

Lehrveranstaltung
Flächentragwerke I
(Scheiben und Platten)

Vorlesungen und Übungen
des Lehrstuhls für Statik der TUM

gehalten WS 1988/89 bis WS 1998/99
von o. Prof. Dr.-Ing. Walter Wunderlich
und Mitarbeitern

Flächentragwerke I (Scheiben und Platten)

Teil 1: Vorlesungsumdruck und Manuskriptseiten

Teil 2: Anhang: Kontinuumsmechanische Grundlagen

Flächentragwerke I

Gliederung WS 1996/97

- 1. Einführung**
- 2. Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie (3-D)**
 - 2.1. Gleichgewicht
 - 2.2. Kinematik (Verformungsgeometrie)
 - 2.3. Stoffgesetz
- 3. Grundlegende Beziehungen für ebene Flächentragwerke (Platten und Scheiben)**
 - 3.1. Definition der Schnittgrößen
 - 3.2. Kinematik
 - 3.3. Werkstoffgesetz
- 4. Lokale Formulierung (Differentialgleichungen) für ebene Flächentragwerke**
 - 4.1. Koordinatensystem und resultierende Schnittkraftvektoren
 - 4.2. Gleichgewicht (vektoriell) am differentiellen Element, Differentialgleichungen
 - 4.3. Randbedingungen
- 5. Globale Formulierung (virtuelle Arbeiten) für ebene Flächentragwerke**
 - 5.1. Begriffe
 - 5.2. Prinzip der virtuellen Arbeiten
- 6. Numerische Lösungen für Scheibenaufgaben (Finite-Element-Methode)**
- 7. Analytische Lösungen für Scheibenaufgaben**
 - 7.1. Spannungsansatz, Airy'sche Spannungsfunktion, Scheibengleichung
 - 7.2. Lösungen in kartesischen Koordinaten
 - 7.2.1. Allgemeines zur Lösung
 - 7.2.2. Zur Entwicklung von Zustandsgrößen in Fourierreihen
 - 7.2.3. Die Halbscheibe unter periodischer Randlast: Allgemeine Lösung
 - 7.2.4. Die Halbscheibe unter periodischer Randlast: Lösungen für Belastung normal bzw. tangential zum Rand
 - 7.2.5. Die schubkraftgestützte Rechteckscheibe unter Gleichlast
 - 7.3. Beispiele zum Tragverhalten
 - 7.3.1. Das Prinzip von de Saint-Venant
 - 7.3.2. Tragverhalten einfeldriger Wandscheiben ("wandartiger Träger")
 - 7.3.3. Tragverhalten mehrfeldriger Wandscheiben
 - 7.3.4. Der Plattenbalken

8. Analytische Lösungen für Plattenaufgaben (Kirchhoff'sche Plattentheorie)

- 8.1. Lösungen für Rechteckplatten und Plattenstreifen, Tragverhalten
- 8.2. Einflußflächen
- 8.3. Analytische Lösung für eine schubstarre Platte (Übung)

9. Finite-Element-Methoden für Plattenaufgaben

- 9.1. Einführung
- 9.2. Vierecks-Elemente
 - 9.2.1. mit Schubverzerrungen (SRI)
 - 9.2.2. ohne Schubverzerrungen (Schaefer)
- 9.3. Beispiel zur Systemberechnung (Schaefer)
- 9.4. Dreiecks-Elemente
 - 9.4.1. DKT-Element (Discret Kirchhoff-Theory Triangle)
- 9.5. Überblick über verschiedene Plattenelemente
- 9.6. Ergänzende Kapitel, Ausblick
 - 9.6.1. Konvergenzverhalten von Rechteckelementen
 - 9.6.2. Modellierung von Plattenbalken
 - 9.6.3. Modellierung von Punktstützen
- 9.7. Finite Plattenelemente (Übung)
- 9.8. Berechnung eines baupraktischen Plattensystems
 - 9.8.1. Tragverhalten und überschlägige Handrechnung (Übung)
 - 9.8.2. Berechnung mittels Einsatz von Finiten Elementen (Übung)

10. Lösungen für Kreis- und Kreisringplatten, Tragverhalten

- 10.1. Rotationssymmetrische Platten unter rotationssymmetrischer Last
- 10.2. Innere und äußere Kreisringplatte – Rand frei aufliegend
- 10.3. Kreisplatte mit Einzellast
- 10.4. Kreisplatte mit Temperaturgradient Δt
- 10.5. Eingespannte Kreisplatte mit Temperaturgradient Δt

1. EINFÜHRUNG

1.3 Literatur

Theorie der ebenen Flächentragwerke

- [1] *Girkmann, K.*: Flächentragwerke. Springer Verlag Wien 1963 (6.Auflage)
- [2] *Gould, Phillip L.*: Analysis of Shells and Plates. Springer Verlag New York 1988
- [3] *Marcus, H.*: Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten unter besonderer Berücksichtigung der trägerlosen Pilzdecken. Springer Verlag Berlin 1932 (2. verb. Auflage)
- [4] *Markus, G.*: Kreis- und Kreisringplatten unter antimetrischer Belastung. W. Ernst Verlag Düsseldorf 1973
- [5] *Markus, G.*: Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke. Werner Verlag Düsseldorf 1978 (3.Auflage)
- [6] *Rabich, R.*: Statik der Platten, Scheiben, Schalen. in: Ingenieur Taschenbuch Bauwesen Band I Pfalz-Verlag Basel 1964
- [7] *Szilard, R.*: Theory and Analysis of Plates. Classical and numerical Methods. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1974
- [8] *Worch, G.*: Über Zusammenhänge zwischen der technischen Balkenbiegelehre und der Scheibentheorie. Bautechnik Archiv (1949) 5
- [9] *Worch, G.*: Elastische Scheiben. Betonkalender 1963 II. Teil S.355
- [10] *Zweiling, K.*: Biharmonische Polynome. Verlag Technik Berlin 1952

Tabellenwerke

- [11] *Bares, R.*: Berechnungstabellen für Platten und Scheiben. Bauverlag Wiesbaden 1979 (3. Auflage)
-> durchlaufende Platten, kreisförmige Platten, elastisch gebettete Platten, orthotrope Platten, Eigenfrequenzen, Stabilität, Rechteckscheiben
- [12] *Bruckner, H.*: Elastische Platten. Vieweg Braunschweig 1977
-> Plattenstreifen, Rechteckplatten, punktgestützte Platten, Halbkreisplatten mit Linien-, Einzel-, Teilflächenlasten
- [13] *Czerny, F.*: Tafeln für vierseitig und dreiseitig gelagerte Rechteckplatten. Betonkalender 1978, 1984, 1987, 1990 I. Teil
-> drillsteife Platten mit Gleichlast und linear veränderlicher Last
- [14] *Pfeiffer, G.*: Berechnung und Bemessung von wandartigen Trägern. Werner Verlag Düsseldorf 1968
-> Krafteinleitungsprobleme, wandartige Träger, Kreisscheiben
- [15] *Pieper, K.; Martens, P.*: Durchlaufende vierseitig gestützte Platten im Hochbau. Beton- und Stahlbetonbau 6(1966) S.158-162.
Zuschrift und Erwiderung mit Ergänzung: Beton- und Stahlbetonbau 6(1967) S.150-151
-> Schnelle, überschlägige Berechnung mit Tabellen für Hochbauplatten

- [16] *Pucher, A.*: Einflußfelder elastischer Platten. Springer Verlag Wien 1964 (3.Auflage)
-> Einflußflächen für Rechteck- und Kreisplatten
- [17] *Rüsch, H.*: Berechnungstabeln für rechtwinklige Fahrbahnplatten von Straßenbrücken. Heft 106 DAfStb, Ernst u. Sohn Berlin 1981 (7. Auflage)
-> spezielle Lasten der DIN 1072 (Radlasten)
- [18] *Rüsch, H.* : Berechnungstabeln für schiefwinklige Fahrbahnplatten von Straßenbrücken. Heft 166 DAfStb, Ernst u. Sohn Berlin 1967
-> spezielle Lasten der DIN 1072 (Radlasten)
- [19] *Schleeh, W.*: Bauteile mit zweiachsigem Spannungszustand (Scheiben). Betonkalender 1978, 1983 II.Teil
-> Krafteinleitungsprobleme, wandartige Träger, Kreisscheiben
- [20] *Schleicher, C., Müller, K.*: Schiefe Einfeldplatten. Transpress VEB Verlag für Verkehrswesen Berlin 1962
-> Zustandsflächen für Gleichlast: Maximalwerte, Höhenlinien, Trajektorien; Einflußflächen
- [21] *Schleicher, C., Wegener, B.*: Durchlaufende schiefe Platten. VEB Verlag für Bauwesen Berlin 1968
-> Zustands- und Einflußflächen für Zwei- und Dreifeldplatten (Gleichlasten, Linienlasten)
- [22] *Stiglat, K., Wippel, H.*: Massive Platten. Betonkalender 1973, 1986, 1989 I.Teil
-> Momente und Lagerkräfte für Rechteckplatten mit Gleich- und Einzellasten; Platten mit unterbrochener Stützung, mit Löchern, elastisch gebettete Platten, Bemessung von Bewehrungsnetzen, Vorspannung, Durchstanzen von Flachdecken, deckengleiche Unterzüge
- [23] *Stiglat, K., Wippel, H.*: Platten. Ernst u. Sohn Berlin 1983 (3.Auflage)
-> Momente und Lagerkräfte für drillsteife Rechteckplatten, Plattenstreifen, punktgestützte Platten und drillweiche Platten (Flächen-, Linien- und Einzellasten, Randmomente)

Finite-Element-Methoden (allgemein)

- [24] *Bathe, K.J.*: Finite-Elemente-Methoden. Springer-Verlag Berlin 1986
- [25] *Gallagher, R.H.*: Finite-Element-Analysis. Grundlagen. Springer-Verlag Berlin 1976
- [26] *Stein, E. und Wunderlich, W.*: Finite-Element-Methoden als direkte Variationsverfahren der Elastostatik. in: Finite Elemente in der Statik. Verlag v. W.Enrst&Sohn Berlin 1973
- [27] *Zienkiewicz, O.C.*: Methode der Finiten Elemente. 2. erw.Aufl. (Studienausgabe, übersetzt nach der 3. Aufl.1977). Carl Hanser Verlag 1983

Speziell zum SRI-Plattenelement

- [28] *Hughes, T.; Taylor, R.; Kanoknukulchai, W.* : A simple and efficient element for plate bending. Int. Journal for numerical Methods in Engineering Vol. 11, 1529-1543 (1977)

Speziell zum Schäfer-Plattenelement

- [29] *Bogner, F.K., Fox, R.L. and Schmit Jr., L.A.:* The Generation of Inter-element Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulas. Proc. Ist. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio 1965.
- [30] *Pestel, E.C.:* Dynamic Stiffness Matrix Formulation by Means of Hermitian Polynomials. Proc. Ist. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio 1965, pp. 479-502.
- [31] *Falk, S.:* Das Verfahren von Rayleigh-Ritz mit Hermiteschen Interpolationspolynomen. Zeitschr. Angew. Math.Mech. 43, 1963, S. 149-166.

Speziell zum DKT-Plattenelement

- [32] *Batoz, J.-L., Bathe, K.-J., Ho, L.-W.:* A study of three-node triangular plate bending elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 15, 1980, pp. 1771-1812.
- [33] *Bathe, K.-J., Ho, L.-W.:* A simple and effective element for analysis of general shell structures. Computer & Structures 13, 1981, pp. 673-681.

Speziell zum Withum-Bell-Plattenelement

- [34] *Argyris, J.H., Fried, I. und Scharpf, D.W.:* The TUBA Family of Elements for the Matrix Displacement Method. The Aeron. Jour. of the Royal Aeron. Soc. 72, 1968, pp. 701-709.
- [35] *Argyris, J.H., Buck, K.E.:* A Sequel to Technical Note 14 on the TUBA Family of Plate Elements. The Aeron. Jour. of the Royal Aeron. Soc. 72, 1968, pp. 977-983.
- [36] *Holand, I. und Bell, K. (Hrsg.):* Finite Element Methods in Stress Analysis. Trondheim 1969, Tapir.
- [37] *Bosshard, W.:* Ein neues vollverträgliches Element für Plattenbiegung. Abhandl. Int. Ver. Brück. Hochb. 28, 1968, pp.1-14.
- [38] *Felippa, C.A.:* Refined Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear Two-dimensional Structures. Ph. D.Thesis, Dept. Civil Eng., University of California, Berkeley, California, 1966.
- [39] *Argyris, J.H., Buck, K.E., Lochner, N. und Scharpf, D.W.:* Matrix Displacement Analysis of Plates and Shells – General Formulation of the Linear Theory. ISD-Report 103, (Juli 1971), Inst. f. Statik u. Dynamik d. Luft- und Raumfahrtkonstr., Univ. Stuttgart.
- [40] *Withum, D.:* Berechnung von Platten nach dem Ritzschen Verfahren mit Hilfe dreieckförmiger Maschennetze. Mitt. Inst. Statik, Techn. Hochschule Hannover 9, 1966.
- [41] *Bell, K.:* A Refined Triangular Plate Bending Finite Element. Int. J. Num. Meth.Eng. 1, 1969, pp. 101-122.
- [42] *Cowper, G., Kosko, E., Lindberg, G. und Olson, M.:* A High-Precision Triangular Plate Bending Element. Nat. Res. Council of Canada, Aeron. Rep. LR 514 Dez. 1968.
- [43] *Butlin, G. und Ford, R.:* A Compatible Triangular Plate Bending Finite Element. Univ. Leicester Eng. Dept. Report 68-15 (Okt. 1968).

1. Einführung

Vertiefungsvorlesung Flächentragwerke

(1) Übergang von Stabtragwerken (1D) auf Scheiben, Platten, Schalen (2D)

Faltwerke



kombinierte Scheibe/Platte



(2) Systematischer Aufbau der Grundlagen

DGLn
(lokale Formulierung)

Arbeitsprinzipie
(globale Formulierung)

..... der (Lösungs-)Methoden

mit bekannten Funktionen
(klassische Meth.)
- für Sonderfälle

Näherungs-Lösungen
(Finite Element Meth.,
Differenzverfahren)

(3) Modellbildung und Tragverhaltenuntersuchungen

Grundgleichungen

Lasten Schnittkräfte Dehnungen Verschiebungen

Gleichgewicht
stat. Randbedg.

⇕
PVV

Stoffgesetz

Kinematik
geom. Randbedg.

⇕
PVK

Der Aufbau der Grundgleichungen ist bei Flächentragwerken
ähnlich wie bei Stabtragwerken → mit anderen Variablen

Methoden
 Lösungen für Spezialfälle \int mit bekannten Lösungs-Funktionen
 Element-Konzept für numerische Lösungen

- | | | | |
|---|-----------------------|----------------|--------------------------|
| } | 1. Grundgleichungen | lokal - global | variablen Formulierungen |
| | 2. Element-Berechnung | | |
| | 3. System-Berechnung | | <u>mit Beispielen</u> |

Beispiele

zu 1: Grundgleichungen

Lasten (Spannung - Schubspannung) Dehnungen Verschiebungen

Gleichgewicht + stat. R.B.	Stoffgesetz	Kinematik + kinem. R.B.
z.B. beam Balken		
\bar{p}_x	N_x	ϵ
\bar{p}_z	Q	γ
\bar{m}	M	α
		u
		w
		φ (von y -Achse)

(Streckspannung
als
E-Verformung)

$-\bar{p}_x = N_x'$	$N_x = E F \epsilon$	$\epsilon = u'$	}	lineare Theorie
$-\bar{p}_z = Q'$	$Q = \kappa G A \gamma$	$\gamma = w' + \varphi$		kinem. Balken
$-\bar{m} = M' - Q$	$M = E I \alpha$	$\alpha = \varphi'$		(ti)

$\underline{D} \underline{s} + \underline{\bar{p}} = 0$ $\underline{s} = \underline{E} \underline{\epsilon}$ $\underline{\epsilon} = \underline{D} \underline{u}$ in Matrizen

Frage: wie bei 2D : Scheibe, Platte, Schale
 3D : Kontinuum

alternativ: Prinzip der virtuellen Arbeiten:

$\int_{\Omega} (\delta \epsilon N + \delta \gamma Q + \delta \alpha M) dx = \int_{\Omega} (\delta u \bar{p}_x + \delta w \bar{p}_z + \delta \varphi \bar{m}) dx$ $\int_{\Omega} (\delta u \bar{P}_x + \delta w \bar{P}_z + \delta \varphi \bar{M}) dx$

innere mit Arbeit Strecklasten Einzellasten



Zu 2: Element-Berechnung



Element-Eigenschaften

durch Lösung der Grundgleichungen am Element

genau (beim Balken) näherungsweise

durch Steifigkeitswerte $\rightarrow k^e$ (Steifigkeitsmatrix)
Beziehung zwischen Stabengrößen

(bei Balken (1-D)):

$$\begin{bmatrix} N_a \\ Q_a \\ M_a \\ \hline N_b \\ Q_b \\ M_b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix}}_{k^e} \begin{bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ \hline u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{bmatrix}$$

genau für $EI = \text{konst.}$

näherungsweise durch Finite-Element-Methode (FEM)

Frage: wie bei 2D (Bohrer, Platte, Schale)
3D (Kontinuum)

Zu 3: System-Beschreibung

System = Σ Elemente (Elementkonzept)

Erfüllen der Grundgleichungen an Knoten

z.B. durch Weggrößenverfahren (Finite-Element-Methode)

Realisierung durch

Software:

CAL
FE-Programme

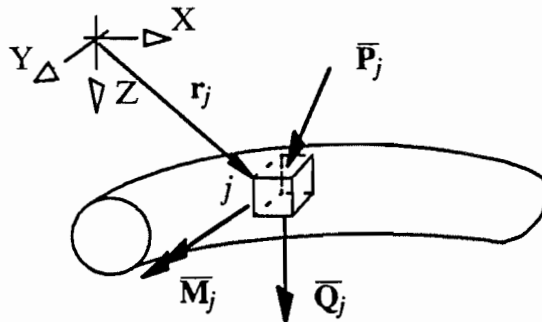
Hardware:

CIP-Rechner
Lehrstuhl-Werkstätten

2. Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie (3-D)

2.1 Gleichgewicht am beliebigen Körper

a) äußeres Gleichgewicht :



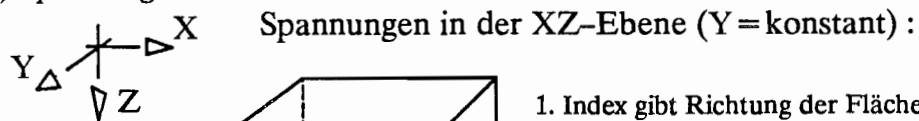
6 Gleichgewichtsbedingungen :

$$\sum (\bar{P}_j + \bar{Q}_j) = 0$$

$$\sum (\mathbf{r}_j \times \bar{P}_j + \mathbf{r}_j \times \bar{Q}_j + \bar{M}_j) = 0$$

$$j = x, y, z$$

b) Spannungen am Element :



Spannungen in der XZ-Ebene (Y = konstant) :

1. Index gibt Richtung der Flächennormalen an
2. Index gibt Richtung der Spannung an

Spannungsdefinition :

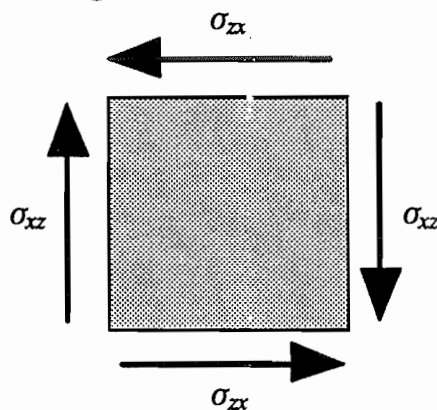
$$\sigma := \lim_{A \rightarrow 0} \frac{P}{A} = \lim_{\text{Fläche} \rightarrow 0} \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$$

Spannungen in Tensorschreibweise :

$$\sigma_{jk} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad j = x, y, z ; \quad k = x, y, z$$

Positive Spannungen weisen am positiven Schnittufer in positive Koordinatenrichtung.

c) Gleichgewicht am Element :



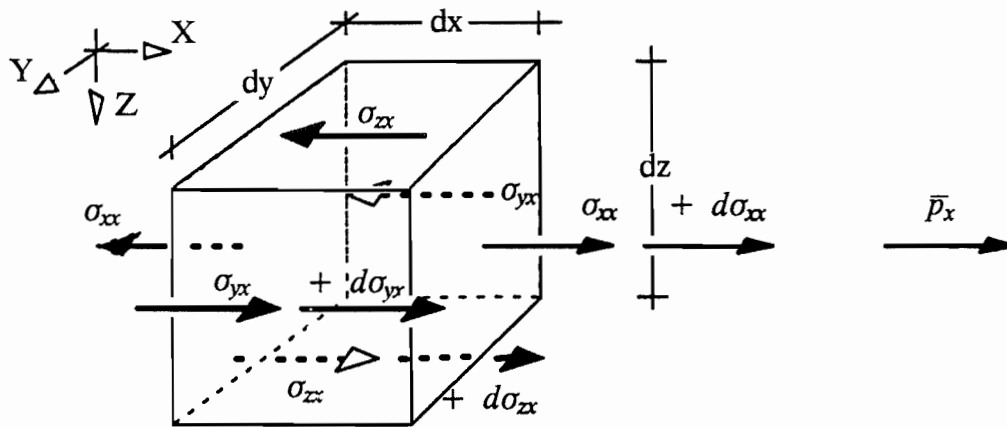
Gleichgewicht um Y-Achse :

$$\sum M = 0 \rightarrow \sigma_{xz} = \sigma_{zx}$$

Symmetrie der Schubspannungen :

Der Spannungstensor ist stets symmetrisch; es bleiben 6 unabhängige Spannungen $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$

Gleichgewicht in X-Richtung :



Spannungszuwachs aus Taylor-Reihen-Entwicklung (Zuwachs in Richtung der positiven Koordinatenrichtung) :

z.B. für eine Funktion $f(x)$: $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} dx^2 + \dots$

mit der Definition : $(\dots)_{,j} = \frac{\partial(\dots)}{\partial j}$

unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung ergibt sich :

$$\sum K_x = 0 : (\sigma_{xx,x} dx) (dy dz) + (\sigma_{yx,y} dy) (dx dz) + (\sigma_{zx,z} dz) (dx dy) + \bar{p}_x dV = 0$$

nach Division durch $dV = dx dy dz$ ergibt sich :

$$\sum K_x = 0 : \sigma_{xx,x} + \sigma_{yx,y} + \sigma_{zx,z} + \bar{p}_x = 0$$

Gleichgewicht in Y- und Z-Richtung analog :

$$\sum K_y = 0 : \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{zy,z} + \bar{p}_y = 0$$

$$\sum K_z = 0 : \sigma_{xz,x} + \sigma_{yz,y} + \sigma_{zz,z} + \bar{p}_z = 0$$

allgemein :

$$\sum K_j = 0 : \boxed{\sigma_{xj,x} + \sigma_{yj,y} + \sigma_{zj,z} + \bar{p}_j = 0} \quad \textcircled{\text{I}}$$

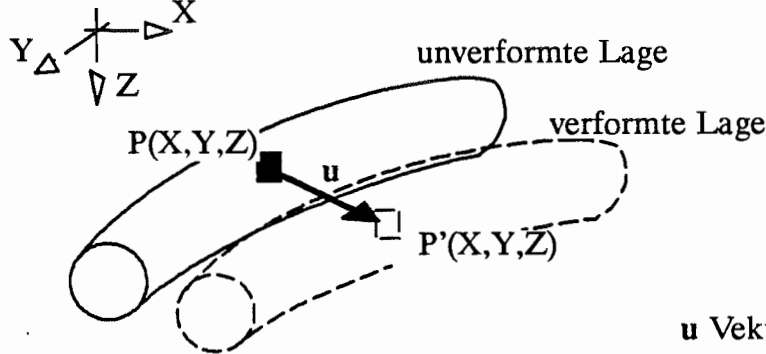
unter Verwendung der Einstein'schen Summenkonvention :
Summation über 2 gleiche Indizes in der allgemeinen Darstellung :

$$\sigma_{kj,k} + \bar{p}_j = 0 \qquad k = x,y,z ; j = x,y,z$$

Es ergeben sich 3 Differentialgleichungen für die 6 unbekanntenen Spannungen $\sigma_{kj} = \sigma_{jk}$

2.2 Kinematik (Verformungsgeometrie)

a) Verschiebungen :

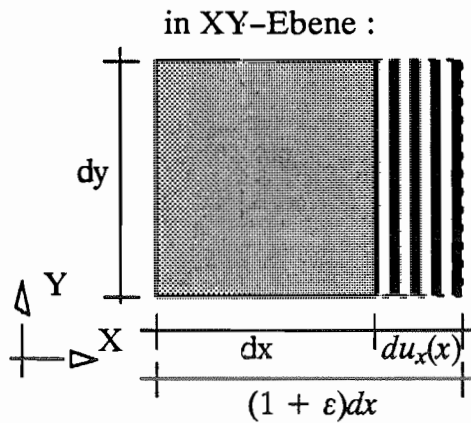


$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

\mathbf{u} Vektor der Verschiebungen

b) Verzerrungen :

Dehnungen :

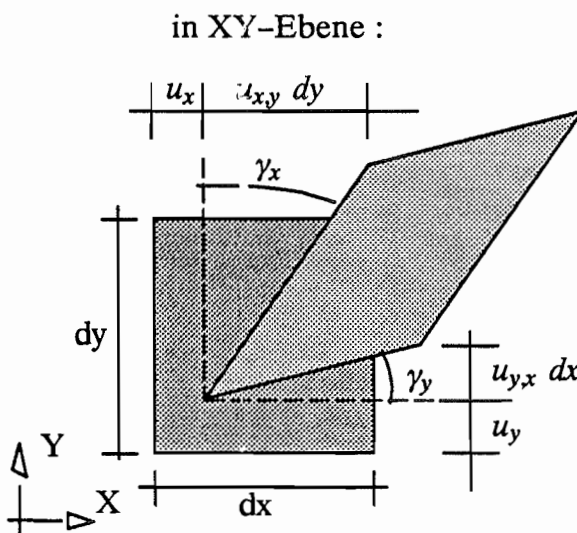


$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = u_{xx} = u_{x,x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = u_{yy} = v_{y,y} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = u_{zz} = w_{z,z} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Gleitungen :



$$\gamma_x = \frac{u_{x,y} dy}{dy} = u_{x,y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_y = \frac{u_{y,x} dx}{dx} = u_{y,x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_x + \gamma_y$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}(\gamma_x + \gamma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \epsilon_{xy} + \epsilon_{yx}$$

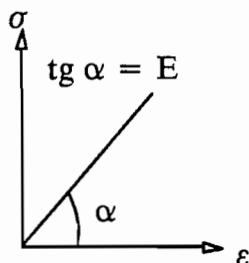
(Ingenieurgleitung)

allgemein :
$$\epsilon_{jk} = \frac{1}{2}(u_{j,k} + u_{k,j}) + \frac{1}{2} u_{ij} u_{ik} \quad \text{II} \quad \epsilon_{jk} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

nichtlinearer Anteil bei großen Verschiebungen

Es bleiben 6 unabhangige Verzerrungen $\epsilon_{jk} = \epsilon_{kj}$

2.3 Werkstoffgesetz



Hooke'sches Gesetz :

für homogene und isotrope Körper wird ein linearer Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen angenommen.

Elastizitätsmodul E : Normalspannungen \leftrightarrow Dehnungen

Schubmodul G : Schubspannungen \leftrightarrow Gleitungen

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \sigma_{xy}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \sigma_{xy}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \sigma_{yz}$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2G} \sigma_{yz}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \sigma_{xz}$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2G} \sigma_{xz}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

für homogenes isotropes Material

$$\begin{matrix} \sigma = & & \mathbf{E} & \epsilon \\ \text{bzw. in der Umkehrung :} & & & \\ \epsilon = & & \mathbf{E}^{-1} & \sigma \end{matrix}$$

III

Gleichgewicht , Kinematik und Werkstoffgesetz in Matrixschreibweise :

$$\begin{matrix} \mathbf{D}^T \sigma + \bar{p} = 0 \\ \epsilon = \mathbf{D} u \\ \sigma = \mathbf{E} \epsilon \end{matrix}$$

Gleichgewicht : 3 Differentialgleichungen mit 6 Unbekannten σ_{jk}

Kinematik : 6 Differentialgleichungen mit 6 Unbekannten ϵ_{jk} und 3 Unbekannten u_k

Werkstoffgesetz : 6 Gleichungen mit obigen Unbekannten $\sigma_{jk}, \epsilon_{jk}$

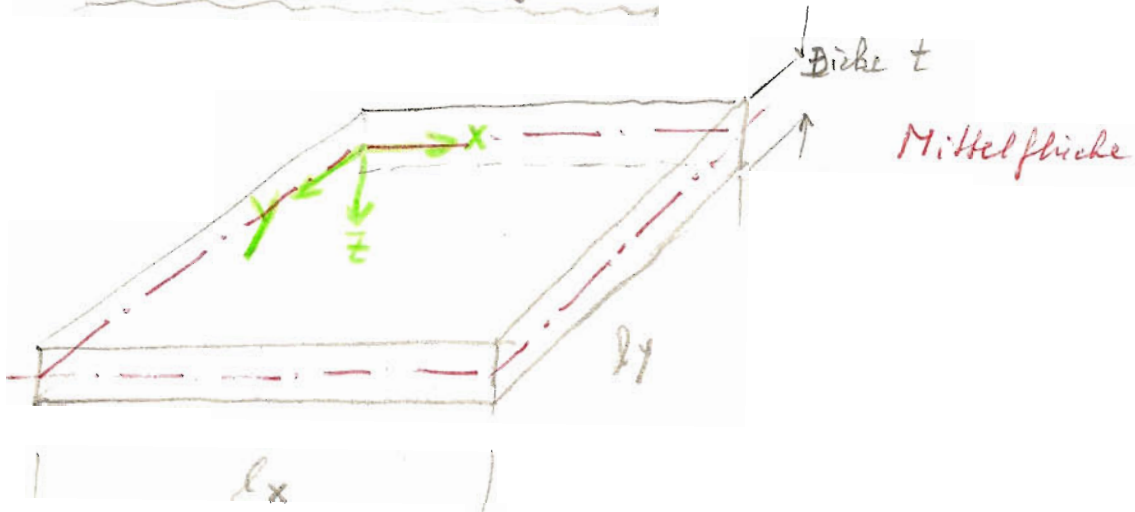
-> 15 Gleichungen für die 15 Unbekannten im 3D-Raum (elastisch,homogen,isotrop)

3. Grundlegende Beziehungen für ebene Flächentragwerke

3.1 Definitionen, Annahmen

Ebene Flächentragwerke

2-D



Annahme: $t/l_x \ll 1$
 $t/l_y \ll 1$

"Dünne Hypothese"

	<u>Scheibe</u>	<u>Platte</u>
Belastung	\bar{p}_x \bar{p}_y (im des Ebene)	\bar{p}_z (\perp zur Ebene)
Weggrößen	u v	w φ_x φ_y

Spannungen



konstante Verteilung über die Dicke



lineare Verteilung über die Dicke

σ_x
 σ_y
 σ_{xy}

→ Spannungs-Resultierende

m_x
 m_y
 m_{xy}

• Spannungsresultierende
vgl. Munddruck

• Annahmen

1.) Scheibe
„Dicke“ - Hypothese

Platte

2.) ebene $\left\{ \begin{array}{l} \text{Spannungszustand} \\ \text{als} \\ \text{Kerzungszustand} \end{array} \right\}$ Navier-Bernoulli Hypothese
(analog Bernoulli im Balken)

3.) homogener, isotroper Werkstoff (linear elastisch)

• Anwendungen

vgl. Folien

Scheiben : Hochhaus - Kerne und -Ankerung
Wandscheiben
Tunnel, Wehrräder 2-D

Platten : Decken
Fundamente
Bänke - Fahrbahnen

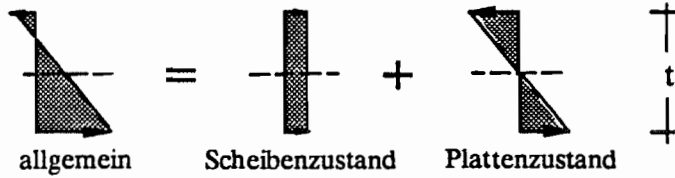
• Faltwerke = aus Platten + Scheiben
zusammengesetzt
als Dach als Brücke



3. GRUNDLEGENDE BEZIEHUNGEN FÜR EBENE FLÄCHENTRAGWERKE

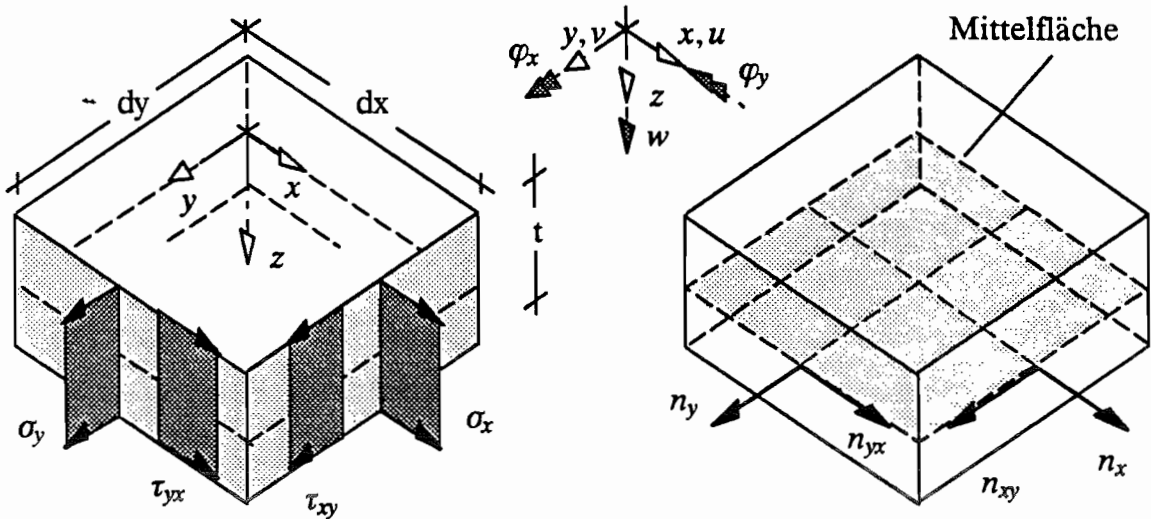
3.1 Definition der Schnittgrößen

Spannungsverteilung über die Plattendicke allgemein :



Positive Spannungen weisen am positiven Schnittufer in positive Koordinatenrichtung.

Scheibenelement :



Normalkräfte :

$$n_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x dz \quad n_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y dz$$

$$\sigma_x = \frac{n_x}{t} \quad \sigma_y = \frac{n_y}{t}$$

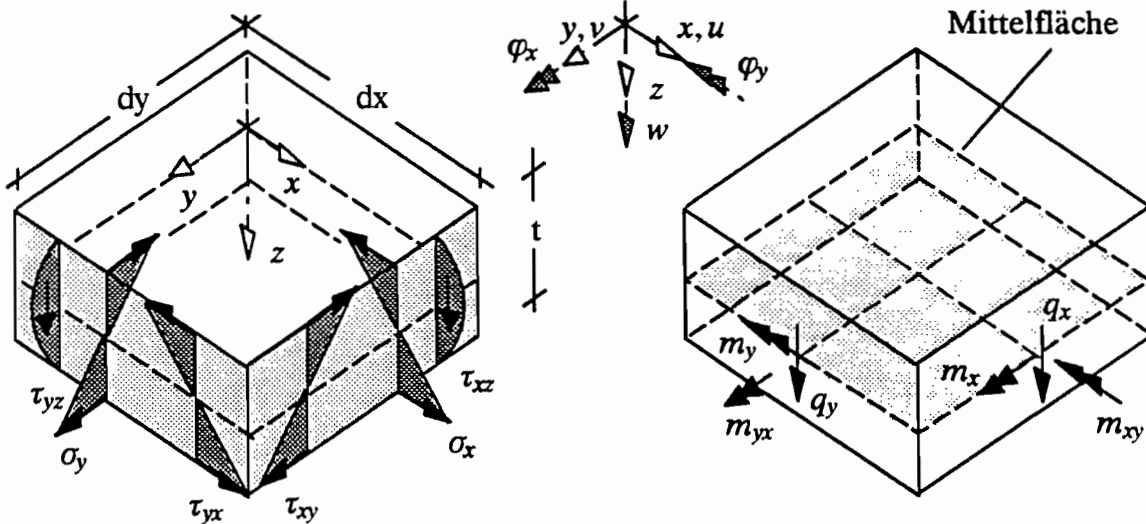
Schubkräfte :

$$n_{xy} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xy} dz \quad n_{yx} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{yx} dz$$

$$\tau_{xy} = \frac{n_{xy}}{t} \quad \tau_{yx} = \frac{n_{yx}}{t}$$

wegen $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ gilt : $n_{xy} = n_{yx}$

Plattenelement :



$$\text{Biegemomente : } m_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x z dz \quad m_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y z dz$$

$$\sigma_x = 12 \frac{m_x}{t^3} z \quad \sigma_y = 12 \frac{m_y}{t^3} z$$

$$\text{Drillmomente : } m_{xy} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xy} z dz \quad m_{yx} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{yx} z dz$$

$$\tau_{xy} = 12 \frac{m_{xy}}{t^3} z \quad \tau_{yx} = 12 \frac{m_{yx}}{t^3} z$$

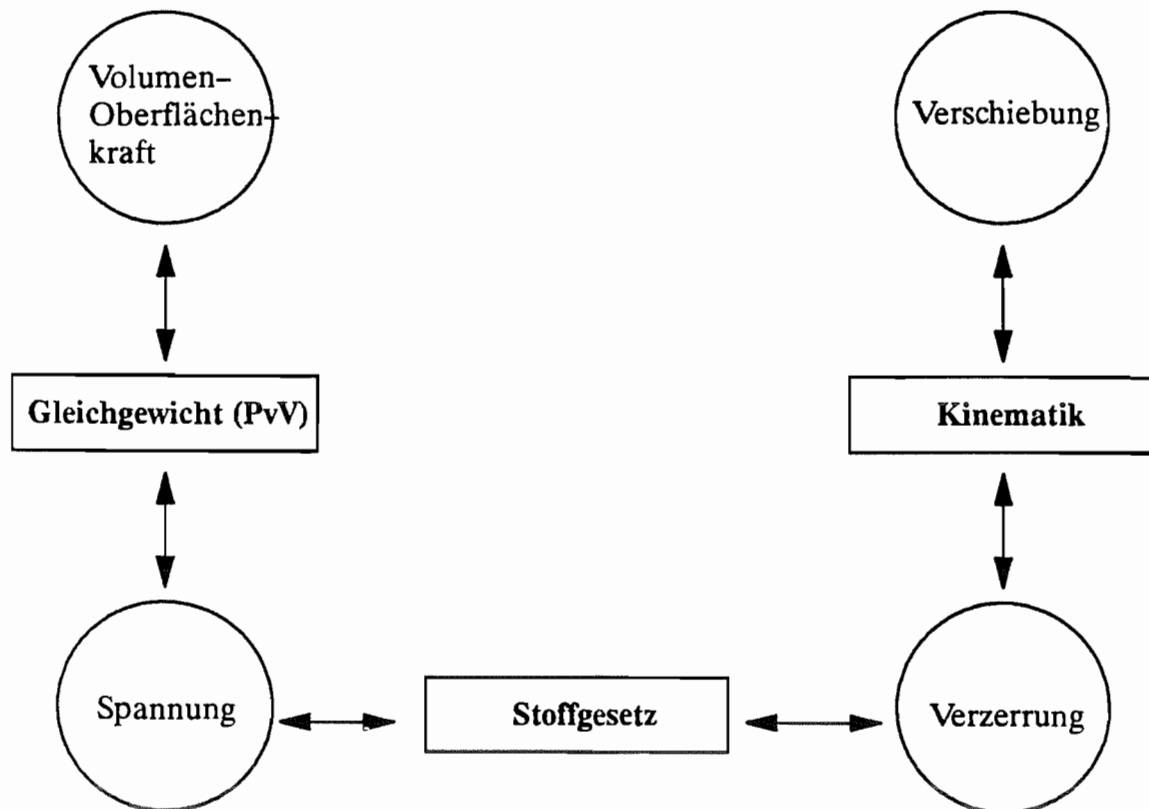
wegen $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ gilt : $m_{xy} = m_{yx}$

$$\text{Querkräfte : } q_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xz} dz \quad q_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{yz} dz$$

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{t^2 - 4z^2}{t^3} q_x \quad \tau_{yz} = \frac{3}{2} \frac{t^2 - 4z^2}{t^3} q_y$$

Grundgleichungen dünnwandiger Flächentragwerke

Ableitung der Grundgleichungen der Theorie dünner, ebener Flächentragwerke aus den Kontinuumsleichungen mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen (PvV).



Annahmen: "Dünne" Platte / Scheibe - $t/l_x \ll 1$, $t/l_y \ll 1$

Ebener Spannungszustand - Ebener Verzerrungszustand

Homogener isotroper Werkstoff

1. Gleichgewicht

Ableitung aus den Kontinuumsgleichungen durch Einsetzen eines Verschiebungsansatzes in das PvV:

$$\delta W = \int_{\Omega} [\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}} - \delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{p}}_{\Omega}] d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \underline{\underline{u}} \underline{\underline{p}}_{\Gamma} d\Gamma = 0$$

$$\delta W = \int_{\Omega} [\delta \bar{\varepsilon}_x \sigma_x + \delta \bar{\varepsilon}_y \sigma_y + \delta \bar{\varepsilon}_z \sigma_z + \delta \bar{\gamma}_{xy} \tau_{xy} + \delta \bar{\gamma}_{xz} \tau_{xz} + \delta \bar{\gamma}_{yz} \tau_{yz} - \delta u_x \bar{p}_x - \delta u_y \bar{p}_y - \delta u_z \bar{p}_z] - \text{Randterme} = 0$$

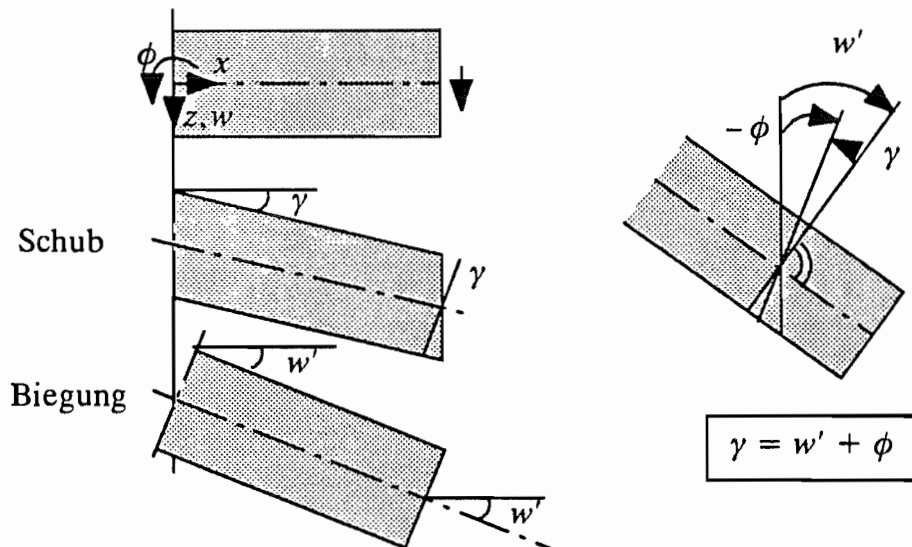
Um die Spannungen und Verzerrungen durch Verschiebungen zu ersetzen, stehen die kinematischen Grundgleichungen und das Stoffgesetz zur Verfügung, die somit a priori erfüllt werden.

Zur Ableitung einer Theorie für Flächentragwerke aus den Grundgleichungen des Kontinuums genügt eine Annahme für den Verschiebungsansatz über die Dicke des Querschnitts und den Spannungszustand.

Wählt man einen festen Verschiebungsansatz, so vereinfachen sich die Kontinuumsgleichungen, da Differentiation und Integration direkt ausgeführt werden können. Bei einem Ansatz in Dickenrichtung reduzieren sich die dreidimensionalen Kontinuumsgleichungen so auf zweidimensionale Gleichungen für Flächentragwerke.

2. Kinematik

Definition der mittleren Schubverzerrung γ bei Platten (und Stäben):



Die Verschiebungen im Kontinuum werden ausgedrückt durch die Verschiebungen und Verdrehungen der Mittelfläche. In dem Ansatz steckt die Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte (was bei dem Auftreten von Schubverzerrungen nicht mehr der Fall ist).

Verschiebungsansatz über die Dicke:

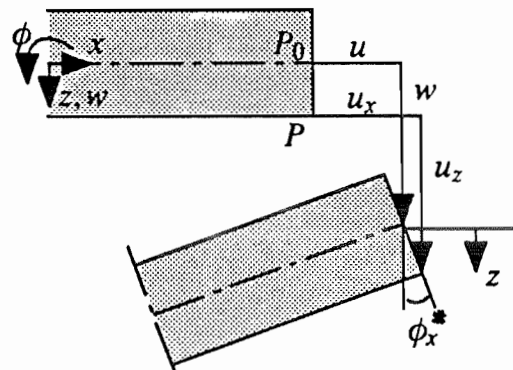
$$u_x(x,y,z) = u(x,y) + z \phi_x^*(x,y)$$

$$u_y(x,y,z) = v(x,y) + z \phi_y^*(x,y)$$

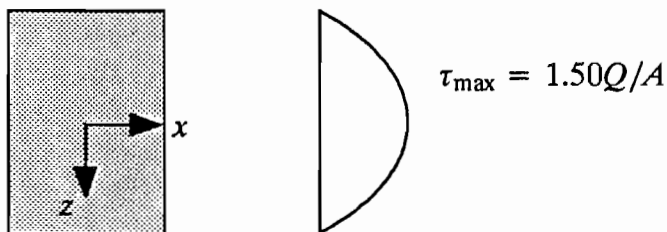
$$u_z(x,y,z) = w(x,y)$$

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \phi_x^* \\ \phi_y^* \end{bmatrix}$$

Geometrischer Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen:



Der lineare Verschiebungsansatz kann nur konstante Schubverzerrungen und -spannungen über die Dicke beschreiben. Dies entspricht einer Mittelwertbildung der Schubanteile, die durch sogenannte Schubkorrekturfaktoren dem wirklichen Verlauf angepaßt werden können.

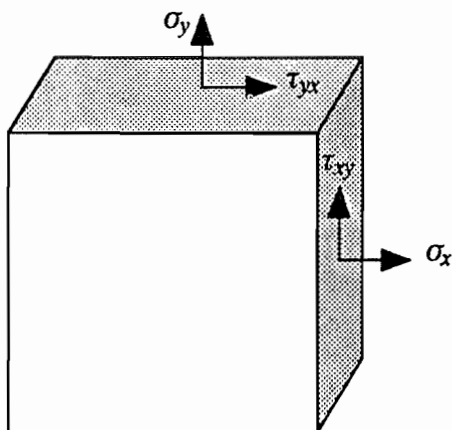


Einsetzen des Ansatzes in die kinematischen Grundgleichungen des Kontinuums liefert die Definition der Verzerrungen der Mittelfläche:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{D} \underline{u}$$

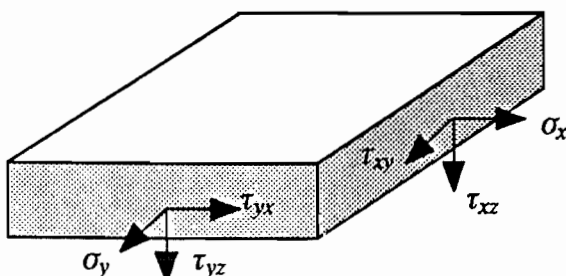
		$\underline{N}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $\underline{\varepsilon} = \underline{D} \underline{N} \underline{v}$ </div>	
Kontinuum			Scheibe / Platte	
$\begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_y \\ \bar{\varepsilon}_z \\ \bar{\gamma}_{xy} \\ \bar{\gamma}_{xz} \\ \bar{\gamma}_{yz} \end{bmatrix}$	=	$\begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & z\partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 & 0 & z\partial_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_y & \partial_x & 0 & z\partial_y & z\partial_x \\ 0 & 0 & \partial_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \phi_x^* \\ \phi_y^* \end{bmatrix}$	=	$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz,m} \\ \gamma_{yz,m} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 0 \\ 2\kappa_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Die Verschiebungen im Kontinuum werden ausgedrückt durch die Verschiebungen und Verdrehungen der Mittelfläche. In dem Ansatz steckt die Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte (was bei dem Auftreten von Schubverzerrungen nicht mehr der Fall ist).



Scheibe:

Ebener
Spannungszustand



Platte:

Ebener
Spannungszustand
+
Schubanteile der Platte

3. Stoffgesetz

Annahmen: "Dünne" Platte / Scheibe - $t/l_x \ll 1$, $t/l_y \ll 1$

Ebener Spannungszustand - Ebener Verzerrungszustand

Homogener isotroper Werkstoff

$$\underline{\varepsilon} = \underline{E}^{-1} \underline{\sigma}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_y \\ \bar{\varepsilon}_z \\ \bar{\gamma}_{xy} \\ \bar{\gamma}_{xz} \\ \bar{\gamma}_{yz} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z = 0 \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \neq 0$$

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\varepsilon}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \\ \bar{\gamma}_{xz} \\ \bar{\gamma}_{yz} \end{bmatrix}$$

Ebener
Spannungszustand

Schubanteile
der Platte

Einsetzen des Stoffgesetzes und der Kinematik in die Schnittkraftdefinition und Ausführen der Integration:

Einsetzen in das Arbeitsprinzip und Aufspalten des Volumenintegrals in ein Flächenintegral und ein Integral über die Dicke liefert automatisch die Definition der Schnittkräfte:

$n_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x dz = \frac{Et}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$ $n_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y dz = \frac{Et}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$ $n_{xy} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xy} dz = \frac{Et}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}$	$q_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xz} dz = Gt \gamma_{xz,m}$ $q_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{yz} dz = Gt \gamma_{yz,m}$
$m_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x z dz = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_x + \nu\kappa_y)$ $m_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y z dz = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_y + \nu\kappa_x)$ $m_{xy} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xy} z dz = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1-\nu}{2} 2\kappa_{xy}$	

Zusammenfassung: Die kinematischen Grundgleichungen dünnwandiger Flächentragwerke ergeben sich direkt aus den Kontinuumsgleichungen durch Einsetzen des Verschiebungsansatzes.

Das Prinzip der virtuellen Arbeiten liefert dann die Definition der zu den Verzerrungen korrespondierenden Spannungsergebnenden.

Durch Einsetzen des entsprechenden Stoffgesetzes (ebener Spannungszustand oder ebener Verzerrungszustand) und der Kinematik und Ausführen der Integration über die Dicke gewinnt man dann zum einen das Stoffgesetz für die Scheiben / Plattenschnittkräfte, und zum anderen wird das PVA von drei auf zwei Dimensionen reduziert.

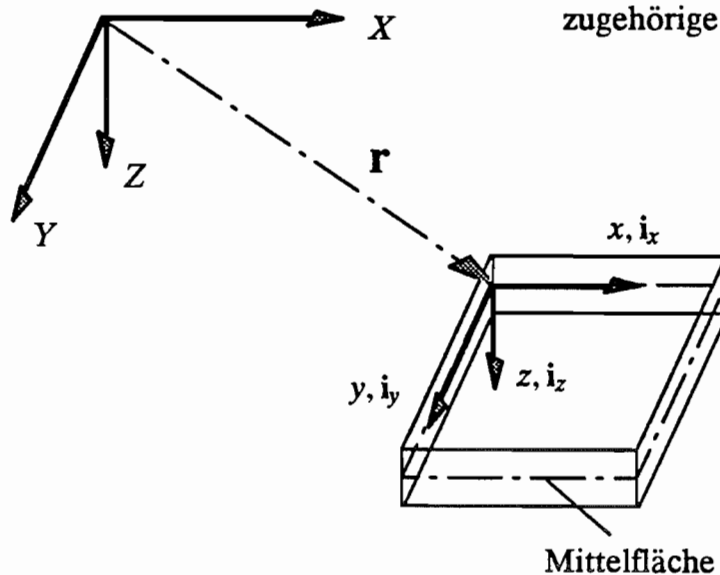
Das Arbeitsprinzip kann in dieser Form, zusammen mit der Kinematik und dem Stoffgesetz als Grundlage numerischer Lösungsverfahren verwendet werden. (z.B. FEM)

Eine andere Möglichkeit besteht darin, aus dem Prinzip durch Umformungen die noch fehlenden Gleichgewichtsbedingungen systematisch zu berechnen und daraus die analytischen Lösungen zu entwickeln.

4. LOKALE FORMULIERUNG (DIFFERENTIALGLEICHUNGEN) FÜR EBENE FLÄCHENTRAGWERKE

4.1 Koordinatensystem und resultierende Schnittkraftvektoren

Globale
Koordinaten
und
Ortsvektor \mathbf{r}



lokale Koordinaten und
zugehörige Richtungsvektoren

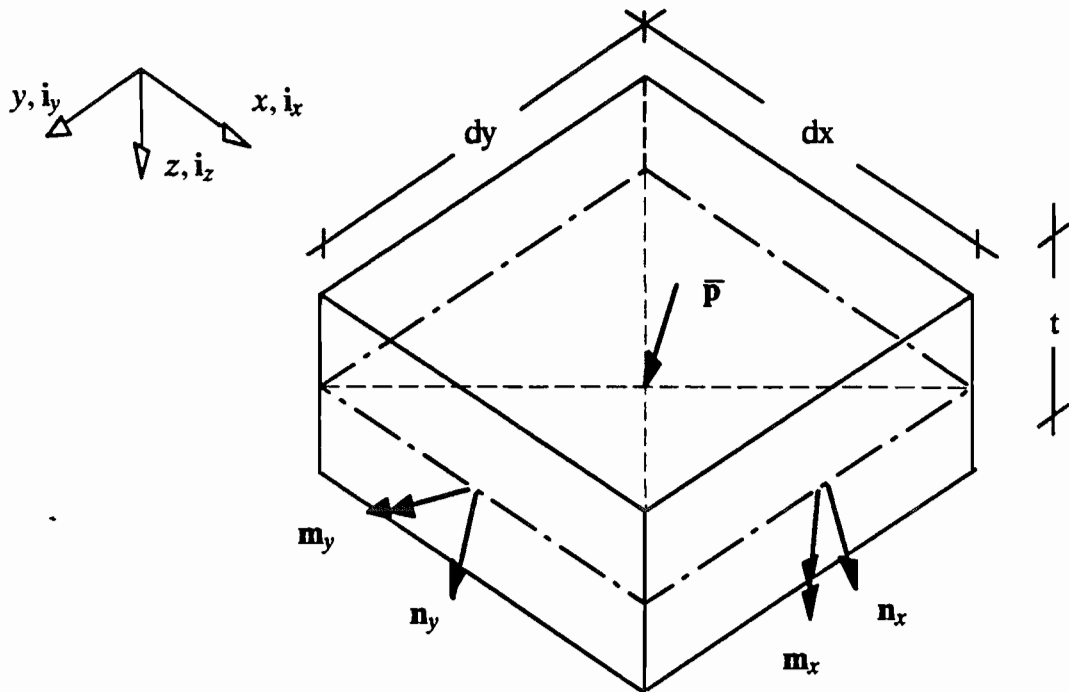
Bei Rechteckplatten sind in der Regel die lokalen und globalen Koordinaten gleichgerichtet. Daraus folgt:

$$\mathbf{i}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{i}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{i}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alle Ableitungen der Richtungsvektoren sind dann Nullvektoren:

$$\frac{\partial \mathbf{i}_x}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{usw.}$$

Resultierende Kraft- und Drehvektoren bezogen auf die Kantenlänge:



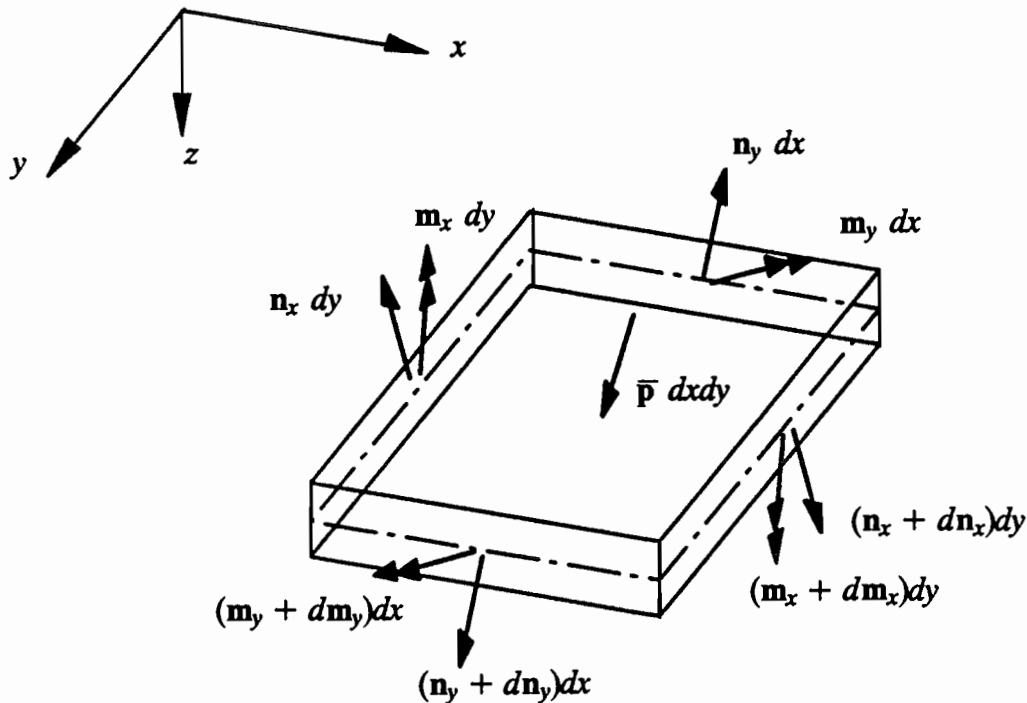
Zusammensetzen aus den positiv definierten Schnittgrößen (siehe 3.1):



$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}_x &= n_x \mathbf{i}_x + n_{xy} \mathbf{i}_y + q_x \mathbf{i}_z & = n_{xx} \mathbf{i}_x + n_{xy} \mathbf{i}_y + q_{xz} \mathbf{i}_z \\
 \mathbf{n}_y &= n_{yx} \mathbf{i}_x + n_y \mathbf{i}_y + q_y \mathbf{i}_z \\
 \mathbf{m}_x &= -m_{xy} \mathbf{i}_x + m_x \mathbf{i}_y \\
 \mathbf{m}_y &= -m_y \mathbf{i}_x + m_{yx} \mathbf{i}_y \\
 \bar{\mathbf{p}} &= \bar{p}_x \mathbf{i}_x + \bar{p}_y \mathbf{i}_y + \bar{p}_z \mathbf{i}_z \quad (\text{äußere Lasten pro Flächeneinheit})
 \end{aligned}$$

Es ist z.B. n_x (kN/m) ein Skalar
 \mathbf{n}_x (kN/m) ein Kraftvektor im Raum
 \mathbf{m}_x (kNm/m) ein Drehvektor in der xy-Ebene

4.2 Gleichgewicht am differentiellen Element (vektoriell)



Dabei bedeuten dn , dm usw. jeweils die Änderung von Betrag und Richtung in der betreffenden Koordinatenrichtung. Dieser Zuwachs wird in eine Taylor-Reihe entwickelt, welche nach dem 1. Glied abgebrochen wird:

$$dn_x = \frac{\partial n_x}{\partial x} dx \quad \text{usw.}$$

Kräftegleichgewicht $\sum \mathbf{n} = 0$:

$$-n_x dy - n_y dx + (n_x + dn_x) dy + (n_y + dn_y) dx + \bar{p} dx dy = 0$$

$$dn_x dy + dn_y dx + \bar{p} dx dy = 0$$

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial n_y}{\partial y} dy dx + \bar{p} dx dy = 0 \quad (1)$$

Momentengleichgewicht $\sum \mathbf{m} = 0$: (bezogen auf die Elementmitte)

$$\begin{aligned} & -m_x dy - m_y dx + (m_x + dm_x) dy + (m_y + dm_y) dx + \\ & + (dx \mathbf{i}_x) \times n_x dy + (dy \mathbf{i}_y) \times n_y dx + \\ & + \left(\frac{dx}{2} \mathbf{i}_x\right) \times dn_x dy + \left(\frac{dy}{2} \mathbf{i}_y\right) \times dn_y dx = 0 \end{aligned}$$

Differentiale zweiter Ordnung vernachlässigt und Reihenentwicklung des Zuwachses :

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy dx + (dx \mathbf{i}_x) \times n_x dy + (dy \mathbf{i}_y) \times n_y dx = 0 \quad (2)$$

Division durch (dxdy) und einsetzen der Vektorkomponenten in das Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(n_x \mathbf{i}_x + n_{xy} \mathbf{i}_y + q_x \mathbf{i}_z)}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial(n_{yx} \mathbf{i}_x + n_y \mathbf{i}_y + q_y \mathbf{i}_z)}{\partial y} + \\ & + (\bar{p}_x \mathbf{i}_x + \bar{p}_y \mathbf{i}_y + \bar{p}_z \mathbf{i}_z) = 0 \end{aligned}$$

Anwenden der Produktregel und umsordieren:

$$\begin{aligned} & (n_{x,x} + n_{yx,y} + \bar{p}_x) \mathbf{i}_x + \\ & + (n_{xy,x} + n_{y,y} + \bar{p}_y) \mathbf{i}_y + \\ & + (q_{x,x} + q_{y,y} + \bar{p}_z) \mathbf{i}_z = 0 \end{aligned}$$

Aus dieser Vektorgleichung folgen unmittelbar die 3 skalaren Kräftegleichgewichtsbedingungen:

$n_{x,x} + n_{yx,y} + \bar{p}_x = 0$	$\sum n_x = 0$
$n_{xy,x} + n_{y,y} + \bar{p}_y = 0$	$\sum n_y = 0$
$q_{x,x} + q_{y,y} + \bar{p}_z = 0$	$\sum n_z = 0$

Mit $n_{xy} = n_{yx}$ wegen $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

Division durch (dxdy) und einsetzen der Vektorkomponenten in das Momentengleichgewicht:

$$\frac{\partial(-m_{xy} \mathbf{i}_x + m_x \mathbf{i}_y)}{\partial x} + \frac{\partial(-m_y \mathbf{i}_x + m_{yx} \mathbf{i}_y)}{\partial y} +$$

$$+ \mathbf{i}_x \times (n_x \mathbf{i}_x + n_{xy} \mathbf{i}_y + q_x \mathbf{i}_z) +$$

$$+ \mathbf{i}_y \times (n_{yx} \mathbf{i}_x + n_y \mathbf{i}_y + q_y \mathbf{i}_z) = 0$$

Nebenrechnung Kreuzprodukte der Einheitsvektoren:

$$\mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_x = 0 \quad \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y = \mathbf{i}_z \quad \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_z = -\mathbf{i}_y$$

$$\mathbf{i}_y \times \mathbf{i}_x = -\mathbf{i}_z \quad \mathbf{i}_y \times \mathbf{i}_y = 0 \quad \mathbf{i}_y \times \mathbf{i}_z = \mathbf{i}_x$$

$$\frac{\partial(-m_{xy} \mathbf{i}_x + m_x \mathbf{i}_y)}{\partial x} + \frac{\partial(-m_y \mathbf{i}_x + m_{yx} \mathbf{i}_y)}{\partial y} +$$

$$+ n_{xy} \mathbf{i}_z - q_x \mathbf{i}_y +$$

$$- n_{yx} \mathbf{i}_z + q_y \mathbf{i}_x = 0$$

Produktregel anwenden und umsortieren:

$$(-m_{xy,x} - m_{y,y} + q_y) \mathbf{i}_x + (m_{x,x} + m_{yx,y} - q_x) \mathbf{i}_y +$$

$$+ (n_{xy} - n_{yx}) \mathbf{i}_z = 0$$

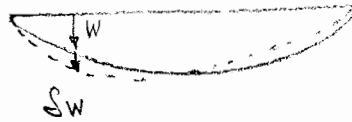
Aus dieser Vektorgleichung folgen unmittelbar die 3 skalaren Momentengleichgewichtsbedingungen:

$m_{x,x} + m_{yx,y} - q_x = 0$	$\sum m_y = 0$
$m_{xy,x} + m_{y,y} - q_y = 0$	$\sum m_x = 0$
$n_{xy} - n_{yx} = 0$	$\sum m_z = 0$

Mit $m_{xy} = m_{yx}$ wegen $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

5. Globale Formulierung (virtuelle Arbeiten)

Begriffe: Virtuelle Verschiebung



Variation der Verschiebung
(infinitesimal benachbarte Lage)

\$\rightarrow\$ muß die Kinematik und geom. RB
erfüllen! (keine Knicke,
Sprünge etc.)

$$\begin{aligned} \epsilon &= u' & \epsilon &= N/EA \\ \alpha &= -w'' & \alpha &= M/EI \\ u &= \bar{u} \\ w &= \bar{w}, \varphi = \bar{\varphi} \end{aligned}$$

Virtuelle Arbeit

z.B. beim Balken

virt. innere Arbeit $\delta W_i = - \int (\delta \epsilon N + \delta \alpha M + \dots) dx$

" äußere " $\delta W_a = \int (\delta u \bar{p}_x + \delta w \bar{p}_z) dx + \sum \delta u \bar{P} + \dots$

Die virtuellen Verschiebungen müssen obige Bedingungen erfüllen \$\rightarrow\$ dann entspricht das PVV den Gleichgewichtsbedingungen

Teilintegration (partielle Integration)

z.B. $\int_a^b (\delta u N' - \bar{p}_x \delta u) dx$

$\left. \begin{aligned} & \int_a^b \delta u (N' - \bar{p}_x) dx + [\delta u N]_a^b \\ & [\delta u N]_a^b - \int_a^b \delta u N' dx \end{aligned} \right\}$

\$\downarrow\$
Gleichgewichts-
bedingung!

\$\downarrow\$
führt zusammen
mit Einzelkraft
zu den stat. RB.

Prinzip der virtuellen Verschiebungen für Flächen tragwerke

$\delta W = \delta(W_i + W_a) = 0 \rightarrow$ Lösungen sind Gleichgewichtszustände

\rightarrow Notwendige und hinreichende Bedingung für Gleichgewicht

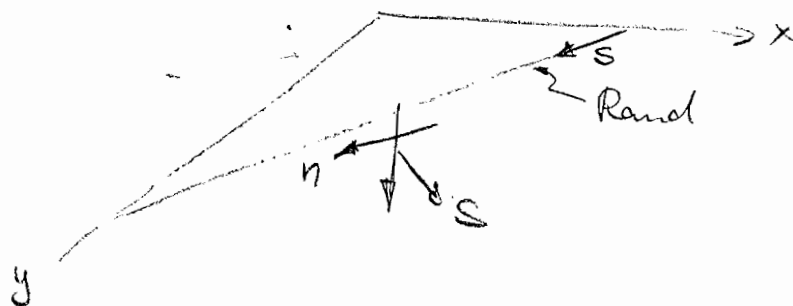
$$\delta W_i = \iint_{xy} \left[\delta \epsilon_x n_x + \delta \epsilon_y n_y + \overbrace{\delta \gamma_{xy}}^{2 \delta \epsilon_{xy}} n_{xy} + \delta \gamma_{yz} q_y + \delta \gamma_{xz} q_x + \delta \alpha_{xx} m_{xx} + \delta \alpha_{yy} m_{yy} + 2 \delta \alpha_{xy} m_{xy} \right] dx dy$$

$$\delta W_a = \iint_{xy} \left[\bar{p}_x \delta u_x + \bar{p}_y \delta u_y + \bar{p}_z \delta u_z \right] dx dy$$

$$+ \int_s \left[\delta u_n \bar{p}_n + \delta u_s \bar{p}_s + \delta w \bar{q}_n + \delta \varphi_n \bar{m}_n + \delta \varphi_s \bar{m}_s \right] ds$$

Randlasten

+ Einzellasten



Ableitung der Grundgleichungen der Theorie dünner, ebener Flächentragwerke aus den Kontinuums-gleichungen mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen

Grundgleichungen:

Stoffgesetz
Kinematik - geom RB

Gleichgewicht - stat RB

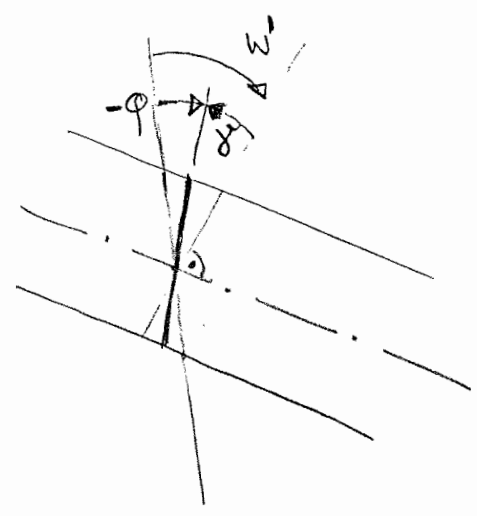
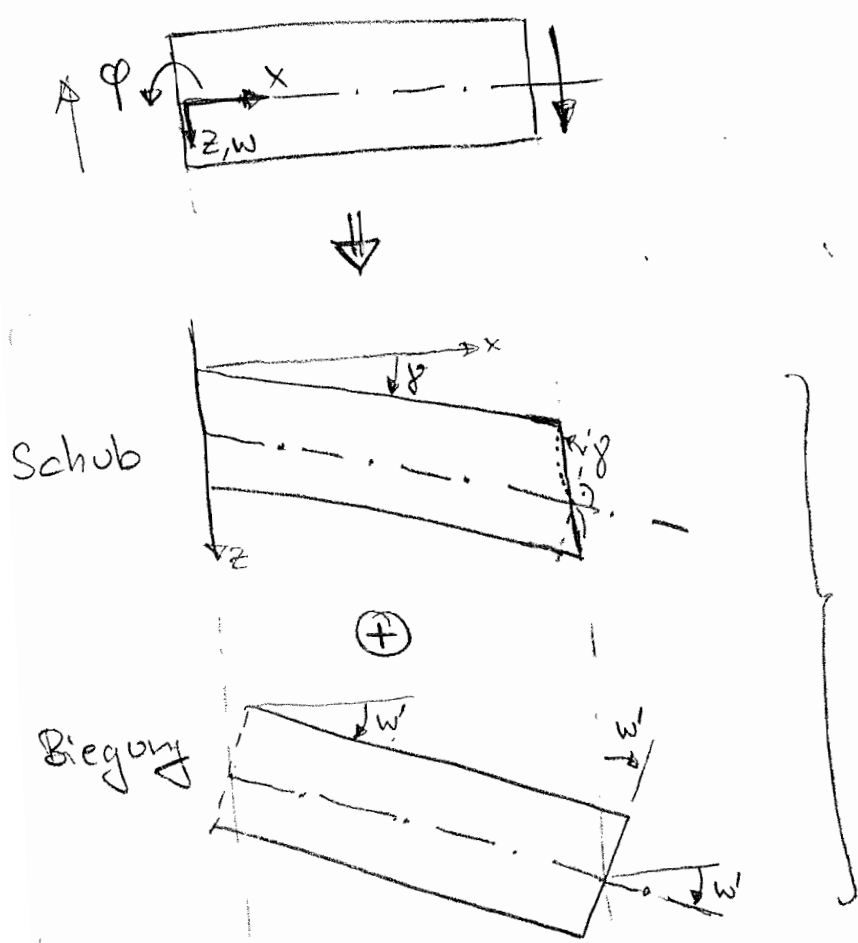


Prinzip d. virt. Verschiebungen

Zur Ableitung einer Theorie für Flächentragwerke aus (bekannten) Grundgleichungen des Kontinuums genügt eine Annahme über den Spannungszustand (Stoffgesetz für ebenen Spanns- oder Verzerrungszustand) und ein Verschiebungsansatz über die Dicke des Querschnitts.

Wählt man einen festen Verschiebungsansatz (ohne freie Konstanten), so vereinfachen sich die Kontinuums-gleichungen, da Differentiationen und Integrationen direkt ausgeführt werden können. Bei einem Ansatz in Dickenrichtung reduzieren sich die dreidimensionalen Kontinuums-gleichungen so auf zweidimensionale Gleichungen für Flächentragwerke.

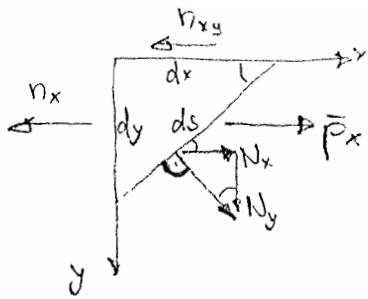
Definition der "mittleren" Schubverzerrung γ bei Platte (und Stäben)



$$w' - \gamma = -\varphi$$

$$\gamma_m = w' + \varphi$$

φ und w sind unabh. Variable, $w' \neq \varphi$ i. Allg.



$$n_x dy + n_{xy} dx - \bar{p}_x ds = 0$$

(6A)

$$\bar{p}_x = \underbrace{\frac{dy}{ds}}_{N_x} n_x + \underbrace{\frac{dx}{ds}}_{N_y} n_{xy}$$

An der Oberfläche (bzw. an Rad) werden Spanne (bzw. Schnittkräfte) zu resultierende Oberflächenkräfte zusammengefaßt.

$$\underline{p} = \underline{N}^T \underline{\sigma}$$

Diese Oberflächenkräfte wirken in Richtung der Koordinatenachse, wie auch last und die Verschiebungen auch, sie leisten mit den Verschiebungen an den Rändern virtuelle Arbeit

$$\underline{\delta u}^T \cdot \underline{p} = \delta u_x p_x + \delta u_y p_y + \delta u_z p_z$$

Die Richtung der Oberfläche in Bezug auf die Koordinaten wird durch die Normaleneinheitsvektor $\underline{n} = [n_x, n_y, n_z]$ (mit den Richtungskosinus als Komponenten) efaßt.

Betrachtet man an schiefe Ränder die Komponenten tangential und normal zu Rand, so ist zusätzlich eine ebene Koordinatensystem mit $\underline{\bar{e}} = \begin{bmatrix} \bar{e}_s \\ \bar{e}_c \end{bmatrix}$ darzustellen

$$\underline{p}_n = \underline{\bar{e}} \underline{p} = \underline{\bar{e}} \underline{N}^T \underline{\sigma}$$

Zur Vereinfachung wird jedoch in die obere Behauptung der schiefe Ränder vernachlässigt, entsprechende Bedingungen sind

1.3 Gauß'scher Integralsatz

Umformung von Volumen- in Flächenintegrale

$$\int_O \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dO = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV$$

\mathbf{v} beliebiger Vektor
(Verschiebungen oder Kräfte)
 \mathbf{n} Normaleneinheitsvektor

in Komponentenschreibweise:

$$\int_O (n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z) \, dO = \int_V (v_{x,x} + v_{y,y} + v_{z,z}) \, dV$$

oder mit Summationskonvention:

$$\int_O n_i v_i \, dO = \int_V v_{i,i} \, dV \quad \text{mit } i = 1, 2, 3$$

Anwendung auf Arbeitsausdruck: (mit $v_i = \delta u_{,i}$)

$$\int_O \delta u_i p_i \, dO = \int_O \delta u_i n_j \sigma_{ij} \, dO = \int_V (\delta u_i \sigma_{ij})_{,j} \, dV = \int_V (\delta u_{i,j} \sigma_{ij} + \delta u_i \sigma_{ij,j}) \, dV$$

$$\boxed{\rightarrow \int_V \delta u_{i,j} \sigma_{ij} \, dV = \int_O \delta u_i p_i \, dO - \int_V \delta u_i \sigma_{ij,j} \, dV}$$

Umformung von Flächen- in Linienintegrale

$$\int_s \delta u_i p_i \, ds = \int_s \delta u_i n_j \sigma_{ij} \, ds = \int_O (\delta u_i \sigma_{ij})_{,j} \, dV = \int_O (\delta u_{i,j} \sigma_{ij} + \delta u_i \sigma_{ij,j}) \, dO$$

mit $i = 1, 2$

Sonderfall: Umformung eines Linienintegrals (partielle oder Teilintegration)

$$[\delta u p]_a^b = \int_a^b (\delta u p)_{,s} \, ds = \int_a^b (\delta u_{,s} p + \delta u p_{,s}) \, ds$$

$$\rightarrow \int_a^b \delta u' p \, ds = [\delta u p]_a^b - \int_a^b \delta u p' \, ds$$

Umfang eines Flöden in ein Linienintegral

$$\int_S (\delta u_x p_x + \delta u_y p_y) ds = \int_S [\delta u_x (N_x \delta_{xx} + N_y \delta_{xy}) + \delta u_y (N_x \delta_{yx} + N_y \delta_{yy})] ds$$

$$= \int_S [N_x (\delta u_x \delta_{xx} + \delta u_y \delta_{yx}) + N_y (\delta u_x \delta_{xy} + \delta u_y \delta_{yy})] ds$$

$$\stackrel{!}{=} \int_V [(\delta u_x \delta_{xx} + \delta u_y \delta_{yx})_{,x} + (\delta u_x \delta_{xy} + \delta u_y \delta_{yy})_{,y}] dV$$

$$= \int_V [\delta u_{x,x} \delta_{xx} + \delta u_x \delta_{xx,x} + \delta u_{y,x} \delta_{yx} + \delta u_y \delta_{yx,x} + \delta u_{x,y} \delta_{xy} + \delta u_x \delta_{xy,y} + \delta u_{y,y} \delta_{yy} + \delta u_y \delta_{yy,y}] dV$$

$$= \int_V (\delta u_{x,x} \delta_{xx} + \delta u_{y,x} \delta_{yx} + \delta u_{x,y} \delta_{xy} + \delta u_{y,y} \delta_{yy} + \delta u_x \delta_{xx,x} + \delta u_y \delta_{yx,x} + \delta u_x \delta_{xy,y} + \delta u_y \delta_{yy,y}) dV$$

$$\Rightarrow \int_V \delta u_{x,x} \delta_{xx} + \delta u_{y,x} \delta_{yx} + \delta u_{x,y} \delta_{xy} + \delta u_{y,y} \delta_{yy}$$

$$= \int_S (\delta u_x N_x \delta_{xx} + \delta u_y N_x \delta_{yx} + \delta u_x N_y \delta_{xy} + \delta u_y N_y \delta_{yy}) ds$$

$$- \int_V (\delta u_x \delta_{xx,x} + \delta u_y \delta_{yx,x} + \delta u_x \delta_{xy,y} + \delta u_y \delta_{yy,y}) dV$$

$$\begin{aligned} \delta W = \int_{\Gamma} \{ & \delta u_{x,x} n_x + \delta u_{y,y} n_y + \delta u_{x,y} n_{xy} + \delta u_{y,x} n_{yx} \\ & + \delta \varphi_{x,x} m_x + \delta \varphi_{y,y} m_y + \delta \varphi_{y,x} m_{xy} + \delta \varphi_{x,y} m_{yx} \\ & + \delta u_z q_x + \delta \varphi_x q_x + \delta u_z q_y + \delta \varphi_y q_y \\ & - \delta u_x \bar{p}_x - \delta u_y \bar{p}_y - \delta u_z \bar{p}_z \} dF - \text{Randterme} = 0 \end{aligned}$$

Partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \delta u_{x,x} n_x dF &= \int_S \delta u_x N_x n_x ds - \int_{\Gamma} \delta u_x n_{x,x} dF \\ \int_{\Gamma} \delta u_{x,y} n_{xy} dF &= \int_S \delta u_x N_y n_{xy} ds - \int_{\Gamma} \delta u_x n_{xy,y} dF \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta W = \int_{\Gamma} \{ & -\delta u_x n_{x,x} - \delta u_y n_{y,y} - \delta u_x n_{xy,y} - \delta u_y n_{yx,x} \\ & - \delta \varphi_x m_{x,x} - \delta \varphi_y m_{y,y} - \delta \varphi_y m_{xy,x} - \delta \varphi_x m_{yx,y} \\ & - \delta u_z q_{x,x} + \delta \varphi_x q_x - \delta u_z q_{y,y} + \delta \varphi_y q_y \\ & - \delta u_x \bar{p}_x - \delta u_y \bar{p}_y - \delta u_z \bar{p}_z \} dF \\ & + \int_S \{ \delta u_x N_x n_x + \delta u_y N_y n_y + \delta u_x N_y n_{xy} + \delta u_y N_x n_{yx} \\ & + \delta \varphi_x N_x m_x + \delta \varphi_y N_y m_y + \delta \varphi_y N_x m_{xy} + \delta \varphi_x N_y m_{yx} \\ & + \delta u_z N_x q_x + \delta u_z N_y q_y \\ & - \delta u_x \bar{p}_x - \delta u_y \bar{p}_y - \delta u_z \bar{p}_z - \delta \varphi_x \bar{m}_x + \delta \varphi_y \bar{m}_y \} ds = 0 \end{aligned}$$

Sortieren der Terme nach der einzelnen virtuellen Verschiebungskomponente.

$$\delta W = \int_{\Gamma} \left\{ \begin{aligned} & -\delta u_x [n_{x,x} + n_{xy,y} + \bar{p}_x] \\ & -\delta u_y [n_{y,y} + n_{xy,x} + \bar{p}_y] \\ & -\delta u_z [q_{x,x} + q_{y,y} + \bar{p}_z] \\ & -\delta \varphi_x [m_{x,x} + m_{xy,y} - \bar{q}_x] \\ & -\delta \varphi_y [m_{y,y} + m_{xy,x} - \bar{q}_y] \end{aligned} \right\} d\Gamma$$

} Gleichgewichtsbedingungen der Scheibe

} Gleichgewichtsbedingungen der Platte (Schubwich)

$$+ \int_{\Sigma} \left\{ \begin{aligned} & \delta u_x [N_x n_x + N_y n_{xy} - \bar{p}_x] \\ & + \delta u_y [N_y n_y + N_x n_{xy} - \bar{p}_y] \\ & + \delta u_z [N_x q_x + N_y q_y - \bar{p}_z] \\ & + \delta \varphi_x [N_x m_x + N_y m_{xy} - \bar{m}_x] \\ & + \delta \varphi_y [N_y m_y + N_x m_{xy} - \bar{m}_y] \end{aligned} \right\} ds = 0$$

} stat. RB der Scheibe

} stat. RB der Platte (Schubwich)

Für beliebige virtuelle Verschiebungen müssen die Ausdrücke in den eckigen Klammern Null werden, wenn $\delta W = 0$ gelten soll. Das sind aber gerade die noch fehlenden, lokalen Gleichgewichtsbedingungen und stat. RB der Scheibe und Platten.

Die Plattenanteile können durch Einführen der Normalenhypothese, d.h. Vernachlässigung der Arbeit der Querkräfte, zur Kirchhoff'schen Plattentheorie umgeformt werden:

(9)

$$\begin{aligned} \gamma_{xz,m} = \varphi_x + u_{z,x} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \gamma_{yz,m} = \varphi_y + u_{z,y} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \varphi_x &= -u_{z,x} \\ \varphi_y &= -u_{z,y} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_x &= -u_{z,xx} \\ \alpha_y &= -u_{z,yy} \\ 2\alpha_{xy} &= -(u_{z,xy} + u_{z,yx}) \end{aligned}$$

Einsetzen in die "globale" Form der Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} \delta W = \int_F \{ & -\delta u_x [\dots] - \delta u_y [\dots] - \delta u_z [q_{x,x} + q_{y,y} + \bar{p}_z] \\ & + \delta u_{z,x} [m_{x,x} + m_{x,y,y} - q_x] + \delta u_{z,y} [m_{y,y} + m_{x,y,x} - q_y] \} dF \\ & + \int_s \{ \delta u_x [\dots] + \delta u_y [\dots] + \delta u_z [N_x q_x + N_y q_y - \bar{p}_z] \\ & - \delta u_{z,x} [N_x m_x + N_y m_{xy} - \bar{m}_x] - \delta u_{z,y} [N_y m_y + N_x m_{xy} - \bar{m}_y] \} ds = 0 \end{aligned}$$

Die Verdrehungen φ_x, φ_y sind jetzt vollständig eliminiert, zur Ableitung der endgültigen Gleichgewichts- und stat. Randbedingungen sind weitere Terme partiell zu integrieren:

Flächenintegrale:

$$\begin{aligned} \int_F \delta u_{z,x} [m_{x,x} + m_{x,y,y} - q_x] dF &= \int_s \delta u_z N_x [m_{x,x} + m_{x,y,y} - q_x] ds - \int_F \delta u_z [m_{x,xx} + m_{x,y,yx} - q_{x,x}] dF \\ \int_F \delta u_{z,y} [m_{y,y} + m_{x,y,x} - q_y] dF &= \int_s \delta u_z N_y [m_{y,y} + m_{x,y,x} - q_y] ds - \int_F \delta u_z [m_{y,yy} + m_{x,y,xy} - q_{y,y}] dF \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_F \left\{ \delta u_x [\dots] - \delta u_y [\dots] \right. \\ & \left. - \delta u_z \left[\cancel{q_{x,x}} + \cancel{q_{y,y}} + \bar{p}_z + m_{x,xx} + m_{xy,yx} - \cancel{q_{x,x}} + m_{y,yy} + m_{xy,xy} - \cancel{q_{y,y}} \right] \right\} dF \\ & + \int_S \left\{ \delta u_x [\dots] + \delta u_y [\dots] \right. \\ & + \delta u_z \left[\cancel{N_x q_x} + \cancel{N_y q_y} - \bar{p}_z + N_x \underbrace{(m_{x,xx} + m_{xy,yx})}_{q_x} - \cancel{N_x q_x} + N_y \underbrace{(m_{y,yy} + m_{xy,xy})}_{q_y} - \cancel{N_y q_y} \right] \\ & \left. - \delta u_{z,x} [N_x m_x + N_y m_{xy} - \bar{m}_x] - \delta u_{z,y} [N_y m_y + N_x m_{xy} - \bar{m}_y] \right\} ds = 0 \end{aligned}$$

Die Querkräfte sind in den Gleichungen jetzt nur noch indirekt, über die Momentenableitungen enthalten:

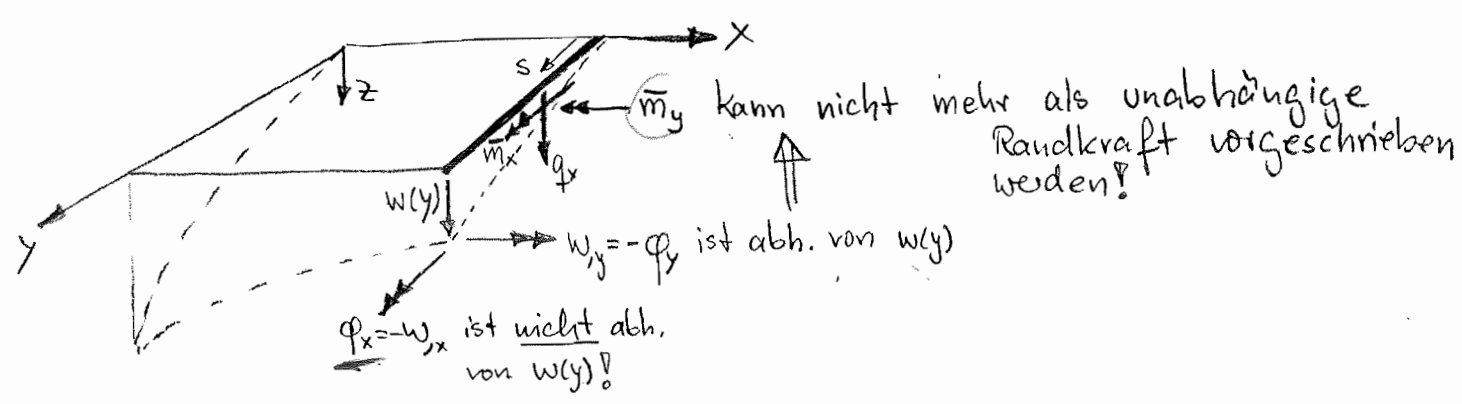
$$\begin{aligned} \delta W = & \int_F \left\{ -\delta u_x [n_{x,x} + n_{xy,y} + \bar{p}_x] \right. \\ & \left. - \delta u_y [n_{y,y} + n_{xy,x} + \bar{p}_y] \right. \\ & \left. - \delta u_z [m_{x,xx} + 2m_{xy,xy} + m_{y,yy} + \bar{p}_z] \right\} dF \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Scheiben-} \\ \text{gleichgewicht} \\ \text{Kirchhoff-Platte} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} & + \int_S \left\{ \delta u_x [N_x n_x + N_y n_{xy} - \bar{p}_x] \right. \\ & \left. + \delta u_y [N_y n_y + N_x n_{xy} - \bar{p}_y] \right. \\ & + \delta u_z [N_x q_x + N_y q_y - \bar{p}_z] \\ & - \delta u_{z,x} [N_x m_x + N_y m_{xy} - \bar{m}_x] \\ & \left. - \delta u_{z,y} [N_y m_y + N_x m_{xy} - \bar{m}_y] \right\} ds = 0 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Scheibe} \\ \text{Kräfte- und} \\ \text{Momentenrand-} \\ \text{bedingungen} \\ \text{der Platte} \end{array} \right\}$$

Konsequenterweise müsste man die Verschiebungsableitungen $\delta u_{z,x}, \delta u_{z,y}$ noch durch partielle Integration umformen. Da aber auch Momentenrandbedingungen formuliert werden müssen, sind hier noch besondere Überlegungen erforderlich:

Die Normalenhypothese verknüpft die Verdrehungen der Mittelfläche mit den Verschiebungsableitungen. Im Platteninneren sind die Verdrehungen in beiden Richtungen von der Verschiebung u_z abhängig, längs eines Randes ist jedoch nur die Normalverdrehung von der Randverschiebung abhängig, während die Verdrehung tangential unabhängig ist.

Zur Vereinfachung wird dieser Sachverhalt am Rand $x = \text{konst.}$, d.h. $[N_x N_y]^T = [1 \ 0]^T$, dargestellt (eine Übertragung auf beliebige, schiefe Ränder geht analog):



Mit $N_x=1, N_y=0$ folgt für die Randintegrale längs des Randes $x = \text{konst.}$:

$$\delta W_R = \int_s \left\{ \delta u_z [q_x - \bar{p}_z] - \delta u_{z,x} [m_x - \bar{m}_x] - \delta u_{z,y} [m_{xy} - \bar{m}_y] \right\} ds$$

partiell integrieren

$$\delta W_R = \int_s \left\{ \delta u_z [q_x - \bar{p}_z] - \delta u_{z,x} [m_x - \bar{m}_x] + \delta u_z [m_{xy,y} - \bar{m}_{y,y}] \right\} ds - \delta u_z [m_{xy} - \bar{m}_y]_a^b$$

$$= \int_s \left\{ \delta u_z \underbrace{[q_x + m_{xy,y} - \bar{p}_z]}_{\text{Kirchhoff'sche Ersatzquerkraft am Rand}} - \delta u_{z,x} \underbrace{[m_x - \bar{m}_x]}_{\text{Randmoment}} \right\} ds - \delta u_z \underbrace{[m_{xy}]_a^b}_{\text{"abhebende" Eckkraft}}$$

6. Beispiel: Diskretisierung und Berechnung eines Wehrpfeilers

Aufgabe: Der auf Seite 2 dargestellte Mittelpfeiler eines Segmentwehres ist mit Hilfe von Scheibenelementen zu berechnen.

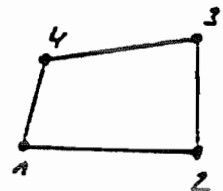
Für die Berechnung stehen zur Verfügung:

A) Elemente mit Verschiebungsansatz

- 1.) CST-Dreieckelement mit linearem Verschiebungsansatz



- 2.) 4-Knoten-Viereckelement mit bilinearem Verschiebungsansatz

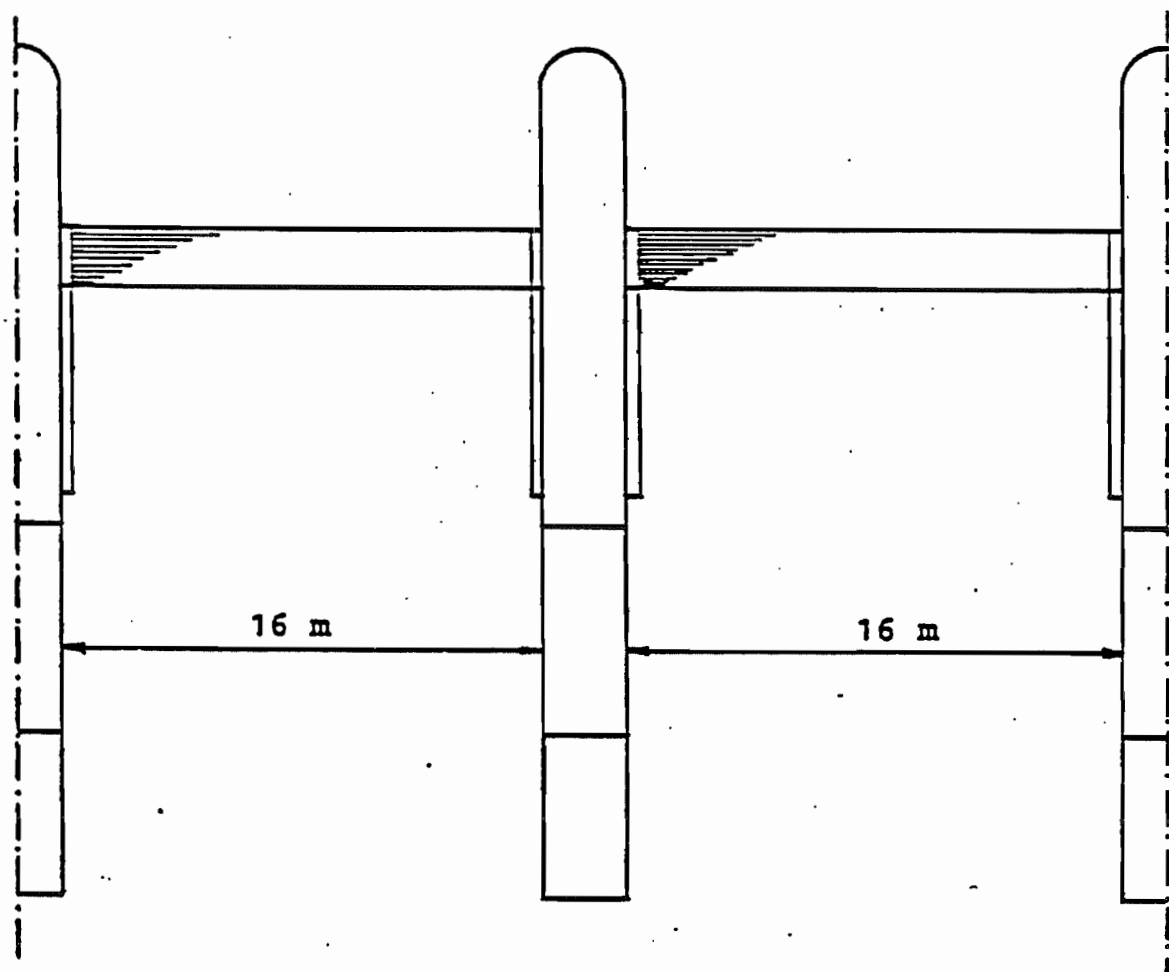
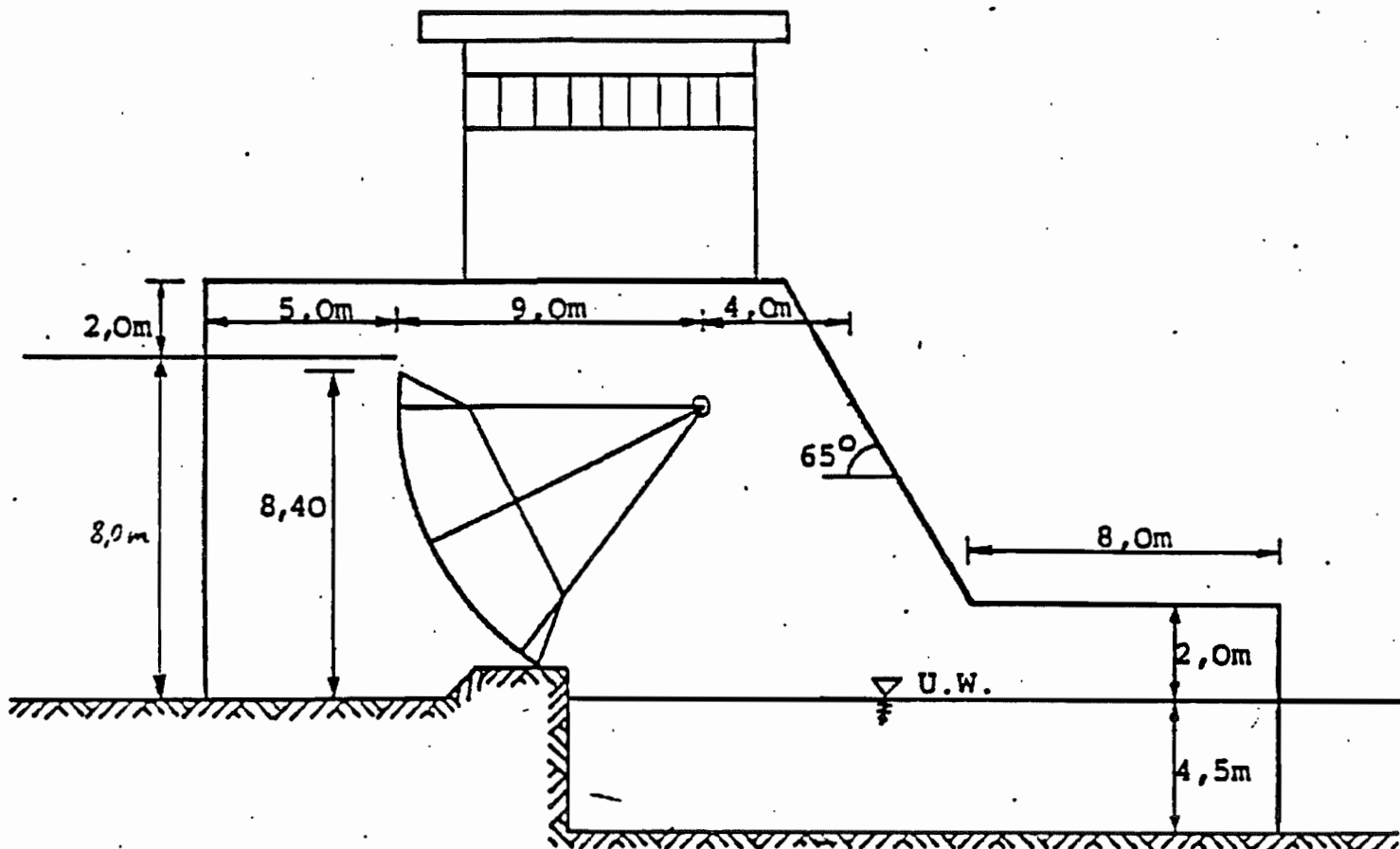


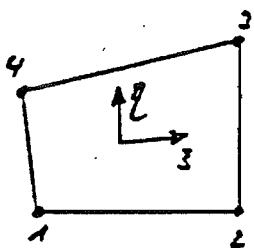
- 3.) Verschiebungselement mit bilinearem Verschiebungsansatz (wie 2.) + unverträglichen quadratischen Verschiebungsverläufen

Der Ansatz für dieses Element hat die Form:

$$u_x = \sum_{i=1}^4 \Omega^i u_x^i + (1-\xi^2) \hat{u}_x^5 + (1-\eta^2) \hat{u}_x^6$$

$$u_y = \sum_{i=1}^4 \Omega^i u_y^i + (1-\xi^2) \hat{u}_y^5 + (1-\eta^2) \hat{u}_y^6$$



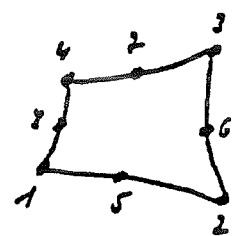


natürliches Koordinatensystem

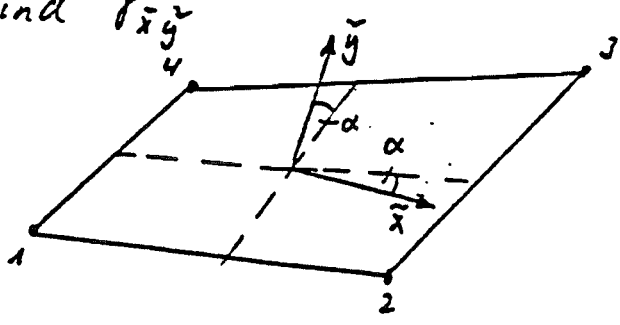
u_x^i, u_y^i sind die Knotenverschiebungen an den Eckknoten.

Die zusätzlichen Freiheitsgrade $u_x^5, u_x^6, u_y^5, u_y^6$ werden am Element durch statische Kondensation eliminiert. Durch die zusätzlichen quadratischen Verschiebungsanteile werden die Biegeeigenschaften des Elements 2. verbessert. Diese Anteile sind jedoch unverträglich. Die Konvergenz des Elements (gegen die richtige Lösung) ist nur für rechteckige und parallelogrammförmige Elemente gesichert (wegen der unverträglichen Ansätze).

4.) 8-Knoten - Viereckelement mit isoparametrischem Ansatz

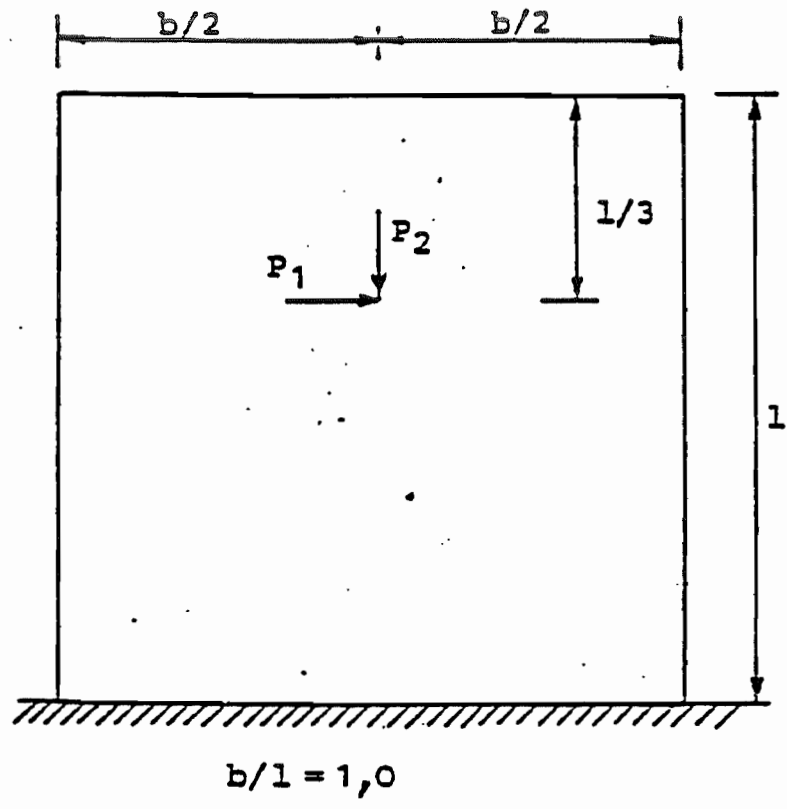


5.) 4-Knoten - Viereckelement mit biquadratischem Verschiebungsansatz (wie 1.) und reduzierter Integration für die Scherkräfte und -Dehnungen $n_{\bar{x}\bar{y}}$ bzw. $G_{\bar{x}\bar{y}}$ und $\gamma_{\bar{x}\bar{y}}$



Problem: Das wesentliche Problem bei der Berechnung des Wehrpfeilers besteht in der Lokalen Erfassung des konzentrierten Lastangriffs am Lager des Wehrsegments.

Um das Verhalten der Elemente bei verschiedenen FE-Netzen unter lokalen Lastangriffen, d.h. bei hohen Spannungsgradienten und Singularitäten, zu verdeutlichen, werden zunächst die Ergebnisse für den geometrisch einfacheren Fall einer Rechteckscheibe unter einer horizontalen und unter einer vertikalen Einzellast dargestellt. Die verwendeten FE-Netze sind auf den nächsten Seiten dargestellt.

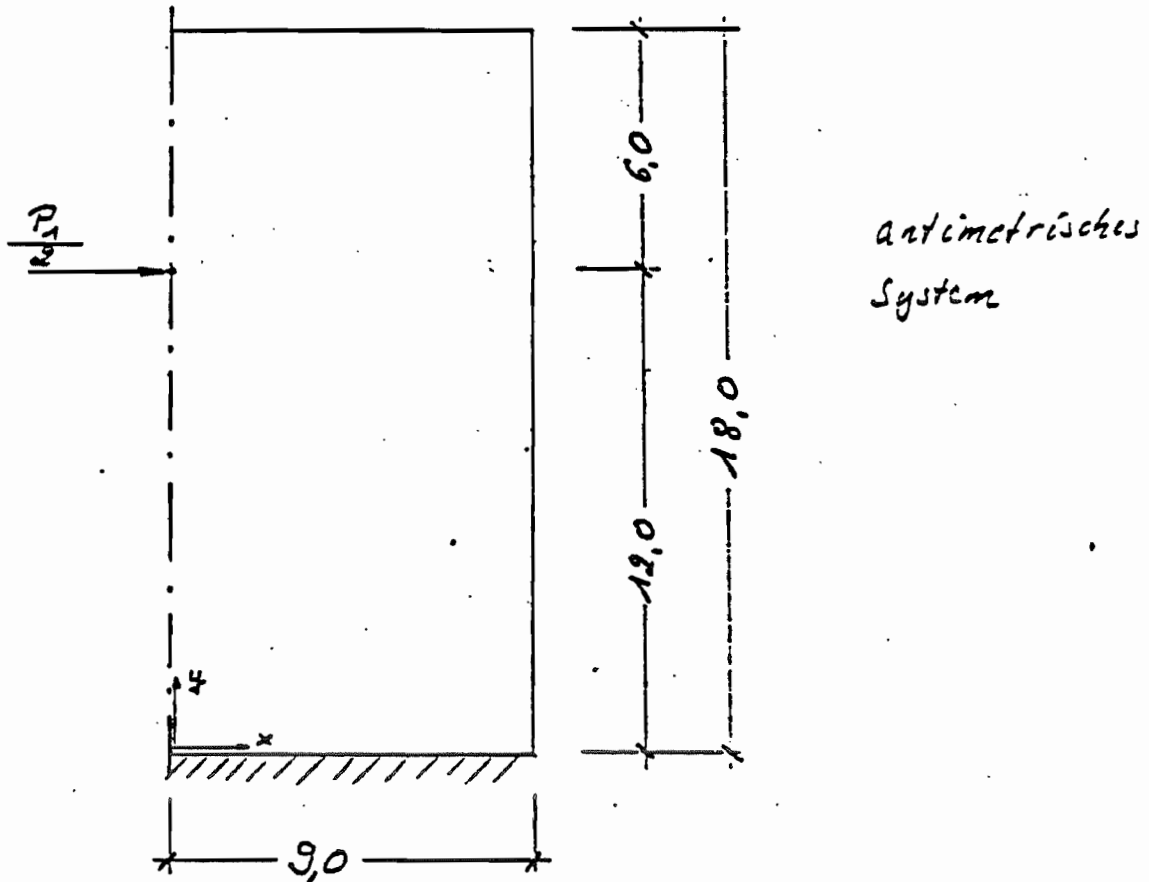


System des behandelten Testfalls.

Als Vergleichslösung im Bereich der Einzellasten kann die Lösung für die unendlich ausgedehnte Scheibe verwendet werden (s. z.B. Girkmann).

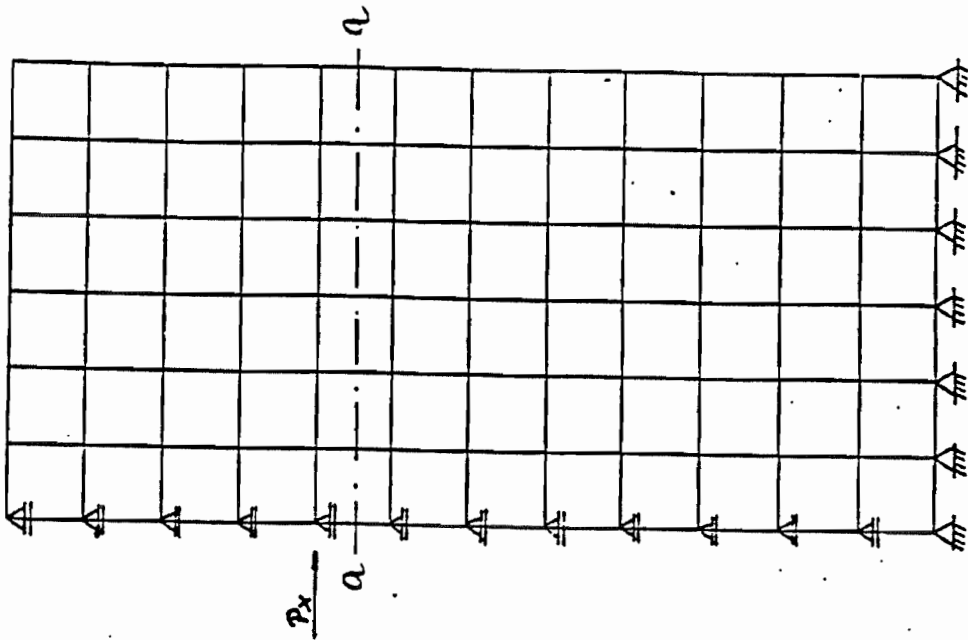
A) Horizontallast

Die Berechnung wird unter Ausnutzung der Symmetriebedingungen durchgeführt.

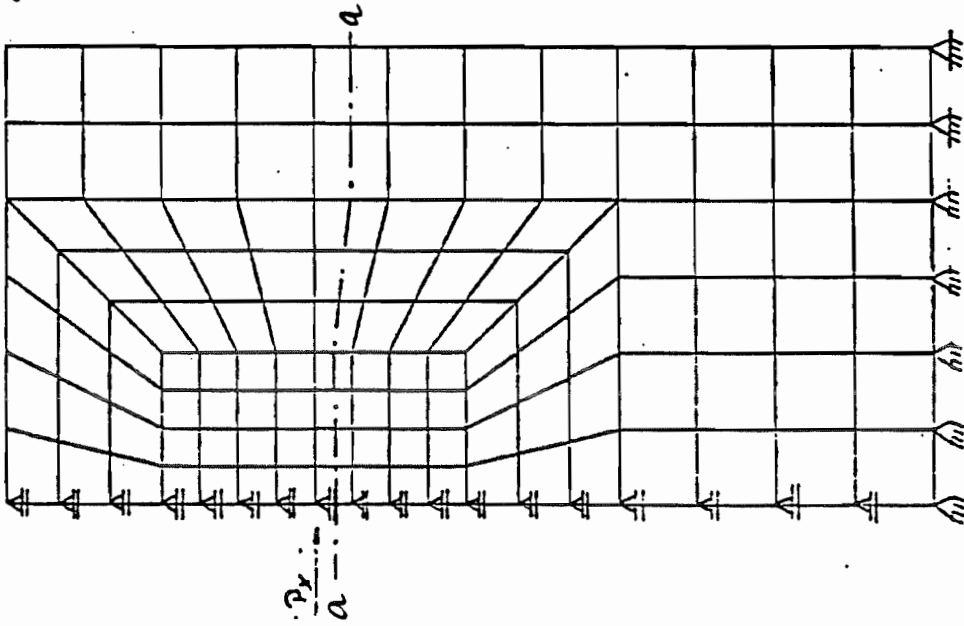


Als Ergebnisse aus den FE-Rechnungen sind die Spannungen in einem Horizontalschnitt a-a durch die Elementmitten der unter der Last liegenden Elemente aufgetragen. Zum Vergleich mit der analytischen Lösung ist diese jeweils als strichpunktierte Linie in einem Horizontalschnitt in Höhe der Last und als gestrichelte Linie in Höhe des Schnittes a-a der FE-Netze RA bzw. DA dargestellt (s. folgende Seite).

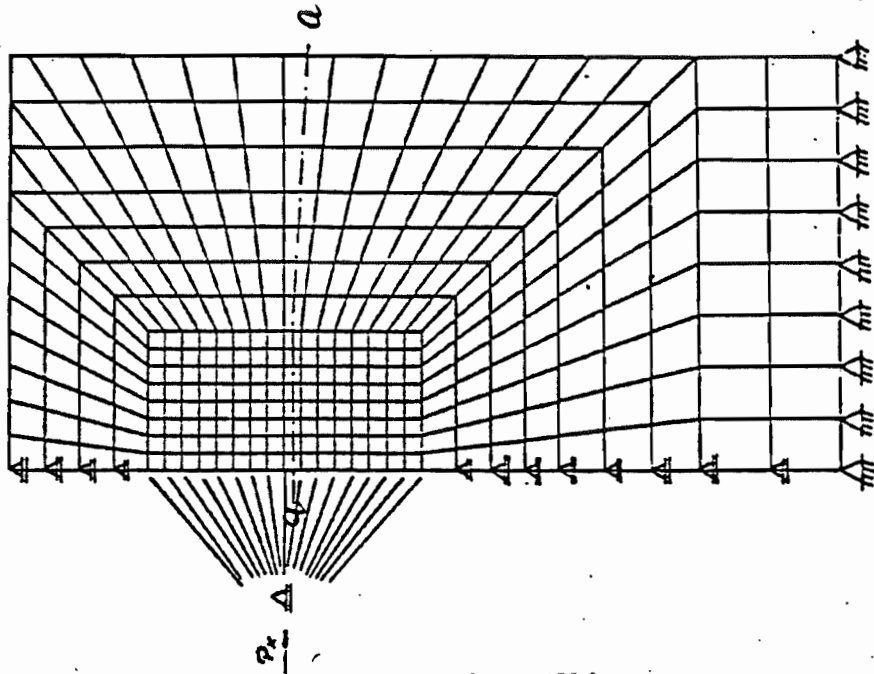
FE-Netze für Viereckelemente:



Netz R1

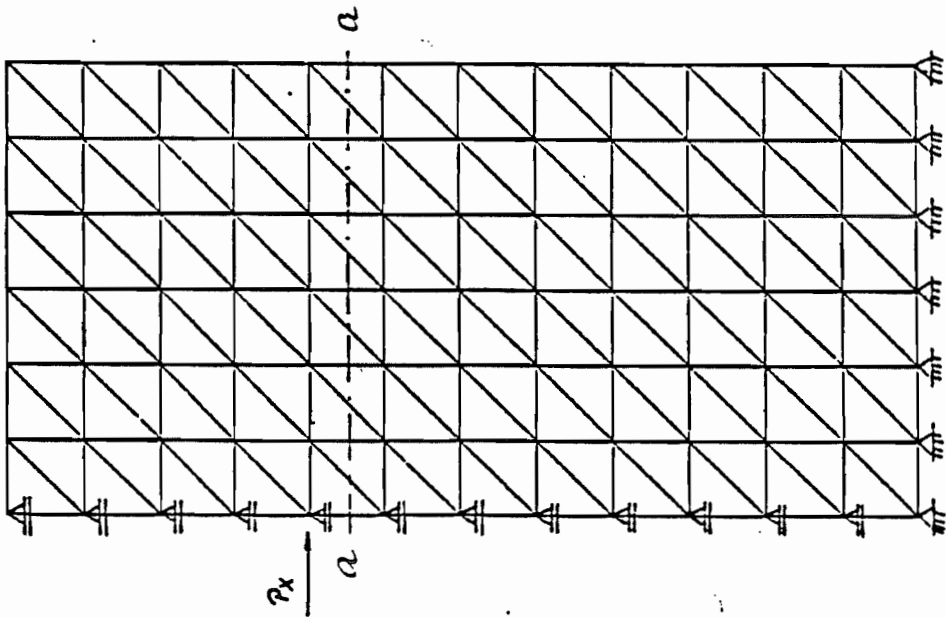


Netz R2

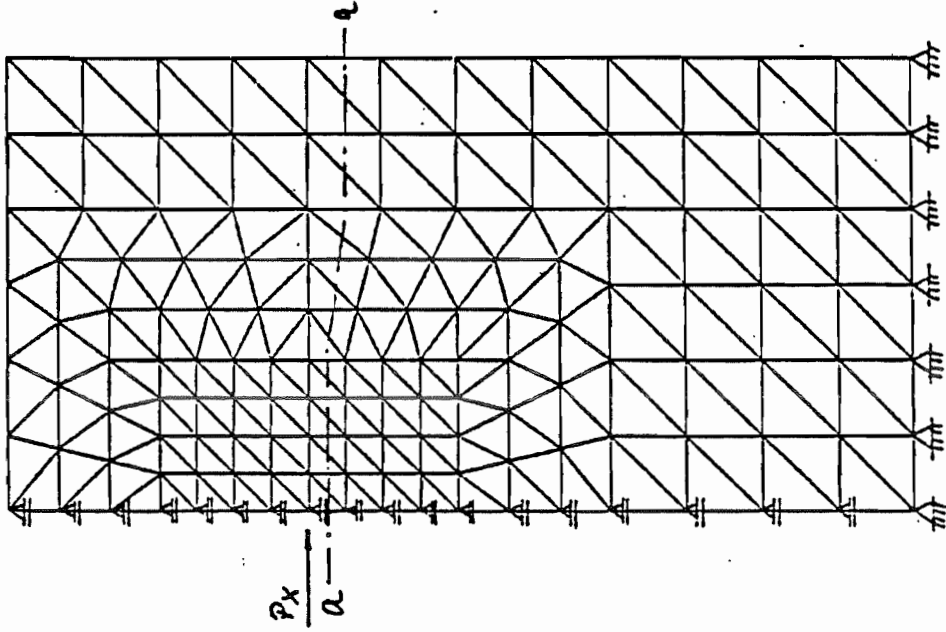


Netz R3

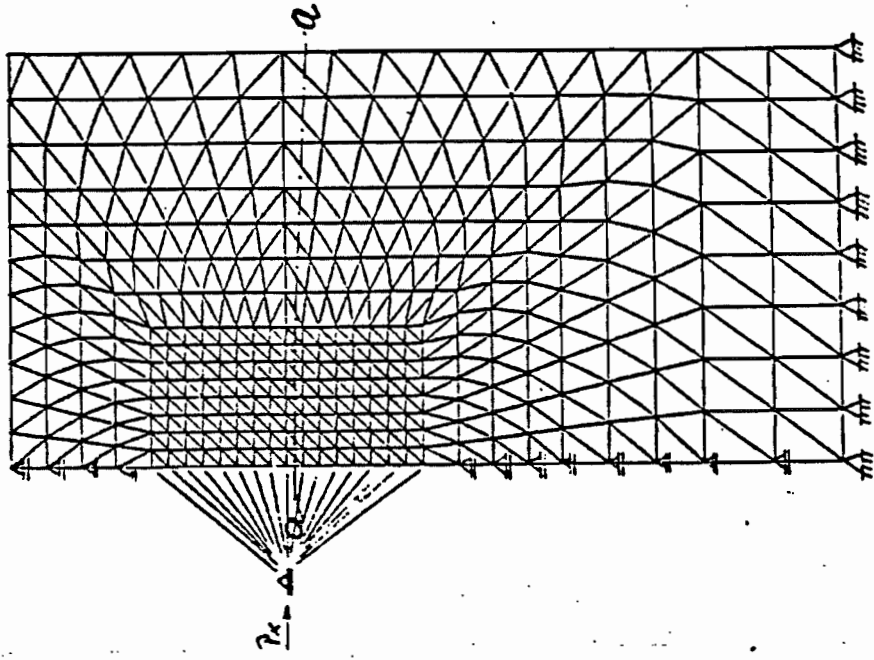
FE-Netze für Dreieckelemente



Netz D1



Netz D2

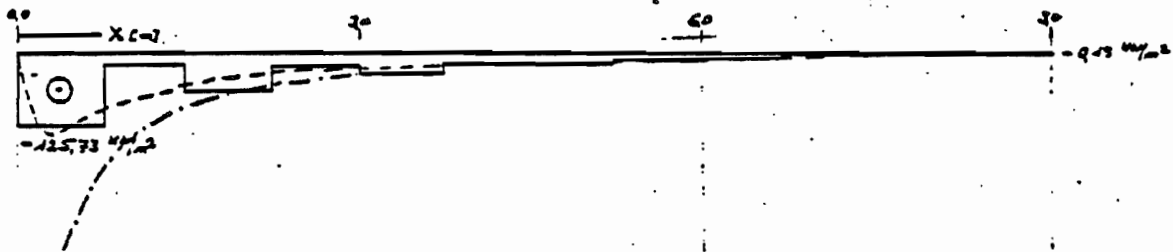


Netz D3

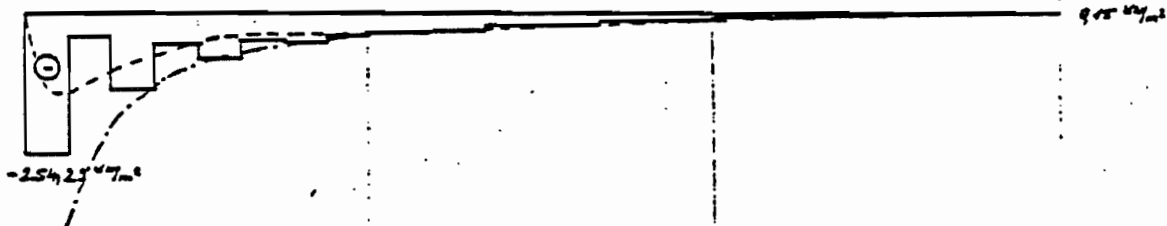
Ergebnisse für Elementtyp 1 :

G_x im Schnitt a-a

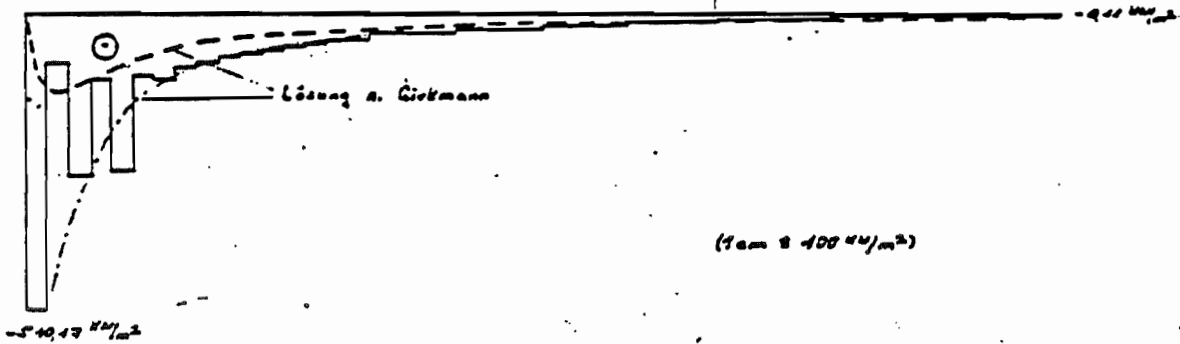
Netz D1



Netz D2

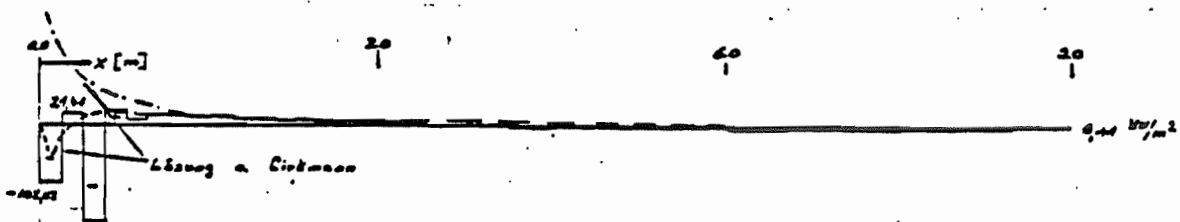


Netz D3

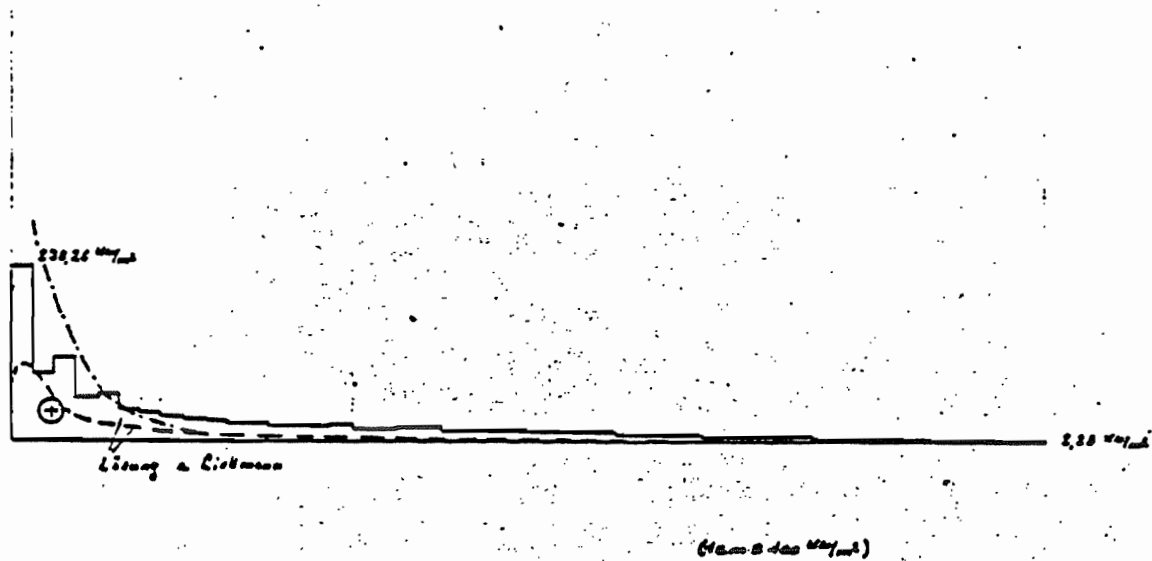


G_y im Schnitt a-a

Netz D3

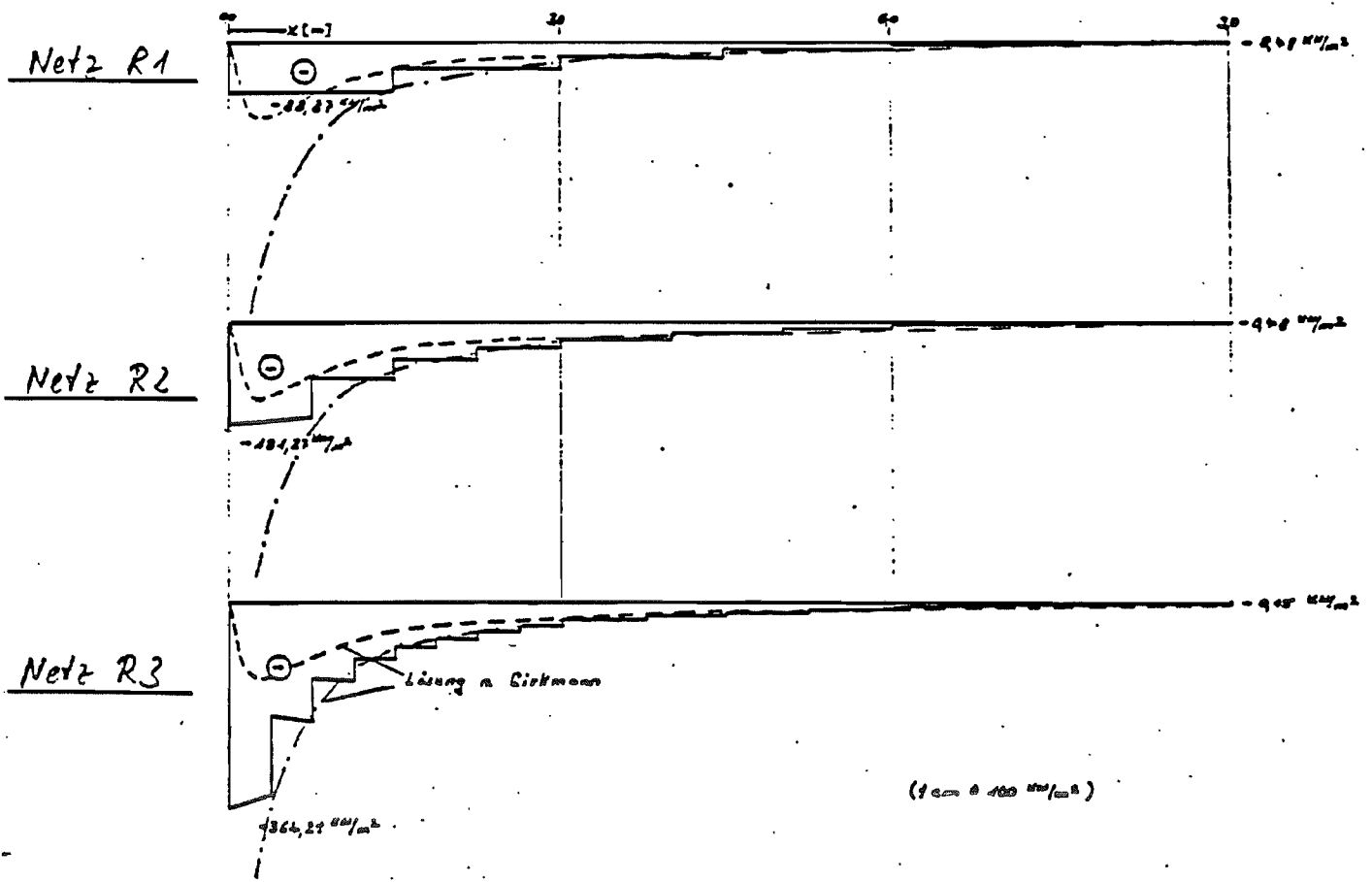


Netz D3

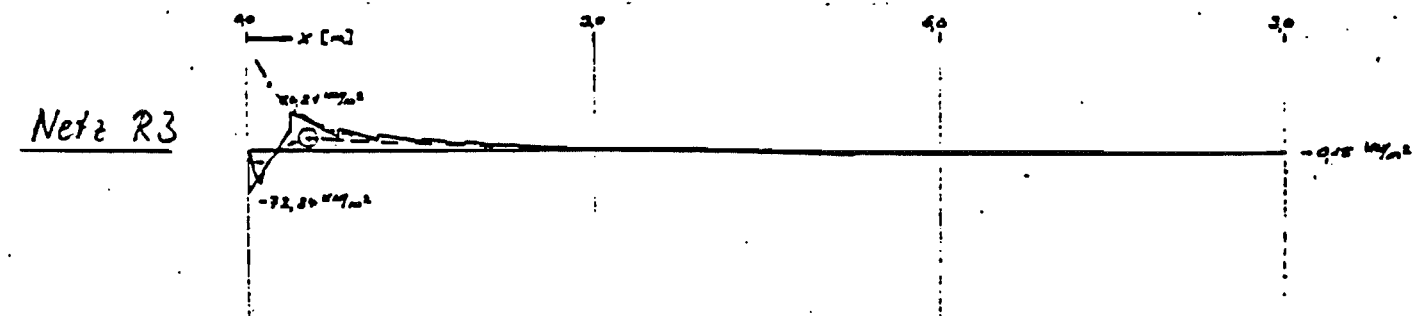


Ergebnisse für Elementtyp 2

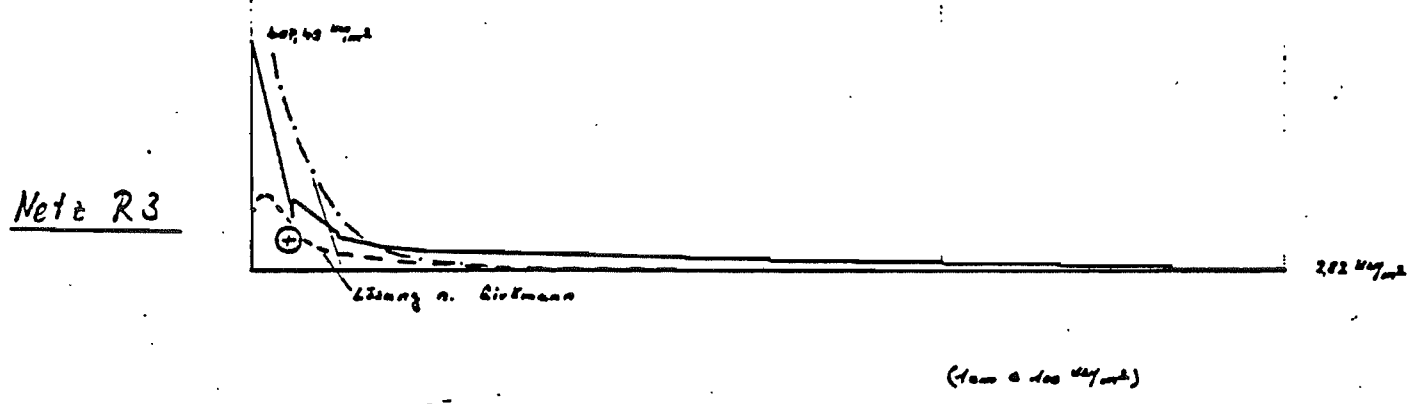
σ_x - Verlauf im Schnitt a-a



σ_y - Verlauf im Schnitt a-a



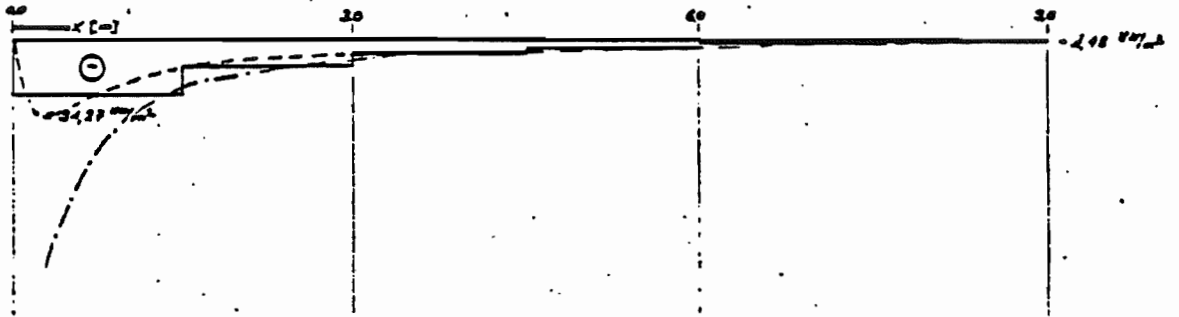
τ_{xy} - Verlauf im Schnitt a-a



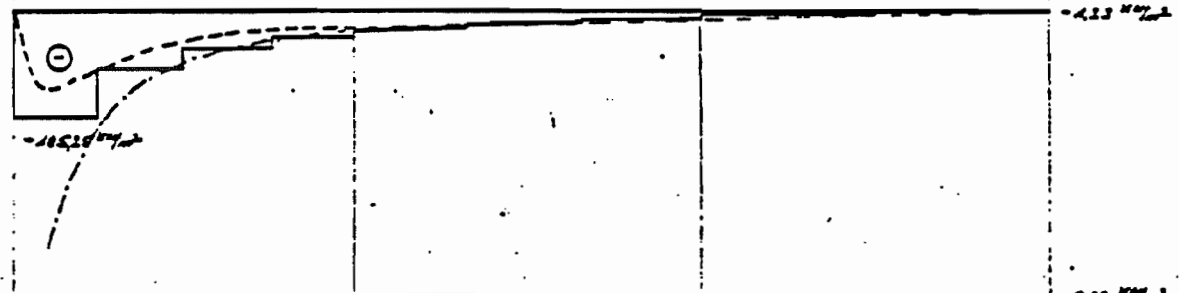
Ergebnisse für Elementtyp 3

G_x -Verlauf im Schnitt a-a

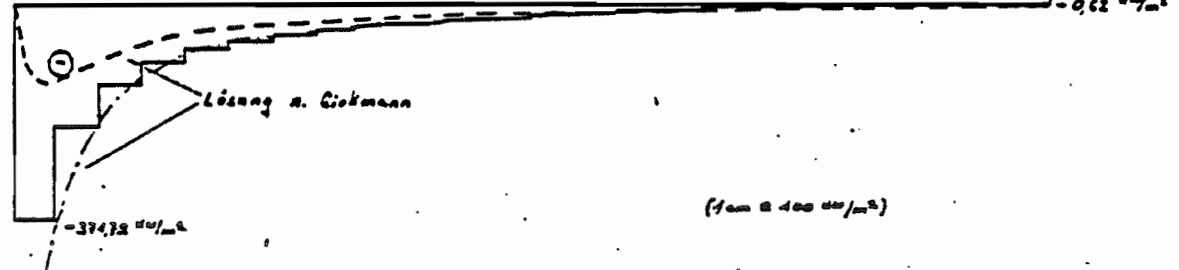
Netz R1



Netz R2

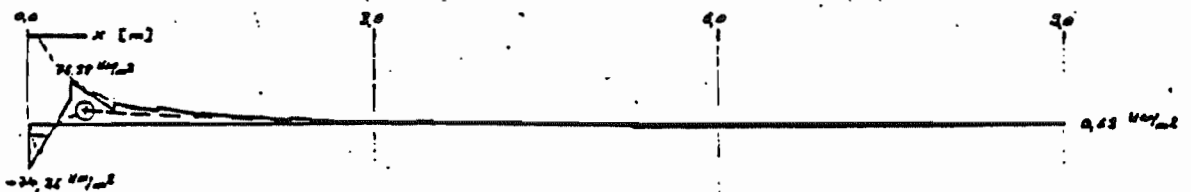


Netz R3



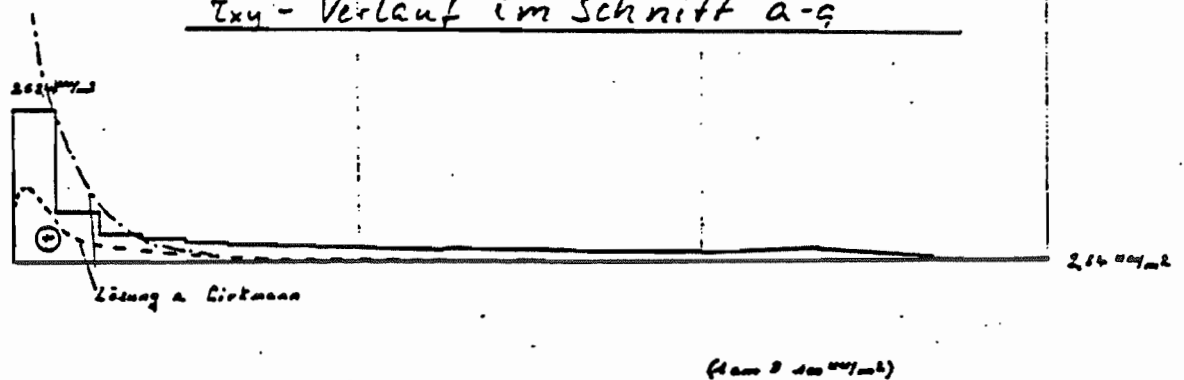
G_y -Verlauf im Schnitt a-a

Netz R3



T_{xy} -Verlauf im Schnitt a-a

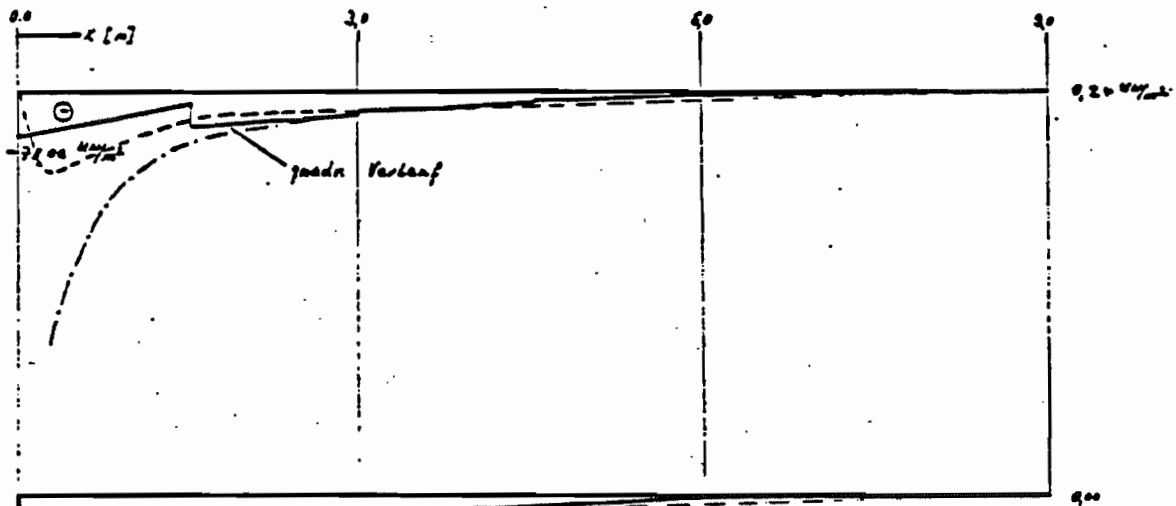
Netz R3



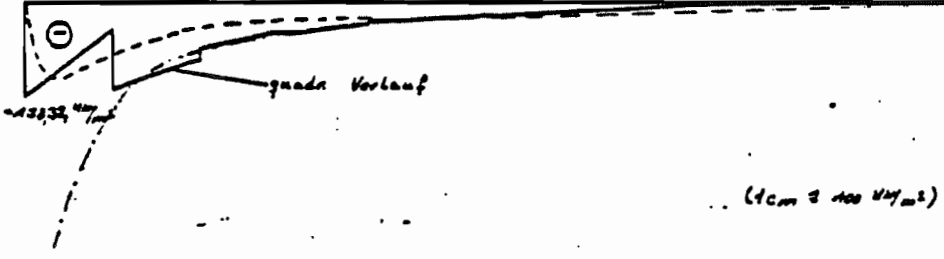
Ergebnisse für Elementtyp 4

G_x -Verlauf im Schnitt a-a

Netz R1

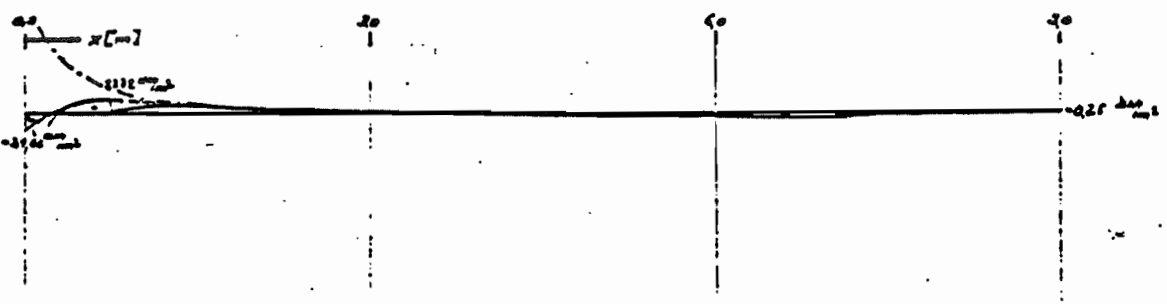


Netz R2



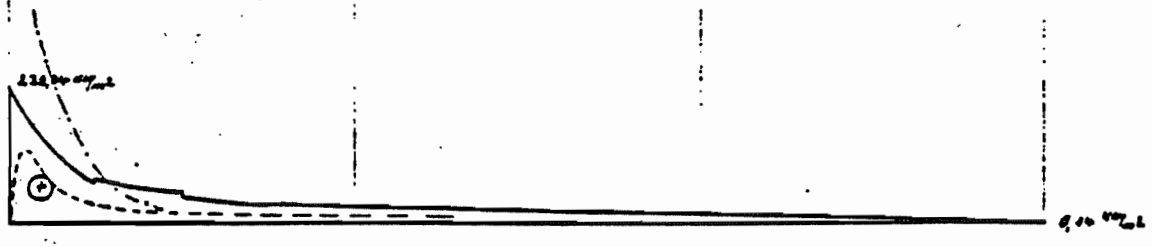
G_y -Verlauf im Schnitt a-a

Netz R2



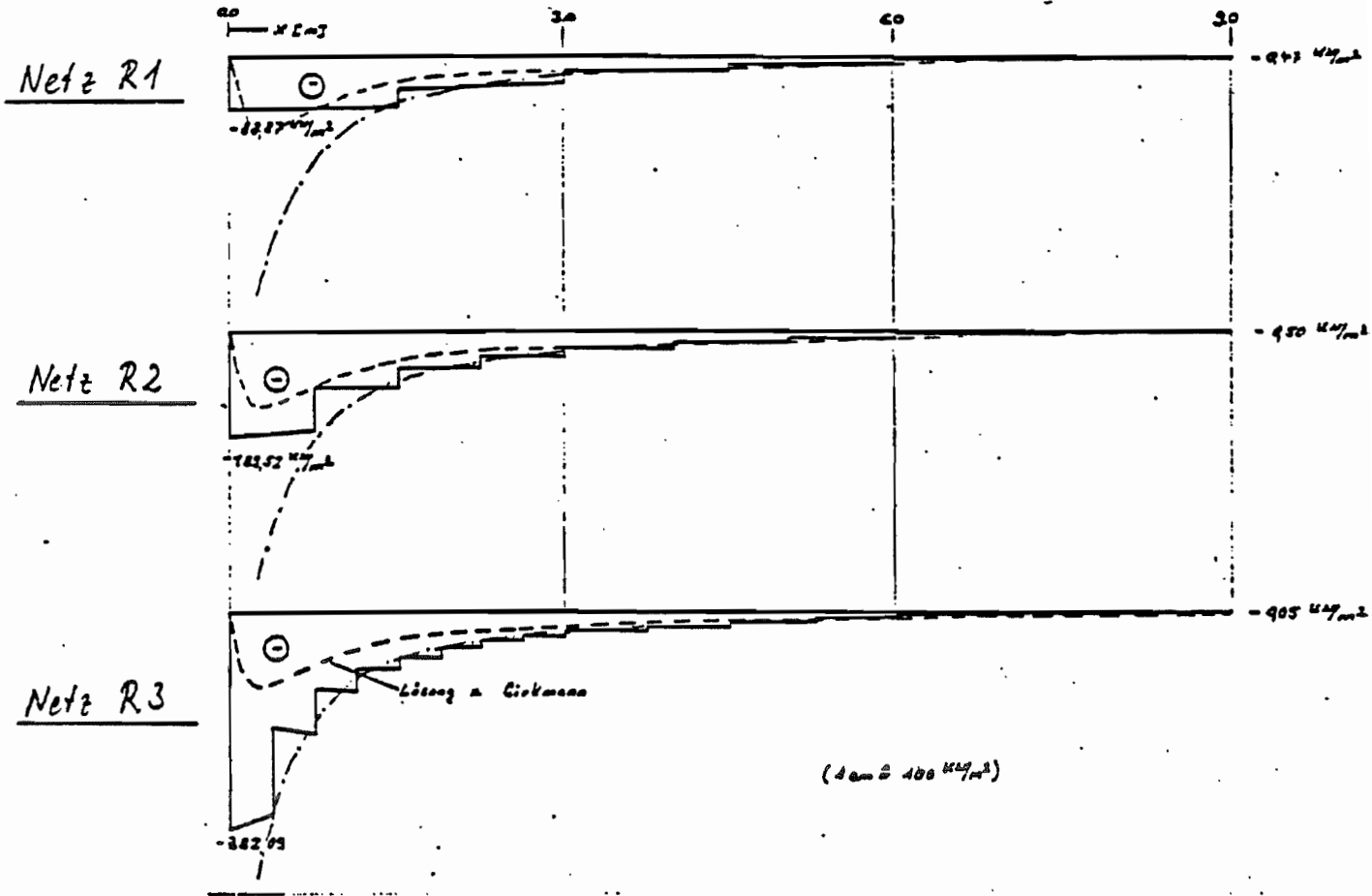
T_{xy} -Verlauf im Schnitt a-a

Netz R2

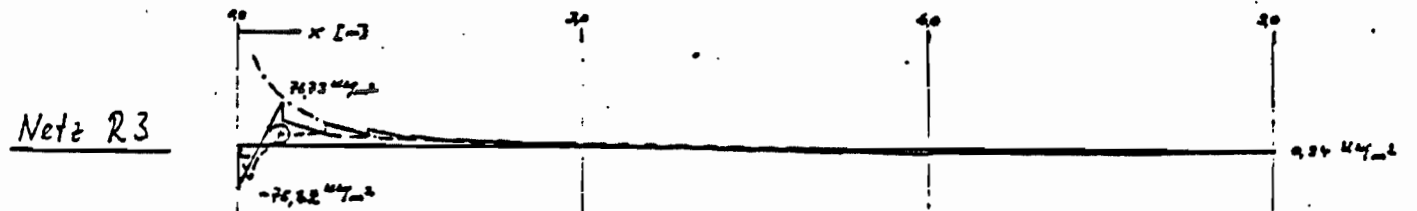


Ergebnisse für Elementtyp 5

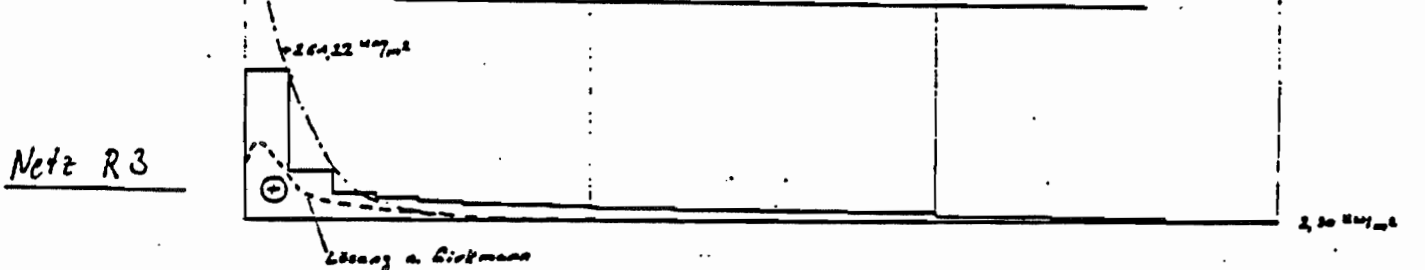
G_x -Verlauf im Schnitt a-a



G_y -Verlauf im Schnitt a-a



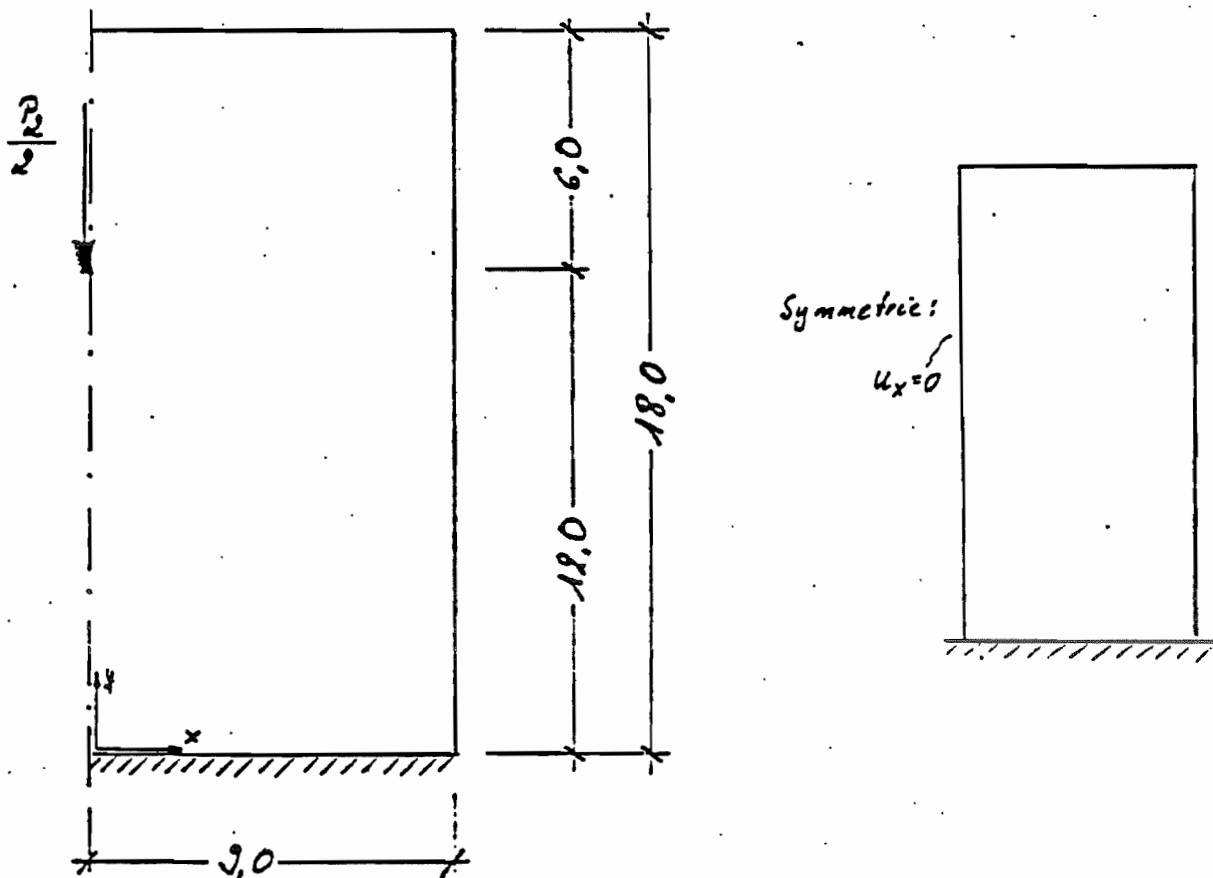
T_{xy} -Verlauf im Schnitt a-a



(dam B 100 $\frac{kN}{m^2}$)

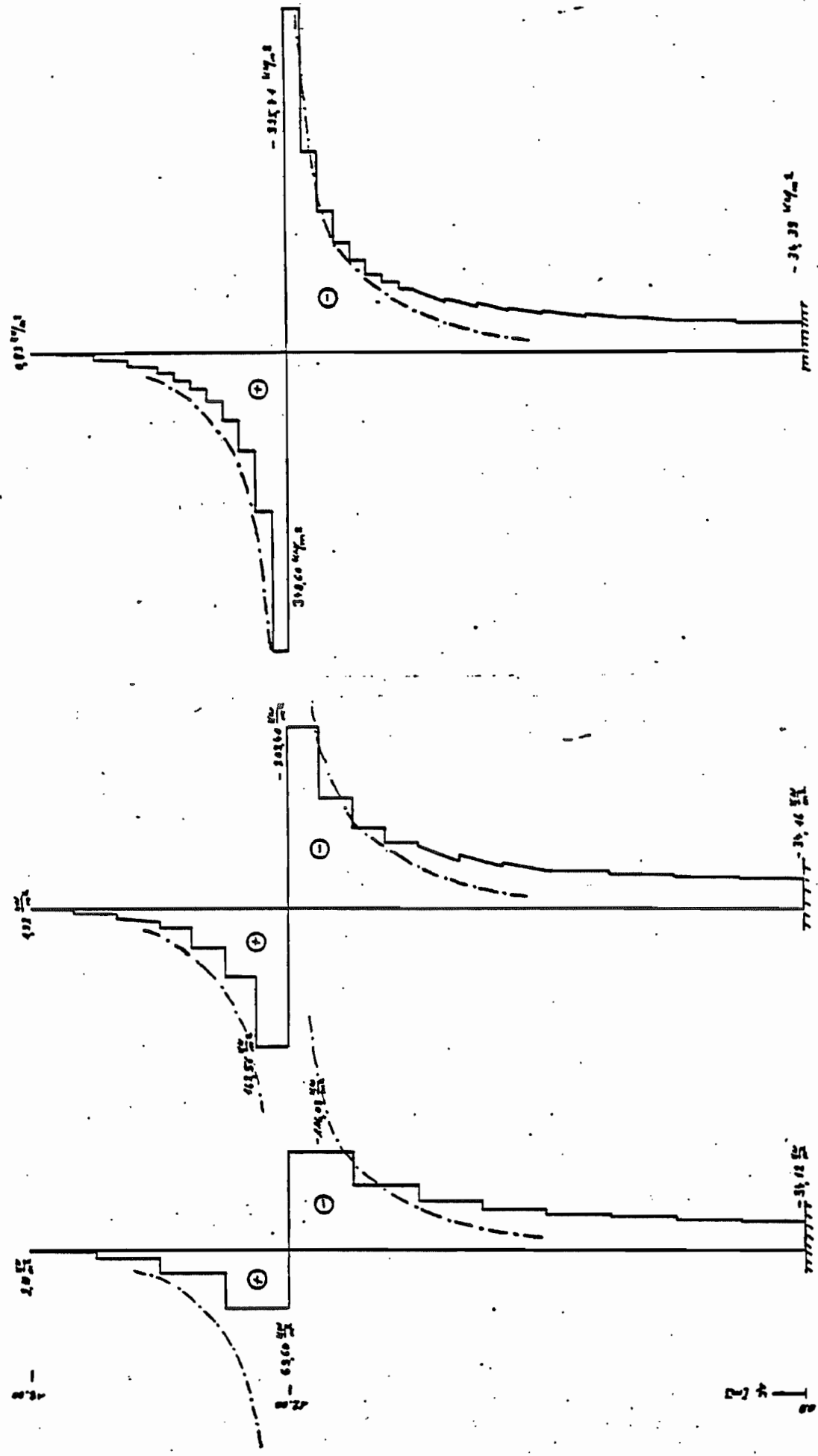
B) Vertikallast

Zur Untersuchung der Vertikallast sind wiederum die gleichen FE-Netze wie für die Horizontallast unter Berücksichtigung der Symmetriebedingungen verwendet.



Die Spannungen sind in einem vertikalen Schnitt durch die Elemente (Mitte) neben der Symmetrieachse dargestellt. Da sie den gleichen charakteristischen Verlauf haben wie für den Fall Horizontallast, sind sie nur für Elementtyp 3 dargestellt. Als Vergleich ist die Lösung der unendlich ausgedehnten Scheibe im Schnitt durch die Symmetrieachse dargestellt.

Ergebnisse für Elementtyp 3, Spannungsverlauf für σ_y



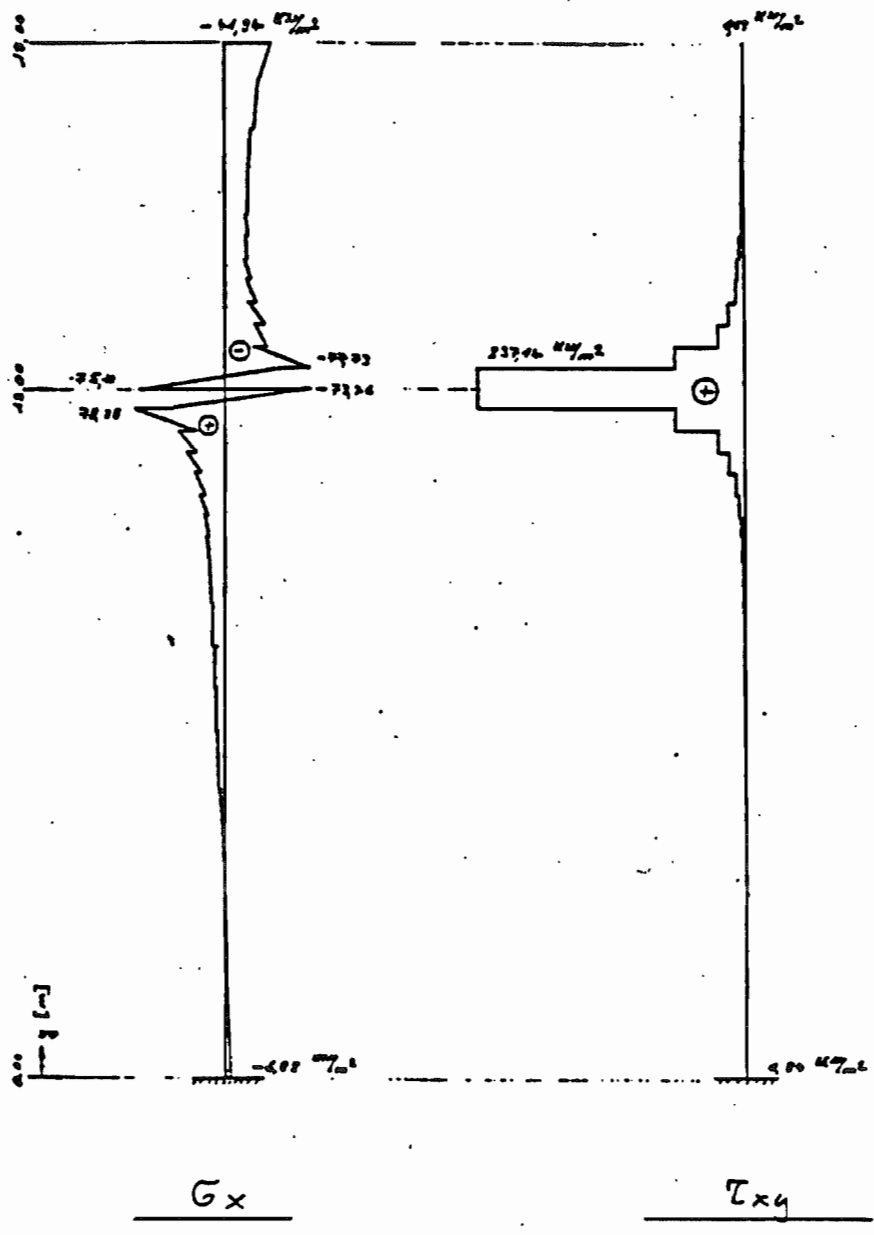
Netz R3

Netz R2

Netz R1

Ergebnisse für Elementtyp 3

Netz R3

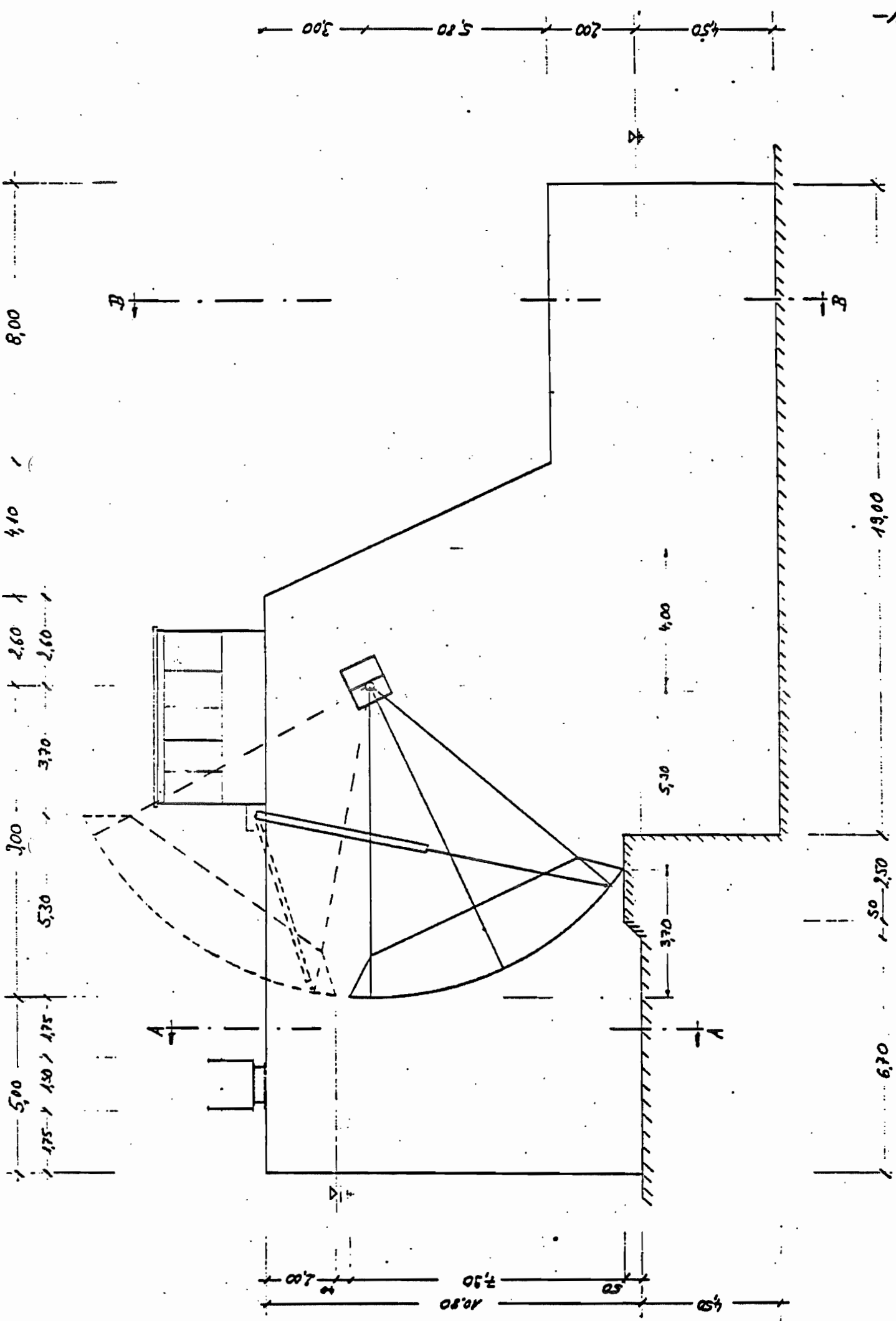


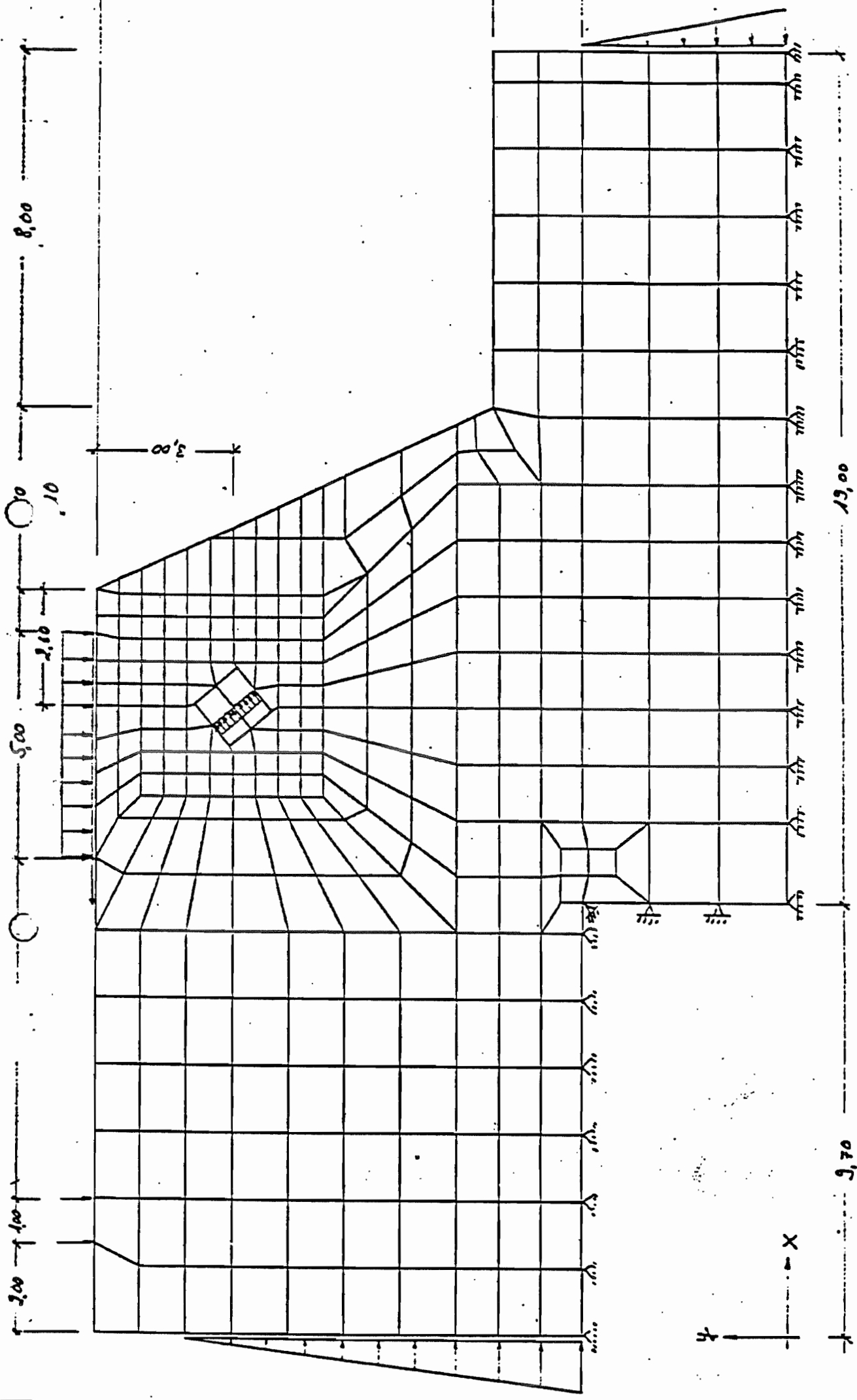
Schlussfolgerungen aus den Ergebnissen.

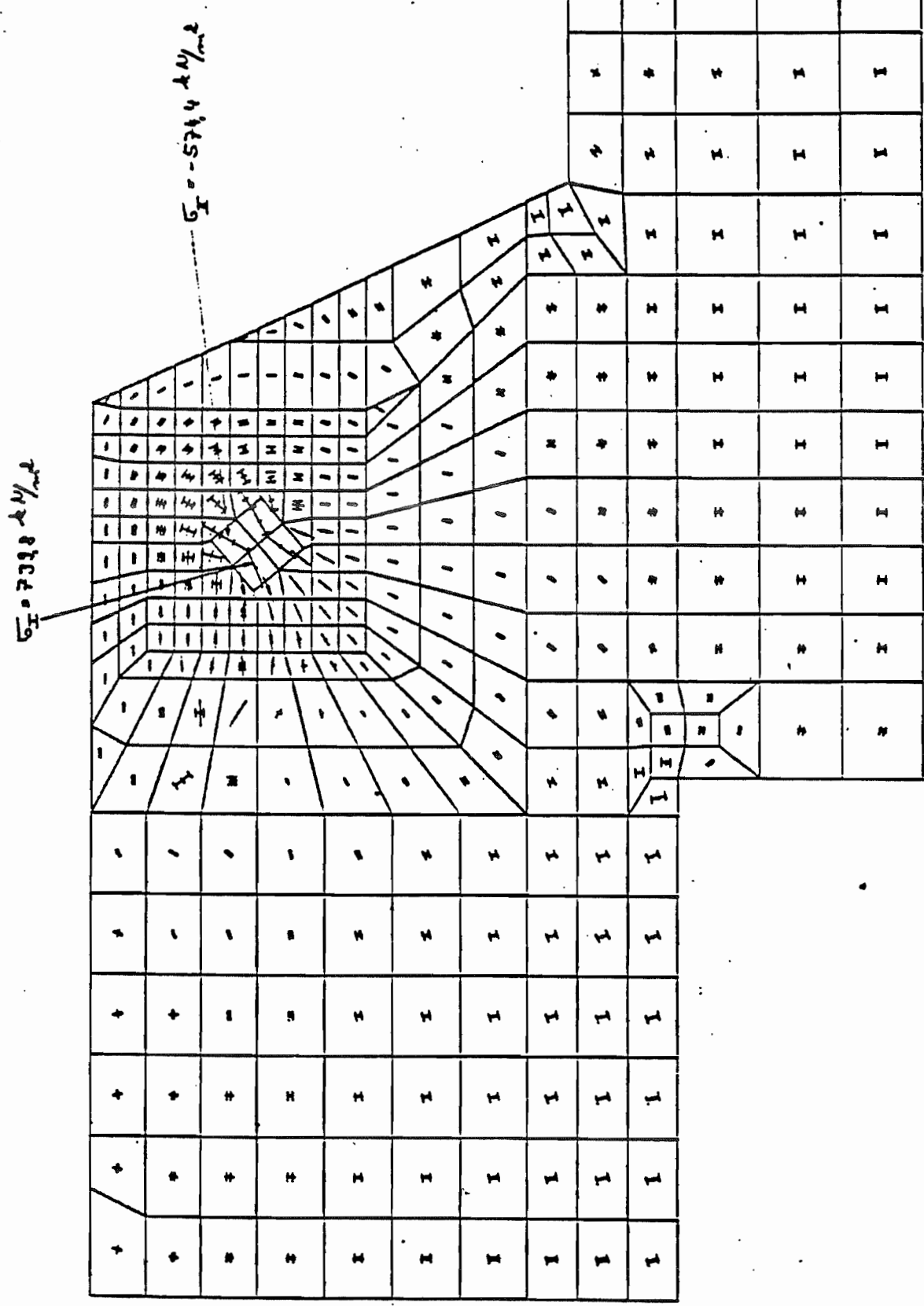
Die Ergebnisse des Elements 1 weisen einen stark oszillierenden Verlauf auf. Sie erschweren dadurch die Ergebnisauswertung und sind daher weniger gut geeignet als die Elemente 2 bis 5. Bei diesen Elementen ist festzustellen, daß die Ergebnisse in Elementmitte recht gut den Mittelwert der Lösung über das Element widergeben.

zur Abdeckung der Zugspannungen durch Bewehrung (z.B. Zugteildeckung) muß die gesamte Zugkraft (Integral der Spannungen) durch Bewehrung aufgenommen werden. Wie man sieht, können diese Spannungsintegrale durch den Mittelwert in Elementmitte recht gut widergegeben werden. Bei der Netzeinteilung kann man sich daher im wesentlichen danach richten, wo man die Ergebnisse z.B. zur Staffelung der Bewehrung benötigt.

Die Elemente 2 bis 5 sind zur Berechnung des Wehrpfeilers gleichermaßen geeignet. Verwendet wurde bei den auf den folgenden Seiten dargestellten Ergebnissen und Netzen Elementtyp 5.





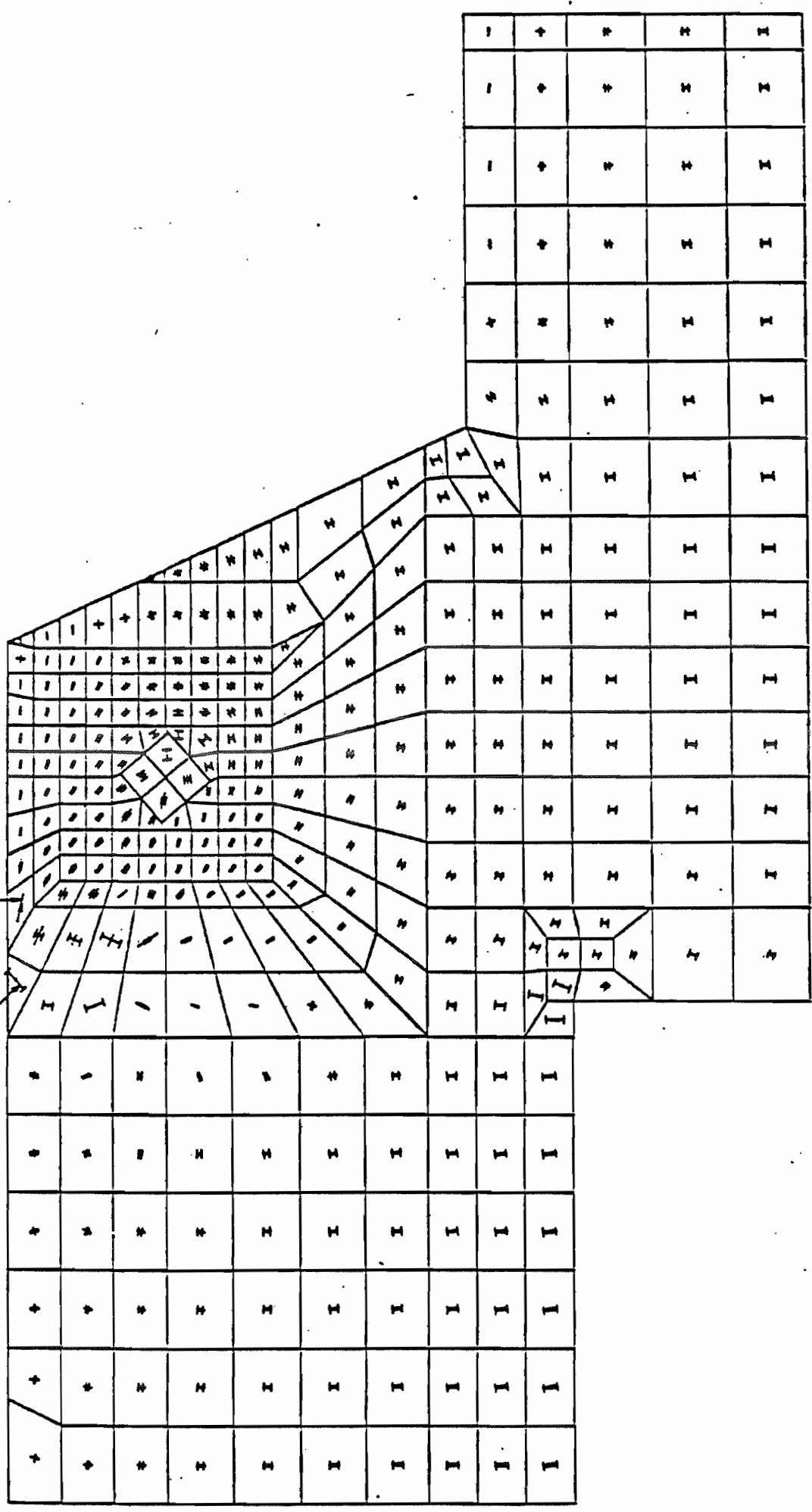


— Zug
- - - Druck

Hauptspannungen für Lastfall 1,
Wehr geschlossen

Hauptspannungen für Lastfall 2,
Wehr geöffnet

$\sigma_x = 1610 \text{ kg/cm}^2$
 $\sigma_y = 530,3 \text{ kg/cm}^2$



7. Analytische Lösungen für Scheibenaufgabe

(43)

„Klassischer“ Lösungsweg bei Scheiben: „Kraftgrößenverfahren“

Modifikation: statt mit den Spannen arbeitet man mit Spannungsfunktionen

Definition: Spannungsfunktionen erfüllen das Gleichgewicht identisch!

(1) Scheiben: Airy'sche Spannungsfunktion $F(x,y)$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sigma_x ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sigma_y ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\tau_{xy}$$

Beweis: Einsetzen in Gleichgewicht

$$\sigma_{x,x} + \tau_{y,x,x} = 0 = F_{,yyx} - F_{,yxy}$$

$$\tau_{x,y,y} + \sigma_{y,y} = 0 = F_{,xxy} - F_{,xyx} \quad \checkmark$$

(2) Gleichgewicht und Stoffgesetz sollen jetzt in die Kinematik eingesetzt werden:

→ aber: hier werden jetzt modifizierte kinematische Gleichungen verwendet

$$\begin{array}{ccc} \underline{\epsilon} & = & \underline{D}u \\ \uparrow & & \uparrow \\ 6 \text{ unabh.} & & 3 \text{ unabh.} \end{array}$$

damit eine eindeutige Beziehung zwischen $\underline{\epsilon}$ und \underline{u} existiert, müssen die Dehnungen drei zusätzliche Gleichungen erfüllen: Verträglichkeitsbedingungen

→ mathematisch: Integrabilitätsbed. für das partielle DGL-System $\underline{\epsilon} = \underline{D}u$

Bei der Scheibe reduziert sich die Verträglichkeitsbedingung auf eine Gleichung

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

Beachte Analogie zu der Ableitung der Speichfunktion (Dualität der Operatoren)
 $\epsilon = D u \leftrightarrow \sigma = D^T \bar{c} = 0$

Beweis durch Einsetzen

$$u_{,xyy} + v_{,yyx} = u_{,yxy} + v_{,xyx}$$

Einsetzen des Stoffgesetzes: und der Def. der Speichfunktion

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{E} \left(F_{,yyyy} - \nu F_{,xxyy} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{E} \left(F_{,yyxx} - \nu F_{,yyxx} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{2(1+\nu)}{E} F_{,yxyx}$$

Verträglichkeitsbedingung:

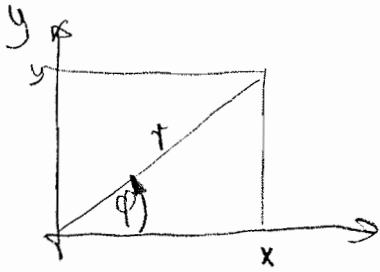
$$\frac{1}{E} \left\{ F_{,yyyy} - \nu F_{,xxyy} + F_{,xxxx} - \nu F_{,yyxx} + 2F_{,yxyx} + 2\nu F_{,yxyx} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{|l} F_{,xxxx} + 2F_{,xxyy} + F_{,yyyy} = 0 \\ \hline \Delta \Delta F = 0 \end{array}$$

Schiebgleichung
Bipotentialgleichung

Koordinate transformation

Polarkoordinaten (für Kreisscheiben)



$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

x Umrechnung der Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

⇒ Schreibgleichung in Polarkoordinaten

Laplace Operator $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$$\Rightarrow \Delta \Delta F = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \partial_{rr} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \partial_{rr} \right) F = 0$$

bei rotationsymmetrischer Last

$$\partial_{\varphi} = 0 !$$

$$\Delta \Delta F = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \partial_{rr} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \partial_{rr} \right) F = 0$$

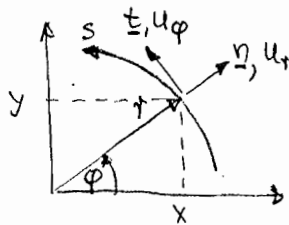
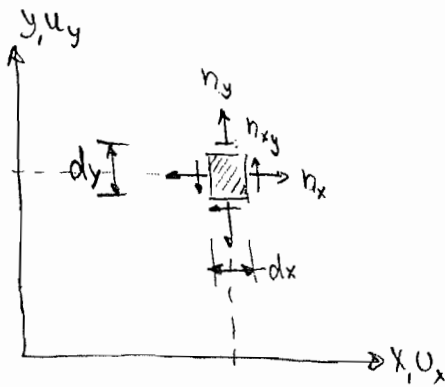
für diese Gleichung in Polarkoordinaten mit Rotationsymmetrie gibt es eine analytische Lösung (Specialfall)

$$F(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 r^2 \ln r + C_4 \ln r$$

Lösungen siehe Umrechnen

7. Analytische Lösungen für Schieben

Kartesische Koord.



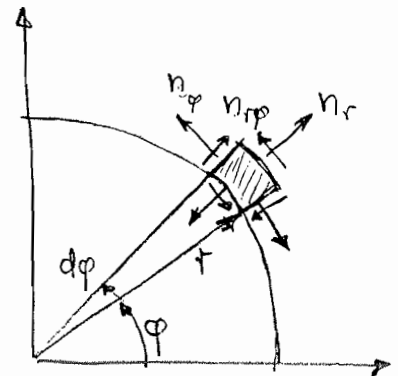
$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

Polar Koord.



Klass. Lösungsverfahren über „Kraftgrößen“-Methode

Schiebengleichung $\Delta \Delta F = 0$ mit Airy'scher Spannungsfunktion F

Def.:

$$n_x = F_{,1y y}$$

$$n_y = F_{,1x x}$$

$$n_{xy} = -F_{,1x y}$$

$$n_r = F_{,1s s} \quad \text{mit } \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{r \partial \varphi}$$

$$n_\varphi = F_{,1r r}$$

$$n_{r\varphi} = F_{,1r s} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{r \partial \varphi} \right)$$

Laplace-Operator

$$\Delta F = [F_{,1x x} + F_{,1y y}] = [n_y + n_x]$$

$$\Delta \Delta F = F_{,1s s} + F_{,1r r} = \left[\frac{1}{r} (F_{,1r r} + \frac{1}{r} F_{,1\varphi \varphi}) + F_{,1r r} \right] = [n_r + n_\varphi]$$

etc. siehe Vorlesung.

Bipotentialgleichung

$$\Delta \Delta F = F_{,1xxxx} + 2F_{,1xxyy} + F_{,1yyyy} = 0$$

→ partielle DGL in x, y

$$\Delta \Delta F = \left(\frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi} + \partial_{rr} \right) \left(\frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi} + \partial_{rr} \right) F = 0$$

Rotationssymmetrie
(Geometrie, Soghn. + Verzerrgn. + Verschl.)

$\partial_\varphi = 0$
 $u_\varphi = 0$

→ gew. DGL in r
(relativ einfache Lösung)

Berechnung von Verschiebungen:

(2)

Gegeben: äußere Lasten

Löse: Verträglichkeitsbedg.

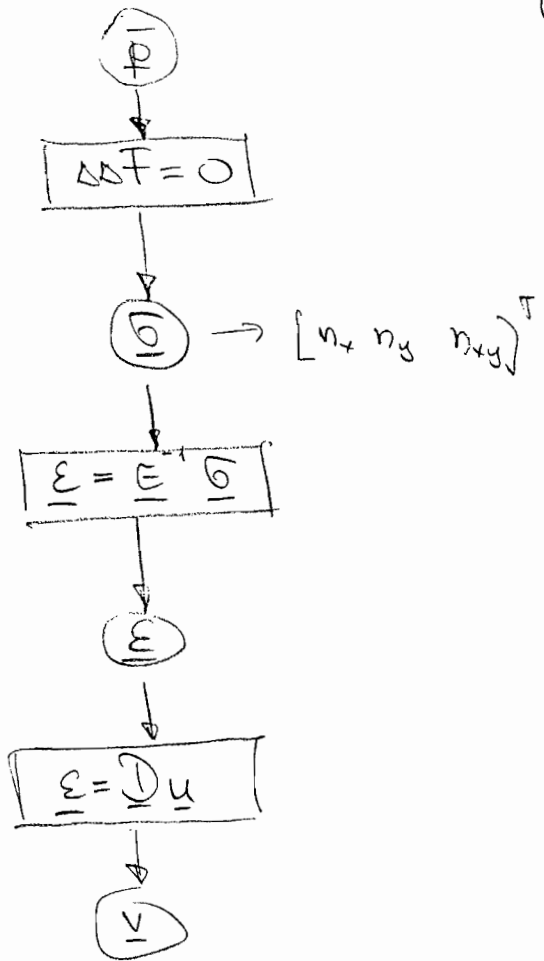
Schnittkräfte

Einsetzen: Stoffgesetz

Verzerrungen

Integriere: Kinematik

Verschiebungen



Kartesische Koord.

Polarkoordinaten

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{Et} \begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \\ & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \\ \gamma_{r\varphi} \end{bmatrix} = \frac{1}{Et} \begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \\ & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_r \\ n_\varphi \\ n_{r\varphi} \end{bmatrix}$$

Kinematische Gleichungen:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{xx} \\ u_{yy} \\ u_{xy} + u_{yx} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \\ \gamma_{r\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_r & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \partial_\varphi \\ \frac{1}{r} \partial_\varphi & (\partial_r - \frac{1}{r}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{r,r} \\ \frac{1}{r}(u_r + u_{\varphi,\varphi}) \\ \frac{1}{r}(u_{r,\varphi} - u_\varphi) + u_{\varphi,r} \end{bmatrix}$$

Verschiebungen:

$$\frac{du_x}{dx} = \varepsilon_x \rightarrow u_x = \int \varepsilon_x dx + \bar{U}(y)$$

$$u_y = \int \varepsilon_y dy + \bar{V}(x)$$

$u_{x,y} + u_{y,x} = \gamma_{xy}$ als N.B. (zur Best. von $\bar{U}(y), \bar{V}(x)$)

$$u_r = \int \varepsilon_r dr + \bar{U}(\varphi)$$

$$u_\varphi = \int (\varepsilon_\varphi \cdot r - u_r) d\varphi + \bar{U}(r)$$

analog.

Kreisscheibe unter rotations-symmetrischer
Randbelastung

(3)

$$\partial_{\varphi} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Delta \Delta F = 0 \rightarrow F(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 r^2 \ln r + C_4 \ln r$$

$$\begin{aligned} n_r = \bar{F}_{,ss} &= \frac{1}{r} F_{,rr} + \frac{1}{r^2} F_{,\varphi\varphi} = \frac{1}{r} (2C_2 r + C_3 (2r \ln r + r^2 \frac{1}{r})) + C_4 \frac{1}{r} \\ &= 2C_2 + C_3 (2 \ln r + 1) + C_4 \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_{\varphi} = \bar{F}_{,rr} &= 2C_2 + C_3 (2 \ln r + 2r \frac{1}{r} + 1) - C_4 \frac{1}{r^2} \\ &= 2C_2 + C_3 (2 \ln r + 3) - C_4 \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

$$n_{r\varphi} = 0 \quad ! \quad (\text{wegen } \partial_{\varphi} = 0)$$

Die Konstante C_1 entfällt bei allen Ableitungen
 \rightarrow kein Einfluß auf die Lösung $C_1 = 0$

Verzerrungen: wegen Rotations-symmetrie $u_{\varphi} = 0$, $\partial_{\varphi} = 0$

$$\epsilon_r = u_{r,r}$$

$$\epsilon_{\varphi} = \frac{u_r}{r} \rightarrow \boxed{u_r = \epsilon_{\varphi} r} \rightarrow u_{r,r} = \epsilon_{\varphi, r} \cdot r + \epsilon_{\varphi} \cdot 1 \stackrel{!}{=} \epsilon_r$$

$$\gamma_{r\varphi} = 0$$

Verträglichkeitsbedg.
für rot. symm.
Spannungszustand

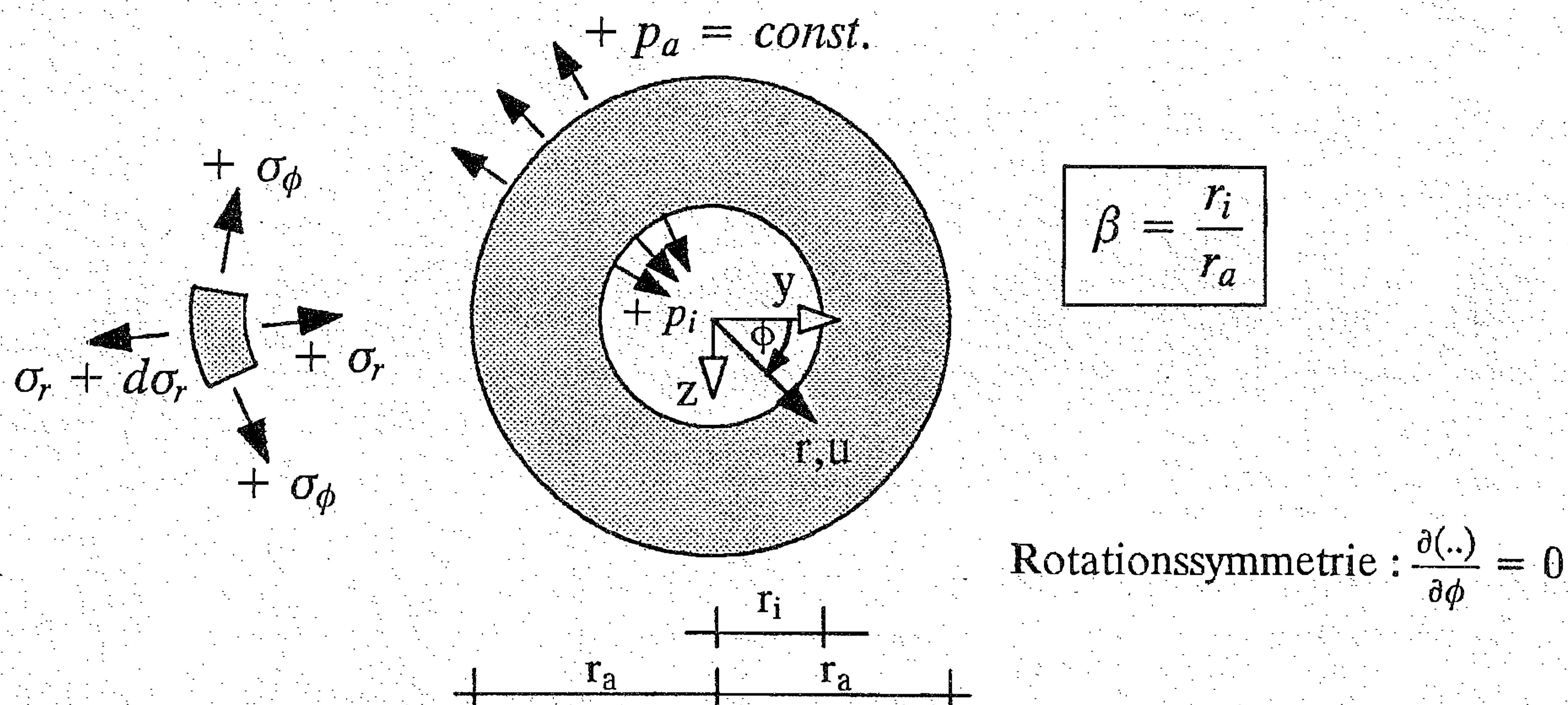
Zusammenfassung

$$\Rightarrow \boxed{C_3 = 0}$$

$n_r = 2C_2 + C_4 \frac{1}{r^2}$	$\epsilon_r = \frac{1}{E t} (n_r - \nu n_{\varphi})$ $\epsilon_{\varphi} = \frac{1}{E t} (n_{\varphi} - \nu n_r)$
$n_{\varphi} = 2C_2 - C_4 \frac{1}{r^2}$	
$u_r = \Delta r = r \epsilon_{\varphi}$	

Kreisringscheibe unter rotationssymmetrischer Belastung

System und Belastung:



Differentialgleichung und allgemeine Lösung:

$$\Delta \Delta F = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) = F_{,rrr} + \frac{2}{r} F_{,rr} - \frac{1}{r^2} F_{,r} + \frac{1}{r^3} F_r = 0 \quad (1)$$

$$F(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 r^2 \ln r + C_4 \ln r \quad (2)$$

C_1 beeinflusst weder Spannungen noch Verschiebungen und kann deshalb immer zu 0 angenommen werden. C_3 ist nur dann von 0 verschieden, wenn eine über r veränderliche Temperaturdehnung vorliegt. Für die oben dargestellte Belastung lautet dann die Lösung:

$$F(r) = C_2 r^2 + C_4 \ln r \quad (3)$$

Spannungen und Verschiebung:

$$\sigma_r = \left\{ p_i + (p_a - p_i) \frac{1}{1 - \beta^2} \left[1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right] \right\} \quad (4)$$

$$\sigma_\phi = \left\{ p_i + (p_a - p_i) \frac{1}{1 - \beta^2} \left[1 + \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right] \right\} \quad (5)$$

Es gilt allgemein: $\sigma_r + \sigma_\phi = \text{const.}$

$$u = r \varepsilon_\phi = \frac{r}{E} \left\{ p_i (1 - \tilde{\nu}) + (p_a - p_i) \frac{1}{1 - \beta^2} \left[(1 - \tilde{\nu}) + (1 + \tilde{\nu}) \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right] \right\} \quad (6)$$

Beim *ebenen Spannungszustand* gilt:

$$\bar{E} = E \quad \text{und} \quad \bar{\nu} = \nu \quad \text{und} \quad \varepsilon_x = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_r + \varepsilon_\phi) \quad (7)$$

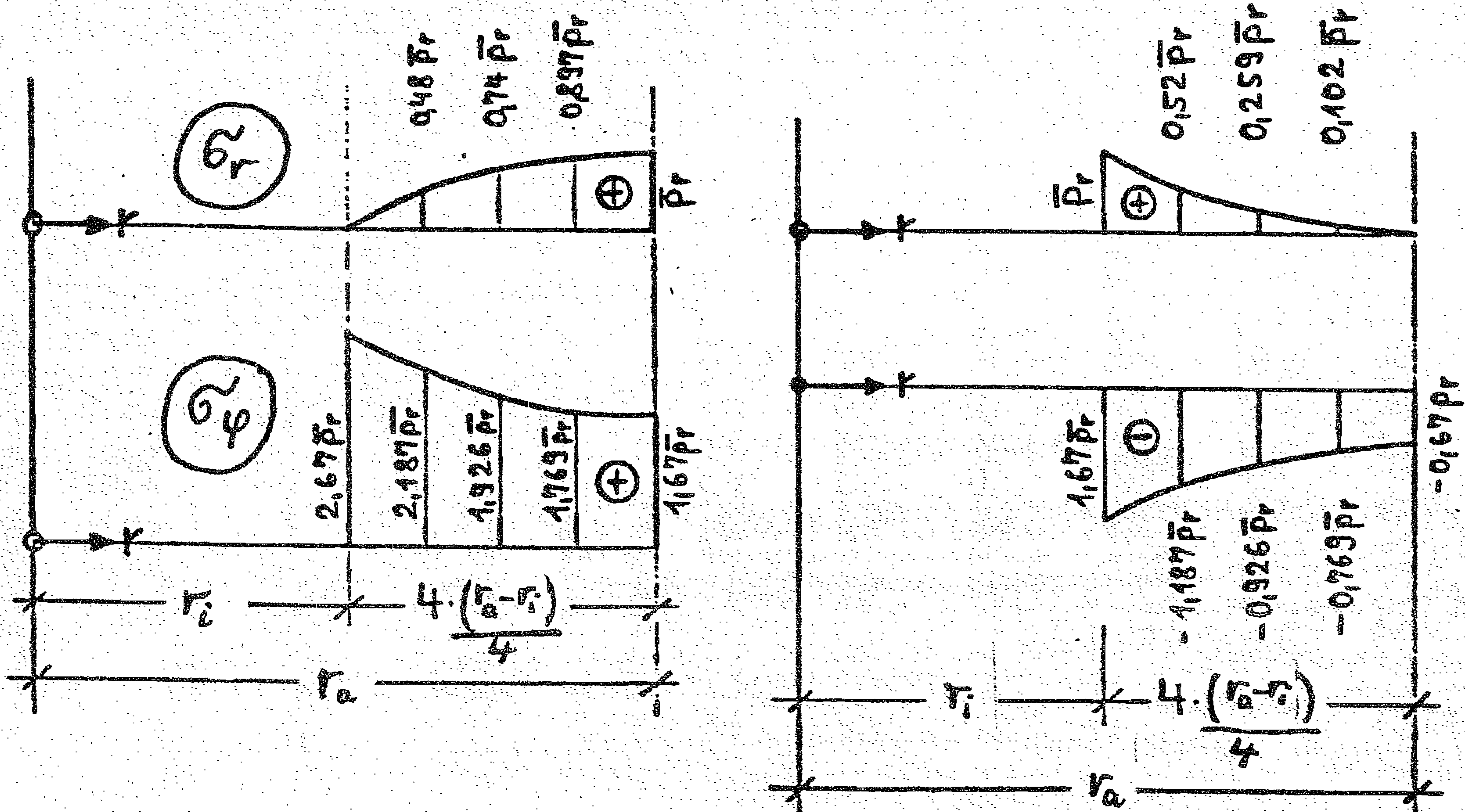
während der *ebene Verzerrungszustand* erfaßt werden kann durch:

$$\bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \text{und} \quad \bar{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu} \quad \text{und} \quad \sigma_x = \nu (\sigma_r + \sigma_\phi) \quad (8)$$

Verlauf der Spannungen im Radialschnitt für $\beta=0,5$ ($r_i=0,5 r_a$):

a) Radialer Zug p_r am Außenrand

b) Radialer Zug p_r am Innenrand



Sonderfall Kreisscheibe mit $p_a = \text{const.}$:

Herleitung aus den obigen Beziehungen durch Grenzübergang $r_i = 0$ und $\beta = 0$.

$$\sigma_r = \sigma_\phi = p_a = \text{const.} \quad (9)$$

$$u(r) = \frac{r p_a (1 - \bar{\nu})}{\bar{E}} \quad (10)$$

Sonderfall unendliche Scheibe mit Loch und mit $p_i = \text{const.}$:

Herleitung aus den obigen Beziehungen durch Grenzübergang $r_a \rightarrow \infty$, $p_a = 0$ und $\beta = 0$.

$$\sigma_r = p_i \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 = -\sigma_\phi \quad (11)$$

$$u(r) = -\frac{r_i p_i (1 + \bar{\nu})}{\bar{E}} \frac{r_i}{r} \quad (12)$$

7.3.4 Die unendliche Scheibe mit kreisförmigem Loch

(aus Betonkalender 1963: G. Worch, Elastische Scheiben)

$$\begin{aligned}
 (49a) \quad F &= -\frac{p}{4} \left[r^2 - 2a^2 \ln \frac{r}{a} - \frac{(r^2 - a^2)^2}{r^2} \cos 2\varphi \right] \\
 \sigma_r &= -\frac{p}{2} \left[1 - \frac{a^2}{r^2} + \left(1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right] \\
 \sigma_\varphi &= -\frac{p}{2} \left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right] \\
 \tau_{r\varphi} &= \frac{p}{2} \left[1 + 2\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^4}{r^4} \right] \sin 2\varphi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (49b) \quad Eu &= -\frac{pr}{2} \cdot \left\{ (1-\mu) + (1+\mu) \frac{a^2}{r^2} + \left[4\frac{a^2}{r^2} + (1+\mu) \left(1 - \frac{a^4}{r^4} \right) \right] \cos 2\varphi \right\} \\
 Ev &= +\frac{pr}{2} \left[2(1-\mu) \frac{a^2}{r^2} + (1+\mu) \left(1 + \frac{a^4}{r^4} \right) \right] \sin 2\varphi
 \end{aligned}$$

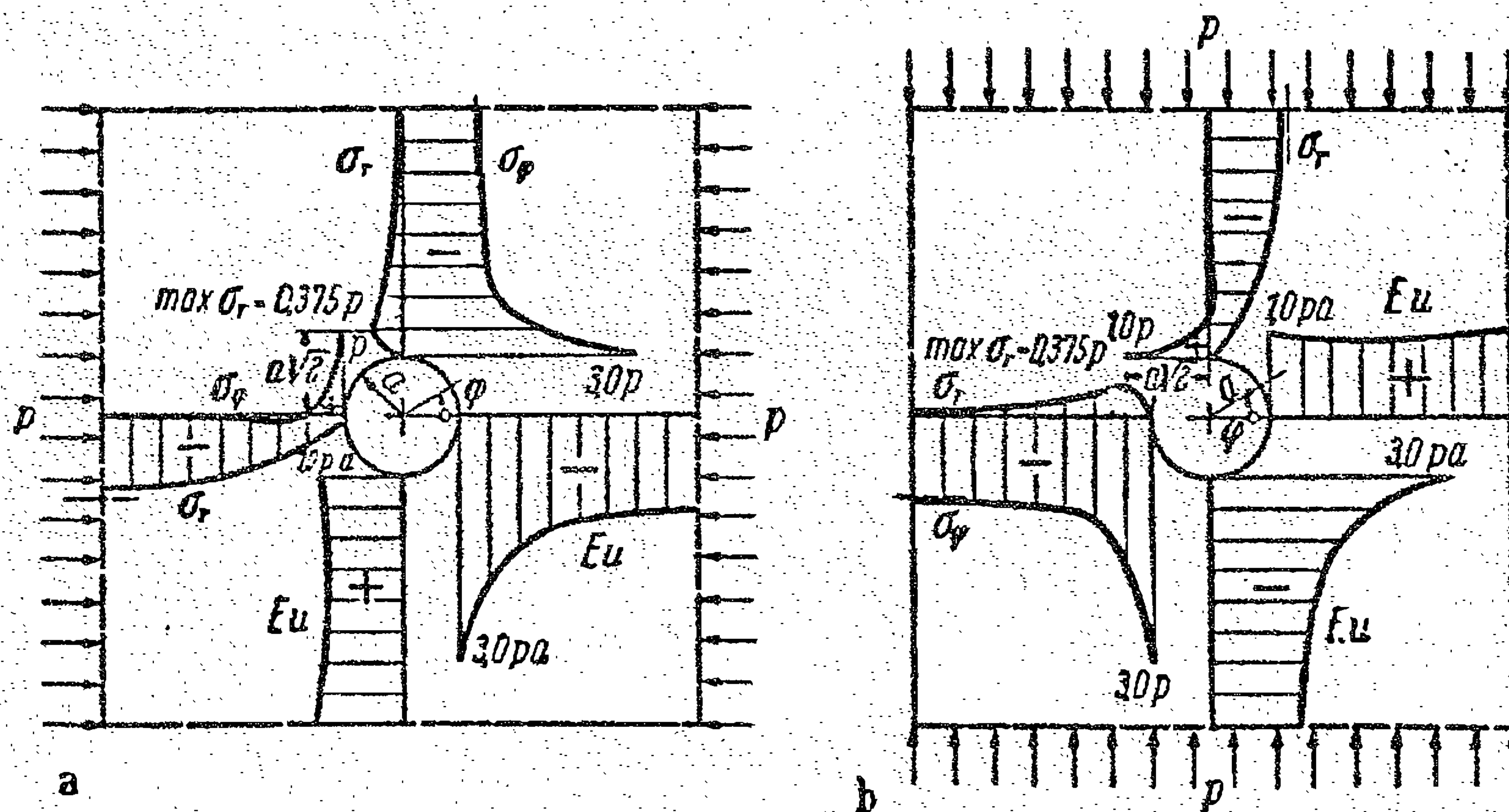
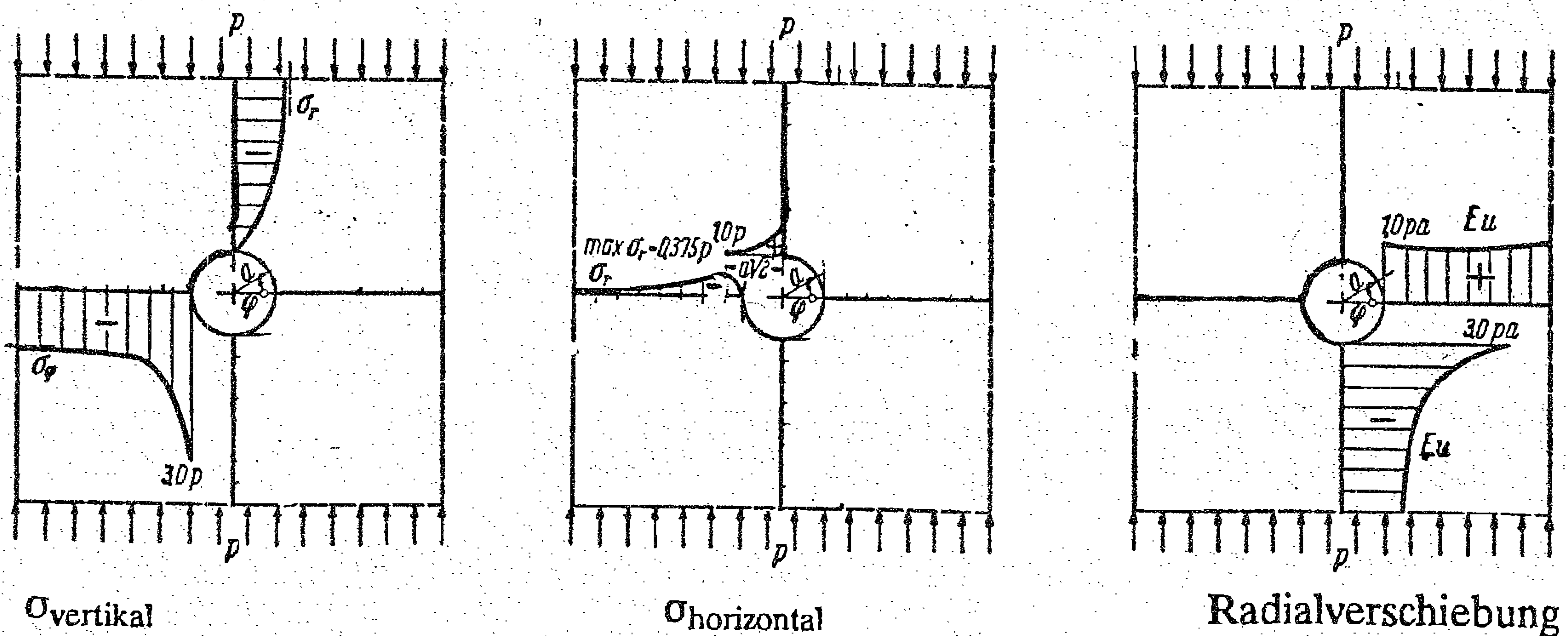


Abb. 48

Die oben angeschriebenen Ausdrücke gelten für die Belastung nach Abb. 48a. Kehrt man in den mit sin und cos behafteten Summanden das Vorzeichen um, so gewinnt man Formeln für den Belastungszustand nach Abb. 48b.



7.2.2 Ersatz abschnittsweise stetiger Funktionen durch Fourierreihen

In vielen Fällen läßt sich die Bipotentialgleichung mit Hilfe trigonometrischer Grundlösungen asymptotisch exakt lösen, wenn sich der zugehörige Partikularanteil (d.h. die Lastfunktion) ebenfalls durch trigonometrische Funktionen darstellen läßt. Dies ist fast immer möglich mit Hilfe der Fourierreihenentwicklung, es gilt nämlich der Satz:

Jede Funktion $g(x)$, die im Intervall $x = [0, L]$ den folgenden Bedingungen genügt, läßt sich in diesem Intervall in konvergente Reihen entwickeln:
 –die Funktion $g(x)$ muß in dem Intervall abschnittsweise stetig und monoton sein
 –an jeder Unstetigkeitsstelle von $g(x)$ müssen die Werte $g(x+0)$ und $g(x-0)$ definiert und endlich sein.

Ansatzfunktion (Fourier-Reihe):

$$f(x) = \sum_n c_n \varphi(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_n a_n \cos n \frac{2\pi x}{L} + \sum_n b_n \sin n \frac{2\pi x}{L}$$

Die Bestimmung der Freiwerte a_0 , a_n und b_n erfolgt mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate:

$$\int_0^L [g(x) - f(x)]^2 dx \rightarrow \min \quad \rightarrow \int_0^L 2[g(x) - f(x)] \frac{\partial f(x)}{\partial c_n} dx = 0$$

$$\rightarrow a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos n \frac{2\pi x}{L} dx ; \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin n \frac{2\pi x}{L} dx$$

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) dx$$

Sonderfall: $g(x)$ ist symmetrisch bzgl. x :

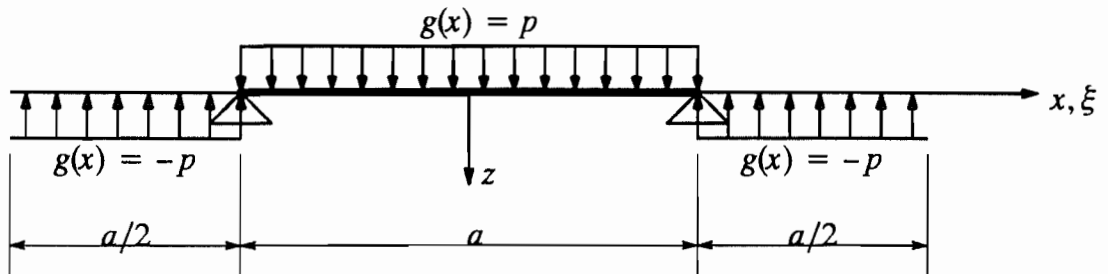
$$a_n = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} g(x) \cos n \frac{2\pi x}{L} dx ; \quad (n = 0, 1, 2, \dots) ; \quad b_n = 0$$

Sonderfall: $p(x)$ ist antisymmetrisch bzgl. x :

$$b_n = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} g(x) \cos n \frac{2\pi x}{L} dx ; \quad (n = 1, 2, 3, \dots) ; \quad a_n = 0$$

a_0 verschwindet immer dann, wenn der Durchschnittswert der Funktion innerhalb des Intervalls Null ist (Gleichgewichtsgruppe).

Beispiel: Konstante Streckenlast (symm. zur z-Achse)



Periodenlänge $L = 2a$

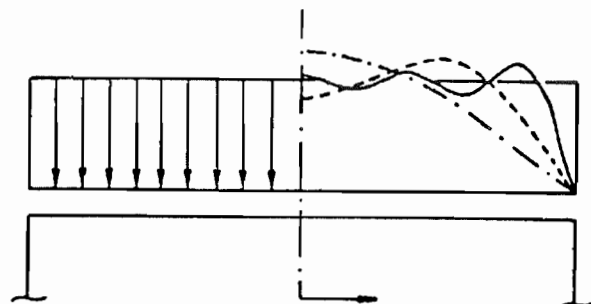
$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{4}{2a} \int_0^{a/2} (-p) \cos n \frac{2\pi x}{2a} dx + \frac{4}{2a} \int_{a/2}^a (p) \cos n \frac{2\pi x}{2a} dx \\
 &= \frac{2}{a} p \left[\frac{a}{n\pi} \sin n \frac{\pi x}{a} \right]_0^{a/2} - \frac{2}{a} p \left[\frac{a}{n\pi} \sin n \frac{\pi x}{a} \right]_{a/2}^a = p \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Näherungslösung:

$$f(x) = p \frac{4}{\pi} \sum_n \left(\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \cos n\pi \frac{x}{a}$$

Approximation der Last
mit $n+1$ Reihengliedern:

- $n=1$
- $n=3$
- $n=9$



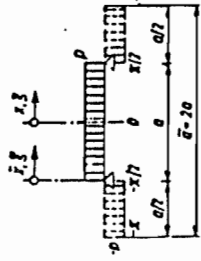
$$f(\xi) = a_0 + a_1 \cos \xi + a_2 \cos 2\xi + a_3 \cos 3\xi + \dots$$

$$+ b_1 \sin \xi + b_2 \sin 2\xi + b_3 \sin 3\xi + \dots$$

$$f(\xi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\xi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\xi$$

TAFEL 877-1: FOURIERREihe Reihen für einige Lastfunktionen

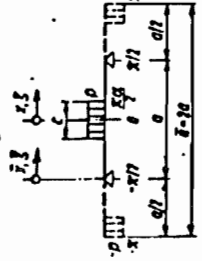
1. Gleichmäßig verteilte Last



$l = \frac{2\pi z}{a}, \xi = \frac{2\pi x}{a}$
 $p(x) = \frac{4p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \cos n\xi$
 $p(\bar{x}) = \frac{4p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \sin n\xi$

$n=1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \dots$
 $\sin \frac{n\pi}{2} = 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \dots$
 $\sin^2 \frac{n\pi}{2} = 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \dots$

2. Gleichmäßig verteilte symmetrische Streckenlast



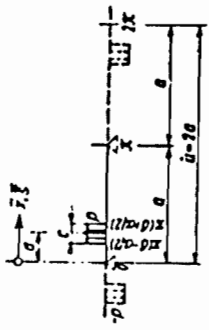
$a = \frac{l}{2}$
 $p(x) = \frac{4p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi a}{2} \cos n\xi$
 $p(\bar{x}) = \frac{4p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi a}{2} \sin n\xi$

Sonderfall: $a = 0, P = ap$ (Einzellast)

$P(x) = \frac{2P}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \cos n\xi$
 $P(\bar{x}) = \frac{2P}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2} \sin n\xi$

(konvergiert außerhalb $z = 0$)

3. Gleichmäßig verteilte Streckenlast an beliebiger Stelle



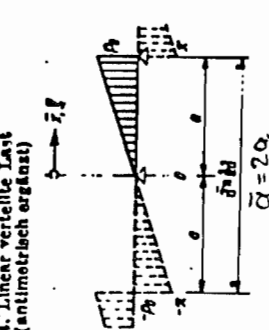
$a = \frac{c}{a}, d = \frac{d}{a}$
 $p(\bar{x}) = \frac{4p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi d \sin \frac{n\pi a}{2} \sin n\xi$

Sonderfall: $a = 0, P = ap$ (Einzellast)

$P(\bar{x}) = \frac{2P}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi d \sin n\xi$

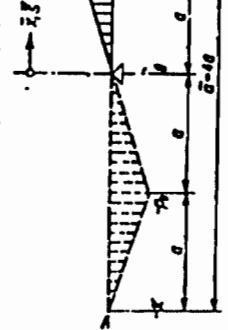
(konvergiert außerhalb $\bar{x} = d$)

4. Linear verteilte Last (antimetrisch ergänzt)



$p(x) = p_0 \frac{\xi}{l}$
 $p(\bar{x}) = -\frac{2p_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\pi \sin n\xi$

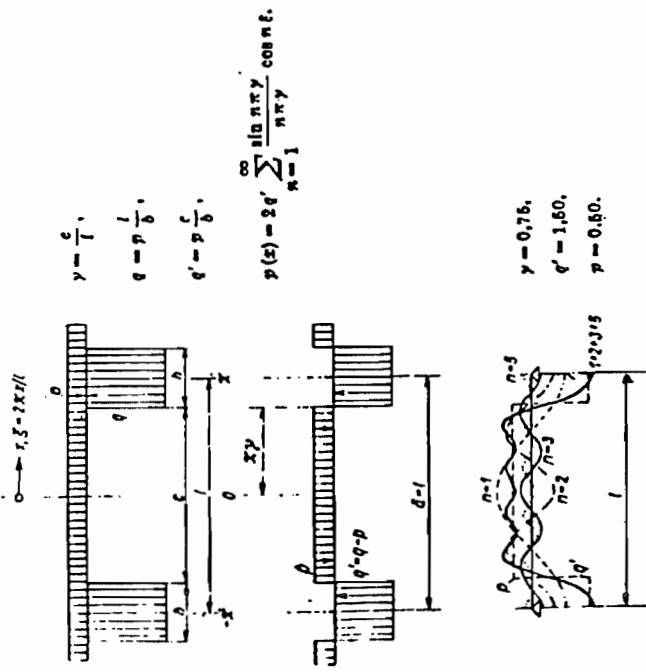
5. Linear verteilte Last (antimetrisch und symmetrisch ergänzt)



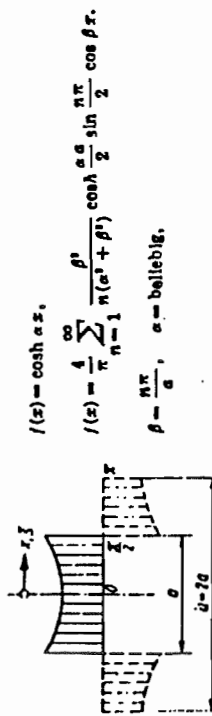
$p(x) = p_0 \frac{2\xi}{l}$
 $\bar{x} = \frac{2\pi x}{a} = \frac{2\pi}{a} \xi$

$p(\bar{x}) = \frac{8p_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin n\xi$

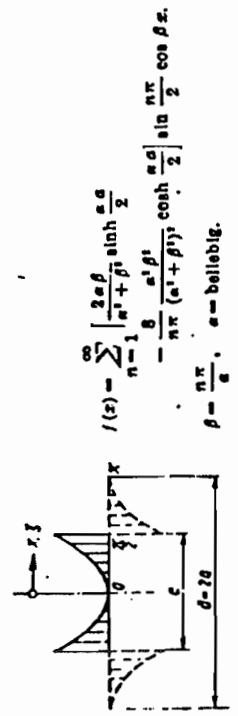
6. Gleichmäßig verteilte Last mit Stützkraft



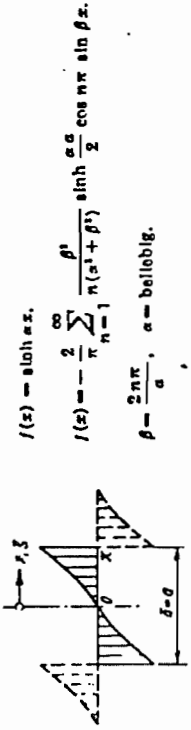
7. Hyperbolischer Kosinus (antimetrisch ergänzt)



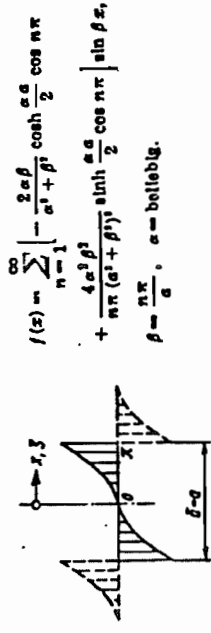
8. f(x) = a * sinh ax (antimetrisch ergänzt)



9. Hyperbolischer Sinus (oben, -ergänzung)



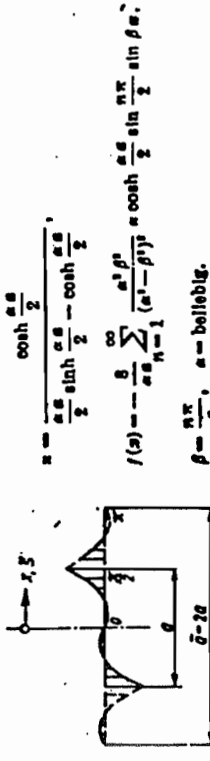
10. f(x) = a * cosh ax (ohne Ergänzung)



11. f(x) = cosh ax - a * sinh ax (ohne Ergänzung)



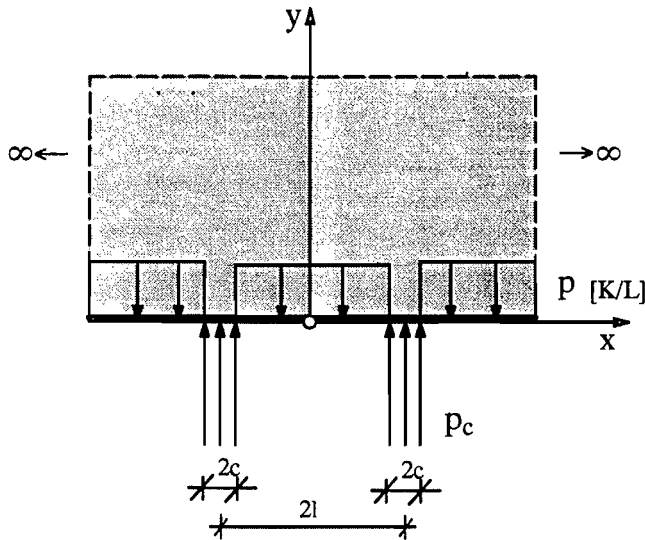
12. f(x) = sinh ax - a * cosh ax (symmetrisch ergänzt)



Für konzentrierte Lasten auf sehr kleiner Fläche eignen sich die Reihen wenig, da sie im Lastbereich schlecht oder gar nicht konvergieren. In solchen Fällen wird zweckmäßig die Singulardifferenz-Methode angewandt. Danach wird ein Spannungszustand ermittelt, der zwar dem Belastungszustand genau entspricht, nicht aber die Randbedingungen erfüllt. Durch Überlagerung einer weiteren Lösung werden dann auch die Randbedingungen befriedigt. Die Reihendarstellung dieser Zusatzlösung konvergiert meistens gut.

7.2.3 Die Halbscheibe unter periodischer Belastung

System und Belastung



Die Belastung muß in einer Periode im Gleichgewicht sein, daraus folgt :

$$p_c = p \cdot \frac{l-c}{c} \quad [K/L]$$

Fourierkoeffizienten der Last :

Wegen $p(x) = p(-x) \Rightarrow b_n \equiv 0$ $a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) dx = 0$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \frac{1}{l} \int_0^l g(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} \left\{ \int_0^{l-c} p \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{l-c}^l -\frac{l-c}{c} p \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right\} \\ &= \frac{2}{l} \left\{ \frac{lp}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi x}{l} \right]_0^{l-c} - \frac{l-c}{c} p \frac{l}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi x}{l} \right]_{l-c}^l \right\} ; \end{aligned}$$

mit $n\pi \frac{l-c}{l} = n\pi - n\pi \frac{c}{l}$

$\sin(a - \beta) = \sin a \cos \beta - \cos a \sin \beta$ rechnet man :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2p}{n\pi} \left\{ \left[\sin n\pi \cos n\pi \frac{c}{l} - \cos n\pi \sin n\pi \frac{c}{l} \right] + \frac{l-c}{c} [\dots] \right\} \\ &= -\frac{2p}{n\pi} \left(\frac{l-c}{c} + 1 \right) \left[\cos n\pi \sin n\pi \frac{c}{l} \right] \\ &= -\frac{2p}{n\pi} \frac{l}{c} (-1)^n \sin n\pi \frac{c}{l} ; \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{-2p}{\pi} \frac{l}{c} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi c}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} ;$$

Ermittlung der Spannungsfunktion :

$$\begin{aligned} \text{Randbedingungen } y=0 : \quad \sigma_y(x, 0) &= \frac{p(x)}{h} \Rightarrow F_{,xx}(x, 0) = \frac{p(x)}{h} \\ \tau_{xy}(x, 0) &= 0 \Rightarrow F_{,xy}(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

Produktansatz (Näherung) :

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F_x(x) \cdot F_y(y) ; \\ F_{,x} &= F_y \cdot F_{,xx} ; \quad F_{,xx} = F_y \cdot F_{,xxx} ; \quad F_{,xxxx} = F_y \cdot F_{,xxxx} ; \\ F_{,xy} &= F_{,xy} \cdot F_{,yy} ; \quad F_{,xyy} = F_{,xx} \cdot F_{,yyy} ; \\ F_{,y} &= F_x \cdot F_{,yy} ; \quad F_{,yy} = F_x \cdot F_{,yyy} ; \quad F_{,yyy} = F_x \cdot F_{,yyyy} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Differentialgleichung :} \quad \Delta \Delta F &= F_{,xxxx} + 2 \cdot F_{,xyy} + F_{,yyy} = 0 ; \\ \Rightarrow F_y \cdot F_{,xxxx} &+ 2 \cdot F_{,xx} \cdot F_{,yy} + F_x \cdot F_{,yyyy} = 0 ; \end{aligned}$$

Ausgehend von der Fourierreihe der Last setzt man mit Beachtung obiger Randbedingungen :

$$\begin{aligned} F_x(x) &= \cos a_n x ; \quad F_{,xx} = -a_n^2 \cos a_n x \\ F_{,xxxx} &= a_n^4 \cos a_n x \\ \Rightarrow F_y a_n^4 \cos a_n x &+ 2 (-a_n^2 \cos a_n x) F_{,yy} + \cos a_n x F_{,yyyy} = 0 ; \end{aligned}$$

$$a_n^4 F_y - 2a_n^2 F_{,yy} + F_{,yyyy} = 0 ; \quad \text{Gewöhnliche, lineare, homogene DGL 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten — Lösung über Exponentialansatz (siehe HM III).}$$

$$F_y = (A_n' + y B_n') e^{-a_n y} + (C_n' + y D_n') e^{a_n y} ;$$

Spannungsfunktion

$$F = F_x F_y = \sum_1^{\infty} [(A_n' + y B_n') e^{-a_n y} + (C_n' + y D_n') e^{a_n y}] \cos a_n x$$

Bei einer Gleichgewichtsbetrachtung im Endlichen sind im Unendlichen über alle Grenzen wachsende Spannungen nicht möglich.

$$\begin{aligned} \Rightarrow F &= \sum [A_n' + y B_n'] e^{-a_n y} \cos a_n x \\ F_{,x} &= - \sum [A_n' + y B_n'] e^{-a_n y} a_n \sin a_n x \\ F_{,xy} &= - \sum [-a_n A_n' - a_n y B_n' + B_n'] e^{-a_n y} a_n \sin a_n x \\ -F_{,xy} &= - \sum [a_n^2 A_n' - a_n B_n' + y a_n^2 B_n'] e^{-a_n y} \sin a_n x = \tau_{xy} \\ F_{,xx} &= - \sum [A_n' + y B_n'] e^{-a_n y} a_n^2 \cos a_n x = \sigma_y \\ F_{,yy} &= \sum [a_n^2 A_n' - a_n B_n' + y a_n^2 B_n' - a_n B_n'] e^{-a_n y} \cos a_n x \\ &= \sum [a_n^2 A_n' - 2 a_n B_n' + y a_n^2 B_n'] e^{-a_n y} \cos a_n x = \sigma_x \end{aligned}$$

Mit $A_n = A_n' a_n^2$; $B_n = B_n' a_n$

$$F_{xx} = \sigma_y = - \sum [A_n + y a_n B_n] e^{-a_n y} \cos a_n x$$

$$F_{yy} = \sigma_x = \sum [A_n - 2 B_n + y a_n B_n] e^{-a_n y} \cos a_n x$$

$$-F_{xy} = \tau_{xy} = - \sum [A_n - B_n + y a_n B_n] e^{-a_n y} \sin a_n x$$

Bestimmung der Freiwerte aus den Randbedingungen:

$$y = 0 : \sigma_y = \frac{p}{h} : - \sum A_n \cos a_n x = - \frac{1}{h} \frac{2p}{\pi c} \sum (-1)^n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi c}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{1}{h} \frac{2p}{\pi c} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi c}{l}$$

$$y = 0 : \tau_{xy} = 0 : A_n - B_n = 0$$

$$\Rightarrow B_n = A_n$$

Spannungen:

$$\sigma_x(x, y) = \frac{2pl}{\pi hc} \sum \frac{(-1)^n}{n} \sin a_n c (y a_n - 1) e^{-a_n y} \cos a_n x ;$$

$$\sigma_y(x, y) = - \frac{2pl}{\pi hc} \sum \frac{(-1)^n}{n} \sin a_n c (y a_n + 1) e^{-a_n y} \cos a_n x ;$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{2pl}{\pi hc} \sum \frac{(-1)^n}{n} \sin a_n c a_n y e^{-a_n y} \sin a_n x ;$$

Verschiebungen (Ebener Spannungszustand)

$$u_x = \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = \frac{1}{E} (F_{yy} - \nu F_{xx})$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{E} \int F_{yy} dx - \frac{\nu}{E} F_x + \frac{1}{E} \Phi(y) \quad (1)$$

$$v_y = \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = \frac{1}{E} (F_{xx} - \nu F_{yy})$$

$$\Rightarrow v(x, y) = \frac{1}{E} \int F_{xx} dy - \frac{\nu}{E} F_y + \frac{1}{E} \Psi(x) \quad (2)$$

Andererseits gilt für die Gleitung :

$$\gamma_{xy} = u_{y,x} + v_{x,y}$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} (u_{y,x} + v_{x,y}) = -F_{xy}$$

$$\Rightarrow -2(1+\nu) F_{xy} = \int F_{yyy} dx - \nu F_{xy} + \Phi_y + \int F_{xxx} dy - \nu F_{yx} + \Psi_x$$

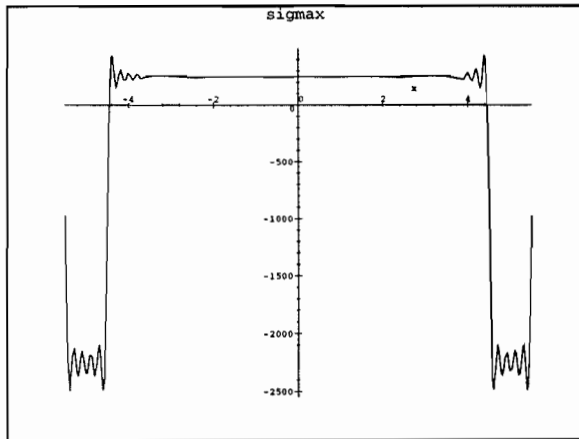
$$\int F_{yyy} dx + \int F_{xxx} dy + 2 F_{xy} + \Phi_y + \Psi_x = 0 \quad (3)$$

Bei bekannter Spannungsfunktion $F(x,y)$ können die Verschiebungen u und v aus (1) und (2) und den gegebenen Randbedingungen unter Beachtung von (3) errechnet werden.

Berechnung der Spannungsverläufe mit 50 Reihengliedern:

Zahlenwerte: $l = 5,0 \text{ m}$, $c = 0,50 \text{ m}$, $h = 0,40 \text{ m}$,

$$p = 100 \text{ kN/m}, \quad E = 20 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2, \quad \nu = 0,2$$

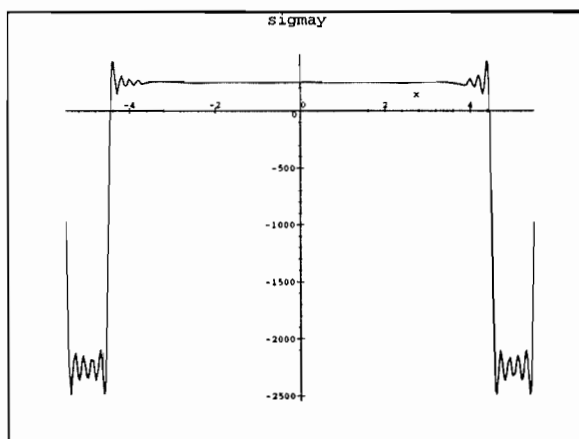


Abszisse: $x \text{ [m]}$

Ordinate: $\sigma_x \text{ [MN/m}^2\text{]}$

Schnitt: $y = 0,0 \text{ m}$

Der Cosinus-Ansatz für F_x und die Differentialgleichung für F_y führen zu einer Lösung, die für $y = 0$ identische Spannungsverläufe für σ_x und σ_y erzeugt.

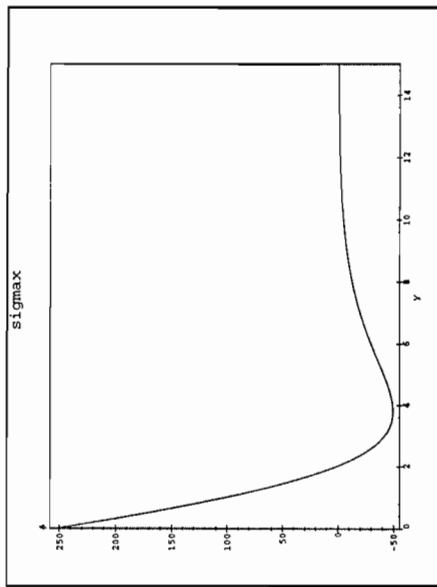


Abszisse: $x \text{ [m]}$

Ordinate: $\sigma_y \text{ [MN/m}^2\text{]}$

Schnitt: $y = 0,0 \text{ m}$

Die sprunghafte Änderung der äußeren Einwirkung \bar{p} führt zu Singularitäten in den Spannungen σ_x und σ_y an der Stelle $x = \pm 4,5 \text{ m}$.



Abszisse: σ_x [MN/m^2]

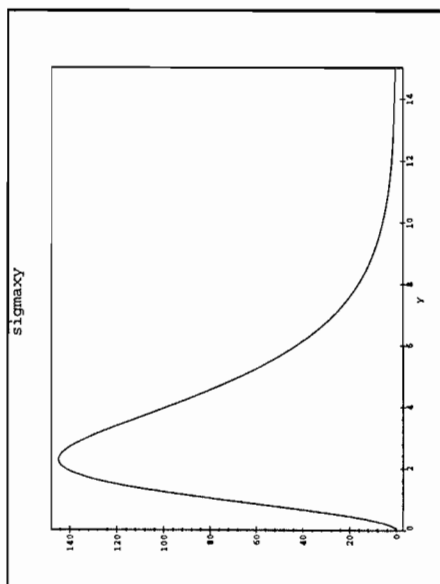
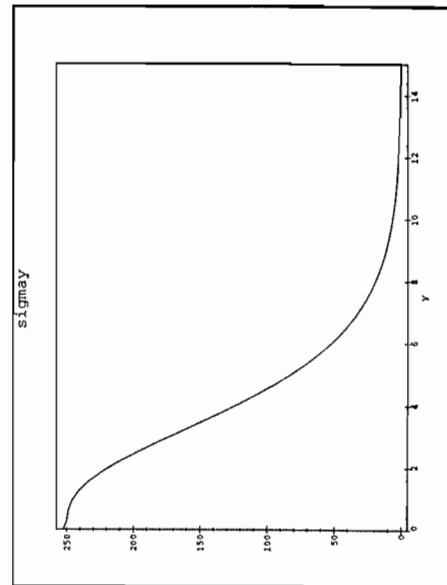
Ordinate: y [m]

Schnitt: $x = 0,0$ m

Abszisse: σ_y [MN/m^2]

Ordinate: y [m]

Schnitt: $x = 0,0$ m



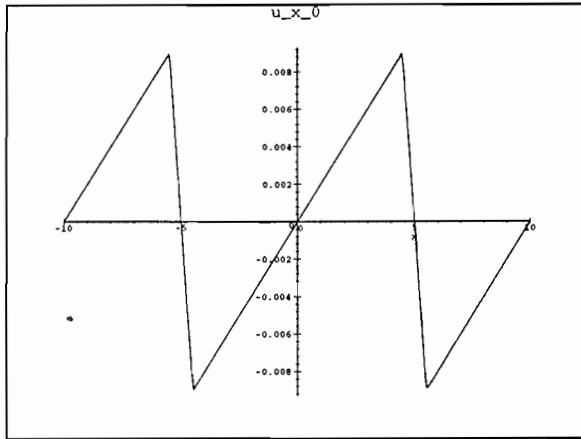
Abszisse: σ_{xy} [MN/m^2]

Ordinate: y [m]

Schnitt: $x = 2,5$ m

Berechnung der Verschiebungen durch Einbau der folgenden Randbedingungen in die Gleichungen (1) bis (3):

$$u(0, 0) = 0 \quad u(x, \infty) = 0 \quad v(0, \infty) = 0$$



Abszisse: u [m]

Ordinate: x [m]

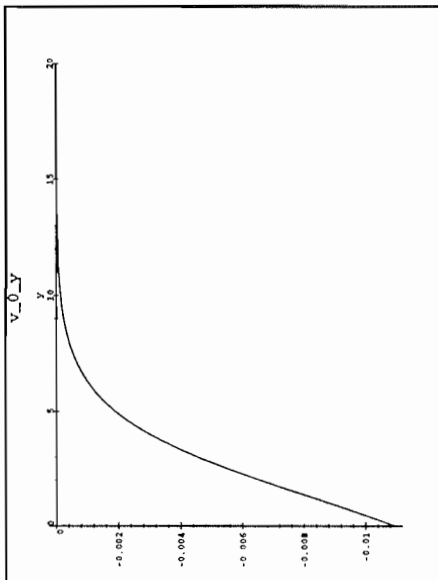
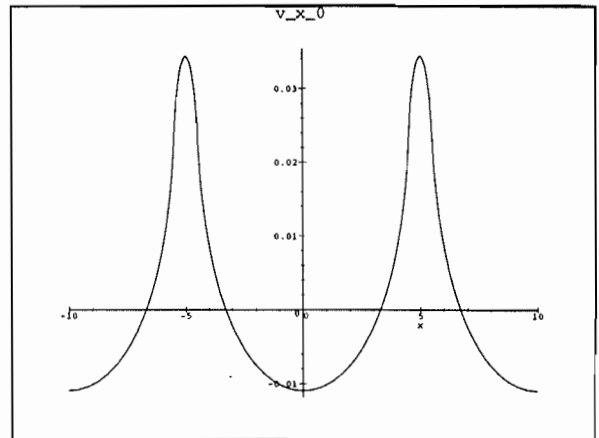
Schnitt: y=0,0 m

Die Singularitäten in den Spannungen an der Stelle $x = \pm 4,5$ m führen zu einer Unstetigkeit in der Verschiebung u.

Abszisse: v[m]

Ordinate: x [m]

Schnitt: y=0,0 m



Abszisse: y [m]

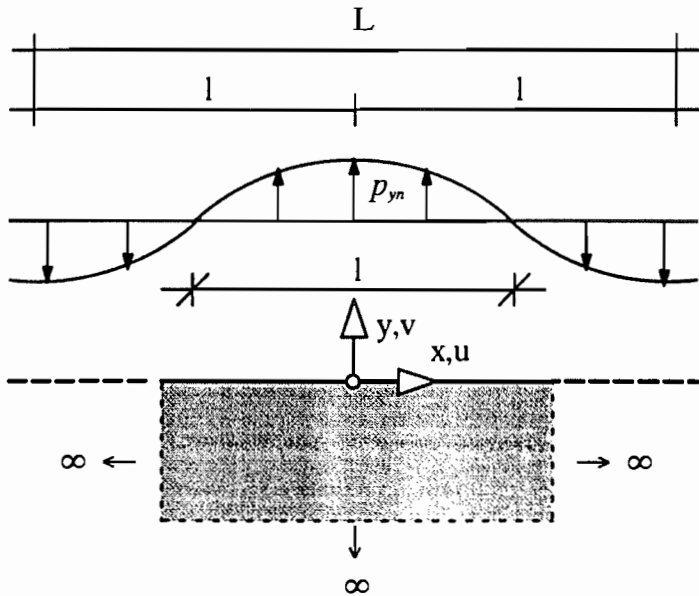
Ordinate: v [m]

Schnitt: x=0,0 m

7.2.4 Die unendliche Halbscheibe mit periodischer Randlast: Verlauf von Schnittkräften und Verschiebungen

Ebener Spannungszustand; Grundlösungen für Fourier-Reihenentwicklung

a) Belastung normal zum Rand



$$p_y(x) = p_{yn} \cdot \cos \alpha_n x$$

$$\alpha_n = \frac{n \cdot \pi}{l}; \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

l = Länge der Halbwelle bei $n = 1$

$L = 2 \cdot l$ = Periode für $n = 1$

p_{yn} = Maximalwert (Amplitude)
des Reihenglieds n

Airy'sche Spannungsfunktion:

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y) = \cos(\alpha_n \cdot x) \cdot \left[\frac{-p_{yn}}{\alpha_n^2} \cdot (1 - \alpha_n y) \cdot e^{\alpha_n y} \right]$$

Produktansatz: in x-Richtung periodisch
in negativer y-Richtung abklingend

Spannungen: (über Scheibendicke integriert, z.B. in [kN/m])

$$n_x = F_{,yy} = p_{yn} \cdot \cos(\alpha_n x) \cdot (1 + \alpha_n y) \cdot e^{\alpha_n y}$$

$$n_y = F_{,xx} = p_{yn} \cdot \cos(\alpha_n x) \cdot (1 - \alpha_n y) \cdot e^{\alpha_n y}$$

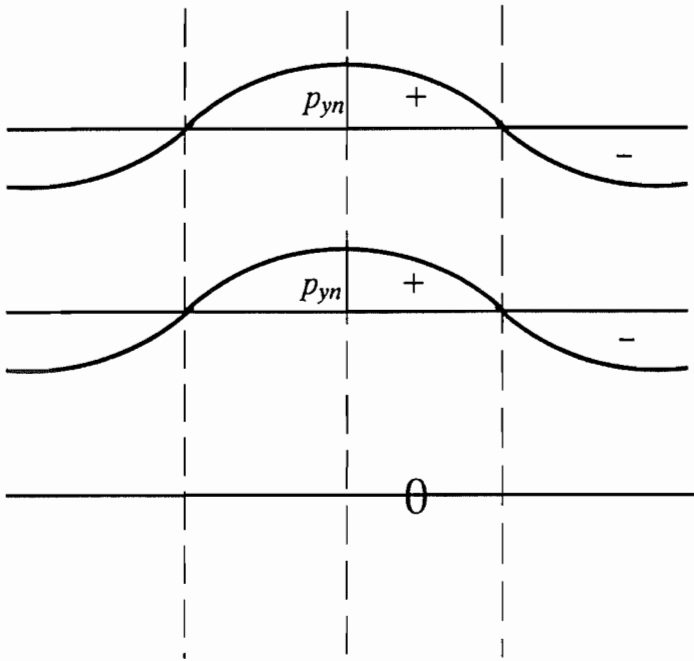
$$n_{xy} = -F_{,yx} = p_{yn} \cdot \sin(\alpha_n x) \cdot \alpha_n y \cdot e^{\alpha_n y}$$

Verschiebungen: (Randbedingungen $u(x=0) = 0$ für alle y
 $v(y = -\infty) = 0$ für alle x)

$$u = \frac{1}{E \cdot h} \cdot \frac{p_{yn}}{\alpha_n} \cdot \sin(\alpha_n x) \cdot [(1 - \nu) + (1 + \nu) \alpha_n y] \cdot e^{\alpha_n y}$$

$$v = \frac{1}{E \cdot h} \cdot \frac{p_{yn}}{\alpha_n} \cdot \cos(\alpha_n x) \cdot [2 - (1 + \nu) \alpha_n y] \cdot e^{\alpha_n y}$$

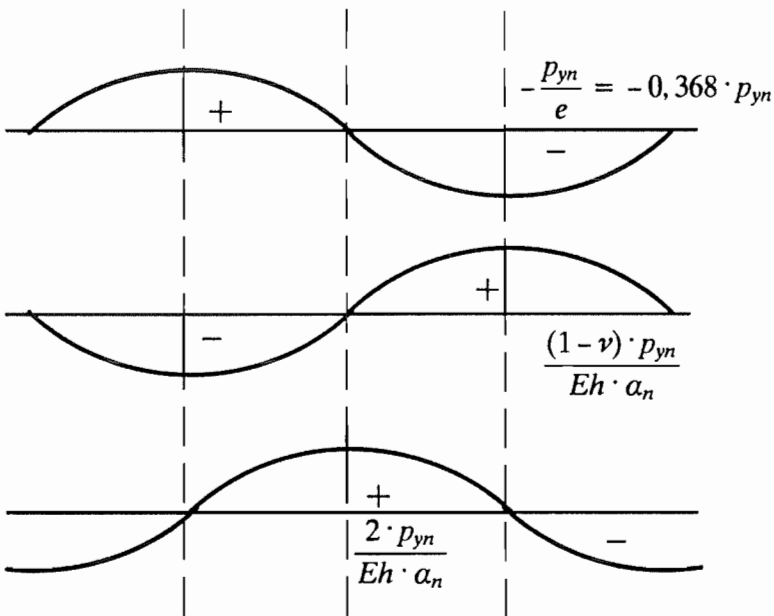
Verlauf der Spannungen und Verschiebungen in x-Richtung



$n_x (y = 0)$
 $y = 0$ ist der belastete Rand

$n_y (y = 0)$

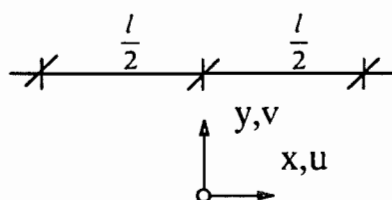
$n_{xy} (y = 0)$



$n_{xy} (y = \frac{-1}{\alpha_n})$

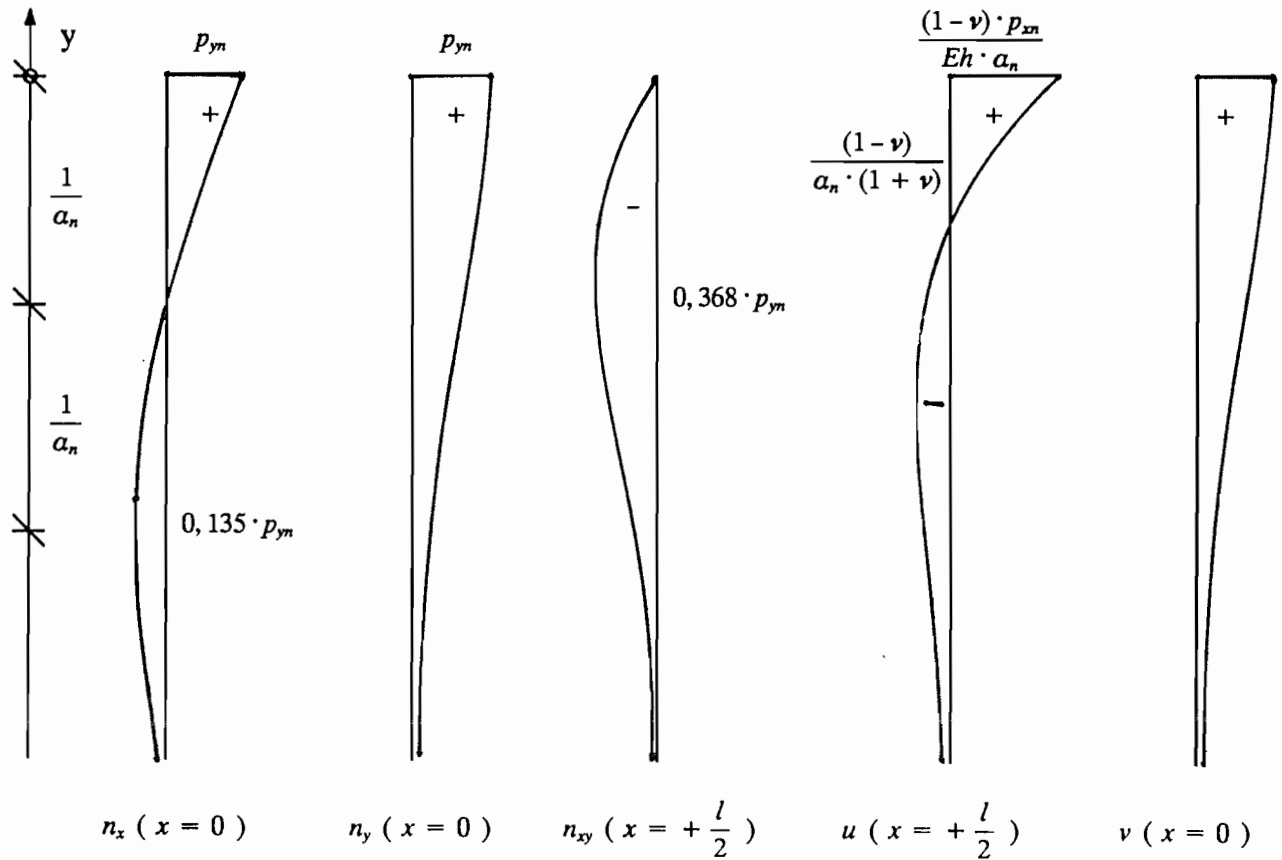
$u (y = 0)$

$v (y = 0)$

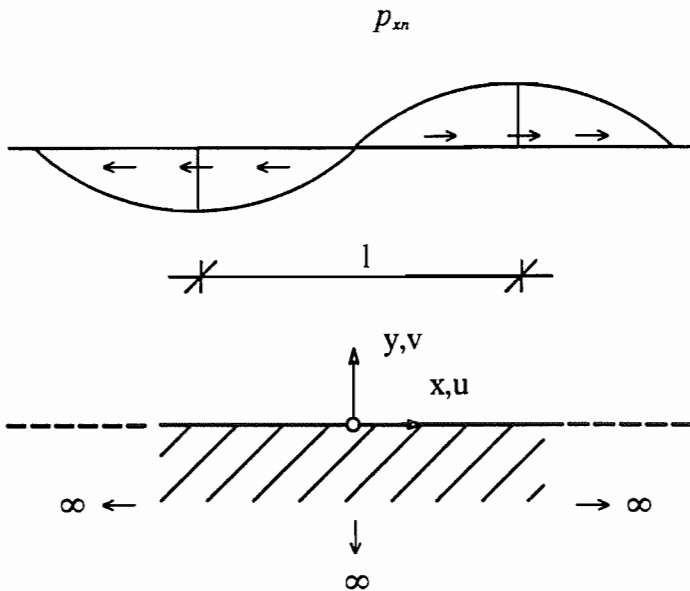


Halbscheibe mit periodischer Normalbelastung

Verlauf der Spannungen und Verschiebungen in y-Richtung



b) Belastung parallel zum Rand



$$p_x(x) = p_{xn} \cdot \sin \alpha_n x$$

$$\alpha_n = \frac{n \cdot \pi}{l}; \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$L = 2 \cdot l = \text{Periode für } n = 1$$

Airy' sche Spannungsfunktion:

$$F(x,y) = \cos(\alpha_n \cdot x) \cdot \left[\frac{p_{xn}}{\alpha_n^2} \cdot (\alpha_n y) \cdot e^{\alpha_n y} \right]$$

Spannungen: (über Scheibendicke integriert, z.B. in [kN/m])

$$n_x = F_{,yy} = p_{xn} \cdot \cos(\alpha_n x) \cdot (2 + \alpha_n y) \cdot e^{\alpha_n y}$$

$$n_y = F_{,xx} = -p_{xn} \cdot \cos(\alpha_n x) \cdot (\alpha_n y) \cdot e^{\alpha_n y}$$

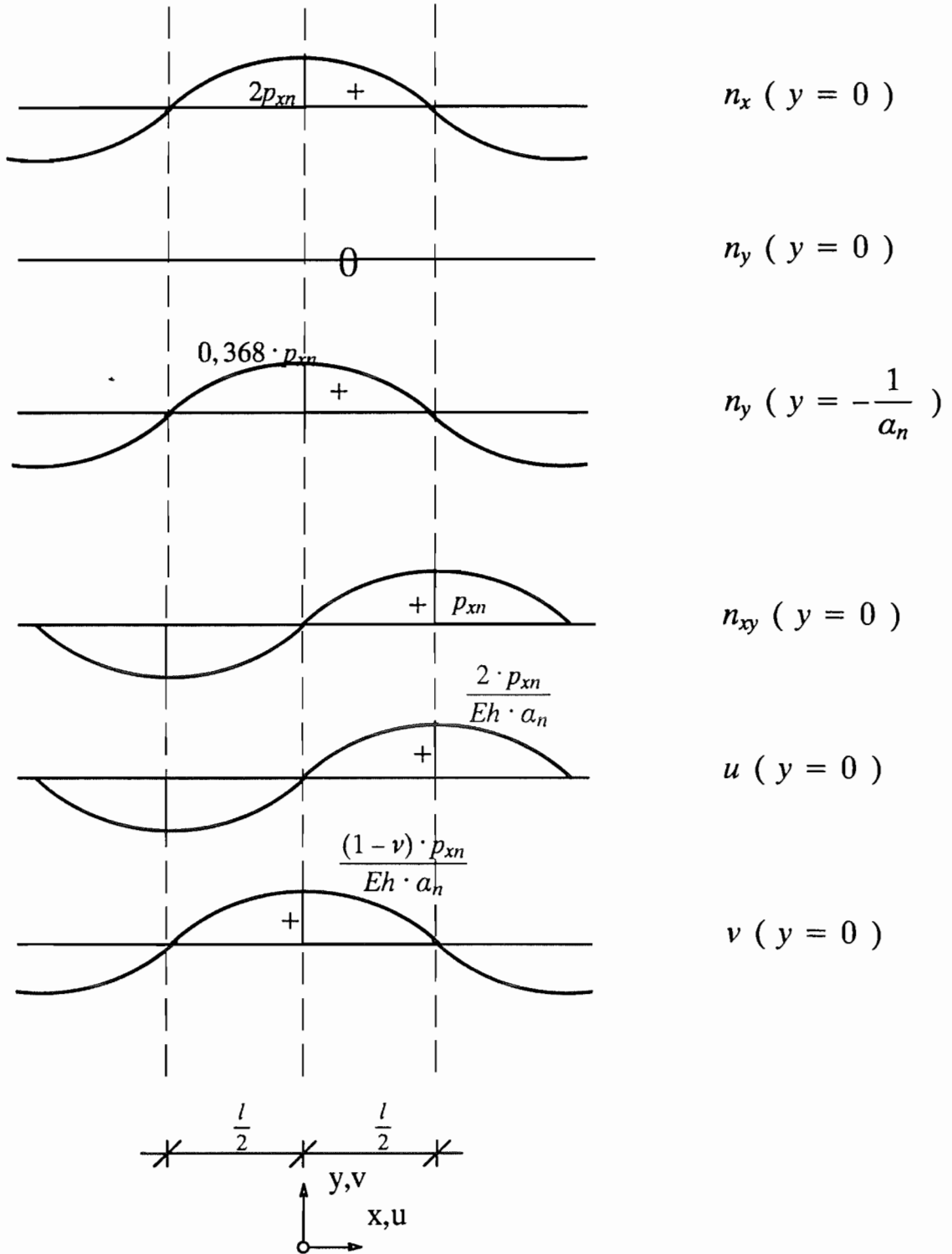
$$n_{xy} = -F_{,yx} = p_{xn} \cdot \sin(\alpha_n x) \cdot (1 + \alpha_n y) \cdot e^{\alpha_n y}$$

Verschiebungen:

$$u = \frac{1}{E \cdot h} \cdot \frac{p_{xn}}{\alpha_n} \cdot \sin(\alpha_n x) \cdot [2 + (1 + \nu) \alpha_n y] \cdot e^{\alpha_n y}$$

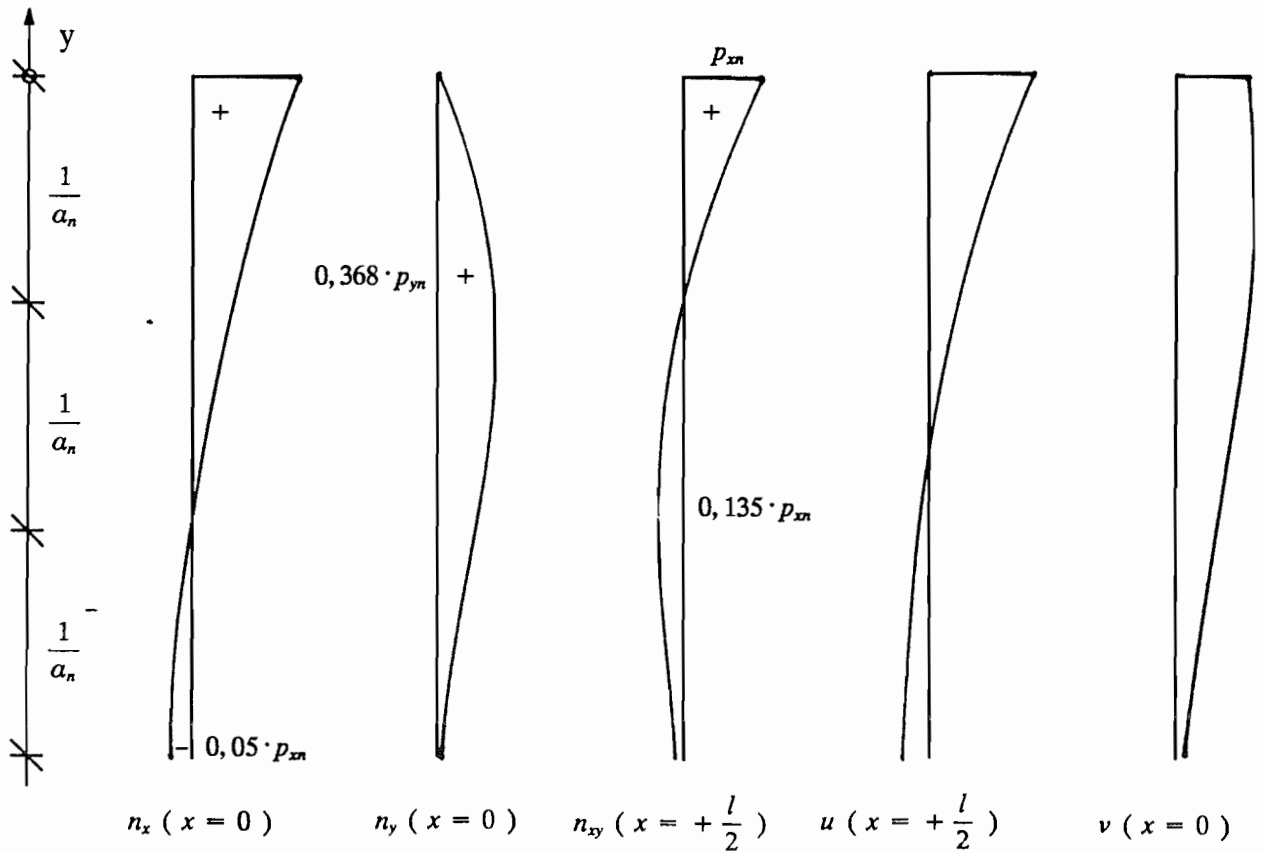
$$v = \frac{1}{E \cdot h} \cdot \frac{p_{xn}}{\alpha_n} \cdot \cos(\alpha_n x) \cdot [(1 - \nu) - (1 + \nu) \alpha_n y] \cdot e^{\alpha_n y}$$

Verlauf in x-Richtung



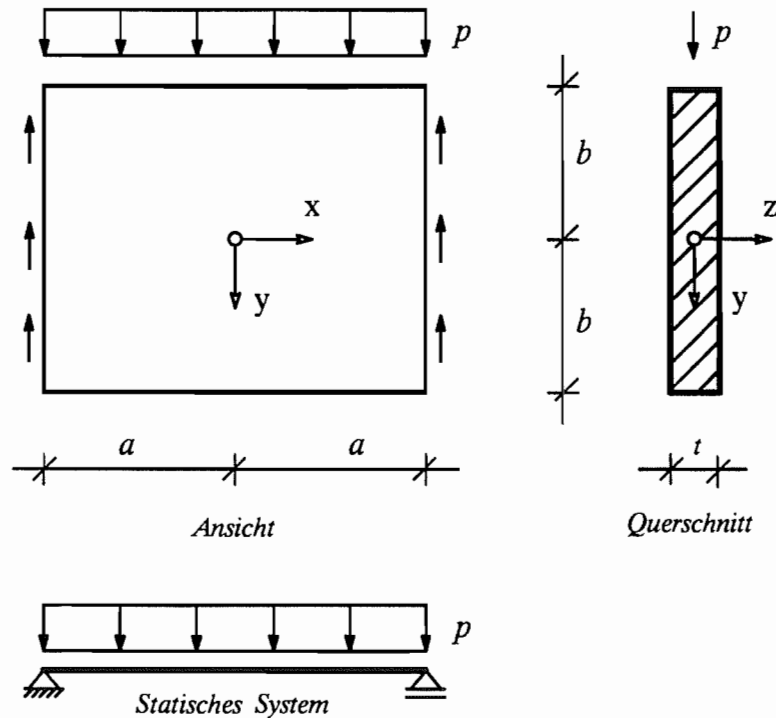
Verlauf in y-Richtung

Halbscheibe mit periodischer Last parallel zum Rand



7.2.5 Die schubkraftgestützte Rechteckscheibe unter Gleichlast

nach: A. Timpe, Zeitschrift für Mathematik und Physik 52 (1905) S. 36 f.



Differentialgleichung:

$$\Delta \Delta F = F_{,xxxx} + 2 \cdot F_{,xxyy} + F_{,yyyy} = 0$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} y = -b: & \quad n_y = -p; & \quad n_{xy} = 0 \\ y = +b: & \quad n_y = 0; & \quad n_{xy} = 0 \\ x = \mp a: & \quad n_x = 0; & \quad \int_{-b}^b n_{xy} \cdot dy = \pm p \cdot a \end{aligned}$$

n_{xy} beliebig verteilt, aber im Gleichgewicht mit p

Lösung: (Airy' sche Spannungsfunktion)

$$F(x,y) = \frac{p}{40 \cdot b^3} \cdot \left[-10b^3x^2 + 15b^2x^2y + (5a^2 - 2b^2) y^3 + y^5 - 5y^3x^2 \right]$$

Spannungen: $n_x = \sigma_x \cdot t$ [kN/m]

$$n_x = F_{,yy} = \frac{P}{40b^3} [+ (5a^2 - 2b^2) \cdot 6y + 20y^3 - 30yx^2] =$$

$$= + \underbrace{\frac{3}{4} \frac{P}{b^3} \cdot (a^2 - x^2) \cdot y}_{n_x^{(B)}} - \underbrace{\frac{P}{10b^3} \cdot (3b^2 - 5y^2) \cdot y}_{\Delta n_x^{(S)}}$$

$$n_y = F_{,xx} = \frac{P}{40b^3} [-20b^3 + 30b^2y - 10y^3]$$

$$n_{xy} = -F_{,xy} = -\frac{P}{40b^3} [+ 30b^2x - 30y^2x] = -\frac{3}{4} \frac{P}{b} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \cdot x$$

Überprüfen der Verträglichkeit:

$$F_{,xxxx} = 0$$

$$F_{,xyyy} = \frac{P}{40b^3} [0 + 0 - 60y] = -\frac{1,5 P y}{b^3}$$

$$F_{,yyyy} = 0 - \frac{P}{10b^3} (0 - 30y) = +\frac{3 P y}{b^3}$$

$$\Delta \Delta F = F_{,xxxx} + 2F_{,xyyy} + F_{,yyyy} = 0 \text{ ist also eingehalten}$$

Überprüfen der Randbedingungen:

$$y = -b: \quad n_{xy} = 0; \quad n_y = \frac{P}{40b^3} [-20b^3 - 30b^3 + 10b^3] = -p$$

$$y = +b: \quad n_{xy} = 0; \quad n_y = \frac{P}{40b^3} [-20b^3 + 30b^3 - 10b^3] = 0$$

$$x = +a: \quad n_x^{(B)} = 0; \quad \Delta n_x^{(S)} \neq 0 \quad (\text{siehe Diskussion!})$$

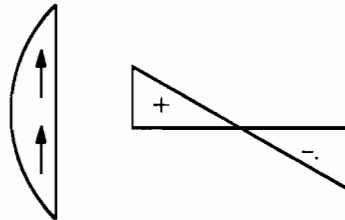
$$\int_{-b}^b n_{xy} \cdot dy = -\frac{3 P \cdot a}{4 b} \cdot \left[y - \frac{y^3}{3b^2} \right]_{-b}^b = -\frac{3 P \cdot a}{4 b} \cdot \left[b - (-b) - \frac{b^3 - (-b^3)}{3b^2} \right] =$$

$$= -\frac{3 P \cdot a}{4 b} \cdot \frac{4}{3} b = -p \cdot a$$

$$x = -a: \quad n_x^{(B)} = 0; \quad n_x^{(S)} \neq 0 \quad \int_{-b}^b n_{xy} \cdot dy = + p \cdot a$$

Diskussion:

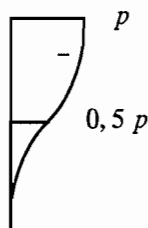
- 1) Die Schubspannungen n_{xy} ergeben sich nach Balken- und Scheibentheorie bei diesem Ansatz gleich:



$$\max n_{xy} = 1,5 \frac{p \cdot a}{(2b)} = 1,5 \frac{Q}{A}$$

$$(y = 0; x = -a)$$

- 2) Die Vertikalspannung n_y ist unabhängig von x , a , a/b



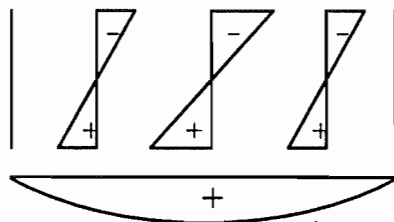
In der Balkentheorie wird dagegen angenommen: $n_y = 0$

- 3) Die Längsspannung (Biegespannung) n_x besteht aus 2 Anteilen:

$n_x^{(B)}$ (≙ Balkentheorie nach Navier)

und einem Zusatzteil $\Delta n_x^{(S)}$

- a) $n_x^{(B)}$ genau wie beim Balken



$$\max n_x^{(B)} = \frac{3}{4} \cdot p \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{p \cdot (2a)^2}{8} \cdot \frac{6}{(2b)^2} = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{1}{W} = \frac{M}{W}$$

$$(\text{ bei } y = b; x = 0)$$

Der Maximalwert von $n_x^{(B)}$ ist abhängig von $(a/b)^2$

- b) $\Delta n_x^{(S)}$ ist wie n_y unabhängig von x , a , a/b

$$\max. \Delta n_x^{(S)} = \pm 0,2 \cdot p \quad (y = \pm b)$$

$$R = \int_{-b}^b \Delta n_x^{(S)} \cdot dy = C_1 \cdot \int_{-b}^b (3b^2 - 5y^2) \cdot y \cdot dy = C_1 \cdot \left[\frac{3}{2} b^2 y^2 - \frac{5}{4} y^4 \right]_{-b}^b = 0$$

$$M = \int_{-b}^b \Delta n_x^{(S)} \cdot y \cdot dy = C_1 \cdot \int_{-b}^b (3b^2 - 5y^2) \cdot y^2 \cdot dy = C_1 \cdot \left[\frac{3}{3} b^2 y^3 - \frac{5}{5} y^5 \right]_{-b}^b = 0$$

$\Rightarrow \Delta n_x^{(S)}$ hat keine resultierenden Kräfte oder Momente

$\Delta n_x^{(S)}$ ist also ein Eigenspannungszustand

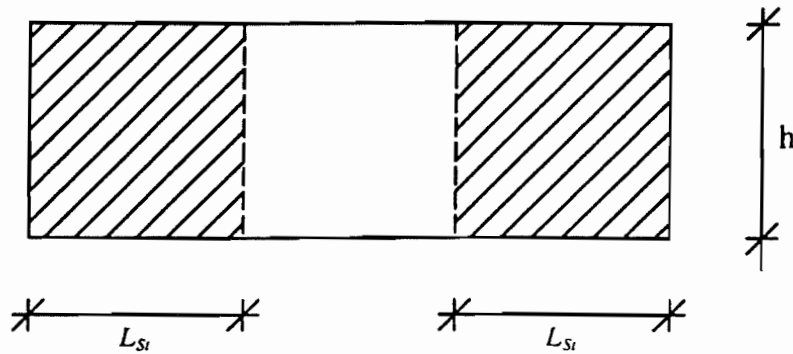
4) Die Randbedingungen sind erfüllt außer:

$$n_x = 0 \text{ bei } x = \pm a$$

Aus 3b folgt jedoch (mit dem Prinzip von de St. Venant), daß eine genauere Lösung durch Überlagern eines weiteren Eigenspannungszustandes ($-\Delta n_x^{(S)}$) an den seitlichen Rändern $x = \pm a$ gefunden würde, dessen Einfluß mit zunehmendem Abstand vom Rand schnell abnimmt. (Randbedingungen sind im Mittel erfüllt !)

5) Eine andere Verteilung der Schubspannungen an den seitlichen Rändern (Art der Auflagerung) beeinflusst ebenfalls nur einen gewissen Störbereich:

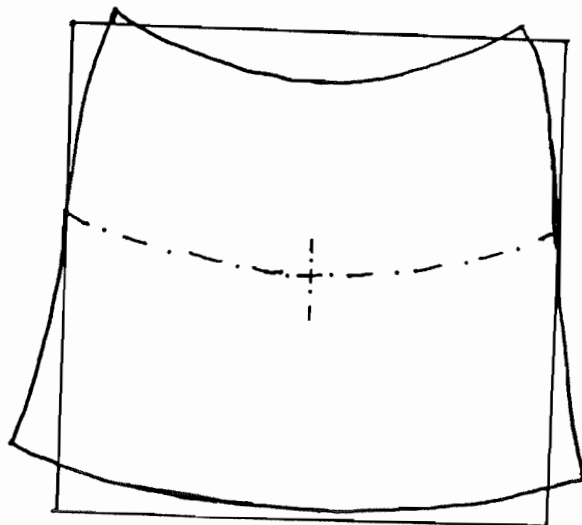
$$\text{Faustformel } L_{\text{Störung}} \approx h$$



Rechteckscheibe mit Gleichlast oben und Schubstützung

Verformung für: $a/b = 1,0$
 $\nu = 0,2$

Randbedingung: $\left. \begin{matrix} u=0 \\ v=0 \end{matrix} \right\} \text{ in Scheiben-} \\ \text{mitte}$



7.3 Beispiele zum Tragverhalten

7.3.1 Das Prinzip von de Saint-Venant

(aus: W. Schleeh: Bauteile mit zweiachsigem Spannungszustand (Scheiben). BK 1983 II)

1.5 Das Prinzip von de Saint-Venant bei Scheibenproblemen

Dieses allgemein gültige Prinzip der Elastomechanik besagt, daß in hinreichender Entfernung vom Angriffspunkt eines Kräftesystems dessen Wirkung nicht mehr von seiner örtlichen Verteilung, sondern nur von seiner elementar verteilten Resultierenden abhängt (Bild 7a). Daraus folgt unmittelbar, daß die Wirkung eines Gleichgewichtssystems, das bereits am Ort der Lasteinleitung aus der unstetig verteilten Last und ihrer elementar verteilten Resultierenden besteht, in der gleichen hinreichenden Entfernung vom Angriffsort auf Null abklingt (Bild 7b). Diese Entfernung ist unabhängig von Lastart und Lastintensität und beträgt in der Rechteckscheibe immer das etwa 1,0fache der Trägerhöhe; sie gilt auch dann, wenn Gleichgewichtssysteme innerer Span-

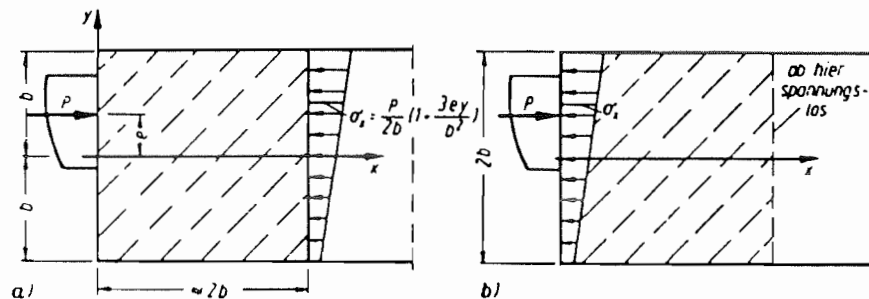


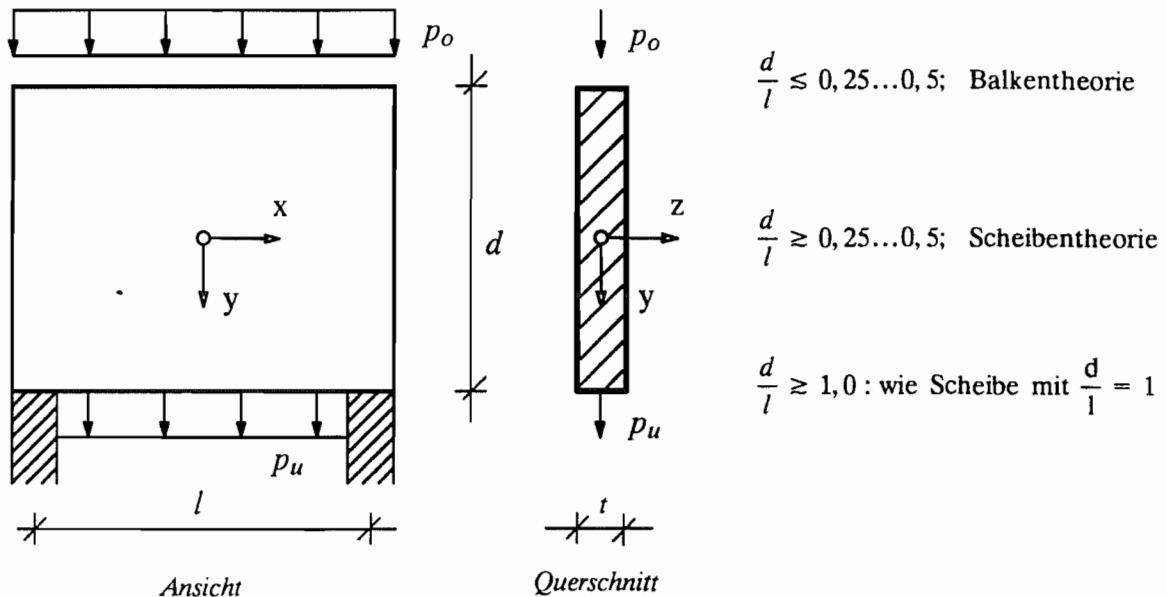
Bild 7. Das Prinzip von de Saint-Venant

nungen statt von äußeren Lasten z. B. von einem Zwang zu geometrischer Verträglichkeit ausgehen. Der Spannungsausgleich verläuft wellenförmig und klingt theoretisch erst im Unendlichen aus; die Nichtberücksichtigung des auslaufenden Endes der Welle ab einer Entfernung gleich der 1,0fachen Höhe der Rechteckscheibe bedeutet aber nur noch einen Fehler von etwa 0,5%. Die generelle Festlegung auf die 1,0fache Höhe, oder z. B. auch bei periodisch unstetiger Belastung eines unendlich langen Randes auf den 1,0fachen Lastabstand, ist rein pragmatisch, weil sie leicht zu behalten und einfacher zu handhaben ist, trotzdem aber den Bedürfnissen der Praxis noch genügt. Dieses Wissen um die Bedeutung des de Saint-Venant'schen Prinzips erleichtert bei der Betrachtung ebener Probleme das Verständnis für das von der Navier-Hypothese abweichende wirkliche Verhalten und für die Zulässigkeit von Näherungen zur Vereinfachung der Berechnung.

7.3.2 Tragverhalten einfeldriger Wandscheiben ("wandartiger Träger")

Es herrscht ein ebener Spannungszustand.

Vorkommen: z.B. Abfangen großer Wandlasten über Türen usw.



Eigengewicht: Näherungsweise je zur Hälfte bei p_u und p_o berücksichtigen.

Verschiedene Randbedingungen:

- Stützung unten
- Stützung seitlich (querverlaufende Wände, dickere Stützen)
- Last oben und/oder unten

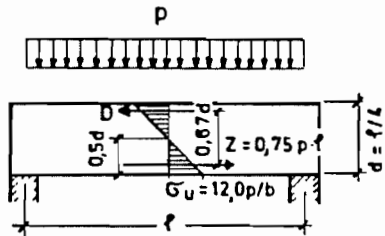
Lösungsmethoden: - Finite Elemente
- Spannungsoptik
- Reihenentwicklungen

Literatur: (1) Leonhardt, F.: Vorlesungen über Massivbau. Zweiter Teil: Sonderfälle der Bemessung im Stahlbetonbau, Springer, Berlin 1975.

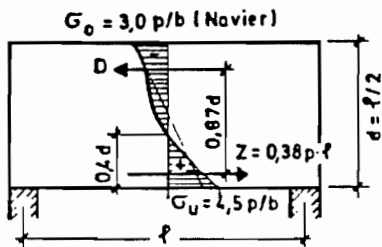
(2) Schlee, W.: Bauteile mit zweiachsigem Spannungszustand (Scheiben). In: Betonkalender 1983 II, Ernst und Sohn, Berlin 1983.

Stützung unten, Einfluß von d/l ((1) Bild 2.2)

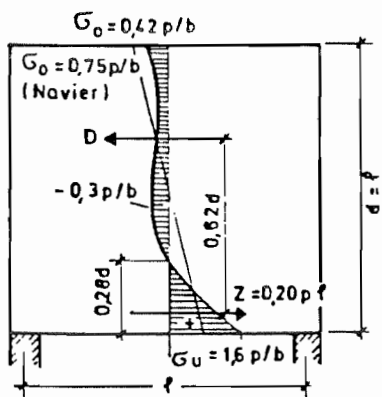
$l/d = 4$



$l/d = 2$



$l/d = 1$



$l/d < 1$

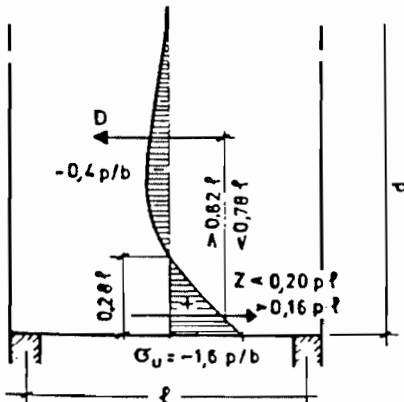


Bild 2.2 Spannungen σ_x und Größe der resultierenden Kräfte in Feldmitte von einfeldrigen, von oben gleichmäßig belasteten Trägern im Zustand I bei verschiedenem l/d und $c/l = 0,1$ (c = Auflagerbreite)

Stützung unten, Lastangriff oben oder unten ((1) Bild 2.4)

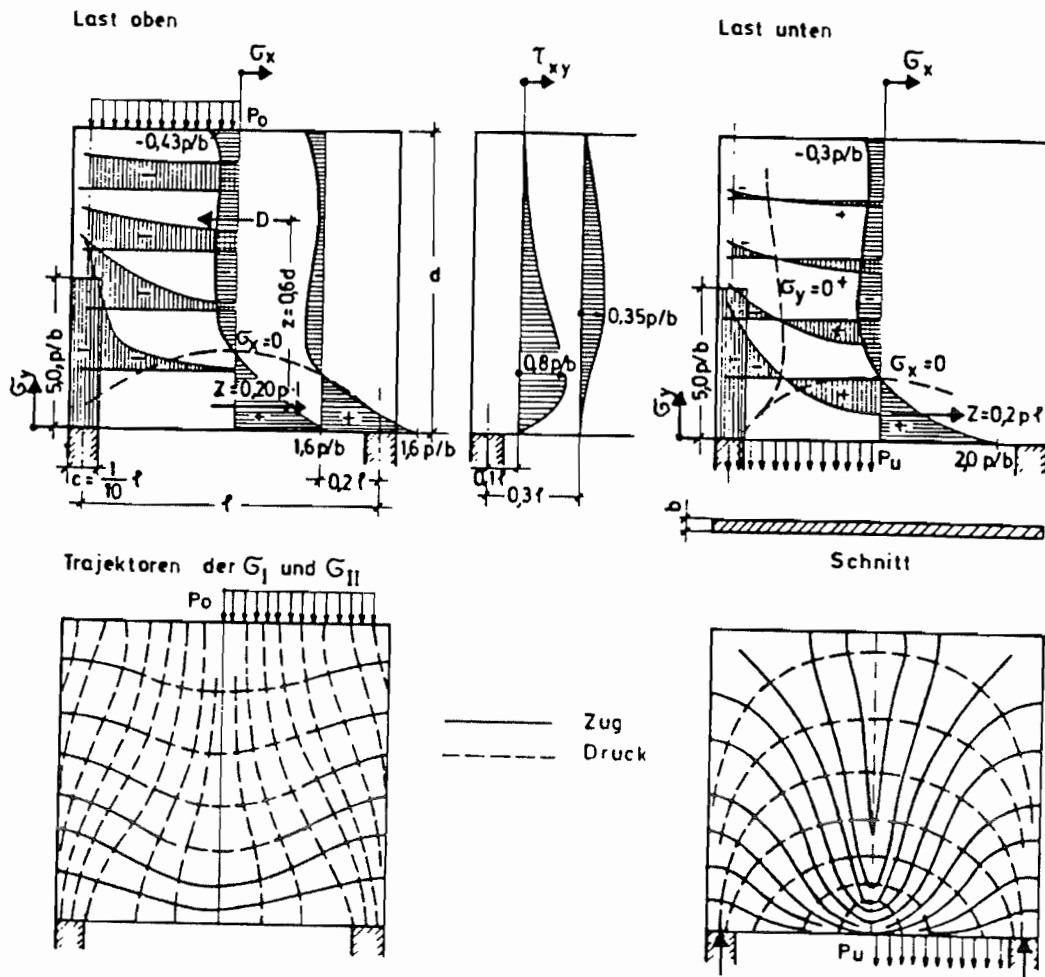
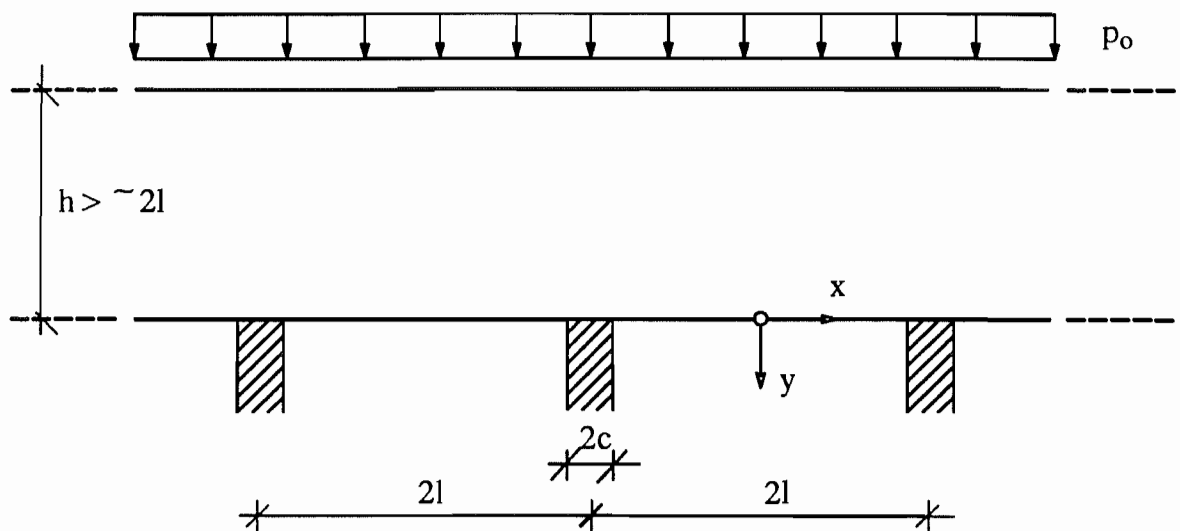


Bild 2.4 Verlauf der Spannungskomponenten σ_x , σ_y , τ_{xy} und Hauptspannungstrajektorien beim einfeldrigen wandartigen Träger mit $\ell/d = 1$ und $c/\ell = 0,1$ unter Last von oben bzw. Last von unten

„Biegespannungen“ σ_x und Schubspannungen τ_{xy} etwa gleichgroß, σ_y jedoch abhängig von der Lasteinleitung (Stichwort: Aufhängebewehrung für unten eingehängte Lasten).

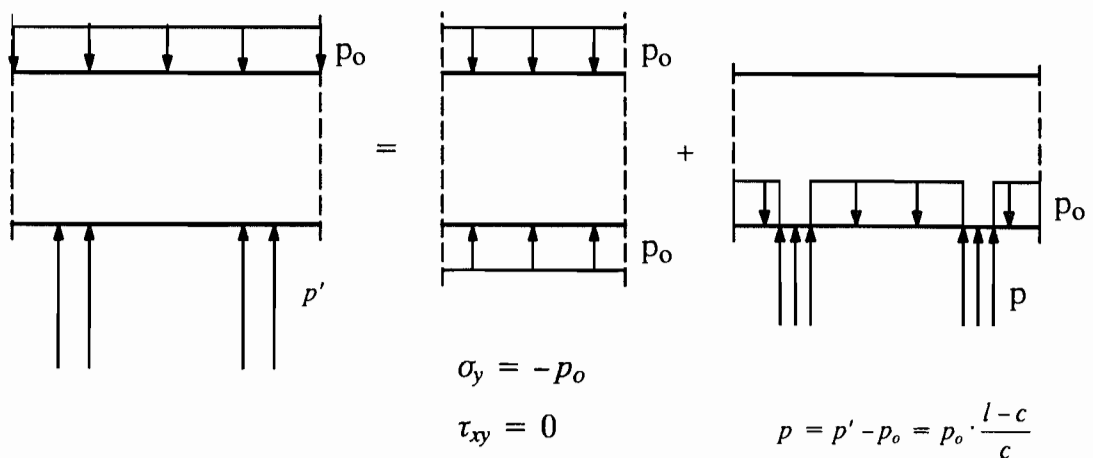
7.3.3 Tragverhalten mehrfeldriger Wandscheiben



Näherung: Scheibe ∞ lang
 \Rightarrow alle Stützen und Felder gleich beansprucht
 Stützenpressung aus $\Sigma V = 0$: (gleichmäßig verteilt angenommen)

$$p' = p_0 \cdot \frac{l}{c}$$

Lösung durch Superposition und Reihenentwicklung

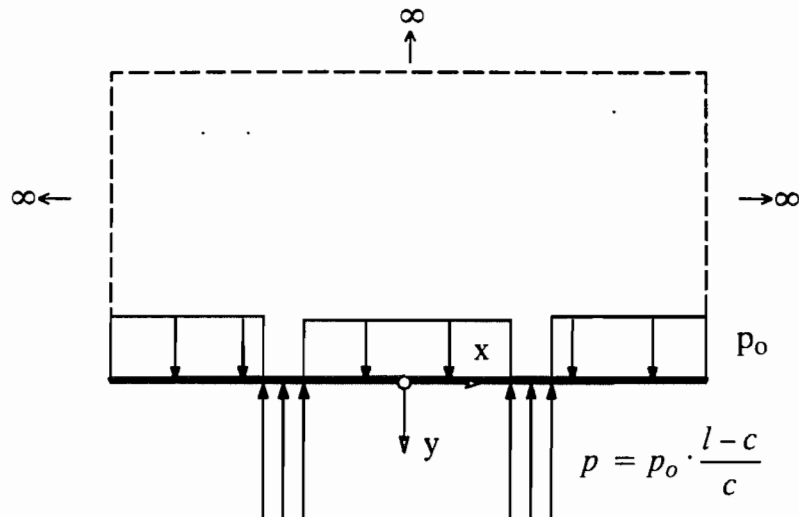


Reihenentwicklung (näherungsweise wird hier die Lösung der unendlichen Halbscheibe verwendet)

$$p_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{yn} \cdot \cos \alpha_n x$$

mit $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\alpha_n = \frac{n \cdot \pi}{l}$$

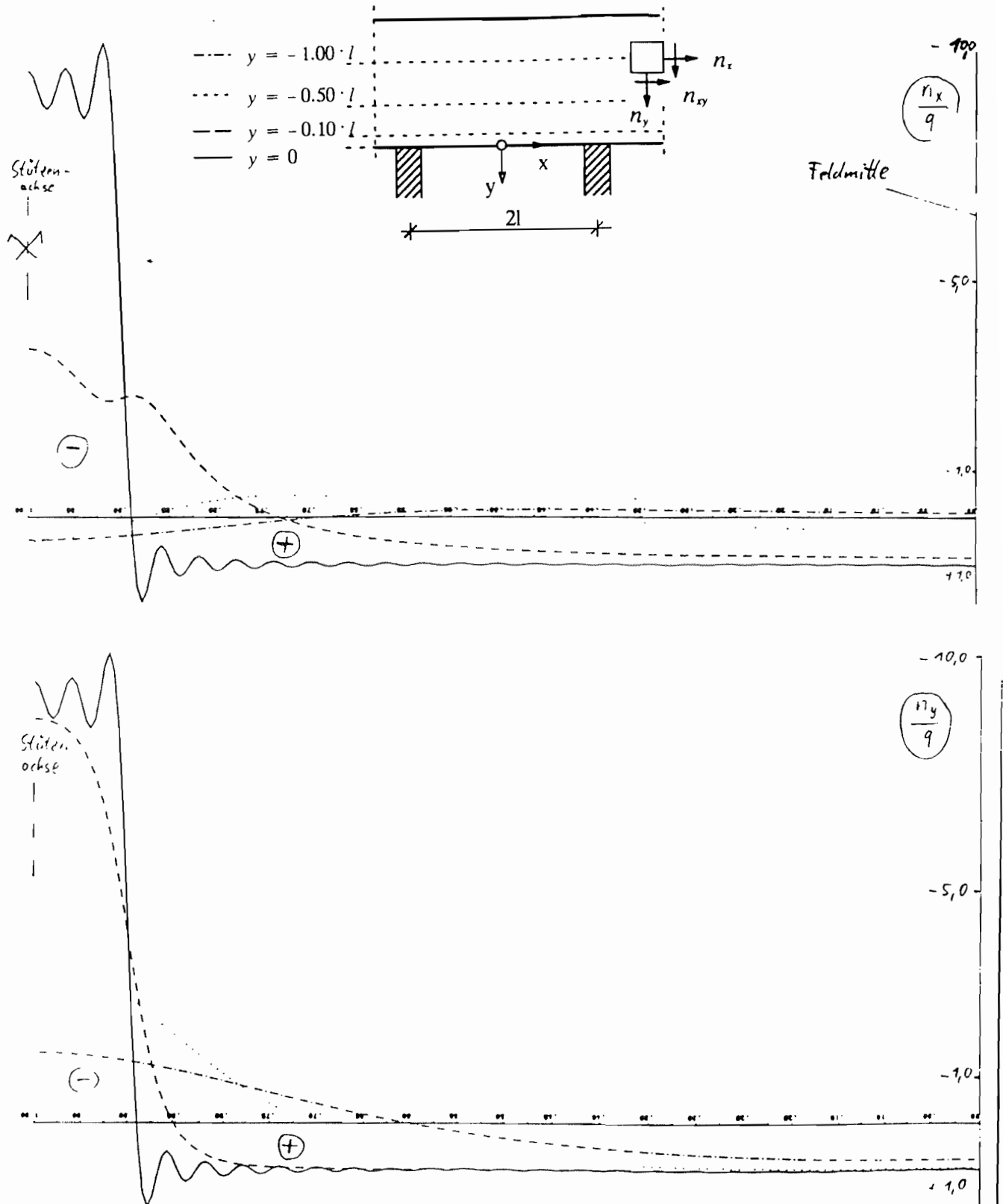


Koeffizienten der Fourier-Reihenglieder:

$$p_{yn} = \frac{2p_0}{c \cdot \alpha_n} \cdot \sin \left[n\pi \cdot \left(1 - \frac{c}{l}\right) \right] = -\frac{2p_0 l (-1)^n}{c \cdot \pi \cdot n} \cdot \sin \left(\frac{n\pi}{l} \cdot c \right)$$

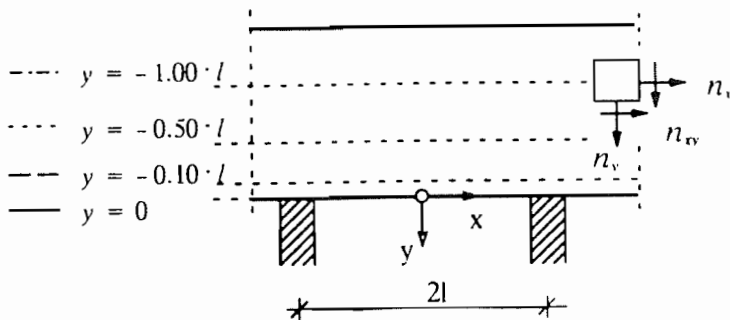
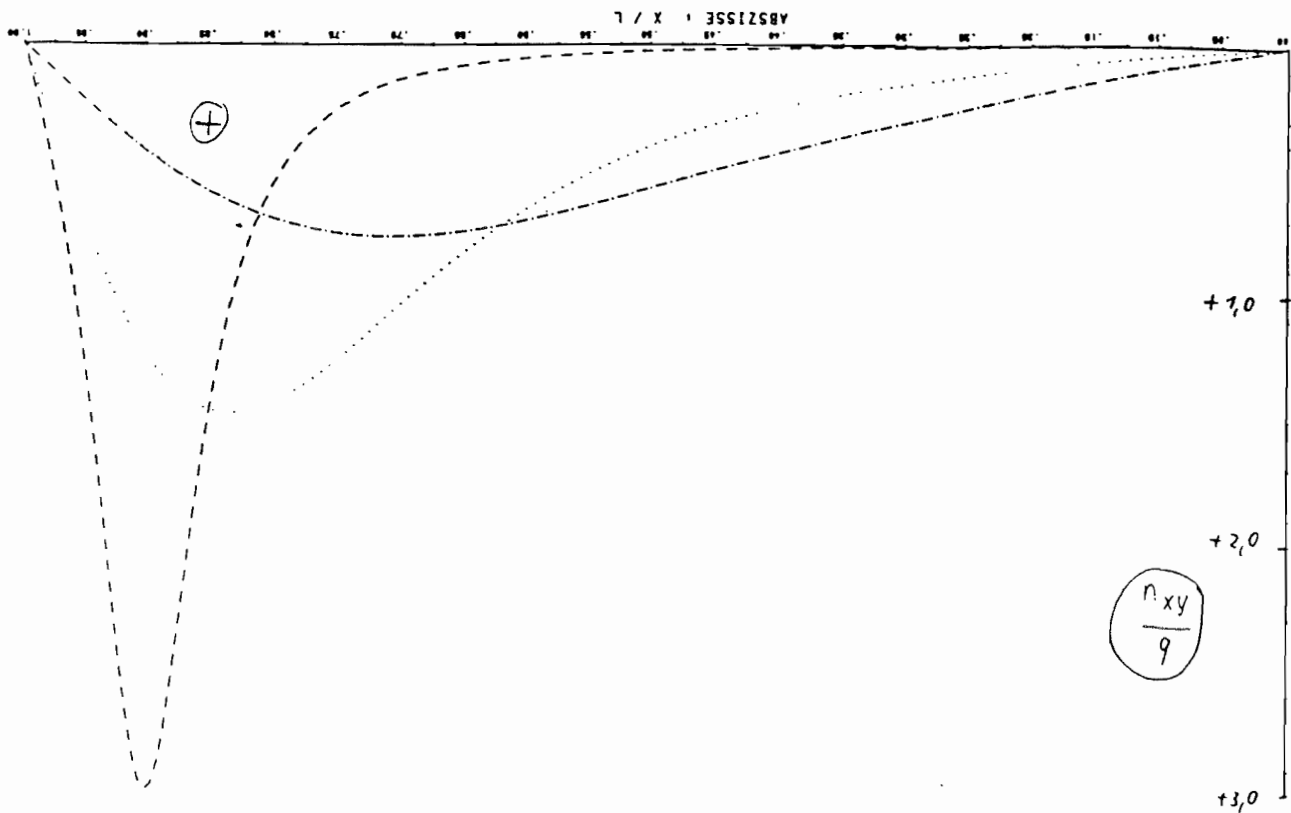
Durchlaufende (oder eingespannte) Wandscheibe mit Gleichlast unten

Verlauf der **Normalspannungen** in verschiedenen Schnitten $y/l = \text{const}$
Abbruch der Reihe nach $n_{\text{max}} = 50$ Reihengliedern

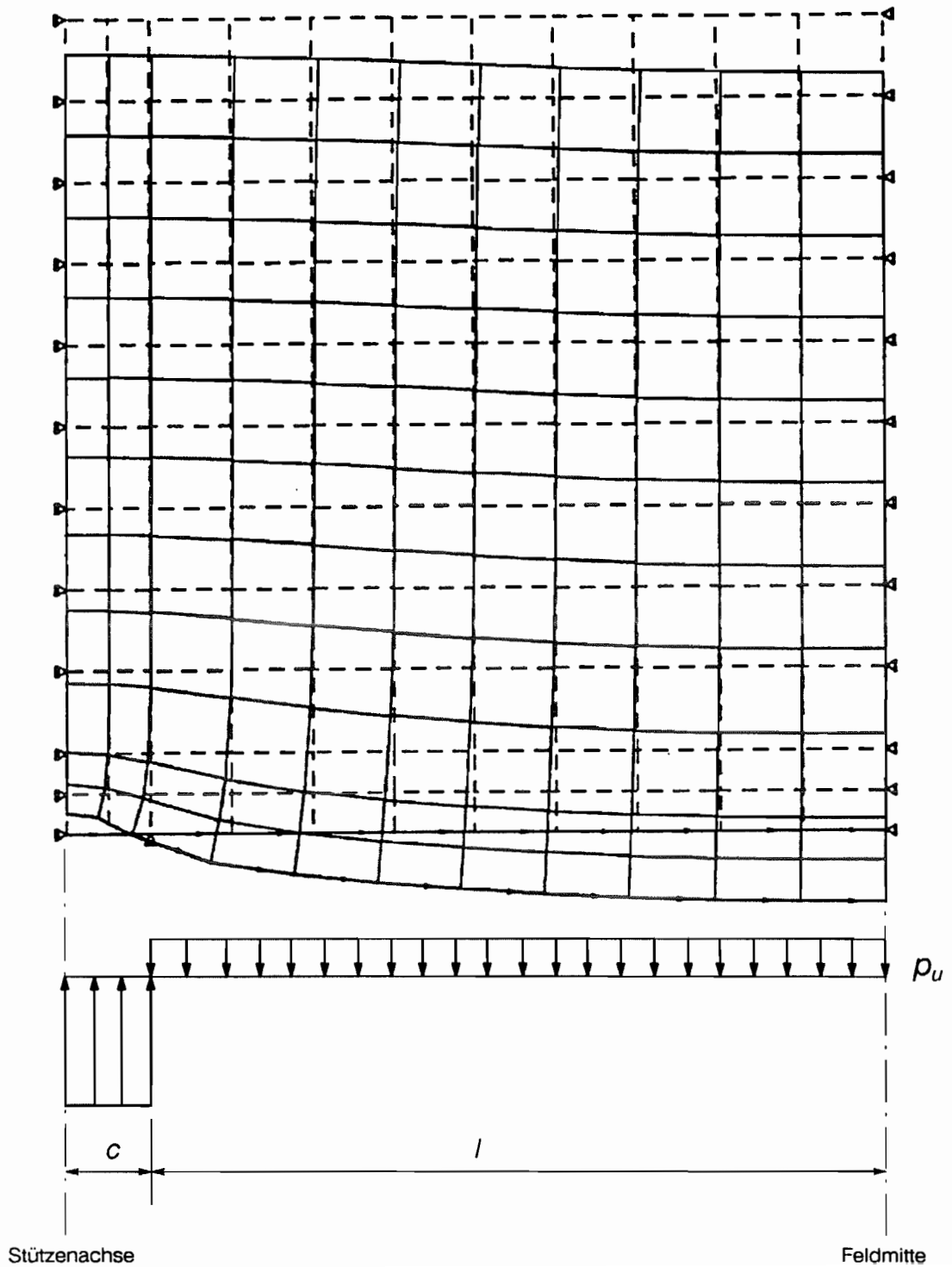


Durchlaufende (oder eingespannte) Wandscheibe mit Gleichlast unten

Verlauf der Schubspannungen in verschiedenen Schnitten $y/l = \text{const}$
Abbruch der Reihe nach $n_{\text{max}} = 50$ Reihengliedern

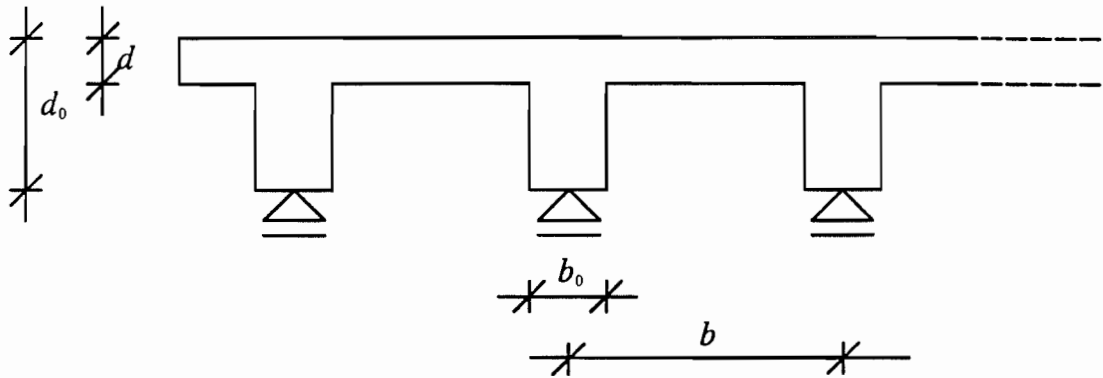


Durchlaufende (oder eingespannte) Wandscheibe ($c/l = 0.1$) mit Gleichlast unten
Verformte Scheibe (linke Hälfte eines Feldes, Lösung mit Finiten Elementen)
Verschiebungen 30-fach überhöht

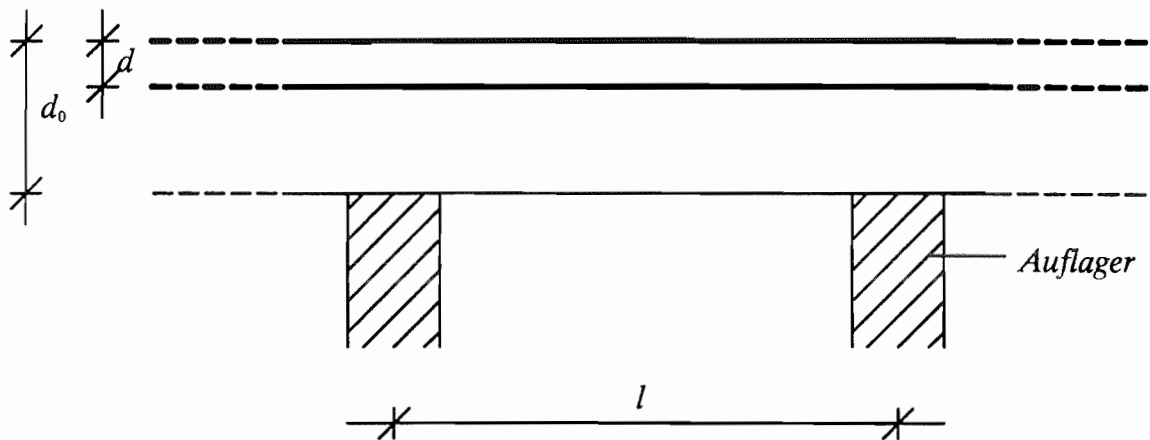


7.3.4 Der Plattenbalken

Querschnitt :



Längsschnitt :



Vorkommen: – weitgespannte Hochbaudecken (Einkaufszentren, Lagerhallen)

– Brücken mit kleineren bis mittleren Spannweiten

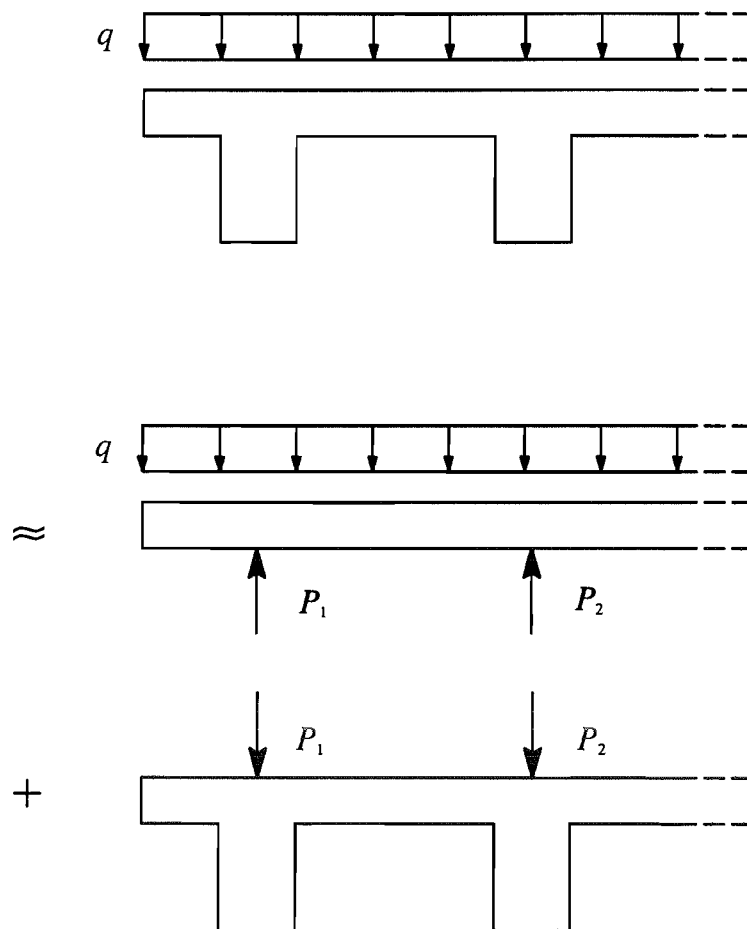
Lasten: – überwiegend Nutzlasten (flächig oder konzentriert)

Verschiedene Randbedingungen:

– Längs durchlaufend oder Einfeldträger

Lösungsmethode:

Trennen von Platten- und Scheibenbeanspruchung



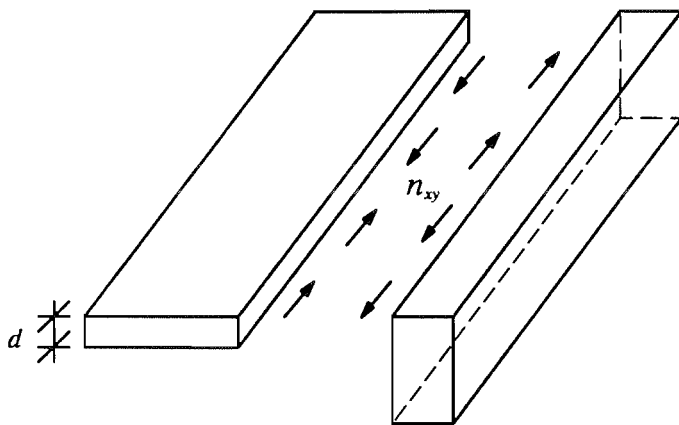
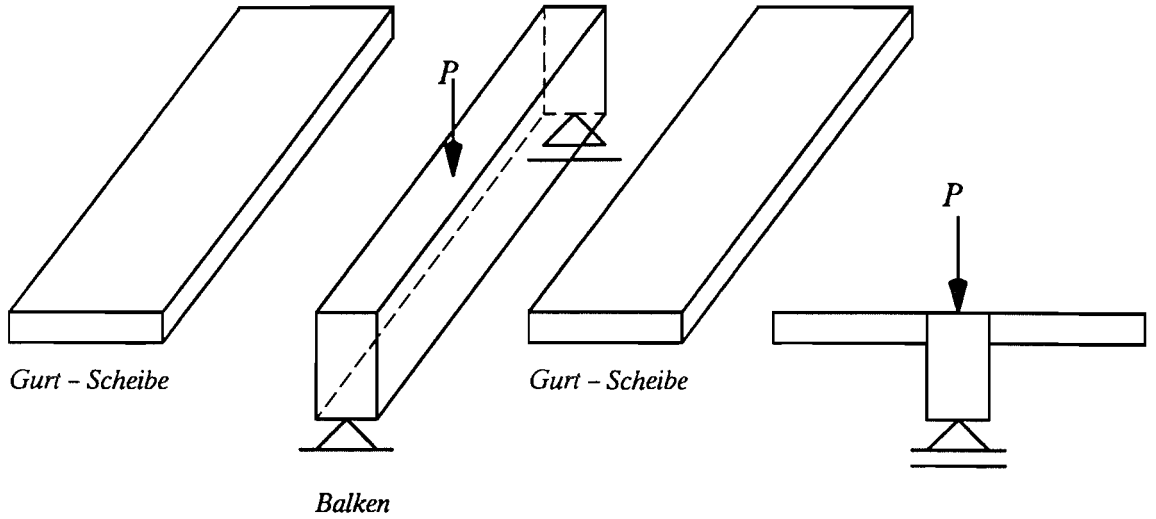
*Näherungsweise Berechnung
als durchlaufende Platte
(siehe später Abschnitt 8)*

Scheibenzustand :

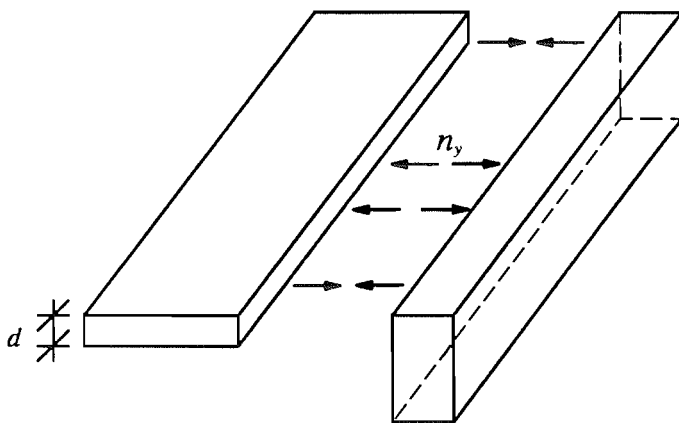
Lösung durch

- Reihenentwicklung
 - Finite Elemente
 - Tabellen für 'Plattenbalken'
- (Stichwort mitwirkende Breite)

Schnittgrößen zwischen Scheibe und Balken im Scheibenzustand:



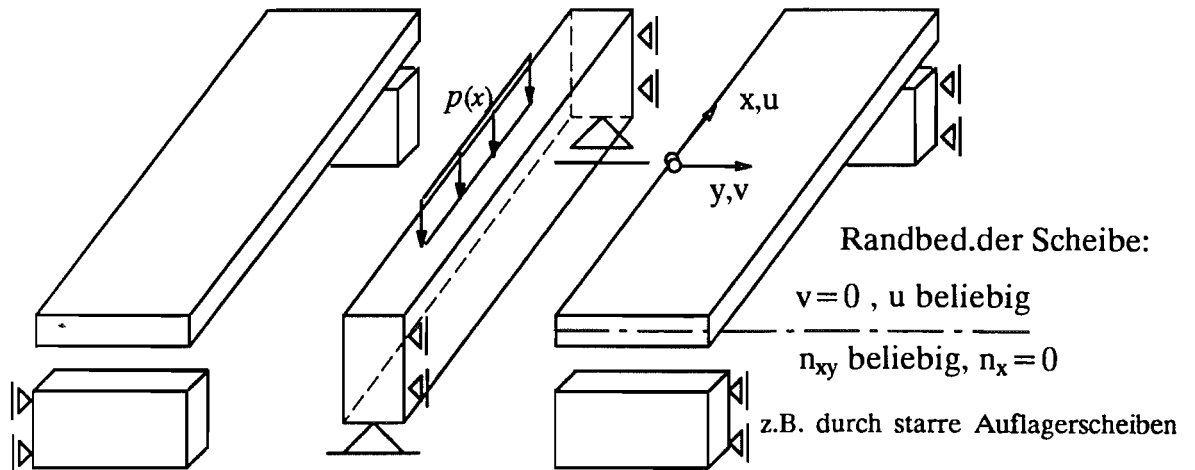
Schubspannungen : $n_{xy}(x) = \tau_{xy}(x) \cdot d$



Normalspannungen : $n_y(x) = \sigma_y(x) \cdot d$

Berechnung des Plattenbalkens (gelenkig gelagerter Einfeldträger)

Lösung durch Reihenentwicklung und mit dem Kraftgrößenverfahren



1. System und Last **periodisch fortsetzen**

2. **Reihenentwicklung** der Last und der unbekanntenen Schnittgrößen:

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot \cos \alpha_n x$$

$$n_{xy}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n_{xy_n} \cdot \sin \alpha_n x$$

$$n_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n_{y_n} \cdot \cos \alpha_n x$$

im Schnitt Scheibe / Balken

3. Berechnung mit dem **Kraftgrößenverfahren**

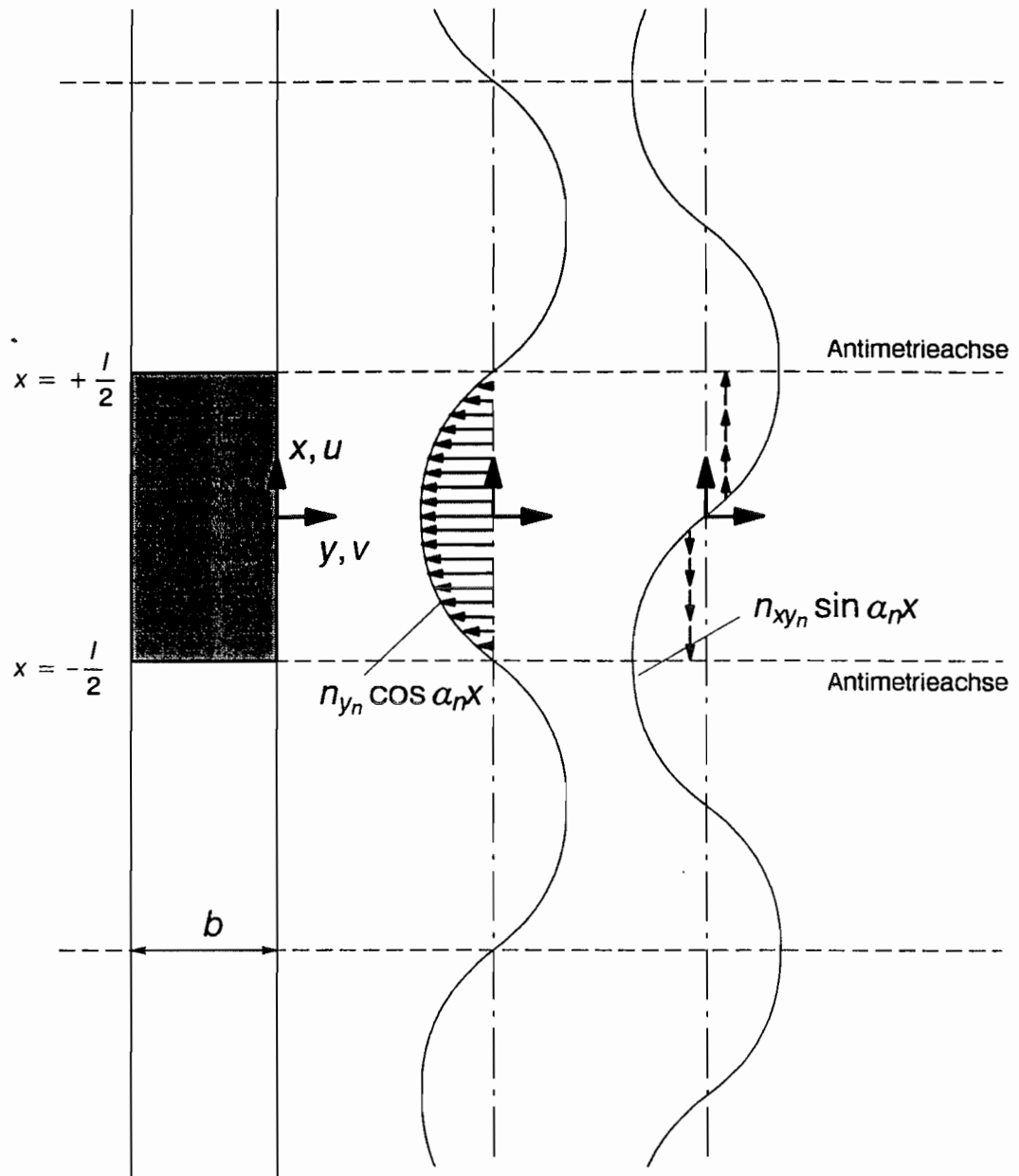
gewählt z.B. :

$$x_{1n} \equiv n_{xy_n}$$

$$x_{2n} \equiv n_{y_n}$$

Statisch Unbestimmte sind hier die Amplituden (Maximalwerte) der trigonom. Funktionen. Dabei ist für jedes einzelne Reihenglied eine vollständige statisch unbestimmte Berechnung durchzuführen.

Berechnung der Gurtscheiben durch periodische Fortsetzung in Längsrichtung:



Die Randbedingungen des Plattenbalkens bei $x = \pm \frac{l}{2}$

$$\begin{aligned} u &\neq 0 ; n_x = 0 \\ v &= 0 ; n_{xy} \neq 0 \end{aligned}$$

sind durch die antimetrische Fortsetzung eingehalten. Als weitere Näherung kann ggf. anstelle des unendlichen Scheibenstreifens die unendliche Halbscheibe zur Berechnung herangezogen werden.

1. Analytische Lösungen für Plattenaufgaben (78)

siehe dazu auch Vorlesung Statik 3 (Kap. ...)

Kirchhoff'sche Plattentheorie: $\Delta \Delta w = \frac{p}{B}$

→ Ersatzquerkräfte am Rand $q_1^* = q_1 + M_{12,1}$

Es liegen drei Randkräfte vor

Wegen $q_2 = -w'$ sind die
Verdrrehungen keine unabh.

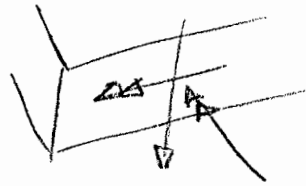
Randverschiebungen mehr

→ deshalb liegen nur

2 Verschiebungs-RB für 3 Randkräfte vor

→ Drillmomente und Querkräfte werden
zusammengefasst → Ersatzquerkräfte

→ Analyt. Lösung für Kreisplatte (→ Statik 3)



Reissner - Theorie mit Schubverzerrungen

die Randbedingungen können
ohne Näherung erfüllt werden

Analytische Lösung

wie Kirchhoff-Theorie + Korrekturterme

Grenzschicht-Lösungen
 in der Nähe der Ränder

→ klingen im Bereich
 der Plattenstärke ab

Das DGL-System enthält nur erste Ableitungen

→ Grundlage für FEM-Modelle

→ Schubanteile besonders behandeln (shear locking)

9.1 Lösung für Kreisplatten

→ Statik 3

(79)

$$\Delta \Delta W = \left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) W = \frac{p}{B}$$

Lösung mit $s = \frac{r}{a}$ $r = \text{Koordinate}$
 $a = \text{Dickenwert}$

$$W_h = C_1 + C_2 s^2 + C_3 s^2 \ln s + C_4 \ln s$$

$W_p = \text{Partikularantrieb aus Belastung}$

$$W = W_h + W_p$$

8.1 Analytische Lösung für Rechteckplatten

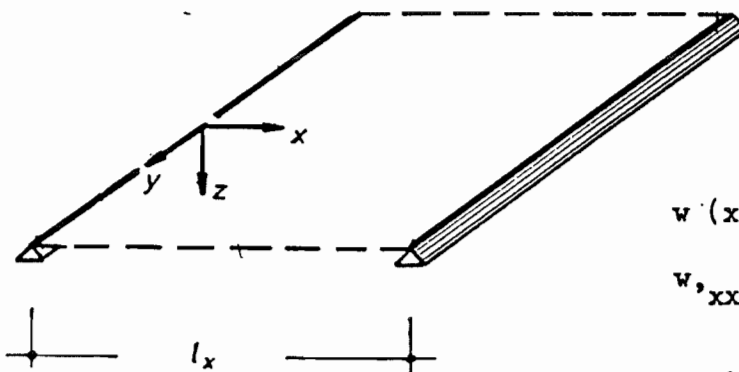
Homogene Lösung der Rechteckplatte

(harmonischer Lösungsverlauf in x-Richtung)

Ansatz: (M. Levy) $w(x,y) = \sum_n W(y) \cdot \sin \alpha_n x$

oder $w(x,y) = \sum_n W(y) \cdot \cos \alpha_n x$

mit: $\alpha_n = \frac{n\pi}{l_x}$



$$w(x=0) = 0; \quad w(x=l_x) = 0$$

$$w_{,xx}(x=0) = 0; \quad w_{,xx}(x=l_x) = 0$$

Navier'sche Rb. längs $x = \text{konst.}$

Die Wahl dieses Ansatzes setzt also an den Rändern $x = \text{konst.}$ Navier'sche Rb. voraus. Ein Randwertproblem ist nur längs $y = \text{konst.}$ -Rändern zu formulieren.

Lösung der Dgl. $\Delta\Delta w = 0$

$$\Delta\Delta w = w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}$$

$$= \alpha^4 \cdot W \cdot \sin \alpha x - 2\alpha^2 \cdot W_{,yy} \cdot \sin \alpha x + W_{,yyyy} \cdot \sin \alpha x = 0$$

$$W_{,yyyy} - 2\alpha^2 \cdot W_{,yy} + \alpha^4 W = 0 \quad (\text{gew. lineare Dgl. 4. Ordn.})$$

Lösung

$$w_h(x,y) = \sum_n \left[(A_n + B_n y) e^{-\alpha_n y} + (C_n + D_n y) e^{\alpha_n y} \right] \cdot \sin \alpha_n x$$

$m_x, m_{xy}, m_y, q_x, q_y, \dots$ durch Differentiation

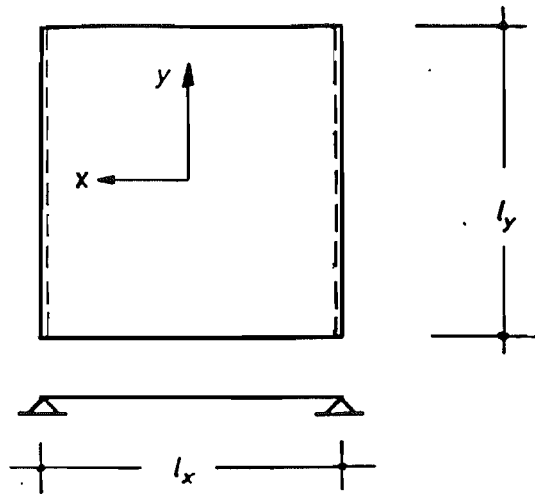
Beispiel: Rechteckplatte mit frei drehbar gelagertem Randpaar

a) System und Belastung

Belastung:

x-Richtung: beliebig

y-Richtung: konst.



b) Lösung der Plattengleichung $\Delta\Delta w = \frac{P}{B}$

$$w(x,y) = w_p(x,y) + w_h(x,y)$$

mit w_p - partikuläre Lösung der vollständigen Plattengleichung,
die im allgemeinen die Randbedingungen nicht befriedigt.

w_h - homogene Lösung der Plattengleichung ($\Delta\Delta w = 0$),
deren Integrationskonstanten so bestimmt werden müssen,
daß die Gesamtlösung $w = w_p + w_h$ die Randbedingungen erfüllt.

b1) Partikuläre Lösung

Belastung (in x- und y - Richtung beliebig)

$$p(x,y) = \sum_m \sum_n p_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi}{l_y} y \cdot \cos \frac{n\pi}{l_x} x$$

Lösung (Doppelreihenansatz)

$$w_p(x,y) = \sum_m \sum_n w_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi}{l_y} y \cdot \cos \frac{n\pi}{l_x} x$$

$$\text{mit } w_{mn} = \frac{p_{mn}}{B\kappa^4} \cdot \left(\frac{m^2}{l_y^2} + \frac{n^2}{l_x^2} \right)^{-2}$$

Sonderfall:

Belastung in y-Richtung konstant

$$p(x) = \sum_n p_n \cdot \cos \alpha_n x$$

Lösung: (Einfachreihenansatz)

$$w_p(x) = \sum_n w_n \cos \alpha_n x \quad \text{mit} \quad w_n = \frac{1}{B \alpha_n^4} p_n$$

b2) homogene Lösung

b3) Gesamtlösung: $w = w_p + w_h$

$$w(x,y) = \sum_n \left\{ \frac{1}{B \alpha_n^4} p_n + \left[(A_n + B_n y) e^{-\alpha_n y} + (C_n + D_n y) e^{\alpha_n y} \right] \right\} \cdot \cos \alpha_n x$$

c) Schnittgrößen

Biege- und Torsionsmomente

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_{xy} \\ m_y \end{bmatrix} = -B \begin{bmatrix} w_{,xx} + \nu \cdot w_{,yy} \\ (1-\nu) \cdot w_{,xy} \\ w_{,yy} + \nu \cdot w_{,xx} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Querkräfte

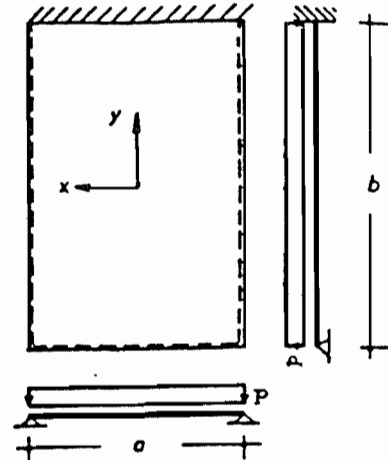
$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{x,x} + m_{xy,y} \\ m_{y,y} + m_{xy,x} \end{bmatrix} = -B \begin{bmatrix} w_{,xxx} + w_{,xyy} \\ w_{,yyy} + w_{,xxy} \end{bmatrix}$$

Ersatzquerkräfte

$$\begin{bmatrix} \bar{q}_x \\ \bar{q}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{xy,y} \\ m_{xy,x} \end{bmatrix} = -B \begin{bmatrix} w_{,xxx} + (2-\nu)w_{,xyy} \\ w_{,yyy} + (2-\nu)w_{,xxy} \end{bmatrix}$$

d) Lösung des Randwertproblems

Belastung: $p = \text{const.}$
 $v = 0$



d1) Belastung (Entwicklung als FOURIER-Reihe)

$$p(x) = \sum p_n \cos \alpha_n x = \frac{4 \cdot p}{\pi} \sum \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \alpha_n x \quad \text{mit } n = 1, 3, 5, \dots$$

d2) Ansatzfunktion

$$w(x, y) = \sum_n \left[\frac{1}{B \alpha_n^4} p_n + (A_n + B_n y) e^{-\alpha_n y} + (C_n + D_n y) e^{\alpha_n y} \right] \cdot \cos \alpha_n x$$

Ableitungen:

$$w_{,y} = \sum_n \left[\left\{ -\alpha_n A_n + (1 - \alpha_n y) B_n \right\} e^{-\alpha_n y} + \left\{ \alpha_n C_n + (1 + \alpha_n y) D_n \right\} e^{\alpha_n y} \right] \cdot \cos \alpha_n x$$

$$w_{,yy} = \sum_n \left[\left\{ \alpha_n^2 A_n + (\alpha_n^2 y - 2\alpha_n) B_n \right\} e^{-\alpha_n y} + \left\{ \alpha_n^2 C_n + (\alpha_n^2 y + 2\alpha_n) D_n \right\} e^{\alpha_n y} \right] \cdot \cos \alpha_n x$$

$$w_{,yyy} = \sum_n \left[\left\{ -\alpha_n^3 A_n + (3\alpha_n^2 - \alpha_n^3 y) B_n \right\} e^{-\alpha_n y} + \left\{ \alpha_n^3 C_n + (3\alpha_n^2 + \alpha_n^3 y) D_n \right\} e^{\alpha_n y} \right] \cdot \cos \alpha_n x$$

d3) Schnittgrößen

Momente

$$m_x = -B \left[\frac{1}{B \alpha_n^4} p_n + (A_n + B_n y) e^{-\alpha_n y} + (C_n + D_n y) e^{\alpha_n y} \right] (-\alpha_n^2) \cos \alpha_n x$$

$$m_{xy} = -B \left[(-\alpha_n A_n + (1 - \alpha_n y) B_n) e^{-\alpha_n y} + (\alpha_n C_n + (1 + \alpha_n y) D_n) e^{\alpha_n y} \right] (-\alpha_n) \sin \alpha_n x$$

$$m_y = -B \left[(\alpha_n^2 A_n + (\alpha_n^2 y - 2\alpha_n) B_n) e^{-\alpha_n y} + (\alpha_n^2 C_n + (\alpha_n^2 y + 2\alpha_n) D_n) e^{\alpha_n y} \right] \cos \alpha_n x$$

Querkräfte.

$$q_x = -B \left[\frac{1}{B \cdot 2\alpha_n^3} p_n + B_n e^{-\alpha_n y} - D_n e^{\alpha_n y} \right] \cdot 2\alpha_n^2 \sin \alpha_n x$$

$$q_y = -B \left[B_n e^{-\alpha_n y} + D_n e^{\alpha_n y} \right] \cdot 2\alpha_n^2 \cos \alpha_n x$$

Ersatzquerkräfte

(werden hier nicht berechnet)

d4) Randbedingungen

Rand	$x = -\frac{a}{2}$:	$w = 0$;	$w_{,xx} = 0$	werden bereits von der Ansatzfunktion erfüllt
	$x = \frac{a}{2}$:	$w = 0$;	$w_{,xx} = 0$	

Rand	$y = \frac{b}{2}$:	$w = 0$;	$w_{,y} = 0$
	$y = -\frac{b}{2}$:	$w = 0$;	$w_{,yy} = 0$

Bestimmungsgleichungen für $A_n - D_n$

$v(y=+\beta)$	=	$e^{-\alpha_n \beta}$	$\beta e^{-\alpha_n \beta}$	$e^{\alpha_n \beta}$	$\beta e^{\alpha_n \beta}$	+	A_n	+	$\frac{\alpha_n^{-4}}{\alpha_n} p_n$	=	0
$v_{,y}(y=+\beta)$		$-\alpha_n e^{-\alpha_n \beta}$	$(1-\alpha_n \beta)e^{-\alpha_n \beta}$	$\alpha_n e^{\alpha_n \beta}$	$(1+\alpha_n \beta)e^{\alpha_n \beta}$		B_n		0		0
$v(y=-\beta)$		$e^{\alpha_n \beta}$	$-\beta e^{\alpha_n \beta}$	$e^{-\alpha_n \beta}$	$-\beta e^{-\alpha_n \beta}$		C_n		$\frac{\alpha_n^{-4}}{\alpha_n} p_n$		0
$v_{,yy}(y=-\beta)$		$\alpha_n^2 e^{\alpha_n \beta}$	$(-\alpha_n^2 \beta - 2\alpha_n)e^{\alpha_n \beta}$	$\alpha_n^2 e^{-\alpha_n \beta}$	$(-\alpha_n^2 \beta + 2\alpha_n)e^{-\alpha_n \beta}$		D_n		0		0

mit $p_n = \frac{4p}{n\pi}$

für $n = 1, 3, 5, \dots$

$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$

$\beta = b/2$

d5) Auswertung

für $a = 4 \text{ m}$, $b = 6 \text{ m}$

Berechnung der Integrationskonstanten

$n = 1$

$$\begin{bmatrix} 0,09478 & 0,2843 & 10,55 & 31,65 \\ -0,07444 & -0,1285 & 8,286 & 35,41 \\ 10,55 & -31,65 & 0,09478 & -0,2843 \\ 6,508 & -36,09 & 0,05846 & -0,02651 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} = -\frac{p}{B} \cdot \begin{bmatrix} 3,346 \\ 0 \\ 3,346 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_1 = -0,668 \cdot \frac{p}{B}; B_1 = -0,122 \cdot \frac{p}{B}; C_1 = -1,01 \cdot \frac{p}{B}; D_1 = 0,235 \cdot \frac{p}{B}$$

$n = 3$

$$\begin{bmatrix} 0,0008514 & 0,002554 & 1174 & 3523 \\ -0,002006 & -0,005167 & 2767 & 9476 \\ 1174 & -3523 & 0,0008514 & -0,002554 \\ 6520 & -25090 & 0,004726 & -0,01016 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 \\ B_3 \\ C_3 \\ D_3 \end{bmatrix} = \frac{p}{B} \cdot \begin{bmatrix} 0,01377 \\ 0 \\ 0,01377 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_3 = 0,531 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{p}{B}; B_3 = 0,138 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{p}{B}; C_3 = 0,945 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{p}{B}; D_3 = -0,276 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{p}{B}$$

usw.

Berechnung der Zustandsgrößen

$$w(x,y) = w_1(x,y) + w_3(x,y) + \dots$$

entsprechend : $m_x \quad m_y \quad m_{xy} \quad q_x \quad q_y \quad \bar{q}_x \quad \bar{q}_y$

Verformungen und Biegemomente in Plattenmitte

Die Berechnungen wurden für $n = 1, 3, 5$ und 7 mit einem programmierbaren Kleinrechner durchgeführt.

n	B · w	B · f _m	m _x	m _{xm}	m _y	m _{ym}
1	1,66		1,02		0,476	
3	1,64		0,949		0,475	
5	1,65		0,966		0,475	
7	1,64		0,960		0,475	
		1,649		0,964		0,475

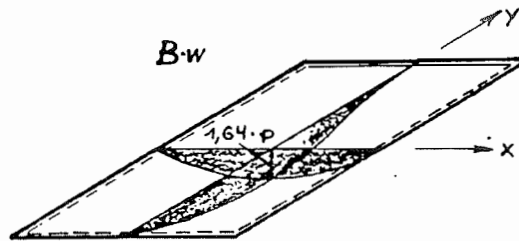
alle Werte
für $p = 1,0 \text{ kN/m}^2$

Die in den Spalten 3, 5 und 7 angegebenen Werte wurden den Tafeln für vierseitig gelagerte Platten von F. Czerny (BK 74 S. 148 ff.) entnommen.

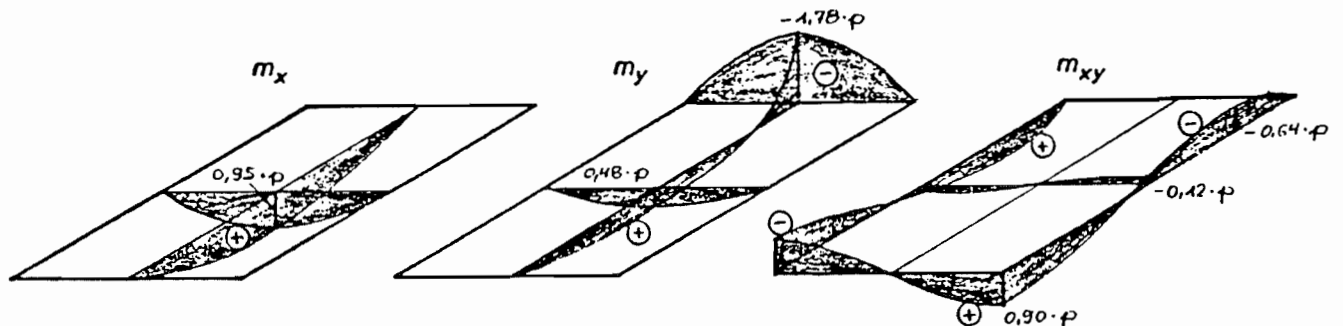
Verformungen und Schnittgrößen

Im folgenden wurden die Zustandsgrößen für einen Reihenansatz mit $n = 3$ ermittelt

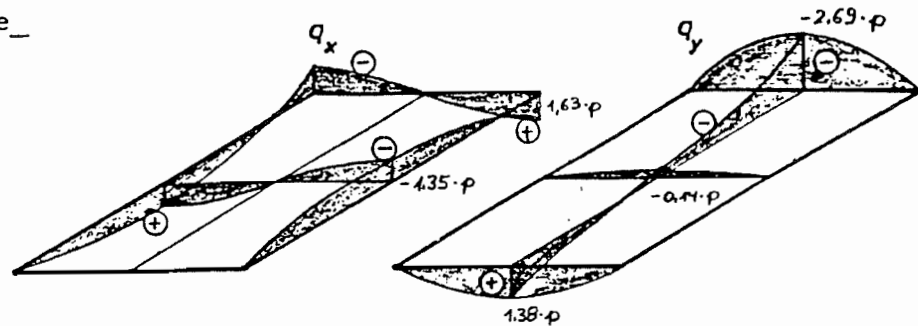
Durchbiegung



Biege- und Torsionsmomente



Querkräfte



Einzelkräfte an den Plattenecken

$$A = 2 \cdot m_{xy}$$

$$A (x = \pm 2m, y = -3m) = 1,808 p \text{ [KN]} \text{ (abhebend)}$$

$$A (x = \pm 2m, y = +3m) = 0$$

Tragverhalten

lassen sich auch bei Platten Schnittrichtungen senkrecht zur Plattenmittelebene bestimmen, für welche die Biegemomente Extremwerte (Hauptbiegemomente) annehmen und die Torsionsmomente verschwinden.

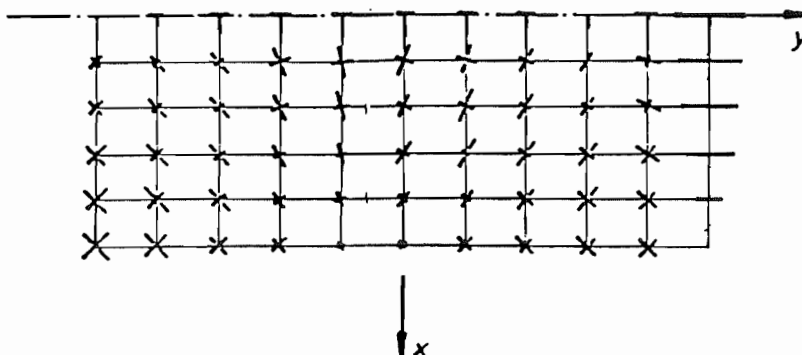
Hauptbiegemomente

$$m_{1,2} = \frac{1}{2} (m_x + m_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(m_x - m_y)^2 + 4m_{xy}^2}$$

Richtungswinkel (Winkel zwischen Normale und x-Achse positiv entgegen dem Uhrzeigersinn)

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2m_{xy}}{m_x - m_y}$$

Die Hauptbiegemomente der in diesem Abschnitt berechneten vierseitig gelagerten Platte sind nachfolgend dargestellt.



Rechteckplatte mit frei drehbar gelagertem Randpaar $x = \text{const.}$
Belastung in y -Richtung konstant

x -Richtung: FOURIER-Reihe $n = 3$

Abmessungen: $l_x = 4.00$ $l_y = 6.00$ $l_y/l_x = 1.50$

Querdehnungszahl: .00

Randbedingungen: $y = -3.00$ $Rb1 = 1$ $Rb2 = 3$ $y = 3.00$ $Rb1 = 1$ $Rb2 = 2$

Bereich: mit $x' = x/l_x$ und $y' = y/l_y$

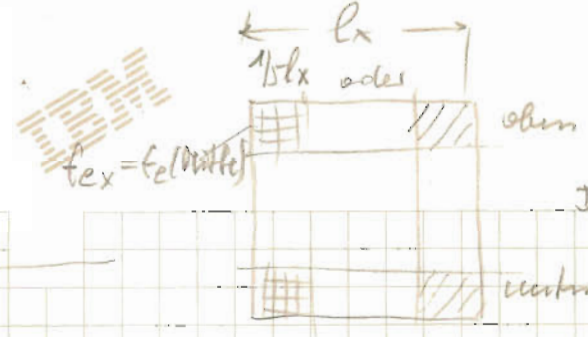
von $x' = .00$ bis $x' = .50$ $dx' = .10$

$y' = -.50$ $y' = .50$ $dy' = .10$

x'	y'	w_B	m_x	m_y	m_{xy}	m_1	m_2	ϕ	q_x	q_y
.00	-.50	.129-14	.754-15	-.108-14	.000 00	.754-15	-.108-14	.0	.000 00	.138 01
	-.40	.627 00	.347 00	.336 00	.000 00	.347 00	.336 00	.0	.000 00	.906 00
	-.30	.114 01	.645 00	.466 00	.000 00	.645 00	.466 00	.0	.000 00	.539 00
	-.20	.148 01	.852 00	.498 00	.000 00	.852 00	.498 00	.0	.000 00	.271 00
	-.10	.165 01	.955 00	.493 00	.000 00	.955 00	.493 00	.0	.000 00	.599-01
	.00	.164 01	.949 00	.475 00	.000 00	.949 00	.475 00	.0	.000 00	-.139 00
	.10	.147 01	.840 00	.434 00	.000 00	.840 00	.434 00	.0	.000 00	-.370 00
	.20	.113 01	.638 00	.326 00	.000 00	.638 00	.326 00	.0	.000 00	-.681 00
	.30	.691 00	.373 00	.546-01	.000 00	.373 00	.546-01	.0	.000 00	-.113 01
	.40	.235 00	.117 00	-.558 00	.000 00	.117 00	-.558 00	.0	.000 00	-.180 01
	.50	-.304-14	-.207-14	-.178 01	.000 00	-.200-14	-.178 01	.0	.000 00	-.269 01
.10	-.50	.123-14	.735-15	-.103-14	.236 00	.236 00	-.236 00	44.9	.150-15	.138 01
	-.40	.599 00	.346 00	.324 00	.220 00	.555 00	.115 00	43.5	-.626-01	.878 00
	-.30	.108 01	.637 00	.445 00	.169 00	.736 00	.346 00	30.2	-.150 00	.517 00
	-.20	.141 01	.837 00	.474 00	.102 00	.864 00	.447 00	14.7	-.202 00	.259 00
	-.10	.158 01	.935 00	.469 00	.317-01	.938 00	.467 00	3.8	-.224 00	.572-01
	.00	.157 01	.930 00	.452 00	-.332-01	.934 00	.449 00	-4.5	-.219 00	-.132 00
	.10	.140 01	.826 00	.413 00	-.104 00	.851 00	.300 00	-13.3	-.183 00	-.352 00
	.20	.108 01	.633 00	.311 00	-.158 00	.608 00	.246 00	-22.3	-.110 00	-.650 00
	.30	.661 00	.377 00	.550-01	-.183 00	.460 00	-.279-01	-24.3	.898-02	-.108 01
	.40	.226 00	.123 00	-.523 00	-.142 00	.153 00	-.558 00	-11.3	.172 00	-.174 01
	.50	-.287-14	-.189-14	-.172 01	.697-15	-.200-14	-.172 01	.0	.305 00	-.269 01

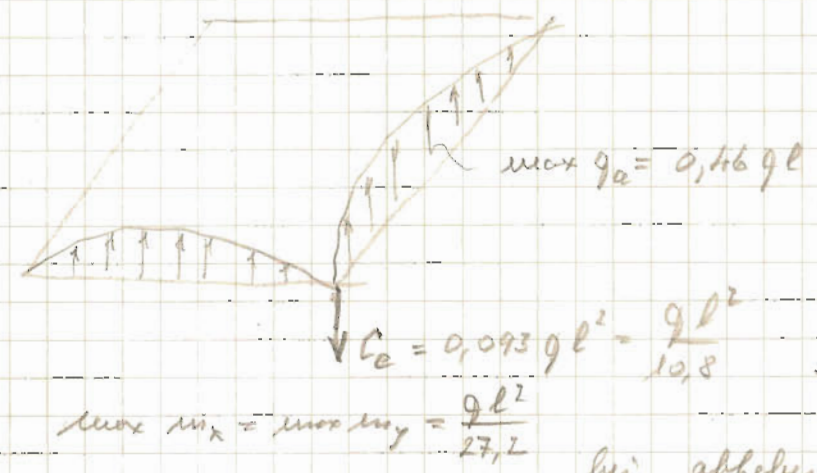
.20	-.50	.105-14	.663-15	-.003-15	.472 00	.472 00	-.472 00	44.9	.228-15	.132 01
	-.40	.516 00	.330 00	.286 00	.431 00	.741 00	-.123 00	43.5	-.212 00	.782 00
	-.30	.935 00	.595 00	.384 00	.327 00	.834 00	.145 00	36.0	-.385 00	.448 00
	-.20	.121 01	.771 00	.405 00	.107 00	.857 00	.310 00	23.5	-.489 00	.222 00
	-.10	.135 01	.856 00	.400 00	.609-01	.864 00	.392 00	7.4	-.533 00	.491-01
	.00	.134 01	.853 00	.385 00	-.728-01	.864 00	.374 00	-8.6	-.522 00	-.112 00
	.10	.120 01	.763 00	.353 00	-.198 00	.844 00	.272 00	-22.0	-.453 00	-.300 00
	.20	.934 00	.595 00	.268 00	-.304 00	.777 00	.864-01	-30.8	-.313 00	-.557 00
	.30	.571 00	.368 00	.534-01	-.356 00	.600 00	-.178 00	-33.0	-.779-01	-.943 00
	.40	.197 00	.130 00	-.443 00	-.286 00	.249 00	-.562 00	-22.5	.273 00	-.155 01
	.50	-.241-14	-.142-14	-.152 01	.145-14	-.100-14	-.152 01	.0	.686 00	-.258 01
.30	-.50	.772-15	.516-15	-.644-15	.608 00	.688 00	-.688 00	45.0	.213-15	.109 01
	-.40	.301 00	.272 00	.217 00	.616 00	.862 00	-.371 00	43.7	-.420 00	.600 00
	-.30	.688 00	.479 00	.204 00	.459 00	.852 00	-.879-01	38.9	-.699 00	.333 00
	-.20	.894 00	.613 00	.296 00	.274 00	.771 00	.138 00	29.9	-.851 00	.163 00
	-.10	.994 00	.677 00	.291 00	.845-01	.695 00	.273 00	11.8	-.913 00	.361-01
	.00	.990 00	.674 00	.280 00	-.100 00	.690 00	.256 00	-13.5	-.898 00	-.821-01
	.10	.884 00	.608 00	.257 00	-.275 00	.759 00	.106 00	-28.7	-.803 00	-.219 00
	.20	.680 00	.484 00	.197 00	-.423 00	.787 00	-.106 00	-35.6	-.606 00	-.408 00
	.30	.422 00	.310 00	.448-01	-.503 00	.698 00	-.342 00	-37.5	-.266 00	-.700 00
	.40	.147 00	.117 00	-.316 00	-.421 00	.374 00	-.573 00	-31.3	.284 00	-.119 01
	.50	-.172-14	-.876-15	-.116 01	.221-14	-.100-14	-.116 01	.0	.112 01	-.213 01
.40	-.50	.408-15	.285-15	-.340-15	.845 00	.845 00	-.845 00	45.0	.156-15	.629 00
	-.40	.202 00	.157 00	.118 00	.746 00	.884 00	-.608 00	44.2	-.633 00	.329 00
	-.30	.365 00	.272 00	.151 00	.548 00	.763 00	-.340 00	41.8	-.983 00	.178 00
	-.20	.474 00	.345 00	.156 00	.325 00	.589 00	-.875-01	36.9	-.116 01	.868-01
	-.10	.527 00	.379 00	.153 00	.100 00	.417 00	.115 00	20.7	-.124 01	.191-01
	.00	.524 00	.378 00	.147 00	-.118 00	.428 00	.977-01	-22.8	-.122 01	-.432-01
	.10	.469 00	.343 00	.135 00	-.324 00	.580 00	-.101 00	-36.1	-.111 01	-.115 00
	.20	.365 00	.276 00	.104 00	-.502 00	.700 00	-.318 00	-40.1	-.879 00	-.216 00
	.30	.225 00	.181 00	.261-01	-.603 00	.712 00	-.504 00	-41.3	-.463 00	-.375 00
	.40	.792-01	.715-01	-.164 00	-.520 00	.487 00	-.579 00	-38.6	.246 00	-.655 00
	.50	-.894-15	-.392-15	-.636 00	.280-14	-.400-15	-.636 00	.0	.149 01	-.123 01

.50	-.50	.807-30	.574-30	-.672-30	.904 00	.904 00	-.904 00	45.0	.126-15	.128-14
-.40	-.40	.402-15	.320-15	.236-15	.793 00	.793 00	-.793 00	45.0	-.718 00	.659-15
-.30	-.30	.723-15	.552-15	.299-15	.580 00	.580 00	-.580 00	45.0	-.109 01	.354-15
-.20	-.20	.938-15	.697-15	.309-15	.342 00	.342 00	-.342 00	45.0	-.129 01	.171-15
-.10	-.10	.104-14	.765-15	.302-15	.105 00	.105 00	-.105 00	44.9	-.137 01	.379-16
.00	.00	.103-14	.763-15	.291-15	.124 00	.124 00	-.124 00	-44.9	-.135 01	-.853-16
.10	.10	.920-15	.694-15	.260-15	.342 00	.342 00	-.342 00	-45.0	-.124 01	-.228-15
.20	.20	.724-15	.561-15	.207-15	.529 00	.529 00	-.529 00	-45.0	-.991 00	-.420-15
.30	.30	.447-15	.372-15	.534-16	.639 00	.639 00	-.639 00	-45.0	-.548 00	-.744-15
.40	.40	.157-15	.148-15	-.321-15	.557 00	.557 00	-.557 00	-45.0	.223 00	-.131-14
.50	.50	-.175-29	-.721-30	-.127-14	.303-14	.246-14	-.373-14	39.0	.163 01	-.251-14



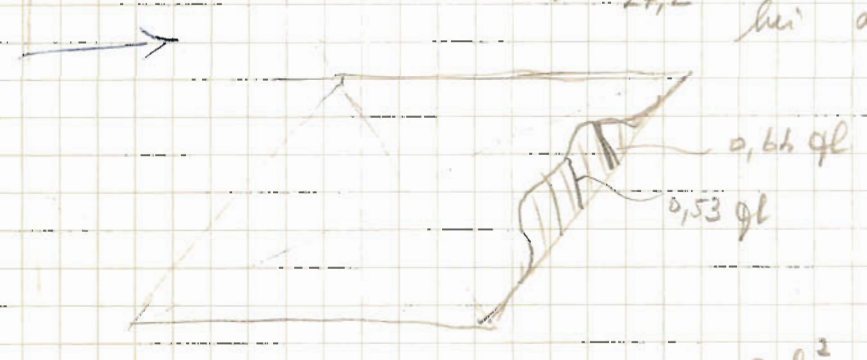
Drillbewehrung bei
nicht besterter Verbindung
(gelenkige Lagerung)

Verteilung der Auflageschäfte mit Zweifachbindung
 $l_x = l_y$



druck. Riegel
Verbindung in rechteckigen
keine Drillbewehrung

bei abhebenden Laster



$max m_x = max m_y = \frac{q l^2}{23,6}$; d.h. 15% größer als $q l^2 / 27,2$

d.h. wenn keine Bewehrung oder Drillbewehrung,
dann höhere Feldbewehrung + Risse

8.2 Einflußflächen

A. Pucher, Einflußfelder elastischer Platten
Springer Verlag 1964

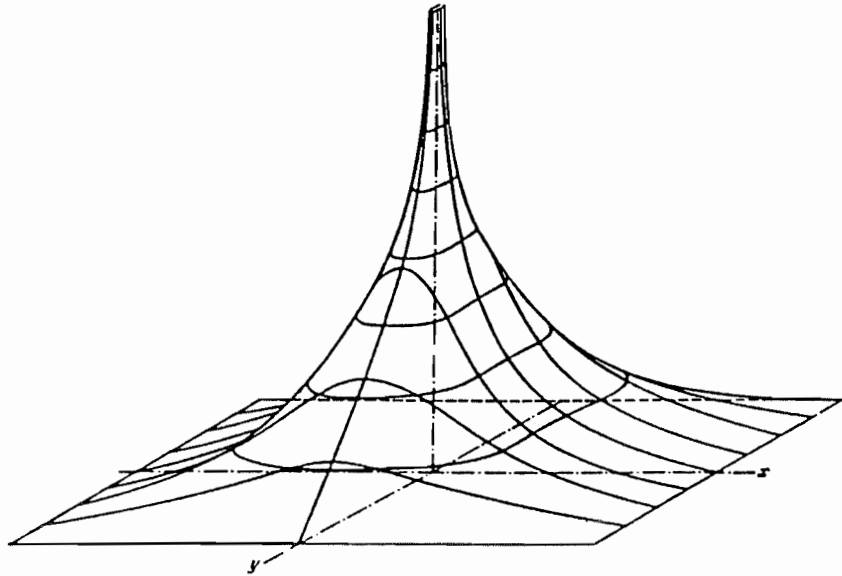
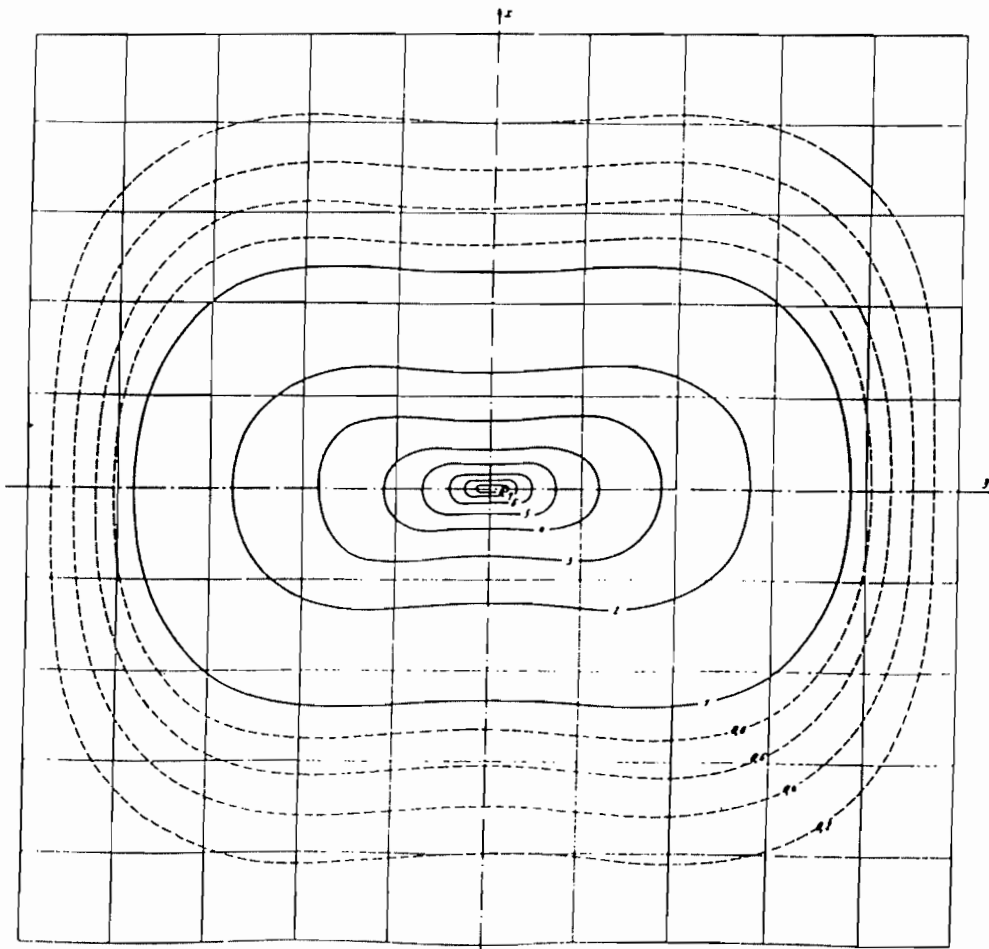
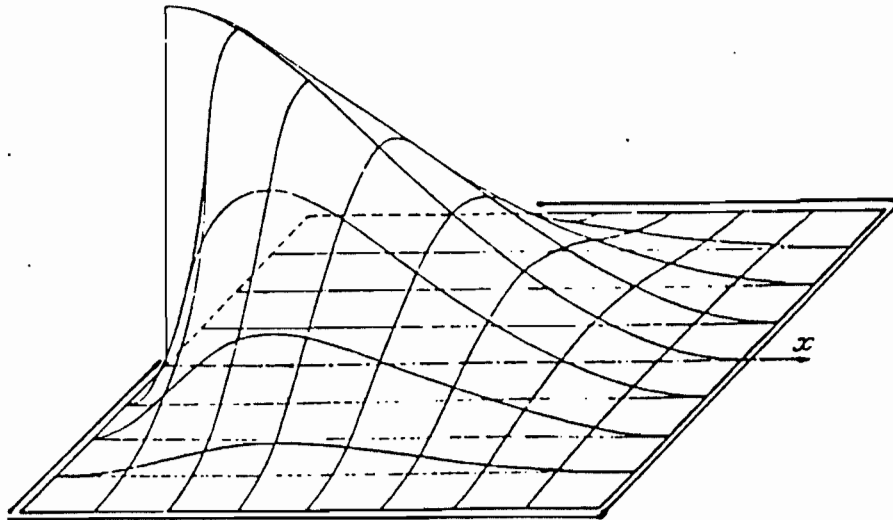


Abb. 2. Schrägbild eines Momenten Einflußfeldes mit dem willkürlich abgebrochenen, nach Unendlich gehenden Schlauch endlichen Inhaltos über dem Aufpunkt
Fig. 2. Isometric projection of a moment influence surface with the infinite trunk of finite volume above the reference point, truncated arbitrarily.

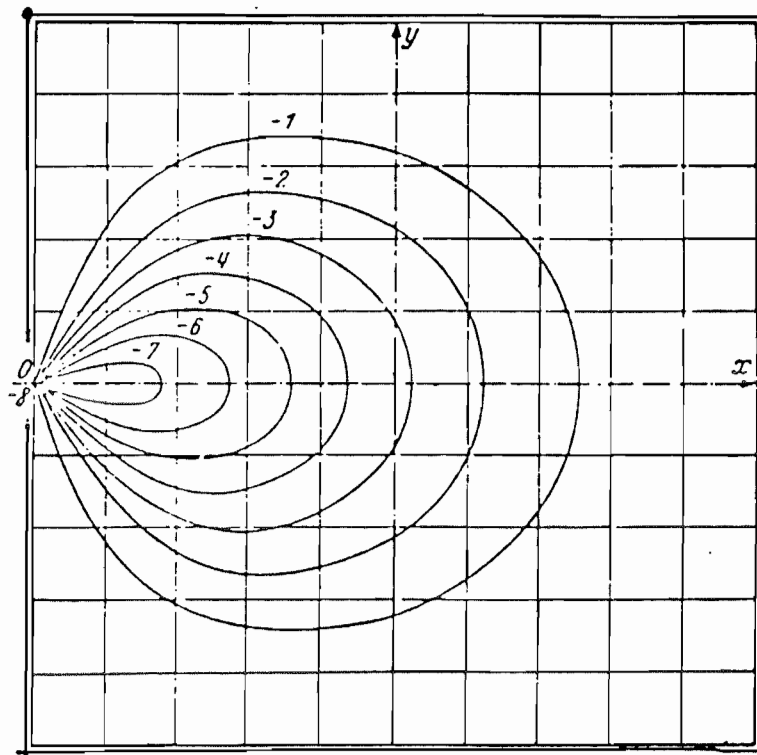


Tafel 28 m_x -Einflußfeld für die Feldmitte einer Rechteckplatte mit vier frei aufliegenden Rändern ($a/b = 1.0$, 8 n fach)

Chart 24 m_x influence surface for the centre of a rectangular plate with four supported edges ($a/b = 1.0$, 8 n times)



a)



b)

m_x Stützmoment Einflußfeld für die Mitte der ~~unteren~~ Seite einer Rechteckplatte mit vier eingespannten Rändern (b/a = ~~1,0~~ 8/7) 1,0
 m_x Support-moment influence surface for the center of the ~~bottom~~ edge of a rectangular plate with four edges restrained (b/a = ~~1,0~~ 8/7) 1,0

Quelle unbekannt

9.2 Viereckselemente

9.2.1 Vierknoten-Rechteckelement *mit* Schubverzerrungen (SRI-Element : shear reduced integration)

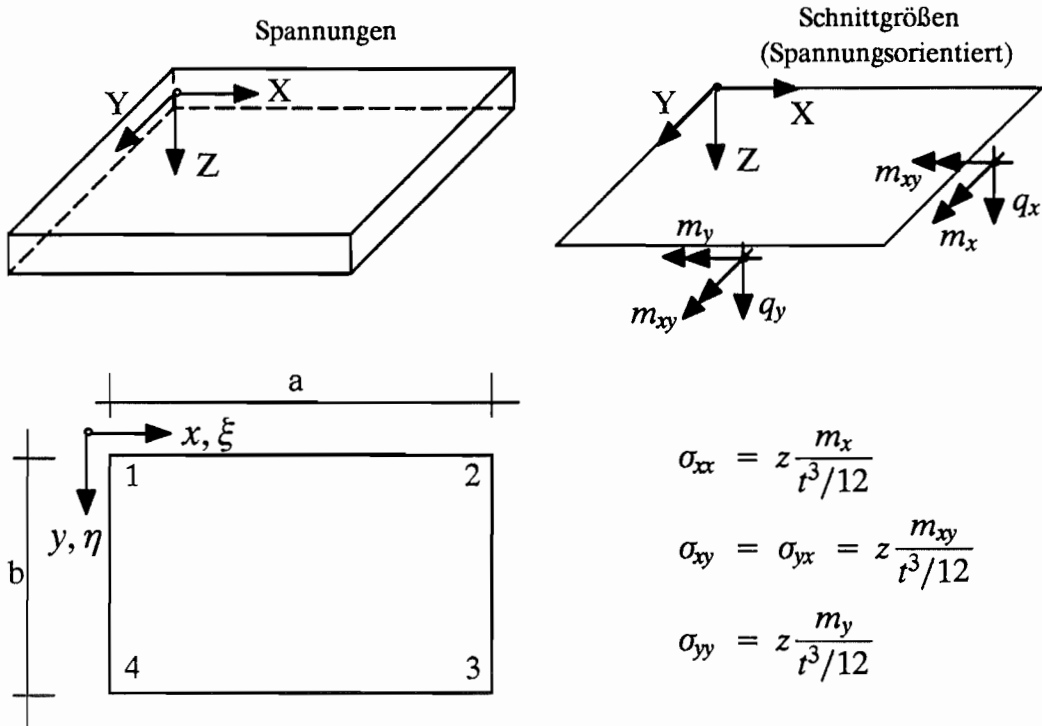
siehe Vorlesungsumdruck: Finite Element Methoden I (WS 93/94)

die Seiten 2-11 entfallen!

9.2.2 Vierknoten-Rechteckelement ohne Schubverzerrungen

(Schäferelement : mit bikubischem Ansatz für w)

9.2.2.1 Bezeichnung für das Plattenelement :



$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= z \frac{m_x}{t^3/12} \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = z \frac{m_{xy}}{t^3/12} \\ \sigma_{yy} &= z \frac{m_y}{t^3/12} \end{aligned}$$

9.2.2.2 Grundlegende Beziehungen

Prinzip der virtuellen Arbeiten :

$$-\delta W = \underbrace{\int_A \delta \epsilon^T \mathbf{s} \, dA}_{\text{I}} - \underbrace{\int_s \delta u^T \bar{p}_s \, ds}_{\text{II}} - \underbrace{\int_A \delta u^T \bar{p}_A \, dA}_{\text{III}} = 0$$

$$\epsilon^T = \{ \kappa_x, \kappa_y, 2\kappa_{xy} \} \quad \mathbf{s}^T = \{ m_x, m_y, m_{xy} \}$$

I innere virtuelle Arbeit δW_i

II Äußere virtuelle Arbeit aus Linienlasten $\bar{p}_s (s)$

III Äußere virtuelle Arbeit aus Flächenlasten $\bar{p}_A (x, y)$

Kinematik :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \mathbf{D} \mathbf{u} \\ \mathbf{u} &= [w(x, y)] \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_x^2 \\ -\partial_y^2 \\ -2\partial_x \partial_y \end{bmatrix} \cdot [w]$$

Werkstoffgesetz :

$$\mathbf{s} = \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon} \quad \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\text{Plattensteifigkeit : } B = \frac{\overbrace{Et^3}}{12(1-\nu^2)}$$

Innere virtuelle Arbeit :

$$\delta W_i = \int_A \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon} \, dA$$

$$\int_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{u} \, dA$$

9.2.2.3 Verschiebungsansatz und Formfunktionen Ansatzfunktionen

1. Wahl eines Ansatzes für w : bikubisches Polynom 3. Grades

1	η	η^2	ξ^3
ξ	$\xi\eta$	$\xi\eta^2$	$\xi\eta^3$
ξ^2	$\xi^2\eta$	$\xi^2\eta^2$	$\xi^2\eta^3$
ξ^3	$\xi^3\eta$	$\xi^3\eta^2$	$\xi^3\eta^3$

Schema des verwendeten Polynoms

Ansatz : $w(\xi, \eta) = N_u(\xi, \eta) \hat{w}$

mit :

$$\mathbf{N}_u = [\text{const.} \mid \text{linear} \mid \text{quadratisch} \mid \text{kubisch} \mid \dots \mid \dots]$$

$$\mathbf{N}_u = [1 \mid \xi\eta \mid \xi^2 \xi\eta \eta^2 \mid \xi^3 \xi^2\eta \xi\eta^2 \eta^3 \mid \xi^3\eta \xi^2\eta^2 \xi\eta^3 \mid \xi^3\eta^2 \xi^2\eta^3 \mid \xi^3\eta^3]$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \{ \hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3, \dots, \hat{w}_{16} \} \quad (\text{generalisierte Verschiebungen bzw. Freiwerte des Ansatzes})$$

2. Formfunktionen :

Die Freiwerte $\hat{\mathbf{w}}$ werden durch mechanisch sinnvolle Unbekannte \mathbf{v} ersetzt
(Knotenverschiebung bzw. Knotenvariable)

$$\mathbf{v} = \mathbf{H} \hat{\mathbf{w}} \quad \rightarrow \quad \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{G} \mathbf{v}$$

$$w(\xi, \eta) = N_u(\xi, \eta) \mathbf{G} \mathbf{v} = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{v} \quad ; \quad \mathbf{N} = N_u \mathbf{G}$$

Die Zahl der Knotenverschiebungen muß der Zahl der linear unabhängigen Terme des Ansatzes entsprechen. Je Knoten sind daher 4 Unbekannte zu wählen :

$$\mathbf{v}^T = \{ v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \}$$

mit

$$\mathbf{v}^{T_k} = \left\{ w \mid a \cdot \varphi_x^* \mid b \cdot \varphi_y^* \mid a \cdot b \cdot \vartheta \right\}_k$$

$$\varphi_x^* = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \varphi_y^* = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad \vartheta = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Berechnung der Matrix $\mathbf{G} = \mathbf{H}^{-1}$

a) Erstellen der Matrix \mathbf{H} aus der Beziehung

$$\mathbf{v} = \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{w}} \quad (\text{siehe dazu Anhang 1 Seite 17})$$

Die Matrix \mathbf{H} enthält die diskreten Werte des Ansatzes $\mathbf{N}_u(\xi, \eta)$ an den Elementknoten.

b) Bilden der Matrix \mathbf{G} durch Inversion von \mathbf{H}

$$\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{siehe dazu Anhang 2})$$

Ergebnis :

$$w(\xi, \eta) = \mathbf{N}_u(\xi, \eta) \mathbf{G} \mathbf{v} = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{v} \quad (\text{die Koeffizienten der Matrix } \underline{\mathbf{N}} \text{ stellen Formfunktionen dar)}$$

3. Verzerrungen

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a^2} N_{u,\xi\xi} \\ -\frac{1}{b^2} N_{u,\eta\eta} \\ -\frac{2}{ab} N_{u,\xi\eta} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{B}_u \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} ;$$

9.2.2.4. Steifigkeitsmatrix

Einsetzen des Ansatzes in das Prinzip der virtuellen Arbeiten :

$$w(\xi, \eta) = \mathbf{N}_u(\xi, \eta) \mathbf{G} \mathbf{v}$$

$$\epsilon(\xi, \eta) = \mathbf{D} \mathbf{N}_u(\xi, \eta) \mathbf{G} \mathbf{v}$$

$$= \mathbf{B}_u(\xi, \eta) \mathbf{G} \mathbf{v} ; \quad \mathbf{B}_u = \mathbf{D} \mathbf{N}_u$$

$$\delta W_i = \int_A \delta \epsilon^T \mathbf{s} dA = \delta \mathbf{v}^T \underbrace{\mathbf{G}^T a b \int \int_{\xi \eta} \mathbf{B}_u^T \mathbf{E} \mathbf{B}_u d\eta d\xi}_{\text{Elementsteifigkeitsmatrix } \mathbf{k}^i} \mathbf{G} \mathbf{v}$$

(Konsistente Knotenkräfte s.S. 25 bzw. Abschnitt 9.2.2.5)

Matrizenmultiplikation $\mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B}_u$

Multiplikationsschema :

		\mathbf{B}_u		
\mathbf{E}		$\mathbf{E} \mathbf{B}_u$		
\mathbf{B}_u^T		$\mathbf{B}_u^T \mathbf{E} \mathbf{B}_u$		
		$\frac{1}{a^2} \mathbf{N}_{u,\xi\xi}$		
		$\frac{1}{b^2} \mathbf{N}_{u,\eta\eta}$		$= \mathbf{B}_u$
		$\frac{2}{ab} \mathbf{N}_{u,\xi\eta}$		
$\mathbf{E} = \mathbf{B}x$	1	ν	$\frac{1}{a^2} \mathbf{N}_{u,\xi\xi} + \frac{\nu}{b^2} \mathbf{N}_{u,\eta\eta}$	$x \mathbf{B} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}_u$
	ν	1	$\frac{\nu}{a^2} \mathbf{N}_{u,\xi\xi} + \frac{1}{b^2} \mathbf{N}_{u,\eta\eta}$	
			$\frac{1-\nu}{2}$	
\mathbf{B}_u^T	$\frac{1}{a^2} (\mathbf{N}_{u,\xi\xi})^T$	$\frac{1}{b^2} (\mathbf{N}_{u,\eta\eta})^T$	$\frac{2}{ab} (\mathbf{N}_{u,\xi\eta})^T$	$x \mathbf{B} = \mathbf{B}_u^T \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}_u$

$$\mathbf{k}^i = B a b \mathbf{G}^T \int \int_{\xi \eta} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^4} (\mathbf{N}_{u,\xi\xi})^T \mathbf{N}_{u,\xi\xi} + \\ \frac{\nu}{a^2 b^2} (\mathbf{N}_{u,\eta\eta})^T \mathbf{N}_{u,\xi\xi} + \\ \frac{\nu}{a^2 b^2} (\mathbf{N}_{u,\xi\xi})^T \mathbf{N}_{u,\eta\eta} + \\ \frac{1}{b^4} (\mathbf{N}_{u,\eta\eta})^T \mathbf{N}_{u,\eta\eta} + \\ \frac{2(1-\nu)}{a^2 b^2} (\mathbf{N}_{u,\xi\eta})^T \mathbf{N}_{u,\xi\eta} \end{bmatrix} d\eta d\xi \mathbf{G}$$

Im Anhang 3 ist die Steifigkeitsmatrix in Abhängigkeit von den Seitenlängen a und b und der Querkontraktionszahl ν aufgeführt.

Jeder Koeffizient k_{ij} , $i, j = 1, 16$ besteht aus 4 Anteilen :

$$k_{ij} = k_{ij}^a + k_{ij}^b + k_{ij}^c + k_{ij}^d$$

Sie ergeben sich aus :

$$B a b \mathbf{G}^T \int \int_{\xi \eta} \frac{1}{a^4} (\mathbf{N}_{u,\xi\xi})^T \mathbf{N}_{u,\xi\xi} d\eta d\xi \mathbf{G} = k_{ij}^a$$

$$B a b \mathbf{G}^T \int \int_{\xi \eta} \frac{1}{b^4} (\mathbf{N}_{u,\eta\eta})^T \mathbf{N}_{u,\eta\eta} d\eta d\xi \mathbf{G} = k_{ij}^b$$

$$B a b \mathbf{G}^T \int \int_{\xi \eta} \frac{1}{a^2 b^2} (\mathbf{N}_{u,\xi\eta})^T \mathbf{N}_{u,\xi\eta} d\eta d\xi \mathbf{G} = k_{ij}^c$$

$$B a b \mathbf{G}^T \int \int_{\xi \eta} \frac{\nu}{a^2 b^2} [(\mathbf{N}_{u,\eta\eta})^T \mathbf{N}_{u,\xi\xi} + (\mathbf{N}_{u,\eta\eta})^T \mathbf{N}_{u,\eta\eta} - 2(\mathbf{N}_{u,\xi\eta})^T \mathbf{N}_{u,\xi\eta}] d\eta d\xi \mathbf{G} = k_{ij}^d$$

Mit $N_{16} = 6300$, $a = \frac{a}{b}$ erhält man die im Anhang angegebenen Ausdrücke

$$k_{ij} = \frac{B}{N_{16} b^2} \begin{bmatrix} () \frac{1}{a^3} + \\ () a + \\ () \frac{1}{a} + \\ () \frac{\nu}{a} \end{bmatrix}$$

NB : a ist gegenüber SRI-Element
der Reziprokwert !!

Anhang 1 : Transformation

$$\mathbf{v} = \mathbf{H} \hat{\mathbf{w}}$$

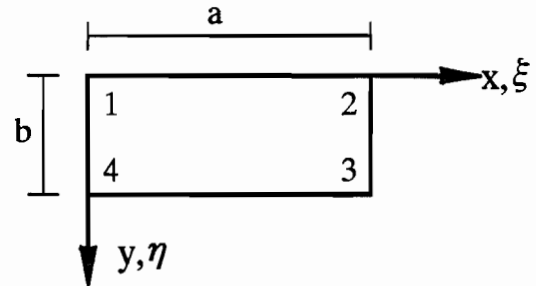
Ersetzen der Freiwerte $\hat{\mathbf{W}}$ durch mechanisch sinnvolle Unbekannte \mathbf{V} .

..... (16 Freiwerte bzw. Unbekannte am Element)

$$w(\xi, \eta) = \mathbf{N}_u(\xi, \eta) \hat{\mathbf{w}}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{H} \hat{\mathbf{w}}$$

mit $\mathbf{v}_k = \left\{ w \mid a\varphi_x^* \mid b\varphi_y^* \mid ab\vartheta \right\}_k$



$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 & \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^3 & \xi^3\eta & \xi^2\eta^2 & \xi\eta^3 & \xi^3\eta^2 & \xi^2\eta^3 & \xi^3\eta^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2\xi & \eta & 0 & 3\xi^2 & 2\xi\eta & \eta^2 & 0 & 3\xi^2\eta & 2\xi\eta^2 & \eta^3 & 3\xi^2\eta^2 & 2\xi\eta^3 & 3\xi^2\eta^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \xi & 2\eta & 0 & \xi^2 & 2\xi\eta & 3\eta^2 & \xi^3 & 2\eta\xi^2 & 3\eta^2\xi & 2\eta\xi^3 & 3\eta^2\xi^3 & 3\eta^2\xi^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\xi & 2\eta & 0 & 3\xi^2 & 4\xi\eta & 3\eta^2 & 6\xi^2\eta & 6\xi\eta^2 & 9\xi^2\eta^2 \end{bmatrix}$$

$\xi = 0, \eta = 0$ Knoten ①	w_1	1																
	$a\varphi_{x1}^*$		-1															
	$a\varphi_{y1}^*$			-1														
	$ab\vartheta_1$					1												
$\xi = 1, \eta = 0$ Knoten ②	w_2	1	1	1														
	$a\varphi_{x2}^*$		-1		-2				-3									
	$a\varphi_{y2}^*$			-1		-1			-1			-1						
	$ab\vartheta_2$					1			2			3						
$\xi = 1, \eta = 1$ Knoten ③	w_3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	$a\varphi_{x3}^*$		-1		-2	-1			-3	-2	-1		-3	-2	-1	-3	-2	-3
	$a\varphi_{y3}^*$			-1		-1	-2		-1	-2	-3	-1	-2	-3	-2	-3	-3	-3
	$ab\vartheta_3$					1			2	2		3	4	3	6	6	9	
$\xi = 0, \eta = 1$ Knoten ④	w_4	1		1			1				1							
	$a\varphi_{x4}^*$		-1			-1				-1				-1				
	$a\varphi_{y4}^*$			-1			-2				-3							
	$ab\vartheta_4$					1				2				3				

$$\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{H}} \hat{\underline{\mathbf{w}}} \quad (\text{generalische Freiwerte})$$

Anhang 3: Plattenelementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k}^i Schäferelement : 16-er Ansatz mit bikubischem Hermiteschem Interpolationspolynom für $w(\xi, \eta)$

Vorfaktor: $\frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{6300b^2}$; $a = \frac{a}{b}$; $\mathbf{v}_k = [w; a\varphi_x; b\varphi_y; abd]$ (Vgl. Seite 16 unten)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$1/a^3$	a	$1/a$	v/a
1	28080	-14040	-3960	1980	-28080	-14040	3960	1980	-9720	-4860	-2340	-1170	9720	-4860	2340	-1170	$1/a^3$	a	$1/a$	v/a
	28080	-3960	-14040	1980	9720	2340	-4860	-1170	-9720	-2340	-4860	-1170	-28080	3960	-14040	1980				
	18144	-1512	-1512	126	-18144	-1512	1512	126	18144	1512	1512	126	-18144	1512	-1512	126				
	0	-7560	-7560	1260	0	0	7560	630	0	0	0	0	0	0	0	630				
2	-14040	9360	1980	-1320	14040	4680	-1980	-660	4860	1620	1170	390	-4860	3240	-1170	780	$1/a^3$	a	$1/a$	v/a
	-3960	720	1980	-360	-2340	-540	1170	270	2340	540	1170	270	3960	-720	1980	-360				
	-1512	2016	126	-168	1512	-504	-126	42	-1512	504	-126	42	1512	-2016	126	-168				
	-7560	0	7560	-840	0	0	-630	210	0	0	0	0	7560	0	630	0				
3	-3960	1980	720	-360	3960	1980	-720	-360	2340	1170	540	270	-2340	1170	-540	270	$1/a^3$	a	$1/a$	v/a
	-14040	1980	9360	-1320	-4860	-1170	3240	780	4860	1170	1620	390	14040	-1980	4680	-660				
	-1512	126	2016	-168	1512	126	-2016	-168	-1512	-126	504	42	1512	-126	-504	42				
	-7560	7560	0	-840	7560	630	0	0	0	0	0	0	0	-630	0	210				
4	1980	-1320	-360	240	-1980	-660	360	120	-1170	-390	-270	-90	1170	-780	270	-180	$1/a^3$	a	$1/a$	v/a
	1980	-360	-1320	240	1170	270	-780	-180	-1170	-270	-390	-90	-1980	360	-660	120				
	126	-168	-168	224	-126	42	168	-56	126	-42	-42	14	-126	168	42	-56				
	1260	-840	-840	0	-630	210	0	0	0	0	0	0	-630	0	210	0				
5	-28080	14040	3960	-1980	28080	14040	-3960	-1980	9720	4860	2340	1170	-9720	4860	-2340	1170	$1/a^3$	a	$1/a$	v/a
	9720	-2340	-4860	1170	28080	3960	-14040	-1980	-28080	-3960	-14040	-1980	-9720	2340	-4860	1170				
	-18144	1512	1512	-126	18144	1512	-1512	-126	-18144	-1512	-1512	-126	18144	-1512	1512	-126				
	0	0	7560	-630	0	7560	-7560	-1260	0	0	-7560	0	-630	0	0	0				
6	-14040	4680	1980	-660	14040	9360	-1980	-1320	4860	3240	1170	780	-4860	1620	-1170	390	$1/a^3$	a	$1/a$	v/a
	2340	-540	-1170	270	3960	720	-1980	-360	-3960	-720	-1980	-360	-2340	540	-1170	270				
	-1512	-504	126	42	1512	2016	-126	-168	-1512	-2016	-126	-168	1512	504	126	42				
	0	0	630	210	7560	0	-7560	-840	-7560	0	-630	0	0	0	0	0				
7	3960	-1980	-720	360	-3960	-1980	720	360	-2340	-1170	-540	-270	2340	-1170	540	-270	$1/a^3$	a	$1/a$	v/a
	-4860	1170	3240	-780	-14040	-1980	9360	1320	14040	1980	4680	660	-4860	-1170	1620	-390				
	1512	-126	-2016	168	-1512	-126	2016	168	1512	126	-504	-42	-1512	126	504	-42				
	7560	-630	0	0	-7560	-7560	0	840	0	630	0	-210	0	0	0	0				
8	1980	-660	-360	120	-1980	-1320	360	240	-1170	-780	-270	-180	1170	-390	270	-180	$1/a^3$	a	$1/a$	v/a
	-1170	270	780	-180	-1980	-360	1320	240	1980	360	660	120	-1170	-270	390	-90				
	126	42	-168	-56	-126	-168	168	224	126	168	-42	-56	-126	-42	42	14				
	630	210	0	0	-1260	-840	840	0	630	0	-210	0	0	0	0	0				
	w_1	$a\varphi_{x1}$	$b\varphi_{y1}$	abd_1	w_2	$a\varphi_{x2}$	$b\varphi_{y2}$	abd_2	w_3	$a\varphi_{x3}$	$b\varphi_{y3}$	abd_3	w_4	$a\varphi_{x4}$	$b\varphi_{y4}$	abd_4				

Knoten ①

Knoten ②

k^i Fortsetzung

$$\text{Vorfaktor: } \frac{E I^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{6300b^2}; \quad a = \frac{a}{b}; \quad v_k = \{w; a\varphi_x; b\varphi_y; abd\}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
9	-9720	4860	2340	-1170	9720	4860	-2340	-1170	28080	14040	3960	1980	-28080	14040	-3960	1980	$1/a^3$
	-9720	2340	4860	-1170	-28080	-3960	14040	1980	28080	3960	14040	1980	9720	-2340	4860	-1170	a
	18144	-1512	-1512	126	-18144	-1512	1512	126	18144	1512	1512	126	-18144	1512	-1512	126	$1/a$
	0	0	0	0	0	-7560	0	630	0	7560	7560	1260	0	0	-7560	630	ν/a
10	-4860	1620	1170	-390	4860	3240	-1170	-780	14040	9360	1980	1320	-14040	4680	-1980	660	$1/a^3$
	-2340	540	1170	-270	-3960	-720	1980	360	3960	720	1980	360	2340	-540	1170	-270	a
	1512	504	-126	-42	-1512	-2016	126	168	1512	2016	126	168	-1512	-504	-126	-42	$1/a$
	0	0	0	0	-7560	0	630	0	7560	0	7560	840	0	0	-630	-210	ν/a
11	-2340	1170	540	-270	2340	1170	-540	-270	3960	1980	720	360	-3960	1980	-720	360	$1/a^3$
	-4860	1170	1620	-390	-14040	-1980	4680	660	14040	1980	9360	1320	4860	-1170	3240	-780	a
	1512	-126	504	-42	-1512	-126	-504	-42	1512	126	2016	168	-1512	126	-2016	168	$1/a$
	0	0	0	0	-630	0	-210	0	7560	7560	840	0	-7560	630	0	ν/a	
12	-1170	390	270	-90	1170	780	-270	-180	1980	1320	360	240	-1980	660	-360	120	$1/a^3$
	-1170	270	390	-90	-1980	-360	660	120	1980	360	1320	240	1170	-270	780	-180	a
	126	42	42	14	-126	-168	-42	-56	126	168	168	224	-126	-42	-168	-56	$1/a$
	0	0	0	0	-630	0	-210	0	1260	840	0	0	-630	-210	0	ν/a	
13	9720	-4860	-2340	1170	-9720	-4860	2340	1170	-28080	-14040	-3960	-1980	28080	-14040	3960	-1980	$1/a^3$
	-28080	3960	14040	-1980	-9720	-2340	4860	1170	9720	2340	4860	1170	28080	-3960	14040	-1980	a
	-18144	1512	1512	-126	18144	1512	-1512	-126	-18144	-1512	-1512	-126	18144	-1512	1512	-126	$1/a$
	0	7560	0	-630	0	0	0	0	0	0	-7560	-630	0	7560	-1260	ν/a	
14	-4860	3240	1170	-780	4860	1620	-1170	-390	14040	4680	1980	660	-14040	9360	-1980	1320	$1/a^3$
	3960	-720	-1980	360	2340	540	-1170	-270	-2340	-540	-1170	-270	-3960	720	-1980	360	a
	1512	-2016	-126	168	-1512	504	126	-42	1512	-504	126	-42	-1512	2016	-126	168	$1/a$
	7560	0	-630	0	0	0	0	0	0	0	630	-210	-7560	0	840	ν/a	
15	2340	-1170	-540	270	-2340	-1170	540	270	-3960	-1980	-720	-360	3960	-1980	720	-360	$1/a^3$
	-14040	1980	4680	-660	-4860	-1170	1620	390	4860	1170	3240	780	14040	-1980	9360	-1320	a
	-1512	126	-504	42	1512	126	504	42	-1512	-126	-2016	-168	1512	-126	2016	-168	$1/a$
	0	630	0	210	0	0	0	0	-7560	-630	0	0	7560	0	-840	ν/a	
16	-1170	780	270	-180	1170	390	-270	-90	1980	660	360	120	-1980	1320	-360	240	$1/a^3$
	1980	-360	-660	120	1170	270	-390	-90	-1170	-270	-780	-180	-1980	360	-1320	240	a
	126	-168	42	-56	-126	42	-42	14	126	-42	168	-56	-126	168	-168	224	$1/a$
	630	0	210	0	0	0	0	0	630	-210	0	0	840	-840	0	ν/a	
	w_1	$a\varphi_{x1}$	$b\varphi_{y1}$	$abd\vartheta_1$	w_2	$a\varphi_{x2}$	$b\varphi_{y2}$	$abd\vartheta_2$	w_3	$a\varphi_{x3}$	$b\varphi_{y3}$	$abd\vartheta_3$	w_4	$a\varphi_{x4}$	$b\varphi_{y4}$	$abd\vartheta_4$	

Knoten ③

Knoten ④

9.2.2.5 Konsistenter Lastvektor :

für eine konstante Flächenbelastung q ergibt sich für den konsistenten Lastvektor $\bar{\mathbf{p}}^i$ des Elements i entsprechend Integral III von Seite 12 der folgende Ausdruck :

$$\delta W_a = \int_A \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}}_A dA = \int_A \delta w \bar{q} dA = \delta \mathbf{v}_T^T \int_A \mathbf{N}^T \bar{q} dA = \delta \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{p}}^i$$

Die Auswertung der Integration liefert für $\bar{\mathbf{p}}^i$:

$$\bar{\mathbf{p}}^T = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{144} \end{bmatrix}}_{\text{Knöten } \textcircled{1}} \mid \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{144} \end{bmatrix}}_{\textcircled{2}} \mid \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{144} \end{bmatrix}}_{\textcircled{3}} \mid \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{144} \end{bmatrix}}_{\textcircled{4}} \right\} \cdot a \cdot b \cdot \bar{q}$$

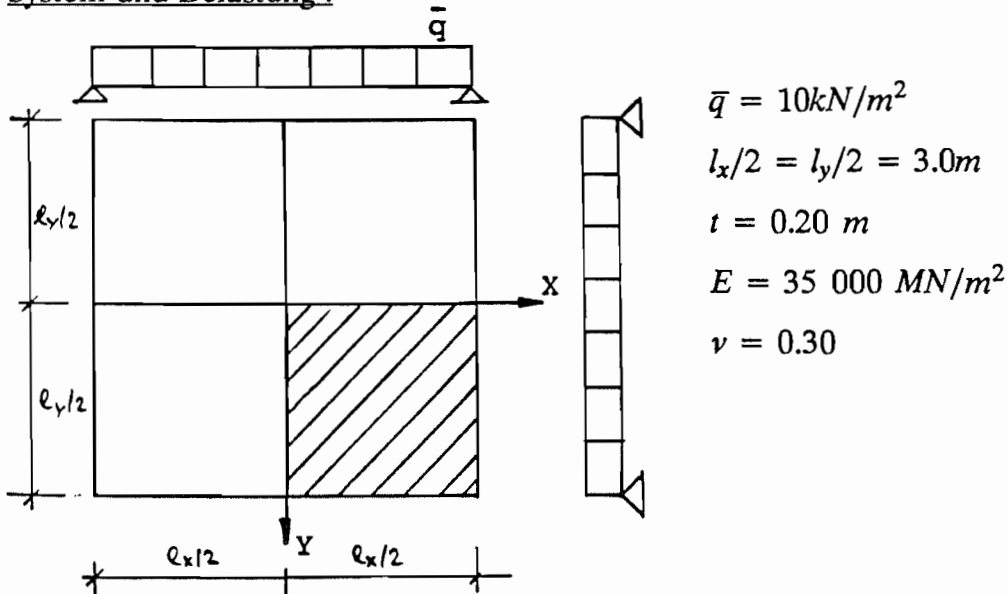
Der zugehörige Verschiebungsvektor \mathbf{v}^T (Freiheitsgrade am Element) hat die Form :
(vgl. Seite 14)

$$\mathbf{v}^T = \left\{ w_1 \ a\varphi_{x1}^* \ b\varphi_{y1}^* \ ab\vartheta_1 \mid w_2 \ a\varphi_{x2}^* \ b\varphi_{y2}^* \ ab\vartheta_2 \mid w_3 \ a\varphi_{x3}^* \ b\varphi_{y3}^* \ ab\vartheta_3 \mid w_4 \ a\varphi_{x4}^* \ b\varphi_{y4}^* \ ab\vartheta_4 \right\}$$

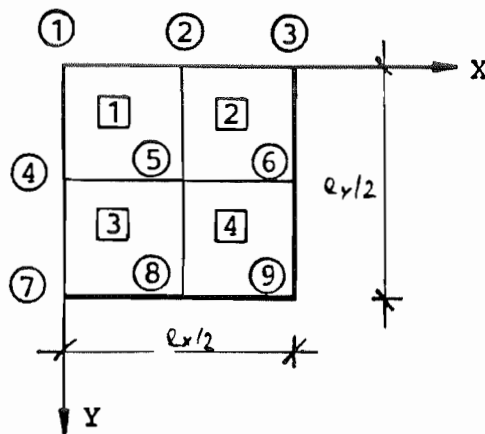
9.3 Beispiel zur Systemberechnung

Berechnung einer gelenkig gelagerten Rechteckplatte unter Gleichlast mit dem Schäferelement :

System und Belastung :



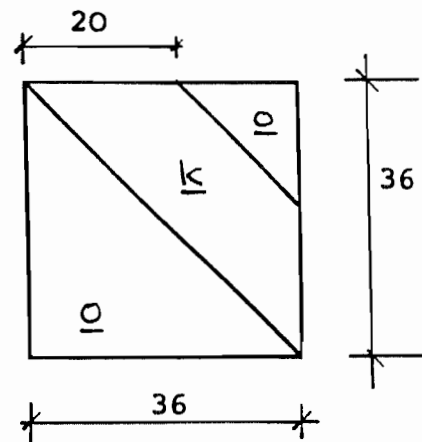
Diskretisierung unter Ausnutzung der Symmetrie :



Berechnung der Bandbreite des Gleichungssystems (ohne Berücksichtigung der Randbedingungen)

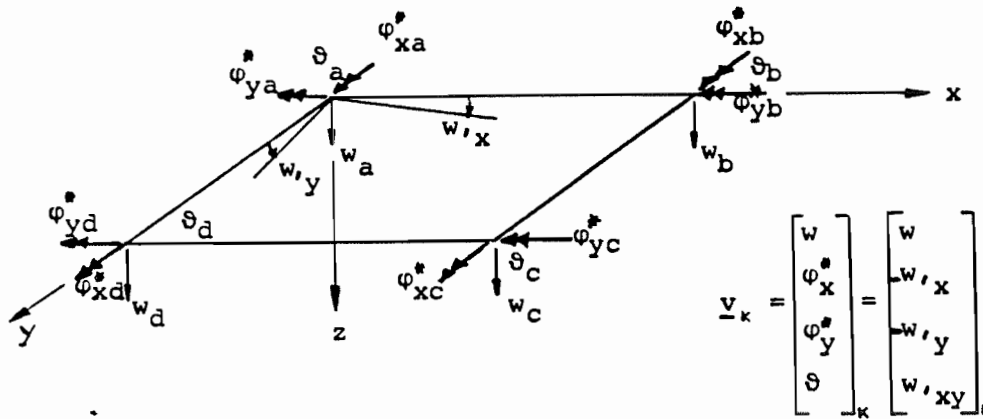
$$9 \text{ Knoten} \hat{=} 4 \text{ Freiheitsgrade} = 36 \text{ Gleichungen}$$

max. Knotennummerdifferenz in einem Element = 4; somit Bandbreite 4+1=5 Knoten bzw. 5·4=20 Freiheitsgrade



Elementsteifigkeitsmatrix k^i :

Die Weggrößen mit * sind mit den spannungsorientierten Kraftgrößen am positiven Schnittufer gleichgerichtet (vgl. Seite 10).



$\underline{v}_k =$ Knotenfreiheitsgrade am Knoten k

Die Elementsteifigkeitsmatrix k^i kann numerisch oder aus Tabelle (Kapitel 9.2/Seiten 19 und 20) ermittelt werden.

Da globales und lokales Koordinatensystem parallel und gleichgerichtet (koaxial) sind, genügt es, eine Elementsteifigkeitsmatrix k^i zu ermitteln (und im Rechner abzuspeichern).

Elementlastvektor \bar{P}^i :

In einfachster Näherung könnte die Flächenlast \bar{q} durch statisch äquivalente vertikale Knotenkräfte ersetzt werden. Die genauere Erfassung der Flächenlast erfolgt über den *konsistenten Lastvektor* entsprechend Kapitel 9.2/Seite 21; der konsistente Lastvektor für das Schärelement i (4 Knoten : 1 bis 4 bzw. a bis d) enthält auch Knotenbiege- und drillmomente; er lautet für eine Gleichlast \bar{q} :

$$\bar{P}^{iT} = \left[\bar{P}_1^T \quad \bar{P}_2^T \quad \bar{P}_3^T \quad \bar{P}_4^T \right]^i \quad \text{mit} \quad \bar{P}_1^T = \left[\frac{1}{4} \quad \frac{-1}{24} \quad \frac{-1}{24} \quad \frac{1}{144} \right] a \quad b \quad \bar{q}$$

$$\bar{P}_2^T = \left[\frac{1}{4} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{-1}{24} \quad \frac{-1}{144} \right] a \quad b \quad \bar{q}$$

$$\bar{P}_3^T = \left[\frac{1}{4} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{1}{144} \right] a \quad b \quad \bar{q}$$

$$\bar{P}_4^T = \left[\frac{1}{4} \quad \frac{-1}{24} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{-1}{144} \right] a \quad b \quad \bar{q}$$

mit $a=b=1,5 \text{ m}$ und $\bar{q} = 10 \text{ kN/m}^2$ ergibt sich z.B.:

$$\bar{P}_1^T = [5,625 \quad -0,9375 \quad -0,9375 \quad 0,15625]$$

Bildung der Gesamtsteifigkeitsmatrix K :

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix **K** kann auf zwei Wegen ermittelt werden :

Variante 1 : Bildung von **K** durch Überlagerung von Untermatrizen der Elementsteifigkeitsmatrizen k^i (knotenweise) ohne Berücksichtigung der Randbedingungen. Die Randbedingungen werden anschließend durch Streichen von Spalten und Zeilen berücksichtigt (vgl. z.B. Baustatik 3 Abschnitt 5.4.5).

Variante 2 : Bildung von **K** unter Berücksichtigung der Randbedingungen (vgl. z.B. Baustatik 3 Abschnitt 5.4.6 oder FTWI Abschnitt 6.1.5) -> Überlagerung für jeden Systemfreiheitsgrad.

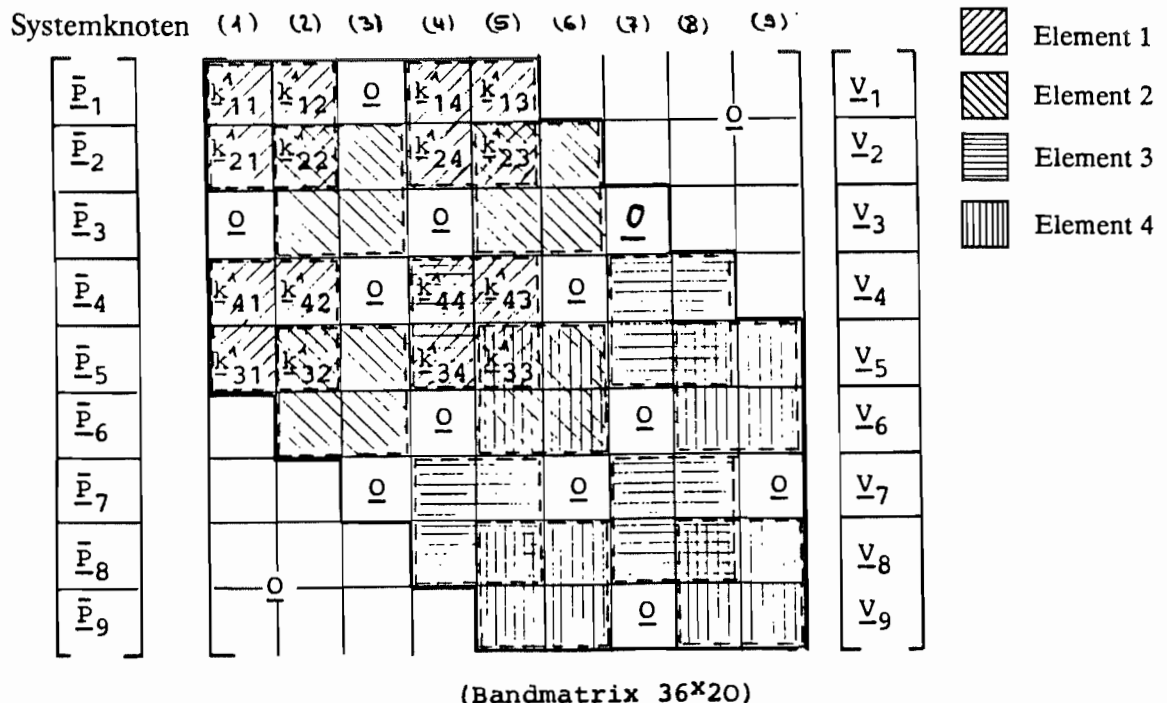
Zuordnung von Element- und Knotennummern (Topologie) - Inzidenztafel :

Elementnummer	k ₁	k ₂	k ₃	k ₄	— Elementknoten
	a	b	c	d	— Elementknoten
1	1	2	5	4	— Systemknoten
2	2	3	6	5	
3	4	5	8	7	
4	5	6	9	8	

globale Knotennummern

Schematische Darstellung der Überlagerung zur Gesamtsteifigkeitsmatrix K

(Variante 1) : Exemplarisch sind die knotenbezogenen Untermatrizen k_{jk}^i (Dimension 4x4 da je Knoten 4 Freiheitsgrade vorhanden) für den Einbau von Element 1 angegeben. Die Indizes j, k geben die Position der Untermatrizen in der Elementsteifigkeitsmatrix k^i an ($j, k = 1,2,3,4$, da 4 Knoten !).

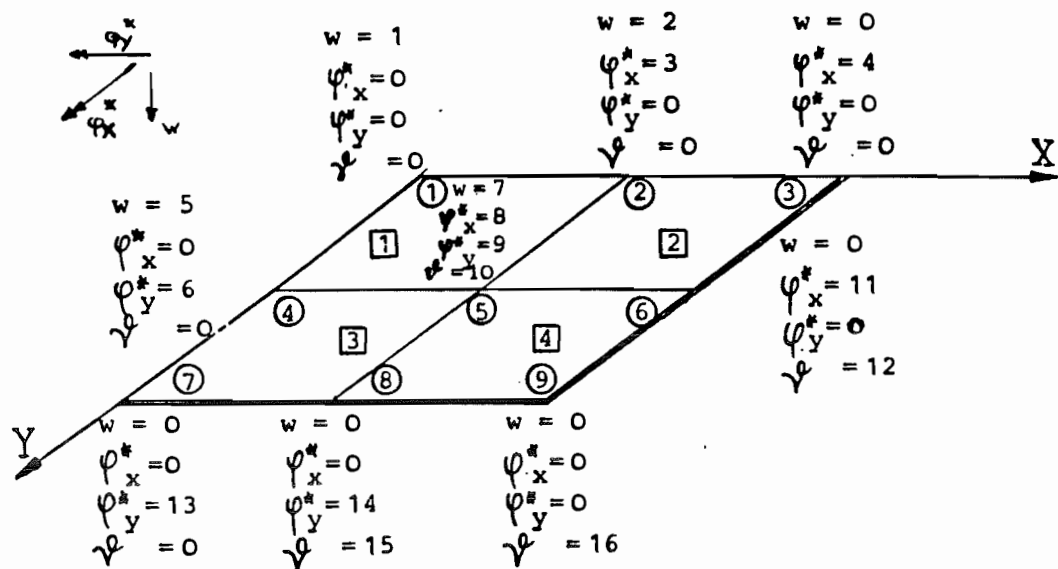


Die Randbedingungen sind durch Streichen von Spalten und Zeilen einzuarbeiten !

Randbedingungen :

Symmetrie zur x-Achse: $\varphi_y^* = \psi = 0$
 Symmetrie zur y-Achse: $\varphi_x^* = \psi = 0$
 gelenkige Lagerung parallel zur y-Achse: $w = \varphi_y^* = 0$
 gelenkige Lagerung parallel zur x-Achse: $w = \varphi_x^* = 0$

Systemfreiheitsgrade (unter Berücksichtigung der Randbedingungen : Variante 2) :



- Die globalen Freiheitsgrade (*Systemfreiheitsgrade*) werden fortlaufend in der Reihenfolge der Systemknoten numeriert.
- Für jeden Systemfreiheitsgrad wird anschließend eine Gleichgewichtsgleichung (*Systemgleichung*) aufgestellt.
Das Aufstellen der Systemgleichungen entspricht der knotenweisen Überlagerung von Untermatrizen nach Variante 1.
Das Unterlassen des Aufstellens von Gleichungen für unterdrückte Freiheitsgrade (z.B. bei Auflagern) entspricht dem Streichen von Spalten und Zeilen aus dem vollständigen Gleichungssystem nach Variante 1.
- Diese Variante der Bildung von **K** wird in der Regel in Programmen (z.B. CAL) verwendet.
- Die *lokalen Koordinatensysteme* an den Elementen und das *globale Koordinatensystem* am System sind identisch (koaxial). Transformationen sind daher vor dem Zusammenbau zur Gesamtsteifigkeitsmatrix **K** nicht erforderlich.

Numerierung der Systemfreiheitsgrade :

Systemknoten	w_k	φ_{xk}	φ_{yk}	ϑ_k
1	1	0	0	0
2	2	3	0	0
3	0	4	0	0
4	5	0	6	0
5	7	8	9	10
6	0	11	0	12
7	0	0	13	0
8	0	0	14	15
9	0	0	0	16

Zuordnung von Freiwerten am Element (1 - 16) und Systemfreiheitsgraden (1 - 16) :

Elementnummer	$k_1 = a$				$k_2 = b$				$k_3 = c$				$k_4 = d$			
	w_1	φ_{x1}^*	φ_{y1}^*	ϑ_1	w_2	φ_{x2}^*	φ_{y2}^*	ϑ_2	w_3	φ_{x3}^*	φ_{y3}^*	ϑ_3	w_4	φ_{x4}^*	φ_{y4}^*	ϑ_4
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	$k_1 = 1$				$k_2 = 2$				$k_3 = 5$				$k_4 = 4$			
	1	0	0	0	2	3	0	0	7	8	9	10	5	0	6	0
2	$k_1 = 2$				$k_2 = 3$				$k_3 = 6$				$k_4 = 5$			
	2	3	0	0	0	4	0	0	0	11	0	12	7	8	9	10
3	$k_1 = 4$				$k_2 = 5$				$k_3 = 8$				$k_4 = 7$			
	5	0	6	0	7	8	9	10	0	0	14	15	0	0	13	0
4	$k_1 = 5$				$k_2 = 6$				$k_3 = 9$				$k_4 = 8$			
	7	8	9	10	0	11	0	12	0	0	0	16	0	0	14	15

- Die Größe der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} ergibt sich zu 16x16.
Wird \mathbf{K} als Bandmatrix gespeichert, so ergibt sich eine Matrix 16x11.
- Bei der Bildung von \mathbf{K} nach Variante 2 werden die Koeffizienten der Elementsteifigkeitsmatrizen einzeln auf die entsprechenden Koeffizienten von \mathbf{K} aufaddiert. (Bei Variante 1 dagegen knotenweise mit den entsprechenden Untermatrizen \mathbf{k}_{jk}^i !)

Schematische Darstellung der Überlagerung zur Gesamtsteifigkeitsmatrix **K**

(Variante 2) : Exemplarisch sind die Koeffizienten k_{jk}^1 der Elementsteifigkeitsmatrix k^1 für den Einbau von Element 1 angegeben. Die Indizes j, k geben Zeile und Spalte aus der Steifigkeitsmatrix an ($j, k = 1, 2, 3, \dots, 16$, da 16 Freiwerte am Element !).

Gleichungsnummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
Systemfreiheitsgrad	w_1	w_2	φ_{x2}	φ_{x3}	w_4	φ_{y4}	w_5	φ_{x5}	φ_{y5}	φ_{z5}	φ_{x6}	φ_{y6}	φ_{y7}	φ_{y8}	φ_{y9}	φ_{y9}	System- konstanten
1	$k_{1,1}^1$	$k_{1,5}^1$	$k_{1,6}^1$		$k_{1,13}^1$	$k_{1,15}^1$	$k_{1,9}^1$	$k_{1,10}^1$	$k_{1,11}^1$	$k_{1,12}^1$							1
2																\emptyset	2
3																	3
4																	4
5																	5
6	$k_{15,1}^1$	$k_{15,5}^1$	$k_{15,6}^1$		$k_{15,13}^1$	$k_{15,15}^1$	$k_{15,9}^1$	$k_{15,10}^1$	$k_{15,11}^1$	$k_{15,12}^1$							6
7																	7
8																	8
9																	9
10																	10
11																	11
12																	12
13																	13
14																	14
15		\emptyset															15
16																	16

↑
Gleichungsnummer (Systemfreiheitsgrad)

Bildung des Gesamtlastvektors \bar{P} :

Der Gesamtlastvektor \bar{P} hat 16 Koeffizienten (16 Systemfreiheitsgrade), wenn die Randbedingungen sofort berücksichtigt werden :

		Gleichungs- nummer	korrespondierende Verschiebung	System- knoten
P_1^1	5,625	1	w	1
$P_5^1 + P_1^2$	5,625 * 2	2	w	2
$P_6^1 + P_2^2$	0,9375-0,9375	3	φ_x^*	
P_6^2	0,9375	4	φ_x^*	3
$P_{13}^1 + P_1^3$	5,625 * 2	5	w	
$P_{15}^1 + P_3^2$	0,9375-0,9375	6	φ_y^*	4
$P_9^1 + P_{13}^2 + P_5^3 + P_1^4$	5,625 * 4	7	w	
$P_{10}^1 + P_{14}^2 + P_6^3 + P_2^4$	0	8	φ_x^*	
$P_{11}^1 + P_{15}^2 + P_7^3 + P_3^4$	0	9	φ_y^*	5
$P_{12}^1 + P_{16}^2 + P_8^3 + P_4^4$	0	10	ϑ	
$P_{10}^2 + P_6^4$	0,9375 * 2	11	φ_x^*	
$P_{12}^2 + P_8^4$	0	12	ϑ	6
P_{15}^3	0,9375	13	φ_y^*	7
$P_{11}^3 + P_{15}^4$	0,9375 * 2	14	φ_y^*	
$P_{12}^3 + P_{16}^4$	0	15	ϑ	8
P_{12}^4	0,15625	16	ϑ	9

Bei den Koeffizienten P_j^i im Lastvektor \bar{P} steht i für das Element i und j für die Komponente j (Zeile bzw. Spalte) aus dem Elementlastvektor \bar{P}^i bzw. \bar{P}^{iT} .

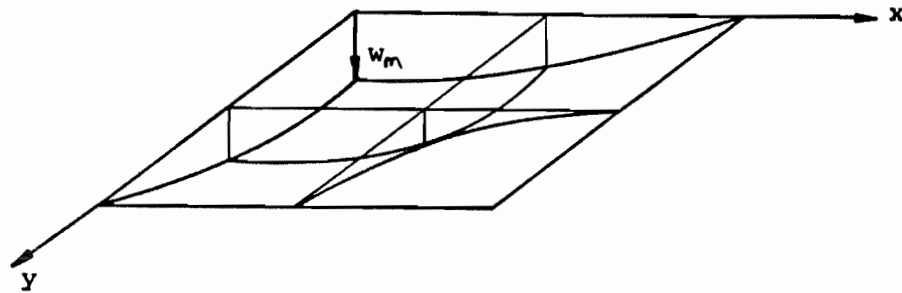
Lösen des Gleichungssystems $KV = \bar{P}$:

Durch Lösen des Gleichungssystems (Gleichgewichtsgleichungen) erhält man die gesuchten unbekanntenen Weggrößen V_k in den Systemknoten k .

Berechnungsergebnisse :

Durchbiegung w_m in Feldmitte (Systemknoten 1) in [mm] :

	Berechnung mit konsistentem Lastvektor	Berechnung mit angenähertem Lastvektor (nur vert. Knotenlasten)
Diskretisierung mit 4 Elementen	0,2055	0,1866
Diskretisierung mit 9 Elementen	0,2054	0,197
analytische Lösung	0,2051	0,2051



Biegemoment m_{xm} in Feldmitte und Drillmoment m_{xye} im Eck in [kNm] :

	Berechnung mit konsistentem Lastvektor		Berechnung mit angenähertem Lastvektor (nur vert. Knotenlasten)	
	m_{xm}	m_{xye}	m_{xm}	m_{xye}
Diskretisierung mit 4 Elementen	17,82	-11,76	16,59	-9,74
Diskretisierung mit 9 Elementen	17,42	-11,72		
analytische Lösung	17,21	-11,67	17,21	-11,67

Anmerkungen zur Berechnung der Schnittgrößen :

aus Kinematik und Werkstoffgesetz folgt :

$$\mathbf{s} = \mathbf{E}_B \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{mit} \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\text{sowie} \quad \mathbf{E}_B = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} ; \quad B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

bei Vernachlässigung der Schubverzerrungen :

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} m_x^* \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{xx} \\ \dot{\varphi}_{yy} \\ \dot{\varphi}_{xy} + \dot{\varphi}_{yx} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{bmatrix}$$

mit den Ansatzfunktionen ergibt sich für beliebige Stellen (x,y) :

$$w(x,y) = \mathbf{N}_u(x,y) \quad \mathbf{G} \quad \mathbf{v}$$

$$w_{,xx}(x,y) = \mathbf{N}_{u,xx}(x,y) \quad \mathbf{G} \quad \mathbf{v}$$

$$w_{,yy}(x,y) = \mathbf{N}_{u,yy}(x,y) \quad \mathbf{G} \quad \mathbf{v}$$

$$w_{,xy}(x,y) = \mathbf{N}_{u,xy}(x,y) \quad \mathbf{G} \quad \mathbf{v}$$

sowie :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}(x,y) \quad \mathbf{v}$$

$$\mathbf{s}(x,y) = \mathbf{E}_B \mathbf{B}(x,y) \quad \mathbf{v}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_U(x,y) \quad \mathbf{G} \quad \mathbf{v}$$

$$\mathbf{s}(x,y) = \mathbf{E}_B \mathbf{B}_U(x,y) \quad \mathbf{G} \quad \mathbf{v}$$

für eine programmtechnische Realisierung wird häufig (z.B. in CAL) mit einer *Spannungsauswertungsmatrix* \mathbf{r}^i für das Element i gearbeitet; sie ergibt sich zu :

$$\mathbf{r}^i(x,y) = \mathbf{E}_B \mathbf{B}(x,y) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{r}^i(x,y) = \mathbf{E}_B \mathbf{B}_U(x,y) \quad \mathbf{G}$$

die Schnittgrößen ergeben sich damit zu :

$$\mathbf{s}^i(x,y) = \mathbf{r}^i(x,y) \quad \mathbf{v}^i$$

Anmerkungen zur programmtechnischen Realisierung :

Zur Vorzeichenfestlegung bei Plattenelementen :

Bei der Herleitung des Schäferelements werden 4 Knotenvariable v_k verwendet. $v_k = [w \ a\varphi_x^* \ b\varphi_y^* \ ab\vartheta]$ (Abschnitt 9.2.2). Ihre positive Richtung (Bild 1) entspricht den *spannungsorientierten* positiven Schnittgrößen am positiven Schnittufer -> *Vorzeichendefinition 1*.

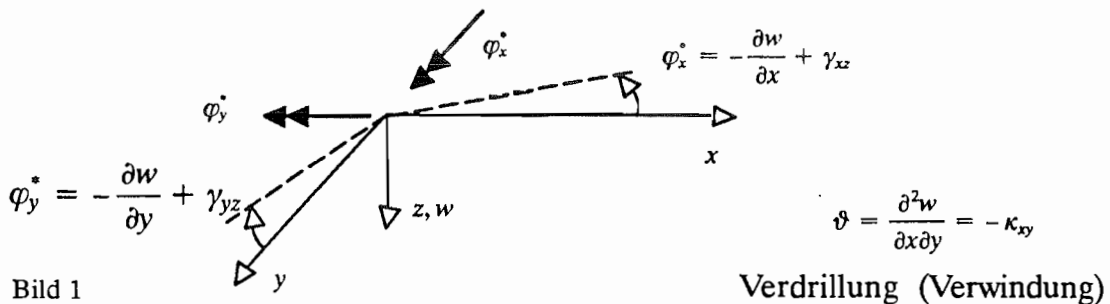
Bei der Programmierung werden zweckmäßigerweise die *koordinatenorientierten* Verdrehungen (Bild 2) als Rechnunbekannte des Weggrößenverfahrens benutzt -> *Vorzeichendefinition 2*. Die neuen Knotenvariablen lauten $v_k = [w \ \varphi_x \ \varphi_y \ \vartheta]$ (Bild 2).

Die in Abschnitt 9.2 hergeleiteten Steifigkeitsmatrizen sind daher für die programmtechnische Realisierung noch entsprechend zu verändern:

- Tauschen einiger Zeilen und Spalten (Wechsel der Indizes)
- Tauschen einiger Vorzeichen (andere Vorzeichendefinition)
- Division einiger Matrizenelemente durch die Seitenlängen a bzw. b des Elements

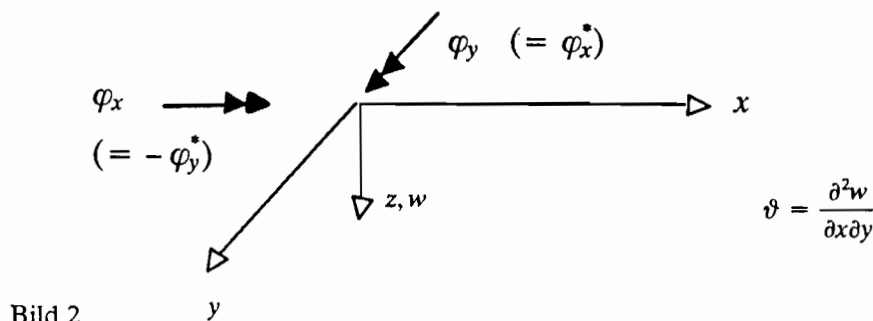
Vorzeichendefinition 1 :

- positiver Drehsinn und Indizierung der Querschnittsdrehwinkel (φ_x^* und φ_y^*) und der spannungsorientierten Schnittgrößen (m_x und m_y) am positiven Schnittufer sind identisch
- dient u.a. zur Herleitung der Differentialgleichung (Abschnitt 4)
- dient u.a. zur Herleitung der Steifigkeitsmatrizen von Plattenelementen (Absch. 9.2)
- dient u.a. zur Handberechnung von rechteckigen Plattensystemen (Abschnitt 9.3)
- entspricht der Vorzeichendefinition 1 bei den Stabtragwerken



Vorzeichendefinition 2 :

- die positiven Drehwinkel (φ_x und φ_y) sind als Knotenfreiheitsgrade rechtsdrehend um die jeweilige Koordinatenachse
- die positiven Kraftgrößen (M_x, M_y, P_z) an den Knoten sind in positiver Koordinatenrichtung orientiert
- dient u.a. zur Programmierung von Plattenelementen (z.B. CAL)
- dient u.a. zur Plattenberechnung mit Finite-Element-Programmen
- entspricht der Vorzeichendefinition 2 bei den Stabtragwerken



Zum Zusammenbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix und des Lastvektors :

Gesamtsteifigkeitsmatrix K und Lastvektoren \bar{P} mit 0 besetzen	
Schleife über alle Elemente <i>i</i>	
Schleife über alle Zeilen der Elemensteifigkeitsmatrix $j = 1, 2, \dots, 16$ (Zeilen des Gleichungssystems -> Kraftgrößen)	
Schleife über alle Spalten der Elem.-steif.-matrix $k = 1, 2, \dots, 16$ (Spalten des Gleichungssystems -> Weggrößen)	
Gesamtsteifigkeitsmatrix K :	$K_{ID_j, ID_k} := K_{ID_j, ID_k} + k_{jk}^i$
Realisierung in FORTRAN :	
NZ = ID (i, j)	NZ Zeilennummer in K
IF (NZ .NE. 0) THEN	NS Spaltennummer in K
NS = ID (i, k)	ID Inzidenztafel
IF (NS .NE. 0) THEN	(vgl. Seite 5 dieses Umdrucks)
K (NZ, NS) = K (NZ, NS) + KEL (i, j, k)	
ENDIF	KEL Koeffizient <i>j, k</i> der Elementsteifigkeitsmatrix k^i des Elements <i>i</i>
ENDIF	
Schleife über alle Lastfälle $l = 1, 2, \dots$	
Lastvektoren aus Elementlasten \bar{P}^i :	$\bar{P}_{ID_j, l} := \bar{P}_{ID_j, l} + \bar{P}_{j, l}^i$

Schleife über alle Systemfreiheitsgrade $n = 1, 2, \dots$	
Schleife über alle Lastfälle $l = 1, 2, \dots$	
gesamte Lastvektoren : (mit direkten Knotenlasten \bar{P}^*)	$\bar{P}_{n, l} = \bar{P}_{n, l} + \bar{P}_{n, l}^*$

z.B Einbau von Element 1 in **K** :

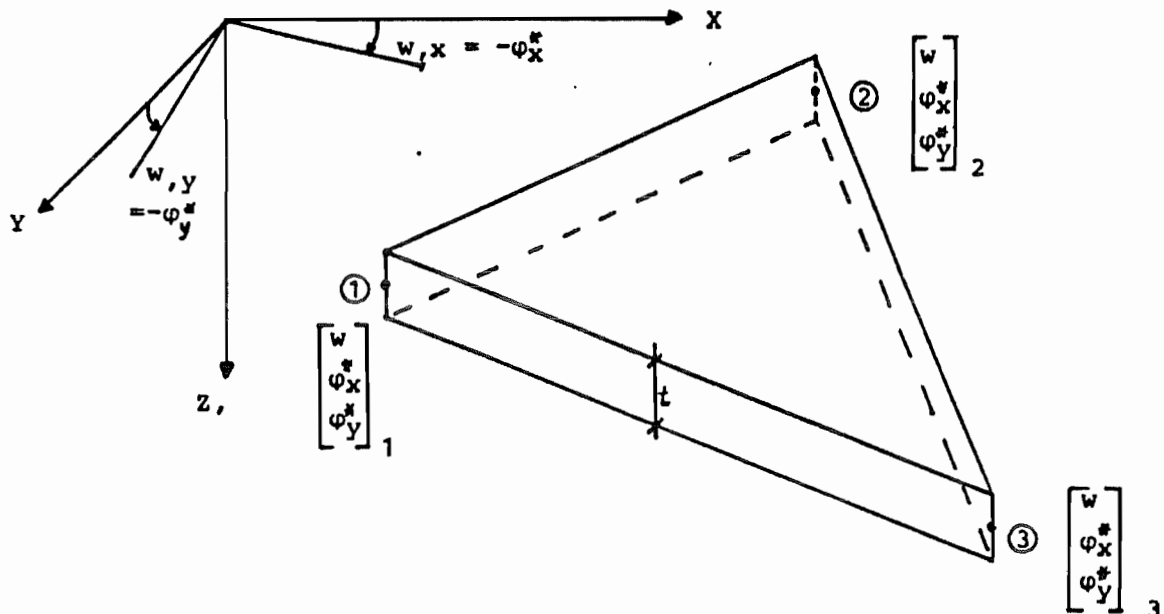
Zeile 1 :	Zeile 6 :
$K_{1,1} = K_{1,1} + k_{1,1}^1$	$K_{6,1} = K_{6,1} + k_{15,1}^1$
$K_{1,2} = K_{1,2} + k_{1,5}^1$	$K_{6,2} = K_{6,2} + k_{15,5}^1$
$K_{1,3} = K_{1,3} + k_{1,6}^1$	$K_{6,3} = K_{6,3} + k_{15,6}^1$
.
.
$K_{1,6} = K_{1,6} + k_{1,15}^1$	$K_{6,6} = K_{6,6} + k_{15,15}^1$
.
.
.

9.4 Dreieckselemente

Dreieckselemente haben den Vorteil, daß mit ihnen Platten mit unregelmäßigen Rändern gut behandelt werden können, oder daß in Bereichen hoher Spannungskonzentration die Elementgröße leicht variiert werden kann. Desweiteren läßt sich die Geometrie von doppelt gekrümmten Schalen durch stückweise ebene dreieckige Plattenelemente annähern. Dazu muß dem Biegeelement zusätzlich die Beschreibung des ebenen Spannungszustandes überlagert werden.

9.4.1 DKT-Element (Dreieck mit diskreter Kirchhoff-Theorie) mit 9 Freiheitsgraden (DKT-Element : discret Kirchhoff-theory triangle)

Elementgeometrie, Koordinatensystem, Knotenfreiheitsgrade :



Das DKT-Element besitzt als dreieckiges Plattenelement 9 Freiheitsgrade (9 Elementfreiwerte). Dies sind in den 3 Elementknoten jeweils die Freiheitsgrade w , φ_x^* und φ_y^* . Der Vektor v der Knotenverschiebungen am Element lautet demnach :

$$v^T = \begin{bmatrix} v_1^T & v_2^T & v_3^T \end{bmatrix} \quad v_i^T = \begin{bmatrix} w_i & \varphi_{xi}^* & \varphi_{yi}^* \end{bmatrix}$$

grundlegende Annahmen :

Ausgangspunkt der Ableitung des DKT-Elements ist die Plattentheorie mit Berücksichtigung der Schubverzerrungen nach Reissner bzw. Mindlin. Für dünne Platten sind die aus der Querkraft resultierenden Schubspannungen im Vergleich zu den Biegespannungen von untergeordneter Bedeutung. Damit ist die Arbeit aus Querkraftschub klein gegenüber der Arbeit aus Biegung und kann bei der Herleitung des DKT-Elements vernachlässigt werden. Diese Annahme entspricht der KIRCHHOFF-Hypothese; sie wird hier jedoch in diskreter Form an den Elementrändern eingeführt, um die Verdrehungen mit den Durchbiegungen zu verknüpfen.

Es verbleiben die virtuellen Arbeitsanteile der Biegung:

$$\delta W_i = \int_A \delta \underline{\kappa}^T \underline{E}_B \underline{\kappa} dA \quad \underline{\kappa} = \begin{bmatrix} \varphi_{xx}^* \\ \varphi_{yy}^* \\ \varphi_{xy}^* + \varphi_{yx}^* \end{bmatrix} \text{ Verzerrungen (Krümmungen)} \quad (1),(2)$$

Gleichung (1) enthält nur die ersten Ableitungen der Verdrehungen φ_x^* und φ_y^* . Folglich ist es damit verhältnismäßig einfach, verträgliche Ansatzfunktionen aufzustellen.

Zur Verknüpfung der unbekannt Variablen φ_x^* und φ_y^* mit den Durchbiegungen w an den Knoten dienen die aus der Plattentheorie mit Normalenhypothese folgenden Beziehungen

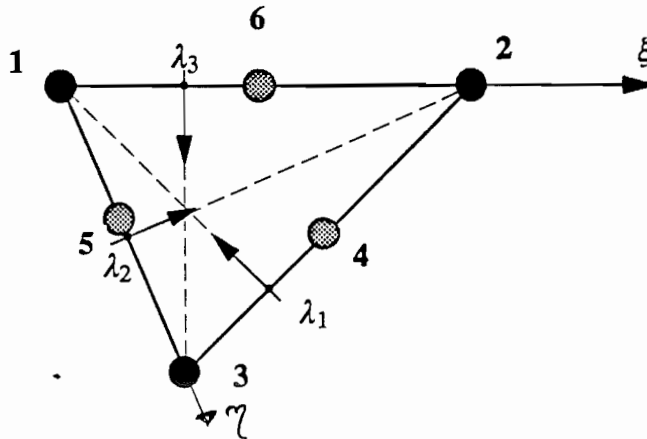
$$\varphi_x^* = - w'_{,x} \quad \text{und} \quad \varphi_y^* = - w'_{,y} ,$$

die hier an diskreten Knotenpunkten, jedoch nicht im Inneren des Elements vorgeschrieben werden. Dabei darf die gewollte Verträglichkeit der Ansätze für φ_x^* und φ_y^* nicht beeinträchtigt werden.

Schritte bei der Formulierung des DKT-Elements :

- 1) quadratische Ansatzfunktionen für φ_x^* und φ_y^* mit zunächst 6 Knoten (Eckknoten und Seitenmitten)
- 2) Kirchhoff-Hypothese ist in den diskreten Elementknoten zu erfüllen
- 3) Die Verschiebungen w sollen längs der Elementseiten kubisch verlaufen (Kompatibilität von w und φ an den Elementseiten)
- 4) Die vom Ansatz mit 6 Knoten vorhandenen 12 Freiheitsgrade (φ_x^* und φ_y^*) werden auf 9 Elementfreiwerte in den 3 Knoten reduziert. Je Knoten w, φ_x^* und φ_y^*

zu 1) Für φ_x^* und φ_y^* werden quadratische Ansatzfunktionen gewählt. Das Element wird zunächst mit 6 Knoten beschrieben.



Das Element wird entweder in den natürlichen Koordinaten ξ, η oder den Flächenkoordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (jeweils im Wertebereich 0...1) beschrieben. Die Ansätze lauten für die 6*2 Einheitsverschiebungen für φ_x^* und φ_y^* .

$$\varphi_x^*(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^6 N_{xl}(\xi, \eta) \varphi_{xl}^* \quad \text{bzw.} \quad \varphi_x^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{l=1}^6 N_{xl}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \varphi_{xl}^* \quad (3)$$

$$\varphi_y^*(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^6 N_{yl}(\xi, \eta) \varphi_{yl}^* \quad \text{bzw.} \quad \varphi_y^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{l=1}^6 N_{yl}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \varphi_{yl}^*$$

(l ist der Laufindex über die 6 Elementknoten.)

Die Formfunktionen N in Flächenkoordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ lauten :

$$\underline{N}_x(\lambda) = \underline{N}_y(\lambda) = [\lambda_1(2\lambda_1 - 1) \quad \lambda_2(2\lambda_2 - 1) \quad \lambda_3(2\lambda_3 - 1) \quad 4\lambda_1\lambda_2 \quad 4\lambda_2\lambda_3 \quad 4\lambda_3\lambda_1]$$

$$\underline{N}(\lambda) = \begin{bmatrix} \underline{N}_x(\lambda) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{N}_y(\lambda) \end{bmatrix}$$

Die Formfunktionen N in natürlichen Koordinaten ξ, η lauten :

$$\underline{N}_x(\xi, \eta) = \underline{N}_y(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} 1 - 3\xi - 3\eta + 2\xi^2 + 2\eta^2 + 4\xi\eta \\ -\xi + 2\xi^2 \\ -\eta + 2\eta^2 \\ 4\xi - 4\xi^2 - 4\xi\eta \\ 4\xi\eta \\ 4\eta - 4\eta^2 - 4\xi\eta \end{bmatrix} \quad \text{es gilt :}$$

$$\lambda_1 = 1 - \xi - \eta$$

$$\lambda_2 = \xi$$

$$\lambda_3 = \eta$$

zu 2) Die Kirchhoff-Hypothese wird in diskreter Form geschrieben:

a) in den Eckknoten : $i = 1,2,3$

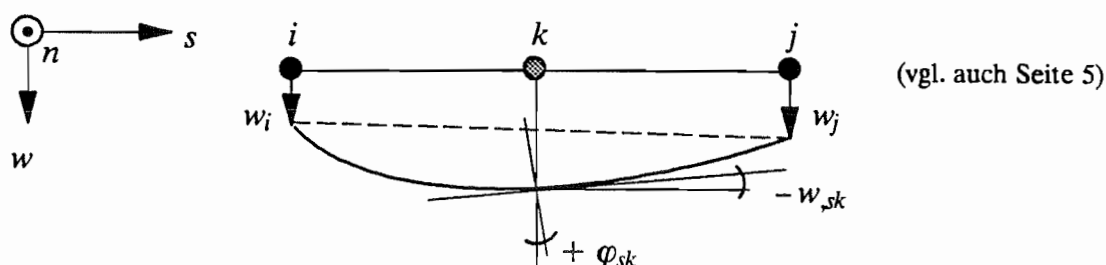
$$\underline{Y}_i = \begin{bmatrix} \varphi_x^* + w_{,x} \\ \varphi_y^* + w_{,y} \end{bmatrix} = \underline{0} \quad x,y : \text{globale Koordinaten} \quad (4)$$

b) in den Mittelknoten : $k = 4,5,6$

$$\varphi_{sk} + w_{,sk} = 0 \quad s : \text{Randkoordinate} \quad (5)$$

(nicht in Normalenrichtung!)

zu 3) Die Verschiebungen w sollen längs der Dreieckseiten (Randkoordinate s) kubisch verlaufen, damit $w_{,s}$ mit φ_s (quadratischer Ansatz !) kompatibel ist.



Die Neigung φ_{sk} im Mittelknoten k wird durch die Durchbiegungen w und die Neigungen $w_{,s}$ in den Eckknoten i und j formuliert:

$$w_{,sk} = -\frac{3}{2l_{ij}} w_i - \frac{1}{4} w_{,si} + \frac{3}{2l_{ij}} w_j - \frac{1}{4} w_{,sj} \quad (6)$$

mit $k =$ Mittelknoten der Seite ij

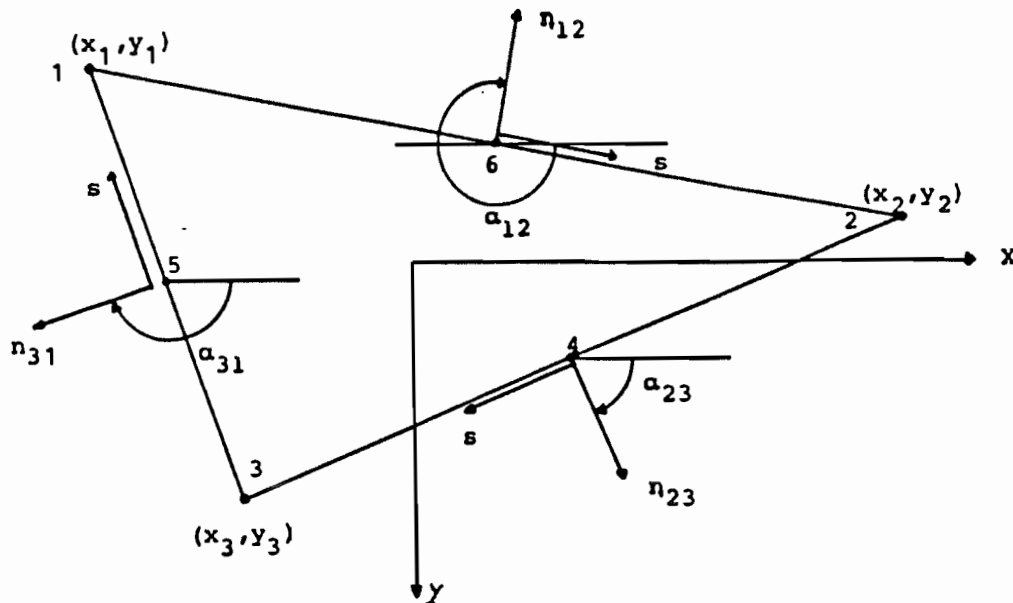
und $l_{ij} =$ Länge der Seite ij .

zu 4) Um den Ansatz von 12 Knotenfreiwerten (φ_x^*, φ_y^* in den Eck- und Seitenmittelknoten) auf 9 Knotenfreiwerte ($w, \varphi_x^*, \varphi_y^*$ in den Eckknoten) zu reduzieren, wird die Normalenneigung φ_n längs der Elementränder linear angesetzt, so daß die Verdrehung φ_{nk} an den Seitenmittelknoten durch die Verdrehung der Eckknoten ausgedrückt werden kann,

$$\varphi_{nk} = \frac{1}{2} (\varphi_{ni} + \varphi_{nj}) \quad (7)$$

wobei $k = 4,5,6$ die Seitenmittelknoten bezeichnen.

Folgerungen aus den Annahmen und der Formulierung des DKT-Elements :



Elementgeometrie

- 1) Durch die Beziehungen in den Gleichungen (3) + (7) ist zu sehen, daß die Beziehung zwischen den Verdrehungen φ und den Verschiebungen w durch Gleichung (5) gegeben ist, mit der Annahme einer kubischen Funktion von w entlang den Seiten (oder quadratische Funktion von w, s).
- 2) Es ist nicht notwendig, eine Ansatzfunktion für w innerhalb des Elements zu definieren.
- 3) Da die Durchbiegung w kubisch auf den Seiten verläuft, ist w, s wie auch φ_s quadratisch. Damit ist die KIRCHHOFF-Hypothese auf dem gesamten Rand befriedigt, wenn an drei Punkten des Randes $\gamma_s = \varphi_s + w, s = 0$ gefordert wird.
- 4) Die mit diesem Element berechnete Lösung konvergiert gegen die Lösung der KIRCHHOFF'schen Plattentheorie, da die virtuelle Arbeit der Querkräfte vernachlässigt und die KIRCHHOFF-Hypothesen längs der Ränder eingehalten wird.
- 5) Aus den bisherigen Betrachtungen folgt, daß w_i, w, s_i, φ_s und φ_n konform sind (w, n wurde nicht eingeführt, da w im Elementinnern nicht definiert ist).

Realisierung der Elementformulierung des DKT-Elements :

Um jetzt die Verdrehungen φ_x^* und φ_y^* durch die neun Knotenfreiheitsgrade

$$\underline{v}^T = \left[w_1 \quad \varphi_{x1}^* \quad \varphi_{y1}^* \quad | \quad w_2 \quad \varphi_{x2}^* \quad \varphi_{y2}^* \quad | \quad w_3 \quad \varphi_{x3}^* \quad \varphi_{y3}^* \right] \quad (8)$$

ausdrücken zu können, muß die folgende geometrische Relation an jeder Elementseite verwendet werden:

$$\begin{bmatrix} \varphi_x^* \\ \varphi_y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_n \\ \varphi_s \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} s = \sin \alpha \\ c = \cos \alpha \end{matrix} \quad (9)$$

Zur Berechnung der auf die drei Knoten bezogenen Ansatzfunktionen für die neun Knotenfreiwerte an den Eckknoten sind die Knoten in den Seitenmitten zu eliminieren. Diese längere Umformung soll hier kurz erläutert werden:

Mit Gleichung (5) wird die Verdrehung φ_{sk} auf dem Rand durch die Ableitung der Randverschiebung des Seitenmittelknotens $w_{,sk}$ ausgedrückt:

$$\varphi_{sk} = f(w_{,sk}) \quad (10)$$

Durch Einsetzen der Gleichung (6) wird die Ableitung der Randverschiebung $w_{,sk}$ des Knoten k durch die Eckverschiebungen und deren Ableitungen dargestellt:

$$\varphi_{sk} = f(w_i, w_j, w_{,si}, w_{,sj}) \quad (11)$$

Mit Gleichung (4) und (9) kann $w_{,s}$ durch φ_x^* und φ_y^* ersetzt werden.

Die Normalenneigung φ_{nk} kann durch Gl (7) und Gl (9) durch die Knotenfreiwerte φ_x^* und φ_y^* an den Eckknoten ausgedrückt werden. Damit sind die Knotenverdrehungen φ_{xk}^* , φ_{yk}^* des Elements mit ursprünglich sechs Knoten durch die Verschiebungen und die Verdrehungen an den Eckknoten w_i , φ_{xi}^* , φ_{yi}^* ausgedrückt:

$$\varphi_{xk}^*, \varphi_{yk}^* = f(w_i, \varphi_{xi}^*, \varphi_{yi}^*) \quad (12)$$

Setzen wir Gleichung (12) in Gleichung (3) ein, bekommen wir die neuen Ansatzfunktionen zu

$$\begin{aligned} \varphi_x^* &= \underline{N}_x(E, \eta) \cdot \underline{v} \\ \varphi_y^* &= \underline{N}_y(E, \eta) \cdot \underline{v} \end{aligned} \quad \underline{v} \text{ vgl. Seite 4} \quad (13)$$

bzw. Gl (8) Seite 6

Die Ableitung der Steifigkeitsmatrix erfolgt jetzt wie üblich.
Aus Gleichung (2) folgt mit Gleichung (13)

$$\underline{x} = \underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{v} = \underline{B} \cdot \underline{v} \quad (14)$$

Die Steifigkeitsmatrix wird dann

$$\underline{k}_{DKT} = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \underline{B}^T \underline{E}_B \underline{B} \, dE \, d\eta$$

wobei die exakte Integration durch 3 Gaußpunkte - jeweils in den Seitenmitten - gegeben ist, da unter dem Integral nur quadratische Terme auftreten.

Die Biegemomente \underline{m} an jedem Punkt des Elements können mit

$$\underline{m}(x, y) = \underline{E}_B \cdot \underline{B}(x, y) \cdot \underline{v} \quad (15)$$

beschrieben werden, wobei

$$x = x_1 + \xi x_{21} + \eta x_{31}$$

$$y = y_1 + \xi y_{21} + \eta y_{31}$$

ist, mit

$$x_{21} = x_2 - x_1$$

$$x_{31} = x_3 - x_1$$

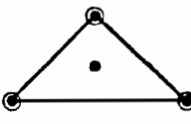
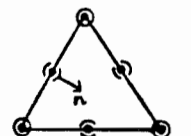
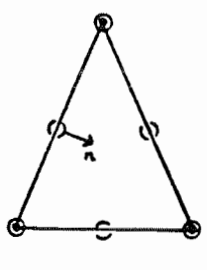
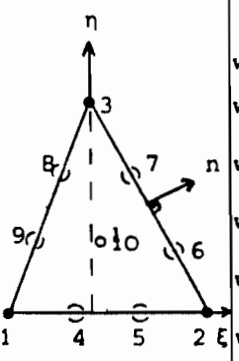
$$y_{21} = y_2 - y_1$$

$$y_{31} = y_3 - y_1$$


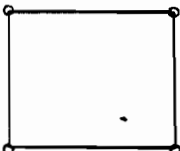
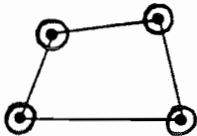
Im allgemeinen ist \underline{m} von allen Komponenten des Vektors \underline{v} abhängig.

9.5 Überblick über verschiedene Plattenelemente

Plattenelemente

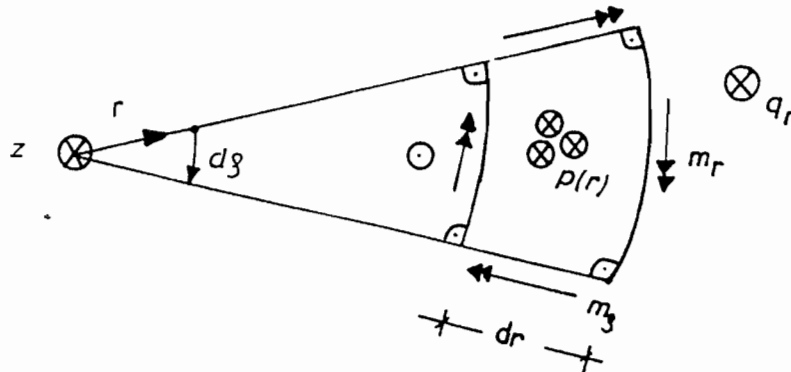
Element	Freiwerte je Knoten	Anzahl je Element	Ansatz (Schema)	Bemerkungen																																																																																					
	<ul style="list-style-type: none"> w $w_{,x}$ $w_{,y}$ 	9 (10)	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>ξ</td><td>ξ^2</td><td>ξ^3</td></tr> <tr><td>η</td><td>$\eta \xi$</td><td>$\eta \xi^2$</td><td></td></tr> <tr><td>η^2</td><td>$\eta^2 \xi$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η^3</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1	ξ	ξ^2	ξ^3	η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$		η^2	$\eta^2 \xi$			η^3				<p>Der innere Knoten (Schwerpunkt) wird durch Kondensation eliminiert</p> <p>(nicht konformes Element)</p>																																																																					
1	ξ	ξ^2	ξ^3																																																																																						
η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$																																																																																							
η^2	$\eta^2 \xi$																																																																																								
η^3																																																																																									
	<ul style="list-style-type: none"> w $w_{,x}$ $w_{,y}$ $w_{,n}$ 	15	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>ξ</td><td>ξ^2</td><td>ξ^3</td><td>ξ^4</td></tr> <tr><td>η</td><td>$\eta \xi$</td><td>$\eta \xi^2$</td><td>$\eta \xi^3$</td><td></td></tr> <tr><td>η^2</td><td>$\eta^2 \xi$</td><td>$\eta^2 \xi^2$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η^3</td><td>$\eta^3 \xi$</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η^4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1	ξ	ξ^2	ξ^3	ξ^4	η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$	$\eta \xi^3$		η^2	$\eta^2 \xi$	$\eta^2 \xi^2$			η^3	$\eta^3 \xi$				η^4																																																																	
1	ξ	ξ^2	ξ^3	ξ^4																																																																																					
η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$	$\eta \xi^3$																																																																																						
η^2	$\eta^2 \xi$	$\eta^2 \xi^2$																																																																																							
η^3	$\eta^3 \xi$																																																																																								
η^4																																																																																									
	<ul style="list-style-type: none"> w $w_{,x}$ $w_{,y}$ $w_{,xx}$ $w_{,yy}$ $w_{,xy}$ $w_{,n}$ 	21	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>ξ</td><td>ξ^2</td><td>ξ^3</td><td>ξ^4</td><td>ξ^5</td></tr> <tr><td>η</td><td>$\eta \xi$</td><td>$\eta \xi^2$</td><td>$\eta \xi^3$</td><td>$\eta \xi^4$</td><td></td></tr> <tr><td>η^2</td><td>$\eta^2 \xi$</td><td>$\eta^2 \xi^2$</td><td>$\eta^2 \xi^3$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η^3</td><td>$\eta^3 \xi$</td><td>$\eta^3 \xi^2$</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η^4</td><td>$\eta^4 \xi$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η^5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1	ξ	ξ^2	ξ^3	ξ^4	ξ^5	η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$	$\eta \xi^3$	$\eta \xi^4$		η^2	$\eta^2 \xi$	$\eta^2 \xi^2$	$\eta^2 \xi^3$			η^3	$\eta^3 \xi$	$\eta^3 \xi^2$				η^4	$\eta^4 \xi$					η^5						quintisches Element (vgl. Witthum / Bell)																																																	
1	ξ	ξ^2	ξ^3	ξ^4	ξ^5																																																																																				
η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$	$\eta \xi^3$	$\eta \xi^4$																																																																																					
η^2	$\eta^2 \xi$	$\eta^2 \xi^2$	$\eta^2 \xi^3$																																																																																						
η^3	$\eta^3 \xi$	$\eta^3 \xi^2$																																																																																							
η^4	$\eta^4 \xi$																																																																																								
η^5																																																																																									
	<p>Knoten</p> <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1-3</td><td>4-9</td><td>10</td></tr> <tr><td>w</td><td>w</td><td>w</td></tr> <tr><td>$w_{,x}$</td><td>$w_{,n}$</td><td>$w_{,x}$</td></tr> <tr><td>$w_{,y}$</td><td></td><td>$w_{,y}$</td></tr> <tr><td>$w_{,xx}$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$w_{,yy}$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$w_{,xy}$</td><td></td><td></td></tr> </table>	1-3	4-9	10	w	w	w	$w_{,x}$	$w_{,n}$	$w_{,x}$	$w_{,y}$		$w_{,y}$	$w_{,xx}$			$w_{,yy}$			$w_{,xy}$			33	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>ξ</td><td>ξ^2</td><td>ξ^3</td><td>ξ^4</td><td>ξ^5</td><td>ξ^6</td><td>ξ^7</td></tr> <tr><td>η</td><td>$\eta \xi$</td><td>$\eta \xi^2$</td><td>$\eta \xi^3$</td><td>$\eta \xi^4$</td><td>$\eta \xi^5$</td><td>$\eta \xi^6$</td><td></td></tr> <tr><td>η^2</td><td>$\eta^2 \xi$</td><td>$\eta^2 \xi^2$</td><td>$\eta^2 \xi^3$</td><td>$\eta^2 \xi^4$</td><td>$\eta^2 \xi^5$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η^3</td><td>$\eta^3 \xi$</td><td>$\eta^3 \xi^2$</td><td>$\eta^3 \xi^3$</td><td>$\eta^3 \xi^4$</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η^4</td><td>$\eta^4 \xi$</td><td>$\eta^4 \xi^2$</td><td>$\eta^4 \xi^3$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η^5</td><td>$\eta^5 \xi$</td><td>$\eta^5 \xi^2$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η^6</td><td>$\eta^6 \xi$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η^7</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1	ξ	ξ^2	ξ^3	ξ^4	ξ^5	ξ^6	ξ^7	η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$	$\eta \xi^3$	$\eta \xi^4$	$\eta \xi^5$	$\eta \xi^6$		η^2	$\eta^2 \xi$	$\eta^2 \xi^2$	$\eta^2 \xi^3$	$\eta^2 \xi^4$	$\eta^2 \xi^5$			η^3	$\eta^3 \xi$	$\eta^3 \xi^2$	$\eta^3 \xi^3$	$\eta^3 \xi^4$				η^4	$\eta^4 \xi$	$\eta^4 \xi^2$	$\eta^4 \xi^3$					η^5	$\eta^5 \xi$	$\eta^5 \xi^2$						η^6	$\eta^6 \xi$							η^7								Durch 3 Zusatzbedingungen werden die 36 Koeffizienten zu 33 Linear-Kombinationen zusammengefasst
1-3	4-9	10																																																																																							
w	w	w																																																																																							
$w_{,x}$	$w_{,n}$	$w_{,x}$																																																																																							
$w_{,y}$		$w_{,y}$																																																																																							
$w_{,xx}$																																																																																									
$w_{,yy}$																																																																																									
$w_{,xy}$																																																																																									
1	ξ	ξ^2	ξ^3	ξ^4	ξ^5	ξ^6	ξ^7																																																																																		
η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$	$\eta \xi^3$	$\eta \xi^4$	$\eta \xi^5$	$\eta \xi^6$																																																																																			
η^2	$\eta^2 \xi$	$\eta^2 \xi^2$	$\eta^2 \xi^3$	$\eta^2 \xi^4$	$\eta^2 \xi^5$																																																																																				
η^3	$\eta^3 \xi$	$\eta^3 \xi^2$	$\eta^3 \xi^3$	$\eta^3 \xi^4$																																																																																					
η^4	$\eta^4 \xi$	$\eta^4 \xi^2$	$\eta^4 \xi^3$																																																																																						
η^5	$\eta^5 \xi$	$\eta^5 \xi^2$																																																																																							
η^6	$\eta^6 \xi$																																																																																								
η^7																																																																																									

Plattenelemente (Fortsetzung)

Element	Freiwerte je Knoten	Anzahl je Element	Ansatz (Schema)	Bemerkungen																									
	w w _x w _y	12	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>ξ</td><td>ξ²</td><td>ξ³</td></tr> <tr><td>η</td><td>ηξ</td><td>ηξ²</td><td>ηξ³</td></tr> <tr><td>η²</td><td>η²ξ</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η³</td><td>η³ξ</td><td></td><td></td></tr> </table>	1	ξ	ξ ²	ξ ³	η	ηξ	ηξ ²	ηξ ³	η ²	η ² ξ			η ³	η ³ ξ			(vgl. SRI-Element bei linearem Ansatz) (nicht konformes Element)									
1	ξ	ξ ²	ξ ³																										
η	ηξ	ηξ ²	ηξ ³																										
η ²	η ² ξ																												
η ³	η ³ ξ																												
	w w _x w _y w _{xy}	16	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>ξ</td><td>ξ²</td><td>ξ³</td></tr> <tr><td>η</td><td>ηξ</td><td>ηξ²</td><td>ηξ³</td></tr> <tr><td>η²</td><td>η²ξ</td><td>η²ξ²</td><td>η²ξ³</td></tr> <tr><td>η³</td><td>η³ξ</td><td>η³ξ²</td><td>η³ξ³</td></tr> </table>	1	ξ	ξ ²	ξ ³	η	ηξ	ηξ ²	ηξ ³	η ²	η ² ξ	η ² ξ ²	η ² ξ ³	η ³	η ³ ξ	η ³ ξ ²	η ³ ξ ³	(vgl. Schäfer)									
1	ξ	ξ ²	ξ ³																										
η	ηξ	ηξ ²	ηξ ³																										
η ²	η ² ξ	η ² ξ ²	η ² ξ ³																										
η ³	η ³ ξ	η ³ ξ ²	η ³ ξ ³																										
	• w ○ w _x w _y	12	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>ξ</td><td>ξ²</td><td>ξ³</td><td>ξ⁴</td></tr> <tr><td>η</td><td>ηξ</td><td>ηξ²</td><td>ηξ³</td><td></td></tr> <tr><td>η²</td><td>η²ξ</td><td>η²ξ²</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η³</td><td>η³ξ</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>η⁴</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table> <p style="text-align: right;">(15 Freiwerte)</p>	1	ξ	ξ ²	ξ ³	ξ ⁴	η	ηξ	ηξ ²	ηξ ³		η ²	η ² ξ	η ² ξ ²			η ³	η ³ ξ				η ⁴					(nicht konformes Element)
1	ξ	ξ ²	ξ ³	ξ ⁴																									
η	ηξ	ηξ ²	ηξ ³																										
η ²	η ² ξ	η ² ξ ²																											
η ³	η ³ ξ																												
η ⁴																													

10.1 Rotationssymmetrische Platten unter rotationssymmetrischer Last

1. Schnittgrößendefinition



2. DGL der Platte

$$\Delta \Delta w = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{p(r)}{B}$$

3. Lösung der DGL

$$w = \frac{1}{B} \int \frac{1}{r} \left\{ \int r \left[\int \frac{1}{r} \left(\int p(r) r dr \right) dr \right] dr \right\} dr = w_p + w_h$$

partikuläre Lösung: Integrationskonstanten zu Null setzen $\rightarrow w_p$

homogene Lösung: $p(r) = 0 \rightarrow w_h$

$$w_h = C_1 + C_2 \rho^2 + C_3 \rho^2 \ln \rho + C_4 \ln \rho \quad \text{mit } \rho = \frac{r}{a}$$

Ermittlung der Konstanten über die Randbedingungen

4. Schnittgrößen

$$m_r = -B \left(w'' + \nu \frac{1}{r} w' + (1 + \nu) \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \right)$$

$$m_g = -B \left(\frac{1}{r} w' + \nu w'' + (1 + \nu) \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \right)$$

$$q_r = m_r' + \frac{1}{r} (m_r - m_g)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{mit } \Delta t = t_u - t_o \\ ()' = \frac{d()}{dr} \\ = \frac{d()}{dg a} \end{array} \right\}$$

10.2 Innere und äußere Kreisringplatte – Rand frei aufliegend

Vorwerte: $\varrho = \frac{r}{a}$, $\beta = \frac{b}{a}$, $B = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, μ , $w' = \frac{dw}{dr}$

alle Beispiele mit $\mu = 1/6$

$$\Phi_0 = 1 - \varrho^4, \quad \Phi_1 = 1 - \varrho^2, \quad \Phi_2 = \varrho^2 \ln \varrho,$$

$$\Phi_3 = \ln \varrho, \quad \Phi_4 = \frac{1}{\varrho^2} - 1, \quad \alpha = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta$$

$$\alpha_1 = (3 + \mu) + 4(1 + \mu)\alpha \quad \alpha_2 = (3 + \mu) - 4(1 + \mu)\alpha$$

1) Kreisringplatte mit Vollast, p = const.

$$w = \frac{pa^4}{64B} \left\{ \frac{2}{1 + \mu} [(3 + \mu) - \beta^2 \alpha_2] \Phi_1 - \Phi_0 - \frac{4}{1 - \mu} \beta^2 \alpha_1 \Phi_3 - 8\beta^2 \Phi_2 \right\}$$

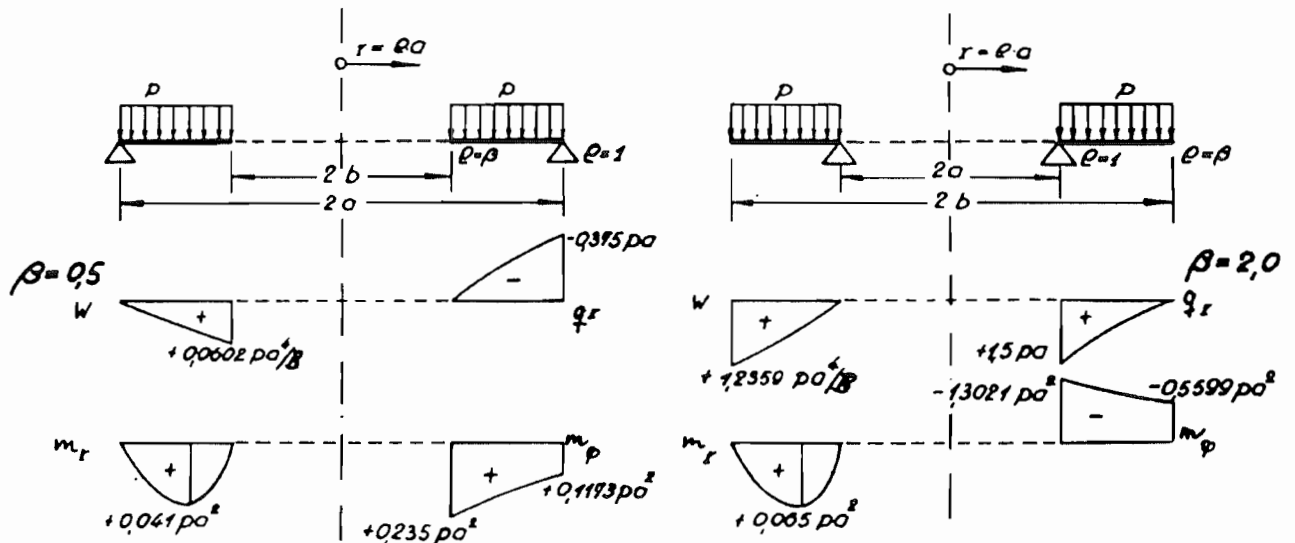
$$m_r = \frac{pa^2}{16} \left[(3 + \mu) \Phi_1 - \beta^2 \alpha_1 \Phi_4 + 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3 \right]$$

$$m_\varphi = \frac{pa^2}{16} \left\{ (1 + 3\mu) \Phi_1 + \beta^2 \alpha_1 \Phi_4 + 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3 + 2(1 - \mu) - 2\beta^2 [2(1 - \mu) - \alpha_1] \right\}$$

$$q_r = -\frac{pa}{2} \left(\varrho - \frac{\beta^2}{\varrho} \right)$$

$$w' = -\frac{pa^2 b}{8B(1 + \mu)} \left(\frac{\alpha_1}{1 - \mu} - \beta^2 \right) \quad \text{für } \varrho = \beta$$

$$w' = -\frac{pa^3}{8B(1 + \mu)} \left[1 - \beta^2 \left(2 - \frac{\alpha_1}{1 - \mu} \right) \right] \quad \text{für } \varrho = 1$$



2) Kreisringplatte mit Ringlast am Rande $\varrho = \beta$

$$w = \frac{Pa^2 b}{8B} \left[\left(\frac{3+\mu}{1+\mu} - 2\alpha \right) \Phi_1 + 4 \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \Phi_3 + 2\Phi_2 \right]$$

$$m_r = -\frac{Pb}{2} (1+\mu) (-\alpha \Phi_4 + \Phi_3)$$

$$m_\varphi = -\frac{Pb}{2} (1+\mu) \left[\alpha \Phi_4 + \Phi_3 + \left(2\alpha - \frac{1-\mu}{1+\mu} \right) \right]$$

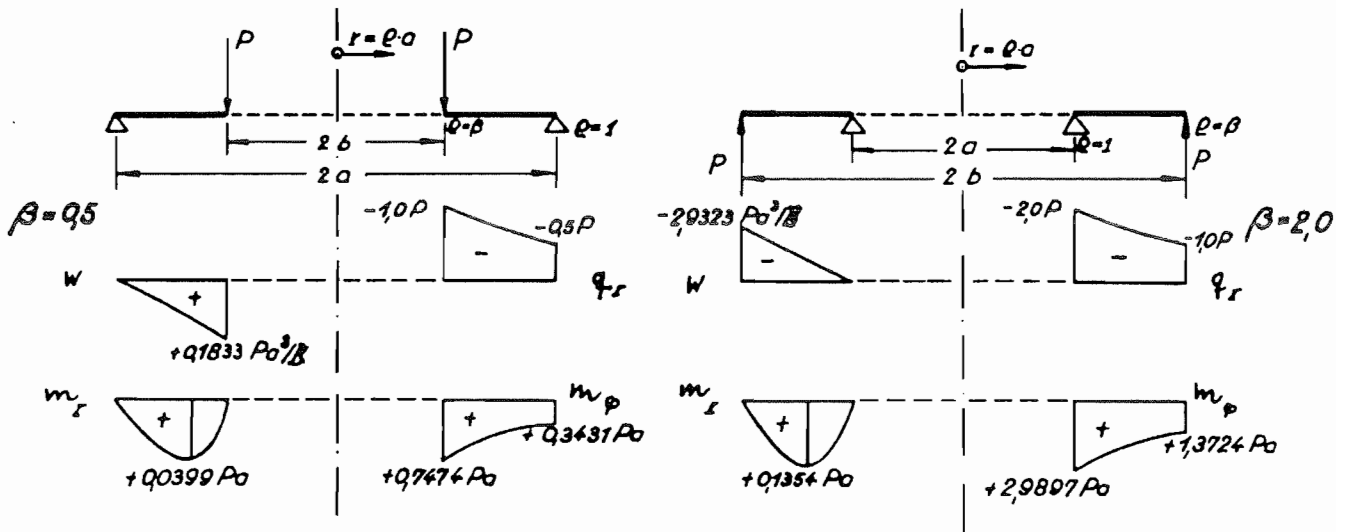
$$q_r = -\frac{P\beta}{\varrho}$$

$$w' = -\frac{Pa^2}{2B(1+\mu)} \left(\beta^2 - 2\alpha \frac{1+\mu}{1-\mu} \right)$$

für $\varrho = \beta$

$$w' = -\frac{Pab}{2B(1+\mu)} \left(1 - 2\alpha \frac{1+\mu}{1-\mu} \right)$$

für $\varrho = 1$



3) Kreisringplatte mit Ringmoment am Rande $\varrho = \beta$

$$w = -\frac{\bar{m} \cdot b^2}{2B(1+\mu)} \frac{1}{1-\beta^2} (\Phi_1 - 2 \frac{1+\mu}{1-\mu} \Phi_3), \quad q_r = 0$$

$$m_r = \bar{m} \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \Phi_4$$

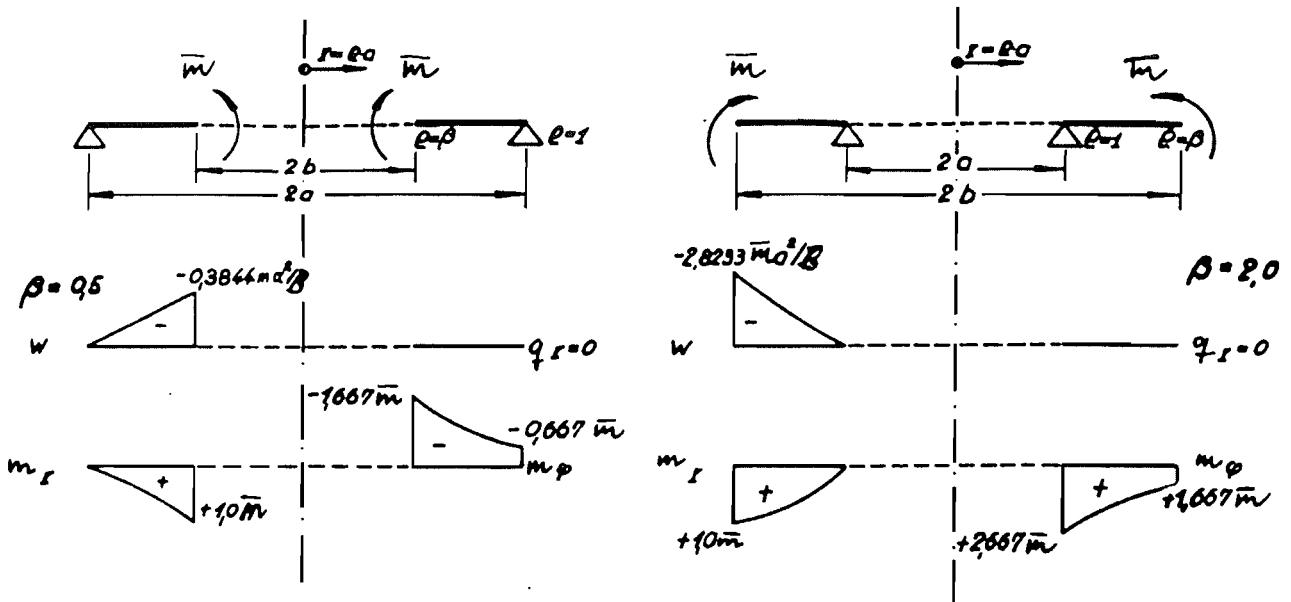
$$m_\varphi = -\bar{m} \frac{\beta^2}{1-\beta^2} (\Phi_4 + 2)$$

$$w' = \frac{\bar{m} b}{B(1+\mu)} \frac{1}{1-\beta^2} \left(\beta^2 + \frac{1+\mu}{1-\mu} \right)$$

für $\varrho = \beta$

$$w' = \frac{2\bar{m} b}{B(1-\mu^2)} \frac{\beta}{1-\beta^2}$$

für $\varrho = 1$



4) Kreisringplatte mit Ringmoment am Rande $l = 1$

$$w = \frac{\bar{m} a^2}{2B(1+\mu)(1-\beta^2)} (\Phi_1 - 2 \frac{1+\mu}{1-\mu} \beta^2 \Phi_3)$$

$$m_r = \bar{m} (1 - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \Phi_4)$$

$$m_\phi = \bar{m} (\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} + \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \Phi_4)$$

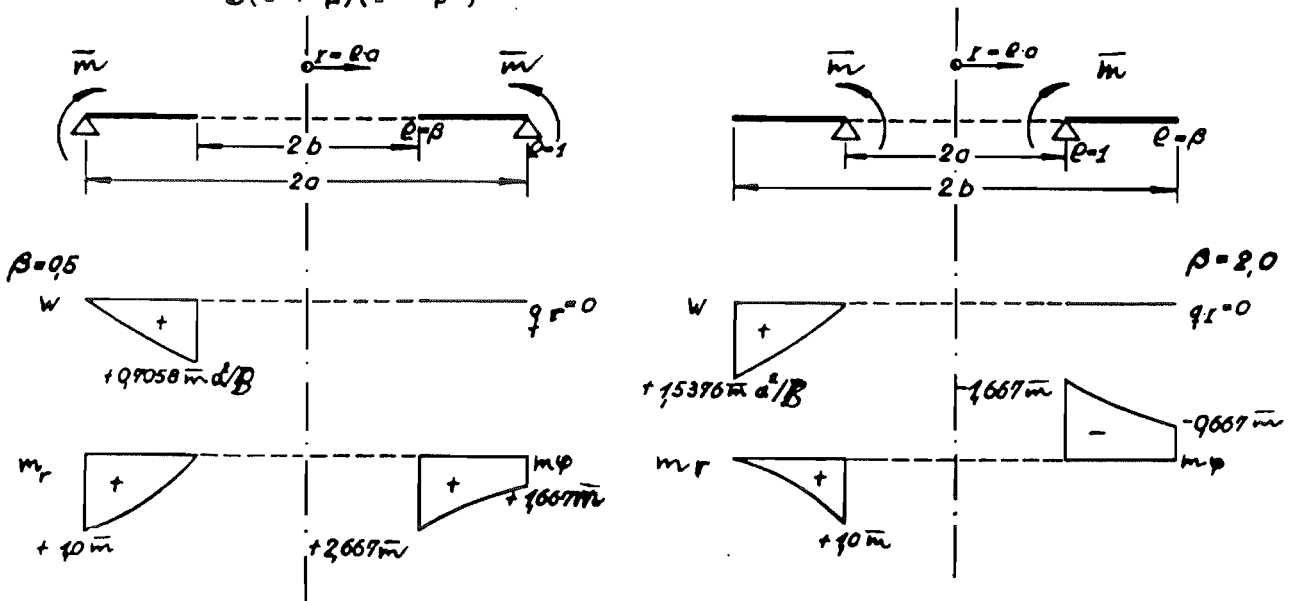
$$q_r = 0$$

$$w' = - \frac{\bar{m} b}{B(1-\mu^2)} \frac{2}{1-\beta^2}$$

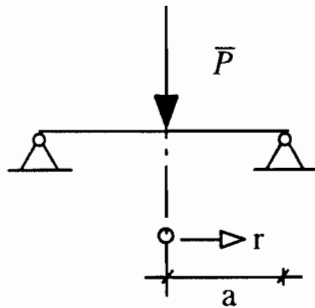
für $l = \beta$

$$w' = - \frac{\bar{m} a}{B(1+\mu)(1-\beta^2)} (1 + \frac{1+\mu}{1-\mu} \beta^2)$$

für $l = 1$



10.3 Kreisplatte mit Einzellast

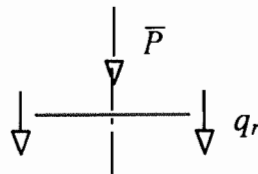


$$\varrho = \frac{r}{a}$$

partikuläre Lösung: $w_p \equiv 0$

Randbedingungen: $\varrho = 0 : w' = 0 \rightarrow C_4 = 0$

ϱ beliebig: $q_r \cdot 2\pi r + \bar{P} = 0$



$$\rightarrow q_r = \frac{-\bar{P}}{2\pi a} \cdot \frac{1}{\varrho}$$

$$C_3 = \frac{\bar{P}a^2}{8\pi B}$$

$\varrho = 1 : w = 0 \rightarrow C_1 = -C_2$

$$m_r = 0$$

$$\rightarrow C_2 = \left(\frac{3 + \nu}{1 + \nu} \right) \cdot \frac{(-\bar{P}a^2)}{16\pi B}$$

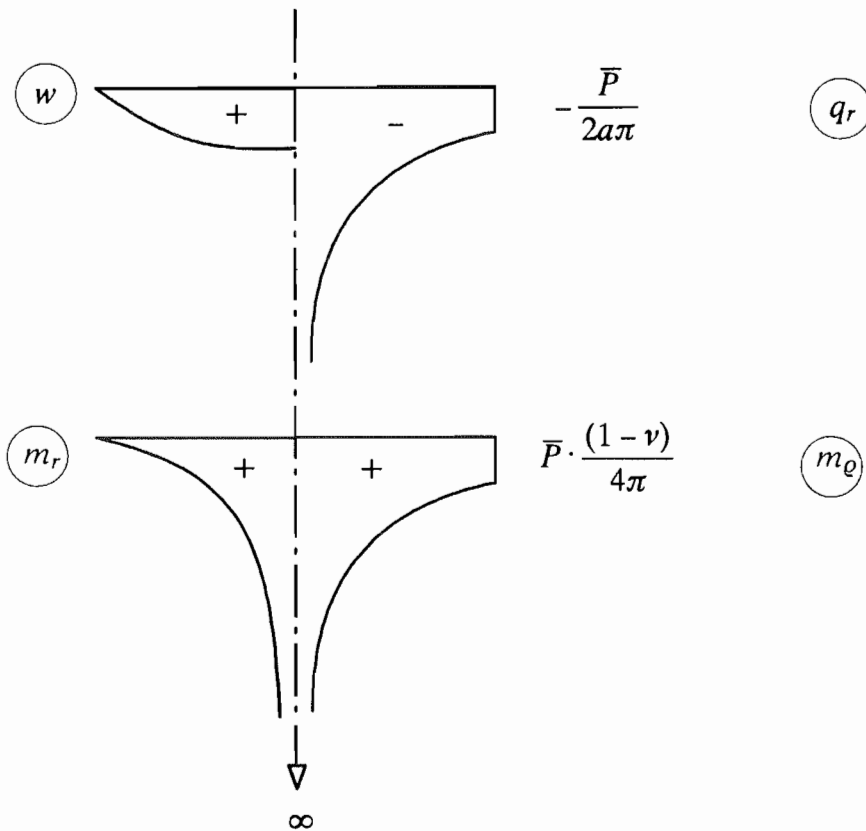
Ergebnis: $w = \frac{\bar{P}a^2}{8\pi B} \cdot \left[\frac{3 + \nu}{2(1 + \nu)} \cdot (1 - \varrho^2) + \varrho^2 \cdot \ln \varrho \right]$

$$w' = \frac{\bar{P}a}{8\pi B} \cdot \left[-\frac{3 + \nu}{1 + \nu} \cdot \varrho + 2\varrho \cdot \ln \varrho + \varrho \right]$$

$$m_r = -\frac{\bar{P}}{4\pi} (1 + \nu) \cdot \ln \varrho$$

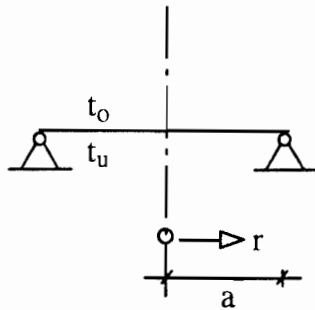
$$m_\varrho = \frac{\bar{P}}{4\pi} [(1 - \nu) - (1 + \nu) \cdot \ln \varrho]$$

$$q_r = -\frac{\bar{P}}{2a\pi} \cdot \frac{1}{\varrho}$$



Hinweis: $\lim_{\varrho \rightarrow 0} (\varrho^2 \ln \varrho) = 0$ $\lim_{\varrho \rightarrow 0} (\varrho \ln \varrho) = 0$

10.4 Kreisplatte mit Temperaturgradient Δt



$$\Delta t = t_u - t_0$$

$$\varrho = \frac{r}{a}$$

partikuläre Lösung: $w_p \equiv 0$

Randbedingungen: $\varrho = 0 : w' = 0 \rightarrow C_4 = 0$

$$q_r = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

$$\varrho = 1 : m_r = 0$$

$$\rightarrow C_2 = -\frac{a^2}{2} \cdot \frac{\alpha_t \Delta t}{h}$$

$$w = 0 \rightarrow C_1 = -C_2$$

Ergebnis:

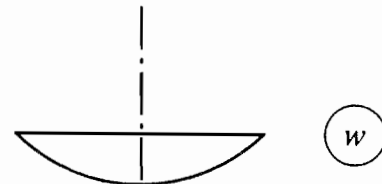
$$w = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \cdot (1 - \varrho^2)$$

$$w' = -a \cdot \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \cdot \varrho$$

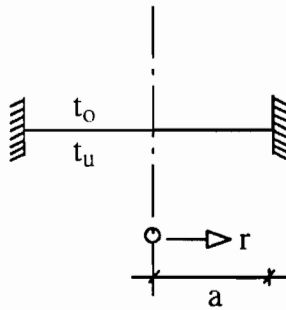
$$m_r \equiv 0$$

$$m_\varrho \equiv 0$$

$$q_r \equiv 0$$



10.5 Eingespannte Kreisplatte mit Temperaturgradient Δt



$$\Delta t = t_u - t_o$$

$$\varrho = \frac{r}{a}$$

partikuläre Lösung: $w_p \equiv 0$

Randbedingungen: $\varrho = 0 : w' = 0 \rightarrow C_4 = 0$

$q_r = 0 \rightarrow C_3 = 0$

$\varrho = 1 : w' = 0 \rightarrow C_2 = 0$

$w = 0 \rightarrow C_1 = 0$

Ergebnis:

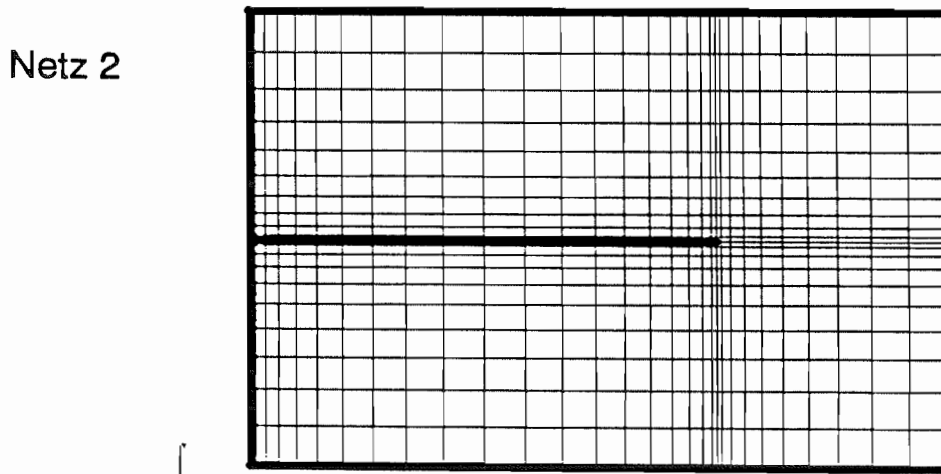
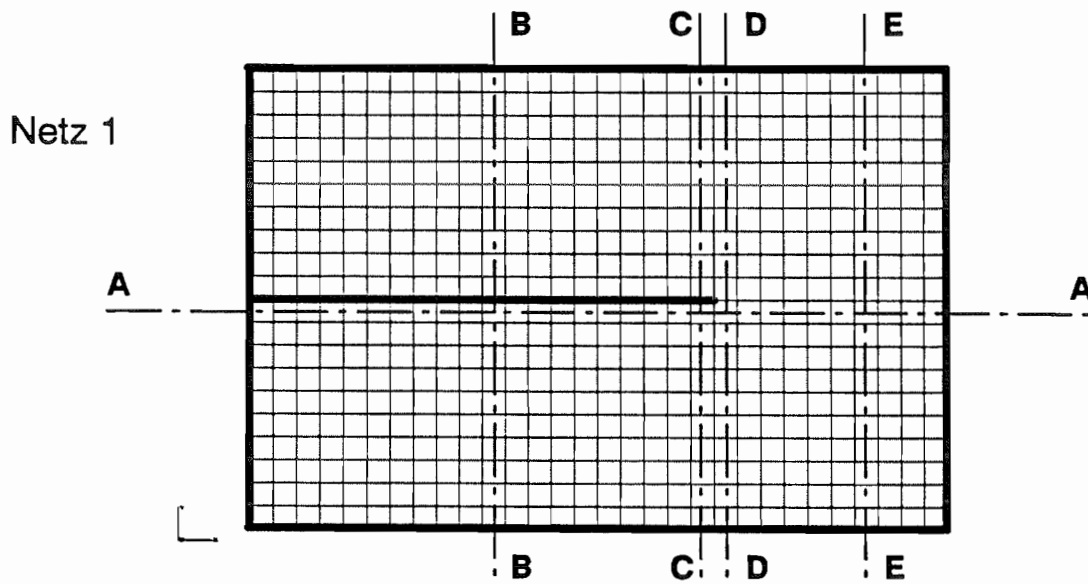
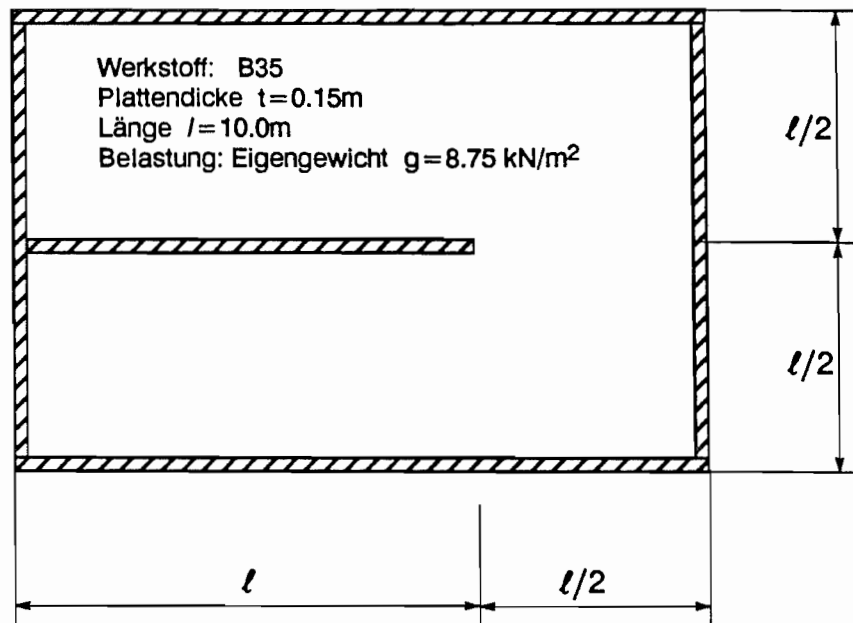
$$w \equiv 0$$

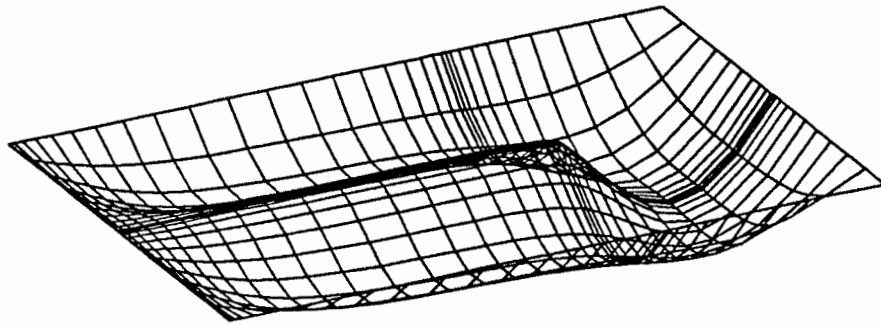
$$w' \equiv 0$$

$$m_r = m_\varrho = -B \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{\alpha_t \Delta t}{h}$$

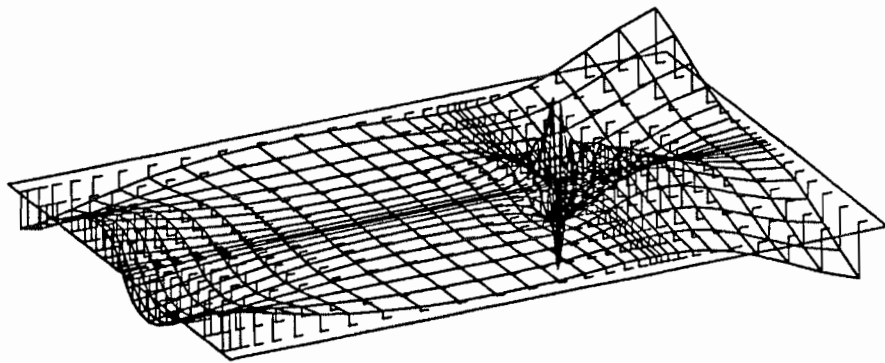
$$q_r \equiv 0$$

BEISPIEL: Vierseitig frei gelagerte Rechteckplatte mit unterbrochener Mittelstützung



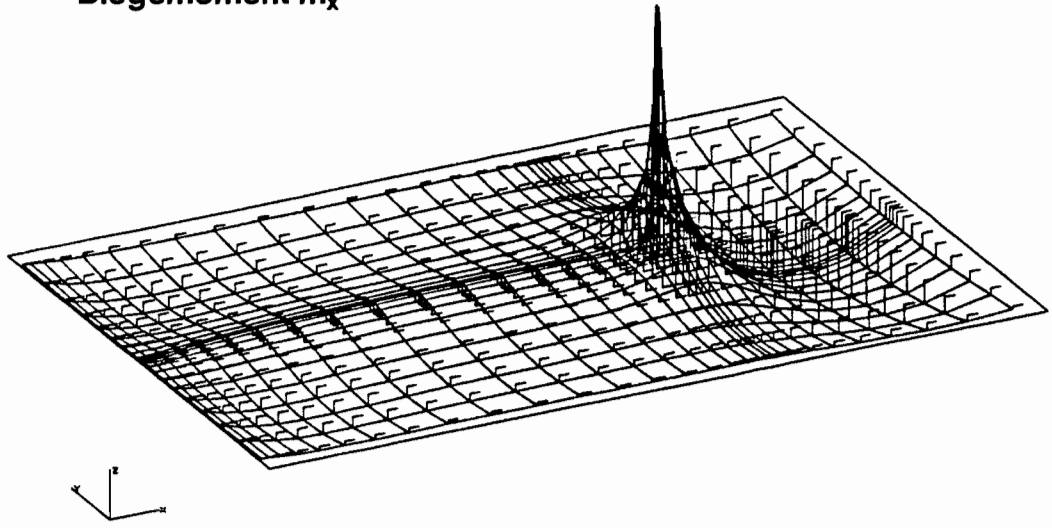


DANA PLOT:02PL1.PLT VERSCHIEDUNGEN ERGEBN.MASSSTAB: +--+ 1.469E-04
LF 1

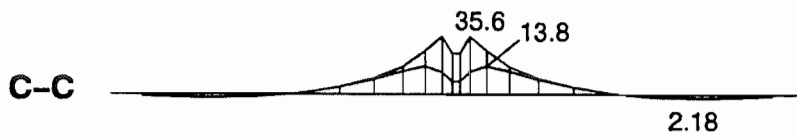
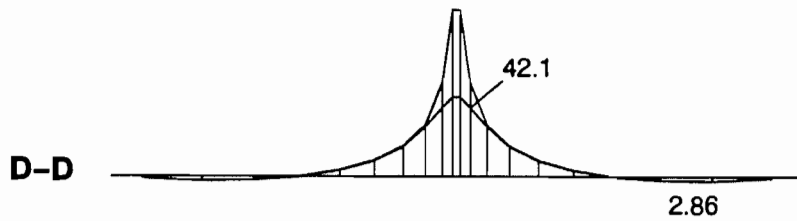
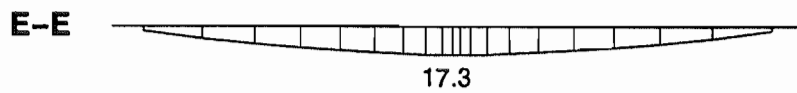
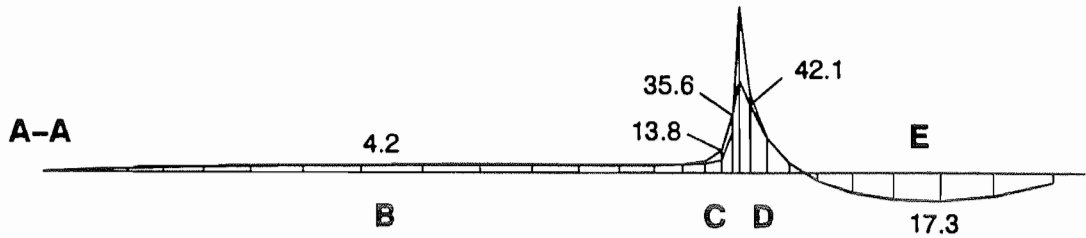


DANA PLOT:02PL4.PLT ERGEBN.MASSSTAB: +--+ 7.143E+00
ERGEBN. ETYP: 6 / MXY LOKAL LF 1

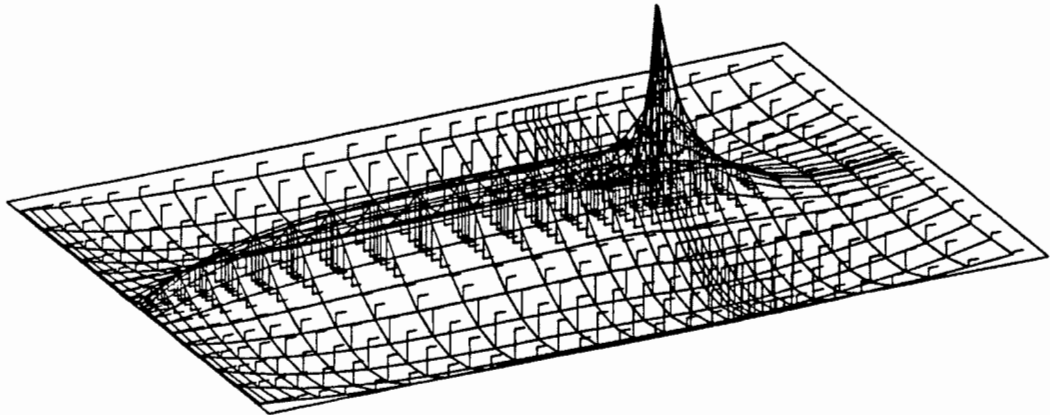
Biegemoment m_x



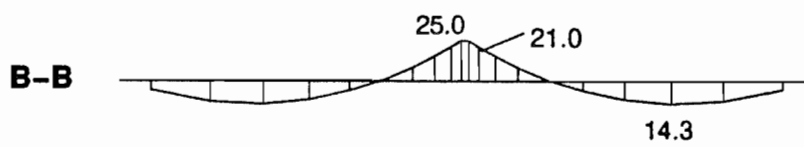
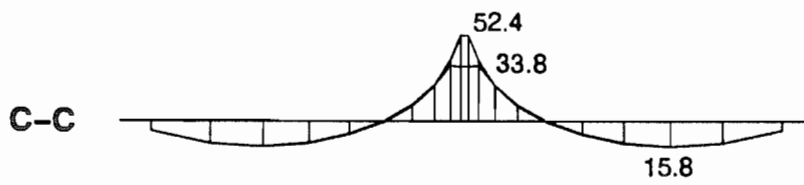
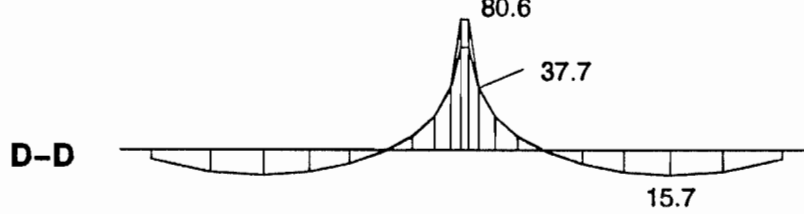
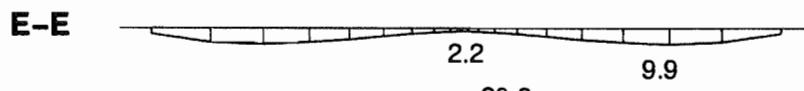
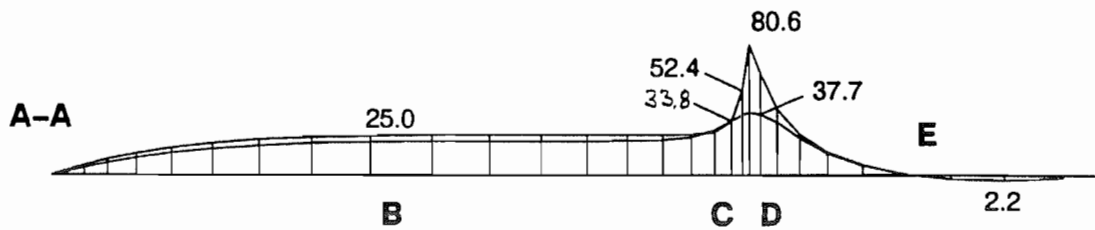
DANA PLOT:B2PL2.PLT ERGEBN.MASSSTAB: \rightarrow 2.000E+01
ERGEBN. ETYP: 6 / MX LOKAL LF 1



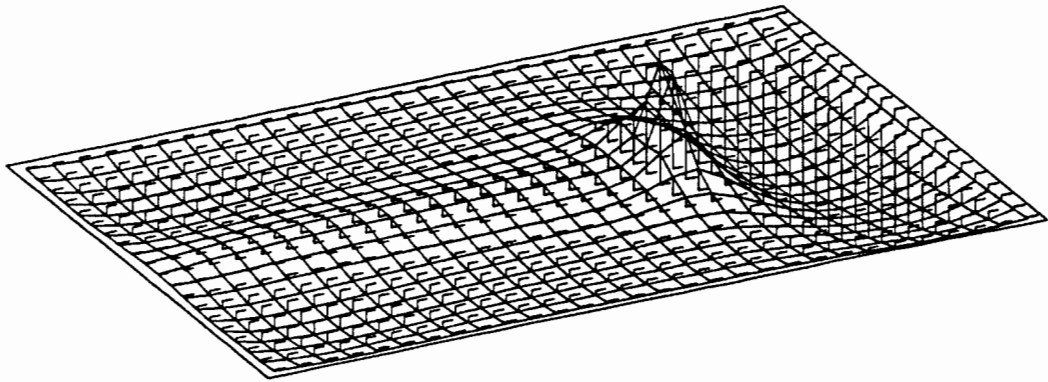
Biegemoment m_y



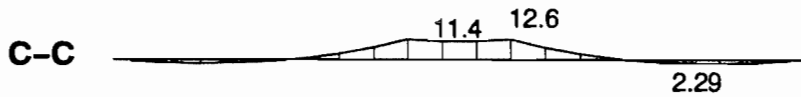
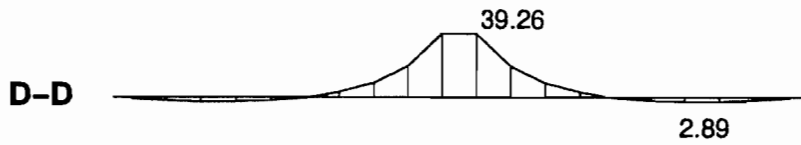
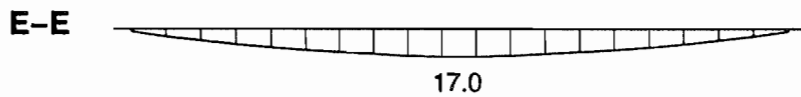
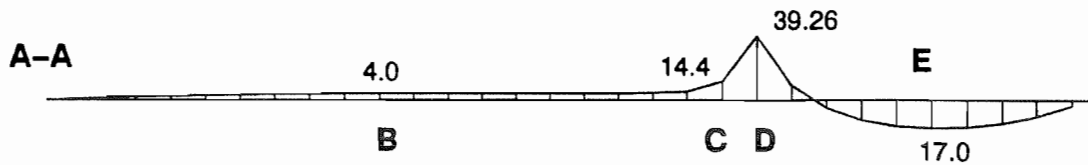
DANA PLOT:B2PL3.PLT ERGEBN.MASSSTAB: \rightarrow 2.000E+01
ERGEBN. ETYP: 6 / MY LOKAL LF 1



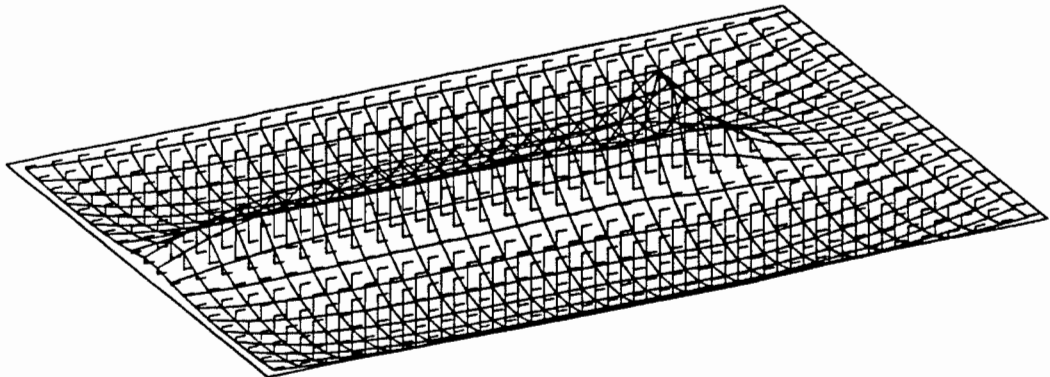
Biegemoment m_x



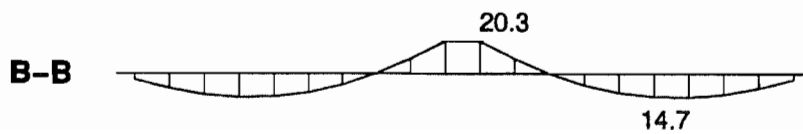
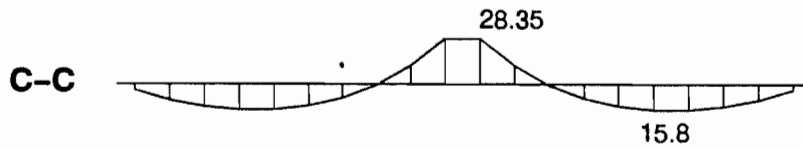
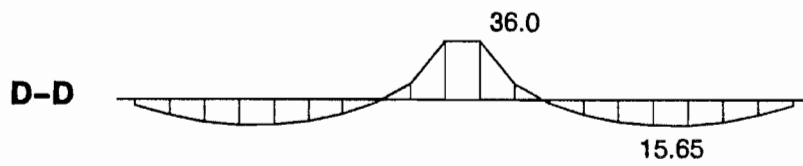
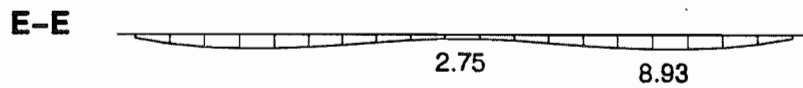
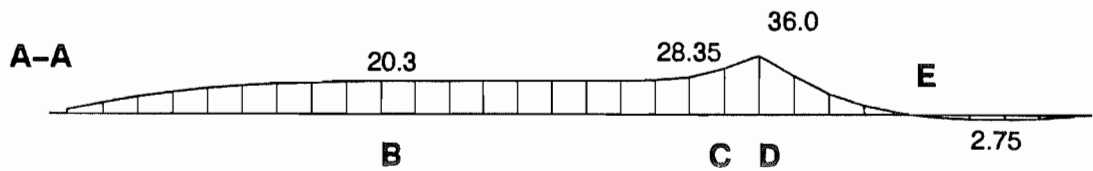
DANA PLOT:D1PL2.PLT ERGEBN.MASSSTAB: + + 2.000E+01
ERGEBN. ETYP: 6 / MX LOKAL LF 1



Biegemoment m_y

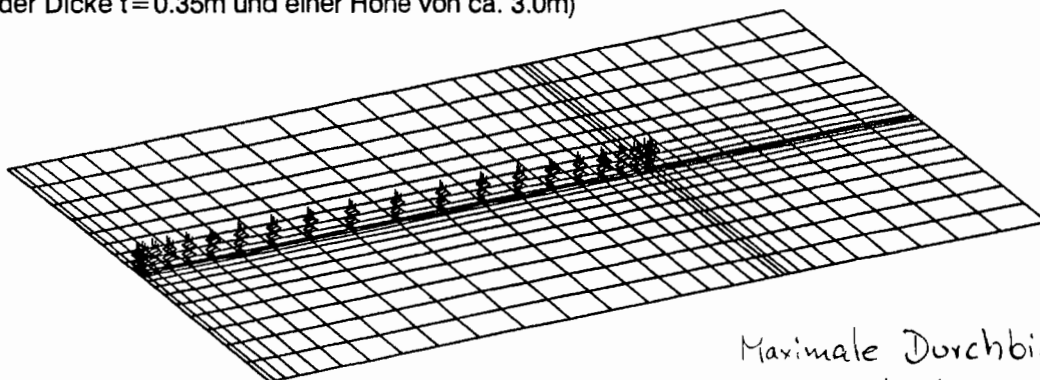


DANA PLOT:B1PL3.PLT ERGEBN.MASSSTAB: \pm 2.000E+01
ERGEBN. ETYP: 6 / MY LOKAL LF 1

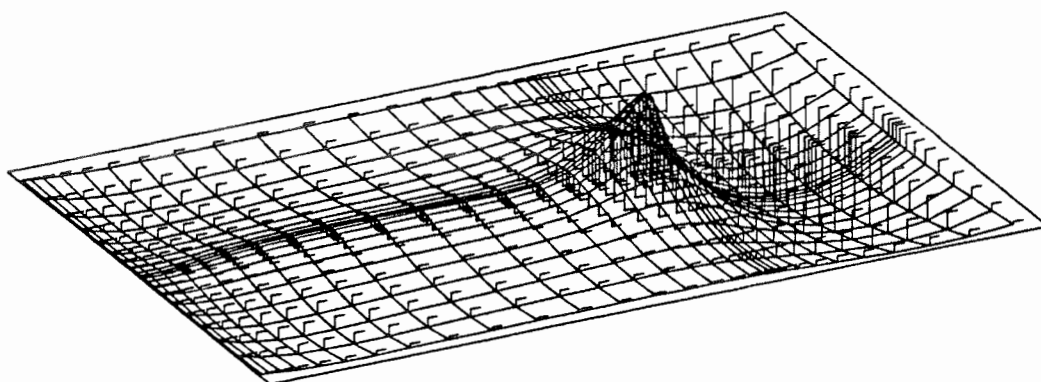


Modellierung der Mittelunterstützung mit Federn

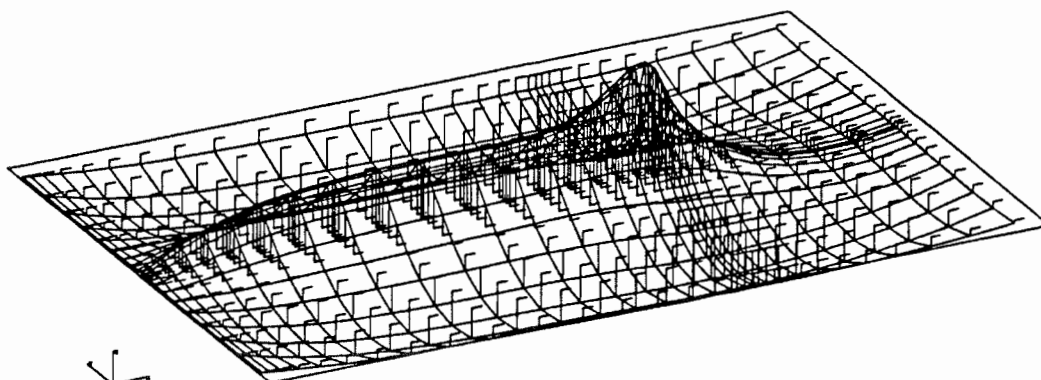
(Federsteifigkeit entspricht einer Wandscheibe aus Beton
der Dicke $t=0.35\text{m}$ und einer Höhe von ca. 3.0m)



Maximale Durchbiegung
am Rand der unter-
brochenen Stützung $w=0,13\text{m}$

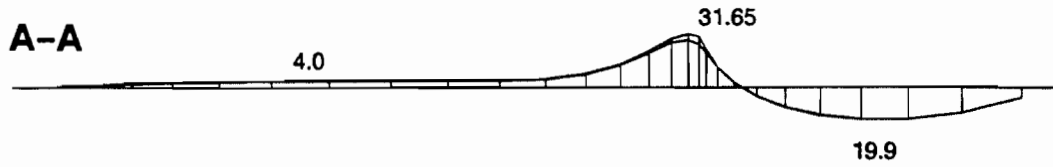


DANA PLOT:03PL2.PLT ERGEDN.MASSSTAB: \rightarrow 2.000E+01
ERGEDN. ETYP: 6 / MX LOKAL LF 1

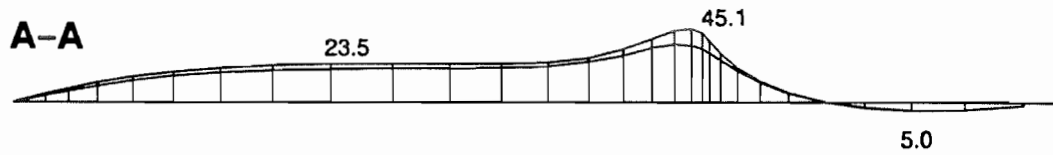


DANA PLOT:03PL3.PLT ERGEDN.MASSSTAB: \rightarrow 2.000E+01
ERGEDN. ETYP: 6 / MY LOKAL LF 1

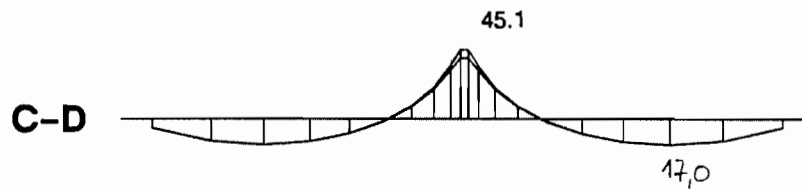
**Schnittkräfte im Bereich der unterbrochenen Mittelunterstützung bei
bei elastischer Lagerung**



Biegemomente m_x

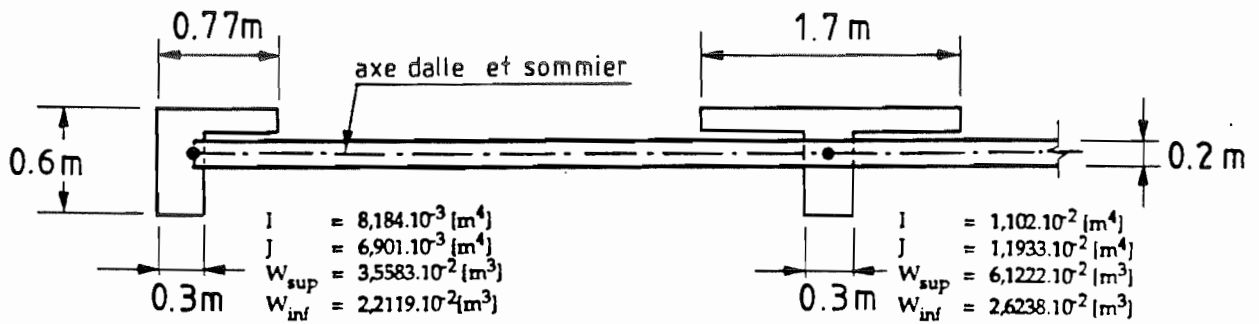
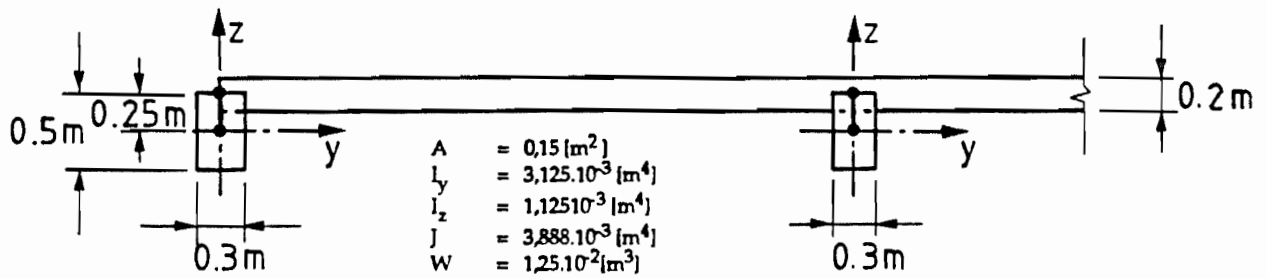
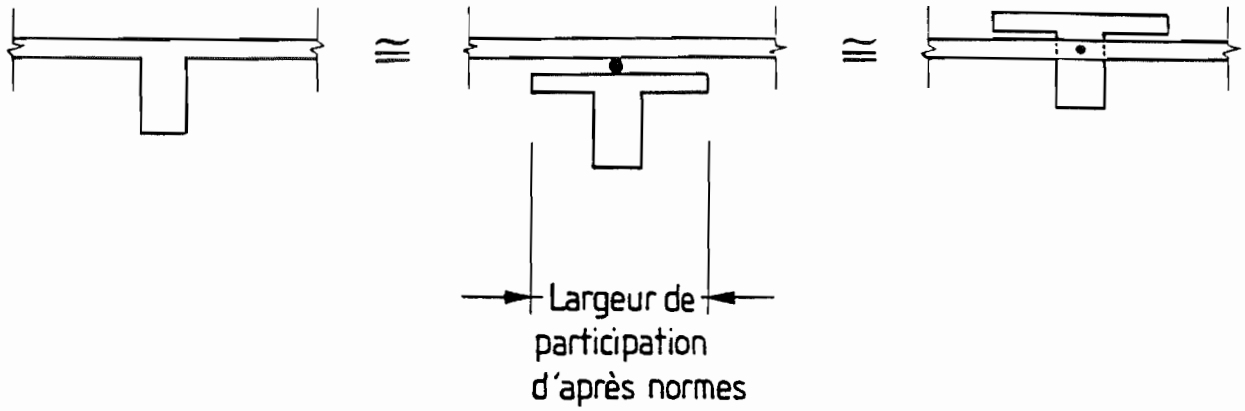


Biegemomente m_y



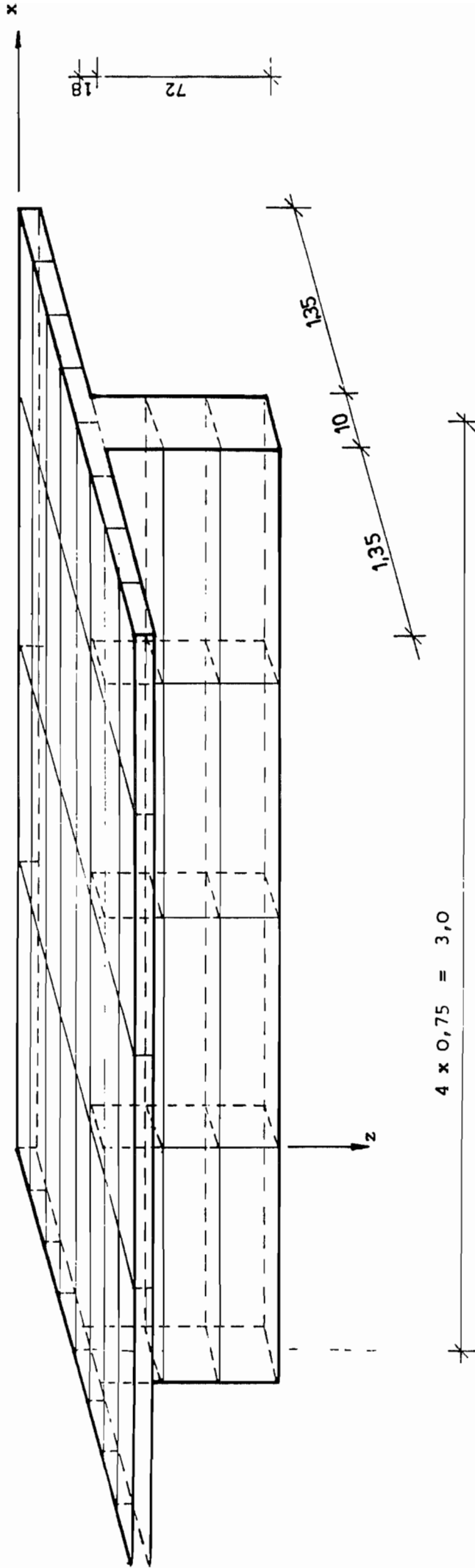
MODELLIERUNG PLATTENBALKEN

PLATTE + BALKEN



PLATTENBALKEN

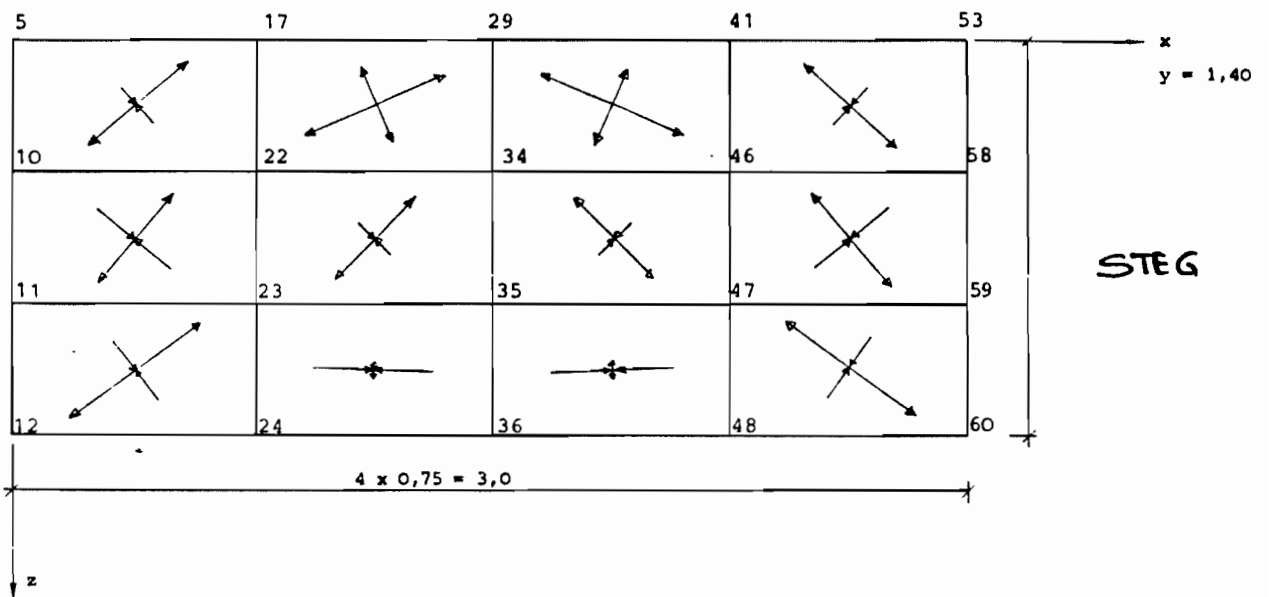
(MODELLIERUNG MIT FALTWERKSELEMENTEN)



SCHEIBEN WIRKUNGEN

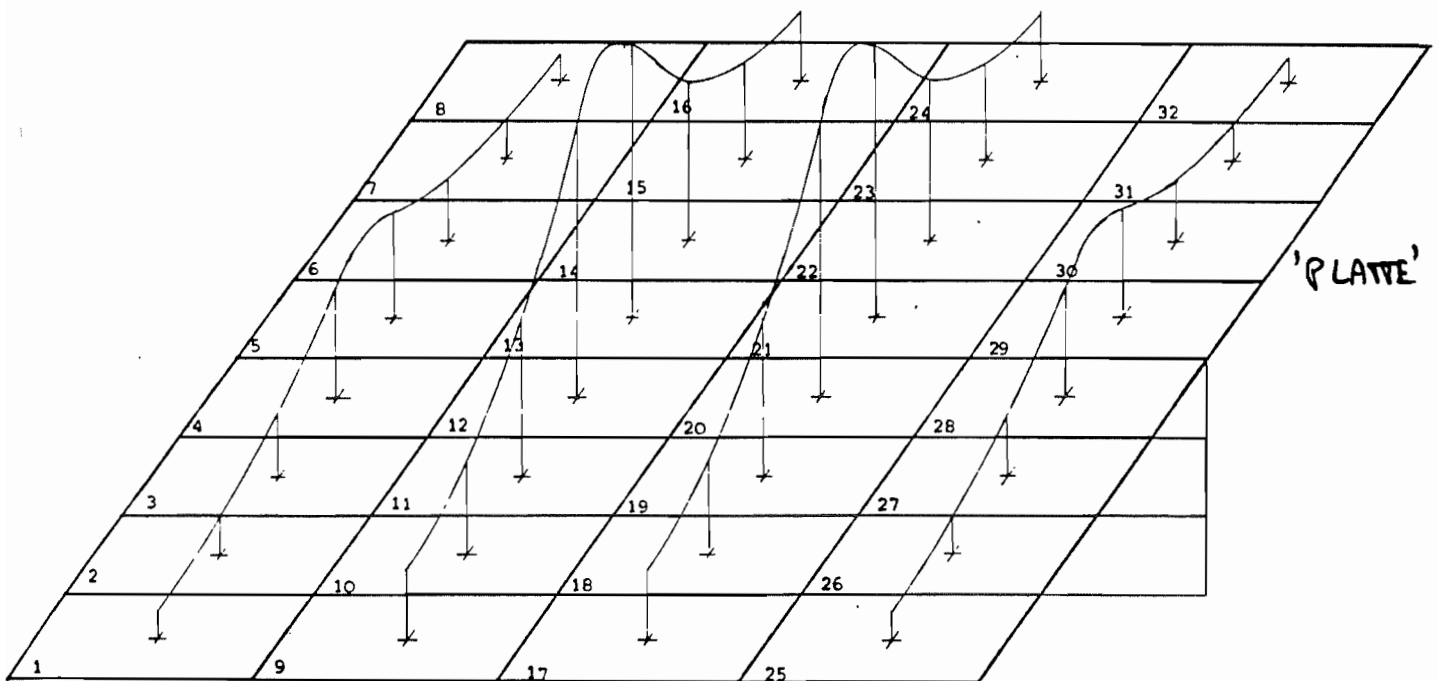
61.6II

Hauptspannungen in Steg



Normalspannungen σ_x in der Platte

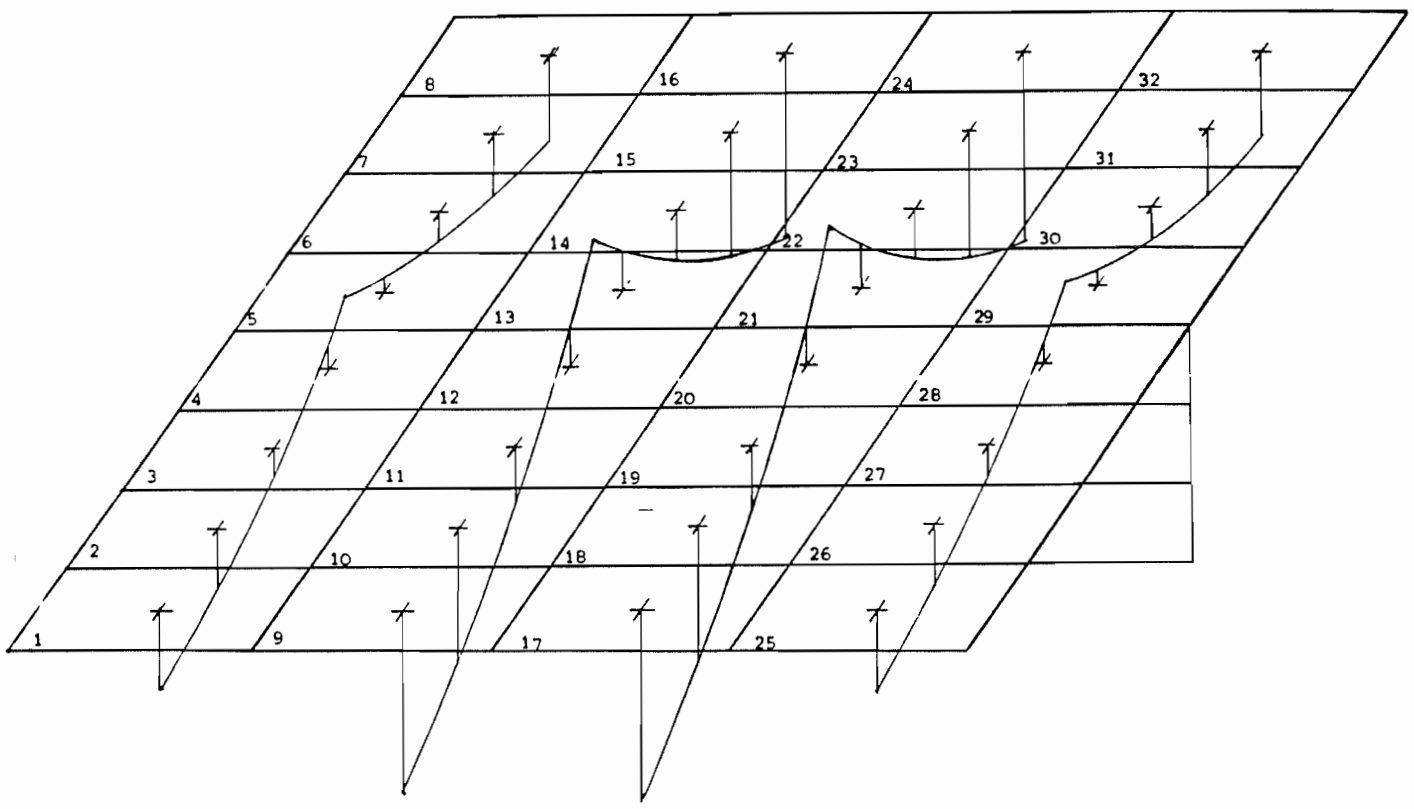
6x



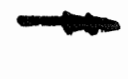
PLATTENWIRKUNGEN:

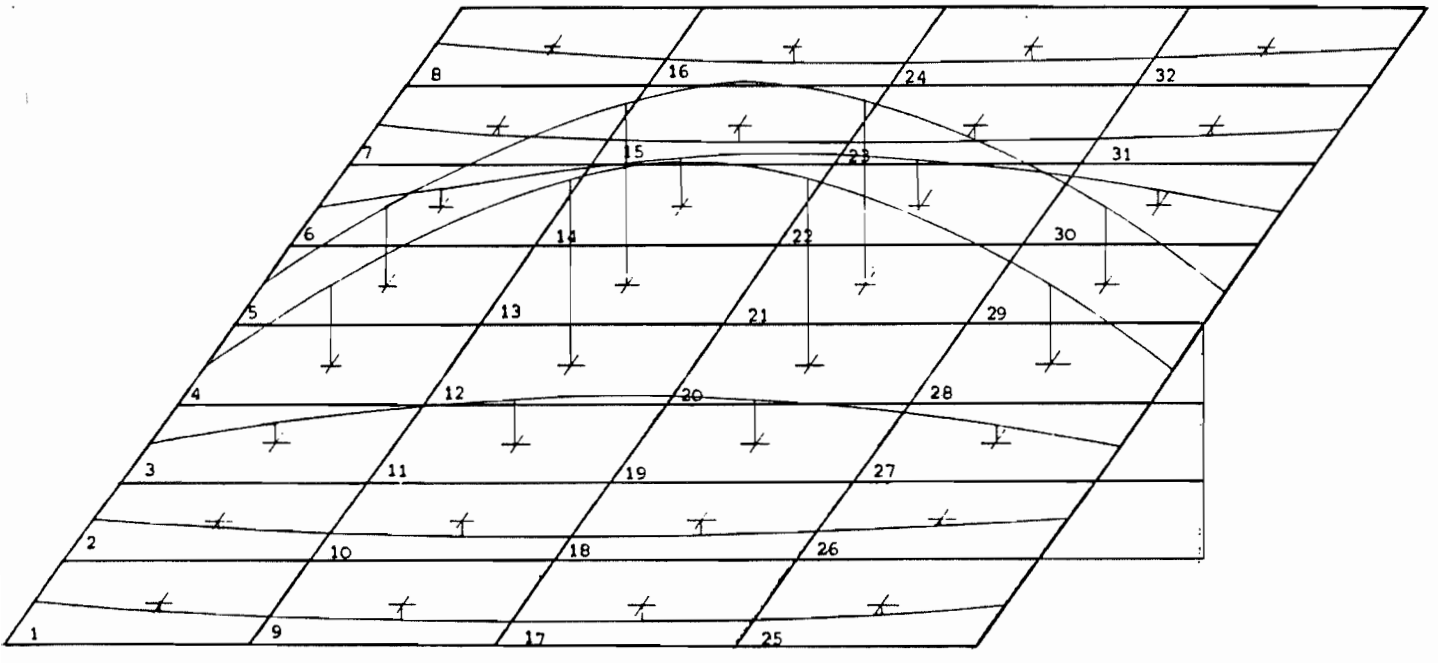
Biegemomente m_x in der Platte

m_x 



Biegemomente m_y in der Platte

m_y 



'PUNKT STÜTZEN'

AUS: FEM- Anwend. i.d. Baupraxis (Mü. 1984), Ernst & Sohn 1985

FLACHDECKEN UND FINITE ELEMENTE -
EINFLUSS DES RECHENMODELLS IM STÜTZENBEREICH

von Ekkehard Ramm und Jochen Müller *

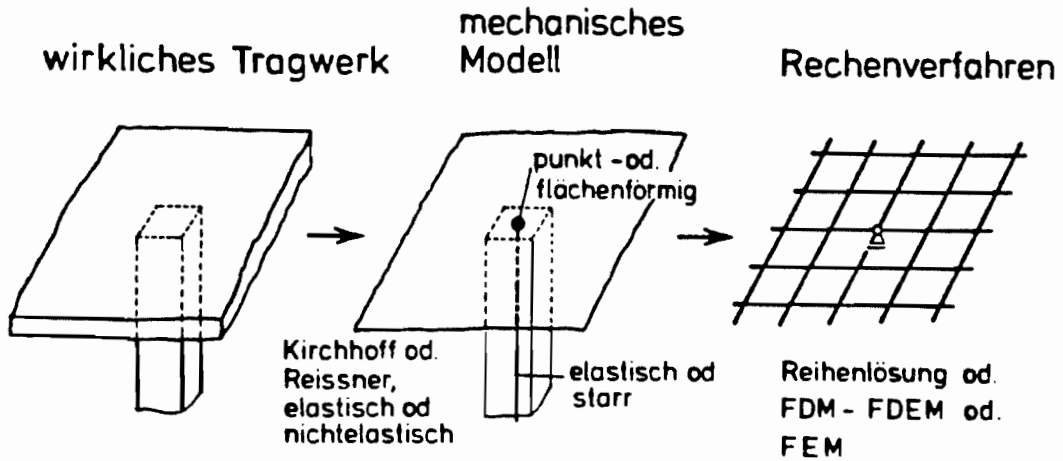


Bild 1: Idealisierungsschritte

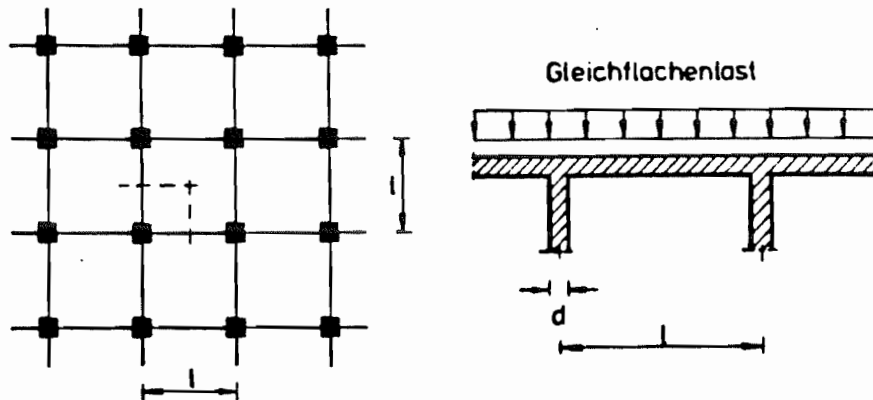


Bild 2: Untersuchtes Plattensystem

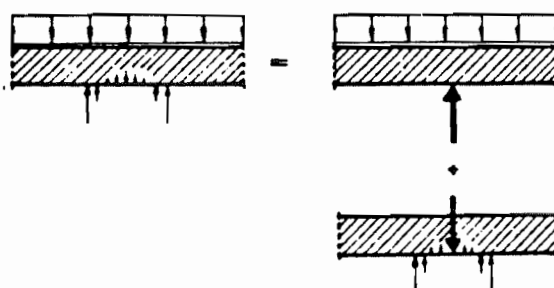


Bild 8: Lastabtragung im Stützbereich

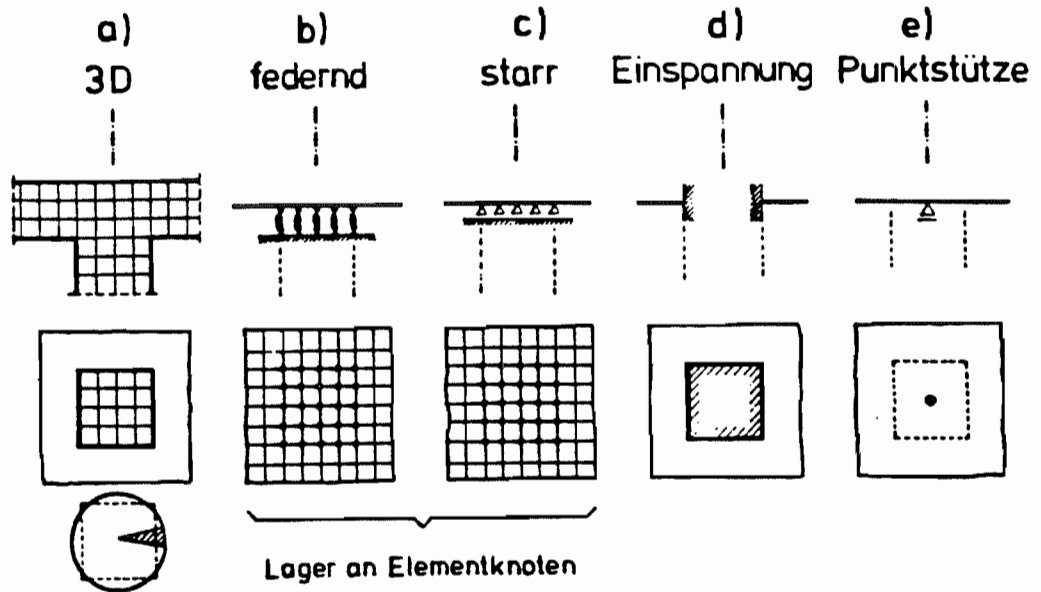


Bild 3: Stützenidealisationen

Einfluß der Netzverfeinerung

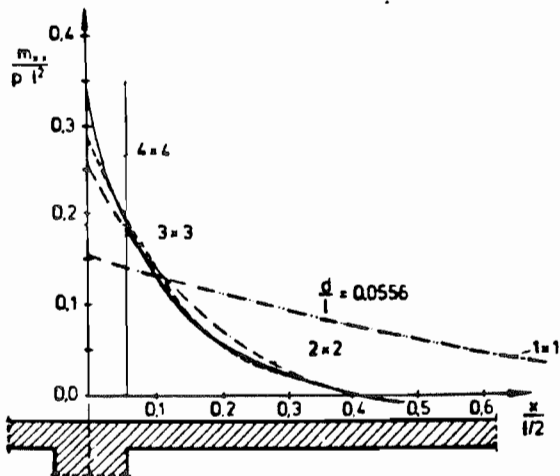


Bild 10: Punktstützung: Konvergenzverhalten NISA S 16

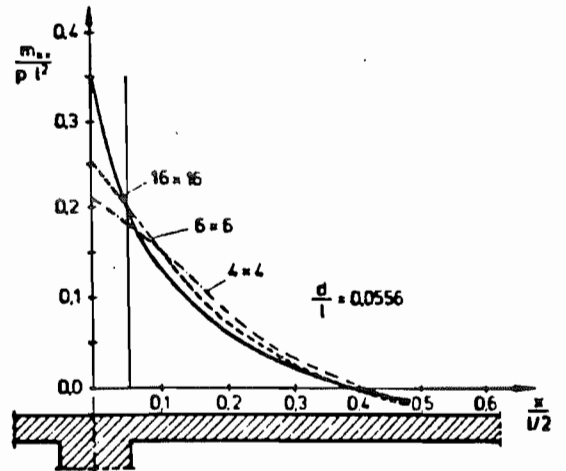
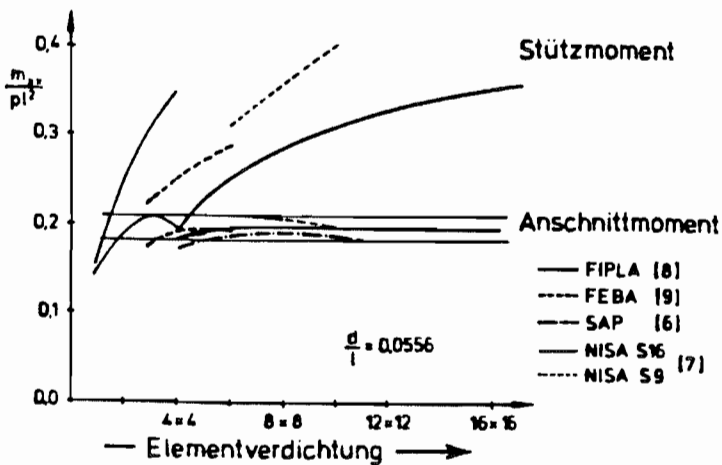


Bild 11: Punktstützung: Konvergenzverhalten FIPLA



Empfehlung:

d/l	Idealisierung
< 0,1	Punktstütze oder Einzelfeder
0,1 - 0,2	starre oder federnde Lager
> 0,2	Volleinspannung am Stützenrand

Bild 12: Punktstützung: Konvergenzdiagramm

Um Ecke laufende Kragplatte

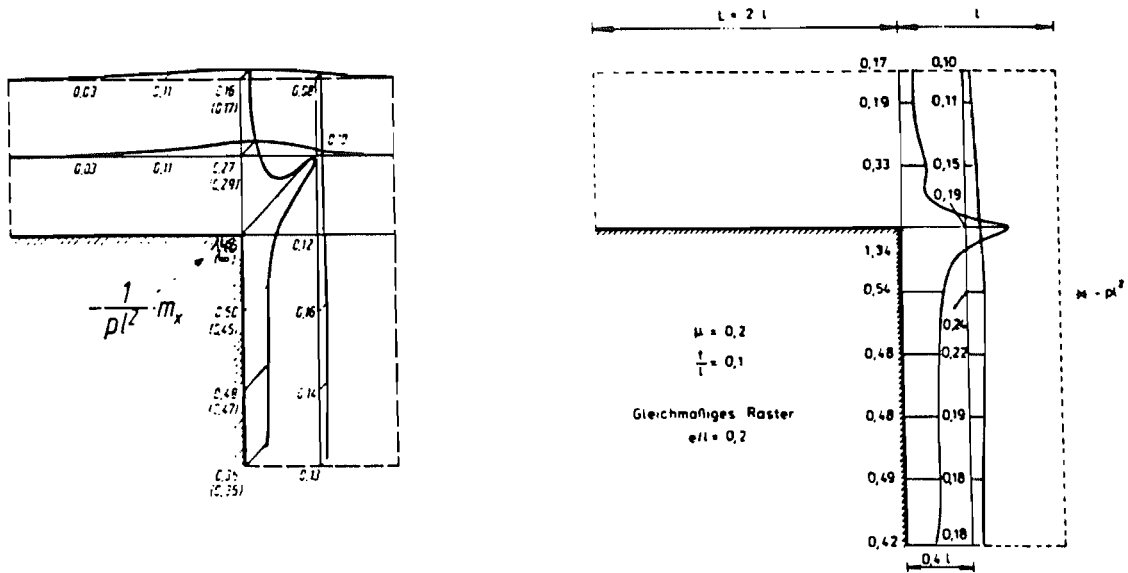


Bild 16: Verlauf von m_x nach [25] und [26] an der Einspannung
 mit Differenzverfahren (1971) / FE-Lösung (1989)

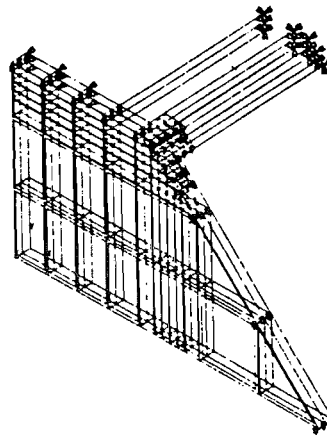
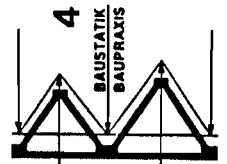


Bild 17: Räumliche Idealisierung der halben Eckplatte

Die Ergebnisse einer räumlichen Modellierung der Platte und des Eckbereiches mit Quaderelementen [26], Bild 17, bei elastischer Lagerung gehen in dieselbe Richtung: Der Maximalwert des Momentes liegt etwa bei dem dreifachen des Kragmomentes $M_{x \max} \sim 3 pl^2/2$.

Aus der Studie lassen sich folgende Schlußfolgerungen ziehen:

- Eine extreme Verdichtung zur Erfassung der künstlichen Spannungskonzentrationen des Rechenmodells im Eckbereich ist nicht erforderlich; der Verschmierungseffekt der finiten Elemente kommt dem wirklichen Tragverhalten bei elastischer Lagerung – möglicherweise auch bei Aufweichung durch Ribbildung u.ä. – entgegen. (Eine genauere Untersuchung zum "pollution"-Effekt, Abschnitt 3.5, steht für diesen Fall noch aus.)
- Eine moderate Netzverfeinerung zur Wiedergabe der zum Eck zunehmenden Einspanngrößen des wirklichen Tragwerks ist erforderlich.
- In jedem Fall sind die globalen Gleichgewichtsbedingungen, z.B. ΣM um Einspannlinie am Gesamtsystem, zu überprüfen.



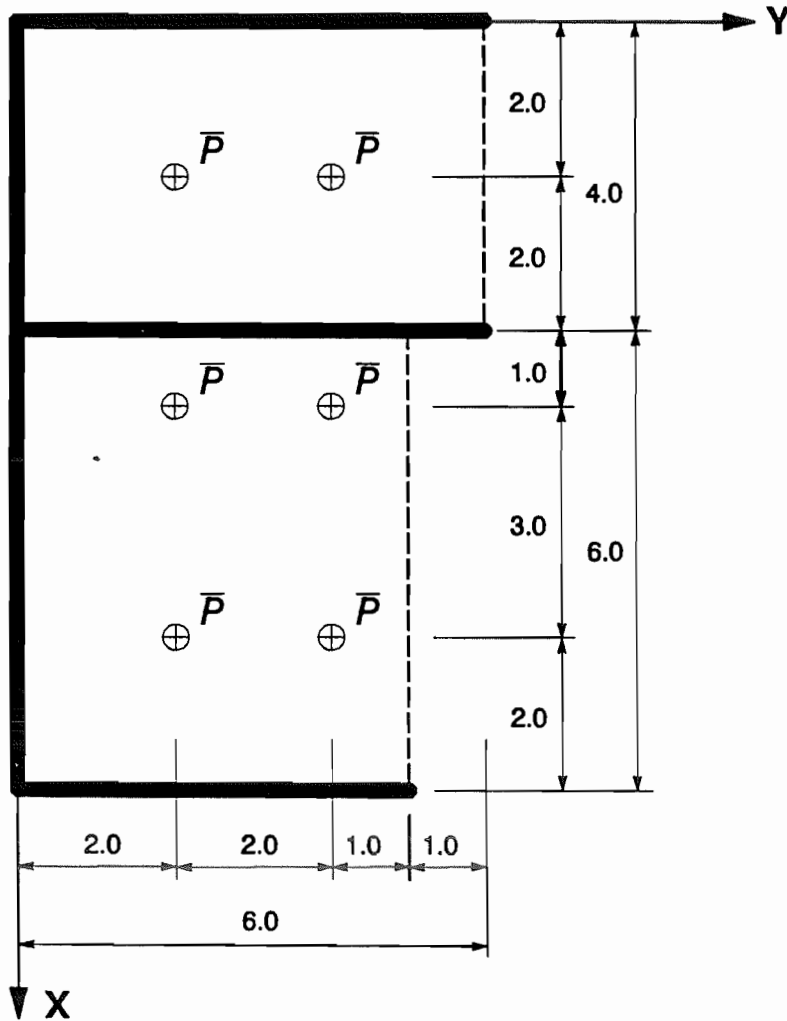
aus:

Problemfälle bei FE-Modellierungen

E. Ramm, J. Müller, Universität Stuttgart
 K. Wassermann, Universität Kaiserslautern

Hannover, 1990

Untersuchung des Konvergenzverhaltens verschiedener Plattenelemente am Beispiel einer Zweifeldplatte

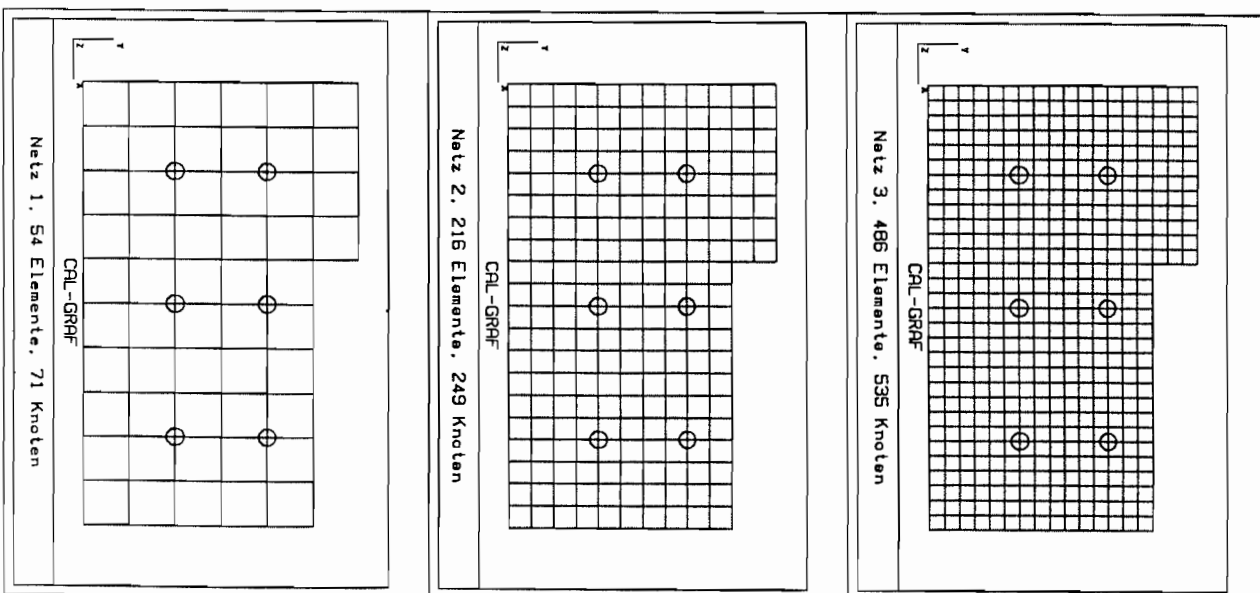


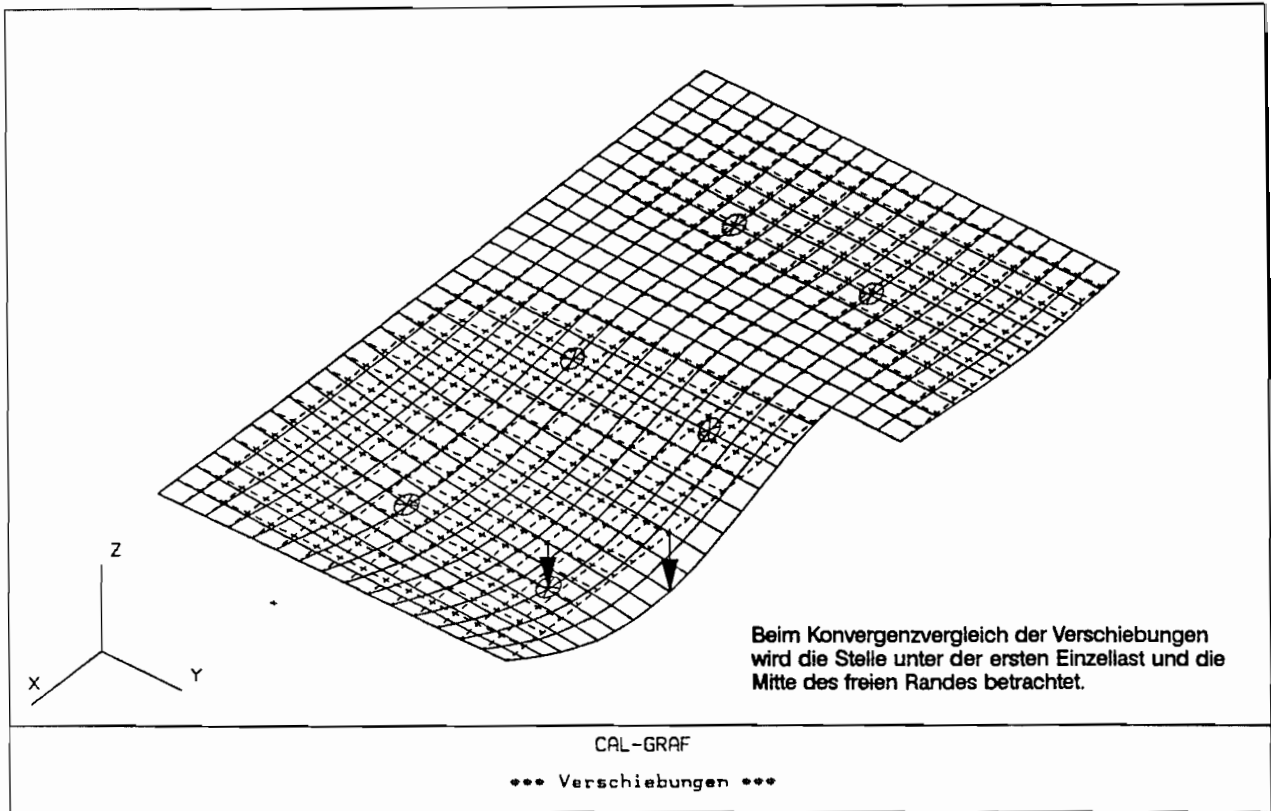
System:

$d = 0.25\text{m}$
 $E = 30 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$
 $\nu = 0.3$

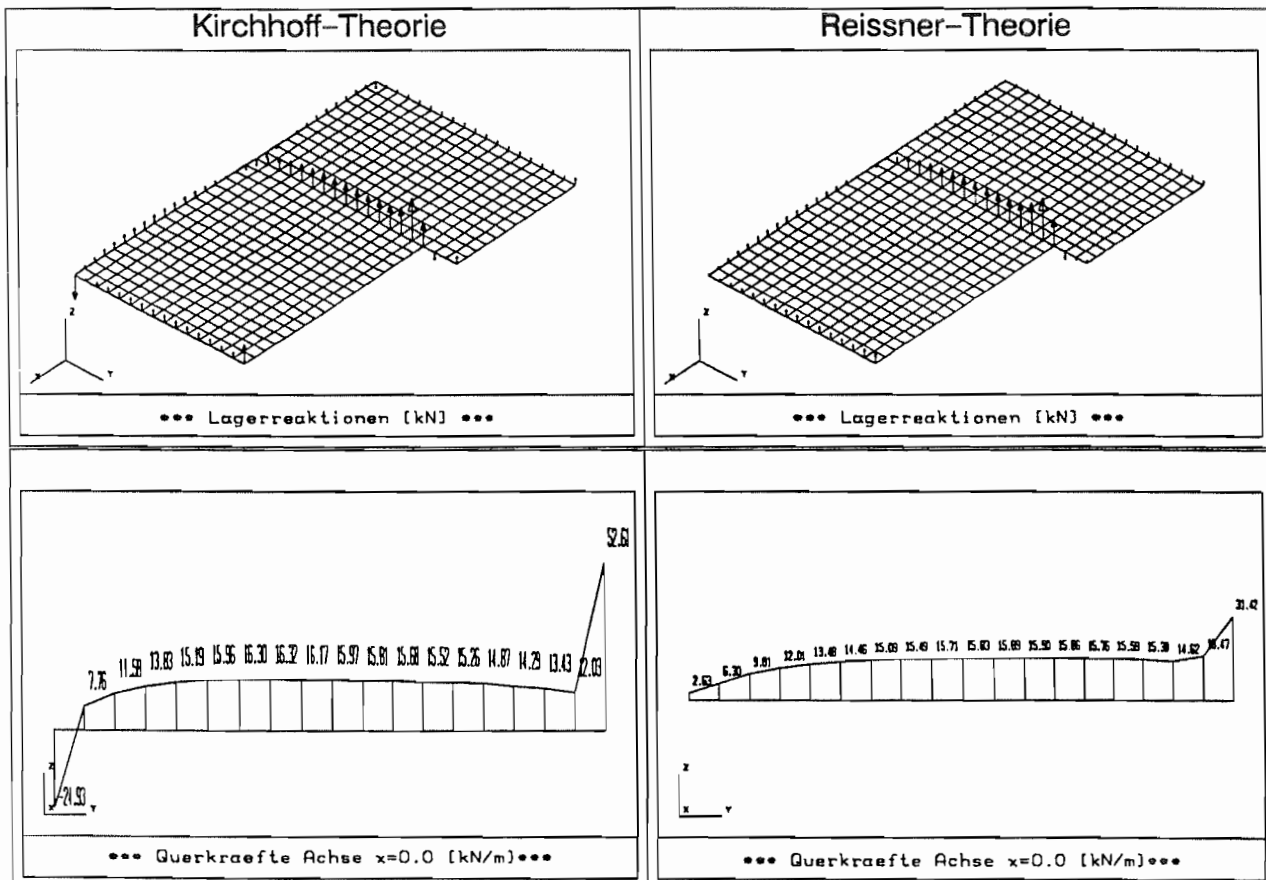
Belastung:

Flächenlast
 $q = 11.25 \text{ kN/m}^2$
Einzellasten
 $P = 10 \text{ kN}$





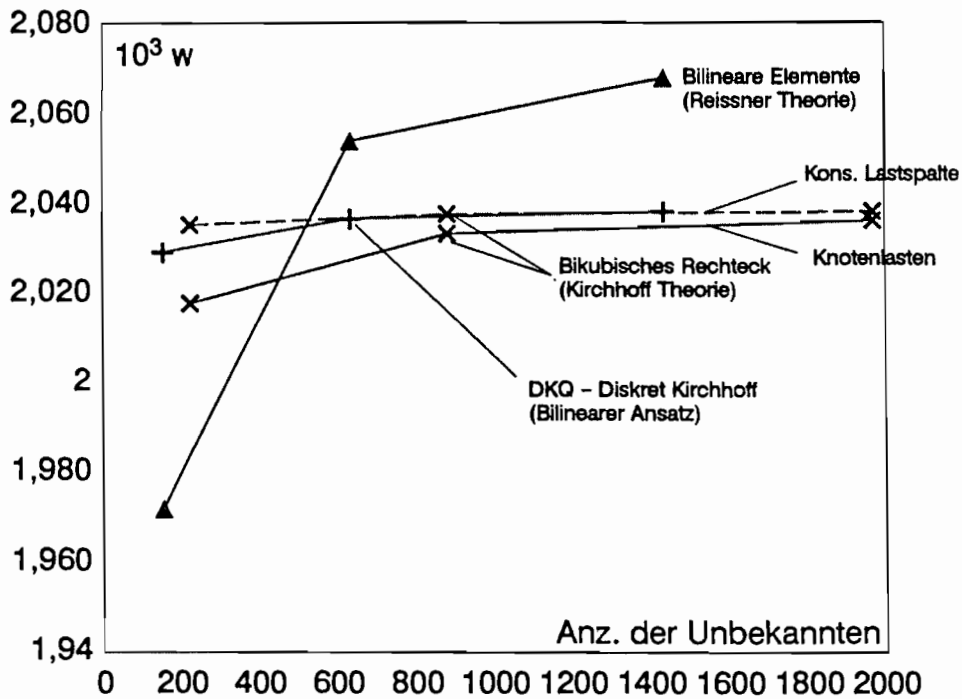
Verteilung der Auflagerkräfte infolge Volllast: Beachte die abhebenden Eckkräfte bei der Schubstarren Platte (Kirchhoff), sowie das Ansteigen der Auflagerkraft am hinteren Rand infolge der fehlenden Durchlaufwirkung des vorstehenden Plattenteils.



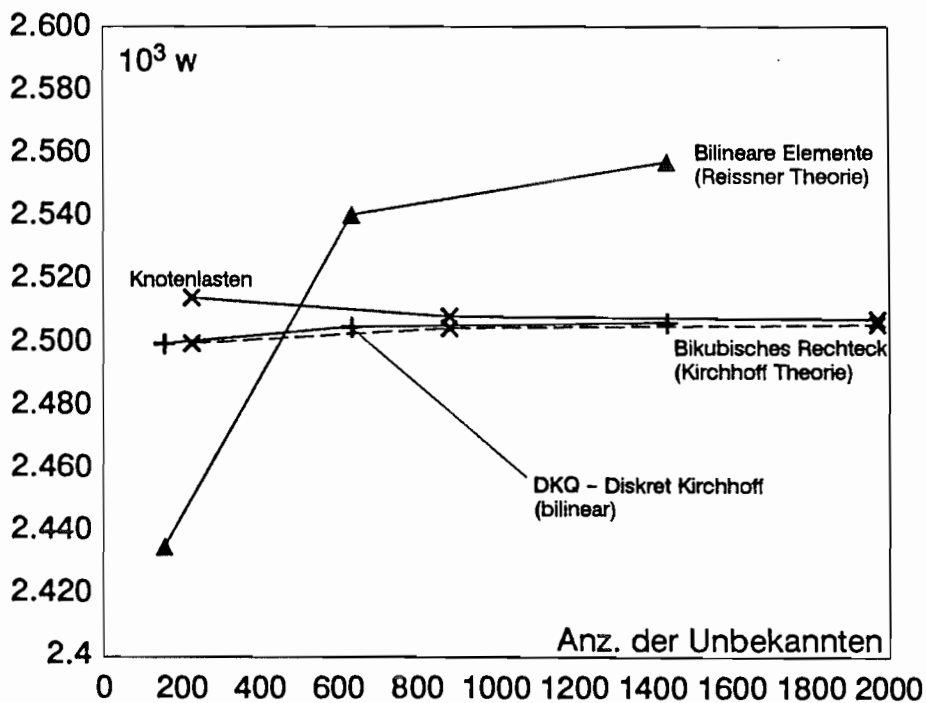
Konvergenzverhalten rechteckiger Plattenelemente – Verschiebungen

Vergleich von schubstarr (Kirchhoff) mit schubweichen (Reissner) Plattenelementen:

- a) Die schubweichen Elemente konvergieren nicht gegen denselben Grenzwert wie die Kirchhoff-Elemente, der Unterschied ist für dünne Platten jedoch gering (siehe nächste Seite).
- b) Vergleicht man das Konvergenzverhalten an verschiedenen Punkten des Netzes, so stellt man fest, daß das bikubische Element nicht immer von unten gegen die exakte Lösung konvergiert (siehe unten)



Verschiebung (10^3 -fach) unter der Einzellast, Knoten $x = 8.0, y = 4.0$

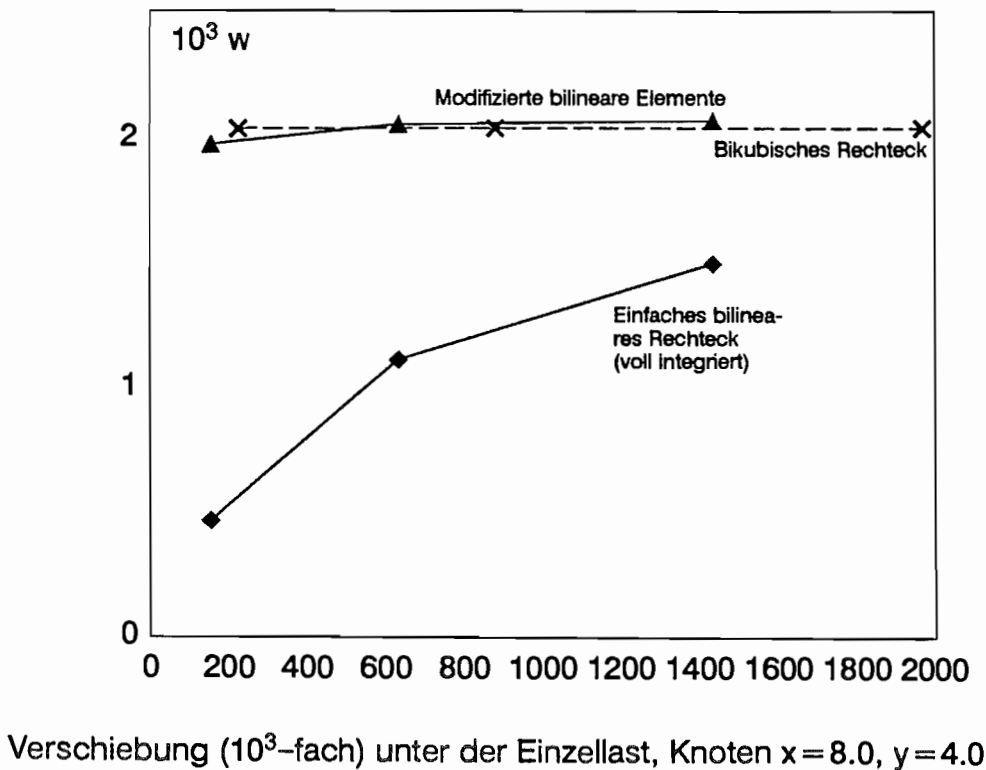
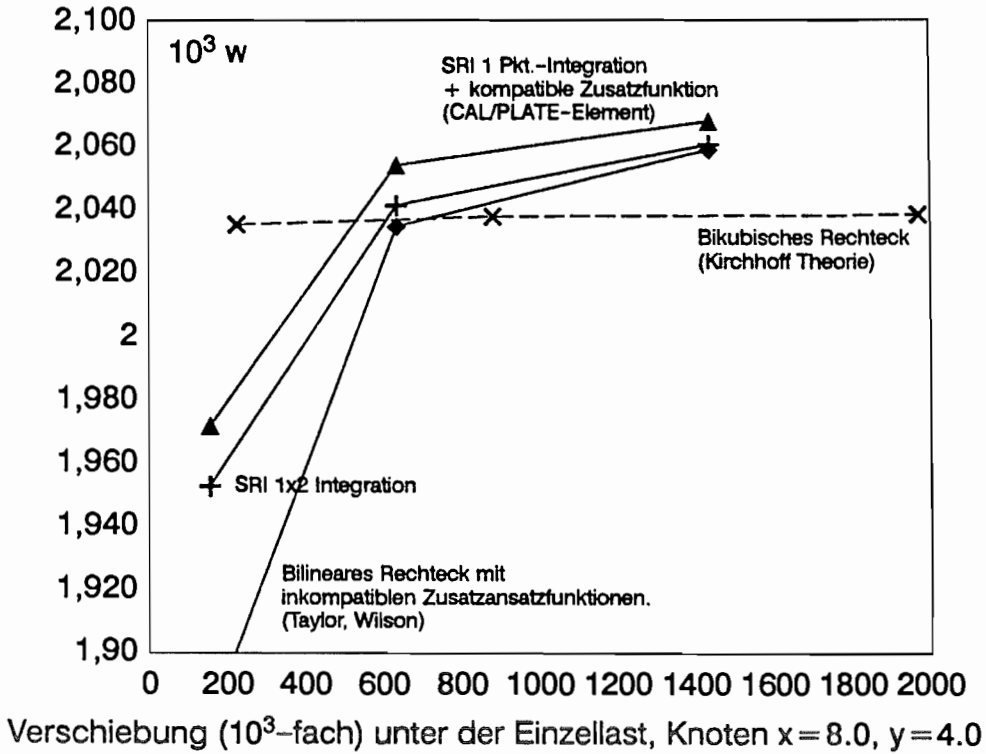


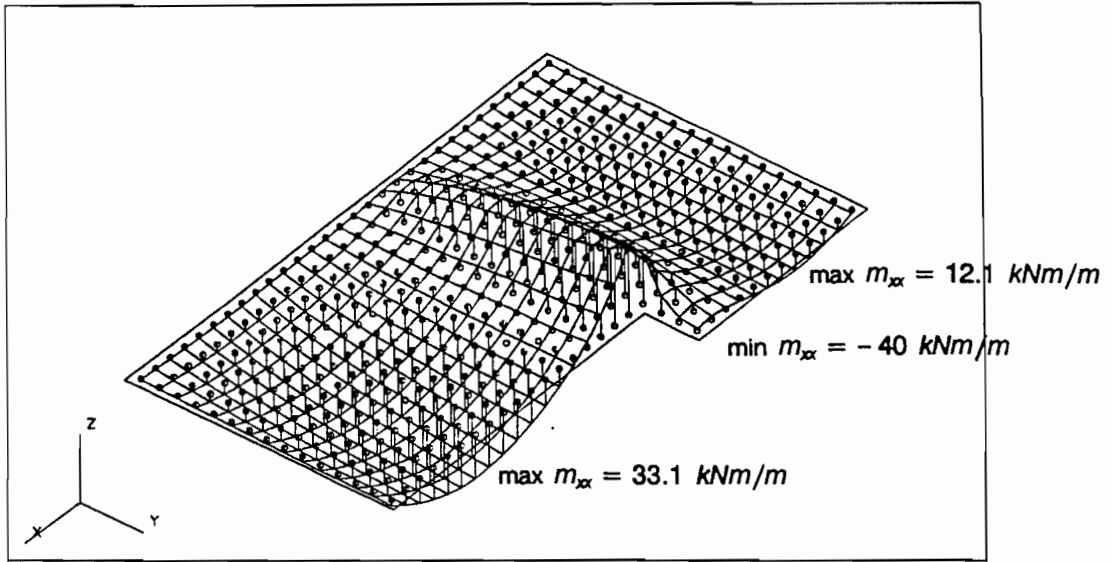
Verschiebung (10^3 -fach) am freien Rand, Knoten $x = 7.0, y = 5.0$

Konvergenzverhalten rechteckiger Plattenelemente – Verschiebungen

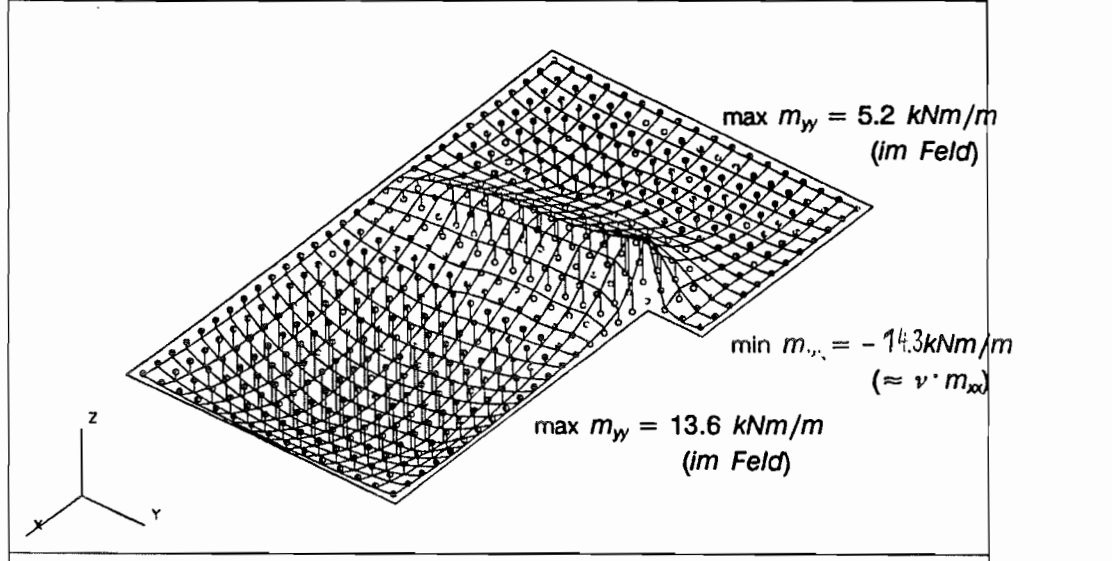
Vergleich verschiedener schubweicher (Reissner) Plattenelemente untereinander:

- a) Das einfache vollintegrierte bilineare Rechteckelement ist wegen des sogenannten "Shear Lockings" viel zu steif.
- b) Es läßt sich durch reduzierte Integration der Schubanteile und/oder zusätzlichen Ansatzfunktionen verbessern.
- c) Die verbesserten bilinearen Elemente sind im vorliegenden Fall mit rechteckigem Netz gleichwertig (siehe unten).

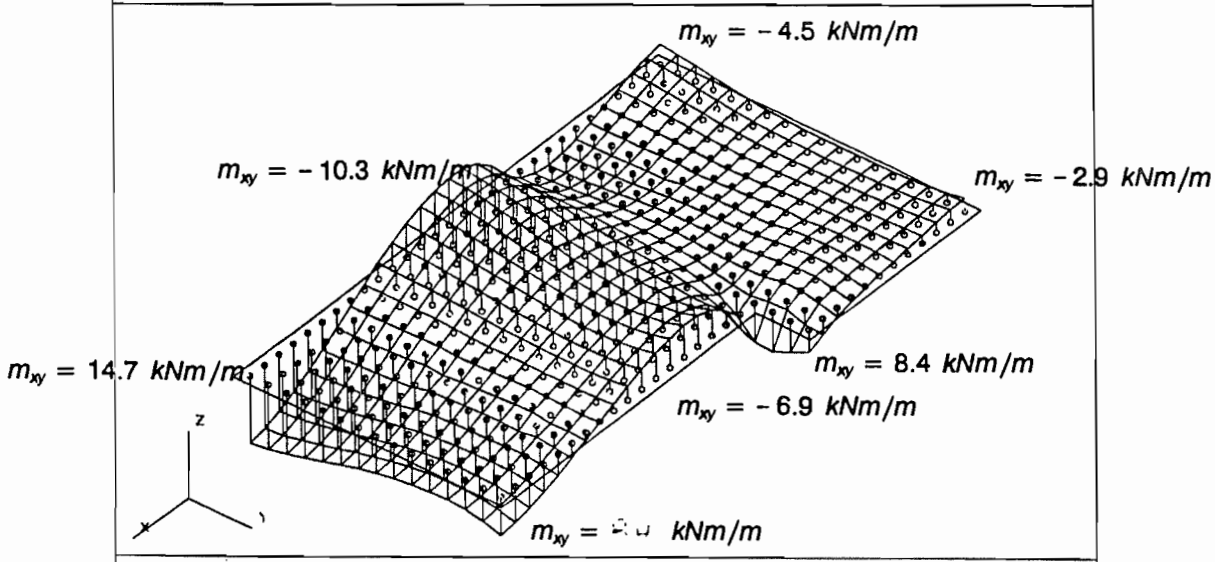




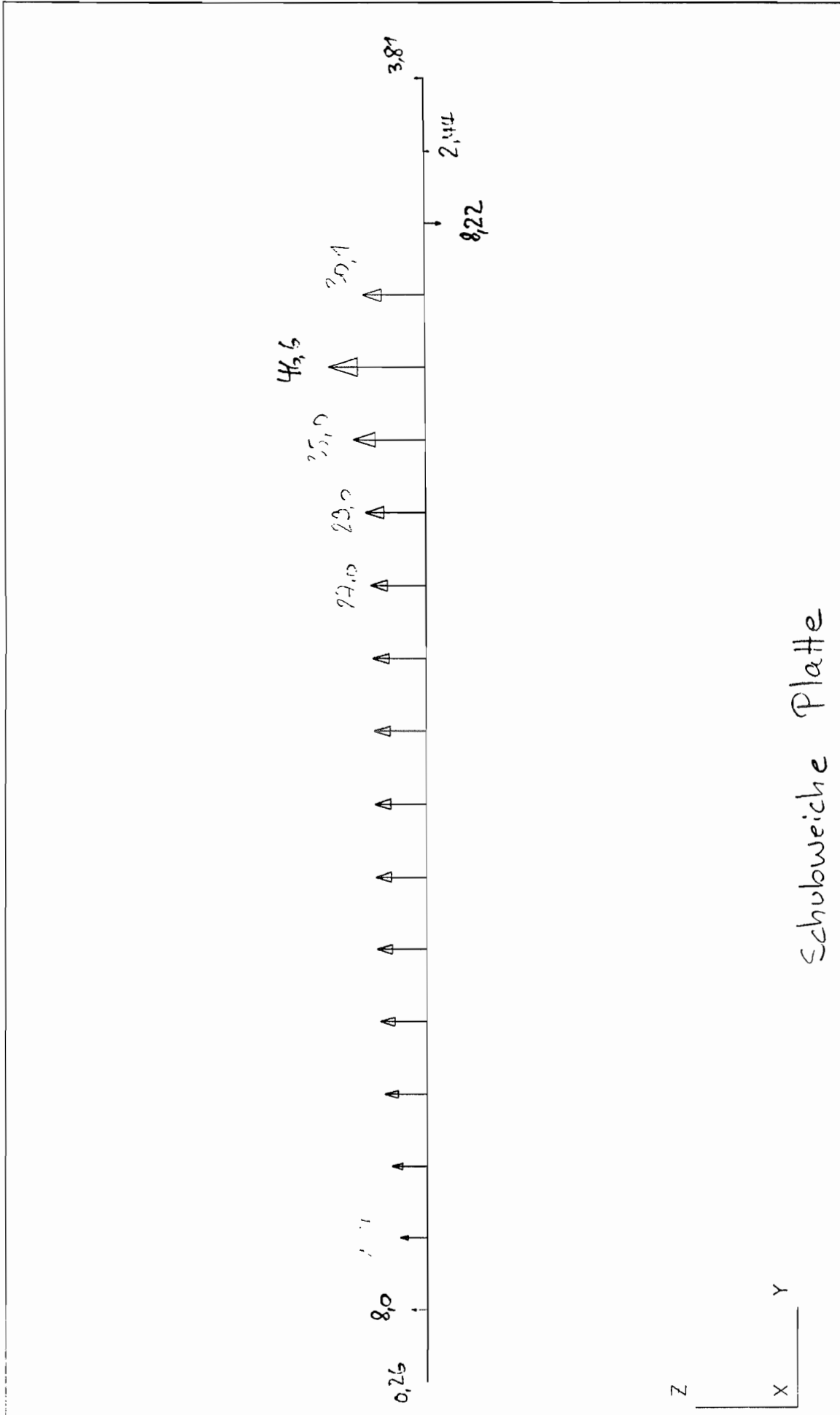
CAL-GRAF
 *** Biegemoment Mxx ***



CAL-GRAF
 *** Biegemoment Myy ***



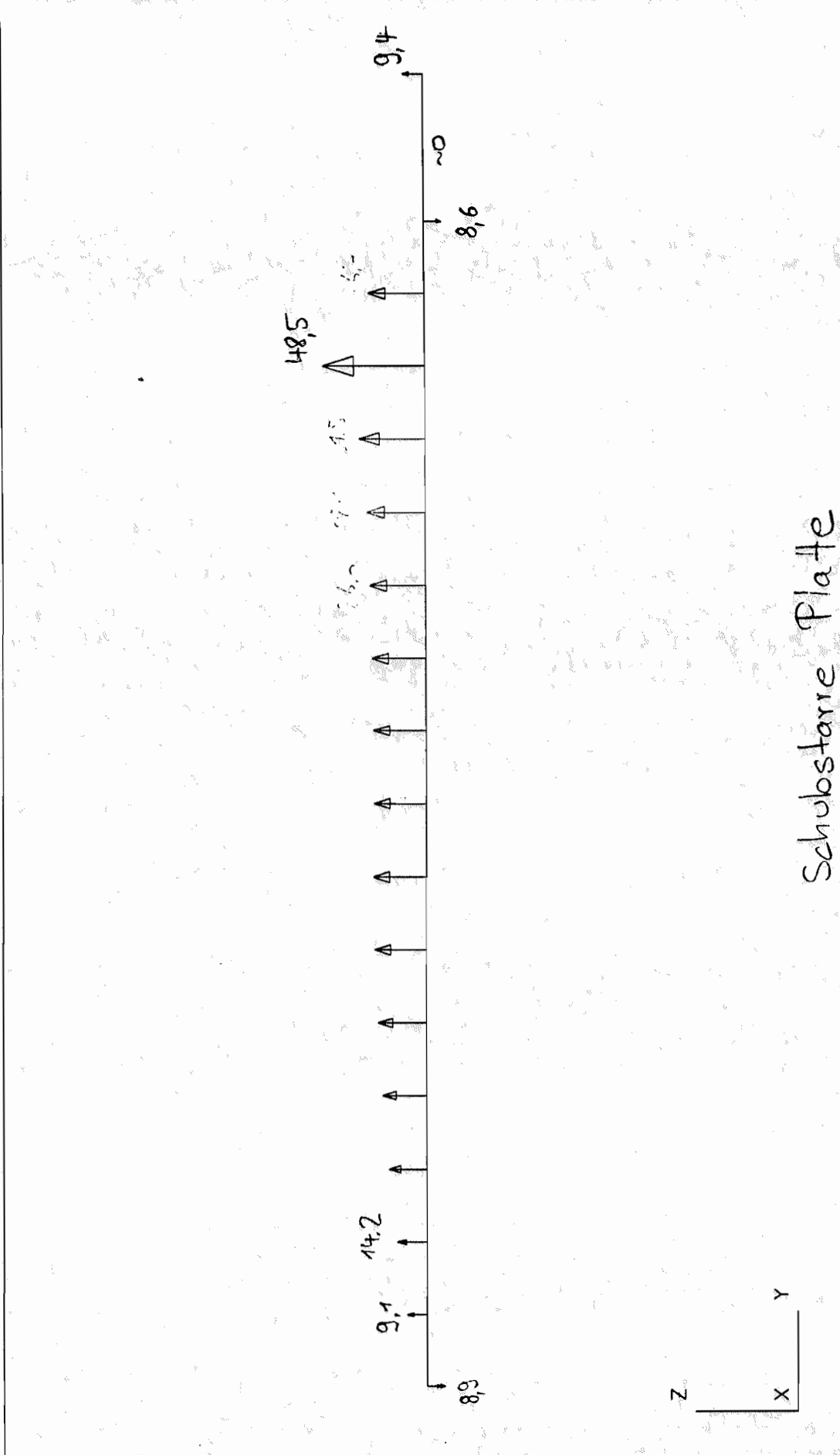
CAL-GRAF
 *** Drillingmoment Mxy ***



Schubweiche Platte

CAL-GRAF

*** Lagerreaktionen [kN] Achse x=4.0 ***



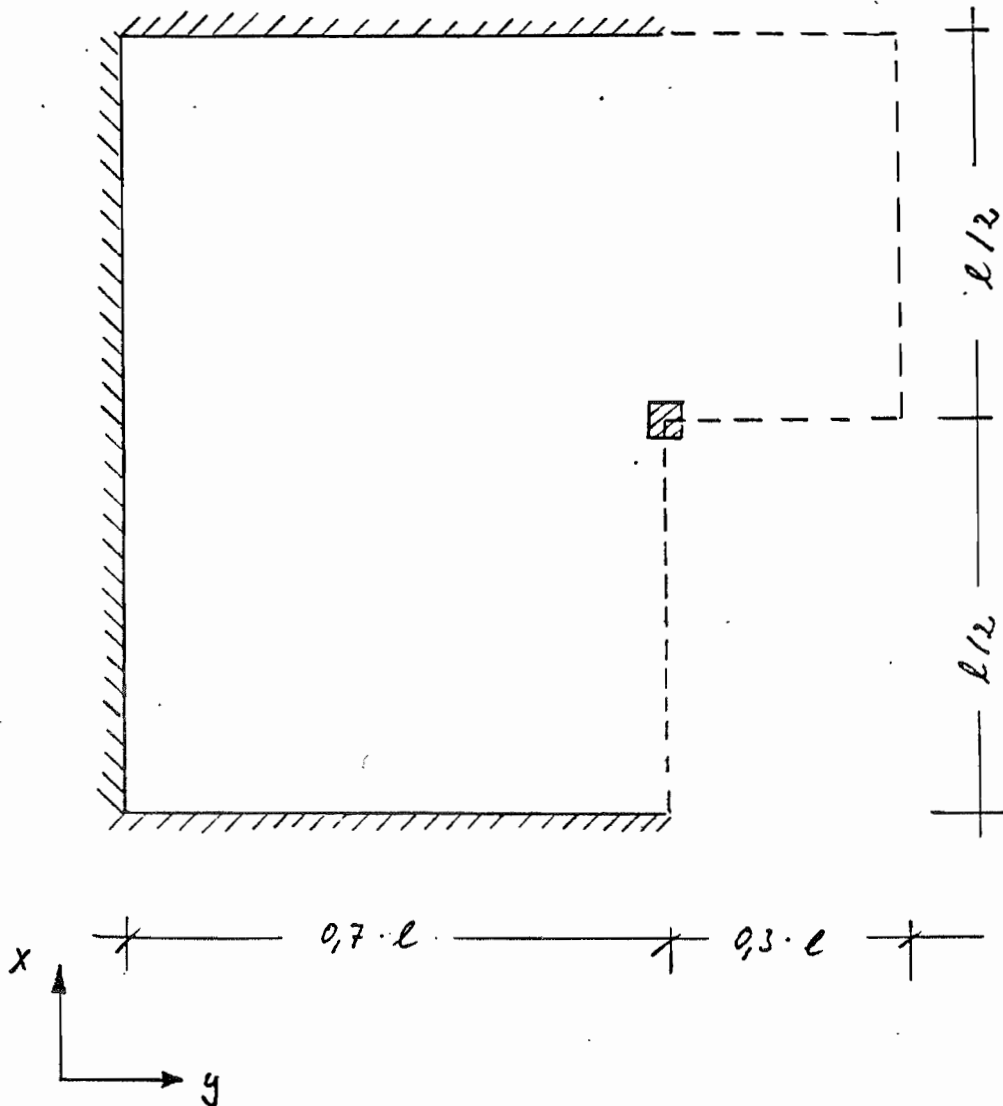
Schubstarre Platte

CAL-GRAF

*** Lagerreaktionen [kN] Achse x=4.0 ***

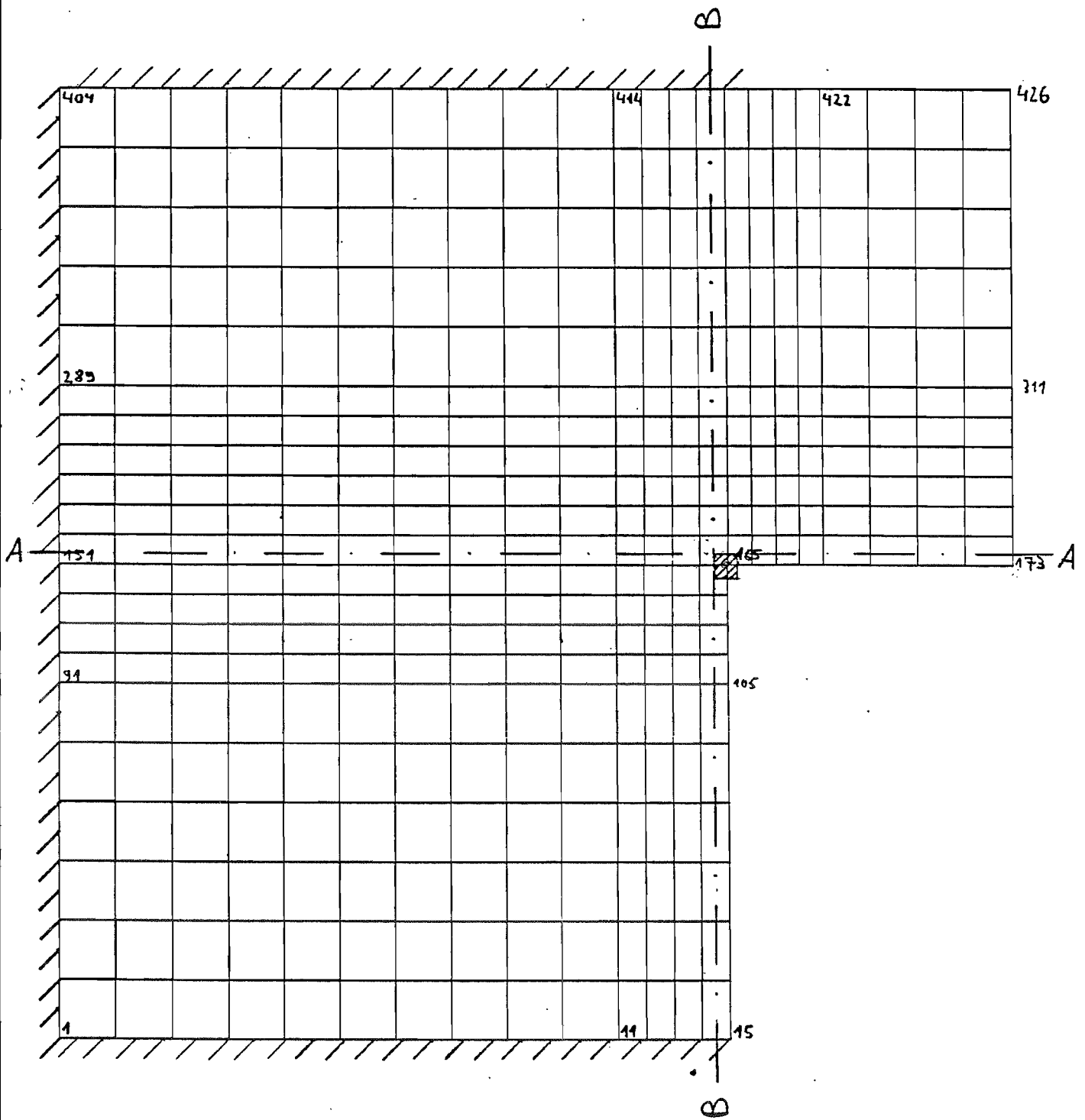
Beispiel: Dreiseitig eingespannte Platte
mit Stütze am freien Rand

nur als Umdruck verteilt \rightarrow nur Folien, als Anwendungs-
 beispiel für Punktstützung



Lastfall Eigengewicht

$$\nu = 0,2$$

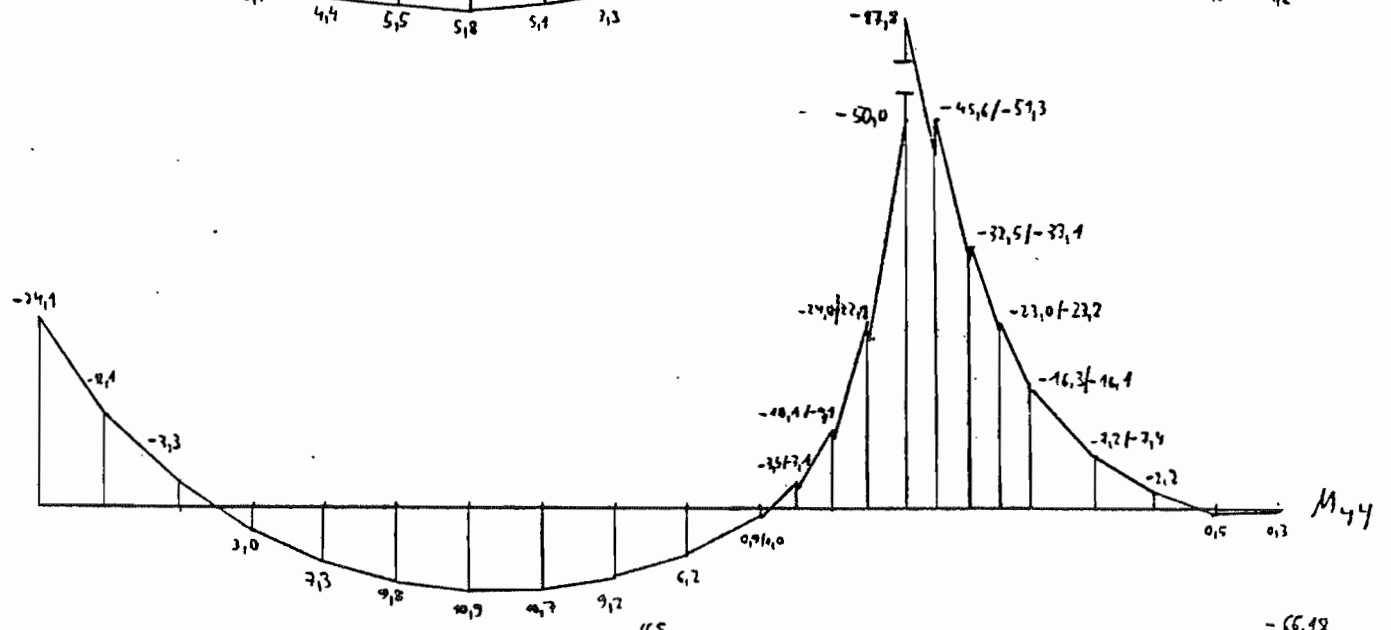
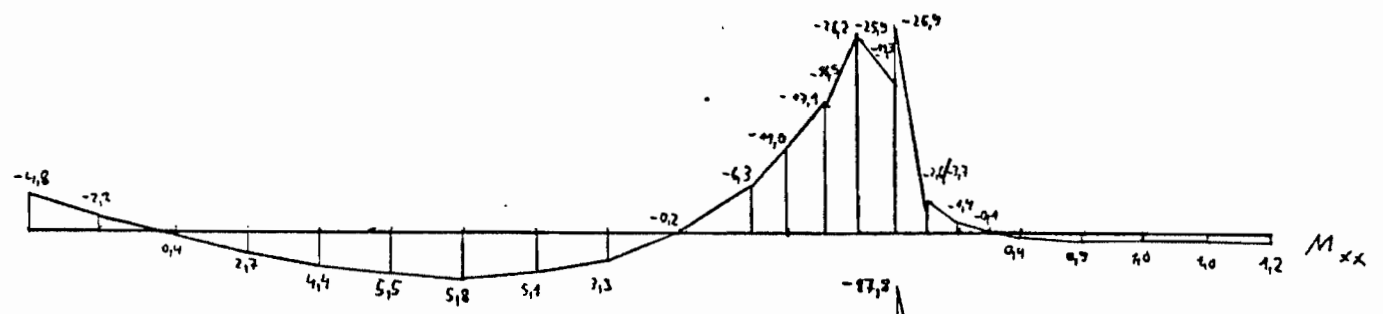


*** 3-SEITIG EINGESPANNTE PLATTE ***
*** STUETZE UNTER KNOTEN 165 ***
*** 426 KNOTEN ***

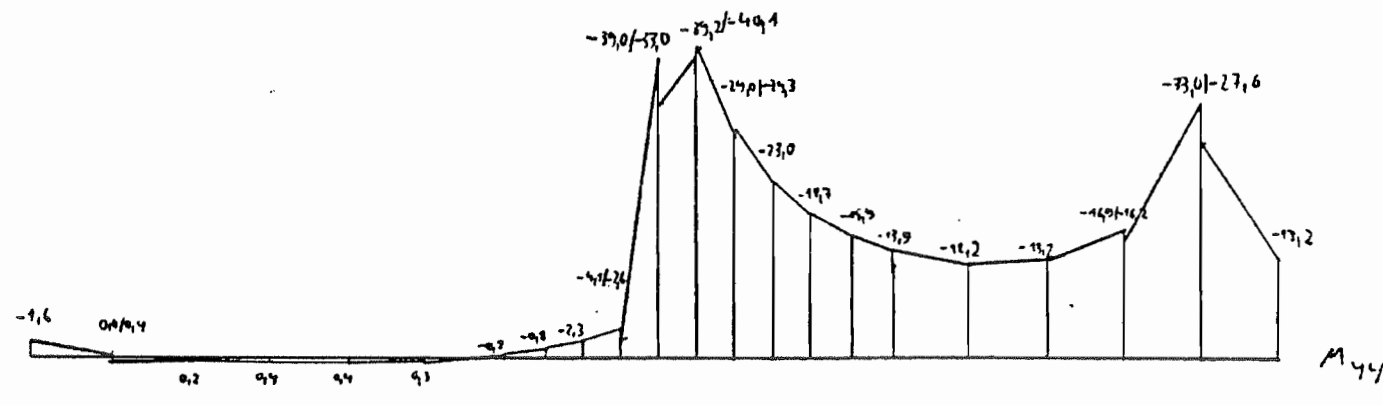
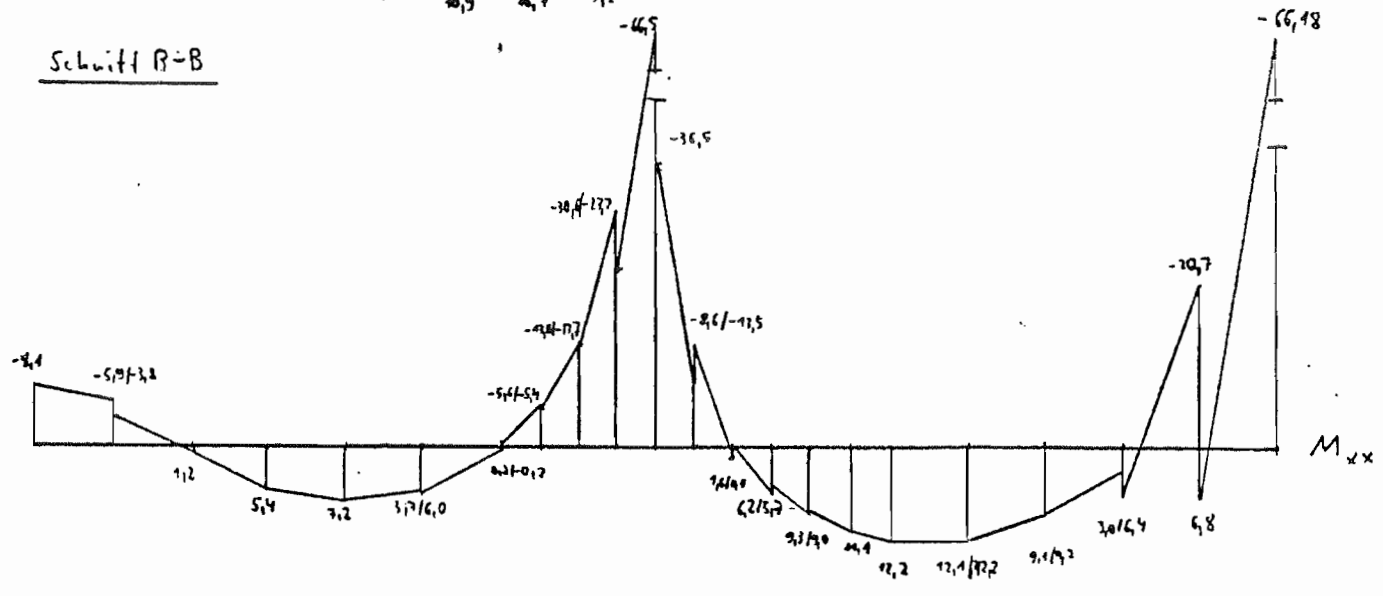
Netz 4

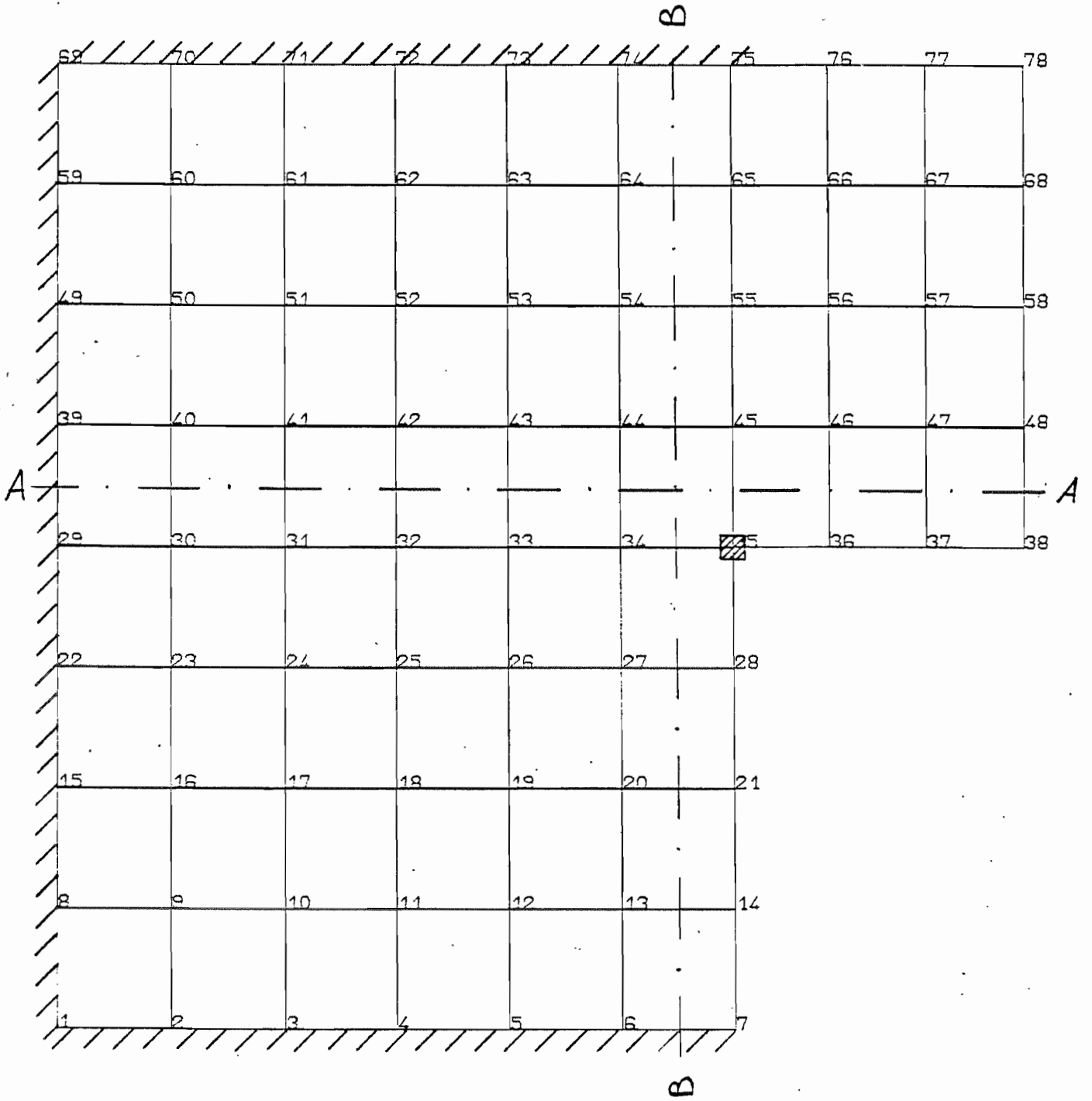
Schnitt A-A

Biegemomentenverlauf, Netz 4



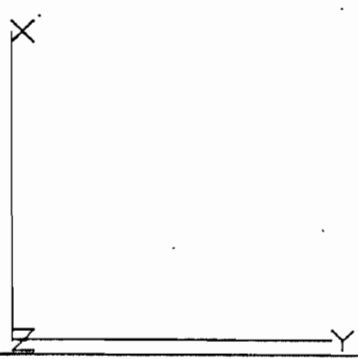
Schnitt B-B





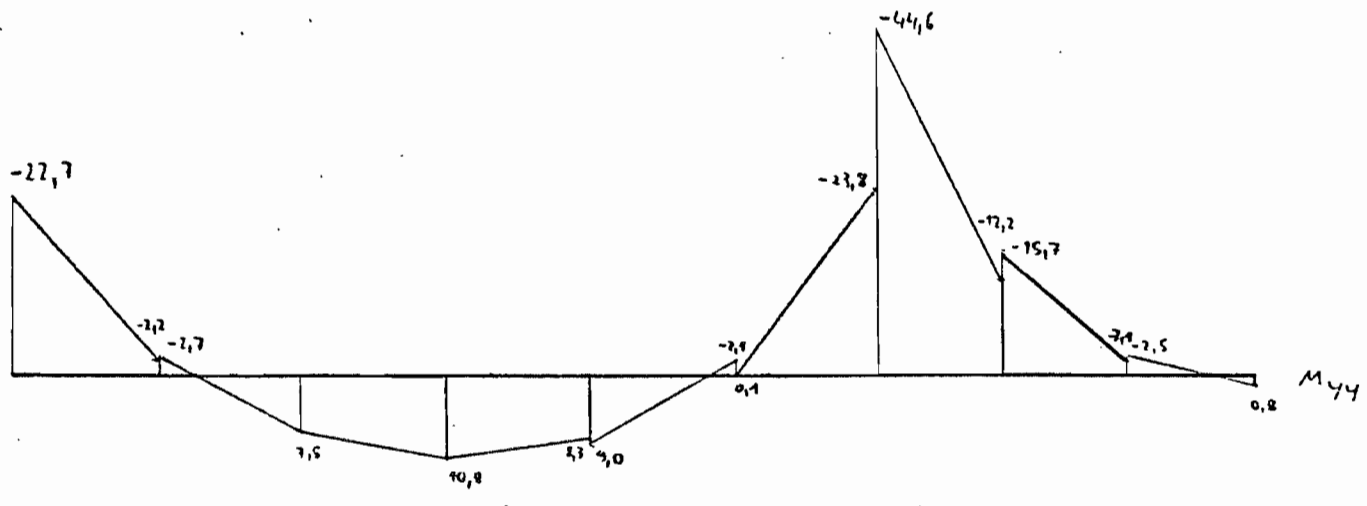
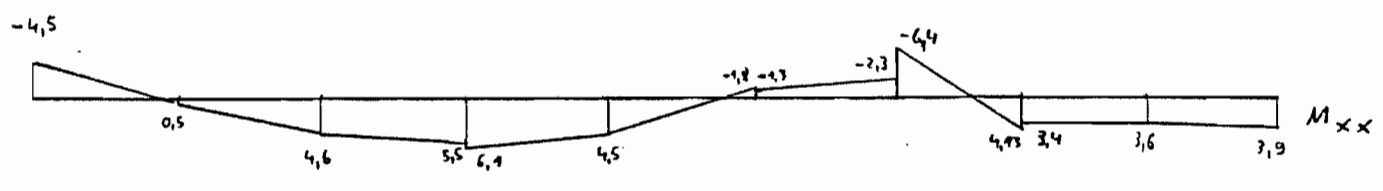
*** 3-SEITIG EINGESPANNTE PLATTE ***
 *** STUETZE UNTER KNOTEN 35 ***
 *** 75 KNOTEN ***

Netz 1

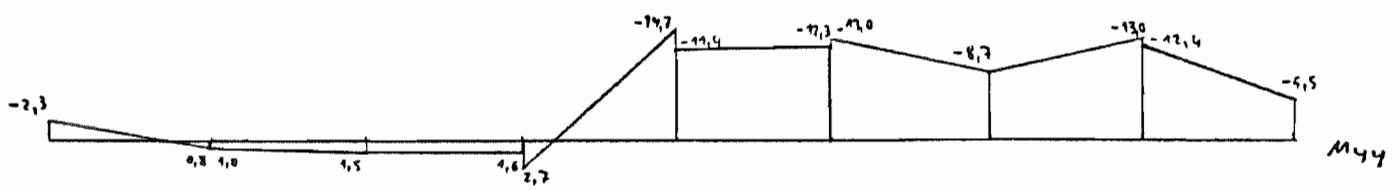
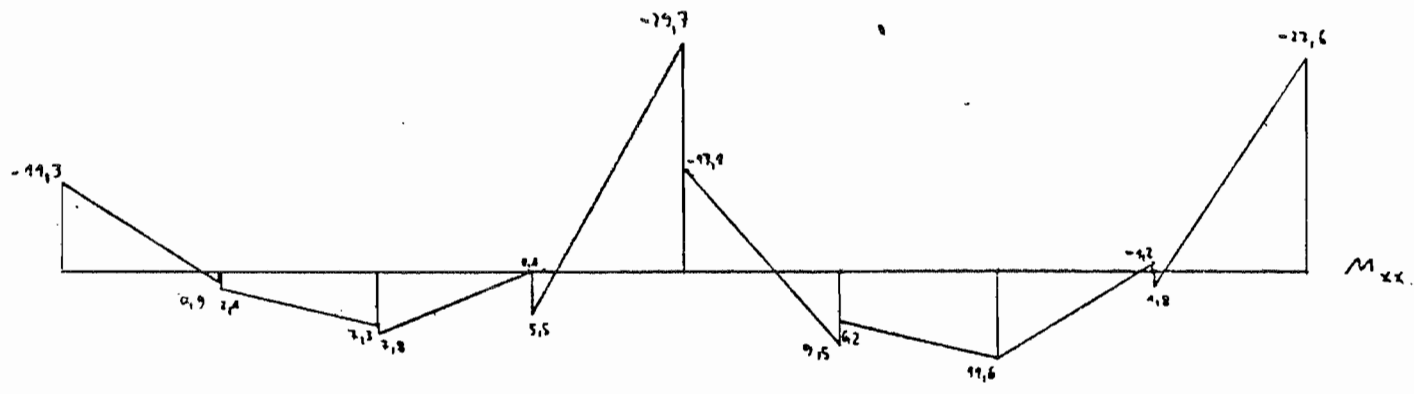


*** 3-SEITIG EINGESPANNTE PLATTE ***
*** 75 KNOTEN ***
*** HAUPTBIEGEMOMENTE ***
Netz 1

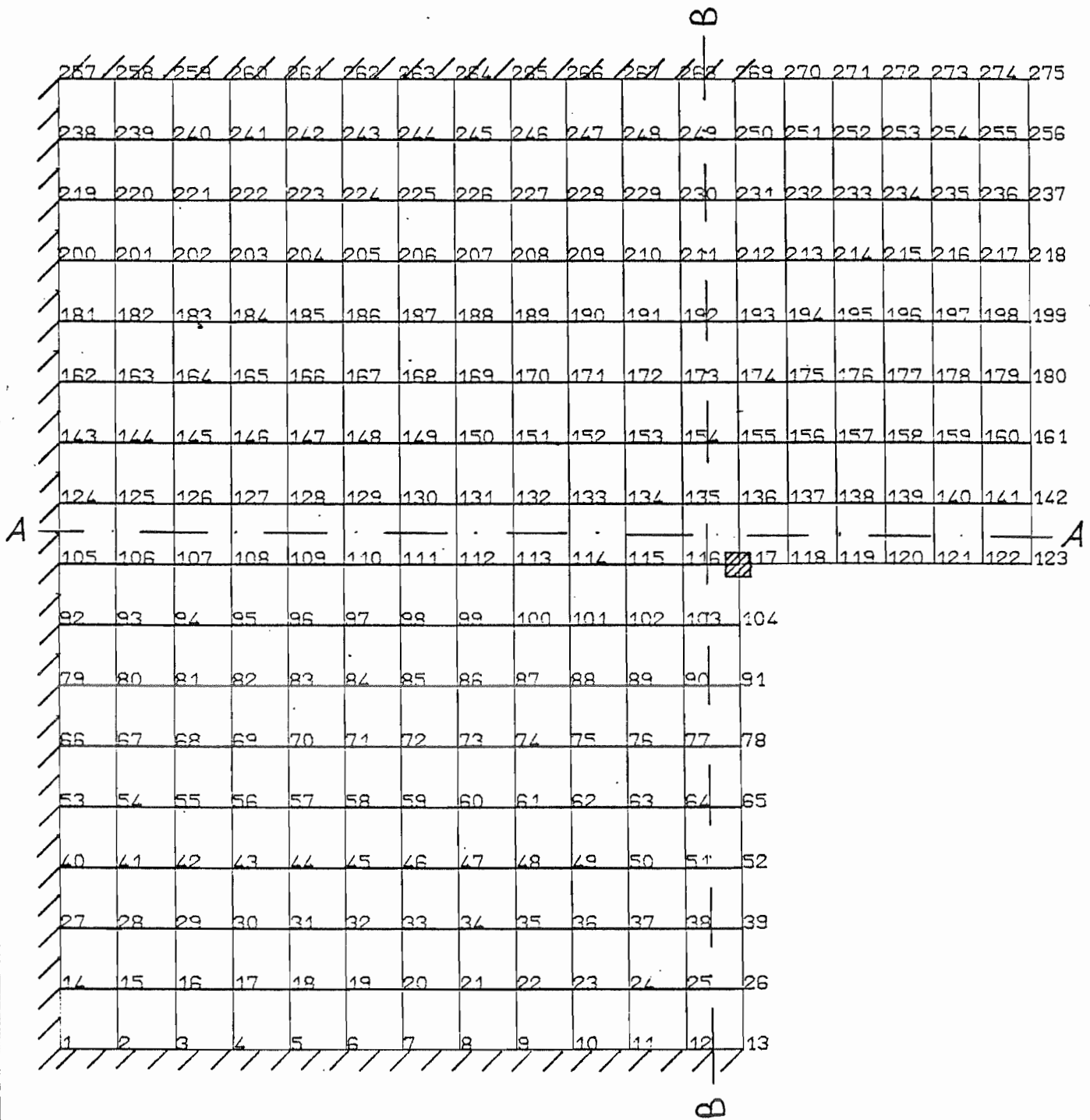
Schnitt A-A



Schnitt B-B



Biegemomentenverlauf , Netz 1

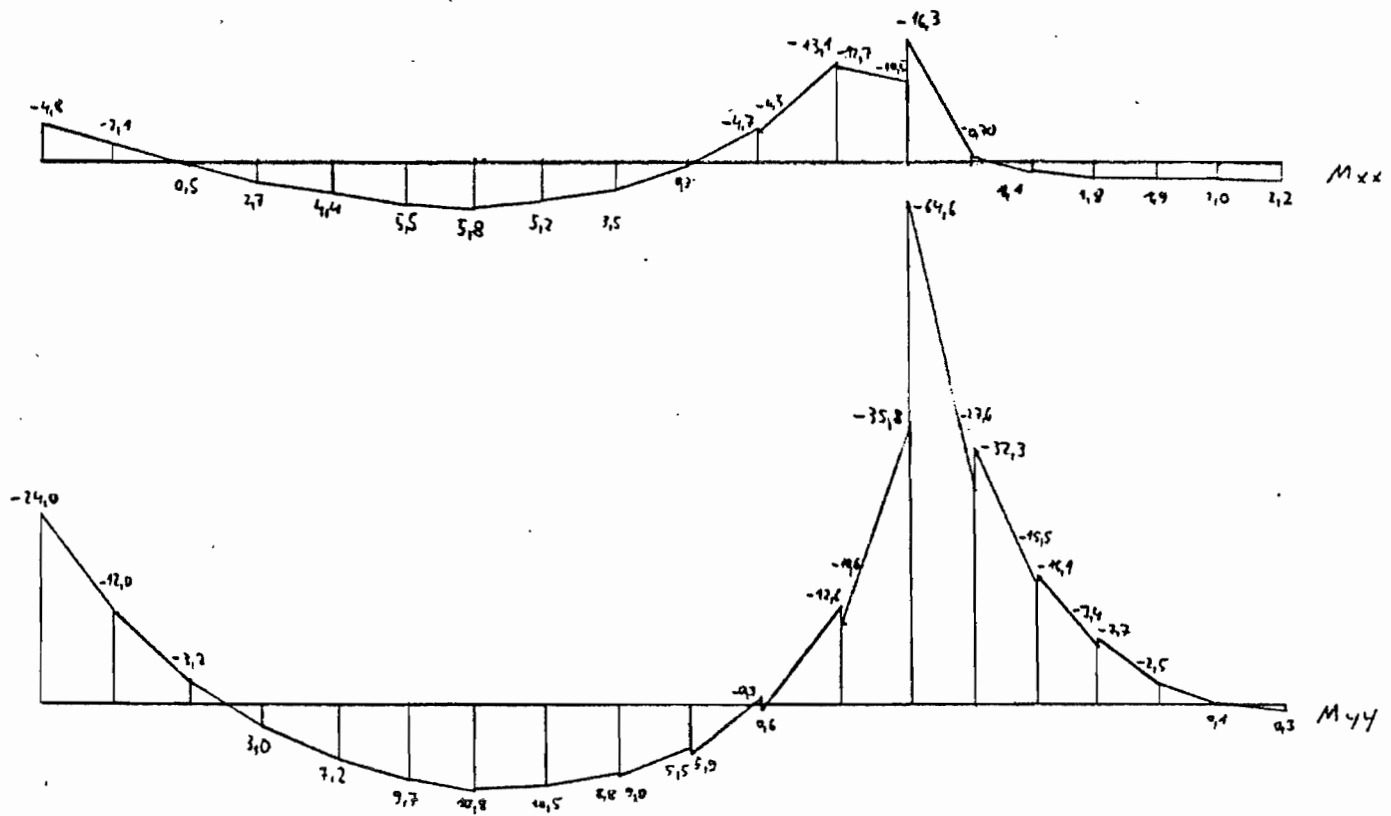


*** 3-SEITIG EINGESPANNTE PLATTE ***
 *** STUETZE UNTER KNOTEN 117 ***
 *** NETZ MIT 275 KNOTEN ***

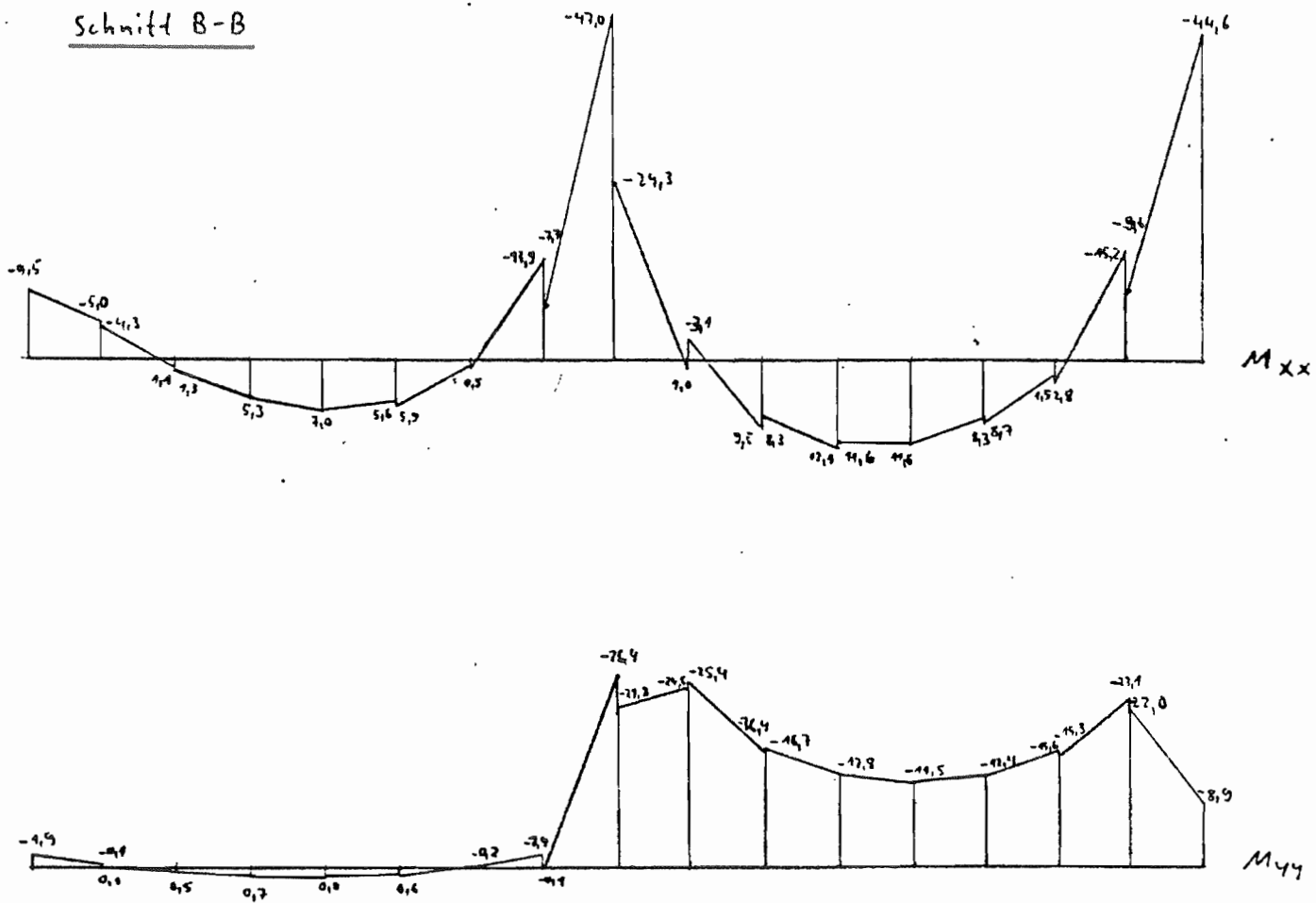
Netz 2.

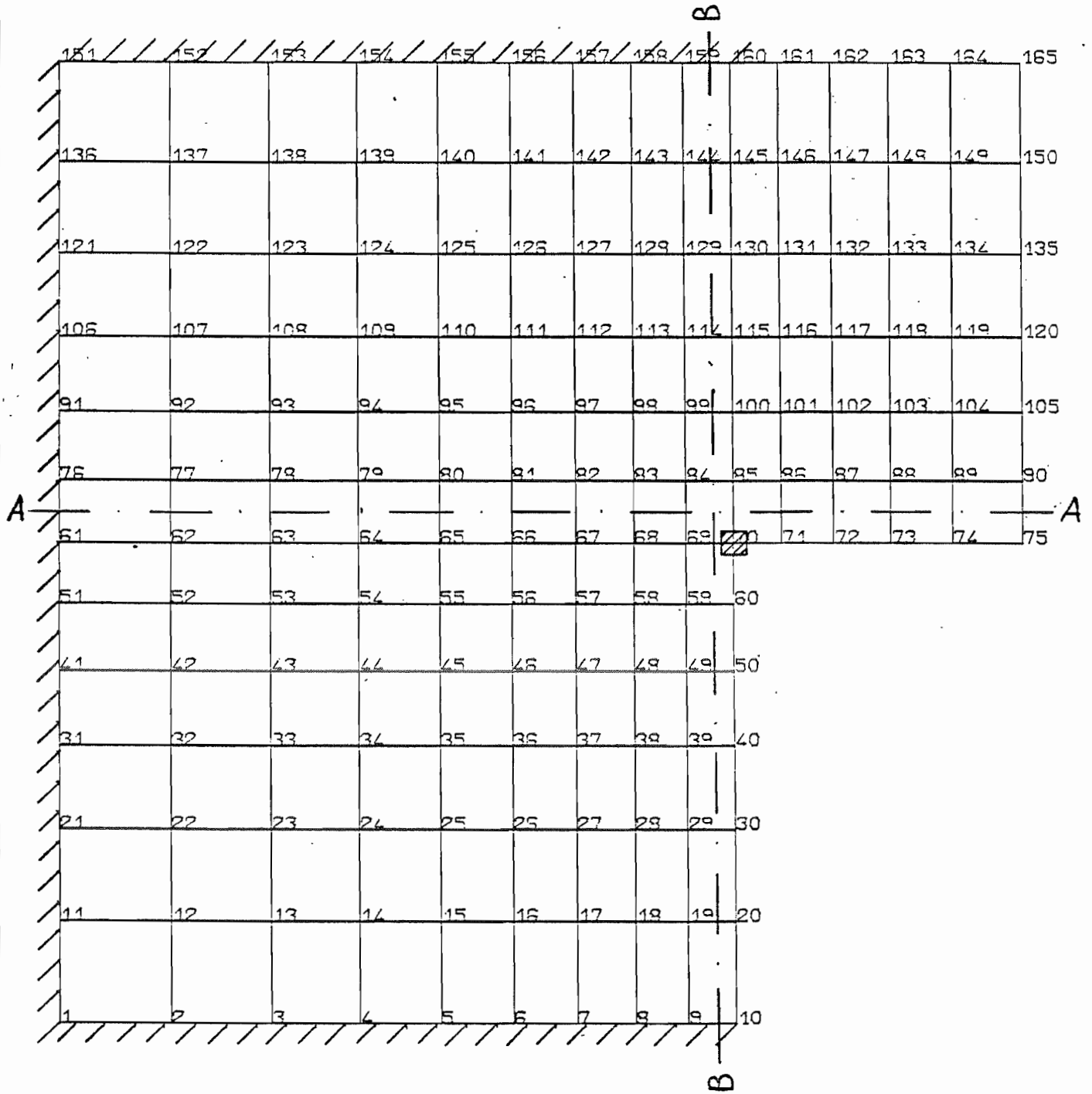
Schnitt A-A

Biegemomentenverlauf , Netz 2



Schnitt B-B



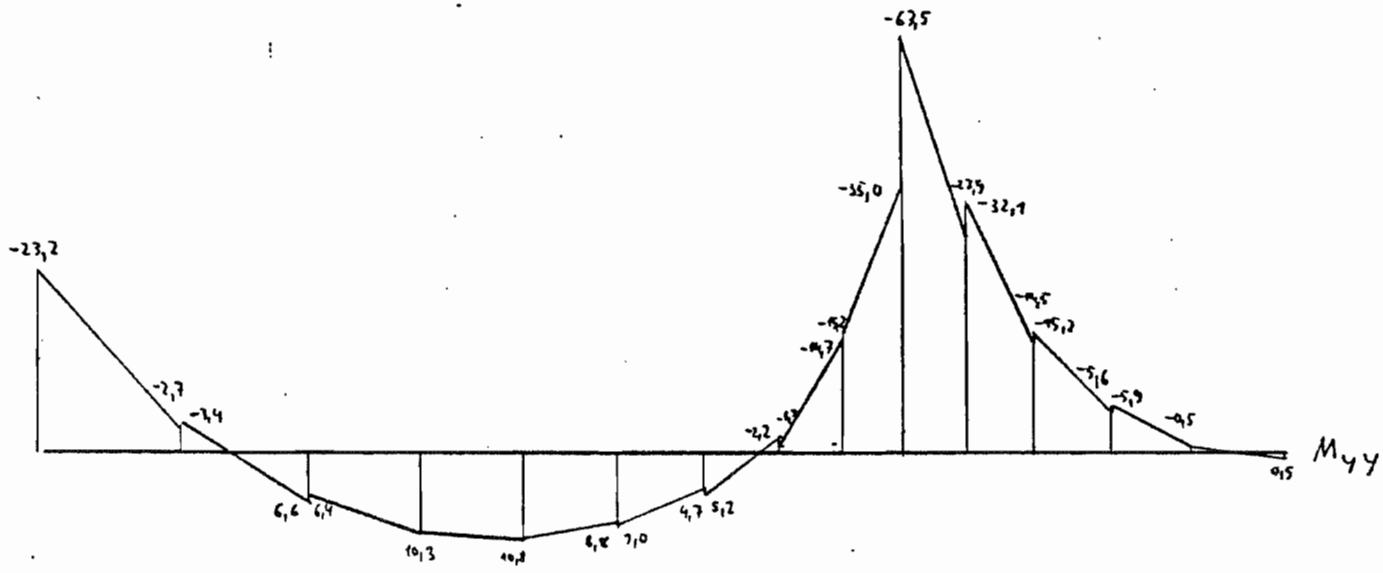
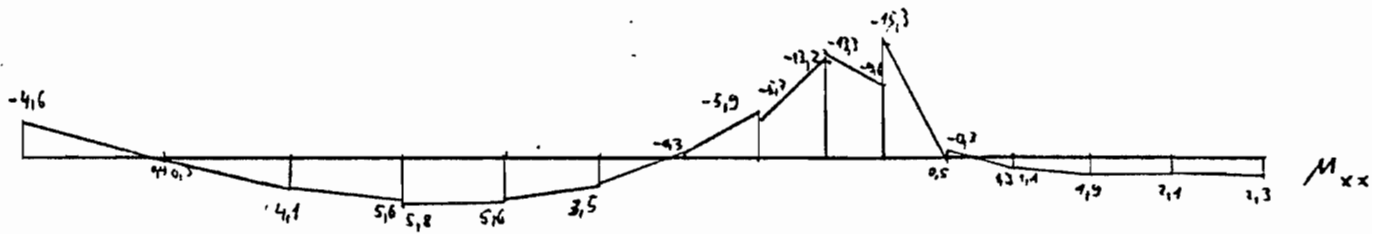


*** 3-SEITIG EINGESPANNTE PLATTE ***
*** STUETZE UNTER KNOTEN 70 ***
*** 165 KNOTEN ***

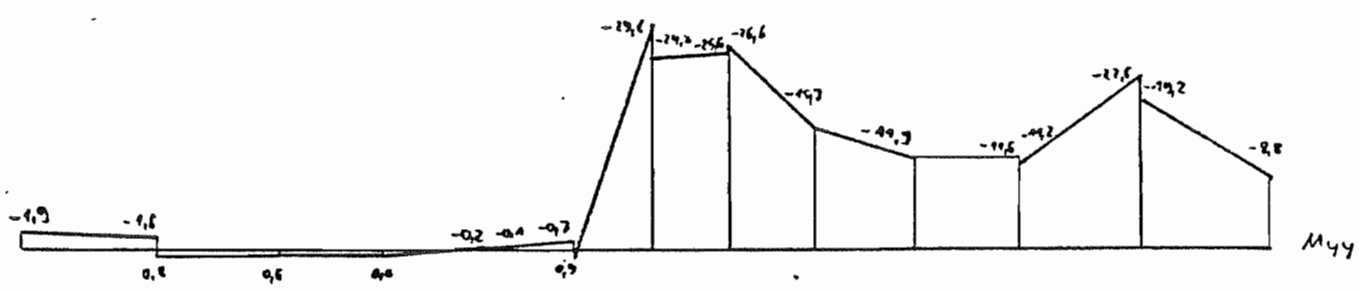
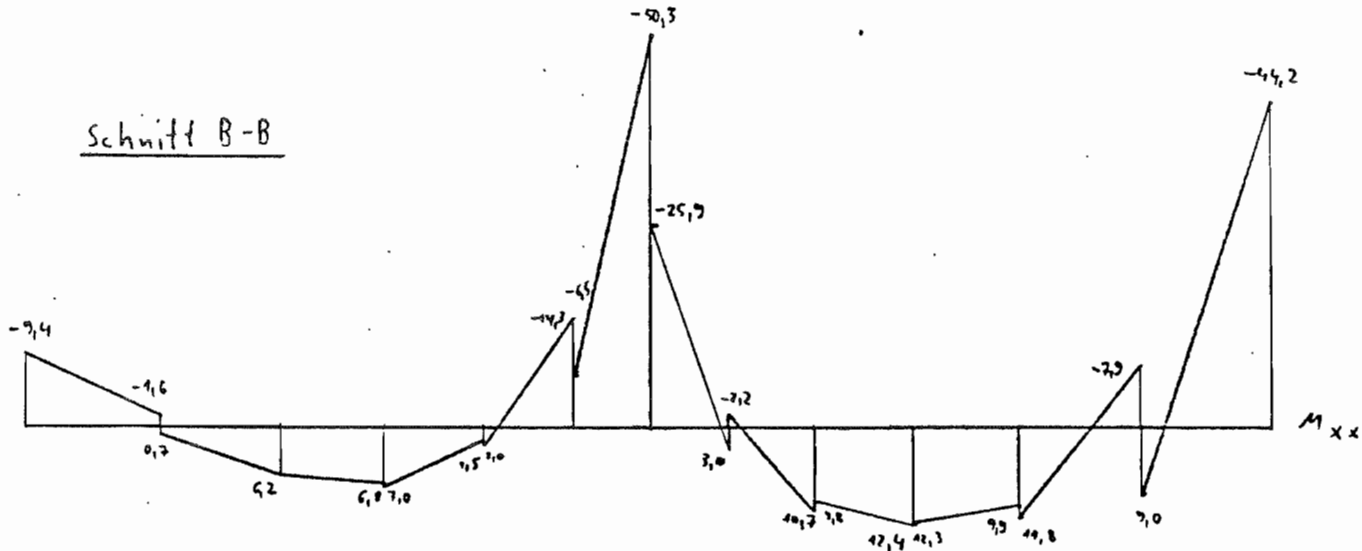
Netz 3

Schnitt A-A

Biegemomentenverlauf, Netz 3



Schnitt B-B



Flächentragwerke I			Vorlesungsplan WS 97/98
Woche	Datum	Vorlesung Mi 8 ³⁰ –10 ⁰⁰ Raum N1070	Übung/Seminar Mi 8 ³⁰ –10 ⁰⁰ Raum N1070
1	5. Nov.	1. Einführung 2. Grundgleichungen im elastischen Kontinuum	
2	12. Nov.	3. Grundgleichungen ebener Flächentragwerke Schnittgrößen, Kinematik, Stoffgesetz	
3	19. Nov.	4. Lokale Formulierung (DGLn)	
4	26. Nov.	5. Globale Formulierung (PVV) 7. Analytische Lösung Scheiben – Spanngsfkt.	
5	3. Dez.		zu Kap. 7: Kragsscheibe unter Einzellast – Spannungsfunktion
6	10. Dez.	7.5 Tragverhalten von Wandscheiben 6. FEM für Scheiben – Beispiel	
7	17. Dez.		zu Kap. 7.4: Durchlaufende Scheibe – Spannungsfunktion – Lösung mit Fourierreihenansatz
	24. Dez.	Weihnachten	Weihnachten
	31. Dez.	Weihnachten	Weihnachten
8	7. Jan.	8. Analytische Lösungen von Platten 8.2 Analyt. Lsg. für Rechteckplatten 8.3 Einflußflächen	
9	14. Jan.		zu Kap. 8.2: Rechteckplatten unter Gleichlast – Lösung mit Fourierreihenansatz
10	21. Jan.	9. FEM für Platten – Rechteckelemente (bilinear–Reissner Theorie,	
11	28. Jan.		zu Kap. 9: Handrechnung mit SRI und Schäfer– element – Randbedg., Lastspalten, Schnittkräfte – Erklärung zu shear locking
12	4. Feb.	– Dreieckselemente (lineares Dreieck DKT) 9.5 Beispiel zu Konvergenz der Elemente	
13	11. Feb.		Berechnung eines bauprkt. Plattensystems: – Überschlägige Berechnung mit Hilfe von Tabellenwerken
14	18. Feb.		Berechnung eines bauprkt. Plattensystems: – Berechnung mit FEM, Diskretisierung v. Platte, Stütze und Unterzug.
15	25. Feb.	8.1 Analytische Lösung für die Kreisplatte	Aschermittwoch

Flächentragwerke I			Vorlesungsplan WS 96/97
Woche	Datum	Vorlesung Mi 8 ³⁰ -10 ⁰⁰ Raum 2100	Übung/Seminar Mi 8 ³⁰ -10 ⁰⁰ Raum 2100
1	6. Nov.	1. Einführung 2. Grundgleichungen im elastischen Kontinuum	
2	13. Nov.	3. Grundgleichungen ebener Flächentragwerke Schnittgrößen, Kinematik, Stoffgesetz	
3	20. Nov.	4. Lokale Formulierung (DGLn)	
4	27. Nov.	5. Globale Formulierung (PVV) 7. Analytische Lösung Scheiben – Spanngsftk.	
5	4. Dez.		zu Kap. 7: Kragsscheibe unter Einzellast – Spannungsfunktion
6	11. Dez.		zu Kap. 7.4: Durchlaufende Scheibe – Spannungsfunktion – Lösung mit Fourierreihenansatz
7	18. Dez.	7.5 Tragverhalten von Wandscheiben 6. FEM für Scheiben – Beispiel	
	25. Dez.	Weihnachten	Weihnachten
	1. Jan.	Weihnachten	Weihnachten
8	8. Jan.	8. Analytische Lösungen von Platten 8.2 Analyt. Lsg. für Rechteckplatten 8.3 Einflußflächen	
9	15. Jan.	9. FEM für Platten – Rechteckelemente (bilinear-Reissner Theorie, bikubisch-Kirchhoff Theorie)	
10	22. Jan.		zu Kap. 8.2: Rechteckplatten unter Gleichlast – Lösung mit Fourierreihenansatz
11	29. Jan.		zu Kap. 9: Handrechnung mit SRI und Schäfer-element – Randbedg., Lastspalten, Schnittkräfte – Erklärung zu shear locking
12	5. Feb.	– Dreieckselemente (lineares Dreieck DKT) 9.5 Beispiel zu Konvergenz der Elemente	
13	12. Feb.	Aschermittwoch	Berechnung eines bauprkt. Plattensystems: –Überschlägige Berechnung mit Hilfe von Tabellenwerken
14	19. Feb.		Berechnung eines bauprkt. Plattensystems: –Berechnung mit FEM, Diskretisierung v. Platte. Stütze und Unterzug.
15	26. Feb.	8.1 Analytische Lösung für die Kreisplatte	

**Finite-Element-Methoden
und
Theorie der Flächentragwerke**

Allgemeine Formelsammlung

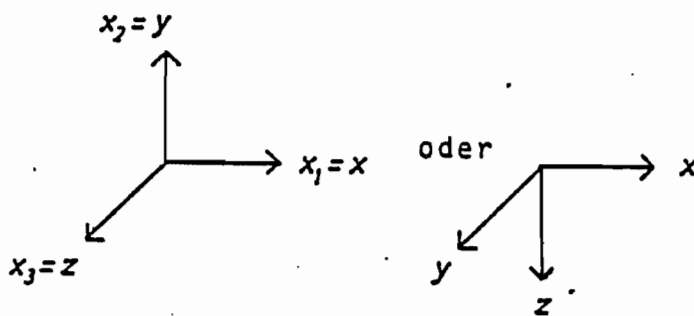
Teil 1: Kontinuumsmechanische Grundlagen elastischer Tragwerke

1. KONTINUUMSMECHANISCHE GRUNDLAGEN ELASTISCHER TRAGWERKE

1.1 Lokale Formulierung der Grundgleichungen (Differentialgleichungen)

Voraussetzungen: Werkstoff elastisch, homogen, isotrop;
lineare Theorie

Beschreibung:



kartesische
Koordinaten

(nur bei Schalen krummlinige Koordinaten zweckmäßig, Beziehungen leicht umzuschreiben)

Mit Summationskonvention (Kontinuum: $i=1,2,3$; Scheibe $i=1,2$; etc.)

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\sigma_{ik} \epsilon_{ik} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik} \epsilon_{ik} = \sigma_{11} \epsilon_{11} + \sigma_{12} \epsilon_{12} + \sigma_{13} \epsilon_{13} + \sigma_{21} \epsilon_{21} + \sigma_{22} \epsilon_{22} + \sigma_{23} \epsilon_{23} + \sigma_{31} \epsilon_{31} + \sigma_{32} \epsilon_{32} + \sigma_{33} \epsilon_{33}$$

Abkürzung für partielle Ableitung:

$$\frac{\partial a_k}{\partial x_i} = \partial_i a_k \quad \text{oder} \quad \frac{\partial a_k}{\partial x_i} = a_{k,i}$$

für gewöhnliche Ableitung :

$$\frac{da_k}{dx} = d_x a_k \quad \text{oder} \quad \frac{da_k}{dx} = a_{k,x} = a'_k$$

1.1.1 Kinematik

	Balken	
	mit Schubverzerrungen	ohne Schubverzerrungen
Kontinuum		
Verschiebungen	$\bar{u} = \{u, w, \varphi\}$	$\bar{u} = \{u, w\}$
Verzerrungen	$\bar{\epsilon} = \{\epsilon_x, \gamma, \chi_x\}$	$\bar{\epsilon} = \{\epsilon_x, \chi_x\}$
Kinematische Gleichungen	$\epsilon_x = d_x u_x = u'$ $\gamma = d_x w + \varphi = w' + \varphi$ $\chi_x = d_x \varphi = \varphi'$	$\epsilon_x = d_x u_x = u'$ $\chi_x = -d_x^2 w = -w''$
oder in Matrizenform:	$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma \\ \chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x & 0 & 0 \\ 0 & d_x & +1 \\ 0 & 0 & d_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{bmatrix} \quad \bar{u}$ $\bar{\epsilon} = \bar{D} \bar{u}$	$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x & 0 \\ 0 & -d_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \quad \bar{u}$ $\bar{\epsilon} = \bar{D}_u \bar{u}$

Platte
mit | ohne
Schubverzerrungen

$$\underline{u} = \{ w, \varphi_x, \varphi_y \}$$

$$\underline{\epsilon} = \{ \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \}$$

$$\kappa_x = \partial_x \varphi_x$$

$$\kappa_y = \partial_y \varphi_y$$

$$2\kappa_{xy} = \partial_y \varphi_x + \partial_x \varphi_y$$

$$\gamma_{xz} = \partial_x w + \varphi_x$$

$$\gamma_{yz} = \partial_y w + \varphi_y$$

$$\underline{u} = \{ w \}$$

$$\underline{\epsilon} = \{ \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy} \}$$

$$\kappa_x = -\partial_x^2 w \quad \kappa_x, \kappa_y \text{ -Verwindung}$$

$$\kappa_y = -\partial_y^2 w \quad \kappa_{xy} \text{ -Verdrillung}$$

$$2\kappa_{xy} = -2\partial_x \partial_y w$$

$\gamma_{xz} = 0$ Durch das Einführen von kinematischen Hypothesen entstehen zwangsläufig zweite Ableitungen!
 $\gamma_{yz} = 0$

Scheibe

Verschiebungen $\underline{u} = \{ u, v \}$

Verzerrungen $\underline{\epsilon} = \{ \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy} \}$

Kinematische Gleichungen :

$$\epsilon_x = \partial_x u$$

$$\epsilon_y = \partial_y v$$

$$\gamma_{xy} = \partial_y u + \partial_x v$$

oder in Matrizenform:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\underline{\epsilon} = \underline{D} \cdot \underline{u}$$

$$\begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ 1 & 0 & \partial_x \\ 0 & 1 & \partial_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ w \end{bmatrix}$$

$$\underline{\epsilon} = \underline{D}_u \cdot \underline{u}$$

$$\begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_x^2 \\ -\partial_y^2 \\ -2\partial_x \partial_y \end{bmatrix} \cdot w$$

$$\underline{\epsilon} = \underline{D} \cdot \underline{u}$$

1.1.2 Werkstoffgesetz (isotrope, homogene Körper)

Kontinuum	Balken
<p>ohne Schubverzerrungen</p>	<p>mit Schubverzerrungen</p>
<p>Spannungen $\underline{\sigma} = \{ \sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz} \}$</p>	<p>$\underline{s} = \{ N \ Q \ +M \}$</p>
<p>Verzerrungen $\underline{\epsilon} = \{ \epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz} \}$</p>	<p>$\underline{\epsilon} = \{ \epsilon_x \ \chi_x \}$</p>
<p>Werkstoffgesetz</p>	<p>$\underline{s} = \underline{E} \underline{\epsilon}$</p>
$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} N \\ Q \\ +M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EF & 0 \\ \kappa GF & EI \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma \\ \chi_x \end{bmatrix}$
<p>$\underline{\sigma} =$</p>	<p>$\underline{s} = \underline{E} \underline{\epsilon}$</p>
<p>oder</p>	$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EF} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\kappa GF} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \underline{s}$
$\underline{\epsilon} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \underline{\sigma}$	$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EF} & 0 \\ 0 & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \underline{s}$

Scheibe

Schnittgrößen: $\underline{s} = \{ n_x, n_y, n_{xy} \}$

Verzerrungen: $\underline{\epsilon} = \{ \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy} \}$

Werkstoffgesetz

für: ebenen Spannungszustand

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0$$

$$\underline{s} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underline{E} \cdot \underline{\epsilon}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E t} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \underline{E}^{-1} \cdot \underline{s}$$

Dehnsteifigkeit: $D = \frac{E t}{1-\nu^2}$

ebenen Verzerrungszustand

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E t}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underline{E} \cdot \underline{\epsilon}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E t} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \underline{E}^{-1} \cdot \underline{s}$$

Platte
mit Schubverzerrungen | ohne Schubverzerrungen

Schnittgrößen: $s = \{m_x, m_y, m_{xy}, q_x, q_y\}$

$s = \{m_x, m_y, m_{xy}\}$

Verzerrungen: $\epsilon = \{x_x, x_y, x_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}$

$\epsilon = \{x_x, x_y, x_{xy}\}$

Werkstoffgesetz

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \\ 5/6 & 0 \\ 0 & 5/6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_x \\ x_y \\ 2x_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_x \\ x_y \\ 2x_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\underline{s} = \underline{E} \cdot \underline{\epsilon}$$

$$\underline{s} = \underline{E} \cdot \underline{\epsilon}$$

$$\begin{bmatrix} x_x \\ x_y \\ 2x_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \\ \frac{12}{Et^3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Gt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ q_x \\ q_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_x \\ x_y \\ 2x_{xy} \end{bmatrix} = \frac{12}{Et^3} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\epsilon} = \underline{E}^{-1} \cdot \underline{s}$$

$$\underline{\epsilon} = \underline{E}^{-1} \cdot \underline{s}$$

Plattensteifigkeit: $K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

1.1.3 Gleichgewicht

	Balcken	
	mit Schubverzerrungen	ohne Schubverzerrungen
Kontinuum		
Spannungen	$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{pmatrix}$	
Volumenkräfte (Eigengewicht)	$\underline{\bar{p}}_v = \begin{pmatrix} \bar{p}_{vx} & \bar{p}_{vy} & \bar{p}_{vz} \end{pmatrix}$	
Gleichgewichtsbedingungen	$\sigma_{i,j} + \bar{p}_{vi} = 0$	
	$\partial_x \sigma_x + \partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{xz} + \bar{p}_{vx} = 0$; $\tau_{xy} = \tau_{yx}$	
	$\partial_x \tau_{yx} + \partial_y \sigma_y + \partial_z \tau_{yz} + \bar{p}_{vy} = 0$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$	
	$\partial_x \tau_{zx} + \partial_y \tau_{zy} + \partial_z \sigma_z + \bar{p}_{vz} = 0$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$	
oder in Matrizenform	$\begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & \partial_y & \partial_z & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 & \partial_x & 0 & \partial_z \\ 0 & 0 & \partial_z & 0 & \partial_x & \partial_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{vx} \\ \bar{p}_{vy} \\ \bar{p}_{vz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma \\ \sigma \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\underline{\bar{D}}_s' \cdot \underline{\bar{p}}_v = \underline{0}$
	$\underline{s} = \begin{pmatrix} N & Q & M \end{pmatrix}$	$\underline{s} = \begin{pmatrix} N & M \end{pmatrix}$
	$\underline{\bar{p}} = \begin{pmatrix} \bar{p}_x & \bar{p}_z \end{pmatrix}$	$\underline{\bar{p}} = \begin{pmatrix} \bar{p}_x & \bar{p}_z \end{pmatrix}$
	$d_x N + \bar{p}_x = 0$	$d_x N + \bar{p}_x = 0$
	$d_x Q + \bar{p}_z = 0$	$d_x^2 M + \bar{p}_z = 0$
	$d_x M - Q = 0$	
	$\begin{bmatrix} d_x & 0 & 0 \\ 0 & d_x & 0 \\ 0 & -1 & d_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_z \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{s} = \underline{0}$	$\begin{bmatrix} d_x & 0 \\ 0 & +d_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_z \end{bmatrix} = \underline{0}$
	$\underline{\bar{D}}_s' \cdot \underline{s} + \underline{\bar{p}} = \underline{0}$	$\underline{\bar{D}}_s' \cdot \underline{s} + \underline{\bar{p}} = \underline{0}$

Platte
|
mit Schubverzerrungen | ohne Schubverzerrungen

Scheibe

Schnittgrößen: $\underline{s} = \{n_x, n_y, n_{xy}\}$

Volumenkräfte: $\underline{\bar{p}}_v = \{\bar{p}_{vx}, \bar{p}_{vy}\}$

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\partial_x n_x + \partial_y n_{yx} + \bar{p}_{vx} = 0$$

$$\partial_y n_y + \partial_x n_{xy} + \bar{p}_{vy} = 0$$

$$n_{xy} - n_{yx} = 0$$

oder in Matrizenform:

$$\begin{bmatrix} \partial_x & 0 & \partial_y \\ 0 & \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{p}_{vx} \\ \bar{p}_{vy} \end{bmatrix} = 0$$

$$\underline{D}_s^T \underline{s} + \underline{\bar{p}}_v = 0$$

$\underline{s} = \{m_x, m_y, m_{xy}, q_x, q_y\}$

$\underline{\bar{p}} = \{\bar{p}_z\}$

$$\partial_x q_x + \partial_y q_y + \bar{p}_z = 0$$

$$\partial_x m_x + \partial_y m_{yx} - q_x = 0$$

$$\partial_y m_y + \partial_x m_{xy} - q_y = 0$$

$$m_{xy} = m_{yx}$$

$$\begin{bmatrix} \partial_x & 0 & \partial_y & -1 & 0 \\ 0 & \partial_y & \partial_x & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_x & \partial_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ q_x \\ q_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{p}_z \end{bmatrix} = 0$$

$$\underline{D}_s^T \underline{s} + \underline{\bar{p}} = 0$$

$\underline{s} = \{m_x, m_y, m_{xy}\}$

$\underline{\bar{p}} = \{\bar{p}_z\}$ Oberflächenkräfte

$$\partial_x^2 m_x + 2\partial_x \partial_y m_{xy} + \partial_y^2 m_y + \bar{p}_z = 0$$

$$\begin{bmatrix} \partial_x^2 & \partial_y^2 & 2\partial_x \partial_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{p}_z \end{bmatrix} = 0$$

$$\underline{D}_s^T \underline{s} + \underline{\bar{p}} = 0$$

1.1.4 Oberflächenkräfte und Randbedingungen

An der Oberfläche werden die Spannungen zu resultierenden Oberflächenkräften zusammengefaßt. Die Richtung der Oberfläche in Bezug auf die Koordinaten wird durch den Normalenvektor eines Oberflächenelementes mit den Komponenten $\{n_x, n_y, n_z\}$ - den Richtungs-cosinus - erfaßt. Der Vektor \underline{p} der Oberflächenkräfte läßt sich damit darstellen durch

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & n_y & 0 & n_x & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_x & n_y \end{bmatrix} \underline{a}$$

$$\underline{p} = \underline{N}^T \underline{a}$$

Die Matrix \underline{N}^T hat dieselbe Struktur wie \underline{D}^T :
den Ableitungsrichtung in \underline{D}^T entsprechen
die Projektionsrichtungen in \underline{N}^T

Randbedingungen : Kontinuum

Geometrische R.B. auf dem Teil O_u der Gesamtoberfläche 0 :

$$\underline{u} = \underline{\bar{u}} \quad \text{auf} \quad O_u$$

Statische R.B. auf dem Teil $O_p = 0 - O_u$:

$$\underline{p} = \underline{\bar{p}} \quad \text{auf} \quad O_p$$

Balken

$$\left. \begin{array}{l} u = \bar{u} \\ w = \bar{w} \\ \varphi = \bar{\varphi} \end{array} \right\} \text{ auf } O_u$$

$$\left. \begin{array}{l} N = \bar{N} \\ Q = \bar{Q} \\ M = \bar{M} \end{array} \right\} \text{ auf } O_p$$

Scheibe | mit Schubverzerrungen | Prut ohne

Geometrische Randbedingungen auf dem Teil der Oberfläche 0_u der Gesamtoberfläche 0

$$u = \bar{u}$$

$$v = \bar{v}$$

$$w = \bar{w}$$

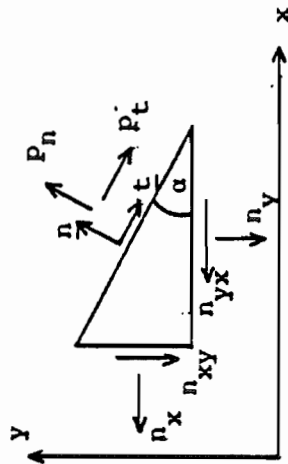
$$\varphi_n = \bar{\varphi}_n$$

$$\varphi_t = \bar{\varphi}_t$$

$$w = \bar{w}$$

$$\varphi_n = \bar{\varphi}_n$$

Statische Randbedingungen auf dem Teil 0_p der Gesamtoberfläche 0 mit $0_p = 0 - 0_u$



Oberflächenkräfte:

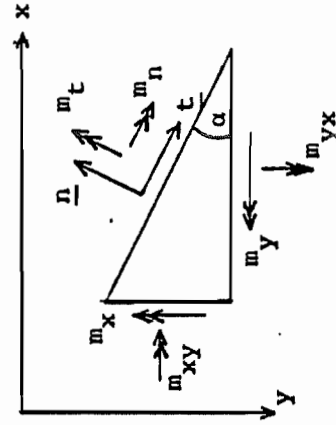
$$\begin{bmatrix} P_n \\ P_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\underline{p} = \underline{\tau} \cdot \underline{N}^T \cdot \underline{n}$$

\underline{T} : Transformationsmatrix

$$P_n = \bar{p}_n$$

$$P_t = \bar{p}_t$$



Oberflächenschnittgrößen:

$$\begin{bmatrix} m_t \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 0 \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix}$$

$$q_n = \sin \alpha q_x - \cos \alpha q_y$$

$$m_n = \bar{m}_n$$

$$m_t = \bar{m}_t$$

$$q_p = \bar{q}_n$$

$$m_n = \bar{m}_n$$

$$q^* = q_n + \partial_s m_t = \bar{q}^* \text{ Kirchhoff'sche Ersatzscherkraft}$$

1.2 Globale Formulierung (Prinzip der virtuellen Arbeiten)

Die globale Formulierung von Gleichgewicht und statischen Randbedingungen ist dem Prinzip der virtuellen Arbeiten äquivalent. Zur Umformung wird das Gauß'sche Divergenztheorem herangezogen.

Kontinuum

Lokale Formulierung

Gleichgewicht : $D^T \cdot \underline{\sigma} + \underline{\bar{p}}_v = 0$ in V

Statische Randbedingungen: $\underline{p} = \underline{\bar{p}}$ auf O_p

Globale Formulierung (Nachbarlage $\delta \underline{u}$)

$$\int_{O_p} \delta \underline{u}^T (\underline{p} - \underline{\bar{p}}) dO = \int_V \delta \underline{u}^T (D^T \underline{\sigma} + \underline{\bar{p}}_v) dV$$

Indexschreibweise:

$$\int_{O_p} \delta u_i (\bar{p}_i - p_i) dO = \int_V \delta u_i (\sigma_{ij,j} + \bar{p}_{vi}) dV$$

Balken

mit Schubverzerrungen

$$D^T \cdot \underline{s} + \underline{\bar{p}} = 0$$

$$\left. \begin{matrix} N = \bar{N} \\ Q = \bar{Q} \\ M = \bar{M} \end{matrix} \right\} \text{an den Rändern}$$

$$\int_0^l \delta \underline{u}^T (\underline{s} - \underline{\bar{s}}) dx = \int_0^l \delta \underline{u}^T (D^T \underline{s} + \underline{\bar{p}}) dx$$

in Komponenten:

$$\int_0^l \delta \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N - \bar{N} \\ Q - \bar{Q} \\ M - \bar{M} \end{bmatrix} dx = \int_0^l \delta \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x & 0 & 0 \\ 0 & d_x & 0 \\ 0 & -1 & d_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_z \\ 0 \end{bmatrix} dx$$

Umformung mittels des Gauß'schen Satzes

$$\int_{O_p} \delta u_i p_i dO = \int_V (\sigma_{ij,j} \delta u_i + \sigma_{ij} \delta u_{i,j}) dV - \int_{O_u} \delta u_i p_i dO$$

$O_u = 0$

wenn $\underline{\epsilon} = \underline{D} \cdot \underline{u}$ für $\underline{u} = \underline{\bar{u}}$

Prinzip der virtuellen Arbeiten:

$$\int_V \delta u_{i,j} \sigma_{ij} dV - \int_V \delta u_i \bar{p}_{vi} dV - \int_{O_p} \delta u_i \bar{p}_i dO = 0$$

Setzt man die Kinematik $\underline{\epsilon} = \underline{D}_u \underline{u}$ in V und die geometrischen Randbedingungen $\underline{u} = \underline{\bar{u}}$ auf O_u (eingepägte Verschiebungen) als erfüllt voraus, so kommt man in den vorliegenden Gleichungen zum Prinzip der virtuellen Arbeiten, das somit den Gleichgewichts- und statischen Randbedingungen äquivalent ist.

In Matrixschreibweise:

$$-\delta A = \int_V \delta \underline{u}^T \underline{D}^T \underline{\sigma} dV - \int_V \delta \underline{u}^T \underline{\bar{p}}_v dV - \int_{O_p} \delta \underline{u}^T \underline{\bar{p}} dO = 0$$

mit $\underline{\epsilon} = \underline{D}_u \underline{u}$ in V
 $\underline{u} = \underline{\bar{u}}$ auf O_u

$$\delta A = \int_V \delta [u_x \ u_y \ u_z] \begin{Bmatrix} x \partial & 0 & 0 & \partial_y \partial_z \partial & 0 \\ 0 & y \partial & 0 & \partial_x \partial_z \partial & \sigma \\ 0 & 0 & z \partial & 0 & \partial_x \partial_y \partial \end{Bmatrix} dV - \int_{O_p} \delta [u \ u] \begin{Bmatrix} \bar{p}_{vx} \\ \bar{p}_{vy} \\ \bar{p}_{vz} \end{Bmatrix} dO = 0$$

$$\int_{O_p} \delta \underline{u}^T \underline{s} dO = \int_{O_x} (\delta \underline{u} \underline{s}_{,x} + \delta \underline{u}_{,x} \underline{s}) dx - \int_{\text{auf } O_u} \delta \underline{u}^T \underline{s} dO$$

$= \delta \epsilon_x$ wenn $\underline{\epsilon} = \underline{D} \underline{u}$ für $\underline{u} = \underline{\bar{u}}$ am Rand

$$\int_x \delta [u \ w \ \varphi] \begin{bmatrix} x^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^d & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x^d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q \\ M \\ 0 \end{bmatrix} dx - \int_x \delta [u \ w \ \varphi] \begin{bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_z \\ 0 \end{bmatrix} dx - \delta [u \ w \ \varphi] \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{Q} \\ \bar{M} \end{bmatrix} dO = 0$$

Setzt man die Kinematik $\underline{\epsilon} = \underline{D}_u \underline{u}$ in V und die geometrischen Randbedingungen $\underline{u} = \underline{\bar{u}}$ auf O_u (eingepägte Verschiebungen) als erfüllt voraus, so kommt man in den vorliegenden Gleichungen zum Prinzip der virtuellen Arbeiten, das somit den Gleichgewichts- und statischen Randbedingungen äquivalent ist.

In Matrixschreibweise:

$$-\delta A = \int_x \delta \underline{u}^T \underline{D}^T \underline{s} dx - \int_x \delta \underline{u}^T \underline{\bar{p}} dx - \int_{O_u} \delta \underline{u}^T \underline{s} dO = 0$$

mit $\underline{\epsilon} = \underline{D}_u \underline{u}$ über die Stabachse
 $\underline{u} = \underline{\bar{u}}$ am Rand

$$-\delta A = \int_x \delta [u \ w \ \varphi] \begin{Bmatrix} x^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^d & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x^d & 0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q \\ M \\ 0 \end{bmatrix} dx - \delta [u \ w \ \varphi] \begin{bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_z \\ 0 \end{bmatrix} dx - \delta [u \ w \ \varphi] \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{Q} \\ \bar{M} \end{bmatrix} dO = 0$$

Kontinuum

Bal n

Für eine Formulierung in Weggrößen wird das Werkstoffgesetz eingeführt:

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\varepsilon} = \underline{E} \underline{D}_u \underline{u}$$

$$\delta A = - \int_V \delta \underline{u}^T \underline{D}^T \underline{E} \cdot \underline{D}_u \underline{u} \, dV + \int_V \delta \underline{u}^T \underline{p}_v \, dV + \int_{O_p} \delta \underline{u}^T \underline{p} \, dO = 0$$

\underline{k}^D = Operatormatrix

$$\underline{s} = \underline{E} \underline{\varepsilon} = \underline{E} \underline{D}_u \underline{u}$$

$$\delta A = - \int_x \delta \underline{u}^T \underbrace{\underline{D}^T \underline{E} \cdot \underline{D}_u}_{\underline{k}^D} \underline{u} \, dx + \int_x \delta \underline{u}^T \underline{p} \, dx + [\delta \underline{u}^T \underline{s}]_0^l = 0$$

oder

$$A = - \int_V \delta [u_x \ u_y \ u_z] \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} G \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} G \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} G \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} G \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} G \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial z} \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} G \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial z} \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} G \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\underline{k}^D} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \, dV + \int_{O_p} \delta [u_x \ u_y \ u_z] \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \, dO = 0$$

oder

$$\delta A = - \int_x \delta [u \ w \ \varphi] \underbrace{\begin{bmatrix} dEFd_x & 0 & 0 \\ 0 & dxGFd_x & dxGF \\ 0 & xGFd_x & xGF \end{bmatrix}}_{\underline{k}^D} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{bmatrix} \, dx + \begin{bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_z \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{Q} \\ \bar{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{bmatrix} \Big|_0^l = 0$$

Vorliegende Formulierung Grundlage des Weggrößenverfahrens; Einführen von Ansätzen liefert Steifigkeitsmatrizen.

Scheibe

Prinzip der virtuellen Arbeit:

$$\delta A = - \int_F \delta \bar{u}^T ({}^0 D \cdot \bar{s} - \bar{p}) dF + \int_S \delta \bar{u}^T \bar{p} ds = 0$$

$$\delta A = - \int_F \delta [u \ v] \begin{Bmatrix} \partial_x \partial_y \partial_z \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{p}_{vx} \\ \bar{p}_{vy} \end{Bmatrix} dF$$

$$\bar{p}_v: \text{Eigengewicht} \quad + \int_S \delta [u \ v] \begin{Bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \end{Bmatrix} ds = 0$$

$$\bar{p}: \text{Randlasten}$$

Übergang auf Formulierung in Weggrößen:

$$\delta A = - \int_F \delta \bar{u}^T ({}^0 R \cdot \bar{u} - \bar{p}_v) dF + \int_S \delta \bar{u}^T \bar{p} ds = 0$$

$${}^0 k^D = {}^0 D^T E D_u$$

$$A = - \int_F \delta [u \ v] \begin{Bmatrix} \partial_x D \partial_x + \partial_y D \partial_y + \\ \partial_y \frac{D(1-\nu)}{2} \partial_x \partial_y - \partial_x \frac{D(1-\nu)}{2} \partial_x \partial_y + \\ \partial_y D \partial_x + \partial_x D \partial_y + \\ \partial_x \frac{D(1-\nu)}{2} \partial_x \partial_y - \partial_y \frac{D(1-\nu)}{2} \partial_x \partial_y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{p}_{vx} \\ \bar{p}_{vy} \end{Bmatrix} dF$$

$$+ \int_S \delta [u \ v] \begin{Bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \end{Bmatrix} ds = 0$$

Platte

ohne

Schubverzerrungen

$$\delta A = - \int_F \delta \bar{u}^T ({}^0 D \cdot \bar{s} - \bar{p}) dF + \int_S \delta \bar{u}^T \bar{p} ds = 0$$

$$\delta A = - \int_F \delta [\varphi_x \ \varphi_y \ w] \begin{Bmatrix} \partial_x \partial_y \partial_z \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ q_x \\ q_y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{p}_z \end{Bmatrix} dF$$

$$+ \int_S \delta [\varphi_x \ \varphi_y \ w] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{p}_z \end{Bmatrix} ds = 0$$

$$\delta A = - \int_F \delta w \left[\varphi_x^2 - \varphi_y^2 - 2 \partial_x \partial_y \varphi \right] \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} - [\bar{p}_z] dF$$

$$+ \int_S \delta [\varphi_x \ \varphi_y \ w] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{p}_z \end{Bmatrix} ds = 0$$

\bar{p}_z : Eigengewicht und Flächenlasten
 \bar{p}_s : Rand - Streckenlasten

$$\delta A = \int_F \delta \bar{u}^T ({}^0 R \cdot \bar{u} - \bar{p}_v) dF - \int_S \delta \bar{u}^T \bar{p} ds = 0$$

$$\delta A = - \int_F \delta [\varphi_x \ \varphi_y \ w] \begin{Bmatrix} \partial_x^2 K \partial_x^2 + \partial_y^2 K \partial_y^2 + \\ \partial_x \frac{2-\nu}{2} K \partial_x \partial_y + \partial_y \frac{2-\nu}{2} K \partial_x \partial_y + \\ + \frac{5}{6} G t \\ \partial_y \nu K \partial_x^2 + \partial_x \nu K \partial_y^2 + \\ \partial_x \frac{2-\nu}{2} K \partial_x \partial_y + \partial_y \frac{2-\nu}{2} K \partial_x \partial_y + \\ + \frac{5}{6} G t \\ \partial_x \frac{5}{6} G t + \partial_y \frac{5}{6} G t \\ \partial_x \nu \frac{5}{6} G t \partial_x + \partial_y \nu \frac{5}{6} G t \partial_y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ w \end{Bmatrix} dF$$

$$+ \int_S \delta w \bar{p}_z ds = 0$$

$$\delta A = - \int_F \delta w \left\{ K \left[\nu \partial_x (\partial_{xx} + \nu \partial_{yy}) + \nu \partial_y (2(1-\nu) \partial_{xy}) + \nu \partial_x (\partial_{yy} + \nu \partial_{xx}) \right] \right\} dF$$

am Biegebalken

$$\begin{aligned}
 M'' + \bar{q} &= 0 && \text{über } x \\
 M &= \bar{M} && \text{und } Q = \bar{Q} && \text{auf } O_p \\
 x &= -w'' && \text{über } x \\
 \varphi &= \bar{\varphi} && \text{und } w = \bar{w} && \text{auf } O_u
 \end{aligned}$$

$$[\delta w (Q - \bar{Q}) - \delta w' (M - \bar{M})] \Big|_{O_p} \Big|_{O_u} = \int_{O_p} \delta w (M'' + \bar{q}) dx$$

$$\begin{aligned}
 [\delta w Q - \delta w' M] \Big|_{O_p} \Big|_{O_u} &= \int_{O_p} \delta w Q' - \delta w' M' - \underbrace{\delta w'' M + \delta w' Q}_{\delta x, \text{ wenn } x=-w''} dx \\
 &= \underbrace{[\delta w Q - \delta w' M] \Big|_{O_u}}_{=0, \text{ wenn } \delta w = 0, \delta w' = 0} \Big|_{O_p} = 0 \text{ auf } O_u
 \end{aligned}$$

$$\int \delta x M - \bar{q} \delta w dx - [-\bar{M} \delta w' + \bar{Q} \delta w] \Big|_{O_p} = 0$$

mit $\delta x = -\delta w''$ in x
 $\delta w = 0, \delta w' = 0$ auf O_u

Allgemeine Schreibweise (mit Matrizen)

Lokale Aussagen:

$$\begin{aligned}
 \underline{D}^T \underline{\sigma} + \underline{\bar{p}}_V &= \underline{0} && \text{in } V \\
 \underline{p} &= \underline{\bar{p}} && \text{auf } O_p \\
 \underline{\varepsilon} &= \underline{D} \underline{u} && \text{in } V \\
 \underline{u} &= \underline{\bar{u}} && \text{auf } O_u
 \end{aligned}$$

Globale Variationsaussagen

$$\int_{O_p} \delta \underline{u}^T (\underline{p} - \underline{\bar{p}}) dO = \int_V \delta \underline{u}^T (\underline{D}^T \underline{\sigma} + \underline{\bar{p}}_V) dV$$

Gauß'scher Satz:

$$\int_{O_p} \delta u_i p_i dO = \int_V (\underbrace{\sigma_{ij,j} + \sigma_{ij} \delta u_{i,j}}_{\delta \varepsilon_{ij}}) dV - \underbrace{\int_{O_u} \delta u_i p_i dO}_{=0}$$

wenn $\underline{\varepsilon} = \underline{D} \underline{u}$ in V wenn $\delta u_i = 0$ auf O_u

Variationsprinzip: Prinzip der virtuellen Arbeiten:

$$\int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV - \int_V \delta \underline{u}^T \underline{\bar{p}}_V dV - \int_{O_p} \delta \underline{u}^T \underline{\bar{p}} dO = 0$$

mit $\delta \underline{\varepsilon} = \underline{D} \delta \underline{u}$ in V
 $\delta \underline{u} = \underline{0}$ auf O_u

Lokale und globale Form der Grundgleichungen

1.3 Gauß'scher Integralsatz

Umformung von Volumen- in Flächenintegrale

$$\int_O \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dO = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV$$

\mathbf{v} beliebiger Vektor
(Verschiebungen oder Kräfte)
 \mathbf{n} Normaleneinheitsvektor

in Komponentenschreibweise:

$$\int_O (n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z) \, dO = \int_V (v_{x,x} + v_{y,y} + v_{z,z}) \, dV$$

oder mit Summationskonvention:

$$\int_O n_i v_i \, dO = \int_V v_{i,i} \, dV \quad \text{mit } i = 1, 2, 3$$

Anwendung auf Arbeitsausdruck: (mit $v_i = \delta u_{,i}$)

$$\int_O \delta u_i p_i \, dO = \int_O \delta u_i n_j \sigma_{ij} \, dO = \int_V (\delta u_i \sigma_{ij})_{,j} \, dV = \int_V (\delta u_{i,j} \sigma_{ij} + \delta u_i \sigma_{ij,j}) \, dV$$

$$\rightarrow \int_V \delta u_{i,j} \sigma_{ij} \, dV = \int_O \delta u_i p_i \, dO - \int_V \delta u_i \sigma_{ij,j} \, dV$$

Umformung von Flächen- in Linienintegrale

$$\int_s \delta u_i p_i \, ds = \int_s \delta u_i n_j \sigma_{ij} \, ds = \int_O (\delta u_i \sigma_{ij})_{,j} \, dV = \int_O (\delta u_{i,j} \sigma_{ij} + \delta u_i \sigma_{ij,j}) \, dO$$

mit $i = 1, 2$

Sonderfall: Umformung eines Linienintegrals (partielle oder Teilintegration)

$$[\delta u p]_a^b = \int_a^b (\delta u p)_{,s} \, ds = \int_a^b (\delta u_{,s} p + \delta u p_{,s}) \, ds$$

$$\rightarrow \int_a^b \delta u' p \, ds = [\delta u p]_a^b - \int_a^b \delta u p' \, ds$$