischen Beziehungen.



$\alpha = 45^\circ$; $H = 6,0 \text{ m}$; $H_k = 3,0 \text{ m}$; $\rho_F = 10 \text{ kN/m}^3$; $E = 30.000 \text{ MN/m}^2$; $\nu = 0,2$; $t = 0,10 \text{ m}$



MAX= 125.176
MIN= 8.327

System: flvll-6l.sys

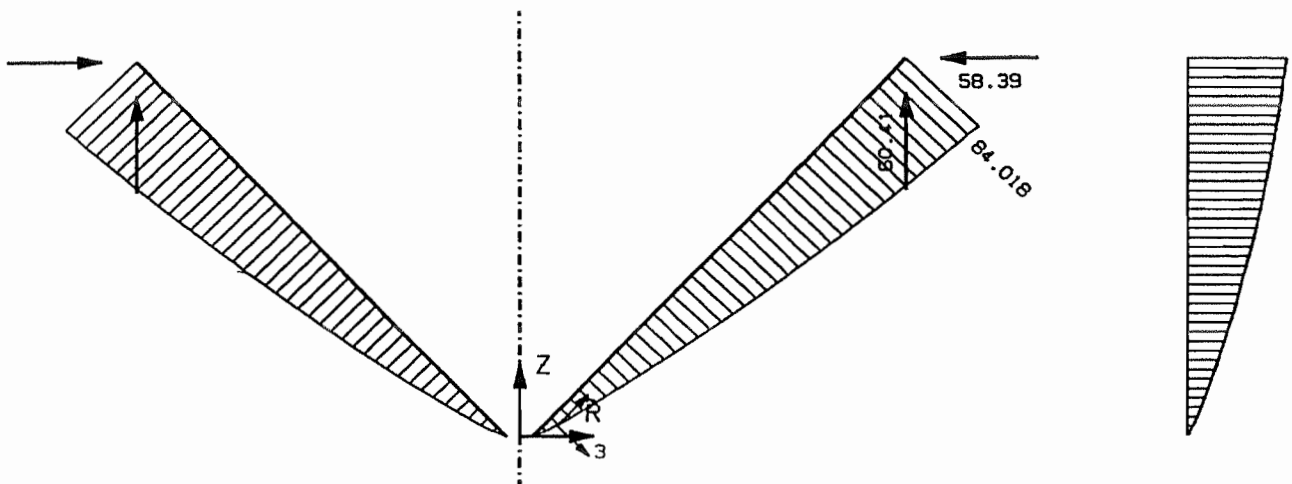
ROSCH: *** NORMALKRAFTLINIE n11 ***

Datum: 15. JUNI 1998

Lasten: flvll-6l.las

System:
Lastfall:

Theorie I. Ordnung



MAX= 84.018
MIN= 0.000

System: flvll-6l.sys

ROSCH: *** NORMALKRAFTLINIE n22 ***

Datum: 15. JUNI 1998

Lasten: flvll-6l.las

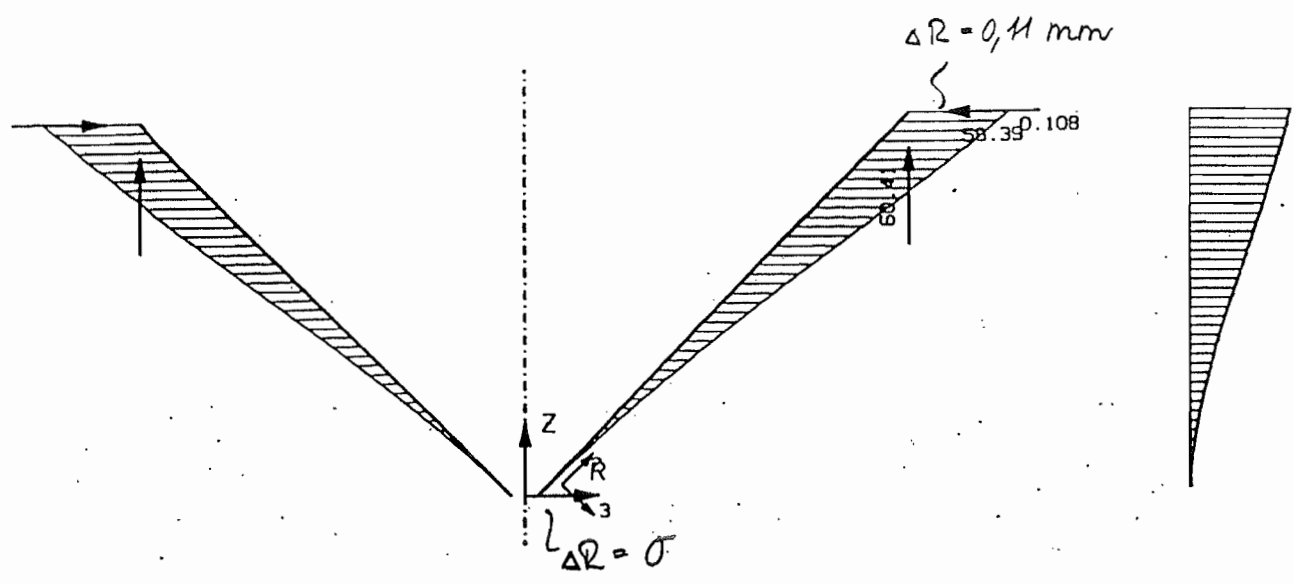
System:
Lastfall:

Theorie I. Ordnung

- 21 -

Verschiebungen - Kegel unter Wasserfüllung

$\alpha = 45^\circ$; $H = 6,0 \text{ m}$; $H_K = 3,0 \text{ m}$; $\rho_F = 10 \text{ kN/m}^3$; $E = 30.000 \text{ MN/m}^2$; $\nu = 0,2$; $t = 0,1 \text{ m}$

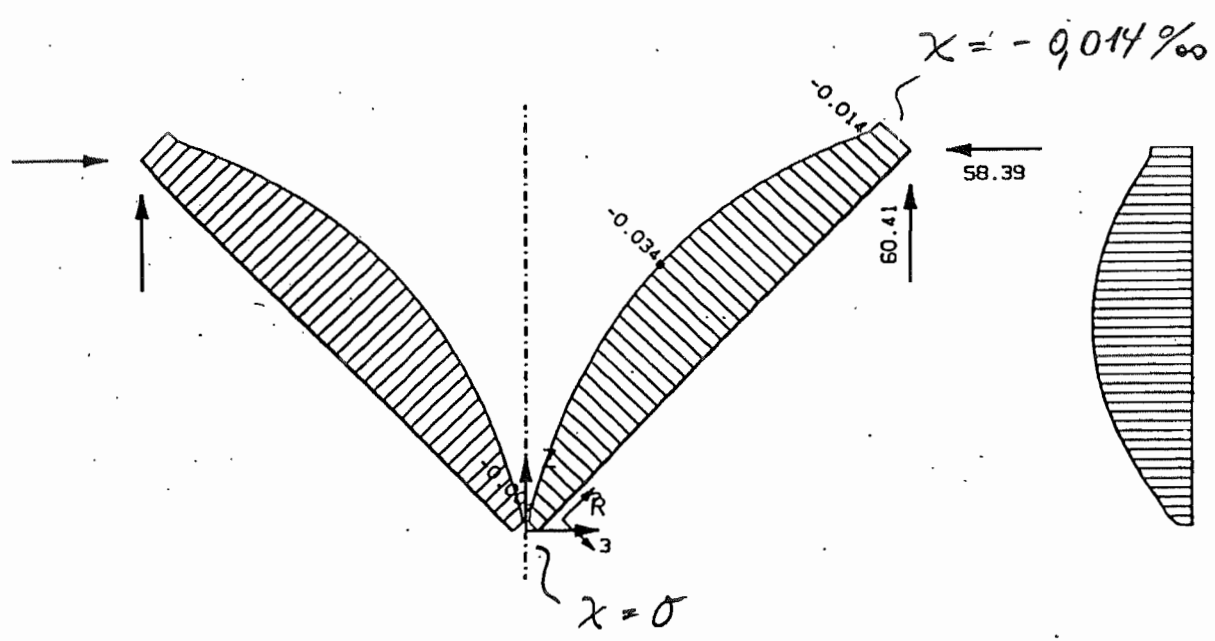


MAX= 0.108
MIN= 0.000

System: flwll-6l.sys
Lasten: flwll-6l.las

ROSCH: ... VERSCHIEBUNG DELTA-R ...
System:
Lastfall:

Datum: 15. JUNI 1998
Theorie I. Ordnung

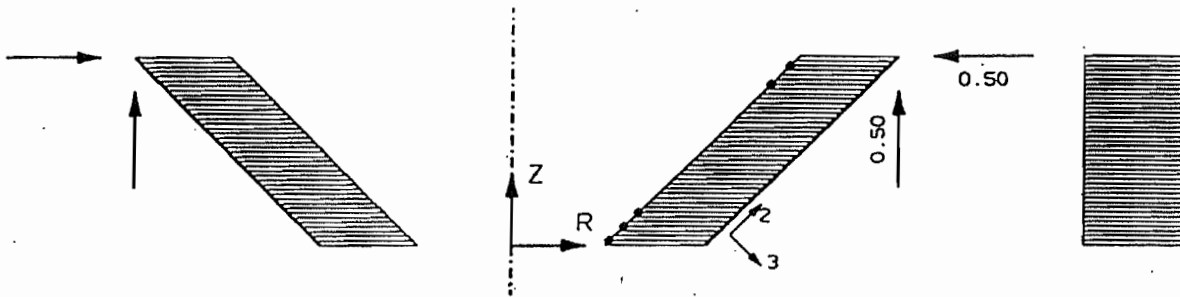


MAX= -0.004
MIN= -0.034

System: flwll-6l.sys

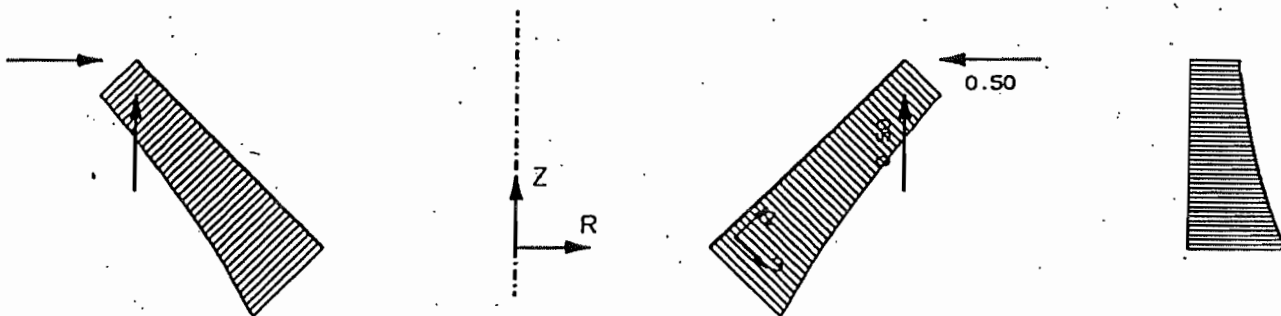
ROSCH: ... VERDREHUNGSLINIE ...
System:

Datum: 15. JUNI 1998



MAX= 0.000
MIN= 0.000

System: ftvll-62.sys	ROSCH: ... VERSCHIEBUNG DELTA-R ...	Date: 15. JUNI 1998
Lasten: ftvll-62.las	System: Lastfall:	Theorie 1. Ordnung



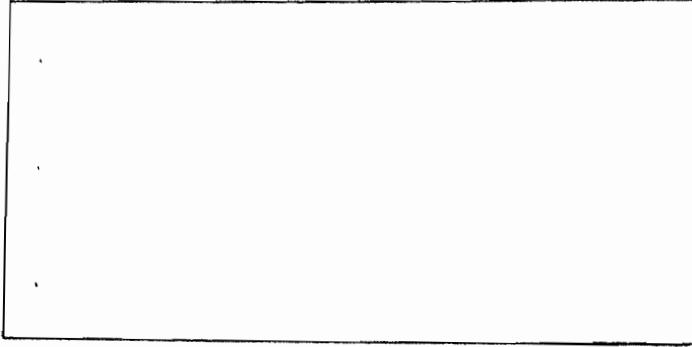
MAX= 0.000
MIN= 0.000

System: ftvll-62.sys	ROSCH: ... VERDREHUNGSLINIE ...	Date: 15. JUNI 1998
Lasten: ftvll-62.las	System: Lastfall:	Theorie 1. Ordnung

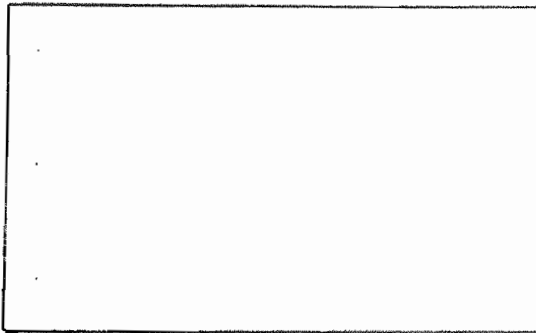
2.) Biegetheorie der Zylinderschale unter rot.-sym. Belastung

$$A = R_0 \quad ; \quad B = 1 \quad ; \quad A_{1,2} = B_{1,2} = 0 \quad ; \quad R_1 = R_0 \quad ; \quad R_2 = -\infty$$

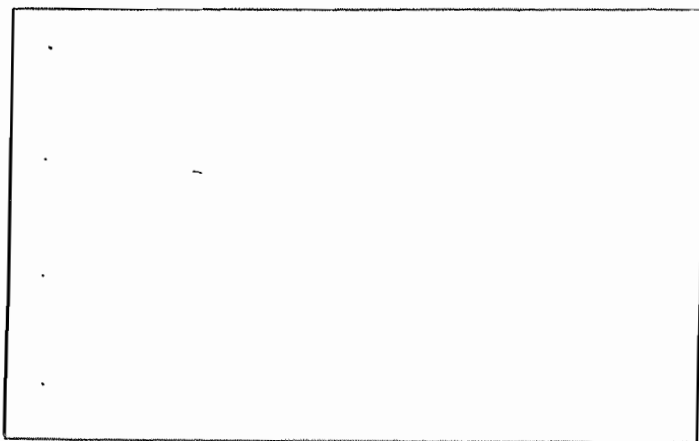
► Gleichgewicht (Kap. 7, S.4)



► Kinematik (Kap. 5, S.11)

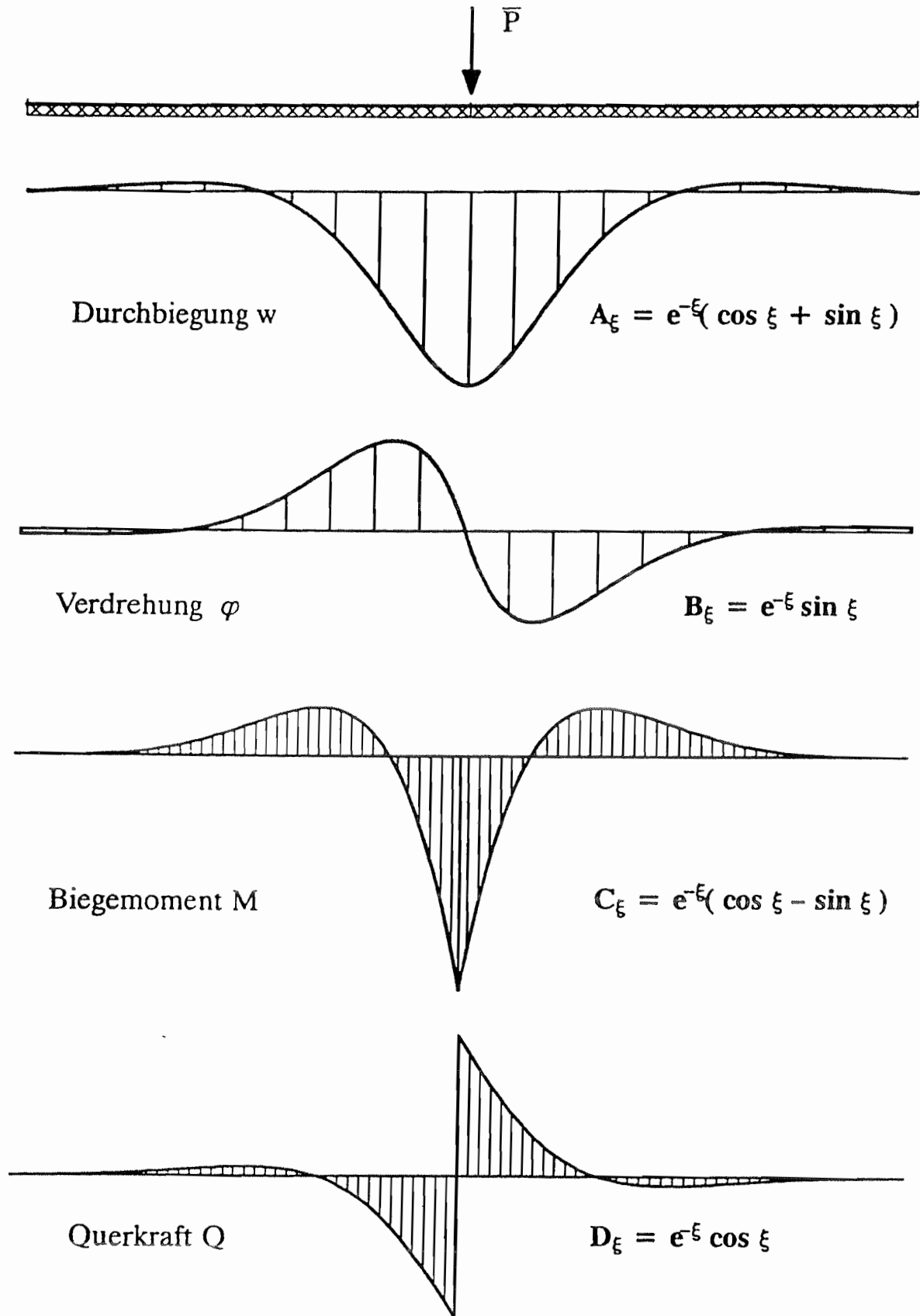


► Stoffgesetz (Kap. 6, S.3)

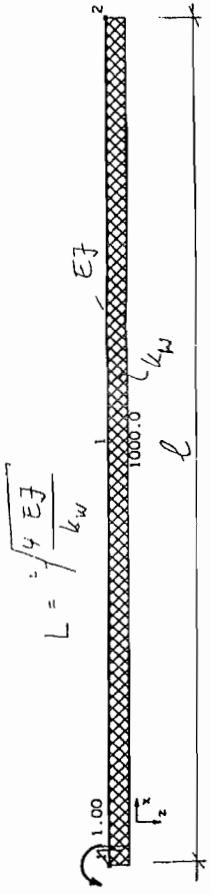


$$\mathcal{J} = \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2} \quad , \quad \mathcal{B} = \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Verlauf der Zustandsgrößen eines unendlich langen Trägers mit einer Einzellast:



Elastisch gestützter Balken unter Randmoment

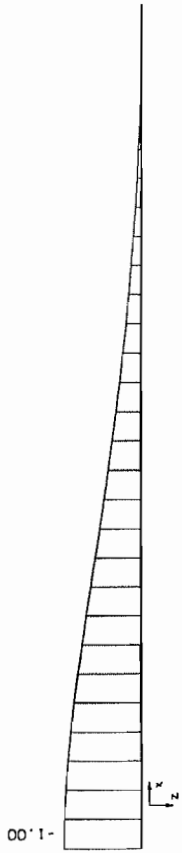
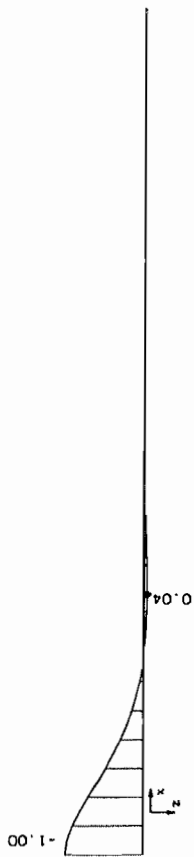


$$L = \sqrt[4]{\frac{4 EJ}{k_w}}$$

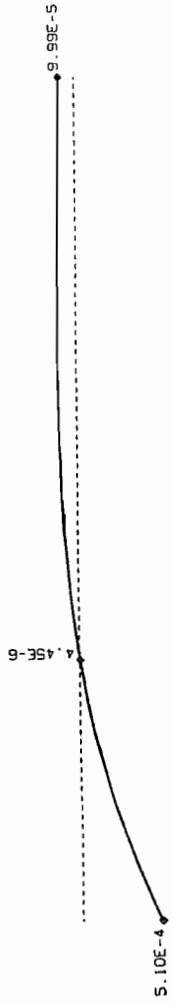
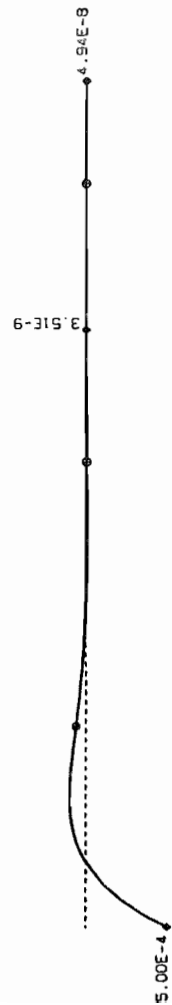
$l > 4 \cdot L$
(langer Balken)

$l < 4 \cdot L$
(kurzer Balken)

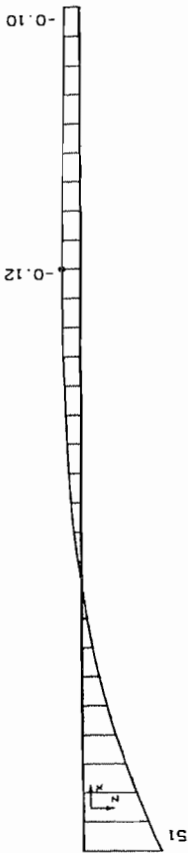
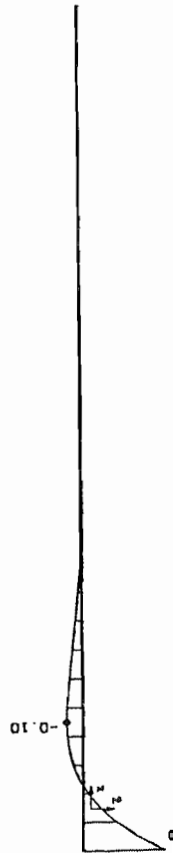
Moment



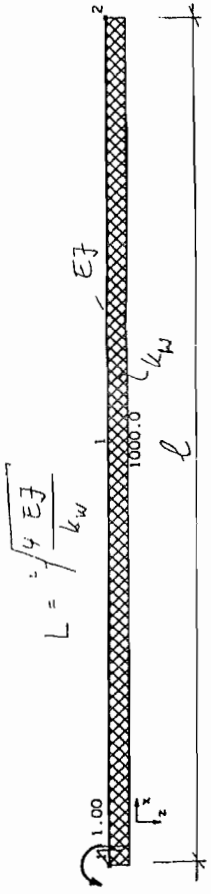
Durchbiegung



Sollspannung



Elastisch gestützter Balken unter Randmoment

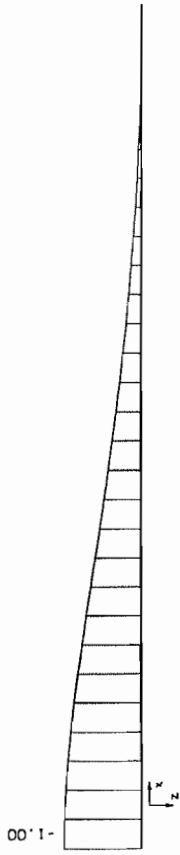
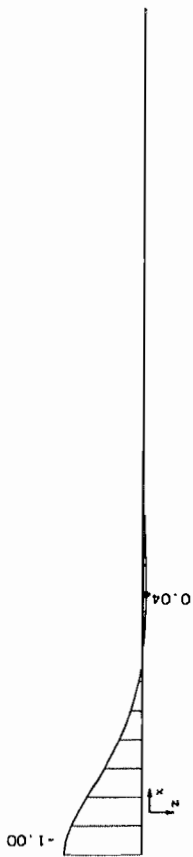


$$L = \sqrt[4]{\frac{4 EJ}{k_w}}$$

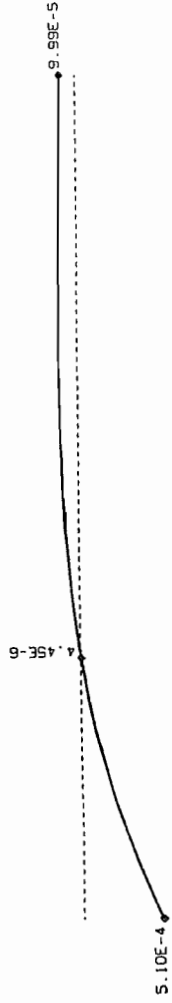
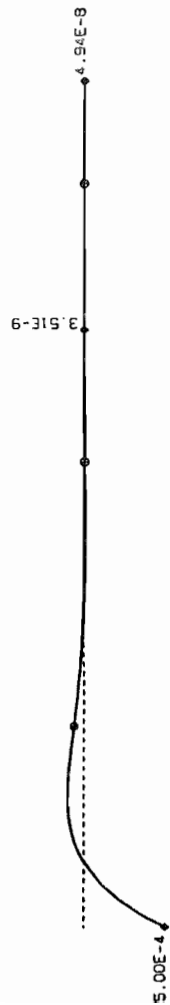
$l > 4 \cdot L$
(langer Balken)

$l < 4 \cdot L$
(kurzer Balken)

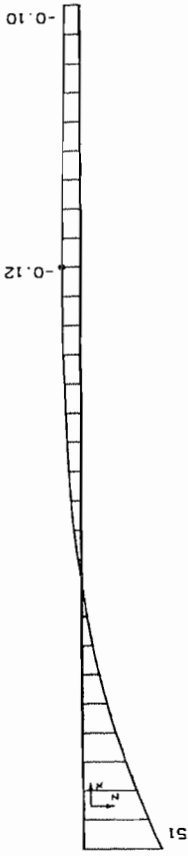
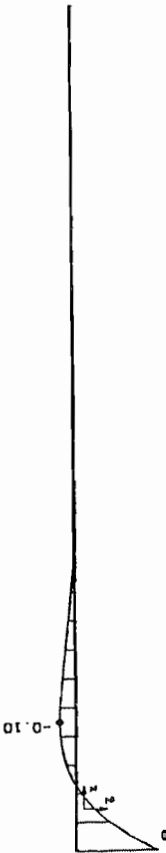
Moment



Durchbiegung



Sollspannung



Ableitungen der Hilfsfunktionen

Kettenregel: $\frac{d}{d\theta^2} = \frac{d\xi}{d\theta^2} \cdot \frac{d}{d\xi} = \frac{1}{L} \cdot \frac{d}{d\xi} = -\frac{1}{L} \cdot \frac{d}{d\xi}$

$$\frac{dA_\xi}{d\theta^2} = -\frac{2}{L} B_\xi, \quad \frac{dB_\xi}{d\theta^2} = \frac{1}{L} C_\xi, \quad \frac{dC_\xi}{d\theta^2} = -\frac{2}{L} D_\xi, \quad \frac{dD_\xi}{d\theta^2} = -\frac{1}{L} A_\xi$$

$$\frac{dA_{\bar{\xi}}}{d\theta^2} = \frac{2}{L} B_{\bar{\xi}}, \quad \frac{dB_{\bar{\xi}}}{d\theta^2} = -\frac{1}{L} C_{\bar{\xi}}, \quad \frac{dC_{\bar{\xi}}}{d\theta^2} = \frac{2}{L} D_{\bar{\xi}}, \quad \frac{dD_{\bar{\xi}}}{d\theta^2} = \frac{1}{L} A_{\bar{\xi}}$$

$$\boxed{v^3 = C_1 \cdot D_\xi + C_2 \cdot C_\xi + \bar{C}_1 \cdot D_{\bar{\xi}} + \bar{C}_2 \cdot C_{\bar{\xi}}}$$

$$\varphi^2 = \chi = -v_{,12}^3 \quad (\text{Kap. 5/S.11 und } y_{i3} = 0)$$

$$m_{22} = B \cdot \beta_{22} = B \cdot \varphi_{,12}^2 = -B \cdot v_{,122}^3 \quad (\text{Kap. 6/S.3 und Kap. 5/S.11})$$


$$m_{11} = \nu \cdot m_{22}, \quad q_2 = m_{22,2} = -B \cdot v_{,1222}^3$$

$$m_{11} = D \cdot (\alpha_{11} + \nu \cdot \alpha_{22}) = D \cdot \left(\frac{\nu^3}{R_0} + \nu \cdot v_{,12}^2 \right) = D \cdot \frac{\nu^3}{R_0} \cdot (1 - \nu^2) = Et \cdot \frac{\nu^3}{R_0}$$

$$\text{mit } B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad \dots \text{ Biegesteifigkeit}$$

$$D = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \quad \dots \text{ Dehnsteifigkeit}$$

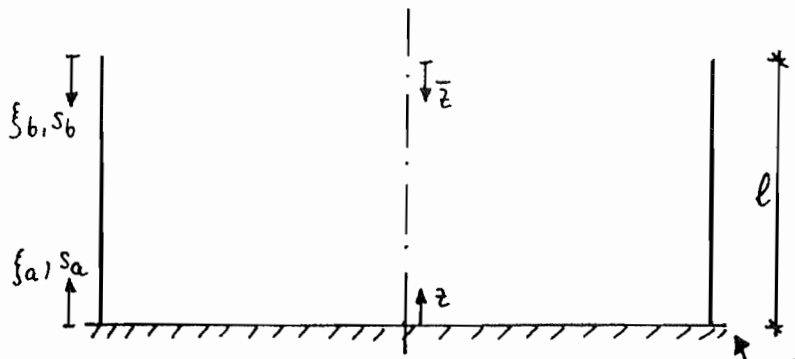
langer Zylinder: $l > 4L$

→ Ränder beeinflussen sich nicht gegenseitig! 

$$\leadsto \boxed{v^3 = C_1 \cdot D_\xi + C_2 \cdot C_\xi} \quad \text{für Lastangriff bei } \xi = 0$$

$$\boxed{v^3 = \bar{C}_1 \cdot D_{\bar{\xi}} + \bar{C}_2 \cdot C_{\bar{\xi}}} \quad \text{für Lastangriff bei } \bar{\xi} = 0$$

3.6, Superposition \rightarrow Kap. 7.5/Seite 1



$$\xi_b = \frac{s_b}{L}, \quad \xi_a = \frac{s_a}{L}$$

$$\bar{z} = l - z$$

Belastung am Rand $\xi_a = 0$

\rightarrow ξ durch ξ_a ersetzen!

\rightarrow Vorzeichen wie angegeben!

$n_{22} = 0$

$$n_{11} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MSZ}}}{R_0 \cdot \gamma \cdot \bar{z}} - \frac{2HR_0}{L} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{X}_1 = H}}{D_{\xi_a}} - \frac{2MR_0}{L^2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{X}_2 = M}}{C_{\xi_a}}$$

mit $\bar{z} = l - z = l - L \cdot \xi_a$

$$n_{11} = 4 \cdot M \cdot (3,5 - 0,5946 \cdot \xi_a) - \frac{2 \cdot 20,958 \cdot 4}{0,5946} \cdot D_{\xi_a} + \frac{2 \cdot 5,654 \cdot 4}{0,5946^2} \cdot C_{\xi_a}$$

$\rightarrow n_{11} = 154 - 26,162 \xi_a - 281,978 \cdot D_{\xi_a} + 127,937 \cdot C_{\xi_a}$

$$q_2 = H \cdot C_{\xi_a} - \frac{2M}{L} \cdot B_{\xi_a}$$

$\rightarrow q_2 = 20,958 \cdot C_{\xi_a} + 19,018 \cdot B_{\xi_a}$

$$m_{22} = H \cdot L \cdot B_{\xi a} + M \cdot A_{\xi a}$$

$$\leadsto \underline{m_{22} = 12,462 \cdot B_{\xi a} - 5,654 \cdot A_{\xi a}}$$

$$\leadsto \underline{m_{11} = \nu \cdot m_{22} = 2,492 \cdot B_{\xi a} - 1,131 \cdot A_{\xi a}}$$

$$\chi = \frac{R_0^2 \cdot \gamma}{Et} - \frac{H \cdot L^2}{2B} \cdot A_{\xi a} - \frac{M \cdot L}{B} \cdot D_{\xi a}$$

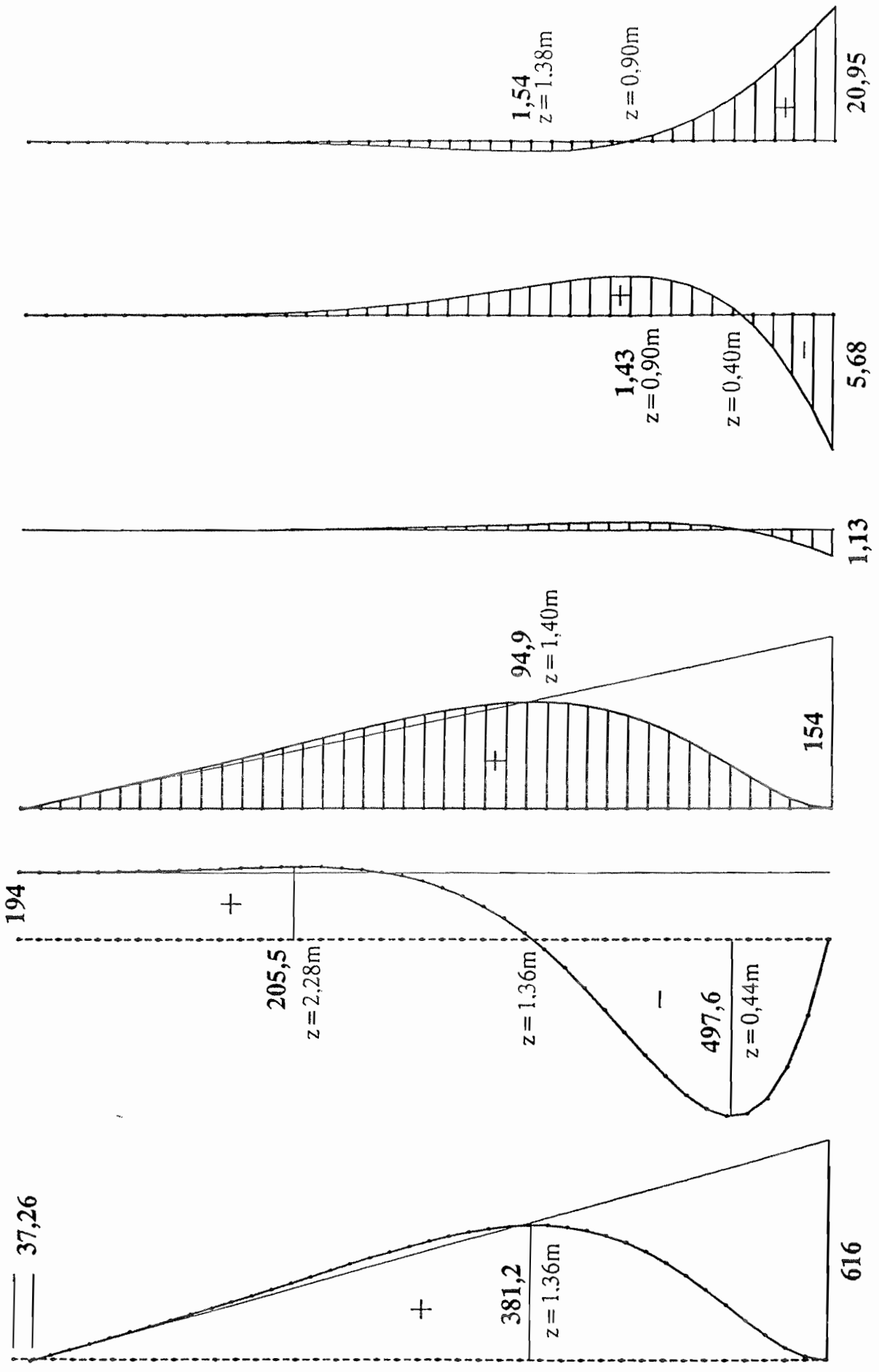
$$\leadsto \underline{Et \cdot \chi = 176 - 1896,9 \cdot A_{\xi a} + 1721,3 \cdot D_{\xi a}}$$

$$\Delta R = \frac{R_0^2 \cdot \gamma}{Et} \cdot (l - L_{\xi a}) - \frac{H \cdot L^3}{2B} \cdot D_{\xi a} - \frac{M \cdot L^2}{2B} \cdot C_{\xi a}$$

$$\leadsto \underline{Et \cdot \Delta R = 616 - 104,65 \xi a - 1127,9 \cdot D_{\xi a} + 511,7 \cdot C_{\xi a}}$$

Zustandsgrößen für den eingespannten Zylinder mit Flüssigkeitsfüllung

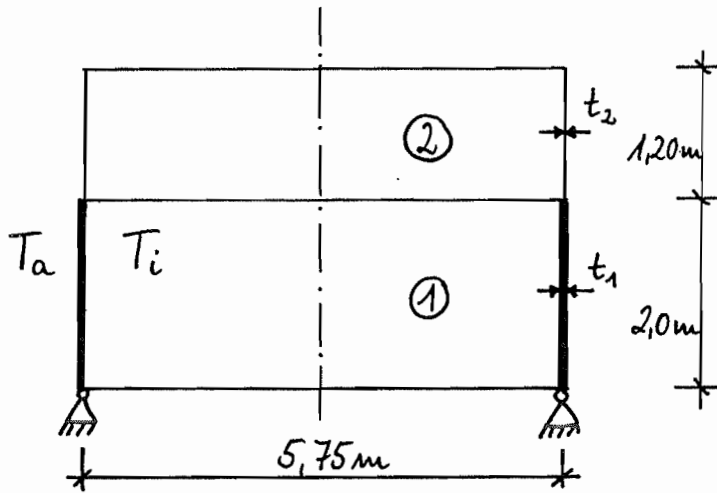
- 30 -



Verschiebungen *Et Verdrehungen *Et Normalkraft n_{11} Moment m_{11} Querkraft q_2

Beispiel: Zusammengesetzter Zylinder unter ΔT (kurze Zylinderschale)

1. Statisches System



$t_1 = 0,30\text{m}$, $t_2 = 0,20\text{m}$

$E = 34000\text{ MN/m}^2$ (B25)

$\alpha_T = 1 \cdot 10^{-5} / \text{K}$, $\nu = 0,2$

$\Delta T = T_a - T_i = -10\text{K}$

\rightarrow innen wärmer

\rightarrow Biegesteifigkeit:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{34000 \cdot 0,3^3}{12(1-0,2^2)} = 79687,5 \text{ kNm} \\ B_2 &= \frac{34000 \cdot 0,2^3}{12(1-\nu^2)} = 23611,1 \text{ kNm} \end{aligned} \right\} \frac{B_1}{B_2} = 3,375$$

\rightarrow charakteristische Länge:

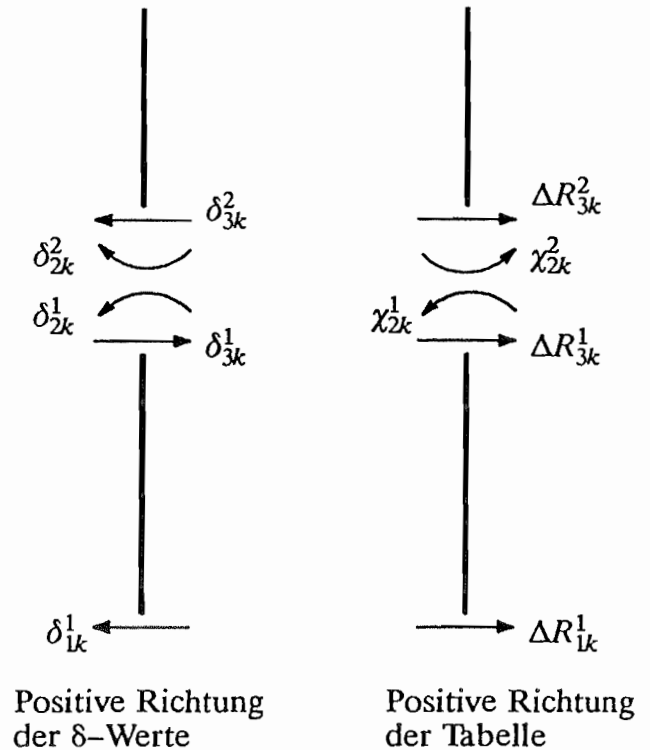
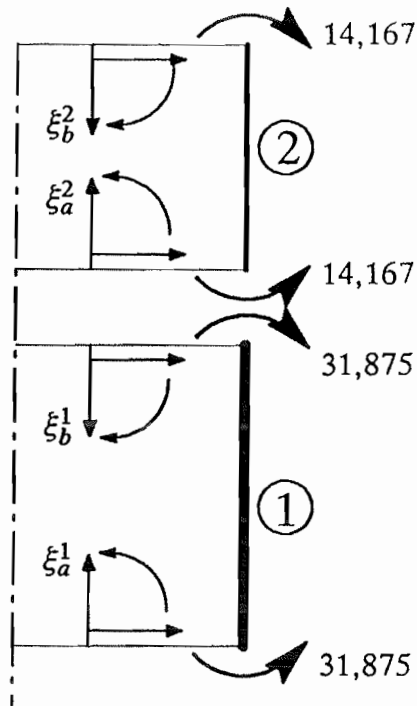
$L_1 = \frac{\sqrt{R_0 \cdot t}}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} = \frac{\sqrt{2,875 \cdot 0,3}}{\sqrt[4]{3(1-0,2^2)}} = 0,7129\text{m}$

$L_2 = \frac{\sqrt{2,875 \cdot 0,2}}{\sqrt[4]{3(1-0,2^2)}} = 0,5821\text{m}$

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow \lambda_1 &= \frac{e_1}{L_1} = \frac{2,0}{0,7129} = 2,8054 < 4 \\ \lambda_2 &= \frac{e_2}{L_2} = \frac{1,20}{0,5821} = 2,0616 < 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{2 kurze Zylinder, Ränder beeinflussen sich gegenseitig!}$$

3. Lastspannungszustand

δ-Werte infolge m_{22}



Zylinder 1 $\lambda_1 = 2,8054$ $L_1 = 0,7129\text{m}$

Erstes Vorzeichen = Richtung der Last; zweite Vorzeichen = Richtung der Verschiebung

$$B_1 \cdot \delta_{10}^1 = (+)(-)B_1 w^{(\xi_a=0)} = -\frac{M \cdot L^2}{2}(W-MS) = -\frac{31,875 \cdot 0,7129^2}{2} \cdot (0,92309) = -7,4762$$

$$B_1 \cdot \delta_{20}^1 = (+)(+)B_1 (-\chi^{(\xi_b=0)}) = \frac{M \cdot L}{2}(PHI-MS) = \frac{31,875 \cdot 0,7129}{2} \cdot (2,1575) = -24,513$$

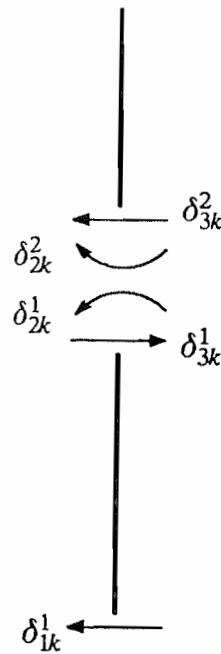
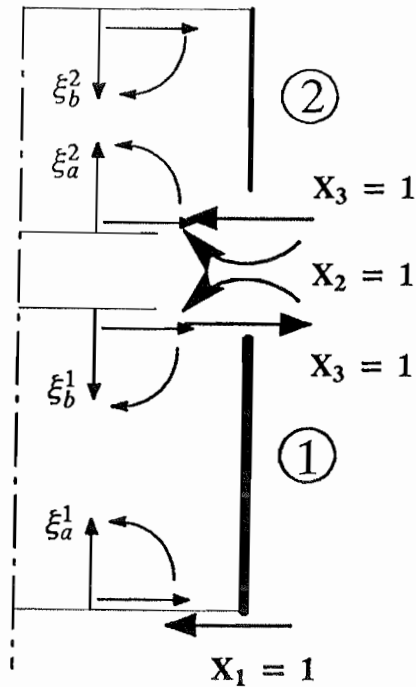
$$B_1 \cdot \delta_{30}^1 = (+)(+)B_1 w^{(\xi_b=0)} = \frac{M \cdot L^2}{2}(W-MS) = \frac{31,875 \cdot 0,7129^2}{2} \cdot (0,92309) = 7,4762$$

Zylinder 2 $\lambda_2 = 2,0616$ $L_2 = 0,5821\text{m}$

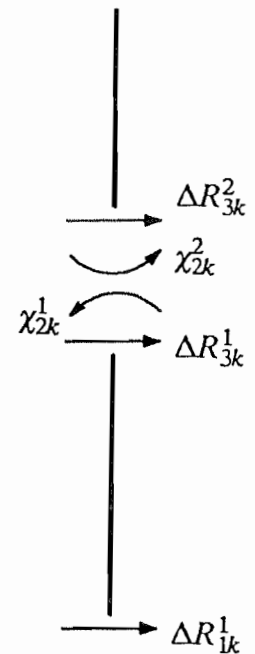
$$B_2 \cdot \delta_{20}^2 = (+)(-)B_2 \chi^{(\xi_a=0)} = -\frac{M \cdot L}{2}(PHI-MS) = -\frac{14,167 \cdot 0,5821}{2} \cdot (1,8806) = -7,7542$$

$$B_2 \cdot \delta_{30}^2 = (+)(-)B_2 w^{(\xi_a=0)} = -\frac{M \cdot L^2}{2}(W-MS) = -\frac{14,167 \cdot 0,5821^2}{2} \cdot (0,6285) = -1,5085$$

4. Einheitsspannungszustände (einseitige Last)



Positive Richtung der δ -Werte



Positive Richtung der Tabelle

Zylinder 1 $\lambda_1 = 2,8054$ $L_1 = 0,7129\text{m}$

δ -Werte infolge $X_1 = 1$

$$B_1 \cdot \delta_{11}^1 = (-)(-)B_1 w(\xi_a=0) = \frac{H \cdot L^3}{2} (W-PR) = \frac{1,0 \cdot 0,7129^3}{2} \cdot (1,0136) = 0,1836$$

$$B_1 \cdot \delta_{21}^1 = (-)(+)B_1 \chi(\xi_a=\lambda) = -\frac{H \cdot L^2}{2} (PHI-PR) = -\frac{1,0 \cdot 0,7129^2}{2} \cdot (0,0802) = -0,0209$$

$$B_1 \cdot \delta_{31}^1 = (-)(+)B_1 w(\xi_a=\lambda) = -\frac{H \cdot L^3}{2} (W-PR) = -\frac{1,0 \cdot 0,7129^3}{2} \cdot (-0,1552) = 0,0292$$

δ -Werte infolge $X_2 = 1$

$$B_1 \cdot \delta_{12}^1 = (-)(-)B_1 w(\xi_b=\lambda) = \frac{M \cdot L^2}{2} (W-MR) = \frac{1,0 \cdot 0,7129^2}{2} \cdot (-0,0802) = -0,0209$$

$$B_1 \cdot \delta_{22}^1 = (-)(+)B_1 (-\chi(\xi_b=0)) = \frac{M \cdot L}{2} (PHI-MR) = \frac{1,0 \cdot 0,7129}{2} \cdot (2,0087) = +0,7250$$

$$B_1 \cdot \delta_{32}^1 = (-)(+)B_1 w(\xi_b=0) = -\frac{M \cdot L^2}{2} (W-MR) = -\frac{1,0 \cdot 0,7129^2}{2} \cdot (1,0032) = -0,2549$$

δ -Werte infolge $X_3 = 1$

$$B_1 \cdot \delta_{13}^1 = (+)(-)B_1 w^{(\xi_b=\lambda)} = -\frac{H \cdot L^3}{2}(W-PR) = -\frac{1,0 \cdot 0,7129^3}{2} \cdot (-0,1552) = 0,0292$$

$$B_1 \cdot \delta_{23}^1 = (+)(+)B_1(-\chi^{(\xi_b=0)}) = -\frac{H \cdot L^2}{2}(PHI-PR) = -\frac{1,0 \cdot 0,7129^2}{2} \cdot (1,0032) = -0,2549$$

$$B_1 \cdot \delta_{33}^1 = (+)(+)B_1 w^{(\xi_b=0)} = \frac{H \cdot L^3}{2}(W-PR) = \frac{1,0 \cdot 0,7129^3}{2} \cdot (1,0136) = 0,1836$$

Zylinder 2 $\lambda_2 = 2,0616$ $L_2 = 0,5821\text{m}$

δ -Werte infolge $X_2 = 1$

$$B_2 \cdot \delta_{22}^2 = (-)(-)B_2 \chi^{(\xi_a=0)} = \frac{M \cdot L}{2}(PHI-MR) = \frac{1,0 \cdot 0,5821}{2} \cdot (2,1206) = 0,6171$$

$$B_2 \cdot \delta_{32}^2 = (-)(-)B_2 w^{(\xi_a=0)} = \frac{M \cdot L^2}{2}(W-MR) = \frac{1,0 \cdot 0,5821^2}{2} \cdot (1,1098) = 0,1880$$

δ -Werte infolge $X_3 = 1$

$$B_2 \cdot \delta_{23}^2 = (-)(-)B_2 \chi^{(\xi_a=0)} = \frac{H \cdot L^2}{2}(PHI-PR) = \frac{1,0 \cdot 0,5821^2}{2} \cdot (1,1098) = 0,1880$$

$$B_2 \cdot \delta_{32}^2 = (-)(-)B_2 w^{(\xi_a=0)} = \frac{H \cdot L^3}{2}(W-PR) = \frac{1,0 \cdot 0,5821^3}{2} \cdot (1,119) = 0,1103$$

5. δ -Werte und Verträglichkeit

$$B_1 \cdot \delta_{10} = B_1 \delta_{10}^1 + \frac{B_1}{B_2} B_2 \delta_{10}^2 = -7,4762$$

$$B_1 \cdot \delta_{20} = B_1 \delta_{20}^1 + \frac{B_1}{B_2} B_2 \delta_{20}^2 = -24,513 - 3,375 \cdot 7,7542 = -50,6834$$

$$B_1 \cdot \delta_{30} = B_1 \delta_{30}^1 + \frac{B_1}{B_2} B_2 \delta_{30}^2 = 7,4762 - 3,375 \cdot 1,5085 = 2,385$$

$$B_1 \cdot \delta_{11} = B_1 \delta_{11}^1 + \frac{B_1}{B_2} B_2 \delta_{11}^2 = 0,1836$$

$$B_1 \cdot \delta_{12} = B_1 \delta_{12}^1 + \frac{B_1}{B_2} B_2 \delta_{12}^2 = -0,0209$$

$$B_1 \cdot \delta_{13} = B_1 \delta_{13}^1 + \frac{B_1}{B_2} B_2 \delta_{13}^2 = 0,0292$$

$$B_1 \cdot \delta_{21} = B_1 \delta_{21}^1 + \frac{B_1}{B_2} B_2 \delta_{21}^2 = -0,0209$$

$$B_1 \cdot \delta_{22} = B_1 \delta_{22}^1 + \frac{B_1}{B_2} B_2 \delta_{22}^2 = 0,7250 + 3,375 \cdot 0,6171 = 2,808$$

$$B_1 \cdot \delta_{23} = B_1 \delta_{23}^1 + \frac{B_1}{B_2} B_2 \delta_{23}^2 = -0,2549 + 3,375 \cdot 0,1880 = 0,3796$$

$$B_1 \cdot \delta_{31} = B_1 \delta_{31}^1 + \frac{B_1}{B_2} B_2 \delta_{31}^2 = 0,0292$$

$$B_1 \cdot \delta_{32} = B_1 \delta_{32}^1 + \frac{B_1}{B_2} B_2 \delta_{32}^2 = -0,2549 + 3,375 \cdot 0,1880 = 0,3796$$

$$B_1 \cdot \delta_{33} = B_1 \delta_{33}^1 + \frac{B_1}{B_2} B_2 \delta_{33}^2 = 0,1836 + 3,375 \cdot 0,1103 = 0,5559$$

Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} 0,1836 & -0,0209 & 0,0292 \\ -0,0209 & 2,8080 & 0,3796 \\ 0,0292 & 0,3796 & 0,5559 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,4762 \\ 50,6834 \\ -2,3850 \end{bmatrix}$$

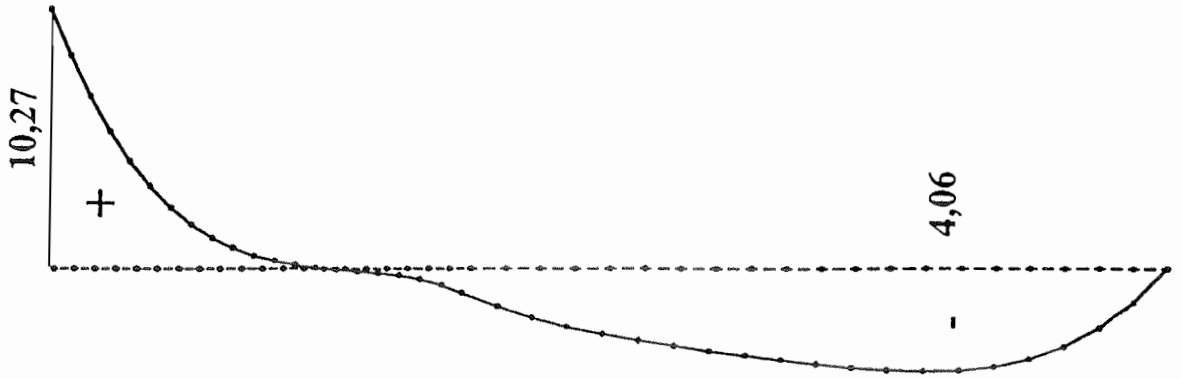
Lösung:

$$X_1 = 46,5222 \text{ kN/m}$$

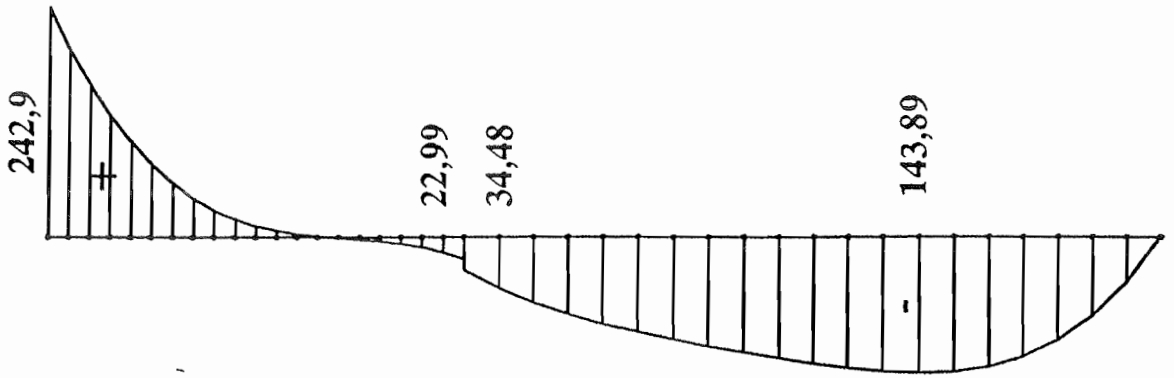
$$X_2 = 21,2697 \text{ kNm/m}$$

$$X_3 = -21,2582 \text{ kN/m}$$

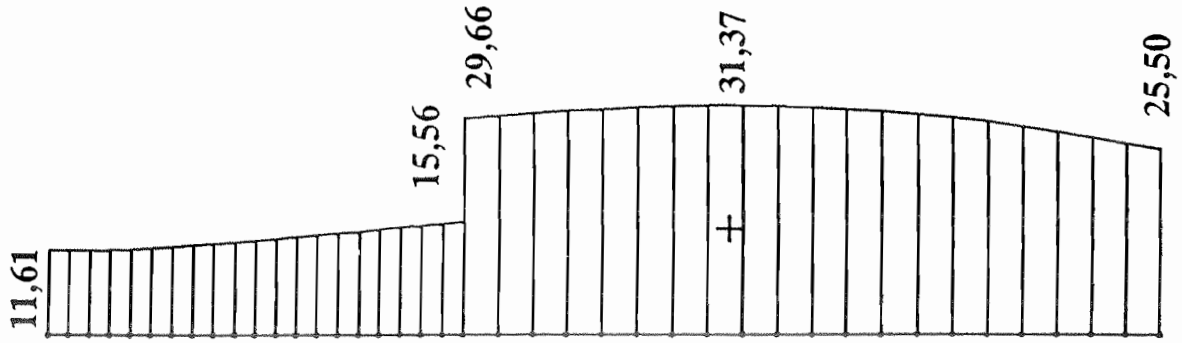
Zustandsgrößen für den kurzen Zylinder mit Temperaturbelastung



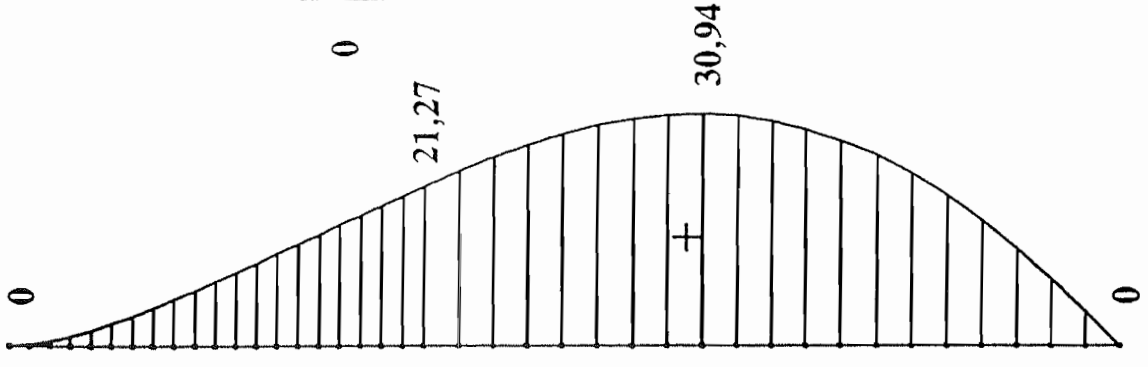
Verschiebungen $\cdot 10^{-5}$



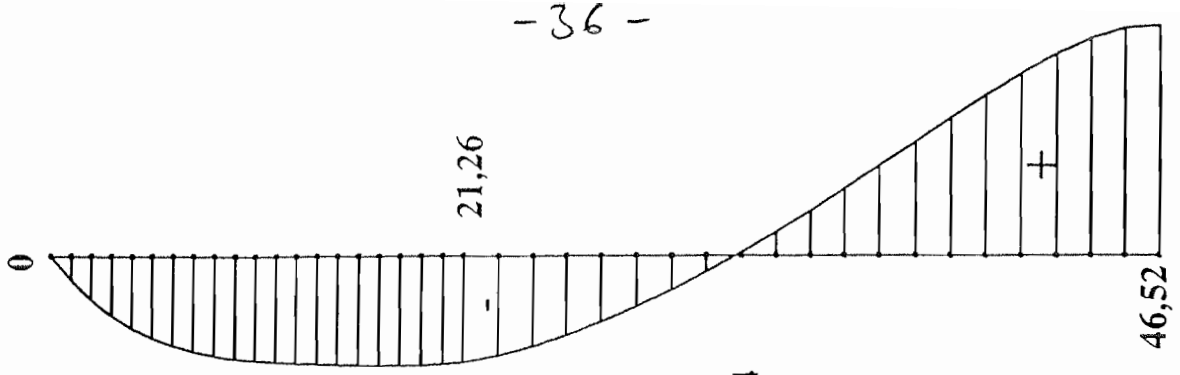
Normalkraft n_{11}



Moment m_{11}



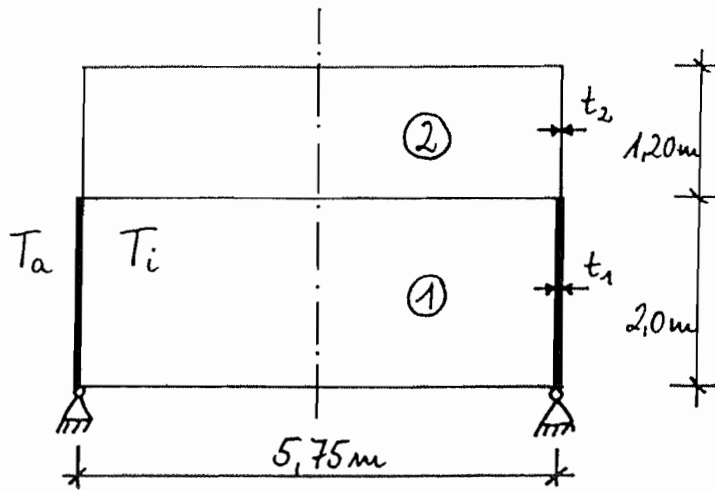
Moment m_{22}



Querkraft q_2

-37 - Beispiel: Zusammengesetzter Zylinder unter ΔT (kurze Zylinderschale)

1, Statisches System



$t_1 = 0,30m$, $t_2 = 0,20m$

$E = 34000 \text{ MN/m}^2$ (B25)

$\alpha_T = 1 \cdot 10^{-5} /K$, $\nu = 0,2$

$\Delta T = T_a - T_i = -10K$

\rightarrow innen wärmer

2, Hauptsystem

\rightarrow 3-fach statisch unbestimmt

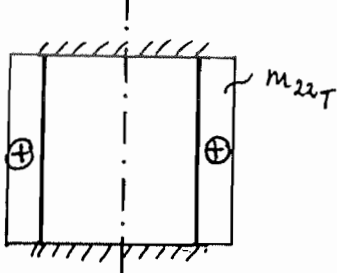
3, Lastspannungszustand infolge $\Delta T = -10K$

\rightarrow LSZ wirkt am membrangelagerten Hauptsystem

z. B.: Zylinder (2)

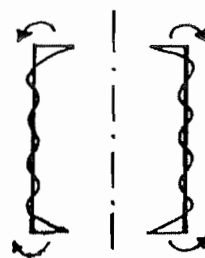
Zwang:

$m_{22T} = -B(1+\nu)\alpha_T$



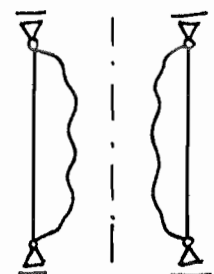
Randbiegemoment

$M = -m_{22T}$



Membranlagerung

unter ΔT : $m_{22} \neq 0$!



4, Einheitenspannungszustände

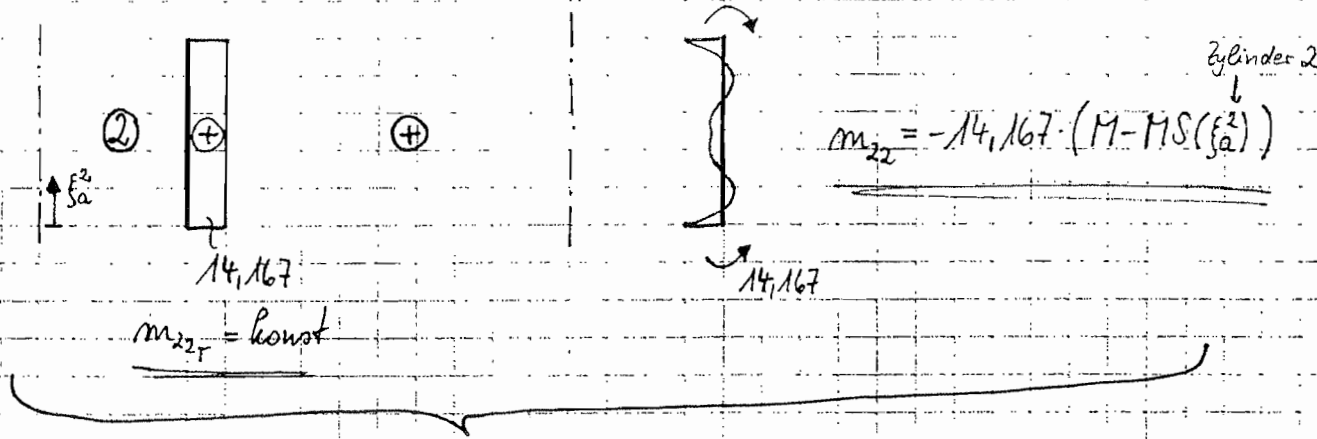
\rightarrow bei einseitiger Last Koord.-system so legen, daß Lastangriff im Nullpunkt

5, Sik-Werte und Verträglichkeit

6, Superposition der Zustandsgrößen ...

6. Superposition der Zustandsgrößen

z. B. Verlauf von m_{22} im Bereich ②:



m_{22}^{20} aus LSP

$\lambda_2 = 2,06$

Superposition:

$m_{22}^2 = +14,167 + [-M \cdot (M - MS(\xi_a^2))] - LSP \leftarrow$ s. Kap. 7.5.5/S.8

$\left. \begin{aligned} & - \textcircled{M} \cdot [M - MR(\xi_a^2)] - \text{ES22} \\ & - \textcircled{H} \textcircled{L_2} [M - PR(\xi_a^2)] = \dots \text{ES23} \end{aligned} \right\}$ s. Kap. 7.5.5/S.10
 $\begin{matrix} \downarrow x_2 \\ \rightarrow x_3 \end{matrix}$
 $-x_3 \quad 0,5821$

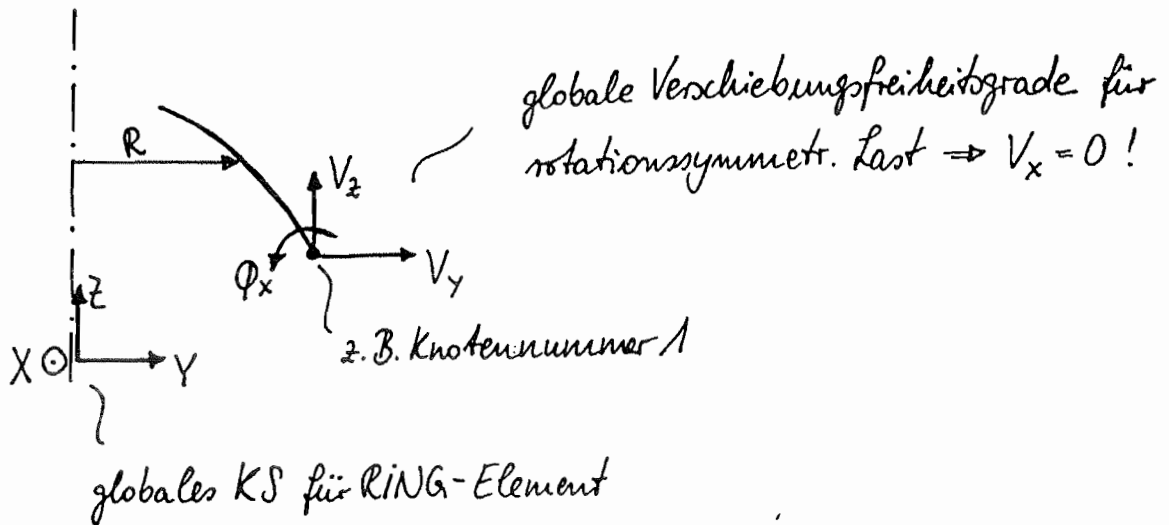
$m_{22}^2(\xi_a^2 = \lambda_2) = 14,167 + [-14,167 \cdot 1,0] +$
 $+ 21,2697 \cdot [0,0] -$
 $- 21,2582 \cdot [0,0] = \underline{\underline{0,0}}$ (V)
 Ladungsangriff $\hat{=}$ Koord. $\xi_a^2 = 0$
 Ursprung $\xi_a^2 = 0$
 Wert bei Lastangriff bis Systemmitte tabelliert!
 $\xi_a^2 = \lambda_2 \neq \xi_b^2 = 0!$

1. Koordinatensysteme und Freiheitsgrade

1.1. Globales Koordinatensystem

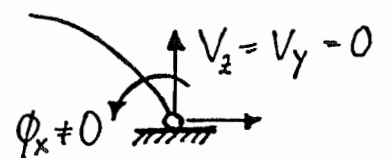
Gilt für:

- Ergebnisausgabe der Verschiebungsgrößen
- Definition der Randbedingung im BOUND-Befehl bei Einstellung des RING-Eingabeparameters TL auf TL=0.



- Beispiel für Anwendung des BOUND-Befehls:

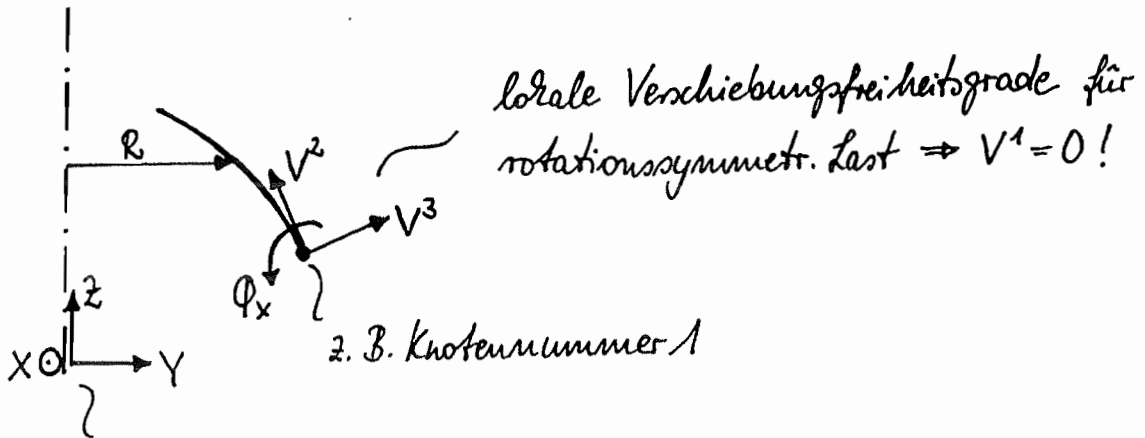
BOUND	JD					
1	F	=	0	0	0	1 0 0
						1
						V_y V_z ϕ_x ... freigegeben
						unterdrückt



1.2, Lokales Koordinatensystem

Gilt für:

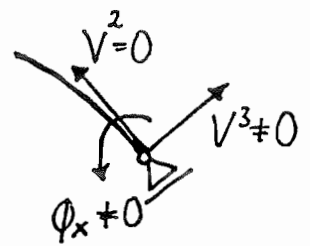
- Ergebnisausgabe der Schnittgrößen
- Definition der Randbedingung im BOUND-Befehl bei Einstellung des RING-Eingabeparameters auf TL = (Knotennummer mit lokaler Def.).



globales KS für RING-Element

- Beispiel für Anwendung des BOUND-Befehls:

BOUND	JD	$V^2 \dots$ unterdrückt				
1 F =	0	1	0	1	0	0
		V^3		ϕ_x		
		freigegeben				



Vorsicht:

V^3 an 2. Stelle

V^2 an 3. Stelle

- Beachte:
- Für Knoten, deren Randbedingungen im lokalen Koordinaten festgelegt sind, erfolgt die Ausgabe der Verschiebungen auch im lokalen Koordinaten!
 - Es ist zweckmäßig, Linienlasten auf das globale Koordinatensystem zu beziehen!

2. Elementlänge im Bereich von Biegestörungen

- im Bereich $L = 5 \cdot l_{max}$ im Abstand von der Biegestörung darf eine maximale Elementlänge nicht überschritten werden.
- maximale Elementlänge l_{max} :

$$l_{max} = \sqrt{R_s \cdot t} \quad \text{aber besser: } l = \frac{1}{5} l_{max} \dots \frac{1}{3} l_{max}$$

\swarrow \nwarrow
 Krümmungsradius Schalendicke

3. Elementknoten auf Rotationsachse

In den Berechnungen treten Terme $\frac{1}{R}$ auf. Diese Terme führen auf der Rotationsachse $R=0$ zu Singularitäten.

Abhilfe:

- Loch in der Schale von der Größe der Schalendicke t im Bereich der Rotationsachse anordnen.
- Am Loch für rot.-symmetr. Last spezielle Randbedingungen ansetzen:

$$\Rightarrow V_y = \Phi_x = 0 \quad V_z \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{BOUND ID} \quad V_z \dots \text{freigegeben}$$

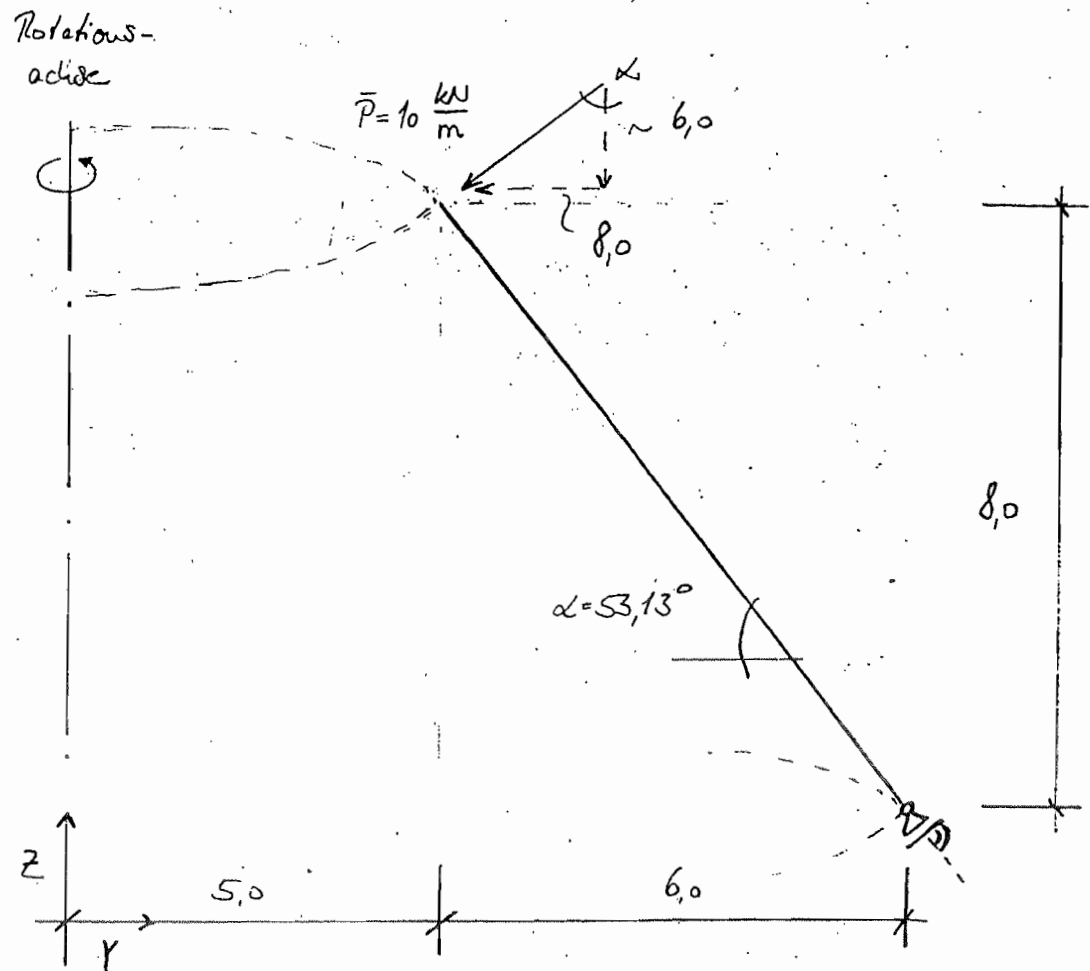
$$141 \quad F = 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$



- Elementlänge im Abstand $L = 10 \cdot t$ vom Loch sollte in der Größe der Schalendicke t liegen.

4.) Beispiel . Kegel unter Randlast mit CAL88

4.1.) Statisches System



$$E = 30.000 \text{ MN/m}^2$$

$$t = 0,20 \text{ m}$$

$$r = 0,2$$

7. Berechnung des Kegels unter Randlast mit CAL88

```

START
OUTPUT KEGEL.AUS
* Beispiel: Kegel unter Randlast
* zur 9./10. Übung im Juli 1997

NODES XYZ NK=50
1 X=0 Y=11.0 Z=0.0
50 X=0 Y=5.0 Z=8.0

BOUND BC
1 F= 0 1 0 1 0 0
2 F= 0 1 1 1 0 0 G=50 I=1

PROPS RING MAT NM=1
1 E=30000.0 NU=0.2

IZERO IPL Z=49 S=3
RING GRP XYZ BC MAT IPL
1 K=1.50 M=1 G=49 NH=0 TL=1
TYP=3 T=0.20 0.20

BADDSF KGES

LOADS V BC REACT NL=1
50 LC=1 P=0.0,-40.0,-30.0,0.0,0.0,0.0

BSOLVE KGES V
DISPL V BC DIS
FORCE GRP V FOR
REACT V REACT
IDENT **** Beispiel Kegelschale (Randlast) ****
FIGUR 0.0
PROJ,XYZ,PLKO 1.0 0.0 0.0 W=0
PSCAL,PLKO,4,1
PNODE,PLKO,0

PGRID,PLKO,IPL,0,0
BOX,1 **** Systemzeichnung ****
ENDJOB
IDENT **** Beispiel Kegelschale ****
FIGUR 0.0
PROJ,XYZ,PLKO 1.0 0.0 0.0 W=0
PSCAL,PLKO,4,1
PNODE,PLKO,0
LOAD,FAK,1,1
5.0

SCALE,DIS,FAK
ADD DIS XYZ
PROJ,DIS,PLKO 1.0 0.0 0.0 W=0
PSCAL,PLKO,4,2
PNODE,PLKO,0
PGRID,PLKO,IPL,0,0
BOX,1 **** Verschiebungsfigur ****
ENDJOB
IDENT **** Beispiel Kegelschale ****
FIGUR 0.0
PROJ,XYZ,PLKO 1.0 0.0 0.0 W=0
PSCAL,PLKO,4,1
PBEAM,PLKO,IPL,FOR,1 SF=3

PNODE,PLKO,0
PGRID,PLKO,IPL,0,0
BOX,1 **** Normalkraft M11 ****
ENDJOB
IDENT **** Beispiel Kegelschale ****
FIGUR 0.0
PROJ,XYZ,PLKO 1.0 0.0 0.0 W=0
PSCAL,PLKO,4,1
PBEAM,PLKO,IPL,FOR,2 SF=3
PNODE,PLKO,0
PGRID,PLKO,IPL,0,0
BOX,1 **** Normalkraft M22 ****
ENDJOB
IDENT **** Beispiel Kegelschale ****
FIGUR 0.0
PROJ,XYZ,PLKO 1.0 0.0 0.0 W=0
PSCAL,PLKO,4,1
PBEAM,PLKO,IPL,FOR,4 SF=3
PNODE,PLKO,0
PGRID,PLKO,IPL,0,0
BOX,1 **** Moment M11 ****
ENDJOB
IDENT **** Beispiel Kegelschale ****
FIGUR 0.0
PROJ,XYZ,PLKO 1.0 0.0 0.0 W=0
PSCAL,PLKO,4,1
PBEAM,PLKO,IPL,FOR,5 SF=3
PNODE,PLKO,0
PGRID,PLKO,IPL,0,0
BOX,1 **** Moment M22 ****
ENDJOB
IDENT **** Beispiel Kegelschale ****
FIGUR 0.0
PROJ,XYZ,PLKO 1.0 0.0 0.0 W=0
PSCAL,PLKO,4,1
PBEAM,PLKO,IPL,FOR,7 SF=3
PNODE,PLKO,0
PGRID,PLKO,IPL,0,0
BOX,1 **** Querkraft Qres ****
ENDJOB
RETURN

```

.... Technische Universitaet Muenchen Lenzsch... fuer Statik *****
 CAL-Ergebnisprotokoll -- Seite 1 -- Datum : 14. 7.1997 *****

----- Verbleibender Speicherplatz =1200000
 ## * Beispiel: Kegel unter Randlast
 ## * zur 9./10. Uebung im Juli 1997

>> NODES XYZ NK=50
 ++ Matrix <XYZ > mit 50 Zeilen und 3 Spalten erzeugt

----- KNOTENKOORDINATEN -----

Knotennr.	X-KOORD.	Y-KOORD.	Z-KOORD.
1	0.0000	11.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000
49	0.0000	0.0000	0.0000
50	0.0000	5.0000	8.0000

>> BOUND BC
 ++ Matrix <BC > mit 50 Zeilen und 6 Spalten erzeugt

----- KNOTENFREIHEITSGRADE -----

Knoten	Vx	Vy	Vz	PHIX	PHIY	PHIZ
1	0	1	0	1	0	0
2	0	1	1	1	0	0
3	0	1	1	1	0	0
49	0	1	1	1	0	0
50	0	1	1	1	0	0

----- GLEICHUNGNUMMERN -----

Knoten	Vx	Vy	Vz	PHIX	PHIY	PHIZ
1	0	1	0	2	0	0
2	0	3	4	5	0	0
3	0	6	7	8	0	0
49	0	144	145	146	0	0
50	0	147	148	149	0	0

>> PROPS RING MAT NM=1
 ++ Matrix <MAT > mit 1 Zeilen und 5 Spalten erzeugt

----- MATERIAL- UND GEOMETRIEDATEN -----

MATR.-NR. E NUE ALPHA-T FAK M
 1 3.0000E+04 2.0000E-01 0.0000E+00 1.0000E+00 0.0000E+00
 >> IZERO IPL Z=49 S=3
 ++ Matrix <IPL > mit 49 Zeilen und 3 Spalten erzeugt
 >> RING GRP XYZ BC MAT IPL

SCHALENRIINGELEMENT
 Schalentheorie nach NAGHDI
 Integrationsordnung = 2

ELEMENTGRUPPE 1: KEGEL

ELEMENTINFORMATION:

 Umfangswellenzahl..... 0
 Anfangsknotennummer..... 1
 Endknotennummer..... 50
 Knoten mit Membranlagerung.... 1
 Materialgruppennummer..... 1
 Anzahl der Elemente..... 49
 Schalendicke am Anfangsknoten. 2.0000E-01
 Schalendicke am Endknoten..... 2.0000E-01

Element	Knoten	Laenge	Dicke	Radius
1	1	0.2041	0.2000	11.0000
2	2	0.2041	0.2000	10.8776
3	3	0.2041	0.2000	10.8776
48	48	0.2041	0.2000	5.2449
49	49	0.2041	0.2000	5.1224
50	50	0.2041	0.2000	5.1224

----- KNOTENKOORDINATEN -----

Knotennr.	X-KOORD.	Y-KOORD.	Z-KOORD.
1	0.0000	11.0000	0.0000
2	0.0000	10.8776	0.1633
3	0.0000	10.7551	0.3265

49 0.0000 5.1224 7.8367
 50 0.0000 5.0000 8.0000
 ++ Matrix <GRP > mit 1 Zeilen und 8 Spalten erzeugt
 >> BADDSF KGES
 ++ Matrix <KGES > mit 149 Zeilen und 6 Spalten erzeugt

----- Bandbreite = 6 -----

>> LOADS V BC REACT NL=1
 ++ Matrix <V > mit 149 Zeilen und 1 Spalten erzeugt
 ++ Matrix <REACT > mit 300 Zeilen und 1 Spalten erzeugt

----- KNOTENLASTEN -----

Knoten	LFN	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
50	1	0.0000E+00	-4.0000E+01	-3.0000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+01

>> BSOLVE KGES V
 >> DISPL V BC DIS

49 1 0.0000E+00 -2.8779E-12 -1.3941E-12 -2.9826E-13 0.0000E+00 0.0000E+00 0.0000E+00
50 1 0.0000E+00 -1.4877E-13 -2.0716E-12 -1.5399E-13 0.0000E+00 0.0000E+00 0.0000E+00

----- SUMME DER REAKTIONSKRAEFTE -----
LFN Fx Fy Fz Mx My Mz
1 0.0000E+00 -2.8441E-12 3.7500E+01 -7.3268E-13 0.0000E+00 0.0000E+00 0.0000E+00

>> IDENT **** BEISPIEL KEGELSCHALE (RANDLAST) ***
Identifikation: <*** Beispiel Kegelschale (Randlast)>
>> FIGUR 0.0
Bild-Nullpunkt X = 0.0000 Y = 0.0000
>> PROJ.XYZ,PLKO 1.0 0.0 0.0 W=0
++ Matrix <PLKO > mit 50 Zeilen und 3 Spalten erzeugt
Blickpunkt X = 1.0000 Y = 0.0000 Z = 0.0000
>> PSCALE, PLKO, 4,1
>> PNODE, PLKO, 0
>> PGRID, PLKO, IPL, 0, 0
>> BOX, 1, **** SYSTEMZEICHNUNG ****
Bildtitel: <*** Systemzeichnung ***>
>> ENDJOB
>> RETURN

----- KNOTENVERSCHIEBUNGEN -----
Knoten LFN Vx Vy Vz PHIX PHIZ
1 1 0.0000E+00 1.6117E-03 0.0000E+00 4.5553E-04 0.0000E+00 0.0000E+00
2 1 0.0000E+00 1.2850E-03 8.1780E-04 4.5633E-04 0.0000E+00 0.0000E+00
3 1 0.0000E+00 1.2812E-03 6.6739E-04 4.5777E-04 0.0000E+00 0.0000E+00
48 1 0.0000E+00 -6.7665E-02 -5.9995E-02 1.4640E-01 0.0000E+00 0.0000E+00
49 1 0.0000E+00 -9.3626E-02 -7.8847E-02 1.6674E-01 0.0000E+00 0.0000E+00
50 1 0.0000E+00 -1.2230E-01 -9.9333E-02 1.7604E-01 0.0000E+00 0.0000E+00
----- Verbleibender Speicherplatz =1198070

>> FORCE GRP V FOR
++ Matrix <FOR > mit 49 Zeilen und 14 Spalten erzeugt

[SCHNITTGROESSEN RING]

Table with columns: EL.-NR, LFN, N11, N22, N12, M11, M22, M12, Q-RES.

Table with columns: EL.-NR, LFN, N11, N22, N12, M11, M22, M12, Q-RES.

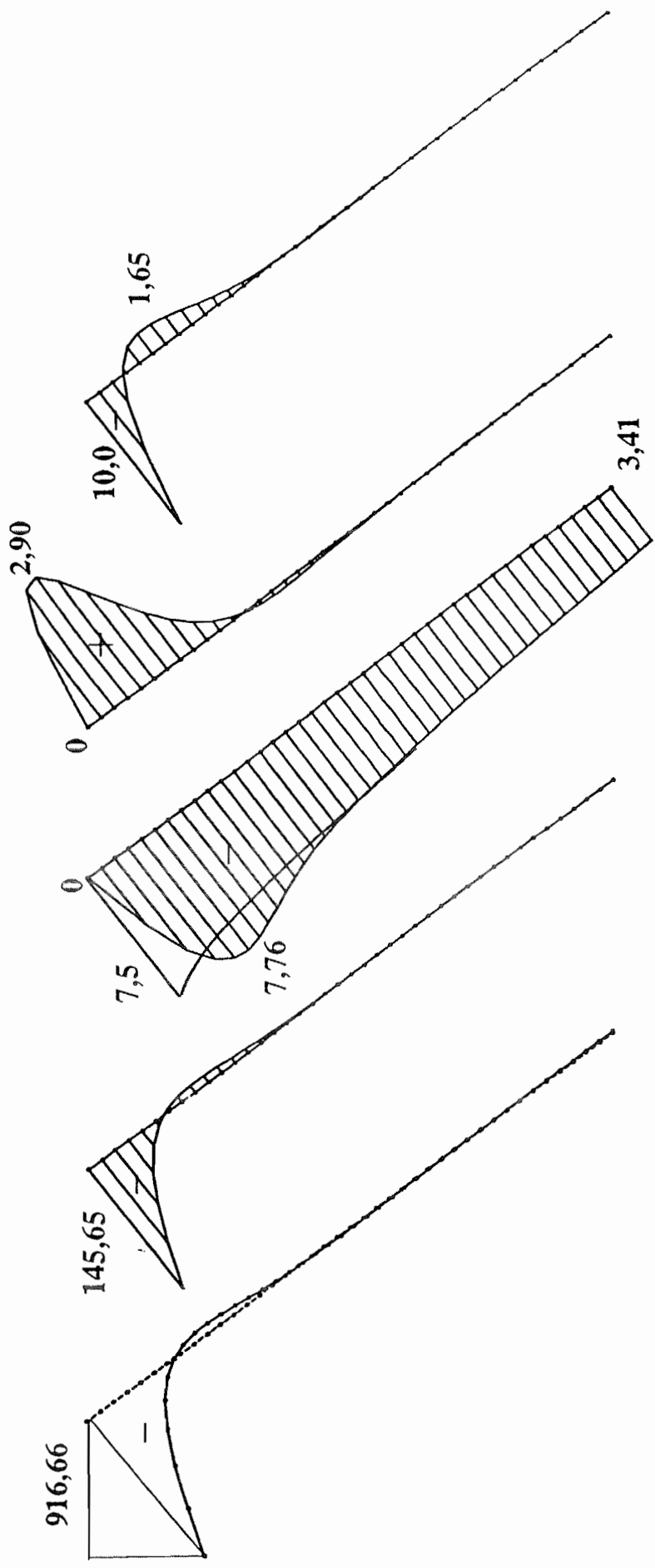
Table with columns: REAKTIONSKRAEFTE, Knoten, LFN, Fx, Fy, Fz, Mx, My, Mz.

Kontrolle!

Verbleibender Speicherplatz =1197378

Verbleibender Speicherplatz =1197378

Zustandsgrößen für den Kegel mit Randkraft



Biegetheorie der Kugelschale

rotationssymmetrische Zustände:

$$- v^1 = 0, \bar{p}_1 = 0$$

$$- n_{12} = n_{21} = 0, m_{12} = m_{21} = 0$$

$$- \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0, \beta_{12} = \beta_{21} = 0$$

Geometrische Beschreibung: $\Theta^2 = \varphi$

$$R = R_0 \sin \varphi; \quad R_{,2} = R_0 \cos \varphi$$

$$R_1 = R_2 = R_0; \quad B = R_0$$

Kinematische Beziehungen

$$\alpha_{11} = \frac{\cot \varphi}{R_0} v^2 + \frac{1}{R_0} v^3 \quad (1)$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{R_0} v_{,2}^2 + \frac{1}{R_0} v^3 \quad (2)$$

$$\gamma_{23} = 0 \Rightarrow \varphi^2 = -\frac{1}{R_0} v_{,2}^3 + \frac{1}{R_0} v^2 \quad (3)$$

$$\beta_{11} = \frac{\cot \varphi}{R_0} \varphi^2 \quad (4)$$

$$\beta_{22} = \frac{1}{R_0} - \varphi_{,2}^2 \quad (5)$$

aus (2) - (1):

$$(\alpha_{22} - \alpha_{11}) \cot \varphi = \frac{1}{R_0} \cot \varphi (v_{,2}^2 - \cot \varphi v^2) \quad (6)$$

aus (1):

$$\alpha_{11,2} = \frac{1}{R_0} \left(v_{,2}^2 \cot \varphi - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} + v_{,2}^3 \right) \quad (7)$$

Kopplung der Beziehungen

(9) und (11) in (13) und (14) eingesetzt:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{Et} (q_{2,2} - \nu q_2 \cot \varphi) \quad (17)$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{Et} (q_2 \cot \varphi - \nu q_{2,2}) \quad (18)$$

(4) und (5) in (15) und (16) eingesetzt:

$$m_{11} = \frac{B}{R_0} (\cot \varphi \varphi^2 + \nu \varphi_{,2}^2) \quad (19)$$

$$m_{22} = \frac{B}{R_0} (\varphi_{,2}^2 + \nu \cot \varphi \varphi^2) \quad (20)$$

aus (17) und (18):

$$\alpha_{11,2} = \frac{1}{Et} \left(q_{2,22} - \nu q_{2,2} \cot \varphi + \nu q_2 \frac{1}{\sin^2 \varphi} \right) \quad (21)$$

$$(\alpha_{22} - \alpha_{11}) \cot \varphi = \frac{1}{Et} \cot \varphi (1 + \nu) (q_2 \cot \varphi - q_{2,2}) \quad (22)$$

(21) und (22) in (8):

$$\frac{1}{Et} \left[q_2 \cot^2 \varphi (1 + \nu) - q_{2,2} \cot \varphi - q_{2,22} - \nu q_2 \frac{1}{\sin^2 \varphi} \right] = \varphi^2$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{Et} [q_{2,22} + q_{2,2} \cot \varphi - q_2 (\cot^2 \varphi - \nu)] + \varphi^2 = 0} \quad (23)$$

(19) und (20) in (12):

$$\begin{aligned}
 q_2 &= -\frac{\cot\varphi}{R_0} \frac{B}{R_0} (\cot\varphi \varphi^2 + \nu \varphi_{,2}^2) \\
 &+ \frac{\cot\varphi}{R_0} \frac{B}{R_0} (\varphi_{,2}^2 + \nu \cot\varphi \varphi^2) \\
 &+ \frac{1}{R_0} \frac{B}{R_0} \left(\varphi_{,22}^2 - \nu \frac{1}{\sin^2\varphi} \varphi^2 + \nu \cot\varphi \varphi_{,2}^2 \right) \\
 &\rightarrow \frac{B}{R_0^2} \left[\varphi_{,22}^2 + \varphi_{,2}^2 (\cot\varphi + \nu \cot\varphi - \nu \cot\varphi) \right. \\
 &\quad \left. + \varphi^2 \left(-\cot^2\varphi + \nu \cot^2\varphi - \frac{\nu}{\sin^2\varphi} \right) \right] - q_2 = 0 \\
 &\rightarrow \boxed{\frac{B}{R_0^2} \left[\varphi_{,22}^2 + \varphi_{,2}^2 \cot\varphi - \varphi^2 (\cot^2\varphi + \nu) \right] - q_2 = 0} \quad (24)
 \end{aligned}$$

(23) und (24) liefern zwei gekoppelte Differentialgleichungen für φ^2 und q_2 .

Lösung nur über Reihenentwicklungen möglich, wobei die Konvergenz schlecht ist.

→ praktisch nicht einsetzbar.

Näherungslösung

Voraussetzung: die Lösungen stellen stark abklingende Funktionen $f(\theta^2)$ dar, ähnlich wie bei der Zylinderschale.

Dann gilt: f_{12} ist groß gegenüber f ,
 f_{122} ist groß gegenüber f_{12}
 usw..

Beispiel: $f = e^{-k\theta^2}$, $k \gg 1$
 $f_{12} = -k e^{-k\theta^2} = -k f$

vernachlässigung kleinerer Anteile in (23) und (24):

$$\frac{1}{Et} \varphi_{2,22} + \varphi^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \varphi^2 = -\frac{1}{Et} \varphi_{2,22} \quad (25)$$

$$\frac{B}{R_0^2} \varphi_{1,22} - \varphi_2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \varphi_2 = \frac{B}{R_0} \varphi_{1,22} \quad (26)$$

(25) und (26) ineinander eingesetzt:

$\varphi_{2,2222} + \frac{Et R_0^2}{B} \varphi_2 = 0$	(27)
---	------

$\varphi_{1,2222} + \frac{Et R_0^2}{B} \varphi^2 = 0$	(28)
---	------

mit $\frac{Et R_0^2}{B} = \frac{12 R_0^2 (1-\nu^2)}{t^2} = 4\alpha^4$

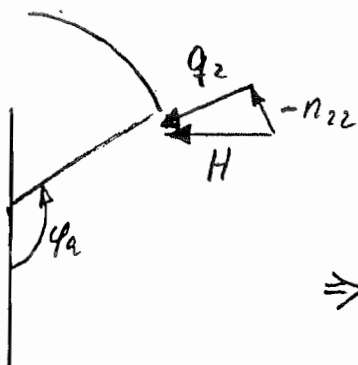
Lösung: $q_2 = (C_1 \cos \alpha \varphi + C_2 \sin \alpha \varphi) e^{-\alpha \varphi}$
 $(+ \bar{C}_1 \cos \alpha \bar{\varphi} + \bar{C}_2 \sin \alpha \bar{\varphi}) e^{-\alpha \bar{\varphi}}$
 (analog zum Zylinder)

charakteristischer Winkel: $\frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{t}{R_0}} \sqrt[4]{\frac{1}{3(1-\nu^2)}}$ (30)

charakterist. Länge: $L = \frac{1}{\alpha} R_0 = \sqrt{R_0 t} \sqrt[4]{\frac{1}{3(1-\nu^2)}}$ (31)

Lösung für die "lange" Kugel:

$q_2 = K_1 \cdot D_\xi + K_2 \cdot B_\xi$ mit $\xi = \alpha(\varphi - \varphi_a)$ (32)



Randbed.: $\xi = 0, \varphi = \varphi_a$

$q_2 = K_1 = H \sin \varphi_a = H \sin \tilde{\varphi}_a$

$\Rightarrow q_2 = H \sin \varphi_a C_\xi + K_2 B_\xi$ (33)

mit (25): $\varphi^2 = -\frac{1}{Et} q_{2,22}$

$C_{\xi,22} = 2\alpha^2 A_\xi$; $B_{\xi,22} = -2\alpha^2 D_\xi$

$\rightarrow \varphi^2 = \frac{2\alpha^2}{Et} (-H \sin \varphi_a A_\xi + K_2 D_\xi)$ (34)

aus (20) mit φ^2 klein gegenüber φ_{12}^2 :

$$m_{22} = \frac{B}{R_0} \varphi_{12}^2 = \frac{2\alpha^3 B}{Et R_0} (2H \sin \varphi_a B_\xi - K_2 A_\xi) \quad (35)$$

$$\frac{2\alpha^3 B}{Et R_0} = \frac{2\alpha^3 R_0}{4\alpha^4} = \frac{R_0}{2\alpha} = \frac{1}{2} L$$

$$m_{22} = HL \sin \varphi_a B_\xi - \frac{1}{2} L K_2 A_\xi \quad (36)$$

Randbed. für $\xi=0$ ($\varphi=\varphi_a$):

$$m_{22} = -\frac{1}{2} L K_2 = M$$

$$\Rightarrow K_2 = -\frac{2M}{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{m_{22} = HL \sin \varphi_a B_\xi + M A_\xi} \quad (36a)$$

$$\boxed{\varphi_2 = H \sin \varphi_a C_\xi - \frac{2M}{L} B_\xi} \quad (37a)$$

$$\varphi^2 = \chi = \frac{2\alpha^2}{Et} \left(-H \sin \varphi_a A_\xi - \frac{2}{L} M D_\xi \right) \quad (34a)$$

$$\frac{2\alpha^2}{Et} = \frac{2\alpha^2 R_0^2}{4\alpha^4 B} = \frac{L^2}{2B}$$

$$\rightarrow \boxed{\chi = -\frac{L^2}{2B} H \sin \varphi_a A_\xi - \frac{L}{B} M D_\xi} \quad (34b)$$

aus (19) mit (35) und (36a):

$$\boxed{m_{11} = \nu m_{22} + \frac{B}{R_0} \cot \varphi \chi} \quad (35)$$

----- klein gegenüber m_{22}

aus (9):

$$\boxed{n_{22} = H \sin \varphi_a \cot \varphi C_{\xi} - \frac{2M}{L} \cot \varphi B_{\xi}} \quad (36)$$

aus (11):

$$n_{11} = q_{2,2} = -2\alpha H \sin \varphi_a D_{\xi} - \frac{2\alpha M}{L} C_{\xi}$$

$$\boxed{n_{11} = -\frac{2HR_0}{L} \sin \varphi_a D_{\xi} - \frac{2MR_0}{L^2} C_{\xi}} \quad (37)$$

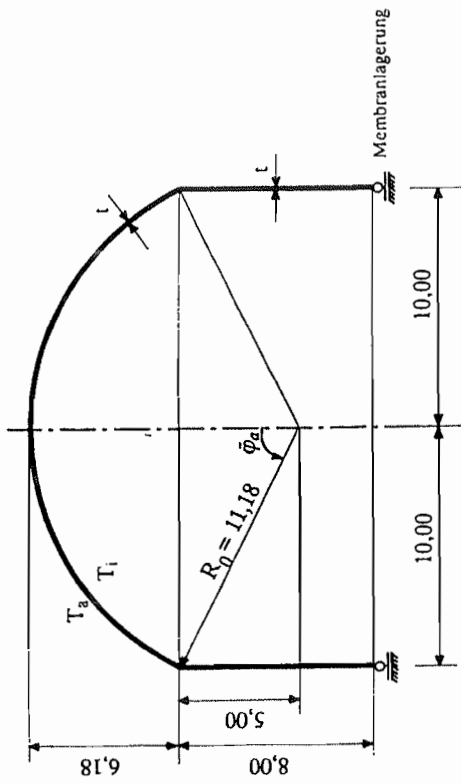
$$\alpha_{11} = \frac{\Delta R}{R} \rightarrow \Delta R = R \alpha_{11} = R_0 \sin \varphi \alpha_{11}$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{E\epsilon} (n_{11} - \nu n'_{22}) = \frac{1}{E\epsilon} (q_{2,2} - \nu q'_{2,2} \cot \varphi)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta R = R_0 \sin \varphi \frac{n_{11}}{E\epsilon}} \quad (38)$$

Zusammengesetzte Schalen unter rotationssymmetrischer Beanspruchung

I. System



$E = 34000 \text{ MN/m}^2$ (B35)

$\nu = 0,2$

$\alpha_T = 10^{-5} \text{ 1/K}$

$t = 0,3 \text{ m} = \text{const}$

$\varphi_a = 63,43^\circ$

$R_0 = 11,18 \text{ m}$

Untersuchung folgender Lastfälle:

Lastfall 1 : Eigengewicht $g = 25,0 \cdot 0,3 = 7,5 \text{ kN/m}^2$

Lastfall 2 : Temperatur $T_i = 35 \text{ K}, T_a = 20 \text{ K}$

$\Delta T = T_a - T_i = -15,0 \text{ K}$

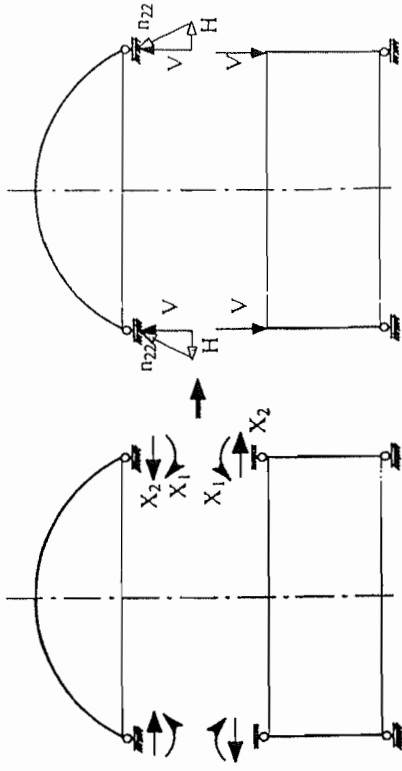
$T_s = \frac{T_a + T_i}{2} = 27,5 \text{ K}$

Modifikation des Systems:

- a) Einbau eines Ringbalkens
- b) Ringvorspannung im oberen Viertel des Zylinders

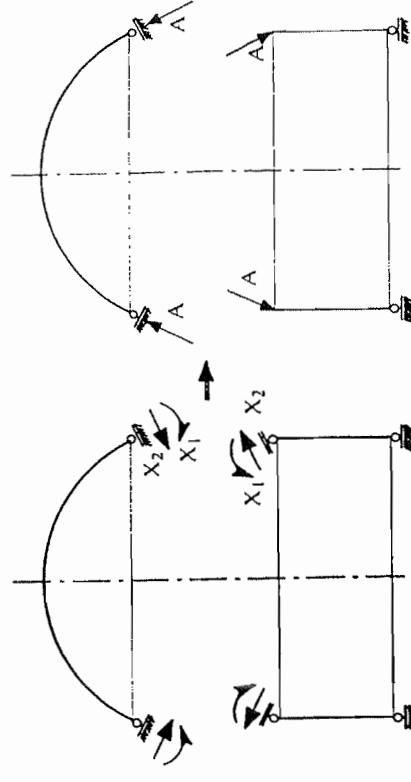
2. Wahl eines Hauptsystem

wenn möglich statisch bestimmt \Rightarrow Membrantheorie



I. Horizontalschnitt (senkrecht zur Rotationsachse)

Kugel: Die Kugelschale ist nicht membrangelagert
 \Rightarrow Statisch unbestimmtes Hauptsystem
 \Rightarrow in der Kugelschale treten Biegestörungen auf.
 Zylinder: membrangelagert, Membranbelastung \Rightarrow ok.

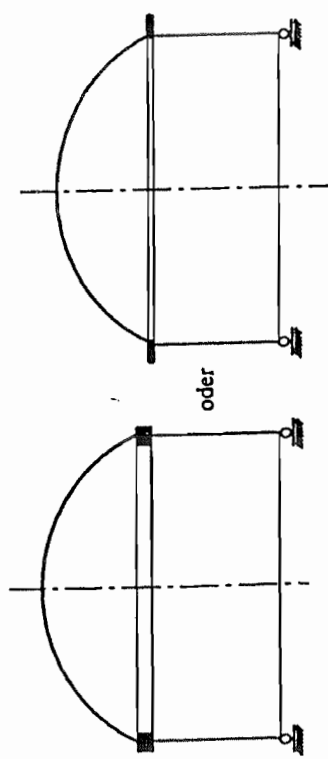


II. Schrägschnitt

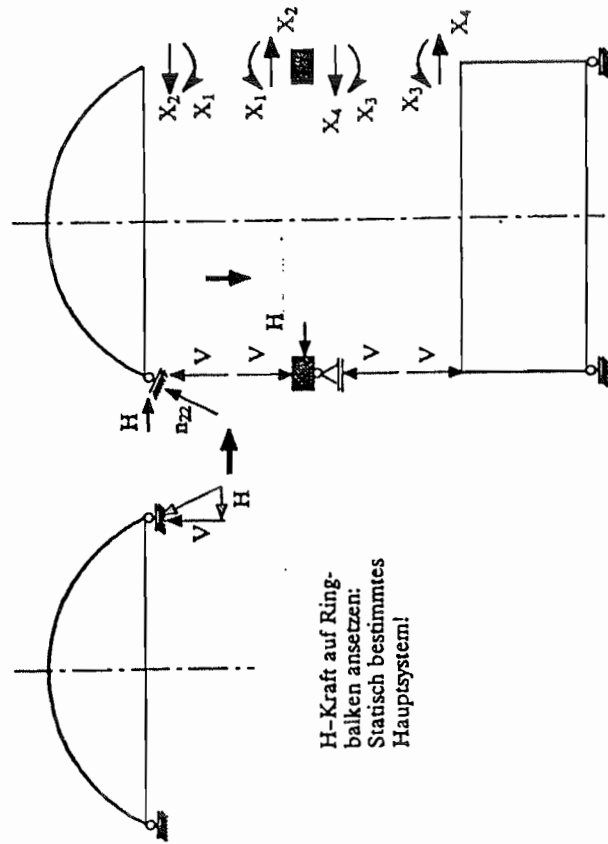
Kugel: membrangelagert \Rightarrow statisch bestimmt \Rightarrow ok.
 Zylinder: statisch unbestimmtes Hauptsystem \Rightarrow Anwendung der Biegetheorie
 \Rightarrow "schiefe" Randlasten und Randverschiebungen sind nicht tabelliert
 \Rightarrow umständlich

Alternative:

durch konstruktive Maßnahmen einen möglichst ungestörten Membranfluß erzwingen:



Ringbalken oder Kreisringscheibe

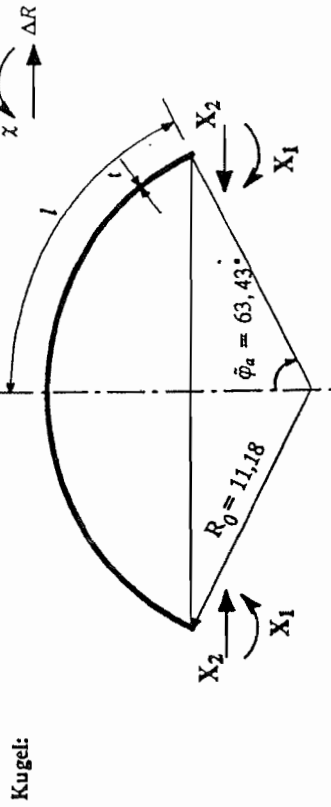


H-Kraft auf Ringbalken ansetzen:
 Statisch bestimmtes Hauptsystem!

Man kann versuchen, durch Optimierung der Ringbalkenabmessungen die Biegestörungen in den angrenzenden Schalen zu minimieren.

Berechnung mit Hauptsystem I

3. Eigenspannungszustände ESZ:



charakteristische Länge L

$$L = \frac{\sqrt{R_0 \cdot l}}{\sqrt[3]{3(1-\nu^2)}} = \frac{\sqrt{11,18 \cdot 0,3}}{\sqrt[3]{3(1-0,2^2)}} = 1,406 \text{ m}$$

Meridianlänge $l = R_0 \cdot \varphi_a = 11,18 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 63,43 = 12,377 \text{ m}$

$l/L = 12,377/1,406 = 8,804 > 4 \Rightarrow$ lange Schale, Biegestörungen klingen ab!

$\varphi_a = 63,43^\circ > 30^\circ \Rightarrow$ Steile Kugelschale, siehe Formelsammlung.

($\varphi_a < 30^\circ \Rightarrow$ flache Kugelschale, siehe z.B. Hampe)

Die Abklügelänge ist bei geschlossenen Kugelschalen immer eingehalten, wenn $\varphi_a > 30^\circ \Rightarrow l/L > 4,18$

$$B = \frac{E \cdot l^3}{12(1-\nu^2)} = E \cdot l \cdot \frac{0,30^2}{12(1-0,2^2)} = \frac{E \cdot l}{128}$$

für $\xi = 0$ gilt: $A_\xi = C_\xi = D_\xi = 1$; $B_\xi = 0$

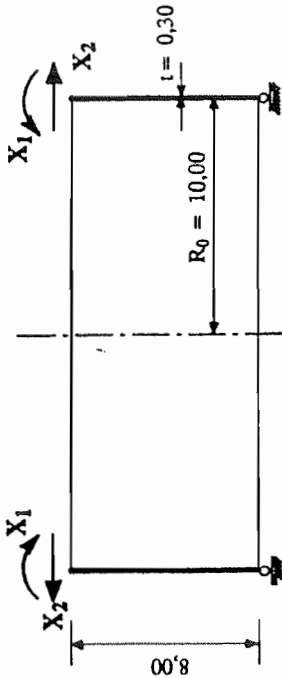
$$\chi_M = -\frac{ML}{B} D_\xi \Rightarrow X_1 \delta_{11} = (-) \cdot X_1 \cdot \frac{1,406}{E} \cdot 128 = + \frac{179,97}{E} \cdot X_1$$

$$\Delta R_M = -\frac{ML^2}{2B} \sin \varphi C_\xi \Rightarrow X_1 \delta_{21} = (-) \cdot X_1 \cdot \frac{1,406^2}{2E} \cdot 128 \cdot \sin 63,43 = + \frac{113,16}{E} \cdot X_1$$

$$\chi_H = -\frac{HL^2}{2B} \sin \varphi A_\xi \Rightarrow X_2 \delta_{12} = (-) \cdot (-) X_2 \cdot \frac{1,406^2}{2E} \cdot 128 \cdot \sin 63,43 = + \frac{113,16}{E} \cdot X_2$$

$$\Delta R_H = -\frac{HL^3}{2B} \sin^2 \varphi D_\xi \Rightarrow X_2 \delta_{22} = (-) \cdot (-) X_2 \cdot \frac{1,406^3}{2E} \cdot 128 \cdot \sin^2 63,43 = + \frac{142,29}{E} \cdot X_2$$

Zylinder:



charakteristische Länge L

$$L = \frac{\sqrt{R_0 \cdot t}}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} = \frac{\sqrt{10,00 \cdot 0,3}}{\sqrt{3(1-0,2^2)}} = 1,33 \text{ m}$$

$$l = 8,0 \text{ m}$$

$l/L = 8,00/1,33 = 6,015 > 4 \Rightarrow$ lange Schale, Biegestörungen klingen ab!

$$B = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)} = Et \cdot \frac{0,30^2}{12(1-0,2^2)} = \frac{E \cdot t}{128} \quad (\text{siehe Kugel})$$

für $\xi = 0$ gilt: $A_\xi = C_\xi = D_\xi = 1$; $B_\xi = 0$

$$\chi_M = \frac{ML}{B} D_\xi \Rightarrow X_1 \delta_{11} = (+)(+)X_1 \cdot \frac{1,33}{Et} \cdot 128 = + \frac{170,24}{Et} \cdot X_1$$

$$\Delta R_M = -\frac{ML^2}{2B} C_\xi \Rightarrow X_1 \delta_{21} = (-)(+)X_1 \cdot \frac{1,33^2}{2Et} \cdot 128 = -\frac{113,21}{Et} \cdot X_1$$

$$\chi_H = -\frac{HL^2}{2B} A_\xi \Rightarrow X_2 \delta_{12} = (-)(+)X_2 \cdot \frac{1,33^2}{2Et} \cdot 128 = -\frac{113,21}{Et} \cdot X_2$$

$$\Delta R_H = \frac{HL^3}{2B} D_\xi \Rightarrow X_2 \delta_{22} = (+)(+)X_2 \cdot \frac{1,33^3}{2Et} \cdot 128 = + \frac{150,57}{Et} \cdot X_2$$

4. Verträglichkeitsbedingungen:

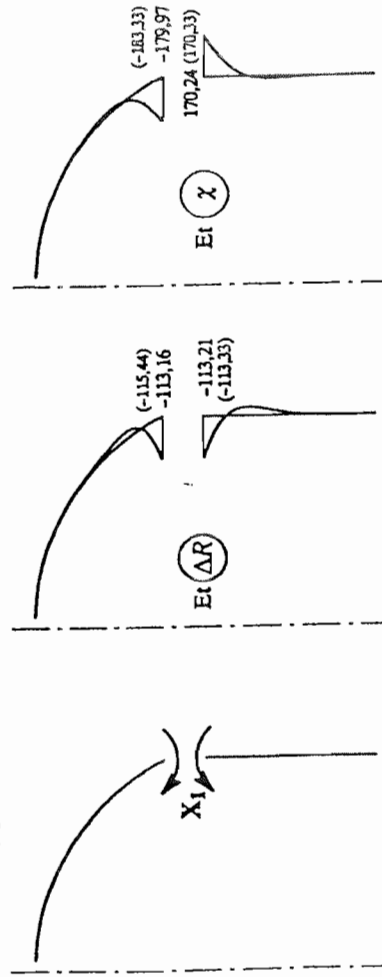
$\delta_{ik} \cdot X_k + \delta_{i0} = 0$ Kugel und Zylinder zusammenfassen

$$\begin{bmatrix} 179,97 + 170,24 & | & 113,16 - 113,21 \\ 113,16 - 113,21 & | & 142,29 + 150,57 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = -Et \begin{bmatrix} \delta_{10} & | & \delta_{12}^2 \\ \delta_{20} & | & \delta_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 350,21 & | & -0,05 \\ -0,05 & | & 292,86 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = -Et \begin{bmatrix} \delta_{10} & | & \delta_{12}^2 \\ \delta_{20} & | & \delta_{22}^2 \end{bmatrix}$$

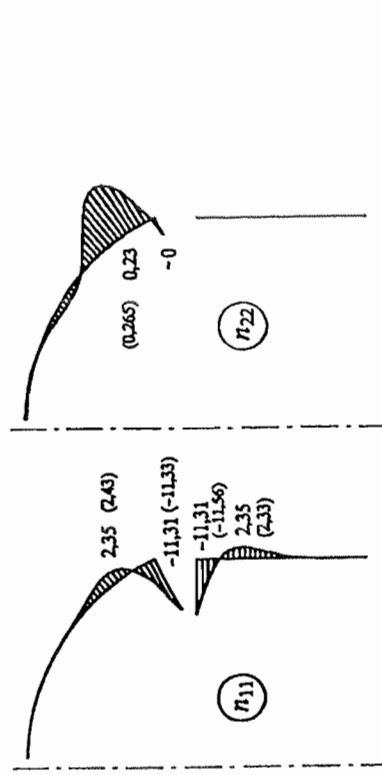
Verformungen aus den Lastspannungszuständen

Einheitsspannungszustand X_1



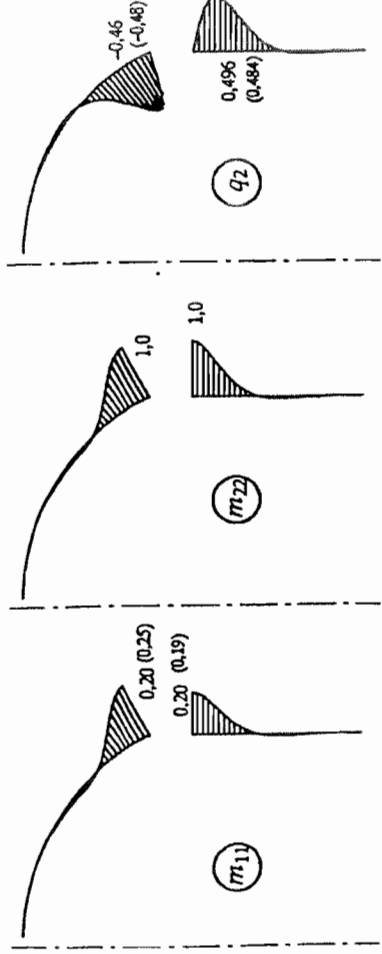
Radialverschiebung ΔR

Verdrehung χ



Normalkraft n_{11}

Normalkraft n_{22}

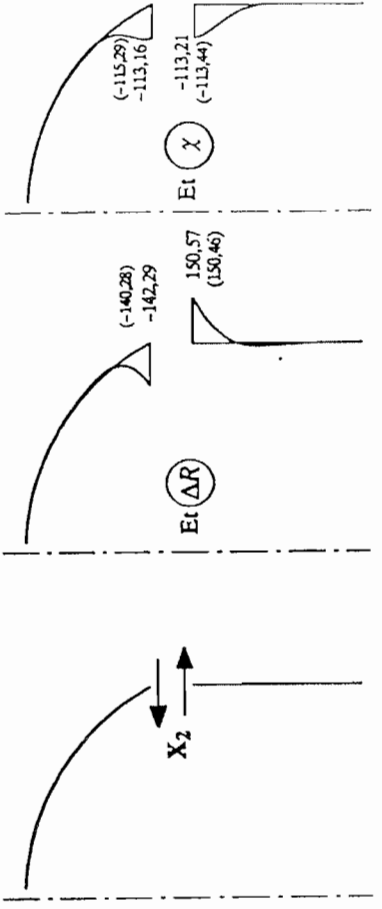


Moment m_{11}

Moment m_{22}

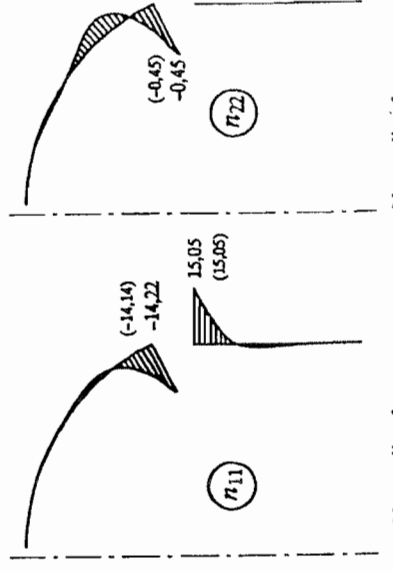
Querkraft q_2

Einheitsspannungszustand X_2



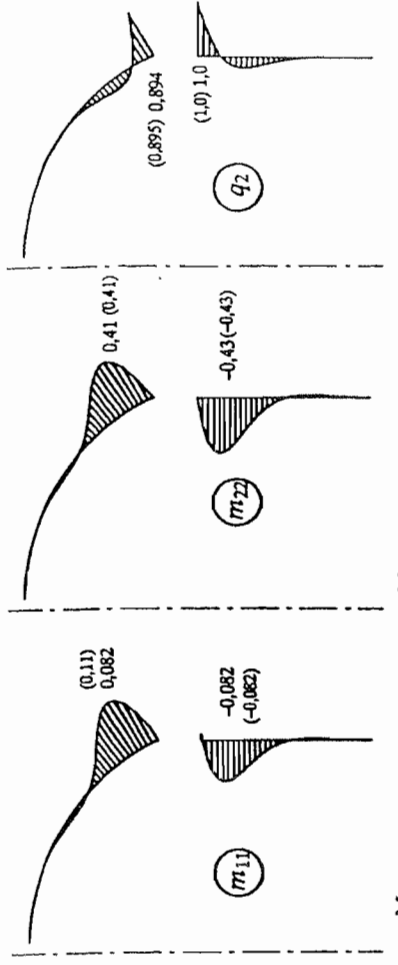
Radialverschiebung ΔR

Verdrehung χ



Normalkraft n_{11}

Normalkraft n_{22}



Moment m_{11}

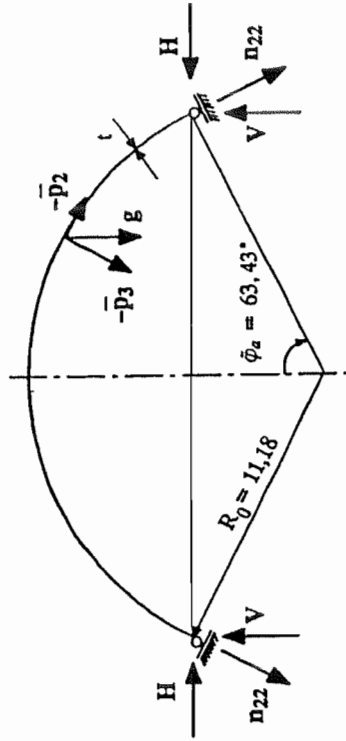
Moment m_{22}

Querkraft q_2

Lastspannungszustände LSZ:

5. Lastfall 1: Eigengewicht $g = 7,5 \text{ kN/m}^2$

Kugel: (Formeln siehe Anhang)



$$P_2 = -g \cdot \sin \varphi$$

$$P_3 = -g \cdot \cos \varphi$$

Die Kugelschale ist membrangelagert

⇒ Auflagerreaktionen $n_{22}, \Delta R, X$

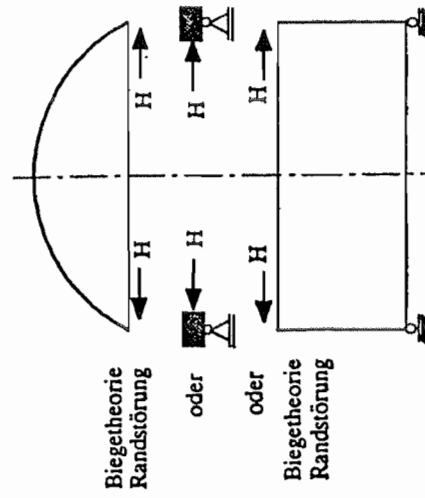
⇒ V-Komponente wird an den Zylinder weitergegeben

⇒ H-Komponente wird entweder

- von der Kugel selbst aufgenommen,

- an den Zylinder weitergegeben,

- von einem evtl. vorhandenen Ringbalken aufgenommen.



$$n_{22} = -\frac{g \cdot R_0}{1 + \cos \varphi} = -\frac{7,5 \cdot 11,18}{1 + \cos 63,43^\circ} = -57,94 \text{ kN/m}$$

$$n_{11} = R_0 P_3 - n_{22} = -\frac{R_0 \cdot g}{1 + \cos \varphi} \cdot (-1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi)$$

$$n_{11} = 11,18 \cdot (-7,5 \cdot \cos 63,43^\circ) - (-57,94) = -37,50 + 57,94 = 20,43 \text{ kN/m} \quad (\text{Zug})$$

$$H = -n_{22} \cdot \cos \varphi = 25,92 \text{ kN/m}$$

$$V = -n_{22} \cdot \sin \varphi = 51,82 \text{ kN/m}$$

$$Et \Delta R = R \cdot (n_{11} - n_{22})$$

$$Et \Delta R = -Et \delta_{20}^H = 10,00 \cdot (20,43 - 0,2 \cdot (-57,94)) = 320,18$$

$$Et \chi = -Et \delta_{10}^H = R_0 g \sin \varphi (2 + \nu) = 11,18 \cdot 7,5 \cdot \sin 63,43^\circ \cdot 2,2 = 164,98$$

Biegestörung aus $H = 25,92 \text{ kN}$:

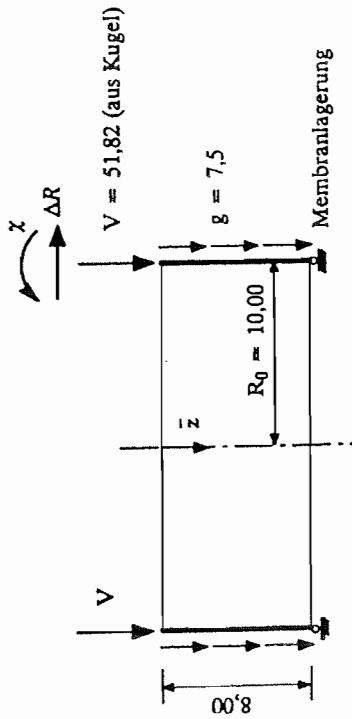


$$Et \chi = -Et \delta_{10}^H = 113,16 \cdot 25,92 = 2933,1 \quad (Et \delta_{10}^H = -164,98)$$

$$Et \Delta R = -Et \delta_{20}^H = 142,29 \cdot 25,92 = 3688,1 \quad (Et \delta_{20}^H = -320,18)$$

Eine Zuweisung der H-Kräfte zu einem Ringbalken würde die Relativverschiebungen und damit die Biegestörungen erheblich reduzieren.

Zylinder:



$$n_{22} = - \int g dz + C = -gz + C$$

$$n_{22}(z=0) = -51,82 \Rightarrow C = -51,82$$

$$n_{22} = -7,5z - 51,82$$

$$n_{11} = p_5 R_0 = 0$$

$$n_{22,2} = \frac{\partial n_{22}}{\partial z} = -\frac{\partial n_{22}}{\partial z} = 7,5$$

$$Et \chi = Et \delta_{10}^{II} = -R_0 (-\eta n_{22,2}) = -10 (-0,2 \cdot 7,5) = 15,0$$

$$Et \Delta R = Et \delta_{20}^{II} = -R_0 \eta n_{22} = -10 \cdot 0,2 \cdot (-51,82) = 103,64$$

Lastspalte Lastfall 1 (EG)

$$\delta_{10} = \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -164,98 - 2933,1 + 15,00 \\ -20,18 - 3688,1 + 103,64 \end{bmatrix} = Et \begin{bmatrix} -3082,92 \\ -3905,03 \end{bmatrix}$$

Membran Biegung Zyl.
Kugel

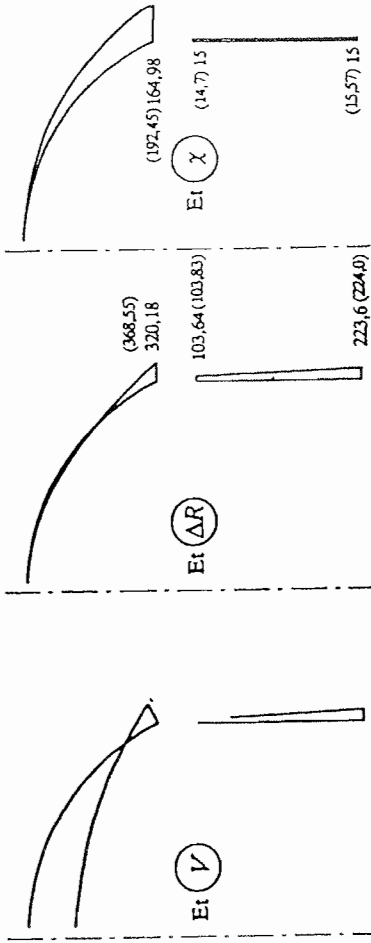
$$\delta_k \cdot X_k = -\delta_{10} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,81 \\ 13,33 \end{bmatrix}$$

Endgültige Schnittgrößen und Verformungen durch Überlagerung der X_k -fachen ESZ mit dem LSZ.

Schnittkräfte:

$$s(\xi) = s_k(\xi) \cdot X_k + s_0(\xi)$$

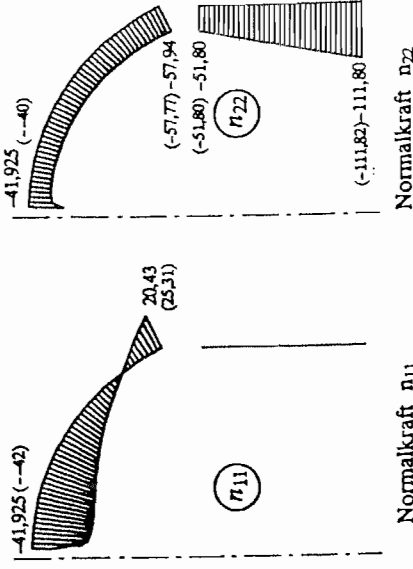
Lastspannungszustand Eigengewicht (Membrananteile)



Verschiebung V

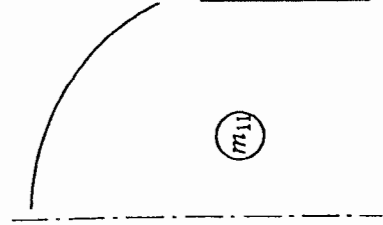
Radialverschiebung ΔR

Verdrehung χ



Normalkraft n_{11}

Normalkraft n_{22}

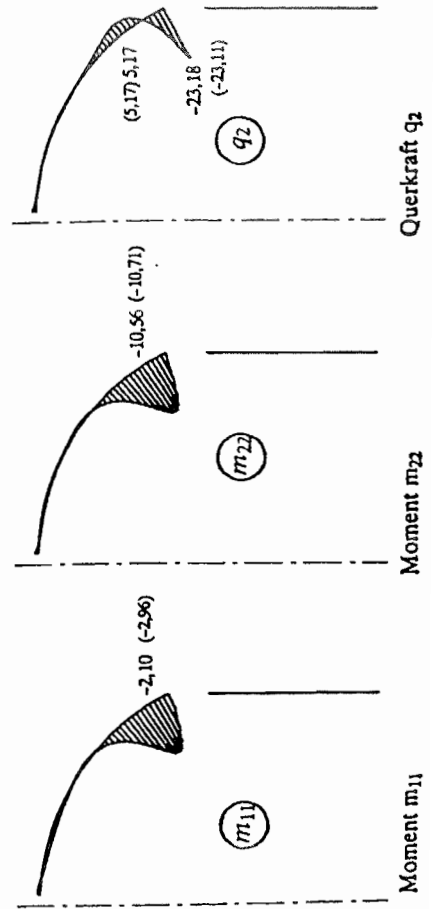
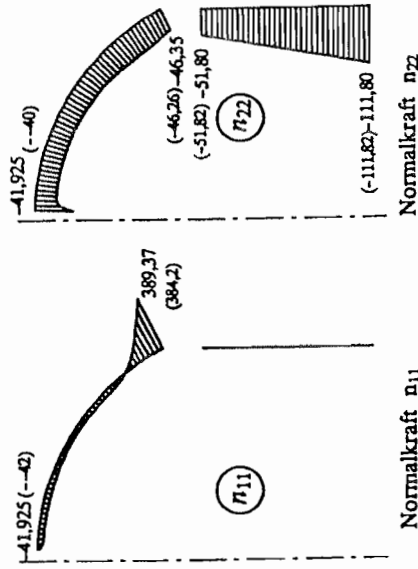
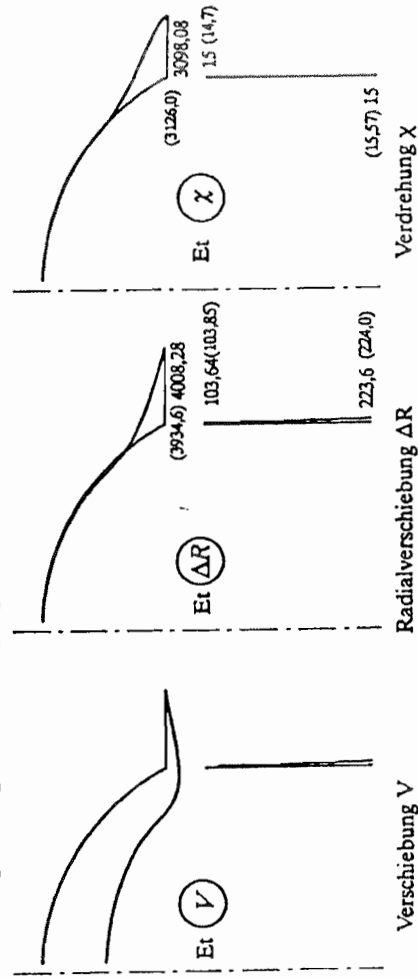


Moment m_{11}

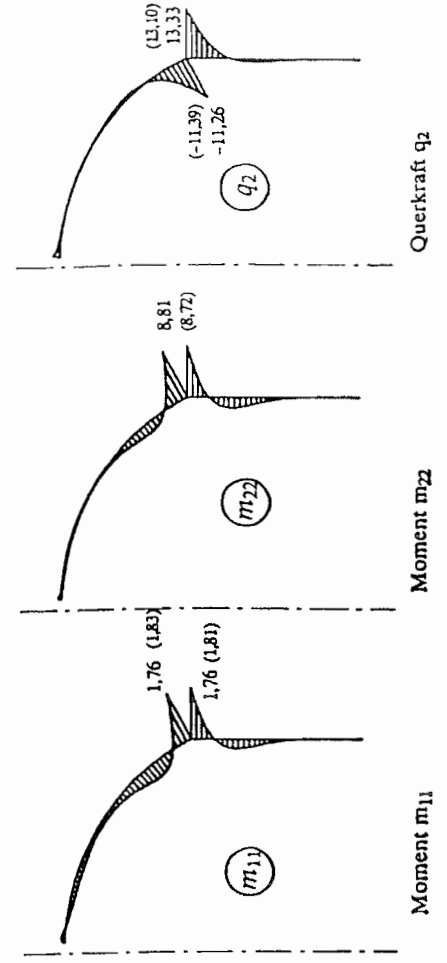
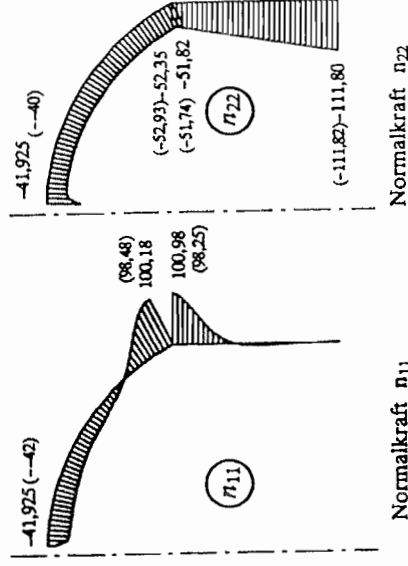
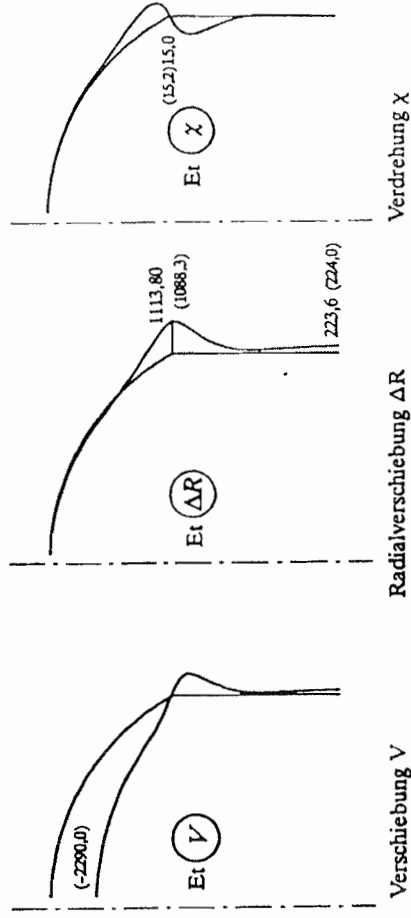
Moment m_{22}

Querkraft q_2

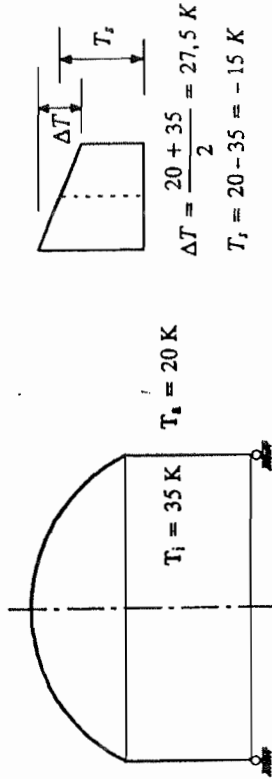
Lastspannungszustand Eigengewicht



Lastfall Eigengewicht

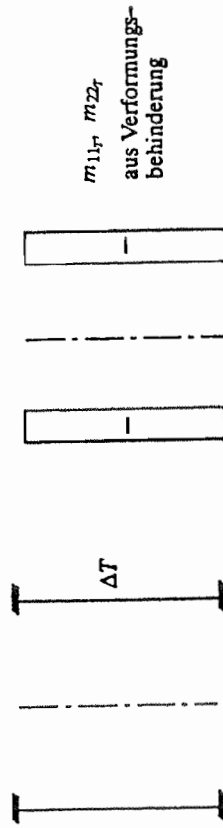


6. Lastfall 2: Temperatur

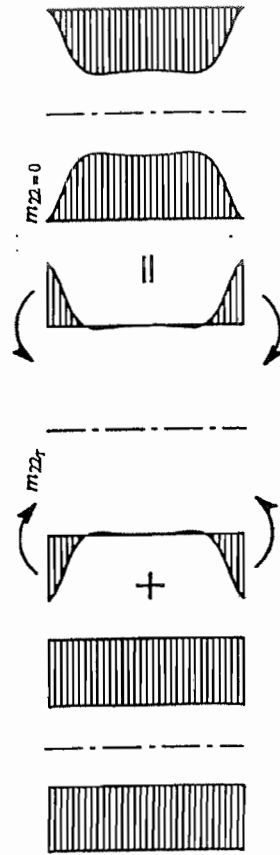


Vorüberlegungen zu ΔT (Temperatur-Gradient) bei der Ermittlung des Membranzustandes der Schale:

z.B. Zylinder



Membranlagerung: $m_{\phi}, q_a = 0$ an den Auflagern \Rightarrow Randmomente ansetzen, die die Momente aus Verformungsbehinderung aufheben.



Momentenverlauf der membrangelagerten Schale infolge ΔT

ΔT ruft auch in membrangelagerten Schalen Biegespannungen hervor;

Ursache: Dehnungsbehinderung infolge der Krümmung der Schalenmittelfläche.

Größe des Temperaturmomentes bei behinderter Krümmung:

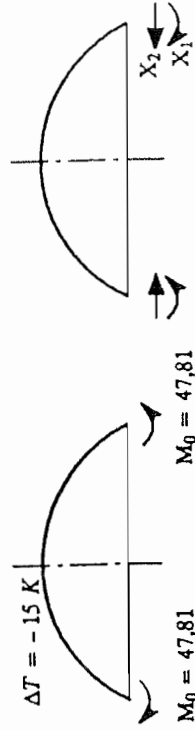
$$\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-\nu^2)B} \begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{22} \end{bmatrix} + \alpha_T \frac{\Delta T}{r} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gesamtkrümmung ist behindert!

$$m_{11,r} = m_{22,r} = -B(1 + \nu)\alpha_T \frac{\Delta T}{r}$$

$$\Delta T = -15 \text{ K} \quad m_{22,r} = -\frac{EI}{128} \cdot (1 + 0,2) \cdot 10^{-5} \frac{-15}{0,3} = 47,81 \text{ kNm/m}$$

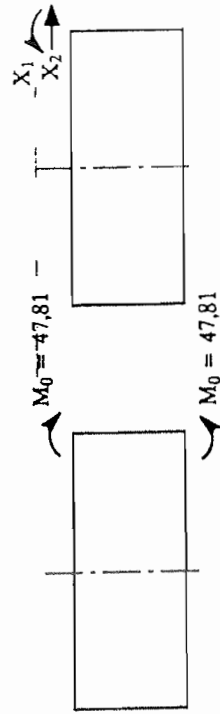
Kugel:



$$\chi = -\delta_{10} = -\frac{ML}{B} D_{\xi} = -\frac{47,81 \cdot 1,406}{EI} \cdot 128 = 8604,27/EI$$

$$\Delta R = -\delta_{20} = -\frac{ML^2}{B} \sin^2 \phi C_{\xi} = -\frac{47,81 \cdot 1,406^2}{EI} \cdot 128 \cdot \sin^2 63,43^\circ = 5409,98/EI$$

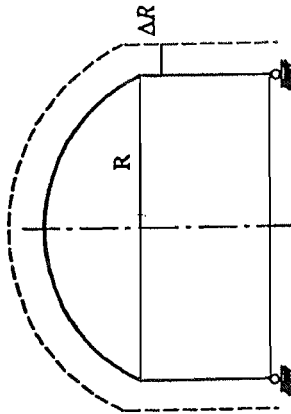
Zylinder:



$$\chi = \delta_{10} = \frac{ML}{B} D_{\xi} = \frac{47,81 \cdot 1,33}{EI} \cdot 128 = -8139,17/EI$$

$$\Delta R = \delta_{20} = \frac{ML^2}{B} C_{\xi} = \frac{47,81 \cdot 1,33^2}{EI} \cdot 128 = 5412,55/EI$$

Gleichmäßige Erwärmung der Schale T_s



ΔR von Kugel und Zylinder sind gleich \Rightarrow keine Biegestörungen $\delta_{\Delta R} = 0$
 Bei Vollinspannung treten am Auflager Randstörungen auf.

$n_{\phi\phi} = m_{\phi\phi} = 0$

$a_{11} = a_{22} = a_T \cdot T_s$

$\Delta R = a_{11} \cdot R = a_T \cdot T_s \cdot R = 0,00275$ siehe auch Ringbalken

$EI \Delta R = 28050$

$\chi = 0$

nur gleichmäßige Dehnung der Mittelfläche

Lastspalte Lastfall 1 (EG)

$$\delta_n = \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8604,27 & -8139,17 \\ -5409,98 & -5412,55 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} -16743,4 & \dots \\ \dots & 2,57 \end{bmatrix} \dots$$

Kugel Zyl.

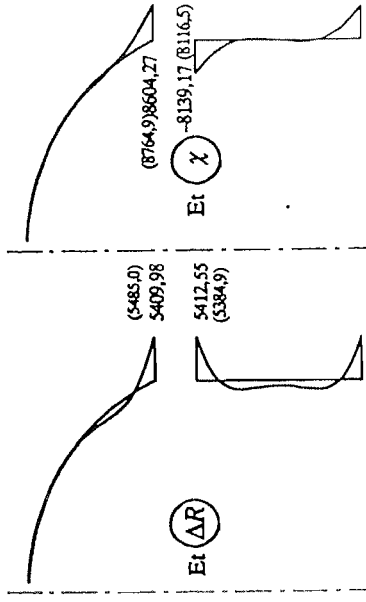
$$\delta_k \cdot X_k = -\delta_n \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47,8097 \\ -0,00006 \end{bmatrix}$$

Endgültige Schnittgrößen und Verformungen durch Überlagerung der X_k -fachen ESZ mit dem LSZ.

Schnittkräfte:

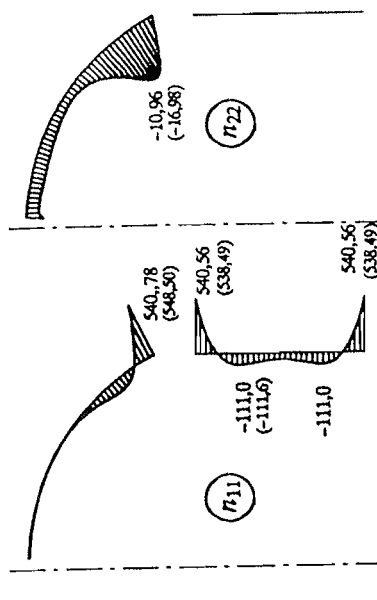
$$s(\xi) = s_k(\xi) \cdot X_k + s_0(\xi)$$

Lastspannungszustand ΔT



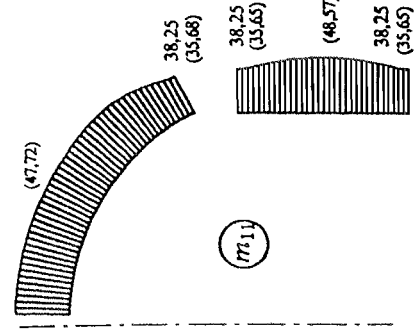
Radialverschiebung ΔR

Verdrehung χ



Normalkraft n_{11}

Normalkraft n_{22}

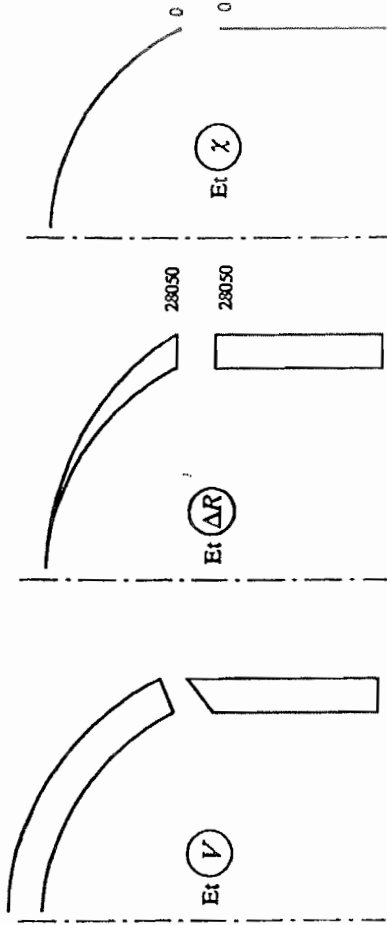


Moment m_{11}

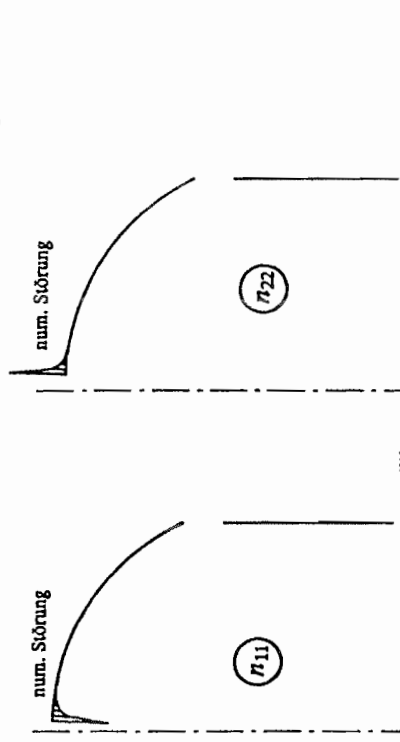
Moment m_{22}

Querkraft q_2

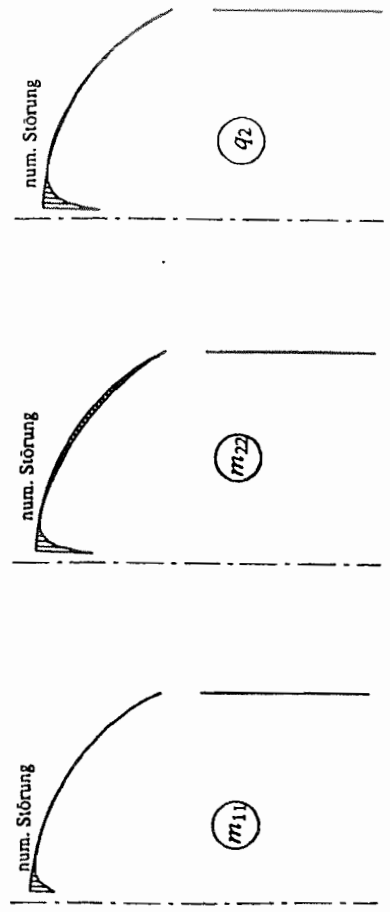
Lastspannungszustand T_0



Verschiebung V
Radialverschiebung ΔR
Verdrehung X

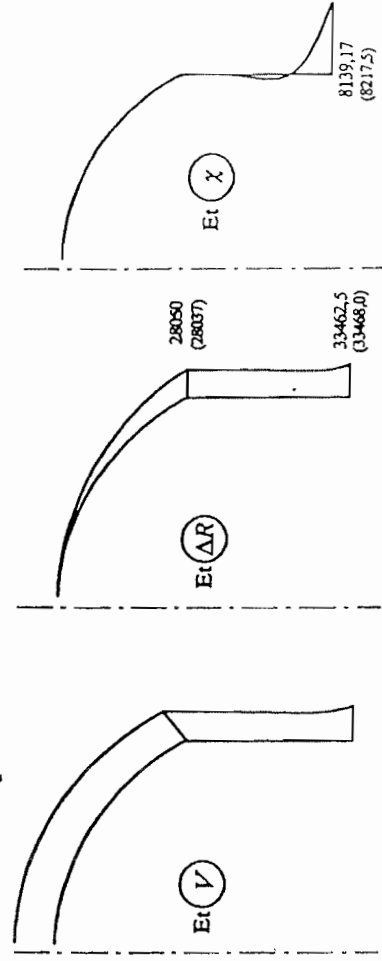


Normalkraft n_{11}
Normalkraft n_{22}
Querkraft q_2

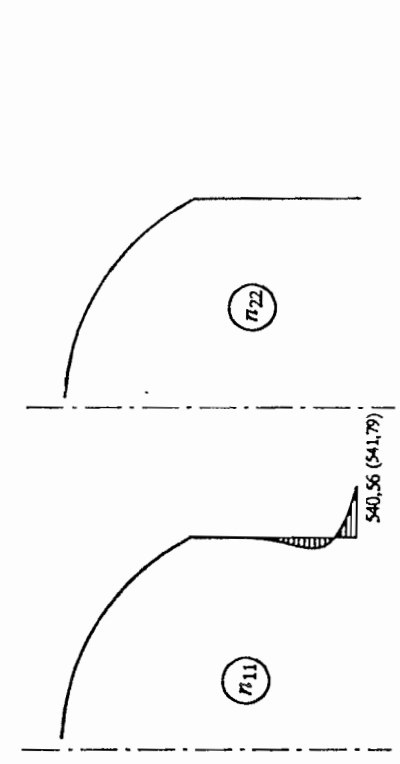


Moment m_{11}
Moment m_{22}
Querkraft q_2

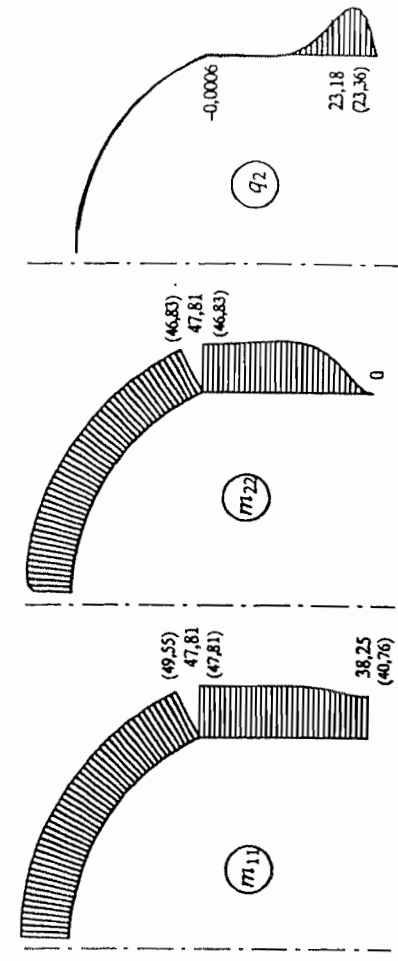
Lastfall Temperatur



Verschiebung V
Radialverschiebung ΔR
Verdrehung X



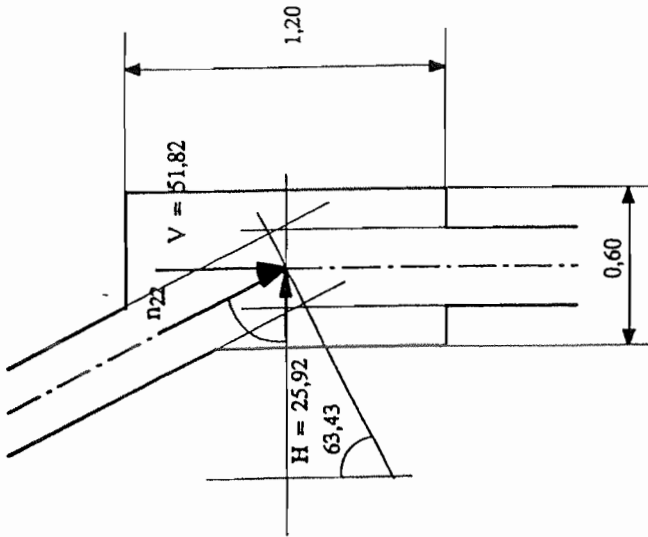
Normalkraft n_{11}
Normalkraft n_{22}
Querkraft q_2



Moment m_{11}
Moment m_{22}
Querkraft q_2

7. Modifikation des Systems

a) Ringbalken



Einfluß auf die Berechnung:

Lastfall 1: Eigengewicht

ESZ: Kugel und Zylinder wie vorher, zusätzlich δ_x -Ring

LSZ: LF1 (EG) H-Kraft aus der Kugel, Eigengewicht des Ringes erhöht die Randlast V auf den Zylinder.

Lastfall 2: Temperatur

$T_{4, Ring} \approx T_{4, Schale}$

ΔT in Ringrichtung \Rightarrow nur Zwangsmomente, keine Verformungen

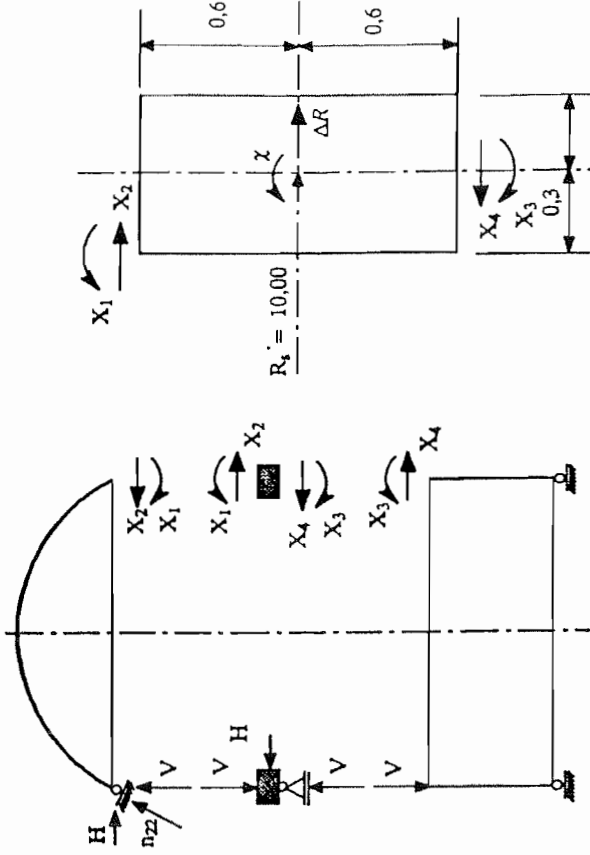
ΔT in Meridianrichtung \Rightarrow Querschnittsverdrehung (evtl. vernachlässigen)

$$\Delta v(z) = \Delta v(\varphi) + \chi \cdot z$$

$$\Delta v(\varphi) = \frac{N \cdot r_t}{EA} + \alpha_T \cdot T_t \cdot r_t = \frac{P_y \cdot r_t^2}{EA} + \alpha_T \cdot T_t \cdot r_t$$

$$\chi = -\varphi_z = \frac{\partial \Delta v}{\partial z} = \frac{M_y \cdot r_t}{EI_y} + \frac{\alpha_T \cdot \Delta T_t \cdot r_t}{h} = \frac{m_t \cdot r_t^2}{EI_y} + \frac{\alpha_T \cdot \Delta T_t \cdot r_t}{h}$$

Einheitsspannungszustände



$$\frac{EI}{EA} = \frac{0,3}{0,6 \cdot 1,2} = 0,4166$$

$$\frac{EI}{EI_y} = \frac{0,3 \cdot 12}{0,6 \cdot 1,2^3} = 3,4722$$

$$X_1 \phi_{11} = \chi = X_1 \cdot 10^2 \cdot \frac{EI}{EI_y} \cdot \frac{X_1}{EI} = \frac{X_1}{EI} \cdot 347,22$$

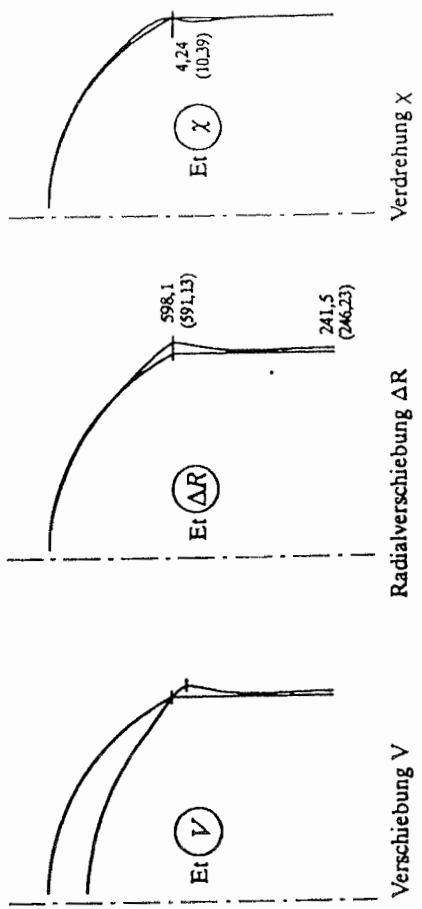
$$X_1 \phi_{21} = \chi \cdot z_k = -\frac{X_1 \cdot 10^2 \cdot EI}{EI_y} \cdot \frac{EI}{EI} \cdot 0,60 = -\frac{X_1}{EI} \cdot 208,33$$

$$X_1 \phi_{31} = -\chi = -\frac{X_1 \cdot 10^2 \cdot EI}{EI_y} \cdot \frac{EI}{EI} = -\frac{X_1}{EI} \cdot 347,22$$

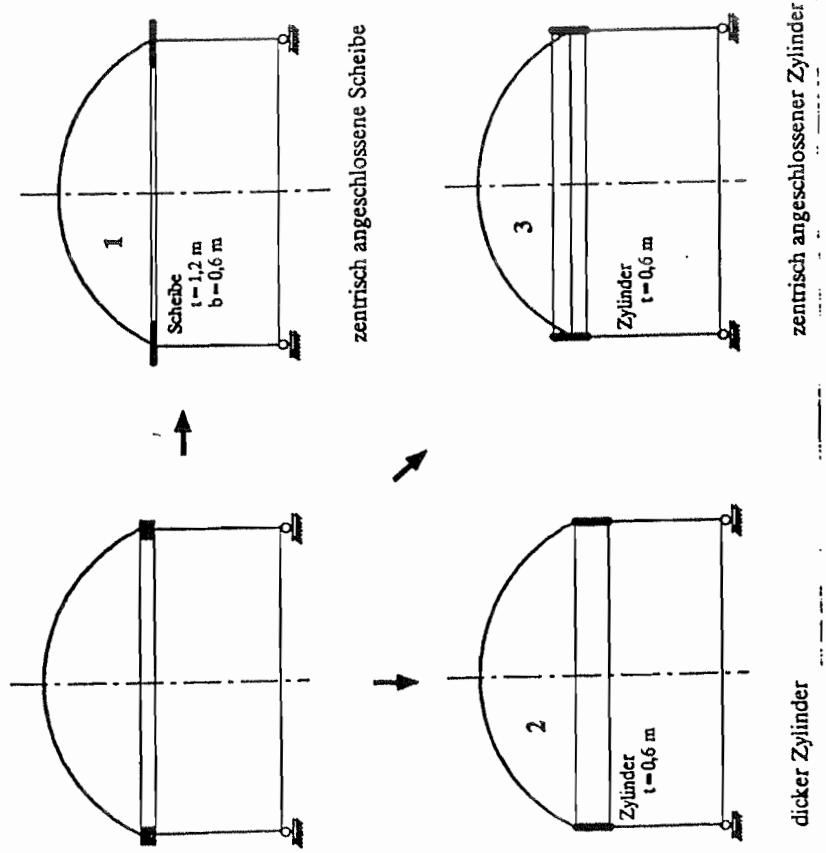
$$X_1 \phi_{41} = -\chi \cdot z_k = -\frac{X_1 \cdot 10^2 \cdot EI}{EI_y} \cdot \frac{EI}{EI} \cdot 0,60 = -\frac{X_1}{EI} \cdot 208,33$$

$$X_2 \phi_{12} = -\chi \cdot z_k = -\frac{X_2 \cdot 10^2 \cdot EI}{EI_y} \cdot \frac{EI}{EI} \cdot 0,60 = -\frac{X_2}{EI} \cdot 208,33$$

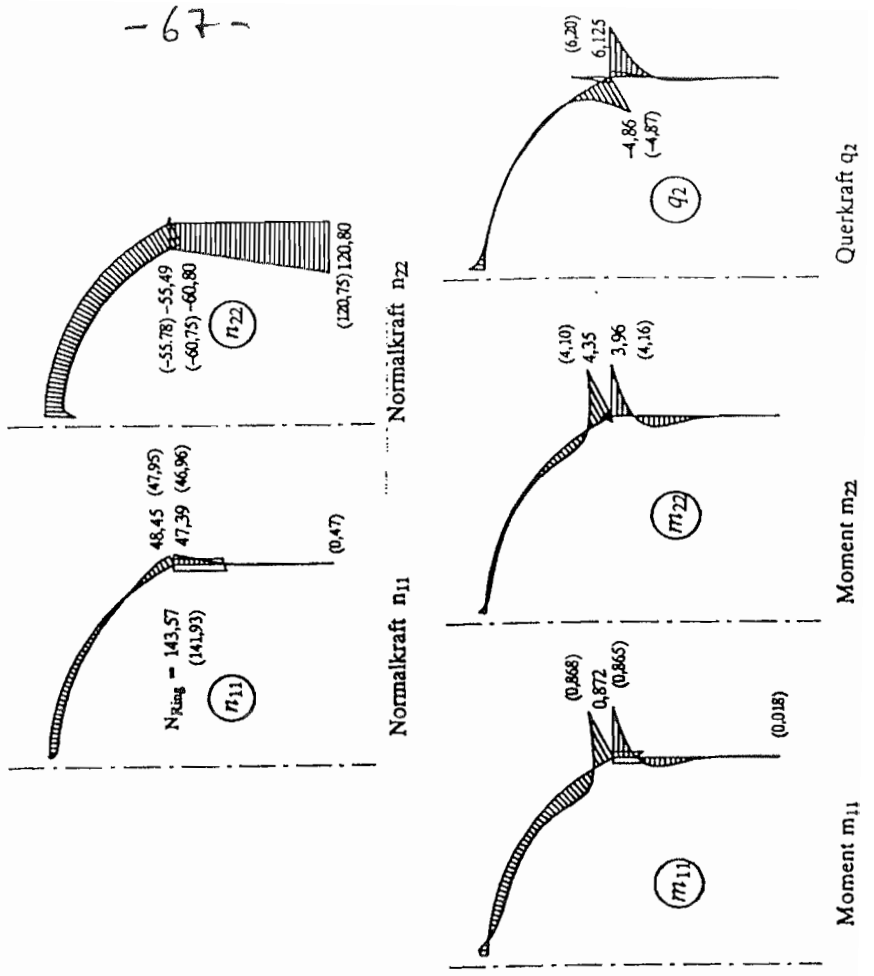
Lastfall Eigengewicht + Ringbalken als Scheibe



Möglichkeiten der Berechnung des Kreisringbalkens mit CAL-88



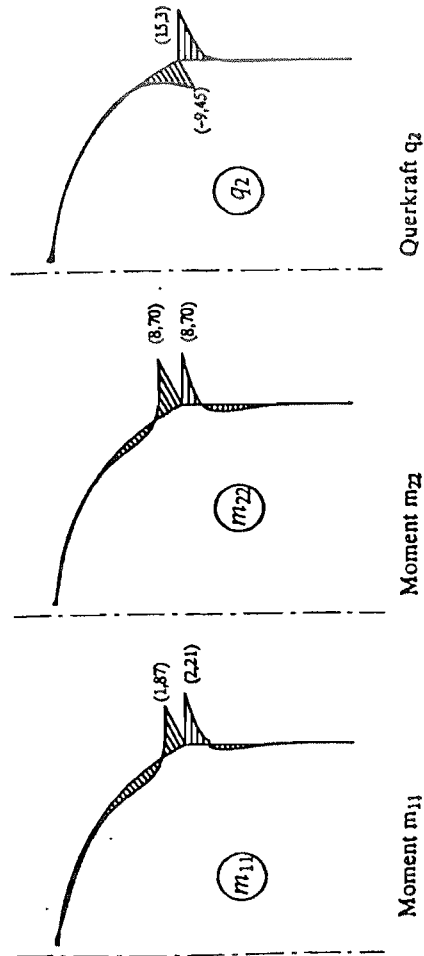
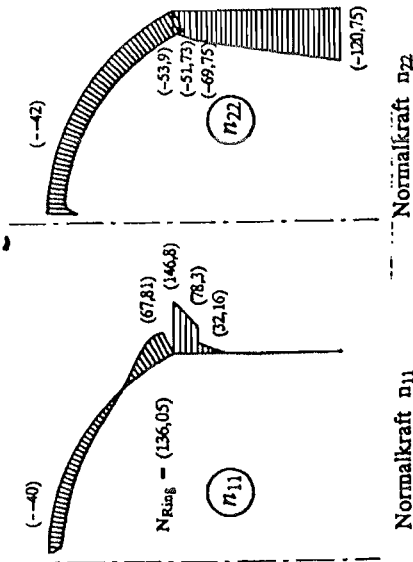
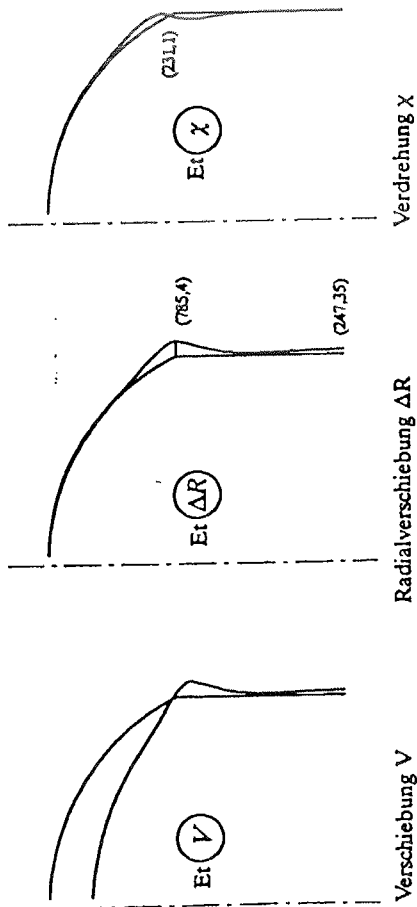
- 67 -



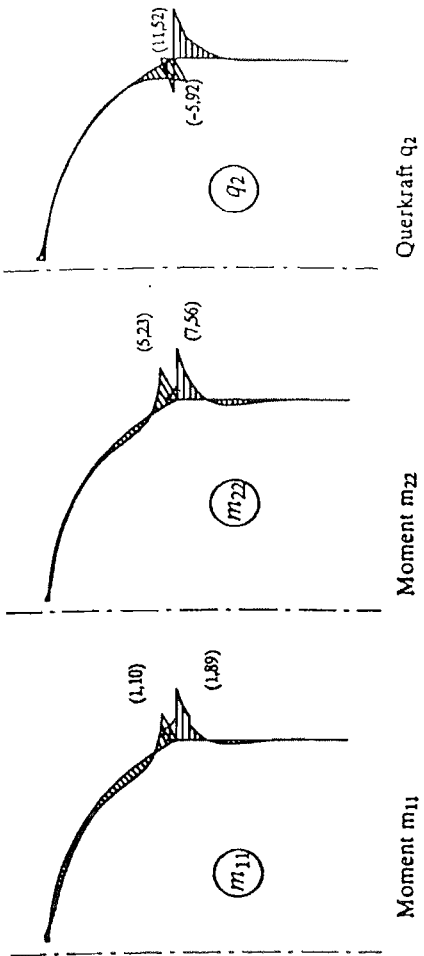
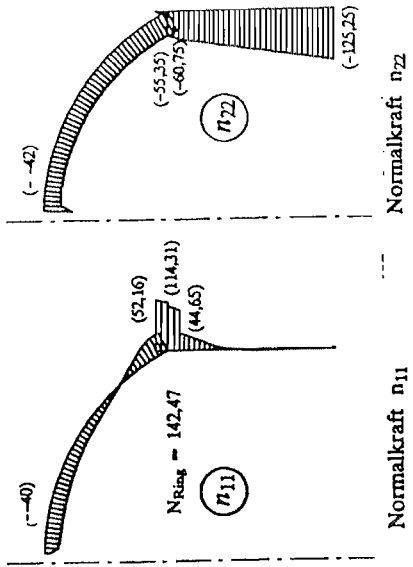
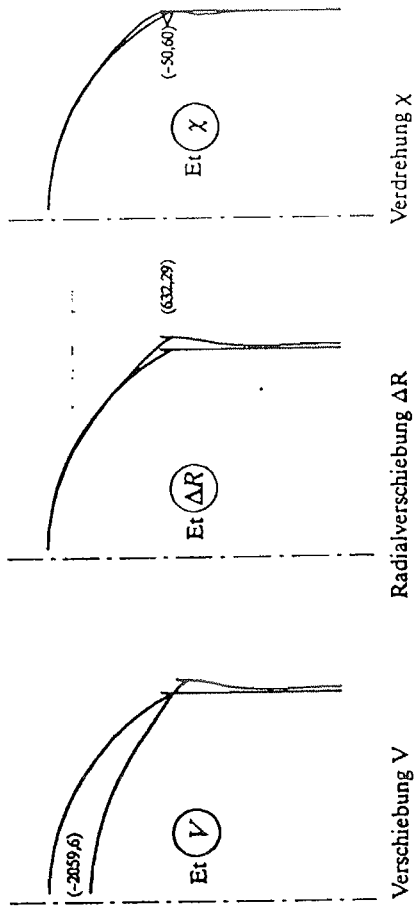
Moment m_{11}

Moment m_{22}

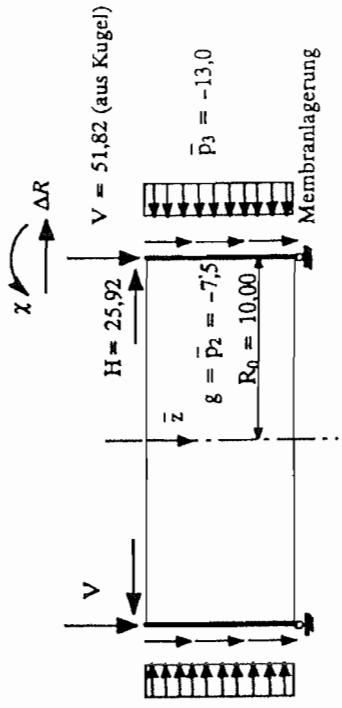
Lastfall Eigengewicht + Ringbalken als Schale



Lastfall Eigengewicht + Ringbalken als Schale (zentrisch)



δ_k -Zahlen für kurzen Zylinder
 Lastspannungszustand Lastfall Eigengewicht:



Membrantheorie Eigengewicht und Vorspannung

$$n_{zz} = - \int g dz + C = - 7,5 \cdot z + C$$

$$n_{zz}(0) = - 51,82$$

$$n_{zz}(z) = - 7,5z - 51,82$$

$$n_{11}(z) = - 13,0 \cdot 10,0 = - 130,0$$

$$Ei\Delta R = R(n_{11} - \nu n_{zz})$$

$$Ei\Delta R = 10,0 \cdot (- 130,0 - 0,2 \cdot (- 7,5z - 51,82))$$

$$Ei\Delta R = - 1196,36 + 15,0z$$

$$Ei\chi = \nu R n_{zz,2} = 15,0$$

$$Ei\delta'_{20} = - 1196,36$$

$$Ei\delta'_{40} = + 1166,36$$

$$Ei\delta'_{10} = + 15,0$$

$$Ei\delta'_{30} = - 15,0$$

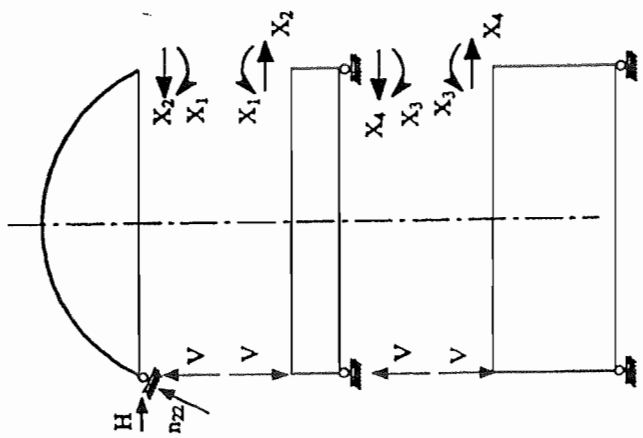
Zusätzlicher Lastanteil des langen Zylinders $Ei\delta''_{40} = - 133,64$

Biegestörung aus H (Zahlentafeln kurzer gebetteter Träger)

$$\lambda = \frac{l}{L} = 1,504$$

$$\xi = \frac{x}{l} : \xi_0 = 0 ; \xi_1 = 1,504$$

b) Ringvorspannung im oberen Viertel des Zylinders



Kugel: δ_k -Zahlen wie vorher

Zylinder: $L = \frac{\sqrt{R} l}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} = 1,33$

kurzer Zylinder: $l = 2,0$ m

$$l/L = \frac{2,0}{1,33} = 1,504 < 4$$

→ gegenseitige Beeinflussung der Ränder

langer Zylinder: $l = 6,0$ m

$$l/L = \frac{6,0}{1,33} = 4,5 < 4$$

→ δ_k -Zahlen wie vorher

Dimensionierung der Vorspannung zur Aufnahme der H-Kraft aus der Kugel

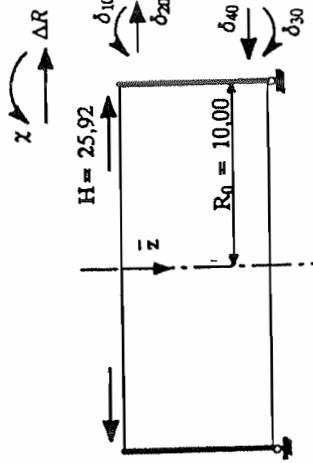
$$H = 25,92 \text{ kN/m}$$

$$\text{Kesselformel: } N_{11} = \bar{p}_3 \cdot R = N_{Vexp.}$$

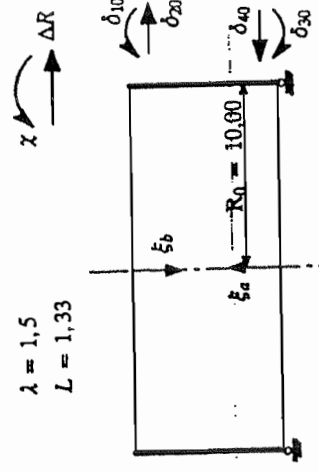
Verteilung der H-Kraft auf die 2,0 m Länge

$$\Rightarrow \text{Ersatzlast } p_{3y} = - \frac{25,92}{2} = - 13,0 \text{ kN/m}^2$$

entspricht einer Vorspannkraft von $N = 13,00 \cdot 10,00 = 130,00 \text{ kN/m}$



$$\begin{aligned} \delta_{10}'' &= -X(\xi_b = \lambda) = -\frac{H L^2}{2B} \cdot [PHI - PR] = -\frac{25,92 \cdot 1,33^2}{2Ei} \cdot 128 \cdot 1,5623 = -\frac{1}{Ei} \cdot 4583,50 \\ \delta_{20}'' &= \Delta R(\xi_b = 0) = \frac{H L^3}{2B} \cdot [W - PR] = \frac{25,92 \cdot 1,33^3}{2Ei} \cdot 128 \cdot 1,3955 = \frac{1}{Ei} \cdot 5446,3 \\ \delta_{30}'' &= X(\xi_b = \lambda) = \frac{H L^2}{2B} \cdot [PHI - PR] = \frac{25,92 \cdot 1,33^2}{2Ei} \cdot 128 \cdot 1,2004 = \frac{1}{Ei} \cdot 3522,4 \\ \delta_{40}'' &= -\Delta R(\xi_b = \lambda) = -\frac{H L^3}{2B} \cdot [W - PR] = -\frac{25,92 \cdot 1,33^3}{2Ei} \cdot 128 \cdot (-0,6205) = \frac{1}{Ei} \cdot 2421,6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} &= X(\xi_b = 0) = \frac{X_1 L}{2B} \cdot [PHI - MR] = \frac{X_1 \cdot 1,33}{2Ei} \cdot 128 \cdot 2,8707 = \frac{X_1}{Ei} \cdot 244,35 \\ X_1 \delta_{21} &= -\Delta R(\xi_b = 0) = -\frac{X_1 L^2}{2B} \cdot [W - MR] = -\frac{X_1 \cdot 1,33^2}{2Ei} \cdot 128 \cdot 1,5623 = -\frac{X_1}{Ei} \cdot 176,86 \\ X_1 \delta_{31} &= -X(\xi_b = \lambda) = -\frac{X_1 L}{2B} \cdot [PHI - MR] = -\frac{X_1 \cdot 1,33}{2Ei} \cdot 128 \cdot 1,4113 = -\frac{X_1}{Ei} \cdot 120,13 \\ X_1 \delta_{41} &= \Delta R(\xi_b = \lambda) = \frac{X_1 L^2}{2B} \cdot [W - MR] = \frac{X_1 \cdot 1,33^2}{2Ei} \cdot 128 \cdot (-1,2004) = -\frac{X_1}{Ei} \cdot 135,89 \\ X_2 \delta_{22} &= \Delta R(\xi_b = 0) = \frac{X_2 L^3}{2B} \cdot [W - PR] = \frac{X_2 \cdot 1,33^3}{2Ei} \cdot 128 \cdot 1,3955 = \frac{X_2}{Ei} \cdot 210,12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 \delta_{32} &= -X(\xi_b = \lambda) = \frac{X_2 L^2}{2B} \cdot [PHI - PR] = \frac{X_2 \cdot 1,33^2}{2Ei} \cdot 128 \cdot 1,2004 = \frac{X_2}{Ei} \cdot 135,89 \\ X_2 \delta_{42} &= -\Delta R(\xi_b = \lambda) = -\frac{X_2 L^3}{2B} \cdot [W - PR] = -\frac{X_2 \cdot 1,33^3}{2Ei} \cdot 128 \cdot (-0,6205) = \frac{X_2}{Ei} \cdot 93,43 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{33} &= X(\xi_a = 0) = \delta_{11} \\ \delta_{43} &= \Delta R(\xi_a = 0) = -\delta_{21} \\ \delta_{44} &= \Delta R(\xi_a = 0) = \delta_{22} \end{aligned}$$

Verträglichkeitsbedingung Lastfall 1 (EG)

Es kann dieselbe Ausgangsmatrix, wie bei dem System mit Ringbalken verwendet werden! Wegen der Abhingverhaltens der Biegestörung spielt es keine Rolle, daß der untere Zylinder jetzt kürzer ist.

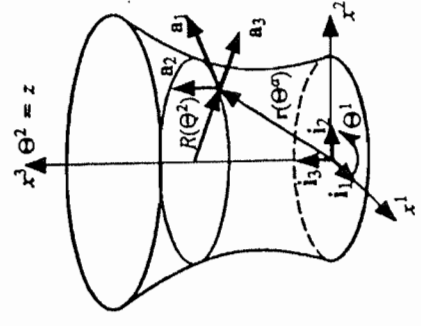
179,97	113,16				164,98 - 15,07
+ 244,35	- 176,86	- 120,13	- 135,89		+ 4583,5
113,16	142,29			$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$	320,18 + 1196,36
- 176,86	+ 210,12	135,89	93,43		- 5446,3
- 120,13	135,89	+ 244,35	+ 176,86		- 15,0 + 15,0
- 135,89	93,43	+ 176,86	+ 210,12		- 3522,4
					- 133,64 - 1166,36
					- 2421,6

$$\delta_{ik} \cdot X_k = -\delta_{i0} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,5199 \\ -7,2292 \\ -3,1720 \\ -5,0525 \end{bmatrix}$$

Endgültige Schnittgrößen und Verformungen durch Überlagerung der X_i -fachen ESZ mit dem LSZ.

Anhang: Membranschnittkräfte von Rotationschalen mit rotationssymmetrischer Belastung.

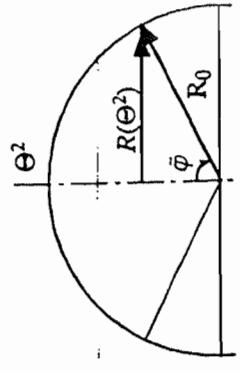
1. Möglichkeit:



$$n_z(z) = -\frac{R_1}{R^2} [\bar{p}_2 - R_2 \bar{p}_3] R dz + C$$

$$n_{11}(z) = -\frac{R_1}{R_2} n_{zz} + R_1 \bar{p}_3$$

Kugel:



Koordinatentransformation:

$$z = R_0 \cos \varphi$$

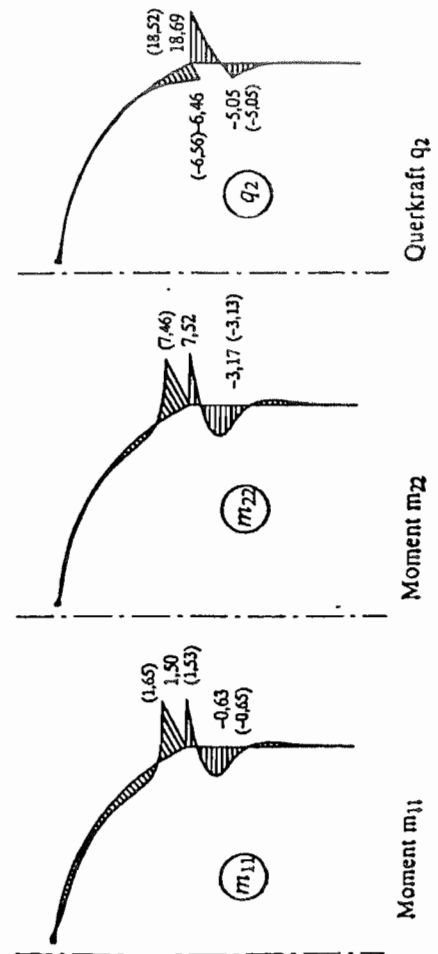
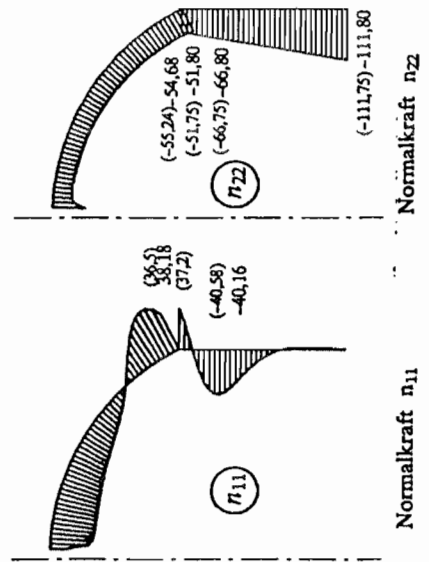
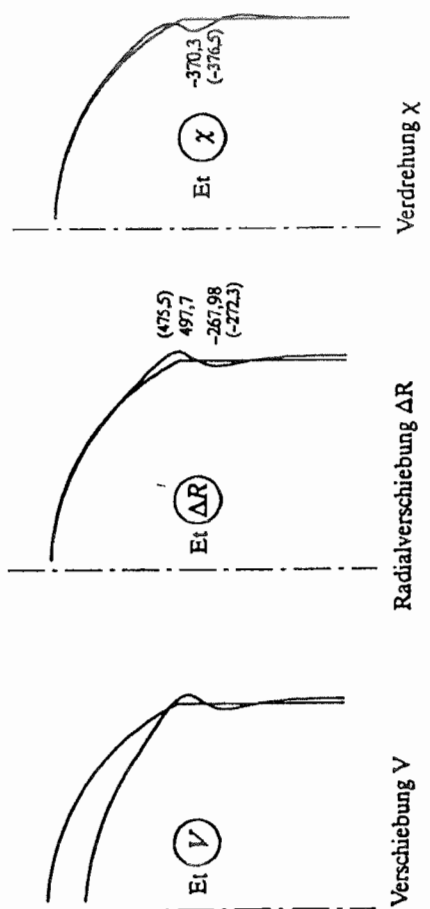
$$R(\varphi) = R_0 \sin \varphi$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = -R_0 \sin \varphi \Rightarrow dz = -R_0 \sin \varphi d\varphi$$

$$R_1 = R_2 = R_0$$

$$R_2 = \frac{dR}{dz} = \frac{dR}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dz} = R_0 \cdot \frac{-1}{R_0 \sin \varphi} = -\frac{1}{\sin \varphi} = -\cot \varphi$$

Lastfall Eigengewicht + Vorspannung



$$\begin{aligned}
 n_{22}(\varphi) &= -\frac{1}{R_0 \sin^2 \varphi} \left[\left[\begin{array}{l} p_2 + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} p_3 \\ p_2 + p_3 \end{array} \right] R_0 \sin \varphi (-R_0 \cos \varphi) d\varphi + C \right. \\
 &= \frac{R_0}{\sin^2 \varphi} [p_2 \sin \varphi + p_3 \cos \varphi] \sin \varphi d\varphi + C \\
 &= \frac{R_0}{\sin^2 \varphi} \int [(-g \sin \varphi) \sin \varphi + (-g \cos \varphi) \cos \varphi] \sin \varphi d\varphi + C \\
 &= -\frac{R_0 g}{\sin^2 \varphi} \int [\sin^2 \varphi + \sin \varphi \cos^2 \varphi] d\varphi + C \\
 &= -\frac{R_0 g}{\sin^2 \varphi} \int [\sin \varphi] d\varphi + C \\
 &= -\frac{R_0 g}{\sin^2 \varphi} [-\cos \varphi] + C \\
 &= -\frac{R_0 g}{\sin^2 \varphi} [-\cos \varphi + 1] + C \\
 &= -\frac{R_0 g}{\sin^2 \varphi} [1 - \cos \varphi] + C \\
 &= -\frac{R_0 g}{(1 + \cos \varphi)(1 - \cos \varphi)} [1 - \cos \varphi] + C \\
 &= -\frac{R_0 g}{(1 + \cos \varphi)} + C
 \end{aligned}$$

Randbedingungen: für $\varphi = 90^\circ \Rightarrow n_{22} = -R_0 g \Rightarrow C = 0$

$$n_{22} = -\frac{R_0 g}{1 + \cos \varphi}$$

$$n_{11} = R_0 p_3 - n_{22} = -\frac{R_0 g}{1 + \cos \varphi} \cdot (-1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi)$$

$$n_{11} = -\frac{R_0 g}{1 + \cos \varphi} \cdot (-1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi)$$

2. Möglichkeit:

$$n_{22} = -\frac{R_1}{R^2} \int [p_1 A B] \varphi^2 + C$$

Kugel:

$$R = R_0 \sin \varphi$$

$$R_1 = R_0$$

$$A = R_0 \sin \varphi$$

$$B = R_0$$

Koordinatentransformation:

$$\sin \varphi = \sin \bar{\varphi} ; \cos \varphi = \cos \bar{\varphi} ; d\varphi = -d\bar{\varphi}$$

$$\bar{p}_1 = p_2 \sin \bar{\varphi} + p_3 \cos \bar{\varphi}$$

$$\bar{p}_2 = -g \sin \bar{\varphi}$$

$$\bar{p}_3 = -g \cos \bar{\varphi}$$

$$\bar{p}_z = -g(\sin^2 \bar{\varphi} + \cos^2 \bar{\varphi}) = -g$$

$$n_{22} = \frac{R_0}{R_0^2 \sin^2 \bar{\varphi}} \int [-g R_0^2 \sin \bar{\varphi}] d\bar{\varphi} + C$$

$$= -\frac{R_0}{\sin^2 \bar{\varphi}} \int [g \sin \bar{\varphi}] d\bar{\varphi} + C$$

$$= -\frac{R_0 g}{\sin^2 \bar{\varphi}} [-\cos \bar{\varphi}] + C$$

$$= -\frac{R_0 g}{\sin^2 \bar{\varphi}} [1 - \cos \bar{\varphi}] + C$$

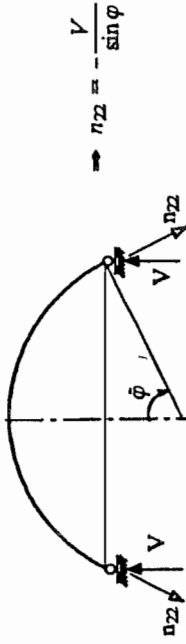
$$= -\frac{R_0 g}{(1 + \cos \bar{\varphi})(1 - \cos \bar{\varphi})} [1 - \cos \bar{\varphi}] + C$$

$$= -\frac{R_0 g}{(1 + \cos \bar{\varphi})} + C$$

Randbedingung: für $\bar{\varphi} = 90^\circ \Rightarrow n_{22} = -R_0 g \Rightarrow C = 0$

$$n_{22} = -\frac{R_0 g}{1 + \cos \bar{\varphi}}$$

oder anschaulich aus $\Sigma V_z = 0$ z.B.



$$\Rightarrow n_{zz} = -\frac{V}{\sin \varphi}$$

Oberfläche: $O = 2\pi R_0^2 (1 - \cos \varphi)$

Halbkugel: $O = 2\pi R_0^2$

Resultierende der Last:

$$P_z = g[2\pi R_0^2 (1 - \cos \varphi)]$$

Resultierende der Auflagerkräfte:

$$P_V = 2\pi R V = 2\pi R_0 \sin \varphi V$$

$$\Sigma V_z = 0$$

$$P_z = P_V \Rightarrow g[2\pi R_0^2 (1 - \cos \varphi)] = 2\pi R_0 \sin \varphi V$$

$$V = \frac{R_0 g (1 - \cos \varphi)}{\sin \varphi}$$

$$n_{zz} = -\frac{V}{\sin \varphi}$$

$$n_{zz} = -\frac{R_0 g (1 - \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi}$$

$$n_{zz} = -\frac{R_0 g (1 - \cos \varphi)}{(1 + \cos \varphi)(1 - \cos \varphi)}$$

$$n_{zz} = -\frac{R_0 g}{(1 + \cos \varphi)}$$

Verformungen:

$$Et \Delta R = R (n_{11} - \nu n_{22})$$

$$= R_0 \sin \varphi (n_{11} - \nu n_{22})$$

$$= R_0 \sin \varphi \left(\frac{-R_0 g}{1 + \cos \varphi} (-1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi - \nu) \right)$$

$$= \frac{R_0^2 g \sin \varphi}{1 + \cos \varphi} (\cos \varphi + \cos^2 \varphi - (1 + \nu))$$

$$Et \Delta R = -R_0^2 g \sin \varphi \left(\cos \varphi - \frac{1 + \nu}{1 + \cos \varphi} \right)$$

$$Et \chi = -R_{,2} (1 + \nu)(n_{11} - n_{22}) - R \frac{\partial}{\partial z} (n_{11} - \nu n_{22})$$

$$R_{,2} = \frac{dR}{dz} = \frac{d\varphi}{dz} = R_{, \varphi} \frac{d\varphi}{dz} = R_{, \varphi} \frac{-1}{R_0 \sin \varphi} = -\frac{R_0 \cos \varphi}{R_0 \sin \varphi} = -\cot \varphi$$

$$(n_{11} - \nu n_{22}) = R_0 g \sin \varphi - \nu n_{22} = -R_0 g \cos \varphi + (1 + \nu) \frac{R_0 g}{1 + \cos \varphi}$$

$$= R_0 g \left[-\cos \varphi + \frac{1 + \nu}{1 + \cos \varphi} \right]$$

$$(n_{11} - \nu n_{22})_{, \varphi} = R_0 g \left[\sin \varphi + \frac{(1 + \nu) \sin \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2} \right]$$

$$R(n_{11} - \nu n_{22})_{,2} = -R_0 g \sin \varphi \left[1 + \frac{(1 + \nu)}{(1 + \cos \varphi)^2} \right]$$

$$Et \chi = \cot \varphi (1 + \nu)(n_{11} - n_{22}) - \frac{R_1}{R_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (n_{11} - \nu n_{22})$$

$$n_{22} = -\frac{g \cdot R_0}{1 + \cos \varphi}$$

$$n_{11} = -\frac{R_0 \cdot g}{1 + \cos \varphi} \cdot (-1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi)$$

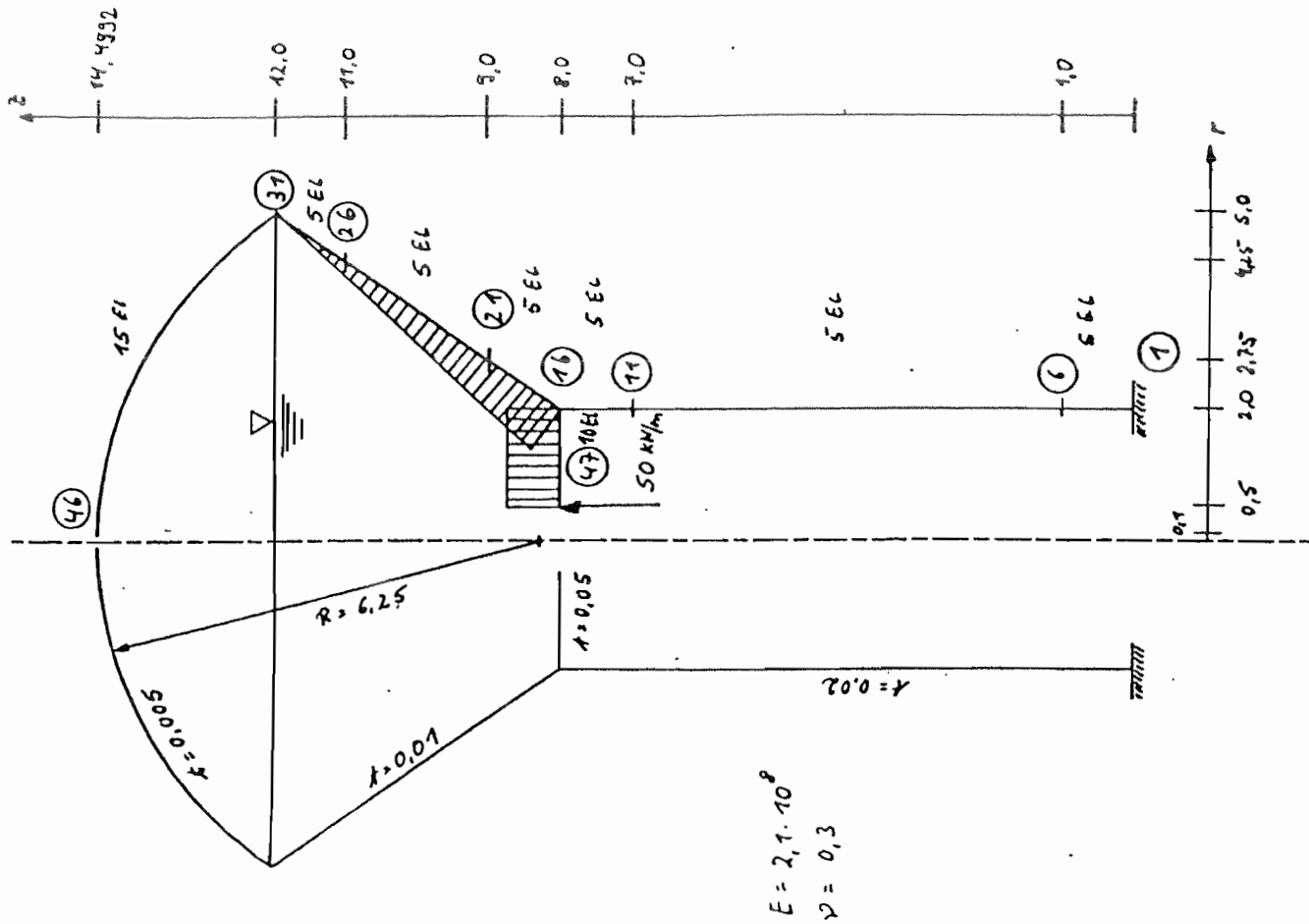
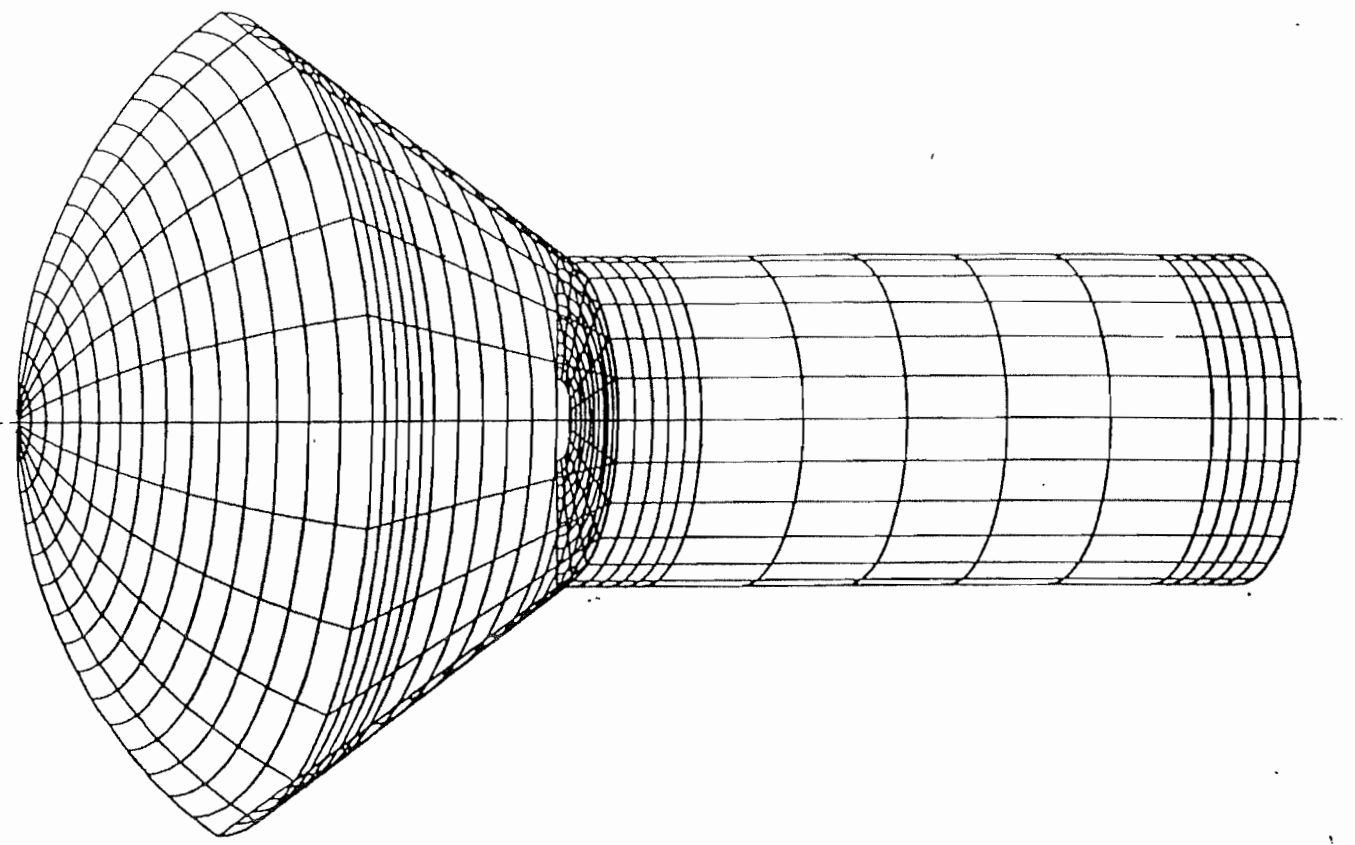
$$n_{11} - n_{22} = \frac{R_0 \cdot g}{1 + \cos \varphi} (2 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi)$$

$$= -R_0 \cdot g \left(-\frac{2}{1 + \cos \varphi} + \cos \varphi \right)$$

$$\begin{aligned}
 Et \chi &= -R_0 g \sin \bar{\varphi} \left[(1 + \nu) \frac{\cos \bar{\varphi}}{\sin^2 \bar{\varphi}} \left(-\frac{2}{1 + \cos \bar{\varphi}} + \cos \bar{\varphi} \right) - 1 - \frac{1 + \nu}{(1 + \cos \bar{\varphi})^2} \right] \\
 Et \chi &= -R_0 g \sin \bar{\varphi} \left[-1 + (1 + \nu) \left[\frac{\cos \bar{\varphi}}{\sin^2 \bar{\varphi}} \left(-\frac{2}{1 + \cos \bar{\varphi}} + \cos \bar{\varphi} \right) - \frac{1}{(1 + \cos \bar{\varphi})^2} \right] \right] \\
 Et \chi &= -R_0 g \sin \bar{\varphi} \left[-1 + (1 + \nu) \left[\frac{\cos^2 \bar{\varphi}}{\sin^2 \bar{\varphi}} - \frac{2 \cos \bar{\varphi}}{\sin^2 \bar{\varphi} (1 + \cos \bar{\varphi})} - \frac{1}{(1 + \cos \bar{\varphi})^2} \right] \right] \\
 &= -R_0 g \sin \bar{\varphi} \left[-1 + (1 + \nu) \left[\frac{\cos^2 \bar{\varphi}}{(1 - \cos \bar{\varphi})(1 + \cos \bar{\varphi})} - \frac{2 \cos \bar{\varphi}}{(1 - \cos \bar{\varphi})(1 + \cos \bar{\varphi})^2} - \frac{1}{(1 + \cos \bar{\varphi})^2} \right] \right] \\
 &= -R_0 g \sin \bar{\varphi} \left[-1 + (1 + \nu) \left[\frac{-2 \cos \bar{\varphi} + \cos^2 \bar{\varphi} + \cos^3 \bar{\varphi}}{(1 - \cos \bar{\varphi})(1 + \cos \bar{\varphi})^2} - \frac{1}{(1 + \cos \bar{\varphi})^2} \right] \right] \\
 &= -R_0 g \sin \bar{\varphi} \left[-1 + (1 + \nu) \left[\frac{-2 \cos \bar{\varphi} + \cos^2 \bar{\varphi} + \cos^3 \bar{\varphi} - 1 + \cos \bar{\varphi}}{(1 - \cos \bar{\varphi})(1 + \cos \bar{\varphi})^2} \right] \right] \\
 &= -R_0 g \sin \bar{\varphi} \left[-1 + (1 + \nu) \left[\frac{-1 - \cos \bar{\varphi} + \cos^2 \bar{\varphi} + \cos^3 \bar{\varphi}}{1 + \cos \bar{\varphi} - \cos^2 \bar{\varphi} - \cos^3 \bar{\varphi}} \right] \right] \\
 &= -R_0 g \sin \bar{\varphi} [-1 - (1 + \nu)]
 \end{aligned}$$

$Et \chi = R_0 g \sin \bar{\varphi} (2 + \nu)$

Übungsbeispiel Wasserbehälter



\$ANF : BEISPIEL WASSERBEHAELTER

START

OUTPUT WASSERBE.AUS

NODES XYZ NK = 56

1 X=0.0 Y=2.0 Z=0.0

6 Y=2.0 Z=1.0

11 Y=2.0 Z=7.0

16 Y=2.0 Z=8.0

21 Y=2.75 Z=9.0

26 Y=4.25 Z=11.0

31 Y=5.0 Z=12.0

46 Y=0.1 Z=14.4992

47 Y=0.5 Z=8.0

56 Y=1.85 Z=8.0

:

BOUND BC

2 F=0 1 1 1 0 0 G=56 I=1

1 F=0 0 0 0 0 0

46 F=0 0 1 0 0 0

:

PROPS RING MAT NM=1

1 E=2.1E8 NU=0.3 T=1.0E-5

:

IZERO IPL Z=55 S=3

RING GRP XYZ BC MAT IPL

1 K=1 6 M=1 G=5

TYP=2 T=.02

6 K=6 11 G=10

TYP=2 T=.02

11 K=11 16 G=15

TYP=2 T=.02

16 K=16 21 G=20 P=1

TYP=3 T=.01

:

P=0 0 40.0 0 0 0 30.0 0

:

:

21 K=21 26 G=25 P=1

TYP=3 T=.01

:

P=0 0 30.0 0 0 0 10.0 0

:

:

26 K=26 31 G=30 P=1

TYP=3 T=.01

:

P=0 0 10.0 0 0 0 0 0

:

:

16 K=16,21 M=1 G=20 NH=0 TL=0 P=1

TYP=3 T=.01,0.0 GEO=0.0

PG=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0

P=0.0,0.0,40.0,0.0,0.0,0.0,30.0,0.0

T=0.0,0.0,0.0,0.0

B=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0

21 K=21,26 M=1 G=25 NH=0 TL=0 P=1

TYP=3 T=.01,0.0 GEO=0.0

PG=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0

P=0.0,0.0,30.0,0.0,0.0,0.0,10.0,0.0

T=0.0,0.0,0.0,0.0

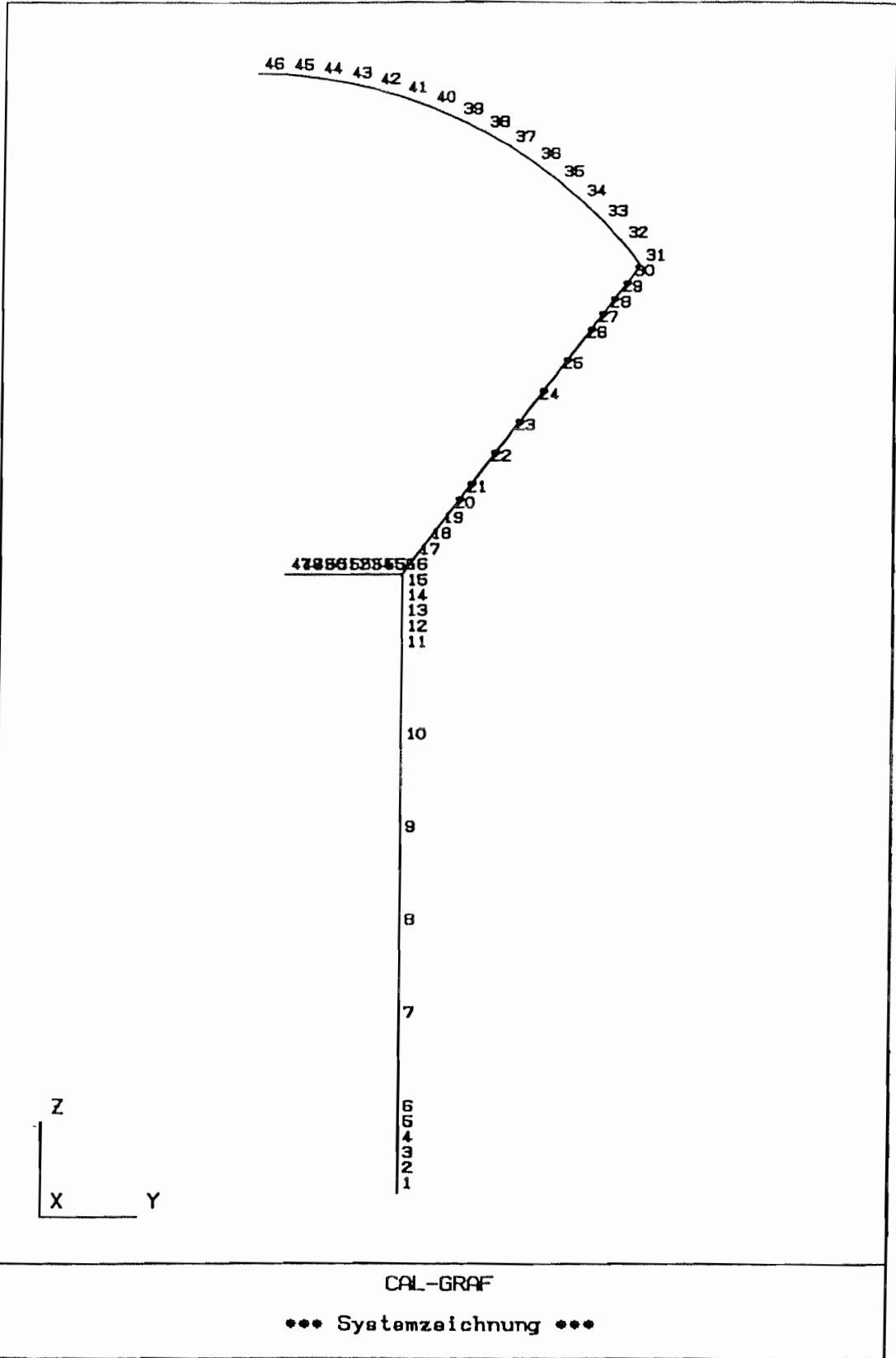
B=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0

26 K=26,31 M=1 G=30 NH=0 TL=0 P=1

TYP=3 T=.01,0.0 GEO=0.0

PG=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0

BEN. TEXT: *** Beispiel Wasserbehälterberechnung ***



CAL-GRAF

*** Systemzeichnung ***

```
31 K=31 46 G=45
   TYP=4 T=.005 .005 GEO=6.25
46 K=47 56 G=54 P=1
   TYP=1 T=0.05
:
   P=0 0 40.0 0 0 0 40.0 0
:
:
:
55 K=56 16 P=1
   TYP=1 T=0.05
:
   P=0 0 40.0 0 0 0 40.0 0
:
:
:
LOADS V BC REACT NL=1
47 LC=1 P=0.0 0.0 25.0 0.0 0.0 0.0
:
BADDSF KGES
BSOLVE KGES V
DISPL V BC DIS
FORCE GRP V FOR
IDENT '*** Beispiel Wasserbehälterberechnung ***'
FIGUR 0.0 0.0
PROJ,XYZ,PLKO 1.0 0.0 0.0 W=0
PSCAL,PLKO,4,1
PNODE,PLKO,1
PGRID,PLKO,IPL,0,0
BOX,1 '*** Systemzeichnung ***'
ENDJOB
IDENT '*** Beispiel Wasserbehälterberechnung ***'
FIGUR 0.0 0.0
PROJ,XYZ,PLKO 1.0 0.0 0.0 W=0
PSCAL,PLKO,4,1
PNODE,PLKO,0
PGRID,PLKO,IPL,0,1
LOAD,FAK,1,1
1000.0
SCALE,DIS,FAK
ADD DIS XYZ
PROJ,DIS,PLKO 1.0 0.0 0.0 W=0
PSCAL,PLKO,4,2
PNODE,PLKO,0
PGRID,PLKO,IPL,0,0
BOX,1 '*** Verschiebungsfigur ***'
ENDJOB
IDENT '*** Beispiel Wasserbehälterberechnung ***'
FIGUR 0.0 0.0
PROJ,XYZ,PLKO 1.0 0.0 0.0 W=0
```



```
PSCAL,PLKO,4,1
PBEAM,PLKO,IPL,FOR,1 SF=2
PNODE,PLKO,0
PGRID,PLKO,IPL,0,0
BOX,1 '*** Normalkraft N11 ***'
ENDJOB
IDENT '***Beispiel Wasserbehaelterberechnung ***'
FIGUR 0.0 0.0
PROJ,XYZ,PLKO 1.0 0.0 0.0 W=0
PSCAL,PLKO,4,1
PBEAM,PLKO,IPL,FOR,2 SF=2
PNODE,PLKO,0
PGRID,PLKO,IPL,0,0
BOX,1 '*** Normalkraft N22 ***'
ENDJOB
IDENT '***Beispiel Wasserbehaelterberechnung ***'
FIGUR 0.0 0.0
PROJ,XYZ,PLKO 1.0 0.0 0.0 W=0
PSCAL,PLKO,4,1
PBEAM,PLKO,IPL,FOR,4 SF=2
PNODE,PLKO,0
PGRID,PLKO,IPL,0,0
BOX,1 '*** Moment M11 ***'
ENDJOB
IDENT '***Beispiel Wasserbehaelterberechnung ***'
FIGUR 0.0 0.0
PROJ,XYZ,PLKO 1.0 0.0 0.0 W=0
PSCAL,PLKO,4,1
PBEAM,PLKO,IPL,FOR,5 SF=2
PNODE,PLKO,0
PGRID,PLKO,IPL,0,0
BOX,1 '*** Moment M22 ***'
ENDJOB
IDENT '***Beispiel Wasserbehaelterberechnung ***'
FIGUR 0.0 0.0
PROJ,XYZ,PLKO 1.0 0.0 0.0 W=0
PSCAL,PLKO,4,1
PBEAM,PLKO,IPL,FOR,7 SF=2
PNODE,PLKO,0
PGRID,PLKO,IPL,0,0
BOX,1 '*** Querkraft Qres ***'
ENDJOB
RETURN
```

----- Verbleibender Speicherplatz = 379303

>> DISPL V BC DIS

++ Matrix <DIS > mit 56 Zeilen und 3 Spalten erzeugt

----- KNOTENVERSCHIEBUNGEN -----

Knoten	LFN	Vx	Vy	Vz	PHIx	PHIy	PHIz
1	1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
2	1	0.0000E+00	1.0726E-05	-5.0934E-06	-5.5699E-05	0.0000E+00	0.0000E+00
3	1	0.0000E+00	1.6708E-05	-1.0484E-05	-8.6848E-06	0.0000E+00	0.0000E+00
4	1	0.0000E+00	1.6821E-05	-1.5947E-05	2.9003E-06	0.0000E+00	0.0000E+00
5	1	0.0000E+00	1.6382E-05	-2.1399E-05	1.1158E-06	0.0000E+00	0.0000E+00
6	1	0.0000E+00	1.6305E-05	-2.6844E-05	-4.7584E-08	0.0000E+00	0.0000E+00
7	1	0.0000E+00	1.6335E-05	-5.9513E-05	-1.4908E-10	0.0000E+00	0.0000E+00
8	1	0.0000E+00	1.6335E-05	-9.2183E-05	2.8834E-12	0.0000E+00	0.0000E+00
9	1	0.0000E+00	1.6335E-05	-1.2485E-04	3.4537E-12	0.0000E+00	0.0000E+00
10	1	0.0000E+00	1.6335E-05	-1.5752E-04	-6.8610E-10	0.0000E+00	0.0000E+00
11	1	0.0000E+00	1.6332E-05	-1.8020E-04	1.8735E-06	0.0000E+00	0.0000E+00
12	1	0.0000E+00	1.5329E-05	-1.9563E-04	8.3019E-06	0.0000E+00	0.0000E+00
13	1	0.0000E+00	1.4317E-05	-2.0102E-04	-7.5813E-06	0.0000E+00	0.0000E+00
14	1	0.0000E+00	2.5383E-05	-2.0651E-04	-1.2416E-04	0.0000E+00	0.0000E+00
15	1	0.0000E+00	6.1224E-05	-2.1274E-04	-1.5420E-04	0.0000E+00	0.0000E+00
16	1	0.0000E+00	-1.0489E-05	-2.1917E-04	1.3107E-03	0.0000E+00	0.0000E+00
17	1	0.0000E+00	1.0770E-04	-3.2268E-04	-6.5581E-04	0.0000E+00	0.0000E+00
18	1	0.0000E+00	1.4665E-04	-3.6993E-04	-3.6215E-05	0.0000E+00	0.0000E+00
19	1	0.0000E+00	1.4668E-04	-3.8629E-04	-5.5337E-05	0.0000E+00	0.0000E+00
20	1	0.0000E+00	1.5156E-04	-4.0459E-04	-5.7891E-05	0.0000E+00	0.0000E+00
21	1	0.0000E+00	1.5561E-04	-4.2081E-04	-4.5604E-05	0.0000E+00	0.0000E+00
22	1	0.0000E+00	1.5998E-04	-4.4661E-04	-2.9165E-05	0.0000E+00	0.0000E+00
23	1	0.0000E+00	1.5887E-04	-4.6377E-04	-8.3549E-06	0.0000E+00	0.0000E+00
24	1	0.0000E+00	1.5091E-04	-4.7187E-04	1.4621E-05	0.0000E+00	0.0000E+00
25	1	0.0000E+00	1.3493E-04	-4.7051E-04	4.0083E-05	0.0000E+00	0.0000E+00
26	1	0.0000E+00	1.0999E-04	-4.5935E-04	6.6151E-05	0.0000E+00	0.0000E+00
27	1	0.0000E+00	9.3851E-05	-4.4997E-04	8.1973E-05	0.0000E+00	0.0000E+00
28	1	0.0000E+00	7.5033E-05	-4.3792E-04	9.6273E-05	0.0000E+00	0.0000E+00
29	1	0.0000E+00	5.3203E-05	-4.2299E-04	1.1814E-04	0.0000E+00	0.0000E+00
30	1	0.0000E+00	2.4728E-05	-4.0244E-04	1.6746E-04	0.0000E+00	0.0000E+00
31	1	0.0000E+00	-1.1918E-05	-3.7506E-04	1.6958E-04	0.0000E+00	0.0000E+00
32	1	0.0000E+00	-1.5646E-06	-3.6622E-04	-1.9076E-05	0.0000E+00	0.0000E+00
33	1	0.0000E+00	-1.4945E-06	-3.6605E-04	1.4704E-06	0.0000E+00	0.0000E+00
34	1	0.0000E+00	-1.6090E-06	-3.6597E-04	-2.3584E-07	0.0000E+00	0.0000E+00
35	1	0.0000E+00	-1.6769E-06	-3.6583E-04	-1.4500E-07	0.0000E+00	0.0000E+00
36	1	0.0000E+00	-1.7659E-06	-3.6568E-04	-1.8912E-07	0.0000E+00	0.0000E+00
37	1	0.0000E+00	-1.8731E-06	-3.6550E-04	-2.4288E-07	0.0000E+00	0.0000E+00
38	1	0.0000E+00	-2.0044E-06	-3.6529E-04	-3.2540E-07	0.0000E+00	0.0000E+00
39	1	0.0000E+00	-2.1671E-06	-3.6504E-04	-4.5825E-07	0.0000E+00	0.0000E+00
40	1	0.0000E+00	-2.3729E-06	-3.6470E-04	-6.8796E-07	0.0000E+00	0.0000E+00
41	1	0.0000E+00	-2.6399E-06	-3.6422E-04	-1.1245E-06	0.0000E+00	0.0000E+00
42	1	0.0000E+00	-2.9992E-06	-3.6347E-04	-2.0672E-06	0.0000E+00	0.0000E+00
43	1	0.0000E+00	-3.5007E-06	-3.6206E-04	-4.7705E-06	0.0000E+00	0.0000E+00
44	1	0.0000E+00	-4.3383E-06	-3.5914E-04	-9.4072E-06	0.0000E+00	0.0000E+00
45	1	0.0000E+00	-4.8671E-06	-3.3652E-04	-1.9637E-04	0.0000E+00	0.0000E+00
46	1	0.0000E+00	0.0000E+00	-1.9773E-04	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
47	1	0.0000E+00	-6.6760E-06	-4.5218E-04	-1.8150E-03	0.0000E+00	0.0000E+00
48	1	0.0000E+00	-6.3747E-06	-7.0641E-04	-1.5423E-03	0.0000E+00	0.0000E+00
49	1	0.0000E+00	-6.4554E-06	-9.0758E-04	-1.1219E-03	0.0000E+00	0.0000E+00
50	1	0.0000E+00	-6.7351E-06	-1.0393E-03	-6.2631E-04	0.0000E+00	0.0000E+00
51	1	0.0000E+00	-7.1318E-06	-1.0944E-03	-1.0934E-04	0.0000E+00	0.0000E+00
52	1	0.0000E+00	-7.6031E-06	-1.0732E-03	3.8524E-04	0.0000E+00	0.0000E+00
53	1	0.0000E+00	-8.1248E-06	-9.8188E-04	8.1961E-04	0.0000E+00	0.0000E+00
54	1	0.0000E+00	-8.6824E-06	-8.3205E-04	1.1598E-03	0.0000E+00	0.0000E+00
55	1	0.0000E+00	-9.2863E-06	-8.4024E-04	1.3744E-03	0.0000E+00	0.0000E+00
56	1	0.0000E+00	-9.8700E-06	-4.2749E-04	1.4341E-03	0.0000E+00	0.0000E+00

----- Verbleibender Speicherplatz = 379129

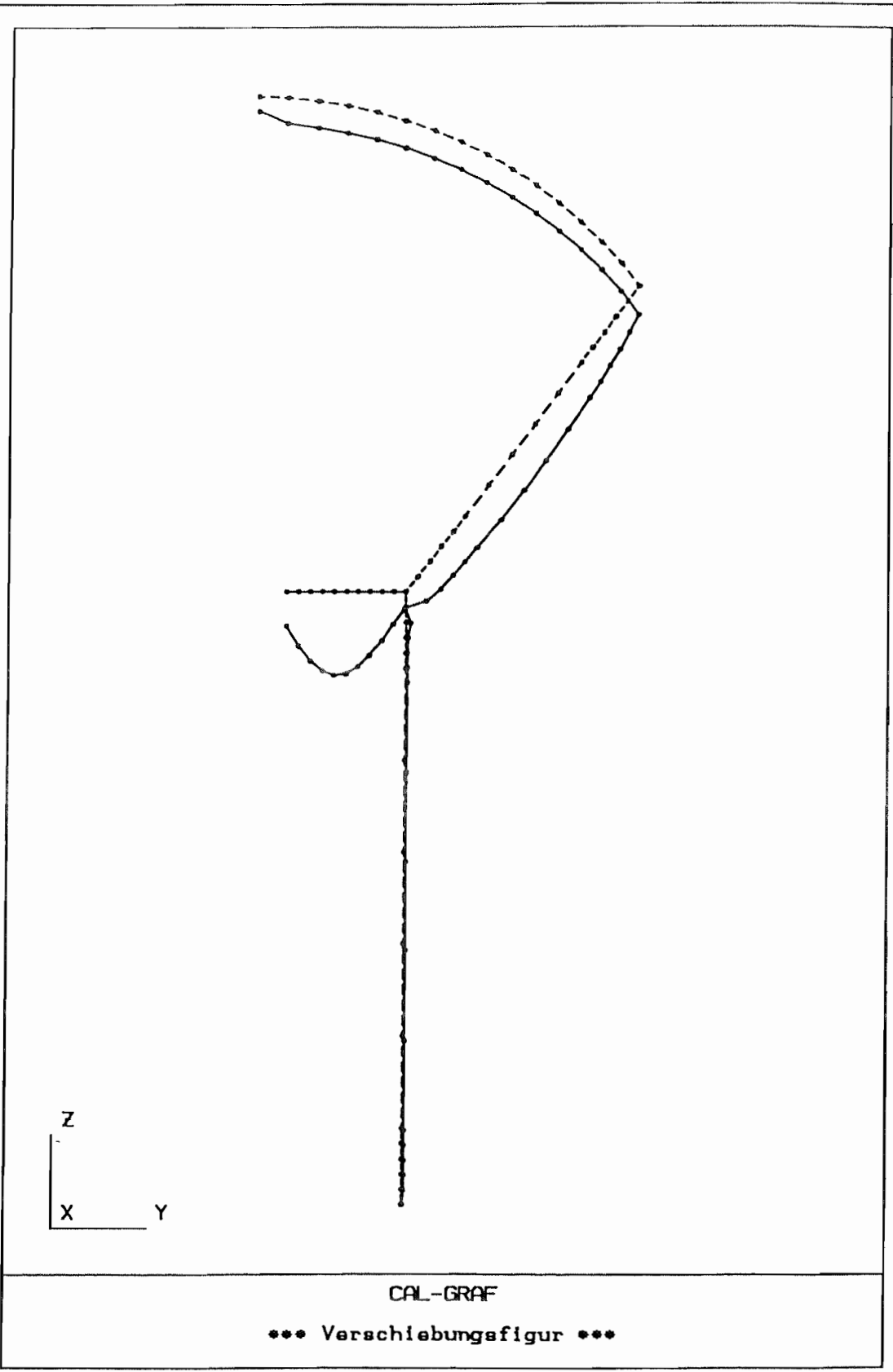
>> FORCE GRP V FOR
++ Matrix <FOR > mit 55 Zeilen und 14 Spalten erzeugt

----- SCHNITTGROESSEN RING -----

EL.-NR	LFN	N11	N22	N12	M11	M22	M12	Q-RES.
1	1	-3.4303E+01	-1.1434E+02	0.0000E+00	-6.2284E-02	-2.0761E-01	0.0000E+00	2.6699E+00
		-1.1778E+01	-1.1434E+02	0.0000E+00	1.2086E-02	3.9037E-02	0.0000E+00	2.0815E-01
2	1	-1.1778E+01	-1.1434E+02	0.0000E+00	1.2086E-02	3.9037E-02	0.0000E+00	2.0815E-01
		7.8338E-01	-1.1434E+02	0.0000E+00	7.2203E-03	2.2118E-02	0.0000E+00	-1.7148E-01
3	1	7.8338E-01	-1.1434E+02	0.0000E+00	7.2203E-03	2.2118E-02	0.0000E+00	-1.7148E-01
		1.0215E+00	-1.1434E+02	0.0000E+00	7.8091E-04	6.4054E-04	0.0000E+00	-4.2637E-02
4	1	1.0215E+00	-1.1434E+02	0.0000E+00	7.8091E-04	6.4054E-04	0.0000E+00	-4.2637E-02
		9.9157E-02	-1.1434E+02	0.0000E+00	1.4854E-04	-1.4161E-03	0.0000E+00	6.4500E-03
5	1	9.9157E-02	-1.1434E+02	0.0000E+00	1.4854E-04	-1.4161E-03	0.0000E+00	6.4500E-03
		-6.2857E-02	-1.1434E+02	0.0000E+00	5.4180E-04	-9.6248E-05	0.0000E+00	4.2625E-03
6	1	-6.2857E-02	-1.1434E+02	0.0000E+00	5.4180E-04	-9.6251E-05	0.0000E+00	4.2625E-03
		-3.3839E-04	-1.1434E+02	0.0000E+00	6.2831E-04	1.8863E-04	0.0000E+00	7.1823E-08
7	1	-3.3838E-04	-1.1434E+02	0.0000E+00	6.2830E-04	1.8863E-04	0.0000E+00	-9.0180E-09
		-3.1332E-04	-1.1434E+02	0.0000E+00	6.2826E-04	1.8849E-04	0.0000E+00	9.8447E-08
8	1	-3.1331E-04	-1.1434E+02	0.0000E+00	6.2826E-04	1.8848E-04	0.0000E+00	-2.6882E-08
		-3.1301E-04	-1.1434E+02	0.0000E+00	6.2826E-04	1.8849E-04	0.0000E+00	1.3142E-07
9	1	-3.1300E-04	-1.1434E+02	0.0000E+00	6.2826E-04	1.8848E-04	0.0000E+00	-3.8324E-08
		-4.5535E-05	-1.1434E+02	0.0000E+00	6.2835E-04	1.8875E-04	0.0000E+00	1.2177E-05
10	1	-4.5528E-05	-1.1434E+02	0.0000E+00	6.2834E-04	1.8873E-04	0.0000E+00	1.1963E-05
		-5.9579E-03	-1.1434E+02	0.0000E+00	1.7299E-03	3.8610E-03	0.0000E+00	2.3395E-02
11	1	-5.9579E-03	-1.1434E+02	0.0000E+00	1.7299E-03	3.8610E-03	0.0000E+00	2.3395E-02
		-2.1125E+00	-1.1434E+02	0.0000E+00	1.6820E-03	3.8183E-03	0.0000E+00	-5.8782E-02
12	1	-2.1125E+00	-1.1434E+02	0.0000E+00	1.6820E-03	3.8183E-03	0.0000E+00	-5.8782E-02
		-4.2380E+00	-1.1434E+02	0.0000E+00	-1.1643E-02	-4.0482E-02	0.0000E+00	-4.2627E-01
13	1	-4.2380E+00	-1.1434E+02	0.0000E+00	-1.1643E-02	-4.0482E-02	0.0000E+00	-4.2627E-01
		1.9001E+01	-1.1434E+02	0.0000E+00	-3.8218E-02	-1.3035E-01	0.0000E+00	-1.0060E-01
14	1	1.9001E+01	-1.1434E+02	0.0000E+00	-3.8218E-02	-1.3035E-01	0.0000E+00	-1.0060E-01
		9.4267E+01	-1.1434E+02	0.0000E+00	8.1989E-02	2.6615E-01	0.0000E+00	5.3753E+00
15	1	9.4267E+01	-1.1434E+02	0.0000E+00	8.1989E-02	2.6615E-01	0.0000E+00	5.3753E+00
		-5.6330E+01	-1.1434E+02	0.0000E+00	6.7528E-01	2.2522E+00	0.0000E+00	1.2290E+01
16	1	-4.2167E+01	-1.0384E+02	0.0000E+00	-2.5112E-01	-8.5989E-01	0.0000E+00	1.0448E+01
		7.6113E+01	-9.6937E+01	0.0000E+00	2.5836E-02	9.5710E-02	0.0000E+00	-1.3199E-01
17	1	7.6113E+01	-9.6937E+01	0.0000E+00	2.5836E-02	9.5710E-02	0.0000E+00	-1.3199E-01
		1.0872E+02	-8.3940E+01	0.0000E+00	2.0902E-03	6.2245E-03	0.0000E+00	-1.6404E-01
18	1	1.0872E+02	-8.3940E+01	0.0000E+00	2.0902E-03	6.2245E-03	0.0000E+00	-1.6404E-01
		1.0403E+02	-7.2316E+01	0.0000E+00	-4.4569E-04	-1.8355E-03	0.0000E+00	1.7997E-02
19	1	1.0403E+02	-7.2316E+01	0.0000E+00	-4.4569E-04	-1.8355E-03	0.0000E+00	1.7997E-02
		1.0377E+02	-6.2151E+01	0.0000E+00	3.3642E-04	8.5442E-04	0.0000E+00	3.2316E-03
20	1	1.0377E+02	-6.2151E+01	0.0000E+00	3.3642E-04	8.5442E-04	0.0000E+00	3.2316E-03
		1.0289E+02	-5.3115E+01	0.0000E+00	4.1267E-04	9.9575E-04	0.0000E+00	-1.7242E-03
21	1	1.0289E+02	-5.3115E+01	0.0000E+00	4.1267E-04	9.9575E-04	0.0000E+00	-1.7242E-03
		9.8770E+01	-3.7943E+01	0.0000E+00	4.8815E-04	1.1593E-03	0.0000E+00	4.2977E-04
22	1	9.8770E+01	-3.7943E+01	0.0000E+00	4.8815E-04	1.1593E-03	0.0000E+00	4.2978E-04
		9.1798E+01	-2.5982E+01	0.0000E+00	5.3092E-04	1.1964E-03	0.0000E+00	3.6720E-04
23	1	9.1798E+01	-2.5982E+01	0.0000E+00	5.3092E-04	1.1964E-03	0.0000E+00	3.6721E-04
		8.1820E+01	-1.6685E+01	0.0000E+00	5.7747E-04	1.2561E-03	0.0000E+00	3.5618E-04
24	1	8.1820E+01	-1.6685E+01	0.0000E+00	5.7747E-04	1.2561E-03	0.0000E+00	3.5618E-04
		6.8833E+01	-9.6743E+00	0.0000E+00	6.2570E-04	1.3269E-03	0.0000E+00	2.3879E-04
25	1	6.8833E+01	-9.6743E+00	0.0000E+00	6.2570E-04	1.3269E-03	0.0000E+00	2.3880E-04
		5.2944E+01	-4.6759E+00	0.0000E+00	6.4043E-04	1.3058E-03	0.0000E+00	1.2796E-03
26	1	5.2944E+01	-4.6759E+00	0.0000E+00	6.4043E-04	1.3058E-03	0.0000E+00	1.2796E-03
		4.3934E+01	-2.8624E+00	0.0000E+00	6.3750E-04	1.2467E-03	0.0000E+00	-6.9517E-04
27	1	4.3934E+01	-2.8624E+00	0.0000E+00	6.3750E-04	1.2467E-03	0.0000E+00	-6.9517E-04
		3.4187E+01	-1.4783E+00	0.0000E+00	6.5044E-04	1.2584E-03	0.0000E+00	1.8516E-03
28	1	3.4187E+01	-1.4783E+00	0.0000E+00	6.5044E-04	1.2584E-03	0.0000E+00	1.8516E-03
		2.3620E+01	-5.0530E-01	0.0000E+00	1.0993E-03	2.6724E-03	0.0000E+00	1.0218E-02
29	1	2.3620E+01	-5.0530E-01	0.0000E+00	1.0993E-03	2.6724E-03	0.0000E+00	1.0218E-02
		1.0722E+01	5.0679E-02	0.0000E+00	1.7660E-03	4.6291E-03	0.0000E+00	-4.1700E-03
30	1	1.0722E+01	5.0679E-02	0.0000E+00	1.7660E-03	4.6291E-03	0.0000E+00	-4.1700E-03
		-4.9650E+00	1.3507E-01	0.0000E+00	-2.4494E-03	-9.3296E-03	0.0000E+00	-1.3200E-01
31	1	-2.4530E+00	1.6603E-01	0.0000E+00	-2.8442E-03	-9.3296E-03	0.0000E+00	9.2707E-02

		-2.6792E-01	2.5663E-01	0.0000E+00	1.9831E-04	6.4250E-04	0.0000E+00	-4.5407E-03
32	1	-2.6792E-01	2.5663E-01	0.0000E+00	1.9831E-04	6.4250E-04	0.0000E+00	-4.5407E-03
		-2.6521E-01	2.7614E-01	0.0000E+00	-1.2087E-05	-3.8255E-05	0.0000E+00	1.5391E-04
33	1	-2.6521E-01	2.7614E-01	0.0000E+00	-1.2087E-05	-3.8255E-05	0.0000E+00	1.5391E-04
		-3.0699E-01	3.0565E-01	0.0000E+00	5.1804E-07	1.8715E-06	0.0000E+00	-4.3522E-06
34	1	-3.0699E-01	3.0565E-01	0.0000E+00	5.1804E-07	1.8714E-06	0.0000E+00	-4.3525E-06
		-3.4282E-01	3.4288E-01	0.0000E+00	-1.3446E-07	-1.6037E-07	0.0000E+00	-6.6106E-06
35	1	-3.4282E-01	3.4288E-01	0.0000E+00	-1.3450E-07	-1.6048E-07	0.0000E+00	-6.6109E-06
		-3.9084E-01	3.9080E-01	0.0000E+00	-1.3080E-07	-1.7824E-07	0.0000E+00	-7.8704E-06
36	1	-3.9084E-01	3.9080E-01	0.0000E+00	-1.3084E-07	-1.7835E-07	0.0000E+00	-7.8708E-06
		-4.5370E-01	4.5371E-01	0.0000E+00	-1.5957E-07	-3.2573E-07	0.0000E+00	-1.1002E-05
37	1	-4.5370E-01	4.5371E-01	0.0000E+00	-1.5960E-07	-3.2583E-07	0.0000E+00	-1.1003E-05
		-5.3827E-01	5.3834E-01	0.0000E+00	-2.0244E-07	-5.8886E-07	0.0000E+00	-1.5741E-05
38	1	-5.3827E-01	5.3834E-01	0.0000E+00	-2.0247E-07	-5.8895E-07	0.0000E+00	-1.5742E-05
		-6.5569E-01	6.5588E-01	0.0000E+00	-2.7061E-07	-1.0868E-06	0.0000E+00	-2.3570E-05
39	1	-6.5569E-01	6.5588E-01	0.0000E+00	-2.7061E-07	-1.0868E-06	0.0000E+00	-2.3571E-05
		-8.2554E-01	8.2601E-01	0.0000E+00	-3.8910E-07	-2.1109E-06	0.0000E+00	-3.7450E-05
40	1	-8.2554E-01	8.2601E-01	0.0000E+00	-3.8911E-07	-2.1109E-06	0.0000E+00	-3.7450E-05
		-1.0850E+00	1.0862E+00	0.0000E+00	-6.1383E-07	-4.4405E-06	0.0000E+00	-6.4299E-05
41	1	-1.0850E+00	1.0862E+00	0.0000E+00	-6.1384E-07	-4.4406E-06	0.0000E+00	-6.4299E-05
		-1.5126E+00	1.5154E+00	0.0000E+00	-1.1816E-06	-1.0855E-05	0.0000E+00	-1.2846E-04
42	1	-1.5126E+00	1.5154E+00	0.0000E+00	-1.1816E-06	-1.0855E-05	0.0000E+00	-1.2846E-04
		-2.2938E+00	2.3070E+00	0.0000E+00	-2.2405E-06	-3.1854E-05	0.0000E+00	-2.4655E-04
43	1	-2.2938E+00	2.3070E+00	0.0000E+00	-2.2405E-06	-3.1854E-05	0.0000E+00	-2.4655E-04
		-4.0984E+00	4.0624E+00	0.0000E+00	-5.4699E-06	-9.1636E-05	0.0000E+00	-1.5060E-03
44	1	-4.0984E+00	4.0624E+00	0.0000E+00	-5.4699E-06	-9.1636E-05	0.0000E+00	-1.5060E-03
		-7.8039E+00	9.5327E+00	0.0000E+00	-3.7715E-05	-3.0929E-03	0.0000E+00	-4.0584E-03
45	1	-7.8039E+00	9.5327E+00	0.0000E+00	-3.7715E-05	-3.0929E-03	0.0000E+00	-4.0584E-03
		-1.1673E+00	-3.8911E+00	0.0000E+00	4.1895E-03	1.3965E-02	0.0000E+00	6.2230E-02
46	1	-1.4020E+02	-4.7641E-14	0.0000E+00	-7.9407E-06	-1.7204E-09	0.0000E+00	5.0000E+01
		-1.1166E+02	-2.8957E+01	0.0000E+00	-3.9840E+00	4.0217E+00	0.0000E+00	3.3154E+01
47	1	-1.1166E+02	-2.8957E+01	0.0000E+00	-3.9840E+00	4.0217E+00	0.0000E+00	3.3154E+01
		-9.7674E+01	-4.3157E+01	0.0000E+00	-1.1338E+00	6.4462E+00	0.0000E+00	2.1500E+01
48	1	-9.7674E+01	-4.3157E+01	0.0000E+00	-1.1338E+00	6.4462E+00	0.0000E+00	2.1500E+01
		-8.9789E+01	-5.1161E+01	0.0000E+00	8.7712E-01	7.7310E+00	0.0000E+00	1.2579E+01
49	1	-8.9789E+01	-5.1161E+01	0.0000E+00	8.7712E-01	7.7310E+00	0.0000E+00	1.2579E+01
		-8.4910E+01	-5.6114E+01	0.0000E+00	2.2173E+00	8.1158E+00	0.0000E+00	5.2727E+00
50	1	-8.4910E+01	-5.6114E+01	0.0000E+00	2.2173E+00	8.1158E+00	0.0000E+00	5.2727E+00
		-8.1683E+01	-5.9391E+01	0.0000E+00	2.9970E+00	7.7428E+00	0.0000E+00	-1.0000E+00
51	1	-8.1683E+01	-5.9391E+01	0.0000E+00	2.9970E+00	7.7428E+00	0.0000E+00	-1.0000E+00
		-7.9437E+01	-6.1671E+01	0.0000E+00	3.2916E+00	6.7032E+00	0.0000E+00	-6.5714E+00
52	1	-7.9437E+01	-6.1671E+01	0.0000E+00	3.2916E+00	6.7032E+00	0.0000E+00	-6.5714E+00
		-7.7812E+01	-6.3321E+01	0.0000E+00	3.1545E+00	5.0589E+00	0.0000E+00	-1.1645E+01
53	1	-7.7812E+01	-6.3321E+01	0.0000E+00	3.1545E+00	5.0589E+00	0.0000E+00	-1.1645E+01
		-7.6599E+01	-6.4553E+01	0.0000E+00	2.6249E+00	2.8545E+00	0.0000E+00	-1.6353E+01
54	1	-7.6599E+01	-6.4553E+01	0.0000E+00	2.6249E+00	2.8545E+00	0.0000E+00	-1.6353E+01
		-7.5668E+01	-6.5498E+01	0.0000E+00	1.7324E+00	1.2253E-01	0.0000E+00	-2.0784E+01
55	1	-7.5668E+01	-6.5498E+01	0.0000E+00	1.7324E+00	1.2253E-01	0.0000E+00	-2.0784E+01
		-7.4939E+01	-6.6238E+01	0.0000E+00	4.9999E-01	-3.1120E+00	0.0000E+00	-2.5000E+01

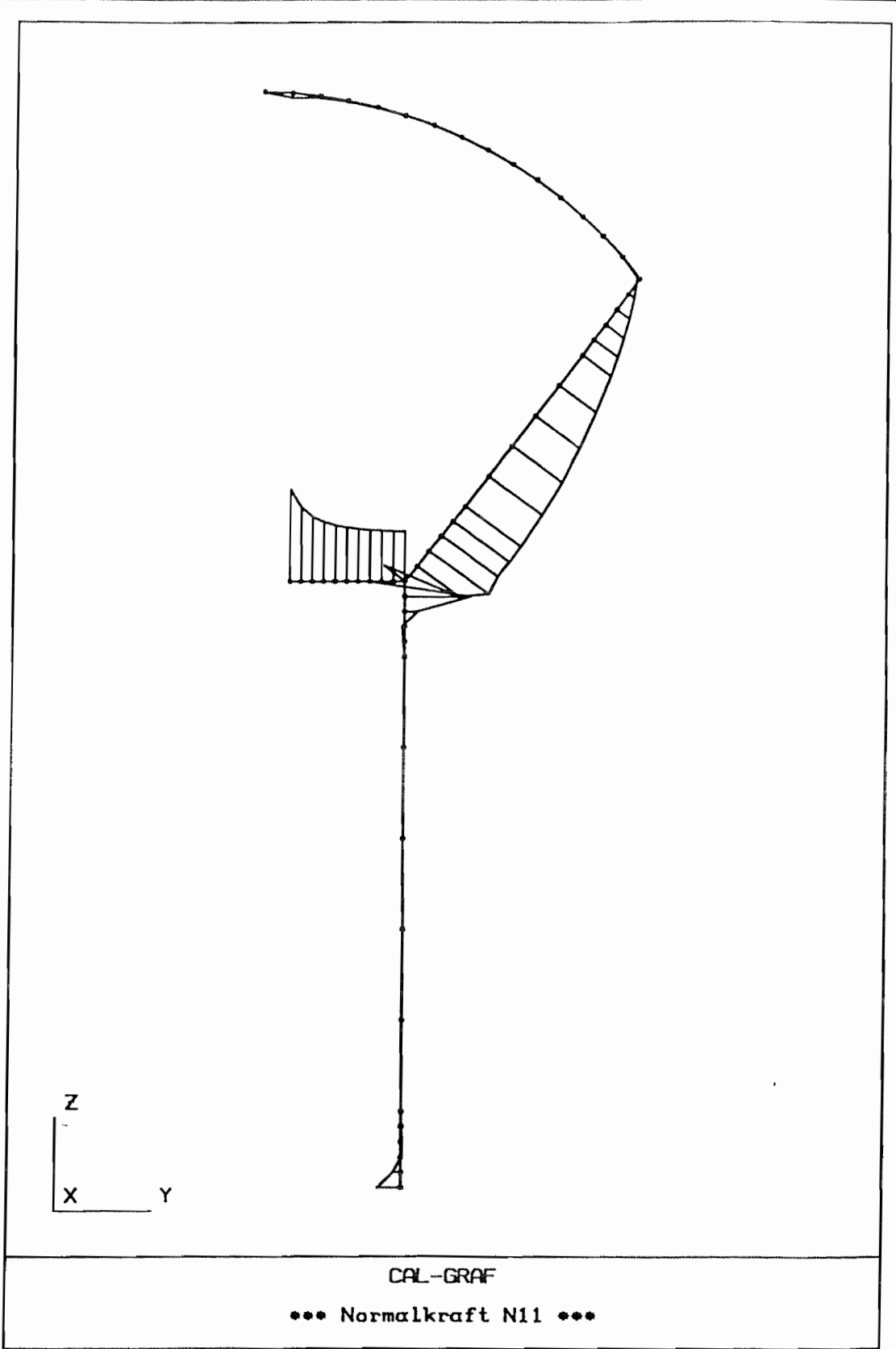
BEN. TEXT: *** Beispiel Wasserbehälterberechnung ***



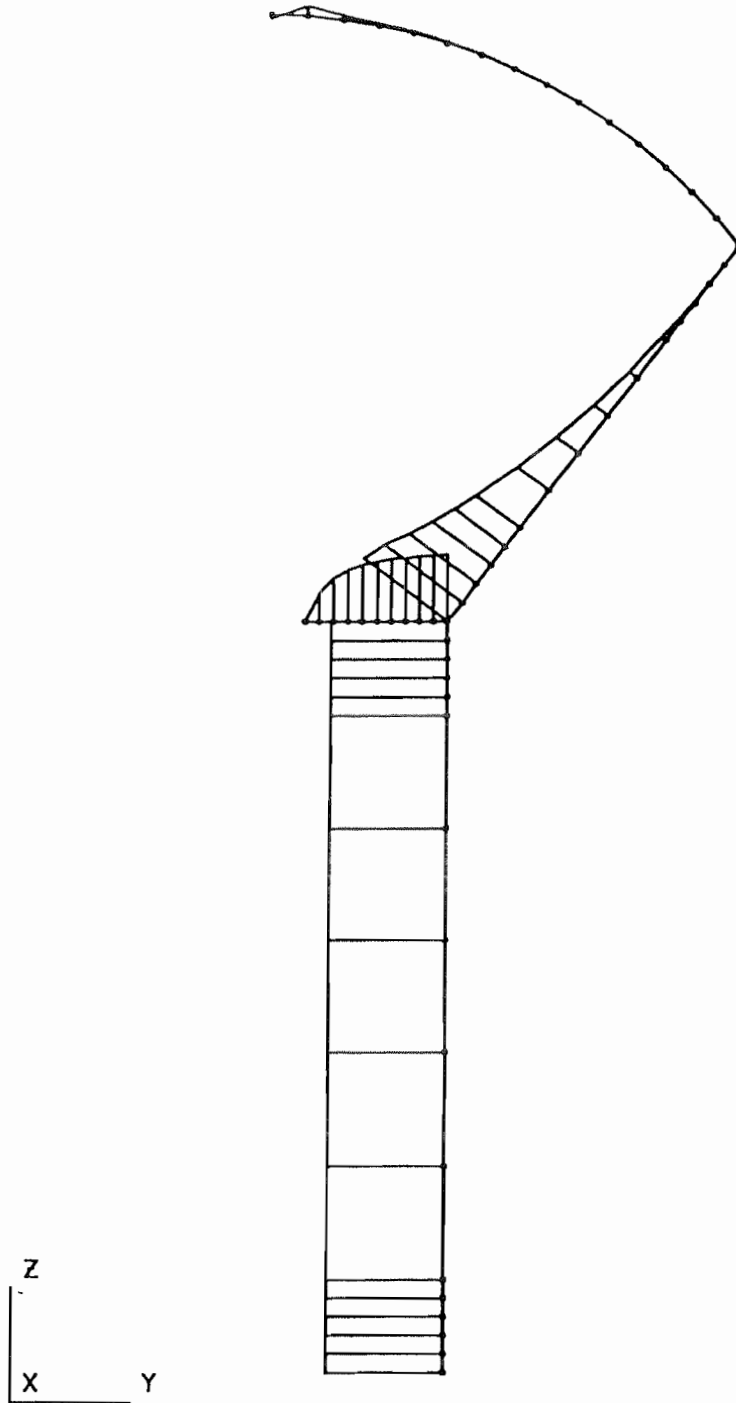
CAL-GRAF

*** Verschiebungsfigur ***

BEN. TEXT: ***Beispiel Wasserbehälterberechnung ***



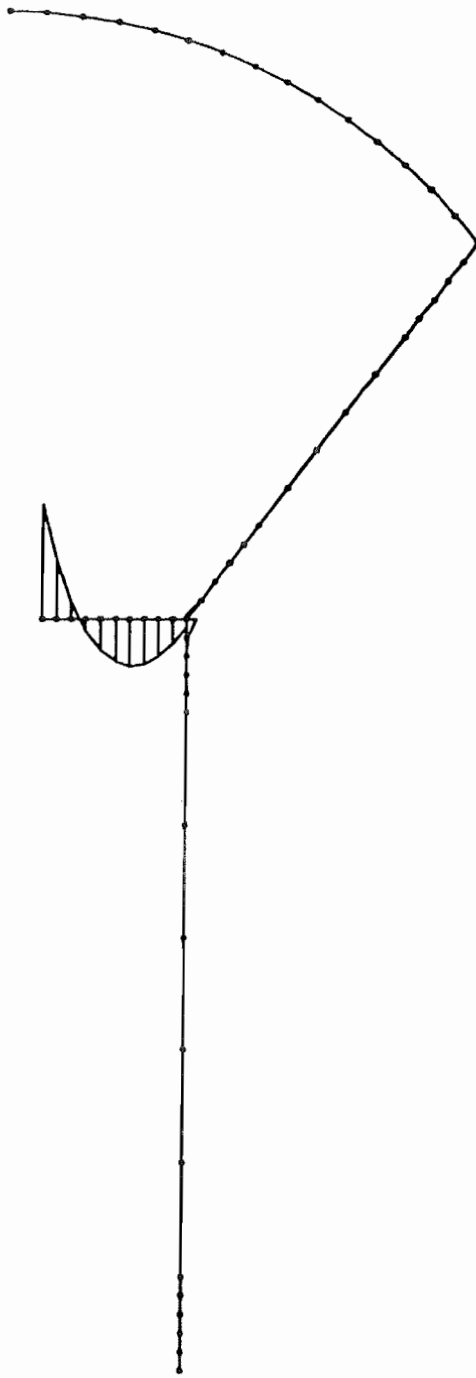
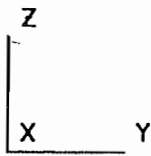
BEN. TEXT: ***Beispiel Wasserbehälterberechnung ***



CAL-GRAF

*** Normalkraft N22 ***

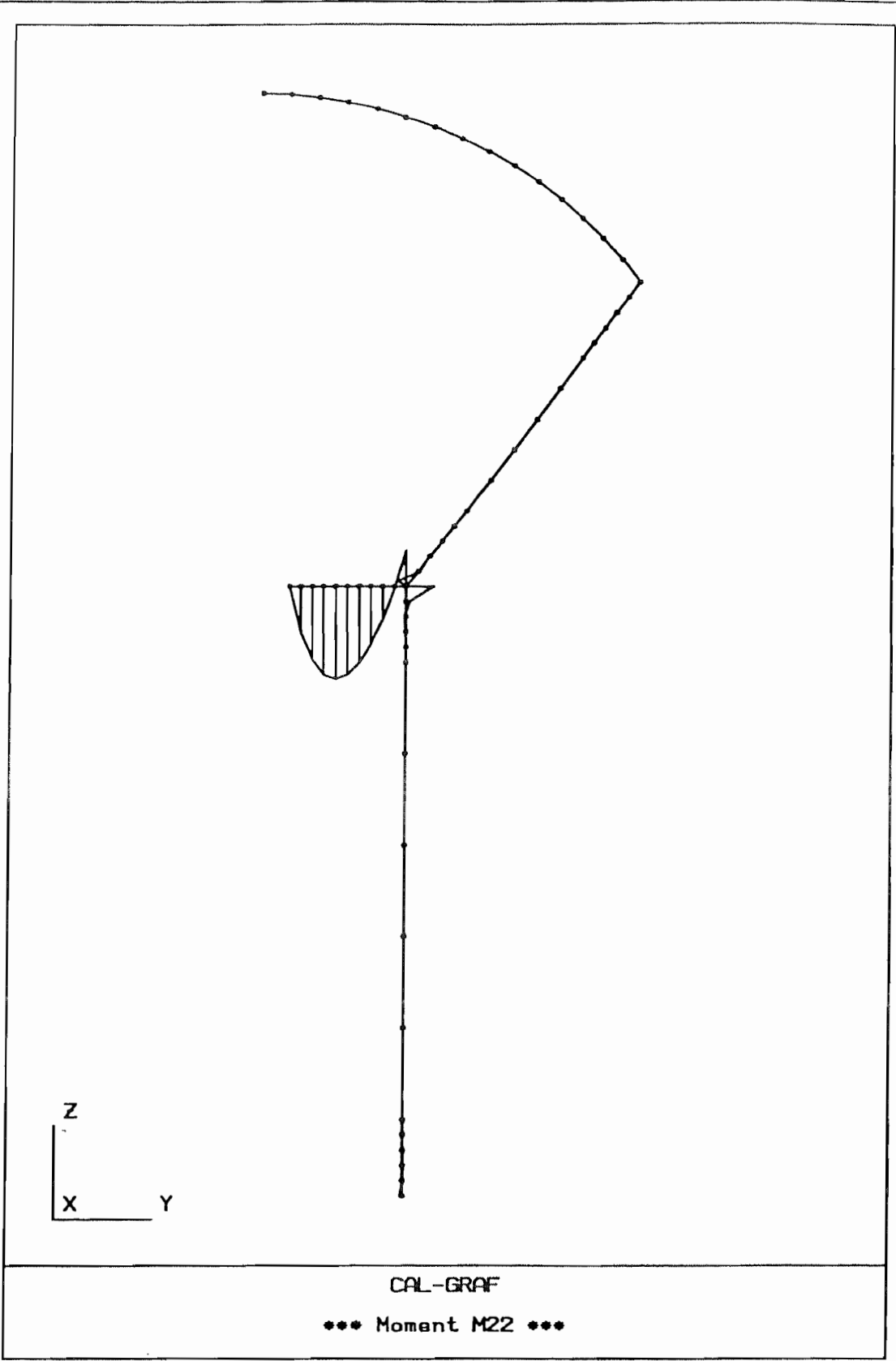
BEN. TEXT: ***Beispiel Wasserbehälterberechnung ***



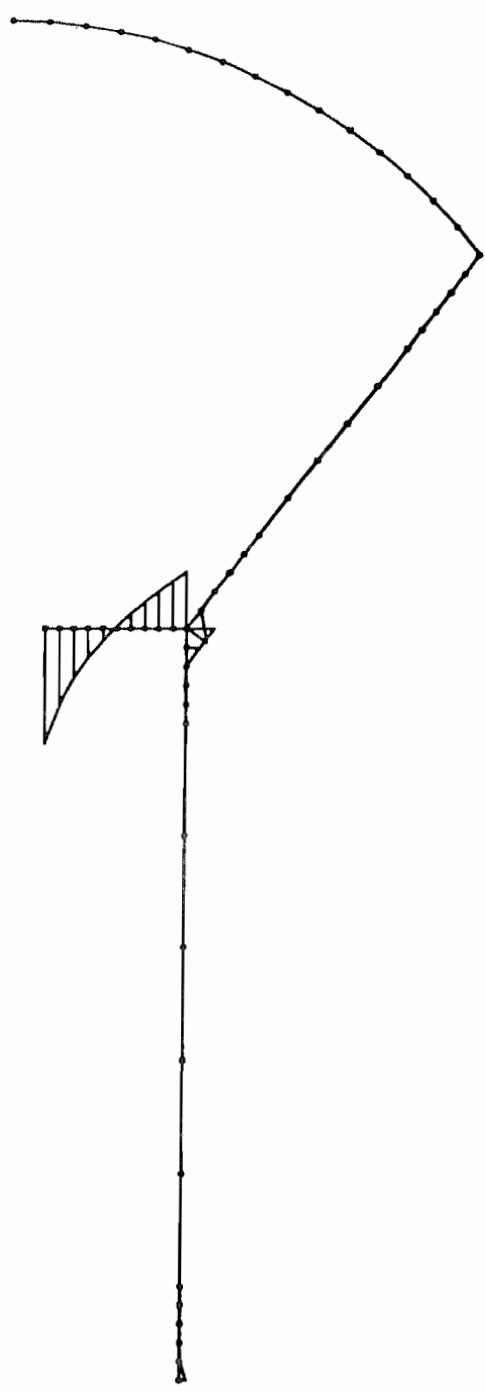
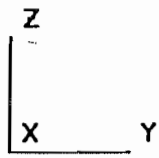
CAL-GRAF

*** Moment M11 ***

BEN. TEXT: ***Beispiel Masserbahalterberechnung ***



BEN. TEXT: ***Beispiel Wasserbehälterberechnung ***

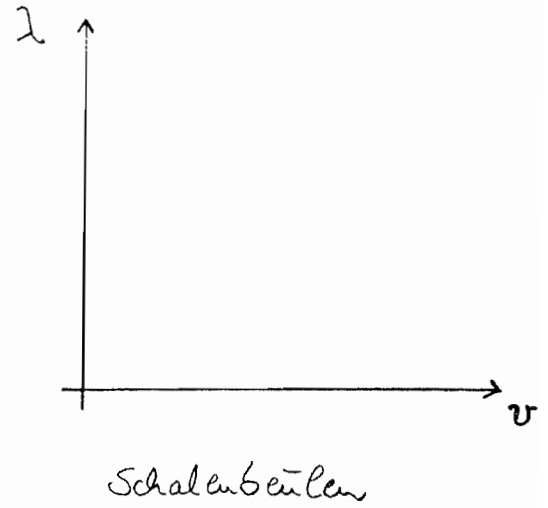
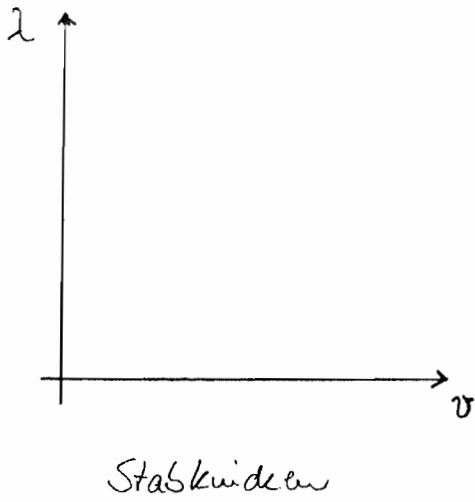


CAL-GRAF

*** Querkraft Qres ***

Beulen von Schalen am Beispiel der Zylinderschale

1 Allgemeines



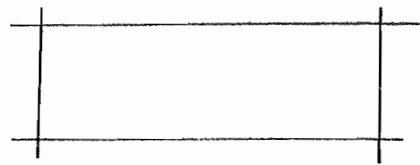
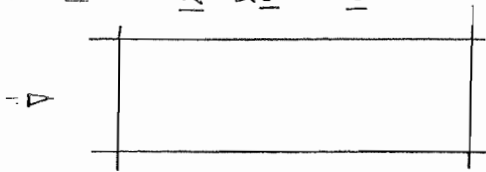
Verzweigungsproblem

$$\underline{K} \cdot \underline{v}_1 = \underline{P}_{krit} \text{ (I)}$$

$$\underline{K} \cdot \underline{v}_2 = \underline{P}_{krit} \text{ (II)}$$

Spannungsproblem

$$\text{I} - \text{II} \cdot \underline{K} \cdot \Delta \underline{v} = \underline{\sigma}$$

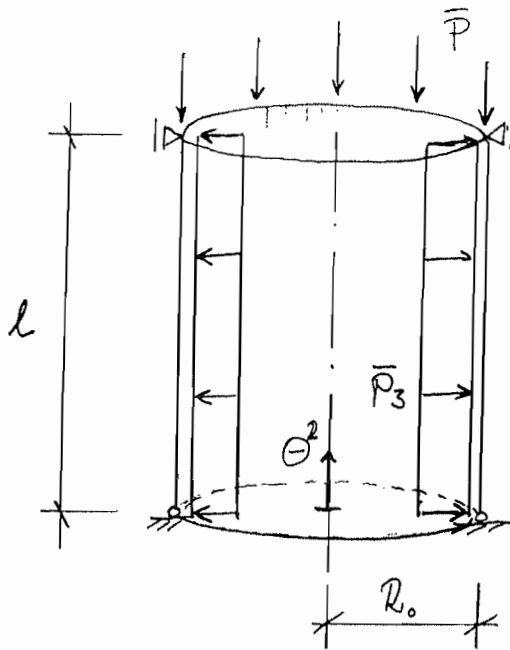


~>

... mit λ ... Eigenwert
 $\hat{=}$ Lastfaktor bis Stab.-versagen

... mit Δv ... Eigenform
 $\hat{=}$ zugehörige Beulform

2 Beispiel Zylinder der Schale



Randbedingungen:

$$v^3(\theta^2 = 0) = \sigma$$

$$v^3_{,22}(\theta^2 = 0) = \sigma$$

$$v^3(\theta^2 = l) = \sigma$$

$$v^3_{,22}(\theta^2 = l) = \sigma$$

DGL:

$$\underbrace{B \cdot v^3_{,2222}}_{\text{Biegetheorie}} + \underbrace{\frac{Et}{R_0^2} v^3 + \bar{p} v^3_{,22}}_{\text{Th. II. Ord.}} = \sigma \quad (*)$$

... zum Vergleich: Balken - DGL:

$$EJ w^{IV} + N \cdot w'' = 0$$

Lösung der DGL (*):

$$v_h^3 = C_1 \cos(n_1 \theta^2) + C_2 \sin(n_1 \theta^2) + C_3 \cos(n_2 \theta^2) + C_4 \sin(n_2 \theta^2)$$

... mit $n_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n_{22} \pm \sqrt{n_{22}^2 - 4Bk}}{B}}$

$$k = \frac{Et}{R_0^2}$$

Berechnung mit Programm 'maple':
 > restart;
 > with (linalg):

hier:
 N22 als Druckkraft positiv!

Randbedingungen
 > ma := matrix([[1,0,1,0],[-n1^2,0,-n2^2,0],[cos(n1*l),sin(n1*l),cos(n2*l),sin(n2*l)],[-n1^2*cos(n1*l),-n1^2*sin(n1*l),-n2^2*cos(n2*l),-n2^2*sin(n2*l)]]);

$$ma := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -n1^2 & 0 & -n2^2 & 0 \\ \cos(n1 l) & \sin(n1 l) & \cos(n2 l) & \sin(n2 l) \\ -n1^2 \cos(n1 l) & -n1^2 \sin(n1 l) & -n2^2 \cos(n2 l) & -n2^2 \sin(n2 l) \end{bmatrix}$$

Randbedingungen
 (1)
 (2)
 (3)
 (4)

> glei := det(ma);

$$glei := -\sin(n1 l) n2^4 \sin(n2 l) + 2 n1^2 \sin(n1 l) n2^2 \sin(n2 l) - n1^4 \sin(n1 l) \sin(n2 l)$$

> n1 := sqrt((N22+sqrt(N22^2-4*EI*k))/(2*EI));

$$n1 := \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\frac{N22 + \sqrt{N22^2 - 4 EI k}}{EI}}$$

> n2 := sqrt((N22-sqrt(N22^2-4*EI*k))/(2*EI));

$$n2 := \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\frac{N22 - \sqrt{N22^2 - 4 EI k}}{EI}}$$

> EI := Em*t^3/(12*(1-nue^2));

$$EI := \frac{Em t^3}{12 - 12 nue^2} \hat{=} \text{Biegesteifigkeit der Schale}$$

> k := Em*t/r^2;

$$k := \frac{Em t}{r^2}$$

> sols := simplify(solve({glei=0},{N22}));

> assign(sols);

> N22 := simplify(subs(sols,N22));

$$N22 := -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{3 nue^2 - 3}{r^2 t^2} Em t^3} \frac{Em t^3}{-1 + nue^2}$$

Auswertung fuer Stahlschalen:

> nue := 0.3;

> evalf(simplify(N22));

$$.6052275326 \sqrt{\frac{1}{r^2 t^2} Em t^3} \sim \text{s. DIN 18800, T4 (406):}$$

$$\sigma_{x_{si}} = 0,605 \cdot E \cdot \frac{t}{r}$$

Auswertung fuer Beispiel (DIN 18800, T4 - Bemessung):

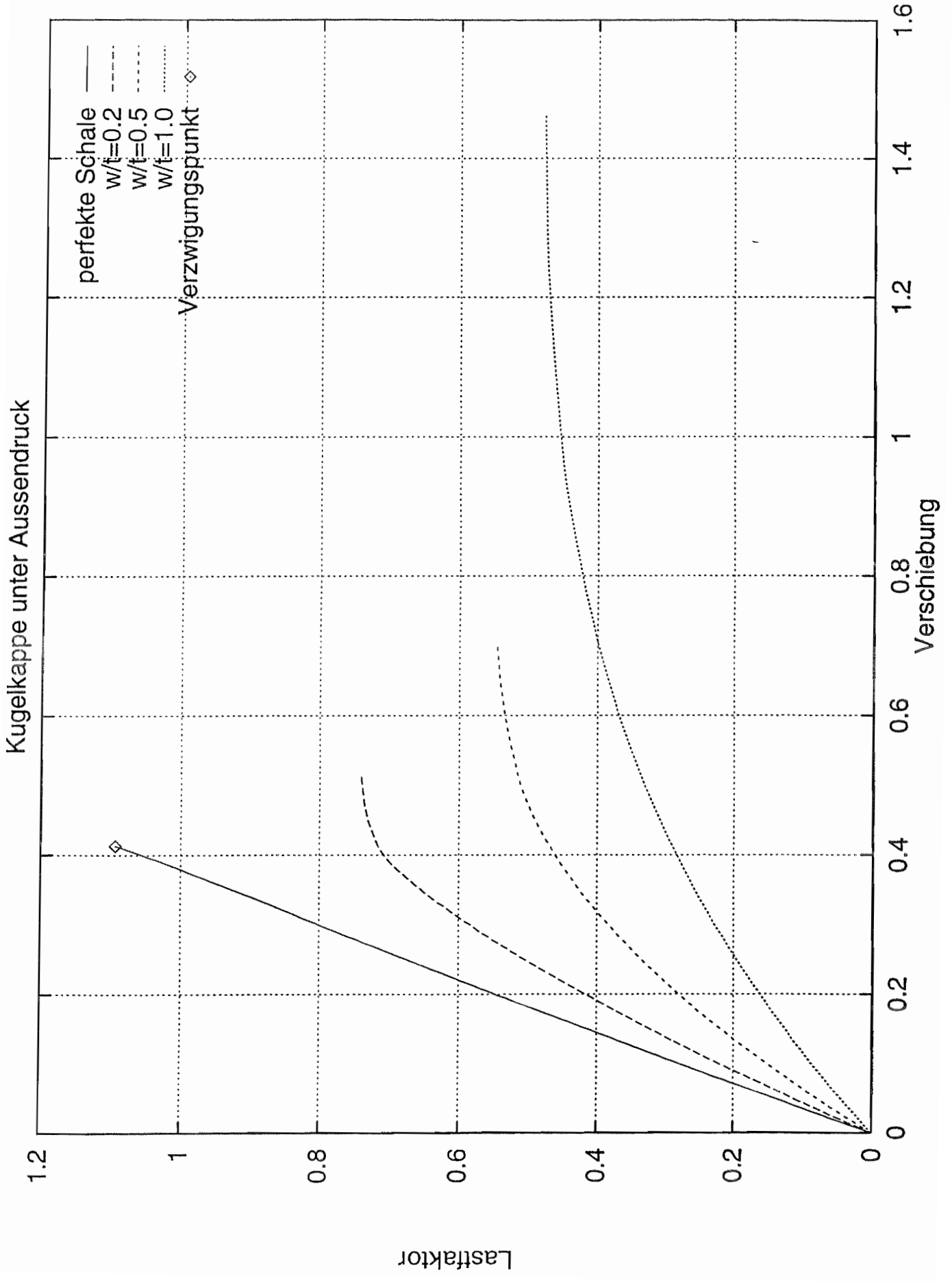
> Em := 210000:r := 3:t:=0.005:

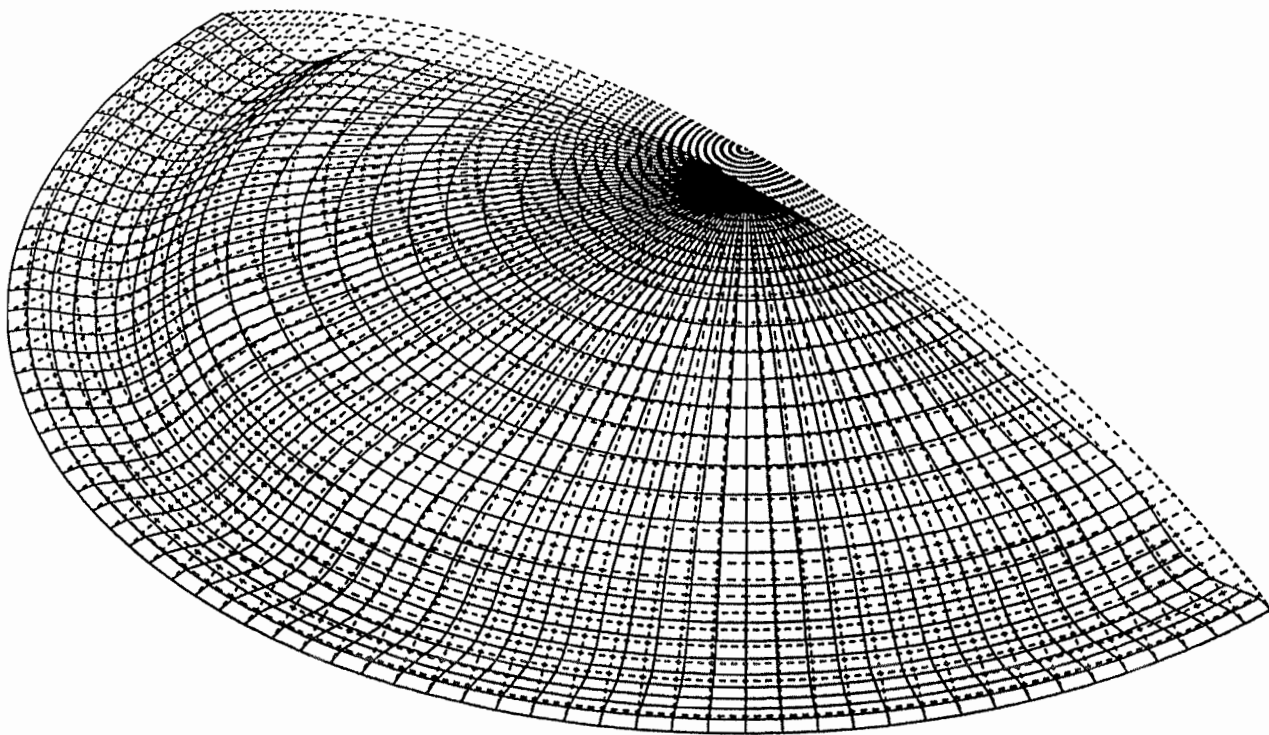
> evalf(N22);

$$1.059148182 \sim \sigma_{x_{si}} = \frac{N22}{t} = 211,82 \text{ N/mm}^2$$

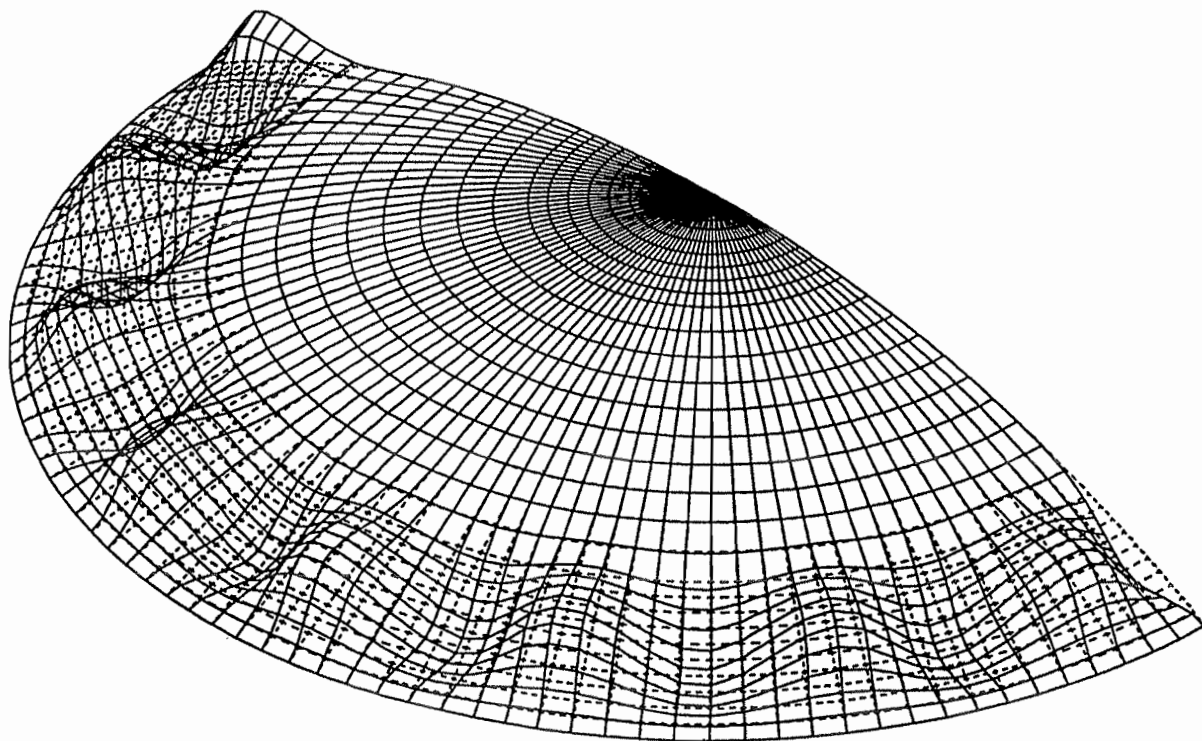
>

>

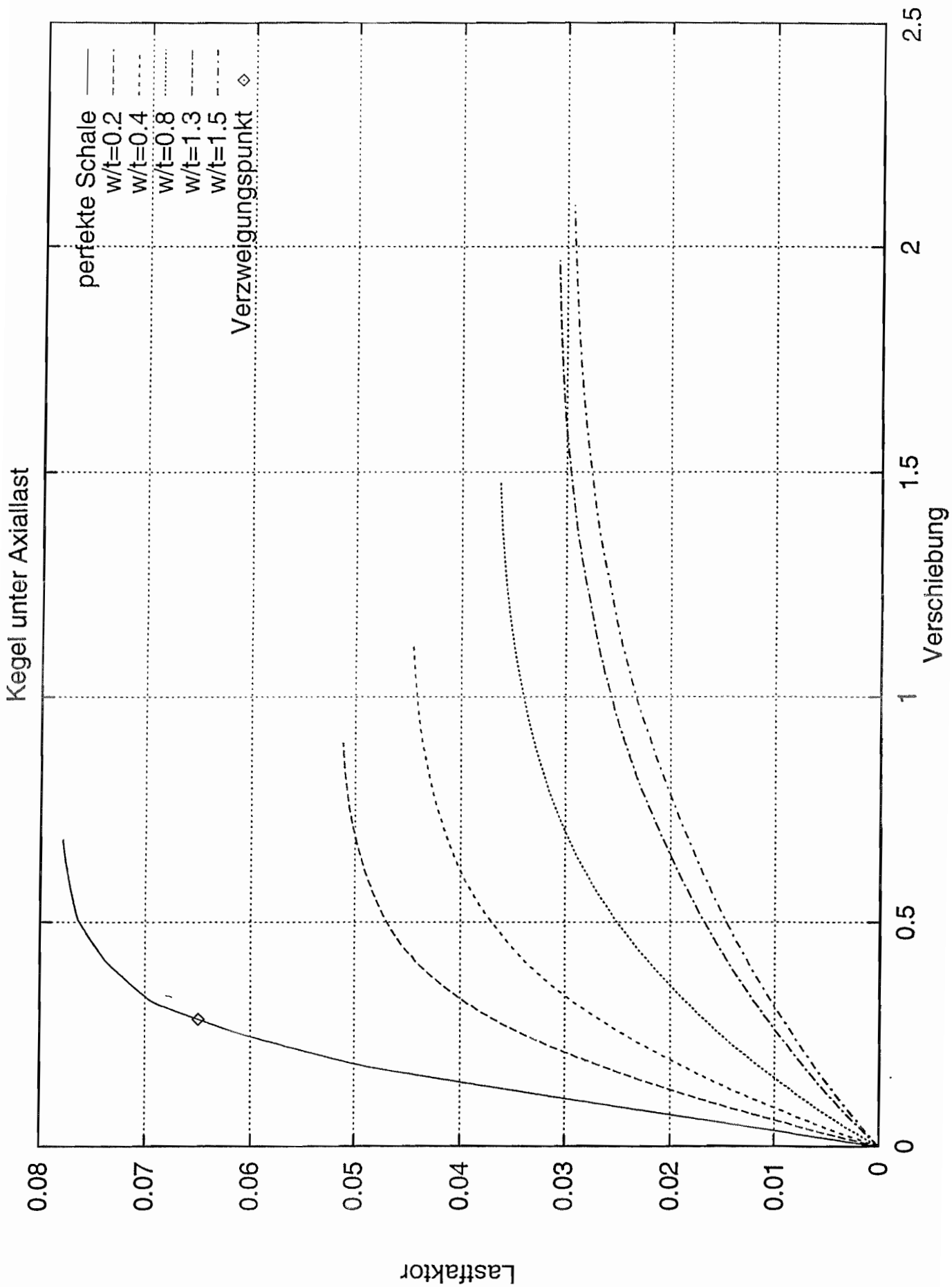


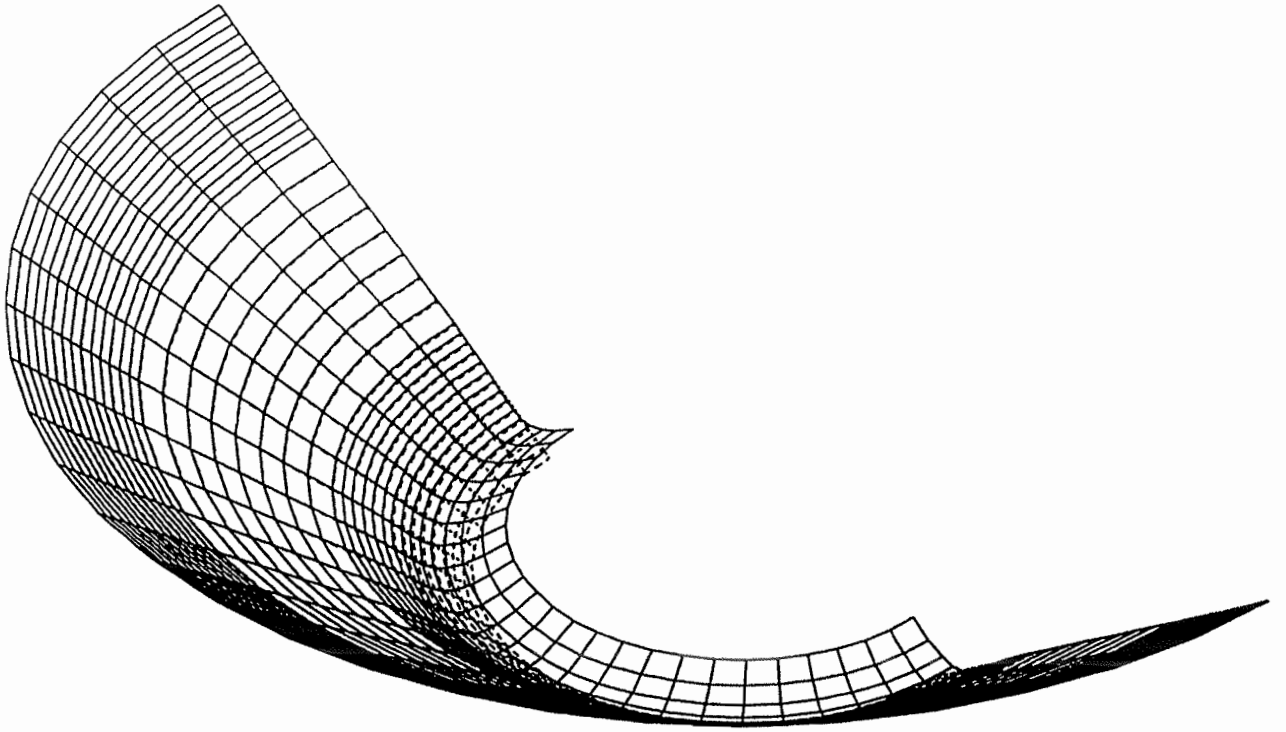


Strukturplot: Primaerpfad

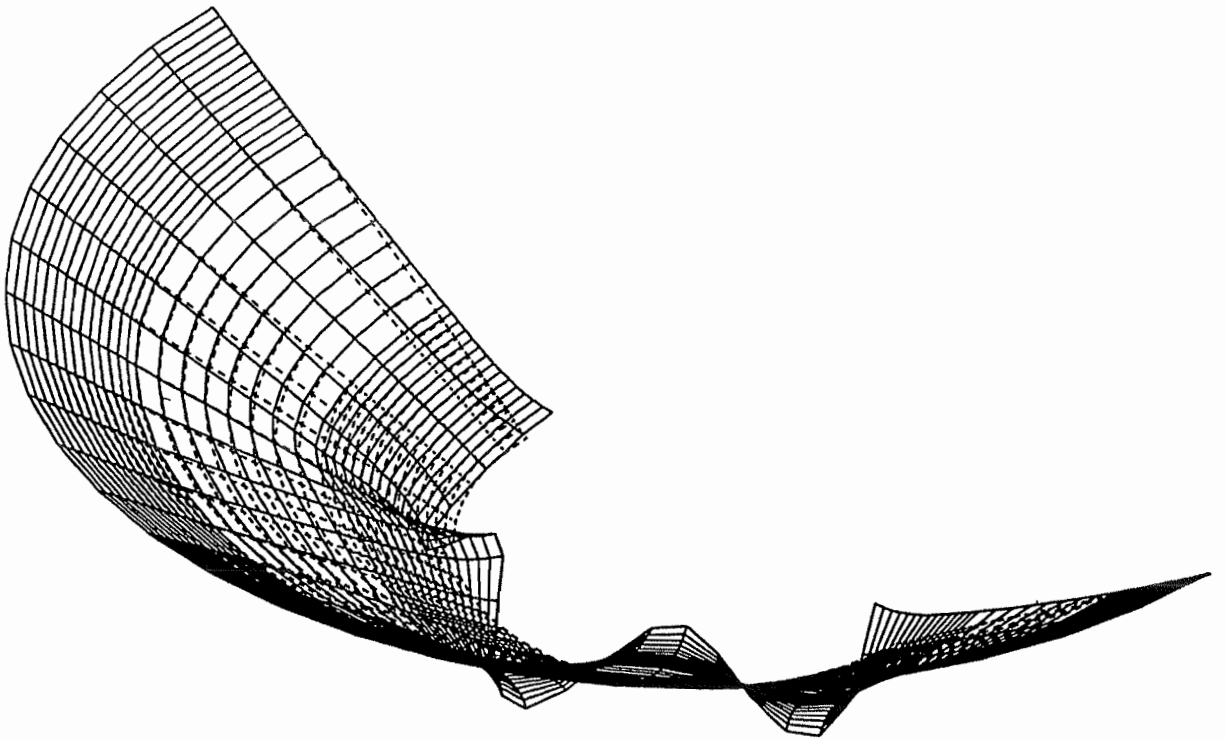


Eigenformplot





Strukturplot: Primaerpfad



Eigenformplot

► Nachweis (Drücke in Umfangstrichtung, LF2)

• Ideale Beulspannung

$$\cdot (411) : \tau_{\ell} = 600$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{\frac{E}{23 \cdot \rho_{y,k}}} = 6,17 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Nachweis erf.}$$

$$\cdot (412) : \frac{\ell}{r} = 3,33$$

$$1,63 \cdot C_{\varphi} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{t}} = 1,63 \cdot 1,25 \cdot \sqrt{600} = 49,91$$

↑ Tab. 2 (RB1, RB2)

} mittellange
kürzer Zyl.

$$\rightarrow \underline{\underline{\sigma_{\varphi,8}}} = 0,92 \cdot C_{\varphi} \cdot E \frac{\tau}{\ell} \left(\frac{t}{r}\right)^{1,5} = \underline{\underline{4,93}} \text{ N/mm}^2$$

• Reale Beulspannung

$$\cdot (202) : \lambda_{s\varphi} = \sqrt{\frac{240}{4,93}} = 6,98$$

$$\cdot (204) : (\text{normal imperfektionsempfindlich})$$

$$k_1 = \frac{0,65}{\lambda_s^2} = 0,01334$$

$$\cdot (420) :$$

$$\underline{\underline{\sigma_{\varphi,8,R,4}}} = k_1 \cdot \rho_{y,k} = 0,01334 \cdot 240 = \underline{\underline{3,20}} \text{ N/mm}^2$$

$$(\cong 0,65 \cdot \sigma_{\varphi,8} = 0,65 \cdot 4,93 = 3,20)$$

• Grenzbeulspannung

$$\cdot (206) : \gamma_{M1} = 1,1$$

$$\cdot (205) : \underline{\underline{\sigma_{\varphi,8,R,d}}} = \frac{3,20}{1,1} = \underline{\underline{2,91}} \text{ N/mm}^2$$

• Nachweis

$$\sigma_{\varphi} = \bar{P}_3 \cdot R_0 / t = 2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{3000}{5} = 1,2 \text{ N/mm}^2$$

$$\cdot (402) : \frac{\sigma_{\varphi}}{\sigma_{\varphi s, R, d}} = \frac{1,2}{2,91} = 0,41 < 1,0 \quad \checkmark$$

► Nachweis (LF3)

... Berücksichtigung des stabilisierenden Juckendruckes

$$\cdot (429) : \bar{\lambda}_{sx} = 1,065 > 1,0$$

$$\rightarrow k_{29} = k_2 \left\{ 1 + 1,2 \cdot \bar{\lambda}_{sx} \left[\frac{q_i}{E} \left(\frac{l}{t} \right)^2 \right]^{0,38} \right\} =$$

$$= 0,248 \cdot 1,148 = 0,285$$

$$\cdot (419) : \sigma_{x s, R, k} = 0,285 \cdot 240 = 68,4 \text{ N/mm}^2$$

$$\cdot (205) : \sigma_{x s, R, d} = 68,4 / 1,263 = 54,16 \text{ ---}$$

$$\cdot (207) : \frac{\sigma_x}{\sigma_{x s, R, d}} = \frac{20}{54,16} = 0,37 \quad \checkmark$$

Bem.: Vergleichsspannungsnachweis führen!

► Nachweis (LF4)

... Interaktion: Axialdruck + Äußendruck

$$\cdot (426) \quad \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{x s, R, d}} \right)^{1,25} + \left(\frac{\sigma_{\varphi}}{\sigma_{\varphi s, R, d}} \right)^{1,25} + \left(\frac{\tau}{\tau_{s, R, d}} \right)^2 \leq 1,0$$

$$\left(\frac{20}{47,13} \right)^{1,25} + \left(\frac{1,2}{2,91} \right)^{1,25} + 0 = 0,67 < 1,0 \quad \checkmark$$

Stahlbauten
Stabilitätsfälle, Schalenbeulen

DIN 18800
 Teil 4

Steel structures; stability; buckling of shells
 Constructions métalliques; stabilité; voilement des coques

Diese Norm wurde im NABAU-Fachbereich 08 Stahlbau — Deutscher Ausschuß für Stahlbau e.V. — ausgearbeitet. Mit den vorliegenden neuen Normen der Reihe DIN 18800 wurde erstmals das Sicherheits- und Bemessungskonzept der im Jahre 1981 vom NABAU herausgegebenen „Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen an bautechnische Anlagen“ (GrSiBA) verknüpft. Darüber hinaus ist auch den laufenden Entwicklungen hinsichtlich der europäischen Vereinheitlichungsbemühungen (Stichwort: EUROCODES) Rechnung getragen worden. Alle Verweise auf die Normen DIN 18800 Teil 1, Teil 2 und Teil 3 beziehen sich auf deren Ausgabe November 1990.

Inhalt

1	Allgemeine Angaben	Seite
1.1	Anwendungsbereich	15
1.2	Begriffe	15
1.3	Häufig verwendete Formelzeichen	15
1.4	Grundsätzliches zum Beulsicherheitsnachweis	16
2	Vorgehen beim Beulsicherheitsnachweis	16
3	Herstellungsgenauigkeiten	16
4	Kreiszylinderchalen mit konstanter Wanddicke	16
4.1	Formelzeichen, Randbedingungen	18
4.2	Ideale Beulspannung	18
4.2.1	Druckbeanspruchung in Axialrichtung	18
4.2.2	Druckbeanspruchung in Umfangsrichtung	18
4.2.3	Schubbeanspruchung	19
4.3	Reale Beulspannung	19
4.4	Spannungen infolge Einwirkungen	20
4.5	Kombinierte Beanspruchung	20
4.5.1	Druck in Axialrichtung	20
4.5.2	Druck in Umfangsrichtung und Schub	20
4.5.2	Druck in Meridianrichtung und Zug	20
4.5.2	Druck in Axialrichtung und Zug in Umfangsrichtung aus innerem Manteldruck	20
4.5.2	Druck in Axialrichtung und Zug in Umfangsrichtung aus innerem Manteldruck	20
5	Kreiszylinderchalen mit abgestufter Wanddicke	20
5.1	Formelzeichen, Randbedingungen	21
5.2	Ideale Beulspannung	22
5.3	Spannungen infolge Einwirkungen	22
5.3.1	Ideale Beulspannung	22
5.3.1	Druckbeanspruchung in Axialrichtung	22
5.3.2	Druckbeanspruchung in Umfangsrichtung	23

Fortsetzung Seite 2 bis 23

1 Allgemeine Angaben

1.1 Anwendungsbereich

(101) Geltungsbereich
 Diese Norm gilt für Schalenkonstruktionen aus Stahl. Sie ist stets zusammen mit DIN 18800 Teil 1 anzuwenden.

Anmerkung: Bei Berücksichtigung der entsprechenden Zahlenwerte für die Werkstoffkenngrößen können die Regelungen dieser Norm auch für Stahl bei anderen als in DIN 18800 Teil 1 angegebenen Temperaturen und für Schalen aus anderen Metallen verwendet werden. Dabei ist gegebenenfalls zu berücksichtigen, daß in dieser Norm in den Gleichungen für die ideale Beulspannung die Querkontraktionszahl mit $\mu = 0,3$ eingesetzt wurde.

(102) Tragsicherheitsnachweis

Diese Norm regelt den Tragsicherheitsnachweis für den Grenz Zustand Instabilität von unversteiften Kreiszylinder-, Kegel- und Kugelschalen bei vorwiegend ruhender Belastung. Dieser Nachweis wird als Beulsicherheitsnachweis bezeichnet.

Diese Norm darf bei entsprechender Berücksichtigung der Randbedingungen auch für kreiszylindrische, kegelförmige oder kugelförmige Schalentelle, Teillieder versteifter Schalen und Abschnitte zusammengesetzter Schalen angewendet werden.

Anmerkung 1: Unter „entsprechender Berücksichtigung der Randbedingungen“ ist beispielsweise für kreiszylindrische Schalentelle, Teillieder oder Schalenabschnitte bei Verwendung der in dieser Norm angegebenen Gleichungen für die ideale Beulspannung zu verstehen, daß ihre in Umfangsrichtung verlaufenden Ränder (Querränder) hinreichend genau als radial unverschieblich eingestuft werden können.

Anmerkung 2: Für den Beulsicherheitsnachweis versteifter Schalen gegen globales Beulen, d.h. für den Tragsicherheitsnachweis ihrer Stielen, werden z.B. in [1] Hinweise gegeben.

1.2 Begriffe

(103) Ideale Beullast

- Die ideale Beullast ist die unter den idealisierenden Voraussetzungen
- perfekte Geometrie,
 - perfekte Lasteinbringung und Lagerung,
 - unbeschränkte Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes,
 - ideal isotroper Werkstoff,
 - keine Eigenspannungen,
- nach der Elastizitätstheorie ermittelte kleinste Verzugslast.

(104) Ideale Beulspannung
 Die ideale Beulspannung ist die zur idealen Beullast gehörende Membranspannung.

(105) Reale Beulspannung
 Die reale Beulspannung ist die zur Erfassung der baupraktisch unvermeidbaren Einflüsse

- geometrische Imperfektionen,
- strukturelle Imperfektionen, sowie des
- nichtelastischen Werkstoffverhaltens

gegenüber der idealen Beulspannung abgeminderte Membranspannung. Sie entspricht dem charakteristischen Wert des Widerstandes im Grenzzustand Instabilität im Sinne von DIN 18800 Teil 1.

Anmerkung 1: Geometrische Imperfektionen sind herstellungsbedingte Abweichungen von der geometrischen Sollform (z.B. Vorbeulen, Umrundungen, Schrumpfknicke an Schweißnähten, Exzentrizitäten an Stoßstellen).

Anmerkung 2: Strukturelle Imperfektionen sind z.B. Walz- und Schweißzugspannungen sowie die inhomogenen und Anisotropie von Werkstoffeigenschaften gemäß 3. Nichtelastisches Werkstoffverhalten kann entweder ähnlich einer ideal-plastischen Spannungsdehnungslinie (ausgeprägte Streckgrenze vorhanden) oder einer verfestigungsplastischen Spannungsdehnungsline (0,2 %-Dehngrenze als Streckgrenze) vorliegen. Es hat in der Regel keinen signifikanten Einfluß auf die reale Beulspannung, wenn diese kleiner als 40 % der Streckgrenze ist.

(106) Grenzbeulspannung

Die Grenzbeulspannung ist der Bemessungswert der realen Beulspannung. Man erhält sie durch Abminderung der realen Beulspannung mit dem Teilsicherheitsbeiwert des Widerstandes.

1.3 Häufig verwendete Formelzeichen

- (107) Geometrische Größen
- t Wanddicke
 - r Breitenkreisradius der Schalenmittelfläche
 - $d = 2r$ Breitenkreisdurchmesser der Schalenmittelfläche
 - R Radius der Kugelmittelfläche
 - e_V planmäßiger Versatz der Schalenmittelflächen
 - $l_{mk}, l_{ms}, l_{m\varphi}$ Meßlängen zur Ermittlung von Herstellungsgenauigkeiten
 - U Umrundtheit
 - e unplanmäßige Exzentrizität
 - x, φ Koordinaten in der Schalenmittelfläche in Meridianrichtung (Richtung der Erzeugenden, bei Kreiszylindern identisch mit Axialrichtung) und in Umfangsrichtung
 - z Koordinate rechtwinklig zur Schalenmittelfläche
 - u, v, w Verschiebungen in den Koordinatenrichtungen x, y, z

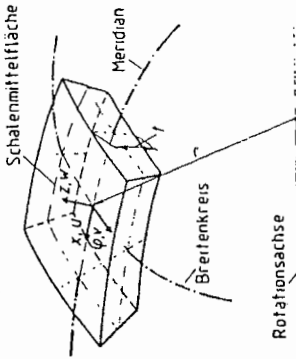


Bild 1 Geometrische Größen

Anmerkung: Weitere Formelzeichen, die jeweils den speziellen Schalentyp betreffen, stehen am Beginn der Abschnitte 4 bis 7.

(108) Physikalische Kenngrößen, Festigkeiten
 E Elastizitätsmodul
 f_y Streckgrenze
 Anmerkung: Für die Zahlenwerte von E und $f_{y,k}$ siehe DIN 18 800 Teil 1, Tabelle 1.

(109) Nebenzahlen
 Index R Widerstandsgröße
 Index k charakteristischer Wert einer Größe
 Index d Bemessungswert einer Größe
 Anmerkung: Die Begriffe „Widerstand“, „charakteristischer Wert“ und „Bemessungswert“ sind in DIN 18 800 Teil 1, Abschnitt 3.1, definiert.

(110) Lastgrößen, Beanspruchungsgrößen
 q Flächenlast, rechtwinklig zur Schalenmittelfläche, als Druck von außen oder Sog von innen positiv
 p Linienlast oder Flächenlast in Schalenmittelfläche in Axial- oder Meridiantichtung
 s Linienlast in Schalenmittelfläche in Umfangsrichtung
 $r_1, r_2, r_{\phi}, r_{x\phi}$ Membranschnittkräfte
 σ_x, σ_ϕ Membrannormalspannungen, als Druck positiv
 T Membransubspannungen

(111) Systemwerte
 $\sigma_{s,k}, \sigma_{s,R}, f_{s,k}, f_{s,R}$ Ideale Beulschwingungen
 $\sigma_{s,k}, \sigma_{s,R}, \sigma_{s,R,k}, \sigma_{s,R,k}, f_{s,k}, f_{s,R,k}$ Reale Beulschwingungen bezogener Schalenstabilitätsgrade
 $\lambda_{s,k}$ Abminderungsfaktor
 (bezogene reale Beulschwingung)
 = $\frac{\text{Streckgrenze}}{\text{Streckgrenze}}$

Anmerkung: Der Index S kennzeichnet hier (im Gegensatz zu DIN 18 800 Teil 1) das Schalenbeulen.

(112) Teilsicherheitsbeiwerte
 γ_M Teilsicherheitsbeiwert für den Widerstand
 γ_F Teilsicherheitsbeiwert für die Einwirkungen
 Anmerkung 1: Die Zahlenwerte von γ_M sind Abschnitt 2, Element 206, zu entnehmen.
 Anmerkung 2: Die Zahlenwerte für γ_F sind DIN 18 800 Teil 1 zu entnehmen.

1.4 Grundsätzliches zum Beulsicherheitsnachweis
 (113) Erforderlicher Nachweis
 Für Schalenkonstruktionen aus Stahl ist außer den Nachweisen nach DIN 18 800 Teil 1 ein Beulsicherheitsnachweis nach dieser Norm zu führen. Es ist nachzuweisen, daß die mit den Bemessungswerten der Einwirkungen ermittelte maßgebende Membranspannung die entsprechende Grenzbeulschwingung nicht überschreitet.
 Anmerkung 1: Die Regeln zur Berechnung der Bemessungswerte der Einwirkungen stehen in DIN 18 800 Teil 1, Abschnitte 7.2.1 und 7.2.2.
 Anmerkung 2: DIN 18 800 Teil 1 enthält keine speziellen Angaben für den Tragsicherheitsnachweis in Schalenkonstruktionen. Inwieweit im Vergleichs-spannungsnachweis nach DIN 18 800 Teil 1, Abschnitt 7.5.2, Element 747, neben den in jedem

Falle zu berücksichtigenden Membranspannungen auch Biegespannungen berücksichtigt werden müssen, hängt davon ab, ob sie für das Gleichgewicht erforderlich oder nicht erforderlich sind und ob sie einmalig oder wiederholt auftreten. Die einschlägigen Fachnormen enthalten zum Teil Hinweise hierzu. Hinweise zu sogenannten „Spannungskategorien“ werden z. B. in der KTA-Regel 3401.2, Fassung 6/85, gegeben.

(114) Ermittlung der realen Beulschwingung
 Die reale Beulschwingung ist nach den Regeln der folgenden Abschnitte zu ermitteln. Dies setzt voraus, daß die für die einzelnen Schalenformen angegebenen Randbedingungen vorliegen und die Toleranzwerte für die Herstellungsgenauigkeiten nach Abschnitt 3 eingehalten werden. Der beulastabmindernde Einfluß von baupraktisch unvermeidlichen Unebenheiten der Auflagerung ist erlaubt, der von ungleichmäßigen Nachgiebigkeiten der Auflagerung oder Bodensetzungen dagegen im allgemeinen noch nicht.

(115) Ebene Platten als Näherung
 Der Beulsicherheitsnachweis für Schalenkonstruktionen darf vereinfachend wie für ebene Platten unter Vernachlässigung der Krümmung, aber mit Berücksichtigung der Lagerungsbedingungen und der für die Schale berechneten Membranschnittkräfte, geführt werden.

2 Vorgehen beim Beulsicherheitsnachweis

(201) Ideale Beulschwingungen
 Es sind die idealen Beulschwingungen $\sigma_{s,k}, \sigma_{s,R}$ und $f_{s,k}, f_{s,R}$ in den Abschnitten 4 bis 7 angegebenen Gleichungen zu ermitteln.

Die idealen Beulschwingungen dürfen auch durch geeignete Berechnungsverfahren (z. B. Finite-Element-Methode) ermittelt werden, sofern sichergestellt ist, daß diese die kritischen Beulmuster (das heißt die zum niedrigsten Eigenwert führenden Eigenformen) zuverlässig auffinden.

Anmerkung: Die in den Abschnitten 4 bis 7 angegebenen Gleichungen für die idealen Beulschwingungen wurden überwiegend mit der klassischen linearen Beultheorie ermittelt. Berechnungen, die den zur Gleichgewichtsverzweigung führenden Beanspruchungszustand der perfekten Schale (Vorbeulzustand) genauer erfassen, können auch kleinere ideale Beulschwingungen liefern. Diese brauchen nicht angestrebt zu werden, da die Differenz zu den mit den Gleichungen der Norm ermittelten idealen Beulschwingungen mit den Abminderungsfaktoren nach Element 204 abgedeckt ist.

(202) Bezogene Schalenstabilitätsgrade
 Mit den idealen Beulschwingungen sind die bezogenen Schalenstabilitätsgrade $\lambda_{s,k}$ mit den Gleichungen (1) bis (3) zu bestimmen.

$$\lambda_{s,k} = \sqrt{\frac{f_{s,k}}{\sigma_{s,k}}} \quad (1)$$

$$\lambda_{s,R} = \sqrt{\frac{f_{s,R}}{\sigma_{s,R}}} \quad (2)$$

$$\lambda_{s,R,k} = \sqrt{\frac{f_{s,R,k}}{1,3 \cdot f_{s,R}}} \quad (3)$$

Anmerkung: Der bezogene Schalenstabilitätsgrad $\lambda_{s,k}$ in dieser Norm entspricht stabilitätstheoretisch den bezogenen Stabilitätsgraden λ_k und $\lambda_{k,M}$ in DIN 18 800 Teil 2 und dem bezogenen Plattenstabilitätsgrad λ_P in DIN 18 800 Teil 3. Er ist nicht identisch mit dem bezogenen Schalenstabilitätsgrad λ_s in der früheren DASI-Richtlinie 013.

(203) Reale Beulschwingungen
 In Abhängigkeit von den bezogenen Schalenstabilitätsgraden $\lambda_{s,k}$ sind Abminderungsfaktoren $\lambda_{s,R,k}$ und $\lambda_{s,R}$ zu ermitteln. Die realen Beulschwingungen $\sigma_{s,R,k}, \sigma_{s,R}$ und $f_{s,R,k}, f_{s,R}$ ergeben sich durch Multiplikation der Abminderungsfaktoren mit dem charakteristischen Wert der Streckgrenze nach den Gleichungen (4) bis (6).

$$\sigma_{s,R,k} = \lambda_{s,R,k} \cdot \sigma_{s,k} \quad (4)$$

$$\sigma_{s,R} = \lambda_{s,R} \cdot \sigma_{s,k} \quad (5)$$

$$f_{s,R,k} = \lambda_{s,R,k} \cdot f_{s,k} \quad (6)$$

Anmerkung: Die Vorgehensweise mit Abminderungsfaktoren, die auf die Streckgrenze bezogen sind und die Abhängigkeit von bezogenen Schalenstabilitätsgraden bestimmen, stimmt mit der Vorgehensweise bei anderen Stabilitätsfällen in Stahlbauten überein (siehe DIN 18 800 Teile 2 und 3).

(204) Abminderungsfaktoren
 Die Abminderungsfaktoren $\lambda_{s,R}$ ergeben sich je nach Schalenart und Beanspruchungstyp aus den Gleichungen (7) oder (8). Die Zuordnung erfolgt in den Abschnitten 4.3, 5.4, 6.3 und 7.3.

Normal imperfektionsempfindliche Schalenbeulfälle:
 $\lambda_{s,R} \leq 0,4: \lambda_{s,R} = 1$ (7 a)
 $0,4 < \lambda_{s,R} \leq 1,2: \lambda_{s,R} = 1,274 - 0,686 \lambda_{s,R}$ (7 b)
 $1,2 < \lambda_{s,R}: \lambda_{s,R} = 0,657 \lambda_{s,R}$ (7 c)

Sehr imperfektionsempfindliche Schalenbeulfälle:
 $\lambda_{s,R} \leq 0,25: \lambda_{s,R} = 1$ (8 a)
 $0,25 < \lambda_{s,R} \leq 1,0: \lambda_{s,R} = 1,233 - 0,933 \lambda_{s,R}$ (8 b)
 $1,0 < \lambda_{s,R} \leq 1,5: \lambda_{s,R} = 0,37 \lambda_{s,R}$ (8 c)
 $1,5 < \lambda_{s,R}: \lambda_{s,R} = 0,27 \lambda_{s,R}$ (8 d)

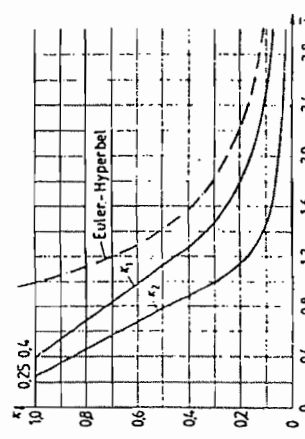


Bild 2. Abminderungsfaktoren $\lambda_{s,R}$ (bezogene reale Beulschwingungen) für Schalenbeulen (Grundbeulformen)

Anmerkung: Die Abminderungsfaktoren $\lambda_{s,R}$ erfassen den Einfluß der geometrischen und strukturellen Imperfektionen sowie des nichtelastischen Werkstoffverhaltens (vergleiche hierzu Anmerkungen zu Abschnitt 1, Element 105). Dabei wird die unterschiedliche Imperfektionsempfindlichkeit verschiedener Schalenarten und Beanspruchungsfälle durch die beiden unterschiedlich großen Abminderungsfaktoren $\lambda_{s,R}$ und $\lambda_{s,R,k}$ (Grundbeulformen) berücksichtigt.

(205) Grenzbeulschwingungen
 Die Grenzbeulschwingungen sind nach den Gleichungen (9) bis (11) zu ermitteln:

$$\sigma_{s,R,k,d} = \sigma_{s,R,k} / \gamma_M \quad (9)$$

$$\sigma_{s,R,d} = \sigma_{s,R} / \gamma_M \quad (10)$$

$$f_{s,R,k,d} = f_{s,R,k} / \gamma_M \quad (11)$$

mit γ_M nach Element 206.

(206) Teilsicherheitsbeiwerte für den Widerstand
 Die Teilsicherheitsbeiwerte γ_{M} ergeben sich je nach Schalenart und Beanspruchungstyp aus den Gleichungen (12) oder (13).

Normal imperfektionsempfindliche Schalenbeulfälle, bei denen die reale Beulschwingung mit $\lambda_{s,R}$ ermittelt wurde:

$$\gamma_{M1} = 1,1 \quad (12)$$

Sehr imperfektionsempfindliche Schalenbeulfälle, bei denen die reale Beulschwingung mit $\lambda_{s,R,k}$ ermittelt wurde:

$$\lambda_{s,R} \leq 0,25: \gamma_{M2} = 1,1 \quad (13 a)$$

$$0,25 < \lambda_{s,R} \leq 2,00: \gamma_{M2} = 1,1 \left(1 + 0,3 \cdot 18 \frac{\lambda_{s,R} - 0,25}{1,75} \right) \quad (13 b)$$

$$2,00 < \lambda_{s,R}: \gamma_{M2} = 1,45 \quad (13 c)$$

Anmerkung: Der erhöhte Teilsicherheitsbeiwert γ_{M2} berücksichtigt die besonders große Streuung der experimentellen Beullasten von mittellangen dünnwandigen Kreiszylindern und Kegelschalen unter konstanter Druckbeanspruchung in Axial- bzw. Meridiantichtung und von dünnwandigen Kugelschalen unter konstantem Außendruck, die der Festlegung der Grundbeulform $\lambda_{s,R}$ zugrunde gelegt wurden. Die besonders große Streuung der experimentellen Beullasten hat ihre Ursache im ungünstigen Nachbeulverhalten dieser Schalenformen und ihrer daraus resultierenden extremen Imperfektionsempfindlichkeit.

Für Sonderfälle, bei denen sich das ungünstige Nachbeulverhalten und die extreme Imperfektionsempfindlichkeit nicht einstellen können (z. B. schmale Teillieder längsverstärkter Kreiszylinder oder kurze Kreiszylinder unter Axialdruckbeanspruchung), kann auch ein geringerer γ_{M2} -Wert gerechtfertigt sein.

(207) Einzelnachweise
 Es sind je nach Beanspruchungstyp einer oder mehrere der folgenden Einzelnachweise zu führen

$$\frac{\sigma_{s,R,k,d}}{\sigma_{s,R,k,d}} \leq 1 \quad (14)$$

$$\frac{\sigma_{s,R,d}}{\sigma_{s,R,d}} \leq 1 \quad (15)$$

$$\frac{f_{s,R,k,d}}{f_{s,R,k,d}} \leq 1 \quad (16)$$

(304) Exzentrizitäten
Unplanmäßige Exzentrizitäten e an Stoßstellen der Schalwand bedingt durch die Druckbeanspruchungsrichtung sollen Bedingung (22) einhalten.

(22 a) $e \leq 0,2 \cdot t$
jedoch
(22 b) $e \leq 3 \text{ mm}$

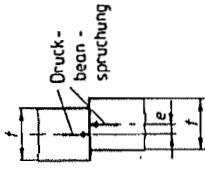


Bild 6. Exzentrizität

(305) Überschreitung der Toleranzwerte
Werden die Toleranzwerte nach den Elementen 302 bis 304 überschritten, so ist im Einzelfall zu entscheiden, ob Nacharbeiten oder andere Maßnahmen erforderlich sind. Der Zustand darf ohne besondere Maßnahmen belassen werden, wenn die Toleranzwerte nicht mehr als bis zu ihrem doppelten Wert überschritten werden und der Beulungsrisikofaktor mit einem reduzierten Abminderungsfaktor nach Gleichung (23) geführt wird.

(23 a) $\text{red } k = k \cdot \left[1 - \frac{\lambda_s}{3} \cdot \left(\frac{\text{vorh } a}{\text{zul } a} - 1 \right) \right]$
für $\lambda_s < 1,5$
bzw.
(23 b) $\text{red } k = k \cdot \left(1,5 - 0,5 \cdot \frac{\text{vorh } a}{\text{zul } a} \right)$
für $\lambda_s \geq 1,5$

Hierin bedeuten:
 k : Abminderungsfaktor nach den Gleichungen (7) bzw. (8)
zul a: zulässige Vorbeulte z zu t , nach Element 302 oder zulässige Unrundheit zu U nach Element 303 oder zulässige Exzentrizität zu e nach Element 304
vorh a: vorhandene Vorbeulte z oder vorhandene Unrundheit U oder vorhandene Exzentrizität e (zu a s. vorh a s. 2 zu a)

Werden die Toleranzwerte mehrerer Arten von Herstellungsgenauigkeiten gleichzeitig überschritten, so genügt es, die ungünstigste Einzelüberschreitung vor a zu a in Gleichung (23) einzusetzen.

Anmerkung 1: Vor der Entscheidung für Richtarbeiten sollte stets bedacht werden, daß dabei zusätzliche Eigenspannungen entstehen können. Es sollte auch der Ausnutzungsgrad in Betracht gezogen werden. In Zweifelsfällen ist es empfehlenswert, den Aufsteiler der statischen Berechnung hinzuzuziehen.
Anmerkung 2: Gleichung (23) stellt eine auf der sicheren Seite liegende Abschätzung des von den zu großen geometrischen Imperfektionen zusätzlich verursachten Abfalls der realen Beulspannungen dar.

Anmerkung 1: Die Meßlängen entsprechen in ihrer Größenordnung den Abmessungen einer Baule des kritischen Nachbeulmusters der Kugel unter Außendruck (t_{mk}) des Kreiszylinders unter Axialdruck (t_{mp}) bzw. des Kreiszylinders unter Außendruck (t_{mp}).

Anmerkung 2: Bei Kegelschalen wird für die Messung in Umfangsrichtung die Meßlehre in der Ebene des Breitenkreises angesetzt. Die Messung der Vorbeulte z darf aber normal zum Meridian erfolgen (siehe Bild 4).

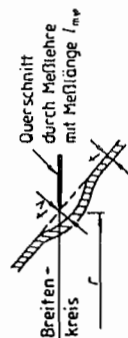


Bild 4. Messung der Vorbeulte in Umfangsrichtung bei Kegelschalen

(303) Unrundheit
Die Unrundheit U soll Bedingung (20) einhalten.

(20) $U = 2 \cdot \frac{\max d - \min d}{\max d + \min d} \cdot 100 \leq \text{zul } U$

Hierin sind $\max d$ und $\min d$ der jeweils größte und kleinste gemessene Durchmesser (siehe Bild 5) und $\text{zul } U$ die zulässige Unrundheit nach Gleichung (21).
(21 a) $\text{zul } U = 2,0\%$
für $d \leq 500 \text{ mm}$,
(21 b) $\text{zul } U = 0,5\%$
für $d \geq 1250 \text{ mm}$.

Zwischen $d = 500 \text{ mm}$ und $d = 1250 \text{ mm}$ ist linear zu interpolieren.

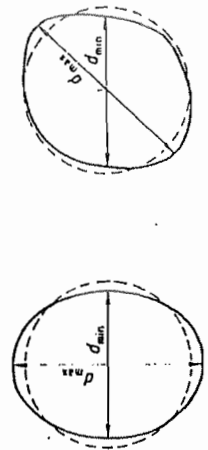


Bild 5. Unrundheit

Hierin bedeuten:
 σ_x, σ_τ : maßgebende Membrandruck- und - Schubspannungen infolge der Bemessungswerte der Einwirkungen, berechnet nach der Elastizitätstheorie

(208) Nachweis bei kombinierter Beanspruchung
Bei Vorhandensein von mehr als einer der drei beulauflösenden Membranspannungen (Druck in Axial- bzw. Meridianrichtung, Druck in Umfangsrichtung, Schub) ist außer den Einzelnachweisen ein Nachweis unter kombinierter Beanspruchung mit den jeweils angegebenen maßgebenden Membranspannungen und Interaktionsbedingungen zu führen (siehe Abschnitte 4.5, 5.6, 6.5, 7.5).

3 Herstellungsgenauigkeiten

(301) Toleranzwerte
Die in dieser Norm angegebenen realen Beulspannungen gelten nur, wenn die unvermeidbaren Herstellungsgenauigkeiten die in den Elementen 302 bis 304 angegebenen Toleranzwerte nicht überschreiten. Sie sind durch Stichproben zu überprüfen.

Anmerkung 1: Angaben zum Vorgehen bei Überschreitung der Toleranzwerte sind in Element 305 gemacht.
Anmerkung 2: Die Toleranzwerte sind im allgemeinen nicht geeignet, als Grundlage für Imperfektions-Rechnungen zu dienen.

(302) Vorbeulen
Die Teile z von Vorbeulen (Vorbeulte) soll den Wert von 1% der Meßlänge nicht überschreiten. Die Meßlänge (siehe Bild 3) beträgt

— bei Kugelschalen in beliebiger Richtung
 $t_{mk} = 4 \cdot l \cdot r \cdot t$ (17)
— bei Kreiszylinder- und Kegelschalen in Meridianrichtung
 $t_{mx} = 4 \cdot l \cdot r \cdot t$ (18)
— bei Kreiszylinder- und Kegelschalen in Umfangsrichtung
 $t_{my} = 2,3 \cdot r \cdot \frac{t}{\sqrt{t}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t}}$ (19 a)

jedoch $t_{my} \leq r$ (19 b)

Die Meßlänge darf in allen drei Fällen auf 2000 mm begrenzt werden.
Im Bereich von Schweißnähten beträgt die Meßlänge höchstens 500 mm.

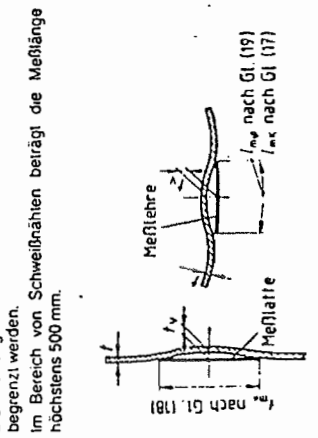


Bild 3 Meßlängen und Vorbeulen

(306) Unterschreitung der Nenndicke
Bei Wanddicken $t < 5 \text{ mm}$ ist der Beulsicherheitsnachweis statt mit t mit der effektiven Wanddicke t_{eff} nach Gleichung (24) zu führen.

(24) $t_{eff} = t - 0,5 \cdot \Delta t$
Hierin bedeutet:
 Δt : zulässige Unterschreitung der Nenndicke nach jeweiliger Liefernorm

Bei Bleichen mit bestellter Mindestwanddicke und entsprechenden Abnahmeprüfzeugnissen 3.1 A, B oder C oder Abnahmeprüfprotokollen 3.2 A oder C nach DIN 50 049 darf der Beulsicherheitsnachweis mit der beschleunigten Mindestwanddicke geführt werden.

4 Kreiszylinderschalen mit konstanter Wanddicke

4.1 Formelzeichen, Randbedingungen
(401) Geometrische Größen

- l : Zylinderlänge
- r : Radius der Zylindermittelfläche

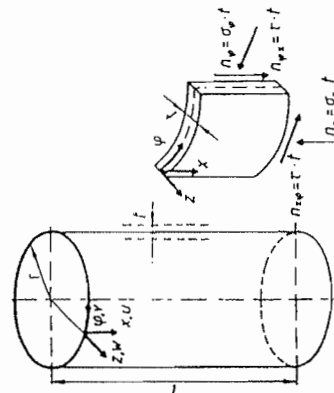


Bild 7. Geometrie und Membranschnittkräfte des Kreiszylinders

Anmerkung: Zusätzlich zur Konstanz der Wanddicke wird in diesem Abschnitt vorausgesetzt, daß an keiner Stelle (beispielsweise an Stößen) ein planmäßiger Versatz vorhanden ist. Angaben zur näherungsweise Behandlung „abgeplatteter“ Kreiszylinderschalen sind in Abschnitt 5.4, Element 514 gemacht.

(402) Beanspruchungsgrößen, Beulspannungen

- a) Druckbeanspruchung in Axialrichtung
 - σ_x : Axialdruckspannung
 - $\sigma_{s,i}$: ideale Axialbeulspannung
 - $\sigma_{s,r,k}$: reale Axialbeulspannung
- b) Druckbeanspruchung in Umfangsrichtung
 - σ_θ : Umfangsdruckspannung
 - $\sigma_{\theta,i}$: ideale Umfangsbeulspannung
 - $\sigma_{\theta,s,r,k}$: reale Umfangsbeulspannung
- c) Schubbeanspruchung
 - τ : Schubspannung
 - $\tau_{s,i}$: ideale Schubbeulspannung
 - $\tau_{s,r,k}$: reale Schubbeulspannung

Anmerkung: Beispiele für die verschiedenen Beanspruchungen sind in den Bildern 8 bis 10 angegeben.

$P = 2 \pi r p$
 $M = \pi r^2 \max p$
 $M = \pi r^2 \max p$
 $\sigma_x = \frac{P}{2 \pi \cdot r \cdot l}$
 $\max \sigma_x = \frac{M}{\pi \cdot r^2 \cdot l}$

a) konstante Axiallast (z. B. aus Deckdruck bei allseitigem Außendruck)

b) in Umlängsrichtung sinusförmig veränderliche Axiallast aus Rohrbiegung

c) in Längsrichtung veränderliche Axiallast (z. B. Silobelastung)

Bild 8. Beispiele für Druckbeanspruchung in Axialrichtung

$\sigma_y = q \cdot r / l$
 $\sigma_y = q(x) \cdot r / l$

a) Konstanter rotationsymmetrischer Manteldruck (z. B. aus allseitigem Außendruck oder innerem Unterdruck)

b) in Längsrichtung veränderlicher rotationsymmetrischer Manteldruck

Bild 9. Beispiele für Druckbeanspruchung in Umlängsrichtung

$M_T = 2 \pi r^2 s$
 $M_T = 2 \pi r^2 s$
 $V = \pi r \cdot \max s$
 $V = \pi r \cdot \max s$
 $\max \sigma_{xy} = \frac{V}{\pi \cdot r \cdot l}$

a) Konstante Schubbeanspruchung aus Torsion

b) in Umlängsrichtung sinusförmig veränderliche Schubbeanspruchung aus Querkraft (Die aus Gleichgewichtsgründen am Rand in Axialrichtung angreifende Membrannormalspannung aus Rohrbiegung ist aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht eingezeichnet)

Bild 10. Beispiele für Schubbeanspruchung

(403) Randbedingungen
 Es werden die folgenden Randbedingungen (RB) unterschieden:

- RB 1: radial unverschieblicher, axial unverschieblicher (wölbhindernder), bei kurzen Kreiszylinderschalen zusätzlich eingespannter Rand
- RB 2: radial unverschieblicher, axial verschieblicher (wölbireiner, gelenkiger Rand)
- RB 3: freier Rand

Anmerkung 1: Die Begriffe „verschieblich“ und „unverschieblich“ beziehen sich auf relative Verschiebungen des Schalenrandes bezüglich des Randkreises (radial) bzw. der Randkreisebene (axial), nicht auf Starrkörperverschiebungen des gesamten Randkreises.

Anmerkung 2: Radiale Unverschieblichkeit kann beispielsweise für Behälter bei Aussteifung durch Bodenbleche oder Dachschalen bzw. Dachgespärre angenommen werden (siehe Bild 11 a bis d). Beim Teilnachweis ringverstärkter Schalen ist sie an den Ringsteifen, welche Knotenlinien der Beulfigur bilden (siehe Bild 11f), ebenfalls gegeben. Die Stabilität der Ringsteifen ist gesondert nachzuweisen; Hinweise dazu werden z. B. in [1] gegeben.

Anmerkung 3: Axiale Unverschieblichkeit liegt bei Verankerung der Ränder oder deren Einbindung in stützende Endplatten vor.

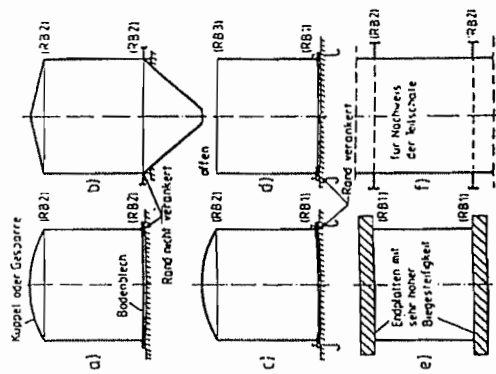


Bild 11 Konstruktive Erläuterungen und Beispiele zu den Randbedingungen

4.2 Ideale Beulspannung
 4.2.1 Druckbeanspruchung in Axialrichtung
 (404) Voraussetzung
 Die folgenden Gleichungen für die ideale Beulspannung gelten nur für radial unverschiebliche Ränder (RB 1 oder RB 2)

(405) Kein Nachweis erforderlich
 Für Kreiszylinder nach Gleichung (25) braucht kein Beulspannungsnachweis geführt zu werden.

$$\frac{r}{t} \leq 25 \sqrt{f_{yk}} \quad (25)$$

Anmerkung: Der nach DIN 18800 Teil 2 zu führende Nachweis der Biegeknicksicherheit bleibt hiervon unberührt.

(406) Kreiszylinder allgemein
 Für Kreiszylinder mit Druckbeanspruchung in Axialrichtung ist die ideale Beulspannung $\sigma_{x,i}$ mit Gleichung (26) zu bestimmen.

$$\sigma_{x,i} = 0,605 C_x \cdot E \cdot \frac{t}{r} \quad (26)$$

Der Beiwert C_x ist in Abhängigkeit von der Schalendicke nach den Elementen 407 oder 408 zu bestimmen.
 Anmerkung: Gleichung (26) ergibt sich auf der Basis der klassischen linearen Beultheorie für die Kreiszylinderschale unter konstanter Axiallast (siehe Bild 8a).

(407) Mittellange und kurze Kreiszylinder
 Für mittellange und kurze Kreiszylinder nach Bedingung (27) gilt C_x nach Gleichung (28).

$$\frac{l}{r} \leq 0,5 \sqrt{\frac{r}{t}} \quad (27)$$

$$C_x = 1 + 1,5 \left(\frac{l}{r} \right)^2 \quad (28)$$

C_x darf auch gleich 1 gesetzt werden.
 Anmerkung: Der Beiwert C_x nach Gleichung (28) erlaubt den asymptotischen Übergang der idealen Axialbeulspannung der kurzen Kreiszylinderschale unter konstanter Axiallast mit RB 2 nach Abschnitt 4.1, Element 403, in die ideale Beulspannung der gelenkig gelagerten, breiten Rechteckplatte (knickstabähnliches Plattenbeulen, siehe Bild 12).

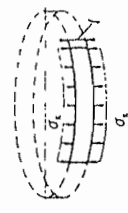


Bild 12. Plattenbeulen als Grenzfall der kurzen Kreiszylinderschale mit Druckbeanspruchung in Axialrichtung

(408) Lange Kreiszylinder
 Für lange Kreiszylinder nach Bedingung (29) ist der Beiwert C_x in Abhängigkeit von den Randbedingungen mit / nach Tabelle 1 mit Gleichung (30) zu bestimmen

$$\frac{l}{r} > 0,5 \sqrt{\frac{r}{t}} \quad (29)$$

$$C_x = 1 + \frac{0,4 \sqrt{\frac{l}{r}}}{\frac{r}{t} \cdot 0,2} \quad (30)$$

jedoch $C_x \geq 0,6$.

Tabelle 1. Bewerte η zur Ermittlung der idealen Axialbeulspannungen bei langen Kreiszyllindern

Fall	Kombination der Randbedingungen nach Abschnitt 4.1, Element 403	Bewert η
1	RB 1 RB 1	6
2	RB 2 RB 1	3
3	RB 2 RB 2	1

Anmerkung: Der Bewerter C_ϕ nach Gleichung (30) erlaubt näherungsweise den Abfall der auf der Basis der klassischen linearen Beultheorie ermittelten idealen Beulspannung im Übergangsbereich vom mittellangen Kreiszyllinder zum Knickstab.

(409) Knicken von langen Kreiszyllindern
Für lange Kreiszyllinder nach Bedingung (29) ist außer dem Beulstabilitätsnachweis nach dieser Norm der Nachweis der Biegeknickeisicherheit nach DIN 18800 Teil 2 zu führen. Eine Interaktion mit dem Schalenbeulen braucht dabei nicht berücksichtigt zu werden.

Anmerkung: Implizit wird eine gewisse Interaktion dadurch berücksichtigt, daß die in den Beulstabilitätsnachweis nach Gleichung (14) einzuführende größte Membranspannung σ_x bei langen Kreiszyllindern (rohrförmigen Stäben), die die Abgrenzungskriterien in DIN 18800 Teil 1, Abschnitt 7.5.1, Element 739, nicht enthalten, sowieso aus Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung zu ermitteln ist.

(410) Sehr lange Kreiszyllinder

Außer bei Einhaltung von Bedingung (25) braucht auch für sehr lange Kreiszyllinder (rohrförmige Stäbe) nach Bedingung (31) unter planmäßig mittigem Druck kein Beulstabilitätsnachweis geführt zu werden.

$$\frac{f_k}{r} \leq 10 \sqrt{\frac{r}{t}} \quad (31)$$

mit f_k Knicklänge nach DIN 18800 Teil 2
Anmerkung 1: Der nach DIN 18800 Teil 2 zu führende Nachweis der Biegeknickeisicherheit bleibt hiervon unberührt.

Anmerkung 2: Gleichung (31) ergibt sich näherungsweise aus dem Gleichsetzen der Beanspruchbarkeiten des planmäßig mittig gedrückten rohrförmigen Stabes nach DIN 18800 Teil 2 (Knickspannungsformel a) und der langen Kreiszyllinderschale unter Axialdruckbeanspruchung (Abminderungsfaktor k_2 nach Gleichung (8) mit $C_\phi = 0.6$ nach Gleichung (30)).

4.2.2 Druckbeanspruchung in Umfangsrichtung

(411) Kein Nachweis erforderlich
Für Kreiszyllinder nach Bedingung (32) braucht kein Beulstabilitätsnachweis geführt zu werden.

$$\frac{r}{t} \leq 23 \sqrt{f_{y,k}} \quad (32)$$

(412) Mittellange und kurze Kreiszyllinder

Für mittellange und kurze Kreiszyllinder nach Bedingung (33) ist die ideale Beulspannung $\sigma_{\phi,si}$ mit Gleichung (34) zu bestimmen, wobei der Bewerter C_ϕ in Abhängigkeit von den Randbedingungen Tabelle 2 zu entnehmen ist.

Anmerkung: Gleichung (36) erlaubt auf der Basis der klassischen linearen Beultheorie den Übergang zum unter Radialbelastung ausknickenden Kreisring als dem Grenzfalle der langen Kreiszyllinderschale unter konstantem Mäneldruck.

4.2.3 Schubbeanspruchung

(414) Voraussetzung
Die folgenden Gleichungen für die ideale Beulspannung gelten nur für radial unverschiebbare Ränder (RB 1 oder RB 2).

(415) Kein Nachweis erforderlich
Für Kreiszyllinder nach Bedingung (37) braucht kein Beulstabilitätsnachweis geführt zu werden.

$$\frac{r}{t} \leq \left(\frac{E}{15 f_{y,k}} \right)^{0,67} \quad (37)$$

(416) Mittellange und kurze Kreiszyllinder

Für mittellange und kurze Kreiszyllinder nach Bedingung (38) ist die ideale Beulspannung $\tau_{S,R,k}$ nach Gleichung (39) mit $C_r = 1$ zu bestimmen.

$$\frac{t}{r} \leq 8,7 \sqrt{r/t} \quad (38)$$

$$\tau_{S,R,k} = 0,75 C_r \cdot E \left(\frac{t}{r} \right)^{1,25} \left(\frac{r}{t} \right)^{1,05} \quad (39)$$

In Gleichung (39) darf auch C_r nach Gleichung (40) eingesetzt werden.

$$C_r = \left[1 + 42 \left(\frac{r}{t} \right)^3 \left(\frac{t}{r} \right)^{1,5} \right]^{1,05} \quad (40)$$

Anmerkung 1: Gleichung (39) ergibt sich auf der Basis der klassischen linearen Beultheorie für die Kreiszyllinderschale unter konstanter Torsionsbeanspruchung (siehe Bild 10 a).

Anmerkung 2: Der Bewerter C_r nach Gleichung (40) erlaubt den asymptotischen Übergang der idealen Schubbeulspannung der kurzen Kreiszyllinderschale unter konstanter Torsionsbeanspruchung mit RB 2 nach Abschnitt 4.1, Element 403, in die ideale Beulspannung der Schubbeanspruchten, Gelenkig gelagerten, breiten Rechteckplatte (siehe Bild 14).



Bild 14. Plattenbeulen als Grenzfall der kurzen Kreiszyllinderschale mit Schubbeanspruchung

(417) Lange Kreiszyllinder
Für lange Kreiszyllinder nach Bedingung (41) ist die ideale Beulspannung $\tau_{S,i}$ nach Gleichung (42) zu bestimmen.

$$\frac{t}{r} > 8,7 \sqrt{r/t} \quad (41)$$

$$\tau_{S,i} = 0,25 E \left(\frac{t}{r} \right)^{1,5} \quad (42)$$

4.3 Reale Beulspannung

(418) Gültigkeitsgrenzen
Die in Abschnitt 4.3 in den Elementen 419 bis 421 angegebenen Gleichungen für reale Beulspannungen gelten nur für Kreiszyllinderschalen mit $r/t \leq 2500$.

Anmerkung: Für Radius/Dicken-Verhältnisse $r/t > 2500$ wird der Erfahrungsbereich hinsichtlich der Abminderungsfaktoren k verlassen.

(419) Druckbeanspruchung in Axialrichtung
Die reale Beulspannung $\sigma_{S,R,k}$ für Druckbeanspruchung in Axialrichtung beträgt

$$\sigma_{S,R,k} = k_2 \cdot f_{y,k} \quad (43)$$

mit k_2 nach Gleichung (8), ermittelt mit $\lambda_{S,\phi}$ nach Gleichung (1).

(420) Druckbeanspruchung in Umfangsrichtung
Die reale Beulspannung $\sigma_{\phi,R,k}$ für Druckbeanspruchung in Umfangsrichtung beträgt

$$\sigma_{\phi,R,k} = k_1 \cdot f_{y,k} \quad (44)$$

mit k_1 nach Gleichung (7), ermittelt mit $\lambda_{S,\phi}$ nach Gleichung (2).

(421) Schubbeanspruchung
Die reale Beulspannung $\tau_{S,R,k}$ für Schubbeanspruchung beträgt

$$\tau_{S,R,k} = k_1 \cdot \frac{f_{y,k}}{1,3} \quad (45)$$

mit k_1 nach Gleichung (7), ermittelt mit $\lambda_{S,\phi}$ nach Gleichung (3).

(422) Kurze Kreiszyllinder

Der Beulstabilitätsnachweis darf auch dann im Sinne von Abschnitt 1.4, Element 115 wie für eine ebene Platte nach DIN 18800 Teil 3 geführt werden, wenn sich für kurze Kreiszyllinder damit günstigere Ergebnisse ergeben als nach dieser Norm.

4.4 Spannungen infolge Einwirkungen

(423) Maßgebende Membranspannungen
Der Beulstabilitätsnachweis nach Abschnitt 2, Element 207, ist stets mit den Größtwerten der Membranspannungen σ_x, σ_y und τ zu führen.

Anmerkung: Die Membranspannungen sind nach DIN 18800 Teil 1, stets mit den Bemessungswerten der Einwirkungen zu ermitteln.

(424) Ersatz-Windbelastung für die Ermittlung der Umfangsdruckspannung

Die äußere Windbelastung von Kreiszyllinderschalen mit den Randbedingungen nach Tabelle 2 beim Beulstabilitätsnachweis darf für die Ermittlung von q_w durch einen konstanten rotationsymmetrischen Mäneldruck nach Gleichung (46) ersetzt werden.

$$q_w = \delta \cdot \max q_w \quad (46)$$

Hierin bedeuten:
 $\max q_w$ größter Druckwert im Staupunkt

$$\delta = 0,46 \left(1 + 0,1 \sqrt{C_{\phi} \frac{r}{t} \left| \frac{r}{t} \right|} \right) \leq 1 \quad (47)$$

mit C_ϕ nach Tabelle 2, je nach Randbedingung
Bei offenen oder beulteilten Kreiszyllindern ist zusätzlich zur Ersatz-Windbelastung nach Gleichung (46) ein konstanter rotationsymmetrischer Mäneldruck von $0,6 \max q_w$ zur Berücksichtigung des Windsogs im Zylinderinneren anzunehmen.

Anmerkung: Der Bewerter δ in Gleichung (46) berücksichtigt, daß die ideale Umfangsbeulspannung nach Gleichung (34) für konstanten Mäneldruck ermittelt wurde und die veränderte Umfangsdruckverteilung unter äußerer Windbelastung nach Bild 15 ein günstigeres Beulverhalten bewirkt.

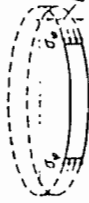


Bild 13. Plattenbeulen als Grenzfall der kurzen Kreiszyllinderschale mit Druckbeanspruchung in Umfangsrichtung

(413) Lange Kreiszyllinder
Für lange Kreiszyllinder nach Bedingung (35) ist die ideale Beulspannung $\sigma_{\phi,si}$ mit Gleichung (36) zu bestimmen, wobei C_ϕ aus Tabelle 2 zu entnehmen ist.

$$\frac{t}{r} > 1,63 \sqrt{C_\phi} \sqrt{\frac{r}{t}} \quad (35)$$

$$\sigma_{\phi,si} = E \left(\frac{t}{r} \right)^{1,2} \left[0,275 + 2,03 \left(\frac{C_\phi}{\frac{t}{r}} \right)^{1,5} \right] \quad (36)$$

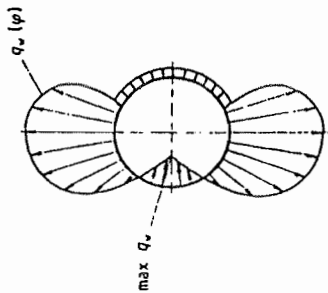


Bild 15. Beispiel für äußere Windbelastung

(425) Manteldruck bei sehr kurzen Kreiszyllindern
Bei sehr kurzen Kreiszyllinderschalen nach Gleichung (48) bzw. sehr kurzen Teillängern von ringverstärkten Kreiszyllindern darf σ_φ nach Gleichung (49) ermittelt werden.

$$\frac{l}{r} \leq \frac{3,12}{1 + r/l} \quad (48)$$

$$\sigma_\varphi = \psi \frac{q \cdot r}{l} \quad (49)$$

Der Beiwert ψ ist Tabelle 3 zu entnehmen.
Anmerkung: Der Beiwert ψ in Gleichung (49) berücksichtigt, daß bei sehr kurzen Kreiszyllinderschalen ein Teil des Manteldrucks unmittelbar von den Rändern bzw. von den Ringteilen aufgenommen wird.

4.5 Kombinierte Beanspruchung

4.5.1 Druck in Axialrichtung,
Druck in Umfangsrichtung und Schub

(426) Interaktionsbedingung
Bei gleichzeitiger Wirkung von Axialdruckspannungen σ_x , Umfangsdruckspannungen σ_φ und Schubspannungen τ

ist außer den Einzelnachweisen nach Abschnitt 2, Element 207 und Abschnitt 4.4, Element 423, ein Nachweis nach folgender Interaktionsbedingung zu führen:

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{s,R,d}} \right)^{1,25} + \left(\frac{\sigma_\varphi}{\sigma_{\varphi,R,d}} \right)^{1,25} + \left(\frac{\tau}{\tau_{s,R,d}} \right)^2 \leq 1 \quad (50)$$

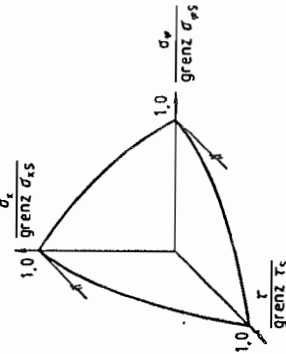


Bild 16. Interaktionsbedingung (50)

Anmerkung: Beim Nachweis nach Bedingung (50) ist ein aus allseitigem Außendruck bei geschlossenen Zylindern entstehender Deckeldruck als Axialdruck anzusetzen.

(427) Zu kombinierende Membranspannungen
In die Interaktionsbedingung (50) sind die Größtwerte der Membranspannungen σ_x , σ_φ und τ einzusetzen, auch wenn diese nicht an derselben Stelle auftreten. Treten Größtwerte innerhalb der randnahen Bereiche der Länge l_R nach Gleichung (51) auf, so dürfen an ihrer Stelle in die Interaktionsbedingung (50) als maßgebende Membranspannungen die in der verbleibenden freien Länge $(l - 2 \cdot l_R)$ auftretenden Größtwerte eingesetzt werden.

$$l_R = 0,10l \quad (51 a)$$

$$l_R \leq 0,16 C_{\varphi R} r \quad (51 b)$$

mit $C_{\varphi R}$ nach Tabelle 2.

Tabelle 3. Beiwerte ψ

l/r	ψ
$\leq \frac{1,56}{1 + r/l}$	$1 - \frac{0,85}{1 + l \cdot l_R / A_R}$
$\geq \frac{1,56}{1 + r/l}$	$1 - \frac{0,85 [2 - l / (1,56 \cdot r \cdot l)]}{1 + (b + 1,56 \cdot r \cdot l) / A_R}$
$\geq \frac{3,12}{1 + r/l}$	1

A_R Querschnittsfläche der Steile (ohne mitwirkende Schalenteile)

Bei radial unverschieblichen Rändern gilt $A_R = 0$

Bei langen Kreiszyllindern nach Bedingung (35) dürfen darüber hinaus in der Interaktionsbedingung (50) solche Größtwerte kombiniert werden, die innerhalb der freien Länge $(l - 2 \cdot l_R)$ in einem Zylinderabschnitt der Länge l nach Gleichung (52) auftreten.

$$l' = 1,30 C_{\varphi R} r \quad (52)$$

Anmerkung: Die Interaktionsbedingung (50) sichert gegen das beauforderte Zusammenwirken von Spannungsfeldern, nicht von Einzelspannungen ab. Das wird auf der sicheren Seite durch Kombinieren der Membranspannungsgrößenwerte erfaßt. Liegen die absolut größten Membranspannungswerte aber bei starker Veränderlichkeit in unmittelbarer Nähe der Ränder bzw. bei langen Kreiszyllindern darüber hinaus weit voneinander entfernt, so wäre eine Kombination dieser Größtwerte beulmechanisch nicht begründet und zu konservativ. Die Regelung für die Einzelnachweise nach Abschnitt 4.4, Element 423, bleibt hiervon unberührt.

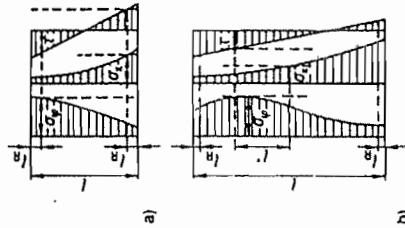


Bild 17. Beispiele für zu kombinierende Membranspannungen bei mittellangen und kurzen Kreiszyllindern (a) und langen Kreiszyllindern (b)

4.5.2 Druck in Axialrichtung und Zug in Umfangsrichtung aus innerem Manteldruck

(428) Voraussetzung
Die beulasterhöhende Wirkung nach Element 429 darf nur dann in Rechnung gestellt werden, wenn der innere Manteldruck und damit die Umfangsdruckspannungen zweifelsfrei gleichzeitig mit der Druckbeanspruchung in Axialrichtung vorhanden sind.

Anmerkung: Besondere Vorsicht ist z. B. geboten bei Lasten aus Schütglütern, die zur Brückenbildung neigen

(429) Beulasterhöhende Wirkung des inneren Manteldruckes

Für mittellange und kurze Kreiszyllinder nach Bedingung (27), deren bezogener Schlankeitsgrad nach Gleichung (1) größer als 0,7 ist, darf die beulasterhöhende Wirkung der Umfangsdruckspannungen infolge eines inneren Manteldruckes q_i dadurch berücksichtigt werden, daß die reale Beulspannung $\sigma_{s,k}$ gemäß Gleichung (43) statt mit k_{2q} nach Gleichung (53) berechnet wird

$$\lambda_{s,k} \leq 0,7; \quad k_{2q} = k_2 \quad (53 a)$$

$$0,7 < \lambda_{s,k} < 1,0;$$

$$k_{2q} = k_2 \left(1 + 1,2 \lambda_{s,k} \left[\frac{q_i}{E} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right]^{0,38} \right) \quad (53 b)$$

$$1,0 \leq \lambda_{s,k};$$

$$k_{2q} = k_2 \left(1 + 1,2 \lambda_{s,k} \left[\frac{q_i}{E} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right]^{0,38} \right) \quad (53 c)$$

Bei kurzen Kreiszyllindern darf k_{2q} nicht angesetzt werden, wenn die ideale Axialbeulspannung mit C_1 nach Gleichung (28) ermittelt wurde oder wenn der Beulsicherheitsnachweis wie für eine ebene Platte gemäß Abschnitt 4.3, Element 422, geführt wird.

Für lange Kreiszyllinder nach Bedingung (29) darf keine beulasterhöhende Wirkung des inneren Manteldrucks in Rechnung gestellt werden.

Anmerkung 1: Innerer Manteldruck q_i ; entsteht z. B. aus hydrostatischem Druck bei Flüssigkeitsfüllung oder aus Innendruck in einem geschlossenen Behälter oder aus Silogut. q_i wirkt entgegen gesetzt der sonst in dieser Norm als positiv definierten Manteldruckrichtung.

Anmerkung 2: Gleichung (53c) erfaßt für rautenförmig elastisch beulende Kreiszyllinder den beulasterhöhenden Einfluß der Umfangsdruckspannungen, durch den die Imperfektionsempfindlichkeit gemindert wird. Dieser beulasterhöhende Effekt ist bei ringwulstartig elastisch-plastisch beulenden Kreiszyllindern nicht gegeben.

Anmerkung 3: Auf den bei Schalen neben dem Beulsicherheitsnachweis nach dieser Norm stets parallel zu führenden Vergleichsspannungsnachweis nach DIN 18 800 Teil 1 wird hingewiesen (vergleiche Abschnitt 1.4, Element 113)

(430) Anzusetzende Axialdruckspannung
Die bei geschlossenen Kreiszyllindern unter Innendruck infolge des Deckeldruckes entstehende Axialzugspannung darf bei der Ermittlung der maßgebenden Membranspannung σ_x für den Beulsicherheitsnachweis berücksichtigt werden.

(431) Knicken von langen Kreiszyllindern unter innerem Manteldruck

Bei durch Innendruck beanspruchten Rohren, bei denen wegen fehlender Deckel keine vom Innendruck q_i hervorgerufene Axialzugkraft entsteht, ist ein Stabilitätsnachweis als Stab nach Abschnitt 4.2.1, Element 409, mit einer fiktiven Axialdruckkraft $q_i \cdot r^2 \cdot \lambda$ zu führen. Diese fiktive Axialdruckkraft ist gegebenenfalls planmäßig vorhandenen Axialkräften zu überlagern.

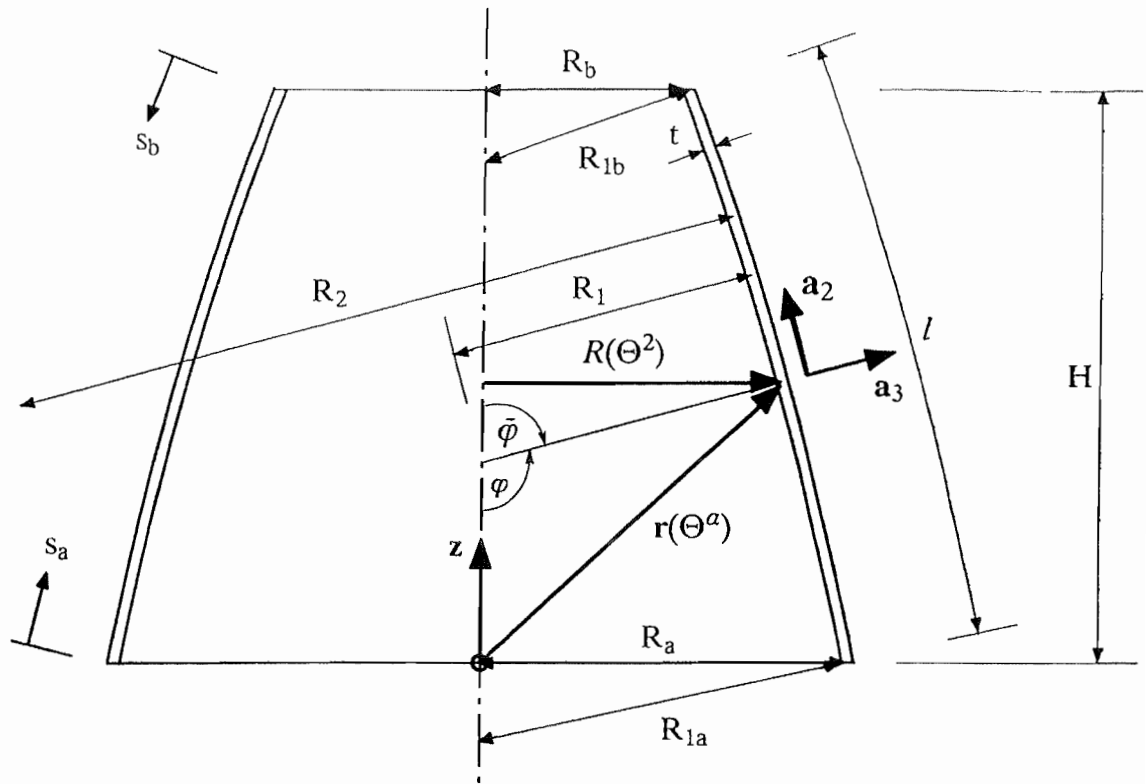
Anmerkung: Ein innendruckbeanspruchtes Rohr ohne Deckel stellt einen Stabilitätsfall dar. Sein kritischer Innendruck ist identisch mit demjenigen gedachten äußeren Deckeldruck, der das Rohr als Knickstab instabil werden ließe. Dieser Fall liegt z. B. bei Druckrohrleitungen in aufgelöster Bauweise mit Dehnstützen (Kompensatoren, Stopfbuchsen) vor. Erst die bei vorhandenen Deckeln auftretende Axialzugkraft kompensiert die Stabilitätsgefährdung.

Formelsammlung zu FTW II (Schalen)

(Geometrie, Membrantheorie, Belastung, KGV)

Anm.: Die Tafeln für den kurzen el. gebetteten Balken /
den kurzen Zylinder wurden bereits mit dem Skriptum
FTW I ausgegeben

Allgemeine Rotationsschale mit $\Theta^2 = z$



Volumen:
$$V = \pi \int_a^b R(z)^2 dz$$

Mantelfläche:
$$M = 2\pi \int_a^b B \cdot R(z) dz = 2\pi \int_a^b R(z) \sqrt{1 + (R(z),z)^2} dz$$

Bogenlänge l:
$$l = \int_a^b B dz = \int_a^b \sqrt{1 + (R(z),z)^2} dz$$

Koordinate z:
$$z = \Theta^2$$

Radius:
$$R(\Theta^2) = R(z)$$

Winkel:
$$\sin \varphi = \frac{1}{B} = \frac{1}{\sqrt{1 + (R(z),z)^2}} = \frac{R(z)}{R_1}$$

$$\cos \varphi = \frac{R(z),z}{B} = \frac{R(z),z}{\sqrt{1 + (R(z),z)^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{1}{R(z),z}$$

Ableitungen: $R(z)_{,2} = R(z)_{,z} = \frac{dR(z)}{dz}$

$$R(z)_{,22} = R(z)_{,zz} = \frac{d^2R(z)}{dz^2}$$

Ortsvektor: $\mathbf{r} = R(z) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R(z) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + z \mathbf{i}_3 = \begin{bmatrix} R(z) \cos \Theta^1 \\ R(z) \sin \Theta^1 \\ z \end{bmatrix}$

Basisvektoren: $\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_{,1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Theta^1} = -R(z) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R(z) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2 = \begin{bmatrix} -R(z) \sin \Theta^1 \\ R(z) \cos \Theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{t}_1 = -\sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2 = \begin{bmatrix} -\sin \Theta^1 \\ \cos \Theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{r}_{,2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = R(z)_{,z} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R(z)_{,z} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$$

$$= \begin{bmatrix} R(z)_{,z} \cos \Theta^1 \\ R(z)_{,z} \sin \Theta^1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (R(z)_{,z})^2}} \left[R(z)_{,z} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R(z)_{,z} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (R(z)_{,z})^2}} \begin{bmatrix} R(z)_{,z} \cos \Theta^1 \\ R(z)_{,z} \sin \Theta^1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = R(z) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R(z) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - R(z) \cdot R(z)_{,z} \mathbf{i}_3$$

$$= \begin{bmatrix} R(z) \cos \Theta^1 \\ R(z) \sin \Theta^1 \\ -R(z) \cdot R(z)_{,z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t}_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + (R(z)_{,z})^2}} \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - R(z)_{,z} \mathbf{i}_3 \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (R(z)_{,z})^2}} \begin{bmatrix} \cos \Theta^1 \\ \sin \Theta^1 \\ -R(z)_{,z} \end{bmatrix}$$

$$r_{,11} = -R(z) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - R(z) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 = \begin{bmatrix} -R(z) \cos \Theta^1 \\ -R(z) \sin \Theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_{,22} = R(z)_{,zz} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R(z)_{,zz} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 = \begin{bmatrix} R(z)_{,zz} \cos \Theta^1 \\ R(z)_{,zz} \sin \Theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Skalarprodukt: $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = A^2 = R(z)^2$

$$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = B^2 = 1 + (R(z)_{,z})^2$$

Bogenparameter: $s_a = \int_a^z B \cdot dz = \int_a^z \sqrt{1 + (R(z)_{,z})^2} \cdot dz$

$$s_b = - \int_b^z B \cdot dz = - \int_b^z \sqrt{1 + (R(z)_{,z})^2} \cdot dz$$

Flächenparameter: $A = R(z)$

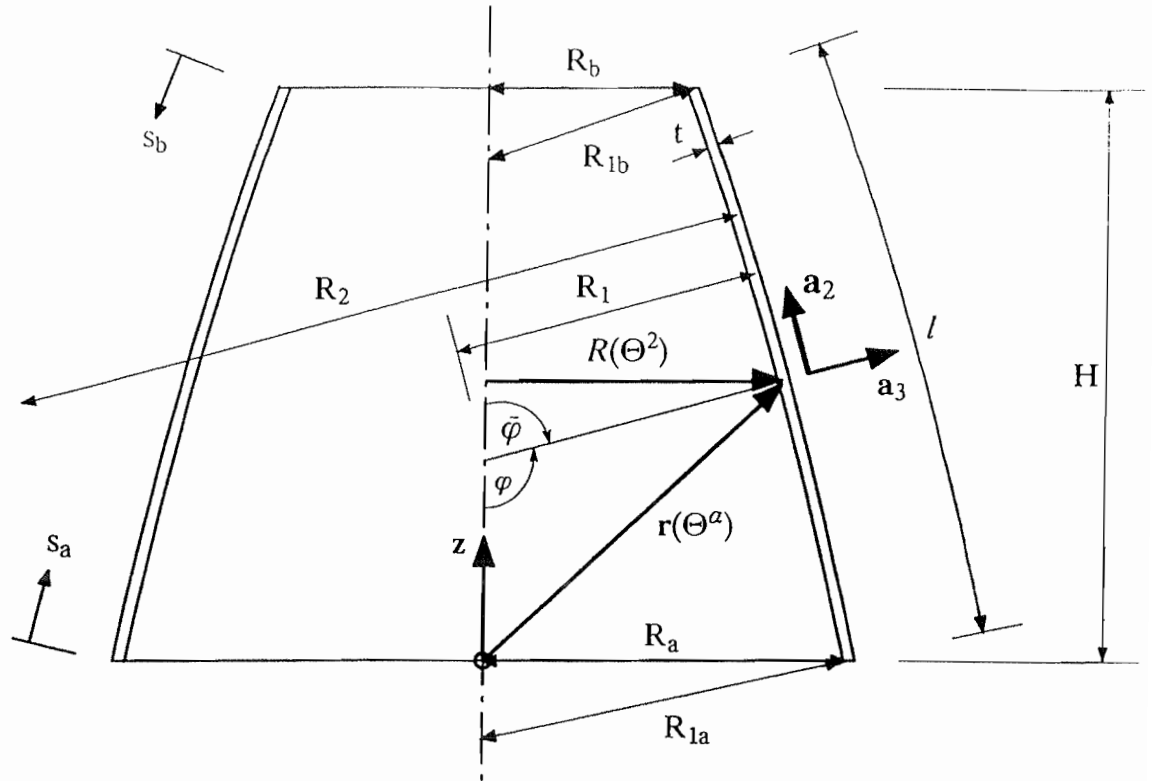
$$B = \sqrt{1 + (R(z)_{,z})^2}$$

$$R_1 = A \cdot B = R(z) \cdot \sqrt{1 + (R(z)_{,z})^2}$$

$$R_2 = - \frac{B^3}{R(z)_{,zz}} = - \frac{(1 + (R(z)_{,z})^2)^{\frac{3}{2}}}{R(z)_{,zz}}$$

Gauß'sche Krümmung: $K = \frac{1}{R_1 R_2} = - \frac{R(z)_{,zz}}{R(z) \cdot [1 + (R(z)_{,z})^2]^2}$

Allgemeine Rotationsschale mit $\Theta^2 = \varphi$



Volumen:

$$V = \pi \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} R(\varphi)^2 \cdot z(\varphi),_{\varphi} d\varphi$$

Mantelfläche:

$$M = 2\pi \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} \frac{R(\varphi) \cdot R(\varphi),_{\varphi}}{\cos \varphi} d\varphi$$

Bogenlänge l:

$$l = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} \frac{R(\varphi),_{\varphi}}{\cos \varphi} d\varphi$$

Koordinate z:

$$z = z(\varphi)$$

Radius:

$$R(\Theta^2) = R(\varphi)$$

Winkel:

$$\varphi = \Theta^2$$

$$\sin \varphi = \frac{R(\varphi)}{R_1}$$

$$\tan \varphi = \frac{z(\varphi),_{\varphi}}{R(\varphi),_{\varphi}}$$

Ableitungen: $R(\varphi)_{,2} = R(\varphi)_{,\varphi} = \frac{dR(\varphi)}{d\varphi}$

$$z(\varphi)_{,2} = z(\varphi)_{,\varphi} = \frac{dz(\varphi)}{d\varphi}$$

$$R(\varphi)_{,22} = R(\varphi)_{,\varphi\varphi} = \frac{d^2R(\varphi)}{d\varphi^2}$$

Ortsvektor: $\mathbf{r} = R(\varphi) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R(\varphi) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + z(\varphi) \mathbf{i}_3 = \begin{bmatrix} R(\varphi) \cos \Theta^1 \\ R(\varphi) \sin \Theta^1 \\ z(\varphi) \end{bmatrix}$

Basisvektoren: $\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_{,1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Theta^1} = -R(\varphi) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R(\varphi) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2 = \begin{bmatrix} -R(\varphi) \sin \Theta^1 \\ R(\varphi) \cos \Theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{t}_1 = -\sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2 = \begin{bmatrix} -\sin \Theta^1 \\ \cos \Theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{r}_{,2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Theta^2} = R(\varphi)_{,\varphi} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R(\varphi)_{,\varphi} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + z(\varphi)_{,\varphi} \mathbf{i}_3$$

$$= \begin{bmatrix} R(\varphi)_{,\varphi} \cos \Theta^1 \\ R(\varphi)_{,\varphi} \sin \Theta^1 \\ z(\varphi)_{,\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t}_2 = \cos \varphi \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \tan \varphi \mathbf{i}_3 \right]$$

$$= \cos \varphi \begin{bmatrix} \cos \Theta^1 \\ \sin \Theta^1 \\ \tan \varphi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = R(\varphi) \cdot z(\varphi)_{,\varphi} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R(\varphi) \cdot z(\varphi)_{,\varphi} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - R(\varphi) \cdot R(\varphi)_{,\varphi} \mathbf{i}_3$$

$$= \begin{bmatrix} R(\varphi) \cdot z(\varphi)_{,\varphi} \cos \Theta^1 \\ R(\varphi) \cdot z(\varphi)_{,\varphi} \sin \Theta^1 \\ -R(\varphi) \cdot R(\varphi)_{,\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t}_3 = \sin \varphi \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - \cot \varphi \mathbf{i}_3 \right]$$

$$= \sin \varphi \begin{bmatrix} \cos \Theta^1 \\ \sin \Theta^1 \\ -\cot \varphi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{,11} = -R(\varphi) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - R(\varphi) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 = \begin{bmatrix} -R(\varphi) \cos \Theta^1 \\ -R(\varphi) \sin \Theta^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{,22} = R(\varphi)_{,\varphi\varphi} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R(\varphi)_{,\varphi\varphi} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + z(\varphi)_{,\varphi\varphi} \mathbf{i}_3$$

$$= \begin{bmatrix} R(\varphi)_{,\varphi\varphi} \cos \Theta^1 \\ R(\varphi)_{,\varphi\varphi} \sin \Theta^1 \\ z(\varphi)_{,\varphi\varphi} \end{bmatrix}$$

Skalarprodukt: $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = A^2 = R(\varphi)^2$

$$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = B^2 = (z(\varphi)_{,\varphi})^2 + (R(\varphi)_{,\varphi})^2 = R(\varphi)_{,\varphi} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$$

Bogenparameter: $s_a = \int_{\varphi_a}^{\varphi} B \cdot d\varphi = \int_{\varphi_a}^{\varphi} \frac{R(\varphi)_{,\varphi}}{\cos \varphi} d\varphi$

$$s_b = - \int_{\varphi_b}^{\varphi} B \cdot d\varphi = - \int_{\varphi_b}^{\varphi} \frac{R(\varphi)_{,\varphi}}{\cos \varphi} d\varphi$$

Flächenparameter: $A = R(\varphi) = R_1 \sin \varphi$

$$B = \sqrt{(z(\varphi)_{,\varphi})^2 + (R(\varphi)_{,\varphi})^2} = R(\varphi)_{,\varphi} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$R_1 = R(\varphi) \cdot \frac{1}{\sin \varphi}$$

$$R_2 = R(\varphi)_{,\varphi} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$$

Gauß'sche Krümmung: $K = \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{R(\varphi) \cdot R(\varphi)_{,\varphi}}$

Umrechnung der Parameter $\Theta^2 = z$ und $\Theta^2 = \varphi$

$$B_z = \sqrt{1 + (R(z),z)^2} = \frac{1}{\sin \varphi}$$

$$\frac{dR}{dz} = R(z),z = \frac{1}{\tan \varphi}$$

$$dz = \sin \varphi R_2 d\varphi = R(\varphi),\varphi \cdot \tan \varphi d\varphi = z(\varphi),\varphi d\varphi$$

$$d\varphi = \frac{B_z}{R_2} dz$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{R_2}{B_z}$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{\sin \varphi R_2} = \frac{1}{R(\varphi),\varphi \cdot \tan \varphi} = \frac{1}{z(\varphi),\varphi}$$

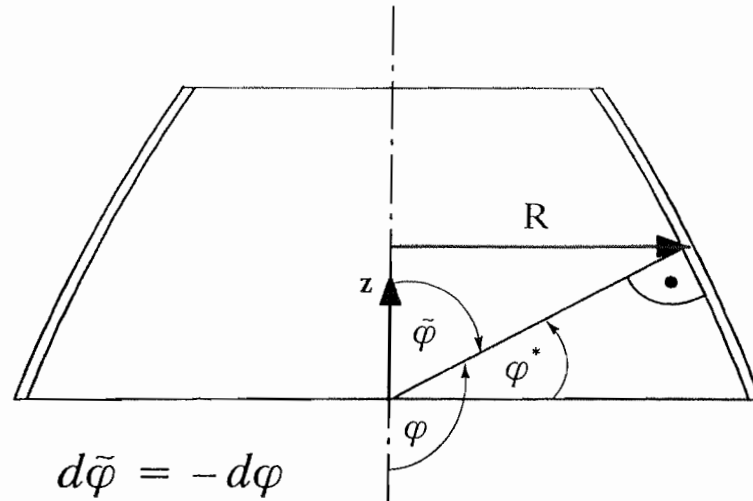
$$ds_2 = B_z dz = \sqrt{1 + (R(z),z)^2} dz = \frac{1}{\sin \varphi} dz = \frac{R(\varphi),\varphi}{\cos \varphi} d\varphi = B_\varphi d\varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{B_z} = \frac{1}{\sqrt{1 + (R(z),z)^2}} = \frac{R(z)}{R_1}$$

$$\cos \varphi = \frac{R(z),z}{B_z} = \frac{R(z),z}{\sqrt{1 + (R(z),z)^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{1}{R(z),z}$$

Beziehungen zwischen verschiedenen Winkelangaben



$$\varphi = 180^\circ - \tilde{\varphi}$$

$$\tilde{\varphi} = 180^\circ - \varphi$$

$$\varphi = 90^\circ + \varphi^*$$

$$\varphi^* = 90^\circ - \varphi$$

$$\sin \varphi = + \cos \varphi^*$$

$$\cos \varphi = - \sin \varphi^*$$

$$\tan \varphi = - \cot \varphi^*$$

$$\cot \varphi = - \tan \varphi^*$$

$$\sin \varphi = + \sin \tilde{\varphi}$$

$$\cos \varphi = - \cos \tilde{\varphi}$$

$$\tan \varphi = - \tan \tilde{\varphi}$$

$$\cot \varphi = - \cot \tilde{\varphi}$$

$$\sin \varphi^* = - \cos \varphi$$

$$\cos \varphi^* = + \sin \varphi$$

$$\tan \varphi^* = - \cot \varphi$$

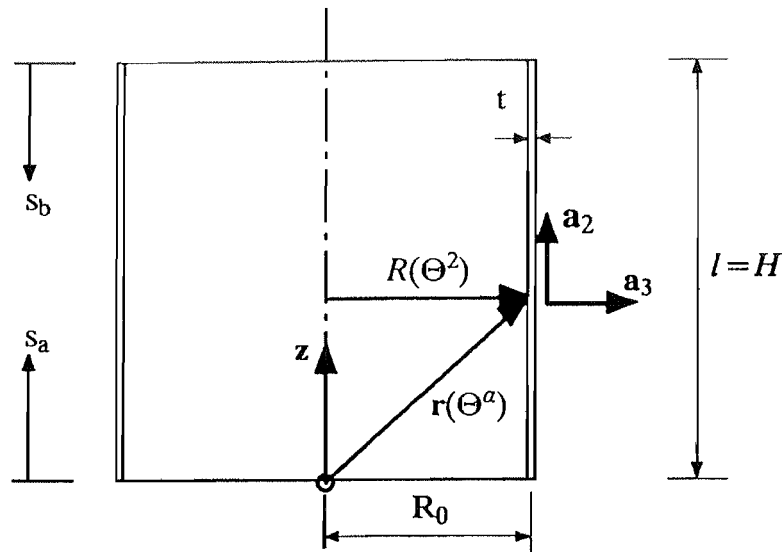
$$\cot \varphi^* = - \tan \varphi$$

$$\sin \tilde{\varphi} = + \sin \varphi$$

$$\cos \tilde{\varphi} = - \cos \varphi$$

$$\tan \tilde{\varphi} = - \tan \varphi$$

$$\cot \tilde{\varphi} = - \cot \varphi$$

Zylinderschale mit $\Theta^2 = z$ 

Volumen:	$V = R_0^2 \cdot \pi \cdot H$
Mantelfläche:	$M = 2\pi \cdot R_0 \cdot H$
Bogenlänge l:	$l = H$
Koordinate z:	$z = \Theta^2$
Radius:	$R(\Theta^2) = R(z) = R_0$
Winkel:	$\varphi = 90^\circ = \text{const}$
Ableitungen:	$R_{,z} = 0$
	$R_{,zz} = 0$
Bogenparameter:	$s_a = z$
	$s_b = H - z$
Flächenparameter:	$A = R_0$
	$B = 1$
	$R_1 = R_0$
	$R_2 = -\infty$

Gauß'sche Krümmung: $K = \frac{1}{R_1 R_2} = 0$

Die Zylinderfläche wird Differentialgleichungen vom parabolischen Typ liefern.

Ortsvektor: $\mathbf{r} = R_0 \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R_0 \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + z \mathbf{i}_3$

Basisvektoren: $\mathbf{a}_1 = -R_0 \sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R_0 \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$

$$\mathbf{t}_1 = -\sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{a}_3 = R_0 \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R_0 \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

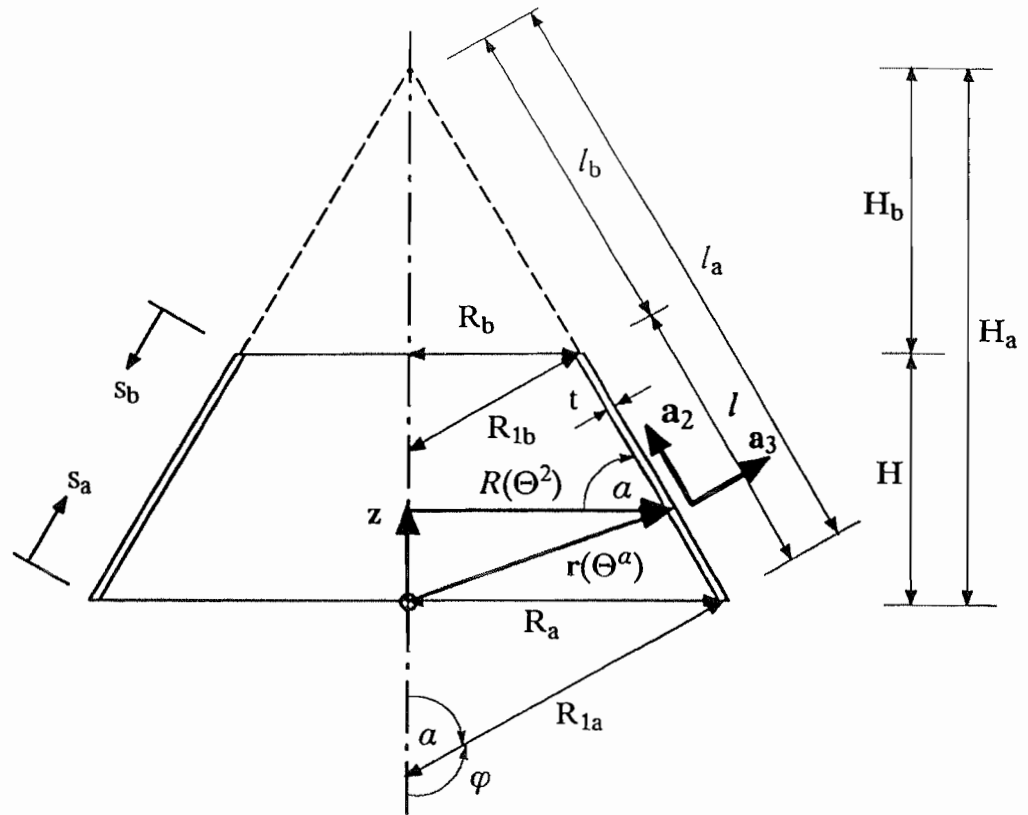
$$\mathbf{t}_3 = \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

Höhere Ableitungen:

$$\mathbf{r}_{,11} = -R_0 \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - R_0 \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{r}_{,22} = \mathbf{0}$$

Allgemeine Kegelschale mit $\Theta^2 = z$



- Volumen:**
$$V = \frac{\pi H}{3} (R_a^2 + R_a \cdot R_b + R_b^2)$$
- Mantelfläche:**
$$M = \pi (R_a + R_b) \sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}$$
- Bogenlänge l:**
$$l = \sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}$$
- Koordinate z:**
$$z = \Theta^2$$
- Radius:**
$$R(\Theta^2) = R(z) = (H_a - z) \frac{R_b - R_a}{H} = R_a + z \frac{R_b - R_a}{H}$$
- Winkel:**
$$\varphi = 180^\circ - \alpha = \text{const}$$
- $$\sin \alpha = \frac{H}{l} = \frac{H}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}}$$
- $$\cos \alpha = -\frac{R_b - R_a}{l} = -\frac{R_b - R_a}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}}$$
- $$\tan \alpha = \frac{H_a}{R_a} = \frac{H_b}{R_b} = -\frac{H}{R_b - R_a}$$
- Ableitungen:**
$$R_{,z} = \frac{R_b - R_a}{H}$$
- $$R_{,zz} = 0$$

Bogenparameter: $s_a = z \cdot \frac{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}}{H}$

$$s_b = (H - z) \cdot \frac{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}}{H}$$

Flächenparameter: $A = R(z) = R_a + z \frac{R_b - R_a}{H}$

$$B = \frac{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}}{H} = \sqrt{1 + \left(\frac{R_b - R_a}{H}\right)^2}$$

$$R_1 = \left(R_a + z \frac{R_b - R_a}{H}\right) \frac{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}}{H}$$

$$R_2 = -\infty$$

Gauß'sche Krümmung: $K = \frac{1}{R_1 R_2} = 0$

Die Kegelfläche wird Differentialgleichungen vom parabolischen Typ liefern.

Ortsvektor: $\mathbf{r} = \left(R_a + z \frac{R_b - R_a}{H}\right) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \left(R_a + z \frac{R_b - R_a}{H}\right) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + z \mathbf{i}_3$

Basisvektoren: $\mathbf{a}_1 = -\left(R_a + z \frac{R_b - R_a}{H}\right) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \left(R_a + z \frac{R_b - R_a}{H}\right) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$

$$\mathbf{t}_1 = -\sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{R_b - R_a}{H} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \frac{R_b - R_a}{H} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{t}_2 = \frac{R_b - R_a}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}} \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \frac{H}{R_b - R_a} \mathbf{i}_3 \right]$$

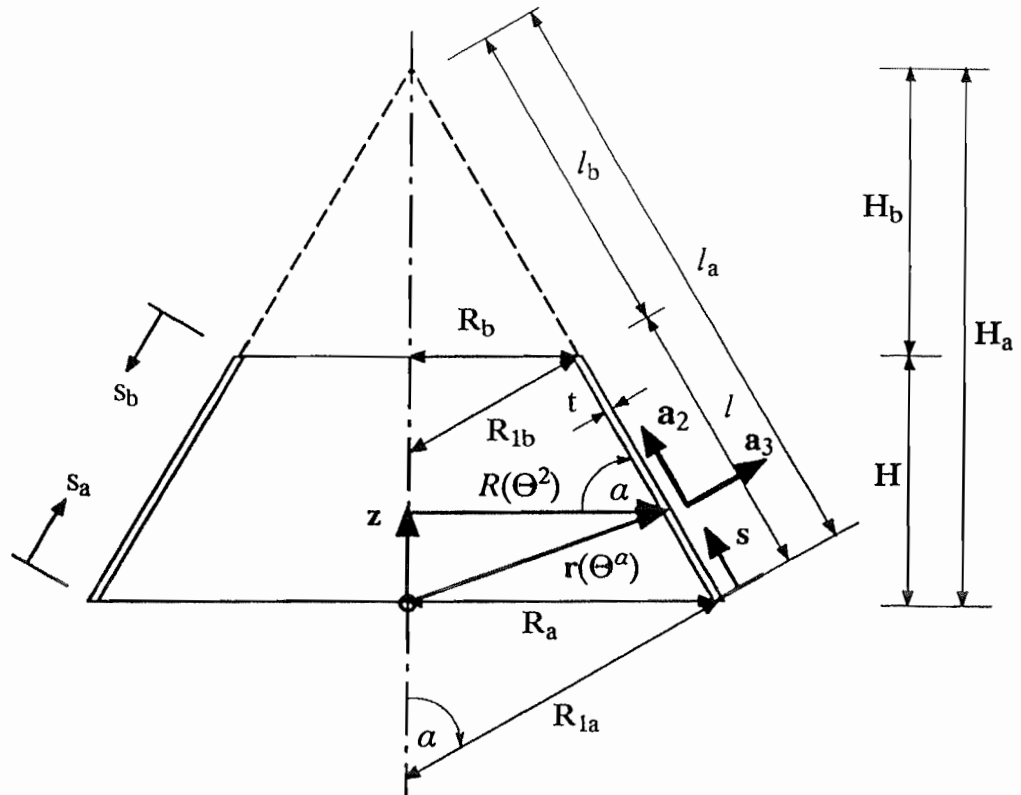
$$\mathbf{a}_3 = \left(R_a + z \frac{R_b - R_a}{H}\right) \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - \frac{R_b - R_a}{H} \mathbf{i}_3 \right]$$

$$\mathbf{t}_3 = \frac{H}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}} \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - \frac{R_b - R_a}{H} \mathbf{i}_3 \right]$$

Höhere Ableitungen:

$$\mathbf{r}_{,11} = -\left(R_a + z \frac{R_b - R_a}{H}\right) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - \left(R_a + z \frac{R_b - R_a}{H}\right) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{r}_{,22} = \mathbf{0}$$

Allgemeine Kegelschale mit $\Theta^2 = s$ 

Volumen:
$$V = \frac{\pi H}{3} (R_a^2 + R_a \cdot R_b + R_b^2)$$

Mantelfläche:
$$M = \pi (R_a + R_b) \sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}$$

Bogenlänge l:
$$l = \sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}$$

Koordinate z:
$$z = s \frac{H}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}}$$

Radius:
$$R(\Theta^2) = R(s) = R_a + s \frac{R_b - R_a}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}}$$

Winkel:
$$\varphi = \alpha = \text{const}$$

$$\sin \alpha = \frac{H}{l} = \frac{H}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}}$$

$$\cos \alpha = -\frac{R_b - R_a}{l} = -\frac{R_b - R_a}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}}$$

$$\tan \alpha = \frac{H_a}{R_a} = \frac{H_b}{R_b} = -\frac{H}{R_b - R_a}$$

Ableitungen: $R_{,s} = \frac{R_b - R_a}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}}$

$$R_{,ss} = 0$$

Bogenparameter: $s_a = s$

$$s_b = l - s$$

Flächenparameter: $A = R(s) = R_a + s \frac{R_b - R_a}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}}$

$$B = 1$$

$$R_1 = R(s) \cdot \frac{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}}{H} = R_a \cdot \frac{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}}{H} + s \frac{R_b - R_a}{H}$$

$$R_2 = -\infty$$

Gauß'sche Krümmung: $K = \frac{1}{R_1 R_2} = 0$

Die Kegelfläche wird Differentialgleichungen vom parabolischen Typ liefern.

Ortsvektor:
$$\mathbf{r} = \left[R_a + s \frac{R_b - R_a}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}} \right] \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 +$$

$$+ \left[R_a + s \frac{R_b - R_a}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}} \right] \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + s \frac{H}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}} \mathbf{i}_3$$

Basisvektoren:
$$\mathbf{a}_1 = \left[R_a + s \frac{R_b - R_a}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}} \right] [-\sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2]$$

$$\mathbf{t}_1 = -\sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{R_b - R_a}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \frac{R_b - R_a}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}} \sin \Theta^2 \mathbf{i}_2$$

$$+ \frac{H}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}} \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{t}_2 = \frac{R_b - R_a}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}} \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \frac{H}{R_b - R_a} \mathbf{i}_3 \right]$$

$$\mathbf{a}_3 = \left[R_a + s \frac{R_b - R_a}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}} \right] \left[\frac{H}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 \right.$$

$$\left. + \frac{H}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}} \sin \Theta^2 \mathbf{i}_2 - \frac{R_b - R_a}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}} \mathbf{i}_3 \right]$$

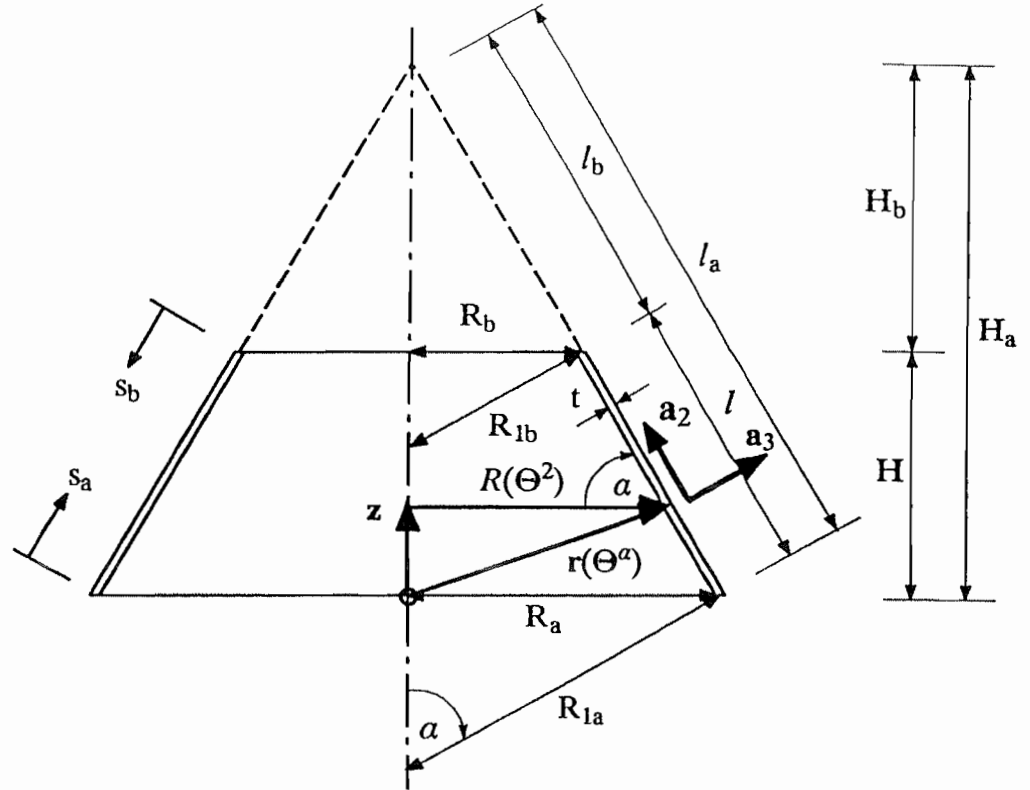
$$\mathbf{t}_3 = \frac{H}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}} \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - \frac{R_b - R_a}{H} \mathbf{i}_3 \right]$$

Höhere Ableitungen:

$$\mathbf{r}_{,11} = \left[R_a + s \frac{R_b - R_a}{\sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}} \right] [-\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2]$$

$$\mathbf{r}_{,22} = \mathbf{0}$$

Kegelschale mit $\Theta^2 = z$



Volumen:
$$V = \frac{\pi H}{3} (R_a^2 + R_a \cdot R_b + R_b^2)$$

Mantelfläche:
$$M = \pi (R_a + R_b) \cdot \frac{H}{\sin \alpha}$$

Bogenlänge l:
$$l = \sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}$$

Koordinate z:
$$z = \Theta^2$$

Radius:
$$R(\Theta^2) = R(z) = (H_a - z) \cot \alpha$$

Winkel:
$$\varphi = \alpha = \text{const}$$

$$\tan \varphi = \frac{H_a}{R_a} = \frac{H_b}{R_b} = -\frac{H}{R_b - R_a}$$

Ableitungen:
$$R_{,z} = -\cot \alpha$$

$$R_{,zz} = 0$$

Bogenparameter:
$$s_a = \frac{z}{\sin \alpha}$$

$$s_b = \frac{(H - z)}{\sin \alpha}$$

Flächenparameter: $A = R(z) = (H_a - z) \cot a$

$$B = \frac{1}{\sin a}$$

$$R_1 = R(z) \cdot \frac{1}{\sin a} = (H_a - z) \frac{\cos a}{\sin^2 a}$$

$$R_2 = -\infty$$

Gauß'sche Krümmung: $K = \frac{1}{R_1 R_2} = 0$

Die Kegelfläche wird Differentialgleichungen vom parabolischen Typ liefern.

Ortsvektor: $\mathbf{r} = (H_a - z) \cot a \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + (H_a - z) \cot a \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + z \mathbf{i}_3$

Basisvektoren: $\mathbf{a}_1 = -(H_a - z) \cot a \sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + (H_a - z) \cot a \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$

$$\mathbf{t}_1 = -\sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = -\cot a \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - \cot a \sin \Theta^2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{t}_2 = -\cos a \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - \tan a \mathbf{i}_3 \right]$$

$$\mathbf{a}_3 = (H_a - z) \cot a \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + (H_a - z) \cot a \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + (H_a - z) \cot^2 a \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{t}_3 = \sin a \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \cot a \mathbf{i}_3 \right]$$

Höhere Ableitungen:

$$\mathbf{r}_{,11} = -(H_a - z) \cot a \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - (H_a - z) \cot a \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{r}_{,22} = \mathbf{0}$$

Flächenparameter: $A = R(s) = R_a - s \cos \alpha$

$$B = 1$$

$$R_1 = R(s) \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{R_a}{\sin \alpha} - s \cot \alpha$$

$$R_2 = -\infty$$

Gauß'sche Krümmung:

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = 0$$

Die Kegelfläche wird Differentialgleichungen vom parabolischen Typ liefern.

Ortsvektor: $\mathbf{r} = (R_a - s \cos \alpha) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + (R_a - s \cos \alpha) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + s \sin \alpha \mathbf{i}_3$

Basisvektoren: $\mathbf{a}_1 = -(R_a - s \cos \alpha) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + (R_a - s \cos \alpha) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$

$$\mathbf{t}_1 = -\sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = -\cos \alpha \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - \cos \alpha \sin \Theta^2 \mathbf{i}_2 + \sin \alpha \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{t}_2 = -\cos \alpha [\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - \tan \alpha \mathbf{i}_3]$$

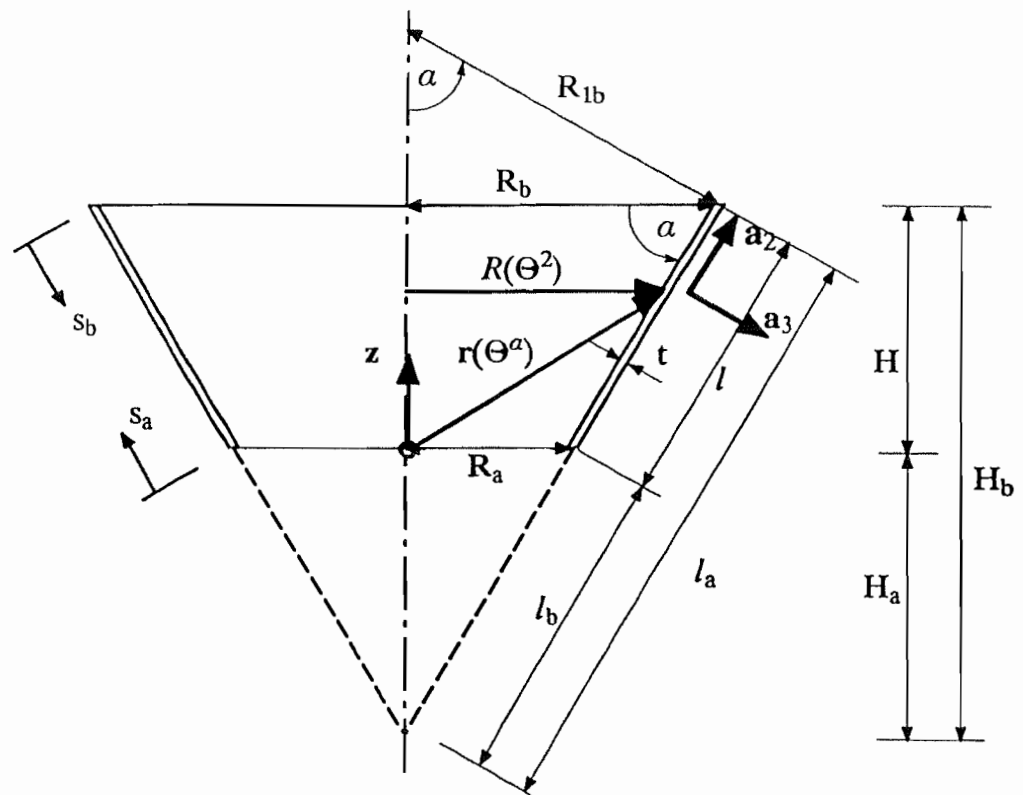
$$\mathbf{a}_3 = (R_a - s \cos \alpha) [\sin \alpha \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \alpha \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \cos \alpha \mathbf{i}_3]$$

$$\mathbf{t}_3 = \sin \alpha [\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \cot \alpha \mathbf{i}_3]$$

Höhere Ableitungen:

$$\mathbf{r}_{,11} = -(R_a - s \cos \alpha) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - (R_a - s \cos \alpha) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{r}_{,22} = \mathbf{0}$$

Kegelschale mit $\Theta^2 = z$ 

Volumen:
$$V = \frac{\pi H}{3} (R_a^2 + R_a \cdot R_b + R_b^2)$$

Mantelfläche:
$$M = \pi (R_a + R_b) \cdot \frac{H}{\sin \alpha}$$

Bogenlänge l:
$$l = \frac{H}{\sin \alpha} = \sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}$$

Koordinate z:
$$z = \Theta^2$$

Radius:
$$R(\Theta^2) = R(z) = (H_a + z) \cot \alpha$$

Winkel:
$$\varphi = \alpha = \text{const}$$

$$\tan \varphi = \frac{H_a}{R_a} = \frac{H_b}{R_b} = \frac{H}{R_b - R_a}$$

Ableitungen:
$$R_{,z} = \cot \alpha$$

$$R_{,zz} = 0$$

Bogenparameter: $s_a = \frac{z}{\sin \alpha}$

$$s_b = \frac{(H_a - z)}{\sin \alpha}$$

Flächenparameter: $A = R(z) = (H_a + z) \cot \alpha$

$$B = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$R_1 = R(z) \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = (H_a + z) \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$R_2 = -\infty$$

Gauß'sche Krümmung: $K = \frac{1}{R_1 R_2} = 0$

Die Kegelfläche wird Differentialgleichungen vom parabolischen Typ liefern.

Ortsvektor: $\mathbf{r} = (H_a + z) \cot \alpha \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + (H_a + z) \cot \alpha \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + z \mathbf{i}_3$

Basisvektoren: $\mathbf{a}_1 = -(H_a + z) \cot \alpha \sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + (H_a + z) \cot \alpha \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$

$$\mathbf{t}_1 = -\sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = \cot \alpha \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \cot \alpha \sin \Theta^2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{t}_2 = \cos \alpha \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \tan \alpha \mathbf{i}_3 \right]$$

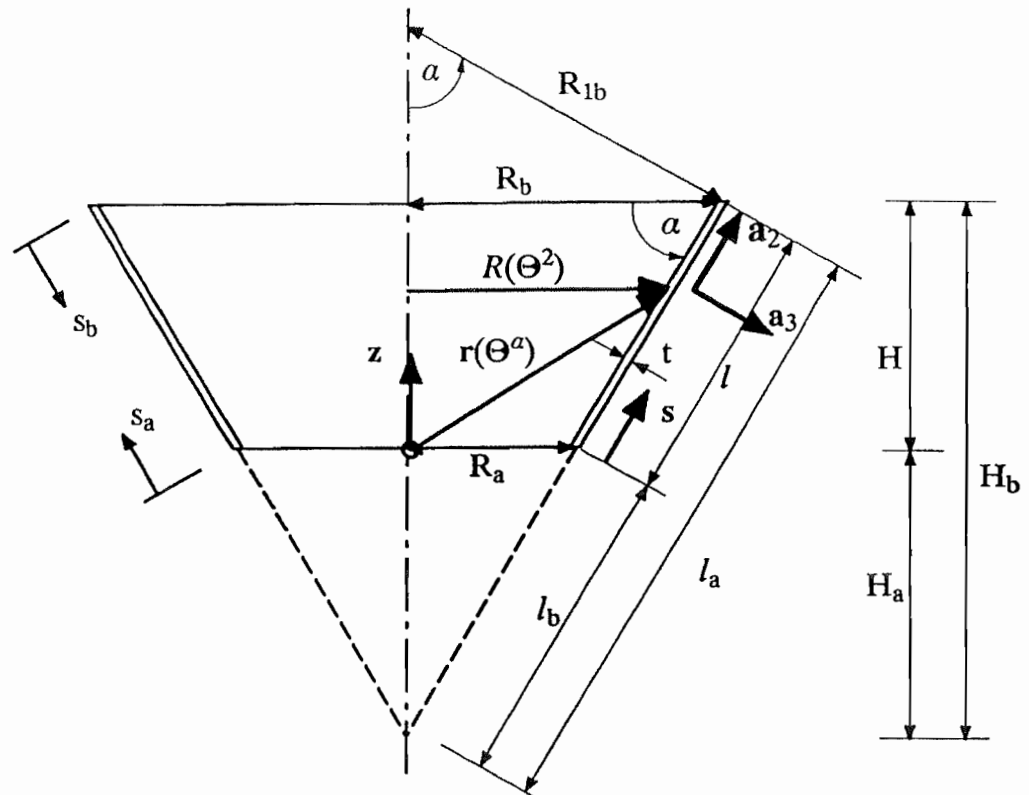
$$\mathbf{a}_3 = (H_a + z) \cot \alpha \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - \cot \alpha \mathbf{i}_3 \right]$$

$$\mathbf{t}_3 = \sin \alpha \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - \cot \alpha \mathbf{i}_3 \right]$$

Höhere Ableitungen:

$$\mathbf{r}_{,11} = -(H_a + z) \cot \alpha \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - (H_a + z) \cot \alpha \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{r}_{,22} = \mathbf{0}$$

Kegelschale mit $\Theta^2 = s$ 

Volumen:
$$V = \frac{\pi H}{3} (R_a^2 + R_a \cdot R_b + R_b^2)$$

Mantelfläche:
$$M = \pi (R_a + R_b) \cdot \frac{H}{\sin \alpha}$$

Bogenlänge l:
$$l = \frac{H}{\sin \alpha} = \sqrt{H^2 + (R_b - R_a)^2}$$

Koordinate z:
$$z = s \sin \alpha$$

Radius:
$$R(\Theta^2) = R(s) = \left(\frac{H_a}{\sin \alpha} + s \right) \cos \alpha = R_a + s \cos \alpha$$

Winkel:
$$\varphi = \alpha = \text{const}$$

$$\tan \varphi = \frac{H_a}{R_a} = \frac{H_b}{R_b} = \frac{H}{R_b - R_a}$$

Ableitungen:
$$R_{,s} = \cos \alpha$$

$$R_{,ss} = 0$$

Bogenparameter:
$$s_a = s$$

$$s_b = l - s$$

Flächenparameter: $A = R(s) = R_a + s \cos a$

$$B = 1$$

$$R_1 = R(s) \cdot \frac{1}{\sin a} = \frac{R_a}{\sin a} + s \cot a$$

$$R_2 = -\infty$$

Gauß'sche Krümmung: $K = \frac{1}{R_1 R_2} = 0$

Die Kegelfläche wird Differentialgleichungen vom parabolischen Typ liefern.

Ortsvektor: $\mathbf{r} = (R_a + s \cos a) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + (R_a + s \cos a) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + s \sin a \mathbf{i}_3$

Basisvektoren: $\mathbf{a}_1 = -(R_a + s \cos a) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + (R_a + s \cos a) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$

$$\mathbf{t}_1 = -\sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = \cos a \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \cos a \sin \Theta^2 \mathbf{i}_2 + \sin a \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{t}_2 = \cos a \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \tan a \mathbf{i}_3 \right]$$

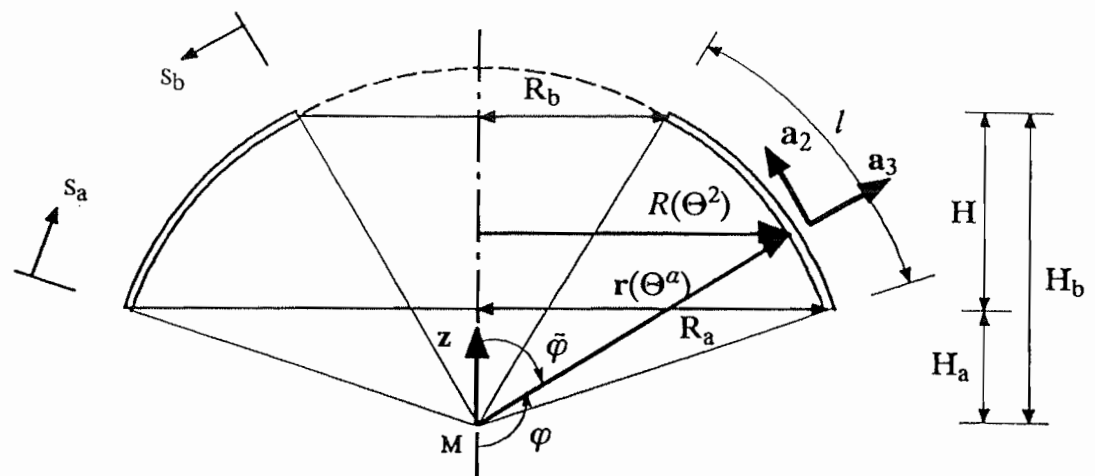
$$\mathbf{a}_3 = (R_a + s \cos a) \left[\sin a \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin a \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - \cos a \mathbf{i}_3 \right]$$

$$\mathbf{t}_3 = \sin a \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - \cot a \mathbf{i}_3 \right]$$

Höhere Ableitungen:

$$\mathbf{r}_{,11} = -(R_a + s \cos a) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - (R_a + s \cos a) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{r}_{,22} = \mathbf{0}$$

Kugelschale mit $\Theta^2 = z$ 

Liegt der Kugelmittelpunkt nicht innerhalb der Kugelzone, so gilt:

$$H = \sqrt{R_0^2 - R_a^2} - \sqrt{R_0^2 - R_b^2} \quad \text{für } (R_b < R_a)$$

$$R_0 = \sqrt{R_a^2 + \left(\frac{R_a^2 - R_b^2 - H^2}{2H} \right)^2} \quad \text{für } (R_b < R_a)$$

Volumen: $V = \frac{\pi \cdot H}{6} (3R_a^2 + 3R_b^2 + H^2)$

Mantelfläche: $M = 2\pi \cdot R_0 \cdot H$

Bogenlänge l: $l = R_0 \cdot \left(\arcsin \frac{H_b}{R_0} - \arcsin \frac{H_a}{R_0} \right)$

Koordinate z: $z = \Theta^2$

Radius: $R(\Theta^2) = \sqrt{R_0^2 - z^2}$

Winkel: $\sin \varphi = \frac{\sqrt{R_0^2 - z^2}}{R_0}$

$$\cos \varphi = -\frac{z}{R_0}$$

$$\tan \varphi = -\frac{\sqrt{R_0^2 - z^2}}{z}$$

Ableitungen: $R(z)_{,z} = -\frac{z}{\sqrt{R_0^2 - z^2}} = -\frac{z}{R(z)}$

$$R(z)_{,zz} = -\frac{R(z)^2 - z^2}{R(z)^3} = -\frac{R_0^2}{(R_0^2 - z^2)^{3/2}}$$

Bogenparameter: $s_a = R_0 \cdot \left(\arcsin \frac{z}{R_0} - \arcsin \frac{H_a}{R_0} \right)$

$$s_b = R_0 \cdot \left(\arcsin \frac{H_b}{R_0} - \arcsin \frac{z}{R_0} \right)$$

Flächenparameter: $A = \sqrt{R_0^2 - z^2}$

$$B = \frac{R_0}{\sqrt{R_0^2 - z^2}}$$

$$R_1 = R_0$$

$$R_2 = R_0$$

Gauß'sche Krümmung: $K = \frac{1}{R_0^2}$

Die Kugelfläche wird Differentialgleichungen vom parabolischen Typ liefern.

Ortsvektor: $\mathbf{r} = \sqrt{R_0^2 - z^2} \cdot \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sqrt{R_0^2 - z^2} \cdot \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + z \mathbf{i}_3$

Basisvektoren: $\mathbf{a}_1 = -\sqrt{R_0^2 - z^2} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sqrt{R_0^2 - z^2} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$

$$\mathbf{t}_1 = -\sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = -\frac{z}{\sqrt{R_0^2 - z^2}} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - \frac{z}{\sqrt{R_0^2 - z^2}} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{t}_2 = \left[-\frac{z}{R_0} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - \frac{z}{R_0} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \frac{\sqrt{R_0^2 - z^2}}{R_0} \mathbf{i}_3 \right]$$

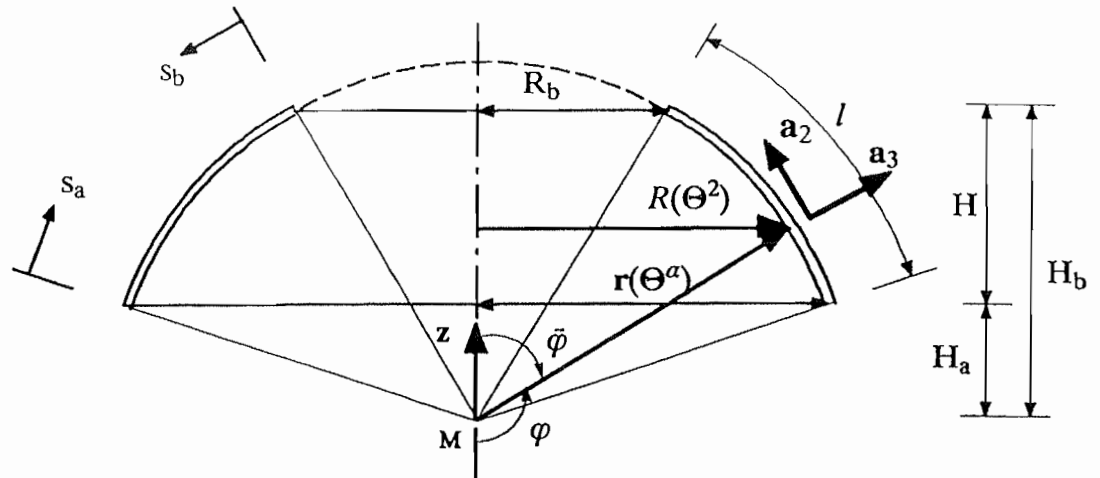
$$\mathbf{a}_3 = \sqrt{R_0^2 - z^2} \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \frac{z}{\sqrt{R_0^2 - z^2}} \mathbf{i}_3 \right]$$

$$\mathbf{t}_3 = \frac{\sqrt{R_0^2 - z^2}}{R_0} \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \frac{z}{\sqrt{R_0^2 - z^2}} \mathbf{i}_3 \right]$$

Höhere Ableitungen:

$$\mathbf{r}_{,11} = -\sqrt{R_0^2 - z^2} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - \sqrt{R_0^2 - z^2} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{r}_{,22} = -\frac{R_0^2}{(R_0^2 - z^2)^{3/2}} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - \frac{R_0^2}{(R_0^2 - z^2)^{3/2}} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

Kugelschale mit $\Theta^2 = \varphi$ 

Volumen:
$$V = \frac{\pi \cdot R_0^3}{3} \left[3 \cdot (\cos \varphi_a - \cos \varphi_b) - (\cos^3 \varphi_a - \cos^3 \varphi_b) \right]$$

Mantelfläche:
$$M = 2\pi \cdot R_0^2 \cdot (\cos \varphi_a - \cos \varphi_b)$$

Bogenlänge l:
$$l = R_0 \cdot (\varphi_b - \varphi_a)$$

Koordinate z:
$$z(\varphi) = -R_0 \cdot \cos \varphi$$

Radius:
$$R(\varphi) = R_0 \cdot \sin \varphi$$

Winkel:
$$\varphi = \Theta^2$$

Ableitungen:
$$R(\varphi)_{,\varphi} = R_0 \cdot \cos \varphi$$

$$R(\varphi)_{,\varphi\varphi} = -R_0 \cdot \sin \varphi$$

$$z(\varphi)_{,\varphi} = R_0 \cdot \sin \varphi$$

$$z(\varphi)_{,\varphi\varphi} = R_0 \cdot \cos \varphi$$

Bogenparameter:
$$s_a = R_0 \cdot (\varphi - \varphi_a)$$

$$s_b = R_0 \cdot (\varphi_b - \varphi)$$

Flächenparameter:
$$A = R(\varphi) = R_0 \sin \varphi$$

$$B = R_0$$

$$R_1 = R_0$$

$$R_2 = R_0$$

Gauß'sche Krümmung:
$$K = \frac{1}{R_0^2}$$

Die Kugelfläche wird Differentialgleichungen vom parabolischen Typ liefern.

Ortsvektor: $\mathbf{r} = R_0 \sin \varphi \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R_0 \sin \varphi \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - R_0 \cos \varphi \mathbf{i}_3$

Basisvektoren: $\mathbf{a}_1 = -R_0 \sin \varphi \sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R_0 \sin \varphi \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$

$$\mathbf{t}_1 = -\sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = R_0 \cos \varphi \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R_0 \cos \varphi \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + R_0 \sin \varphi \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{t}_2 = \cos \varphi \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \tan \varphi \mathbf{i}_3 \right]$$

$$\mathbf{a}_3 = R_0^2 \sin^2 \varphi \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R_0^2 \sin^2 \varphi \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - R_0^2 \sin \varphi \cos \varphi \mathbf{i}_3$$

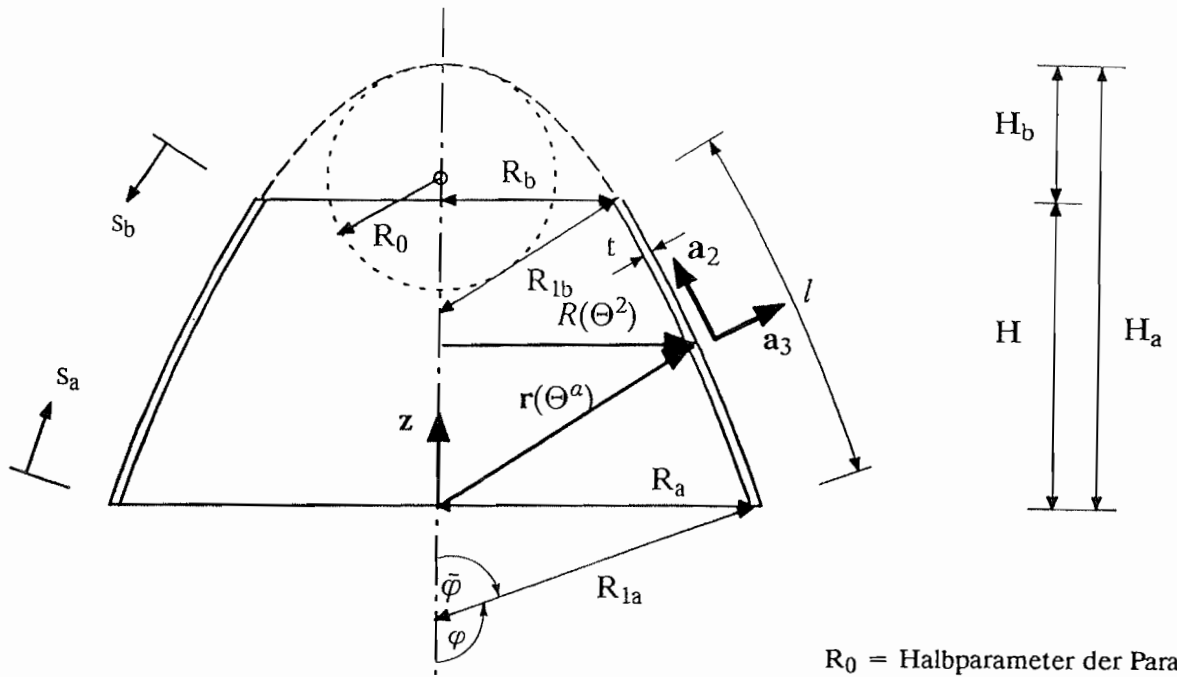
$$\mathbf{t}_3 = \sin \varphi \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - \cot \varphi \mathbf{i}_3 \right]$$

Höhere Ableitungen:

$$\mathbf{r}_{,11} = -R_0 \sin \varphi \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - R_0 \sin \varphi \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{r}_{,22} = -R_0 \sin \varphi \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - R_0 \sin \varphi \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + R_0 \cos \varphi \mathbf{i}_3$$

Rotationsparaboloid mit $\Theta^2 = z$



$R_0 =$ Halbparameter der Parabel

$$R_0 = \frac{R_a^2 - R_b^2}{2 H}$$

$$H_a = \frac{R_a^2}{2 R_0}$$

$$H_b = \frac{R_b^2}{2 R_0}$$

Volumen: $V = \frac{\pi \cdot H}{2} (R_a^2 + R_b^2) = \pi \cdot H R_0 (2H_a - H)$

Mantelfläche: $M = \frac{2 \pi}{3 R_0} [(2R_0 \cdot H_a + R_0^2)^{3/2} - (2R_0 \cdot H_b + R_0^2)^{2/3}]$

Bogenlänge l: $l = \sqrt{H_a^2 + R_0 \frac{H_a}{2}} - \sqrt{H_b^2 + R_0 \frac{H_b}{2}} + \frac{R_0}{2} \left[\operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{2H_a}{R_0}} - \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{2H_b}{R_0}} \right]$

Koordinate z: $z = \Theta^2$

Radius: $R(\Theta^2) = \sqrt{2R_0(H_a - z)}$

Winkel: $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2(H_a - z)}}{\sqrt{2(H_a - z) + R_0}}$

$$\cos \varphi = -\frac{R_0}{\sqrt{2R_0(H_a - z) + R_0^2}}$$

$$\tan \varphi = -\frac{\sqrt{2R_0(H_a - z)}}{R_0}$$

Ableitungen: $R(z),z = -\frac{R_0}{\sqrt{2R_0(H_a-z)}} = -\frac{z}{R(z)}$

$$R(z),zz = -\frac{R_0^2}{R(z)^3} = -\frac{R_0^2}{(2R_0(H_a-z))^{3/2}}$$

Bogenparameter: $l = \sqrt{H_a^2 + R_0 \frac{H_a}{2}} - \sqrt{z^2 + R_0 \frac{z}{2}} + \frac{R_0}{2} \left[\operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{2H_a}{R_0}} - \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{z}{R_0}} \right]$

$$l = \sqrt{z^2 + R_0 \frac{z}{2}} - \sqrt{H_b^2 + R_0 \frac{H_b}{2}} + \frac{R_0}{2} \left[\operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{2z}{R_0}} - \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{2H_b}{R_0}} \right]$$

Flächenparameter: $A = \sqrt{2R_0(H_a-z)}$

$$B = \sqrt{1 + \frac{R_0}{2(H_a-z)}} = \frac{\sqrt{2(H_a-z) + R_0}}{\sqrt{(H_a-z)}}$$

$$R_1 = \sqrt{2R_0(H_a-z) + R_0^2}$$

$$R_2 = \frac{[2R_0(H_a-z) + R_0^2]^{3/2}}{R_0^2}$$

Gauß'sche Krümmung: $K = \frac{R_0^2}{[2R_0(H_a-z) + R_0^2]^2}$

Die Paraboloidfläche wird Differentialgleichungen vom parabolischen Typ liefern.

Ortsvektor: $r = \sqrt{2R_0(H_a-z)} \cdot \cos \Theta^1 i_1 + \sqrt{2R_0(H_a-z)} \cdot \sin \Theta^1 i_2 + z i_3$

Basisvektoren: $a_1 = -\sqrt{2R_0(H_a-z)} \sin \Theta^1 i_1 + \sqrt{2R_0(H_a-z)} \cos \Theta^1 i_2$

$$t_1 = -\sin \Theta^1 i_1 + \cos \Theta^1 i_2$$

$$a_2 = -\frac{R_0}{\sqrt{2R_0(H_a-z)}} \cos \Theta^1 i_1 - \frac{R_0}{\sqrt{2R_0(H_a-z)}} \sin \Theta^1 i_2 + i_3$$

$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{2R_0(H_a-z) + R_0^2}} \left[-R_0 \cos \Theta^1 i_1 - R_0 \sin \Theta^1 i_2 + \sqrt{2R_0(H_a-z)} i_3 \right]$$

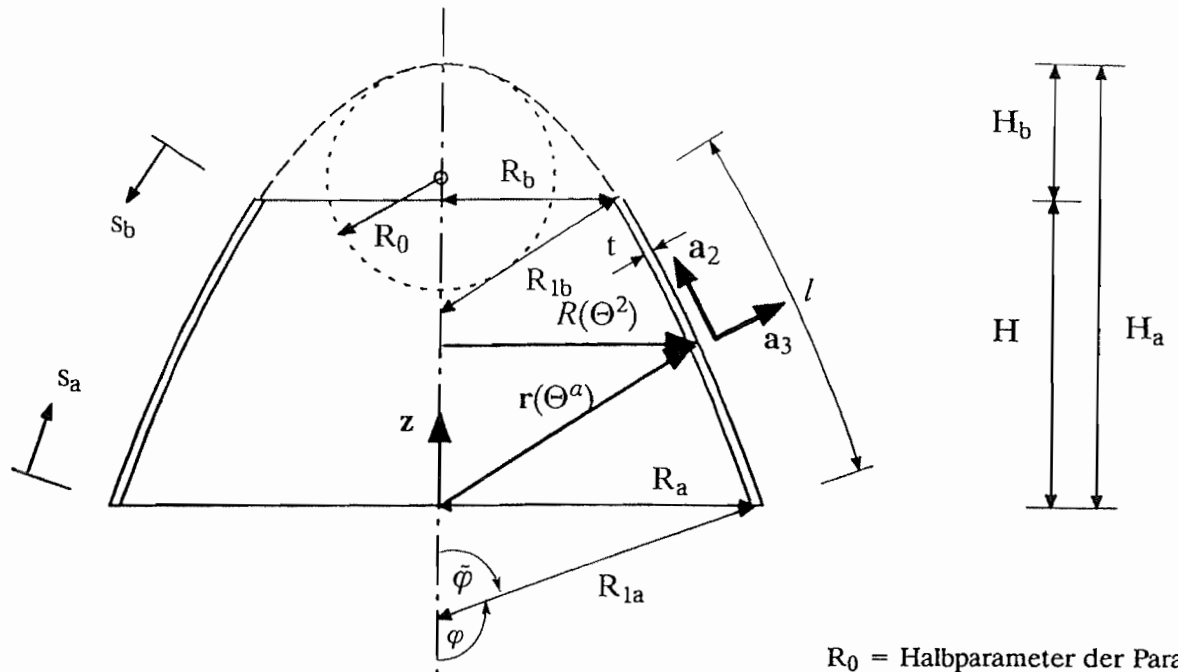
$$a_3 = a_1 \times a_2 = \sqrt{2R_0(H_a-z)} \cos \Theta^1 i_1 + \sqrt{2R_0(H_a-z)} \sin \Theta^1 i_2 + R_0 i_3$$

$$t_3 = \frac{\sqrt{2(H_a-z)}}{\sqrt{2(H_a-z) + R_0}} \left[\cos \Theta^1 i_1 + \sin \Theta^1 i_2 + \frac{R_0}{\sqrt{2R_0(H_a-z)}} i_3 \right]$$

Höhere Ableitungen:

$$r_{,11} = -\sqrt{2R_0(H_a-z)} \cos \Theta^1 i_1 - \sqrt{2R_0(H_a-z)} \sin \Theta^1 i_2$$

$$r_{,22} = -\frac{R_0^2}{[2R_0(H_a-z)]^{3/2}} [\cos \Theta^1 i_1 + \sin \Theta^1 i_2]$$

Rotationsparaboloid mit $\Theta^2 = \varphi$ 

Volumen:
$$V = \frac{\pi R_0^3}{4} (\tan^4 \varphi_a - \tan^4 \varphi_b)$$

Mantelfläche:
$$M = -\frac{2}{3} \pi R_0^2 \left(\frac{1}{\cos^3 \varphi_a} - \frac{1}{\cos^3 \varphi_b} \right)$$

Bogenlänge l:
$$l = \frac{1}{2} R_0 \left[\frac{\sin \varphi_a}{\cos^2 \varphi_a} + \ln \left[\frac{1 + \sin \varphi_a}{\cos \varphi_a} \right] - \frac{\sin \varphi_b}{\cos^2 \varphi_b} - \ln \left[\frac{1 + \sin \varphi_b}{\cos \varphi_b} \right] \right]$$

Koordinate z:
$$z(\varphi) = -\frac{R_0}{2} \tan^2 \varphi + H_a$$

Radius:
$$R(\varphi) = -R_0 \tan \varphi$$

Winkel:
$$\varphi = \Theta^2$$

Ableitungen:
$$R(\varphi),_{\varphi} = -R_0 \frac{1}{\cos^2 \varphi} = -R_0 (1 + \tan^2 \varphi)$$

$$R(\varphi),_{\varphi\varphi} = -\frac{2R_0 \sin \varphi}{\cos^3 \varphi}$$

$$z(\varphi),_{\varphi} = -R_0 \tan \varphi \cdot (1 + \tan^2 \varphi) = -R_0 \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} = R_0 \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi}$$

$$z(\varphi),_{\varphi\varphi} = -R_0 \left(\frac{1 + 2 \sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} \right)$$

Bogenparameter:

$$l = \frac{1}{2} R_0 \left[\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} + \ln \left(\left| \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right| \right) - \frac{\sin \varphi_b}{\cos^2 \varphi_b} - \ln \left(\left| \frac{1 + \sin \varphi_b}{\cos \varphi_b} \right| \right) \right]$$

$$l = \frac{1}{2} R_0 \left[\frac{\sin \varphi_a}{\cos^2 \varphi_a} + \ln \left(\left| \frac{1 + \sin \varphi_a}{\cos \varphi_a} \right| \right) - \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \ln \left(\left| \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right| \right) \right]$$

Flächenparameter: $A = -R_0 \tan \varphi$

$$B = -R_0 \frac{1}{\cos^3 \varphi}$$

$$R_1 = -R_0 \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$R_2 = -R_0 \cdot \frac{1}{\cos^3 \varphi}$$

Gauß'sche Krümmung: $K = \frac{\cos^4 \varphi}{R_0^2}$

Die Paraboloidfläche wird Differentialgleichungen vom parabolischen Typ liefern.

Ortsvektor: $\mathbf{r} = R_0 \tan \varphi \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R_0 \tan \varphi \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - \left(\frac{R_0}{2} \tan \varphi - H_a \right) \mathbf{i}_3$

Basisvektoren: $\mathbf{a}_1 = -R_0 \tan \varphi \sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R_0 \tan \varphi \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$

$$\mathbf{t}_1 = -\sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = -R_0 \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - R_0 \frac{1}{\cos^2 \varphi} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - R_0 \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{t}_2 = \cos \varphi \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \tan \varphi \mathbf{i}_3 \right]$$

$$\mathbf{a}_3 = R_0^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R_0^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - R_0^2 \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{t}_3 = \sin \varphi \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - \cot \varphi \mathbf{i}_3 \right]$$

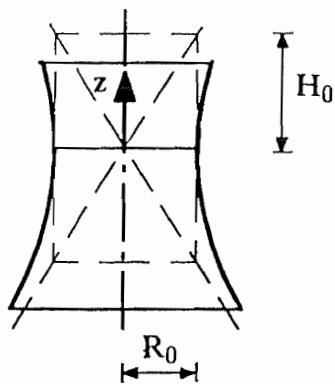
Höhere Ableitungen:

$$\mathbf{r}_{,11} = R_0 \tan \varphi \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - R_0 \tan \varphi \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{r}_{,22} = -\frac{2R_0 \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - \frac{2R_0 \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - R_0 \frac{1 + 2 \sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} \mathbf{i}_3$$

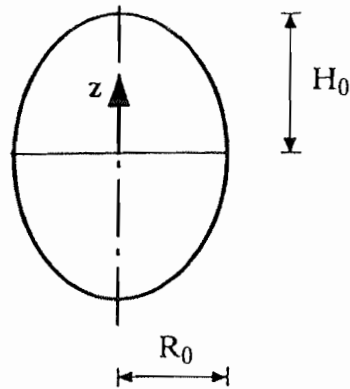
Hyperboloid, Ellipsoid, Kugel, Zylinder mit $\Theta^2 = z$

Einheitliche Darstellung von Hyperboloid, Ellipsoid und Kugel



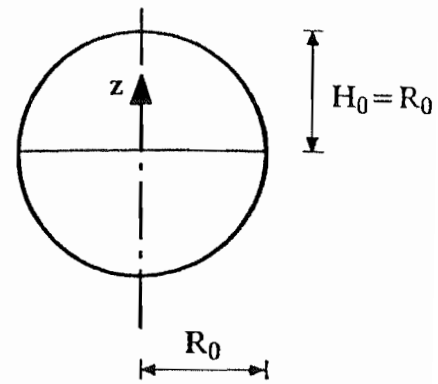
Hyperbel

$$\frac{R(z)^2}{R_0^2} - \frac{z^2}{H_0^2} = 1$$



Ellipse

$$\frac{R(z)^2}{R_0^2} + \frac{z^2}{H_0^2} = 1$$



Kreis

$$\frac{R(z)^2}{R_0^2} + \frac{z^2}{R_0^2} = 1$$

Allgemeine Gleichung:

$$R(z)^2 + \frac{R_0^2}{H_0^2} \cdot z^2 = R_0^2$$

$$R(z)^2 + \alpha \cdot z^2 = R_0^2$$

$$\text{mit } \alpha = \frac{R_0^2}{H_0^2} = \frac{R_0^2 - R(z)^2}{z^2}$$

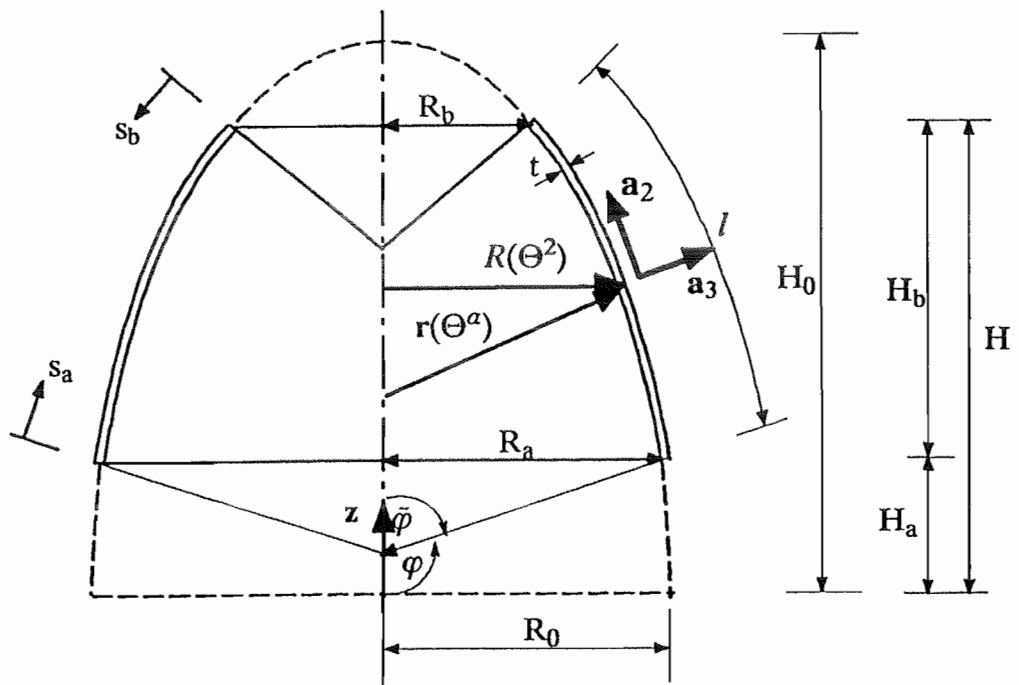
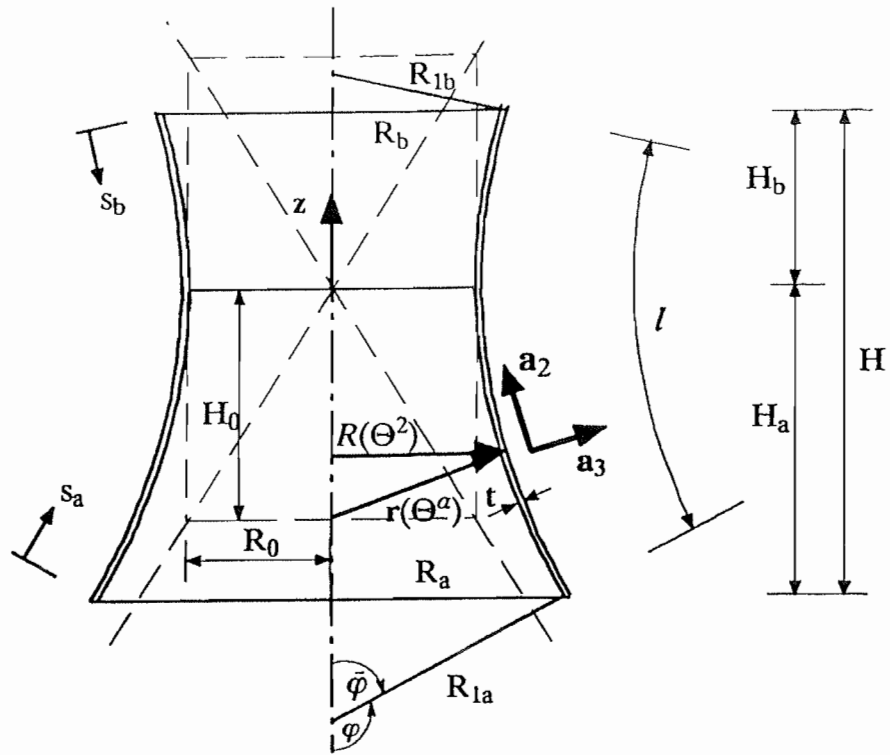
$\alpha < 0$ Hyperbel

$\alpha > 0$ Ellipse

$\alpha = 1$ Kreis

$\alpha = 0$ Zylinder

Ermittlung von α durch Einsetzen eines beliebigen Punktes z.B. $\alpha = \frac{R_0^2}{H_0^2} = \frac{R_0^2 - R_a^2}{H_a^2}$



Volumen:
$$V = \pi \left[R_0^2 (H_b - H_a) - \frac{a}{3} (H_b^3 - H_a^3) \right]$$

Mantelfläche:
$$M = \pi \left[z \sqrt{R_0^2 - az^2} + a^2 z^2 + \frac{R_0^2}{a^2 - a} \operatorname{arcsinh} \frac{z \sqrt{a^2 - a}}{R_0} \right]_{H_a}^{H_b} \text{ für } (a^2 - a) > 0$$

$$M = \pi \left[z \sqrt{R_0^2 - az^2} + a^2 z^2 + \frac{R_0^2}{a - a^2} \operatorname{arcsin} \frac{z \sqrt{a - a^2}}{R_0} \right]_{H_a}^{H_b} \text{ für } (a^2 - a) < 0$$

Bogenlänge l:
$$l = \int_a^b B \, dz = \int_a^b \frac{\sqrt{R_0^2 - az^2 + a^2z^2}}{\sqrt{R_0^2 - az^2}} \, dz$$

Koordinate z:
$$z = \Theta^2$$

Radius:
$$R(\Theta^2) = \sqrt{R_0^2 - az^2}$$

Winkel:
$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{R_0^2 - az^2}}{\sqrt{R_0^2 - az^2 + a^2z^2}}$$

$$\cos \varphi = -\frac{az}{\sqrt{R_0^2 - az^2 + a^2z^2}}$$

$$\tan \varphi = -\frac{\sqrt{R_0^2 - az^2}}{az}$$

Ableitungen:
$$R(z)_{,z} = -\frac{az}{\sqrt{R_0^2 - az^2}} = -\frac{az}{R(z)}$$

$$R(z)_{,zz} = -\frac{R(z)^2 - az^2}{R(z)^3} = -\frac{aR_0^2}{(R_0^2 - az^2)^{3/2}}$$

Bogenparameter:
$$s_a = \int_a^z B \cdot dz = \int_a^z \frac{\sqrt{R_0^2 - az^2 + a^2z^2}}{\sqrt{R_0^2 - az^2}} \cdot dz$$

$$s_b = -\int_b^z B \cdot dz = -\int_b^z \frac{\sqrt{R_0^2 - az^2 + a^2z^2}}{\sqrt{R_0^2 - az^2}} \cdot dz$$

Flächenparameter:
$$A = \sqrt{R_0^2 - az^2}$$

$$B = \frac{\sqrt{R_0^2 - a^2z^2}}{R(z)} = \frac{\sqrt{R_0^2 - az^2 + a^2z^2}}{\sqrt{R_0^2 - az^2}}$$

$$R_1 = \sqrt{R_0^2 - az^2 + a^2z^2}$$

$$R_2 = \frac{(R_0^2 - az^2 + a^2z^2)^{3/2}}{aR_0^2}$$

Gauß'sche Krümmung:
$$K = \frac{aR_0^2}{(R_0^2 - az^2 + a^2z^2)^2}$$

Die Hyperboloidfläche wird Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typ liefern.
Die Ellipsoidfläche wird Differentialgleichungen vom parabolischen Typ liefern.

Ortsvektor:
$$\mathbf{r} = \sqrt{R_0^2 - az^2} \cdot \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sqrt{R_0^2 - az^2} \cdot \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + z \mathbf{i}_3$$

Basisvektoren:
$$\mathbf{a}_1 = -\sqrt{R_0^2 - az^2} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sqrt{R_0^2 - az^2} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{t}_1 = -\sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = -\frac{az}{\sqrt{R_0^2 - az^2}} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - \frac{az}{\sqrt{R_0^2 - az^2}} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{R_0^2 - az^2 + a^2 z^2}} \left[-az \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - az \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \sqrt{R_0^2 - az^2} \mathbf{i}_3 \right]$$

$$\mathbf{a}_3 = \sqrt{R_0^2 - az^2} \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \frac{az}{\sqrt{R_0^2 - az^2}} \mathbf{i}_3 \right]$$

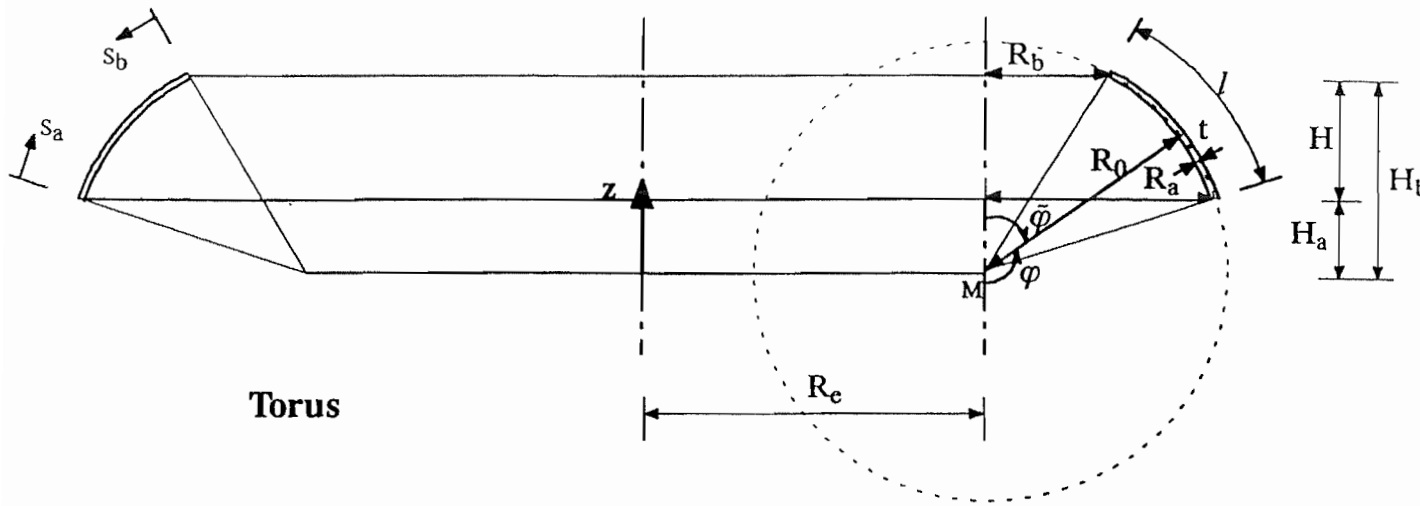
$$\mathbf{t}_3 = \frac{\sqrt{R_0^2 - az^2}}{\sqrt{R_0^2 - az^2 + a^2 z^2}} \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \frac{az}{\sqrt{R_0^2 - az^2}} \mathbf{i}_3 \right]$$

Höhere Ableitungen:

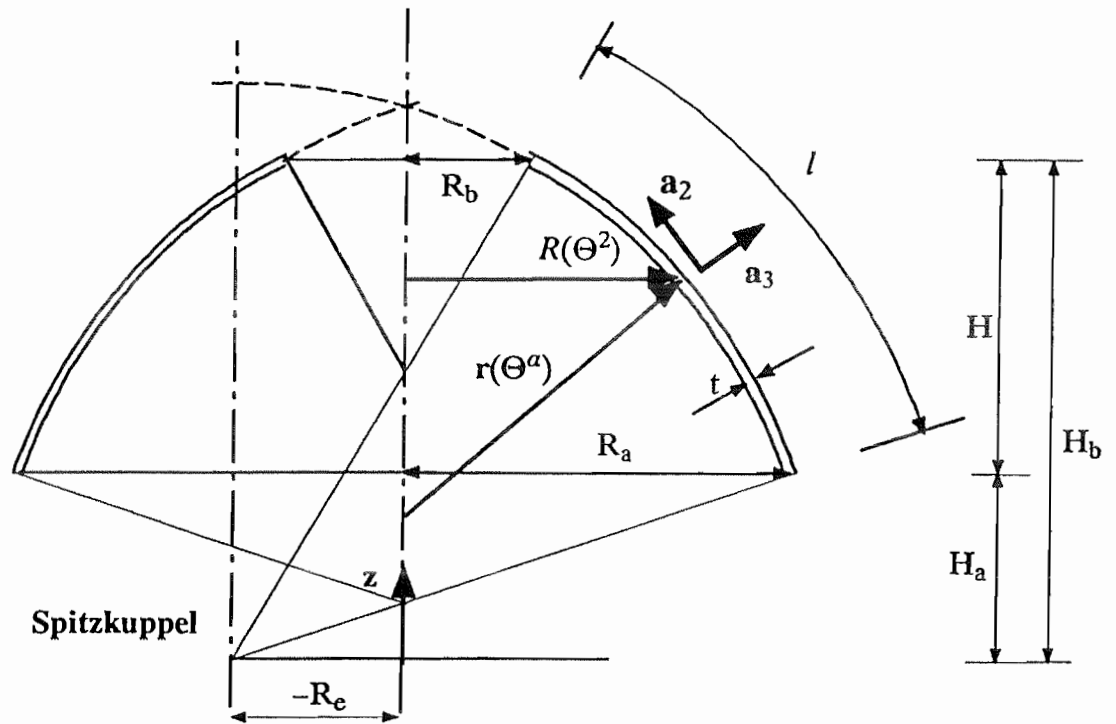
$$\mathbf{r}_{,11} = -\sqrt{R_0^2 - az^2} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - \sqrt{R_0^2 - az^2} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{r}_{,22} = -\frac{aR_0^2}{(R_0^2 - az^2)^{3/2}} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - \frac{aR_0^2}{(R_0^2 - az^2)^{3/2}} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

Spitzkuppel, Torus, Kreis mit $\Theta^2 = z$



Torus



Spitzkuppel

Volumen:
$$V = \pi \left[(R_0^2 + R_e^2) H + \frac{1}{3} (H_a^3 - H_b^3) + R_e R_0^2 \left(\arcsin \frac{H_b}{R_0} - \arcsin \frac{H_a}{R_0} \right) + R_e H_b \sqrt{R_0^2 - H_b^2} - R_e H_a \sqrt{R_0^2 - H_a^2} \right]$$

Mantelfläche:
$$M = 2\pi \left[R_0 \cdot H + R_e R_0 \left(\arcsin \frac{H_b}{R_0} - \arcsin \frac{H_a}{R_0} \right) \right]$$

Bogenlänge l: $l = R_0 \cdot \left(\arcsin \frac{H_b}{R_0} - \arcsin \frac{H_a}{R_0} \right)$

Koordinate z: $z = \Theta^2$

Radius: $R(\Theta^2) = \sqrt{R_0^2 - z^2} + R_e$

Winkel: $\sin \varphi = \frac{\sqrt{R_0^2 - z^2}}{R_0}$

$$\cos \varphi = -\frac{z}{R_0}$$

$$\tan \varphi = -\frac{\sqrt{R_0^2 - z^2}}{z}$$

Ableitungen: $R(z)_{,z} = -\frac{z}{\sqrt{R_0^2 - z^2}} = -\frac{z}{R(z)}$

$$R(z)_{,zz} = -\frac{R(z)^2 - z^2}{R(z)^3} = -\frac{R_0^2}{(R_0^2 - z^2)^{3/2}}$$

Bogenparameter: $s_a = R_0 \cdot \left(\arcsin \frac{z}{R_0} - \arcsin \frac{H_a}{R_0} \right)$

$$s_b = R_0 \cdot \left(\arcsin \frac{H_b}{R_0} - \arcsin \frac{z}{R_0} \right)$$

Flächenparameter: $A = \sqrt{R_0^2 - z^2}$

$$B = \frac{R_0}{\sqrt{R_0^2 - z^2}}$$

$$R_1 = R_0 + \frac{R_e R_0}{\sqrt{R_0^2 - z^2}}$$

$$R_2 = R_0$$

Gauß'sche Krümmung: $K = \frac{\sqrt{R_0^2 - z^2}}{R_0^2 (\sqrt{R_0^2 - z^2} + R_e)}$

Die Torus- bzw Spitzkuppelfläche wird Differentialgleichungen vom parabolischen Typ liefern.

Ortsvektor:
$$\mathbf{r} = (\sqrt{R_0^2 - az^2} + R_e) \cdot \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + (\sqrt{R_0^2 - az^2} + R_e) \cdot \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + z \mathbf{i}_3$$

Basisvektoren:
$$\mathbf{a}_1 = -(\sqrt{R_0^2 - z^2} + R_e) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + (\sqrt{R_0^2 - z^2} + R_e) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{t}_1 = -\sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = -\frac{z}{\sqrt{R_0^2 - z^2}} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - \frac{z}{\sqrt{R_0^2 - z^2}} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{t}_2 = \left[-\frac{z}{R_0} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - \frac{z}{R_0} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \frac{\sqrt{R_0^2 - z^2}}{R_0} \mathbf{i}_3 \right]$$

$$\mathbf{a}_3 = (\sqrt{R_0^2 - z^2} + R_e) \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \frac{z}{\sqrt{R_0^2 - z^2}} \mathbf{i}_3 \right]$$

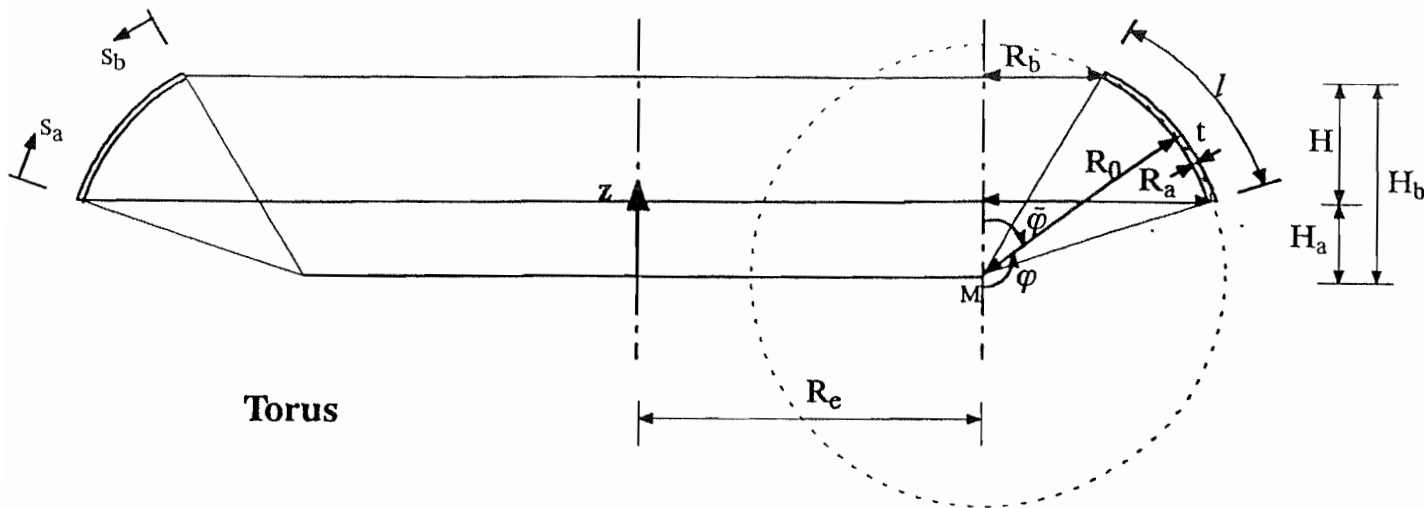
$$\mathbf{t}_3 = \frac{\sqrt{R_0^2 - z^2}}{R_0} \left[\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \frac{z}{\sqrt{R_0^2 - z^2}} \mathbf{i}_3 \right]$$

Höhere Ableitungen:

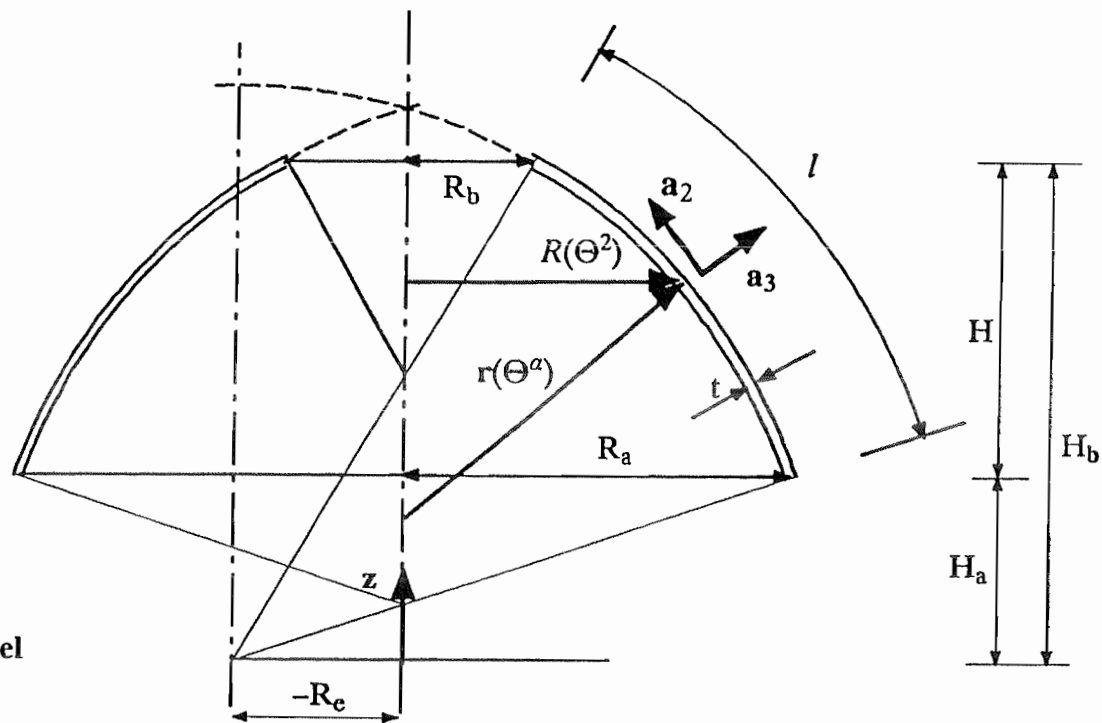
$$\mathbf{r}_{,11} = -(\sqrt{R_0^2 - z^2} + R_e) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - (\sqrt{R_0^2 - z^2} + R_e) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{r}_{,22} = -\frac{R_0^2}{(R_0^2 - z^2)^{3/2}} \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - \frac{R_0^2}{(R_0^2 - z^2)^{3/2}} \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

Spitzkuppel, Torus, Kreis mit $\Theta^2 = \varphi$



Torus



Spitzkuppel

- Volumen:**
$$V = \frac{\pi \cdot R_0^3}{3} [3 \cdot (\cos \varphi_a - \cos \varphi_b) - (\cos^3 \varphi_a - \cos^3 \varphi_b)]$$

$$+ \pi [R_e R_0^2 (\varphi_b - \sin \varphi_b \cos \varphi_b) - R_e^2 R_0 \cos \varphi_b$$

$$- R_e R_0^2 (\varphi_a + \sin \varphi_a \cos \varphi_a) + R_e^2 R_0 \cos \varphi_a]$$
- Mantelfläche:**
$$M = 2\pi \cdot R_0^2 \cdot (\cos \varphi_a - \cos \varphi_b) + 2\pi \cdot R_e \cdot R_0 \cdot (\varphi_b - \varphi_a)$$
- Bogenlänge l:**
$$l = R_0 \cdot (\varphi_b - \varphi_a)$$
- Koordinate z:**
$$z(\varphi) = -R_0 \cdot \cos \varphi$$

Radius:	$R(\varphi) = R_0 \cdot \sin \varphi + R_e$	
	$R(\varphi) = R_0(\sin \varphi - \sin \varphi_0)$	für Spitzkuppel
Winkel:	$\varphi = \Theta^2$	
Ableitungen:	$R(\varphi),_{\varphi} = R_0 \cdot \cos \varphi$	
	$R(\varphi),_{\varphi\varphi} = -R_0 \cdot \sin \varphi$	
	$z(\varphi),_{\varphi} = R_0 \cdot \sin \varphi$	
	$z(\varphi),_{\varphi\varphi} = R_0 \cdot \cos \varphi$	
Bogenparameter:	$s_a = R_0 \cdot (\varphi - \varphi_a)$	
	$s_b = R_0 \cdot (\varphi_b - \varphi)$	
Flächenparameter:	$A = R(\varphi) = R_0 \sin \varphi + R_e$	
	$B = R_0$	
	$R_1 = R_0 + \frac{R_e}{\sin \varphi}$	
	$R_1 = R_0 \left(1 - \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi} \right)$	für Spitzkuppel
	$R_2 = R_0$	
Gauß'sche Krümmung:	$K = \frac{\sin \varphi}{R_0^2 \sin \varphi + R_e R_0}$	
	$K = \frac{\sin \varphi}{R_0^2 (\sin \varphi - \sin \varphi_0)}$	für Spitzkuppel

Die Spitzkuppelfläche wird Differentialgleichungen vom parabolischen Typ liefern.

Ortsvektor:	$\mathbf{r} = (R_0 \sin \varphi + R_e) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + (R_0 \sin \varphi + R_e) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - R_0 \cos \varphi \mathbf{i}_3$
Basisvektoren:	$\mathbf{a}_1 = -(R_0 \sin \varphi + R_e) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + (R_0 \sin \varphi + R_e) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$
	$\mathbf{t}_1 = -\sin \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \cos \Theta^1 \mathbf{i}_2$
	$\mathbf{a}_2 = R_0 \cos \varphi \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R_0 \cos \varphi \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + R_0 \sin \varphi \mathbf{i}_3$
	$\mathbf{t}_2 = \cos \varphi [\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + \tan \varphi \mathbf{i}_3]$
	$\mathbf{a}_3 = (R_0 \sin \varphi + R_e)[R_0 \sin \varphi \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + R_0 \sin \varphi \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - R_0 \cos \varphi \mathbf{i}_3]$
	$\mathbf{t}_3 = \sin \varphi [\cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 - \cot \varphi \mathbf{i}_3]$

Höhere Ableitungen:

$$\mathbf{r}_{,11} = -(R_0 \sin \varphi + R_e) \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - (R_0 \sin \varphi + R_e) \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{r}_{,22} = -R_0 \sin \varphi \cos \Theta^1 \mathbf{i}_1 - R_0 \sin \varphi \sin \Theta^1 \mathbf{i}_2 + R_0 \cos \varphi \mathbf{i}_3$$

FORMELSAMMLUNG MEMBRANTHEORIE

Kräftegleichgewicht im Membranspannungszustand

Allgemeine Schalen:

$$\begin{bmatrix} B_{,1} + B\partial_1 & 2A_{,2} + A\partial_2 & -B_{,1} \\ -A_{,2} & 2B_{,1} + B\partial_1 & A_{,2} + A\partial_2 \\ -\frac{AB}{R_1} & 0 & -\frac{AB}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{22} \end{bmatrix} + AB \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \end{bmatrix} = 0$$

Rotationsschalen:

Rotationssymm. Geometrie: $A = R(\Theta^2)$ (wegen $\Theta^1 = \vartheta$)
 $B_{,1} = 0$ (keine Krümmungsänderung im Umfangsrichtung)

Gleichgewichtsbedingungen für beliebige Θ^2 und beliebige Lasten:

$$\begin{bmatrix} B\partial_1 & 2R_{,2} + R\partial_2 & 0 \\ -R_{,2} & B\partial_1 & R_{,2} + R\partial_2 \\ -\frac{RB}{R_1} & 0 & -\frac{RB}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{22} \end{bmatrix} + RB \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \end{bmatrix} = 0$$

Umgeformt und ausgeschrieben:

$$n_{11,1} + \frac{1}{RB}(R^2 n_{12})_{,2} + R \bar{p}_1 = 0 \quad (1)$$

$$-R_{,2} n_{11} + B n_{12,1} + (R n_{22})_{,2} + RB \bar{p}_2 = 0 \quad (2)$$

$$-\frac{1}{R_1}n_{11} - \frac{1}{R_2}n_{22} + \bar{p}_3 = 0 \quad (3)$$

Rotationsschalen mit rotationssymmetrischer Belastung:

Bei rotationssymm. Belastung gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \Theta^1} = 0 \quad (\text{keine Änderung in Umfangsrichtung})$$

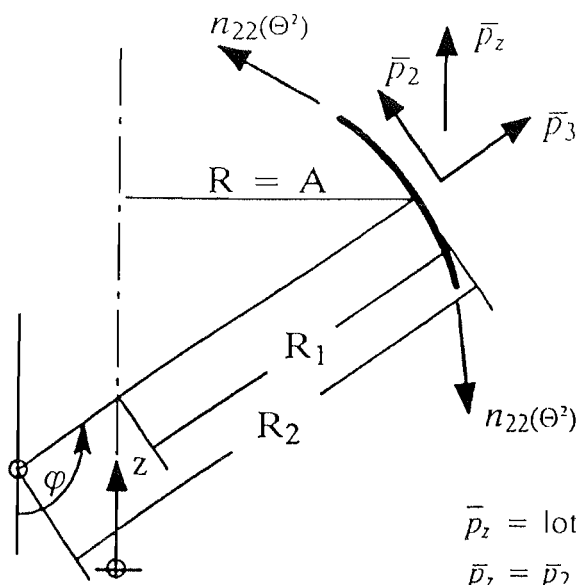
Gleichgewichtsbedingung für beliebige Θ^2 :

$$R n_{12,2} + 2R_{,2} n_{12} + RB \bar{p}_1 = 0 \quad (\text{Torsion}) \quad (1a)$$

$$-R_{,2} n_{11} + (R n_{22})_{,2} + RB \bar{p}_2 = 0 \quad (2a)$$

$$-\frac{1}{R_1}n_{11} - \frac{1}{R_2}n_{22} + \bar{p}_3 = 0 \quad (3a)$$

Rotationsschalen mit rotationssymmetrischer Belastung::



Meridianschnitt

\bar{p}_z = lotrechte Komponente der Flächenlast
 $\bar{p}_z = \bar{p}_2 \sin \varphi - \bar{p}_3 \cos \varphi$

Allg. Lösung für beliebige Θ^2 (Θ^2 muß zweckmäßig gewählt werden):

Gleichgewicht $\Sigma V_z = 0$:

$$n_{22}(\Theta^2) = -\frac{R_1}{R^2} \frac{F_z}{2\pi} = -\frac{F_z}{2\pi R \sin \varphi} = -\frac{F_z}{2\pi R_1 \sin^2 \varphi}$$

$$\begin{aligned} F_z &= 2\pi \int_{\Theta^2} \bar{p}_z R B d\Theta^2 + C \\ &= 2\pi \int_z [\bar{p}_2 - R_{,2} \bar{p}_3] R dz + C \\ &= 2\pi \int_{\varphi} [\bar{p}_2 \sin \varphi - \bar{p}_3 \cos \varphi] R R_2 d\varphi + C \end{aligned}$$

F_z = Resultierende aller lotrechten Lastkomponenten für den betrachteten Bereich bzw. Schnitt)

$$n_{22}(\Theta^2) = -\frac{R_1}{R^2} \int_{\Theta^2} \bar{p}_z R B d\Theta^2 + C$$

$$n_{11}(\Theta^2) = -\frac{R_1}{R_2} n_{22} + R_1 \bar{p}_3 = R_1 \left(\bar{p}_3 - \frac{n_{22}}{R_2} \right)$$

$$n_{12}(\Theta^2) = -\frac{1}{R^2} \int_{\Theta^2} \bar{p}_1 R^2 B d\Theta^2 + C$$

Lösung für $\Theta^2 = z$:

$$\begin{aligned} n_{22}(z) &= -\frac{R_1}{R^2} \int_z [\bar{p}_2 - R_{,2} \bar{p}_3] R dz + C \\ &= -\frac{\sqrt{1 + (R_{,2})^2}}{R} \int_z [\bar{p}_2 - R_{,2} \bar{p}_3] R dz + C \end{aligned}$$

$$n_{11}(z) = -\frac{R_1}{R_2} n_{22} + R_1 \bar{p}_3 = R_1 \left(\bar{p}_3 - \frac{n_{22}}{R_2} \right)$$

$$n_{12}(z) = -\frac{1}{R^2} \int_z \bar{p}_1 R^2 B dz + C$$

Lösung für $\Theta^2 = \varphi$:

$$\begin{aligned} n_{22}(\varphi) &= -\frac{1}{R_1 \sin^2 \varphi} \int_\varphi [\bar{p}_2 \sin \varphi - \bar{p}_3 \cos \varphi] R R_2 d\varphi + C \\ &= -\frac{1}{R_1 \sin^2 \varphi} \int_\varphi [\bar{p}_2 \sin \varphi - \bar{p}_3 \cos \varphi] R_1 R_2 \sin \varphi d\varphi + C \end{aligned}$$

$$n_{11}(\varphi) = -\frac{R_1}{R_2} n_{22} + R_1 \bar{p}_3 = R_1 \left(\bar{p}_3 - \frac{n_{22}}{R_2} \right)$$

$$n_{12}(\varphi) = -\frac{1}{R_1^2 \sin^2 \varphi} \int_\varphi \bar{p}_1 R_2 R_1^2 \sin^2 \varphi d\varphi + C$$

Kinematische Gleichungen im Membranspannungszustand

Allgemeine Schalen:

$$\begin{bmatrix} B\partial_1 & A_{,2} & \frac{AB}{R_1} \\ -A_{,2} + A\partial_2 & -B_{,1} + B\partial_1 & 0 \\ B_{,1} & A\partial_2 & \frac{AB}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} = AB \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Rotationsschalen:

Rotationssymm. Geometrie: $A = R(\Theta^2)$ (wegen $\Theta^1 = \vartheta$)

$B_{,1} = 0$ (keine Krümmungsänderung im Umfangsrichtung)

Kinematische Gleichung für beliebige Θ^2 und beliebige Lasten:

$$\begin{bmatrix} B\partial_1 & R_{,2} & \frac{RB}{R_1} \\ -R_{,2} + R\partial_2 & B\partial_1 & 0 \\ 0 & R\partial_2 & \frac{RB}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} = RB \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Rotationsschalen mit rotationssymmetrischer Belastung:

Bei rotationssymm. Belastung gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \Theta^1} = 0 \quad (\text{keine Änderung in Umfangsrichtung})$$

Kinematische Gleichung für beliebige Θ^2 :

$$-R_{,2} v^1 + R v^1_{,2} = RB a_{12} \quad (\text{Torsion}) \quad (1a)$$

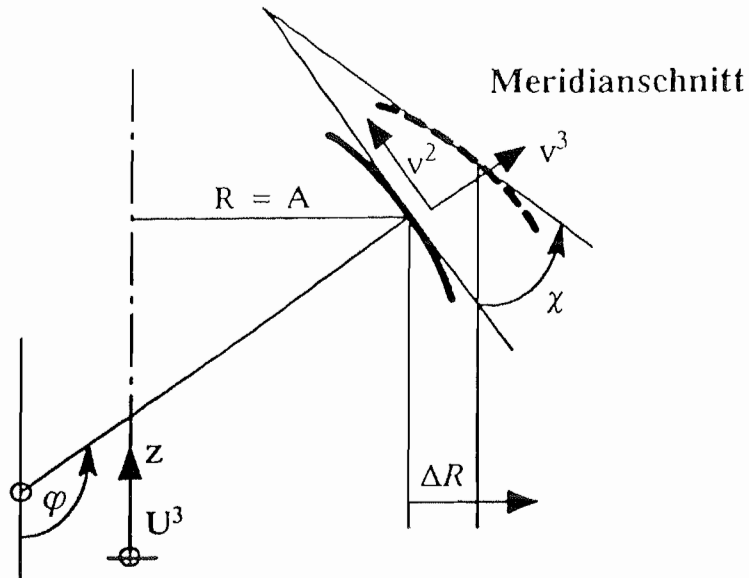
$$R_{,2} v^2 + \frac{RB}{R_1} v^3 = RB a_{11} \quad (2a)$$

$$v^2_{,2} + \frac{B}{R_2} v^3 = B a_{22} \quad (3a)$$

$$R_1 R_{,2} v^2 - R_2 R v^2_{,2} = RB (R_1 a_{11} - R_2 a_{22}) \quad (2b)$$

$$\frac{RB}{R_1} v^3 = RB a_{11} - R_{,2} v^2 \quad (3b)$$

Rotationsschalen mit rotationssymmetrischer Belastung:



Werkstoffgesetz:

$$\varepsilon_{11} = \alpha_{11} = \frac{1}{Et} (n_{11} - \nu n_{22})$$

$$\varepsilon_{22} = \alpha_{22} = \frac{1}{Et} (n_{22} - \nu n_{11})$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{1}{Gt} n_{12}$$

Allg. Lösung für beliebige Θ^2 :

$$\begin{aligned} \Delta R &= v^2 \cos \varphi + v^3 \sin \varphi \\ &= R \alpha_{11} = R \frac{1}{Et} (n_{11} - \nu n_{22}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U^3 &= v^2 \sin \varphi - v^3 \cos \varphi \\ &= \frac{1}{\sin \varphi} (v^2 - \cos \varphi \Delta R) = \frac{v^2}{\sin \varphi} - \Delta R \cot \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi &= -\frac{1}{B} v^3_{,2} + \frac{v^2}{R_2} = \frac{1}{R_2} \left(-\frac{\partial v^3}{\partial \varphi} + v^2 \right) \\ &= -\frac{R_{,2} R}{RB} (\alpha_{11} - \alpha_{22}) - \frac{R_1}{B} \alpha_{11,2} \end{aligned}$$

Lösung für $\Theta^2 = z$:

$$v^2(z) = -\frac{1}{B} \int \frac{B^2}{R_2} [R_1 \alpha_{11} - R_2 \alpha_{22}] dz + C$$

$$\begin{aligned} v^3(z) &= R_1 \alpha_{11} - R_2 v^2 \\ &= R_1 \alpha_{11} + \frac{R_2}{B} \int \frac{B^2}{R_2} [R_1 \alpha_{11} - R_2 \alpha_{22}] dz + C \end{aligned}$$

$$Et \Delta R = R (n_{11} - \nu n_{22})$$

$$Et \chi = -R_2 (1 + \nu)(n_{11} - n_{22}) - R \frac{\partial}{\partial z} (n_{11} - \nu n_{22})$$

$$U^3 = B v^2 - R_2 \Delta R$$

Lösung für $\Theta^2 = \varphi$:

$$v^2(\varphi) = -\sin \varphi \int \frac{[R_1 \alpha_{11} - R_2 \alpha_{22}]}{\sin \varphi} d\varphi + C$$

$$\begin{aligned} v^3(\varphi) &= R_1 \alpha_{11} - v^2 \cot \varphi \\ &= R_1 \alpha_{11} + \cos \varphi \int \frac{[R_1 \alpha_{11} - R_2 \alpha_{22}]}{\sin \varphi} d\varphi + C \end{aligned}$$

$$Et \Delta R = R (n_{11} - \nu n_{22})$$

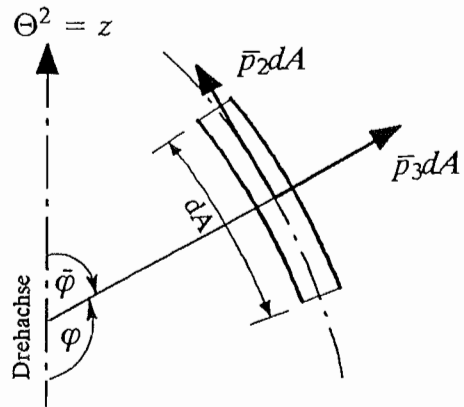
$$Et \chi = -\cot \varphi (1 + \nu)(n_{11} - n_{22}) - \frac{R_1}{R_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (n_{11} - \nu n_{22})$$

$$U^3 = \frac{1}{\sin \varphi} (v^2 - \cos \varphi \Delta R) = \frac{v^2}{\sin \varphi} - \Delta R \cot \varphi$$

Rotationssymmetrische Belastung

$\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3 \hat{=}$ Belastungsanteil in Richtung der Tangentenvektoren t_1, t_2, t_3

Rotationssymmetrie: $\Rightarrow \bar{p}_1 = 0$

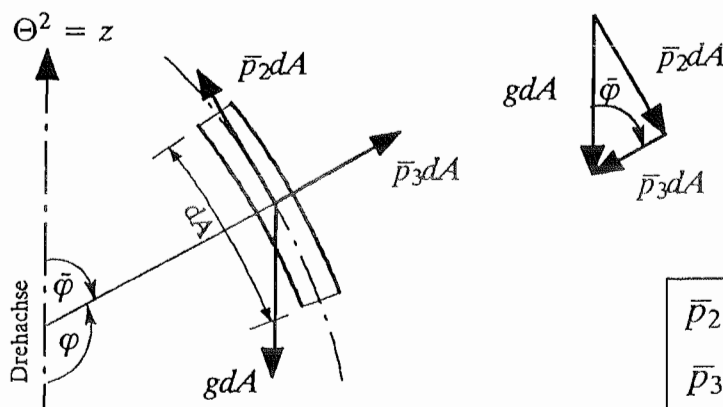


$$\tilde{\varphi} = \pi - \varphi$$

$$\cos \varphi = -\cos \tilde{\varphi} = \frac{R_{,2}}{\sqrt{1 + (R_{,2})^2}}$$

$$\sin \varphi = \sin \tilde{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 + (R_{,2})^2}}$$

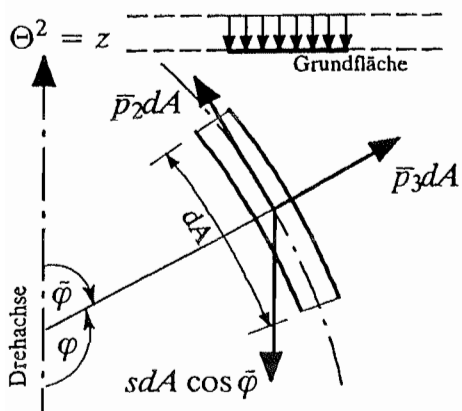
a) Eigengewicht g (Kraft/Schalenmittelfläche)



$$\bar{p}_2 = -g \sin \varphi = -g \sin \tilde{\varphi}$$

$$\bar{p}_3 = g \cos \varphi = -g \cos \tilde{\varphi}$$

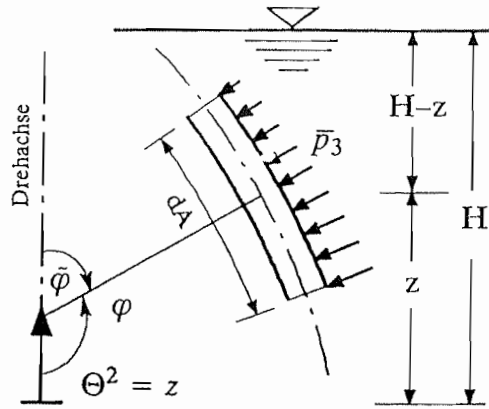
b) Schneelast s (Kraft/Grundfläche)



$$\bar{p}_2 = s \sin \varphi \cos \varphi = -s \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\varphi}$$

$$\bar{p}_3 = -s \cos^2 \varphi = -s \cos^2 \tilde{\varphi}$$

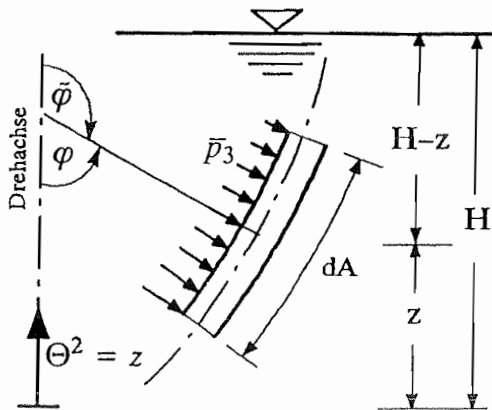
c) Hydrostatische Last (Flüssigkeitsdruck) (Last \perp zur Wandung)



$$\bar{p}_2 = 0$$

$$\bar{p}_3 = -(H-z) \cdot \gamma_F$$

entgegen t_3

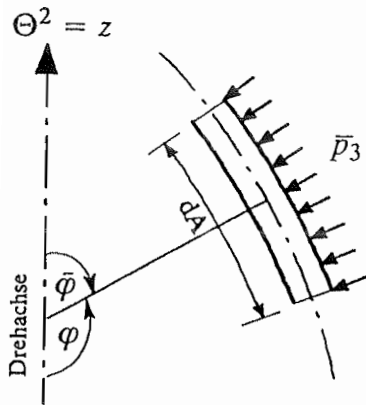


$$\bar{p}_2 = 0$$

$$\bar{p}_3 = (H-z) \cdot \gamma_F$$

in Richtung t_3

d) Gasdruck (Last \perp zur Wandung)

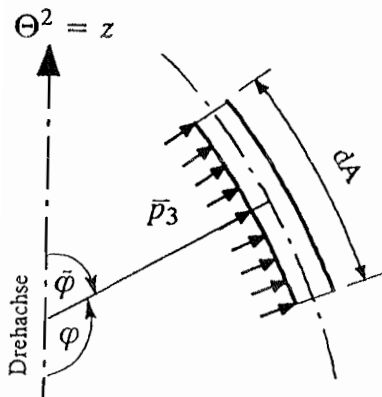


Aussendruck:

$$\bar{p}_2 = 0$$

$$\bar{p}_3 = -p$$

entgegen t_3



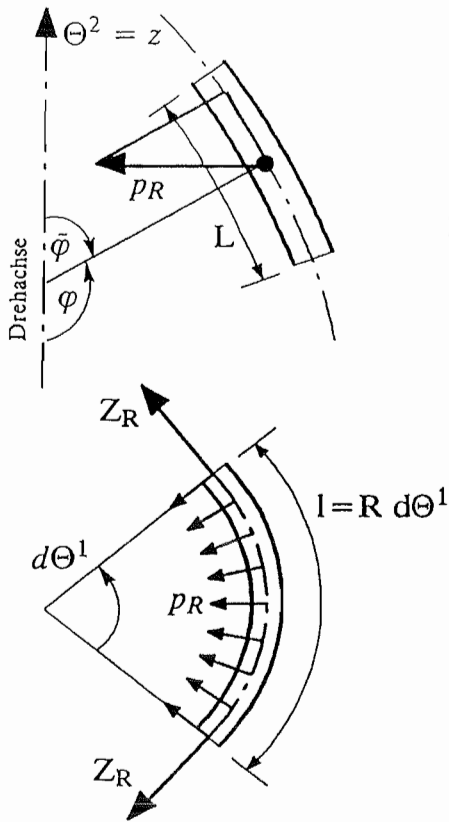
Innendruck:

$$\bar{p}_2 = 0$$

$$\bar{p}_3 = p$$

in Richtung t_3

e) Ringvorspannung Z_R



L = Verteilungsbreite der Spannglieder

"kontinuierliche Verschmierung", da sonst Unstetigkeiten in der Last

$$Z_R \cdot 2 \cdot \sin \frac{d\Theta^1}{2} = Z_R d\Theta^1 \quad \text{mit } \sin \Theta^1 = \Theta^1$$

$$p_R \cdot R \cdot d\Theta^1 = Z_R d\Theta^1$$

$$p_R = \frac{Z_R}{R} \quad [\text{kN/m}] \quad (\text{Umlenkraft})$$

$$\bar{p}_2 = -\frac{p_R \cos \varphi}{L} = -\frac{Z_R \cos \varphi}{R L}$$

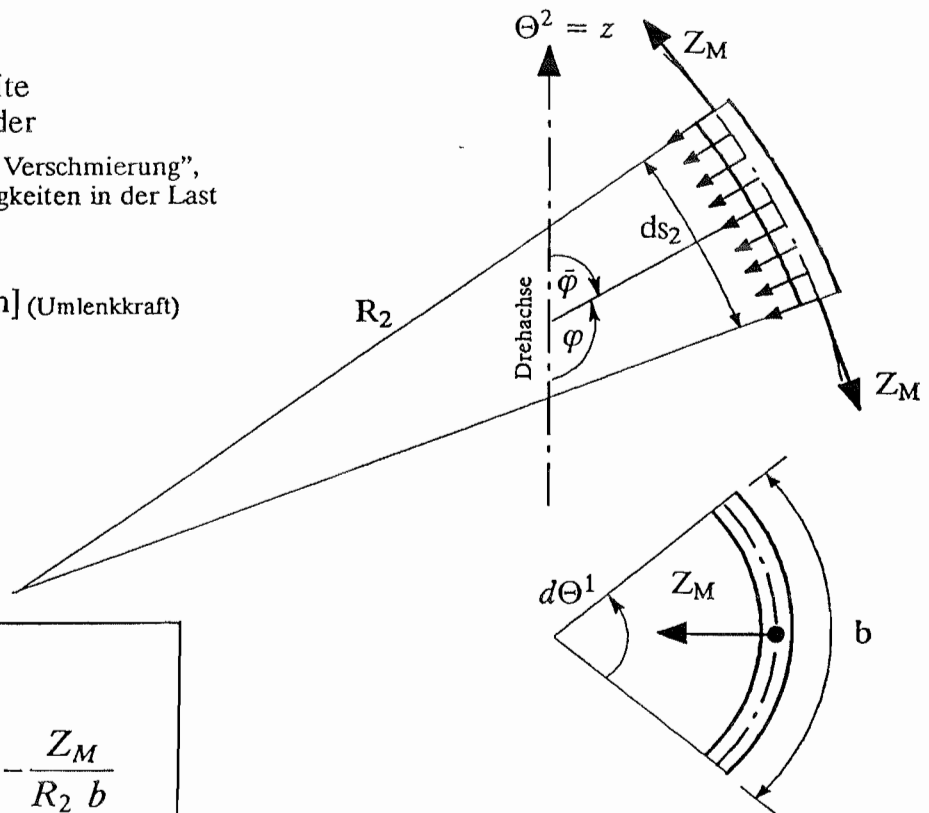
$$\bar{p}_3 = -\frac{p_R \sin \varphi}{L} = -\frac{Z_R \sin \varphi}{R L}$$

f) Meridianvorspannung Z_M

b = Verteilungsbreite der Spannglieder

"kontinuierliche Verschmierung", da sonst Unstetigkeiten in der Last

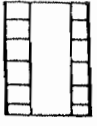
$$p_M = \frac{Z_M}{R_2} \quad [\text{kN/m}] \quad (\text{Umlenkraft})$$



$$\bar{p}_2 = 0$$

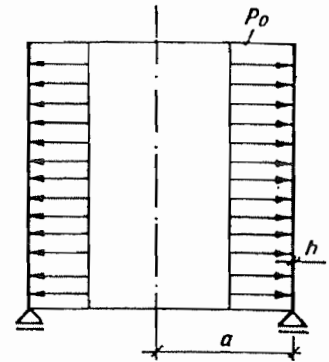
$$\bar{p}_3 = -\frac{p_M}{b} = -\frac{Z_M}{R_2 b}$$

Zylinderschale unter Innendruck

Zylinderschale	Membrantheorie	
Rechenbeispiel: Lastfall Innendruck		

Geometrie und Belastung

Schalenradius $a = 10 \text{ m}$
 Wanddicke $h = 0,15 \text{ m}$
 Baustoff Stahlbeton
 Elastizitätsmodul $E = 3 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$
 Belastung $p_0 = 100 \text{ kN/m}^2$

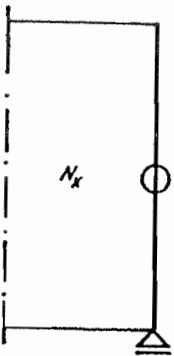


Berechnungsformeln

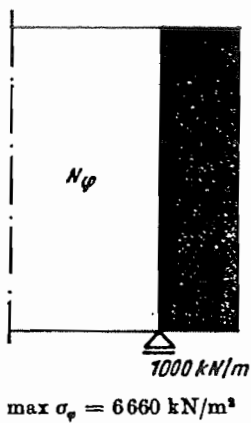
Längskraft $N_x = 0$	Ringkraft $N_\varphi = p_0 a$	Normalverschiebung $w = p_0 \frac{a^2}{Eh}$
-------------------------	----------------------------------	--

Rechenbeispiel

$N_x = 0$



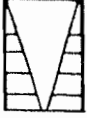
$N_\varphi = 1000 \text{ kN/m}$
 $= \text{const}$



$w = 2,2 \text{ mm}$
 $= \text{const}$

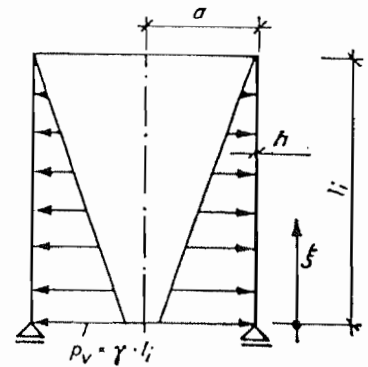


Zylinderschale unter Flüssigkeitsdruck

Zylinderschale	Membrantheorie	
Rechenbeispiel: Lastfall Flüssigkeitsdruck		

Geometrie und Belastung

Schalenradius $a = 10 \text{ m}$
 Schalenlänge $l = 20 \text{ m}$
 Wanddicke $h = 0,15 \text{ m}$
 Baustoff Stahlbeton
 Elastizitätsmodul $E = 3 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$
 Belastung:
 Flüssigkeit mit $\gamma = 1,0 \text{ g/cm}^3$

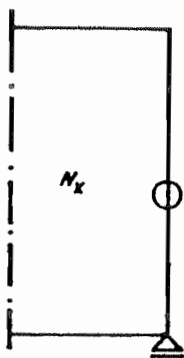


Berechnungsformeln

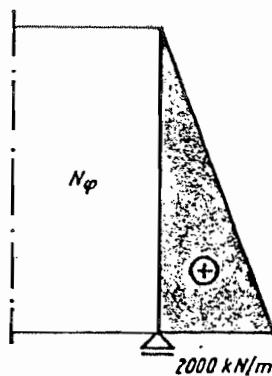
Längskraft	Ringkraft	Normalverschiebung
$N_x = 0$	$N_\varphi = p_v \cdot a(1 - \xi)$	$w = p_v \frac{a^2}{Eh} (1 - \xi)$

Rechenbeispiel

$\xi = 0; N_x = 0$
 $\xi = 0,5; N_x = 0$
 $\xi = 1,0; N_x = 0$

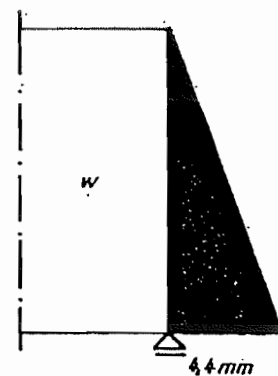


$N_\varphi = 2000 \text{ kN/m}$
 $N_\varphi = 1000 \text{ kN/m}$
 $N_\varphi = 0$



$\max \sigma_\varphi = + 13300 \text{ kN/m}^2$

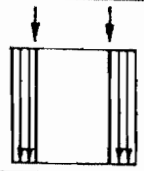
$w = 4,4 \text{ mm}$
 $w = 2,2 \text{ mm}$
 $w = 0$



Zylinderschale unter Eigenlast und vertikaler Randlast

Zylinderschale

Membrantheorie



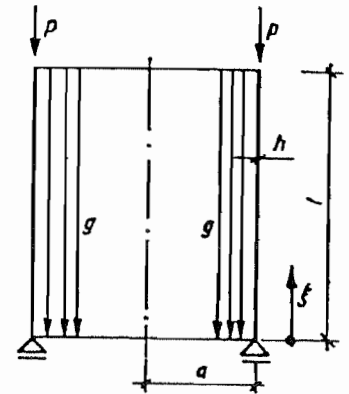
Rechenbeispiel: Lastfall Eigenlast und obere Randlast

Geometrie und Belastung

Schalenradius $a = 10 \text{ m}$
 Schalenlänge $l = 20 \text{ m}$
 Wanddicke $h = 0,15 \text{ m}$

Baustoff Stahlbeton

Elastizitätsmodul: $E = 3 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$
 Dichte $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$
 Querdehnzahl $\mu = 1/6$
 obere Randlast $p = 100 \text{ kN/m}$



Berechnungsformeln

Längskraft

$$N_x = -gl(1 - \xi) - p$$

Normalverschiebung

$$w = g \frac{\mu a}{Eh} l(1 - \xi) + p \frac{\mu a}{Eh}$$

Rechenbeispiel $g = \rho h = 0,375 \text{ N/cm}^2$

$$\xi = 0; \quad N_x = -175 \text{ kN/m}$$

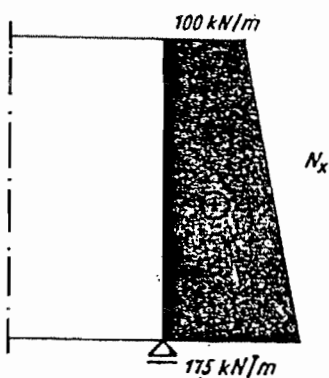
$$\xi = 0,5; \quad N_x = -137,5 \text{ kN/m}$$

$$\xi = 1; \quad N_x = -100 \text{ kN/m}$$

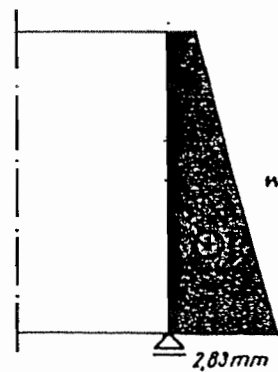
$$w = 2,83 \text{ mm}$$

$$w = 1,43 \text{ mm}$$

$$w = 0,03 \text{ mm}$$



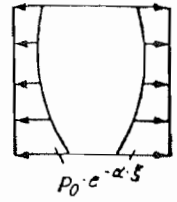
$$\max \sigma_x = -1170 \text{ kN/m}^2$$



Abschätzung der Gültigkeit der Membrantheorie für Belastung mit exponentiellem Verlauf

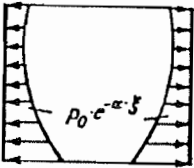
Zylinderschale

Membrantheorie



Vergleich Membrantheorie – Biegetheorie

Belastung

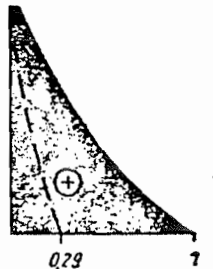
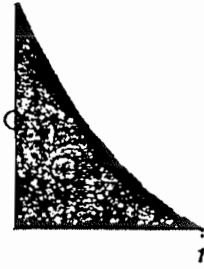
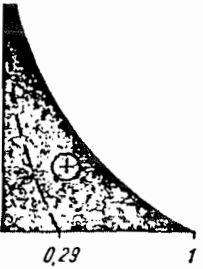
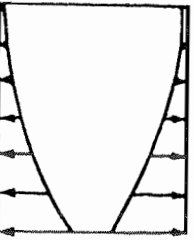
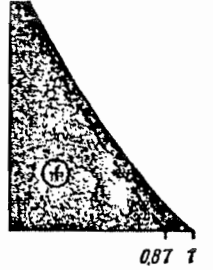
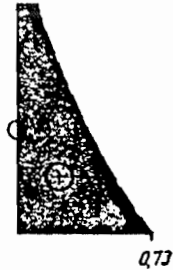
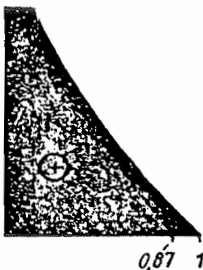
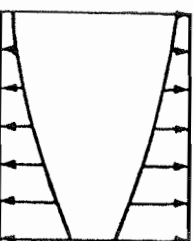
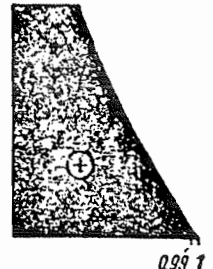
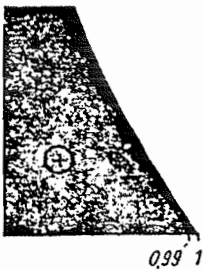
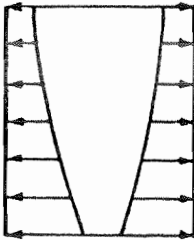
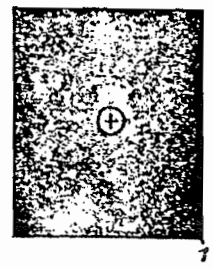
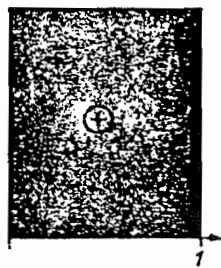
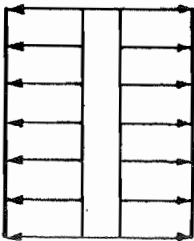


— Membrantheorie - - - Biegetheorie

N_φ
($kl = 3,2$)

M_x
($kl = 3,2$)

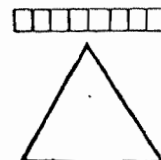
w
($kl = 3,2$)



Kegelschale unter gleichmäßig über den Grundriß verteilter Belastung

Kegelschale

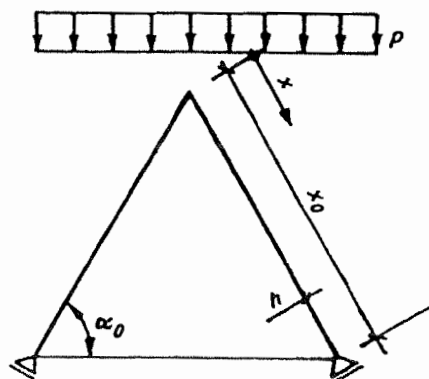
Membrantheorie



Rechenbeispiel: gleichmäßig verteilte Belastung

Geometrie und Belastung

Schalenslänge	$x_0 = 20 \text{ m}$
Wanddicke	$h = 0,15 \text{ m}$
Neigungswinkel	$\alpha_0 = 60^\circ$
Baustoff Stahlbeton	
Elastizitätsmodul	$E = 3 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$
Querdehnzahl	$\mu = 1/6$
Belastung	$p = 100 \text{ kN/m}^2$



Berechnungsformeln

Längskraft

$$N_x = -p \frac{\cot \alpha_0}{2} x$$

Ringkraft

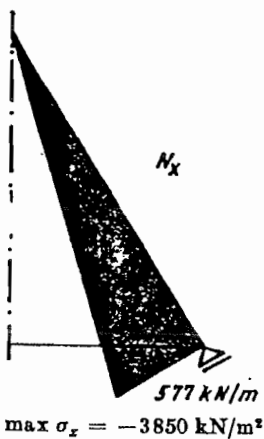
$$N_\varphi = -p \frac{\cos^3 \alpha_0}{\sin \alpha_0} x$$

Horizontalverschiebung

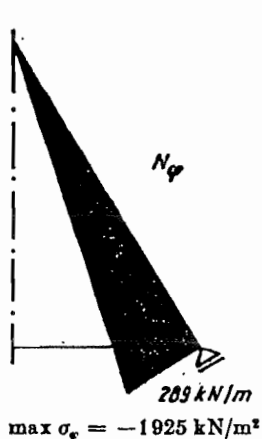
$$\Delta r = -p \frac{\cos^2 \alpha_0}{Eh \sin \alpha_0} \left(\cos^2 \alpha_0 - \frac{\mu}{2} \right) x^2$$

Rechenbeispiel

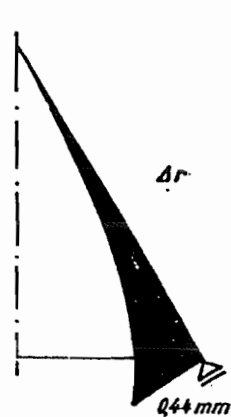
$x = 0;$	$N_x = 0$
$x = 0,5 x_0;$	$N_x = -289 \text{ kN/m}$
$x = x_0;$	$N_x = -577 \text{ kN/m}$



$N_\varphi = 0$
$N_\varphi = -144 \text{ kN/m}$
$N_\varphi = -289 \text{ kN/m}$



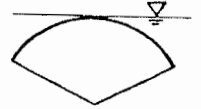
$\Delta r = 0$
$\Delta r = -0,11 \text{ mm}$
$\Delta r = -0,44 \text{ mm}$



Kugelschale unter Flüssigkeitsdruck

Kugelschale

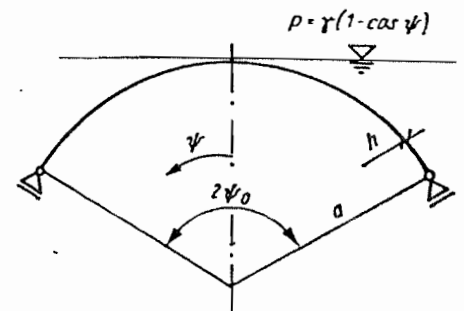
Membrantheorie



Rechenbeispiel: Lastfall Flüssigkeitsfüllung

Geometrie und Belastung

Schalenradius	$a = 11,55 \text{ m}$
Wanddicke	$h = 0,15 \text{ m}$
Öffnungswinkel	$2\psi_0 = 120^\circ$
Baustoff Stahlbeton	
Elastizitätsmodul	$E = 3 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$
Querdehnzahl	$\mu = 1,6$
Belastung:	
Flüssigkeit mit	$\gamma = 1,0 \text{ g/cm}^3$



Berechnungsformeln

Meridiankraft

$$N_\psi = -\gamma \frac{a^2}{6} \left(1 - 2 \frac{\cos^2 \psi}{1 + \cos \psi} \right)$$

Ringkraft

$$N_\varphi = \gamma \frac{a^2}{6} \left(1 - 2 \frac{3 - 2 \cos^2 \psi}{1 + \cos \psi} \right)$$

Horizontalverschiebung

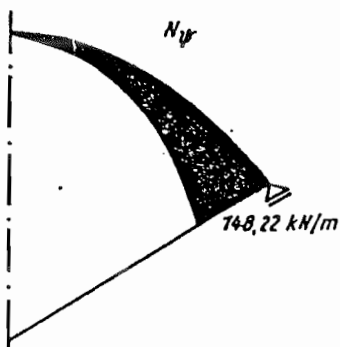
$$\Delta r = -\gamma \frac{a^3}{Eh} \sin \psi \left[1 - \cos \psi - \frac{1 + \mu}{6} \left(1 - 2 \frac{\cos^2 \psi}{1 + \cos \psi} \right) \right]$$

Rechenbeispiel

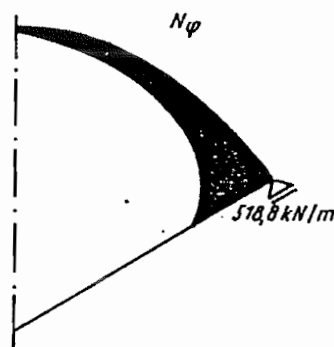
$\psi = 0;$	$N_\psi = 0$
$\psi = 0,5\psi_0;$	$N_\psi = -43,6 \text{ kN/m}$
$\psi = \psi_0;$	$N_\psi = -148,2 \text{ kN/m}$

$N_\varphi = 0$
$N_\varphi = -135,1 \text{ kN/m}$
$N_\varphi = -518,8 \text{ kN/m}$

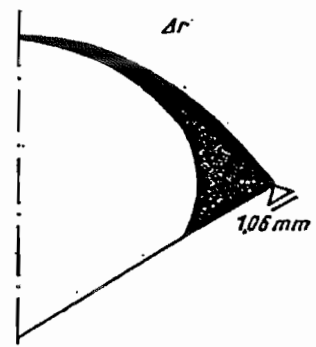
$\Delta r = 0$
$\Delta r = -0,67 \text{ mm}$
$\Delta r = -1,06 \text{ mm}$



$$\max \sigma_\psi = -990 \text{ kN/m}^2$$



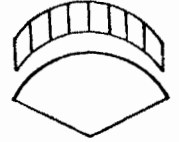
$$\max \sigma_\varphi = -3460 \text{ kN/m}^2$$



Kugelschale unter Eigenlast

Kugelschale

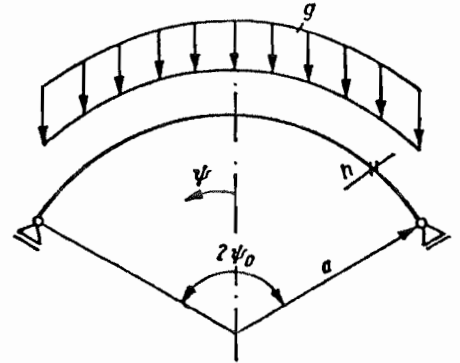
Membrantheorie



Rechenbeispiel: Lastfall Eigenlast

Geometrie und Belastung

Schalenradius $a = 11,55 \text{ m}$
 Wanddicke $h = 0,15 \text{ m}$
 Öffnungswinkel $2\psi_0 = 120^\circ$
 Baustoff Stahlbeton
 Elastizitätsmodul $E = 3 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$
 Dichte $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$
 Querdehnzahl $\mu = 1/6$



Berechnungsformeln

Meridiankraft

$$N_\psi = -g \frac{a}{1 + \cos \psi}$$

Ringkraft

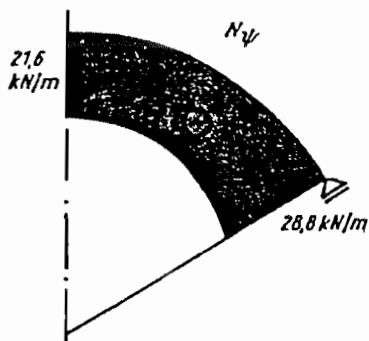
$$N_\varphi = -ga \left(\cos \psi - \frac{1}{1 + \cos \psi} \right)$$

Horizontalverschiebung

$$\Delta r = -g \frac{a^2}{Eh} \sin \psi \left(\cos \psi - \frac{1 + \mu}{1 + \cos \psi} \right)$$

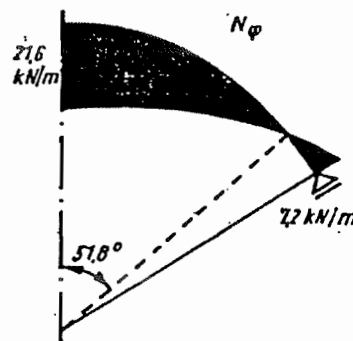
Rechenbeispiel $g = \rho h = 0,375 \text{ N/cm}^2$

$\psi = 0;$ $N_\psi = -21,6 \text{ kN/m}$
 $\psi = 0,5\psi_0;$ $N_\psi = -23,2 \text{ kN/m}$
 $\psi = \psi_0;$ $N_\psi = -28,8 \text{ kN/m}$



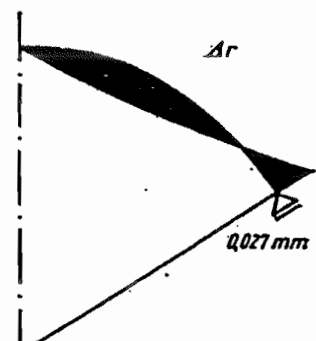
$\max \sigma_\psi = -192 \text{ kN/m}^2$

$N_\varphi = -21,6 \text{ kN/m}$
 $N_\varphi = -14,3 \text{ kN/m}$
 $N_\varphi = +7,2 \text{ kN/m}$



$\max \sigma_\varphi = -144 \text{ kN/m}^2$

$\Delta r = 0$
 $\Delta r = -0,013 \text{ mm}$
 $\Delta r = +0,027 \text{ mm}$



Zur Formulierung der Verträglichkeitsgleichungen des Kraftgrößenverfahrens bei zusammengesetzten rotationssymmetrischen Schalenträgwerken

1. Die Wirkungsrichtung der statisch unbestimmten Einheitsspannungszustände X_i ist beliebig wählbar. Es ist zweckmäßig, sie denen der Randkräfte und Randmomente der verwendeten Formelsammlung anzupassen.
2. Die Vorzeichen der δ -Werte sind nur an diskreten Punkten, den Angriffspunkten der statisch unbestimmten Kraftgrößen der Einheitsspannungszustände zu definieren. Sie sind nicht zu verwechseln mit den Funktionen $\chi(\xi)$ und $\Delta R(\xi)$, die bauteilbezogen festgelegt werden (siehe Spalte 1 im Beispiel Seite 2).
3. Die δ -Werte setzen sich i. a. aus zwei Anteilen zusammen, den Randverschiebungen $\Delta R \delta_{ik}^m$ und den Randverdrehungen $\chi \delta_{ik}^m$ benachbarter Bauteile.
 Der hochgestellte Index m kennzeichnet das Bauteil bzw. Schalenelement.
 Der erste tiefgestellte Index kennzeichnet Ort und Art der Verschiebung.
 Der zweite tiefgestellte Index kennzeichnet die verursachende statisch unbestimmte Kraftgröße, bzw. die eingeprägte Last.
 Der obere linke Index ΔR oder χ wird nur zur Verdeutlichung der Verschiebung oder Verdrehung verwendet. (Mit dem ersten Index des δ -Wertes ist die Art der Weggröße bereits festgelegt).
4. Die positive Wirkungsrichtung der Randverschiebungen $\Delta R \delta_{ik}^m$ und der Randverdrehungen $\chi \delta_{ik}^m$ ist durch die dem ersten tiefgestellten Index zugeordnete Kraftgröße bestimmt.
 Der Wert eines Anteils $\Delta R \delta_{ik}^m$ bzw. $\chi \delta_{ik}^m$ ist positiv, wenn die durch den Einheitsspannungszustand X_k am Ort i (des Schalenelements m) hervorgerufene Verschiebung (bzw. Verdrehung) den gleichen Richtungssinn besitzt, wie die statisch unbestimmte Kraftgröße X_i des Einheitsspannungszustandes i am Element m .

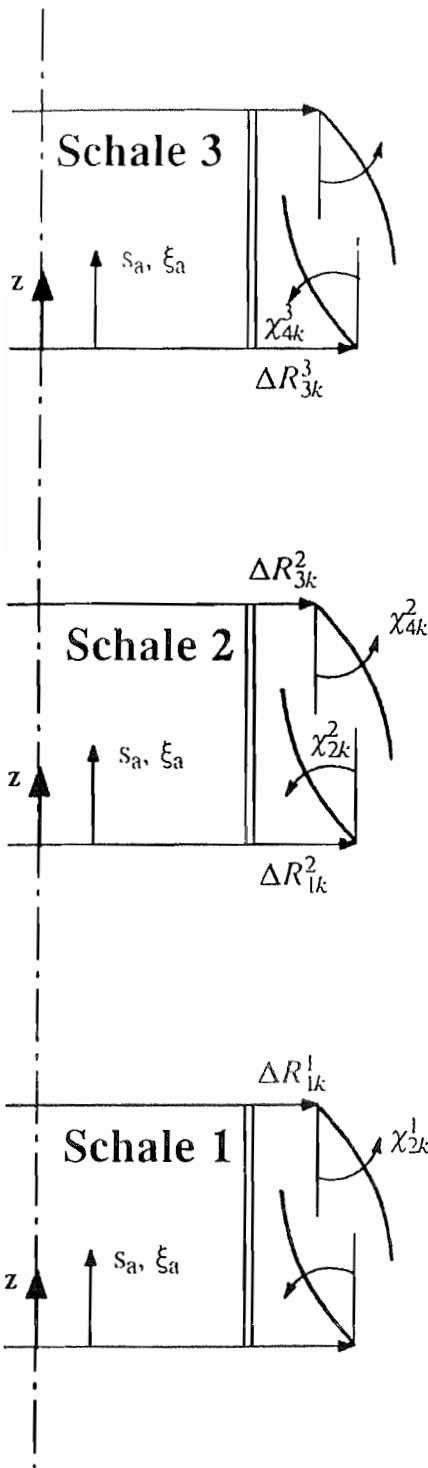
Zur Unterscheidung der Vorzeichendefinitionen werden folgende Formelzeichen eingeführt:

$\Delta R_{ik}^m, \chi_{ik}^m$ Verschiebung oder Verdrehung mit den Vorzeichen aus der verwendeten Formelsammlung.

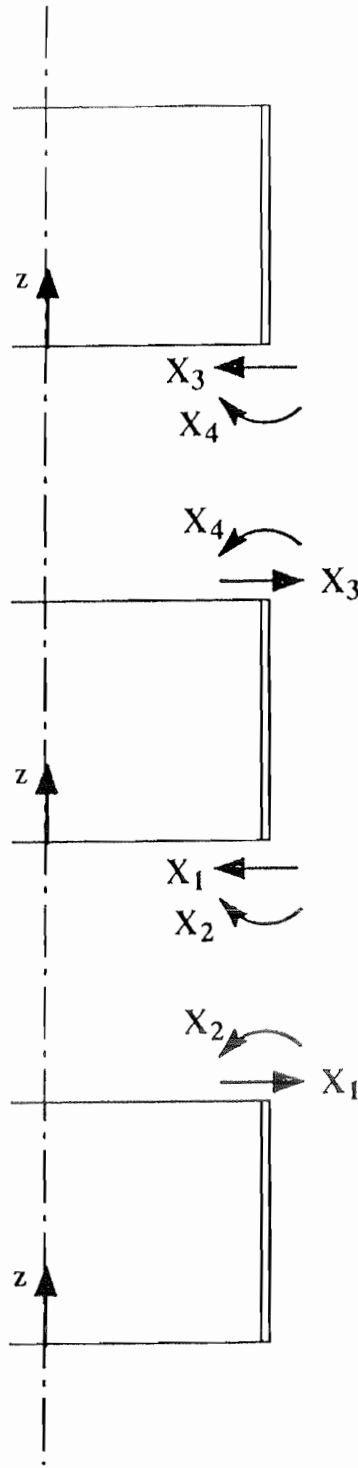
$\Delta R \delta_{ik}^m, \chi \delta_{ik}^m$ Verschiebung oder Verdrehung mit den entsprechenden Vorzeichen der zugeordneten statisch unbestimmten Kraftgröße.

$\Delta R f_{ik}^m, \chi f_{ik}^m$ vorzeichenlose Verschiebung oder Verdrehung.

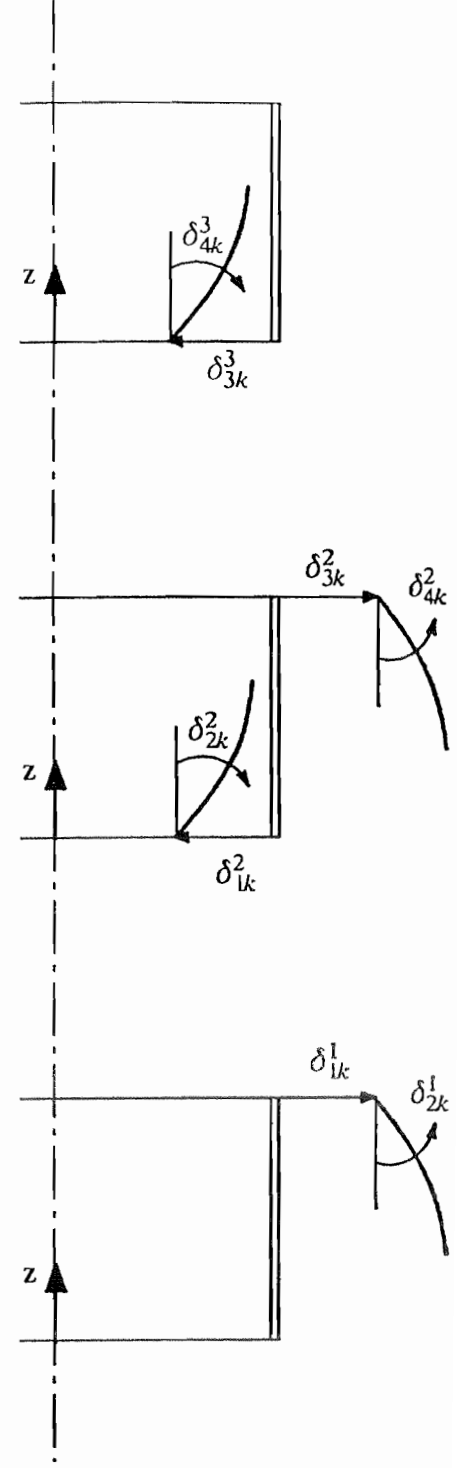
Die Vorzeichen sind **anschaulich** nach der Wirkungsrichtung festzulegen, d.h. wirkt die Verschiebung in Richtung der positiv definierten Richtung wird der Zahlenwert positiv, wirkt die Verschiebung entgegengesetzt der positiv definierten Richtung wird der Zahlenwert negativ.



1. Positive Wirkungsrichtung der Randkräfte und Zustandsgrößen lt. Abschnitt 7.5, Biegetheorie



2. Positive Wirkungsrichtung der statisch Unbestimmten (zweckmäßig, aber nicht zwingend)



3. Positive Wirkungsrichtung der Anteile der δ -Werte an den Bauteilen

Für das oben angegebene Beispiel gilt für die Zustandsgrößen im Schnitt zwischen Schale 1 und Schale 2:

Lastspannungszustand:

$$\Delta R_{\delta_{10}}^1 = \Delta R_{10}^1$$

$$\chi_{\delta_{20}}^1 = \chi_{10}^1$$

$$\Delta R_{\delta_{10}}^2 = -\Delta R_{10}^2$$

$$\chi_{\delta_{20}}^2 = -\chi_{10}^2$$

Einheitsspannungszustände:

$$\Delta R_{\delta_{11}}^1 = \Delta R_{11}^1 = +\Delta R_f^1$$

$$\chi_{\delta_{21}}^1 = \chi_{21}^1 = -\chi_f^1$$

$$\Delta R_{\delta_{12}}^1 = \Delta R_{12}^1 = -\Delta R_f^1$$

$$\chi_{\delta_{22}}^1 = \chi_{22}^1 = +\chi_f^1$$

$$\Delta R_{\delta_{11}}^2 = -\Delta R_{11}^2 = +\Delta R_f^2$$

$$\chi_{\delta_{21}}^2 = -\chi_{21}^2 = +\chi_f^2$$

$$\Delta R_{\delta_{12}}^2 = -\Delta R_{12}^2 = +\Delta R_f^2$$

$$\chi_{\delta_{22}}^2 = -\chi_{22}^2 = +\chi_f^2$$

$$\Delta R_{\delta_{13}}^2 = -\Delta R_{13}^2 = -\Delta R_f^2$$

$$\chi_{\delta_{23}}^2 = -\chi_{23}^2 = +\chi_f^2$$

$$\Delta R_{\delta_{14}}^2 = -\Delta R_{14}^2 = +\Delta R_f^2$$

$$\chi_{\delta_{24}}^2 = -\chi_{24}^2 = -\chi_f^2$$

5. Die Verträglichkeitsgleichungen werden analog zur Stabstatik formuliert.

Z.B. gilt für obiges Beispiel:

$$(\delta_{11}^1 + \delta_{11}^2)X_1 + (\delta_{12}^1 + \delta_{12}^2)X_2 + \delta_{13}^2 X_3 + \delta_{14}^2 X_4 + \delta_{10}^1 + \delta_{10}^2 = 0$$

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \delta_{14} \cdot X_4 + \delta_{10} = 0$$

oder

$$(\Delta R_{11}^1 - \Delta R_{11}^2)X_1 + (\Delta R_{12}^1 - \Delta R_{12}^2)X_2 - \Delta R_{13}^2 X_3 - \Delta R_{14}^2 X_4 + \Delta R_{10}^1 - \Delta R_{10}^2 = 0$$

$$(f_{11}^1 + f_{11}^2)X_1 + (-f_{12}^1 + f_{12}^2)X_2 - f_{13}^2 X_3 + f_{14}^2 X_4 + \Delta R_{10}^1 - \Delta R_{10}^2 = 0$$

$$(\delta_{21}^1 + \delta_{21}^2)X_1 + (\delta_{22}^1 + \delta_{22}^2)X_2 + \delta_{23}^2 X_3 + \delta_{24}^2 X_4 + \delta_{20}^1 + \delta_{20}^2 = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \delta_{24} \cdot X_4 + \delta_{20} = 0$$

oder

$$(\chi_{21}^1 - \chi_{21}^2)X_1 + (\chi_{22}^1 - \chi_{22}^2)X_2 - \chi_{23}^2 X_3 - \chi_{24}^2 X_4 + \chi_{20}^1 - \chi_{20}^2 = 0$$

$$(-f_{21}^1 + f_{21}^2)X_1 + (f_{22}^1 + f_{22}^2)X_2 + f_{23}^2 X_3 - f_{24}^2 X_4 + \chi_{20}^1 - \chi_{20}^2 = 0$$

Anmerkung: Die oben entwickelte Systematik weist folgende Eigenschaften auf:

1. Die Kraftgrößen der Einheitsspannungszustände leisten auf eigenen Wegen stets positive Arbeit. Diagonalglieder in der Koeffizientenmatrix der Verträglichkeitsbedingung werden in allen Anteilen stets positiv erhalten.
2. Die Systematik und Entwicklung der Verträglichkeitsgleichungen erfolgt in vollständiger Analogie zu den entsprechenden Gleichungen der Stabstatik.
3. Eine Zeile der Verträglichkeitsgleichungen bleibt unmittelbar als Arbeitsgleichung deubar. Entsprechend dem Prinzip der virtuellen Kräfte gilt:
Die von einem beliebigem Gleichgewichtssystem von Kräften und Spannungen (die Einheitsverschiebungszustände sind Gleichgewichtszustände) auf einem System verträglicher Verschiebungen und Verzerrungen (denen der gegebenen Belastung) geleistete Ergänzungsarbeit verschwindet.
Das System von Verschiebungen und Verzerrungen erfüllt die vorgeschriebenen Randbedingungen.

Mögliche Vorgehensweise:

1. Tragwerke in seine Bauteile gliedern \Rightarrow Hauptsystem wählen!
2. Statisch Unbestimmte mit ihrer positiven Wirkungsrichtung festlegen.
3. Verschiebungen $\Delta R_{ik}'''$ und Verdrehungen χ_{ik}''' aus den Einheitsspannungszuständen und den äußeren Lasten der einzelnen Bauteile an den Wirkungslinien der Einheitsspannungszustände aus den Berechnungsunterlagen ermitteln. Ihre Vorzeichen entsprechen denen der verwendeten Formelsammlungen (Vorzeichendefinition 1 bzw. Spalte 1 auf Seite 2).
4. Zusammenfassen der Verschiebungen $\Delta R_{ik}'''$ und χ_{ik}''' zu δ -Werten $\Delta R_{ik}^{\delta m}$ und $\chi_{ik}^{\delta m}$. Dabei sind die Vorzeichen entsprechend der Wirkungsrichtungen der statisch Unbestimmten einzuführen. Stimmen die positiven Wirkungsrichtungen der Verschiebungen am Schalenelement von Spalte 1 und 3 überein, so behält der entsprechende δ -Werte sein Vorzeichen, andernfalls ist das Vorzeichen zu wechseln.
5. Koeffizientenmatrix der Verträglichkeit aufstellen. Gleichungslösung.
6. Ermittlung der endgültigen Zustandsgrößen \Rightarrow Überlagerung.