

## **Schwingungsverhalten mehrstufiger Getriebe**

**Thanak Utakapan**

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktor-Ingenieurs**

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Prof. Dr. Markus Zimmermann  
Prüfer der Dissertation: 1. Prof. Dr.-Ing. Karsten Stahl  
2. Prof. Dr.-Ing. Markus Lienkamp

Die Dissertation wurde am 14.01.2020 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 09.07.2020 angenommen.



## Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Maschinenelemente, Forschungsstelle für Zahnräder und Getriebebau (FZG) der Technischen Universität München. Sie basiert maßgeblich auf den Inhalten der bearbeiteten Forschungsvorhaben „Kennwerte Anregungsverhalten“ und „Erweiterung Dynamische Zahnkräfte Programm“, die durch die Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA) gefördert wurden.

Mein herzlicher Dank gilt allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Inbesondere bedanke ich mich bei

meinem Doktorvater, Herrn Professor Dr.-Ing. Karsten Stahl, für seine Unterstützungen während der Zeit an der FZG, das entgegengebrachte Vertrauen und für die Möglichkeit, meine fachlichen Kenntnisse zu erweitern und anschließend zu promovieren,

Herrn Prof. Dr.-Ing. Markus Lienkamp für die Durchsicht meiner Arbeit und die Übernahme des Korreferats,

Herrn Prof. Dr. Markus Zimmermann für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes,

meinem Abteilungsleiter, Herrn Dr.-Ing. Michael Otto für die fachlichen Unterstützungen, die Durchsicht dieser Arbeit und unsere regelmäßigen Gespräche, um diese Arbeit bestmöglich zu gestalten,

dem ehemaligen Botschafter, Herrn Dr. Charivat Santaputra und dem ehemaligen Vorstandsmitglied des National Science and Technology Development Agency (NSTDA), Herrn. Assoc. Prof. Dr. Harit Sutabutr für die organisatorischen Unterstützung von thailändischer Seite,

meinen Praktikumsbetreuern, Herrn Dr.-Ing. Karsten Röski und Herrn Dr.-Ing. Dominik Mäder, die mein Interesse an Numerik geweckt haben,

meinem ehemaligen Teamleiter, Herrn Dr.-Ing. Michael Heider, für die wissenschaftlichen Vorschläge und erleuchtende Gespräche bezüglich seiner IT-Fachkenntnisse,

meinem ehemaligen Diplomarbeitbetreuer, Herrn Dr.-Ing. Sebastian Idler, für die Motivation und die Unterstützung zu promovieren,

Herrn Prof. Dr.-Ing. Jens Bühr für die wissenschaftliche Anregungen und Ratschläge,

meinen Dynamik-Büro-Kollegen, Herrn Dr.-Ing. Bernhard Kohn, Herrn. Dr.-Ing. Benedikt Neubauer, Max Fromberger, Uwe Weinberger und Joshua Götz für die fachlichen Diskussionen und die schönen Stimmungen,

meinem ehemaligen Masterand und anschließend auch meinem weiteren Büro-Kollege, Sebastian Sepp, der eine tolle Arbeit erfolgreich durchgeführt hat,

allen Kollegen an der FZG für das unvergessliche Arbeitsklima. Für die guten Freundschaften bedanke ich mich bei Herrn Dr.- Ing. Maximilian Strebel, Herrn Dr.-Ing. Michael Hein, Herrn Dr.-Ing. Georg Meingaßner, Thomas Jurkschat und Marco Mileti,

Frau Dr.rer.nat. Montatip Poomvanicha für die seelische Unterstützung und ihren Halt zu jeder Zeit.

Nicht zuletzt bedanke ich mich bei meinen Eltern Panee Chaeng-Akson und Weerathep Utakapan, meinem Onkel Wolfgang Rebstock und meiner Tante Wipapiti Rebstock für die unendliche Liebe und den familiären Rückhalt.

Thailand, im Oktober 2019

## Kurzfassung

Zur rechnerischen Beurteilung des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe sind die Berücksichtigung der Kreuzeinflüsse zwischen den Verzahnungsstufen und die detaillierte Betrachtung im Zahneingriff notwendig. Das Modell muss in der Lage sein, die Überlagerung aller Verzahnungsanregungen, die zeitlich sowohl in Betrag als auch in Richtung variieren, zu erfassen. Weiterhin sind die Beurteilungsansätze, die sich bereits bei der Auswertung des Schwingungsverhaltens einstufiger Getriebe bewährt haben, zur Anwendung bei mehrstufigen Getrieben zu überprüfen.

Die vorliegende Arbeit befasst sich im Wesentlichen mit der Modellbildung und der Erweiterung der Auswertung des Schwingungsverhaltens von mehrstufigen Getrieben. Zur rechnerischen Betrachtung wird ein räumliches Getriebemodell auf Basis des linear-elastischen Gesamtgetriebesystems zur Ermittlung des Verformungsverhaltens des Welle-Lager-Systems erstellt. Dank der gekoppelten kontinuumsmechanischen Zahnkontaktanalyse nach Weber/Banaschek und Schmidt können Einflüsse von Verzahnungen erfasst werden. In der Dynamiksimulation ist dadurch eine genaue Betrachtung des Schwingungsverhaltens möglich. Eine Methode zur Ermittlung von Übertragungsfunktionen wird vorgestellt und zur in der Arbeit erweiterten quasidynamischen Auswertung eingesetzt. Damit wird eine rechenzeit-effiziente Auswertung ermöglicht. Weiterhin wird die Spektralanalyse zur Auswertung von Signalen, deren Richtungen sich mit der Zeit ändern, erweitert. Schließlich werden Messungen an einem mehrstufigen Getriebe beschrieben und ausgewertet. Insgesamt können Übereinstimmungen zwischen den rechnerischen und den gemessenen Ergebnissen gefunden werden.

## Abstract

The consideration of interaction between gear meshes and detailed tooth contacts are necessary for computational evaluation of gear noise behaviour of multistage gearboxes. Gear mesh excitation of each stage provides different magnitude and direction, so that the adopted model needs to be capable of predicting the resulting behaviour. Furthermore, the validity of evaluation methods, which are well approved in the usage on single-stage gearboxes, shall be verified.

This dissertation focusses on the development of a computational model and the extension of evaluation methods for multistage gearboxes. The computational model is based on the method of the linear-elastic transmission system with all spatial degrees of freedom in order to capture the deformation of the shaft-bearing-system. The model is coupled with the continuum mechanical tooth contact analysis according to Weber/Banaschek and Schmidt. The dynamic simulation shall provide comprehensive knowledge on the noise behaviour of gearboxes under dynamic conditions. Meanwhile, a method to evaluate transfer functions of systems is presented for the usage in the extended quasi-dynamic evaluation, which enables good time-efficient calculation. Finally, a method for spectral analysis for signals with time-varying directions is developed. Measurements on a multistage gearbox are described and evaluated. Overall a good correlation between computational and experimental results can be identified.



## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Problemstellung und Ziel der Arbeit</b> .....	1
1.1	Ausgangssituation .....	1
1.2	Zielsetzung .....	2
1.3	Lösungsweg .....	2
<b>2</b>	<b>Stand des Wissens</b> .....	3
2.1	Ansätze zur Beurteilung des Anregungsverhaltens von Stirnradgetrieben .....	3
2.1.1	Zahnpaar- und Verzahnungssteifigkeit .....	3
2.1.2	Quasistatische Drehwegabweichung .....	4
2.1.3	Kraftanregung .....	6
2.1.4	Lagerkraft .....	7
2.1.5	Dynamische Berechnung .....	8
2.1.6	Eigenwertberechnung und Gleichungslösen im Frequenzbereich .....	10
2.2	Dämpfungsmodelle .....	10
2.2.1	Rayleigh Dämpfung .....	11
2.2.2	Caughey Dämpfung .....	12
2.2.3	Verzahnungsdämpfung nach Gerber .....	13
2.3	Weg- und Kraftüberhöhung in Abhängigkeit von der Drehzahl .....	14
2.4	Kennwerte zur Beurteilung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen .....	16
2.4.1	Zahnkraft- und Anregungspegel .....	16
2.4.2	Lagerkraftpegel .....	17
2.4.3	Linearisierter Kraftpegel .....	18
2.4.4	Dynamischer Zahnkraftpegel .....	18
2.4.5	Anwendungskraftpegel .....	19
2.5	Optimierung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen bei einstufigen Getrieben .....	22
2.5.1	Optimierung des Anregungsverhaltens mit Hilfe der Makrogeometrie .....	22
2.5.2	Optimierung des Anregungsverhaltens mit Hilfe der Mikrogeometrie .....	24
2.6	Rechnerische Getriebemodelle .....	26
2.7	Schwingungsverhalten mehrstufiger Getriebe .....	28
2.8	Fazit .....	29
<b>3</b>	<b>Erweiterung der Berechnungsmethoden des Anregungsverhaltens mehrstufiger Getriebe</b> .....	31
3.1	Bestimmung der Eingriffsstellungen .....	31
3.2	Berechnung des Verformungsverhaltens des Welle-Lager-Systems .....	33
3.3	Quasidynamische Auswertung .....	34

3.4	Bestimmung des Übertragungsverhaltens eines linearen Gesamttriebmodells ..	37
3.5	Modellbildung in der dynamischen Simulation .....	41
3.5.1	Aufbau des dynamischen räumlichen Modells .....	42
3.5.2	Bestimmung der Systemdämpfung .....	44
3.5.3	Ansatz zur Berücksichtigung von impliziten Lagersteifigkeiten .....	45
3.6	Größen zur Beurteilung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen in der dynamischen Simulation .....	47
3.6.1	Dynamische Drehwegabweichung .....	48
3.6.2	Dynamische Zahnkraft .....	49
3.6.3	Dynamische Lastverteilung .....	49
3.6.4	Zustandsgrößen an den Wellenabschnitten .....	50
3.7	Beispiel dynamischer Ausgabegrößen .....	51
3.8	Spektrale Signalanalyse mehrstufiger Getriebe .....	58
3.8.1	Rechenzeiteffiziente Spektrumsermittlung bei quasistatischen Ansätzen .....	58
3.8.2	Spektralanalyse des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe .....	60
3.9	Erweiterung der Kennwertbildung zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe .....	63
3.10	Fazit .....	65
<b>4</b>	<b>Messtechnische Untersuchung des Schwingungsverhaltens eines mehrstufigen Getriebes</b> .....	<b>67</b>
4.1	Beschreibung des Prüfaufbaus .....	67
4.1.1	Prüfgetriebe .....	67
4.1.2	Prüfverzahnung .....	68
4.1.3	Verwendete Messtechnik .....	70
4.2	Versuchsprogramm .....	71
4.3	Auswerteverfahren der resultierenden Signale .....	72
4.4	Messergebnisse .....	76
4.4.1	Referenzverzahnung .....	76
4.4.2	Unterkritische Verzahnung .....	80
4.4.3	Überkritische Verzahnung .....	83
4.4.4	Low-Loss-Verzahnung .....	86
4.5	Fazit .....	89
<b>5</b>	<b>Rechnerische Studie des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe</b> .....	<b>91</b>
5.1	Untersuchung der Kraft- und Weganregung in Abhängigkeit der Drehzahl .....	91
5.2	Untersuchung der Zustandsgröße an den Lagern in Abhängigkeit der Drehzahl .....	102
5.3	Lagerkraft und Lagerkraftpegel .....	106
5.4	Fazit .....	113



---

<b>6 Diskussion</b> .....	115
6.1 Auswertung des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe .....	115
6.2 Drehzahleinfluss bei mehrstufigen Getrieben .....	116
6.3 Einfluss der Höherharmonischen .....	117
<b>7 Zusammenfassung und Ausblick</b> .....	118
7.1 Zusammenfassung .....	118
7.2 Ausblick .....	120
<b>A Anhang</b> .....	1
A.1 Herleitung .....	1
A.2 Ermittlung Vergrößerungsfunktionen der Verzahnungsanregung .....	3
A.3 Beschreibung der eingesetzten ODE-Solver .....	5
A.3.1 Adams-Bashforth-Verfahren .....	5
A.3.2 BDF-Verfahren .....	6
A.4 Übersicht der Messpositionen am Speed2E-Getriebe .....	7
A.5 Dynamische Untersuchung eines zweistufigen Getriebes .....	8
A.5.1 Prinzipskizze und Daten .....	8
A.5.2 Dynamische Lastverteilung der ersten Verzahnungsstufe (Schrägverzahnung) .	9

## Nomenklatur

Zeichen	Einheit	Benennung
$\underline{\underline{A}}$		Parametermatrix im Zustandsraum
$\underline{\underline{B}}$		Parametermatrix im Zustandsraum
$\underline{\underline{C}}$		Steifigkeitsmatrix
$\underline{\underline{\tilde{C}}}_B$		Elementare Steifigkeitsmatrix des Balkenelementes
$\underline{\underline{C}}_{L,s}$		Sekantensteifigkeitsmatrix eines Lagers am Betriebspunkt $s$
$\underline{\underline{\partial C}}_s$		Tangentensteifigkeitsmatrix eines Lagers am Betriebspunkt $s$
$\underline{\underline{C}}_{ers,s}$		Ersatzsteifigkeitsmatrix eines Lagers am Betriebspunkt $s$
$D_{i,j}$	-	Lehr'sches Dämpfungsmaß bei der $i$ - bzw. $j$ -ten Schwingungsmode
$D_{ze}$	-	Lehr'sches Verzahnungsdämpfungsmaß eines einzelnen Zahnpaares
$\underline{\underline{F}}$		Kraftvektor
$\underline{\underline{\hat{F}}}$		Kraftvektor im Zustandsraum
$\underline{\underline{\tilde{F}}}_B$		Schnittlastvektor des Balkenelementes
$F_{L,i}$	N	Amplitude der Lagerkraft der Ordnung $i$
$F_0$	N	Bezugskraft (= 1 N)
$F_{bez}$	N	Bezugskraft nach DIN EN ISO 1683 [DIN08] ( $=1 \cdot 10^{-6}$ N)
$F_L$	N	Lagerkraft auf einer Welle
$F_{z,dyn,i}$	N	Amplitude der dynamischen Zahnkraft der $i$ -ten Ordnung
$\bar{F}_{ord}$	N	Kraftamplitude des gemittelten, betriebsbereichsbewerteten Ordnungsspektrums
$F_{ord}(n)$	N	Kraftamplitude der Ordnung $ord$ für die Drehzahl $n$
$\bar{F}_{ord}$	N	Gemittelte Kraftamplitude für die Ordnung $ord$
$F_{z,qdyn}(i)$	N	Quasidynamisches Kraftspektrum
$F_z$	N	Verzahnungskraft
$\underline{\underline{I}}$		Einheitsmatrix
$\underline{\underline{K}}$		Dämpfungsmatrix
$\underline{\underline{\tilde{K}}}_B$		Elementare Dämpfungsmatrix des Balkenelementes
$\underline{\underline{M}}$		Massenmatrix
$M_z$	Nm	Torsionsmoment am treibenden Rad durch die Verzahnungskraft
$L_A$	dB	Anregungspegel
$L_{A,F}$	dB	Anwendungskraftpegel
$L_{F,gem}$	dB	Gemittelter Kraftpegel
$L_{F,gem,i}$	dB	Gemittelter Kraftpegel der $i$ -ten Zahneingriffsordnung

wird fortgesetzt

<b>Zeichen</b>	<b>Einheit</b>	<b>Benennung</b>
$L_{F,dyn}$	dB	Dynamischer Kraftpegel
$L_{FL}$	dB	Lagerkraftpegel
$L_{Flin}$	dB	Linearisierter Kraftpegel
$L_{Fz}$	dB	Zahnkraftpegel
$L_{Fz,dyn}$	dB	Dynamischer Zahnkraftpegel
$L_{res}$	dB	Kennwert des resultierenden Schwingungsverhaltens
$L_j$	dB	Kennwert des Schwingungsverhaltens in der $j$ -Achse
$N$		Anzahl der Moden
$N_{Bl}$	-	Anzahl gleichzeitig aktiver Berührlinien der betrachteten Eingriffsstellung
$N_P$	-	Anzahl diskreter Punkte pro Berührlinie
$N_{PDR,i}$	-	Anzahl der Zahneingriffe
$N_{i,j,per}$	-	Anzahl der Umdrehungen auf der $j$ -ten Welle
$S(n,ord)$	$mm/s^2 \cdot N$	Spektralamplitude der Ordnung $ord$ bei der Drehzahl $n$
$T_i$	Nm	Drehmoment am Rad $i$
$U$	-	Vergrößerungsfunktion Weggröße nach Geiser [Gei02]
$V$	-	Vergrößerungsfunktion Kraftgröße nach Geiser [Gei02]
$a$	mm	Achsabstand
$a_i$	-	Ordnungsspezifische Konstante
$b_0$	mm	Bezugsbreite ( $b_0 = 1$ mm)
$c_\gamma$	N/m	Gemittelte Verzahnungssteifigkeit
$c_{zjk}(t)$	N/mm	Verzahnungssteifigkeit am Punkt $j$ der Berührlinie $k$
$c_{zi}(t)$	$N/\mu m$	Lokale Steifigkeit der Verzahnung am Punkt $i$ zur Eingriffsstellung $t$
$c_{zi}(t)$	$N/\mu m$	Lokale Steifigkeit der Verzahnung am Punkt $i$ zum Zeitpunkt $t$
$c_\gamma$	N/m	Gemittelte Verzahnungssteifigkeit
$d_b$	mm	Grundkreisdurchmesser
$\underline{e}_i$	-	Einheitsvektor der $i$ -Achse
$f$	Hz	Anregungsfrequenz
$f_0$	Hz	Bezugsfrequenz (= 1 Hz)
$f_{i,j}$	Hz	Eigenfrequenz bei der $i$ - bzw. $j$ -ten Schwingungsmode
$f_z$	Hz	Zahneingriffsfrequenz
$f_{Welle1}$	Hz	Drehfrequenz der Eingangswelle
$h$		Schrittweite
$i$	-	Zahneingriffsordnung
$i_{st}$	-	Übersetzung bis zur Momentenausleitungsstelle

wird fortgesetzt

Zeichen	Einheit	Benennung
$k$	-	Rotatorischer Freiheitsgrad um die Längsachse an der Momentenausleitungsstelle
$k_z$	N · s/m	Über alle eingreifenden Zähne gemittelte Dämpfungskonstante nach Gerber [Ger84]
$k_{ze}$	N·s/m	Dämpfungskonstante eines Zahnpaares
$m_{red}$	kg	Reduzierte Trägheitsmasse
$n_1$	min <sup>-1</sup>	Ritzeldrehzahl der betrachteten Stufe
$n_o$	min <sup>-1</sup>	Obere Grenzdrehzahl für alle Ordnungen
$n_u$	min <sup>-1</sup>	Untere Grenzdrehzahl für alle Ordnungen
$n_o(ord)$	min <sup>-1</sup>	Obere Grenzdrehzahl im Betriebs- und Frequenzbereich für die Ordnung $ord$
$n_u(ord)$	min <sup>-1</sup>	Untere Grenzdrehzahl im Betriebs- und Frequenzbereich für die Ordnung $ord$
$n_z$	-	Anzahl der dazwischen liegenden Zähne
$r_{b,i}$	m	Grundkreisradius des Rades $i$
$s$		Anzahl der Schritte des Solvers
$t$		Zeit
$\Delta t$	s	Zeitliche Phasenverschiebung
$v_t$	m/s	Umfangsgeschwindigkeit
$\underline{x}(t)$		Ortsvektor
$\underline{\dot{x}}(t)$		Geschwindigkeitsvektor
$\underline{\ddot{x}}(t)$		Beschleunigungsvektor
$\underline{x}_s$		Stationäre Lagerverformung am Betriebspunkt $s$
$\underline{x}_t$		Dynamische Lagerverformung um den Betriebspunkt $s$
$x$	mm	Drehwegabweichung
$x_{fi}(t)$	$\mu\text{m}$	res. Abweichungsbetrag zwischen Ritzel und Rad in Eingriffsrichtung am Punkt $i$
$x_{fi}$	$\mu\text{m}$	res. Abweichungsbetrag zwischen Ritzel und Rad in Eingriffsrichtung
$x_{jk}$	mm	Verschiebungsvektor zwischen den Radkörpern am Punkt $j$ der Berührlinie $k$
$x_{fjk}$	mm	Flankenabweichung des Stirnprofils am Punkt $j$ der Berührlinie $k$
$x_z$	mm	Weganregung an der Verzahnung
$x_\varphi$	rad	Verdrehwinkel um die Längsachse
$z$	-	Zähnezahl
$z_{1,2}$	-	Zähnezahl des Rades 1 bzw. 2

wird fortgesetzt

Zeichen	Einheit	Benennung
$z_{11}$	-	Zähnezahl des treibenden Rades der ersten Stufe
$z_{12}$	-	Zähnezahl des treibenden Rades der zweiten Stufe
$\alpha$		Gleichungskoeffizient
$\alpha_i$		Dämpfungskoeffizient der $i$ -ten Mode
$\alpha$	1/s	Koeffizient
$\alpha_w$	-	Betriebseingriffswinkel
$\alpha_w$	rad	Betriebseingriffswinkel
$\beta$		Gleichungskoeffizient
$\underline{\delta}_B$		Verschiebungsvektor des Balkenelementes
$\delta_x$		Verformung um den Betriebspunkt eines Lagers (1D)
$\varepsilon_\alpha$	-	Profilüberdeckung
$\varepsilon_{\alpha,Last}$	-	Überdeckung unter Last
$\eta_{\text{öl}}$	mPa·s	Dynamische Viskosität des Schmierstoffs
$\omega_{i,j}$	rad/s	Eigenkreisfrequenz bei der $i$ - bzw. $j$ -ten Schwingungsmode
$\omega_{Lmin}$	rad/s	Kürzeste Grunddrehfrequenz der Lagerkraft
$\varphi$	rad	Drehwinkel des Referenzzahns bzgl. Zahnmitte
$\varphi_E$	rad	Winkelkoordinate des Eingriffsendes
$\psi_b$	rad	Grunddicken-Halbwinkel
$\theta$	kg·m <sup>2</sup>	Trägheitsmoment
$\theta_i$	kg · m <sup>2</sup>	Trägheitsmoment des Rades $i$
$\xi$	rad	Wälzwinkel
$\xi_w$	rad	Wälzwinkel am Wälzpunkt C (=tan $\alpha_w$ )

### Indizes

1	Treibendes Rad bzw. unterer Wälzkörper	2	Getriebenes Rad bzw. unterer Wälzkörper
Bl	Berührlinie	B	Balkenelemente
b	Grundkreis	bez	Bezugswert
dyn	Dynamisch	ers	Ersatz, repräsentativ
FL	Lagerkraft	gem	Gemittelt
L	Lager	lin	Linearisiert
o	Obere Grenze	min	Minimal / Kürzest
PDR	Periodisch, Zahneingriff	ord	Ordnung (Bezeichnung)
per	Periodisch, allgemein	qdyn	Quasidynamisch

wird fortgesetzt

**Indizes**

res	Resultierend	u	Untere Grenze
red	Reduziert	Welle1,2	Bezüglich Welle 1 bzw. 2
z	Zahnradbezogen		

**Abkürzungen**

DIN	Deutsches Institut für Normung	DFT	Diskrete Fourier-Transformation
DZP	Dynamisches Zahnkräfte Programm	EDV	Elektronische Datenverarbeitung
EN	Europäische Normen	FE	Finite Elemente
FFT	Schnelle Fourier-Transformation	FVA	Forschungsvereinigung Antriebs- technik
FZG	Forschungsstelle für Zahnräder und Getriebebau	ISO	Internationale Organisation für Nor- mung
kgv	Kleinstes gemeinsames Vielfaches	ODE	Gewöhnliche Differenzialgleichung
RIKOR	Rizelkorrektur Programm	TG	Teilgetriebe
TPA	Transferpfad-Analyse		

# 1 Problemstellung und Ziel der Arbeit

## 1.1 Ausgangssituation

Das Geräuschverhalten eines Getriebes wird wesentlich von der Anregung aus dem Zahneingriff beeinflusst. Bereits in der frühen Auslegungsphase eines Getriebes wird daher ein günstiges Anregungsverhalten von Verzahnungen angestrebt. Das Anregungsverhalten eines Zahneingriffs lässt sich durch Vorgaben der Flankengeometrie im Mikrometerbereich gezielt beeinflussen. In der Literatur gibt es zahlreiche Ansätze zur rechnerischen Beurteilung der Verzahnungsanregung. Grundsätzlich lassen sich die Ansätze in quasistatische und dynamische Ansätze klassifizieren. Die Aussagegenauigkeit unterschiedlicher Ansätze ist von den getroffenen Modellannahmen abhängig. Bei den quasistatischen Ansätzen wird angenommen, dass Massen- und Dämpfungskräfte vernachlässigt werden können, so dass nur ein statisches Gleichungssystem in Abhängigkeit der Wälzstellung gelöst werden muss. Dies verkürzt die Rechenzeit erheblich. Diese quasistatischen Ansätze werden daher in der Auslegungsphase insbesondere bei der Optimierung von Verzahnungsparametern bevorzugt verwendet. Bei dynamischen Methoden kann das Anregungsverhalten unter Berücksichtigung der Drehzahleinflüsse gut abgebildet werden. Die dynamische Simulation liefert grundsätzlich detaillierte Ergebnisse zum Schwingungsverhalten von Getrieben, erfordert jedoch eine lange Rechenzeit. Diese Methode wird daher nicht in der frühen Auslegungsphase von Verzahnungen verwendet, sondern in der Nachrechnung von bereits verhältnismäßig detaillierten Verzahnungsauslegungen eingesetzt.

Um die Schwingungsanregung mehrstufiger Stirnradgetriebe zu beurteilen, werden in der Praxis bisher häufig einzelne Verzahnungsstufen getrennt behandelt, sodass Kreuzeinflüsse zwischen den Verzahnungsstufen vernachlässigt werden. U.U. werden die dynamischen Berechnungsmodelle vereinfacht, z.B. als Mehrmassen-Torsionsmodelle. Obwohl das Anregungsverhalten maßgeblich von der Torsionsschwingung beeinflusst wird, werden weitere signifikante Einflüsse, wie räumliche Verlagerungen der Wellen bzw. Drehzahleinflüsse, durch andere Freiheitsgrade, z.B. Biegung, dadurch nicht erfasst. Durch die genannten Vereinfachungen wird die rechnerische Aussagegüte der Berechnungsmodelle beeinträchtigt.

Zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens von mehrstufigen Getrieben ist die Kraftschwankung an den Lagerstellen eine wichtige Größe. Eine zutreffende Berechnung ist mit Modellen des Getriebesystems, die räumliche Zustandsgrößen an den Lagerstellen erfassen, möglich. Es besteht ein Zielkonflikt zwischen einfacher und schneller quasistatischer Berechnung mit nur grober Abbildung des Zahneingriffs und genauer, aber zeitaufwändiger dynamischer Berechnung unter Beachtung des dynamischen Systemverhaltens. Der Unterschied in der Rechenzeit zwischen den Ansätzen wird durch die Verfeinerung der Freiheitsgrade und die Anzahl der Verzahnungsstufen stärker ausgeprägt. Die Wahl eines geeigneten Berechnungsmodells ist eine Herausforderung für den Konstrukteur und von hoher Relevanz für die zielgerichtete Auslegung

von optimalen Stirnradverzahnungen.

## 1.2 Zielsetzung

Ziel der Arbeit ist die Weiterentwicklung der rechnerischen Ansätze zur Beurteilung des Anregungsverhaltens mehrstufiger Stirnradgetriebe. Dabei sollen die Kreuzeinflüsse von Verzahnungsstufen sowie die Einflüsse der räumlichen Verlagerungen des Welle-Lager-Systems berücksichtigt werden. Trotzdem sollen die Verhältnisse in den einzelnen Zahneingriffen genau erfasst werden und die dynamischen Verzahnungs- und Lagerkräfte zeiteffizient berechnet werden können.

## 1.3 Lösungsweg

Die gegenseitigen Kreuzeinflüsse eines mehrstufigen Getriebes sowie die räumlichen Wellenverlagerungen können mit Hilfe eines Gesamttriebmodells berücksichtigt werden. Bisher wird das Gesamttriebmodell für die Beurteilung der statischen Tragfähigkeit verwendet und wurde zur Erfassung räumlicher Wellenverlagerungen in dem EDV-Programm RIKOR K [Neu16b] implementiert. Auf Basis dieses bestehenden Modells werden die Grundlagen für die Berechnung des Anregungsverhaltens mehrstufiger Getriebe weiterentwickelt. Um kurze Rechenzeit für die Verzahnungsauslegung zu gewährleisten, wird das weiterentwickelte Modell mit Hilfe von quasistatischen Ansätzen ausgewertet. Im Gegensatz zu einstufigen Getrieben muss das gesamte Anregungsverhalten mehrstufiger Getriebe an den Lagerstellen ausgewertet werden. Mit Hilfe des weiterentwickelten Modells soll dies ermöglicht werden.

Außerdem wird eine detaillierte Aussage über das Anregungsverhalten mehrstufiger Getriebe unter Berücksichtigung der Drehzahleinflüsse mit Hilfe des weiterentwickelten Modells getroffen. Auf dieser Basis wird die Modellierung in Form der Massen-, Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix abgebildet und anschließend als Zustandsmatrix für die Zeitschrittintegration verwendet. Während der Zeitschrittintegration variieren die Verzahnungssteifigkeiten in Abhängigkeit der Eingriffsstellung sowie der daraus resultierenden Lastverteilung. Außerdem variieren die Lagersteifigkeiten aufgrund der dynamischen Belastungen. Diese Änderungen der Steifigkeiten müssen daher in jedem Zeitschritt berücksichtigt werden, d.h. das Gleichungssystem muss implizit gelöst werden. Um die Bewegungsgleichung des Gesamtsystems effizient zu lösen, wird ein geeigneter Gleichungssolver gewählt.

Die weiterentwickelten Grundlagen für die Modellbildung mehrstufiger Getriebe werden im EDV-Programm DZP Version 6 implementiert. Schließlich werden zur Validierung Schwingungsmessungen an einem mehrstufigen Getriebe durchgeführt.



## 2 Stand des Wissens

### 2.1 Ansätze zur Beurteilung des Anregungsverhaltens von Stirnradgetrieben

Zahnradgetriebe werden maßgeblich durch die Verzahnungsanregungen beeinflusst. Die nennenswerten Ursachen der Verzahnungsanregung sind die zeitveränderliche Verzahnungssteifigkeit, Verzahnungsabweichungen, die Verformungen der Zahnräder, die Oberflächenstruktur, die Überdeckungsvergrößerung unter Last sowie die Reibkraftumkehr am Wälzkreis [Hei12]. Diese sind ausführlich in [Mül91, Nie89] beschrieben. In diesem Abschnitt wird ein Überblick über das Anregungsverhalten von Verzahnungen und die Ansätze zur Beurteilung des Anregungsverhaltens vorgestellt.

Grundsätzlich kann das Schwingungssystem eines Getriebes numerisch mit Hilfe der folgenden Dynamikgleichung nach Heider [Hei12] erfasst werden:

$$\underline{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{\underline{K}}(t) \cdot \dot{\underline{x}}(t) + \underline{\underline{C}}(t) \cdot \underline{x}(t) = \underline{\underline{F}}(t) \quad (2.1)$$

---

$\underline{\underline{M}}$	Massenmatrix	$\ddot{\underline{x}}(t)$ $\dot{\underline{x}}(t)$ $\underline{x}(t)$	Beschleunigungsvektor
$\underline{\underline{K}}(t)$	Dämpfungsmatrix		Geschwindigkeitsvektor
$\underline{\underline{C}}(t)$	Steifigkeitsmatrix		Ortsvektor
$\underline{\underline{F}}(t)$	äußerer Kraftvektor		

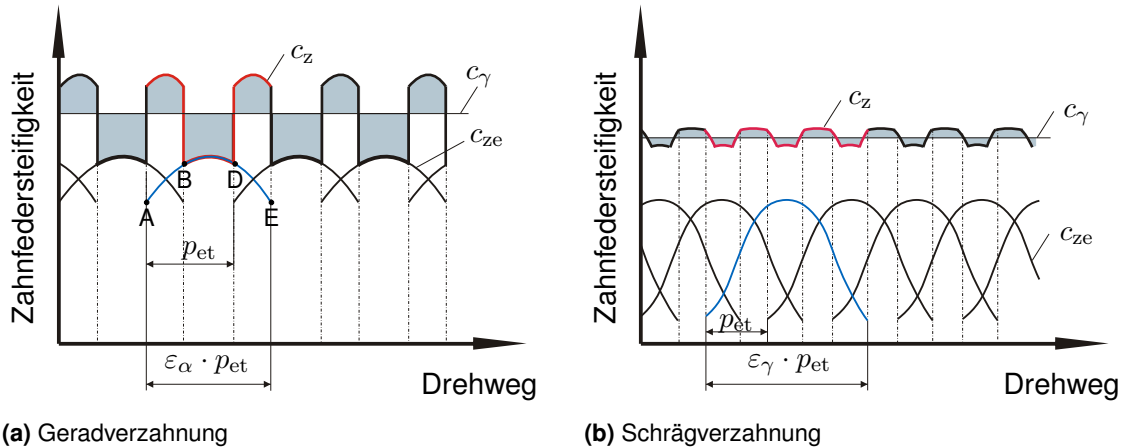
---

Diese Gleichung weist darauf hin, dass das Schwingungsverhalten eines Getriebes durch die Massen bzw. Trägheiten, zeitveränderliche Steifigkeiten, Dämpfungen sowie externe Lasten maßgeblich beeinflusst wird. In der Literatur unterscheiden sich die Modellierungen auf Basis dieser Gleichung maßgeblich durch die darauf aufgebauten Ansätze, die berücksichtigten Freiheitsgrade sowie die Auswertezwecke. Diese werden im Laufe dieses Kapitels erklärt.

#### 2.1.1 Zahnpaar- und Verzahnungssteifigkeit

Im ganzen Zahneingriff tragen unterschiedliche Zahnpaare die Last, die konstant über der Zeit übertragen wird. Dadurch wird die Gesamtlänge der aktiven Berührlinien zeitlich veränderlich und es ergibt sich eine zeitliche Schwankung der Verzahnungssteifigkeit, s. [Koh19, Sch73]. **Bild 2.1** zeigt schematisch die Ermittlung der Verzahnungssteifigkeit aus den Zahnpaarsteifigkeiten bei unterschiedlichen Verzahnungsarten, s. auch [Nie89]. Aufgrund der zeitlichen Schwankung der Verzahnungssteifigkeit wird das Schwingungssystem eines Getriebes nach **Gleichung (2.1)** als parametererregt bezeichnet [Koh19, Küç85, Mag08].

Müller [Mül91] stellt den wesentlichen Einfluss der Überdeckungen auf die Schwankung der Verzahnungssteifigkeit fest. Heider [Hei12] untersucht den Einfluss von Verzahnungskorrekturen auf die Sprung- und Profilüberdeckungen und somit auf das Anregungsverhalten von Verzahnungen. Nach [Hei12] lässt sich zwar die Lage der Resonanzstelle durch die Verzahnungssteifigkeit beeinflussen. Der Einfluss ist jedoch untergeordnet, da die Veränderung der Ver-



**Bild 2.1:** Steifigkeiten unterschiedlicher Verzahnungsarten: Zahnpaarsteifigkeit  $c_{ze}$ , Verzahnungssteifigkeit  $c_z$ , mittlere Verzahnungssteifigkeit  $c_\gamma$  (nach [Koh19, Nie89], geändert)

verzahnungssteifigkeit nicht zur signifikanten Verschiebung der Resonanzstelle führt. Bei der Ermittlung der Verzahnungseigenfrequenz steht die Verzahnungssteifigkeit unter der Wurzel.

Die Zahnpaarsteifigkeit lässt sich nach dem kontinuumsmechanischen Ansatz nach Weber/Banaschek [Web55] in Erweiterung nach Schmidt [Sch73] berechnen. In [Koh19] wird das Verfahren sowie die zeitliche Entwicklung ausführlich beschrieben.

Numerisch kann die Verzahnungssteifigkeit ermittelt werden, indem die Zahnpaarsteifigkeiten als parallel geschaltete Federn an den aktiven Berührstellen modelliert werden. Dabei müssen Abweichungsbeträge der Verzahnungen durch die Verzahnungskorrekturen sowie Fertigungstoleranzen berücksichtigt werden [Hei12]. Nach den Ansätzen nach Baethge [Bae69] und Thoma [Tho11] können vor- und nachzeitige Eingriffe in Form von Verzahnungsabweichungen berücksichtigt werden.

### 2.1.2 Quasistatische Drehwegabweichung

Die quasistatische Drehwegabweichung stellt eine Randbedingung der **Gleichung (2.1)** dar, bei der die Drehzahl  $n \rightarrow 0$  angenommen wird. Da in diesem Zustand keine Massen- und Dämpfungskräfte wirken, können die Massen und die Dämpfung vernachlässigt werden. Ist die Nennzahnkraft an der Verzahnung bekannt, lässt sich die Drehwegabweichung zu einer Eingriffsstellung  $t$  wie folgt beschreiben [Hei12]:

$$x(t) = \frac{F - \sum_i [c_{zi}(t) \cdot x_{fi}(t)]}{\sum_i c_{zi}(t)} \tag{2.2}$$

$x(t)$	$\mu\text{m}$	Drehwegabweichung in der Eingriffsstellung $t$	$F$	N	Nennzahnkraft
$c_{zi}(t)$	$\text{N}/\mu\text{m}$	Lokale Steifigkeit der Verzahnung am Punkt $i$ zur Eingriffsstellung $t$	$x_{fi}(t)$	$\mu\text{m}$	Res. Abweichungsbetrag zwischen Ritzel und Rad in Eingriffsrichtung am Punkt $i$

Nach **Gleichung (2.2)** ist die Drehwegabweichung zur Eingriffsstellung  $t$  von der Last abhängig. Deshalb wird sie grundsätzlich als Drehwegabweichung unter Last (Loaded Transmission Error) bezeichnet. In der Praxis wird die Drehwegabweichung als eine Abfolge der Eingriffsstellungen dargestellt. Da jeder Wert aus einer statischen Gleichung ermittelt wird, wird der resultierende Verlauf als quasistatische Drehwegabweichung bezeichnet. In der Praxis wird sie mit Hilfe von EDV-Software ermittelt. Die Berechnung der Drehwegabweichung mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente wird in [Tha09] beschrieben. Das Programm DZP [Gri10b] bestimmt die Drehwegabweichung einer Verzahnung, indem die Verzahnungssteifigkeit  $c_{zi}(t)$  in **Gleichung (2.2)** mit Hilfe des Ansatzes nach Weber/Banaschek [Web55] mit Erweiterung von Schmidt [Sch73] berechnet wird. Die resultierende Abweichung  $x_{fi}(t)$  ergibt sich aus der Verzahnungstopologie sowie aus der Wellenverlagerung. Die letztere wird in der Programmversion 5 mit Hilfe des Übertragungsmatrizenverfahrens nach Falk [Fal55] jeweils für eine Welle berechnet [Bih16]. Bei mehrstufigen Getrieben werden die Kräfte aus den anderen Verzahnungsstufen als externe Lasten an den Wellenstützpunkten abgebildet. Einflüsse von Lagern werden mit Hilfe des Programmmoduls LAGER2 [Sch08] in WELLAG [Tho08] berechnet.

Die Drehwegabweichung ist eine der weit verbreiteten Größen zur Beurteilung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen [Gre64, Har58, Hei12]. Mark et al. [Mar78, Mar79] unterteilen die Drehwegabweichung in zwei Komponenten, in eine deterministische und eine stochastische. Sie untersuchen die Einflüsse wie die elastische Verformung der Verzahnungen und die Flankenabweichung auf diese Komponente anhand der Spektralanalyse. Zhao et al. [Zha18] untersuchen Einflüsse der Mikrogeometrie unter Berücksichtigung der Fertigungstoleranzen auf die Drehwegabweichung. Houser et al. [Hou94] untersuchen das Schwingungsverhalten von Stirnradgetrieben anhand der Luftschallmessung und stellen einen Zusammenhang zwischen dem gemessenen Luftschall und der Drehwegabweichung fest. Toshiya et al. [Nag16] ermitteln die quasistatische Drehwegabweichung aus der gemessenen Torsionsbeschleunigung mit Hilfe einer rechnerisch bestimmten Frequenzgangfunktion und vergleichen diese mit der rechnerisch ermittelten Drehwegabweichung. Mark et al [Mar16, Mar19] führen rechnerische Untersuchungen der quasistatischen Drehwegabweichung von Verzahnungen mit Zahnschäden durch. Ziel der Arbeit ist die Zustandsüberwachung von Getrieben. Weitere Schadensanalyse von Verzahnungen und Zustandsüberwachung mit Hilfe der Drehwegabweichung werden in [Fro16, Fro17, Par18] ausgeführt. Auf Basis der Drehwegabweichung entwickelt Neubauer [Neu16a] die Gesamtdrehwinkeldifferenz als eine Torsionsverformung zwischen An- und Abtrieb eines Planetengetriebes. Diese Größe lässt sich, analog zur quasistatischen Drehwegabweichung, über der Eingriffsfolge darstellen und kann als ein Maß zur Bewertung des Anregungsverhaltens von Planetengetrieben verwendet werden. Auf Basis der Gesamtdrehwinkeldifferenz untersucht Weinberger [Wei16] das Anregungsverhalten eines Planetengetriebes bei Grübchen an einer Verzahnung.

In der Messtechnik kann die Drehwegabweichung gemessen werden, indem die Verdrehwinkel

des Ritzels und des Rades gemessen werden und die Drehwegfehler auf die Eingriffsstrecke umgerechnet werden. Baethge [Bae69] führt umfangreiche Drehwegmessungen zur Untersuchung unterschiedlicher Verzahnungseinflüsse auf das Schwingungsverhalten eines Getriebes durch. Inalpolat et al [Ina14] untersucht messtechnisch den Einfluss der Teilungsabweichung eines Stirnradgetriebes auf das Drehwegverhalten. In [Uta16] wird das Anregungsverhalten einer Normal- und einer Hochverzahnung mit Flankenkorrekturen untersucht. Dabei wird der Zusammenhang zwischen der gemessenen Drehwegabweichung und Torsionsbeschleunigung validiert. Einflüsse der Flankenmodifikation auf das Drehwegverhalten werden messtechnisch in [Gri10a] untersucht. Auf Basis der Drehwegabweichung und Voruntersuchungen der periodischen Flankenkorrektur in [Gei02, Hei12, Rad07, Sat97] entwickelt Kohn [Koh19] teilungsperiodische Flankenmodifikationen, die fertigungstechnisch realisierbar sind und die Verzahnungsanregung ausgleichen, ohne die Lastverteilung zu beeinträchtigen. Diese ermöglicht eine getrennte Auslegung von Flankenmodifikationen zur Sicherstellung der Tragfähigkeit und des anregungsarmen Schwingungsverhaltens.

### 2.1.3 Kraftanregung

Im Gegensatz zur quasistatischen Drehwegabweichung stellt die Kraftanregung eine Randbedingung dar, bei der die Drehzahl sehr hoch angenommen wird. In diesem Zustand sind die Zustandsgrößen so groß, dass die relativen Bewegungen zwischen dem Rad und Ritzel und deren abgeleiteten Größen vernachlässigbar klein sind. An der Verzahnung wirken ausschließlich die Kräfte durch die Steifigkeiten aufgrund der Verformung zwischen Ritzel und Rad sowie der Verzahnungsabweichungen. Massen- und Dämpfungskräfte sind in diesem Zustand vernachlässigbar. Die Kraftanregung lässt sich wie folgt ermitteln [Hei12]:

$$F_z(t) = \sum_i \{c_{zi}(t) \cdot [x + x_{fi}(t)]\} \quad (2.3)$$

$F_z(t)$	N	Kraftanregung	$c_{zi}(t)$	N/ $\mu\text{m}$	Lokale Steifigkeit der Verzahnung am Punkt $i$ zum Zeitpunkt $t$
$x$	$\mu\text{m}$	Verformung zwischen Ritzel und Rad in Eingriffsrichtung	$x_{fi}$	$\mu\text{m}$	Res. Abweichungsbetrag zwischen Ritzel und Rad in Eingriffsrichtung

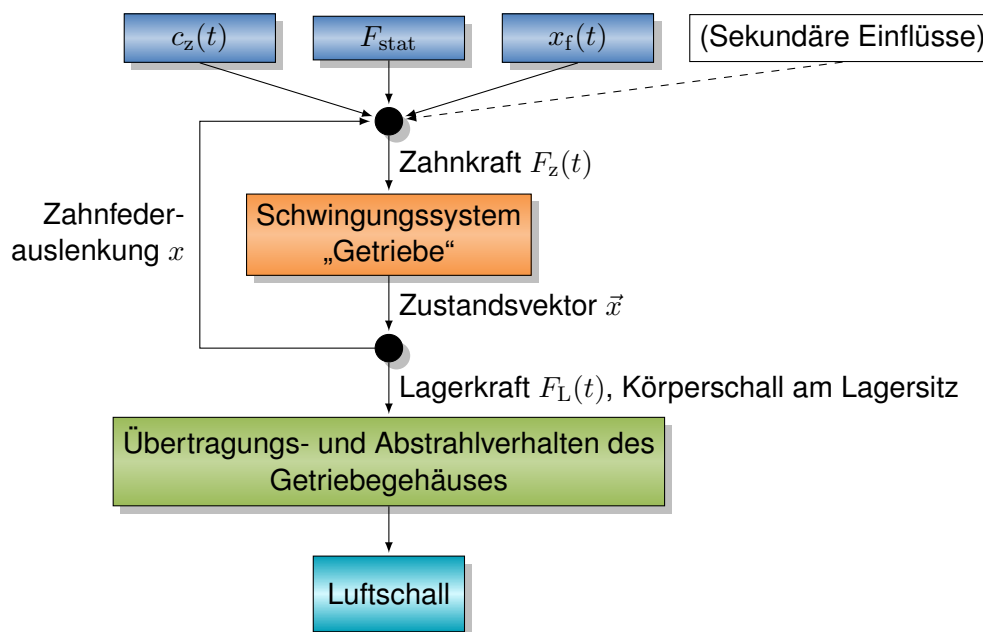
Im Gegensatz zur quasistatischen Drehwegabweichung wird die Kraftanregung in der Literatur weniger verbreitet eingesetzt. Da die Kraftanregung eine Kraftgröße ist, ist diese Größe praktisch für die Kennwertbildung und die Vergleichbarkeit des Anregungsverhaltens zwischen Verzahnungsvarianten. Diese rechnerische Größe ist außerdem sehr vorteilhaft, wenn die Rechenzeit kritisch ist.

Messtechnisch wird in der Praxis die dynamische Zahnkraft untersucht. Bedingt durch die Messeinrichtung erfasst die gemessene Zahnkraft nicht ausschließlich die Verzahnungsanregung. Sie stellt einen Zusammenhang zwischen der Verzahnungsanregung und einer Schwingungs-

antwort dar [Mül91]. Die unterschiedlichen Einflüsse auf die dynamische Zahnkraft werden in [Gei02, Kna77, Mül91, Sat97] untersucht.

### 2.1.4 Lagerkraft

Bei mehrstufigen Getrieben wird das resultierende Schwingungsverhalten des Getriebes durch alle Verzahnungsstufen beeinflusst. Daher müssen die Anregungen aller Verzahnungsstufen bei der Auswertung mitberücksichtigt werden.



**Bild 2.2:** Schematische Darstellung des Schwingungssystems „Zahnradgetriebe“, Entstehungskette des abgestrahlten Luftschalls (nach [Mül91]), geändert

In **Bild 2.2** ist die schematische Darstellung des Schwingungssystems im Zahnradgetriebe nach Müller [Mül91] gezeigt. In jeder Verzahnungsstufe liegen Anregungsquellen wie die zeitveränderliche Verzahnungssteifigkeit  $c_z(t)$ , die aus dem äußeren Moment resultierende Zahnkraft  $F_{stat}$ , die wirksame Flankenform zwischen Ritzel und Rad usw. vor. Diese werden in Form einer zeitveränderlichen Zahnkraft  $F_z(t)$  zusammengefasst. Aufgrund der Gehäuseabschirmung ist die außerhalb des Getriebes wahrnehmbare direkte Luftschallabstrahlung des Zahneingriffs vernachlässigbar [Lin99]. Die relevante Anregung durch die Zahnkraft wirkt daher hauptsächlich indirekt in Form von Körperschallschwingungen und wird über das Welle-Lager-System ans Getriebegehäuse übertragen. Von der Oberfläche des Gehäuses wird die Schwingung in Form von Luftschall abgestrahlt.

Um die Auswertung des Anregungsverhaltens mehrstufiger Getriebe zu erweitern, hat Sattlberger [Sat97] die Lagerkraft als Summe der Zahnkräfte aller Stufen auf einer Welle definiert. Auf der Zwischenwelle eines zweistufigen Getriebes lässt sich die Lagerkraft  $F_L$  wie folgt definieren:

$$F_L(t) = F_{z,1}(t) + F_{z,2}(t + \Delta t) \quad (2.4)$$

$F_L(t)$	N	Lagerkraft auf einer Welle	$F_{z,i}(t)$	N	Zahnkraft der $i$ -ten Stufe
$\Delta t$	s	Zeitliche Phasenverschiebung			

Dabei ergibt sich die Phasenverschiebung  $\Delta t$  aus der Lage beider Zahneingriffe zueinander und der elastischen Verformung zwischen beiden Verzahnungsstufen.

Die Spektralanalyse der Lagerkraft erfordert eine Berücksichtigung der Eingriffsperioden beider Stufen, um Leakage-Effekte zu vermeiden. Grundsätzlich tritt Leakage auf, wenn die Dauer des auszuwertenden Signals nicht der Periode bzw. dem Vielfachen der Periode des Signals entspricht. Dabei tauchen Seitenbänder um die Signalfrequenzen auf. Im Vergleich zu den einzelnen Kraftanregungen ist dadurch eine längere Simulationszeitdauer für die Spektralanalyse mehrerer Stufen erforderlich.

### 2.1.5 Dynamische Berechnung

Bisher wird das Lösen des Gleichungssystems nach **Gleichung (2.1)** vereinfacht, indem die Drehzahleinflüsse vernachlässigt werden. Durch die Vereinfachung des Gleichungssystems ergibt sich ein statisches Gleichungssystem. Beim numerischen Lösen solcher Gleichungssysteme stehen zahlreiche Bibliotheken wie LAPACK [And90] bzw. PARDISO [PAR19] zur Verfügung. Beide Bibliotheken sind in der Intel Math Kernel Library [Cor19] zur numerischen Berechnung verfügbar.

Unter Berücksichtigung der zeitabhängigen Gleichungsterme kann **Gleichung (2.1)** mit der Zeitschrittintegration gelöst werden. Grundsätzlich stehen zahlreiche Methoden zum Lösen des Gleichungssystems zur Verfügung. Diese Methoden werden numerisch implementiert und werden Solver genannt. Diese Solver lösen ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung mit einer Anfangsbedingung. Es gilt:

$$\dot{\underline{z}}(t) = f(t, \underline{z}), \text{ mit } \underline{z}(t_0) = \underline{z}_0 \quad (2.5)$$

$\underline{z}$	Zustandsvektor	$t$	Zeit
$f$	Bezeichnung für eine Funktion		

**Gleichung (2.1)** stellt ein Differentialgleichungssystem 2. Ordnung dar und kann zu einem 1. Ordnung nach [Hei12] reduziert werden. Es gilt nach **Gleichung (2.1)** und **Gleichung (2.5)**:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\underline{x}}(t) \\ \dot{\underline{x}}(t) \end{pmatrix}}_{\dot{\underline{z}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} & -\underline{I} \\ \underline{C}(t) & \underline{K}(t) \end{bmatrix}}_{\underline{B}(t)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{x}(t) \\ \dot{\underline{x}}(t) \end{pmatrix}}_{\underline{z}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{F}(t) \end{pmatrix}}_{\widehat{\underline{F}}(t)} \quad (2.6)$$

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{A}^{-1} \widehat{\underline{F}}(t) - \underline{A}^{-1} \underline{B}(t) \cdot \underline{z}(t) \quad (2.7)$$

$\underline{A}$	Parametermatrix im Zustandsraum	$\underline{B}$	Parametermatrix im Zustandsraum
$\underline{I}$	Einheitsmatrix	$\widehat{\underline{F}}$	Kraftvektor im Zustandsraum

Bei der numerischen Zeitschrittintegration wird die Lösung des Zustandsvektors mit der Schrittweite  $h$  diskretisiert und bestimmt. Im Allgemeinen lässt sich die Lösung des Zustandsvektors zur Zeit  $t_n$  mit Hilfe der unterschiedlichen Solver nach [But16] formulieren als:

$$\underline{z}(t_n) = \underline{z}_n = \sum_{i=1}^s \alpha_i \cdot \underline{z}_{n-i} + h \sum_{i=0}^s \beta_i \cdot f(t_{n-i}, \underline{z}_{n-i}) \quad (2.8)$$

---

$s$	Anzahl der Schritte des Solvers	$h$	Schrittweite
$\alpha$	Gleichungskoeffizient	$\beta$	Gleichungskoeffizient

---

Im Allgemeinen weisen die Solver unterschiedliche obige Parameter auf. Bei den Solvern mit  $s = 1$  handelt es sich um Einschrittverfahren. Sie benötigen zur Bestimmung des Zustandsvektors  $\underline{z}_n$  den Lösungsvektor  $\underline{z}_{n-1}$  aus der zuletzt ermittelte Berechnung. Im Gegensatz dazu sind bei Mehrschrittverfahren mit  $s$  Schritten insgesamt  $s$  Lösungsvektoren aus den vorherigen Berechnungen notwendig. Zu Beginn eines  $s$  schrittigen Verfahren müssen insgesamt  $s - 1$  Startwerte  $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \dots, \underline{z}_{s-1}$  vorgegeben werden, deren Berechnungsvorschriften durch die Solver definiert werden.

Weiterhin unterscheiden sich die Solver durch den Koeffizienten  $\beta_0$ . Bei expliziten Solvern ist  $\beta_0 = 0$ . Im Gegensatz dazu ist  $\beta_0 \neq 0$  bei impliziten Solvern. Dadurch taucht der Term  $f(t_n, \underline{z}_n)$  zur Bestimmung des Vektors  $\underline{z}_n$  auf. Die Gleichung muss dann iterativ gelöst werden. Ein Überblick über die Entwicklung unterschiedlicher numerischer Solver über drei Jahrhunderte wird in [Gol77] dokumentiert.

Zur Auswahl eines geeigneten Solvers sind der verbundene Rechenaufwand und die Stabilität des Solvers beim Einsatz für ein Gleichungssystem zu berücksichtigen. Ein impliziter Solver wird in der Praxis trotz lange Rechenzeit bevorzugt, wenn das Gleichungssystem steif ist. Ein Gleichungssystem ist steif, wenn ein Eigenwert der Jacobi-Matrix des Gleichungssystems negativ ist und betragsmäßig relativ größer ist als der Kehrwert der berechneten Zeitspanne, s. auch [Bui84, Hin83]. Bei einigen Solvern wird dadurch eine sehr kleine Schrittweite benötigt. Die wesentlichen Merkmale bei einer ungeeigneten Wahl der Solver ist z.B. die erhebliche Steigerung der Rechenzeit bzw. die numerische Instabilität.

In [Hei12] wird der Solver nach Cash/Karp [Cas90] zum Lösen des Torsionsmodells eines Getriebes eingesetzt. Dieser Solver stellt eine Erweiterung nach Fehlberg [Feh70] dar und gehört zu einem der Runge-Kutta-Verfahren. Diese Verfahren sind Einschrittverfahren, bei denen  $s$ -Zwischenwerte aus definierten Zeitpunkten beim Lösen bestimmt und gewichtet werden. Diese Zwischenwerte werden im nächsten Zeitpunkt im Gegensatz zu Mehrschrittverfahren nicht verwendet. Die Runge-Kutta-Verfahren verfügen über explizite sowie implizite Methoden. Beim Cash/Karp Solver handelt es sich um ein explizites Verfahren. Das Verfahren verfügt über eine Schrittweitenanpassung, sodass eine geeignete Schrittweite ausgewählt wird und im Laufe der Berechnung automatisch angepasst wird.

Weiterhin implementiert Hindmarsh [Hin83] die ODEPACK Bibliothek zum Lösen eines Anfangswertproblems. Die Bibliothek verfügt über einige Solver zum Lösen unterschiedlicher Gleichungssysteme. Bei nicht-steifen Gleichungssystemen steht der Adams-Bashforth-Solver [Bas83] zur Verfügung. Es handelt sich um ein explizites Mehrschrittverfahren, bei dem  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_i = 0$  für  $i > 2$  und  $\beta_0 = 0$  in **Gleichung (2.8)** gelten. Außerdem ist der BDF-Solver [Cur52] in der Bibliothek vorhanden. Der Name ist aus dem englischen Begriff „Backward Difference Formula“ abgeleitet. Dabei handelt es sich um ein implizites Mehrschrittsverfahren mit  $\beta_i = 0$  für  $i > 1$  in **Gleichung (2.8)**. Dieser Solver ist geeignet zum Lösen eines steifen Gleichungssystems, s. [But16]. Beide Solver verfügen über eine Schrittweitenanpassung. Darüber hinaus implementiert Hindmarsh einen Algorithmus zum Wechsel zwischen beiden Solvern während der Berechnung. Dieser Algorithmus erkennt, wann das Gleichungssystem steif wird und schaltet den BDF-Solver ein, sonst wird das Gleichungssystem mit dem Adams-Bashforth-Solver gelöst. Damit wird eine effiziente Rechenzeit ermöglicht.

### 2.1.6 Eigenwertberechnung und Gleichungslösen im Frequenzbereich

Grundsätzlich ist es mit Hilfe der Modaltransformation möglich, **Gleichung (2.1)** ohne Zeitschrittintegration auszuwerten. Daraus können Eigenfrequenzen und -schwingungsformen des Systems identifiziert werden. In der Arbeit von Gold [Gol79] werden Frequenzgänge eines räumlichen Mehrmassenmodells auf dieser Basis ermittelt. Bihl [Bih16] entwickelt einen Ansatz zur Bestimmung der partikulären Lösung des Gleichungssystems im Frequenzbereich. Zur Ermittlung der stationären Schwingungsantwort wird in der Literatur auch die modale Summation (engl: modal summation) [Leg88] durchgeführt. Mit Hilfe der Technik ermittelt Kubur [Kub04] die dynamische Drehwegabweichung eines FE-Modells eines mehrstufigen schrägverzahnten Getriebes und vergleicht das Ergebnis mit Messungen. Bei diesen Transformationen werden die zeitabhängigen Parameter in **Gleichung (2.1)** nicht berücksichtigt.

## 2.2 Dämpfungsmodelle

Im Gegensatz zur Ermittlung einer Massen- bzw. Steifigkeitsmatrix in **Gleichung (2.1)** ist die Bestimmung einer Dämpfungsmatrix wesentlich komplizierter. Dies liegt daran, dass die gesamte Dämpfung oft durch unterschiedliche Mechanismen hervorgerufen wird. Aus diesem Grund wird in der Praxis vorausgesetzt, dass die Dämpfung proportional zur Massen- und Steifigkeitsmatrix ist und dass die klassischen normalen Moden des Systems beim Vorhandensein der Dämpfung beibehalten werden [Adh07, Pha04]. Die Rayleigh- sowie Caughey-Dämpfung erfüllen diese Bedingung. Als eine normale Mode wird eine Schwingungsmode bezeichnet, deren Eigenvektoren reell sind [Hec95]. Die Eigenform ist dann durch eine stehende Welle mit festen Schwingungsknoten gekennzeichnet. Dagegen weist eine komplexe Mode eine Eigenform auf, die mit der Zeit propagiert. Sie weist keine festen Schwingungsknoten auf [Døs88b]. Effekte wie Kreiselwirkungen führen zu komplexen Moden [Adh07, Pha04]. Bihl [Bih16] stellt einen geringen Einfluss von Kreiselwirkungen auf die Verzahnungseigenfrequenz von Stirnradgetrieben



fest. Weitere ausführliche Details über komplexe Moden sind in [Ewi84, Pot75] beschrieben.

### 2.2.1 Rayleigh Dämpfung

Systemdämpfungen werden in der Praxis als viskose Dämpfung modelliert, d.h. die Dämpferkraft ist abhängig von der Geschwindigkeit. Die Dämpfungsmatrix  $K$  in **Gleichung (2.1)** lässt sich mit unterschiedlichen Ansätzen abschätzen. Oft wird sie proportional zur Massen- und Steifigkeitsmatrix angenommen. Die Rayleigh-Dämpfung [Ray45] ist die bekannteste und wird auch als klassische Dämpfung bezeichnet. Mathematisch lässt sich diese Dämpfung wie folgt bestimmen:

$$\underline{\underline{K}} = \alpha \underline{\underline{M}} + \beta \underline{\underline{C}} \tag{2.9}$$

$\underline{\underline{K}}$	Dämpfungsmatrix	$\underline{\underline{M}}$	Massenmatrix
$\underline{\underline{C}}$	Steifigkeitsmatrix	$\alpha$	1/s
$\beta$	Koeffizient		Koeffizient

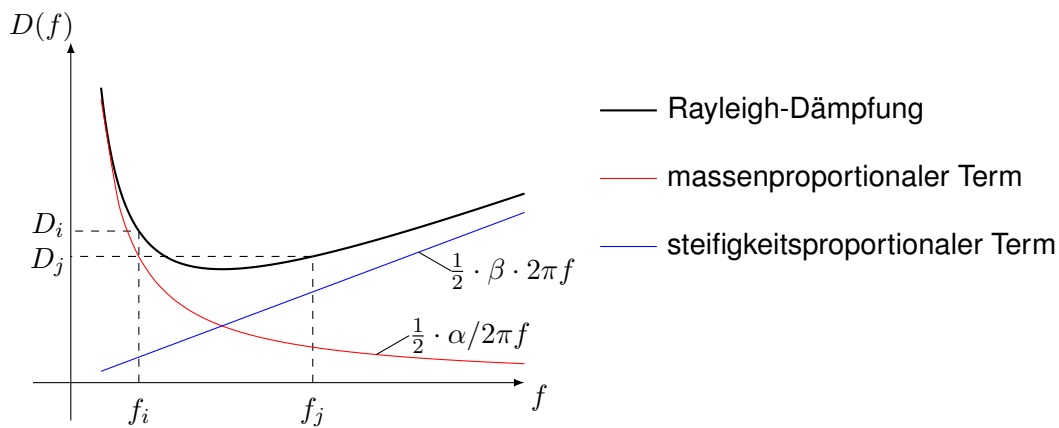
Die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  sind zwei reale skalare Werte. Sind Dämpfungen bei zwei Schwingungsmoden  $i$  und  $j$  bekannt, können diese zwei Größen wie folgt bestimmt werden:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_i} & \omega_i \\ \frac{1}{\omega_j} & \omega_j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi \cdot f_i} & 2\pi \cdot f_i \\ \frac{1}{2\pi \cdot f_j} & 2\pi \cdot f_j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_i \\ D_j \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

$\omega_{i,j}$	rad/s	Eigenkreisfrequenz bei der $i$ - bzw. $j$ -ten Schwingungsmode	$f_{i,j}$	Hz	Eigenfrequenz bei der $i$ - bzw. $j$ -ten Schwingungsmode
$D_{i,j}$	-	Lehr'sches Dämpfungsmaß bei der $i$ - bzw. $j$ -ten Schwingungsmode			

**Bild 2.3** zeigt die Bestimmung der Rayleigh-Dämpfung durch zwei bekannte Dämpfungsmaße bei zwei Anregungsfrequenzen  $f_i$  und  $f_j$ . In vielen Anwendungen ist es typisch, die beiden Dämpfungswerte gleich zu setzen ( $D_i = D_j$ ). Nach **Gleichung (2.10)** setzt sich die Rayleigh Dämpfung linear aus zwei Termen zusammen, nämlich aus dem massenproportionalen sowie aus dem steifigkeitsproportionalen Term. Der Einfluss der Massen ist durch den Koeffizienten  $\alpha$  charakterisiert. Diese Einflüsse sind im kleinen Frequenzbereich dominant. Im Gegensatz dazu prägen sich die Einflüsse der Steifigkeiten im höheren Frequenzbereich zunehmend aus. Diese sind mit dem Koeffizienten  $\beta$  beschrieben.

In zahlreichen Literaturstellen wie [Ali08, Ber94, Cha08, Hal06, Med04, Ota80] wurde die Verwendung der Rayleigh Dämpfung untersucht. Ausgehend von **Gleichung (2.9)** wird die Dämpfungsmatrix  $K$  für unterschiedliche Anwendungen angepasst. Nach Hall [Hal06] ist es üblich, eigene Koeffiziente  $\beta_i$  für Steifigkeitsmatrizen unterschiedlicher Freiheitsgrade einzusetzen. Charney [Cha08] hat die Verwendung der Tangentensteifigkeit  $\underline{\underline{C}}_t$  in **Gleichung (2.9)** vorgeschlagen. Ist die Steifigkeit außerdem zeitlich variierend, sollten die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  in jedem



**Bild 2.3:** Bestimmung der Rayleigh-Dämpfung

Zeitpunkt bestimmt werden [Cha08]. Die Verwendung der Tangentensteifigkeit gegenüber der initialen Steifigkeit wird in [Jeh14] untersucht. In manchen Anwendungen wird einer der beiden Terme in **Gleichung (2.9)** vernachlässigt. Die Anwendung der nur von den Massen abhängigen Dämpfung wird in [Cha08] gezeigt. Medina [Med04] hat das Schwingungsverhalten eines Balkens untersucht und hat festgestellt, dass die Dämpfung eher durch die Steifigkeiten ausgeprägt ist und die Einflüsse der Massen vernachlässigt werden können. Die Untersuchungen von Ryan [Rya08] sowie die experimentellen Ergebnisse von Otani [Ota80] haben das gleiche Verhalten bestätigt. Zareian [Zar06] hat das Modell von Medina [Med04] für Schwingungssysteme mit mehreren Freiheitsgraden erweitert.

Der Gültigkeitsbereich der Rayleigh Dämpfung ist jedoch sehr eingeschränkt. Hall [Hal06] hat festgestellt, dass die Dämpfung in manchen Bereichen unrealistische Werte aufweisen kann. Dies liegt sowohl am Massen- als auch am Steifigkeitsterm. Nakamura [Nak16] hat die Genauigkeit der Rayleigh Dämpfung untersucht und das Dämpfungsmodell erweitert, damit Dämpfungswerte plausibel in größeren Frequenzbereichen verwendet werden können.

### 2.2.2 Caughey Dämpfung

Die Caughey Dämpfung stellt den erweiterten Dämpfungsansatz nach Rayleigh dar. Unter Berücksichtigung der Erhaltung der normalen Moden eines Schwingungssystems unter Vorhandensein der Dämpfungen, lässt sich die Dämpfungsmatrix nach Caughey [Cau60] in Form einer Reihenentwicklung generalisieren. Diese Reihenentwicklung wird auch als Caughey Reihe bezeichnet und ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Erhaltung der normalen Moden. Die Reihe lautet:

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{M}} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i (\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{C}})^i \quad (2.11)$$

$\underline{\underline{K}}$	Dämpfungsmatrix	$\underline{\underline{M}}$	Massenmatrix
$\underline{\underline{C}}$	Steifigkeitsmatrix	$N$	Anzahl der Moden
$\alpha_i$	Dämpfungskoeffizient der $i$ -ten Mode		

Nach **Gleichung (2.11)** ist es offensichtlich, dass die Rayleigh Dämpfung in **Gleichung (2.9)** ein Sonderfall der Caughey Dämpfung ist, wenn zwei Dämpfungsmaße bekannt sind und in **Gleichung (2.11)** eingesetzt werden. Dabei werden bis zu zwei normalen Moden berücksichtigt. Analog zu **Gleichung (2.10)** lassen sich die Dämpfungskoeffizienten  $\alpha_i$  aller Moden wie folgt bestimmen [Gér97]:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 & \omega_1^3 & \dots & \omega_1^{2N-3} \\ \frac{1}{\omega_2} & \omega_2 & \omega_2^3 & \dots & \omega_2^{2N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\omega_N} & \omega_N & \omega_N^3 & \dots & \omega_N^{2N-3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_N \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Die Verwendung der Caughey Dämpfung wird in [Lan17] detailliert untersucht. In mehreren Literaturstellen wird die Identifikation der Dämpfungsmatrix ausgehend von der Caughey Dämpfung erweitert. Adhikari [Adh07] ermittelt die Dämpfung mit Hilfe der experimentellen Modalanalyse. Ursprünglich werden die klassischen normalen Moden bei der Identifikation der Dämpfung berücksichtigt. Die Ermittlung der Dämpfungswerte bei den komplexen Moden sind in [Adh01a, Adh01b, Ibr83] beschrieben. Die komplexen Moden können z.B. durch gyroskopische bzw. aerodynamische Effekte hervorgerufen werden [Adh07, Pha04].

### 2.2.3 Verzahnungsdämpfung nach Gerber

Gerber [Ger84] hat die Einflüsse von Verzahnungsdämpfungen untersucht und hat das Lehr'sche Verzahnungsdämpfungsmaß empirisch ermittelt. Er gibt folgende empirische Näherungsgleichung für das Dämpfungsmaß eines einzelnen Zahnpaars an:

$$D_{ze} = 2.2 \cdot 10^{-4} (a - 23)^{0.55} \cdot (\eta_{\delta 1} + 39)^{0.27} \cdot (v_t - 5)^{0.53} \quad (2.13)$$

$D_{ze}$	-	Lehr'sches Verzahnungsdämpfungsmaß eines einzelnen Zahnpaars	$a$	mm	Achsabstand
$\eta_{\delta 1}$	mPa·s	Dynamische Viskosität des Schmierstoffs	$v_t$	m/s	Umfangsgeschwindigkeit

**Gleichung (2.13)** gilt für Verzahnungen mit Umfangsgeschwindigkeit von 15 m/s  $< v_t < 50$  m/s, Achsabstand 50 mm  $< a < 250$  mm und Mineralöl.

Darüber hinaus kann die über alle eingreifenden Zähne gemittelte Dämpfungskonstante  $k_z$  auf Basis eines Einmassenschwingers berechnet werden als:

$$k_z = \begin{cases} \varepsilon_{\alpha, \text{Last}} \cdot k_{ze} = \varepsilon_{\alpha, \text{Last}} \cdot 2 \cdot \sqrt{c_\gamma \cdot m_{\text{red}}} \cdot D_{ze} & \text{für Geradverzahnung} \\ \varepsilon_\alpha \cdot k_{ze} & \text{für Schrägverzahnung} \end{cases} \quad (2.14)$$

$k_z$	N·s/m	Über alle eingreifenden Zähne gemittelte Dämpfungskonstante	$k_{ze}$	N·s/m	Dämpfungskonstante eines Zahnpaars
$\varepsilon_{\alpha, Last}$	-	Überdeckung unter Last	$\varepsilon_{\alpha}$	-	Profilüberdeckung
$c_{\gamma}$	N/m	Gemittelte Verzahnungssteifigkeit	$m_{red}$	kg	reduzierte Trägheitsmasse (s. [Gri10b])

Bei Geradverzahnungen wird die Vergrößerung der Profilüberdeckung durch den vorzeitigen Ein- und verspäteten Ausgriff anhand der Überdeckung unter Last  $\varepsilon_{\alpha, Last}$  berücksichtigt. Auf Basis des Scheibenmodells lässt sich die Berechnung für Schrägverzahnungen erweitern. Da die Berührlinienlänge bei Eingriffsbeginn und -ende bei Schrägverzahnungen sehr klein ist, ist die Vergrößerung der Überdeckung unter Last vernachlässigbar [Ger84].

Neben dem Dämpfungsansatz nach Gerber [Ger84] gibt es in der Literatur weitere Ansätze zur Abschätzung von Verzahnungsdämpfungen. In [Kas81, Lin98, Wan81] werden Dämpfungen von Verzahnungen sowie von Wellen unter Berücksichtigung des Stabilitätsverhaltens nach der Mathieu'schen Differentialgleichung abgeschätzt, s. auch [Kov18, Mag08]. Der Einfluss der Dämpfung auf das Stabilitätsverhalten eines allgemeinen Schwingungssystem wird in [Ins03, Ped80] untersucht. Das Stabilitätsverhalten eines einstufigen Getriebes wird in [Küç83] untersucht. Auf dieser Basis erweitert Bihr [Bih16] einen Näherungsansatz zur Identifikation von instabilen Bereichen bei mehrstufigen Getrieben. Li und Kahraman [Li11] entwickeln einen Ansatz zur Bestimmung des Lehr'schen Dämpfungsmaßes unter dem elasto-hydrodynamischen Zustand.

### 2.3 Weg- und Kraftüberhöhung in Abhängigkeit von der Drehzahl

Die Drehwegabweichung unter Last und die Kraftanregung in **Abschnitt 2.1.2** und **Abschnitt 2.1.3** stellen Kenngrößen der Verzahnungsanregung dar, die anhand der statischen Gleichungen in Abhängigkeit der Eingriffsfolge berechnet werden und bei denen die Drehzahleinflüsse auf das Anregungsverhalten des Getriebes vernachlässigbar sind. In der Praxis weist die Drehzahl einen maßgeblichen Einfluss auf das Schwingungsverhalten des Getriebes auf, insbesondere in den Resonanzbereichen und in den sich daraus ergebenden Vorresonanzbereichen. Der Drehzahleinfluss auf das Schwingungsverhalten von Getrieben wird in [Bih12, Bih14] untersucht.

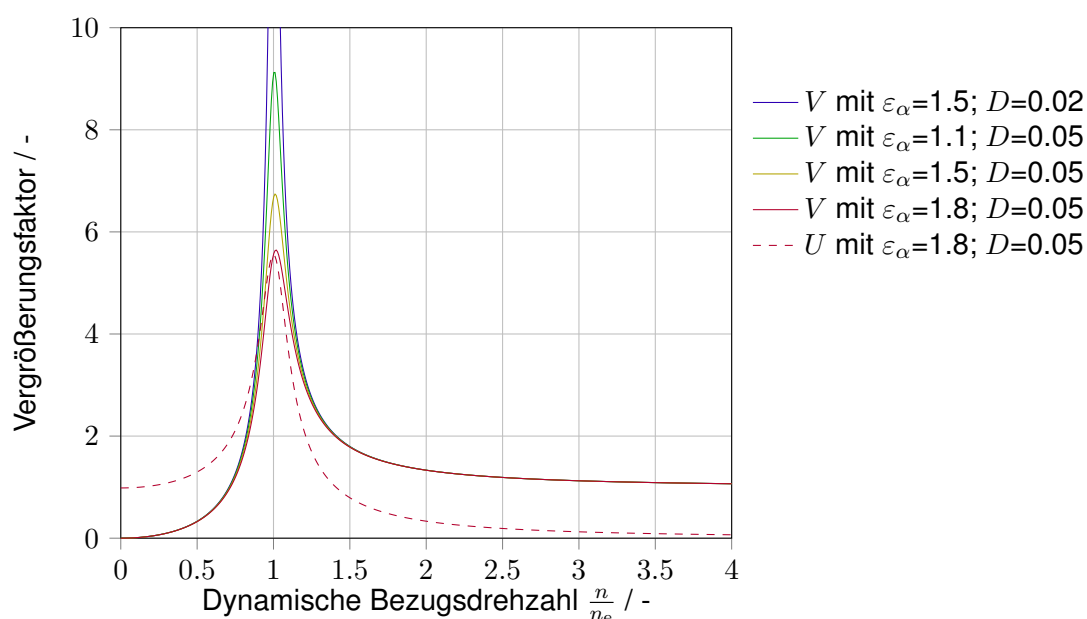
Um die Drehzahleinflüsse auf das Anregungsverhalten einer Verzahnung abzuschätzen, gibt Geiser [Gei02] Vergrößerungsfunktionen an. Die Vergrößerungsfunktionen werden auf Basis eines reduzierten Einmassenschwingers unter Berücksichtigung der Verzahnungsdämpfung nach Gerber [Ger84] ermittelt. Die Vergrößerungsfunktion  $U$  beschreibt die dynamische Wegüberhöhung  $x_d$ , wenn die quasistatische Drehwegabweichung bekannt ist. Sie lässt sich wie folgt berechnen:

$$U = \frac{1}{\sqrt{(1 - N^2)^2 + 4 \cdot (D_{ze} \cdot \varepsilon_{\alpha} \cdot N)^2}}; \quad \text{mit } N = \frac{f_z}{f_0} \quad (2.15)$$

Ist die Kraftanregung bekannt, lässt sich die dynamische Kraftüberhöhung  $F_d$  durch die Vergrößerungsfunktion  $V$  abschätzen. Diese Vergrößerungsfunktion ist definiert als:

$$V = \frac{N^2}{\sqrt{(1 - N^2)^2 + 4 \cdot (D_{ze} \cdot \varepsilon_\alpha \cdot N)^2}} \tag{2.16}$$

$U$	-	Vergrößerungsfunktion Weggröße nach Geiser [Gei02]	$V$	-	Vergrößerungsfunktion Kraftgröße nach Geiser [Gei02]
$N$	-	Bezugsdrehzahl	$D_{ze}$	-	Lehr'sche Verzahnungsdämpfungsmaß eines einzelnen Zahn-paares nach Gerber [Ger84]
$\varepsilon_\alpha$	-	Profilüberdeckung	$f_z$	Hz	Zahneingriffsfrequenz
$f_0$	Hz	Verzahnungseigenfrequenz			



**Bild 2.4:** Vergrößerungsfunktionen nach Geiser [Gei02] mit unterschiedlichen Profilüberdeckungen  $\varepsilon_\alpha$  und Lehr'schen Verzahnungsdämpfungsmaßen eines einzelnen Zahn-paares  $D_{ze}$

Um die Vergrößerungsfunktionen in **Gleichung (2.15)** bzw. **Gleichung (2.16)** zu bestimmen, muss die Verzahnungseigenfrequenz vorab bekannt sein. **Bild 2.4** zeigt beispielhaft Weg- und Kraft-Vergrößerungsfunktion einer Verzahnung nach Geiser [Gei02] mit unterschiedlichen Parametern. Die Überhöhungen im Resonanzbereich sind eindeutig erkennbar. Mit zunehmendem Dämpfungsmaß nimmt die Überhöhung jedoch ab. Mit steigender Profilüberdeckung lässt sich ebenfalls die Überhöhung verkleinern. Die Weganregung weist einen maßgeblichen Einfluss im unterkritischen Betrieb ( $n < n_e$ ) auf. Im Gegensatz dazu weist die dynamische Kraft einen gewissen Einfluss auf das Anregungsverhalten im überkritischen Betrieb auf.

Bihl [Bih16] entwickelt einen Ansatz zur Bestimmung des Übertragungsverhaltens eines Zahnradgetriebes mit mehreren Freiheitsgraden. Für jede entkoppelte modale Koordinate kann die Vergrößerungsfunktion eines Einmassenschwingers angewendet werden. An der Verzahnungs-

stufe wird die Vergrößerungsfunktion nach Geiser [Gei02] unter Berücksichtigung der Dämpfung nach Gerber [Ger84] eingesetzt. Die partikuläre Lösung an einem Freiheitsgrad im modalen Raum lässt sich anhand der Superposition der Teillösungen durch die harmonischen Anteile der Anregung ermitteln. Mit Hilfe der Rücktransformation mit der Eigenvektormatrix des Systems kann diese in physikalische Koordinaten umgerechnet werden.

Vergrößerungsfunktionen stellen grundsätzlich das Übertragungsverhalten zwischen Anregungs- und Antwortstellen dar. Bei mehreren Freiheitsgraden wird das Übertragungsverhalten als eine Matrix beschrieben. Die Analyse des Übertragungsverhaltens eines Schwingungssystems wird auch „Transferpfad-Analyse“ (engl.: Transfer Path Analysis (TPA)) genannt. Vanhollebeke et al [Van15b] untersuchen Einflüsse der Lagerparameter auf das Übertragungsverhalten eines Getriebes einer Windkraftanlage an Lagerstellen. Eine messtechnische Untersuchung des Übertragungsverhaltens eines Getriebes wird in [Roo12] durchgeführt. Der Überblick über verschiedene Verfahren zur TPA wird in [Van15a, Zel09] erläutert.

## 2.4 Kennwerte zur Beurteilung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen

Das Anregungsverhalten von Zahnradgetrieben kann in Form einer Weganregung wie der Drehwegabweichung bzw. einer krafterregten Größe wie der Kraftanregung beschrieben werden. Diese Größen sind von der Zeit bzw. der Wälzstellung abhängig. Durch die Spektralanalyse können die Komponenten der jeweiligen Frequenzen bzw. Zahneingriffsordnungen ausgewertet werden. Obwohl diese Analyse einen detaillierten Überblick über das Anregungsverhalten des Getriebes ergibt, ist die Vergleichbarkeit zwischen unterschiedlichen Verzahnungsvarianten nur umständlich handhabbar. Deshalb können die Größen in Form eines skalaren Kennwertes komprimiert werden.

### 2.4.1 Zahnkraft- und Anregungspegel

Der Zahnkraftpegel wird nach Müller [Mül91] definiert und lässt sich aus der Kraftanregung ableiten. Dieser Pegel wird in Analogie zum Körperschallschnellepegel  $L_v$  in [Mül91] formuliert und berücksichtigt die spektralen Komponenten der Kraftanregung. Mathematisch wird der Zahnkraftpegel wie folgt definiert:

$$L_{Fz} = 10 \cdot \log \left[ \frac{1}{f_0 \cdot F_0} \cdot \sum_{i_{ord}=1}^{n_{ord}} (i_{ord} \cdot f_z \cdot F_i)^2 \right] \quad (2.17)$$

$L_{Fz}$	dB	Zahnkraftpegel	$i_{ord}$	-	Zahneingriffsordnung
$f_z$	Hz	Zahneingriffsfrequenz	$F_i$	N	Amplitude der Kraftanregung der $i$ -ten Ordnung
$f_0$	Hz	Bezugseingriffsfrequenz ( $f_0 = 1$ Hz)	$F_0$	N	Bezugskraft ( $F_0 = 1$ N)
$n_{ord}$	-	maximale Zahneingriffsordnung			

Wird die Kraftanregung  $F_z$  auf die Zahnbreite  $b$  bezogen ( $F'_i = F_i/b$ ), so lässt sich **Gleich-**

ung (2.17) nach Müller [Mül91] umformulieren als:

$$L_{Fz} = 10 \cdot \log \underbrace{\left[ \sum_{i_{\text{ord}}=1}^{n_{\text{ord}}} \left( \frac{i_{\text{ord}} \cdot F'_i}{F'_0} \right)^2 \right]}_{L_A} + 10 \cdot \log \underbrace{\left( \frac{b}{b_0} \right)^2}_{L_b} + 10 \cdot \log \underbrace{\left( \frac{f_z}{f_0} \right)^2}_{L_{fz}} \quad (2.18)$$

$L_A$  erfasst den Einfluss der kinematischen Verzahnungsgrößen

$L_b$  erfasst den Einfluss der Zahnbreite

$L_{fz}$  erfasst den Einfluss der Drehzahl bzw. Zahneingriffsfrequenz

$L_A$	dB	Anregungspegel	$F'_0$	N	Bezugskraft ( $F'_0 = 1 \text{ N}$ )
$b_0$	mm	Bezugsbreite ( $b_0 = 1 \text{ mm}$ )			

## 2.4.2 Lagerkraftpegel

Bei mehrstufigen Getrieben wird die Verzahnungsanregung in Form von Körperschall an die Lagerstellen weitergeleitet. Die Lagerkraft kann daher als ein Maß zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens des Getriebes verwendet werden. Sattelberger [Sat97] hat den daraus abgeleiteten Lagerkraftpegel wie folgt definiert:

$$L_{FL} = 10 \cdot \log \left[ \frac{1}{(\omega_0 \cdot F_0)^2} \cdot \sum_{i=1}^k \left( \frac{i \cdot \omega_{L\min} \cdot F_{L,i}}{N} \right)^2 \right] \quad (2.19)$$

$L_{FL}$	dB	Lagerkraftpegel	$i$	-	Ordnung des Spektrums
$F_{L,i}$	N	Amplitude der Lagerkraft der Ordnung $i$	$f_0$	Hz	Bezugsfrequenz (= 1 Hz)
$F_0$	N	Bezugskraft (= 1 N)	$\omega_{L\min}$	rad/s	Kürzeste Grunddrehfrequenz der Lagerkraft
$N$	-	Parameter nach Sattelberger [Sat97]			

Die kleinste Grunddrehfrequenz  $\omega_{L\min}$  lässt sich aus der Berechnung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV) der einzelnen Drehfrequenzen bestimmen. Damit wird jene Periode  $T_{L\min}$  ermittelt, in der sich die Gesamtkonstellation der Zahneingriffe eines ganzen Getriebes exakt wiederholt.

$$\omega_{L\min} = \frac{2\pi}{T_{L\min}} = 2\pi \frac{n_{\text{Welle}}}{60 \cdot N_{\text{wges,min}}} \quad (2.20)$$

**Gleichung (2.20)** beinhaltet die vereinfachende Annahme, dass die Verzahnungen abweichungsfrei sind. Das heißt, auf der betrachteten Welle ergibt sich insgesamt eine Anzahl von  $N_{\text{wges,min}}$  Umdrehungen, die sich unter Berücksichtigung der periodischen Zahneingriffe der Teilsignale aus der Verzahnungsstufen ermitteln lässt.

### 2.4.3 Linearisierter Kraftpegel

Der Zahnkraftpegel nach Müller [Mül91] wird aus der Kraftanregung ermittelt. Obwohl die Einflüsse der Vorresonanzen zum Teil durch die quadratische Gewichtung der Zahneingriffsordnungen in **Gleichung (2.17)** berücksichtigt werden, liefert der Zahnkraftpegel keine Aussage über das Anregungsverhalten des Getriebes unter Drehzahleinflüssen, da die Kraftanregung aus einem quasistatischen Ansatz ermittelt wird.

In der Praxis können die Drehzahleinflüsse vereinfacht in Form einer Vergrößerungsfunktion beschrieben werden, wie z.B. die Vergrößerungsfunktionen nach Geiser [Gei02] in **Abschnitt 2.3**. Deshalb hat Geiser [Gei02] den linearisierten Kraftpegel  $L_{Flin}$  entwickelt. Der linearisierte Kraftpegel lässt sich wie folgt berechnen:

$$L_{Flin} = 10 \cdot \log \left[ \frac{1}{F_0^2} \cdot \sum_{i_{ord}=1}^{n_{ord}} (F_{i_{ord}} \cdot V_{i_{ord}})^2 \right] \quad (2.21)$$

$L_{Flin}$	dB	Linearisierter Kraftpegel	$F_0$	N	Bezugskraft ( $F_0 = 1$ N)
$F_{i_{ord}}$	N	Amplitude der Kraftanregung der $i$ -ten Zahneingriffsordnung	$V_{i_{ord}}$	-	Vergrößerungsfunktion Kraftgröße
$i_{ord}$	-	Zahneingriffsordnung	$n_{ord}$	-	maximale Zahneingriffsordnung

Die Vergrößerungsfunktion nach Geiser [Gei02] in **Gleichung (2.16)** kann hier verwendet werden. Bihl [Bih12, Bih16] hat mit dem Mehrmassenmodell eine Möglichkeit entwickelt, die dynamischen Einflüsse auf die Verzahnungskraft geeignet zu erfassen und die Vergrößerungsfunktion angewendet. Diese Funktion kann in **Gleichung (2.21)** eingesetzt werden, um eine hochwertige Aussage über die Drehzahleinflüsse auszuwerten.

### 2.4.4 Dynamischer Zahnkraftpegel

In Analogie zum Zahnkraftpegel in **Abschnitt 2.4.1** lässt sich der dynamische Zahnkraftpegel wie folgt berechnen:

$$L_{Fz,dyn} = 10 \cdot \log \left[ \frac{1}{(f_0 \cdot F_0)^2} \cdot \sum_{i_{ord}=1}^{n_{ord}} (i_{ord} \cdot f_z \cdot F_{z,dyn,i})^2 \right] \quad (2.22)$$

$L_{Fz,dyn}$	dB	Dynamischer Zahnkraftpegel	$i_{ord}$	-	Zahneingriffsordnung
$f_z$	Hz	Zahneingriffsfrequenz	$F_{z,dyn,i}$	N	Amplitude der dynamischen Zahnkraft der $i$ -ten Ordnung
$f_0$	Hz	Bezugseingriffsfrequenz ( $f_0 = 1$ Hz)	$F_0$	N	Bezugskraft ( $F_0 = 1$ N)
$n_{ord}$	-	maximale Zahneingriffsordnung			

Die Kraft, die in die Kennwertbildung eingeht, ist die dynamische Zahnkraft, z.B. aus einer Dynamiksimulation. Dadurch werden die Drehzahleinflüsse bei diesem Kennwert berücksichtigt.



Geiser [Gei02] hat den dynamischen Kraftpegel  $L_{F,\text{dyn}}$  entwickelt. Dieser Kennwert wird mathematisch wie folgt formuliert:

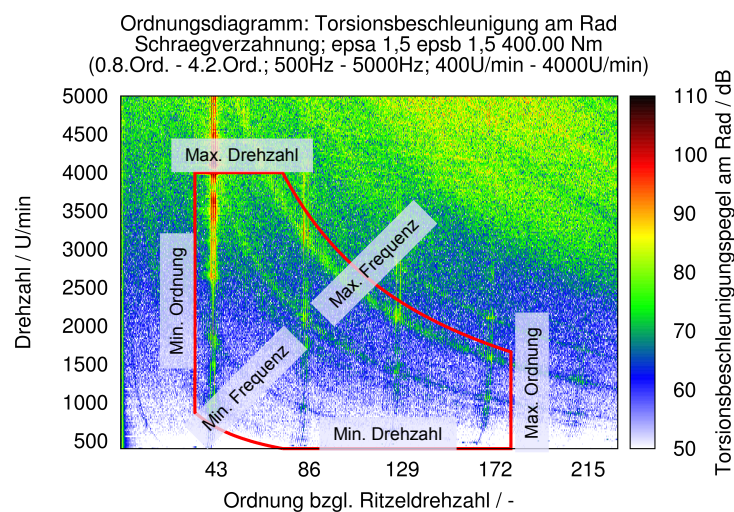
$$L_{F,\text{dyn}} = 10 \cdot \log \left[ \frac{1}{F_0^2} \cdot \sum_{i_{\text{ord}}=1}^{n_{\text{ord}}} (F_{z,\text{dyn},i})^2 \right] \quad (2.23)$$

$L_{F,\text{dyn}}$	dB	Dynamischer Kraftpegel	$F_0$	N	Bezugskraft ( $F_0 = 1 \text{ N}$ )
$F_{z,\text{dyn},i}$	N	Amplitude der dynamischen Zahnkraft der $i$ -ten Ordnung	$n_{\text{ord}}$	-	maximale Zahneingriffsordnung

Im Gegensatz zum dynamischen Zahnkraftpegel gehen die Zahneingriffsfrequenzen nicht in die Kennwertbildung ein. Das heißt, die Höherharmonischen werden nicht höher gewichtet als die Grundharmonische. Geiser hat begründet, dass die Gewichtung bereits in der dynamischen Zahnkraft enthalten ist [Gei02, Hei12].

### 2.4.5 Anwendungskraftpegel

Der Anwendungskraftpegel kann aus unterschiedlichen Datenbasen gebildet werden. Dadurch lässt sich das Anregungsverhalten von Verzahnungen in allen Entwicklungsphasen mit Hilfe des Kennwerts bewerten [Hei11b, Uta15]. Zur aussagekräftigen Beurteilung des Anregungsverhaltens einer Verzahnung ist es notwendig, einen Auswertalgorithmus zu verwenden, der einer Messauswertung ähnlich ist. Nur so ist es möglich, in der Auslegungsberechnung und in der Messung, die der Überprüfung der Auslegung dient, vergleichbare Ergebnisse zu erzielen. Aus diesem Grund wird die Datengrundlage eines Campbelldiagramms für die Bewertung des Anregungsverhaltens herangezogen. Dieses Diagramm enthält die vollständige Schwingungsinformation eines Getriebes über die Drehzahlen. **Bild 2.5** zeigt ein Campbelldiagramm aus einer Körperschallmessung. Da die Abszisse des Diagramms die Ordnung bezüglich der Ritzeldrehzahl darstellt, wird dieses Diagramm auch das Ordnungsdiagramm genannt.



**Bild 2.5:** Ordnungsdiagramm aus einer Körperschallmessung mit Begrenzungen für den Anwendungskraftpegel

Der Anwendungskraftpegel verwendet das Ordnungsdigramm als Basis für die Kennwertbildung und komprimiert die Informationen aus dem Diagramm in einem skalaren Wert. Der Kennwert beurteilt das Anregungsverhalten innerhalb eines definierten Auswertebereiches. Dieser Bereich ist von Anwendung zu Anwendung unterschiedlich und stellt eine Eingangsgröße für die Kennwertbildung dar. Der Bereich ist durch die Angabe von Frequenz, Drehzahl und Ordnung begrenzt, so dass der neue Kennwert als Kraftpegel mit besonderer Berücksichtigung des Anwendungsfalles als **Anwendungskraftpegel**  $L_{A,F}$  bezeichnet wird. Die Eingrenzungen sind in **Bild 2.5** rot eingezeichnet.

Formelmäßig lässt sich der Anwendungskraftpegel wie in **Gleichung (2.24)** beschreiben [Hei1 1b]:

$$L_{A,F} = 10 \cdot \log \left[ \frac{1}{\bar{F}_{bez}^2} \sum_{ord=ord_u}^{ord_o} \bar{F}_{ord}^2 \right] \quad (2.24)$$

$L_{A,F}$	dB	Anwendungskraftpegel	$F_{bez}$	N	Bezugskraft nach DIN EN ISO 1683 [DIN08] ( $=1 \cdot 10^{-6}$ N)
$ord$	-	Zahneingriffsordnung	$ord_{o,u}$	-	Obere bzw. untere Zahneingriffsordnung
$\bar{F}_{ord}$	N	Amplitude des gemittelten, betriebsbereichsbewerteten Ordnungsspektrums			

Die Kraftamplitude  $\bar{F}_{ord}$  wird innerhalb des rot eingezeichneten Betriebsbereichs berücksichtigt, wie in **Bild 2.5** dargestellt wird. Die gemittelte Kraftamplitude lässt sich zunächst aus der arithmetischen Mittelwertbildung der Amplituden einzelner Zahneingriffsordnungen ermitteln. Anschließend wird dieser Wert zusätzlich mit dem Verhältnis der Breite des für diese Ordnung relevanten Drehzahlbandes zur Breite des gesamten betrachteten Drehzahlbandes gewichtet.

$$\bar{F}_{ord} = \frac{\int_{n_u(ord)}^{n_o(ord)} F_{ord}(n) \cdot dn}{n_o(ord) - n_u(ord)} \cdot \frac{n_o(ord) - n_u(ord)}{n_o - n_u} = \frac{\int_{n_u(ord)}^{n_o(ord)} F_{ord}(n) \cdot dn}{n_o - n_u} \quad (2.25)$$

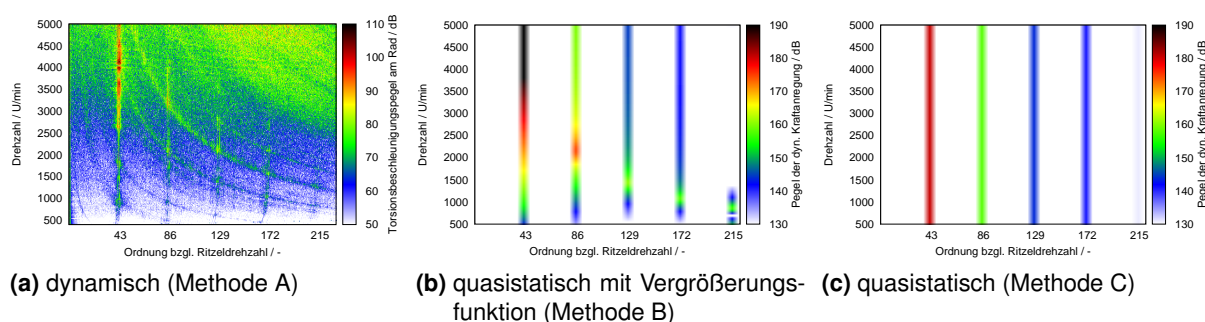
$\bar{F}_{ord}$	N	Gemittelte Amplitude für die Ordnung $ord$	$ord$	-	Betrachtete Zahneingriffsordnung
$n_o(ord)$	$\text{min}^{-1}$	Obere Grenzdrehzahl im Betriebs- und Frequenzbereich für die Ordnung $ord$	$n_u(ord)$	$\text{min}^{-1}$	Untere Grenzdrehzahl im Betriebs- und Frequenzbereich für die Ordnung $ord$
$n_o$	$\text{min}^{-1}$	Obere Grenzdrehzahl für alle Ordnungen	$n_u$	$\text{min}^{-1}$	Untere Grenzdrehzahl für alle Ordnungen
$F_{ord}(n)$	N	Amplitude der Ordnung $ord$ für die Drehzahl $n$			

Durch die Mittelwertbildung und den Bezug auf die Breiten der Drehzahlbänder in **Gleichung (2.25)** stellt die gemittelte Kraftamplitude die Signifikanz der einzelnen Ordnung im verwendeten Betriebs- und Frequenzbereich unter Berücksichtigung evtl. auftretender Überhöhungen durch Resonanzstellen dar.

Der Anwendungskraftpegel kann aus unterschiedlichen Datengrundlagen gebildet werden. Dies ist selbst in der Phase der Verzahnungsauslegung möglich, wenn versucht wird, die Datenbasis eines Campbelldiagramms zu erstellen und als Basis für die Kennwertbildung zu verwenden. Aus diesem Grund ist es erforderlich, die Herkunft der Datengrundlage für den Anwendungskraftpegel in dessen Kurzbezeichnung  $L_{A,F}$  zu kennzeichnen. In Anlehnung an die Vorgehensweise bei unterschiedlich komplexen Bildungsvorschriften von Größen in Normen wird eine Kurzbezeichnung A, B oder C angehängt.

**Tabelle 2.1:** Unterschiedliche Bildungsmöglichkeiten für den Anwendungskraftpegel  $L_{A,F}$

Method	Bezeichnung	Berechnungsumfang	Grundlage
A	$L_{A,F,A}$	Dyn. Simulation	Dyn.Zahnkraft
		Messung	Körperschall, Torsionsbeschleunigung
B	$L_{A,F,B}$	Quasistatisch mit Vergrößerungsfunktion	Drehwegabweichung
			Kraftanregung
C	$L_{A,F,B}$	Quasistatisch	Drehwegabweichung
			Kraftanregung



**Bild 2.6:** Ordnungsdigramm aus unterschiedlichen Datenbasen [Uta15]

Liegen Daten aus einer dynamischen Messung bzw. Simulation vor, so kann das Ordnungsdigramm unmittelbar aus den Daten ermittelt werden. Die Drehzahleinflüsse sind vollständig in den Daten beinhaltet. **Bild 2.6(a)** zeigt beispielhaft ein Ordnungsdigramm einer Torsionsbeschleunigungsmessung an einem Prüfstand. Der Kennwert wird mit Methode A gebildet.

Wird eine Kenngröße aus einem quasistatischen Ansatz ermittelt, enthält diese Kenngröße keine Informationen über frequenzabhängige Einflüsse auf das Schwingungsverhalten. Sind diese Einflüsse bekannt und werden sie in Form von einer Vergrößerungsfunktion beschrieben, so kann der Kennwert nach Methode B aus der berechneten Kenngröße und der Vergrößerungsfunktion ermittelt werden. In **Bild 2.6(b)** ist eine Kraftanregung mit einer Vergrößerungsfunktion nach Geiser (vgl. **Bild 2.4**) in Form eines Ordnungsdigrammes dargestellt. In diesem Bild ist

eine Verzahnungseigenfrequenz identifizierbar.

Ohne eine frequenzabhängige Vergrößerungsfunktion wird der Kennwert aus einer aus dem quasistatischen Ansatz ermittelten Kenngröße nach Methode C berechnet. In diesem Fall wird angenommen, dass die Spektren konstant sind über dem ganzen Drehzahlbereich. In **Bild 2.6(c)** ist ein Ordnungsdiagramm aus einer Krafterregung gezeigt. Hier sind keine Drehzahleinflüsse zu erkennen.

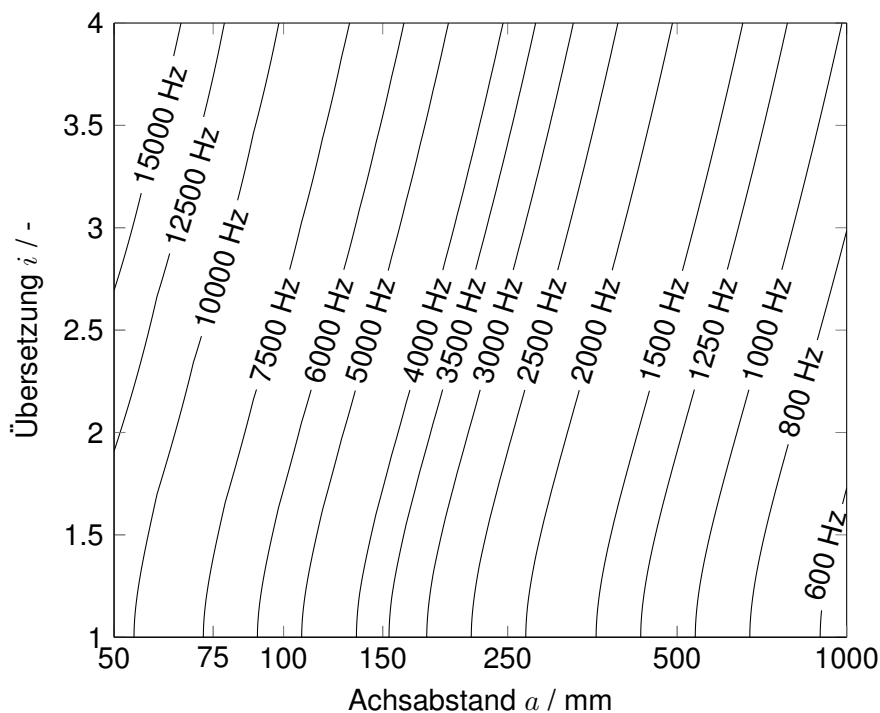
Durch die Möglichkeit, den Anwendungskraftpegel aus unterschiedlichen Daten zu ermitteln, ist die durchgängige Anwendung über den gesamten Produktentwicklungsprozess von der ersten Auslegung bis hin zur Verwendung von Daten aus Körperschall- oder Torsionsbeschleunigungsmessung sichergestellt.

## **2.5 Optimierung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen bei einstufigen Getrieben**

Bei der anregungsoptimalen Auslegung von Verzahnungen ist es notwendig, das Ziel während des gesamten Entwicklungsprozesses im Blick zu behalten, um alle Entwicklungsschritte aufeinander abstimmen zu können. Die Anregung eines Getriebes lässt sich durch zwei wesentliche Gesichtspunkte optimieren [Hei12]: Die Vermeidung von Resonanzbereichen über möglichst dem gesamten Betriebsbereich oder die Minimierung der Anregung aus der Verzahnung bei Anregungslast unter Berücksichtigung des im Betrieb vorkommenden Lastbereiches. Aus diesem Grund lässt sich die Optimierung durch geeignete Wahl der Verzahnungsgeometrien realisieren, nämlich der Makro- und Mikrogeometrie.

### **2.5.1 Optimierung des Anregungsverhaltens mit Hilfe der Makrogeometrie**

Die Makrogeometrie wird bereits in der frühen Konzeptphase ausgelegt und hat einen wesentlichen Einfluss auf die Lage der Hauptresonanzen. Durch die Auslegung des Achsabstandes und der Übersetzung wird die Massenverteilung der Räder wesentlich festgelegt. Heider [Hei12] hat einen Ansatz zur Abschätzung der Eigenfrequenz der Verzahnung hergeleitet. Somit kann ein resonanzgefährdeter Frequenzbereich identifiziert werden. Bei mehrstufigen Stirnradgetrieben ergibt sich außerdem die Beeinflussungsmöglichkeit der Eigenfrequenzen durch die Anpassung der Übersetzungsaufteilung zur Verschiebung der Eigenfrequenzen.

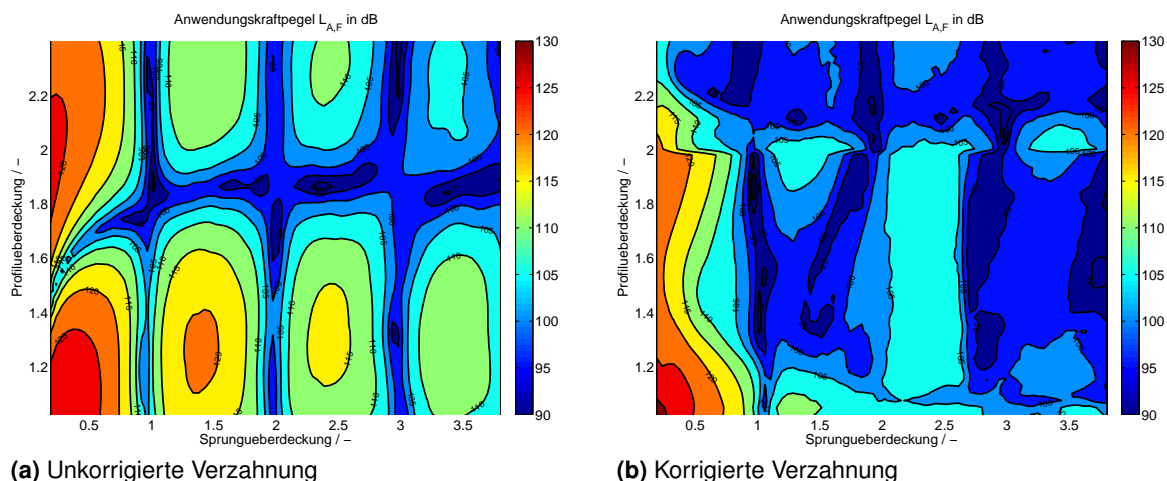


**Bild 2.7:** Näherung der Eigenfrequenzen einer Stirnradpaarung in Abhängigkeit von Achsabstand und Übersetzung. Gültig für Radkörper und Verzahnungen aus Stahl, Vollscheibenräder und Verzahnungssteifigkeit  $c_\gamma = 20 \text{ N}/(\text{mm} \cdot \mu\text{m})$  nach DIN 3990 [DIN87b] bzw. ISO 6336 [ISO06] (nach [Hei12], geändert)

Die Verzahnungshauptgeometrie wie Zähnezah, Modul, Eingriffswinkel, Schrägungswinkel usw. hat einen Einfluss auf das Anregungsverhalten der Verzahnung. Insbesondere die Zähnzah stellt die maßgebliche Größe zur Beeinflussung der Anregungsfrequenzen einer Verzahnung dar. Durch die Wahl der Zähnezah bzw. des Moduls wird der Betriebsbereich festgelegt. Im unterkritischen Bereich ( $f_z < f_E$ ) lassen sich die Resonanzgefährdung z.B. durch kleinere Zähnezahlen (größerer Modul) verringern. Dadurch wird der Abstand zur Resonanzdrehzah vergrößert.

Eine weitere wesentliche Größe bei der Auslegung der Verzahnungshauptgeometrie stellt die Überdeckung dar. Tendenziell weisen Verzahnungen mit höheren Überdeckungen ein günstiges Anregungsniveau auf. Insbesondere Schrägverzahnungen führen zu einer deutlich geringeren Anregung als Geradverzahnungen. Nachdem das Anregungsverhalten von Verzahnungen neben den Überdeckungsverhältnissen auch maßgeblich von der Verzahnungsfeingeometrie abhängig ist, müssen bei der Auslegung anregungsarmer Verzahnungen jeweils beide Einflüsse gemeinsam beachtet werden.

So ist in **Bild 2.8(a)** das Anregungsverhalten von Verzahnungen für unterschiedliche Profil- und Sprungüberdeckungen dargestellt. Für die unkorrigierte Verzahnung in **Bild 2.8(a)** sind deutliche Minima für ganzzahlige Werte der Sprungüberdeckung und Profilüberdeckungen von ca. 1.8 erkennbar. Im Bereich der geometrischen Profilüberdeckung von 1.8 liegt durch die



(a) Unkorrigierte Verzahnung

(b) Korrigierte Verzahnung

**Bild 2.8:** Anregungsverhalten von Schrägverzahnungen unterschiedlicher Überdeckungen charakterisiert durch den Anwendungskraftpegel ( $n=500 - 4500 \text{ min}^{-1}$ ,  $f = 50 \text{ Hz} - 10 \text{ kHz}$ ,  $ord = 1 - 5$ ) [Hei12]

Überdeckungsvergrößerung unter Last (vor- und nachzeitiger Zahneingriff) näherungsweise eine ganzzahlige wirksame Profilüberdeckung vor. Für die praktische Anwendung dieser Werte in der Verzahnungsauslegung ist deshalb gerade die Profilüberdeckung kaum geeignet, da die starke Lastabhängigkeit der wirksamen Werte die optimale Wahl dieser Größe erschwert. Es ist zu erkennen, dass Verzahnungen mit ganzzahliger Sprungüberdeckung stets niedrige Anregungswerte aufweisen.

### 2.5.2 Optimierung des Anregungsverhaltens mit Hilfe der Mikrogeometrie

Die Mikrogeometrie hat einen signifikanten Einfluss auf das Anregungsverhalten von Verzahnungen. Heider [Hei12] hat den Einfluss der Mikrogeometrie auf das Anregungsverhalten von Verzahnungen anhand des in **Bild 2.8(a)** dargestellten Diagramms gezeigt. Hier wurden lange Kopf- und Fussrücknahme mit dem Betrag der Zahnverformung verwendet. Die ausgeprägten Minima für spezielle Werte der Profil- oder Sprungüberdeckung sind hierin kaum mehr vorhanden. Es sind teilweise Minimalwerte bei ganzzahligen Sprungüberdeckungen erkennbar, die jedoch bei weitem nicht so ausgeprägt sind wie bei der unkorrigierten Verzahnung (**Bild 2.8(a)**). Angesichts der Tatsache, dass zur Sicherstellung der Tragfähigkeit ohnehin Verzahnungskorrekturen erforderlich sind, hat die Wahl der Überdeckung bei der anregungsgünstigen Verzahnungsauslegung einen Einfluss auf das Anregungsverhalten, das zusätzlich durch gezielte Anregungskorrekturen weiter verringert werden kann. Eine Ausnahme hierzu stellt ein Bereich der Profilüberdeckung um 2.0 dar. Hier ist die Auslegung geeigneter Profilkorrekturen sehr schwierig, da die erforderlichen Längen der Kopf- bzw. Fußrücknahmen praktisch nicht darstellbar sind. In **Bild 2.8(b)** ist deshalb im Bereich von Profilüberdeckung 2.0 in weiten Teilen eine Zunahme des Anregungsverhaltens feststellbar, die sich mit noch größeren Profilüberdeckungen wieder zum erwartungsgemäß geringen Anregungsverhalten von Hochverzahnungen entwickelt. Dies bedeutet für die praktische Anwendung, dass das Anregungsverhalten von Verzahnungen mit

Profilüberdeckungen zwischen 1.9 und 2.1 nur bedingt mit Korrekturen optimierbar ist.

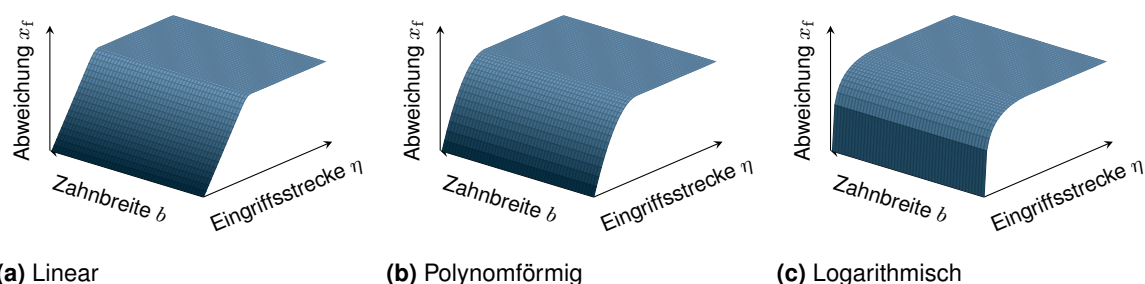
In der Praxis sind zahlreiche Korrekturarten und -typen für unterschiedliche Einsatzzwecke vorhanden. Stiller [Sti13] hat in der Praxis vorhandene Korrekturarten- und typen zusammengestellt. **Tabelle 2.2** listet gängige Standardkorrekturen und deren Formen auf.

Korrekturart	Korrekturform (jeweils)
Kopfrücknahme	Linear
Fussrücknahme	Kreisförmig
Endrücknahme – beidseitig	Polynomförmig
Endrücknahme rechts	Exponentiell
Endrücknahme links	Logarithmisch
Dreieckförmige Endrücknahme beidseitig	Abschnittsweise definiert
Dreieckförmige Endrücknahme im Kopf	
Dreieckförmige Endrücknahme im Fuss	
Flankenlinienballigkeit	Symmetrisch(polynomförmig)
Stirnprofilballigkeit	Asymmetrisch (ein Kreisbogen)
	Asymmetrisch (zwei Kreisbögen)
	Logarithmisch
Flankenlinienwinkelmodifikation	
Stirnprofilwinkelmodifikation	
Schränkung	
Periodische Flankenwelligkeit	

**Tabelle 2.2:** Heute gängige Standardkorrekturen und deren Formen [Sti13]

Grundsätzlich verfügt eine Korrekturart über verschiedene Korrekturformen. Diese unterscheiden sich im Überbergangsbereich. **Bild 2.9** zeigt beispielhaft unterschiedlicher Korrekturformen einer Kopfrücknahme.

Neben Standardkorrekturen steht eine periodische Korrektur zur Optimierung des Anregungsverhalten von Verzahnungen zur Verfügung. Diese Korrektur wurde von Radev [Rad04, Rad07] zum Ausgleich der Drehwegabweichung vorgeschlagen. Mit dieser Korrektur wird die Lastverteilung nicht beeinträchtigt. Die Optimierung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen lässt sich somit vollständig von der der Tragfähigkeit entkoppeln. Die Kompensation der ersten



**Bild 2.9:** Exemplarische Korrekturformen einer Kopfrücknahme

Zahneingriffsordnung der Drehwegabweichung wird experimentell in [Rad04] nachgewiesen. Zur Kompensation der Verzahnungsanregung höherer Harmonischer hat Kohn [Koh17] eine teilungsperiodische Korrektur entwickelt. Diese Korrektur ermöglicht die Optimierung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen ohne Einbuße der Tragfähigkeit bzw. Wirkungsgrades. Die Auswirkung der Korrektur wurde experimentell in [Koh16, Koh17] nachgewiesen.

## 2.6 Rechnerische Getriebemodelle

In der Literatur existieren zahlreiche rechnerische Getriebemodelle. Diese Modelle unterscheiden sich durch die eingesetzten Parameter bzw. Annahmen, z.B. die zugelassenen Freiheitsgrade, die Verzahnungssteifigkeiten sowie die Berücksichtigung der Getriebekomponenten.

In vielen Literaturstellen werden Getriebe als Torsionsmodelle abgebildet. Zur Untersuchung von Verzahnungsdämpfungen entwickelt Gerber [Ger84] ein Torsionsmodell für ein einstufiges Getriebe. Er ergänzt das Modell mit translatorischen Federn in der Normalrichtung des Zahneingriffs an den Lagerstellen zur Erfassung der Weiterleitung des Körperschalls. Er weist darauf hin, dass das Modell das Schwingungsverhalten von Geradverzahnungen behandelt. Aufgrund der Vernachlässigung der Axial- und Kippschwingungen ist die Berechnung mit dem Modell im Stirnschnitt für Schrägverzahnungen mit kleinen Schrägungswinkeln und kleinen Verzahnungsbreiten noch anwendbar. Das Schwingungsverhalten von Schrägverzahnungen wird messtechnisch von Hösel [Hös65] untersucht. Zur Berücksichtigung der Reibkraftumkehr um den Wälzpunkt modifiziert Gerber die Zahnpaarsteifigkeit auf Basis des Ansatzes nach Weber/Banaschek [Web55]. Das Modell nach Gerber dient als Grundlage der dynamischen Schwingungsuntersuchung im „**D**ynamischen **Z**ahnkräfte **P**rogramm“ (DZP).

Müller [Mül91] erweitert das Torsionsmodell nach Gerber [Ger84] um eine zusätzliche Längsordinate der Berührlinien mit Einzelfedern zur Bestimmung des Verformungsverhaltens eines Zahnpaars längs der über das Eingriffsfeld verlaufenden Berührlinie. Die Bestimmung der Verformung und Lastverteilung längs der Berührlinie erfolgt auf Basis der Berechnung nach Placzek [Pla88], die eine Modifizierung des Berechnungsansatzes nach Schmidt [Sch73] um die äquidistanten Stützstellen über der Zahnbreite darstellt. Dadurch ist die Berechnung des Anregungsverhaltens von Schrägverzahnungen möglich. Zur Abbildung mehrstufiger Getriebe erweitert Sattelberger [Sat97] das Modell mit Koppelsteifigkeiten zwischen den Verzahnungen und untersucht diesen Einfluss auf das Schwingungsverhalten eines Getriebes.

Im Laufe der Entwicklung von DZP wird das oben beschriebene Berechnungsmodell von weiteren Forschern wie Geiser [Gei02], Radev [Rad07], Griggel [Gri10a], Heider [Hei12] und Bihr [Bih16] erweitert. Zur Berechnung der Verzahnungssteifigkeit können Standardkorrekturen, reale Topologien sowie Teilungsabweichungen berücksichtigt werden. Zur Erfassung vor- und nachzeitiger Zahneingriffe werden Ansätze nach Baethge [Bae69] und Thoma [Tho11] verwendet. Darüber hinaus wird das Programmmodul WELLAG [Ott05] und LAGER2 [Her02, Jur15] zur genaueren Erfassung der Verformungen und der Verlagerungen der Verzahnungen durch das



Welle-Lager-System und zur Ermittlung von Lagersteifigkeiten integriert. Die Berechnung des Verformungsverhaltens des Welle-Lager-Systems beruht auf dem Übertragungsmatrizen-Verfahren. Außerdem werden Kennwerte in **Abschnitt 2.4** zur Erleichterung der Auswertung implementiert. Parallel zur Entwicklung von DZP werden experimentelle Untersuchungen zur Absicherung der Berechnungsgüte in [Gei02, Mül90, Rad07] durchgeführt. Damit ermöglicht das dynamische DZP-Torsionsmodell die Untersuchung sowohl des Verformungsverhaltens des Welle-Lager-System als auch der detaillierten Betrachtung im Zahneingriff z.B. der Lastverteilung. Auf Basis dieses Torsionsmodells erweitert Heider das Modell zur Abbildung von Planetengetrieben. Das daraus entstandene Modell wird im EDV-Programm ANPLA [Hei11a] implementiert. Grundsätzlich können Torsionsmodelle gute Aussagen über die Drehschwingung des Systems liefern und werden daher auch häufig verwendet, z.B. in [Ina14, Jai13, Lee11, Xu10].

In [Küç85] wird ein räumliches Mehrmassenmodell eines Getriebes vorgestellt. In diesem Modell sind Kipp- und Axialbewegung berücksichtigt. Zur Abbildung von Verzahnungssteifigkeiten wird die Zahnpaarsteifigkeit mit Hilfe eines Polynoms 2. Grades nach [Mol63, Zie71] angenähert. Zur Untersuchung der Amplituden- und Phasengänge und zur Bestimmung der Eigenfrequenzen eines mehrstufigen Getriebes bildet Gold [Gol79] ein räumliches Getriebemodell mit Wellen aus Balkenelementen ab. Aufgrund des eingesetzten Berechnungsverfahrens im Frequenzbereich wird die zeitliche Schwankung der Verzahnungssteifigkeit nicht berücksichtigt. An den Verzahnungsstufen werden die gemittelten Verzahnungssteifigkeit nach [Bos65, Zie71] verwendet.

Auf Basis der Modelbildung der Wellenabschnitte mit elastischen Balkenelementen entwickeln Bihl [Bih16] und Kohn [Koh12] Ansätze zur Abbildung mehrstufiger Getriebe zur Untersuchung der Schwingungsformen. Zur Bestimmung des Biegeverhaltens unter Berücksichtigung der Schubverformung werden Balkenelemente nach Timoshenko [Tim34] eingesetzt. Die Balkenelemente werden miteinander gekoppelt. Die kontinuierliche Balkenmasse wird an den Knotenpunkten der Balkenelemente unter Berücksichtigung der Einhaltung der kinetischen Energie diskretisiert. Die Verzahnungssteifigkeit wird mit Hilfe der Ansätze nach Weber/Banaschek [Web55] und Schmidt [Sch73] über zwei Lasten um den Betriebspunkt ermittelt und daraus eine Tangentensteifigkeit bestimmt. Diese Steifigkeit wird als lineare translatorische Federn in Eingriffsrichtung gerichtet und an den Grundkreisen beider Räder angekoppelt. Parallel zu den Federn werden Dämpfer auf Basis der Dämpfung nach Gerber [Ger84] eingesetzt. Darüber hinaus entwickelt Bihl [Bih16] auf Basis des entwickelten Getriebemodells ein Verfahren zur Modellreduktion. Mit Hilfe des Verfahrens werden die Anzahl der zu berechnenden Freiheitsgrade reduziert und die Rechenzeit wird effizient verkürzt.

Neubauer [Neu16a] und Weinberger [Wei14] entwickeln das Getriebemodell nach Bihl [Bih16] und Kohn [Koh16] zur Abbildung von Planetengetrieben zur Bestimmung des statisches Verformungsverhaltens weiter. Das Modell ermöglicht die Berücksichtigung komplexer Bauteilgeometrien z.B. die Lagerung einer Welle in einer anderen Welle. Zur Berücksichtigung des nicht-

linearen und gekoppelten Verformungsverhaltens von Wälzlagern wird ein iteratives Verfahren entwickelt. Die sich daraus ergebende Lagersteifigkeit (Sekantensteifigkeit) wird als Federelemente an das Getriebesystem angekoppelt. Analog zur Rechenvorschrift der quasistatischen Drehwegabweichung für eine Stirnradstufe in **Abschnitt 2.1.2** definiert Neubauer [Neu16a] die Gesamtdrehwinkeldifferenz zwischen An- und Abtrieb eines Planetengetriebes zur Beurteilung des Anregungsverhaltens. Dabei werden die Verzahnungssteifigkeiten an den Verzahnungsstufen in Abhängigkeit der Eingriffsfolgen parametrisiert. Parameteruntersuchungen der Gesamtdrehwinkeldifferenz eines Planetengetriebes sind in [Neu16a] gezeigt.

Die oben beschriebene Modellbildung wird als das linear-elastische Gesamtgetriebemodell bezeichnet und wird in RIKOR2dyn [Bih12, Bih14] zur Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenformen des Getriebes und RIKOR K [Neu16b] zur Beurteilung des statischen Verformungsverhaltens des Getriebes implementiert. Die dynamische Betrachtung in Form nach **Gleichung (2.1)** und **Abschnitt 2.1.5** ist nicht vorhanden.

Eine ausführliche Übersicht zu weiteren Modellierungen von Getriebesystemen wird in [Özg88] beschrieben. Durch die leistungsfähigen Rechner können heute aufwändige Getriebemodelle auf Basis der FE-Methode sowie der Mehrkörpersimulation erstellt werden. In [Par00b] wird das dynamische Verhalten eines Planetengetriebes eines Hubschraubers auf Basis der FE-Methode untersucht. Dabei wird der Zusammenhang zwischen der Last und der Verformung elastischer Zähne durch die gekoppelte Rechnung zwischen der FE-Methode und dem Ansatz des Oberflächenintegrals (engl: Surface Integral) nach Vijayakar [Vij91] ermittelt. Das gleiche Modellierungsprinzip durch den gleichen Autor wird in [Par00a] für eine Stirnradstufe angewendet. Die Zeitschrittintegration dieser Methode ist zeitintensiv und kann Tage dauern, s. auch [Bih16].

Für die Modellierung auf Basis der Mehrkörpersimulation gibt es unterschiedliche Detaillierungsgrade der Abbildung von Verzahnungssteifigkeiten. Zur vereinfachten Betrachtung kann die Verzahnungssteifigkeit in dem kommerziellen Mehrkörpersimulationsprogramm SIMPACK [SIM15] nach DIN 3990 [DIN87b] bestimmt werden. Eine weitere Möglichkeit ist die Einbindung der Verzahnungssteifigkeit in Form von Kennfeldern aus einem externen Programm. Dies wird in [And15] beschrieben. Darüber hinaus ist es bei der Mehrkörpersimulation möglich, die Radkörper als flexible Körper mittels der FE-Methode zu modellieren und einzubinden. Dabei ist der Modellierungsaufwand relativ hoch. Bei der Einbindung müssen die Freiheitsgrade des Modells nach bestimmten Kriterien reduziert werden. Die Wiederverwendbarkeit des Modells bei geänderten Verzahnungsgeometrien ist gering.

## 2.7 Schwingungsverhalten mehrstufiger Getriebe

Sattelberger [Sat97] untersucht das Schwingungsverhalten eines zweistufigen Getriebes. Die Untersuchungen umfassen Berechnungen anhand eines Torsionsschwingermodells sowie umfangreiche Messungen. Dabei definiert er eine bezogene Kopplungssteifigkeit  $c_k^*$  als ein Maß zur

Abschätzung der gegenseitigen Beeinflussung zwischen den Stufen. Bei kleiner Kopplungssteifigkeit ist die gegenseitige Beeinflussung vernachlässigbar. Außerdem werden weitere makro- und mikrogeometrie-relevanten Einflüsse untersucht. Er stellt fest, dass die Lagerkraft eine Auswertegröße zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe ist und als Grundlage zur Kennwertbildung des Lagerkraftpegels verwendet werden kann

Choy et al [Cho90, Cho91a, Cho91b] untersuchen das Schwingungsverhalten eines dreistufigen Getriebes anhand eines Mehrmassenmodells. Die zeitveränderliche Verzahnungssteifigkeit einer Stufe wird anhand von trigonometrischen Termen um eine ermittelte Verzahnungssteifigkeit ausgedrückt. Parameter wie Mikrogeometrien werden nicht berücksichtigt. Kubur et al [Kub04] stellen ein Modell zur Untersuchung des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe auf Basis der FE-Methode vor. Das Modell stellt die Erweiterung des Modells in [Kah90] dar. Die Lösung des Ansatzes erfolgt im Frequenzbereich. Hierbei werden Nicht-Linearitäten vernachlässigt, wie die Anzahl der sich im Eingriff befindenden Zahnpaare und die sich daraus ergebenden Verzahnungssteifigkeiten. Das Modell beschränkt sich nach [Kub04] nur auf Schrägverzahnungen mit großen Überdeckungen, deren Verzahnungssteifigkeitsschwankungen klein sind.

Zhou et al [Zho11] untersuchen das Schwingungsverhalten eines zweistufigen Getriebes anhand einer Mehrkörpersimulation. Die Räder werden anhand konstanter Steifigkeiten gekoppelt. Sie stellen Modulationen der beiden Stufen fest. Dabei tauchen Amplituden an den Ordnungen auf, die mathematisch in Form von einem linearen Zusammenhang zwischen den Zahn-eingriffsordnungen beider Stufen beschrieben werden können. Sepp [Sep17] untersucht das Schwingungsverhalten eines zweistufigen Getriebes auf Basis der Torsionsschwingung und der Zahnkontaktanalyse und stellt auch Modulationen fest. Bei der Körperschallmessung des vorgerechneten Getriebes kann dieser Effekt aufgrund der geringen Amplituden nicht nachgewiesen werden. Brecher et al [Bre17] untersuchen numerisch Einflüsse der Wellengeometrien und der Zähnezahl eines zweistufigen Getriebes anhand einer Mehrkörpersimulation. Zur Abbildung von Verzahnungsanregungen werden diese aus einer externen FE-basierten Rechnung mit dem EDV-Programm STIRAK [Pro03] in Form von Kennfeldern durchgeführt. Das Modell ist ausschließlich auf Torsionsschwingung fokussiert.

Messtechnische Untersuchungen führt Gu [Gu16] an einem zweistufigen schrägverzahnten Prüfgetriebe durch. Mittels eines Beschleunigungssignals an der Gehäuseoberfläche werden Methoden im Zeitbereich und im Frequenzbereich zur Schadenserkenkung von Verzahnungen überprüft.

## 2.8 Fazit

In der Literatur sind umfangreiche Untersuchungen des Schwingungsverhaltens von einstufigen Stirnradgetrieben dokumentiert. Rechnerisch sind unterschiedliche Berechnungsansätze für verschiedene Anwendungszwecke vorhanden. Die Genauigkeit dieser Ansätze wird mit Messergebnissen an realen Getrieben abgesichert. Außerdem gibt es messtechnisch zahlrei-

che Auswerteverfahren, um eine Aussage über das Schwingungsverhalten eines Getriebes zu erfassen oder die Auswertung zu erleichtern. So werden Kennwerte, z.B. der Anwendungskraftpegel, definiert, mit denen Schwingungsamplituden in einem bestimmten Auswertebereich beurteilt werden können, der meist über einem weiten Drehzahl-, Ordnungs- und Frequenzgrenzen liegt. Die Eingangsgröße für diese Kennwerte stellt das Spektrum einer Schwingungsgröße in einer Schwingungsebene dar. So wird in der Praxis bei einstufigen Getrieben angestrebt, die Messrichtung einer Schwingungsgröße in der Eingriffsrichtung einzurichten.

Die Untersuchung des Schwingungsverhaltens von mehrstufigen Getrieben wird in der Literatur selten behandelt. Das Schwingungsverhalten von Stirnradgetrieben wird maßgeblich von den Verzahnungsanregungen beeinflusst. Bei mehrstufigen Getrieben ergibt sich das Schwingungsverhalten aus der Überlagerung der Anregungen aller Verzahnungsstufen. Diese Anregungen unterscheiden sich durch die an den jeweiligen Stufen vorliegenden Lasten sowie die Anregungsfrequenzen. Beide Größen sind durch die Übersetzung der jeweiligen Verzahnungsstufe bestimmt. Außerdem weisen die Stufen unterschiedliche Eingriffsrichtungen auf, sodass die Kräfte unterschiedlich auf die Wellen wirken.

Zur rechnerischen Untersuchung des Schwingungsverhaltens eines mehrstufigen Getriebes ist es deshalb erforderlich, die Kreuzeinflüsse zwischen den Verzahnungen und die Verformungen des Welle-Lager-Systems in allen räumlichen Freiheitsgraden zu erfassen. Bei zahlreichen kommerziellen Mehrkörpersimulationssystemen können räumliche Verformungen und Verlagerungen des Welle-Lager-Systems ermittelt werden. Die Verzahnungssteifigkeiten werden jedoch unter vereinfachten Annahmen eingesetzt. Viele wichtige Parameter, z.B. die Flankentopologie, werden hierbei vernachlässigt oder als Kennfelder behandelt. Analog dazu werden einige Verfahren durch die Modellbildung eingeschränkt. So werden die zeitveränderlichen Parameter bei der Modalanalyse linearisiert. Die genaue Untersuchung an den Zahnflanken, z.B. die Lastverteilung entlang der Eingriffsstrecke, ist nicht möglich. Bei der FE-basierten Rechnung können die Zahnflanken genau abgebildet werden. Die Abbildung von Verzahnungen und des Getriebesystems sind aufwändig und das Modell erfordert meist sehr lange Rechenzeit, was für viele Anwendungszwecke nachteilig ist.

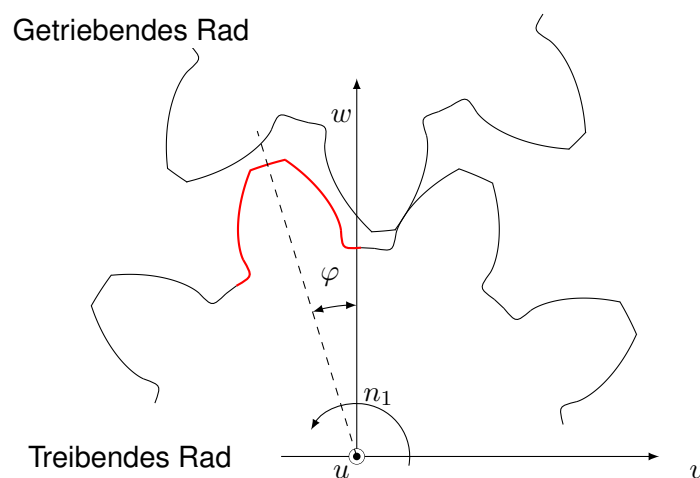
Aus diesem Grund ist es für die rechnerische Untersuchung des Schwingungsverhaltens eines mehrstufigen Getriebes sinnvoll, einen spezifischen Ansatz zu entwickeln bzw. auf Basis der vorhanden bewährten Berechnungen bei einstufigen Getrieben zu erweitern. Dieser Ansatz soll neben der Erfassung der räumlichen Verformungen und Verlagerungen des Getriebesystems eine detaillierte Aussage über die Zahnkontakte liefern und zeiteffizient sein.

Ein wesentliches Merkmal des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe stellt die zeitliche Schwankung der Schwingungsrichtung dar. Diese Getriebe verfügen daher über keine bevorzugte Auswerterichtung wie einstufige Getriebe. Auswertemethoden, die sich bereits für einstufige Getriebe bewährt haben, müssen erweitert werden, um die Auswertung der Messgrößen in räumlichen Richtungen zu ermöglichen.

### 3 Erweiterung der Berechnungsmethoden des Anregungsverhaltens mehrstufiger Getriebe

#### 3.1 Bestimmung der Eingriffsstellungen

Grundsätzlich weist die Verzahnungsanregung bei mehrstufigen Getrieben unterschiedliche Anregungsfrequenzen auf. Zwischen den Verzahnungsstufen weisen die Anregungen Phasenverschiebungen auf. Die Phasenverschiebung ergibt sich durch die konstruktive Phasenlage zwischen den jeweiligen Stufen sowie durch das elastische Verhalten der Verzahnungen [Sat97].

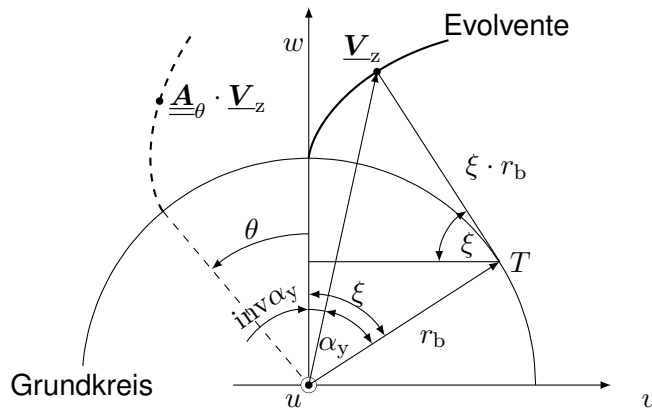


**Bild 3.1:** Definition des Drehwinkels  $\varphi$  zwischen der Zahnmitte eines Referenzzahns des treibenden Rades und der Richtung des Achsabstands (hier entlang der  $w$  Achse)

Um den Effekt der Phasenlage bei der Berechnung des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe zu erfassen, müssen die initialen Eingriffsstellungen aller Stufen bestimmt werden. Zur Sicherstellung der praktischen Anwendbarkeit auf reale Getriebe muss eine Größe definiert werden, die praxistauglich und ohne komplexen Aufwand bestimmt werden kann. Um dies zu ermöglichen, wird ein Referenzzahn des treibenden Rades jeder Stufe definiert. Mit Hilfe des Drehwinkels  $\varphi$  zwischen der Zahnmitte des Referenzzahns und dem Achsabstand, wie in **Bild 3.1** dargestellt wird, lässt sich die Eingriffsstellung der Verzahnung sowie das sich im Eingriff befindende Zahnpaar bestimmen.

In **Bild 3.2** ist eine Evolvente einer Verzahnung gezeigt. Für das eingezeichnete Koordinatensystem wird die dargestellte Flanke als Rechtsflanke bezeichnet. Durch die Verzahnung von zwei evolventischen Zahnrädern und den Achsabstand wird der Betriebseingriffswinkel  $\alpha_w$  eingestellt (vgl. **Bild A.1**). Im Anhang wird der Zusammenhang zwischen der Wälzstellung und dem Drehwinkel  $\theta$  hergeleitet. Für die Rechtsflanke gilt:

$$\xi = \alpha_w + \theta \quad (3.1)$$

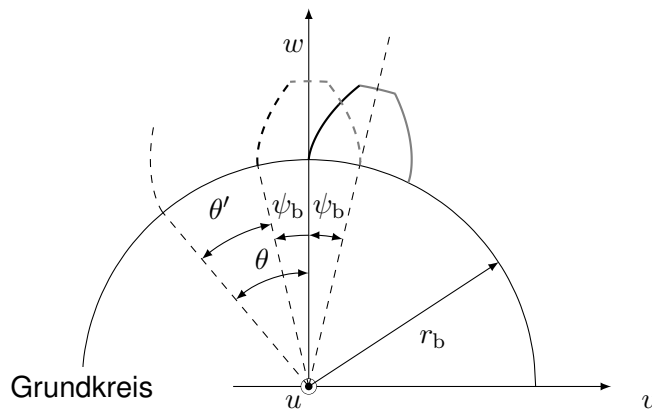


**Bild 3.2:** Bestimmung der Evolvente (Rechtsflanke dargestellt)

$\xi$	rad	Wälzwinkel	$\alpha_w$	rad	Betriebseingriffswinkel
$\theta$	rad	Drehwinkel einer Evolvente um die u-Achse			

Analogerweise gilt für die Linksflanke der Zusammenhang wie folgt:

$$\xi = \alpha_w - \theta \tag{3.2}$$



**Bild 3.3:** Verdrehung der Evolvente unter Berücksichtigung des Grunddicken-Halbwinkels  $\psi_b$

Zur einfacheren Verwendung wird der Verdrehwinkel in Bezug auf die Zahnmitte referenziert. Dabei wird das Rad in **Bild 3.3** um einen positiven Grunddicken-Halbwinkel  $\psi_b$  gedreht. Unter Berücksichtigung des Grunddicken-Halbwinkels gilt für die Rechtsflanke:

$$\xi = \alpha_w + \psi_b + \varphi \tag{3.3}$$

$\xi$	rad	Wälzwinkel	$\alpha_w$	-	Betriebseingriffswinkel
$\psi_b$	rad	Grunddicken-Halbwinkel	$\varphi$	rad	Drehwinkel bzgl. der Zahnmitte

Bei der Linksflanke wird der Grunddicken-Halbwinkel in die entgegengesetzte Richtung gedreht. Daraus folgt nach **Gleichung (3.2)**:

$$\xi = \alpha_w - (-\psi_b + \varphi) = \alpha_w + \psi_b - \varphi \tag{3.4}$$

Mit Hilfe der **Gleichung (3.3)** und **Gleichung (3.4)** kann der Wälzwinkel eines Zahnrades bei einem vorgegebenen Winkel bezüglich der Zahnmitte bestimmt werden. Der Wälzwinkel des Gegenrades lässt sich nach [DIN87a] wie folgt umrechnen:

$$\xi_2 = \frac{z_1}{z_2} \cdot (\xi_w - \xi_1) + \xi_w \quad (3.5)$$

$\xi_{1,2}$	rad	Wälzwinkel des Rades 1 bzw. 2	$\xi_w$	rad	Wälzwinkel am Wälzpunkt C (=tan $\alpha_w$ )
$z_{1,2}$	-	Zähnezahl des Rades 1 bzw. 2			

**Gleichung (3.3)** und **Gleichung (3.4)** können zusätzlich zur Bestimmung des sich im Eingriff befindenden Zahnpaars verwendet werden. Dabei werden die Drehwinkel  $\varphi_A$  und  $\varphi_E$  bei Eingriffsbeginn und -ende durch das Einsetzen von Wälzwinkel am Fussnutzkreis  $\xi_{Nf1}$  und Wälzwinkel am Kopfnutkreis  $\xi_{Na1}$  in **Gleichung (3.3)** bzw. **Gleichung (3.4)** ermittelt. Die beiden Wälzwinkel werden nach DIN 3960 [DIN87a] bestimmt. Der Referenzzahn in **Bild 3.1** ist im Eingriff, wenn der Drehwinkel  $\varphi$  innerhalb beider Winkel liegt ( $\varphi_A \leq \varphi \leq \varphi_E$ ). Ist  $\varphi > \varphi_E$ , legt dieser Zahn den Winkelabstand von  $\varphi - \varphi_E$  nach dem Eingriff zurück. Die Anzahl der Zähne  $n_z$  zwischen diesem Abstand können mittels Aufrundens des Winkelabstandes auf ein Vielfaches des Teilungswinkels wie folgt bestimmt werden.

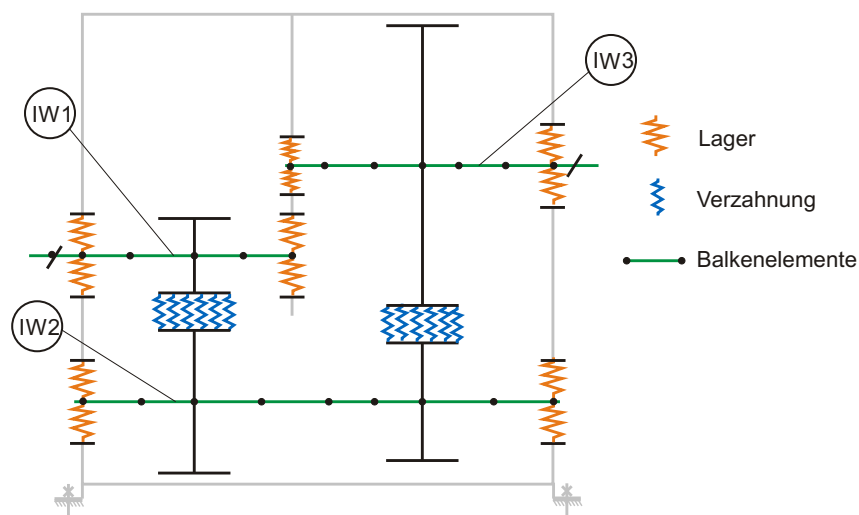
$$n_z = \left\lceil \frac{(\varphi - \varphi_E) \cdot z}{2\pi} \right\rceil \in \mathbb{N} \quad (3.6)$$

$n_z$	-	Anzahl der dazwischen liegenden Zähne	$z$	-	Zähnezahl
$\varphi$	rad	Drehwinkel des Referenzzahns bzgl. Zahnmitte	$\varphi_E$	rad	Winkelcoordinate des Eingriffsendes

### 3.2 Berechnung des Verformungsverhaltens des Welle-Lager-Systems

Die Wellenverlagerungen und -verformungen haben einen wesentlichen Einfluss auf das Anregungsverhalten von Verzahnungen und sind wichtige Eingangsgrößen für die numerische Berechnung des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe. Bisher erfolgt die Berechnung des Verformungsverhaltens des Welle-Lager-Systems in DZP [Gri10b] mit Hilfe des Berechnungsmoduls WELLAG [Ott05]. Diese Berechnung basiert auf der Grundlage des Übertragungsmatrizenverfahrens. Bei der Berechnung des Verformungsverhaltens des Welle-Lager-Systems einer Verzahnungsstufe werden die Belastungen benachbarter Verzahnungsstufen durch externe gleichmäßige Breitenlastverteilungen auf den Wellen ersetzt.

Zur Überarbeitung der Berechnung des Verformungsverhaltens des Welle-Lager-Systems wird WELLAG durch ein linear elastisches Gesamttriebmodell ersetzt. **Bild 3.4** zeigt beispielhaft die numerische Abbildung eines zweistufigen Getriebes mit diesem Modell. Pro Welle werden unterschiedliche Wellengeometrien als einzelne elastische Balkenelemente abgebildet und sind



**Bild 3.4:** Abbildung eines zweistufigen Getriebes mit Hilfe des linear elastischen Gesamttriebmodells

miteinander gekoppelt. An den Verzahnungsstufen werden die Wellen mit einer diskreten Anzahl von Kraftelementen (Federn) in Breitenrichtung gekoppelt. Diese Federn sind in Eingriffsrichtung orientiert. An den Lagerstellen werden die Wellen mit Translations- und Rotationsfedern in der jeweiligen Belastungsebene gekoppelt. Da das Verformungsverhalten von Wälzlagern sowie das Kontaktverhalten in den Zahneingriffen nicht linear ist, erfolgt hier eine Linearisierung des Betriebsverhaltens am Betriebspunkt mit Hilfe eines Iterationsverfahrens zur Bestimmung der Arbeitspunkte der Wälzlager, s. auch [Neu16a, Neu16b].

Beim linear elastischen Gesamttriebmodell erfolgt die Berechnung des Verformungsverhaltens des Welle-Lager-Systems durch die Verzahnungslasten innerhalb eines Rechengangs. Die Kreuzeinflüsse sowie das nicht lineare Verhalten der Lager werden effizient gehandhabt. Außerdem ist die Berücksichtigung der ungleichmäßigen Breitenlastverteilung von Verzahnungen möglich. Dies ist insbesondere vorteilhaft bei breiten Zahnrädern. Durch die Integration des linear elastischen Gesamttriebmodells in DZP wird die Berechnung des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe grundlegend überarbeitet.

### 3.3 Quasidynamische Auswertung

Die Bewertung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen mit Hilfe von quasistatischen Größen wie der Drehwegabweichung bzw. der Kraftanregung hat sich bereits für einstufige Getriebe bewährt, s. auch [Gri10a, Hei12, Mül91, Rad07, Ret77]. Diese Größen stellen die Randbedingungen des Drehzahleinflusses in der **Gleichung (2.1)** dar und zeichnen sich durch eine kurze Rechenzeit aus. In diesem Abschnitt wird eine Methode zur Erweiterung der Aussagegüte der quasistatischen Ansätze unter Berücksichtigung von dynamischen Einflüssen vorgestellt. Ziel der Weiterentwicklung ist eine zeiteffiziente Methode zur Bestimmung und Optimierung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen sowie des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe.



Bei mehrstufigen Getrieben wird das Schwingungsverhalten des Getriebes von allen Verzahnungsstufen beeinflusst, deren Anregungsfrequenzen aufgrund der Übersetzungen unterschiedlich sind. Grundsätzlich werden die Last und die Drehzahl durch die Übersetzung an einer Verzahnungsstufe umgewandelt. Diese beiden Größen haben einen unmittelbaren Einfluss auf das Anregungsverhalten der Verzahnung, da:

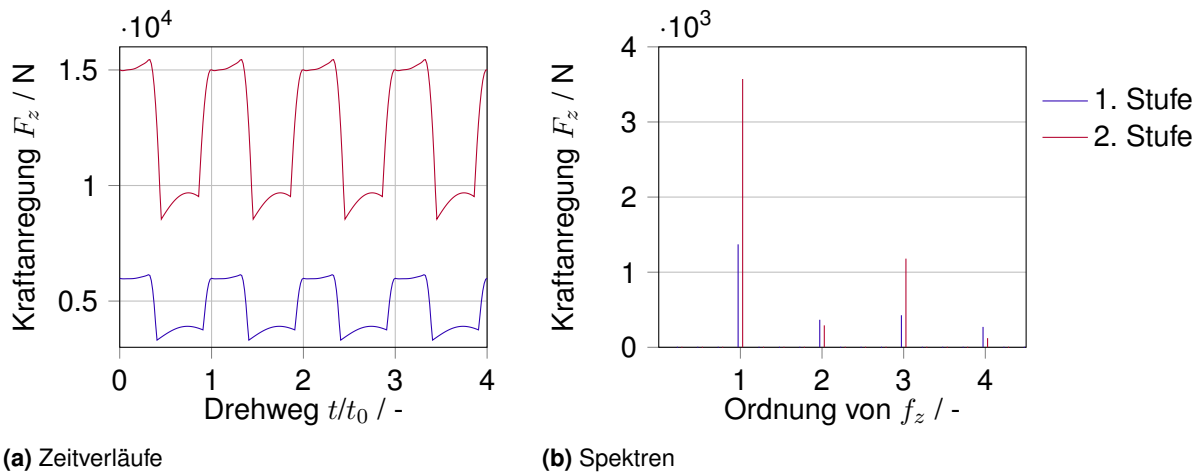
- die Last die Verformung und auch die Verzahnungssteifigkeit beeinflusst. Mit zunehmender Last steigt die Verformung an.
- die Drehzahl zusammen mit der Zähnezahl die Anregungsfrequenz bestimmt. Der Abstand zwischen der Betriebsdrehzahl und somit der Anregungsfrequenz und der Verzahnungseigenfrequenz definiert das Betriebsverhalten der Verzahnung. Die Verzahnung befindet sich im unterkritischen Betrieb, wenn die Anregungsfrequenz weit unterhalb der Verzahnungseigenfrequenz liegt.

**Tabelle 3.1:** Prinzipskizze und Daten eines zweistufigen Getriebes

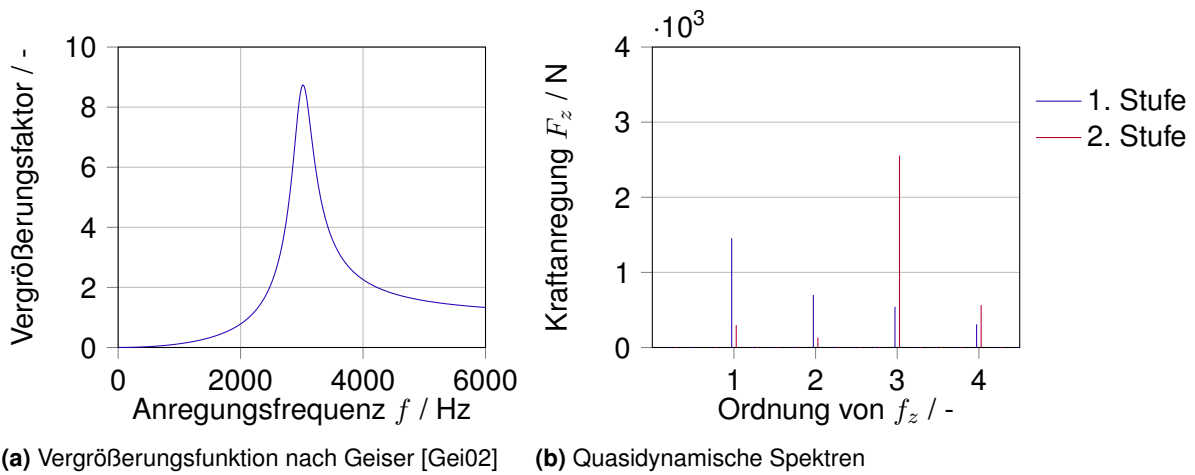
Prinzipskizze	Verzahnungsdaten	Ritzel	Rad	Einheit	
	Normalmodul	$m_n$	5	mm	
	Normaleingriffswinkel	$\alpha_n$	20	°	
	Schrägungswinkel	$\beta$	0	°	
	Zähnezahl	$z$	27	70	-
	Profilverschiebungsfaktor	$x$	0.6	0.4	-
	Kopfnutzkreisdurchmesser	$d_{Na}$	148.5	363.5	mm
	Fußnutzkreisdurchmesser	$d_F$	125	326	mm
	Zahnbreite	$b$	35		mm
	Achsabstand	$a$	247.5		mm
	Profilüberdeckung	$\varepsilon_\alpha$	1.315		-
	<b>Betriebsdaten</b>		<b>Einheit</b>		
	Antriebsdrehmoment	$T_{an}$	300		Nm
	Antriebsdrehzahl	$n_{an}$	4800		min <sup>-1</sup>
	Schmierstoff		ISO-VG-100		
	Öltemperatur	$T_{Oel}$	80		°C

Die beiden Einflüsse werden nun anhand des zweistufigen Getriebes in **Tabelle 3.1** untersucht. Beide Stufen verfügen über die gleiche Verzahnung. Die Übersetzung der jeweiligen Stufe beträgt ca. 2. Um die Einflüsse der Wellenverformungen klein zu halten, werden kurze Wellen mit starren Lagerungen angenommen.

**Bild 3.5** zeigt die Kraftanregungen beider Stufen. Die erste Zahneingriffsordnung hat die höchste Anregung an beiden Stufen. Die Amplituden der Kraftanregung der zweiten Stufe sind deutlich höher als die der ersten Stufe. Diese geht auf die vorliegende Last zurück, da die Last an der zweiten Stufe durch die Übersetzung höher ist als die der ersten Stufe. Die quasistatische Berechnung weist darauf hin, dass die Anregung der zweiten Stufe dominant ist, wenn beide Stufen sich im überkritischen Betrieb befinden.



**Bild 3.5:** Kraftanregungen  $F_z$  beider Stufen bei sehr hoher Drehzahl



**Bild 3.6:** Quasidynamische Auswertung der Kraftanregungen bei Antriebsdrehzahl  $n_1 = 4000 \text{ min}^{-1}$

In der Praxis wird das Getriebe in einem bestimmten Drehzahlbereich betrieben. Um den Drehzahleinfluss zu berücksichtigen, kann eine Vergrößerungsfunktion verwendet werden. Die analytische Kraft-Vergrößerungsfunktion nach Geiser [Gei02] in **Abschnitt 2.3** zeichnet sich durch die kurze Rechenzeit aus und wird für die Auswertung verwendet. Die Verzahnungsdämpfung wird mit Hilfe der **Gleichung (2.13)** nach Gerber [Ger84] ermittelt.

Die Verzahnungseigenfrequenz der jeweiligen Stufen lässt sich zunächst anhand des Heider'schen Diagramms in **Bild 2.7** abschätzen und beträgt ca. 3000 Hz. Daraus wird eine Vergrößerungsfunktion nach Geiser [Gei02] ermittelt und wird in **Bild 3.6(a)** abgebildet. Unter Berücksichtigung der Vergrößerungsfunktion lässt sich das quasidynamische Kraftspektrum wie folgt ermitteln:

$$F_{z,\text{qdyn}}(i) = V(f) \cdot F_z(i) \quad \text{mit } i = \frac{f}{f_z} \tag{3.7}$$

$F_{z,\text{qdyn}}(i)$	N	Quasidynamisches Kraftspektrum	$F_z(i)$	N	Spektrum der Kraftanregung aus dem quasistatischen Ansatz
$V(\omega)$	-	Kraft-Vergrößerungsfunktion	$i$	-	Zahneingriffsordnung
$f$	Hz	Anregungsfrequenz	$f_z$	Hz	Zahneingriffsfrequenz

Die Ergebnisse des quasidynamischen Kraftspektrums bei der Antriebsdrehzahl von  $4800 \text{ min}^{-1}$  sind in **Bild 3.6(b)** gezeigt. Im Vergleich zu den Spektren in **Bild 3.5(b)** nehmen die Amplituden der zweiten Stufe drastisch ab. Die Amplitude der 3. Zahneingriffsordnung der 2. Stufe ist die höchste. Dies beruht auf der Übersetzung ins Langsame. Dadurch befindet sich die zweite Stufe im unterkritischen Betrieb. Die quasistatische Auswertung in **Bild 3.5(b)** weist darauf hin, dass die 3. Zahneingriffsordnung eine signifikante Amplitude aufweist. Unter Berücksichtigung der Betriebsdrehzahl, die weit unter der Resonanz liegt, ist diese Anregung unübersehbar und sollte bei der Korrekturauslegung mit berücksichtigt werden.

Weiterhin weist die quasidynamische Auswertung in **Bild 3.6(b)** darauf hin, dass die Anregung der ersten Stufe im Allgemeinen bei der Betriebsdrehzahl höher ist als die der zweiten Stufe. Zur Optimierung des Geräuschverhaltens des Getriebes bei dieser Betriebsdrehzahl kann die Korrekturauslegung an der ersten Stufe eine große Wirkung haben.

### 3.4 Bestimmung des Übertragungsverhaltens eines linearen Gesamtgetriebe-modells

Mit Hilfe der quasidynamischen Auswertung in **Abschnitt 3.3** kann das Schwingungsverhalten eines Getriebes mit Hilfe eines quasistatischen Ansatzes unter zusätzlicher Berücksichtigung der dynamischen Einflüsse im Betriebsbereich in Form von einer Übertragungsfunktion ausgewertet werden. Diese Methode zeichnet sich daher durch eine sehr kurze Rechenzeit aus. Aus dem resultierenden Spektrum kann ein skalarer Kennwert wie der Anwendungskraftpegel nach Methode B [Gri07, Gri10c, Uta15] gebildet werden, dieser kann z.B. bei der Optimierung von Korrekturparametern von Verzahnungen mehrstufiger Getriebe wie in DZPopt [Gri10b] verwendet werden.

Die Aussagekräftigkeit der quasidynamischen Auswertung wird wesentlich von der Güte der Übertragungsfunktion beeinflusst. Werden mehrere Resonanzstellen und Freiheitsgrade in der Übertragungsfunktion erfasst, kann eine genaue Aussage über das Schwingungsverhalten des Getriebes getroffen werden. Die Übertragungsfunktion ist ortsabhängig, s. auch [Døs88a, Døs88b]. Deshalb ist es für die Auswertung des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe wichtig, geeignete Ankopplungspunkte zu wählen. Die Übertragungsfunktion soll zum Beispiel von den Verzahnungen zu den Lagerstellen ermittelt werden, da die überlagerten Anregungen der Verzahnungen dort an das Gehäuse weitergeleitet werden. Auf Grundlage der Modellbildung eines mehrstufigen Getriebes mit Hilfe des linear elastischen Getriebemodells lässt sich eine hochwertige Übertragungsfunktion zu einem bestimmten Ort wie zu einem bestimmten Wellenabsatz, Radkörper usw. herleiten. Auf dieser Basis ist die Analyse des Übertragungsverhaltens

eines bestimmten räumlichen Freiheitsgrades möglich. In diesem Abschnitt wird eine Methode zur Bestimmung einer Vergrößerungsfunktion aus dem Gleichungssystem des linear elastischen Gesamttriebemodells gezeigt.

Grundsätzlich lässt sich das Gleichungssystem eines mehrstufigen Getriebes auf Basis des linear elastischen Gesamttriebemodells aus **Gleichung (2.1)** wie folgt formulieren:

$$\underline{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{\underline{K}}(t) \cdot \dot{\underline{x}}(t) + \underline{\underline{C}}(t) \cdot \underline{x}(t) = \underline{\underline{F}}(t) \quad (\text{s. 2.1})$$

Der Aufbau der einzelnen Matrizen wird im nächsten Abschnitt beschrieben. Um die Analyse im Frequenzbereich zu ermöglichen, werden zunächst die zeitabhängigen Anteile in der Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix approximiert. Grundsätzlich wird die Zeitvarianz der Matrizen durch viele Parameter beeinflusst, z.B. die Lagerungen oder die Verzahnungen. In der Literatur gibt es unterschiedliche Approximationsverfahren, deren Anwendung für bestimmte Ziele geeignet sind. Die Approximationsverfahren werden in [Bih16] beschrieben. Die Steifigkeit eines Lagers lässt sich um den Betriebspunkt linearisieren, während die Eingriffssteifigkeit einer Verzahnung gemittelt werden kann. Nach Approximation ergeben sich die Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen  $\underline{\underline{C}}_{\text{äqu}}$  und  $\underline{\underline{K}}_{\text{äqu}}$ . Das Gleichungssystem lässt sich wie folgt formulieren:

$$\underline{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{\underline{K}}_{\text{äqu}} \cdot \dot{\underline{x}}(t) + \underline{\underline{C}}_{\text{äqu}} \cdot \underline{x}(t) = \underline{\underline{F}}(t) \quad (3.8)$$

Mit Hilfe der Laplace-Transformation gilt:

$$\left[ \underline{\underline{M}}s^2 + \underline{\underline{K}}_{\text{äqu}}s + \underline{\underline{C}}_{\text{äqu}} \right] \cdot \underline{\underline{X}}(s) = \underline{\underline{F}}(s) \quad (3.9)$$

Es gilt:

$$s = j\omega \quad (3.10)$$

Daraus folgt:

$$\underbrace{\left[ -\underline{\underline{M}}\omega^2 + \underline{\underline{K}}_{\text{äqu}}j\omega + \underline{\underline{C}}_{\text{äqu}} \right]}_{\underline{\underline{A}}(j\omega)} \cdot \underline{\underline{X}}(j\omega) = \underline{\underline{F}}(j\omega) \quad (3.11)$$

Ist der Kraftvektor  $\underline{\underline{F}}(j\omega)$  bekannt, kann der Ortsvektor  $\underline{\underline{X}}(j\omega)$  im Frequenzbereich bei invertierbarer Matrix  $\underline{\underline{A}}$  bestimmt werden als:

$$\underline{\underline{X}}(j\omega) = \underline{\underline{A}}^{-1}(j\omega) \cdot \underline{\underline{F}}(j\omega) \quad (3.12)$$

Nach Laplace-Transformation gilt:

$$\mathcal{L}\{\dot{\underline{x}}\} = s\underline{\underline{X}}(s) - \underline{x}(0) = j\omega\underline{\underline{X}}(j\omega) \quad \text{mit } \underline{x}(0) = \underline{0} \quad (3.13)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{\underline{x}}\} = s^2\underline{\underline{X}}(s) - s\underline{\underline{X}}(0) - \dot{\underline{x}}(0) = -\omega^2\underline{\underline{X}}(j\omega) \quad \text{mit } \dot{\underline{x}}(0) = \underline{0} \quad (3.14)$$

Mit Hilfe der **Gleichung (3.13)** und **Gleichung (3.14)** können der Geschwindigkeits- und der Beschleunigungsvektor auf Basis der **Gleichung (3.12)** ermittelt werden.

Im Allgemeinen stellt eine Übertragungsfunktion das Verhältnis zwischen der Ein- und Ausgangsgröße im Frequenzbereich dar [Thü08]. Wird das Gleichungssystem mit einem Einheitskraftvektor beaufschlagt, so lässt sich der Ortsvektor anhand der **Gleichung (3.12)** bestimmen. Beim Einheitskraftvektor handelt es sich um einen Kraftvektor mit dem Eintrag von 1 Anregungseinheit an der Anregungsstelle  $i$ . Die Anregungseinheit beschreibt die Form der Anregung, grundsätzlich N bzw. Nm. Sollte Weganregung untersucht werden, kann diese als mm definiert werden. Dies wird später diskutiert. Wird **Gleichung (3.12)** gelöst, stellt der Eintrag des Ortsvektors an der Stelle  $j$  daher das Übertragungsverhalten zwischen dem Punkt  $i$  und  $j$  dar. Somit lässt sich die Übertragungsfunktion zwischen einem beliebigen Anregungspunkt und einem beliebigen Antwortpunkt ableiten.

Um die Anregung an einer Verzahnungsstufe zu untersuchen, muss zunächst die Verzahnung mit einer Last beaufschlagt werden. Beim linear elastischen Gesamttriebmodell werden Kreuzeinflüsse zwischen unterschiedlichen Freiheitsgraden erfasst, s. auch [Koh12, Neu16a], deshalb kann die Last als Torsionsmoment am treibenden Rad angebracht werden. Dieses Moment ergibt sich durch die Zahnkraft. In der Praxis wird die Last bis zur Momentenausleitungsstelle weitergeleitet. Deshalb muss eine Gegenlast an dieser Stelle angebracht werden. Der Kraftvektor in **Gleichung (3.11)** kann wie folgt formuliert werden.

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ \{M_z\}_j \\ \underline{\mathbf{0}} \\ \{i_{st} \cdot M_z\}_k \\ \underline{\mathbf{0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ \{F_z \cdot r_b\}_j \\ \underline{\mathbf{0}} \\ \{i_{st} \cdot F_z \cdot r_b\}_k \\ \underline{\mathbf{0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ \{1 \cdot r_b\}_j \\ \underline{\mathbf{0}} \\ \{i_{st} \cdot 1 \cdot r_b\}_k \\ \underline{\mathbf{0}} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$\underline{\mathbf{F}}$		Kraftvektor	$F_z$	N	Verzahnungskraft
$M_z$	Nmm	Torsionsmoment am treibenden Rad durch die Verzahnungskraft	$r_b$	mm	Grundkreisdurchmesser des treibenden Rades
$j$	-	Rotatorischer Freiheitsgrad um die Längsachse des treibenden Rades	$k$	-	Rotatorischer Freiheitsgrad um die Längsachse an der Momentenausleitungsstelle
$i_{st}$	-	Übersetzung bis zur Momentenausleitungsstelle			

Analog zur Anregung aus einer Kraftgröße in **Gleichung (3.15)** kann der Kraftvektor aus einer

Weganregung an einer Verzahnungsstufe wie folgt formuliert werden:

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ \{c_\gamma \cdot x_z \cdot r_b\}_j \\ \underline{\mathbf{0}} \\ \{i_{st} \cdot c_\gamma \cdot x_z \cdot r_b\}_k \\ \underline{\mathbf{0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ \{c_\gamma \cdot 1 \cdot r_b\}_j \\ \underline{\mathbf{0}} \\ \{i_{st} \cdot c_\gamma \cdot 1 \cdot r_b\}_k \\ \underline{\mathbf{0}} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

---

$x_z$	mm	Weganregung an der Verzahnung	$c_\gamma$	N/mm	Gemittelte Eingriffssteifigkeit
-------	----	-------------------------------	------------	------	---------------------------------

---

Mit Hilfe der **Gleichung (3.15)** und **Gleichung (3.16)** lässt sich das Übertragungsverhalten durch die Verzahnungssanregung an einem bestimmten Ort in **Gleichung (3.12)** ermitteln.

Auf Basis des Übertragungsverhaltens in **Gleichung (3.12)** können weitere Größen zur Auswertung des Übertragungsverhaltens an der Verzahnung abgeleitet werden.

Die Drehwegabweichung einer Verzahnung lässt sich durch die Abweichung zwischen den Verdrehwinkeln der Radkörper wie folgt berechnen [Fro16, Uta16]:

$$x = x_{\varphi_1} \frac{d_{b1}}{2} + x_{\varphi_2} \frac{d_{b2}}{2} \quad (3.17)$$

---

$x$	mm	Drehwegabweichung	$x_\varphi$	rad	Verdrehwinkel um die Längsachse
$d_b$	mm	Grundkreisdurchmesser	$\{ \}_{1,2}$	-	Index für treibendes bzw. getriebenes Rad

---

Das Übertragungsverhalten lässt sich mit Hilfe der Laplace-Transformation berechnen. Unter Berücksichtigung des Ortsvektors der **Gleichung (3.12)** gilt:

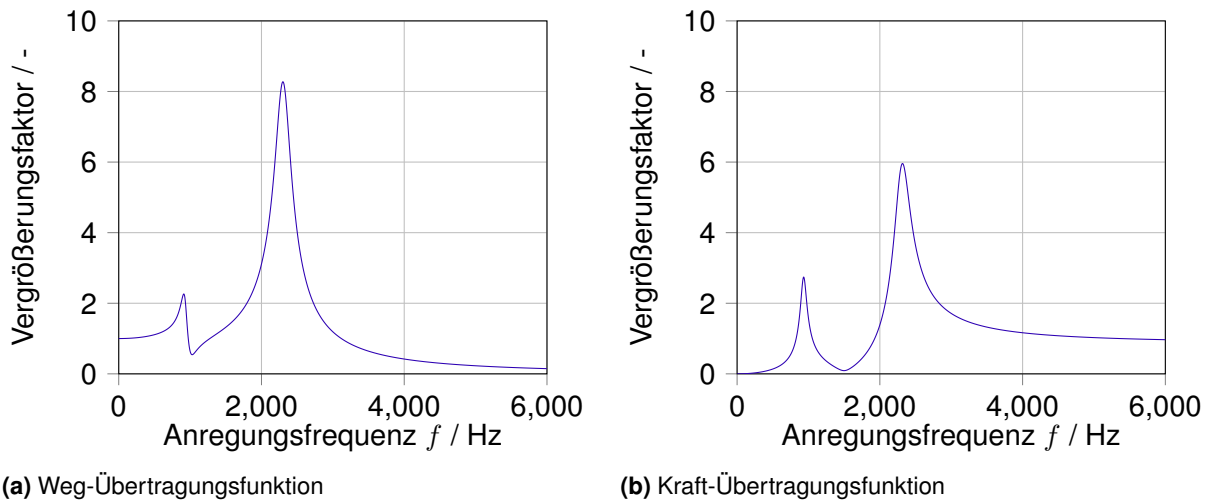
$$\mathcal{L}x = \frac{d_{b1}}{2} X_j + \frac{d_{b2}}{2} X_k \quad (3.18)$$

---

$j$	Rotatorischer Freiheitsgrad um die Längsachse des treibenden Rades	$k$	Rotatorischer Freiheitsgrades um die Längsachse des getriebenen Rades
-----	--	-----	---

---

Das Übertragungsverhalten nach **Gleichung (3.18)** der ersten Verzahnung des Getriebes aus **Tabelle 3.1** ist beispielhaft in **Bild 3.7(a)** dargestellt. Zur Vereinfachung wird das Torsionsmodell aus DZP [Uta19] verwendet. Im Bild sind 2 Überhöhungen erkennbar. In Erweiterung zur Vergrößerungsfunktion nach Geiser [Gei02] (vgl. **Bild 2.4**) lassen sich die Überhöhungsstellen durch die Berechnung der **Gleichung (3.12)** ermitteln. Die erste Überhöhung befindet sich bei der Anregungsfrequenz von ca. 2300 Hz. Dies weist auf die Eigenfrequenz der ersten Verzahnungsstufe hin. Die zweite Überhöhung befindet sich bei der Anregungsfrequenz von ca. 930 Hz und weist auf den Einfluss der Eigenfrequenz der zweiten Stufe hin.



**Bild 3.7:** Übertragungsfunktionen des Anregungsverhaltens der ersten Verzahnungsstufe des Getriebes in **Tabelle 3.1**

Analog dazu lässt sich das Übertragungsverhalten der Zahnkraft wie folgt annähern:

$$\mathcal{L}F_z = m_{\text{red}} \left( \ddot{X}_j \frac{d_{b1}}{2} + \ddot{X}_k \frac{d_{b2}}{2} \right) = -m_{\text{red}} \omega^2 \left( X_j \frac{d_{b1}}{2} + X_k \frac{d_{b2}}{2} \right) \quad (3.19)$$

mit der reduzierten Trägheitsmasse nach [Gri10b]:

$$m_{\text{red}} = \frac{\theta_1 \cdot \theta_2}{\theta_2 + \theta_1 (d_{b1}/d_{b2})^2} \div \left( \frac{d_{b1}}{2} \right)^2 \quad (3.20)$$

---

$m_{\text{red}}$	kg	reduzierte Trägheitsmasse		$\theta$	kg·m <sup>2</sup>	Trägheitsmoment
------------------	----	---------------------------	--	----------	-------------------	-----------------

---

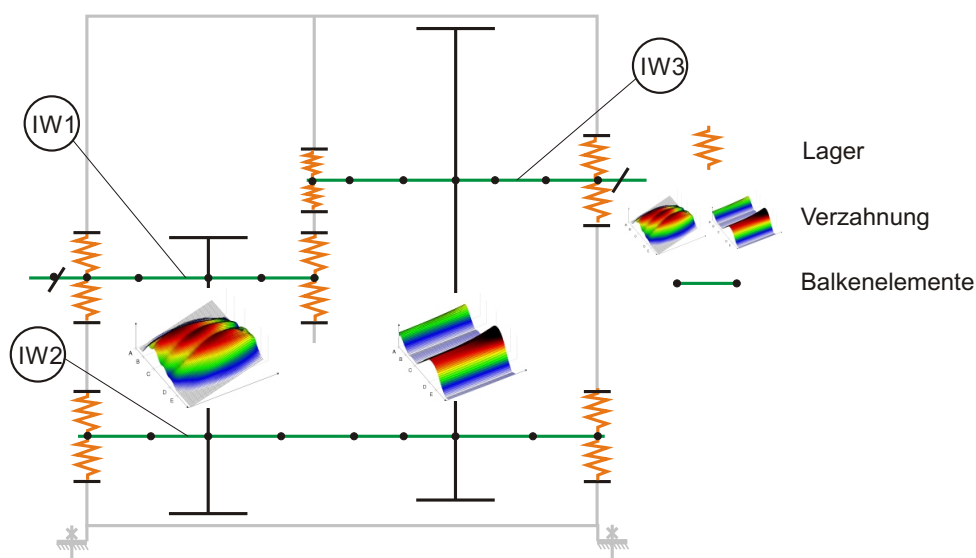
Das Übertragungsverhalten der Zahnkraft der ersten Stufe des Getriebes aus **Tabelle 3.1** nach **Gleichung (3.19)** ist beispielhaft in **Bild 3.7(b)** gezeigt. Dabei sind zwei Überhöhungen durch die beiden Verzahnungsstufen im Diagramm identifizierbar. Dieses Diagramm kann für die Berechnung der quasidynamischen Zahnkraft in **Gleichung (3.7)** weiter verwendet werden. In **Abschnitt A.2** wird die Vergrößerungsfunktion nach Geiser [Gei02] zur Veranschaulichung der Methode hergeleitet.

### 3.5 Modellbildung in der dynamischen Simulation

Mit Hilfe der Dynamiksimulation lässt sich das Schwingungsverhalten mehrstufiger Getriebe unter Berücksichtigung der Drehzahleinflüsse und der Einflüsse der zeitveränderlichen Parameter wie Verzahnungs- bzw. Lagersteifigkeiten durch unterschiedliche Ausgabegrößen beurteilen. In diesem Abschnitt wird die Modellbildung des räumlichen dynamischen Modells vorgestellt, das die detaillierten Analysen sowohl der Verzahnungen als auch der Zustandsgrößen an den Elementen ermöglicht.

### 3.5.1 Aufbau des dynamischen räumlichen Modells

Um die räumlichen Verformungen bzw. Verlagerungen zu berücksichtigen, kann grundsätzlich ein Getriebe mit Hilfe des linear elastischen Getriebemodells in **Abschnitt 2.6** numerisch abgebildet werden. Durch die Zeitauflösung wird die Wälzstellung diskretisiert. Um eine genaue Aussage über das Anregungsverhalten von Verzahnungen zu machen, lässt sich die Verzahnungssteifigkeit mit Hilfe der Zahnkontaktanalyse nach Weber/Banaschek [Web55] mit Erweiterung von Schmidt [Sch73] bestimmen. Die Verzahnung wird als eine Feder entlang der Eingriffsrichtung modelliert. Zur Bestimmung einer Verzahnungssteifigkeit ist die Wellenverlagerung unter der Verzahnung nötig. Diese ergibt sich aus der Integration des dynamischen Gleichungssystems. Aus diesem Grund wird das Gleichungssystem numerisch mit Hilfe eines impliziten Solvers wie mit dem BDF Verfahren gelöst, s. [Hin83]. Die Bildung des dynamischen Modells auf Basis des linear elastischen Getriebemodells ist beispielhaft anhand eines zweistufigen Getriebes in **Bild 3.8** dargestellt.



**Bild 3.8:** Dynamisches Modell auf Grundlage des Gesamtgetriebemodells mit detaillierter Betrachtung aller Verzahnungsstufen innerhalb eines Rechengangs

Um das dynamische Gleichungssystem aufzustellen, werden Massen-, Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen benötigt. Die Ermittlung der Massenmatrix des linear-elastischen Gesamtgetriebemodells wird in [Koh12] ausführlich beschrieben. Dabei wird zunächst eine lokale Massenmatrix der jeweiligen diskretisierten Elemente mit Hilfe des Reduktionsverfahrens mit Formfunktionen aufgebaut. Die gesamte Massenmatrix wird aus diesen lokalen Massenmatrizen aufsummiert.

Analog dazu ergibt sich ebenfalls die Steifigkeitsmatrix nach [Koh12, Neu16b] aus der Aufsummiierung lokaler Steifigkeitsmatrizen. Die Steifigkeit der jeweiligen Balkenelemente wird nach dem Ansatz nach Timoshenko unter Berücksichtigung des Schubeinflusses berechnet. Dies ist nach [Ste95, Wal10] für die Modellierung der Wellen notwendig, da die Länge der Absätze meis-



tens verhältnismäßig kleiner ist als deren Durchmesser. Die Steifigkeitsmatrix ist zeitabhängig. Dies geht auf die Verzahnungssteifigkeiten und die Lagersteifigkeit zurück. Die letztere wird von vielen Parametern wie Vorspannkraft, Lagerspiel usw. beeinflusst. Diese Parameter können mit Hilfe der Integration ermittelt werden und gehen in jedem Zeitschritt in die Berechnung der Lagersteifigkeit ein. Die Berechnung der Lagersteifigkeit kann mit Hilfe des Berechnungsmoduls LAGER2 [Her02, Jur15] ausgeführt werden und muss implizit gelöst werden.

Die Dämpfungsmatrix kann mit Hilfe des Caughey-Ansatzes abgeschätzt werden. Diese wird in **Abschnitt 3.5.2** beschrieben. Die Dämpfungsmatrix ist proportional zu Massen und Steifigkeiten. Aus diesem Grund ist die Dämpfungsmatrix zeitlich nicht konstant.

**Gleichung (2.1)** ist die gewöhnliche Differenzialgleichung 2. Ordnung. Um das Gleichungssystem zu integrieren, muss diese Gleichung in die Form einer gewöhnlichen Differenzialgleichung 1. Ordnung in **Gleichung (2.7)** eingebracht werden.

Da die Parametermatrix in **Gleichung (2.7)** von der Zeit abhängig sind, müssen die Parametermatrizen in jedem Zeitschritt aktualisiert werden. Zur Berechnung der Verzahnungssteifigkeiten müssen die Ortsvektoren  $\underline{x}(t)$  bekannt sein. Das Gleichungssystem wird aus diesem Grund mit Hilfe eines impliziten Solvers gelöst. Das Gleichungssystem wird im Dynamischen Zahnkräfte Programm (DZP) mit Hilfe des BDF-Verfahrens aus der Bibliothek ODEPACK [Hin83] gelöst. Das Verfahren ist implizit und mehrschrittig. Im Gegensatz zu den expliziten Verfahren wie dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren [Feh70, Run94] bzw. dem Runge-Kutta-Verfahren mit Erweiterung nach Cash/Karp [Cas90] ist das BDF-Verfahren für mehrstufige Getriebe geeignet. Durch die Berücksichtigung räumlicher Freiheitsgrade und die Berücksichtigung unterschiedlicher Einflüsse aus den beteiligten Elementen wie Verzahnungen und Lagern ist die Anwendung des Solvers für ein steifes Gleichungssystem notwendig. Mit dem BDF-Verfahren ist dies sichergestellt. Darüber hinaus steht das Adams-Bashforth-Verfahren aus derselben Bibliothek zur Verfügung. Das Verfahren ist ein explizites Mehrschrittverfahren und ist zeiteffizient beim Lösen eines nicht-steifes Gleichungssystems. Die ODEPACK-Bibliothek kann zwischen beiden Verfahren während der Berechnung wechseln, damit die Rechenzeit noch effizienter wird.

Die Rechenzeit innerhalb einem Zeitschritt setzt sich aus der Dauer des Matrizenaufbaus und der Dauer des Lösens des Gleichungssystems zusammen. Durch die hohe Anzahl der Freiheitsgrade beim linear elastischen Gesamtgetriebesystems kann die Rechenzeit durch den Matrizenaufbau in jedem Zeitschritt verlangsamt werden. Um die Rechenzeit nicht zu beeinträchtigen, können die Matrizen nach [Gri10a, Hei12] aufgebaut werden. Dabei setzen sich die Matrizen aus einem zeitinvarianten und einem zeitvarianten Anteil zusammen. Bei der Steifigkeitsmatrix gehören z.B. die Verzahnungs- und Lagersteifigkeiten zum letzteren Anteil. Bei diesem Verfahren werden die ganzen Matrizen nicht in jedem Zeitschritt neu berechnet, sondern der zeitvariante Anteil aktualisiert.

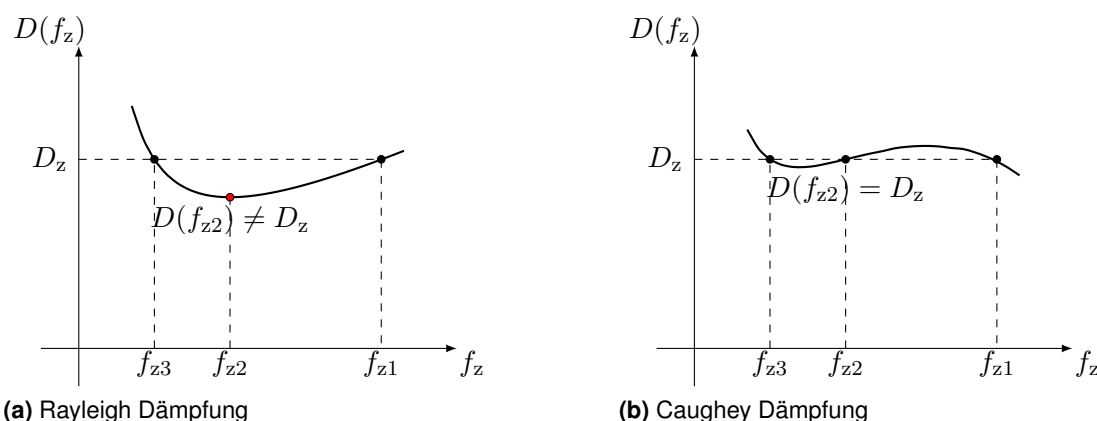
Durch die hohe Anzahl der Freiheitsgrade des linear elastischen Gesamtgetriebesystems ergibt

sich für die Dynamiksimulation ein hoher Speicherplatzbedarf, da die Dimension der Matrizen im Zustandsraum vervierfacht wird ( $2\text{dof} \times 2\text{dof}$ ). Da die Matrizen dünn besetzt sind, d.h. viele Elemente sind Null, können die Matrizen numerisch komprimiert werden. Es stehen grundsätzlich viele Verfahren zur Verfügung. Eine Möglichkeit ist die Komprimierung nach dem CSR-Verfahren (s. auch [Cor19]). Dadurch lässt sich der benötigte Speicher erheblich reduzieren.

### 3.5.2 Bestimmung der Systemdämpfung

Durch die Modellbildung eines mehrstufigen Getriebes mit Hilfe des linearen Gesamtgetriebe-modells können die Massen- und Steifigkeitsmatrix ermittelt werden. Bei der dynamischen Simulation wird die Dämpfung zur Abbildung der Energiedissipation benötigt. Da die Energiedissipation durch unterschiedliche Mechanismen hervorgerufen wird, wird eine proportionale Systemdämpfung vorausgesetzt, die sich aus linearer Kombination aus der Massen- und Steifigkeitsmatrix zusammensetzt (s. **Abschnitt 2.2**).

Die Systemdämpfung ist grundsätzlich frequenzabhängig. Bei Stirnradgetrieben kann die Verzahnungsdämpfung nach Gerber [Ger84] bestimmt werden. Die Abhängigkeit von der Wellendrehzahl wird durch die Umfangsgeschwindigkeit in **Gleichung (2.13)** ausgedrückt.



**Bild 3.9:** Dämpfungswerte eines dreistufigen Getriebes nach unterschiedlichen Dämpfungsansätzen

In vielen Anwendungen wird die Dämpfungsmatrix nach einem Rayleigh-Ansatz abgebildet. Dabei werden die Dämpfungen bei zwei Anregungsfrequenzen berücksichtigt (s. **Gleichung (2.10)**). Bei Stirnradgetrieben können Dämpfungen für bis zu zwei Verzahnungsstufen berücksichtigt werden. Außerdem ist der Abstand zwischen zwei Anregungsfrequenzen durch die Übersetzung zwischen beiden Stufen festgelegt. Wird das System zusätzlich mit einer weiteren Anregungsfrequenz angeregt, kann die Dämpfung bei dieser Frequenz unrealistisch werden.

**Bild 3.9** zeigt beispielhaft Dämpfungskennlinien eines dreistufigen Getriebes. Das Getriebe übersetzt die Drehzahl ins Langsame mit der Übersetzung der jeweiligen Stufe von 2. Daher gilt  $f_{z1} > f_{z2} > f_{z3}$ . Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die Dämpfung aller Verzahnungsstufen gleich ist und  $D_z$  beträgt. Bei der Rayleigh Dämpfung werden in **Bild 3.9(a)** die Dämpfungen bei den minimalen und maximalen Zahneingriffsfrequenzen berücksichtigt ( $f_{z3}$  und  $f_{z1}$ ).

Dadurch ergibt sich eine große Abweichung der Dämpfung an der Stufe 2.

Um die Verzahnungsdämpfungen mehrstufiger Getriebe bei der Bildung einer Systemdämpfung zu berücksichtigen, wird die Systemdämpfung nach Caughey gebildet. Die Dämpfungskennlinie ist in **Bild 3.9(b)** gezeigt. Alle Dämpfungen werden mit dem Ansatz abgebildet. Ist ein weiterer Dämpfungswert an einem Betriebspunkt bekannt, kann dieser mit Hilfe der **Gleichung (2.11)** und **Gleichung (2.12)** berücksichtigt werden. Mit Hilfe dieses Ansatzes lässt sich die Anzahl der Verzahnungsstufen beliebig erweitern.

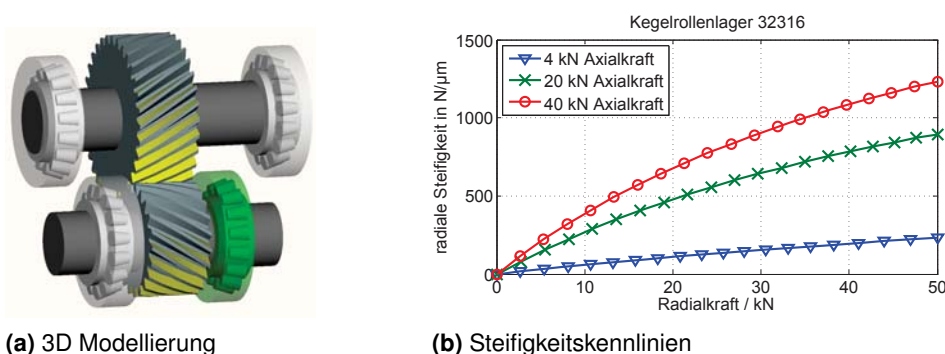
Weiterhin muss die zeitliche Änderung der Steifigkeit  $\underline{C}$  berücksichtigt werden. Bei Stirnradgetrieben ist die Verzahnungssteifigkeit zeitlich nicht konstant und ist grundsätzlich von der Wälzstellung abhängig (s. auch **Abschnitt 2.1.1**). Neben der Verzahnungssteifigkeit kann die Lagersteifigkeit auch im Laufe der Zeit veränderlich sein. Deshalb muss das implizite Verhalten der Steifigkeit bei der Ermittlung der Systemdämpfung berücksichtigt werden. Die Systemdämpfung wird somit in Anlehnung an **Gleichung (2.11)** für ein Getriebe mit insgesamt  $N$  Verzahnungsstufen wie folgt ermittelt:

$$\underline{K}(t) = \underline{M} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i (\underline{M}^{-1} \underline{C}(t))^i \quad (3.21)$$

Die Systemdämpfung ist nun bei jedem Zeitschritt zu bestimmen. Die Dämpfungskoeffizienten  $\alpha_i$  können mit Hilfe der **Gleichung (2.12)** ermittelt werden und sind über der Zeit konstant.

### 3.5.3 Ansatz zur Berücksichtigung von impliziten Lagersteifigkeiten

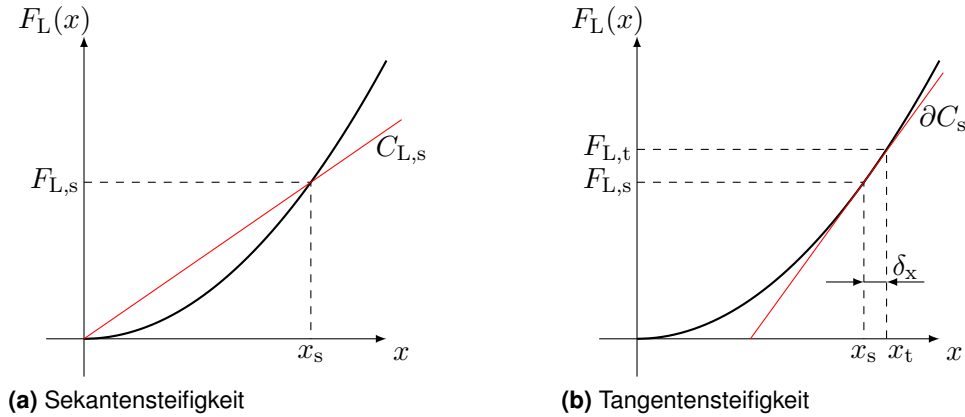
Die Lager weisen einen großen Einfluss auf die Verformungen sowie die Verlagerungen der Wellen auf. Der Einfluss der Lager wird bei der numerischen Berechnung der Verformungen des Welle-Lager-Systems durch Steifigkeiten abgebildet. Diese stellen den Zusammenhang zwischen den Belastungen und den räumlichen Verformungen an den Lagern dar. Die Methoden zur Ermittlung der Steifigkeiten eines Lagers unter einer vorgegeben Last sind z.B. in [Neu16a, Tho11] vorgestellt.



**Bild 3.10:** Lagersteifigkeit eines Kegelrollenlagers einer Stirnradstufe mit angestellten Lagerungen bei unterschiedlichen axialen Belastungen [Hei13]

Grundsätzlich wird die Lagersteifigkeit durch viele Parameter beeinflusst. Z.B. weisen im Fall ei-

ner angestellten Lagerung mit Kegelrollenlagern in **Bild 3.10(a)** die radialen Lagersteifigkeiten deutliche Abhängigkeiten von der axialen Lagerkraft auf, die wiederum von der Axialkomponente der Verzahnungskraft abhängt (**Bild 3.10(b)**) [Hei13]. Diese Verzahnungskraft ist im dynamischen Fall zeitlich nicht konstant. Aus diesem Grund weist die Lagersteifigkeit eine zeitliche Abhängigkeit auf.



**Bild 3.11:** Bestimmung von Steifigkeiten eines Lagers aus dem Belastungs-Verformungs-Diagramm (nach [Tho11], geändert)

Das Verformungsverhalten von Lagern ist im Allgemeinen nicht linear [Tho11]. **Bild 3.11** zeigt beispielhaft einen Zusammenhang zwischen der Belastung und der Verformung eines Lagers. Zur Vereinfachung wird der Zusammenhang zunächst eindimensional betrachtet. Das Verformungsverhalten dieses Lagers um einen Betriebspunkt kann grundsätzlich anhand von zwei Steifigkeiten beschrieben werden. Die Steifigkeit  $C_{L,s}$  lässt sich am Betriebspunkt des Lagers unmittelbar aus der Belastung des Lagers  $F_{L,s}$  und der daraus resultierenden Verformung  $x_s$  wie folgt ermitteln:

$$C_{L,s} = \frac{F_{L,s}}{x_s} \quad (3.22)$$

Diese Steifigkeit wird auch Sekantensteifigkeit genannt (s. **Bild 3.11(a)**). Wird um den Betriebspunkt linearisiert, ergibt sich die partielle Steifigkeit  $\partial C_s$  des Lagers aus der Tangente des Belastungs-Verformungsverhaltens (s. **Bild 3.11(b)**). Diese Steifigkeit wird daher auch als Tangentensteifigkeit bezeichnet. Die Lagerkraft  $F_{L,t}$  bei der Verformung  $\delta_x$  um den Betriebspunkt lässt sich ermitteln aus:

$$F_{L,t} = F_{L,s} + \partial C_s \cdot \delta_x = F_{L,s} + \partial C_s \cdot (x_t - x_s) \quad (3.23)$$

In diesem Zustand weist das Lager die Gesamtverformung von  $x_t$  auf. Unter Berücksichtigung der räumlichen Einflüsse ergibt sich aus **Gleichung (3.23)** als Vektordarstellung:

$$\underline{F}_{L,t} = \underline{C}_{L,s} \cdot \underline{x}_s + \underline{\partial C_s} \cdot (\underline{x}_t - \underline{x}_s) \quad (3.24)$$

In der dynamischen Simulation ist die Gesamtverformung  $\underline{x}_t$  von der Zeit  $t$  abhängig ( $\underline{x}_t = \underline{x}(t)$ ). Diese Verformung wird jedoch bei der Integration ermittelt. Aus diesem Grund ist diese nur implizit lösbar. Um das Gleichungssystem zu vereinfachen, werden zunächst die Steifigkeiten in Form von einer Ersatzsteifigkeitsmatrix  $\underline{C}_{\text{ers},s}(t)$  erfasst, damit gilt:

$$\underline{C}_{\text{ers},s}(t) \cdot \underline{x}(t) \stackrel{!}{=} \underline{C}_{L,s} \cdot \underline{x}_s + \underline{\partial C}_s \cdot (\underline{x}(t) - \underline{x}_s) \quad (3.25)$$

Aus der Vektormultiplikation gilt zunächst:

$$\frac{\underline{x}^T(t) \cdot \underline{x}(t)}{|\underline{x}(t)|^2} = \frac{\underline{x}^T(t) \cdot \underline{x}(t)}{\underline{x}^T(t) \cdot \underline{x}(t)} = 1 \quad (3.26)$$

Wird **Gleichung (3.26)** in **Gleichung (3.25)** multipliziert, ergibt sich:

$$\underline{C}_{\text{ers},s}(t) \cdot \underline{x}(t) = \left[ \frac{(\underline{C}_{L,s} - \underline{\partial C}_s) \cdot \underline{x}_s \cdot \underline{x}^T(t)}{\underline{x}^T(t) \cdot \underline{x}(t)} + \underline{\partial C}_s \right] \cdot \underline{x}(t) \quad (3.27)$$

Die Ersatzsteifigkeitsmatrix des Lagers  $\underline{C}_{\text{ers},s}(t)$  kann daher zeitlich erfasst werden als:

$$\underline{C}_{\text{ers},s}(t) = \left[ \frac{(\underline{C}_{L,s} - \underline{\partial C}_s) \cdot \underline{x}_s \cdot \underline{x}^T(t)}{\underline{x}^T(t) \cdot \underline{x}(t)} + \underline{\partial C}_s \right] \quad (3.28)$$

Zur Ermittlung der dynamischen Wechselwirkungen des Welle-Lager-Systems wird diese lokale Matrix in jedem Zeitschritt aktualisiert und in das Getriebemodell (s. auch **Abschnitt 2.6**) eingebaut, sodass nur die zeitabhängigen Terme geändert werden und die ganze Steifigkeitsmatrix nicht in jedem Zeitschritt komplett neu berechnet wird. Die ähnliche Behandlung der zeitabhängigen Terme in der Steifigkeitsmatrix hat sich bereits bei der Berücksichtigung der zeitveränderlichen Verzahnungssteifigkeiten nach [Gri10a, Hei12] bewährt. Da die Steifigkeitsmatrix von der Zeit abhängig ist, wird das Gleichungssystem implizit gelöst. Numerisch können die ODE-Solver wie das BDF-Verfahren (**B**ackward **D**ifferentiation **F**ormulas) verwendet werden, s. auch [Hin83].

### 3.6 Größen zur Beurteilung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen in der dynamischen Simulation

Auf Basis der Modellbildung in **Abschnitt 3.5** können unterschiedlichen Größen aus der Zeitschrittintegration ermittelt werden. In Verbindung mit der Zahnkontaktanalyse, die während der Integration aufgerufen wird, um die zeitveränderlichen Verzahnungssteifigkeiten zu erfassen, können detaillierte Aussagen über die jeweiligen Verzahnungsstufen getroffen werden. Da das Gesamtmodell in einem Rechengang berechnet wird, ist sichergestellt, dass Kreuzeinflüsse mehrstufiger Getriebe berücksichtigt werden. In diesem Abschnitt werden unterschiedliche Auswertegrößen aus der Dynamiksimulation vorgestellt.

### 3.6.1 Dynamische Drehwegabweichung

Durch die Integration lässt sich die Eingriffsstellung einer Verzahnung aus dem Ortsvektor  $\underline{x}(t)$  in **Gleichung (2.6)** ermitteln. Auf Basis der Zahnkontaktanalyse kann die dynamische Verzahnungssteifigkeit bestimmt werden. Im DZP wird die Verzahnungssteifigkeit nach der Plattentheorie nach Schmidt [Sch73] berechnet, bei der die Zahnverformung im Normalschnitt nach Weber/Banaschek [Web55] berücksichtigt wird. Einflüsse des vor- und nachzeitigen Eingriffs werden als zusätzliche Abweichungsbeträge nach Baethge [Bae69] berücksichtigt. Bei der Berechnung im Zahnkontakt können Stützpunkte gleichmäßig entlang der jeweiligen aktiven Berührlinien diskretisiert werden. Die Drehwegabweichung einer Verzahnung bei einer Eingriffsstellung zum Zeitpunkt  $t$  kann in einer Matrixdarstellung analog zu Kohn [Koh19] wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} c_{z11}(t) & 1 & 0 & \cdots & 0 & & \\ c_{z21}(t) & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \\ c_{zN_P1}(t) & 0 & \cdots & 0 & 1 & & \\ \hline c_{zjk}(t) & & \underline{\mathbf{0}}_n & & \underline{\mathbf{I}}_n & & \underline{\mathbf{0}}_n \\ \hline c_{z1N_{B1}}(t) & & & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{z2N_{B1}}(t) & & & & & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \underline{\mathbf{0}}_n & & \underline{\mathbf{0}}_n & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ c_{zN_P N_{B1}}(t) & & & & & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x(t) \\ f_{11} \\ f_{21} \\ \vdots \\ f_{N_P1} \\ f_{jk} \\ f_{1N_{B1}} \\ f_{2N_{B1}} \\ \vdots \\ f_{N_P N_{B1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{z11}(t) \cdot x_{f11,dyn} \\ c_{z21}(t) \cdot x_{f2,dyn} \\ \vdots \\ c_{zN_P1}(t) \cdot x_{fN_P1,dyn} \\ \hline c_{zjk}(t) \cdot x_{fjk,dyn} \\ \hline c_{z1N_{B1}}(t) \cdot x_{f1N_{B1},dyn} \\ c_{z2N_{B1}}(t) \cdot x_{f2N_{B1},dyn} \\ \vdots \\ c_{zN_P N_{B1}}(t) \cdot x_{fN_P N_{B1},dyn} \\ \hline F_{bt} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$x(t)$	mm	Dynamische Drehwegabweichung als Starrkörperbewegung der Radkörper in Eingriffsrichtung bei einer Eingriffsstellung zum Zeitpunkt $t$	$x_{fjk,dyn}$	mm	Summe aus Verzahnungstopologie und Einflüssen aus dynamischer Wellenverlagerung des Stirnprofils am Punkt $j$ der Berührlinie $k$
$c_{zjk}$	N/mm	Verzahnungssteifigkeit aus überlagerten und invertierten Einflusszahlenmatrizen von Ritzel und Rad am Punkt $j$ der Berührlinie $k$	$f_{jk}$	N	Diskrete Einzelkraft am Punkt $j$ der Berührlinie $k$
$N_P$	-	Anzahl diskreter Punkte pro Berührlinie	$N_{B1}$	-	Anzahl gleichzeitig aktiver Berührlinien der betrachteten Eingriffsstellung

Die örtlich wirksame Kontaktabweichung  $x_{fjk,dyn}$  setzt sich aus der Flankenformabweichung der Verzahnung und der dynamischen Wellenverlagerung zusammen. Der erste Term ergibt sich aus der Verzahnungstopologie und berücksichtigt Einflüsse wie Fertigungstoleranzen und Verzahnungskorrekturen. Die dynamische Wellenverlagerung wird aus der Zeitschrittintegration ermittelt. Die dynamische Drehwegabweichung ist eine stufenbezogene Auswertegröße. Bei

mehrstufigen Getrieben werden die Kreuzeinflüsse durch die anderen Verzahnungsstufen mit Hilfe des linear elastischen Gesamtgetriebemodells in Form der Verlagerungen berücksichtigt. Der Zeitverlauf von  $x(t)$  über den zeitveränderlichen Eingriffstellungen wird als dynamische Drehwegabweichung bezeichnet.

Um eine ausführliche Analyse der dynamischen Drehwegabweichung zu ermöglichen, wird die Spektralanalyse herangezogen. Dabei werden die Schwingungsamplituden zu den zugehörigen Anregungsfrequenzen bestimmt. Numerisch kann das Verfahren wie die Diskrete Fourier-Analyse (DFT) verwendet werden. Alternativ steht der Algorithmus der schnellen Fourier-Transformation (FFT) zur schnelleren Auswertung zur Verfügung, wenn das Zeitsignal bestimmte Kriterien erfüllt. Dies wird ausführlich in [Ror11] beschrieben. Grundsätzlich kann das Spektrum bei einer Drehzahl in Abhängigkeit der Anregungsfrequenzen dargestellt werden. Um die Vergleichbarkeit zwischen den Spektren bei unterschiedlichen Drehzahlen und somit Anregungsfrequenzen zu gewährleisten, werden die Anregungsfrequenzen mit der Zahneingriffsfrequenz der betrachteten Verzahnungsstufe normiert. Daraus lässt sich die Zahneingriffsordnung aus folgender Gleichung ermitteln:

$$i = \frac{f}{f_z}, \quad \text{mit } f_z = z_1 \cdot \frac{n_1}{60} \quad (3.30)$$

$i$	-	Zahneingriffsordnung	$f$	Hz	Anregungsfrequenz
$z_1$	-	Zähnezahl am Ritzel der betrachteten Stufe	$n_1$	$\text{min}^{-1}$	Ritzeldrehzahl der betrachteten Stufe
$f_z$	Hz	Zahneingriffsfrequenz			

### 3.6.2 Dynamische Zahnkraft

Ähnlich wie bei der dynamischen Drehwegabweichung kann die dynamische Zahnkraft auf Basis der Zahnkontaktanalyse ermittelt werden. Die dynamische Zahnkraft wird wie folgt berechnet:

$$F_z(t) = \sum_j^{N_{\text{Bl}}} \sum_k^{N_{\text{P}}} c_{zjk}(t) \cdot (x_{fjk,\text{dyn}}(t)) = \sum_j^{N_{\text{Bl}}} \sum_k^{N_{\text{P}}} c_{zjk}(t) \cdot (x_{jk}(t) + x_{fjk}(t)) \quad (3.31)$$

$F_z(t)$	N	Dynamische Zahnkraft	$c_{zjk}(t)$	N/mm	Verzahnungssteifigkeit am Punkt $j$ der Berührlinie $k$
$x_{jk}(t)$	mm	Verschiebungsvektor zwischen den Radkörpern am Punkt $j$ der Berührlinie $k$	$x_{fjk}(t)$	mm	Flankenabweichung des Stirnprofils am Punkt $j$ der Berührlinie $k$

### 3.6.3 Dynamische Lastverteilung

Mit Hilfe der Zahnkontaktanalyse lässt sich die Lastverteilung entlang der zeitlich aktiven Berührlinien ermitteln. Die Einzellasten entlang der Berührlinien können nach **Gleichung (3.29)**

bestimmt werden. Wird ein Flankenbereich nicht belastet, wird die Verzahnungsfeder an dieser Stelle ausgetragen. Die Berechnung muss iterativ durchgeführt werden, s. auch [Koh19, Neu16a].

### 3.6.4 Zustandsgrößen an den Wellenabschnitten

Die dynamische Drehwegabweichung und die dynamische Zahnkraft sind stufenbezogene Auswertegrößen. Diese Größen sind daher zur Auswertung des Anregungsverhaltens der einzelnen Verzahnungsstufen bei mehrstufigen Getrieben geeignet, z.B. bei der Korrekturauslegung einer Verzahnung unter Berücksichtigung der Drehzahleinflüsse.

Bei mehrstufigen Getrieben werden die Anregungen der Verzahnungsstufen nach Föllner [Föl84] in Form vom Körperschall über die Maschinenstruktur weitergeleitet. Der Körperschall wird schließlich an den Oberflächen als Luftschall abgestrahlt. Um den Überblick über das Schwingungsverhalten mehrstufiger Getriebe zu erhalten, ist es sinnvoll, das Schwingungsverhalten an den Lagerstellen auszuwerten. Dort werden die Anregungen der Verzahnungsstufen überlagert, bevor sie an die Gehäuseoberflächen weitergeleitet werden, s. auch [Mül91, Sat97].

Anhand des linear elastischen Gesamttriebmodells werden die Wellenabschnitten als Balkenelemente diskretisiert und deren räumliche Freiheitsgrade miteinander verbunden. Im Gegensatz zur Modellbildung wie z.B. auf Basis der Übertragungsmatrizen [Fal55, Ker82] können die Zustandsgrößen dieser Freiheitsgrade im Laufe der Zeitschrittintegration nachvollzogen werden. Daraus können die Zustandsgrößen wie

- Auslenkung
- Geschwindigkeit
- Beschleunigung
- Kraft bzw. Moment

des jeweiligen Freiheitsgrades aufgezeichnet und ausgewertet werden. Die Kraft- und Momentengrößen ergeben sich aus der Schnittlast des Balkenelementes. Die Schnittlasten  $\underline{\tilde{F}}_B$  können mathematisch wie folgt ermittelt werden:

$$\underline{\tilde{F}}_B = \underline{\tilde{C}}_B \cdot \underline{\delta}_B + \underline{\tilde{K}}_B \cdot \dot{\underline{\delta}}_B \quad (3.32)$$

---

$\underline{\tilde{F}}_B$	Schnittlastvektor des Balkenelementes		$\underline{\tilde{C}}_B$	Elementare Steifigkeitsmatrix des Balkenelementes
$\underline{\tilde{K}}_B$	Elementare Dämpfungsmatrix des Balkenelementes		$\underline{\delta}_B$	Verschiebungsvektor des Balkenelementes

---

Der Verschiebungsvektor  $\underline{\delta}_B$  und dessen Ableitung können unmittelbar aus dem Zustandsvektor  $\underline{z}$  in **Gleichung (2.7)** ermittelt werden, wenn die Vektorindizes des Balkenelementes bekannt

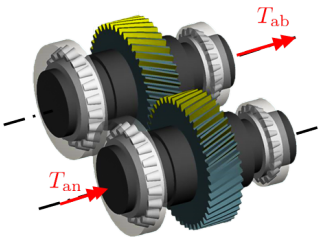


sind, s. auch [Neu16b]. Die elementare Dämpfungsmatrix  $\tilde{\underline{K}}_B$  lässt sich wie in **Abschnitt 3.5.2** beschrieben unter Berücksichtigung der elementaren Massenmatrix  $\tilde{\underline{M}}_B$  aufbauen.

### 3.7 Beispiel dynamischer Ausgabegrößen

In diesem Abschnitt werden die Ausgabegrößen aus **Abschnitt 3.6** beispielhaft gezeigt. Um Effekte zwischen Verzahnungsstufen zunächst in der Dynamiksimulation auszuschließen und damit die Darstellung zu vereinfachen, wird die Berechnung an einem einstufigen Getriebe aus dem FZG Dynamikprüfstand durchgeführt. In **Tabelle 3.2** sind die Verzahnungsdaten gezeigt. Das Anregungsverhalten der Verzahnung bei der Last von 333 Nm wird untersucht. Weitere ausführliche Beschreibungen des Dynamikprüfstands sind in [Hei12, Koh19] zu finden.

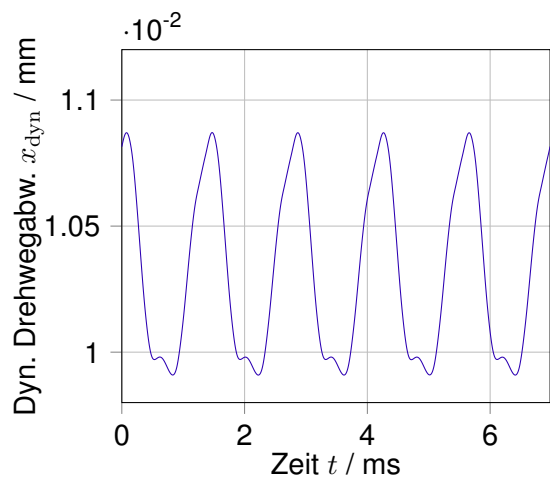
**Tabelle 3.2:** Hauptgeometrie der Schrägverzahnung am 140er-Dynamikprüfstand an der FZG

3D Model	Größe		Ritzel	Rad	
	Normaleingriffswinkel	$\alpha_n$	20.00		°
	Betriebseingriffswinkel	$\alpha_{wt}$	19.79		°
	Schrägungswinkel	$\beta$	21.00	-21.00	°
	Zähnezahl	$z$	43	45	-
	Achsabstand	$a$		140.00	mm
	Normalmodul	$m_n$		3.00	mm
	Profilverschiebungsfaktor	$x$	-0.21	-0.24	-
	Zahnbreite	$b$	39.50	39.50	mm
	Wälzkreisdurchmesser	$d_w$	136.82	143.18	mm
	Teilkreisdurchmesser	$d$	138.18	144.60	mm
	Grundkreisdurchmesser	$d_b$	128.74	134.73	mm
	Kopfnutzkreisdurchmesser	$d_{Na}$	142.30	148.50	mm
	Drehmoment	$T$	333.33	(348.84)	Nm
	Drehzahl	$N$	2600.00	(2484.44)	U/min

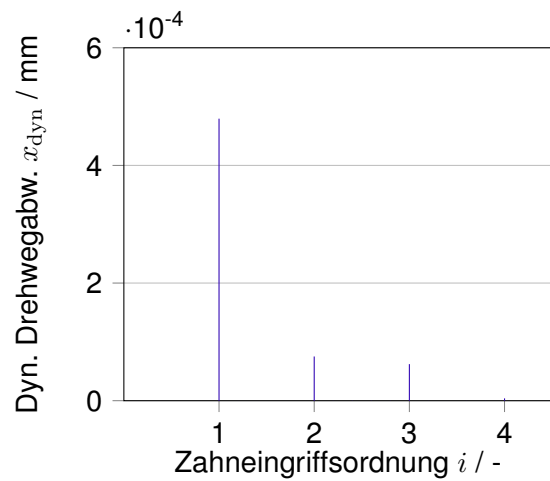
**Bild 3.12** zeigt beispielhaft die dynamischen Drehwegabweichungen der Schrägverzahnung bei unterschiedlichen Drehzahlen. Das Spektrum in **Bild 3.12(b)** weist darauf hin, dass die erste Zahneingriffsordnung bei der Antriebsdrehzahl von  $n_1 = 1000 \text{ min}^{-1}$  dominant ist. Amplituden der Höherharmonischen sind im Diagramm zu sehen. Erhöht sich die Antriebsdrehzahl um ca.  $200 \text{ min}^{-1}$ , verschwinden nun die Amplituden der 3. und 4. Zahneingriffsordnungen in **Bild 3.12(d)**, während die Amplitude der 2. Zahneingriffsordnung bei diesem Betriebspunkt zunimmt. Im Gegensatz dazu ist die dynamische Drehwegabweichung bei der Drehzahl von ca.  $4300 \text{ min}^{-1}$  nahezu durch die erste Zahneingriffsordnung dominiert. Die Amplitude ist im Vergleich zu den anderen Spektren wesentlich kleiner.

Die Drehwegabweichungen in **Bild 3.12** weisen darauf hin, dass die Drehzahl und somit die Anregungsfrequenz einen maßgeblichen Einfluss auf das Schwingungsverhalten der Verzahnung hat.

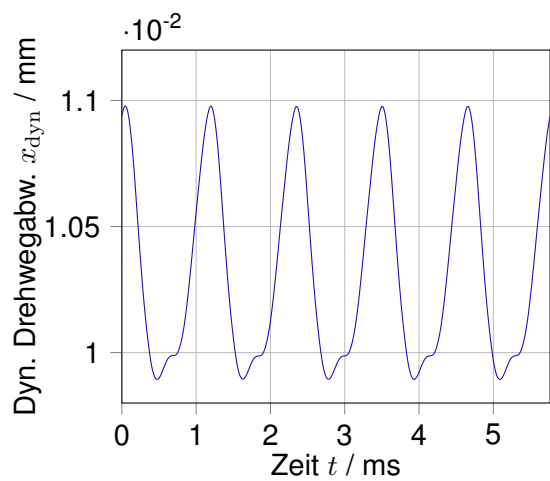
**Bild 3.13** zeigt die rechnerischen dynamischen Zahnkräfte der Schrägverzahnung bei unter-



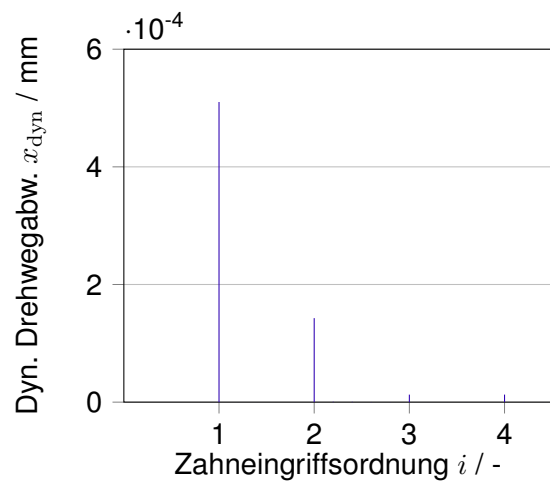
(a) Zeitverlauf bei  $n_1 = 1000 \text{ min}^{-1}$



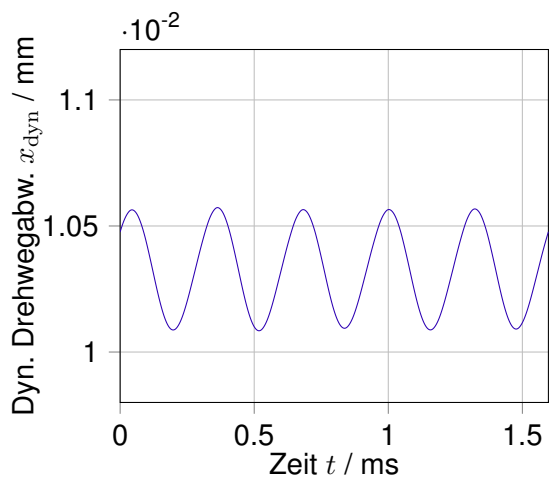
(b) Spektrum bei  $n_1 = 1000 \text{ min}^{-1}$



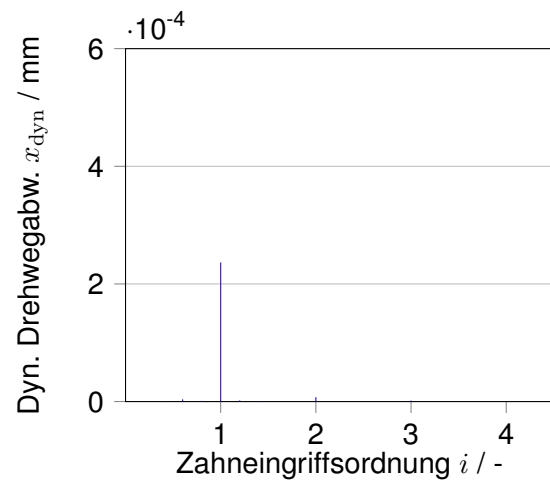
(c) Zeitverlauf bei  $n_1 \approx 1200 \text{ min}^{-1}$



(d) Spektrum bei  $n_1 \approx 1200 \text{ min}^{-1}$

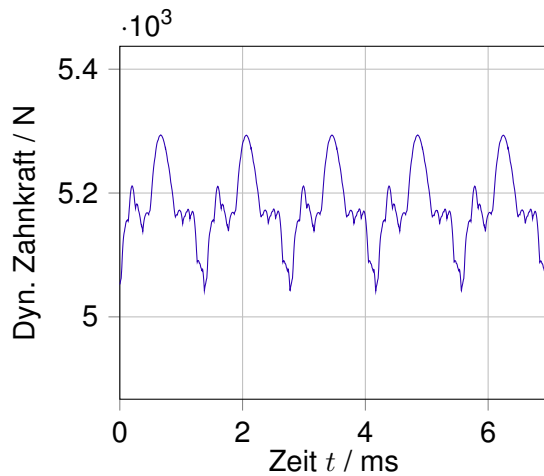


(e) Zeitverlauf bei  $n_1 \approx 4300 \text{ min}^{-1}$

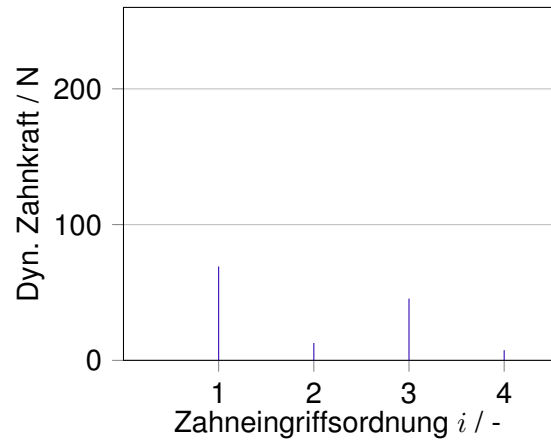


(f) Spektrum bei  $n_1 \approx 4300 \text{ min}^{-1}$

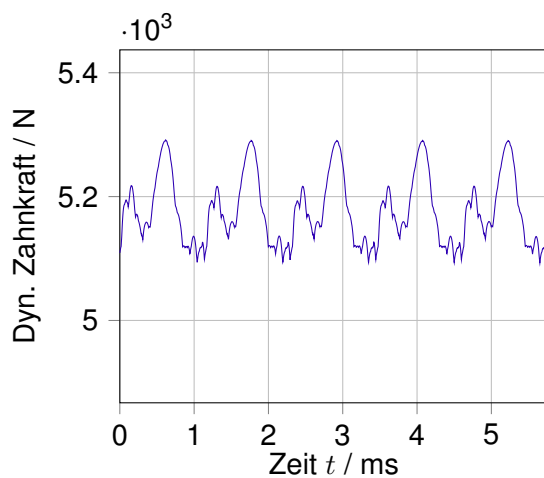
**Bild 3.12:** Dynamische Drehwegabweichung einer Schrägverzahnung bei  $T_1 = 333 \text{ N}$



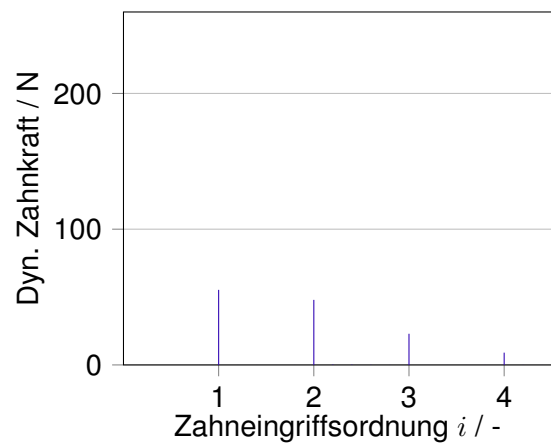
(a) Zeitverlauf bei  $n_1 = 1000 \text{ min}^{-1}$



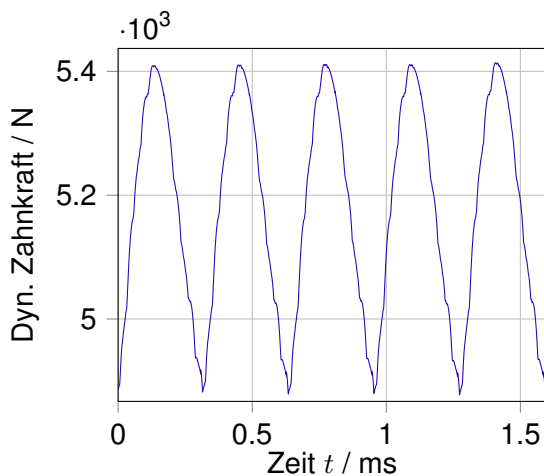
(b) Spektrum bei  $n_1 = 1000 \text{ min}^{-1}$



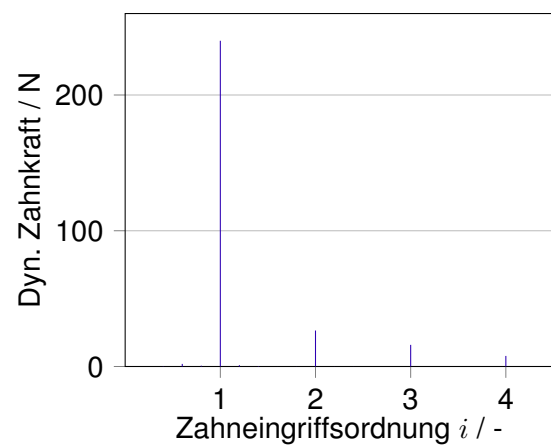
(c) Zeitverlauf bei  $n_1 \approx 1200 \text{ min}^{-1}$



(d) Spektrum bei  $n_1 \approx 1200 \text{ min}^{-1}$



(e) Zeitverlauf bei  $n_1 \approx 4300 \text{ min}^{-1}$



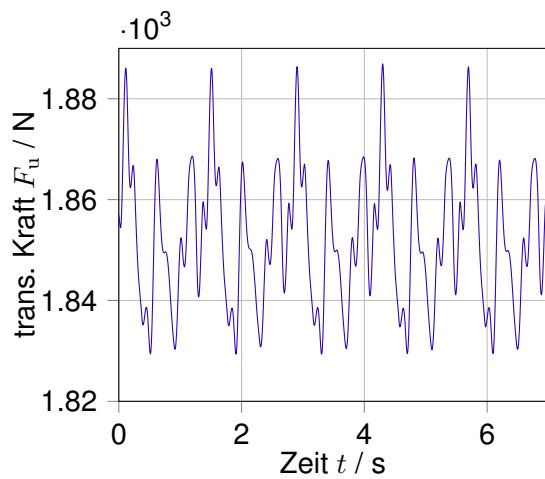
(f) Spektrum bei  $n_1 \approx 4300 \text{ min}^{-1}$

**Bild 3.13:** Dynamische Zahnkraft einer Schrägverzahnung bei  $T_1 = 333 \text{ N}$

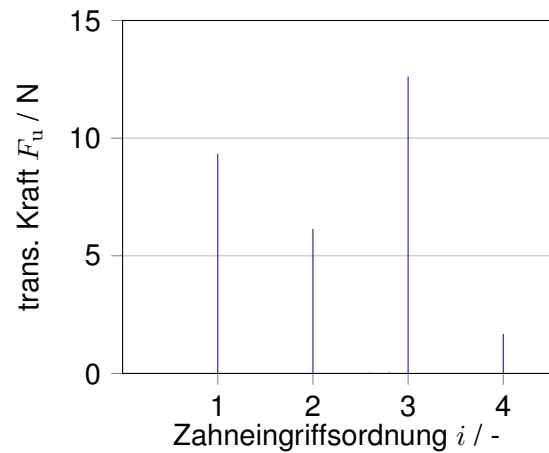
schiedlichen Drehzahlen. Im Drehzahlbereich von  $n_1 = 1000 \text{ min}^{-1}$  dominieren die 1. und 3. Zahneingriffsordnung, vgl. **Bild 3.13(b)**. Die Anregung der 3. Zahneingriffsordnung nimmt jedoch leicht ab, wenn die Antriebsdrehzahl um ca.  $200 \text{ min}^{-1}$  erhöht wird, während die Anregung

der 2. Zahneingriffsordnung eindeutig zunimmt in **Bild 3.13(d)**. Im hohen Drehzahlbereich von ca.  $4300 \text{ min}^{-1}$  weist die 1. Zahneingriffsordnung den größten Einfluss auf die dynamische Zahnkraft auf, vgl. **Bild 3.13(d)**. Die Amplitude dieser Zahneingriffsordnung ist ebenfalls relativ größer als die Spektren bei anderen Drehzahlbereichen. Hierdurch ist offensichtlich, dass die Drehzahl einen erheblichen Einfluss auf die dynamische Zahnkraft aufweist.

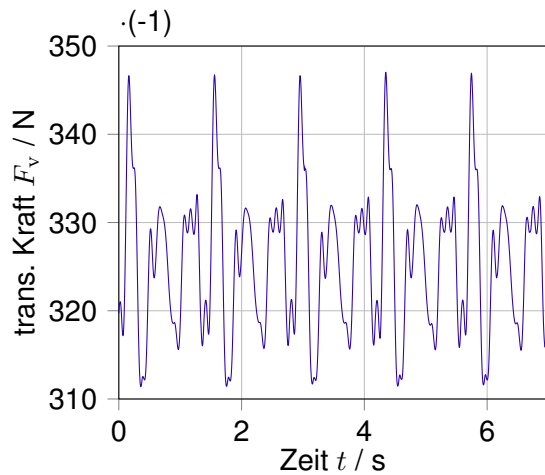
**Bild 3.14** zeigt beispielhaft die dynamischen Kraftgrößen an einem Lager des treibenden Rades des 140er-Dynamikprüfstands an der FZG bei  $T_1 = 333 \text{ N}$  und  $n_1 = 1000 \text{ min}^{-1}$ . Die Spektren der translatorischen Kräfte in der axialen Richtung und in einer radialen Richtung in **Bild 3.14(b)** und **Bild 3.14(d)** zeigen unterschiedliches Schwingungsverhalten in den jeweiligen Zahneingriffsordnungen. Die Kraftamplitude der Zahneingriffsordnung bei der translatorischen Kraft in der axialen Richtung  $F_u$  hat einen wesentlichen Einfluss auf das Schwingungsverhalten in dieser Richtung. Das Schwingungsverhalten in den jeweiligen Richtungen ist von Resonanzstellen unterschiedlicher Freiheitsgrade wie von Biegeeigenfrequenzen abhängig. Mit Hilfe des in **Abschnitt 3.5** beschriebenen Modells kann das Schwingungsverhalten in den unterschiedlichen Freiheitsgraden untersucht werden. Das resultierende Schwingungsverhalten der translatorischen Kräfte lässt sich mit Hilfe der **Gleichung (3.41)** auswerten. **Bild 3.14(e)** und **Bild 3.14(f)** zeigen das rotatorische Moment um die Längsachse  $M_{\varphi_u}$ . Diese Größe stellt das Schwingungsverhalten in Torsionsrichtung dar. In dieser Richtung ist die Amplitude der dritten Zahneingriffsordnung ebenfalls die höchste. Mit Hilfe der Auswertung dynamischer Größen in **Bild 3.14(f)** lässt sich erkennen, wie hoch die Einflüsse des Gesamtgetriebes auf das Schwingungsverhalten sind.



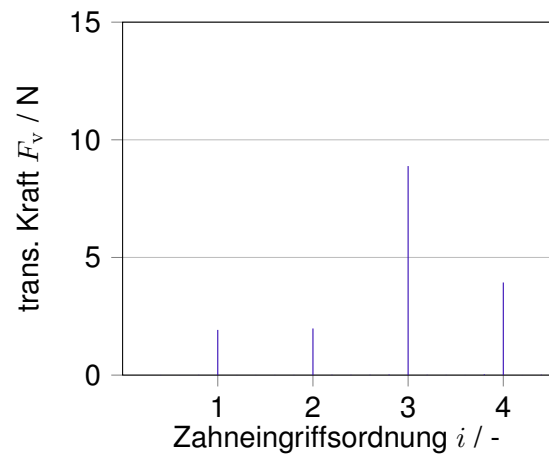
(a) Zeitverlauf translatorischer Kraft  $F_u$



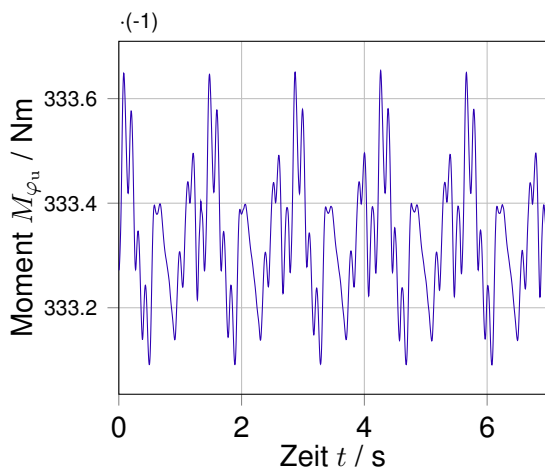
(b) Spektrum translatorischer Kraft  $F_u$



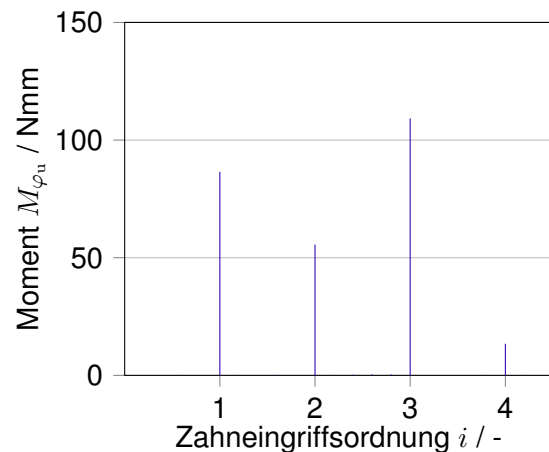
(c) Zeitverlauf translatorischer Kraft  $F_v$



(d) Spektrum translatorischer Kraft  $F_v$

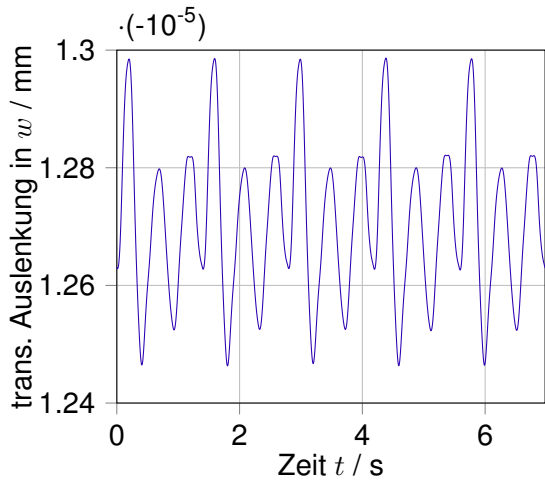


(e) Zeitverlauf rotatorisches Momentes  $M_{\varphi_u}$

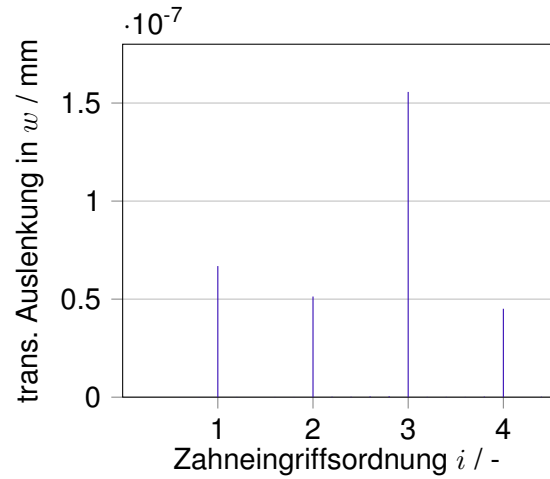


(f) Spektrum rotatorisches Momentes  $M_{\varphi_u}$

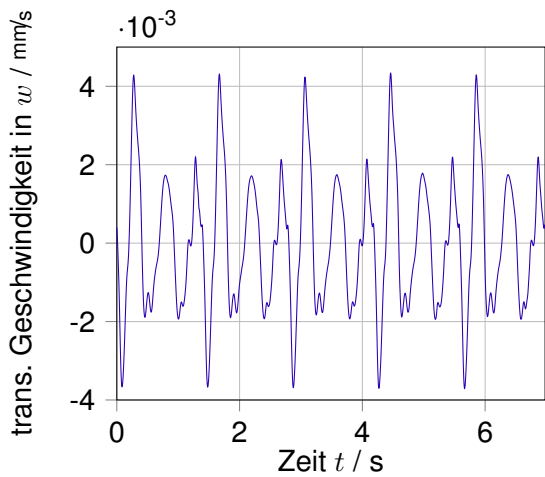
**Bild 3.14:** Dynamische Kräfte und Moment um unterschiedliche Freiheitsgrade an einem Lager des treibenden Rades des einstufigen Getriebes bei  $T_1 = 333 \text{ N}$  und  $n_1 = 1000 \text{ min}^{-1}$



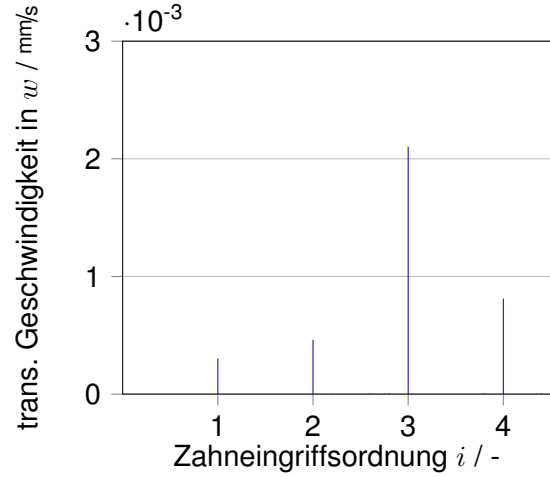
(a) Zeitverlauf translatorischer Auslenkung in  $w$ -Achse



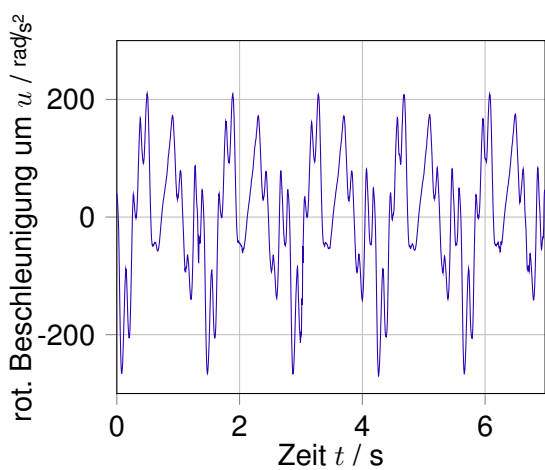
(b) Spektrum translatorischer Auslenkung in  $w$ -Achse



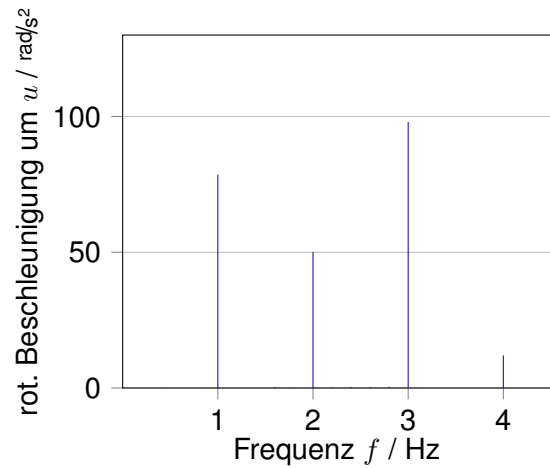
(c) Zeitverlauf translatorischer Geschwindigkeit in  $w$ -Achse



(d) Spektrum translatorischer Geschwindigkeit in  $w$ -Achse



(e) Zeitverlauf rotatorischer Beschleunigung um Längsachse



(f) Spektrum rotatorischer Beschleunigung um Längsachse

**Bild 3.15:** Dynamische Zustandsgrößen um unterschiedliche Freiheitsgrade an einem Lager des treibenden Rades des einstufigen Getriebes bei  $T_1 = 333 \text{ N}$  und  $n_1 = 1000 \text{ min}^{-1}$

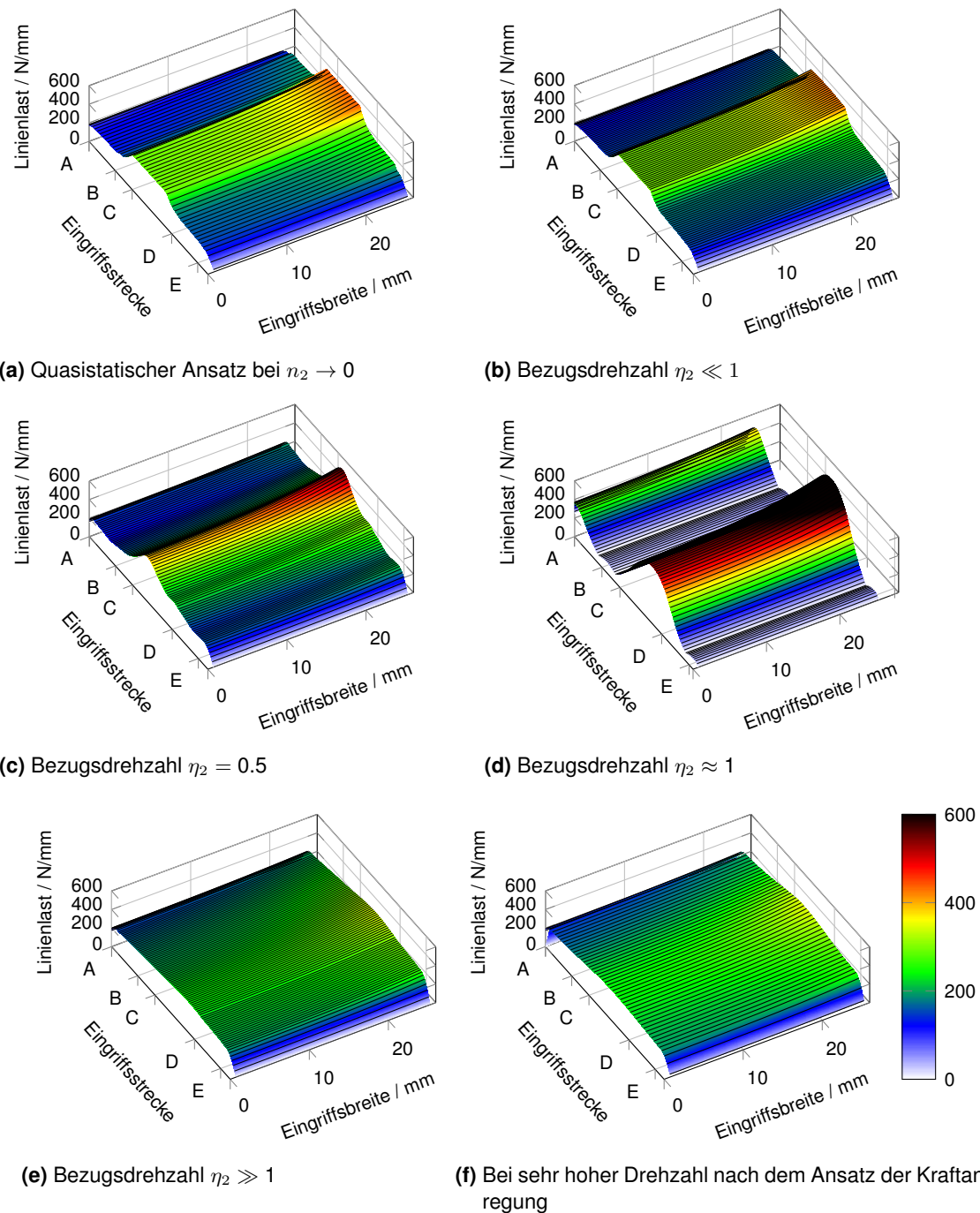
In **Bild 3.15** sind weitere Zustandsgrößen um unterschiedliche Freiheitsgrade an der Lagerstelle gezeigt. Im Vergleich zum Anregungsverhalten der Verzahnung in **Bild 3.12(b)** und **Bild 3.13(b)** unterscheiden sich die Spektren je nach Arten der Zustandsgrößen und der Freiheitsgrade. Das heißt, die mechanische Struktur spielt eine große Rolle für das Schwingungsverhalten eines Getriebes und muss bei der Auswertung mit berücksichtigt werden, s. auch [Föl84, Mül91]. Mit Hilfe des linear elastischen Gesamtgetriebemodells lässt sich eine detaillierte Auswertung des dynamischen Verhaltens von Verzahnungen bis hin zu einer beliebigen Stelle an einer Welle vornehmen.

Um den Drehzahleinfluss auf die dynamische Lastverteilung an der Verzahnung zu zeigen, wird im Folgenden die Geradverzahnung des zweistufigen Getriebes in **Bild 3.8** verwendet. Diese Verzahnung hat gleiche Verzahnungsdaten, wie in der **Tabelle 3.1** aufgelisten sind.

Die Lastverteilungen bei unterschiedlichen Drehzahlen aus der Dynamiksimulation mit DZP [Uta19] sind in **Bild 3.16** dargestellt. Dabei wird die Bezugsdrehzahl  $\eta$  als das Verhältnis der Zahneingriffsfrequenz zur Verzahnungseigenfrequenz definiert. **Bild 3.16(b)** zeigt die dynamische Lastverteilung bei kleiner Drehzahl ( $\eta \ll 1$ ). Die Überhöhung im Bereich des Einzeleingriffsgebiets ist eindeutig erkennbar. Die Lastüberhöhung an der rechten Flanke geht auf die Wellenverlagerungen zurück. Um diese Überhöhung abzumildern, müssen Korrekturen, z.B. Schrägungswinkelkorrektur oder Breitenballigkeit, eingesetzt werden. In diesem Betriebsbereich hat die Drehzahl nur wenig Einfluss auf die Lastverteilung. Die dynamische Lastverteilung ist deshalb ähnlich der quasistatischen Lastverteilung in **Bild 3.16(a)**, die unmittelbar aus dem quasistatischen Ansatz berechnet wird.

Mit zunehmender Drehzahl ändert sich die dynamische Lastverteilung. **Bild 3.16(c)** zeigt die dynamische Lastverteilung bei einer Vorresonanz ( $\eta = 0.5$ ). Die Veränderung der Linienlasten vor allem im Bereich des Übergangs zwischen des Doppel- und Einzeleingriffs ist nicht abrupt. Durch den Drehzahleinfluss weist die Überhöhung einen stärkeren Wert auf als in **Bild 3.16(b)**. Die Überhöhung ist noch viel stärker im Resonanzbereich ( $\eta \approx 1$ ) in **Bild 3.16(d)**. Auch die Lage der Überhöhung verschiebt sich im Vergleich zur dynamischen Last in **Bild 3.16(b)**. Aufgrund der vernachlässigbaren relativen Auslenkung zwischen Ritzel und Rad im sehr großen Drehzahlbereich verteilt sich die dynamische Last plateauartig im ganzen Eingriffsgebiet wie in **Bild 3.16(e)** dargestellt ist. Die dynamische Lastverteilung ist vergleichbar mit der quasistatischen Lastverteilung in **Bild 3.16(f)**, die aus der Randbedingung zur Ermittlung der Kraftanregung in **Abschnitt 2.1.3** bestimmt wird.

Es ist anzumerken, dass die dreidimensionale Darstellung der dynamischen Lastverteilung entweder unmittelbar aus einem Zahneingriff oder über mehrere Eingriffsdauern gemittelt erfolgt. Aufgrund dieser eingeschränkten Darstellungsmöglichkeit können Einflüsse, die sich auf mehrere Eingriffsperioden und somit auf das Schwingungsverhalten auswirken, nicht in einem Diagramm identifiziert werden. Alternativ kann die dynamische Lastverteilung unterschiedlicher Zahneingriffe als eine zeitliche Abfolge dargestellt werden. Hierdurch wird die Weiterauswertungen aufwändig.



**Bild 3.16:** Lastverteilung bei unterschiedlichen Drehzahlen einer Geradverzahnung eines Getriebes

### 3.8 Spektrale Signalanalyse mehrstufiger Getriebe

#### 3.8.1 Rechenzeiteffiziente Spektrumsermittlung bei quasistatischen Ansätzen

Grundsätzlich wird für die Spektralanalyse ein Signal, dessen Länge einem Vielfachen der Signalperiode entspricht, gefordert. Ist dies nicht der Fall, kann Leakage auftreten. Um den Leakage-Effekt abzumildern, gibt es zwei Möglichkeiten. Durch eine geeignete Wahl einer Fensterfunktion werden die zeitlichen Ränder des Signals abgeschwächt. Die Periode des Signals



wird dadurch künstlich erzeugt. Alternativ kann Leakage durch eine lange Messdauer reduziert werden. Die Frequenzauflösung wird dadurch feiner und die Breite des Hauptmaximums (engl: lobe width) des Fenstersignals, in diesem Fall die Rechteckfunktion, wird geringer. Der Leakage-Effekt ist ausführlich in [Ror11] beschrieben.

In der Simulation ist die ausgewertete Signallänge viel kürzer als in der Messung. Bei einstufigen Getrieben reicht es oft, die Anregung, z.B. die Zahnkraft einer abweichungsfreien Verzahnung, in einer Eingriffsteilung auszuwerten, da diese der Periode des Signals entspricht. Dies führt zu einer gröberen Frequenz- bzw. Ordnungsauflösung in der Spektralanalyse. Deshalb ist Leakage bei der Simulation eindeutiger zu erkennen als in der Messung.

Sind Abweichungen zwischen Zahneingriffen vorhanden, z.B. Teilungsfehler, wird ein längerer Zeitverlauf für die Spektralanalyse benötigt. Dies erfordert mehr Rechenzeit.

Die Ermittlung der Periode der resultierenden Anregung bei mehrstufigen Getrieben ist wesentlich komplizierter, da sich die resultierende Anregung aus den Anregungen aller Verzahnungsstufen mit unterschiedlichen Anregungsfrequenzen zusammensetzt. Grundsätzlich gilt, die Periode der resultierenden Anregung bei mehrstufigen Getrieben ist wesentlich länger als die Perioden der zusammengesetzten Teilsignale der jeweiligen Stufen. Dadurch wird die Rechenzeit zur Ermittlung des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe maßgeblich verlängert, um die Ergebnisse zur Spektralanalyse weiterzuverarbeiten. In diesem Abschnitt wird eine Methode zur zeiteffizienten Spektralanalyse der resultierenden Anregungen aus den quasistatischen Ansätzen vorgestellt.

Zunächst wird die Periode der resultierenden Anregung bestimmt. In **Bild 3.4** ist beispielhaft ein zweistufiges Getriebe gezeigt. Da die resultierende Anregung sich aus den Anregungen der jeweiligen Verzahnungsstufen zusammensetzt, lässt sich die Periode der resultierenden Anregung an der Zwischenwelle bestimmen. Die Periode der Lagerkraft aus Kraftanregungen auf der Zwischenwelle lässt sich aus den Perioden der Kraftanregungen der ersten und zweiten Stufe ermitteln. Die Periode der einzelnen Kraftanregung der  $i$ -ten Stufe  $N_{\text{PDR},i}$  ist von der Verzahnung abhängig. Ist die Verzahnung abweichungsfrei, so ist die Kraftanregung nach einem Zahneingriff periodisch ( $N_{\text{PDR},i} = 1$ ). Sind alle Zähne abweichungsbehaftet, lässt sich die Periode  $N_{\text{PDR},i}$  aus dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zähnezahlen des Ritzels  $z_{1,i}$  und Rades  $z_{2,i}$  der  $i$ -ten Stufe wie folgt berechnen.

$$N_{\text{PDR},i} = \text{kgv}(z_{1,i}, z_{2,i}) \quad (3.33)$$

---

$N_{\text{PDR},i}$	-	Anzahl der Zahneingriffe		$z_{1/2,i}$	-	Zähnezahl des Ritzels bzw. Rades
--------------------	---	--------------------------	--	-------------	---	----------------------------------

---

Die Periode der Kraftanregung lässt sich in die Anzahl der Umdrehungen auf der  $j$ -ten Welle umrechnen als:

$$N_{i,j,\text{per}} = \frac{N_{\text{PDR},i}}{z_{i,j}} \quad (3.34)$$

$N_{i,j,\text{per}}$	-	Anzahl der Umdrehungen auf der $j$ -ten Welle		$z_{i,j}$	-	Zähnezahl des Zahnrads der $i$ -ten Stufe auf der $j$ -ten Welle
----------------------	---	--	--	-----------	---	---

Setzt sich die Lagerkraft aus Kraftanregungen der  $i$ -ten und  $i + 1$ -ten Stufe zusammen, so lässt sich die Periode der Lagerkraft als  $N_{j,\text{Lagerkraft}}$  Umdrehungen der  $j$ -Welle wie folgt berechnen:

$$N_{j,\text{Lagerkraft}} = \text{kgv}(N_{i,j,\text{per}}, N_{i+1,j,\text{per}}, N_{i+2,j,\text{per}}, N_{i+3,j,\text{per}}, \dots) \quad (3.35)$$

$$= \text{kgv}\left(\frac{N_{\text{PDR},i}}{z_{i,j}}, \frac{N_{\text{PDR},i+1}}{z_{i+1,j}}, \frac{N_{\text{PDR},i+2}}{z_{i+2,j}}, \frac{N_{\text{PDR},i+3}}{z_{i+3,j}}, \dots\right) \quad (3.36)$$

$$= \text{kgv}\left(\text{kgv}\left(\frac{N_{\text{PDR},i}}{z_{i,j}}, \frac{N_{\text{PDR},i+1}}{z_{i+1,j}}\right), \text{kgv}\left(\frac{N_{\text{PDR},i+2}}{z_{i+2,j}}, \frac{N_{\text{PDR},i+3}}{z_{i+3,j}}\right), \dots\right) \quad (3.37)$$

**Gleichung (3.37)** weist darauf hin, dass die Ermittlung des kleinsten gemeinsamen Vielfachens paarweise verschachtelt werden kann. Zusätzlich ist die Ermittlung des kleinsten gemeinsamen Vielfachens von rationalen Zahlen möglich, wenn die Brüche auf den gleichen Nenner erweitert werden.

Aus **Gleichungen (3.35) – (3.37)** folgt, dass:

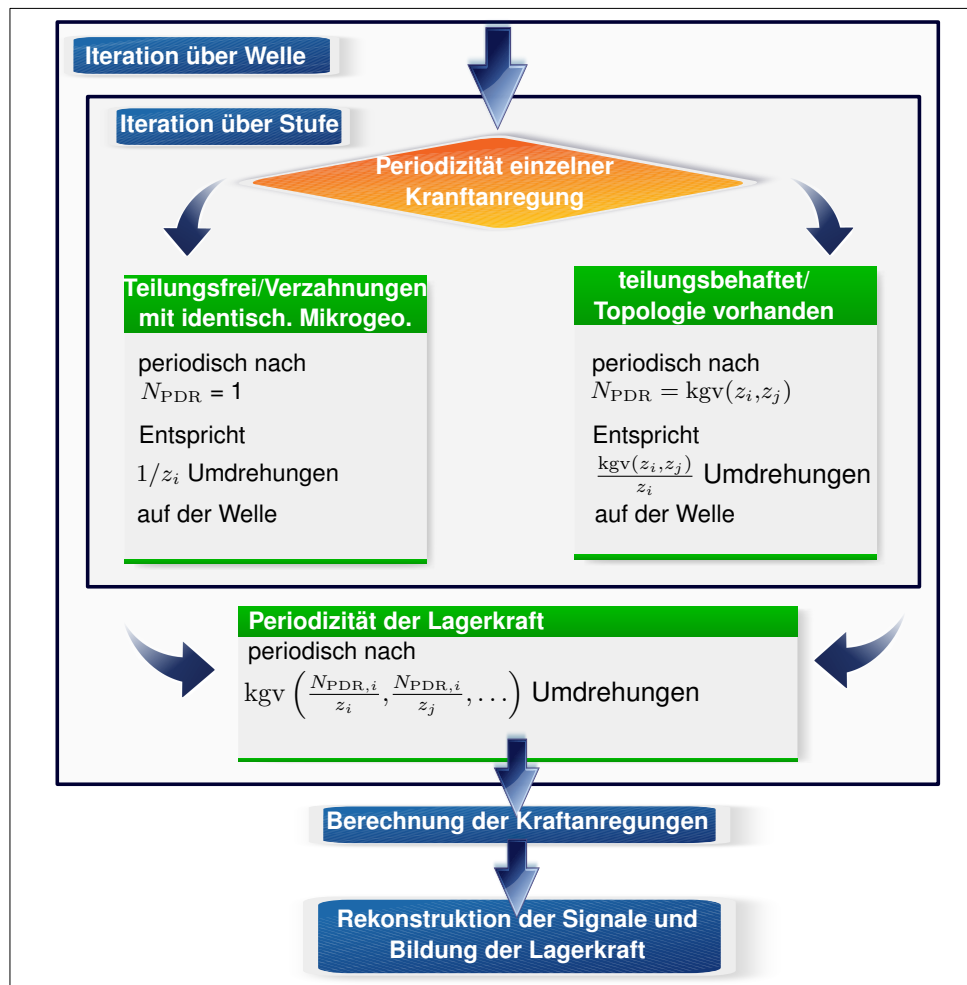
- die Periode der Lagerkraft aus Kraftanregungen ein ganzzahliges Vielfaches der Perioden aller zusammengesetzten Kraftanregungen ist,
- die Periode der Lagerkraft wesentlich länger ist, als die Perioden der zusammengesetzten Kraftanregungen.

Um Leakage zu vermeiden, muss aus diesem Grund die Periode der Lagerkraft berücksichtigt werden. Dadurch wird die Rechenzeit erheblich erhöht, obwohl die Teilsignale (Kraftanregungen) bereits periodisch sind.

Um die Rechenzeit auf sinnvolle Weise zu beschleunigen, können die zeitlichen Kraftanregungen nach ihrer periodischen Dauer rekonstruiert werden. Das heißt, die Teilsignale werden mit dem wiederholten Verlauf vervollständigt. Schließlich werden sie vektoriell in die Lagerkraft überlagert. **Bild 3.17** zeigt grafisch die Schritte zur Ermittlung der einzelnen Signalperioden bis zur Bildung der Lagerkraft. Es sei hier anzumerken, dass diese Methode nur für die quasistatische Berechnung verwendet werden kann und nicht bei der dynamischen Simulation angewendet werden darf. In der dynamischen Berechnung weist nämlich die zeitliche Wechselwirkung des Welle-Lager-Systems in räumlichen Freiheitsgraden einen großen Einfluss auf das Schwingungsverhalten auf, sodass diese auch bei der Bestimmung der Signalperiode zu berücksichtigen ist.

### 3.8.2 Spektralanalyse des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe

Wegen der Überlagerung der Verzahnungsanregungen ist die Analyse des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe wesentlich aufwändiger als die bei einstufigen Getrieben. Bei

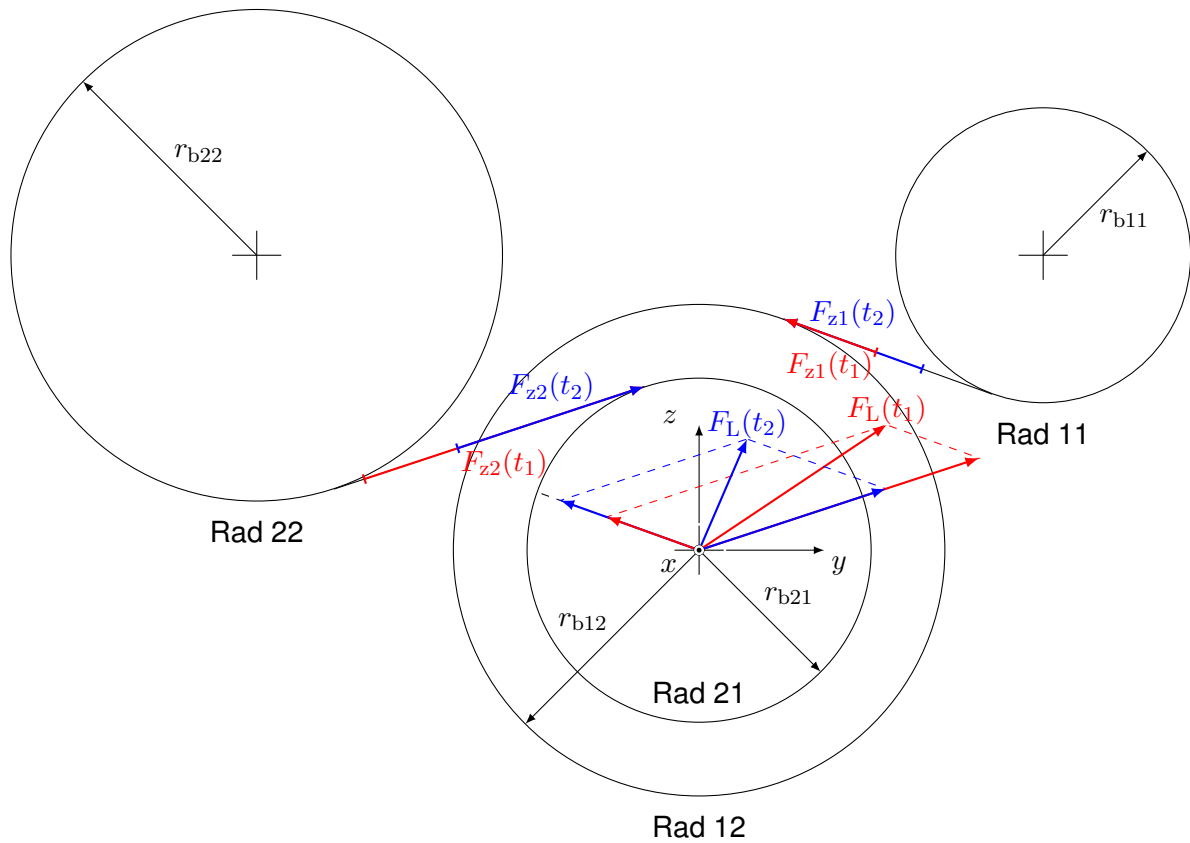


**Bild 3.17:** Ermittlung der Periodizität der Lagerkraft anhand der Periodizitäten der zusammengesetzten Kraftanregungen

einer evolventischen Verzahnung wirkt die Zahnkraft während des gesamten Abwälzvorgangs konstant in der Richtung, aber nicht im Betrag. Die Zahnkraft ist im Betrag zeitveränderlich in Abhängigkeit der Wälzstellung. Das Spektrum kann unmittelbar aus der Spektralanalyse aus der Zahnkraft ermittelt werden. In diesem Abschnitt wird die erweiterte Methode zur Spektralanalyse mehrstufiger Getriebe gezeigt.

Im Gegensatz dazu weist das resultierende Schwingungsverhalten eines mehrstufigen Getriebes durch die vektorielle Überlagerung der einzelnen Anregungen einen zeitveränderlichen Betrag und eine zeitveränderliche Richtung auf. Diese wird in **Bild 3.18** grafisch erklärt. In diesem Bild ist die resultierende Lagerkraft an der Zwischenwelle eines zweistufigen Getriebes gezeigt. Angenommen ist, dass sich die Lagerkraft nur durch die Überlagerung aller Zahnkräfte ergibt. Die Räder sind durch ihre Grundkreise abgebildet. Dadurch können die Eingriffslinien beider Verzahnungsstufen ermittelt werden. Das Rad 11 treibt im Uhrzeigersinn an.

Die Zahnkräfte bei einem Zeitpunkt  $t_1$  sind rot dargestellt. Die daraus resultierende Lagerkraft  $F_L(t_1)$  lässt sich grafisch aus beiden Kraftkomponenten ermitteln. Bei einem späteren Zeitpunkt



**Bild 3.18:** Resultierende Lagerkraft an der Zwischenwelle eines zweistufigen Getriebes durch die Überlagerung von Zahnkräften aller Verzahnungsstufen

$t_2$  weisen die beiden Zahnkräfte andere Beträge auf. Die Schwankung der Zahnkräfte in Abhängigkeit der Zeit führt neben den Einflussgrößen der Verzahnungen wie die veränderlichen Verzahnungsstufigkeiten, Flankenformen, Verlagerungen der Wellen, usw., auch auf die unterschiedlichen Zahneingriffsfrequenzen beider Stufen zurück. Die Zahnkräfte wirken weiterhin auf die Eingriffslinien. Durch die Änderung der Kraftkomponente ändert sich nun die Lagerkraft  $F_L(t_2)$  sowohl in dem Betrag als auch in der Richtung.

Grundsätzlich kann bei mehrstufigen Getrieben die resultierende Kraftgröße, wie die Lagerkraft aus Kraftanregungen aus **Gleichung (2.4)**, vektoriell in einem raumfesten orthogonalen Koordinatensystem mit  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achsen wie folgt beschrieben werden:

$$\underline{F}_L(t) = F_{L,x}(t) \cdot \underline{e}_x + F_{L,y}(t) \cdot \underline{e}_y + F_{L,z}(t) \cdot \underline{e}_z \quad (3.38)$$

---

$F_{L,i}(t)$	N	Lagerkraftkomponente in $i$ -Achse		$\underline{e}_i$	-	Einheitsvektor der $i$ -Achse
--------------	---	------------------------------------	--	-------------------	---	-------------------------------

---

Bei der Fouriertransformation einer Zeitfunktion  $x(t)$  gilt eine lineare Eigenschaft:

$$\mathcal{F}[ax(t)] = a\mathcal{F}[x(t)] \quad (3.39)$$

Da die Einheitsvektoren in **Gleichung (3.38)** konstant sind, lässt sich das Spektrum der resul-

tierenden Anregung mit Hilfe der **Gleichung (3.39)** wie folgt berechnen:

$$\mathcal{F}[\underline{F}_L(t)] = \mathcal{F}[F_{L,x}(t)] \cdot \underline{e}_x + \mathcal{F}[F_{L,y}(t)] \cdot \underline{e}_y + \mathcal{F}[F_{L,z}(t)] \cdot \underline{e}_z \quad (3.40)$$

$$\underline{F}_L(\omega) = F_{L,x}(\omega) \cdot \underline{e}_x + F_{L,y}(\omega) \cdot \underline{e}_y + F_{L,z}(\omega) \cdot \underline{e}_z \quad (3.41)$$

Nach **Gleichung (3.41)** setzt sich das Spektrum des resultierenden Schwingungsverhaltens eines mehrstufigen Getriebes aus Spektralkomponenten in den orthogonalen Achsen zusammen. Die Spektren in den jeweiligen Achsen lassen sich unabhängig voneinander auswerten.

### 3.9 Erweiterung der Kennwertbildung zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe

Zur Sicherstellung der praktischen Vergleichbarkeit zwischen unterschiedlichen Getrieben bzw. Verzahnungsvarianten werden Kennwerte zur Beurteilung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen definiert, s. auch **Abschnitt 2.4**. Im Allgemeinen gehen die Spektren in die Kennwertbildung ein und werden zu einem skalaren Wert komprimiert. Bei mehrstufigen Getrieben setzt sich das Spektrum der resultierenden Anregung aus den Spektren in den orthogonalen Achsen zusammen. Deshalb wird die Kennwertbildung unter Berücksichtigung der erweiterten Spektralanalyse bei mehrstufigen Getrieben weiterentwickelt und in diesem Abschnitt vorgestellt.

Grundsätzlich können die Kennwerte zur Beurteilung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen in **Abschnitt 2.4** im Allgemeinen wie folgt formuliert werden:

$$L = 10 \cdot \log \sum_i \left( \frac{a_i \cdot F_i}{b_0} \right)^2 \quad (3.42)$$

$i$	-	Zahneingriffsordnung	$F_i$	N	Kraftspektrum bei der Zahneingriffsordnung $i$
$a_i$	-	Ordnungsspezifische Konstante	$b_0$	N	Referenzwert

Diese Gleichung lässt sich wie folgt umschreiben:

$$\sum_i \left( \frac{a_i \cdot F_i}{b_0} \right)^2 = 10^{\frac{L}{10}} \quad (3.43)$$

Der Kennwert in **Gleichung (3.42)** bewertet grundsätzlich das Anregungsverhalten einer Verzahnung anhand des Kraftspektrums in **Gleichung (3.43)** in einer Richtung. Bei mehrstufigen Getrieben lässt sich das resultierende Kraftspektrum vektoriell aus den Spektralkomponenten in **Gleichung (3.41)** zusammensetzen. Deshalb wird die Kennwertbildung für die Auswertung des Schwingungsverhalten mehrstufiger Getriebe erweitert. In Abhängigkeit der Ordnung  $i$  lässt sich das Spektrum in **Gleichung (3.41)** wie folgt umschreiben:

$$\underline{F}_{\text{res},i} = F_{x,i} \cdot \underline{e}_x + F_{y,i} \cdot \underline{e}_y + F_{z,i} \cdot \underline{e}_z \quad (3.44)$$

Betragsmäßig gilt:

$$F_{\text{res},i}^2 = F_{x,i}^2 + F_{y,i}^2 + F_{z,i}^2 \quad (3.45)$$

Durch Multiplikation der Konstante  $\left(\frac{a_i}{b_0}\right)^2$  und darauf folgende Summation gilt:

$$\sum_i \left(\frac{a_i \cdot F_{\text{res},i}}{b_0}\right)^2 = \sum_i \left(\frac{a_i \cdot F_{x,i}}{b_0}\right)^2 + \sum_i \left(\frac{a_i \cdot F_{y,i}}{b_0}\right)^2 + \sum_i \left(\frac{a_i \cdot F_{z,i}}{b_0}\right)^2 \quad (3.46)$$

Wird **Gleichung (3.43)** in die rechten Terme eingesetzt, so ergibt sich:

$$\sum_i \left(\frac{a_i \cdot F_{\text{res},i}}{b_0}\right)^2 = 10^{\frac{L_x}{10}} + 10^{\frac{L_y}{10}} + 10^{\frac{L_z}{10}} \quad (3.47)$$

Wird diese Gleichung in **Gleichung (3.42)** eingesetzt, lässt sich daraus der Kennwert für das resultierende Schwingungsverhalten wie folgt ermitteln:

$$L_{\text{res}} = 10 \cdot \log \left( 10^{\frac{L_x}{10}} + 10^{\frac{L_y}{10}} + 10^{\frac{L_z}{10}} \right) = 10 \cdot \log \left( \sum_j 10^{\frac{L_j}{10}} \right) \quad (3.48)$$

---

$L_{\text{res}}$	dB	Kennwert des resultierenden Schwingungsverhaltens	$L_j$	dB	Kennwert des Schwingungsverhaltens in der $j$ -Achse
------------------	----	---	-------	----	--

---

Diese Gleichung stimmt mit der Addition der Schalldruckpegel inkohärenter Schallquellen überein, s. auch [Bie17]. Das heißt zwischen den Schallquellen, also den Lagerkraftkomponenten der einzelnen Achsen, treten keine Interferenzen auf. In der Berechnung wird diese Annahme mit Hilfe der orthogonalen Achsen in **Gleichung (3.44)** sichergestellt. Es ist darauf hinzuweisen, dass diese Gleichung für die Auswertung des Schwingungsverhaltens an den Lagerstellen anwendbar ist. An diesen Stellen werden die Kräfte ins Gehäuse weitergeleitet. Im Gehäuse können Interferenzen auftreten und müssen mit berücksichtigt werden. Dies kann z.B. in Form von der Superpositionen der Schallquellen geschehen und ist von den Gehäusen abhängig. Die Auswertung des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe im Gehäuse wird nicht im Rahmen dieser Dissertation behandelt.

Mit Hilfe der **Gleichung (3.48)** können Kennwerte zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens in den jeweiligen orthogonalen Achsen unabhängig voneinander gebildet werden. Der Kennwert des resultierenden Schwingungsverhaltens kann aus den ermittelten Kennwerten bestimmt werden. **Gleichung (3.48)** ist auch für einstufige Getriebe anwendbar. Bei einstufigen Getrieben wirkt die Zahnkraft entlang einer Eingriffsrichtung. Fällt die Krafrichtung mit einer der gewählten Achsen zusammen, wirken keine Kräfte in den weiteren orthogonalen Achsrichtungen. Der resultierende Kraftpegel ist dann gleich dem Kraftpegel entlang der Eingriffsrichtung.

### 3.10 Fazit

Die geometrischen Einbaulagen haben bei mehrstufigen Getrieben einen Einfluss auf die Phasenverschiebung zwischen den Anregungen unterschiedlicher Verzahnungsstufen. Um diesen Effekt rechnerisch zu berücksichtigen, wird der Zusammenhang zwischen der Einbaulage und der Eingriffsstellung formuliert. Damit ist es möglich, das überlagerte Schwingungsverhalten genauer zu erfassen.

Um die Kreuzeinflüsse der Verzahnungsstufen zu berücksichtigen, wird die Berechnung des Verformungsverhaltens des Getriebes mit Hilfe des linear elastischen Gesamtgetriebemodells durchgeführt. Bei den quasistatischen Berechnungen wie der Drehwegabweichung bzw. der Kraftanregung geht die Verformung als Eingangsgröße ein. Durch die genaue Berücksichtigung der Kreuzeinflüsse lassen sich die quasistatischen Größen hochwertig auswerten.

Die quasistatische Berechnung zeichnet sich durch kurze Rechenzeit aus. Dabei wird der Drehzahleinfluss vernachlässigt. Bei mehrstufigen Getrieben werden die Ergebnisse außerdem durch die Übersetzungen beeinflusst. Durch die Übersetzung werden das Drehmoment und die Drehzahl gewandelt. Ohne Berücksichtigung des Drehzahleinflusses wäre die Verzahnungsanregung an der nächsten Stufe aufgrund des höheren vorliegenden Drehmoments höher als die der vorherigen Verzahnungsstufen. Im Gegensatz dazu wird die Drehzahl durch die Übersetzung  $i > 1$  ins Langsame umgewandelt. In den meisten Fällen wird der Abstand zwischen der Zahneingriffsfrequenz und der Verzahnungshauptresonanz vergrößert. Im Allgemeinen gilt, je näher die Zahneingriffsfrequenz an der Hauptresonanzfrequenz liegt, desto größer wird die Zahnkraftamplitude im Vergleich zur quasistatischen Größe. Aus diesem Grund ist es bei mehrstufigen Getriebe wichtig, den Drehzahleinfluss zu berücksichtigen. Um eine gute Aussage über das Schwingungsverhalten mehrstufiger Getriebe ohne Einbuße von Rechenzeit zu erhalten, kann eine quasidynamische Auswertung durchgeführt werden. Dieser Begriff wird definiert, um die Auswertung von der konventionellen quasistatischen Auswertung zu unterscheiden. Dabei wird der Drehzahleinfluss in Form von einer Vergrößerungsfunktion ausgedrückt und mit der quasistatischen Anregungsgröße multipliziert. Eine Methode zur Ermittlung einer Vergrößerungsfunktion von einer Anregungsquelle zu einer Schwingungsantwort aus dem linear elastischen Gesamtgetriebemodell wird vorgestellt. Bei dieser Methode können Signalarten und -stellen der gewählten Anregungen bzw. Antworten frei gewählt werden. Somit wird eine flexible Auswertung für unterschiedliche Auswerteziele ermöglicht.

Um eine detaillierte Aussage über das Schwingungsverhalten mehrstufiger Getriebe zu bekommen, kann eine Dynamiksimulation ausgeführt werden. Analog zur quasistatischen Berechnung wird das Welle-Lager-System mit Hilfe des linear elastischen Gesamtgetriebemodells abgebildet. Eine Methode zur impliziten Berücksichtigung der Lagersteifigkeiten wird vorgestellt, um die Wechselwirkung zwischen den dynamischen Lasten und die daraus resultierenden Lagersteifigkeiten in jedem Zeitschritt zu identifizieren. An den Verzahnungsstufen werden die dynami-

schen Verzahnungssteifigkeiten nach Weber / Banaschek [Web55] in Erweiterung von Schmidt [Sch73] in jedem Zeitschritt ermittelt und in das Gleichungssystem integriert. Die Systemdämpfung wird nach Caughey [Cau60] ermittelt. Dieser Dämpfungsansatz ist die Erweiterung des klassischen Dämpfungsansatzes nach Rayleigh [Ray45] und kann eine beliebige Anzahl Dämpfungswerte an unterschiedlichen Anregungsfrequenzen berücksichtigen, was bei mehrstufigen Getrieben empfehlenswert ist.

Durch die Kopplung der Zahnkontaktanalyse mit dem linear elastischen Gesamtgetriebesystem in der Dynamiksimulation ist es nun möglich, eine hochwertige Auswertung von unterschiedlichen Zustandsgrößen wie Auslenkungen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen sowie Kräften und Momenten an unterschiedlichen Stellen zu gewährleisten. Die dynamische Zahnkontaktanalyse ermöglicht zusätzlich die zeitliche Betrachtung zahnradspezifischer Auswertegrößen, wie die dynamische Drehwegabweichung, die dynamischen Zahnkräfte sowie die dynamischen Lastverteilungen. Dadurch wird eine genaue rechnerische Beurteilung des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe unter dynamischen Einflüssen ermöglicht.

Aufgrund der Tatsache, dass das Schwingungsverhalten mehrstufiger Getriebe sich aus den Anregungskomponenten der jeweiligen Verzahnungsstufen zusammensetzt, wird die Spektralanalyse des resultierenden Signals behandelt. Die Periode der resultierenden Schwingungsantwort mehrstufiger Getriebe ist wesentlich länger als die der Komponenten der jeweiligen Verzahnungsstufen. Um Leakage zu vermeiden, ist die Berechnung des Schwingungsverhaltens innerhalb mindestens einer Periode erforderlich, was zu steigender Rechenzeit führt. Eine zeiteffiziente Methode zur Ermittlung des Spektrums bei quasistatischen Berechnungen wird vorgestellt. Mit Hilfe der Rekonstruktion der Teilsignale mit deren periodischen Anteilen ist die Ermittlung eines hoch auflösenden Spektrums ohne Einbuße von Rechenzeit möglich.

Außerdem sind sowohl der Betrag als auch die geometrische Richtung der daraus resultierenden Schwingungsantwort zeitlich nicht konstant. Eine Methode zur Ermittlung des resultierenden Spektrums wird vorgestellt, in dem das Signal in einem orthogonalen Koordinatensystem komponentenweise beschrieben wird und daraus eine Spektralanalyse in den jeweiligen Achsen durchgeführt wird. Das resultierende Spektrum ergibt sich aus diesen ermittelten Komponenten. Analog dazu können die in der Literatur gängigen Kennwerte zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe erweitert werden. Dabei ergibt sich der Kennwert der resultierenden Schwingungsantwort aus den Werten der jeweiligen Achsen. Die Summation erfolgt analog zu der von inkohärenten Schallquellen.

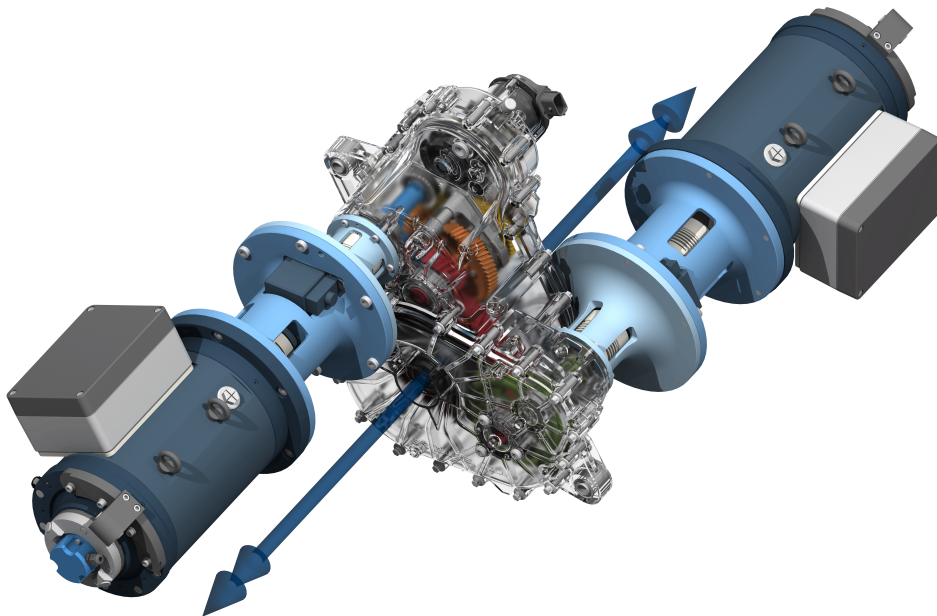


## 4 Messtechnische Untersuchung des Schwingungsverhaltens eines mehrstufigen Getriebes

Die experimentellen Untersuchungen werden an dem mehrstufigen Prüfstandsgetriebe des Speed2E-Projekts mit Eingangsdrehzahlen bis zu  $30000 \text{ min}^{-1}$  durchgeführt. Mittels Beschleunigungssensoren wird der Körperschall an geeigneten Positionen am Getriebegehäuse gemessen und damit auf die Verzahnungsanregung zurückgeschlossen. In den folgenden Kapiteln werden der Prüfstand und die verwendete Schwingungssensorik, sowie die Versuchsplanung und die herrschenden Betriebsbedingungen während der Testläufe vorgestellt.

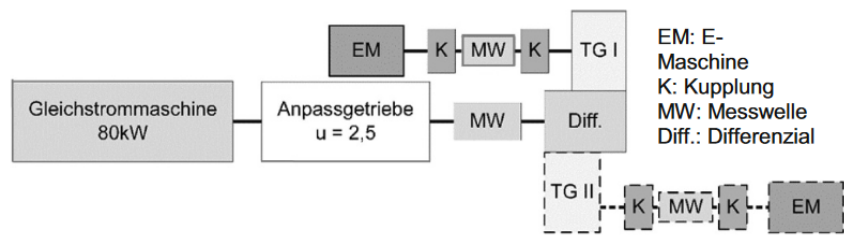
### 4.1 Beschreibung des Prüfaufbaus

#### 4.1.1 Prüfgetriebe



**Bild 4.1:** Elektromechanischer Hochdrehzahltriebsstrang Speed2E [Idl16a]

Das Speed2E-Getriebe besteht aus zwei Teilgetrieben, die jeweils von baugleichen permanent erregten 60 kW-Synchronmaschinen mit bis zu  $30000 \text{ min}^{-1}$  angetrieben werden. Das Teilgetriebe I (TG I) ist zweistufig mit einer Gesamtübersetzung von 21 konzipiert. Bei maximaler Motordrehzahl wird durch das TG I die Fahrzeuggeschwindigkeit von 160 km/h realisiert. Das Teilgetriebe II (TG II) ist dreistufig mit 2 schaltbaren Gängen mit Gang 1 für das Anfahren ( $i=32$ ) bzw. mit Gang 2 als Effizienzgang ( $i=15$ ) ausgeführt. Um das Prüfgetriebe möglichst kompakt aufbauen zu können, sind am Prüfstand beide Teilgetriebe über einen gemeinsamen Final Drive des integrierten Kegelraddifferenzials mechanisch gekoppelt [Idl16b].



**Bild 4.2:** Schematischer Prüfaufbau zur Schwingungsmessung am Speed2E-Getriebe (nach [Fis17])

In **Bild 4.2** ist der schematische Prüfstands Aufbau dargestellt. Zum Antreiben verfügt jedes Teilgetriebe über eine Elektromaschine, die durch eine 800-V-Gleichspannungsquelle gespeist wird. Mit Hilfe eines Umrichters wird der Gleichstrom in Drehstrom wechselgerichtet. Die Messung des Drehmoments erfolgt über eine Messwelle. Am Prüfstand wird eine Abtriebsseite über ein gesperrtes Differenzial blockiert. Fahrwiderstände werden anhand einer Belastungsmaschine simuliert. Mittels der Belastungsmaschine wird die Abtriebsdrehzahl gleichzeitig geregelt. Das Abtriebsdrehmoment wird anhand einer weiteren Messwelle gemessen. Alle Messwellen sind mit Balgkupplungen verbunden. Dadurch werden die Fluchtungsfehler ausgeglichen [Idl16a].

#### 4.1.2 Prüfverzahnung

##### Verzahnungen des TG I

Insgesamt stehen vier Verzahnungsvarianten an der ersten Verzahnungsstufe des TG I zur Verfügung. Diese vier Verzahnungsvarianten wurden mit unterschiedlichen Auslegungszielen konzipiert und wurden aus 20MnCr5 gefertigt. Als Ausgangsvariante dient die Referenzverzahnung. Diese Verzahnung wurde nach dem Stand der Technik der heutigen automobilen Fahrzeuggetriebe ausgelegt. Diese Auslegung zielt auf eine gute Tragfähigkeit und ein niedriges Anregungsniveau.

Grundsätzlich besteht bei hohen Betriebsdrehzahlen bis zu  $30000 \text{ min}^{-1}$  die Gefahr von Resonanzen. Um den Betrieb in der Resonanz zu vermeiden, wird bei der überkritischen Verzahnung durch die größere Zähnezahzahl realisiert. Dabei wird bei dem gegebenen Achsabstand der kleinste Modul der vorgegebenen Werkzeugdatenbank verwendet. Diese Verzahnung besitzt somit die maximale Zähnezahzahl. Die Zahneingriffsfrequenz wird dadurch vergrößert. Außerdem wird die Verzahnungseigenfrequenz durch die geringere Übersetzung gesenkt. Diese ist auf das niedrige Massenverhältnis zwischen Ritzel und Rad zurückzuführen. Somit wird der Abstand zwischen der Verzahnungseigenfrequenz und der Zahneingriffsfrequenz deutlich vergrößert.

In der Praxis werden die Getriebe vorwiegend unterkritisch ausgelegt. Das heißt, die Verzahnungshauptresonanz wird nie während des Betriebs erreicht. Die unterkritische Verzahnung wurde daher durch eine sehr kleine Zähnezahzahl am Ritzel ausgelegt. Diese Verzahnung weist eine niedrigere Zahneingriffsfrequenz im Vergleich zu den anderen Verzahnungsvarianten auf.

**Tabelle 4.1:** Hauptgeometriedaten der Prüfverzahnungen der 1. Verzahnungsstufe und der 2. Verzahnungsstufe des Teilgetriebes I des Speed2E-Getriebes nach [Sep17]

Verzahnungsdaten	Einheit	Stufe 1				Stufe 2
		Referenz	Unterkritisch	Überkritisch	Low-Loss	
Zähnezahl	-	18/89	13/66	27/100	27/133	18/77
Achsabstand	mm	86	86	86	86	126
Übersetzung	-	4.944	5.077	3.704	4.926	4.278
Normalmodul	mm	1.42	2.00	1.25	1.03	2.50
Eingriffswinkel	°	17.5	15.0	17.5	22.5	17.5
Verzahnungsbreite	mm	20.0	22.0	21.0	21.5	32.0
Schrägungswinkel	°	-29/+29	-19/+19	-24/+24	-19/+19	+16/-16
Profilverschiebungsfaktor	-	0.550/-1.132	0.950/0.471	0.500/-1.178	0.100/-1.175	0.771/0.300
Profilüberdeckung	-	1.670	1.475	1.593	1.042	1.573
Sprungüberdeckung	-	2.065	1.088	2.071	2.063	1.088
Fusskreisdurchmesser	mm	25.91/136.36	24.29/135.44	34.32/129.97	26.91/139.72	42.88/193.98
Kopfnutzkreisdurchmesser	mm	34.20/144.60	34.90/146.00	40.90/136.196	30.30/144.30	56.00/207.20
Zahnverlustfaktor	-	0.22	0.22	0.18	0.07	0.18

Zur Erzielung eines hohen Wirkungsgrades wurde die Low-Loss-Verzahnung konzipiert. Diese Verzahnung weist eine sehr kleine Profilüberdeckung auf. Die Eingriffsstrecke dieser Verzahnung ist um den Wälzpunkt konzentriert, so dass die Gleitanteile im ganzen Eingriff gering sind.

**Tabelle 4.1** fasst die Verzahnungsdaten der ersten und zweiten Stufe des TG I zusammen. Während alle anderen Verzahnungen die Übersetzungen  $i \approx 5$  haben, weist die überkritische Verzahnung die Übersetzung  $i \approx 3.7$  auf.

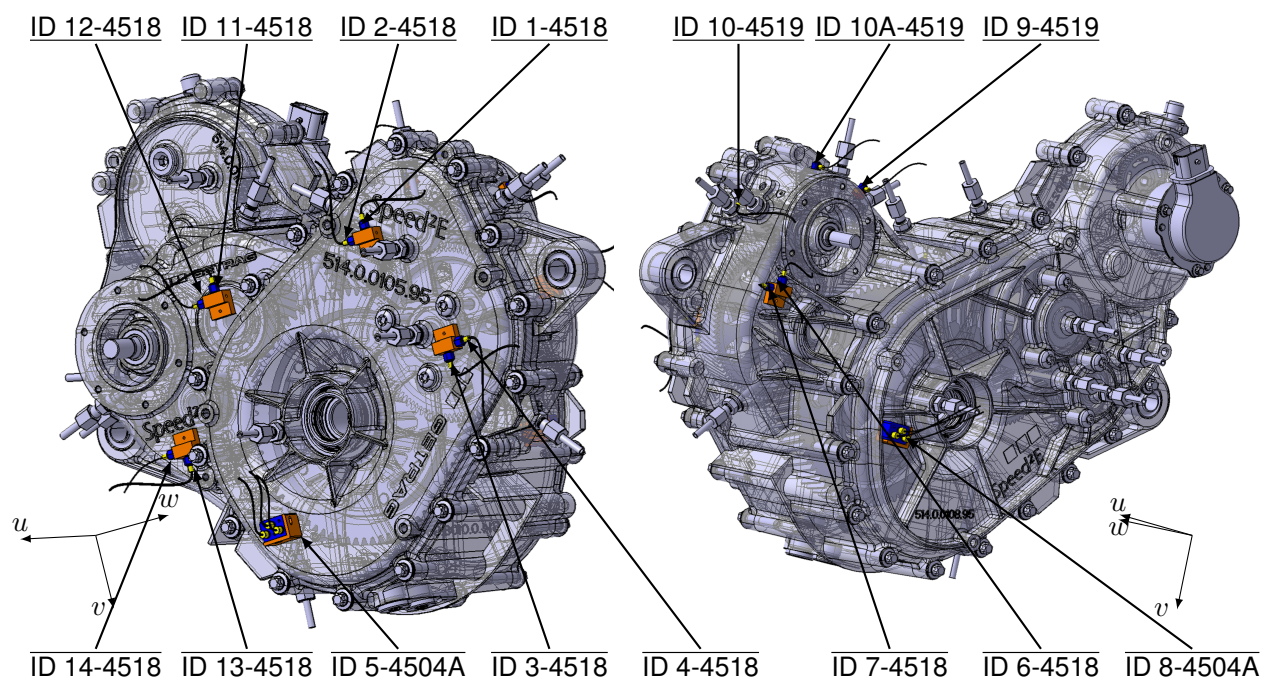
#### 4.1.3 Verwendete Messtechnik

Das Schwingungsverhalten des mehrstufigen Speed2E-Getriebe wird anhand des Körperschalls mit Hilfe von piezoelektrischen Beschleunigungssensoren der Firma Brüel & Kjær aufgezeichnet. Die verwendeten Sensorentypen sind 4504 A [Brü19a], 4518 [Brü19b] und 4519 [Brü19c]. Nach Angaben des Herstellers besitzen die Sensoren die Empfindlichkeit von 10 mV/g. Die Typen 4518 und 4519 sind einachsig und messen die Beschleunigungen längst ihrer Befestigungsgewindes. Die Resonanz beider Sensoren liegt bei 45000 Hz. Der Messbereich liegt zwischen 1 – 25000 Hz. Der Sensortyp 4504 ist dreiaxsig und kann Beschleunigungen aller translatorischen Richtungen aufnehmen. Die Resonanz liegt jedoch niedriger bei 20000 Hz. Der Messbereich zwischen 1 – 10000 Hz ist zuverlässig.

Als Spannungsquelle für die Sensoren dient der Messverstärker Brüel & Kjær 2694, durch den Messsignale zur Weiterverarbeitung in einem Messrechner verstärkt werden. Bis zu 16 Messkanäle kann der Messverstärker gleichzeitig verarbeiten.

Die Datenerfassung erfolgt über einen Messrechner der Firma National Instrument NI PXI 8110 [Nat19a]. Der Rechner hat zwei Messkarten der Typen NI PXI 6123 [Nat19b] und NI PXI 6221 [Nat19c]. Jede Messkarte kann jeweils acht Messkanäle verarbeiten. Zur Datenaufzeichnung wird ein FZG-internes, in LabView implementiertes Messprogramm verwendet.

An der Abtriebswelle wird die Drehzahl mit Hilfe eines induktiven Sensors der Firma Sick Typ IM12-02BPS-ZC1 [Sic19] aufgezeichnet. Die Aufzeichnung der Drehzahl geschieht parallel zur Messung des Körperschalls. Somit kann die Drehzahl zu jedem beliebigen Messpunkt zugeordnet werden.



**Bild 4.3:** Positionierung der Beschleunigungssensoren am Gehäuse des Speed2E-Getriebes. Die Sensoren ID 1-10 erfassen das Schwingungsverhalten von TG I, die Sensoren ID 11-14 das Verhalten von TG II (nach [Sep17])

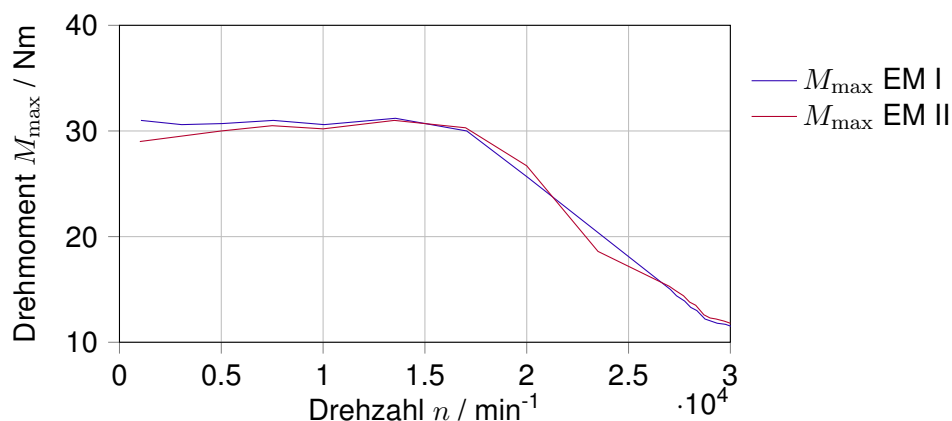
Die Beschleunigungssensoren werden möglichst nah an den Lagerstellen beider Teilgetriebe angebracht und mit den angepassten Adaptern auf der Oberfläche des Gehäuses aufgeklebt. Die Positionen der Sensoren sind in **Bild 4.3** dargestellt. Bei den einachsigen Sensoren werden sie orthogonal zueinander angeordnet. In dem dargestellten Bild ist die  $v$ -Achse nach unten gerichtet. Die  $u$ -Achse ist parallel zu den Längsachsen der Wellen. Die  $w$ -Achse ergibt sich aus dem Koordinatensystem.

Bei dem TG I können die Sensoren in der Nähe aller Lagerstellen angebracht werden. Aufgrund der Gehäuseform ist diese bei TG II nicht möglich. Der Körperschall dieses Teilgetriebes wird an je einer Lagerstelle der Wellen gemessen.

## 4.2 Versuchsprogramm

Das Schwingungsverhalten des mehrstufigen Getriebes wird anhand von Hochläufen bei konstantem Drehmoment untersucht. Dabei wird der Prüfstand über einem Drehzahlbereich am Antrieb von  $500 - 30000 \text{ min}^{-1}$  innerhalb der Messdauer von 140 s gefahren. Der Körperschall wird anhand von Beschleunigungssensoren an den unterschiedlichen Positionen gemessen.

Um den progressiven Drehmomentabfall der Elektromaschine beim hohen Drehzahlbereich (Feldschwächbereich) zu vermeiden, wird der Prüfstand bei der konstanten Teillast von 10 Nm untersucht. Bei diesem Motormoment ist sichergestellt, dass die Elektromaschine eine konstante Last über dem untersuchten Drehzahlbereich abgeben kann, s. auch **Bild 4.4**. Durch



**Bild 4.4:** Gemessene Volllastkennlinien der beiden Synchronmaschinen EM I (TG I) und EM II (TG II) (nach [Mar17], geändert)

die Übersetzung beträgt das Abtriebsdrehmoment des TG I  $T_{\text{ab}} = 210 \text{ Nm}$ .

Das Speed2E-Getriebe besteht aus 2 Teilgetrieben, die am Prüfstand jeweils durch eine Elektromaschine angetrieben werden. Deshalb kann das Schwingungsverhalten bei unterschiedlichen Konfigurationen untersucht werden. Um die Einflüsse unterschiedlicher Verzahnungen an der Hochdrehzahlstufe des TG I zu untersuchen, wird das TG II vollständig ausgebaut.

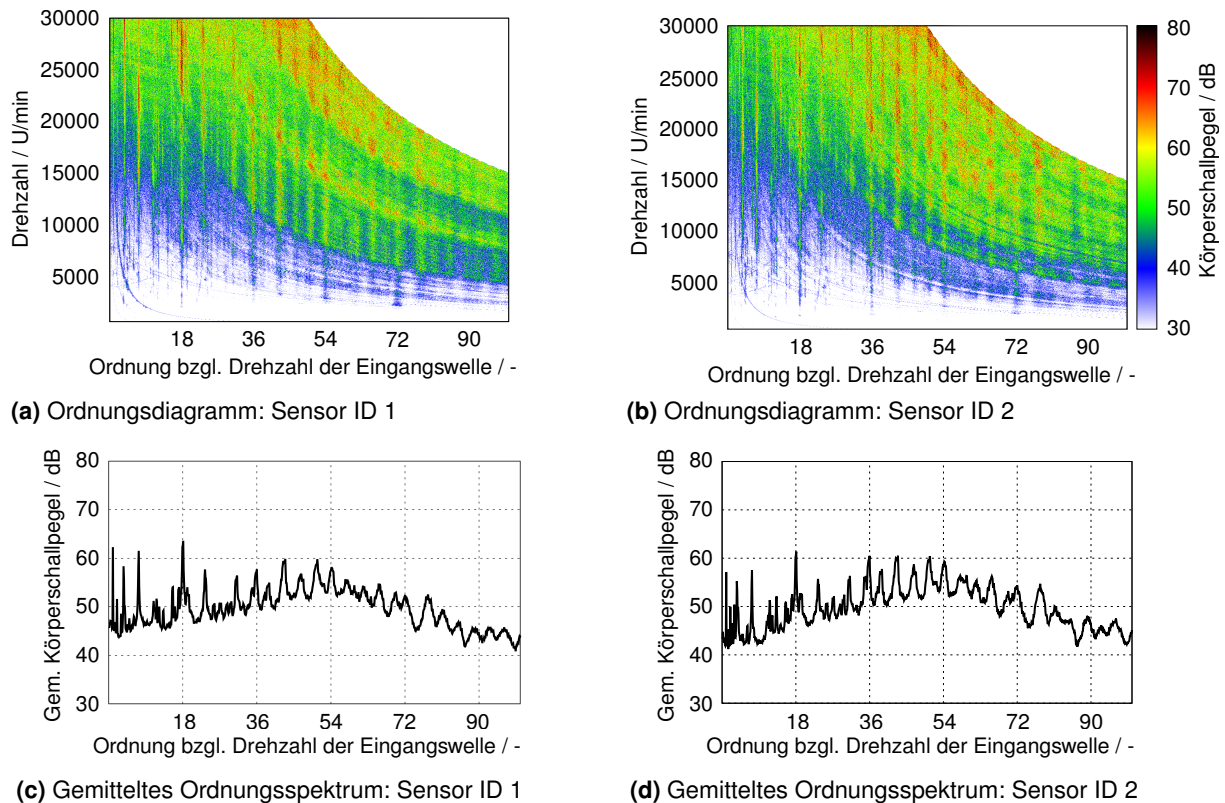
**Tabelle 4.2:** Versuchsplanung am Speed2E-Getriebe mit Teilgetriebe I und II zur Körperschallmessung. Alle Versuche werden mit einem konstanten Motormoment von jeweils 10 Nm beider Elektromaschinen und einer Hochlaufdauer von 140 s durchgeführt nach [Sep17]

Prüflauf	Verzahnung TG I	Drehzahl EM I	Drehzahl EM II
TG I	Referenz	500 – 30000 $\text{min}^{-1}$	-
	Überkritisch	500 – 30000 $\text{min}^{-1}$	-
	Unterkritisch	500 – 30000 $\text{min}^{-1}$	-
	Low-Loss	500 – 30000 $\text{min}^{-1}$	-

### 4.3 Auswerteverfahren der resultierenden Signale

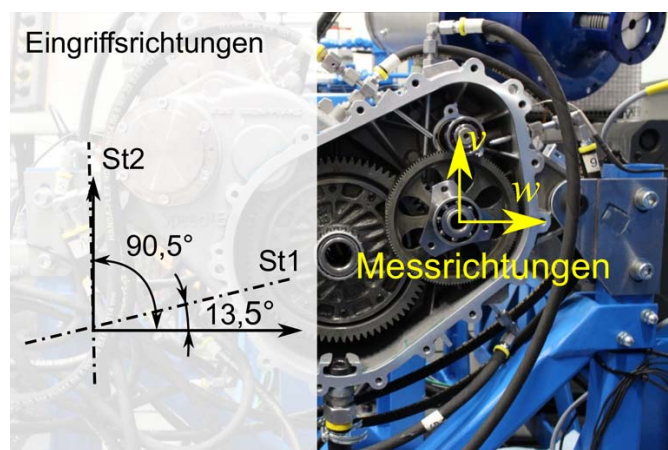
Grundsätzlich werden Beschleunigungssensoren bei der Messung des Körperschalls eines einstufigen Getriebes in der Praxis entlang der Eingriffsrichtung angebracht, da die Richtung der Zahnkraft entlang der Eingriffsrichtung wirkt und sich zeitlich nicht ändert. Die gemessenen Signale können unmittelbar mit Hilfe der Fourier-Transformation zur Spektralanalyse verwendet werden. Bei mehrstufigen Getrieben lässt sich die Richtung der Lagerkraft durch die Überlagerungen der Zahnkräfte unterschiedlicher Verzahnungsstufen zeitlich verändern. Dadurch sind die Erfassung und die Auswertung des resultierenden Schwingungsverhaltens wesentlich komplizierter und müssen erweitert werden.

Um das resultierende Schwingungsverhalten zu erfassen, wird deshalb der Körperschall mit Hilfe orthogonal angeordneter Beschleunigungssensoren gemessen. Die Messsignale werden entlang der vorgelegten Achsen der jeweiligen Sensoren aufgezeichnet. In **Bild 4.5** sind Ordnungsdigramme und gemittelte Ordnungsspektren des Körperschalls des TG I mit der Referenz

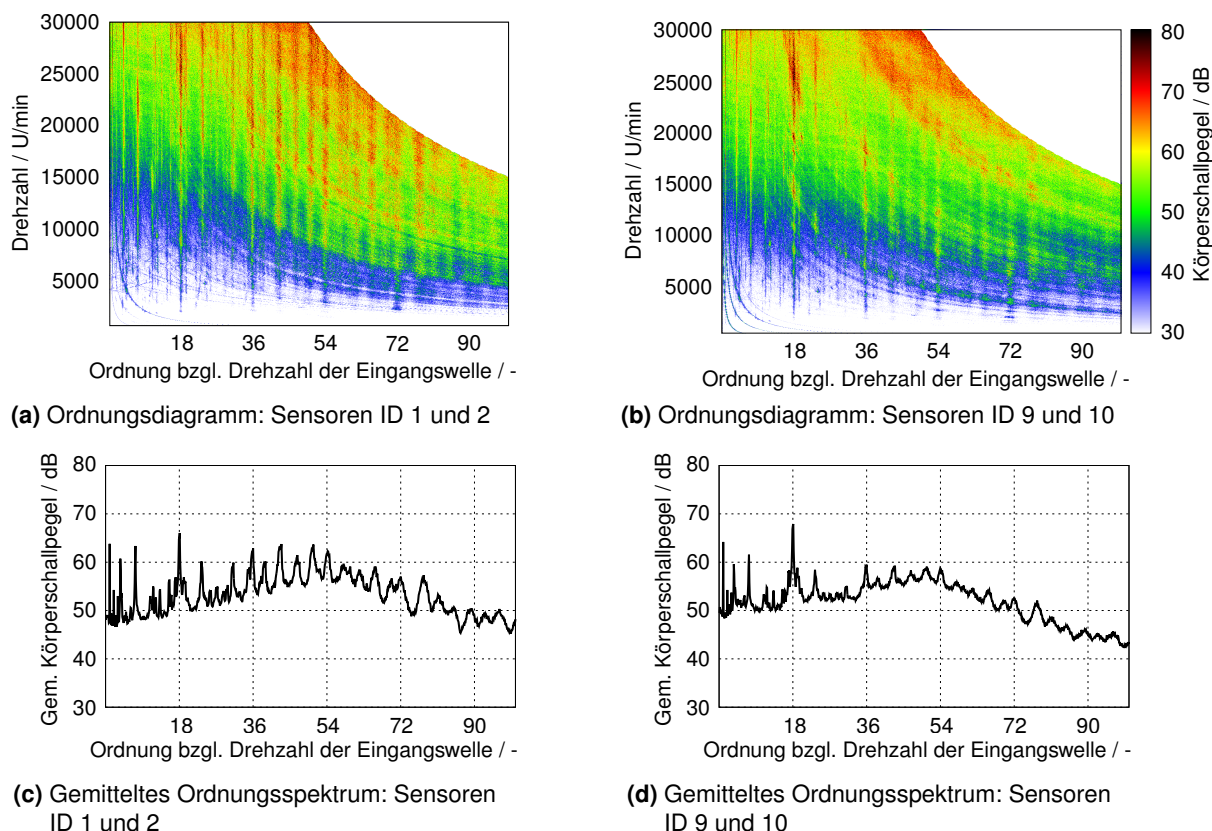


**Bild 4.5:** Schwingungsverhalten des TG I mit der Referenzverzahnung an einem Lager der Eingangswelle aus einzelnen Sensoren

renzverzahnung an der ersten Stufe in beiden orthogonalen radialen Richtungen in der  $v$ - und  $w$ -Achse an einem Lager der Eingangswelle (vgl. **Bild 4.3** – Sensor ID 1 und 2) aus einem Hochlauf dargestellt. Beide Sensoren zeigen die Überhöhungen an der Ordnung 18 und deren Vielfachen sowie an der Ordnung 3.6 und deren Vielfachen. Diese sind auf die Anregungen der ersten und zweiten Verzahnungsstufe zurückzuführen und werden im nächsten Abschnitt beschrieben.



**Bild 4.6:** Eingriffsrichtung der Verzahnungsstufen des Teilgetriebes I mit der Referenzverzahnung an der 1. Stufe (nach [Sep17])



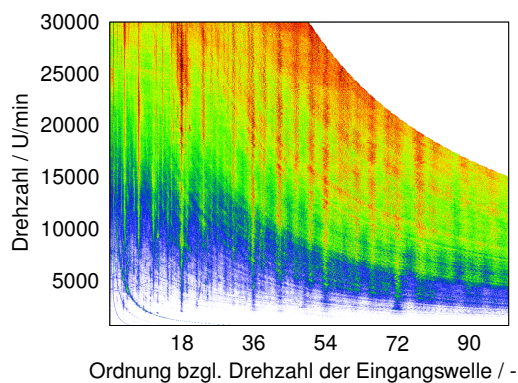
**Bild 4.7:** Schwingungsverhalten des TG I mit der Referenzverzahnung an beiden Lagern der Eingangswelle

Die Anregungen der zweiten Stufe bei der Ordnung 3.6 und deren Vielfachen sind leicht ausgeprägter zu erkennen beim Sensor ID 1. **Bild 4.6** zeigt die geometrischen Eingriffsrichtungen beider Verzahnungsstufen und die Messrichtungen am TG I. **Bild 4.3** und **Bild 4.6** weisen darauf hin, dass die aufgezeichnete Messrichtung des Sensors ID 1 beinahe mit der Eingriffsrichtung der zweiten Stufe zusammenfällt. Anregungen der zweiten Stufe werden hauptsächlich entlang dieser Messrichtung aufgezeichnet.

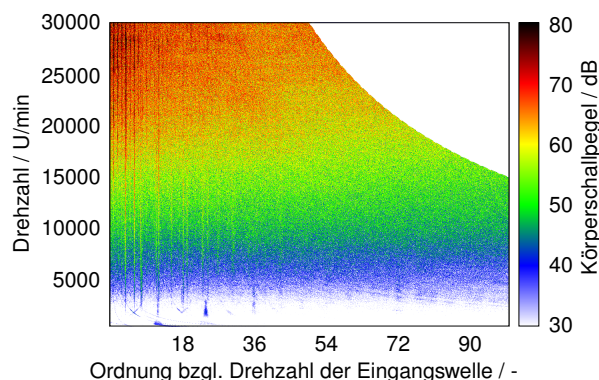
Um das resultierende Schwingungsverhalten an der Lagerstelle zu ermitteln, lässt sich dieses nach **Gleichung (3.41)** bzw. **Gleichung (3.48)** aus dessen Teilkomponenten in den jeweiligen Achsen zusammensetzen. Daraus ergibt sich der resultierende Körperschall aus den Sensoren ID 1 und ID 2 wie in **Bild 4.7(a)** und **Bild 4.7(c)** dargestellt. In den beiden Diagrammen ist das Schwingungsverhalten aus den beiden Sensoren gezeigt (vgl. **Bild 4.5**). Analog dazu zeigen **Bild 4.7(b)** und **Bild 4.7(d)** das resultierende Schwingungsverhalten am anderen Lager aus Sensor ID 9 und 10. Im Vergleich zu den Verzahnungsanregungen an dem ersten Lager sind die Verzahnungsanregung an diesem Lager identifizierbar, jedoch weniger ausgeprägt. Grund dafür kann z.B. der Einfluss des Lagerabstandes sein, da das erste Lager näher zum Radkörper liegt (vgl. **Bild 4.3**). An den unteren linken Ecken der Ordnungsdigramme in **Bild 4.7(a)** und **Bild 4.7(b)** sind 3 Eigenfrequenzen als Hyperbeln identifizierbar. Diese sind ca. bei 300 Hz,



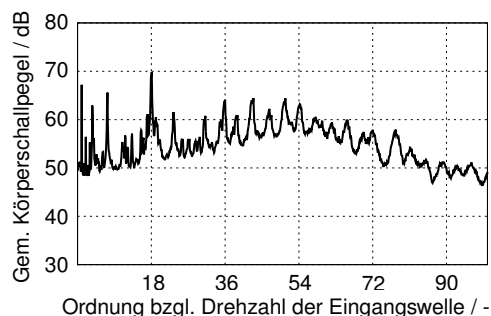
150 Hz und 50 Hz und gehören zu den Eigenfrequenzen des Getriebes. Diese Überhöhungen sind größer am Lager der Sensoren ID 9 und 10.



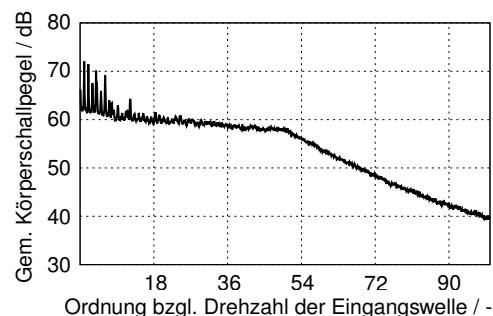
(a) Ordnungsdiagramm: beide Lager



(b) Ordnungsdiagramm: Überlagerung der Sensoren ID 1 und 2 im Zeitbereich



(c) Gemittelttes Ordnungsspektrum: beide Lager der Eingangswelle



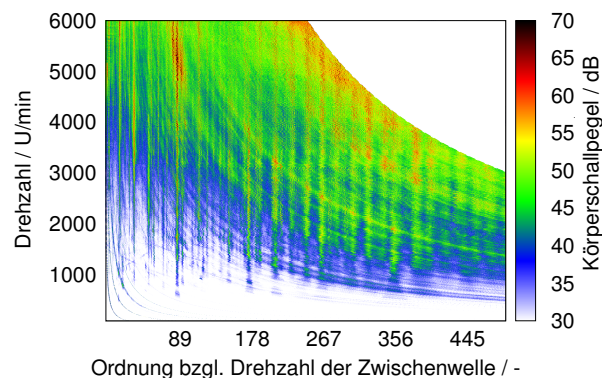
(d) Gemittelttes Ordnungsspektrum: Überlagerung der Sensoren ID 1 und 2 im Zeitbereich

**Bild 4.8:** Schwingungsverhalten des TG I mit der Referenzverzahnung an der Eingangswelle

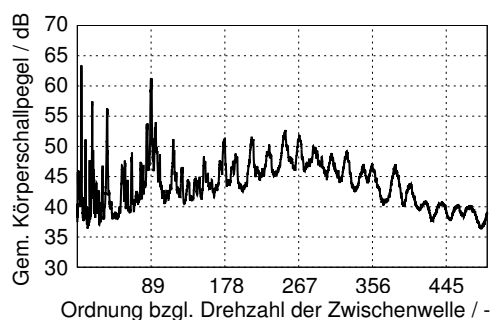
Das resultierende Schwingungsverhalten der Eingangswelle lässt sich durch die Addition der inkohärenter Schallquellen aller Lager analogerweise nach **Gleichung (3.41)** sowie **Gleichung (3.48)** ermitteln und wird in **Bild 4.8(a)** und **Bild 4.8(c)** dargestellt. In den beiden Diagrammen sind Überhöhungen aufgrund der Anregungen beider Verzahnungsstufen sowie der Eigenfrequenzen eindeutig zu erkennen.

Im Gegensatz zum oben beschriebenen Verfahren werden die Messsignale bei der Auswertung des überlagerten Schwingungsverhaltens aus Sensor ID 1 und 2 in **Bild 4.8(b)** und **Bild 4.8(d)** im Zeitbereich vektoriell addiert, bevor die Spektralanalyse ausgeführt wird. In den beiden Diagrammen können im Vergleich zu **Bild 4.8(a)** und **Bild 4.8(c)** Überhöhungen an den Ordnungen nicht mehr zugeordnet werden, und die Eigenfrequenzen sind nicht mehr identifizierbar. Dies weist darauf hin, dass diese Auswertungsmethode zur Verfälschung der resultierenden Ergebnisse führt und vermieden werden sollte.

Analog zur Auswertung des Schwingungsverhaltens der Eingangswelle zeigen **Bild 4.9(a)** und **Bild 4.9(b)** das Schwingungsverhalten an der Zwischenwelle. Die Ordnungen in den Diagrammen sind bezüglich der Wellendrehzahl der Zwischenwelle dargestellt. Die Anregungen der



(a) Ordnungsdiagramm



(b) Gemittetes Ordnungsspektrum

**Bild 4.9:** Schwingungsverhalten des TG I mit der Referenzverzahnung an der Zwischenwelle

ersten Stufe sind deshalb an der Ordnung 89 und deren Vielfachen zu erkennen. Die Zahl 89 entspricht der Zähnezah des Rades der ersten Stufe, das auf dieser Welle montiert ist. Dementsprechend sind die Anregungen der zweiten Stufe an der Ordnung 18 und deren Vielfachen zu finden, da die Zähnezah des auf dieser Welle montierten Ritzels 18 beträgt. Die Eigendynamik ist ebenfalls im Ordnungsdiagramm erkennbar.

Daraus lässt sich schließen, dass das beschriebene Auswerteverfahren des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe eine detaillierte Ergebnisdarstellung ermöglicht.

## 4.4 Messergebnisse

In diesem Abschnitt wird zunächst das Schwingungsverhalten des zweistufigen Teilgetriebes I mit insgesamt 4 Verzahnungsvarianten untersucht. Um den Kopplungseffekt des Teilgetriebes II auszuschließen, wird das Teilgetriebe II demontiert.

### 4.4.1 Referenzverzahnung

In **Bild 4.8(a)** und **Bild 4.8(c)** sind das Ordnungsdiagramm und das gemittelte Ordnungsspektrum der Eingangswelle gezeigt. Die Ordnung auf der Abszisse wird bezüglich der Drehzahl der Eingangswelle dargestellt. Das weiße Gebiet in der oben rechten Ecke stellt den Bereich oberhalb des auswertebaren Bereichs von 25000 Hz dar. An der Eingangswelle sind die Überhöhungen der ersten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe an der 18. Ordnung und an deren Vielfachen eindeutig zu sehen. Die erste Zahneingriffsordnung der ersten Stufe lässt sich an

der Eingangswelle mathematisch berechnen als:

$$ord_{st1} = \frac{z_{11} \cdot f_{Welle1}}{f_{Welle1}} = z_{11} \tag{4.1}$$

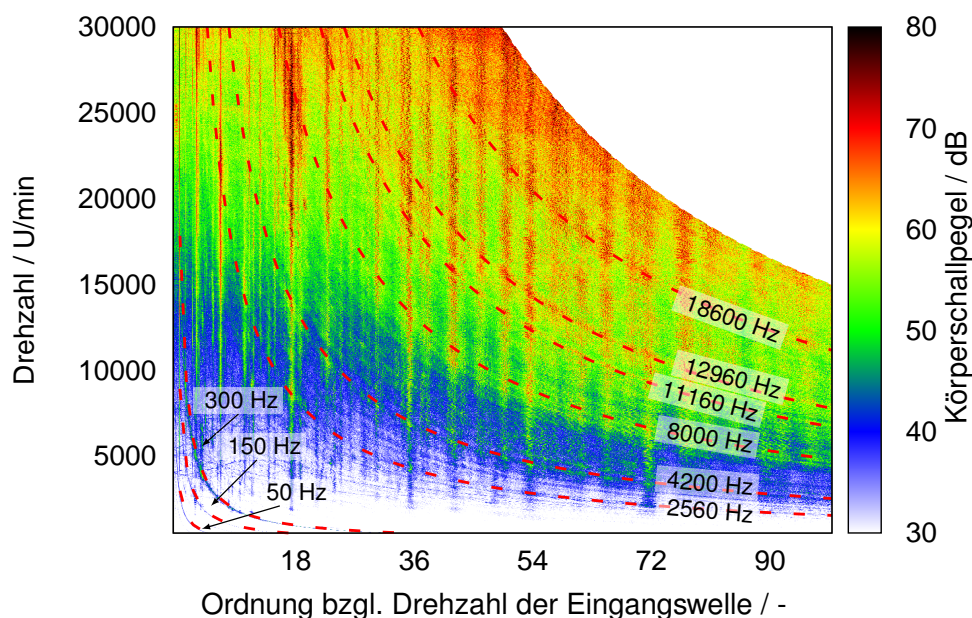
$ord_{st1}$	-	Erste Zahneingriffsordnung bzgl. der Ordnung der Eingangswelle	$z_{11}$	-	Zähnezahl des treibenden Rades der ersten Stufe
$f_{Welle1}$	Hz	Drehfrequenz der Eingangswelle			

Weiterhin sind Überhöhungen an den weiteren Ordnungen sichtbar. Unter Berücksichtigung der Übersetzung lässt sich die erste Zahneingriffsordnung der zweiten Stufe bezüglich der Ordnung der Eingangswelle wie folgt bestimmen:

$$ord_{st2} = \frac{z_{12} \cdot f_{Welle2}}{f_{Welle1}} = \frac{z_{12}}{i_{12}} \tag{4.2}$$

$ord_{st2}$	-	Erste Zahneingriffsordnung der zweiten Stufe bezüglich der Ordnung der Eingangswelle	$z_{12}$	-	Zähnezahl des treibenden Rades der zweiten Stufe
$i_{12}$	-	Übersetzung	$\{ \}_{Welle1,2}$	-	Eingangswelle bzw. Zwischenwelle

Aus diesem Grund lässt sich die Überhöhung an der Ordnung 3.6 zur ersten Zahneingriffsordnung der zweiten Stufe zuordnen. Die Höherharmonischen sind als Vielfache dieser Ordnung sichtbar. Grundsätzlich tauchen die Überhöhungen an den Zahneingriffsordnungen der jeweiligen Verzahnungsstufen in einem diskreten Abstand auf.



**Bild 4.10:** Ordnungsdiagramm des resultierenden Schwingungsverhaltens an der Eingangswelle des TG I mit der Referenzverzahnung und die identifizierbaren Eigenfrequenzen

Resonanzstellen im Ordnungsdiagramm können als überhöhte Amplituden bei bestimmten Betriebspunkten identifiziert werden. Diese Resonanzstellen ergeben sich, wenn die Anregun-

gen, die im Ordnungsdiagramm als senkrechte Linien zu sehen sind, mit einer Eigenfrequenz bei einer bestimmten Drehzahl zusammentreffen. Durch den Bezug der Ordnung auf die Ritzelfrequenz erscheinen die Eigenfrequenzen in Form von Hyperbeln im Ordnungsdiagramm.

**Bild 4.10** zeigt die im Ordnungsdiagramm identifizierbaren Eigenfrequenzen des TG I mit der Referenzverzahnung. Da sich diese Frequenzen durch die visuellen Ermittlung ergeben, können Abweichungen bei der Bestimmung vorliegen. Aus dem Diagramm können Frequenzen bei ca. 18600, 12960, 11160, 8000, 4200, 2560, 300, 150 und 50 Hz identifiziert werden. Bei den Schwingungsauswertungen mit anderen Verzahnungsvarianten in nächsten Abschnitt sind die Eigenfrequenzen im niedrigen Frequenzbereich zwischen 50 – 300 Hz durchaus indentifizierbar. Diese Eigenfrequenzen sind eventuell Eigenfrequenzen des Gehäuses. Die übrigen Eigenfrequenzen im höheren Frequenzbereich können im weiteren Bauteilen zugeordnet werden.

An der ersten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe bei der 18. Ordnung ist eine Amplitudenüberhöhung bei der Drehzahl von ca.  $25000 \text{ min}^{-1}$  eindeutig zu erkennen. Diese weist auf die Eigenfrequenz der Verzahnung hin und entspricht der Frequenz von ca. 8000 Hz. Bei der zweiten Stufe ist die Amplitudenüberhöhung an der zweiten Zahneingriffsordnung durch die Frequenz von ca. 2560 Hz erkennbar und weist auf die Eigenfrequenz der zweiten Stufe hin. Die Frequenz schneidet die Verzahnungsanregung der ersten Zahneingriffsordnung der zweiten Stufe oberhalb der maximalen Drehzahl. Die zweiten Stufe wird deshalb im gesamten Betriebsdrehzahlbereich unterkritisch betrieben.

Grundsätzlich weist die Eingangswelle ein höheres Schwingungsniveau in **Bild 4.8(a)** auf als die Zwischenwelle in **Bild 4.9(a)**. Dieses kann auf unterschiedliche Gründe wie Wellengröße, Lagerabstände, usw. zurückzuführen sein.

Mit Hilfe des Anwendungskraftpegels nach Methode A  $L_{A,F,A}$  lässt sich das Schwingungsverhalten des TG I auswerten. Zunächst muss ein Auswertebereich aus den Drehzahl-, Frequenz- und Ordnungsgrenzen definiert werden. Um einen guten Überblick über das allgemeine Schwingungsverhalten des Getriebes zu erhalten, wird der Auswertebereich in **Tabelle 4.3** möglichst groß ausgewählt.

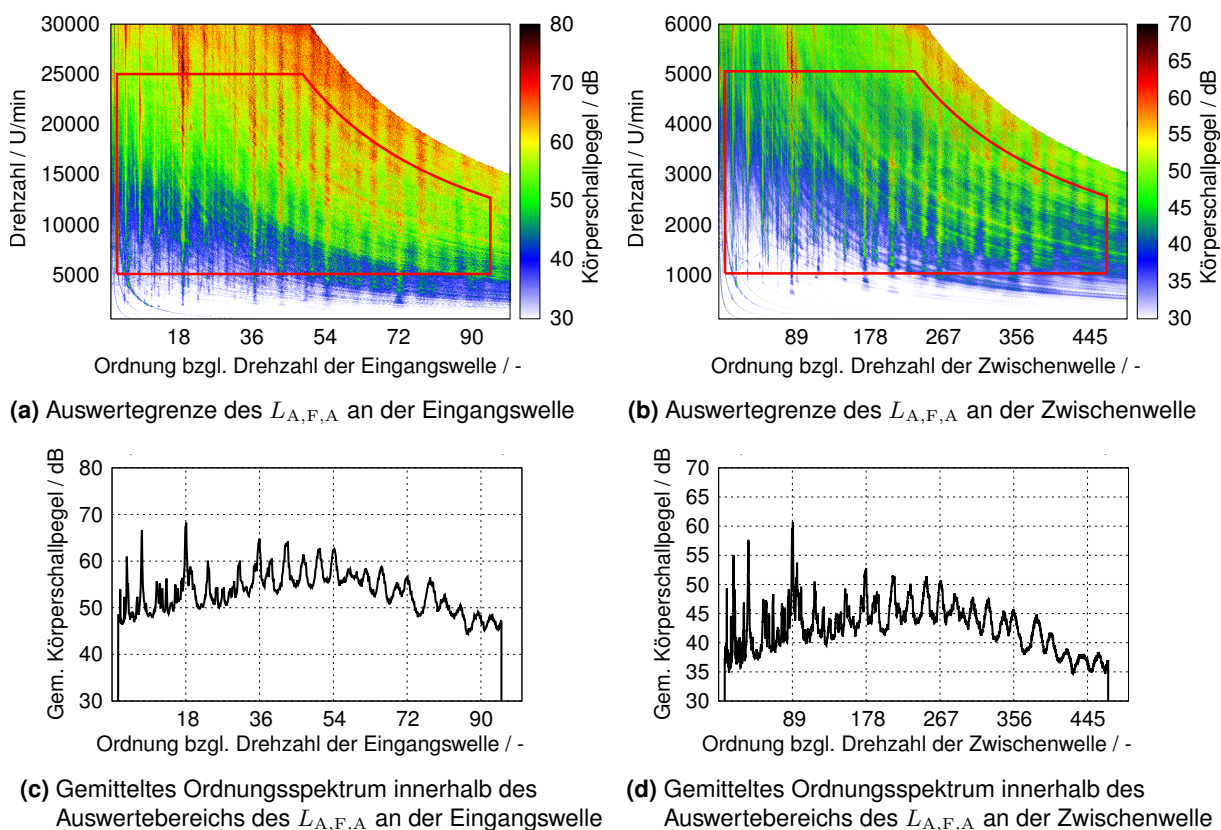
**Tabelle 4.3:** Auswertebereich für den Anwendungskraftpegel  $L_{A,F,A}$  bei der Referenzverzahnung an der ersten Stufe

	Einheit	Eingangswelle	Zwischenwelle
Drehzahlgrenze	$\text{min}^{-1}$	5000 ... 25000	1011.24 ... 5056.18
Frequenzgrenze	Hz	bis 20000 Hz	bis 20000 Hz
Ordnungsgrenze	-	1.5 ... 95	7.42 ... 469.72

Die Grenzen sind bezüglich der Eingangswelle festgelegt. Um die Einflüsse der Fertigungstoleranzen sowie Teilungsabweichungen auszuschließen, werden die Überhöhungen unter der 1. Wellenordnung nicht ausgewertet. Die Grenzen lassen sich für die Zwischenwelle unter Berück-

sichtigung der Übersetzung umrechnen und sind in der Tabelle genannt. Die untere Ordnungsgrenze beträgt damit ca. 7.42, wodurch auch die Einflüsse der Fertigungstoleranzen sowie der Teilungsabweichungen der Zwischenwelle bei der Auswertung ausgeschlossen werden.

Der Auswertebereich beinhaltet insgesamt 5 bzw. 26 Harmonische der Anregungen der ersten bzw. zweiten Stufe in **Bild 4.11(a)** und **Bild 4.11(b)**. An der Eingangswelle beträgt der Anwendungskraftpegel ca. 85 dB und weist ein leicht höheres Schwingungsniveau auf als der an der Zwischenwelle bei ca. 81 dB. In **Tabelle 4.4** sind die Ergebnisse des Anwendungskraftpegels an beiden Wellen gezeigt. Es ist anzumerken, dass in dem Auswertebereich Überhöhungen zwischen der 2. und 4. Zahneingriffsordnung der ersten Stufe (entspricht 36. und 72. Ordnung bezüglich der Drehzahl der Eingangswelle bzw. 10. und 20. Zahneingriffsordnung der zweiten Stufe) identifizierbar sind. An der Zwischenwelle sind diese Ordnung zwischen der 180. und 360. Ordnung bezüglich der Drehzahl zu finden. Diese Überhöhungen gehören zu den Anregungen der Höherharmonischen der zweiten Stufe.



**Bild 4.11:** Schwingungsverhalten des TG I mit der Referenzverzahnung

Um den Einfluss des Anregungsverhaltens von Verzahnungen der jeweiligen Verzahnungsstufen auszuwerten, wird zunächst einen Kraftpegel aus dem gemittelten Ordnungsspektrum definiert. Da das gemittelte Ordnungsspektrum in **Bild 4.8(c)** in dB dargestellt wird, lässt sich das Anregungsverhalten einer Verzahnungsstufe auf Basis der **Gleichung (3.48)** als Summe der

gemittelten Kraftpegel der Zahneingriffsordnungen der Verzahnungsstufe wie folgt definieren:

$$L_{F,\text{gem}} = 10 \cdot \log \left( \sum_i^{n_{\text{ord}}} 10^{\frac{L_{F,\text{gem},i}}{10}} \right) \quad (4.3)$$

$L_{F,\text{gem}}$	dB	Gemittelter Kraftpegel	$L_{F,\text{gem},i}$	dB	Gemittelter Kraftpegel der $i$ -ten Zahneingriffsordnung
$i$	-	Zahneingriffsordnung	$n_{\text{ord}}$	-	Maximale Zahneingriffsordnung

Dieser Kennwert wertet ausschließlich das gemittelte Spektrum der diskreten Zahneingriffsordnungen aus. Um das Anregungsverhalten unterschiedlicher Verzahnungsstufen zu vergleichen, werden die Anregungen bis zu 4. Zahneingriffsordnung bewertet ( $n_{\text{ord}} = 4$ ), da diese Anregungen in der Praxis eine große Rolle für das Anregungsverhalten von Verzahnungen aufweisen (s. auch [Gri10c, Hei11b, Uta15]). Auf Basis des gemittelten Ordnungsspektrums an der Eingangswelle in **Bild 4.8(c)** sowie an der Zwischenwelle in **Bild 4.9(b)** ergeben sich die gemittelten Kraftpegel der jeweiligen Verzahnungsstufen in **Tabelle 4.4**.

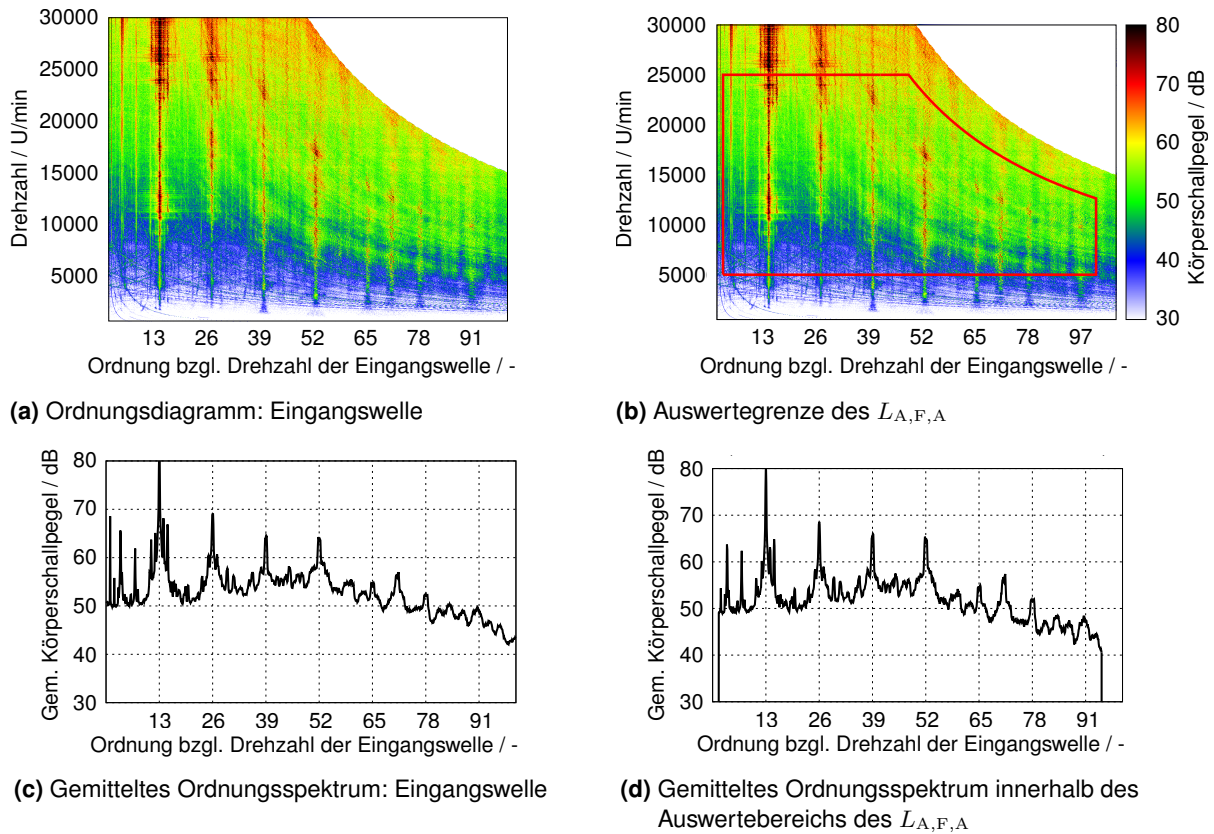
**Tabelle 4.4:** Auswertung des Schwingungsverhaltens des TG I mit der Referenz-Verzahnung an der ersten Stufe anhand unterschiedlicher Kennwerte

	$L_{A,F,A}$ in dB	$L_{F,\text{gem}}$ in dB	
		1. Stufe	2. Stufe
Eingangswelle	85.36	75.97	70.20
Zwischenwelle	81.46	66.75	65.81

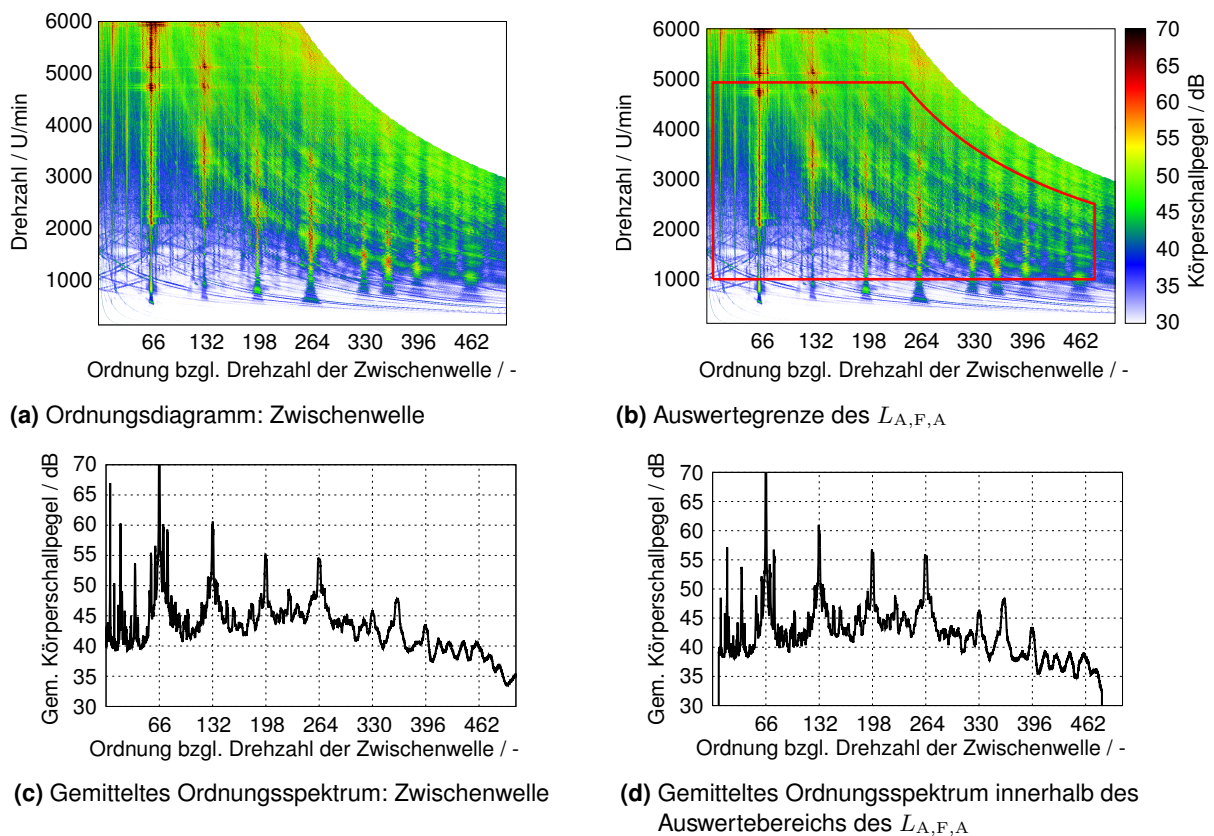
Grundsätzlich weist die erste Verzahnungsstufe ein höheres Anregungsniveau an den beiden Wellen auf als die zweite Verzahnungsstufe. Der gemittelte Kraftpegel  $L_{F,\text{gem}}$  an der Eingangswelle beträgt 75.97 dB in der ersten Stufe gegenüber 70.20 dB von der zweiten Stufe. Der Unterschied des Anregungsniveaus zwischen den beiden Stufen ist weniger ausgeprägt auf der Zwischenwelle bei 66.75 dB von der ersten Stufe gegenüber 65.81 dB in der zweiten Stufe. Dieses lässt sich erklären, dass das Ritzel der zweiten Stufe an der Zwischenwelle befindet und nahe zu einem der ausgewerteten Lager liegt. Darüber hinaus ist das Anregungsverhalten der zweiten Stufe an der Eingangswelle identifizierbar, obwohl keine Räder der zweiten Stufe auf dieser Welle montiert ist.

#### 4.4.2 Unterkritische Verzahnung

Die Ordnungsdigramme des Schwingungsverhaltens an den Wellen des TG I mit der unterkritischen Verzahnung an der ersten Stufe sind in **Bild 4.12** und **Bild 4.13** dargestellt. Bei der unterkritischen Variante verfügen das Ritzel an der ersten Verzahnungsstufe über 13 Zähne und das Rad über 66 Zähne (s. **Tabelle 4.1**). Aus diesem Grund sind die Überhöhungen an der 13. Ordnung und deren Vielfache im Ordnungsdigramm sowie im gemittelten Ordnungsspektrum an der Eingangswelle in **Bild 4.12(a)** und **Bild 4.12(c)** der Anregung der ersten Verzahnungsstufe zuzuordnen. Unter Berücksichtigung der Übersetzung befindet sich die erste

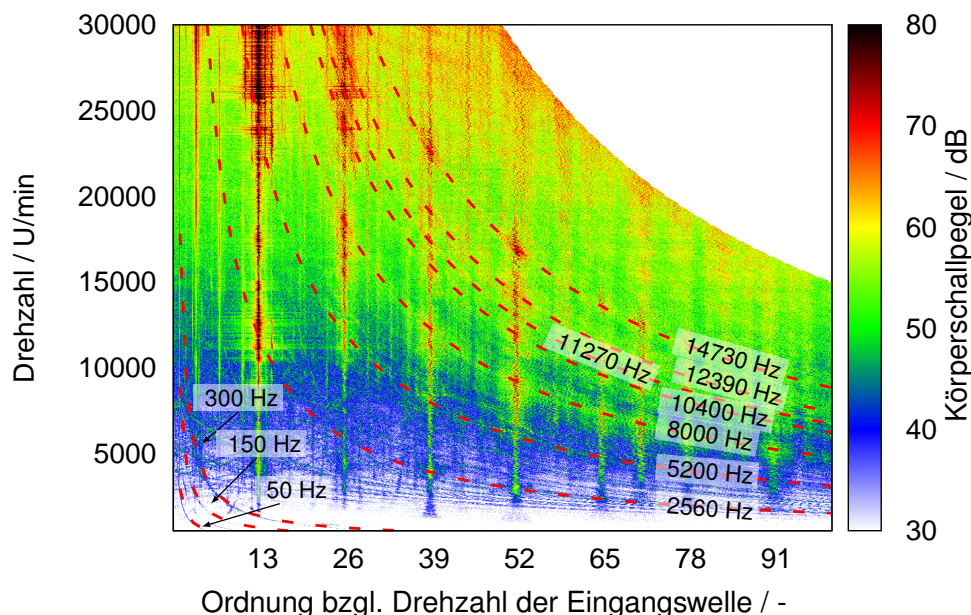


**Bild 4.12:** Schwingungsverhalten an der Eingangswelle des TG I mit der unterkritischen Verzahnung



**Bild 4.13:** Schwingungsverhalten an der Zwischenwelle des TG I mit der unterkritischen Verzahnung

Zahneingriffsordnung der zweiten Stufe an der Ordnung von ca. 3.5 im Ordnungsdigramm der Eingangswelle. An der Zwischenwelle tauchen die Anregungen der ersten Stufe an der 66. Ordnung und deren Vielfachen auf. Da die Verzahnung der zweiten Stufe unverändert bleibt, sind die Anregungen der zweiten Stufe an der 18. Ordnung und deren Vielfachen ähnlich wie bei der Messung der Referenzverzahnung zu sehen. Das Ordnungsdigramm sowie das daraus gemittelte Ordnungsspektrum sind in **Bild 4.13(a)** und **Bild 4.13(c)** dargestellt.



**Bild 4.14:** Ordnungsdigramm des resultierenden Schwingungsverhaltens an der Eingangswelle des TG I mit der unterkritischen Verzahnung und die identifizierbaren Eigenfrequenzen

**Bild 4.14** zeigt die aus dem Ordnungsdigramm ermittelten Eigenfrequenzen des TG I mit der unterkritischen Verzahnung. Dabei sind Eigenfrequenzen von ca. 14730, 12390, 11270, 10400, 8000, 5200, 2560, 300, 300, 150, 50 Hz zu sehen. Die Frequenzen von ca. 8000 und 2560 können den Eigenfrequenzen der ersten und der zweiten Stufe zugeordnet werden. Mit Hilfe des Ordnungsdigramms ist ersichtlich, dass der Betriebspunkt des TG I mit der unterkritischen Verzahnung durch kleinere Zähnezahl am Ritzel weiter unterhalb der Verzahnungshauptresonanz liegt. In Kauf zu nehmen ist jedoch das häufigere Auftauchen der Höherharmonischen innerhalb eines auszuwertenden Ordnungsbereiches. Die zweite Stufe befindet sich im unterkritischen Betriebspunkt.

Die Auswertegrenze für den Anwendungskraftpegel  $L_{A,F,A}$  in **Tabelle 4.5** ist identisch zur vordefinierten Auswertegrenze bei der Referenzverzahnung. Unter Berücksichtigung der Übersetzung werden die auszuwertende Drehzahl- und die Ordnungsgrenze an der Zwischenwelle angepasst. Im Vergleich zur Referenzverzahnung weist die unterkritische Verzahnung weniger Zähne auf. Dadurch tauchen die Überhöhungen durch die Höherharmonischen innerhalb des Auswertebereichs öfter auf. Insgesamt werden 7 Zahneingriffsordnungen der ersten Stufe und 26 Zahneingriffsordnungen der zweiten Stufe ausgewertet.



**Tabelle 4.5:** Auswertebereich für den Anwendungskraftpegel  $L_{A,F,A}$  bei der unterkritischen Verzahnung an der ersten Stufe

	Einheit	Eingangswelle	Zwischenwelle
Drehzahlgrenze	$\text{min}^{-1}$	5000 ... 25000	984.85 ... 4924.24
Frequenzgrenze	Hz	bis 20000 Hz	bis 20000 Hz
Ordnungsgrenze	-	1.5 ... 95	7.62 ... 482.31

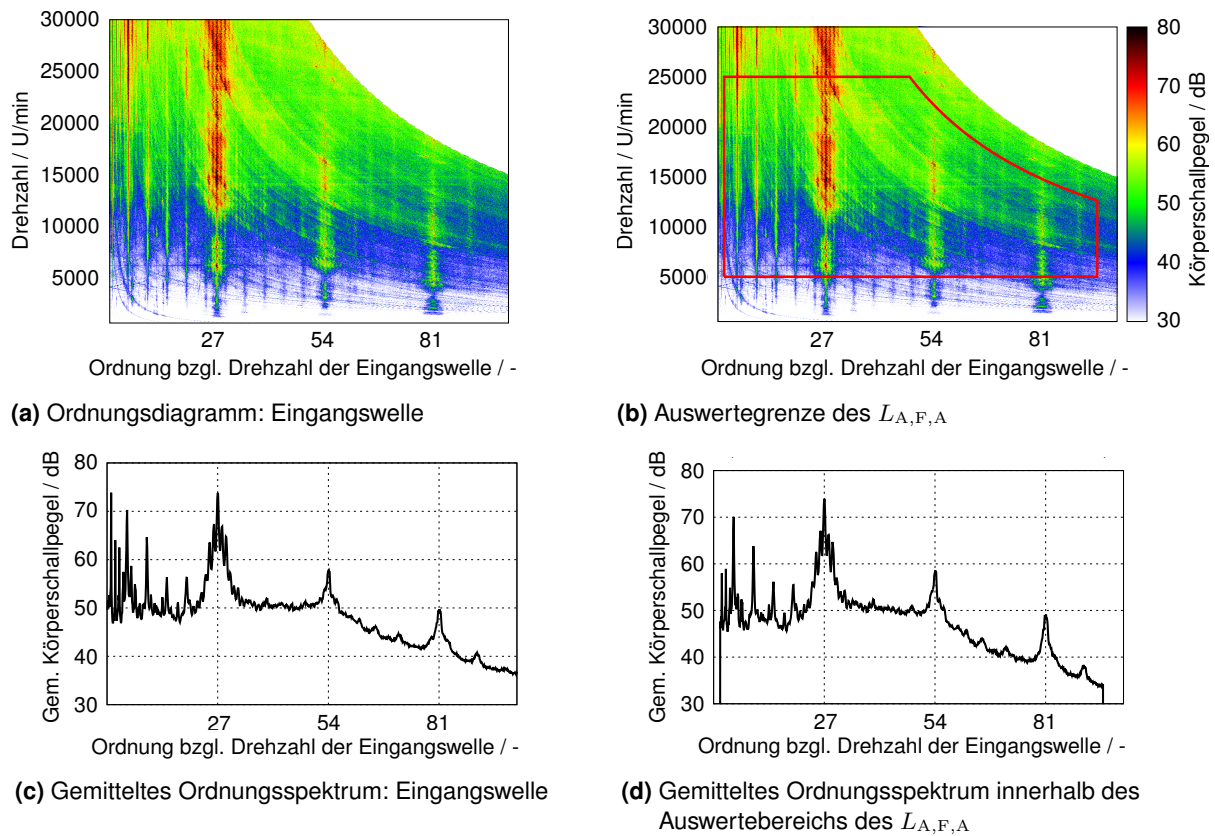
**Tabelle 4.6:** Auswertung des Schwingungsverhaltens des TG I mit der unterkritischen Verzahnung an der ersten Stufe anhand unterschiedlicher Kennwerte

	$L_{A,F,A}$ in dB	$L_{F, \text{gem}}$ in dB	
		1. Stufe	2. Stufe
Eingangswelle	86.89	86.35	72.14
Zwischenwelle	84.98	78.96	67.02

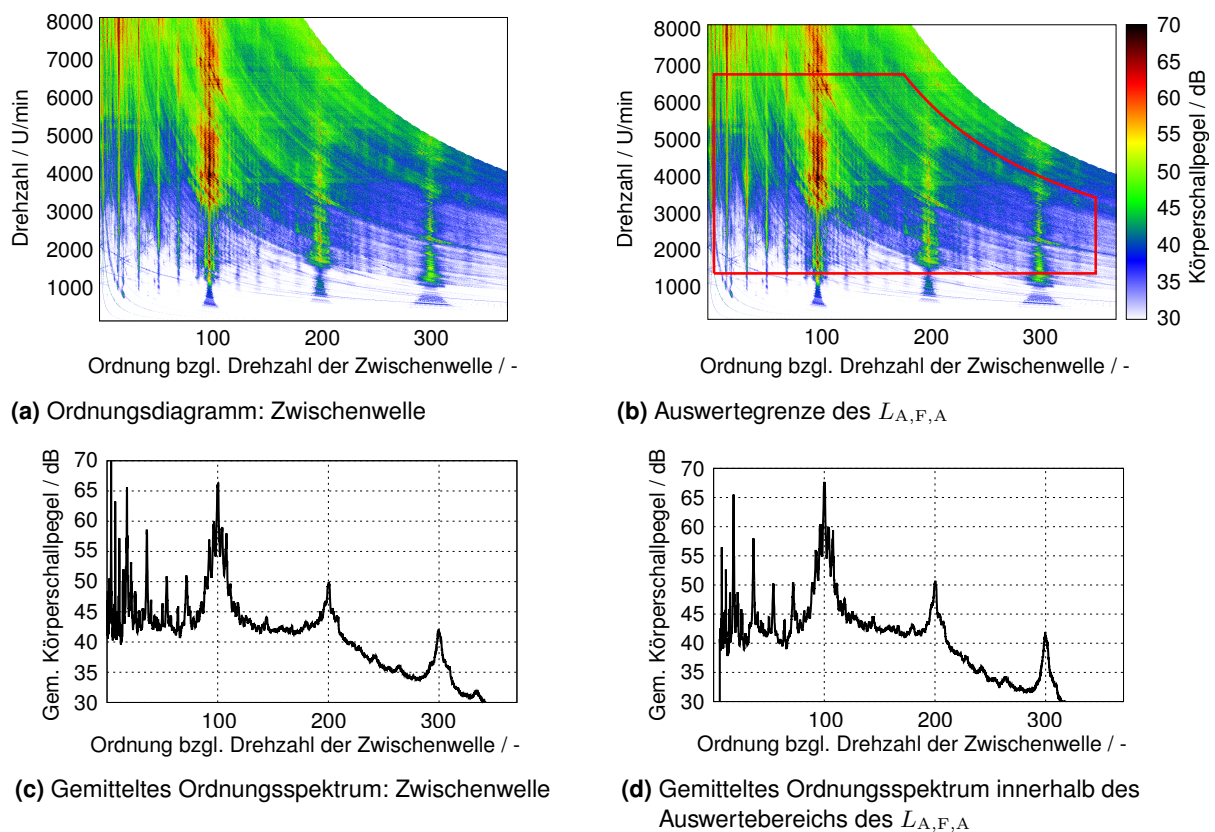
In **Tabelle 4.6** sind die Anwendungskraftpegel  $L_{A,F,A}$  innerhalb des Auswertebereichs der beiden Wellen gezeigt. Die Kennwerte sind leicht höher als die der Referenzverzahnung. Diese Verzahnungsvariante weist ein leicht höheres Schwingungsniveau auf als die Referenzverzahnung. Die Anregungsniveaus der jeweiligen Verzahnungsstufen lassen sich mit Hilfe des gemittelten Kraftpegels auswerten. Die Kennwerte für die Eingangs- und die Zwischenwelle sind in **Tabelle 4.6** gezeigt. Das Anregungsniveau der unterkritischen Verzahnung ist um ca. 10 dB höher als das der Referenzverzahnung. Da die zweite Verzahnungsstufe unverändert bleibt, sind die gemittelten Kraftpegel der beiden Wellen ähnlich wie bei der Referenzverzahnung. Dass das gemittelte Kraftspektrum der ersten Stufe deutlich erhöht wird, während der Anwendungskraftpegel nur leicht erhöht wird, liegt daran, dass der gemittelte Kraftpegel keine Drehzahlgrenze berücksichtigt. In den Ordnungsdiagrammen in **Bild 4.12(a)** und **Bild 4.13(a)** sind hohe Amplituden an der ersten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe oberhalb der auszuwertenden Drehzahlgrenze zu finden. Diese sind für die Erhöhung des gemittelten Kraftspektrums verantwortlich.

#### 4.4.3 Überkritische Verzahnung

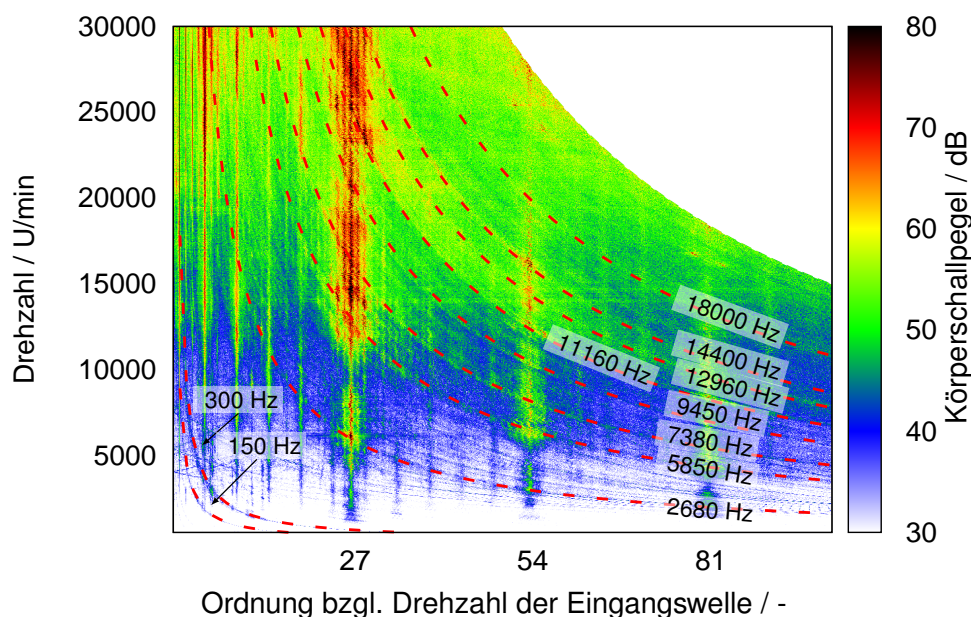
Bei der überkritischen Verzahnung verfügen das Ritzel und das Rad über 27 und 100 Zähne und damit über mehr Zähne als bei der Referenzverzahnung. **Bild 4.15** und **Bild 4.16** zeigen das Schwingungsverhalten des Getriebes an der Eingangs- und an der Zwischenwelle. Unter Berücksichtigung der Übersetzung befindet sich die erste Zahneingriffsordnung der zweiten Stufe in **Bild 4.15(a)** nach **Gleichung (4.2)** an der Ordnung 4.86. Im Gegensatz zu den anderen Verzahnungsvarianten weist die überkritische Verzahnung eine Übersetzung von 3.704 auf. Aus diesem Grund wird unter Berücksichtigung der maximalen Antriebsdrehzahl die Drehzahlachse in den Diagrammen in **Bild 4.16** bis  $8000 \text{ min}^{-1}$  dargestellt. Bei dieser Verzahnungsvariante ist die Zahnkraft trotz des gleichen Antriebsdrehmoments aufgrund der kleineren Übersetzung niedriger als die der restlichen Verzahnungsvarianten.



**Bild 4.15:** Schwingungsverhalten an der Eingangswelle des TG I mit der überkritischen Verzahnung



**Bild 4.16:** Schwingungsverhalten an der Zwischenwelle des TG I mit der überkritischen Verzahnung



**Bild 4.17:** Ordnungsdiagramm des resultierenden Schwingungsverhaltens an der Eingangswelle des TG I mit der überkritischen Verzahnung und die identifizierbaren Eigenfrequenzen

**Bild 4.17** zeigt die aus dem Ordnungsdiagramm ermittelten Eigenfrequenzen des TG I mit der überkritischen Verzahnung. Dabei sind Eigenfrequenzen von ca. 18000, 14400, 12960, 11160, 9450, 7380, 5850, 2680, 300 und 150 Hz zu erkennen. Die Frequenzen von ca. 7380 Hz kann der Eigenfrequenz der ersten Stufe zugeordnet werden. Die Eigenfrequenz der ersten Stufe weicht von denen der restlichen Verzahnungsvarianten aufgrund der ausgelegten Übersetzung ab. Durch die geänderte Übersetzung liegen ein anderes Massenverhältnis zwischen Ritzel und Rad sowie ein anderes Lastverhältnis an der zweiten Stufe vor. Das Lastverhältnis beeinflusst damit die Eingriffssteifigkeit der zweiten Stufe. Aus diesem Grund ist die Verschiebung der Lage der Verzahnungseigenfrequenz der zweiten Stufe im Ordnungsdiagramm zu sehen. Die Eigenfrequenz bei ca. 2680 Hz lässt sich der Verzahnungseigenfrequenz der zweiten Stufe zuordnen.

**Tabelle 4.7:** Auswertebereich für den Anwendungskraftpegel  $L_{A,F,A}$  bei der überkritischen Verzahnung an der ersten Stufe

	Einheit	Eingangswelle	Zwischenwelle
Drehzahlgrenze	$\text{min}^{-1}$	5000 ... 25000	1350 ... 6750
Frequenzgrenze	Hz	bis 20000 Hz	bis 20000 Hz
Ordnungsgrenze	-	1.5 ... 95	5.56 ... 351.85

Die Auswertebereiche für den Anwendungskraftpegel  $L_{A,F,A}$  sind in **Tabelle 4.16** gezeigt. Innerhalb des Auswertebereichs werden insgesamt 3 Zahneingriffsordnungen der ersten Stufe und 19 Zahneingriffsordnungen der zweiten Stufe ausgewertet.

**Tabelle 4.8:** Auswertung des Schwingungsverhaltens des TG I mit der überkritischen Verzahnung an der ersten Stufe anhand unterschiedlicher Kennwerte

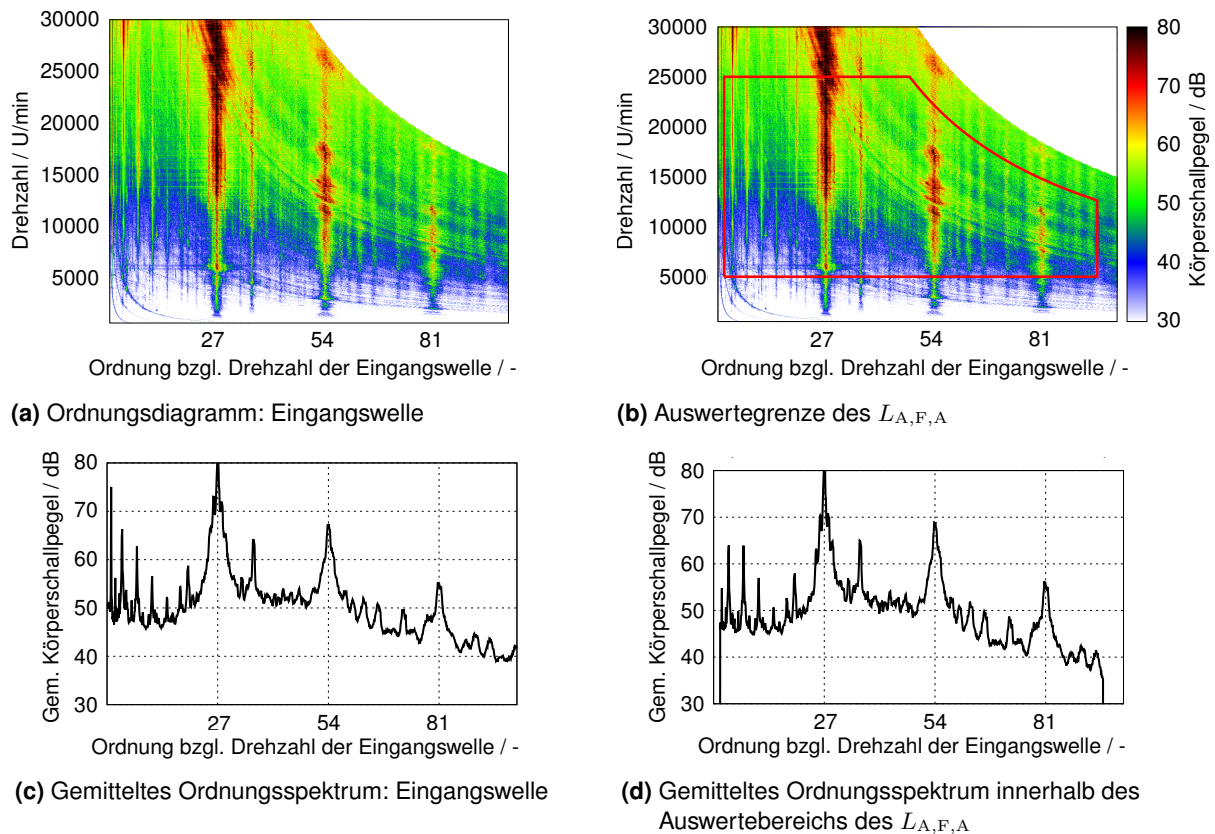
	$L_{A,F,A}$ in dB	$L_{F,gem}$ in dB	
		1. Stufe	2. Stufe
Eingangswelle	84.36	78.34	73.80
Zwischenwelle	83.33	71.21	71.02

Die Ergebnisse der Kennwertauswertungen für die überkritische Verzahnung sind in **Tabelle 4.8** gelistet. An der Eingangswelle ist der Anwendungskraftpegel leicht niedriger als der der Referenzverzahnung. Dies lässt sich durch die kleinere Anzahl der auszuwertenden Zahneingriffsordnungen der ersten Verzahnungsstufe und die niedrigere Zahnkraft erklären. Im Gegensatz dazu weist der Anwendungskraftpegel einen leicht höheren Wert an der Zwischenwelle auf. Die Auswertungen des Anregungsverhaltens der jeweiligen Verzahnungsstufen erfolgten mit Hilfe der gemittelten Kraftpegel in **Tabelle 4.8**. An den beiden Wellen weist die erste Verzahnungsstufe ein höheres Anregungsniveau auf als bei der Referenzverzahnung. Im Vergleich zur Eingangswelle nimmt der gemittelte Kraftpegel an der Zwischenwelle deutlich zu. Dies erklärt die Erhöhung des Anwendungskraftpegels an der Zwischenwelle. Weiterhin ist das Anregungsniveau der zweiten Verzahnungsstufe an den beiden Wellen höher als bei der Referenzverzahnung. Diese lässt sich auf die Übersetzung und damit den Drehzahleinfluss zurückführen. Durch die kleinere Übersetzung wird die zweite Stufe im höheren Drehzahlbereich betrieben. Da die Drehzahlbereiche beider Verzahnungsvarianten unterkritisch sind, kann man davon ausgehen, dass die Drehzahl bei der überkritischen Verzahnung einen höheren Einfluss auf das Anregungsverhalten der zweiten Stufe hat. Innerhalb des ausgelegten Auswertebereichs des Anwendungskraftpegels werden mehr Höherharmonische der Anregung der zweiten Stufe ausgewertet als bei der Referenzverzahnung. Aus diesem Grund wird eine Erhöhung des Anwendungskraftpegels an der Zwischenwelle festgestellt. Der Drehzahleinfluss bei dieser Verzahnungsvariante wird zum Teil durch die niedrigere Zahnkraft ausgeglichen. Deshalb ist keine große Steigerung des Anwendungskraftpegels an der Zwischenwelle zu sehen.

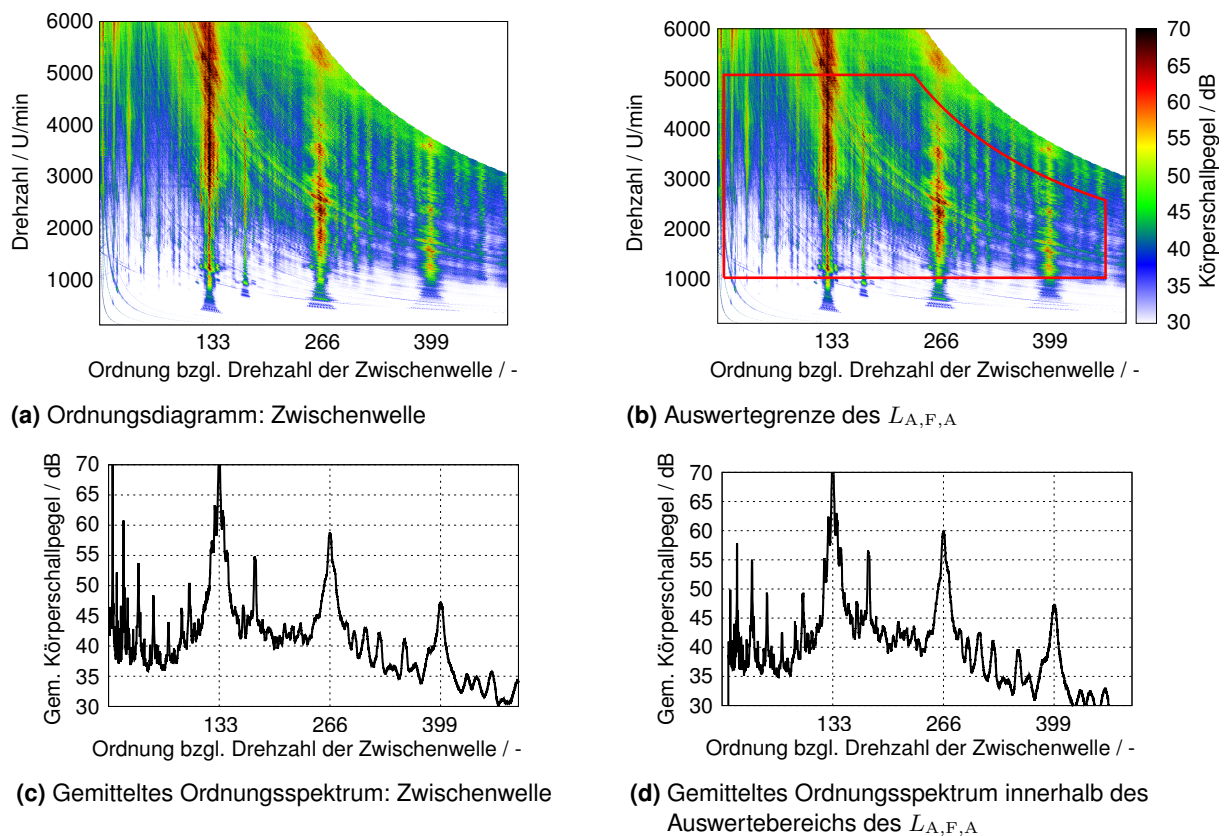
#### 4.4.4 Low-Loss-Verzahnung

Im Vergleich zu den anderen Verzahnungsvarianten weist die Low-Loss-Verzahnung den kleinsten Zahnverlustfaktor auf (s. **Tabelle 4.1**). Sie verfügt über 27 Zähne am Ritzel und 133 Zähne am Rad und damit über eine Übersetzung von 4.926. Die Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  bei dieser Verzahnungsvariante beträgt 1.042. Im Gegensatz zu den anderen Verzahnungsvarianten kann diese in der Praxis unter Berücksichtigung der Verzahnungskorrekturen das Anregungsverhalten der Verzahnung beeinträchtigen, s. auch [Hei12].

In **Bild 4.18(a)** ist das Ordnungsdiagramm an der Eingangswelle gezeigt. Die erste Zahneingriffsordnung der zweiten Stufe lässt sich nach **Gleichung (4.2)** an der Ordnung 3.65 identifizieren. Das Ordnungsdiagramm der Zwischenwelle ist in **Bild 4.19(a)** dargestellt. Aus den beiden

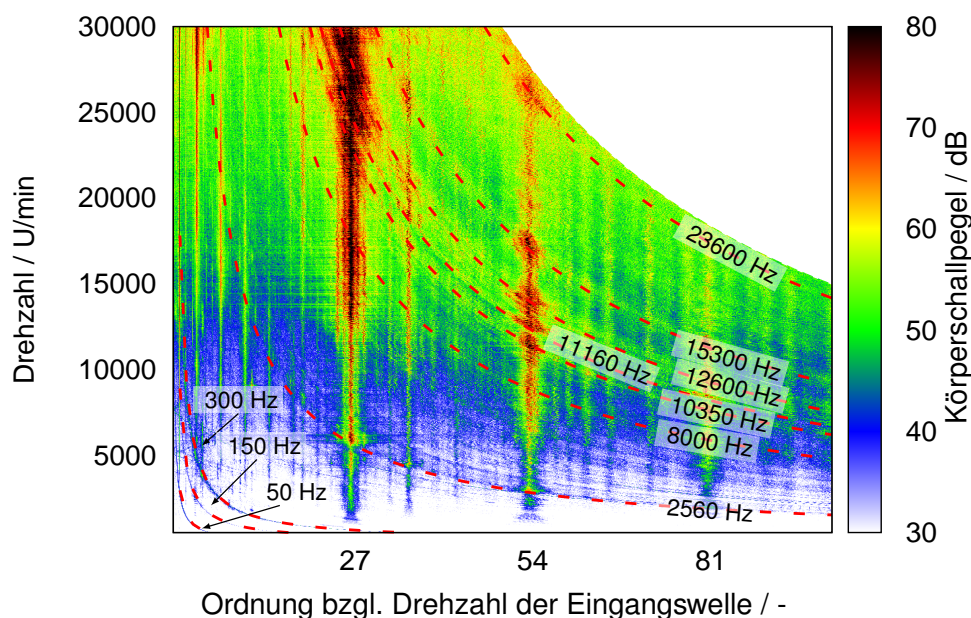


**Bild 4.18:** Schwingungsverhalten an der Eingangswelle des TG I mit der Low-Loss-Verzahnung



**Bild 4.19:** Schwingungsverhalten an der Zwischenwelle des TG I mit der Low-Loss-Verzahnung

Diagrammen ist die erhebliche Erhöhung der Schwingungsamplitude an der ersten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe zu erkennen. Weiterhin zeigen **Bild 4.18(c)** und **Bild 4.19(c)** die gemittelten Ordnungsspektren an der Eingangs- und der Zwischenwelle. Im Gegensatz zur überkritischen Verzahnung, die über gleiche Zähnezahl am Ritzel verfügt, sind hohe Schwingungsamplituden an den zweiten und dritten Zahneingriffsordnungen der ersten Stufe zu erkennen.



**Bild 4.20:** Ordnungsdiagramm des resultierenden Schwingungsverhaltens an der Eingangswelle des TG I mit der Low-Loss-Verzahnung und die identifizierbaren Eigenfrequenzen

In **Bild 4.20** sind Eigenfrequenzen des TG I mit Low-Loss-Verzahnung dargestellt. Aus dem Ordnungsdiagramm können Eigenfrequenzen bei ca. 23600, 15300, 12600, 11160, 10350, 8000, 2560, 300, 150 und 50 Hz identifiziert werden. Unter Berücksichtigung der Übersetzung und des Achsabstandes ist somit eine ähnliche Verzahnungseigenfrequenz wie bei der Referenzverzahnung zu erwarten. Die Eigenfrequenzen von ca. 8000 und 2560 Hz können den Verzahnungseigenfrequenzen der ersten und der zweiten Stufe zugeordnet werden. Im gesamten Drehzahlbereich werden die Schwingungsamplituden der ersten Stufe durch viele Eigenfrequenzen erhöht. Das Ordnungsdiagramm weist daher ein höheres Schwingungsniveau als bei den anderen Verzahnungsvarianten auf. Die zweite Verzahnungsstufe wird jedoch im ganzen Drehzahlbereich unterkritisch betrieben.

**Tabelle 4.9:** Auswertebereich für den Anwendungskraftpegel  $L_{A,F,A}$  bei der Low-Loss-Verzahnung an der ersten Stufe

	Einheit	Eingangswelle	Zwischenwelle
Drehzahlgrenze	$\text{min}^{-1}$	5000 ... 25000	1015.04 ... 5075.19
Frequenzgrenze	Hz	bis 20000 Hz	bis 20000 Hz
Ordnungsgrenze	-	1.5 ... 95	7.39 ... 467.96

**Tabelle 4.10:** Auswertung des Schwingungsverhaltens des TG I mit der Low-Loss-Verzahnung an der ersten Stufe anhand unterschiedlicher Kennwerte

	$L_{A,F,A}$ in dB	$L_{F,gem}$ in dB	
		1. Stufe	2. Stufe
Eingangswelle	90.15	85.66	70.68
Zwischenwelle	88.75	76.97	66.92

Zur Auswertung des Schwingungsverhaltens des Getriebes werden die Parametergrenzen für den Anwendungskraftpegel in **Tabelle 4.9** festgelegt. Innerhalb des Auswertebereiches werden 3 Zahneingriffsordnungen der ersten Stufe ausgewertet. Die Kennwerte sind in **Tabelle 4.10** gelistet. Der Anwendungskraftpegel für die Eingangswelle beträgt ca. 90 dB und für die Zwischenwelle ca. 88 dB. Im Vergleich zu allen Verzahnungsvarianten weist die Low-Loss-Verzahnung das höchste Schwingungsniveau auf. Die gemittelten Kraftpegel für die erste Stufe sind ca. 10 dB höher als die der Referenzverzahnung an den beiden Wellen.

Das Anregungsniveau der ersten Stufe mit Hilfe des gemittelten Kraftpegels ist an den beiden Wellen um ca. 10 dB höher als das der Referenzverzahnung, während der gemittelte Kraftpegel der zweiten Stufe fast unverändert bleibt. Daraus lässt sich schließen, dass hauptsächlich die erste Verzahnungsstufe dazu beiträgt, das resultierende Schwingungsverhalten des Getriebes zu erhöhen. Die Übersetzungen der Low-Loss-Verzahnung und der Referenzverzahnung sind vergleichbar. Das heißt, die zweite Stufe unterliegt einem ähnlichen Betriebsverhalten (Last und Drehzahlbereich). Aus diesem Grund ergibt sich erwartungsgemäß ein vergleichbares Anregungsniveau der zweiten Verzahnungsstufe. Es ist allerdings darauf hinzuweisen, dass die Auswertung des Anregungsniveaus einer Verzahnung mit Hilfe des vordefinierten gemittelten Kraftpegels Schwingungsamplituden innerhalb bestimmter Zahneingriffsordnungen berücksichtigt. In diesem Fall werden die ersten 5 Zahneingriffsordnungen, die in der Praxis einen dominanten Einfluss auf das Anregungsverhalten der Verzahnung aufweisen können, ausgewertet. Kreuzeinflüsse zwischen den Verzahnungsstufen das dynamische Verhalten des Getriebes beeinflussen, z.B. das Verhalten in den Vorresonanzstellen, bei denen die Höherharmonischen einen maßgeblichen Einfluss haben. Dieses Verhalten ist von jedem Getriebe und dessen Betriebsbereich abhängig.

#### 4.5 Fazit

Um das Schwingungsverhalten durch die Anregung einer einzigen Stirnradstufe zu untersuchen, wird das Messsignal entlang der Eingriffsrichtung aufgezeichnet, wie z.B. in der Voruntersuchung des Schwingungsverhaltens ausschließlich der ersten Stufe des TG I [Gwi17]. Mehrstufige Getriebe regen Schwingungen an, deren Beträge und geometrische Eingriffslagen zeitveränderlich sind. Die Getriebe verfügen über keine Hauptebene, in der sich die resultierende Schwingung auswirkt. Das Schwingungsverhalten eines mehrstufigen Getriebes muss daher in räumlichen Komponenten ausgewertet werden. Um einen Überblick über das resultierende Schwingungsverhalten zu erhalten, kann das resultierende Spektrum aus den Spektrumskom-

ponenten der jeweiligen orthogonalen Messrichtungen vektoriell zusammengesetzt werden und für die Auswertung des Schwingungsverhaltens verwendet werden.

Auf Grundlage der Bildung des resultierenden Spektrums kann ein resultierender Kennwert aus Kennwertkomponenten in den räumlichen Richtungen gebildet werden. Die Kennwertbildung ist analog zur Addition von Pegeln inkohärenter Schallquellen. Insgesamt geben das resultierende Spektrum und der resultierende Kennwert einen guten Überblick über das Schwingungsverhalten mehrstufiger Getriebe wieder. Dynamische Einflüsse, die in den jeweiligen Messrichtungen identifiziert werden, sind dort zu erkennen.

Mit Hilfe des gemittelten Kraftpegels können Amplituden eines bestimmten Ordnungsbereiches spezifiziert ausgewertet werden. Der Einfluss der Schwingungsanregung der einzelnen Verzahnungsstufe ist berücksichtigt, wenn die Amplituden der Eingriffsordnung und deren Vielfachen in die Kennwertbildung eingehen.

Die Anwendungskraftpegel an der Zwischenwelle aller Verzahnungsvarianten sind in **Tabelle 4.11** gelistet.

**Tabelle 4.11:** Anwendungskraftpegel nach Methode A der resultierenden Beschleunigung an den Lagern der Zwischenwelle

Verzahnungsvariante	$L_{A,F,A}$ in dB
Referenz	81.46
Unterkritisch	84.98
Überkritisch	83.33
Low-Loss	88.75

Im Versuch zeigt die Referenzverzahnung den kleinsten Pegel und die Low-Loss-Verzahnung den größten.

Neben der Wellendrehzahl werden durch die Zähnezah Eingriffsordnung und Übersetzung festgelegt. Mit höherer Zähnezah wird die Eingriffsordnung größer, während die Eingriffsordnung mit der zunehmenden Übersetzung kleiner wird. Der Abstand zwischen den Ordnungen der Höherharmonischen wird durch die Festlegung der Eingriffsordnung definiert. Somit liegen die Anregungen, deren Eingriffsordnung klein ist, relativ eng nebeneinander. Je mehr Ordnungen innerhalb der auszuwertenden Ordnungsgrenze liegen, desto mehr Höherharmonische sind beteiligt. In diesem Fall tauchen ebenfalls Vorresonanzen öfter auf. Weiterhin kann die Übersetzung einen Einfluss auf die Verschiebung der Resonanzlage haben. Durch die Übersetzung wird die Last an der nächsten Stufe beeinflusst. Die lastabhängige Eingriffssteifigkeit kann dadurch geändert werden.



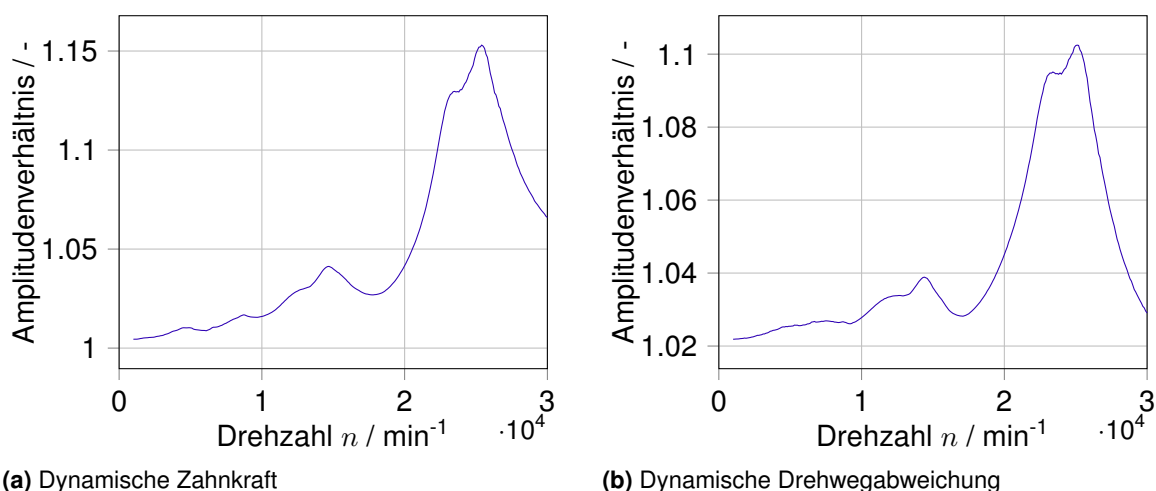
## 5 Rechnerische Studie des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe

Zur rechnerischen Beurteilung des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe wurden die erweiterten Berechnungsmethoden aus **Kapitel 3** das EDV-Programm DZP (Dynamische Zahnkräfte Programm) [Uta19] implementiert. Das Programm DZP ermöglicht die rechnerische Beurteilung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen. Es stehen unterschiedliche Berechnungen wie die quasistatischen sowie dynamischen Ansätze zur Verfügung. Das Anregungsverhalten von Verzahnungen wird mit Hilfe der Spektralanalyse ausgewertet. Die Ergebnisse können in Form von skalaren Kennwerten wie in **Abschnitt 2.4** dargestellt werden. Dadurch lässt sich der Vergleich des Anregungsniveaus zwischen Verzahnungsvarianten erleichtern. Durch die Erweiterung der Berechnungsmodule in DZP zur Berücksichtigung mehrstufiger Getriebe werden Kreuzeinflüsse zwischen Verzahnungen abgebildet und somit die Beurteilung des resultierenden Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe ermöglicht.

In diesem Kapitel wird das Schwingungsverhalten des mehrstufigen Speed2E Getriebes untersucht.

### 5.1 Untersuchung der Kraft- und Weganregung in Abhängigkeit der Drehzahl

Das Anregungsverhalten von Verzahnungen lässt sich grundsätzlich in Form der dynamischen Zahnkraft bzw. der Drehwegabweichung ausdrücken. Bei mehrstufigen Getrieben wird das Anregungsverhalten einer Verzahnung durch das Anregungsverhalten anderer Verzahnungsstufen beeinflusst. In diesem Abschnitt wird das Anregungsverhalten der ersten Stufe mit der Referenzverzahnung des Teilgetriebes I des Speed2E Getriebes mit Hilfe des linear elastischen Gesamtgetriebemodells untersucht. Das Getriebe wird in dem Drehzahlbereich zwischen 1000 – 30000  $\text{min}^{-1}$  beim Antriebsmoment  $T_{\text{an}} = 10 \text{ Nm}$  wie in **Kapitel 4** untersucht.



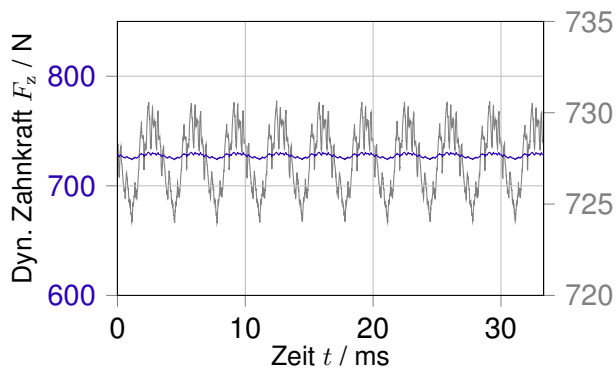
**Bild 5.1:** Resonanzkurven des Anregungsverhaltens der Verzahnung der ersten Stufe des TG I

Die Resonanzkurven der dynamischen Zahnkraft sowie der dynamischen Drehwegabweichung der ersten Verzahnungsstufe sind in **Bild 5.1** gezeigt. Das dimensionslose Amplitudenverhältnis stellt die Amplitude bei der gegebenen Drehzahl in Bezug auf deren statische Auslenkung dar und beschreibt damit die Überhöhung dynamischer Amplituden bei der gegebenen Drehzahl. Im niederfrequenten Bereich nähert sich das Verhältnis der dynamischen Zahnkraft in **Bild 5.1(a)** gegen 1 und weist darauf hin, dass die Amplitude im diesen Bereich sehr klein ist, da die Amplitude ausschließlich den statischen Wert annimmt. Die Resonanzkurve zeigt mehrere lokale Maxima innerhalb des untersuchten Drehzahlbereichs, z.B. bei ca. 4500, 8500, 15000 bzw. 25000  $\text{min}^{-1}$ . Die höchste Überhöhung liegt bei der Drehzahl von ca. 25000  $\text{min}^{-1}$ . Das höchste Amplitudenverhältnis beträgt ca. 1.15 und ist relativ klein. Dies lässt sich auf die kleine Antriebslast von nur 10 Nm zurückführen. Dadurch ist die Lage der Hauptresonanz erkennbar. Das Amplitudenverhältnis im hohen Drehzahlbereich ist tendenziell höher als das im niederfrequenten Bereich. Dadurch ist es auszuschließen, dass die dynamische Zahnkraft mit zunehmender Drehzahl einen wesentlichen Einfluss auf das Anregungsverhalten der Verzahnung annimmt. Das Verhalten an beiden Rändern lässt sich analytisch mit Hilfe der Geiser-Vergrößerungsfunktion (s. **Bild 2.4**) abbilden.

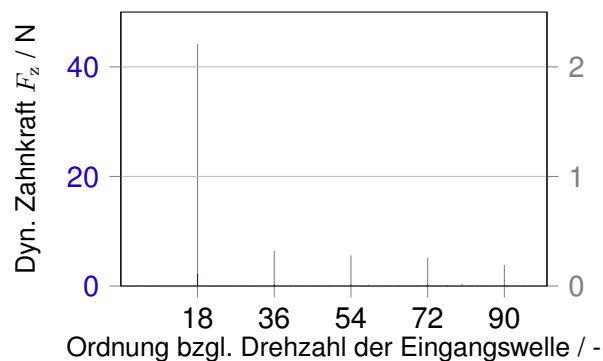
**Bild 5.1(b)** zeigt das Amplitudenverhältnis der dynamischen Drehwegabweichung. Im Vergleich zur dynamischen Zahnkraft unterscheidet sich das Verhalten des Amplitudenverhältnisses an den Rändern. Im niederfrequenten Bereich liegt ein gewisser Faktor höher als 1 vor. Nach der Hauptresonanz bei der Drehzahl von ca. 25000  $\text{min}^{-1}$  fällt das Amplitudenverhältnis rasch ab. Der Einfluss dynamischer Drehwegabweichung nimmt daher mit zunehmender Drehzahl ab. Dieses Verhalten kann ebenfalls analytisch mit Hilfe der Geiser-Vergrößerungsfunktion wie in **Bild 2.4** erkannt werden.

Um die detaillierte Aussage über das Anregungsverhalten der Verzahnung zu ermöglichen, wird die Spektralanalyse ausgeführt. Zur Vermeidung von Leakage wird die Berechnung innerhalb 89 Zahneingriffen der ersten Stufe ausgewertet. Diese Zeitdauer entspricht der kompletten Umdrehung der Zwischenwelle (s. **Tabelle 4.1**), auf der sich beide Verzahnungsstufen befinden. Somit ist es sichergestellt, dass die berechneten Signale periodische Anteile beider Stufen enthalten.

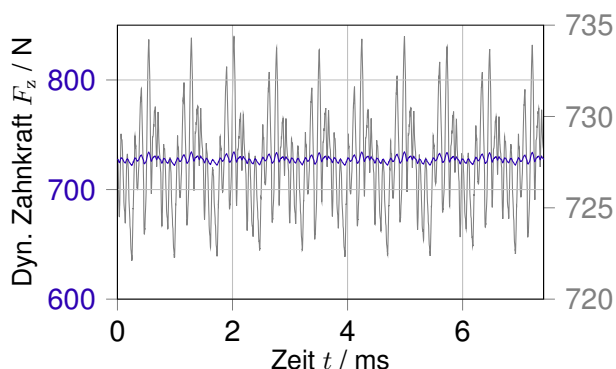
**Bild 5.2 – Bild 5.7** stellen das Anregungsverhalten der Verzahnung im weiträumigen Drehzahlbereich mit Hilfe der dynamischen Zahnkraft bzw. der Drehwegabweichung dar. Die Darstellung mit blauen Linien sind für fast alle Diagramme gleich skaliert, ausgenommen Spektren im hohen Drehzahlbereich, da die Amplituden im Vergleich zu denen bei den anderen Drehzahlen deutlich höher sind. Durch die gleiche Achsenskalierung können die Form der Zeitverläufe bzw. kleine ausgeprägte Amplituden nicht eindeutig sichtbar sein. Deshalb enthält jedes Diagramm die Daten in zwei unterschiedlichen Maßstäben. Die Darstellung mit einer lokal angepassten Achsenskalierung wird in grau ausgeführt.



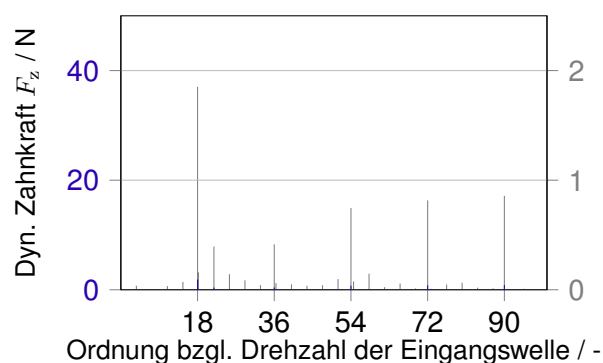
(a) Zeitverlauf bei  $n_1 = 1000 \text{ min}^{-1}$



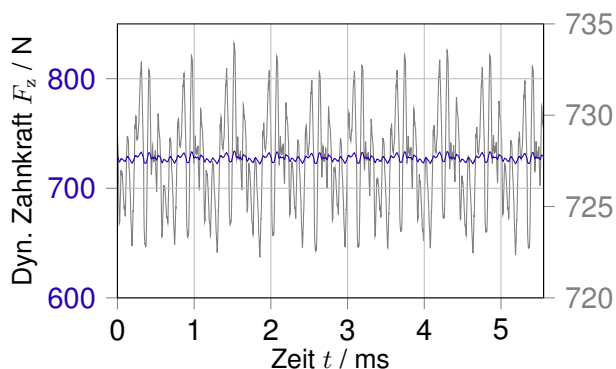
(b) Spektrum bei  $n_1 = 1000 \text{ min}^{-1}$



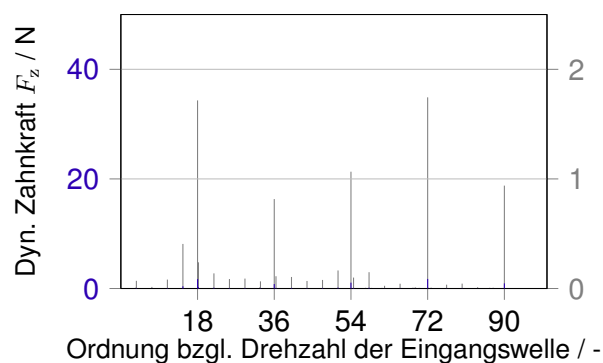
(c) Zeitverlauf bei  $n_1 = 4500 \text{ min}^{-1}$



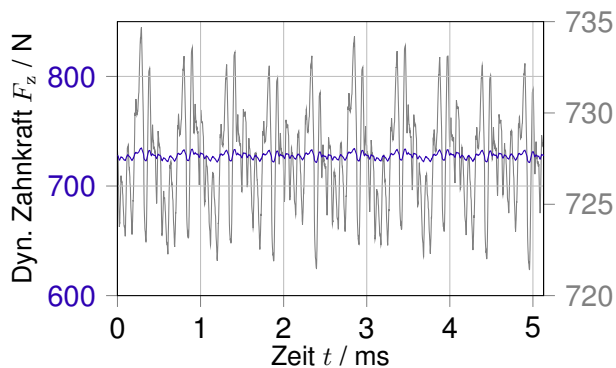
(d) Spektrum bei  $n_1 = 4500 \text{ min}^{-1}$



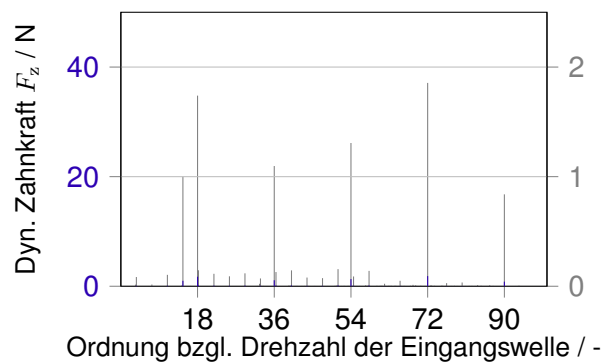
(e) Zeitverlauf bei  $n_1 = 6000 \text{ min}^{-1}$



(f) Spektrum bei  $n_1 = 6000 \text{ min}^{-1}$

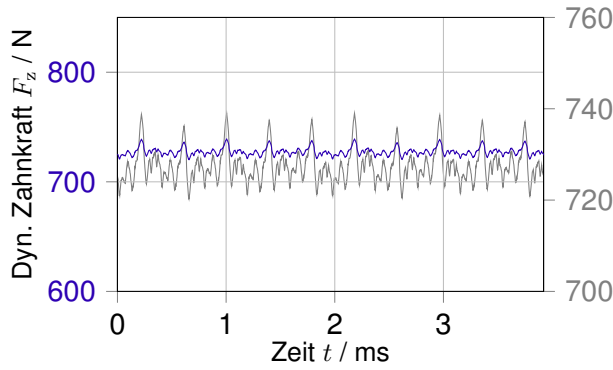


(g) Zeitverlauf bei  $n_1 = 6500 \text{ min}^{-1}$

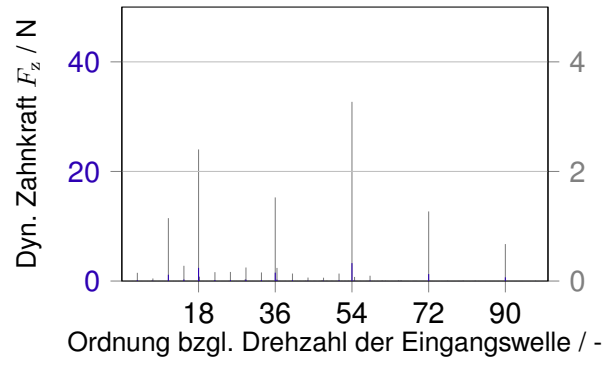


(h) Spektrum bei  $n_1 = 6500 \text{ min}^{-1}$

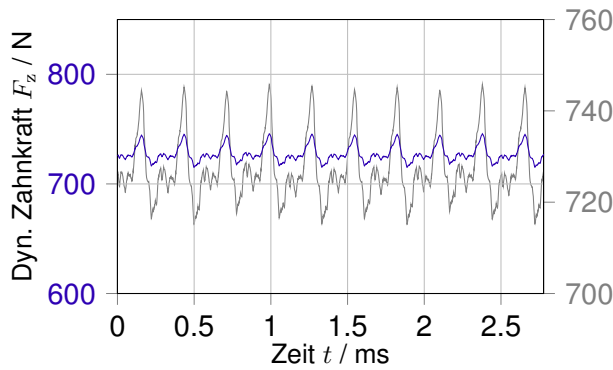
**Bild 5.2:** Dynamische Zahnkräfte der ersten Stufe des Teilgetriebes I mit der Referenzverzahnung bei unterschiedlichen Drehzahlen bei  $T_{an} = 10 \text{ N}$  (Teil I)



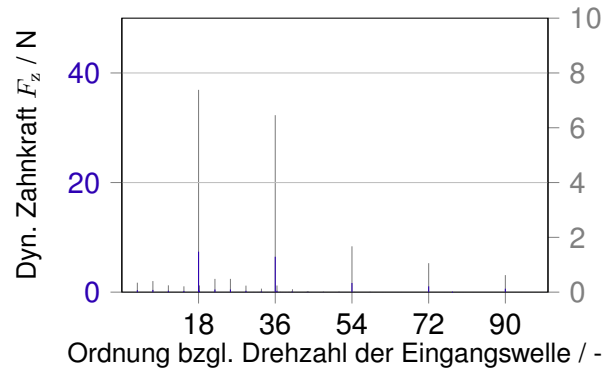
(a) Zeitverlauf bei  $n_1 = 8500 \text{ min}^{-1}$



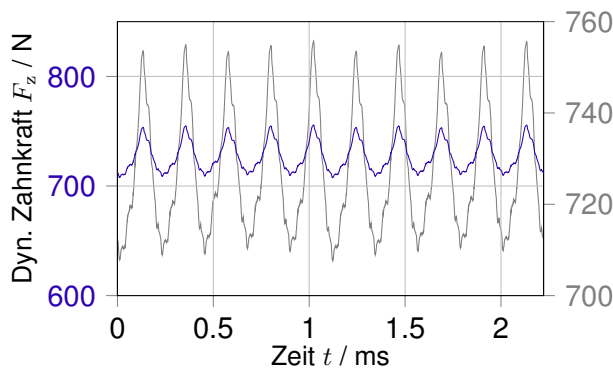
(b) Spektrum bei  $n_1 = 8500 \text{ min}^{-1}$



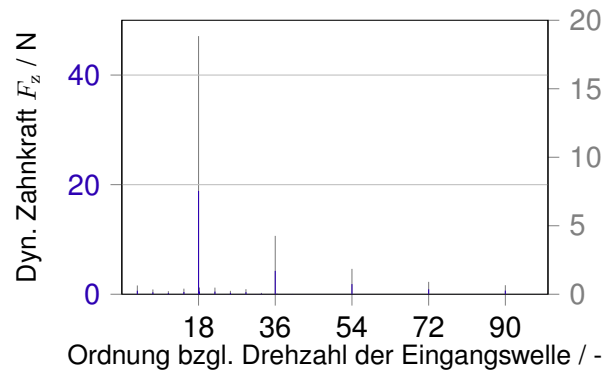
(c) Zeitverlauf bei  $n_1 = 12000 \text{ min}^{-1}$



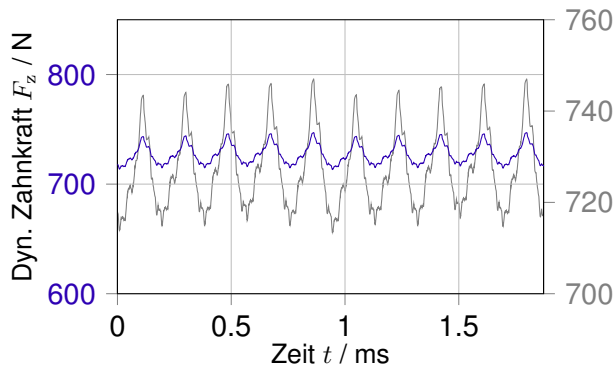
(d) Spektrum bei  $n_1 = 12000 \text{ min}^{-1}$



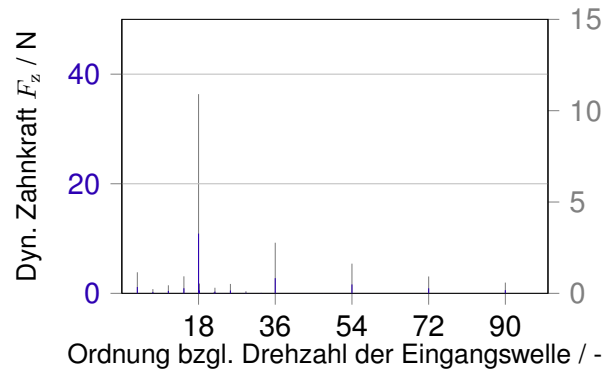
(e) Zeitverlauf bei  $n_1 = 15000 \text{ min}^{-1}$



(f) Spektrum bei  $n_1 = 15000 \text{ min}^{-1}$

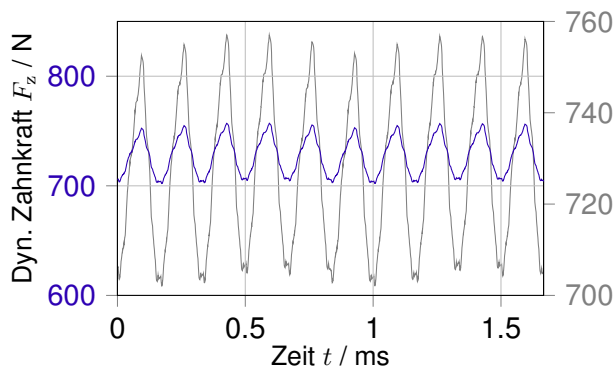


(g) Zeitverlauf bei  $n_1 = 17800 \text{ min}^{-1}$

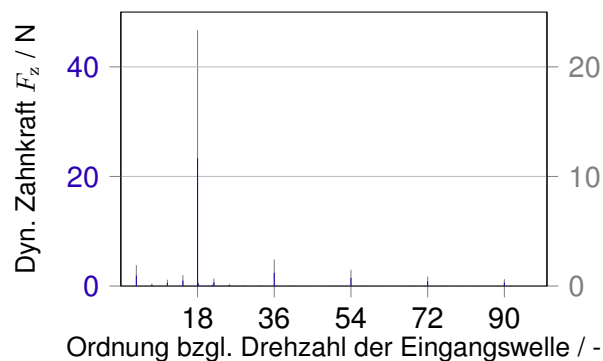


(h) Spektrum bei  $n_1 = 17800 \text{ min}^{-1}$

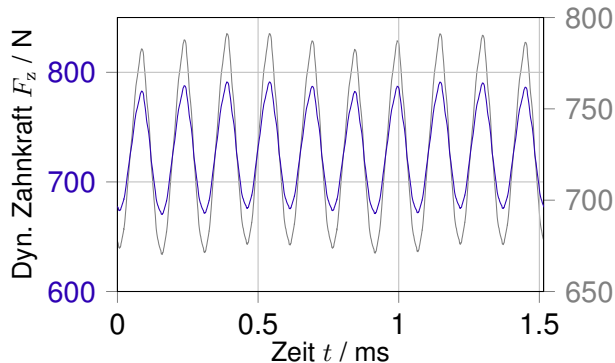
**Bild 5.3:** Dynamische Zahnkräfte der ersten Stufe des Teilgetriebes I mit der Referenzverzahnung bei unterschiedlichen Drehzahlen bei  $T_{an} = 10 \text{ N}$  (Teil II)



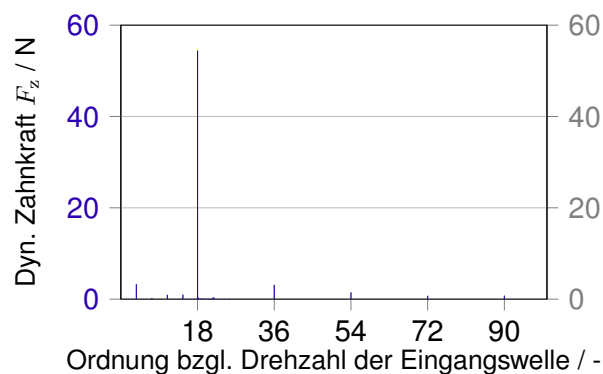
(a) Zeitverlauf bei  $n_1 = 20000 \text{ min}^{-1}$



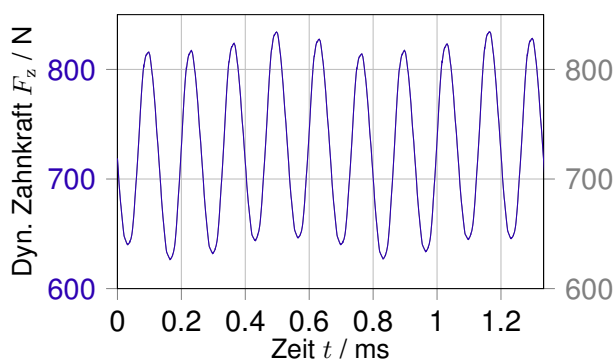
(b) Spektrum bei  $n_1 = 20000 \text{ min}^{-1}$



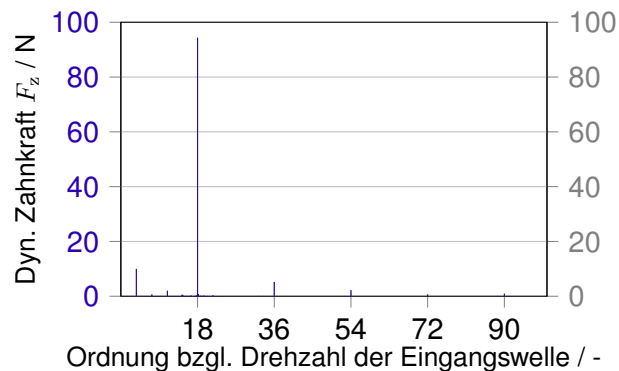
(c) Zeitverlauf bei  $n_1 = 22000 \text{ min}^{-1}$



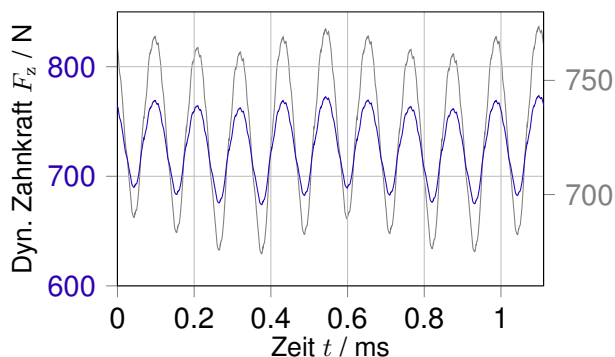
(d) Spektrum bei  $n_1 = 22000 \text{ min}^{-1}$



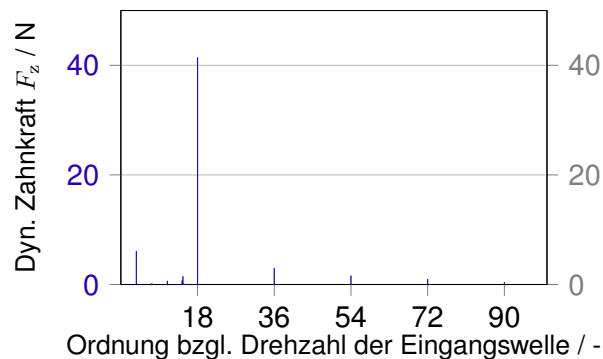
(e) Zeitverlauf bei  $n_1 = 25000 \text{ min}^{-1}$



(f) Spektrum bei  $n_1 = 25000 \text{ min}^{-1}$



(g) Zeitverlauf bei  $n_1 = 30000 \text{ min}^{-1}$



(h) Spektrum bei  $n_1 = 30000 \text{ min}^{-1}$

**Bild 5.4:** Dynamische Zahnkräfte der ersten Stufe des Teilgetriebes I mit der Referenzverzahnung bei unterschiedlichen Drehzahlen bei  $T_{an} = 10 \text{ N}$  (Teil III)

Die dynamischen Zahnkräfte bei unterschiedlichen Drehzahlen sind in **Bild 5.2** – **Bild 5.4** dargestellt. Die Amplitude der Zahnkraft ist bei der Drehzahl von ca.  $25000 \text{ min}^{-1}$  in **Bild 5.4(e)** und **Bild 5.4(f)** eindeutig hoch. Diese weist auf die Resonanzstelle der Verzahnung hin. Im Gegensatz dazu weisen die Zahnkräfte im niedrigen Drehzahlbereich kleine Amplituden in **Bild 5.2** auf. Das Spektrum bei kleinen Drehzahlen von ca.  $1000 \text{ min}^{-1}$  in **Bild 5.2(b)** zeigt Überhöhungen ausschließlich an den Zahneingriffsordnungen der ersten Stufe (18. Ordnung und deren Vielfachen). Die Amplitude der ersten Zahneingriffsordnung ist die dominante. Anregungen der zweiten Stufe, deren erste Zahneingriffsordnung mit Hilfe der **Gleichung (4.2)** bei ca. 3.6 beträgt, sind nicht identifizierbar.

Bei der Drehzahl von  $4500 \text{ min}^{-1}$  sind in **Bild 5.2(d)** die Amplituden der Höherharmonischen der ersten Verzahnungsstufe insbesondere die ab der dritten Zahneingriffsordnung eindeutig erhöht. Zwischen der ersten und der zweiten Zahneingriffsordnung sind Anregungen der zweiten Stufe insbesondere an der 6. Zahneingriffsordnung der zweiten Stufe (ca. 21.6. Ordnung) erkennbar.

Die Amplitude an der 72. Ordnung (der vierten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe) erhöht sich mit zunehmender Drehzahl weiter und ist relativ gleich hoch wie die Amplitude an der 18. Ordnung bei der Drehzahl von  $6000 \text{ min}^{-1}$ . Diese weist auf die Lage einer Vorresonanzstelle bei dieser Drehzahl hin. Die Amplitude an der vierten Zahneingriffsordnung der zweiten Stufe (ca. 14.4. Ordnung) ist die dominanteste aus den Anregungen der zweiten Stufe. Wird die Drehzahl erhöht, so ist der Einfluss der Vorresonanz in **Bild 5.2(h)** immerhin sichtbar. Die Amplituden an den Ordnungen sind relativ gleich groß wie bei der Drehzahl von  $6000 \text{ min}^{-1}$ , ausgenommen die Amplitude an der vierten Zahneingriffsordnung der zweiten Stufe, die nun verdoppelt ist.

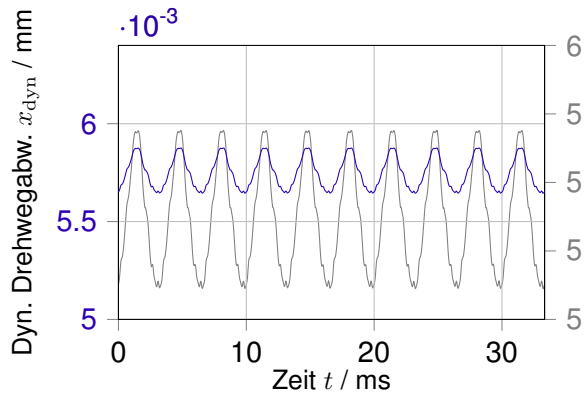
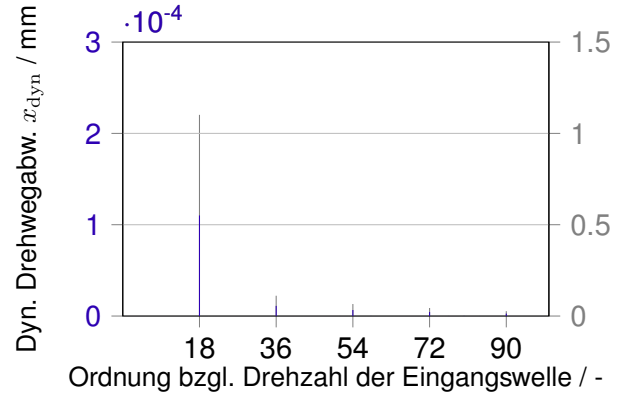
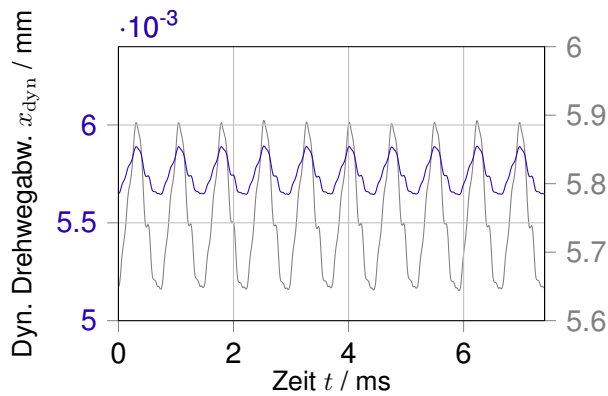
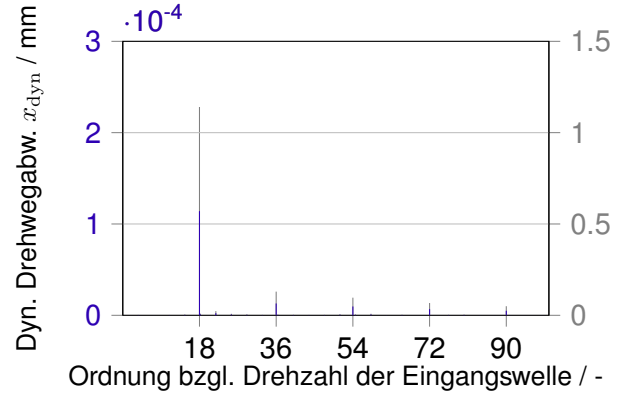
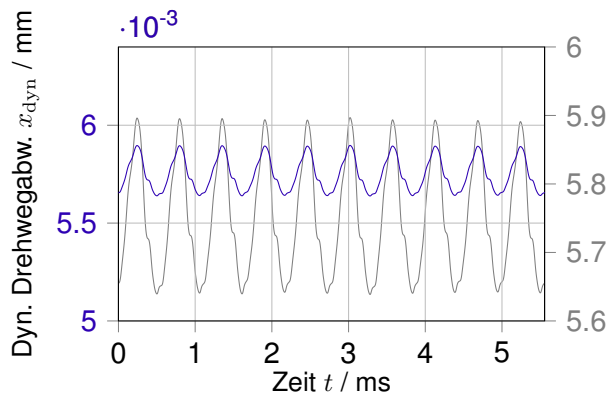
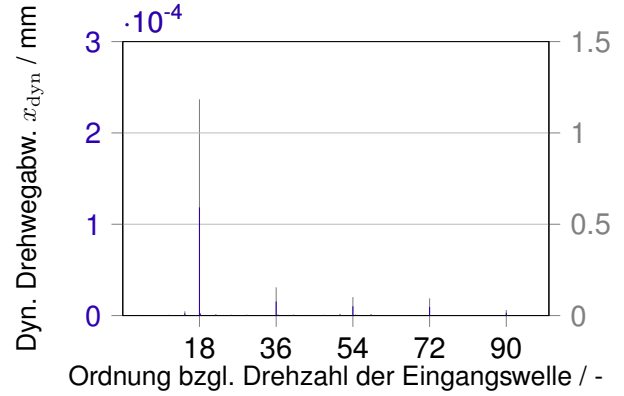
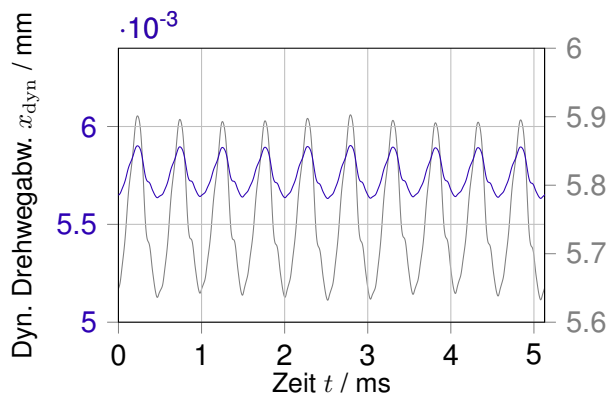
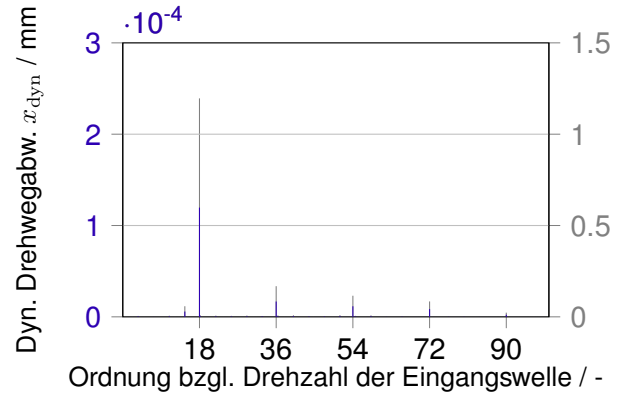
**Bild 5.3(b)** und **Bild 5.3(d)** zeigen die dynamischen Zahnkräfte bei den Drehzahlen von  $8500$  und  $12000 \text{ min}^{-1}$ . In diesem Bereich sind die Überhöhungen an der dritten bzw. der zweiten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe eindeutig und weisen auf die weiteren Vorresonanzstellen hin. Außerdem ist die Überhöhung der Amplitude an der dritten Zahneingriffsordnung der zweiten Stufe bei der Drehzahl von  $8500 \text{ min}^{-1}$  identifizierbar. Mit zunehmenden Drehzahlen sinken die Amplituden der Höherharmonischen ab wie bei der Drehzahl von  $15000 \text{ min}^{-1}$  in **Bild 5.3(f)** zu sehen sind. Bei der Drehzahl von  $17800 \text{ min}^{-1}$  in **Bild 5.3(h)** fallen die Amplituden der Anregungen der ersten Stufe im Vergleich zu denen bei der Drehzahl von  $15000 \text{ min}^{-1}$  ab. Diese führt auf das dynamische Verhalten des Gesamtsystems zurück. Die Amplitude der ersten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe ist weiterhin die dominante. Mit zunehmenden Drehzahlen steigt die Amplitude an der ersten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe drastisch an, während sich die anderen Amplituden nur geringfügig ändern, s. **Bild 5.4(e)** – **Bild 5.4(f)**. Die Anregung an der ersten Zahneingriffsordnung weist ihr Maximum um die Drehzahl von  $25000 \text{ min}^{-1}$  auf. Damit lässt sich die Lage der Hauptresonanz der Verzahnung um diesem Drehzahlbereich herum abschätzen. Mit der Erkennung der Lage der Hauptresonanz lässt sich das Anregungsverhalten in den Vorresonanzen in **Bild 5.2(g)**, **Bild 5.3(a)** und **Bild 5.3(c)** erklären, da die

Anregungsfrequenzen dort nahezu den ganzzahligen Vielfachen der Hauptresonanz (4, 3 und 2) entsprechen. Die Anregung der ersten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe nimmt nach der Resonanz ab, wie in **Bild 5.4(g)** zu sehen ist. Im Vergleich zu dieser Anregung sind die anderen Anregungen relativ untergeordnet. Auch Anregungen der zweiten Verzahnungsstufe sind im hohen Drehzahlbereich sichtbar.

**Bild 5.5 – Bild 5.7** zeigen die dynamischen Drehwegabweichungen bei unterschiedlichen Drehzahlen. Im Vergleich zu den dynamischen Zahnkräften ist die Änderung der dynamischen Drehwegabweichungen im kleinen Drehzahlbereich zwischen  $1000 - 6500 \text{ min}^{-1}$  in **Bild 5.5** nicht ausgeprägt. Bei allen vier ausgewählten Drehzahlen weist die Anregung der ersten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe eine Überhöhung bei ca.  $1.1 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$ . Die Höherharmonischen der ersten Stufe sind im Vergleich zu dieser Anregung wesentlich kleiner. Mit Hilfe der Spektralanalyse können Anregungen der zweiten Stufe in den dynamischen Drehwegabweichungen festgestellt werden. Diese sind allerdings nicht ausgeprägt wie bei den dynamischen Zahnkräften. So ist zum Beispiel die Anregung an der Ordnung von ca. 21.6 bei der Drehzahl von  $4500 \text{ min}^{-1}$  in **Bild 5.2(d)** zu erkennen. Diese entspricht die Anregung der 6. Zahneingriffsordnung der zweiten Stufe. Im Vergleich dazu ist diese Anregung bei der dynamischen Zahnkraft in **Bild 5.2(d)** ausschlaggebender. Das gleiche Verhalten lässt sich auch bei den anderen Höherharmonischen der zweiten Stufe bei den anderen Drehzahlen abbilden. Während die Amplitude der 4. Zahneingriffsordnung der zweiten Stufe bei der dynamischen Zahnkraft maßgeblich zunimmt, wenn die Drehzahl von  $6000 \text{ min}^{-1}$  auf  $6500 \text{ min}^{-1}$  erhöht wird, ist die Zunahme dieses Anteils bei der dynamischen Drehwegabweichung nicht ausschlaggebend. Die dynamische Drehwegabweichung scheint unempfindlicher gegen den Anregungen zu sein.

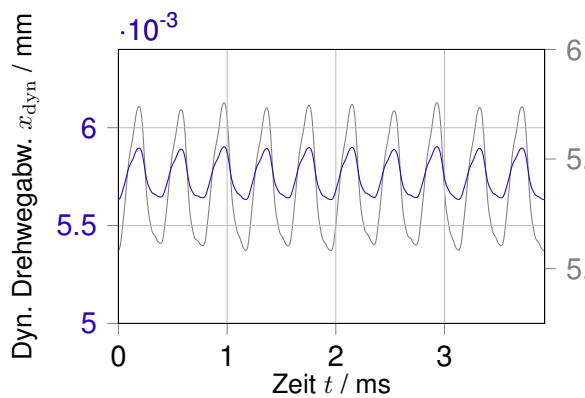
In den mit Hilfe der Spektralanalyse der dynamischen Zahnkräfte festgestellten Vorresonanzen durch die 3. und 2. Zahneingriffsordnung der ersten Stufe bei der Drehzahl von  $8500 \text{ min}^{-1}$  sowie  $12000 \text{ min}^{-1}$  in **Bild 5.6(b)** und **Bild 5.6(d)** sind die Überhöhungen der jeweiligen Höherharmonischen sichtbar. Die dominante Anregung der ersten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe hat weiterhin einen entscheidenden Einfluss auf das Anregungsverhalten in Form der Drehwegabweichung durchaus den ganzen Drehzahlbereich (s. **Bild 5.6(d) – Bild 5.7(h)**). Nach der Hauptresonanz um die Drehzahl von  $25000 \text{ min}^{-1}$  nimmt diese Anregung deutlich ab (s. **Bild 5.7(h)**). Mit zunehmenden Drehzahlen steigt die Anregung der ersten Zahneingriffsordnung allmählich an. Diese sind in **Bild 5.6(f) – Bild 5.7(h)** identifizierbar.

Die ermittelten Spektren der dynamischen Zahnkräfte bzw. der dynamischen Drehwegabweichungen können in Abhängigkeit der Drehzahl in Form von einem Ordnungsdiagramm wie in **Bild 5.8** dargestellt werden. Beide Größen stellen das Anregungsverhalten der ersten Verzahnungsstufe dar. Im Gegensatz dazu stellen die Ordnungsdiagrammen in **Kapitel 4** das Schwingungsverhalten des Getriebes dar, das sich aus der Überlagerung der Anregungsverhalten aller Verzahnungsstufen ergibt. In den beiden Diagrammen in **Bild 5.8** sind sowohl Anregungen der ersten Stufe als auch Anregungen der zweiten Stufe identifizierbar. Dies weist darauf hin, das

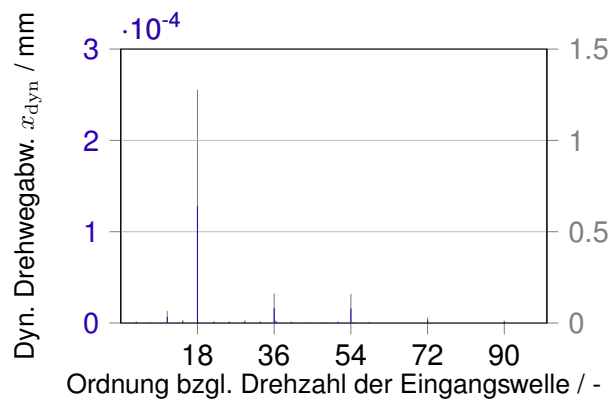
(a) Zeitverlauf bei  $n_1 = 1000 \text{ min}^{-1}$ (b) Spektrum bei  $n_1 = 1000 \text{ min}^{-1}$ (c) Zeitverlauf bei  $n_1 = 4500 \text{ min}^{-1}$ (d) Spektrum bei  $n_1 = 4500 \text{ min}^{-1}$ (e) Zeitverlauf bei  $n_1 = 6000 \text{ min}^{-1}$ (f) Spektrum bei  $n_1 = 6000 \text{ min}^{-1}$ (g) Zeitverlauf bei  $n_1 = 6500 \text{ min}^{-1}$ (h) Spektrum bei  $n_1 = 6500 \text{ min}^{-1}$ 

**Bild 5.5:** Dynamische Drehwegabweichungen der ersten Stufe des Teilgetriebes I mit der Referenzverzahnung bei unterschiedlichen Drehzahlen bei  $T_{\text{an}} = 10 \text{ N}$  (Teil I)

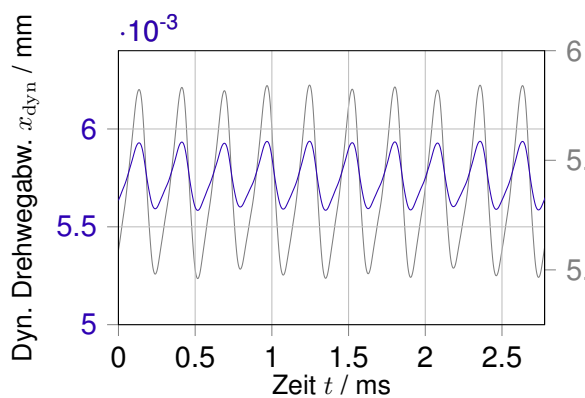




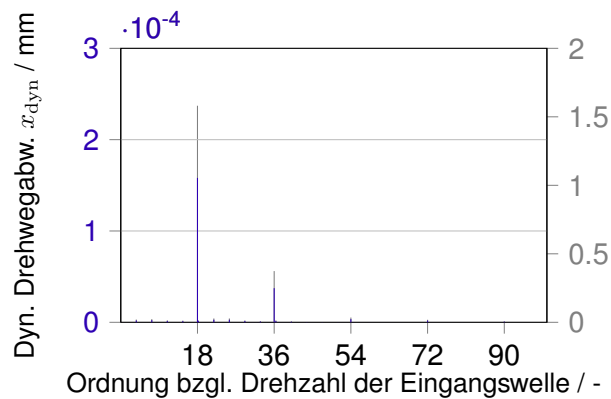
(a) Zeitverlauf bei  $n_1 = 8500 \text{ min}^{-1}$



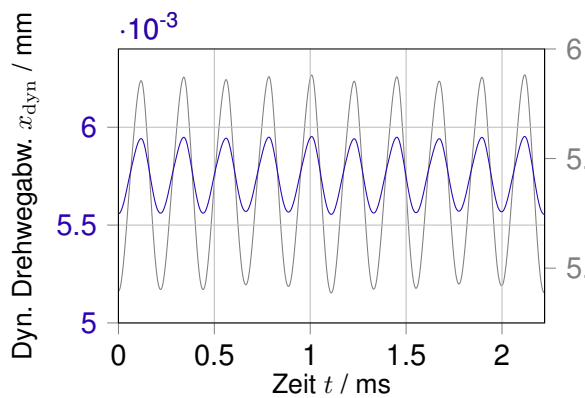
(b) Spektrum bei  $n_1 = 8500 \text{ min}^{-1}$



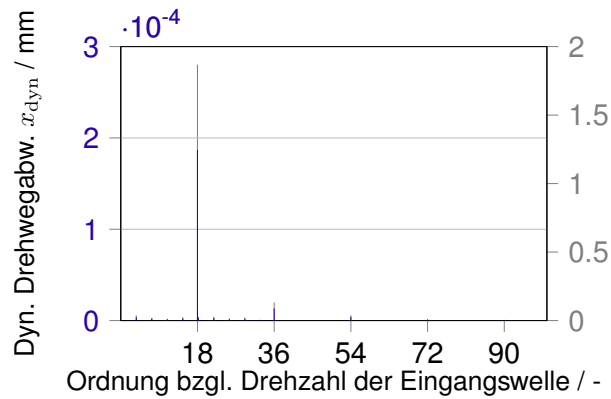
(c) Zeitverlauf bei  $n_1 = 12000 \text{ min}^{-1}$



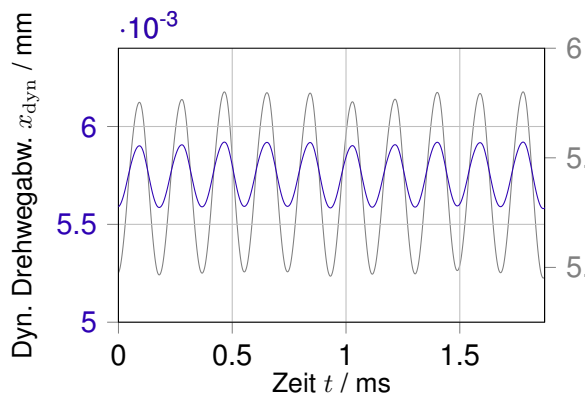
(d) Spektrum bei  $n_1 = 12000 \text{ min}^{-1}$



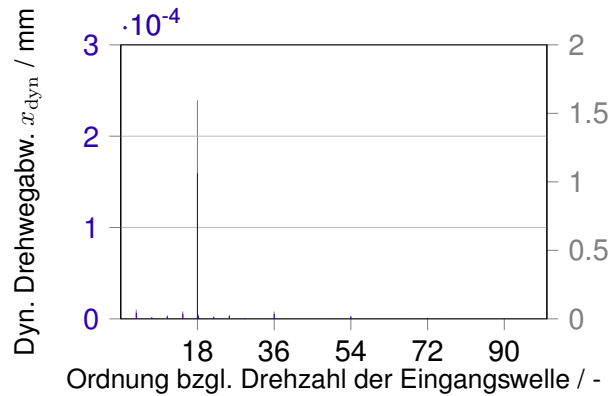
(e) Zeitverlauf bei  $n_1 = 15000 \text{ min}^{-1}$



(f) Spektrum bei  $n_1 = 15000 \text{ min}^{-1}$

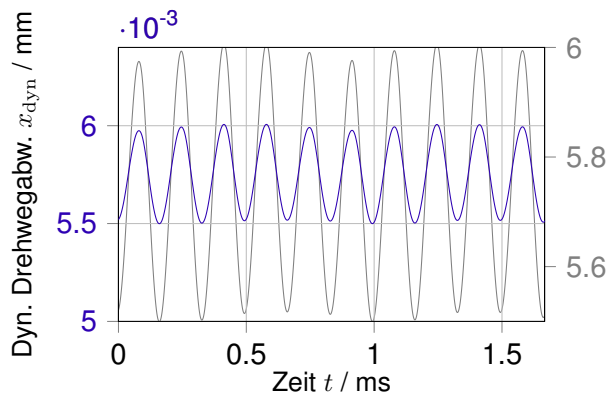
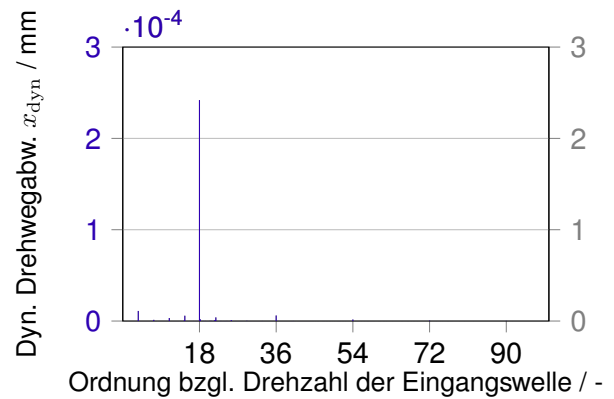
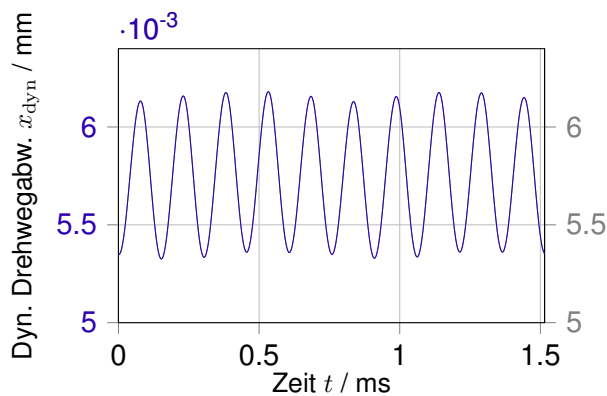
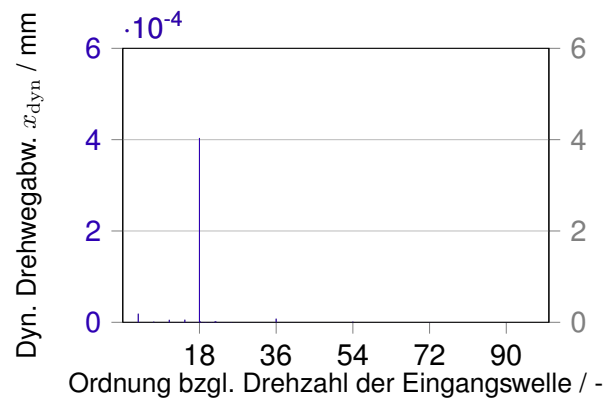
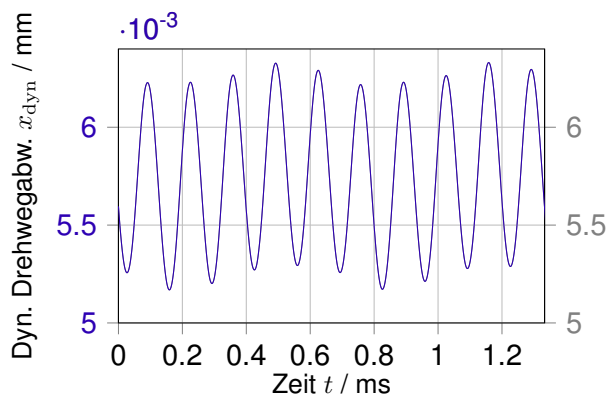
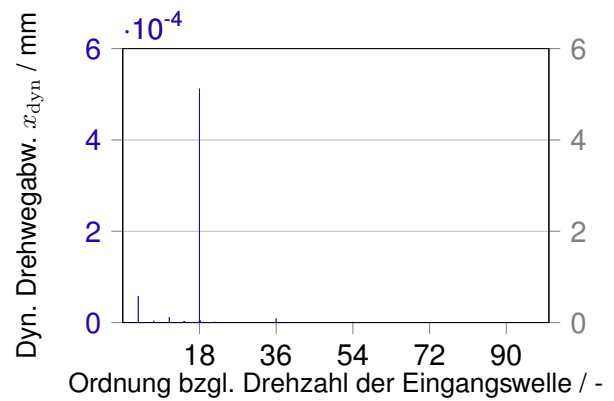
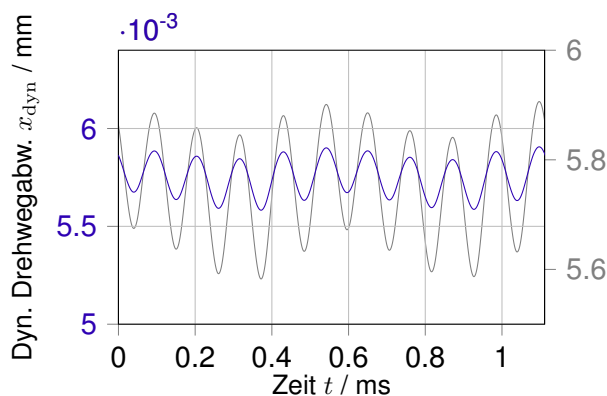
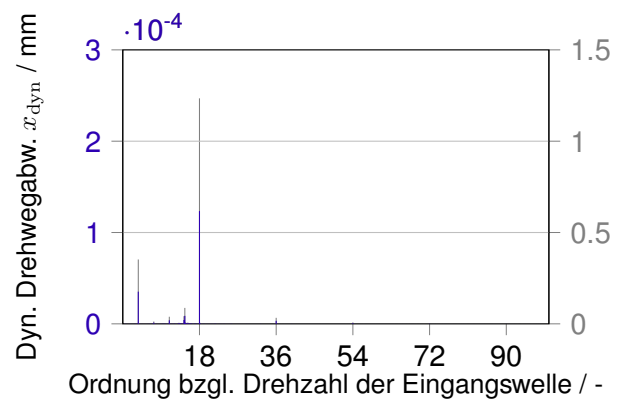


(g) Zeitverlauf bei  $n_1 = 17800 \text{ min}^{-1}$

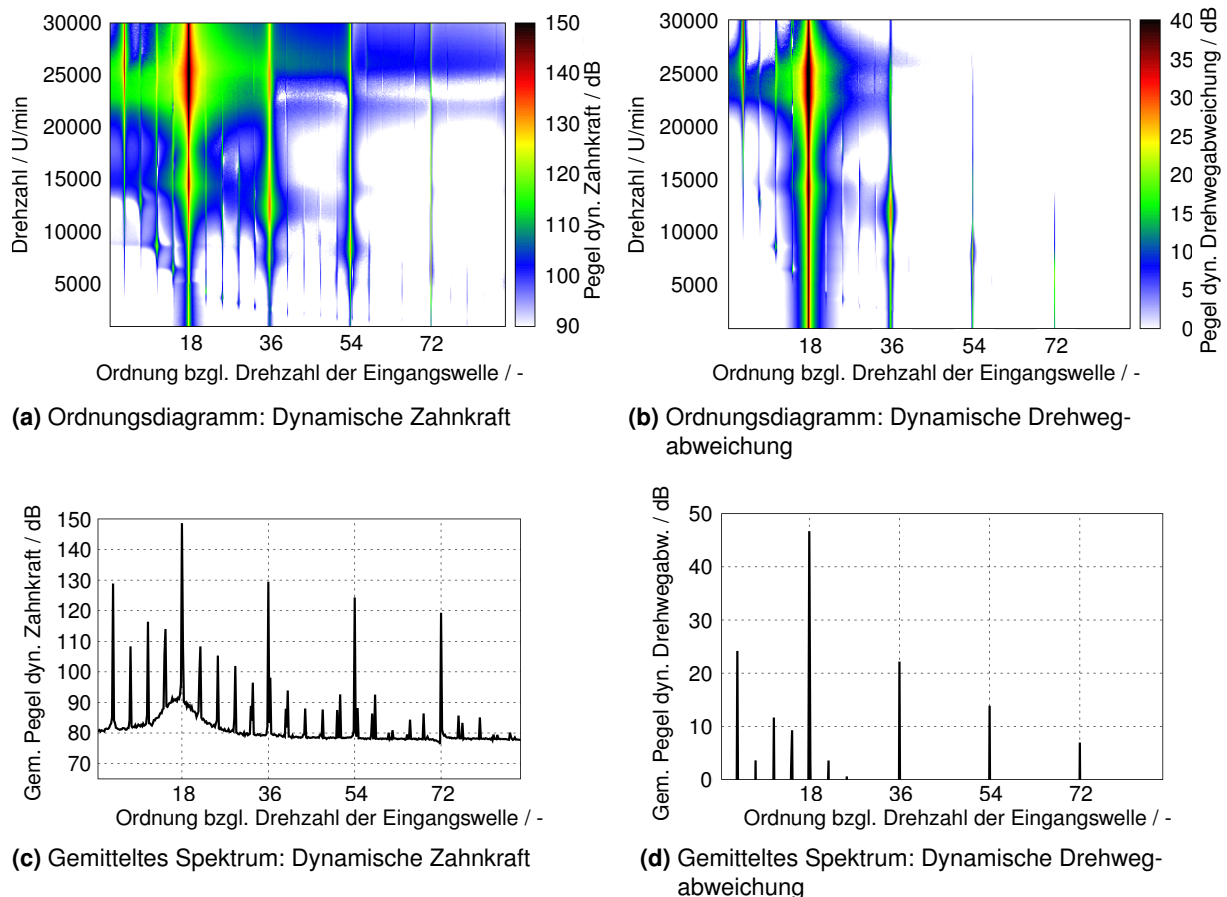


(h) Spektrum bei  $n_1 = 17800 \text{ min}^{-1}$

**Bild 5.6:** Dynamische Drehwegabweichungen der ersten Stufe des Teilgetriebes I mit der Referenzverzahnung bei unterschiedlichen Drehzahlen bei  $T_{an} = 10 \text{ N}$  (Teil II)

(a) Zeitverlauf bei  $n_1 = 20000 \text{ min}^{-1}$ (b) Spektrum bei  $n_1 = 20000 \text{ min}^{-1}$ (c) Zeitverlauf bei  $n_1 = 22000 \text{ min}^{-1}$ (d) Spektrum bei  $n_1 = 22000 \text{ min}^{-1}$ (e) Zeitverlauf bei  $n_1 = 25000 \text{ min}^{-1}$ (f) Spektrum bei  $n_1 = 25000 \text{ min}^{-1}$ (g) Zeitverlauf bei  $n_1 = 30000 \text{ min}^{-1}$ (h) Spektrum bei  $n_1 = 30000 \text{ min}^{-1}$ 

**Bild 5.7:** Dynamische Drehwegabweichungen der ersten Stufe des Teilgetriebes I mit der Referenzverzahnung bei unterschiedlichen Drehzahlen bei  $T_{\text{an}} = 10 \text{ N}$  (Teil III)



**Bild 5.8:** Auswertungen aus dynamischen Berechnungen des Anregungsverhaltens der ersten Verzahnungsstufe des TG I des Speed2E Getriebes bei Antriebsdrehmoment bei  $T_{an} = 10 \text{ Nm}$

resultierende Anregungsverhalten einzelner Verzahnungsstufe sich durch die Interaktion der Anregungen zwischen den Verzahnungsstufen ergibt. Bei der rechnerischen Bestimmung des Anregungsverhaltens der Verzahnung sind daher Kreuzeinflüsse zu berücksichtigen. Mit Hilfe des Ordnungsdigramms können Eigenfrequenzen in Form von hyperbolisch verlaufenden Linien visuell erkannt werden.

Mit Hilfe des Ordnungsdigramms in **Bild 5.8(a)** ist eindeutig zu erkennen, wie der Einfluss der dynamischen Zahnkraft auf das Anregungsverhalten der Verzahnung mit steigenden Drehzahlen zunimmt, während der Einfluss der dynamischen Drehwegabweichung in **Bild 5.8(b)** kleiner wird. Im Gegensatz zur dynamischen Zahnkraft sind die Höherharmonischen im kleinen Drehzahlbereich präsent und verschwinden allmählich mit steigenden Drehzahlen. **Bild 5.8(c)** und **Bild 5.8(d)** zeigen die gemittelten Spektren der jeweiligen Auswertegrößen. Die Anregung der ersten Zahneingriffsordnung der ersten Verzahnungsstufe weist die höchste Amplitude auf. Die zweithöchste Amplitude ist die Anregung an der ersten Zahneingriffsordnung der zweiten Verzahnungsstufe. Das Anregungsniveau ist vergleichbar mit dem der zweiten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe. Die Anregungsniveaus der Höherharmonischen der zweiten Stufe sind kleiner als die der Höherharmonischen der ersten Stufe. Dieses Verhalten ist auch in der

Messung feststellbar.

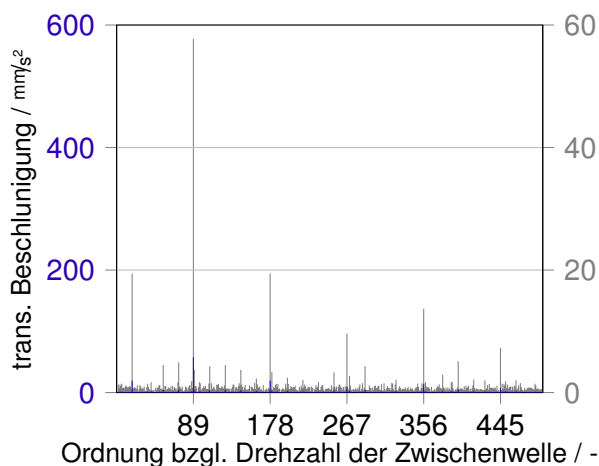
## 5.2 Untersuchung der Zustandsgröße an den Lagern in Abhängigkeit der Drehzahl

Bei mehrstufigen Getrieben werden Anregungen aller Verzahnungsstufen überlagert und in Form vom Körperschall über das Welle-Lager-System ans Getriebegehäuse weitergeleitet (s. **Bild 2.2**). In diesem Abschnitt wird das Schwingungsverhalten des Speed2E Getriebes anhand der resultierenden translatorischen Beschleunigungen an Lagerstellen der Zwischenwelle des TG I rechnerisch untersucht.

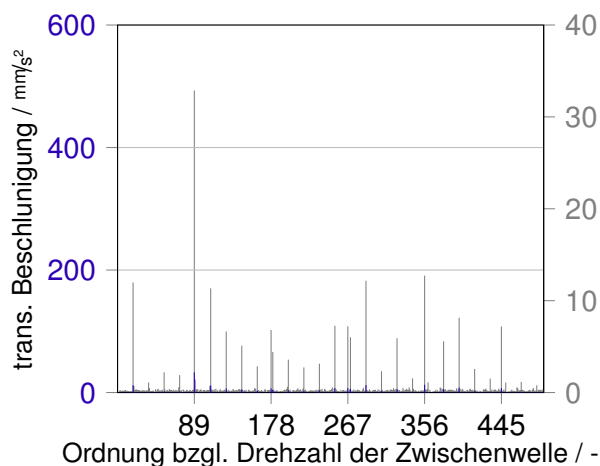
Auf der Zwischenwelle befinden sich das Rad der ersten Verzahnungsstufe ( $z_{21} = 89$ ) und der Ritzel der zweiten Stufe ( $z_{12} = 18$ ). **Bild 5.9** und **Bild 5.10** zeigen die Spektren der resultierenden Beschleunigungen an Lagerstellen der Zwischenwelle. Die Spektren in blau werden mit gleichen Achsenskalierungen dargestellt, ausgenommen bei  $n_1 = 22000$  und  $25000 \text{ min}^{-1}$ , bei denen die Amplituden recht hoch sind. Mit Hilfe der Darstellung in grau werden die Spektren bei einer bestimmten Drehzahl detailliert aufgelöst.

Im sehr kleinen Drehzahlbereich wie bei  $1000 \text{ min}^{-1}$  in **Bild 5.9(a)** dominieren wesentlich Schwingungsamplituden der ersten Zahneingriffsordnung der ersten Verzahnungsstufe. Die Amplitude der ersten Zahneingriffsordnung der zweiten Stufe weist einen relativen gleichen Wert wie die der zweiten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe auf. Beide Schwingungsamplituden gelten als die 2. dominanten Schwingungsamplituden. Dagegen sind die Amplituden der weiteren Höherharmonischen der zweiten Stufe relativ klein im Vergleich zu denen der ersten Stufe. Der Einfluss durch die zweite Verzahnungsstufe nimmt mit steigender Drehzahl zu und sind eindeutig in den Diagrammen in **Bild 5.9(b) – Bild 5.9(f)** zu identifizieren. Im Vergleich zum Schwingungsverhalten bei  $1000 \text{ min}^{-1}$  nehmen die Schwingungsamplituden der ersten Zahneingriffsordnung (entspricht der 89. Ordnung) der ersten und der zweiten Stufe bei  $4500 \text{ min}^{-1}$  eindeutig ab, während sich Schwingungsamplituden der Höherharmonischen der zweiten Stufe insbesondere zwischen der 89. – 445. Ordnung bezüglich der Drehzahl der Zwischenwelle ausprägen.

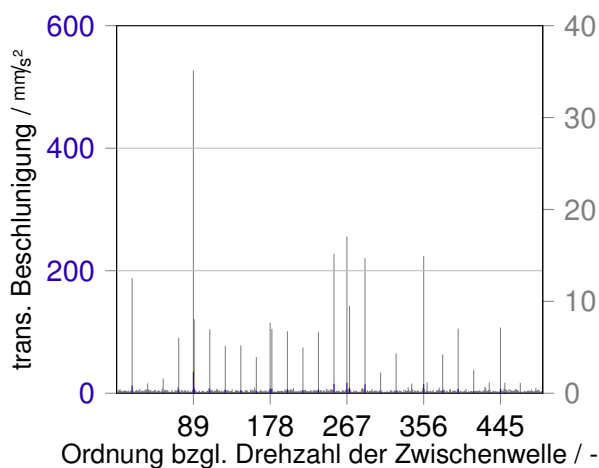
Aus der Voruntersuchung des Anregungsverhaltens der ersten Verzahnungsstufe im vorherigen Abschnitt ist bekannt, dass sich die erste Stufe im Drehzahlbereich von ca.  $6000 - 6500 \text{ min}^{-1}$  in einer Vorresonanz befindet und ihre vierte Zahneingriffsordnung eine wichtige Rolle auf das Anregungsverhalten der Verzahnung hat, vgl. auch **Bild 5.2(f)** und **Bild 5.2(h)** sowie **Bild 5.5(f)** und **Bild 5.5(h)**. **Bild 5.9(c)** und **Bild 5.9(d)** zeigen Spektren des Schwingungsverhaltens an den Lagerstellen der Zwischenwelle. Der rasche Anstieg der Schwingsamplitude der vierten Zahneingriffsordnung der zweiten Stufe bei der 72. Ordnung in **Bild 5.9(d)** ist bereits in **Bild 5.2(h)** identifizierbar. Die Schwingungsamplitude der vierten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe ist vergleichbar mit der Schwingungsamplitude dritten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe, die in den Spektren leicht höher ist als die bei der vierten Zahneingriffsordnung.



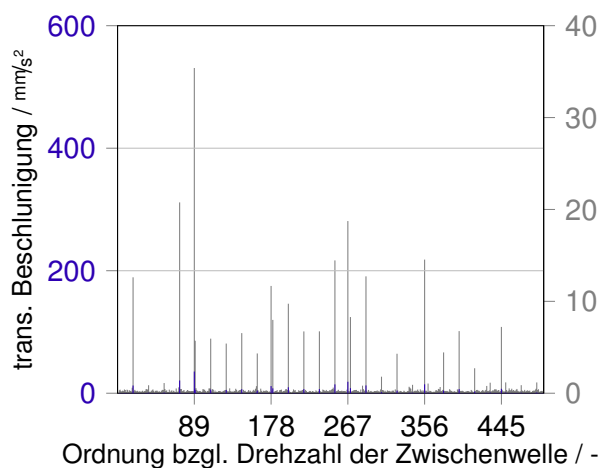
(a) Spektrum bei  $n_1 = 1000 \text{ min}^{-1}$



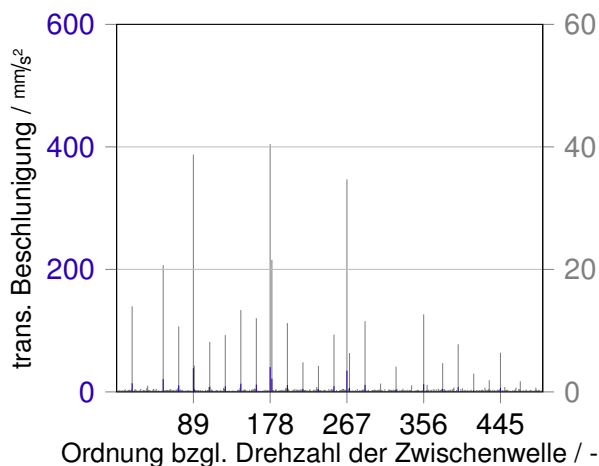
(b) Spektrum bei  $n_1 = 4500 \text{ min}^{-1}$



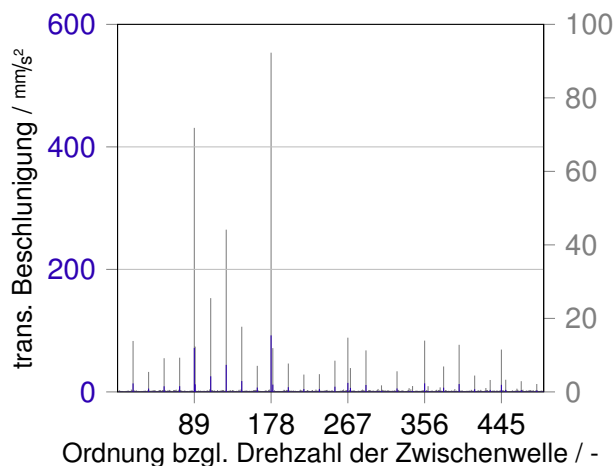
(c) Spektrum bei  $n_1 = 6000 \text{ min}^{-1}$



(d) Spektrum bei  $n_1 = 6500 \text{ min}^{-1}$

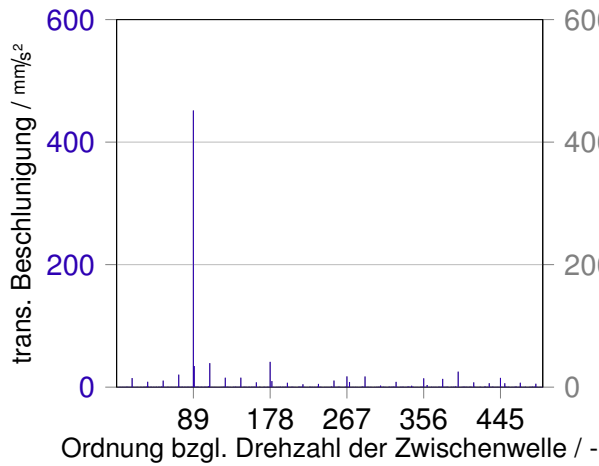
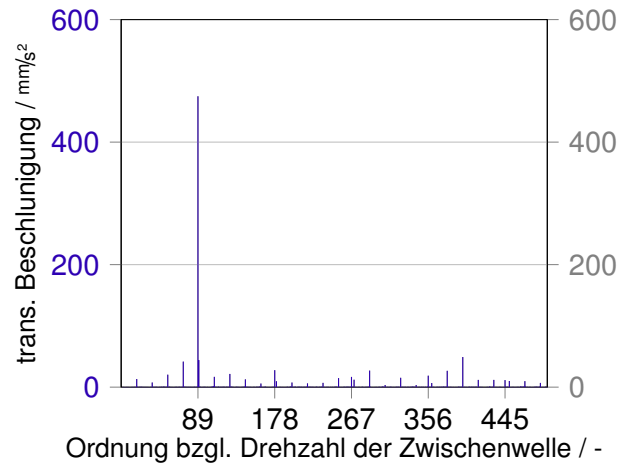
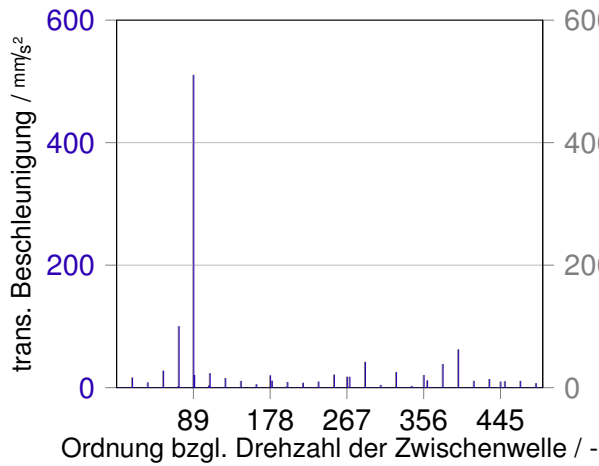
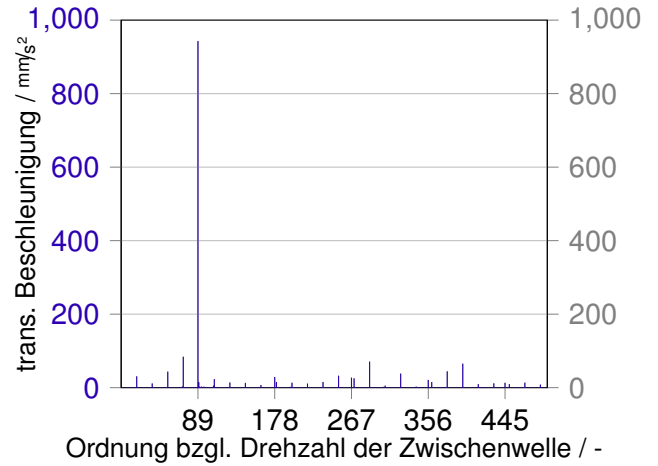
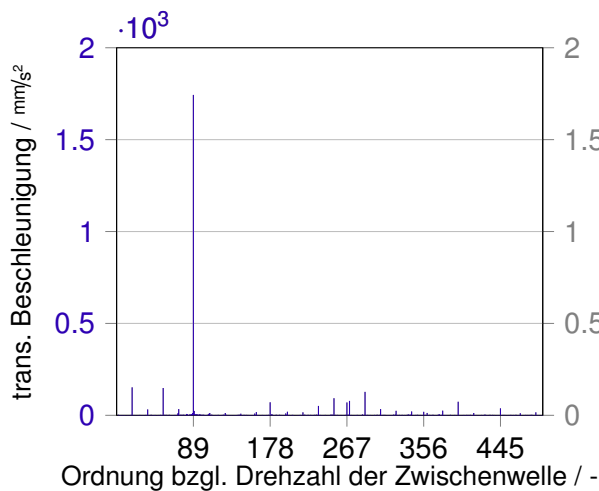
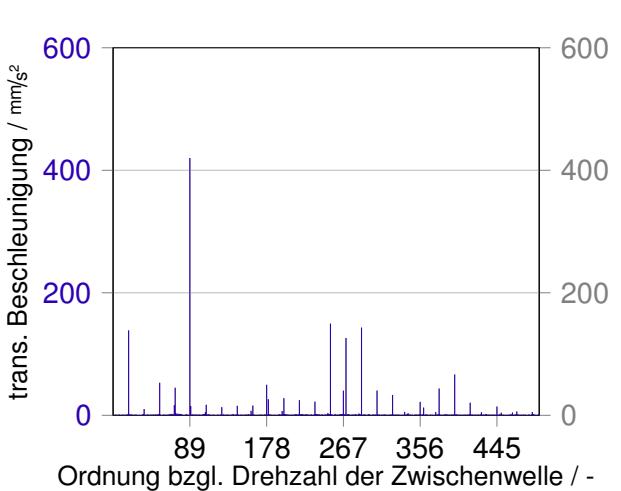


(e) Spektrum bei  $n_1 = 8500 \text{ min}^{-1}$



(f) Spektrum bei  $n_1 = 12000 \text{ min}^{-1}$

**Bild 5.9:** Resultierende translatorische Beschleunigung an Lagerstellen der Zwischenwelle bei  $T_{an} = 10 \text{ N}$  (Teil I)

(a) Spektrum bei  $n_1 = 15000 \text{ min}^{-1}$ (b) Spektrum bei  $n_1 = 17800 \text{ min}^{-1}$ (c) Spektrum bei  $n_1 = 20000 \text{ min}^{-1}$ (d) Spektrum bei  $n_1 = 22000 \text{ min}^{-1}$ (e) Spektrum bei  $n_1 = 25000 \text{ min}^{-1}$ (f) Spektrum bei  $n_1 = 30000 \text{ min}^{-1}$ 

**Bild 5.10:** Resultierende translatorische Beschleunigung an Lagerstellen der Zwischenwelle bei  $T_{\text{an}} = 10 \text{ N}$  (Teil II)

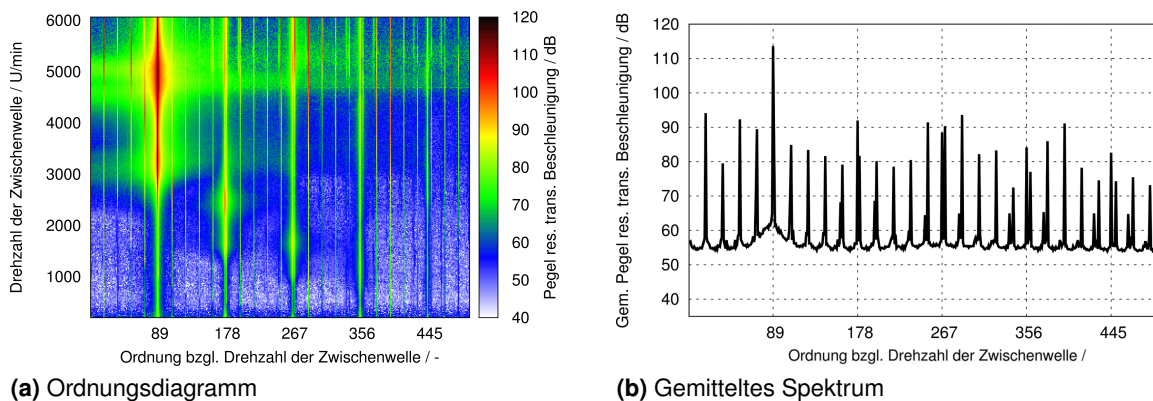
Beide Amplituden sind deutlich größer als die Schwingungsamplitude der zweiten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe. Die unterschiedlichen Schwingungsantworten an den verschiedenen Ordnungen führen auf den Einfluss des Übertragungsverhaltens von Radkörpern, Wellen bis hin zu den Lagerstellen zurück. Aus dem vorherigen Abschnitt ist bereits zu erkennen, dass die Drehzahl einen gewissen Einfluss auf die Anregungsamplituden der Höherharmonischen der Verzahnungsanregung hat. Daraus lässt sich ausschließen, dass die 3. und 4. Höherharmonischen der ersten Verzahnungsstufe in diesem Drehzahlbereich einen Einfluss auf das Schwingungsverhalten des Getriebes hat.

Das Schwingungsverhalten durch die Höherharmonischen ist in **Bild 5.9(e)** und **Bild 5.9(f)** wiederzuerkennen, bei denen die Amplituden an der 3. und die 2. Zahneingriffsordnung der ersten Stufe eine wesentliche Rolle für das Schwingungsverhalten des Getriebes spielen. Bei der Drehzahl von  $8500 \text{ min}^{-1}$  weisen die 1., 2. und 3. Zahneingriffsordnung ein vergleichbares Schwingungsniveau auf. Bei der Drehzahl von  $12000 \text{ min}^{-1}$  steigt die Amplitude der zweiten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe rasch und überholt die Schwingungsamplitude der ersten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe. Weiterhin können Schwingungsamplituden an den 18. und deren Vielfachen durch die zweite Verzahnungsstufe festgestellt werden. Im Vergleich zu den Spektren bei niedrigeren Drehzahlbereichen z.B. bei der Drehzahl von  $4500 \text{ min}^{-1}$  nehmen die Amplituden der niedrigeren Zahneingriffsordnungen zu.

Mit steigender Drehzahl nimmt die Schwingungsamplitude der ersten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe im Vergleich zu den Schwingungsamplituden an den anderen Ordnungen rasch zu, s. auch **Bild 5.10(a)** – **Bild 5.10(e)**. Sie weist den höchsten Wert um die Drehzahl von ca.  $25000 \text{ min}^{-1}$  auf. Hier sind zwar die Amplituden der anderen Ordnungen feststellbar, aber sie weisen deutlich untergeordnete Werte auf. Bereits im vorherigen Abschnitt wurde die Resonanzstelle der ersten Verzahnungsstufe um die Drehzahl von ca.  $25000 \text{ min}^{-1}$  lokalisiert. Das Schwingungsverhalten innerhalb dieses Drehzahlbereich führt daher auf die Lage der Resonanzstelle der ersten Verzahnungsstufe zurück.

Bei  $30000 \text{ min}^{-1}$  nimmt die Schwingungsamplitude der ersten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe deutlich ab, s. auch **Bild 5.10(f)**. Diese Abnahme der Amplitude weist darauf hin, dass die Resonanz bereits durchgefahen ist. In dem Spektrum nehmen die Amplituden durch die zweite Stufe zu. Hierin können z.B. die Amplituden der 1., 14., 15. und 16. Zahneingriffsordnungen (entspricht der 18., 252., 270. und 288. Ordnung im Diagramm) eindeutig festgestellt werden.

Die Spektren der resultierenden Beschleunigung können in Abhängigkeit der Drehzahlen zusammengefasst in Form des Ordnungsdiagramms in **Bild 5.11(a)** dargestellt werden. Die Drehzahl wird unter Berücksichtigung der Übersetzung dargestellt. Das resultierende Schwingungsverhalten, das sich aus den Schwingungsamplituden sowohl aus der ersten als auch aus der zweiten Stufe zusammen setzt, können im Diagramm eindeutig erkannt werden. Darüber hinaus können die Stellen mit hohen Schwingungsamplituden durch die Vor- bzw. Resonanzstellen



**Bild 5.11:** Auswertung der rechnerischen resultierenden translatorischen Beschleunigungen an Lagern der Zwischenwelle des TG I des Speed2E Getriebes bei Antriebsdrehmoment bei  $T_{an} = 10 \text{ Nm}$

abgelesen werden. Aus dem Ordnungsdigramm lässt sich das gemittelte Ordnungsspektrum ermitteln und ist in **Bild 5.11(b)** dargestellt.

### 5.3 Lagerkraft und Lagerkraftpegel

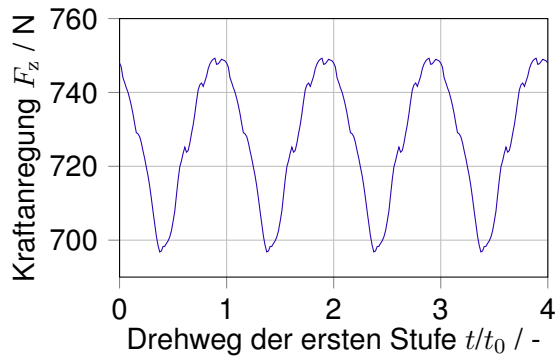
Bisher wird das Speed2E Getriebe mit Hilfe von Dynamiksimulationen rechnerisch untersucht. Trotz der detaillierten Aussage über den Drehzahleinfluss benötigt die Dynamiksimulation oft eine lange Rechenzeit. Bei mehrstufigen Getrieben wird der auszuwertende Zeitraum oft wesentlich länger als bei einstufigen Getrieben, da sich das Schwingungsverhalten mehrstufiger Getriebe aus Anregungen unterschiedlicher Anregungsfrequenzen zusammensetzt. Nur dann werden sinnvolle Ergebnisse aus den Weiterauswertungen wie Spektralanalyse gewährleistet. Ein Ordnungsdigramm über einen breiten Drehzahlbereich zu erzeugen, kann daher wochenlang dauern. Diese ist bei bestimmten Anwendungsfällen z.B. bei der Variationsrechnung zur Optimierung von Mikrogeometrien ungünstig.

Im Gegensatz zur Dynamiksimulation werden quasistatische Berechnungen bevorzugt eingesetzt, wenn die Rechenzeit kritisch wird, s. auch **Abschnitt 2.1.2** und **Abschnitt 2.1.3**. Die Ergebnisse haben sich bei einstufigen Getriebe bewährt. In diesem Abschnitt wird die Gültigkeit der erweiterten Lagerkraft, die sich aus Kraftanregungen von Verzahnungen bei mehrstufigen Getrieben ermitteln lässt, untersucht.

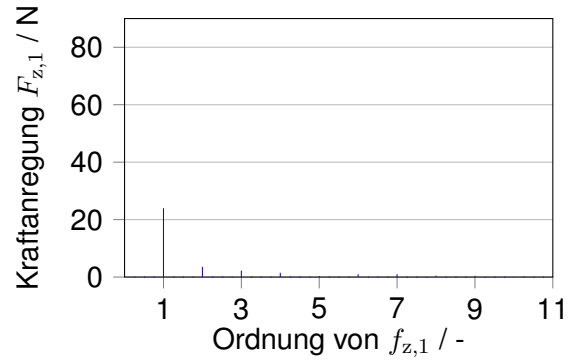
**Bild 5.12** zeigt die Kraftanregungen beider Verzahnungsstufen bei dem Antriebsmoment an der Eingangswelle von  $T_{an} = 10 \text{ Nm}$ . Die Zeitverläufe in **Bild 5.12(a)** und **Bild 5.12(c)** werden bis 4. Zahneingriff der jeweiligen Verzahnungstufe dargestellt. Daraus ergeben sich die Spektren für die jeweiligen Verzahnungsstufen. Die Spektren in **Bild 5.12(b)** und **Bild 5.12(d)** werden bezüglich der Zahneingriffsordnung der zugeordneten Stufen dargestellt.

Die Amplituden der Kraftanregung der zweiten Stufe in **Bild 5.12(d)** sind deutlich höher als die der ersten Stufe in **Bild 5.12(b)**. Während die Amplitude der ersten Zahneingriffsordnung bei der zweiten Stufe ca. 80 N beträgt, weist die Amplitude der ersten Zahneingriffsordnung bei der

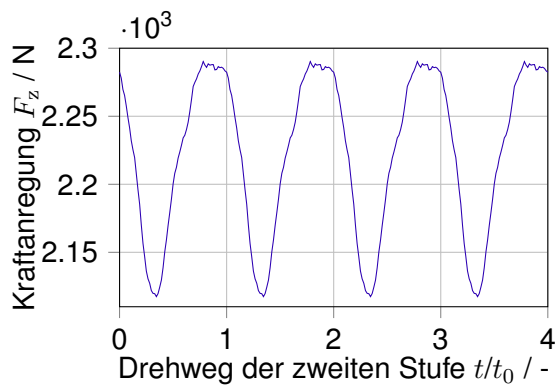




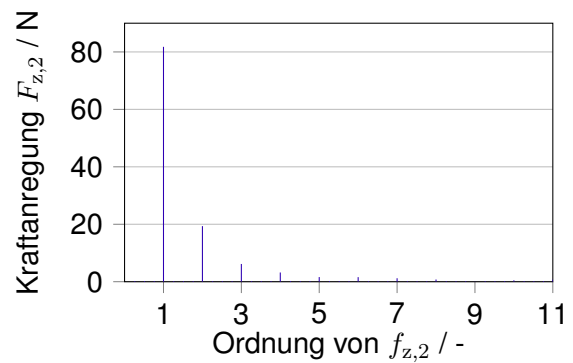
(a) Zeitverlauf der Kraftanregung der ersten Stufe



(b) Spektrum der ersten Stufe



(c) Zeitverlauf der Kraftanregung der zweiten Stufe



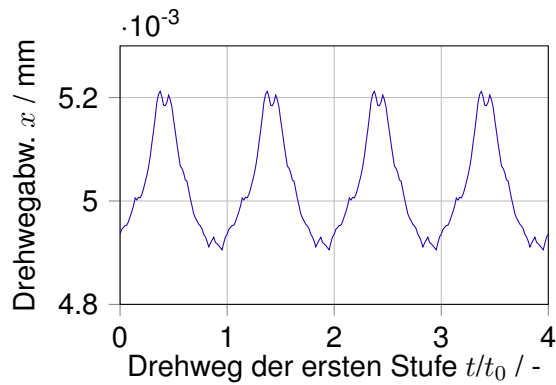
(d) Spektrum der zweiten Stufe

**Bild 5.12:** Quasistatische Kraftanregungen der jeweiligen Verzahnungsstufen

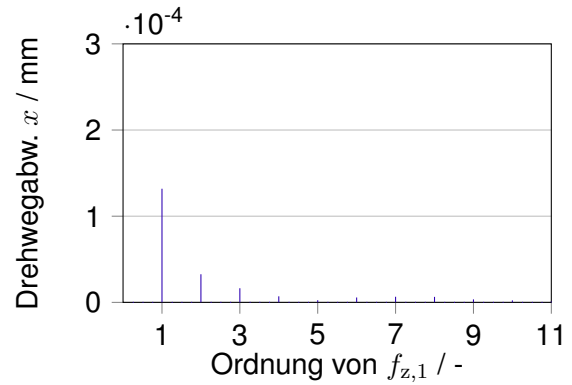
ersten Stufe nur ca. 20 N auf. Die höhere Anregung an der zweiten Stufe liegt an der Tatsache, dass größere Last aufgrund der Übersetzung an der zweiten Verzahnungsstufe vorliegt. Unter Berücksichtigung der Übersetzung von ca. 4.9 liegt das Moment 49 Nm am Ritzel der zweiten Stufe vor und entspricht der Nennumfangskraft  $F_t$  von 2223.13 N. Am Ritzel der ersten Stufe liegt im Gegensatz dazu das Antriebsmoment 10 Nm und entspricht der Nennumfangskraft von 727.48 N. Mit Hilfe der Makrogeometrien der Räder in **Tabelle 4.1** kann davon ausgegangen werden, dass dadurch größere Verformung an der zweiten Verzahnungsstufe vorliegt (vgl. die quasistatische Drehwegabweichung in **Bild 5.13**) und somit höhere Kraftsamplitude.

Die Lagerkraft lässt sich aus den Kraftanregungen ermitteln, s. **Abschnitt 2.1.4**. Die Ergebnisse werden in **Bild 5.14** zusammen mit den Auswertungen der jeweiligen Komponenten entlang der orthogonalen Achsen zusammengestellt. Die Ergebnisse im Zeitbereich werden innerhalb einer kompletten Umdrehung der Zwischenwelle dargestellt. In diesem Zeitraum sind beide Kraftanregungen periodisch. Daraus werden die Spektren bezüglich der Zwischenwelle dargestellt.

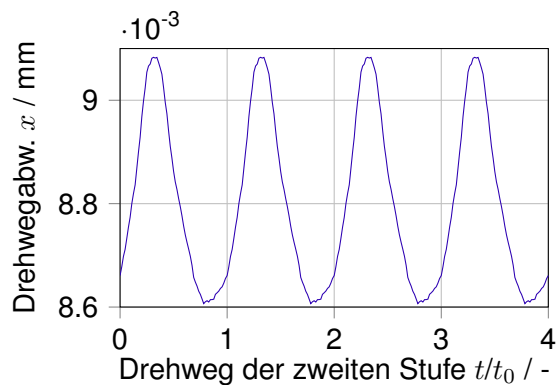
Bei der resultierenden Lagerkraft weist bei der Spektralanalyse in **Bild 5.14(b)** die höchste Amplitude an der 18. Ordnung auf. Diese entspricht der Amplitude der 1. Zahneingriffsordnung der zweiten Stufe. Die zweithöchste Amplitude liegt bei der 89. Ordnung und entspricht die Anregung aus der ersten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe. Insgesamt wird die Lagerkraft durch



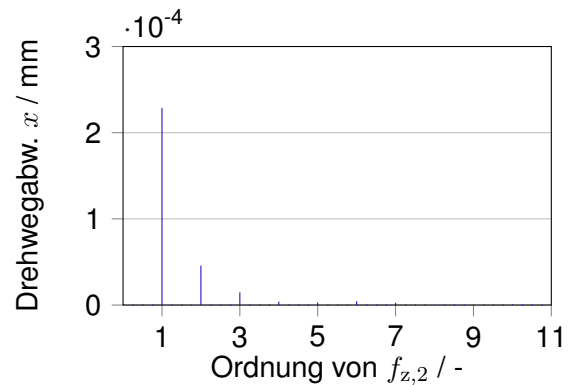
(a) Zeitverlauf der ersten Stufe



(b) Spektrum der ersten Stufe



(c) Zeitverlauf der zweiten Stufe

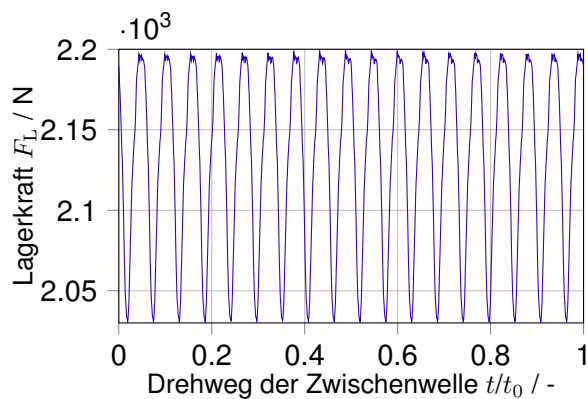


(d) Spektrum der zweiten Stufe

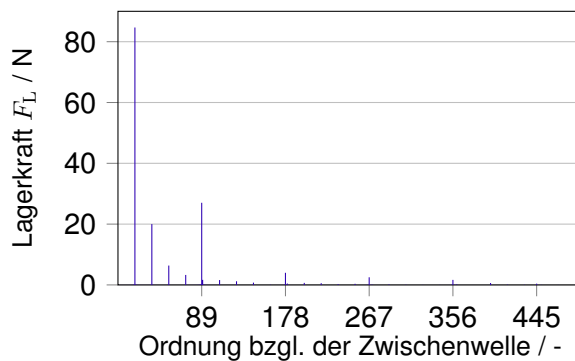
**Bild 5.13:** Quasistatische Drehwegabweichung der jeweiligen Verzahnungsstufen

die Anregungen der zweiten Stufe hauptsächlich beeinflusst. **Bild 5.14(c) – Bild 5.14(h)** zeigen die Auswertungen der Lagerkraft entlang der jeweiligen orthogonalen Achsen wie sie in **Bild 4.6** definiert sind. In Richtung der  $w$ -Achse wird die Lagerkraftkomponente maßgeblich durch die erste Stufe charakterisiert. Die Anregungen der zweiten Stufe sind in dem Diagramm kaum sichtbar. Dagegen wird die Lagerkraftkomponente in Richtung der  $v$ -Achse vorwiegend durch die zweite Stufe abgebildet. Das negative Vorzeichen in **Bild 5.14(e)** deutet auf die Richtung der radialen Kraft in die Wellenmitte hin. Die Ausprägung unterschiedlicher Anregungen in den Achsen führt auf die geometrischen Lagen der Eingriffsrichtungen beider Stufen und die Definition der Achsen zurück, s. **Bild 4.6**. Beim TG I stehen außerdem die Eingriffsrichtungen nahezu orthogonal zueinander und macht den Effekt um so ausgeprägter. **Bild 5.14(h)** zeigt die Spektren der axialen Lagerkraftkomponente. Die Anregungen der ersten Zahneingriffsordnungen weisen vergleichbare Werte auf. Geometrisch werden Makrogeometrien wie Schrägungswinkel beeinflusst.

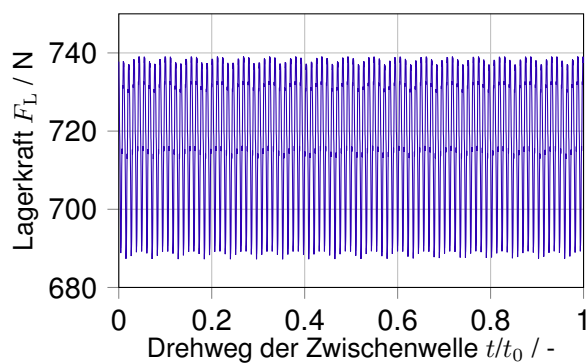
Die Amplituden der Lagerkraftkomponenten sind zeitveränderlich. Dadurch ist die räumliche Eingriffslage der Lagerkraft zeitlich nicht konstant. **Bild 5.15** zeigt die Lage der resultierenden Lagerkraft in der radialen Ebene bezüglich der  $w$ -Achse. Die Werte schwanken zwischen ca.  $288^\circ - 292^\circ$ .



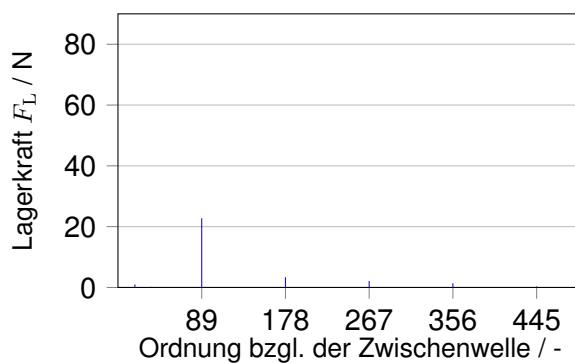
(a) Zeitverlauf der resultierenden Lagerkraft



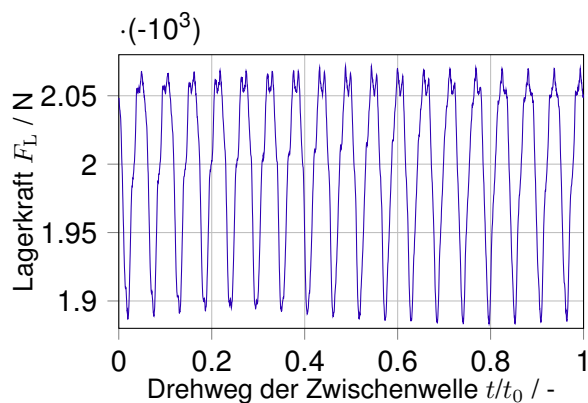
(b) Spektrum der resultierenden Lagerkraft



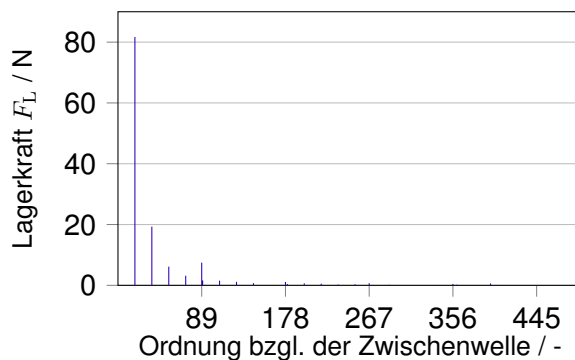
(c) Zeitverlauf der Komponente der Lagerkraft in  $w$ -Achse



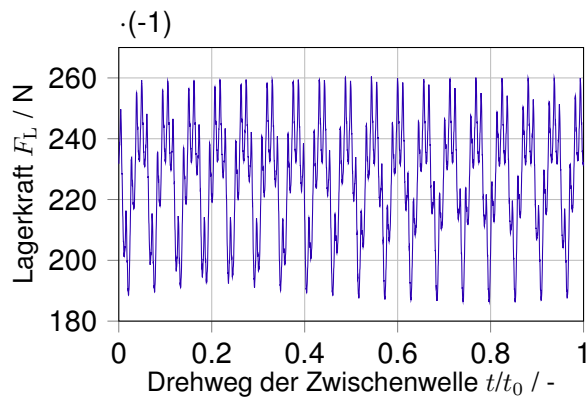
(d) Spektrum der Komponente der Lagerkraft in  $w$ -Achse



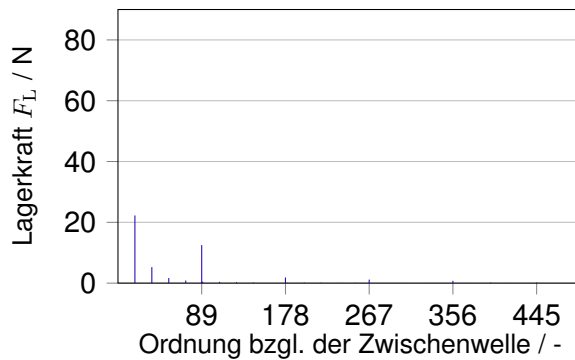
(e) Zeitverlauf der Komponente der Lagerkraft in  $v$ -Achse



(f) Spektrum der Komponente der Lagerkraft in  $v$ -Achse

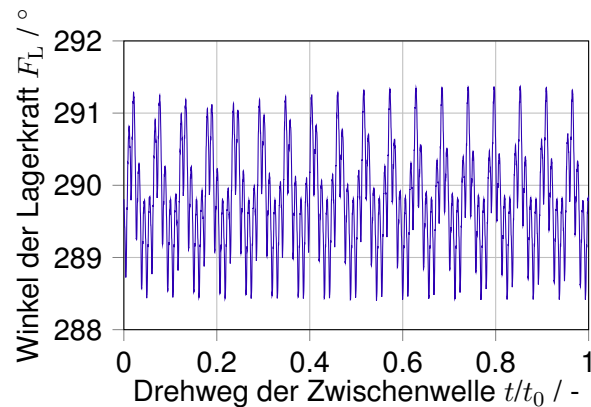


(g) Zeitverlauf der Komponente der Lagerkraft in  $u$ -Achse



(h) Spektrum der Komponente der Lagerkraft in  $u$ -Achse

**Bild 5.14:** Lagerkraft und deren Komponenten in den jeweiligen Achsen



**Bild 5.15:** Zeitverlauf des Winkels der Lagerkraft aus Kraftanregungen der Zwischenwelle

Im Gegensatz zu anderen ermittelten Ergebnissen weist bei der quasistatischen Lagerkraft die Amplitude der ersten Zahneingriffsordnung der zweiten Stufe die höchste auf. Die Ergebnisse haben gezeigt, dass die Amplitude der ersten Zahneingriffsordnung eher die dominante ist. Diese Diskrepanz führt grundlegend auf die Vernachlässigung des Drehzahleinflusses bei der Lagerkraft zurück. Bei mehrstufigen Getrieben liegen an den Verzahnungsstufen unterschiedliche Lasten und Drehzahlen aufgrund der Übersetzungen vor. Bei der Übersetzung ins Langsame  $i > 1$  wird das Moment höher übersetzt. Auf der nächsten Verzahnungsstufe liegt höhere Last vor. Die quasistatische Anregung auf dieser Stufe ist daher größer als die auf den niedrigeren Stufen. Durch die Übersetzung wird außerdem die Drehzahl umgewandelt. Bei der Übersetzung  $i > 1$  wird die Anregungsfrequenz der nächsten Stufe kleiner. Verfügen die Verzahnungsstufen über vergleichbar hohe Eigenfrequenzen, liegt der Abstand zwischen der Betriebsdrehzahl (Anregungsfrequenz) und der Resonanz bei der nächsten Stufe größer vor. Diese Stufe wird in diesem Sinne unterkritischer betrieben als die niedrigeren Stufen. Je nach dem Betriebspunkt werden die Verzahnungsstufen unter Berücksichtigung des Drehzahleinflusses (unterschiedlicher Anregungsfrequenzen) unterschiedlich verstärkt. Bei Getrieben mit  $i > 1$  können Anregungen der ersten Stufe im unterkritischen Betrieb höher sein, als die der zweiten Stufe. Die Hauptresonanz der ersten Stufe kann früher erreicht werden als die der zweiten Stufe, da diese Stufe schneller dreht. Dies ist beim TG I der Fall.

**Tabelle 5.1:** Lagerkraftpegel aus den Kraftanregungen der Zwischenwelle des TG I

Verzahnungsvariante	Lagerkraftpegel in dB
Referenz	69.78
Unterkritisch	70.10
Überkritisch	68.27
Low-Loss	73.14

**Tabelle 5.1** listet die Lagerkraftpegel der Zwischenwelle des TG I mit allen vier Verzahnungsvarianten auf. Bei der Kennwertbildung werden Amplituden mit deren Ordnungen quadratisch gewichtet (s. **Abschnitt 2.4.2**). So werden Amplituden höherer Ordnungen mit stärkerer Ge-

wichtung ausgewertet. Effekte wie Erhöhungen in Vorresonanzstellen werden dadurch berücksichtigt.

Um die fehlende Aussage über Drehzahl- bzw. auch Kreuzeinflüsse bei der quasistatischen Lagerkraft ohne Einbuße von der Rechenzeit zu ergänzen, können sie in Form von Übertragungsfunktionen ausgedrückt werden. Je höherwertiger die Übertragungsfunktion ist, desto aussagekräftiger werden die Ergebnisse. Die Vergrößerungsfunktionen nach Geiser [Gei02] in **Abschnitt 2.3** können zur Abschätzung des Anregungsverhaltens einer Verzahnung in Form vom Weg oder der Kraft unter Berücksichtigung der Lage der Verzahnungshauptresonanz verwendet werden. Für die Ermittlung der Vergrößerungsfunktionen ist eventuell eine Vorrechnung der Verzahnungseigenfrequenz notwendig. Außerdem liefern die Ergebnisse ausschließlich Aussagen an den jeweiligen Verzahnungsstufen. Bei mehrstufigen Getrieben werden weitere Berechnungsvorschriften benötigt, um daraus das Schwingungsverhalten zu beurteilen.

Mit Hilfe des Verfahrens in **Abschnitt 3.4** kann eine Übertragungsfunktion einer Verzahnungsanregung zu einer Zustandsgröße wie Auslenkung, Geschwindigkeit, Beschleunigung oder einer daraus abgeleiteten Kraft bzw. Moment an einem bestimmten Wellenabschnitt ermittelt werden. Die Vorkenntnis über der Lagen der Verzahnungseigenfrequenzen ist nicht notwendig. Diese werden bei der Berechnung ermittelt. Im Folgenden werden die Übertragungsfunktionen der Kraftanregungen beider Verzahnungsstufen zur resultierenden translatorischen Beschleunigung an den Lagern der Zwischenwelle ermittelt. Die Massen- und Steifigkeitsmatrix in **Gleichung (3.11)** lassen sich aus dem linearen Gesamtgetriebesystem analog zur Berechnung der Dynamiksimulation ermitteln. Für Verzahnungen in der  $\underline{C}_{\text{äqu}}$  Matrix werden die gemittelten Eingriffssteifigkeiten aus der quasistatischen Berechnung verwendet. Daraus kann die Dämpfungsmatrix  $\underline{K}_{\text{äqu}}$  wie in **Abschnitt 3.5.2** bestimmt werden.

Bei der Anregung mit der Kraftanregung wird der Kraftvektor  $\underline{F}$  nach **Gleichung (3.15)** aufgebaut. Der Kraftvektor entspricht der Zahnkraft von 1 N an einer Verzahnungsstufe. Mit Hilfe der **Gleichung (3.12)** und **Gleichung (3.14)** können die Beschleunigungen an den Freiheitsgraden bestimmt werden. Die resultierende translatorische Beschleunigung eines Lagers L1 ergibt sich aus der Summe deren Komponenten im Frequenzbereich wie in **Gleichung (3.41)**. Daraus folgt:

$$\mathcal{L} \left\{ \ddot{\underline{x}}_{\Sigma \text{trans},L1} \right\} = s^2 X_{u,L1}(s) \cdot \underline{e}_u + s^2 X_{v,L1}(s) \cdot \underline{e}_v + s^2 X_{w,L1}(s) \cdot \underline{e}_w \quad \text{mit } s = j\omega \quad (5.1)$$

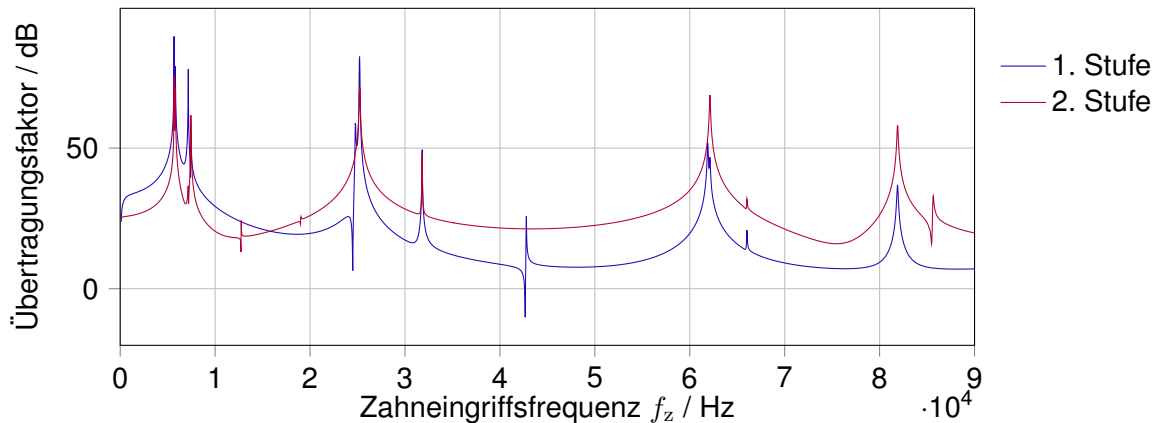
Unter der Annahme inkohärenter Schallquellen an den Lagern lässt sich die Übertragungsfunktion der resultierenden translatorischen Beschleunigung an Lagern der Zwischenwelle wie folgt ermitteln, vgl. **Abschnitt 3.9**:

$$\left| \mathcal{L} \ddot{\underline{x}}_{\Sigma \text{trans},L} \right|^2 = \left| \mathcal{L} \ddot{\underline{x}}_{\Sigma \text{trans},L1} \right|^2 + \left| \mathcal{L} \ddot{\underline{x}}_{\Sigma \text{trans},L2} \right|^2 \quad (5.2)$$

In **Bild 5.16** sind die Übertragungsfunktionen der Kraftanregungen der beiden Stufen zur resultierenden translatorischen Beschleunigung an den Lagern der Zwischenwelle dargestellt. Die

Übertragungsfunktionen haben ursprünglich die Einheit in  $\text{mm/s}^2\text{N}$ . Um die einheitliche Konvention der Pegeldarstellung von unterschiedlichen Größen zu gewährleisten, werden die Funktionen gemäß der Pegelung nach FVA 487 [Hei11b, Uta15] wie folgt logarithmisch dargestellt:

$$L_{\text{FRF}}(f_z) = 20 \log \left[ \frac{|\mathcal{L}\ddot{\mathbf{x}}_{\Sigma \text{trans,L}}(f_z)|}{1 \cdot 10^{-6}} \right] \quad \text{mit } f_z = \frac{\omega_z}{2\pi} = \frac{n \cdot z}{60 \cdot 2\pi} \quad (5.3)$$



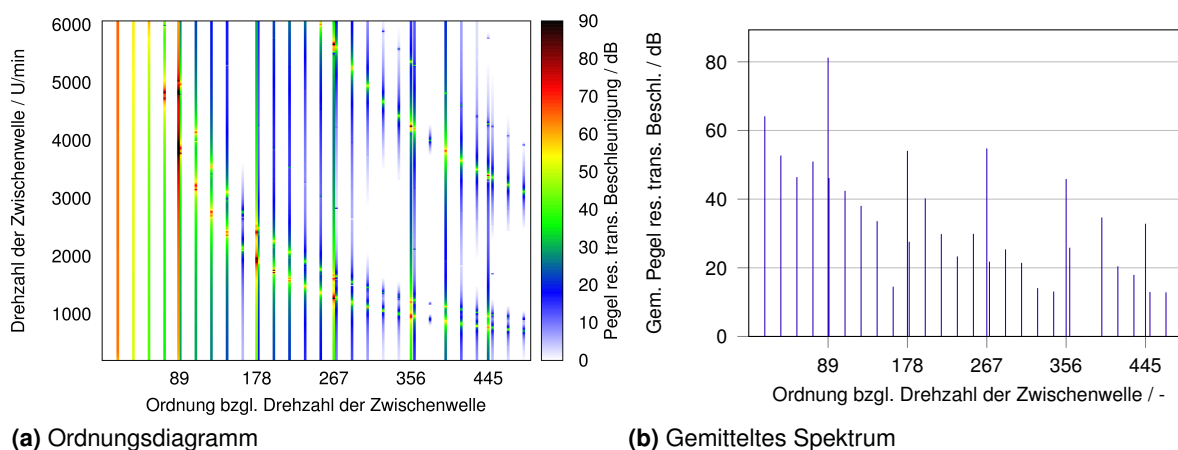
**Bild 5.16:** Übertragungsfunktionen der Kraftanregungen der jeweiligen Verzahnungsstufen zur resultierenden translatorischen Beschleunigung an den Lagern der Zwischenwelle

Daraus können die Spektrenamplituden  $S(n, \text{ord})$  der resultierenden translatorischen Beschleunigung quasidynamisch wie folgt ermittelt werden:

$$S(n, \text{ord}) = \sum_i^N \left[ \left| \mathcal{L}\ddot{\mathbf{x}}_{\Sigma \text{trans,L},i}(f_{z,i}(n) \cdot \text{ord}) \right| \cdot F_{\text{ord},i} \right] \quad (5.4)$$

$S(n, \text{ord})$	$\text{mm/s}^2 \cdot \text{N}$	Spektrenamplitude der Ordnung $\text{ord}$ bei der Drehzahl $n$	$F_{\text{ord},i}$	N	Kraftanregung bei der Ordnung $\text{ord}$ der $i$ -ten Verzahnungsstufe
$i$	-	$i$ -te Verzahnungsstufe	$N$	-	Anzahl der Verzahnungsstufen

**Bild 5.17(a)** zeigt das Ordnungsdiagramm der resultierenden translatorischen Beschleunigung an den Lagern der Zwischenwelle aus der quasidynamischen Auswertung. Die Überhöhung um den Drehzahlbereich der Zwischenwelle von  $4000 - 5000 \text{ min}^{-1}$  an der 89. Ordnung ist nachvollziehbar aus den vorherigen Auswertungen. In dem Diagrammen sind außerdem einige Eigenfrequenzen sichtbar. **Bild 5.17(b)** zeigt das gemittelte Ordnungsspektrum aus dem Ordnungsdiagramm. Im qualitativen Vergleich zur quasistatischen Auswertung der Lagerkraft in **Bild 5.14(b)** zeigt die höchste Amplitude an der ersten Zahneingriffsordnung der ersten Stufe (89. Ordnung). Obwohl die Amplitude an der 18. Ordnung deutlich unter Berücksichtigung des Drehzahleinflusses abnimmt, trägt sie jedoch auch maßgeblich bei der Schwingungsantwort bei und insgesamt relativ vergleichbar mit den 2. und 3. Zahneingriffsordnungen der ersten Stufe.



**Bild 5.17:** Quasidynamische Auswertung der resultierenden translatorischen Beschleunigung an den Lagern der Zwischenwelle

**Tabelle 5.2:** Anwendungskraftpegel nach Methode B  $L_{A,F,B}$  der resultierenden translatorischen Beschleunigung an den Lagern der Zwischenwelle des TG I

Verzahnungsvariante	$L_{A,F,B}$ in dB
Referenz	65.46
Unterkritisch	63.11
Überkritisch	55.65
Low-Loss	61.37

In **Tabelle 5.2** sind die Anwendungskraftpegel nach Methode B der resultierenden translatorischen Beschleunigung an den Lagern der Zwischenwelle des TG I für alle vier Verzahnungsvarianten gelistet. Die Verzahnungen sind mit ihrer Nenngeometrie in der Berechnung abgebildet. Fertigungsabweichungen sind nicht berücksichtigt. Die Auswertegrenzen sind in **Kapitel 4** für alle Verzahnungsvarianten definiert. Im Vergleich zu den Lagerkraftpegeln aus Kraftanregungen in **Tabelle 5.1** werden die Ergebnisse unter Berücksichtigung der Drehzahleinflüsse ausgewertet. Die Aussagegüte hängt jedoch stark von der Aussagekräftigkeit der verwendeten Übertragungsfunktionen ab. Durch Vereinfachungen in **Abschnitt 3.4** z.B. die Approximation der Matrizen  $\underline{C}_{\text{äqu}}$  und  $\underline{K}_{\text{äqu}}$  können Abweichungen auftreten. Trotzdem zeichnet sich das Verfahren durch die sehr kurze Rechenzeit aus, da die Ergebnisse innerhalb der wenigen Minuten ausgewertet werden können, während die Rechenzeit bei der Dynamiksimulation zu Tagen bzw. Wochen eskaliert werden kann.

## 5.4 Fazit

Auf Basis der Modellbildung mit Hilfe des linear elastischen Gesamtgetriebesystems kann eine vollständige Dynamiksimulation ausgeführt werden. Die Interaktion zwischen den Verzahnungen spiegelt sich bereits in den Verzahnungsanregungen, sowohl in Form der dynamischen Verzahnungskraft als auch der dynamischen Drehwegabweichung, wider. Das Gesamtgetriebe Modell ermöglicht außerdem die Untersuchung von Zustandsgrößen an einem beliebigen Wellenabschnitt. Somit ist die Auswertung des resultierenden Schwingungsverhaltens an den

Lagern möglich. Dies bietet die Möglichkeit, Simulation und Messung zu vergleichen, da beide Schwingungsdaten im Bereich der Lagerstelle liefern. Die Ergebnisse der Dynamiksimulation zeigen einen wesentlichen Einfluss der Drehzahlen (Anregungsfrequenzen) auf das Schwingungsverhalten mehrstufiger Getriebe. Grundsätzlich wird die Schwingungsamplitude nicht nur in den Hauptresonanzen verstärkt, sondern auch in den Vorresonanzen, bei denen die Amplituden der Höherharmonischen einen maßgeblichen Einfluss auf das Schwingungsverhalten aufweisen.

Die quasistatischen Ansätze zeichnen sich durch die kurze Rechenzeit aus und haben sich bei einstufigen Getrieben bewährt. Hier liegt nämlich nur eine Anregungsquelle aus einer Verzahnung vor. Bei mehrstufigen Getrieben existieren mehrere Anregungsquellen an den Verzahnungsstufen mit unterschiedlichen Anregungsfrequenzen. Aufgrund der Vernachlässigung des Drehzahleinflusses ist die Gültigkeit der Ansätze bei mehrstufigen Getrieben eingeschränkt. Durch die Übersetzung wird die Last und die Drehzahl umgewandelt. Bei den quasistatischen Ansätzen werden ausschließlich die Last behandelt. Eine Übersetzung ins Langsame führt zu höherer Last und Verformung an der nächsten Verzahnungsstufe. Im Gegensatz dazu wird die Drehzahl an der nächsten Stufe kleiner. Unter Berücksichtigung des Drehzahlbereichs kann daher die schneller drehende Stufe einen maßgeblichen Einfluss auf das Schwingungsverhalten aufweisen, obwohl an dieser Stufe eine deutlich geringere Last vorliegt. Die Aussagegültigkeit der quasistatischen Ansätze wird daher bei mehrstufigen Getrieben durch die Übersetzung und die Bezugsdrehzahl (Betriebsverhältnis zur Resonanzlage) beeinflusst.

Um den Drehzahleinfluss ohne Einbuße von langer Rechenzeit zu berücksichtigen, können die Ergebnisse der quasistatischen Ansätze mit Hilfe von Übertragungsfunktionen ergänzt werden. Es wird quasidynamisch ausgewertet. In dieser Arbeit wird eine Methode zur Abschätzung des Übertragungsverhaltens der Verzahnungsanregung zu einer Zustandsgröße gezeigt. Die Auswertung zeigt gute Korrelation mit den Ergebnissen aus den Messungen und der Dynamiksimulation. Die Aussagegüte der quasidynamischen Auswertung ist im Wesentlichen abhängig von der Hochwertigkeit der Übertragungsfunktionen. Dieser Ansatz ist aufgrund ihrer kurzen Rechenzeit geeignet z.B. bei der Variationsrechnung. Da bei der Ermittlung der Funktionen oft Gleichungsterme vereinfacht bzw. linearisiert werden, ersetzt dieser Ansatz die Dynamiksimulation zur ausführlichen Untersuchung nicht.



## 6 Diskussion

### 6.1 Auswertung des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe

Zur Auswertung des Schwingungsverhaltens eines mehrstufigen Getriebes werden in dieser Arbeit Schwingungen an Lagerstellen ausgewertet. Die Auswertung geschieht unter der Annahme der Addition inkohärenter Schallquellen, das heißt, Schwingungen an den Lagerstellen beeinflussen sich nicht gegenseitig. Die Spektralanalyse kann daher ohne Berücksichtigung der Schwingungsphasen im Zeitbereich ausgeführt werden. Wirken die Axialkräfte zweier Lager auf der gleichen Welle in entgegengesetzter Richtung, so ergibt sich das resultierende spektrale Schwingungsverhalten aus der Summation der Auswertungen der einzelnen Lager (s. auch **Gleichung (3.48)**), da beide Lager Kräfte auf das Getriebegehäuse ausüben.

In der Berechnung werden die Schwingungen an den Lagerstellen ausgewertet, bevor sie an das Gehäuse abgegeben werden. Die ermittelten Lagerkraftpegel aus den Kraftanregungen in **Tabelle 5.1** weisen darauf hin, dass die Low-Loss-Verzahnung das höchste Schwingungsniveau im Vergleich zu allen Verzahnungsvarianten aufweist. Darüber hinaus sind die Schwingungsniveaus der weiteren drei Verzahnungsvarianten relativ vergleichbar. Das niedrigste Schwingungsniveau weist die überkritische Verzahnung auf. Unter Berücksichtigung der Drehzahleinflüsse in **Tabelle 5.2** hat die Referenzverzahnung das höchste Schwingungsniveau, während die überkritische Verzahnung das niedrigste Schwingungsniveau aufweist. Bei der Bildung des Anwendungskraftpegels sind neben den Drehzahleinflüssen weitere Parameter, die von der Drehzahl abhängig sind, z.B. die Anzahl der zu berücksichtigenden Höherharmonischen, entscheidend für die Auswertung.

Die mit Hilfe von DZP ermittelten gemittelten Eingriffssteifigkeiten aller Verzahnungsvarianten sind in **Tabelle 6.1** gelistet. Im Vergleich zu den anderen Eingriffssteifigkeiten weist die Low-Loss-Verzahnung aufgrund der Zahnform die deutlich größte Eingriffssteifigkeit auf.

**Tabelle 6.1:** Gemittelte Eingriffssteifigkeiten  $c_\gamma$  der Verzahnungsvarianten der ersten Stufe des TG I

Verzahnungsvariante	$c_\gamma$ in N/(mm· $\mu$ m)
Referenz	14.48
Unterkritisch	10.02
Überkritisch	14.34
Low-Loss	27.46

Die Low-Loss-Verzahnung ist aufgrund der höchsten Verzahnungssteifigkeit die abweichungsempfindlichste Verzahnungsvariante. Flankenabweichungen sowie Verzahnungsabweichungen können zu einem hohen Schwingungsniveau führen. Dies ist in der Messung in **Tabelle 4.11** eindeutig zu erkennen. Die Abweichungen sind aber in der Berechnung nicht enthalten.

Bei der Messung werden die Sensoren am Gehäuse nahe den Lagerstellen platziert. Sämtliche

Schwingungen aus dem Getriebe werden dort überlagert. Bei der Berechnung ist die Analyse von überlagerten Schwingungen im Gehäuse wesentlich komplizierter, da diese unter Berücksichtigung der Phasen der einzelnen Schwingungen ausgeführt werden müssen. Konstruktive Auslegungen wie Wandstärke oder Verrippungen haben unmittelbaren Einfluss auf das Schwingungsverhalten im Gehäuse. Diese Untersuchung wird in dieser Arbeit nicht behandelt. Auf Basis des in der Arbeit angewendeten linear elastischen Gesamtgetriebemodells ist eine Erweiterung um ein Getriebegehäusemodell möglich.

## 6.2 Drehzahleinfluss bei mehrstufigen Getrieben

Bei einstufigen Getrieben wird in der Praxis oft das Anregungsverhalten von Verzahnungen ohne den Drehzahleinfluss rechnerisch mit Hilfe von quasistatischen Ansätzen beurteilt. Wenn das Getriebe nur über eine Verzahnungsstufe verfügt, wirkt nur eine Verzahnungsanregung auf das Getriebe. Zur Berücksichtigung des Drehzahleinflusses muss die Lage der Verzahnungshauptresonanz identifiziert werden. Daraus können Frequenzen der Vorresonanzen ermittelt werden, nämlich wenn die Resonanz dem Vielfachen der Frequenz entspricht. Der Abstand zwischen dem betrachteten Drehzahlbereich zur Hauptresonanz legt die Amplitudenüberhöhung fest.

Im Gegensatz dazu weisen mehrstufige Getriebe aufgrund von Übersetzungen und von unterschiedlichen Zähnezahlen Verzahnungsanregungen mit unterschiedlichen Frequenzen auf. Damit wird die rechnerische Beurteilung des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe wesentlich komplizierter. Ohne Berücksichtigung des Drehzahleinflusses wird tendenziell die Anregung der Stufe mit der höchsten Last, z.B. die Endstufe bei Getrieben mit Übersetzung ins Langsame, dominieren, wenn alle Verzahnungen entsprechend ähnliche Hauptgeometrien aufweisen. An dieser Stufe drehen sich jedoch die Wellen am langsamsten. Im Vergleich dazu sind an der schnell laufenden Stufe die dynamischen Einflüsse höher. Sattelberger [Sat97] untersucht ein zweistufiges Getriebe mit der Übersetzung der jeweiligen Stufe bei 1. Die Schwingungsamplituden beider Stufen sind relativ gleich hoch. Auch hier ist der Einfluss auf die Übersetzung zurückzuführen. Weisen die Verzahnungen unterschiedliche Hauptgeometrien wie Achsabstand, Übersetzung oder Verzahnungsart auf, so wird das Schwingungsverhalten des Getriebes nur mit Hilfe einer Berechnung unter Berücksichtigung des Drehzahleinflusses zutreffend zu beurteilen sein.

Die quasistatischen Ansätze sollten daher bei mehrstufigen Getrieben nur bedingt angewendet werden. Alternativ können Drehzahleinflüsse in Form von Übertragungsfunktionen erfasst und berücksichtigt werden. Die Aussagegüte der daraus entstandenen quasidynamischen Auswertung ist von der Genauigkeit der Übertragungsfunktionen, z.B. der Modellbildung, der Ermittlungsmethode usw. abhängig.

Durch die genauen Kenntnisse des Schwingungsverhaltens des Getriebes im betrachteten Drehzahlbereich kann die kritische Stufe identifiziert werden, die die größte Schwingungsamplitude beiträgt. Grundsätzlich ist es sinnvoller und wirtschaftlicher, das Anregungsverhalten

dieser Stufe zu minimieren. Eine optimale Auslegung der Mikrogeometrien ohne Einbuße von Tragfähigkeit wird in [Koh19] beschrieben.

### 6.3 Einfluss der Höherharmonischen

Bei einstufigen Getrieben werden die Frequenzen der Höherharmonischen der Verzahnungsanregung bezüglich der Zahneingriffsfrequenz dargestellt, in Form von Zahneingriffsordnungen. Dies ermöglicht die genaue Analyse des Anregungsverhaltens der Verzahnung in unterschiedlichen Betriebsbereichen, z.B. durch welche Höherharmonische das Anregungsverhalten bei einer Vorresonanz charakterisiert ist. Da mehrstufige Getriebe über unterschiedliche Zahneingriffsfrequenzen verfügen, ist es sinnvoll, die Frequenzdarstellung bezüglich einer Drehfrequenz einer Welle in Form von der Ordnung bezüglich der Welle zu realisieren. Diese beschreibt die Anzahl der Schwingungsperioden in einer kompletten Wellenumdrehung. Die Spektren können ohne komplexen Aufwand den dazugehörigen Stufen zugeordnet werden.

Die Grundeingriffsordnung einer Stufe legt den Abstand zwischen den Ordnungen der Höherharmonischen fest. Je kleiner die Grundeingriffsordnung ist, desto öfter tauchen die Amplituden der Höherharmonischen auf, das heißt, die Amplituden liegen dichter beieinander. Die Höherharmonischen haben dominanten Einfluss auf das Schwingungsverhalten insbesondere in Vorresonanzen. Für eine Stufe mit kleiner Grundeingriffsordnung und somit kleinem Abstand der Höherharmonischen kann dies eine Empfindlichkeit gegenüber Vorresonanzen bedeuten.

Grundsätzlich gibt es nach **Gleichung (4.1)** und **Gleichung (4.2)** zwei Parameter für die Auslegung der Grundeingriffsordnung bzw. des Abstandes zwischen den Höherharmonischen, nämlich die Zähnezahl und die Übersetzung. Diese beiden Parameter definieren die Eingriffsfrequenz der Verzahnungsstufe. Je kleiner die Zähnezahl ist, desto kleiner ist die Grundeingriffsordnung. Dies lässt sich in den Messergebnissen des TG I mit der unterkritischen Verzahnung an der ersten Stufe veranschaulichen. Im Vergleich zur Getriebekonfiguration mit der überkritischen Verzahnung liegen deutlich mehr Höherharmonische innerhalb der ausgewerten Ordnungsgrenze. Im Antriebsdrehzahlbereich zwischen  $5000 - 10000 \text{ min}^{-1}$  sind bei der unterkritischen Variante 5 Vorresonanzstellen zu durchfahren, während die überkritische Variante nur über 2 Vorresonanzstellen innerhalb des Auswertebereichs verfügt.

Mit zunehmender Übersetzung dreht sich die betrachtete Welle langsamer als die Referenzwelle. Dadurch wird die Grundeingriffsordnung der nächsten Verzahnungsstufe nach **Gleichung (4.2)** kleiner. Die Schwingungsamplituden der langsamen Stufe tauchen in Ordnungsdigramm öfter auf. Das heißt, mehr Höherharmonische dieser Stufe tragen zum resultierenden Schwingungsverhalten des Getriebes bei. In der Arbeit wird gezeigt, dass die langsame Stufe im Vergleich zu den schneller drehenden Stufen einem geringen Drehzahleinfluss ausgesetzt ist. Die Amplituden der Höherharmonischen der langsamen Stufe müssen daher nicht die höchsten sein. Um den Abstand zwischen den Höherharmonischen zu vergrößern, können die Zähnezahlen des Ritzels und des Rades angepasst werden.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

### 7.1 Zusammenfassung

Im Vergleich zu einstufigen Getrieben verfügen mehrstufige Getriebe über mehrere Verzahnungsstufen und somit mehrere Anregungsquellen, deren Schwingungsanregungen über die weiteren Maschinenelemente übertragen und auch überlagert werden. Deshalb ist die Auswertung des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe wesentlich komplizierter als das einstufiger Getriebe.

In dieser Arbeit werden rechnerische Ansätze zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens mehrstufiger Getriebe auf Basis des linear elastischen Gesamttriebessystems und der kontinuumsmechanischen Zahnkontaktanalyse erweitert. Da dieses Modell die Berechnung des Anregungsverhaltens aller Zahneingriffe in demselben Rechengang ermöglicht, können Interaktionen zwischen Verzahnungsstufen in der Berechnung mit berücksichtigt werden. Mit Hilfe des Modells können Zustandsgrößen an beliebigen Wellenabschnitten, z.B. an den Lagerstellen, ausgewertet werden.

Durch die Kopplung der Berechnung mit der Zahnkontaktanalyse ist eine detaillierte Betrachtung der Lastverteilung im Zahnkontakt möglich. Einflüsse der Verzahnungstopologien auf das Schwingungsverhalten können mit Hilfe des erweiterten Modells untersucht werden. Außerdem kann ein optimales Schwingungsverhalten eines Getriebes durch die Auslegung der Verzahnungsmikrogeometrien erzielt werden. Das erweiterte Modell stellt einen effizienten Berechnungsansatz dar, der eine genaue Erfassung des Verformungsverhaltens des Getriebestrangs sowie eine detaillierte Aussage über das Verhalten der Verzahnungen ermöglicht.

Auf Basis des erweiterten Modells wird das Schwingungsverhalten des zweistufigen Teilgetriebes I des Speed2E-Getriebes untersucht. Zur Ermittlung des Drehzahleinflusses wird das Modell mit Hilfe der Dynamiksimulation ausgewertet. In den Spektren der Verzahnungsanregungsgrößen der ersten Stufe können Amplituden der zweiten Verzahnungsstufe identifiziert werden. Diese lassen sich auf Interaktionen zwischen den beiden Verzahnungsstufen zurückführen. In der Dynamiksimulation können Amplitudenüberhöhungen durch die Vorresonanzen der zweiten Stufe in der Verzahnungsanregung der ersten Stufe identifiziert werden. In diesen Bereichen spielen Interaktionen zwischen den Verzahnungen eine wichtige Rolle auf das Anregungsverhalten, insbesondere in kleinen Drehzahlbereichen, in denen Vorresonanzen häufig vorkommen.

Schwingungsgrößen an den Lagerstellen können als Maß zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens von Getrieben verwendet werden. Durch Anregungen entlang unterschiedlicher Eingriffsebenen ist es bei mehrstufigen Getrieben sinnvoll, die Schwingungsgrößen in den räumlichen Richtungen auszuwerten. In der Dynamiksimulation wird die resultierende translatorische Be-

schleunigung ausgewertet. Diese Größe setzt sich aus den translatorischen Beschleunigungen an den Lagern in allen Richtungen zusammen.

Bei einstufigen Getrieben werden die quasistatischen Ansätze oft aufgrund der kurzen Rechenzeit eingesetzt. Dagegen verfügen mehrstufige Getriebe über mehrere Verzahnungsstufen, deren Lasten und Drehzahlen durch Übersetzungen bestimmt werden. Um die Vorzüge der quasistatischen Ansätze auch für mehrstufige Getriebe zu nutzen, wird in der Arbeit die quasidynamische Auswertung erweitert, bei der die quasistatischen Ergebnisse unter Drehzahleinflüssen in Form von Übertragungsfunktionen ausgewertet werden. Eine Methode zur Ermittlung einer Übertragungsfunktion von einer Verzahnungsanregung zu einer Zustandsgröße an einem beliebigen Punkt an einer Welle aus einem linear elastischen Gesamtgetriebemodell wird in dieser Arbeit vorgestellt.

Mehrstufige Getriebe weisen keine ausgeprägte Schwingungsrichtung über der Zeit auf. Das resultierende Spektrum an einer Lagerstelle setzt sich deshalb aus den räumlichen orthogonalen Komponenten zusammen. Analog dazu lässt sich das resultierende Spektrum mehrerer Lagerstellen mit der Methode der Addition inkohärenter Schallquellen ermitteln.

Die erste Verzahnungsstufe des TG I verfügt über 4 unterschiedliche Verzahnungsvarianten, die für unterschiedliche Einsatzzwecke ausgelegt sind. Mit Hilfe der Verzahnungsvarianten werden die Einflüsse der Makrogeometrien auf das Schwingungsverhalten des Getriebes untersucht. Die Zähnezahzahl und die Übersetzung bestimmen neben der Wellendrehzahl die Eingriffsfrequenz einer Verzahnungsstufe und daraus abgeleitet die Eingriffsordnung. Kleine Zähnezahzahl verringert die Eingriffsordnung und somit den Abstand zwischen den Ordnungen der Höherharmonischen. Je dichter die Ordnungen liegen, desto mehr Höherharmonische müssen im Auswertebereich ausgewertet werden. Dagegen wird der Abstand zwischen den Eingriffsordnungen größer bei kleinerer Übersetzung. Darüber hinaus weist die Übersetzung einen wesentlichen Einfluss auf die Last- und Drehzahlverhältnisse der nächsten Verzahnungsstufen auf.

Um das Schwingungsverhalten innerhalb bestimmter Ordnungsgrenzen zu beurteilen, wird der gemittelte Kraftpegel definiert. Mit Hilfe dieses Kennwerts können Einflüsse der jeweiligen Verzahnungsstufen auf das resultierenden Schwingungsverhalten identifiziert und ausgewertet werden. Bei den Getriebevarianten, die sich durch die erste Verzahnungsstufe unterscheiden, während die Lastverhältnisse an der zweiten Stufe unverändert bleiben, treten unterschiedliche Schwingungsniveaus an der ersten Stufe auf. Die Schwingungsniveaus an der zweiten Stufe sind vergleichbar.

Der Vergleich zwischen Mess- und Rechenergebnissen legt nahe, dass für eine qualitativ gute Übereinstimmung zusätzlich zur Nengeometrie der Verzahnungen auch die Fertigungsabweichungen genau bekannt sein und in der Berechnung berücksichtigt werden müssen. Mit Hilfe der in der Arbeit vorgestellten Berechnungsmethoden können Einflüsse der Verzahnungsgeometrien auf das Schwingungsverhalten mehrstufiger Getriebe abgebildet und beurteilt werden. Damit wird eine detaillierte Verzahnungsauslegung z.B. Korrekturauslegung unter Berücksichtigung der Kreuzeinflüsse ermöglicht.

## 7.2 Ausblick

Es wurde die Auswertung des resultierenden Schwingungsverhaltens bis an die Lagerstellen erweitert. Die Schwingungen an diesen Stellen werden an das Gehäuse unabhängig voneinander weitergeleitet und können zur Ermittlung des resultierenden Schwingungsverhaltens als inkohärente Schallquellen angenommen werden. Bevor die Schwingungen in Form des Luftschalls an den Gehäuseoberflächen abgestrahlt werden, werden sie im Gehäuse überlagert. Zur Ermittlung des Schwingungsverhaltens im Gehäuse ist eine Erweiterung um eine Gehäusemodellierung notwendig. Mit Hilfe des linear elastischen Gesamttriebessystems ist die Ankopplung des Gehäusemodells an den Lagerstellen ohne komplexen Aufwand möglich. Ist ein Abstrahlmaß bekannt, so lässt sich eine durchgängige Untersuchung von Verzahnungsanregungen bis hin zur Luftschallabstrahlung ermöglichen. Allerdings wird die Rechenzeit durch die Einbringung weiterer Freiheitsgrade erheblich gesteigert.

Bei der Auslegung von Flankenmodifikationen werden in der Praxis die quasistatischen Ansätze eingesetzt. Die Auslegung mit Hilfe der Dynamiksimulation ist aufgrund des hohen Rechenaufwands praxisuntauglich. Typischerweise werden die Getriebe für den unterkritischen Betrieb ausgelegt. Schwingungsüberhöhungen können daher in Vorresonanzstellen auftreten. Auch die dynamischen Lastverteilungen in diesen Bereichen unterscheiden sich von der statischen. Deshalb soll die Wirkung der Korrekturen auch für diese Betriebsbereiche abgesichert werden, z.B. mittels Nachrechnungen mit Dynamiksimulation. Die Dynamiksimulation ist vorteilhaft, wenn die dynamische Lastverteilung veranschaulicht wird. Alternativ kann die quasidynamische Auswertung bei der Geräuschoptimierung verwendet werden.

## Literaturverzeichnis

### Normen, Richtlinien und Patente

- [DIN08] DIN EN ISO 1683: Akustik - Bevorzugte Bezugswerte für Pegel in der Akustik und Schwingungstechnik. (2008).
- [DIN87a] DIN 3960: Begriffe und Bestimmungsgrößen für Stirnräder (Zylinderräder) und Stirnradpaare (Zylinderradpaare) mit Evolventen-Verzahnung. (1987).
- [DIN87b] DIN 3990: Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern, Einführung und allgemeine Einflussfaktoren. (1987).
- [Hei11a] FVA-Heft Nr. 968: Programm Anregung Planetenradstufe (ANPLA), Version 2.0. (2011).
- [ISO06] ISO 6336: Calculation of load capacity of spur and helical gears. (2006).

### Zeitschriftenaufsätze, Bücher, Dissertationen, Studienarbeiten

- [Adh01a] Adhikari, S. ; Woodhouse, J.: Identification of damping part 1: Viscous Damping. In: *Journal of Sound and Vibration* Vol. 243 (Jan. 2001), pp. 43–61. DOI: 10.1006/jsvi.2000.3391.
- [Adh01b] Adhikari, S. ; Woodhouse, J.: Identification of damping part 2: Non-Viscous Damping. In: *Journal of Sound and Vibration* Vol. 243 (Jan. 2001), pp. 63–88. DOI: 10.1006/jsvi.2000.3392.
- [Adh07] Adhikari, S. ; Phani, S. A.: Rayleigh's classical damping revisited. In: *International Conference on Civil Engineering in the New Millennium: Opportunities and Challenges*. Howrah, India, (Jan. 2007).
- [Ali08] Alipour, A. ; Zareian, F.: Study Rayleigh damping in structures; uncertainties and treatments. In: *The 14th World Conference on Earthquake Engineering*. Beijing, China, (Oct. 2008).
- [And15] Andary, F. ; Piel, D. ; Wegerhoff, M.: MBS Gear-tooth Stiffness Model - Implementation of a new coupling model for fast and accurate simulation of gear pairs using stiffness characteristic arrays. In: *Proceedings of International Conference on Gears* (2015).
- [And90] Anderson, E. ; Bai, Z. ; Dongarra, J. ; Greenbaum, A. ; McKenney, A. ; Du Croz, J. ; Hammerling, S. ; Demmel, J. ; Bischof, C. ; Sorensen, D.: LAPACK: a portable linear algebra library for high-performance computers. In: *Proceedings of the 1990*

- ACM/IEEE conference on Supercomputing. Supercomputing '90. New York: IEEE Computer Society Press, (1990), pp. 2–11.*
- [Bae69] Baethge, J.: *Drehwegfehler, Zahnfederhärte und Geräusch bei Stirnrädern*. Dissertation. TH München, (1969).
- [Bas83] Bashforth, F. ; Adams, J. C.: An attempt to test the theories of capillary action by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluid. With an explanation of the method of integration employed in constructing the tables which give the theoretical forms of such drops. 80, 59 p. Cambridge [Eng.]: University Press, (1883), 80, 59 p. URL: <http://hdl.handle.net/2027/pst.000032906509>.
- [Ber94] Bernal, D.: Viscous Damping in Inelastic Structural Response. In: *Journal of Structural Engineering* Vol. 120 (Apr. 1994), pp. 1240–1254. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1994)120:4(1240).
- [Bie17] Bies, D. A. ; Hansen, C. H. ; Howard, C. Q.: *Engineering Noise Control*. 5. Edition. Boca Raton, London, New York: CRC Press, (Sept. 2017). ISBN: 978-1-4987-2405-0.
- [Bih12] Bihr, J.: FVA-Heft 1013: FVA-Forschungsvorhaben 565 I, Drehzahleinfluss Getriebedynamik, Untersuchung des Drehzahleinflusses auf das Geräusch- und Schwingungsverhalten von mehrstufigen Getrieben unter Berücksichtigung der Kopplung der Getriebestufen. Abschlussbericht. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (2012).
- [Bih14] Bihr, J. ; Utakapan, T.: FVA-Forschungsvorhaben 565 II, Drehzahleinfluss Getriebedynamik, Untersuchung des Drehzahleinflusses auf das Geräusch- und Schwingungsverhalten von mehrstufigen Getrieben unter Berücksichtigung der Kopplung der Getriebestufen. Abschlussbericht. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (2014).
- [Bih16] Bihr, J.: *Untersuchung des Schwingungsverhaltens von mehrstufigen Getriebe unter besonderer Berücksichtigung des Welle-Lager-Systems*. PhD thesis. Dissertation TU München, (2016).
- [Bos65] Bosch, M.: *Über das dynamische Verhalten von Stirnradgetrieben unter besonderer Berücksichtigung der Verzahnungsgenauigkeit*. PhD thesis. RWTH Aachen, (1965).
- [Bre17] Brecher, C. ; Läpenhaus, C. ; Schroers, M.: Analysis of Dynamic Excitation Behavior of a Two-stage Spur Gearbox. In: *Procedia CIRP* 62 (2017). 10th CIRP Conference on Intelligent Computation in Manufacturing Engineering - CIRP ICME '16., pp. 369–374. ISSN: 2212-8271. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procir.2016.06.027>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S221282711630645X>.



- [Bui84] Bui, T. ; Oppenheim, A. ; Pratt, D.: Recent advances in methods for numerical solution of O.D.E. initial value problems. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 11 (1984) Nr. 3, pp. 283–296. ISSN: 0377-0427. DOI: [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(84\)90003-7](https://doi.org/10.1016/0377-0427(84)90003-7). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377042784900037>.
- [But16] Butcher, J. C.: Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. New York: John Wiley & Sons, (2016). ISBN: 978-1-119-12151-0.
- [Cas90] Cash, J. ; Karp, A.: A Variable Order Runge-Kutta Method for Value Problems with Rapidly Varying Right-Hand Sides. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 16 (Sept. 1990), pp. 201–222. DOI: 10.1145/79505.79507.
- [Cau60] Caughey, T. K. ; O’Kelly, M. E. J.: Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems. In: *Journal of Applied Mechanics* Vol. 27 (1960), p. 269. DOI: 10.1115/1.3643949.
- [Cha08] Charney, F. A.: Unintended Consequences of Modeling Damping in Structures. In: *Journal of Structural Engineering* Vol. 134 (Apr. 2008), pp. 581–592. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2008)134:4(581).
- [Cho90] Choy, F. ; K. Tu, Y. ; Zakrajsek, J. ; P. Townsend, D.: Dynamics of multistage gear transmission with effects of gearbox vibrations. In: (July 1990).
- [Cho91a] Choy, F. K. ; Tu, Y. K. ; Zakrajsek, J. J. ; Townsend, D. P.: Effects of Gear Box Vibration and Mass Imbalance on the Dynamics of Multistage Gear Transmission. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 113 (July 1991) Nr. 3, pp. 333–344. ISSN: 1048-9002. DOI: 10.1115/1.2930190. URL: <https://doi.org/10.1115/1.2930190>.
- [Cho91b] Choy, F. ; Tu, Y. ; Savage, M. ; Townsend, D.: Vibration signature and modal analysis of multi-stage gear transmission. In: *Journal of the Franklin Institute* 328 (1991) Nr. 2, pp. 281–298. ISSN: 0016-0032. DOI: [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(91\)90035-2](https://doi.org/10.1016/0016-0032(91)90035-2). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0016003291900352>.
- [Cor19] Corp., I.: Intel® Math Kernel Library – Developer Reference. MKL 2019 Update 4. (2019).
- [Cur52] Curtiss, C. F. ; Hirschfelder, J. O.: Integration of Stiff Equations. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 38 (Mar. 1952) Nr. 3. PMC1063538[pmcid], pp. 235–243. ISSN: 0027-8424. DOI: 10.1073/pnas.38.3.235. URL: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/16589085>.
- [Døs88a] Døssing, O.: Structural Testing – Part I: Mechanical Mobility Measurements. Nærum: Brüel & Kjær, (Apr. 1988).

- [Døs88b] Døssing, O.: Structural Testing – Part II: Modal Analysis and Simulation. Nærum: Brüel & Kjær, (Mar. 1988).
- [Ewi84] Ewins, D. J.: Modal testing: theory and practice. 4, illustriert, Neuauflage, überarbeitet. Letchworth: Research Studies Press, (1984). ISBN: 978-0-863-80017-7.
- [Fal55] Falk, S.: Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren. In: *Ingenieur-Archiv* 24, S. 216–232. Ingenieur-Archiv, (1955).
- [Feh70] Fehlberg, E.: Klassische Runge-Kutta-Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungsprobleme. In: *Computing (Arch. Elektron. Rechnen)*, Jg. 6, S. 61 - 71. (1970).
- [Fis17] Fischer, P. D. ; Sedlmair, M.: FVA-Forschungsvorhaben 716: Innovatives Super-Hochdrehzahl-Mehrgang-Konzept für den elektrifizierten automobilen Antriebsstrang für höchste Effizienz und höchsten Komfort.. Abschlussbericht. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (2017).
- [Föl84] Föllner, D.: Lärmarm konstruieren X - Luftschallabstrahlung von krafterregten Strukturen. Tech. rep. Schriftreihe der Bundesanstalt für Arbeitsschutz, (1984).
- [Fro16] Fromberger, M. ; Kohn, B. ; Utakapan, T. ; Otto, M. ; Stahl, K.: Measurement of Gear Noise Behaviour for Different Microgeometries. In: *Proceedings of Internoise 2016* (2016), pp. 6565–6573.
- [Fro17] Fromberger, M. ; Weinberger, U. ; Kohn, B. ; Utakapan, T. ; Otto, M. ; Stahl, K.: Evaluating Signal Processing Methods for Use in Gearbox Condition Monitoring. In: *Proceedings of 24th International Congress on Sound and Vibration* (2017).
- [Gei02] Geiser, H.: *Grundlagen zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens von Stirnrädern*. Dissertation. TU München, (2002).
- [Ger84] Gerber, H.: *Innere dynamische Zusatzkräfte bei Stirnradgetrieben*. Dissertation. TU München, (1984).
- [Gér97] Géradin, M. ; Rixen, D.: Mechanical Vibrations. 2nd ed. New York: John Willy & Sons, (1997).
- [Gol77] Goldstine, H. H.: A history of numerical analysis from the 16th through the 19th century -. 1977. Aufl. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, (1977). ISBN: 978-0-387-90277-7.
- [Gol79] Gold, P.: *Statisches und dynamisches Verhalten mehrstufiger Zahnradgetriebe*. Dissertation. RWTH Aachen, (1979).
- [Gre64] Gregory, R. ; Harris, S. ; Munro, R.: Dynamic behaviour of spur gears.. In: *Proc. Inst. Mech. Eng., Vol. 178 Pt I No 8*, S. 207-226. Inst. Mech. Eng, (1963–64).

- [Gri07] Griggel, T. ; Gacka, A.: FVA-Heft Nr. 831: FVA-Forschungsvorhaben 487 I, Kennwerte Anregungsverhalten, Kennwertdefinition zum Geräuschphänomen Verzahnungsheulen. Abschlussbericht. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (2007).
- [Gri10a] Griggel, T.: *Einfluss von Korrekturen und Fertigungsabweichungen auf die Schwingungsanregung von Stirnrädern*. Dissertation. TU München, (2010).
- [Gri10b] Griggel, T. ; Heider, M. ; Bihl, J.: FVA-Heft Nr. 937: FVA-Forschungsvorhaben 338 V, DZP / DZPopt, DZP Version 5.0 und DZPopt Version 2.0. Abschlussbericht. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (2010).
- [Gri10c] Griggel, T. ; Heider, M. ; Gacka, A. ; Röthlingshöfer, T. ; Ingeli, J.: FVA-Heft Nr. 936: FVA-Forschungsvorhaben 487 II, Kennwerte Anregungsverhalten, Analyse der Berechnungsprogramme DZP4, RIKOR H und FE-Stirnradkette 3.1. Abschlussbericht. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (2010).
- [Gu16] Gu, J. X.: *Fault Detection and Diagnosis of a Multistage Helical Gearbox using Magnitude and Phase Information from Vibration Signals*. Dissertation. Manchester Metropolitan University, (2016).
- [Gwi17] Gwinner, P. ; Otto, M. ; Stahl, K.: Vibration Behaviour of High-Speed Gearings for Electrically Driven Powertrains. In: *Getriebe in Fahrzeugen 2017*. VDI, (2017).
- [Hal06] Hall, J. F.: Problems encountered from the use (or misuse) of Rayleigh damping. In: *Journal of Earthquake Engineering & Structural Dynamics* Vol. 35 (Apr. 2006), pp. 525–545. DOI: 10.1002/eqe.541.
- [Har58] Harris, S.: Dynamic loads on the teeth of spur gears.. In: *Proc. Inst. Mech. Eng., Vol. 172, S. 87-112*. Inst. Mech. Eng, (1958).
- [Hec95] Heckl, M. ; Müller, H. A.: Taschenbuch der technischen Akustik. Korrigierter Nachdruck. Berlin: Springer-Verlag, (1995). ISBN: 978-3-642-97357-4. DOI: 10.1007/978-3-624-97356-7.
- [Hei11b] Heider, M. ; Ingeli, J.: FVA-Heft 983: FVA-Forschungsvorhaben 487 III, Neue Kennwerte zur rechnerischen Beurteilung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen. Abschlussbericht. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (2011).
- [Hei12] Heider, M.: *Schwingungsverhalten von Zahnradgetrieben – Beurteilung und Optimierung des Schwingungsverhaltens von Planeten- und Stirnradgetrieben*. Dissertation. TU München, (2012).
- [Hei13] Heider, M. ; Otto, M. ; Stahl, K.: Antrag zum FVA-Vorhaben 338 VII: Erweiterung Dynamisches Zahnkräfte Programm (DZP). FVA-Forschungsantrag. Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V., (2013).

- [Her02] Hertter, T.: FVA-Infoblatt Nr. 364/1: Erweiterung der FVA-Programme RIKOR und LAGER2 zur Bestimmung der Lebensdauer von Wälzlagern in Industriegetriebenen. Frankfurt am Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (2002).
- [Hin83] Hindmarsh, A.: ODEPACK, a Systematized Collection of ODE Solvers. In: *Scientific Computing – edited by R.S. Stepleman* 1 of IMACS Transaction on Scientific Computation (1983), pp. 55–64.
- [Hös65] Hösel, T.: *Geräuschuntersuchungen an schrägverzahnten Stirnrädern*. Dissertation. TU München, (1965).
- [Hou94] Houser, D. R. ; Oswald, F. B. ; Valco, M. J. ; Drago, R. ; Lenkski, J. W. J.: Modelling of In-Structure Damping: A Review of the State-of-the-art. In: *Proceedings of the 30th Joint Propulsion Conference*. Indianapolis, Indiana: National Aeronautics and Space Administration, (June 1994).
- [Ibr83] Ibrahim, S. R.: Computation of normal modes from identified complex modes. In: *AIAA Journal* Vol. 21 No. 3 (1983), pp. 446–451. DOI: 10.2514/3.601186.
- [Idl16a] Idler, S. ; Gwinner, P. ; Stahl, K.: Innovative Super-High Multiple Speed Concept for the Electrified Automotive Powertrain. In: *Conference on Future Automotive Technology - Bayern Innovativ, Fürstfeldbruck, Deutschland*. (2016).
- [Idl16b] Idler, S. ; Gwinner, P. ; Stahl, K. ; König, R. ; Rinderknecht, S.: Innovative Super-High-Multiple-Speed-Concept for the Electrified Automotive Powertrain. In: *Conference on Future Automotive Technology*. Fürstfeldbruck, (2016).
- [Ina14] Inalpolat, M. ; Handschuh, M. ; Kahraman, A.: Impact of indexing errors on spur gear dynamics. In: *International Gear Conference 2014: 26 - 28 August 2014, Lyon*. Oxford: Chandos Publishing, (2014), pp. 751–762. ISBN: 978-1-78242-194-8. DOI: <https://doi.org/10.1533/9781782421955.751>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B978178242194850080X>.
- [Ins03] Insperger, T. ; Stépań, G.: Stability of the Damped Mathieu Equation With Time Delay. In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 125 (June 2003) Nr. 2, pp. 166–171. ISSN: 0022-0434. DOI: 10.1115/1.1567314.
- [Jai13] Jain, S. ; Yadav, A.: Torsional Vibration Analysis of Meshed Gear System. In: *International Journal of Engineering Research and Technology* 2 (Aug. 2013) Nr. 8. ISSN: 2278-0181.
- [Jeh14] Jehel, P. ; Lèger, P. ; Ibrahimbegovic, A.: Initial versus tangent stiffness-based Rayleigh damping in inelastic time history seismic analyses. In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* Vol. 43 (2014), pp. 467–484. DOI: 10.1002/eqe.2357.

- [Jur15] Jurkschat, T. ; Otto, M. ; Stahl, K.: FVA-Heft 1145: FVA-Forschungsvorhaben 364 IV, Erweiterung von LAGER2 zur Dimensionierung von Wälzlagern in Industriegetriebenen: Verlustleistung und Betriebstemperatur. Frankfurt am Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (2015).
- [Kah90] Kahraman, A. ; Ö, H. ; Houser, D. R. ; Zakrajsek, J.: Dynamic Analysis of Geared Rotors by Finite Elements. In: *Journal of Mechanical Design* 114 (Feb. 1990). DOI: 10.1115/1.2926579.
- [Kas81] Kasuba, R. ; Evans, J. W.: An Extended Model for Determining Dynamic Loads in Spur Gearing. In: *Journal of Mechanical Design* 103 (Apr. 1981) Nr. 2, pp. 398–409. ISSN: 1050-0472. DOI: 10.1115/1.3254920.
- [Ker82] Kersten, R. ; Falk, S.: Das Reduktionsverfahren der Baustatik. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, (1982).
- [Kna77] Knabel, W.: *Geräusche und Schwingung an Stirnradgetrieben, Untersuchungen geometrischer Einflüsse bei hoher Drehzahl und Belastungen*. Dissertation. TU München, (1977).
- [Koh12] Kohn, B.: *Entwicklung einer Systematik zur dynamischen Gesamtsystemanalyse von Getrieben*. Betreuer: BIHR, J. Diplomarbeit. TU München, (2012).
- [Koh16] Kohn, B.: FVA-Heft 1190: FVA-Forschungsvorhaben 338 VI, Entwicklung einer Auslegungsmethode für eine anregungsoptimale Flankenkorrektur unter Berücksichtigung der Tragfähigkeit. Abschlussbericht. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (2016).
- [Koh17] Kohn, B. ; Utakapan, T. ; Fromberger, M. ; Otto, M. ; Stahl, K.: Flank modifications for optimal excitation behaviour. In: *Forschung im Ingenieurwesen* 81 (Sept. 2017) Nr. 2, pp. 65–71. ISSN: 1434-0860. DOI: 10.1007/s10010-017-0218-0. URL: <https://doi.org/10.1007/s10010-017-0218-0>.
- [Koh19] Kohn, B.: *Topologische Flankenkorrektur zur Anregungsoptimierung von Stirnradgetrieben*. Dissertation. TU München, (2019).
- [Kov18] Kovacic, I. ; Rand, R. ; Mohamed Sah, S.: Mathieu's Equation and Its Generalizations: Overview of Stability Charts and Their Features. In: *Applied Mechanics Reviews* 70 (Feb. 2018) Nr. 2. 020802. ISSN: 0003-6900. DOI: 10.1115/1.4039144.
- [Kub04] Kubur, M. ; Kahraman, A. ; Zini, D. M. ; Kienzle, K.: Dynamic Analysis of a Multi-Shaft Helical Gear Transmission by Finite Elements: Model and Experiment. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 126 (July 2004) Nr. 3, pp. 398–406. ISSN: 1048-9002. DOI: 10.1115/1.1760561. URL: <https://doi.org/10.1115/1.1760561>.
- [Küç83] Küçükay, F.: Stabilitätsuntersuchungen an einstufigen Zahnradgetrieben. In: *ZAMM* 63, T68-T71. (1983).

- [Küç85] Küçükay, F.: *Dynamik der Zahnradgetriebe*. Habilitationsschrift. TU München, (1985).
- [Lan17] Lanzi, A. ; Luco, J.: Caughey damping series in terms of products of the flexibility matrix. In: *Journal of Engineering Mechanics* Vol. 143 (Sept. 2017). DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001306.
- [Lee11] Lees, A. W. ; Friswell, M. I. ; Litak, G.: Torsional Vibration of Machines with Gear Errors. In: *Journal of Physics: Conference Series* 305 (July 2011). DOI: 10.1088/1742-6596/305/1/012020. URL: <https://doi.org/10.1088%5C%2F1742-6596%5C%2F305%5C%2F1%5C%2F012020>.
- [Leg88] Leger, P. ; Wilson, E. L.: Modal summation methods for structural dynamic computations. In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 16 (1988) Nr. 1, pp. 23–27. DOI: 10.1002/eqe.4290160103.
- [Li11] Li, S. ; Kahraman, A. ; Klein, M.: A Fatigue Model for Spur Gear Contacts Operating Under Mixed Elastohydrodynamic Lubrication Conditions. In: *Proceedings of the ASME 2011 - 11th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Washington DC - DETC2011-47287*. (2011).
- [Lin98] Lin, H. H. ; Liou, C.-H.: A Parametric Study of Spur Gear Dynamics. Tech. rep. National Aeronautics and Space Administration, (Jan. 1998). URL: <https://apps.dtic.mil/docs/citations/ADA336751>.
- [Lin99] Linke, H.: *Stirnradsverzahnung*. München, Wien: Carl Hauser Verlag, (1999).
- [Mag08] Magnus, K. ; Popp, K. ; Sestro, W.: *Schwingungen: Eine Einführung in die physikalischen Grundlagen und die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen*. 8, überarb. Aufl. 2008. Vieweg+Teubner Verlag, (2008).
- [Mar16] Mark, W. D.: Analytical approximations to damaged gear tooth transmission-error contributions for gear-health monitoring. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 230 (2016) Nr. 7-8, pp. 1157–1182. DOI: 10.1177/0954406215606930. URL: <https://doi.org/10.1177/0954406215606930>.
- [Mar17] Martin, T.: *Experimentelle Untersuchung einer wirkungsgradoptimierten Betriebsstrategie an einim elektromechanischen Hochdrehzahl-Antriebsstrang*. Betreuer: Sedlmair. Masterarbeit. Technische Universität München, (2017).
- [Mar19] Mark, W. D. ; Isaacson, A. C. ; Wagner, M. E.: Transmission-error frequency-domain-behavior of failing gears. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 115 (2019), pp. 102–119. ISSN: 0888-3270. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2018.05.036>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327018302851>.

- [Mar78] Mark, W.: Analysis of the vibratory excitation of gear systems: Basic theory. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 63 (May 1978) Nr. 5, pp. 1409–1430. DOI: 10.1121/1.381876.
- [Mar79] Mark, W.: Analysis of the vibratory excitation of gear systems. II: Tooth error representations, approximations, and application. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 66 (Dec. 1979) Nr. 6, pp. 1758–1787. DOI: 10.1121/1.383649.
- [Med04] Medina, R. ; Krawinkler, H.: Seismic demands for nondeteriorating frame structures and their dependence on ground motions. In: *PEER Report 2003/15* (May 2004).
- [Mol63] Molerus, O.: *Laufunruhige Drehzahlbereiche mehrstufiger Getriebe*. Dissertation. TH Karlsruhe, (1963).
- [Mül90] Müller, R.: FVA-Heft 326: FVA-Forschungsvorhaben 133 I, Sprungüberdeckung, Einfluss von Verzahnungsabweichungen und -korrekturen auf die Schwingungsanregung schrägverzahnter Getriebe. Abschlussbericht. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (1990).
- [Mül91] Müller, R.: *Schwingungs- und Geräuschanregung bei Stirnradgetrieben*. Dissertation. TU München, (1991).
- [Nag16] Nagumo, T. ; Matsumura, S. ; Houjoh, H.: Estimation of loaded static transmission error of helical gears by vibration measurement under operating load conditions. In: *Transactions of the JSME* 82 (2016) Nr. 844. DOI: 10.1299/transjsme.16-00429.
- [Nak16] Nakamura, N.: Extended Rayleigh Damping Model. In: *Frontiers in Built Environment* Vol. 2 (June 2016). DOI: 10.3389/fbui.2016.00014.
- [Neu16a] Neubauer, B.: *Lastverteilung und Anregungsverhalten in Planetengetriebesystemen*. Dissertation. TU München, (2016).
- [Neu16b] Neubauer, B. ; Weinberger, U.: FVA-Heft 1197: Berechnung der Lastverteilung in Getriebesystemen mit beliebig angeordnetet Planetenradstufen. Abschlussbericht. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (2016).
- [Nie89] Niemann, G. ; Winter, H.: *Maschinenelemente: Getriebe allgemein, Zahnradgetriebe – Grundlagen, Stirnradgetriebe*. 2. Vol. 2. Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer Verlag, (1989).
- [Ota80] Otani, S.: Nonlinear dynamic analysis of reinforced concrete building structures. In: *Canadian Journal of Civil Engineering* Vol. 7 (June 1980), pp. 333–344. DOI: 10.1139/180-041.
- [Ott05] Otto, M. ; Thoma, F.: Ritzelkorrektur (RIKOR), Version H. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA) Heft Nr. 481, (2005).

- [Özg88] Özguven, H. ; Houser, D.: Mathematical models used in gear dynamics - a review. In: *Journal of Sound and Vibration*, 121(3), 383-411. (1988).
- [Par00a] Parker, R. ; Vijayakar, S. ; Imajo, T.: Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modelling and experimental comparisons. In: *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 237, pp. 435-455. (2000).
- [Par00b] Parker, R. ; Agashe, V. ; Vijayakar, S.: Dynamic Response of a Planetary Gear System Using a Finite Element/Contact Mechanics Model. In: *Journal of Mechanical Design* 122 (Oct. 2000), p. 304. DOI: 10.1115/1.1286189.
- [Par18] Park, S. ; Kim, S. ; Choi, J.-H.: Gear fault diagnosis using transmission error and ensemble empirical mode decomposition. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 108 (2018), pp. 262–275. ISSN: 0888-3270. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.02.028>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327018300864>.
- [Ped80] Pedersen, P. ; Lyngby: Stability of the Solution to Mathieu-Hill Equations with Damping. In: *Ingenieur-Archiv* 49 (1980), pp. 15–29. ISSN: 1432-0681. DOI: 10.1007/BF0053659.
- [Pha04] Phani, A. S.: *Damping Identification in linear vibrations*. Dissertation. Cambridge University, (2004).
- [Pla88] Placzek, T.: *Lastverteilung und Flankenkorrektur*. Dissertation. TU München, (1988).
- [Pot75] Potter, R.: A general theory of modal analysis for linear systems. Hewlett-Packard-Comp., (1975).
- [Pro03] Programm: FE-Stirnradkette 3.0. Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), Frankfurt / Main – Benutzeranleitung, (2003).
- [Rad04] Radev, S. ; Griggel, T.: FVA-Heft 739: FVA-Forschungsvorhaben 338 IIb, Anregungsoptimierte Flankenkorrektur für konstante und veränderliche Last. Abschlussbericht. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (2004).
- [Rad07] Radev, S.: *Einfluss von Flankenkorrekturen auf das Anregungsverhalten gerad - und schrägverzahnter Stirnradpaarungen*. Dissertation. TU München, (2007).
- [Ray45] Rayleigh, J. ; Lindsay, R.: *The Theory of Sound*. Dover Publications, (1945).
- [Ret77] Rettig, H.: Innere dynamische Zusatzkräfte bei Zahnradgetrieben. In: *Antriebstechnik* 16 Nr. 11, S. 655-663. Frankfurt am Main, (1977).
- [Roo12] Roozen, N. B. ; Leclere, Q. ; Sandier, C.: Operational transfer path analysis applied to a small gearbox test set-up. In: d'Acoustique, S. F. (ed.): *Acoustics 2012*. Nantes, France, (Apr. 2012). URL: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00811346>.



- [Ror11] Rorabaugh, C. B.: Notes on Digital Signal Processing – Practical Recipes for Design, Analysis and Implementation. Boston: Prentice Hall, (2011).
- [Run94] Runge, C.: Über angewandte Mathematik. In: *Mathematische Annalen*, Jg. 44, S. 437 - 448. (1894).
- [Rya08] Ryan, K. L. ; Polanco, J.: Problems with Rayleigh Damping in Base-Isolated Buildings. In: *Journal of Structural Engineering* Vol. 134 (Nov. 2008). DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2008)134:11(1780).
- [Sat97] Sattelberger, K.: *Schwingungs- und Geräuschanregung bei ein- und mehrstufigen Stirnradgetrieben*. Dissertation. TU München, (1997).
- [Sch08] Schleich, T. ; Weitzl, R.: LAGER 2 2.3 – Programm zur Berechnung von Lagern. Programmdokumentation. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (2008).
- [Sch73] Schmidt, G.: *Berechnung der Wälzpressung schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung*. Dissertation. TU München, (1973).
- [Sep17] Sepp, S.: *Experimentelle Untersuchung des Anregungsverhaltens mehrstufiger Getriebe*. Betreuer: Utakapan. Masterarbeit. Technische Universität München, (2017).
- [SIM15] SIMPACK GmbH: SIMPACK Documentation. Release 9.8. (2015).
- [Ste95] Stephan, W. ; Postl, R.: Schwingungen elastischer Kontinua. 1. Auflage. Stuttgart: Teubner, (1995).
- [Sti13] Stiller, S. ; Carl, C.: FVA-Heft 1079: FVA-Forschungsvorhaben 609, Berücksichtigung des Einflusses von Flankenkorrekturen auf die Last-, Pressungs- und Zahnfußspannungsverteilung von Stirnradverzahnungen, Korrektoreinfluss Lastverteilung. Abschlussbericht. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (2013).
- [Tha09] Tharmakulasingam, R.: *Transmission Error in Spur Gears: Static and Dynamic Finite-Element Modeling and Design Optimization*. Dissertation. Brunel University, (2009).
- [Tho08] Thoma, F.: WELLAG 1.0 – Unterprogramm zur Berechnung von Wellen und Lagern. Programmdokumentation. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (2008).
- [Tho11] Thoma, F.: *Lastübertragung im verformten System Lager-Welle-Zahnrad, Berechnung der Lastverteilung im Zahnkontakt unter Berücksichtigung des Welle-Lagersystems als Teil der Zahnradstufe*. Dissertation. TU München, (2011).
- [Thü08] Thümmel, T.: Experimentelle Schwingungsanalyse Skript. München: Lehrstuhl für angewandte Mechanik, Fakultät für Maschinenwesen, Technische Universität München, (WS 2007/2008).

- [Tim34] Timoshenko, S.: *Theory of Elasticity*. New York: McGraw-Hill Book Company, (1934).
- [Uta15] Utakapan, T.: FVA-Heft 1101: FVA-Forschungsvorhaben 487 IV, Neue Kennwerte zur rechnerischen Beurteilung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen. Abschlussbericht. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (2015).
- [Uta16] Utakapan, T. ; Kohn, B. ; Fromberger, M. ; Heider, M. ; Otto, M. ; Höhn, B. R. ; Stahl, K.: Measurement of Gear Noise Behaviour for Different Microgeometries. In: *Proceedings of Internoise 2016* (2016), pp. 3964–3974.
- [Uta19] Utakapan, T. ; Götz, J.: FVA-Heft 1346: FVA-Forschungsvorhaben 338 VII, Erweiterung Dynamisches Zahnkräfte Programm. Abschlussbericht. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (2019).
- [Van15a] Van der Seijs, M. ; Klerk, D. ; Rixen, D.: General framework for transfer path analysis: History, theory and classification of techniques. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 68-69 (Aug. 2015), pp. 217–244. DOI: 10.1016/j.ymsp.2015.08.004.
- [Van15b] Vanhollebeke, F. ; Peeters, J. ; Vandepitte, D. ; Desmet, W.: Using transfer path analysis to assess the influence of bearings on structural vibrations of a wind turbine gearbox. In: *Wind Energy* 18 (2015) Nr. 5, pp. 797–810. DOI: 10.1002/we.1729. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/we.1729>.
- [Vij91] Vijayakar, S.: A combined surface integral and finite element solution for a three-dimensional contact problem. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 31 (1991) Nr. 3, pp. 525–545. DOI: 10.1002/nme.1620310308. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620310308>.
- [Wal10] Wall, W. ; Nissen, K.: *Finite Elemente*. Vorlesungsskript. Lehrstuhl für Numerische Mechanik, TU München, (2010).
- [Wan81] Wang, K. L. ; Cheng, H. S.: A Numerical Solution to the Dynamic Load, Film Thickness, and Surface Temperatures in Spur Gears, Part I: Analysis. In: *Journal of Mechanical Design* 103 (Jan. 1981) Nr. 1, pp. 177–187. ISSN: 1050-0472. DOI: 10.1115/1.3254859.
- [Web55] Weber, C. ; Banaschek, K.: *Formänderung und Profilrücknahme bei gerad- und schrägverzahnten Rädern*. Vol. 11. Schriftenreihe Antriebstechnik. Braunschweig: Vieweg-Verlag, (1955).

- [Wei14] Weinberger, U.: *Berechnung der Lastverhältnisse in Planetenradlagerungen unter Berücksichtigung der Planetenradverformung im komplexen Getriebeumfeld*. Betreuer: NEUBAUER, B. Diplomarbeit. TU München, (2014).
- [Wei16] Weinberger, U. ; Otto, M. ; Stahl, K.: Influence of Pitting on Total Transmission Error of a Planetary Gear Stage. In: *Proceedings of Internoise 2016* (2016), pp. 6545–6553.
- [Xu10] Xu, X. ; Zhou, R.: Research on Torsional Vibration of the Propulsion Shafting Gear System Based on Extended Lumped Parameter Model. In: *Applied Mechanics and Materials* 37-38 (Nov. 2010), pp. 1120–1124. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.37-38.1120.
- [Zar06] Zareian, F.: *Simplified Performance-Based Earthquake Engineering*. Dissertation. Stanford University, (2006).
- [Zel09] Zeller, P.: *Handbuch Fahrzeugakustik - Grundlagen, Auslegung, Berechnung, Versuch*. DE. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, (2009). ISBN: 978-3-834-89322-2.
- [Zha18] Zhao, L. ; Du, M. ; Yang, Y.: Optimizing Gear Micro Geometry for Minimum Transmission Error When Considering Manufacturing Deviation. In: *International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing* Vol. 6 (Feb. 2018) Nr. 1.
- [Zho11] Zhou, C. ; Young, S. ; Tang, Y.: Two-stage Gear Driveline Vibration and Noise. In: (May 2011). DOI: 10.4271/2011-01-1542.
- [Zie71] Ziegler, H.: *Gesamt-Zahnfedersteifigkeit und Lastverteilung schrägverzahnter Stirnräder*. PhD thesis. TH Aachen, (1971).

## Internetseiten

- [Brü19a] Brüel and Kjær: Product Data - Piezoelectric Accelerometer - Type 4504 A. URL: <https://www.bksv.com/-/media/literature/Product-Data/bp1451.ashx> Abrufdatum 9.09.2019.
- [Brü19b] Brüel and Kjær: Product Data - Piezoelectric Accelerometer - Type 4518. URL: <https://www.bksv.com/-/media/literature/Product-Data/bp2070.ashx> Abrufdatum 9.09.2019.
- [Brü19c] Brüel and Kjær: Product Data - Piezoelectric Accelerometer - Type 4519. URL: <https://www.bksv.com/-/media/literature/Product-Data/bp2071.ashx> Abrufdatum 9.09.2019.

- [Nat19a] National Instrument: Product Data - PXI Controller - Type NI PXI 8110. URL: <https://www.ni.com/de-de/support/model.pxi-8110.html> Abrufdatum 9.09.2019.
- [Nat19b] National Instrument: Product Data - PXI Multifunction I/O Module - Type NI PXI 6123. URL: <https://www.ni.com/de-de/support/model.pxi-6123.html> Abrufdatum 9.09.2019.
- [Nat19c] National Instrument: Product Data - PXI Multifunction I/O Module - Type NI PXI 6221. URL: <https://www.ni.com/de-de/support/model.pxi-6221.html> Abrufdatum 9.09.2019.
- [PAR19] PARDISO Solver Project: Homepage. URL: <https://www.pardiso-project.org/> Abrufdatum 9.09.2019.
- [Sic19] Sick: Product Data - Inductive Sensor - Type IM12-02BPS-ZC1. URL: <https://www.sick.com/de/de/im-standard/im12-02bps-zc1/p/p235462> Abrufdatum 9.09.2019.

### **Betreute und für diese Arbeit relevante Studienarbeiten**

Folgende Studienarbeiten, deren Bearbeitung, Auswertung, Interpretation und Darstellung von Ergebnissen unter wesentlicher wissenschaftlicher Anleitung des Autors dieser Dissertation entstanden sind, wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit am Lehrstuhl für Maschinenelemente, Forschungsstelle für Zahnräder und Getriebebau angefertigt. Ergebnisse flossen zum Teil in die Arbeit ein.

- [Sep17] Sepp, S.: *Experimentelle Untersuchung des Anregungsverhaltens mehrstufiger Getriebe*. Betreuer: Utakapan. Masterarbeit. Technische Universität München, (2017).

### **Sonstige Dokumente**

Diese Arbeit basiert auf den Ergebnissen der Forschungsvorhaben der Forschungsvereinigung Antriebstechnik FVA 487 IV sowie FVA 338 VII. Die Inhalte der Abschlussberichte zu den Forschungsvorhaben werden in dieser Dissertation verwendet. Zudem sind folgende Arbeiten in den Jahren 2012 bis 2018, die vom Autor selbst oder unter Beteiligung von Mitarbeitern des Lehrstuhls für Maschinenelemente, Forschungsstelle für Zahnräder und Getriebebau erstellt wurden, zum Teil mit in diese Arbeit eingeflossen.

- [Uta15] Utakapan, T.: FVA-Heft 1101: FVA-Forschungsvorhaben 487 IV, Neue Kennwerte zur rechnerischen Beurteilung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen. Abschlussbericht. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (2015).

- [Uta19] Utakapan, T. ; Götz, J.: FVA-Heft 1346: FVA-Forschungsvorhaben 338 VII, Erweiterung Dynamisches Zahnkräfte Programm. Abschlussbericht. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), (2019).

## A Anhang

### A.1 Herleitung

In **Bild 3.2** ist eine Evolvente einer Verzahnung gezeigt. Die Längsachse  $u$  zeigt aus der Zeichenebene. Die dargestellte Flanke wird im Folgenden als Rechtsflanke bezeichnet und kann mathematisch in einer vektoriellen Form  $\underline{V}_z$  wie folgt beschrieben werden:

$$\underline{V}_z = r_b \cdot \begin{pmatrix} \sin \xi - \xi \cos \xi \\ \cos \xi + \xi \sin \xi \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Wird die Evolvente um einen Winkel  $\theta$  um die  $u$ -Achse gedreht, so lässt sich die Evolvente unter Berücksichtigung einer Drehmatrix beschreiben als:

$$\underline{V}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot r_b \cdot \begin{pmatrix} \sin \xi - \xi \cos \xi \\ \cos \xi + \xi \sin \xi \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Die Tangente dieser Evolvente kann mit Hilfe ihrer Ableitung nach dem Wälzwinkel  $\xi$  ermittelt werden. Es gilt:

$$\frac{d\underline{V}_{z,\theta}}{d\xi} = r_b \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta [\cos \xi - \cos \xi + \xi \sin \xi] - \sin \theta [-\sin \xi + \sin \xi + \xi \cos \xi] \\ \sin \theta [\cos \xi - \cos \xi + \xi \sin \xi] + \cos \theta [-\sin \xi + \sin \xi + \xi \cos \xi] \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$= r_b \cdot \begin{pmatrix} \sin(\xi - \theta) \\ \cos(\xi - \theta) \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Bei der Paarung von zwei Zahnrädern greifen die Zähne entlang der Eingriffslinie ein. Die Richtung der Eingriffslinie  $\underline{r}_{\text{EGS}}$  in **Bild A.1** kann durch den Betriebseingriffswinkel  $\alpha_w$  vektoriell ausgedrückt werden als:

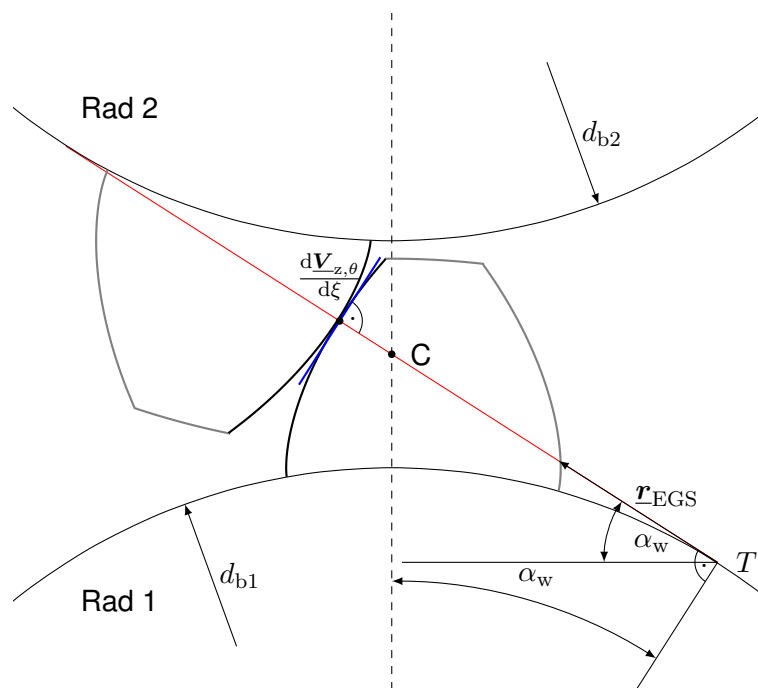
$$\underline{r}_{\text{EGS}} = \begin{pmatrix} -1 \\ \tan \alpha_w \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Nach dem Verzahnungsgesetz fällt die Normale der Evolvente im Eingriff mit der Eingriffslinie zusammen. Das heißt, die Tangente der Evolvente steht senkrecht zur Eingriffslinie. Mathematisch lässt sich mit Hilfe der **Gleichung (A.4)** und **Gleichung (A.5)** wie folgt definieren:

$$\frac{d\underline{V}_{z,\theta}}{d\xi} \cdot \underline{r}_{\text{EGS}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{A.6})$$

Durch das Lösen der **Gleichung (A.6)** ergibt sich:

$$\xi = \alpha_w + \theta \quad (\text{s. 3.1})$$



**Bild A.1:** Zahneingriff einer evolventischen Verzahnung

Mit Hilfe der **Gleichung (3.1)** lässt sich die Eingriffsstellung einer Verzahnung unter vorgegebenem Drehwinkel  $\theta$  bestimmen. Zur einfacheren Verwendung wird der Verdrehwinkel in Bezug auf die Zahnmitte referenziert. Dabei wird das Rad in **Bild 3.3** um einen positiven Grunddicken-Halbwinkel  $\psi_b$  gedreht. Dieser Winkel lässt sich nach [DIN87a] wie folgt definieren:

$$\psi_b = \frac{\pi + 4 \cdot x \cdot \tan \alpha_n}{2 \cdot z} \quad (\text{A.7})$$

Der Drehwinkel wird im neuen Koordinatensystem  $\theta'$  unter Berücksichtigung des Grunddicken-Halbwinkel  $\psi_b$  definiert als:

$$\theta = \theta' + \psi_b \quad (\text{A.8})$$

Analog zu **Gleichung (A.8)** gilt für den Drehwinkel  $\varphi$  des Referenzzahns in **Bild 3.1**:

$$\varphi = \theta - \psi_b = \theta' \quad (\text{A.9})$$

Wird diese Gleichung in **Gleichung (3.1)** eingesetzt, so ergibt sich:

$$\xi = \alpha_w + \psi_b + \varphi \quad (\text{s. 3.3})$$

Mit Hilfe der **Gleichung (3.3)** kann der Wälzwinkel bei einem vorgegebenen Winkel bezüglich der Zahnmitte bestimmt werden. Anzumerken ist, dass diese Gleichung für die Rechtsflanke gültig ist. Bei der Linksflanke müssen die erste Komponente in **Gleichung (A.1)** sowie die Richtung der Eingriffsstrecke in **Gleichung (A.5)** mit einem Minuszeichen umgedreht werden. Somit

ergeben sich die Tangente der Evolvente und die Richtung der Eingriffsstrecke als:

$$\frac{d\mathbf{V}_{z,\theta}}{d\xi} = r_b \begin{pmatrix} -\sin(\theta + \xi) \\ \cos(\theta + \xi) \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

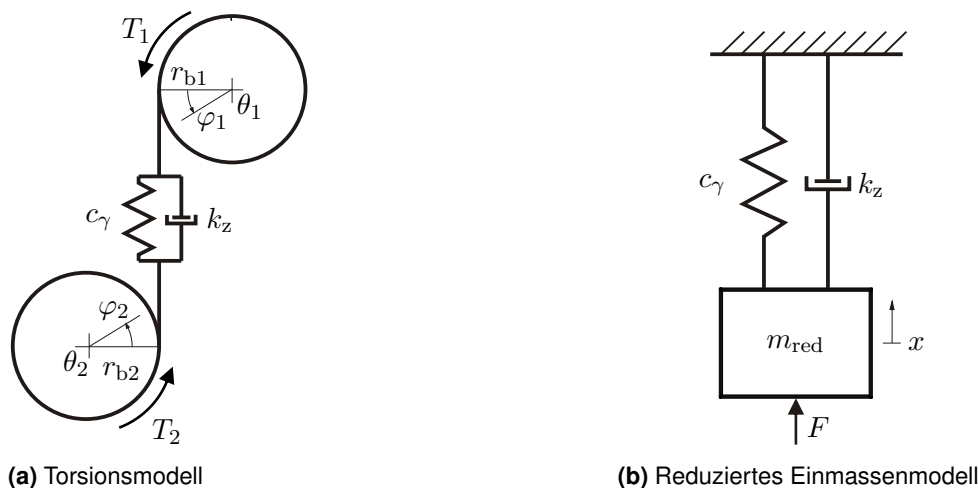
$$\mathbf{r}_{\text{EGS}} = \begin{pmatrix} +1 \\ \tan \alpha_w \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Bei der Linksflanke muss der Grunddicken-Halbwinkel um die negative Richtung zurückgedreht werden. Somit ergibt sich der Zusammenhang:

$$\xi = \alpha_w + \psi_b - \varphi \quad (\text{s. 3.4})$$

## A.2 Ermittlung Vergrößerungsfunktionen der Verzahnungsanregung

In diesem Abschnitt werden die Vergrößerungen nach Geiser [Gei02] in **Abschnitt 2.3** anhand der Methode in **Abschnitt 3.4** beispielhaft hergeleitet.



**Bild A.2:** Einfache Modellierung eines einstufigen Modell (nach [Gri10b], geändert)

Für ein einstufiges Getriebe lässt sich ein einfaches Torsionsmodell in **Bild A.2(a)** auf ein reduziertes Einmassenmodell in **Bild A.2(b)**. Es gilt nach [Gri10b]:

$$m_{\text{red}} \cdot \ddot{x}(t) + k_z \cdot \dot{x}(t) + c_\gamma \cdot x(t) = F(t) \quad (\text{A.12})$$

mit

$$F(t) = \frac{T_1(t)}{r_{b1}} \quad (\text{A.13})$$

$$m_{\text{red}} = \frac{\theta_1 \cdot \theta_2}{\theta_2 + \theta_1 \cdot (r_{b2}/r_{b1})^2} \div (r_{b1})^2 \quad (\text{A.14})$$



$m_{\text{red}}$	kg	Reduzierte Trägheitsmasse	$k_z$	N · s/m	Über alle eingreifenden Zähne gemittelte Dämpfungskonstante nach Gerber [Ger84]
$c_\gamma$	N/m	Gemittelte Verzahnungssteifigkeit	$\theta_i$	kg · m <sup>2</sup>	Trägheitsmoment des Rades $i$
$r_{b,i}$	m	Grundkreisradius des Rades $i$	$T_i$	Nm	Drehmoment am Rad $i$
$F$	N	Last auf reduzierte Koordinate	$x$	m	Reduzierte Koordinate

Mit Hilfe der Laplace-Transformation wie in **Gleichung (3.9) - Gleichung (3.11)** gilt:

$$\left[ -m_{\text{red}} \cdot \omega^2 + \underbrace{2 \cdot D_{ze} \cdot \varepsilon_\alpha \cdot \sqrt{c_\gamma \cdot m_{\text{red}}}}_{k_z \text{ nach Gleichung (2.14)}} \cdot j\omega + c_\gamma \right] \cdot X(j\omega) = F(j\omega) \quad (\text{A.15})$$

Daraus folgt:

$$\frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{-m_{\text{red}} \cdot \omega^2 + c_\gamma + j\omega \cdot 2 \cdot D_{ze} \cdot \varepsilon_\alpha \cdot \sqrt{c_\gamma \cdot m_{\text{red}}}} \quad (\text{A.16})$$

$$= \frac{1}{c_\gamma} \cdot \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot 2 \cdot D_{ze} \cdot \varepsilon_\alpha} \right], \quad \text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{c_\gamma}{m_{\text{red}}}} \quad (\text{A.17})$$

$$\left| \frac{X(N)}{F(N)} \right| = \frac{1}{c_\gamma} \cdot \left| \frac{1}{1 - N^2 + j \cdot N \cdot 2 \cdot D_{ze} \cdot \varepsilon_\alpha} \right|, \quad \text{mit } N = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (\text{A.18})$$

$$= \frac{1}{c_\gamma} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - N^2)^2 + 4 \cdot (D_{ze} \cdot \varepsilon_\alpha \cdot N)^2}} \quad (\text{A.19})$$

Unter Berücksichtigung der quasistatischen Drehwegabweichung  $X_s$  gilt für  $F(j\omega)$ :

$$F(j\omega) = -c_\gamma \cdot X_s(j\omega) \quad (\text{A.20})$$

Daraus folgt nach **Gleichung (A.19)**:

$$\frac{1}{c_\gamma} \cdot \left| \frac{X(N)}{-X_s(N)} \right| = \frac{1}{c_\gamma} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - N^2)^2 + 4 \cdot (D_{ze} \cdot \varepsilon_\alpha \cdot N)^2}} \quad (\text{A.21})$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{(1 - N^2)^2 + 4 \cdot (D_{ze} \cdot \varepsilon_\alpha \cdot N)^2}} \quad (\text{2.15})$$

Die zusätzliche dynamische Verzahnungskraft lässt sich nach Geiser [Gei02] im Zeitbereich definiert als:

$$F_{\text{dyn}}(t) = m_{\text{red}} \cdot \ddot{x}(t) \quad (\text{A.22})$$

$$\mathcal{L}\{F_{\text{dyn}}(t)\} = \mathcal{L}\{m_{\text{red}} \cdot \ddot{x}(t)\} \quad (\text{A.23})$$

$$F_{\text{dyn}}(j\omega) = -m_{\text{red}} \cdot \omega^2 \cdot X(j\omega) \quad (\text{A.24})$$

Wird **Gleichung (A.17)** mit  $-m \cdot \omega^2$  multipliziert, so ergibt sich:

$$\left| \frac{F_{\text{dyn}}(N)}{F(N)} \right| = \frac{|-1| \cdot m_{\text{red}} \cdot \omega^2}{c_\gamma} \cdot \left| \frac{1}{1 - N^2 + j \cdot N \cdot 2 \cdot D_{ze} \cdot \varepsilon_\alpha} \right| \quad (\text{A.25})$$

$$= \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - N^2)^2 + 4 \cdot (D_{ze} \cdot \varepsilon_\alpha \cdot N)^2}} \quad (\text{A.26})$$

$$V = \frac{N^2}{\sqrt{(1 - N^2)^2 + 4 \cdot (D_{ze} \cdot \varepsilon_\alpha \cdot N)^2}} \quad (\text{2.16})$$

### A.3 Beschreibung der eingesetzten ODE-Solver

Zur Zeitschrittintegration wird in der Arbeit die ODEPACK-Bibliothek [Hin83] verwendet. Es steht zum Lösen des Gleichungssystems zwei Solver zur Verfügung. Das Adams-Bashforth-Verfahren ist ein explizites Mehrschrittverfahren, während das BDF-Verfahren ein implizites Mehrschrittverfahren, das das Lösen von steifen Gleichungssystemen einzusetzen ist.

Im Allgemeinen lässt sich nach Butcher [But16] der zu ermittelnde Zustandsvektor  $\underline{z}(t)$  zum Zeitpunkt  $t_n$  mit einem  $s$ -schrittigen Verfahren in **Gleichung (2.8)** bestimmen als:

$$\underline{z}(t_n) = \underline{z}_n = \sum_{i=1}^s \alpha_i \cdot \underline{z}_{n-i} + h \sum_{i=0}^s \beta_i \cdot f(t_{n-i}, \underline{z}_{n-i}) \quad (\text{2.8})$$

In mancher Literatur wird die Notation des berechneten Zeitpunkt als  $n+1$  für den „nächsten“ Zeitschritt bzw.  $n+s$  für den „aktuellsten“ Zeitschritt verwendet. In dieser Arbeit wird in Anlehnung an Butcher [But16] die Konvention  $\underline{z}_n$  für den zu bestimmenden Zustandsvektor bezeichnet.

#### A.3.1 Adams-Bashforth-Verfahren

Beim Adams-Bashforth-Verfahren gilt:

$$\underline{z}_n = \underline{z}_{n-i} + h \sum_{i=0}^s \beta_i \cdot f(t_{n-i}, \underline{z}_{n-i}), \text{ mit } \beta_0 = 0 \quad (\text{A.27})$$

**Tabelle A.1** listet die Gleichungskoeffiziente bis zu  $s = 8$  Schritten. Der Fehlerkoeffizient  $C$  berücksichtigt die Abweichung durch die Abschätzung bzw. die Berücksichtigung begrenzter  $s$ -ten Ordnung in Taylor-Reihenentwicklung. Dieser Term weist eine Ordnung höher als  $s$  in der Reihenentwicklung auf. So lautet die Gleichung für die Bestimmung mit 2 Ordnungen nach [But16] als:

$$\underline{z}(t_n) = \underline{z}(t_{n-1}) + h \left( \frac{3}{2} \underline{z}'(t_{n-1}) - \frac{1}{2} \underline{z}''(t_{n-2}) \right) + Ch^3 \underline{z}'''(t_n) + \mathcal{O}(h^4), \text{ mit } C = \frac{5}{12} \quad (\text{A.28})$$

Es ist anzumerken, dass der Fehlerkoeffizient eines  $s$ -schrittigen Verfahren dem letzten Koeffizient  $\beta_{s+1}$  des  $s+1$ -schrittigen Verfahren entspricht.

**Tabelle A.1:** Gleichungskoeffiziente für Adams-Bashforth-Verfahren bis  $s = 8$  (übersetzt aus [But16])

$s$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$C$
1	1								$\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$							$\frac{5}{12}$
3	$\frac{23}{12}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{12}$						$-\frac{3}{18}$
4	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{3}{8}$					$\frac{251}{720}$
5	$\frac{1901}{720}$	$-\frac{1387}{360}$	$\frac{109}{30}$	$-\frac{367}{360}$	$\frac{251}{720}$				$-\frac{95}{288}$
6	$\frac{4277}{1440}$	$-\frac{2641}{480}$	$\frac{4991}{720}$	$-\frac{3649}{720}$	$\frac{959}{480}$	$-\frac{95}{288}$			$\frac{19087}{60480}$
7	$\frac{198721}{60480}$	$-\frac{18637}{2520}$	$\frac{235183}{20160}$	$-\frac{10754}{945}$	$\frac{135713}{20160}$	$-\frac{5603}{2520}$	$\frac{19087}{60480}$		$-\frac{5257}{17280}$
8	$\frac{16083}{4480}$	$-\frac{1152169}{120960}$	$\frac{242653}{13440}$	$-\frac{296053}{13440}$	$\frac{2102243}{120960}$	$-\frac{115747}{13440}$	$\frac{32863}{13440}$	$-\frac{5257}{17280}$	$\frac{1070017}{3628800}$

### A.3.2 BDF-Verfahren

Für BDF-Verfahren gilt:

$$\underline{z}(t_n) = \underline{z}_n = \sum_{i=1}^s \alpha_i \cdot \underline{z}_{n-i} + h\beta_0 \cdot f(t_n, \underline{z}_n) \quad (\text{A.29})$$

Gleichungskoeffiziente für die Bestimmung bis zu  $s = 7$  sind in **Tabelle A.2** gezeigt. Der Fehlerkoeffizient  $C$  lässt sich nach Butcher [But16] als  $C = \beta_0/(s + 1)$  bestimmen. In der Praxis wird  $s \geq 7$  aufgrund der entstandenen Instabilität nicht eingesetzt, s. auch [But16]

**Tabelle A.2:** Gleichungskoeffiziente für BDF-Verfahren bis  $s = 7$  (übersetzt aus [But16])

$s$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\beta_0$	$C$
1	1							1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$						$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$
3	$\frac{18}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$\frac{2}{11}$					$\frac{6}{11}$	$\frac{3}{22}$
4	$\frac{48}{25}$	$-\frac{36}{25}$	$\frac{16}{25}$	$-\frac{3}{25}$				$\frac{12}{25}$	$\frac{12}{125}$
5	$\frac{300}{137}$	$-\frac{300}{137}$	$\frac{200}{137}$	$-\frac{75}{137}$	$\frac{12}{137}$			$\frac{60}{137}$	$\frac{10}{137}$
6	$\frac{120}{49}$	$-\frac{150}{49}$	$\frac{400}{147}$	$-\frac{75}{49}$	$\frac{24}{49}$	$-\frac{10}{147}$		$\frac{20}{49}$	$\frac{20}{343}$
7	$\frac{980}{363}$	$-\frac{490}{121}$	$\frac{4900}{1089}$	$-\frac{1225}{363}$	$\frac{196}{121}$	$-\frac{490}{1089}$	$\frac{20}{363}$	$\frac{140}{363}$	$\frac{35}{726}$

## A.4 Übersicht der Messpositionen am Speed2E-Getriebe

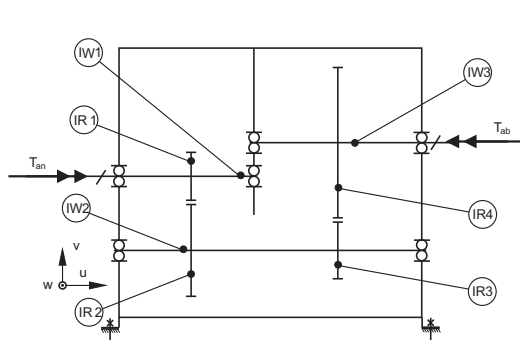
**Tabelle A.3:** Übersicht der Messpositionen des Teilgetriebes I und II am Speed2E-Getriebe [Sep17]

Sensor ID	Typ	Sensor Seriennummer	Messkanal	Messrichtung		Winkel $\alpha$ um z-Achse	Referenz-Ebene	Beschreibung
				entsprechend KOSY Sensor	entsprechend KOSY Getriebe			
1	4518	51879	1	x	x(+)			TGI: Hochdrehzahlwelle
2	4518	52914	2	y	y(+)			Spindellager Vorne
3	4518	52905	3	x	x(-)			TGI: Zwischenwelle
4	4518	52906	4	y	y(-)			Rillenkugellager Vorne
5	4504 A	31219	optional: 5	x	x(-)			Differenzialwelle
			optional: 6	y	y(-)			Kegelrollenlager Vorne
6	4518	52912	14	x	x(+)			TGI: Zwischenwelle
7	4518	52908	13	y	y(-)			Zylinderrollenlager Hinten
8	4504 A	31126	9	x	x(-)			Differenzialwelle
			10	y	y(+)			Kegelrollenlager Hinten
9	4519	55200	11			+26.68°	yz	TGI: Hochdrehzahlwelle Spindellager Hinten
10	4519	58259	12			-72.00°	yz	TGI: Hochdrehzahlwelle Spindellager Hinten
10A	4519	58260	15			+26.68°	yz	TGI: Hochdrehzahlwelle Spindellager Hinten geschraubt
11	4518	51885	7	x	x(+)			TG II: 2. Zwischenwelle
12	4518	52909	8	y	y(+)			Kegelrollenlager Vorne
13	4518	52903	5	x	x(-)			TG II: 1. Zwischenwelle
14	4518	52910	6	y	y(+)			Kegelrollenlager Vorne
11	Induktiv		16					Drehzahlsensor Induktiv an Abtriebswelle

## A.5 Dynamische Untersuchung eines zweistufigen Getriebes

In **Bild A.3** ist die Prinzipskizze des in der Arbeit als Berechnungsbeispiel verwendeten zweistufigen Getriebes dargestellt. Auf der Eingangswelle (IW1) befindet sich das schrägverzahnte Ritzel (IR1), das sich mit dem Rad (IR2) auf der Zwischenwelle (IW2) kämmt. Auf dieser Welle ist das geradverzahnte Ritzel der zweiten Stufe (IR3) montiert. Das Drehmoment aus der Zwischenwelle wird an die Abtriebswelle (IW3) über das Rad (IR4) weitergeleitet.

### A.5.1 Prinzipskizze und Daten



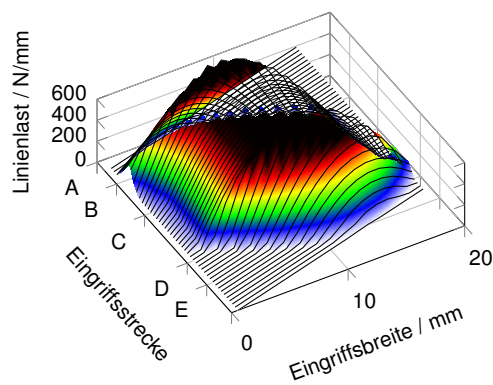
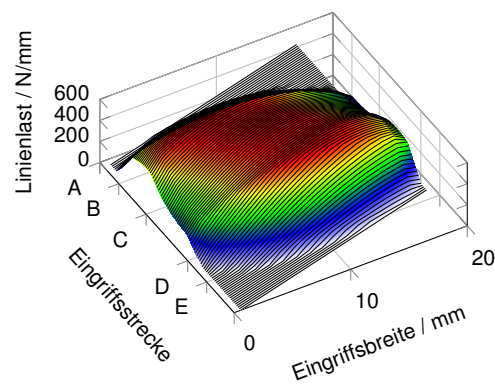
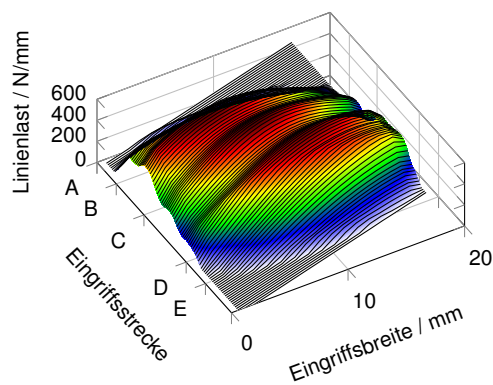
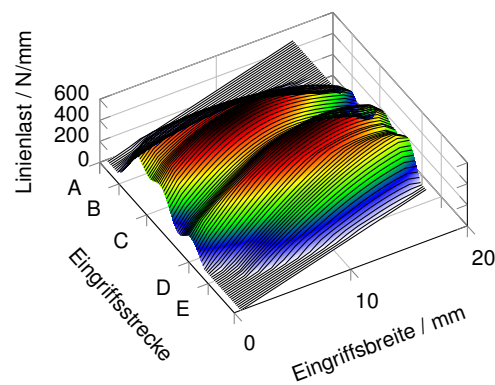
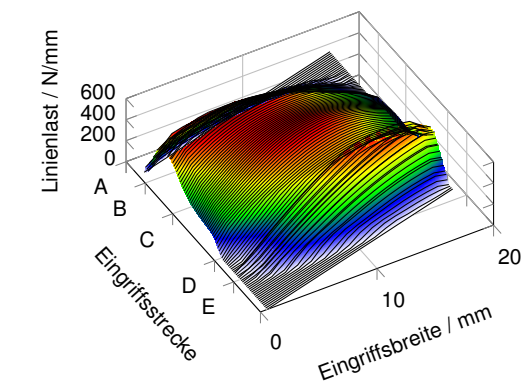
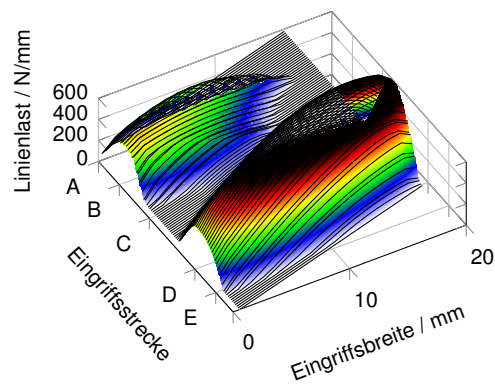
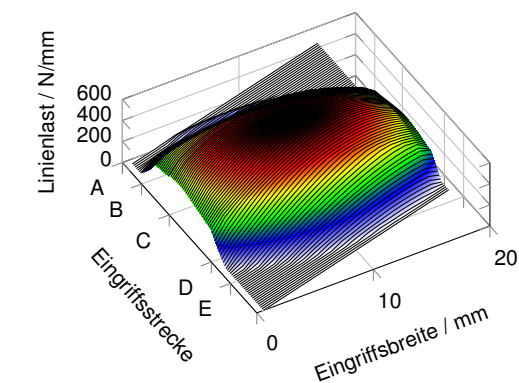
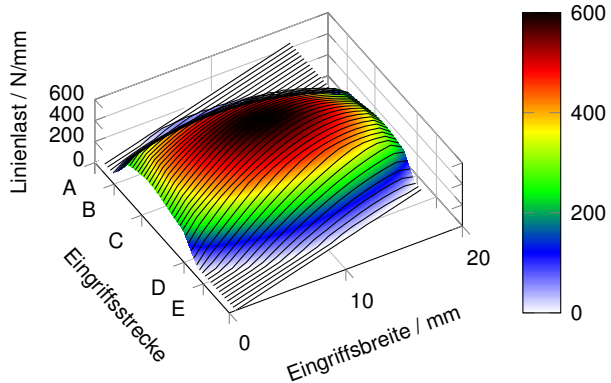
Betriebsdaten	Stufe 1		Stufe 2	
Antriebsdrehmoment / Nm	200 – 600		(370 – 1110)	
Achsabstand / mm	116		247.5	
Achswinkel / °	180		0	
Verzahnungsdaten	IR1	IR2	IR3	IR4
Zähnezahl $z$ / -	20	37	27	70
Normalmodul $m$ / -	4	4	5	5
Normaleingriffswinkel $\alpha$ / °	20	20	20	20
Schrägungswinkel $\beta$ / °	-15	15	0	0
Profilverschiebungsfaktor $x$ / -	0	0	0.6	0.4
Fusskreisdurchmesser $d_F$ / mm	74	138	125	326
Kopfnutzkreisdurchmesser $d_{Na}$ / mm	88	155	148.5	363.5
Zahnbreite $b$ / mm	20	20	35	35

Prinzipische Skizze des zweistufigen Getriebes

Betriebs- und Verzahnungsdaten des zweistufigen Getriebes

**Bild A.3:** Prinzipskizze und Daten des zweistufigen Getriebes

### A.5.2 Dynamische Lastverteilung der ersten Verzahnungsstufe (Schrägverzahnung)

(a) Quasistatischer Ansatz bei  $n_1 \rightarrow 0$ (b)  $n_1 = 10 \text{ min}^{-1}$ (c)  $n_1 = 3039.29 \text{ min}^{-1} (\eta_2 = 0.5)$ (d)  $n_1 = 4553.94 \text{ min}^{-1}$ (e)  $n_1 = 6674.44 \text{ min}^{-1} (\eta_2 \approx 1)$ (f)  $n_1 = 12430.10 \text{ min}^{-1}$ (g) Bezugsdrehzahl  $\eta_1 \gg 1$ 

(h) Bei sehr hoher Drehzahl nach dem Ansatz der Kraftanregung

**Bild A.4:** Lastverteilung bei unterschiedlichen Drehzahlen der Schrägverzahnung des Getriebes

## Dissertationen der FZG

1. PERRET, H. Übertragung konstanter Leistung durch stufenlos mechanische Regeltriebe. TH Braunschweig (1935).
2. BELLMANN, H. Beiträge zur Prüfung von Bremsbelägen. TH Braunschweig (1939).
3. HIERSIG, H.M. Der Zusammenhang von Gestaltung und Beanspruchung bei Schneckengetrieben mit Evolventenverzahnung. TH Braunschweig (1943).
4. HELBIG, F. Walzenfestigkeit und Grübchenbildung von Zahnrad- und Wälzlagerwerkstoffen. TH Braunschweig (1943).
5. ARF, D. Pendelrollenlager mit symmetrischen und unsymmetrischen Rollen. TH Braunschweig (1944).
6. OESMANN, W. Entwicklung einer Stahlsand-Schalt- und Regelkupplung. TH Braunschweig (1945).
7. RUBO, E. Ermittlung der Achsfehler-Empfindlichkeit verschiedener Zylinder-Schneckengetriebe mit Hilfe des Einlauf-Abschliffvolumens. TH Braunschweig (1948).
8. GLAUBNITZ, H. Drehmomentmessungen zum Wendevorgang bei Raupenfahrwerken. TH Braunschweig (1948).
9. TALKE, H. Beiträge zur hydrodynamischen Schmiertheorie des ebenen Gleitschuhes auf ebener Fläche. TH Braunschweig (1948).
10. CRAMER, H. Über die Reibung und Schmierung feinmechanischer Geräte. TH Braunschweig (1949).
11. THOMAS, W. Reibscheiben-Regelgetriebe mit Linienberührung. TH Braunschweig (1949).
12. MAUSHAKE, W. Theoretische Untersuchung von Schneckengetrieben mit Globoidschnecke und Stirnrad. TH Braunschweig (1950).
13. KRAUPNER, K.W. Das plastische Verhalten umlaufender Stahlrollen bei Punktberührung. TH Braunschweig (1951).
14. BANASCHEK, K. Die Gleitreibung geschmierter Flächen kleiner Schmiegun. Einfluß von Werkstoffpaarung, Krümmung, Oberfläche und Schmierstoff. TH Braunschweig (1951).

15. HEYER, E. Versuche mit Zylinderschneckenrieben. Einfluß von Zahnform, Modul, Durchmesser und Schmierstoff auf Verlustleistung und Tragfähigkeit. TH München (1952).
16. HENTSCHEL, G. Der Hochleistungswälztrieb. Entwicklungsstand und Entwicklungsmöglichkeiten. TH München (1952).
17. WINTER, H. Tragfähigste Evolventengeradverzahnung. TH München (1954).
18. ROY, A.K. Spannungsoptische Untersuchung eines schrägverzahnten Stirnrades. TH München (1957).
19. RETTIG, H. Dynamische Zahnkraft. TH München (1957).
20. OHLENDORF, H. Verlustleistung und Erwärmung von Stirnrädern. TH München (1958).
21. UNTERBERGER, M. Geräuschuntersuchungen an geradverzahnten Zahnrädern. TH München (1958).
22. LOOMAN, J. Das Abrichten von profilierten Schleifscheiben zum Schleifen von schrägverzahnten Stirnrädern. TH München (1959).
23. JARCHOW, F. Versuche an Stirnrad-Globoidschneckenrieben. TH München (1960).
24. POPOVIC, L. Einfluß von Zahnform und Bearbeitung auf die Zahnfußfestigkeit. TH München (1960).
25. EHRENSPIEL, K. Die Festkörperreibung von geschmierten und ungeschmierten Metallpaarungen mit Linienberührung. TH München (1962).
26. PITTROFF, H. Riffelbildung infolge Stillstandserschütterungen bei Wälzlagern. TH München (1962).
27. SCHREIBER, H. Zur Auswertung von Lebensdauerversuchen an Wälzlagern. TH München (1962).
28. ROTH, K. Untersuchungen über die Eignung der Evolventenzahnform für eine allgemein verwendbare feinwerktechnische Normverzahnung. TH München (1963).
29. NARUSE, Ch. Verschleiß, Tragfähigkeit und Verlustleistung bei Schraubengradtrieben. TH München (1964).
30. GARTNER, F. Die Mischreibung bei Linienberührung. TH München (1964).



31. ASSMANN, H. Vergleichende Untersuchung von Getriebeölen im FZG-Stirnrad- und Esso-Hypoidprüfstand. TH München (1965).
32. REISTER, D. Einseitiges Breitentragen bei Stirnrädern. TH München (1965).
33. KORRENN, H. Gleitreibung in den Kontaktstellen zwischen den Wälzkörpern und den Laufbahnen der Ringe von Wälzlagern. TH München (1965).
34. HÖSEL, Th. Geräuschuntersuchungen an schrägverzahnten Stirnrädern mit Evolventenverzahnung. TH München (1965).
35. LANGENBECK, K. Die Verschleiß- und Freßgrenzlast der Hypoidgetriebe. TH München (1966).
36. MEMMEL, M. Untersuchungen über die Tragfähigkeit und Gebrauchsdauer von Gelenklagern. TH München (1966).
37. BÖTSCH, H. Der Einfluß der Oberflächenbearbeitung und -behandlung auf die Flankenfestigkeit von Stirnrädern aus Vergütungsstahl. TH München (1966).
38. LECHNER, G. Die Freßlastgrenze bei Stirnrädern aus Stahl. TH München (1966).
39. LANGE, S. Untersuchungen von Helicon- und Spiroidgetrieben mit abwickelbaren Schneckenflanken nach der hydrodynamischen und nach der Hertzschen Theorie. TH München (1967).
40. SCHWÄGERL, D. Untersuchung von Helicon- und Spiroidgetrieben mit trapezförmigem Schneckenprofil nach der Hertzschen und nach der hydrodynamischen Theorie. TH München (1967).
41. MICHELS, K. Schneckengetriebe mit Werkstoffpaarung Stahl/Grauguß. TH München (1968).
42. GACKSTETTER, G. Verlustarme Verzahnung. TH München (1968).
43. GEUPEL, H. Flüssigkeitsreibung bei Punktberührung. TH München (1969).
44. GREKOUSSIS, R. Vergleichende Untersuchungen zur Freßtragfähigkeit von Hypoid- und Stirnrädern. TH München (1969).
45. BAETHGE, J. Zahnfederhärte, Drehwegfehler und Geräusch bei Stirnrädern. TH München (1969).

46. SCHULZ, H.D. Untersuchung über Tragfähigkeiten und Verlustleistung von Schneckengetrieben mit trapezförmigem Schneckenprofil und kegeliger Schnecke. TH München (1969).
47. STÖLZLE, K. Leistungsübertragung in Planetengetrieben bei statischem und dynamischem Betrieb. Berechnung, Optimierung und Versuchsergebnisse. TH München (1970).
48. SEITZINGER, K. Die Erwärmung einsatzgehärteter Zahnräder als Kennwert für ihre Freßtragfähigkeit. TU München (1971).
49. STÖSSEL, K. Reibungszahlen unter elasto-hydrodynamischen Bedingungen. TU München (1971).
50. SCHMIDT, G. Berechnung der Wälzpressung schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung. TU München (1972).
51. HIRT, M. Einfluß der Zahnfußausrundung auf Spannung und Festigkeit von Geradstirnrädern. TU München (1974).
52. WILKESMANN, H. Berechnung von Schneckengetrieben mit unterschiedlichen Zahnprofilformen (Tragfähigkeits- und Verlustleistung für Hohlkreis-, Evolventen- und Geradlinienprofil). TU München (1974).
53. RICHTER, M. Der Verzahnungswirkungsgrad und die Freßtragfähigkeit von Hypoid- und Schraubenradgetrieben - Versuchsergebnisse und Berechnungsmethoden. TU München (1976).
54. RÖSCH, H. Untersuchungen zur Wälzfestigkeit von Rollen - Einfluß von Werkstoff, Wärmebehandlung und Schlupf. TU München (1976).
55. GAGGERMEIER, H. Untersuchungen zur Reibkraftübertragung in Regel-Reibradgetrieben im Bereich elasto-hydrodynamischer Schmierung. TU München (1977).
56. KÄSER, W. Beitrag zur Grübchenbildung an gehärteten Zahnrädern. Einfluß von Härtetiefe und Schmierstoff auf die Flankentragfähigkeit. TU München (1977).
57. KNABEL, W. Geräusche und Schwingungen an Stirnradgetrieben. Untersuchungen geometrischer Einflüsse bei hohen Drehzahlen und Belastungen. TU München (1977).

58. WIRTH, X. Über den Einfluß von Schleifkerben auf die Zahnfußtragfähigkeit und das Schädigungsverhalten oberflächengehärteter Zahnräder. TU München (1977).
59. HUBER, G. Zylinderschneckengetriebe, ein Beitrag zur Berechnung von Grübchen- und Gleitverschleiß und Angaben zum Wirkungsgradverhalten aus Versuchen. TU München (1978).
60. BROSSMANN, U. Über den Einfluß der Zahnfußausrundung und des Schrägungswinkels auf Beanspruchung und Festigkeit schrägverzahnter Stirnräder. TU München (1979).
61. PLEWE, H.-J. Untersuchungen über den Abriebverschleiß von geschmierten, langsam laufenden Zahnrädern. TU München (1980).
62. FRESEN, G. Untersuchungen über die Tragfähigkeit von Hypoid- und Kegelradgetrieben (Grübchen, Ridging, Rippling, Graufleckigkeit und Zahnbruch). TU München (1981).
63. OSTER, P. Beanspruchung der Zahnflanken unter Bedingungen der Elastohydrodynamik. TU München (1982).
64. HORNING, K. Zahnräder aus Bainitischem Gusseisen mit Kugelgraphit. TU München (1983).
65. WEISS, T. Zum Festigkeits- und Verzugverhalten von randschichtgehärteten Zahnrädern. TU München (1983).
66. VOJACEK, H. Das Reibungsverhalten von Fluiden unter elastohydrodynamischen Bedingungen. Einfluß der chem. Struktur des Fluides, der Werkstoffe und der Makro- und Mikrogeometrie der Gleit/Wälzkörper. TU München (1984).
67. SCHÖNNENBECK, G. Einfluß der Schmierstoffe auf die Zahnflankenermüdung (Graufleckigkeit und Grübchenbildung) hauptsächlich im Umfangsgeschwindigkeitsbereich 1...9 m/s. TU München (1984).
68. WIENER, H. Untersuchung der Rollenkinematik im Axial-Pendelrollenlager. TU München (1984).
69. MATHIAK, D. Untersuchungen über Flankentragfähigkeit, Zahnfußtragfähigkeit und Wirkungsgrad von Zylinderschneckengetrieben. TU München (1984).

70. STRASSER, H. Einflüsse von Verzahnungsgeometrie, Werkstoff und Wärmebehandlung auf die Zahnfußtragfähigkeit. TU München (1984).
71. JOACHIM, F.-J. Untersuchungen zur Grübchenbildung an vergüteten und normalisierten Zahnrädern (Einfluß von Werkstoffpaarung, Oberflächen- und Eigenspannungszustand). TU München (1984).
72. GERBER, H. Innere dynamische Zusatzkräfte bei Stirnradgetrieben - Modellbildung, innere Anregung und Dämpfung. TU München (1984).
73. SIMON, M. Messung von elasto-hydrodynamischen Parametern und ihre Auswirkung auf die Grübchentragfähigkeit vergüteter Scheiben und Zahnräder. TU München (1984).
74. SCHMIDT, W. Untersuchungen zur Grübchen- und zur Zahnfußtragfähigkeit geradverzahnter evolventischer Innenstirnräder. TU München (1984).
75. FUNCK, G. Wärmeabführung bei Getrieben unter quasistationären Betriebsbedingungen. TU München (1985).
76. PAUL, M. Einfluß von Balligkeit und Lageabweichungen auf die Zahnfußbeanspruchung spiralverzahnter Kegelräder. TU München (1986).
77. HOPPE, F. Das Abschalt- und Betriebsverhalten von mechanischen Sicherheitskupplungen. TU München (1986).
78. MICHAELIS, K. Die Integraltemperatur zur Beurteilung der Freßtragfähigkeit von Stirnradgetrieben. TU München (1987).
79. WECH, L. Untersuchungen zum Wirkungsgrad von Kegelrad- und Hypoidgetrieben. TU München (1987).
80. KNAUER, G. Zur Grübchentragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder - Einfluß von Werkstoff, Schmierstoff und Betriebstemperatur. TU München (1988).
81. PLACZEK, T. Lastverteilung und Flankenkorrektur in gerad- und schrägverzahnten Stirnradstufen. TU München (1988).

82. PFLAUM, H. Das Reibungsverhalten ölgeschmierter Kegelreibkupplungen in Synchronisationseinrichtungen von Kraftfahrzeug-Schaltgetrieben. TU München (1988).
83. BRINCK, P. Zahnfußtragfähigkeit oberflächengehärteter Stirnräder bei Laststrichtungsumkehr. TU München (1989).
84. (entfallen)
85. NEUPERT, K. Verschleißtragfähigkeit und Wirkungsgrad von Zylinder-Schneckengetrieben. TU München (1990).
86. PREXLER, F. Einfluß der Wälzflächenrauheit auf die Grübchenbildung vergüteter Scheiben im EHD-Kontakt. TU München (1990).
87. SCHALLER, K.-V. Betriebsfestigkeitsuntersuchungen zur Grübchenbildung an einsatzgehärteten Stirnradflanken. TU München (1990).
88. COLLENBERG, H.-F. Untersuchungen zur Freßtragfähigkeit schnelllaufender Stirnradgetriebe. TU München (1991).
89. MÜLLER, R. Schwingungs- und Geräuschanregung bei Stirnradgetrieben. TU München (1991).
90. ANZINGER, M. Werkstoff- und Fertigungseinflüsse auf die Zahnfußtragfähigkeit, insbesondere im hohen Zeitfestigkeitsgebiet. TU München (1991).
91. KAGERER, E. Messung von elastohydrodynamischen Parametern im hochbelasteten Scheiben- und Zahnkontakt. TU München (1991).
92. HASLINGER, K. Untersuchungen zur Grübchentragfähigkeit profilkorrigierter Zahnräder. TU München (1991).
93. VOLLHÜTER, F. Einfluß der Achsversetzung auf die Grübchen- und Zahnfußtragfähigkeit von spiralverzahnten Kegelrädern. TU München (1992).
94. PINNEKAMP, B. Das Schaltverhalten von PKW-Getriebesynchronisierungen. TU München (1992).
95. SCHUBERT, M. Einfluß der Befestigungsart und Radkranzdicke auf die Zahntragfähigkeit von Innenstirnrädern. TU München (1993).
96. STEINGRÖVER, K. Untersuchung zu Verschleiß, Verlustgrad und Fressen bei Zylinder-Schneckengetrieben. TU München (1993).

97. ELSTORPFF, M.-G. Einflüsse auf die Grübchentragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder bis in das höchste Zeitfestigkeitsgebiet. TU München (1993).
98. EMMERT, S. Untersuchungen zur Zahnflankenermüdung (Graufleckigkeit, Grübchenbildung) schnellaufender Stirnradgetriebe. TU München (1994).
99. SUCHANDT, Th. Betriebsfestigkeitsuntersuchungen zur Zahnfußtragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder und zur Bruchfestigkeit vergüteter Laschenkettens. TU München (1994).
100. HÄMMERL, B. Lebensdauer- und Temperaturverhalten ölgekühlter Lamellenkupplungen bei Lastkollektivbeanspruchung. TU München (1994).
101. WEISS, R. Einfluß der Ölalterung auf die Zahnflankentragfähigkeit. TU München (1994).
102. SCHLENK, L. Untersuchungen zur Freßtragfähigkeit von Großzahnradern. TU München (1995).
103. MANN, U. Schmierfilmbildung in elasto-hydrodynamischen Kontakten, Einfluß verschiedener Grundöle und Viskositäts-Index-Verbesserer. TU München (1995).
104. RUDZEWSKI, S. Systemtechnische Verknüpfung eingeführter Getriebeberechnungsprogramme. TU München (1995).
105. RANK, R. Untersuchungen zur Lebensdauerprüfung von Synchronisierungen. TU München (1995).
106. EBERSPÄCHER, C. Reihenfolgeeffekte bei der Grübchen-Betriebsfestigkeit einsatzgehärteter Zahnräder. TU München (1995).
107. RANK, B. Untersuchungen zur Grübchenbildung bei Zylinder-Schneckengetrieben. TU München (1996).
108. SATTELBERGER, K. Schwingungs- und Geräuschanregung bei ein- und mehrstufigen Stirnradgetrieben. TU München (1997).
109. HIRSCHMANN, V. Tragfähigkeitsuntersuchungen an stufenlosen Umschlingungsgetrieben. TU München (1997).
110. THOMAS, J. Flankentragfähigkeit und Laufverhalten von hartfeinbearbeiteten Kegelrädern. TU München (1998).

111. WIKIDAL, F. Berechnung der Flankenpressung gerad- und schrägverzahnter Stirnräder für last- und fertigungsbedingte Abweichungen. TU München (1998).
112. PERPONCHER, V., CH. Einflüsse von Reibflächentopographie und Beanspruchungen auf das Reibungs- und Verschleißverhalten von Synchronisierungen. TU München (1998).
113. SCHEDL, U. Einfluß des Schmierstoffs auf die Grübchenlebensdauer ein-satzgehärteter Zahnräder. TU München (1998).
114. VOLLMER, T. Methodik zur Entwicklung einer Fahrstrategie für Fahrzeuge, ausgeführt am Beispiel des Autarken Hybrids. TU München (1998).
115. HEITMANN, A. Entwicklung des  $i^2$ -Getriebes für den Autarken Hybrid-Antriebsstrang. TU München (1998).
116. PFLEGER, F. Schalt- und Lebensdauerverhalten von Lamellenkupplungen. TU München (1998).
117. KERSCHL, S. Der Autarke Hybrid - Optimierung des Antriebsstrangs hinsichtlich Energieverbrauch und Bestimmung des Einsparpotentials, TU München (1998).
118. DÖBEREINER, R. Tragfähigkeit von Hochverzahnungen geringer Schwingungsanregung, TU München (1998).
119. WEIGAND, U. Werkstoff- und Wärmebehandlungseinflüsse auf die Zahnfußtragfähigkeit, TU München (1999).
120. SCHRADE, U. Einfluß von Verzahnungsgeometrie und Betriebsbedingungen auf die Graufleckentragfähigkeit von Zahnradgetrieben, TU München (2000).
121. KÖLL, J. Konstruktion des Getriebes für ein Pkw-Hybridantriebssystem, TU München (2000).
122. FÖRSTER, W. Der Lastschaltvorgang beim stufenlosen  $i^2$ -Getriebe des Autarken Hybrid-Antriebsstrangs, TU München (1999).
123. LANGE, N. Hoch fresstragfähige Schneckengetriebe mit Rädern aus Sphaeroguß, TU München (2000).
124. LUTZ, M. Methoden zur rechnerischen Ermittlung und Optimierung von Tragbildern an Schneckengetrieben, TU München (2000).

125. KOPATSCH, F. Wirksamkeit von Viskositätsindex-Verbesserern im EHD-Zahnradkontakt, TU München (2000).
126. BAYERDÖRFER, I. Einfluß von betriebsbedingten Schmierstoffveränderungen auf die Flankentragfähigkeit einsatzgehärteter Stirnräder, TU München (2000).
127. TOBIE, T. Zur Grübchen- und Zahnfußtragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder, TU München (2001).
128. STAHL, K. Grübchentragfähigkeit einsatzgehärteter Gerad- und Schrägverzahnungen unter besonderer Berücksichtigung der Presungsverteilung, TU München (2001).
129. NEUMÜLLER, M. Einfluß der Ölalterung auf Reibungs- und Verschleißverhalten von Synchronisierungen, TU München (2001).
130. MOSBACH, C. Das Reibungs- und Reibschwing-Verhalten nasslaufender Lamellenkupplungen, TU München (2002).
131. DYLA, A. Modell einer durchgängig rechnerbasierten Produktentwicklung, TU München (2002).
132. GRASWALD, C. Reibung im elastohydrodynamischen Kontakt von Reibradgetrieben, TU München (2002).
133. GEISER, H.. Grundlagen zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens von Stirnrädern, TU München (2002).
134. SCHINAGL, S. Zahnfußtragfähigkeit schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung, TU München (2002).
135. DOLESCHEL, A. Wirkungsgradberechnung von Zahnradgetrieben in Abhängigkeit vom Schmierstoff, TU München (2003).
136. ANNAST, R. Kegelrad-Flankenbruch, TU München (2003)
137. SÜSSMUTH, J.-F. Eignungsbeurteilung von Schmierstoffen für stufenlose Umschlingungsgetriebe, TU München (2003).
138. MATTEN, D. Methode zur Entwicklung ingenieurwissenschaftlicher Berechnungsprogramme, TU München (2003).
139. GEIER, N. Untersuchung des Reibungs- und Verschleißverhaltens nasslaufender Kupplungen in Abhängigkeit ihrer Reibflächentopographie, TU München (2003)



140. HERTTER, T. Rechnerischer Festigkeitsnachweis der Ermüdungstragfähigkeit vergüteter und einsatzgehärteter Stirnräder, TU München (2003).
141. KRIEGER, H. Alterung von Schmierstoffen im Zahnradprüfstand und in Praxisgetrieben, TU München (2004).
142. STEUTZGER, M. Einfluß der Baugröße auf die Zahnfußtragfähigkeit einsatzgehärteter Stirnräder, TU München (2004).
143. SCHMIDBAUER, T. Aufbau und Erprobung des Autarken Hybrid-Antriebsstrangs im Versuchsfahrzeug. TU München (2004).
144. LIU, W. Einfluss verschiedener Fertigungsverfahren auf die Graufleckentragfähigkeit von Zahnradgetrieben. TU München (2004).
145. FEHLING, R. Höhere Tragfähigkeit bei Zahnradflanken durch eine nichtevolventische Profilmodifikation. TU München (2004).
146. GUTTENBERG, P. Der autarke Hybrid am Prüfstand - Funktion, Kraftstoffverbrauch und energetische Analyse. TU München (2004)
147. WIMMER, T. Einflüsse auf das Lastübernahmeverhalten von nasslaufenden Lamellenkupplungen. TU München (2004).
148. RADEV, T. Einfluss des Schmierstoffes auf die Grübchentragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder - Entwicklung des Praxisnahen Pittingtests. TU München (2005)
149. KRASDEV, I. Optimierung des Lastschaltvorgangs im  $i^2$ -Getriebe. TU München (2005)
150. HEILEMANN, J. Tragfähigkeit und Wirkungsgrad bei unterschiedlichen Schnecken-Zahnflankenformen unter Berücksichtigung der Oberflächenhärte und Härtetiefe. TU München (2005).
151. HEIZENRÖTHER, M. Das Stirnraddifferenzial mit Innenverzahnung im Vergleich zum Kegelraddifferenzial inklusive einer Sperrwertanalyse. TU München (2005).
152. WIMMER, A. Lastverluste von Stirnradverzahnungen - Konstruktive Einflüsse, Wirkungsgradmaximierung, Tribologie. TU München (2006).
153. BRUCKMEIER, S. Flankenbruch bei Stirnradgetrieben. TU München (2006).

154. HAUSER, C. Einfluss der Ölalterung auf Reibcharakteristik und Reibschwingverhalten von Lamellenkupplungen. TU München (2007).
155. GROSSL, A. Einfluss von PVD-Beschichtungen auf die Flanken- und Fußtragfähigkeit einsatzgehärteter Stirnräder. TU München (2007).
156. STEINBERGER, G. Optimale Grübchentragfähigkeit von Schrägverzahnungen. TU München (2007).
157. JAROS, M. Integration des STEP-Produktmodells in den Getriebeentwicklungsprozess. TU München (2007).
158. RADEV, S. Einfluss von Flankenkorrekturen auf das Anregungsverhalten gerad- und schrägverzahnter Stirnradpaarungen. TU München (2007).
159. BRAYKOFF, C. Tragfähigkeit kleinmoduliger Zahnräder. TU München (2007).
160. STANGL, M. Methodik zur kinematischen und kinetischen Berechnung mehrwelliger Planeten-Koppelgetriebe. TU München (2007).
161. STENICO, A. Werkstoffmechanische Untersuchungen zur Zahnfußtragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder. TU München (2007).
162. SCHWIENBACHER, S. Einfluss von Schleifbrand auf die Flankentragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder. TU München (2008).
163. WINKLER, J. Tribologischer Schichtaufbau bei Synchronisierungen und sein Einfluss auf Reibung und Verschleiß. TU München (2008).
164. WIRTH, C. Zur Tragfähigkeit von Kegelrad- und Hypoidgetrieben. TU München (2008).
165. KREIL, O. Einfluss der Oberflächenstruktur auf Druckverteilung und Schmierfilmdicke im EHD-Kontakt. TU München (2009).
166. OTTO, H.-P. Flank load carrying capacity and power loss reduction by minimised lubrication. TU München (2009).
167. OTTO, M. Lastverteilung und Zahnradtragfähigkeit von schrägverzahnten Stirnrädern. TU München (2009).

168. TOMIC, D. Zum Verschleiß von Kegelreibkupplungen - Einflüsse von Belastung und Schmierstoff auf Reibschichteigenschaften. TU München (2009).
169. WEISEL, C. Schneckengetriebe mit lokal begrenztem Tragbild. TU München (2009).
170. WEITL, R. Zur Tragfähigkeitsberechnung von Wälzlagern und Stirnrädern. TU München (2010).
171. MULZER, F. Systematik hochübersetzender coaxialer Getriebe. TU München (2010).
172. SCHUDY, J. Untersuchungen zur Flankentragfähigkeit von Außen- und Innenverzahnungen. TU München (2010).
173. BRETL, N. Einflüsse auf die Zahnfußtragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder im Bereich hoher Lastspielzahlen. TU München (2010).
174. GRIGGEL, T. Einfluss von Korrekturen und Fertigungsabweichungen auf die Schwingungsanregung von Stirnrädern. TU München (2010).
175. LAYHER, M. Einfluss der Schmierstoffadditivierung auf das Reibungsverhalten nasslaufender Reibschaltelemente. TU München (2011).
176. HOCHMANN, M. Zahnradtragfähigkeit bei Schmierung mit Getriebefließfetten. TU München (2011).
177. DETZEL, J. Tribologische Untersuchungen an Achsgetrieben zur Verbesserung des Wirkungsgrads. TU München (2011).
178. ZIEGLER, A. Zur verkürzten Systemlebensdauerprüfung von Zahnradgetrieben. TU München (2011).
179. THOMA, F. Lastübertragung im verformten System Lager-Welle-Zahnrad. TU München (2012).
180. FRÜHE, T. Berechnung und Minimierung der Zahnfußspannung von Standard- und LowLos-Verzahnungen. TU München (2012).
181. WITZIG, J. Flankenbruch - Eine Grenze der Zahnradtragfähigkeit in der Werkstofftiefe. TU München (2012).

182. KLEIN, M. Zur Fresstragfähigkeit von Kegelrad- und Hypoidgetrieben. TU München (2012).
183. KURTH, F. Efficiency Determination and Synthesis of Complex-Compound Planetary Gear Transmissions. TU München (2012).
184. WOHLLEBER, F. Thermischer Haushalt nasslaufender Lamellenkupplungen. TU München (2012).
185. HEIDER, M. Schwingungsverhalten von Zahnradgetrieben - Beurteilung und Optimierung des Schwingungsverhaltens von Stirnrad- und Planetengetrieben. TU München (2012).
186. MONZ, A. Tragfähigkeit und Wirkungsgrad von Schneckengetrieben bei Schmierung mit konsistenten Getriebefetten. TU München (2012).
187. WIRTH, M. Schleppmomente in Synchronisierungen von Fahrzeuggetrieben. TU München (2012).
188. BANSEMIR, G. Konstruktionsleitsystem für den durchgängig rechnerbasierten Zahnradgetriebeentwurf. TU München (2012).
189. HERGESELL, M. Grauflecken- und Grübchenbildung an einsatzgehärteten Zahnrädern mittlerer und kleiner Baugröße. TU München (2013).
190. KOLLER, P. Steigerung der Zahnflankentragfähigkeit durch Optimierung von Eigenspannungs- und Oberflächenzustand. TU München (2013).
191. SCHLEICH, T. Temperatur- und Verlustleistungsverhalten von Wälzlagern in Getrieben. TU München (2013).
192. STEPLINGER, J.-P. Tragfähigkeit und Wirkungsgrad von Stirnradgetrieben bei Schmierung mit hochviskosen Fluiden und Fetten NLGI 0,1 und 2. TU München (2013).
193. FÜRSTENBERGER, M. Betriebsverhalten verlustoptimierter Kunststoffzahnäder. TU München (2013).
194. HOMBAUER, M. Grauflecken an Kegelrad- und Hypoidverzahnungen und deren Einfluss auf die Grübchentragfähigkeit. TU München (2013).

195. MAYER, J. Einfluss der Oberfläche und des Schmierstoffs auf das Reibungsverhalten im EHD-Kontakt. TU München (2013).
196. BAUHOFFER, H. Kontakt- und Laufverhalten von Kronenrädern unter Montageabweichungen. TU München (2014).
197. LECHNER, C. Energiebilanzierung des CVT-Hybrid. TU München (2014).
198. HINTERSTOISSER, M. Zur Optimierung des Wirkungsgrades von Stirnradgetrieben TU München (2014).
199. LOMBARDO, S. Einfluss von verschiedenen Carbonitrierverfahren auf die Zahnfuß- sowie Zahnflankentragfähigkeit von Stirnrädern. TU München (2014).
200. IDLER, S. Die Fresstragfähigkeit stufenloser Umschlingungsgetriebe. TU München (2014).
201. LANGHEINRICH, A. Geometrie, Beanspruchung und Verformung asymmetrischer Stirnradverzahnungen. TU München (2014).
202. MATT, P. Einfluss der Stirnkanten auf die Tragfähigkeit von Verzahnungen. TU München (2014).
203. HENSEL, M. Thermische Beanspruchbarkeit und Lebensdauerverhalten von nasslaufenden Lamellenkupplungen. TU München (2014).
204. GEIGER, J. Wirkungsgrad und Wärmehaushalt von Zahnradgetrieben bei instationären Betriebszuständen. TU München (2014).
205. SIGMUND, W. Untersuchung und Simulation des Verschleißverhaltens von Schneckengetrieben mit unvollständigem Tragbild. TU München (2015).
206. PARLOW, J. Entwicklung einer Methode zum anforderungsgerechten Entwurf von Stirnradgetrieben. TU München (2016).
207. NEUBAUER, B. Lastverteilung und Anregungsverhalten in Planetengetriebesystemen. TU München (2016).
208. NITSCH, Ch. Dynamisches Betriebsverhalten von Werkstoffverbundzahnradern. TU München (2016).
209. BIHR, J. Untersuchung des Schwingungsverhaltens von mehrstufigen Stirnradgetrieben unter besonderer Berücksichtigung des Welle-Lager-Systems. TU München (2016).

210. SCHURER, S. Einfluss nichtmetallischer Einschlüsse in hochreinen Werkstoffen auf die Zahnfußtragfähigkeit. TU München (2016).
211. KADACH, D. Stillstandsmarkierungen an Zahnrädern und deren Auswirkungen auf die Flankentragfähigkeit. TU München (2016).
212. FELBERMAIER, M. Untersuchungen zur Graufleckenbildung und deren Einfluss auf die Grübchentragfähigkeit einsatzgehärteter Stirnräder. TU München (2016).
213. ACUNER, R. Synchronisierungen mit Carbon-Reibwerkstoffen unter hohen und extremen Beanspruchungen. TU München (2016).
214. LOHNER, T. Berechnung von TEHD Kontakten und Einlaufverhalten von Verzahnungen. TU München (2016).
215. ZIMMER, M. Berechnung und Optimierung von Geometrie und Eingriffsverhalten von Verzahnungen beliebiger Achslage. TU München (2017).
216. GWINNER, Ph. Auslegung schwingungsarmer Stirnradverzahnungen für den automobilen Einsatz in hochdrehenden, elektrisch angetriebenen Achsgetrieben. TU München (2017).
217. SCHULTHEISS, H. Zum Verschleißverhalten einsatzgehärteter Zahnradpaarungen in Abhängigkeit des Schmierungsmechanismus bei Fettschmierung. TU München (2017)
218. MOSER, K. Methode zur Untersuchung des Betriebsverhaltens stufenloser Umschlingungsgetriebe. TU München (2017)
219. STREBEL, M. Spontanschäden an nasslaufenden Lamellenkupplungen. TU München (2017)
220. BAAR, M. Kennwerte zur Tragfähigkeit kleinmoduliger Kronenradverzahnungen unterschiedlicher Werkstoffpaarung. TU München (2017)
221. WICKBORN, C. Erweiterung der Flankentragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern in der Werkstofftiefe. TU München (2017)
222. MEINGASSNER, G. Methodik zur Untersuchung des Reibungsverhaltens nasslaufender Lamellenkupplungen bei Langsamlauf- und Mikroschlupf. TU München (2017)
223. ZORNEK, B. Untersuchungen zur Flankentragfähigkeit vergüteter und nitrierter Innen- und Außenverzahnungen. TU München (2018)

224. DOBLER, F. Einflüsse auf die Tragfähigkeit induktiv umlaufgehärteter Stirnräder. TU München (2018)
225. DAFFNER, M. Validierung von Verformungsberechnungen im System Zahnrad-Welle-Lager-Gehäuse. TU München (2018)
226. HEIN, M. Zur ganzheitlichen betriebsfesten Auslegung und Prüfung von Getriebezahnrädern. TU München (2018)
227. KOHN, B. Topologische Flankenkorrektur zur Anregungsoptimierung von Stirnradgetrieben. TU München (2019)
228. BOIADJIEV, I. Schadensentwicklung und Tragfähigkeit carbonitrierter Kegelradverzahnungen. TU München (2019)
230. MAUTNER, E. Grübchentragfähigkeit von Schneckengetrieben großer Baugröße mit unvollständigem Tragbild. TU München (2019)
231. ENGELHARDT, C. Einfluss von Wasser in Getriebeölen auf die Zahnflankentragfähigkeit einsatzgehärteter Stirnräder. TU München (2019)
232. VÖLKEL, K. Charakterisierung des Einlaufverhaltens nasslaufender Lamellenkupplungen. TU München (2020)
233. BANSEMIR, S. Bewertung von Berechnungstiefe und Aussagegüte bei der Stirnradgetriebeberechnung. TU München (2020)
234. UTAKAPAN, T. Schwingungsverhalten mehrstufiger Getriebe. TU München (2020)