

# TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Lehrstuhl für Holzbau und Baukonstruktion

Berechnung von Zylinderschalen aus Holz und Holzwerkstoffen unter Berücksichtigung der Spannungsrelaxation

Dipl.-Ing. (Univ.) Patrik Aondio

Vollständiger Abdruck der von der Ingenieur fakultät Bau Geo Umwelt der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Gerhard H. Müller

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Stefan Winter
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Heinrich Kreuzinger (i.R.)
3. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Jan W. G. van de Kuilen

Die Dissertation wurde am 14. Mai 2014 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Ingenieur fakultät Bau Geo Umwelt

am 07.07.2014 angenommen.





## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Holzbau und Baukonstruktion der Technischen Universität München.

Großer Dank gilt an erster Stelle Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Stefan Winter, der mir durch die Anstellung am Lehrstuhl für Holzbau und Baukonstruktion, die Möglichkeit eröffnet hat diese Arbeit anzufertigen. Gleichzeitig möchte ich mich für das große entgegengebrachte Vertrauen in den Bereichen meiner Tätigkeiten, wie Organisation der Berufsschullehrerausbildung und Koordination des Studienganges Bauingenieurwesen recht herzlich bedanken.

Herzlich bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Heinrich Kreuzinger, der sich auf einer Zugfahrt zum Doktorandenkolloquium nach Stuttgart spontan bereit erklärt hatte, meine Arbeit trotz seines wohl verdienten Ruhestandes zu betreuen. Durch seine sehr sympathische, offene Art und sein ungemeines Wissen hat er wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Für die Übernahme des weiteren Koreferates sowie die angenehmen Gespräche und konstruktiven Diskussionen bedanke ich mich bei Univ.-Prof. Dr.-Ing. Jan-Willem van de Kuilen.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Gerhard Müller danke ich für die Übernahme des Vorsitzes bei der Prüfungskommission sowie die zügige Abwicklung des Promotionsverfahrens.

Großer Dank gilt auch meinen Kollegen am Lehrstuhl, die durch das harmonisch herrschende Arbeitsklima zum Arbeiten motiviert haben. Namentlich möchte ich mich besonders bei Dr.-Ing. Philipp Dietsch bedanken, bei dem ich schon als wissenschaftliche Hilfskraft während meines Studiums tätig war. Er hat durch seine hilfsbereite Art und ständige Gesprächsbereitschaft wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen.

Abschließend möchte ich mich bei meiner Lebensgefährtin Claudia Egger bedanken, die aufopferungsvoll auf die teils wenige gemeinsame Zeit verzichtet hat, damit ich an meiner Arbeit schreiben kann.

München, im Juli 2014

Patrik Aondio

## Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem Tragverhalten von zylinderförmigen Schalenträgwerken aus Holz und Holzwerkstoffen. Es wird die Möglichkeit untersucht, Zylinderschalen aus plan produzierten, großformatigen Holzwerkstoffplatten herzustellen. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die durch Krümmung induzierten Eigenspannungen gelegt und deren Erfassung in einer statischen Berechnung. Dazu werden zwei Möglichkeiten der statischen Berücksichtigung erarbeitet und der Einfluss eines orthotropen Materialverhaltens auf die Tragfähigkeit von Zylinderschalen untersucht.

Da sich im Material Holz die durch Zwang induzierten Eigenspannungen mit der Zeit abbauen, werden gesonderte Untersuchungen zur Relaxation angestellt. Es werden Lamellen eines alten Brettschichtholzträgers und industriell gefertigte Dreischichtplatten aus Fichtenholz untersucht. Dabei werden Möglichkeiten der Vor- und Nachbehandlung der Dreischichtplatten betrachtet, durch welche das Maß der Relaxation beeinflusst und gesteigert werden kann. Die Versuchsergebnisse werden mit Lösungen der Rheologie verglichen und Ansätze zur Berücksichtigung der Eigenspannungen geliefert. Zudem werden Eigenspannungszustände in einem stark gekrümmten Brettschichtholzträger errechnet und diese mit Berechnungsergebnissen nach DIN EN 1995-1-1 verglichen. Es werden Anwendungsbereiche zylinderförmiger Schalenelemente im Dach- Decken- und Silo-Bau vorgestellt.

**Stichworte:** Zylinderschale, Relaxation, Eigenspannungen, zeitabhängiger E-Modul, stark gekrümmte Brettschichtholzträger

## Summary

The present work deals with loadbearing cylindrical shells from wood or wood based products. The feasibility to produce cylindrical shells from plane, large-sized wood based panels is examined. Particular focus is given to the internal stresses which are induced when bending the panels. Two approaches to account for these internal stresses in static calculations are developed. The influence of material orthotropy on cylindrical shells is analyzed in detail.

Since such internal stresses decrease with time, experiments are realized to narrow down the extent of stress relaxation in the bent elements. This includes the investigation of lamellas from an old curved beam from glued laminated timber as well as experiments on newly manufactured, three layered spruce panels.

The possibilities of pre- and post-treatment of the panels aiming at increasing the stress relaxation are investigated. The experimental results are compared to results from analytical rheology models. From this, approaches are developed to account for internal stresses and stress relaxation in bent elements. These approaches are applied to determine the internal stresses in a highly curved beam from glued laminated timber; the results are subsequently compared to calculations according to EN 1995-1-1. Areas to apply cylindrical shells in roof, floor and silo constructions are presented.

**Keywords:** cylindrical shell, relaxation, internal stresses, time dependent modulus of elasticity, highly curved glued laminated timber beams

## Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung und Zielsetzung .....</b>	<b>1</b>
<b>1 Zylinderschalen – Historische Entwicklung .....</b>	<b>2</b>
1.1 Hintergrund .....	2
1.2 Ursprünge des Schalenbaues.....	2
1.3 Entwicklungen im Massivbau.....	6
1.4 Bogentragwerke aus Holz.....	12
1.5 Gewölbte Flächentragwerke aus Holz.....	17
1.6 Fazit .....	28
<b>2 Berechnung von isotropen Zylinderschalen .....</b>	<b>29</b>
2.1 Hintergrund .....	29
2.2 Geschichtliche Entwicklung der Berechnungsverfahren.....	29
2.3 Differentialgleichungen der Zylindertheorie .....	32
2.4 Berechnungsmethode nach Lundgren .....	34
2.5 Trägerrostmodelle .....	38
2.6 Fazit .....	48
<b>3 Berechnung von orthotropen Zylinderschalen .....</b>	<b>49</b>
3.1 Hintergrund .....	49
3.2 Geschichtliche Entwicklung der Berechnungsverfahren.....	49
3.3 Verfahren der Schubanalogie.....	51
3.4 Einfluss der Orthotropie .....	58
3.5 Fazit .....	61
<b>4 Hölzerne Zylinderschalen .....</b>	<b>62</b>
4.1 Hintergrund - Einleitung.....	62
4.2 Zusammenhänge zwischen Krümmung und Spannung.....	63
4.3 Normative Regelungen zur Krümmung von Holzbauteilen.....	66
4.4 Rechnerische Berücksichtigung von Eigenspannungen .....	72
4.5 Formgebung und konstruktive Regeln .....	77
4.6 Einsatz- Herstellungsmöglichkeiten hölzerner Zylinderschalen.....	84
4.6.1 Einzelschalen zum Einsatz in Dachtragwerken.....	84
4.6.2 Schalensegmente zum Einsatz in Dachtragwerke .....	87
4.6.3 Schalensegmente zum Einsatz in Deckentragwerken.....	89

4.6.4	Schalensegmente zum Einsatz in Silos .....	90
4.7	Fazit .....	92
<b>5</b>	<b>Rheologie.....</b>	<b>93</b>
5.1	Hintergrund .....	93
5.2	Retardation – Kriechen .....	93
5.2.1	Allgemeines .....	93
5.2.2	Kriechen von Holz und Holzwerkstoffen.....	96
5.3	Relaxation .....	108
5.3.1	Allgemeines .....	108
5.3.2	Relaxation von Holz und Holzwerkstoffen .....	109
5.4	Rheologische Grundkörper und ihren Kombinationen.....	115
5.5	Rheologische Körper zur Beschreibung des Verhaltens von Holz.....	121
<b>6</b>	<b>Experimentelle Untersuchungen zur Relaxation an Brettschichtholzträgern .....</b>	<b>136</b>
6.1	Hintergrund .....	136
6.2	Material und Prüfkörpereigenschaften .....	136
6.3	Versuchsdurchführung.....	136
6.4	Versuchsauswertung .....	137
6.5	Weiterführende Betrachtungen .....	141
6.6	Fazit .....	149
<b>7</b>	<b>Experimentelle Untersuchungen zur Relaxation an Dreischichtplatten .....</b>	<b>150</b>
7.1	Hintergrund .....	150
7.2	Material und Prüfkörpereigenschaften .....	150
7.3	Versuchsdurchführung.....	152
7.4	Versuchsauswertung .....	154
7.5	Fazit .....	165
<b>8</b>	<b>Statische Nachweise unter Berücksichtigung der Relaxation .....</b>	<b>167</b>
8.1	Hintergrund .....	167
8.2	Einwirkungen.....	167
8.3	Widerstände .....	168
8.4	Berechnung eines stark gekrümmten Brettschichtholzträgers.....	169
8.5	Berechnung einer hölzernen Zylinderschale .....	173
8.6	Fazit .....	177

<b>9</b>	<b>Zusammenfassung.....</b>	<b>178</b>
<b>10</b>	<b>Abbildungsverzeichnis.....</b>	<b>180</b>
<b>11</b>	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>194</b>
<b>12</b>	<b>Formelzeichen und Abkürzungen.....</b>	<b>215</b>
	<b>Anhang A.....</b>	<b>221</b>
	<b>Anhang B.....</b>	<b>227</b>
	<b>Anhang C.....</b>	<b>233</b>
	<b>Anhang D.....</b>	<b>235</b>
	<b>Anhang E.....</b>	<b>241</b>



## Einleitung und Zielsetzung

### Allgemeines

Schalentragwerke bilden hoch effiziente und leistungsfähige Systeme, bei denen Materialersparnis mit hoher Steifigkeit einhergeht. Dadurch können bei minimalem Materialverbrauch sehr filigrane und weit gespannte Tragwerke realisiert werden. Der hohen Materialersparnis steht jedoch eine große erforderliche Expertise von mechanischem Wissen und materialgerechtem Planen entgegen. Speziell im Holzbau stellt das materialgerechte Planen und Entwerfen von Schalen durch die beschränkten, gewachsenen Abmessungen des Rohstoffes Holz eine gewisse Schwierigkeit dar. Viele kleinere Querschnitte müssen unter Verwendung von mechanischen Verbindungsmitteln zu Bögen, Rauten- oder Gitternetzen zusammengeführt werden um ein stabiles Traggerüst zu bilden. Auf dieses wird vielfach eine statisch nicht wirkende Hülle aufgebracht die den Raumabschluss bildet. Diese Kleingliedrigkeit in der Ausführung führt zu erheblichem Mehraufwand und Problemen in der statischen Berechnung. Zudem bergen viele komplizierte Anschlüsse ein großes Risiko von Schäden.

Durch die starken Entwicklungen im Bereich der Holzwerkstoffindustrie hat sich in den letzten Jahren eine Vielzahl von neuen Plattenwerkstoffen auf dem Markt etabliert, die auch im Bereich des Schalenbaues gut eingesetzt werden können. Durch die mitunter große zweidimensionale Ausdehnung bieten sie Vorteile gegenüber den eindimensionalen Abmessungen der gewöhnlichen Holzstäbe. So können die tragende und raumabschließende Ebene zu einer zusammengefasst werden und durch die schon vorhandenen relativ großen Dimensionen werden weniger Arbeitsschritte in Planung, Berechnung und Ausführung notwendig.

Plattenwerkstoffe werden in der Regel plan hergestellt und die Produktion von gekrümmten Holzwerkstoffplatten würde einen erheblichen Produktions- und Kostenaufwand zur Folge haben, der mit vielen Bauvorhaben in keinem Verhältnis stehen würde. Deshalb soll in dieser Arbeit die Möglichkeit untersucht werden, aus plan hergestellten Plattenwerkstoffen Holzschalen zu fertigen.

### Problemstellung und Zielsetzung

Die Herstellung von Schalentragwerken aus konventionell gefertigten Holzwerkstoffplatten ist im Wesentlichen von der möglichen Krümmung der Platten abhängig. Durch die Krümmung entstehen Eigenspannungen in der Schalenwandung, die in einer statischen Berechnung berücksichtigt werden müssen. Welche Anteile dieser Spannungen durch rheologische Prozesse im Material abgebaut werden ist kaum bekannt; ebenso wie diese Änderungen in statischen Berechnungen berücksichtigt werden können. Ziel ist es, Hinweise zur Planung, Berechnung und Konstruktion von Zylinderschalen aus Holzwerkstoffplatten unter Berücksichtigung der herstellungsbedingten Eigenspannungen zu erarbeiten.

## 1 Zylinderschalen – Historische Entwicklung

### 1.1 Hintergrund

Viele Tragwerksformen haben sich aus der Historie entwickelt. Dabei standen schon immer die Aspekte der Herstellbarkeit, vorhandene Materialressourcen, Robustheit und mögliche Spannweiten im Mittelpunkt. Dieser langlebige Entwicklungsprozess kann so wie bei jeder Tragwerksform auch bei Schalentragwerken über mehrere Epochen beobachtet werden. Um einen Überblick über Schalentragwerke zu erhalten, wird eine chronologische Abfolge der wichtigsten Entwicklungen und Errungenschaften wiedergegeben. Es soll insbesondere die Entwicklung der hölzernen Zylinderschalen erläutert werden.

### 1.2 Ursprünge des Schalenbaues

Die Geschichte der Schalentragwerke kann sehr weit zurückverfolgt werden. Vor ca. 400.000 Jahren wurden die ersten schalenähnlichen Tragwerke als Ast-Ast-Zelte zum Schutz vor Witterungseinflüssen und Gefahren erstellt, wie archäologische und ethnologische Erkenntnisse belegen. Als Beispiel kann die Schutzhütte „Terra Amata“ bei Nizza genannt werden (siehe Abb. 1 und Abb. 2). Diese aus Baumästen bestehende „Konstruktionsweise“ war bis ins Mittelalter üblich und bestand primär aus den Materialien Holz, Reisig oder Schilf, zudem kamen Tierfelle als Eindeckung zum Einsatz. Eine ausreichende Gesamtsteifigkeit wurde vermutlich durch kreuzweises Verflechten der Äste erreicht. Da diese Tragwerke meist aus organischen Baustoffen bestanden, sind von Ihnen kaum Reste erhalten und eine Rekonstruktion ist sehr schwierig.<sup>1,2</sup>

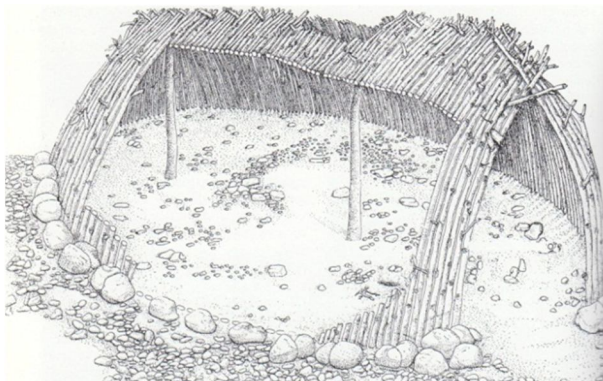


Abb. 1: „Terra Amata“ [Klotz, 1991]



Abb. 2: Rekonstruktion Ast-Ast-Zelt [Rauch, 2010]

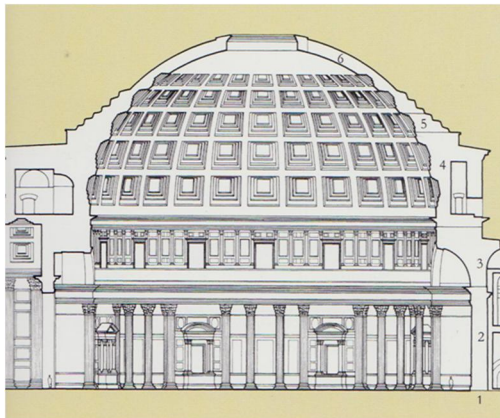
Die begrenzte Dauerhaftigkeit der Ast-Ast-Zelte wurde bald erkannt weshalb das Augenmerk der Baumeister auf die Materialien Stein und Ziegel gelenkt wurde. Speziell für die Herstellung repräsentativer Bauten, wie beispielsweise zur Demonstration der Macht der damaligen Herrscher, war Dauerhaftigkeit ein wichtiger Aspekt. Mit den Materialien Stein und Ziegel bestand die Möglichkeit „für die Ewigkeit“ zu Bauen. Um die Leistungen der damaligen Baumeister – die vielfach rein aus Erfahrungswerten ohne statische Berechnungen und Nachweisverfahren bauten – zu veranschaulichen, sollen einige der imposantesten Bauwerke aufgeführt und beschrieben werden. Eines der wichtigsten Bauwerke der Antike und gleichzeitig ein wahres Schlüsselbauwerk der Architektur- und Ingenieurgeschichte stellt das Pantheon in Rom mit seiner mächtigen Kuppel dar (siehe Abb. 3). Die halbkugelförmige Kuppel besitzt eine Scheitelhöhe von 43,30 Metern und setzt

<sup>1</sup> Heinle, Schlaich (1996). *Kuppeln aller Zeiten aller Kulturen*. Seite 9

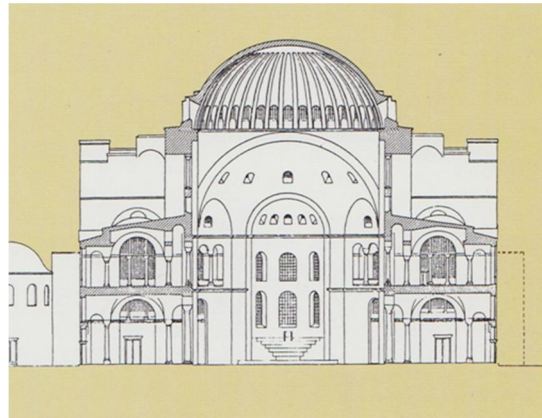
<sup>2</sup> Rauch (2010). *Schalen und Freiformen*. Seite 10



sich aus fünf konzentrischen Ringen mit je 28 Kassetten zusammen. Mit dem Bau wurde in der Regierungszeit von *Kaiser Trajan* im Jahre 114 n. Chr. begonnen. Als Baumeister kann *Apollodorus von Damaskus* genannt werden, der zu jener Zeit bereits Erfahrungen im Kuppelbau vorzuweisen hatte. So zum Beispiel die Halbkuppelsäle in den Trajansmärkten (Spannweiten 19 Meter) und die Trajansthermen mit Spannweiten von 22 Metern, die aber nur als Vorstudien für sein letztendliches Meisterwerk dienten. „Um den Kuppelschub nicht zu groß werden zu lassen, wurden die Materialgewichte systematisch abgestuft. Im Pantheon lassen sich sechs unterschiedliche Zonen mit jeweils abnehmenden Gewichten feststellen, vom Fundament aus Travertin-Quadern bis zur obersten Kuppelkalotte aus leichtem Tuffstein“ [Schmidt, 2005]. Dieses Bauwerk diente vielen weiteren Bauten als Vorbild, so beispielsweise der unter Kaiser Justinian 532-537 n. Chr. errichteten Kirche Hagia Sophia in Konstantinopel (siehe Abb. 4). Zentrales Element dieses Bauwerks ist die 563 n. Chr. errichtete Rippenkuppel mit einer Scheitelhöhe von 55 Metern. Sie besitzt einen Durchmesser von 32 Metern und wurde aus flachen Ziegeln gemauert. Da die Kuppel in Ihren ersten Entwürfen sehr flach ausgeführt wurde, stürzte sie bei einem Erdbeben im Jahre 558 n. Chr. ein und wurde nach Vorschlägen von *Isidoros von Milet* in ihrer heutigen Form neu errichtet. Diese Kuppel diente nachweislich vielen weiteren Bauwerken wie beispielsweise der Kirche San Vitale in Ravenna oder der monumentalen Pfalzkapelle in Aachen als Vorbild (siehe Abb. 5).<sup>3,4</sup>



**Abb. 3:** Schnitt durch das Pantheon in Rom [Heinle & Schlaich, 1996]



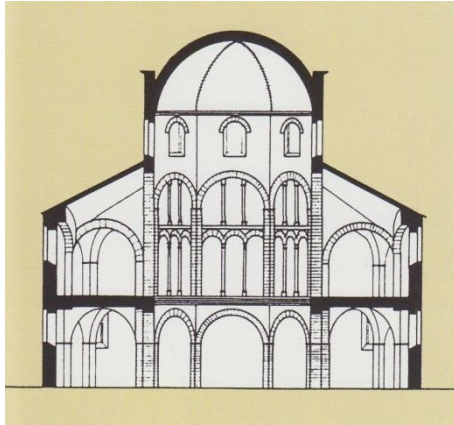
**Abb. 4:** Schnitt durch Hagia Sophia [Heinle & Schlaich, 1996]

Die um 800 n. Chr. errichtete Pfalzkapelle in Aachen wurde als ca. 85 cm starke Steinkuppel mit vier im Kuppelfuß angeordneten Ringankern zur Aufnahme der Ringzugkräfte ausgebildet (siehe Abb. 5). Diese Ringanker wurden ohne mathematische bzw. statische Kenntnisse der Baumeister angeordnet und Zeugen von sehr großen Erfahrungen im Kuppelbau. Auch die Kuppeln von San Marco in Venedig sind laut Architekturhistorikern auf den Einfluss der Hagia Sofia zurückzuführen (siehe Abb. 6). Hierbei ist zu vermerken, dass die äußere Schale der zweischaligen Konstruktion aus Holz besteht und als Wetterschutz der inneren steinernen Schale dient. Die hohen hölzernen Schutzkuppeln die im Jahre 1231 aufgesetzt wurden sollten zudem die optische Erscheinung von San Marco im Stadtbild steigern.<sup>5</sup>

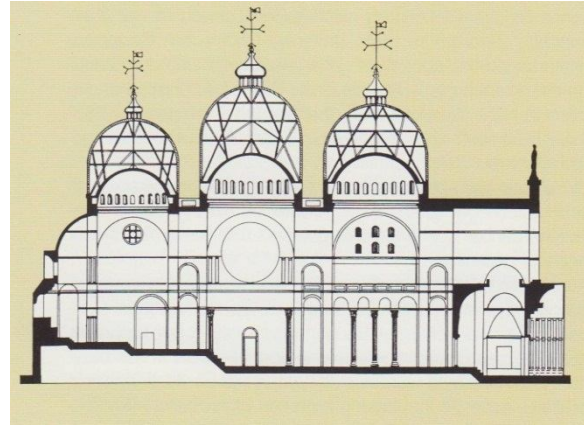
<sup>3</sup> Schmidt, H (2005). Von der Steinkuppel zur Zeiss-Dywidag-Schalenbauweise, Seite 81/82

<sup>4</sup> Heinle, Schlaich (1996). *Kuppeln aller Zeiten aller Kulturen*. Seite 20/35

<sup>5</sup> Heinle, Schlaich (1996). *Kuppeln aller Zeiten aller Kulturen*. Seite 81/87

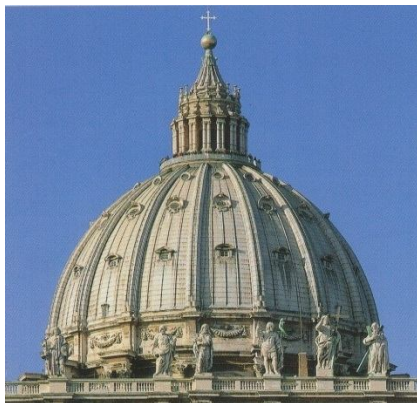


**Abb. 5:** Schnitt durch die Pfalzkapelle in Aachen [Heinle & Schlaich, 1996]

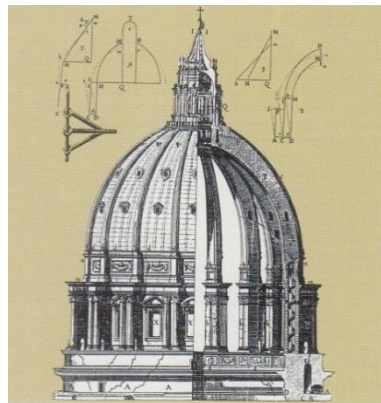


**Abb. 6:** Schnitt durch San Marco in Venedig [Heinle & Schlaich, 1996]

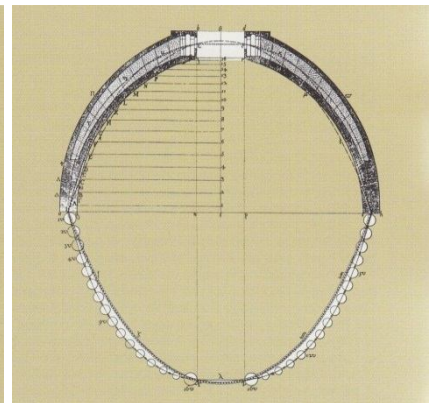
Die wohl bekannteste und historisch wichtigste Schalenkonstruktion steht in Rom. Die nach Ideen von *Bramante* entworfene Steinkuppel des Neubaus der Kirche St. Peter.



**Abb. 7:** Kuppel von St. Peter [Heinle & Schlaich, 1996]



**Abb. 8:** Gutachten der drei Mathematiker [Heinle & Schlaich, 1996]



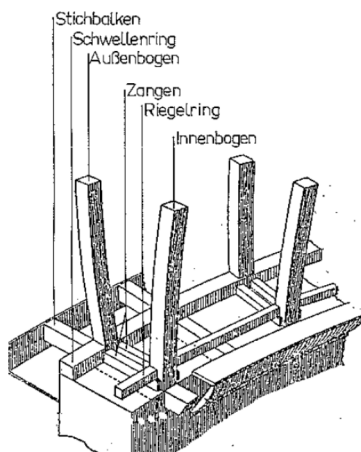
**Abb. 9:** Modellversuch von Giovanni Poleni [Heinle & Schlaich, 1996]

Der Bau, welcher sich über viele Jahre hinweg zog, wurde von verschiedenen Baumeistern begleitet und modifiziert. Mitunter war ab 1546 *Michelangelo Buonarroti* an den Bauarbeiten beteiligt, welcher maßgebliche Änderungen an den Entwürfen *Bramantes* vornahm. Die schlussendliche Schalenkonstruktion wurde nach dem Tode *Michelangelos* von den Architekten *Giacomo della Porta* und *Domenico Fontana* beendet, welche *Michelangelos* Entwürfe mit einer steileren Wölbung als vorgesehen ausführten. Doch nicht die beachtlichen Dimensionen der Kuppel, mit einem Durchmesser von 41,70 Metern und einer Scheitelhöhe von 119 Metern, oder die namhaften Baumeister machen die Kuppel so wichtig. „Sondern die Tatsache, dass zum ersten Mal in der Geschichte des Bauens Erkenntnisse aus Mathematik und Naturwissenschaft an die Stelle von intuitivem Wissen und Erfahrungsregeln traten um den Nachweis für die Tragfähigkeit einer Struktur zu führen“ [Schmidt, 2005]. Dies geschah als im Jahre 1743 erhebliche Risse in der Kuppel von St. Peter auftraten. Daraufhin wurden drei Patres beauftragt die Standfestigkeit der Kuppel zu untersuchen. Diese Patres und ein unabhängiger italienischer Mathematiker und Ingenieur namens *Giovanni Poleni* wiesen nach, dass der Kräfteverlauf in der Kuppel mit der Kettenlinie zu vergleichen sei. Diese mathematisch ermittelte Kettenlinie, welche schon durch *James Stirling* in Form der Stützlinie (1717) beschrieben wurde, verläuft innerhalb der Kuppel. Die Abweichung der Stütz- bzw. Kettenlinie zur Systemlinie konnte als sehr gering erachtet werden, wodurch in Folge Eigengewicht

kaum Biegebeanspruchungen auftreten. Somit war die Standsicherheit der Kuppel nachgewiesen (siehe Abb. 9).<sup>6,7</sup>

Zum Schutz der großen Stein- bzw. Ziegelkuppeln wurden sehr oft hölzerne Schutzkuppeln über den massiven Stein- bzw. Ziegelkuppeln angeordnet. Einerseits dienten sie als Witterungsschutz damit keine Feuchtigkeit durch vorhandene Risse eintreten konnte, andererseits um das äußere Erscheinungsbild der Kuppeln zu steigern. Diese Holzkuppeln konnten durch ihr geringes Eigengewicht und unter Zuhilfenahme von fachwerkartigen Unterkonstruktionen stark abweichend von der Stützfläche ausgeführt werden. Bevorzugt wurde die äußere, hölzerne Hülle stark überhöht ausgeführt, um die Sichtbarkeit im Stadtbild deutlich zu steigern. Beispiele dafür sind die St. Pauls Kathedrale in London und die Kuppeln von San Marco in Venedig. Die zwiebelförmigen, stark überhöhten und spitz zulaufenden Schalenkonstruktionen, wie sie aus Russland bekannt sind, sollen wegen der teilweise hohen Schneelasten entstanden sein.<sup>8,9</sup> Da diese Schutzkuppeln vielfach nicht dem Konstruktionsprinzip einer Schale entsprechen, sollen sie an dieser Stelle nicht weiter behandelt werden. Nähere Informationen zu Schutzkuppeln aus Holz können in [Meschke, 1989] und [Heinle & Schlaich, 1996] gefunden werden.

Die älteste baugeschichtlich gesicherte frei tragende, rein aus Holz hergestellte Kuppel befindet sich in Jerusalem. Sie überdacht den um 691 n. Chr. gebauten Felsendom im Tempelbezirk Haram al-Scharif (siehe Abb. 10 und Abb. 11).<sup>10</sup> Diese Holzkuppel wurde zweischalig ausgebildet, wobei die äußere Schale als Witterungsschutz und die innere Schale als raumseitige Verschalung dient. „Die beiden Schalen bestehen aus je 32 Bogensparren, die aus je drei Holzstücken zusammengesetzt sind und im Scheitel zusammentreffen. Die Kuppel aus libanesischem Zedernholz hat einen Innendurchmesser von 20,4 Metern und eine Scheitelhöhe von 35,3 Metern über dem Boden. Die äußere Kuppeldeckung wurde mehrmals erneuert. Die heutige Eindeckung besteht aus einer vergoldeten Aluminiumeindeckung. Nach einem Erdbeben wurde die Kuppel in den Jahren 1022/23 originalgetreu wieder aufgebaut. Erst bei einer Renovierung im Jahre 1022/23 originalgetreu wieder aufgebaut. Erst bei einer Renovierung im Jahre 1960 wurde die äußere Holzkonstruktion durch eine Metallkonstruktion ersetzt“ [Heinle & Schlaich, 1996].



**Abb. 10:** Kuppelaufleger des Felsendoms [Meschke, 1989]



**Abb. 11:** Foto des Felsendoms [Heinle & Schlaich, 1996]

<sup>6</sup> Heinle, Schlaich (1996). *Kuppeln aller Zeiten aller Kulturen*. Seite 98/105

<sup>7</sup> Schmidt, H (2005). Von der Steinkuppel zur Zeiss-Dywidag-Schalenbauweise, Seite 79/81

<sup>8</sup> Heinle, Schlaich (1996). *Kuppeln aller Zeiten aller Kulturen*. Seite 41 und 164

<sup>9</sup> Meschke, H.-J. (1989). *Baukunst und -technik der hölzernen Wölbkonstruktionen*. Seite 5

<sup>10</sup> Heinle, Schlaich (1996). *Kuppeln aller Zeiten aller Kulturen*. Seite 164



### 1.3 Entwicklungen im Massivbau

Da sehr viele Entwicklungen des Holzschalenbaus auf Errungenschaften des Massivbaus zurückgehen, sollen in diesem Kapitel die wichtigsten Meilensteine aufgeführt werden.

Bis in die Anfangsjahre des 20. Jahrhunderts wurden Kuppeln und Schalentragerwerke vornehmlich in traditioneller gemauerter Weise hergestellt. Die ersten zwei Stahlbetonkuppeln wurden 1904 und 1907 jeweils in München fertiggestellt und überdachten das bayerische Armeemuseum (siehe Abb. 12) und den Präparier-Saal der königlichen Anatomie. *Ludwig Zöllner* setzte sich im Wettbewerb zur Überdachung des Armeemuseums mit seiner Stahlbetonkuppel gegen den Entwurf des Architekten *Ludwig Mellinger* durch, welcher eine massive Steinkuppel vorsah. Zöllners Konstruktion bestand aus einer 16 m weit spannenden, halbkugelförmigen inneren Kuppel und einer äußeren Schutzkuppel mit einer aufgesetzten, 9 m hohen Laterne. Gebildet wurden die Kuppeln aus einer nur 5 bis 6 cm dicken Betonschicht, welche ein selbsttragendes, netzförmiges Stahlgerüst aus Winkel- und T-Profil-Eisen umgab. Die 22 m weit spannende, flache Kugelkalotte über der königlichen Anatomie wurde in den Jahren 1905 - 1907 nach derselben Konstruktionsart erbaut.<sup>11</sup>

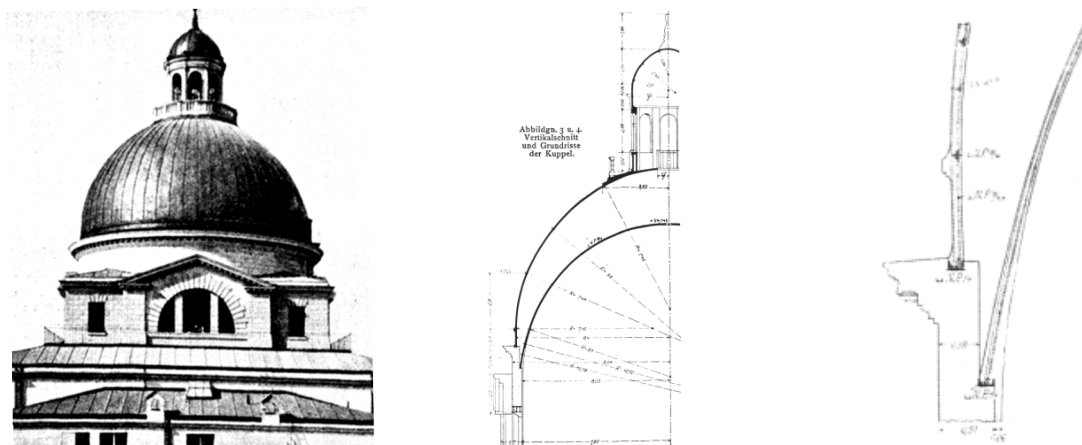
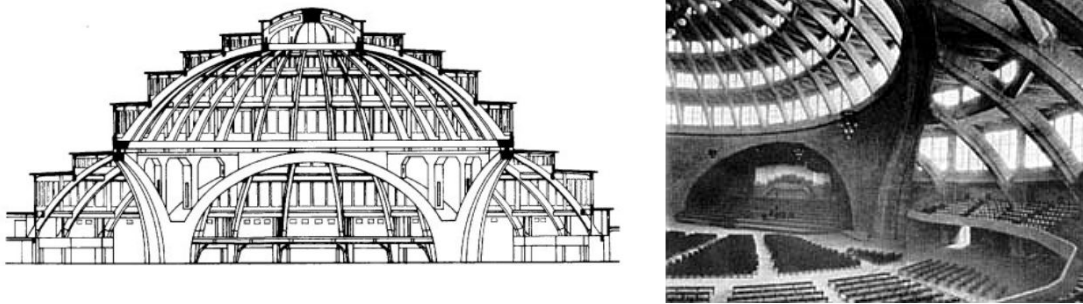


Abb. 12: Links: Bayerisches Armeemuseum; Mitte: Vertikalschnitt der Kuppel; Rechts: Fußpunkt der Kuppel [Zöllner, 1906]

Weitere Kuppeln der Bauweise nach *Zöllner* gab es jedoch nicht. Stattdessen wurden noch während des ersten Jahrzehnts des 20. Jahrhunderts, die folgenden Stahlbetonkuppeln als Rippenkonstruktionen ausgeführt. So auch die Kuppel über der Festhalle in Breslau, der sogenannten "Jahrhunderthalle", welche von 1912 - 1913 nach dem Entwurf vom Stadtbaurat *Max Berg* durch die *Firma Dyckerhoff & Widmann AG* erbaut wurde (siehe Abb. 13). Die Kuppel mit 65 m Spannweite besteht aus 32 einzelnen Bindern, welche ausgehend von einem unteren Zugring nach oben konzentrisch zusammenlaufen und im Scheitel durch einen Druckring kurzgeschlossen werden. Den Unterbau der Kuppel bilden vier Bögen mit einer Spannweite von jeweils 41 m. Für die Herstellung des Bauwerks waren 13.600 m<sup>3</sup> Beton, 600 t Bewehrungseisen, sowie 3.000 m<sup>3</sup> Holz erforderlich.<sup>12</sup> Anhand dieser Zahlen ist zu erkennen, dass ein enormer Schalungsaufwand betrieben werden musste, eine solche Rippenkonstruktion zu realisieren. Dies spiegelte sich natürlich auch in den Kosten wieder.

<sup>11</sup> Schmidt, H. (2005). *Von der Steinkuppel zur Zeiss-Dywidag-Schalbauweise*. Seite 85; 86

<sup>12</sup> Schmidt, H. (2005). *Von der Steinkuppel zur Zeiss-Dywidag-Schalbauweise*. Seite 86



**Abb. 13:** Links: Schnitt durch die „Jahrhunderthalle“; Rechts: Innenansicht der „Jahrhunderthalle“ [Zöllner, 1906]

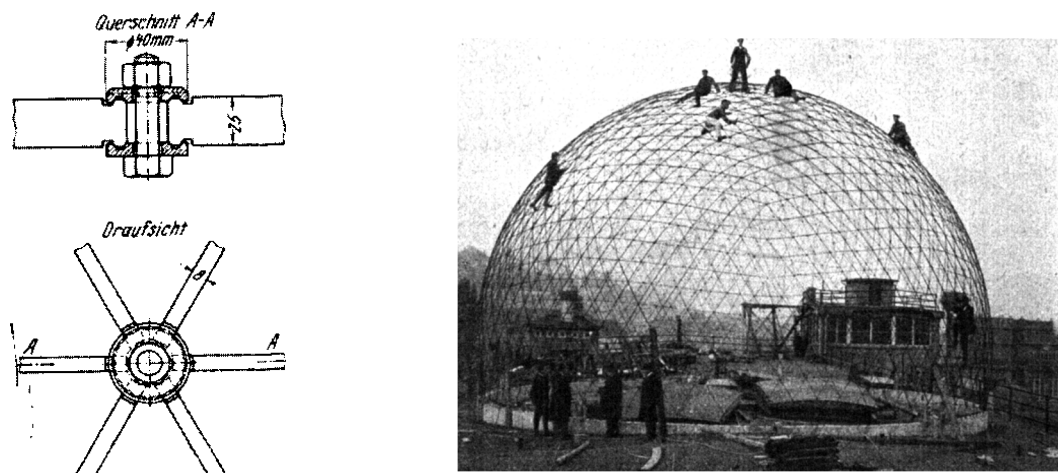
Erst die Erfindung der nur wenige Zentimeter dicken Zeiss-Dywidag-Schalen ermöglichte es bei geringem Eigengewicht und niedrigen Kosten große Spannweiten zu erzielen. Die Erfindung dieser Schalen basiert auf einer Idee *Oskar von Millers* zur Errichtung eines Planetariums im Deutschen Museum. Um dieses Vorhaben umzusetzen wandte er sich 1913 an die Firma *Carl Zeiss* in Jena, welche bereits mit der Entwicklung eines derartigen Projektionsgerätes begonnen hatte. Für das neue Planetarium benötigte man allerdings eine geschlossene, halbkugelförmige Fläche welche es so nicht gab. So machte es sich *Walther Bauersfeld*, damaliger Forschungsleiter bei *Carl Zeiss*, zur Aufgabe eigens für dieses Gerät eine entsprechende Planetariums-Kuppel zu konstruieren. Seine Lösung, die heute als geodätische Kuppel bekannt ist, beschrieb er in einer Handnotiz wie folgt: "Geht man von dem bekannten regelmäßigen Körper aus, dessen Oberfläche aus 20 gleichseitigen Dreiecken besteht, und schneidet jede der 12 Ecken, die dieser Körper hat, durch ebene Schnitte ab, so entstehen an der Oberfläche 20 Sechsecke und 12 Fünfecke. Mit passender Lage der Schnitte lässt sich erreichen, dass die Fünfecke und Sechsecke den gleichen umschließenden Kreis aufweisen. Denkt man nun noch die Kanten dieses Körpers vom Mittelpunkt auf eine Kugeloberfläche projiziert, so entsteht die ausgeführte Kugeleinteilung". Insgesamt waren für die Herstellung der Kuppel 3.840 Eisenstäbe notwendig, die über eine zweiteilige Klemmverbindung gekoppelt wurden. Die Klemmverbindung bestand aus zwei miteinander verschraubten Scheiben mit ringförmigen Einfräsungen, in welche die Stabenden einrasteten (siehe Abb. 14, links). Anschließend wurde das Stahlnetzwerk in Zusammenarbeit mit der *Dyckerhoff & Widmann AG* und dessen Oberingenieur *Franz Dischinger* mit einem Drahtgewebe umgeben und durch Torkretieren, einem erst 1908 erfundenen Verfahren zum schichtweisen Auftrag von Beton, zu einer geschlossenen Schalenfläche geformt. Als Schalung wurde eine 3 x 3 Meter große gewölbte Holzplatte verwendet, die entsprechend dem Baufortschritt versetzt wurde. Die Kuppel überspannte 16 m bei einer Wandstärke von nur 3 Zentimetern und einer Bewehrungsmenge von  $9 \text{ kg/m}^2$  ( $0,09 \text{ kN/m}^2$ ).<sup>13, 14</sup>

Auf Grund des Erfolges dieser ersten Schale wurde eine Vielzahl von Folgeprojekten realisiert. Von den ersten gefertigten Zeiss-Dywidag Schalen ist heute nur noch das Planetarium in Jena erhalten, dessen Kuppel eine Spannweite von 25 Metern über einem zylindrischen Unterbau misst.<sup>15</sup>

<sup>13</sup> Schmidt, H. (2005). *Von der Steinkuppel zur Zeiss-Dywidag-Schalenbauweise*. Seite 87

<sup>14</sup> Kordina, K. (2005). *Ingenieurporträt Franz Dischinger*. Seite 68

<sup>15</sup> Schmidt, H. (2005). *Von der Steinkuppel zur Zeiss-Dywidag-Schalenbauweise*. Seite 87



**Abb. 14:** Links: Knotenpunkt des ersten Zeiss- Netzwerkes; Rechts: Testkuppel auf dem Dach der Zeiss-Werke [Zöllner, 1906]

*Dischinger* arbeitete in den Folgejahren intensiv an der Weiterentwicklung der Schalenbauweise, bestrebt auch rechteckige Grundrisse überspannen zu können. Nachdem er sich einige Zeit mit den theoretischen Grundlagen doppelt gekrümmter Schalen auseinandersetzte, kam er zum Entschluss, dass die Zeiss-Netzwerke zu diesem Zweck ungeeignet seien und wandte sich stattdessen der Entwicklung einfach gekrümmter Zylinderschalen zu. Zusammen mit *Bauersfeld*, der ausgehend von Überlegungen *August Föppls*, die Grundgesetze einer Membrantheorie für zylindrische Schalen geschaffen hatte, und *Ulrich Finsterwalder*, entwickelte er 1924 die zylindrischen Zeiss-Dywidag-Tonnengewölbe. Nach ersten Versuchen an Blech- und Betonmodellen entstand noch im selben Jahr ein erster Versuchsaufbau. Die Zylinderschale überspannte dabei einen Grundriss von 4 x 10 Metern, bei einem Stich von 1,12 Metern und einer Wandstärke von nur 1,5 Zentimetern.<sup>16, 17</sup>

Durch diese Entwicklung konnte eine vollkommen neuartige Lastabtragung linienförmiger Bauteile erreicht werden. Wo bislang linienförmige Bauteile wie Bögen und Balken eingesetzt wurden, konnten mit der Tonnenschale flächige Elemente zur einfach gerichteten Lastabtragung verwendet werden. Die erforderliche Biegesteifigkeit wurde nicht durch eine Erhöhung der Materialstärke, sondern durch Aktivierung einer hohen geometrischen Steifigkeit erreicht. Dazu wurden die Schalen nur an ihren Stirnseiten gelagert, wodurch eine zusätzliche Schubtragwirkung in der Schalenwandung hervorgerufen wurde. Diese zusätzliche Tragwirkung, die sich bei einfach gekrümmten Flächen wie Tonnenschalen einstellt, führt zu einer momentenfreien Abtragung verschiedener Laststellungen.

Im Jahre 1926 wurde die erste Tonnenschale der breiten Öffentlichkeit vorgestellt. Die sogenannte Dywidag-Halle hatte eine Grundfläche von 35 x 41 Metern. Zwei Innenstützen trennten den Raum in einen 23 m langen vorderen und einen 18 m langen hinteren Teil. Überdeckt wurden die Räume jeweils von drei 5 bzw. 5,5 Zentimeter starken Eisenbetonschalen mit halbelliptischer Form. Die Spannweite jeder einzelnen Schale betrug in Querrichtung 11,65 Meter, bei einem Stich von 3,5 Metern (siehe Abb. 15). Zudem wurden in die drei vorderen Tonnen Oberlichter mit jeweils 12 Metern Länge und 3 Metern Breite ausgespart. Zur Armierung der Tonnen wurden lediglich 2,2 Kilogramm Rundeisenstahl pro Quadratmeter quadratisch angeordnet. An den stärker beanspruchten Stellen wurden zusätzlich 8 Millimeter starke, schräg liegende Bewehrungsstäbe eingebracht. Die sechs

<sup>16</sup> Schmidt, H. (2005). *Von der Steinkuppel zur Zeiss-Dywidag-Schalenbauweise*. Seite 87-88

<sup>17</sup> Kordina, K. (2005). *Ingenieurporträt Franz Dischinger*. Seite 69

Zylinderschalen wurden in einer Zeit von nur 42 Arbeitstagen hergestellt, wobei lediglich fünf Tage zwischen Torkretieren und entfernen der Schalung vorgesehen waren (siehe Abb. 16).<sup>18</sup>

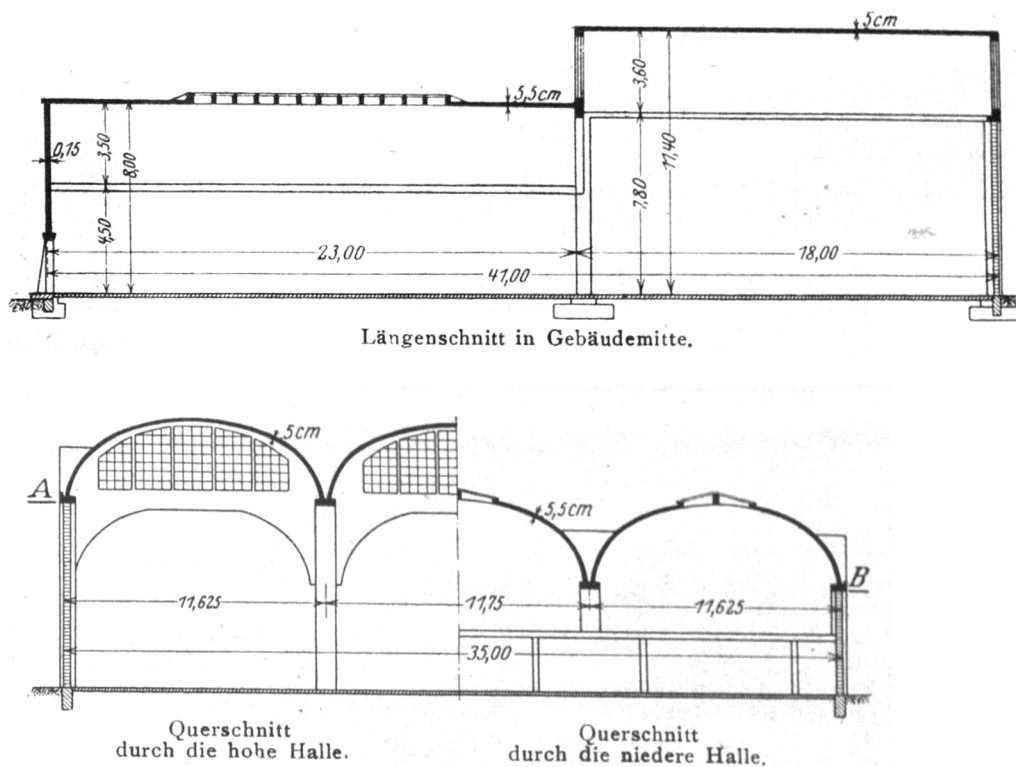


Abb. 15: Längenschnitt und Querschnitt durch die Dywidag- Halle [Dischinger & Finsterwalder, 1926]

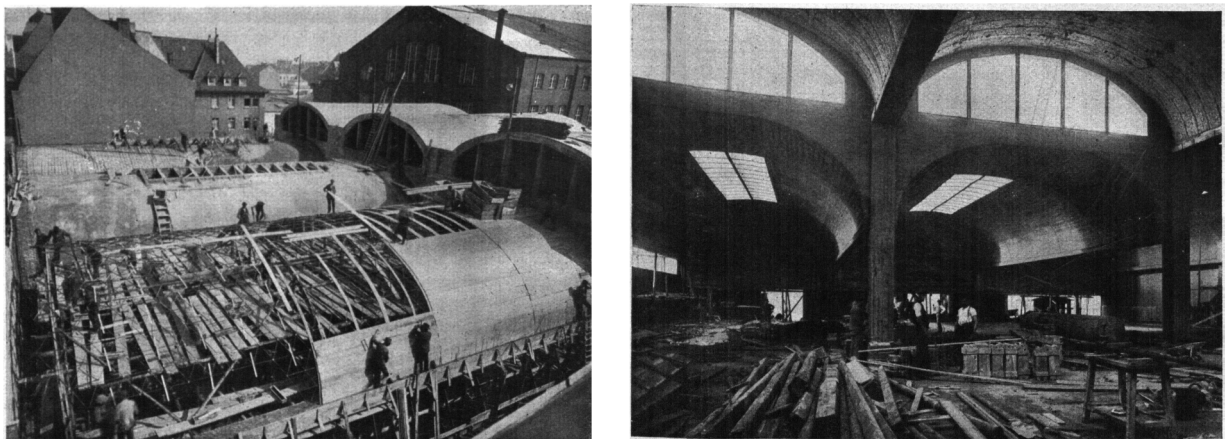


Abb. 16: Links: Dywidag- Halle; Rechts: Innenansicht nach dem Ausrüsten [Dischinger & Finsterwalder, 1926]

In den Jahren 1926 bis 1928 entstand in Frankfurt am Main das erste Großprojekt mit Zeiss-Dywidag-Tonnengewölben. Die Frankfurter Großmarkthalle galt damals mit einer Länge von 220 Metern und einer Gesamtbreite von 50 Metern als größte stützenfrei überspannte Eisenbetonhalle der Welt. Zur Überdachung dieser Fläche kamen fünfzehn halbelliptische Einzeltonnen zum Einsatz (siehe Abb. 17). Jede Tonne überspannte in Querrichtung 14,1 Meter bei einer Länge von 36,9 Metern. Die Schalenwandungen wiesen eine Stärke von 7 bis 8 Zentimetern auf. Die Höhe einer Tonne

<sup>18</sup> Dischinger, F., & Finsterwalder, U. (1926). Die Dywidag-Halle Auf Der Gesolei. Seite 930: 931



einschließlich des dazugehörigen Randgliedes, welches als 2 Meter hoher Kastenträger ausgebildet wurde, betrug 6 Meter.<sup>19</sup>

Da es sich bei diesem Bauwerk um eine in diesem Ausmaß neuartige Konstruktion handelte, entschied sich die Stadt Frankfurt die getroffenen theoretischen Annahmen, durch ein Versuchsmodell im Maßstab 1:3 nachzuprüfen. Gemessen wurden die Formänderungen, die sich unter der zu bemessenden Last, welche mit Sandsäcken simuliert wurde, ergaben. Die größte Durchbiegung der Tonne stellte sich im Scheitel mit nur 3,38 Millimetern unter einer Belastung entsprechend dem Eigengewicht + der 1,5-fachen Schneelast ein und bestätigte damit den guten Gesamteindruck der Probetonne.<sup>20</sup>

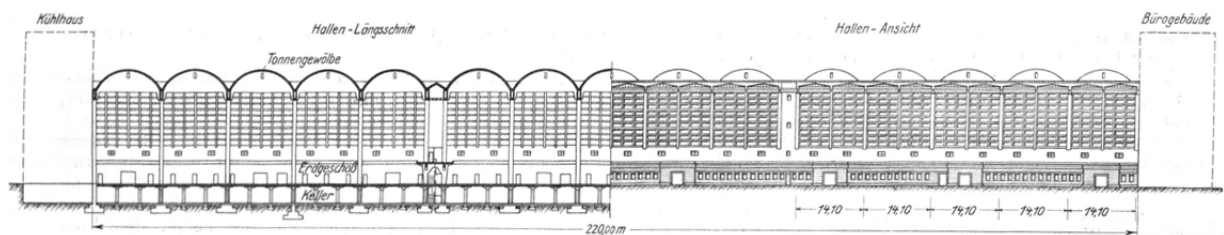


Abb. 17: Längsschnitt durch die Großmarkthalle Frankfurt a. M. [Klonlogel, 1928]

Fast gleichzeitig mit dem Bau der Großmarkthalle entstand in Frankfurt ein zweites bedeutendes Bauwerk für das städtische Elektrizitätswerk. Dieses bestand aus insgesamt sieben Tonnen, die jeweils eine Fläche von 12 x 36 m überdeckten (siehe Abb. 18). Da ein möglichst geringer Stich angestrebt wurde, wurden die Gewölbe bei diesem Projekt nicht halbelliptisch ausgeführt, sondern erstmals kreissegmentförmig mit 45° Neigung der Endtangenten. Zudem bestanden die inneren Randglieder aus horizontal gerichteten, 1 Meter breiten und dafür nur 20 Zentimetern starken Platten. Die äußeren Randglieder waren vertikal ausgerichtet und 1 Meter hoch. Ausgesteift wurden die 8,5 cm starken Gewölbe neben den als Fensterfachwerk aufgelösten 25 Zentimetern starken Stirnwänden, durch einen zusätzlichen, durchlaufenden Querbinder in der Mitte. Im Scheitel wurden die Schalen auf Grund der 2,88 Meter breiten Oberlichter durch Rippen 15/33 Zentimeter ersetzt. Bewehrt wurden die Schalen mit 8 und 10 Millimeter starken Rundeisen, die entsprechend dem Verlauf der Hauptspannungs-Trajektorien verlegt wurden. Als Träger für die Schalung wurde, wie bei der Großmarkthalle ein doppeltes Zeiss-Netzwerk montiert.<sup>21</sup>

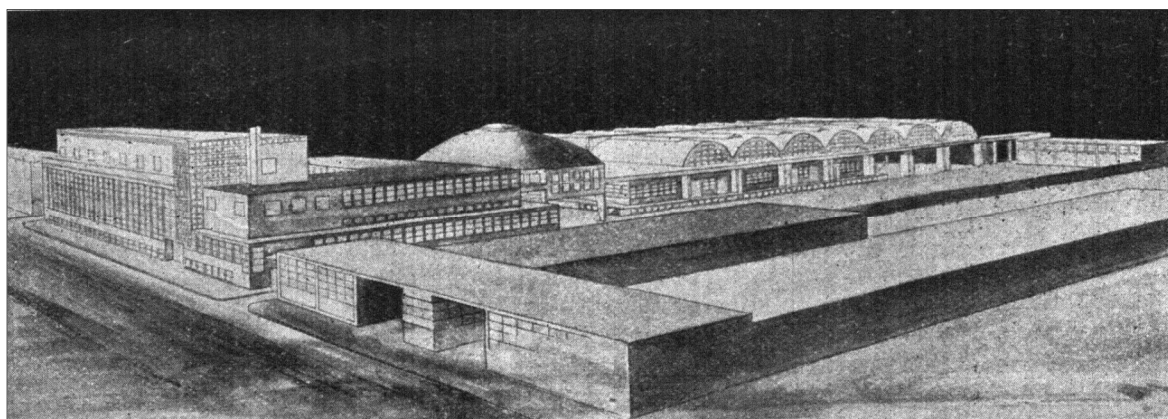


Abb. 18: Elektrizitätswerk in Frankfurt am Main [Finsterwalder, 1928]

<sup>19</sup> Klonlogel, A. (1928). *Die Schalengewölbe der Großmarkthalle Frankfurt a. M.* Seite 14; 28

<sup>20</sup> Klonlogel, A. (1928). *Die Schalengewölbe der Großmarkthalle Frankfurt a. M.* Seite 14; 15; 26; 27

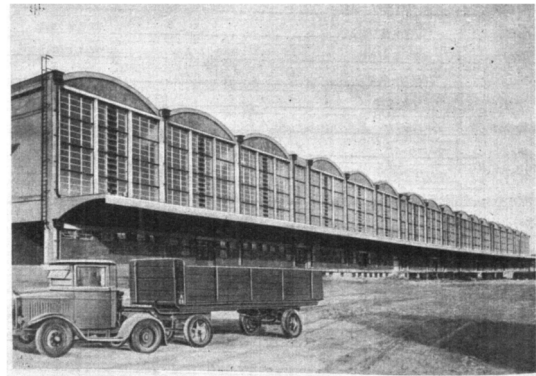
<sup>21</sup> Finsterwalder, U. (1928). *Die Schalendächer des Elektrizitätswerkes in Frankfurt a. M.* Seite 206; 207



In der Folge wurden viele weitere Bauprojekte mit Zylinderschalen nach dem Zeiss-Dywidag-Verfahren verwirklicht. Eine Reihe der bemerkenswertesten Konstruktionen wurde 1932 in [Dischinger & Finsterwalder, 1932] ausführlich beschrieben. Hervorzuheben sind daraus der 1931 errichtete Kaischuppen 59 in Hamburg mit seinen 36 Tonnengewölben (siehe Abb. 19) oder auch die Großmarkthalle in Budapest von 1930 (siehe Abb. 20), welche als Weiterentwicklung der Frankfurter Großmarkthalle gesehen werden kann. Berechnungen zur Großmarkthalle Budapest sind in [Dischinger, 1930] zu finden. Neben der Vielzahl an Tonnengewölben entstanden auch erste Schalenkragdächer (siehe Abb. 21) und Schalensheddächer (siehe Abb. 22).<sup>22</sup>



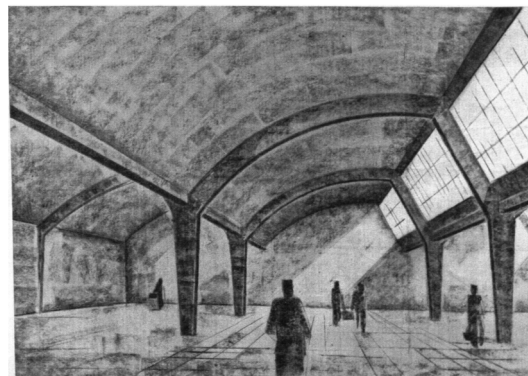
**Abb. 19:** Kaischuppen 59 Hamburg  
[Dischinger & Finsterwalder, 1932]



**Abb. 20:** Großmarkthalle Budapest  
[Dischinger & Finsterwalder, 1932]



**Abb. 21:** Bahnsteigdach am Ostbahnhof München  
[Dischinger & Finsterwalder, 1932]



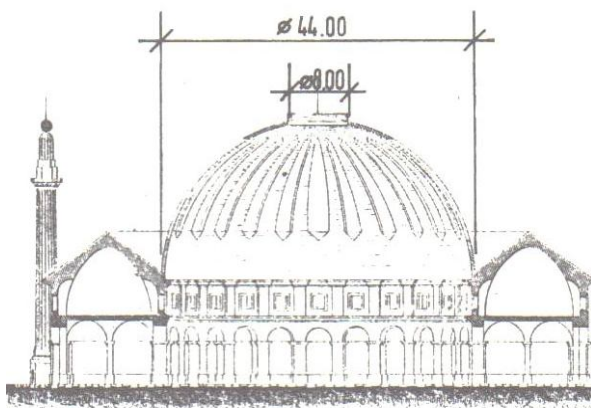
**Abb. 22:** Perspektive eines Schalensheddaches  
[Dischinger & Finsterwalder, 1932]

<sup>22</sup> Carobbio, A. (2012). *Zylinderschalen aus Holz*. Seite 24-25

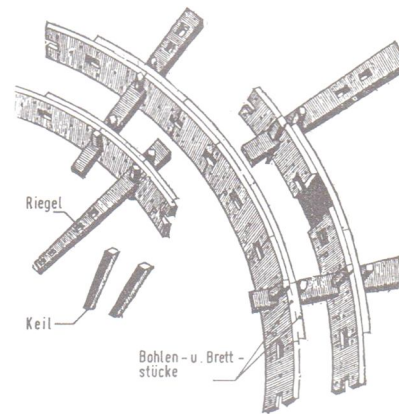
## 1.4 Bogentragwerke aus Holz

Die Entstehungsgeschichte der freitragenden Zylinder- bzw. Tonnenschalen geht auf die Entwicklungen der hölzernen Bogentragwerke zurück, weshalb diese in diesem Kapitel näher erläutert werden sollen. Bereits 1561 stellte der französische Architekt *Philibert de l'Orme* in seinem Buch „Nouvelles Inventions our bine bastir et à petits fraiz“ die Erfindung eines bogenförmigen Holzbinders vor. Der darin beschriebene und nach ihm benannte de l'Ormesche Bogen bestand aus mehreren Lagen kurzer, aufrecht stehender Bohlen oder Bretter, die entsprechend der erforderlichen Bogenlinie zugeschnitten und anschließend vernagelt wurden. Die Stöße wurden dabei versetzt angeordnet. Um ein Ausknicken der einzelnen Bögen zu verhindern, wurden sie durch verkeilte Querriegel stabilisiert (siehe Abb. 24). Neben der Tatsache mit diesen Bögen stützenfrei konstruieren zu können, zeichneten sich die damit hergestellten Konstruktionen in erster Linie durch erhebliche Materialersparnisse gegenüber anderen Konstruktionen aus. Ursprünglich war das Vertrauen in diese Konstruktionsweise nicht sehr hoch, weshalb nur kleinere Bauwerke, insbesondere landwirtschaftliche Gebäude wie Scheunen und Speicher realisiert wurden.<sup>23,24,25</sup>

Der eigentliche Durchbruch dieser Bauweise gelang zweihundert Jahre nach dem Tode *Philibert de l'Ormes*, bei dem Wettbewerb zur Überdachung der Getreidehalle in Paris (siehe Abb. 23). Hier setzte sich der Kuppelentwurf, von den Architekten *Legrand* und *Molinos*, nach dem de l'Ormeschen Prinzip gegen Entwürfe aus Stein und Gusseisen durch.<sup>26</sup> „Die Halle au Blé in Paris (Kornhalle), heute unter dem Namen Bourse de Commerce bekannt, wurde mit einer 41 Meter weit spannenden Holzkuppel aus Bohlenbindern, 33 Meter hoch über dem Boden überdeckt (1785). Im Scheitel der Kuppel wurde eine aus Eisenprofilen gefertigte Laterne angebracht, die die Wölbkonstruktion krönte. Bereits 1802 fiel die Kuppel einem Feuer zum Opfer und wurde später durch eine Eisenkuppel ersetzt.“ [Heinle & Schlaich, 1996]



**Abb. 23:** Schnitt durch die Halle au Blé [Meschke, 1989]



**Abb. 24:** Bogen nach de l'Orme mit Querriegel [Meschke, 1989]

Durch den erfolgreichen Einsatz des de l'Ormeschen Bogenträgers bei der Überdachung der Halle au Blé in Paris wurde das Bausystem schnell bekannt und mehrfach nachempfunden. Besonders geeignet schien diese Bauweise zur Ausführung tonnenförmiger Dachtragwerke. So wurde das Exerzierhaus des Alexanderregiments in Berlin mit einer Spannweite von ca. 18 Metern als Tonne mit aufgesetztem Satteldach ausgeführt (siehe Abb. 26). Dabei bildeten dreilagig ausgebildete

<sup>23</sup> Meschke, H.-J. (1989). *Baukunst und -technik der hölzernen Wölbkonstruktionen*. Seite 47/50

<sup>24</sup> Fiebig (1924). *Hölzerne Tragwerke*. Seite 193

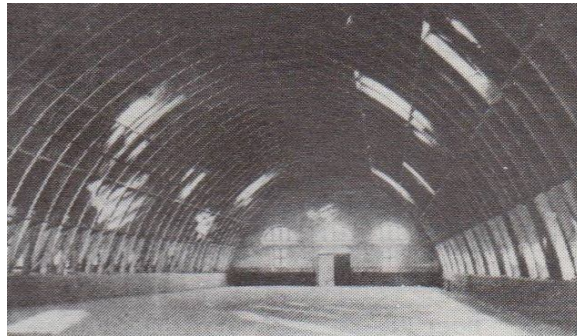
<sup>25</sup> Kersten, C. (1926). *Freitragende Holzbauten*. Seite 21/22

<sup>26</sup> Heinle, Schlaich (1996). *Kuppeln aller Zeiten aller Kulturen*. Seite 145 und 164

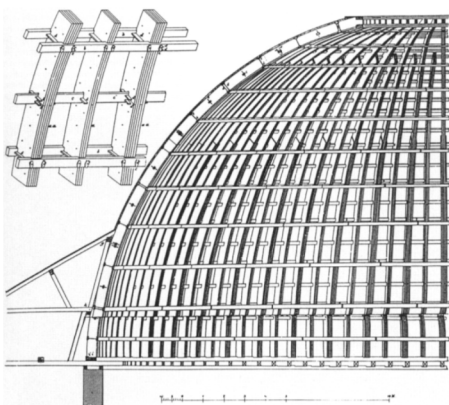
Spitzbögen mit einem Gesamtquerschnitt von 13/28 Zentimetern in einem Abstand von 1,09 Metern das Haupttraggerüst.<sup>27</sup>



**Abb. 25:** Bogen mit Querriegel [Erlor, 2009]



**Abb. 26:** Das Exerzierhaus des Alexanderregiments in Berlin [Meschke, 1989]



**Abb. 27:** Ludwigskirche in Darmstadt [Müller, 1998]

Die größte nach dem de l'Ormeschen Prinzip gebaute Kuppel in Deutschland, war die von *Georg Moller* entworfene Ludwigskirche in Darmstadt (siehe Abb. 27). Um Ringzugkräfte in Folge vertikaler Belastungen aufnehmen zu können, wurden radial verlaufende Ringbalken aus Eichenholz in der 33,5 Meter weit spannenden Kuppel angeordnet. Diese Kuppel wurde 1827 fertiggestellt und fiel den Zerstörungen des zweiten Weltkrieges zum Opfer.<sup>28</sup> Abb. 25 zeigt die Möglichkeit des Anschlusses der Querriegel an einen de l'Ormeschen Bogen.

„Die bekannten Nachteile, wie der beträchtliche Holzverschnitt beim Zuschnitt der Bohlen und Bretter, der damit verbundene Arbeitsaufwand und die Spaltgefahr aufgrund der vielen angeschnittenen Fasern, veranlassten den französischen Ingenieur *Armand Rose Emy* den de l'Ormeschen Bogen ingenieurmäßig weiterzuentwickeln und 1819 eine nach ihm benannte neue Bogenbauweise der Fachwelt vorzustellen. Handelsübliche, lange Bohlen mit einem Querschnitt von 4,5-5,5/13 Zentimetern wurden mit ihren Breitseiten aufeinander gelegt und über ein Lehrgerüst gebogen. Auf diese Weise, die gewünschte Bogenform einnehmend, verbanden umgelegte Eisenbänder und Schraubbolzen im stetigen Wechsel von 0,4-0,5 Metern die vorgespannten Bohlenlagen zum Emyschen Bohlenbogen (siehe Abb. 28).“ [Meschke, 1989]

Da durch die Verspannung mit Schraubbolzen und Eisenbändern nur eine geringe Aktivierung der Haftreibung zwischen den Brettern möglich war, kam es bei Biegebeanspruchungen zwangsläufig zu hohen Schubverformungen des Bogenquerschnittes und starken elastischen Verformungen bei wechselnden Belastungen. Um diese zum Teil erheblichen Verformungen zu minimieren schlug Emy 1841 vor, den Kämpferbereich des Bogens mehrgürtig auszubilden (siehe Abb. 29).<sup>29,30,31</sup>

<sup>27</sup> Meschke, H.-J. (1989). *Baukunst und -technik der hölzernen Wölbkonstruktionen*. Seite 106

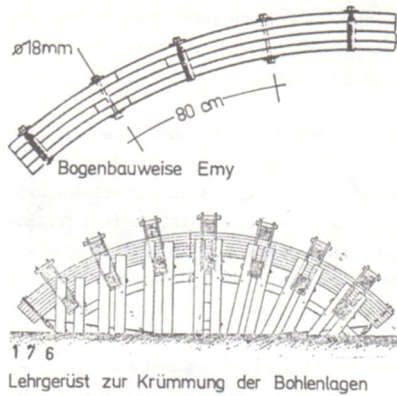
<sup>28</sup> Müller, C. (1998). *Entwicklung des Holzleimbaues...* Seite 15

<sup>29</sup> Meschke, H.-J. (1989). *Baukunst und -technik der hölzernen Wölbkonstruktionen*. Seite 106

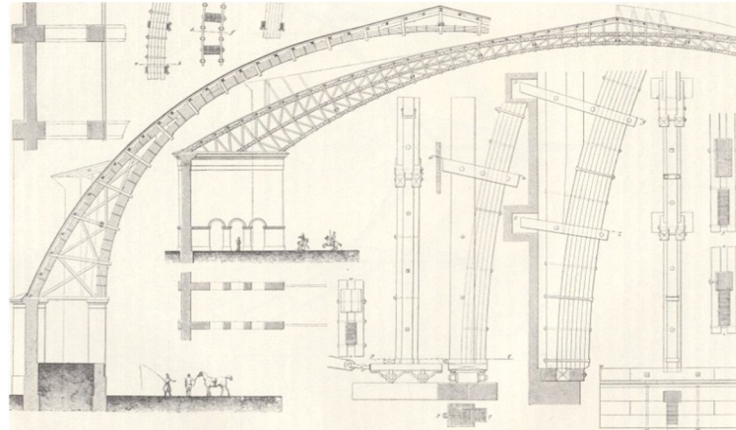
<sup>30</sup> Kersten, C. (1926). *Freitragende Holzbauten*. Seite 24/25

<sup>31</sup> Müller, C. (1998). *Entwicklung des Holzleimbaues...* Seite 19



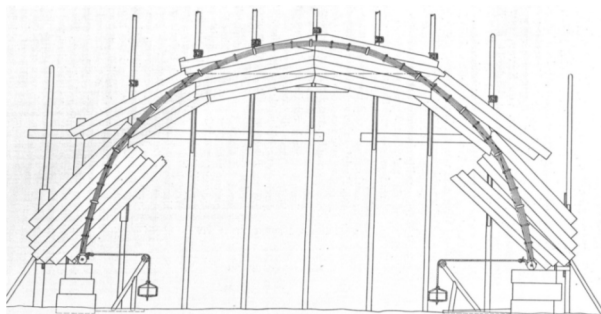


**Abb. 28:** Bauweise nach Emy [Meschke, 1989]

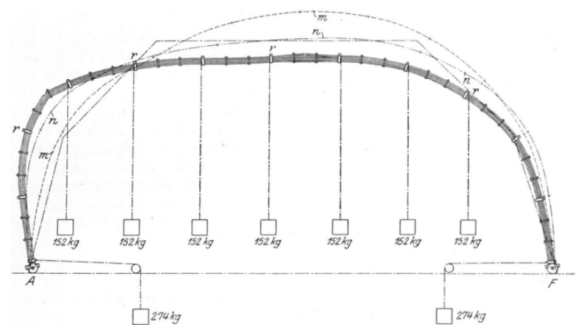


**Abb. 29:** Entwürfe für Großhallen nach Emy mit Spannweiten über 100 Meter [Kersten, 1926]

Erste wissenschaftliche Untersuchungen zum Tragverhalten der de l'Ormeschen und Emyschen Bohlenbögen wurden 1847 von *Paul Joseph Ardant* einem Schüler *Emys* veröffentlicht. Darin stellte er Versuchsergebnisse über die Durchbiegung Emyscher und de l'Ormescher Bohlenbögen vor. Zu diesem Zweck errichtete er jeweils vor dem zu untersuchenden Bogen ein Beobachtungsgerüst, auf dem er die sich verändernde Bogenform unter Last markierte. Dabei wies der Emysche Bohlenbogen eine höhere Tragfähigkeit als der de l'Ormesche Bogenträger auf (siehe Abb. 30 und Abb. 31).<sup>32,33</sup>



**Abb. 30:** Aufriss der Ardant'schen Versuchsvorrichtung [Carobbio, 2012]



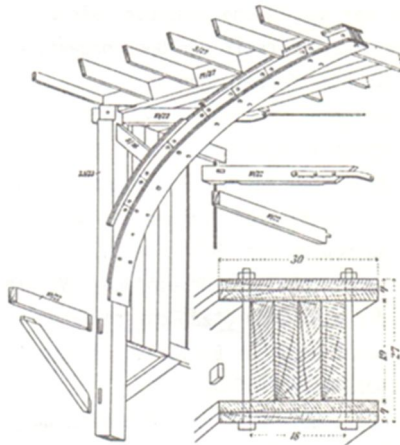
**Abb. 31:** Verformung eines Emyschen Bohlenbogens bei Versuchen nach Ardant [Meschke, 1989]

In den Folgejahren entstanden eine Reihe von Bauwerken nach dem Prinzip des Emyschen Bogenträgers, oder als Kombination des Emy- und de l'Ormeschen Trägers mit teilweise beachtlichen Spannweiten. So hatte das 124 Meter lange Tonnengewölbe des Kristallpalastes in London, eine Spannweite von 22 Metern. Der alte Zentralbahnhof München (1848) überspannte mit dem Prinzip des Emyschen Bohlenbinders 26,5 Meter und die Halle für das Sängerfest in Wien im Jahre 1890 hatte eine überwältigende Spannweite von 56 Metern und bot 20.000 Menschen Platz (siehe Abb. 33). Die Halle für das Sängerfest in Wien, besaß nach der Frankreich-Halle zur Weltausstellung 1873, eines der ersten Tonnendächer bei dem die Bogenträger als hölzerne I-Querschnitte ausgebildet wurden. Der Steg bestand aus einem mehrlagigen de l'Ormeschen Bohlenbogen und die Flansche aus mehrlagigen Emy-Trägern. Der Verbund zwischen Steg und Flansch wurde durch Vernagelung hergestellt, wobei zusätzlich eiserne Stäbe beidseitig des Steges zur Aufnahme des Schubes angebracht wurden<sup>34</sup> (siehe Abb. 32).

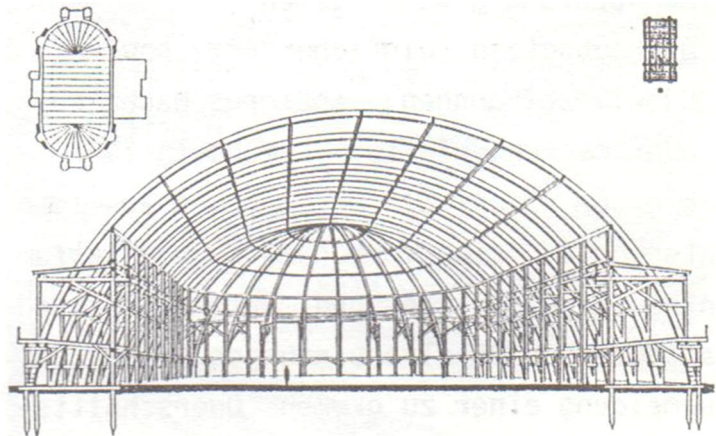
<sup>32</sup> Carobbio, A. (2012). *Zylinderschalen aus Holz*. Seite 6

<sup>33</sup> Meschke, H.-J. (1989). *Baukunst und -technik der hölzernen Wölbkonstruktionen*. Seite 107

<sup>34</sup> Meschke, H.-J. (1989). *Baukunst und -technik der hölzernen Wölbkonstruktionen*. Seite 112/113

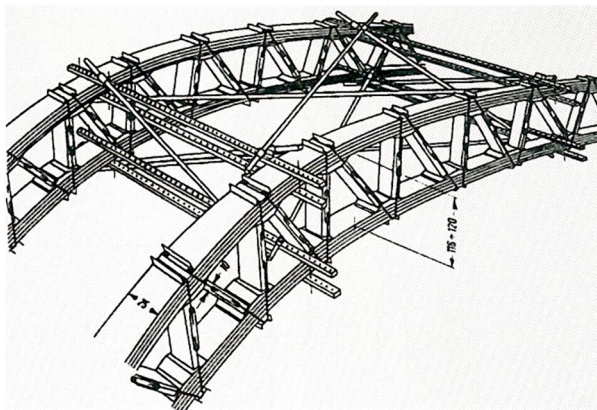


**Abb. 32:** Kombination aus de l'Ormeschen Bohlenbögen und Emy-Trägern [Meschke, 1989]



**Abb. 33:** Halle für das Sängerefest in Wien (1890) [Meschke, 1989]

Der Emy-Träger bildet zudem die Grundlage des Cruciani-Lehrgerüsts (siehe Abb. 34) und einiger Brücken *Carl Friedrich von Wiedekings*. Das Cruciani-Lehrgerüst wurde nach dem zweiten Weltkrieg vielfach verwendet, weitgespannte Beton-Bogentragwerke in Italien und Österreich herzustellen. Dazu wurden Ober- und Untergurte eines Fachwerkträgers aus Emy-Trägern hergestellt, welche durch hölzerne Diagonalen auf Abstand gehalten wurden und zur Stützung des noch frischen Betons dienten (siehe Abb. 35).<sup>35, 36</sup>



**Abb. 34:** Einstöckiger-Cruciani-Bogen [v. Halász, 1974]



**Abb. 35:** Zweistöckiges-Cruciani-Lehrgerüst mit einer Spannweite von 65 Metern [v. Halász, 1974]

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts gelang es dem Düsseldorfer Zimmermeister und Architekten *Philipp Stephan* einen relativ biege- und schubsteifen Bogen zu entwickeln. Der von ihm entworfene Bogenquerschnitt bestand aus Ober- und Untergurt, welche über aussteifende Diagonalen auf Abstand gehalten wurden (siehe Abb. 36). Die Gurte wurden aus nebeneinanderliegenden, hochkant gestellten Brettern hergestellt, welche über die hohe Kante gebogen wurden.<sup>37</sup>

<sup>35</sup> Holzlexikon (2003). *Band 1 A-K*. Seite 222

<sup>36</sup> v. Halász (1974). *Holzbau-Taschenbuch*. Seite 611-614

<sup>37</sup> Fiebig (1924). *Hölzerne Tragwerke*. Seite 193

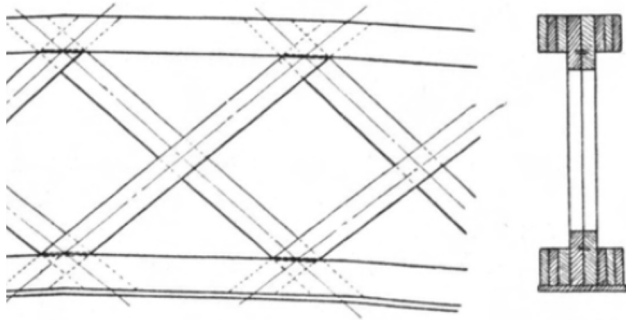


Abb. 36: Bogenbinder nach Stephan [Kersten, 1926]

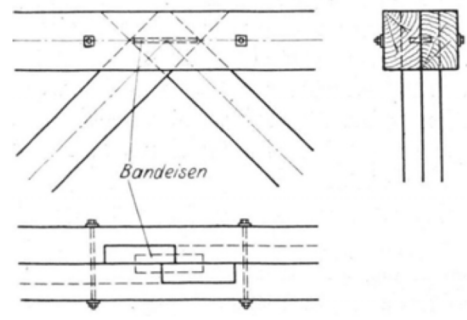


Abb. 37: Anschluss mit Flacheisendübel [Kersten, 1926]

Diese Konstruktion erforderte einen kraftschlüssigen Anschluss der Streben an die Gurte. Zunächst wurde versucht die Streben mittels Schwalbenschwanz in die Füllbretter der Gurte einzulassen. Es zeigte sich aber, dass diese Vorgehensweise wenig zuverlässig war. Dies lag zumeist an der ungenauen Ausbildung der Schwalbenschwanzverbindungen und am Schwindverhalten des Holzes. Um dem Rechnung zu tragen, überlegte sich *Stephan* eine statisch einfache Dübelverbindung aus Flacheisen oder Hartholz (siehe Abb. 37). Der Horizontalschub des Bogens wurde vornehmlich durch Zugstangen aus Holz oder Eisen am Kämpfer aufgenommen (siehe Abb. 38). Dabei wurde der Bogenfuß zangenartig umfasst und das Binderstück am Auflager vollwandig ausgebildet, d.h. die einzelnen schrägen Stäbe wurden durch schräg stehende Bretter oder durch mehrere Brettlagen ersetzt.<sup>38</sup>

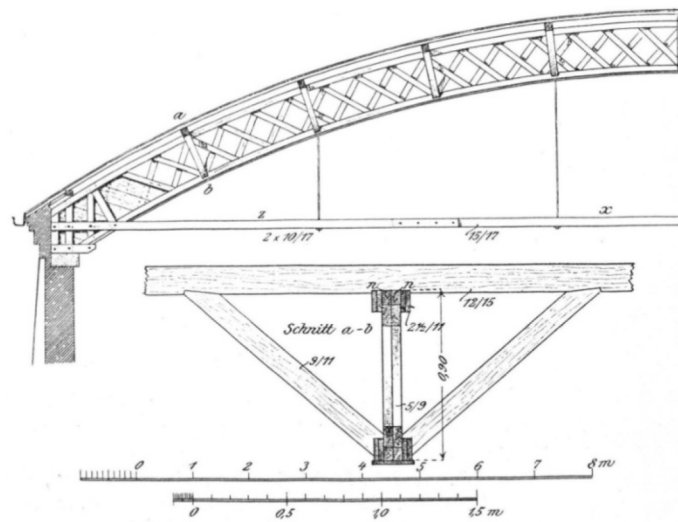


Abb. 38: Bauweise Stephan mit hölzerner Zugstange [Kersten, 1926]

In einigen Fällen wurde nicht nur das Binderstück am Auflager vollwandig ausgeführt, sondern der gesamte Träger. Ein entsprechendes Beispiel ist in Abb. 39 und Abb. 40 gegeben. Dabei handelt es sich um eine Halle für Wasserflugzeuge in Warnemünde mit einer Bogenspannweite von 55 Metern und einer Stützhöhe von 18 Metern.

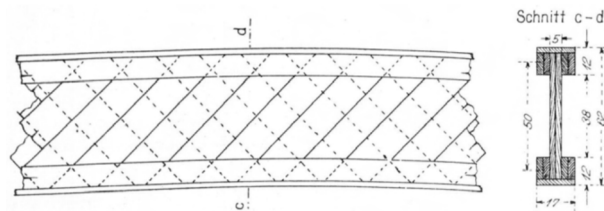


Abb. 39: Vollwandbogen für eine Wasserflugzeughalle in Warnemünde [Kersten, 1926]

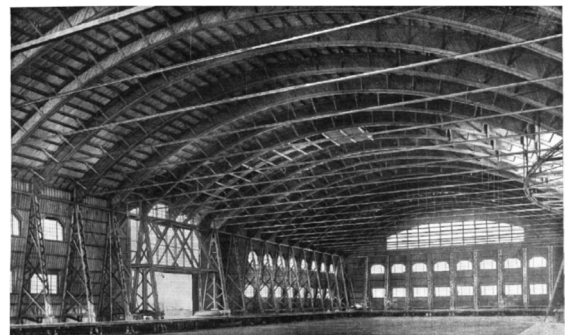
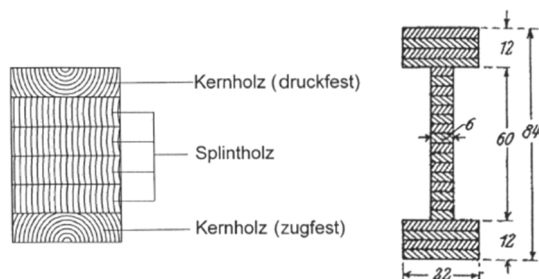


Abb. 40: Halle für Wasserflugzeuge in Warnemünde [Kersten, 1926]

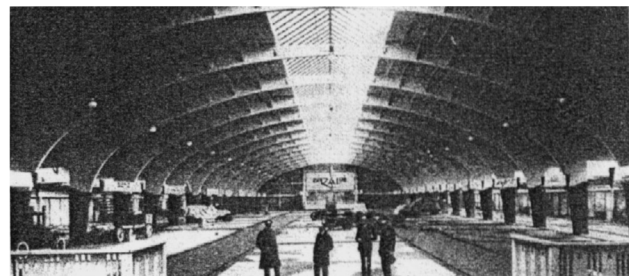
<sup>38</sup> Kersten, C. (1926). *Freitragende Holzbauten*. Seite 85/87



Mit dem Streben nach immer größeren Bogenspannweiten und effizienteren Einsatzmöglichkeiten des Holzes hat sich gleichzeitig zur Bauweise *Stephan* die für den Holzbau wohl wichtigste Bauweise entwickelt: die Bauweise nach Hetzer. Am 22. Juni 1906 erwarb der Zimmerermeister *Otto Hetzer* das Patent Nr. 197773 zur Herstellung gebogener Holzbauteile, die aus mehreren Holzstäben bestehen und durch Klebstoff miteinander verbunden werden. „Die Dicke der einzelnen Holzlamellen richtete sich nach der angestrebten Tragwerkskrümmung und betrug 15 bis 45 Millimeter. Der kleinste Krümmungshalbmesser lag bei 2,0 Metern. Verwendet wurde hauptsächlich völlig luftgetrocknetes Fichtenholz wegen der besseren Haftfestigkeit des angewendeten Klebstoffes“ [Rug, 2006]. Diese Bauweise bildet die Grundlage des heutigen Brettschichtholzes. Schon damals bestand die Idee, die zumeist stark beanspruchten äußeren Bereiche eines Trägers durch Holz höherer Festigkeit zu ersetzen (siehe Abb. 41). Durch die Bauweise von Hetzer konnten im Jahre 1941 Bogentragwerke mit einer Spannweite von 54 Metern realisiert werden, wobei der Bogenquerschnitt vielfach als Doppel T-Querschnitt ausgeführt wurde. Ein Beispiel für ein solches Bogentragwerk mit 30 Metern Spannweite ist in Abb. 42 gegeben.<sup>39</sup>



**Abb. 41:** Anordnung der Lamellen und Querschnitt eines Bogenbinders [Rug, 2006]



**Abb. 42:** Ausstellungshalle in Amsterdam, Spannweite 30m (1922) [Rug, 2006]

Es haben sich neben den hier angegebenen Bogensystemen noch weiter nicht zwingend nennenswerte Bauweisen entwickelt. Für nähere Informationen zu dem Thema der Bogentragwerke kann auf folgende Literaturquellen verwiesen werden: [Kersten, 1921], [Meschke, 1989], [Heinle & Schlaich, 1996].

## 1.5 Gewölbte Flächentragwerke aus Holz

Bei den bisher besprochenen Bauweisen erfolgte die primäre Lastabtragung über einzelne Rippen oder Bögen. Dies änderte sich in den Anfangsjahren des 20. Jahrhunderts, als bedingt durch die Stahlknappheit im Bauwesen - hervorgerufen durch den hohen Verbrauch für Kriegszwecke - neue sparsame Bauweisen gesucht wurden. *Friedrich Zollinger* entwarf zur Bekämpfung der gleichzeitig vorherrschenden Wohnungsnot ein Holz-Stabnetzwerk, welches aus fast ausschließlich identischen kurzen Einzelementen gebildet wurde und zur Serienherstellung geeignet war. Als Grundlage diente ihm das Prinzip des de l'Ormeschen Bohlenbogens. Die Neuerung bestand darin, durch Auseinanderklappen der Bohlen eines zwei-lagigen Bogens um einen spitzen Winkel und die Reihung mehrerer solcher Systeme hintereinander, ein in Rauten-Felder gegliedertes Stabnetzwerk zu schaffen. Dazu ordnete er die gleichartigen Bretter- bzw. Bohlenstücke so an, dass auf eine Lamelle in der Mitte jeweils zwei weitere Lamellen treffen. Diese erhalten an ihren Enden Schmiegen und werden mit einem Schraubbolzen an die durchlaufende Lamelle befestigt. Zusätzlich wird in die durchgehenden Lamellen ein Langloch eingebracht (siehe Abb. 44). Dadurch konnte ein Materialersparnis von rund 30% gegenüber den bis dahin üblich hergestellten Dachtragwerken, wie Mansarden- oder Satteldächern, erreicht werden. Dieses Bauprinzip ließ sich *Friedrich Zollinger* im

<sup>39</sup> Rug (2006). *Hundert Jahre Hetzer-Patent*. Seite 533/540

Jahre 1910 als „Zollbau-Lamellendach“ patentieren. Einen regelrechten Boom erlebte diese Bauweise nach dem 1. Weltkrieg, als lange Holzbauteile Mangelware waren und schnell und kostengünstig gebaut werden musste. Viele Zollinger-Dächer wurden aus Brettern der Verpackungskisten von Materialien und Maschinen hergestellt, als Verbindungsmittel kamen vielfach Maschinenschrauben zum Einsatz. Hauptvorteil war dabei, dass kaum geschultes Personal zur Erstellung von Zollbau-Lamellendächern erforderlich war und somit viele kleinere Tragwerke in nachbarschaftlicher Hilfe errichtet werden konnten.<sup>40,41</sup>



Abb. 43: Spitzbogendach in Zollbauweise [Kersten, 1926]

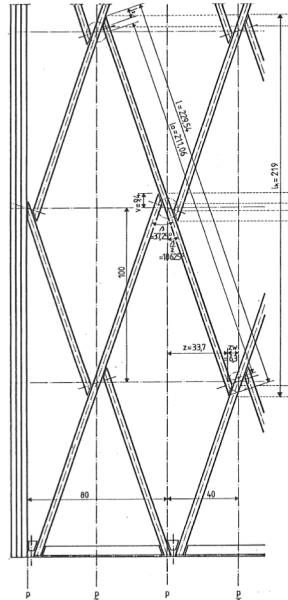
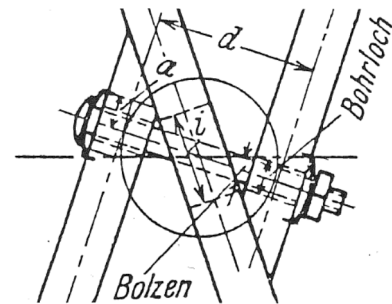


Abb. 44: Abwicklung einer Bogenfläche in Zollbauweise und Knotendetail [Meschke, 2012]



Diese Vorteile führten schnell zu einer großen Verbreitung, zunächst im Siedlungsbau als Wohnhausdach und anschließend zunehmend auch für weit gespannte Konstruktionen im Industriebau und der Agrarwirtschaft. Im Hallenbau mit Spannweiten von 12 bis 40 Metern wurden vornehmlich tonnenförmige Dächer ausgeführt, bei Feldscheunen mit Spannweiten bis zu 30 Metern dagegen fast ausschließlich Spitzbogendächer.<sup>42</sup>

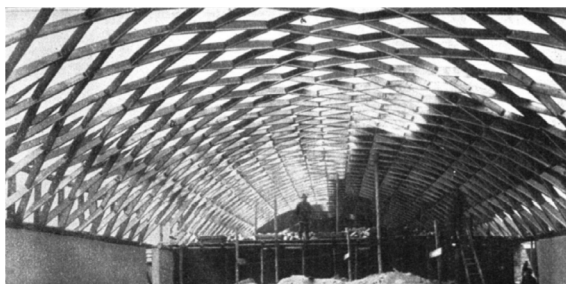


Abb. 45: Tonnenförmiges Hallendach in Zollbauweise [Carobbio, 2012]

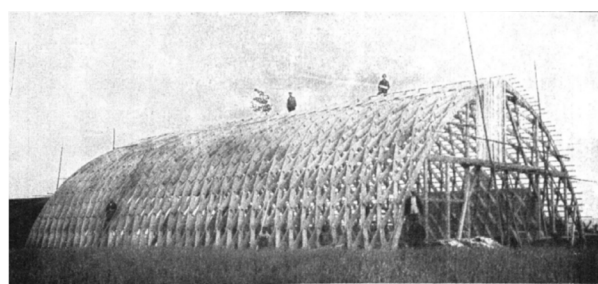


Abb. 46: Spitzbogenförmige Scheune in Zollbauweise [Carobbio, 2012]

Als Beispiel soll das im Jahre 1947 erbaute Tonnendach der Münsterlandhalle mit einer Spannweite von 36,36 Metern erwähnt werden (siehe Abb. 47). Nach [Meschke, 1989] ist sie das größte mit Normallamellen gefügte Netzwerk Europas in Zollinger-Bauweise und dient, bedingt durch ihre hervorragende Akustik, bis heute noch als Konzerthalle. Sie wurde im Jahre 1982 einer

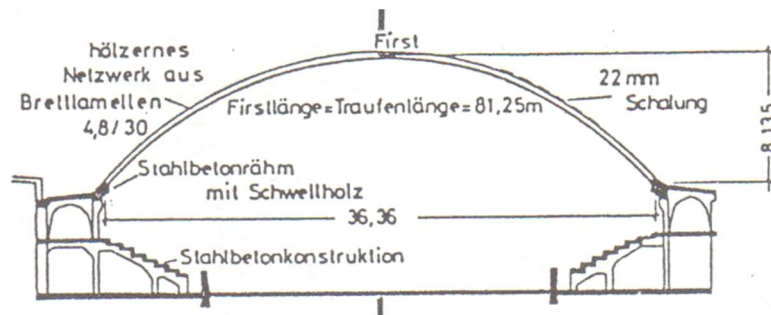
<sup>40</sup>Meschke, H.-J. (1989). *Baukunst und -technik der hölzernen Wölbkonstruktionen*. Seite 119/120

<sup>41</sup>Winter, K., Rug, W. (1992). *Innovationen im Holzbau – Die Zollinger Bauweise*. Seite 192/195

<sup>42</sup>Carobbio, A. (2012). *Zylinderschalen aus Holz*. Seite 12



Generalsanierung unterzogen, nachdem große Verformungszunahmen festgestellt wurden. Nach [Ewald, 1985] waren die stetig zunehmenden Verformungen auf Torsionsbeanspruchungen in den durchlaufenden Stäben zurückzuführen, die durch das Nichtvorhandensein von biegesteifen Stößen und asymmetrischen Belastungszuständen induziert wurden. Mitunter haben zusätzliche Einbaulasten und Schwinderscheinungen des Holzes zu Veränderung der Bogengeometrie geführt, wobei durch den flacher werdenden Bogenstich der Bogenschub erheblich zunahm.<sup>43,44</sup>



**Abb. 47:** Schnitt durch die Münsterlandhalle [Meschke, 1989]



**Abb. 48:** Foto Zollinger-Lamellen-Bauweise [Ewald, 1985]

Fast gleichzeitig mit *Friedrich Zollinger* entwickelte die *Broda-Hallendach-GmbH* zu Beginn des 20. Jahrhunderts in Anlehnung an die Föppl'sche Fachwerktonne ein Holztonnentragwerk, welches sich durch die statische Nutzung der Schalung auszeichnete. Dabei wurden flachliegende Hölzer mit einem Querschnitt von 15/8 Zentimeter und 90 Zentimeter Achsabstand parallel zur Traufe über ein Lehrgerüst, welches die Kontur der Tonne vorgab, gelegt. Senkrecht zu diesen Hölzern wurden Bretter mit Nut und Feder angeordnet die ineinandergeschoben eine zusammenhängende Fläche ergaben. Als Verbindungsmittel kamen Schraubennägeln zum Einsatz. Ab Spannweiten über 15 Metern wurde unterseitig nochmals eine komplette Schalung angebracht. Abb. 49 zeigt ein Broda-Dach bei dem an Stelle einer durchgehenden, unteren Schalung nur einzelne Bretter zur Anwendung kamen. Die Spannweite betrug Rund 15 Meter.<sup>45,46</sup> Erste Hinweise zur Berechnung solcher Zylinderschalen, mit besonderem Verweis auf die Scherkräfte zwischen den Brettlagen, finden sich in [Fiebig, 1924]. Aus heutiger Sicht handelt es sich bei Verwendung einer zusätzlichen unteren Bretterlage schon um eine dreilagige genagelte Brettsperholzschale.

Aufgrund der Materialeffizienz und hohen Tragfähigkeit wurde die Bauweise Broda von der österreichischen *Stephansdach GmbH* übernommen und für den Einsatz im Wohnungsbau optimiert. Die daraus entwickelte Bauweise wurde Bauweise Kolb genannt. Dabei wurden in Werkstätten ein Meter breite und fünf Meter lange Bogenplatten hergestellt, welche durch Arbeiter zur Baustelle transportiert werden konnten. Die vorhandenen Hohlräume zwischen innerer und äußerer Schalung wurden durch Dämmstoffe verfüllt und an der Außenseite eine Stülpschalung angebracht (siehe Abb. 50).<sup>47</sup>

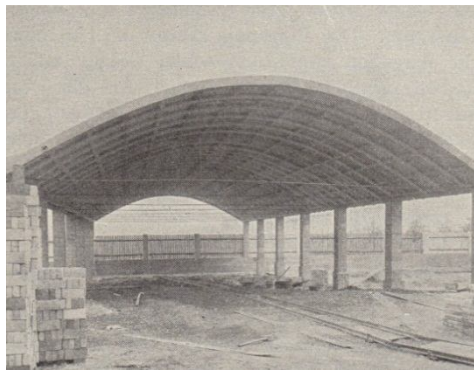
<sup>43</sup>Meschke, H.-J. (1989). *Baukunst und -technik der hölzernen Wölbkonstruktionen*. Seite 146

<sup>44</sup>Ewald, G. (1985). *Zur Ausbildung der Knotenpunkte bei Rauten-Lamellen-Konstruktionen*. Seite 222/223

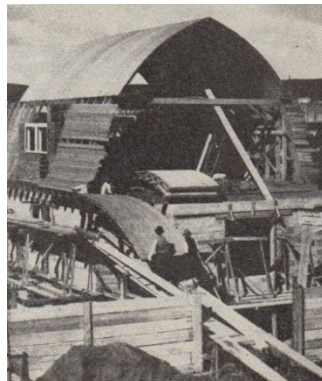
<sup>45</sup>Kersten, C. (1926). *Freitragende Holzbauten*. Seite 89/90

<sup>46</sup>Meschke, H.-J. (1989). *Baukunst und -technik der hölzernen Wölbkonstruktionen*. Seite 173

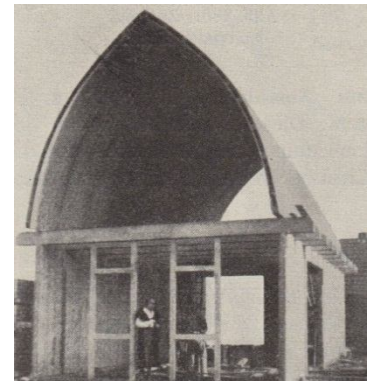
<sup>47</sup>Kersten, C. (1926). *Freitragende Holzbauten*. Seite 90/91



**Abb. 49:** Bauweise nach Broda [Kersten, 1926]



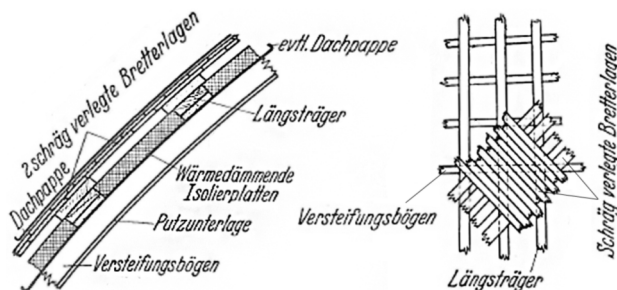
**Abb. 50:** Bauweise Kolb in Bauausführung und fertiggestellter Rohbau [Kersten, 1926]



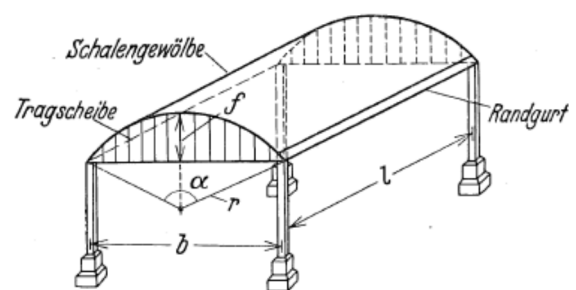
Leider konnten zu den Bauweisen Broda und Kolb keine weiteren Unterlagen gefunden werden. Diese Bauweisen waren aber für damalige Verhältnisse durch die Möglichkeiten der Vorfertigung revolutionär.

Im Jahre 1929 ließ das Bauforschungsinstitut in Moskau, unter der Leitung von *Prof. G. G. Karlsen* ausführliche Untersuchungen zu hölzernen Zylinderschalen anstellen. „Als Versuchsergebnis entstand eine durchaus brauchbare Konstruktion für hölzerne Schalendächer, die schon im Jahre 1931 in die amtlich russischen Vorschriften für den Bau und Entwurf von Holztragwerken aufgenommen wurde. Als Normalausführung wurde eine Holzschale ohne Oberlicht angenommen, die folgende Konstruktion aufweist: als oberste Schicht liegen in schräger Anordnung ( $45^\circ$  gegen die Längsachse und  $90^\circ$  gegeneinander) zwei Holzbrettlagen; die oberste Brettlage wird ohne Zwischenräume verlegt und dient als Unterlage für die Dachhaut, während die unteren Lagen auch in Abständen gelegt werden können. Unterhalb der beiden Bretterlagen befinden sich die aus 2-3 übereinander gelegten Brettern bestehenden Längsträger. Zur Erzielung einer ebenen Untersicht können die Längsträger mit gespundetem Furnierholz verkleidet werden (siehe Abb. 51). Bei größeren Spannweiten, sowie bei flach gekrümmten Schalen wird die Konstruktion durch die Anordnung kleiner, in einer Entfernung von 100-150 Zentimeter voneinander liegenden Versteifungsbögen aus 3-5 übereinander flach gelegten Holzbrettern verstärkt.“ [Pohl, 1934]

Zur Verbesserung der wärmeisolierenden Eigenschaften der Schale, konnten zwischen den Versteifungsbögen wärmedämmende Platten angebracht werden. Als wirtschaftlichste Abmessungen der Holschalen wurden folgende Werte ermittelt:  $b \leq 28$  Meter,  $l \leq 55$  Meter (siehe Abb. 52).



**Abb. 51:** Konstruktion des Schalendaches [Pohl, 1934]

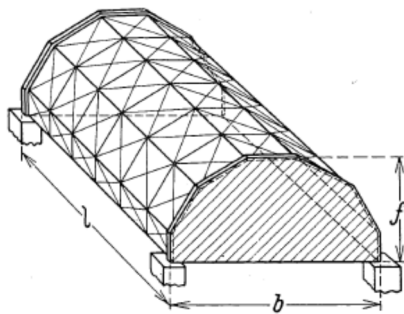


**Abb. 52:** Schema des Schalengewölbes [Pohl, 1934]

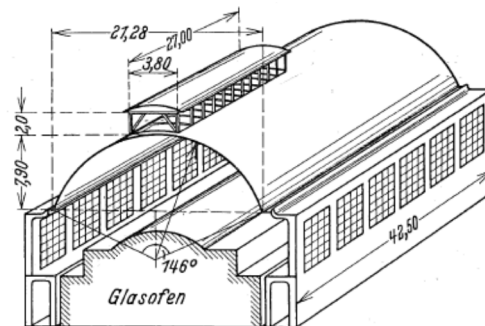
War ein Oberlicht vorgesehen, änderte sich die Konstruktion leicht. Die Längsträger fielen komplett weg und es wurden stattdessen Dachhautleisten in Längsrichtung der Schale auf die oberste Brettlage aufgebracht. Zudem wurde alle 60 Zentimeter ein durchlaufender Holzbogen angeordnet.

Die schräg verlegten Brettlagen hingegen wurden im Bereich des Oberlichts unterbrochen und durch Randverstärkungen versteift.<sup>48</sup>

Die Auflagerbedingungen wurden durch angeordnete Binderscheiben in den Giebelwänden und durch entsprechende Randgurte geschaffen. Zur Dimensionierung wurde die stetig gekrümmte Schale durch ein ähnlich geformtes Fachwerk, dem Föppl'schen Gewölbe bzw. der Föppl'schen Schale ersetzt (siehe Abb. 53). Die Belastungen wurden als Knotenlasten zusammengefasst und entsprechend auf das Raumfachwerk aufgebracht. Die in den Gurtstäben wirkenden Kräfte wurden dann für die Längsträger bzw. Dachhautleisten der Schale herangezogen, die Kräfte in den kreuzweise angeordneten Diagonalen für die beiden schräg verlegten Bretterlagen, womit die entsprechenden Brettlagen bemessen werden konnten. Durch eine hohe Anzahl von ebenen Fachwerken konnte eine ausreichende Genauigkeit der Ergebnisse erzielt werden.<sup>49</sup>



**Abb. 53:** Föppl'sches Gewölbe  
[Pohl, 1934]



**Abb. 54:** Glasofenhalle in Nishnij-Nowgorod  
[Pohl, 1934]

Belastungsversuche an Modellschalen des Bauinstituts Moskau zeigten, dass diese zylindrischen Schalen hochgradig elastisch sind und nur sehr geringe Verformungen aufweisen. Dabei betrug die Vertikalverformung bei projektmäßiger Belastung rund 1/1250 bis 1/1000 der Spannweite. Der Einsturz erfolgte erst bei 5 bis 6-facher Vollbelastung. Auf Grundlage dieser Forschungsergebnisse wurden im Jahre 1931 die Glasofenhallen in Nishnij-Nowgorod ausgeführt (siehe Abb. 54). Obwohl für den Bau schwere Gerüste erforderlich waren, erwies sich die Ausführung aus Holz um 40 – 50% billiger als eine Eisenbeton- bzw. Eisenüberdachung. Dabei betrug das Dachgewicht nur 30-35 Kilogramm je Quadratmeter und die Bogenspannweite ca. 21 Meter.<sup>50</sup>

„Unabhängig vom Moskauer Forschungsinstitut entwickelte der Ingenieur *K. Fink* ein Bauverfahren, das die Herstellung eines schweren Baugerüsts unnötig machte. Und zwar schlug er vor, die Schalen der Länge nach in einzelne Elemente zu unterteilen, diese auf der Baustelle unter Nutzung ein und desselben Gerüsts vollständig herzustellen und anschließend auf die bereits erstellten Stützen aufzusetzen. Nach diesem Prinzip wurden für einen Flughafen 12 Einzelschalen fertiggestellt (siehe Abb. 55), welche je 12 Tonnen wogen und unter Zuhilfenahme von vier an den Schalenden eingesetzten Winden montiert werden konnten. Die Baukosten wurden durch dieses Verfahren erheblich reduziert und betragen nur noch etwa 45% der bislang billigsten und gebräuchlichsten Holzdächer in Russland. Eine Verbindung der dargestellten Entwicklung von hölzernen Zylinderschalen in Russland zu der in Deutschland scheint nicht gegeben zu sein.“ [Carobbio, 2012]

<sup>48</sup> Pohl, K. A. (1934). *Das Schalengewölbe als Holzkonstruktion*. Seite 381/382

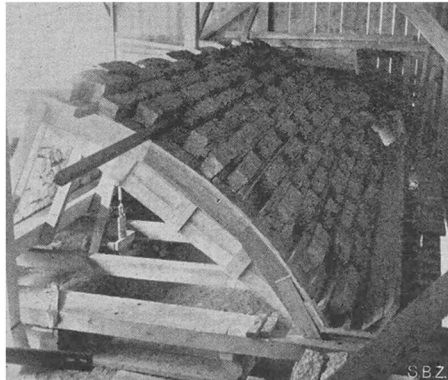
<sup>49</sup> Pohl, K. A. (1934). *Das Schalengewölbe als Holzkonstruktion*. Seite 382/383

<sup>50</sup> Pohl, K. A. (1934). *Das Schalengewölbe als Holzkonstruktion*. Seite 382/383

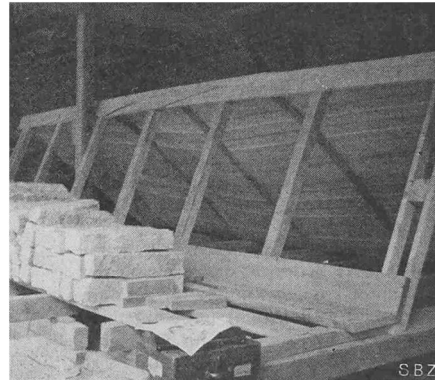




Dachkonstruktionen in Holz. Anschließend wurde die Last bis zum Versagen der Konstruktion gesteigert. Bei einer Belastung von ca.  $194 \text{ kg/m}^2$  ( $1,94 \text{ kN/m}^2$ ) erfolgte ein Ausbeulen (Durchschlagen) der Shedschale, aber kein Einsturz. Nach Entlastung der Versuchsschale konnte sie durch drei Arbeiter und Drücken gegen die Beule wieder in ihre Ausgangsform gebracht werden. Dieser Effekt konnte mehrfach wiederholt werden, wobei der Übergang in die nächste Gleichgewichtsform immer bei derselben Lastgröße geschah.<sup>52</sup>

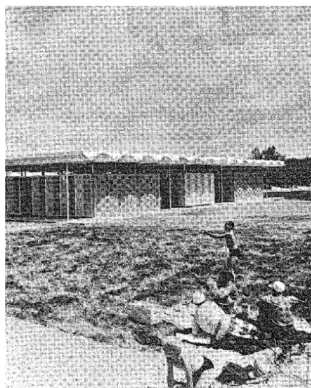


**Abb. 58:** Shedschale mit Belastung  
[Bächthold, 1945]

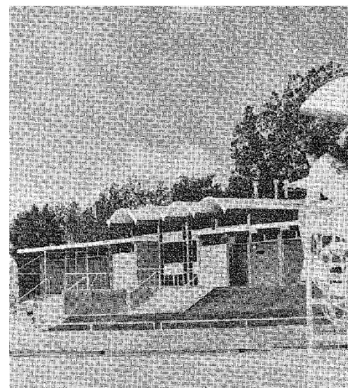


**Abb. 59:** Ausgebeulte Schale  
[Bächthold, 1945]

Abgesehen von Forschungen in der Schweiz und Russland gab es lange Zeit keine weiteren Versuche zur Klärung des Tragverhaltens von hölzernen Zylinderschalen. Dennoch wurden in den USA beispielsweise mehrere Zylinderschalen aus Furnierholz errichtet (siehe Abb. 60 und Abb. 61).



**Abb. 60:** Zylinderschalen als Dachkonstruktion  
[v. Halász & Cziesielski, 1973]



**Abb. 61:** Zylinderschalen aus Furnierholz  
in den USA [v. Halász & Cziesielski, 1973]

Im Jahre 1973 veröffentlichten *Robert v. Halász* und *Erich Cziesielski* an der Technischen Universität Berlin umfangreiche Versuchsergebnisse zur Konstruktion und Berechnung hölzerner Zylinderschalen aus Furnierholz. Als Grundlage für ihre Versuche wurden 2,50 Meter lange Rohre aus Furnierholz von 70 Zentimeter Durchmesser in Viertelsegmente zerschnitten. Dabei konnte beim Aufschneiden der Rohre keine Krümmungsänderung der Segmente festgestellt werden. Es wurden verschiedene Schalentypen hergestellt und untersucht, eine Liste der untersuchten Schalen ist in Abb. 62 gegeben.<sup>53</sup>

<sup>52</sup> Bächthold, J. (1945). *Belastungsversuche an einer freitragenden Zylinderschale*. Seite 97/98

<sup>53</sup> v. Halász, R., Cziesielski, E. (1973). *Konstruktion und Berechnung hölzerner Zylinderschalen aus Furnierholz*. Seite 3/10

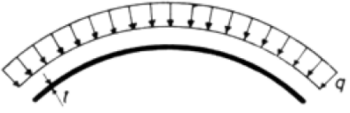



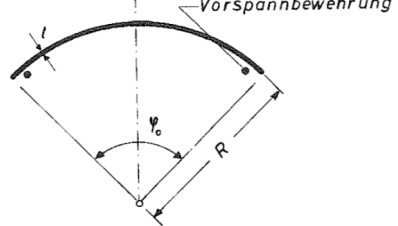
Schalentyp	Schalenschnitt	
1		Einwandige Schale ohne Quersteifen
2		Einwandige Schale mit Quersteifen (Vierkantstäbe 12/12mm aus Stahl alle 21,5cm)
3		Doppelwandige Schale ohne Bewehrung (3 Abstandshölzer 35/55mm)
4		Schlaff bewehrte doppelwandige Schale (Bewehrungsstahl d=10mm in Längsrichtung in den Schalenträgern eingebracht)
5		Vorgespannte einwandige Schale (verbundlose Vorspannung durch Stahldrähte parallel zu den Längsrändern)

Abb. 62: Untersuchte Schalenschnitte (Abmessungen  $\varphi_0=89^\circ$ ;  $R=35\text{cm}$ ;  $t=0,83\text{cm}$ ) [v. Halász & Cziesielski, 1973]

Die unterschiedlichen Schalentypen wurden mit ihrer Öffnung nach oben, als Einfeldträger auf zwei Stützen in ein stählernes Gerüst eingebaut und anschließend durch ein aufblasbares Druckkissen in radialer Richtung belastet. In Abhängigkeit der Belastung wurden die vertikalen Verformungen und die horizontalen Verschiebungen der Schalenträger an neun Messpunkten messtechnisch erfasst. Der entsprechende Versuchsaufbau ist in Abb. 63 dargestellt. In allen Fällen betrug die Dicke der Schalenträger rund 8 Millimeter.<sup>54</sup>

<sup>54</sup> v. Halász, R., Cziesielski, E. (1973). *Konstruktion und Berechnung hölzerner Zylinderschalen aus Furnierholz*. Seite 7/8

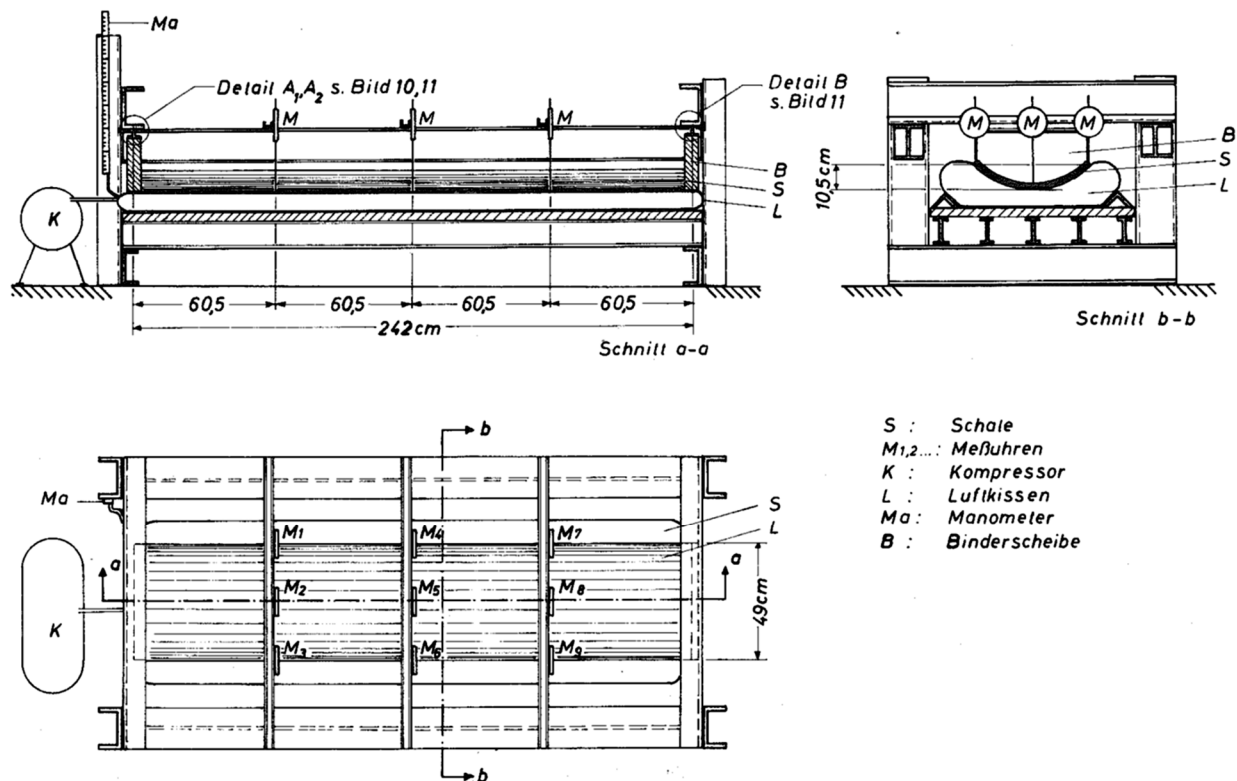


Abb. 63: Versuchsaufbau nach v. Halász und Cziesielski [v. Halász & Cziesielski, 1973]

Die mittlere Bruchlast des Schalentyps 1 (einwandige Schale) betrug  $633 \text{ kp/m}^2$  ( $\approx 6,21 \text{ kN/m}^2$ ) und des Schalentyps 2 (einwandige Schale mit Quersteifen)  $691 \text{ kp/m}^2$  ( $\approx 6,78 \text{ kN/m}^2$ ), wobei das Bruchbild bei allen Schalen gleich war; es bildete sich ein über den Schalenquerschnitt nahezu geradliniger Sprödbbruch aus. Der Bruch trat in der Regel an den Stößen der oberen, in Bogenrichtung verlaufenden Furnierlage auf.<sup>55</sup>

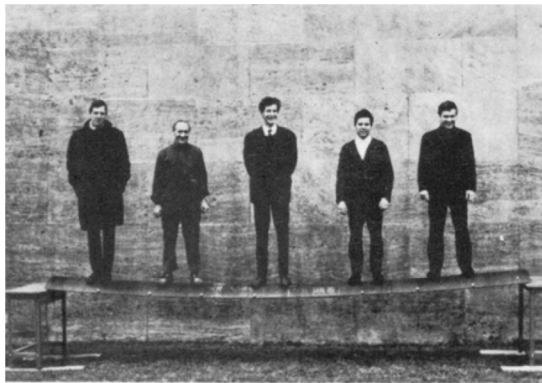
Versuchsergebnisse von [v. Halász & Cziesielski, 1973] an doppelwandigen Schalen zeigten, dass dem 3,4-mal höheren Materialaufwand eine 4,3-mal höhere Steifigkeit entgegen stand. Exemplarisch sind in Abb. 64 und Abb. 65 eine einwandige und doppelwandige Schale unter Belastung dargestellt. In beiden Bildern beträgt die Spannweite 5,0 Meter und die Breite (Sehnenlänge des Bogenquerschnittes) rund 50 cm. Beide Schalentypen wurden aus einer Beplankung der Stärke 0,82 Zentimetern gefertigt. Obwohl sich auf der einwandigen Konstruktion (siehe Abb. 64) weniger Personen befanden, waren die Durchbiegungen beträchtlich größer als bei der doppelwandigen Konstruktion. Neben der größeren Biegesteifigkeit zeigte die doppelwandige Schale vor allem auch eine höhere Torsionssteifigkeit.<sup>56</sup> Die maximale Bruchlast einer doppelwandigen Schale wurde zu  $2220 \text{ kp/m}^2$  ( $\approx 21,76 \text{ kN/m}^2$ ) bestimmt.<sup>57</sup>

<sup>55</sup> v. Halász, R., Cziesielski, E. (1973). *Konstruktion und Berechnung hölzerner Zylinderschalen aus Furnierholz*. Seite 17/19

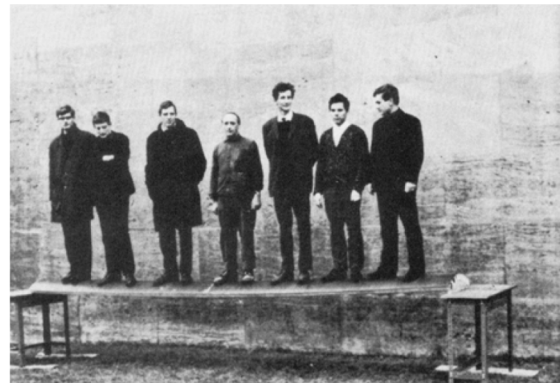
<sup>56</sup> v. Halász, R., Cziesielski, E. (1973). *Konstruktion und Berechnung hölzerner Zylinderschalen aus Furnierholz*. Seite 20/22

<sup>57</sup> v. Halász, R., Cziesielski, E. (1973). *Konstruktion und Berechnung hölzerner Zylinderschalen aus Furnierholz*. Seite 24





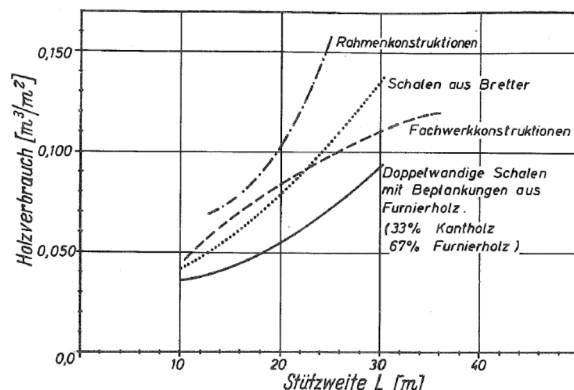
**Abb. 64:** Einwandige Demonstrationsschale [v. Halász & Cziesielski, 1973]



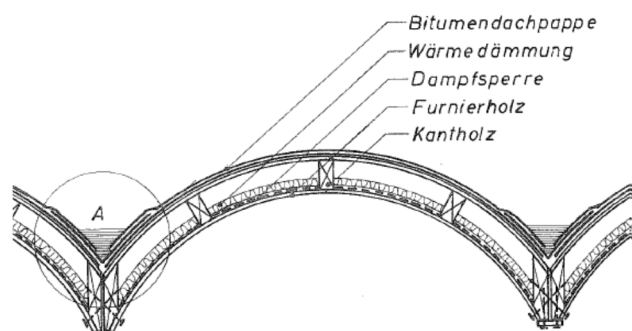
**Abb. 65:** Doppelwandige Demonstrationsschale [v. Halász & Cziesielski, 1973]

Untersuchungen an doppelwandigen Schalen mit schlaffer Bewehrung oder einwandige Schalen mit externer Vorspannung ohne Verbund zeigten keine Vorteile. Die externe Vorspannung führte durch Ungenauigkeiten beim Einbau gar zu zusätzlichen Verdrehungen des Querschnitts und zu einem früheren Versagen.<sup>58</sup>

Nach v. Halász und Cziesielski haben unbewehrte doppelwandige Schalen das größte Potential aufzuweisen. Der nötige Materialaufwand liegt deutlich unter dem alternativer Konstruktionen aus Holz bei Vorhandensein einer hohen Steifigkeit (siehe Abb. 66). Zudem kann durch einen hohen Vorfertigungsgrad der Bauablauf erheblich vereinfacht werden. Ein Vorschlag zur Ausführung doppelwandiger Zylinderschalen ist in Abb. 67 gegeben.<sup>59</sup>



**Abb. 66:** Vergleich des Materialverbrauchs verschiedener Holzkonstruktionen [v. Halász & Cziesielski, 1973]



**Abb. 67:** Möglicher Aufbau einer doppelwandigen Schale [v. Halász & Cziesielski, 1973]

Seit Ende des 20. Jahrhunderts bzw. Beginn des 21. Jahrhunderts hat sich eine neuere Bauweise von Flächentragwerke auf Grundlage des Emyschen Bohlenbogens etabliert. Diese Bauweise ist als Brettrippenbauweise bekannt und besteht aus nachgiebig zu einem elastischen Verbundquerschnitt gefügten Brett lamellen, die in einem rautenförmigen Stabnetzwerk zusammenwirken. Ein sehr gelungenes Beispiel der Brettrippenbauweise ist in Abb. 68 zu sehen.

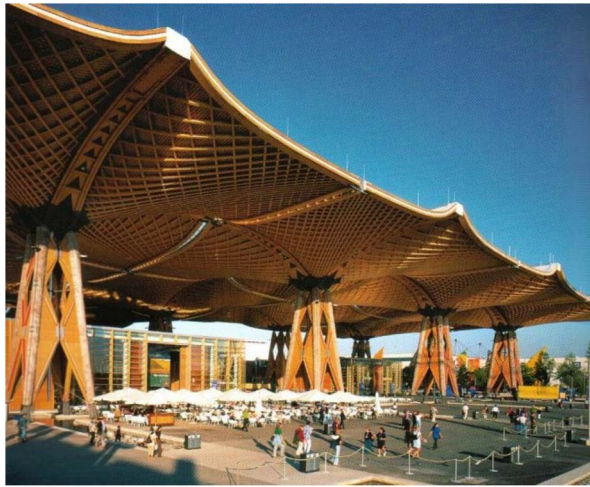
Die Knotenpunkte der Brettrippenbauweise sind derart gestaltet, dass ein Brett einer Lage über mehrere Knoten hinweg durchlaufend ausgebildet wird, während das Brett aus der jeweils anderen Richtung gestoßen wird und lediglich als Füllholz zwischen zwei Knoten fungiert. In der darauffolgenden Lage dreht sich das Prinzip um (siehe Abb. 69). Die verwendeten Brett lamellen

<sup>58</sup> v. Halász, R., Cziesielski, E. (1973). *Konstruktion und Berechnung hölzerner Zylinderschalen aus Furnierholz*. Seite 28/32

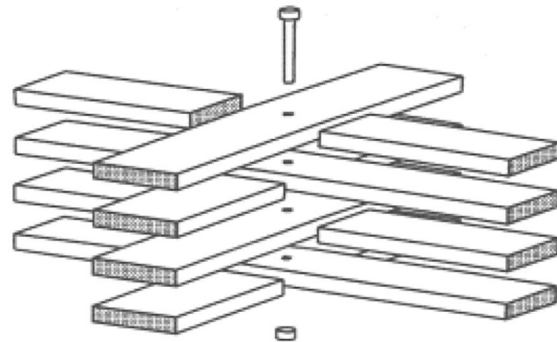
<sup>59</sup> v. Halász, R., Cziesielski, E. (1973). *Konstruktion und Berechnung hölzerner Zylinderschalen aus Furnierholz*. Seite 55/61



haben in der Regel eine Dicke von 20 mm bis 45 mm, wobei die Brettbreite zwischen 80 mm und 300 mm betragen kann. Die einzelnen Brettlagen werden über Schrauben miteinander verbunden.<sup>60</sup>

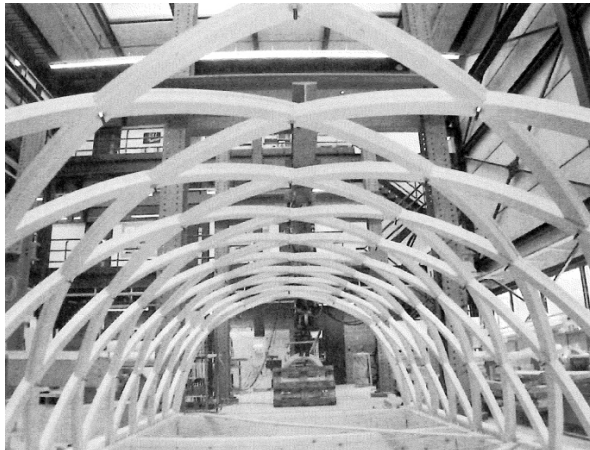


**Abb. 68:** Holzschirme der Expo 2000, Hannover [Pirazzi, 2005]

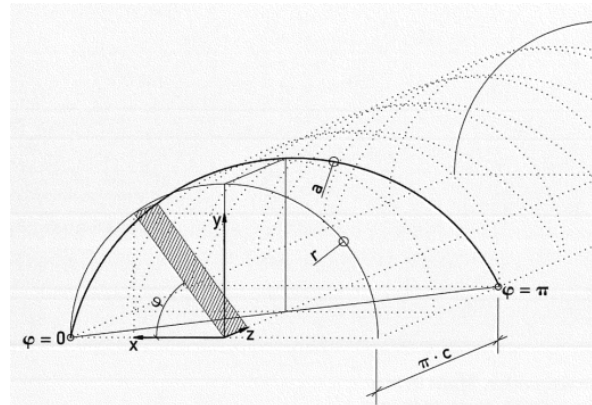


**Abb. 69:** Konstruktionsprinzip der Brettrippenbauweise [Pirazzi, 2005]

Der Entwurf von Holzschalen in Brettrippenbauweise sollte wenn möglich stets so erfolgen, dass die Brettlamellen einer geodätischen Linie folgen. Durch diese Vorgabe kann die Krümmung und Verwindung in jedem Punkt der Lamellen geschlossen ermittelt und gleichzeitig eine zweiachsige Biegung vermieden werden. Ein entsprechendes Beispiel einer zylinderförmigen Versuchsschale in Brettrippenbauweise, deren Lamellen den geodätischen Linien folgen ist in Abb. 70 und Abb. 71 gegeben.



**Abb. 70:** Zylinderförmige Versuchsschale in Brettrippenbauweise [Gliniorz, et al., 2001]



**Abb. 71:** Verlauf der Brettlamellen auf einer zylinderförmigen Versuchsschale [Gliniorz, et al., 2001]

Durch die erforderliche Biegung um die schwache Achse und gleichzeitige Verwindung können zum Teil hohe Eigenspannungen in den Lamellen entstehen. Des Weiteren gestaltet sich die Montage einer Rippenschale in der Regel durch den hohen Grad an Verschraubungen und entsprechende Maßnahmen zur Formgebung als sehr Aufwendig.<sup>61</sup>

Neuere Entwicklungen des Holzschalenbaues laufen auf sogenannte Freiformflächen hinaus. Diese beliebigen Formen können lediglich durch NURBS-Funktionen („Non-Uniform Rational B-Splines“) mathematisch korrekt beschrieben werden. Eines der bekanntesten Bauwerke, welches mit einem Dachtragwerk als Freiformfläche versehen wurde ist das Centre Pompidou in Metz (siehe Abb. 72).

<sup>60</sup> Pirazzi, C. (2005). Zur Berechnung von Holzschalen in Brettrippenbauweise im elastischen Verbundquerschnitt. Seite 3/5

<sup>61</sup> Pirazzi, C. (2005). Zur Berechnung von Holzschalen in Brettrippenbauweise im elastischen Verbundquerschnitt. Seite 4

Durch die freie Formgebung folgt die Geometrie keiner Stützfläche oder Stützlinie, weshalb teilweise hohe Biegemomente in der Schalenwandung aufgenommen werden müssen. Zu diesem Zweck wurden vielfach doppelgekrümmte Brettschichtholzträger verwendet, die aufwendig geplant und produziert werden mussten (siehe Abb. 73).



Abb. 72: Freiformfläche, Centre Pompidou in Metz



Abb. 73: Gekrümmte Brettschichtholzträger des Centre Pompidou in Metz

Die Erstellung von Freiformflächen geht gleichzeitig mit einem hohen Material-, Arbeits- und Planungsaufwand einher, sodass nur wenige Unternehmen weltweit in der Lage sind solche Projekte zu realisieren.

### 1.6 Fazit

In der Historie hat es eine Reihe von sehr imposanten und beeindruckenden zylinderförmigen Schalentragwerken aus Holz und Stahlbeton gegeben. Viele Errungenschaften des Holzbaus gehen aus Entwicklungen des Massivbaus hervor. Es gilt aber auch, dass viele Entwicklungen des Massivbaus erst durch Erfahrungen des Holzbaus möglich wurden. Ein großer allgemeiner Nachteil von Schalentragwerken liegt im herstellungsbedingten hohen Arbeitsaufwand. So müssen für Betonschalen große Schalungen erstellt werden, die den noch frischen Beton in die entsprechende Form bringen und bis zur Aushärtung stabilisieren. Holzschalen können unter Umständen auch freitragend erstellt werden, müssen aber vielfach in kleingliedriger Weise durch einzelne Stababschnitte zu einem großen Konstrukt zusammengeführt werden. Eine sehr interessante Idee zeigen *v. Halász* und *Cziesielski* in ihrer Arbeit [*v. Halász & Cziesielski, 1973*]. Sie teilen Furnierholzrohre in Viertelsegmente und verwenden diese als Zylinderschalen. Dieser Ansatz zeigt eine Möglichkeit zur Vorfertigung von Schalensegmenten und eine erhebliche Reduktion der erforderlichen Arbeitszeit auf der Baustelle. Der große Nachteil besteht jedoch darin, dass diese Furnierholzrohre bzw. Schalensegmente zuvor in einer Schalung erstellt werden müssen, was wiederum mit einem hohen Zeit- und Ressourcenaufwand verbunden ist. Es gilt also eine Herstellungsmethodik von Zylinderschalen zu finden, die sich durch Reduktion des zeitlichen Aufwands in der Produktion sowie der Materialkosten auszeichnet.

## 2 Berechnung von isotropen Zylinderschalen

### 2.1 Hintergrund

Da in der Historie wesentlich mehr Zylinderschalen aus isotropen als aus anisotropen Materialien erstellt wurden, sind auch die Berechnungsgrundlagen von isotropen Schalen wesentlich ausgereifter. Zudem stellt die Isotropie eine erhebliche Vereinfachung gegenüber dem anisotropen Materialverhalten dar. In diesem Abschnitt sollen historische Entwicklungen, sowie mathematische Grundlagen von exakten Lösungen und Näherungslösungen wiedergegeben werden, die als Berechnungsgrundlage für spätere Untersuchungen dienen.

### 2.2 Geschichtliche Entwicklung der Berechnungsverfahren

*Finsterwalder*, *Dischinger* und *Bauersfeld* haben sich ab dem Jahre 1924 sehr intensiv mit der Berechnung von zylindrischen Schalen bzw. Tonnenschalen auseinandergesetzt. *Bauersfeld* lieferte einen maßgeblichen Beitrag zur Berechnung, da er ausgehend von Überlegungen *August Föppl's* die Grundgesetze einer Membrantheorie für zylindrische Schalen schaffte.<sup>62,63</sup> *Dischinger* ging bei der Berechnung seiner Zylinderschalen davon aus, dass ein zylindrisches Rohr mit Endscheiben in zwei Halbzylinder geschnitten werden kann, ohne wesentlich den Kräfteverlauf zu stören. Der so erhaltene Halbzylinder verhält sich nach Einführung zusätzlicher Konstruktionsmaßnahmen (Randträger) wie das zylindrische Rohr, weshalb auch dessen Differentialgleichungen gültig sind.<sup>64</sup>

*Ulrich Finsterwalder* promovierte im Jahre 1930 bei *Ludwig Föppl* mit Auszeichnung zum Thema „Die querversteiften zylindrischen Schalengewölbe“ und erweiterte die Erkenntnisse *Dischingers* um das Verhalten zylindrischer Schalen in Störbereichen (Randbereichen). Dabei hat *Finsterwalder* ein Differentialgleichungssystem 8. Ordnung unter Vernachlässigung der Querkontraktion zur Lösung von Tonnenschalen aufgestellt. Die Theorie geht von einer Schale aus, die an den Enden auf Binderscheiben gelagert ist, welche in ihrer Ebene steif und aus ihrer Ebene heraus ideal weich sind. Des Weiteren werden Drillmomente und Biegemomente in Richtung der Zylindererzeugenden vernachlässigt, weshalb diese Theorie erst ab einer ausreichenden Schalenlänge ihre Gültigkeit findet.<sup>65,66,67</sup>

Eine Erweiterung zur Schalentheorie mit veränderlicher Krümmung und veränderlicher Schalenstärke ist in [Aas- Jakobsen, 1958] zu finden. Darin werden Lösungen durch Reihenansätze bzw. Exponentialfunktionen aufgestellt, wobei auch Lösungen auf Basis eines Iterationsverfahrens vermerkt sind.<sup>68</sup>

*Schorer* knüpft mit seiner Theorie an der Methode von *Finsterwalder* an. Er eliminiert in den Verformungsbedingungen die Glieder aus tangentialer Dehnung, welche verglichen mit den Längsdehnungen deutlich kleiner ausfallen. Damit wird die Differentialgleichung 8. Ordnung von *Finsterwalder* stark vereinfacht, ohne dabei den Gültigkeitsbereich wesentlich zu reduzieren.

<sup>62</sup> Schmidt, H. (2005). *Von der Steinkuppel zur Zeiss-Dywidag-Schalenbauweise*. Seite 87-88

<sup>63</sup> Kordina, K. (2005). *Ingenieurporträt Franz Dischinger*. Seite 69

<sup>64</sup> Tetzlaff, W. (1953). *Die praktischen Berechnungsverfahren für tonnen- und trogartige Schalen*. Seite 16-17

<sup>65</sup> Dicleli, C. (2006). *Ingenieurporträt Ulrich Finsterwalder*. Seite 77

<sup>66</sup> Baur, K. (2013). *Berechnungsverfahren von isotropen zylindrischen Schalen*. Seite 7

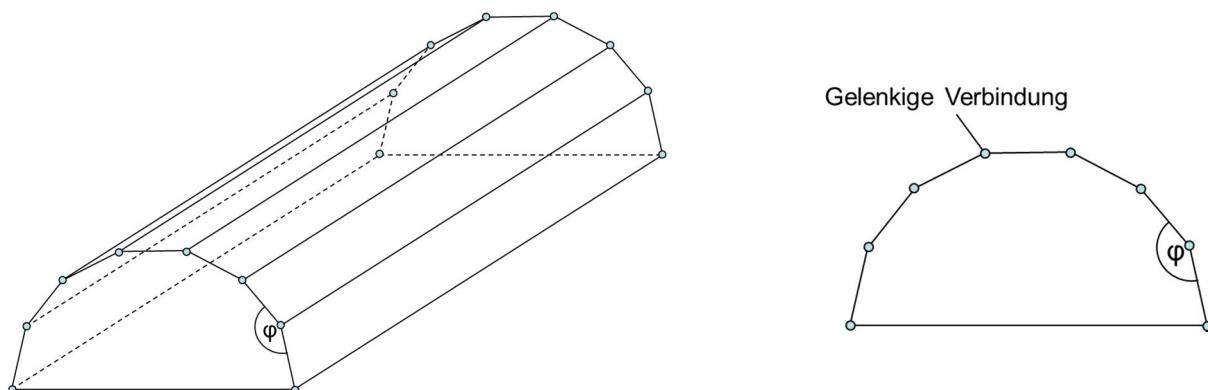
<sup>67</sup> Finsterwalder, U. (1930). *Die querversteiften zylindrischen Schalengewölbe*. Seite 43-45, 48

<sup>68</sup> Knittel, G. (1948). *Über die Berechnung freitragender kontinuierlicher Zylinderschalen*. Seite 3-4

Im Gegensatz zur Membrantheorie befasste sich *Wilhelm Flügge* mit der Berechnung von Zylinderschalen unter Berücksichtigung der Biegesteifigkeiten und leitete drei Differentialgleichungen zur Zylindertheorie in ihrer endgültigen Form her. Auf Grund der sehr guten Lösungen wurden die Ergebnisse der Differentialgleichungen nach *Flügge* vielfach zur Verifikation weiterer Schalentheorien verwendet und um deren Gültigkeitsbereiche abzugrenzen. Der Ansatz von *Flügge* wurde im Laufe der Zeit von verschiedenen Personen hinsichtlich Vereinfachungen untersucht um den Rechenaufwand zu reduzieren. Auch *Flügge* selbst schlug vor, in den Elastizitätsbedingungen untergeordnete Glieder zu vernachlässigen und bei der Berechnung von Tonnenschalen Drillmomente und Momente die Biegerandspannungen in Schalenlängsrichtung erzeugen nicht zu berücksichtigen.<sup>69</sup>

[Wlassow, 1958] beschreibt in einer ersten Auflage seines Buches aus dem Jahre 1949 die sogenannte Wlassow'sche Halbmembrantheorie. In dieser Theorie werden Momente und Querkräfte in Längsrichtung vernachlässigt, während in Ringrichtung Momente und Querkräfte wirken. Die Gleichgewichtsbedingungen können somit in Ringrichtung aus der Biegetheorie und in Längsrichtung aus der Membrantheorie übernommen werden. Als weitere Vereinfachungen werden Dehnungen in Bogenrichtung und Schubverzerrungen der Schalenmittelfläche vernachlässigt, da diese kaum Einfluss auf den Spannungszustand haben. Dadurch werden Verträglichkeitsbeziehungen erheblich vereinfacht, jedoch ist diese Theorie auf Grund der Vereinfachungen nur noch für lange Schalen gültig. Die Gültigkeit dieser Theorie kann mit  $L/R > \pi$  gegeben werden, wobei „L“ der Schalenlänge und „R“ dem Krümmungsradius der Schale entsprechen.<sup>70</sup>

[Tetzlaff, 1953] beschreibt in seiner Arbeit die Möglichkeit der Berechnung von tonnen- und trogartigen Schalen unter Verwendung der Faltwerkstheorie. Dabei wird die betrachtete Schale durch ein Faltwerk angenähert dessen Falten gelenkig miteinander verbunden sind (siehe Abb. 74). Längs- und Querrichtungen werden in der Berechnung getrennt voneinander betrachtet, wobei Belastungen als trigonometrische Reihen aufgebracht werden. Diese Theorie hat eine Gültigkeit für folgende Winkel:  $0^\circ < \varphi < 180^\circ$  wobei eine Richtungsänderung von  $70^\circ < \varphi < 160^\circ$  die besten Lösungen liefert.



**Abb. 74:** Annäherung einer Tonnenschale als Faltwerk in Ansicht und Schnitt

Im Jahre 1949 präsentierte *Lundgren* in seinem Werk „Cylindrical Shells“ [Lundgren, 1949] die Idee, lange Zylinderschalen wie Balken mit dünnwandigem, offenem Querschnitt zu rechnen. Dabei wurden Längs- und Schubkräfte über eine Berechnung am Balken ermittelt und in Ringrichtung wirkende Kräfte über Berechnungen am Bogen. Um die Berechnung am Balken auszuführen muss von der Bernoulli- Hypothese ausgegangen werden, wonach Querschnitte im verformten Zustand weiterhin

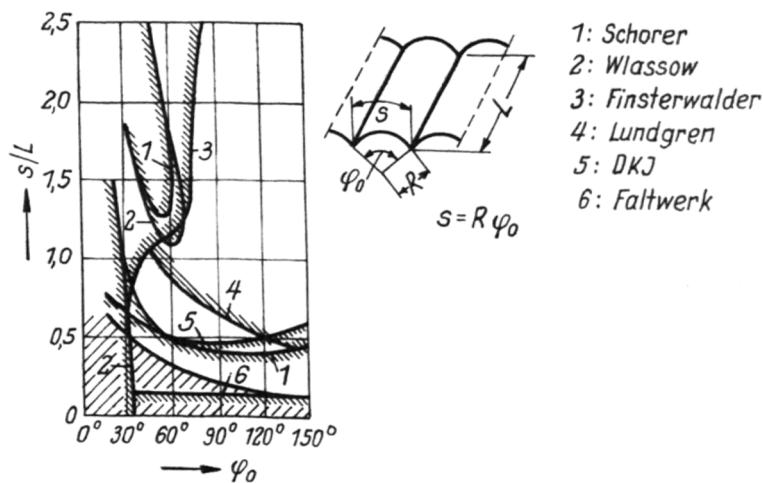
<sup>69</sup> Baur, K. (2013). *Berechnungsverfahren von isotropen zylindrischen Schalen*. Seite 6-7

<sup>70</sup> Baur, K. (2013). *Berechnungsverfahren von isotropen zylindrischen Schalen*. Seite 7



eben bleiben. Diese Annahme zeigte sich bereits in den Berechnungsergebnissen von [Finsterwalder, 1930] als bestätigt. Zudem werden seitliche Verformungen des Querschnittes sowie Querdehnungseffekte des Materials vernachlässigt. Die Berechnungsmethode nach *Lundgren* erwies sich als sehr anwenderfreundlich und ausreichend genau für lange Zylinderschalen, weshalb sie an einer späteren Stelle genauer beschrieben werden soll.

Bei der Verwendung von Näherungsverfahren zur Berechnung von Zylinderschalen werden Vernachlässigungen entweder bei den Verträglichkeits- oder Gleichgewichtsbedingungen gemacht. Die Zuverlässigkeit des Ergebnisses hängt vor allem davon ab, wie weit die vorab getroffenen theoretischen Annahmen, denen das entsprechende Näherungsverfahren unterliegt, von der Realität abweichen. Eine Aussage über die Auswirkung einzelner Vernachlässigungen auf das Ergebnis ist in geschlossener Form nicht möglich. Aus diesem Grund hatte *Alfred Mehmel* eine zylindrische Mittelschale einer Schalenreihe mit verschiedenen Näherungsverfahren berechnet und das jeweilige Biegemoment in Krümmungsrichtung ( $m_\varphi$ ) mit dem Wert der sich aus der exakten Lösung nach *Flügge* ergibt verglichen. Als zulässige Abweichung legte er  $0,1 \cdot m_\varphi$  (Biegemoment in Ringrichtung) fest und wiederholte die Berechnungen unter Variation der charakteristischen Abmessungen der Schale. Die damit gefundenen Gültigkeitsgrenzen der untersuchten Näherungsverfahren sind in Abb. 75 dargestellt. Die ungültigen Bereiche sind anschräftigt und der uninteressante Bereich durchschraffiert. Die Ordinate gibt das Verhältnis von Bogenlänge zu axialer Länge der Schale ( $s/L$ ) an, wobei ein großes Verhältnis eine "kurze Schale" und ein kleines Verhältnis eine "lange Schale" kennzeichnet. Die Abszisse gibt den Öffnungswinkel  $\varphi_0$  an. Dieser liegt in der Regel zwischen  $60^\circ$  und  $120^\circ$ . Von einem kleineren Öffnungswinkel ist abzuraten, da die Schale sonst so flach würde, dass ihre Tragwirkung eher einer Platte gleicht.<sup>71</sup>



**Bemerkung zu Abb. 75:**

Ungültige Bereiche sind anschräftigt,  
uninteressante Bereiche durchschraffiert.

**Abb. 75:** Gültigkeitsgrenzen für Näherungsverfahren zur Berechnung von Zylinderschalen [v. Halász & Cziesielski, 1973]

Aus obenstehender Grafik zeigt sich, dass einige Berechnungsverfahren nur für bestimmte geometrische Verhältnisse gültig sind. Die Faltwerkstheorie nach [Tetzlaff, 1953] und die Halbmembrantheorie nach [Wlassow, 1958] scheinen besonders gut geeignet zur Berechnung von Zylinderschalen zu sein, so auch die Berechnungsmethode nach *Finsterwalder*. Diese Berechnungsverfahren sind jedoch sehr rechen- und zeitintensiv, wodurch sie in der Ingenieurspraxis vielfach nicht zur Anwendung kommen. Da *Alfred Mehmel* nur das Biegemoment in Ringrichtung mit den exakten Werten verglichen hatte wird obenstehendem Diagramm keine übermäßige Beachtung geschenkt. In weiterer Folge sollen einige Grundlagen der angesprochenen Theorien näher gezeigt

<sup>71</sup> v. Halász, R., Cziesielski, E. (1973). *Konstruktion und Berechnung hölzerner Zylinderschalen aus Furnierholz*. Seite 32

und besprochen werden. Zudem wird die Möglichkeit gezeigt, Zylinderschalen mit Hilfe von Trägerrostmodellen zu rechnen.

### 2.3 Differentialgleichungen der Zylindertheorie

Eine vollständige Lösung von biegebeanspruchten dünnwandigen Kreiszylinderschalen wurde 1934 auf Grundlage der „Love- Theorie“ von *Flügge* entwickelt. Zusammen mit der Halbbiegetheorie von *Wlassow* bildet sie die Grundlage der meisten Berechnungsverfahren.<sup>72</sup> Die Differentialgleichungen der Zylindertheorie nach *Flügge* lauten für die entsprechenden Richtungen wie folgt:

Gleichgewichtsbetrachtung in  $x$ -Richtung (longitudinal):

$$R^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2} \cdot R \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} + \nu \cdot R \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + k \cdot \left( \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - R^3 \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1-\nu}{2} \cdot R \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \varphi^2} \right) = -P_x \cdot \frac{R^2}{D} \quad (2.1)$$

Gleichgewichtsbetrachtung in  $\varphi$ -Richtung (Ringrichtung):

$$\frac{1+\nu}{2} \cdot R \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2} \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} + k \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot (1-\nu) \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{3-\nu}{2} \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} \right) = -P_\varphi \cdot \frac{R^2}{D} \quad (2.2)$$

Gleichgewichtsbetrachtung in  $z$ -Richtung (senkrecht zur Schalenebene):

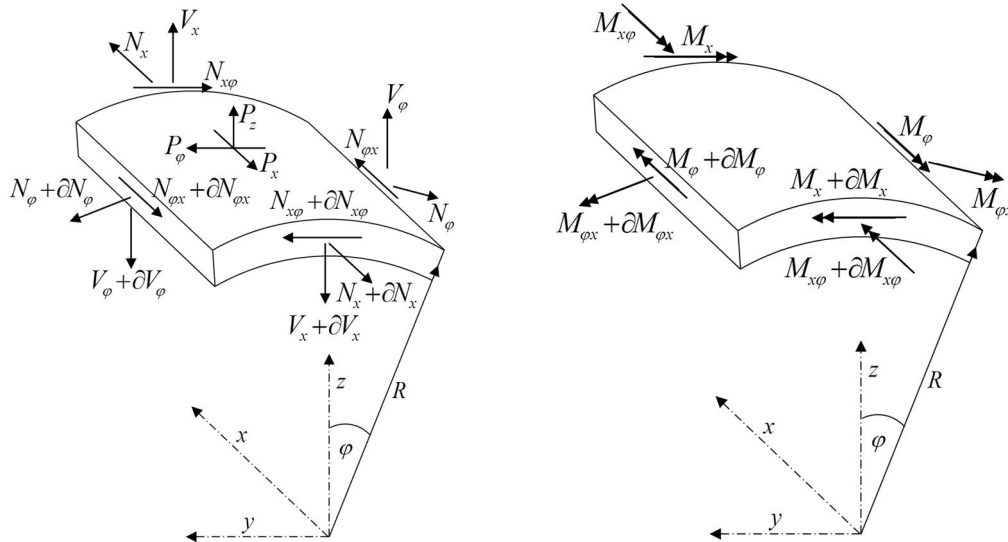
$$\nu \cdot R \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w + k \cdot \left( \frac{1-\nu}{2} \cdot R \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \varphi^2} - R^3 \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{3-\nu}{2} \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \varphi} + R^4 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right) = P_z \cdot \frac{R^2}{D} \quad (2.3)$$

Steifigkeiten:

$$K = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1-\nu^2)}; \quad D = \frac{E \cdot t}{1-\nu^2}; \quad k = \frac{K}{R^2 \cdot D} = \frac{t^2}{12 \cdot R^2} \quad (2.4)$$

Diese Differentialgleichungen gehen von einem konstanten Krümmungshalbmesser aus, wodurch alle Funktionen nur vom Winkel  $\varphi$  und der Koordinate  $x$  abhängig sind. Durch das Lösen der Differentialgleichungen werden Funktionen zur Beschreibung der Verschiebung der Schalenmittelfläche erhalten:  $u(x, \varphi)$ ,  $v(x, \varphi)$ ,  $w(x, \varphi)$ . Aus diesen Funktionen können anschließend die Schnittgrößen in longitudinaler und Ringrichtung bestimmt werden. Die Orientierung der Schnittgrößen nach *Flügge*, an den entsprechenden Schnittpunkten sind in Abb. 76 gegeben. Dabei werden Schnittgrößen als resultierende Kraftgrößen dargestellt. Zudem sind die entsprechenden Belastungen  $P_z$ ,  $P_\varphi$  und  $P_x$  gegeben.

<sup>72</sup> Keppeler, J. A. (2003). *Beitrag zur Bemessung sattelgelagerter Behälter unter vertikaler Belastung*. Seite 15


**Abb. 76:** Schnittgrößen der Kreiszyklinderschale

Die Schnittgrößen können aus den Verschiebungen wie folgt berechnet werden:

Normalkraft in Ringrichtung:

$$N_{\varphi} = \frac{D}{R} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w + \nu \cdot R \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{K}{R^3} \cdot \left( w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \quad (2.5)$$

Normalkraft longitudinal:

$$N_x = \frac{D}{R} \cdot \left( R \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \cdot w + \nu \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) - \frac{K}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.6)$$

Schubkraft:

$$N_{x\varphi} = \frac{D}{R} \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + R \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{K}{R^3} \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot \left( R \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + R \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) \quad (2.7)$$

Schubkraft:

$$N_{\varphi x} = \frac{D}{R} \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + R \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{K}{R^3} \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + R \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) \quad (2.8)$$

Biegemoment in Ringrichtung:

$$M_{\varphi} = \frac{K}{R^2} \cdot \left( w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \nu \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.9)$$

Biegemoment longitudinal:

$$M_x = \frac{K}{R^2} \cdot \left( R^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - R \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \quad (2.10)$$

Drillingmoment:

$$M_{\varphi x} = \frac{K}{R^2} \cdot (1-\nu) \cdot \left( R \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{R}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.11)$$

Drillingmoment:

$$M_{x\varphi} = \frac{K}{R^2} \cdot (1-\nu) \cdot \left( R \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} - R \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.12)$$

Es ist zu sehen, dass mit der Berechnung nach *Flügge* ein hoher mathematischer Aufwand verbunden ist. Da die Biegesteifigkeit einer Schale für gewöhnlich viel geringer ist als die Dehnsteifigkeit, schlug *Flügge* eine vereinfachte Biegetheorie vor. Unter Vernachlässigung der mit der Biegesteifigkeit  $K$  behafteten Glieder und des Einflusses der Längs- und Tangentialverschiebungen

können die oben stehenden Gleichgewichtsbetrachtungen wesentlich vereinfacht werden. Es ergeben sich folgende drei Differentialgleichungen:<sup>73</sup>

$$\text{DGL 1: } R^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2} \cdot R \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} + \nu \cdot R \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = -P_x \cdot \frac{R^2}{D} \quad (2.13)$$

$$\text{DGL 2: } \frac{1+\nu}{2} \cdot R \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2} \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} = -P_\varphi \cdot \frac{R^2}{D} \quad (2.14)$$

$$\text{DGL 3: } \nu \cdot R \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w + k \cdot \left( R^4 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) = P_z \cdot \frac{R^2}{D} \quad (2.15)$$

Aus der Lösung der Differentialgleichungen können wiederum die entsprechenden Schnittgrößen ermittelt werden.

$$\text{Normalkraft in Ringrichtung: } N_\varphi = \frac{D}{R} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w + \nu \cdot R \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.16)$$

$$\text{Normalkraft longitudinal: } N_x = \frac{D}{R} \cdot \left( R \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \cdot w + \nu \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \quad (2.17)$$

$$\text{Schubkraft: } N_{x\varphi} = N_{\varphi x} = \frac{D}{R} \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + R \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.18)$$

$$\text{Biegemoment in Ringrichtung: } M_\varphi = \frac{K}{R^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \nu \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.19)$$

$$\text{Biegemoment longitudinal: } M_x = \frac{K}{R^2} \cdot \left( R^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \quad (2.20)$$

$$\text{Drillmoment: } M_{\varphi x} = M_{x\varphi} = \frac{K}{R} \cdot (1-\nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x} \quad (2.21)$$

Wlassow führte in seinen Berechnungen eine zusätzliche Spannungsfunktion ein, mit dessen Hilfe er die Verformungsfunktion geschlossen lösen konnte. [Knittel, 1948] zeigt Lösungen der maßgebenden Differentialgleichungen mit Hilfe eines Produktansatzes auf und diskutiert ausführlich die Randbedingungen am Übergangsbereich von Schalenwandung zu Randträger.

## 2.4 Berechnungsmethode nach Lundgren

Im Folgenden soll die schon genannte Berechnungsmethode nach *Lundgren* vorgestellt werden. Wie Abb. 75 zeigt, ist die Balkenmethode nach Lundgren vor allem für Zylinderschalen mit einem Verhältnis von  $s/L \leq 0,5$  und für  $45^\circ \leq \varphi \leq 120^\circ$  anwendbar und damit insbesondere zur Berechnung von „langen“ Schalen geeignet. Zu dieser Berechnungsmethode wurde eine vom Verfasser betreute Masterarbeit durchgeführt, und eine Reihe von Tabellenkalkulationsblättern in Microsoft Excel erstellt (siehe: Carobbio, A.: *Zylinderschalen aus Holz*. 2012). Die Lundgren'sche

<sup>73</sup> Keppler, J. A. (2003). *Beitrag zur Bemessung sattelgelagerter Behälter unter vertikaler Belastung*. Seite 22



Balkenmethode beruht im Wesentlichen auf den Voraussetzungen, wie sie auch aus der Biegetheorie des Balkens bekannt sind. Es wird für den Querschnitt der Zylinderschale das Flächenträgheitsmoment ermittelt und die gesamte Schale wie ein Balken berechnet. Dabei werden folgende Größen als vernachlässigbar angesehen:

1. Verformungen des Schalenquerschnittes in seiner Ebene
2. Seitliche Querverformungen des Schalenquerschnittes
3. Axiale Biegemomente in der Schalenwandung ( $m_x$ )
4. Torsionsmomente in der Schalenwandung ( $m_{x\varphi}$ )

Die erste Voraussetzung, das Ebenbleiben der Querschnitte, stellt die eigentliche Grundlage der Balkenmethode nach Lundgren dar. Sie wird auf Grund der Verformungen in Querrichtung (zugehörig zu  $m_\varphi$ ) und den Schubverformungen zwar nie exakt erfüllt sein, der Fehler, der sich aus der Abweichung vom linear angenommenen Normalkraftverlauf  $n_x(z)$  bzw. Spannungsverlauf zum tatsächlichen Spannungsverlauf ergibt ist für "lange Schalen" bei gleichmäßig verteilten Flächenlasten nach [v. Halász & Cziesielski, 1973] jedoch vernachlässigbar klein.

Die zweite Voraussetzung, wonach der Querschnitt keine seitliche Querverformung aufweist, hat auf die Verteilung der Spannungen für symmetrisch belastete Schalen keinen nennenswerten Einfluss. Es ist jedoch anzumerken, dass für besonders gelagerte und belastete Schalen, wie beispielsweise innere Schalen einer Shedreihe, der Einfluss der Querverformungen nicht unberücksichtigt bleiben sollte. Grund hierfür sind die aus Torsion auftretenden Wölbkräfte, auf Grund derer sich keine lineare Verteilung der Normalspannungen mehr ergibt.

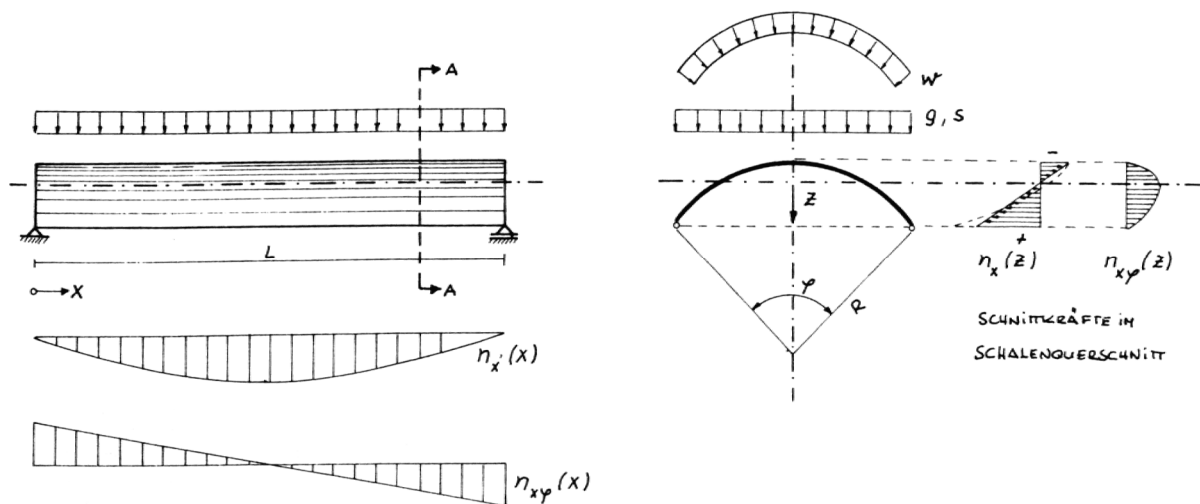


Abb. 77: Schnittkräfte in Schalenlängsrichtung und im Schalenquerschnitt [v. Halász & Cziesielski, 1973]

Die dritte und vierte Voraussetzung, wonach die Schnittkräfte  $m_x$  und  $m_{x\varphi}$  vernachlässigt werden scheint für "lange Schalen" ebenfalls zulässig, da die dünne Schalenwandung weder nennenswerte Lasten in axialer Richtung durch Biegemomente, noch über Torsionsmomente, abtragen kann. Demzufolge müssen nach der Balkenmethode lediglich die Schnittkräfte:  $n_x$ ,  $n_{x\varphi}$ ,  $n_\varphi$ ,  $m_\varphi$  und  $q_\varphi$  ermittelt werden (siehe Abb. 78). Die Berechnung der Schnittkräfte  $n_x$  und  $n_{\varphi x} = n_{x\varphi}$  erfolgt dabei aufgrund des Tragverhaltens der Schale als Balken (siehe Abb. 77), während die restlichen Schnittkräfte ( $n_\varphi$ ,  $m_\varphi$  und  $q_\varphi$ ) aus einer Berechnung am Bogen hervorgehen (siehe Abb. 79).<sup>74</sup>

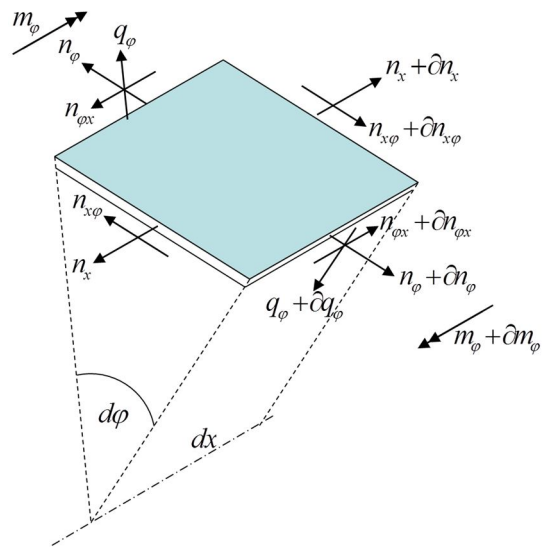


Abb. 78: Schnittkräfte an einem Schalenelement

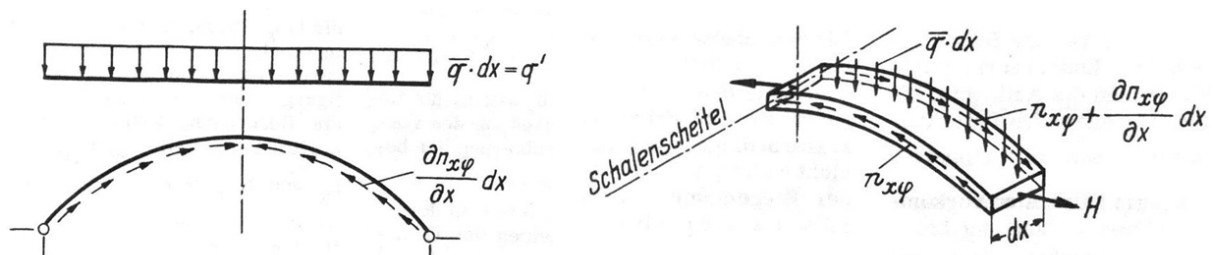


Abb. 79: Bogenelement (links) und Schalenscheitel (rechts) zur Berechnung der Schnittkräfte  $n_\varphi$ ,  $m_\varphi$  und  $q_\varphi$  [v. Halász & Cziesielski, 1973]

Diese Berechnungsmethode bietet sich wie anfangs schon erwähnt sehr gut zur Umsetzung in Microsoft Excel an. Um die Qualität dieses Berechnungsverfahrens beurteilen zu können, wurde eine Parameterstudie durchgeführt. Dabei wurden Ergebnisse der Lundgren'schen Balkenanalgie mit Ergebnissen nach der Finiten Element Methode verglichen. Die Berechnungen nach der FEM wurden mit der Software „Dlubal RFEM4.xx“ durchgeführt. Betrachtet wurde eine isotrope Zylinderschale mit konstantem Radius, konstantem Öffnungswinkel, konstanter Schalenstärke und konstanter Belastung (siehe Abb. 80). Variiert wurde lediglich die Spannweite der Schale.

<sup>74</sup> v. Halász, R., Cziesielski, E. (1973). *Konstruktion und Berechnung hölzerner Zylinderschalen aus Furnierholz*. Seite 33

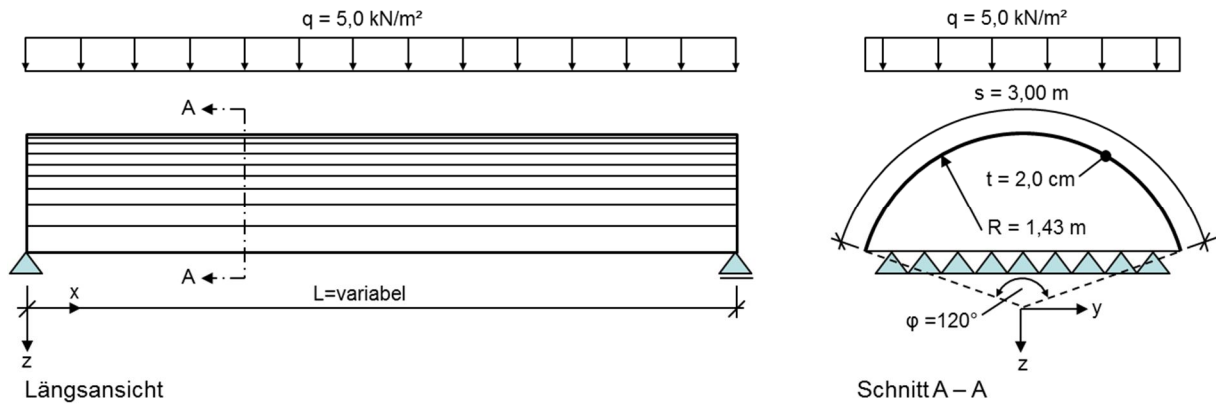


Abb. 80: Grafische Darstellung der untersuchten Schale in Ansicht und Schnitt

Der Verlauf der Berechnungen und nähere Informationen sind Anhang A dieser Arbeit zu entnehmen. Aus den erhaltenen Ergebnissen der FEM-Berechnung und der Berechnungsmethode nach Lundgren konnte der Fehler in Abhängigkeit vom Verhältnis Spannweite zu Bogenlänge bei Betrachtung der longitudinalen Schwerpunktspannungen  $\sigma_x$  im Scheitel und an der Traufe in Feldmitte ermittelt werden. Zudem wurden die Schwerpunktspannungen in Ringrichtung  $\sigma_\varphi$  im Scheitel untersucht. Dabei wurden die Ergebnisse aus der FEM-Berechnung als exakte Lösung interpretiert (siehe Abb. 81).

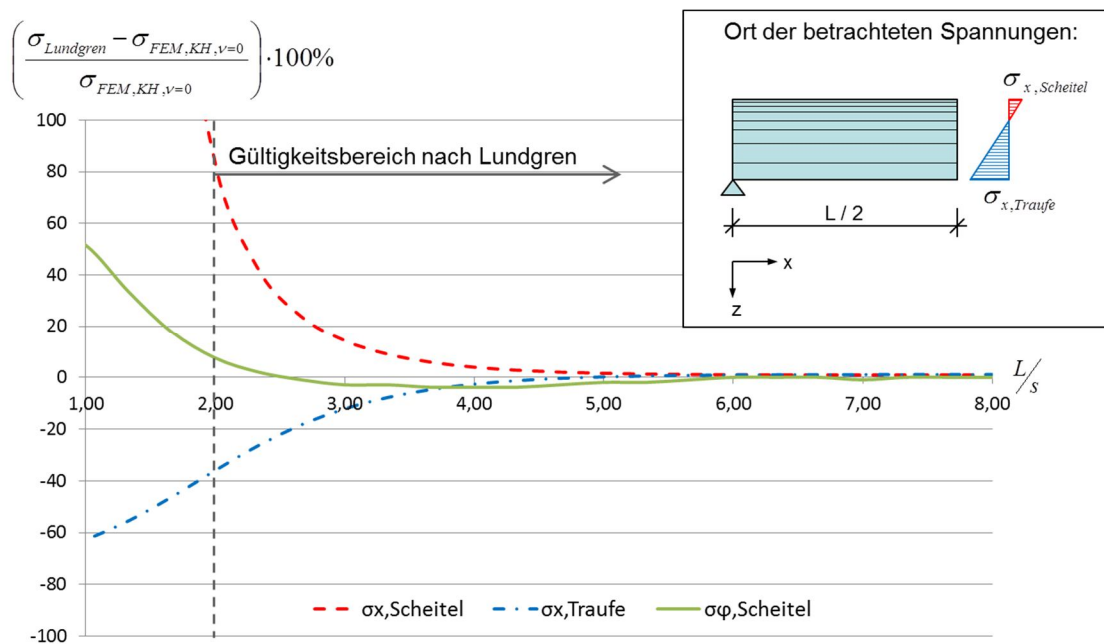


Abb. 81: Vergleich Berechnungsergebnisse nach Lundgren und Ergebnisse nach der FE-Methode

Es zeigt sich, dass ab einem Verhältnis der Schalenspannweite zur Bogenlänge von ca. 4,0 das Ergebnis nach der Lundgren'schen Berechnungsmethode kaum von den Ergebnissen der FEM abweicht. Der mittlere Fehler der Spannungen im Scheitel beträgt ab diesem Geometrieverhältnis rund 1,5% und an der Traufe 0,4%. Folglich können Spannungen im Scheitel und an der Traufe bei langen Zylinderschalen mit einer sehr hohen Genauigkeit berechnet werden. Unterhalb eines Verhältnisses der Spannweite zur Bogenlänge von 2 nimmt die Abweichung exponentiell zu und führt zu nicht brauchbaren Ergebnissen.

Des Weiteren wurden die Schnittgrößen  $m_\varphi$  und  $n_\varphi$  im Scheitel der Schale betrachtet (siehe Abb. 82). Es zeigt sich, dass die Übereinstimmung der in Ringrichtung verlaufenden Normalkräfte  $n_\varphi$  im

Gültigkeitsbereich der Lundgren'schen Schalentheorie mit den exakten Ergebnissen sehr gut ist. Der mittlere Fehler liegt in diesem Fall bei rund 0,8%. Dagegen sind die Abweichungen der Momente etwas höher und betragen durchschnittlich rund 5,7%. In Abb. 82 ist zudem noch die Berechnungsungenauigkeit der vertikalen Verschiebung der Trauflinie in Feldmitte dargestellt. Es zeigt sich, dass diese nicht besonders gut mit den Lösungen der FEM korrespondiert und ein mittlerer relativer Fehler von ca. 28,4% auftritt.

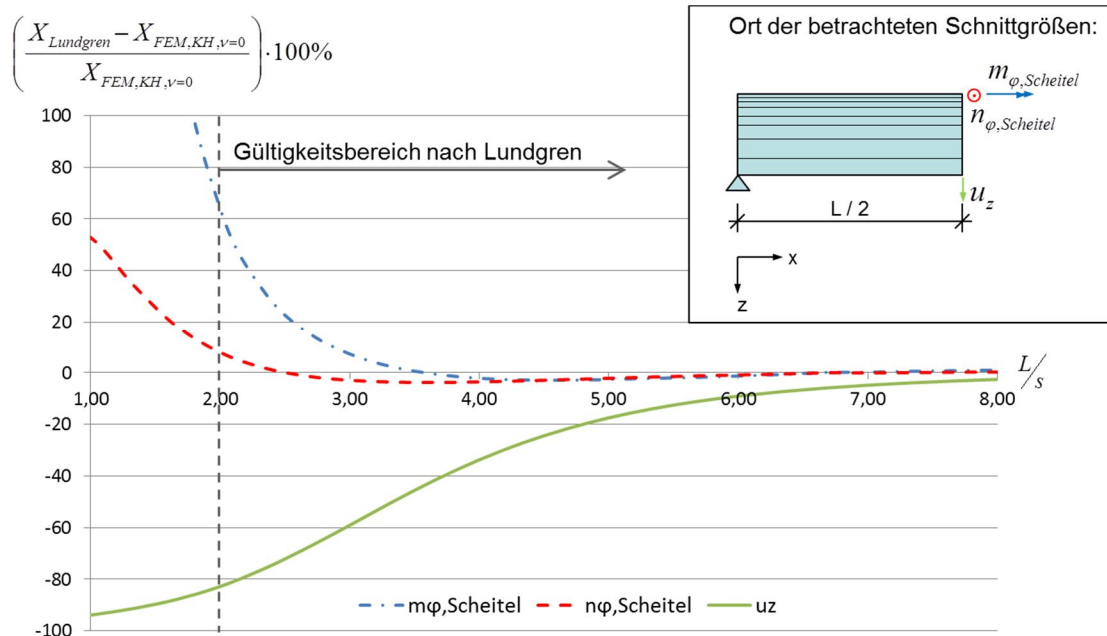
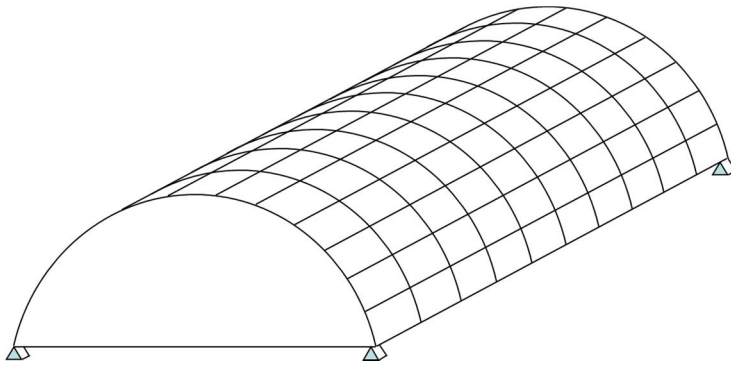
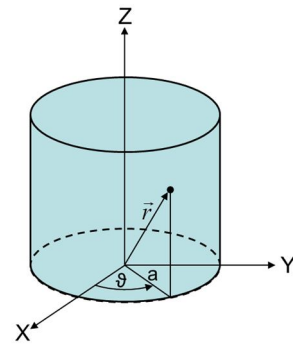


Abb. 82: Vergleich Berechnungsergebnisse nach Lundgren und Ergebnisse nach der FE-Methode

In Summe zeigt die Parameterstudie, dass die Balkenanalgie nach Lundgren gut geeignet ist, Spannungen in longitudinaler als auch Ringrichtung bei langen isotropen Zylinderschalen zu berechnen. Entgegen den Ergebnissen von *Mehmel* sollte nach Meinung des Autors der Gültigkeitsbereich der Lundgren'schen Balkentheorie erst ab einem Bogenlänge – Spannweiten – Verhältnis  $s/L=3,5$  angesetzt werden, denn erst dort liegt der Fehler der Längsspannungen unter 10%. Bei der Verwendung dieser Balkenmethode ist zwingend zu beachten, dass keine Querdehnungseffekte des Materials berücksichtigt werden.

## 2.5 Trägerrostmodelle

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung von Zylinderschalen besteht darin, diese als Trägerrost abzubilden (siehe Abb. 83). Dabei wird die Geometrie der Schale durch in Ringrichtung und längs verlaufenden Stäben beschrieben, welche in ihren Kreuzungspunkten biegesteif miteinander verbunden sind. Durch diese einfache Methode ist es möglich unter zu Hilfenahme eines in der Baustatik gewöhnlichen Stabwerksprogramms das Tragverhalten von Zylinderschalen und deren Schnittgrößen zu berechnen. Auf den folgenden Seiten soll eine mögliche Modellierung und Berechnung aufgezeigt werden.


**Abb. 83:** Zylinderschale als Trägerrost

**Abb. 84:** Allgemeine Zylinderdarstellung

Um das Trägerrostsystem zu bilden, ist es möglich eine entsprechende mathematische Beschreibung des Zylinders bzw. des Zylinderausschnitts zu wählen. Es bieten sich vier verschiedene Darstellungsmöglichkeiten an, die sich auf Abb. 84 beziehen:

Parametrische Darstellung	$x = a \cdot \cos \vartheta$ $y = a \cdot \sin \vartheta$ $z = z$	(2.22)
------------------------------	---	--------

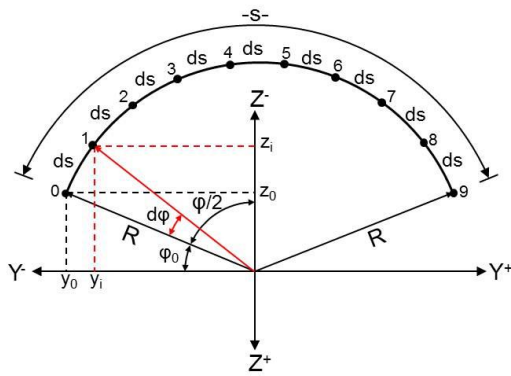
Vektorielle Darstellung	$\vec{r} = a \cdot \cos \vartheta \cdot \vec{e}_1 + a \cdot \sin \vartheta \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3$	(2.23)
----------------------------	---	--------

Explizite Darstellung	$x^2 = a^2 \cdot \cos^2 \vartheta$ $y^2 = a^2 \cdot \sin^2 \vartheta$ $x^2 + y^2 = a^2 \quad \rightarrow \quad y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$	(2.24)
--------------------------	--	--------

Implizite Darstellung	$F = x^2 + y^2 - a^2 = 0$	(2.25)
--------------------------	---------------------------	--------

An dieser Stelle soll die parametrische Darstellung des Zylinders gewählt werden, wobei der Ursprung des Koordinatensystems in den Krümmungsmittelpunkt der Schale gelegt und die  $x$ -Koordinate in longitudinaler Richtung (parallel zur Scheitellinie) orientiert wird. Die in Ringrichtung verlaufenden Bögen werden in  $n$  äquidistante Teilabschnitte zerlegt deren Länge mit  $ds$  bezeichnet wird. Durch die Unterteilung in Ringrichtung entstehen entsprechende Winkelinkremente der Größe  $d\varphi$  (siehe Abb. 85). Die Gitterrostknoten in Längsrichtung werden durch eine Teilung der Schalenlänge in  $m$  äquidistante Teilabschnitte erhalten wodurch Stäbe der Länge  $dx$  entstehen (siehe Abb. 86).





- $s \dots$  Bogenlänge
- $R \dots$  Bogenradius
- $\varphi \dots$  Öffnungswinkel
- $n \dots$  Anzahl der Teilungen in Ringrichtung
- $m \dots$  Anzahl der Teilungen in Längsrichtung
- $i \dots$  Knotennummer
- $d\varphi \dots$  Winkelinkrement
- $\varphi_0 \dots$  Startwinkel
- $ds \dots$  Bogenintervalle

Abb. 85: Trägerrostmodell in Ringrichtung

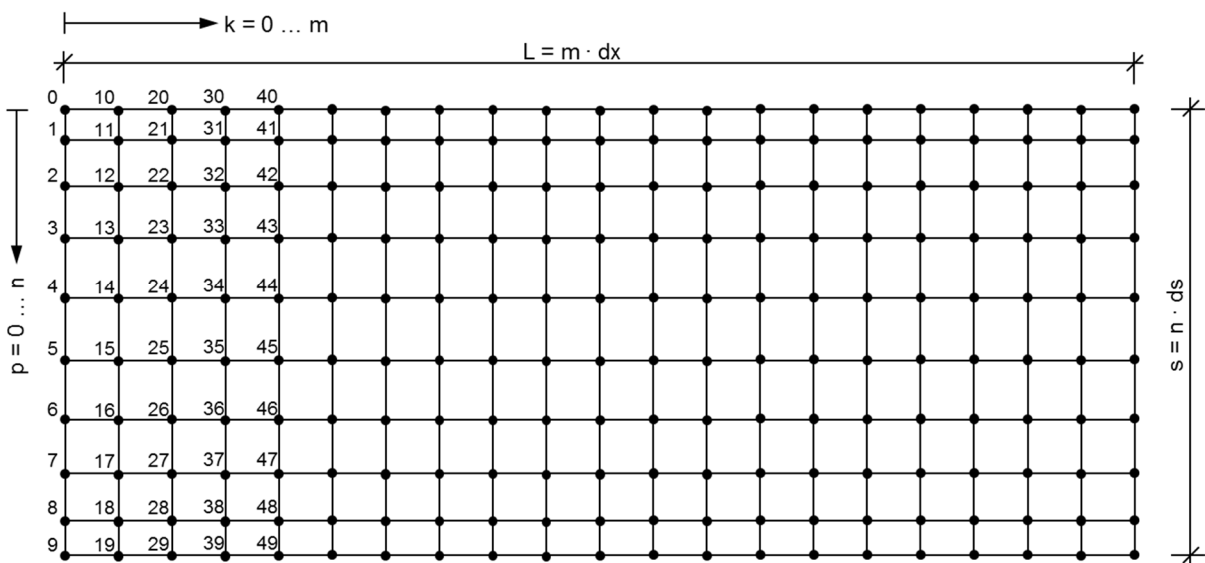


Abb. 86: Trägerrostmodell im Grundriss

Eine entsprechende mathematische Beschreibung der einzelnen Knotenkoordinaten in Abhängigkeit der zwei Variablen  $k$  und  $p$ , die jeweils von 0 bis  $m$  bzw.  $n$  laufen ist in (2.26) gegeben.

Koordinaten des Punktes  $i$

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \cdot k \\ R \cdot \cos\left(\frac{\pi - s/R}{2} + \frac{s \cdot p}{R \cdot n}\right) \\ -R \cdot \sin\left(\frac{\pi - s/R}{2} + \frac{s \cdot p}{R \cdot n}\right) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} p = 0 \dots n \\ k = 0 \dots m \\ i = p + (n+1) \cdot k \end{matrix} \quad (2.26)$$

Nach Bestimmung der Gitterpunkte werden die Knoten in Ring- und longitudinaler Richtung durch Stäbe verbunden. Das entstehende Raster sollte wenn möglich so gewählt werden, dass annähernd gleiche Stablängen entstehen, um den späteren Berechnungsaufwand zu reduzieren. Die zwischen den Knoten verlaufenden Stäbe sind gerade, wodurch eine polygonale Annäherung des Bogens in Ringrichtung entsteht. Je enger das Raster gewählt wird, umso genauer ist die Approximation.

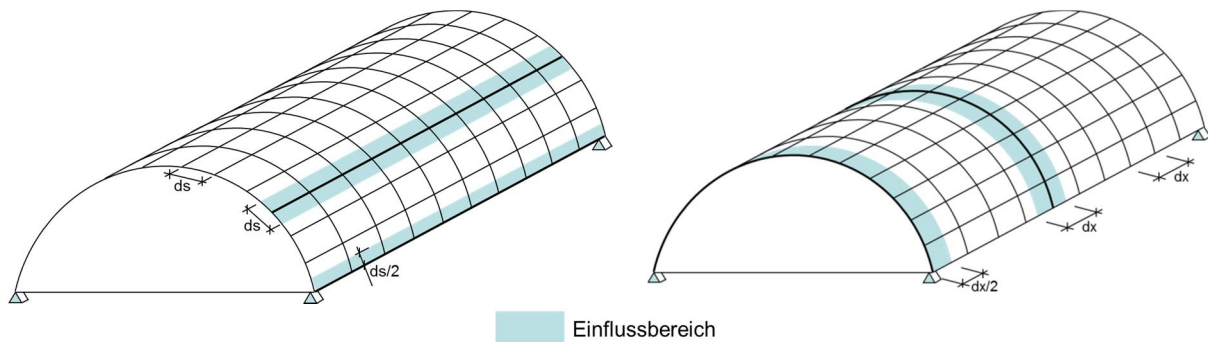


Abb. 87: Links: Einflussbereich der Längsstäbe; Rechts: Einflussbereich der Ringstäbe

Den längs und in Ringrichtung verlaufenden Stäben werden Material- bzw. Steifigkeitseigenschaften des entsprechenden repräsentierenden Flächenstreifens zugewiesen. Ein längs verlaufender Stab repräsentiert einen Streifen der Breite  $ds$ , ein in Ringrichtung verlaufender Stab einen Streifen der Breite  $dx$  (siehe Abb. 87, links und rechts). Randstäbe besitzen im Gegensatz zu anderen Stäben nur die halbe Steifigkeit, da sich der Einflussbereich der Randträger auf das halbe Rastermaß reduziert. Eine Ausnahme bilden Randstäbe in deren Einflussbereich Versteifungsträger zur Stabilisierung des freien Randes der Schale angeordnet sind. Durch die Anordnung dieser Randträger kommt zur Steifigkeit der Schale noch die Steifigkeit des Trägers hinzu (siehe Abb. 88).

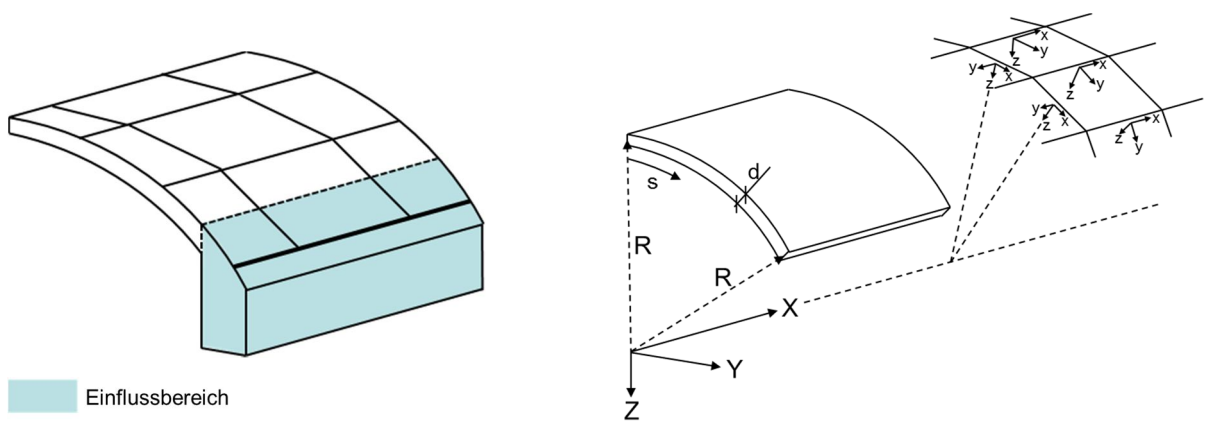


Abb. 88: Einflussbereich Randträger

Abb. 89: Anordnung der lokalen Koordinatensysteme

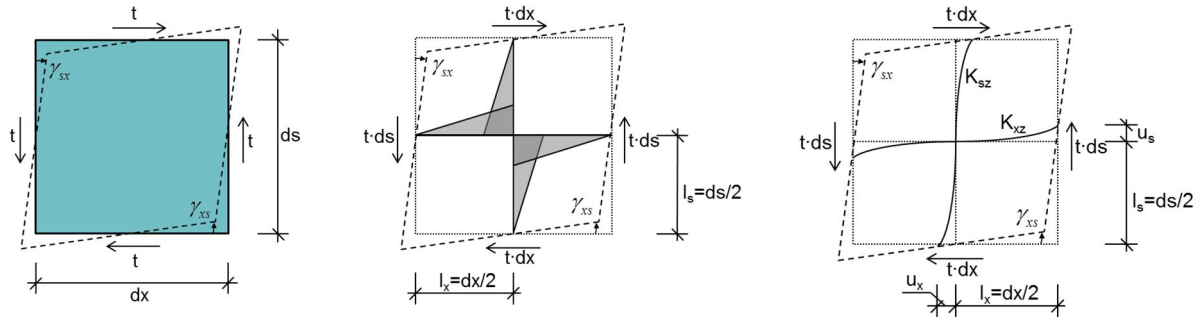
Das lokale Koordinatensystem der Stäbe wird so angeordnet, dass die lokale  $z$ -Achse in Richtung des Krümmungsmittelpunktes zeigt und die lokale  $x$ -Achse in Richtung der Stabachse. Die Richtung der  $y$ -Achse ergibt sich aus der „Rechten Hand Regel“ (siehe Abb. 89).

Die Steifigkeiten der einzelnen Stäbe können getrennt für längs und in Ringrichtung verlaufende Stäbe berechnet werden. Querdehnungseffekte des Materials werden bei der Wahl dieses einfachen Rost-Typs nicht erfasst.

In dieser Arbeit wird von einer konstanten Stärke  $d$  der Schale ausgegangen wobei Randbereiche gesondert betrachtet werden müssen. Unter Umständen könnten auch veränderliche Schalenstärken erfasst werden, die sich in Änderungen der Stabsteifigkeiten widerspiegeln.

Besonderes Augenmerk wird der Modellierung der Scheibensteifigkeit geschenkt, welche durch eine Vierendeel-Tragwirkung, d.h. einem biegesteifen Anschluss zwischen in Ringrichtung und longitudinal verlaufenden Stäben erfolgt. Diese Tragwirkung ist primär von der Biegesteifigkeit der Roststäbe um die lokale  $z$ -Achse abhängig. Es wird davon ausgegangen, dass sich in Feldmitte der in Ringrichtung und längs verlaufenden Stäbe ein Nulldurchgang im Momentenverlauf einstellt (siehe Abb. 90, Mitte).

Um auf eine entsprechende Biegesteifigkeit der Stäbe zu schließen, werden der Knotenpunkt zweier sich kreuzender Stäbe und ein homogenes Scheibenelement der Größe  $dx \cdot ds$  betrachtet und deren Schubverformungen miteinander verglichen. Als Belastung wirkt ein konstant verteilter Schubfluss auf das homogene Scheibenelement sowie auf den Rostknoten (siehe Abb. 90).



**Abb. 90:** Links: Betrachtetes schubbeanspruchtes Element in der Ebene  $xs$ ; Mitte: Momentenverlauf in den Stäben am betrachteten Knoten; Rechts: Verformte Gitterroststäbe am betrachteten Knoten

Am betrachteten homogenen Element der Dicke  $d$  in der  $xs$ -Ebene, mit den Abmessungen  $dx$  und  $ds$  (siehe Abb. 90, links) können folgende mathematischen Zusammenhänge geschrieben werden. Dabei bezeichnet  $t$  den Schubfluss,  $\tau$  die Schubspannung,  $\gamma$  die Gleitung und  $G$  den Schubmodul:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{t}{d \cdot G} = \frac{t}{D_{xs}} \quad (2.27)$$

Für die Gleitungen eines entsprechenden Rostelementes wird vorausgesetzt, dass die Dehnsteifigkeiten der Stäbe unendlich groß sind ( $EA = \infty$ ) und diese um die lokale  $z$ -Achse beansprucht werden (siehe Abb. 90, rechts). Dementsprechend können über die Biegesteifigkeiten  $K_{xz}$  und  $K_{sz}$  die Gleitungen  $\gamma_{xs}$  und  $\gamma_{sx}$  berechnet werden.

$$\gamma_{xs} = \frac{u_s}{l_x} = t \cdot ds \cdot \frac{dx^2}{12 \cdot K_{xz}} \quad (2.28)$$

$$\gamma_{sx} = \frac{u_x}{l_s} = t \cdot dx \cdot \frac{ds^2}{12 \cdot K_{sz}} \quad (2.29)$$

Damit die Gleitung des Rostes der Gleitung des Schubelements entspricht, muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\gamma = \gamma_{xs} + \gamma_{sx} = t \cdot \left( ds \cdot \frac{dx^2}{12 \cdot K_{xz}} + dx \cdot \frac{ds^2}{12 \cdot K_{sz}} \right) = \frac{t}{D_{xs}} \quad (2.30)$$

Werden in beiden Richtungen äquidistante Rostintervalle gewählt ( $dx = ds = e$ ), so kann die erforderliche Biegesteifigkeit  $K_z$  der Stäbe wie folgt bestimmt werden:

$$K_z = \frac{e^3}{6} \cdot D_{xs} = \frac{e^3}{6} \cdot d \cdot G \quad (2.31)$$

Wird eine ungleiche Rasterung in Ring- und longitudinaler Richtung gewählt, so muss unter Vorgabe einer identischen Gleitungen der Roststäbe ( $\gamma_{xs} = \gamma_{sx}$ ) eine unterschiedliche Biegesteifigkeit der Stäbe ermittelt werden. Die erforderlichen Steifigkeiten sind in den nachfolgenden Formeln gegeben, wobei der Indizes  $R$  die in Ringrichtung verlaufenden und  $L$  die longitudinalen Stäbe beschreiben.

$$K_z^L = \frac{ds \cdot dx^2}{6} \cdot D_{xs} = \frac{ds \cdot dx^2}{6} \cdot d \cdot G \quad (2.32)$$

$$K_z^R = \frac{dx \cdot ds^2}{6} \cdot D_{xs} = \frac{dx \cdot ds^2}{6} \cdot d \cdot G \quad (2.33)$$

Weiterführende Ansätze zur Modellierung der Scheibensteifigkeit in Rostsystemen können [Scholz, 2004] entnommen werden.

Um die Qualität der oben angegebenen Formeln zu prüfen soll ein schubbeanspruchtes Feld der Abmessungen  $l_s=l_x=1$  durch ein Rostsystem mit unterschiedlich feiner, äquidistanter Teilung ersetzt werden. Als Vergleichswert zwischen dem homogen - isotropen Element und dem Trägerrost dient die Kopfverschiebung  $u_i$ . Als exakte Lösung wird die Kopfverschiebung nach Gleichung (2.27) berechnet. Das Trägerrostraster wird im Stabwerksprogramm „*Dlubal RStab7.xx*“ kontinuierlich verfeinert und gleichzeitig die Stabsteifigkeiten angepasst. Die Anzahl der Stabunterteilungen wird von  $n=2$  bis  $n=60$  gesteigert (siehe Abb. 91, Mitte und rechts).

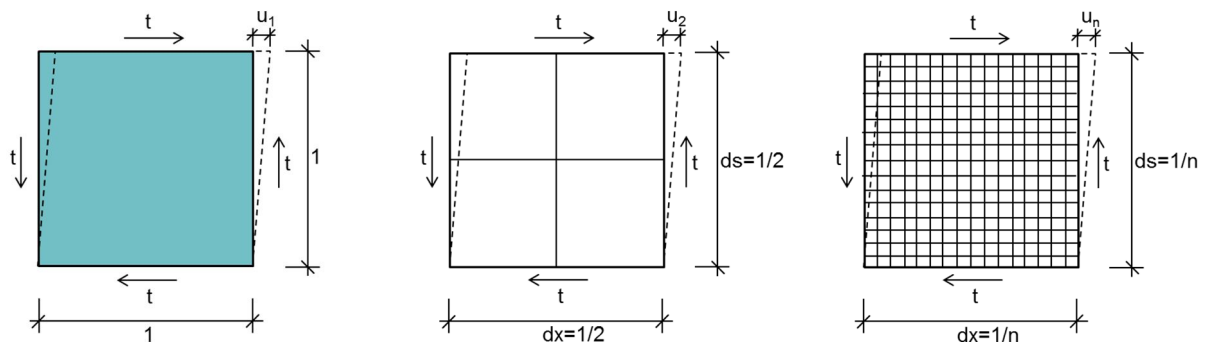


Abb. 91: Links: homogenes Scheibenelement; Mitte: Trägerrostmodell  $n=2$ ; Rechts: Trägerrostmodell  $dx=ds=1/n$



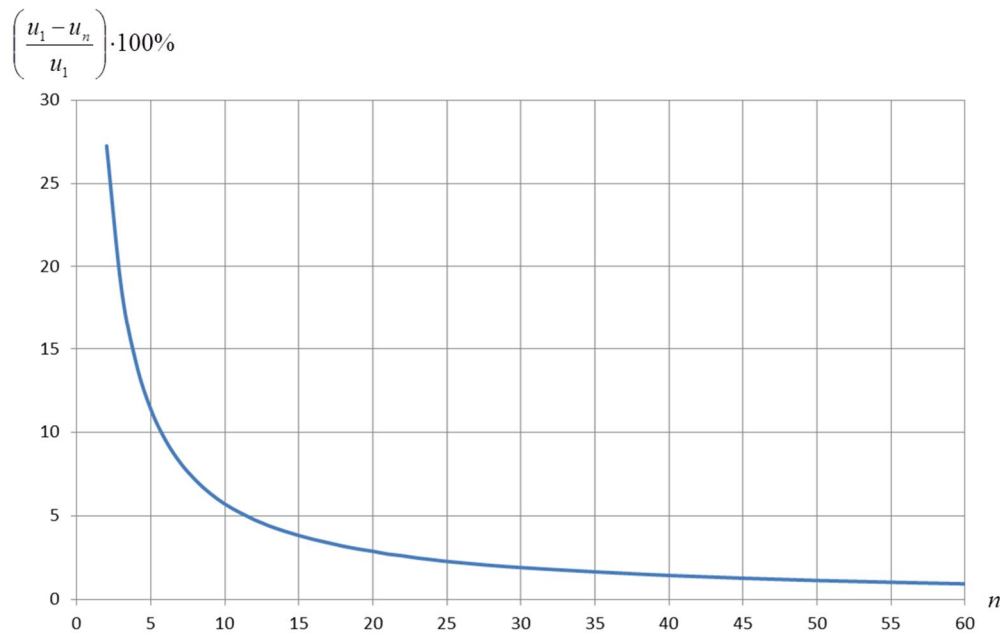


Abb. 92: Fehlerbetrachtung am Trägerrostmodell in Abhängigkeit der Anzahl von Teilungen

Es zeigt sich, dass mit einer steigenden Anzahl von Knoten der Fehler ähnlich einer Exponentialfunktion zu einem Grenzwert konvergiert. Dieser liegt in diesem Beispiel bei rund 0,9 % (siehe Abb. 92). Ab einer Anzahl von mehr als 12 Teilungen bewegt sich dieser bereits in einem Bereich unter 5%. Da bei der Modellierung von Zylinderschalen auf Grund der geometrischen Abmessungen ohnehin eine hohe Anzahl von Roststäben erforderlich ist, kann der Fehler der durch die Scheibenidealisierung entsteht als sehr gering erachtet werden.

Biegesteifigkeiten um die lokale y-Achse, sowie Drill- und Schubsteifigkeiten der in Ring- und longitudinaler Richtung verlaufenden Stäbe können, wie aus der technischen Mechanik bekannt, berechnet werden und sollen an dieser Stelle nicht näher erläutert werden. Eine Zusammenstellung aller zur Berechnung erforderlichen Steifigkeiten ist in nachfolgender Tabelle gegeben.

	Längsrichtung	Ringrichtung	Einheit
Biegesteifigkeit: (lokale y-Achse)	$K_y^L = E \cdot \frac{d^3}{12} \cdot ds$	$K_y^R = E \cdot \frac{d^3}{12} \cdot dx$	[MNm <sup>2</sup> ]
Biegesteifigkeit: (lokale z-Achse)	$K_z^L = \frac{ds \cdot dx^2}{6} \cdot d \cdot G$	$K_z^R = \frac{dx \cdot ds^2}{6} \cdot d \cdot G$	[MNm <sup>2</sup> ]
Drillsteifigkeit:	$K_{xy}^L = G \cdot \frac{d^3}{6} \cdot ds$	$K_{xy}^R = G \cdot \frac{d^3}{6} \cdot dx$	[MNm <sup>2</sup> ]
Schubsteifigkeit:	$S_{xz}^L = S_{yz}^L = G \cdot d \cdot ds$	$S_{xz}^R = S_{yz}^R = G \cdot d \cdot dx$	[MN]
Dehnsteifigkeit:	$D_x^L = E \cdot d \cdot ds$	$D_x^R = E \cdot d \cdot dx$	[MN]

Tabelle 1: Stabsteifigkeiten zur Berechnung von Zylinderschalen mittels Trägerrostmodellen

Die Scheibensteifigkeit wird wie oben beschrieben, durch die Biegesteifigkeit um die lokale z-Achse und eine biegesteife Verbindung der in Ring- und longitudinaler Richtung verlaufenden Stäbe modelliert. Für Randstäbe müssen unter Umständen gesonderte Betrachtungen angestellt werden. Querdehnungseffekte des Materials werden in Tabelle 1 nicht berücksichtigt. Ist dies jedoch

erforderlich, müssen die Biege- und Dehnsteifigkeiten durch  $(1-\nu^2)$  dividiert werden und der Schubmodul muss die Bedingung  $G = E/[2 \cdot (1+\nu)]$  erfüllen. Die Anordnung der Stäbe im System, mit entsprechenden Stabsteifigkeiten ist in Abb. 93 gegeben.

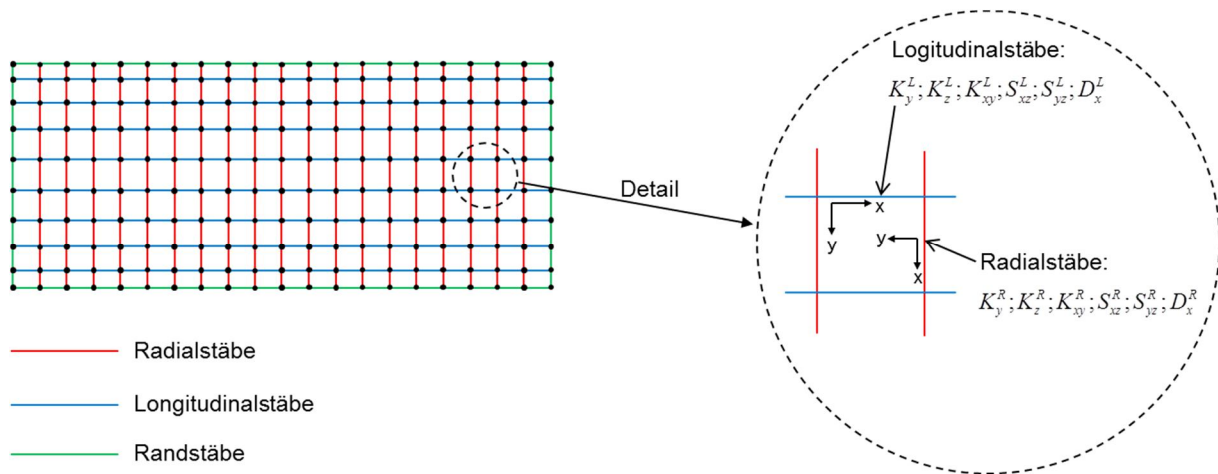


Abb. 93: Anordnung der Stäbe im Trägerrostsystem

Um die Güte dieses Berechnungsverfahrens und der angegebenen Formeln zu prüfen, wurde eine Parameterstudie erstellt, deren Berechnungsergebnisse mit Ergebnissen der Finiten Element Methode verglichen wurden. Zudem wurde in „Microsoft Excel“ ein Tabellenkalkulationsblatt verfasst, welches alle bis hier angegebenen Formeln zur Bestimmung der Geometriepunkte und Stabsteifigkeiten umsetzt. Betrachtet wurde eine isotrope Zylinderschale mit konstantem Radius, konstantem Öffnungswinkel, konstanter Schalenstärke und konstanter Belastung (siehe Abb. 80), lediglich die Spannweite der Schale wurde variiert. Nähere Angaben zur Berechnung und Modellierung der Schale können Anhang B dieser Arbeit entnommen werden. Verglichen wurden diverse Spannungen, Schnittgrößen und Verformungen in Feldmitte der Schale. Dazu zählen die longitudinalen Schwerpunktspannungen  $\sigma_x$  (im Scheitel und an der Traufe) und die Schwerpunktspannungen in Ringrichtung  $\sigma_\varphi$  im Scheitel.

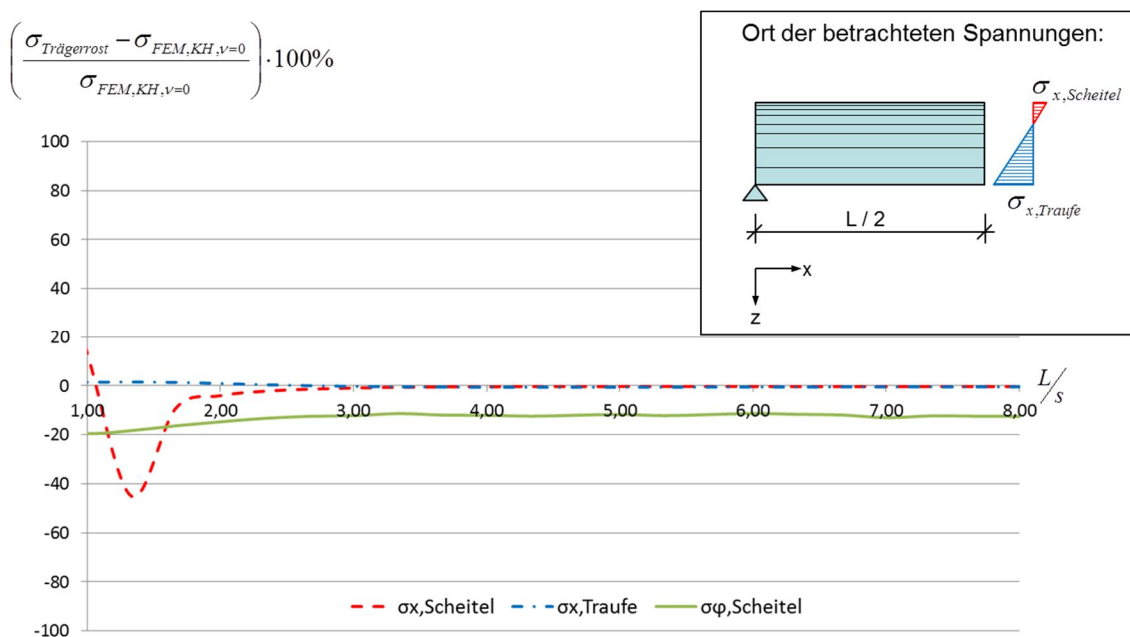


Abb. 94: Vergleich Berechnungsergebnisse am Trägerrost und Ergebnisse nach der FE-Methode

Es zeigt sich, dass ab einem Verhältnis der Schalenspannweite  $L$  zur Bogenlänge  $s$  von zwei die longitudinalen Schwerpunktspannungen im Scheitel und Traufe ( $\sigma_{x,Scheitel}$  und  $\sigma_{x,Traufe}$ ) sehr gut mit den Berechnungen der FEM übereinstimmen (siehe Abb. 94). Die relative Abweichung beträgt im Mittel weniger als 0,7%. Die Schwerpunktspannungen in Ringrichtung weisen eine beinahe konstante Abweichung von rund 12% auf. Dieser Fehler rührt hauptsächlich aus dem Berechnungsfehler der Normalkraft  $n_\varphi$  und kann entsprechend auch Abb. 95 entnommen werden. Wieso bei einem Verhältnis von 1,5 plötzlich eine hohe Abweichung zwischen den Ergebnissen des Trägerrostes und der FEM auftritt konnte nicht geklärt werden. Es liegt wahrscheinlich daran, dass sich bei sehr kurzen Schalen das System ändert und eine daraus entstehende Bogenwirkung durch den Trägerrost nicht mehr exakt abgebildet werden kann.

Bei Betrachtung nachstehender Auswertung kann erkannt werden, dass mit der Berechnung am Trägerrost das Moment  $m_\varphi$  im Scheitel und die vertikale Verschiebung an der Traufe mit sehr hoher Genauigkeit bestimmt werden können, lediglich die Normalkraft weist wie vorhin schon erwähnt, einen relativ hohen konstanten Fehler auf.

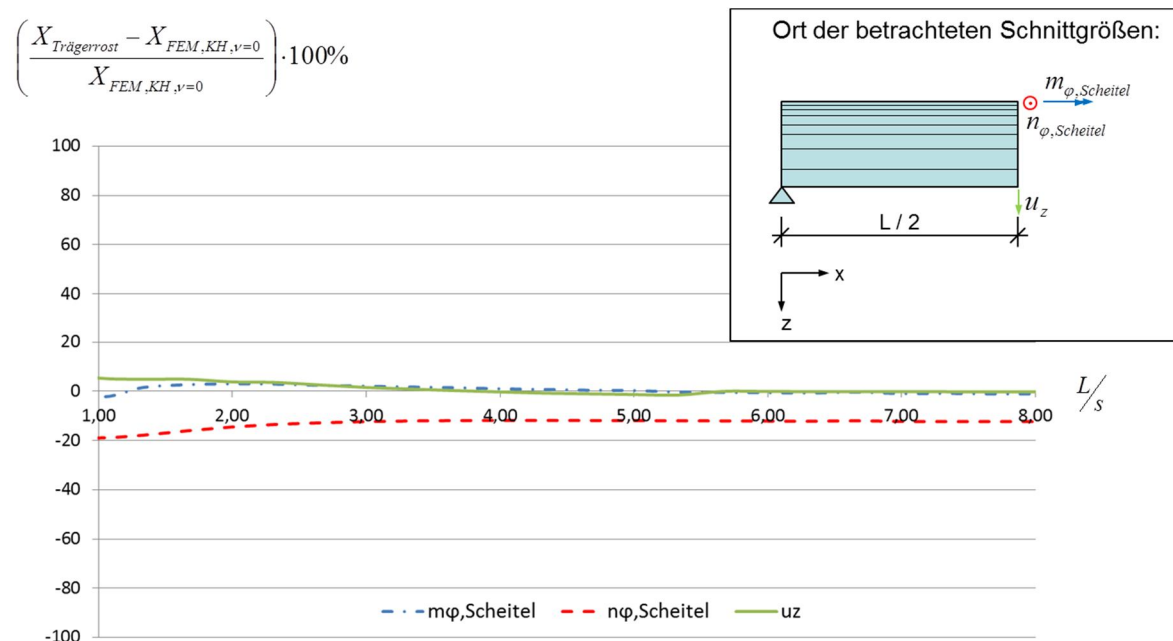


Abb. 95: Vergleich Berechnungsergebnisse am Trägerrost und Ergebnisse nach der FE-Methode

Anhand der durchgeführten Berechnungen wurde festgestellt, dass das Trägerrostmodell sehr gut geeignet ist isotrope Zylinderschalen zu berechnen. Um den Einfluss der Vernachlässigung der Querdehnung des Materials im Trägerrostmodell zu erfassen, wurden Vergleichsrechnungen mit der Methode der Finiten Elemente unter Berücksichtigung von Querdehnungseffekten durchgeführt. Betrachtet wurde wiederum dieselbe Schale wie im vorherigen Abschnitt. Für die Querdehnungszahl wurde ein Wert von  $\nu = 0,3$  angesetzt. Alle Berechnungen wurden nach der Kirchhoffschen Plattentheorie und nach Theorie erster Ordnung durchgeführt. Es wurden die Spannungen im Scheitel in Ring- sowie longitudinaler Richtung und die vertikale Verschiebung der Traufe (siehe Abb. 96) ausgewertet. Es zeigt sich, dass die Querdehnzahl kaum Einflüsse auf das Ergebnis hat. Lediglich die große Abweichung der longitudinalen Spannungen im Scheitel, bei einem Verhältnis von Schalenspannweite zu Bogenlänge von 1,5 wird um rund 20% reduziert.

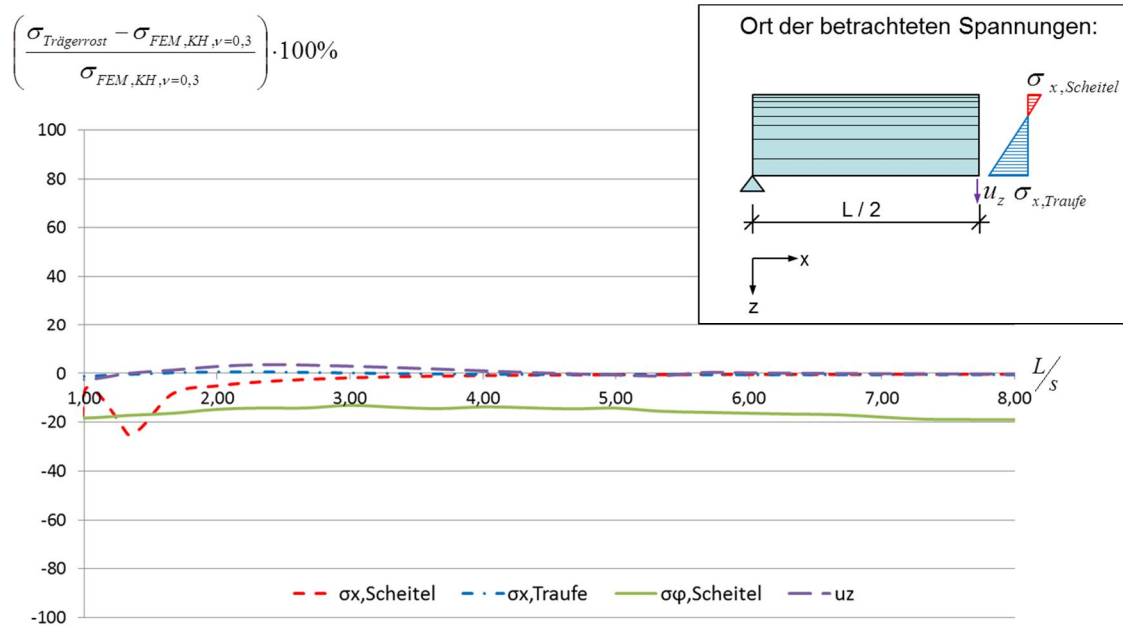


Abb. 96: Vergleich Berechnungsergebnisse am Trägerrost und Ergebnisse nach der FE-Methode

Ein weiterer Berechnungsdurchgang sollte noch etwaige Unterschiede der Ergebnisse zwischen dem Trägerrostmodell mit Berücksichtigung von Schubverformungen und der Berechnungsmethode nach Reissner-Mindlin untersuchen. Die Querdehnzahl wurde im FEM-Modell zu Null gesetzt ( $\nu = 0$ ). Es zeigt sich, dass die Ergebnisse ab einem Geometrieverhältnis von Rund zwei wiederum sehr gut übereinstimmen (siehe Abb. 97). Unterhalb dieses Verhältnisses kommt es wiederum zu großen Abweichungen der Spannungen im Scheitel  $\sigma_{x,Scheitel}$ . Die Verformungen des Trägerrostmodells unter Berücksichtigung von Schubverformungen und die Verschiebungen am FEM-Modell nach Reissner-Mindlin stimmen mit einer zufriedenstellenden Genauigkeit überein.

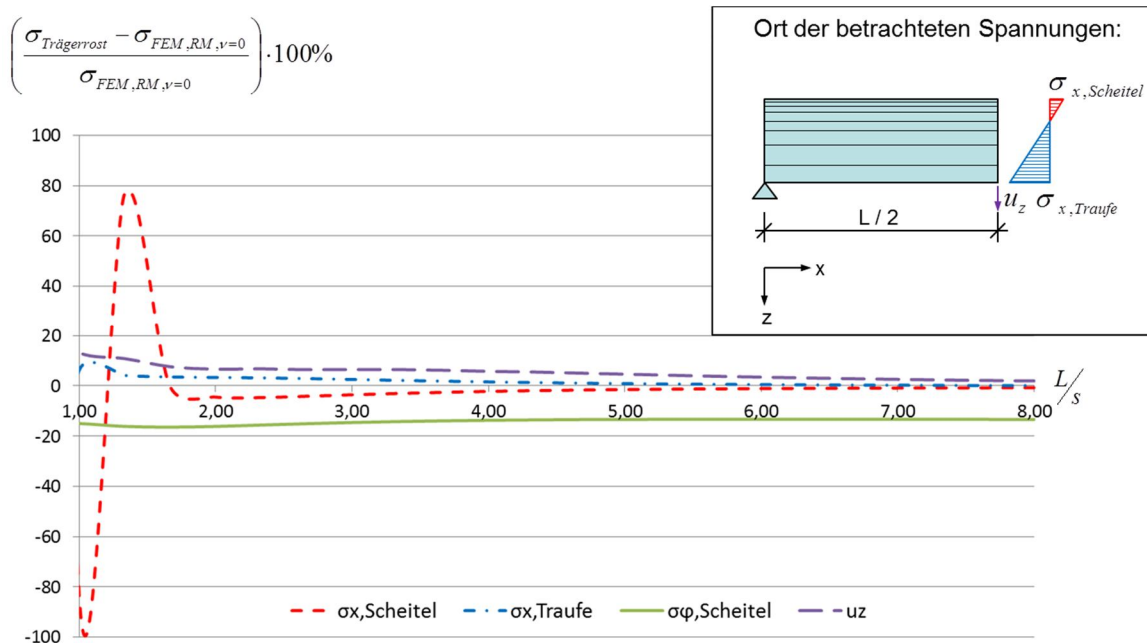


Abb. 97: Vergleich Berechnungsergebnisse am Trägerrost und Ergebnisse nach der FE-Methode

In Anbetracht der durchgeführten Parameterstudien kann gesagt werden, dass Trägerrostmodelle sehr gut geeignet sind Zylinderschalen zu berechnen. Ab einem Verhältnis der Schalenstützweite zur Bogenlänge von 2,0 stimmen die Ergebnisse sehr gut mit Berechnungen der FEM überein. Da



Zylinderschalen in der Regel zur Überbrückung größerer Spannweiten herangezogen werden, ist der Bereich unterhalb dieses Wertes als uninteressant zu erachten. Die Vernachlässigung der Querdehnung des Materials führt zu geringen Abweichungen der Ergebnisse. Trägerrostmodelle können auch Schubverformungen mit ausreichender Genauigkeit abbilden.

## **2.6 Fazit**

In diesem Abschnitt konnte eine Reihe von Berechnungsmöglichkeiten aufgezeigt werden. Es hat sich herausgestellt, dass die Berechnungsmethode nach Lundgren geeignet ist, um schnell und einfach mit Unterstützung eines Tabellenkalkulationsblattes lange isotrope Zylinderschalen zu berechnen. Zudem bildet die Berechnung mit Trägerrostmodellen eine weitere, sehr gut handhabbare Berechnungsmöglichkeit, deren Berechnungsgenauigkeit über der Lundgren'schen Balkenmethode liegt. Die Berechnung mit Differentialgleichungen liefert zwar exakte Lösungen, ist aber mit einem sehr hohen mathematischen Aufwand verbunden, der sich stark an die entsprechende Belastung und die geometrischen Randbedingungen knüpft.

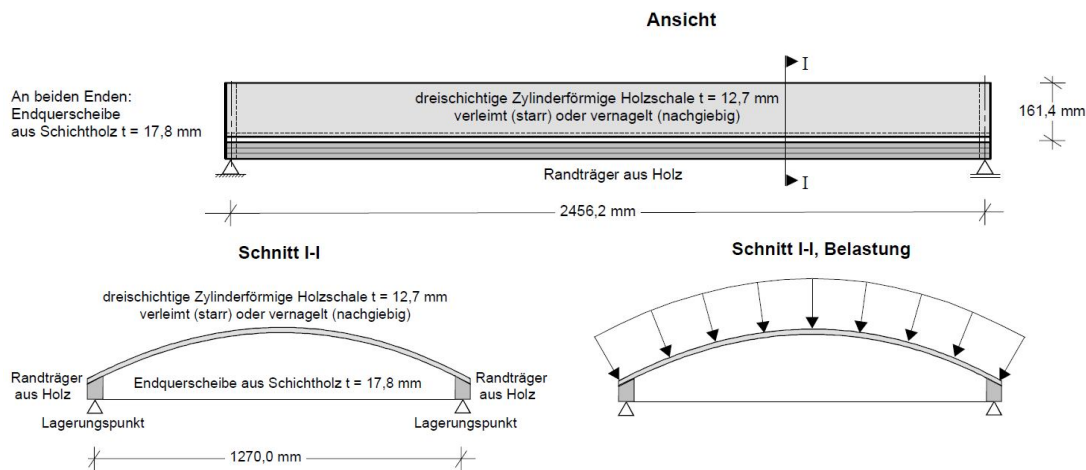
### 3 Berechnung von orthotropen Zylinderschalen

#### 3.1 Hintergrund

Die Berechnung von orthotropen Zylinderschalen nimmt eine besondere Stellung in der Berechnung von Zylinderschalen ein. In diesem Abschnitt werden durchgeführte Berechnungen gezeigt und Einflüsse der Orthotropie untersucht.

#### 3.2 Geschichtliche Entwicklung der Berechnungsverfahren

Zur Berechnung von orthotropen Schalenstrukturen stehen diverse Möglichkeiten zur Verfügung. Eine der gängigsten Methoden ist die Berechnung mit Finiten Elementen. Diese Berechnungsmethode wird für gewöhnlich unter Verwendung spezieller Software (z. B.: ANSYS, ABAQUS, RFEM, ...) durchgeführt, wobei vielfach eine hohe Rechnerleistung gefordert wird. Die Berechnung erfolgt durch Zerlegung des zu untersuchenden Objektes in ein feingliedriges zwei- oder dreidimensionales Netz, wobei für jeden Knoten definierte Bedingungen (Translations- oder Rotationsfreiheitsgrade) gelten müssen. Ein großes Problem dieser Berechnungsmethode liegt darin, große Verschiebungen bzw. Gleitungen abzubilden. Speziell das Gleiten schubweicher Schichten, wie es beispielsweise bei genageltem Brettsperrholz der Fall ist, stellt ein großes Problem dar. Im Jahre 1979 wurden an der University of Canterbury in Christchurch, New Zealand, Berechnungen an Zylinderschalen mittels der Finiten-Elemente-Methode durchgeführt. Das primäre Bestreben lag darin, geometrische Nicht-linearitäten von hölzernen Zylinderschalen zu beschreiben, um Einblick in das Verhalten bei großen Verformungen zu gewinnen. In diesem Zusammenhang wurden zwei aus Sperrholz gefertigte Zylinderschalen untersucht. Eine der Schalen war genagelt, die andere geklebt. Die Spannweite betrug jeweils rund 2,5 Meter mit einem Krümmungsradius von 1,3 Metern.<sup>75</sup> Der entsprechende Versuchsaufbau ist in Abb. 98 gegeben.



**Abb. 98:** Abmessung der untersuchten genagelten und geklebten Schalen mit Belastung [Scholz, 2004]

Die Brettsperrholzschaalen waren mit einer Schalenstärke von 12,7 mm jeweils dreilagig aufgebaut. Die mittlere Lage verlief parallel zur Scheitellinie und die Decklamellen senkrecht dazu. Zudem wurden Randbalken und Binderscheiben angebracht. Die radial aufgebrachte Bruchlast der genagelten Schale betrug 3,593 kN/m<sup>2</sup>, bei einer maximalen Verformung von 71,55 mm. Für die geklebte Schale konnte eine Bruchlast von 7,66 kN/m<sup>2</sup> bei einer maximalen Verformung von 13,78 mm ermittelt werden. Speziell die Modellierung der schubweichen, genagelten Schale führte bei der

<sup>75</sup> Moss, P. J., Carr, A. J. (1979). *Nonlinear layered timber cylindrical shell*. Seite 2019/2033

nachlaufenden Berechnung zu Problemen und es konnten keine zufriedenstellenden Ergebnisse der FE-Modellierung für den genagelten Querschnitt erreicht werden.<sup>76</sup>

G. Bryan Walford und Peter J. Moss untersuchten in den Folgejahren weiterhin beide Schalen und stellten fest, dass das Verformungsverhalten der genagelten Schale stark mit dem Schubverformungsverhalten eines ebenen Probenstückes korreliert und besonders auftretende Kriecherscheinungen der Verbindungsmittel eine Rolle spielen. Auf dieser Grundlage entwickelten sie einen verformungs- und lastabhängigen „Nachgiebigkeitskoeffizienten“, der in die Finite-Elementberechnung mit einbezogen wurde um die Systemsteifigkeiten anzupassen. Durch diesen Koeffizienten konnten ausreichend genaue Übereinstimmungen zwischen den Berechnungen und experimentellen Ergebnissen erzielt werden (siehe Abb. 99).

Diese Ergebnisse wurden mit Berechnungsergebnissen nach Schorer verglichen, welche aber viel zu geringe Verformungen lieferten, da die Schubdeformationen in den Fugen vernachlässigt wurden.

G. Bryan Walford und Peter J. Moss beobachteten unter anderem, dass sich die geklebte Schale nach Entlastung wieder vollkommen in ihren Ausgangszustand zurückbegab, wohingegen die genagelte Schale große plastische Verformungen aufwies.<sup>77</sup>

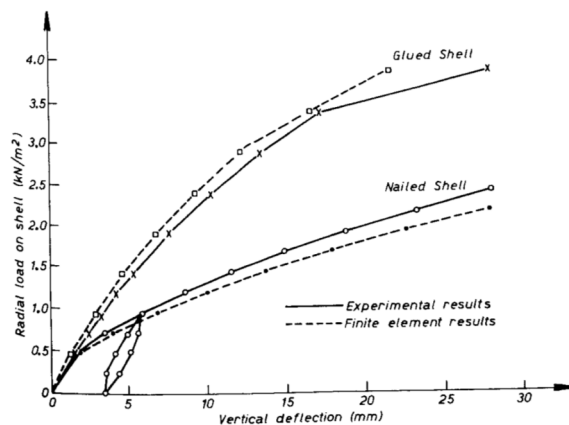


Abb. 99: Vertikale Schalenverformung in Feldmitte [Walford & Moss, 1980]

Im Jahre 1994 untersuchte G. Schickhofer in seiner Dissertation „Starrer und nachgiebiger Verbund bei geschichteten, flächenhaften Holzstrukturen“ [Schickhofer, 1994] wiederum die von Walford und Moss bekannte, geklebte Schale mit einem für die damaligen Zeit neuartigen Finiten Element Typs. Er zeigte, dass die Verwendung des „Composite-Shell-Elements“ (ein mehrschichtiges finites Element) des Programms „ABAQUS“ geeignet ist um geklebte zylindrische Holzschalen ausreichend genau zu beschreiben.

Abweichend von der Methode der Finiten Elemente befasste sich Scholz in [Scholz, 2004] mit der Berechnung der von Walford und Moss bekannten Zylinderschalen nach dem Verfahren der Schubanalogie. Dieses Verfahren basiert auf der Annäherung der Schalen geometrie mittels eines Trägerrostmodells und soll im nächsten Abschnitt näher erläutert werden. Er zeigte, dass die geklebte dreischichtige Schale sehr gut nach Theorie 2. Ordnung berechnet werden konnte. Zudem erhielt er sehr gute Übereinstimmungen mit den Ergebnissen von Schickhofer (siehe Abb. 100).

<sup>76</sup> Moss, P. J., Carr, A. J. (1979). *Nonlinear layered timber cylindrical shell*. Seite 2019/2033

<sup>77</sup> Walford, G. B., Moss, P. J. (1980). *Tests on nailed and glued layered timber cylindrical shells*. Seite 247/263

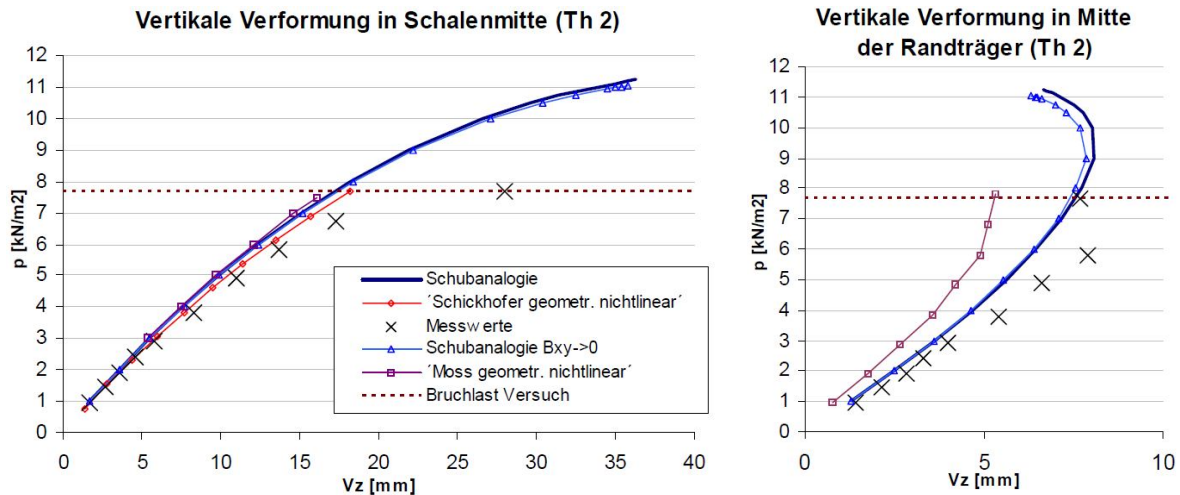


Abb. 100: Vergleich der Vertikalen Verschiebungen im Mittelpunkt der geklebten Schale und in der Mitte der Randträger [Scholz, 2004]

Die genagelte Zylinderschale wurde ebenfalls von *Scholz* untersucht, bei der sich eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen den Messwerten und der Berechnung nach der Schubanalogue zeigte. Die Abweichungen können vermutlich durch die unzureichenden Informationen über die Versuchsdurchführung begründet werden, wodurch ein „weicherer“ Verhalten der Tragstruktur als vorhanden angenommen wurde (siehe Abb. 101).<sup>78</sup>

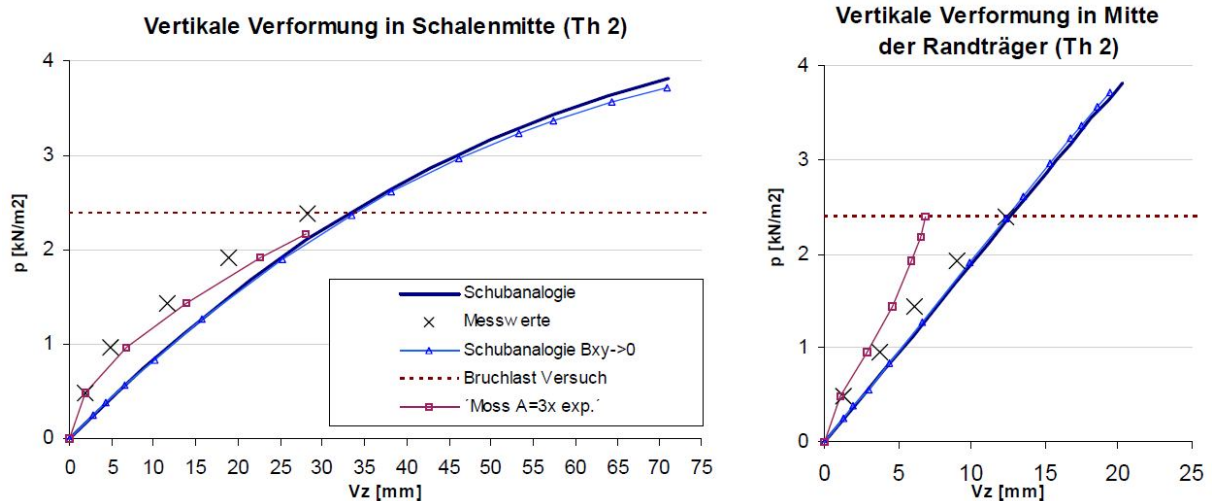


Abb. 101: Vergleich der Vertikalen Verschiebungen im Mittelpunkt der genagelten Schale und in der Mitte der Randträger [Scholz, 2004]

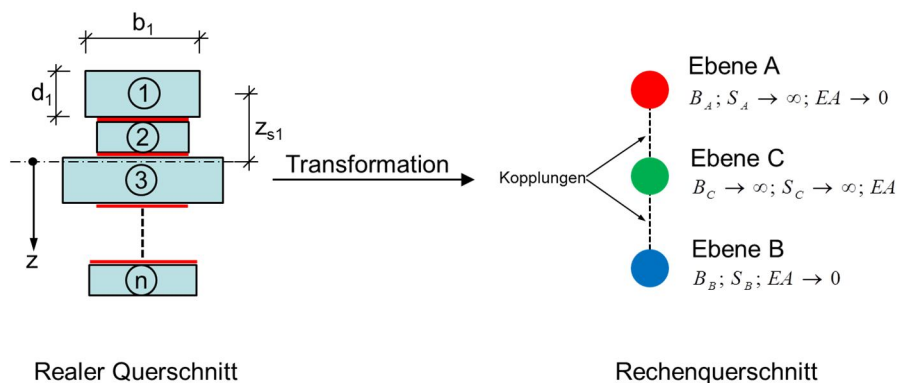
### 3.3 Verfahren der Schubanalogue

Zur Berechnung von orthotropen Schalen bieten sich wie im vorherigen Abschnitt gegeben, nicht viele Möglichkeiten an. Dabei muss besonders darauf geachtet werden, dass das gewählte Berechnungsverfahren möglichst wirklichkeitsnah die stoffliche als auch konstruktive Anisotropie des Werkstoffes und der Struktur wiedergibt. Wie in [Scholz, 2004] beschrieben, bietet das Berechnungsverfahren der Schubanalogue, eine gute Alternative zu Modellierungen in Finiten Elementen Programmen. Mit diesem Verfahren können beliebige Verbundquerschnitte berechnet

<sup>78</sup> Scholz, A. (2004). Ein Beitrag zur Berechnung von Flächentragwerken aus Holz. Seite 145/162

werden, sowie auch flächige Tragwerke mit schubweichen Zwischenschichten. Deshalb sollen die wichtigsten Grundlagen auf den folgenden Seiten aufgezeigt und beschrieben werden.

Dem Verfahren der Schubanalogie liegt eine Transformation des realen Querschnittaufbaues, in einen ideellen Rechenquerschnitt zugrunde. Dieser ideelle Rechenquerschnitt besteht in der Regel aus zwei Ebenen. Die Ebene A berücksichtigt die Biegesteifigkeit der einzelnen realen Ebenen (Eigenanteile). Ebene B beschreibt das Zusammenwirken der realen Ebenen mit Berücksichtigung der Steineranteile und Schubnachgiebigkeit. Bei Bedarf kann eine zusätzliche Ebene C verwendet werden um die Dehnsteifigkeit des betrachteten Querschnittes abzubilden. Diese wird als Gelenkkette in den ideellen Querschnitt übertragen. Die einzelnen Ebenen müssen über ihre Verschiebungen gekoppelt werden. Dies kann über dehnstarre Koppelstäbe oder Verknüpfungen der Verschiebungen in einem Rechenprogramm erfolgen. Abb. 102 zeigt die Überführung eines realen Querschnittes in den ideellen Rechenquerschnitt.



**Abb. 102:** Transformation eines Verbundquerschnittes in den ideellen Rechenquerschnitt

Am ideellen Rechenquerschnitt können die ideellen Schnittkräfte berechnet, und anschließend die Spannungsverteilung am realen Verbundquerschnitt, ermittelt werden.

Auf die Ermittlung der Steifigkeiten der ideellen Ebenen soll im Folgenden eingegangen werden, da die korrekte Transformation von entscheidender Bedeutung ist.<sup>79</sup> Weiterführende Informationen können [Scholz, 2004], [Mestek, 2011], [Winter, et al., 2008] und [Kreuzinger, 1999] entnommen werden.

Wie bereits erläutert, wird der Ebene A der Eigenanteil der Biegesteifigkeit des realen Querschnitts zugewiesen. Dieser beträgt:

$$B^A = \sum (E_i \cdot I_i^A) = \sum \left( E_i \cdot \frac{b_i \cdot d_i^3}{12} \right) \quad (3.1)$$

Der Ebene B hingegen wird der Steineranteil der realen Biegesteifigkeit zugeteilt. Dieser ergibt sich zu:

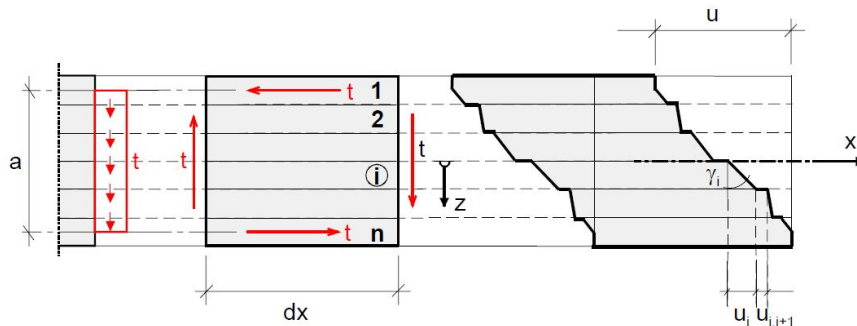
$$B^B = \sum (E_i \cdot I_i^B) = \sum (E_i \cdot d_i \cdot b_i \cdot z_{s,i}^2) \quad (3.2)$$

$z_{s,i}$  ... Schwerpunktabstand der Teilquerschnitte zum Gesamtschwerpunkt

<sup>79</sup> Folgende Erläuterungen und Formeln dieses Kapitels beziehen sich auf:  
Scholz, A. (2004). *Ein Beitrag zur Berechnung von Flächentragwerken aus Holz*. Seite 27-31; 71,72



Das Verhalten des Verbundquerschnittes bezüglich Schubs wird über die Schubdeformation der Ebene B erfasst. Über Verformungsbetrachtungen wird dazu in einer ersten Näherung eine entsprechende Ersatzschubsteifigkeit ermittelt. Geht man davon aus, dass sich zwischen den Schwerachsen der äußeren Teilquerschnitte ein näherungsweise konstant verlaufender Schubfluss einstellt, ergibt sich ein Verschiebungszustand entsprechend nachfolgender Abbildung.



**Abb. 103:** Verformung eines exemplarischen Verbundquerschnitts mit unterschiedlich steifen Schichten unter konstantem Schubfluss [Scholz, 2004]

Die Verschiebungen der einzelnen schubweichen Teilquerschnitte ergeben sich zu:

$$u_i = \frac{\tau}{G_i} \cdot d_i = \frac{t}{G_i \cdot b_i} \cdot d_i \quad (3.3)$$

Zu diesen Verschiebungen kommen die Anteile aus dem schubweichen Verbund der einzelnen Teilquerschnitte hinzu. Diese betragen:

$$u_{i+1} = \frac{\tau}{c_{i,i+1}} = \frac{t}{c_{i,i+1} \cdot b_i} \quad (3.4)$$

Hierin steht  $c_{i,i+1}$  für die Schubsteifigkeit der Verbindung der Schicht  $i$  mit der Schicht  $i+1$  auf  $1 \text{ m}^2$  Fläche bezogen.  $\tau$  ist die Schubspannung,  $t$  der Schubfluss und  $G$  der Schubmodul. Die Ersatzschubsteifigkeit  $S$  wird nun so definiert, dass ein homogener Querschnitt mit dieser Steifigkeit dieselbe Gesamtverzerrung unter Schubbelastung erfährt wie der reale Verbundquerschnitt ihn haben würde.

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{a^2} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{c_{i,i+1}} + \frac{d_1}{2 \cdot G_1 \cdot b_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{d_i}{G_i \cdot b_i} + \frac{d_n}{2 \cdot G_n \cdot b_n} \right\} \quad (3.5)$$

Soll nur die Schubnachgiebigkeit der Verbindung berücksichtigt werden ( $G_i \rightarrow \infty$ ), vereinfacht sich die Gleichung zur Ermittlung der Ersatzschubsteifigkeit zu:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{a^2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{c_{i,i+1}} \quad (3.6)$$

Bei der Berechnung eines flächigen Verbundquerschnitts mit der Schubanalogie sollte dem ideellen System neben der Ersatzschubsteifigkeit  $S$  zudem noch eine passende Ersatzschubsteifigkeit  $D_{xy}$ , welche die Scheibentragwirkung abbildet, zugewiesen werden. Diese kann nach dem aktuellen Stand der Forschung beispielsweise für Brettsperrholzelemente mit Schmalseitenverklebung zu:

$$D_{xy} = \sum_{i=1}^n G_{mean} \cdot d_i \quad (3.7)$$

angenommen werden. Liegt keine Schmalseitenverklebung vor, reduziert sich der Wert auf:

$$D_{xy} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} \cdot G_{mean} \cdot d_i \quad (3.8)$$

Zur näherungsweise Erfassung des Verhaltens von Verbundquerschnitten unter Torsionsbeanspruchung lassen sich ideale Drillsteifigkeiten ableiten. Unter Annahme einer linear verteilten Torsionsschubspannung beträgt die Drillsteifigkeit  $B_{xy}$  einer homogenen Platte pro Meter Plattenbreite:

$$B_{xy} = G_{xy} \cdot \frac{h^3}{6} \quad (3.9)$$

Für die Drillsteifigkeit  $B_{xy,i}$  einer einzelnen Schicht eines schichtweise aufgebauten Flächenelements gilt damit:

$$B_{xy,i} = 2 \cdot G_{xy,i} \cdot z_{s,i}^2 \cdot d_i + G_{xy,i} \cdot \frac{1}{6} \cdot d_i^3 \quad (3.10)$$

Die Drillsteifigkeit einer aus n- Schichten zusammengesetzten Fläche lässt sich über die Summe der Einzelsteifigkeiten ermitteln und beträgt:

$$B_{xy} = \sum_{i=1}^n 2 \cdot G_{xy,i} \cdot z_{s,i}^2 \cdot d_i + \sum_{i=1}^n G_{xy,i} \cdot \frac{1}{6} \cdot d_i^3 \quad (3.11)$$

Dabei bezeichnet das erste Glied dieser Gleichung den Steineranteil, und das zweite Glied den Anteil aus der Eigensteifigkeit der Schicht i an der Drillsteifigkeit. Damit folgt für die ideellen Ebenen:

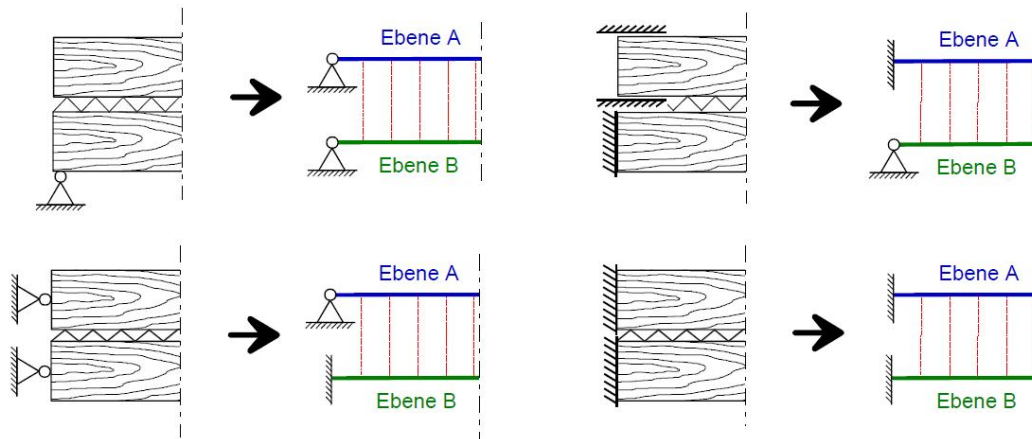
$$B_{xy}^A = \sum_{i=1}^n G_{xy,i} \cdot \frac{1}{6} \cdot d_i^3 \quad (3.12)$$

$$B_{xy}^B = \sum_{i=1}^n 2 \cdot G_{xy,i} \cdot z_{s,i}^2 \cdot d_i \quad (3.13)$$

Nun muss nur noch die Dehnsteifigkeit der Ebene C ermittelt werden. Sie ergibt sich zu:

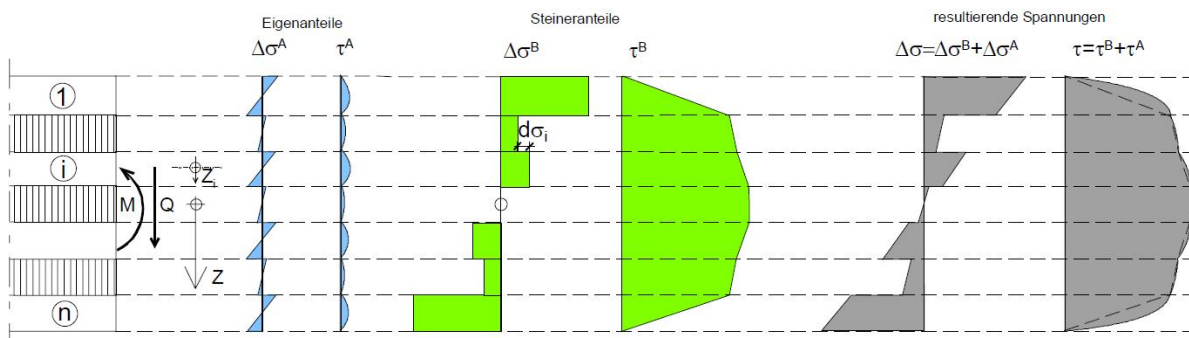
$$D^C = \sum_{i=1}^n (E_i \cdot A_i) = \sum_{i=1}^n (E_i \cdot d_i \cdot b_i) \quad (3.14)$$

Nachdem die entsprechenden Steifigkeiten der einzelnen Ebenen bekannt sind, kann die Berechnung der Schnittgrößen am ideellen System erfolgen. Das statische System entspricht dabei dem real vorhandenen. Die Randbedingungen die sich aus der Auflagerung des realen Systems ergeben, müssen im ideellen System analog wiedergegeben werden. Dies geschieht für gängige Auflagerbedingungen wie in Abb. 104 skizziert.



**Abb. 104:** Verschiedene Endlagerungen eines zweiteiligen Verbundquerschnitts und die Umsetzung im ideellen System [Scholz, 2004]

Die Modellierung des ideellen Systems kann dabei sowohl mit Flächen- als auch mit Stabelementen erfolgen. Aus den am ideellen Querschnitt ermittelten Schnittgrößen kann anschließend die Spannungsverteilung am realen Querschnitt ermittelt werden. Die Ebene A gibt dabei das Tragverhalten aus den Eigenanteilen der Biegesteifigkeiten wieder und liefert dementsprechend die Eigenanteile der Biegespannungen für die einzelnen Teilquerschnitte (siehe Abb. 105). Die Ebene B hingegen beschreibt das Zusammenwirken der einzelnen Schichten, wodurch das Moment der Ebene B zu Normalkräften und damit konstanten Normalspannungen in den Teilquerschnitten führt. Wird das System ferner durch Normalkräfte belastet und durch ein Dreiebenen-Modell beschrieben, so liefert die zusätzlich eingeführte Ebene C ebenfalls Normalspannungen (nicht dargestellt in Abb. 105). Durch Addition dieser Anteile aus den verschiedenen Ebenen wird die resultierende Spannungsverteilung am Verbundquerschnitt erhalten.



**Abb. 105:** Schematische Darstellung der Spannungsermittlung am Beispiel eines Schichtquerschnitts [Scholz, 2004]

Die Formeln zur Berechnung der einzelnen Spannungsanteile aus den Schnittgrößen am ideellen System werden im Folgenden gegeben.

Der Eigenanteil der Biegespannung für die einzelnen Teilquerschnitte beträgt:

$$\sigma_i^A(z_i) = \frac{M^A}{B^A} \cdot E_i \cdot z_i \quad \text{mit} \quad -\frac{d_i}{2} \leq z_i \leq \frac{d_i}{2} \quad (3.15)$$

Der Steineranteil der Biegespannung für die einzelnen Teilquerschnitte ergibt sich zu:

$$\sigma_i^B(z_{S,i}) = \frac{M^B}{B^B} \cdot E_i \cdot z_{S,i} \quad (3.16)$$

Die Normalspannung in den einzelnen Teilquerschnitten aus einer eventuellen Normalkraftbeanspruchung erhält man beim Dreiebenen-Modell aus:

$$\sigma_i^C = \frac{N^C}{D^C} \cdot E_i \quad (3.17)$$

Die Schubspannung setzt sich zusammen aus den parabelförmigen Anteilen der Ebene A und den linearen Anteilen der Ebene B (siehe Abb. 105). Diese ergeben sich aus der bereichsweisen Integration über die Teilquerschnitte. Für den Eigenanteil der Schubspannung der einzelnen Teilquerschnitte gilt:

$$\tau_i^A(z_i) = - \int_{\frac{d_i}{2}}^{z_i} \frac{d\sigma^A}{dx} dz = - \int_{\frac{d_i}{2}}^{z_i} \frac{dM^A}{dx} \cdot \frac{E_i}{B^A} \cdot z_i dz = -Q^A \cdot \frac{E_i}{B^A} \cdot \left( \frac{z_i^2}{2} - \frac{d_i^2}{8} \right) \quad (3.18)$$

Für den Steineranteil der Schubspannung der einzelnen Teilquerschnitte folgt analog:

$$\tau_i^B(z_{s,i}; z_i) = - \int_{\frac{d_i}{2}}^{z_i} \frac{d\sigma^B}{dx} dz + \tau_i^0 = - \int_{\frac{d_i}{2}}^{z_i} \frac{dM^B}{dx} \cdot \frac{E_i}{B^B} \cdot z_{s,i} dz + \tau_i^0 \quad (3.19)$$

$$\tau_i^B(z_{s,i}; z_i) = - \frac{Q^B \cdot E_i}{B^B} \cdot z_{s,i} \cdot \left( z_i + \frac{d_i}{2} \right) + \tau_i^0$$

Die Summe der Einzelanteile führt dann, wie bereits erläutert, zu den resultierenden Spannungsverteilungen:

$$\text{Normalspannungen:} \quad \sigma_i(z_i; z_{s,i}) = \sigma_i^A(z_i) + \sigma_i^B(z_{s,i}) + \sigma_i^C \quad (3.20)$$

$$\text{Schubspannungen:} \quad \tau_i(z_i; z_{s,i}) = \tau_i^A(z_i) + \tau_i^B(z_{s,i}; z_i) \quad (3.21)$$

Zur Berechnung von Flächen aus zusammengeklebten Schichten kann das Berechnungsverfahren wesentlich vereinfacht werden. Dazu können die Ebenen A, B und C in einer Ebene zusammengefasst werden, wodurch sich der Modellierungsaufwand im Trägerrostmodell erheblich reduziert. Der im Folgenden aufgeführte Formelkatalog stellt eine Zusammenfassung der wichtigsten Formeln aus dem informativen Anhang D der [DIN 1052:2008-12] dar. Dabei werden die Steifigkeiten für Platten in einer xy-Ebene angegeben.

Pro Meter Streifen berechnen sich die entsprechenden Biegesteifigkeiten wie folgt:

$$B_x = \sum (E_{x,i} \cdot d_i \cdot z_i^2) + \sum \left( E_{x,i} \cdot \frac{d_i^3}{12} \right) \quad (3.22)$$

$$B_y = \sum (E_{y,i} \cdot d_i \cdot z_i^2) + \sum \left( E_{y,i} \cdot \frac{d_i^3}{12} \right)$$

Für die Drillsteifigkeit gilt:

$$B_{xy} = \sum (2 \cdot G_{xy,i} \cdot d_i \cdot z_i^2) + \sum \left( G_{xy,i} \cdot \frac{d_i^3}{6} \right) \quad (3.23)$$

Handelt es sich bei dem betrachteten Element um Brettsper Holz, dessen Brettlagen nicht an den Schmalseiten verklebt sind, kann die Drillsteifigkeit näherungsweise zu Null gesetzt werden.

Die Schubsteifigkeit in der xz- bzw. in der yz-Ebene kann wie folgt berechnet werden:

$$\frac{1}{S_{xz}} = \frac{1}{a^2} \cdot \left\{ \frac{d_1}{2 \cdot G_{xz,1}} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{d_i}{G_{xz,i}} + \frac{d_n}{2 \cdot G_{xz,n}} \right\} \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{S_{yz}} = \frac{1}{a^2} \cdot \left\{ \frac{d_1}{2 \cdot G_{yz,1}} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{d_i}{G_{yz,i}} + \frac{d_n}{2 \cdot G_{yz,n}} \right\}$$

Die Dehnsteifigkeiten berechnen sich wie folgt:

$$D_x = \sum_{i=1}^n (E_{x,i} \cdot d_i) \quad (3.25)$$

$$D_y = \sum_{i=1}^n (E_{y,i} \cdot d_i)$$

Für die Schubsteifigkeit in der xy- Ebene gilt:

$$D_{xy} = \sum_{i=1}^n (G_{xy,i} \cdot d_i) \quad (3.26)$$

Handelt es sich bei dem betrachteten Element um Brettsper Holz, dessen Brettlagen an den Schmalseiten nicht verklebt sind, muss die oben angegebene Schubsteifigkeit mit 0,25 multipliziert werden.

Aus den am Trägerrost berechneten Schnittgrößen können anschließend wieder Spannungen am realen Querschnitt berechnet werden.



### 3.4 Einfluss der Orthotropie

Um den Einfluss eines orthotropen Materialverhaltens, wie es beispielsweise bei Brettsperrholz der Fall ist, auf die Tragfähigkeit von Zylinderschalen zu untersuchen, wurden diverse Berechnungen an Trägerrostmodellen durchgeführt. Dazu wurde eine 15 Meter lange Zylinderschale betrachtet, deren E-Modul in Ringrichtung variiert und in longitudinaler Richtung konstant gehalten wurde. Die Variation des E-Moduls führte zu einer Änderung der Dehnsteifigkeit und Biegesteifigkeit in Ringrichtung. In allen betrachteten Fällen wurde von einer gleichbleibenden Schub- bzw. Scheibensteifigkeit ausgegangen. Das entsprechende statische System ist in Abb. 106 gegeben.

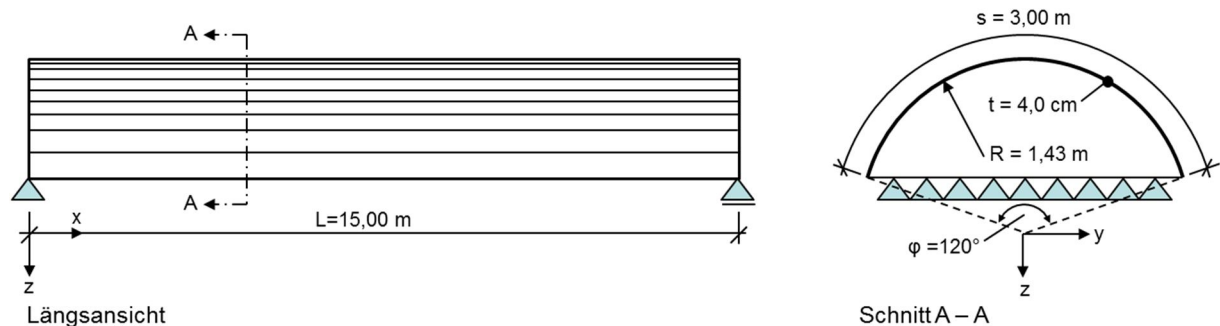


Abb. 106: Statisches System der betrachteten Schale in Ansicht und Schnitt

Um den Einfluss der Orthotropie auf das Gesamtsystem zu untersuchen, wurden zwei Lastfälle betrachtet. Ein symmetrischer Lastfall (LF 1) mit 5,0 kN/m<sup>2</sup> konstanter Last auf der gesamten Schale, sowie ein asymmetrischer Lastfall (LF 2) mit 5,0 kN/m<sup>2</sup> wirkend auf den halben Schalenquerschnitt.

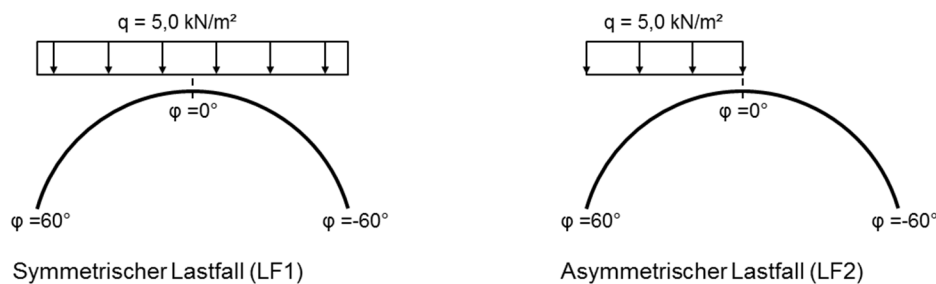


Abb. 107: Betrachtete Lastfälle

Es wurden Schnittgrößen an der Traufe ( $\varphi=60^\circ$ ;  $\varphi=-60^\circ$ ), am Scheitel ( $\varphi=0^\circ$ ), jeweils in Feldmitte und Verformungen bei  $\varphi=60^\circ$  in Feldmitte nach Theorie erster Ordnung unter Berücksichtigung der Schubverformungen berechnet. Berechnungen höherer Ordnung haben keine relevante Steigerung der Ergebnisse gezeigt, weshalb eine Berechnung nach Theorie erster Ordnung als ausreichend erachtet wurde. Die Stabilität der betrachteten Schale wurde ebenfalls außer Acht gelassen. Für das isotrope Ausgangsmaterial wurden folgende Werte angenommen (Querdehnzahl  $\nu=0,2$ ):

	Longitudinale Richtung	Ringrichtung
E-Modul	$E_L = 32.000 \text{ [MN/m}^2\text{]}$	$E_R = 32.000 \text{ [MN/m}^2\text{]}$
Schubmodul	$G = 13.333 \text{ [MN/m}^2\text{]}$	

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

Tabelle 2: Schubmodul und E-Modul des Ausgangsmaterials

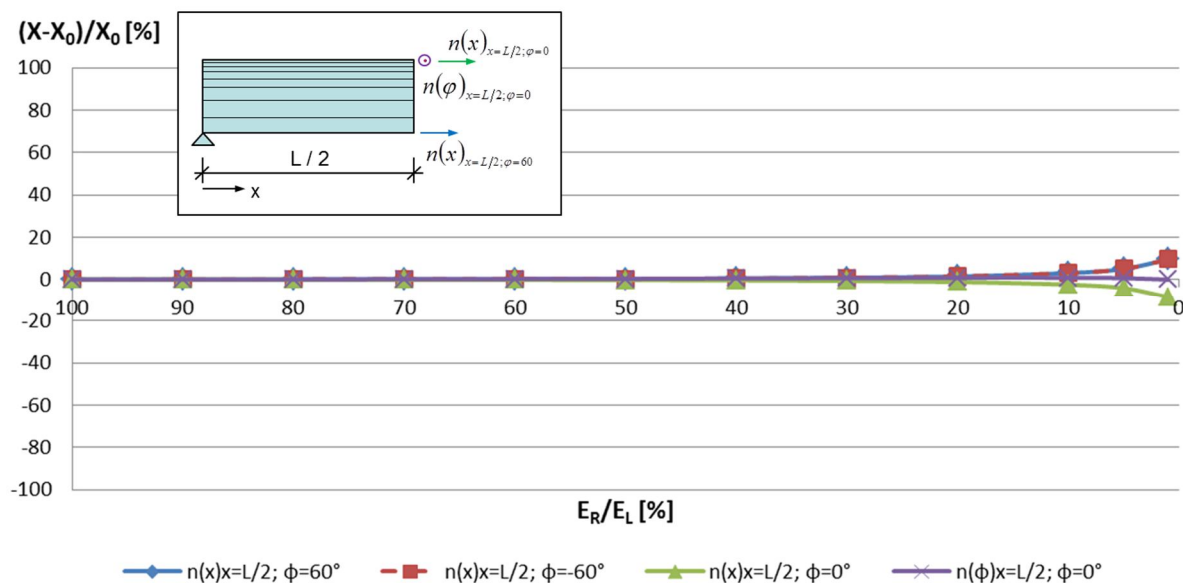
Ausgehend vom oben gegebenen Material, wurde der E-Modul in Ringrichtung kontinuierlich abgemindert. Die entsprechenden lokalen Stabsteifigkeiten des Trägerrostmodelles konnten nach

folgenden Formeln bestimmt werden, wobei von einem äquidistanten Rostabstand  $d_s=d_x=0,1\text{ m}$  ausgegangen wurde (Schalenstärke  $d=0,04\text{ m}$ ).

	Längsrichtung	Ringrichtung	Einheit
Biegesteifigkeit: (lokale y-Achse)	$K_y^L = E_L \cdot \frac{d^3}{12} \cdot ds$	$K_y^R = E_R \cdot \frac{d^3}{12} \cdot dx$	[MNm <sup>2</sup> ]
Biegesteifigkeit: (lokale z-Achse)	$K_z^L = \frac{ds \cdot dx^2}{6} \cdot d \cdot G$	$K_z^R = \frac{dx \cdot ds^2}{6} \cdot d \cdot G$	[MNm <sup>2</sup> ]
Drillsteifigkeit:	$K_{xy}^L = G \cdot \frac{d^3}{6} \cdot ds$	$K_{xy}^R = G \cdot \frac{d^3}{6} \cdot dx$	[MNm <sup>2</sup> ]
Schubsteifigkeit:	$S_{xz}^L = S_{yz}^L = G \cdot d \cdot ds$	$S_{xz}^R = S_{yz}^R = G \cdot d \cdot dx$	[MN]
Dehnsteifigkeit:	$D_x^L = E_L \cdot d \cdot ds$	$D_x^R = E_R \cdot d \cdot dx$	[MN]

**Tabelle 3:** Stabsteifigkeiten zur Berechnung einer orthotropen Zylinderschale mittels Trägerrostmodell

Anschließend konnten die Berechnungsergebnisse des abgeminderten Systems  $X$  mit den Werten des Ausgangssystems  $X_0$  verglichen und die relativen Abweichungen bezogen auf den Ausgangswert bestimmt werden.



**Abb. 108:** Einfluss der Steifigkeit in Ringrichtung auf die Normalkräfte in Feldmitte im LF 1

In Abb. 108 ist zu sehen, dass im LF 1 eine Reduktion der Ringsteifigkeiten kaum einen Einfluss auf die Normalkräfte in Feldmitte besitzt. Erst ab einem in Ringrichtung verlaufenden E-Modul, der nur noch 10 % des longitudinalen E-Moduls beträgt ist ein leichter Anstieg der Normalkräfte zu verzeichnen. Wie in Abb. 109 zu erkennen, ist ab einer Abminderung des Ring-E-Moduls von 60 % eine merkliche Änderung in den Biegemomenten zu verzeichnen. Es wird darauf hingewiesen, dass die Drehmomenten-Vektoren  $m(x)_{x=L/2;\phi=60}$  bzw.  $m(x)_{x=L/2;\phi=-60}$  senkrecht zum Krümmungsradius  $R$  stehen und in diesem Beispiel, eine Verwölbung der Schalenwandung nach innen verursachen.

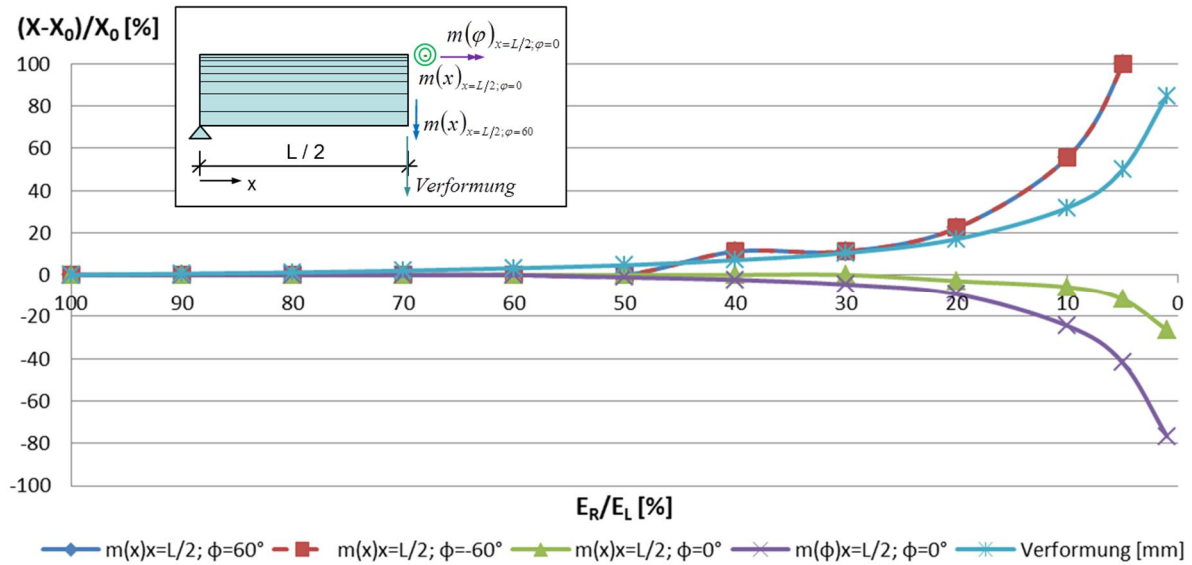


Abb. 109: Einfluss der Steifigkeit in Ringrichtung auf Momente und Verformungen im LF 1

Im asymmetrischen Lastfall LF 2 können keine merklichen Einflüsse der Orthotropie erkannt werden. Wie Abb. 110 zeigt, verhalten sich die Normalkräfte analog zu den Ergebnissen des ersten Lastfalles. Erst ab einer Abminderung des E-Moduls in Ringrichtung um rund 95 %, ist ein Anstieg der Normalkräfte von ca. 10 % zu erwarten.

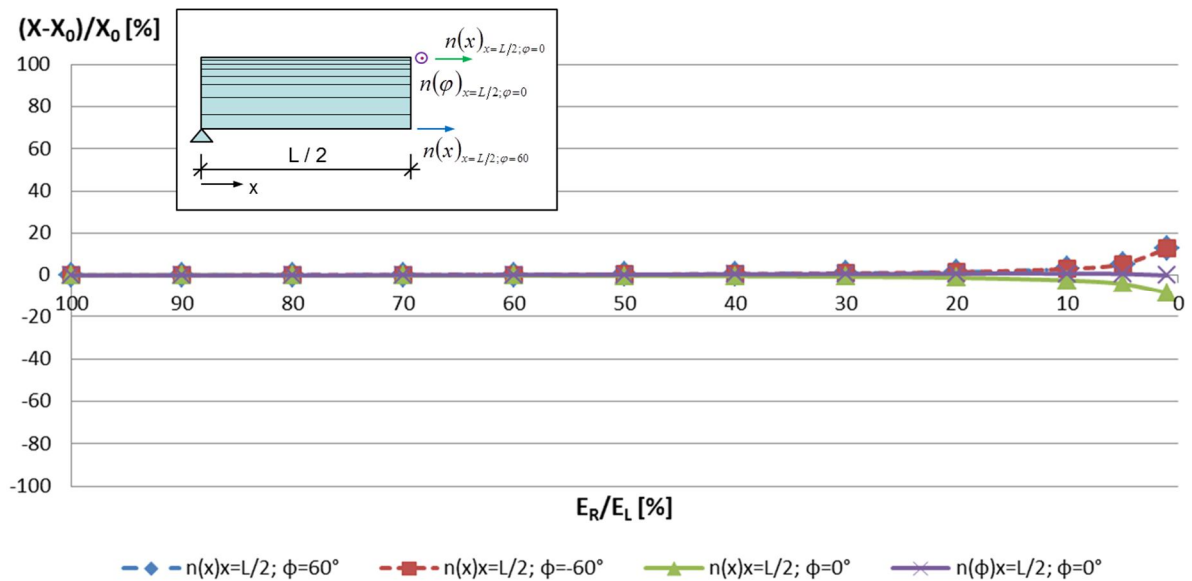


Abb. 110: Einfluss der Steifigkeit in Ringrichtung auf die Normalkräfte im LF 2

Auch für die Betrachtung der Momente im LF 2 zeigt sich, dass die Orthotropie kaum einen Einfluss besitzt (siehe Abb. 111). Lediglich ab einer Abminderung des Ring-E-Moduls um 90 % ist ein Anstieg der Momente in der Schalenwandung von rund 10 % zu erwarten.

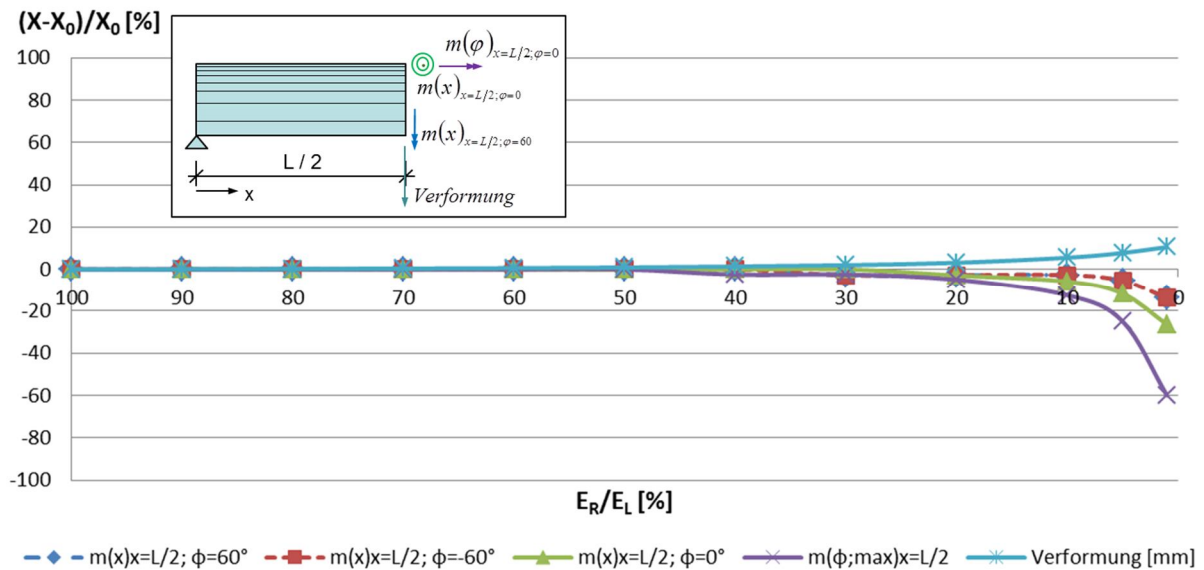


Abb. 111: Einfluss der Steifigkeit in Ringrichtung auf Momente und Verformungen im LF 2

Das hier beobachtete Verhalten ist darauf zurück zu führen, dass die Lastabtragung bei Zylinderschalen primär in longitudinaler Richtung erfolgt und vorwiegend von der Steifigkeit in Längsrichtung bzw. von der Scheibenschubsteifigkeit abhängig ist. Dieser Aspekt birgt Vorteile für den Einsatz orthotroper Holzwerkstoffe. Diese können auf Grund ihrer Steifigkeitsverhältnisse in Ringrichtung leicht gebogen werden, bei wesentlich höherer Scheibensteifigkeit und Dehn- bzw. Biegesteifigkeit in longitudinaler Richtung.

### 3.5 Fazit

In der Historie wurden sehr wenige Berechnungen an orthotropen Schalen durchgeführt, die zumeist auch nicht zufriedenstellend ausfielen, da kaum Korrelationen mit Versuchsergebnissen nachgewiesen werden konnten. Vielfach wurden dazu Programme auf der Grundlage von Finiten Elementen verwendet. Es hat sich gezeigt, dass die Berechnungsmethode der Schubanalogie eine sehr gute Alternative zur Berechnung nach der Methode der Finiten Elemente darstellt. Dabei kann die Zylinderschale als Trägerrostmodell abgebildet und Belastungen als Knotenlasten auf das System aufgebracht werden. Durch eine entsprechende Anpassung der Stabsteifigkeiten kann die Orthotropie des Materials berücksichtigt werden. Wird von einem orthotropen Materialverhalten ausgegangen, wie es beispielsweise bei Brettsperrholz der Fall ist, so haben Berechnungen gezeigt, dass der Einfluss der Orthotropie als sehr gering erachtet werden kann. Ein Einfluss der Orthotropie ist lediglich auf die Biegebeanspruchung in der Schalenwandung zu verzeichnen (ab einer Abminderung der Schalensteifigkeit in Ringrichtung von mehr als 50 %) und auf Normalkräfte in der Schalenwandung ab einer Abminderung der Schalensteifigkeit in Ringrichtung von mehr als 90 %. Es ist an dieser Stelle zu vermerken, dass die genannten Ergebnisse an Berechnungen nach Theorie 1. Ordnung entwickelt und Stabilitätsbetrachtungen außenvorgelassen wurden.

## 4 Hölzerne Zylinderschalen

### 4.1 Hintergrund - Einleitung

Wie der historische Überblick der Schalenelemente in Kapitel 1 zeigt, bilden Zylinderschalen hoch effiziente und materialsparende Bauwerke, die zur Überbrückung großer Spannweiten bei minimalem Eigengewicht geeignet sind. Da in der Vergangenheit bereits mehrere dieser Bauwerke realisiert wurden, sollen in diesem Abschnitt der Arbeit bereits bekannte konstruktive Prinzipien des Bauens zusammengetragen und neue Möglichkeiten der Umsetzung aufgezeigt werden. Speziell die Herstellung durch Holzwerkstoffplatten soll untersucht werden, da die Entwicklungen und die Möglichkeiten zur Produktion großformatiger Holzwerkstoffplatten immer weiter voranschreiten. Laut Angabe einiger Hersteller ist es inzwischen möglich, Holzwerkstoffplatten mit bis zu 4,50 Metern Breite und über 60,0 Metern Länge zu produzieren (siehe Abb. 112).<sup>80</sup>



**Abb. 112:** Produktionsstraße für Dreischichtplatten [www.dieffenbacher.de]

Dabei muss beachtet werden, dass diese Plattendimensionen fast nur für plan produzierte Holzwerkstoffe möglich sind. Es gibt Verfahren großformatige, gekrümmte Holzwerkstoffe herzustellen, wie in Abb. 113 zu sehen ist. Diese Art der Herstellung ist jedoch vielfach sehr kosten-, energie- und zeitintensiv. Zudem können nicht solche extremen Maße, wie bei der Produktion von planen Platten erreicht werden und durch die Krümmung entstehen mitunter erhebliche Transportprobleme.

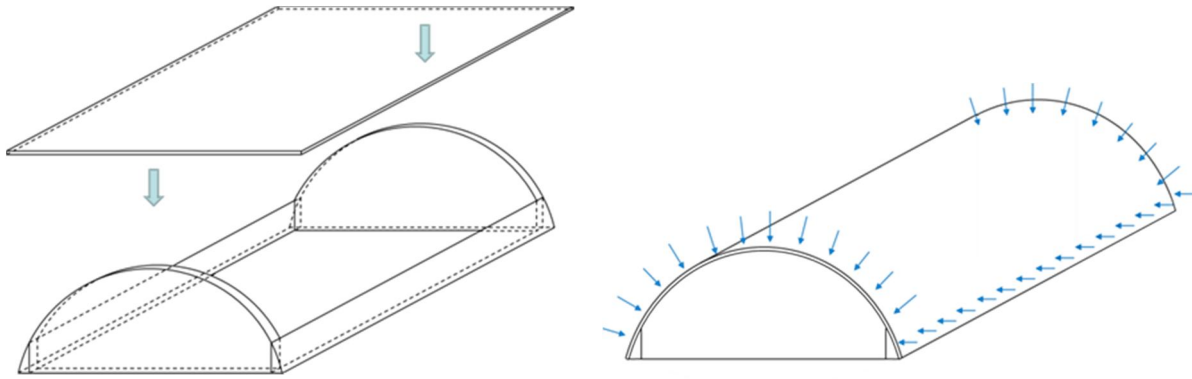


**Abb. 113:** Gekrümmte Brettsper Holzplatte der Aussegnungshalle Gräfelfing [Winter, et al., 2008]

Daher soll die Idee verfolgt werden, plan produzierte Plattenwerkstoffe zur Herstellung von Zylinderschalen einzusetzen. Es ist bei den zu verwendenden Holzwerkstoffplatten auf eine ausreichende geometrische Ausdehnung, sowie eine nicht zu hohe Biegesteifigkeit um die zu krümmende Achse zu achten. Eine entsprechende grafische Darstellung zur möglichen Herstellung ist in Abb. 114 gegeben.

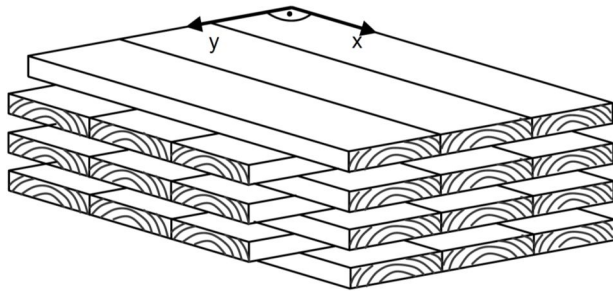
<sup>80</sup> www.dieffenbacher.de, Download am 08.05.2013





**Abb. 114:** Herstellung einer Zylinderschale mittels einer plan produzierten Holzwerkstoffplatte

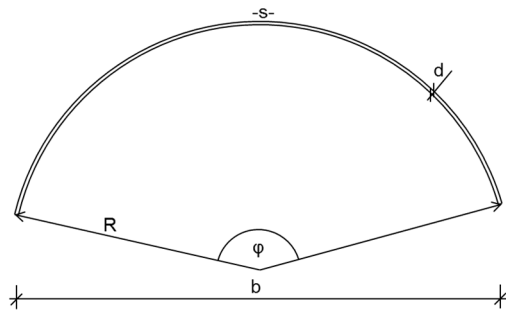
Durch die erforderliche einachsige Krümmung können orthotrope Materialeigenschaften von Vorteil sein. Eine solche Orthotropie kann beispielsweise bei Brettsperrholz (siehe Abb. 115) und Furnierschichtholz gefunden werden. Positive Eigenschaften besitzen vor allem Dreischichtplatten, da diese eine geringe Biegesteifigkeit besitzen und mit sehr großen geometrischen Ausdehnungen produziert werden können.



**Abb. 115:** Schematische Darstellung [Mestek, 2011]

## 4.2 Zusammenhänge zwischen Krümmung und Spannung

Die Herstellung von hölzernen Zylinderschalen ist maßgeblich vom möglichen Krümmungsradius des verwendeten Holzproduktes abhängig. Dieser steht in direktem Zusammenhang mit den auftretenden Spannungen die während der Krümmung entstehen. Die Größe der entstehenden Spannungen ist unter Annahme von eben bleibenden Querschnitten und Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes vom E-Modul und der Querschnittshöhe abhängig. Die Zusammenhänge zwischen verwendetem Material und möglichen bzw. erforderlichen geometrischen Beziehungen werden im Folgenden hergeleitet. Dazu werden Diagramme und Formeln erarbeitet, die bei einer späteren Abschätzung und Berechnung von gekrümmten Bauteilen hilfreich sein können. Alle Betrachtungen werden am Kreissegment durchgeführt, da dies zu einer einfacheren Handhabung vieler mathematischer Ausdrücke führt. Zudem empfehlen Autoren wie *Dischinger*, *Finsterwalder* und *Lundgren* die Verwendung der Kreisgeometrie zur Vereinfachung in der späteren praktischen Umsetzung. Die entsprechenden geometrischen Bezeichnungen am Kreissegmentbogen sind in Abb. 116 dargestellt.



Bezeichnungen:

$s$  ... Bogenlänge

$d$  ... Lamellenstärke

$R$  ... Krümmungsradius

$\varphi$  ... Öffnungswinkel

$b$  ... Sehnenlänge

**Abb. 116:** Kreissegment mit geometrischen Bezeichnungen

Es gilt:

$$s = R \cdot \varphi \quad (4.1)$$

$$b = 2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (4.2)$$

Durch die Krümmung eines Werkstoffes mit einem konstanten Krümmungsradius  $R$  kann die auftretende Biegeandspannung  $\sigma$  nach Gleichung (4.3) berechnet werden. Es wird davon ausgegangen, dass sich der Krümmungsradius  $R$  auf die Schwerlinie des betrachteten Materials bezieht. Dabei sollen alle Spannungen im rein elastischen Bereich betrachtet werden. Unter Zugrundelegung einer konstanten Krümmung können Schubspannungen und Schubverformungen ausgeschlossen werden.

$$\sigma = \frac{E \cdot d}{2 \cdot R} \quad (4.3)$$

Auf Grundlage von Gleichung (4.3) kann ein minimal möglicher Krümmungsradius  $R_{min}$  für eine maximal zulässige Randspannung  $\sigma_{zul}$  ermittelt werden.

$$R_{min} = \frac{E \cdot d}{2 \cdot \sigma_{zul}} \quad (4.4)$$

Unter Berücksichtigung der im Bauwesen verwendeten Festigkeitsklassen nach [DIN EN 338:2010-12] sollen mögliche Krümmungsradien diverser Holzlamellen ermittelt werden. Für den E-Modul wird der Mittelwert des E-Moduls  $E_{0,mean}$  verwendet, für die zulässige Spannung der 5 %-Quantil-Wert (siehe Gleichung (4.5)).

$$R_{min} = \frac{E_{0,mean} \cdot d}{2 \cdot f_{m,k}} \quad (4.5)$$

Eine Auswertung in Abhängigkeit der gebräuchlichsten Holzfestigkeitsklassen nach [DIN EN 338:2010-12] ist in Abb. 117 zu sehen.

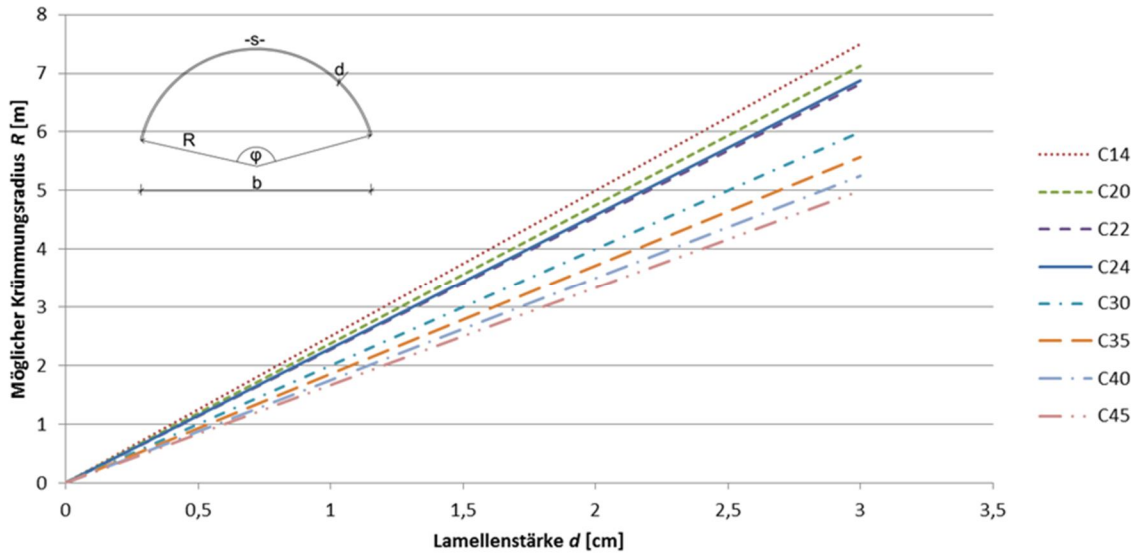


Abb. 117: Möglicher Krümmungsradius  $R$  in Abhängigkeit der Lamellenstärke  $d$  und der Holzfestigkeitsklasse

Es ist zu erkennen, dass eine höhere Holzfestigkeitsklasse kleinere Krümmungsradien zulässt als niedrige, da die Biegezugfestigkeit schneller ansteigt als der E-Modul. Das bedeutet, dass zur Herstellung kleiner Krümmungsradien hohe Festigkeitsklassen erforderlich sind. In diesem Zusammenhang soll das Verhältnis aus Bogenlänge  $s$  zu Lamellenstärke  $d$  in Abhängigkeit des Öffnungswinkels  $\varphi$  und der zulässigen Biegegrandspannungen  $\sigma_{zul}$  ermittelt werden. Die mathematische Formulierung sieht wie folgt aus:

$$\frac{s}{d} = \hat{\varphi} \cdot \frac{E}{2 \cdot \sigma_{zul}} \xrightarrow{\text{für den Holzbau}} \frac{s}{d} = \hat{\varphi} \cdot \frac{E_{0,mean}}{2 \cdot f_{m,k}} \quad (4.6)$$

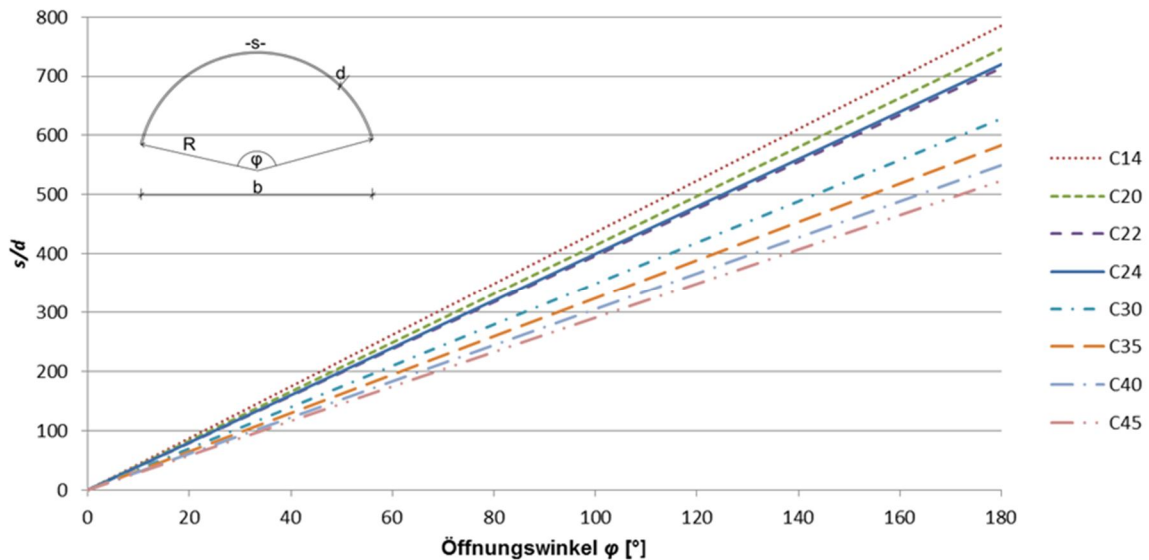


Abb. 118:  $s/d$  in Abhängigkeit des Öffnungswinkels  $\varphi$  und der Holzfestigkeitsklasse

Unter Zuhilfenahme von Gleichung (4.6) bzw. Abb. 118 kann die erforderliche Länge einer Lamelle in Abhängigkeit der Lamellenstärke  $d$ , des Öffnungswinkels  $\varphi$  und der Holzfestigkeitsklasse ermittelt werden. Als Beispiel für die erforderliche Bogenlänge, soll dies für eine Lamelle der Festigkeitsklasse C30, einen Öffnungswinkel von  $140^\circ$  und einer Lamellenstärke von 1,6 cm exemplarisch gezeigt werden.

$$s = \hat{\varphi} \cdot \frac{E_{0,mean}}{2 \cdot f_{m,k}} \cdot d = \frac{140^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \cdot \frac{12000 \text{ MN/m}^2}{2 \cdot 30 \text{ MN/m}^2} \cdot 1,6 \text{ cm} = 782 \text{ cm} = 7,82 \text{ m} \quad (4.7)$$

Das bedeutet, es bedarf einer 7,82 Meter langen Lamelle der Festigkeitsklasse C30, um einen Öffnungswinkel von 140° bei einem konstanten Krümmungsradius und einer Lamellenstärke von 1,60 Zentimetern herzustellen.

Ein weiterer Zusammenhang kann zwischen dem Verhältnis aus Sehnenlänge  $b$  zur Lamellenstärke  $d$  in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel  $\varphi$  und der zulässigen Biegerandspannung  $\sigma_{zul}$  hergeleitet werden. So kann beispielsweise bei Kenntnis der Lamellenstärke und Holzfestigkeitsklasse die minimal mögliche Sehnenlänge ermittelt werden. Ein Maximum der Sehnenlänge wird bei einem Öffnungswinkel von 180° erreicht, und kann aus Gleichung (4.8) berechnet oder Abb. 119 entnommen werden.

$$\frac{b}{d} = \frac{E}{\sigma_{zul}} \cdot \sin\left(\frac{\hat{\varphi}}{2}\right) \xrightarrow{\text{für den Holzbau}} \frac{b}{d} = \frac{E_{0,mean}}{f_{m,k}} \cdot \sin\left(\frac{\hat{\varphi}}{2}\right) \quad (4.8)$$

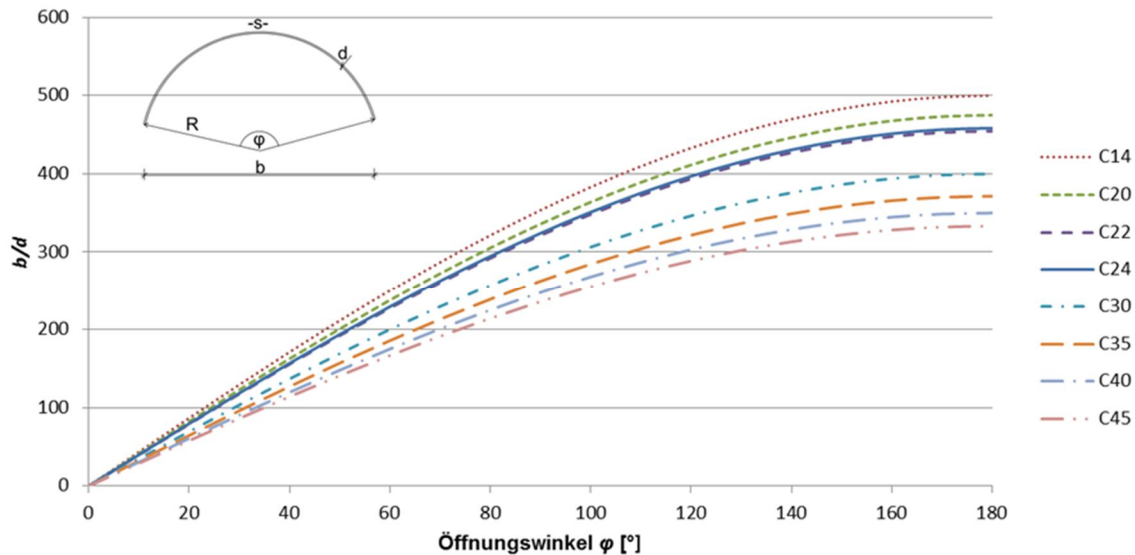


Abb. 119:  $b/d$  in Abhängigkeit des Öffnungswinkels „ $\varphi$ “ und der Holzfestigkeitsklasse

Exemplarisch soll die mögliche Sehnenlänge  $b$  für eine Lamelle der Stärke 1,6 cm, einem Öffnungswinkel von 140° und der Festigkeitsklasse C30 berechnet werden.

$$b = \frac{E_{0,mean}}{f_{m,k}} \cdot \sin\left(\frac{\hat{\varphi}}{2}\right) \cdot d = \frac{12000 \text{ MN/m}^2}{30 \text{ MN/m}^2} \cdot \sin\left(\frac{140^\circ \cdot \pi}{2 \cdot 180^\circ}\right) \cdot 1,6 \text{ cm} = 601 \text{ cm} = 6,01 \text{ m} \quad (4.9)$$

Das Ergebnis zeigt, dass bei Verwendung einer Holzlamelle der Festigkeitsklasse C30 und einer Stärke von 1,60 cm eine minimale Sehnenlänge von 6,01 m möglich ist.

### 4.3 Normative Regelungen zur Krümmung von Holzbauteilen

In diesem Abschnitt werden normativ festgelegte Regeln zur Produktion von gekrümmtem Brettsperrholz und Brettschichtholz untersucht. Hinweise zur Herstellung gekrümmter Brettsperrholzelemente finden sich im Entwurf der [DIN EN 16351:2011-12]. Grundsätzlich wird nach

dieser Norm ein Produkt als gekrümmtes Brettsperrholz bezeichnet, sobald seine Überhöhung mehr als 1% der Spannweite beträgt. In Kapitel 7.5 des Entwurfs der [DIN EN 16351:2011-12] wird explizit auf die maximal zulässige Dicke der Lamellen in Abhängigkeit des Krümmungsradius und der Biegefestigkeit eingegangen. Dabei beträgt die maximal zulässige Stärke der Lamellen:

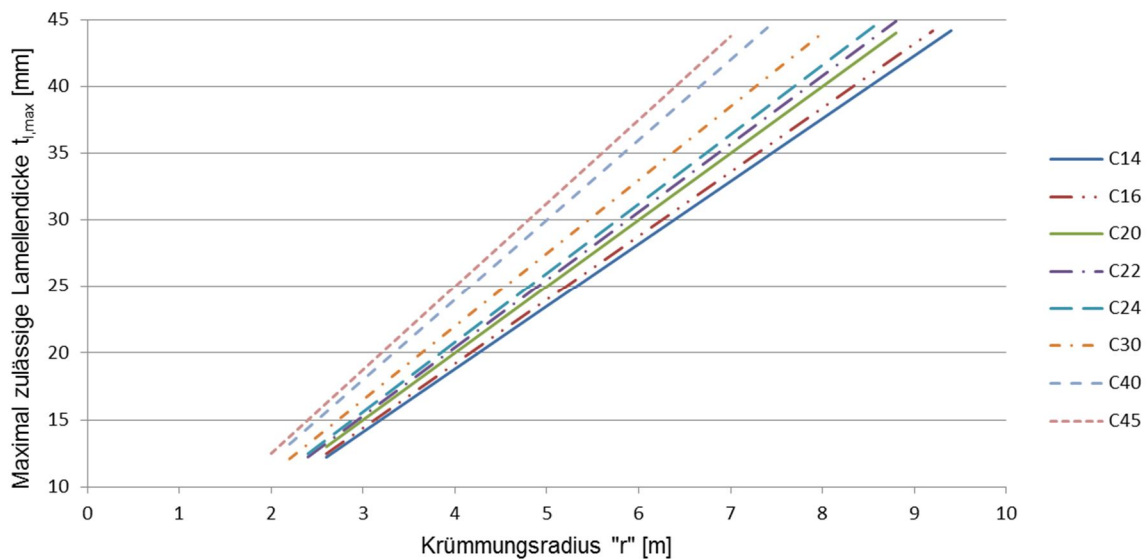
$$t_l \leq \frac{r}{250} \cdot \left( 1 + \frac{f_{m,j,dc,k}}{80} \right) \quad (4.10)$$

$t_l$  ... endgültige Lamellendicke [mm]

$r$  ... Krümmungsradius der Lamelle im Element mit dem kleinsten Radius [mm]

$f_{m,j,dc,k}$  ... deklarierter charakteristischer Wert der Biegefestigkeit der Keilzinkenverbindung [N/mm<sup>2</sup>]

Die Lamellendicke muss nach dieser Norm zwischen 12 und 45 Millimeter betragen. Abb. 120 zeigt maximal zulässige Lamellenstärken (nach Gleichung (4.10)) für ausgewählte Holzfestigkeitsklassen, die zur Herstellung von Brettsperrholz verwendet werden können. Es ist zu sehen, dass bei steigender Festigkeitsklasse und gleichbleibendem Krümmungsradius stärkere Lamellen zulässig sind. Der kleinstmögliche Krümmungsradius, welcher nach dieser Norm erreicht werden kann liegt bei rund 2,0 Metern und einer Festigkeitsklasse C45.



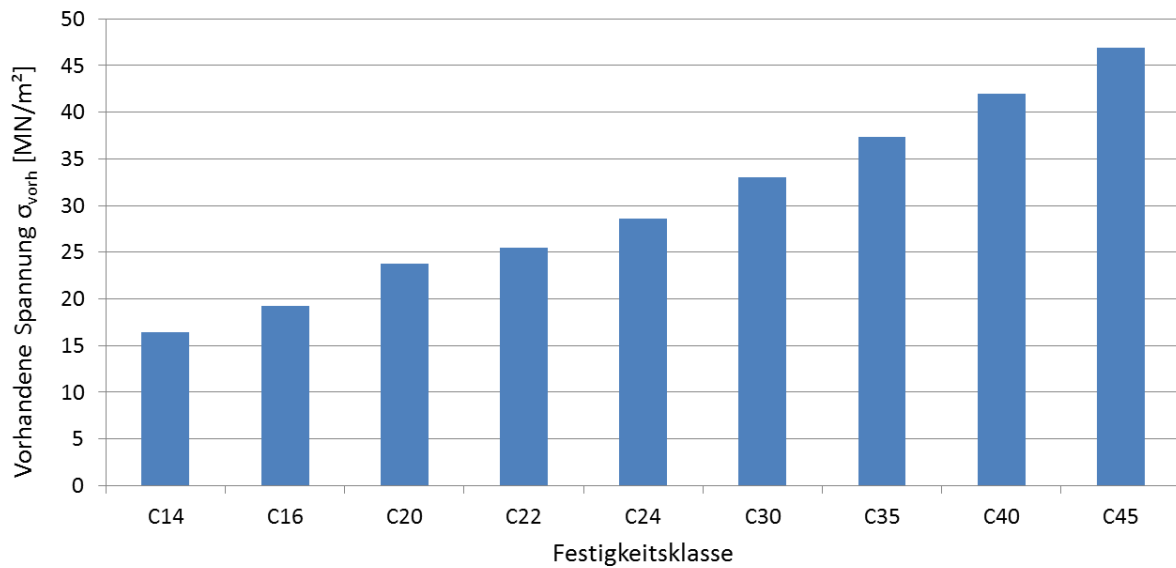
**Abb. 120:** Zulässige Lamellendicken für verschiedene Krümmungsradien und Festigkeitsklassen nach [E DIN EN 16351:2011-12]

Nun sollen die entstehenden Eigenspannungen unter einer maximal zulässigen Lamellenstärke und Berücksichtigung des minimal möglichen Krümmungsradius berechnet werden (siehe Gleichung (4.11)). Dazu wird von einem rein elastischen Verhalten des Holzes ausgegangen.

$$\sigma_{vorh} = \frac{t_{l,max} \cdot E_{0,mean}}{2 \cdot r} \quad (4.11)$$

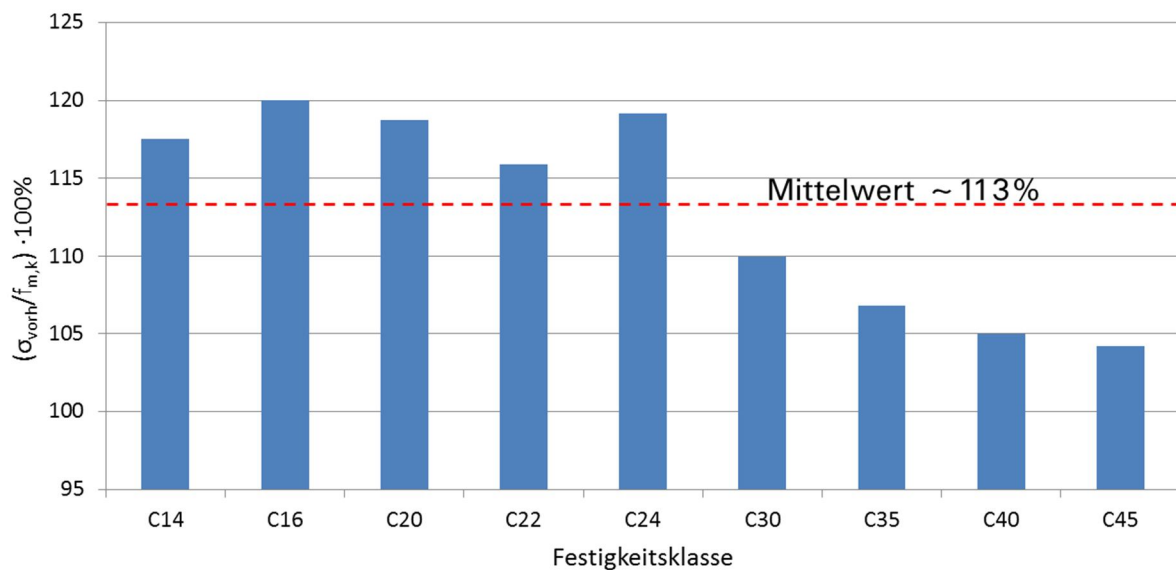
Eine grafische Auswertung der Ergebnisse ist für die gebräuchlichsten Holzfestigkeitsklassen in Abb. 121 zu sehen.





**Abb. 121:** Vorhandene Spannungen bei maximaler Lamellenstärke und minimalem Krümmungsradius

Werden die entstehenden Spannungen den charakteristischen Festigkeiten gegenübergestellt, so kann festgestellt werden, dass diese teilweise erheblich über den charakteristischen Festigkeiten liegen. Eine entsprechende grafische Auswertung ist in Abb. 122 gegeben.



**Abb. 122:** Ausnutzungsgrad bei maximaler Lamellenstärke und minimalem Krümmungsradius

Aus Abb. 122 ist ersichtlich, dass bereits bei der Herstellung von gekrümmtem Brettsperrholz und Ausnutzung der maximal möglichen Lamellenstärken, die charakteristischen Festigkeiten im Durchschnitt um rund 13% überschritten werden. Wie diese Eigenspannungen in einer späteren Bemessung behandelt werden geht aus [E DIN EN 16351:2011-12] nicht hervor.

Da es sich bei [DIN EN 16351:2011-12] um eine Entwurfsnorm handelt und keine weiteren Normen für Brettsperrholz bekannt sind, soll vergleichend die Bestimmung der erforderlichen Lamellenstärke bei der Herstellung von Brettschichtholzträgern nach [DIN 1052:2008-12; Anhang H] und [DIN EN 14080:2013-09] gezeigt werden. In [DIN 1052:2008-12] muss der Biegeradius  $R$  der Lamellen für gekrümmte Bauteile in der Nutzungsklasse 1 und 2 mindestens  $230 \cdot R$  und in der Nutzungsklasse 3

mindestens  $205 \cdot t$  betragen. Biegeradien bis zu  $150 \cdot t$  sind zulässig, wenn die Lamellendicke  $t$  folgender Bedingung entspricht:

$$t \leq 13 + 0,4 \cdot \left[ \frac{R}{t} - 150 \right] \quad (4.12)$$

$R$  ... Biegeradius der Lamellen [mm]

$t$  ... Lamellendicke [mm]

Wird in Gleichung (4.12) der minimalste Biegeradius von  $R_{\min} = 150 \cdot t$  eingesetzt, so ergibt sich eine maximal zulässige Lamellenstärke von 13 Millimetern. Als vergleichendes Beispiel soll hier die entstehende Eigenspannung bei einer Lamellenstärke von 13 Millimetern, der Festigkeitsklasse C24 und einem Radius von  $R_{\min} = 150 \cdot t = 150 \cdot 13 = 1950 \text{ mm}$  berechnet werden.

$$\sigma = \frac{E_{0,mean} \cdot t}{R_{\min} \cdot 2} = \frac{11.000 \text{ N/mm}^2 \cdot 13 \text{ mm}}{1950 \text{ mm} \cdot 2} = 36,66 \text{ N/mm}^2 \quad (4.13)$$

Es ist zu sehen, dass die charakteristische Biegezugfestigkeit um rund 52% überschritten wird. Um dieser Überschreitung in einer statischen Berechnung entgegen zu wirken, wird die Biegezugfestigkeit in Abhängigkeit des Verhältnisses aus Krümmungsradius und Lamellenstärke abgemindert und die Spannung in Folge äußerer Belastung erhöht (siehe [DIN 1052:2008-12; 10.4.3]).

[DIN EN 14080:2013-09] ist sehr ähnlich zum Entwurf der [DIN EN 16351:2011-12]. Auch hier werden Bauteile als gekrümmt bezeichnet, sobald ihre Überhöhung mehr als 1% der Spannweite beträgt. Laut dieser Norm sollen Brettschichtholzlamellen in der Nutzungsklasse 1 oder 2 eine Stärke zwischen 6 und 45 mm besitzen. In Nutzungsklasse 3 darf die Lamellenstärke zwischen 6 und 35 mm betragen. Für gekrümmtes Brettschichtholz kann die Lamellendicke  $t$  wie folgt in Abhängigkeit des Krümmungsradius  $r$  und der charakteristischen Biegezugfestigkeit der Keilzinkenverbindungen  $f_{m,j,dc,k}$  berechnet werden:

$$t \leq \frac{r}{250} \cdot \left( 1 + \frac{f_{m,j,dc,k}}{150} \right) \quad (4.14)$$

Eine Auswertung von Gleichung (4.14) für verschiedene Brettschichtholzfestigkeitsklassen und Krümmungsradien ist in Abb. 123 gegeben.

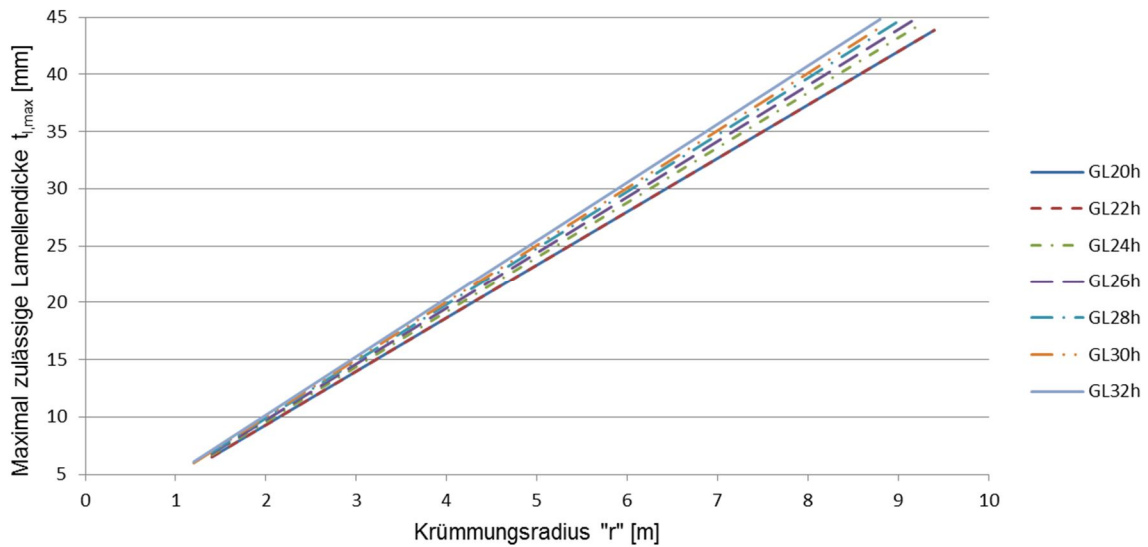


Abb. 123: Zulässige Lamellendicken für verschiedene Krümmungsradien und Festigkeitsklassen nach [DIN EN 14080:2013-09]

Es ist zu erkennen, dass bei der Herstellung von Brettschichtholz ein minimaler Krümmungsradius von rund 1,20 m zulässig ist (siehe Abb. 123). Dazu müssen Lamellen der Festigkeitsklasse T24 (C40) mit einer Stärke von 6 mm bei der Produktion von GL32h verwendet werden. Durch die maximale Ausnutzung der Krümmung entstehen somit Spannungen, die teilweise oberhalb der charakteristischen Festigkeiten der Lamelle liegen (siehe Abb. 124).

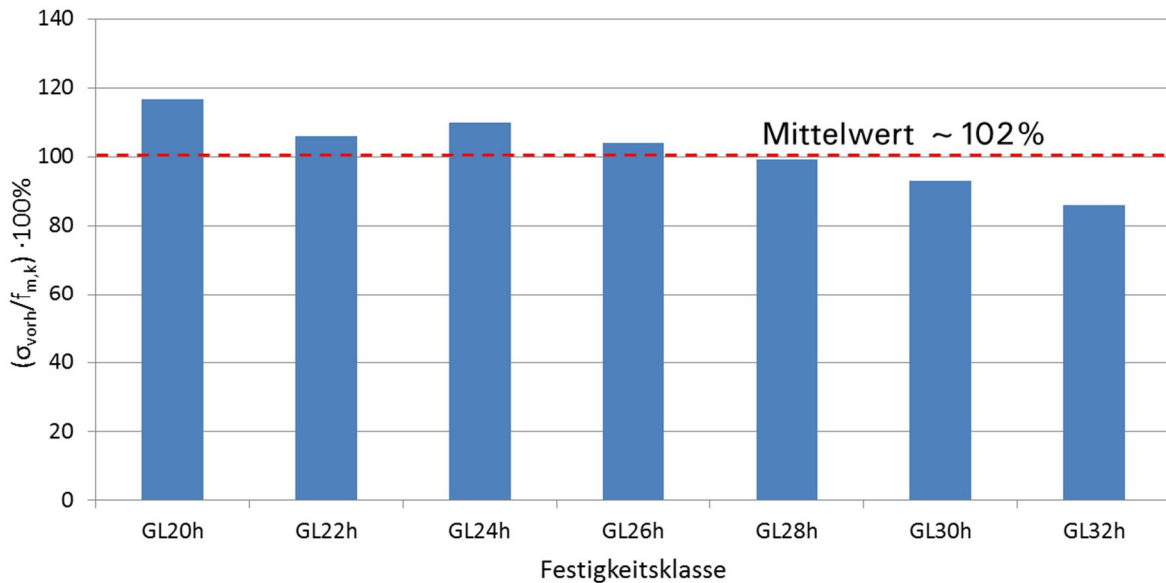


Abb. 124: Ausnutzungsgrad der Lamellen bei der Herstellung von Brettschichtholz und maximaler Krümmung

Nach Abb. 124 liegen bei der Herstellung von Brettschichtholz der Festigkeitsklasse GL20h, GL22h, GL24h, GL26h und Ausnutzung der maximalen Krümmung und Lamellenstärke die entstehenden Spannungen oberhalb der charakteristischen zulässigen Biegezugspannungen der Lamellen. Da sich gekrümmte Brettschichtholzträger nach dem Lösen aus dem Spannbett etwas zurückverformen (aufatmen), soll die Spannung in einer Lamelle nach dem Lösen betrachtet werden. Es wird davon ausgegangen, dass vor und nach dem Lösen ein konstanter Krümmungsradius herrscht. Unter der Annahme eines starren Verbundes zwischen den Lamellen und eben bleibenden Querschnitten kann folgende Formel für die Spannung in einer Lamelle nach dem Aufatmen  $\sigma_{m,Aufatmen}$  ermittelt werden (siehe Gleichung (4.15)). Zur Berechnung müssen nachstehende Werte bekannt sein:

- Eigenspannung in der Lamelle bei der Herstellung  $\sigma_{m,Herstellung}$
- Anzahl der verklebten Lamellen  $n$
- E-Modul der Lamellen  $E_{mean}$
- E-Modul des Brettschichtholzträgers nach der Verklebung  $E_{0,g,mean}$

$$\sigma_{m,Aufatmen} = \sigma_{m,Herstellung} \cdot \left( 1 - \frac{E_{mean}}{n^2 \cdot E_{0,g,mean}} \right) \quad (4.15)$$

Nach Gleichung (4.15) zeigt sich, dass die Anzahl der verklebten Lamellen einen erheblichen Einfluss auf die abgebauten Spannungen nach dem Aufatmen besitzt. Wird näherungsweise davon ausgegangen, dass  $E_{mean} = E_{0,g,mean}$  ist und mindestens 30 Lamellen in einem Brettschichtholzträger verbaut werden, beträgt der Spannungsabbau durch das Aufatmen lediglich 0,1 %.

Wie in [DIN 1052:2008-12] beschrieben, werden die herstellungsbedingten Eigenspannungen auch in [DIN EN 1995-1-1:2010-12] durch die Abminderung der Biegezugfestigkeit  $f_{m,d}$  im Firstbereich um einen Faktor  $k_r$  berücksichtigt (siehe auch [Blaß, et al., 2004]). Dieser Ansatz führt auf folgenden Nachweis:

$$\sigma_{m,d} \leq k_r \cdot f_{m,d} \quad (4.16)$$

$\sigma_{m,d}$  ... Einwirkende Biegerandspannung auf Bemessungsniveau

$f_{m,d}$  ... Biegezugfestigkeit auf Bemessungsniveau

$k_r$  ... Faktor zur Berücksichtigung der durch die Krümmung induzierten Spannungen

Der Faktor  $k_r$  kann in Abhängigkeit des inneren Krümmungsradius  $r_{in}$  des Bauteils ermittelt werden (siehe Gleichung (4.17) und Abb. 125).

$$k_r = 1 \quad \text{für} \quad \frac{r_{in}}{t} \geq 240$$

$$k_r = 0,76 + 0,001 \cdot \frac{r_{in}}{t} \quad \text{für} \quad \frac{r_{in}}{t} < 240 \quad (4.17)$$

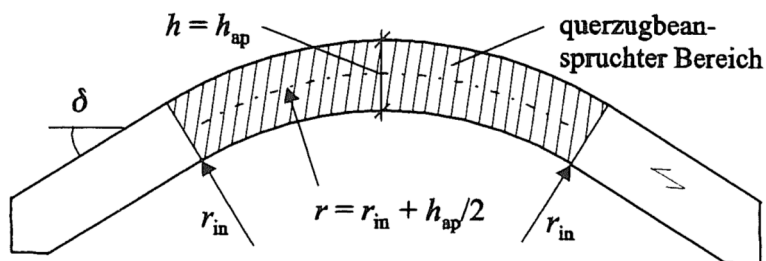


Abb. 125: Bezeichnungen am gekrümmten Brettschichtholzträger [Goris, 2006]

Wird Gleichung (4.17) für die in Abb. 123 gegebenen maximalen Lamellenstärken in Abhängigkeit des minimalen Radius ausgewertet, so stellt sich heraus, dass  $k_r$  in einem Bereich von 0,95÷0,97 schwankt. Das bedeutet, dass die Festigkeit des Brettschichtholzträgers lediglich um 3 % bis 5 % abgemindert wird und Eigenspannungen kaum berücksichtigt werden. Zur Berechnung der

einwirkenden Biegespannungen aus äußeren Lasten, wird zudem ein Faktor  $k_f$  ermittelt. Dieser berücksichtigt die nicht lineare Spannungsverteilung im Firstbereich. Eine Auswertung für im Bauwesen gängige geometrische Verhältnisse ist in Abb. 126 gegeben.

$h_{ap}/r$	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,5
$k_f$	1,00	1,02	1,04	1,07	1,09	1,13	1,16	1,20	1,24	1,28	1,33
$k_p$	0,00	0,013	0,025	0,038	0,050	0,063	0,075	0,088	0,100	0,113	0,125

**Abb. 126:** Faktor  $k_f$  in Abhängigkeit der geometrischen Verhältnisse [Goris, 2006]

Es kann festgehalten werden, dass bei der Bemessung von stark gekrümmten Brettschichtholzträgern die durch Herstellung induzierten Eigenspannungen kaum Berücksichtigung finden. Die einzelnen Lamellen werden im Herstellungsprozess bis über ihre charakteristische Festigkeit ausgenutzt. In einer anschließenden Bemessung wird davon ausgegangen, dass nochmals zusätzliche Spannungen in der Größenordnung der Festigkeit der Lamellen aufgebracht werden können. Berechnungen haben gezeigt, dass das Aufatmen des Brettschichtholzquerschnittes nur zu einem geringen Abnehmen der Spannungen führt. Für die Herstellung von gekrümmtem Brettsperrholz konnte lediglich der normative Zusammenhang zwischen Lamellenstärke und Krümmungsradius gefunden werden, jedoch keine Norm die sich explizit mit dem nachträglichen Krümmen befasst.

In [DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08] befindet sich der Verweis, dass bei der Verklebung von Brettschichtholz zur Herstellung von Verbundbauteilen mit einem Krümmungsradius der Einzelbauteile von  $R \leq 1000 \cdot a$  ( $a$  = Dicke des Einzelbauteils) Biegespannungen infolge äußerer Einwirkungen mit denjenigen infolge des Krümmens der Einzelbauteile zu überlagern sind. Wie diese Überlagerung erfolgen soll wird allerdings nicht angegeben.

Es wird vermutet, dass die durch die Herstellung induzierten Spannungen über langzeitliche, materielle Effekte abgebaut werden. Daher können unter Verwendung der bisherigen Normung keine dem Autor bekannten, auf Eigenspannungen zurückführbare Schäden, aufgezeichnet werden. Dies soll in den nachfolgenden Kapiteln näher untersucht werden. Vorerst wird davon ausgegangen, dass die durch die Herstellung induzierten Spannungen nahe bzw. oberhalb der charakteristischen Festigkeiten liegen dürften und in einer Bemessung entsprechend berücksichtigt werden müssen.

#### 4.4 Rechnerische Berücksichtigung von Eigenspannungen

Die korrekte Berücksichtigung von fertigungsinduzierten Eigenspannungen ist ein wichtiger Aspekt in der Berechnung von gekrümmten Bauteilen und Schalenträgwerken. Dazu sollen in diesem Abschnitt zwei Möglichkeiten gezeigt werden, wie Eigenspannungen in einer statischen Berechnung berücksichtigt werden können. Es werden analytische Ansätze zur Berechnung der entstehenden Schnittgrößen und Haltekräfte sowie Hinweise zur Implementierung in kommerziellen Stabwerksprogrammen geliefert.

Wird ein ursprünglich ideal gerader Stab mit einem konstanten Krümmungsradius beaufschlagt, so stellt sich über die gesamte gekrümmte Länge eine gleichmäßige Biegegrandspannung ein. Der gleiche Spannungsverlauf und die konstante Krümmung würden sich analog an einem geraden Stab einstellen, der durch zwei Momente an den freien Enden beansprucht wird (siehe Abb. 127). Das entsprechende Moment  $M$  kann nach der technischen Biegelehre über den Krümmungsradius  $R$  und die Biegesteifigkeit  $EI$  angegeben werden.



$$M = \frac{1}{R} \cdot EI \tag{4.18}$$



Abb. 127: Gekrümmter Stab mit Eigenspannungen und Ersatzmoment

Wird davon ausgegangen, dass die durch das Krümmen entstehenden inneren Spannungen versuchen den Stab wieder in seine ursprüngliche Geometrie zu bringen, müssen die Randmomente entgegengesetzt zur vorherigen Orientierung auf den Stab aufgebracht werden. Um dieses Rückstellen zu verhindern, bedarf es gleichzeitig einer horizontalen Halterung der Ränder, wodurch das System eines Zweigelenkbogens entsteht (siehe Abb. 128).

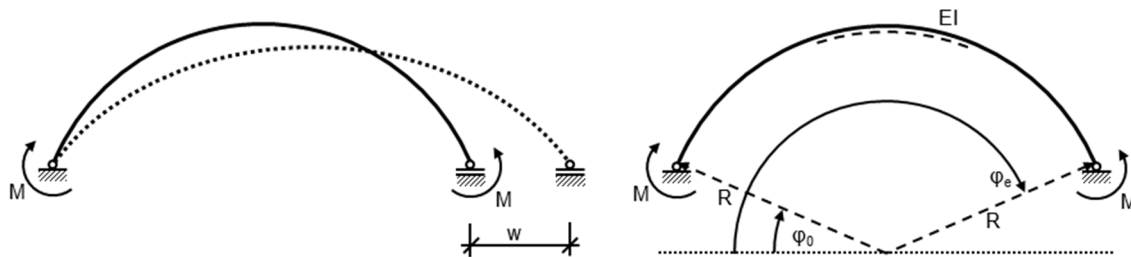


Abb. 128: Rückstellen des Stabes und Zweigelenkbogen

Die erforderlichen horizontalen Auflagerreaktionen in Abhängigkeit des Öffnungswinkels und des Radius können über den Arbeitssatz berechnet werden. Sie sind notwendig, um die Enden in ihrer Ausgangslage zu arretieren. Die entsprechenden Ansätze zur Berechnung nach dem Kraftgrößenverfahren sind in Abb. 129 gegeben.

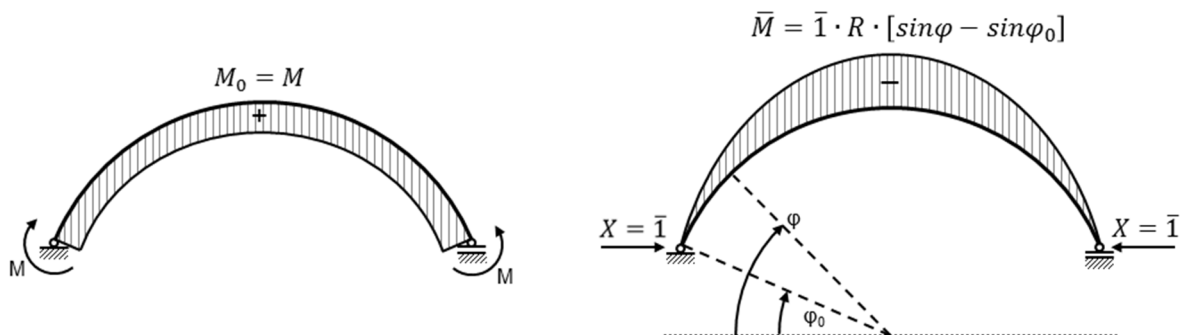
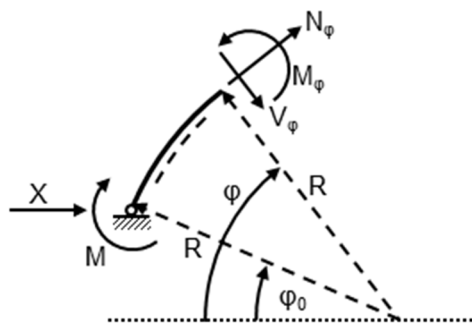


Abb. 129: Last- und Einheitszustand nach dem Kraftgrößenverfahren

Als Ergebnis wird eine Funktion in Abhängigkeit des Krümmungsradius und Öffnungswinkels erhalten.

$$X = -\frac{2 \cdot M}{R} \cdot \frac{\cos \varphi_0 + \varphi_0 \cdot \sin \varphi_0 - \cos \varphi_e - \varphi_e \cdot \sin \varphi_0}{3 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin \varphi_0 + 3 \cdot \varphi_0 - 2 \cdot \varphi_0 \cdot \cos^2 \varphi_0 + \cos \varphi_e \cdot \sin \varphi_e - 3 \cdot \varphi_e - 4 \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 + 2 \cdot \varphi_e \cdot \cos^2 \varphi_0} \tag{4.19}$$

Die Auflagerkraft  $X$  kann in Komponenten tangential und radial zur Stabachse zerlegt werden. Somit können Schnittgrößen die durch den Eigenspannungszustand entstehen berechnet und Verbindungsmitteln zur Arretierung bemessen werden.



$$N_\varphi = -X \cdot \sin \varphi \quad (4.20)$$

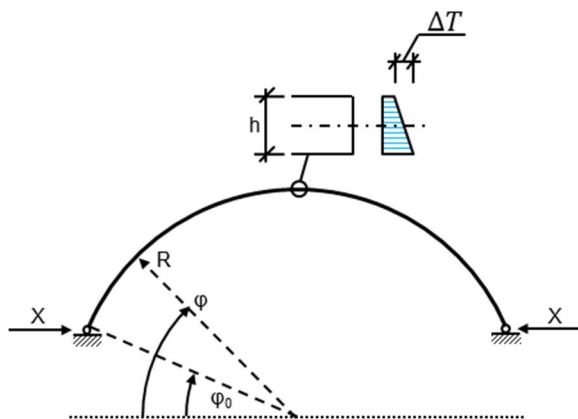
$$V_\varphi = -X \cdot \cos \varphi \quad (4.21)$$

$$M_\varphi = M - X \cdot R \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \quad (4.22)$$

$$\varphi \in [\varphi_0, \varphi_e]$$

Abb. 130: Schnittgrößen am Bogenquerschnitt

Eine weitere Möglichkeit, die durch die Krümmung entstehenden Eigenspannungen zu erfassen, ist die Berechnung eines ideellen Temperaturgradienten. Dabei wird von einer linearen Temperaturverteilung über die Querschnittshöhe  $h$  ausgegangen (siehe Abb. 131). Dieser Ansatz ermöglicht die Modellierung und Erfassung jeder beliebigen Krümmung durch Temperaturunterschiede über die Stablänge und eignet sich sehr gut zur Eingabe in Stabwerksprogrammen. Die erforderliche ideelle Temperaturdifferenz zwischen Stabober- und unterkante, kann wie folgt berechnet werden (siehe Gleichung (4.23)):



$$\Delta T = \frac{1}{R} \cdot \frac{h}{\alpha_T} \quad (4.23)$$

Abb. 131: Bogenquerschnitt unter Temperaturbelastung und Haltekräfte

$R$  entspricht wiederum dem Krümmungsradius,  $h$  der Querschnittshöhe und  $\alpha_T$  dem Temperaturausdehnungskoeffizienten des Materials. Aus diesem Ansatz heraus kann über den Arbeitssatz die horizontale Festhaltekraft  $X$  in Abhängigkeit des Krümmungsradius und der Biegesteifigkeit ermittelt werden.

$$X_T = -\frac{2 \cdot EI}{R^2} \cdot \frac{\cos \varphi_0 + \varphi_0 \cdot \sin \varphi_0 - \cos \varphi_e - \varphi_e \cdot \sin \varphi_0}{3 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin \varphi_0 + 3 \cdot \varphi_0 - 2 \cdot \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0^2 + \cos \varphi_e \cdot \sin \varphi_e - 3 \cdot \varphi_e - 4 \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_e + 2 \cdot \varphi_e \cdot \cos \varphi_0^2} \quad (4.24)$$

Vergleichende Berechnungen zwischen dem Ansatz der Randmomente und der ideellen Temperaturlast sind Anhang D zu entnehmen. Der Ansatz einer ideellen Temperaturlast führt generell zu höheren Schnittgrößen bzw. Spannungen als das Aufbringen von Randmomenten. Die maximale Spannung und die maximalen Momente treten bei Verwendung des Ansatzes der Randmomente an den Auflagern auf, bei Berechnungen mit einer ideellen Temperaturlast im Scheitel (siehe Abb. 132).

Entsprechende Formeln für die maximalen Spannungen sind wie folgt mit Gleichung (4.25) und (4.26) gegeben.

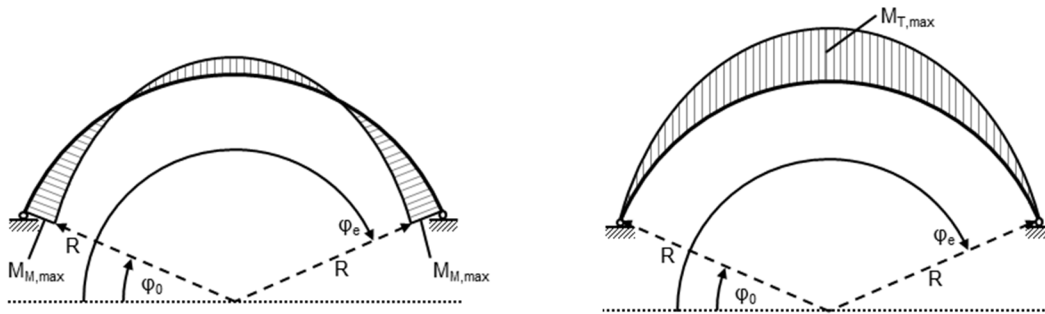


Abb. 132: Links: Momentenverlauf in Folge Randmoment; Rechts: Momentenverlauf in Folge ideeller Temperaturlast

Randmoment: 
$$\sigma_M = -\frac{X \cdot \sin \varphi_0}{A} \pm \frac{M}{W} \quad (4.25)$$

Ideelle Temperaturlast: 
$$\sigma_T = -\frac{X_T \cdot \sin(\varphi_e/2)}{A} \pm \frac{-X_T \cdot R \cdot (\sin(\varphi_e/2) - \sin \varphi_0)}{W} \quad (4.26)$$

$A$  ... Querschnittsfläche  
 $W$  ... Widerstandsmoment

Für Praxisanwendungen wird der Ansatz der ideellen Temperaturlast empfohlen, da die Aufbringung einer Temperaturlast mehr dem Eigenspannungszustand entspricht als das Einwirken eines Randmomentes. Mitunter setzt der Ansatz des Randmomentes voraus, dass in der Praxis ein Randmoment aufgebracht bzw. aufgenommen werden kann, was nicht immer der Fall ist. Zudem liefert die ideelle Temperaturlast wesentlich höhere Eigenspannungen als entsprechende Randmomente (siehe auch Anhang D).

Es soll darauf hingewiesen werden, dass durch die Wirkung der Eigenspannungen die Flanken des betrachteten Querschnittes nach innen gedrückt und der Scheitel überhöht wird, somit weicht die Geometrie leicht von der idealen Kreisform ab (siehe Abb. 133). Die Verformung ist für beide untersuchten Lastfälle (Randmoment und ideelle Temperaturlast) nahezu identisch. Zu diesem Zweck müssen in der Planung von zylinderförmigen Tragwerken konstruktive Maßnahmen vorgesehen werden, dieser Formänderung entgegenzuwirken, da sonst viele Annahmen der vorgestellten Berechnungsmöglichkeiten nicht mehr zutreffen.

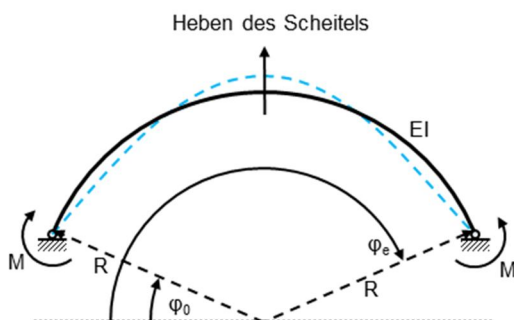


Abb. 133: Verformung eines Bogens in Folge Eigenspannungen

Es stellt sich in diesem Abschnitt noch die zusätzliche Frage, welche Kräfte erforderlich sind, einen Stab um einen gleichmäßigen Radius zu krümmen. Dazu wird wiederum ein Stab mit konstantem Querschnitt betrachtet, welcher über eine Schablone mit konstantem Radius gebogen werden soll. Das Biegen beginnt dabei von einer Seite, wie in Abb. 134 gezeigt und wird durch radial angeordnete Kräfte ( $F$ ), die den Stab an die Schablone anpressen, realisiert.

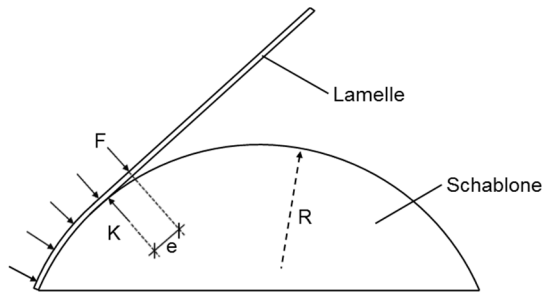


Abb. 134: Krümmen einer Lamelle

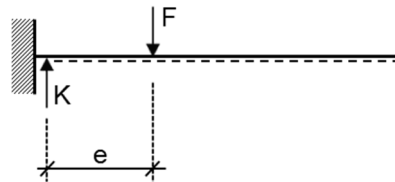


Abb. 135: Statisches Ersatzsystem

Es ist bekannt, dass nach dem Krümmen ein konstanter Biegespannungsverlauf und folglich auch ein konstanter Momentenverlauf im Stab herrschen müssen. Der konstante Momentenverlauf kann sich wie im vorherigen Abschnitt beschrieben durch ein Randmoment, oder eine entsprechende Temperaturlast einstellen. Hier wird der Ansatz eines Randmomentes betrachtet, welches jeweils am Rand des gekrümmten Bereiches angreift. Dieses Moment wird durch ein Kräftepaar, bestehend aus einer Druckkraft  $F$  am Stab und einer Reaktionskraft  $K$  an der Schablone erzeugt. Die Kraft  $K$  kann als Resultierende der Spannungen verstanden werden, welche sich durch das Anpressen zwischen Stab und Schablone einstellt und denselben Betrag wie  $F$  hat. Da der bereits fixierte Bereich auf der Schablone einer Einspannung sehr nahe kommt, kann das in Abb. 135 gegebene statische System für den noch zu krümmenden Bereich angenommen werden. Durch das kontinuierliche Anpressen des Stabes auf die Schablone wird der Lastangriffspunkt von  $K$  bei voranschreitender Krümmung zur Kraft  $F$  hin verschoben (siehe Abb. 136). Nach dem Krümmen stellt sich ein vom Krümmungsradius abhängiges Einspannmoment ein, welches mit folgender Gleichung beschrieben werden kann:

$$M = \frac{EI}{R} = F \cdot e = K \cdot e \quad (4.27)$$

Dieses Moment ist über die gekrümmte Länge konstant, woraus eine erforderliche Kraft zur Krümmung ermittelt werden kann.

$$F = \frac{EI}{R \cdot e} \quad (4.28)$$

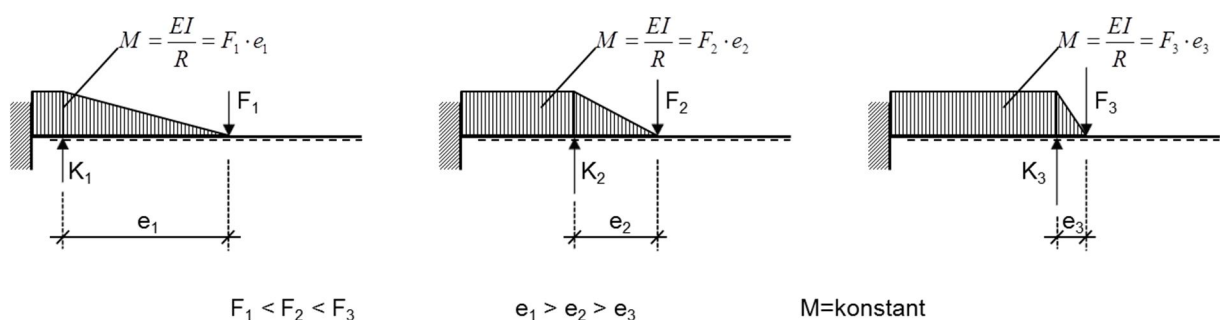


Abb. 136: Lage der Reaktionskraft  $K$  und Momentenverlauf in Abhängigkeit der Kraft  $F$

Mit abnehmendem Abstand  $e$  nimmt die Kraft  $F$  linear zu und somit auch die Kontaktkraft  $K$ . Im Bereich des konstanten Momentenverlaufs entstehen keine Spannungen zwischen Stab und Schablone, weshalb hier auch keine Haltekräfte aktiviert werden müssen. Das bedeutet, dass bei der Krümmung eines Stabes über eine Schablone mit konstantem Krümmungsradius nur noch an den Enden des Stabes eine Kraft  $F$  erforderlich ist um die Form zu halten (siehe Abb. 137). Im Randbereich stellt sich zwischen der Kraft  $F$  und der Kontaktkraft  $K$  ein „Störbereich“ ein, in dem die verformte Geometrie des Stabes nicht exakt mit der Geometrie der Schablone übereinstimmt. Dies ist auch am linearen Momentenverlauf im Randbereich zu erkennen (siehe Abb. 138).

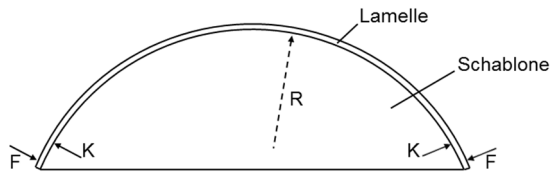


Abb. 137: Gekrümmte Lamelle

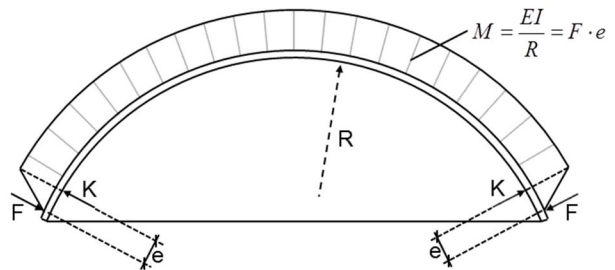
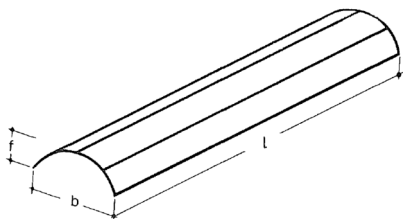


Abb. 138: Momentenverlauf entlang der gekrümmten Lamelle

In diesem einfachen Berechnungsansatz wird die Nachgiebigkeit der Schablone nicht berücksichtigt. So wird es in der Praxis wahrscheinlich zu einer anderen Lage der Kontaktresultierenden  $K$  kommen als hier angenommen. Versuchsergebnisse an Holzwerkstoffplatten haben gezeigt, dass wie in diesem Abschnitt beschrieben nur die Kräfte  $F$  am Rand erforderlich sind um eine konstante Krümmung zu erhalten. Eine exakte Berechnung unter Berücksichtigung aller Steifigkeiten ist nur unter Zuhilfenahme eines FEM-Programms möglich und soll hier nicht weiter verfolgt werden.

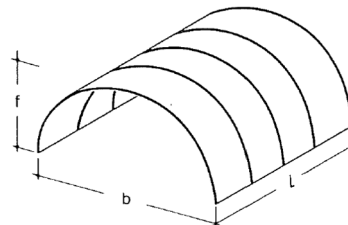
#### 4.5 Formgebung und konstruktive Regeln

Aus den beschriebenen historischen Zylinderschalen in Kapitel 1 ist ersichtlich, dass es eine Vielzahl von Gestaltungs- und Formgebungsmöglichkeiten gibt. Dabei muss jede Form auf das etwaige Bauobjekt abgestimmt werden, um eine optimale Schalengeometrie zu erhalten. Gleichzeitig mit dem optischen Erscheinungsbild wird durch die Formgebung das Lastabtragungsverhalten stark beeinflusst.



$$b < \frac{l}{5} \text{ lange Tonnenschale} \quad f \leq \frac{b}{2}$$

Abb. 139: Lange Zylinderschale [Natterer, et al., 1991]



$$b > \frac{l}{5} \text{ kurze Tonnenschale} \quad f \geq \frac{b}{2}$$

Abb. 140: Kurze Zylinderschale [Natterer, et al., 1991]

Maßgebende Größe zur Planung, Berechnung und Konstruktion von Zylinderschalen ist die Schalenlänge  $l$ . Dabei werden lange und kurze Schalen unterschieden. Lange Schalen besitzen nach [Natterer, et al., 1991] eine Sehnenlänge  $b$  des Kreisquerschnittes kleiner als ein Fünftel der Schalenspannweite und einen Schalendick  $f$  der kleiner als die Hälfte der Sehnenlänge  $b$  ist (siehe Abb. 139). Für kurze Schalen gilt, dass die Sehnenlänge  $b$  größer einem Fünftel der



Schalenspannweite und der Schalenchstich  $f$  größer als die halbe Sehnenlänge ist (siehe Abb. 140). Die primäre Lastabtragung von kurzen Schalen erfolgt über die Bogentragwirkung weshalb diese auch wie ein Bogen berechnet werden können. Lange Schalen hingegen weisen das Bestreben auf, Lasten ähnlich einem Balken abzutragen, wodurch eine Berechnung im Sinne der Balkenalogie möglich ist (siehe Kapitel 2.4).<sup>81</sup>

Da die Dicke einer Schale per Definition klein im Vergleich zu den restlichen Abmessungen ist, kann auch ihre Biegesteifigkeit im Vergleich zur Dehnsteifigkeit als sehr gering erachtet werden. Dementsprechend ist eine Schale zur Abtragung großer Biegemomente zunächst ungeeignet und sollte stets so konzipiert sein, dass die zu erwartenden Belastungen primär über Normalkräfte abgetragen werden können.<sup>82, 83</sup> Auch hohe singuläre Belastungen können von Schalenträgwerken kaum aufgenommen werden, was die Lagerung auf Stützen einbezieht. Zu diesem Zweck können Binderscheiben oder Versteifungsbögen angeordnet werden (siehe Abb. 141). Endbinderscheiben dienen zudem als Übergang der Schalenwandung auf die Unterkonstruktion, die beispielsweise als Mauerwerk ausgeführt wird. Nach *Dischinger, Lundgren, Finsterwalder* und *Knittel* müssen Endbinderscheiben keine hohe Biegesteifigkeit besitzen, sondern lediglich eine hohe Dehnsteifigkeit. Für Versteifungsbögen trifft dies nicht zu, weshalb sie auch vielfach sehr massiv ausgeführt werden. Zudem verhindern Endscheiben oder Versteifungsbögen die Verformung der Schalenenden und tragen somit erheblich zur Gesamtstabilität der Zylinderschalen bei.

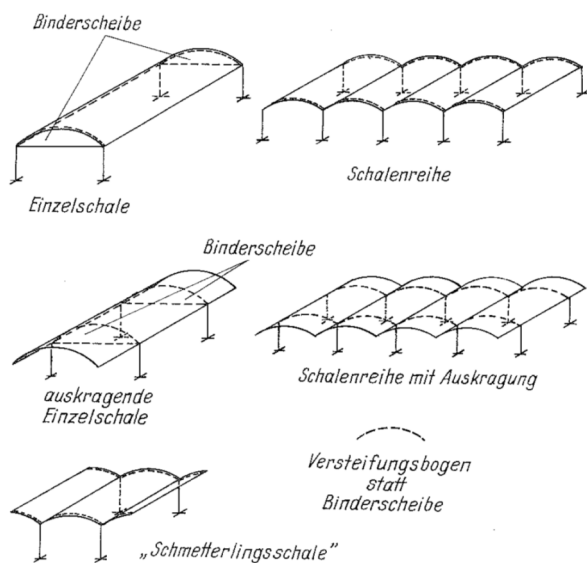


Abb. 141: Gestaltung von Zylinderschalen und Lagerausbildung [v. Halász & Cziesielski, 1973]

\* Biegesteifigkeit  $K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

Dehnsteifigkeit  $D = \frac{Et}{1-\nu^2}$

→ Die Dicke  $t$  der Schale geht nur linear in die Dehnsteifigkeit ein, während sie kubisch in die Biegesteifigkeit einfließt.

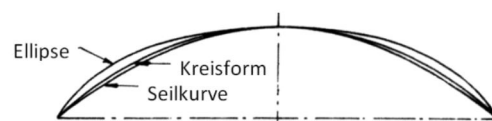


Abb. 142: Verschiedene Querschnitte [Carobbio, 2012]

Neben der rein elastischen Steifigkeit beruht die Tragfähigkeit von Schalen aber vor allem auf deren geometrischen Steifigkeit, die sich durch die Wahl der Krümmungslinie gezielt verändern lässt. Die äußerste Linie in Abb. 142 beschreibt eine elliptische Kurve und ermöglicht die größte Steifigkeit und somit auch die größte Stützweite. Insbesondere die frühen Zylinderschalen, wie beispielsweise die Überdachung der Dywidag-Halle auf der Gesolei oder der Großmarkthalle in Frankfurt wurden in halbelliptischer Form ausgeführt. Diese Form erforderte im Stahlbetonbau einen hohen Schalungsaufwand, weshalb Finsterwalder von dieser Form abkam und den Kreisquerschnitt näher

<sup>81</sup> Lundgren, H., (1949). *Cylindrical Shells*. Seite 30

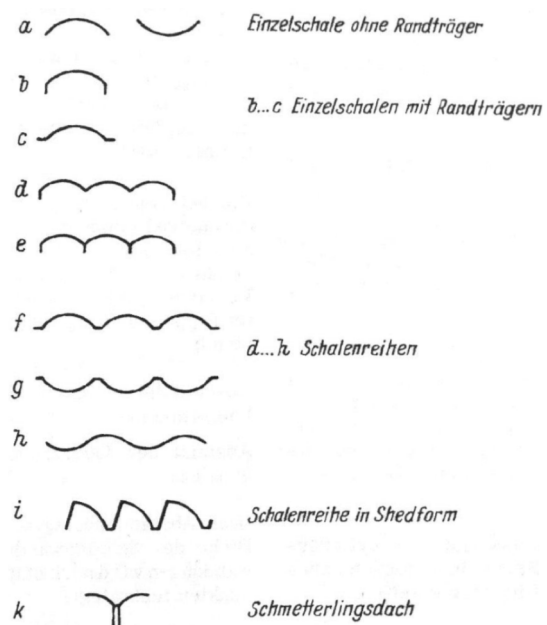
<sup>82</sup> Lundgren, H., (1949). *Cylindrical Shells*. Seite 15/18

<sup>83</sup> Dischinger, F., & Finsterwalder, U. (1926). *Die die Dywidag-Halle auf der Gesolei*. Seite 929

untersuchte. Auf Grund ihrer einfachen Form stellen kreissegmentförmige Querschnitte inzwischen die gebräuchlichste Form für Zylinderschalen dar. Eine weitere Möglichkeit zur Ausbildung des Querschnittes ist die Seilkurve bzw. Stützlinie. Diese ist besonders dann anzuraten, wenn die Lastabtragung in Bogenrichtung erfolgen soll und der Abstand der Binderscheiben bzw. Versteifungsbögen zueinander sehr gering ist (siehe Abb. 144: b/d).<sup>84, 85</sup>

Abhängig von der Ausbildung der Randbereiche lassen sich Zylinderschalen mit oder ohne Randträger unterscheiden. Der wirtschaftliche Anwendungsbereich von Zylinderschalen aus Holz, die ohne Randträger ausgeführt werden liegt nach [v. Halász & Scheer, 1996] zwischen 5 und maximal 10 Metern Stützweite, je nachdem ob es sich um einwandige oder doppelwandige Schalen handelt. Für größere Stützweiten, bei denen der Schalenstich aus gestalterischen Gründen nicht ausreichend groß gewählt werden kann, empfiehlt es sich vertikale Randträger an den Schalenrändern anzuordnen. Horizontal angeordnete Randträger sind hauptsächlich für Schalenreihen empfehlenswert, wenn zwischen den Schalen Lichtbänder angeordnet werden sollen. Durch die Kombination der verschiedenen Querschnittstypen ergeben sich weitläufige Gestaltungsmöglichkeiten von Schalendächern, welche im Folgenden gezeigt werden sollen.

Einzelschalen bilden die einfachste Form von Zylinderschalen. Sie können mit oder ohne Randträger ausgebildet werden, wobei die Krümmung nach oben oder unten gerichtet sein kann (siehe Abb. 143: a,b,c). Zur Überdachung größerer Flächen können verschiedene Kombinationen von Einzelschalen zur Anwendung kommen (siehe Abb. 143: d...h). Eine Besonderheit sind Schalenreihen in Shedform und Schmetterlingsform (siehe Abb. 143: i, k). Dabei bieten Shedschalen die Möglichkeit eines hohen Lichteintrages ins Innere eines Gebäudes, weshalb sie gerne für Fertigungshallen genutzt werden. Das Schmetterlingsdach findet vielfach bei der Überdachung von Bahnhöfen Anwendung, wie es beispielsweise auch bei der Überdachung des Ostbahnhofes München der Fall war (siehe Abb. 21).<sup>86</sup>



**Abb. 143:** Gestaltungsmöglichkeiten mit Zylinderschalen [v. Halász & Cziesielski, 1973]

Soll ein großer rechteckiger Grundriss überdacht werden, so wird prinzipiell versucht die Lasten soweit als möglich über die kurze Seite abzutragen. Dazu können „lange Schalen“ parallel zueinander angeordnet werden (siehe Abb. 144 a) oder „kurze Schalen“ durchgängig über Versteifungsbögen wie in Abb. 144 b. Welche der beiden Varianten letztendlich besser geeignet ist, hängt von verschiedenen Randbedingungen ab.<sup>87</sup>

<sup>84</sup> Lundgren, H., (1949). *Cylindrical Shells*. Seite 15;16;29

<sup>85</sup> Finsterwalder, U. (1928). *Die Schalendächer des Elektrizitätswerkes in Frankfurt a. M.* Seite 206

<sup>86</sup> v. Halász, R., Scheer, C. (1996). *Holzbau Taschenbuch: Band 1*. Seite 771

<sup>87</sup> Lundgren, H., (1949). *Cylindrical Shells*. Seite 30

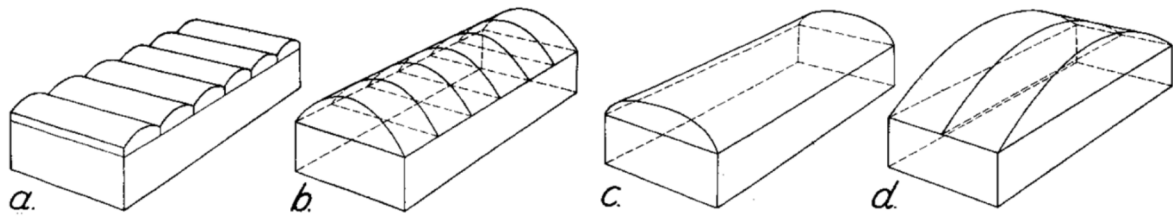


Abb. 144: Mögliche Zylinderschalen zur Überdachung großer rechteckiger Flächen [Lundgren, 1949]

So lassen sich beispielsweise mit der Variante *b* größere Flächen überdecken, allerdings ist die Konstruktion wesentlich höher als bei Variante *a*. Variante *c* ähnelt in ihrer äußeren Form stark der Variante *b*, allerdings wird ein Großteil der Last hier über die längere Seite des Gebäudes abgetragen, da im Gegensatz zu Variante *b* keine Versteifungsbögen angeordnet sind. Dementsprechend können damit auch nur kleinere Flächen als bei *a* und *b* überdacht werden. Eine weitere Möglichkeit, Lasten über die lange Seite des Gebäudes abzutragen zeigt Variante *d*. Anwendung findet diese Variante vor allem bei der Überdachung von Flugzeughangars, da für diese mindestens eine der langen Seiten geöffnet werden muss und eine Lastabtragung über die kurze Seite kaum möglich ist. Historisch gesehen haben „lange Schalen“ viel früher ihre Anwendung in Deutschland gefunden als „kurze Schalen“, weshalb die Schalen des Typs *a* wesentlich bedeutender sind als die Schalen des Typs *b*.<sup>88</sup> In deutschsprachiger Fachliteratur wird zuweilen auch zwischen „Quertonne“ (Scheitellinie quer zur Hauptachse des Raumes) und „Längstonne“ (Scheitellinie parallel zur Hauptachse des Raumes) unterschieden. Diese Unterscheidung ist jedoch nur wenig aussagekräftig und soll daher im Folgenden nicht weiter verwendet werden.

Zum Entwurf von Zylinderschalen kann auf einige grundsätzliche Entwurfsideen von [v. Halász & Cziesielski, 1973] und [Lundgren, 1949] zurückgegriffen werden. Lundgren untersuchte zwar isotrope Zylinderschalen, liefert aber gute Richtwerte für die zu verwendenden Geometrieverhältnisse. V. Halász und Cziesielski haben in Ihrer Arbeit sehr viele Entwurfsideen zum Bau von Zylinderschalen aus Furnierholz niedergeschrieben, die zum Teil auch für die Herstellung von Zylinderschalen aus großformatigen Plattenwerkstoffen übernommen werden können. Nach [v. Halász & Cziesielski, 1973] können Stützweiten von 5 bis 30 Metern realisiert werden. Die Schalenbreite *b* (siehe Abb. 139 und Abb. 140) sollte zwischen  $L/5$  und  $L/10$ , bei einem Schalenstich *f* von  $L/20$  bis  $L/40$  betragen. Bei der Wahl der Abmessungen ist zu beachten, dass die Schale umso steifer wird, je größer das Verhältnis von Schalenstich zu Schalenlänge ( $f/L$ ) ist. Zudem ist es ratsam für größere Spannweiten doppelwandige Konstruktionen auszubilden, da die Torsionssteifigkeit maßgeblich erhöht wird. Um eine möglichst effiziente Lastabtragung zu gewährleisten, sollten bei doppelwandigen Konstruktionen die beiden Schalenquerschnitte möglichst schubsteif miteinander verbunden werden. Werden doppelwandige Schalen in Schalenreihen verwendet, so kann eine zusätzliche Tragfähigkeitssteigerung durch Verbindung der längs laufenden Randrippen erfolgen (siehe Abb. 145).<sup>89</sup>

<sup>88</sup> Lundgren, H., (1949). *Cylindrical Shells*. Seite 30-37;141

<sup>89</sup> v. Halász, R., Cziesielski, E. (1973). *Konstruktion und Berechnung hölzerner Zylinderschalen aus Furnierholz*. Seite 56/59

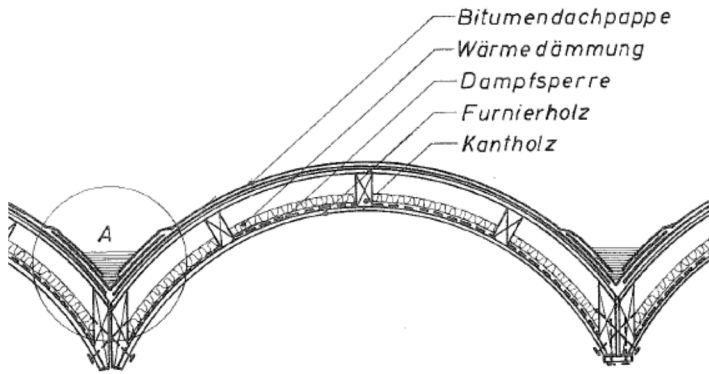


Abb. 145: Möglicher Aufbau einer doppelwandigen Schale [v. Halász & Cziesielski, 1973]

Grundsätzlich sollten in jeder Schale Rippen zur Aussteifung der Schalenwandung in Ring- und longitudinaler Richtung angeordnet werden. Der Abstand  $c$  der Längsrippen zueinander sollte etwa  $b/5$ , jedoch nicht mehr als 0,50 Meter betragen. Querrippen sollten in einem Abstand  $a$  von  $L/10$ , jedoch  $\leq 1,25$  Meter angeordnet werden (siehe Abb. 146).<sup>90</sup> Eine Auflistung der wichtigsten Entwurfsgrößen ist in nachfolgender Tabelle gegeben:

Entwurfsgröße	Empfehlungen v. Halász und Cziesielski
Spannweite	$L \approx 5 \dots 30 \text{ m}$
Sehnenlänge	$b \approx \frac{L}{5} \dots \frac{L}{10} \text{ m}$
Bogenstich	$f \approx \frac{L}{20} \dots \frac{L}{40} \text{ m}$
Abstand der Querrippen (Zwischenscheiben)	$a \approx \frac{L}{10} \leq 1,25 \text{ m}$
Abstand der Längsrippen	$c \approx \frac{L}{10} \leq 0,5 \text{ m}$

Tabelle 4: Entwurfsgrößen für Zylinderschalen nach v. Halász und Cziesielski

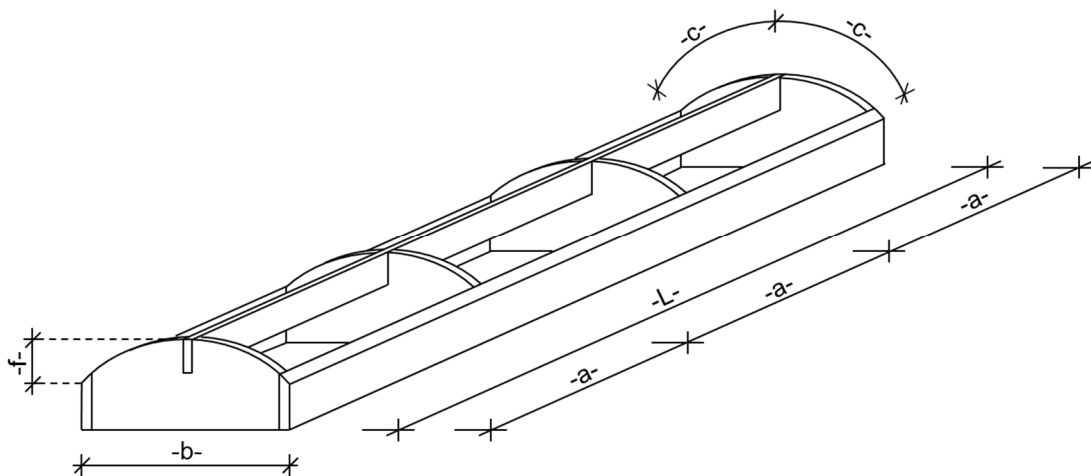


Abb. 146: Grafische Darstellung der Entwurfsgrößen nach v. Halász und Cziesielski

<sup>90</sup> v. Halász, R., Scheer, C. (1996). *Holzbau Taschenbuch: Band 1*. Seite 772

Die Anordnung von Querrippen bringt zusätzlich zur Beulaussteifung der Schalenwandung den Vorteil, dass die durch die Herstellung induzierten Spannungen keine erhebliche Verformung der Schalenwandung verursachen und der ursprüngliche Schalenquerschnitt erhalten bleibt.

Soll die Schalenwandung kontinuierlich an den Querrippen befestigt werden, so kann dies durch Schrauben erfolgen, welche die ursprünglich plane Platte auf die Querrippen runterziehen (siehe Abb. 147). Die zum Befestigen und „Runterziehen“ erforderliche Kraft kann wie im vorherigen Abschnitt 4.4 beschrieben durch folgende Formel berechnet werden:

$$F = \frac{EI}{R \cdot e} = R_{ax} \quad (4.29)$$

$EI$  ... Biegesteifigkeit der Platte

$e$  ... Abstand Kontaktpunkt zu Schraubenachse

Die Kraft  $F$  entspricht dabei der Zugtragfähigkeit  $R_{ax}$  der Schrauben, welche in diesem Fall vornehmlich vom Kopfdurchziehparameter abhängig ist. Dieser Parameter kann unter Umständen durch die Verwendung von Schrauben mit großen Köpfen oder Unterlegscheiben erhöht werden. Wie groß der Abstand  $s$  zwischen den Schrauben sein kann, ist von der freien Schraubenlänge  $w$  und dem Krümmungsradius  $R$  abhängig (siehe Abb. 148).

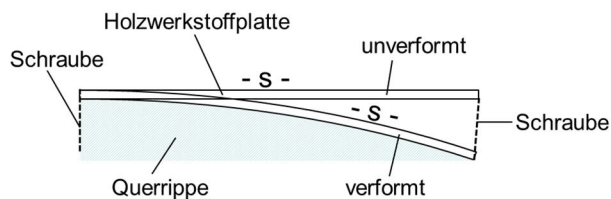


Abb. 147: Befestigung der Schalenwandung auf einer Querrippe

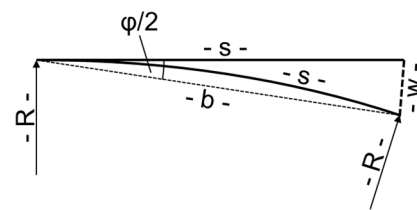


Abb. 148: Geometrische Beziehungen

Der mögliche Abstand  $s$  zwischen den Schrauben kann über folgende Gleichung numerisch bestimmt werden:

$$w^2 = s^2 + 4 \cdot R^2 \cdot \sin^2\left(\frac{s}{2 \cdot R}\right) - 4 \cdot s \cdot R \cdot \sin\left(\frac{s}{2 \cdot R}\right) \cdot \cos\left(\frac{s}{2 \cdot R}\right) \quad (4.30)$$

Dazu müssen der Radius  $R$  der Querrippe und die Länge  $w$  der Schraube bekannt sein. Zur freien Länge  $w$  kommt in einer späteren Dimensionierung noch die Einbindetiefe der Schraube hinzu. Ist der Winkel zwischen Schraubenachse und unverformter Schalenwandung näherungsweise  $90^\circ$ , so kann Gleichung (4.30) erheblich vereinfacht werden und es folgt Gleichung (4.31).

$$w = 2 \cdot R \cdot \sin^2\left(\frac{s}{2 \cdot R}\right) \quad (4.31)$$

Die Schalenwandung muss gleichzeitig an den Randträgern befestigt werden. Dadurch wird ein Randmoment an der Schalenwandung erzeugt, welches zur Krümmung der Platten beiträgt. Die Befestigung kann wie in Abb. 149 gezeigt durch Schrauben oder Schraubpressklebung erfolgen.



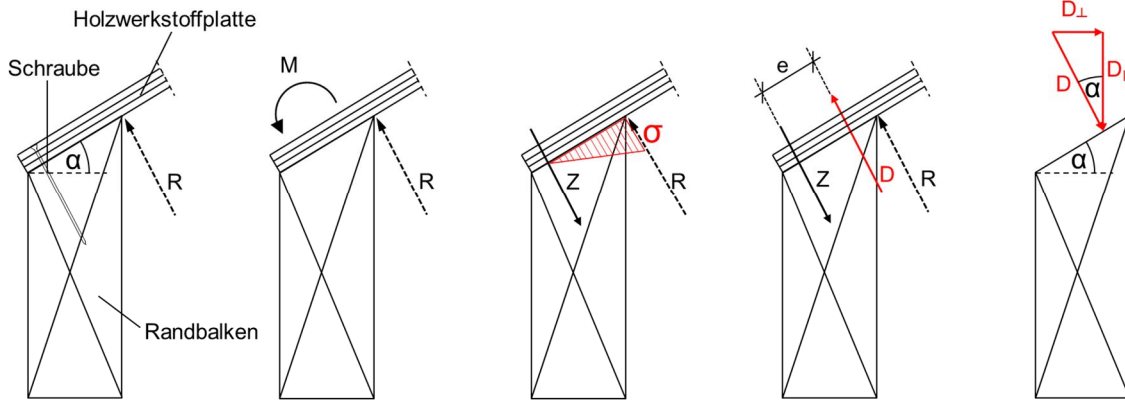
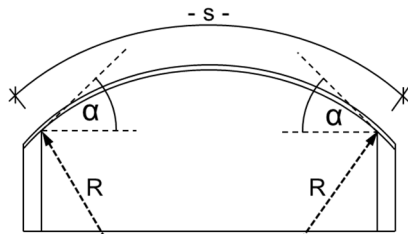


Abb. 149: Kräfte am Randträger durch das Befestigen der Platte

Der Anschnitt-Winkel  $\alpha$  der Randbalken kann aus dem Krümmungsradius  $R$  und der Bogenlänge  $s$  berechnet werden (siehe Gleichung (4.32)). Es muss beachtet werden, dass durch die Kontaktpression am Randbalken eine Kraft senkrecht zur Faser  $D_{\perp}$  erzeugt wird (siehe Abb. 149).



$$\alpha = \frac{s}{2 \cdot R} \quad (4.32)$$

Abb. 150: Anschnitt- Winkel  $\alpha$  am Randträger

Diese Kraft kann über das zur Krümmung erforderliche Randmoment  $M$  berechnet werden. Dabei ist der Abstand  $e$  zwischen Druck- und Zugkomponente nicht bekannt. Dieser Abstand kann unter Annahme einer linearen Spannungsverteilung im Randbereich abgeschätzt werden. Daraus ergeben sich folgende Formeln:

$$D_{\perp} = D \cdot \sin \alpha = \frac{M}{e} \cdot \sin \alpha \quad (4.33)$$

$$D_{\parallel} = D \cdot \cos \alpha = \frac{M}{e} \cdot \cos \alpha \quad (4.34)$$

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Kräfte  $Z$  und  $D$  der Zugtragfähigkeit  $R_{ax}$  der Schrauben gleichzusetzen (Gleichung (4.35)). Somit kann in der Folge ein Abstand  $e$  zwischen Druckresultierender und Schraubenachse berechnet werden (Gleichung (4.36)). Liegt die Druckresultierende nicht im Querschnitt des Randträgers, muss der Randbalken verbreitert, oder die Zugtragfähigkeit der Schraube erhöht werden.

$$Z = D = R_{ax} \quad (4.35)$$

$$e = \frac{M}{R_{ax}} \quad (4.36)$$

Aus dem erhaltenen Lastangriffspunkt der Druckresultierenden kann anschließend der Nachweis am Randbalken geführt werden.

In diesem Abschnitt wurden eine Reihe von Ausbildungsmöglichkeiten zylinderförmiger Schalen und fertigungstechnische bzw. berechnungsrelevante Aspekte aufgezeigt. Hauptaugenmerk lag auf den langen Zylinderschalen, welche sich nach Meinung des Verfassers sehr gut zur Herstellung aus industriell gefertigten Plattenwerkstoffen eignen. Zudem besteht bei langen, schlanken Zylinderschalen die Möglichkeit der Vorfertigung in Herstellungsbetrieben, wodurch eine hohe Produktionsqualität erreicht werden kann. Der Einsatzbereich von Zylinderschalen und deren Herstellung soll nicht nur auf Dachelemente beschränkt sein, weshalb auf diverse Anwendungen im nächsten Kapitel eingegangen werden soll.

### 4.6 Einsatz- Herstellungsmöglichkeiten hölzerner Zylinderschalen

#### 4.6.1 Einzelschalen zum Einsatz in Dachtragwerken

Dieses Kapitel zeigt Möglichkeiten zur Herstellung von Einzelschalen, welche beispielsweise in der Realisierung von leichten Dachtragwerken zum Einsatz kommen können. Dazu soll je Einzelschale eine großformatige Holzwerkstoffplatte verwendet werden, die durch vertikal angeordnete Randträger und Scheibenelemente stabilisiert und in Form gehalten werden soll. Abb. 151 zeigt eine mögliche Ausbildung solcher Schalen mit und ohne Holzwerkstoffplatte.

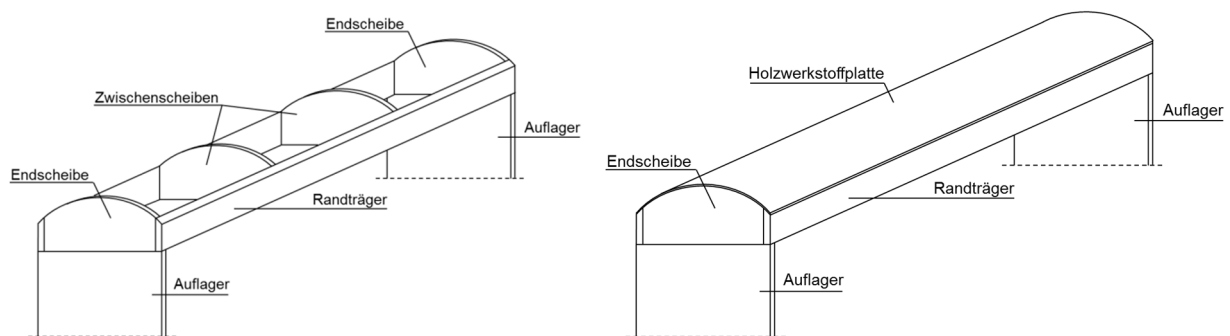


Abb. 151: Exemplarische Herstellung einer Einzelschale mit und ohne Holzwerkstoffplatte

Der Randträger spielt dabei eine wichtige Rolle. Er verleiht der gesamten Struktur mehr Steifigkeit und wird zur Befestigung der Platte entlang der Traufe benötigt. Entsprechende Hinweise können Kapitel 4.5 entnommen werden. Wird die zuvor plane Holzwerkstoffplatte nur an den Endscheiben gehalten, bildet sich in Folge der Eigenspannungen ein abhebender Rand aus (siehe Abb. 152).

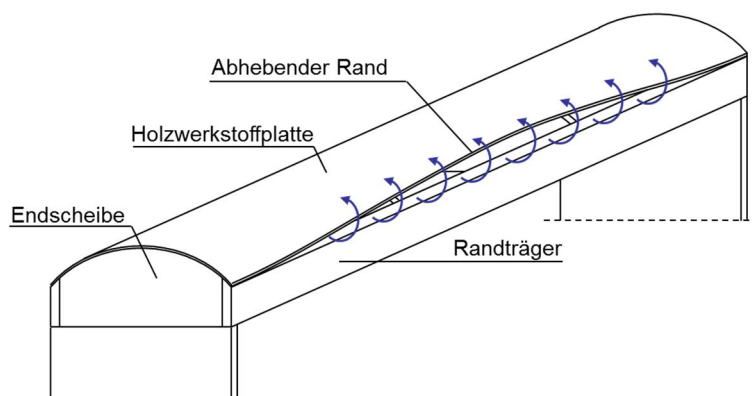
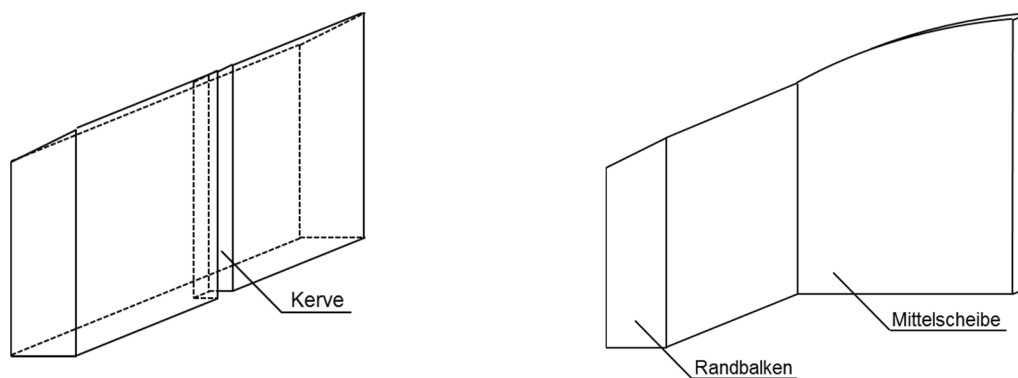


Abb. 152: Abhebender Randbereich in Folge Eigenspannungen

Grundsätzlich ist zur Fertigung von Schalen eine präzise Bearbeitung der erforderlichen Holzbauteile notwendig, was mit den heutigen holzbearbeitenden Maschinen ohne weiteres möglich ist. Zum Entwurf einer Einzelschale müssen im ersten Schritt die gewünschten geometrischen Ausdehnungen der Schale und der mögliche Krümmungsradius der Platte erfasst werden. Letzterer kann dabei über die in Kapitel 4.2 besprochenen Ansätze berechnet werden. Anhand dieser Daten kann unter Verwendung der Empfehlungen von *v. Halász* und *Cziesielski* eine erforderliche Anzahl von Zwischenscheiben ermittelt werden. Diese Scheiben können vorzugsweise aus Holzwerkstoffplatten hergestellt werden, wobei der Abbund auf einer CNC gesteuerten Maschine erfolgen kann. Die Zwischenscheiben können sehr filigran ausfallen, da sie primär der Beul-Stabilisierung der Deckplatte dienen. Für Endscheiben würden sich Brettsperrholzelemente anbieten, da diese die Lasten von der Schalenwandung in das Auflager leiten müssen und eine relativ große Auflagerbreite von Vorteil ist. Die Randträger können je nach Abmessungen aus Konstruktionsvollholz oder Brett-schichtholz hergestellt werden. Dabei muss die Oberkante des Trägers entsprechend der Endtangente der Zwischen- und Endscheiben angeschnitten werden. Der entsprechende Anschnitt-Winkel kann nach Gleichung (4.32) ermittelt werden. Um ein einfaches und sicheres Zusammenbauen der Elemente zu gewährleisten sollten in den Randträgern entsprechende Kerben zum Einlassen der Scheibenelemente geschnitten werden. So könnten Randträger und Scheibenelemente durch Schraubpressklebungen miteinander verbunden werden (siehe Abb. 153).



**Abb. 153:** Links: Randbalken mit eingeschnittener Kerfe; Rechts: Vereinigter Randbalken mit Mittelscheibe

Nach Herstellung des Traggerüsts kann die Deckplatte aufgebracht werden. Diese muss ausgehend von einer Trauflinie befestigt werden, da so die Platte an einer Seite ausgerichtet werden kann und zur zweiten Trauflinie hin gebogen wird. Dabei kann der Verbund zwischen Deckplatte und Unterkonstruktion über stiftförmige Verbindungsmittel oder Pressklebung erfolgen. Zur Steigerung der Tragfähigkeit kann die Schalenwandung auch zweilagig ausgeführt werden. Dabei können zwei Holzwerkstoffplatten übereinander angebracht und durch Einlegen eines Zwischenholzes auf Abstand gebracht werden um die Steifigkeit zu erhöhen.

Der größte Unterschied zu der hier verfolgten Idee und den Ansätzen von *v. Halász* und *Cziesielski*, ist die Einbindung des formgebenden Gerüsts in die schlussendliche Tragstruktur. *V. Halász* und *Cziesielski* benötigen zur Herstellung der Schalen ein Lehrgerüst, in welches Furniere mit Klebstoff bis zur Aushärtung eingebracht werden müssen. In der hier untersuchten Ausführung wird eine plan produzierte Holzwerkstoffplatte mit einem aus Vollholz bestehenden Gerüst verbunden, welches die Formgebung der Platte übernimmt und gleichzeitig zur Lastabtragung beiträgt.

Unter den in Kapitel 4.5 angegebenen Entwurfskriterien wurde die in Abb. 154 gegebene Schale entworfen und berechnet (die entsprechenden Berechnungen können Anhang E entnommen werden). Alle Berechnungen erfolgen nach dem in Kapitel 3.3 beschriebenen Verfahren der Schubanalogie.

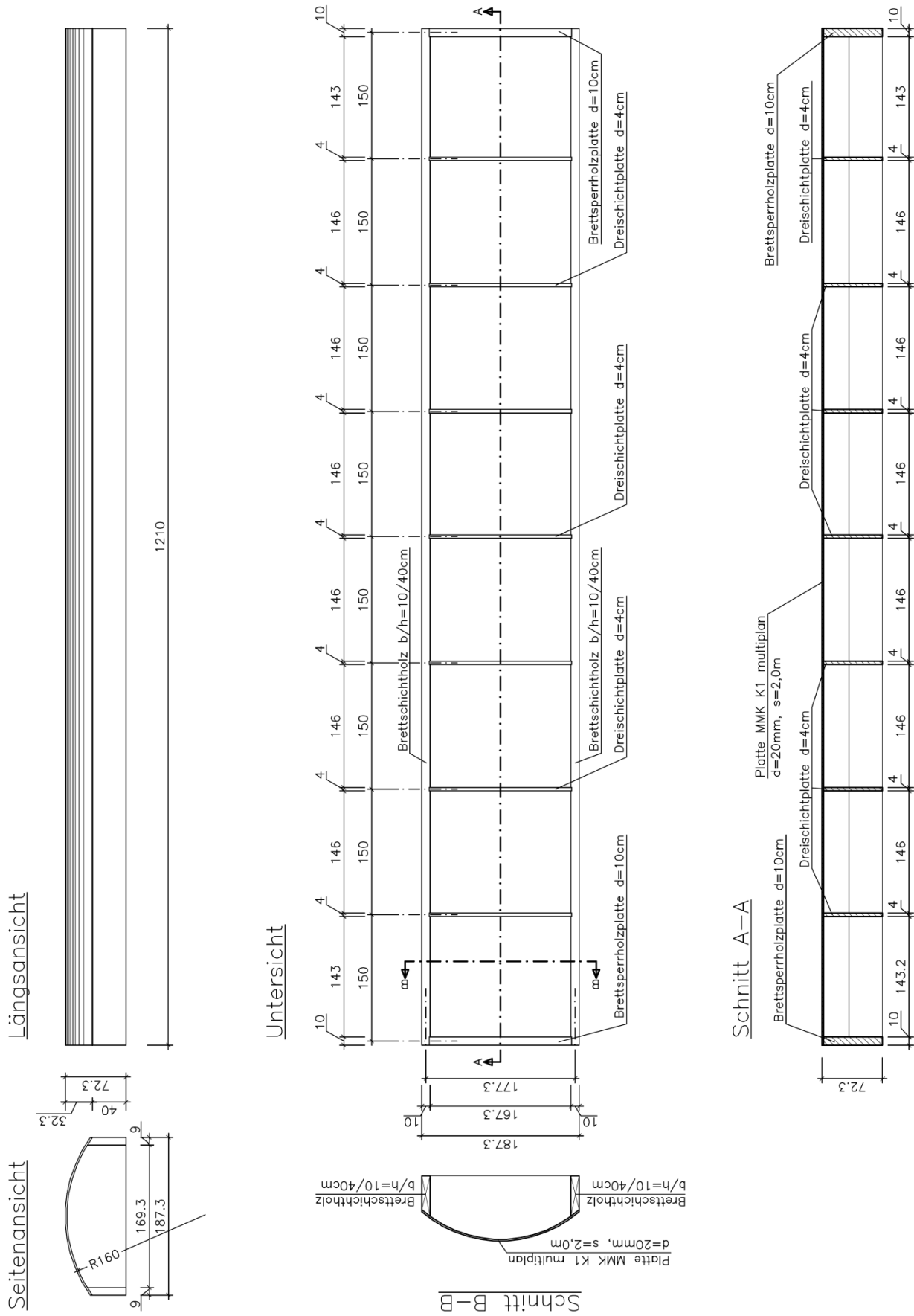


Abb. 154: Entwurf einer möglichen hölzernen Zylinderschale (alle Maße in Zentimeter)

Es zeigt sich, dass die in Abb. 154 gegebene Schalenkonstruktion ohne weiteres eine ständige Last von  $g_k=1,00 \text{ kN/m}^2$  und veränderliche Last von  $q_k=1,50 \text{ kN/m}^2$  über 12,00 m abtragen kann. Dabei wurden Berechnungen mit und ohne Berücksichtigung der durch die Krümmung induzierten Eigenspannungen durchgeführt. Die Berücksichtigung der Eigenspannungen unter Verwendung eines Teilsicherheitsbeiwertes von  $\gamma_G=1,35$  bzw.  $\gamma_P=1,1$  hat zur Folge, dass der Nachweis der Tragfähigkeit in Ringrichtung nicht eingehalten werden kann. Es hat sich aber schon in Kapitel 4.3 gezeigt, dass keine klare Regelung der durch das Krümmen verursachten Spannungen gegeben ist, weshalb in einem späteren Kapitel näher darauf eingegangen werden soll. Ohne Berücksichtigung der fertigungsbedingten Spannungen können alle Nachweise der Tragfähigkeit eingehalten werden. Neben der Fertigung als einzelnes Schalenelement, welches an sich schon statisch brauchbar und hoch funktional ist, besteht die Möglichkeit diese Elemente in einer Gruppe oder Reihe zu verwenden. Zur Überdachung von größeren Flächen können hölzerne Schalenreihen wie beispielsweise die Betonschalenreihen der Großmarkthalle Frankfurt (siehe Abb. 17), des Elektrizitätswerks in Frankfurt am Main (siehe Abb. 18), oder vieler anderer Großüberdachungen ausgeführt werden. In den durchgeführten Berechnungen wurde das Beulen der Zylinderschale nicht explizit untersucht.

Die in Abb. 154 gegebene Zylinderschale weist durch den gekrümmten Querschnitt eine sehr hohe Steifigkeit auf, wodurch in Feldmitte in Folge Volllast eine sofortige charakteristische Durchbiegung von lediglich 42 Millimetern ( $L/285$ ) auftritt. Dieser Wert soll mit einem Balkensystem aus Brettschichtholz der Festigkeitsklasse GL24h erreicht werden, um den Materialverbrauch der Zylinderschale gegenüber konventioneller Bauweisen zu zeigen (siehe Abb. 155). Entsprechende Berechnungen sind Anhang E zu entnehmen.

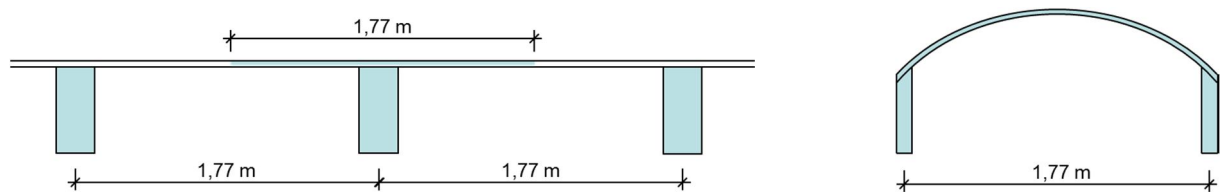


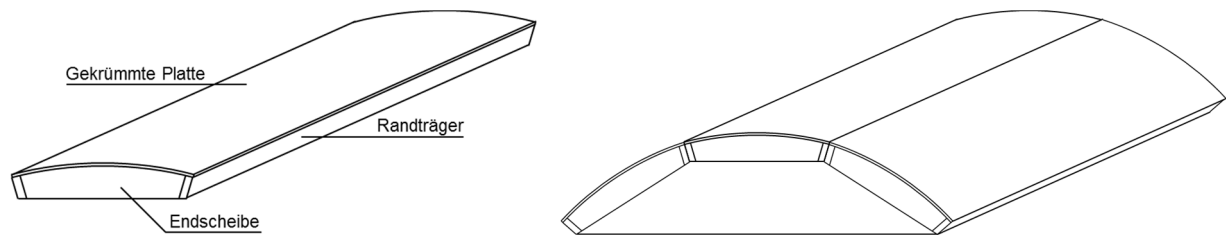
Abb. 155: Gegenüberstellung Balkensystem, Zylinderschale

Es zeigt sich, dass das Balkensystem einen rund 33% höheren Materialverbrauch aufweist als die Zylinderschale. Somit kann durch die Verwendung eines Zylinderschalensystems gleichzeitig eine Kosteneinsparung auf materieller Seite erzielt werden. Werden Aspekte, der derzeit so stark verfolgten Nachhaltigkeit betrachtet, so ist eine Zylinderschale durch den wesentlich geringeren Materialverbrauch auch nachhaltiger als manche konventionelle Lösung.

#### 4.6.2 Schalensegmente zum Einsatz in Dachtragwerke

Da vielfach die Plattenabmessungen nicht ausreichen, um eine Schale aus einer einzigen großen Holzwerkstoffplatte zu fertigen und die Abmessungen für einen Transport um ein weites Maß überschritten werden, sollen Gedanken zur Segmentierung von Schalen wiedergegeben werden. Dabei wird speziell der Gedanke eines modularen Aufbaues verfolgt, in dem aus mehreren kleineren Segmenten ein großes Ganzes geschaffen werden kann. Es bietet sich an, Module zu entwickeln, die parallel zur Trauflinie verlaufen, da solche Elemente wiederum aus einer großen Holzwerkstoffplatte gefertigt werden können. Ein solches Modul könnte wie in Abb. 156 (links) gezeigt aussehen. Mehrere dieser Module aneinandergereiht ergibt eine große Zylinderschale. Die Lagerung der Module kann auf einer polygonal geschnittenen Endscheibe geschehen (siehe Abb. 156, rechts). Dabei gilt es zudem eine kraftschlüssige Verbindung zwischen den Modulen herzustellen, um eine gleichmäßige

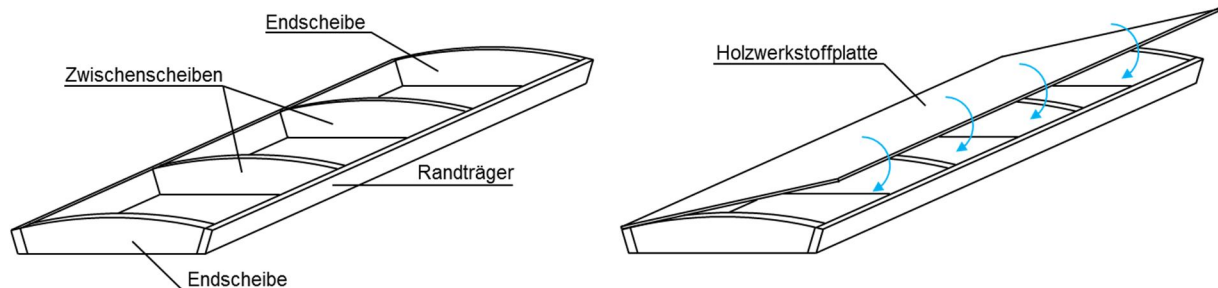
Verformung zwischen den Elementen zu gewährleisten. Dies könnte beispielsweise durch stiftförmige Verbindungsmittel, Verklebungen, Dübel oder Verzahnung der Randträger erfolgen.



**Abb. 156:** Herstellung einer Zylinderschale aus kleineren Modulen; Links: Einzelmodul; Rechts: Große Schale

Durch den modularen Aufbau kann zudem die Arbeitszeit auf der Baustelle erheblich verkürzt und die Bauqualität gesteigert werden. Für die Produktion der Einzelmodule empfiehlt es sich, folgendes Schema in einem Herstellungsbetrieb durchzuführen (siehe auch Abb. 157):

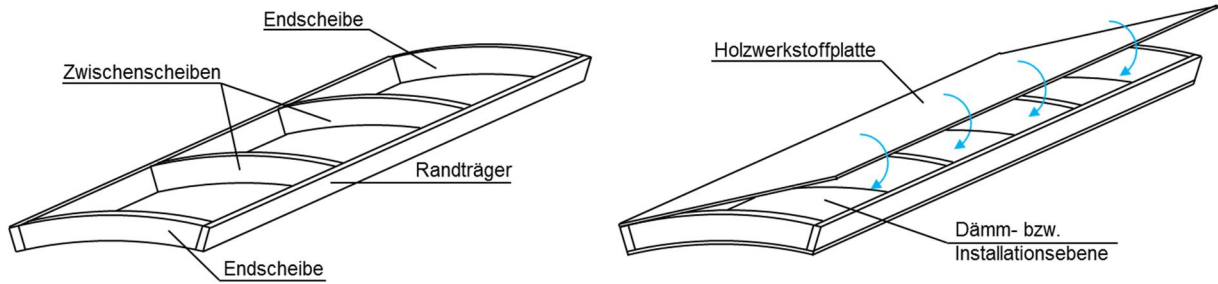
- Produktion der End- und Zwischenscheiben aus Holzwerkstoffplatten oder Vollholzquerschnitten in Abhängigkeit des gewünschten Krümmungsradius
- Abbund der Randträger mit entsprechenden Kernen
- Zusammenfügung von Randträgern, End- und Zwischenscheiben
- Aufbringung und Befestigung der Deckplatte



**Abb. 157:** Herstellung eines Moduls

Bei der Wahl des Krümmungsradius müssen als Hauptpunkte die mögliche Krümmung in Abhängigkeit der Materialfestigkeit (siehe Kapitel 4.2), die erforderlichen Kräfte zur Krümmung und die Verankerung der entsprechenden Kräfte (siehe Kapitel 4.5) berücksichtigt werden. Sollte aus statischen Gründen eine höhere Tragfähigkeit erforderlich sein, so besteht die Möglichkeit eine zweite Lage von Platten aufzubringen. Diese kann direkt auf die oberste Decklage, oder in entsprechendem Abstand zur ersten Plattenlage angeordnet werden. Durch die Entzerrung der beiden Plattenlagen entsteht sogleich ein Hohlraum, der als Dämm- oder Installationsebene genutzt werden kann. Abb. 158 zeigt ein Beispiel eines solchen Moduls. In diesem Fall ist die Unterkante der End- und Zwischenscheiben gekrümmt, wodurch eine glatte, kontinuierliche Untersicht entsteht. Damit muss auch die Endscheibe zur Lagerung der gesamten Schale rund ausgeschnitten werden.



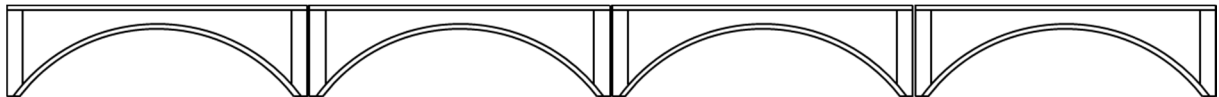


**Abb. 158:** Zweilagiges Modul; Links: Gerüst ohne Platten; Rechts: Modul mit Platten und Dämm- bzw. Installationsebene

Durch die Ausbildung einer zweilagigen Schale wird die Steifigkeit der Schalenwandung erheblich gesteigert. Es ist in solchen Fällen zu beachten, dass die Lastabtragung mitunter stark von der allgemeinen Schalentheorie abweichen kann und gesonderte Betrachtung angestellt werden müssen. Durch den modularen Aufbau entsteht die Möglichkeit nahezu willkürliche Querschnitte der Gesamtschale zu realisieren. Es können Schalen mit elliptischem Querschnitt durch die Kombination verschiedener Module, oder Schalenreihen mit positiven und negativen Krümmungen verwirklicht werden, was ohne eine entsprechende Modularisierung kaum möglich wäre.

#### 4.6.3 Schalensegmente zum Einsatz in Deckentragwerken

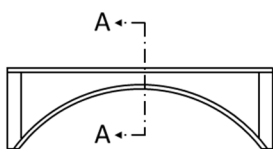
Der Einsatz von Schalensegmenten ist auch in der Herstellung von Deckenkonstruktionen möglich. Dazu muss als oberer Abschluss eine horizontale Fläche geschaffen werden. Dies kann durch Aufständering einer horizontal angeordneten Platte auf die gekrümmte, untere Platte geschehen. Dadurch entsteht zwischen den Platten ein Hohlraum, der als Installations- oder Dämmebene genutzt werden kann (siehe Abb. 159).



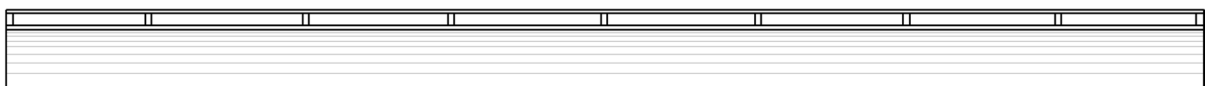
**Abb. 159:** Entwurfsidee einer Deckenkonstruktion mit Dämm- bzw. Installationsebene

Um einen möglichst einfachen und schnellen Montageablauf zu garantieren sollten die einzelnen Deckenabschnitte als eigenständige Module geplant und bemessen werden. So können sie leicht gefertigt, transportiert und verbaut werden. Der Quer- und Längsschnitt eines solchen Moduls ist in Abb. 160 dargestellt.

Querschnitt:

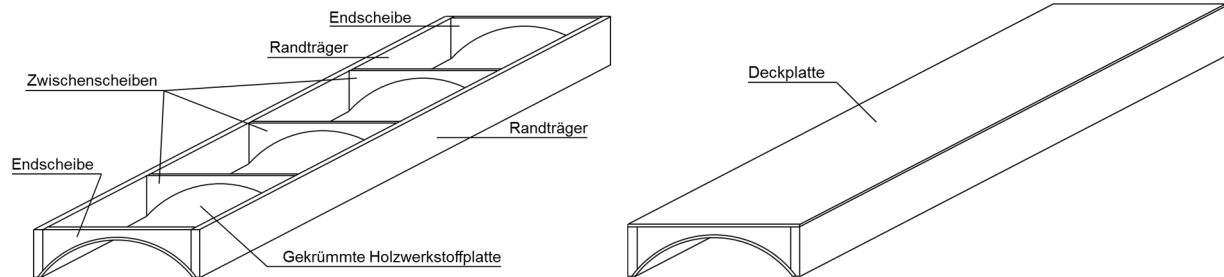


Längsschnitt: A – A



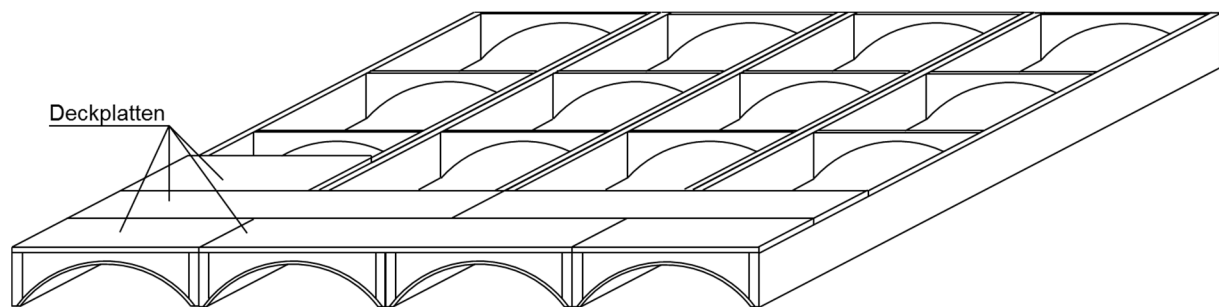
**Abb. 160:** Querschnitt und Längsschnitt eines Deckenelementes

Es ist zu beachten, dass es sich bei solchen Elementen nicht mehr zwingend um Zylinderschalen handelt, sondern um eine Kombination aus Zylinderschale und Platte bzw. Scheibe. Die Herstellung eines solchen Moduls würde wiederum mit der Fertigung der Zwischen- und Endscheiben beginnen, die entsprechend mit den Randträgern verbunden werden. Sobald das formgebende Gerüst erstellt ist, können die obere und untere Lage aus Holzwerkstoffplatten aufgebracht werden (siehe Abb. 161). Es muss beachtet werden, dass die obere Holzwerkstofflage eine ausreichende Steifigkeit besitzt, um Biegebeanspruchungen zwischen den Querrippen abzutragen.



**Abb. 161:** Herstellung eines Deckenelementes

Um die Gesamtsteifigkeit in Querrichtung und auch die Redundanz eines solchen Deckensystems zu erhöhen, besteht die Möglichkeit die oberste Lage in Querrichtung nach dem Verlegen mehrerer Elemente aufzubringen. Somit können mehrere Schalensegmente miteinander verbunden und Lasten besser verteilt werden (siehe Abb. 162).



**Abb. 162:** Nachträgliches aufbringen der obersten Lage auf mehrere Elemente

In jedem Fall müssen die Randträger der einzelnen Elemente miteinander verbunden werden. Dies geschieht wie bei der Erstellung von Schalenreihen aus Einzelschalen mit Hilfe von Bolzen, Dübeln, Schrauben oder Schraubpressklebungen.

#### 4.6.4 Schalensegmente zum Einsatz in Silos

Die Herstellung von Zylindersegmenten würde sich auch zur Konstruktion von Holzsilos anbieten. Bisweilen werden Holzsilos aus einer Reihe von Dauben ( $b/h \sim 40/160\text{mm}$ ) hergestellt, die auf der Baustelle oder im Werk zu einem kompletten Zylinder mittels Nut- und Federsystem zusammengefügt werden. Um die hohen Ringzugkräfte aufzunehmen, die durch das Füllgut entstehen, müssen mehrere horizontal verlaufende Ringe angeordnet werden. Diese Ringe werden während der Nutzungszeit eines Silos mehrfach nachgespannt, da sie sich in Folge von Temperatureinwirkungen und Verformungen der Silowandung lockern. (Beispiel eines Holzsilos siehe Abb. 163)

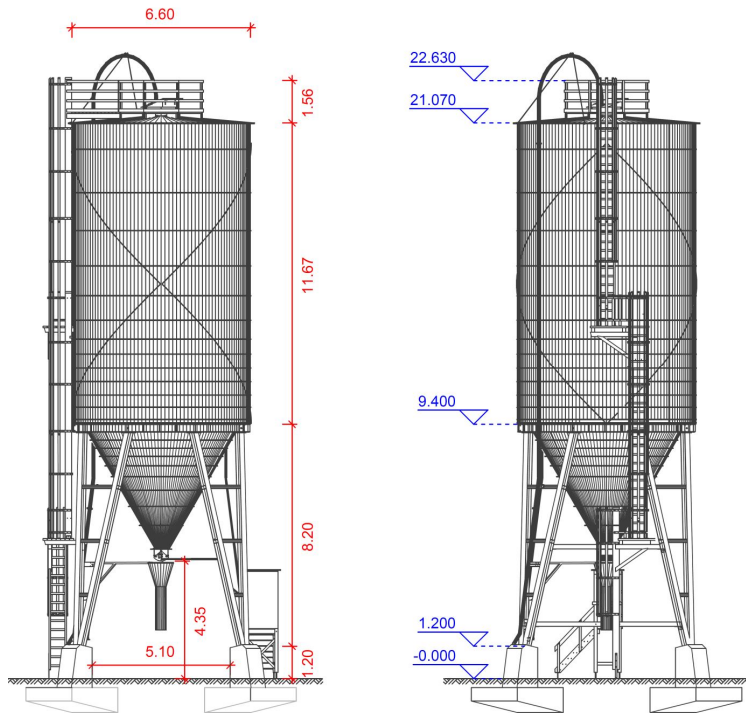


Abb. 163: Silo zur Lagerung von Streugut [blumer-lehmann]

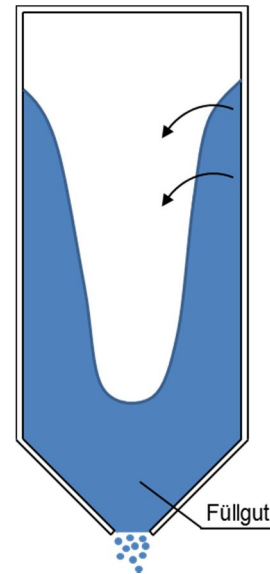
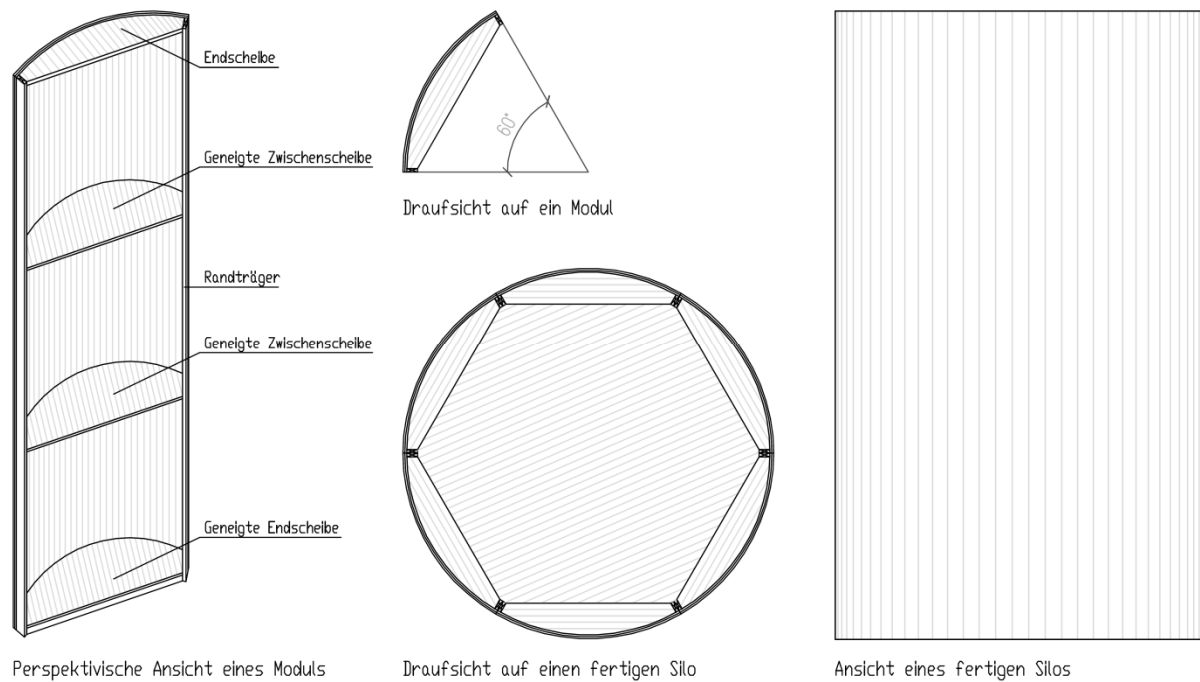


Abb. 164: Abrutschen des Füllgutes

Da die einzelnen Dauben in der Regel nur konstruktiv miteinander verbunden sind, kommt es bei schlagartigen Beanspruchungen mitunter zur Schiefstellung des Silos. Eine schlagartige Beanspruchung kann beispielsweise durch Verwendung von schlecht rieselfähigem Streugut verursacht werden. Beim Entnehmen des Streugutes türmt sich an den Seiten das Material auf, bis es plötzlich abrutscht bzw. umfällt (siehe Abb. 164).

Durch die Verwendung von Schalensegmenten könnte die Gesamtsteifigkeit der Silos erheblich gesteigert werden und auch eine Schrägstellung bei Stoßbelastungen, durch die fehlende Schubsteifigkeit zwischen den Dauben, verhindert werden. Mehrere, im Werk gefertigte, und als Elemente auf die Baustelle gebrachte zylinderförmige Segmente werden hierzu zu einem geschlossenen Zylinder zusammengeführt. Eine mögliche Ausführung eines solchen Elementes ist in Abb. 165 gegeben. Der Zentriwinkel eines Moduls beträgt  $60^\circ$ , so dass ein geschlossener Zylinder aus sechs Elementen hergestellt werden kann. Die Schalenwandung besteht aus zwei Holzwerkstoffplatten, die übereinandergelegt an den Randträgern und Zwischen- bzw. Endscheiben befestigt werden. Die Randträger der Module werden beim Zusammenbau des Silos miteinander verbunden, dies kann durch Schrauben oder Bolzen geschehen. Damit das Schüttgut nicht auf den Zwischenscheiben liegen bleiben kann, werden diese geneigt eingebracht. Folglich rutscht das Material auf den schrägen Flächen ab und es können auch keine großen Anhäufungen an den Rändern entstehen, die zu einer Stoßbelastung führen. Da das Schüttgut sich aber auf den Zwischenscheiben absetzen kann, ist hier auf eine ausreichende Tragfähigkeit zu achten. Als oberer Abschluss des Zylinders kann eine polygonal geschnittene Brettsperrholzplatte verwendet werden, an der die Module befestigt sind.



**Abb. 165:** Aufbau eines modularen Silos

Durch den modularen Aufbau des Silos steigt zwar der Holzverbrauch an, aber Stabilität und Dichtigkeit werden erheblich gesteigert. Laut Angaben eines Siloherstellers liegen die gängigen Durchmesser von Silos zur Lagerung von Streugut bei 4,00 bis ca. 6,60 Metern.<sup>91</sup> Diese Radien können auch bei der Krümmung von Holzwerkstoffplatten erreicht werden. Es muss aber besonders beachtet werden, dass Holzsilos vorwiegend frei bewittert werden und eine entsprechende Resistenz der Holzwerkstoffe gegeben sein muss.

#### 4.7 Fazit

Wie die vorherigen Kapitel zeigen, stände für Zylinderschalen oder für einfach gekrümmte Schalensegmente ein weites Anwendungsfeld zur Verfügung. Sie könnten zur Herstellung von Dach-, Decken- und Siloelementen verwendet werden. Das große Problem besteht jedoch in der Berücksichtigung der durch die Krümmung der Platten entstehenden Eigenspannungen. Da bereits durch die Herstellung die charakteristischen Festigkeiten erreicht bzw. überschritten werden, können die Nachweise der Tragfähigkeit nicht eingehalten werden. Dies zeigen auch Berechnungsergebnisse in Anhang E. Eine explizite Angabe zur Behandlung der durch die Fertigung induzierten Eigenspannungen konnte in keiner Norm gefunden werden.

Es ist bekannt, dass Spannungen unter einer konstanten Verformung, in einem Werkstoff über einen betrachteten Zeitraum abgebaut werden. Dieser Effekt wird als Relaxation bezeichnet. Ein solches langzeitliches Verhalten muss auch bei der Herstellung von Zylinderschalen bzw. gekrümmten Bauteilen zu beobachten sein. Um nähere Kenntnis dazu zu erhalten, werden in den folgenden Kapiteln die langzeitlichen Eigenschaften des Holzes, seine Beschreibungs- und Beeinflussungsmöglichkeiten betrachtet.

<sup>91</sup> <http://www.blumer-lehmann.ch>, Download am 12.09.2013

## 5 Rheologie

### 5.1 Hintergrund

Die Herstellung von gekrümmten Holzbauteilen führt unweigerlich zu Eigenspannungen. Diese werden im Bauteil gespeichert und bauen sich über einen betrachteten Zeitraum zu gewissen Teilen ab. Da bei der Berechnung von Zylinderschalen die – aus gekrümmten Holzwerkstoffplatten hergestellt werden sollen – in Ringrichtung sehr hohe Eigenspannungen entstehen, ist die Kenntnis des zeitlichen Verlaufs der Spannungsentwicklung oder ein Bereich in dem die Spannungen nach einer gewissen Zeit liegen, unabdingbar. Da es sich bei Holz bzw. Holzwerkstoffen um viskose Materialien handelt, sollen in den folgenden Abschnitten die wichtigsten langzeitlichen Effekte zusammengetragen und erläutert werden. Grundsätzlich kann dies alles unter dem Schlagwort der Rheologie erfolgen.

„Rheologie ist die Lehre von der Deformation und dem Fließen der Substanzen. Diese Wissenschaft ist ein Teilgebiet der Physik (und der physikalischen Chemie), da die wichtigsten Messgrößen aus der Mechanik kommen: Kräfte, Auslenkungen und Geschwindigkeiten. Der Begriff ist aus dem Griechischen abgeleitet: „rhein“ bedeutet fließen, strömen. Dem Wortsinne nach bedeutet Rheologie also „Fließkunde“. Rheologische Untersuchungen umfassen nicht nur das Fließverhalten von Flüssigkeiten, sondern auch das Deformationsverhalten von Festkörpern. Der Zusammenhang besteht darin, dass durch Scherkräfte verursachte Deformationen bei vielen Substanzen zum Fließen führen.“ [Mezger, 2010]

Die beiden primären Themen der Rheologie sind das Kriechen (Retardation) und die Relaxation, die in den Folgeabschnitten besprochen werden sollen.

### 5.2 Retardation – Kriechen

#### 5.2.1 Allgemeines

Da in der Literatur das Kriechen wesentlich intensiver behandelt wird als die Relaxation und beide Effekte sehr eng miteinander verwandt sind, soll diese an erster Stelle besprochen werden. So können im späteren Verlauf Erkenntnisse aus dem Kriechverhalten der Werkstoffe eins zu eins auf Relaxationsprozesse übertragen werden.

„Kriechen ist die Zunahme der Verformung im Laufe der Zeit unter einer ständig wirkenden Belastung. Wie Abb. 166 zeigt, beginnt der Kriechanteil der Verformung unmittelbar nach der elastischen Anfangsverformung  $u_{inst}$ . Die elastische Anfangsverformung kann experimentell bestimmt werden, indem eine Belastung kontinuierlich bis zu einem bestimmten Wert innerhalb einer vorgegebenen Zeit und unter genau definierten Bedingungen aufgebracht wird“ [Andriamitantoa, 1995].  $F$  entspricht in dieser Grafik der Belastung,  $u$  der Verformung und  $t$  der Zeit. Die Kriechverformung zum Zeitpunkt  $t_{fin}$  kann aus der Differenz von  $u_{fin} - u_{inst}$  berechnet werden.  $R$  kennzeichnet die Entlastungsphase.

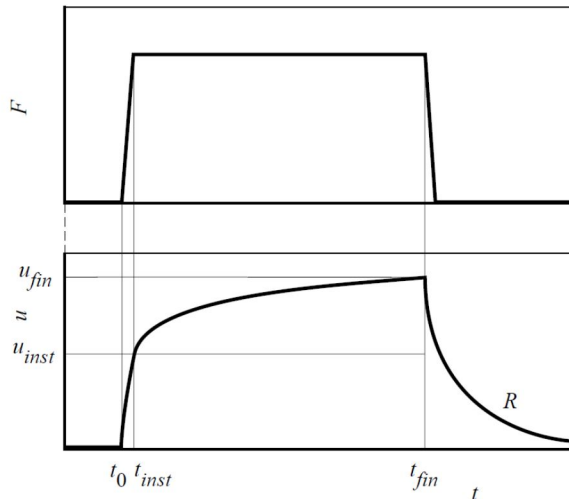
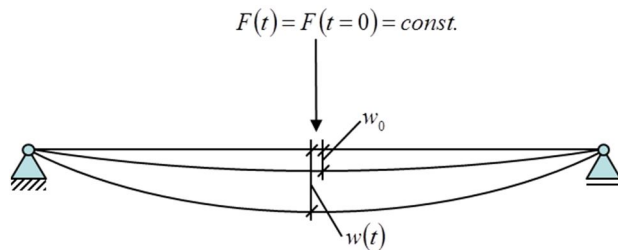


Abb. 166: Schematische Darstellung des viskos-elastischen Verhaltens [Andriamitsoa, 1995]

Wird ein Retardationsversuch durchgeführt, so erfährt ein zu untersuchender Körper eine konstante Belastung, die im Bereich kleiner Verformungen eine annähernd konstante Spannung erzeugt. Der Quotient aus der zeitabhängigen Verformung  $\varepsilon(t)$  und der Spannung  $\sigma_0$  wird als „Nachgiebigkeit“ oder „Compliance“  $C_M(t)$  bezeichnet.<sup>92</sup>

$$C_M(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \tag{5.1}$$

Um den zeitlichen Verlauf der Verformung darzustellen haben sich nach [Gressel, 1971] diverse Darstellungsarten etabliert. Die gebräuchlichsten Darstellungsmöglichkeiten sollen nachfolgend an einem Einfeldträger beschrieben werden.



Dieser Einfeldträger wird durch eine punktuelle Last  $F(t)$  in Feldmitte beansprucht, welche über den betrachteten Zeitraum konstant wirkt. Die zeitliche Verformung wird in Feldmitte erfasst. Die sofortige elastische Durchbiegung wird mit  $w_0$ , die totale Durchbiegung nach einer bestimmten Zeit  $t$  mit  $w(t)$  bezeichnet (siehe Abb. 167).

Abb. 167: Zeitlicher Verlauf der Verformung eines Einfeldträgers

Grundsätzlich kann das Formänderungsverhalten als absolutes oder relatives Kriechen beschrieben werden. Die grafische Darstellung von unveränderten Messwerten  $w(t)$  wird als absolutes Kriechen bezeichnet (siehe Abb. 168 a)). Werden die gemessenen Durchbiegungen  $w(t)$  auf die Anfangsdurchbiegung  $w_0$  zum Zeitpunkt  $t=0$  bezogen, so stellt der Quotient  $w(t)/w_0$  einen Vergrößerungs-faktor (siehe Abb. 168 d)) und dessen Kehrwert  $w_0/w(t)$  einen Abminderungsfaktor dar (siehe Abb. 168 e)). Die beiden bezogenen Größen werden als relatives Kriechen bezeichnet.

<sup>92</sup> Gressel, P. (1971). Untersuchungen über das Zeitstandbiegeverhalten von Holzwerkstoffen in .... Seite 57



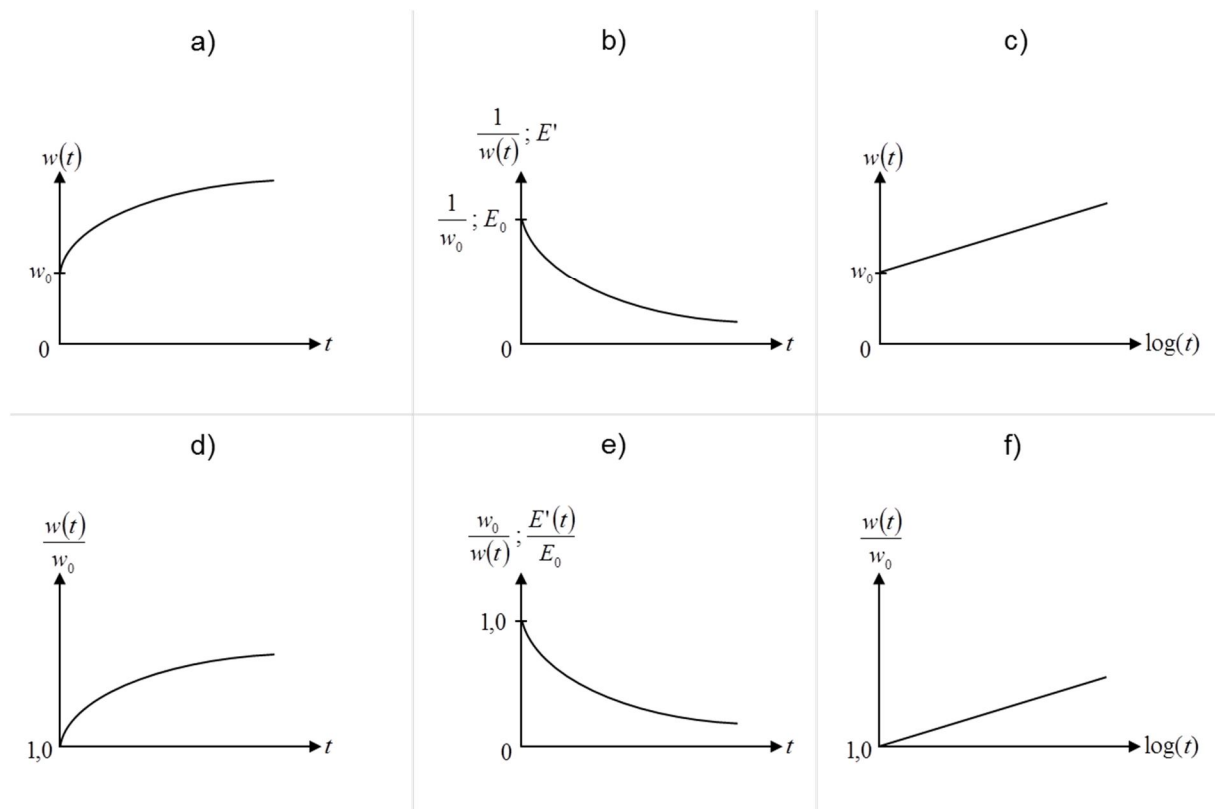


Abb. 168: Möglichkeiten zur Darstellung des Formänderungsverhaltens [Gressel, 1971]

In Abb. 168 b) wird der zeitliche Verlauf des reziproken Messwertes  $1/w(t)$  dargestellt. Dieser Wert kann einem ideellen E-Modul  $E'$  gleichgesetzt werden, welcher unter denselben Ausgangsbedingungen zu einer sofortigen Durchbiegung wie zum Zeitpunkt  $t$  führen würde. Dieser E-Modul darf keinesfalls mit dem realen E-Modul zum Zeitpunkt  $t$  verglichen werden. Zur Betrachtung von kurzen Zeitabschnitten (weniger als 50 Tage) werden für gewöhnlich lineare Zeitachsen auf der Abszisse verwendet. Werden längere Zeitperioden untersucht, so bietet sich ein logarithmischer Zeitmaßstab an, da der Funktionsverlauf für gewöhnlich in eine Gerade übergeht (siehe Abb. 168 c) und f)). Des Weiteren ist die Darstellung des zeitlichen Verlaufs über den relativen Kriechfaktor  $[w(t)-w_0]/w_0 = w(t)/w_0 - 1$  möglich. Das Integral unter der Kriechkurve  $[w(t)-w_0]/w_0$  kann als Maß für die durch das Kriechen bewirkte Formänderungsarbeit betrachtet werden.<sup>93</sup>

[Niemz, 1993] stellt in seinem Buch den allgemeinen Verlauf einer Kriechfunktion wie in Abb. 169 a) gegeben dar. Es ist zu erwähnen, dass die Angaben von [Niemz, 1993] zu größten Teilen aus Versuchsergebnissen von [Gressel, 1971] stammen.

Dieser allgemeine Verlauf einer Kriechfunktion kann in drei Abschnitte unterteilt werden, welche sich primär durch ihre Kriechgeschwindigkeiten unterscheiden. Die Primärperiode ist gekennzeichnet durch eine Abnahme der Geschwindigkeit und stellt eine sofortige quasi-elastische, spontane Verformung dar. In der sekundären Periode ist eine nahezu konstante Steigung bzw. Kriechgeschwindigkeit zu erkennen, die einer verzögert-elastischen Verformungszunahme entspricht. Dieser verzögert elastischen Periode folgt oberhalb einer bestimmten Belastungsschwelle eine dritte, plastische Komponente, die sich auch nach unendlich langer Entlastungszeit nicht mehr zurückbildet. In der dritten Zeitperiode nimmt die Kriechgeschwindigkeit mit voranschreitender Zeit zu.<sup>94</sup>

<sup>93</sup> Gressel, P. (1971). *Untersuchungen über das Zeitstandbiegeverhalten von Holzwerkstoffen in ....* Seite 57-58

<sup>94</sup> Gressel, P. (1971). *Untersuchungen über das Zeitstandbiegeverhalten von Holzwerkstoffen in ....* Seite 2-3

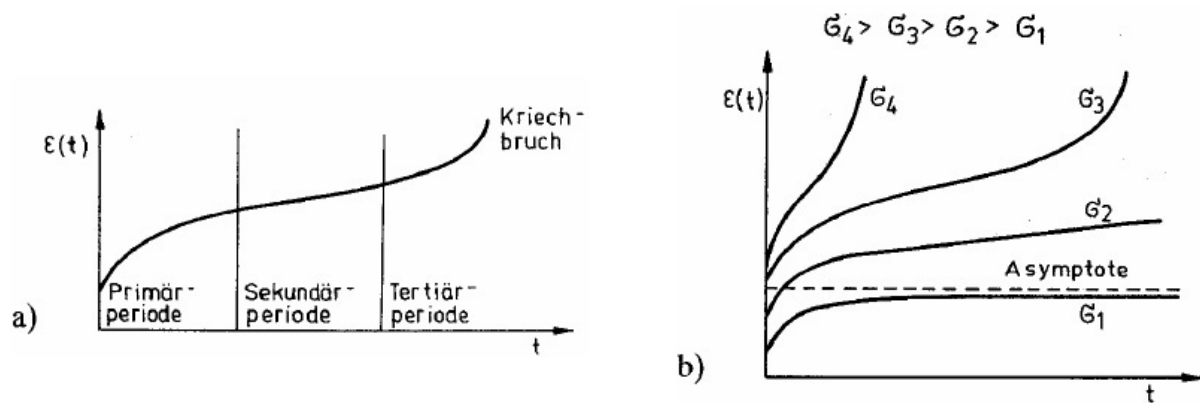


Abb. 169: a) idealisierte Kriechfunktion, b) Kriechkurven von Holz bei unterschiedlichen Lasten [Niemz, 1993]

Ob eine Kriechfunktion eine Tertiärperiode besitzt ist vom Belastungsniveau abhängig (siehe Abb. 169 b)). Bei sehr hohen Belastungen kann der sekundäre Bereich unterdrückt werden und ein direkter Übergang vom primären auf den tertiären Pfad stattfinden. Für geringe Belastungen nähert sich die Kriechfunktion asymptotisch einem Grenzwert an und es findet nur ein Primärkriechen statt. Der tertiäre Kriechbereich ist bei vielen Werkstoffen mit sprödelastischem Verhalten nicht oder nur bei hohen mechanischen Beanspruchungen zu finden.<sup>95,96</sup>

### 5.2.2 Kriechen von Holz und Holzwerkstoffen

Das Kriechverhalten von Holz und Holzwerkstoffen wurde von sehr vielen Autoren untersucht und soll an dieser Stelle nur auszugsweise in den wichtigsten Punkten wiedergegeben werden. Nähere Informationen können in [Roth, 1935], [Kollmann, 1951], [Kollmann, 1961], [Armstrong, et al., 1962] [Möhler & Maier, 1970], [Gressel, 1971], [Leicester, 1971], [Gressel, 1983], [Gressel, 1984], [Gressel, 1984/1], [Freingruber, 1985], [Löffler, 1988], [Moliński & Raczkowski, 1988], [Dinwoodie, et al., 1991], [Niemz, 1993], [Morlier, 1994], [Tong, 1994], [Hanhijärvi, 1995], [Andriamitantoa, 1995], [Ranta-Maunus, 1995], [Thelandersson, 1995], [Koponen, 1998], [Becker, 2002], [Thelandersson & Larsen, 2003], [Schänzlin, 2003], [Piter, et al., 2006], [Ranz, 2007], [Sorvari & Malinen, 2007], [Jöbstl, 2007], [Neuhaus, 2009] gefunden werden. Speziell verwiesen wird auf das Forschungsvorhaben AIF-Nr. 5348 von Peter Gressel [Gressel, 1983]. In dieser Arbeit wurden beinahe 400 Literaturquellen zum Thema Kriechen von Holz und Holzwerkstoffen zusammengetragen und ausgewertet. Zudem wurden Kriechversuche mit einer Dauer von mehr als 12 Jahren durchgeführt. Auf Grundlage dieser Forschungsarbeit sollen hier die wichtigsten Einflussfaktoren und Ergebnisse wiedergegeben und durch neuere Literaturquellen ergänzt werden.

Holz kann als hoch polymerer Werkstoff betrachtet werden, der im Wesentlichen aus den drei Polymeren Cellulose, Hemicellulose und Lignin besteht. Das rheologische Verhalten dieser heterogenen Mischung „Holz“ ergibt sich aus der Überlagerung der Eigenschaften seiner drei Hauptbestandteile. Viele Forschungsergebnisse haben gezeigt, dass ein Vergleich des Holzes mit anderen hochpolymeren Werkstoffen gerechtfertigt ist.<sup>97</sup>

<sup>95</sup> Gressel, P. (1971). *Untersuchungen über das Zeitstandbiegeverhalten von Holzwerkstoffen in ...* Seite 2-3

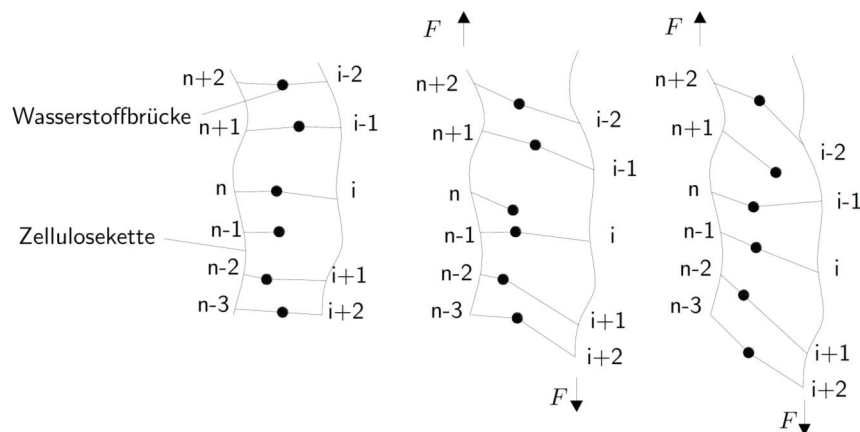
<sup>96</sup> Rösler, et. al. (2012). *Mechanisches Verhalten der Werkstoffe*. Seite 387

<sup>97</sup> Gressel, P. (1971). *Untersuchungen über das Zeitstandbiegeverhalten von Holzwerkstoffen in ...* Seite 13

Im Laufe der Zeit haben sich diverse Betrachtungsweisen bzw. Darstellungsmethoden des Langzeitverhaltens von Holz etabliert. Die gängigsten sind:

- Molekularkinetische Betrachtungsweise
- Mathematische Ansätze
- Rheologische Modelle

In der molekularkinetischen Betrachtungsweise wird versucht, das Langzeitverhalten des Holzes über Platzwechselvorgängen ähnlich zu Hochpolymeren zu beschreiben. Wird ein hochpolymerer Werkstoff beansprucht, so beginnen die im spannungslosen Zustand lockeren, verknäuelten Moleküle sich zu strecken und aneinander abzugleiten. Die Streckung wird durch die gegenseitigen Bindungskräfte der Moleküle mit fortschreitender Dehnung und Orientierung der Molekülverbände behindert. Dieser degressive Verlauf der Verformung entspricht dem primären Abschnitt der allgemeinen Kriechfunktion und ist reversibel. Beim Überschreiten einer Spannungsgrenze brechen die ersten schwächeren Bindungen zwischen den Molekülen auf. Im Holz sind das Wasserstoffbindungen zwischen den Zelluloseketten. Die Güte („Stärke“) der Wasserstoffbindungen ist abhängig vom Feuchtegehalt des Holzes, wodurch starke und schwache Bindungen entstehen können. Diese molekularen Rissstellen bleiben nicht offen; vielmehr haben die Moleküle das Bestreben, sich in einem entspannten Zustand an nähergelegenen Punkten erneut zu binden. Dieser Vorgang wird als Platzwechsel bezeichnet (siehe Abb. 170).<sup>98, 99</sup>



**Abb. 170:** Kriechvorgang durch gegenseitiges Verschieben der Zelluloseketten [Schänzlin, 2003]

Da diese neu gebildeten Bindungen in ihrer anfänglichen Lage noch ungespannt sind, kann sich das Kriechen nun mit örtlich erhöhter Geschwindigkeit fortsetzen. Derartige Rissstellen bilden und schließen sich in ständig wachsender Zahl und sind über den gesamten betrachteten Körper verteilt. Das Verhältnis der sich bildenden zu den sich schließenden Rissstellen ist konstant, wodurch eine konstante Kriechgeschwindigkeit erreicht wird, die sich im sekundären Bereich der Kriechkurve widerspiegelt. Oberhalb einer bestimmten Belastung werden jedoch vermehrt Bindungen gelöst und weniger neu gebildet, wodurch ein Anstieg der Kriechgeschwindigkeit zu verzeichnen ist und die tertiäre Periode des Kriechverlaufs bestritten wird. Sobald alle Bindungen gelöst sind, kommt es zum Bruch des betrachteten Körpers.<sup>100</sup>

Es gibt in der molekularkinetischen Betrachtungsweise noch weitere Ansätze, die beispielsweise nur die Zellwandung des Holzes und die Füllung des Hohlraums zwischen den Zellwandungen durch ein

<sup>98</sup> Gressel, P. (1971). *Untersuchungen über das Zeitstandbiegeverhalten von Holzwerkstoffen in ...* Seite 8-10

<sup>99</sup> Schänzlin, J. (2003). *Zum Langzeitverhalten von Brettstapel-Beton-Verbunddecken*. Seite 18-19

<sup>100</sup> Gressel, P. (1971). *Untersuchungen über das Zeitstandbiegeverhalten von Holzwerkstoffen in ...* Seite 8-10

hygroskopisches, viskoses, stark quellendes und schwindendes Gel betrachten.<sup>101, 102</sup> Die molekulare Betrachtung ist hilfreich um ein Verständnis für das allgemeine Verformungsverhalten von Holz und Holzwerkstoffen zu erhalten. Es eignet sich aber kaum, um das Langzeitverhalten von baupraktisch relevanten Querschnitten zu beschreiben, oder gar eine Langzeitprognose für baurelevante Holzbauteile abzugeben.

Bis ungefähr ins Jahre 1990 wurde das Langzeitverhalten von Holz und Holzwerkstoffen überwiegend durch rein mathematische Ansätze beschrieben. Diese mathematischen Beschreibungen wurden überwiegend aus empirischen Funktionen basierend auf Messdaten ermittelt und beinhalteten keine physikalische Deutung der aufgezeichneten Kriechverläufe. Sie waren relativ einfach zu bestimmen und beschrieben das erfasste Werkstoffverhalten relativ genau. Die übliche Darstellung der zeitlichen Veränderung wurde wie folgt ausgedrückt:<sup>103</sup>

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_{cr}(t) \quad (5.2)$$

Dabei beschreibt  $\varepsilon_0$  die rein elastische Verformung und  $\varepsilon_{cr}(t)$  zeitabhängige Verformungen in Folge Kriechen. Der Kriechanteil wurde durch eine Potenzfunktion der allgemeinen Form wie folgt dargestellt:

$$\varepsilon_{cr}(t) = a \cdot t^m \quad (5.3)$$

$a$  und  $m$  sind Parameter, die aus experimentellen Versuchen bestimmt werden müssen. Nach [Gressel, 1984/1] besteht der Vorteil dieser Potenzfunktion darin, dass sich bei einer Darstellung im doppelt-logarithmischen Maßstab Geraden ergeben, die ein einfaches Auslesen von Zwischenwerten, als auch eine bedingte Extrapolation zulassen. Eine weitere Möglichkeit der Darstellung des Kriechanteils besteht als Exponentialfunktion der folgenden Form:

$$\varepsilon_{cr}(t) = a \cdot (1 - e^{-bt}) \quad (5.4)$$

$a$  und  $b$  sind wiederum Parameter die aus durchgeführten Versuchen ermittelt werden müssen. Es gibt noch eine Reihe verschiedener Darstellungsmöglichkeiten, auf die an dieser Stelle aber verzichtet werden soll.

Die dritte Möglichkeit das Kriechen von Holz zu beschreiben besteht darin, mechanische Ersatzmodelle, auch rheologische Modelle genannt zu verwenden. Diese Modelle haben in den letzten Jahren eine wahrliche Renaissance erlebt da sie sehr gut in rechnergestützten Programmen implementiert werden können. Zudem bieten sie eine sehr gute Veranschaulichung verschiedener Effekte. Dabei wird das Langzeitverhalten von Werkstoffen durch mechanische Grundelemente wie beispielsweise Feder, Dämpfer und Reibungskörper dargestellt. Durch eine entsprechende Anordnung der Grundelemente untereinander können elastische, plastische sowie viskose Verformungsanteile beschrieben werden. Wobei immer vom Boltzmann'schen Superpositionsprinzip ausgegangen wird. Neuere Elemente, wie sie von [Leicester, 1971], [Grimsel, 1998], [Toratti, 1992], [Tong, 1994] oder [Hanhijärvi, 1995] veröffentlicht wurden, beschreiben zudem hygroskopische Effekte wie Quellen-Schwinden und eine feuchteabhängige Variationen des E-Moduls. Auch das

<sup>101</sup> Schänzlin, J. (2003). *Zum Langzeitverhalten von Brettstapel-Beton-Verbunddecken*. Seite 19-20

<sup>102</sup> Gressel, P. (1971). *Untersuchungen über das Zeitstandbiegeverhalten von Holzwerkstoffen in ...*. Seite 10

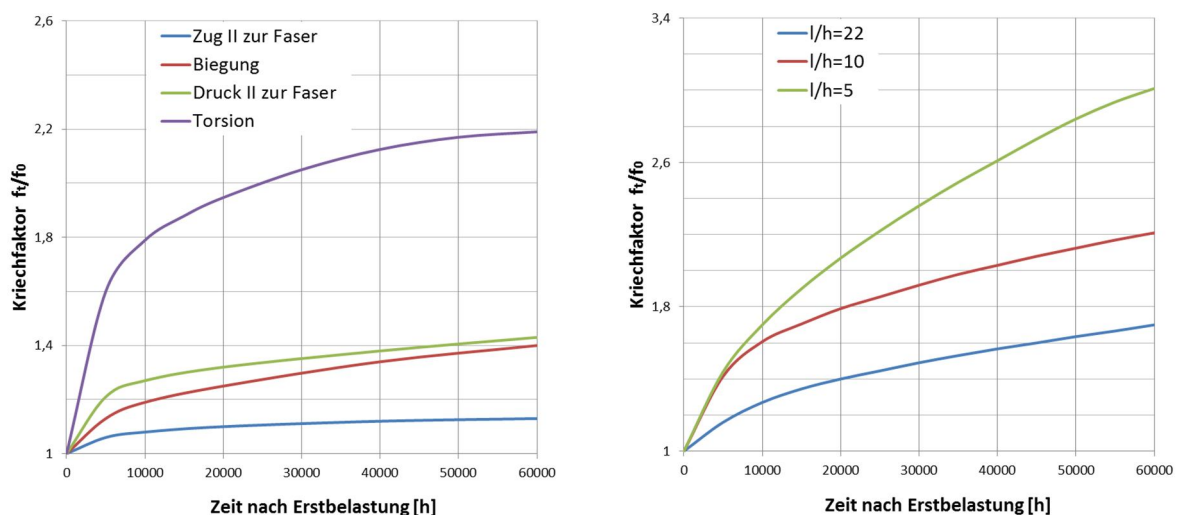
<sup>103</sup> Gressel, P. (1984/1). *Zur Vorhersage des langfristigen Formänderungsverhalten aus Kurz-Kriechversuchen*. Seite 293

Bruchverhalten unter Dauerlast sowie die Restfestigkeit von Polymeren kann wie von [Lawniczak, 1967] gezeigt, durch rheologische Modelle dargestellt werden. Da diese Modelle für einen Ingenieur durch ihre Anschaulichkeit sehr praktisch sind, sollen Sie in den Kapiteln 5.4 und 5.5 näher beschrieben werden.

Da Holz ein anisotroper Werkstoff ist und seine langzeitlichen Verhaltensmuster von verschiedenen Effekten abhängig sind, sollen im Folgenden die wichtigsten Einflussfaktoren auf das Kriechverhalten von Vollholz beschrieben werden. Dazu zählen:

- Art der Belastung (Biege-, Schub-, Druck-, Zug-, oder Torsionsbeanspruchung)
- Höhe der Belastung
- Belastungsdauer
- Temperatur (konstant oder wechselnd)
- Holzfeuchte bzw. relative Luftfeuchte (konstant oder wechselnd)

Die **Belastungsart** hat einen sehr großen Einfluss auf das Kriechen und wird in Abb. 171 gezeigt. Darin werden Versuchsergebnisse nach [Gressel, 1983] als relative Verläufe veranschaulicht.



**Abb. 171:** Links: Kriechverlauf bei unterschiedlicher Belastung; Rechts: Schubkriechen in Abhängigkeit der Geometrie [Gressel, 1983]

Das linke Diagramm zeigt Kriechversuche an Fichtenholz in Abhängigkeit der Beanspruchungsart, an kleinen fehlerfreien Proben in einem Klima von 20°C und 55 % rel. Luftfeuchte. Der Belastungsgrad (Verhältnis aus aufgebrachter Spannung zu Kurzzeitfestigkeit) beträgt rund 20-30 %.<sup>104</sup> Das rechte Diagramm in Abb. 171 veranschaulicht den Einfluss der Schubbeanspruchung auf das Kriechverhalten von Vollholz. Abgebildet sind verschiedene Verhältnisse zwischen Spannweite  $l$  und Probenhöhe  $h$ , von in Feldmitte punktuell beanspruchten Fichtenholzproben. Der Dreipunktversuch wurde unter konstantem Klima (20°C und 55 % rel. Luftfeuchte) gefahren und die Durchbiegung in Feldmitte für rund sieben Jahre aufgezeichnet.<sup>105</sup>

Es ist aus Abb. 171 zu erkennen, dass das Kriechen in Folge Zugbeanspruchung parallel zur Faser geringer ist als Biegekriechen oder Druckkriechen parallel zur Faser. Schub- und Torsionsbeanspruchungen liefern die größten Kriechverformungen. Das relative Kriechen unter reiner Torsionsbeanspruchung beträgt nach sieben Jahren rund 220 % und für die Schubbeanspruchung

<sup>104</sup> Neuhaus, H. (2009). *Ingenieurholzbau, Grundlagen-Bemessung-Nachweise-Beispiele*. Seite 29

<sup>105</sup> Gressel, P. (1983). *Erfassung, systematische Auswertung und Ergänzung bisheriger ...* Seite 12

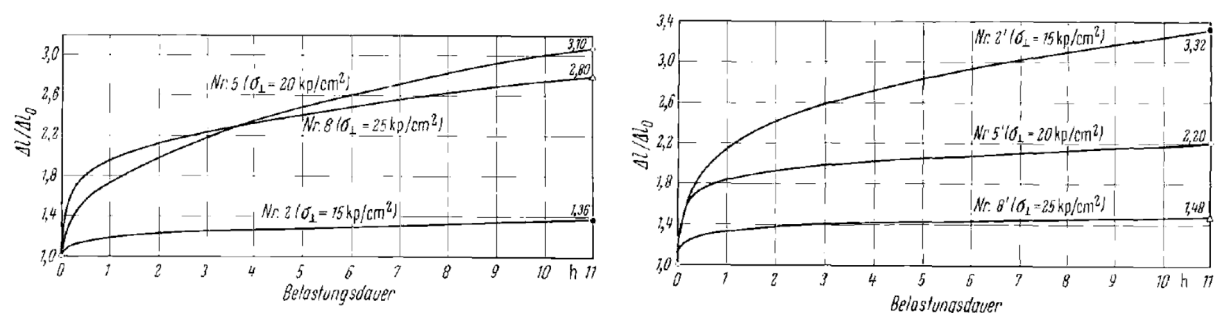
maximal 300 %. Es zeigt sich zudem unter Schubbeanspruchung, dass die relative Durchbiegungszunahme bei einem Stützweitenverhältnis  $l/h=5$  etwa vier mal so groß ist wie bei  $l/h=22$ . Bei einem Verhältnis von  $l/h=10$  ist das relative Kriechen im Schubversuch noch rund doppelt so hoch wie bei  $l/h=22$ . In allen Belastungsfällen ist noch kein Endwert der Verformung erreicht und die Kriechverformungen befinden sich in der zweiten Periode des allgemeinen Kriechverlaufs. [Gressel, 1984] gibt an, dass Versuche an Furniersperrholz unter Schubbeanspruchung gezeigt haben, dass diese etwa 3-3,5-mal so stark kriechen wie unter reiner Biegung.<sup>106</sup> Dieser Effekt wird aber vermutlich mehr auf ein Rollschub-Kriechen zurückzuführen sein.

Der Zugversuch parallel zur Faser aus Abb. 171 zeigt die geringsten Kriecherscheinungen, wobei das Kriechen beinahe zum Stillstand kommt und nur noch ein sehr langsamer zeitlicher Anstieg der Verformungen zu verzeichnen ist. [Ranta-Maunus, 1995] gibt an, dass die relative Kriechgeschwindigkeit bei Zug senkrecht zur Faser wesentlich schneller ist als bei Zug parallel zur Faser. So können Kriecherscheinungen die parallel zur Faser binnen eines Jahres auftreten, bei gleicher Beanspruchung senkrecht zur Faser in weniger als einer Woche entstehen. Eine entsprechende mathematische Beschreibung des Kriechens bei Zug senkrecht zur Faser kann wie folgt angegeben werden:<sup>107</sup>

$$\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_0} = 1 + 0,06 \cdot t^{0,27} \tag{5.5}$$

Die Zeit  $t$  muss in Gleichung (5.5) in Stunden eingesetzt werden. [Ranta-Maunus, 1995] verweist zudem darauf, dass die Kriechgeschwindigkeit erheblich durch ein gleichzeitiges Austrocknen des Holzquerschnittes erhöht werden kann.<sup>108</sup>

Versuchsergebnisse zum Kriechen bei Druckbeanspruchungen senkrecht zur Faser sind von *Möhler* und *Maier* bekannt. *Möhler* und *Maier* geben an, dass konstante Querdruckbeanspruchungen zu erheblich größeren Kriecherscheinungen führen als Druckspannungen parallel zur Faser, wobei sich die anfängliche Kriechgeschwindigkeit bei niedrigen Belastungen im Lauf der Zeit weitgehend verringert oder gar zu Null wird. Bei höheren Belastungen senkrecht zur Faser kann mitunter eine zunehmende Beschleunigung eintreten, die schließlich im Versagen des Bauteils endet.<sup>109</sup>



**Abb. 172:** Kriechen unter Querdruckbeanspruchung; Links: trockenes Fichtenholz; Rechts: Feuchtes Fichtenholz [Möhler & Maier, 1970]

Abb. 172 zeigt Ergebnisse von *Möhler* und *Maier* an trockenem Fichtenholz (links), mit einer Holzfeuchte von rund 15% und feuchtem Fichtenholz (rechts) mit einer Holzfeuchte von rund 30%

<sup>106</sup> Gressel, P. (1984). *Kriechverhalten von Holz und Holzwerkstoffen*. Seite 216

<sup>107</sup> Ranta-Maunus, A. (1995). *Creep and effects of moisture in timber*. Seite 4/2

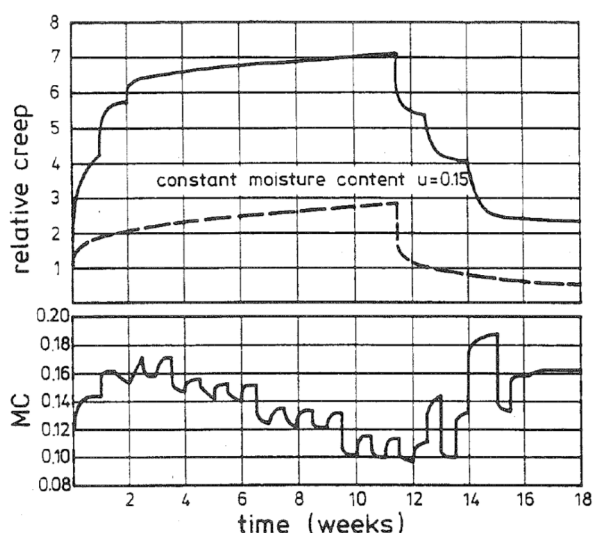
<sup>108</sup> Ranta-Maunus, A. (1995). *Creep and effects of moisture in timber*. Seite 4/2

<sup>109</sup> Möhler, K.; Maier, G. (1970). *Kriech- und Relaxations-Verhalten von luftgetrocknetem und nassem ...*Seite 14



unter verschiedenen Belastungsgraden.<sup>110</sup> Es ist zu erkennen, dass zusätzlich zum Belastungsgrad auch die Holzfeuchte einen Einfluss auf das Kriechen bei Druck senkrecht zur Faser hat. In den 11 stündigen Versuchen konnte ein maximales relatives Kriechen von rund 340 % an nassem Fichtenholz festgestellt werden. Der Maximalwert an trockenem Fichtenholz beträgt bei gleichem Belastungsniveau hingegen nur rund 220 %. Des Weiteren kriecht die trockene Fichtenholzprobe unter einer hohen Belastung höher als die entsprechende feuchte Probe. Erklärungen zu diesem Phänomen konnten in [Möhler & Maier, 1970] oder auch bei anderen Autoren nicht gefunden werden. Bei diesen Versuchsergebnissen ist anzumerken, dass die Versuchsdauer im Gegensatz zu den vorherigen Ergebnissen sehr kurz ist und unter einer längeren Zeitperiode sicherlich höhere Werte erreicht werden würden.

Als letzte, für den Holzbau interessante Belastungsart müssen noch Kriechverformungen in Folge von Rollschub betrachtet werden. Für reine Rollschubbeanspruchungen konnten Versuchsergebnisse in [Ranta-Maunus, 1995] gefunden werden. Darin wird das Kriechverhalten von Fichtenfurnieren unter konstanter und wechselnder Feuchte beschrieben (siehe Abb. 173). Es ist zu erkennen, dass das relative Kriechen im konstanten Klima (gestrichelte Linie) rund 300% und im Wechselklima (durchgezogene Linie) rund 700% betragen. Die Versuchsdauer betrug in diesem Fall 18 Wochen, wobei nach rund 11 Wochen die Probekörper entlastet wurden. Der zeitliche Verlauf des Feuchtegehaltes der Furniere ist unterhalb der Kriechverformung abgebildet.



**Abb. 173:** Kriechen unter Rollschubspannungen in Fichtenfurnieren im Konstant- und Wechselklima [Ranta-Maunus, 1995]

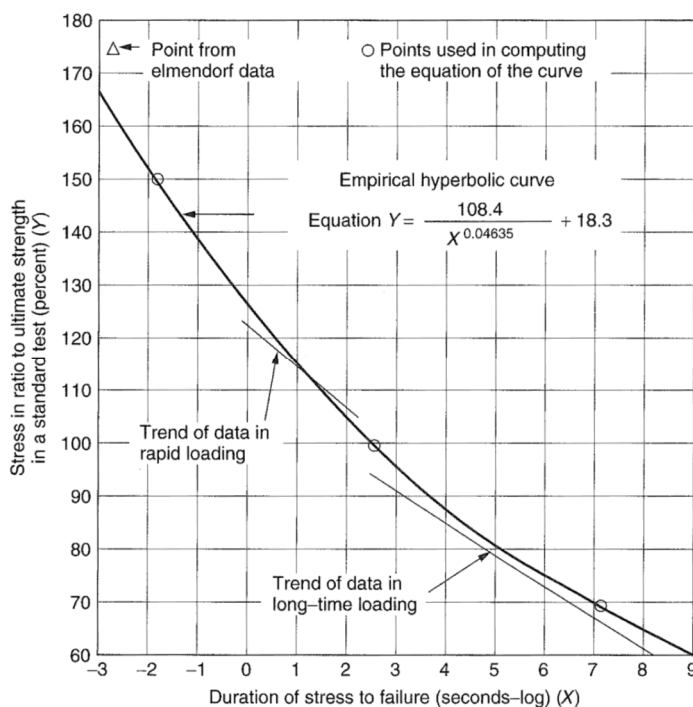
Weitere Ergebnisse zum Einfluss des Rollschubes konnten in [Jöbstl, 2007] gefunden werden. Er untersucht in seiner Arbeit das Kriechverhalten von Brettsperrholzelementen in Abhängigkeit der rollschubbeanspruchten Lagen und stellt fest, dass mit steigender Lagenzahl die Kriechneigung zunimmt. Leider sind keine näheren Angaben zu den Versuchsergebnissen bekannt.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass alle Beanspruchungen senkrecht zur Faser (Druck, Zug, Torsion und Rollschub) zu großen Kriechverformungen führen. Beanspruchungen parallel zur Faser (Druck, Zug und Biegung) führen zu geringen bis mäßigen Verformungen. Das Kriechverhalten in Folge von Schub ist maßgeblich vom Verhältnis  $l/h$  abhängig und kann auch sehr beachtliche Ausmaße annehmen. Leider können die unterschiedlichen Versuchsergebnisse nicht direkt miteinander verglichen werden, da die Versuchsdurchführung je nach Autor stark variiert.

<sup>110</sup> Möhler, K.; Maier, G. (1970). *Kriech- und Relaxations-Verhalten von luftgetrocknetem und nassem ...*Seite 16-17

Der **Belastungsgrad** (Verhältnis aus aufgebrachtener Spannung zu Kurzzeitfestigkeit) und die **Belastungsdauer** beeinflussen maßgeblich die Langzeitfestigkeit des Holzes, welche auch als Kriechbruchfestigkeit bezeichnet werden kann. Werden mehrere Biegeversuche mit steigendem Belastungsgrad gefahren, so kann festgestellt werden, dass die Kriechverformungen bis zu einem gewissen Belastungsniveau proportional, später überproportional zunehmen. Unterhalb dieses Grenzwertes läuft die Kriechgeschwindigkeit im Laufe der Zeit gegen Null, d.h. die Langzeitverformungen nähern sich einem Endwert an. Oberhalb dieses Grenzwertes wird irgendwann die Tertiärperiode bestritten bis ein Kriechbruch eintritt (vergleiche auch Abb. 169 b)). Zu diesem Thema gibt [Andriamitantsoa, 1995] an, dass bei konstanten Umgebungsbedingungen und bei Spannungen unter etwa 35% der Kurzzeitfestigkeit des Holzes, das Verhältnis aus den Verformungen unter zwei unterschiedlich großen Spannungen, dem Verhältnis aus den entsprechenden Spannungen unabhängig von der Zeit entspricht. Der französische Architekt *Georges Louis Le Clere, Conte de Buffon* stellte bereits im Jahre 1741 an Probelastungen von Eichenbalken fest, dass die Langzeitfestigkeit maßgeblich vom Belastungsgrad abhängig ist. Daraufhin schlug er vor, dass ständige Lasten nur die Hälfte der Kurzzeittragfähigkeit betragen dürfen.<sup>111</sup> Weitere Untersuchungen zur Langzeitfestigkeit von Holz wurden im Jahre 1935 von *Roth* durchgeführt und sind in [Roth, 1935] zu finden. Er untersuchte speziell das Dauerverhalten von Eichen- und Tannenholz unter konstanter und wechselnder Druck- und Biegebeanspruchung.

Im Hinblick auf die Verwendung von Holz im Flugzeugbau wurden in den USA umfangreiche Biegeversuche an kleinen Normproben durchgeführt. Eine zusammenfassende Auswertung ist in [Wood, 1951] zu finden. *Wood* entwarf am „Forest Products Laboratory“ in Madison, Wisconsin eine empirische Ausgleichskurve, die den relativen Einfluss der Belastungsdauer auf die Festigkeit im gesamten Zeitbereich beschreibt. Diese Kurve wurde als sogenannte „Madison Curve“ in die Holzbauvorschriften fast aller englischsprachigen und auch anderer Länder übernommen (siehe Abb. 174).<sup>112</sup>



**Abb. 174:** Zusammenhang zwischen Belastungsgrad und Versagensdauer „Madison Curve“ [Thelandersson & Larsen ,2003]

<sup>111</sup> Madsen, B. (1992). *Structural behaviour of timber*. Seite 6.2.1

<sup>112</sup> Glos, P.; Heimeshoff, B.; Kellertshofer, W. (1987). *Einfluss der Belastungsdauer auf die Zug- und Druckfestigkeit von Fichten-Brettlamellen*. Seite 243-244

Aus dieser in Abb. 174 gegebenen „Madison Curve“ können drei charakteristische Punkte abgelesen und mit entsprechenden Ereignissen verknüpft werden. So tritt beispielsweise ein Versagen bei einer Anpralllast, die 150 % der Kurzzeitfestigkeit beträgt, nach 0,015 Sekunden auf, bei einem Belastungsgrad von 100 % nach 7,5 Minuten und einem Belastungsgrad von 69 % nach 3750 Stunden. Unter einer konstanten Biegebeanspruchung die 62 % der Kurzzeitfestigkeit beträgt, prognostiziert *Wood* ein Versagen nach 10 Jahren.<sup>113</sup>

Ab dem Jahre 1970 befasste sich Prof. *Borg Madsen* an der University of British Columbia sehr ausführlich mit der Langzeitfestigkeit von Holz. Er untersuchte fehlerfreie Holzprobekörper der Größe 25 x 25 x 410 mm im Dreipunktbiegeversuch unter konstanter Last.<sup>114</sup> Als Auswertung unzähliger Versuche gibt *Hoffmeyer* in [Thelandersson & Larsen, 2003] an, dass für Vollholz eine ständige Belastung nicht mehr als 60 % und bei einigen Holzwerkstoffen nicht mehr als 20 % der Kurzzeitfestigkeit betragen soll, um ein Versagen in den ersten 10 Jahren zu vermeiden.

Weitere Untersuchungen zum Einfluss des Belastungsgrades auf das Kriechverhalten von Holz und Holzwerkstoffen liegen in [Gressel, 1984] vor. Daraus sind in Abb. 175 Kriechverformungen für kleine fehlerfreie Fichtenholzproben im Biegeversuch, in Abhängigkeit des Belastungsgrades (Verhältnis aus aufgebrachtener Spannung zu Kurzzeitfestigkeit) dargestellt. Die Proben wurden in einem konstanten Klima von 20°C und einer relativen Luftfeuchte von 55% für ein Jahr gelagert. Es ist zu erkennen, dass mit steigendem Belastungsgrad die Kriechgeschwindigkeiten in der Primär- und Sekundärperiode steigen. Zudem gibt *Gressel* an, dass Kriechverformungen erst ab einem Belastungsgrad von 5 bis 15 % zu erwarten sind, darunter entstehen nur sofortige, elastische Verformungen.<sup>115</sup>

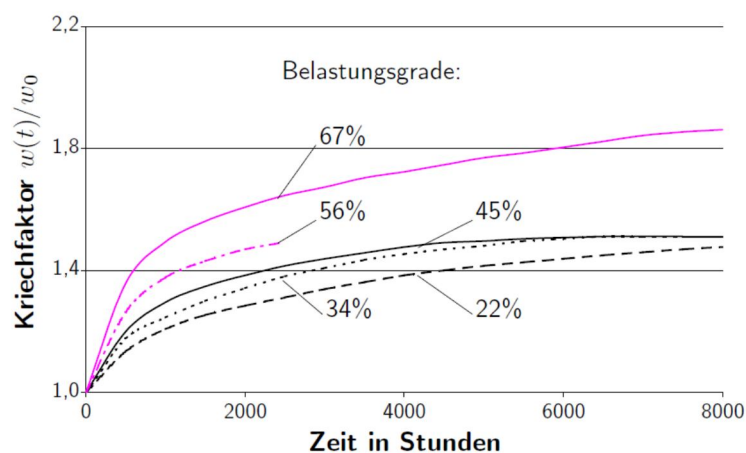


Abb. 175: Einfluss des Belastungsgrades auf die Kriechverformung [Schänzlin, 2003]

Da ein Großteil der Zellwand des Holzes aus Lignin und Hemicellulose besteht und diese Stoffe bei einer **Temperaturerhöhung** zunehmend an Viskosität verlieren, tragen sie unter anderem zum Langzeitverhalten bei. Besonders die Hemicellulose wird bei Erhöhung der Temperatur weicher und führt zu einer Steigerung des Kriechvermögens.<sup>116</sup> Das Ergebnis von einwöchigen Versuchen an Fichtenholz unter Biegebeanspruchung und konstanter Holzfeuchte ist in Abb. 176 gegeben. Ein klarer Anstieg der Kriechverformung ist erst ab einer Temperatur von rund 55°C zu erkennen. Übersteigt die Temperatur einen Wert von 50°C nicht, ist der Kriecheinfluss vernachlässigbar und

<sup>113</sup> Thelandersson, S. & Larsen, H.-J. (2003). *Timber Engineering*. Seite 133-134

<sup>114</sup> Thelandersson, S. & Larsen, H.-J. (2003). *Timber Engineering*. Seite 133

<sup>115</sup> Gressel, P. (1983). *Erfassung, systematische Auswertung und Ergänzung bisheriger ...* Seite 20

<sup>116</sup> Morlier, P. (1994). *Creep in Timber Structures, Report of RILEM Technical Committee 112-TSC*. Seite 14

wird in der Regel durch den Einfluss der Feuchteänderung überdeckt.<sup>117</sup> Das Kriechen in Folge von Temperaturschwankungen kann aber bei Holzwerkstoffen wie Sperrholz und Spanplatten bei Verwendung thermoplastischer oder stark weichmacherhaltiger Klebstoffe, schon bei geringeren Temperaturen erfasst werden.<sup>118</sup>

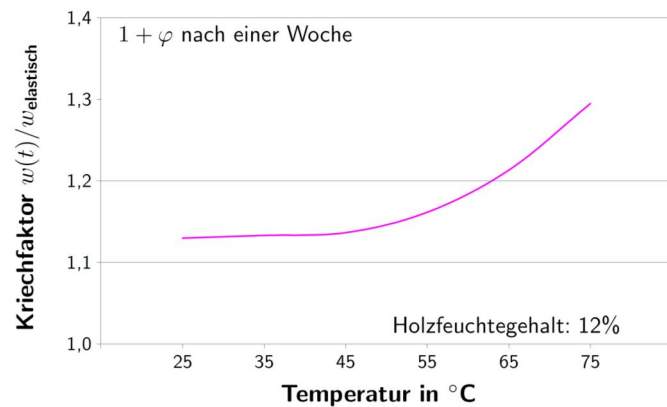


Abb. 176: Einfluss der Temperatur auf die Kriechverformung nach Morlier [Schänzlin, 2003]

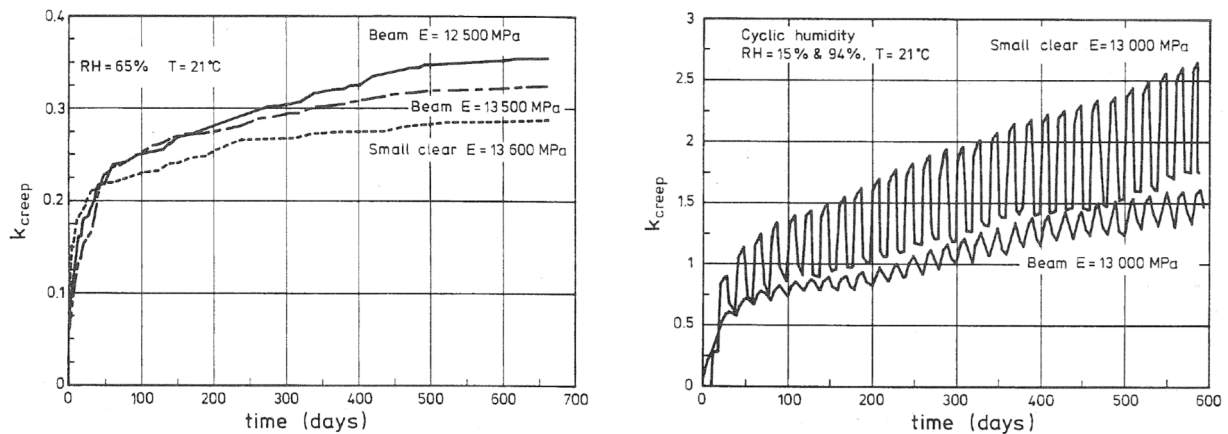
Das zeitabhängige Verformungsverhalten von Holz und Holzwerkstoffen ist zu den vorher genannten Einflüssen, von der umgebenden **relativen Luftfeuchte** und der **Holzfeuchte** abhängig. Bei der Betrachtung von Holzwerkstoffen bzw. Holz unter Berücksichtigung der umgebenden relativen Luftfeuchte können unterschiedliche Kriecherscheinungen erfasst werden. So kriecht Vollholz und Furniersperrholz wesentlich stärker unter wechselnder relativer Luftfeuchte als unter konstanter relativer Luftfeuchte. Im Wechselklima hängt das Formänderungsverhalten entscheidend von der Differenz zwischen Feucht- und Trockenphase ab. Wobei lange Zyklen zu größeren Verformungen führen als kurze Zyklen. Spanplatten erfahren hingegen bei konstantem Feuchtklima erheblich größere Kriechverformungen als bei wechselnder relativer Feuchte.<sup>119</sup> Seit den Jahren 1960 ist bekannt, dass Kriechverformungen von Vollholzquerschnitten im Biegeversuch unter stark wechselnden klimatischen Bedingungen, ungefähr dem 10 bis 20 fachen der anfänglichen elastischen Verformung betragen. Dies zeigen Versuchsergebnisse an Biegezugproben in Abb. 177.<sup>120</sup>

<sup>117</sup> Andriamantsoa, L. D. (1995). *Kriechen, Informationsdienst Holz, Holzbauwerke, STEP 1*. Seite A19/4

<sup>118</sup> Gressel, P. (1983). *Erfassung, systematische Auswertung und Ergänzung bisheriger ...* Seite 52

<sup>119</sup> Gressel, P. (1983). *Erfassung, systematische Auswertung und Ergänzung bisheriger ...* Seite 34-50

<sup>120</sup> Ranta-Maunus, A. (1995). *Creep and effects of moisture in timber*. Seite 4/2



**Abb. 177:** Links: relatives Kriechen unter konstanten klimatischen Bedingungen; Rechts: relatives Kriechen unter Variation der relativen Luftfeuchte [Ranta-Maunus, 1995]

Abb. 177 (links) zeigt Versuche von kleinen (Querschnitt: 10/10 mm – Small clear) und großen Biegeproben (Querschnitt: 44/94 mm - Beam) im konstanten Klima. Es ist zu sehen, dass das relative Kriechen rund 30% beträgt und für kleine Probenquerschnitte geringer ausfällt als für große. In Abb. 177 (rechts) sind entsprechende Ergebnisse unter wechselnden klimatischen Bedingungen (Schwankung der relativen Luftfeuchte von 15 – 94% und eine Temperatur von 21°C) aufgezeichnet. Es ist klar zu erkennen, dass das relative Kriechen erheblich ansteigt und für kleine Querschnitte größer ausfällt als für große. [Ranta-Maunus, 1995] gibt deshalb in seiner Arbeit explizit an, dass die Ergebnisse an Kleinproben kaum auf reale im Bauwesen erforderliche Querschnitte übertragen werden können. Des Weiteren stellte *Gressel* fest, dass es bei Biegeversuchen an Vollholzquerschnitten und Wechselklima bereits unter Eigengewicht zu merklichen Kriecherscheinungen kommt.<sup>121</sup>

[Perkitny, 1965] stellte bei der Untersuchung von druckbelasteten Kiefernholzproben fest, dass nicht nur extreme Feuchtigkeitsänderungen im Bereich von 0-30% sondern auch weit kleinere, scheinbar bedeutungslose Feuchtigkeitsschwankungen im Bereich von  $\pm 1\%$  Kriecherscheinungen deutlich beeinflussen können. Der Einfluss der wechselnden Holzfeuchte auf das Kriechverhalten von Holzwerkstoffen wurde das erste Mal im Jahre 1965 beschrieben. Es zeigte sich, dass das relative Kriechen bei dreischichtigen harnstoff- und phenolharzverleimten Spanplatten bei wechselnder Feuchtigkeit bis zu 10-mal so hoch ist, wobei Phenolharzplatten stärker kriechen als Harnstoffharzplatten.<sup>122</sup> Entsprechende Kriechversuche unter zyklischer Änderung der relativen Luftfeuchte zwischen 30% und 90% sind für verschiedene Holzwerkstoffe nach *Dinwoodie* in Abb. 178 gegeben.

<sup>121</sup> Gressel, P. (1984). *Kriechverhalten von Holz und Holzwerkstoffen*. Seite 217

<sup>122</sup> Gressel, P. (1971). *Untersuchungen über das Zeitstandbiegeverhalten von Holzwerkstoffen in ....* Seite 20

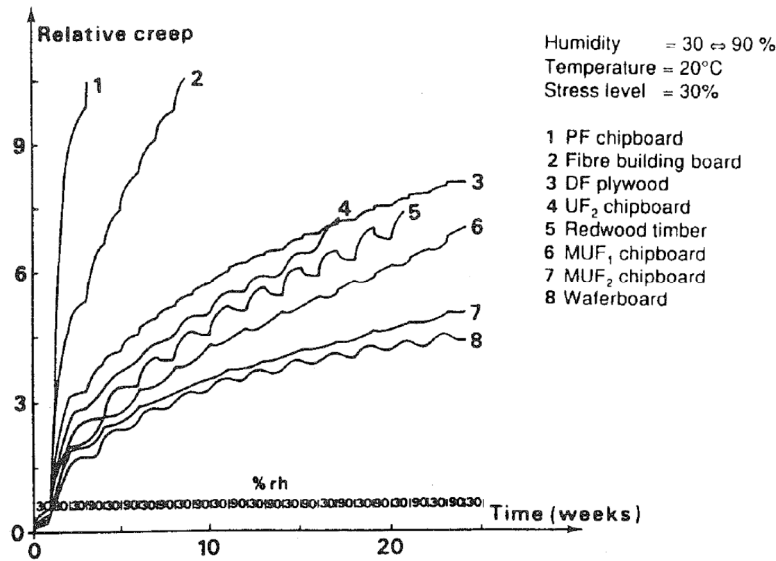


Abb. 178: Kriechen von Holzwerkstoffen unter veränderlicher relativer Luftfeuchte [Ranta-Manus, 1995]

Es ist zu sehen, dass Phenolformaldehyd (PF) gebundene Spanplatten wesentlich stärker und schneller kriechen, als Melamin (MUF) oder Harnstoff (UF) gebundene Spanplatten. In Abb. 178 ist zudem der Kriechverlauf von Sperrholz, mit einem Endmaß des relativen Kriechens von rund 750% nach rund 25 Tagen gegeben. Weitere Ergebnisse zum Kriechen von Brettsperrholz aus Fichte unter wechselnder klimatischer Beanspruchung wurden von [Koponen, 1998] präsentiert und zeigen ein relatives Kriechen von rund 800% nach drei Jahren unter einer wechselnden relativen Luftfeuchte zwischen 25% und 90%.

Versuche von *Moliński* und *Raczkowski* zeigen in [Moliński & Raczkowski, 1988], dass die differenzierte Befeuchtung von Druck- und Zugzone im Biegekriechversuch maßgeblichen Einfluss auf den Kriechverlauf besitzt. Ein Auszug der entsprechenden Ergebnisse ist in Abb. 179 gegeben.

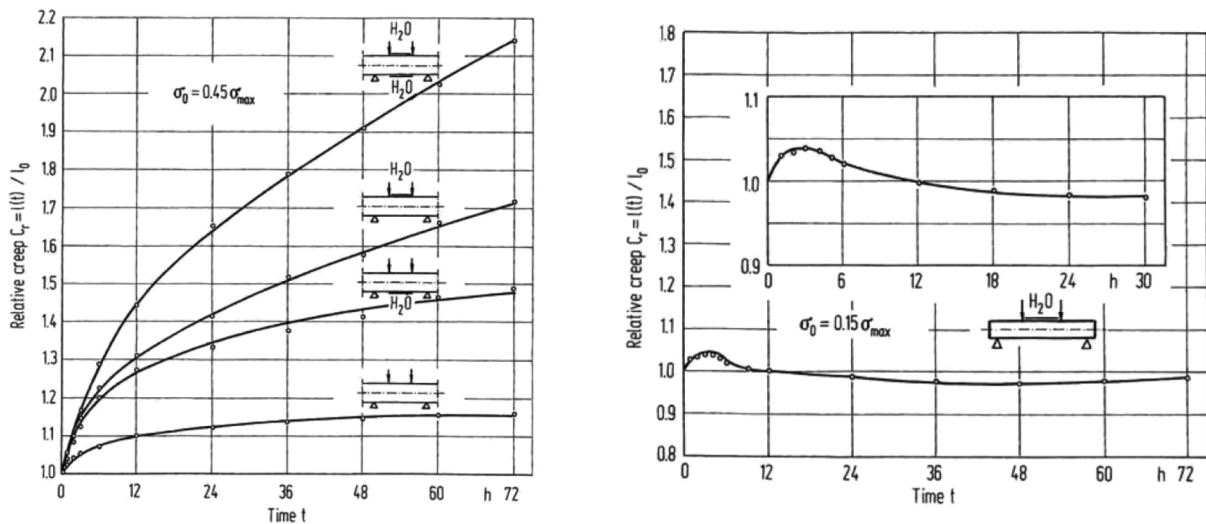


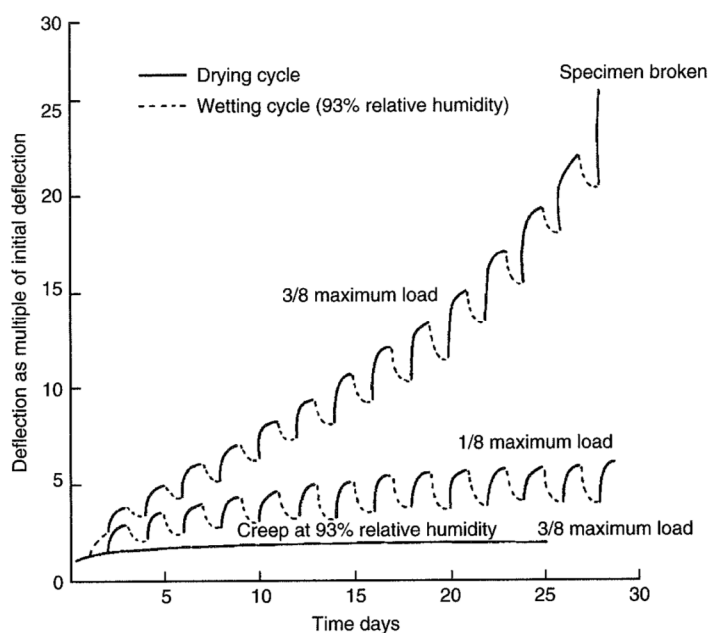
Abb. 179: Kriechversuche unter symmetrischer und antisymmetrischer Befeuchtung und Variation des Lastniveaus [Moliński & Raczkowski, 1988]

Im linken Diagramm von Abb. 179, sind Kriechversuche unter einer Biegespannung von 45% der Biegezugfestigkeit abgebildet. Der Versuch hatte eine Versuchsdauer von 72 Stunden. Unter einer symmetrischen Befeuchtung der Druck- und Zugzone konnte die größte relative Kriechverformung von 215% ermittelt werden. Eine Befeuchtung der Druckzone führt zu größeren Kriecherscheinungen



als die Befeuchtung der Zugzone. Es ist sehr gut zu erkennen, dass die Kriechgeschwindigkeit der nicht befeuchteten Biegeprobe in der Sekundärperiode beinahe null ist. Hingegen weisen die befeuchteten Proben eine erhebliche Kriechgeschwindigkeit auf, die gegen keinen Grenzwert strebt. Ein besonderer Effekt ist im rechten Diagramm zu sehen: darin ist der 72 stündige Kriechversuch unter einem Belastungsgrad von 15% aufgezeichnet bei dem die Druckzone während des Kriechversuches befeuchtet wird. Eine anfängliche Zunahme der Verformung wird gemessen, die nach Erreichen eines Maximums kontinuierlich abnimmt und nach rund 12 Stunden zu einer Überhöhung der Biegeprobe in Bezug auf den Ausgangszustand führt. In weiteren Untersuchungen wurde beobachtet, dass bei einer Biegespannung unter 17% der Biegefestigkeit und Befeuchtung der Druckzone eine Verminderung der Durchbiegung zu erwarten ist.<sup>123</sup> Dieser Effekt ist auf Quellerscheinungen im Druckbereich der Probekörper zurückzuführen, wobei der E-Modul des Druckbereichs anfangs schneller abnimmt als Quellerscheinungen auftreten. Das Kriechen von Holz unter Berücksichtigung des E-Moduls, der umgebenden relativen Luftfeuchte und dem Belastungsgrad wird in [Tong, 1994] beschrieben. Er stellt fest, dass mit sinkendem E-Modul die Kriechneigung des Holzes steigt und eine Variation der Luftfeuchte erst ab einer Beanspruchung von 30% der Bruchlast einen überproportionalen Einfluss auf das Kriechen besitzt. Seine Versuchsergebnisse wurden mit einem rheologischen Modell ähnlich dem von [Toratti, 1992] nachgerechnet und bestätigt.

Die Holzfeuchte beeinflusst den Kriechverlauf sowie den Versagenszeitpunkt, wobei insbesondere Schwankung der Holzfeuchte zu einer Beschleunigung des Bruchverhaltens führen. Ein entsprechendes Beispiel ist in Abb. 180 gegeben, in dem der Einfluss des Belastungsgrades und der Holzfeuchteschwankungen klar zu erkennen ist.



**Abb. 180:** Effekt von zyklischen Feuchteschwankungen auf das relative Kriechen [Thelandersson & Larsen ,2003]

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass das Kriechen von Holz und Holzwerkstoffen von vielen Faktoren abhängig ist. Die wichtigsten Einflussgrößen sind die Belastungsart, die Belastungsdauer und die Holzfeuchte bzw. rel. Luftfeuchte. Generell gilt für verschiedene Holzwerkstoffe, dass das Kriechen mit abnehmender Holzpartikelgröße zunimmt. Das heißt je kleiner die Holzbauteile werden, umso größer sind die Langzeitverformungen. Gängige Holzwerkstoffe können mit steigender

<sup>123</sup> Moliński, W., Raczkowski, J. (1988). *Creep of wood in bending an non-symmetrical moistening*. Seite 457-459

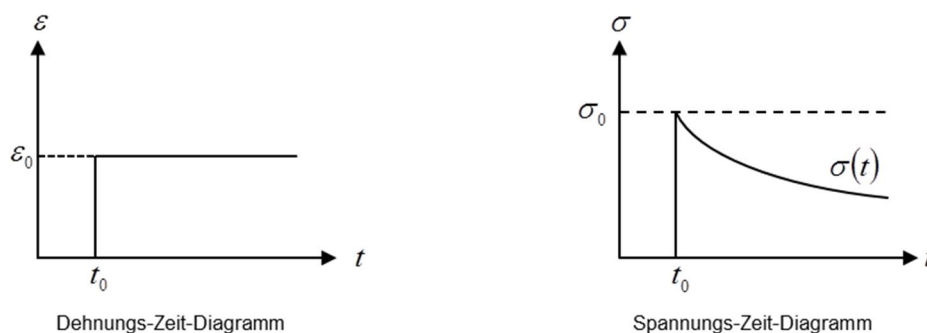
Kriechneigung wie folgt angegeben werden: Vollholz und Brettschichtholz (in Faserrichtung), Sperrhölzer, OSB-Platten, Spanplatten, Faserplatten. Dabei spielt der verwendete Klebstoff, die verwendete Klebstoffmenge und Orientierung der verklebten Holzteile eine besondere Rolle.<sup>124</sup> Als wichtiges Ergebnis ist noch festzuhalten, dass durch gezieltes Befeuchten der Biegezug- oder Biegedruckbereiche im Biegeversuch das Kriechverhalten gesteuert werden kann und zyklische Änderungen der Holzfeuchte einen größeren Einfluss haben als eine konstante Holzfeuchte.

## 5.3 Relaxation

### 5.3.1 Allgemeines

Relaxation ist wie das Kriechen eine zeitabhängige Eigenschaft von Werkstoffen und charakteristisch für viskoelastisches Materialverhalten. Es ist dabei unerheblich ob es sich um Stahl, Holz oder Beton handelt. Beton und Holz weisen im Vergleich zu Stahl ein wesentlich markanteres Relaxationsvermögen auf. Beton ist ein Kompositwerkstoff, dessen Relaxationsvermögen hauptsächlich von der Zementmatrix und weniger von den Zuschlagstoffen abhängig ist. Holz ist hingegen ein natürlich gewachsener Rohstoff, dessen Eigenschaften vorwiegend von seinen anatomischen Eigenschaften geprägt werden. Relaxation ist sprachlich gesehen ein sehr weitläufiger Begriff und findet in vielen wissenschaftlichen und nicht wissenschaftlichen Bereichen Anwendung. Eine für das Bauwesen passende Definition lautet: „Relaxation ist die zeitliche Spannungsabnahme bei konstanter Verformung. Durch internes viskoses Fließen werden elastische Spannungen abgebaut“ [Beddoe, 2008]. Eine weitere Definition kann in [Niemz, 1993] gefunden werden: „Unter Spannungsrelaxation wird die Abnahme der für das Aufrechterhalten einer definierten Verformung erforderlichen Spannung mit zunehmender Zeit verstanden.“

Um das Relaxationsvermögen eines Körpers zu bestimmen wird dieser im Relaxationsversuch um einen konstanten Betrag verformt. Die dazu erforderliche Spannung sinkt mit abnehmender Geschwindigkeit asymptotisch bis nahe Null bei Werkstoffen mit plastischem Fließen, oder bei fehlendem plastischem Fließen bis zu einem bestimmten Endwert (siehe Abb. 181). Die Geschwindigkeit der Spannungsabnahme hängt von der Struktur des Werkstoffes, von der Höhe der aufgetragenen Verformung und von Umweltbedingungen ab.



**Abb. 181:** Ideeller Relaxationsverlauf: Links: Dehnungsverlauf; Rechts: Spannungsverlauf über die Zeit

<sup>124</sup> Holzlexikon (2003). *Holzlexikon, Band 1 A-K*. Seite 726-727

Das Verhältnis von zeitabhängiger Spannung  $\sigma(t)$  zur konstanten Verformung  $\varepsilon_0$  liefert den zeitabhängigen Modul  $M(t)$ .<sup>125</sup>

$$M(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (5.6)$$

### 5.3.2 Relaxation von Holz und Holzwerkstoffen

In der Literatur sind bei weitem nicht so viele Beiträge zur Spannungsrelaxation bekannt wie zum Kriechen, da in der Regel die Durchführung eines Relaxationsversuches sehr aufwendig und kostenintensiv ist. Die molekularen Vorgänge die zur Spannungsrelaxation führen sind vergleichbar mit denen des Kriechens, weshalb darauf nicht näher eingegangen wird. Durch die vielen Parallelen zum Kriechen können folgende Einflüssen auf die Relaxation identifiziert werden:

- Art der Verformung (Biege-, Schub-, Druck-, Zug- oder Torsionsverformung)
- Höhe der Verformung
- Verformungsdauer
- Temperatur (konstant oder wechselnd)
- Holzfeuchte bzw. relative Luftfeuchte (konstant oder wechselnd)

Der älteste gefundene Beitrag zur Verformungsart stammt aus dem Jahre 1947 von *G. Kitazawa* [Grossmann, 1954]. *G. Kitazawa* hat bei Druckversuchen quer zur Holzfasern unter Belastungen, die 30% bis 50% der Proportionalitätsgrenze betragen, nachgewiesen, dass bei konstanter Stauchung die Spannungen nach Gleichung (5.7) abfallen. Der Relaxationsverlauf scheint seiner Meinung nach umgekehrt proportional zur Dichte des Holzes zu sein. Der Relaxationskoeffizient  $m$  variiert zwischen 0,0178 (Alaskan Cedar, Dichte: 0,45 g/cm<sup>3</sup>) und 0,069 (Quebracho, Dichte 1,12 g/cm<sup>3</sup>).<sup>126,127</sup> Werte für andere Holzarten konnten nicht gefunden werden.

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = 1 - m \cdot \log t \quad (5.7)$$

Dabei sind:  $\sigma$  die Spannung nach der Zeit  $t$  in Minuten  
 $\sigma_1$  die Spannung nach 1 Minute und  
 $m$  der Relaxationskoeffizient

Für lufttrockenes Fichtenholz unter Querdruckbeanspruchung ermittelten *Möhler* und *Maier* bei konstanter Stauchung nach drei Tagen Spannungsreduktionen von rund 50% der anfänglichen Spannungen. Bei nassem Holz betrug die Relaxation unabhängig von der Höhe der anfänglich aufgebrachtten Querdruckspannung rund 60%.<sup>128</sup> Ein Auszug der Relaxationsverläufe senkrecht zur Faser ist in Abb. 182 gegeben. Durchgezogene Linien sind Versuche an trockenen Probekörpern (15% Holzfeuchte), gestrichelte Linien an nassen Probekörpern (30% Holzfeuchte). Es ist zu erkennen, dass trockene Proben ein geringeres Relaxationsvermögen aufweisen als nasse. So sind in

<sup>125</sup> Gressel, P. (1971). *Untersuchungen über das Zeitstandbiegeverhalten von Holzwerkstoffen in ...*. Seite 4

<sup>126</sup> Kubat, D. G.; Samuelsson, S.; Klason, C. (1989). *Stress relaxation in wood*. Seite 3541

<sup>127</sup> Kollmann, F. (1961). *Rheologie und Strukturfestigkeit von Holz*. Seite 78-79

<sup>128</sup> Möhler, K.; Maier, G. (1970). *Kriech- und Relaxations-Verhalten von lufttrockenem und nassem ...*. Seite 14

den nassen Probekörpern nach 21 Stunden nur noch 43 % der ursprünglichen Vorspannkraft vorhanden, in den trockenen Proben 59 % bei gleichem Lastniveau.

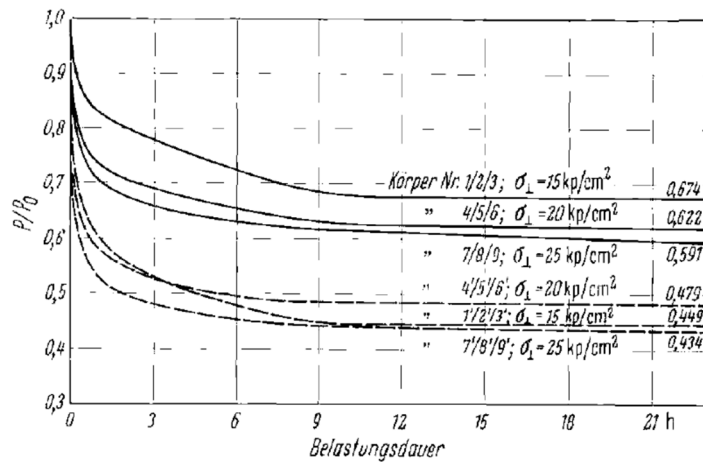


Abb. 182: Spannungsrelaxation bei Druck senkrecht zur Faser [Möhler & Maier, 1970]

Versuche von *Steck* bestätigten die Ergebnisse von *Möhler* und *Maier*; es wurden ebenfalls Spannungsrelaxationen von rund 50%, bei Quellungsversuchen senkrecht zur Faser an Brettschichtholzträgern aus Fichtenholz ermittelt.<sup>129</sup>

Versuche zum Relaxationsverhalten bei Zug und Druck parallel zur Faser wurden im Jahre 1969 von *Echenique-Manrique* an tropischen Holzarten durchgeführt. Gleichzeitig wurde bei konstanter relativer Luftfeuchte und Temperatur das Dehnungsniveau der Proben variiert. Es zeigte sich, dass die Relaxationsgeschwindigkeit unter Druckbeanspruchung größer ist als unter Zugbeanspruchung (siehe Abb. 183).<sup>130</sup> Dies bestätigen auch Angaben von *Gressel* in [Gressel, 1983] und deckt sich mit Beobachtungen an Kriechversuchen, wonach Druckkriechen schneller von statten geht als Zugkriechen parallel zur Faser.

<sup>129</sup> Steck, G. (1987). *Relaxationsversuche mit Brettschichtholzproben unter Querdruckbeanspruchung infolge ...*Seite 139

<sup>130</sup> Echenique-Manrique, R. (1969). *Stress Relaxation of Wood at Several Levels of Strain.* Seite 66

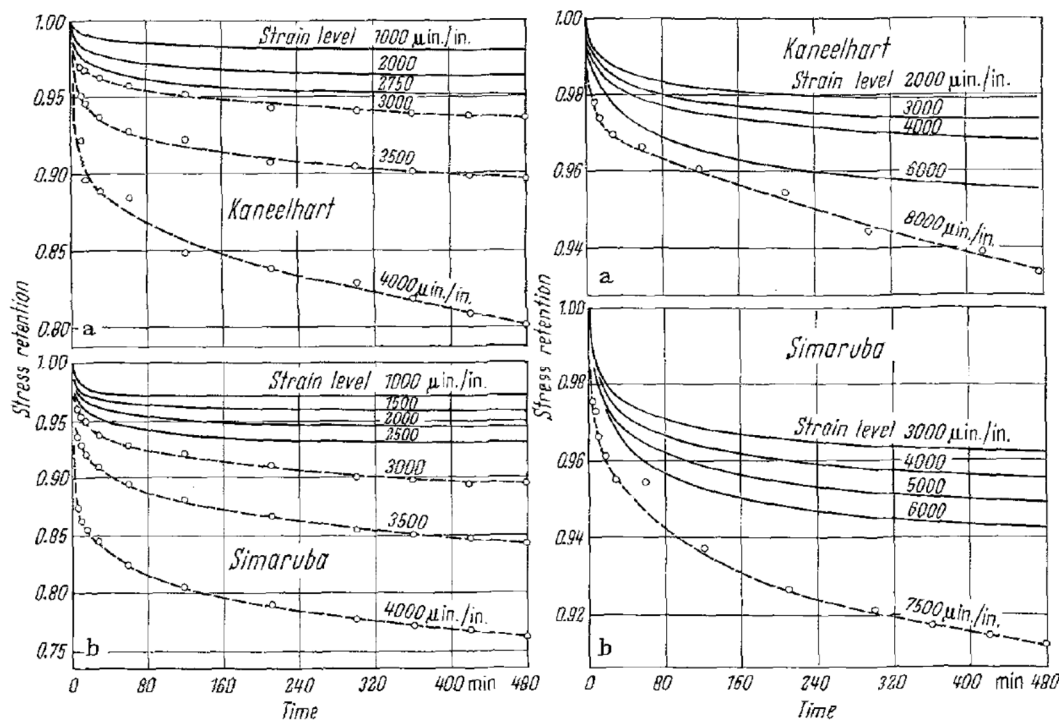


Abb. 183: Spannungsrelaxation bei Zug und Druck für verschiedene Dehnungen und Holzarten [Echenique-Manrique, 1969]

In Abb. 183 sind Versuchsergebnisse von *Echenique-Manrique* für zwei Holzarten: Kanelhart (*Licaria*) und Simaruba (*Bursera simaruba*) abgebildet. Die linken Diagramme zeigen Relaxationsverläufe unter verschiedenen hohen Stauchungen parallel zur Faser. Es ist deutlich zu sehen, dass mit höheren Stauchungen für beide Holzarten die Relaxation höher und auch schneller ausfällt. Das gleiche kann in den rechten Diagrammen für positive Dehnungen parallel zur Faser abgelesen werden. Wobei die Relaxation unter Druck erheblich schneller und höher ausfällt als unter Zug. An dieser Stelle soll noch erwähnt werden, dass in [Echenique-Manrique, 1969] ein rheologisches Modell vorgestellt wird welches auf einem nichtlinearen Dämpfer basiert und sich sehr gut zur Beschreibung der im Versuch ermittelten Ergebnisse eignet. Dieses Modell wird in Kapitel 5.5, Abb. 201 genauer beschrieben.

In Versuchen von *Perkitny* und *Hoffmann* wurde das Relaxationsvermögen von Kiefernspiltholzproben nach verschieden langer, konstanter Durchbiegung und unterschiedlicher Holzfeuchte untersucht. Im Dreipunkt-Biegeversuch wurde festgestellt, dass die Dauer der aufgebrachten Biegeverformung einen erheblichen Einfluss auf den Endwert der Relaxation besitzt und die Relaxationsgeschwindigkeit nicht von der Anfangsspannung abhängig ist. Der Höchstwert der Relaxation konnte bei einer Holzfeuchte von 20% ermittelt werden.<sup>131</sup> Abb. 184 zeigt Versuchsergebnisse für unterschiedliche Durchbiegungen (links: 3,0 mm; rechts: 6,0 mm) bei einer Spannweite von 120 mm, einer Querschnittsfläche von 10/10 mm und für Holzfeuchten von 0, 10, 20, 30%. Der zeitliche Verlauf der Spannungen wird in der linken Grafik auf die Ausgangsspannung bei einer Holzfeuchte von 0% und in der rechten Grafik auf die Ausgangsspannung bei einer Holzfeuchte von 10% bezogen.<sup>132</sup>

<sup>131</sup> Perkitny, T.; Hoffmann, Z. (1976). Zur Relaxation von Holz nach verschieden langer, konstanter Durchbiegung. Seite 170

<sup>132</sup> Perkitny, T.; Hoffmann, Z. (1976). Zur Relaxation von Holz nach verschieden langer, konstanter Durchbiegung. Seite 168

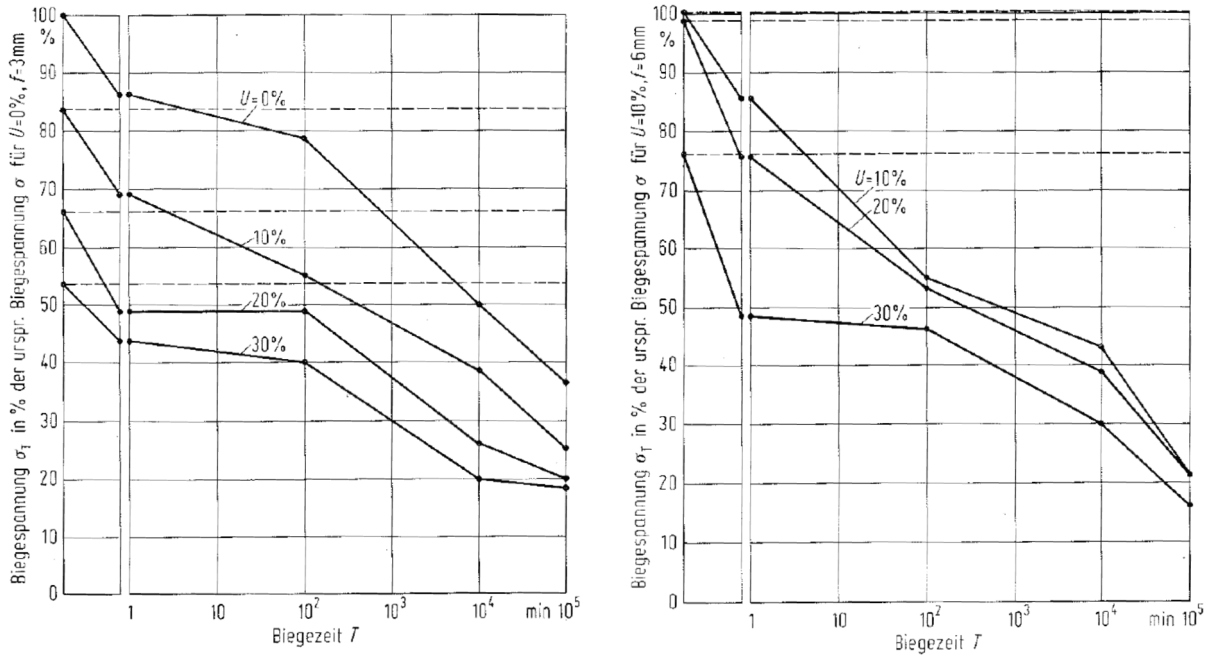


Abb. 184: Zeitlicher Verlauf der Spannung bei unterschiedlicher Holzfeuchte und Durchbiegung [Perkitny, et al., 1976]

Im Jahre 1970 führten *Becker* und *Reiter* eine Reihe von Versuchen an Buchenholzproben durch. Dabei wurde das Relaxationsverhalten in Abhängigkeit der Temperatur und Holzfeuchte im Biegeversuch ermittelt. Im Zuge dieser Versuchsreihe wurde ein erstes Relaxometer entwickelt, welches in der Lage ist, Verformungen durch Variation der Belastung konstant zu halten. In den Versuchen konnten die deutlichsten Relaxationserscheinungen bei Holzfeuchtigkeitsgehalten von 19% und einer Temperatur von 90°C erfasst werden. Die Spannungen fielen nach 48 Stunden bis auf 30% des Ausgangswertes ab. Den geringsten Spannungsabbau verzeichneten Proben bei Holzfeuchtegehalten von 10% und einer Temperatur von 30°C. Hier waren nach 48 Stunden noch etwa 95% der Anfangsspannungen vorhanden. Alle anderen Versuchsergebnisse lagen zwischen den beiden Extremen.<sup>133</sup> Entsprechende Versuchsergebnisse sind in nachfolgenden Abbildungen gegeben, worin deutlich der Einfluss der Temperatur und Holzfeuchte zu erkennen ist.

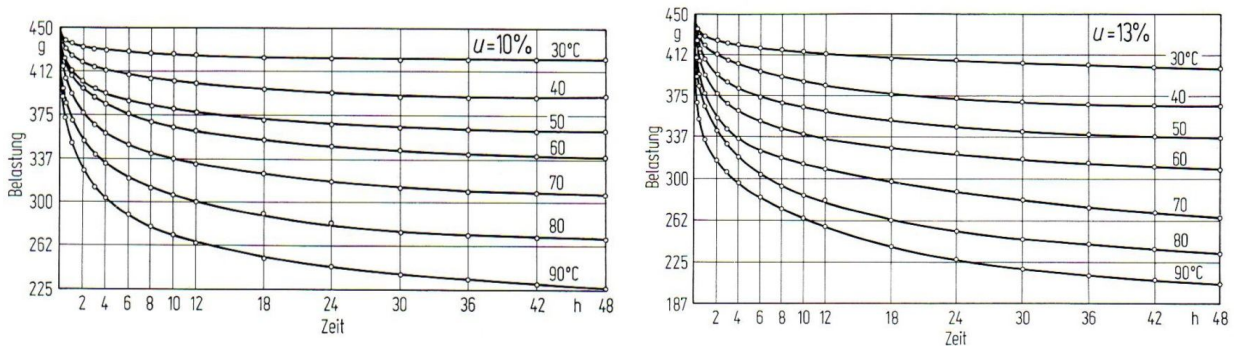
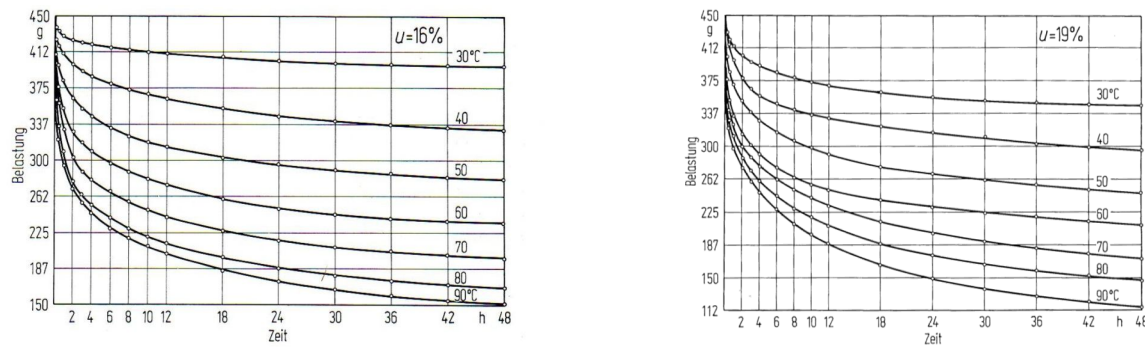


Abb. 185: Spannungsrelaxation bei verschiedenen Temperaturen (Holzfeuchte u=10 und 13%) [Becker & Reiter, 1970]

<sup>133</sup> Becker, H.; Reiter, L. (1970). *Über den Einfluss von Temperatur und Holzfeuchtigkeit auf die Relaxation der...*Seite 270





**Abb. 186:** Spannungsrelaxation bei verschiedenen Temperaturen (Holzfeuchte  $u=16$  und  $19\%$ ) [Becker & Reiter, 1970]

Der hohe Einfluss der Temperatur und Holzfeuchte auf die Relaxation wird vor allem beim Dämpfen von Holzbauteilen, insbesondere in der Möbelherstellung genutzt. So können sehr kleine Krümmungsradien produziert werden. Durch die im Bauwesen für gewöhnlich notwendigen großen Abmessungen findet das Verfahren bis auf wenige Ausnahmen jedoch fast keine Anwendung.

Der Einfluss einseitiger Trocknung bzw. Befeuchtung kann wie beim Kriechen auch in der Relaxation erfasst werden. So kann in der Arbeit von [Moliński & Raczkowski, 1988] gefunden werden, dass bereits 1959 *Lawniczak* in seinen Untersuchungen feststellte, dass bei biegebeanspruchten Konstruktionen, bei denen der Zugbereich befeuchtet wird und der Druckbereich einer Trocknung unterliegt, höhere Spannungsrelaxationen auftreten als bei einer symmetrischen Trocknung. Leider liegt dieser Text nur in polnischer Sprache vor und es wird auf die Übersetzungen von *Moliński* und *Raczkowski* vertraut. [Kubat, et al., 1989] berichten ebenfalls von Biege- und Torsionsversuchen unter dem Einfluss der Sorption. So strebt die Relaxationskurve unter konstanter relativer Luftfeuchte im Relaxationsversuch gegen einen Grenzwert. Werden die Probekörper aus Hinoki-Holz zusätzlich durch Wasserdampf beaufschlagt, kann eine erhebliche Zunahme des Relaxationsvermögens verzeichnet werden.<sup>134</sup> Leider konnten keine Zahlenwerte oder Diagramme zu den Versuchen gefunden werden. Es wird aber explizit auf die Affinität zum Kriechen unter zyklischer Befeuchtung hingewiesen und dass Spannungen senkrecht zur Faserrichtung schneller abgebaut werden als parallel zur Faser. Des Weiteren liefern [Kubat, et al., 1989] Ansätze zur Beschreibung des Relaxationsverhaltens von Kiefernholz Furnieren und der Steigung der Relaxationskurve (siehe Gleichung (5.7)).

$$F \approx (0,1 \pm 0,01) \cdot \sigma_0^* = (0,1 \pm 0,01) \cdot (\sigma_0 - \sigma_\infty) \quad (5.8)$$

$F$  ... Steigung der Relaxationskurve im logarithmischen Maßstab

$\sigma_0$  ... Spannung zum Versuchsbeginn  $t = 0$

$\sigma_\infty$  ... Spannung nach unendlich langer Zeit  $t = \infty$

Zudem geben [Kubat, et al., 1991] an, dass der Relaxationsverlauf vielfach durch die Formel nach *Kohlrausch-Williams-Watt* beschrieben werden kann:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \exp(-k \cdot t^\beta) \quad (5.9)$$

Dabei entsprechen die Parameter  $k$  und  $\beta < 1$  empirisch zu ermittelnden Größen.

<sup>134</sup> Kubat, D. G.; Samuelsson, S.; Klason, C. (1989). *Stress relaxation in wood*. Seite 3542

In Versuchen von [Popper, et al., 1999] konnte an zyklisch befeuchteten und getrockneten Brettschichtholzproben aus Fichtenholz eine Abnahme der Querdruckspannungen mit steigender Anzahl von Trocknungszyklen festgestellt werden. Die Versuchsergebnisse liegen in der Größenordnung der Ergebnisse von [Steck, 1987] und [Möhler & Maier, 1970]. Auch *Toratti* und *Svensson* befassen sich in [Toratti & Svensson, 2000] mit dem rheologischen Verhalten von Holz unter zyklischer Befeuchtung und Trocknung. Dabei unterwerfen sie kleine Holzprobekörper einer konstanten Querdruck- bzw. Querkzugspannung, welche anschließend durch wechselnde relative Luftfeuchten beansprucht werden. Aus den gemessenen Verformungen konnten Werte der Relaxation zwischen 40% und 50% ermittelt werden, wobei bei Feuchteaufnahme etwas höhere Werte gemessen wurden als bei Feuchteabgabe. Es konnte festgestellt werden, dass hohe Feuchtedifferenzen einen großen Einfluss, jedoch die Geschwindigkeit der durchgeführten Feuchtezyklen einen kleinen Einfluss auf das Langzeitverhalten besitzen. Aus berechneten Ergebnissen von [Angst & Malo, 2012] konnten an den von [Toratti & Svensson, 2000] durchgeführten Versuchen Relaxationswerte von bis zu 70% nach einigen Tagen bzw. wenigen Wochen ermittelt werden.

Die bemessungstechnische Erfassung von Relaxationseffekten in dauerhaft, künstlich gekrümmten Holzbauteilen wird in [Čížek, 1961] diskutiert. Es wird angegeben, dass bei der Herstellung von gekrümmtem Brettschichtholz eine Relaxation von 50 % in den Lamellen nach der ČSR-Norm von 1955 verwendet werden kann. Die daraus resultierenden inneren Spannungen können über einen reduzierten Elastizitätsmodul berechnet werden. Diese gesamte Thematik ist wiederum sehr eng mit der Langzeitfestigkeit und der Kriechbruchfestigkeit verknüpft, weshalb viele Affinitäten zum Kriechen erkannt werden können. *Szalai* beschreibt ebenfalls die Einflüsse der Relaxation bei der Herstellung von gekrümmtem Brettschichtholz durch eine zeitliche Abnahme des E-Moduls und gibt folgende mathematische Gleichung an (für Kiefernholz gilt  $a=2,810$  und  $b=0,03855$ ).<sup>135</sup>

$$E(t) = E(t = 0) \cdot \left[ 1 - \frac{a}{100} \cdot \ln \frac{t+b}{b} \right] \quad (5.10)$$

Dieser Elastizitätsmodul darf nicht mit dem realen E-Modul der Lamellen verglichen werden, er dient lediglich zur Berechnung der zeitlich abfallenden inneren Spannungen oder zur Berechnung von Kriechverformungen.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass zur Relaxation von Holz und Holzwerkstoffen nur wenige Unterlagen und Versuche bekannt sind. Es ist aber wichtig zu erkennen, dass sehr viele Verhaltensweisen zur Relaxation aus dem Kriechverhalten übertragen werden können, wie beispielsweise die Abhängigkeiten von Holzfeuchte, Temperatur und Belastungsniveau. Da das Verhalten im Kriechversuch mit dem der Relaxation so eng verwandt ist, liegt es nahe ein Model zu entwickeln, welches beide materiellen Eigenschaften zufriedenstellend abbilden kann. Dies wird vielfach mit rheologischen Modellen versucht, weshalb in den nächsten beiden Kapiteln näher darauf eingegangen werden soll.

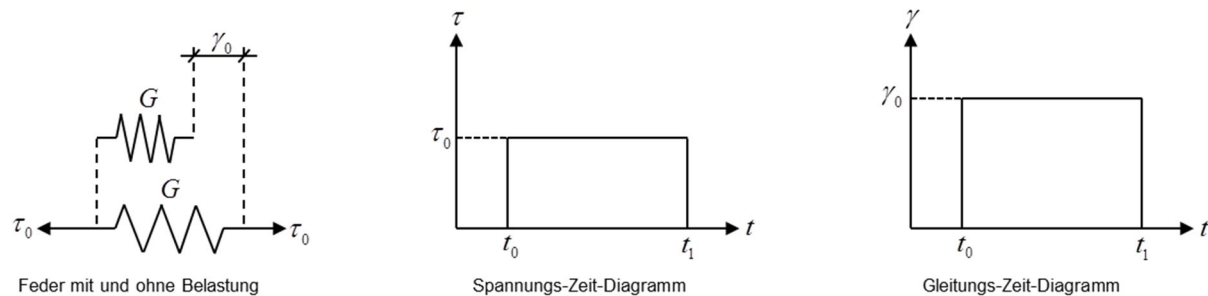
---

<sup>135</sup> Szalai, J. (1986). *Theoretische und experimentelle Untersuchung der herstellungsbedingten ...* Seite 72

## 5.4 Rheologische Grundkörper und ihren Kombinationen

In diesem Abschnitt sollen die grundlegenden, allgemeinen rheologischen Modelle kurz vorgestellt und erläutert werden. Eine entsprechende Übersicht der wichtigsten erwähnten Elemente ist in Abb. 198 gegeben.

Rheologische Grundkörper beschreiben die drei grundlegenden Materialeigenschaften: Elastizität, Plastizität und Viskosität. Das ideal elastische Verhalten wird durch eine Hook'sche Feder dargestellt, die sich in Folge Belastung augenblicklich dehnt und nach Entlastung wieder vollkommen in den Ausgangszustand zurückbegibt (siehe Abb. 187).



**Abb. 187:** Das Federelement – Hook'sche Feder

„Die Verformungsgleichung des Grundkörpers geht von der Proportionalität zwischen der einwirkenden Schubspannung  $\tau_0$  und der Scherung um einen Winkel  $\gamma_0$  aus.“ [Beddoe, 2008] Die Gesamtdehnung berechnet sich aus:

$$\gamma_0 = \frac{\tau_0}{G} \quad (5.11)$$

Die Viskosität wird durch einen Newton'schen Dämpfer idealisiert, welcher aus einem Zylinder besteht und mit einer idealen Newton'schen Flüssigkeit gefüllt ist, in der sich ein Kolben bewegen kann. Wird dieses Dämpfungselement durch eine konstante Spannung  $\tau_0$  beansprucht, so ändert sich die Dehnung proportional zur Zeit (siehe Abb. 188).<sup>136</sup> Die Differentialgleichung des Spannungs-Dehnungsgesetzes lautet:

$$\tau = \eta \cdot \dot{\gamma} \quad (5.12)$$

Daraus errechnet sich die Gesamtdehnung des Dämpfers unter einer konstanten Spannung  $\tau_0$  und einer verstrichenen Zeit  $t_1$  zu:

$$\gamma_1 = (t_1 - t_0) \cdot \frac{\tau_0}{\eta} = (t_1 - t_0) \cdot \dot{\gamma} \quad (5.13)$$

<sup>136</sup> Pfefferle, R. (1971). *Zur Theorie des Betonkriechens*. Seite 28

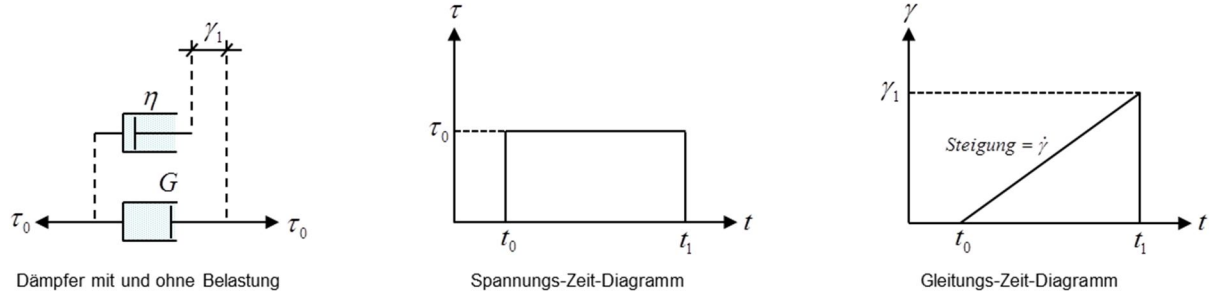


Abb. 188: Das Dämpferelement – Newton' scher Dämpfer

Die Plastizität eines Materials kann durch ein Reibungselement nachempfunden werden. Dieses Element zeigt erst dann Dehnungen, wenn eine gewisse Haftreibung  $\tau_R$  durch eine äußere aufgebrachte Spannung  $\tau_1$  überschritten wird. Danach wächst die Dehnung sofort gegen unendlich an (siehe Abb. 189).<sup>137</sup>

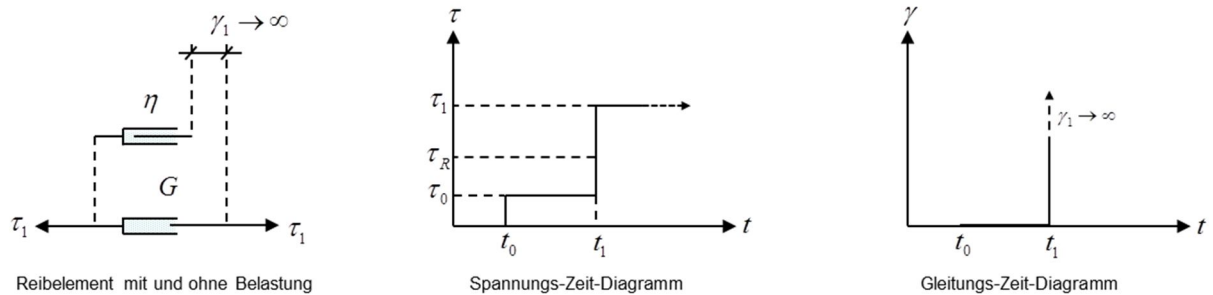


Abb. 189: Das Reibungselement

Folglich gelten für ein Reibungselement folgende Beziehungen:

$$-\tau_R \leq \tau \leq \tau_R \rightarrow \gamma = 0 \tag{5.14}$$

$$-\tau_R > \tau > \tau_R \rightarrow \gamma \rightarrow \infty \tag{5.15}$$

In neueren rheologischen Modellen kommen vermehrt „aktive“ Elemente zum Einsatz. Diese Elemente vollführen Dehnungen ohne Einwirkung von Kräften. Sie reagieren abhängig von der Definition, auf eine Änderung der Temperatur oder Feuchte in Form von Temperaturdehnungen oder Quellen und Schwinden. Dazu müssen entsprechende stoffliche Parameter, wie Temperaturdehnmaße  $\alpha_T$  und Quell- bzw. Schwindmaße  $\alpha$  bekannt sein. Solche Grundkörper finden Verwendung, um das thermische oder hygrische Verhalten von Werkstoffen unter wechselnden klimatischen Bedingungen zu beschreiben. Als Beispiel ist in Abb. 190 ein feuchteabhängiges Element gezeigt, welches nach einer schlagartigen Feuchteänderung  $\Delta u$  eine sofortige Gleitung  $\Delta \gamma$  erfährt. Der Verlauf der Dehnungsänderung ist affin zum Feuchteverlauf und kann wie folgt berechnet werden:

$$\Delta \gamma = \alpha \cdot \Delta u \tag{5.16}$$

<sup>137</sup> Pfefferle, R. (1971). Zur Theorie des Betonkriechens. Seite 29

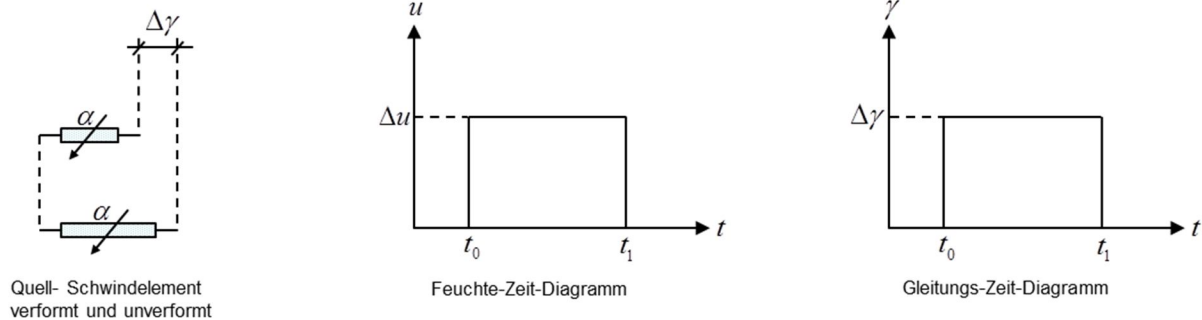


Abb. 190: Das Schwind- Quellelement

Die vorgestellten Grundkörper können in verschiedenen Kombinationen zueinander stehen. Eine der einfachsten Kombinationen ist die Parallelschaltung zweier Hooke'scher Federn. Dabei weisen beide Federn gleiche Verformungen, aber unterschiedliche Spannungen auf (bei unterschiedlicher Federsteifigkeit). Die Gesamtspannung setzt sich aus der Summe der Einzelspannungen zusammen.

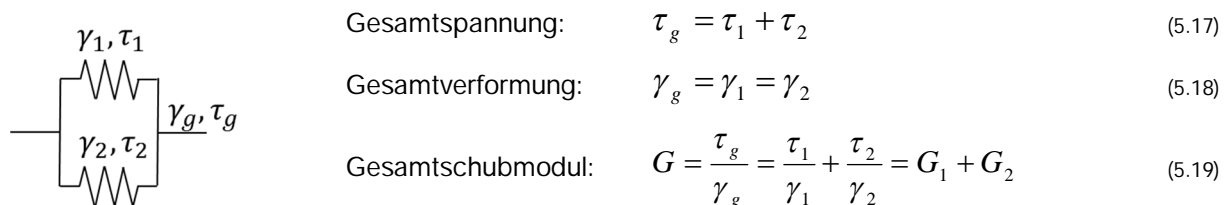


Abb. 191: Parallelschaltung zweier Hooke'scher Federn

Eine weitere Möglichkeit besteht darin die vorher genannten Federn hintereinander, d.h. in Reihe zu schalten. Dabei weisen beide Federn dieselbe Spannung, aber unterschiedliche Verformungen auf (bei unterschiedlicher Federsteifigkeit). Die Gesamtverformung setzt sich aus der Summe der Einzelverformungen zusammen.

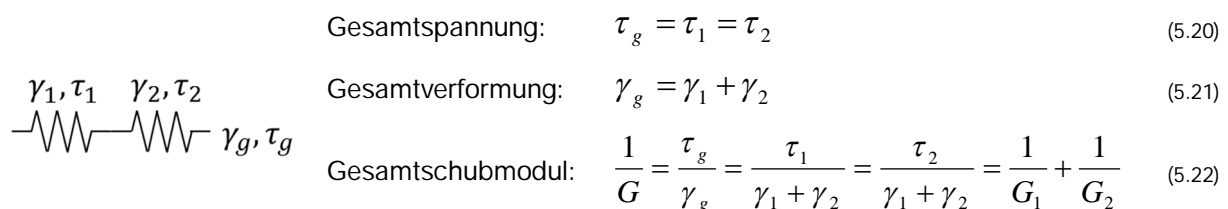
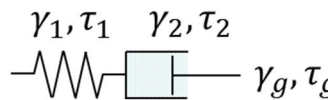


Abb. 192: Reihenschaltung zweier Hooke'scher Federn

Auch diverse Kombinationen aus Feder- und Dämpfersystemen sind möglich. Das einfachste Modell ist der Maxwell-Körper: er setzt sich aus einem Newton'schen Dämpfer und einer Hooke'schen Feder zusammen, die in Reihe geschaltet sind. Die elastische Feder vollführt bei Belastung eine sofortige und reversible Verformung, wobei der Dämpfer eine zeitabhängige irreversible Verformung mitmacht, außer bei Umkehrung der Belastungsrichtung. In beiden Grundelementen herrscht dieselbe Spannung, die Gesamtverformung ergibt sich als Summe der beiden Einzelverformungen. Wobei hier die angelegte Spannung auch durch die Anfangsspannung  $\tau_0$  dargestellt werden kann. Mit dem Maxwell-Körper können Werkstoffe beschrieben werden, in denen mittels Dehnungen von außen aufgezwungene Spannungen durch Relaxation abgebaut werden.<sup>138</sup>

<sup>138</sup> Beddoe, R.E. (2008). Skriptum zur Vertiefervorlesung Bauingenieurwesen Grundfachvorlesung Baustoffingenieurwesen. Seite 16-17



Gesamtspannung:  $\tau_g = \tau_1 = \tau_2$  (5.23)

Gesamtverformung:  $\gamma_g = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\tau_0}{G_1} + \frac{\tau_0}{\eta} \cdot t$  (5.24)

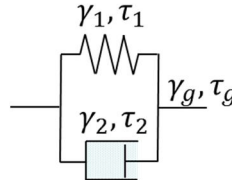
Abb. 193: Der Maxwell- Körper

Zur Beschreibung von Relaxationsvorgängen kann davon ausgegangen werden, dass sich die Gesamtverformung  $\gamma_g$  aus einer sofortigen elastischen Verformung  $\gamma_1$  und einer Kriechverformung  $\gamma_2$  zusammensetzt. Die Gesamtverformung  $\gamma_g$  ändert sich mit der Zeit nicht. Nach [Beddoe, 2008] lässt sich die Relaxationsfunktion für den Maxwell-Körper folgendermaßen ausdrücken:

$$\tau(t) = \tau_0 \cdot \exp\left(-G_1 \cdot \frac{a \cdot t}{b+t}\right)$$

Es wird davon ausgegangen, dass Zeit und Spannung voneinander unabhängig sind. Nach sehr langen Relaxationszeiten wird der Relaxationsendwert  $\tau(t = \infty) = \tau_0 \cdot \exp(-a \cdot G)$  erreicht. Die Parameter  $a$  und  $b$  können aus Kriechversuchen ermittelt werden.

Wird eine Hook'sche Feder mit einem Newton'schen Dämpfer parallelgeschaltet, so ergibt sich das so genannte Kelvin-Voigt Modell oder auch der Kelvin-Körper. Wird dem Kelvin-Körper eine konstante Spannung aufgezwungen, so weisen beide Grundkörper dieselbe Verformung auf. Die elastische Dehnung erscheint nicht sofort, sondern wird als asymptotischer Wert erst nach unendlich langer Zeit erreicht. Dieser Körper wird vielfach verwendet, um das verzögert elastische Materialverhalten von Bitumen, Mörtel, Beton oder Metallen zu beschreiben.



Gesamtspannung:  $\tau_g = \tau_1 + \tau_2 = G_1 \cdot \gamma_1 + \eta \cdot \dot{\gamma}_2$  (5.25)

Gesamtverformung:  $\gamma_g = \gamma_1 = \gamma_2$  (5.26)

Abb. 194: Der Kelvin- Körper

Nach Lösen der Differentialgleichung (5.25) kann das Zeit-Dehnungs-Gesetz wie folgt geschrieben werden:

$$\gamma(t) = \frac{\tau_0}{G_1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{G_1}{\eta} \cdot t}\right)$$
 (5.27)

Dabei entspricht  $\tau_0$  der zum Zeitpunkt  $t=0$  aufbrachten Gesamtspannung  $\tau_g$ . Diese Lösung wurde unter anderem von *Dischinger* verwendet, um das Kriechverhalten von Beton zu beschreiben.<sup>139</sup> Der zeitliche Verlauf der Verformung bei Belastung zum Zeitpunkt  $t_0$  und Entlastung zum Zeitpunkt  $t_1$  kann mathematisch wie folgt beschrieben werden:

<sup>139</sup> Pfefferle, R. (1971). *Zur Theorie des Betonkriechens*. Seite 32



$$\gamma(t) = \frac{\tau_0}{G_1} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{G_1 \cdot (t-t_0)}{\eta}} \right) \quad \text{für } t_0 \leq t \leq t_1 \quad (5.28)$$

$$\gamma(t) = \frac{\tau_0}{G_1} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{G_1 \cdot (t-t_0)}{\eta}} \right) \cdot e^{-\frac{G_1 \cdot (t-t_1)}{\eta}} \quad \text{für } t > t_1 \quad (5.29)$$

Eine exemplarische grafische Darstellung des Verlaufs ist in Abb. 195 gegeben.

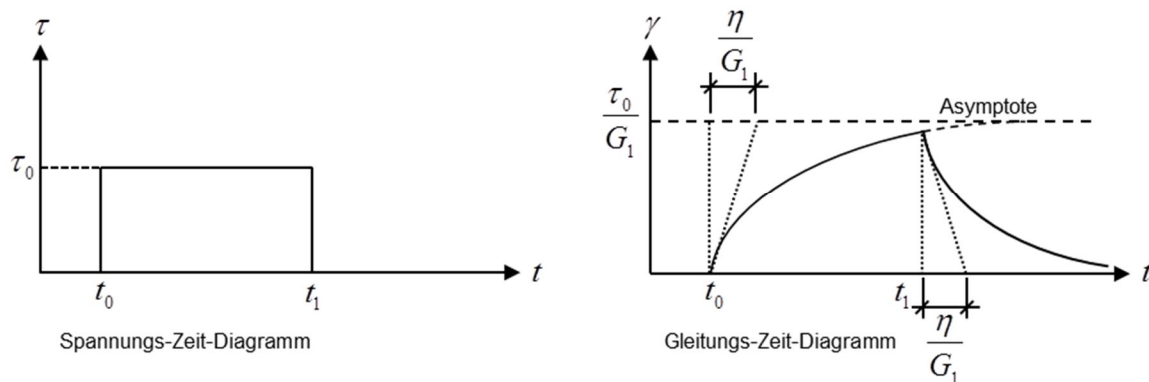
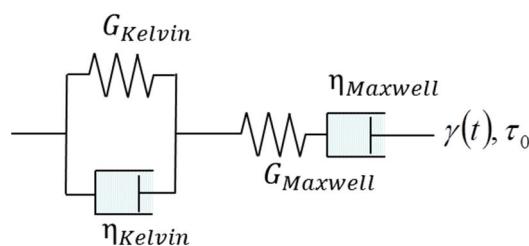


Abb. 195: Zeit-Verformungsverlauf eines Kelvin- Körpers bei Be- und Entlastung

Eine Kombination aus Kelvin- und Maxwell-Körper stellt der Burgers-Körper dar. Dabei werden beide Körper in Reihe geschaltet, somit können verzögert elastische Werkstoffeigenschaften als auch Relaxationsvorgänge beschrieben werden. Dieser Körper findet hauptsächlich in der Asphalt- bzw. Betontechnologie seine Anwendung.<sup>140</sup>



Die Verformung des Burgers- Körpers setzt sich aus einem sofortigen elastischen Anteil (Feder:  $G_{Maxwell}$ ), einem viskosen Anteil (Dämpfer:  $\eta_{Maxwell}$ ) und einem verzögert elastischen Anteil (Verformung des Kelvin- Körpers:  $G_{Kelvin}$ ,  $\eta_{Kelvin}$ ) zusammen. Wird eine plötzlich auftretende konstante Spannung  $\tau_0$  an den Körper angelegt, so kann der zeitliche Verlauf der Verformung wie folgt beschrieben werden:

Abb. 196: Der Burgers-Körper

$$\gamma(t) = \frac{\tau_0}{G_{Maxwell}} + \frac{\tau_0}{\eta_{Maxwell}} \cdot t + \frac{\tau_0}{G_{Kelvin}} \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{G_{Kelvin}}{\eta_{Kelvin}} \cdot t\right) \right] \quad (5.30)$$

Dadurch können nicht lineare Verformungsverläufe bei Belastung- und Entlastung dargestellt und berechnet werden. Ein exemplarischer Verlauf mit Darstellung der einzelnen Verformungsanteile ist in nachfolgender Abbildung gegeben.

<sup>140</sup> Beddoe, R.E. (2008). Skriptum zur Vertiefervorlesung Bauingenieurwesen Grundfachvorlesung Baustoffingenieurwesen. Seite 17

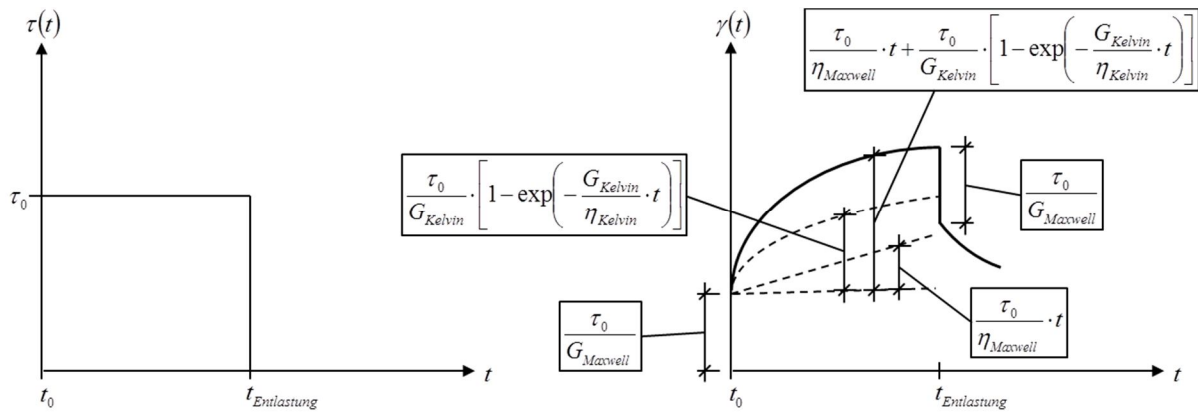


Abb. 197: Be- und Entlastung eines Burgers- Körpers und schematische Darstellung einzelner Verformungsanteile

Es gibt noch eine Reihe anderer rheologischer Körper, die an dieser Stelle nicht näher erläutert werden sollen. Eine Zusammenfassung der bekanntesten Modelle ist in Abb. 198 gegeben. Im folgenden Kapitel wird auf die Beschreibung des Werkstoffes Holz mittels rheologischer Modelle näher eingegangen und ein Überblick über die derzeit bekannten Modelle gegeben.

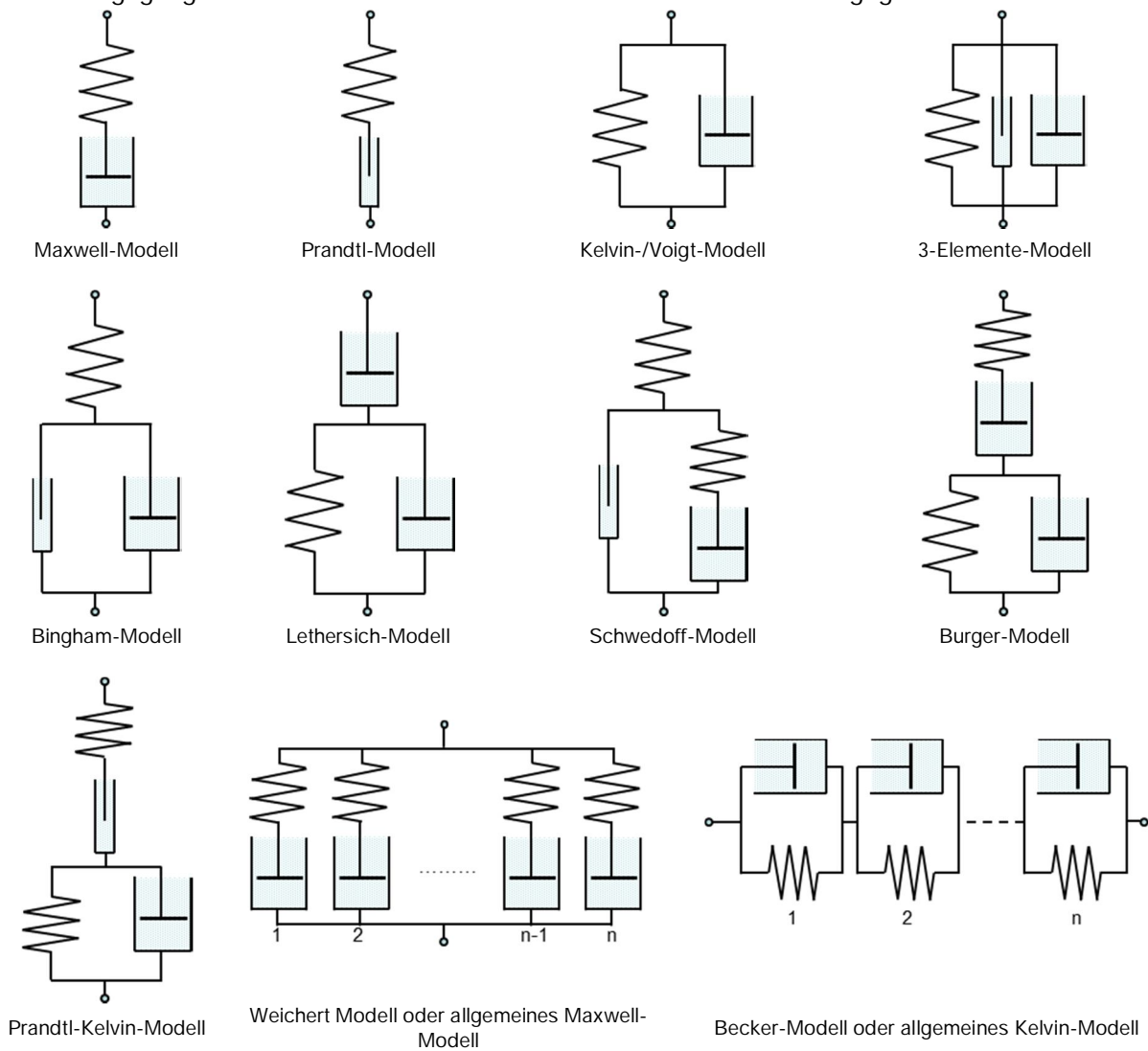


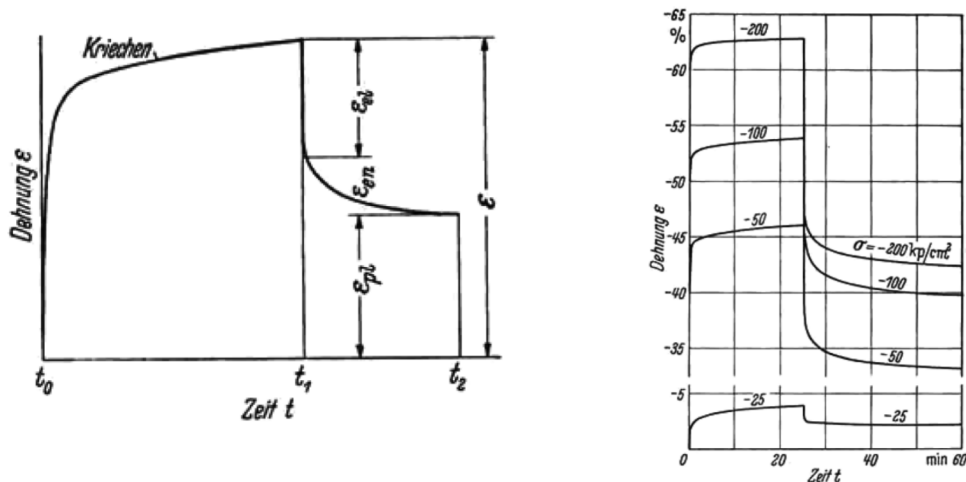
Abb. 198: Die bekanntesten aus Einzelementen zusammengesetzten Modelle<sup>141</sup>

<sup>141</sup> Pfefferle, R. (1971). Zur Theorie des Betonkriechens. Seite 31

## 5.5 Rheologische Körper zur Beschreibung des Verhaltens von Holz

Das rheologische Verhalten von Holz wurde von mehreren Autoren untersucht. Die verwendeten rheologischen Modelle sollen in diesem Abschnitt gezeigt und in Auszügen beschrieben werden. Eine Übersicht der gefundenen rheologischen Modelle ist in Abb. 213 gegeben.

Einer der ersten Beiträge zur rheologischen Beschreibung von Holz stammt aus dem Jahre 1961 [Kollmann, 1961]. Darin verwendet *Kollmann* den Burgers-Körper zur Beschreibung des zeitlichen Verlaufs der Stauchung bei querdruckt-beanspruchtem Fichtenholz und verweist auf die Affinität zum Dehnungs- Zeitverhalten von hochpolymeren Stoffen (siehe Abb. 199) (vergleiche auch Abb. 197).



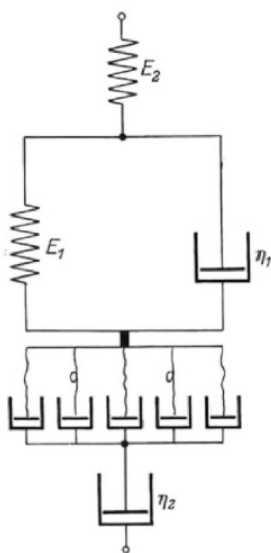
**Abb. 199:** Dehnungs-Zeitschaubild für hochpolymere Stoffe (links) und Be- Entlastung von Fichtenholz, Druck senkrecht zur Faser in radialer Richtung Holzfeuchte 17% (rechts) [Kollmann, 1961]

[Kollmann, 1961] beschreibt zudem in seinem Werk die Mikro- und Makrostruktur des Holzes durch verschieden steife bzw. weiche Federn. Dabei wird beispielsweise Frühholz durch weiche, Spätholz durch steife und Markstrahlen durch sehr steife Federn dargestellt. Die Plastizität des Holzes hängt nach seiner Aussage stark vom Wassergehalt des Holzes und damit von dem in den Zellwänden gebundenen Wasser ab. Das bedeutet, je höher die Holzfeuchtigkeit ist, umso geringer ist die Viskosität des Dämpfers und umso besser ist die micellare Schmierung. Ein sehr feuchtes Holz wird in einem rheologischen Model deshalb mit einem „weichen“ Dämpfer und ein trockenes Holz mit einem „harten“ Dämpfer kombiniert. Durch Erhöhung der Feuchtigkeit und Temperatur des Holzes, kann zur Viskosität auch die Plastizität erheblich gesteigert werden. Dies wird von [Van de Kuilen, 2004] bei der Herstellung von Leitplanken aus gedämpften Holzelementen genutzt, dabei wird zudem auf die Änderung des E-Moduls in Abhängigkeit des Holzfeuchtegehaltes verwiesen, was schon in [Kollmann, 1961] der Fall war. In [Kollmann, 1961] wird des Weiteren vorgeschlagen, den Biegezugbereich eines auf Biegung beanspruchten Stabes durch steife Federn zu modellieren und den Biegedruckbereich durch Dämpferelemente. Diese Überlegung stammt aus der Betrachtung von Zug- bzw. Druckproben, die im Zugversuch ein nahezu ideal-elastisches Verhalten an den Tag legen was im Druckversuch nicht der Fall ist. Durch eine solche Modellierung besteht die Möglichkeit, abweichend von der Theorie von Navier nichtlineare Spannungsverteilungen über die Querschnittshöhe zu berücksichtigen.

Konträr zu den Ausführungen von [Kollmann, 1961] ist [Kühne, 1961] der Meinung dass das Formänderungsverhalten von Holz nicht durch einfache Feder- und Kolbensysteme beschrieben werden kann. Es bedürfe weitaus komplexerer Systeme um das statische System der Holzstruktur und das Zusammenwirken der einzelnen Holzbestandteile zu beschreiben. Dabei sollte ein statisches

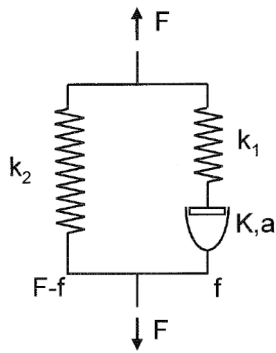
System entwickelt werden, welches die gesamte strukturelle Inhomogenität des Werkstoffes gleichzeitig erfasst.

Im Jahre 1965 stellt [Perkitny, 1965] erste Untersuchungen zum rheologischen Verhalten von Holz in Wechselbeziehung mit Sorption und Desorption dar. Er beschreibt die durch Quellen und Schwinden entstehenden Verformungen als sich durch innere Kräfte darstellbare Erscheinungen, die in einem rheologischen Modell durch aktive, in Abhängigkeit der Feuchte arbeitende Elemente modelliert werden können. An Versuchen stellte er fest, dass Feuchteänderungen während der Versuchszeit einen erheblichen Einfluss auf das Verformungsverhalten der Holzprobekörper haben. Den Einfluss der Feuchteänderung auf das rheologische Verhalten von Holz konnte er am besten an druckbeanspruchten Holzproben erkennen. Dabei kam es nicht nur zu Kriecherscheinungen, die das Kriechen bei konstanter Holzfeuchte um ein vielfaches überschritten, sondern auch zu Quellungen die eine zur Belastung gegenteilige Verformung verursachten. Entsprechende Versuchsergebnisse konnten auch von [Moliński & Raczkowski, 1988] erfasst werden (siehe Abb. 179). Es muss gesagt werden, dass die aufgebrachte Last sehr gering war und somit die entstehenden inneren Quellkräfte zu einer Probenhebung führten. [Perkitny, 1965] schließt aus seinen Versuchen, dass die im Augenblick der Entlastung im Holz vorhandene Holzfeuchte für die sofortige elastische Rückfederung verantwortlich ist und die klimatische Vorgeschichte fast keinen Einfluss besitzt. Verzögert elastische Rückverformungen sind bei feuchtem Holz höher als bei trockenem Holz mit gleicher Belastungsvorgeschichte. Holzproben die während der Belastung getrocknet werden weisen keinerlei verzögerte elastische Rückverformung auf. „Diese Feststellung steht in gutem Einklang mit der bekannten Tatsache, dass die Heißpressung nassen Holzes d. h. seine Trocknung unter gleichzeitiger Druckeinwirkung eine schnelle Relaxation der aufgebrachten Druckspannungen herbeiführt und somit zu einer oft erwünschten, irreversiblen Stabilisierung derjenigen Form beiträgt, die dem Holzkörper durch die Pressung aufgezwungen wurde.“ [Perkitny, 1965]



**Abb. 200:** Rheologisches Modell für die mechanischen Verformungen von Holz [Lawniczak, 1967]

[Lawniczak, 1967] bezieht in das bekannte Modell von Burgers das kombinierte Modell von *Regel* mit ein. Dieses besteht aus beliebig gewundenen Fäden, die in viskosen Dämpfern enden und durch zwei parallel angeordnete Plättchen gekoppelt sind. „Die Vorzüge dieses Modells beruhen darauf, dass es neben Zerstörungsvorgängen auch den Einfluss von Faktoren wie Temperatur, Zunahme der Sprödigkeit bei ansteigender Belastungsgeschwindigkeit und auch Verstärkungsvorgänge sinngemäß veranschaulicht. Eine bruchlose Verformung dieses Elements erfolgt so lange, bis einer der verwickelten Fäden in einen Spannungszustand versetzt ist. Ohne Zerreißen des gespannten Fadens ist dann jede weitere Formänderung unmöglich. Nach dem Zerreißen geraten andere Fäden in Spannungszustände und bewirken, dass eine Reihe von zähen Bestandteilen einbezogen wird, wodurch sich das System verstärkt. Das Zerreißen aller Fäden im Element hat dann eine totale Zerstörung des Aufbaus zur Folge.“ [Lawniczak, 1967]



**Abb. 201:** Rheologisches Modell nach Eyring [Jaenicke, 2003]

1969 veröffentlichte *Ramon Echenique-Manrique* die Ergebnisse seiner Versuchsreihen in dem wissenschaftlichen Magazin „Wood Science and Technology“. In seinem Beitrag „Stress Relaxation of Wood at Several Levels of Strain“ untersuchte er das Relaxationsverhalten von verschiedenen tropischen Holzarten infolge unterschiedlicher Druck- und Zugbelastung. Er kam zu der Erkenntnis, dass die Spannungsrelaxation nicht in jedem Bereich eine lineare Funktion der Dehnung ist.<sup>142</sup> Um diese Gegebenheit in einem Modell abbilden zu können, bediente er sich des von *Eyring* modifizierten Standard-Festkörper-Modells, welches in Abb. 201 dargestellt ist.

Dieses Modell wurde ursprünglich zur Beschreibung des viskos-elastischen Verhaltens von Textilien verwendet.<sup>143</sup> Um einen Retardations- oder Relaxationsverlauf ermitteln zu können müssen dimensionslose Eingangswerte aus durchgeführten Versuchen ermittelt werden. Beispielsweise kann der Relaxationsverlauf mit Hilfe einer Referenzzeit bestimmt werden, zu welcher die halbe Relaxation abgeklungen ist (siehe Gleichung (5.31)).

$$t' = \frac{t}{t_x} \quad (5.31)$$

$t'$  ... transformierte Zeit [-]

$t$  ... tatsächliche Zeit [min]

$t_x$  ... Zeit zu der die halbe Relaxation abgeklungen ist [min]

Durch die Kraft zum Zeitpunkt  $t = 2 \cdot t_x$  kann die Dämpferkonstante  $a$ , welche in Abhängigkeit zur Kraft  $f$  am Dämpfer entsteht wie folgt berechnet werden.

$$f_{(t=2t_x)} = \frac{\frac{F_{(t=2t_x)}}{F_0} - \frac{F_\infty}{F_0}}{1 - \frac{F_\infty}{F_0}} \quad (5.32)$$

$f$  ... Dimensionslose Kraft am Dämpfer [-]

$F_{(t=2t_x)}$  ... Kraft aus Relaxationsversuch zum Zeitpunkt  $t' = 2$  [N]

$F_0$  ... Kraft aus Relaxationsversuch zum Zeitpunkt  $t = 0$  [N]

$F_\infty$  ... Kraft aus Relaxationsversuch zum Zeitpunkt  $t = \infty$  [N]

Die Dämpferkonstante  $a$  kann anschließend über Gleichung (5.33) iterativ ermittelt werden.

$$\log \frac{\tanh\left(\frac{a \cdot f}{2}\right)}{\tanh\left(\frac{a}{2}\right)} = t \cdot \log \frac{\tanh\left(\frac{a}{4}\right)}{\tanh\left(\frac{a}{2}\right)} \quad (5.33)$$

<sup>142</sup> Echenique-Manrique, R. (1969). *Stress Relaxation of Wood at Several Levels of Strain*. Seite 49-73

<sup>143</sup> Pirazzi, C. (2005). *Zur Berechnung von Holzschalen in Brettrippbauweise mit elastischem Verbundquerschnitt*. Seite 60

Durch die folgenden Gleichungen (5.34) bzw. (5.35) können die bei konstanter Dehnung wirkenden Kräfte am Feder-Dämpfersystem, sowie auch der zeitliche Relaxationsverlauf zu jedem Zeitpunkt  $t$  bestimmt werden.

$$f_{(t')} = \frac{1}{a} \cdot \ln \left[ \frac{1 + \left( \frac{\tanh \frac{a}{4}}{\tanh \frac{a}{2}} \right)^{t'}}{1 - \left( \frac{\tanh \frac{a}{4}}{\tanh \frac{a}{2}} \right)^{t'}} \cdot \tanh \frac{a}{2} \right] \quad (5.34)$$

$$\frac{F_t}{F_0} = f + \frac{F_\infty}{F_0} \cdot (1 - f) \quad (5.35)$$

Das hier von *Eyring* beschriebene Modell wurde von *van der Put* in seiner Dissertation [van der Put, 1989] sehr ausführlich untersucht. Er stellt fest, dass dieses rheologische Modell sehr gut geeignet ist, das rheologische Verhalten von Holz zu beschreiben. Dabei können Änderungen der relativen Luftfeuchte, der Temperatur und des Belastungsgrades erfasst werden. Die theoretischen Berechnungsergebnisse des Modells stimmen mit experimentellen Ergebnissen sehr gut überein.<sup>144</sup>

Bei Versuchen am Ende der 50er Jahre in Australien und später in England wurde erkannt, dass bei wechselnder Holzfeuchte und konstanter mechanischer Belastung Kriechverformungen auftreten können, die das 20-fache der elastischen Verformungen betragen. Erste Versuche zur Beschreibung dieses, als mechano-sorptives Kriechen bezeichneten Phänomens, stammen aus den 70er Jahren.<sup>145</sup> Aus diesen Jahren stammen auch zwei rheologische Modelle von *Leicester*. [Leicester, 1971] beschreibt das Kriechverhalten von grünem Holz bei der Trocknung unter Druck- bzw. Biegebeanspruchungen. Das erste Modell entspricht einem abgewandeltem Maxwell-Körper wobei der Newton'sche Dämpfer durch ein mechano-sorptives Element ersetzt wird. Die Gesamtverformung  $\Delta$  des Körpers berechnet sich aus der Summe der beiden Verformungsanteile  $\Delta_e$  und  $\Delta_m$  unter einer Belastung  $P$ .

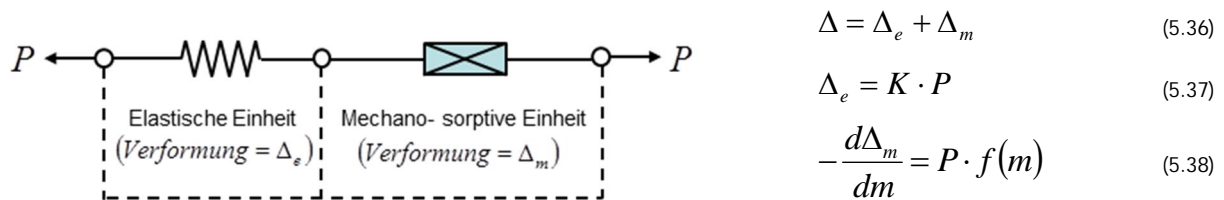


Abb. 202: Erstes rheologisches Modell nach *Leicester*

$m$  entspricht dabei dem mittleren Feuchtegehalt des betrachteten Körpers,  $K$  ist eine Konstante (Federsteifigkeit) und  $f(m)$  eine Funktion die den Feuchtegehalt beschreibt. Mit Gleichung (5.38) wird

<sup>144</sup> Van der Put, T. A. C. M. (1989). *Deformation and Damage Process in Wood*. Seite 139-144

<sup>145</sup> Grimsel, M. (1998). *Mechanisches Verhalten von Holz*. Seite 58



eine irreversible Verformung in Folge von mechano-sorptiven Effekten beschrieben.<sup>146</sup> Ein Anwendungsbeispiel dieses Modells zur Berechnung von Retardations- und Relaxationsverläufen findet sich in [Grossman, 1971].

Das zweite von *Leicester* vorgeschlagene rheologische Modell setzt sich aus drei Einheiten zusammen (siehe Abb. 203). Die erste Einheit besteht aus einer elastischen Feder zur Berechnung der sofortigen Dehnungen. Die zweite aus drei Kelvin- Körpern zur Beschreibung des viskos-elastischen Verhaltens und die dritte Einheit aus einem mechano-sorptiven Element welches irreversible Verformungen vollführt und einem modifizierten Kelvin-Körper für reversible Verformungen. Die Summe aller Teilverformungen liefert die Gesamtverformung  $\Delta$ .<sup>147</sup>

$$\Delta = \Delta_e + \Delta_v + \Delta_{irr} + \Delta_r \tag{5.39}$$

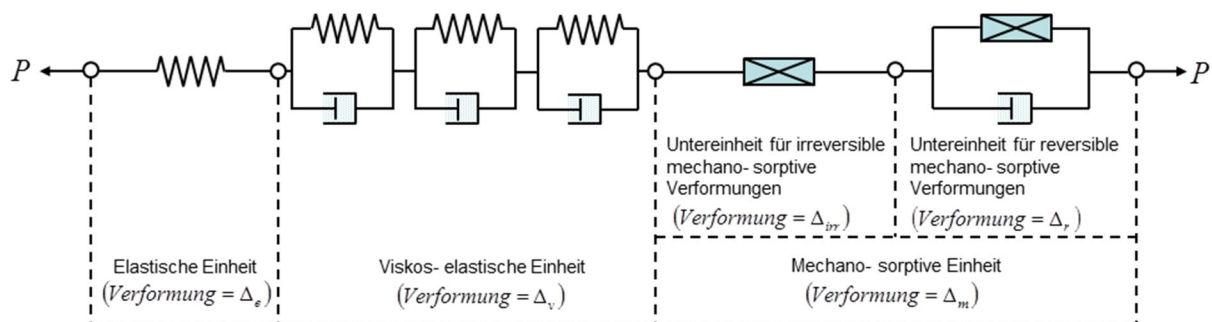


Abb. 203: Zweites rheologisches Modell nach *Leicester*

Durchgeführte Berechnungsergebnisse zu diesem zweiten *Leicester*-Modell konnten nicht gefunden werden, weshalb auch keine Angaben zur Modellierungsgenauigkeit gegeben werden können. Im Gegensatz zu *Leicester* befasst sich [Reinhardt, 1973] mit dem Kriech- und Relaxationsverhalten von Holz ohne Berücksichtigung der mechano-sorptiven Einflüsse. Er bedient sich an dem von Pfefferle für den Beton entwickelten Modell, welches einfach zu bestimmen und dessen Lösungen für den Massivbau schon überwiegend bekannt sind (siehe Abb. 204). Dieses Modell besitzt sehr große Ähnlichkeiten mit dem Modell von *Eyring* (siehe Abb. 201) oder mit einem Newton'schen Körper, vor welchen eine Hooke'sche Feder geschaltet wird. Der Dämpfer des Modells weist ein Verformungsverhalten auf, das nicht proportional zur Zeit ist, sondern zur Wurzel aus der Zeit. Der Einfluss eines nichtlinearen Dämpfers gegenüber einem linearen Dämpfer wird in Abb. 205 gezeigt. Die Kelvineinheit (linearer Dämpfer) verformt sich zu Beginn der Belastung weniger, erreicht jedoch dann schneller den Endwert als das Modell nach Pfefferle (nichtlinearer Dämpfer).

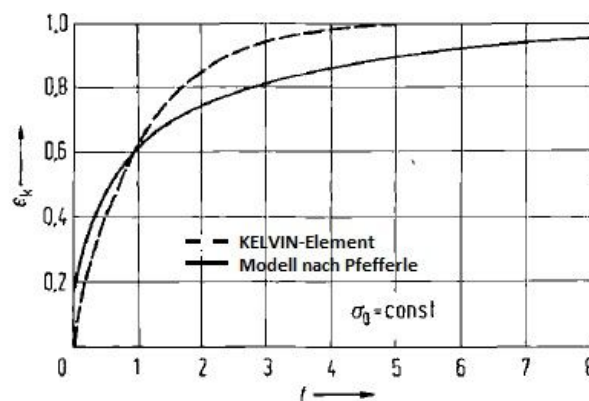
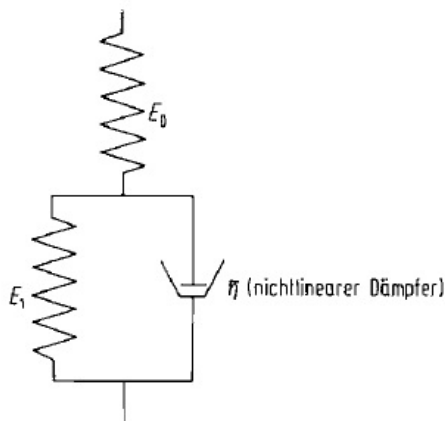


Abb. 204: Modell nach Pfefferle [Reinhardt, 1973]

Abb. 205: Einfluss des nichtlinearen Dämpfers [Reinhardt, 1973]

<sup>146</sup> Leicester, R. H. (1971). *A Rheological Model for Mechano-sorptive Deflections of Beams*. Seite 213

<sup>147</sup> Leicester, R. H. (1971). *A Rheological Model for Mechano-sorptive Deflections of Beams*. Seite 217-218

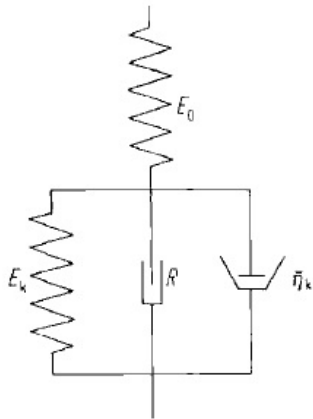


Abb. 206: Modell für Rückkriechversuche [Reinhardt, 1973]

Zur Bestimmung der irreversiblen Anteile wurde in das Modell von Pfefferle noch ein Reibungselement eingefügt.<sup>148</sup> Die erarbeiteten Ergebnisse wurden an Versuchen von [Möhler & Maier, 1970] sowie an Versuchen von Kollmann kontrolliert und zeigten für Kriechversuche gute, für Relaxationsversuche akzeptable Ergebnisse. Der zeitliche Verlauf des Kriechens kann nach *Reinhardt*, wie in Gleichung (5.40) dargestellt, beschrieben werden. Dabei wird vom Modell ohne Reibkörper ausgegangen.

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} + \frac{\sigma_0}{E_1} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{E_1 \cdot \sqrt{t}}{\eta}} \right) \quad \sigma_0 \quad \dots \text{Spannung zum Zeitpunkt } t=0 \quad (5.40)$$

Soll eine Funktion zur Beschreibung des Relaxationsverlaufs hergeleitet werden, so kann dies über die Kriechzahl  $\varphi_\infty$  erfolgen.

$$\varphi_\infty = \frac{\varepsilon_{k,\infty}}{\varepsilon_0} = \frac{E_0}{E_1} \quad (5.41)$$

Daraus ergibt sich für den Relaxationsverlauf folgender Zusammenhang:

$$\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{1 + \varphi_\infty} \left[ 1 + \varphi_\infty \cdot e^{-\frac{E_0 + E_1 \cdot \sqrt{t}}{\eta}} \right] \quad \sigma(t) \quad \dots \text{Spannung zum Zeitpunkt } t \quad (5.42)$$

Die Restspannung  $\sigma_\infty$  zum Zeitpunkt  $t \rightarrow \infty$  beträgt:

$$\frac{\sigma_\infty}{\sigma_0} = \frac{1}{1 + \varphi_\infty} \quad \rightarrow \quad \sigma_\infty = \sigma_0 \cdot \frac{1}{1 + \varphi_\infty} \quad (5.43)$$

Wird der rechte Teil der Gleichung (5.43) betrachtet und  $\varphi_\infty$  durch  $k_{def}$  ersetzt, so erhält man die in [DIN 1052:2008-12, Abschnitt 8.3, Absatz(3)] gegebene Abminderung der Steifigkeiten für druckbeanspruchte Bauteile der Nutzungsklasse 2 und 3, bei einer Überschreitung des ständigen Lastanteils von 70% gegenüber der Gesamtlast. Derselbe Ausdruck wird auch für Untersuchungen nach dem Ersatzstabverfahren und Theorie II. Ordnung respektive Knicken und Kippen verwendet. Aus diesem Zusammenhang kann im Rückschluss eine maximale Spannungsrelaxation in Abhängigkeit der Nutzungsklasse und der Einwirkungsdauer über den Beiwert  $k_{def}$  der [DIN 1052:2004-08] berechnet werden.

<sup>148</sup> Reinhardt, H.W. (1973). *Zur Beschreibung des rheologischen Verhaltens von Holz*. Seite 352-353

$$\sigma_{\infty} = \sigma_0 \cdot \frac{1}{1 + \varphi_{\infty}} = \sigma_0 \cdot \frac{1}{1 + k_{def}} \quad (5.44)$$

Als Beispiel soll für die Nutzungsklasse 2 und einer ständigen Lasteinwirkung der Anteil der Relaxation für einen Vollholzquerschnitt ermittelt werden:

$$k_{def} = 0,8 \rightarrow \frac{1}{1 + k_{def}} = \frac{1}{1 + 0,8} = 0,56 \quad (5.45)$$

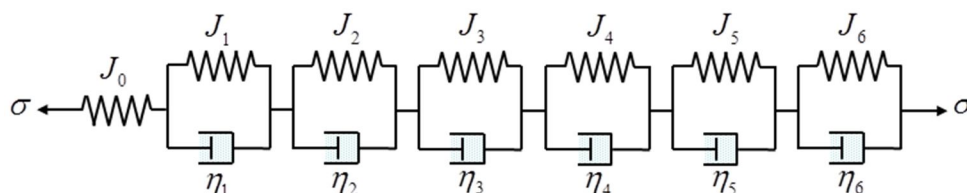
Dies würde bedeuten, dass nach unendlich langer Zeit 44% der Spannungen abgebaut würden. Dieser Wert deckt sich mit Angaben zur Langzeitfestigkeit in Kapitel 5.2.2, wonach ein Wert von 56 % der Kurzzeitfestigkeit als Proportionalitätsgrenze für Langzeitbelastungen in diversen Normen festgelegt wurde. Zudem deckt sich dieser Wert mit Angaben von [Čížek, 1961] zur Berechnung der Spannungen nach unendlich langer Zeit in Brettschichtholzträgern.

Einige Jahre später beschreibt *Gressel* den Burgers-Körper in seiner Arbeit [Gressel, 1984/1] als 4-Parameter Modell, da es vier Parameter bedarf um durchgeführte Kriechversuche mit diesem Modell zu Beschreiben. Die von ihm verwendete Funktion wurde wie folgt dargestellt:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 \cdot (1 - e^{-\beta_3 \cdot t}) + \beta_4 \cdot t \quad (5.46)$$

Dabei entspricht  $Y$  der Verformung,  $t$  der Zeit und  $\beta_i$  den entsprechenden zu bestimmenden Parametern. Dieses Modell eignet sich nach seinen Angaben sehr gut zur Beschreibung von durchgeführten Kriechversuchen, von denen er bis zu 13 Jahre dauernde Versuche an Holz und Holzwerkstoffen selbst durchgeführt hatte. Eine Extrapolation von Kriechverformungen aus Kurzzeitversuchen (2 bis 4 Jahren) mit dem 4-Parameter Modell liefert nach seinen Angaben sehr konservative und teilweise unrealistische Ergebnisse.<sup>149</sup>

Zu den neueren Modellen, die auch das Kriechen aufgrund von Feuchteschwankungen (mechano sorptive creep) wiederum berücksichtigen, zählen die Modelle nach *Toratti* und *Hanhijärvi*.<sup>150</sup> *Toratti* wählt in seinem System sechs Kelvin-Körper die in Reihe geschaltet sind (Becker-Modell oder auch allgemeines Kelvin-Modell genannt) und eine Hooke'sche Feder, die sofortige elastische Verformungen repräsentiert (siehe Abb. 207). Dieses Modell dient *Toratti* als Berechnungsgrundlage für Simulationen mit Hilfe der Finite-Element-Methode. Dabei wird das Langzeitverhalten von biege- und druckbeanspruchten Bauteilen unter wechselnden klimatischen Bedingungen und wechselnder Belastung untersucht.



**Abb. 207:** Rheologisches Modell nach Toratti

Die Gesamtdehnung dieses Modells  $\mathcal{E}(t)$  setzt sich aus vier voneinander unabhängigen Teilen zusammen. Dabei entspricht  $\mathcal{E}_E$  der elastischen Verformung,  $\mathcal{E}_{visk}$  der viskosen Verformung in Folge

<sup>149</sup> Gressel, P. (1984/1). Zur Vorhersage des langfristigen Formänderungsverhalten aus Kurz-Kriechversuchen. Seite 295-298

<sup>150</sup> Schänzlin, J. (2003). Zum Langzeitverhalten von Brettstapel-Beton-Verbunddecken. Seite 21

Kriechen,  $\varepsilon_{ms}$  dem Kriechen in Folge wechselnder klimatischer Gegebenheiten (mechano-sorptive creep) und  $\varepsilon_u$  der Verformung hervorgerufen durch Quellen und Schwinden.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_E + \varepsilon_{visk} + \varepsilon_{ms} + \varepsilon_u \quad (5.47)$$

Die sofortige elastische Dehnung berechnet sich mit Hilfe der elastischen Nachgiebigkeit  $J_0(u)$  und der anliegenden Spannung  $\sigma$ . Die elastische Nachgiebigkeit wird durch den Kehrwert des feuchteabhängigen E-Moduls  $E_0(u)$  ausgedrückt, welcher über den E-Modul bei einer Holzfeuchte von 0% ermittelt werden kann. Toratti gibt in seiner Arbeit für Fichtenholz mit einer Holzfeuchte von 0% einen Wert von  $E_0 = 14000 \text{ MN/m}^2$  an.<sup>151</sup>

$$\varepsilon_E = \sigma \cdot J_0(u) = \sigma \cdot \frac{1}{E_0(u)} \quad (5.48)$$

$$E_0(u) = E_0 \cdot (1 - 1,06 \cdot u) \xrightarrow{\text{für Fichtenholz}} E_0(u) = 14000 \cdot (1 - 1,06 \cdot u) \quad (5.49)$$

Die gewöhnlichen Kriechdehnungen  $\varepsilon_{visk}$  ohne Berücksichtigung der veränderlichen Holzfeuchte werden durch die sechs in Reihe geschalteten Kelvin-Körper erfasst. Dabei wird von einem exponentiellen Verlauf der Kriechdehnungen ausgegangen, wobei aber unterschiedliche Retardationszeiten der Kelvin-Körper zugrunde gelegt werden.<sup>152</sup> Daraus ergibt sich folgende mathematische Beschreibung für die viskose Dehnung:

$$\varepsilon_{visk} = J_0(u_{ref}) \int_0^t \left\{ \sum_{n=1}^6 J_n \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t-t'}{\tau_n}} \right) \cdot \frac{d\sigma}{dt'} \right\} dt' \quad (5.50)$$

Die Retardationszeiten werden mit 0,01; 0,1; 1; 10; 100 und 5000 Tagen angegeben und die Referenzfeuchte mit  $u_{ref}=0,20$ . Durch Beschreibung des Dehnungsverlaufs mit Hilfe eines Potenzansatzes ergeben sich folgende Berechnungsparameter für die obige Formel:

$J_1 = 0,0686$	[-]	$\tau_1 = 0,01$	[Tage]
$J_2 = -0,0056$	[-]	$\tau_1 = 0,1$	[Tage]
$J_3 = 0,0716$	[-]	$\tau_1 = 1$	[Tage]
$J_4 = 0,0404$	[-]	$\tau_1 = 10$	[Tage]
$J_5 = 0,2073$	[-]	$\tau_1 = 100$	[Tage]
$J_6 = 0,5503$	[-]	$\tau_1 = 5000$	[Tage]

Der Dehnungsanteil in Folge wechselnder klimatischer Gegebenheiten kann durch verschiedene mathematische Ansätze berechnet werden. Dabei werden Modelle mit Erreichen einer Kriechgrenze oder ohne Erreichen einer Kriechgrenze differenziert, wobei unterschiedliche Funktionsverläufe mit konstanter oder wechselnder Steigung angesetzt werden können. Nähere Informationen zu den unterschiedlichen Berechnungsansätzen sind in [Toratti, 1992] zu finden. Hier soll als Beispiel die Formel mit Erreichen der Kriechgrenze angegeben werden.

<sup>151</sup> Toratti, T. (1992). *Creep of Timber in a variable Environment*. Seite 41

<sup>152</sup> Toratti, T. (1992). *Creep of Timber in a variable Environment*. Seite 35

$$\varepsilon_{ms}(t) = J^\infty \int_0^t \left\{ 1 - e^{-c \int_{t'}^t |du(t'')|} \right\} d\sigma(t') \quad (5.51)$$

mit

$$J^\infty = 0,7 \cdot J_0(u_{ref}) \quad (5.52)$$

$$c = 2,5$$

Die Dehnungen, die durch das Quellen und Schwinden des Holzes hervorgerufen werden, können mit folgender Formel berechnet werden:

$$\varepsilon_u(t) = \int_0^t \{\alpha - b \cdot \varepsilon(t')\} du(t') \quad (5.53)$$

$$b = 1,3$$

Der Schwind- bzw. Quelldehnungskoeffizient parallel zur Faser ergibt sich zu:<sup>153</sup>

$$\alpha = 6,25 \cdot 10^{-5} / u \text{ [%]} \quad (5.54)$$

Daraus ergibt sich in Summe die Gesamtdehnung des Modells in Abhängigkeit der wechselnden Holzfeuchte und Belastung zu:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_E + \varepsilon_{visk} + \varepsilon_{ms} + \varepsilon_u \quad (5.55)$$

$$\varepsilon(t) = \sigma \cdot J_0(u) + J_0(u_{ref}) \int_0^t \left\{ \sum_n J_n \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t-t'}{\tau_n}} \right) \cdot \frac{d\sigma}{dt'} \right\} dt' + J^\infty \int_0^t \left\{ 1 - e^{-c \int_{t'}^t |du(t'')|} \right\} d\sigma(t') + \int_0^t \{\alpha - b \cdot \varepsilon(t')\} du(t') \quad (5.56)$$

Das von *Toratti* verwendete rheologische Modell wurde von [Tong, 1994] genutzt, um Kriechversuche an biegebeanspruchten Vollholzquerschnitten unter wechselnder relativer Luftfeuchte zu überprüfen, wobei zufriedenstellende Ergebnisse erreicht werden konnten.

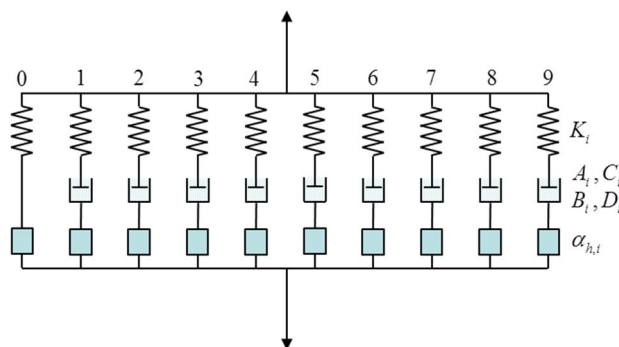


Abb. 208: Rheologisches Modell nach Hanhijärvi

Ein alternatives rheologisches Modell zu dem von [Toratti, 1992] wurde von [Hanhijärvi, 1995] auf Grundlage von [van der Put, 1989] erarbeitet. Hanhijärvi beschreibt wiederum das Langzeitverhalten von Holz unter Berücksichtigung klimatischer Einflüsse und der Variationen der Belastung. Sein Modell besteht aus zehn parallel angeordneten Maxwell-Körpern, welche jeweils um ein Quell- bzw. Schwinddehnungselement erweitert wurden.

<sup>153</sup> Toratti, T. (1992). *Creep of Timber in a variable Environment*. Seite 41

Um eine Kriechgrenze zu erreichen, wird die Dämpferkonstante des ersten Maxwell-Körpers zu unendlich gesetzt.

Dieses Modell wurde zur Ermittlung der Spannungen und Dehnungen innerhalb eines gekrümmten Balkenquerschnittes in einer Finiten-Element-Berechnung verwendet, welche direkt mit der Berechnung der Feuchteverteilung über den Querschnitt gekoppelt war. Die Ergebnisse der Berechnung zeigen eine gute Übereinstimmung mit experimentell ermittelten Ergebnissen.<sup>154</sup>

Die Dehnungsänderung des rheologischen Modells nach [Hanhijärvi, 1995], in Abhängigkeit der Zeit lässt sich bestimmen zu:

$$\dot{\varepsilon} = A_i \cdot \sinh[\phi_i \cdot \sigma_i + B_i \cdot \tanh(D_i \cdot \dot{h})] + \alpha \cdot \dot{h} \quad (5.57)$$

mit

$K_i$	Federsteifigkeit des Elementes $i$
$A_i, \phi_i$	Parameter zur Definition der Kriecheigenschaften des Modells
$B_i, D_i$	Parameter zur Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen Feuchte und Kriechen
$\alpha$	Quell- und Schwindmaß in Abhängigkeit des relativen Porendruck $h$
$\sigma_i$	Spannung im Element $i$ des rheologischen Modells
$\dot{h}$	zeitliche Änderung des relativen Porendrucks
$\dot{\varepsilon}$	zeitliche Dehnungsänderung

Die aktuellsten, gefundenen rheologischen Modelle stammen von [Grimsel, 1998]. Er stellt in seiner Arbeit drei unterschiedliche Modelle vor, von denen eines besonders gut geeignet ist, um mechano-sorptive Verformungen zu beschreiben. Das erste Modell entspricht einem erweiterten Kelvin-Modell, welches sehr ähnlich zu dem von [Reinhardt, 1973] vorgestellten Modell nach Pfefferle (siehe Abb. 209) ist. *Grimsel* verwendet jedoch einen linearen Dämpfer und berechnet sich aus Versuchen die entsprechenden Feder- und Dämpferkonstanten ( $E_0$ ,  $E_{vis}$ ,  $D_{vis}$ ). Die vollständige Gleichung einer Kriechkurve bei aufgebracht konstanter Spannung lautet:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{vis} = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma}{E_{vis}} \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{E_{vis}}{D_{vis}} \cdot t\right) \right) \quad (5.58)$$

Vergleiche der ermittelten Kriechkurve zu Versuchsergebnissen haben gezeigt, dass Abweichungen von maximal 28% auftreten. Eine optimierte Approximation durch einen nichtlinearen Optimierungsalgorithmus bringt kaum Verbesserungen (siehe Abb. 209).<sup>155</sup>

<sup>154</sup> Hanhijärvi, A. (1995). *Modeling of creep deformation mechanisms in wood*. Seite 3

<sup>155</sup> Grimsel, M. (1998). *Mechanisches Verhalten von Holz*. Seite 55



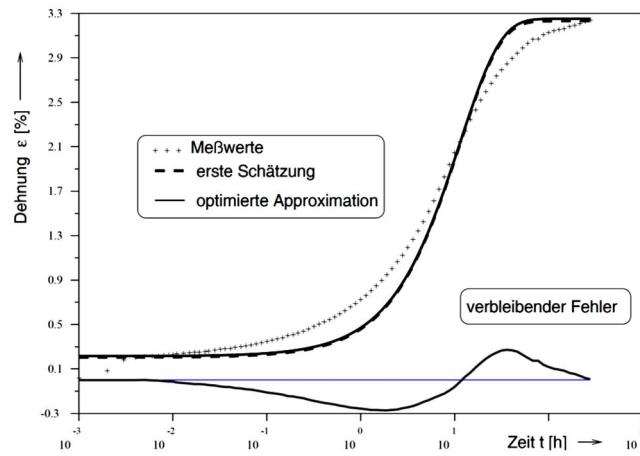
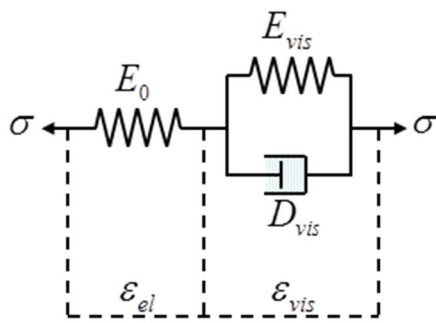


Abb. 209: Erstes rheologisches Modell nach Grimsel und Messwerte mit berechneten Kriechfunktionen [Grimsel, 1998]

Um das zweite Model zu erhalten, wird eine Kelvin-Einheit hinzugefügt (siehe Abb. 210, links). So wird das Element von fünf Parametern abhängig, welche aus durchgeführten Kriechversuchen ermittelt werden müssen.

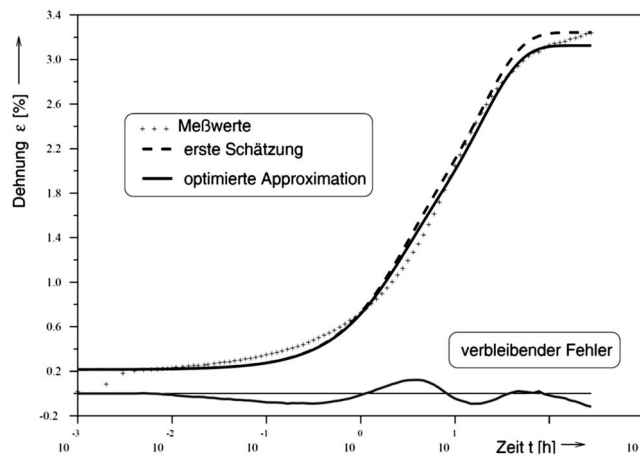
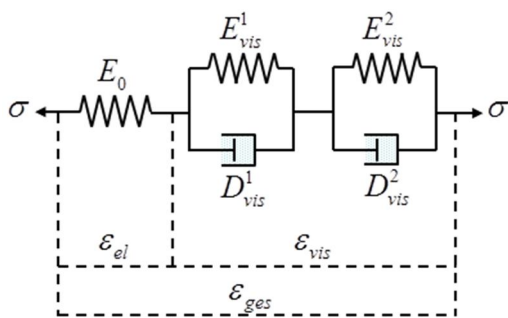


Abb. 210: Zweites rheologisches Modell nach Grimsel und Messwerte mit berechneten Kriechfunktionen [Grimsel, 1998]

Der E-Modul zur Beschreibung der sofortigen Verformungen  $E_0$ , wird aus dem Spannungs-Dehnungsdiagramm nach einer verstrichenen Zeit von fünf Sekunden bestimmt.

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_{(t=5\text{sec})}} \tag{5.59}$$

Die E-Module der Kelvin-Körper können nach folgendem Ansatz berechnet werden:

$$E_{vis}^{ges} = \frac{\sigma}{\varepsilon_{ges} - \varepsilon_{el}} \tag{5.60}$$

$$E_{vis}^1 = E_{vis}^{ges} \cdot e^1 \tag{5.61}$$

$$E_{vis}^2 = \frac{E_{vis}^{ges} \cdot E_{vis}^1}{E_{vis}^1 - E_{vis}^{ges}} \tag{5.62}$$

Die entsprechenden dynamischen Viskositäten der Dämpfer werden anhand der Zeitpunkte  $t_{25\%}$  und  $t_{75\%}$  gewählt, bei denen 1/4 bzw. 3/4 der auftretenden viskos-elastischen Dehnungen erreicht werden.<sup>156</sup>

$$D_{vis}^1 = E_{vis}^1 \cdot t_{25\%} \quad (5.63)$$

$$D_{vis}^2 = E_{vis}^2 \cdot t_{75\%} \quad (5.64)$$

Mit Hilfe der berechneten Parameter kann folglich die Gesamtdehnung zu jedem Zeitpunkt ermittelt werden:

$$\epsilon_{ges} = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma}{E_{vis}^1} \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{E_{vis}^1}{D_{vis}^1} \cdot t\right) \right) + \frac{\sigma}{E_{vis}^2} \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{E_{vis}^2}{D_{vis}^2} \cdot t\right) \right) \quad (5.65)$$

Unter Durchführung einer numerischen Optimierung dieser vier Parameter, können nach [Grimsel, 1998] Abweichungen zwischen gemessenen und berechneten Kriechkurven von weniger als 12% erreicht werden (siehe Abb. 210, rechts). Nachteil dieser Methode ist es, dass zuvor abgeschlossene Kriech- bzw. Relaxationsversuche bekannt sein müssen, um auf die entsprechenden Parameter zu schließen. Durch eine ausreichende Anzahl von Versuchen könnten jedoch Parameter bestimmt werden, die einem konstanten Klima und einer Holzsorte zugeordnet werden können.

Über die Zeit veränderliche Belastungen und Änderungen der klimatischen Gegebenheiten werden in den bis hier beschriebenen Modellen von Grimsel nicht berücksichtigt. Diese mechano-sorptiven Effekte können in einem weiteren von ihm vorgestellten System erfasst werden, welches speziell für die Holz Trocknung entworfen wurde (siehe Abb. 211). Anmerkung: Grimsel verwendet in seinen Ausführungen den Buchstaben „X“ zur Beschreibung der Holzfeuchte, dies soll für diesen Abschnitt so übernommen werden.

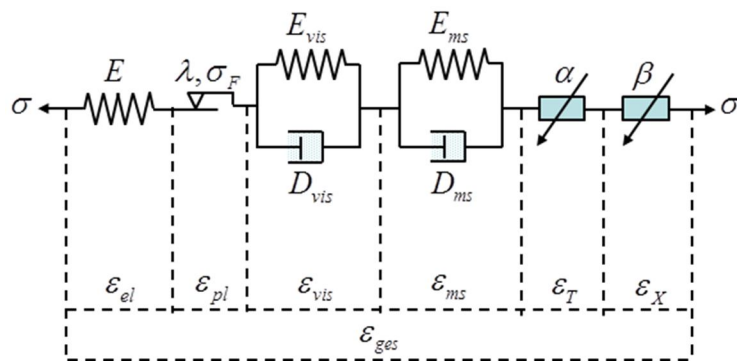


Abb. 211: Drittes rheologisches Modell nach Grimsel

Die Gesamtdehnung  $\epsilon_{ges} = \epsilon(t, T, X)$  ist eine Funktion der Zeit  $t$ , Temperatur  $T$  und Feuchte  $X$  und setzt sich zusammen aus einem elastischen Anteil  $\epsilon_{el}$ , einem plastischen  $\epsilon_{pl}$ , einem viskos-elastischen  $\epsilon_{vis}$  und einem mechano-sorptiven Anteil  $\epsilon_{ms}$ , sowie der thermischen Ausdehnung  $\epsilon_T$  und der feuchtebedingten Schwindung  $\epsilon_X$ .<sup>157</sup>

$$\epsilon_{ges} = \epsilon_{el} + \epsilon_{pl} + \epsilon_{vis} + \epsilon_{ms} + \epsilon_T + \epsilon_X \quad (5.66)$$

<sup>156</sup> Grimsel, M. (1998). *Mechanisches Verhalten von Holz*. Seite 57

<sup>157</sup> Grimsel, M. (1998). *Mechanisches Verhalten von Holz*. Seite 60

Die einzelnen Anteile können in folgender Form, unabhängig von einander dargestellt werden:

$$\varepsilon_{el} = \frac{\sigma(t)}{E_{el}(T, X)} \tag{5.67}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{pl}}{\partial t} = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma(t) < \sigma_F \\ \lambda \cdot \sigma & \text{für } \sigma(t) > \sigma_F \end{cases} \tag{5.68}$$

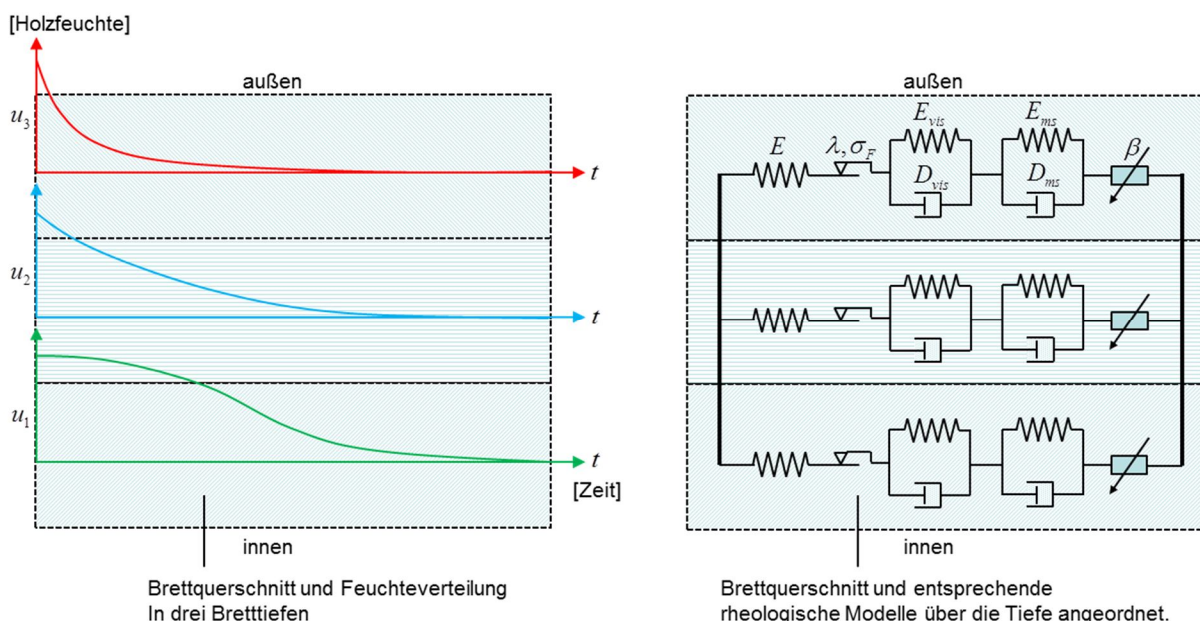
$$\frac{\partial \varepsilon_{vis}}{\partial t} = \frac{\sigma(t) - E_{vis}(T, X) \cdot \varepsilon_{vis}}{D_{vis}(T, X)} \tag{5.69}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ms}}{\partial X} = \frac{\sigma(t) - E_{ms}(T, X) \cdot \varepsilon_{ms}}{D_{ms}(T, X)} \tag{5.70}$$

$$\varepsilon_T = \alpha(T, X) \cdot (T - T_0) \tag{5.71}$$

$$\varepsilon_X = \beta(T, X) \cdot (X - X_0) \tag{5.72}$$

Dieses Modell wurde von *Grimsel* verwendet um den Eigenspannungszustand bei der technischen Trocknung von Buchenholz zu untersuchen. Dazu reduzierte er das Gesamtproblem auf ein eindimensionales System, indem unterschiedliche Brettstärken durch die Parallelschaltung von rheologischen Modellen abgebildet wurden (siehe Abb. 212). Der große Vorteil dieses Systems liegt darin, dass in jeder Tiefe in Abhängigkeit des entsprechenden Feuchteverlaufs die Dehnungsanteile getrennt berechnet werden können. In einer Sensitivitätsanalyse stellte er fest, dass eine Variation der Temperatur keinen Einfluss auf den Gesamtdehnungsverlauf hat. Weshalb das temperaturabhängige Element aus dem oben gezeigten rheologischen Modell entnommen werden konnte.



**Abb. 212:** Berechnung der Eigenspannungen bei der Trocknung von Buchenholz in Abhängigkeit des Feuchteverlaufs

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass in der Vergangenheit eine Reihe von rheologischen Modellen entwickelt wurden. Die praktische Handhabung vieler Modelle ist auf Grund Ihrer

Komplexität nicht immer gegeben, weshalb sie auch kaum Anwendung finden. Zu den effizientesten Modellen zählen jene nach *Eyring* und *Pfefferle*, da diese in ihrem Aufbau relativ einfach sind und durch das nichtlineare Dämpferelement das rheologische Verhalten des Holzes sehr gut beschreiben. Zudem sind für das Modell nach Pfefferle schon geschlossene Lösungen bekannt und Untersuchungen von *van der Put* haben gezeigt, dass das Modell von *Eyring* sehr gut geeignet ist Versuche nachzubilden. Leider fehlen zu den genannten Modellen ausreichend Versuchsdurchführungen um zuverlässige Prognosen der Kriech- und Relaxationskurven, für unterschiedliche Holzarten und Holzwerkstoffe zu geben.

Nachfolgend sind alle gefundenen rheologischen Modelle zum Beschreiben des Verhaltens von Holz in chronologischer Reihenfolge nochmals aufgeführt (siehe Abb. 213). Zudem werden Angaben zum Erscheinungsjahr und Autor des jeweiligen Modells gegeben.

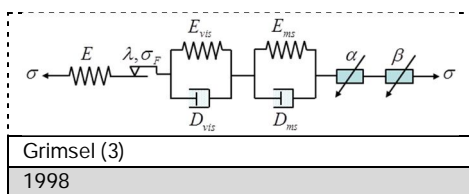
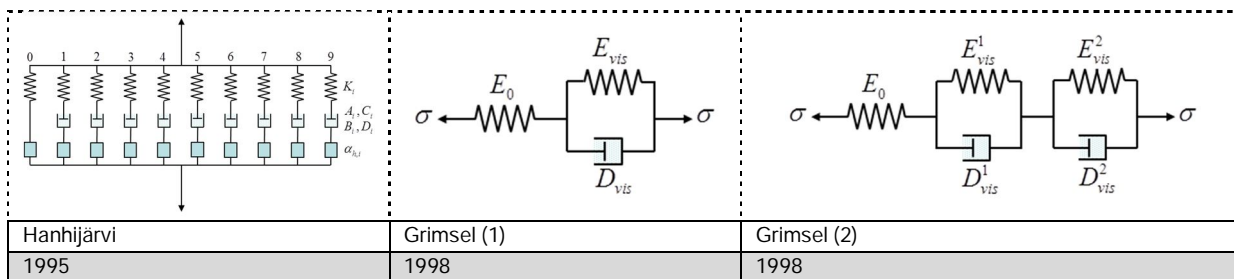
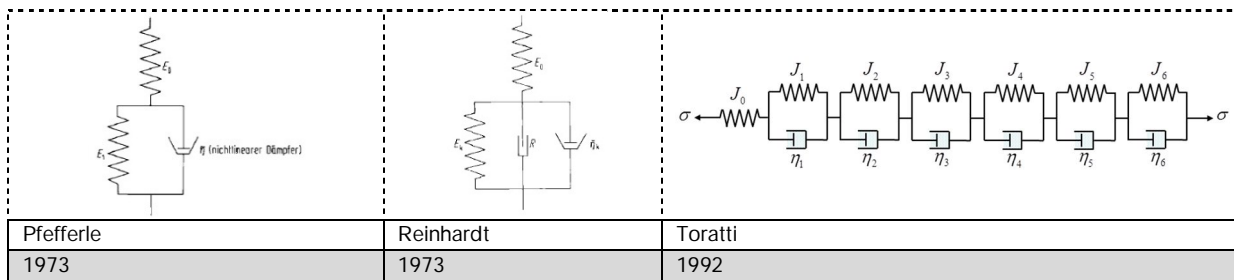
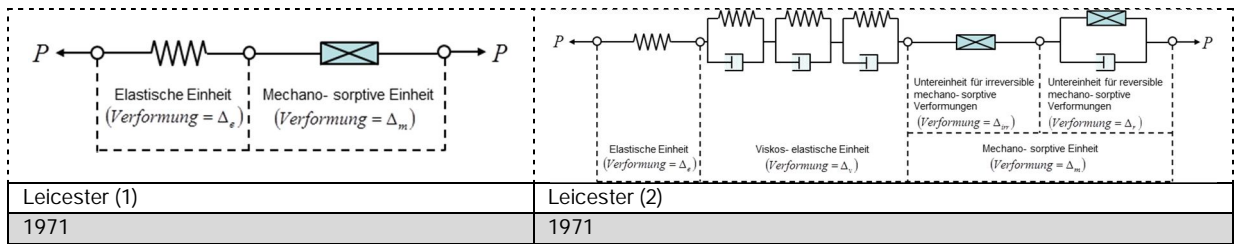
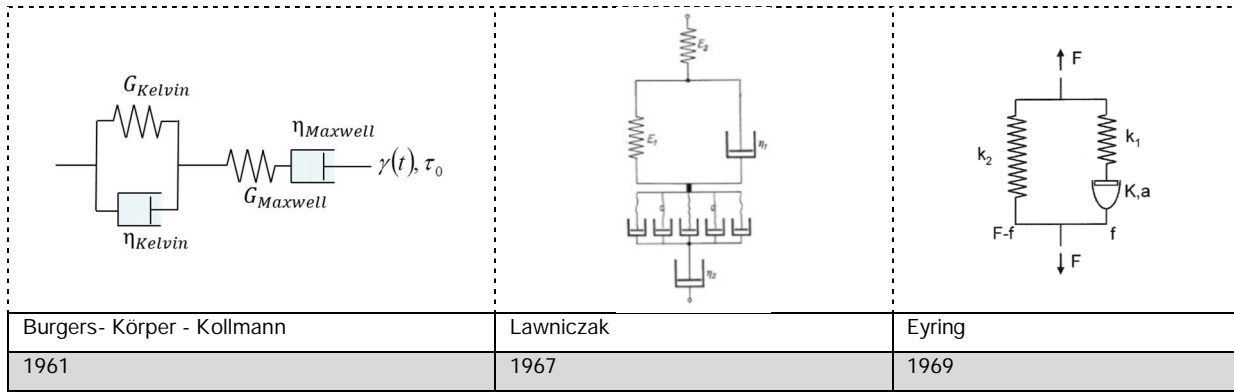


Abb. 213: Chronologische Zusammenstellung der gefundenen rheologischen Modelle

## 6 Experimentelle Untersuchungen zur Relaxation an Brettschichtholzträgern

### 6.1 Hintergrund

In den vorherigen Abschnitten wurden Versuchsergebnisse zur Relaxation diverser Autoren wiedergegeben. Es sind Untersuchungen zur Spannungsrelaxation bei Querdruck, Querkzug, Zug und Druck parallel zur Faser bekannt, aber nur wenige zur Spannungsrelaxation unter reiner Biegung. Zudem besitzen viele der in den Versuchen betrachteten Probekörper nur sehr geringe geometrische Ausdehnungen, deren Verhalten nicht zwingend auf große Bauteile übertragen werden kann. Die Untersuchungszeiträume sind vielfach sehr kurz gewählt und bewegen sich nur in einer Zeitspanne von wenigen Stunden bis einigen Monaten. Dadurch kann ausschließlich durch entsprechende Extrapolationen auf ein Spannungsniveau nach langer Zeit geschlossen werden. Zur Ermittlung der in der Baupraxis vorkommenden Spannungsrelaxation soll ein reales Bauteil gefunden und untersucht werden, dessen Alter und klimatische Lagerung bekannt sind.

### 6.2 Material und Prüfkörpereigenschaften

Der zu untersuchende Prüfkörper wurde am Lehrstuhl für Holzbau und Baukonstruktion der Technischen Universität München gefunden. Es handelt sich um einen rund 25 Jahre alten, sehr stark gekrümmten Brettschichtholzträger, der als Anschauungsexemplar seit jeher vor den Lehrstuhlräumlichkeiten ausgestellt wird (siehe Abb. 214). Der Träger wurde über den gesamten Zeitraum im Innenraumklima (Nutzungsklasse 1) gelagert und besitzt einen Holzschutzanstrich. Für die nachfolgenden Untersuchungen wurde der Brettschichtholzträger vermessen und in digitalisierter Form dargestellt (siehe Abb. 215). Die Gesamtlänge des Trägers beträgt 2,70 Meter. Der mittlere Krümmungsradius der obersten Lamelle konnte zu 2,00 Metern und der untersten Lamelle zu 1,50 Metern bestimmt werden.

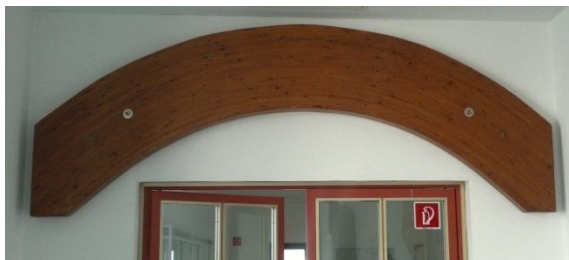


Abb. 214: Gekrümmter Brettschichtholzträger

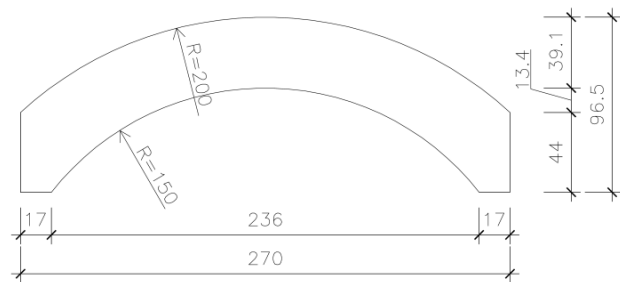


Abb. 215: Grafische Darstellung des untersuchten Trägers

Der Brettschichtholzträger besteht aus 10 mm starken Fichtenholzlamellen, die eine Breite von 9,0 Zentimetern besitzen. Es wird vermutet, dass die Lamellen auf Grund der rötlich, dunkelbraunen Klebefuge durch einen Phenol-Resorcinharz (PRF) miteinander verklebt wurden.

### 6.3 Versuchsdurchführung

Um ein Maß für den Abbau der durch die Fertigung induzierten Eigenspannungen zu erhalten, wurden die beiden obersten Lamellen des Trägers mit Hilfe einer Handbandsäge aus dem Verbund gelöst. Vor dem Heraustrennen der jeweiligen Lamelle wurde alle 10 Zentimeter die senkrechte Strecke zwischen einer angebrachten Richtlatte und der Oberkante der entsprechenden Lamelle gemessen (siehe Abb. 216). Bereits beim Lösen der ersten Lamelle war nach einem relativ kurzen Schnitt eine klare Rückverformung zu erkennen (siehe Abb. 218). Durch die Ungenauigkeiten beim Heraustrennen der Lamellen blieben immer wieder Teile der Nachbarlamellen und Reste der Klebefuge an der zu



untersuchenden Lamelle zurück. Um einen negativen Einfluss, vor allem einen Sperreffekt dieser Bereiche zu vermeiden, wurden die Lamellen anschließend vorsichtig geschliffen.



Abb. 216: Richtlatte zur Vermessung



Abb. 217: Handbandsäge



Abb. 218: Lösen der Lamelle

Nach diesen Prozeduren konnte wiederum alle 10 Zentimeter die Entfernung zwischen Richtlatte und Oberkante der gelösten Lamelle bestimmt werden.

#### 6.4 Versuchsauswertung

Die aufgenommenen Messpunkte wurden mit der Software „Maple 15“, unter Verwendung einer nicht linearen Ausgleichsrechnung und Kombination zweier Sinuswellen mit unterschiedlicher Amplitude angenähert (siehe Gleichung (6.1) und Tabelle 5). Das Ergebnis der nicht linearen Ausgleichsrechnung ist in Abb. 219 und Abb. 220 grafisch dargestellt.

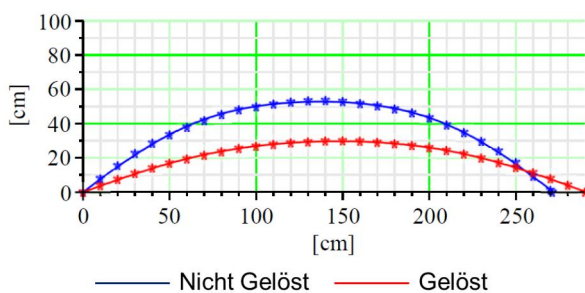


Abb. 219: Erste Lamelle vor und nach dem Lösen

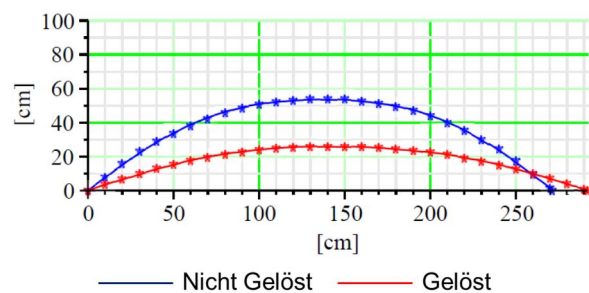


Abb. 220: Zweite Lamelle vor und nach dem Lösen

$$y(x) = a \cdot \sin\left(\frac{b \cdot \pi \cdot x}{L}\right) + c \cdot \sin\left(\frac{d \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \quad (6.1)$$

	Erste Lamelle		Zweite Lamelle	
	ungelöst	gelöst	ungelöst	gelöst
<i>a</i>	56,1056	30,8210	56,6770	27,1405
<i>b</i>	0,9949	0,9940	0,9941	1,0058
<i>c</i>	3,1332	1,0689	3,0904	1,2707
<i>d</i>	3,0005	3,0530	3,0103	2,8818
<i>L</i>	271,0000	289,9019	271,1000	292,2005

Tabelle 5: Parameter der Ausgleichsfunktion in [cm]

Um eine Vergleichbarkeit der Krümmungen in den beiden Zuständen (gelöst und ungelöst) zu erhalten, müssen die Funktionen entlang Ihrer Bogenlänge parametrisiert werden. Dies kann mit

Gleichung (6.2) erfolgen. Der Ursprung des Koordinatensystems wird dazu in den Anfangspunkt der Lamellen gelegt (siehe Abb. 221).

$$s(x) = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + \left| \frac{\partial y(x)}{\partial x} \right|^2} dx \quad (6.2)$$

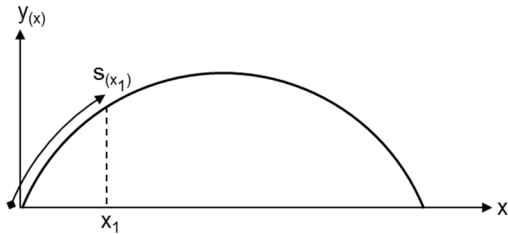


Abb. 221: Funktionslänge am Bogen

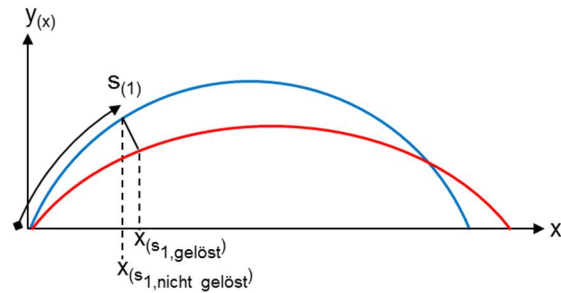


Abb. 222: x-Koordinate in Abhängigkeit der Bogenlänge

Die Lösung des Integrals (siehe Gleichung (6.2)) ist auf analytischem Wege nicht möglich, weshalb auf ein numerisches Lösungsverfahren zurückgegriffen wurde. Die numerische Lösung führt zur Darstellung der Funktionslänge entlang der x-Koordinate (siehe Abb. 223 und Abb. 224). Somit können die Koordinaten eines Punktes auf der gelösten und ungelösten Lamelle bei gleicher zurückgelegter Funktionslänge miteinander verglichen werden (siehe auch Abb. 222).

Die Gesamtlänge S der Lamellen konnte zudem wie folgt berechnet werden:

	Erste Lamelle		Zweite Lamelle	
	ungelöst	gelöst	ungelöst	gelöst
S	297,6177	297,8157	298,1960	298,3658

Tabelle 6: Länge der Lamellen in [cm]

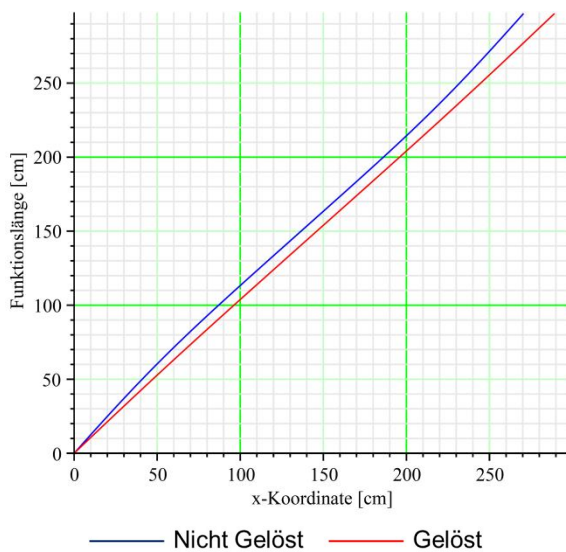


Abb. 223: Funktionslänge der ersten Lamelle in Abhängigkeit der x-Koordinate

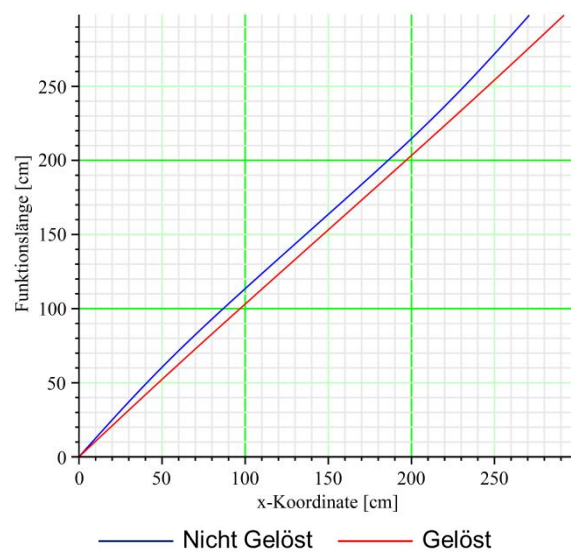


Abb. 224: Funktionslänge der zweiten Lamelle in Abhängigkeit der x-Koordinate

Aus Tabelle 6 ist zu erkennen, dass sich die Längen der Lamellen im gelösten und ungelösten Zustand um 2 mm unterscheiden. Dies entspricht einer Übereinstimmung von 99,93% und lässt auf eine ausreichende Berechnungsgenauigkeit für den hier betrachteten Fall schließen. Im nächsten Schritt kann die Krümmung der jeweiligen Funktion mit Gleichung (6.3) bestimmt werden. Dazu wird die Koordinate  $x$  in Abhängigkeit der Funktionslänge  $s$  ausgedrückt.

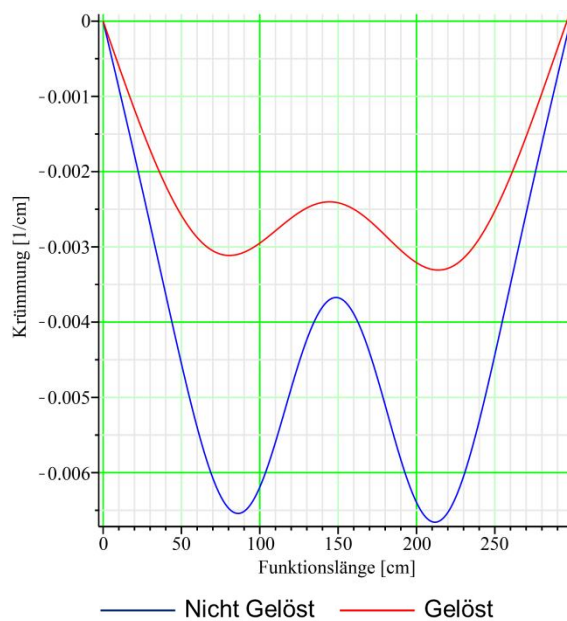
$$\kappa(s) = \frac{1}{R(s)} = \frac{y''(x_s)}{\sqrt{(1 + y'(x_s)^2)^3}} \quad (6.3)$$

$\kappa(s)$  ... Krümmung am Punkt  $s$

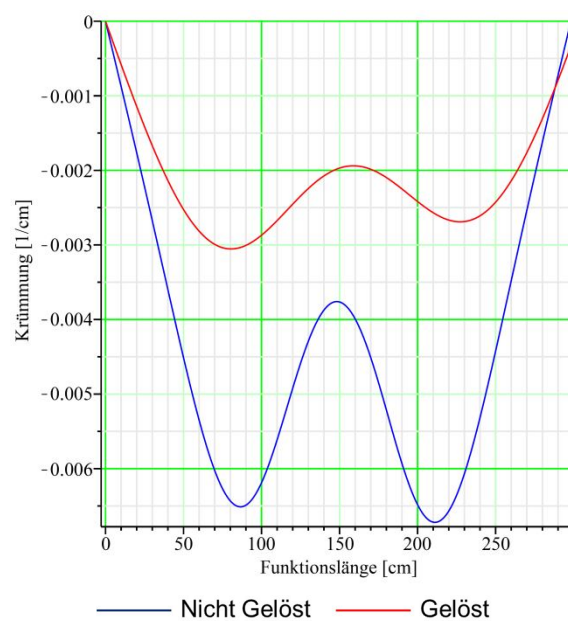
$R(s)$  ... Krümmungsradius am Punkt  $s$

$y(x_s)$  ... Funktion in Abhängigkeit von  $x$ , wobei  $x$  über die Bogenlänge parametrisiert wurde

Als Ergebnis konnten die in Abb. 225 und Abb. 226 gegebenen Krümmungsverläufe entlang der Funktionslänge der Lamellen ermittelt werden.



**Abb. 225:** Krümmung der ersten Lamelle über die Funktionslänge



**Abb. 226:** Krümmung der zweiten Lamelle über die Funktionslänge

Es ist zu erkennen dass sich die Krümmung nach dem Lösen wesentlich verringert. Eine Ausnahme bildet der rechte Randbereich der zweiten Lamelle (siehe Abb. 226), wo nach dem Lösen eine größere Krümmung auftritt als zuvor. Dieser Effekt ist auf die Ansatzfunktion zurückzuführen, welche verwendet wurde um die nicht lineare Ausgleichsrechnung durchzuführen. Mit einem Polynomansatz dritten Grades würde diese Unstimmigkeit entfallen, es würde aber ein Längenunterschied von rund einem Zentimeter zwischen gelöster und ungelöster Lamelle auftreten. Es fällt in den obenstehenden Grafiken auf, dass die Krümmung zu den Lamellenenden hin abnimmt, was einer Erhöhung des Krümmungsradius entspricht. Dies deckt sich mit Aussagen von [Szalai, 1986]. Auch er hat in seinen Untersuchungen festgestellt, dass bei der Herstellung von Brettschichtholzträger die Randbereiche, eine Krümmungsänderung erfahren. [Szalai, 1986] gibt an, dass es in Randbereichen von gekrümmten Trägern zu Störbereichen in Folge des Zurückfederns nach dem Lösen aus der

Schablone kommt. Seiner Meinung nach ist somit eine mathematische Beschreibung der Geometrie nicht ohne weiteres möglich.

Aus den erhaltenen Krümmungsverläufen kann, unter Annahme des eben bleiben der Querschnitte, auf ein Maß der Spannungsrelaxation geschlossen werden. Es wird angenommen, dass die Lamellen vor der Herstellung des Brettschichtholzträgers ideal gerade und spannungslos waren. Die betrachteten Holzlamellen wurden zum Zeitpunkt  $t=0$  gekrümmt (siehe Abb. 227). In Folge dieser Krümmung sind hohe Biegeendspannungen  $\sigma_{t=0}$  entstanden, die sich durch das Aufatmen des Brettschichtholzträgers, nach dem Lösen aus der Schablone, und durch Relaxationsprozesse im Laufe der Zeit abgebaut haben. Die Relaxationsvorgänge in den Lamellen wurden durch den Feuchteintrag des Klebers bei der Herstellung und durch klimatische Schwankungen während der 25 jährigen Lagerung beeinflusst. Kurz vor dem Lösen aus dem Verbund ist eine Restspannung von  $\sigma_{t=25a}$  vorhanden. Es wird angenommen, dass es sich um eine linear verteilte Spannung handelt, welche nach dem Lösen aus dem Verbund, zu einem Aufatmen der Lamellen und zu einer Änderung der Krümmung führt.

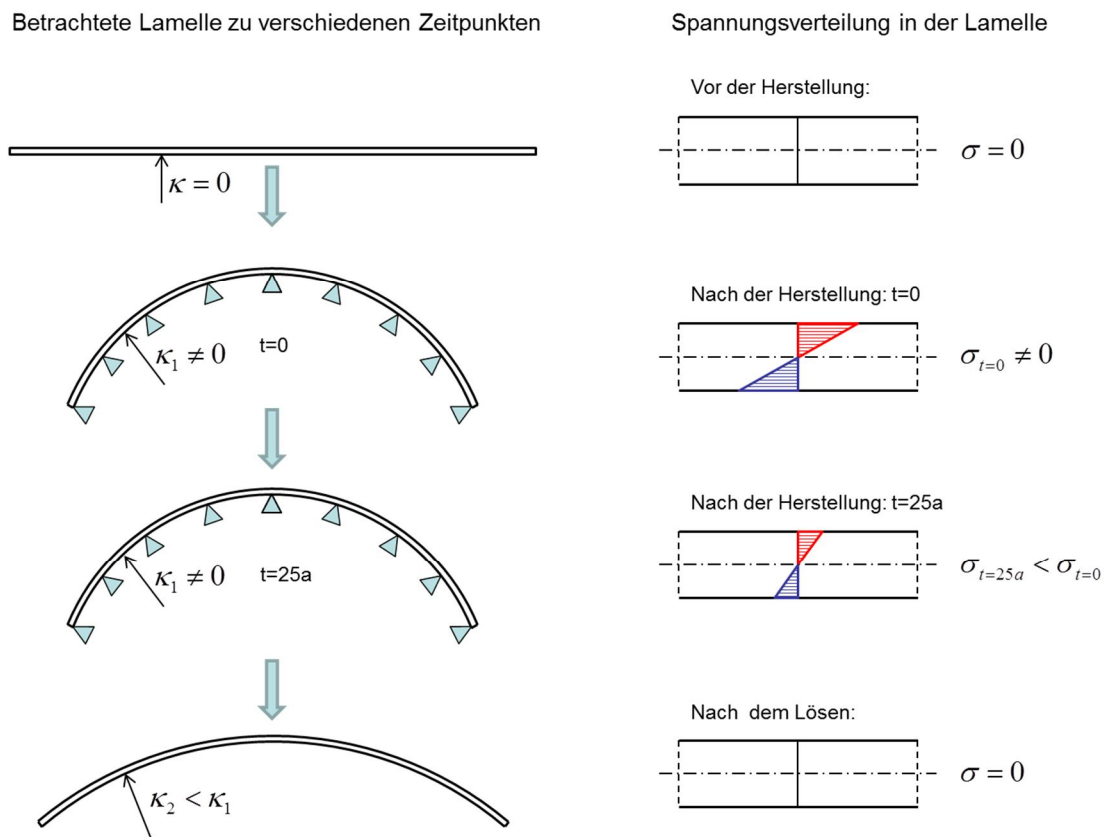


Abb. 227: Zeitliche Entwicklung der Spannungsverteilung in einer nicht gehaltenen, gehaltenen und gelösten Holzlamelle

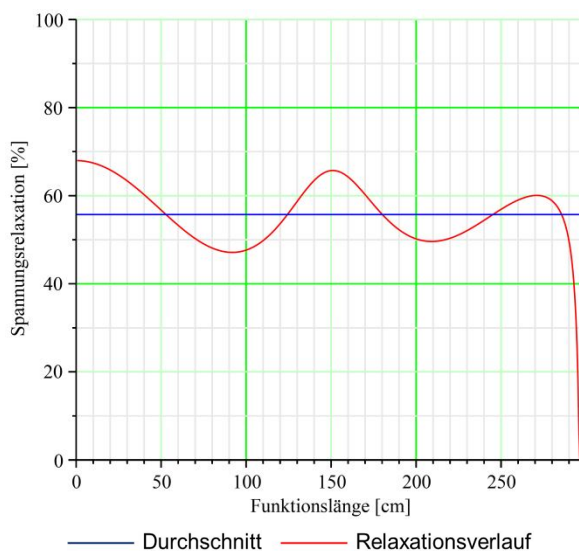
Die Differenz der Krümmung vor und nach dem Lösen gibt Auskunft über die verbliebene bzw. gespeicherte Restspannung  $\sigma_{t=25a}$ . Es wird davon ausgegangen, dass sich über den betrachteten Zeitraum der E-Modul und der Querschnitt der Lamelle nicht geändert haben. Wird die Restspannung  $\sigma_{t=25a}$  mit dem Ausgangswert der Spannung  $\sigma_{t=0}$  ins Verhältnis gesetzt, so kann ein prozentualer Anteil für die Restspannung  $\vartheta$  ermittelt werden.

$$\mathcal{G} = \frac{\sigma_{t=25a}}{\sigma_{t=0}} \cdot 100\% = \frac{|\Delta\kappa| \cdot E \cdot \frac{d_2}{2}}{|\kappa_1| \cdot E \cdot \frac{d_2}{2}} \cdot 100\% = \frac{|\kappa_1 - \kappa_2|}{|\kappa_1|} \cdot 100\% \quad (6.4)$$

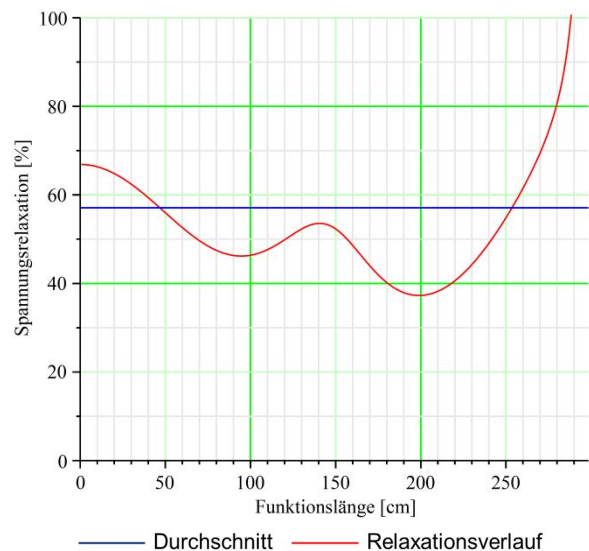
Aus diesem Wert ermittelt sich die Spannungsrelaxation  $\chi$  bzw. der Spannungsabbau wie folgt:

$$\chi = 100\% - \mathcal{G} = \left( 1 - \frac{|\kappa_1 - \kappa_2|}{|\kappa_1|} \right) \cdot 100\% \quad (6.5)$$

Für die beiden betrachteten Lamellen wurde Gleichung (6.5) entlang der Funktionslänge ausgewertet. Das Ergebnis dieser Berechnung ist in Abb. 228 bzw. Abb. 229 gegeben.



**Abb. 228:** Relaxationsverlauf über die Funktionslänge für die erste Lamelle



**Abb. 229:** Relaxationsverlauf über die Funktionslänge für die zweite Lamelle

Die Berechnungsergebnisse zeigen, dass ein sehr hoher Spannungsabbau über den betrachteten Zeitraum stattgefunden hat. In den Randbereichen der Lamellen streben die Werte teilweise gegen null bzw. hundert Prozent. Dieses Ergebnis ist auf die Wahl der Ansatzfunktion der nicht linearen Ausgleichsrechnung zurückzuführen. Im Mittel liegt die Spannungsrelaxation für die erste Lamelle bei rund 56% und für die zweite Lamelle bei rund 57%. Diese Werte decken sich gut mit den Angaben von [Čížek, 1961], der eine Spannungsrelaxation von rund 50 % in Brettschichtholzträgern angibt. Ein Nachkriechen wie es in [Perkitny, et al., 1976] beschrieben wurde konnte nicht festgestellt werden. Vermutlich da das saubere Lösen der Lamellen aus dem Verbund, eine zu lange Zeit in Anspruch genommen hatte.

## 6.5 Weiterführende Betrachtungen

Um das Verhalten der Lamellen nach dem Lösen aus dem Verbund zu untersuchen wurden diese für einen Zeitraum von einem Jahr beobachtet. Die Lagerung erfolgte im Innenraumklima (Büroraum) mit sehr ähnlichen klimatischen Bedingungen wie sie noch im Verbund vorherrschten. Bei der Lagerung wurde darauf geachtet, dass sich beide Lamellen unbehindert verformen können. Dazu wurden sie an dünnen Bindfäden aufgehängt und eine Seite der Lamellen an einer Wand gestoßen, wodurch ein Festpunkt definiert werden konnte (siehe Abb. 230).





Abb. 230: Lagerung der Lamellen im Büroraum und Lagerungsbedingungen an der Wand (Festpunkt)

Am freien Ende der Lamelle wurde jeweils ein Lot angebracht. Mit Hilfe dieses Lotes konnten an einem darunter befindlichen Blatt Papier die aktuelle Position der freien Enden aufgezeichnet werden. Gleichzeitig mit der Erfassung der aktuellen Lage der Lamellenenden wurden die relative Luftfeuchte und die Raumtemperatur aufgezeichnet. So konnten Verformungen in Folge wechselnder klimatischer Umgebungsbedingungen erfasst und untersucht werden (siehe Abb. 231 bis Abb. 233).

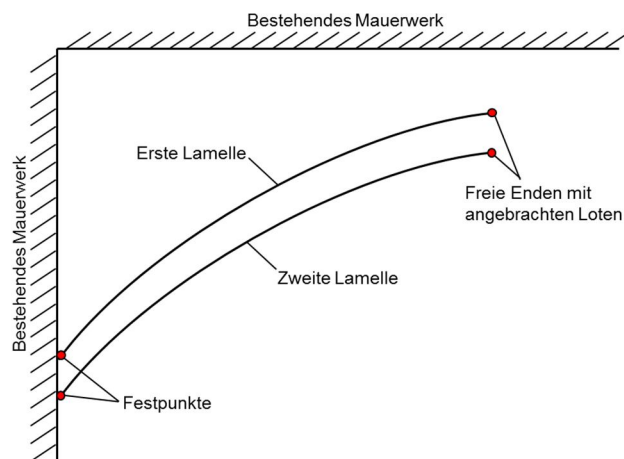


Abb. 231: Grundrissdarstellung der Lamellen im Büroraum

Abb. 232: Betrachtung der Zugseite der beiden Lamellen

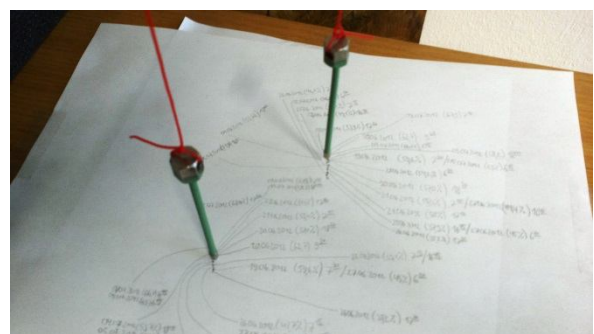
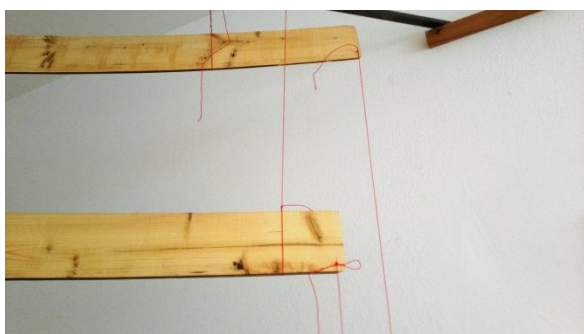


Abb. 233: Befestigung des Lotes am freien Ende und Aufzeichnung der Position und klimatischen Bedingungen am Papier

Es zeigte sich, dass die Lamellen auf eine Änderung der Umgebungsbedingung reagieren. Schnelle Änderungen der relativen Luftfeuchte verursachen ein Aufatmen bzw. Zusammenziehen der Lamellen. Langsame Änderungen der relativen Luftfeuchte führen hingegen zu kaum erkennbaren Verformungen. Jene Lamelle die im Verbund an der Außenseite des Brett-schichtholzträgers angebracht war, wies ein aktiveres Verhalten gegenüber Feuchteänderungen auf. Das kann vermutlich am Holzschutzanstrich an der Zugseite der Lamelle liegen, der die Feuchteaufnahme bzw.



Abgabe verzögert und somit im Verhältnis zur Innenseite sehr träge auf eine Änderung der relativen Luftfeuchte reagiert. Ein schneller Anstieg der relativen Luftfeuchte führte zum Aufatmen der Lamelle, wobei bei länger anhaltenden Feuchteperioden die Krümmung wieder zunahm. Da ein annähernd gleiches Verhalten an der zweiten Lamelle zu erkennen war, lässt sich die Vermutung anstellen, dass gestauchte Fasern schneller Feuchtigkeit aufnehmen als gezogene, beziehungsweise druckbeanspruchte Fasern stärker auf Änderungen der relativen Luftfeuchte reagieren, als zugbeanspruchte. Dies würde sich mit Aussagen von [Stevens & Turner, 1970] decken. Stevens und Turner berichten, dass durch die Krümmung eines Holzwerkstückes, die Dichte im Druckbereich erhöht wird. Dazu kommt ein stärkeres Quell- und Schwindverhalten bei Steigerung der Dichte.

Am freien Lamellenende konnte ein maximal zurückgelegter Weg von rund 2,0 cm aufgezeichnet werden (siehe Abb. 234). Wird von einem konstanten Krümmungsradius zu jedem Zeitpunkt ausgegangen, so kann über den zurückgelegten Weg eine maximale Sehnenlänge  $L_1$  bzw.  $L_2$  des Kreisbogens und entsprechend eine Krümmungsänderung berechnet werden. Der Maximal- bzw. Minimalwert der aufgezeichneten relativen Luftfeuchte beträgt dabei 35,2 % bzw. 67,5 %.

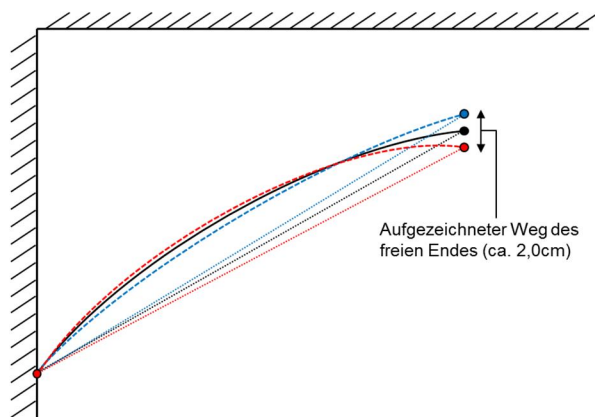


Abb. 234: Verformung einer Lamelle im Grundriss

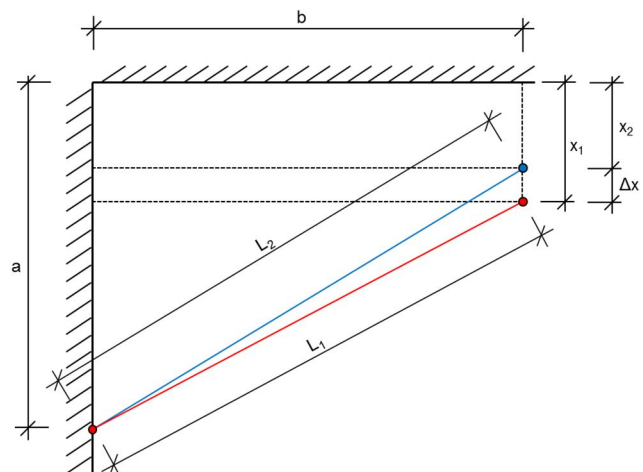


Abb. 235: Kinematik des freien Lamellenendes

Alle zur Berechnung notwendigen, gemessenen Werte, sind in nachfolgender Tabelle gegeben. Die zu Tabelle 7 gehörenden geometrischen Bezeichnungen sind Abb. 235 und Abb. 236 zu entnehmen.

Messwerte	Erste Lamelle	Zweite Lamelle
a	2,340 m	2,456 m
b	2,027 m	1,998 m
$x_2$ (bei 67,5% rel. Luftfeuchte)	0,251 m	0,319 m
$\Delta x$ (bei 35,2% rel. Luftfeuchte)	0,020 m	0,013 m
s	2,978 m	2,984 m
d	0,010 m	0,010 m

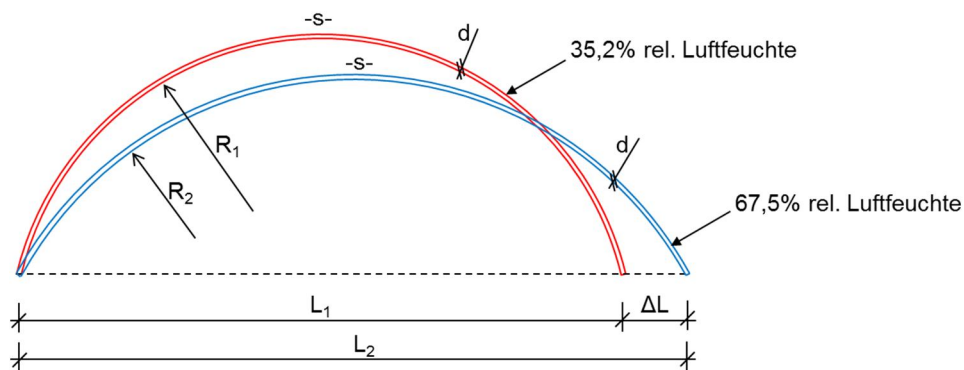
Tabelle 7: Messwerte der untersuchten Lamellen

Die Sehnenlängen in Abhängigkeit der relativen Luftfeuchte ergeben sich zu:

Berechnete Werte	Erste Lamelle	Zweite Lamelle
$L_1$ (bei 35,2% rel. Luftfeuchte)	2,896 m	2,916 m
$L_2$ (bei 67,5% rel. Luftfeuchte)	2,911 m	2,925 m
$\Delta L$	0,015 m	0,009 m

**Tabelle 8:** Berechnete Sehnenlängen in Abhängigkeit der relativen Luftfeuchte

Es ist zu sehen, dass die Sehne der ersten Lamelle in Folge der schwankenden Luftfeuchtigkeit um rund 1,5 Zentimeter länger bzw. kürzer wird. Bei der zweiten Lamelle liegt die Sehnenlängenänderung bei rund 0,9 Zentimeter. Der Unterschied ist wie bereits erwähnt, vermutlich auf den Holzschutzanstrich auf der Außenseite der ersten Lamelle zurückzuführen. Von großem Interesse ist noch die Änderung des Krümmungsradius bzw. der Krümmung. Da nur zwei Punkte des Kreisbogens bekannt sind wird von einem konstanten Krümmungsradius  $R$  in jedem Zustand und einer gleichbleibenden Bogenlänge  $s$  (siehe Tabelle 7) ausgegangen. Exemplarisch ist die Formänderung in Abhängigkeit der relativen Luftfeuchtigkeit in nachfolgender Abbildung gegeben.



**Abb. 236:** Exemplarische Darstellung der Verformung einer Lamelle in Abhängigkeit der rel. Luftfeuchte

Aus den gegebenen Werten kann der Radius und die Krümmung für beide Lamellen bei entsprechender relativer Luftfeuchtigkeit berechnet werden. Die Ergebnisse sind nachfolgender Tabelle 9 zu entnehmen:

Berechnete Werte	Erste Lamelle	Zweite Lamelle
$R_1$ (bei 35,2% rel. Luftfeuchte)	3,648 m	4,021 m
$R_2$ (bei 67,5% rel. Luftfeuchte)	4,039 m	4,319 m
$\Delta R = R_2 - R_1$	0,391 m	0,298 m
$\kappa_1 = 1/R_1$	0,274 1/m	0,249 1/m
$\kappa_2 = 1/R_2$	0,247 1/m	0,231 1/m

**Tabelle 9:** Krümmungsradius und Krümmung der untersuchten Lamellen

Aus den Ergebnissen ist zu erkennen, dass der Krümmungsradius in Abhängigkeit der relativen Luftfeuchtigkeit um rund 30 bzw. 40 Zentimeter schwankt. Aus diesem Grund, kann die Spannungsrelaxation in den betrachteten Lamellen nur näherungsweise angegeben werden. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass das saubere Lösen der Lamellen, einige Zeit in Anspruch genommen hat und die relative Luftfeuchtigkeit bzw. Holzfeuchtigkeit während dieses Prozesses nicht

aufgezeichnet wurde. Es war zur Zeit des Heraustrennens auch nicht bekannt, dass eine Schwankung der relativen Luftfeuchtigkeit einen solchen Einfluss haben würde.

Die Werte der Relaxation können für beide Lamellen wie folgt berechnet werden. Dabei wird bei der ersten Lamelle von einem Krümmungsradius von 2,00 Metern und bei der zweiten Lamelle von 1,99 Metern im Brettschichtholzverbund ausgegangen.

$$\begin{array}{l} \text{Erste Lamelle} \\ \text{(bei 35,2\% rel. Luftfeuchte):} \end{array} \quad \chi_{35,2\%} = \left( 1 - \frac{\left| \frac{1}{2,00} - \kappa_1 \right|}{\frac{1}{2,00}} \right) \cdot 100\% = 55\% \quad (6.6)$$

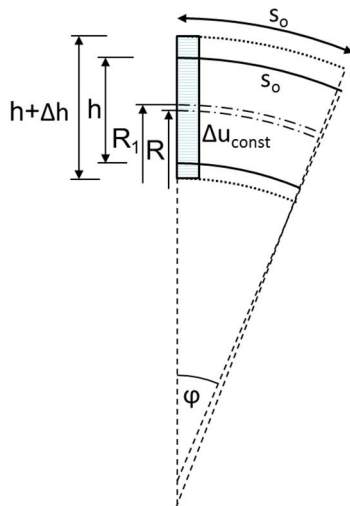
$$\begin{array}{l} \text{Erste Lamelle} \\ \text{(bei 67,5\% rel. Luftfeuchte):} \end{array} \quad \chi_{67,5\%} = \left( 1 - \frac{\left| \frac{1}{2,00} - \kappa_2 \right|}{\frac{1}{2,00}} \right) \cdot 100\% = 49\% \quad (6.7)$$

$$\begin{array}{l} \text{Zweite Lamelle} \\ \text{(bei 35,2\% rel. Luftfeuchte):} \end{array} \quad \chi_{35,2\%} = \left( 1 - \frac{\left| \frac{1}{1,99} - \kappa_1 \right|}{\frac{1}{1,99}} \right) \cdot 100\% = 49\% \quad (6.8)$$

$$\begin{array}{l} \text{Zweite Lamelle} \\ \text{(bei 67,5\% rel. Luftfeuchte):} \end{array} \quad \chi_{67,5\%} = \left( 1 - \frac{\left| \frac{1}{1,99} - \kappa_2 \right|}{\frac{1}{1,99}} \right) \cdot 100\% = 46\% \quad (6.9)$$

Es ist zu sehen, dass sich die Spannungsrelaxation in einem Bereich von 46÷55 % bewegt. Dabei ist zu beachten, dass diese Werte an den freigeschnittenen Lamellen ermittelt wurden, welche an allen vier Seiten luftumströmt waren. Im Brettschichtholzverbund sind nur die beiden Schmalseiten, mit Ausnahme der Decklamelle, den direkten klimatischen Schwankungen unterworfen und es können somit keine Verformungen dieser Größenordnung hervorgerufen werden.

Das Verformungsverhalten von Holz ist vom Quell- und Schwindverhalten in radialer, tangentialer und longitudinaler Richtung abhängig. Diese feuchteabhängigen Änderungen haben einen direkten Einfluss auf den Krümmungsradius gebogener Holzbauteile, von denen das Quellen bzw. Schwinden in radialer und longitudinaler Richtung näher betrachtet werden soll. Durch das Quellen bzw. Schwinden in radialer Richtung verändert sich die Querschnittshöhe  $h$  und gleichzeitig der Krümmungsradius  $R$  (siehe Abb. 237). Eine entsprechende Berechnung des geänderten Krümmungsradius  $R_1$  kann wie folgt geschehen:



Quellen:  $R_1 = R \cdot (1 + \alpha_R \cdot |\Delta u_{const}|)$  (6.10)

Schwinden:  $R_1 = R \cdot (1 - \alpha_R \cdot |\Delta u_{const}|)$  (6.11)

$\Delta u_{const}$  beschreibt eine über die Querschnittshöhe  $h$  konstante Holzfeuchteänderung, welche auf Grund des radialen Quell- und Schwindmaßes  $\alpha_R$  eine Änderung der Querschnittshöhe  $\Delta h = h \cdot \alpha_R \cdot \Delta u_{const}$  hervorruft. Dadurch wird unter Annahme einer konstant bleibenden Länge  $s_0$  eine Änderung des Krümmungsradius  $R$  erzeugt, welche zum Radius  $R_1 = R + \Delta R$  führt.

Abb. 237: Quellen in radialer Richtung

Wird von einem Quell- bzw. Schwindmaß  $\alpha_R = 0,24 \%$  je Prozent Feuchteänderung ausgegangen, so kann die Änderung des Krümmungsradius  $\Delta R$  dem ursprünglichen Radius  $R$  gegenübergestellt werden. Daraus ergibt sich folgende Abbildung.

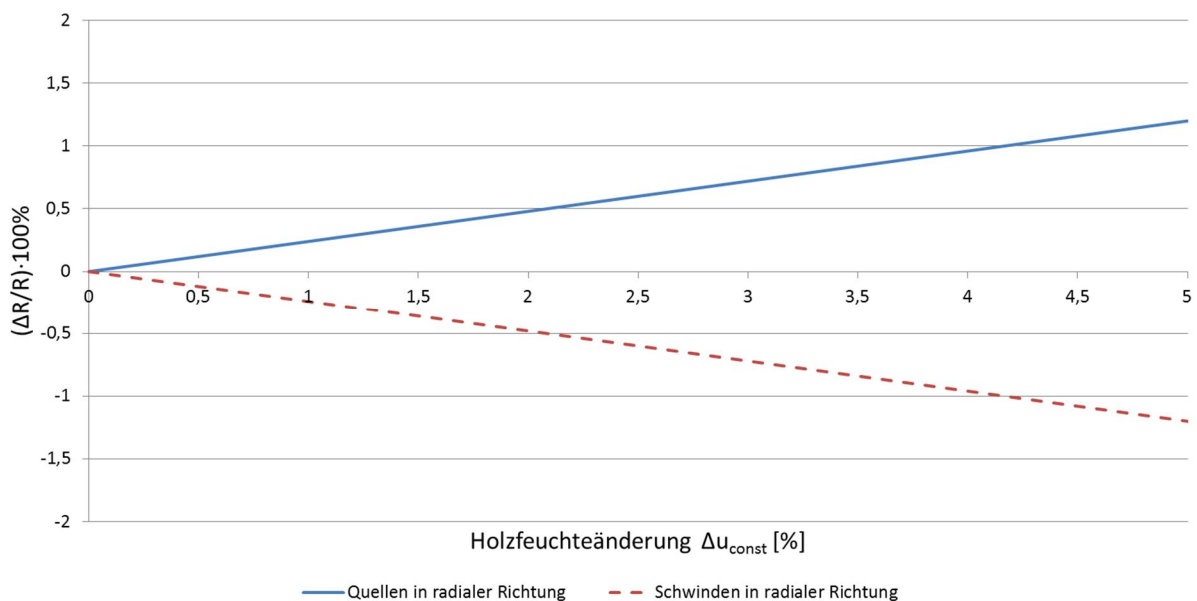
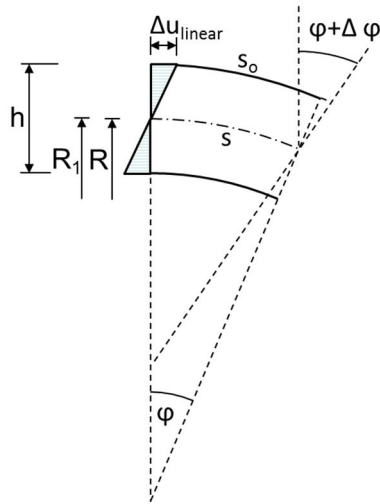


Abb. 238: Einfluss des radialen Quellens und Schwindens auf den Krümmungsradius

In oben stehender Abbildung ist zu sehen, dass eine lineare Zunahme der Holzfeuchte gleichzeitig eine lineare Änderung des Krümmungsradius zur Folge hat. Ein Quellen in radialer Richtung führt zur Abnahme der Krümmung, ein Schwinden in radialer Richtung hingegen zur Zunahme.

Als weiteren Einfluss auf den Krümmungsradius kann eine über die Querschnittshöhe  $h$  nicht konstante Quellung bzw. Schwindung in longitudinaler Richtung identifiziert werden. Wird von einer linearen Verteilung der Holzfeuchte ausgegangen, so kann ein geänderter Krümmungsradius  $R_1$  wie folgt berechnet werden:



Quellen: 
$$R_1 = \frac{R}{1 + 2 \cdot \frac{R}{h} \cdot \alpha_L \cdot |\Delta u_{linear}|} \quad (6.12)$$

Schwinden: 
$$R_1 = \frac{R}{1 - 2 \cdot \frac{R}{h} \cdot \alpha_L \cdot |\Delta u_{linear}|} \quad (6.13)$$

Es wird davon ausgegangen, dass sich die Länge der Schwerachse  $s$  durch den Feuchteunterschied nicht ändert. Bei einer Quellung wird die Oberkante  $s_0$  gedehnt, beim Schwinden wird diese verkürzt.

Abb. 239: Quellen in longitudinaler Richtung

Werden die durch das Quellen bzw. Schwinden der Oberkante  $s_0$  verursachten Änderungen des Krümmungsradius  $\Delta R$ , auf Grundlage eines Quell- bzw. Schwindmaßes von  $\alpha_L = 0,01$  % je Prozent Feuchteänderung, dem ursprünglichen Krümmungsradius  $R$  gegenübergestellt, so ist ein klarer Einfluss zu erkennen (siehe Abb. 240).

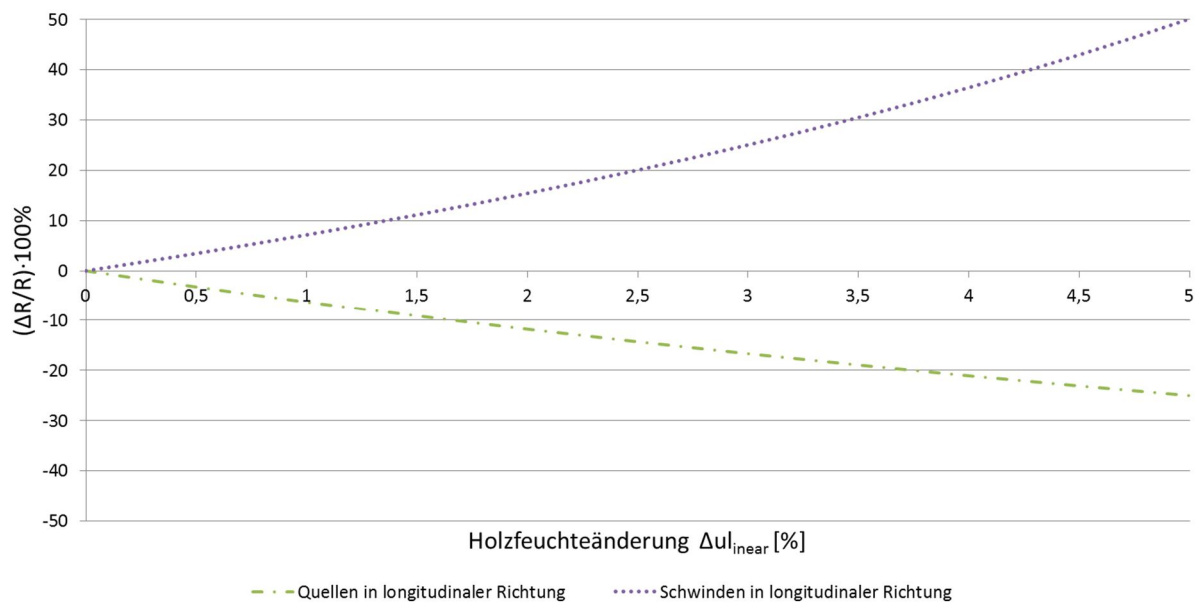


Abb. 240: Einfluss des longitudinalen Quellens und Schwindens auf den Krümmungsradius

Mit zunehmender Feuchtedehnung der Oberkante  $s_0$  nimmt die Krümmung zu. Verkürzt sich die Oberkante, so nimmt die Krümmung ab. Eine Gegenüberstellung der Ergebnisse aus Quellen bzw. Schwinden senkrecht und longitudinal zur Stabachse ist in nachfolgender Abbildung gegeben.

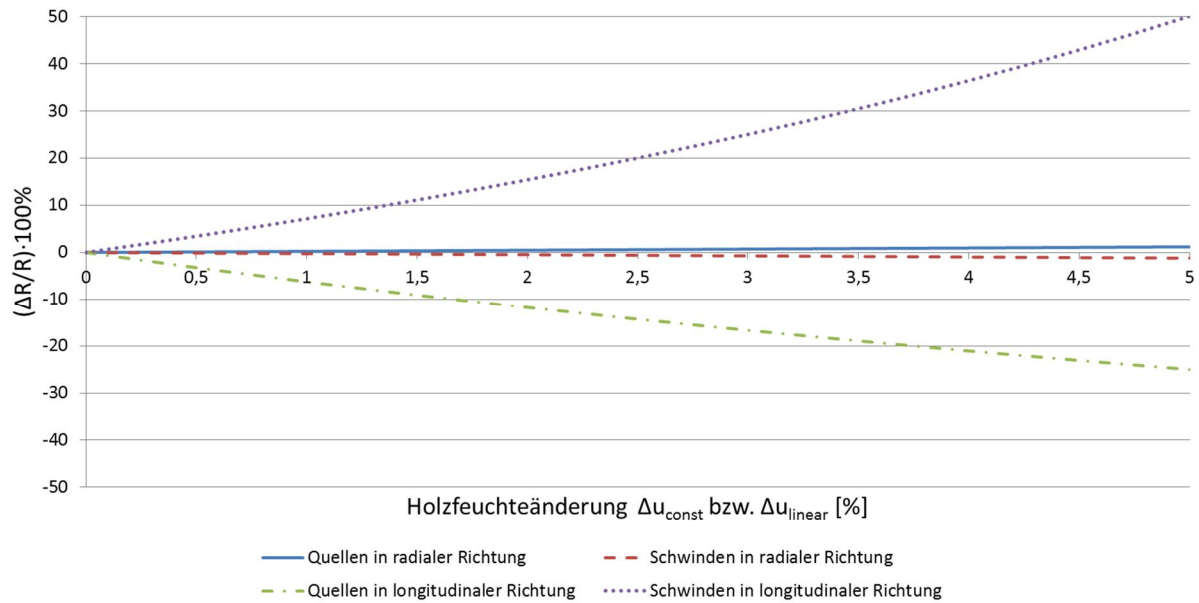


Abb. 241: Einfluss des longitudinalen bzw. radialen Quellens und Schwindens auf den Krümmungsradius

Es ist zu erkennen, dass der Einfluss einer linear veränderlichen Feuchteverteilung auf den Krümmungsradius größer ist als der einer konstanten. Werden die untersuchten Lamellen wiederum betrachtet so wird vermutet, dass die erfassten Verformungen aus einer Kombination beider Effekte bestehen. Dies würde erklären, weshalb bei schnellen Änderungen der relativen Luftfeuchte größere Verformungen auftreten, da diese zu einem abrupten Quellen bzw. Schwinden der Randbereiche führen, ähnlich einer linearen Feuchteverteilung. Bei langanhaltenden relativen Luftfeuchten bildet sich eine nahezu konstante Holzfeuchteänderung aus, die auch zu geringeren Änderungen der Krümmung führt.

Exemplarisch soll an dieser Stelle noch die erste Lamelle betrachtet werden. Diese zeugt im betrachteten Zeitraum von einem besonders aktiven Verhalten bei schnellen Wechseln der relativen Luftfeuchte. Es wird vermutet, dass dieses Verhalten vor allem auf den einseitig vorhandenen Holschutzanstrich zurückzuführen ist. Durch diesen kann dieser Bereich vermutlich langsamer Feuchte aufnehmen und es bildet sich eine steile Gradiente aus. Diese Feuchteverteilung kann in einen konstanten und linearen Anteil zerlegt werden, wobei der lineare Anteil den größten Einfluss auf die Krümmungsänderung besitzt (siehe Abb. 242).

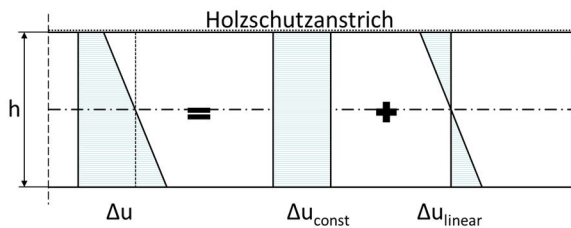


Abb. 242: Feuchteverteilung in einer Lamelle

Eine numerische Untersuchung zeigt, dass bereits ein Wert von  $\Delta u_{linear} \approx 1\%$  ausreicht, die erfassten Krümmungsänderungen zu reproduzieren. Um die hier angestellten Überlegungen zu bestätigen müsste jedoch eine genaue Erfassung der Feuchtegradienten über die Querschnittshöhe vorliegen.



Es wird davon ausgegangen, dass auch bei Schalenelementen, schnelle Änderungen der relativen Luftfeuchtigkeit einen entsprechenden Einfluss auf die Spannungsverteilung haben. Um die aus der relativen Luftfeuchtigkeit entstehenden Verformungen zu berücksichtigen, können ideale Biegerandspannungen berechnet werden. Diese müssten wirken, um dieselben Krümmungsänderungen hervorzurufen, wie die Schwankungen der relativen Luftfeuchte. Für die hier betrachteten Lamellen kann dies unter Annahme eines mittleren E-Moduls von 11.000 MN/m<sup>2</sup> und eben bleiben der Querschnitte erfolgen.

Für die erste Lamelle berechnet sich somit eine erforderliche Biegerandspannung von:

$$\sigma = \frac{d \cdot E_{0,mean}}{2} \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{0,01 \text{ m} \cdot 11.000 \text{ MN/m}^2}{2} \cdot \left( \frac{1}{3,648 \text{ m}} - \frac{1}{4,039 \text{ m}} \right) = 1,46 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \quad (6.14)$$

Entsprechend für die zweite Lamelle:

$$\sigma = \frac{d \cdot E_{0,mean}}{2} \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{0,01 \text{ m} \cdot 11.000 \text{ MN/m}^2}{2} \cdot \left( \frac{1}{4,021 \text{ m}} - \frac{1}{4,319 \text{ m}} \right) = 0,94 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \quad (6.15)$$

Es zeigt sich, dass nur sehr geringe Biegerandspannungen notwendig wären, um den Lamellen eine entsprechende Krümmungsänderung aufzuzwingen. Diese Spannungen rühren aus Schwankungen der Luftfeuchtigkeit und werden bei behinderter Verformung im System gespeichert und führen entsprechend zu zusätzlichen inneren Spannungen.

## 6.6 Fazit

Die Untersuchungen des Brettschichtholzträgers haben gezeigt, dass es in den verwendeten Lamellen nach 25 Jahren, bei einer Lagerung in Nutzungsklasse 1, zu Spannungsrelaxationen von rund 46÷55 % kommt. Diese Ergebnisse decken sich mit Aussagen von [Čížek, 1961]. Eine einjährige Untersuchung der betrachteten Lamellen hat gezeigt, dass diese ein aktives Verhalten gegenüber Änderungen der relativen Luftfeuchtigkeit aufweisen. Durch die Schwankungen der relativen Luftfeuchte kommt es zu einer kontinuierlichen Schwankung der inneren Spannungen, welche sich zeitverzögert bzw. gedämpft zur relativen Luftfeuchte entwickeln. Bei sehr dünnen und schlanken Bauteilen sollten diese zusätzlichen Spannungen berücksichtigt werden.

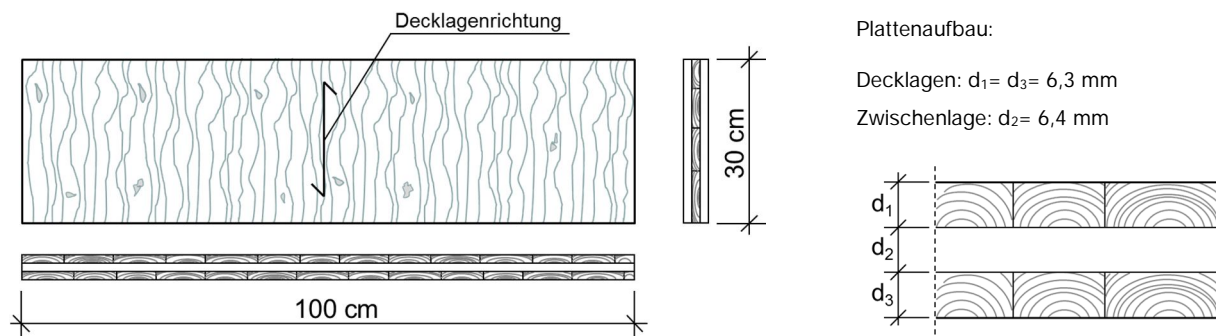
## 7 Experimentelle Untersuchungen zur Relaxation an Dreischichtplatten

### 7.1 Hintergrund

Die Grundsätzliche Idee dieser Arbeit besteht darin, große Holzwerkstoffplatten um eine Achse zu krümmen und dadurch eine hohe geometrische Steifigkeit zu aktivieren. Es hat sich gezeigt, dass für diese Art der Anwendung kreuzweise verklebte Dreischichtplatten geeignet sind. Aus Untersuchungen zur Relaxation und Retardation ist bekannt, dass Holz in Abhängigkeit der Beanspruchungsrichtung ein sehr differenziertes Langzeitverhalten besitzt. Da bei der Krümmung von Dreischichtplatten mehrere Effekte auftreten, sollen gesonderte Untersuchungen angestellt werden. Eine intensive Literaturrecherche hat keine Ergebnisse zur Relaxation an Dreischichtplatten ergeben, lediglich einige Kriechversuche an mehrlagigen Brettsperrholzelementen konnten gefunden werden – vergleiche [Jöbstl, 2007].

### 7.2 Material und Prüfkörpereigenschaften

Das Relaxationsvermögen soll, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, an dreischichtigen Platten bestimmt werden. Zu diesem Zweck werden aus einer großen industriell gefertigten, dreischichtigen Fichtenholzplatte, Probekörper der Größe 100 / 30 cm geschnitten. Die Lagen der Platte sind nicht seitenverklebt und entsprechen laut Angabe des Herstellers der Festigkeitsklasse C24 (siehe Abb. 243).



**Abb. 243:** Dreischichtplatte in Grundriss, Längs- und Seitenansicht

Werden die in der Literatur beschriebenen Biege- Relaxationsversuche herangezogen, so kann festgestellt werden, dass diese in der Regel als Dreipunkt-, Vierpunkt-, oder Kragarmversuch durchgeführt werden. Entsprechende Beispiele sind in [Becker & Reiter, 1970], [Gressel, 1971], [Perkitny, et al., 1976], [Gressel, 1983] und [Jaenicke, 2003] zu finden. Anhand dieser Versuchsdurchführungen können Bereiche mit differenzierter Biegebeanspruchung und Krümmung erfasst werden, insbesondere bei Versuchen im Dreipunkt- oder Kragarmversuch. Diese ungleichmäßige Beanspruchung der Bereiche führt zu Unterschieden im langzeitlichen Verhalten innerhalb des Probekörpers. Da keine entsprechende Prüfnorm zur Bestimmung des Relaxationsverhaltens unter reiner Biegung gefunden wurde, soll eine eigene Prüfmethode bzw. ein eigener Prüfkörper zur Untersuchung plattenförmiger Bauteile entwickelt werden. Um eine konstante Krümmung zu erhalten und die Platten rein auf Biegung zu beanspruchen, werden mehrere Kreisabschnitte aus Holzwerkstoffplatten mit einem Krümmungshalbmesser von 1,20 m gefertigt und durch 30 cm lange, schräg angeschnittene Kanthölzer verbunden. Die somit gefertigten Lehrgerüste dienen der Befestigung der Dreischichtplatten (siehe Abb. 244).

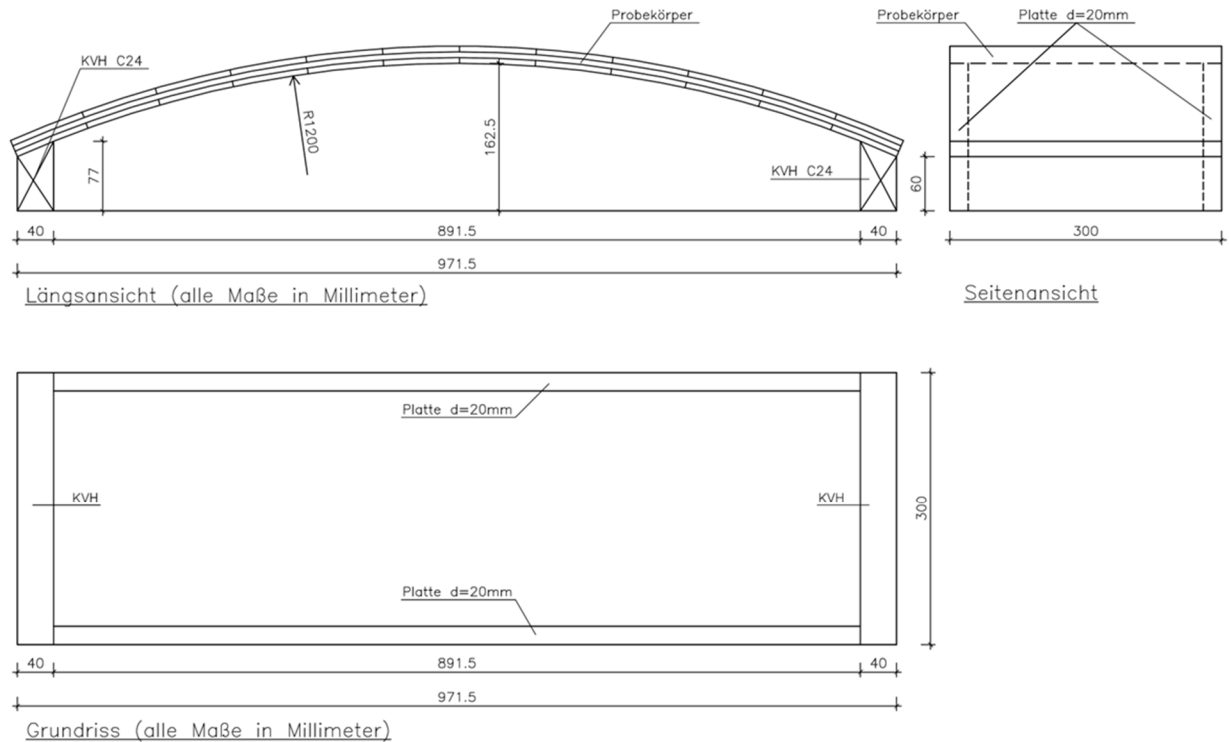


Abb. 244: Darstellung des Prüfkörpers in Längsansicht, Grundriss und Seitenansicht

Es werden insgesamt 15 Prüfkörper hergestellt, mit denen drei verschiedene Versuchsreihen zu je 5 Probekörpern gefahren werden.

Alle Dreischichtplatten werden an den Rändern mit Bohrungen versehen, um sie anschließend auf den Lehrgerüsten mit Schrauben zu befestigen. Dabei beträgt der Abstand senkrecht zum freien Rand jeweils 1 cm und zwischen den Bohrungen 10 cm. Die Platten werden anschließend mit Schnellbauschrauben ausgehend von einer Seite auf den Lehrgerüsten befestigt und alternierend auf den gegenüberliegenden Seiten verschraubt (siehe Abb. 245).

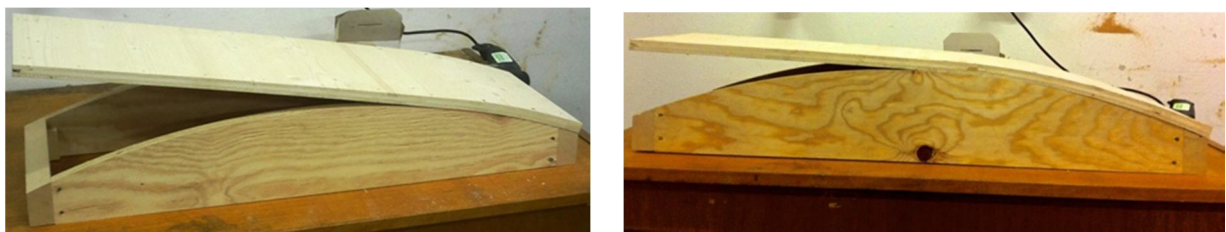


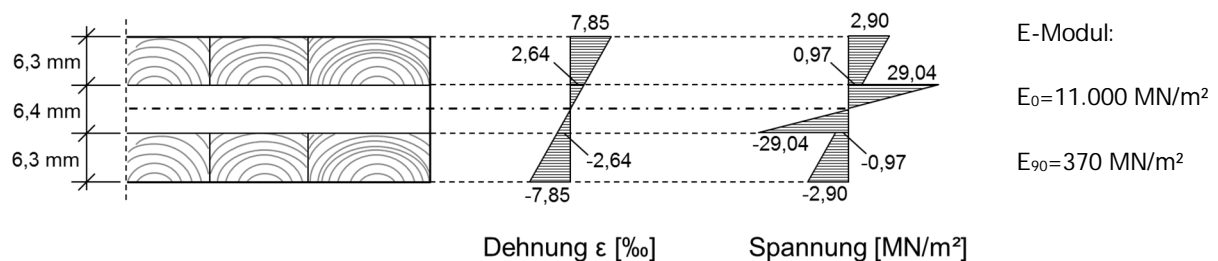
Abb. 245: Fotos zur Krümmung der Dreischichtplatten über das Lehrgerüst

Die Krümmung wird senkrecht zu den Decklamellen aufgebracht. Durch das Krümmen werden die äußeren Lamellen senkrecht zur Faser und die mittlere Lamelle parallel zur Faser beansprucht. Empfehlungen zum mechanischen Krümmen von Holz können in [Stevens & Turner, 1970] gefunden werden, wonach Holz bis zu einem Verhältnis von Krümmungshalbmesser zu Probekörperdicke gleich 50 ( $R/S=50$ ) parallel zur Faser gebogen werden kann, ohne die Bruchdehnung zu überschreiten. In dem hier durchgeführten Versuch ergibt sich das Verhältnis von Radius zu Probekörperstärke:

$$\frac{R}{S} = \frac{120 \text{ cm}}{1,9 \text{ cm}} = 63 \tag{7.1}$$

und liegt oberhalb der Grenze von 50.

Die auftretenden Dehnungen und Spannungen können in den drei Lagen nach der technischen Biegelehre ermittelt werden. Dazu wird von einer linearen Verteilung der Dehnungen ausgegangen. Die entsprechenden Spannungen, sind von den in den Schichten herrschenden E-Modulen abhängig. Die daraus zu ermittelnden Dehnungen und Spannungen sind in Abb. 246 gegeben.



**Abb. 246:** Dehnungs- und Spannungsbild in der Platte

Es ist zu sehen, dass die Decklamellen eine Dehnung bzw. Stauchung von 7,85 ‰ und Querzug- bzw. Querdruckspannung von 2,90 MN/m<sup>2</sup> erfahren. In der mittleren Lage treten Dehnungen von 2,64 ‰ und Spannungen von 29,04 MN/m<sup>2</sup> parallel zur Faser auf. Die Biegezugdehnungen in der mittleren Lamelle liegen unter den allgemein angegebenen Bruchdehnungen von 5,4 ‰ bis 7,7 ‰<sup>158, 159</sup> für Fichtenholz und unterhalb der Proportionalitätsgrenze von rund 3,0 ‰.<sup>160</sup> Hingegen liegen die Dehnungen senkrecht zur Faser über den in der Literatur gegebenen Bruchdehnungen von 3,3 ‰ bis 6,0 ‰<sup>161</sup> (Zug senkrecht zur Faser) bzw. Bruchspannungen 5 N/mm<sup>2</sup> senkrecht zur Faser<sup>162</sup>. Vorausgreifend kann gesagt werden, dass keiner der 15 Probekörper Risse in Folge Querzugspannungen aufwies.

### 7.3 Versuchsdurchführung

Da das Relaxationsverhalten stark von der Holzfeuchte bzw. von der relativen Luftfeuchtigkeit abhängig ist, werden drei Versuche unter unterschiedlichen Bedingungen, mit je 5 Prüfkörpern gefahren. Nachfolgend sollen die drei Versuchsdurchführungen erläutert werden.

#### Versuchsreihe 1: Trockenlagerung bei 20°C und 65 % rel. Luftfeuchte

In dieser ersten Versuchsreihe werden fünf im Klimaraum bei 20°C und 65% relativer Luftfeuchte konditionierte Dreischichtplatten über die Lehrgerüste gebogen und für 90 Tage im Normklima gelagert. Um auf etwaige Änderungen des Materials während der Lagerungszeit schließen zu können, wird vor Versuchsbeginn der Verschiebungsmodul im Dreipunkt- Biegeversuch ermittelt. Dieser wird an die Bestimmung des E-Moduls nach *DIN 52186* angelehnt, dessen Randbedingungen ebenfalls eingehalten werden (siehe Abb. 247, links). Da die Biegesteifigkeiten der Platten so gering sind und die Messung in einer großen Prüfeinrichtung durch das Messrauschen verfälscht würden, werden die Belastungen nicht durch eine weg- oder zeitgesteuerte hydraulische Presse, sondern durch entsprechende Gewichte, die in Feldmitte angehängt werden, aufgebracht. Als Belastung kommen drei definierte Kraftgrößen (100 N, 150 N, 200 N) zum Einsatz. Die vertikale Verschiebung in Feldmitte

<sup>158</sup> Grosser, D.; Zimmer, B. (1989). *Einheimische Nutzhölzer und ihre Verwendung*. Seite 48

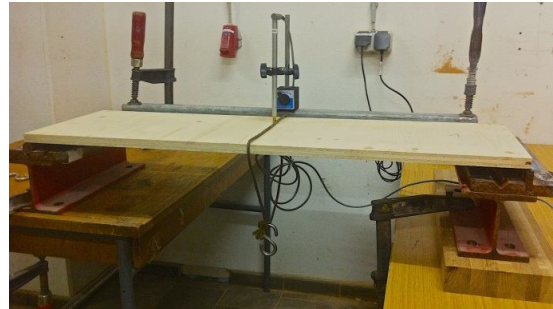
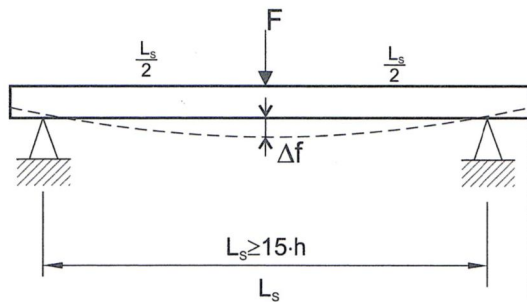
<sup>159</sup> Sell, J. (1989). *Eigenschaften und Kenngrößen von Holzarten*. Seite 34-45

<sup>160</sup> Neuhaus, H. (1994). *Lehrbuch des Ingenieurholzbau*. Seite 34

<sup>161</sup> Grosser, D.; Zimmer, B. (1989). *Einheimische Nutzhölzer und ihre Verwendung*. Seite 49

<sup>162</sup> Van der Kuilen, J.W.G (2013). *Vorlesungsunterlagen zur Vorlesung Holz im Bauwesen*. WS13/14

wird durch einen Wegaufnehmer des Herstellers *Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH* erfasst (siehe Abb. 247, rechts).

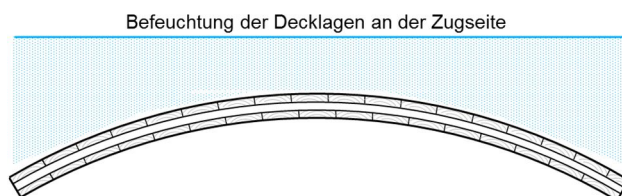


**Abb. 247:** Links: Dreipunkt- Biegeversuch nach DIN 52186 [Scholz & Wagenführ, 2008]; Rechts: Foto Versuch

Nach 90 Tagen werden die Dreischichtplatten von den Lehrgerüsten gelöst und die Relaxation durch Messung der verbleibenden Sehnenlänge bestimmt. Zudem wird der Verschiebungsmodul aller Platten ermittelt und die Werte mit den Ergebnissen vor der Lagerung verglichen.

#### Versuchsreihe 2: Lagerung bei 20°C und Befeuchtung der Zugseite

In der zweiten Versuchsreihe werden fünf Dreischichtplatten untersucht, die gekrümmt und anschließend auf der zugbeanspruchten Seite zyklisch befeuchtet werden. Die Biegezeit beträgt 90 Tage. Vor der Versuchsdurchführung werden die Dreischichtplatten im Laborraum auf eine Ausgangsholzfeuchte von rund 8,5 % konditioniert. Zudem wird wie in Versuchsreihe 1, vor Versuchsbeginn der Verschiebungsmodul bestimmt um auf etwaige Änderungen des Materials während der Lagerungszeit zu schließen. Durch das, während der Lagerungszeit erfolgte zyklische Befeuchten, kann eine mögliche Nachbehandlung von Schalenelemente nachempfunden werden. Dabei erfolgt die Befeuchtung mittels einer Sprühflasche. Es wird so viel Wasser auf die Probekörper gesprüht, bis eine erste Tröpfchen-Bildung zu erkennen ist und das Wasser zu fließen beginnt (siehe Abb. 248). Eine Reihe von in der Literatur gefundenen Quellen zeigt, dass ein zyklisches Trocknen und Befeuchten zu erheblichen Steigerungen der Retardation und Relaxation führt. Versuche von [Möhler & Maier, 1970], [Moliński & Raczkowski, 1988], [Ranta-Maunus, 1995] zeigen ebenfalls, dass eine Befeuchtung der Druckzone zu höheren Werten der Relaxation führen würde, es wird aber auf eine spätere, im Großformat für die Praxis leichtere Umsetzbarkeit abgezielt.



**Abb. 248:** Probekörper mit Befeuchtung der Zugseite

**Abb. 249:** Probekörper mit Aluminiumabklebung

Die Ränder der Platten werden mit Aluminiumklebeband versehen, um keine direkte Feuchteaufnahme an den Schnittflächen zu ermöglichen und größere Plattendimensionen zu simulieren (siehe Abb. 249). Zudem wird erhofft, dass durch die geringe Plattenstärke ein Eintrag des aufgesprühten Wassers in die unteren Lamellen erfolgt. Um die Feuchteentwicklung in den Platten zu untersuchen und zu kontrollieren, werden je Platte drei Holzfeuchtemesssensoren eingebaut (siehe



Abb. 250 und Abb. 251). Diese sind an einen Datenlogger des Unternehmens *Scantronik Mugrauer GmbH* angeschlossen und messen stündlich den elektrischen Widerstand in den drei Lagen, wodurch auf die Holzfeuchte zurückgerechnet werden kann. Des Weiteren werden an zwei Platten Temperatursensoren eingebracht um einen entsprechenden Einfluss der Temperatur zu berücksichtigen.

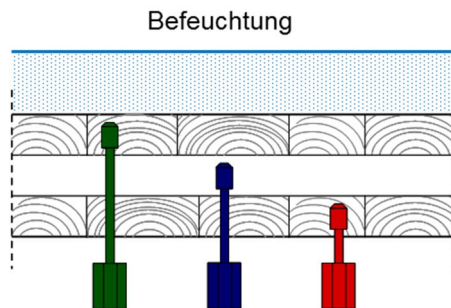


Abb. 250: Schematische Darstellung der Feuchtemessung

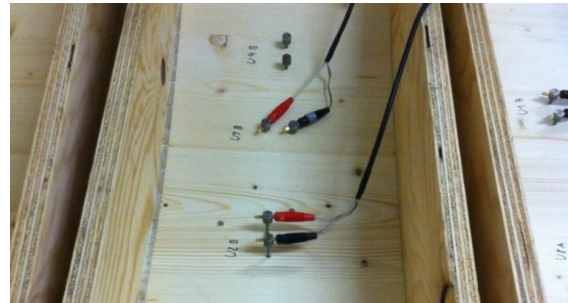


Abb. 251: Foto der Holzfeuchtemesspunkte

Der Wert der Relaxation wird im Anschluss zur Krümmungszeit von 90 Tagen, wie in Versuchsreihe 1 über die Sehnenlänge nach dem Lösen bestimmt. Auch der Verschiebungsmodul nach der Lagerung wird mit den zuvor gemessenen Werten verglichen.

#### Versuchsreihe 3: Wässerung der Proben und Trockenlagerung bei 20°C und 65 % rel. Luftfeuchte

In dieser Versuchsreihe wird der Einfluss einer Vorbehandlung der Platten untersucht. Zu diesem Zweck werden fünf Dreischichtplatten für zwei Tage im Wasserbad gelagert. Nach der Wässerung beträgt die Holzfeuchte in allen drei Lagen im Mittel 33 % und liegt über dem Fasersättigungspunkt von rund 30 %. Durch die hohe Holzfeuchtigkeit sinkt die Biegesteifigkeit der Platten und sie werden über die Lehrgerüste gebogen. Nach dem Biegen erfolgt eine Lagerung von 90 Tagen im Klimaraum bei 20°C und 65 % relativer Luftfeuchte. Die Platten werden nach 10, 30 und 90 Tagen kurz vom Lehrgerüst gelöst und die verbleibende Sehnenlänge gemessen. Dadurch kann ein zeitlicher Verlauf der Relaxation abgeschätzt werden.

### 7.4 Versuchsauswertung

#### Versuchsreihe 1: Trockenlagerung bei 20°C und 65 % rel. Luftfeuchte

Durch die 90 tägige Lagerung werden die durch das Krümmen induzierten Spannungen infolge rheologischer Prozesse abgebaut. Der Spannungsabbau wird durch die bleibende Verformung der Dreischichtplatten ersichtlich und kann auch dadurch berechnet werden. Dazu wird von einem konstanten Krümmungsradius  $R$  vor und nach der Biegezeit ausgegangen. Durch die Sehnenlänge  $L$  des Bogens bzw. der gekrümmten Platten, kann der Krümmungsradius  $R$  berechnet werden. Die Bogenlänge  $s$  ist durch die Abmessungen der Dreischichtplatten mit  $s=100$  cm gegeben.

$$L = 2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{s}{2 \cdot R}\right) = 2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{50}{R}\right) \quad (7.2)$$

Die Lösung von Gleichung (7.2) kann auf numerischem Wege erfolgen. Anhand dieser Vorgaben muss nur eine Messgröße, die Sehnenlänge  $L$ , erfasst werden. Die Spannungsrelaxation berechnet sich wie schon in Kapitel 6.4 mit:



$$\chi = \left( 1 - \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1} \right) \cdot 100\% = \left( 1 - \frac{1/R_1 - 1/R_2}{1/R_1} \right) \cdot 100\% \quad (7.3)$$

$R_1$  ... Krümmungsradius während der 90 Tage

$R_2$  ... Krümmungsradius nach dem Lösen aus dem Lehrgerüst

Die Sehnenlänge  $L$  ist im Versuch als der Abstand der Innenkanten der Platten definiert, welcher mit einem Zollstock, je Probekörper zweimal, bestimmt wird, um etwaige Fehlablesungen zu vermeiden. Die gelösten Platten werden zur Messung der Sehnenlänge auf die lange Kante gelegt, um den Einfluss des Eigengewichts auf die Messergebnisse zu vermeiden.

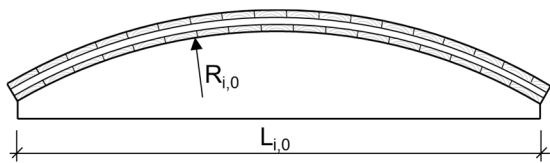


Abb. 252: Dreischichtplatte vor dem Lösen

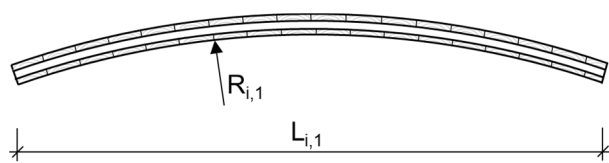


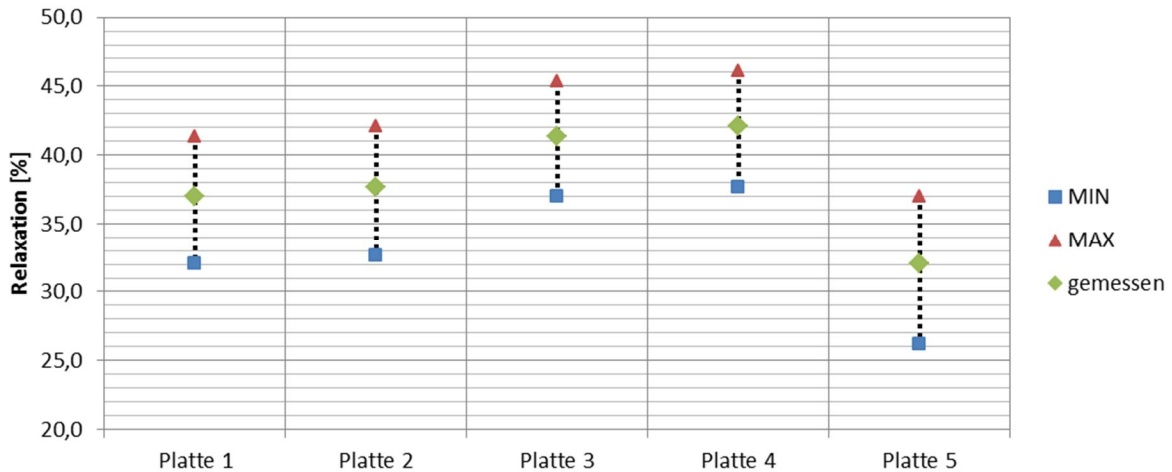
Abb. 253: Dreischichtplatte nach dem Lösen

Die Messwerte vor dem Lösen werden mit  $L_{i,0}$  und nach dem Lösen mit  $L_{i,1}$  bezeichnet (siehe Abb. 252 und Abb. 253), wobei  $i$  die entsprechende Plattennummer angibt. Alle Messwerte und die entsprechenden Berechnungsergebnisse sind nachfolgender Tabelle 10 zu entnehmen.

Platte:	Sehnenlänge vor dem Lösen:	Sehnenlänge nach dem Lösen:	Berechneter Radius vor dem Lösen	Berechneter Radius nach dem Lösen	Berechnete Relaxation
1	$L_{1,0} = 97,1 \text{ cm}$	$L_{1,1} = 99,6 \text{ cm}$	$R_{1,0} = 119,34 \text{ cm}$	$R_{1,1} = 322,52 \text{ cm}$	37 %
2	$L_{2,0} = 97,2 \text{ cm}$	$L_{2,1} = 99,6 \text{ cm}$	$R_{2,0} = 121,47 \text{ cm}$	$R_{2,1} = 322,52 \text{ cm}$	38 %
3	$L_{3,0} = 97,1 \text{ cm}$	$L_{3,1} = 99,5 \text{ cm}$	$R_{3,0} = 119,34 \text{ cm}$	$R_{3,1} = 288,44 \text{ cm}$	41 %
4	$L_{4,0} = 97,2 \text{ cm}$	$L_{4,1} = 99,5 \text{ cm}$	$R_{4,0} = 121,47 \text{ cm}$	$R_{4,1} = 288,44 \text{ cm}$	42 %
5	$L_{5,0} = 97,1 \text{ cm}$	$L_{5,1} = 99,7 \text{ cm}$	$R_{5,0} = 119,34 \text{ cm}$	$R_{5,1} = 372,35 \text{ cm}$	32 %

Tabelle 10: Ergebnisse Versuchsreihe 1

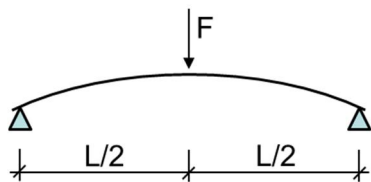
Es zeigt sich, dass die Spannungsrelaxation zwischen 32 % und 42 % liegt, wobei ein arithmetisches Mittel von 38 % berechnet werden kann. Wird davon ausgegangen, dass die Sehnenlänge im gelösten Zustand  $L_{i,1}$ , durch das zur Seite legen der Platten, mit einer Genauigkeit von  $\pm 1 \text{ mm}$  bestimmt werden kann, so kommt es durch die geringe, bleibende Krümmung zu einem relativ großen Streubereich der Relaxation. In folgender Abb. 254 sind die Werte der Spannungsrelaxation mit einem Messfehler von  $\pm 1 \text{ mm}$  gegeben.



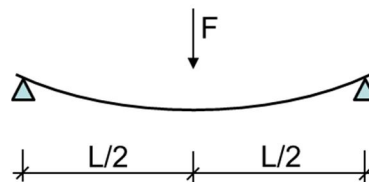
**Abb. 254:** Ergebnisbereich der Relaxation für Versuchsreihe 1 mit Berücksichtigung der Messungengenauigkeit

Es ist zu sehen, dass der geringste Wert der Spannungsrelaxation unter Berücksichtigung der Messungengenauigkeit, in Platte 5 mit 26 % und der maximale Wert in Platte 4 mit 46 % ermittelt werden kann. Das arithmetische Mittel aller minimalen Werte liegt bei 33 % und aller maximalen Werte bei 42 %. Es scheint angebracht zu sein, lediglich von Streubereichen der Relaxation zu sprechen, da durch die geringen Probekörpermengen und einfache Versuchsdurchführung keine hohe stochastische Genauigkeit zu erwarten ist.

Ein Vergleich der Verschiebungsmodule vor und nach der 90 tägigen Lagerung zeigt, dass die Probekörper steifer werden. Dazu wurden die gekrümmten Platten bogenförmig und seillinienförmig belastet (siehe Abb. 255 und Abb. 256). Leider konnte eine behinderungsfreie Verformung an den Auflagern nicht vollständig gewährleistet werden, da die zur Verfügung stehenden Auflager nur Kanten und kein Rollenlager besaßen.



**Abb. 255:** Platte beansprucht als Bogen



**Abb. 256:** Platte beansprucht als Seil

Die ermittelten Verschiebungsmodule können wie folgt angegeben werden:

Platte:	Verschiebungsmodul vor dem Versuch	Verschiebungsmodul nach dem Versuch (Bogen)	Verschiebungsmodul nach dem Versuch (Seil)
1	1092,6 [N/mm]	1092,6 [N/mm]	1250,3 [N/mm]
2	1035,8 [N/mm]	1072,5 [N/mm]	1169,3 [N/mm]
3	875,2 [N/mm]	889,3 [N/mm]	953,2 [N/mm]
4	1153,7 [N/mm]	1307,9 [N/mm]	1321,4 [N/mm]
5	921,6 [N/mm]	971,6 [N/mm]	1055,7 [N/mm]

**Tabelle 11:** Verschiebungsmodule vor und nach dem Versuch der Versuchsreihe 1

Tendenziell ist ein größerer Zuwachs der Steifigkeit unter seillinienförmiger Beanspruchung zu erkennen. Der Zuwachs der Steifigkeit im bogenförmigen Versuch beträgt im Mittel rund 4 % und in

der seilförmigen Versuchsdurchführung 13 %. Dies deckt sich mit Aussagen von [Stevens & Turner, 1970] wonach die Dichte des Materials im Druckversuch zunimmt. Folglich wurde auch durch die dreimonatige Lagerung die Dichte des druckbeanspruchten Bereichs erhöht, der vornehmlich aus dem querdruckbeanspruchten Bereich der äußeren Lage besteht. Da die Schmalseiten der Brettlagen nicht verklebt sind, kann diese Erhöhung der Dichte beim bogenförmigen Versuch nicht zum Tragen kommen. Werden die Verschiebungsmodule der Platten mit den entsprechenden Werten der Relaxation verglichen, so kann festgestellt werden, dass Platte 3 mit dem geringsten Verschiebungsmodul die zweit-höchste Relaxation aufweist. Platte 4, mit der höchsten Steifigkeit weist eine im geringeren Maße höhere Relaxation auf als Platte 3. Anhand der Betrachtung aller Verschiebungsmodule und Werte der Relaxation, kann kein direkter Zusammenhang zwischen Steifigkeit und Relaxation erkannt werden. Es konnten nach Abschluss der Untersuchungen auch keinerlei Querspannungen in den Decklamellen der Platten festgestellt werden.

#### Versuchsreihe 2: Lagerung bei 20°C und Befeuchtung der Zugseite

In diesem Versuch wurden fünf Probekörper für 90 Tage über eine Lehre mit konstantem Radius gebogen und durch Befeuchtung der zugbeanspruchten Seite behandelt. Nach rund drei Wochen stellte sich heraus, dass auch ein häufiges Befeuchten an der Oberfläche lediglich zu einem kurzen Feuchteanstieg in der obersten Lamelle führt und nach einer Trocknungsdauer von zehn bis elf Stunden wieder die ursprüngliche Holzfeuchte von durchschnittlich 8,5 % erreicht wird. Die mittlere und untere Lamelle weisen keine bzw. vernachlässigbar kleine Feuchteänderungen in Folge der Behandlung auf. Daraufhin wurden die Probekörper im weiteren Verlauf des Versuches, nach der Befeuchtung mit einer diffusionsdichten Folie abgedeckt, wodurch eine Verdunstung des aufgetragenen Wassers nahezu verhindert wird. Durch diese Maßnahme konnte ein Feuchteeintrag in alle drei Schichten der Platten realisiert werden. Sie wurden in der Folge zweimal täglich in einem Intervall von drei Tagen mit Wasser besprüht, wodurch ein Maximalwert der Holzfeuchte von rund 22 % in den Decklamellen erreicht wird. Da versucht wurde, ein zyklisches Befeuchten und Trocknen zu realisieren, wurde die Folie immer wieder von den Probekörpern abgenommen. Es zeigt sich am Ende der Versuchszeit, dass ein Abdecken der Probekörper für ein bis zwei Tage ausreichend ist, um ein zyklisches Befeuchten und Trocknen zu bewerkstelligen. Um die Platten wieder auf die Ausgangsfeuchte zurückzuführen, wurden diese rund vier Wochen vor dem Ausbau nicht mit Wasser behandelt. Mit Hilfe der Software *SoftFOX* konnte der Verlauf der Feuchteentwicklung in den drei Lagen erfasst und kontinuierlich überwacht werden. Eine grafische Darstellung des Holzfeuchteverlaufs in Platte 6 ist für den betrachteten Zeitraum in Abb. 257 gegeben.

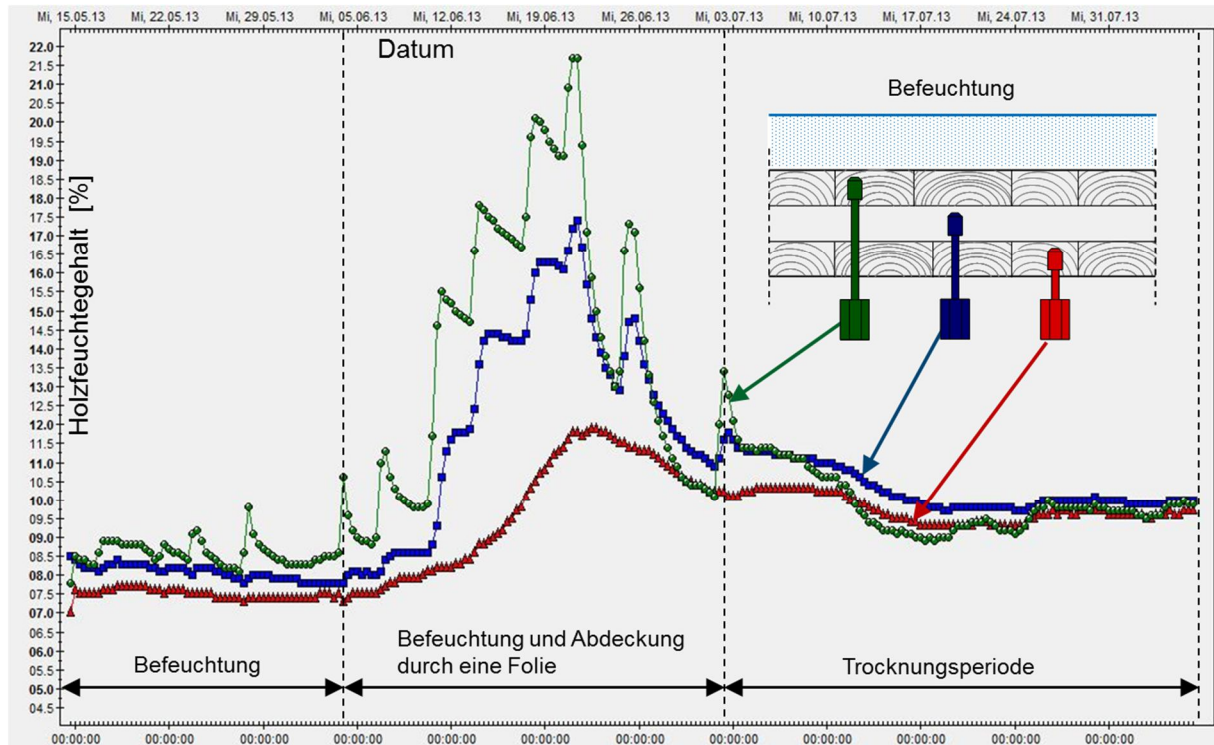


Abb. 257: Holzfeuchteverlauf in Platte 6, in unterschiedlichen Lagen für Versuchsreihe 2

Die Spannungsrelaxation wird wie in Versuchsreihe 1 erklärt, durch das Messen der Sehnenlänge unter Annahme eines konstanten Krümmungsradius berechnet. Die entsprechenden Messwerte und Berechnungsergebnisse sind in Tabelle 12 zusammengefasst.

Platte:	Sehnenlänge vor dem Lösen:	Sehnenlänge nach dem Lösen:	Berechneter Radius vor dem Lösen	Berechneter Radius nach dem Lösen	Berechnete Relaxation
6	$L_{6,0} = 97,2 \text{ cm}$	$L_{6,1} = 99,4 \text{ cm}$	$R_{6,0} = 121,47 \text{ cm}$	$R_{6,1} = 263,25 \text{ cm}$	46 %
7	$L_{7,0} = 97,2 \text{ cm}$	$L_{7,1} = 99,0 \text{ cm}$	$R_{7,0} = 121,47 \text{ cm}$	$R_{7,1} = 209,12 \text{ cm}$	58 %
8	$L_{8,0} = 97,1 \text{ cm}$	$L_{8,1} = 99,1 \text{ cm}$	$R_{8,0} = 119,34 \text{ cm}$	$R_{8,1} = 214,87 \text{ cm}$	55 %
9	$L_{9,0} = 97,1 \text{ cm}$	$L_{9,1} = 99,1 \text{ cm}$	$R_{9,0} = 119,34 \text{ cm}$	$R_{9,1} = 214,87 \text{ cm}$	55 %
10	$L_{10,0} = 97,2 \text{ cm}$	$L_{10,1} = 99,2 \text{ cm}$	$R_{10,0} = 121,47 \text{ cm}$	$R_{10,1} = 227,88 \text{ cm}$	53 %

Tabelle 12: Ergebnisse Versuchsreihe 2

Es zeigt sich im Vergleich zu den Ergebnissen aus Versuchsreihe 1 ein positiver Effekt der Befeuchtung. Die Spannungsrelaxation liegt für die fünf untersuchten Platten im Mittel bei rund 53 % (in Versuchsreihe 1 waren es rund 38 %). Der Streubereich zwischen maximalem und minimalem gemessenen Wert kann für die Versuchsreihe 2 mit 46 % bis 58 % angegeben werden. Wird davon ausgegangen, dass die Sehnenlänge nach dem Lösen wiederum mit einer Genauigkeit von  $\pm 1 \text{ mm}$  bestimmt werden kann, so können die in nachfolgender Grafik ermittelten Bereiche der Relaxation angegeben werden.

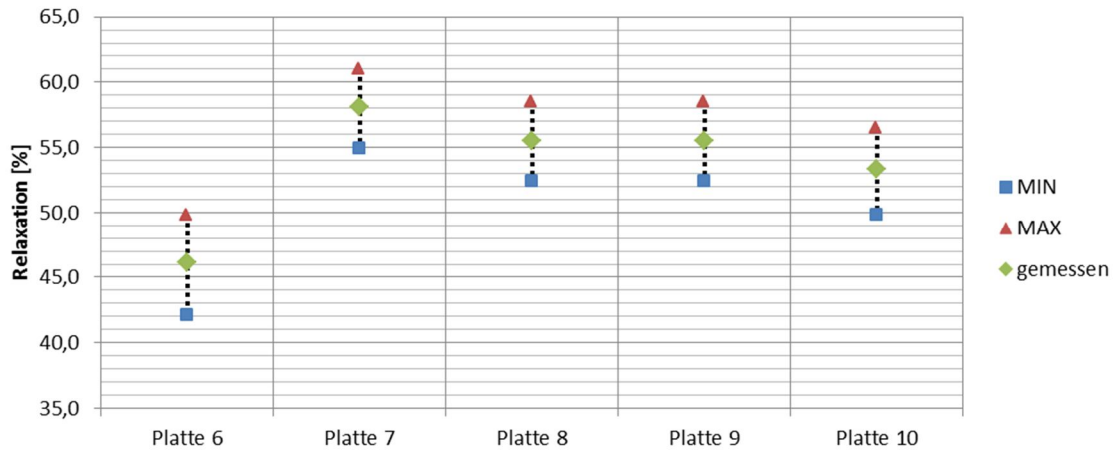


Abb. 258: Ergebnisbereich der Relaxation für Versuchsreihe 2 mit Berücksichtigung der Messungenauigkeit

Werden die maximalen und minimalen Werte in Abb. 258 betrachtet, so kann unter Berücksichtigung der Messungenauigkeit ein minimaler Wert in Platte 6 von 42 % und ein maximaler Wert in Platte 7 von 61 % abgelesen werden. Das arithmetische Mittel aller minimalen Werte liegt bei rund 50 % und aller maximalen Werte bei ca. 57 %.

Abb. 259 zeigt eine Gegenüberstellung der Ergebnisse aus Versuchsreihe 1 und Versuchsreihe 2. Tendenziell ist eine klare Steigerung der Relaxation zu erkennen. Dabei ist eine maximale Differenz der Messergebnisse von Platte 5 zu Platte 7 mit 26 % gegeben. Die kleinste Differenz der Messergebnisse zwischen Platte 4 und Platte 6 liegt bei 4 %. Werden die arithmetischen Mittel der Messungen verglichen, so kann eine Differenz zwischen Versuchsreihe 2 und Versuchsreihe 1 von 15 % festgestellt werden. Generell kann erkannt werden, dass die Messungenauigkeit von  $\pm 1$  mm mit zunehmender Relaxation einen geringeren Einfluss auf das Ergebnis hat. Dieser Effekt ist auf geometrische Zusammenhänge zwischen Sehnenlänge und Krümmungsradius zurückzuführen.

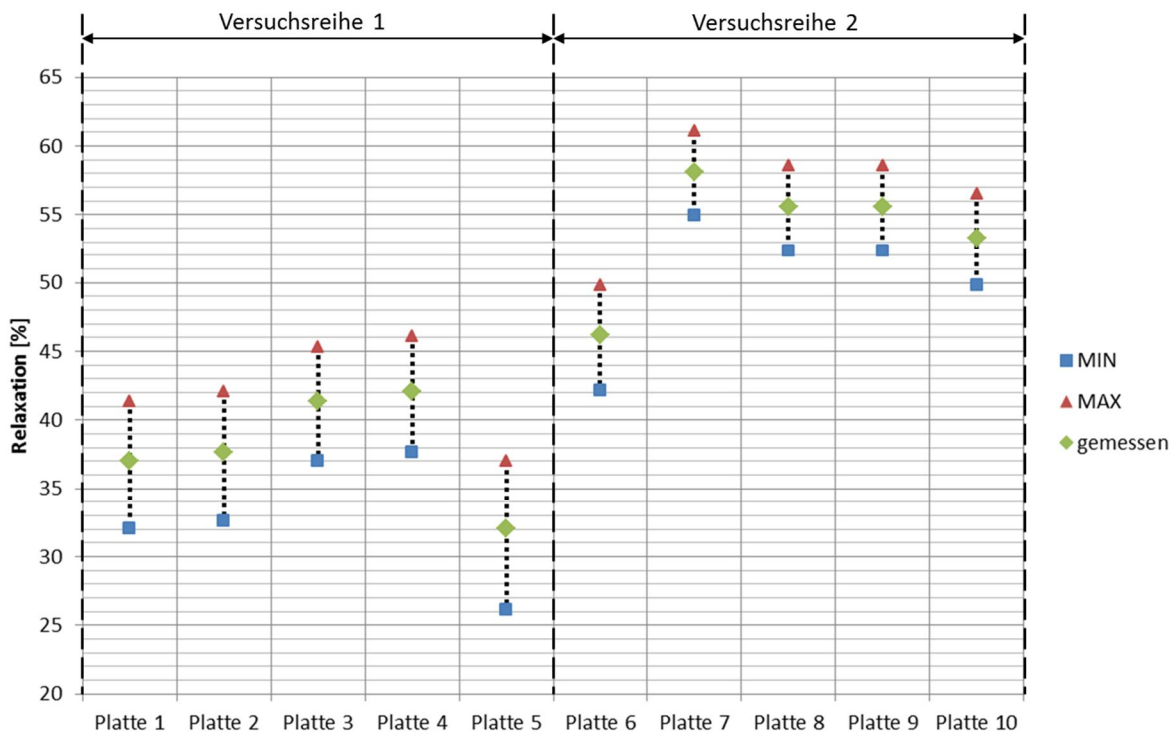
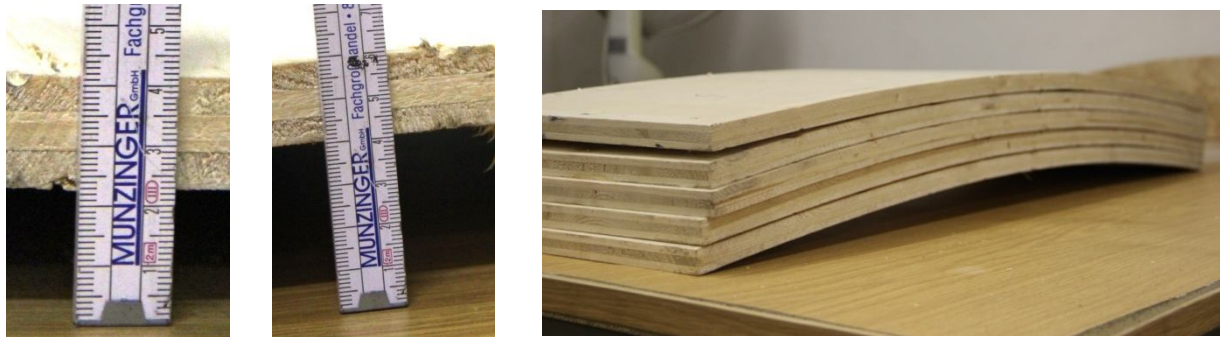


Abb. 259: Gegenüberstellung Versuchsreihe 1 und Versuchsreihe 2

Messungen des Plattenstichs aus Versuchsreihe 1 und 2 bestätigen, den positiven Effekt der Nachbehandlung. So beträgt der Bogenstich der Platten in Versuchsreihe 1 rund 2,2 cm und in Versuchsreihe 2 rund 4 cm (siehe Abb. 260, links und rechts). Die untersuchten Platten aus Versuchsreihe 2 sind in Abb. 261 dargestellt.



**Abb. 260:** Bogenstich der Platten nach dem Versuch      **Abb. 261:** Platten nach dem Versuch

An dieser Stelle sollen die Verschiebungsmodule vor und nach der Versuchsdurchführung noch betrachtet werden. Für die Verschiebungsmodule nach der Biegezeit von 90 Tagen kann wiederum eine bogenförmige und seilförmige Betrachtung angestellt werden (siehe Abb. 255 und Abb. 256).

Platte:	Verschiebungsmodul vor dem Versuch	Verschiebungsmodul nach dem Versuch (Bogen)	Verschiebungsmodul nach dem Versuch (Seil)
6	1164,2 [N/mm]	1283,6 [N/mm]	1349,8 [N/mm]
7	1081,2 [N/mm]	1176,4 [N/mm]	1137,7 [N/mm]
8	1075,5 [N/mm]	1092,6 [N/mm]	1201,5 [N/mm]
9	743,6 [N/mm]	742,2 [N/mm]	741,2 [N/mm]
10	1185,5 [N/mm]	1280,8 [N/mm]	1365,0 [N/mm]

**Tabelle 13:** Verschiebungsmodule vor und nach dem Versuch für Versuchsreihe 2

In Tabelle 13 ist zu erkennen, dass tendenziell eine Steigerung der Steifigkeiten stattfindet, wobei Platte 9 eine Ausnahme bildet und der Verschiebungsmodul leicht abnimmt. Der Zuwachs der Steifigkeit im bogenförmigen Versuch beträgt im Mittel rund 5 % und in der seilförmigen Versuchsdurchführung 9 %. Eine Betrachtung aller Verschiebungsmodule und Werte der Relaxation, zeigt keinen Zusammenhang.

Zum Abschluss der Versuchsreihe 2 konnten teilweise leichte Spalte an den längsseitigen Stößen der Decklamellen, im Zugbereich der Platten verzeichnet werden. Diese hatten sich schon während den Feuchtezyklen mehrfach geöffnet bzw. geschlossen und sind auf Quell- bzw. Schwinderscheinungen zurückzuführen.

Versuchsreihe 3: Wässerung der Proben und Trockenlagerung bei 20°C und 65 % rel. Luftfeuchte

In diesem Versuch wird der Einfluss einer Vorbehandlung der Dreischichtplatten untersucht. Zu diesem Zweck werden diese für zwei Tage im Wasserbad gelagert. Nach der Wasserlagerung beträgt die Holzfeuchte mehr als 30 % und liegt über dem Fasersättigungspunkt. Beim Aufspannen der Platten auf den Lehrgerüsten kann eine wesentliche Abnahme der Steifigkeiten und eine leichtere Verarbeitbarkeit erkannt werden. Auf Grund der geringen Plattenstärke beträgt bereits ein Tag nach dem Biegen und Lagerung im Klimaraum bei 20°C und 65 % relativer Luftfeuchte die Holzfeuchte nur noch rund 18 %. Die Holzfeuchte wird in diesem Versuch nicht über eine kontinuierliche Feuchtemessung aufgezeichnet, da die Probekörper während des Versuchs nur austrocknen sollen

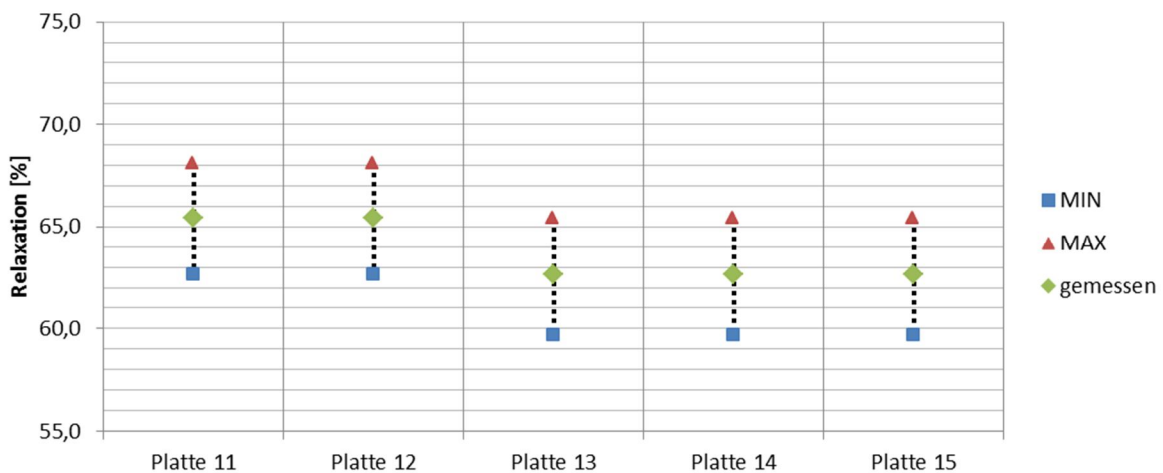


und mehrfach vom Lehrgerüst gelöst werden müssen. Die Kontrolle der Holzfeuchte erfolgt mit Hilfe von Einschlagelektroden und einem elektronischen Holzfeuchtemessgerätes des Unternehmens *Gann*. Die Platten werden 10 Tage nach dem Aufspannen von den Lehrgerüsten gelöst, um den Abbau der Spannung zu überprüfen und nachzuverfolgen. Es zeigt sich, dass zum Aufrechterhalten der Krümmung der Platten lediglich zwei Schnellbauschrauben notwendig sind, die den Verbund mit den schräg angeschnittenen Konstruktionsvollhölzern herstellen. Somit kann das Lösen, Messen der Sehnenlänge und wieder Aufbringen der Platten, in weniger als einer Minute geschehen. Die Messergebnisse zeigen, dass bereits nach 10 Tagen höhere Werte der Relaxation erreicht werden als in Versuchsreihe 1 und Versuchsreihe 2. Entsprechende Mess- und Berechnungsergebnisse sind Tabelle 14 zu entnehmen. Die mittlere Holzfeuchte aller Platten beträgt nach 10 Tagen rund 14,6 %.

Platte:	Sehnenlänge vor dem Lösen:	Sehnenlänge nach dem Lösen:	Berechneter Radius vor dem Lösen	Berechneter Radius nach dem Lösen	Berechnete Relaxation
11	L <sub>11,0</sub> = 97,0 cm	L <sub>11,1</sub> = 98,8 cm	R <sub>11,0</sub> = 121,66 cm	R <sub>11,1</sub> = 185,99 cm	65 %
12	L <sub>12,0</sub> = 97,0 cm	L <sub>12,1</sub> = 98,8 cm	R <sub>12,0</sub> = 121,66 cm	R <sub>12,1</sub> = 185,99 cm	65 %
13	L <sub>13,0</sub> = 97,0 cm	L <sub>13,1</sub> = 98,9 cm	R <sub>13,0</sub> = 121,66 cm	R <sub>13,1</sub> = 194,28 cm	63 %
14	L <sub>14,0</sub> = 97,0 cm	L <sub>14,1</sub> = 98,9 cm	R <sub>14,0</sub> = 121,66 cm	R <sub>14,1</sub> = 194,28 cm	63 %
15	L <sub>15,0</sub> = 97,0 cm	L <sub>15,1</sub> = 98,9 cm	R <sub>15,0</sub> = 121,66 cm	R <sub>15,1</sub> = 194,28 cm	63 %

**Tabelle 14:** Ergebnisse Versuchsreihe 3 – nach 10 Tagen

Eine grafische Auswertung der Berechnungsergebnisse ist in Abb. 262 zu sehen. Der Mittelwert der gemessenen Relaxation liegt bei rund 64 % wobei eine sehr geringe Streuung der Ergebnisse zu verzeichnen ist. Unter Berücksichtigung einer Messungenauigkeit von ±1 mm kann in Platte 13, 14 und 15 ein minimaler Wert der Relaxation von fast 60 % erfasst werden. Die maximalen Werte treten in Platte 11 und 12 mit 68 % auf.



**Abb. 262:** Versuchsreihe 3: Werte der Relaxation nach 10 Tagen

Nach einer Biegedauer von 30 Tagen ist in allen fünf Dreischichtplatten eine Steigerung der Relaxation von fast 5 % zu verzeichnen, wobei die Holzfeuchte weiterhin rund 14,6 % beträgt. Die entsprechenden Messergebnisse und Berechnungsergebnisse können Tabelle 15 entnommen werden.

Platte:	Sehnenlänge vor dem Lösen:	Sehnenlänge nach dem Lösen:	Berechneter Radius vor dem Lösen	Berechneter Radius nach dem Lösen	Berechnete Relaxation
11	$L_{11,0} = 97,0 \text{ cm}$	$L_{11,1} = 98,6 \text{ cm}$	$R_{11,0} = 121,66 \text{ cm}$	$R_{11,1} = 172,14 \text{ cm}$	71 %
12	$L_{12,0} = 97,0 \text{ cm}$	$L_{12,1} = 98,6 \text{ cm}$	$R_{12,0} = 121,66 \text{ cm}$	$R_{12,1} = 172,14 \text{ cm}$	71 %
13	$L_{13,0} = 97,0 \text{ cm}$	$L_{13,1} = 98,7 \text{ cm}$	$R_{13,0} = 121,66 \text{ cm}$	$R_{13,1} = 178,67 \text{ cm}$	68 %
14	$L_{14,0} = 97,0 \text{ cm}$	$L_{14,1} = 98,7 \text{ cm}$	$R_{14,0} = 121,66 \text{ cm}$	$R_{14,1} = 178,67 \text{ cm}$	68 %
15	$L_{15,0} = 97,0 \text{ cm}$	$L_{15,1} = 98,7 \text{ cm}$	$R_{15,0} = 121,66 \text{ cm}$	$R_{15,1} = 178,67 \text{ cm}$	68 %

Tabelle 15: Ergebnisse Versuchsreihe 3 – nach 30 Tagen

Eine grafische Auswertung der Berechnungsergebnisse aus Tabelle 15 unter Annahme einer Messungengenauigkeit von  $\pm 1 \text{ mm}$  ist in Abb. 263 gegeben.

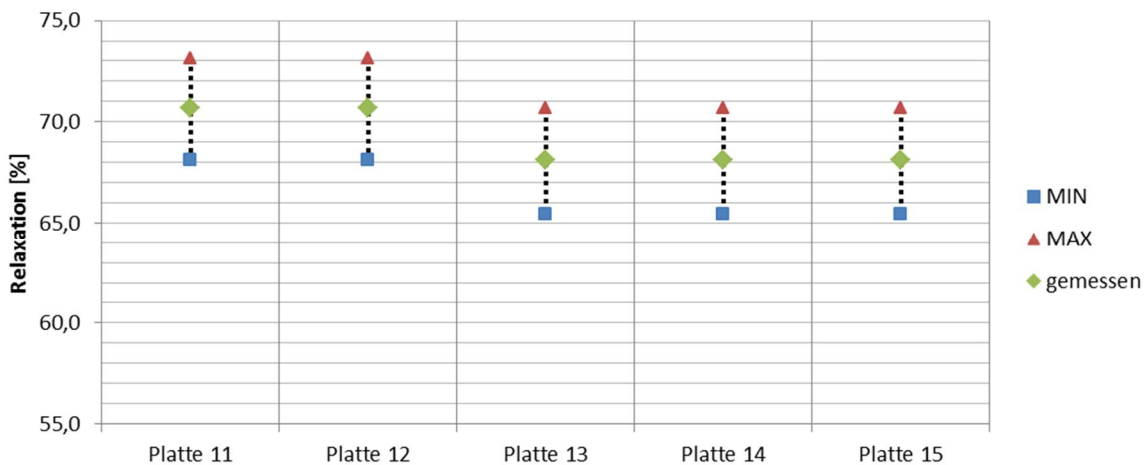


Abb. 263: Versuchsreihe 3: Werte der Relaxation nach 30 Tagen

Der Mittelwert der gemessenen Relaxation liegt bei rund 69 %. Unter Berücksichtigung einer Messungengenauigkeit von  $\pm 1 \text{ mm}$  kann in Platte 13, 14 und 15 ein minimaler Wert der Relaxation von rund 65 % erfasst werden. Die maximalen Werte treten in Platte 11 und 12 mit 73 % auf.

In nachfolgender Abbildung sind die Werte der Relaxation nach 10 und 30 Tagen einander gegenübergestellt.

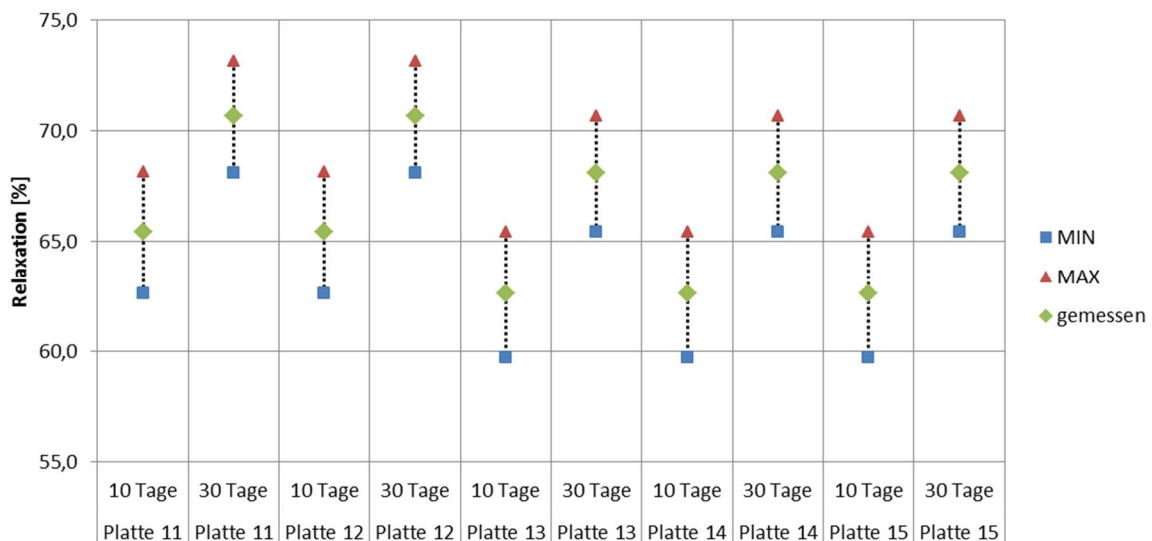


Abb. 264: Versuchsreihe 3: Werte der Relaxation nach 10 und 30 Tagen

Nach 90 Tagen kann keine weitere Steigerung der Relaxation erfasst werden. Lediglich die mittlere Holzfeuchte ist von 14,6 % auf Rund 12,6 % gesunken. Die entsprechenden Mess- und Berechnungsergebnisse sind in Tabelle 16 gegeben. Dieses Ergebnis deckt sich mit Angaben anderer Autoren, wonach die Relaxationsgeschwindigkeit mit zunehmender Zeit abnimmt und beinahe zum Stillstand kommt.

Platte:	Sehnenlänge vor dem Lösen:	Sehnenlänge nach dem Lösen:	Berechneter Radius vor dem Lösen	Berechneter Radius nach dem Lösen	Berechnete Relaxation
11	L <sub>11,0</sub> = 97,0 cm	L <sub>11,1</sub> = 98,6 cm	R <sub>11,0</sub> = 121,66 cm	R <sub>11,1</sub> = 172,14 cm	71 %
12	L <sub>12,0</sub> = 97,0 cm	L <sub>12,1</sub> = 98,6 cm	R <sub>12,0</sub> = 121,66 cm	R <sub>12,1</sub> = 172,14 cm	71 %
13	L <sub>13,0</sub> = 97,0 cm	L <sub>13,1</sub> = 98,7 cm	R <sub>13,0</sub> = 121,66 cm	R <sub>13,1</sub> = 172,14 cm	68 %
14	L <sub>14,0</sub> = 97,0 cm	L <sub>14,1</sub> = 98,7 cm	R <sub>14,0</sub> = 121,66 cm	R <sub>14,1</sub> = 172,14 cm	68 %
15	L <sub>15,0</sub> = 97,0 cm	L <sub>15,1</sub> = 98,7 cm	R <sub>15,0</sub> = 121,66 cm	R <sub>15,1</sub> = 172,14 cm	68 %

Tabelle 16: Ergebnisse Versuchsreihe 3 – nach 90 Tagen

In nachfolgender Abb. 265 ist der zeitliche Verlauf der Relaxation für die untersuchten Dreischichtplatten gegeben. Es zeigt sich, dass die Relaxation in den ersten 10 Tagen am schnellsten von statten geht und nach 30 Tagen beinahe zum Erliegen kommt.

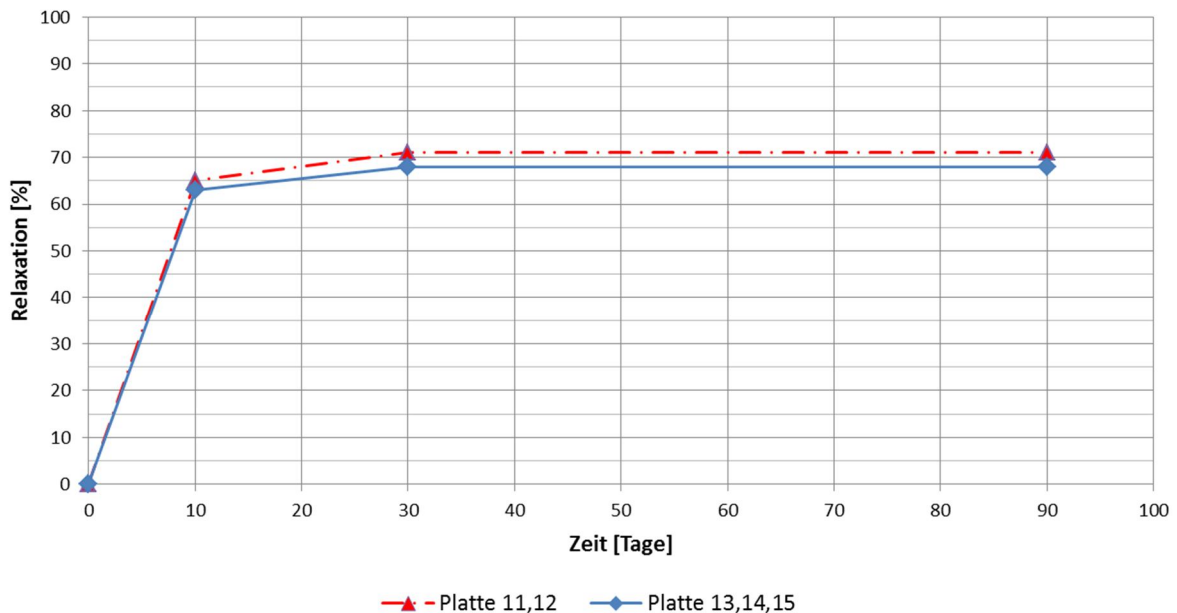


Abb. 265: Versuchsreihe 3: Zeitlicher Verlauf der Relaxation

Wie in Kapitel 5.3 beschrieben, kann der Relaxationsverlauf durch verschiedene Gleichungen beschrieben werden. Dazu haben sich in diesem Fall die Gleichungen nach [Kubat, et al., 1989] und [Reinhardt, 1973] als besonders geeignet erwiesen, da für die meisten anderen Ansätze zu wenig Messergebnisse vorhanden sind. Zudem sind für die Funktionsverläufe nach Reinhardt und Kubat bereits geschlossene mathematische Funktionen vorhanden. Da in den durchgeführten Versuchen die Relaxationsergebnisse nur bis 90 Tage bekannt sind, wird in Gleichung (7.4) die Endkriechzahl  $\varphi_{\infty}$  durch  $\varphi_{90}$  ersetzt.

$$\text{Reinhardt: } \chi = \left[ 1 - \frac{1}{1 + \varphi_{90}} \cdot \left( 1 + \varphi_{90} \cdot e^{-k \cdot \sqrt{t}} \right) \right] \cdot 100\% \quad (7.4)$$

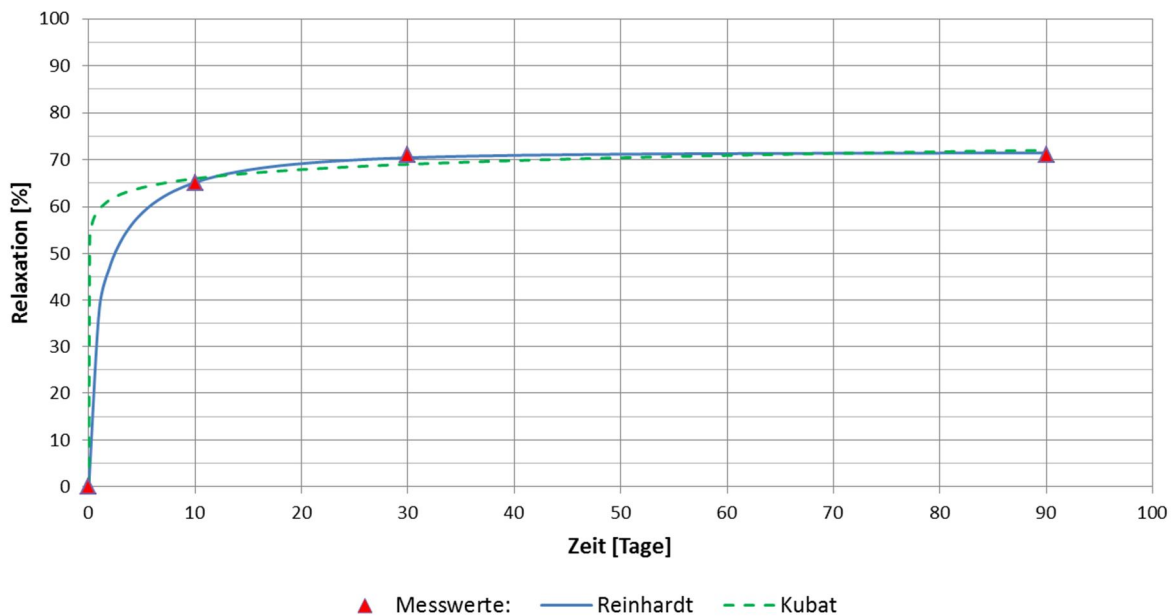
$$\text{Kubat: } \chi = \left[ 1 - \exp(-\alpha \cdot t^{\beta}) \right] \cdot 100\% \quad (7.5)$$

Aus den erhaltenen Messergebnissen können mit Hilfe einer nichtlinearen Ausgleichsrechnung, unter Verwendung der kleinsten Fehlerquadrate und der Software „Maple 15“, die unbekanntenen Konstanten  $\varphi_{90}$ ,  $k$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmt werden. Die berechneten Zahlenwerte sind in Tabelle 17 gegeben.

Platte:	Reinhardt		Kubat	
	$\varphi_{90}$	$k$	$\alpha$	$\beta$
11,12	2,506477608	-0,767137546	0,905827058	0,075677307
13, 14, 15	2,149413000	-0,882818913	0,927452246	0,04982973

**Tabelle 17:** Konstanten der Relaxationskurven

Die grafische Auswertung der Gleichungen (7.4) und (7.5) zeigt, dass die Relaxationsfunktion nach [Reinhardt, 1973] besonders gut geeignet ist, die erhaltenen Messgrößen abzubilden (siehe Abb. 266 und Abb. 267). Durch ihren langsameren Anstieg in den ersten Tagen stellt sie zudem einen realistischeren Verlauf als Gleichung (7.5) dar. Es soll besonderes Augenmerk auf die Konstante  $\varphi_{90}$  gelegt werden. Wie in Kapitel 5.5 erläutert, soll an dieser Stelle  $\varphi_{90}$  durch den aus DIN 1052:2008-12 bekannten Verformungsbeiwert  $k_{def}$  ersetzt werden. Dieser lautet für Sperrholz in der Nutzungsklasse 3:  $k_{def} = 2,50$  und für Brettschichtholz in der Nutzungsklasse 3:  $k_{def} = 2,00$ . Beide Werte liegen sehr nahe an den aus den Versuchen ermittelten Werten ( $\varphi_{90} = 2,506$  bzw.  $\varphi_{90} = 2,149$ ).



**Abb. 266:** Relaxationsverlauf nach Reinhardt und Kubat für Platte 11, 12

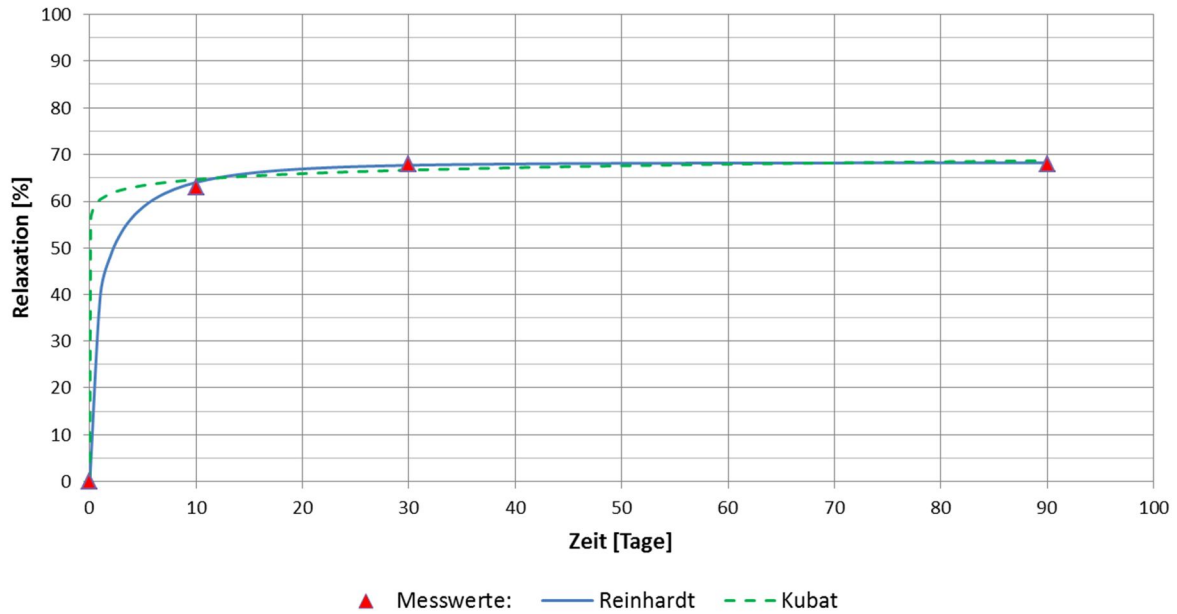


Abb. 267: Relaxationsverlauf nach Reinhardt und Kubat für Platte 13, 14, 15

Werden alle drei Versuchsreihen betrachtet, so stellt sich heraus, dass die erhaltene Relaxation sehr gut durch folgende Formel (7.6) berechnet werden kann.

$$\chi = \left( 1 - \frac{1}{1 + k_{def}} \right) \cdot 100\% \tag{7.6}$$

Für Versuchsreihe 1 kann der Verformungsbeiwert für Sperrholz in der Nutzungsklasse 1 (NKL 1) verwendet werden. In Versuchsreihe 2 trifft der Verformungsbeiwert für NKL 2 und in Versuchsreihe 3 der Verformungsbeiwert der NKL 3 sehr gut zu. Eine Gegenüberstellung der Ergebnisse ist in Tabelle 18 gegeben.

Versuchsreihe	Messwerte nach 90 Tagen Relaxation [%]	NKL	$k_{def}$	Relaxation nach Gleichung (7.6) [%]
1	37-42	1	0,8	44
2	46-58	2	1,0	50
3	68-71	3	2,5	71

Tabelle 18: Gegenüberstellung der gemessenen Relaxation mit Berechnungen nach DIN 1052:2008-12

### 7.5 Fazit

Untersuchungen an einem 25 Jahre alten, stark gekrümmten Brettschichtholzträger zeigen, dass die verwendeten Lamellen immer noch unter Spannung stehen. Dabei verliert das verwendete Holz nicht die Eigenschaft sich an wechselnde klimatische Bedingungen durch Quell- und Schwindefeffekte anzupassen. Der Spannungsabbau in den untersuchten Lamellen aus Fichte, beträgt nach 25 Jahren und einer kontinuierlichen Lagerung in Nutzungsklasse 1, zwischen 46 % und 55 %.

Im Hinblick auf die Herstellung von Zylinderschalen aus Holzwerkstoffplatten wird festgestellt, dass entsprechende Vor- bzw. Nachbehandlungen mit Wasser, das Relaxationsvermögen erheblich beeinflussen. Dabei zeigt eine Wässerung der untersuchten Probekörper vor der Krümmung den

größten Erfolg. Es werden Werte der Spannungsrelaxation von 68 % bis 71 %, in dreilagigen, kreuzweise verklebten Holzwerkstoffplatten erreicht. Der größte Teil der Spannungen wird in den ersten 10 Tagen abgebaut. Durch das Befeuchten wird die Verarbeitbarkeit der Platten, in Folge des Abnehmens des E-Moduls, erleichtert. Es kann durch das Befeuchten jedoch zu Problemen bei einer etwaigen Verklebung kommen. Eine erhöhte Abnahme der Spannungen kann durch eine nachträgliche Befeuchtung erreicht werden. Durch die Befeuchtung der Zugzone werden Spannungsrelaxationen von 50 % bis 57 % nach 90 Tagen erreicht. Werden keine Befeuchtungen durchgeführt, so liegt der Spannungsabbau nach 90 Tagen bei rund 33 % bis 42 %. Der Verlauf der Spannungsrelaxation, lässt sich sehr gut mit Gleichung (7.4) beschreiben. Es müssen dazu jedoch entsprechende Parameter aus Versuchen ermittelt werden. Es zeigt sich, dass der Endwert der Spannungen nach 90 Tagen, durch Gleichung (7.6) ausreichend genau bestimmt werden kann. Dazu können in Abhängigkeit der Befeuchtung die Werte  $k_{def}$  aus DIN 1052:2008-12 entnommen werden.



## 8 Statische Nachweise unter Berücksichtigung der Relaxation

### 8.1 Hintergrund

Die korrekte Berücksichtigung von Eigenspannungen, bei der Herstellung von gekrümmten Holzbauteilen, ist sehr wichtig. Der einzige direkte Verweis dazu konnte in [Čížek, 1961] gefunden werden. Diese Literaturquelle bezieht sich auf die Herstellung und Bemessung von gekrümmten Brettschichtholzträgern, unter Berücksichtigung der entstehenden Eigenspannungen und Relaxation, in der der ČSR-Norm. Die im Brettschichtholzträger gespeicherten Spannungen werden dabei, durch einen um den Faktor 0,5 abgeminderten E-Modul berücksichtigt. Dieser abgeminderte E-Modul dient gleichzeitig zur Berechnung von Endkriechverformungen im Nachweis der Gebrauchstauglichkeit. Grundsätzlich konnten nur Normentexte gefunden werden, welche sich auf die Herstellung von gekrümmten Brettschichtholzträgern bzw. Brettsperrholzelementen beziehen. Es gibt keinen Normentext, der eine nachträgliche Krümmung fertiger Bauprodukte berücksichtigt.

Im heutigen Nachweisverfahren der Tragfähigkeit, welches auf semiprobabilistischen Werten basiert, müssen Einwirkungen getrennt von Tragfähigkeiten betrachtet werden. Beide Seiten werden durch entsprechende Teilsicherheitsfaktoren, in Abhängigkeit Ihrer Wahrscheinlichkeit behaftet. Da zur Berücksichtigung der durch Zwangs-Krümmungen induzierten Spannungen nichts vorhanden ist, werden in den folgenden Abschnitten entsprechende Ansätze erarbeitet.

### 8.2 Einwirkungen

In diesem Abschnitt sollen die Einwirkungen auf gekrümmte Holzbauteile erfasst, und deren Berücksichtigung im Nachweis der Tragfähigkeit diskutiert werden. Es wird die Ringrichtung betrachtet, da die Frage der Berücksichtigung, der durch das Krümmen induzierten Spannungen, noch ungeklärt ist.

Die Einwirkungen auf ein Bauteil setzen sich in der Regel aus ständigen, veränderlichen und außergewöhnlichen Lasten zusammen. Die durch die Krümmung induzierten Spannungen  $\sigma_{m,K}$  zählen zu den ständigen Einwirkungen. Sie sind vom Krümmungsradius  $R$ , dem E-Modul  $E$  und der Bauteilstärke  $d$  abhängig (siehe Gleichung (8.1)).

$$\sigma_{m,K} = \frac{E \cdot d}{2 \cdot R} \quad (8.1)$$

Da der Radius  $R$  eine wesentliche Größe beim Krümmen von Bauteilen ist, kann ein entsprechender geometrischer Bemessungswert  $R_d$  nach DIN EN 1990:2010-12 ermittelt werden.

$$R_d = R_{nom} \mp \Delta R \quad (8.2)$$

$R_{nom}$  gibt den Nennwert des Radius an und  $\Delta R$  die zu erwartende fertigungstechnische Abweichung. Allgemein wird davon ausgegangen, dass die Genauigkeit der heutigen computergesteuerten, holzbearbeitenden Maschinen im Millimeterbereich liegt. Um auf der sicheren Seite zu liegen, kann eine Genauigkeit von 1 cm angenommen werden. Da sich die Spannungen bei einem kleiner werdenden Radius erhöhen, soll  $\Delta R$  vom Nennwert  $R_{nom}$  abgezogen werden.

Wie Versuche in Kapitel 7 zeigen, nehmen die durch das Krümmen induzierten Spannungen sehr schnell ab. Dabei muss eine eventuelle Feuchtebehandlung berücksichtigt werden. So treten bei

wassergesättigten Dreischichtplatten binnen 30 Tagen Relaxationen von 68 % bis 71 % auf. Bei mit Wasser nachbehandelten Dreischichtplatten beträgt die Relaxation nach 90 Tagen 46 % bis 58 % und bei unbehandelten Platten 37 % bis 42 %. Dieser Effekt ist vom verwendeten Material abhängig, weshalb die Relaxation durch eine Abminderung des E-Moduls berücksichtigt werden soll. In Kapitel 7 hat sich gezeigt, dass der Relaxationsverlauf sehr gut durch Gleichung (7.4) und ein entsprechendes Endmaß der Relaxation, durch Gleichung (7.6) erfasst werden kann. Wird davon ausgegangen, dass die Relaxation nach 30 Tagen fast vollkommen abgeklungen ist, so kann ein ideeller E-Modul  $E_{ideell}$  wie in Gleichung (8.3) gegeben ermittelt werden.

$$E_{ideell} = E_{mean} \cdot \left( \frac{1}{1 + k_{def}} \right) \quad (8.3)$$

Bei dem hier verwendeten E-Modul  $E_{mean}$  handelt es sich um den Mittelwert einer stochastischen Reihe, dessen 5%-Quantilwert durch Multiplikation mit  $2/3$  (siehe [DIN EN 1995-1-1]) erhalten werden kann. Wird von einer Gaußverteilung ausgegangen, so kann der 95%-Quantilwert durch Multiplikation mit  $4/3$  bestimmt werden. Die Verwendung des 95%-Quantilwertes scheint in diesem Fall gerechtfertigt zu sein, da der E-Modul einen negativen Einfluss auf die Schnittgrößen bzw. Tragfähigkeit besitzt. Der Verformungsbeiwert  $k_{def}$  kann in Abhängigkeit des Materials und der Vor- bzw. Nachbehandlung gewählt werden. Der Bemessungswert der Bauteilstärke  $d$  wird dem gegebenen Nennwert gleichgesetzt, weshalb eine charakteristische Spannung in Folge des Krümmens nach 30 Tagen berechnet werden kann (siehe Gleichung (8.4)).

$$\sigma_{m,K,k} = \frac{2 \cdot d}{3 \cdot (R_{nom} - \Delta R)} \cdot E_{mean} \cdot \left( \frac{1}{1 + k_{def}} \right) \quad (8.4)$$

Um die Einwirkungen auf Bemessungsniveau zu heben, wird eine Anlehnung an DIN EN 1992-1-1 („Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken“) vorgeschlagen. Darin werden Einwirkungen aus Zwang, mit einem Teilsicherheitsbeiwert von  $\gamma_{Zwang} = 1,00$  multipliziert. Da in keiner, für den Holzbau relevanten Norm der Lastfall Zwang behandelt wird, scheint diese Annahme gerechtfertigt zu sein.

### 8.3 Widerstände

Für den Holzbau gilt, dass der Bemessungswert der Tragfähigkeit  $R_d$  aus dem charakteristischen Wert der Tragfähigkeit  $R_k$ , einem materialabhängigen Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_M = 1,3$  und einem Modifikationsbeiwert  $k_{mod}$  berechnet werden kann. Dabei berücksichtigt der Modifikationsbeiwert  $k_{mod}$  die Möglichkeit einer Kriechbruchscheinung, welche von der Belastungsdauer und den umgebenden klimatischen Bedingungen abhängig ist. Wird ein möglicher Kriechbruch verhindert, indem keine zusätzlichen Verformungen möglich sind, so kann dieser nach Meinung des Verfassers zu  $k_{mod} = 1,0$  gesetzt werden. Daraus ermittelt sich für den Lastfall des Zwanges ein Bemessungswert der Tragfähigkeit von:

$$R_d = \frac{R_k \cdot k_{mod}}{\gamma_M} = \frac{R_k}{1,3} \quad (8.5)$$

## 8.4 Berechnung eines stark gekrümmten Brettschichtholzträgers

In diesem Kapitel soll ein stark gekrümmter Brettschichtholzträger nach [DIN EN 1995-1-1] berechnet und die Ergebnisse mit den in den vorherigen Kapiteln gewonnen Erkenntnissen verglichen werden. Der betrachtete Träger ist in Abb. 268, und die entsprechenden Berechnungswerte in Tabelle 19 gegeben. Es wird davon ausgegangen, dass der Träger gegen seitliches Ausweichen kontinuierlich gehalten wird.

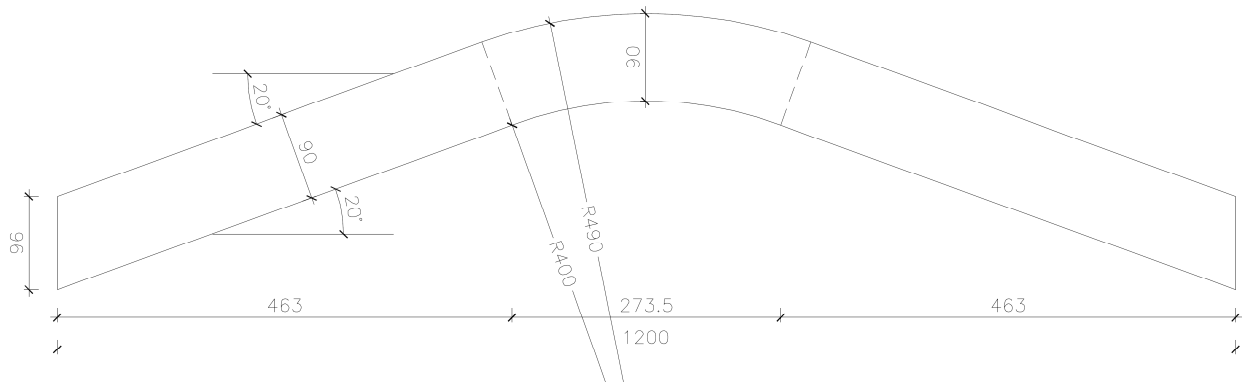


Abb. 268: Grafische Darstellung des betrachteten Trägers – alle Maße in cm

Geometrie		Belastung	
Spannweite:	L=12,00 m	Eigengewicht des Binders:	$g_{k,1}=0,85$ kN/m
Binderbreite:	b=0,18 m	Ständige äußere Einwirkungen:	$g_{k,2}=4,00$ kN/m
Binderhöhe am Auflager:	$h_A=0,96$ m	Schneelast:	$s_k=7,00$ kN/m
Innenradius:	$r_{in}=4,00$ m		
Neigung Ober- Untergurt:	$\vartheta=20^\circ$		
Lamellenstärke:	t=18 mm	<b>Randbedingungen</b>	
<b>Material</b>		Meereshöhe:	HüNN<1000 m
Material der Lamellen:	T14 (C24)	Gebäudekategorie:	A
Material des Trägers:	GL 24h	Nutzungs-kategorie:	NKL 1

Tabelle 19: Berechnungswerte

Die gewählte Lamellenstärke von 18 mm liegt unter der nach [DIN EN 14080:2013-09] geforderten Obergrenze von  $t \leq 19,2$  mm (siehe Gleichung (4.14)).

$$t \leq \frac{r}{250} \cdot \left( 1 + \frac{f_{m,j,dc,k}}{150} \right) = \frac{4000 \text{ mm}}{250} \cdot \left( 1 + \frac{30 \text{ N/mm}^2}{150} \right) = 19,2 \text{ mm} \quad (8.6)$$

Es sollen die Biege- und Randspannungen im stark gekrümmten Firstbereich nachgewiesen werden. Dazu kann folgendes Moment in Feldmitte bestimmt werden:

$$M_{ap,d} = \frac{(g_d + s_d) \cdot L^2}{8} = \frac{(1,35 \cdot 0,85 + 1,35 \cdot 4,00 + 1,5 \cdot 7,00) \cdot 12,00^2}{8} = 306,85 \text{ kNm} \quad (8.7)$$

Die maximalen Randspannungen, unter Berücksichtigung der nicht linearen Spannungsverteilung im Firstbereich betragen:

$$\sigma_{ap,d} = \frac{k_l \cdot M_{ap,d}}{W_{ap}} = \frac{1,09 \cdot 6 \cdot 306,85 \cdot 10^{-3} \text{ MNm}}{0,18 \cdot 0,90^2 \text{ m}^3} = 13,76 \text{ MN/m}^2 \quad (8.8)$$

Dadurch kann unter Berücksichtigung der durch die Krümmung induzierten Eigenspannungen, folgender Nachweis der Tragfähigkeit geführt werden:

$$\frac{r_{in}}{t} = \frac{400 \text{ cm}}{1,8 \text{ cm}} = 222 < 240 \rightarrow k_r = 0,76 + 0,001 \cdot \frac{r_{in}}{t} = 0,98 \quad (8.9)$$

$$\frac{\sigma_{ap,d}}{k_r \cdot f_{m,d}} = \frac{13,76 \text{ MN/m}^2}{0,98 \cdot 16,61 \text{ MN/m}^2} = 0,84 < 1,0 \quad (8.10)$$

Es zeigt sich, dass nach [DIN EN 1995-1-1] ein Ausnutzungsgrad von 84%, im betrachteten Brettschichtholzträger auftritt.

Nun sollen Berechnungen unter Berücksichtigung der Eigenspannungen, wie in Kapitel 8.2 und 8.3 beschrieben, angestellt werden. Dazu werden die oberste und unterste Lamelle des Trägers isoliert betrachtet. Die durch die Krümmung im Firstbereich induzierten Spannungen können nach Gleichung (8.4) berechnet werden. Es wird angenommen, dass durch den Feuchteintrag des Klebstoffes, der Spannungsabbau begünstigt wird und entsprechend ein  $k_{def}$ -Wert der Nutzungsklasse 2 angesetzt werden kann. Der daraus ermittelte Wert der Relaxation, deckt sich mit den Versuchsergebnissen aus Kapitel 6. Geometrische Abweichungen des Krümmungsradius werden an dieser Stelle nicht beachtet ( $\Delta R=0$ ). Somit können für die innenliegende und außenliegende Lamelle folgende Werte der Eigenspannungen ermittelt werden, wobei weiterhin von einem ebenbleiben der Querschnitte ausgegangen wird:

Innenliegende Lamelle:

$$\sigma_{m,K,k,in} = \frac{2 \cdot d}{3 \cdot \left( r_{in} + \frac{t}{2} \right)} \cdot E_{mean} \cdot \left( \frac{1}{1 + k_{def}} \right) \quad (8.11)$$

$$\sigma_{m,K,k,in} = \frac{2 \cdot 18 \text{ mm}}{3 \cdot 4009 \text{ mm}} \cdot 11000 \text{ N/mm}^2 \cdot \left( \frac{1}{1 + 0,8} \right) = 18,29 \text{ N/mm}^2$$

Außenliegende Lamelle:

$$\sigma_{m,K,k,au} = \frac{2 \cdot d}{3 \cdot \left( r_{in} + h_{ap} - \frac{t}{2} \right)} \cdot E_{mean} \cdot \left( \frac{1}{1 + k_{def}} \right) \quad (8.12)$$

$$\sigma_{m,K,k,au} = \frac{2 \cdot 18 \text{ mm}}{3 \cdot (4000 + 891) \text{ mm}} \cdot 11000 \text{ N/mm}^2 \cdot \left( \frac{1}{1 + 0,8} \right) = 14,99 \text{ N/mm}^2$$

Die daraus zu ermittelnden Biegegrandspannungen auf Bemessungsniveau lauten:

$$\sigma_{m,K,d,in} = \sigma_{m,K,k,in} \cdot \gamma_{Zwang} = 18,29 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,00 = 18,29 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{m,K,d,au} = \sigma_{m,K,k,au} \cdot \gamma_{Zwang} = 14,99 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,00 = 14,99 \text{ N/mm}^2 \quad (8.13)$$

Die Spannungen in Folge äußerer Beanspruchungen, auf Bemessungsniveau können Gleichung (8.8) mit  $\sigma_{ap,d} = 13,76 \text{ N/mm}^2$  entnommen werden. Da lediglich die Lamellen nachgewiesen werden, wird die Annahme getroffen, dass die durch die äußeren Beanspruchungen verursachten Spannungen, konstant über die Lamellenstärke verteilt sind. Somit können kombinierte Zug-Biege- bzw. Druck-



Es zeigt sich, dass die unterste Lamelle eine Dehnung von 3,0 ‰ und eine Stauchung von 1,5 ‰ erfährt. An der obersten Lamelle betragen die Dehnungen entsprechend +1,1 ‰ und -2,6 ‰. Werden diese Werte mit den Bruchdehnungen aus der Literatur verglichen (Bruchdehnung auf Zug  $\epsilon_z \approx 6 \text{ ‰}$ , Bruchdehnung auf Druck  $\epsilon_D \approx 8 \text{ ‰}$ <sup>163</sup>) so wird festgestellt, dass diese nicht überschritten werden. Es kann folglich darauf geschlossen werden, dass kein Bauteilversagen unter der gegebenen Belastung auftritt.

Werden die Berechnungsergebnisse nach [DIN EN 1995-1-1] mit den Ergebnissen des Verfassers verglichen, so kann eine erhebliche Diskrepanz festgestellt werden. Im ersteren Fall verfügt der gekrümmte Träger über reichliche Reserven (84 % Ausnutzungsgrad) und könnte noch zusätzlich belastet werden. In der zweiten Berechnung, unter Berücksichtigung der nach der Relaxation erhaltenen Eigenspannungen, auf Grundlage von eigenen Versuchen, wird der Nachweis der Tragfähigkeit unter Betrachtung der einzelnen Lamellen bei weitem nicht eingehalten. Die Bruchdehnungen werden zwar nicht überschritten, aber sie liegen sehr nahe an der Proportionalitätsgrenze von 3 ‰. Es stellt sich somit die Frage, ob das in [DIN EN 1995-1-1] gegebene Bemessungsverfahren die erforderliche Sicherheit für gekrümmte, tragende Bauteile überhaupt erfüllt. Entsprechende Mindestzuverlässigkeiten können nach [DIN EN 1990:2010-12] in Abhängigkeit der Klassen für Schadensfolgen ermittelt werden.

Es muss an dieser Stelle erwähnt werden, dass beim Krümmen von Holzlamellen mit Spannungen parallel zur Faserrichtung folgende Beobachtungen gemacht werden können. Die Krümmung erfolgt prinzipiell um die schwache Achse der Holzlamellen, wobei die Bestimmung der Holzfestigkeitsklasse jedoch nach dem Prinzip der Hochkant-Biegung erfolgt. Die Festigkeitswerte der Hochkant-Biegung werden in Versuchen auf eine Bretthöhe von 150 Millimetern bezogen, wobei das Verhältnis von Stützweite zu Bretthöhe gleich 18 beträgt. Es hat sich gezeigt, dass bei Festigkeitsbestimmungen im Flach-Kant-Biegeversuch rund 15 bis 20% höhere Festigkeiten erhalten werden als im Hochkant-Biegeversuch. Die Spannungen in den gekrümmten Lamellen wurden auf der Grundlage eines mittleren E-Moduls bestimmt. Wird die entsprechende Festigkeit als Mittelwert angesetzt, so liegt diese rund 60 bis 70% höher als der charakteristische Wert der Festigkeit unter Annahme eines Variationskoeffizienten von rund 20 bis 25%. Dieser Variationskoeffizient entspricht den Ergebnissen einer üblichen maschinellen Sortierung. Das bedeutet, dass eine Brettlamelle welche in der Festigkeitsklasse C24 eingestuft und um die schwache Achse beansprucht wird eine mittlere Festigkeit von  $24 \cdot 1,6 \cdot 1,15 = 44 \text{ N/mm}^2$  besitzt. Werden Bretter so stark gekrümmt, dass eine maximale Biegerandspannung von  $24 \text{ N/mm}^2$  entsteht, so liegt das Verhältnis von Biegerandspannung zu mittlerer Kurzzeitfestigkeit bei rund 55% ( $24/44 \approx 55\%$ ).<sup>164</sup> Diese Dinge wurden in den vorherigen Berechnungen nicht berücksichtigt und sollten in einer Folgearbeit näher betrachtet werden um exaktere Berechnungsmöglichkeiten für stark gekrümmte Holzbauteile zu liefern.

Eine Auswertung von [Dietsch, 2012] an 300 weitgespannten Holztragwerken zeigt, dass an 17% der untersuchten Tragwerke Schäden in Folge Querspannungen auftreten. Es besteht die Möglichkeit, dass mitunter ein Teil dieser Schäden, auf eine nicht ausreichende Berücksichtigung der durch Krümmung induzierten Eigenspannungen zurückzuführen ist. Diese Vermutung sollte in einer Folgearbeit näher untersucht werden, nachdem auch erkannt wurde, dass der Beiwert  $k_t$  aus [DIN EN 1995-1-1] eine geringe Berücksichtigung der Eigenspannungen in gekrümmten Trägern erlaubt.

---

<sup>163</sup> Neuhaus, H. (1994). *Lehrbuch des Ingenieurholzbaus*. Seite 34

<sup>164</sup> Stapel, et al. (2010). *Influence of origin and grading principles on the engineering properties of European timber*. CIB W18 paper 43-5-2



## 8.5 Berechnung einer hölzernen Zylinderschale

In diesem Abschnitt soll die aus Kapitel 4 bekannte Zylinderschale (siehe Abb. 270), unter den in Kapitel 7 gewonnenen Erkenntnissen nachgewiesen werden. Dazu wird die Ringrichtung der Zylinderschale betrachtet. Aus den Ergebnissen in Anhang E ist bekannt, dass die longitudinale Richtung die Nachweise der Tragfähigkeit erfüllt und soll somit nicht weiter betrachtet werden. Das Trägerrostmodell hat eine einheitliche Rostbreite von 10 Zentimetern.

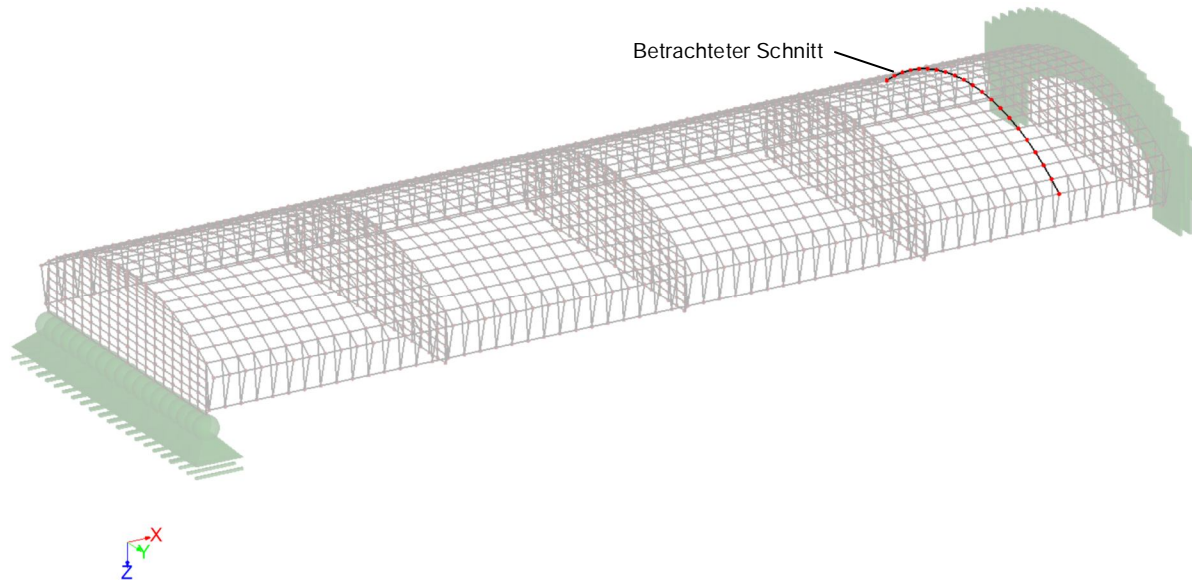


Abb. 270: Untersuchte Zylinderschale und betrachteter Schnitt bei X=5,30 Meter

Um die durch die Krümmung induzierten Spannungen zu berücksichtigen, soll wiederum der Ansatz einer ideellen Temperaturlast verwendet werden (siehe Kapitel 4.4). Um den durch Relaxationsprozesse hervorgerufenen Spannungsabbau entsprechend umzusetzen, kann folgender Zusammenhang geschrieben werden:

$$\sigma_{m,K,k} = \frac{2 \cdot d}{3 \cdot (R_{nom} - \Delta R)} \cdot E_{mean} \cdot \left( \frac{1}{1 + k_{def}} \right) = \frac{\Delta T_{ideell} \cdot \alpha_T}{d} \cdot E_{mean} \cdot \frac{d}{2} \quad (8.17)$$

$$\Delta T_{ideell} = \frac{4 \cdot d}{3 \cdot \alpha_T} \cdot \frac{1}{(R_{nom} - \Delta R)} \cdot \left( \frac{1}{1 + k_{def}} \right)$$

Die unter diesem Ansatz ermittelte ideelle Temperaturlast, erfüllt die beschriebenen Kriterien nach Kapitel 8.2 und wird wiederum als Beanspruchung auf das Trägerrostmodell in Ringrichtung aufgebracht. Die geometrische Abweichung des Krümmungsradius wird an dieser Stelle nicht beachtet ( $\Delta R=0$ ). Es werden Spannungen nach dem Abklingen des Relaxationsprozesses betrachtet, was laut Versuchen aus Kapitel 7 nach rund einem Monat der Fall ist. Zudem werden zwei Varianten der Plattenbehandlung untersucht. In der ersten Variante wird die verwendete Dreischichtplatte nach der Krümmung, durch das Befeuchten an der gezogenen Faser nachbehandelt. So kann ein Verformungsbeiwert  $k_{def}=1,0$  in Gleichung (8.17) eingesetzt werden. Variante zwei betrachtet die Verwendung einer wassergesättigten Dreischichtplatte, wodurch der Verformungsbeiwert gleich  $k_{def}=2,5$  gesetzt werden kann. Daraus ergeben sich die beiden ideellen Temperaturlasten:

$$\text{Variante 1: } \Delta T_{ideell,1} = \frac{4 \cdot 6,6 \text{ mm}}{3 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}} \cdot \frac{1}{1360 \text{ mm}} \cdot \left( \frac{1}{1+1,0} \right) = 647 \text{ }^\circ\text{C} \quad (8.18)$$

$$\text{Variante 2: } \Delta T_{ideell,2} = \frac{4 \cdot 6,6 \text{ mm}}{3 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}} \cdot \frac{1}{1360 \text{ mm}} \cdot \left( \frac{1}{1+2,5} \right) = 369,7 \text{ }^\circ\text{C} \quad (8.19)$$

Im Grenzzustand der Tragfähigkeit können somit zwei Lastfallkombinationen (LK) betrachtet werden:

$$\text{Lastfallkombination 1: } 1,35 \cdot g_k + 1,5 \cdot q_k + 1,0 \cdot \Delta T_{ideell,1} \quad (8.20)$$

$$\text{Lastfallkombination 2: } 1,35 \cdot g_k + 1,5 \cdot q_k + 1,0 \cdot \Delta T_{ideell,2} \quad (8.21)$$

Alle Berechnungen werden mit der Software „R-Stab“ durchgeführt, wobei eine Berechnung am verformten System zugrunde gelegt wird (TH. 2. Ordnung). Des Weiteren wird lediglich eine symmetrische Laststellung betrachtet. Es ergeben sich für die beiden Lastfallkombinationen folgende Normkraft- und Momentenverläufe in Ringrichtung. Der Schnitt wird bei einer Ordinate X=5,30 Metern geführt (siehe Abb. 270).

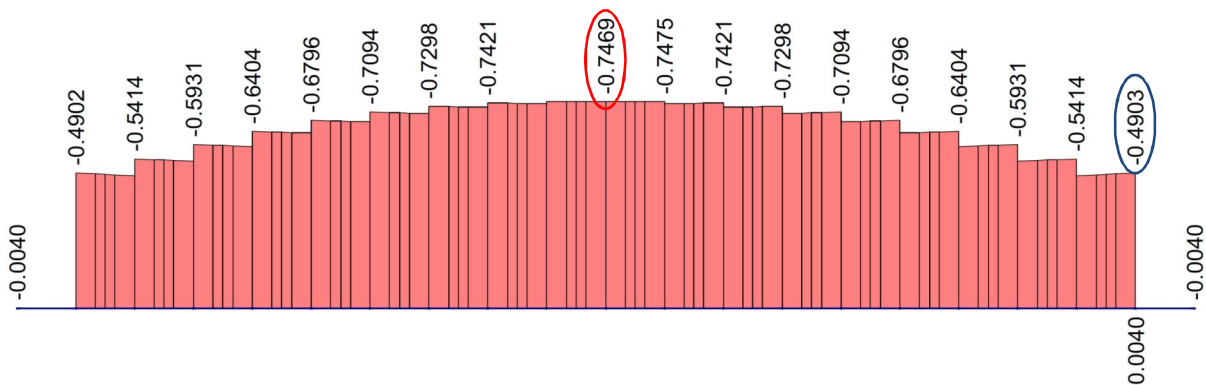


Abb. 271: Normkraftverlauf in Ringrichtung für die LG 1 [kN]

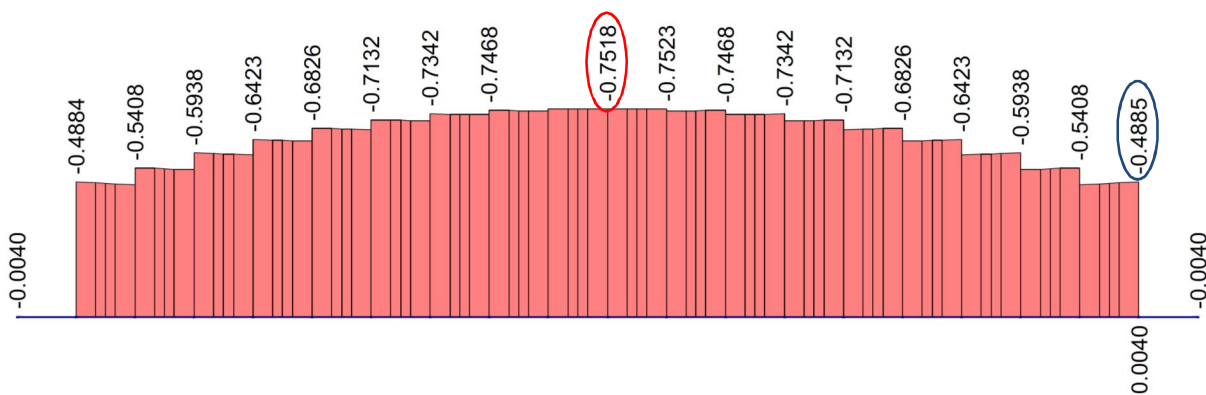


Abb. 272: Normkraftverlauf in Ringrichtung für die LG 2 [kN]

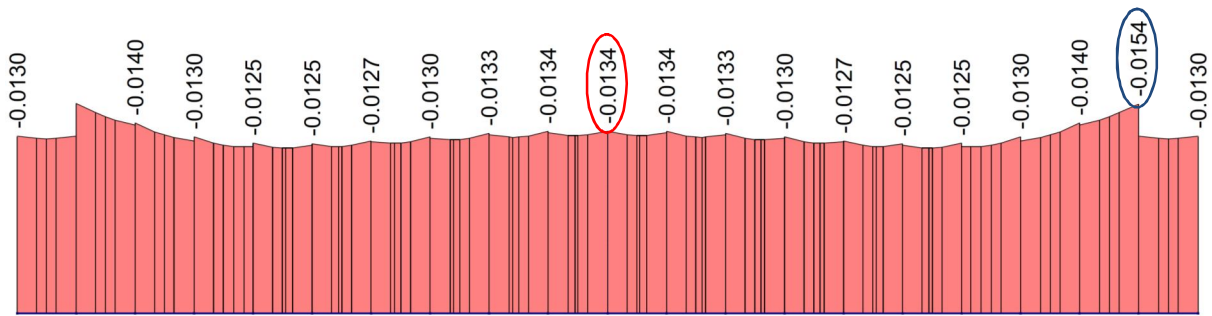


Abb. 273: Momentenverlauf um die lokale y-Achse für die LG 1 [kNm]

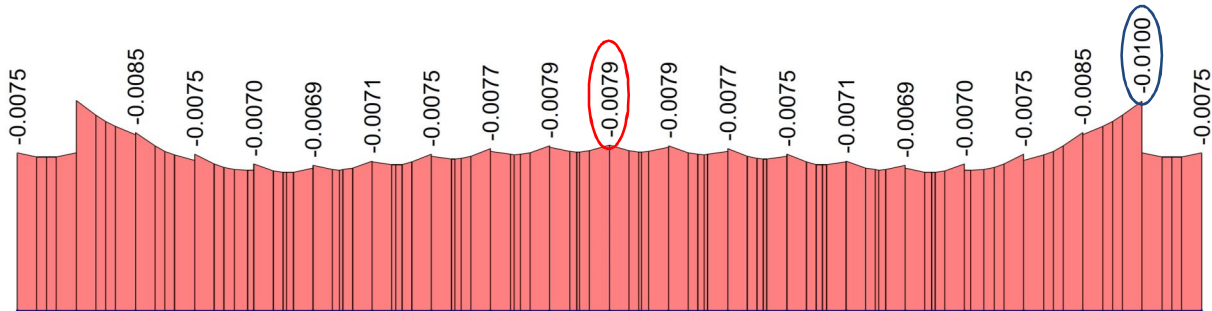


Abb. 274: Momentenverlauf um die lokale y-Achse für die LG 2 [kNm]

Es werden die Nachweise der Tragfähigkeit am Scheitel (rote Markierungen Abb. 271 bis Abb. 274) und am Übergang vom Randträger zur Dreischichtplatte (blaue Markierungen Abb. 271 bis Abb. 274) geführt. Da die Normalkräfte von den äußeren Einwirkungen und die Biegebeanspruchungen überwiegend von den ideellen Temperaturlasten (Eigenspannungen) abhängig sind, können wie in Kapitel 8.4 differenzierte Materialwiderstände ermittelt werden:

Eigenspannungen:

$$k_{mod} = 1,0$$

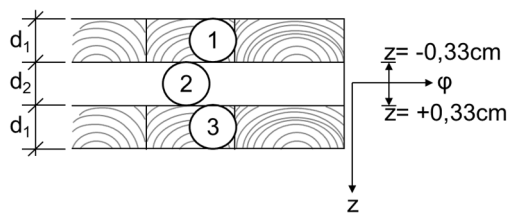
$$f_{m,d} = \frac{f_{m,k} \cdot k_{mod}}{\gamma_M} = 18,46 \text{ N/mm}^2$$

Äußere Lasten:

$$k_{mod} = 0,8 \text{ (Annahme)}$$

$$f_{c,0,d} = \frac{f_{c,0,k} \cdot k_{mod}}{\gamma_M} = 12,92 \text{ N/mm}^2 \quad (8.22)$$

Die Spannungsnachweise für die LG 1 können wie folgt geführt werden:



Stabsteifigkeiten in Ringrichtung:

$$K_y^\varphi = 263,5 \text{ kNcm}^2$$

$$S_{xz}^\varphi = 455,40 \text{ kN}$$

$$D_x^\varphi = 7.260 \text{ kN}$$

Abb. 275: Aufbau der Dreischichtplatte in Ringrichtung

In Folge Normalkräfte können die Spannungen nach Gleichung (8.23) ermittelt werden.

$$\sigma_{\varphi,n,2} = E_{\varphi,2} \cdot \frac{n_\varphi}{D_x^\varphi} \quad (8.23)$$

$$\text{Scheitel LG 1: } \sigma_{c,0,d} = 11.000 \frac{MN}{m^2} \cdot \frac{-0,7469 \text{ kN}}{7.260 \text{ kN}} = -1,13 \frac{MN}{m^2}$$

$$\text{Traufe LG 1: } \sigma_{c,0,d} = 11.000 \frac{MN}{m^2} \cdot \frac{-0,4903 \text{ kN}}{7.260 \text{ kN}} = -0,74 \frac{MN}{m^2}$$

Entsprechend ergeben sich die Spannungen in Folge Momenten-Beanspruchung zu:

$$\sigma_{\varphi,m,2} = E_{\varphi,2} \cdot \frac{m_{\varphi}}{K_y} \cdot z \quad (8.24)$$

$$\text{Scheitel LG 1: } \sigma_{m,d} = 11.000 \frac{MN}{m^2} \cdot \frac{-1,34 \text{ kNcm}}{263,5 \text{ kNcm}^2} \cdot \pm 0,33 \text{ cm} = \pm 18,46 \frac{MN}{m^2}$$

$$\text{Traufe LG 1: } \sigma_{m,d} = 11.000 \frac{MN}{m^2} \cdot \frac{-1,54 \text{ kNcm}}{263,5 \text{ kNcm}^2} \cdot \pm 0,33 \text{ cm} = \pm 21,21 \frac{MN}{m^2}$$

Der Nachweis der Längsspannungen bei kombinierter Platten- und Scheibenbeanspruchung lautet:

$$\text{Scheitel LG 1: } \frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,d}}{f_{m,d}} = \frac{1,13}{12,92} + \frac{18,46}{18,46} = 0,09 + 1,00 = 1,09 > 1,0 \quad (8.25)$$

$$\text{Traufe LG 1: } \frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,d}}{f_{m,d}} = \frac{0,74}{12,92} + \frac{21,21}{18,46} = 0,06 + 1,15 = 1,21 > 1,0 \quad (8.26)$$

Es zeigt sich, dass die Nachweise der Tragfähigkeit für diese Art der Plattenbehandlung (LG 1) nicht eingehalten werden. Nun wird Variante 2 untersucht. Die Spannungen in Folge der Beanspruchungen ergeben sich am Scheitel und an der Traufe wie folgt:

Normalspannungen:

$$\text{Scheitel LG 1: } \sigma_{c,0,d} = 11.000 \frac{MN}{m^2} \cdot \frac{-0,7518 \text{ kN}}{7.260 \text{ kN}} = -1,14 \frac{MN}{m^2} \quad (8.27)$$

$$\text{Traufe LG 1: } \sigma_{c,0,d} = 11.000 \frac{MN}{m^2} \cdot \frac{-0,4885 \text{ kN}}{7.260 \text{ kN}} = -0,74 \frac{MN}{m^2}$$

Biegerandspannungen:

$$\text{Scheitel LG 1: } \sigma_{m,d} = 11.000 \frac{MN}{m^2} \cdot \frac{-0,79 \text{ kNcm}}{263,5 \text{ kNcm}^2} \cdot \pm 0,33 \text{ cm} = \pm 10,88 \frac{MN}{m^2} \quad (8.28)$$

$$\text{Traufe LG 1: } \sigma_{m,d} = 11.000 \frac{MN}{m^2} \cdot \frac{-1,00 \text{ kNcm}}{263,5 \text{ kNcm}^2} \cdot \pm 0,33 \text{ cm} = \pm 13,78 \frac{MN}{m^2}$$

Die Nachweise der Tragfähigkeit können dann wie folgt geführt werden:

$$\text{Scheitel LG 1: } \frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,d}}{f_{m,d}} = \frac{1,14}{12,92} + \frac{10,88}{18,46} = 0,09 + 0,59 = 0,68 < 1,0 \quad (8.29)$$

$$\text{Traufe LG 1: } \frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,d}}{f_{m,d}} = \frac{0,74}{12,92} + \frac{13,78}{18,46} = 0,06 + 0,75 = 0,81 < 1,0 \quad (8.30)$$

Es zeigt sich, dass für diese Art der Plattenvorbehandlung die Nachweise der Tragfähigkeit eingehalten werden.

Da es sich hier um ein fiktives, erstes Beispiel zur Berechnung von Zylinderschalen, unter Berücksichtigung der Relaxation handelt, sollten für eine praktische Anwendung zwingend weiterführende Untersuchungen angestellt werden. Diese könnten beispielsweise an realen Probeschalen durchgeführt werden, die in Großversuchen bis zum Versagen beansprucht werden. Somit könnten die hier hergeleiteten Berechnungen überprüft und validiert werden.

## 8.6 Fazit

In den vorherigen Kapiteln wurde eine Möglichkeit gezeigt, wie die Relaxation in Bauteilen erfasst werden kann. Dies kann beispielsweise durch die Abminderung des E-Moduls erfolgen, wobei eine Abhängigkeit von den Umgebungsbedingungen bzw. von der Vor-Nachbehandlung gegeben ist. In einer statischen Berechnung werden die Eigenspannungen im Nachweis der Tragfähigkeit mit einem Teilsicherheitsbeiwert von  $\gamma_{Zwang}=1,00$  behaftet und der mittlere E-Modul um einen Faktor 4/3 erhöht. Wird ein möglicher Kriechbruch unterbunden, so kann der Modifikationsbeiwert zu  $k_{mod}=1,0$  gesetzt werden, wodurch auf der Widerstandsseite einer behinderten Verformung Rechnung getragen wird.

Theoretische Untersuchungen an einem stark gekrümmten Brettschichholzträger haben gezeigt, dass die nach [DIN EN 1995-1-1] gegebenen Berechnungsvorschriften die durch die Herstellung induzierten Eigenspannungen kaum berücksichtigen. Dabei werden in den verarbeiteten Lamellen mitunter Dehnungen erreicht, die an der Proportionalitätsgrenze liegen. Es stellt sich somit die Frage, ob das geforderte Sicherheitsniveau der stark gekrümmten Brettschichholzträger eingehalten werden kann, wodurch sich ein neues Forschungsfeld ergibt.

Berechnungen an einer exemplarischen Zylinderschale zeigen, dass die Berücksichtigung der Spannungsrelaxation auch in statischen Modellen, durch entsprechende ideelle Temperaturlasten möglich ist. Unter Berücksichtigung dieser Spannungsabbauten können Nachweise der Tragfähigkeit realitätsnah mit ausreichender Sicherheit geführt werden, was bis zum jetzigen Zeitpunkt nicht möglich war. Um jedoch absolutes Gewähr der Ergebnisse zu erhalten sind weiterführende, praktische Versuche zwingend notwendig.

## 9 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, die Möglichkeiten der Berechnung und Herstellung, zylinderförmiger Schalenträgerwerke aus Holz und Holzwerkstoffen zu untersuchen. Diese sollten durch das Krümmen großformatiger, plan produzierter Platten hergestellt werden. Es wurden umfangreiche Literaturrecherchen zur historischen Entwicklung der Zylinderschalen angestellt, um evtl. durchgeführte Untersuchungen bzw. realisierte Bauobjekte zu finden. In der Vergangenheit wurde eine Reihe von Zylinderschalen in Holzbauweise erstellt, doch es gibt keine Versuche, diese aus einer einzigen großen Platte herzustellen.

Parallelen zur Herstellung von Schalensegmenten konnten bei der Produktion von gekrümmten Brettschichtholzträgern aufgedeckt werden. Zu diesem Zweck wurden entsprechende Normen gesichtet, normativ mögliche Krümmungen berechnet und ausgewertet. Es wurde festgestellt, dass bei der Produktion von gekrümmtem Brettschichtholz, die durch die Krümmung hervorgerufenen Biegegrandspannungen mitunter über den charakteristischen Festigkeiten der Lamellen liegen und in statischen Nachweisen kaum Berücksichtigung finden.

Möglichkeiten zur Berechnung zylinderförmiger Schalen wurden ebenfalls untersucht. Dabei wurden einfache Berechnungsmodelle auf der Grundlage von Tabellenkalkulationen und Trägerrostmodellen gefunden und deren Genauigkeiten mit Berechnungen der FEM verglichen. Zusätzlich zu isotropen Schalen wurden auch orthotrope Schalen betrachtet. Im Speziellen wurden dabei der Einfluss eines orthotropen Materialverhaltens und dessen Auswirkungen auf die Schnittgrößen untersucht. Es hat sich gezeigt, dass der Einfluss der Orthotropie für symmetrische als auch unsymmetrische Lastfälle gering ist. Ein Einfluss der Orthotropie ist auf die Biegebeanspruchung in der Schalenwandung zu verzeichnen (ab einer Abminderung der Schalensteifigkeit in Ringrichtung von mehr als 50 %) und auf Normalkräfte in der Schalenwandung ab einer Abminderung der Schalensteifigkeit in Ringrichtung von mehr als 90 %.

Durch die Krümmung der verwendeten Werkstoffe werden Eigenspannungen induziert, die in den entsprechenden statischen Berechnungen berücksichtigt werden müssen. Dazu wurden zwei Lösungen erarbeitet, die durch ein entsprechendes Randmoment oder eine ideelle Temperaturlast beschrieben werden können. Die beiden Lösungen wurden miteinander verglichen, wobei festgestellt wurde, dass die Berücksichtigung der Eigenspannungen durch eine ideelle Temperaturlast besser geeignet ist als durch ein entsprechendes Randmoment. Der Ansatz des Randmomentes setzt voraus, dass in der Praxis ein Randmoment aufgebracht bzw. aufgenommen werden kann, was nicht immer der Fall ist. Sollte zudem ein Randbalken entlang der Traufe vorhanden sein, so wird das Randmoment zwangsläufig in diesen eingeleitet und die gekrümmte Ebene bleibt unbeeinflusst. Zudem liefert die ideelle Temperaturlast wesentlich höhere Eigenspannungen als entsprechende Randmomente. Mit Hilfe dieses Ansatzes konnte eine Zylinderschale unter Berücksichtigung der durch die Krümmung induzierten Spannungen berechnet und nachgewiesen werden. Da es sich bei Holz um ein viskos-elastisches Material handelt, werden Teile der induzierten Spannungen durch rheologische Prozesse abgebaut. Der resultierende Spannungsabbau wurde an einem 25 Jahre alten Brettschichtholzträger durch Herauslösen zweier Lamellen und Erfassen der bleibenden Verformungen bestimmt. Zudem wurden Versuche an Dreischichtplatten aus Fichtenholz durchgeführt, wobei der Einfluss einer Vor- bzw. Nachbehandlung untersucht wurde. Es hat sich gezeigt, dass das Wässern der Platten vor der Krümmung zu maximalen Relaxationserscheinungen führt. Dabei konnten Spannungsabbauten von rund 70 %, nach 90 Tagen erreicht werden, wobei der Großteil der Spannungen in den ersten 10 Tagen abgebaut wird.



Die Ergebnisse der rheologischen Untersuchungen wurden in statische Berechnungsvorschläge überführt, die eine Berücksichtigung auf der Einwirkungs- und Widerstandsseite vorsehen. Auf der Einwirkungsseite wird die Spannungsrelaxation durch eine Abminderung des E-Moduls erfasst, wobei dieser als 95 % Quantilwert eingesetzt wird und die Abminderung in Folge der Vor- bzw. Nachbehandlung erfolgt. Auf der Widerstandsseite kann das behinderte Verformungsverhalten durch eine Anpassung des Materialbeiwertes  $k_{mod}$  erfolgen, welcher die Möglichkeit eines Kriechbruches voraussieht. Diese Berechnungsvorschläge wurden an einem exemplarischen Brettschichtholzträger und einer beispielhaften Zylinderschale durchexerziert. Es hat sich gezeigt, dass nach diesem Berechnungsansatz, der Nachweis der Tragfähigkeit an gekrümmten Brettschichtholzträgern nicht eingehalten werden kann. Diese Feststellung könnte die Grundlage für weitere Forschungsaktivitäten bilden.

## 10 Abbildungsverzeichnis

Hinweis: Die mit [ ] gekennzeichneten Bilder wurden direkt aus der entsprechenden Literaturquelle entnommen.

Abb. 1: „Terra Amata“ [Klotz, 1991].....	2
Abb. 2: Rekonstruktion Ast-Ast-Zelt [Rauch, 2010] .....	2
Abb. 3: Schnitt durch das Pantheon in Rom [Heinle & Schlaich, 1996] .....	3
Abb. 4: Schnitt durch Hagia Sophia [Heinle & Schlaich, 1996].....	3
Abb. 5: Schnitt durch die Pfalzkapelle in Aachen [Heinle & Schlaich, 1996].....	4
Abb. 6: Schnitt durch San Marco in Venedig [Heinle & Schlaich, 1996] .....	4
Abb. 7: Kuppel von St. Peter [Heinle & Schlaich, 1996] .....	4
Abb. 8: Gutachten der drei Mathematiker [Heinle & Schlaich, 1996].....	4
Abb. 9: Modellversuch von Giovanni Poleni [Heinle & Schlaich, 1996].....	4
Abb. 10: Kuppelaufleger des Felsendoms [Meschke, 1989] .....	5
Abb. 11: Foto des Felsendoms [Heinle & Schlaich, 1996].....	5
Abb. 12: Links: Bayerisches Armeemuseum; Mitte: Vertikalschnitt der Kuppel; Rechts: Fußpunkt der Kuppel [Zöllner, 1906].....	6
Abb. 13: Links: Schnitt durch die „Jahrhunderthalle“; Rechts: Innenansicht der „Jahrhunderthalle“ [Zöllner, 1906].....	7
Abb. 14: Links: Knotenpunkt des ersten Zeiss- Netzwerkes; Rechts: Testkuppel auf dem Dach der Zeiss-Werke [Zöllner, 1906] .....	8
Abb. 15: Längsschnitt und Querschnitt durch die Dywidag- Halle [Dischinger & Finsterwalder, 1926] .	9
Abb. 16: Links: Dywidag- Halle; Rechts: Innenansicht nach dem Ausrüsten [Dischinger & Finsterwalder, 1926].....	9
Abb. 17: Längsschnitt durch die Großmarkthalle Frankfurt a. M. [Klonlogel, 1928] .....	10
Abb. 18: Elektrizitätswerk in Frankfurt am Main [Finsterwalder, 1928] .....	10
Abb. 19: Kaischuppen 59 Hamburg [Dischinger & Finsterwalder, 1932] .....	11
Abb. 20: Großmarkthalle Budapest [Dischinger & Finsterwalder, 1932] .....	11
Abb. 21: Bahnsteigdach am Ostbahnhof München [Dischinger & Finsterwalder, 1932] .....	11

Abb. 22: Perspektive eines Schalensheddaches [Dischinger & Finsterwalder, 1932] .....	11
Abb. 23: Schnitt durch die Halle au Blé [Meschke, 1989] .....	12
Abb. 24: Bogen nach de l'Orme mit Querriegel [Meschke, 1989].....	12
Abb. 25: Bogen mit Querriegel [Erlor, 2009] .....	13
Abb. 26: Das Exerzierhaus des Alexanderregiments in Berlin [Meschke, 1989].....	13
Abb. 27: Ludwigskirche in Darmstadt [Müller, 1998].....	13
Abb. 28: Bauweise nach Emy [Meschke, 1989] .....	14
Abb. 29: Entwürfe für Großhallen nach Emy mit Spannweiten über 100 Meter [Kersten, 1926].....	14
Abb. 30: Aufriss der Ardant'schen Versuchsvorrichtung [Carobbio, 2012] .....	14
Abb. 31: Verformung eines Emyschen Bohlenbogens bei Versuchen nach Ardant [Meschke, 1989]..	14
Abb. 32: Kombination aus de l'Ormeschen Bohlenbögen und Emy-Trägern [Meschke, 1989] .....	15
Abb. 33: Halle für das Sängerfest in Wien (1890) [Meschke, 1989] .....	15
Abb. 34: Einstöckiger-Cruciani-Bogen [v. Halász, 1974].....	15
Abb. 35: Zweistöckiges-Cruciani-Lehrgerüst mit einer Spannweite von 65 Metern [v. Halász, 1974] .	15
Abb. 36: Bogenbinder nach Stephan [Kersten, 1926] .....	16
Abb. 37: Anschluss mit Flacheisendübel [Kersten, 1926].....	16
Abb. 38: Bauweise Stephan mit hölzerner Zugstange [Kersten, 1926] .....	16
Abb. 39: Vollwandbogen für eine Wasserflugzeughalle in Warnemünde [Kersten, 1926].....	16
Abb. 40: Halle für Wasserflugzeuge in Warnemünde [Kersten, 1926].....	16
Abb. 41: Anordnung der Lamellen und Querschnitt eines Bogenbinders [Rug, 2006] .....	17
Abb. 42: Ausstellungshalle in Amsterdam, Spannweite 30m (1922) [Rug, 2006] .....	17
Abb. 43: Spitzbogendach in Zollbauweise [Kersten, 1926] .....	18
Abb. 44: Abwicklung einer Bogenfläche in Zollbauweise und Knotendetail [Meschke, 2012] .....	18
Abb. 45: Tonnenförmiges Hallendach in Zollbauweise [Carobbio, 2012].....	18
Abb. 46: Spitzbogenförmige Scheune in Zollbauweise [Carobbio, 2012] .....	18
Abb. 47: Schnitt durch die Münsterlandhalle [Meschke, 1989] .....	19
Abb. 48: Foto Zollinger-Lamellen-Bauweise [Ewald, 1985].....	19

Abb. 49: Bauweise nach Broda [Kersten, 1926].....	20
Abb. 50: Bauweise Kolb in Bauausführung und fertiggestellter Rohbau [Kersten, 1926] .....	20
Abb. 51: Konstruktion des Schalendaches [Pohl, 1934] .....	20
Abb. 52: Schema des Schalengewölbes .....	20
Abb. 53: Föppl'sches Gewölbe [Pohl, 1934].....	21
Abb. 54: Glasofenhalle in Nishnij-Nowgorod [Pohl, 1934].....	21
Abb. 55: Hölzernes Schalendach von K. Fink [Pohl, 1934].....	22
Abb. 56: Hölzerne Shedschale: Schnitt [v. Halász & Cziesielski, 1973] .....	22
Abb. 57: Hölzerne Shedschale: Ansicht [v. Halász & Cziesielski, 1973].....	22
Abb. 58: Shedschale mit Belastung [Bächthold, 1945] .....	23
Abb. 59: Ausgebeulte Schale [Bächthold, 1945].....	23
Abb. 60: Zylinderschalen als Dachkonstruktion.....	23
Abb. 61: Zylinderschalen aus Furnierholz in den USA [v. Halász & Cziesielski, 1973].....	23
Abb. 62: Untersuchte Schalenquerschnitte (Abmessungen $\varphi_0=89^\circ$ ; $R=35\text{cm}$ ; $t=0,83\text{cm}$ ) [v. Halász & Cziesielski, 1973] .....	24
Abb. 63: Versuchsaufbau nach v. Halász und Cziesielski [v. Halász & Cziesielski, 1973] .....	25
Abb. 64: Einwandige Demonstrationsschale [v. Halász & Cziesielski, 1973].....	26
Abb. 65: Doppelwandige Demonstrationsschale [v. Halász & Cziesielski, 1973] .....	26
Abb. 66: Vergleich des Materialverbrauchs verschiedener Holzkonstruktionen [v. Halász & Cziesielski, 1973] .....	26
Abb. 67: Möglicher Aufbau einer doppelwandigen Schale [v. Halász & Cziesielski, 1973].....	26
Abb. 68: Holzschirme der Expo 2000, Hannover [Pirazzi, 2005].....	27
Abb. 69: Konstruktionsprinzip der Brettrippenbauweise [Pirazzi, 2005] .....	27
Abb. 70: Zylinderförmige Versuchsschale in Brettrippenbauweise [Gliniorz, et al., 2001] .....	27
Abb. 71: Verlauf der Brettlamellen auf einer zylinderförmigen Versuchsschale [Gliniorz, et al., 2001].	27
Abb. 72: Freiformfläche, Centre Pompidou in Metz .....	28
Abb. 73: Gekrümmte Brettschichtholzträger des Centre Pompidou in Metz .....	28

Abb. 74: Annäherung einer Tonnenschale als Falwerk in Ansicht und Schnitt .....	30
Abb. 75: Gültigkeitsgrenzen für Näherungsverfahren zur Berechnung von Zylinderschalen [v. Halász & Cziesielski, 1973] .....	31
Abb. 76: Schnittgrößen der Kreiszylinderschale .....	33
Abb. 77: Schnittkräfte in Schalenlängsrichtung und im Schalenquerschnitt [v. Halász & Cziesielski, 1973] .....	35
Abb. 78: Schnittkräfte an einem Schalenelement .....	36
Abb. 79: Bogenelement (links) und Schalenstreifen (rechts) zur Berechnung der Schnittkräfte $n\varphi$ , $m\varphi$ und $q\varphi$ .....	36
Abb. 80: Grafische Darstellung der untersuchten Schale in Ansicht und Schnitt.....	37
Abb. 81: Vergleich Berechnungsergebnisse nach Lundgren und Ergebnisse nach der FE-Methode..	37
Abb. 82: Vergleich Berechnungsergebnisse nach Lundgren und Ergebnisse nach der FE-Methode..	38
Abb. 83: Zylinderschale als Trägerrost .....	39
Abb. 84: Allgemeine Zylinderdarstellung .....	39
Abb. 85: Trägerrostmodell in Ringrichtung.....	40
Abb. 86: Trägerrostmodell im Grundriss .....	40
Abb. 87: Links: Einflussbereich der Längsstäbe; Rechts: Einflussbereich der Ringstäbe .....	41
Abb. 88: Einflussbereich Randträger .....	41
Abb. 89: Anordnung der lokalen Koordinatensysteme.....	41
Abb. 90: Links: Betrachtetes schubbeanspruchtes Element in der Ebene $x_s$ ; Mitte: Momentenverlauf in den Stäben am betrachteten Knoten; Rechts: Verformte Gitterroststäbe am betrachteten Knoten	42
Abb. 91: Links: homogenes Scheibenelement; Mitte: Trägerrostmodell $n=2$ ; Rechts: Trägerrostmodell $dx=ds=1/n$ .....	43
Abb. 92: Fehlerbetrachtung am Trägerrostmodell in Abhängigkeit der Anzahl von Teilungen .....	44
Abb. 93: Anordnung der Stäbe im Trägerrostsystem.....	45
Abb. 94: Vergleich Berechnungsergebnisse am Trägerrost und Ergebnisse nach der FE-Methode ...	45
Abb. 95: Vergleich Berechnungsergebnisse am Trägerrost und Ergebnisse nach der FE-Methode ...	46
Abb. 96: Vergleich Berechnungsergebnisse am Trägerrost und Ergebnisse nach der FE-Methode ...	47
Abb. 97: Vergleich Berechnungsergebnisse am Trägerrost und Ergebnisse nach der FE-Methode ...	47

Abb. 98: Abmessung der untersuchten genagelten und geklebten Schalen mit Belastung [Scholz, 2004] .....	49
Abb. 99: Vertikale Schalenverformung in Feldmitte [Walford & Moss, 1980] .....	50
Abb. 100: Vergleich der Vertikalen Verschiebungen im Mittelpunkt der geklebten Schale und in der Mitte der Randträger [Scholz, 2004] .....	51
Abb. 101: Vergleich der Vertikalen Verschiebungen im Mittelpunkt der genagelten Schale und in der Mitte der Randträger [Scholz, 2004] .....	51
Abb. 102: Transformation eines Verbundquerschnittes in den ideellen Rechenquerschnitt .....	52
Abb. 103: Verformung eines exemplarischen Verbundquerschnitts mit unterschiedlich steifen Schichten unter konstantem Schubfluss [Scholz, 2004] .....	53
Abb. 104: Verschiedene Endlagerungen eines zweiteiligen Verbundquerschnitts und die Umsetzung im ideellen System [Scholz, 2004] .....	55
Abb. 105: Schematische Darstellung der Spannungsermittlung am Beispiel eines Schichtquerschnitts [Scholz, 2004] .....	55
Abb. 106: Statisches System der betrachteten Schale in Ansicht und Schnitt .....	58
Abb. 107: Betrachtete Lastfälle .....	58
Abb. 108: Einfluss der Steifigkeit in Ringrichtung auf die Normalkräfte in Feldmitte im LF 1 .....	59
Abb. 109: Einfluss der Steifigkeit in Ringrichtung auf Momente und Verformungen im LF 1 .....	60
Abb. 110: Einfluss der Steifigkeit in Ringrichtung auf die Normalkräfte im LF 2 .....	60
Abb. 111: Einfluss der Steifigkeit in Ringrichtung auf Momente und Verformungen im LF 2 .....	61
Abb. 112: Produktionsstraße für Dreischichtplatten [www.dieffenbacher.de] .....	62
Abb. 113: Gekrümmte Brettsperrholzplatte der Aussegnungshalle Gräfelfing [Winter, et al., 2008] .....	62
Abb. 114: Herstellung einer Zylinderschale mittels einer plan produzierten Holzwerkstoffplatte .....	63
Abb. 115: Schematische Darstellung [Mestek, 2011] .....	63
Abb. 116: Kreissegment mit geometrischen Bezeichnungen .....	64
Abb. 117: Möglicher Krümmungsradius $R$ in Abhängigkeit der Lamellenstärke $d$ und der Holzfestigkeitsklasse .....	65
Abb. 118: $s/d$ in Abhängigkeit des Öffnungswinkels $\varphi$ und der Holzfestigkeitsklasse .....	65
Abb. 119: $b/d$ in Abhängigkeit des Öffnungswinkels „ $\varphi$ “ und der Holzfestigkeitsklasse .....	66



Abb. 120: Zulässige Lamellendicken für verschiedene Krümmungsradien und Festigkeitsklassen nach [E DIN EN 16351:2011-12] .....	67
Abb. 121: Vorhandene Spannungen bei maximaler Lamellenstärke und minimalem Krümmungsradius .....	68
Abb. 122: Ausnutzungsgrad bei maximaler Lamellenstärke und minimalem Krümmungsradius.....	68
Abb. 123: Zulässige Lamellendicken für verschiedene Krümmungsradien und Festigkeitsklassen nach [DIN EN 14080:2013-09] .....	70
Abb. 124: Ausnutzungsgrad der Lamellen bei der Herstellung von Brettschichtholz und maximaler Krümmung.....	70
Abb. 125: Bezeichnungen am gekrümmten Brettschichtholzträger [Goris, 2006].....	71
Abb. 126: Faktor $k_i$ in Abhängigkeit der geometrischen Verhältnisse [Goris, 2006] .....	72
Abb. 127: Gekrümmter Stab mit Eigenspannungen und Ersatzmoment .....	73
Abb. 128: Rückstellen des Stabes und Zweigelenkbogen .....	73
Abb. 129: Last- und Einheitszustand nach dem Kraftgrößenverfahren .....	73
Abb. 130: Schnittgrößen am Bogenquerschnitt.....	74
Abb. 131: Bogenquerschnitt unter Temperaturbelastung und Haltekräfte.....	74
Abb. 132: Links: Momentenverlauf in Folge Randmoment; Rechts: Momentenverlauf in Folge ideeller Temperaturlast.....	75
Abb. 133: Verformung eines Bogens in Folge Eigenspannungen.....	75
Abb. 134: Krümmen einer Lamelle .....	76
Abb. 135: Statisches Ersatzsystem .....	76
Abb. 136: Lage der Reaktionskraft $K$ und Momentenverlauf in Abhängigkeit der Kraft $F$ .....	76
Abb. 137: Gekrümmte Lamelle.....	77
Abb. 138: Momentenverlauf entlang der gekrümmten Lamelle.....	77
Abb. 139: Lange Zylinderschale [Natterer, et al., 1991] .....	77
Abb. 140: Kurze Zylinderschale [Natterer, et al., 1991] .....	77
Abb. 141: Gestaltung von Zylinderschalen und Lagerausbildung [v. Halász & Cziesielski, 1973].....	78
Abb. 142: Verschiedene Querschnitte [Carobbio, 2012] .....	78
Abb. 143: Gestaltungsmöglichkeiten mit Zylinderschalen [v. Halász & Cziesielski, 1973].....	79

Abb. 144: Mögliche Zylinderschalen zur Überdachung großer rechteckiger Flächen [Lundgren, 1949] .....	80
Abb. 145: Möglicher Aufbau einer doppelwandigen Schale [v. Halász & Cziesielski, 1973].....	81
Abb. 146: Grafische Darstellung der Entwurfsgrößen nach v. <i>Halász und Cziesielski</i> .....	81
Abb. 147: Befestigung der Schalenwandung auf einer Querrippe.....	82
Abb. 148: Geometrische Beziehungen.....	82
Abb. 149: Kräfte am Randträger durch das Befestigen der Platte.....	83
Abb. 150: Anschnitt- Winkel $\alpha$ am Randträger.....	83
Abb. 151: Exemplarische Herstellung einer Einzelschale mit und ohne Holzwerkstoffplatte.....	84
Abb. 152: Abhebender Randbereich in Folge Eigenspannungen.....	84
Abb. 153: Links: Randbalken mit eingeschnittener Kerbe; Rechts: Vereinigter Randbalken mit Mittelscheibe.....	85
Abb. 154: Entwurf einer möglichen hölzernen Zylinderschale (alle Maße in Zentimeter).....	86
Abb. 155: Gegenüberstellung Balkensystem, Zylinderschale.....	87
Abb. 156: Herstellung einer Zylinderschale aus kleineren Modulen; Links: Einzelmodul; Rechts: Große Schale.....	88
Abb. 157: Herstellung eines Moduls.....	88
Abb. 158: Zweilagiges Modul; Links: Gerüst ohne Platten; Rechts: Modul mit Platten und Dämm- bzw. Installationsebene.....	89
Abb. 159: Entwurfsidee einer Deckenkonstruktion mit Dämm- bzw. Installationsebene.....	89
Abb. 160: Querschnitt und Längsschnitt eines Deckenelementes.....	89
Abb. 161: Herstellung eines Deckenelementes.....	90
Abb. 162: Nachträgliches aufbringen der obersten Lage auf mehrere Elemente.....	90
Abb. 163: Silo zur Lagerung von Streugut [blumer-lehmann].....	91
Abb. 164: Abrutschen des Füllgutes.....	91
Abb. 165: Aufbau eines modularen Silos.....	92
Abb. 166: Schematische Darstellung des viskos-elastischen Verhaltens [Andriamitantoa, 1995].....	94
Abb. 167: Zeitlicher Verlauf der Verformung eines Einfeldträgers.....	94

Abb. 168: Möglichkeiten zur Darstellung des Formänderungsverhaltens [Gressel, 1971].....	95
Abb. 169: a) idealisierte Kriechfunktion, b) Kriechkurven von Holz bei unterschiedlichen Lasten [Niemz, 1993].....	96
Abb. 170: Kriechvorgang durch gegenseitiges Verschieben der Zelluloseketten [Schänzlin, 2003] ....	97
Abb. 171: Links: Kriechverlauf bei unterschiedlicher Belastung; Rechts: Schubkriechen in Abhängigkeit der Geometrie [Gressel, 1983] .....	99
Abb. 172: Kriechen unter Querdruckbeanspruchung; Links: trockenes Fichtenholz; Rechts: Feuchtes Fichtenholz [Möhler & Maier, 1970] .....	100
Abb. 173: Kriechen unter Rollschubspannungen in Fichtenfurnieren im Konstant- und Wechselklima [Ranta-Maunus, 1995].....	101
Abb. 174: Zusammenhang zwischen Belastungsgrad und Versagensdauer „Madison Curve“ [Thelandersson & Larsen ,2003] .....	102
Abb. 175: Einfluss des Belastungsgrades auf die Kriechverformung [Schänzlin, 2003] .....	103
Abb. 176: Einfluss der Temperatur auf die Kriechverformung nach <i>Morlier</i> [Schänzlin, 2003] .....	104
Abb. 177: Links: relatives Kriechen unter konstanten klimatischen Bedingungen; Rechts: relatives Kriechen unter Variation der relativen Luftfeuchte [Ranta-Maunus, 1995].....	105
Abb. 178: Kriechen von Holzwerkstoffen unter veränderlicher relativer Luftfeuchte [Ranta-Maunus, 1995] .....	106
Abb. 179: Kriechversuche unter symmetrischer und antimetrischer Befeuchtung und Variation des Lastniveaus [Moliński & Raczkowski, 1988].....	106
Abb. 180: Effekt von zyklischen Feuchteschwankungen auf das relative Kriechen [Thelandersson & Larsen ,2003].....	107
Abb. 181: Ideeller Relaxationsverlauf: Links: Dehnungsverlauf; Rechts: Spannungsverlauf über die Zeit .....	108
Abb. 182: Spannungsrelaxation bei Druck senkrecht zur Faser [Möhler & Maier, 1970].....	110
Abb. 183: Spannungsrelaxation bei Zug und Druck für verschiedene Dehnungen und Holzarten [Echenique-Manrique, 1969] .....	111
Abb. 184: Zeitlicher Verlauf der Spannung bei unterschiedlicher Holzfeuchte und Durchbiegung [Perkitny, et al., 1976] .....	112
Abb. 185: Spannungsrelaxation bei verschiedenen Temperaturen (Holzfeuchte $u=10$ und $13\%$ ) [Becker & Reiter, 1970] .....	112
Abb. 186: Spannungsrelaxation bei verschiedenen Temperaturen (Holzfeuchte $u=16$ und $19\%$ ) [Becker & Reiter, 1970] .....	113

Abb. 187: Das Federelement – Hook'sche Feder .....	115
Abb. 188: Das Dämpferelement – Newton' scher Dämpfer.....	116
Abb. 189: Das Reibungselement.....	116
Abb. 190: Das Schwind- Quellelement.....	117
Abb. 191: Parallelschaltung zweier Hooke' scher Federn .....	117
Abb. 192: Reihenschaltung zweier Hooke' scher Federn.....	117
Abb. 193: Der Maxwell- Körper .....	118
Abb. 194: Der Kelvin- Körper .....	118
Abb. 195: Zeit-Verformungsverlauf eines Kelvin- Körpers bei Be- und Entlastung.....	119
Abb. 196: Der Burgers-Körper .....	119
Abb. 197: Be- und Entlastung eines Burgers- Körpers und schematische Darstellung einzelner Verformungsanteile.....	120
Abb. 198: Die bekanntesten aus Einzelementen zusammengesetzten Modelle.....	120
Abb. 199: Dehnungs-Zeitschaubild für hochpolymere Stoffe (links) und Be- Entlastung von Fichtenholz, Druck senkrecht zur Faser in radialer Richtung Holzfeuchte 17% (rechts) [Kollmann, 1961] .....	121
Abb. 200: Rheologisches Modell für die mechanischen Verformungen von Holz [Lawniczak, 1967] 122	
Abb. 201: Rheologisches Modell nach Eyring [Jaenicke, 2003] .....	123
Abb. 202: Erstes rheologisches Modell nach <i>Leicester</i> .....	124
Abb. 203: Zweites rheologisches Modell nach <i>Leicester</i> .....	125
Abb. 204: Modell nach Pfefferle [Reinhardt, 1973].....	125
Abb. 205: Einfluss des nichtlinearen Dämpfers [Reinhardt, 1973] .....	125
Abb. 206: Modell für Rückkriechversuche [Reinhardt, 1973].....	126
Abb. 207: Rheologisches Modell nach Toratti .....	127
Abb. 208: Rheologisches Modell nach Hanhijärvi.....	129
Abb. 209: Erstes rheologisches Modell nach Grimsel und Messwerte mit berechneten Kriechfunktionen [Grimsel, 1998] .....	131
Abb. 210: Zweites rheologisches Modell nach Grimsel und Messwerte mit berechneten Kriechfunktionen [Grimsel, 1998] .....	131

Abb. 211: Drittes rheologisches Modell nach Grimsel .....	132
Abb. 212: Berechnung der Eigenspannungen bei der Trocknung von Buchenholz in Abhängigkeit des Feuchteverlaufs .....	133
Abb. 213: Chronologische Zusammenstellung der gefundenen rheologischen Modelle.....	135
Abb. 214: Gekrümmter Brettschichtholzträger .....	136
Abb. 215: Grafische Darstellung des untersuchten Trägers.....	136
Abb. 216: Richtlatte zur Vermessung .....	137
Abb. 217: Handbandsäge .....	137
Abb. 218: Lösen der Lamelle .....	137
Abb. 219: Erste Lamelle vor und nach dem Lösen .....	137
Abb. 220: Zweite Lamelle vor und nach dem Lösen.....	137
Abb. 221: Funktionslänge am Bogen .....	138
Abb. 222: x-Koordinate in Abhängigkeit der Bogenlänge .....	138
Abb. 223: Funktionslänge der ersten Lamelle in Abhängigkeit der x-Koordinate.....	138
Abb. 224: Funktionslänge der zweiten Lamelle in Abhängigkeit der x-Koordinate .....	138
Abb. 225: Krümmung der ersten Lamelle über die Funktionslänge.....	139
Abb. 226: Krümmung der zweiten Lamelle über die Funktionslänge.....	139
Abb. 227: Zeitliche Entwicklung der Spannungsverteilung in einer nicht gehaltenen, gehaltenen und gelösten Holzlamelle.....	140
Abb. 228: Relaxationsverlauf über die Funktionslänge für die erste Lamelle.....	141
Abb. 229: Relaxationsverlauf über die Funktionslänge für die zweite Lamelle.....	141
Abb. 230: Lagerung der Lamellen im Büroraum und Lagerungsbedingungen an der Wand (Festpunkt) .....	142
Abb. 231: Grundrissdarstellung der Lamellen im Büroraum.....	142
Abb. 232: Betrachtung der Zugseite der beiden Lamellen .....	142
Abb. 233: Befestigung des Lotes am freien Ende und Aufzeichnung der Position und klimatischen Bedingungen am Papier.....	142
Abb. 234: Verformung einer Lamelle im Grundriss .....	143
Abb. 235: Kinematik des freien Lamellenendes .....	143

Abb. 236: Exemplarische Darstellung der Verformung einer Lamelle in Abhängigkeit der rel. Luftfeuchte .....	144
Abb. 237: Quellen in radialer Richtung .....	146
Abb. 238: Einfluss des radialen Quellens und Schwindens auf den Krümmungsradius.....	146
Abb. 239: Quellen in longitudinaler Richtung.....	147
Abb. 240: Einfluss des longitudinalen Quellens und Schwindens auf den Krümmungsradius .....	147
Abb. 241: Einfluss des longitudinalen bzw. radialen Quellens und Schwindens auf den Krümmungsradius.....	148
Abb. 242: Feuchteverteilung in einer Lamelle .....	148
Abb. 243: Dreischichtplatte in Grundriss, Längs- und Seitenansicht .....	150
Abb. 244: Darstellung des Prüfkörpers in Längsansicht, Grundriss und Seitenansicht.....	151
Abb. 245: Fotos zur Krümmung der Dreischichtplatten über das Lehrgerüst.....	151
Abb. 246: Dehnungs- und Spannungsbild in der Platte .....	152
Abb. 247: Links: Dreipunkt- Biegeversuch nach DIN 52186 [Scholz & Wagenführ, 2008]; Rechts: Foto Versuch .....	153
Abb. 248: Probekörper mit Befeuchtung der Zugseite.....	153
Abb. 249: Probekörper mit Aluminiumabklebung .....	153
Abb. 250: Schematische Darstellung der Feuchtemessung.....	154
Abb. 251: Foto der Holzfeuchtemesspunkte .....	154
Abb. 252: Dreischichtplatte vor dem Lösen.....	155
Abb. 253: Dreischichtplatte nach dem Lösen.....	155
Abb. 254: Ergebnisbereich der Relaxation für Versuchsreihe 1 mit Berücksichtigung der Messungenaugigkeit.....	156
Abb. 255: Platte beansprucht als Bogen.....	156
Abb. 256: Platte beansprucht als Seil.....	156
Abb. 257: Holzfeuchteverlauf in Platte 6, in unterschiedlichen Lagen für Versuchsreihe 2 .....	158
Abb. 258: Ergebnisbereich der Relaxation für Versuchsreihe 2 mit Berücksichtigung der Messungenaugigkeit.....	159
Abb. 259: Gegenüberstellung Versuchsreihe 1 und Versuchsreihe 2 .....	159



Abb. 260: Bogenstich der Platten nach dem Versuch.....	160
Abb. 261: Platten nach dem Versuch .....	160
Abb. 262: Versuchsreihe 3: Werte der Relaxation nach 10 Tagen.....	161
Abb. 263: Versuchsreihe 3: Werte der Relaxation nach 30 Tagen.....	162
Abb. 264: Versuchsreihe 3: Werte der Relaxation nach 10 und 30 Tagen.....	162
Abb. 265: Versuchsreihe 3: Zeitlicher Verlauf der Relaxation .....	163
Abb. 266: Relaxationsverlauf nach Reinhardt und Kubat für Platte 11, 12 .....	164
Abb. 267: Relaxationsverlauf nach Reinhardt und Kubat für Platte 13, 14, 15 .....	165
Abb. 268: Grafische Darstellung des betrachteten Trägers – alle Maße in cm.....	169
Abb. 269: Dehnungsverlauf in den Lamellen des Brettschichtholzträgers .....	171
Abb. 270: Untersuchte Zylinderschale und betrachteter Schnitt bei $X=5,30$ Meter .....	173
Abb. 271: Normalkraftverlauf in Ringrichtung für die LG 1 [kN].....	174
Abb. 272: Normalkraftverlauf in Ringrichtung für die LG 2 [kN].....	174
Abb. 273: Momentenverlauf um die lokale y-Achse für die LG 1 [kNm] .....	175
Abb. 274: Momentenverlauf um die lokale y-Achse für die LG 2 [kNm] .....	175
Abb. 275: Aufbau der Dreischichtplatte in Ringrichtung .....	175
Abb. 276: Grafische Darstellung der untersuchten Schale in Ansicht und Schnitt.....	221
Abb. 277: Lage des Schwerpunktes der Schale .....	221
Abb. 278: Tabellenkalkulationsblatt zur Ermittlung der Querschnittsgrößen.....	222
Abb. 279: Tabellenkalkulationsblatt zur Ermittlung der Kräfte in Ringrichtung .....	223
Abb. 280: Tabellenkalkulationsblatt mit Ergebnissen der Schnittgrößen in Ringrichtung.....	224
Abb. 281: Grafische Darstellung der Schale in RFEM.....	224
Abb. 282: Vergleich Berechnungsergebnisse nach Lundgren und Ergebnisse nach der FE-Methode .....	225
Abb. 283: Vergleich Berechnungsergebnisse nach Lundgren und Ergebnisse nach der FE-Methode .....	226
Abb. 284: Grafische Darstellung der untersuchten Schale in Ansicht und Schnitt.....	227
Abb. 285: Eingabebereich in Excel zur Berechnung isotroper Schalen .....	227

Abb. 286: Stabsteifigkeiten berechnet mit Excel .....	228
Abb. 287: Trägerrostmodel im Programm „Dlupal RStab7.xx“ .....	228
Abb. 288: Ergebnisse am Trägerrost in Abhängigkeit der Schalenspannweite.....	229
Abb. 289: Ergebnisse aus der FEM in Abhängigkeit der Schalenspannweite.....	229
Abb. 290: Vergleich Berechnungsergebnisse am Trägerrost und Ergebnisse nach der FE-Methode	230
Abb. 291: Vergleich Berechnungsergebnisse am Trägerrost und Ergebnisse nach der FE-Methode	231
Abb. 292: Vergleich Berechnungsergebnisse am Trägerrost und Ergebnisse nach der FE-Methode	231
Abb. 293: Vergleich Berechnungsergebnisse am Trägerrost und Ergebnisse nach der FE-Methode	232
Abb. 294: Links: unverformte Lamelle und verformte Lamelle, Rechts: statische Systeme mit Belastungen.....	235
Abb. 295: Abweichungen zwischen berechneten und exakten Werten in z-Richtung .....	237
Abb. 296: Abweichungen zwischen berechneten und exakten Werten in x-Richtung .....	237
Abb. 297: Links: Belastung durch ein Randmoment (LF1), Rechts: Belastung durch eine Temperatureinwirkung (LF2).....	238
Abb. 298: Normalkraftverlauf in Folge Randmoment und Temperaturbelastung .....	238
Abb. 299: Querkraftverlauf in Folge Randmoment und Temperaturbelastung.....	239
Abb. 300: Momentenverlauf in Folge Randmoment und Temperaturbelastung.....	239
Abb. 301: Spannungen an der Zugseite der Lamelle .....	240
Abb. 302: Links: Endscheibe mit Orientierung der Decklagen; Rechts Zwischenscheibe mit Orientierung der Decklagen .....	242
Abb. 303: Entwurf einer möglichen hölzernen Zylinderschale (alle Maße in Zentimeter).....	243
Abb. 304: Aufbau einer Dreischichtplatte und Orientierung im System.....	244
Abb. 305: Links: Endscheibe; Mitte: Zwischenscheibe mit Decklamellenorientierung; Rechts: Trägerrostmodel der Scheiben.....	245
Abb. 306: Trägerrostmodel; alle Maße sind Achs-Maße [m] .....	246
Abb. 307: Ständige und veränderliche Last auf die Zylinderschale .....	246
Abb. 308: Verformung der Zylinderschale unter charakteristischer Volllast.....	247
Abb. 309: Gegenüberstellung Balkensystem, Zylinderschale .....	247

Abb. 310: Normalkraftverteilung in Randträger und Platte im Lastfall: Eigenspannungen + ständige + veränderliche Lasten.....	249
Abb. 311: Ausnutzungsgrad der Randträger im Lastfall 1: Eigenspannungen + ständige + veränderliche Lasten.....	250
Abb. 312: Normalkraft im Scheitel [kN] für den Lastfall 1: Eigenspannungen + ständige + veränderliche Lasten.....	250
Abb. 313: Biegemomentenverlauf im Scheitel [kNm] für den Lastfall 1: Eigenspannungen + ständige + veränderliche Lasten.....	251
Abb. 314: Querkraftverlauf im Scheitel [kN] für den Lastfall 1: Eigenspannungen + ständige + veränderliche Lasten.....	251
Abb. 315: Aufbau der Dreischichtplatte.....	251
Abb. 316: Aufbau der Dreischichtplatte.....	252
Abb. 317: Exemplarische Schubspannungsverteilung.....	253
Abb. 318: Betrachteter Schnitt bei X=5,30 Meter .....	254
Abb. 319: Normalkraftverlauf in Ringrichtung für den LF 1; Maximalwert: -0,7563 kN .....	255
Abb. 320: Normalkraftverlauf in Ringrichtung für den LF 2; Maximalwert: -0,7588 kN .....	255
Abb. 321: Momentenverlauf um die lokale y-Achse für den LF 1; Maximalwert: -0,0238 kNm .....	255
Abb. 322: Momentenverlauf um die lokale y-Achse für den LF 2; Maximalwert: -0,0027 kNm .....	255
Abb. 323: Aufbau der Dreischichtplatte in Ringrichtung .....	256
Abb. 324: Querkraftverlauf in Ringrichtung für den LF 1 (lokale z-Richtung); Maximalwert: $v_{\varphi,z} = 0,0202$ kN.....	257
Abb. 325: Querkraftverlauf in Ringrichtung für den LF 2 (lokale z-Richtung); Maximalwert: $v_{\varphi,z} = 0,0210$ kN.....	257
Abb. 326: Exemplarische Schubspannungsverteilung.....	257
Abb. 327: Querkraftverlauf in Ringrichtung für den LF 1 (lokale y-Richtung); Maximalwert: $v_{\varphi,y} = 0,3350$ kN.....	258
Abb. 328: Querkraftverlauf in Ringrichtung für den LF 2 (lokale y-Richtung); Maximalwert: $v_{\varphi,y} = 0,0210$ kN.....	258
Abb. 329: Querkraftverlauf in Ringrichtung für den LF 1 (lokale y-Richtung); Maximalwert: $v_{\varphi,y} = 1,8433$ kN.....	259
Abb. 330: Querkraftverlauf in Ringrichtung für den LF 2 (lokale y-Richtung); Maximalwert: $v_{\varphi,y} = 1,7917$ kN.....	259

## 11 Literaturverzeichnis

- [Aas- Jakobsen, 1958] Aas- Jakobsen, A.: Die Berechnung der Zylinderschalen. Springer Verlag, Berlin. 1958
- [Andriamitantsoa, 1995] Andriamitantsoa, L. D.: Kriechen. In: Informationsdienst Holz, Holzbauwerke, STEP 1, Bemessung und Baustoffe, S. A19/1-A19/5. Fachverlag Holz, Düsseldorf, 1995
- [Angst & Malo, 2010] Angst, V.; Malo, K., A.: Moisture induced stresses perpendicular to the grain in glulam: Review and evaluation of the relative importance of models and parameters. In: Holzforschung, Vol. 64, pp. 609-617. Walter de Gruyter, Berlin, New York, DOI: 10.1515/HF.2010.089. 2010
- [Angst & Malo, 2012] Angst, V.; Malo, K., A: The effect of climate variations on glulam – an experimental study. In: European Journal of Wood Products, Online Article, published online 19. Januar 2012, DOI: 10.1007/s00107-012-0594-y. 2012
- [Armstrong, et al., 1962] Armstrong, L. D.; Kingston, R. S. T.: The effect of moisture content changes on the deformation of wood under stress. In: Australian Journal of Applied Science, 13(4), S. 257-276. 1962
- [Bächthold, 1945] Bächthold, J.: Belastungsversuche an einer freitragenden Zylinderschale aus Holz. In: Schweizerische Bauzeitung, Band 126, Nr. 10, S. 96-98. Verlag C. & W. Jegher, Zürich. 1945
- [Bader, et al., 2007] Bader, H.; Niemz, P.; Sonderegger, W.: Untersuchungen zum Einfluss des Plattenaufbaus auf ausgewählte Eigenschaften von Massivholzplatten. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 65. Jahrgang, S. 173-181. Springer-Verlag. 2007
- [Baur, 2013] Baur, K.: Berechnungsverfahren von isotropen zylindrischen Schalen. Bachelorarbeit an der Technischen Universität München, Lehrstuhl für Holzbau und Baukonstruktion. 2013

- [Becker & Reiter, 1970] Becker, H; Reiter, L.: Über den Einfluss von Temperatur und Holzfeuchtigkeit auf die Relaxation der Biegespannungen in Rotbuchenholz. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 28. Jahrgang, S. 264-270. Springer-Verlag. 1970
- [Becker, 2002] Becker, P.: Modellierung des zeit- und feuchteabhängigen Materialverhaltens zur Untersuchung des Langzeittragverhaltens von Druckstäben aus Holz. Dissertation an der Fakultät Bauingenieurwesen der Bauhaus- Universität Weimar. 2002
- [Becker, 2011] Becker, M.: Balkentheorie nach Bernoulli und Timoshenko. Bachelorarbeit im Studiengang Bauingenieurwesen, Lehrstuhl für Baumechanik, Technische Universität München. 2011
- [Beddoe, 2008] Beddoe, R.E.: Skriptum zur Vertiefervorlesung Bauingenieurwesen Grundfachvorlesung Baustoffingenieurwesen des Fachs Baustoffkunde. Lehrstuhl für Baustoffkunde und Werkstoffprüfung: Technische Universität München. 2008
- [Biermann, 1968] Biermann, W.: Trägerrosttabellen Deutsch - Englisch. Verlag Technik, Berlin. 1968
- [Blaß, et al., 2004] Blaß H.J.; Ehlbeck J.; Kreuzinger H; Steck G.: Erläuterungen zu DIN 1052:2004-08. Entwurf, Berechnung und Bemessung von Holzbauwerken, 1. Auflage. Bruderverlag Karlsruhe. 2004
- [Carobbio, 2012] Carobbio, A.: Zylinderschalen aus Holz. Masterarbeit an der Technischen Universität München, Lehrstuhl für Holzbau und Baukonstruktion. 2012
- [Chronowicz, 1961] Chronowicz, A.: Die Berechnung der Zylinderschalen – Praktische Näherungsverfahren. Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart. 1961
- [Čížek, 1961] Čížek, L.: Dauerfestigkeit und rheologische Eigenschaften von Holz und Holzwerkstoffen. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 19. Jahrgang, Heft 3, S. 83-85. Springer-Verlag. 1961
- [Czaderski et al., 2007] Czaderski, Ch.; Steiger, R.; Howald, M.; Olia, S.; Gülzow, A.; Niemz, P.: Versuche und Berechnungen an allseitig gelagerten 3-schichtigen Brettsperrholzplatten. In: Holz als Roh- und Werkstoff, S. 338-402. Springer-Verlag. 2007

- [Dicleli, 2006] Dicleli, C.: Ingenieurporträt Ulrich Finsterwalder – Ingenieur aus Leidenschaft. In: Deutsche Bauzeitung, S. 76-80. Berlin. 2006
- [Dietsch, 2012] Dietsch, P.: Einsatz und Berechnung von Schubverstärkungen für Brettschichtholzbauteile. Dissertation an der Technischen Universität München, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen. 2012
- [Dinwoodie, et al., 1991] Dinwoodie, J. M.; Paxton, B. H.; Higgins, J. S.; Robson, D. J.: Creep in chipboard. In: Wood Science and Technology, S. 39-51. Springer-Verlag. 1991
- [Dischinger & Finsterwalder, 1932] Dischinger, F., & Finsterwalder, U.: Die weitere Entwicklung der Schalenbauweise „Zeiss- Dywidag“. In: Beton und Eisen, S. 149-155;165-170;181-184;213-220;229-232. 1932
- [Dischinger& Finsterwalder, 1926] Dischinger, F., & Finsterwalder, U.: Die Dywidag- Halle auf der Gesolei. In: Der Bauingenieur, S. 929-931. Berlin. 1926
- [Echenique-Manrique, 1969] Echenique-Manrique, R.: Stress Relaxation of Wood at Several Levels of Strain. Wood Science and Technology, Vol. 3, S. 49-73. 1969
- [Ehlbeck & Kürth] Ehlbeck, J., Kürth, J.: Einfluss des querzugbeanspruchten Volumens auf die Tragfähigkeit gekrümmter Träger und Satteldachträger aus Brettschichtholz. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 50. Jahrgang, S. 33-40. Springer-Verlag. 1992
- [Ěížek, 1968] Ěížek, L.: Einfluss der Feuchtigkeit auf das rheologische Verhalten des Holzes. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 26. Jahrgang, Heft 11, S. 416-417. Springer-Verlag. 1968
- [Erlor, 2009] Erlor, K.: Gebogen und weit gespannt. In: Bauen mit Holz , S. 28-31. Bruderverlag, Karlsruhe. 2009
- [Ernährungsamt und Hochbauamt F. a. M., 1928] Ernährungsamt und Hochbauamt Frankfurt am Main: Die Neue Großmarkthalle in Frankfurt am Main; Zur Eröffnung am 25. Oktober 1928. Verlag Englert und Schlosser, Frankfurt am Main. 1928



- [Ewald, 1985] Ewald, G.: Zur Ausbildung der Knotenpunkte bei Rauten-Lamellen-Konstruktionen. In: Bauen mit Holz , S. 222-223. Bruderverlag, Karlsruhe. 1985
- [Fessel, 1951] Fessel, F.: Probleme beim Holzbiegen. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 2. Jahrgang, S. 56-62. Springer-Verlag. 1951
- [Fiebig, 1924] Fiebig: Hölzerne Tragwerke. In: Deutsche Bauzeitung, 58. Jahrgang, No. 98, Konstruktion und Bauausführung, S. 193-198. Berlin. 1926
- [Finsterwalder, 1930] Finsterwalder, U.: Die querversteiften zylindrischen Schalengewölbe. Dissertation an der Technischen Hochschule München. In: Sonderdruck aus Ingenieur – Archiv, IV. Band, I. Heft, Springer-Verlag. Berlin. 1933
- [Finsterwalder, 1932] Finsterwalder, U.: Die Schalendächer des Elektrizitätswerkes in Frankfurt am Main. In: Beton und Eisen, S. 205-208. 1932
- [Flügge, 1973] Flügge, W.: Stresses in Shells, Second Edition. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York. 1973
- [Flügge, 1981] Flügge, W.: Statik und Dynamik der Schalen, Dritte Auflage. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York. 1981
- [Föppl, 1892] Föppl, A.: Das Fachwerk im Raum. Dogma in Europäischer Hochschulverlag GmbH & Co KG, Bremen. 2012
- [Fortuin, 2003] Fortuin, G.: Anwendung mathematischer Modelle zur Beschreibung der technischen Konvektionstrocknung von Schnittholz, Dissertation an der Universität Hamburg, Fachbereich Biologie. 2003
- [Frei, 1984] Frei, O.: Der Zwiebelturm. In: Arcus, Architektur und Wissenschaft, Verlagsgesellschaft Rudolf Müller GmbH, Köln. 1984
- [Freingruber, 1985] Freingruber, H.-C.: Beitrag zum Einfluss von Relaxation und Kriechen auf die Herstellungsspannungen von gekrümmtem Brettschichtholz aus Fichtenholz. Dissertation an der Technischen Universität Wien, Fakultät für Bauingenieurwesen. 1985

- [Gamper et al., 2012] Gamper, A.; Dietsch, P.; Merk, M.; Winter, S.: Langzeitmessungen zur Bestimmung der Auswirkungen auf Feuchtegradienten in Holzbauteilen. Schlussbericht zum Forschungsvorhaben, Lehrstuhl für Holzbau und Baukonstruktion, Technische Universität München. 2012
- [Gereke, 2006] Gereke, T.; Niemz, P.; Bader, H.; Blumer, S.; Clauss, S.; Weber, A.: Untersuchungen zur Optimierung von Massivholzplatten, 1. Teilbericht. Forschungsbericht für das Kuratorium des Fonds zur Förderung der Wald- und Holzforschung Nr. 2004.14,ETH Zürich, Institut für Baustoffe, Zürich, Schweiz. 2006
- [Gereke, 2009] Gereke, T.: Moisture induced Stresses in Cross- Laminated Wood Panels. Dissertation an der ETH Zürich, Zürich. 2009
- [Gliniorz, et al., 2001] Gliniorz, K.-U.; Natterer, J.; Kreuzinger, H.: Tonnenschalen aus Holz in Kreuzrippenbauweise. In: Bautechnik 78 (2001), Heft 7, S. 464-473. Ernst & Sohn Verlag, Berlin. 2001
- [Glos, et al., 1987] Glos, P.; Heimeshoff, B.; Kellethofer, W.: Einfluss der Belastungsdauer auf die Zug- und Druckfestigkeit von Fichten-Brettlamellen. In: Holz als Roh und Werkstoff, S. 243-249. Springer-Verlag. 1987
- [Goris, 2006] Goris, A.: Bautabellen für Ingenieure mit Berechnungshinweisen und Beispielen, 17. Auflage. Werner Verlag, Neuwied. 2006
- [Gressel, 1971] Gressel, P.: Untersuchungen über das Zeitstandbiegeverhalten von Holzwerkstoffen in Abhängigkeit von Klima und Belastung. Dissertation im Fachbereich Biologie der Universität Hamburg. 1971
- [Gressel, 1983] Gressel, P.: Erfassung, systematische Auswertung und Ergänzung bisheriger Untersuchungen über das rheologische Verhalten von Holz und Holzwerkstoffen – Ein Beitrag zur Verbesserung des Formänderungsnachweises nach DIN 1052 „Holzbauwerke“. Abschlussbericht zu den Forschungsvorhaben AIF Nr. 4289/5348 Band 1+2. Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine, Abteilung Ingenieurholzbau, Universität Fridericiana, Karlsruhe. 1983

- [Gressel, 1984/1] Gressel, P.: Zur Vorhersage des langfristigen Formänderungsverhaltens aus Kurz-Kriechversuchen. In: Holz als Roh und Werkstoff, S. 293-301. Springer-Verlag. 1984
- [Gressel, 1984/2] Gressel, P.: Einfluss des Sorptionsverhaltens auf die Eigenschaften von Spanplatten. In: Holz als Roh und Werkstoff, S. 393-398. Springer-Verlag. 1984
- [Gressel, 1984] Gressel, P.: Kriechverhalten von Holz und Holzwerkstoffen. In: Bauen mit Holz, S. 216-223. Bruderverlag, Karlsruhe. 1984
- [Grimsel, 1998] Grimsel, M.: Mechanisches Verhalten von Holz. Dissertation an der Fakultät Maschinenwesen an der Technischen Universität Dresden. 1998
- [Grosser & Zimmer, 1989] Grosser, D.; Zimmer, B.: Einheimische Nutzhölzer und ihre Verwendung. In: Informationsdienst Holz, Arbeitsgemeinschaft Holz e.V., Düsseldorf. 1989
- [Grossman, 1971] Grossman, P. U. A.: Use of Leicester's "Rheological Model for Mechano-sorptive Deflections of Beams". Wood Science and Technology, Vol. 5, S. 232-235. 1971
- [Grossmann, 1954] Grossmann, P.: Stress Relaxation in Wood. In: Nature, Vol. 173, pp. 173-174. Nature Publishing Group. 1954
- [Gulvanessian, et al., 2002] Gulvanessian, H.; Calgaro, J.-A.; Holický, M.: Designers'guide to EN 1990 Eurocode: Basis of structural design. Thomas Telford Limited, London. 2002
- [Gulvanessian, et al., 2009] Gulvanessian, H.; Formichi, P.; Calgaro, J.-A.: Designers'guide to Eurocode 1: Actions on buildings. Thomas Telford Limited, London. 2009
- [Gülzow et al., 2008] Gülzow, A.; Gsell, D.; Steiger, R.: Zerstörungsfreie Bestimmung elastischer Eigenschaften quadratischer 3-schichtiger Brettsperrholzplatten mit symmetrischem Aufbau. In: Holz als Roh- und Werkstoff, S. 19-37. Springer-Verlag. 2008

- [Gülzow, et al., 2010] Gülzow, A.; Richter, K.; Steiger, R.: Influence of wood moisture on bending and shear stiffness of cross laminated timber panels. In: European Journal of Wood Products, S. 193-197. Springer-Verlag. 2010
- [Hake & Meskouris, 2007] Hake, E.; Meskouris, K.: Statik der Flächentragwerke; Einführung mit vielen durchgerechneten Beispielen, Zweite korrigierte Auflage. Springer- Verlag, Berlin Heidelberg. 2007
- [Hanhijärvi, 1995] Hanhijärvi, A.: Modelling of creep deformation mechanisms in wood. Dissertation at the Helsinki University of Technology, Espoo. 1995
- [Hartmann, 1974] Hartmann, D.: Optimierung balkenartiger Zylinderschalen aus Stahlbeton mit elastischem und plastischem Werkstoffverhalten. Dissertation an der Abteilung Bauwesen der Universität Dortmund. 1974
- [Hartnack, 2004] Hartnack, R.: Langzeitverhalten von druckbeanspruchten Bauteilen aus Holz. Dissertation an der Fakultät für Bauingenieurwesen der Bauhaus-Universität Weimar. 2004
- [Heinle & Schlaich, 1996] Heinle, E.; Schlaich, J.: Kuppeln aller Zeiten – aller Kulturen. Deutsche Verlags-Anstalt. 1996
- [Heisel & Eggert, 1990] Heisel, U.; Eggert, O. Th.: Plastifizierung von Bugholz mit Hochfrequenz oder Wasserdampf. In: HOB 9/90, S. 18-26. Stuttgart: Institut für Werkzeugmaschinen. 1990
- [Heisel & Eggert, 1991] Heisel, U.; Eggert, O. Th.: Holzbiegen zwischen gestern und heute. In: HOB 5/91, S. 74-79. Stuttgart: Institut für Werkzeugmaschinen. 1991
- [Herrmann, 2009] Herrmann, M.: Innovationen der Holzfeuchtemessung, Diplomarbeit an der Technischen Universität München, Lehrstuhl für Holzbau und Baukonstruktion. 2009
- [Hofmann, 1992] Hofmann, T. J.: Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie. Dissertation am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart. 1992

- [Holzlexikon, 2003] Holzlexikon: Band 1 A-K, Band 2 L-Z. DRW- Verlag, Leinfelden-Echterdingen. 2003
- [Hoonakker, 2012] Hoonakker, S.: Timber cylindrical shells – Finite Element modeling. Masterarbeit an der Technischen Universität München, Lehrstuhl für Holzbau und Baukonstruktion. 2012
- [Jaenicke, 2003] Jaenicke, J.: Versuche zum Relaxationsverhalten von Kreisbogenträger. Diplomarbeit an der Faculté Environnement naturel, architectural et construit und der Technischen Universität München: Lausanne. 2003
- [Jöbstl, 2007] Jöbstl, R. A.: Praxisgerechte Bemessung von Brettsperholz. In: Tagungsband, Ingenieurholzbau, Karlsruher Tage 2007, Bruderverlag, Universität Karlsruhe. 2007
- [Keppler, 2003] Keppler, J. A.: Beitrag zur Bemessung sattelgelagerter Behälter unter vertikaler Belastung. Dissertation an der Technischen Hochschule Aachen, Fakultät für Bauingenieurwesen. 2003
- [Kersten, 1921] Kersten, C.: Freitragende Holzbauten. Springer Verlag, Berlin. 1921
- [Kersten, 1926] Kersten, C.: Freitragende Holzbauten; Ein Lehrbuch für Schule und Praxis. Zweite Auflage. Springer Verlag, Berlin. 1926
- [Kindmann & Krahwinkel, 2012] Kindmann, R.; Krahwinkel, M.: Stahl- und Verbundkonstruktionen, Entwurf, Konstruktion, Berechnungsbeispiele, 2. Auflage. Springer Vieweg Verlag, DOI 10.1007/978-3-8348-8634-7. 2012
- [Klonlogel, 1928] Klonlogel, A.: Die Schalengewölbe der Großmarkthalle Frankfurt am Main. In: Beton und Eisen, S. 11-16; 25-28. 1928
- [Klotz, 1991] Klotz, H.: Von der Urhütte zum Wolkenkratzer, Geschichte der Gebauten Umgebung. Prestel- Verlag, München. 1991
- [Knittel, 1948] Knittel, G.: Über die Berechnung freitragender kontinuierlicher Zylinderschalen. Dissertation an der Fakultät für Bauwesen der Technischen Hochschule München. 1948

- [Kollmann, 1951] Kollmann, F.: Technologie des Holzes und der Holzwerkstoffe, Band 1. Springer Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg. 1951
- [Kollmann, 1955] Kollmann, F.: Technologie des Holzes und der Holzwerkstoffe, Band 2. Springer Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg. 1955
- [Kollmann, 1961] Kollmann, F.: Rheologie und Strukturfestigkeit von Holz. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 19. Jahrgang, Heft 3, S. 73-80. Springer-Verlag. 1961
- [Kollmann, Krech, 1960] Kollmann, F.; Krech, H.: Dynamische Messung der elastischen Holzeigenschaften und der Dämpfung. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 18. Jahrgang, Heft 2, S. 42-54. Springer-Verlag. 1960
- [Koponen, 1998] Koponen, S.; Toratti, T.: Long-term deformations of plywood and solid timber. In WCTE 1998, S. 756-757, Montreux, Switzerland. 1998
- [Kordina, 2005] Kordina, K.: Ingenieurporträt Franz Dischinger – Konstrukteur dünnwandiger Schalen und Brücken aus Beton. In: Deutsche Bauzeitung, S. 68-75. Berlin. 2005
- [Kreuzinger, 1999] Kreuzinger, H.: Platten, Scheiben, Schalen; Ein Berechnungsmodell für gängige Statikprogramme. In: Bauen mit Holz, S. 34-39. Bruderverlag, Karlsruhe. 1999
- [Kubat, et al., 1989] Kubat, D. G.; Samuelsson, S.; Klason, C.: Stress relaxation in wood (Scots pine veneer). In: Journal of materials science 24, S. 3541-3548. Chapman and Hall Ltd. 1989
- [Kubat, et al., 1991] Kubat, D. G.; Klason, C.: Stress relaxation in wood (Scots pine veneer), Part II. In: Journal of materials science 24, S. 5261-5268. Chapman and Hall Ltd. 1991
- [Kühne, 1961] Kühne, H.: Beitrag zur Theorie des mechanischen Formänderungsverhaltens von Holz. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 19. Jahrgang, Heft 3, S. 81-82. Springer-Verlag. 1961



- [Lawniczak, 1967] Lawinczak, M.: Einfluss der Erwärmung von Rotbuche in Wasser auf das rheologische Verhalten bei zyklischer Belastung quer zur Faser. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 25. Jahrgang, Heft 1, S. 5-10. Springer-Verlag. 1967
- [Lederer, 1972] Lederer, F.: Fachwerk- und Rostplatten. Werner-Verlag, Düsseldorf. 1972
- [Lee, 1988] Lee, Y.-R.: Beitrag zur Berechnung interlaminarer Spannungen von dickwandigen laminierten Zylinderschalen mit abgestufter Dicke. Dissertation an der Fakultät für Maschinenwesen der Rheinisch- Westfälischen Technischen Hochschule Aachen. 1988
- [Leicester, 1971] Leicester, R. H.: A Rheological Model for Mechano-sorptive Deflections of Beams. Wood Science and Technology, Vol. 5, S. 211-220. 1971
- [Lennon, et al., 2006] Lennon, T.; Moore, D. B.; Wang, Y. C.; Bailey, C. G.: Designers' guide to EN 1991-1-2, 1992-1-2, 1993-1-2 and 1994-1-2. Thomas Telford Limited, London. 2006
- [Löffler, 1988] Löffler, T.: Kriechen von Holz. IRB Verlag, Stuttgart. 1988
- [Lundgren, 1949] Lundgren, H.: Cylindrical Shells. The Danish Technical Press, The Institute of Danish Civil Engineers, Copenhagen. 1949
- [Madsen, 1992] Madsen, B.: Structural behaviour of timber. Timber engineering LTD, Alpin Court. 1992
- [Mannes, et al., 2012] Mannes, D.; Schmidt, J.-A.; Volkmer, T.; Niemz, P.: Untersuchungen zum Einfluss der Klebstoffart auf den kapillaren Wassertransport in Holz parallel zur Faserrichtung. In: Bauphysik 34, Heft 2, S. 61-65. Ernst & Sohn, Berlin. 2012
- [Martensson, et al., 1991] Martensson, A.; Ranta-Maunus, A.; Seoane, I.: Fundamental Aspects on creep in Wood. In: Cost 508-Wood Mechanics Workshop, Department of Structural Engineering, Lund University, Sweden, Lund. 1991

- [Meschke, 1989] Meschke, H.-J.: Baukunst und –Technik der hölzernen Wölbkonstruktionen – Vom Bogentragwerk zum Stabnetzwerk. Dissertation an der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, Fakultät für Architektur. 1989
- [Mestek, 2011] Mestek, P.: Punktgestützte Flächentragwerke aus Brettspertholz (BSP) – Schubbemessung unter Berücksichtigung von Schubverstärkungen. Dissertation an der Technischen Universität München, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen. 2011
- [Mezger, 2010] Mezger, T.G.: Das Rheologie Handbuch, Für Anwender von Rotations- und Oszillations-Rheometer. 3. überarbeitete Auflage. Hannover: Vincentz Network. 2010
- [Mirianon, et al., 2008] Mirianon, F.; Fortino, S.; Toratti, T.: A Method to model Wood by using ABAQUS Finite Element Software, Part 1. Constitutive Model and computational Details. VTT Publications 687, VTT Technical Research Centre of Finland, Kemistintie. 2008
- [Mohammad, 1975] Mohammad, H. R.: Durchlaufende Tonnenschalen gleichbleibender Wanddicke mit veränderlichem Krümmungsradius. Dissertation an der Fakultät für Bauwesen der Rheinisch- Westfälischen Technischen Hochschule Aachen. 1975
- [Möhler & Maier, 1970] Möhler, K.; Maier, G.: Kriech- und Relaxationsverhalten von lufttrockenem und nassem Fichtenholz bei Querdruckbeanspruchung. In: Holz als Roh- und Werkstoff 28, S. 14-20. Springer-Verlag. 1970
- [Moliński & Raczkowski, 1988] Moliński, W.; Raczkowski, J.: Creep of wood in bending and non-symmetrical moistening. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 46, S. 457-460. Springer-Verlag. 1988
- [Morlier, 1994] Morlier, P.: Creep in Timber Structures, Report of RILEM Technical Committee 112-TSC. Taylor & Francis, London and New York. 1994

- [Moser, 1985] Moser, K.: Ein Meilenstein auf dem Weg zu wirtschaftlichen Großüberdachungen; Eine neue Sporthalle als Holznetzku­p­pel in Oulu, Nordfinnland. In: Bauen mit Holz , S. 748-751. Bruderverlag, Karlsruhe. 1985
- [Moss, et al., 1979] Moss, P. J.; Carr, A. J.; ASCE, M.; Cree-Brown, N. C.: Nonlinear layered timber cylindrical shells. In: Journal of the structural division. Vol. 105, No. 10, October 1979, S. 2019-2033. 1979
- [Mucha, 1993] Mucha, A.: Holzbrücken, Statische Systeme, Konstruktionsdetails, Beispiele. Speedy's Kopie + Verlag, Rosenheim. 1993
- [Müller, 1998] Müller, C.: Entwicklung des Holzleimbaues unter besonderer Berücksichtigung der Erfindungen von Otto Hetzer – ein Beitrag zur Geschichte der Bautechnik. Dissertation an der Universität Weimar. 1998
- [Natterer, 1998] Natterer, J.; Sandoz, J.-L.: Space and shell structures in timber. In WCTE 1998, S. 377-387, Montreux, Switzerland. 1998
- [Natterer, et al., 1991] Natterer, J.; Herzog, T.; Volz, M.: Holzbau Atlas Zwei. Arbeitsgemeinschaft Holz e.V. und Institut für internationale Architektur-Dokumentation, München. Institut für internationale Architektur-Dokumentation GmbH, München. 1991
- [Natterer, et al., 2000] Natterer, J.; Burger, N.; Müller, A.; Natterer, Jo.: Holzrippendächer in Brettstapelbauweise - Raumerlebnis durch filigrane Tragwerke. In: Bautechnik 77 (2000), S. 783-792. Ernst & Sohn Verlag, Berlin. 2000
- [Neuhaus, 1981] Neuhaus, H.: Elastizitätszahlen von Fichtenholz in Abhängigkeit von der Holzfeuchtigkeit. Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen, Mitteilung Nr. 81-8, Ruhr-Universität Bochum, Bochum. 1981
- [Neuhaus, 1994] Neuhaus, H.: Lehrbuch des Ingenieurholzbaus. Vieweg+Teubner Verlag, Stuttgart. 1994
- [Neuhaus, 2009] Neuhaus, H.: Ingenieurholzbau, Grundlagen-Bemessung-Nachweise-Beispiele, 2. Vollständig überarbeitete Auflage. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden. 2009

- [Niemz, 1993] Niemz, P.: Physik des Holzes und der Holzwerkstoffe. Leinfelden-Echterdingen: DRW-Verlag Weinbrenner. 1993
- [Niemz, et al., 2003] Niemz, P.; Petzold, H.; Häupl, P.: Untersuchungen zur Messung und Simulation der Feuchteänderung von dreischichtigen Massivholzplatten bei Klimawechsel. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 61. Jahrgang, S. 8-12. Springer-Verlag. 2003
- [Niemz, et al., 2005] Niemz, P.; Bärtschi, H.; Howald, M.: Untersuchungen zur Feuchteverteilung und Spannungsbildung in Holzbauteilen bei Wechselklimalagerung. In: Schweizerische Zeitschrift für Forstwesen, 156. Jahrgang, S. 92-99. Stämpfli Publikationen AG, Bern. 2005
- [Noack & Stöckmann, 1968] Noack, D.; Stöckmann, V.: Prinzip der Dauerschwingbeanspruchung als statischer Relaxationsversuch mit überlagerter dynamischer Relaxation. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 26. Jahrgang, Heft 12, S. 447-453. Springer-Verlag. 1968
- [Perkitny, 1965] Perkitny, T.: Über Wechselbeziehungen zwischen Sorption, Desorption und Rheologie von Holz. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 23. Jahrgang, Heft 5, S. 173-182. Springer-Verlag. 1965
- [Perkitny, et al., 1976] Perkitny, T.; Hoffmann, Z.: Zur Relaxation von Holz nach verschieden langer, konstanter Durchbiegung. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 34. Jahrgang, S. 167-170. Springer-Verlag. 1976
- [Petersen, 1964] Petersen, C.: Beitrag zur praktischen Berechnung zylindrischer Tonnenschalen mit veränderlichem Krümmungshalbmesser. Dissertation an der Fakultät für Bauwesen der Technischen Hochschule München. 1964
- [Pfefferle, 1971] Pfefferle, R.: Zur Theorie des Betonkriechens. Dissertation an der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität Karlsruhe. 1998
- [Pirazzi, 2005] Pirazzi, C.: Zur Berechnung von Holzschalen in Brettrippenbauweise mit elastischem Verbundquerschnitt. Dissertation, École Polytechnique fédérale de Lausanne. 2005

- [Piter, et al., 2006] Piter, J. C.; Zerbino, R. L.; Blaß, H. J.: Deflections in beams of Argentinean Eucalyptus grandis under long term loading. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 64. Jahrgang, S. 351-355. Springer-Verlag. 2006
- [Pohl, 1934] Pohl, K. A.: Das Schalengewölbe als Holzkonstruktion. Der Bauingenieur, Heft 39/40, S. 381-384. Springer Verlag, Berlin. 1934
- [Popper, et al., 1999] Popper, R.; Gehri, E.; Eberle, G.: Mechanosorptive Eigenschaften von bewehrtem Brettschichtholz: Relaxation bei zyklischer Klimabelastung. Verlag nicht bekannt. 1999
- [Popper, et al., 2004] Popper, R.; Niemz, P.; Eberle, G.: Untersuchungen zur Gleichgewichtsfeuchte und Quellung von Massivholzplatten. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 62. Jahrgang, S. 209-217. Springer-Verlag. 2004
- [Raczkowski, 1969] Raczkowski, J.: Der Einfluss von Feuchtigkeitsänderung auf das Kriechverhalten des Holzes. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 27. Jahrgang, Heft 6, S. 232-237. Springer-Verlag. 1969
- [Ranta-Maunus, 1995] Ranta-Maunus, A.: Creep and effects of moisture in timber. In: Informationsdienst Holz, Holzbauwerke, STEP 3, Grundlagen Entwicklungen Ergänzungen, S. 4/1-4/21. Fachverlag Holz, Düsseldorf, 1995
- [Ranz, 2007] Ranz, T.: Ein feuchte- und temperaturabhängiger anisotroper Werkstoff: Holz. Heft 2/07 der Reihe: Beiträge der Materialtheorie, Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, Neubiberg. 2007
- [Rauch, 2010] Rauch, M.: Schalen und Freiformtragwerke – Entwicklung, Grundlagen und Ausführung. Masterarbeit an der Technischen Universität München, Lehrstuhl für Holzbau und Baukonstruktion. 2010
- [Reinhardt, 1973] Reinhardt, H.-W.: Zur Beschreibung des rheologischen Verhaltens von Holz. In: Holz als Roh- und Werkstoff 31, S. 352-355. Springer-Verlag. 1973

- [Rösler, et. al., 2012] Rösler, J.; Harders, H.; Bäker, M.: Mechanisches Verhalten der Werkstoffe, 4. Auflage. Springer Vieweg- Verlag, Wiesbaden. 2012
- [Roth, 1935] Roth, P.: Dauerbeanspruchung von Eichenholz- und von Tannenholz- Prismen in Faserrichtung durch konstante und durch wechselnde Druckkräfte und Dauerbeigebeanspruchung von Tannenholzbalken. Dissertation an der Technischen Hochschule „Fridericiana“ zu Karlsruhe i. B. J. Langs Buchdruckerei, Karlsruhe. 1935
- [Rug, 2006] Rug, W.: 100 Jahre Hetzer-Patent. In: Bautechnik 83 (2006), Heft 8, S. 533-540. Ernst & Sohn Verlag, Berlin. 2006
- [Schäfer, 2009] Schäfer, W.: Die Reise nach Jerusalem. In: Bauen mit Holz , S. 16-18. Bruderverlag, Karlsruhe. 2009
- [Schänzlin, 2003] Schänzlin, J.: Zum Langzeitverhalten von Brettstapel-Beton-Verbunddecken. Dissertation am Institut für Konstruktion und Entwurf der Universität Stuttgart. 2003
- [Schickhofer, 1994] Schickhofer, G.: Starrer und nachgiebiger Verbund bei geschichteten, flächenhaften Holzstrukturen. Dissertation an der Technischen Universität Graz, Fakultät für Bauingenieurwesen. 1994
- [Schießl, 2003] Schießl, P.: Skriptum zu Vertiefervorlesung Bauingenieurwesen Grundfachvorlesung Baustoffingenieurwesen des Fachs Baustoffkunde. Lehrstuhl für Baustoffkunde und Werkstoffprüfung, Hydratationswärme und Festigkeitsentwicklung: Technische Universität München. 2003
- [Schmidt, 2005] Schmidt, H.: Von der Steinkuppel zum Zeiss-Dywidag-Schalen-Gewölbe. In: Beton- und Stahlbetonbau, Heft 1, S. 79-92. Ernst & Sohn. 2005
- [Scholz, 2004] Scholz, A.: Ein Beitrag zur Berechnung von Flächentragwerken aus Holz. Dissertation an der Technischen Universität München, Fakultät für Bauingenieurwesen. 2004



- [Scholz, Wagenführ, 2008] Scholz, F.; Wagenführ, A.: Taschenbuch der Holztechnik. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag München, Leipzig. 2008
- [Schunk et al., 1996] Schunk, E.; Rasch, J.; Barthel, R.; Graefe, R.; Wenzel, F.; Kupfer, H.; Isler, H.: Beiträge zur Geschichte des Bauingenieurwesens 7. Schalen. Vorträge im Wintersemester 95/96. Technische Universität München, Lehrstuhl für Baukonstruktion. 1996
- [Sell, 1989] Sell, J.: Eigenschaften und Kenngrößen von Holzarten. Baufachverlag AG, Zürich. 1989
- [Silva, et al., 2012] Silva, D. A. L.; Lahr, F. A. R.; de Faria, O. B.; Chahud, E.: Influence of wood moisture content on the modulus of elasticity in compression parallel to the grain. In: Materials Research. S. 300-304. 2012
- [Sorvari, Malinen, 2007] Sorvari, J.; Malinen, M.: On the direct estimation of creep and relaxation functions. In: Mech Time-Dependent Mater, S. 143-157. Springer-Verlag. 2007
- [Stapel, et al., 2010] Stapel, P.; Rais, A.; van de Kuilen, J-W.: Influence of origin and grading principles on the engineering properties of European timber. CIB W18 paper 43-5-2. Nelson, New Zealand. 2010
- [Steck, 1985] Steck, G.: Abbau von Eigenspannungen aus Feuchteänderung bei Brettschichtholz durch Sägeschnitte. Universität Karlsruhe, Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Stein, Abteilung Ingenieurholzbau. 1985
- [Steck, 1987] Steck, G.: Relaxationsversuche mit Brettschichtholzproben unter Querdruckbeanspruchung infolge Feuchtezunahme. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 45. Jahrgang, S. 137-140. Springer-Verlag. 1987
- [Stevens, Turner, 1970] Stevens, W. C.; Turner, N.: Wood bending book. London. Her Majesty's Stationery office. 1970

- [Stiefel, 2013] Stiefel, F.: Spannungsrelaxation in gekrümmten Holzbauteilen bei wechselnder Holzfeuchte. Bachelorarbeit an der Technischen Universität München, Lehrstuhl für Holzbau und Baukonstruktion. 2013
- [Stolper, 1998] Stolper, M.: Berechnung von Schalen aus Holz. Diplomarbeit an der Technischen Universität München, Institut für Tragwerksbau, Fachgebiet Holzbau. 1998
- [Szalai, 1986] Szalai, J.: Theoretische und experimentelle Untersuchung der herstellungsbedingten Eigenspannungen von gekrümmten Brettschichtträgern. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 44. Jahrgang, S. 69-75. Springer-Verlag. 1986
- [Tetzlaff, 1953] Tetzlaff, W.: Die praktischen Berechnungsverfahren für tonnen- und trogartige Schalen. VEB Verlag Technik Berlin, Berlin. 1953
- [Thelandersson & Larsen, 2003] Thelandersson, S., Larsen, H.-J.: Timber Engineering. John Wiley & Sons, England. 2003
- [Thelandersson, 1995] Thelandersson, S.: Deformations in timber structures. In: Informationsdienst Holz, Holzbauwerke, STEP 3, Grundlagen Entwicklungen Ergänzungen, S. 11/1-11/16. Fachverlag Holz, Düsseldorf, 1995
- [Timoshenko, 1953] Timoshenko, S. P.: History of Strength of Materials: With a brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures, McGraw-Hill Publishing Company LTD, New York, London, Toronto. 1953
- [Tong, 1994] Tong, L.: Creep of wood under a large span of loads in constant and varying environments. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 52. Jahrgang, S. 63-70. Springer-Verlag. 1994
- [Toratti & Svensson, 2000] Toratti, T.; Svensson, S.: Mechano-sorptive experiments perpendicular to grain under tensile and compressive loads. In: Wood Science and Technology, Volume 34, Issue 4, S. 317-326. 2000

- [Toratti, 1992/1] Toratti, T.: Modelling the Creep of Timber Beams. In: Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 25 No 1, SS. 12-35, Helsinki. 1992
- [Toratti, 1992] Toratti, T.: Creep of Timber in a variable Environment. Dissertation at the Helsinki University of Technology, Helsinki. 1992
- [v. Halász & Cziesielski, 1973] v. Halász, R., Cziesielski, E.: Konstruktion und Berechnung hölzerner Zylinderschalen aus Furnierholz. Berichte aus der Bauforschung, Heft 90. Ernst & Sohn Verlag, Berlin. 1973
- [v. Halász & Scheer, 1996] v. Halász, R., Scheer, C.: Holzbau Taschenbuch; Band 1: Grundlagen, Entwurf, Bemessung von Konstruktionen, 9. Auflage. Ernst & Sohn Verlag, Berlin. 1996
- [v. Halász, 1974] v. Halász, R.: Holzbau-Taschenbuch. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin-München-Düsseldorf. 1974
- [Van de Kuilen, 2004] Van de Kuilen, J.W.G.: Structural use of steam bent timber in a guardrail. In WCTE 2004, Lathi, Finland. 2004
- [Van de Kuilen, 2013] Van de Kuilen, J.W.G.: Vorlesungsunterlagen zur Vorlesung Holz im Bauwesen. WS13/14, Holzforschung München. 2013
- [van der Put, 1989] Van der Put, T. A. C. M.: Deformation and Damage Process in Wood. Dissertation at the Technische Universiteit Delft, Delft. 1989
- [Varga & van der Zee, 2008] Varga, D.; van der Zee, M. E.: Influence of steaming on selected wood properties of four hardwood species. In: Holz als Roh- und Werkstoff, 66. Jahrgang, S. 11-18. Springer-Verlag. 2008
- [Volkmer, et al., 2012] Volkmer, T.; Schmidt, J.-A.; Kranitz, K.; Niemz, P.: Untersuchungen zum Einfluss der Klebstoffart auf den Diffusionswiderstand von Holzverklebungen. In: Bauphysik 34, Heft 2, S. 55-60. Ernst & Sohn, Berlin. 2012
- [Walford & Moss, 1980] Walford, G. B.; Moss, P. J.: Tests on nailed and glued layered timber cylindrical shells. In: Journal of the structural division. Vol. 106, No. 1, January 1980, S. 247-263. 1980

- [Winter & Rug, 1992] Winter, K., Rug, W.: Innovationen im Holzbau – Die Zollinger Bauweise. In: Bautechnik 69 (1992) , S. 190-197. Ernst & Sohn Verlag, Berlin. 1992
- [Winter, et al., 2008] Winter, S.; Kreuzinger, H.; Mestek, P.: Brettstapel, Brettsperrholz und Verbundkonstruktionen. Teilprojekt 15 des HTO-Verbundforschungsvorhabens „Holzbau der Zukunft, TU München. 2008
- [Wlassow, 1958] Wlassow, W.S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie-Verlag, Berlin. 1958
- [Wood, 1947] Wood, L. W.: Behavior of wood under continued loading. Engr. News Record, Vol. 139, No. 24, pp. 108-111. 1947
- [Wood, 1951] Wood, L. W.: Relation of strength of wood to duration of load. Forest Products Laboratory Report No. 1916, December, Madison, Wisconsin. 1951
- [Zimmermann, 1992] Zimmermann, R.: Optimierung axial gedrückter CFK-Zylinderschalen. VDI Reihe 1 Nr. 207. VDI- Verlag, Düsseldorf. 1992
- [Zöllner, 1906] Zöllner, L.: Der Eisenbeton-Kuppelaufbau des Armeemuseums in München. In: Deutsche Bauzeitung, S. 60-61. Berlin. 1906

**Verwendete Normen und Zulassungen:**

- DIN 1052:2008-12 Entwurf, Berechnung und Bemessung von Holztragwerken - Allgemeine Bemessungsregeln und Bemessungsregeln für den Hochbau
- DIN EN 384:2010-08 Bauholz für tragende Zwecke - Bestimmung charakteristischer Werte für mechanische Eigenschaften und Rohdichte; Deutsche Fassung EN 384:2010
- DIN EN 338:2010-12 Bauholz für tragende Zwecke - Festigkeitsklassen; Deutsche Fassung prEN 338:2010

DIN EN 1992-1-1	Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken - Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau; Deutsche Fassung EN 1992-1-1:2004 + AC:2010
DIN EN 1194:1999	Brettschichtholz - Festigkeitsklassen und Bestimmung charakteristischer Werte
DIN EN 386:2001	Brettschichtholz - Leistungsanforderungen und Mindestanforderungen an die Herstellung
DIN EN 12369-1:2001	Charakteristische Werte für die Berechnung und Bemessung von Holztragwerken. Teil 1: OSB, Spanplatten und Faserplatten; Deutsche Fassung EN 12369-1:2001
DIN EN 1995-1-1:2010-12	Eurocode 5: Bemessung und Konstruktion von Holzbauten - Teil 1-1: Allgemeines - Allgemeine Regeln und Regeln für den Hochbau; Deutsche Fassung EN 1995-1-1:2004 + AC:2006 + A1:2008
DIN EN 1990:2010-12	Grundlagen der Tragwerksplanung; Deutsche Fassung EN 1990:2002 + A1:2005 + A1:2005/AC:2010
DIN EN 14358:2006	Holzbauwerke - Berechnung der 5%-Quantile für charakteristische Werte und Annahmekriterien für Proben; Deutsche Fassung 14358:2006
DIN EN 14080:2013-09	Holzbauwerke - Brettschichtholz und Balkenschichtholz - Anforderungen; Deutsche Fassung EN 14080:2013
E DIN EN 16351:2011-12	Holzbauwerke - Brettsperrholz - Anforderungen; Deutsche Fassung prEN 16351:2011
DIN EN 12369-2:2011-09	Holzwerkstoffe - Charakteristische Werte für die Berechnung und Bemessung von Holzbauwerken - Teil 2: Sperrholz; Deutsche Fassung EN 12369-2:2011
DIN EN 12369-3:2009-02	Holzwerkstoffe - Charakteristische Werte für die Berechnung und Bemessung von Holzbauwerken - Teil 3: Massivholzplatten; Deutsche Fassung EN 12369-3:2008

- DIN EN 385:2001 Keilzinkenverbindung in Bauholz - Leistungsanforderungen und Mindestanforderungen an die Herstellung; Deutsche Fassung EN 385:2001
- DIN EN 1995-1-1/NA:2013-08 Nationaler Anhang - National festgelegte Parameter - Eurocode 5: Bemessung und Konstruktion von Holzbauten - Teil 1-1: Allgemeines - Allgemeine Regeln und Regeln für den Hochbau
- DIN 52186 Prüfung von Holz – Biegeversuch
- Nr. Z-9.1-242 Allgemeine bauaufsichtliche Zulassung „K1-Multiplan“ Drei- und Fünfschichtplatten aus Nadelholz, vom 18. Juni 2012

### **Immaterielle Quellen**

- [Dieffenbacher] <http://www.dieffenbacher.de> (abgerufen: 08.05.2013)
- [blumer-lehmann] [http://www.blumer-lehmann.ch/silobau/img/pool/1\\_400-RU-V-S.pdf](http://www.blumer-lehmann.ch/silobau/img/pool/1_400-RU-V-S.pdf) (abgerufen: 08.05.2013)

## 12 Formelzeichen und Abkürzungen

### Griechische Buchstaben:

$\alpha$	Temperaturausdehnungskoeffizient; Winkel; Anschnitt-Winkel der Randbalken; Quell- bzw. Schwindmaße; Parameter
$\beta$	Parameter; Winkel
$\gamma$	Gleitung; Teilsicherheitsbeiwert; Abminderungsbeiwert; Verformung
$\Delta$	Änderung; Differenz; Verformung
$\varepsilon$	Verformung; Dehnung
$\eta$	Viskosität; Dämpferkonstante; Ausnutzungsgrad
$\vartheta$	Restspannung; Neigung Ober- Untergurt
$\kappa$	Krümmung
$\nu$	Querdehnzahl
$\pi$	Mathematische Konstante
$\sigma$	Spannung
$\tau$	Schubspannung
$\varphi$	Öffnungswinkel einer Schale; Startwinkel; Ringrichtung; Kriechzahl; Konstante
$\chi$	Spannungsrelaxation

### Große lateinische Buchstaben

$A$	Querschnittsfläche; Ebene der Schubanalogie
$B$	Biegesteifigkeit; Binderscheibe; Ebene der Schubanalogie; Parameter zur Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen Feuchte und Kriechen
$C$	Ebene der Schubanalogie; Compliance
$D$	Dehnsteifigkeit; Druckkraft; Dämpferkonstanten; Parameter zur Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen Feuchte und Kriechen
$E$	E-Modul; Federsteifigkeit
$F$	Kraft; Druckkraft; Steigung der Relaxationskurve
$G$	Schubmodul



## Formelzeichen und Abkürzungen

<i>J</i>	Nachgiebigkeit
<i>K</i>	Biegesteifigkeit; Federsteifigkeit; Krümmung
<i>L</i>	Länge; Spannweite; Longitudinal
<i>M</i>	Moment; Messuhr; Modul
<i>N</i>	Normalkraft
<i>P</i>	Belastung
<i>R</i>	Krümmungsradius; Radius; Entlastungsphase; Tragfähigkeit; Ringrichtung
<i>S</i>	Schale; Ersatzschubsteifigkeit; Gesamtlänge
<i>T</i>	Festigkeitsklasse der Lamellen; Temperatur
<i>W</i>	Widerstandsmoment
<i>X</i>	Auflagerkraft; Festhaltekraft; berechneter Zahlenwert; Feuchte
<i>Y</i>	Verformung
<i>Z</i>	Zugkraft
<i>BSH</i>	Brettschichtholz
<i>BSP</i>	Brettsperrholz
<i>CNC</i>	Computerized Numerical Control
<i>EA</i>	Dehnsteifigkeit
<i>EI</i>	Biegesteifigkeit
<i>FEM</i>	Finite-Element-Methode
<i>GA</i>	Schubsteifigkeit
<i>GL</i>	Brettschichtholz (glued-laminated timber)
<i>HüNN</i>	Höhe über dem Meeresniveau
<i>KLED</i>	Klasse der Lasteinwirkungsdauer
<i>LF</i>	Lastfall
<i>LK</i>	Lastfallkombinationen
<i>MUF</i>	Melamin Klebstoff
<i>NKL</i>	Nutzungsklasse

NURBS Non-Uniform Rational B-Splines

*PF* Phenolformaldehyd Klebstoff

*TH* Theorie

*UF* Harnstoff Klebstoff

### **Kleine lateinische Buchstaben**

*a* Radius; Dicke des Einzelbauteils; Abstand der Querrippen; Parameter; Dämpferkonstante

*b* Sehnenlänge; Querschnittsbreite; Parameter

*c* Schubsteifigkeit der Verbindung; Abstand der Längsrippen; Parameter; Druck (compression)

*d* Schalendicke; Lamellenstärke; Design

*e* Trägerrostlänge, Hebelarm; Einheitsvektor

*f* Schalenstich

*g* Ständige Last

*h* Querschnittshöhe

*i* Knotennummer; Zähler

*k* Laufvariable; Parameter; charakteristische Angabe

*l* Länge; longitudinal

*m* Moment; Anzahl der Teilungen in Längsrichtung; Parameter; Parameter; Relaxationskoeffizient

*n* Normalkraft; Anzahl der Teilungen in Ringrichtung; Parameter

*p* Laufvariable

*q* Belastung; Querkraft; veränderliche Last

*r* Krümmungsradius der Lamelle; reversibel

*s* Bogenlänge; Funktionslänge, Schneelast

*t* Schalenstärke; Schubfluss; Zeit; Zug (tension); Lamellendicke

*u* Verschiebung; Verformung; Holzfeuchte

*v* Verschiebung

*w* Verschiebung; freie Schraubenlänge

## Formelzeichen und Abkürzungen

<i>x</i>	Koordinate, lokale Koordinate
<i>y</i>	Koordinate, lokale Koordinate
<i>z</i>	Koordinate, lokale Koordinate
<i>ap</i>	First (Apex)
<i>au</i>	Außen
<i>def</i>	Deformation
<i>ds</i>	Bogenintervalle, Trägerrostlänge
<i>dx</i>	Trägerrostlänge; differentielle Größe
<i>in</i>	Innen
<i>irr</i>	Irreversibel
<i>ms</i>	Mechano-sorptive
<i>nom</i>	Nominal
<i>pl</i>	Plastisch
<i>ref</i>	Referenz
<i>visk</i>	Viskos

### Indizes

$\varphi$	Ringrichtung
<i>e</i>	Elastisch
<i>d</i>	Designwert
<i>g</i>	Gesamt
<i>i,j</i>	Zähler
<i>k</i>	Charakteristischer Wert; 5%-Quantil
<i>l</i>	Lamelle; Linear
<i>m</i>	Moment, Mechano-sorptiv
<i>r</i>	Krümmung; reversibel
<i>s</i>	Schwerpunkt
<i>u</i>	Holzfeuchte

<i>x,y,z</i>	Koordinaten, lokale Koordinaten, Richtungen
<i>A</i>	Ebene A der Schubanalogie
<i>B</i>	Ebene B der Schubanalogie
<i>C</i>	Ebene C der Schubanalogie
<i>D</i>	Druck
<i>G</i>	Ständig
<i>K</i>	Krümmung
<i>L</i>	Longitudinal
<i>Q</i>	Veränderlich
<i>R</i>	Ring Richtung; Reibung
<i>T</i>	Temperatur
<i>X</i>	Feuchte
<i>Z</i>	Zug
<i>ap</i>	First (Apex)
<i>au</i>	Außen
<i>ax</i>	Axial
<i>dc</i>	Deklariert
<i>def</i>	Deformation
<i>fin</i>	Final
<i>in</i>	Innen
<i>inst</i>	Sofort
<i>irr</i>	Irreversibel
<i>min</i>	Minimal
<i>mean</i>	Mittlerer Wert
<i>ms</i>	Mechano-sorptive
<i>nom</i>	Nominal
<i>pl</i>	Plastisch

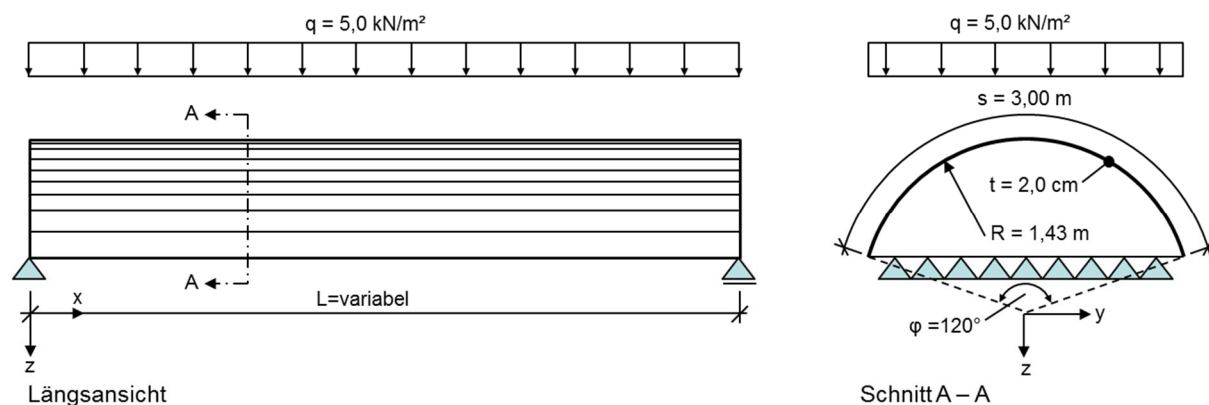
## Formelzeichen und Abkürzungen

<i>ref</i>	Referenz
<i>visk</i>	Viskos
<i>vorh</i>	Vorhanden
<i>zul</i>	Zulässig
0	Startwert; Referenzwert; Ausgangswert
1,2	Nummerierung
⊥	Senkrecht
	Parallel
∞	Unendlich
·	Transformiert
+	Positive Dehnung
-	Negative Dehnung; Stauchung

## Anhang A

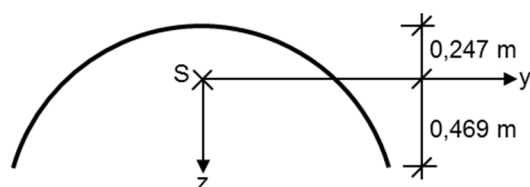
Vergleichende Berechnung zwischen der Berechnungsmethode nach Lundgren und der FEM:

Es werden Ergebnisse der Lundgren'schen Balkenanalgie mit Ergebnissen nach der Finiten Element Methode verglichen. Betrachtet wird eine isotrope Zylinderschale mit konstantem Radius, konstantem Öffnungswinkel, konstanter Schalenstärke und konstanter Belastung (siehe Abb. 276). Variiert wird lediglich die Spannweite der Schale.



**Abb. 276:** Grafische Darstellung der untersuchten Schale in Ansicht und Schnitt

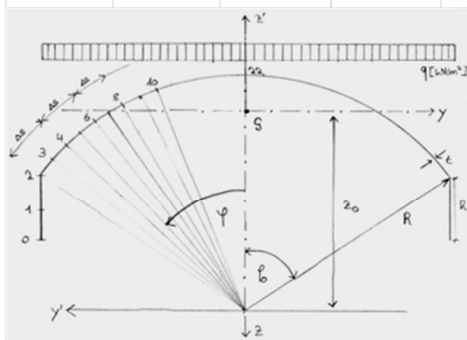
In einem ersten Schritt müssen die Querschnittswerte der Zylinderschale ermittelt werden, da die Spannungen entlang der Erzeugenden analog der Berechnungen am Balken bestimmt werden. Die Berechnung der Querschnittsgrößen erfolgt über ein Tabellenkalkulationsblatt im Programm Microsoft-Excel (siehe Abb. 278). Auf Grund der Achsensymmetrie des Querschnittes, wird der halbe Schalenquerschnitt betrachtet welcher in 22 Teilabschnitte zerlegt wird. Die Lage des Schwerpunktes wird wie aus der technischen Mechanik bekannt, über die Summe der statischen Momente der Teilquerschnitte, dividiert durch die Gesamtquerschnittsfläche ermittelt. Dazu wird das ursprüngliche Koordinatensystem in den Krümmungsmittelpunkt der Schale gelegt. Für den in diesem Beispiel betrachteten Schalenquerschnitt wird die Lage des Schwerpunktes in einer Entfernung von  $z_0 = 1,1851$  Metern vom Krümmungsmittelpunkt berechnet (siehe Abb. 278). Der Abstand der Faser im Scheitel bzw. an der Traufe zum Schwerpunkt beträgt  $0,247$  bzw.  $0,469$  Meter (siehe Abb. 277).



**Abb. 277:** Lage des Schwerpunktes der Schale

**Tabellarische Ermittlung der Schnittkräfte nach Lundgren**

— Zylinderschale mit Randträger unter symmetrischer Belastung —



<b>Schale:</b>	
t [m]	= 0,02
R [m]	= 1,43239449
q [kN/m <sup>2</sup> ]	= 5,00
φ <sub>0</sub> [°]	= 60
Δs [m]	= 0,1500
z <sub>0</sub> [m]	= 1,1851
<b>Schneelast:</b> ja	

<b>Randträger:</b>	
b [m]	= 0
h [m]	= 0
q <sub>rand</sub> [kN/m]	= 0
A <sub>0</sub> [m <sup>2</sup> ]	= 0,000

Punkt	φ [°]	z' = R cos φ [m]	y' = R sin φ [m]	A = t · Δs [m <sup>2</sup> ]	Sy' = A · z' [m <sup>3</sup> ]	Y = -y' [m]	Z = z <sub>0</sub> - z' [m]	A · Z [m <sup>3</sup> ]	Sy [m <sup>3</sup> ]	Iy = A · Z <sup>2</sup> [m <sup>4</sup> ]
0		0,716	1,240		0,00000	-1,240	0,469		0,00000	
1		0,716	1,240			-1,240	0,469	0,00000	0,00000	
2	60	0,716	1,240	0,00000	0,00000	-1,240	0,469	0,00000	0,00000	0,00E+00
3	57	0,780	1,201			-1,201	0,405			
4	54	0,842	1,159	0,00300	0,00234	-1,159	0,343	0,00121	0,00121	4,92E-04
5	51	0,901	1,113			-1,113	0,284			
6	48	0,958	1,064	0,00300	0,00270	-1,064	0,227	0,00085	0,00207	2,41E-04
7	45	1,013	1,013			-1,013	0,172			
8	42	1,064	0,958	0,00300	0,00304	-0,958	0,121	0,00052	0,00258	8,90E-05
9	39	1,113	0,901			-0,901	0,072			
10	36	1,159	0,842	0,00300	0,00334	-0,842	0,026	0,00022	0,00280	1,55E-05
11	33	1,201	0,780			-0,780	-0,016			
12	30	1,240	0,716	0,00300	0,00360	-0,716	-0,055	-0,00005	0,00275	7,86E-07
13	27	1,276	0,650			-0,650	-0,091			
14	24	1,309	0,583	0,00300	0,00383	-0,583	-0,123	-0,00027	0,00248	2,49E-05
15	21	1,337	0,513			-0,513	-0,152			
16	18	1,362	0,443	0,00300	0,00401	-0,443	-0,177	-0,00046	0,00202	6,94E-05
17	15	1,384	0,371			-0,371	-0,198			
18	12	1,401	0,298	0,00300	0,00415	-0,298	-0,216	-0,00060	0,00142	1,18E-04
19	9	1,415	0,224			-0,224	-0,230			
20	6	1,425	0,150	0,00300	0,00424	-0,150	-0,239	-0,00069	0,00074	1,58E-04
21	3	1,430	0,075			-0,075	-0,245			
22	0	1,432	0,000	0,00300	0,00429	0,000	-0,247	-0,00074	0,00000	1,81E-04
				Σ	Σ					Σ
				0,03000	0,03555					1,39E-03

Abb. 278: Tabellenkalkulationsblatt zur Ermittlung der Querschnittsgrößen

Zur Berechnung des Flächenträgheitsmomentes um die y-Achse werden die Eigenanteile der Schalenwandung vernachlässigt. Diese Vernachlässigung kann als begründet erachtet werden, da die Flächenträgheitsmomente der Teilquerschnitte wesentlich kleiner sind als deren Steineranteile bezogen auf den Schwerpunkt. Daraus ergibt sich für den halben Querschnitt ein Flächenträgheitsmoment von  $1,39 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$  (siehe Abb. 278) und für den Gesamtquerschnitt von  $I_y = 2,7801 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ . Somit können die Spannungen im Scheitel und an der Traufe analog der Berechnung am Balken ermittelt werden.

Spannung im Scheitel: 
$$\sigma_{x,\text{Scheitel}} = \frac{M_y(x) \cdot -0,247 \text{ m}}{I_y} \tag{A.1}$$

Spannung an der Traufe: 
$$\sigma_{x,\text{Traufe}} = \frac{M_y(x) \cdot 0,469 \text{ m}}{I_y} \tag{A.2}$$



In diesem Beispiel wird die Schale an beiden Enden gelenkig auf Endscheiben gelagert wodurch der Momentenverlauf durch eine quadratische Parabel wie folgt beschrieben werden kann:

$$M_y(x) = \frac{\bar{q}}{2} \cdot (L \cdot x - x^2) \tag{A.3}$$

$\bar{q}$  ist die vertikale Linienlast, die sich aus der Flächenlast  $q$  berechnet.

Die Berechnung der Schnittgrößen und Spannungen in Ringrichtung erfolgt durch Betrachtung des Querschnittes.

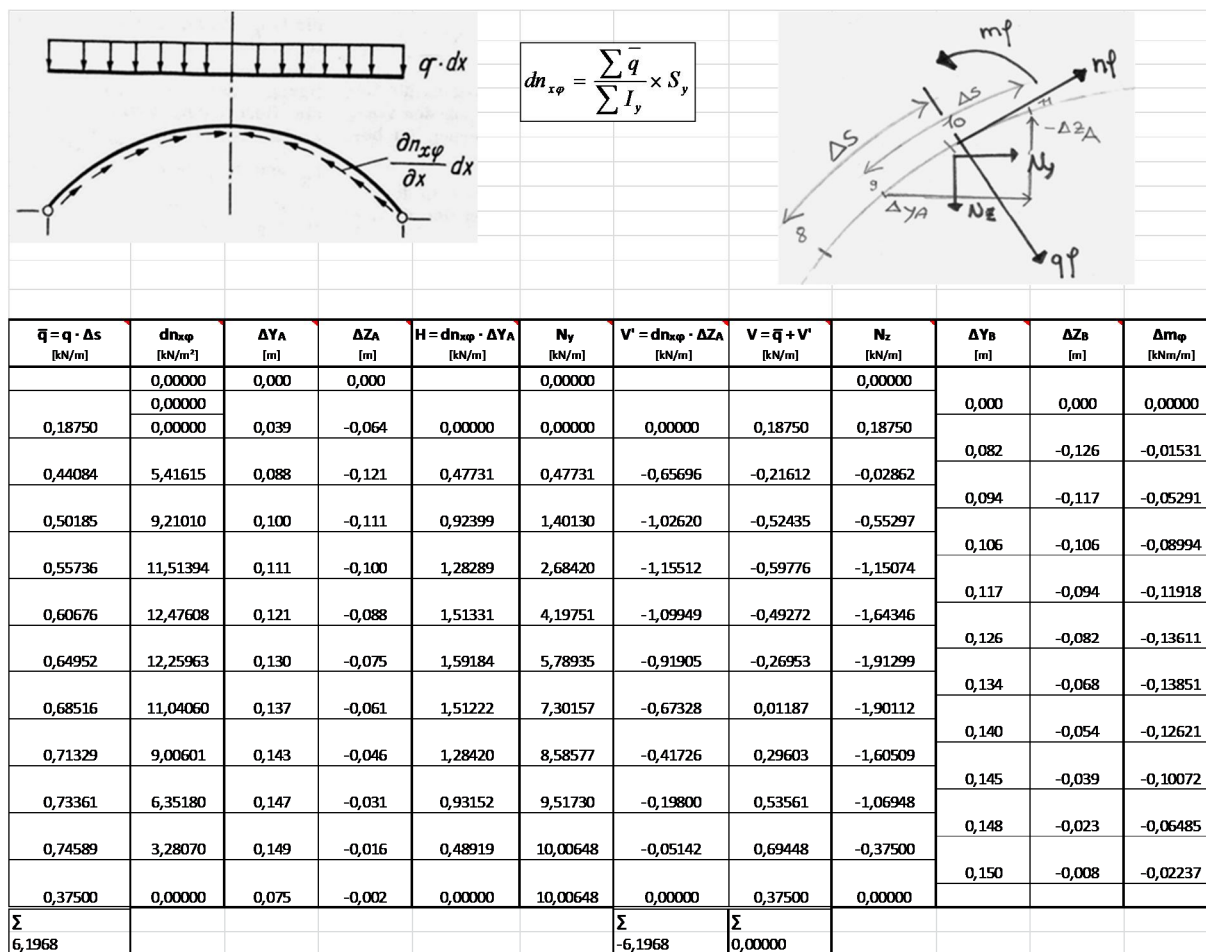


Abb. 279: Tabellenkalkulationsblatt zur Ermittlung der Kräfte in Ringrichtung

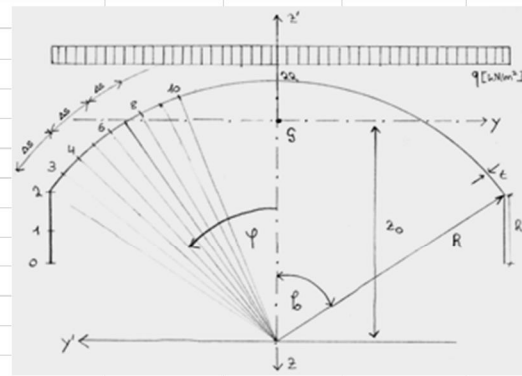
Dazu denkt man sich zunächst einen Schalenstreifen der Breite  $dx = 1$  herausgeschnitten. Dabei werden die, aus der Balkentragwirkung bekannten, Schnittkräfte  $n_{x\varphi}$  und  $n_{x\varphi} + \frac{\partial n_{x\varphi}}{\partial x} dx$  freigeschnitten. Damit wirkt auf den Bogen die Differenz dieser Schubkräfte

$$\frac{\partial n_{x\varphi}}{\partial x} dx = n'_{x\varphi} = \frac{\bar{q}}{I_y} \cdot S_y(s) \tag{A.4}$$

als tangentielle Kraft und die äußere Last  $q \cdot dx$ . Mit Hilfe von Gleichgewichtsbedingungen, bzw. wenn nötig mit einer statisch unbestimmten Rechnung, können daraus die gesuchten Schnittgrößen:  $n_\varphi$ ,

$m_\varphi$  und  $q_\varphi$  ermittelt werden. Nähere Informationen zur Berechnung sind den Literaturquellen [Lundgren, 1949] und [Carobbio, 2012] zu entnehmen.

Punkt	$\varphi$ [°]	$m_\varphi$ [kNm/m]	$n_\varphi$ [kN/m]	$q_\varphi$ [kN/m]
0				
1				
2	60	0,00000	0,00000	0,00000
3	57			
4	54	-0,01531	-0,30358	-0,36916
5	51			
6	48	-0,06823	-1,34798	-0,67105
7	45			
8	42	-0,15816	-2,76347	-0,94048
9	39			
10	36	-0,27735	-4,35986	-1,13713
11	33			
12	30	-0,41346	-5,96749	-1,23741
13	27			
14	24	-0,55197	-7,44017	-1,23250
15	21			
16	18	-0,67818	-8,65760	-1,12611
17	15			
18	12	-0,77890	-9,52732	-0,93223
19	9			
20	6	-0,84375	-9,98630	-0,67271
21	3			
22	0	-0,86612	-10,00648	0,00000



$$\Delta m_\varphi = N_y \times \Delta Z_B - N_z \times \Delta Y_B$$

$$n_\varphi = -N_y \times \frac{\Delta Y_A}{\Delta s} - N_z \times \frac{\Delta Z_A}{\Delta s}$$

$$q_\varphi = -N_z \times \frac{\Delta Y_A}{\Delta s} + N_y \times \frac{\Delta Z_A}{\Delta s}$$

Abb. 280: Tabellenkalkulationsblatt mit Ergebnissen der Schnittgrößen in Ringrichtung

Da die Berechnungsmethode nach Lundgren Querdehnungseffekte nicht berücksichtigt und in diesem Beispiel Schubverformungen vernachlässigt wurden, werden die Ergebnisse mit Lösungen der FEM unter Annahme der Kirchhoffschen Plattentheorie und einer Querdehnzahl  $\mu=0$  verglichen. Für den Elastizitätsmodul wurde ein Wert von 210.000 MN/m<sup>2</sup> in Rechnung gestellt. Die Schale wurde wie in der Lundgren'schen Berechnung gelenkig auf Endscheiben gelagert und mit dem Programm „Dlubal RFEM4.xx“ modelliert und berechnet (siehe Abb. 281).

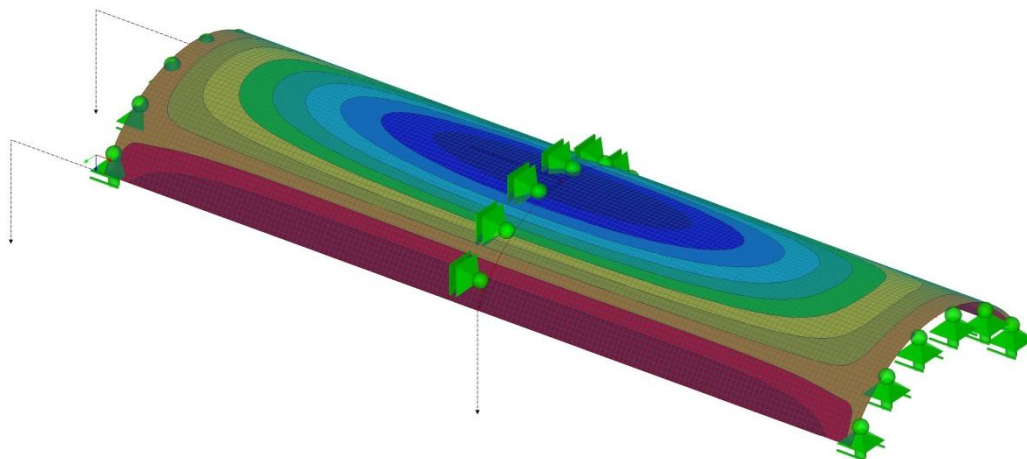
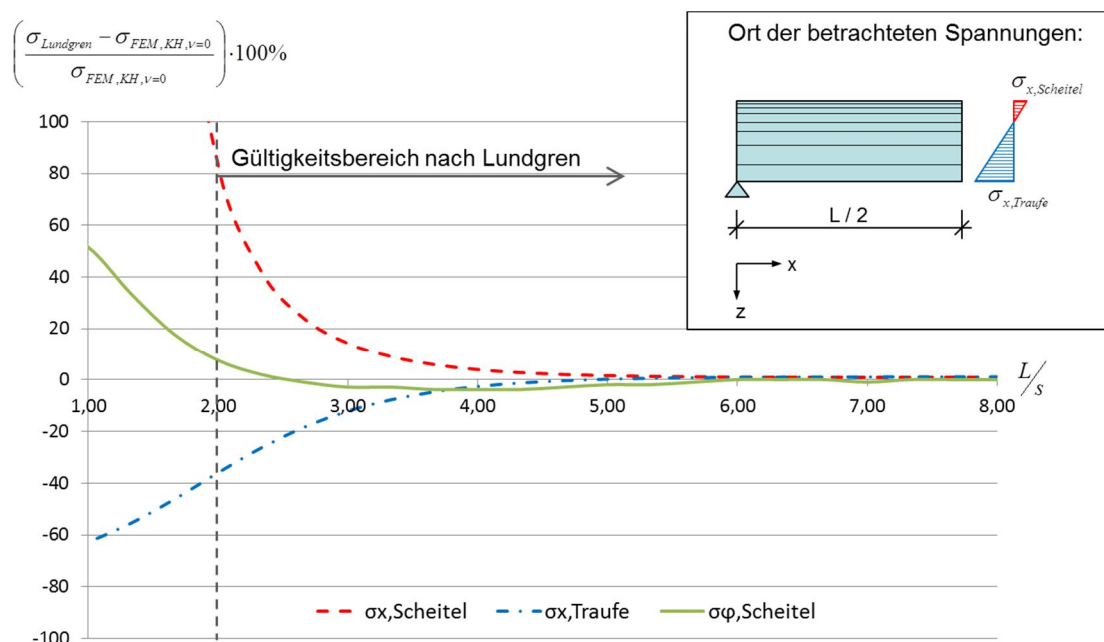


Abb. 281: Grafische Darstellung der Schale in RFEM

Aus den erhaltenen Ergebnissen der FEM- Berechnung und der Berechnungsmethode nach Lundgren konnte der Fehler in Abhängigkeit vom Verhältnis Spannweite zu Bogenlänge bei Betrachtung der longitudinalen Schwerpunktspannungen  $\sigma_x$  im Scheitel und an der Traufe in Feldmitte ermittelt werden. Zudem wurden die Schwerpunktspannungen in Ringrichtung  $\sigma_\varphi$  im Scheitel untersucht. Dabei wurden die Ergebnisse aus der FEM-Berechnung als exakte Lösung interpretiert (siehe Abb. 282).



**Abb. 282:** Vergleich Berechnungsergebnisse nach Lundgren und Ergebnisse nach der FE-Methode

Es zeigt sich, dass ab einem Verhältnis der Schalenspannweite zur Bogenlänge von ca. 4,0 das Ergebnis nach der Lundgren'schen Berechnungsmethode kaum von den Ergebnissen der FEM abweicht. Der mittlere Fehler der Spannungen im Scheitel beträgt ab diesem Geometrieverhältnis rund 1,5% und an der Traufe 0,4%. Folglich können die Spannungen im Scheitel und an der Traufe bei langen Zylinderschalen mit einer sehr hohen Genauigkeit berechnet werden. Unterhalb eines Verhältnisses der Spannweite zur Bogenlänge von 2 nimmt die Abweichung exponentiell zu und führt zu nicht brauchbaren Ergebnissen.

Des Weiteren wurden die Schnittgrößen  $m_\varphi$  und  $n_\varphi$  im Scheitel der Schale betrachtet (siehe Abb. 283). Es zeigt sich, dass die Übereinstimmung der in Ringrichtung verlaufenden Normalkräfte  $n_\varphi$  im Gültigkeitsbereich der Lundgren'schen Schalentheorie mit den exakten Ergebnissen sehr hoch ist. Der mittlere Fehler liegt in diesem Fall bei rund 0,8%. Dagegen sind die Abweichungen der Momente etwas höher und betragen durchschnittlich rund 5,7%. In Abb. 283 ist zudem noch die Berechnungsungenauigkeit der vertikalen Verschiebung der Trauflinie in Feldmitte dargestellt. Es zeigt sich, dass diese nicht besonders gut mit den Lösungen der FEM korrespondieren und ein mittlerer relativer Fehler von ca. 28,4% auftritt.

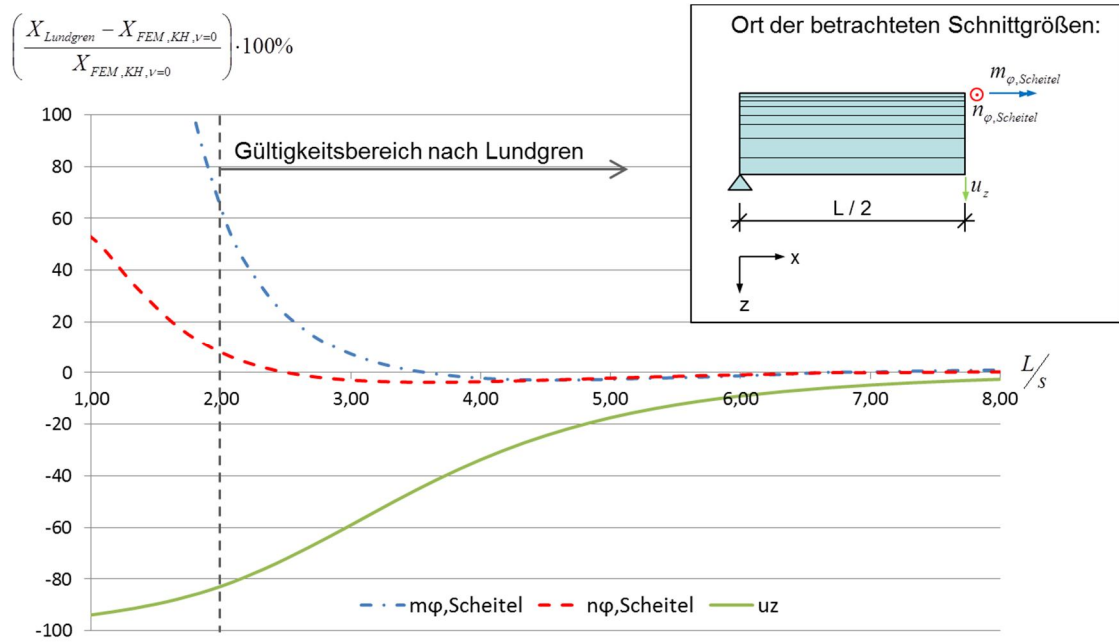


Abb. 283: Vergleich Berechnungsergebnisse nach Lundgren und Ergebnisse nach der FE-Methode

## Anhang B

Vergleichende Berechnung zwischen Trägerrost und FEM:

Um die Qualität der Berechnung von isotropen Zylinderschalen mittels Trägerrostmodellen zu überprüfen soll an einem exemplarischen Schalenquerschnitt eine Parameterstudie durchgeführt und die Ergebnisse mit Lösungen der FEM verglichen werden. Um ein geschlossenes Beispiel zu erhalten, werden mitunter Abschnitte aus dem Haupttext dieser Arbeit wiederholt, um somit die Vollständigkeit zu wahren. Dabei soll wie in Anhang A lediglich die Spannweite der Schale variiert werden (siehe Abb. 284).

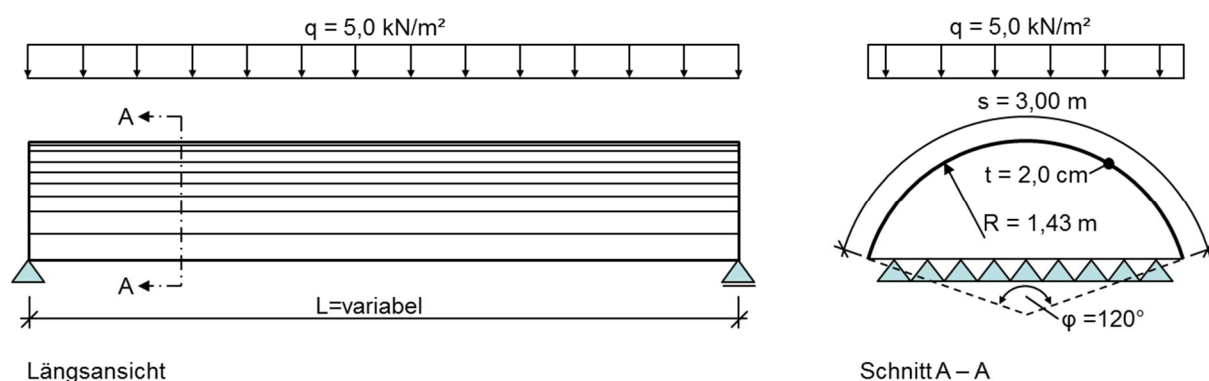


Abb. 284: Grafische Darstellung der untersuchten Schale in Ansicht und Schnitt

Zu diesem Zweck wurde in Microsoft Excel ein entsprechendes Arbeitsblatt erstellt, in welchem alle in Kapitel 2.5 angegebenen Formeln zur Bestimmung der Knotenpunkte und der Stabsteifigkeiten implementiert wurden. Die errechneten Daten können so über eine entsprechende Schnittstelle in das Stabwerksprogramm „Dlupal RStab7.xx“ eingelesen werden. Der Eingabebereich in Excel ist in Abb. 285 dargestellt. Der entsprechende Quellcode ist in Anhang C wiedergegeben.

Berechnung einer Isotropen Zylinderschale:			
<b>Materialkennwerte:</b>			
E- Modul:	210000	[MN/m <sup>2</sup> ]	
Schubmodul:	81000,0	[MN/m <sup>2</sup> ]	
Querdehnzahl:	0		
<b>Schalenquerschnitt:</b>			
Radius R:	1,43239449	[m]	
Öffnungswinkel Phi:	2,0943951	[Rad]	
Schalenintervalle n:	60		
Schalenstärke:	0,02	[m]	
Höhe Randträger:	0	[m]	
Breite Randträger:	0	[m]	
<b>Schalenspannweite:</b>			
Schalenintervalle längs:	100		

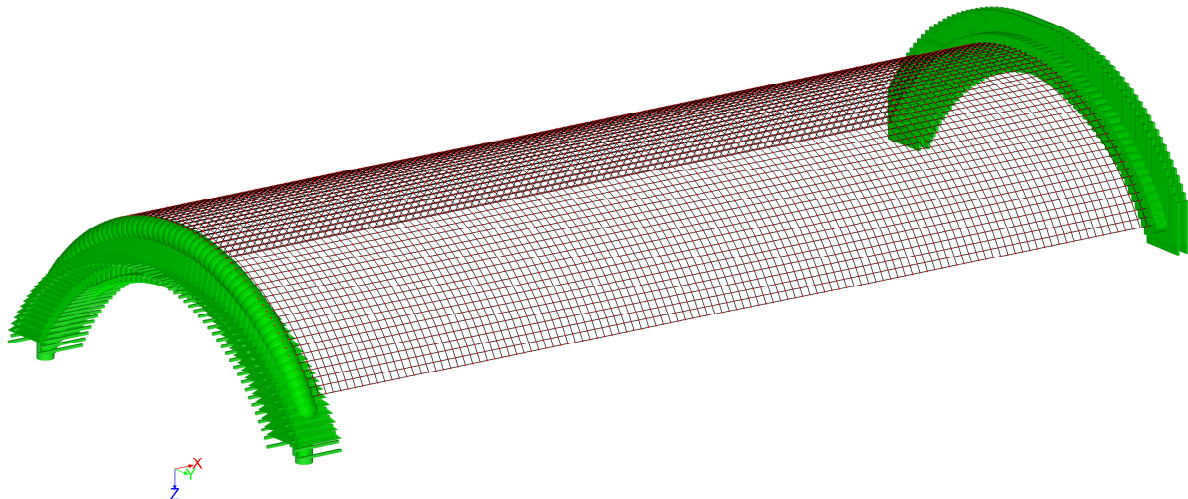
Abb. 285: Eingabebereich in Excel zur Berechnung isotroper Schalen

Das Trägerrostraster wird während der gesamten Berechnung konstant gehalten und hat ein Maß von 5,0 x 5,0 cm. Daraus ergeben sich folgende Stabsteifigkeiten:

Quersch. Nr.	Querschnitts- Bezeichnung	Material Nr.	Trägheitsmomente [cm <sup>4</sup> ]			Querschnittsflächen [cm <sup>2</sup> ]		
			Torsion I <sub>T</sub>	Biegung I <sub>y</sub>	Biegung I <sub>z</sub>	Axial A	Schub A <sub>y</sub>	Schub A <sub>z</sub>
1	Bogenstäbe	1	54000,00	70000,00	337500,00	210000,00	67500,00	67500,00
2	Longitudinalstäbe	1	54000,00	70000,00	337500,00	210000,00	67500,00	67500,00
3	Randbalken	1	27000,00	35000,00	168750,00	105000,00	33750,00	33750,00

**Abb. 286:** Stabsteifigkeiten berechnet mit Excel

Als Belastung wird eine Flächenlast von 5,0 kN/m<sup>2</sup> auf die Schale angesetzt. Diese Flächenlast wird durch einen „Lastgenerator“ auf Knotenlasten umgerechnet und in das System übertragen. Um den Berechnungsaufwand zu verringern wird nur die halbe Schalenlänge betrachtet und über entsprechende Lagerungen die Symmetriebedingungen erfüllt (siehe Abb. 287). Es könnte noch eine weitere Symmetrieebene in der Scheitellinie eingeführt werden, was in diesem konkreten Fall aber nicht gemacht wurde. Nach der erfolgten Berechnung können aus den erhaltenen Schnittgrößen am Stab wiederum Spannungen an der Schale ermittelt werden. Die Vergleichsrechnung wird mit dem Programm „Dlubal RFEM4.xx“ angestellt und die Berechnungsmethode nach Kirchhoff ohne Berücksichtigung der Schubverformungen zugrunde gelegt. Die Poissonzahl wird zu Null gesetzt, da das Trägerrostmodell auch keine Querdehnungseffekte berücksichtigen kann.



**Abb. 287:** Trägerrostmodell im Programm „Dlubal RStab7.xx“

Betrachtet werden die Schwerpunktspannungen in longitudinaler Richtung am Scheitel, an der Traufe und die Schwerpunktspannungen in Ringrichtung am Scheitel. Des Weiteren werden Abweichungen des Biegemomentes und der Normalkraft am Scheitel in Ringrichtung ermittelt.

Für das Trägerrostmodell können folgende Werte bestimmt werden:

Trägerrost						
L	$\sigma_{x,Scheitel}$	$\sigma_{x,Traufe}$	$m_{\phi,Scheitel}$	$n_{\phi,Scheitel}$	$\sigma_{\phi,Scheitel}$	max u
[m]	[MN/m <sup>2</sup> ]	[MN/m <sup>2</sup> ]	[kNm/m]	[kN/m]	[MN/m <sup>2</sup> ]	[mm]
1	-0,078	1,295	0,004	-6,070	-0,304	0,020
2	-0,017	3,521	0,014	-5,182	-0,259	0,130
3	0,164	6,421	-0,048	-5,310	-0,266	0,390
4	-0,082	9,527	-0,194	-6,128	-0,306	0,860
5	-1,018	12,315	-0,376	-7,112	-0,356	1,490
6	-2,595	14,847	-0,544	-7,932	-0,397	2,170
7	-4,645	17,475	-0,674	-8,498	-0,425	2,880
8	-7,032	20,493	-0,764	-8,840	-0,442	3,630
9	-9,683	24,054	-0,824	-9,040	-0,452	4,510
10	-12,570	28,224	-0,862	-9,132	-0,457	5,580
11	-15,683	33,020	-0,884	-9,158	-0,458	6,930
12	-19,023	38,443	-0,894	-9,146	-0,457	8,640
13	-22,593	44,483	-0,898	-9,108	-0,455	10,780
14	-26,397	51,129	-0,896	-9,060	-0,453	13,460
15	-30,442	58,368	-0,892	-9,008	-0,450	16,750
16	-34,733	66,184	-0,882	-8,958	-0,448	20,760
17	-39,275	74,567	-0,878	-8,910	-0,446	26,030
18	-44,073	83,504	-0,872	-8,870	-0,443	31,910
19	-49,131	92,985	-0,866	-8,834	-0,442	38,860
20	-54,452	103,002	-0,862	-8,808	-0,440	46,990
21	-60,040	113,549	-0,856	-8,786	-0,439	56,440
22	-65,897	124,619	-0,854	-8,770	-0,438	67,330
23	-72,023	136,209	-0,850	-8,758	-0,438	79,820
24	-78,422	148,317	-0,848	-8,750	-0,438	94,030

Abb. 288: Ergebnisse am Trägerrost in Abhängigkeit der Schalenspannweite

Entsprechend ergeben sich die Werte aus der Finiten Element Berechnung:

FEM						
L	$\sigma_{x,Scheitel}$	$\sigma_{x,Traufe}$	$m_{\phi,Scheitel}$	$n_{\phi,Scheitel}$	$\sigma_{\phi,Scheitel}$	max u
[m]	[MN/m <sup>2</sup> ]	[MN/m <sup>2</sup> ]	[kNm/m]	[kN/m]	[MN/m <sup>2</sup> ]	[mm]
1	-0,075	1,295	0,003	-7,250	-0,200	0,030
2	-0,010	3,470	0,013	-6,316	-0,315	0,180
3	0,145	6,330	-0,049	-6,550	-0,330	0,510
4	-0,150	9,380	-0,191	-7,457	-0,375	1,110
5	-1,120	12,145	-0,366	-8,467	-0,425	1,880
6	-2,705	14,705	-0,528	-9,274	-0,465	2,680
7	-4,750	17,400	-0,655	-9,813	-0,490	3,460
8	-7,130	20,485	-0,746	-10,135	-0,505	4,240
9	-9,770	24,110	-0,807	-10,307	-0,515	5,110
10	-12,645	28,345	-0,847	-10,381	-0,515	6,140
11	-15,755	33,195	-0,871	-10,395	-0,520	7,450
12	-19,100	38,665	-0,885	-10,372	-0,520	9,110
13	-22,670	44,745	-0,891	-10,330	-0,520	11,230
14	-26,485	51,435	-0,892	-10,278	-0,515	13,900
15	-30,535	58,710	-0,889	-10,225	-0,510	17,210
16	-34,845	66,560	-0,885	-10,174	-0,510	21,280
17	-39,400	74,975	-0,882	-10,128	-0,505	26,030
18	-44,215	83,940	-0,877	-10,089	-0,480	31,930
19	-49,295	93,455	-0,872	-10,057	-0,500	38,900
20	-54,635	103,500	-0,865	-10,006	-0,500	47,050
21	-60,250	114,080	-0,864	-10,011	-0,505	56,520
22	-66,130	125,190	-0,861	-9,996	-0,500	67,440
23	-72,280	136,815	-0,859	-9,985	-0,500	79,960
24	-78,705	148,965	-0,857	-9,977	-0,500	94,220

Abb. 289: Ergebnisse aus der FEM in Abhängigkeit der Schalenspannweite



Eine Gegenüberstellung der Berechnungsergebnisse zeigt folgende Zusammenhänge:

Ab einem Verhältnis der Schalenspannweite zur Bogenlänge von 2 stimmen die longitudinalen Schwerpunktspannungen im Scheitel und Traufe ( $\sigma_{x,Scheitel}$  und  $\sigma_{x,Traufe}$ ) in Feldmitte sehr gut mit den Berechnungen der FEM überein (siehe Abb. 290). Die relative Abweichung beträgt im Mittel weniger als 0,7%. Die Schwerpunktspannungen in Ringrichtung weisen eine beinahe konstante Abweichung von rund 12% auf. Dieser Fehler rührt hauptsächlich aus dem Berechnungsfehler der Normalkraft  $n_\phi$  und kann entsprechend auch Abb. 291 entnommen werden. Wieso bei einem Verhältnis von 1,5 plötzlich eine hohe Abweichung zwischen den Ergebnissen des Trägerrostes und der FEM auftritt konnte nicht erklärt werden. Dieses Verhalten zeigte sich in mehreren Berechnungsdurchgängen.

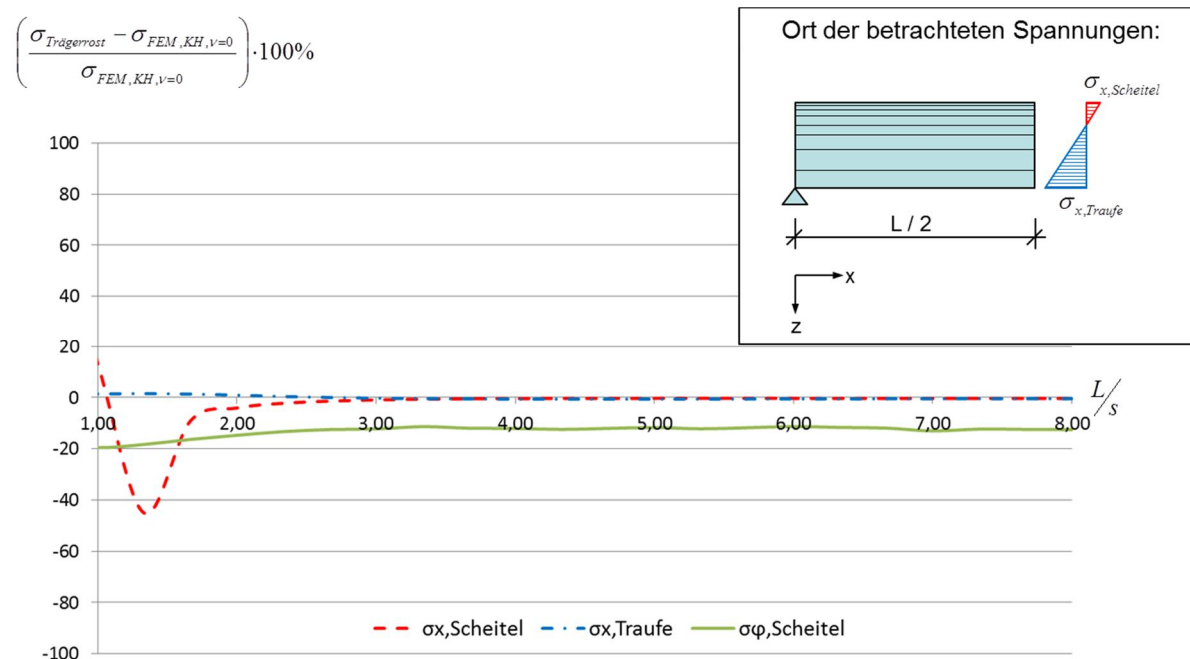


Abb. 290: Vergleich Berechnungsergebnisse am Trägerrost und Ergebnisse nach der FE-Methode

Bei Betrachtung nachstehender Auswertung kann erkannt werden, dass mit der Berechnung am Trägerrost das Moment  $m_\phi$  im Scheitel und die vertikale Verschiebung an der Traufe mit sehr hoher Genauigkeit bestimmt werden können. Auch die Verformungen der Trauflinie in vertikaler Richtung stimmen sehr gut mit den Berechnungen der FEM überein, lediglich die Normalkraft weist einen relativ hohen konstanten Fehler auf.

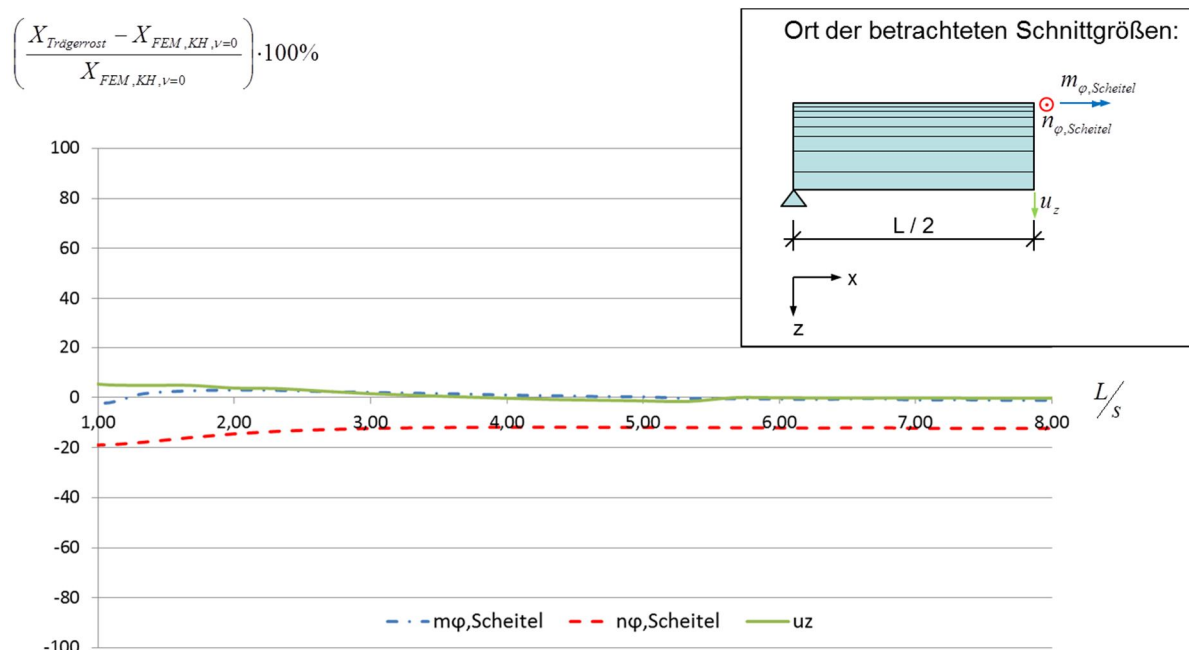


Abb. 291: Vergleich Berechnungsergebnisse am Trägerrost und Ergebnisse nach der FE-Methode

Anhand der durchgeführten Berechnungen kann festgestellt werden, dass ein Trägerrostmodell sehr gut geeignet ist um isotrope Zylinderschalen zu berechnen. Um den Einfluss der Querdehnung des Materials zu erfassen, wurden noch Vergleichsrechnungen mit der Methode der Finiten Elemente unter Berücksichtigung von Querdehnungseffekten des Materials durchgeführt. Es zeigte sich, dass kaum Einflüsse zu erkennen sind. Betrachtet wurde wiederum dieselbe Schale wie in den vorherigen Beispielen. Es wurden die Spannungen im Scheitel in Ring- und longitudinaler Richtung und die vertikale Verschiebung der Traufe (siehe Abb. 292) ausgewertet. Für die Querdehnungszahl wurde in das FEM-Programm ein Wert von  $\nu = 0,3$  eingegeben. Alle Berechnungen wurden nach der Kirchhoffschen Plattentheorie nach Theorie erster Ordnung durchgeführt.

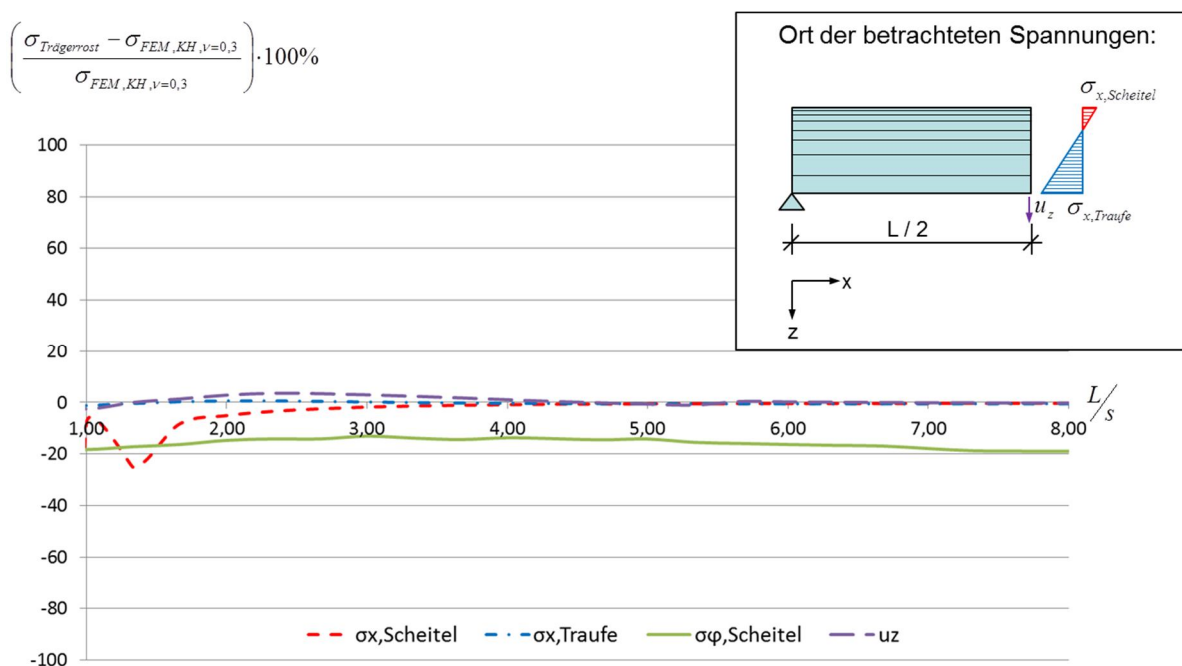


Abb. 292: Vergleich Berechnungsergebnisse am Trägerrost und Ergebnisse nach der FE-Methode

Ein letzter Berechnungslauf sollte noch etwaige Unterschiede der Ergebnisse zwischen dem Trägerrostmodell mit Berücksichtigung der Schubverformungen und der Berechnungsmethode nach Reissner- Mindlin untersuchen. Es wurde von einer Querdehnzahl  $\nu = 0$  ausgegangen und es hat sich gezeigt, dass die Ergebnisse ab einem Geometrieverhältnis von Rund zwei sehr gut übereinstimmen (siehe Abb. 293).

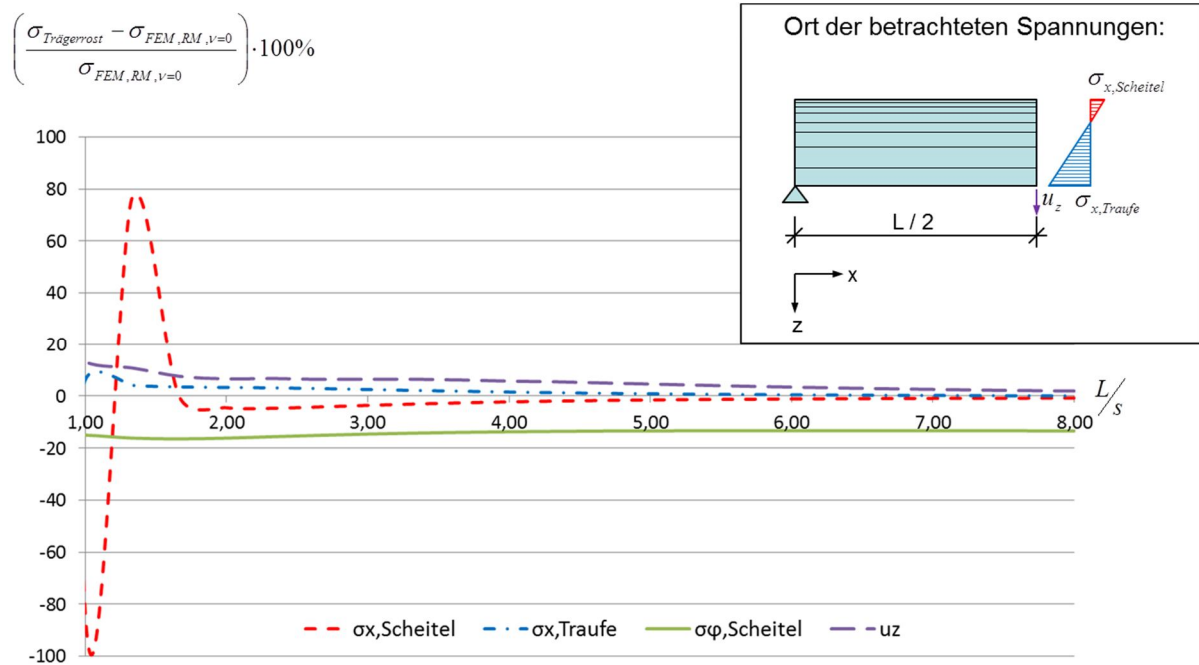


Abb. 293: Vergleich Berechnungsergebnisse am Trägerrost und Ergebnisse nach der FE-Methode

In Anbetracht aller durchgeführten Berechnungen wurde erkannt, dass ein Trägerrostmodell sehr gut geeignet ist Zylinderschalen zu berechnen. Ab einem Verhältnis der Schalenstützweite zur Bogenlänge von 2,0 stimmen die Ergebnisse sehr gut mit den Berechnungen der FEM überein. Die Vernachlässigung der Querdehnung des Materials führt nur zu geringen Abweichungen. Auch Berechnungen unter Berücksichtigung der Schubverformungen führen zu sehr guten Ergebnissen.

## Anhang C

Quellcode zur Berechnung des Trägerrostes und der Stabstelligkeiten in Microsoft Excel und zur Datenübertragung in „Dlubal RStab7.xx“.

```
Private Sub CommandButton1_Click()
```

```
Dim x, R, Phi, ds As Double           'Koordinaten des Kreisbogens
Dim n, m, i, px, py As Integer       'Anzahl der Intervalle

R = Sheets("Tabelle1").Range("C11").Value   'Radius der Schale [m]
n = Sheets("Tabelle1").Range("C13").Value   'Anzahl der Intervalle in Bogenrichtung
m = Sheets("Tabelle1").Range("C20").Value   'Anzahl der Intervalle in Schalenlängsrichtung
ds = Sheets("Tabelle1").Range("K5").Value   'Länge der Intervalle [m]
px = m + 1                                'Anzahl der Knoten in Schalenlängsrichtung
py = n + 1                                'Anzahl der Knoten in Bogenrichtung
Knoten = px * py                          'Punkte in einer Fläche
Stäbe = n * px + m * py                    'Stäbe in einer Fläche

Sheets("1.1 Knoten").Range("A3:G30000") = "" 'Bereinigung der Bereiche
Sheets("1.7 Stäbe").Range("A3:P30000") = ""  'Bereinigung der Bereiche

'Benennen der Bereiche
Sheets("1.1 Knoten").Range("D3:D" & 3 + n).Name = "x_Koordinate"
Sheets("1.1 Knoten").Range("E3:E" & 2 + (n + 1) * (m + 1)).Name = "Radius"
Sheets("Tabelle1").Range("D25:D" & 25 + n).Name = "Winkel"
Sheets("1.1 Knoten").Range("B3:B" & 2 + (n + 1) * (m + 1)).Name = "Bezugsknoten"
Sheets("1.1 Knoten").Range("C3:C" & 2 + (n + 1) * (m + 1)).Name = "Koordinatensystem"

'Auffüllen der Bereiche
Sheets("1.1 Knoten").Range("x_Koordinate").Value = 0
Sheets("1.1 Knoten").Range("Radius").Value = R
Sheets("1.1 Knoten").Range("Bezugsknoten").Value = 0
Sheets("1.1 Knoten").Range("Koordinatensystem") = "X-Zylindrisch"

For i = 0 To m                               'Eintragen der Winkel und der x-Koordinate
    Sheets("1.1 Knoten").Range("F" & (3 + (n + 1) * i) & ":F" & 2 + (n + 1) * (i + 1)).Value =
    Sheets("Tabelle1").Range("Winkel").Value
    Sheets("1.1 Knoten").Range("D" & (3 + (n + 1) * i) & ":D" & 2 + (n + 1) * (i + 1)).Value = ds * i
Next

For i = 0 To Knoten - 1
    Sheets("1.1 Knoten").Cells(3 + i, 1) = 1 + i           'Nummerierung der Knoten
Next

'Eingabe der Stäbe
For i = 0 To Stäbe - 1
    Sheets("1.7 Stäbe").Cells(3 + i, 1) = (i + 1)         'Nummerierung der Stäbe
Next

'Eingabe des Bogens
For k = 0 To (px - 1)
    For i = 0 To (py - 2)
        Sheets("1.7 Stäbe").Cells(3 + (i) + k * (py - 1), 3) = (i + 1) + k * py           'Knotenanzfang
        Sheets("1.7 Stäbe").Cells(3 + (i) + k * (py - 1), 4) = (i + 1) + k * py + 1       'Knotenende
    Next
Next
```

## Anhang C

Next

'Verbinden der Bögen

For i = 1 To py \* (px - 1)

Sheets("1.7 Stäbe").Cells(3 + (i - 1) + px \* (py - 1), 3) = i 'Knotenanzfang

Sheets("1.7 Stäbe").Cells(3 + (i - 1) + px \* (py - 1), 4) = i + py 'Knotenende

Next

Sheets("1.7 Stäbe").Range("G3:H" & n \* px + 2).Name = "Querschnitt\_Bogenstäbe"

Sheets("1.7 Stäbe").Range("G" & (n \* px + 3) & ":H" & Stäbe + 2).Name = "Querschnitt\_Längsstäbe"

Sheets("1.7 Stäbe").Range("P3:P" & n \* px + 2).Name = "Bogenstäbe"

Sheets("1.7 Stäbe").Range("P" & (n \* px + 3) & ":P" & Stäbe + 2).Name = "Längsstäbe"

Sheets("1.7 Stäbe").Range("B3:B" & Stäbe + 2).Name = "Stabtyp"

Sheets("1.7 Stäbe").Range("E3:E" & Stäbe + 2).Name = "Winkel"

Sheets("1.7 Stäbe").Range("F3:F" & Stäbe + 2).Name = "Drehung"

Sheets("1.7 Stäbe").Range("I3:L" & Stäbe + 2).Name = "Gelenk"

'Sheets("1.7 Stäbe").Range("G3:H" & Stäbe + 2).Name = "Querschnittsnummer"

Sheets("Tabelle1").Range("E25:E" & 25 + n).Name = "Stabdrehung"

Sheets("1.7 Stäbe").Range("Querschnitt\_Bogenstäbe").Value = 1 'Eintragen der Bogenstäbe

Sheets("1.7 Stäbe").Range("Querschnitt\_Längsstäbe").Value = 2 'Eintragen der Nullen

Sheets("1.7 Stäbe").Range("Bogenstäbe") = "Bogenstäbe" 'Kommentar Bogenstab

Sheets("1.7 Stäbe").Range("Längsstäbe") = "Längsstäbe" 'Kommentar Bogenstab

Sheets("1.7 Stäbe").Range("Stabtyp") = "Balkenstab" 'Balkenstab

Sheets("1.7 Stäbe").Range("Winkel") = "Winkel" 'Winkel

Sheets("1.7 Stäbe").Range("Drehung").Value = 0 'Drehung

Sheets("1.7 Stäbe").Range("Gelenk").Value = 0 'Eintragen der Nullen

'Sheets("1.7 Stäbe").Range("Querschnittsnummer").Value = 1 'Eintragen der Nullen

'Einfügen der Stabverdrehungen

For i = 0 To m - 1

Sheets("1.7 Stäbe").Range("F" & (3 + n \* px + (n + 1) \* i) & ":F" & 2 + n \* px + (n + 1) \* (i + 1)).Value =

Sheets("Tabelle1").Range("Stabdrehung").Value

Next

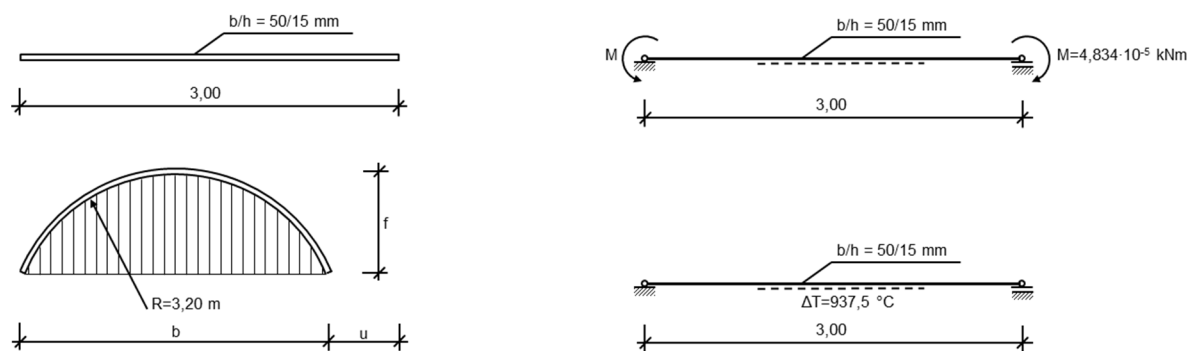
End

Sub

## Anhang D

Berücksichtigung der Eigenspannungszustände mittels Randmomente und ideellen Temperaturlasten:

Exemplarisch soll an dieser Stelle eine Holzlamelle untersucht werden (Festigkeitsklasse C24, Länge: 3,0 Meter,  $b/h=50/15$  Millimeter) die in Ihrem ursprünglichen Zustand ideal gerade ist und anschließend über eine Schablone mit einem konstanten Krümmungsradius von 3,2 Metern gebogen werden soll (siehe Abb. 294, links).



**Abb. 294:** Links: unverformte Lamelle und verformte Lamelle, Rechts: statische Systeme mit Belastungen

Nach der Krümmung werden die beiden Enden der Lamelle horizontal festgehalten und die Schablone entfernt. Von Interesse sind dabei die erforderlichen Festhaltekräfte an den Lamellenenden und die entsprechenden Schnittgrößenverläufe in der Lamelle. Mit Hilfe der in Kapitel 4.4 angegebenen Ansätze werden ideale Randmomente (LF1) und Temperaturverläufe (LF2) berechnet und diese anschließend in einem Stabwerksprogramm als Belastung auf die gerade Lamelle aufgebracht (siehe Abb. 294, rechts). So kann kontrolliert werden, ob sich durch die entsprechenden Belastungen eine konstante Krümmung und die korrekte horizontale Verschiebung der Lamellenenden einstellt. Die Berechnungen werden mit dem Programm „Dlubal R-Stab7.xx“ und einer nichtlinearen Berechnungstheorie 3. Ordnung durchgeführt, da es sich im betrachteten Fall um große Verformungen bzw. Verschiebungen handelt. Die Berechnungsergebnisse aus dem Biegen der Lamelle werden mit den exakten Werten der Kreisgeometrie verglichen.

Das erforderliche Randmoment in Abhängigkeit des Krümmungsradius und der Biegesteifigkeit ergibt sich zu:

$$M_{\text{erf}} = \frac{1}{R} \cdot EI = \frac{1}{3,2\text{m}} \cdot 11.000 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0,05 \cdot 0,015^3}{12} \text{m}^4 = 4,834 \cdot 10^{-5} \text{ MNm} \quad (\text{D.1})$$

Die einwirkende ideale Temperaturdifferenz zum Erhalt der gewünschten Krümmung kann unter Annahme eines Temperatursdehnungskoeffizienten von  $\alpha_T = 5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$  wie folgt berechnet werden:

$$\Delta T = \frac{1}{R} \cdot \frac{h}{\alpha_T} = \frac{1}{3,2\text{m}} \cdot \frac{0,015\text{m}}{5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}} = 937,5^\circ\text{C} \quad (\text{D.2})$$

Die Werte der horizontalen Verschiebung am rechten Rand  $u$ , der Stich  $f$  und der Öffnungswinkel  $\varphi$  können durch geometrische Betrachtungen am Kreisbogen ermittelt werden. Dabei werden diese Werte als exakte Lösung interpretiert.

$$u = s - b = s - 2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = s - 2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{s}{R \cdot 2}\right) \quad (\text{D.3})$$

$$u = 3,00 \text{ m} - 2 \cdot 3,20 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{3,00 \text{ m}}{3,20 \text{ m} \cdot 2}\right) = \underline{108,66 \text{ mm}}$$

$$f = R \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] = R \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{b}{R \cdot 2}\right)\right] \quad (\text{D.4})$$

$$f = 3,20 \text{ m} \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{3,00 \text{ m}}{3,20 \text{ m} \cdot 2}\right)\right] = \underline{345,17 \text{ mm}}$$

$$\varphi = \frac{s}{R} = \frac{3,00 \text{ m}}{3,20 \text{ m}} = 0,9375 \quad (\text{D.5})$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \cdot (\pi - \varphi) = 1,102046 \quad (\text{D.6})$$

Nach Gleichung (4.19) und (4.20) können die entsprechenden Haltekräfte in horizontaler Richtung ermittelt werden.

Lastfall: Randmoment (LF1)

Lastfall: Ideelle Temperaturlast (LF2)

X=175,33 [N]

X=175,33 [N]

Es ist zu sehen, dass beide analytischen Berechnungsansätze das gleiche Ergebnis liefern.

Die Berechnungen der Lamelle mit dem Stabwerksprogramm „Dlubal R-Stab7.xx“ ergeben für die zwei getrennt betrachteten Lastfälle folgende Ergebnisse (entsprechende statische Systeme siehe Abb. 294, rechts):

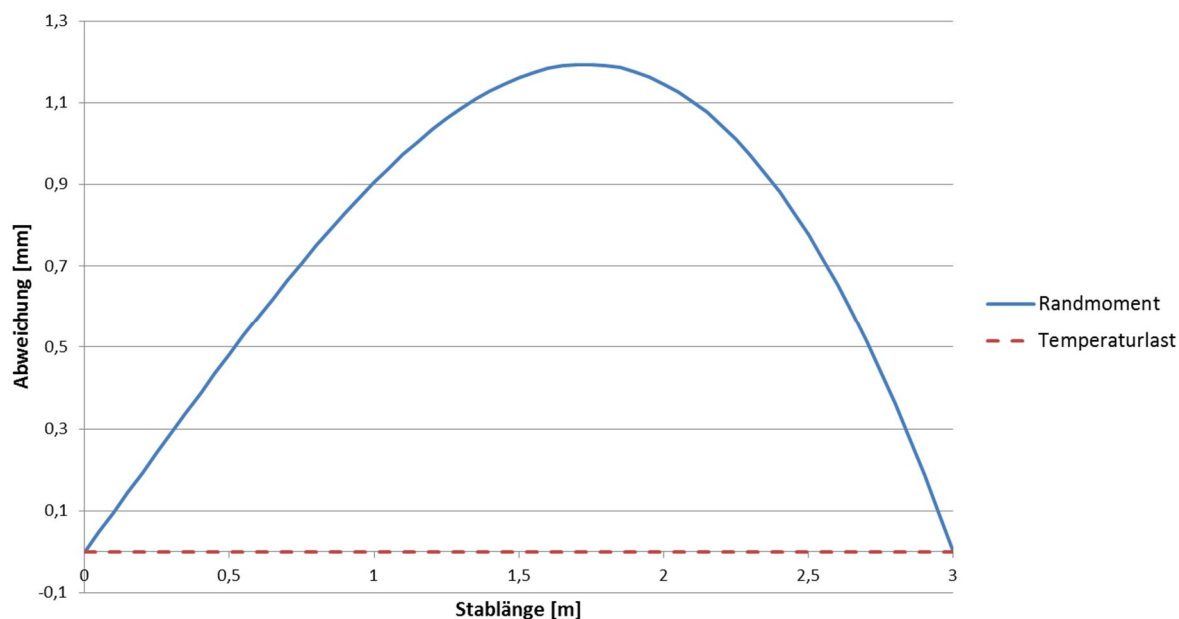
Lastfall:	u [mm]	f [mm]
Randmoment (LF1)	107,88	344,01
Ideelle Temperaturlast (LF2)	108,63	345,18
Exakte Werte	108,66	345,17

**Tabelle 20:** Berechnungsergebnisse für die zwei getrennten Lastfälle und exakte Werte

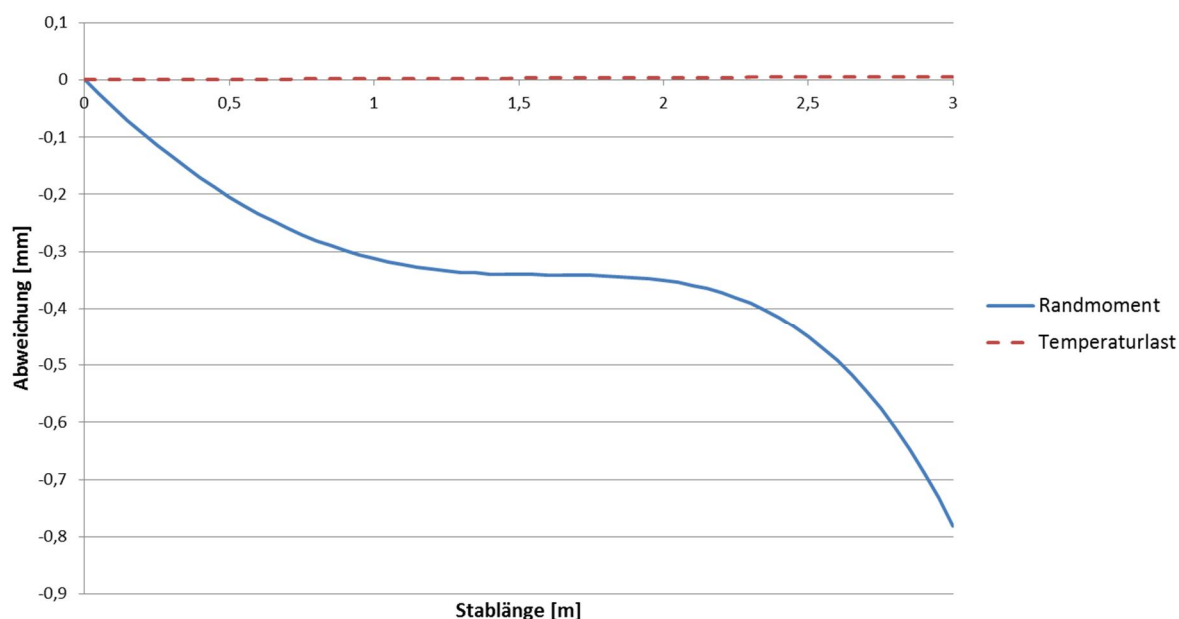
In Tabelle 20 ist zu sehen, dass die Ergebnisse der ideellen Temperaturlast besser mit den exakten Werten übereinstimmen als die Ergebnisse mit den Randmomenten. So ist die Differenz zwischen berechneter Verformung in z-Richtung (senkrecht zur unverformten Stabachse) unter Berücksichtigung einer ideellen Temperaturlast und exakter Lösung nahezu Null (siehe Abb. 295). Das Selbe kann für die Verschiebungen in x-Richtung (parallel zur Stabachse) beobachtet werden (siehe Abb. 296). Hingegen weisen die Verformungen in Folge Randmoment eine maximale Abweichung von rund 1,2 Millimetern in z-Richtung und 0,8 Millimetern in x-Richtung bezogen auf die



exakte Geometrie auf. Eine grafische Auswertung der Abweichungen zwischen exakter Kreisbogengeometrie und berechneter Verformung ist in Abb. 295 bzw. Abb. 296 zu sehen.

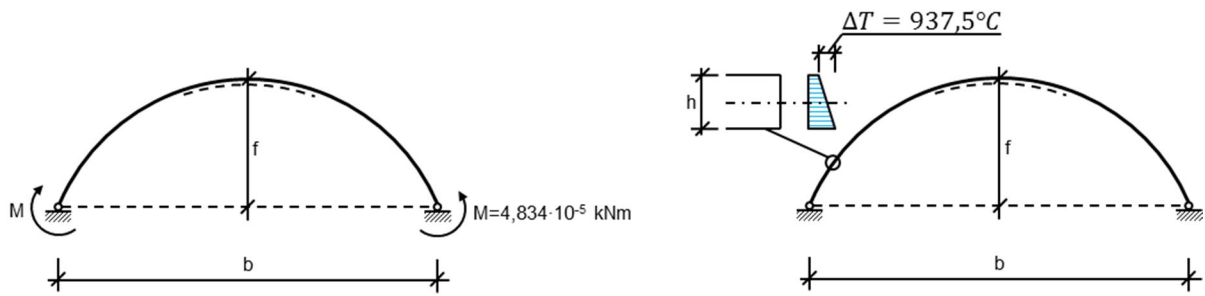


**Abb. 295:** Abweichungen zwischen berechneten und exakten Werten in z-Richtung



**Abb. 296:** Abweichungen zwischen berechneten und exakten Werten in x-Richtung

Um die Haltekkräfte nach dem Entfernen der Schablone zu ermitteln, wird im Stabwerksprogramm „R-Stab“ das statische System verändert. Das ursprünglich horizontal verschiebliche Auflager an der rechten Seite wird festgehalten und die exakte verformte Stabgeometrie betrachtet. Die berechneten Randmomente bzw. Temperaturbeanspruchungen werden mit umgekehrter Orientierung als Belastung aufgebracht (siehe Abb. 297). Die Berechnungen erfolgen nun nach Theorie erster Ordnung.



**Abb. 297:** Links: Belastung durch ein Randmoment (LF1), Rechts: Belastung durch eine Temperatureinwirkung (LF2)

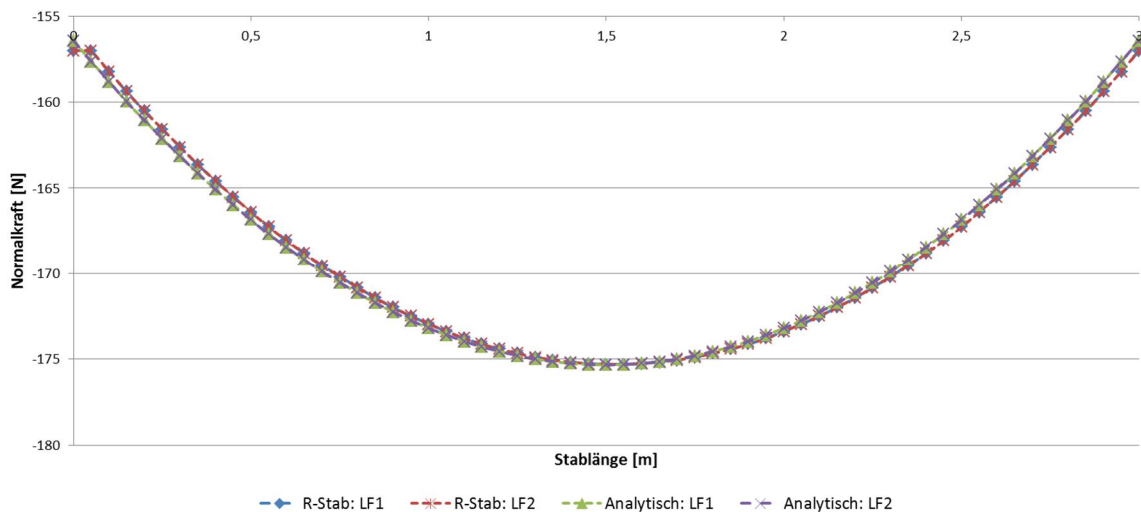
Die Berechnungsergebnisse aus „R-Stab“ und der analytisch bestimmte Wert lauten wie folgt:

Lastfall:	X [N]
Randmoment (LF1)	175,32
Ideelle Temperaturlast (LF2)	175,32
Exakte Werte	175,33

**Tabelle 21:** Berechnungsergebnisse aus R-Stab und analytischer Wert

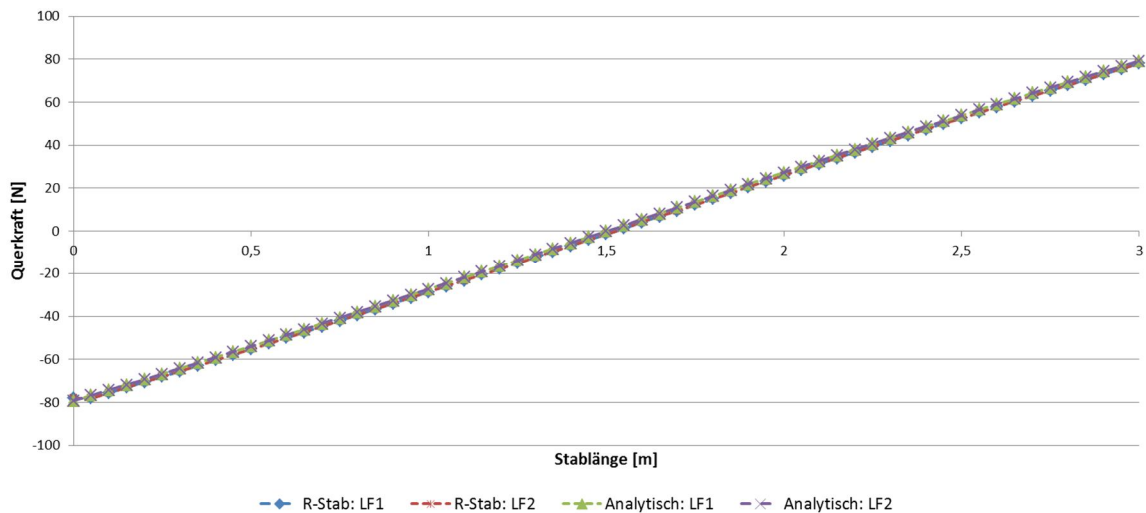
Der Unterschied zwischen den berechneten Haltekräften aus „R-Stab“ und dem analytisch ermittelten Wert beträgt nahezu Null und zeugt von einer sehr guten Übereinstimmung. Nun sollen die entsprechenden Schnittgrößenverläufe aus der Stabwerksberechnung mit den Berechnungen nach Gleichung (4.20) bis (4.22) verglichen werden.

Die berechneten Ergebnisse der Schnittgrößenverläufe sind in den nachfolgenden Diagrammen dargestellt.



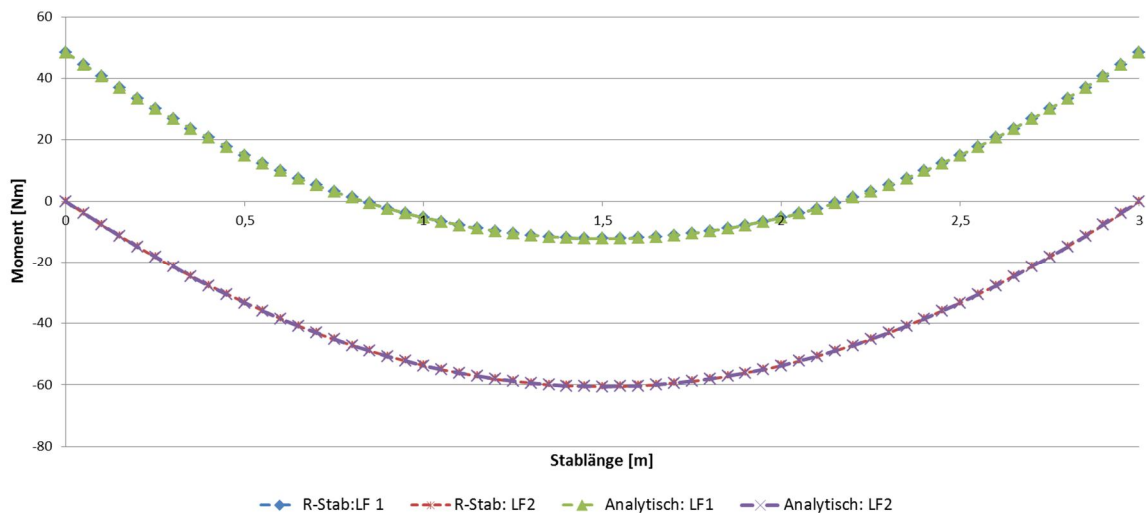
**Abb. 298:** Normalkraftverlauf in Folge Randmoment und Temperaturbelastung

Aus Abb. 298 ist zu erkennen, dass sich die Normalkraftverläufe der „R-Stab“ – Berechnungen für den LF1 und LF2 kaum unterscheiden. Auch die beiden analytisch ermittelten Schnittgrößenverläufe sind nahezu identisch mit den Ergebnissen aus „R-Stab“.



**Abb. 299:** Querkraftverlauf in Folge Randmoment und Temperaturbelastung

Beim Querkraftverlauf in Abb. 299 zeigt sich wiederum, dass die beiden analytisch ermittelten Ergebnisse, wie auch die mit „R-Stab“ berechneten Verläufe nahezu deckungsgleich sind.



**Abb. 300:** Momentenverlauf in Folge Randmoment und Temperaturbelastung

Bei der Betrachtung der Momentenverläufe in Abb. 300 können erhebliche Unterschiede zwischen den Berechnungen nach LF1 und LF2 erkannt werden. Die Verläufe in Folge LF1 sind um den Betrag des Randmomentes gegenüber dem LF2 verschoben, somit werden im Lastfall Temperaturlast höhere Werte berechnet (vergleiche 60 Nm mit 48 Nm). Grundsätzlich unterscheiden sich in diesem Fall die „R-Stab“ – Berechnungen kaum von den analytischen Ergebnissen.

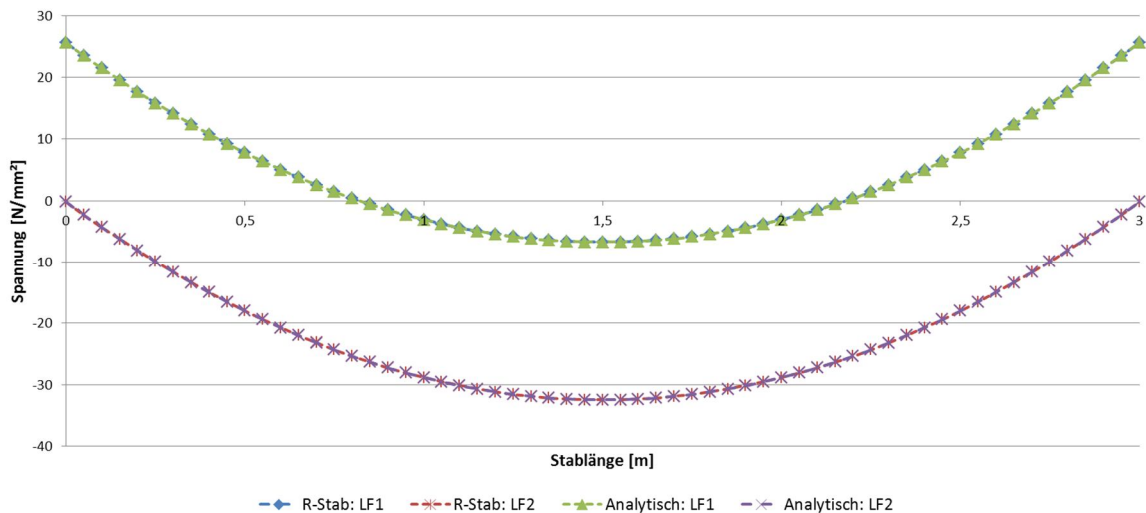


Abb. 301: Spannungen an der Zugseite der Lamelle

Werden die entstehenden Spannungen an der Zugseite der Lamelle berechnet (siehe Abb. 301) so können kaum Unterschiede zwischen den analytischen Ergebnissen und den Ergebnissen nach „R-Stab“ festgestellt werden. Das bedeutet, dass die entsprechenden Lastzustände unabhängig voneinander entweder mit „R-Stab“ oder analytisch berechnet werden können und zum gleichen Ergebnis führen. Im LF1 ergibt sich die maximale Spannung am Rand der Lamelle zu 25,5 N/mm<sup>2</sup> und im LF2 in Feldmitte zu -32,9 N/mm<sup>2</sup>. Diese beiden Werte werden nun mit der Spannung in der Lamelle, vor dem Entfernen der Schablone  $\sigma_{Schablone}$  bei einem konstanten Radius von 3,20 Metern verglichen.

$$\sigma_{Schablone} = \frac{d \cdot E_{0,mean}}{2 \cdot R} = \frac{0,015 \text{ m} \cdot 11.000 \text{ MN/m}^2}{2 \cdot 3,2 \text{ m}} = 25,78 \text{ MN/m}^2 \quad (\text{D.7})$$

Die Spannungen im LF1 (Randmoment) stimmen dabei noch sehr gut mit den Spannungen vor dem Entfernen der Schablone überein (25,5 N/mm<sup>2</sup> ~ 25,78 N/mm<sup>2</sup>), hingegen erhöhen sich die Spannungen im LF2 (Temperaturlast) in Feldmitte um den Faktor 1,27.

Fazit: Kann in der Praxis das Randmoment durch entsprechende konstruktive Ausbildungen aufgenommen werden, so bietet sich der Berechnungsansatz mit den Randmomenten an. Sollte dies nicht der Fall sein, so muss mit einer ideellen Temperaturlast gerechnet werden, wodurch im Scheitel wesentlich höhere Spannungen entstehen. Für die Praxisanwendung wird der Ansatz eines Temperaturlastfalles die größere Bedeutung haben, da eine feste Einspannung nur sehr schwer zu realisieren ist. Zudem bietet die ideelle Temperaturlast die Möglichkeit, unterschiedliche Krümmungen in einem Bauteil zu berücksichtigen.

## Anhang E

Berechnung einer hölzernen Zylinderschale:

Um die Praxistauglichkeit eines solchen Systems zu untersuchen, wurde eine Zylinderschale entworfen und entsprechend ihrer statischen Eigenschaften berechnet (siehe Abb. 303). Die Einzelschale besteht aus einer konventionell gefertigten Dreischichtplatte mit Vollholzrandträgern und Scheibenelementen aus dreilagigem Brettsperrholz, die an ihren Enden gelenkig gelagert ist. Verwendet wird die Dreischichtplatte „K1-Multiplan“ der Mayer-Melnhof Kaufmann Reuthe GmbH mit der allgemeinen bauaufsichtlichen Zulassung [Z-9.1-242], welche auch für statische Zwecke eingesetzt werden darf. Die verwendete Platte besitzt eine Plattendicke von 20 Millimetern, die Stärke der Decklamellen beträgt 6,7 Millimeter und der Mittellamelle 6,6 Millimeter. Die maximalen Plattenformate dieses Produktes liegen bei 20.000 x 2.015 Millimeter, wobei diese maximale Länge durch Keilzinkungen realisiert werden kann. In einem ersten Schritt wird der mögliche Krümmungsradius der Platte senkrecht zur Decklagenrichtung untersucht. Dieser ist von der Biegezugfestigkeit und dem E-Modul abhängig. Die charakteristischen Rechenwerte um die schwache Achse werden laut Zulassung wie folgt angegeben:

$$f_{m,90,k} = 6,2 \frac{N}{mm^2} \quad \dots \text{ Biegezugfestigkeit senkrecht zu den Decklamellen}$$

$$E_{m,90,mean} = 800 \frac{N}{mm^2} \quad \dots \text{ E- Modul senkrecht zu den Decklamellen}$$

Aus diesen Werten kann ein minimaler Krümmungsradius ermittelt werden.

$$R_{\min} = \frac{E_{m,90,mean} \cdot d}{2 \cdot f_{m,90,k}} = \frac{800 \frac{N}{mm^2} \cdot 20 \text{ mm}}{2 \cdot 6,2 \frac{N}{mm^2}} = 1290 \text{ mm} \quad (\text{E.1})$$

Um mit den Eigenspannungen nicht bis zur Grenze der charakteristischen Werte zu gehen, wird ein Krümmungshalbmesser von 1600 Millimetern gewählt. Daraus und mit der maximalen Bogenlänge von 2,00 Metern kann der Öffnungswinkel der Einzelschale ermittelt werden.

$$\varphi = \frac{s}{R} = \frac{2000 \text{ mm}}{1600 \text{ mm}} = 1,25 \text{ Rad} \quad \hat{=} \quad 71,62^\circ \quad (\text{E.2})$$

Nach den Forschungsergebnissen von *v. Halász* und *Cziesielski* werden folgende geometrischen Größen für einen ersten Entwurf der Zylinderschale herangezogen.

Entwurfsgröße	Empfehlung v. Halász und Cziesielski	Gewählt
Spannweite	$L \approx 5 \dots 30 \text{ m}$	$L = 12 \text{ m}$
Sehnenlänge	$b \approx \frac{L}{5} \dots \frac{L}{10} \text{ m} \xrightarrow{\text{hier}} 2,4 \dots 1,2 \text{ m}$	$b = 1,77 \text{ m}$
Bogenstich	$f \approx \frac{L}{20} \dots \frac{L}{40} \text{ m} \xrightarrow{\text{hier}} 0,6 \dots 0,3 \text{ m}$	$b = 0,32 \text{ m}$

Abstand der Querrippen (Zwischenscheiben)	$a \approx \frac{L}{10} \leq 1,25 \text{ m} \xrightarrow{\text{hier}} 1,20 \text{ m}$	$b = 1,50 \text{ m}$
Abstand der Längsrippen	$c \approx \frac{L}{10} \xrightarrow{\text{hier}} 1,20 \text{ m}$	$c = 1,77 \text{ m}$

**Tabelle 22:** Entwurfsgrößen der Zylinderschale

Aus den ermittelten Randbedingungen wird die in Abb. 154 dargestellte Zylinderschale entworfen. Sie besitzt Randträger aus Brettschichtholz (Festigkeitsklasse GL 24h, Abmessungen  $b/h= 10/40\text{cm}$ ) in einem Achsabstand von 1,77 Metern. Die Spannweite der Schale beträgt 12,00 Meter (Achslänge) und die Gesamtlänge 12,10 Meter. Die Rippen in Querrichtung werden aus Dreischichtplatten mit einer Stärke von 4 Zentimetern hergestellt. Diese Zwischenscheiben werden in einem Achs-Maß von 1,50 Metern über die Länge der Schale verteilt und dienen vor allem der Beulaussteifung der Deckplatte. Zudem erleichtern sie den Herstellungsprozess und verhindern ein Auseinanderdrücken der Randträger in Folge der Eigenspannungen der Platte. Den Abschluss bilden zwei Endscheiben aus 10 Zentimeter starkem Brettsperrholz. Diese Brettsperrholzscheiben stellen gleichzeitig den Übergang zur darunter befindlichen Konstruktion dar, die hier nicht näher betrachtet wird. Die Decklagenrichtung der Endscheiben wird in vertikaler Richtung angeordnet (siehe Abb. 302, links), da in dieser Richtung die höchste Lastabtragung erfolgen wird. Die Decklagenrichtung der Zwischenscheiben wird horizontal angelegt (siehe Abb. 302, rechts), da nach den Berechnungsergebnissen von Lundgren ein aufeinander zuwandern der Plattenränder verhindert werden muss. Mitunter werden die Zwischenscheiben durch das Auseinanderdrücken der Randbalken in Folge Eigenspannungen auf Zug beansprucht.



**Abb. 302:** Links: Endscheibe mit Orientierung der Decklagen; Rechts Zwischenscheibe mit Orientierung der Decklagen

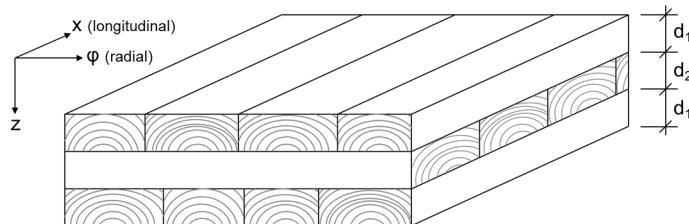
Der Verbund zwischen Platte und Randträger soll als Schraubpressklebung erfolgen. Als Belastung auf die Schale werden ständige Lasten von  $1,00 \text{ kN/m}^2$  (beispielsweise Eigengewicht) und zeitlich veränderliche Lasten von  $1,50 \text{ kN/m}^2$  (zum Beispiel Schnee) aufgebracht. Zudem müssen zu den extern einwirkenden Beanspruchungen noch entsprechende Eigenspannungen aus der Krümmung der Platte berücksichtigt werden.





Alle Berechnungen zur Überprüfung der Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit der in Abb. 303 gegebenen Schale werden mit dem Stabwerksprogramm „Dlupal R-Stab7.xx“ durchgeführt. Dazu werden Decklage, End- und Zwischenscheiben als Trägerrostmodelle implementiert, welche mit den Randträgern entsprechend gekoppelt sind. Für den Nachweis der Tragfähigkeit wird von der Nutzungsklasse 1 und der Klasse der Lasteinwirkungsdauer „mittel“ ausgegangen.

Die Steifigkeiten der Trägerroststäbe werden unter Berücksichtigung der in [DIN EN 1995-1-1/NA:2010-12] bzw. [DIN 1052:2008-12] gegebenen Berechnungsvorschriften für Flächen aus miteinander verklebten Schichten bestimmt. Laut Zulassung [Z-9.1-242] sind mindestens 90% der Bretter der verwendeten Dreischichtplatte der Festigkeitsklasse C24 zuzuweisen. Für die Berechnung der Steifigkeiten und zum Nachweis der Tragfähigkeit, wird davon ausgegangen, dass die einzelnen Bretter an den Schmalseiten nicht miteinander verklebt sind. Die Decklagen werden im System in longitudinaler Richtung orientiert und entsprechend die Mittellamelle in Ringrichtung (siehe Abb. 304).



Berechnungsgrößen:

$$E_{0,mean} = 11.000 \text{ N/mm}^2$$

$$G_{mean} = 690 \text{ N/mm}^2$$

$$d_1 = 6,7 \text{ mm}$$

$$d_2 = 6,6 \text{ mm}$$

**Abb. 304:** Aufbau einer Dreischichtplatte und Orientierung im System

Auf Grundlage dieser Daten können die Steifigkeiten in Ring- und longitudinaler Richtung je Meter Plattenstreifen wie folgt berechnet werden:

Biegesteifigkeit in longitudinaler Richtung:

$$B_x = 2 \cdot E_{0,mean} \cdot \left[ \left( \frac{d_1^3}{12} \right) + \left( d_1 \cdot \left( \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} \right)^2 \right) \right] = 7,0698 \text{ kNm} \quad (\text{E.3})$$

Biegesteifigkeit in Ringrichtung:

$$B_{\varphi} = E_{0,mean} \cdot \left( \frac{d_2^3}{12} \right) = 0,2635 \text{ kNm} \quad (\text{E.4})$$

Drillsteifigkeit:<sup>165</sup>

$$B_{\varphi x} = G_{mean} \cdot \left[ \frac{d_1^3}{3} + \frac{d_2^3}{6} + 4 \cdot d_1 \cdot \left( \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} \right)^2 \right] = 0,92 \text{ kNm} \quad (\text{E.5})$$

Schubsteifigkeit in longitudinaler Richtung:

$$S_x = 2 \cdot d_1 \cdot G_{mean} + \frac{1}{\frac{1}{(d_1 + d_2)^2} \cdot \left( \frac{d_1}{G_{mean}} + \frac{d_2}{G_{R,mean}} \right)} = 10.924,87 \text{ kN/m} \quad (\text{E.6})$$

<sup>165</sup> Winter, et al. (2008). *Brettstapel, Brettsper Holz und Verbundkonstruktionen*. Seite P15-95

Schubsteifigkeit in Ringrichtung:

$$S_{\varphi} = d_2 \cdot G_{mean} = 4.554 \text{ kN/m} \quad (\text{E.7})$$

Scheibenschubsteifigkeit:

$$D_{\varphi x} = \frac{1}{4} \cdot G_{mean} \cdot (2 \cdot d_1 + d_2) = 3.450 \text{ kN/m} \quad (\text{E.8})$$

Dehnsteifigkeit in longitudinaler Richtung:

$$D_x = 2 \cdot E_{0,mean} \cdot d_1 = 147.400 \text{ kN/m} \quad (\text{E.9})$$

Dehnsteifigkeit in Ringrichtung:

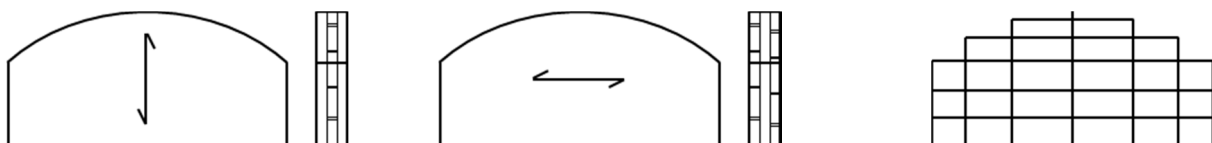
$$D_{\varphi} = E_{0,mean} \cdot d_2 = 72.600 \text{ kN/m} \quad (\text{E.10})$$

Die entsprechenden Stabsteifigkeiten des Trägerrostmodells der Decklage sind in nachfolgender Tabelle gegeben. Der Abstand  $e$  zwischen den Stäben in Ring- als auch in longitudinaler Richtung beträgt jeweils 10 Zentimeter.

	Longitudinale Richtung	Ringrichtung	Einheit
Biegesteifigkeit: (lokale y-Achse)	$K_y^x = B_x \cdot e = 0,70698$	$K_y^{\varphi} = B_{\varphi} \cdot e = 0,02635$	[kNm <sup>2</sup> ]
Biegesteifigkeit: (lokale z-Achse)	$K_z^x = \frac{e^3}{6} \cdot D_{\varphi x} = 0,575$	$K_z^{\varphi} = \frac{e^3}{6} \cdot D_{\varphi x} = 0,575$	[kNm <sup>2</sup> ]
Drillsteifigkeit:	$K_{xy}^x = B_{\varphi x} \cdot e = 0,092$	$K_{xy}^{\varphi} = B_{\varphi x} \cdot e = 0,092$	[kNm <sup>2</sup> ]
Schubsteifigkeit:	$S_{xz}^x = S_{yz}^x = S_x \cdot e = 1.092,49$	$S_{xz}^{\varphi} = S_{yz}^{\varphi} = S_{\varphi} \cdot e = 455,40$	[kN]
Dehnsteifigkeit:	$D_x^x = D_x \cdot e = 14.740$	$D_x^{\varphi} = D_{\varphi} \cdot e = 7.260$	[kN]

**Tabelle 23:** Stabsteifigkeiten zur Modellierung der Holzwerkstoffplatte in „R-Stab“

Die End- und Zwischenscheiben werden ebenfalls als Trägerrost in das Stabwerksprogramm eingegeben. Beide Scheibentypen weisen auf Grund des vorgegebenen Rasters der Deckplatte einen unregelmäßigen Abstand zwischen den Roststäben auf (siehe Abb. 305, rechts). Um die Steifigkeiten nicht in jedem Trägerroststab getrennt berechnen zu müssen, wird ein mittlerer Rostabstand in vertikaler und horizontaler Richtung ermittelt.



**Abb. 305:** Links: Endscheibe; Mitte: Zwischenscheibe mit Decklamellenorientierung; Rechts: Trägerrostmodell der Scheiben

Die Eingabedaten für das Programm „Dlupal R-Stab7.xx“ werden mit Hilfe eines Microsoft-Excel-Kalkulationsblattes generiert. Somit können eventuelle Änderungen der Geometrie, des

Trägerrostraster oder der Dreischichtplatten sofort in die Berechnung übernommen werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit und um den Berechnungsaufwand geringer zu halten, wird unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften nur die halbe Schalenlänge von 6,0 Metern betrachtet. Das zur Berechnung generierte Trägerrostmodell ist in Abb. 306 grafisch dargestellt.

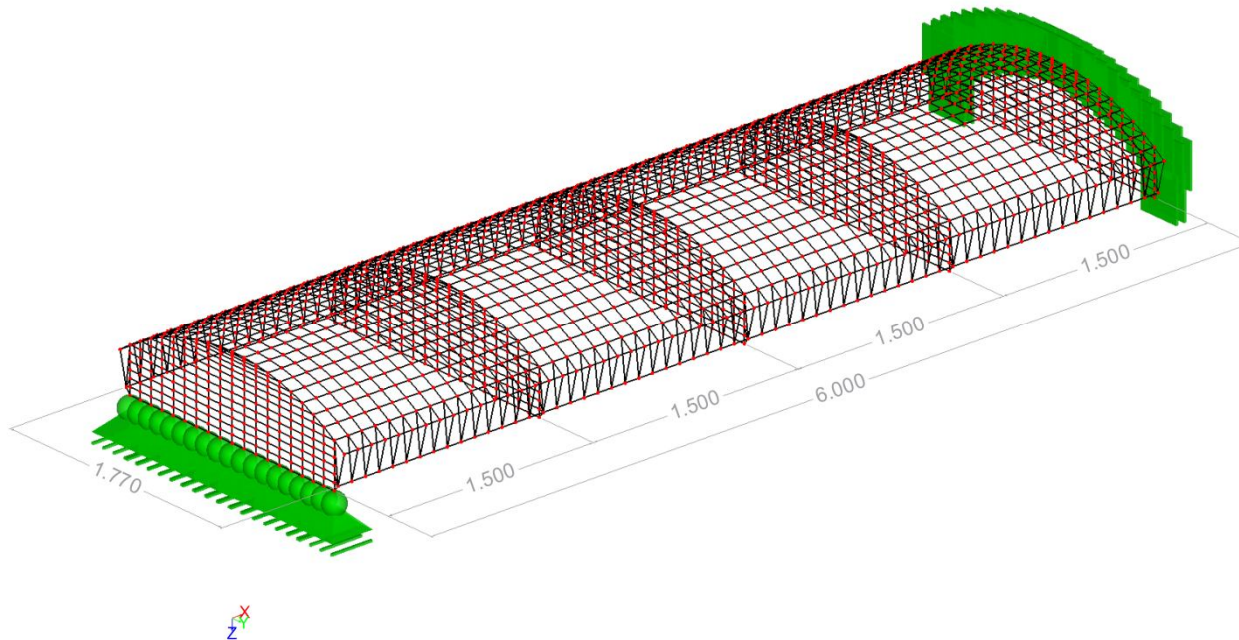


Abb. 306: Trägerrostmodell; alle Maße sind Achs-Maße [m]

Die ständigen und veränderlichen Lasten werden gemäß nachfolgender Abbildung über einen Lastgenerator auf das Trägerrostmodell aufgebracht.

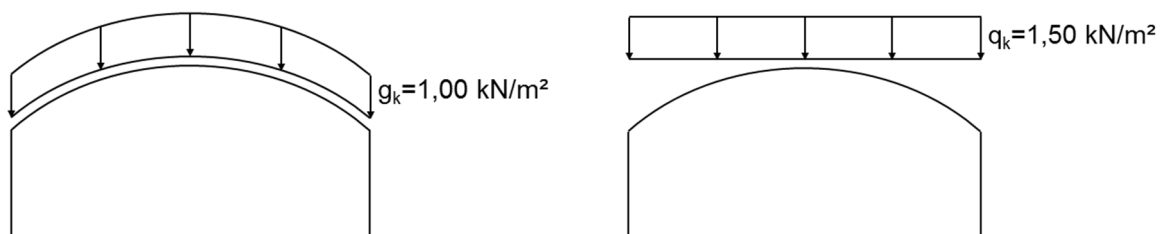


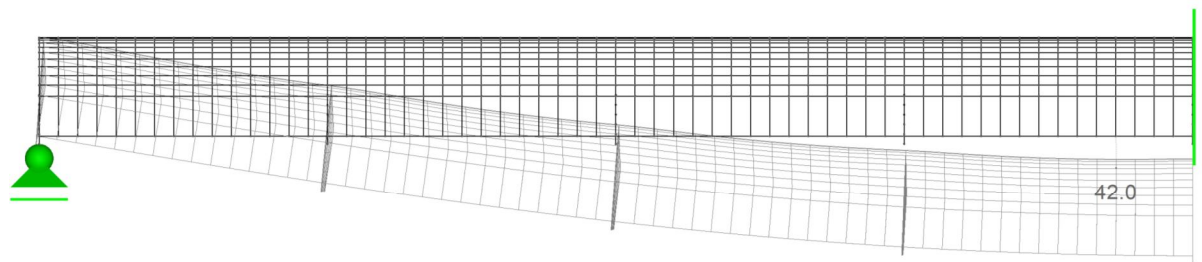
Abb. 307: Ständige und veränderliche Last auf die Zylinderschale

Der Eigenspannungszustand kann wie in Kapitel 4.2 gezeigt, durch eine ideale Temperaturlast, die auf die in Ringrichtung verlaufenden Stäbe des Trägerrostes wirkt, berücksichtigt werden. Die ideale Temperaturlast wird in Abhängigkeit des Krümmungsradius der mittleren Lamelle, deren Stärke  $d_2$  und des Temperaturexpansionskoeffizienten wie folgt berechnet:

$$\Delta T = \frac{1}{R} \cdot \frac{d_2}{\alpha_T} = \frac{6,6 \text{ mm}}{(1350 \text{ mm} + 10 \text{ mm}) \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C}} = 970,6^\circ\text{C} \quad (\text{E.11})$$

In dieser einfachen Berechnung werden nur symmetrische Laststellungen betrachtet, um eine Abschätzung der Leistungsfähigkeit des Systems zu erhalten. Ein Nachweis im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit wird nicht explizit geführt; es werden aber die Verformungen auf charakteristischem Lastniveau unter Berücksichtigung der Schubverformungen betrachtet. Es zeigt sich, dass unter der gegebenen charakteristischen Belastung (Eigenspannungen + ständige und vorübergehende Lasten) und unter Verwendung der Mittelwerte der E-Module und Schubmodule eine

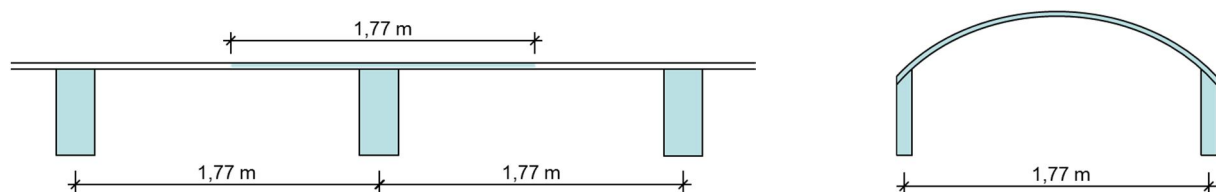
maximale Durchbiegung von 42 Millimetern in Feldmitte auftritt (siehe Abb. 308). Dies entspricht einer Durchbiegung von rund 1 / 285 der Spannweite.



Y X  
Z

**Abb. 308:** Verformung der Zylinderschale unter charakteristischer Volllast

Dieses Ergebnis soll mit einem Brettschichtholzträger der Festigkeitsklasse GL 24h erreicht werden und der erforderliche Querschnitt mit der Querschnittsfläche der Einzelschale verglichen werden.



**Abb. 309:** Gegenüberstellung Balkensystem, Zylinderschale

Die Lasteinzugsbreite des zu betrachtenden Einfeldträgers entspricht dem Achs-Maß der Randträger der Schale und beträgt 1,77 Meter. Daraus ermittelt sich eine charakteristische Linienlast von:

$$(g_k + q_k) = (1,00 \text{ kN/m}^2 + 1,50 \text{ kN/m}^2) \cdot 1,77 \text{ m} = 4,42 \text{ kN/m} \quad (\text{E.12})$$

Die maximale Durchbiegung in Feldmitte, unter Berücksichtigung der Schubverformungen kann am Rechteckquerschnitt wie folgt berechnet werden.

$$w_{(L/2)} = \frac{(g_k + q_k) \cdot L^2}{8 \cdot G \cdot A_s} + \frac{5 \cdot (g_k + q_k) \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I} = \frac{3 \cdot (g_k + q_k) \cdot L^2}{20 \cdot G \cdot b \cdot h_{\text{erf}}} + \frac{5 \cdot (g_k + q_k) \cdot L^4}{32 \cdot E \cdot b \cdot h_{\text{erf}}^3} \quad (\text{E.13})$$

Unter Annahme einer vorhandenen Trägerbreite von 20 Zentimetern und einer maximalen Durchbiegung von 42 Millimetern ermittelt sich die erforderliche Trägerhöhe zu:

$$h_{\text{erf}} = 53,3 \text{ cm} \quad (\text{E.14})$$

Dies entspricht einer erforderlichen Querschnittsfläche des Brettschichtholzträgers von:

$$A_{\text{erf}} = A_{\text{BSH}} = b \cdot h = 20 \text{ cm} \cdot 53,3 \text{ cm} = 1066 \text{ cm}^2 \quad (\text{E.15})$$

Um einen direkten Vergleich des Materialverbrauchs zwischen Balkensystem und Zylinderschale zu erhalten kann die Querschnittsfläche des Brettschichtholzträgers mit der Gesamtquerschnittsfläche der Randbalken der Zylinderschale verglichen werden.

$$A_{\text{Randbalken}} = 2 \cdot b \cdot h = 2 \cdot 10 \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm} = 800 \text{ cm}^2 \quad (\text{E.16})$$

Es zeigt sich, dass durch die Wahl der Zylinderschalenkonstruktion rund 266 cm<sup>2</sup> an Brettschichtholzquerschnitt gespart werden kann. In Festmeter ausgedrückt, wären es in diesem Fall rund 0,32 m<sup>3</sup> pro Achse. Wird davon ausgegangen, dass auf die Brettschichtholzträgerkonstruktion noch eine geschlossene Schalung von drei Zentimetern aufgebracht werden muss, so ergibt sich pro Achse folgender Materialquerschnitt:

$$A_{\text{BSH}} = 1066 \text{ cm}^2 + 3 \text{ cm} \cdot 177 \text{ cm} = 1597 \text{ cm}^2 \quad (\text{E.17})$$

Im Vergleich dazu hat die verwendete Zylinderschale eine Gesamtquerschnittsfläche von:

$$A_{\text{Zylinderschale}} = 2 \cdot b \cdot h + s \cdot d = 2 \cdot 10 \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm} + 200 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 1200 \text{ cm}^2 \quad (\text{E.18})$$

Werden die beiden Querschnittsflächen miteinander verglichen, so stellt sich heraus, dass ein System aus lauter Brettschichtholzträgern rund 33% mehr Holz verbraucht als die Lösung mittels Zylinderschale.

$$\frac{A_{\text{BSH}}}{A_{\text{Zylinderschale}}} = \frac{1597 \text{ cm}^2}{1200 \text{ cm}^2} = 1,33 \quad (\text{E.19})$$

Im Grenzzustand der Tragfähigkeit werden zwei Lastfälle (LF) untersucht. Die entsprechenden Lastkombinationen und Teilsicherheitsbeiwerte sind nachfolgend dargestellt. Dabei werden die charakteristischen Eigenspannungen mit  $p_k$ , die ständigen Lasten mit  $g_k$  und die veränderlichen Lasten mit  $q_k$  bezeichnet.

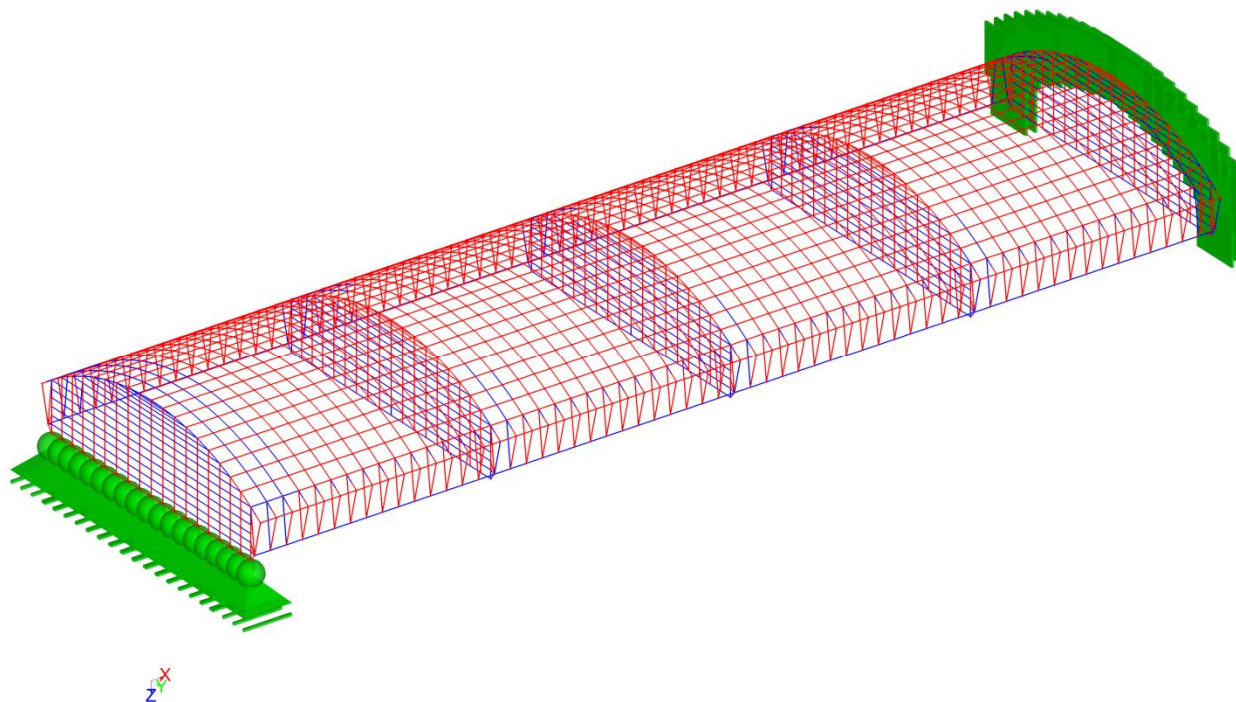
Lastkombinationen:

- LF 1: Ständige und vorübergehende Bemessungssituation:  $1,1 \cdot p_k + 1,35 \cdot g_k + 1,5 \cdot q_k$
- LF 2: Ständige und vorübergehende Bemessungssituation (ohne  $p_k$ ):  $1,35 \cdot g_k + 1,5 \cdot q_k$

Da in den einschlägig bekannten Normen keine Teilsicherheitsbeiwerte für die durch die Herstellung induzierten Eigenspannungen gefunden wurden, wird vorerst ein Teilsicherheitsbeiwert von 1,1 auf der Einwirkungsseite angesetzt. Die Verwendung eines Teilsicherheitsbeiwertes von 1,35 wäre nach Meinung des Verfassers zu sehr auf der unwirtschaftlichen Seite, vor allem da keine Spannungsverluste in Folge Relaxation berücksichtigt wurden. Für jene Berechnungen, die zum Nachweis der Tragfähigkeit verwendet werden gilt, dass alle Steifigkeitswerte durch den Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_M=1,3$  geteilt werden müssen. In den Berechnungsergebnissen zeigt sich, dass eine Berechnung nach Theorie erster, zweiter oder dritter Ordnung nahezu dieselben Schnittgrößen liefert. Der Zuwachs der Schnittgrößen unter Berücksichtigung des geometrisch nicht linearen Verhaltens liegt unter 10 %. Somit ist gemäß [DIN 1052:2008-12, Abs. 8.1 (2)] die Ermittlung der Spannungen nach Theorie I. Ordnung zulässig.

Eine allgemeine Betrachtung der Schnittgrößenverläufe zeigt, dass die Einwirkungen primär über Normalkräfte abgetragen werden. Dabei stellt sich in der Deckplatte beinahe ein reiner Membranspannungszustand ein. Die vorhandenen Biegespannungen sind auf den Einfluss der fertigungsbedingten Eigenspannungen und die elastische Bettung der Platte auf den Zwischenscheiben zurückzuführen. Die Randträger erfahren Zugkräfte, sowie Biegemomente um die

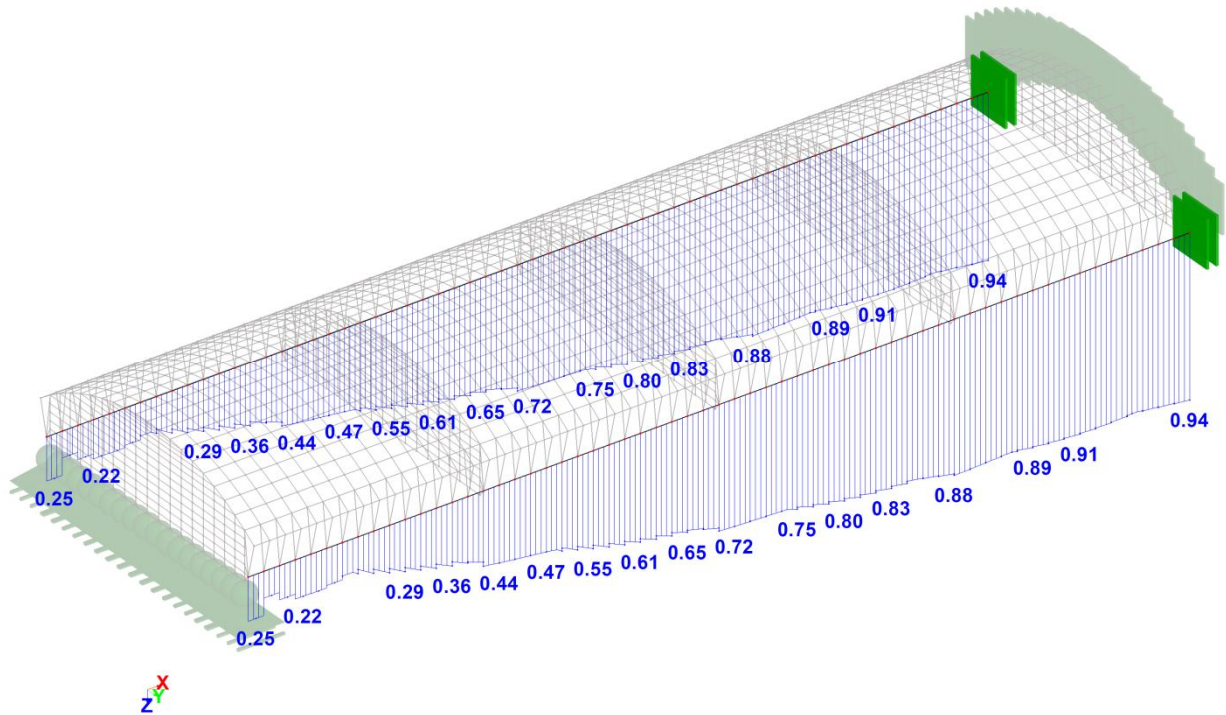
schwache und starke Achse. Ein entsprechender Ausdruck des Normalkraftverlaufs für den LF 1 ist in Abb. 310 gegeben. Es ist zu sehen, dass die Deckplatte bis auf einige Störbereiche in den Randzonen Druckkräfte (rot) erfährt. Der Randbalken, als auch die horizontalen Stäbe der Zwischen- und Endscheiben werden zugbeansprucht (blau).



**Abb. 310:** Normalkraftverteilung in Randträger und Platte im Lastfall: Eigenspannungen + ständige + veränderliche Lasten

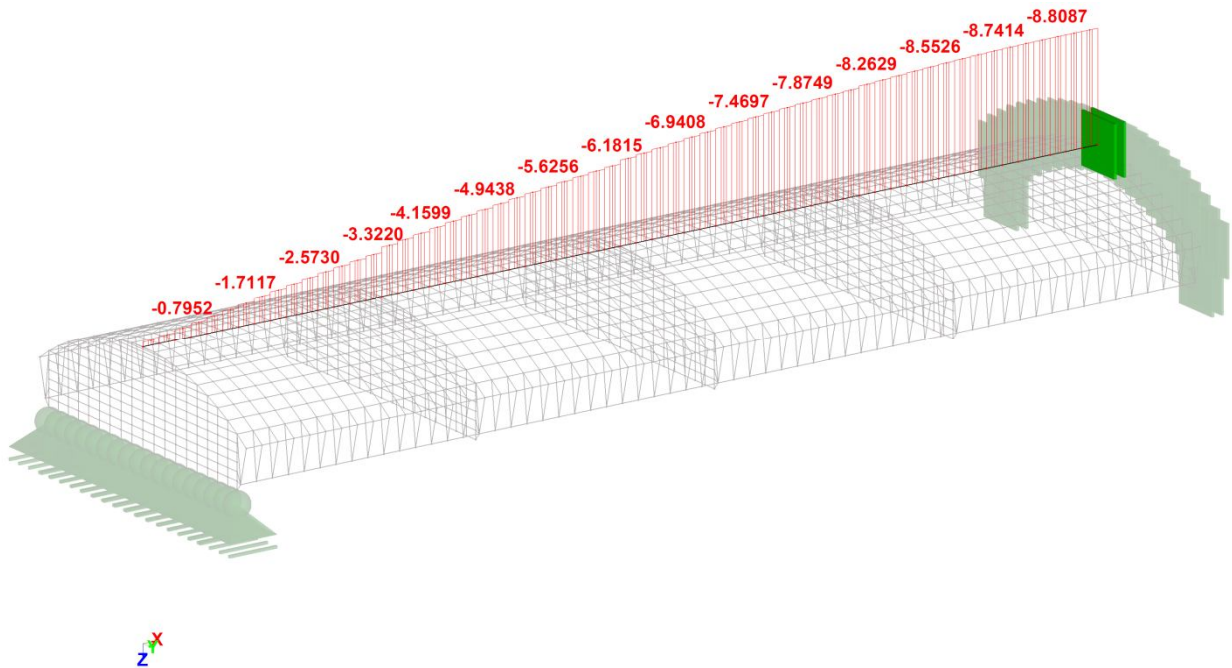
Für die Nachweisführung wird das Tragwerk in Haupt- und Nebentragrichtung betrachtet. Die Haupttragrichtung verläuft in longitudinaler und die Nebentragrichtung in Ringrichtung. Die longitudinale Lastabtragung setzt sich zusammen aus den beiden Haupttraggliedern Randbalken und longitudinale Gitterroststäbe. Die Nebentragrichtung nur aus den in Ringrichtung verlaufenden Stäben. Wird der Nachweis der Tragfähigkeit unter Berücksichtigung aller einwirkenden Kräfte für die Randträger geführt, so kann dies im Programm „R-Stab“ mit einem Zusatzmodul zur Nachweisführung geschehen. Daraus wird ein maximaler Ausnutzungsgrad von 94% der Randstäbe berechnet (siehe Abb. 311). Das Ergebnis konnte mit einer Handrechnung bestätigt werden. Für die Gitterroststäbe muss die Nachweisführung händisch erfolgen, da die Stäbe über ideale Stabsteifigkeiten in das Programm eingegeben wurden und somit eine Rückrechnung der Spannungen aus den Schnittgrößen erfolgen muss.





**Abb. 311:** Ausnutzungsgrad der Randträger im Lastfall 1: Eigenspannungen + ständige + veränderliche Lasten

Für die Platte werden die Schnittgrößen im Scheitel in longitudinaler Richtung untersucht. Dort treten folgende Normalkräfte auf (siehe Abb. 312).



**Abb. 312:** Normalkraft im Scheitel [kN] für den Lastfall 1: Eigenspannungen + ständige + veränderliche Lasten

Zu den Normalkräften kommen geringe Biegemomente und Schubkräfte dazu. Durch das Vorhandensein der Zwischenscheiben bildet sich eine Durchlaufträgerwirkung in der Platte aus mit entsprechenden Stütz- und Feldmomenten. Die Schnittgrößenverläufe für den Lastfall 1 sind in Abb. 313 und Abb. 314 dargestellt.



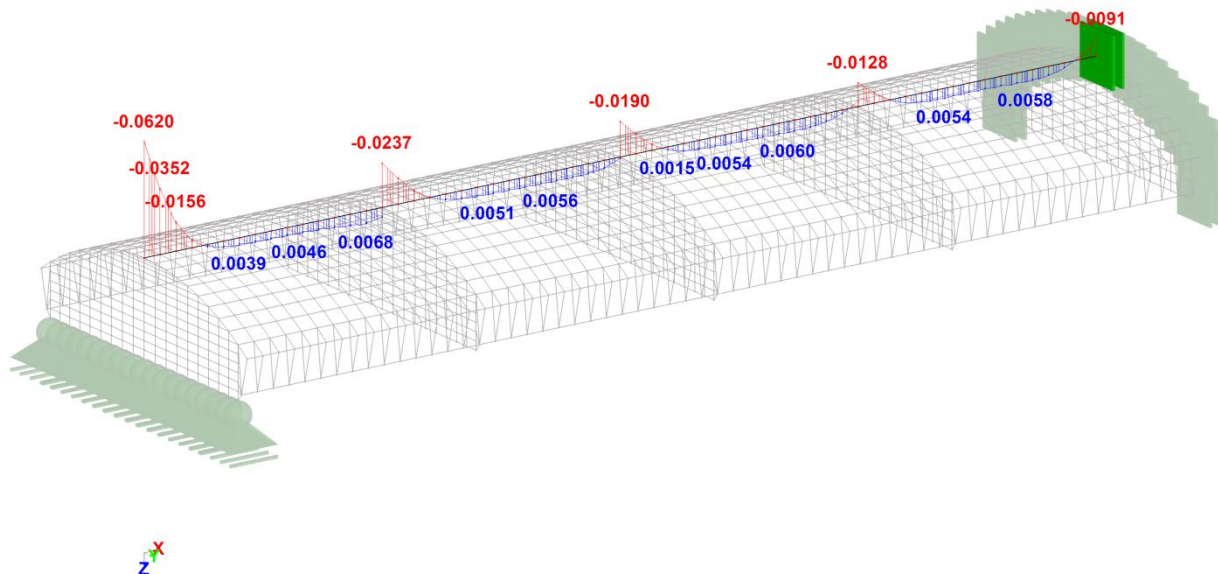


Abb. 313: Biegemomentenverlauf im Scheitel [kNm] für den Lastfall 1: Eigenspannungen + ständige + veränderliche Lasten

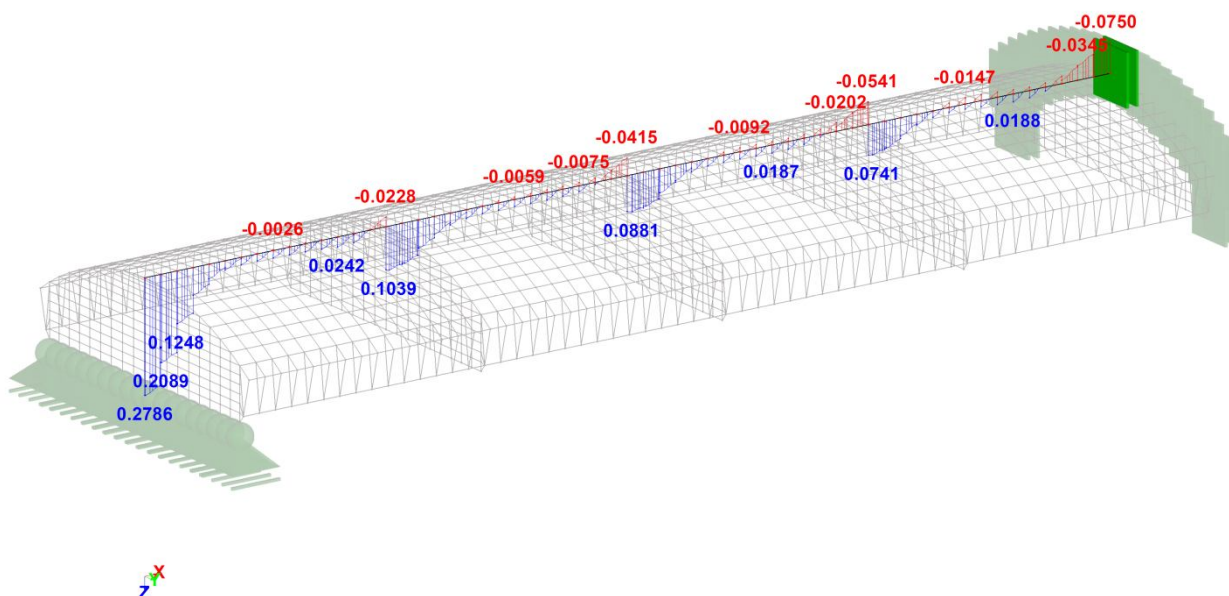


Abb. 314: Querkraftverlauf im Scheitel [kN] für den Lastfall 1: Eigenspannungen + ständige + veränderliche Lasten

Aus den berechneten Schnittgrößen und Stabsteifigkeiten können die Spannungen zur Nachweisführung berechnet werden.

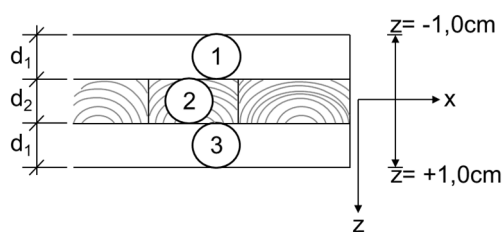


Abb. 315: Aufbau der Dreischichtplatte

Stabsteifigkeiten in longitudinaler Richtung:

$$K_y^x = 7069,8 \text{ kNcm}^2$$

$$S_{xz}^x = 1.092,49 \text{ kN}$$

$$D_x^x = 14.740 \text{ kN}$$

Festigkeiten:

$$f_{m,d} = 14,77 \text{ MN/m}^2$$

$$f_{c,0,d} = 12,92 \text{ MN/m}^2$$

$$f_{v,d} = 1,23 \text{ MN/m}^2$$

$$f_{R,d} = 0,61 \text{ MN/m}^2$$

In einem ersten Schritt sollen die Spannungen in Feldmitte ( $x=6,00$  m) betrachtet werden, da dort eine maximale Normalkraft von  $-8,8087$  kN in den longitudinal verlaufenden Stäben auftritt (siehe Abb. 312).

Schwerpunktspannungen in Folge Normalkraft in Feldmitte ( $x=6,00$  m) in Lamelle 1:

$$\sigma_{x,n,1} = E_{x,1} \cdot \frac{n_x}{D_x} \quad (\text{E.20})$$

$$\sigma_{c,0,d} = 11.000 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \cdot \frac{-8,8087 \text{ kN}}{14.740 \text{ kN}} = -6,57 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$$

Biegegrandspannungen in Folge Moment in Feldmitte ( $x=6,00$  m) in Lamelle 1:

$$\sigma_{x,m,1} = E_{x,1} \cdot \frac{m_x}{K_y} \cdot z \quad (\text{E.21})$$

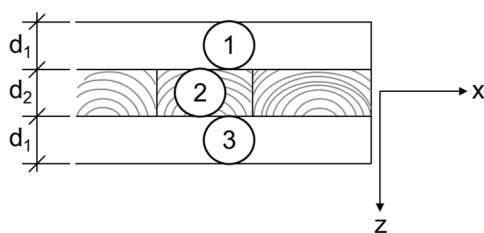
$$\sigma_{m,d} = 11.000 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \cdot \frac{-0,91 \text{ kNcm}}{7.069,8 \text{ kNcm}^2} \cdot \pm 1,0 \text{ cm} = \pm 1,4 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$$

Nachweis der Längsspannungen bei kombinierter Platten- und Scheibenbeanspruchung:

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,d}}{f_{m,d}} = \frac{6,57}{12,92} + \frac{1,4}{14,77} = 0,60 \leq 1,0 \quad (\text{E.22})$$

Es zeigt sich, dass in Folge Längsspannungen ein Ausnutzungsgrad von 60% in der Deckplatte auftritt, wobei der Bemessungswert der Biegefestigkeit noch um den Systembeiwert  $k_1$  erhöht werden dürfte.<sup>166</sup> Die Schubspannungen sollen an der Endscheibe nachgewiesen werden, in der eine Querkraft von  $0,2789$  kN herrscht (siehe Abb. 314).

Schubspannungen aus Querkraft  $v_{x,z}$ :



Abmessungen:

$$d_1 = 6,7 \text{ mm}$$

$$d_2 = 6,6 \text{ mm}$$

Abb. 316: Aufbau der Dreischichtplatte

Für das statische Moment gilt in den entsprechenden Schnitten:

Mitte Lamelle 1: 
$$ES_{x,1,m} = E_{x,1} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \left( -\frac{3 \cdot d_1}{4} - \frac{d_2}{2} \right) \quad (\text{E.23})$$

$$ES_{x,1,m} = 1.100 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot \frac{0,67}{2} \cdot \left( -\frac{3 \cdot 0,67}{4} - \frac{0,66}{2} \right) \text{ cm}^2 = -245,97 \text{ kN}$$

<sup>166</sup> Winter, et al. (2008). *Brettstapel, Brettsperrholz und Verbundkonstruktionen*. Seite P15-97

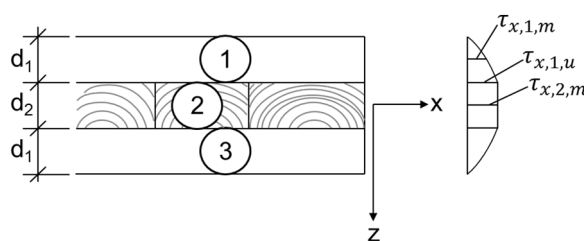
$$\text{Unterkante Lamelle 1: } ES_{x,1,u} = E_{x,1} \cdot d_1 \cdot \left( -\frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2} \right) \quad (\text{E.24})$$

$$ES_{x,1,u} = 1.100 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 0,67 \cdot \left( -\frac{0,67}{2} - \frac{0,66}{2} \right) \text{cm}^2 = -490,10 \text{ kN}$$

$$\text{Mitte Lamelle 2: } ES_{x,2,m} = ES_{x,1,u} - E_{x,2} \cdot \frac{d_2^2}{8} \quad (\text{E.25})$$

$$ES_{x,2,m} = -490,10 \text{ kN} - 0 = -490,10 \text{ kN}$$

Daraus ermittelt sich folgender Schubspannungsverlauf:



$$\tau_{x,1,m} = \frac{ES_{x,1,m}}{K_y^x} \cdot v_{x,z} = 0,10 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \quad (\text{E.26})$$

$$\tau_{x,1,u} = \frac{ES_{x,1,u}}{K_y^x} \cdot v_{x,z} = 0,19 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \quad (\text{E.27})$$

$$\tau_{x,2,m} = \frac{ES_{x,2,m}}{K_y^x} \cdot v_{x,z} = 0,19 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \quad (\text{E.28})$$

Abb. 317: Exemplarische Schubspannungsverteilung

Torsionsbeanspruchungen der Longitudinalstäbe, und Schubspannungen in Folge Verdrillung treten nicht auf, weshalb der Nachweis der Schubspannungen wie folgt erfolgen kann:

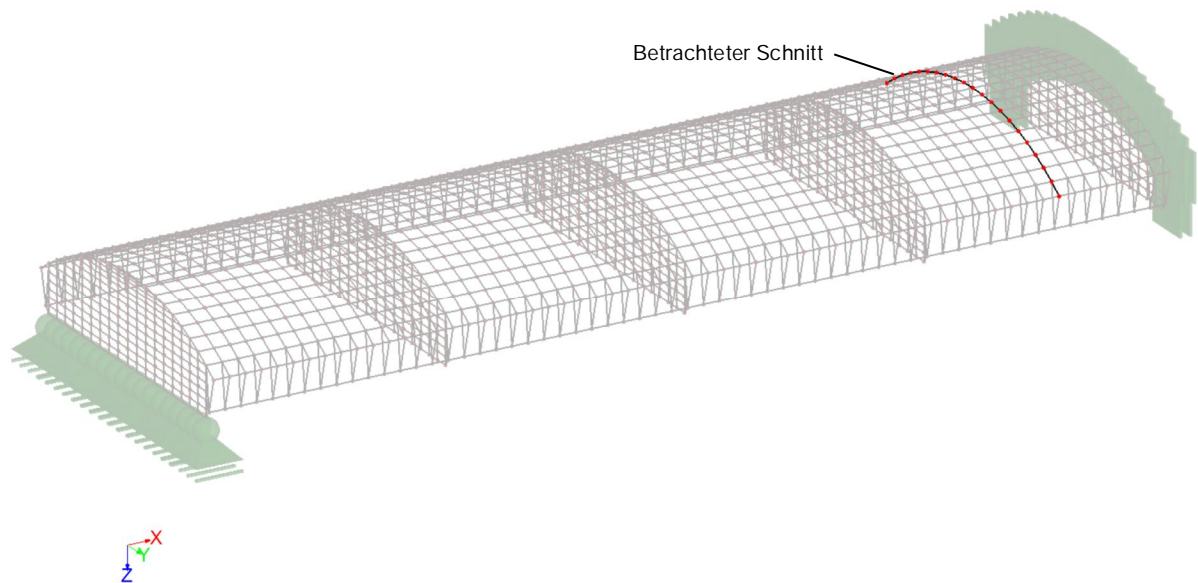
$$\left( \frac{\tau_d}{f_{v,d}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{drill,d}}{f_{v,d}} \right)^2 = \left( \frac{0,19}{1,23} \right)^2 + 0 = 0,24 \leq 1,0 \quad (\text{E.29})$$

Für die Rollschubspannungen in der Lamelle 2 gilt:

$$\frac{\tau_{R,d}}{f_{R,d}} = \frac{0,19}{0,61} = 0,31 \leq 1,0 \quad (\text{E.30})$$

Die Untersuchung weiterer longitudinaler Stäbe hat gezeigt, dass auch für diese die Nachweise der Tragfähigkeit erfüllt sind. Auf eine genaue Ausführung dieser Ergebnisse soll an dieser Stelle verzichtet werden, da nur einige nach Meinung des Autors wichtige Bereiche gezeigt werden sollen.

Im nächsten Schritt wird die Nebentragrichtung der Schale untersucht. Da speziell in dieser Richtung der Einfluss der Eigenspannungen sehr hoch ist, werden beide Lastfälle (LF 1 und LF 2) miteinander verglichen. In beiden Fällen werden alle Berechnungen auf Bemessungsniveau geführt um anschließend die Tragfähigkeit nachzuweisen. Betrachtet wird exemplarisch ein Schnitt an der Längskoordinate X=5,30 Meter (siehe Abb. 318).



**Abb. 318:** Betrachteter Schnitt bei X=5,30 Meter

Werden die Schnittgrößenverläufe der beiden Lastfälle miteinander verglichen, so kann bis auf den Momentenverlauf um die lokale y-Achse, kein wesentlicher Einfluss aus den Eigenspannungen erkannt werden (vergleiche Abb. 319 bis Abb. 322). Eine Gegenüberstellung der Maximalwerte (blau umrandete Werte) des Lastfalls 1 und des Lastfalls 2 bestätigt diese Aussage.

$$\alpha = \frac{\text{Maximalwert LF 1}}{\text{Maximalwert LF 2}} \quad (\text{E.31})$$

Normalkraft:	$\alpha=1,00$
Querkraft in lokaler y-Richtung:	$\alpha=1,11$
Querkraft in lokaler z-Richtung:	$\alpha=0,96$
Torsionsmoment:	$\alpha=1,00$
Moment um die lokale y-Achse:	$\alpha=8,81$
Moment um die lokale z-Achse:	$\alpha=1,12$

Der größte Einfluss der Eigenspannungen ist bei Betrachtung der Momente um die lokale y- Achse festzustellen ( $\alpha=8,81$ ).

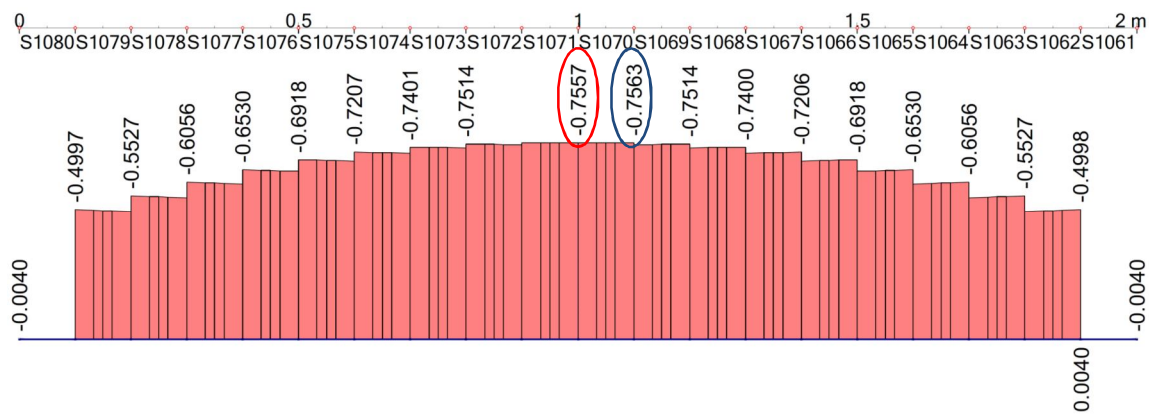


Abb. 319: Normalkraftverlauf in Ringrichtung für den LF 1; Maximalwert: -0,7563 kN

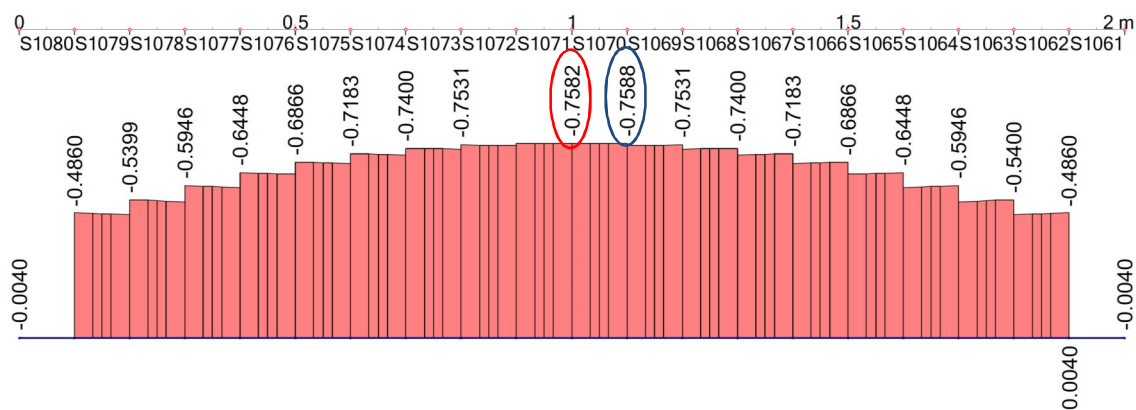


Abb. 320: Normalkraftverlauf in Ringrichtung für den LF 2; Maximalwert: -0,7588 kN

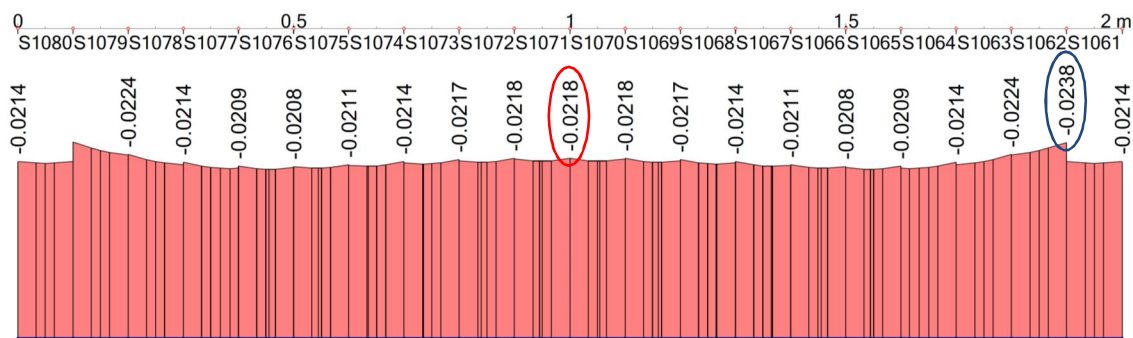


Abb. 321: Momentenverlauf um die lokale y-Achse für den LF 1; Maximalwert: -0,0238 kNm

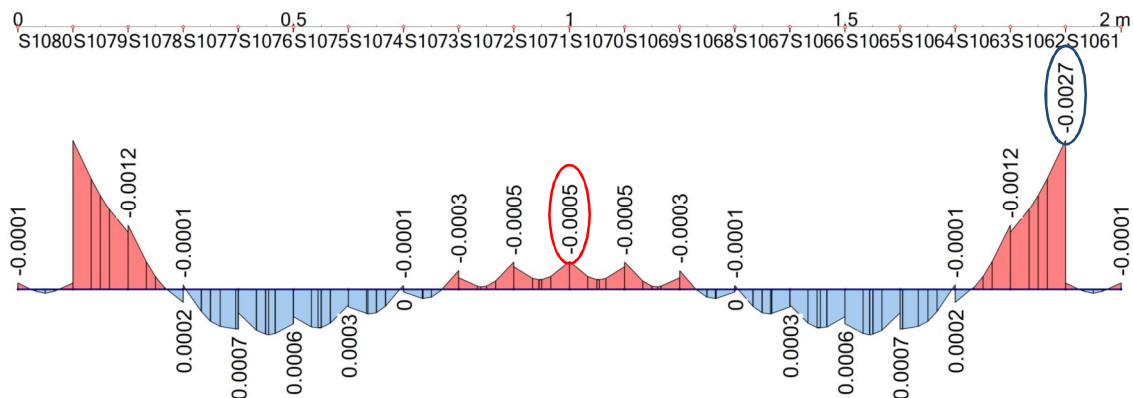
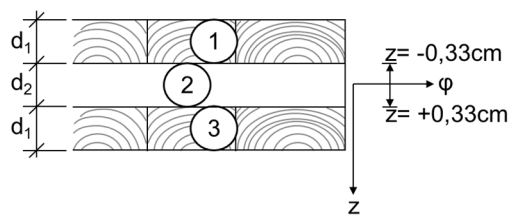


Abb. 322: Momentenverlauf um die lokale y-Achse für den LF 2; Maximalwert: -0,0027 kNm

Aus den berechneten Schnittgrößen und den Stabsteifigkeiten können die Spannungen zur Nachweisführung im Scheitelpunkt ermittelt werden. Die entsprechenden Werte der Normalkraft und des Momentes können aus Abb. 319 bis Abb. 322 entnommen werden und sind rot hervorgehoben.



Stabsteifigkeiten in Ringrichtung:

$$K_y^\varphi = 263,5 \text{ kNcm}^2$$

$$S_{xz}^\varphi = 455,40 \text{ kN}$$

$$D_x^\varphi = 7.260 \text{ kN}$$

Festigkeiten:

$$f_{m,d} = 14,77 \text{ MN/m}^2$$

$$f_{c,0,d} = 12,92 \text{ MN/m}^2$$

$$f_{v,d} = 1,23 \text{ MN/m}^2$$

$$f_{R,d} = 0,61 \text{ MN/m}^2$$

Abb. 323: Aufbau der Dreischichtplatte in Ringrichtung

Schwerpunktspannungen in Folge Normalkraft am Scheitel für beide Lastfälle:

$$\sigma_{\varphi,n,2} = E_{\varphi,2} \cdot \frac{n_\varphi}{D_x^\varphi} \quad (\text{E.32})$$

$$\text{LF 1} \quad \sigma_{c,0,d} = 11.000 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \cdot \frac{-0,7557 \text{ kN}}{7.260 \text{ kN}} = -1,15 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$$

$$\text{LF 2} \quad \sigma_{c,0,d} = 11.000 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \cdot \frac{-0,7582 \text{ kN}}{7.260 \text{ kN}} = -1,15 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$$

Biegerandspannungen in Folge Moment am Scheitel

$$\sigma_{\varphi,m,2} = E_{\varphi,2} \cdot \frac{m_\varphi}{K_y^\varphi} \cdot z \quad (\text{E.33})$$

$$\text{LF 1} \quad \sigma_{m,d} = 11.000 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \cdot \frac{-2,18 \text{ kNcm}}{263,5 \text{ kNcm}^2} \cdot \pm 0,33 \text{ cm} = \pm 30,03 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$$

$$\text{LF 2} \quad \sigma_{m,d} = 11.000 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \cdot \frac{-0,05 \text{ kNcm}}{263,5 \text{ kNcm}^2} \cdot \pm 0,33 \text{ cm} = \pm 0,69 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$$

Nachweis der Längsspannungen bei kombinierter Platten- und Scheibenbeanspruchung:

$$\text{LF 1} \quad \frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,d}}{f_{m,d}} = \frac{1,15}{12,92} + \frac{30,03}{14,77} = 0,09 + 2,03 = 2,12 > 1,0 \quad (\text{E.34})$$

$$\text{LF 2} \quad \frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,d}}{f_{m,d}} = \frac{1,15}{12,92} + \frac{0,69}{14,77} = 0,09 + 0,05 = 0,14 \leq 1,0 \quad (\text{E.35})$$

Es zeigt sich, dass bei Berücksichtigung der herstellungsbedingten Eigenspannungen (LF 1) der Nachweis der Tragfähigkeit in Ringrichtung nicht erfüllt ist. Wie in Kapitel 4.3 beschrieben, werden bei der Herstellung von gekrümmten Brettspertholzelementen oder gekrümmten Brettschichtholzträgern



diese Eigenspannungen gegebenenfalls auch maßgeblich überschritten. Diese Bauteile besitzen jedoch durch den meist mehrlagigen Aufbau die Möglichkeit der Lastumlagerung innerhalb des Bauteils. Bei der Herstellung von Zylinderschalen aus dreischichtigen Platten kann das Versagen einer in Ringrichtung laufenden Lamelle auch durch die lastverteilende Wirkung der longitudinal gerichteten Lamellen kompensiert werden, wobei die Höhe der Redundanz nicht bekannt ist. In welchem Maße die durch die Krümmung verursachten Spannungen in einer statischen Berechnung berücksichtigt werden, um ein ausreichendes Sicherheitsniveau zu erhalten, und trotzdem wirtschaftlich zu bleiben, ist dennoch unklar. Für den Nachweis der Tragfähigkeit ohne Berücksichtigung der Eigenspannungen (LF 2) zeigt sich, dass dieser bei weitem eingehalten wird.

Für den vorher betrachteten Schnitt sollen nun noch die Schubspannungen nachgewiesen werden. Die entsprechenden Querkraftverläufe sind nachfolgend dargestellt.

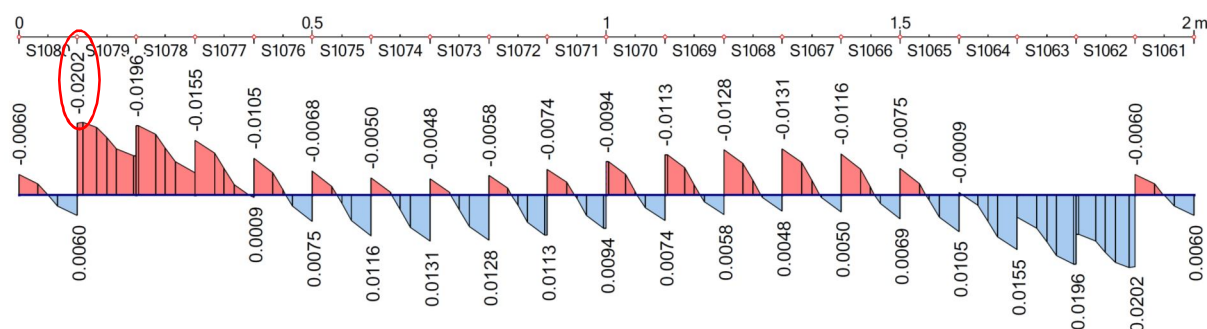


Abb. 324: Querkraftverlauf in Ringrichtung für den LF 1 (lokale z-Richtung); Maximalwert:  $v_{\varphi,z} = 0,0202$  kN

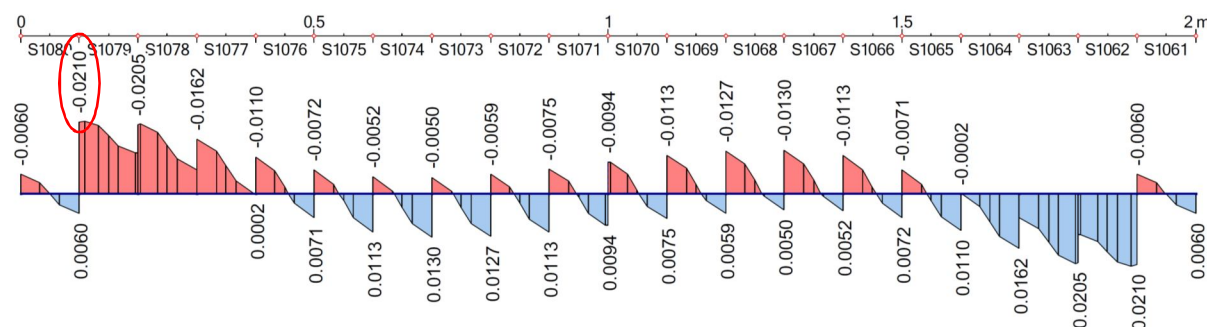
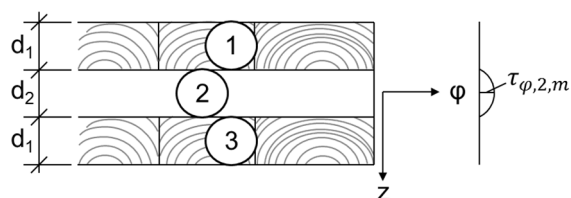


Abb. 325: Querkraftverlauf in Ringrichtung für den LF 2 (lokale z-Richtung); Maximalwert:  $v_{\varphi,z} = 0,0210$  kN

Schubspannungen aus Querkraft  $v_{\varphi,z}$ :



Abmessungen:

$$d_1 = 6,7 \text{ mm}$$

$$d_2 = 6,6 \text{ mm}$$

Abb. 326: Exemplarische Schubspannungsverteilung

Daraus ermittelt sich folgende maximale Schubspannung in der Mittellamelle:

$$\tau_{\varphi,2,m} = \frac{E_{\varphi,1} \cdot v_{\varphi,z} \cdot d_2^2}{8 \cdot K_y^\varphi} \quad (\text{E.36})$$



$$\text{LF 1} \quad \tau_{\varphi,2,m} = \frac{E_{\varphi,1} \cdot v_{\varphi,z} \cdot d_2^2}{8 \cdot K_y^\varphi} = \frac{11.000 \text{ MN/m}^2 \cdot 0,0202 \text{ kN} \cdot 0,66^2 \text{ cm}^2}{8 \cdot 263,5 \text{ kNcm}^2} = 0,046 \text{ MN/m}^2$$

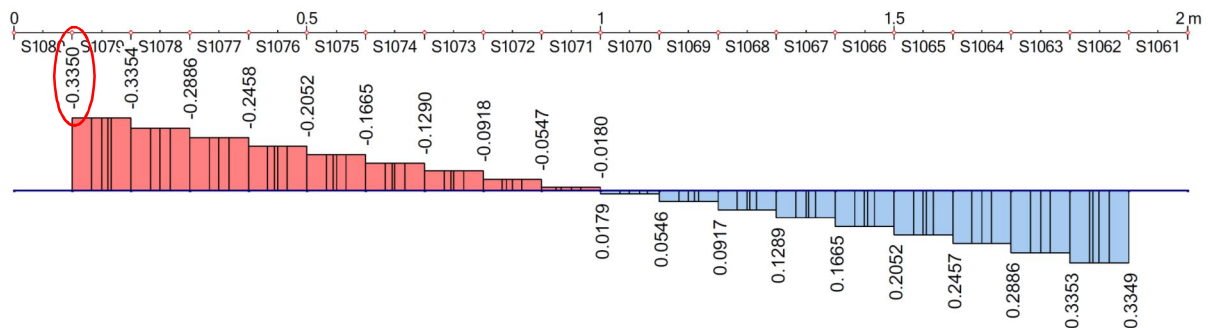
$$\text{LF 2} \quad \tau_{\varphi,2,m} = \frac{E_{\varphi,1} \cdot v_{\varphi,z} \cdot d_2^2}{8 \cdot K_y^\varphi} = \frac{11.000 \text{ MN/m}^2 \cdot 0,0210 \text{ kN} \cdot 0,66^2 \text{ cm}^2}{8 \cdot 263,5 \text{ kNcm}^2} = 0,048 \text{ MN/m}^2$$

Torsionsbeanspruchungen der Ringstäbe treten nur in einem so geringen Maße auf, dass diese vernachlässigt werden können. Somit lautet der Nachweis der Schubspannungen in der Lamelle 2 wie folgt:

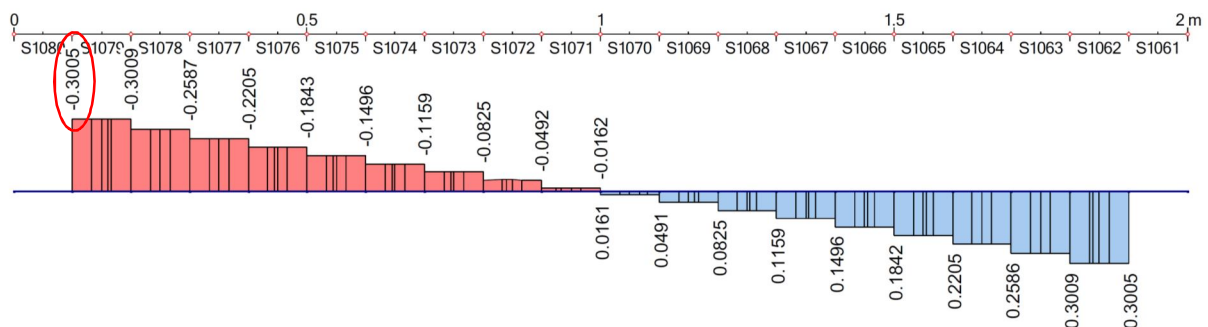
$$\text{LF 1} \quad \left( \frac{\tau_d}{f_{v,d}} \right)^2 = \left( \frac{0,046}{1,23} \right)^2 = 0,001 \leq 1,0 \quad (\text{E.37})$$

$$\text{LF 2} \quad \left( \frac{\tau_d}{f_{v,d}} \right)^2 = \left( \frac{0,048}{1,23} \right)^2 = 0,001 \leq 1,0 \quad (\text{E.38})$$

Zu untersuchen sind noch die Querkräfte in lokaler y-Richtung der in Ringrichtung verlaufenden Stäbe, die durch die Scheibentragwirkung der Platte entstehen. Diese verursachen Rollschubspannungen in der mittleren Lamelle welche zur Endscheibe hin ansteigen. Die entsprechenden Querkräfte in lokaler y-Richtung für den Schnitt bei X=5,30 Metern sind in nachfolgenden Abbildungen gegeben.



**Abb. 327:** Querkraftverlauf in Ringrichtung für den LF 1 (lokale y-Richtung); Maximalwert:  $v_{\varphi,y} = 0,3350 \text{ kN}$



**Abb. 328:** Querkraftverlauf in Ringrichtung für den LF 2 (lokale y-Richtung); Maximalwert:  $v_{\varphi,y} = 0,0210 \text{ kN}$

Die Schubspannungen in Folge Scheibenschub berechnen sich für die beiden Lastfälle wie folgt:

$$\tau_{\varphi x,2} = G_{\varphi x,2} \cdot \frac{v_{\varphi y}}{D_{\varphi x}} \tag{E.39}$$

$$\text{LF 1} \quad \tau_{\varphi x,2} = 0,1 \cdot 690 \text{ MN/m}^2 \cdot \frac{3,335 \text{ kN/m}}{3,450 \text{ kN/m}} = 0,067 \text{ MN/m}^2$$

$$\text{LF 2} \quad \tau_{\varphi x,2} = 0,1 \cdot 690 \text{ MN/m}^2 \cdot \frac{3,005 \text{ kN/m}}{3,450 \text{ kN/m}} = 0,060 \text{ MN/m}^2$$

Der Nachweis der Rollschubspannungen lautet wie folgt:

$$\text{LF 1} \quad \frac{\tau_{R,d}}{f_{R,d}} = \frac{0,067}{0,61} = 0,11 \leq 1,0 \tag{E.40}$$

$$\text{LF 2} \quad \frac{\tau_{R,d}}{f_{R,d}} = \frac{0,060}{0,61} = 0,10 \leq 1,0 \tag{E.41}$$

Wie vorhin angegeben erhöhen sich die Schubspannungen in Folge Scheibenschub zum Auflager hin, weshalb dort die entsprechenden Rollschubspannungen nachgewiesen werden sollen.

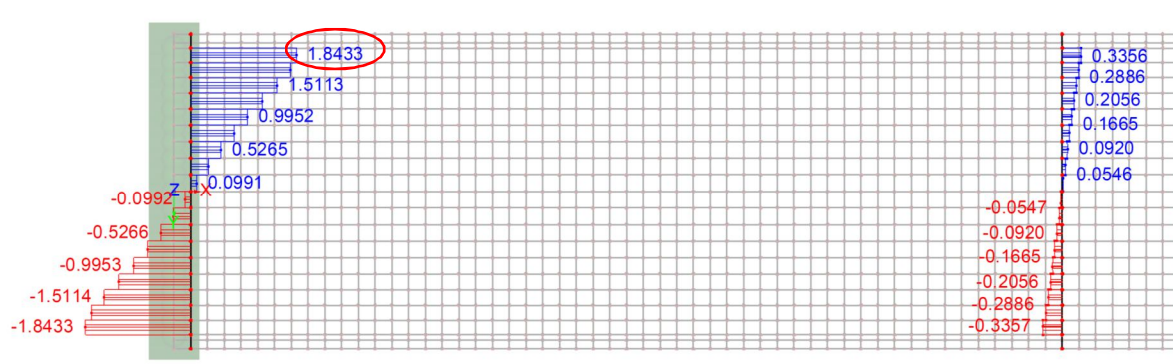


Abb. 329: Querkraftverlauf in Ringrichtung für den LF 1 (lokale y-Richtung); Maximalwert:  $v_{\varphi,y} = 1,8433$  kN

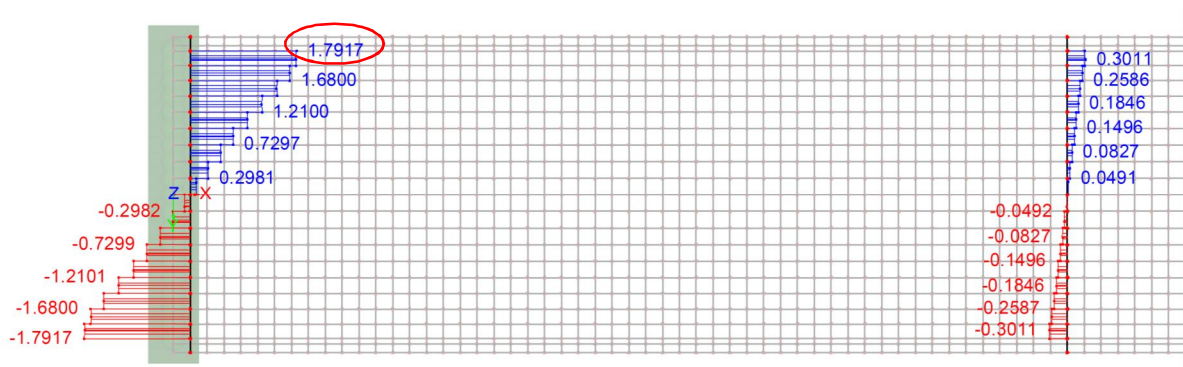


Abb. 330: Querkraftverlauf in Ringrichtung für den LF 2 (lokale y-Richtung); Maximalwert:  $v_{\varphi,y} = 1,7917$  kN

Der Nachweis der Rollschubspannungen ergibt für beide Lastfälle folgende Ergebnisse:

$$\text{LF 1} \quad \frac{\tau_{R,d}}{f_{R,d}} = 0,37 \leq 1,0 \quad (\text{E.42})$$

$$\text{LF 2} \quad \frac{\tau_{R,d}}{f_{R,d}} = 0,36 \leq 1,0 \quad (\text{E.43})$$

Somit wären auch im auflagernahen Bereich die Rollschubspannungen in der mittleren Lamelle noch eingehalten.