



Technische Universität München

**Überführung des Liegenschaftskatasters nach
ETRS89/UTM mittels des Homogenisierungsansatzes
Ortra**

Dissertation
von

Clemens Edmund Glock

Lehrstuhl für Geodäsie
Ingenieurfacultät Bau Geo Umwelt



Ingenieur fakultät Bau Geo Umwelt
Lehrstuhl für Geodäsie

Überführung des Liegenschaftskatasters nach ETRS89/UTM mittels des Homogenisierungsansatzes Ortra

Clemens Edmund Glock

Vollständiger Abdruck der von der Ingenieur fakultät Bau Geo Umwelt der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Rolf Moeckel

Prüfer der Dissertation:

1. Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Wunderlich
2. Prof. Dr. techn. Roland Pail
3. Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger

Die Dissertation wurde am 13.01.2021 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Ingenieur fakultät Bau Geo Umwelt am 04.06.2021 angenommen.

Kurzfassung

Zum Jahresbeginn 2019 wurde in Bayern das europaweit einheitliche Europäische Terrestrische Referenzsystem 1989 (ETRS89) mit dem Abbildungssystem der Universalen Transversalen Mercator Projektion (UTM) als amtliches Lagebezugssystem eingeführt. Es löst das nationale Bezugssystem Deutsches Hauptdreiecksnetz (DHDN) mit der Gauß-Krüger-Abbildung (GK) ab, das über mehrere Jahrzehnte in verschiedenen hierarchischen Ordnungen mit Hilfe von terrestrischen Messverfahren aufgebaut wurde. Für das staatliche Vermessungswesen bedeutet der Zeitpunkt der Umstellung die Einführung eines neuen Raumbezugs für die Bereiche Liegenschaftskataster und Geotopographie. Beim Liegenschaftskataster ist mit der Bezugssystemeinführung von ETRS89/UTM die Aufgabe verbunden, die verschiedenen Objektbereiche des Amtlichen Liegenschaftskataster-Informationssystems ALKIS nach ETRS89/UTM zu überführen. Ein wesentliches Ziel beim Aufbau von neuen homogenen Koordinaten in ETRS89/UTM für das Liegenschaftskataster ist die Minimierung der Netzspannungen, die im alten System DHDN/GK vorhanden waren. Dazu wurde am Landesamt für Digitalisierung, Breitband und Vermessung das Umformungs- und Homogenisierungsverfahren Ortra entwickelt, dessen Name für orthogonale Transformation steht und das auf einer Ausgleichung basiert. Durch die Definition von orthogonalen Beobachtungen weist dieses elastomechanische Analogien auf.

Die Theorie der Elastizität, die sich über die Ausgleichungsrechnung erschließt, findet im Bereich der Umformungsverfahren ein besonderes Anwendungsgebiet, mit dem großen Vorteil der Anwendung von minimaler Formänderungsenergie, wenn Verzerrungen des Grundrisses stattfinden. Für die Umformung des Grundrisses wird mit Hilfe von Pseudobeobachtungen ein geodätisches Netz aufgebaut, das sich in einem statischen Gleichgewicht befindet und nach mechanischen Gesetzen reagiert. Es nutzt Energieprinzipien wie das Prinzip der minimalen Formveränderung, das zu den kleinstmöglichen Grundrissverzerrungen führt und rechtlich mit den geringsten Auswirkungen auf das Eigentum der Bürger verbunden ist. Die Übertragung der Nachbarschaftsgenauigkeit von GK nach UTM durch das Prinzip der minimalen Formveränderung und die Reduzierung von Netzspannungen durch Verteilung der Koordinatenwidersprüche führt dazu, dass beim Übergang in das europäische Referenzsystem ETRS89 eine Homogenisierung der Daten erreicht wird.

Die Arbeit führt in das Thema Koordinatenumformungs- und Homogenisierungsverfahren ein. Moderne geodätische Umformungsformen sollten in Bezug auf die Theorie der nichtlinearen Elastizität betrachtet werden. Beim Ortra-Verfahren wird über Diskretisierung mit Hilfe von lokalen konformen Systemen der Übergang zur Elastizitätstheorie für Stabwerke hergestellt. Auf Basis von mechanischen Gesetzen und der Ausgleichungsrechnung werden die Grundlagen des Ortra-Verfahrens hergeleitet und die Analogie des Verfahrens zu Weg- und Kraftgrößenverfahren der Baustatik aufgebaut. Neben dem Nachweis des mechanischen Gleichgewichts des künstlichen Netzes des Ortra-Verfahrens wird ein Verfahren zur Berechnung der Weg- und Kraftgrößen über Ausgleichungsrechnung definiert. Dazu wird ein neuartiges gerändertes Normalgleichungssystem hergeleitet und auf Basis dieses Gleichungssystems nachgewiesen, wie der Ortra-Ansatz die Geometrie erhält, wenn Netzspannungen existieren. Zuletzt wird gezeigt, wie beim Ansatz von Ortra über verschiedene geodätische Netze Koordinatenwidersprüche, die durch Netzspannungen verursacht werden, hierarchisch verteilt werden.

Abstract

At the beginning of 2019, the European Terrestrial Reference System 1989 (ETRS89) with the projection of Universal Transverse Mercator (UTM) was introduced as official geodetic reference system in Bavaria. It replaces the national reference system Deutsches Hauptdreiecksnetz (DHDN) with the Gauss-Krüger projection (GK), which was built up over several decades with various high- and low-order control networks by terrestrial measuring methods. For public surveying the date of changeover to ETRS89/UTM means the introduction of a new changed spatial reference for the sector of land register and cadastre and the sector of geotopography. For the cadastre the introduction of the reference system ETRS89/UTM is linked to the duty to transform different cadastral feature type groups of the Authoritative Real Estate Cadastre Information System ALKIS to ETRS89/UTM. An essential goal to establish new homogeneous coordinates in ETRS89/UTM for the land registry and cadastre is the reduction of net distortions that were present in the old DHDN/GK reference system. For this purpose, the Bavarian National Mapping Agency for Digitisation, High Speed Internet and Surveying has developed the transformation and homogenization approach Ortra, whose name stands for orthogonal transformation and which is based on an adjustment. It shows elasto-mechanical analogies by the definition of orthogonal observations.

The theory of elasticity, which becomes accessible through the adjustment theory, can find a special field of application in the sector of transformations, with the great advantage of utilizing minimal deformation energy, when distortions of the cadastral ground plan exist. For the transformation of the cadastral ground plan a geodetic network is built up with pseudo-observations, which is in the state of equilibrium and reacts according to mechanical laws. It uses energy principles like the theorem of least work, which leads to the smallest possible distortion of the cadastral ground plan and is associated with the smallest impact on citizens' property from a legal perspective. The transfer of neighborhood accuracy from GK to UTM by the principle of least work and the reduction of net distortions by distributing the coordinate inconsistencies results in a homogenization of data during the transformation process to the European reference system ETRS89.

The thesis introduces into coordinate transformation and homogenization methods. Modern geodetic transformation methods should be considered in relation to the theory of nonlinear elasticity. At the Ortra approach a discretization with help of local conformal systems is used to facilitate the transition to the elasticity theory of trusses. Based on the mechanical laws and adjustment theory the fundamentals of the Ortra approach are developed and the analogy is built up to the direct stiffness method and the flexibility method of structural analysis. In addition to the proof of the mechanical equilibrium of the synthetic geodetic net of Ortra, a procedure for the calculation of the displacement and force quantities via adjustment is defined. For this purpose a new modified system of normal equations is derived and based on this equation system is shown, how the Ortra approach preserves the geometry when net distortions are present. Finally it is shown, how the approach of Ortra distributes coordinate discrepancies, which are caused by net distortions, hierarchically over different geodetic networks.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	9
1.1. Motivation	9
1.2. Zielsetzung und Aufbau der Arbeit	12
2. Analogie der Mechanik und Ausgleichsrechnung	19
2.1. Geschichtlicher Abriss der Analogie der Mechanik und Ausgleichsrechnung	19
2.2. Seilnetzkonstruktionen	22
2.2.1. Berechnung des Gleichgewichtszustands bei Seilnetzen	22
2.2.2. Seilnetze und ihre Überführung in spezielle Verfahren der Ausgleichsrechnung	25
2.2.3. Das Kraftdichteverfahren	36
2.2.4. Updated Reference Strategy für Membranen und Seilnetze	37
3. Mathematische Theorie der Elastizität	49
3.1. Koordinatenumformungsverfahren und Elastizität	49
3.2. Grundgleichungen der Statik	49
3.3. Kinematik: Verschiebungen und Verzerrungen	52
3.3.1. Differentialgeometrie im dreidimensionalen Raum	52
3.3.2. Allgemeines Modell für die Beschreibung von Verschiebungen	55
3.3.3. Verschiebungszustand und Deformationsgradient	56
3.3.4. Nichtlineare und lineare Darstellung von Verzerrungen	59
3.3.5. Beispiel zu lokalen Verzerrungen eines Ortra-Kleinsystems (Ortra-Methode)	63
3.3.6. Beispiel zu lokalen Verzerrungen eines Dreiecks (Membranmethode)	65
3.4. Kinetik	67
3.4.1. Spannungen	67
3.4.2. Spannungstensoren für die Referenz- und Momentankonfiguration	68
3.5. Konstitutive Gleichungen und verallgemeinertes Hookesches Gesetz	70
3.5.1. Mathematische Formulierung des Materialverhaltens	70
3.5.2. Grundlegende Prinzipien der Materialtheorie	71
3.5.3. Übergang zum linearisierten Hookeschen Materialgesetz	76
3.6. Gleichgewicht und Bewegungsgleichungen	83
3.6.1. Kontinuumsmechanische Formulierung des Gleichgewichts	83
3.6.2. Einführung des Prinzips der virtuellen Arbeiten	86
4. Einsatz der Stabtheorie bei baustatischen Verfahren	91
4.1. Virtuelle Arbeit des linear-elastischen Stabes	91
4.1.1. Annahmen für den linear-elastischen Stab	91
4.1.2. Entwicklung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen des eindimensional modellierten Stabes	92
4.2. Aufbau eines Stabtragwerks durch elastische Stäbe	95
4.2.1. Umsetzung des Stabtragwerks durch ein ideales Fachwerk	95
4.3. Aufbau der Grundgleichung des Weggrößenverfahrens für das Stabtragwerk	98
4.3.1. Aufbau eines Matrizenausdrucks für die virtuelle Arbeit eines Fachwerkstabs	98
4.3.2. Assemblierung der lokalen Strukturen in das Gesamtsystem	101
4.3.3. Einführung der globalen Gesamtsteifigkeitsmatrix und abschließende Definition der globalen Systemgleichung	106

4.4.	Direkte Steifigkeitsmethode und Aufbau von Strukturen für die geodätischen Ausgleichungsverfahren	107
5.	Arbeit und Energie in mechanischen Systemen	115
5.1.	Arbeit und Formänderungsenergie	115
5.2.	Potentielle Energie in mechanischen Systemen	118
5.2.1.	Potentielle elastische Energie der inneren Kräfte	118
5.2.2.	Äußere Energie und Gesamtenergie eines statischen Systems	121
6.	Berechnung elastischer Verformungen von gekoppelten statischen Systemen	123
6.1.	Weggrößenverfahren	123
6.1.1.	Prinzip der minimalen Energie Π beim Weggrößenverfahren	124
6.1.2.	Weggrößenverfahren und vermittelnde Ausgleichung	126
6.1.3.	Fortpflanzung der Verzerrungen innerhalb eines geodätischen Netzes, die durch einen mit einem groben Fehler behafteten Punkt verursacht werden	128
6.1.4.	Analogien zwischen Weggrößenverfahren und vermittelnder Ausgleichung	132
6.2.	Kraftgrößenverfahren	132
6.2.1.	Prinzip der minimalen Energie Π beim Kraftgrößenverfahren für ein statisch bestimmtes Hauptsystem	132
6.2.2.	Herleitung des Ansatzes für das Kraftgrößenverfahren für ein statisch unbestimmtes Tragwerksystem	136
6.2.3.	Prinzip der minimalen Energie Π beim Kraftgrößenverfahren für ein statisch unbestimmtes Tragwerksystem	140
6.2.4.	Kraftgrößenverfahren ohne äußere Lasten und bedingte Ausgleichung	141
6.2.5.	Kraftgrößenverfahren mit äußeren Lasten und bedingte Ausgleichung	144
7.	Ausgleichung und Homogenisierungsverfahren	149
7.1.	Ansätze der Homogenisierungsverfahren	149
7.2.	Homogenisierungsverfahren als ETRS89/UTM-Überführungsansatz	154
7.2.1.	Nutzung des Kartenhomogenisierungsverfahrens nach Benning	154
7.2.2.	Mechanische Aspekte bei der Nutzung von Homogenisierungsverfahren	155
7.3.	Das Ortra-Verfahren als ETRS89-/UTM-Überführungsansatz	160
7.3.1.	Mathematischer und ausgleichungstechnischer Teil des Ortra-Verfahrens	160
7.3.2.	Anwendung des Weggrößenverfahrens auf das Ortra-Verfahren, Beziehung zum Kraftgrößenverfahren	167
7.3.3.	Definition der Primär- und Sekundärverschiebungen bei Ortra-Systemen	168
7.3.4.	Entwicklung des modifizierten Weggrößenverfahrens für den Ortra-Ansatz	174
7.3.5.	Herstellung des Drehmomenten- und Kräftegleichgewichts bei den Sekundärverschiebungen	176
8.	Homogenisierung der Netzspannungen durch lineare Verteilung im hierarchischen Ansatz	181
8.1.	Visualisierung der Netzspannungen durch Koordinatenwidersprüche	181
8.1.1.	Ausgleichung zur Erzeugung der Referenzkonfiguration κ_R (Referenz-UTM-Grundriss)	182
8.1.2.	Ausgleichung zur Erzeugung der Momentankonfiguration κ_M (Ist-UTM-Grundriss)	183
8.1.3.	Herleitung eines geränderten Normalgleichungssystems für die Bestimmung der Koordinatenwidersprüche	184
8.2.	Verteilung der Koordinatenwidersprüche bei der hierarchischen Netzverdichtung	190
8.2.1.	Bestimmung der induzierten äußeren Kräfte im Verdichtungsnetz	191
8.2.2.	Zusammensetzung der Koordinatenwidersprüche im Verdichtungsnetz	191
9.	Numerik	195
9.1.	Einleitung	195

9.2.	Einsatz eines Sparse Cholesky-Verfahrens	198
9.2.1.	Entwicklung des Sparse Cholesky-Verfahrens aus der Ausgleichung des Ortra-Verfahrens	198
9.2.2.	Phasen des Sparse Cholesky-Verfahrens	200
9.3.	Symbolische Cholesky-Faktorisierung	200
9.3.1.	Definition des Eliminierungsbaums	200
9.3.2.	Aufbau der Postorder-Reihenfolge beim Eliminierungsbaum	206
9.3.3.	Anzahl der Nichtnull-Elemente in den Zeilen und Spalten des Cholesky-Faktors L	208
9.3.4.	Umsetzung des Algorithmus von G. L. Gilbert, Ng und Peyton 1994, der durch T. A. Davis 2006 weiter optimiert wurde	210
9.4.	Numerische Cholesky-Faktorisierung	216
9.4.1.	Up-Looking Cholesky-Faktorisierung	217
9.4.2.	Sequentielle Cholesky-Faktorisierung mit Left-Looking-Algorithmus	221
9.4.3.	Sparse Cholesky-Faktorisierung auf Basis von Superknoten	224
10.	Zusammenfassung und Ausblick	233
A.	Ansätze der Ausgleichsrechnung	237
A.1.	Vermittelnde Ausgleichung	237
A.2.	Bedingte Ausgleichung	240
A.3.	Vermittelnde Ausgleichung mit Bedingungen zwischen den Unbekannten	243
A.4.	Bedingte Ausgleichung mit Unbekannten	245
	Literaturverzeichnis	246
	Symbolverzeichnis	256
	Abbildungsverzeichnis	263
	Tabellenverzeichnis	264
	Dank	267

1. Einleitung

1.1. Motivation

In der Definition von Helmert 1880 ist „die Geodäsie die Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche“. Für Abbildungen der physischen Erdoberfläche, der Begrenzung der Erde gegenüber der Atmosphäre, werden in der Geodäsie mathematische Rechenflächen definiert. Auf Kugeln und Ellipsoiden, die den Erdkörper geometrisch beispielsweise über gleiches Volumen oder gleiche Oberfläche approximieren, können Flächenkoordinatensysteme eingeführt werden, in denen Punkte durch Lagekoordinaten festgelegt sind. Nach Definition eines Nullmeridians – historisch wurde in Europa dieser Meridian durch die Sternwarte von Greenwich gelegt – ist es möglich, Punkte eindeutig durch Angabe der geographischen Länge und Breite zu koordinieren.

Über die mathematisch parametrisierbare Rechenfläche, die im dreidimensionalen kartesischen Raum eingebettet ist, lässt sich über weitere Festlegungen ein geodätisches Referenzsystem definieren. Ein geodätisches Referenzsystem ist ein mit dem Erdkörper verankertes, dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem, das aus weiteren Definitionen und Konventionen besteht [Görres und Nothnagel 2012, Joos und Glock 2016]. Neben der Definition von geometrischen Größen wie z. B. Ellipsoidparameter, die sich bei modernen Referenzsystemen auf geozentrisch gelagerte Rotationsellipsoide beziehen, erfolgen weitere Festlegungen, z. B. allgemeine Erdrotationsparameter wie Änderungsraten der Winkelgeschwindigkeit der täglichen Erdrotation und Polbewegung.

Für das amtliche Vermessungswesen, für den freien Ingenieurberuf sowie auch für Nutzer von Geobasisdaten hat die aktuelle Einführung eines neuen Referenzsystems eine große Bedeutung. Die Einführung des Europäischen Terrestrischen Referenzsystems 1989 (ETRS89) in Bayern zu Jahresbeginn 2019 legt für das staatliche Vermessungswesen einen neuen Raumbezug für seine beiden Bereiche Liegenschaftskataster und Geotopographie fest, mit weitreichenden Konsequenzen: Für das Liegenschaftskataster ist die Einführung des Referenzsystems ETRS89 mit der Aufgabe verbunden, die Gesamtheit der amtlichen Punkte des Katasters, z. B. die Flurstücks-, Gebäude- und Bauwerkspunkte sowie nachfolgend Punkte der Bodenschätzung und der tatsächlichen Nutzung durch Transformationen nach ETRS89 zu übertragen. Die Überführung der amtlich geführten Punkte erfolgt vom bisherigen Bezugssystem, dem Deutschen Hauptdreiecksnetz (DHDN) mit dem national einheitlich verwendeten Gauß-Krüger-Abbildungssystem (GK), in das neue Referenzsystem ETRS89 mit dem Abbildungssystem der Universalen Transversalen Mercatorprojektion (UTM). Dabei sind die Daten des Liegenschaftskatasters mit höchsten Genauigkeitsansprüchen zu überführen [Glock, Bauer u. a. 2019]. Im Zusammenhang mit der Umformung des bayerischen Liegenschaftskatasters in das Bezugssystem ETRS89 ist die vorliegende Arbeit entstanden.

Beide auf eine zweidimensionale, ebene Abbildungsfläche bezogenen Koordinatensysteme DHDN90/GK und ETRS89/UTM basieren auf der konformen Abbildung eines Ellipsoids in die Ebene. Dazu wird die Gaußsche Abbildung verwendet, deren konforme Abbildungseigenschaft, die winkeltreue Abbildung des Ellipsoids in die Ebene, durch eine mathematische Abbildung der geographischen Breite und Länge erreicht wird, der in der Ebene Strecken- und Flächenverzerrungen anhaften. Bei dieser Abbildung werden die ellipsoidischen Koordinaten über eine in kleinsten, differenziellen Teilen winkeltreue Abbildung in zweidimensionale kartesische Koordinaten abgebildet, wobei Schnittwinkel im konformen Abbild in der Ebene erhalten bleiben [Schnädelbach 1998, Lothar 2020].

Aus Sicht einer Projektion handelt es sich um eine winkeltreue Zylinderabbildung, bei der der Abbildungszyylinder in transversaler Lage gegeben ist, dessen Zylinderachse querachsig in der Äquatorebene liegt. Der Abbildungszyylinder berührt entweder das Rotationsellipsoid im Äquator (GK-System) oder durchschneidet beim UTM-System mit kleinerem Zylinder das Ellipsoid, so dass zwei längentreue Kreise entstehen (Abb. 1.1). Für den Bereich des Liegenschaftskatasters wurde der Bezugsrahmen ETRS89 mit Hilfe moderner Messver-

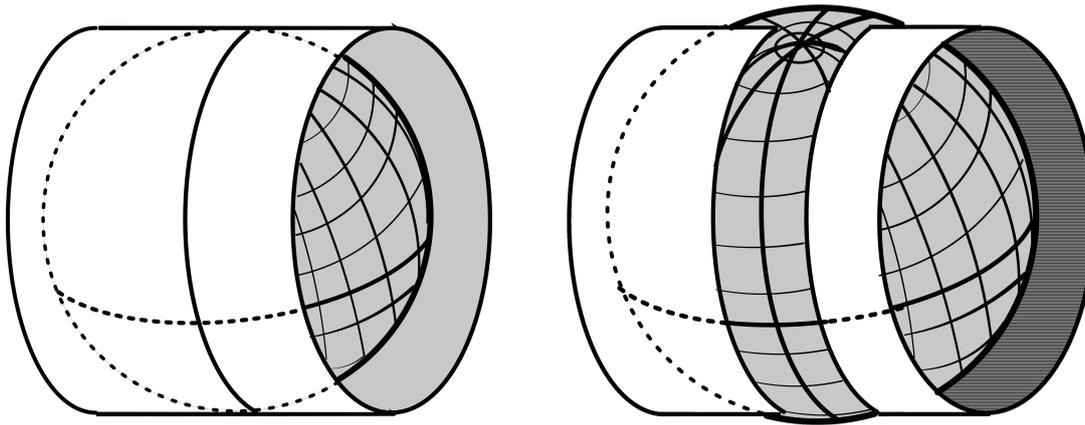


Abbildung 1.1.: Gauß-Krüger-Abbildung (links) und Universale Transversale Mercatorprojektion (rechts).

fahren realisiert, die Globale Navigationssatellitensysteme (GNSS) nutzen und eine globale Genauigkeit im Zentimeterbereich erreichen.

Über Methoden der Mechanik führt die vorliegende Arbeit zu einer Koordinatentransformation, mit neuen Koordinatenwerten für Punkte des Vermessungswesens, die sich auf ein geometrisch verändertes Ellipsoid beziehen. Eine kontinuierliche, ortsabhängige, nichtlineare Abbildungsfunktion der Koordinaten des alten GK-Systems in das neue, für das ETRS89-Referenzsystem definierte UTM-Abbildungssystem, ist für die Überführung des Liegenschaftskatasters in Bayern unbekannt. Von einer Nichtlinearität der unbekannt mathematischen Abbildung ist jedoch auszugehen, da im Projekt u. a. eine Homogenisierung der Koordinaten der Vermessungspunkte vorgegeben ist. Für homogene Koordinaten sollen hohe Genauigkeitsanforderungen gelten, z. B. quasidirekte Positionierung mit modernen globalen GNSS-Messverfahren der Satellitengeodäsie wie das Globale Positioning System (GPS) und hohe Nachbarschaftsgenauigkeit [Joos und Glock 2016]. Die Arbeit stellt einen Prozess der Homogenisierung durch Ausgleichung vor, der in Bayern deutschlandweit erstmals in dieser Art zur Anwendung kam. Dazu müssen homogene Koordinaten von den im historisch gewachsenen nationalen Lagebezugssystem enthaltenen Netzspannungen bereinigt sein.

Netzspannungen sind mit dem Aufbau der geodätischen Grundlagennetze im alten nationalen Lagebezugssystem zu erklären, die über viele Jahrzehnte mit hohem Aufwand errichtet wurden. Die über ältere terrestrische Messverfahren vermessenen Lagefestpunktfelder, bei denen klassische Strecken- und Richtungsmessungen durchgeführt wurden, sind hierarchisch angelegt, wobei zunächst Dreiecksnetze der 1. Ordnung mit 30 bis 60 km langen Dreiecksseiten entstanden sind. Für die Netze 1. Ordnung wurde eine geschlossene Ausgleichung durchgeführt, so dass die Geometrie des Netzes über redundante und widerspruchsfreie, ausgeglichene Beobachtungen definiert wurde. Auf Basis des bei weiteren Vermessungen als unveränderlich angesehenen Netzes der 1. Ordnung wurden hierarchisch weitere Verdichtungsnetze der Ordnung 2 bis 4 aufgebaut, die jedoch zwangsweise mit verbundenen Verzerrungen eingeschaltet wurden, so dass Widersprüche im Netz der untergeordneten Ordnung zu verteilen waren. Die damit verbundenen Netzspannungen pflanzen sich in die Folgenetze fort. Anders als die Baustatik beschreibt die Geodäsie Netzspannungen in der Regel nicht über in Netzelementen mechanisch vorliegende Zug- und Druckspannungen, sondern über geometrische Differenzen zwischen mit neueren Messmethoden unabhängig gemessenen Netzabschnitten und vorhandenen historisch gewachsenen Netzteilen. So liegen Weggrößen im Sinne der Baustatik als Information zu Netzspannungen vor. Neuartig in der Geodäsie ist das Vorgehen, geodätischen Netzen für die Beschreibung von Netzspannungen Materialeigenschaften zuzuweisen, wie beispielsweise über das Hookesche Werkstoffgesetz. Dabei ist es naheliegend, analog zur Mechanik Aussagen zur Größe von Netzspannungen über innere Kräfte zu formulieren, die meist auf konstant gewählte innere Flächengrößen bezogen werden. In der Geodäsie werden Netzspannungen jedoch über die Größe der Koordinatenwidersprüche als besondere Weggrößen quantifiziert.

In der Geodäsie existieren mathematisch als unkompliziert zu betrachtende zwei- oder dreidimensionale geodätische Koordinatentransformationen, bei denen die Koordinaten eines Punktes von einem gegebenen Startsystem in ein Ziel-Koordinatensystem über Drehung, Verschiebung und Skalierung mit Hilfe von Trans-

formationsgleichungen übertragen werden. Meist werden nach der Transformation verbleibende Koordinatenwidersprüche nachträglich durch weitere Verfahren verteilt.

Der Begriff Koordinatenumformung wird verwendet, wenn eine Transformation von nicht gleichartigen Koordinaten durchgeführt wird, beispielsweise von ungenauen Koordinaten eines Ausgangssystems in genaue Koordinaten eines Zielsystems, bei der in der Regel die Transformationsparameter durch eine Ausgleichung geschätzt werden. Die heute meist als numerisch anspruchsvoll angesehenen Ansätze, die für jeden Punkt eigene Transformationsparameter schätzen, könnten zukünftig infolge großer Fortschritte in der Numerik die anfangs genannten Koordinatentransformationen zunehmend ablösen. Für eine für ein ganzes Bundesland durchgeführte Transformation ergibt sich ein Massenproblem, da jeder zu überführende Punkt eine Unbekannte im Gleichungssystem darstellt. Explizit können bei diesen Ausgleichungen Gleichungen mit Geraden- und Ecktinkelbedingungen aufgebaut werden, die zusätzlich dazu beitragen, dass sich Distanzen und Winkel zwischen Punkten mit kleinem Abstand weniger signifikant ändern, was einer guten Übertragung der Nachbarschaftsgenauigkeit entspricht [Wieser, Lienhart und Brunner 2003]. Der Übergang zu einem Homogenisierungssystem ist fließend. Der Begriff der Koordinatenüberführung wird verwendet, wenn die Koordinatenumformung vor dem Hintergrund eines Bezugssystemwechsels durchgeführt wird.

Wie bereits mit der unbekannt, nichtlinearen Funktion zwischen dem nationalen Ausgangsellipsoid mit seiner geodätischen Abbildung des Gauß-Krüger-Systems und dem neuen europäischen Ellipsoid ETRS89 mit dem Abbildungssystem der Universalen Transversalen Mercatorprojektion angedeutet wurde, ist es unmöglich, eine mathematische Abbildung mit strenger Beziehung zwischen beiden Systemen anzuwenden. Anstelle einer Umformung würde es sich bei der UTM-Umstellung um eine rein mathematische Konversion handeln, die jeden Punkt des Liegenschaftskatasters mit einer identischen Formel konvertieren könnte [Joos und Glock 2016]. Diese Abbildungsformel existiert jedoch nicht, da mit Einführung des neuen Referenzsystems, wie bereits erwähnt, die Notwendigkeit besteht, die vorhandenen Netzspannungen des alten Systems zu bereinigen, die zu einer nichtlinearen und unbekannt, Abbildungsfunktion zwischen altem und neuem Referenzsystem führt.

Die Homogenisierung der Daten des Liegenschaftskatasters wird in dieser Arbeit aus mechanischen Methoden in Verbindung mit der Ausgleichsrechnung entwickelt und über eine nichtlineare Koordinatentransformation ausgeführt. Dazu erfolgt unter Anwendung geodätischer Minimalprinzipien für den vorgestellten Ansatz eine Diskretisierung für die nichtlineare Transformation über konforme Systeme. Unter Ausnutzung elastomechanischer Analogien können elastische Gesetze angewendet werden, die in dieser Arbeit über energetische Minimalprinzipien abgeleitet werden. Das zugrunde gelegte statische Netz agiert und reagiert folglich nach mechanischen Gesetzen und führt Formveränderungen durch Anwendung von Energieprinzipien wie dem Prinzip der minimalen Formänderungsenergie durch. Die Aufgabe der Formfindung in ETRS89/UTM des aus elastischen Elementen aufgebauten, stabwerk-ähnlichen geodätischen Netzes des Ortra-Verfahren, dessen Name Ortra verkettete **orthogonale Transformationen** bezeichnet, hat einen unmittelbaren Bezug zu den Formfindungsaufgaben der Baustatik, die z. B. bei Seilnetzen durch das Kraftdichteverfahren [Schek 1974] oder bei Membranen durch die Updated Reference Strategy [Bletzinger und Ramm 1999] gelöst werden können.

Das Liegenschaftskataster dient der amtlichen Dokumentation des Grundstückseigentums. Die Daten zum Grundstückseigentum zeichnen sich durch die bereits angesprochene hohe Nachbarschaftsgenauigkeit aus, die im Bereich von wenigen Zentimetern, der sogenannten Katastergenauigkeit, liegt. Die Überführung der Grenzen der Flurstücke und damit der Grenzen des Grundstückseigentums ist mit möglichst geringen Auswirkungen auf das Eigentum der Bürger durchzuführen. Der Ansatz der minimalen Formänderungsenergie erweist sich als hervorragend geeignet, um bei der Koordinatenüberführung die Beeinträchtigung der Nachbarschaftsgenauigkeit und damit des Eigentumsnachweises zu minimieren.

Zur Lösung dieser Aufgabe betrachtet die vorliegende Arbeit die wissenschaftlichen Aspekte und Fragestellungen der Überführung des Liegenschaftskatasters in das neue Bezugssystem. Es werden geodätische Ausgleichsrechnungen, elastomechanische Analogien, Parallelen zu baustatischen Verfahren, die zu einer speziellen Anwendung und Erweiterung des Standard-Weggrößenverfahrens führen, Ausgleichung von Netzspannungen über Aufbau von künstlichen geodätischen Netzen und abschließend die Numerik dargestellt, die die Verarbeitung von zwei Milliarden Beobachtungen des künstlichen Netzes zur Auflösung von 220 Millionen Koordinaten leistet.

Die Zieldefinition der Koordinatenüberführung lässt sich als Formfindungsaufgabe in einem ebenen Koor-

datensystem UTM formulieren, das vom neuen Bezugsellipsoid ETRS89 winkeltreu abgebildet wurde. Das Ortra-Verfahren, das bei der UTM-Überführung zur Anwendung kam und in dieser Arbeit untersucht wird, soll bei der Formfindung für die Daten des Liegenschaftskatasters die verschiedenen aus Netzspannungen hervorgehenden linearen und nichtlinearen Bereiche unter minimaler Formveränderung und Erhaltung von Topologie und Geometrie umformen. Die für die Bestimmung der endgültigen UTM-Koordinaten im Ausgangsbezugs-system für die Grundrissdaten aufgebaute Geometrie soll trotz vorhandener Netzspannungen weitgehend erhalten bleiben. Dadurch stellt sich für die Grundrissdaten eine Verbesserung der globalen Lagegenauigkeit ein.

1.2. Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

Zielsetzung Die vorliegende Arbeit geht den wissenschaftlichen Fragestellungen des Koordinatenumformungs- und Homogenisierungsverfahrens Ortra nach. Dabei nutzt sie wegen der vorhandenen Analogie von Ausgleichungsverfahren zu elastomechanischen Systemen den umfangreichen Wissensbereich der Elastizität.

Zunächst wird ein Überblick über die Geschichte der Analogie von Mechanik und Ausgleichungsrechnung gegeben. Anhand der Berührungspunkte zwischen Elastizitätslehre, Mechanik und Vermessung wird vor allem für die aktuelle Überführung des Liegenschaftskatasters in ein neues Referenzsystem in Bayern aufgezeigt, welches Potential die Elastizitätstheorie bei der Behandlung von Netzspannungen in historisch gewachsenen geodätischen Netzen besitzt.

Ihr Anwendungsgebiet erweitert sich dank der fortgeschrittenen Möglichkeiten der Numerik auf flächendeckende Ausgleichungen für ganze Bundesländer mit vielen Millionen Unbekannten, die in wenigen Tagen durchführbar sind. Elastizität bringt den großen Vorteil des Einsatzes von minimaler Formänderungsenergie, wenn Grundrissverzerrungen durch Netzspannungen vorherbestimmt sind. In Deutschland haben einige Bundesländer elastomechanische Verfahren für die landesweite Überführung des Liegenschaftskatasters nach UTM eingesetzt, in Bayern auf Basis einer Theorie verketteter Stabtragwerke, in Baden-Württemberg und Hamburg auf Basis der Theorie der finiten Elemente (Dreiecke).

Die Beschäftigung mit Festpunktnetzen zählt zu den Kernaufgaben der Geodäsie, denn terrestrische Festpunkte bilden seit Beginn der Landes- und Katastervermessung die Grundlage der Kataster- und später der Ingenieurvermessungen und sind in Ergänzung zu GNSS-Messungen bis heute unentbehrlich. Zum Zweck der UTM-Überführung in Bayern wurde ein virtuelles geodätisches Netz definiert, das einen hierarchischen Netzaufbau verwirklicht.

Wie in dieser Arbeit gezeigt wird, konnten dabei Berührungspunkte zwischen den Ausgleichungsmodellen für geodätische Netze und den Matrizenmethoden der Baustatik wie dem Weggrößenverfahren und den Finite-Elemente-Methoden genutzt werden.

Das Zeltdach der Olympischen Bauten in München im Jahr 1972 gab den Anlass, dass sich mit Argyris und Linkwitz zwei Wegbereiter der Baustatik und Ausgleichungsrechnung in einem Sonderforschungsbereich in Stuttgart zusammenschlossen, um dessen Konstruktion mit baustatischen Verfahren und Ausgleichungsverfahren zu bestimmen und die Ergebnisse gegenseitig zu bestätigen.

Argyris hatte zur Verbreitung des Weggrößenverfahrens in den 1950er Jahren für Anwendungen der linearen Elastizitätstheorie im Flugzeugbau einen maßgeblichen Beitrag geleistet [Argyris und Kelsey 1960]. Linkwitz hatte mit seinen Veröffentlichungen einen wichtigen Beitrag zur Einführung der modernen Ausgleichungsrechnung geleistet, die auf Basis der Matrizenrechnung arbeitet [Linkwitz 1960b] und in der Geodäsie bis heute weitgehend unverändert verbreitet ist. Aus den Arbeiten des Sonderforschungsbereichs in Stuttgart ist das Membranverfahren von Gielsdorf und Gründig 1997 entstanden, das in Baden-Württemberg und Hamburg für die UTM-Überführung eingesetzt wurde.

Das Ortra-Verfahren, das 2018/2019 für die Überführung des Liegenschaftskatasters in Bayern eingesetzt wurde, nutzt die Theorie der Elastizität, um beim Abbau von Netzspannungen minimale Formänderung zu erreichen.

In dieser Arbeit sollen der Bezug des geodätischen Umformungsverfahrens Ortra zur linearen und nichtlinearen Elastizitätstheorie erarbeitet und der Nutzen der Elastizität aufgezeigt werden. Dafür wird der Ortra-Ansatz schrittweise aus der nichtlinearen Elastizitätstheorie und Kontinuumsmechanik bis zur Einführung der

Matrizenmethoden des Ortra-Verfahrens hergeleitet. Ein wichtiges Verbindungsglied zwischen der nichtlinearen Elastizitätstheorie und dem Ortra-Verfahren bildet ein linearisiertes Materialgesetz, das ebenfalls aus der Kontinuumsmechanik heraus [Truesdell und Noll 2004] entwickelt wird.

Mit diesen Grundlagen können die Verzerrungen und die extern und intern wirkenden Kräfte des künstlichen Netzes des Ortra-Ansatzes analysiert werden. Die Vorgehensweise des Ortra-Ansatzes besteht aus mechanischer Sicht darin, dass dieses künstlich aufgebaute geodätische Netz in identische Punkte eingespannt wird, die als unveränderliche Lager definiert sind. Sowohl im alten als auch im neuen Bezugssystem liegen für identische Punkte Koordinatenwerte vor, wobei diese Punkte im neuen ETRS89/UTM-Bezugssystem in der Regel mit GNSS aufgebaut wurden. Bei Einspannung in die identischen Punkte erfährt das Netz mechanische Spannungen, die zu Verformungen führen.

Das Ortra-Verfahren mit seinen formverändernden diskreten Elementen, die in dieser Arbeit als verkettete Stabtragwerke modelliert werden, kann im weitesten Sinne auch als Finite-Elemente-Methode interpretiert werden. Allerdings umgeht das Verfahren bei der Diskretisierung des geodätischen Netzes in einzelne Systeme das Prinzip, dass keine Überdeckung der Elemente existieren sollte. Die für das einzelne diskrete System definierte Ansatzfunktion dient allein zur Ermittlung einer einzigen Feldgröße, der Koordinate des Ursprungs des Ortra-Systems. In die Ausgleichung wird diese Koordinate neben Transformationsparametern als Unbekannte eingeführt. Mit der Lösung der Ausgleichung ergibt sich der neue Raumbezug des Liegenschaftskatasters.

Die Abweichung vom Prinzip der Überdeckung ist aus geodätischer Sicht begründbar. Zur Verbesserung der Genauigkeit der Koordinate, mit der der Ursprung des Ortra-Systems festgelegt wird, verankert man das System über Zug- und Druckstäbe in vielen nachbarschaftlichen Systemen. Damit haben weitere kleine Widersprüche, beispielsweise bei einem Teil der Nachbarschaft, nur geringe Auswirkungen auf die Genauigkeit der UTM-Koordinate, die das verspannte Ortra-System repräsentiert. Die Methode des elastischen Einhängens eines Systems in Nachbarsysteme ähnelt dem Vorgehen bei Tensegrity-Ansätzen.

Die Stabwerkselemente des Ortra-Verfahrens werden in der Ausgleichung wieder zu einem landesweiten Netz als Gesamtstruktur verkettet. Wenn die Elemente für die Ausgleichung in einer globalen Matrix, analog zu einer Gesamtsteifigkeitsmatrix, assembliert werden, zeigt sich die Ähnlichkeit zu einem Weggrößenverfahren. Die Geodäsie bezeichnet diese Matrix als Normalgleichungsmatrix.

Die in der Praxis bei Anwendung des Verfahrens beobachtbare minimale Formveränderung des statischen Systems wird über Gesetze der Mechanik hergeleitet und nachvollzogen. Dadurch kommen zwei Minimalprinzipien zur Anwendung, eines aus der Mechanik und eines aus der Ausgleichungsrechnung. Baustatisch können die durch Ausgleichung zu minimierenden Widersprüche der gegenseitigen Lagen der Ortra-Systeme, die im Ausgangssystem nicht auftreten, als minimale Formänderung interpretiert werden, obwohl sie keinen elastischen Ursprung haben. Diese Sichtweise deckt sich mit der mechanischen Interpretation von Sebastian Finsterwalder 1899, der Verbesserungen der Ausgleichung, die keinen elastischen Längenänderungen zugeordnet werden können, ebenfalls als mechanischen Ursprungs deutet und dies mit dem Gesetz von Castigliano begründet. Mechanische Gesetze sind auch maßgebend dafür, wie im hierarchischen Netzaufbau die Netzspannungen vom übergeordneten in das untergeordnete Netz, z. B. von Flurstücken zu Gebäuden, übertragen werden.

Günstig für die Entwicklung des Umformungsansatzes, der zugleich die Homogenisierung der Daten ausführt, erweist sich die mathematische Formulierung als lineares System, im Unterschied zu früheren, seit etwa 1990 bis 2010 angewendeten Homogenisierungsverfahren der Geodäsie, die mit Linearisierungen und Näherungswerten arbeiten.

Mit Hilfe von Netz-Simulationsrechnungen, die bei Netzknoten große Netzspannungen kontinuierlich aufbauen, konnte gezeigt werden, dass große Deformationen die Topologie der Grundrissgeometrie nicht verletzen. Dieses Ergebnis wird durch *lineare* Verteilung der Widersprüche in der Nachbarschaft erreicht.

Der Verzicht auf eine mathematische Linearisierung der Problemstellung mit Beschaffung von Näherungswerten verschafft dem linearen Ansatz für eine landesweite Umformung den Vorteil, dass auch die bei der Formfindung meist eingesetzten Newton-Raphson-Verfahren mit ihren Iterationen entbehrlich werden können. Damit wird die Bewältigung der Massenproblematik enorm erleichtert, die sich für ein Bundesland ergibt, wenn insgesamt ca. 2 Milliarden Beobachtungen für die Ausgleichung definiert werden. So wird es möglich, durch direkte Auflösung der Normalgleichungsmatrizen mit Hilfe von Sparse Matrizen-Technologien und ei-

nem Supernodal Sparse Cholesky Faktorisierungsverfahren endgültig homogenisierte, d. h. von Netzspannungen weitgehend befreite Geometrien im neuen Referenzsystem zu bestimmen.

Es kann festgestellt werden, dass das Prinzip "Form follows force", ein grundlegendes Prinzip der Formfindungsmethoden der Baustatik, zugleich das Prinzip des Ortra-Umformungsansatzes bildet.

Äußere Kräfte, die über ein neu entwickeltes, mit Ränderung arbeitendes Normalgleichungssystem bestimmt werden können, müssen einwirken, wenn im alten Referenzsystem vorhandene Netzspannungen im neuen System durch geodätischen Zwangsanschluss kompensiert werden sollen.

Die Theorie der elastischen geodätischen Netze hilft nicht nur beim Auffinden von elastostatischen Analogien zu baustatischen Verfahren. Borre und Krarup haben in den 1970er Jahren beim Aufbau der Theorie der elastischen geodätischen Netze eine inverse Finite-Elemente-Methode verwendet, um Verformungen unterworfenen, aus diskreten Elementen aufgebaute Strecken- und Richtungsnetze ins Kontinuierliche zu übertragen. Das eröffnet die Möglichkeit einer makroskopischen Betrachtungsweise von geodätischen Netzen und die Entwicklung elliptischer Differentialgleichungen mit Randbedingungen. Dabei werden mit Hilfe von Green-Funktionen Kovarianzmatrizen, die eine Analogie zu Flexibilitätsmatrizen der Baustatik darstellen, aus dem Kontinuierlichen abgeleitet.

Die Kovarianzmatrizen des Ortra-Verfahrens enthalten bei Existenz unmittelbar benachbarter Netzspannungen in der Regel kleine Varianzen, die durch eine große Anzahl von als Sekundärverschiebungen bezeichneten Verbesserungen bei der Verkettung der diskreten Systeme erklärbar sind. Im praktischen Gebrauch haben diese Kovarianzmatrizen im Vergleich zu Kovarianzmatrizen der geodätischen Strecken- und Richtungsnetze nur untergeordnete Bedeutung.

Aufbau der Arbeit *Kapitel 2 Analogie der Mechanik und Ausgleichsrechnung* beginnt mit einem Überblick über die Geschichte der Analogie von Mechanik und Ausgleichsrechnung seit Beginn des 20. Jahrhunderts.

Finsterwalder 1899 hat die Verbesserungen von ausgeglichenen Strahlenbündeln der Photogrammetrie als elastische Fäden gedeutet, die im unbelasteten Zustand verschwinden und zum Gleichgewicht beitragen. Die Begründung erfolgt über minimale Formänderungsenergie der elastischen Fäden in Verbindung mit dem zweiten Satz von Castigliano. Die Behandlung von Seilnetzkonstruktionen einschließlich der Berechnung des Gleichgewichtszustands schließt sich an. Auf Basis der Arbeiten von Argyris und Scharpf 1971, Linkwitz und Schek 1971 für das Olympiazeldach in München wird die Überführung der Seilnetzberechnung in spezielle Verfahren der Ausgleichsrechnung dargestellt [Linkwitz, Schek und Gründig 1974, Gründig 1975]. Es folgt eine Einführung in die geodätischen Formfindungsmethoden wie die Kraftdichtemethode von Schek 1974. Im weiteren Zusammenhang wird eine mit einem modifizierten Ausgleichsverfahren umgesetzte Formfindungsmethode behandelt [Gründig 1975], die zu Kontrollberechnungen des Olympiazeldachs in München eingesetzt wurde [Linkwitz 1977].

Die Kraftdichtemethode von Schek kann als Urform der Formfindungsmethoden angesehen werden [Schek 1974, Linkwitz und Schek 1971], die im Bereich der Kontinuumsmechanik seit Mitte der 1990er Jahre aktuelle Fortentwicklungen erfahren haben. Die Forschungsarbeiten im geodätischen Bereich zu Formfindungsmethoden von Gründig, Ströbel und Singer 2003 führten schließlich zu Methoden für textile Membranen und Minimalflächen. Aus diesen Arbeiten heraus entwickelte sich das auf einer Ausgleichung basierende Membranverfahren von Gielsdorf und Gründig 1997, ein mit elastomechanischen Analogien arbeitendes Koordinatenumformungs- und Homogenisierungsverfahren, das für die UTM-Überführung in Hamburg [Gielsdorf, Gründig und Aschoff 2003] und in Baden-Württemberg [Zöllner 2016] eingesetzt wurde. Bei der Updated Reference Strategy von Bletzinger et al. [Bletzinger und Ramm 1999, Wüchner und Bletzinger 2005, Wüchner 2006, Dieringer 2014], die auf der Finite-Elemente-Methode basiert und zunächst allgemein eingeführt wird, handelt es sich um eine verallgemeinerte Theorie, die die verschiedenen Varianten des Kraftdichteverfahrens einschließt. Die Anwendung der Updated Reference Strategy auf Seilnetze wird am Ende des Kapitels beschrieben.

Kapitel 3 Mathematische Theorie der Elastizität führt in das Thema Koordinatenumformungsverfahren und Elastizität ein und stellt die Grundgleichungen der Statik allgemein vor. Danach wird die Theorie der Elastizität zunächst auf Grundlage der Kontinuumsmechanik dargestellt, um aus dieser in *Kapitel 4* die Elastizitätstheorie

für Stabwerke abzuleiten. Über die kontinuumsmechanische Formulierung der Grundgleichungen der Statik gelingt es, moderne Formfindungsverfahren der Baustatik wie die Updated Reference Strategy von Bletzinger et al. durchgängig kontinuumsmechanisch zu formulieren, um Verfahren im Anwendungsbereich der nichtlinearen Elastizität aufzubauen.

Für die anschließende Darstellung verformter Kontinua werden Ausgangs- und Momentankonfiguration definiert, die auch für die Darstellung der elastomechanisch arbeitenden Umformungsverfahren Verwendung finden. Mit der Ausgangs- und Momentankonfiguration kann in statischer oder dynamischer Anwendung die mechanische Reaktion eines unverformten Körpers, der bei der Bewegung elastische Verzerrungen erfährt, vollständig beschrieben werden. Von diesen beiden Konfigurationen ausgehend wird bei der späteren Darstellung des Ortra-Verfahrens eine neuartige Methodik verwendet, indem durch besondere Gewichtsdefinition bei der Ausgleichung unverformte und verformte Netze im neuen Referenzsystem aufgebaut werden.

Zur Beschreibung nichtlinearer Deformationen dient die Einführung von Deformations- und Verzerrungstensoren, die auf die Referenz- und die Momentankonfiguration bezogen werden, sowie von Spannungstensoren. Die Herleitung des für Ingenieuranwendungen wichtigen allgemeinen Hookeschen Materialgesetzes bildet die Grundlage für das anschließende Kapitel.

Das Gleichgewicht, das sich bei mechanischer Belastung eines elastischen Körpers zwischen inneren und äußeren Kräften einstellt, wird mit Hilfe von Bewegungsgleichungen formuliert. Diese Gleichungen, aus denen sich lokal anwendbare Gleichungen für einzelne elastische Elemente und globale Matrizengleichungen für Stabtragwerke aufbauen lassen, bilden die Grundlage des wichtigen Prinzips der virtuellen Arbeit.

In *Kapitel 4 Einsatz der Stabtheorie bei baustatischen Verfahren* wird der Übergang zur Stabtheorie vollzogen, die für die Darstellung des Ortra-Verfahrens notwendig ist. Annahmen für die Geometrie des Stabes vereinfachen die Darstellung der theoretischen Grundlagen der Mechanik erheblich. Durch Nutzung der Stabtheorie können mechanische Zusammenhänge für Stabtragwerke aufgebaut werden, die in idealen Fachwerken realisiert werden. Nach Definition der globalen Komponenten der direkten Steifigkeitsmethode mit Hilfe der Strukturgleichung wird über diese Methode eine moderne Variante des Weggrößenverfahrens der Baustatik vorgestellt, die eine Vorstufe zu den Finite-Elemente-Verfahren darstellt. Für die Bestimmung von Verschiebungen und Verzerrungen (= Weggrößen) kann dieses Verfahren für Stabtragwerke eingesetzt werden und liefert somit auch Grundlagen für das Ortra-Verfahren, das mit verketteten Stabwerken arbeitet. Dieses Verfahren baut analoge Matrizen wie Ausgleichungsverfahren der Geodäsie auf, die Beobachtungsgleichungen für im Gleichgewicht befindliche Netze wie z. B. Seilnetze definieren. Das Verfahren wird in *Kapitel 7* für den Ortra-Ansatz weiter ausgebaut.

Kapitel 5 Arbeit und Energie in mechanischen Systemen führt Energieprinzipien zunächst in kontinuumsmechanischer Formulierung ein, um daraus Aussagen für die lineare Elastizitätstheorie abzuleiten. Diese können unmittelbar für die Herleitung der Matrizenmethoden der Statik aus dem Prinzip der Stationarität der Energie verwendet werden. Dies entspricht einem Minimumsprinzip und sagt für die Deformation mechanischer Systeme wie beispielsweise dem Ortra-System aus, dass minimale Verformungsenergie eingesetzt wird. Aus Sicht der Geodäsie ermöglichen die vorgestellten Energieprinzipien eine vollständige Analogiebildung zum Weg- und Kraftgrößenverfahren mit Mitteln der Ausgleichungsrechnung.

Das Prinzip der minimalen Energie bei Koordinatenumformungsverfahren, die elastomechanische Analogien aufweisen, ist als grundlegendes Prinzip des Ortra-Verfahrens zu verstehen.

Kapitel 6 Berechnung elastischer Verformungen von gekoppelten statischen Systemen leitet die Weg- und Kraftgrößenverfahren mit Hilfe der Ausgleichungsrechnung her und zeigt vor allem für das Kraftgrößenverfahren verschiedene neue Analogien auf. Das Ortra-Verfahren kann in einer bestimmten Ausprägung, die in *Kapitel 8* behandelt wird, als Kraftgrößenverfahren verstanden werden. Mit den Mitteln der Ausgleichungsrechnung wird hier für das Ortra-Verfahren ein mit Gewichtsdivergenzen gerändertes Normalgleichungssystem aufgebaut, um die Netzspannungen bestimmen zu können.

Kapitel 7 Ausgleichung und Homogenisierungsverfahren stellt die Ausgleichung des Ortra-Verfahrens in den Mittelpunkt. Die Theorie des Ortra-Verfahrens wird mit der Theorie der Homogenisierungsverfahren verknüpft und der Ortra-Ansatz in seiner speziellen Rolle als Homogenisierungsverfahren näher untersucht, die er während der UTM-Überführung einnimmt. Dazu werden aus dem Forschungsgebiet der Kartenhomogeni-

sierung neben der Elastizitätstheorie weitere theoretische Grundlagen für Koordinatenumformungsverfahren genutzt, insbesondere der Vorschlag von Benning und Scholz 2010, ein Kartenhomogenisierungsverfahren für die Koordinatenüberführung nach UTM einzusetzen. Moderne Koordinatenumformungsverfahren wie das Membranverfahren und das Ortra-Verfahren verfolgen beim Aufbau homogener Punktfelder in UTM ähnliche Ziele wie die klassischen Kartenhomogenisierungsverfahren bei der Integration unterschiedlich genauer Grundlagendaten. Davon ausgehend wird gezeigt, dass ein Kartenhomogenisierungsverfahren durch wenige theoretische Festlegungen im funktionalen Ansatz zu einem Umformungsverfahren umfunktioniert werden kann.

Die Erfahrungen aus der Anwendung von Kartenhomogenisierungsverfahren in Bayern zur Integration von digitalisierten Katasterkarten [Hampp 1992], die einen ähnlichen Ansatz verfolgen wie die Verfahren von Benning 1996, werden für die aktuelle Aufgabenstellung ausgewertet.

Anschließend wird das Ortra-Verfahren als geeigneter UTM-Überführungsansatz vorgestellt. Über den zugehörigen mathematischen und ausgleichungstechnischen Teil wird im Detail gezeigt, wie in einem hierarchischen Ansatz die künstlichen Netze für Flurstücke, Gebäude und sonstige Bauwerke aufgebaut und auf welche Weise sie im Verlauf des Verfahrens miteinander verknüpft werden.

Nach Darstellung der Grundlagen folgt auf Basis der Ausgleichungsergebnisse des Ortra-Verfahrens die Entwicklung eines modifizierten Weggrößenverfahrens, das die Kräfte für die auftretenden Arten von Verschiebungen ermittelt. Dafür werden die Begriffe Primärverschiebungen, die mit elastischen Elementverformungen im Ortra-Kleinsystem zusammenhängen, und Sekundärverschiebungen definiert, die unmittelbar den Verbesserungen der Ausgleichung zugeordnet sind. Mit Hilfe von Kraftdichten lassen sich Kräfte bestimmen, die hinter den Sekundärverschiebungen stehen [Glock, Bauer u. a. 2019], und sich nachweislich auf benachbarte Ortra-Kleinsysteme übertragen. Mit der Zuweisung von Materialeigenschaften können die Sekundärverschiebungen als elastische Stäbe oder Fäden im Sinne Finsterwalders interpretiert werden. Aufgrund der Kraftübertragung, die bei benachbarten Ortra-Kleinsystemen eine Dehnung oder Stauchung auslöst, besitzen diese eine geometrische Steifigkeit, analog zu den von Argyris und Scharpf 1971 bei Seilnetzen identifizierten geometrischen Steifigkeiten.

Zum Abschluss des Kapitels wird mit einem Least-Squares-Ansatz das Gleichgewicht des für das Ortra-Verfahren aufgebauten Netzes nachgewiesen. Das modifizierte Weggrößenverfahren liefert die Eingangsgrößen für einen unterbestimmten Least-Squares-Ansatz, um einen Nachweis zu erbringen, dass sich das für den Ortra-Ansatz aufgebaute Netz in einem mechanischen Gleichgewicht befindet.

Kapitel 8 Homogenisierung der Netzspannungen durch lineare Verteilung im hierarchischen Ansatz weist unter Nutzung von Formeln des Weggrößenverfahrens nach, wie die Netzspannungen im hierarchischen Ansatz verteilt werden. Dazu werden virtuelle Verschiebungen von Netz- und Grundrisspunkten verwendet und damit unterschiedliche Netzspannungen sichtbar gemacht. Die im direkten Zusammenhang mit Netzspannungen stehenden Verschiebungen werden als Koordinatenwidersprüche zwischen einer freien Ausgleichung und einer Ausgleichung mit Zwangsanschluss ermittelt. Für die Koordinatenwidersprüche wird anschließend ein neuartiger, ausgleichungsbasierter Ansatz mit Gewichtsunterschieden entwickelt.

Für die weitere mechanische Untersuchung wird die unverformte Netzkonfiguration, die über Ausgleichung bereits nach UTM überführt wurde, einer Referenzkonfiguration zugewiesen. Die verformte Netzkonfiguration, in der die endgültigen UTM-Koordinaten gewonnen werden, erfährt eine Zuordnung zur aktuellen Konfiguration.

Neben den Koordinatenwidersprüchen wird für den Ortra-Ansatz über Gewichtsunterschieden ein geschlossener Ausdruck mit Hilfe eines geränderten Normalgleichungssystems für die äußeren Kräfte entwickelt. Die äußeren Kräfte müssen mechanisch aufgewendet werden, um die Koordinatenwidersprüche eliminieren zu können, die durch Netzspannungen im Ausgangsnetz verursacht wurden. Anschließend wird gezeigt, wie sich die Koordinatenwidersprüche (= Verschiebungen) im Verdichtungsnetz zusammensetzen.

Kapitel 9 Numerik rundet die Arbeit ab mit einer Darstellung des hinter dem Ortra-Verfahren stehenden numerischen Verfahrens für die Auflösung der großen Normalgleichungssysteme. Der optimale Einsatz der Numerik war für die praktische Durchführung der UTM-Überführung von entscheidender Bedeutung. Sie ermöglichte es für das Liegenschaftskataster in Bayern als bisher einzigem Bundesland mit Hilfe des Ortra-Verfahrens eine aufwändige, auf Ausgleichungsrechnung basierende Homogenisierung innerhalb weniger Ta-

ge durchzuführen. Die Numerik baut auf Sparse Matrizen Technologien auf, die zunächst eine symbolische Faktorisierung mit dem Aufbau des Eliminierungsbaums durchführen. Auf dieser Basis wird die numerische Faktorisierung vorbereitet, bei der die Ermittlung der zusätzlichen Nichtnull-Belegungen (Fill-Ins), die bei der Cholesky-Faktorisierung entstehen, einen wichtigen Schritt darstellt. Nach Bestimmung der Anzahl der Spalteneinträge des Cholesky-Faktors kann bereits die Datenstruktur für den Faktor im Speicher vorbereitet werden.

Weiterhin werden beide bei der UTM-Überführung eingesetzten Varianten des Cholesky-Verfahrens vorgestellt, die den Cholesky-Faktor entweder sequentiell oder mit Hilfe kleiner Blockmatrizen, auch als Superknoten bezeichnet, aufbauen. Für sehr dünn besetzte Sparse Matrizen eignet sich eine Cholesky Faktorisierung, die den zeilenweisen Aufbau von oben nach unten durchführt. Zur Berechnung weiterer Zeilen des Cholesky-Faktors werden Dreiecksaufösungen durchgeführt, die auf Basis des Eliminierungsbaums arbeiten. Für den größten Teil der Berechnungen wird ein Algorithmus verwendet, der den Cholesky-Faktor mit Hilfe von Superknoten bestimmt.

Über Eliminierungs bäume wird gezeigt, wie vollständige Informationen für die Definition der Superknoten erhalten werden können. Das Kapitel endet mit der Darstellung des Einsatzes von Superknoten bei der numerischen Faktorisierung.

Das Kapitel 10 Zusammenfassung und Ausblick schließt die Arbeit ab.

Anhang A Ansätze der Ausgleichsrechnung gibt einen Überblick über die Grundlagen der in der Geodäsie verwendeten Ausgleichungsverfahren, die für das Verständnis der vorhergehenden Kapitel hilfreich sind.

2. Analogie der Mechanik und Ausgleichsrechnung

2.1. Geschichtlicher Abriss der Analogie der Mechanik und Ausgleichsrechnung

Der geschichtliche Abriss soll zur Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert beginnen und die von Technischen Hochschulen und Universitäten in Deutschland und Österreich ausgehenden Impulse betrachten. Der Blick, der sich auf die wissenschaftlichen Arbeiten von Geodäten und einem Physiker auf dem Gebiet der angewandten Mechanik richtet, die sich mit der Analogie der Elastizitätstheorie und Ausgleichsrechnung beschäftigen, beginnt mit einer Arbeit von Sebastian Finsterwalder an der TH München.

Entdeckung von Analogien im Bereich der Photogrammetrie durch Sebastian Finsterwalder an der TH München Bei photogrammetrischen Untersuchungen, z. B. einem überbestimmten Rückwärtschnitt im Raum, stellte Finsterwalder Analogien zu statischen Systemen fest. Er entdeckte, dass Punkte oder Strecken sich bei einer Ausgleichung so übereinander legen, dass Gleichgewichtssysteme entstehen, und deutete die Verbesserungen bei Strecken als elastische Fäden, die im ungespannten Zustand verschwinden. Finsterwalder definierte innere Kräfte, die für die Zusammenkopplung der Systeme verantwortlich sind, und begründete das Gleichgewichtssystem über den 2. Satz von Castigliano vom Minimum der Formänderungsarbeit [Finsterwalder 1903]. Diese Analogie tritt auch beim Ortra-Ansatz auf und wird dort als Sekundärverschiebung bezeichnet [Glock, Bauer u. a. 2019].

Arbeit von M. Westergaard 1915 Am Lehrstuhl von Sebastian Finsterwalder wurde ein Jahrzehnt später mit der Promotion von Westergaard, der zu diesem Zeitpunkt bereits als Associate Professor der Angewandten Mechanik in Illinois tätig war, eine weitere wichtige Arbeit veröffentlicht [Westergaard 1915]. Sie behandelte unter dem Thema „Anwendung der Statik auf die Ausgleichsrechnung“ mechanisch-fehlertheoretische Analogien beim verallgemeinerten Fachwerk. Westergaard zeigt die Analogie direkt zwischen einer Streckenausgleichung und einem unbestimmtem Fachwerk und stellt die wahrscheinlichste Gestalt der Ausgleichung eines Streckennetzes als Gleichgewichtsgestalt dar. Dabei verwendet er Energieprinzipien, das Hookesche Gesetz und das Prinzip der virtuellen Arbeiten.

Damit ist belegt, dass die grundlegenden Analogien zwischen der linearen Elastizitätstheorie und der Ausgleichsrechnung bereits zu dieser Zeit bekannt waren. Doch fehlten Anfang des 20. Jahrhunderts noch die technischen Mittel, diese Analogien auf breiter Ebene anzuwenden.

Verfahren der Ausgleichsrechnung und der Baustatik 1920 Die Ausgleichsrechnung der 1920er Jahre nutzte bei Streckenausgleichungen das Werkzeug der logarithmischen Tafeln. Auf Seiten der Baustatik wurde seinerzeit häufiger das Kraftgrößenverfahren als das Weggrößenverfahren angewendet, da es gut für Handrechnung geeignet ist. Das heute kaum mehr zum Einsatz kommende Verfahren der bedingten Ausgleichung wurde damals als Standardverfahren der Ausgleichsrechnung verwendet, da dieses wegen der kleineren Dimensionierung des Fehlergleichungssystems für die Handrechnung einen entscheidenden Vorteil hatte, in (A.29) ist für die bedingte Ausgleichung das zugehörige Normalgleichungssystem dargestellt. Dieses wurde wegen der geringeren Rechenarbeit gegenüber der vermittelnden Ausgleichung bevorzugt genutzt, erforderte jedoch sehr komplexe Arbeiten bei der Definition der Bedingungs-gleichungen. Vor dem Einzug der elektronischen Entfernungsmessung standen für Streckenmessungen nur mechanische und optische Verfahren (Massband und Basislatte) von begrenzter Reichweite zur Verfügung. Bis auf Basislinien wurden

in der Landesvermessung deswegen nur selten umfangreiche Streckenmessungen durchgeführt oder größere Streckennetze ausgeglichen. So konnte die Arbeit von Westergaard keinen Weg in die Praxis finden und das Thema *Streckenmessung und Fachwerk* wurde erst wieder von Linkwitz aufgegriffen [Linkwitz 1960a]. Die Ausgleichsrechnung behielt in der Landesvermessung ihren Schwerpunkt in der Ausgleichung von Winkelnetzen.

Arbeiten österreichischer Geodäten In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts kamen einige Arbeiten österreichischer Geodäten hinzu, die sich mit dem Bereich mechanisch-statischer Analogien zur Ausgleichsrechnung beschäftigten.

Prinzip des Gleichgewichts bei den Ausgleichungsansätzen von S. Wellisch Wellisch 1907 entwickelt neben der traditionellen fehlertheoretischen Sichtweise auf die Ausgleichsrechnung, die mit dem Prinzip der kleinsten Quadrate an die beiden Gaußschen Begründungen angelehnt ist, eine weitere Sichtweise, die in der Mechanik begründet ist. Er spricht von dem Prinzip des Gleichgewichts und dabei von einer Gleichgewichtslage eines von gegebenen Kräften beanspruchten elastischen Stabsystems, die sich bei den Knotenpunkten einstellt. Damit wird die Argumentation von Finsterwalder 1903 aufgegriffen und als Prinzip gedeutet. Haponowicz 1912 verfolgte bei der Ausgleichung von Polygonzügen einen Ansatz mit Hilfe der Statik. Passer 1933 zeigt, dass die Ausgleichung von Streckennetzen über die Berechnung von Spannungen statisch unbestimmter Fachwerke durchgeführt werden kann. Er nutzt bei seinem Ansatz das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für eine vereinfachte Formulierung von Bedingungsgleichungen, die wiederum in einer bedingten Ausgleichung Anwendung finden.

Theorie der elastischen Systeme von K. Linkwitz Nach den 1940er und 1950er Jahren, aus denen keine weiteren Arbeiten an deutschen und österreichischen Technischen Universitäten und Hochschulen zur Analogie zwischen Mechanik und Ausgleichung bekannt sind, hat 1960 Linkwitz mit seiner Arbeit über die Fehlertheorie und Ausgleichung nach der Theorie der elastischen Systeme an der TH München promoviert [Linkwitz 1960a]. Er baut die Analogie der Streckenausgleichung zum Kraftgrößenverfahren mit Hilfe von Matrizen auf und führt im Ausgleichungsverfahren eine Gleichgewichtsmatrix und eine Matrix für die kinematische Verträglichkeit ein. Bereits zu Beginn der 1960er Jahre hat Linkwitz durch seine Veröffentlichung „Über die Systematik verschiedener Formen der Ausgleichsrechnung“ in der Zeitschrift für Vermessungswesen [Linkwitz 1960b] einen maßgeblichen Beitrag zur Verbreitung der Matrizen Schreibweise für die Hauptformen der Ausgleichsrechnung wie vermittelnde Ausgleichung und bedingte Ausgleichung geleistet.

Anwendung der Elastomechanik in der Photogrammetrie Jerie 1958 nutzt bei der Aerotriangulation in Blöcken die Elastomechanik, um ein mechanisches Analogverfahren aufzubauen [Schwidefsky 1963]. Auf dieser Basis bildet er das Rechenverfahren einer räumlichen Bündelblockausgleichung auf einen mechanisch arbeitenden, analogen Computer ab. Die Lösung der großen überbestimmten Gleichungssysteme wird mit Methoden der Mechanik erreicht. Zunächst wird der auszugleichende, aus Streifen aufgebaute Bündelblock in quadratische Sektionen aufgeteilt, deren Eckpunkte in Überdeckungszonen benachbarter Streifen liegen. Für die elastischen Basiseinheiten der Sektionen werden, analog zu den Ortra-Kleinsystemen, lokale und konforme Transformationen definiert, die durch die spätere mechanische Ausgleichung ermittelt werden. Zur Ermittlung der Transformationselemente wird die quadratische Sektion in einen mechanischen Apparat eingespannt, der über vier Eckpunkte Zug- oder Druckkräfte auf die quadratische Sektion ausüben kann. Als Reaktion, die identisch zum elastischen Verhalten des Ortra-Kleinsystems über Transformationsparameter einer Ähnlichkeitstransformation beschrieben werden kann (siehe z. B. Gl. (7.4) in Abschnitt 7.3.1), verschiebt, verdreht und verformt sich die Sektion im infinitesimalen Bereich. Dabei stellt sich im mechanischen System ein Gleichgewicht ein. Mit iterativ über Nachjustieren der mechanischen Figur bestimmten Transformationsparametern ergeben sich über den Operateur in den Verknüpfungspunkten immer kleinere Koordinatenwidersprüche, bis sich ein Minimum einstellt. Dieses entspricht der minimalen Quadratsumme der Koordinatenwidersprüche für den gesamten Bündelblock. Zum Aufbau der Gleichgewichtsfigur zur Minimierung der Widersprüche wird bei dem mechanischen Verfahren minimale Formänderungsenergie eingesetzt.

Sonderforschungsbereich 64 an der TH Stuttgart Unter der Federführung von Klaus Linkwitz, der ab Mitte der 1960er Jahre an der Technischen Hochschule und späteren Universität Stuttgart das Institut für „Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen“ leitete, beginnt eine intensive Zeit der Erforschung der Analogien durch geodätische Wissenschaftler mit einer mehr als 30 Jahre währenden Forschungstätigkeit in Stuttgart und später in Berlin. Im Bereich des Bauwesens und der Geodäsie wird der Sonderforschungsbereich 64 „Weitgespannte Flächentragwerke“ gegründet, der zunächst im Institut von Klaus Linkwitz in enger Zusammenarbeit mit Bauingenieuren zu Arbeiten des Aufbaus von Seil- und Hängenetzen wie für das Olympia-Zeltdach in München 1972 führte.

Mitte und Ende der 1980er Jahren beschäftigt sich beim SFB 64 eine weitere Generation von Wissenschaftlern, u. a. Neureither und Bahndorf, mit der Forschung auf dem Gebiet der Seil- und Hängenetze. Neureither 1992 vertieft bei den Seilverfahren weiter den Bereich der Netzstrukturen. Bahndorf, der sich in seiner Promotion mit der Übertragung sequentieller Netzoptimierung auf die Statik beschäftigt, wendet dort auch das Kraftgrößen- und Weggrößenverfahren auf Seilnetze an und trägt damit zur Systematisierung der Berechnung von Seilnetzen bei [Bahndorf 1991].

Arbeiten von Geodäten zu Formfindungsverfahren für Membrane und Minimalflächen In den 1990er Jahren widmet sich die Forschung im Bereich der Leichtbauweise des Bauwesens den Formfindungsverfahren für Membrane und Minimalflächen, [Gründig, Ströbel und Singer 2003, Gründig, Moncrieff u. a. 2000, Singer 1995], die aus geodätischen Ansätzen der Ausgleichsrechnung und Ansätzen für Seil- und Hängenetze entwickelt werden.

Membranverfahren von Gielsdorf und Gründig, das UTM-Umformungsverfahren von Baden-Württemberg Aus den oben beschriebenen Arbeiten heraus ist auch das als Koordinatenumformungsverfahren einsetzbare Membranverfahren von Gielsdorf und Gründig 1997 entstanden, das eine große Ähnlichkeit mit einem Finite-Elemente-Verfahren besitzt. Dabei werden die bei einem Koordinatenumformungsverfahren sowohl am Rand als auch im Innern eines Definitionsbereiches gegebenen, bei Finite-Elemente-Verfahren bekannten Dirichlet-Randbedingungen [siehe z. B. Barthold 2013], die Verschiebungen bei den identischen Punkten, über eine linear-elastische Reaktion des Kontinuums in die Fläche verteilt. Das Kontinuum wird dabei durch diskrete Elemente präsentiert. Dazu werden die Verschiebungen bei den identischen Punkten, die in der Geodäsie als Restklaffungen oder Koordinatenwidersprüche bezeichnet werden, über sich minimal formverändernde Dreiecke in ein durch Dreiecksvermaschung diskretisiertes Kontinuum übertragen.

Das Membranverfahren wurde im Jahre 2018 von der Vermessungsverwaltung Baden-Württembergs für die Überführung des Bezugssystems im Liegenschaftskataster nach ETRS89/UTM angewendet.

Verwandtschaft der zweidimensionalen Umformungsverfahren zu den dreidimensionalen Formfindungsverfahren Sowohl bei dem als baden-württembergischen Umformungsansatz verwendeten Membranverfahren als auch beim Ortra-Verfahren in Bayern sind interessante Analogien zu den im dreidimensionalen Raum arbeitenden Ansätzen zu finden.

Das zweidimensionale z. B. für eine Koordinatenumformung zur Anwendung kommende Membranverfahren [Gielsdorf und Gründig 1997] definiert die minimale Formveränderung des einzelnen Dreiecks über Minimierung der Verzerrungskoeffizienten in analoger Weise wie der im Dreidimensionalen arbeitende Membranansatz [Singer 1995], der im Materialmodell die Elastizität von Textilien nachbildet und auf diese Weise synchron zur Formfindung die dreidimensionale Statik eines leichtgewichtigen, aus Textilien aufgebauten Flächentragwerks modelliert. Eine Analogie zu den Minimalflächenansätzen des dreidimensionalen Raums wurde bei einem Überführungsverfahren von DHDN/GK nach ETRS89/UTM bisher noch nicht aufgebaut. Diese könnte wegen der Flächen-Minimierungsfunktion ein sehr interessanter Ansatz sein. Es finden sich beim als Koordinatenumformungsverfahren arbeitenden Ortra-Verfahren, das als diskrete Elemente dehnbare, mit elastischen Fäden verbundene Koordinatensysteme verwendet, hinsichtlich des Aufbaus, dem Spannens und Nachspannens des Netzes, gewisse Parallelen zu einem im dreidimensionalen Raum für ein Zeltdach aufgebauten Seilnetz. Das aus unvollkommen abgelängten GK-Elementen für das Ortra-Verfahren definierte Netz wird in der Ebene in einen als unveränderlich anzusehenden Referenzrahmen ETRS89 aus diskreten identischen

Punkten in UTM eingehängt. Die Einspannung in einen festen Rahmen ist eine offensichtliche Analogie zu dem Vorgang, der im Dreidimensionalen für doppelt gekrümmte vorgespannte Seile durchgeführt wird, wenn diese in die vorgesehenen Pylone und Stahlträger eingespannt werden.

Durch die Einspannung erfahren beide Netze Verformungen. Die Form der beiden unter mechanischer Spannung stehenden Netze wird nach dem Gesetz der minimalen Formveränderung nur minimal von der Ausgangsform abweichen. Aufgrund dieser Gesetzmäßigkeit sollte fachlich möglich sein, im Anwendungsbereich der linearen Elastizitätstheorie, bei der das Hookesche Werkstoffgesetz für Stäbe oder Seile zur Anwendung kommt, Ausgleichsverfahren für den zwei- oder dreidimensionalen Fall zu formulieren.

Deshalb sollen aus folgenden Gründen die Methoden für die Berechnung des Gleichgewichtszustands von vorgespannten Seilnetzen und Formfindung bei Seilnetzen dargestellt werden:

- wegen der bereits angesprochenen Analogie,
- wegen der wenige Jahre vor den Olympischen Spielen 1972 in München ausgelösten Impulse, die die weitere wissenschaftliche Erforschung der Analogie der Elastostatik und Ausgleichsrechnung vorangetrieben haben, und
- zur Darstellung der Erkenntnisse, welche Voraussetzungen vorhanden sein müssen, um einen parallelen Einsatz von baustatischen Verfahren und von Ansätzen der Geodäsie zu ermöglichen, welche verschiedene Ansätze der Ausgleichsrechnung und der Elastostatik kombinieren.

2.2. Seilnetzkonstruktionen

2.2.1. Berechnung des Gleichgewichtszustands bei Seilnetzen

Für Seilnetze wie auch die später untersuchten Netze wie das beim Vergleich einer vermittelnden Ausgleichung zu einem Weggrößenverfahren zugrunde liegende Streckennetz (siehe Gl. (6.25)) oder das Netz des Ortra-Ansatzes, deren Ausgleichsansätze elastomechanische Analogien aufweisen, gilt immer folgendes Grundprinzip: *Das Netz befindet sich in einem mechanischen Gleichgewicht.*

Eine unmittelbare Folge für geodätische Netze ist, dass diese, wenn elastomechanische Analogien im funktionalen Modell der Ausgleichung des geodätischen Netzes existieren, linear elastisch bzw. nichtlinear elastisch reagieren, nachdem sich das mechanische Gleichgewicht eingestellt hat, und das mechanische Verhalten nach den Gesetzen der Elastizitätstheorie beschrieben werden kann.

Das Gleichgewicht eines mechanischen Systems wird zunächst ganz allgemein durch die Funktion $G(\mathbf{r})$ dargestellt:

$$G(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (2.1)$$

Der Parameter \mathbf{r} der Gleichgewichtsfunktion G in Gl. (2.1) umfasst die Ortsvektoren zu den diskreten Punkten des mechanischen Systems. Die Ortsvektoren sollen bei den Seilnetzen im dreidimensionalen euklidischen Raum vorliegen (siehe Gl. (3.2)). Später wird das Gleichgewicht bei den elastomechanischen Koordinatenumformungsverfahren im zweidimensionalen Raum bestimmt.

Bei den in diesem Abschnitt vorzustellenden Verfahren (siehe Gl. (2.31), (2.49), (2.65)), bei denen die Gleichgewichtsbestimmung durch ein Ausgleichsverfahren erfolgt, wird davon ausgegangen, dass für die erste Schätzung des Gleichgewichts des Netzes Näherungskordinaten für die das Netz repräsentierenden Punkte \mathbf{r}_0 vorliegen.

Aus dem Blickwinkel des mathematisch-numerischen Verfahrens zur Bestimmung des Gleichgewichts ist es unerheblich, ob ein Netz für ein elastomechanisches Koordinatenumformungsverfahren aus rein virtuellen, nur im Computer existierenden Elementen, den Pseudobeobachtungen, aufgebaut ist oder das Netz für ein Bauwerk, das als leichtes Flächentragwerk realisiert wird, aus reellen Bauelementen besteht. Für das leichte Flächentragwerk wird zunächst angenommen, dass es aus physikalisch wirkenden, d. h. elastisch reagierenden Seilelementen zusammengesetzt ist.

Die Gleichgewichtsfunktion G , die als nichtlinear angenommen wird, soll für die Bestimmung der unbekanntenen Freiheitsgrade durch eine Taylorreihe \tilde{G} linearisiert werden:

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}(\mathbf{r}_0) + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{r}} \underbrace{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}_{= \Delta \mathbf{r}} = \mathbf{0}. \quad (2.2)$$

Für die partielle Ableitung $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{r}}$ nach den unbekanntenen Koordinaten soll noch nicht gefordert werden, dass sie mechanische Eigenschaften beschreibende Parameter oder Materialkennwerte wie das Elastizitätsmodul E enthält.

Mit den partiellen Ableitungen $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{r}}$ und den Näherungskoordinaten \mathbf{r}_0 ergeben sich Koordinatenzuschläge $\Delta \mathbf{r}$ wie folgt:

$$\Delta \mathbf{r} = - \left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{r}} \right]^{-1} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}_0). \quad (2.3)$$

Die darzustellenden Verfahren der Baustatik und der Geodäsie sind beides Verfahren zur Berechnung des Gleichgewichtszustandes. Als wichtige Aufgabe ergibt sich bei Gl. (2.1) die Bestimmung der Parameter \mathbf{r} , die die sich beim Gleichgewichtszustand einstellende Form beschreiben. Verfahren zur Bestimmung der Parameter \mathbf{r} sollen Formfindungsverfahren genannt werden.

Nach der Bestimmung der Form des Netzes können anschließend die Spannungen des Netzes untersucht werden.

Verfahren zur Bestimmung eines Gleichgewichtszustands von *elastisch* verformbaren Elementen können die Gleichungen der Art (2.2) mit Hilfe von mechanischen Gesetzen aufbauen. Das durch physikalische Gesetze vorgegebene Verhalten der Verformung kann mathematisch durch Minimalprinzipien formuliert werden. Die mathematisch dem Minimalprinzip unterworfenen Verformung ist, wie bereits einleitend beschrieben wurde, als eine aus Sicht einer Energiebilanz sich einstellende minimale Verformung der Elemente zu verstehen.

Das Minimalprinzip kann z. B. das in der Geodäsie bei der Ausgleichung verwendete Prinzip der kleinsten Quadrate sein, das mathematisch durch eine minimale, vom Anwender mit individuellen Gewichten \mathbf{P} versehene Verbesserungsquadratsumme beschrieben werden kann (Gl. (2.4), siehe auch Gl. (6.1)) :

$$\mathbf{v}^t \mathbf{P} \mathbf{v} = \min. \quad (2.4)$$

Einsatz des Weggrößenverfahrens von Argyris für das Zeltdach in München Für die Berechnung des Zeltdachs der olympischen Bauten in München kam am Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen das von Argyris einige Jahre zuvor im Rahmen der Luft- und Raumfahrtforschung entwickelte Verschiebungs- bzw. Weggrößenverfahren zum Einsatz [Argyris und Kelsey 1960, Argyris 1964, Argyris und Scharpf 1971].

Das damals angewandte Weggrößenverfahren wird in seiner Theorie in Kapitel 4 vorgestellt und insbesondere anhand der globalen Strukturgleichung im Abschnitt 4.4 hergeleitet. Darauf folgt eine Anwendung des Weggrößenverfahrens am Beispiel eines gelagerten Tragwerks in Gl. (4.94). Zur Beschreibung des Weggrößenverfahrens siehe auch Wunderlich und Kiener 2004, Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019 sowie Bletzinger 2017b.

Argyris und seine Mitarbeiter haben zur Regularisierung des Verschiebungsgrößenverfahrens zusätzliche Größen eingeführt, die als mechanische Größen definiert sind und die als bei Vorspannung auftretende geometrische Steifigkeiten erklärt werden [Argyris und Scharpf 1971].

Die geometrische Steifigkeit ermöglicht einem elastisch reagierenden Element wie einem Seil oder beispielsweise dem von Finsterwalder bei einem photogrammetrischen System postulierten elastischen Faden, der im unbelasteten Zustand verschwindet [Finsterwalder 1903], sowohl seine Umgebung in Gleichgewicht zu halten als auch zugleich elastische Reaktionen der Nachbarschaft auszulösen. Die für das Seilnetz aufgebaute Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} , die zunächst singulär ist, wird mit den weiteren Koeffizienten für die geometrische Steifigkeit überlagert [Argyris und Scharpf 1971]. Die Singularität der Steifigkeitsmatrix wird im Abschnitt über den Regularisierungsansatz der Updated Reference Strategy [Bletzinger und Ramm 1999] nachgewiesen.

Diese zusätzlichen Koeffizienten sind mit den zweiten Ableitungen der Gleichgewichtsfunktion $G(\mathbf{r})$ der Gl. (2.1) nach den unbekannt Koordinaten \mathbf{r} identisch, wie sich durch Nachrechnen der zweiten Ableitungen von Gl. (2.12) nach den Unbekannten nachweisen lässt. Ströbel 1995 hat im Zusammenhang mit der Hinzunahme der geometrischen Steifigkeiten zur Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} nachgewiesen, dass diese zu einem Redundanzgewinn der Matrix und in der Folge zu einer Verbesserung der numerischen Stabilität führt.

Beim Anwendungsfall vorgespannter Seile wird nachgewiesen, dass folglich die mit der Vorspannung verbundene Erzeugung positiver Eigenwerte insgesamt mit einem Redundanzgewinn von 3 für jedes Seilelement verbunden ist. Dies führt somit zur Erhöhung der Redundanz $r = n - u$ der Normalgleichungsmatrix bei der Ausgleichung, mit $n =$ Anzahl der Beobachtungen und $u =$ Anzahl der Unbekannten, für jedes in die Ausgleichung eingeführte Seilelement. Eine entsprechende Erhöhung der Redundanz müsste alternativ über die Formulierung von drei zusätzlichen linear unabhängigen Gleichungen zum Gleichungssystem erreicht werden.

Zum Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix durch Assemblierung aus Einzelsteifigkeitswerten siehe auch Gl. (4.65) im Abschnitt 4.3.3.

Mit Hilfe der geometrischen Steifigkeiten, die mathematisch den zweiten Ableitungen der Gleichgewichtsfunktion $G(\mathbf{r})$ nach den unbekannt Koordinaten \mathbf{r} entsprechen, lässt sich die Singularität des Weggrößenverfahrens beim Anwendungsfall Seilnetz im dreidimensionalen Raum überwinden. Das Standard-Weggrößenverfahren selbst arbeitet mit einer aus elastischen Steifigkeitswerten definierten Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} , wie sie in Gl. (4.48) im Abschnitt 4.3.2 vorzufinden ist.

Die von Argyris und seinen Mitarbeitern am Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen der Universität Stuttgart berechneten Modelle waren dann Grundlage für die bauingenieurtechnische Umsetzung der Zeltdächer in München für die Olympischen Spiele 1972.

Linkwitz hat diesen Ansatz später durch eine alternative Formulierung des Weggrößenverfahrens von Argyris über ein vollständig analog aufgebautes Ausgleichungsverfahren ausgebaut. Durch die Formulierung von zusätzlichen Bedingungsgleichungen über den Ansatz *Vermittelnde Ausgleichung mit Bedingungen zwischen den Unbekannten* (siehe Anhang Gl. (A.50)) ermöglichte dieses Ausgleichungsverfahren eine Hinzunahme von weiteren Bedingungen zum Modell des Seilnetzes.

Arbeiten von Linkwitz für Seilnetze Ebenfalls an der Universität Stuttgart wurden Anfang der 1970er Jahre von Linkwitz und seinen Mitarbeitern am Institut für „Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen“ wissenschaftliche Arbeiten für den Aufbau von Verfahren zur Berechnung des Olympia-Zeltdachs in München durchgeführt. Diese neu entwickelten Verfahren wurden zunächst für Kontrollrechnungen bestimmter Abschnitte des Zeltdachverbunds verwendet.

Für die Berechnung des Olympia-Zeltdachs, die in der frühen Forschungsphase auf Basis von Näherungskordinaten aus photogrammetrischen Modellen aufgebaut wurde, sind Ansätze der Ausgleichsrechnung weiterentwickelt worden [Linkwitz und Schek 1972].

Das sich bei der Ausgleichsrechnung für ein Seilnetz anbietende Verfahren der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen (siehe Anhang (A.13)) kann wegen Singularität des entstehenden Normalgleichungssystems ($A^t P A$) keine Lösung für die Bestimmung der unbekannt Form des Seilnetzes bereitstellen.

Die Forschungsarbeiten von Linkwitz und seinen Mitarbeitern führten im Anwendungsbereich der nichtlinearen Ausgleichung (siehe Gl. (2.5)) zu nichtlinearen Normalgleichungssystemen, die die Minimierung der gewichteten Verbesserungssumme unter Nutzung von Lösungsverfahren der numerischen Mathematik wie dem Newton-Verfahren ausführen können [Schek und Maier 1976, Linkwitz 1977].

Dabei werden zur besseren Modellierung der Nichtlinearität zusätzlich zweite Ableitungen der Fehlergleichungen in den Ansatz eingeführt. Im Zusammenhang mit Streckennetzen wurde von Schek und Maier 1976 untersucht, inwieweit die Vorgehensweise der nichtlinearen Ausgleichung mit zusätzlichen zweiten Ableitungen in die bekannten Ausgleichungsverfahren zur Verbesserung von deren Konvergenz übernommen werden kann.

Darstellung der Theorie der Seilnetze Zunächst sollen die Ansätze der Geodäsie des Sonderforschungsbereichs 64 „Weitgespannte Flächentragwerke“ [Linkwitz und Schek 1971, Linkwitz, Schek und Gründig 1974, Gründig 1975] vorgestellt werden, die analog zu den baustatischen Verfahren von Argyris arbeiten und

bei Kontrollrechnungen zu identischen Ergebnissen führten. Damit darf die Hypothese vertreten werden, dass das baustatische Verfahren von Argyris und das Verfahren mit Ausgleichung von Linkwitz parallele und analoge Verfahren sind, die zu identischen Ergebnissen führen. Anschließend wird das Weggrößenverfahren von Argyris, das für Seilnetze zunächst allgemein durch die Gl. (2.2) formuliert werden soll, bzw. das dazu analog aufgebaute Verfahren der Geodäsie (2.42) einer speziellen Form der Ausgleichsrechnung zugeführt (siehe Anhang (A.45)), die es ermöglicht, Zusatzbedingungen für die unbekannte Form oder für Seilkräfte im Innern des Seilnetzes zu formulieren. Dies kann als notwendiger Schritt der Analogiebildung zwischen baustatischen und geodätischen Verfahren im nichtlinearen Bereich gesehen werden, um zu der Kraftdichtemethode als Formfindungsverfahren [Schenk 1974] zu gelangen. Mit den Parallelen des Kraftdichteverfahrens zur Updated Reference Strategy [Bletzinger und Ramm 1999], die als Finite-Elemente-Methode zur Berechnung von leichtgewichtigen Flächentragwerken wie Membranen auf Basis der Kontinuumsmechanik arbeitet und als modernste Verallgemeinerung und Weiterentwicklung des Kraftdichteverfahrens zu sehen ist, wird das Kapitel zur Analogie der Mechanik zur Ausgleichsrechnung abgeschlossen. Die bis Mitte der 1990er Jahre auf geodätischer Seite durchgeführte Weiterentwicklung des Kraftdichteverfahrens zur Berechnung von Minimalflächen, Membranen und Pneus mit Hilfe der Ausgleichsrechnung [Singer 1995] führt schließlich 1998 zu dem von Baden-Württemberg als Koordinatenumformungsverfahren genutzten Membranverfahren von Gielsdorf und Gründig [Zöllner 2016, Gielsdorf und Gründig 1997], das auf Basis von Dreiecken mit Beobachtungsgleichungen im linearelastischen Bereich arbeitet. Diese Verfahren sollen jedoch nicht Gegenstand des vorliegenden Kapitels sein.

2.2.2. Seilnetze und ihre Überführung in spezielle Verfahren der Ausgleichsrechnung

Bei Seilnetzen sollen, wie bereits in der Einleitung zu diesem Abschnitt herausgestellt wurde, nichtlineare Fehlergleichungen vorliegen:

$$l + v = f(x). \quad (2.5)$$

In Gl. (2.5) bezeichnet l den Vektor der ungedehnten Seillängen. Der Vektor v beinhaltet dann aus geodätischer Sicht Verbesserungen der ungedehnten Längen l . Die durch nichtlineare Ausgleichung in Gl. (2.27) bestimmte Verbesserung v kann, neben ihrer Funktion als ausgleichungstechnische Größe, auch als mechanische Elementverformung v gedeutet werden. Falls v zugleich als Elementverformung v verstanden wird, dann beschreibt das Prinzip der kleinsten Quadrate (siehe Anhang (A.6))

$$v^t P v = \min \quad (2.6)$$

gleichzeitig das Prinzip der minimalen Formveränderung (siehe Gl. (6.1)).

Da bei Seilnetzen durch das funktionale Modell $f(x)$ der Ausgleichung ein Gleichgewicht ausgedrückt wird, liegt durch Gl. (2.5) gleichzeitig auch eine Gleichgewichtsgleichung G in Form der Gl. (2.1) vor.

Die Verbesserung v , die als Elementverformung eine innere Weggröße im Seilnetz darstellt, wird auf die linke Seite gestellt:

$$v = f(x) - l. \quad (2.7)$$

Die Quadratsumme der Elementverformungen v wird minimal, falls

$$v^t P v = [f^t(x) - l^t] P [f(x) - l] = \min \quad (2.8)$$

wird. Für die Dehnung müssen im Seil Spannungen existieren, die als Reaktion auf äußere Kräfte entstehen (siehe Gl. (6.6)).

Die Abhängigkeit der Spannungen, die durch Seilkräfte s repräsentiert werden, von den ungedehnten Seillängen l und gedehnten Seillängen w , die aus Koordinatendifferenzen u (Gl. (2.10)) bestimmt werden, sei durch folgende Funktion gegeben:

$$s = f(l, w). \quad (2.9)$$

In diesem Abschnitt wird an späterer Stelle herausgestellt, dass neben gedehnten und ungedehnten Seillängen zusätzlich ein Materialgesetz (Gl. (2.43)) für die Abhängigkeit in (Gl. (2.9)) benötigt wird.

Der Vektor x der unbekannt räumlichen Koordinaten wird mit den dreidimensionalen Koordinaten x_i der Knotenpunkte P_i mit $i = 1, \dots, n$ mit $x_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ über $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ definiert. Der Vektor u enthält alle im Seilnetz zwischen den Knoten P_i definierten Seilstücke u_j . Für die einzelnen Seilstücke u_j werden Komponenten aus Koordinatendifferenzen $u_j = x_k - x_i$ mit $u_j = [x_k - x_i, y_k - y_i, z_k - z_i]^T$ gebildet.

Der Vektor u der Koordinatendifferenzen kann mit Hilfe einer Knoten-Kanten-Matrix C bestimmt werden. Die Knoten-Kanten-Matrix wird in Gl. (2.10) auf die unbekannt räumlichen Koordinaten x angewendet:

$$u = C \cdot x. \quad (2.10)$$

In der die Topologie des Netzes beschreibenden Knoten-Kanten-Matrix C sollen alle bekannten Verknüpfungsbeziehungen zwischen Knoten untereinander und Verbindungen zu den Festpunkten vorliegen.

Da diese später bei Linearisierung der Gleichgewichtsgleichung (Gl. (2.39)) benötigt wird, soll im Zusammenhang mit der Definition der Koordinatendifferenzen u als Funktion der unbekannt räumlichen Koordinaten in Gl. (2.10) die partielle Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}$ der Koordinatendifferenzen u nach den unbekannt Koordinaten bestimmt werden:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = C. \quad (2.11)$$

Mit der über einen iterativen Ansatz in Gl. (2.42) bestimmten Form x können auch die gedehnten Längen der Seile berechnet werden.

Aus der Knoten-Kanten-Matrix C kann die Information herausgelesen werden, welches Seilstück j jeweils welche Anfangs- und Endknoten miteinander verbindet. Die gedehnte Seillänge des Seilstücks j mit den Anfangs- und Endknoten $i(j)$ und $k(j)$ berechnet sich aus dem räumlichen Pythagoras über die Wurzel w_j

$$w_j = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}. \quad (2.12)$$

Für das Seilnetz werden die gedehnten Längen der n Seilstücke in einem Vektor $w^t = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]$ zusammengefasst.

Die Inzidenz- bzw. Knoten-Kanten-Matrix C beschreibt zeilenweise für die im Netz definierten Kanten die Inzidenz des Seilstücks j zu seinem Anfangs- und Endpunkt $i(j)$ und $k(j)$.

Falls der Punkt $i(j)$ Anfangspunkt der Kante ist, enthält die Inzidenzmatrix an der Stelle (j, i) eine +1, falls er Endpunkt der Kante ist, sonst eine -1. Analog gilt die Regelung für $k(j)$ an der Matrizenposition (j, k) . Somit ist die Inzidenz-Matrix C wie folgt definiert:

$$C(j, i) = \begin{cases} +1, & \text{für } i(j) = \text{Anfangsknoten,} \\ 0, & \text{für alle anderen Fälle,} \\ -1, & \text{für } k(j) = \text{Anfangsknoten.} \end{cases} \quad (2.13)$$

$$(2.14)$$

$$(2.15)$$

Die folgende Gleichgewichtsbetrachtung wird lokal mit Hilfe der Inzidenzmatrix C für einen einzelnen Knoten formuliert. Bei Gleichgewicht ist für alle von einem Knoten ausgehenden Kanten, die als topologische Information ebenso in der Inzidenzmatrix abgebildet sind, die Summe r der in den Kanten vorliegenden Seilkräfte s gleich Null:

$$r = C^t \cdot s = 0. \quad (2.16)$$

Neben dem für einen einzelnen Knoten durch Gl. (2.16) ausgedrückten Knotengleichgewicht wird eine globale Sicht für das Gleichgewicht des Gesamtsystems entwickelt. Diese drückt das Gleichgewicht zwischen äußeren und inneren Kräften über eine Gleichgewichtsmatrix A^t wie folgt aus:

$$A^t \cdot s = p. \quad (2.17)$$

Die Definition der Gleichgewichtsmatrix A^t erfolgt im Abschnitt 4.4 in Gl. (4.90).

Für Gleichgewichtsfiguren wie Stabtragwerke wird später allgemein nachgewiesen, dass die Koeffizienten der Gleichgewichtsmatrix identisch mit den trigonometrischen Funktionen $\cos \alpha_{s_i}$ und $\sin \alpha_{s_i}$ des Drehwinkels α_{s_i} des lokalen Koordinatensystems des i -ten Elements bezogen auf das globale Koordinatensystem sind. Siehe dazu im Abschnitt 4.4 die Gl. (4.90) in Verbindung mit Gl. (4.89) für das Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

Im dreidimensionalen Fall sind die Koeffizienten der Gleichgewichtsmatrix A^t identisch mit den Richtungskosinus $\cos \alpha_{1_j}$, $\cos \alpha_{2_j}$, $\cos \alpha_{3_j}$ des j -ten Elements. Die einzelnen Winkel α_j geben die Winkel des Seilstücks gegenüber den globalen Koordinatenachsen an [siehe z. B. Gründig 1975]. Die Koeffizienten können, falls die Komponenten eines Seils s_j aus Koordinatendifferenzen $(x_i - x_k, y_i - y_k, z_i - z_k)$ vorliegen, wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{1_j} &= \frac{x_i - x_k}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}} \\ \cos \alpha_{2_j} &= \frac{y_i - y_k}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}} \\ \cos \alpha_{3_j} &= \frac{z_i - z_k}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Die Richtungskosinus von Gl. (2.18) sind nichtlineare Funktionen der unbekanntenen Koordinaten x . Für die Richtungskosinus $\cos \alpha_{1_j}$, $\cos \alpha_{2_j}$, $\cos \alpha_{3_j}$ kann auch folgende alternative Schreibweise (Gl. (2.20)) für die Gleichgewichtsmatrix A^t entwickelt werden [Linkwitz 1976]. Für die alternative Formulierung der Gleichgewichtsmatrix werden Matrizen für die Koordinatendifferenzen und für die gedehnten Längen der Seilstücke aufgebaut.

Aus dem Vektor w wird eine Diagonalmatrix W gebildet, die die einzelnen Vektorkomponenten des Ausgangsvektors w auf ihre Diagonale abbildet:

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

In analoger Weise wird aus dem Vektor x eine Diagonalmatrix X aufgebaut. Die Matrix U aus dem Vektor u der Koordinatendifferenzen wird über drei Diagonalmatrizen gebildet:

Zunächst werden die einzelnen Vektoren mit den Koordinatendifferenzen $u_j = x_i - x_k$, $v_j = y_i - y_k$ und $w_j = z_i - z_k$ mit $i = 1, \dots, n$ und $n = \text{Anzahl der Seilstücke jeweils}$ in eine Diagonalmatrix abgebildet. Auf diese Weise entstehen zunächst drei Diagonalmatrizen, die die gleiche Matrixdimension wie die Diagonalmatrix W besitzen. Anschließend werden diese nebeneinander stehend zu einer Gesamtmatrix U zusammengefügt.

Abschließend wird die in Gl. (2.10) eingeführte Knoten-Kanten-Matrix C verwendet, um eine Matrizenverknüpfung zu der die Koordinatendifferenzen u repräsentierenden Gesamtmatrix U zu ermöglichen, die eine dreifache Spaltenanzahl bei gleicher Zeilenanzahl im Vergleich zur Diagonalmatrix W besitzt.

Die Gleichgewichtsmatrix A stellt zugleich auch die Jakobimatrix $\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)$ (A-Matrix) der Ausgleichung dar. Näheres siehe Abschnitt 6.1.4 bei der Beschreibung der Analogien zwischen der Ausgleichsrechnung und dem baustatischen Weggrößenverfahren (Tabelle 6.1).

Um die für die Ausgleichung notwendige Definition der Jakobimatrix A zu erhalten, die mit der Definition von Spalten für die Unbekannten die gesuchten Größen festlegt, die ausschließlich Koordinaten von unbekanntem veränderlichen Knoten enthalten darf, und damit die Definition von Koordinaten von Festpunkten ausschließt, müssen die Inzidenzinformationen für Festpunkte abgespalten werden.

Die verbleibende Knoten-Kanten-Matrix wird insgesamt dreimal in eine Hyperdiagonalmatrix C_D wie folgt abgebildet:

$$C_D = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Davon ausgehend kann die Gleichgewichtsmatrix A in Gl. (2.17) wie folgt mit den Matrizen W , U und der die Topologieinformation enthaltenden Matrix C_D gebildet werden [Linkwitz 1976]:

$$A = W^{-1} U C_D \quad \text{bzw.} \quad A^t = C_D^t U^t W^{-1}. \quad (2.21)$$

Wenn die für Vektoren mit Hilfe der Inzidenzmatrix C formulierte Beziehung aus Gl. (2.10) zwischen den Koordinatendifferenzen u und dem unbekanntem Koordinatenvektor x auf die eingeführten, auf die auf Diagonalmatrizen basierenden Matrizen U und C_D übertragen wird, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$X = U \cdot C_D \quad \text{bzw.} \quad X^t = C_D^t U^t. \quad (2.22)$$

Bei Gl. (2.22) ist zu beachten, dass die Matrix X nur die Koordinatendifferenzen zwischen variablen Knoten enthält, während sich in U alle Koordinatendifferenzen finden und damit auch Differenzkomponenten von Seilstücken zu Festpunkten.

An dieser Stelle soll ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass sich nun in der Matrix X Koordinatendifferenzen finden und keine einzelnen Koordinaten, die noch im Vektor x zusammengefasst waren. Die Notation folgt der Notation von [Linkwitz und Schek 1971, Linkwitz, Schek und Gründig 1974].

Mit Gl. (2.22) kann Gl. (2.21) für die Gleichgewichtsmatrix A auch wie folgt dargestellt werden [Linkwitz und Schek 1971]:

$$A = W^{-1} X. \quad (2.23)$$

Das Formfindungsverfahren für die unbekanntem Knotenkoordinaten x beim Seilnetz wird nun über das Prinzip der kleinsten Quadrate aufgebaut, das wie bereits für Gl. (2.6) erläutert, zugleich das Prinzip der minimalen Formänderungsenergie darstellt. Notwendige Bedingung für das Minimum von Gl. (2.8) ist:

$$\frac{\partial (v^t P v)}{\partial x} = 0 \quad \iff \quad 2 v^t P \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (2.24)$$

Mit $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$ und $v = f(x) - l$ aus Gl. (2.7) erhält man das nichtlineare Normalgleichungssystem:

$$g(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^t P (f(x) - l) = 0. \quad (2.25)$$

Die im Vektor w eingetragenen gedehnten Seillängen entsprechen durch Definitionsgleichung (2.12) der Funktion $f(x)$ der Unbekanntem. Damit kann der Vektor der Funktion $f(x)$ durch den Vektor w

$$f(x) = w \quad (2.26)$$

substituiert werden. Das nichtlineare Normalgleichungssystem Gl. (2.25) stellt sich wie folgt dar:

$$g(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^t P (w - l) = 0. \quad (2.27)$$

Da die partielle Ableitung von $f(x)$ nach den unbekanntem Koordinaten x gleich der partiellen Ableitung der Diagonalmatrix W nach den unbekanntem Koordinaten x

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = W^{-1} X = A \quad (2.28)$$

ist, kann das Normalgleichungssystem $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ aus Gl. (2.27) auch wie folgt formuliert werden:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{X}^t \mathbf{W}^{-1} \mathbf{P}}_{=\mathbf{A}^t} (\mathbf{w} - \mathbf{l}) = \mathbf{0}. \quad (2.29)$$

Im Vorgriff auf das Kraftdichteverfahren, bei dem für die Formfindung eine lineare Gleichung für die gesuchten Unbekannten \mathbf{x} definiert wird, soll Gl. (2.27) weiter umgeformt werden. Dabei wird wieder für den Aufbau einer multiplikativen Verknüpfung die Abbildung des Vektors \mathbf{v} auf die Diagonalmatrix \mathbf{V} genutzt, die die Vektorkomponenten von \mathbf{v} auf die Diagonale von \mathbf{V} projiziert.

Da für die Multiplikation einer Diagonalmatrix \mathbf{A} mit einem Vektor \mathbf{b} die kommutative Beziehung für die Verknüpfung von Diagonalmatrizen und Vektoren $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$ gilt, ist Gl. (2.29) zugleich:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^t \mathbf{W}^{-1} \underbrace{(\mathbf{W} - \mathbf{L}) \mathbf{p}}_{=\mathbf{P}(\mathbf{w} - \mathbf{l})} = \mathbf{0}. \quad (2.30)$$

Die inverse Diagonalmatrix \mathbf{W}^{-1} wird von vorne in die Klammer gesetzt und die Rechenregel $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$ erneut angewendet. Es ergibt sich der Ausdruck:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \mathbf{X}^t (\mathbf{E} - \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}) \mathbf{p} = \mathbf{0}, \\ &= \mathbf{X}^t \underbrace{\mathbf{P} \left(\mathbf{e} - \frac{\mathbf{l}}{\mathbf{w}} \right)}_{=\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Für $\mathbf{P} \left(\mathbf{e} - \frac{\mathbf{l}}{\mathbf{w}} \right)$ wird der Vektor \mathbf{q} und der Begriff Kraftdichte eingeführt.

Damit ist

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^t \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (2.32)$$

und damit das nichtlineare Normalgleichungssystem in einen linearen Zusammenhang überführt.

Zum Aufbau eines Newton-Verfahrens der Form

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \left(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}_i), \quad (2.33)$$

die aus der gebräuchlichen Notation des Newton-Verfahrens (siehe z. B. Arens, Hettlich u. a. 2015)

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \frac{\mathbf{g}(\mathbf{x}_i)}{\mathbf{g}'(\mathbf{x}_i)} \quad \text{über} \quad \left(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} = \frac{1}{\mathbf{g}'(\mathbf{x}_i)} \quad (2.34)$$

gewonnen wird, ist die Ableitung $\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}}$ von $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ zu bestimmen, die eine Gleichgewichtsgleichung darstellt.

Da die unbekannt Koordinaten sowohl in den Koordinatendifferenzen \mathbf{X} als auch in den Kraftdichten \mathbf{q} in den gedehnten Längen \mathbf{w} vorkommen, ist beim Differenzieren die Produktregel zu beachten.

Für $\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}}$ ist für das gegebene Produkt $\mathbf{X}^t \cdot \mathbf{q}$ die Produktregel wie folgt anzuwenden:

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left. \frac{\partial \mathbf{X}^t \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{X} = \text{const}} + \left. \frac{\partial \mathbf{X}^t \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{q} = \text{const}}. \quad (2.35)$$

Die Bestimmung des ersten Summanden $\left. \frac{\partial \mathbf{X}^t \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{X} = \text{const}}$ von Gl. (2.35) führt zu einer partiellen Ableitung der Kraftdichten nach den unbekannt Koordinaten:

$$\left. \frac{\partial X^t q}{\partial x} \right|_{X = \text{const}} = X^t \frac{\partial q}{\partial x} = X^t \frac{\partial \left[P \left(e - \frac{l}{w} \right) \right]}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \left[P \left(e - \frac{l}{w} \right) \right]}{\partial w} = \frac{\partial \left[\underbrace{p}_{= \text{konst.}} - P \frac{l}{w} \right]}{\partial w} = P L W^{-2}. \quad (2.37)$$

Mit der partiellen Ableitung $\frac{\partial w}{\partial x} = W^{-1} X$ aus Gl. (2.28) ergibt sich für das Ergebnis des Differenzierens des ersten Summanden von (2.35) somit:

$$\left. \frac{\partial X^t q}{\partial x} \right|_{X = \text{const}} = X^t P L W^{-3} X. \quad (2.38)$$

Die Bestimmung des zweiten Summanden $\left. \frac{\partial X^t q}{\partial x} \right|_{q = \text{const}}$ von Gl. (2.35) führt bei konstanten Kraftdichten zu einer partiellen Ableitung der Koordinatendifferenzen X nach den unbekanntenen Koordinaten x , für die wie in Gl. (2.10) wieder die Variable x verwendet werden soll.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial X^t q}{\partial x} \right|_{q = \text{const}} &= \frac{\partial X^t}{\partial x} \cdot q \quad \text{mit } X^t = C^t \cdot U \\ &= C^t \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \cdot q = C^t \cdot Q \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \\ &= C^t \cdot Q \cdot C. \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = C^t Q C + X^t P L W^{-3} X. \quad (2.40)$$

Das nichtlineare Normalgleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen Koordinaten mit Hilfe des Newton-Verfahrens lautet somit:

$$\left(C^t Q C + X^t P L W^{-3} X \right) \Delta x = A^t P (l - f(x_0)). \quad (2.41)$$

Mit der regulären Normalgleichungsmatrix $\left(C^t Q C + X^t P L W^{-3} X \right)$ können die unbekanntenen Koordinaten iterativ über folgende Gleichung mit Hilfe des Newton-Verfahrens berechnet werden:

$$\underbrace{\Delta x}_{= \Delta r} = \underbrace{\left(C^t Q C + X^t P L W^{-3} X \right)^{-1}}_{= \left[\frac{\partial G}{\partial r} \right]^{-1}} \underbrace{A^t P (l - f(x_0))}_{= G(r_0)}. \quad (2.42)$$

Nun soll der Übergang von der „reinen“, auf Basis der Geometrie des Seilnetzes formulierten Ausgleichung zu einer Ausgleichung vollzogen werden, die Gesetze der linearen Elastizität anwendet.

Die in Gl. (2.42) bisher nicht weiter definierten Gewichte p_i , die in der Gewichtsmatrix P zusammengefasst wurden, werden für den Aufbau einer Steifigkeitsmatrix durch Parameter eines Materialgesetzes wie Steifigkeitswerte der Form $\frac{E \cdot A}{l}$ (siehe Gl. (4.35) in Abschnitt 4.3.1) ersetzt. Die Gewichtsmatrix P soll als quadratische und symmetrische Matrix vorliegen. Konkret soll sie als reine Diagonalmatrix definiert werden, die ausschließlich auf der Diagonalen mit Gewichten besetzt ist. Der Umbau der Gewichtsmatrix zu einer Steifigkeitsmatrix wird durch die Definition von

$$P = H \cdot L^{-1} \quad (2.43)$$

vollzogen.

In Gl. (2.43) wird die quadratische Matrix \mathbf{H} verwendet, die den einzelnen in \mathbf{X} für ein Seilstück definierten Koordinatendifferenzen Matrixkoeffizienten $h_i = E_i \cdot A_i$ mit dem Elastizitätsmodul E_i und der Querschnittsfläche A_i des Seiles i zuordnet.

Mit der Umwandlung der Gewichtsmatrix \mathbf{P} in eine Steifigkeitsmatrix $\mathbf{H} \cdot \mathbf{L}^{-1}$ kann der aus Gl. (2.42) entwickelte Ausdruck Gl. (2.44)

$$\underbrace{\Delta \mathbf{x}}_{= \Delta \mathbf{r}} = \left(\underbrace{\mathbf{C}^t \mathbf{Q} \mathbf{C} + \mathbf{X}^t \mathbf{H} \mathbf{W}^{-3} \mathbf{X}}_{= \mathbf{K}} \right)^{-1} \underbrace{\mathbf{A}^t \mathbf{P} (\mathbf{I} - f(\mathbf{x}_0))}_{= \mathbf{G}(\mathbf{r}_0)} \quad (2.44)$$

durch einen Vergleich mit Gl. (2.3) mit Hilfe einer Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} , die sich bei der partiellen Ableitung $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{r}}$ aus dem Matrizenausdruck $(\mathbf{C}^t \mathbf{Q} \mathbf{C} + \mathbf{X}^t \mathbf{H} \mathbf{W}^{-3} \mathbf{X})$ entwickelt, wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= - \left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{r}} \right]^{-1} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}_0) \\ &= -\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Der Ansatz in Gl. (2.44) kann zur Berechnung der Gleichgewichtsfigur verwendet werden, falls bereits gute Näherungskordinaten vorliegen. In der Praxis wurde jedoch beobachtet, dass Berechnungen mit diesem Ansatz zu Seilknicken an den Rändern und sehr unterschiedlichen Stabkräften im Netzzinnern führen können [Gründig 1975, Linkwitz 1977].

Beim Auftreten des Phänomens des Seilknickens wurde in weiteren Berechnungen versucht, durch veränderte Koordinaten an den Randseilen und modifizierte Seilkräfte, oder durch veränderte Längen der Randseile eine Gleichgewichtsfigur mit verbesserter Seilführung zu berechnen. Dieses Vorgehen wird durch Linkwitz als „Nachspannen vom Rand aus“ bezeichnet, welches viel Erfahrung des Operateurs erforderte und meist mit großem Aufwand bei der Form- und Gleichgewichtsfindung verbunden war [Linkwitz 1977].

Aus diesen praktischen Erfahrungen heraus wird der damalige Wunsch nach Verbesserung der Ausgleichungsansätze verständlich, die vermittelnd zwischen den Formvorgaben des Architekten und den aus Sicht des Bauingenieurs notwendigen physikalischen Stabkräften wirken können. Durch zusätzliche Bedingungen zwischen den Unbekannten (siehe Anhang (A.44)) können Stabkräfte an beliebigen Stellen im Seilnetz, z. B. im inneren Seilnetzbereich, mathematisch definiert werden.

Ausgleichungsansatz für das Seilnetz

Der Ausgleichungsansatz benötigt wiederum ein genähertes Modell für ein Seilnetz. Dieses Modell soll sowohl Näherungswerte für die Geometrie als auch Näherungswerte für Spannungen zur Verfügung stellen. Vor Einführung der analytisch-statischen Formfindungsverfahren, dem „Modell im Computer“, konnte die Geometrie näherungsweise, wie es bei den Zeltdächern der olympischen Bauten in München praktiziert wurde, durch photogrammetrisches Messen eines verkleinerten Modells im Maßstab 1 : 75 oder 1 : 125 [Linkwitz und Schek 1971] bestimmt werden.

Dieses architektonisch vorliegende geometrische Modell musste anschließend mit physikalisch-mechanischen Parametern durch Vorgaben des Bauingenieurs für Spannungswerte ergänzt werden. Ein später durch ein Formfindungsverfahren wie das Kraftdichteverfahren [Schek 1974] bestimmtes analytisches Modell war dagegen bereits aus dem Gesichtspunkt „Form Follows Force“ heraus, bei dem sich die Form unmittelbar aus der Spannung durch Lösung der inversen Problemstellung ergibt, widerspruchsfrei bei den in der Formfindung ermittelten Koordinaten und Spannungen.

Mit Hilfe der Näherungswerte wird über Ausgleichung ein Seilnetz berechnet, das sich im Gleichgewicht befindet und das von der Ausgangsgeometrie und den Ausgangsspannungen nur minimal abweicht.

Für den Aufbau eines äquidistanten Teilnetzes soll das Seilnetz im inneren Bereich I aus gleich langen Seilstücken mit vorgegebener ungedehnter Länge bestehen. Für den äußeren Bereich mit der Bezeichnung R sind die Seillängen zum Rand individuell zu bestimmen.

Ausgehend von der zuvor festgelegten ungedehnten Seillänge l_0 werden die Seilkräfte im Innenbereich I automatisch bei der Formbestimmung durch die Ausgleichung definiert, da mit der endgültigen Form die Knotenabstände vorliegen, auf welche die Seilstücke elastisch gedehnt werden müssen. Im Randbereich dagegen müssen die Seilkräfte vorgegeben werden. Wie eingangs ausgeführt, liegen bei einem genäherten Modell genäherte Knotenlagen sowohl für das Seilinnere als auch für den Randbereich vor.

Auf Basis des Näherungsmodells kann eine Ausgleichung definiert werden, die für die Differenzen zwischen Soll- und Istwerten für Koordinaten und Seilkräfte das Minimumsprinzip

$$(x - x_0)^t P_1 (x - x_0) + (s_R - s_{R_0})^t P_2 (s_R - s_{R_0}) \Rightarrow \min. \quad (2.46)$$

definiert und mit der Nebenbedingung

$$A_I^t s_I + A_R^t s_R = p \quad (2.47)$$

verknüpft. Die Nebenbedingung formuliert die Gleichgewichtslage für den Innen- und Randbereich des Seilnetzes.

Analog zu dem Vorgehen, das bei Gl. (2.2) gezeigt wurde, wird die Gleichgewichtslage $G(x)$ des Seilnetzes, von einer genäherten Gleichgewichtslage $G(x_0)$ ausgehend, über eine Taylor-Reihenentwicklung $\tilde{G}(x_0)$ approximiert (Gl. (2.48)), die nach dem linearen Glied abgebrochen wird. Als lineare Glieder werden partielle Ableitungen nach den Koordinatenzuschlägen Δx und nach den Zuschlägen für Spannungen Δs definiert.

Bei der Linearisierung von $G(x)$ in Gl. (2.48) werden die Jakobimatrix B^t , die die partiellen Ableitungen nach den unbekanntem Koordinaten x enthält, und eine weitere Jakobimatrix A_R , die die partiellen Ableitungen nach den Stabkräften enthält, in der transponierten Form eingeführt. Die Jakobi- und Gleichgewichtsmatrix B , die sich in gleicher Funktion im Kraftgrößenverfahren im Abschnitt 6.2.2 findet, wird dort speziell in den Gleichungen (6.61) und (6.62) weiter ausgeführt.

In Gl. (2.48) ergibt sich dadurch für das lineare Glied zur Bestimmung der Spannungszuschläge der Ausdruck $A_R^t \cdot \Delta s$.

Analog zu der Wirkungsweise der Gleichgewichtsmatrix A^t (siehe z. B. Gl. (2.23)), die, mit Stabkräften verknüpft, das Gleichgewicht zu äußeren Kräften herstellt, steuert hier die Jakobimatrix A_R^t einen Beitrag zu den Ungleichgewichtskräften bei.

$$\begin{aligned} \tilde{G}(x) &= G(x_0) + \underbrace{\left(\frac{\partial G(x_0)}{\partial x} \right)}_{= B^t} \cdot \Delta x + \underbrace{\left(\frac{\partial G(s_R)}{\partial s_R} \right)}_{= A_R^t} \cdot \Delta s \quad \text{mit} \quad G(x) = G(s_R) = A_I^t s_I + A_R^t s_R - p \\ &= G(x_0) + B^t \cdot \Delta x + A_R^t \cdot \Delta s. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Die Ungleichgewichtskräfte $R_{(x_0)}$ sind als Differenz der Gleichgewichtslage \tilde{G} und der durch Näherungswerte berechneten Ungleichgewichtslage G_0 definiert. Durch die Zusammenfassung der Gleichgewichtsfunktionen \tilde{G} und G_0 zu R führt Gl. (2.48) schließlich zu folgendem Ausgleichungsansatz:

$$\underbrace{\tilde{G}(x) - G(x_0)}_{= R_{(x_0)}} = B^t \cdot \Delta x + A_R^t \cdot \Delta s. \quad (2.49)$$

Nach der Methode von Lagrange kann eine Minimumsfunktion Φ für den Ausgleichungsansatz durch Einführung eines einzelnen Lagrangeschen Korrelatenvektors k für die Nebenbedingung der Gl. (2.47) wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned} \Phi &= (x - x_0)^t P_1 (x - x_0) + (s_R - s_{R_0})^t P_2 (s_R - s_{R_0}) \\ &\quad - 2k^t \underbrace{(A_I^t s_I + A_R^t s_R - p)}_{= G(x) / G(s_R)} = \min. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Die partiellen Ableitungen nach den Unbekannten x , s und k werden anschließend zu Null gesetzt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 2 P_1 (x - x_0) - 2 \underbrace{\left(\frac{\partial G(x)}{\partial x} \right)^t}_{= B} k = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 (x - x_0) - \underbrace{\left(\frac{\partial G(x)}{\partial x} \right)^t}_{= B} k = 0 \\
 &\Rightarrow (x - x_0) = P_1^{-1} \underbrace{\left(\frac{\partial G(x)}{\partial x} \right)^t}_{= B} k = P_1^{-1} B k \quad \text{oder} \quad \Delta x = P_1^{-1} B k, \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial s_R} &= 2 P_2 (s_R - s_{R_0}) - 2 \underbrace{\left(\frac{\partial G(s_R)}{\partial s_R} \right)^t}_{= A_R} k = 0 \quad \Rightarrow \quad P_2 (s_R - s_{R_0}) - \underbrace{\left(\frac{\partial G(s_R)}{\partial s_R} \right)^t}_{= A_R} k = 0 \\
 &\Rightarrow (s_R - s_{R_0}) = P_2^{-1} \underbrace{\left(\frac{\partial G(s_R)}{\partial s_R} \right)^t}_{= A_R} k = P_2^{-1} A_R k \quad \text{oder} \quad \Delta s_R = P_2^{-1} A_R k, \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial k} &= A_I^t s_I + A_R^t s_R - p.
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Die obere und mittlere Gleichung von (2.51) soll als Erste und Zweite Korrelatengleichung bezeichnet werden, da in ihnen ein Zusammenhang zwischen den gesuchten unbekanntenen Größen Δx und Δs_R und dem jeweiligen Korrelatenvektor k definiert ist.

Diese beiden Gleichungen stellen bereits, falls der Korrelatenvektor k bekannt ist, Bestimmungsgleichungen für die gesuchten Zuschläge der Koordinaten Δx und Seilkräfte Δs_R dar.

Zur Berechnung von k wird die Erste Korrelatengleichung in Gl. (2.49) eingesetzt:

$$\left(B^t P_1^{-1} B \right) \cdot k + A_R^t \cdot \Delta s = R_{(x_0)}. \tag{2.52}$$

Für Δs im zweiten Summanden in Gl. (2.52) wird die Zweite Korrelatengleichung eingesetzt:

$$\left(B^t P_1^{-1} B \right) \cdot k + \left(A_R^t P_2^{-1} A_R \right) \cdot k = R_{(x_0)}. \tag{2.53}$$

Mit Gl. (2.53) ist der Korrelatenvektor k bestimmt:

$$k = \left(B^t P_1^{-1} B + A_R^t P_2^{-1} A_R \right)^{-1} \cdot R_{(x_0)}, \tag{2.54}$$

und damit auch die unbekanntenen Zuschläge Δx und Δs zu den Koordinaten und den Stabkräften:

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^{-1} B \left(B^t P_1^{-1} B + A_R^t P_2^{-1} A_R \right) \\ P_2^{-1} A_R \left(B^t P_1^{-1} B + A_R^t P_2^{-1} A_R \right) \end{bmatrix} \cdot R_{(x_0)}. \tag{2.55}$$

Damit stellt die Ausgleichsrechnung in Gestalt der Gl. (2.55) einen vermittelnden Ansatz dar, der die Vorgaben sowohl für die Geometrie als auch für Spannungen mit minimalen Abweichungen berücksichtigen kann. Die Vorgaben in Form von Näherungswerten werden zum Aufbau eines widerspruchsfreien mechanischen Gesamtsystems verträglich zusammengeführt. Das entstandene Seilnetz erfüllt die allgemeine Gleichgewichtsfunktion $G(r)$ der Gl. (2.1).

Bei geeigneten Näherungswerten sollten die über Gl. (2.55) erhaltenen Verbesserungen Δs_R zwischen den vom Bauingenieur vorgegebenen (s_{R_0}) und den durch Ausgleich bestimmten Spannungen s_R gering ausfallen. Es kann jedoch der Fall auftreten, dass infolge des Vorgangs „Seilspannen von außen“ die Spannungen s_I im inneren Seilbereich I nochmals für die bautechnische Umsetzung angepasst werden müssen und weitere Rechenschritte notwendig werden.

Durch die nachfolgende Erweiterung des Ansatzes von Gl. (2.49) mit zusätzlichen Bedingungen, die zwischen den Unbekannten x und s_R direkt im funktionalen Modell der Ausgleichung formuliert werden, können auch im inneren Bereich des Netzes Kräfte vorgegeben werden. Diese werden in Form von minimalen Abweichungen eingehalten.

Erweiterter Ausgleichsansatz für das Seilnetz

Neben der mit Kräften formulierten Nebenbedingung $G(s_R)$ der Gl. (2.47), die das Gleichgewicht für den inneren Seilbereich und den Randbereich ausdrückt, kommt bei dem erweiterten Ausgleichsansatz in Gl. (2.56) eine weitere geometrische Nebenbedingung hinzu, die Seilkräfte im Seilinnern definiert.

Die geometrische Nebenbedingung wird so aufgebaut, dass die Koordinatenzuschläge Δx für einen ausgewählten Seilbereich zu bestimmten relativen Positionen der Seilknoten führen. Diese bilden dann aufgrund der vorgegebenen gegenseitigen Knotenabstände sowohl einen geometrisch als auch physikalisch festgelegten Bereich. In diesem sind wegen den gedehnten Seillängen die mechanischen Dehnungen vordefiniert. Da bei der elastischen Reaktion eines Seiles bei vorgegebenem Materialverhalten eine direkte Abhängigkeit der Seilkraft von der Differenz zwischen ungedehnter und gedehnter Seillänge (Gl. (4.32)) besteht, können auf diese Weise Seilkräfte vorgegeben werden. Die Seilkräfte können folglich im Innenbereich I des Seilnetzes definiert werden.

Durch Formulierung des Minimalprinzips und der Nebenbedingungen ergibt sich folgende Aufgabenstellung für die Ausgleichsrechnung:

$$(x - x_0)^t P_1 (x - x_0) + (s_R - s_{R_0})^t P_2 (s_R - s_{R_0}) \Rightarrow \min.,$$

mit den beiden Nebenbedingungen

$$A_I^t s_I + A_R^t s_R = p \quad \text{und} \quad A_Z^t (x - x_0) = u_w. \quad (2.56)$$

Die folgende Linearisierung kann wieder angewendet werden:

$$\underbrace{G(x) - G(x_0)}_{= R(x_0)} = B^t \cdot \Delta x + A_R^t \cdot \Delta s. \quad (2.57)$$

Mit dem Minimalprinzip (2.56) in Verbindung mit den definierten Nebenbedingungen $A_I^t s_I + A_R^t s_R = p$ und $A_Z^t (x - x_0) = u_w$ kann eine Minimumsfunktion nach Lagrange der folgenden Art aufgebaut werden:

$$\begin{aligned} \Phi = & (x - x_0)^t P_1 (x - x_0) + (s_R - s_{R_0})^t P_2 (s_R - s_{R_0}) \\ & - 2 k_1^t (A_I^t s_I + A_R^t s_R - p) - 2 k_2^t (A_Z^t (x - x_0) - u_w) = \min. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Die partiellen Ableitungen der Minimumsfunktion nach den Unbekannten x , den unbekanntem Stabkräften s_R und den beiden Korrelatenvektoren k_1 und k_2 , die zu Null gesetzt werden, sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 2 P_1 (x - x_0) - 2 B k_1 - 2 A_Z k_2 = 0 \Rightarrow \underbrace{(x - x_0)}_{= \Delta x} = P_1^{-1} (B k_1 + A_Z k_2), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial s_R} &= 2 P_2 \underbrace{(s_R - s_{R_0})}_{= \Delta s_R} - 2 A_R k_1 = 0 \Rightarrow (s_R - s_{R_0}) = P_2^{-1} A_R k_1, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial k_1} &= -2 (A_I^t s_I + A_R^t s_R - p) = 0 \Rightarrow A_I^t s_I + A_R^t s_R = p, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial k_2} &= -2 (A_Z^t (x - x_0) - u_w) = 0 \Rightarrow \underbrace{A_Z^t (x - x_0)}_{= \Delta x} = u_w. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Die erste und zweite Gleichung von (2.59) stellen bereits die Bestimmungsgleichungen für die unbekanntem Koordinatenzuschläge Δx und Spannungszuschläge Δs_R dar.

Bei bekannten Korrelaten k_1 und k_2 lassen sich die Unbekannten Δx und Δs_R wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{B} & \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A}_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \end{bmatrix}, \\ \Delta \mathbf{s}_R &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{A}_R & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (2.60)$$

Der Ausdruck für $\Delta \mathbf{x}$ der ersten Gleichung von (2.59), wird zum Aufbau eines Zusammenhangs zwischen dem 1. und 2. Korrelatenvektor in die Gleichung (2.57) eingesetzt:

$$\mathbf{R}_{(x_0)} = \mathbf{B}^t \cdot \mathbf{P}_1^{-1} (\mathbf{B} \mathbf{k}_1 + \mathbf{A}_Z \mathbf{k}_2) + \mathbf{A}_R^t \cdot \Delta \mathbf{s}. \quad (2.61)$$

Der Ausdruck für $\Delta \mathbf{s}_R$ der zweiten Gl. von (2.59) wird analog in die Zwischengleichung (2.61) eingesetzt:

$$\mathbf{R}_{(x_0)} = \mathbf{B}^t \cdot \mathbf{P}_1^{-1} (\mathbf{B} \mathbf{k}_1 + \mathbf{A}_Z \mathbf{k}_2) + \mathbf{A}_R^t \cdot \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{A}_R \mathbf{k}_1. \quad (2.62)$$

Gl. (2.62) wird ausmultipliziert und anschließend werden jeweils Ausdrücke für die Korrelatenvektoren aufgebaut:

$$\mathbf{R}_{(x_0)} = (\mathbf{B}^t \cdot \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{B} \mathbf{k}_1 + \mathbf{A}_R^t \cdot \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{A}_R) \mathbf{k}_1 + (\mathbf{B}^t \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A}_Z) \mathbf{k}_2. \quad (2.63)$$

Der Ausdruck für $\Delta \mathbf{x}$ der ersten Gleichung von (2.59) wird in die vierte Gleichung von (2.59) eingesetzt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_w &= \mathbf{A}_Z^t \cdot \mathbf{P}_1^{-1} (\mathbf{B} \mathbf{k}_1 + \mathbf{A}_Z \mathbf{k}_2) \\ &= (\mathbf{A}_Z^t \cdot \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{B}) \mathbf{k}_1 + (\mathbf{A}_Z^t \cdot \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A}_Z) \mathbf{k}_2.\end{aligned}\quad (2.64)$$

Somit kann für die Korrelaten \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_2 folgendes Gleichungssystem aufgebaut werden:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{B}^t \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{A}_R^t \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{A}_R) & \mathbf{B}^t \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A}_Z \\ \mathbf{A}_Z^t \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{B} & \mathbf{A}_Z^t \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A}_Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{(x_0)} \\ \mathbf{u}_w \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Schließlich folgt für die Korrelaten

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}^t \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{A}_R^t \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{A}_R) & \mathbf{B}^t \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A}_Z \\ \mathbf{A}_Z^t \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{B} & \mathbf{A}_Z^t \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A}_Z \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{(x_0)} \\ \mathbf{u}_w \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

In Verbindung mit Gl. (2.60) kann dann die Bestimmung der Unbekannten $\Delta \mathbf{x}$ und $\Delta \mathbf{s}_R$ erfolgen.

Durch Einführung dieser zusätzlichen Bedingungen können folgende Ziele erreicht werden [Linkwitz 1977]:

- Seilkräfte können im Seilinneren vorgegeben werden. Durch Angleichen der Seilkräfte in fortgesetzten Seilbereichen kann ein homogener Seilkräfteverlauf aufgebaut werden. Das Seilknicken wird dadurch vermindert.
- Zusätzliche Bedingungen können im Gleichungssystem für aufeinanderfolgende Seilkräfte formuliert werden, so dass eine *automatische* Entknickung im Randbereich erreicht werden kann.
- Die jeweiligen Abweichungen vom vorgegebenen Modell, von der Form und von vorgegebenen Seilkräften können durch die für Form und Seilkräfte aufgestellten Gewichtsmatrizen gesteuert werden.

Durch die Hinzunahme von Nebenbedingungen konnten die Ausgleichungsverfahren für Seilnetze so weiterentwickelt werden, dass geeignete, in die Praxis umsetzbare Modelle auf Basis von Vorgaben von Architekten und Bauingenieuren vorlagen [Gründig 1975, Linkwitz 1977].

2.2.3. Das Kraftdichteverfahren

Das Kraftdichteverfahren wurde im Zusammenhang mit den Forschungsaktivitäten des SFB 64 für leichtgewichtige Flächentragwerke von Schek als Formfindungsverfahren für Seilnetze entwickelt [Linkwitz und Schek 1971, Schek 1974]. Anfang der 1990er Jahre kamen als zusätzliche Forschungsgegenstände des Instituts für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen der Universität Stuttgart Membranflächen und Minimalflächen hinzu, deren Ansätze durch Gründig und weitere Stuttgarter Wissenschaftler der dritten Generation entwickelt wurden. Als Vertreter der dritten Generation sind [Ströbel 1995] und [Singer 1995] zu nennen, die ihre Arbeiten später in Berlin fortsetzten. Das Kraftdichteverfahren wurde damit für Membranflächen, Minimalflächen und Pneus verallgemeinert. Dabei wird die Diskretisierung der Flächen über Dreiecke durchgeführt. Die in den Dreiecken definierten elastischen Eigenschaften werden mit Gesetzen der linear-elastischen Mechanik formuliert. [Singer 1995, Gründig, Moncrieff u. a. 2000].

Wenige Jahre später wurde als weiterer Entwicklungsschritt bei den Formfindungsverfahren mit der Updated Reference Strategy von Bletzinger [Bletzinger und Ramm 1999] eine kontinuumsmechanisch definierte Formfindungsmethode auf Basis der finiten Elemente entworfen, die eine Verallgemeinerung der verschiedenen Kraftdichtemethoden darstellt.

Diese Methode formuliert konsequent das physikalische Modell auf Grundlage der Kontinuumsmechanik und kann deswegen auch Anwendungen der nichtlinearen Mechanik verarbeiten, die z. B. eine Modellierung von großen Verschiebungen und nichtlinearen geometrischen Verzerrungen erfordern. Die Updated Reference Strategy wendet damit Gesetze der nichtlinearen Elastizität an, die die lineare Elastizität als Sonderfall einschließt.

An dieser Stelle soll zunächst das Kraftdichteverfahren von Schek 1974 ausgehend von den Grundlagen des Abschnitts 2.2.2 hergeleitet werden. Danach wird die Anwendung der Updated Reference Strategy beispielhaft für die Berechnung von Seilnetzen dargestellt.

Bei den späteren Verfahren [Singer 1995] werden Minimalprinzipien mit unterschiedlich ausgeprägten Kraftdichtegrößen verknüpft. Für Minimalflächen wird ein Minimumsprinzip formuliert, das die Gesamtfläche der Minimalfläche über eine ungewichtete Quadratsumme von Dreiecksflächen ausdrückt. Auf diese Weise wird die Gesamtfläche durch die Ausgleichung automatisch einer Minimierung zugeführt. Als Kraftdichte für das Verfahren zur Berechnung einer Minimalfläche wurde eine Größe gefunden, die Parameter für die Dreiecksfläche und die gedehnten und ungedehnten Dreiecksseiten enthält.

Bei den verschiedenen Verfahren, die für Minimalflächen, Membranflächen und druckbelastete Pneus aufgebaut wurden, werden unterschiedliche geometrische Größen, als auch Kraft- und Weggrößen unter dem Begriff Kraftdichte subsumiert. In der Gleichgewichtsfunktion, die für die Formfindung der speziellen Fläche aufgestellt wird, können Koordinaten in einen linearen Zusammenhang mit der als Rechengröße aufzufassenden Kraftdichte gebracht werden. So entsteht bei dem Kraftdichteverfahren für die spezielle Fläche ein lineares Gleichungssystem für die Flächengeometrie, das eindeutig aufgelöst werden kann.

Bei der Darstellung der in Stuttgart für die Seilnetze entwickelten Ausgleichungsverfahren wurde bereits in Gl. (2.17) eine Kraftdichte eingeführt, die anstelle von Materialparametern über geodätische Gewichte definiert ist, und die eine lineare Gleichgewichtsbeziehung zwischen inneren und äußeren Kräften ermöglicht. Für den Einsatz von Kraftdichten bei der Ermittlung des Kräftegleichgewichts von Ortra-Systemen wird auf Gl. (7.11) im Abschnitt 7.3.5 verwiesen.

Die in Verbindung mit der Kraftdichte in Gl. (2.17) auftretende Gleichgewichtsmatrix A^t wurde im Abschnitt 2.2.2 in Gl. (2.23) in eine lineare Funktion der gesuchten Koordinaten X überführt.

Die beiden Gleichungen (2.17) und (2.23) können zu

$$X^t \underbrace{W^{-1} s}_{= q} = 0 \quad (2.67)$$

zusammengefasst werden.

Die Stabkräfte s werden mit den inversen Längen W^{-1} zu der neuen Größe Kraftdichte q kombiniert. Mit den Kraftdichten q ergibt sich die Gleichung $X^t q = 0$ für das Gleichgewicht, die bereits in Gl. (2.32) formuliert

wurde. Dort wurde diese Größe für ein nichtlineares Normalgleichungssystem verwendet, das Ausgangspunkt für eine Linearisierung war, die für den Aufbau eines Newton-Raphson-Verfahrens benötigt wurde.

Grundgleichung für das Kraftdichteverfahren

Mit Gl. (2.67) ist eine Grundgleichung für ein Kraftdichteverfahren gegeben.

Falls die beim nichtlinearen Normalgleichungssystem verwendete Gewichtsmatrix P beim Übergang von der Ausgleichsrechnung in die Elastomechanik in eine Steifigkeitsmatrix K mit Hilfe der Gl. (2.43) überführt wird, dann ist die für das Normalgleichungssystem in Gl. (2.31) eingeführte Größe q mit der Kraftdichte in Gl. (2.67) identisch.

Aus der Ableitung $\frac{\partial X^t q}{\partial x}$ in Gl. (2.39) kann man ablesen, dass die Funktion

$$X^t q = (C^t Q C) \cdot x = 0 \quad (2.68)$$

mit Hilfe der Knoten-Kanten-Matrix C (siehe Gleichungen (2.13) – (2.15)) und einer Diagonalmatrix Q mit Kraftdichten, die beide über einen Ausdruck $C^t Q C$ mit dem Vektor der unbekanntenen Koordinaten x verknüpft werden, ein Kräftegleichgewicht beschreibt, falls keine äußeren Kräfte vorliegen.

Beim Vorliegen einer Belastung durch äußere Kräfte ist in die Gleichgewichtsfunktion der Gl. (2.68) für die rechte Seite der Vektor p für äußere Kräfte einzusetzen.

Die Koeffizienten der Koordinaten x sollen in unbekannte Neukoordinaten und in gegebene Festpunktkoordinaten unterteilt werden, wie es für den Aufbau der Jakobimatrix A erfolgte, und vorbereitend bei der Hyperdiagonalmatrix C_D in Gl. (2.20) gedanklich durchgeführt wurde.

Bei dieser Unterteilung sollen die unbekanntenen Neukoordinaten in einen Vektor gespeichert werden, der weiterhin die Bezeichnung x beibehalten soll, und die vorgegebenen Festkoordinaten in einen Vektor x_f .

Die allgemeine Knoten-Kanten-Matrix C soll entsprechend in C für Neupunkte und C_f für Festpunkte aufgespalten werden. Hierfür wird die Gl. (2.68) weiter modifiziert und das Gleichgewichtssystem durch äußere Kräfte p belastet:

$$X^t q = (C^t Q C) \cdot x + (C^t Q C_f) \cdot x_f = p \quad (2.69)$$

2.2.4. Updated Reference Strategy für Membranen und Seilnetze

Die für zweidimensionale Flächen aufgebauten Varianten der Kraftdichteverfahren wurden am Institut von Klaus Linkwitz für „Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen“ an der Universität Stuttgart aus den Seilnetzen entwickelt [Schek 1974, Singer 1995]. Für die geometrisch nichtlineare statisch-analytische Formfindung von leichtgewichtigen Flächen ging die Entwicklung von Seilnetzen in Richtung der Minimal- und Membranflächen [Gründig, Moncrieff u. a. 2000]. Diese Entwicklungen hielten später Einzug in den kommerziellen Bereich.

Bei der Updated Reference Strategy (URS) verläuft die Entwicklung ausgehend von speziellen Flächen, die in den dreidimensionalen Raum eingebettet sind, wie den Membran- und Minimalflächen. Ihre Form stellt sich automatisch als Reaktion auf die für das Kontinuum bei materiellen Punkten vorgegebenen Spannungen ein. Bei der URS werden die Ansätze in anderer Form mit Hilfe der Theorie der Kontinuumsmechanik und der Differentialgeometrie formuliert. Die Membran- und Minimalflächen werden z. B. allgemein durch zwei krummlinige Flächenkoordinaten parametrisiert. Die Formfindung eines Seilnetzes ergibt sich durch die Anwendung der Theorie der URS auf den eindimensionalen Fall.

Anmerkung: Die URS verwendet weitere Grundlagen des Kapitels 3 und dort speziell die Notation der Kontinuumsmechanik. Deshalb finden sich bei der Einführung dieser kontinuumsmechanisch formulierten Methode vermehrt Verweise auf Formeln des Kapitels 3.

Die URS definiert allgemein die Gleichgewichtslage mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit (siehe Gl. (3.197) in Abschnitt 3.6.2). Dieses Gleichgewichtssystem wird mit seinen konjugierten mechanischen Größen auf die aktuelle Konfiguration κ_M bezogen. Die folgenden Volumen- und Flächenintegrale werden deswegen mit Größen der aktuellen Konfiguration κ_M formuliert.

Die Membran soll mechanisch als vorgespannte leichtgewichtige Fläche Lasten in tangentialer Richtung abtragen. Die Membran wird über die Mittelfläche modelliert, und die mechanischen Größen werden auf die Mittelfläche bezogen. Die Spannungsverteilung über die Dicke des Materials wird als konstant angenommen [Bletzinger und Ramm 1999].

Aus diesem Grund wird für das dünne Flächentragwerk das Volumenintegral der Gl. (3.197) durch ein Flächenintegral \int_a ersetzt. Für die gesamte Membranfläche wird eine konstante Materialdicke t eingeführt. Nach dem Übergang auf die Fläche ergeben sich für Gl. (3.197) folgende Ausdrücke:

$$\delta W = t \cdot \int_a \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{e} da = t \cdot \int_a \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial(\delta \boldsymbol{u})}{\partial x} da = t \cdot \int_a \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{u}_{,x} da = 0. \quad (2.70)$$

Mit Gl. (3.193) wird die virtuelle Verschiebung in einen Formel­ausdruck $\delta \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}$ übersetzt. Der Tensor \boldsymbol{F} ist der Deformationsgradient, siehe Gl. (3.22). Dann kann Gl. (2.70) umformuliert werden zu:

$$\delta W = t \cdot \int_a \boldsymbol{\sigma} : (\delta \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}) da = 0. \quad (2.71)$$

Mit der Formel von Nanson (Gl. (3.85)) und Nutzung der Beziehung für Flächenintegrale (Gl. (3.88)) ergibt sich der Übergang in die Referenzkonfiguration κ_R :

$$\delta W = t \cdot \int_A \boldsymbol{\sigma} : (\delta \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}) \det \boldsymbol{F} dA = 0. \quad (2.72)$$

Über eine elementare Umformung, wie sie in Gl. (3.197) dargestellt wird, unter Nutzung der Rechenregel Gl. (3.196) für doppelte Verjüngung, wird der Ausdruck für δW schließlich:

$$\delta W = t \cdot \int_a (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{S}) : \delta \boldsymbol{F} da \quad (2.73)$$

oder

$$\delta W = t \cdot \int_A \det \boldsymbol{F} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{F}^{-T}) : \delta \boldsymbol{F} dA = 0, \text{ wenn Gl. (3.196) auf Gl. (2.72) angewendet wird.} \quad (2.74)$$

Diskretisierung für Anwendung der Finite-Elemente-Methode Für die Formfindung von Membranen stellt Gl. (2.74) eine mit kinematischen (Gl. (3.22)) und kinetischen Größen (Gl. (3.79)) formulierte Ausgangsgleichung für eine numerische Lösung dar, die auf dem Prinzip der virtuellen Arbeiten (Gl. (3.185)) basiert. Eine numerische Lösung ist erforderlich, da eine geschlossene Lösung des nichtlinearen Randwertproblems (Gl. (2.74)) in der Regel nicht möglich ist. Als Lösungsansatz wird die Finite-Elemente-Methode gewählt.

Für die Approximation des Gebiets wird dieses in nicht überlappende finite Elemente aufgeteilt. Dieser Vorgang wird als Diskretisierung bezeichnet. Dabei soll das isoparametrische Konzept zum Einsatz kommen. Bei isometrischen Elementen werden sowohl die Geometrie als auch die mechanischen Feldgrößen des finiten Elementes durch gleiche Ansatzfunktionen N^k approximiert [Wriggers 2001].

Im Unterschied zur Kraftdichtemethode für Membranflächen [Singer 1995], die über eine Diskretisierung ausschließlich mit Dreiecken formuliert wurde, eröffnet sich bei Anwendung der Finite-Elemente-Methode die Möglichkeit, bei Definition der Diskretisierung der Membranfläche beliebige geometrische Flächen zur Approximation des Gebietes auszuwählen. Für die Diskretisierung bieten sich beispielsweise isoparametrische drei- oder vierknotige finite Elemente (Dreiecks- oder Viereckselemente) an.

Dreieckselement Für Dreieckselemente können die Ansatzfunktionen N^k wie folgt definiert werden [Bletzinger und Ramm 1999, Wriggers 2001]:

$$\begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^3 N^k \begin{bmatrix} \bar{X}_k^1 \\ \bar{X}_k^2 \\ \bar{X}_k^3 \end{bmatrix}, \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} N^1 &= 1 - \theta^1 - \theta^2, & \frac{\partial N^1}{\partial \theta^1} &= -1, & \frac{\partial N^1}{\partial \theta^2} &= -1, \\ N^2 &= \theta^1, & \frac{\partial N^2}{\partial \theta^1} &= 1, & \frac{\partial N^2}{\partial \theta^2} &= 0, \\ N^3 &= \theta^2, & \frac{\partial N^3}{\partial \theta^1} &= 0, & \frac{\partial N^3}{\partial \theta^2} &= 1. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Die partiellen Ableitungen der Ansatzfunktionen N^k nach θ^1 und θ^2 in Gl. (2.76) sind konstant, so dass die Verzerrungen im Element konstant sind.

Viereckselement Für ein Viereckselement lauten die Ansatzfunktionen:

$$\begin{aligned} N^1 &= \frac{1}{4} (1 + \theta^1) \cdot (1 + \theta^2), \\ N^2 &= \frac{1}{4} (1 - \theta^1) \cdot (1 + \theta^2), \\ N^3 &= \frac{1}{4} (1 - \theta^1) \cdot (1 - \theta^2), \\ N^4 &= \frac{1}{4} (1 + \theta^1) \cdot (1 - \theta^2). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Der Definitionsbereich für θ^1 und θ^2 im Viereckselement ist $[-1, 1]$.

Nach der Diskretisierung des Gesamtgebiets und der Definition der Freiheitsgrade eines Elements bezieht sich die Variation von kontinuumsmechanischen Größen, z. B. des Deformationsgradienten F , auf die Variation der Freiheitsgrade wie z. B. die unbekanntenen Verschiebungen im ausgewählten finiten Element.

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_r} \delta \mathbf{u}_r \quad \text{oder allgemein} \quad \delta(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{u}_r} \delta \mathbf{u}_r. \quad (2.78)$$

Wird Gl. (2.78) in die Ausgangsgleichung (2.74) eingesetzt, ergibt sich der folgende Ausdruck:

$$\begin{aligned} \delta W &= \mathbf{t} \cdot \int_A \det F (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \delta \mathbf{u}_r \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_r} dA = \mathbf{0}, \\ &= \delta \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{t} \cdot \int_A \det F (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_r} dA = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Die Variation δW kann durch das Produkt der partiellen Ableitung der virtuellen Arbeit $\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}_r}$ nach den unbekanntenen Verschiebungen und der Variation $\delta \mathbf{u}_r$ ausgedrückt werden:

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}_r} \cdot \delta \mathbf{u}_r. \quad (2.80)$$

Dieser Ausdruck (2.80) wird in Gl. (2.79) für δW eingesetzt und ergibt:

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}_r} \cdot \delta \mathbf{u}_r = \delta \mathbf{u}_r \cdot t \cdot \int_A \det \mathbf{F} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}_r} dA = \mathbf{0}. \quad (2.81)$$

Durch Kürzung von $\delta \mathbf{u}_r$ folgt eine Gleichung für unbekannte Verschiebungen für die mit finiten Elementen diskretisierte Membranfläche:

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}_r} = t \cdot \int_A \det \mathbf{F} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}_r} dA = \mathbf{0}. \quad (2.82)$$

Linearisierung Nach dem Schritt der Diskretisierung der Membranfläche durch finite Elemente liegt die Gleichgewichtsfunktion weiterhin in einer nichtlinearen Form vor. So sind die Freiheitsgrade des Ansatzes, die in Gl. (2.78) als Verschiebungen \mathbf{u}_r gewählt wurden, nichtlinear von den vorgegebenen Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ abhängig.

Für die in schwacher Form definierte Gleichgewichtsfunktion soll wegen der angestrebten Analogiebetrachtung zu den in Abschnitt 2.2.2 vorgestellten Verfahren (siehe Gleichungen (2.44), (2.48) und (2.57)) wieder eine Bezeichnung $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ in Abhängigkeit der Koordinaten \mathbf{r} wie in Gl. (2.1) gewählt werden.

Durch eine Linearisierung über eine Taylorreihe $\tilde{\mathbf{G}}$ analog zu Gl. (2.2) wird Gl. (2.82) für eine iterative Gleichungslösung durch ein Newton-Raphson-Verfahren vorbereitet:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}} &= \text{LIN} \left(\underbrace{\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}_r}}_{= \mathbf{G}(\mathbf{r})} \right) = \underbrace{\mathbf{G}(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_{R_0} = \mathbf{0})}_{= \mathbf{R}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}_r}}_{= \mathbf{K}} \cdot \Delta \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \\ &\Rightarrow \Delta \mathbf{u}_r = - \left[\underbrace{\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}_r}}_{= \mathbf{K}} \right]^{-1} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}_0) \\ &= -\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Die partielle Ableitung $\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}_r}$ nach den Verschiebungen \mathbf{u}_R wird mit $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ bezeichnet. Diese Bezeichnung, die auf eine Gleichgewichtsfunktion hinweist, ist aus physikalischen Gesichtspunkten gerechtfertigt. Denn die Ableitung einer virtuellen Arbeit nach einer Weggröße, wie sie die Verschiebung \mathbf{u}_r darstellt, ergibt eine Kraft.

Da die Variation δW der virtuellen Arbeit mit $\delta W = 0$ gegeben war, die ein Gleichgewicht des mechanischen Systems kennzeichnet, muss mit diesem Zusammenhang ($\delta W = 0$) die partielle Ableitung $\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}_r}$ folglich eine Gleichgewichtsfunktion darstellen.

Die genäherte Gleichgewichtsfunktion $\mathbf{G}(\mathbf{r}_0)$, die mit den vorliegenden und später verbesserten Ausgangswerten für die Koordinaten berechnet wird, ist Entwicklungspunkt des Newton-Raphson-Verfahrens zur linearen Bestimmung der Zuschläge für die gewählten Freiheitsgrade.

$$\begin{aligned} \text{LIN} \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}_r} \right)_{\kappa_M} &= \underbrace{t \cdot \int_A \det \mathbf{F} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}_r} dA}_{= \mathbf{R}} \\ &+ \Delta \mathbf{u}_r \cdot \underbrace{t \cdot \int_A \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_r} \left(\det \mathbf{F} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}_r} \right) dA}_{= \mathbf{K}} = \mathbf{0} \\ &= \mathbf{R} + \Delta \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

$\text{LIN} \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}_r} \right)_{\kappa_M}$ in Gl. (2.84) wird auf die aktuelle Konfiguration κ_M bezogen. Die Gl. (2.84) in der Referenzkonfiguration κ_R formuliert führt zu $\text{LIN} \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}_r} \right)_{\kappa_R}$:

$$\begin{aligned} \text{LIN} \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}_r} \right)_{\kappa_R} &= \underbrace{t \cdot \int_a (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}_r} da}_{= \mathbf{R}} \\ &+ \Delta \mathbf{u}_r \cdot \underbrace{t \cdot \int_a \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}_r} \cdot \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}_r} da}_{= \mathbf{K}} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Man beachte in Gl. (2.85), dass der in Referenzkonfiguration κ_R formulierte Spannungsvektor \mathbf{S} einen konstanten Ausdruck darstellt, für den bei Differenzierung nach $\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_r}$ keine Produktregel angewendet werden muss, da die kovarianten Basisvektoren \mathbf{G}_i von \mathbf{S} (siehe Gl. (3.95) in Abschnitt 3.4.2) nicht linear abhängig von den Verschiebungen \mathbf{u}_R sind.

Der Vektor der Ungleichgewichtskräfte \mathbf{R} in κ_M in Gl. (2.84) ist somit:

$$\mathbf{R} = t \cdot \int_A \det \mathbf{F} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}_r} dA. \quad (2.86)$$

Die Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{rs} wird in Gl. (2.84) durch die partielle Ableitung nach den Freiheitsgraden \mathbf{u}_r gebildet:

$$\mathbf{K}_{rs} = t \cdot \int_A \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_r} \left(\det \mathbf{F} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}_r} \right) dA. \quad (2.87)$$

Nach Gl. (3.31) in Abschnitt 3.3.3 kann der Deformationsgradient als Tensorprodukt $\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i$ eines ko- und kontravarianten Basisvektors aus unterschiedlichen Konfigurationen κ_R und κ_M dargestellt werden.

Die Basisvektoren \mathbf{G}^i in der Referenzkonfiguration κ_R bleiben bei Deformationen, die durch den Deformationsgradient \mathbf{F} und durch gegenüber \mathbf{X} veränderte Koordinaten $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}_r$ der aktuellen Konfiguration κ_M abgebildet werden, wieder konstant. So verschwindet auch die zweite partielle Ableitung

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}_r \partial \mathbf{u}_r} = \frac{\partial^2 \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{u}_r \partial \mathbf{u}_r} \otimes \mathbf{G}^i = \mathbf{0}, \quad (2.88)$$

da die Verschiebungen \mathbf{u}_r nur *lineare* Funktionen der Basisvektoren \mathbf{g}_i sind.

Für Gl. (2.87) kann wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_s} \left(\det \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\alpha\beta} (\mathbf{g}_{\alpha,r} \cdot \mathbf{g}_\beta) \right) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_s} \left(\underbrace{\det \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\alpha\beta}}_{= \text{const.}} \cdot (\mathbf{g}_{\alpha,r} \cdot \mathbf{g}_\beta) \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_s} \left(\det \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\alpha\beta} \cdot \underbrace{(\mathbf{g}_{\alpha,r} \cdot \mathbf{g}_\beta)}_{= \text{const.}} \right) \\ &= \left(\det \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\alpha\beta} \cdot (\mathbf{g}_{\alpha,r} \cdot \mathbf{g}_{\beta,s}) \right) + \left((\det \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\alpha\beta})_{,s} \cdot (\mathbf{g}_{\alpha,r} \cdot \mathbf{g}_\beta) \right) \end{aligned} \quad (2.89)$$

folgende Darstellung der Tangentensteifigkeitsmatrix entwickelt werden [Bletzinger und Ramm 1999]:

$$\mathbf{K}_{rs} = t \cdot \int_A \left[\left(\det \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\alpha\beta} \cdot (\mathbf{g}_{\alpha,r} \cdot \mathbf{g}_{\beta,s}) \right) + \left((\det \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\alpha\beta})_{,s} \cdot (\mathbf{g}_{\alpha,r} \cdot \mathbf{g}_\beta) \right) \right] dA. \quad (2.90)$$

Seilnetz *Anmerkung:* In Fortsetzung des vorherigen Abschnitts wird die folgende Darstellung der Formfindung des Seilnetzes auf Basis der Updated Reference Strategy weiter kontinuumsmechanisch formuliert. Deshalb finden sich bei den Formeln wieder Verweise auf Kapitel 3.

Ausgangspunkt beim Seilnetz ist erneut die Formulierung der schwachen Form des Gleichgewichts. Unter der Voraussetzung einer gleichbleibenden Querschnittsfläche A für das Seil wird das Volumenintegral \int_V

für den Körper des Kontinuums in Gl. (3.197) in ein Kurvenintegral \int_S über die Bogenlänge des Seils S überführt. Mit der konstanten Querschnittsfläche A multipliziert ergibt der Wert dieses Kurvenintegrals wieder ein Volumen V .

Die Ausgangsformel (2.74) für die URS lautet somit für Seilnetze nach Aufbau des Integrals über die Bogenlänge:

$$\delta W = A \cdot \int_S \det F (\sigma \cdot F^{-T}) : \delta F dS = 0. \quad (2.91)$$

Als nächstes wird schrittweise die Ausgangsformel für das Seilnetz (Gl. (2.91)) umgeformt, um dadurch eine weitere Vereinfachung zu erreichen.

Längs des Seils wird die krummlinige Koordinate θ_1 gelegt. Der kovariante Basisvektor \mathbf{g}_1 mit $\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_1}$ liegt in jedem Kurvenpunkt des Seils tangential zur Parameterlinie θ_1 . Die beiden weiteren für das Seilelement zu definierenden Basisvektoren \mathbf{g}_2 und \mathbf{g}_3 sollen jeweils senkrecht zur Parameterlinie θ_1 und damit zu \mathbf{g}_1 stehen. Die Basisvektoren \mathbf{g}_2 und \mathbf{g}_3 sind im Unterschied zu \mathbf{g}_1 normiert, und deswegen gilt:

$$\|\mathbf{g}_2\| = 1 \quad \text{und} \quad \|\mathbf{g}_3\| = 1. \quad (2.92)$$

Da auch $\mathbf{g}_2 \perp \mathbf{g}_3$ gilt, ist die Determinante $\det F$ des Deformationstensors wegen Gl. (3.87) in Abschnitt 3.4.2 gleich $\det F = \frac{\|\mathbf{g}_1\|}{\|\mathbf{G}_1\|}$.

Bei den Spannungsverhältnissen im Seil wird angenommen, dass Spannungen senkrecht zu \mathbf{g}_1 verschwinden, und im Querschnitt eine konstante Spannungsverteilung in Richtung von \mathbf{g}_1 vorliegt. Dadurch verkürzt sich der Spannungstensor, der im Allgemeinen neun Spannungskoeffizienten σ_{ij} enthält, auf einen Tensor, der nur noch über einen Spannungskoeffizienten in Richtung von \mathbf{g}_1 definiert wird.

Somit kann bei einem Seilelement die Darstellung des Cauchyschen Spannungstensors σ durch einen Einheitstensor erfolgen, der mit einer einzelnen Spannungskomponente $\hat{\sigma}$ multipliziert wird:

$$\sigma = \hat{\sigma} \cdot \mathbf{I}. \quad (2.93)$$

In Gl. (2.91) kann der Ausdruck $F^{-T} : \delta F$ für das Seilelement weiter vereinfacht werden, so dass nur noch Abhängigkeiten vom Basisvektor \mathbf{g}_1 existieren. Unter Nutzung von Rechenvorschriften, die in Gl. (3.37) in Abschnitt 3.3.3 dargestellt werden, lässt sich $F^{-T} : \delta F$ wie folgt überführen:

$$F^{-T} : \delta F = \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{G}_\alpha : \delta (\mathbf{g}_\beta \otimes \mathbf{G}^\beta) = (\mathbf{g}^\alpha \cdot \delta \mathbf{g}_\beta) (\mathbf{G}_\alpha \cdot \mathbf{G}^\beta) = (\mathbf{g}^\alpha \cdot \delta \mathbf{g}_\beta) \delta_\alpha^\beta = \mathbf{g}^\alpha \cdot \delta \mathbf{g}_\alpha. \quad (2.94)$$

Bei diesem Zwischenergebnis wird mit Hilfe von Gl. (3.34) die gemischtvariante Basis $\delta \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}^\alpha$ in eine kovariante Darstellung überführt:

$$\delta \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}^\alpha = g^{\alpha\alpha} \cdot \delta \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_{\alpha'}, \quad \text{man beachte, dass für den Metrikkoeffizient} \quad g^{\alpha\alpha} = \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \quad \text{gilt.} \quad (2.95)$$

Mit der folgenden Darstellung der Variation $g^{\alpha\alpha} \cdot \delta \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_{\alpha'}$, die ausschließlich über \mathbf{g}_1 formuliert wird, da keine Beiträge zur schwachen Form des Gleichgewichts in Richtung \mathbf{g}_2 und \mathbf{g}_3 entstehen, ergibt sich schließlich folgender Ausdruck für $F^{-T} : \delta F$:

$$F^{-T} : \delta F = g_{11} (\delta \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1). \quad (2.96)$$

Beim Seilnetz muss also die Variation des Deformationsgradienten δF ausschließlich in Abhängigkeit des Basisvektors \mathbf{g}_1 durchgeführt werden.

Durch Annahme einer konstanten Spannung über die Querschnittsfläche des Seilelements besteht keine funktionale Abhängigkeit der virtuellen Arbeit δW zu den beiden Basisvektoren \mathbf{g}_2 und \mathbf{g}_3 , die senkrecht zur Wirkungsrichtung der Seilkraft stehen und sich damit in der Querschnittsfläche des Seilelements befinden.

Gl. (2.93) in Verbindung mit Gl. (2.96) und $\det \mathbf{F} = \frac{\|\mathbf{g}_1\|}{\|\mathbf{G}_1\|}$ führt zur folgenden weiteren Darstellung der schwachen Form des Gleichgewichts beim Seilnetz:

$$\begin{aligned} \delta W &= A \cdot \int_S \det \mathbf{F} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \delta \mathbf{F} dA = 0 \\ &= \hat{\sigma} A \cdot \int_S \frac{\|\mathbf{g}_1\|}{\|\mathbf{G}_1\|} \mathbf{F}^{-T} : \delta \mathbf{F} dA = 0 \\ &= \hat{\sigma} A \cdot \int_S \frac{\|\mathbf{g}_1\|}{\|\mathbf{G}_1\|} g_{11} (\delta \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1) dS = 0. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Ziel ist es nun, die letzte Gleichung von (2.97) weiter zu vereinfachen. Nach Gl. (3.26) in Abschnitt 3.3.3 bildet der Deformationsgradient \mathbf{F} das verformte Linienelement $d\mathbf{x}$ aus dem unverformten Linienelement $d\mathbf{X}$ wie folgt ab:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}. \quad (2.98)$$

Nun ist beim Seilnetz L gleich der Länge des undeformierten und l gleich der Länge des deformierten Seilelements. Im Folgenden werden normierte Vektoren $d\bar{\mathbf{x}}$ und $d\bar{\mathbf{X}}$ der Länge 1 für die differentiellen Elemente $d\mathbf{x}$ und $d\mathbf{X}$ in Gl. (2.98) eingeführt.

Mit $\underbrace{l \cdot d\bar{\mathbf{x}}}_{\text{Länge} = l} = \mathbf{F} \cdot \underbrace{L \cdot d\bar{\mathbf{X}}}_{\text{Länge} = L}$ gilt für den Deformationsgradienten \mathbf{F} beim Seilnetz:

$$\mathbf{F} = \frac{l}{L}. \quad (2.99)$$

Mit der Definition der verformten und der unverformten Länge beim Seilelement ergibt sich für $\det \mathbf{F} = \frac{\|\mathbf{g}_1\|}{\|\mathbf{G}_1\|} = \frac{l}{L}$, da $\|\mathbf{g}_1\| = l$ und $\|\mathbf{G}_1\| = L$ ist. Der Metrikkoeffizient g_{11} , der mit $g_{11} = \frac{1}{\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1}$ der Kehrwert des Skalarprodukts des Basisvektors \mathbf{g}_1 mit sich selbst ist, erhält den Wert $g_{11} = \frac{1}{l^2}$. Das Integral über die Bogenlänge $\int_S \dots dS = L$ wird somit gleich der Länge L . Die letzte Gleichung von (2.97) wird

$$\delta W = \hat{\sigma} \cdot A \cdot \int_S \frac{l}{L} \frac{1}{l^2} (\delta \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1) dS. \quad (2.100)$$

Mit der bereits erwähnten Auflösung des Integrals $\int_S \dots dS$, zur Länge L wird Gl. (2.100) zu

$$\begin{aligned} \delta W &= \hat{\sigma} A \cdot \frac{l}{L} \frac{1}{l^2} (\delta \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1) L \\ &= \frac{\hat{\sigma} A}{l} (\delta \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1). \end{aligned} \quad (2.101)$$

Nun wird die auf dem kovarianten Basisvektor \mathbf{g}_1 formulierte Variation $\delta \mathbf{g}_1$ in den Ausdruck $\delta \mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{u}_r} \cdot \delta \mathbf{u}_r$ überführt. Die virtuelle Arbeit beim Seilnetz $\frac{\hat{\sigma} A}{l} (\delta \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1)$ erhält folgende Form:

$$\delta W = \frac{\hat{\sigma} A}{l} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{u}_r} \cdot \mathbf{g}_1 \right) \delta \mathbf{u}_r. \quad (2.102)$$

Mit $\delta W = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}_r} \cdot \delta \mathbf{u}_r$ aus Gl. (2.80) wird Gl. (2.102)

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}_r} \cdot \delta \mathbf{u}_r = \frac{\hat{\sigma} A}{l} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{u}_r} \cdot \mathbf{g}_1 \right) \delta \mathbf{u}_r, \quad (2.103)$$

und schließlich nach Kürzung von $\delta \mathbf{u}_r$

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}_r} = \frac{\hat{\sigma} A}{l} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{u}_r} \cdot \mathbf{g}_1 \right) = \frac{\hat{\sigma} A}{l} (\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_1). \quad (2.104)$$

Für die Linearisierung nach Gl. (2.84) $\text{LIN} \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}_r} \right) = \mathbf{R} + \Delta \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{K}$ erhält man analog

$$\mathbf{R} = \frac{\hat{\sigma} A}{l} (\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_1) \quad (2.105)$$

für den Vektor der Ungleichgewichtskräfte \mathbf{R} . Für die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} ist eine partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_r}$ von Gl. (2.104) durchzuführen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_s} \left(\frac{\hat{\sigma} \cdot A}{l} (\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_1) \right) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_s} \left(\underbrace{\frac{\hat{\sigma} \cdot A}{l} (\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_1)}_{= \text{const.}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_s} \left(\frac{1}{l} \cdot \underbrace{\hat{\sigma} \cdot A (\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_{1,r})}_{= \text{const.}} \right) \\ &= \frac{\hat{\sigma} \cdot A}{l} (\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_{1,s}) - \frac{1}{l^2} \cdot \hat{\sigma} \cdot A (\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_{1,r}) \cdot \underbrace{\frac{\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_{1,s}}{l}}_{= l_s}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{rs} ist somit:

$$\mathbf{K}_{rs} = \frac{\hat{\sigma} \cdot A}{l} \cdot \left((\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_{1,s}) - \frac{1}{l^2} (\mathbf{g}_{1,r} \cdot \mathbf{g}_1) (\mathbf{g}_{1,s} \cdot \mathbf{g}_1) \right). \quad (2.107)$$

Mit den Gleichungen (2.83), (2.105) und (2.107) liegen die notwendigen Gleichungen vor, um ein iteratives Newton-Raphson-Verfahren für das Seilnetz durchführen zu können.

Regularisierungsansatz der Updated Reference Strategy

Die für die Bestimmung der Diskretisierungsparameter der Finiten Elemente aufgebaute Newton-Raphson-Methode in Gl. (2.84), für die über Gl. (2.90) die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{rs} und über Gl. (2.86) der Vektor der Ungleichgewichtskräfte bereitgestellt wurden, ist zunächst wegen Singularität von \mathbf{K}_{rs} numerisch nicht lösbar.

Bei der Formfindung von Membranen oder Minimalflächen handelt es sich wie bei der Formfindung, die beim Ortra-Verfahren für zweidimensionale Grundrisse erfolgt, um ein inverses Problem. Die numerischen Probleme gehen auf die inverse Fragestellung zurück.

Inverse Probleme Bei inversen Problemen wird in umgekehrter Richtung von der Wirkung auf die Ursache geschlossen. Auf den Anwendungsfall der URS bezogen kann die Wirkung eine z. B. für alle Kontinuumspunkte eines Körpers vorgegebene mechanische Größe in der Zielkonfiguration κ_m sein. Bei der inversen Aufgabenstellung der URS wird ein Startsystem mit der zugehörigen Referenzkonfiguration κ_R gesucht, in der das mechanische System zu spezifizieren ist, das nach der Deformation die vorgegebenen Größen des Zielsystems besitzt. Bei dem URS-Ansatz für Membranflächen werden als Lösungsparameter innere Kraftgrößen in Form von Spannungen vorgegeben [Bletzinger und Ramm 1999].

Beim Ortra-Verfahren werden bei der Ausgleichung die Sollkoordinaten und gleichzeitig die Verschiebungen in den identischen Punkten vorgegeben. Die Koordinatendifferenzen zwischen Soll und Ist, die im Ortra-Ansatz bei den identischen Punkten gegeben sind, werden in Gl. (8.41) als mechanische Größen interpretiert und stellen beim inversen Problem vorgegebene Weggrößen dar.

Die Vorgabe der inneren Kraftgrößen oder äußeren Weggrößen im Zielsystem in Verbindung mit Randbedingungen ist aus mathematischer Sicht vollständig, da sie eine Art Randwertaufgabe darstellt, vergleichbar mit Gl. (3.181), so dass bei mechanisch sinnvollen Größen sich eine Form als eindeutige Lösung einstellen kann, die sich im Gleichgewicht befindet.

Geometrische Näherung der Form Die geometrische Näherung der Form beim Verfahren der finiten Elemente kann auf vielfache Weise und über verschiedenartige Parameter erfolgen.

Im Rahmen der vom Anwender definierten Genauigkeit können bei der Methode der finiten Elemente für ein und dieselbe Form die Anzahl, die Größe, der Typ und die Ansatzfunktionen der im numerischen Verfahren eingesetzten Elemente (z. B. Dreiecks- oder Viereckselemente) variiert werden.

Auf einer Membranfläche können durch unterschiedliche Parametrisierung beliebig viele Parameternetze nebeneinander existieren, z. B. parallel zur Richtung der ursprünglichen Flächenparameter θ_1 und θ_2 . Bei der Diskretisierung können Viereckselemente verwendet worden sein, deren Ränder mit den ursprünglichen Linien der Parameternetze zusammenfallen. Für den Übergang von einem zum anderen Parameternetz ist es möglich, die finiten Elemente (= Viereckselemente) im Maßstab und ebenso im Drehwinkel verändern zu können, und dabei trotzdem die gleiche Form zu beschreiben. Eine Formdefinition kann somit durch eine unendliche Anzahl von Diskretisierungen erreicht werden.

Die tangentialen Verschiebungen, die nicht zu einer Modifikation der Form beitragen, führen zur Singularität der Lösung und zur Singularität der Steifigkeitsmatrix K_{rs} [Bletzinger und Ramm 1999], was durch eine Determinante $\det K_{rs} \approx 0$ gekennzeichnet ist. Die Matrixkoeffizienten in der Steifigkeitsmatrix, die von tangentialen Verschiebungen gebildet werden, sind nahezu Null. Nur Verschiebungen normal zur Fläche tragen zur Regularität der Steifigkeitsmatrix bei [Bletzinger und Ramm 1999, Wüchner 2006, Dieringer 2014].

In diesem Zusammenhang ist zu erwähnen, dass die Gleichgewichtsfunktion $G(\boldsymbol{r})$ in Gl. (2.71) nur kinematische und kinetische Größen enthält und damit kein Zusammenhang mit einem Materialgesetz definiert ist. Damit existiert ein weiterer Freiheitsgrad bei der Definition des Materials und den vom Material erzeugten Verzerrungen.

Stabilisierung des numerischen Problems Zur Stabilisierung des numerischen Problems haben sich eine Vielzahl von Herangehensweisen entwickelt.

In den Arbeiten von Veenendaal und Block 2012, die bei ihrem Vergleich der unterschiedlichen Formfindungsverfahren einen einheitlichen Rahmen der mathematischen Darstellung und der Bezeichnungen entwickelt haben, und Wüchner 2006 finden sich Darstellungen über die unterschiedlichen Formfindungsverfahren und Herangehensweisen, die bei der Stabilisierung der numerischen Lösung verfolgt wurden. Die prominentesten Vertreter sind:

- die Kraftdichtemethode [Schek 1974, Gründig, Moncrieff u. a. 2000],
- die Dynamische Relaxation [siehe z. B. Barnes 1977] und
- die Updated Reference Strategy [Bletzinger und Ramm 1999, Wüchner 2006, Dieringer 2014].

Das Verfahren der Dynamischen Relaxation soll in dieser Arbeit keiner weiteren Betrachtung unterzogen werden, da es mit einer dynamischen Formulierung (Bewegungsgleichung) des statischen Problems arbeitet und einen Einschwingansatz zur numerischen Stabilisierung des statischen Problems nutzt.

Die URS verwendet zur Stabilisierung des numerischen Problems eine Homotopieabbildung zwischen zwei Funktionen $f(\boldsymbol{x})$ und $g(\boldsymbol{x})$ (siehe Gl. (2.108) unten).

Die Funktion $f(\boldsymbol{x})$ stellt die originale Funktion dar, die singular im Lösungspunkt der Problemstellung wird. Über die Funktion $g(\boldsymbol{x})$ wird ein numerisch lösbares Ersatzproblem formuliert, das in direkter Beziehung zu dem Originalproblem steht und dieses stabilisiert. Die Qualität der mit Hilfe der Homotopieabbildung definierten Methode, wie sie in Gl. (2.108) formuliert wird, ist umso besser, je näher die stabilisierende Funktion $g(\boldsymbol{x})$ an der eigentlichen Problemformulierung $f(\boldsymbol{x})$ ist [Wüchner und Bletzinger 2005, Wüchner 2006]. Die Funktion $g(\boldsymbol{x})$ muss gemäß der Voraussetzung regulär bei der gesuchten Lösung sein.

Die Homotopieabbildung $h_\lambda(\mathbf{x})$ wird mit dem Homotopiefaktor λ wie folgt aufgebaut:

$$h_\lambda(\mathbf{x}) = \lambda \cdot f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) g(\mathbf{x}). \quad (2.108)$$

Für $\lambda = 1$ in Gl. (2.108) wird durch die Abbildung $h_\lambda(\mathbf{x})$ die Originalgleichung $f(\mathbf{x})$ ausgedrückt. Bei $\lambda = 0$ wird in der Homotopieabbildung vollständig das Ersatzproblem verwendet. Die mit der Homotopieabbildung $h_\lambda(\mathbf{x})$ durch Regularisierung numerisch ermöglichte Lösung nähert sich dem Lösungspunkt des Originalproblems, wenn der Homotopiefaktor λ geeignet variiert wird.

In erster Näherung wird sinnvollerweise der Homotopiefaktor λ zunächst klein ($\lambda \geq 0 \wedge \lambda \ll 1$) gewählt. Je näher der mit dem Faktor $(1 - \lambda)$ zu Anfang höher gewichtete Anteil der Funktion $g(\mathbf{x})$ die modifizierte Gl. (2.108) zu dem Lösungspunkt des Originalproblems führt, umso größer wird man den Homotopiefaktor λ mit $\lambda \gg 0$ wählen. Bei den letzten Iterationen wird dieser Faktor dem Wert 1 angenähert.

Wenn die Homotopiemethode der Gl. (2.108) auf die Problemstellung der Formfindung von Membranen übertragen wird, dann kann die stabilisierende Funktion $g(\mathbf{x})$ am Anfang vollständig in der Referenzkonfiguration aufgebaut werden, da dort die Bestimmung des Gleichgewichts nicht singular wird. Dadurch wird das inverse Problem, zumindest bei Formulierung der Ersatzlösung, in ein direktes Problem überführt, das beim Vorgang der Formfindung innerhalb der für bestimmte Größen konstant definierten Referenzkonfiguration κ_R keine numerischen Probleme bei der Lösungsfindung aufweist. Die in der aktuellen Konfiguration κ_M gegebenen mechanischen Größen werden durch Pull-back Operationen (siehe Gl. (3.30) in Abschnitt 3.3.3) in die Referenzkonfiguration κ_R transformiert.

Mit der Pull-back Operation der Gl. (3.97) $\mathbf{S} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$ wird der Cauchysche Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ in κ_M auf den Zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor \mathbf{S} in κ_R abgebildet. Wenn dieser Ausdruck Gl. (3.97) mit \mathbf{F} multipliziert wird, führt dies nach kurzer Rechnung zum Verständnis der Gl. (2.73).

Damit ist die mit einer Homotopieabbildung (Gl. (2.108)) modifizierte Ausgangsgleichung (2.74) für das numerische Verfahren gegeben.

$$\begin{aligned} \delta W_\lambda = \lambda \delta W_\sigma + (1 - \lambda) \delta W_S = & \quad \lambda \cdot \left[t \cdot \int_A \det \mathbf{F} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \delta \mathbf{F} dA \right] \\ & + (1 - \lambda) \cdot \left[t \cdot \int_A (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \delta \mathbf{F} dA \right] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.109)$$

Mit der Lösung der modifizierten Ausgangsgleichung (2.109), die für diesen Schritt noch linearisiert werden muss (siehe Gl. (2.110)), kann eine neue Referenzkonfiguration definiert werden, die Ausgangspunkt für eine weitere Iteration ist. Für die Linearisierung in Gl. (2.110) sind analog eine Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} (Gl. (2.111)) und ein Vektor der Ungleichgewichtskräfte \mathbf{R} (Gl. (2.112)) aufzubauen.

Die Ausgangs-Referenzkonfiguration kann durch die neue Referenzkonfiguration ersetzt werden und erfährt auf diese Weise eine Fortführung, die mit einer näheren Ausgangslage zur gesuchten Lage verbunden ist (Update). Diese Schritte werden iterativ durchgeführt. Mit jeder weiteren Iteration nähert sich die verbesserte Referenzgeometrie der gesuchten Lösung. Diese Verfahrensweise des schrittweisen „Updates“ der Referenzkonfiguration gibt dem Verfahren „Updated Reference Strategy“ seinen Namen.

Für eine detailliertere Verfahrensbeschreibung wird auf die Literatur [z. B. Bletzinger und Ramm 1999, Wüchner und Bletzinger 2005 und Wüchner 2006] verwiesen.

Durch eine zu Gl. (2.84) analoge Linearisierung erhält man eine Gleichung mit der modifizierten Steifigkeitsmatrix und dem modifizierten Vektor der Ungleichgewichtskräfte

$$\text{LIN} \left(\frac{\partial W_\lambda}{\partial \mathbf{u}_r} \right) = \mathbf{R}_{\lambda r} + \Delta \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{K}_{\lambda rs}, \quad (2.110)$$

die zu einer Formfindung durch numerische Lösung der Gleichgewichtsfunktion (Gl. (2.83)) führt.

Die modifizierte Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\lambda rs}$ wird nach [Bletzinger und Ramm 1999, Wüchner und Bletzinger 2005]

$$\mathbf{K}_{\lambda rs} = \lambda \cdot \left[t \cdot \int_A (\det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T})_{,s} : \mathbf{F}_{,r} dA \right] + (1 - \lambda) \cdot \left[t \cdot \int_A (\mathbf{F}_{,s} \cdot \mathbf{S}) : \mathbf{F}_{,r} dA \right], \quad (2.111)$$

und der Vektor der Ungleichgewichtskräfte

$$\mathbf{R}_{\lambda r} = \lambda \cdot \left[t \cdot \int_A \det \mathbf{F} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \mathbf{F}_{,r} dA \right] + (1 - \lambda) \cdot \left[t \cdot \int_A (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \mathbf{F}_{,r} dA \right]. \quad (2.112)$$

Anwendung der Updated Reference Strategy auf Seilnetze Die Strategie der URS zur Regularisierung von inversen Problemen wird auf das Seilnetz angewendet. Dabei wird eine zu Gl. (2.109) analoge Gleichung $\delta W_\lambda = \lambda \delta W_\sigma + (1 - \lambda) \delta W_S$ aufgebaut.

Mit Gl. (2.102) liegt bereits die originale Funktion (Gl. $f(x)$) für die Homotopieabbildung (2.108) vor. Für die Definition der Funktion $g(x)$, der Ersatzlösung, wird das Prinzip der virtuellen Arbeit δW für das Seilnetz (Gl. (2.102)) in der Referenzkonfiguration κ_R formuliert.

Zunächst wird wieder mit einer Pull-back-Operation (siehe Gl. (3.30) in Abschnitt 3.3.3) gearbeitet. Der Cauchysche Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ von Gl. (2.93), dessen Darstellung in κ_R analog zu (2.93) $\mathbf{S} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{I}$ wird, kann mit Hilfe der Pull-back-Operation wie folgt in die Referenzkonfiguration κ_R übertragen werden: $\mathbf{S} = \boldsymbol{\chi}_*^{-1}(\boldsymbol{\sigma}) = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$.

Es gilt wieder $\det \mathbf{F} = \frac{\|\mathbf{g}_1\|}{\|\mathbf{G}_1\|} = \frac{l}{L}$ und $\mathbf{F} = \frac{l}{L} \mathbf{I}$. Dann ist $\mathbf{F}^{-1} = \frac{L}{l}$ und ebenso $\mathbf{F}^{-T} = \frac{L}{l}$.

Damit ist

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{I} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{I} = \underbrace{\frac{l}{L}}_{=\det \mathbf{F}} \cdot \underbrace{\frac{L}{l}}_{=\mathbf{F}^{-1}} \cdot \underbrace{\frac{\mathbf{n}}{A}}_{=\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underbrace{\frac{L}{l}}_{=\mathbf{F}^{-T}} \cdot \mathbf{I} \\ &= \frac{L \cdot \mathbf{n}}{l \cdot A} \cdot \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.113)$$

Die modifizierte Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\lambda rs}$ für das Seilnetz wird diesmal direkt aus der Darstellung in Gl. (2.85) entwickelt. Der Deformationsgradient \mathbf{F} aus Gl. (2.99) wird in Abhängigkeit von \mathbf{u}_r , dem Diskretisierungsparameter, ausgedrückt. Im Fall des Seilnetzes liegt eine eindimensionale Verzerrung in Richtung des kovarianten Basisvektors \mathbf{g}_1 des Seilelements vor. Diese soll mit \hat{u} bezeichnet werden.

Gl. (2.99) wird mit den Gleichungen (3.20) und (3.26) zu $\mathbf{F} = \frac{l}{L} = \frac{L + \hat{u}}{L}$.

Die partielle Ableitung von \mathbf{F} nach \hat{u} ist $\mathbf{F}_{,\hat{u}} = \frac{1}{L}$. Somit kann die modifizierte Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\lambda rs}$ für das Seilnetz zusammengestellt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\lambda rs} &= A \cdot \int_S (\mathbf{F}_{,\hat{u}} \cdot \mathbf{S}) : \mathbf{F}_{,\hat{u}} dS = A \cdot \int_S \left(\frac{1}{L} \cdot \underbrace{\frac{L \cdot \mathbf{n}}{l \cdot A} \cdot \mathbf{I}}_{=\mathbf{S}} \right) \frac{1}{L} dS \\ &= A \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{L \cdot \mathbf{n}}{l \cdot A} \cdot \frac{L}{L} = \frac{\mathbf{n}}{l} = \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Für die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\lambda rs}$ ergibt sich der Quotient aus Seilkraft \mathbf{n} und deformierter Länge l , der in Gl. (2.67) als Kraftdichte \mathbf{q} eingeführt wurde. Die Kraftdichte \mathbf{q} kann als Zweite Piola-Kirchhoffsche Seilkraft interpretiert werden. Diese wird bei der Formfindung konstant gesetzt und führt zu einem linearen System von Gleichungen [Bletzinger und Ramm 1999].

Damit wurde gezeigt, dass die kontinuumsmechanisch formulierte, allgemeine Theorie der Updated Reference Strategy von Bletzinger und Ramm 1999 als Verallgemeinerung der Kraftdichtemethode [Schek 1974] betrachtet werden kann.

3. Mathematische Theorie der Elastizität

3.1. Koordinatenumformungsverfahren und Elastizität

Koordinatenumformungsverfahren wie z. B. das bei der Überführung des Liegenschaftskatasters in das Bezugssystem ETRS89 mit UTM-Abbildung durch die Bundesländer Baden-Württemberg und Hamburg eingesetzte Membranverfahren [Gielsdorf und Gründig 1997] und das in Bayern eingesetzte Ortra-Verfahren [Hampp und Glock 2017, Glock und Birkenbeul 2018, Glock, Bauer u. a. 2019, Glock und Fischer 2020] greifen auf die Theorie der Elastizität zurück. Diese Umformungsverfahren sind als rechenintensiv arbeitende, vermittelnde Ausgleichungsverfahren aufgebaut.

Die Beobachtungsgleichungen werden zum Zwecke der Homogenisierung der Daten nicht klassisch wie bei einem Strecken- und Richtungsnetz erstellt, sondern in einer Weise definiert, dass sie elastische Elemente nutzen, die sich nach physikalischen Gesetzen verformen. Ein großer Gewinn des Einsatzes der Elastizitätstheorie ist das durch Naturgesetze vorgegebene Verhalten der elastischen Elemente, die sich nach einem Minimumprinzip verformen. Das einzelne Element erfährt aus Sicht der Gesamtbilanz betrachtet, d. h. der Bilanz über das ganze Umformungsgebiet, minimale Formänderungen. Bei der elastischen Verformung wird im Übergang nach ETRS89/UTM infolge der durch Netzspannung verursachten äußeren Kräfte insgesamt minimale Energie aufgewendet. Das dahinter stehende physikalische Gesetz ist das Prinzip der minimalen Formänderungsenergie.

Die Analogie zwischen einem geodätischen Streckennetz und einem mechanischen Fachwerk ist, wie bereits in Abschnitt 2.1 einleitend dargestellt, seit der Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert bekannt. Seit dieser Zeit werden zunehmend Rechenverfahren der Ausgleichsrechnung mechanisch gedeutet (siehe z. B. [Linkwitz 1960a]) und elastische Seilnetze oder mechanische Strukturen wie Tragwerke oder verformte Balken mit Hilfe der Ausgleichsrechnung berechnet [Linkwitz 1977, Bahndorf 1991, Ströbel 1995].

Bei einem Fachwerk, auf dessen Knoten äußere Lasten einwirken, stellt sich nach einer gewissen Zeit ein Gleichgewicht ein. Bei jedem Knoten des Fachwerks ist dann infolge des Gleichgewichts die Summe der inneren und äußeren Kräfte gleich Null [z. B. Dallmann 2015a, Bletzinger 2017a]. Analog zur Statik eines mechanischen Fachwerks erzeugen bei einem geodätischen Netz äußere Kräfte, die unterschiedlicher Herkunft und Art sein können (z. B. Druck- oder Zugkräfte), innere Kräfte, die in Form von Spannungen wahrgenommen werden [z. B. Linkwitz 1960a]. Äußere und innere Kräfte, die in der technischen Mechanik unter dem Begriff Kraftgrößen zusammengefasst werden, bewirken im geodätischen Netz Verschiebungen von Netzpunkten. Werden ungleichmäßige Verschiebungen der Netzpunkte ausgeübt, treten dadurch Verzerrungen im Netz auf. Diese Verschiebungen und Verzerrungen werden in der technischen Mechanik, wenn anstelle des geodätischen Netzes ein analoges Fachwerk für die Betrachtung herangezogen wird, unter dem Begriff der äußeren und inneren Weggrößen zusammengefasst. In der technischen Mechanik existiert für äußere und innere Weggrößen und für äußere und innere Kraftgrößen der Oberbegriff Zustandsgröße [z. B. Dinkler 2014, Wunderlich und Kiener 2004].

3.2. Grundgleichungen der Statik

Im Bereich der technischen Mechanik beschäftigt sich die Statik mit Kräften, Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen von festen Körpern, z. B. Bauteilen, Lagern und Tragwerken, bei denen sich unter vorgegebenen Lasten ein Kräftegleichgewicht einstellt. Solche Körper können durch unterschiedliche Arten von Lasten oder Einwirkungen beansprucht werden, die sich in Kraft-, Verschiebungs- und Verzerrungsgrößen einteilen lassen [Wunderlich und Kiener 2004].

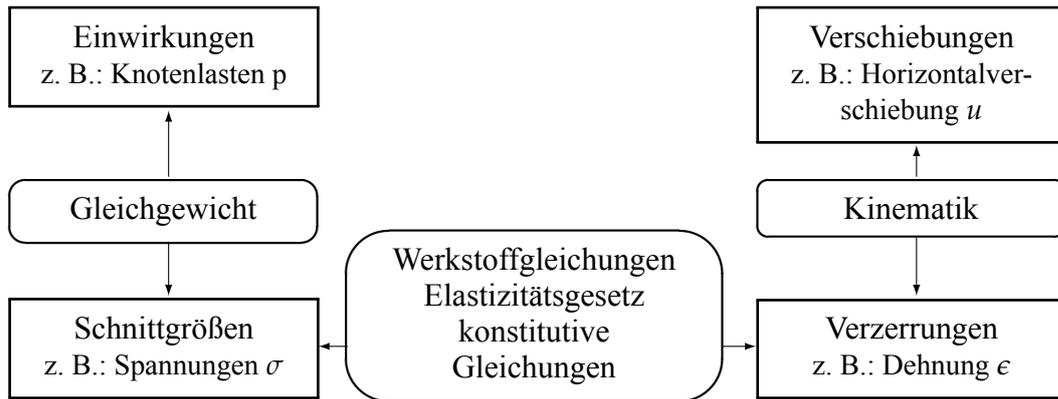


Abbildung 3.1.: Tonti-Schema für die Grundgleichungen der Statik (nach [Dinkler 2014])

Auf Bauteile, Lager oder Tragwerke können Volumen- oder Oberflächenkräfte als äußere Kräfte einwirken [H. Altenbach 2018]. Ein Beispiel für eine Volumenkraft ist die Schwerkraft. Eine Oberflächenkraft kann z. B. durch eine auf dem Bauteil ruhende Schneelast ausgeübt werden. Auf den Körper einwirkende Kräfte können sowohl außerhalb des Körpers (äußere Kräfte) als auch innerhalb des Körpers (innere Kräfte) auftreten.

Der wichtigste Begriff, der unmittelbar mit der inneren Kraft zusammenhängt, ist der Begriff der Spannung. Unter Spannung versteht man eine auf die Flächeneinheit bezogene, im Innern eines Körpers wirkende Kraft [Mang und Hofstetter 2013]. Sowohl die Statik als auch die Elastizitätstheorie bedienen sich mathematischer Methoden zur Formulierung der mechanischen Sachverhalte, ausgehend von einer möglichst zutreffenden Erfassung und Formulierung des mechanischen Phänomens. Die Statik basiert auf der mathematisch fundierten mechanischen Beschreibung von Zustandsgrößen, die meist zur Anwendung kommt, wenn der Körper elastisch auf innere und äußere Kräfte reagiert. Die Elastizität eines Körpers ist die Eigenschaft, nach Einwirkung einer Kraft wieder in seinen Ursprungszustand zurückzukehren.

Mit der weiteren Verbreitung der Methode der Finiten Elemente nutzt diese in größerem Maße die Methoden der Kontinuumsmechanik. Bei der Kontinuumsmechanik werden für jeden Punkt eines Körpers – man spricht in diesem Zusammenhang von einem materiellen Punkt – Grundgleichungen der Statik aufgestellt [H. Altenbach 2018, Holzapfel 2006]. Es können somit in einer kontinuierlichen Sicht z. B. Verzerrungsgrößen innerhalb des Körpers beschrieben werden. Die Kontinuumsmechanik bedient sich dabei der Tensorrechnung als wichtigem mathematischem Hilfsmittel [Itskov 2018]. Bei Anwendung der Kontinuumsmechanik auf Tragwerke kommen dann ein-, zwei- oder dreidimensionale Körper zur Anwendung.

Bei einem weiteren Teilbereich der Mechanik, der Strukturmechanik, werden bei bereits aufgebauten mechanischen Strukturen für die Bestimmung der Festigkeit der Struktur Berechnungen von Verformungen, Kräften und Spannungen durchgeführt. Durch Definition eines Körpers in einem kontinuierlichen Modell kann die Strukturmechanik ebenfalls auf die Theorie der Kontinuumsmechanik zurückgreifen. Für die Bestimmung der Verformungen eines Körpers mit Hilfe der modernen Methoden der Finiten Elemente wird der Körper zunächst kontinuumsmechanisch modelliert und anschließend bei der Berechnung der Zustandsgrößen diskretisiert [Wriggers 2001]. Für die Untersuchung der elastischen Eigenschaften von geodätischen Netzen liegt bereits ein diskretisiertes Modell vor [Neureither 1992]; das Einzelement ist das zunächst physikalisch nicht weiter definierte Netzelement. Das Netzelement stellt geometrisch eine Verbindung zwischen zwei Punkten her, die aus Sicht der Geodäsie bei einer vermittelnden Ausgleichung als Beobachtung unterschiedlicher Art (Streckenbeobachtung und/oder Richtungsbeobachtung) zwischen zwei Punkten eingeführt werden kann. Das zum Streckennetz analoge Fachwerk ist aus Sicht der Mechanik ein eindimensionales Tragwerk, weil ausschließlich die Stablängsverformung mechanisch relevant ist, obwohl das Tragwerk eine zwei- oder dreidimensionale geometrische Ausdehnung besitzt. Die zwei- oder dreidimensionale Tragwerksgeometrie kann in einem zwei- oder dreidimensionalen Koordinatensystem behandelt werden.

In der folgenden Tabelle 3.1 werden mechanische Zustandsgrößen bei einem elastischen Umformungsver-

fahren und einem Fachwerk identifiziert:

Zustandsgröße	Fachwerk	Elastisches Umformungsverfahren
Einwirkungen	an Knoten angreifende äußere Kräfte	zusätzliche äußere Weggrößen, die durch einen mit einem groben Fehler, z. B. 20-cm-Fehler, belasteten identischen Punkt verursacht werden
Schnittgrößen	Stabkraft in einem Fachwerksstab	Spannung in einer geodätischen Beobachtung
Verschiebungen	Verschiebung des Anfangspunktes eines Fachwerkstabs	durch niedrige Gewichtung „zur Verlagerung stimulierter“ Katasterfestpunkt
Verzerrungen	lineare Dehnung eines Fachwerkstabs	unterschiedliche Maßstabsfaktoren benachbarter elastischer Elemente

Tabelle 3.1.: Gegenüberstellung von mechanischen Zustandsgrößen bei einem Fachwerk und einem elastischen Umformungsverfahren

Das Kontinuum eines ein-, zwei- oder dreidimensionalen Körpers wird vollständig geometrisch durch Angabe der linearen, ebenen oder räumlichen Positionen und der Lagebeziehungen seiner materiellen Punkte beschrieben. Zur geometrischen Beschreibung der im Körper verteilten materiellen Punkte können bei modernen Formulierungen über Tensoren kontravariante oder kovariante Basissysteme verwendet werden. Bei Einbettung des Körpers in einen zwei- oder dreidimensionalen euklidischen Raum und linearer Gestalt des Körpers kann auch ein kartesisches Koordinatensystem Ausgangspunkt sein, um Verschiebungen eines Körpers zwischen seiner unverformten und seiner verformten Gestalt zu definieren [Mang und Hofstetter 2013]. Eine gestaltändernde Beanspruchung erfährt ein Körper, wenn bei den *Verschiebungen* Änderungen der Abstände zwischen benachbarten Punkten auftreten.

In diesem Fall sind *Verschiebungen* nicht ausschließlich Starrkörperverschiebungen oder -verdrehungen. Die **kinematischen Beziehungen**, die die *Verschiebungen* mit den *Verzerrungen* verknüpfen, legen die Geometrie der Verformungen fest. Die Verformung kann als Längenänderung und/oder Winkeländerung in Erscheinung treten. Mit dem Begriff Verformung oder Deformation eines Körpers soll eine Formänderung bezeichnet werden, bei der sich Volumen und/oder Gestalt des Körpers verändern. Bei dieser Beschreibung müssen noch keine Annahmen über die Größe der Deformation getroffen werden, z. B. dass die Abstandsänderungen nur infinitesimal klein sein müssen. Die Gleichungen sind werkstoffunabhängig.

Ein geeignetes Maß für die Beanspruchung von Bauteilen ist die *Spannung* [z. B. Gross, Hauger u. a. 2014]. Die *Spannungen* bzw. *Schnittgrößen* sind mit den *Einwirkungen* über **Gleichgewichtsbedingungen** verknüpft. Die Schnittgrößen ergeben sich aus den Spannungen durch Integration über den Querschnitt (1D-Tragwerke, z. B. Fachwerk) oder die Dicke (2D-Tragwerke, z. B. Platte, Schale). Bei ruhenden Belastungen beschreiben sie das statische Gleichgewicht der Kräfte.

Das Gleichgewicht der inneren und äußeren Kräfte eines Körpers kann durch Grundgleichungen ausgedrückt werden. Diese können sowohl in differentieller Form als Differentialgleichungen als auch in integraler Form mit Hilfe von Arbeits- und Energieprinzipien aufgebaut sein [Wunderlich und Kiener 2004, Barthold 2013]. Eine Arbeitsgleichung, die ein statisches Gleichgewicht ausdrückt, ist folgende:

$$\delta W_{ext} + \delta W_{int} = 0. \quad (3.1)$$

Diese mit zwei Termen für äußere und innere Arbeitsanteile und mit Variationssymbolen aufgebaute Gleichung drückt aus, dass bei Gleichgewicht die Summe der Variationen der äußeren und inneren Arbeiten gleich Null ist. Da das Variationssymbol zusätzlich in der technischen Mechanik auch virtuelle Arbeiten bzw. virtuelle Verschiebungen bezeichnet, die aus Modellsicht fiktiv und nur mathematisch auftreten, stellt Gl. (3.1) ebenfalls das Prinzip der virtuellen Arbeiten dar.

Die *Verzerrungen* sind mit den *Schnittgrößen* bzw. *Spannungen* über ein physikalisches Gesetz, die **Werkstoffgleichungen** bzw. **konstitutiven Gleichungen** verknüpft. Falls der Körper sich elastisch verzerrt, treten

an die Stelle allgemeiner konstitutiver Gleichungen lineare bzw. nichtlineare **Elastizitätsgesetze**. Die konstitutiven Beziehungen drücken aus, in welchem Maß sich ein Körper unter inneren Kräften (= Spannungen) verformt.

Jede Gruppe der drei miteinander im Zusammenhang stehenden Beziehungen, der Gleichgewichtsbedingungen, der Werkstoffgleichungen und der kinematischen Beziehungen, kann für sich die Aufgabe linear oder nicht linear formulieren. Falls alle drei Beziehungen linear sind, dann befindet man sich im Geltungsbereich der linearen Elastizitätstheorie.

Bei linearen Beziehungen gelten lineare Überlagerungsgesetze [Wunderlich und Kiener 2004], z. B. das Superpositionsprinzip.

3.3. Kinematik: Verschiebungen und Verzerrungen

Die Bewegung eines deformierbaren Körpers, der äußeren Belastungen ausgesetzt ist, führt bei der kinematischen Betrachtungsweise zur materialunabhängigen Beschreibung von Verschiebungen und Verzerrungen. Die Kinematik bedient sich bei der Beschreibung der Bewegung von deformierbaren Körpern der Mittel der Differentialgeometrie im dreidimensionalen Raum.

Die Darstellung der Bewegung des Körpers erfolgt anhand der Bewegung seiner materiellen Punkte, die als kompakte Menge in ihrer Gesamtheit ein materielles Gebiet im Raum zu einem bestimmten Zeitpunkt definieren und durch materielle Randpunkte der Oberfläche des Körpers begrenzt werden [H. Altenbach 2018].

Die Bewegung des Körpers wird als Funktion der Zeit dargestellt.

3.3.1. Differentialgeometrie im dreidimensionalen Raum

Der materielle Punkt wird durch seinen Ortsvektor \mathbf{r} im dreidimensionalen euklidischen Raum beschrieben (Gl. (3.2)). Dazu wird ein raumfestes kartesisches Koordinatensystem eingeführt (siehe Abb. 3.2 in Abschnitt 3.3.2). Der Ortsvektor \mathbf{r} wird als Linearkombination von orthonormierten, linear unabhängigen Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ dargestellt:

$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = x^i \mathbf{e}_i. \quad (3.2)$$

In Gl. (3.2) wird im Vorgriff auf die Einführung krummliniger Koordinaten (3.4) eine „kovariante“ Schreibweise für die Koordinaten x^j des materiellen Punktes bezüglich einer Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ im dreidimensionalen euklidischen Raum verwendet.

Bei einer orthonormierten Basis sind die Basisvektoren zueinander orthogonal und besitzen die Länge 1. Für die Skalarprodukte der Basisvektoren, die die Metrikkoeffizienten g_{ij} eines Metriktensors definieren, gilt:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1, & g_{12} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0, & g_{13} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 1, \\ g_{21} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0, & g_{22} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1, & g_{23} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0, \\ g_{31} &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0, & g_{32} &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0, & g_{33} &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Für die Beschreibung von Deformationen kann in der Kontinuumsmechanik von kartesischen Koordinatensystemen (Gl. (3.2)) auf kovariante Beschreibungen in Verbindung mit schiefwinkligen oder krummlinigen Koordinaten übergegangen werden [Parisich 2003, H. Altenbach 2018].

Im Gegensatz zu einem kartesischen Koordinatensystem, dessen orthonormierte Basisvektoren \mathbf{e}_j ortsunabhängig sind, können sich die Basisvektoren \mathbf{g}_i eines krummlinigen Koordinatensystems in ihren Beträgen und Richtungen von Ort zu Ort ändern. Darüber hinaus stehen die Basisvektoren \mathbf{g}_i nicht senkrecht zueinander.

Für den Zweck einer allgemeinen Herleitung der in der Kontinuumsmechanik gebräuchlichen Deformations- und Verzerrungstensoren der Abschnitte 3.3.3 und 3.3.4, die das Deformationsverhalten nichtlinear beschreiben, wird im Folgenden ein Übergang auf krummlinige Koordinatensysteme durchgeführt.

Zur analytischen Beschreibung einer zweidimensionalen, einfach zusammenhängenden Fläche im dreidimensionalen Raum, z. B. der Oberfläche eines deformierbaren Körpers, werden krummlinige Gaußsche Flä-

chenparameter θ_1 und θ_2 eingeführt. Diese Parameter definieren einen Punkt der Fläche über folgende Funktion:

$$\mathbf{r}(\theta_1, \theta_2) = x^1(\theta_1, \theta_2) \mathbf{e}_1 + x^2(\theta_1, \theta_2) \mathbf{e}_2 + x^3(\theta_1, \theta_2) \mathbf{e}_3 \quad \text{mit} \quad x^j = x^j(\theta_1, \theta_2). \quad (3.4)$$

Für die Definition einer θ^1 -Parameterlinie erhält der zweite Gaußsche Flächenparameter θ^2 einen festen Wert, der Parameter θ^1 bleibt variabel. Für die zweite Parameterlinie θ^2 wird in Folge der Flächenparameter θ^1 festgehalten:

$$\begin{aligned} \theta_1\text{-Parameterlinie} : \quad & \theta_1 = \text{variabel}, \quad \theta_2 = \text{konstant}, \\ \theta_2\text{-Parameterlinie} : \quad & \theta_1 = \text{konstant}, \quad \theta_2 = \text{variabel}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die mit der Abbildungsvorschrift (3.5) entstehenden Parameterlinien bilden eindeutige, in der Fläche liegende Raumkurven, die ein Parameternetz für diese Fläche darstellen.

Die Abbildung zwischen dem krummlinigen und dem euklidischen Koordinatensystem soll eindeutig und umkehrbar sein.

Dazu ist zu fordern, dass zwischen den kartesischen Koordinaten x^j und den krummlinigen Koordinaten θ^j ein mindestens einmal stetig differenzierbarer und umkehrbarer funktionaler Zusammenhang besteht, der gegeben ist, falls die zugehörige Funktionalmatrix J

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \theta^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \theta^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \theta^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

den Rang 2 besitzt [Kreyszig 1968].

Für die Bestimmung der Koeffizienten der Funktionalmatrix der Gl. (3.6) werden die totalen Differentiale eines Ortsvektors \mathbf{r} in der jeweiligen Basis des Koordinatensystems in den Gleichungen (3.7) und (3.9) gebildet.

Es erfolgt zunächst ein Koordinatendifferential im euklidischen Koordinatensystem:

$$d\mathbf{r} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2)}{\partial x^1}}_{= \mathbf{e}_1} dx^1 + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2)}{\partial x^2}}_{= \mathbf{e}_2} dx^2 + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2)}{\partial x^3}}_{= \mathbf{e}_3} dx^3 = \mathbf{r}_{,i} dx^i. \quad (3.7)$$

Für ein raumfestes euklidisches Koordinatensystem ist die Basis \mathbf{e}_j des Koordinatensystems, das sich in Gl. (3.7) als begleitendes Dreibein mit den Tangentialvektoren $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^3}$ darstellt, an jedem Punkt der Fläche identisch.

Mit der Zuweisung der in jedem Punkt des Raumes unveränderlichen Basisvektoren $\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2}$ und $\mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^3}$ kann Gl. (3.7) auch wie folgt geschrieben werden:

$$d\mathbf{r} = dx^1 \mathbf{e}_1 + dx^2 \mathbf{e}_2 + dx^3 \mathbf{e}_3. \quad (3.8)$$

Das Koordinatendifferential des Ortsvektors \mathbf{r} in dem mit zwei Gaußschen Flächenparametern θ_1 und θ_2 eingeführten krummlinigen Koordinatensystem (Gl. (3.4)) lautet:

$$d\mathbf{r} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^1}}_{= \mathbf{r}_{,1}} d\theta^1 + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^2}}_{= \mathbf{r}_{,2}} d\theta^2 = \mathbf{r}_{,i} d\theta^i. \quad (3.9)$$

Gl. (3.2) in Gl. (3.9) eingesetzt ergibt:

$$d\mathbf{r} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta^1}(x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3)}_{=\mathbf{r}_{,1}}d\theta^1 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta^2}(x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3)}_{=\mathbf{r}_{,2}}d\theta^2 = \mathbf{r}_{,i}d\theta^i. \quad (3.10)$$

Über die Tangentenvektoren $\mathbf{r}_{,1}$ und $\mathbf{r}_{,2}$ der Gl. (3.10), die die krummlinigen Parameterlinien θ^1 und θ^2 in erster Ordnung berühren, erhält man eine Gleichung für die kovarianten Basisvektoren des krummlinigen Koordinatensystems:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{r}_{,i} = \frac{\partial(x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3)}{\partial\theta^i} = \frac{\partial(x^j\mathbf{e}_j)}{\partial\theta^i} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta^i}. \quad (3.11)$$

Die in Gl. (3.11) definierten Basisvektoren \mathbf{g}_1 und \mathbf{g}_2 sind die Tangentenvektoren $\mathbf{r}_{,1}$ und $\mathbf{r}_{,2}$ an die Parameterlinien θ_1 und θ_2 . Diese spannen somit für einen gegebenen Punkt der Fläche eine Tangentialebene auf.

Die Flächengröße da einer von den Parameterlinien $d\theta^1$ und $d\theta^2$ begrenzten infinitesimalen Fläche berechnet sich zu [Kreyszig 1968]

$$da = |\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2| d\theta^1 d\theta^2 = \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 \quad \text{mit} \quad g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2. \quad (3.12)$$

Zur Vervollständigung der Basis im dreidimensionalen Raum wird nun der dritte Basisvektor \mathbf{g}_3 definiert, der senkrecht auf der von \mathbf{g}_1 und \mathbf{g}_2 aufgespannten Tangentialebene stehen soll. Der dritte Basisvektor \mathbf{g}_3 wird normiert ($\Rightarrow \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 = 1$).

Die Definitionsgleichung des Basisvektors \mathbf{g}_3 ist:

$$\mathbf{g}_3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2|} = \mathbf{n}. \quad (3.13)$$

Mit \mathbf{g}_1 , \mathbf{g}_2 und \mathbf{g}_3 liegt eine kovariante Basis des krummlinigen Koordinatensystems im dreidimensionalen Raum vor.

Eine dazu dual aufgebaute kontravariante Basis \mathbf{g}^j kann durch folgende Beziehung zu \mathbf{g}_i aufgestellt werden:

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}. \quad (3.14)$$

Gl. (3.14) definiert, dass ein kovarianter Basisvektor \mathbf{g}_i mit dem kontravarianten Basisvektor \mathbf{g}^j , wenn die Indizes identisch sind ($i = j$), über eine mathematische Verknüpfung zwischen der Länge und Richtung der beiden Basisvektoren über ein Skalarprodukt den Wert 1 ergeben muss.

Die Gl. (3.14) definiert zum anderen, dass der kovariante Basisvektor \mathbf{g}_i normal zu den beiden anderen kontravarianten Basisvektoren \mathbf{g}^j ($i \neq j$) stehen muss.

Für die Definition der Metrik werden die Skalarprodukte der Basisvektoren einer Basis untereinander gebildet.

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = g_{ij} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = g^{ij}. \quad (3.15)$$

Die gebildeten Werte werden als Metrikoeffizienten bezeichnet. Insgesamt können 9 kovariante oder kontravariante Metrikoeffizienten definiert und in einen zweistufigen Metriktenor geschrieben werden, wobei nur 6 dieser Metrikoeffizienten unabhängig sind.

Das Symbol I kennzeichnet die folgende Gleichung als erste Gaußsche Fundamentalform. Das dyadische Produkt im zweiten Teil der Gleichung (z. B. $\mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta$) zeigt, durch welche kovarianten und/oder kontravarianten Basisvektoren die Basis aufgespannt wird:

$$\begin{aligned} I &: (\mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}^\beta) \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta = g^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta \\ I &: (\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta) \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta = g_{\alpha\beta} \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta. \end{aligned} \quad (3.16)$$

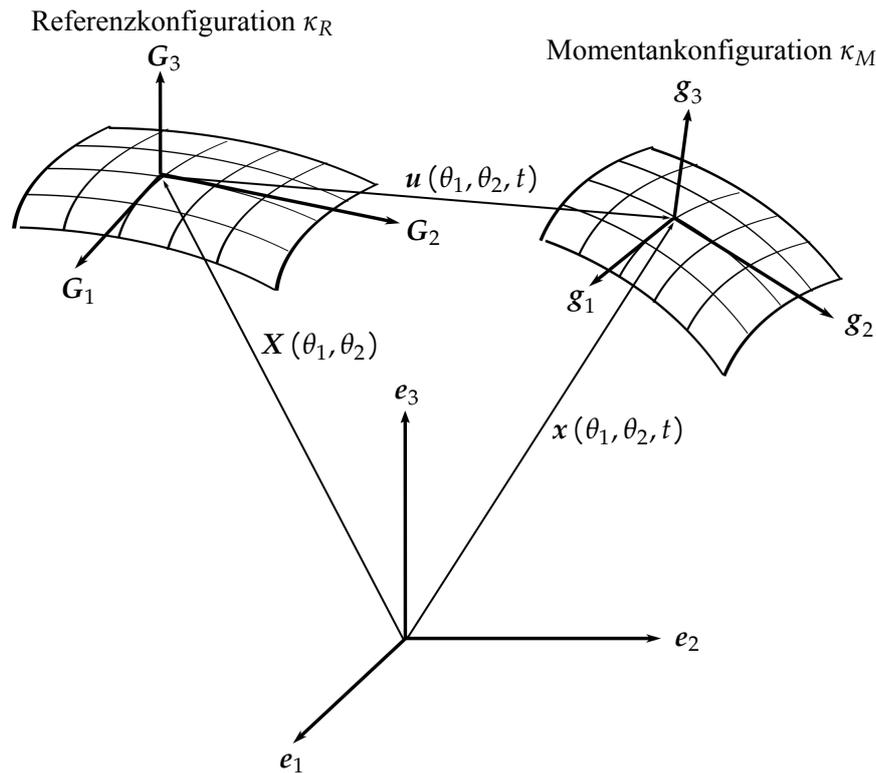


Abbildung 3.2.: Referenz- und Momentankonfiguration

3.3.2. Allgemeines Modell für die Beschreibung von Verschiebungen

Ein Körper soll sich infolge auf ihn einwirkender Kräfte, z. B. Oberflächen- oder Volumenkräfte, verformen. Bei der Verformung kommt es auf der Oberfläche und im Innern des Körpers zur Bewegung infinitesimal kleiner Partikel, die aus geometrischer Sicht durch Verschiebungen einzelner materieller Punkte beschrieben werden soll. Die Verformung des Körpers führt zu Verzerrungen des Körpers, die im Folgenden mathematisch beschrieben werden. Zur Erfassung der Verschiebung der materiellen Punkte des Körpers im Raum werden eine Referenz- und eine Momentankonfiguration eingeführt.

Referenzkonfiguration Auf der linken Seite der Abb. 3.2 ist das Kontinuum unbelastet und befindet sich in seiner Ausgangssituation (= Referenzkonfiguration κ_R). Der unverformte Körper wird in der Referenzkonfiguration durch ein im Körper gelagertes Koordinatensystem mit der kovarianten Basis G_i beschrieben.

Dieses Koordinatensystem ist ebenso wie das bei der Momentankonfiguration einzuführende Koordinatensystem g_i in den dreidimensionalen euklidischen Vektorraum eingebettet. Der euklidische Vektorraum wird in der Abbildung im unteren Bereich durch seine ortsfeste orthonormierte Basis e_i dargestellt.

Für einen materiellen Punkt P des Kontinuums wird der Ortsvektor $X(\theta_1, \theta_2)$ gebildet. Es gilt:

$$X(\theta_1, \theta_2) = \kappa_R(P, t_0). \quad (3.17)$$

Bei dieser Beschreibung wird der Zeitpunkt t_0 als derjenige Zeitpunkt eingeführt, bei dem sich der Körper noch im unbelasteten Zustand befindet.

Momentankonfiguration Das Kontinuum auf der rechten Seite der Abb. 3.2 ist durch einwirkende Kräfte bereits verformt. Das Kontinuum wird im Folgenden in seinem zeitlich fortschreitenden Verformungsprozess durch Momentankonfigurationen $\kappa_M(t)$ dargestellt. In diesen Konfigurationen sollen die Partikel des Kontinuums durch krummlinige Koordinatensysteme mit einer in Raum und Zeit veränderlichen kovarianten Basis g_i abgebildet werden.

Der materielle Punkt P erfährt bei den aufeinander folgenden individuellen Körperverformungen zu den Zeitpunkten t_i eine fortlaufende lineare Verschiebung. Der sich bildende Ortsvektor $\mathbf{x}(\theta_1, \theta_2)$ des materiellen Punktes in κ_M ist

$$\mathbf{x}(\theta_1, \theta_2) = \kappa_M(P, t). \quad (3.18)$$

Die Abbildung von einer Referenzkonfiguration κ_R auf eine Momentankonfiguration κ_M erfolgt über die Platzierungsfunktion $\chi(\mathbf{X}, t)$:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t), \quad \text{mit } \chi(\cdot) : \text{Platzierungsfunktion.} \quad (3.19)$$

Diese Funktion, bei der als unabhängige Variablen der Ortsvektor \mathbf{X} der Referenzkonfiguration und die Zeit t auftreten, wird auch als materielle oder Lagrangesche Beschreibungsweise bezeichnet [Mang und Hofstetter 2013].

Über die materielle Koordinate $\mathbf{X}(\theta_1, \theta_2, t)$ und die zeitabhängigen materiellen Koordinaten $\mathbf{x}(\theta_1, \theta_2, t)$ können physikalische Größen des materiellen Punktes P des Kontinuums mit Hilfe von skalaren, vektoriellen oder tensoriellen Ortsfunktionen beschrieben werden.

3.3.3. Verschiebungszustand und Deformationsgradient

Ein zeitabhängiger Verschiebungsvektor $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ eines Punktes P wird durch die Differenz zwischen dem auf einen materiellen Punkt bezogenen Ortsvektor $\mathbf{X}(\mathbf{X}, t)$ der Referenzkonfiguration κ_R und dem Vektor $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ der Momentankonfiguration κ_M gebildet:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}(\mathbf{X}, t). \quad (3.20)$$

Die Gesamtheit der Ortsvektoren \mathbf{x} aller materiellen Punkte in der aktuellen Momentankonfiguration minus der den materiellen Punkten zugeordneten Ortsvektoren \mathbf{X} der Referenzkonfiguration kennzeichnen den Verschiebungszustand.

Der Verschiebungszustand setzt sich im Allgemeinen aus einer Starrkörperbewegung und einer Formänderung des Körpers zusammen.

Der Verschiebungszustand von $\kappa_R(P)$ nach $\kappa_M(P)$ ist eindeutig, wenn für jeden Punkt der Momentan- und Referenzkonfiguration gilt:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \left(\mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) d\mathbf{X} = \mathbf{F} d\mathbf{X}. \quad (3.21)$$

Der in Gl. (3.21) eingeführte zweistufige Tensor \mathbf{F} ist der materielle Deformationsgradient. Die Verschiebungsableitung $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$ in Gl. (3.21) wird als materieller Verschiebungsgradient bezeichnet.

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \text{grad } \chi(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial x^i}{\partial X^j} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^j. \quad (3.22)$$

Der Deformationsgradient \mathbf{F} ist im Allgemeinen nicht symmetrisch. Für den materiellen Verschiebungsgradient $\text{Grad } \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$ wird das Symbol \mathbf{H} eingeführt:

$$\mathbf{H} = \text{Grad } \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{mit } \mathbf{H} : \text{materieller Verschiebungsgradient.} \quad (3.23)$$

Der auf die räumlichen Koordinaten \mathbf{x} bezogene Verschiebungsgradient $\text{grad } \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$ wird räumlicher Verschiebungsgradient genannt. Er soll mit dem Symbol $\bar{\mathbf{H}}$ bezeichnet werden:

$$\bar{\mathbf{H}} = \text{grad } \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{mit } \bar{\mathbf{H}} : \text{räumlicher Verschiebungsgradient.} \quad (3.24)$$

Der Tensor für den Deformationsgradienten F stellt eine Verbindung zwischen den mit unterschiedlichen Basisvektoren \mathbf{g}_i und \mathbf{G}^j aufgebauten Tangentialräumen zweier Konfigurationen her. Er wird deswegen als Zweifeld-Tensor bezeichnet [Parisch 2003].

Die Eigenschaft wird auf der rechten Seite der Gl. (3.22) deutlich: Das mit Basisvektoren zu definierende dyadische Produkt (\otimes) enthält

- sowohl kovariante Basisvektoren \mathbf{g}_i der Momentankonfiguration κ_M
- als auch kontravariante \mathbf{G}^j Basisvektoren der Referenzkonfiguration κ_R .

Die Eigenschaft des Zweifeld-Tensors kann anschaulich wie folgt ausgedrückt werden: Das linke Standbein des Tensors befindet sich mit \mathbf{g}_i auf der Momentankonfiguration, das rechte Standbein mit \mathbf{G}^j auf der Referenzkonfiguration [Parisch 2003].

Die insgesamt 3×3 Koordinaten F_j^i des Tensors werden aus den partiellen Ableitungen

$$F_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^j} \quad (3.25)$$

aufgebaut.

Der Deformationsgradient F bildet das materielle Linienelement $d\mathbf{X}$ von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration ab [Parisch 2003]:

$$d\mathbf{x} = F d\mathbf{X}, \quad dx^i = F_j^i dX^j. \quad (3.26)$$

Eine Transformation von der Referenzkonfiguration κ_R in die Momentankonfiguration κ_M wird auch als Push-forward-Operation bezeichnet.

Für die Operation wird im Folgenden das Symbol χ_* eingeführt. Damit kann Gl. (3.26) als Push-forward-Operation von $d\mathbf{X}$ von κ_R in die Momentankonfiguration κ_M ausgedrückt werden:

$$d\mathbf{x} = \chi_* (d\mathbf{X}). \quad (3.27)$$

Die inverse Abbildung des Linienelements $d\mathbf{x}$ in die Referenzkonfiguration κ_R kann durch Inversion des Deformationsgradienten F^{-1} erfolgen, wenn die Determinante von F

$$\det F = \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right) = J \neq 0 \quad \text{mit} \quad \det F : \text{ Jacobi - Determinante}$$

nicht verschwindet. Falls eine singuläre Jacobimatrix vorliegt, existieren alternative Vorgehensweisen, die Rückwärtsabbildung zu ermitteln, auf die jedoch in dieser Arbeit nicht näher eingegangen wird.

Die Abbildung F^{-1} bei regulär gegebener Jacobimatrix, die das materielle Linienelement $d\mathbf{x}$ von der Momentan- zurück in die Referenzkonfiguration abbildet, lautet dann:

$$d\mathbf{X} = F^{-1} d\mathbf{x}, \quad dX^j = (F^{-1})_i^j dx^i. \quad (3.28)$$

Der Tensor $F^{-1} = \text{grad } \mathbf{X}$ wird auch als räumlicher Deformationsgradient \bar{F} bezeichnet:

$$F^{-1} = \bar{F} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad } \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^j. \quad (3.29)$$

Die zu χ_* inverse Transformation von der aktuellen Konfiguration zurück in die Referenzkonfiguration wird auch als Pull-back-Operation bezeichnet.

Als Symbol für diese Operation wird χ_*^{-1} eingeführt. Damit kann die inverse Abbildung F^{-1} mit Hilfe des Pull-back-Operators χ_*^{-1} wie folgt beschrieben werden [Parisch 2003]:

$$d\mathbf{X} = \chi_*^{-1} (d\mathbf{x}). \quad (3.30)$$

Der Deformationsgradient F kann im Allgemeinen dazu verwendet werden, um von den kovarianten oder kontravarianten Basisvektoren der Referenzkonfiguration in die Basisvektoren der aktuellen Konfiguration und umgekehrt zu transformieren.

Mit dem Deformationsgradienten F , dem inversen Deformationsgradienten F^{-1} sowie dem transponierten Deformationsgradienten F^T und dem inversen transponierten Deformationsgradienten F^{-T} , die folgende Basisvektoren besitzen [z. B. Bletzinger und Ramm 1999]:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial x}{\partial X} = g_i \otimes G^i, & F^T &= G^i \otimes g_i, \\ F^{-1} &= \frac{\partial X}{\partial x} = G_i \otimes g^i, & F^{-T} &= g^i \otimes G_i, \end{aligned} \quad (3.31)$$

können nachfolgende Beziehungen zwischen kovarianten und kontravarianten Basisvektoren der Referenz- und Momentankonfiguration hergeleitet werden. Dabei wird vom Kronecker-Symbol δ_j^i als Ergebnis eines Skalarproduktes zwischen einem kontravarianten und einem dazu dualen kovarianten Basisvektor (Gl. (3.15)) Gebrauch gemacht [z. B. Bletzinger und Ramm 1999]:

$$\begin{aligned} g_i &= F \cdot G_i = g_j \otimes G^j \cdot G_i = \delta_j^i g_j = g_i, \\ G_i &= F^{-1} \cdot g_i = G_j \otimes g^j \cdot g_i = \delta_j^i G_j = G_i, \\ g^i &= F^{-T} \cdot G^i = g^j \otimes G_j \cdot G^i = \delta_j^i g^j = g^i, \\ G^i &= F^T \cdot g^i = G^j \otimes g_j \cdot g^i = \delta_j^i G^j = G^i. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Mit den ko- und kontravarianten Metrikkoeffizienten $g_{\alpha\beta}$ und $g^{\alpha\beta}$ können kovariante und kontravariante Basisvektoren gegenseitig überführt werden:

$$g_\alpha = g_{\alpha\beta} g^\beta \quad (3.33)$$

und

$$g^\alpha = g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma}, \quad g^\beta = g^{\beta\alpha} g_\alpha. \quad (3.34)$$

Über Gl. (3.31) können auch Ausdrücke wie $F^{-1} \cdot F^{-T}$ oder $F^{-T} : F$ berechnet werden:

$$F^{-1} \cdot F^{-T} = (G_\alpha \otimes g^\alpha) \cdot \underbrace{(g^\beta \otimes G_\beta)}_{= \delta_\alpha^\beta} = \delta_\alpha^\beta G_\alpha \otimes G_\beta = G_\alpha \otimes G_\beta. \quad (3.35)$$

Der Ausdruck für eine Verjüngung $F^{-T} : F$ (Anwendungsfall siehe z. B. Gl. (2.73)) berechnet sich zunächst über die Definitionen von Gl. (3.31) zu $F^{-T} : F = g^\alpha \otimes G_\alpha : g_\beta \otimes G^\beta$. Diese Gleichung wird mit $G_\alpha \cdot G^\beta = \delta_\alpha^\beta$ multipliziert, jedoch erfolgt diese Multiplikation schrittweise (Gl. (3.36) und (3.37)). Zunächst wird im ersten Schritt die Gl. (3.31) mit G_α von rechts multipliziert, und anschließend weiter umgeformt.

$$\begin{aligned} F^{-T} : F &= g^\alpha \otimes G_\alpha : g_\beta \otimes G^\beta \quad | \cdot G_\alpha \quad \text{mit Vertauschen der Seiten} \\ &= g_\beta \delta_\alpha^\beta : g^\alpha \otimes G_\alpha \\ &= g_\alpha : g^\alpha \otimes G_\alpha \end{aligned} \quad (3.36)$$

Dann folgt mit der Multiplikation von Gl. (3.36) mit G^β erneut von rechts der zweite Schritt:

$$\begin{aligned} F^{-T} : F &= g_\alpha : g^\alpha \otimes G_\alpha \quad | \cdot G^\beta \\ &= g_\alpha \cdot g^\alpha \delta_\alpha^\beta \\ &= g_\alpha \cdot g^\beta \\ &= g_{\alpha\beta} \quad g^\beta g^\beta = g^{\alpha\beta} g_\alpha g_\alpha. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Neben den dargestellten Beziehungen zwischen kovarianten und kontravarianten Basisvektoren lassen sich weitere wichtige Beziehungen über den Zusammenhang der Ortsvektoren $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$ der Gl. (3.20) zwischen

- den materiellen und räumlichen Deformationsgradienten \mathbf{F} und \mathbf{F}^{-1} und
- den räumlichen und materiellen Verschiebungsgradienten \mathbf{H} und $\bar{\mathbf{H}}$

und ihren transponierten Versionen ableiten. Diese Beziehungen lauten:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \\
 &= \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}, \\
 \mathbf{F}^T &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T = \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \\
 &= \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \\
 &= \mathbf{I} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T,
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

und

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^{-1} &= \bar{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \\
 &= \mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}, \\
 \mathbf{F}^{-T} &= \bar{\mathbf{F}}^T = \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \\
 &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \\
 &= \mathbf{I} - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Falls ein dreidimensionales euklidisches Koordinatensystem als Basissystem gewählt wurde, dann stellt sich der materielle Deformationsgradient in der folgenden Weise dar:

$$\mathbf{F} = \text{grad } \chi_*(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j}. \tag{3.40}$$

3.3.4. Nichtlineare und lineare Darstellung von Verzerrungen

In der Elastizitätstheorie werden allgemeine, durch Formänderung hervorgerufene Verzerrungen mit Hilfe der quadratischen Form des Liniendifferentials ermittelt. Das Quadrat des Linienelements in Tensorform lautet:

$$d\mathbf{x}^T \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}. \tag{3.41}$$

Weiter umgeformt ergibt sich für die Beziehung zwischen der quadratischen Form des Liniendifferentials in der Momentankonfiguration κ_M und in der Referenzkonfiguration κ_R :

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{x}^T \cdot d\mathbf{x} &= d\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \\
 &= d\mathbf{X}^T \left(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \right) d\mathbf{X} := d\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}.
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Der in Gl. (3.42) auftretende Tensor C wird als rechter Cauchy-Green-Deformationstensor bezeichnet. Der Tensor ist einer von zwei auf dem Deformationsgradienten F basierenden Deformationstensen der Cauchy-Greenschen Art.

Da der Deformationsgradient F im Ausdruck für C rechts steht, leitet sich der Name rechter Deformationstensor ab. Die Definition des Tensors ist:

$$C = F^T F \quad \text{bzw.} \quad C = F^T g F. \quad (3.43)$$

Zur Verdeutlichung, dass der Tensor C in der Referenzkonfiguration κ_R definiert ist, wurde in Gl. (3.43) ein Metriktensor g in die Darstellung hineingenommen. g bezeichnet den Metriktensor der Momentankonfiguration κ_M . Anhand der Definition Gl. (3.43) ist zu sehen, dass dieser Tensor symmetrisch ist.

Der linke Cauchy-Green-Deformationstensor ist [Parisch 2003]:

$$b = F F^T \quad \text{bzw.} \quad b = F G^{-1} F^T. \quad (3.44)$$

Die invariante Differenz $l^2 - L^2$ der Liniendifferentiale mit $l := ds$ und $L := dS$ wird als Maß der bei Formänderung im Körper auftretenden Metrik-Änderungen definiert [Mang und Hofstetter 2013]. Die Differenz der Liniendifferentiale wird mit Gl. (3.26):

$$\begin{aligned} l^2 - L^2 &= ds^2 - dS^2 = dx^T \cdot dx - dX^T \cdot dX = dX^T \cdot F^T \cdot F \cdot dX - dX^T \cdot I \cdot dX \\ &= dX^T \cdot C \cdot dX - dX^T \cdot I \cdot dX \\ &= dX^T \cdot (C - I) \cdot dX := dX^T \cdot 2E \cdot dX, \end{aligned} \quad (3.45)$$

mit

$$E = \frac{1}{2} (C - I) = \frac{1}{2} (F^T F - I). \quad (3.46)$$

E ist ein Tensor zweiter Stufe und wird als Green-Lagrangescher Verzerrungstensor bezeichnet [Mang und Hofstetter 2013]. Mit Gl. (3.46) gilt für E :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} (F^T F - I) \\ &= \frac{1}{2} ((G^\alpha \otimes g_\alpha) (g_\beta \otimes G^\beta) - I) \\ &= \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}) G^\alpha \otimes G^\beta. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor bezieht sich auf die Referenzkonfiguration κ_R und stellt die auf diese Konfiguration bezogenen Metrik-Änderungen $g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}$ des Körpers dar.

Der Verzerrungstensor E kann zunächst in einen linearen und einen nichtlinearen Teil aufgespalten werden:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \left(\left(I + \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^T \right) \cdot \left(I + \frac{\partial u}{\partial X} \right) - I \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial X} + \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^T + \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^T \cdot \frac{\partial u}{\partial X} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial X} + \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^T \right) + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^T \cdot \frac{\partial u}{\partial X}}_{=E_{\text{nicht linear}}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \left(\text{Grad } u + (\text{Grad } u)^T \right)}_{=E_{\text{linear}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\text{Grad } u \cdot (\text{Grad } u)^T \right)}_{=E_{\text{nicht linear}}}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

E ist symmetrisch und kann große Verformungen, die durch große Verschiebungen $\mathbf{u}(\theta_1, \theta_2, t)$ und große Verschiebungsableitungen ($\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$ oder $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$) gekennzeichnet sind, nichtlinear darstellen.

Der zweistufige Verzerrungstensor bezieht sich auf die Referenzkonfiguration.

Über die Beziehung

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \left(\mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}}_{\text{nicht linear}} \quad (3.49)$$

können bei dem linearisierten Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor E_{linear} noch weitere Teile abgespalten werden, wenn ein Konfigurationsübergang des linearisierten Verzerrungstensors von der Referenzkonfiguration κ_R auf die Momentankonfiguration κ_M durchgeführt werden soll. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} E_{\text{linear}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Der mit E_{linear} als linear gekennzeichnete Term $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right)$ in Gl. (3.50) ist nicht mit dem linearisierten Verzerrungstensor ϵ mit der Definitionsgleichung

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right) = \frac{1}{2} \left(\text{grad } \mathbf{u} + (\text{grad } \mathbf{u})^T \right) \quad (3.51)$$

identisch, da dort bei den Verschiebungsableitungen nach den materiellen Koordinaten \mathbf{x} der aktuellen Konfiguration statt nach den Koordinaten \mathbf{X} der Referenzkonfiguration abgeleitet wird.

Zwischen den Verschiebungsableitungen $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$ und $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$ besteht die in Gl. (3.49) angegebene Beziehung, die mit $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$ einen linearen und mit $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$ einen nichtlinearen Anteil enthält. Der Bezug der Verschiebungsableitung auf die aktuelle Konfiguration κ_M statt auf die Referenzkonfiguration κ_R bewirkt, dass durch den Konfigurationsübergang keine Terme mehr mit quadratischen Gliedern, wie z. B. $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$ oder $\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T$, Berücksichtigung finden.

Der linearisierte Verzerrungstensor ϵ wird im Weiteren für die Beschreibung der linearen Elastizitätseigenschaften des Ortra-Verfahrens verwendet.

Dieser Verzerrungstensor kommt generell bei der linearisierten bzw. linearen Elastizitätstheorie zum Einsatz, wenn darüber hinaus die Gleichgewichtsbedingungen linear abgebildet sind (siehe z. B. Gl. (4.90) in Abschnitt 4.4) und zusätzlich eine lineare konstitutive Gleichung (siehe z. B. Gl. (4.25) in Abschnitt 4.3.1) zum Einsatz kommt.

Für ein raumfestes, dreidimensionales euklidisches Koordinatensystem ist der linearisierte Verzerrungstensor ϵ

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\epsilon} &= \frac{1}{2} (\text{grad} \mathbf{u} + (\text{grad} \mathbf{u})^T) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\
 &= \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{array} \right]_{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j} . \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

Die Gültigkeit der Anwendung des linearisierten Verzerrungstensors $\boldsymbol{\epsilon}$ ist an folgende Voraussetzungen geknüpft [Mang und Hofstetter 2013]:

- Die Verschiebungen sind klein gegenüber den Abmessungen des Körpers.
- Die Verschiebungsableitungen sind klein gegenüber Eins.

Die Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors sind unter Verwendung der Indexschreibweise:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.53)$$

Für die neun Komponenten ϵ_{ij} des linearisierten Verzerrungstensors $\boldsymbol{\epsilon}$ führen in Anwendung der Definition der Gl. (3.52) Linearkombinationen der Verschiebungsableitungen $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ und $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ zu neun einzelnen Gleichungen. Diese stellen die kinematischen Beziehungen dar, die Bedingungen für eine geometrische Verträglichkeit zwischen dem Verschiebungszustand und den Verzerrungen des Körpers definieren.

Nun wird die Differenz der Liniendifferentiale $ds^2 - dS^2$ mit der inversen Beziehung $d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} dx$ (siehe Gl. (3.28)) berechnet, und damit die Differenzbildung der Liniendifferentiale auf der aktuellen Konfiguration durchgeführt. Es ergibt sich [Parisch 2003]:

$$\begin{aligned}
 l^2 - L^2 &= dx^T \cdot dx - d\mathbf{X}^T \cdot d\mathbf{X} = dx^T \cdot \mathbf{I} \cdot dx - dx^T \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot dx \\
 &= dx^T \left(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \right) dx := dx^T \cdot 2\mathbf{e} \cdot dx \quad (3.54)
 \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} \right). \quad (3.55)$$

Der in Gl. (3.54) eingeführte nichtlineare Euler-Almansi-Verzerrungstensor \mathbf{e} ist zum Greenschen Verzerrungstensor \mathbf{E} dual und bezieht sich, wie einleitend zur Gl. (3.54) ausgeführt wurde, auf die aktuelle Konfiguration. Die Metrikänderungen $g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}$ werden durch Darstellung in der kontravarianten Basis \mathbf{g}^i auf die aktuelle Konfiguration bezogen und durch den Verzerrungstensor \mathbf{e} wie folgt ausgedrückt:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} \left(g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta} \right) \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta. \quad (3.56)$$

Der Euler-Almansi-Verzerrungstensor \mathbf{e} kann über eine Push-forward-Operation $\chi_* (\mathbf{E})$ des Ausgangstensors \mathbf{E} aus der Referenzkonfiguration erhalten werden.

Unter Verwendung des inversen Deformationstensors \mathbf{F}^{-1} und seiner transponierten Darstellung \mathbf{F}^{-T} kann ein zweistufiger Tensor \mathbf{A} der Referenzkonfiguration in seinen in der aktuellen Konfiguration befindlichen, korrespondierenden Tensor \mathbf{a} transformiert werden:

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{A} \mathbf{F}^{-1}. \quad (3.57)$$

Die Push-forward-Operation des Greenschen Verzerrungstensors E in die aktuelle Konfiguration führt zu dem Euler-Almansi-Verzerrungstensor e [Parisch 2003, Holzapfel 2006]:

$$\begin{aligned}
 e = \chi_*(E) &= F^{-T} E F^{-1} \\
 &= F^{-T} \left(\frac{1}{2} (F^T F - I) \right) F^{-1} \\
 &= \frac{1}{2} (F^{-T} (F^T F - I) F^{-1}) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{F^{-T} F^T}_{=I} \underbrace{F F^{-1}}_{=I} - F^{-T} F^{-1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (I - F^{-T} F^{-1}).
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Die Aufspaltung des Euler-Almansi-Verzerrungstensors e in lineare und nichtlineare Teile führt, wenn die nichtlinearen Anteile vernachlässigt werden, zum linearen Cauchy-Verzerrungstensor ϵ . Der lineare und der nichtlineare Verzerrungstensor besitzen damit die Gemeinsamkeit, dass sie für das verformte Kontinuum in der aktuellen Konfiguration formuliert werden.

Eine auf den Euler-Almansi-Verzerrungstensor e angewendete Pull-back-Operation, die diesen von der aktuellen Konfiguration κ_M in die Referenzkonfiguration κ_R überträgt, führt zu dem Greenschen Verzerrungstensor E :

$$\begin{aligned}
 E = \chi_*^{-1}(e) &= F^T e F \\
 &= F^T \left(\frac{1}{2} (I - F^{-T} F^{-1}) \right) F \\
 &= \frac{1}{2} (F^T (I - F^{-T} F^{-1}) F) \\
 &= \frac{1}{2} \left(F^T F - \underbrace{F^T F^{-T}}_{=I} \underbrace{F^{-1} F}_{=I} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (F^T F - I).
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Die nichtlineare und die lineare Beschreibung von Verzerrungen in der Kontinuumsmechanik und in der linearen Elastizitätstheorie stellen fundamentale Konzepte dar. Als Beziehungen, die geometrisch zwischen verformten und nicht-verformten Größen formuliert werden, sind sie zunächst rein geometrischer Natur und werkstoffneutral. Erst durch zusätzliche konstitutive Beziehungen können Verzerrungen auch als Materialeigenschaften des Körpers angesehen werden, wenn sich bei Belastung eine Verformung über die inneren Spannungen einstellt.

3.3.5. Beispiel zu lokalen Verzerrungen eines Ortra-Kleinsystems (Ortra-Methode)

Das Abbildungsgesetz eines Ortra-Kleinsystems von DHDN/GK4 nach ETRS89/UTM32 lautet [Hampp und Glock 2017, Glock und Birkenbeul 2018]:

$$\begin{aligned}
 E_2 &= E_1 + o_1 (x_2 - x_1) + a_1 (y_2 - y_1) \\
 N_2 &= N_1 + a_1 (x_2 - x_1) - o_1 (y_2 - y_1).
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Gl. (3.60) wird für einen unmittelbaren Bezug zwischen Koordinatendifferenzen im Ausgangs- und Zielsystem leicht modifiziert:

$$\begin{aligned}
 E_2 - E_1 &= o_1 (x_2 - x_1) + a_1 (y_2 - y_1) \\
 N_2 - N_1 &= a_1 (x_2 - x_1) - o_1 (y_2 - y_1).
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

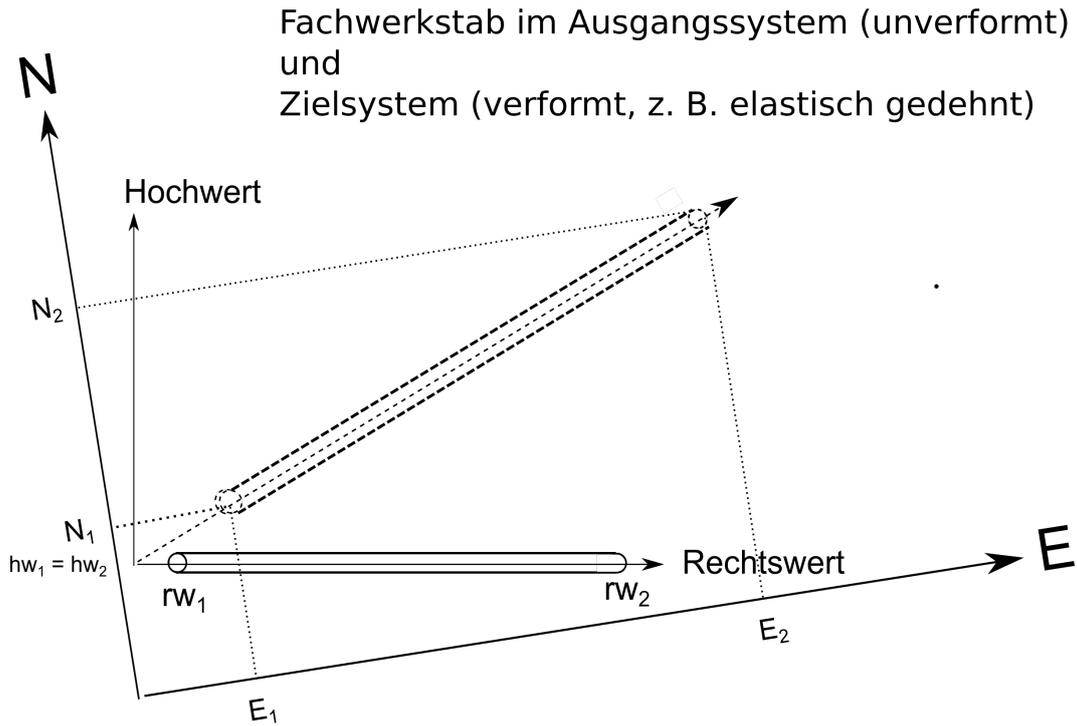


Abbildung 3.3.: Gedrehter Stab eines Ortra-Kleinsystems

Die Koordinatendifferenzen werden in Vektoren zusammengefasst und über eine Transformationsmatrix in Beziehung gebracht:

$$\begin{bmatrix} E_2 - E_1 \\ N_2 - N_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o_1 & a_1 \\ a_1 & -o_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Für die in Gl. (3.62) vorliegenden Koordinatendifferenzen ($E_2 - E_1, N_2 - N_1$) der aktuellen Konfiguration κ_M und den Differenzen ($x_2 - x_1, y_2 - y_1$) der Referenzkonfiguration κ_R wird folgende Variablensubstitution durchgeführt, um zum Aufbau von Koordinaten X_i und x_i für den materiellen Deformationsgradienten zu gelangen:

$$\begin{aligned} X_1 &:= x_2 - x_1 \\ X_2 &:= y_2 - y_1 \\ x_1 &:= E_2 - E_1 \\ x_2 &:= N_2 - N_1. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Dann ist Gl. (3.61) bzw. (3.62):

$$\begin{aligned} x_1 &= \chi_1(X_1, X_2) = o_1 X_1 + a_1 X_2 \\ x_2 &= \chi_2(X_1, X_2) = a_1 X_1 - o_1 X_2 \end{aligned} \quad (3.64)$$

und für den Deformationsgradienten F ergibt sich

$$F = \text{grad } \chi_*(\mathbf{X}) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j} = \begin{bmatrix} o_1 & a_1 \\ a_1 & -o_1 \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

Mit dem Deformationsgradienten F für einen gedrehten Stab des Ortra-Kleinsystems erhält man unter der Verwendung der 2×2 - Inversenformel

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

den inversen Deformationsgradienten F^{-1} :

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} o_1 & a_1 \\ a_1 & -o_1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-o_1 \cdot o_1 - a_1 \cdot a_1} \begin{bmatrix} -o_1 & -a_1 \\ -a_1 & o_1 \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Für den inversen transponierten Deformationsgradienten F^{-T} erhält man wegen der Symmetrie von F^{-1} gleichermaßen:

$$F^{-T} = \begin{bmatrix} o_1 & a_1 \\ a_1 & -o_1 \end{bmatrix}^{-T} = \frac{1}{-o_1 \cdot o_1 - a_1 \cdot a_1} \begin{bmatrix} -o_1 & -a_1 \\ -a_1 & o_1 \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

Durch Anwendung der Definitionsgleichung des Greenschen Verzerrungstensors E mit dem in Gl. (3.65) bestimmten Deformationsgradienten F und dem in Gl. (3.68) ermittelten Tensor F^{-T} ergibt sich im Folgenden:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} (F^T F - I) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} o_1 & a_1 \\ a_1 & -o_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} o_1 & a_1 \\ a_1 & -o_1 \end{bmatrix} - I \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cc} \underbrace{o_1 \cdot o_1 + a_1 \cdot a_1}_{= m^2} & \underbrace{o_1 \cdot a_1 - a_1 \cdot o_1}_{= 0} \\ \underbrace{a_1 \cdot o_1 - o_1 \cdot a_1}_{= 0} & \underbrace{a_1 \cdot a_1 + o_1 \cdot o_1}_{= m^2} \end{array} - I \right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{m^2 - 1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{m^2 - 1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Aus dem Greenschen Verzerrungstensor E der Gl. (3.69) sind folgende Normal- und Schubverzerrungen abzulesen:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{m^2 - 1}{2}, & E_{22} &= \frac{m^2 - 1}{2}, \\ E_{12} &= 0. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Da mit Gl. (3.64) eine lineare Platzierungsfunktion vorliegt, sind die Komponenten des Greenschen Deformationstensors E und des linearisierten Elastizitätstensors ϵ identisch.

3.3.6. Beispiel zu lokalen Verzerrungen eines Dreiecks (Membranmethode)

Das Dreieck ist durch die Seiten a , b und c und die Winkel α , β und γ gegeben. Im unverformten Zustand sollen den Dreiecksseiten a , b und c die unverformten Strecken $l_{01} = a$, $l_{02} = b$ und $l_{03} = c$ zugeordnet werden.

Nach der Verformung sollen den Dreiecksseiten die verformten Strecken $l_1 = a$, $l_2 = b$ und $l_3 = c$ zugeordnet werden.

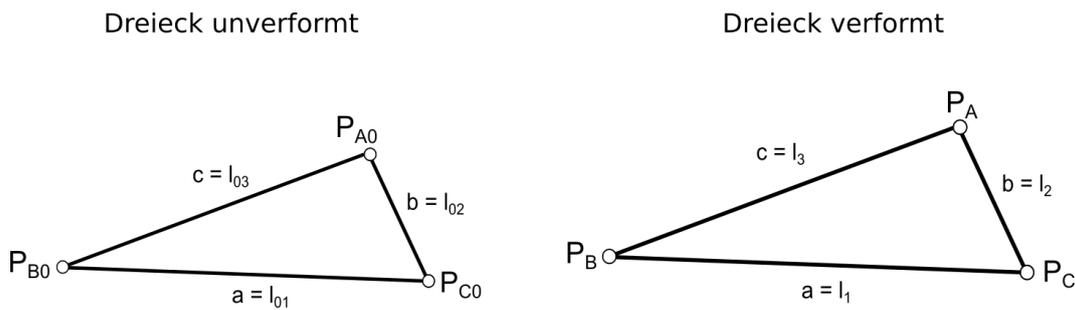


Abbildung 3.4.: Unverformtes Ausgangsdreieck und verformtes Zieldreieck

Für einen Dreieckspunkt, der in dem mit der aktuellen Konfiguration verbundenen zweidimensionalen, euklidischen Koordinatensystem die Koordinaten (x_1, x_2) erhält, lässt sich folgende affine Beziehung zu den Koordinaten (X_1, X_2) des Dreieckspunktes der Referenz- bzw. Ausgangskonfiguration angeben [Singer 1995]:

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_i + \mathbf{b}. \quad (3.71)$$

Für die affine Abbildung (3.71) werden folgende Platzierungsfunktionen χ_1 und χ_2 definiert:

$$\begin{aligned} x_1 &= \chi_1(X_1, X_2) = a X_1 + b X_2 + e, \\ x_2 &= \chi_2(X_1, X_2) = c X_1 + d X_2 + f. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Der Deformationsgradient F zur tensoriellen Beschreibung der Verformung des Dreiecks in der aktuellen Konfiguration ist:

$$\mathbf{F} = \text{grad } \chi_* (\mathbf{X}) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{array} \right]_{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

Für die folgende tensorielle Beschreibung der Verzerrungen des Dreiecks kann der Greensche Verzerrungstensor E wie folgt gebildet werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}}_{=\mathbf{F}^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{=\mathbf{F}} - \mathbf{I} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} a^2 + c^2 & a \cdot b + c \cdot d \\ a \cdot b + c \cdot d & b^2 + d^2 \end{bmatrix} - \mathbf{I} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a^2 + c^2 - 1}{2} & \frac{a \cdot b + c \cdot d}{2} \\ \frac{a \cdot b + c \cdot d}{2} & \frac{b^2 + d^2 - 1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Damit sind die Normal- und Schubverzerrungen berechnet, die bei verformten Dreiecken auftreten. Sie können an entsprechender Stelle dem Greenschen Verzerrungstensor E entnommen werden:

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= \frac{a^2 + c^2 - 1}{2}, & E_{22} &= \frac{b^2 + d^2 - 1}{2}, \\
 E_{12} &= E_{21} = \frac{a \cdot b + c \cdot d}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{3.75}$$

3.4. Kinetik

3.4.1. Spannungen

Die Bewegungen materieller Körper werden durch die Bewegungen ihrer materiellen Punkte beschrieben. Mit der Kinetik, dem Teilgebiet der Mechanik, das die Bewegung deformierbarer Körper zusammen mit den einwirkenden Kräften behandelt, können materialunabhängige Aussagen über die durch Bewegung und durch äußere Belastungen ausgelösten Spannungen gegeben werden [H. Altenbach 2018].

In der Kontinuumsmechanik werden die innerhalb eines Körpers bei einem Materialpunkt gegebenen Spannungsverhältnisse durch Komponenten eines zweistufigen Spannungstensors dargestellt.

Für die Beschreibung von Spannungen werden Spannungstensoren durch Spannungsvektoren ergänzt, die Oberflächenkräfte auf eine Flächeneinheit beziehen.

Ein weiterer Bereich der Kinetik beschäftigt sich mit dem Kräftegleichgewicht, das sich zwischen äußerer Belastung und inneren Kräften einstellt. Bei der Kinetik ergibt sich wiederum die Möglichkeit, die verschiedenen Aussagen auf unterschiedliche Konfigurationen, z. B. die Referenzkonfiguration κ_R und die Momentankonfiguration κ_M , zu beziehen.

Spannungsvektor Durch äußere Belastung wirkt auf jede Fläche eines Körpers ein Vektorfeld von Spannungsvektoren [H. Altenbach 2018]. Die Fläche kann sowohl eine gedachte, mit dem Schnittprinzip erzeugte Schnittfläche als auch eine äußere Begrenzungsfläche sein. Eine mit Hilfe des Schnittprinzips erzeugte Schnittfläche legt im Innern des Körpers innere Kräfte frei.

Bei den folgenden Herleitungen werden nun zunächst Schnittflächen betrachtet. Für äußere Begrenzungsflächen gelten die Aussagen für den Spannungsvektor (Gl. (3.77)) und den Cauchyschen Spannungstensor (Gl. (3.79)) sinngemäß. Die als innere Oberflächenkräfte wirkenden Schnittkräfte resultieren in einen Kraftvektor der Schnittkraft Δf_S , der auf die gesamte Oberfläche Δa bezogen ist. Es ist zu berücksichtigen, dass die Schnittkräfte sowie der resultierende Kraftvektor auf die aktuelle Konfiguration bezogen werden. Zusätzlich wird für die Oberfläche folgende Orientierung durch Einführung einer Flächennormale \mathbf{n} definiert (Gl. (3.76)):

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{n} da. \tag{3.76}$$

Der Spannungsvektor \mathbf{t} im Punkt P einer Schnittfläche oder einer äußeren Begrenzungsfläche wird nach Cauchy durch Grenzwertübergang der Oberfläche Δa gegen Null definiert [Parisich 2003, H. Altenbach 2018]. Der Vektor zeigt in Richtung der resultierenden Schnittkraft:

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta a} = \frac{d\mathbf{f}_S}{da}. \tag{3.77}$$

Alle durch den Materialpunkt P gehenden Schnittflächen, die durch ihre jeweiligen Flächennormalen \mathbf{n} präsentiert werden sollen, können in ihrer Gesamtheit den Spannungszustand des Punktes definieren. Zur vollständigen Definition des Spannungszustands eines materiellen Punktes sind jedoch drei zueinander senkrechte Schnittflächen ausreichend. Ein bewegter Körper soll in infinitesimal kleine, würfelförmige Volumenelemente zerlegt werden. Die Volumenelemente werden durch drei zueinander senkrechte Schnittflächen begrenzt.

Die Orientierung der drei Schnittflächen soll parallel zur Richtung der Koordinatenachsen \mathbf{e}_i eines dreidimensionalen euklidischen Koordinatensystems erfolgen. Auf der jeweiligen Seitenfläche des Würfels existiert nach Gl. (3.77) ein Spannungsvektor \mathbf{t} . Auf die Seitenfläche wirkt jeweils eine Normalspannung in Richtung der Flächennormale $\mathbf{n}_i = \mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$ der Schnittfläche und eine Schubspannung.

Diese Schubspannung soll in zwei zueinander senkrecht stehende Komponenten zerlegt werden, die in Richtung der beiden Koordinatenachsen e_j und e_k mit $j = 1, 2, 3$ und $k = 1, 2, 3, j \neq i, k \neq i$ zeigen und die nicht mit der Richtung der Normalspannung koinzidieren.

Für die drei Spannungsvektoren t_i , die auf die drei Schnittflächen des würfelförmigen infinitesimalen Volumenelements mit den Flächennormalen $n_i = e_i, i = 1, 2, 3$ bezogen werden, gilt [Mang und Hofstetter 2013]:

$$\begin{aligned} t_1 &= \sigma_{11} e_1 + \sigma_{12} e_2 + \sigma_{13} e_3, \\ t_2 &= \sigma_{21} e_1 + \sigma_{22} e_2 + \sigma_{23} e_3, \\ t_3 &= \sigma_{31} e_1 + \sigma_{32} e_2 + \sigma_{33} e_3. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Die σ_{ij} in Gl. (3.78) sind die Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors σ :

$$\sigma = \sigma_{ij} e_i \otimes e_j. \quad (3.79)$$

Der Cauchysche Spannungstensor ist wie der Greensche Verzerrungstensor E der Kinematik ein zweistufiger Tensor, der jedoch auf die aktuelle Konfiguration bezogen wird.

Wenn für die aktuelle Konfiguration statt eines euklidischen ein krummliniges Koordinatensystem mit einer kovarianten Basis g_i verwendet werden soll, gilt folgende Definition des Cauchyschen Spannungstensors:

$$\sigma = \sigma^{ij} g_i \otimes g_j. \quad (3.80)$$

Der Spannungsvektor t kann beim Vorliegen des Cauchyschen Spannungstensors σ für eine gegebene Fläche eines Körpers durch Multiplikation des Normalenvektors n der Fläche mit dem Spannungstensor σ berechnet werden [H. Altenbach 2018]:

$$t = \sigma \cdot n. \quad (3.81)$$

3.4.2. Spannungstensoren für die Referenz- und Momentankonfiguration

Für die Momentankonfiguration wurde der Cauchysche Spannungstensor σ über Gl. (3.78) bis (3.81) definiert. Für elastizitätstheoretische Betrachtungen, wie z. B. für Energiebetrachtungen, kann es notwendig sein, den Spannungstensor auf die Referenzkonfiguration zu beziehen. Dieses bereits als Push-back-Operation eingeführte Verlagern eines Tensors von der aktuellen Konfiguration κ_M in die Ausgangskonfiguration κ_R wird in der Kontinuumsmechanik häufig genutzt, um aus der Sicht der Elastizität konjugierte Größen in Beziehung zu bringen oder auch, um konstitutive Gleichungen aufzubauen.

Konstitutive Gleichungen, wie z. B. für das nichtlineare Saint-Venant–Kirchhoff Materialmodell (siehe Gl. (3.149) in Abschnitt 3.5.3), stellen zwischen E und einem in die Ausgangskonfiguration κ_R gebrachten, noch in Gl. (3.90) einzuführenden Spannungstensor $\chi_*^{-1}(\sigma)$ einen funktionalen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen her.

Der Spannungstensor σ , der den Normalvektor n eines Flächenelements da über Gl. (3.81) in den Spannungsvektor t transformiert, wird nun über Gl. (3.77) auf das Flächenelement da bezogen:

$$df_s = t da = \sigma \cdot n da. \quad (3.82)$$

Ein auf der Referenzkonfiguration vorliegender Spannungstensor, der erste Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor P , kann nun wie folgt definiert werden:

Beim Konfigurationsübergang der mechanischen und geometrischen Größen wird anstelle des Normalenvektors n , bezogen auf die Momentankonfiguration, ein Normalenvektor N der Referenzkonfiguration in Verbindung mit dem gleichfalls übertragenen Flächenstück (= Flächenstück dA) herangezogen.

Mit der Formel von Nanson kann der Übergang der beiden Größen zwischen beiden Konfigurationen erfolgen (z. B. [H. Altenbach 2018, Holzapfel 2006]):

$$n da = \det F F^{-T} N dA \quad (3.83)$$

oder

$$\mathbf{N} dA = \frac{1}{J} \mathbf{F}^T \mathbf{n} da. \quad (3.84)$$

J ist dabei das Verhältnis eines infinitesimalen Volumens dv der aktuellen Konfiguration κ_M zu dV der Referenzkonfiguration κ_R :

$$J = \det \mathbf{F} = \frac{dv}{dV} = \frac{(\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3}{(\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{G}_3} \quad (3.85)$$

Falls die kovarianten Basisvektoren \mathbf{g}_3 und \mathbf{G}_3 in Gl. (3.85) über Gl. (3.13) definiert wurden, gilt folgendes:

$$\begin{aligned} |\mathbf{g}_3| &= 1 \wedge \mathbf{g}_1 \perp \mathbf{g}_3 \wedge \mathbf{g}_2 \perp \mathbf{g}_3, \\ |\mathbf{G}_3| &= 1 \wedge \mathbf{G}_1 \perp \mathbf{G}_3 \wedge \mathbf{G}_2 \perp \mathbf{G}_3. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Dann ist das Verhältnis J bzw. die Determinante von \mathbf{F}

$$J = \det \mathbf{F} = \frac{|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2|}{|\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2|} = \frac{da}{dA'}, \quad (3.87)$$

da das jeweilige Spatprodukt im Zähler und Nenner von Gl. (3.85), wenn durch Gl. (3.86) die Höhe des Spats mit $|\mathbf{g}_3| = 1$ bzw. $|\mathbf{G}_3| = 1$ gegeben ist, die Flächengröße des durch den ersten und zweiten Basisvektors \mathbf{g}_1 und \mathbf{g}_2 bzw. \mathbf{G}_1 und \mathbf{G}_2 aufgespannten Parallelogramms annimmt. Diese Flächengröße lässt sich nach Gl. (3.12) über den Betrag des Kreuzprodukts berechnen, wie dies in Gl. (3.87) gemacht wurde.

Mit Hilfe von Gl. (3.87) kann ein in der aktuellen Konfiguration κ_M gegebenes Flächenintegral in ein Flächenintegral, das auf die Referenzkonfiguration bezogen wird, überführt werden:

$$\int_a \dots da = \int_A \dots \det \mathbf{F} dA. \quad (3.88)$$

Gleiches gilt nach Gl. (3.85) für die Übertragung eines Volumenintegrals von der Momentan- in die Referenzkonfiguration:

$$\int_v \dots dv = \int_V \dots \det \mathbf{F} dV. \quad (3.89)$$

Durch Einsetzen von Gl. (3.83) in Gl. (3.82) ergibt sich für den ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor \mathbf{P} folgendes:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} dA &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} da \\ &= \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} dA, \\ \mathbf{P} &= \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \neq \mathbf{P}^T. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Ein weiterer Spannungstensor ist der Kirchhoffsche-Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}$, der wie folgt definiert ist [Holzapfel 2006]:

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.91)$$

Der Kirchhoffsche-Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}$ und der Cauchysche Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ hängen mit dem ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor wie folgt zusammen [H. Altenbach 2018, Holzapfel 2006]. Bei Gl. (3.92) und (3.93) werden für die linke Seite Tensoren verwendet, rechts findet sich eine Indexschreibweise:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} & P_{ij} &= (\det \mathbf{F}) (F_{ik})^{-1} \sigma_{kj}, \\ &= \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \\ &= J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \\ &= \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T}, \end{aligned} \quad (3.92)$$

mit $\boldsymbol{\tau} = \det \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma}$.

$$\begin{aligned}
 \sigma &= (\det F)^{-1} F P & \sigma_{ij} &= (\det F) F_{ik} P_{kj}, \\
 &= (\det F)^{-1} P F^T. & \sigma_{ij} &= (\det F) P_{ik} F_{kj}.
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

Der Kirchhoffsche-Spannungstensor τ ist wiederum auf der aktuellen Konfiguration κ_M definiert.

Der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor S wird durch eine Pull-back-Operation des Kirchhoffschen Spannungstensors τ gewonnen [Parisch 2003]:

$$\begin{aligned}
 S &= \chi_*^{-1}(\tau) = F^{-1} \tau F^{-T} \\
 &= J F^{-1} \sigma F^{-T} \\
 &= \det F F^{-1} \sigma F^{-T}.
 \end{aligned} \tag{3.94}$$

Analog zur Gl. (3.79) soll auch für den zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor S eine Darstellung auf Basis von kovarianten Basisvektoren G_i der zugrundeliegenden Konfiguration κ_R angegeben werden:

$$S = S^{\alpha\beta} G_\alpha \otimes G_\beta. \tag{3.95}$$

Durch die Push-Forward-Beziehung $\chi_*(S)$ kann eine Beziehung zwischen dem Cauchyschen Spannungstensor σ und dem zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor S angegeben werden:

$$\tau = \chi_*(S) = F^{-T} S F^{-1}. \tag{3.96}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \chi_*^{-1}(\tau) = F^{-1} \tau F^{-T} \\
 &= J F^{-1} \sigma F^{-T} \\
 &= \det F F^{-1} \sigma F^{-T}.
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

Zuletzt soll über die eingeführten Spannungstensoren noch der Zusammenhang zwischen dem ersten und zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor P und S hergestellt werden [H. Altenbach 2018]:

$$\begin{aligned}
 S &= P F^{-T} & S_{ij} &= P_{ik} (F_{jk})^{-1}, \\
 &= F^{-1} P & S_{ij} &= (F_{ik})^{-1} P_{kj}, \\
 &= \det F F^{-1} \sigma F^{-T} & S_{ij} &= (\det F) (F_{ik})^{-1} (F_{jl})^{-1} T_{kl}. \\
 &= F^{-1} \underbrace{\det F \sigma F^{-T}}_{= P}.
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

Damit sind die wichtigsten Spannungstensoren der Kontinuumsmechanik zur Beschreibung der Spannung hergeleitet, die die Verzerrungen in einem Kontinuum verursachen. Diese entsprechen der aktuellen Betrachtungsweise der Mechanik und sind Grundlage für die Anwendung der Finite-Elemente-Methode oder das Weg- oder Kraftgrößenverfahren der Baustatik.

3.5. Konstitutive Gleichungen und verallgemeinertes Hookesches Gesetz

3.5.1. Mathematische Formulierung des Materialverhaltens

Das Materialverhalten eines Kontinuums soll in jedem materiellen Punkt durch einen Satz von Konstitutivgrößen beschrieben werden [H. Altenbach 2018]. Die funktionalen Beziehungen, die die Konstitutivgrößen über

Funktionen oder Funktionale zueinander in Beziehung bringen, werden als Konstitutivgleichungen bezeichnet. Für die mathematische Formulierung des Materialverhaltens finden sich auch die Begriffe Werkstoff- oder Materialgleichungen.

Im einfachsten Fall werden für die Konstitutivgrößen Spannungen und Deformationen verwendet, die die Antwort des Kontinuums auf eine äußere Belastung in einem funktionalen Zusammenhang darstellen. Weitere Konstitutivgrößen können z. B. Temperatur und Wärmestromvektor sein [H. Altenbach 2018]. Bei rein mechanischen Belastungen, die im Weiteren ohne thermische Einflüsse betrachtet werden sollen, wird der funktionale Zusammenhang wie folgt dargestellt [Stein und Barthold 1996, Mang und Hofstetter 2013]:

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{E}), \quad \text{in Indexschreibweise: } S_{ij} = \hat{\mathcal{F}}(E_{ij}). \quad (3.99)$$

Gl. (3.99) verwendet eine allgemeine nichtlineare Beziehung, die zwischen dem nichtlinearen, jedoch symmetrischen Verzerrungstensor \mathbf{E} und dem zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor \mathbf{S} formuliert wird. In der Indexschreibung bedeutet $\hat{\mathcal{F}}$ die allgemeine, nichtlineare Funktion.

Bei den konstitutiven Beziehungen sollen nur sog. Körper ersten Grades [H. Altenbach 2018] behandelt werden. Die mathematischen Materialgleichungen beschränken sich dann bei der Verknüpfung auf lokale mechanische Größen. Diese beziehen sich auf den einzelnen Materialpunkt und seine differentielle Umgebung.

Einführung einer Dehnungsenergiefunktion W und eines Materialmodells der hyperelastischen Materialien

Im Folgenden wird ideal-elastisches Materialverhalten betrachtet. Die durch äußere Belastung entstandenen Verzerrungen sollen bei der reversiblen Wiederherstellung des Körpers in seinen Ausgangszustand vollständig verschwinden. Dieser reversible und geschlossene Prozess soll unabhängig vom gewählten Weg sein. Dann kann im Allgemeinen von der Existenz einer Dehnungsenergiefunktion W ausgegangen werden [H. Altenbach 2018, Mang und Hofstetter 2013]:

$$W = W(\mathbf{X}, \mathbf{F}). \quad (3.100)$$

Die Dehnungsenergiefunktion W stellt ein elastisches Potential dar, das in der aktuellen Deformation dem Materialpunkt mit seinen materiellen Koordinaten \mathbf{X} zugeordnet wird.

Das Potential ermöglicht bei der reversiblen Formänderung die vollständige Wiederherstellung durch die Umwandlung der im Körper gespeicherten elastischen Verzerrungsenergie, die bei Erreichen des Ausgangszustands wieder verschwindet.

Das elastische Potential wird mit dem Materialmodell der hyperelastischen Materialien verknüpft.

Mit Hilfe der Verzerrungsenergiegedichte W kann die Spannung in Form des zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors durch Ableitung nach der Deformation erhalten werden:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}, \quad \text{mit } 2 d\mathbf{E} = d\mathbf{C} \quad \text{kann } \mathbf{S} \text{ auch als } \mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{ausgedrückt werden.} \quad (3.101)$$

Damit kann das elastische Potential W auch als Potential der Spannungen gesehen werden [Mang und Hofstetter 2013].

3.5.2. Grundlegende Prinzipien der Materialtheorie

Das systematische Reduzieren der Materialgesetze auf uns bekannte Formen, wie z. B. das allgemeine Hookesche Gesetz, kann durch Definition von grundlegenden Prinzipien erfolgen. Diese werden im Folgenden vorgestellt. Die wichtigen Prinzipien für Materialgleichungen sind [H. Altenbach 2018, Stein und Barthold 1996]:

- Prinzip der Zulässigkeit,
- Prinzip des Determinismus (Bestimmtheitsprinzip),
- Prinzip der lokalen Wirkung,
- Objektivitätsprinzip (Prinzip der Bezugssystemindifferenz),

- Prinzip der materiellen Symmetrie.

Zunächst wird kurz auf die ersten drei Prinzipien eingegangen, um dann mit den beiden letzten Prinzipien ein erstes Materialgesetz im Abschnitt 3.5.3 herzuleiten.

Grundsätzlich sagt das Prinzip der Zulässigkeit aus, dass die Materialgesetze den Bilanz- und Erhaltungssätzen der Kontinuumsmechanik sowie dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik nicht widersprechen dürfen. Eine Verträglichkeit der Materialgesetze mit den grundlegenden Aussagen der Kontinuumsmechanik muss gewährleistet sein.

Durch das Bestimmtheitsprinzip wird nach Altenbach der aktuelle Zustand des Kontinuums durch die aktuelle Beanspruchung einschließlich der Vorgeschichte bestimmt [H. Altenbach 2018]. Für die Beschreibung des Zustands werden die unabhängigen physikalischen und geometrischen Variablen, die von der Zeit abhängig sein können, in einer Funktion oder in einem Funktional festgelegt. Über die unabhängigen Variablen können mathematische Beziehungen zu den abhängigen Variablen aufgebaut werden.

Das Prinzip der lokalen Wirkung ist das schon eingangs erwähnte Prinzip, dass der Zustand eines Materialpunkts nur durch seine lokale differentielle Umgebung beeinflusst werden soll.

Materielle Objektivität

Die materielle Objektivität fordert die Unabhängigkeit der Materialgleichungen von der Wahl des Bezugssystems zur Beschreibung der Deformationen.

Die aktuellen Spannungszustände der materiellen Punkte eines elastischen Körpers sollen durch den Cauchy'schen Spannungstensor wie folgt beschrieben werden [Ciarlet 1988, Stein und Barthold 1996]:

$$\sigma(x, t) = \hat{\sigma}(F(X, t), X). \quad (3.102)$$

Ein materieller Punkt soll als elastischer Punkt bezeichnet werden, wenn sein Spannungszustand unabhängig von der Deformationsgeschichte z. B. durch Gl. (3.102) in Abhängigkeit vom Deformationsgradienten F beschrieben werden kann. Von einem elastischen Körper soll im Folgenden gesprochen werden, wenn alle materiellen Punkte zugleich elastische Punkte sind. Die durch Gl. (3.102) definierte Materialeigenschaft wird im Allgemeinen als Cauchy-elastische Materialeigenschaft bezeichnet.

Die bei einer Formänderung verrichtete Arbeit kann bei einem Cauchy-elastischen Material vom Weg abhängen. Falls eine solche Wegabhängigkeit existiert, liegen im Material keine konservativen Kräfte für die Spannungen vor, und folglich kann kein Potential für die Formänderungsenergie definiert werden.

Nur bei Wegunabhängigkeit kann der bei elastischem Material durch die Spannung verrichteten Arbeit eine Potentialfunktion zugeordnet werden. Für das Potential soll dann, wie bereits oben in Gl. (3.100) geschehen, eine Formänderungsenergiefunktion W definiert werden. Aus einer weiteren Ableitung der Formänderungsenergiefunktion W nach der Deformation F ergibt sich diesmal die Spannung in Form des ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors P (Gl. (3.90)) [Parisich 2003, Holzapfel 2006]:

$$P(X, F) = \frac{\partial W}{\partial F} \quad \forall X, \forall F. \quad (3.103)$$

Falls ein Spannungstensor wie z. B. P oder σ zusätzlich von der materiellen Koordinate X abhängt, hat das zur Folge, dass die Spannung für jeden materiellen Punkt variiert.

Im Weiteren sollen nur sog. homogene Materialien zum Einsatz kommen, bei denen der Spannungstensor σ der Gl. (3.102) ausschließlich vom aktuellen Deformationszustand abhängig ist. Bei homogenen Materialien sind die Materialeigenschaften für alle materiellen Punkte gleich.

Dann lässt sich das Materialgesetz für den Cauchy'schen Spannungsvektor wie folgt definieren [Stein und Barthold 1996]:

$$\sigma(x, t) = \hat{\sigma}(F(X, t)), \quad \text{in Kurzform: } \sigma = \hat{\sigma}(F). \quad (3.104)$$

Das Material wird nun dem Prinzip unterworfen, dass seine Eigenschaften unabhängig vom gewählten Koordinatensystem sein sollen.

Ein Beobachter, der bei Formänderung des Materials die auftretenden Phänomene in Form von physikalischen Größen wahrnimmt, darf seine Position im Raum beliebig verändern, ohne dass sich dabei eine Änderung der Größen ergibt. Das Prinzip der materiellen Objektivität fordert, dass die Größen, die das Materialverhalten beschreiben, unabhängig von der Lage der orthogonalen Basis des Bezugssystems e_i gültig sind.

Die Invarianz der Größen bei einem Basiswechsel ist gleichbedeutend mit der Tatsache, dass sich die für die Beschreibung des Materialverhaltens verwendeten Zustandsgrößen einer euklidischen Transformation unterziehen dürfen, ohne sich zu ändern.

In der aktuellen Momentankonfiguration wird eine euklidische Transformation durchgeführt, bei der eine Translation und eine Rotation gegenüber dem Koordinatenursprung zur Anwendung kommen soll.

Falls als unabhängige Größe für die Beschreibung der Formveränderung der Deformationsgradient F verwendet wird, ist es nicht notwendig, die Translation zu berücksichtigen, da sie nicht in die Tensorgröße F einfließen kann.

Die Momentankonfiguration κ_M , die mit einer Abbildungsfunktion $x = \chi(X, t)$ in der Lagrangeschen Darstellung gegeben ist, soll über eine orthogonale Transformationsmatrix $Q(t)$ durch Rotation in eine Momentankonfiguration κ_M^* mit $x^* = \chi^*(X, t)$ überführt werden [Ciarlet 1988, Truesdell und Noll 2004]:

$$x^* = Q(t) x. \quad (3.105)$$

Für einen in der Ausgangs-Momentankonfiguration κ_M für eine beliebige Schnittfläche (oder eine äußere Begrenzungsfläche) gegebenen Spannungsvektor t einschließlich der der Ausgangsfläche zuordenbaren Normalen n ergeben sich für die über Gl. (3.105) transformierte Ziel-Momentankonfiguration κ_M^* folgende Beziehungen:

$$t^* = Q(t) t \text{ bzw. } t = Q^t(t) t^*, \quad n^* = Q(t) n \text{ bzw. } n = Q^t(t) n^*. \quad (3.106)$$

Der Spannungsvektor t kann zugleich über den Cauchyschen Spannungstensor σ durch Multiplikation des Normalenvektors n mit dem Spannungstensor σ (siehe Gl. (3.81)) bestimmt werden. Für die jeweilige Momentankonfiguration κ_M und κ_M^* ergeben sich folgende Beziehungen:

$$t^* = \sigma^* n^* (\kappa_M^*), \quad t = \sigma n (\kappa_M). \quad (3.107)$$

Mit Gl. (3.106) und (3.107) folgt:

$$\sigma^* n^* = t^* = Q(t) t = Q(t) \sigma n = Q(t) \sigma Q^t(t) n^*. \quad (3.108)$$

Es ergibt sich somit als Transformationsbeziehung für den Cauchyschen Spannungstensor σ :

$$\sigma^*(X, t) = Q(t) \sigma(X, t) Q^t(t). \quad (3.109)$$

Die Transformationsbeziehung der Gl. (3.109) kennzeichnet das Materialgesetz eines homogenen Materials, das infolge der Beobachterinvarianz dem Kriterium der materiellen Objektivität entspricht:

$$\hat{\sigma}(Q, F) = Q \hat{\sigma}(F) Q^t. \quad (3.110)$$

Zur Prüfung der materiellen Objektivität von weiteren kinematischen Größen existiert die erweiterte Abbildungsfunktion $(x, t) \rightarrow (x^*, t^*)$ [Ogden 1997, Parisch 2003]

$$x^* = Q(t) x + c(t), \quad t^* = t - a, \quad (3.111)$$

die neben der orthogonalen Transformationsmatrix Q eine Translation in Form einer zeitabhängigen Starrkörperbewegung $c(t)$ berücksichtigt.

Für Skalar- und Vektorfelder, Zweifeld-Tensoren wie z. B. den Deformationstensor F und weitere zweistufige Tensoren werden in folgender Übersicht die Bedingungen für materielle Objektivität zusammengestellt [Parisch 2003]:

$$\begin{aligned}
 \text{Skalarfeld:} & \quad \Phi^*(x^*, t) = \Phi(x, t). \\
 \text{Vektorfeld:} & \quad v^*(x^*, t) = Q(t) v(x, t). \\
 \text{Zweifeld-Tensor:} & \quad F^*(x^*, t) = Q(t) F(x, t). \\
 \text{Tensor 2. Stufe:} & \quad t^*(x^*, t) = Q(t) t(x, t) Q^t(t).
 \end{aligned}$$

Mit dieser Übersicht, die eine Überprüfung der materiellen Objektivität bei unterschiedlichen Feldern erlaubt, wird der Abschnitt über das Objektivitätsprinzip abgeschlossen.

Es folgt der letzte vorbereitende Schritt zur Herleitung eines Materialgesetzes über den Ansatz der rationalen Kontinuumsmechanik nach Truesdell und Noll [Truesdell und Noll 2004]. Dabei wird zur materiellen Symmetrie übergegangen, die mit einer mathematischen Formulierung der Richtungsunabhängigkeit von mechanischen Eigenschaften beginnt.

Isotropes Material

Das nichtlineare hyperelastische Modell des Saint-Venant-Kirchhoff-Materials ist durch Richtungsunabhängigkeit (Isotropie) der Materialeigenschaften gekennzeichnet [Stein und Barthold 1996].

Aus dem Modell lässt sich durch Linearisierung das allgemeine Hookesche Materialgesetz herleiten, das später in dieser Arbeit innerhalb der linearisierten Elastizitätstheorie der Stäbe Anwendung finden wird. Für einen materiellen Punkt besitzen beide Materialgesetze für beliebige Richtungen im Innern des elastischen Körpers identische Werkstoffeigenschaften, was zugleich eine Richtungsunabhängigkeit der mechanischen Eigenschaften impliziert.

Bei einem elastischen Körper mit isotropem Material ist für jeden materiellen Punkt des Kontinuums das Kriterium eines elastischen Punktes erfüllt, da ausschließlich eine Abhängigkeit des elastischen Verhaltens vom Deformationsgradienten (Gl. (3.104)) besteht, der invariant gegenüber beliebigen Drehungen im materiellen Punkt ist. Der Deformationsgradient ist gleichermaßen infolge der richtungsinvarianten Werkstoffeigenschaft für jeden elastischen Punkt des Kontinuums richtungsunabhängig.

Zum Aufbau einer Materialgleichung für isotropes Material wird bei einem materiellen Punkt P die Referenzkonfiguration durch den orthogonalen Tensor Q beliebig gedreht. Die materielle Koordinate \tilde{X} des elastischen Punktes in der gedrehten Referenzkonfiguration soll durch folgende Beziehung aus der Ausgangs-Referenzkonfiguration hervorgehen [Stein und Barthold 1996]:

$$\tilde{X} = \Lambda(X) = Q^T X. \quad (3.112)$$

Der Deformationsgradient F wird in Gl. (3.113) auf eine Verkettung des Deformationsgradienten \tilde{F} der gedrehten Referenzkonfiguration und des Gradienten der Abbildungsfunktion $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial X}$ abgebildet [Stein und Barthold 1996]. Daraus ergibt sich eine Beziehung zwischen F und \tilde{F} :

$$F = \frac{\partial x}{\partial \tilde{X}} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial X} = \tilde{F} \frac{\partial \Lambda(X)}{\partial X} = \tilde{F} \frac{\partial (Q^T X)}{\partial X} = \tilde{F} Q^T. \quad (3.113)$$

Formulierungen für ein homogenes, isotropes Materialgesetz

Mit Hilfe dieser Verknüpfung zwischen beiden Deformationsgradienten F und \tilde{F} [Holzapfel 2006, Stein und Barthold 1996]

$$F = \tilde{F} Q^t \iff \tilde{F} = Q F \quad (3.114)$$

kann ein richtungsunabhängiges Materialgesetz für den Spannungstensor σ durch die folgende Beziehung formuliert werden. Dabei kennzeichnet der Spannungstensor $\hat{\sigma}$ den durch Verzerrungen erzeugten Spannungszustand eines isotropen Materials [Ciarlet 1988]:

$$\hat{\sigma}(X, \tilde{F}) = \hat{\sigma}(X, FQ) = \hat{\sigma}(X, F) \quad \forall Q. \quad (3.115)$$

Analog zu Gl. (3.104) soll für ein homogenes isotropes Materialgesetz gelten, dass das Gesetz nicht von der unabhängigen Variable der materialen Koordinate abhängen darf. Es entfällt somit bei Gl. (3.115) die Abhängigkeit von einer zweiten Variablen \mathbf{X} :

$$\hat{\sigma}(\tilde{\mathbf{F}}) = \hat{\sigma}(\mathbf{F}\mathbf{Q}) = \hat{\sigma}(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{Q}. \quad (3.116)$$

Für ein isotropes, cauchy-elastisches Materialgesetz sind gleichzeitig die Kriterien für materielle Objektivität (Gl. (3.109)) und Richtungsunabhängigkeit von Materialeigenschaften (Gl. (3.116)) zu erfüllen:

$$\hat{\sigma}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \mathbf{Q}\hat{\sigma}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^t \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}(\mathbf{F}) = \hat{\sigma}(\mathbf{F}\mathbf{Q}) \quad \forall \mathbf{Q}. \quad (3.117)$$

Durch Anwendung des Darstellungssatzes von Rivlin-Ericksen [Truesdell und Noll 2004, Holzapfel 2006, Ciarlet 1988] werden bei einer Konstitutivgleichung $\hat{\sigma}(\mathbf{F})$ die Kriterien der Gl. (3.117) erfüllt, wenn zum einen

$$\hat{\sigma}(\mathbf{F}) = \hat{\sigma}(\mathbf{F}\mathbf{F}^t) = \hat{\sigma}(\mathbf{b}) \quad \forall \mathbf{F} \quad (3.118)$$

gilt. Zum linken Cauchy-Green-Deformationstensor $\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ siehe Gl. (3.44). Zum anderen wird Gl. (3.117) erfüllt, wenn die Tensorfunktion $\hat{\sigma}(\mathbf{F}) = \hat{\sigma}(\mathbf{b})$ der Gl. (3.118) in Abhängigkeit von reellwertigen Funktionen

$$\beta_i = \beta_i(I_b^{(i)}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.119)$$

der drei Invarianten $I_b^{(1)}$, $I_b^{(2)}$ und $I_b^{(3)}$ des linken Cauchy-Green-Deformationstensors \mathbf{b} gebildet wird:

$$\hat{\sigma}(\mathbf{b}) = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{b} + \beta_2 \mathbf{b}^2 \quad \text{mit} \quad \beta_i = \beta_i(I_b^{(i)}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.120)$$

Die skalaren Funktionen β_i stellen isotropes Materialverhalten beschreibende Koeffizienten dar, die infolge der Abhängigkeit von den Invarianten $I_b^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ des Deformationstensors \mathbf{b} eine Funktion des aktuellen Verzerrungszustands sind.

Die drei Invarianten $I_b^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ des linken Cauchy-Green-Deformationstensors \mathbf{b} sind [Itskov 2018, Holzapfel 2006]:

$$\begin{aligned} I_b^{(1)} &= \text{tr } \mathbf{b} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ I_b^{(2)} &= \frac{1}{2} [(\text{tr } \mathbf{b})^2 - \text{tr}(\mathbf{b}^2)] = \text{tr } \mathbf{b}^{-1} \cdot \det \mathbf{b} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, \\ I_b^{(3)} &= \det \mathbf{b} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Für die Definition der Invarianten $I_b^{(i)}$ werden die Eigenwerte λ_i , $i = 1, 2, 3$ des Tensors \mathbf{b} herangezogen. Wegen der Symmetrie des zugrunde gelegten Tensors \mathbf{b} existieren ausschließlich reelle Eigenwerte [Itskov 2018]. Infolge der materiellen Objektivität wird \mathbf{F} auf den symmetrischen, linksseitigen Deformationstensor \mathbf{b} abgebildet.

Analog kann für den zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor \mathbf{S} ein zu Gl. (3.120) analoges Materialgesetz aufgebaut werden, das die oben genannten Kriterien (Gl. (3.117)) für isotrope, cauchy-elastische Materialien erfüllt. Für die Tensorfunktion $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F})$ muss [Ciarlet 1988]

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}^t \mathbf{F}) = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C}) \quad \forall \mathbf{F} \quad (3.122)$$

gelten, wobei wiederum die Tensorfunktion in Abhängigkeit von Invarianten

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C}) = \gamma_0 \mathbf{I} + \gamma_1 \mathbf{C} + \gamma_2 \mathbf{C}^2 \quad \text{mit} \quad \gamma_i = \gamma_i(I_C^{(i)}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.123)$$

gebildet wird [Holzapfel 2006, Ciarlet 1988, Stein und Barthold 1996].

Dabei sind die Koeffizienten γ_i nun skalare Funktionen der Invarianten $I_C^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ des rechten Cauchy-Green-Deformationstensors \mathbf{C} . Die Invarianten $I_C^{(i)}$ werden analog zu Gl. (3.121) gebildet:

$$\begin{aligned}
 I_C^{(1)} &= \operatorname{tr} \mathbf{C} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\
 I_C^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[(\operatorname{tr} \mathbf{C})^2 - \operatorname{tr} (\mathbf{C}^2) \right] = \operatorname{tr} \mathbf{C}^{-1} \det \mathbf{C} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, \\
 I_C^{(3)} &= \det \mathbf{C} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.
 \end{aligned} \tag{3.124}$$

3.5.3. Übergang zum linearisierten Hookeschen Materialgesetz

Für die Herleitung des allgemeinen Hookeschen Materialgesetzes wird die Linearisierung der Spannungsvektoren in der Referenzkonfiguration durchgeführt [Stein und Barthold 1996, Ciarlet 1988]. Die Deformation des Körpers der aktuellen Konfiguration soll dann auf kleine Verschiebungen seiner materiellen Punkte beschränkt sein.

Der Übergang von dem allgemeinen Materialgesetz eines homogenen, isotropen und hyperelastischen Materials, das für große Verschiebungen gültig ist, zu einem linearisierten Elastizitätsgesetz mit kleinen Verschiebungen, das in unmittelbarer Nähe der Referenzkonfiguration gültig ist, erfolgt über eine Taylorentwicklung.

Die einzelnen Glieder der Taylorreihe werden für eine sich in der Referenzkonfiguration befindende Entwicklungsstelle $\bar{\mathbf{x}}$ definiert.

Für eine lineare Approximation der nächsten Umgebung der Referenzkonfiguration wird die Taylorentwicklung für die Tensorfunktion unter Vernachlässigung höherer Glieder nach dem linearen Glied abgebrochen.

Folgende Bezeichnungen werden in der Taylorentwicklung für die tensorwertige, als stetig differenzierbar angenommene Tensorfunktion $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C}) : \operatorname{Lin}^n \mapsto \operatorname{Lin}^n$ in der Umgebung \mathbf{u} von $\bar{\mathbf{x}}$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C}) &= \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{u})) = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}})) + \overline{\mathbf{DS}} \cdot \mathbf{u} + R(\mathbf{u}) \\
 &= \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}})) + \frac{d}{d\epsilon} [\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{u}))]_{\epsilon=0} + R(\mathbf{u})
 \end{aligned} \tag{3.125}$$

verwendet [Wriggers 2001]:

$\hat{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{C}})$ der Funktionswert der Tensorfunktion $\hat{\mathbf{S}}$ an der Entwicklungsstelle $\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}})$.

$\overline{\mathbf{DS}}$ ist die Ableitung der Tensorfunktion $\hat{\mathbf{S}}$, die über eine Richtungsableitung bestimmt wird.

\mathbf{u} ist eine kleine Verschiebung oder ein Inkrement, das in beliebige Richtung vom Entwicklungspunkt zeigen kann.

$R = R(\mathbf{u})$ das Restglied der Taylorentwicklung mit der Eigenschaft

$$\lim_{|\mathbf{u}| \rightarrow 0} \frac{R(\mathbf{u})}{|\mathbf{u}|} = 0. \tag{3.126}$$

Unter der Linearisierung $\operatorname{Lin}[\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C})]_{\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}}$ der in Richtung des Vektors \mathbf{u} nichtlinearen Funktion $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C})$ wird die Approximation der Funktion $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C})$ durch den linearen Anteil

$$\operatorname{Lin}[\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C})]_{\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}} := \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}})) + \overline{\mathbf{DS}} \cdot \mathbf{u} = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}})) + \frac{d}{d\epsilon} [\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{u}))]_{\epsilon=0} \tag{3.127}$$

verstanden. In gekürzter Notation $\operatorname{Lin}[\hat{\mathbf{S}}]_{\mathbf{u}}$, die ohne Angabe des Parameters der Tensorfunktion $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C})$ und der Entwicklungsstelle $\bar{\mathbf{x}}$ erfolgt, kann Gl. (3.127) wie folgt dargestellt werden:

$$\operatorname{Lin}[\hat{\mathbf{S}}]_{\mathbf{u}} := \hat{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{C}}) + \overline{\mathbf{DS}} \cdot \mathbf{u}. \tag{3.128}$$

Mit der Beziehung in Gl. (3.46) zwischen dem Deformationstensor $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ (Gl. (3.43)) und $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ (Gl. (3.48))

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{C} = \mathbf{1} + 2 \mathbf{E}, \tag{3.129}$$

kann die Linearisierung $\text{Lin}[\hat{S}(C)]_{\mu}$ des Materialgesetzes in der Umgebung der Referenzkonfiguration κ_R in eine Linearisierung $\text{Lin}[\hat{S}(E)]_E$ umformuliert werden:

$$\text{Lin}[\hat{S}(\bar{E})]_E = \hat{S}(\bar{E}) + \overline{DS} \cdot E = \hat{S}(\bar{E}) + \frac{\partial \hat{S}}{\partial E}(\bar{E}) : E. \quad (3.130)$$

Unter der Annahme einer spannungsfreien Referenzkonfiguration κ_R kann die Linearisierung $\text{Lin}[\hat{S}(\bar{E})]_E$ der Gl. (3.130) in die Form der Gl. (3.131) überführt werden. Bei spannungsfreier Referenzkonfiguration wird der rechte Cauchy-Green-Deformationstensor C zu einem Einheitstensor $\mathbf{1}$, da wegen Gl. (3.129) der Greensche Verzerrungstensor E bei Nichtexistenz von Verzerrungen zu einem Nulltensor wird:

$$\begin{aligned} \text{Lin}[\hat{S}]_E = \hat{S}(\mathbf{1}) + \overline{DS} \cdot E &= \hat{S}(\mathbf{1}) + 2 \frac{\partial \hat{S}}{\partial E}(\mathbf{1}) : E \\ &= \hat{S}(\mathbf{1}) + \mathbf{C} : E. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Einführung des vierstufigen Materialtensors \mathbf{C}

Der vierstufige Materialtensor \mathbf{C} wird über eine partielle, in Gl. (3.131) durchgeführte Richtungsableitung der Spannung nach der Deformation erhalten [Parisch 2003]:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \hat{S}}{\partial E} = 2 \frac{\partial \hat{S}}{\partial C} = \text{oder } C_{ABCD} = 2 \frac{\partial S_{AB}}{\partial C_{CD}}. \quad (3.132)$$

In Gl. (3.132) ist der Materialtensor \mathbf{C} als Gradient der Funktion $\hat{S}(E)$ bzw. $\hat{S}(C)$ definiert. Der Tensor \mathbf{C} wird auch als Elastizitätstensor bezeichnet [Mang und Hofstetter 2013, Holzapfel 2006, Parisch 2003].

Der Materialtensor misst die Änderung der Spannung im Verhältnis zur Änderung der Verzerrung. Wegen der Symmetrieeigenschaft $S_{ij} = S_{ji}$ des zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors \mathbf{S} folgt die Symmetrieeigenschaft beim Materialtensor [Parisch 2003]:

$$C_{ijkl} = C_{jikl}. \quad (3.133)$$

Da auch der Greensche Verzerrungstensor E symmetrisch ist, ergibt sich eine weitere Symmetrieeigenschaft:

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}. \quad (3.134)$$

Mit den beiden Symmetrieeigenschaften aus Gl. (3.133) und (3.134) ergeben sich für den Materialtensor \mathbf{C} 36 unabhängige Komponenten. Nun soll im Zusammenhang mit dem Materialtensor \mathbf{C} ein hyperelastisches Materialmodell angenommen werden. Damit wird nach Gl. (3.101) von der Existenz eines elastischen Potentials W ausgegangen, das in der Folge die Definition des Materialtensors \mathbf{C} aus weiteren partiellen Ableitungen des Potentials W in Gl. (3.101) nach dem Cauchy-Green-Deformationstensor C ermöglicht:

$$\mathbf{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad \text{oder} \quad C_{IJKL} = 2 \frac{\partial S_{IJ}}{\partial C_{KL}}, \quad C_{IJKL} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial C_{IJ} \partial C_{KL}}, \quad (3.135)$$

In Gl. (3.135) finden sich wegen der Vertauschbarkeit der Reihenfolge der partiellen Ableitungen nun folgende Symmetrieeigenschaften [Holzapfel 2006]:

$$C_{ABCD} = C_{CDAB} \quad \text{oder} \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^T. \quad (3.136)$$

Der Materialtensor verfügt mit dieser weiteren Symmetrie schließlich über 21 unabhängige Komponenten, die bei der Definition von Gl. (3.135) ganz allgemeine Materialeigenschaften beschreiben, wenn keine Richtungssymmetrien existieren.

Im Weiteren soll jedoch auf das Materialverhalten des isotropen Falls eingegangen werden, bei dem das Material in allen Richtungen identisches mechanisches Verhalten aufweist.

Herleitung des linearisierten Materialgesetzes für isotrope, elastische Materialien

Für das Materialgesetz für isotrope, elastische Materialien \hat{S} der Gl. (3.123) werden bei den folgenden Herleitungen die Invarianten im Vektor $i_C = (I_C^{(1)}, I_C^{(2)}, I_C^{(3)})$ zusammengefasst. Mit den Invarianten im Vektor i_C ergibt sich folgende Darstellung:

$$\hat{S}(C)|_{\text{isotrop}} = \gamma_0(i_C) \mathbf{1} + \gamma_1(i_C) C + \gamma_2(i_C) C^2. \quad (3.137)$$

Die Linearisierung soll durch die Linearisierung der Koeffizientenfunktionen γ_0, γ_1 und γ_2 an der Entwicklungsstelle $C = \mathbf{1}$ erfolgen.

Die drei Invarianten $I_C^{(1)}, I_C^{(2)}$ und $I_C^{(3)}$ sollen konkret für die Entwicklungsstelle $C = \mathbf{1}$ in das Tupel $i_{C=\mathbf{1}} = (I_{C=\mathbf{1}}^{(1)}, I_{C=\mathbf{1}}^{(2)}, I_{C=\mathbf{1}}^{(3)})$ zusammengefasst werden.

Für diese Entwicklungsstelle $C = I$ ergeben sich für die Invarianten in einfacher Rechnung folgende Werte, da alle drei Eigenwerte des Einheitstensors I gleich 1 sind [Ciarlet 1988]:

$$\begin{aligned} I_I^{(1)} &= \text{tr } I = 1 + 1 + 1 = 3, \\ I_I^{(2)} &= \frac{1}{2} [(\text{tr } I)^2 - \text{tr } (I^2)] = \frac{1}{2} [3^2 - 3] = 3, \\ I_I^{(3)} &= \det I = 1. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Die Linearisierung des Materialgesetzes $\hat{S}(C)|_{\text{isotrop}}$ (Gl. (3.137)) für isotrope, elastische Materialien wird mit Linearisierung der Koeffizientenfunktionen zu

$$\begin{aligned} \hat{S}(C)|_{\text{Lin, isotrop}} &= (\gamma_0(i_{C=\mathbf{1}}) + \overline{D\gamma_0(i_{C=\mathbf{1}})} \cdot E) \mathbf{1} + (\gamma_1(i_{C=\mathbf{1}}) + \overline{D\gamma_1(i_{C=\mathbf{1}})} \cdot E) C \\ &+ (\gamma_2(i_{C=\mathbf{1}}) + \overline{D\gamma_2(i_{C=\mathbf{1}})} \cdot E) C^2. \end{aligned} \quad (3.139)$$

Die Ableitungen $\overline{D\gamma_\alpha(i_{C=\mathbf{1}})} \cdot E$ mit $i_{(C=\mathbf{1})} = (I_{C=\mathbf{1}}^{(1)}, I_{C=\mathbf{1}}^{(2)}, I_{C=\mathbf{1}}^{(3)})$ und $\alpha = 1, 2, 3$ können unter Verwendung der Kettenregel und den noch zu bildenden Linearisierungen der Invarianten $\overline{DI_{C=\mathbf{1}}^{(\alpha)}} \cdot E$ wie folgt aufgebaut werden:

$$\begin{aligned} \overline{D\gamma_\alpha(i_{C=\mathbf{1}})} \cdot E &= \frac{\partial \gamma_\alpha(\bar{E})}{\partial E} \cdot E, \quad \text{mit } \alpha = 1, 2, 3 \\ &= \frac{\partial \gamma_\alpha(i_{C=\mathbf{1}})}{\partial I^{(1)}} \overline{DI_{C=\mathbf{1}}^{(1)}} \cdot E + \frac{\partial \gamma_\alpha(i_{C=\mathbf{1}})}{\partial I^{(2)}} \overline{DI_{C=\mathbf{1}}^{(2)}} \cdot E + \frac{\partial \gamma_\alpha(i_{C=\mathbf{1}})}{\partial I^{(3)}} \overline{DI_{C=\mathbf{1}}^{(3)}} \cdot E \\ &= \frac{\partial \gamma_\alpha(i_{C=\mathbf{1}})}{\partial I^{(1)}} \frac{\partial I^{(1)}}{\partial E} \cdot E + \frac{\partial \gamma_\alpha(i_{C=\mathbf{1}})}{\partial I^{(2)}} \frac{\partial I^{(2)}}{\partial E} \cdot E + \frac{\partial \gamma_\alpha(i_{C=\mathbf{1}})}{\partial I^{(3)}} \frac{\partial I^{(3)}}{\partial E} \cdot E. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Die Linearisierungen (Richtungsableitungen) der Invarianten $I_E^{(1)}, I_E^{(2)}$ und $I_E^{(3)}$ berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \overline{DI_E^{(1)}} \cdot E &= \frac{d}{d\epsilon} \left[I_E^{(1)} (I + 2 \epsilon E) \right]_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon} \left[3 + I_E^{(1)} (2 \epsilon E) \right]_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon} [3 + \text{tr} (2 \epsilon E)]_{\epsilon=0} \\
 &= \frac{d}{d\epsilon} [3 + 2 \epsilon E : I]_{\epsilon=0} = [2 E : I] = 2 \text{tr} E, \\
 \overline{DI_E^{(2)}} \cdot E &= \frac{d}{d\epsilon} \left[\frac{1}{2} \left((\text{tr} (I + 2 \epsilon E))^2 - \text{tr} (I + 2 \epsilon E)^2 \right) \right]_{\epsilon=0} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\epsilon} \left[(3 + 2 \epsilon E)^2 - \left((I^2 + 4 \epsilon E + 4 \epsilon^2 E^2) : I \right) \right]_{\epsilon=0} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\epsilon} \left[(9 + 12 \epsilon \text{tr} E + 4 \epsilon^2 (\text{tr} E)^2) - (I^2 + 4 \epsilon E + 4 \epsilon^2 E^2) : I \right]_{\epsilon=0} = \frac{1}{2} [12 \text{tr} E - 4 E : I] \\
 &= 6 \text{tr} E - 2 \text{tr} E = 4 \text{tr} E, \\
 \overline{DI_E^{(3)}} \cdot E &= \frac{d}{d\epsilon} \left[\frac{1}{6} \left((\text{tr} (I + 2 \epsilon E))^3 - 3 \text{tr} (I + 2 \epsilon E) \text{tr} (I + 2 \epsilon E)^2 + 2 \text{tr} (I + 2 \epsilon E)^3 \right) \right]_{\epsilon=0} \\
 &= \frac{1}{6} \frac{d}{d\epsilon} \left[(3 + 2 \epsilon \text{tr} E)^3 - 3 (3 + 2 \epsilon \text{tr} E) \text{tr} (I^2 + 4 \epsilon E + 4 \epsilon^2 E^2) \right. \\
 &\quad \left. + 2 (I^3 + 6 I^2 \epsilon E + 12 I \epsilon^2 E^2 + 8 \epsilon^3 E^3) : I \right]_{\epsilon=0} = \frac{1}{6} [54 \text{tr} E - 54 \text{tr} E + 12 \text{tr} E] \\
 &= 2 \text{tr} E.
 \end{aligned} \tag{3.141}$$

Die Richtungsableitung $\overline{D\gamma_\alpha(i_{C=1})} \cdot E$ wird mit den Ableitungen der Invarianten (Gl. (3.141)) zu

$$\overline{D\gamma_\alpha(i_{C=1})} \cdot E = 2 \frac{\partial \gamma_\alpha(i_{C=1})}{\partial I^{(1)}} \text{tr} E + 4 \frac{\partial \gamma_\alpha(i_{C=1})}{\partial I^{(2)}} \text{tr} E + 2 \frac{\partial \gamma_\alpha(i_{C=1})}{\partial I^{(3)}} \text{tr} E \tag{3.142}$$

zusammengesetzt. Durch Einführung der Definition $\dot{\gamma}_\alpha(i_{C=1})$

$$\dot{\gamma}_\alpha(i_{C=1}) := 2 \frac{\partial \gamma_\alpha(i_{C=1})}{\partial I^{(1)}} + 4 \frac{\partial \gamma_\alpha(i_{C=1})}{\partial I^{(2)}} + 2 \frac{\partial \gamma_\alpha(i_{C=1})}{\partial I^{(3)}} \tag{3.143}$$

kann Gl. (3.142) schließlich in folgender Notation dargestellt werden:

$$\overline{D\gamma_\alpha(i_{C=1})} \cdot E = \dot{\gamma}_\alpha(i_{C=1}) \text{tr} E. \tag{3.144}$$

Für den Ansatz von Gl. (3.145) wird eine Substitution des rechten Cauchy-Green-Deformationstensors C durch $C = I + 2 E$ durchgeführt.

Schließlich ergibt sich nach Einsetzen der einzelnen Richtungsableitungen $\overline{D\gamma_\alpha(i_{C=1})} \cdot E$ in die Definitionsgleichung (3.139) für $\hat{S}(C)|_{\text{Lin, isotrop}}$ folgender Ausdruck für ein linearisiertes Materialgesetz für den zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor S [Ciarlet 1988]:

$$\begin{aligned}
 \hat{S}(C)|_{\text{Lin, isotrop}} &= \left(\gamma_0(i_{C=1}) + \dot{\gamma}_0(i_{C=1}) \text{tr} E \right) \mathbf{1} + \left(\gamma_1(i_{C=1}) + \dot{\gamma}_1(i_{C=1}) \text{tr} E \right) (\mathbf{1} + 2 E) \\
 &\quad + \left(\gamma_2(i_{C=1}) + \dot{\gamma}_2 \text{tr} E \right) (\mathbf{1} + 4 E + 4 E^2).
 \end{aligned} \tag{3.145}$$

Die einzelnen Koeffizientenfunktionen γ_α und ihre Ableitungen $\dot{\gamma}_\alpha$ werden im Folgenden den Tensoren I , $\text{tr} E \cdot I$ und E einzeln zugeordnet. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C})|_{\text{Lin, isotrop}} = & \left(\gamma_0(i_{\mathbf{C}=1}) + \gamma_1(i_{\mathbf{C}=1}) + \gamma_2(i_{\mathbf{C}=1}) \right) \mathbf{1} \\
 & + \left(\dot{\gamma}_0(i_{\mathbf{C}=1}) + \dot{\gamma}_1(i_{\mathbf{C}=1}) + \dot{\gamma}_2(i_{\mathbf{C}=1}) \right) \text{tr } \mathbf{E} \cdot \mathbf{I} \\
 & + \left(2 \left(\gamma_1(i_{\mathbf{C}=1}) + \dot{\gamma}_1(i_{\mathbf{C}=1}) \text{tr } \mathbf{E} \right) + 4 \left(\gamma_2(i_{\mathbf{C}=1}) + \dot{\gamma}_2(i_{\mathbf{C}=1}) \text{tr } \mathbf{E} \right) \right) \mathbf{E} + o(\|\mathbf{E}\|).
 \end{aligned} \tag{3.146}$$

Mit den Konstanten [Stein und Barthold 1996, Ciarlet 1988]

$$\begin{aligned}
 \pi(\mathbf{x}) &= \gamma_0(i_{\mathbf{C}=1}) + \gamma_1(i_{\mathbf{C}=1}) + \gamma_2(i_{\mathbf{C}=1}), \\
 \lambda(\mathbf{x}) &= \dot{\gamma}_0(i_{\mathbf{C}=1}) + \dot{\gamma}_1(i_{\mathbf{C}=1}) + \dot{\gamma}_2(i_{\mathbf{C}=1}), \\
 \mu(\mathbf{x}) &= (\gamma_1(i_{\mathbf{C}=1}) + \dot{\gamma}_1(i_{\mathbf{C}=1}) \text{tr } \mathbf{E}) + 2(\gamma_2(i_{\mathbf{C}=1}) + \dot{\gamma}_2(i_{\mathbf{C}=1}) \text{tr } \mathbf{E}),
 \end{aligned} \tag{3.147}$$

kann das linearisierte Materialgesetz $\hat{\mathbf{S}}$ für den zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C})|_{\text{Lin, isotrop}}$ wie in folgender Gl. (3.148) geschrieben werden.

Materialgesetz für Saint-Venant-Kirchhoff-Materialien

In Gl. (3.148) wird noch eine explizite Abhängigkeit der Materialparameter vom materiellen Ort des Partikels ausgedrückt:

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{E})|_{\text{Lin, isotrop}} = \pi(\mathbf{x}) \mathbf{1} + \lambda(\mathbf{x}) \text{tr } \mathbf{E} \cdot \mathbf{1} + 2 \mu(\mathbf{x}) \mathbf{E} + o(\|\mathbf{E}\|). \tag{3.148}$$

Für ein homogenes Material, dessen Spannungszustand ausschließlich vom Deformationsgradient \mathbf{F} abhängt, wird Gl. (3.148) unter der Annahme, dass die Referenzkonfiguration spannungsfrei ist, zu

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{E})|_{\text{Lin, isotrop}} = \lambda \text{tr } \mathbf{E} \cdot \mathbf{1} + 2 \mu \mathbf{E} + o(\|\mathbf{E}\|). \tag{3.149}$$

Das Materialgesetz stellt, unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung $o(\|\mathbf{E}\|)$, eine konstitutive Gleichung für Saint-Venant-Kirchhoff-Materialien dar. Die isotropes Materialverhalten beschreibenden, unabhängigen Materialkonstanten λ und μ in Gl. (3.149) werden als erste und zweite Lamé-Konstante bezeichnet. Für die erste Lamé-Konstante λ ergibt sich folgender Zusammenhang [Mang und Hofstetter 2013]

$$\lambda = \frac{\nu}{1 - 2\nu} \cdot \frac{1}{1 + \nu} \cdot E, \tag{3.150}$$

mit der Querdehnzahl (Poissonzahl) ν und dem Elastizitätsmodul E .

Für die zweite Lamé-Konstante μ gilt:

$$\mu = G = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \nu} \cdot E. \tag{3.151}$$

μ bzw. G wird als Schubmodul bezeichnet.

In Indeschreibweise ergibt sich für das Materialgesetz für Saint-Venant-Kirchhoff-Materialien (Gl. (3.149)), unter Vernachlässigung höherer Terme, folgender Ausdruck:

$$\mathbf{S}_{ij}(\mathbf{E}) = \lambda \mathbf{E}_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \mathbf{E}_{ij} \quad \text{mit dem Kronecker - Delta } \delta_{ij}. \tag{3.152}$$

Für den vierstufigen Materialtensor \mathbf{C} gelten in Indeschreibweise folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{ij}(\mathbf{E}) = \mathbf{C}_{ijkl} \cdot \mathbf{E}_{kl} \quad \text{mit } \mathbf{C}_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\
 \text{und } \mathbf{E}_{ij} &= \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_k \partial_j u_k).
 \end{aligned} \tag{3.153}$$

Eine nichtlineare Abhängigkeit des Materialgesetzes für Saint-Venant-Kirchhoff-Materialien von den Verschiebungen \mathbf{u} wird deutlich, wenn die Definitionsgleichung für den Verzerrungstensor \mathbf{E} von Gl. (3.48) in Gl. (3.149) eingesetzt wird.

Die Gleichung wird anschließend so umgeformt, dass die von \mathbf{u} abhängigen linearen Terme und die nichtlinearen Terme in unterschiedlichen Zeilen zu stehen kommen:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{E})|_{\text{Lin, isotrop}} &= \lambda \left(\text{tr} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right) \right) \mathbf{I} \\ &+ 2 \mu \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right) \\ &= \lambda \left(\text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right) \mathbf{I} + \mu \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \right) \\ &+ \frac{\lambda}{2} \left(\text{tr} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right) \mathbf{I} + \mu \left(\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right). \end{aligned} \quad (3.154)$$

Linearisierung des Materialgesetzes für Saint-Venant-Kirchhoff-Materialien, Übergang zum allgemeinen Hookeschen Gesetz

Nach der Linearisierung der Materialgleichung für isotrope, elastische Materialien (Gl. (3.137)), die zu einer Materialgleichung für Saint-Venant-Kirchhoff Materialien (Gl. (3.149)) führte, soll nun ein Übergang zu einem linearisierten Elastizitätsgesetz, dem allgemeinen Hookeschen Gesetz, vollzogen werden. Bei dem allgemeinen Hookeschen Gesetz wird durch Nachdifferenzierung des Materialgesetzes für Saint-Venant-Kirchhoff Materialien (Gl. (3.149)) die Linearisierung in den Verschiebungen \mathbf{u} erreicht.

Die Linearisierung $\sigma = \text{Lin}[\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{E}(\mathbf{u}))]_{\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}}$ der Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Ausgangsgleichung (3.137) nach den Verschiebungen kann mathematisch wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned} \sigma = \text{Lin}[\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{E}(\mathbf{u}))]_{\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}} &= \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{E}(\bar{\mathbf{x}})_{(u=0)}) + \frac{d}{d\epsilon} [\mathbf{S}(\mathbf{E}(\bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{u}))]_{\epsilon=0} \\ &= \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{E}(\bar{\mathbf{x}})_{(u=0)}) + \left[\frac{d\mathbf{S}(\mathbf{E}(\bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{u}))}{d\epsilon} \right]_{\epsilon=0}. \end{aligned} \quad (3.155)$$

Unter Anwendung der Kettenregel

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\epsilon} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}}_{\text{äußere Ableitung}} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{E}(\bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{u})}{\partial \epsilon}}_{\text{innere Ableitung}} \Big|_{\epsilon=0} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} \frac{d}{d\epsilon} [\mathbf{E}(\bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{u})]_{\epsilon=0} \quad (3.156)$$

können im Folgenden zwei wichtige Gleichungen für den linearisierten Spannungsvektor σ gewonnen werden. Das Multiplizieren mit der inneren Ableitung führt dabei zu einem Nachdifferenzieren.

Zunächst soll mit der anschließend in Gl. (3.159) zu bildenden Linearisierung des Greenschen Verzerrungstensors $\epsilon = \text{Lin}[\mathbf{E}]_{\mathbf{u}} = \frac{d}{d\epsilon} [\mathbf{E}(\bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{u})]_{\epsilon=0}$ und unter Verwendung der Definition der Gl. (3.132) für den vierstufigen Materialtensor \mathbf{C} für $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}$ eine zu Gl. (3.131) analoge Gleichung für den linearisierten Spannungsvektor σ aufgebaut werden:

$$\begin{aligned} \text{Lin}[\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{E}(\mathbf{u}))]_{\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}} &= \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{E}(\bar{\mathbf{x}})_{(u=0)}) + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}(\bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{u})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{E}(\bar{\mathbf{x}})_{(u=0)}) + \mathbf{C} : \epsilon. \end{aligned} \quad (3.157)$$

Mit der Spannung $\hat{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{E}})$, die in der Referenzkonfiguration verschwindet, wird Gl. (3.157) zu:

$$\sigma = \text{Lin}[\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{E}(\mathbf{u}))]_{\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}} = \mathbf{C} : \epsilon. \quad (3.158)$$

Durch Nachdifferenzieren von Gl. (3.149) bezüglich der Verschiebungen \mathbf{u} unter Verwendung der Linearisierung des Greenschen Verzerrungstensors

$$\begin{aligned} \text{Lin}[E]_{\mathbf{u}} &= \frac{1}{2} \left[\frac{d}{d\epsilon} \left(\left(\mathbf{I} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \left(\mathbf{I} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) - \mathbf{1} \right)_{\epsilon=0} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{d}{d\epsilon} \left(\epsilon \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \epsilon \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)_{\epsilon=0} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right] \end{aligned} \quad (3.159)$$

erhält man:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = \text{Lin}[\hat{S}(E(\mathbf{u}))]_{\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}} &= \text{Lin}[\lambda \text{tr} E(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{1} + 2 \mu E(\mathbf{u})]_{\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}} \\ &= \lambda \text{tr} \text{Lin}[E(\mathbf{u})]_{\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}} \cdot \mathbf{1} + 2 \mu \text{Lin}[E(\mathbf{u})]_{\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}} \\ &= \lambda \text{tr} \left(\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right] \right) \cdot \mathbf{1} + 2 \mu \left(\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right] \right), \end{aligned} \quad (3.160)$$

die Gl. (3.154) entspricht, wenn in linearer Formulierung sämtliche nichtlineare Glieder abgespalten werden.

Für die in der linearisierten Elastizitätstheorie vorausgesetzten kleinen Verzerrungen und kleinen Rotationen ergeben sich kleine Verschiebungsgradienten $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$, die in Gl. (3.160) mit Ableitungen nach den Lagrangeschen Koordinaten \mathbf{X} aufgebaut wurden. In Indexschreibweise kann die Verschiebungsableitung $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$ in Lagrange-scher Fassung wie folgt ausgedrückt werden [Mang und Hofstetter 2013]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j}. \quad (3.161)$$

Die einen kleinen Verschiebungsgradienten $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$ für den materiellen Punkt erzeugende infinitesimale Verschiebung \mathbf{u} , die die aktuelle Konfiguration des verformten Kontinuums in infinitesimaler Nähe der initialen Ausgangskonfiguration verbleiben lässt, bewirkt, dass für die Änderungsrate $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$ folgende Näherung in der infinitesimalen Betrachtung gültig ist [Mang und Hofstetter 2013]:

$$\frac{\partial x_k}{\partial X_j} \approx \delta_{kj}. \quad (3.162)$$

Es gilt dann

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_j} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \approx \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \delta_{ij}, \quad (3.163)$$

und schließlich:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_i} \approx \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \quad \text{in Tensornotation: } \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \approx \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (3.164)$$

Somit kann Gl. (3.160) auch wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = \text{Lin}[\hat{S}(E(\mathbf{u}))]_{\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}} &= \lambda \text{tr} \left(\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right] \right) \cdot \mathbf{1} + 2 \mu \left(\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right] \right) \\ &= \lambda \text{tr} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{1} + 2 \mu \boldsymbol{\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.165)$$

Damit liegt nun das allgemeine Hookesche Werkstoffgesetz vor. Für seine spätere Verwendung bei den Matrizenmethoden der Statik wird Gl. (3.165) noch in der Indexschreibweise formuliert.

Mit der Beziehung [Stein und Barthold 1996]

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{1} = (\epsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : (\delta_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = \epsilon_{ij} \delta_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} = \epsilon_{kk} \quad (3.166)$$

ist

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + 2\mu \epsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (3.167)$$

und es ergibt sich die Indexschreibweise für das allgemeine Hookesche Werkstoffgesetz [z. B. Mang und Hofstetter 2013] bezüglich einer Basis $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}. \quad (3.168)$$

3.6. Gleichgewicht und Bewegungsgleichungen

Ein Kontinuum ist im *statischen* Gleichgewicht, wenn die auf seinen Körper einwirkenden Oberflächen- und Volumenkräfte im Gleichgewicht sind [z. B. Stein und Barthold 1996, Holzapfel 2006, H. Altenbach 2018].

Die Volumenkräfte wirken dabei als Fernwirkungskräfte im Körperinnern. Eine Volumenkraft ist eine Kraft, die im gesamten Volumen eines Körpers an jedem seiner materiellen Punkte angreift und auf ein infinitesimales Volumenelement dV bezogen wird [H. Altenbach 2018, Mang und Hofstetter 2013]. Die Einheit einer Volumenkraft ist [Kraft / Volumen]. Beispiele für Fernwirkungskräfte, die zu einer Volumenkraft im Innern eines Körpers führen, sind die Gravitationskraft und die Fliehkraft.

Oberflächenkräfte wirken über die Oberfläche $\partial\Omega$ des Kontinuums in den Körper hinein und führen dort zu Spannungen.

In Gl. (3.169) wird für einen materiellen Punkt die Schwerkraft \mathbf{f} definiert, die Ausgangspunkt für das linke Integral der Gl. (3.170) zur Definition einer Volumenkraft ist:

$$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{x}, t) g \mathbf{e}_3. \quad (3.169)$$

In Gl. (3.169) ist die Konstante $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ die Schwerebeschleunigung, $\rho(\mathbf{x}, t)$ stellt das Dichtefeld des Kontinuums dar. Der dritte Basisvektor \mathbf{e}_3 eines dreidimensionalen, kartesischen Koordinatensystems wird in Gl. (3.169) so gelegt, dass er entgegen der Richtung der Schwerebeschleunigung (= Lotrichtung) zeigt. Die beiden anderen Basisvektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 des Koordinatensystems sollen eine Horizontalebene auf der Erdoberfläche definieren.

3.6.1. Kontinuumsmechanische Formulierung des Gleichgewichts

Auf der Momentankonfiguration κ_M wird für ein Kontinuum das statische Gleichgewicht wie folgt formuliert:

$$\int_v \mathbf{f} dv + \int_a \mathbf{t} da = \mathbf{0}. \quad (3.170)$$

Im rechten Integral der Gl. (3.170) werden die Oberflächenkräfte mit Hilfe von Spannungsvektoren \mathbf{t} formuliert, die auf äußere, infinitesimale Oberflächenelemente da bezogen sind. Nach Gl. (3.81) ist dieser Spannungsvektor \mathbf{t} das Produkt des Cauchyschen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ und des Normalenvektors \mathbf{n} :

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.171)$$

Durch Anwendung des Gaußschen Divergenztheorems $\int_a \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathbf{n} da = \int_v \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) dv$ auf der Vektorfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2 + f_3 \mathbf{e}_3$ wird das rechte Integral der Gl. (3.170) für die Oberflächenkräfte in folgende Form überführt:

$$\int_a \mathbf{t} da = \int_a \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} da = \int_v \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} dv. \quad (3.172)$$

Dadurch wird die Gleichgewichtsbeziehung Gl. (3.170) einheitlich mit Volumenintegralen formuliert:

$$\int_v f \, dv + \int_v \operatorname{div} \sigma \, dv = \mathbf{0}. \quad (3.173)$$

Mit Hilfe einer integralen Gleichgewichtsbeziehung ermöglichen die Gleichungen (3.170) und (3.173) eine globale Gleichgewichtsangabe für einen ruhenden Körper.

Cauchysche Bewegungsgleichung

Für einen bewegten Körper wird die bisher statische Gleichgewichtsbeziehung Gl. (3.173) durch das Hinzufügen von Trägheitskräften $\int_v \rho \ddot{x} \, dv$ in eine dynamische Bewegungsgleichung überführt, die zudem eine dynamische Gleichgewichtsbeziehung beschreibt:

$$\int_v f \, dv + \int_v \operatorname{div} \sigma \, dv - \int_v \rho \ddot{x} \, dv = \int_v \underbrace{(f + \operatorname{div} \sigma - \rho \ddot{x})}_{=0} \, dv = \mathbf{0}. \quad (3.174)$$

Diese Bewegungsgleichung wird Cauchysche Bewegungsgleichung genannt [H. Altenbach 2018, Mang und Hofstetter 2013] und stellt wie Gl. (3.173) eine globale Gleichgewichtsangabe dar.

Formulierung der starken Form des Gleichgewichts

Da die Gl. (3.174) für jedes beliebige Volumen \int_v zu Null gegeben ist, muss im Integral auf der rechten Seite von Gl. (3.174) der innerhalb der Klammern gegebene Ausdruck Null sein. Daraus ergibt sich die Beziehung Gl. (3.175), die eine Feldgleichung für jeden Kontinuumpunkt darstellt

$$f + \operatorname{div} \sigma - \rho \ddot{x} = \mathbf{0} \quad (3.175)$$

und als starke Form des Gleichgewichts bezeichnet wird [Stein und Barthold 1996, Parisch 2003, Holzapfel 2006].

In dem sich bewegenden Körper liegen infolge der Belastung durch äußere Kräfte (= Volumen- und Oberflächenkräfte) Spannungen vor, die für den einzelnen, mit dem Ortsvektor $x(\mathbf{X}, t)$ gegebenen materiellen Punkt durch den Cauchy-Spannungstensor $\sigma(x, t)$ beschrieben werden. Die Geschwindigkeit v , die als zeitliche Änderung $\frac{d}{dt}$ der materiellen Lagen x der Punkte des Körpers $v = \dot{x}$ ausgedrückt wird, kann wegen

$$x(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \quad (3.176)$$

wenn diese als Vektorfeld interpretiert wird, als zeitliche Änderung des Verschiebungsfelds \mathbf{u} durch die Ableitung $\dot{\mathbf{u}}$ ausgedrückt werden, da der Ortsvektor $\mathbf{X}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X}(\mathbf{X})$ auf materielle Punkte der Referenzkonfiguration κ_R zeitlich unveränderlich ist.

Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit entspricht der zweiten Ableitung $\ddot{\mathbf{u}}$. Damit stellt Gl. (3.175) in folgender modifizierter Form

$$\operatorname{div} \sigma + f = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.177)$$

eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in den Verschiebungen \mathbf{u} dar und wird als erstes Cauchy-Eulersches Bewegungsgesetz bezeichnet [H. Altenbach 2018].

Aufbau des Randwertproblems der nichtlinearen Elastizitätstheorie

Für die Entwicklung von Gl. (3.177) zu einem Randwertproblem (siehe Gl. (3.181)) werden zusätzliche Randbedingungen mit

- vorgegebenen Verschiebungen $\bar{\mathbf{u}}$, den Dirichlet-Randbedingungen auf $\partial\Omega_u$, und

- vorgegebenen Spannungen $\bar{\sigma}$ auf $\partial\Omega_\sigma$, den Neumann-Randbedingungen,

zu der partiellen Differentialgleichung Gl. (3.177) hinzugefügt [Holzapfel 2006, Parisch 2003]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} && \text{auf } \partial\Omega_u, \\ \mathbf{t} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} && \text{auf } \partial\Omega_\sigma. \end{aligned} \quad (3.178)$$

Der Rand des Kontinuums, der in mathematischer Sicht der Rand $\partial\Omega$ des Definitionsbereichs der partiellen Differentialgleichung ist, wird in Bereiche $\partial\Omega_u$ mit geometrischen Randbedingungen $\bar{\mathbf{u}}$ und in Bereiche $\partial\Omega_\sigma$ mit Spannungs- bzw. Kräftebedingungen zerlegt. Die Spannungs-Randbedingung in Gl. (3.178) unten wird mit Hilfe des u. a. in Gl. (3.171) verwendeten Spannungsvektors \mathbf{t} definiert, der eine externe Kraft, die im Rand $\partial\Omega$ auf ein infinitesimales Oberflächenelement da bezogen wird, gegen den Körper ausübt.

Ein Rand $\partial\Omega$ kann nicht gleichzeitig ein Neumann-Rand $\partial\Omega_\sigma$ und ein Dirichlet-Rand $\partial\Omega_u$ sein [Holzapfel 2006, Parisch 2003]. Damit gilt folgende Beziehung:

$$\partial\Omega = \partial\Omega_\sigma \cup \partial\Omega_u. \quad (3.179)$$

In der Referenzkonfiguration κ_R können für die partielle Differentialgleichung zusätzliche Bedingungen für Verschiebungen und für die anfängliche Geschwindigkeit in Form von Anfangsbedingungen angegeben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) |_{t=0} &= \mathbf{u}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) |_{t=0} &= \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.180)$$

Die Verschiebungen im unbelasteten Kontinuum sind in Gl. (3.180) zu Null definiert. Die anfängliche Geschwindigkeit in der Referenzkonfiguration κ_R ist ebenfalls zu Null definiert.

Mit der Definition von Anfangs- und Randbedingungen wird die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in folgendes Randwertproblem überführt [Holzapfel 2006]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} && \text{auf } \partial\Omega_u, \\ \mathbf{t} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} && \text{auf } \partial\Omega_\sigma, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) |_{t=0} &= \mathbf{u}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) |_{t=0} &= \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.181)$$

Eine Lösung für das Randwertproblem Gl. (3.181), welche die Differentialgleichung in jedem Punkt des Kontinuums erfüllt und die Randbedingungen berücksichtigt, nennt man starke Lösung des Randwertproblems. Im Allgemeinen ist eine exakte Lösung der starken Form der Gleichgewichtsbedingung nicht möglich.

Schwache Form des Gleichgewichts

Zur integralen Formulierung des Gleichgewichts, dessen Lösung für die unbekanntenen Verschiebungen nicht mehr eine exakte analytische Lösung des Gleichgewichts in jedem Punkt erforderlich macht, wird die Differentialgleichung des Randwertproblems Gl. (3.181) skalar mit einer Testfunktion η multipliziert [Barthold 2013, Parisch 2003, Stein und Barthold 1996].

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}. \quad (3.182)$$

Für die sog. schwache Formulierung der Gleichgewichtsbedingung wird von der Testfunktion $\boldsymbol{\eta} : D \rightarrow \mathbb{R}$ angenommen, dass sie hinreichend glatt und einmal differenzierbar ($\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{C}^1$) sei [Barthold 2013, Parisch 2003] Die Integration der mit der Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$ multiplizierten Gleichgewichtsbedingung Gl. (3.182) über das gesamte Volumen Ω des Kontinuums ergibt die sog. schwache Form des Gleichgewichts:

$$\int_v (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv = \mathbf{0}. \quad (3.183)$$

Zunächst wird für die Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$ keine Einschränkung bezüglich der Größe gemacht. Für die Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$ kann die Variation $\delta \mathbf{u}$ der aktuellen Konfiguration gewählt werden [Parisich 2003]:

$$\delta (\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}) = \delta \mathbf{u}. \quad (3.184)$$

Die Variation $\delta \mathbf{u}$ ist dann geometrisch als ein virtuelles Verschiebungsfeld aufzufassen. Das virtuelle Verschiebungsfeld, in dem sich zum Zeitpunkt t der deformierte Körper befindet, kann durch Überlagerung der aktuellen Konfiguration $\kappa_M(t)$ mit einer infinitesimal benachbarten Konfiguration $\bar{\kappa}_M(t)$ aufgebaut werden, die demselben Zeitpunkt t zugeordnet wird.

3.6.2. Einführung des Prinzips der virtuellen Arbeiten

Mit der Zuweisung einer virtuellen Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ für die Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$ nimmt die physikalische Einheit des Funktionals durch das in Gl. (3.183) aufgebaute Skalarprodukt von unterschiedlichen Kraftgrößen mit einer virtuellen Weggröße $\delta \mathbf{u}$ die Einheit einer Arbeit an. Diese wird durch die Einführung einer virtuellen Weggröße $\delta \mathbf{u}$ in Gl. (3.184) zur virtuellen Arbeit δW [Parisich 2003, Barthold 2013]:

$$\delta W = \int_v (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dv = \mathbf{0}. \quad (3.185)$$

Gleichung (3.185) wird auch als Prinzip der virtuellen Arbeit bezeichnet. Da eine virtuelle Arbeit δW auf Basis einer infinitesimalen Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ aufgebaut wurde, wird Gl. (3.185) auch als Prinzip der virtuellen Verschiebung bezeichnet.

Zwischen der Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$ und der virtuellen Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ und damit zwischen der schwachen Form des Gleichgewichts und dem Prinzip der virtuellen Arbeit kann ein mathematischer Zusammenhang hergestellt werden. Durch den infinitesimalen Parameter ϵ wird die Größe der virtuellen Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ beliebig klein. Die Richtung der virtuellen Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ und damit auch der vektorwertigen Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$ kann willkürlich definiert werden.

Die virtuelle Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ soll mit der Kinematik des Systems verträglich sein [Holzapfel 2006, Barthold 2013]:

$$\delta \mathbf{u} = \epsilon \cdot \boldsymbol{\eta}. \quad (3.186)$$

Der mathematische Zusammenhang zwischen dem Prinzip der virtuellen Arbeit δW und der schwachen Form des Gleichgewichts ist somit [Barthold 2013]:

$$\delta W(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \epsilon \cdot \delta W(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0}. \quad (3.187)$$

Mit der Identität für die Divergenz $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u})$ der mit dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ multiplizierten virtuellen Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ [Parisich 2003]

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) = (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \delta \mathbf{u} \quad (3.188)$$

und dem Divergenztheorem von Gauß kann das Prinzip der virtuellen Arbeit Gl. (3.185) weiter umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \int_v (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dv &= \mathbf{0} \\
 &= \int_v (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dv &+ \int_v (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dv = \mathbf{0} \\
 &= \int_v \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) \, dv - \int_v \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \delta \mathbf{u} \, dv &+ \int_v (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dv = \mathbf{0} \\
 &= \int_a \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{u} \, da - \int_v \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \delta \mathbf{u} \, dv &+ \int_v (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dv = \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{3.189}$$

Mit der in Gl. (3.181) für den Rand $\partial\Omega_\sigma$ definierten Randwertbedingung $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}$ wird

$$\delta W = \int_a \bar{\mathbf{t}} \delta \mathbf{u} \, da - \int_v \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \delta \mathbf{u} \, dv + \int_v (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dv = \mathbf{0} \tag{3.190}$$

bzw.

$$\int_v \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \delta \mathbf{u} \, dv = \int_a \bar{\mathbf{t}} \delta \mathbf{u} \, da + \int_v (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dv. \tag{3.191}$$

Das zweite Integral in Gl. (3.190) ist die negative innere virtuelle Arbeit:

$$-\delta W_{\text{int}} = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \delta \mathbf{u} \, dv. \tag{3.192}$$

Der Gradient der Variation $\delta \mathbf{u}$ ist nach Parisch [Parisch 2003]

$$\operatorname{grad} \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_{,x} = \frac{\partial (\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial (\delta \mathbf{x})}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \delta \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right) \cdot \mathbf{F}^{-1} = \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \tag{3.193}$$

Der Gradient der Variation $\operatorname{grad} \delta \mathbf{u}$ ist durch den seit Gl. (3.170) gegebenen Bezug des Gleichgewichts auf die Momentankonfiguration in der aktuellen Konfiguration κ_M definiert.

Zunächst sollen weitere Ausdrücke für die negative innere virtuelle Arbeit entwickelt werden [Bletzinger und Ramm 1999]. Der Übergang auf die Referenzkonfiguration κ_R erfolgt durch die Formel von Nanson (siehe Gl. (3.85)):

$$\int_v \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \delta \mathbf{u} \, dv = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \delta \mathbf{u} \, \det \mathbf{F} \, dV. \tag{3.194}$$

Mit Gl. (3.193) wird der Ausdruck für $\operatorname{grad} \delta \mathbf{u}$ in Gl. (3.194) überführt. Für δW aus Gl. (3.194) ergibt sich nun:

$$\delta W = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \underbrace{(\delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1})}_{= \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}} \det \mathbf{F} \, dV = \mathbf{0}. \tag{3.195}$$

Über die Rechenregel für doppelte Verjüngung [Itskov 2018, Holzapfel 2006]

$$\mathbf{A} : (\mathbf{B} \mathbf{C}) = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}) : \mathbf{C} = (\mathbf{A} \mathbf{C}^T) : \mathbf{B}, \tag{3.196}$$

weitere Gleichungsumstellung und Einsetzen der Gl. (3.97) für den zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor \mathbf{S} wird Gl. (3.195) schließlich umgeformt zu:

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_V \det \mathbf{F} \left(\underbrace{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}}_{=\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \right) : \delta \mathbf{F} \, dV \\ &= \int_V \mathbf{F} \left(\underbrace{\det \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}}_{=\mathbf{S}} \right) : \delta \mathbf{F} \, dV \\ &= \int_V (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \delta \mathbf{F} \, dV.\end{aligned}\quad (3.197)$$

Die Verjüngung des Gradienten der Variation $\delta \mathbf{u}$ mit dem Cauchyschen Spannungstensor im Integranden von Gl. (3.192) ist mit

$$\boldsymbol{\sigma} : \text{grad } \delta \mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{e} \quad (3.198)$$

gleich der Verjüngung der Variation des Euler-Almansi-Verzerrungstensors \mathbf{e} aus Gl. (3.55) mit dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ [Holzapfel 2006].

Zum Nachweis von Gl. (3.198) wird zunächst die Variation des Deformationstensors \mathbf{F} gebildet. Dabei wird von der Vertauschbarkeit von Variation und (partieller) Differentiation Gebrauch gemacht [Mang und Hofstetter 2013, Holzapfel 2006]:

$$\delta \mathbf{F} = \frac{\delta \partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \text{grad } \delta \mathbf{u} \, \mathbf{F}. \quad (3.199)$$

Zusätzlich wird die Variation des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors \mathbf{E} benötigt [z. B. Parisch 2003]:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \left(\delta \mathbf{F}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \delta \mathbf{F} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}^T (\text{grad } \delta \mathbf{u})^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \text{grad } \delta \mathbf{u} \, \mathbf{F} \right) \\ &= \mathbf{F}^T \frac{1}{2} \left((\text{grad } \delta \mathbf{u})^T + \text{grad } \delta \mathbf{u} \right) \mathbf{F}.\end{aligned}\quad (3.200)$$

Die Variation der Gl. (3.45) für die Differenz des Liniendifferentials $l^2 - L^2$ ist [Stein und Barthold 1996]:

$$\delta (l^2 - L^2) = \delta \left(\underbrace{d\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T}_{dx^T} \cdot \underbrace{\mathbf{F} d\mathbf{X}}_{dx} - d\mathbf{X}^T \mathbf{I} d\mathbf{X} \right) = d\mathbf{X}^T \delta \mathbf{E} d\mathbf{X}. \quad (3.201)$$

Gleichung (3.201) erhält durch Einsetzen der Beziehung $d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} dx$ aus Gl. (3.28) für $d\mathbf{X}$ und analog für $d\mathbf{X}^T$ folgende Form:

$$\delta (l^2 - L^2) = dx^T \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \delta \mathbf{E} \cdot dx \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad (3.202)$$

und führt im Ergebnis zu einer Variation des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors \mathbf{E} . Dieses Ergebnis wird der Variation der Gl. (3.54) gegenübergestellt, diesmal angewendet in der aktuellen Konfiguration:

$$\delta (l^2 - L^2) = dx^T \cdot \delta \mathbf{e} \cdot dx. \quad (3.203)$$

Der Vergleich der Ergebnisse von Gl. (3.202) zu Gl. (3.203) führt zu

$$\delta \mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \quad (3.204)$$

Nach Einsetzen des Ausdrucks von $\delta \mathbf{E}$ aus Gl. (3.200) in Gl. (3.204) ergibt sich für die Variation des Euler-Almansi-Verzerrungstensors \mathbf{e} :

$$\delta \mathbf{e} = \frac{1}{2} \left((\text{grad } \delta \mathbf{u})^T + \text{grad } \delta \mathbf{u} \right) = \text{sym} (\text{grad } \delta \mathbf{u}). \quad (3.205)$$

Da die Verjüngung von δe bzw. $\text{grad } \delta \mathbf{u}$ in Gl. (3.198) auf einen symmetrischen Tensor σ angewendet wird, ist der Skalar dort auf der linken und der rechten Seite identisch wegen

$$\sigma : \text{grad } \delta \mathbf{u} = \sigma : \text{sym}(\text{grad } \delta \mathbf{u}) = \sigma : \delta e \quad (3.206)$$

und Gleichung (3.198) nachgewiesen. Der innere virtuelle Arbeitsanteil lässt sich nun wie folgt ausdrücken:

$$-\delta W_{\text{int}} = \int_v \sigma : \text{grad } \delta \mathbf{u} \, dv = \int_v \sigma : \delta e \, dv. \quad (3.207)$$

Der $:$ -Operator in z. B. Gl. (3.192) wirkt als Skalarprodukt auf Tensoren. Das Skalarprodukt wird durch komponentenweise Multiplikation der Einträge der beiden beteiligten Tensoren und nachfolgende Summation über alle Produkte gebildet.

Unter Verwendung der Indexschreibweise ist Gl. (3.198) [Mang und Hofstetter 2013]:

$$\sigma : \delta e = \sum_{i=1}^{m=3} \sum_{j=1}^{n=3} \sigma_{ij} \delta e_{ij} = \sigma_{ij} \delta e_{ij}. \quad (3.208)$$

Übergang zur linearisierten Elastizitätstheorie

Mit dem Schritt von Gl. (3.208) nach Gl. (3.209) kann der Übergang zur linearisierten Elastizitätstheorie vollzogen werden, um die Stabtheorie vorzubereiten.

Die linearisierte Elastizitätstheorie soll sich im Weiteren per definitionem auf die Referenzkonfiguration beziehen. Die Integrationsvariablen ändern sich somit für das Volumen auf dV , für die Oberfläche des Körpers auf dA .

In Gl. (3.207) wird auf der rechten Seite anstelle der Variation des Euler-Almansi-Tensors die Variation des linearisierten Elastizitätstensors ϵ eingeführt.

Als Ausgangsgleichung für die Stabtheorie dient folgender Ausdruck für die inneren virtuellen Arbeiten δW_{int} :

$$-\delta W_{\text{int}} = \int_V \sigma : \delta \epsilon \, dV. \quad (3.209)$$

In Indexschreibweise wird Gl. (3.191) in der linearisierten Elastizitätstheorie auf folgende Weise dargestellt [Mang und Hofstetter 2013]:

$$\underbrace{\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \, dV}_{= -\delta W_{\text{int}}} = \underbrace{\int_A \bar{f}_i^{(n)} \delta u_i \, dA + \int_V (f_i - \rho \ddot{u}_i) \cdot \delta u_i \, dV}_{= \delta W_{\text{ext}}} \quad (3.210)$$

4. Einsatz der Stabtheorie bei baustatischen Verfahren

4.1. Virtuelle Arbeit des linear-elastischen Stabes

Das Prinzip der virtuellen Arbeit (Gl. (3.191) und (3.210)) ist Ausgangspunkt für den Übergang von einem dreidimensionalen Kontinuum zu einem linear-elastischen Stab. Dieses Prinzip, das in verschiedenen Ausprägungen vorliegt, wie z. B. einer Formulierung mit den Tensoren der Kontinuumsmechanik oder einer Formulierung innerhalb des Gültigkeitsbereichs der linearen Elastizitätstheorie (Gl. (3.210)), ist das primäre Konzept für die numerisch-mechanischen Berechnungsverfahren, die in diesem und Kapitel 6 vorgestellt werden. Dieses Prinzip stellt Ausgangsgleichungen für den Aufbau der Finite-Elemente-Methode oder für die Matrizenmethoden der Statik wie das Weggrößenverfahren zur Verfügung. Auf dieser Basis können schließlich Weg- und Kraftgrößen des Ortra-Verfahrens mit Hilfe eines modifizierten Weggrößenverfahrens berechnet werden.

Die in integraler Form mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit definierte Grundgleichung (Gl. (3.191)) ist grundsätzlich für geometrisch beliebig ausgeprägte Formen gültig.

Für die Überführung mechanischer Beziehungen des dreidimensionalen Kontinuums in mechanische Beziehungen eines linear-elastischen Stabes werden Definitionen für die geometrisch zulässige Form des Stabes gegeben. Mit dem Übergang auf die einfache geometrische Form des Stabes und mit den nachfolgend für Stäbe getroffenen physikalischen Annahmen vereinfachen sich die Grundgleichungen (3.191) und (3.210). Nach Überführung in die linearisierte Elastizitätstheorie werden die Grundgleichungen Ausgangspunkt für die Untersuchung des Ortra-Systems sein.

Ein Stab weist neben seiner Längsschnittabmessung zwei typische Querschnittabmessungen auf, die klein gegenüber der Ausdehnung des Körpers entlang der Stabachse sind. Auf Basis der Dehnstab- und Balkentheorie werden für die Beschreibung der mechanischen Belastungen für den Stab als äußere Kräfte Längskräfte N , Querkräfte Q und Drehmomente M eingeführt.

Koordinatensystem des Stabes

Die Stabachse soll in der unverformten Ausgangslage, der Referenzkonfiguration κ_R , geradlinig durch die x -Achse eines euklidischen, dreidimensionalen Koordinatensystems verlaufen [Mang und Hofstetter 2013]. Die zur x -Achse senkrechte z -Achse, in deren Richtung sich beispielsweise ein durch die Linienlast $p(x)$ belasteter Stab durchbiegen kann, soll in der Papierebene nach unten gelegt werden. Eine Durchbiegung in Richtung der z -Achse kann auch durch ein Drehmoment M_y erreicht werden, das in der x -/ z -Bildebene an einem Stabende angreift. Die Richtung des zugeordneten Drehmomentvektors zeigt entlang der y -Achse aus der Bildebene heraus in Richtung des Lesers. Mit der y -Achse ist das dreidimensionale euklidische Koordinatensystem vollständig.

Das in der x -/ z -Bildebene definierte Drehmoment M_y erhält zur Kennzeichnung der Raumlage des Drehmomentvektors einen unteren Index y . Zur Unterscheidung von einem zweiten, in der x -/ y -Ebene definierten Drehmoment M_z , das seine Drehmomentkräfte um die z -Achse ausübt und zu einer Durchbiegung des Stabes in dem x -/ y -Grundriss führt, erhält dieses Drehmoment M_z den Index z .

4.1.1. Annahmen für den linear-elastischen Stab

Das über Gl. (3.210) allgemein definierte Prinzip wird, wie einleitend erwähnt, in den nächsten Abschnitten durch spezielle Annahmen vereinfacht. Zunächst werden folgende Annahmen für die Längskräfte, Querkräfte und Drehmomente sowie für die Torsion um die x -Achse getroffen [Wunderlich und Kiener 2004]:

- Die Stabquerschnitte bleiben bei der Belastung durch Biegemomente und Querkräfte eben und formtreu (= kinematische Hypothese von Bernoulli).
- Die Querschubverzerrungen infolge der Biegung durch Querkräfte werden vernachlässigt (Hypothese von Bernoulli).

Infolge der Hypothese von Bernoulli, dass die Stabquerschnitte unter Lasten eben bleiben, können die Einflüsse der in der y-/z-Querschnittsebene auftretenden Verzerrungen ϵ_y , ϵ_z und γ_{yz} vernachlässigt werden. Nach Mang und Hofstetter 2013 sind die Spannungen σ_y , σ_z und τ_{yz} gleich Null. Die virtuellen Verzerrungen $\delta\epsilon_y$, $\delta\epsilon_z$ und $\delta\gamma_{yz}$ und die diesen Größen zuweisbaren virtuellen Arbeiten können zu Null gesetzt werden.

4.1.2. Entwicklung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen des eindimensional modellierten Stabes

Auf Basis der beiden soeben getroffenen Annahmen wird das Prinzip der virtuellen Verschiebungen des eindimensional modellierten Stabes aufgebaut. Ausgangspunkt dafür ist das Volumenintegral für die inneren virtuellen Verschiebungen δW_{int} über $\sigma_{ij} \delta\epsilon_{ij}$ (siehe Gl. (3.210), linke Seite).

Da die äußeren virtuellen Verschiebungen δW_{ext} (Gl. (3.210), rechte Seite) unverändert bleiben, wird bei den folgenden Formeln (4.1) bis (4.12) ausschließlich der Anteil der inneren virtuellen Verschiebungen δW_{int} betrachtet:

$$\begin{aligned}
 -\delta W_{int} &= \int_V \sigma_{ij} \delta\epsilon_{ij} dV \\
 &= \int_V \left[\sigma_x \delta\epsilon_x + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta\gamma_{xz} + \underbrace{\sigma_y \delta\epsilon_y + \sigma_z \delta\epsilon_z + \tau_{yz} \delta\gamma_{yz}}_{\delta\epsilon_y, \delta\epsilon_z, \delta\gamma_{yz} = 0, \text{ ebenso } \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz} = 0.} \right] dV \quad (4.1) \\
 &= \int_V \sigma_x \delta\epsilon_x dV + \int_V \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} dV + \int_V \tau_{xz} \delta\gamma_{xz} dV.
 \end{aligned}$$

Für den Aufbau der inneren virtuellen Verschiebungen in Gl. (4.1) werden die virtuellen Verzerrungen $\delta\epsilon_x$, $\delta\gamma_{xy}$ und $\delta\gamma_{xz}$ aus virtuellen Verschiebungskomponenten δu_x , δu_y und δu_z durch partielle Ableitungen $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \right)$, die sogenannten Verschiebungsableitungen, gewonnen.

Die in Gl. (4.1) zu bestimmenden Verzerrungen bzw. virtuellen Verzerrungen können über folgende kinematische Beziehungen (siehe Gl. (3.52) in Abschnitt 3.3.4)

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (4.2)$$

berechnet werden, mit den Anteilen für die Verschiebungskomponenten u_x , u_y und u_z , die sich für einen Stab aus Längskräften, Querkräften und Biegemomenten ergeben.

Diese Verschiebungskomponenten u_x , u_y und u_z werden in den folgenden Gl. (4.3) und (4.4) aus

- Parametern der Längsdehnungen des Stabes (Modell des Dehnstabes),
- der Biegung des Stabes mit Verkrümmung der Stabachse (Modell des Biegestabs) und
- der Verdrehung des Stabs mit unbehinderter und behinderter Verwölbung (Modell des Torsionsstabes)

entwickelt.

Die in Richtung der x-Achse gemessene Längsverschiebung u_x setzt sich linear aus folgenden Anteilen zusammen [Wunderlich und Kiener 2004]:

- der reinen Längsdehnung u , die durch die in Richtung der Stabachse wirkende Längskraft N verursacht wird,
- dem Anteil, der sich aus der durch das Biegemoment M_y verursachten Verdrehung φ_y der in die z -Richtung durchgebogenen Stabachse und dem vertikalen Abstand z der deformierten Achse zur x -Achse (= Richtung der unverformten Stabachse) zusammensetzt. Der zusätzliche Beitrag zur Längsverschiebung u_x berechnet sich somit aus dem Produkt $z \cdot \varphi_y$ des Abstandes und der Verdrehung.
- dem durch das Biegemoment M_z verursachten Anteil $y \cdot \varphi_z$, der sich analog zu M_y durch Ermittlung der Verdrehung φ_z und eines Abstands von der unverformten Stabachse x bestimmen lässt und
- einem Anteil $\omega(y, z) \cdot \psi$, der durch Torsion verursacht wird. Die Torsion bewirkt eine Verwölbung des Querschnittes, die bei Anwendung der Wölbkrafttorsion zu einer zusätzlichen Verschiebung von Kontinuumpunkten des Stabes in x -Richtung führt. Dieser Anteil wird bei Anwendung der Saint-Venant-Torsion vernachlässigt.

Die Gleichung für die Längsverschiebung u_x setzt sich somit aus folgenden Anteilen zusammen [Wunderlich und Kiener 2004]:

$$u_x = u + y \varphi_z + z \varphi_y + \omega(y, z) \psi. \quad (4.3)$$

Die Querverschiebungen u_y und u_z setzen sich linear aus den Anteilen

- der vertikalen Abstände v und w der bei einer zweiachsigen Biegung entstehenden Auslenkung der verbogenen Stabachse, die auf die unverformte Lage der Stabachse (= x -Achse) bezogen wird, und
- der Verdrehung φ_x des Querschnittes infolge Torsion, die mit der querschnittsbezogenen Koordinate z oder y des Kontinuumpunktes P multipliziert wird,

zusammen.

Für die Querverschiebungen u_y und u_z ergeben sich folgende Gleichungen (Wunderlich und Kiener 2004):

$$\begin{aligned} u_y &= v - z \varphi_x, \\ u_z &= w + y \varphi_x. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Die Längsverzerrung ϵ_x in x -Richtung berechnet sich aus der kinematischen Beziehung $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ von Gl. (4.2):

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u + y \varphi_z + z \varphi_y + \omega \psi \right) \\ &= \underbrace{u'}_{u'=\epsilon} + y \underbrace{\varphi_z'}_{\varphi_z'=\kappa_z} + z \underbrace{\varphi_y'}_{\varphi_y'=\kappa_y} + \omega \underbrace{\psi'}_{\psi'=\kappa_\omega}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die zwei weiteren kinematischen Beziehungen in Gl. (4.2) führen zu den Schubverzerrungen γ_{xy} und γ_{xz} .

Für γ_{xy} ergibt sich über Anwendung der partiellen Ableitung $\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$ folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (v - z \varphi_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u + y \varphi_z + z \varphi_y + \omega(y, z) \psi) \\ &= v' - z \varphi_x' + \varphi_z + \frac{\partial \omega}{\partial y} \psi = v' - z \varphi_x' - \underbrace{\frac{\partial \omega}{\partial y} \varphi_x' + \frac{\partial \omega}{\partial y} \varphi_x' + \varphi_z}_{=0} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \psi \\ &= \underbrace{v' + \varphi_z}_{=\gamma_y} - \left(z + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \underbrace{\varphi_x'}_{=\gamma_{xv}} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \underbrace{(\psi + \varphi_x')}_{=\gamma_{x\omega}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die unterste Zeile von Gl. (4.6) weist darauf hin, dass sich die Schubverzerrung γ_{xy} aus drei Schubanteilen zusammensetzt.

Der erste Term γ_y ist zunächst ein linearer Schubanteil aus der Querkraft. Die beiden weiteren Anteile werden durch die Torsion des Stabes verursacht.

Der zweite Term $-\left(z + \frac{\partial\omega}{\partial y}\right) \gamma_{xV}$ stellt dabei den Schubanteil aus einer unbehinderten Verwölbung des Querschnitts bei Torsion dar, die Saint-Venant-Torsion genannt wird [Wunderlich und Kiener 2004].

Der dritte Term $\frac{\partial\omega}{\partial y} \gamma_{x\omega}$ ist der Schubanteil aus einer Wölbkrafttorsion, die durch zusätzliche Normalspannungen verursacht wird, falls z. B. die Verwölbung durch eine bestimmte Lagerung verhindert wird.

Die Schubverzerrung γ_{xz} errechnet sich analog zu:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(w + y \varphi_x \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u + y \varphi_z + z \varphi_y + \omega(y, z) \psi \right) \\
 &= \underbrace{w' + y \varphi_x' + \varphi_y}_{= \gamma_z} + \frac{\partial\omega}{\partial z} \psi = \underbrace{w' + y \varphi_x' - \frac{\partial\omega}{\partial z} \varphi_x' + \frac{\partial\omega}{\partial z} \varphi_x'}_{= 0} + \varphi_y + \frac{\partial\omega}{\partial z} \psi \\
 &= \underbrace{w' + \varphi_y}_{= \gamma_z} - \left(-y + \frac{\partial\omega}{\partial z} \right) \underbrace{\varphi_x'}_{= \gamma_{xV}} + \frac{\partial\omega}{\partial z} \underbrace{\left(\psi + \varphi_x \right)}_{= \gamma_{x\omega}}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Durch Einführung der kinematischen Beziehungen nach Gl. (4.3) und (4.4) für die Längs- und Querverzerrungen u_x , u_y und u_z entwickelt sich aus Gleichung (4.1) für das Prinzip der virtuellen Kräfte für ein Kontinuum eine Gleichung für das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für Stäbe [Mang und Hofstetter 2013, Wunderlich und Kiener 2004]:

$$\begin{aligned}
 -\delta W_{int} &= \int_x \int_A \left[\sigma_x \underbrace{\delta \left[\epsilon + y \kappa_z + z \kappa_y + \omega \kappa_\omega \right]}_{= \delta \epsilon_x} + \tau_{xy} \underbrace{\delta \left[\gamma_y - \left(z + \frac{\partial\omega}{\partial y} \right) \gamma_{xV} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \gamma_{x\omega} \right]}_{= \delta \gamma_{xy}} \right. \\
 &\quad \left. + \tau_{xz} \underbrace{\delta \left[\gamma_z - \left(-y + \frac{\partial\omega}{\partial z} \right) \gamma_{xV} + \frac{\partial\omega}{\partial z} \gamma_{x\omega} \right]}_{= \delta \gamma_{xz}} \right] dA dx.
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Einführung von Schnittgrößen

Nach Überführung des dreidimensionalen Modells für das Kontinuum in das eindimensional geprägte Modell des Stabes können Schnittgrößen N , M_z , M_y , Q_z , Q_y , M_{xV} und $M_{x\omega}$ für die inneren Kräfte entwickelt werden.

Durch Einführung der Schnittgrößen, die mechanisch als Resultierende einer über einen Querschnitt verteilten Spannung wirken, wird gleichzeitig der dreidimensionale Integrationsbereich von Gl. (4.1) in einen eindimensionalen Integrationsbereich abgebildet, der eine eindimensionale Sichtweise auf den Stab unterstützt.

Beispielsweise berechnen sich Schnittkräfte wie N und M_z durch eine Flächenintegration der über den Querschnitt verteilten Normalspannung [Mang und Hofstetter 2013, Wunderlich und Kiener 2004]:

$$N = \int_A \sigma_x dA, \quad M_z = \int_A \sigma_x y dA. \tag{4.9}$$

Gleichung (4.8) wird durch Trennung in einzelne Terme weiter umgeformt, unter gleichzeitiger Einführung von Schnittkräften, die mit einem eindimensionalen Integrationsbereich formuliert werden. Diese Umformung ermöglicht im Folgenden (Gl. (4.11)) eine direkte Integration der jeweiligen Spannungsgröße über die Querschnittsfläche, wie sie in Gl. (4.9) exemplarisch dargestellt wurde.

Gleichzeitig werden als Nebenprodukt der Umformung für die eingeführten Schnittgrößen einzelne virtuelle Arbeitsanteile durch die Multiplikation von resultierenden Kraftgrößen mit den kinematisch zugeordneten virtuellen Verzerrungsgrößen definiert.

$$\begin{aligned}
 -\delta W_{int} = & \int_x \underbrace{\int_A \sigma_x dA}_{= N} \delta \epsilon dx + \int_x \underbrace{\int_A \sigma_x y dA}_{= M_z} \delta \kappa_z dx + \int_x \underbrace{\int_A \sigma_x z dA}_{= M_y} \delta \kappa_y dx \\
 & + \int_x \underbrace{\int_A \sigma_x \omega dA}_{= M_\omega} \delta \kappa_\omega dx + \int_x \underbrace{\int_A \tau_{xy} dA}_{= Q_y} \delta \gamma_y dx + \int_x \underbrace{\int_A \tau_{xz} dA}_{= Q_z} \delta \gamma_z dx \\
 & + \int_x \left\{ \underbrace{\int_A -\tau_{xy} \left(z - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dA + \int_A \tau_{xz} \left(y - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dA}_{= M_{xV}} \right\} \delta \gamma_{xV} dx \\
 & + \int_x \left\{ \underbrace{\int_A \tau_{xy} \frac{\partial \omega}{\partial y} dA + \int_A \tau_{xz} \frac{\partial \omega}{\partial z} dA}_{= M_{x\omega}} \right\} \delta \gamma_{x\omega} dx.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Mit den Schnittgrößen des Stabes kann die zunächst durch Integration über die Querschnittfläche und über die Stabachse dreidimensional aufgebaute Gleichung für das Prinzip der virtuellen Kräfte des Stabes (Gl. (4.10)) in eine eindimensional formulierte Gleichung überführt werden:

$$\begin{aligned}
 -\delta W_{int} = & \int_x N \delta \epsilon dx + \int_x M_z \delta \kappa_z dx + \int_x M_y \delta \kappa_y dx \\
 & + \int_x M_\omega \delta \kappa_\omega dx + \int_x Q_y \delta \gamma_y dx + \int_x Q_z \delta \gamma_z dx \tag{4.11} \\
 & + \int_x M_{xV} \delta \gamma_{xV} dx + \int_x M_{x\omega} \delta \gamma_{x\omega} dx .
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist Ausgangspunkt für den Aufbau der mechanischen Beziehungen im Modell des Stabtragwerks.

4.2. Aufbau eines Stabtragwerks durch elastische Stäbe

Zum Aufbau der Analogie zum Ortra-Verfahren sollen nur Tragwerkselemente zum Einsatz kommen, die auf äußere Belastung ausschließlich mit Dehnung und Stauchung reagieren. Dies führt zu dem speziellen Stabtragwerk, dem idealen Fachwerk, das auf besonderen Modellannahmen seines mechanischen Verhaltens beruht.

4.2.1. Umsetzung des Stabtragwerks durch ein ideales Fachwerk

Modellannahmen für das ideale Fachwerk

Das Fachwerk ist ein spezielles Stabtragwerk, dessen einzelne Tragwerkselemente auf äußere Belastung mit Dehnung und Stauchung reagieren, jedoch nicht mit Biegung und Torsion. Das Fachwerk besteht aus Fachwerkstäben, auf die über die Gelenke keine Momente übertragen werden können und die in den Knotenpunkten miteinander verbunden sind.

Für das ideale Fachwerk werden folgende Modellannahmen getroffen [Dallmann 2015a]:

- Die Stäbe sind in den Knotenpunkten durch reibungsfreie Gelenke miteinander verbunden.
- Die Stabachsen schneiden sich in den Knotenpunkten.

- Die Stäbe sind gerade und gewichtslos.
- Alle Lasten greifen nur an den Knoten an. Über die Knoten sind keine Momente übertragbar.

Da keine Momente auf die Fachwerkstäbe übertragen werden, existieren keine ein- oder zweiachsigen Biegungen (M_z oder M_y). Ebenfalls können die als reibungsfreie Gelenke aufgebauten Knoten keine Querkräfte (Q_z oder Q_y) hervorrufen. Eine entlang der Stabachse wirkende Verdrehung infolge eines Torsionsmomentes, das ist eine Torsion M_ω , die in Gl. (4.7) zu bestimmten Schubverzerrungen führt, kann aufgrund des Gelenks ebenfalls nicht erzeugt werden. Es treten daher ausschließlich Normalkräfte N als innere Kräfte auf.

Weitere Modellannahmen auf der Elementebene sind:

- Das Verschiebungsfeld u_x in Richtung der Stablängsachse x ist konstant über den Stabquerschnitt.
- Im Fachwerkstab treten außer der Normalspannung σ_x in Richtung der Stablängsachse x keine weiteren Spannungen auf wie z. B. Schubspannungen τ_{xy} und τ_{xz} der Gl. (4.1).

Durch die Modellannahmen für den Fachwerkstab tritt eine Vereinfachung des Prinzips der virtuellen Arbeit der Gl. (4.11) ein.

Prinzip der virtuellen Verschiebungen für Fachwerkstäbe

Für Fachwerkstäbe ergibt sich folgendes Prinzip der virtuellen Verschiebungen [Mang und Hofstetter 2013, Wunderlich und Kiener 2004, Barthold 2013, Bletzinger 2017a]:

$$\delta W_{int} = - \int_0^l N(x) \delta \epsilon(x) dx. \quad (4.12)$$

Für Fachwerkstäbe, bei denen in die Arbeitsanteile für virtuelle innere Arbeiten nach Gl. (4.12) keine weiteren inneren Kräfte einfließen, soll der Begriff Normalkraft und Stabkraft synonym verwendet werden.

Zunächst wirkt bei einem Stab nur eine einzelne Stabkraft. Bei Anwendung des Weggrößenverfahrens erfolgt jedoch eine Zuweisung von Kraft- und Weggrößen zu Knoten des einzelnen Stabes. Bei einem Verbund von Stäben zu einem Fachwerk erfolgt diese bei den Fachwerksknoten. Damit werden Stabendkräfte für die Knoten eingeführt. Die bei einem Stab existierenden Stabendkräfte S_1 und S_2 sollen in dem lokalen Vektor der Stabendkräfte s zusammengefasst werden. Dabei wird bereits eine Vorzeichenkonvention verwendet, die sich bei Anwendung des Weggrößenverfahrens als zweckmäßig erwiesen hat (siehe auch Abb. 4.2 mit vorangehender Darstellung der Konvention und Gl. (4.33)):

$$s_e = \begin{bmatrix} -S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Nach der Modellvorgabe [z. B. Dallmann 2015a] sollen bei einem Fachwerkstab äußere Kräfte an den Knoten angreifen. Die angreifende Kraft soll am Anfangsknoten durch den Vektor P_1 , am Endknoten durch den Vektor P_2 dargestellt werden. Diese verrichten auf den gedachten virtuellen Verschiebungen δd_1 und δd_2 eine virtuelle äußere Arbeit.

Anmerkung: Das in Abb. 4.1 dargestellte System eines Stabes befindet sich im Gleichgewicht, als Voraussetzung für die Definition des Prinzips der virtuellen Arbeit. Die auf den ersten Blick physikalisch nicht nachvollziehbare Richtung der als Gegenkraft zur Kraft P_2 definierten Kraft P_1 ist jedoch korrekt, da diese mit umgekehrten Vorzeichen gemäß der vorher vereinbarten Vorzeichenkonvention definiert wird.

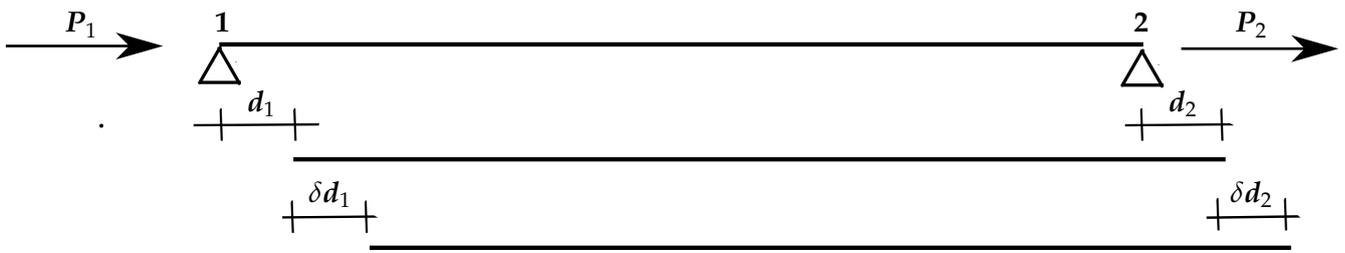


Abbildung 4.1.: Virtuell definierte Verschiebungen δd_1 und δd_2 bei einem Stab, der durch äußere Kräfte P_1 und P_2 belastet wird und der sich im Gleichgewicht befindet.

Die vollständige Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeiten für den Fachwerkstab setzt sich aus den Anteilen der inneren und äußeren virtuellen Arbeit zusammen. Die inneren Kräfte wirken bei δW_{int} der Verformung entgegen. Das Entgegenwirken der inneren Kräfte wird im Integral (4.14) durch ein Minuszeichen vor dem Integral sichtbar:

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{int}} &= - \int_0^l N(x) \delta \epsilon(x) dx, \\ \delta W_{\text{ext}} &= P_1 \delta d_1 + P_2 \delta d_2, \\ \delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} &= - \int_0^l N(x) \delta \epsilon(x) dx + P_1 \delta d_1 + P_2 \delta d_2 = 0.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Die innere virtuelle Arbeit wird weiter umformuliert und vereinfacht. Bei einer als konstant angenommenen Normalkraft kann N_e in Gl. (4.14) vor das Integral gezogen werden. Die Konstanz der Normalkraft beim Fachwerkstab ist bei einem unveränderlichen Querschnitt gegeben, zur Konstanz der Normalkraft siehe Gl. (4.20). In Gl. (4.15) bedeutet der Index e eine auf ein Einzelement bezogene mechanische Größe.

$$\delta W_{\text{int},e} = - N_e \int_0^{l_e} \delta \epsilon(x) dx. \quad (4.15)$$

Das Integral über die virtuelle Verzerrung $\delta \epsilon$ kann beim einzelnen Stab des idealen Fachwerks durch eine virtuelle Stablängenänderung $\delta(\Delta l)$ substituiert werden. Damit ergibt sich folgender Ausdruck für die innere virtuelle Arbeit [Mang und Hofstetter 2013]:

$$\delta W_{\text{int},e} = - N_e \delta(\Delta l_e). \quad (4.16)$$

Durch Anwendung der partiellen Integration kann ein Ausdruck $\int_x m \delta \epsilon dx$ in den Ausdruck $\int_x n \delta u dx$ übersetzt werden:

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{d(u \cdot v)}{dx} dx &= \int_a^b u \frac{dv}{dx} dx + \int_a^b v \frac{du}{dx} dx = [u v] \Big|_a^b \\ &= \int_a^b u dv + \int_a^b v du = [u v] \Big|_a^b.\end{aligned}\quad (4.17)$$

Damit ergibt sich für $\int_a^b u \frac{dv}{dx} dx$ folgender Ausdruck:

$$\int_a^b u \frac{dv}{dx} dx = [u v] \Big|_a^b - \int_a^b v \frac{du}{dx} dx. \quad (4.18)$$

Durch Anwendung von Substitutionen erhält man folgende Gleichung für $\int_0^l N(x) \delta \epsilon(x) dx$:

$$\int_0^l N(x) \delta \epsilon(x) dx = [N(x) \delta u] \Big|_0^l - \int_0^l N'(x) \delta u(x) dx. \quad (4.19)$$

Die Ableitung $N'(x)$ der Normalkraft N nach x ist beim Fachwerkstab gleich Null:

$$N'(x) = \frac{dN}{dx} = 0. \quad (4.20)$$

Die Differentialgleichung $N' = 0$ ist gültig für alle Kontinuumpunkte des Stabes. Durch Integration der Differentialgleichung (4.20) folgt, dass eine konstante Normalkraft für alle Punkte des Fachwerkstabs vorliegen muss.

Damit ist der virtuelle innere Arbeitsanteil

$$\delta W_{int} = - \int_0^l N(x) \delta \epsilon(x) dx = - [N(x) \delta u] \Big|_0^l, \quad (4.21)$$

und die virtuelle Arbeit

$$\begin{aligned} \delta W_{int} + \delta W_{ext} &= - [N_e(x) \delta u] \Big|_0^l + P_1 \delta u_1 + P_2 \delta u_2 \\ &= -N_e(l) \delta u_2 + N_e(0) \delta u_1 + P_1 \delta u_1 + P_2 \delta u_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.3. Aufbau der Grundgleichung des Weggrößenverfahrens für das Stabtragwerk

4.3.1. Aufbau eines Matrizenausdrucks für die virtuelle Arbeit eines Fachwerkstabs

Das Ziel dieses und des folgenden Abschnitts ist die schrittweise Herleitung der globalen System- und Strukturgleichung für das Stabtragwerk (Gl. (4.65)), die Krätzig et al. als Zentralgleichung des Weggrößenverfahrens bezeichnen [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019]. Diese Herleitung wird auf Basis des Prinzips der virtuellen Arbeit des Fachwerkstabs (Gl. (4.22)) erfolgen.

In Kapitel 6, Abschnitt 6.1 erfolgt der Aufbau des Weggrößenverfahrens auf Basis eines Energieprinzips, um damit Analogien zu Verfahren der Ausgleichsrechnung herauszuarbeiten, die elastomechanische Analogien besitzen.

Zunächst wird die Differentialgleichung für die Normalkraft N (Gl. (4.20)) für den Aufbau eines Matrizenausdrucks für die virtuelle Arbeit eines Fachwerkstabs (Gl. (4.37)) durch Einsetzen der kinematischen Beziehung zwischen der Verzerrungs- und Verschiebungsgröße (Gl. (4.23)) umgeformt, um ausschließlich eine Abhängigkeit von den Verschiebungen d_1 und d_2 zu erhalten. Zusätzlich fließt das Stoffgesetz ein.

Ziel ist eine Differentialgleichung, die Ausgangspunkt für die Herstellung eines Zusammenhangs zwischen Verschiebungen und Kräften ist.

Durch Verwendung der Grundgleichung für die Kinematik des Fachwerkstabs

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = u_{,x} = u', \quad (4.23)$$

wird eine Beziehung zwischen der Verschiebungsableitung und der Längsdehnung hergestellt. Mit der weiteren Beziehung zwischen Normalspannung σ_x und Normalkraft N [Mang und Hofstetter 2013]

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad \text{mit} \quad A = \text{Querschnittsfläche des Stabes}, \quad (4.24)$$

und der konstitutiven Beziehung

$$\sigma_x = E \epsilon_x, \quad (4.25)$$

die die Normalspannung σ_x linear über das Elastizitätsmodul E mit der Normalverzerrung ϵ_x verknüpft, wird die lineare Differentialgleichung für den Fachwerkstab in Abhängigkeit der Verschiebungen u gewonnen [Barthold 2013]:

$$- [E A u']' = 0. \quad (4.26)$$

Die Integration dieser Differentialgleichung Gl. (4.26) ergibt erneut die konstante Normalkraft:

$$[E A u'] = [E A \epsilon_x] = N = \text{konst.} \quad (4.27)$$

Nun ist die innere virtuelle Arbeit eines Stabes:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int},e} &= - \int_0^{l_e} N_e(x) \delta \epsilon(x) dx = - N_e(x) \delta(\Delta l_e) = - N_e(x) \delta(d_2 - d_1) \\ &= - N_e(x) \delta \left(\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = N_e(x) \begin{bmatrix} \delta d_1 \\ \delta d_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Der Index e kennzeichnet wieder in Gl. (4.28) und den folgenden Gleichungen, dass die jeweilige Größe auf das Einzelelement des Tragwerks, beim Anwendungsfall des Fachwerks auf den einzelnen Stab bezogen ist. Für die Normalkraft $N_e(x)$ wird das Ergebnis von Gl. (4.27) eingesetzt:

$$N_e(x) = E A \epsilon_x. \quad (4.29)$$

Die Normalverzerrung ϵ_x in Gl. (4.29) kann als Funktion $\epsilon_x(d_1, d_2)$ der lokalen Freiheitsgrade d_1 und d_2 ausgedrückt werden [Felippa 2004, Barthold 2013]:

$$\epsilon_x = \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Nun kann die Normalkraft $N_e(x)$ als eine Funktion $N_e(d_1, d_2)$ der lokalen Verschiebungen d_1 und d_2 formuliert werden:

$$N_e(x) = N_e(d_1, d_2) = E \cdot A \cdot \epsilon_x = E \cdot A \cdot \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Voraussetzung ist, dass die Normalkraft $N_e(x)$ in Gl. (4.31) bei gegebenem Elastizitätsmodul E und Stabquerschnitt A von Null verschieden ist, so dass die Längsverzerrung $\epsilon_x \neq 0$ und damit die Differenz der Verschiebungen $d_2 - d_1 \neq 0$ nicht Null wird. Im Ergebnis erhält der Stab eine gedehnte Stablänge $w_e = l_e + d_2 - d_1$.

Davon ausgehend lässt sich die Normalkraft auch über die Differenz zwischen gedehnter und ungedehnter Stablänge

$$N_e(x) = N_e(w, l) = E \cdot A \cdot \epsilon_x = E \cdot A \cdot \frac{w_e - l_e}{l_e} \quad (4.32)$$

berechnen.

Wenn Lasten als äußere Kräfte auf Elementebene einzuführen sind, wird ab sofort eine in der Baustatik gebräuchliche Vorzeichenkonvention [z. B. Wunderlich und Kiener 2004] angewendet. Diese Konvention besagt, dass die positiven Wirkungsrichtungen aller Stabendvariablen in Richtung positiver lokaler Koordinaten zeigen [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019]. Durch Anwendung der Vorzeichenkonvention wechselt das Vorzeichen am linken Stabende bei der Kraft N_1 in Abb. 4.2.

Die Lasten äußerer Kräfte werden auf Elementebene als lokale Elementknotenkräfte eingeführt, siehe Abb. 4.2.

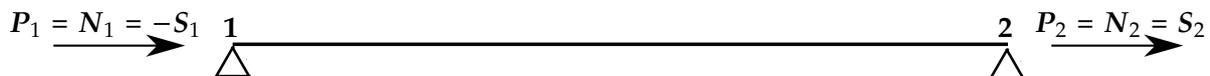


Abbildung 4.2.: Einführung von äußeren Kräften P_1 und P_2 in den lokalen Elementknotenkraftvektor P_e^1 eines Stabelements.

Einführung der lokalen Element-Steifigkeitsmatrix

Dem lokalen Elementknotenkraftvektor \mathbf{P}_e^l setzen sich nach dem dritten Newton'schen Gesetz *Actio gleich Reactio* innere Stabkräfte (Normalkräfte) aus Gl. (4.31) entgegen:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_e^l &= \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}, \\ \text{bzw. } \mathbf{P}_e^l &= \underbrace{\begin{bmatrix} -S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}}_{= \mathbf{s}_e} = \frac{E \cdot A}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Der Vektor der Stabkräfte \mathbf{s}_e aus Gl. (4.13) wird in Gl. (4.34) eingeführt. Damit ergibt sich eine grundlegende Beziehung zwischen Stabkräften \mathbf{s}_e und Verschiebungen \mathbf{u}_e über die Element-Steifigkeitsmatrix \mathbf{k}_e [Bletzinger 2017b, Felippa 2004, Barthold 2013].

Der Index e drückt wieder eine elementbezogene Größe aus. Mit Einführung weiterer lokaler und globaler Koordinatensysteme (Gl. (4.42) und (4.53)), die über einen unteren Index gekennzeichnet werden sollen, wird e , z. B. bei Elementknotenkraftvektoren, auch im oberen Index zu finden sein.

Gl. (4.33) ergibt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{l_e} & -\frac{E \cdot A}{l_e} \\ -\frac{E \cdot A}{l_e} & \frac{E \cdot A}{l_e} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{k}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}}_{= \mathbf{u}_e}, \\ \mathbf{s}_e &= \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Die Koeffizienten der in Gl. (4.34) eingeführten Element-Steifigkeitsmatrix \mathbf{k}_e sind [Bletzinger 2017b]:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{l_e} & -\frac{E \cdot A}{l_e} \\ -\frac{E \cdot A}{l_e} & \frac{E \cdot A}{l_e} \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Für die innere virtuelle Arbeit $\delta W_{\text{int},e}$ des Fachwerkstabs in Gl. (4.28) wird der Ausdruck für die Normalkraft aus Gl. (4.31) eingesetzt:

$$\delta W_{\text{int},e} = -N_e(x) \begin{bmatrix} \delta d_1 \\ \delta d_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = - \underbrace{E \cdot A \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}}_{= N_e} \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta d_1 \\ \delta d_2 \end{bmatrix}^T}_{= \delta \mathbf{u}_e^T} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Mit Eliminierung der Normalkraft N in Gl. (4.36) ergibt sich über die Element-Steifigkeitsmatrix \mathbf{k}_e für $\delta W_{\text{int},e}$ eine Beziehung zwischen den virtuellen Verschiebungen δd_1 und δd_2 und den Verschiebungen d_1 und d_2 des Elements:

$$\delta W_{\text{int},e} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \delta d_1 \\ \delta d_2 \end{bmatrix}^T}_{= \delta \mathbf{u}_e^T} \underbrace{E \cdot A \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{= \mathbf{k}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}}_{= \mathbf{u}_e} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \delta d_1 \\ \delta d_2 \end{bmatrix}^T}_{= \delta \mathbf{u}_e^T} \underbrace{\frac{E \cdot A}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{= \mathbf{k}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}}_{= \mathbf{u}_e}. \quad (4.37)$$

In Matrixform lautet die virtuelle innere Arbeit für den einzelnen Fachwerkstab somit [Barthold 2013, Wunderlich und Kiener 2004]:

$$\delta W_{\text{int},e} = - \delta \mathbf{u}_e^T \underbrace{\mathbf{k}_e \mathbf{u}_e}_{= \mathbf{s}_e} = - \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{s}_e \quad \text{mit} \quad \delta \mathbf{u}_e^T = \begin{bmatrix} \delta d_1 \\ \delta d_2 \end{bmatrix}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Für die virtuelle äußere Arbeit an einem Fachwerksknoten ergibt sich folgende Matrixform in Gl. (4.39). Der Index k kennzeichnet bei den äußeren Arbeiten knotenbezogene Größen, der hochgestellte Index l einen lokalen Vektor.

$$\delta W_{\text{ext},k} = \delta \mathbf{u}_k^T \mathbf{P}_k^l \quad \text{mit} \quad \delta \mathbf{u}_k^T = \begin{bmatrix} \delta d_1 \\ \delta d_2 \end{bmatrix}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_k^l = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Die in Gl. (4.39) dargestellte externe virtuelle Arbeit gilt sowohl für virtuelle Arbeiten von äußeren Knotenkräften als auch von Auflagerreaktionen. Bei verschieblichen Lagern existieren desweiteren virtuelle Arbeiten von äußeren Kräften. Nur bei unverschieblichen Lagern sind diese virtuellen Arbeiten wegen der vorgegebenen (virtuellen) Verschiebungsbeträge $\delta \mathbf{u}_k^T = 0$ gleich Null.

Die Beiträge aus Gl. (4.38) für die virtuellen inneren Arbeiten und aus Gl. (4.39) für die virtuellen äußeren Arbeiten werden über alle Stäbe und über alle Knoten des Tragwerks aufsummiert. Die Gesamtbeiträge ergeben das Prinzip der virtuellen Arbeit für ein Tragwerk (Gl. (4.40)):

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = \sum_{e=1}^{n_e} \delta W_{\text{int},e} + \sum_{k=1}^{n_k} \delta W_{\text{ext},k} = - \sum_{e=1}^{n_e} \delta \mathbf{u}_e^T \underbrace{\mathbf{k}_e \mathbf{u}_e}_{=\mathbf{s}_e} + \sum_{k=1}^{n_k} \delta \mathbf{u}_k^T \mathbf{P}_k^l \\ &= - \underbrace{\sum_{e=1}^{n_e} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{s}_e}_{=\delta W_{\text{int}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n_k} \delta \mathbf{u}_k^T \mathbf{P}_k^l}_{=\delta W_{\text{ext}}} \end{aligned} \quad (4.40)$$

In der Literatur zur Baustatik in Verbindung mit Methoden der Finite Elemente (FEM) [z. B. Barthold 2013] ist die Gl. (4.40) öfters mit umgekehrten Vorzeichen zu finden. Der Vollständigkeit halber wird diese Darstellung ebenfalls angegeben:

$$\delta W = \sum_{e=1}^{n_e} \delta \mathbf{u}_e^T \underbrace{\mathbf{k}_e \mathbf{u}_e}_{=\mathbf{s}_e} - \sum_{k=1}^{n_k} \delta \mathbf{u}_k^T \mathbf{P}_k^l = \sum_{e=1}^{n_e} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{s}_e - \sum_{k=1}^{n_k} \delta \mathbf{u}_k^T \mathbf{P}_k^l. \quad (4.41)$$

4.3.2. Assemblierung der lokalen Strukturen in das Gesamtsystem

Element- und Systemebene Die in Gl. (4.40)/(4.41) die virtuelle innere Arbeit $\delta W_{\text{int},e}$ und die virtuelle äußere Arbeit $\delta W_{\text{ext},k}$ des Fachwerkstabs aufbauenden Vektoren $\delta \mathbf{u}_e^T$ bzw. $\delta \mathbf{u}_k^T$, \mathbf{u}_e und \mathbf{P}_k^l werden auf Elementebene bisher in lokalen *e*indimensionalen Koordinatensystemen dargestellt.

Zur Definition des Gesamtsystems erfolgt der Wechsel auf ein globales Koordinatensystem. Für den Übergang zwischen den lokalen Elementsystemen und dem globalen System werden Koordinatentransformationen definiert [Bletzinger 2017b, Wunderlich und Kiener 2004, Barthold 2013].

Für die Überführung der Elemente in das Koordinatensystem des Gesamtsystems wird zunächst der Übergang auf ein lokales zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem durchgeführt:

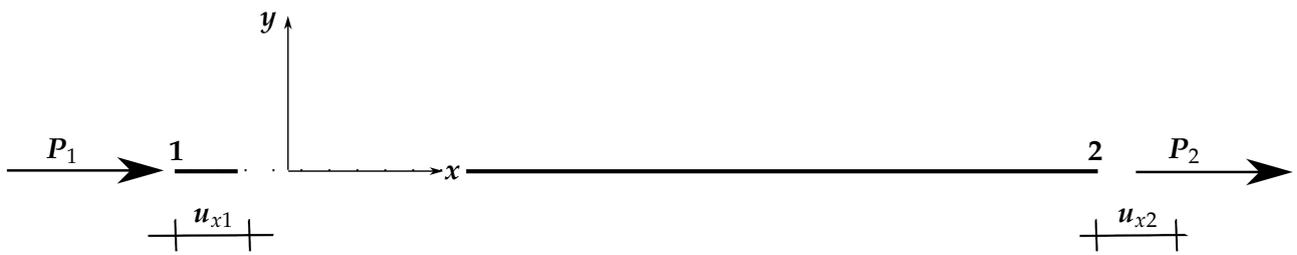


Abbildung 4.3.: Lokales zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem mit den neuen Bezeichnungen u_{x1} und u_{x2} für die an den Knoten 1 und 2 auftretenden Verschiebungen.

Übergang auf zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem Mit dem Übergang auf das zweidimensionale Koordinatensystem erfolgt für den bisher in den Koordinaten $[d_1 \ d_2]^T$ vorliegenden Elementverschiebungsvektor \mathbf{u}_e eine Umbenennung in \mathbf{u}_x^e . Der Vektor \mathbf{u}_x^e bekommt zusätzliche Koordinaten in y-Richtung und ändert die Bezeichnungen seiner Koordinaten in x-Richtung in u_{x1} und u_{x2} :

$$\mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_x^e = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ 0 \\ u_{x2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} (= 0) \\ u_{x2} \\ u_{y2} (= 0) \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Analog wird beim lokalen Elementknotenkraftvektor \mathbf{P}_e^1 und dem Vektor der Stabkräfte \mathbf{s} vorgegangen:

$$\mathbf{P}_e^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{x1} \\ \mathbf{P}_{x2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_x^e = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{x1} \\ 0 \\ \mathbf{P}_{x2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{x1} \\ \mathbf{P}_{y1} (= 0) \\ \mathbf{P}_{x2} \\ \mathbf{P}_{y2} (= 0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_e = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_{x1} \\ \mathbf{S}_{x2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_x^e = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_{x1} \\ -\mathbf{S}_{y1} (= 0) \\ \mathbf{S}_{x2} \\ \mathbf{S}_{y2} (= 0) \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Der Elementknotenkraftvektor wird in \mathbf{P}_x^e umbenannt. Der Index e , der eine elementbezogene Größe kennzeichnet, wird dabei nach oben verschoben. Dasselbe wird beim Vektor der Stabkräfte \mathbf{s}_x^e durchgeführt.

Für den neuen Elementverschiebungsvektor \mathbf{u}_x^e werden die Verschiebungen in Gl. (4.42) mit den Koordinaten $[u_{x1} \ u_{y1} \ u_{x2} \ u_{y2}]_x^T$ definiert. Der Index x kennzeichnet hierbei das vollständige lokale Koordinatensystem. Der Index X wird nachfolgend für das globale Koordinatensystem verwendet.

Zwischen den Elementverschiebungsvektoren \mathbf{u}_e und \mathbf{u}_x^e kann mit der Verknüpfungsmatrix \mathbf{C} , die von Barthold auch als Übertragungsmatrix bezeichnet wird [Barthold 2013], folgender Zusammenhang hergestellt werden:

$$\mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{u}_x^e. \quad (4.44)$$

Der inverse Zusammenhang ist:

$$\mathbf{u}_x^e = \mathbf{C}^T \mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} (= 0) \\ u_{x2} \\ u_{y2} (= 0) \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Mit der Übertragungsmatrix \mathbf{C}^T wird analog eine Beziehung zwischen dem lokalen Elementknotenkraftvektor \mathbf{P}_e^1 und dem Elementknotenkraftvektor \mathbf{P}_x^e aufgebaut:

$$\mathbf{P}_x^e = \mathbf{C}^T \mathbf{P}_e^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{x1} \\ \mathbf{P}_{y1} (= 0) \\ \mathbf{P}_{x2} \\ \mathbf{P}_{y2} (= 0) \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Durch Verkettung von Gl. (4.46) mit $\mathbf{P}_x^e = \mathbf{C}^T \mathbf{P}_e^1$, Gl. (4.33) mit $\mathbf{P}_e^1 = \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{u}_e$ und schließlich Gl. (4.44) mit $\mathbf{u}_e = \mathbf{C} \mathbf{u}_x^e$ kann die Element-Steifigkeitsmatrix \mathbf{k}_x^e im vollständigen lokalen Koordinatensystem aufgebaut werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x^e &= \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{P}_e^1 \\ \mathbf{P}_e^1 &= \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{u}_e \\ \mathbf{u}_e &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{u}_x^e \\ \mathbf{P}_x^e &= \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{u}_x^e. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_x^e &= \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{l_e} & -\frac{E \cdot A}{l_e} \\ -\frac{E \cdot A}{l_e} & \frac{E \cdot A}{l_e} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{k}_x^e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{u}_x^e} \\
 &= \mathbf{k}_x^e \cdot \mathbf{u}_x^e.
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Im zweidimensionalen lokalen Koordinatensystem x stellt sich die Beziehung zwischen dem Vektor der Stabkräfte s_x und den Verschiebungen \mathbf{u}_x^e über die Element-Steifigkeitsmatrix aus Gl. (4.48) wie folgt dar:

$$\mathbf{s}_x = \begin{bmatrix} -S_{x1} \\ -S_{y1} \\ S_{x2} \\ S_{y2} \end{bmatrix} = \mathbf{k}_x^e \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{u}_x^e} \tag{4.49}$$

mit der über $C^T k_e C$ gebildeten Element-Steifigkeitsmatrix \mathbf{k}_x^e

$$\mathbf{k}_x^e = C^T k_e C = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{l_e} & 0 & -\frac{E \cdot A}{l_e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E \cdot A}{l_e} & 0 & \frac{E \cdot A}{l_e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.50}$$

Transformation der Element-Steifigkeitsmatrix, der äußeren Kräfte und der Verschiebungen in das globale Koordinatensystem Für die Transformation der mechanischen Größen des einzelnen Stabelements in mechanische Größen des globalen Koordinatensystems X und in umgekehrter Richtung gelten folgende Transformationsmatrizen [Bletzinger 2017b, Felippa 2004, Barthold 2013]:

$$\mathbf{x} = T(\alpha_{s_i}) \mathbf{X} \quad \text{mit} \quad T(\alpha_{s_i}) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{s_i} & \sin \alpha_{s_i} \\ -\sin \alpha_{s_i} & \cos \alpha_{s_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{s_i} & s_{s_i} \\ -s_{s_i} & c_{s_i} \end{bmatrix}, \tag{4.51}$$

$$\mathbf{X} = T^T(\alpha_{s_i}) \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad T^T(\alpha_{s_i}) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{s_i} & -\sin \alpha_{s_i} \\ \sin \alpha_{s_i} & \cos \alpha_{s_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{s_i} & -s_{s_i} \\ s_{s_i} & c_{s_i} \end{bmatrix}, \tag{4.52}$$

wobei c_{s_i} und s_{s_i} Abkürzungen für $\cos \alpha_{s_i}$ und $\sin \alpha_{s_i}$ mit dem Drehwinkel α_{s_i} des i -ten Stabelements sind.

Der Drehwinkel α_{s_i} gibt an, wie das lokale Koordinatensystem des i -ten Stabelements gegenüber dem globalen Koordinatensystem gedreht ist, und wird von der globalen X -Koordinatenachse in Richtung der lokalen x -Koordinatenachse im Gegenuhrzeigersinn gezählt.

Für den globalen Elementverschiebungsvektor \mathbf{u}_X^e werden Transformationsmatrizen $T^T(\alpha_{s_i})$ aus Gl. (4.52) in eine neue Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{\text{global}}$ zusammengefasst, und es ergibt sich folgende Transformationsbeziehung

$$\mathbf{u}_X^e = \underbrace{\begin{bmatrix} T^T(\alpha_{s_i}) & 0 \\ 0 & T^T(\alpha_{s_i}) \end{bmatrix}}_{= \mathbf{T}_{\text{global}}} \cdot \mathbf{u}_x^e = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y1} \\ u_{X2} \\ u_{Y2} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{u}_X^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha_{s_i} & -\sin \alpha_{s_i} & 0 & 0 \\ \sin \alpha_{s_i} & \cos \alpha_{s_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_{s_i} & -\sin \alpha_{s_i} \\ 0 & 0 & \sin \alpha_{s_i} & \cos \alpha_{s_i} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{T}_{\text{global}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{u}_x^e}, \tag{4.53}$$

die auch bei der Transformation des globalen Elementknotenkraftvektors \mathbf{P}_X^e aus dem lokalen Elementknotenkraftvektor \mathbf{P}_x^e Anwendung findet. Die Transformationsbeziehung für Stabkräfte wird:

$$\mathbf{s}_X = \mathbf{T}_{\text{global}} \cdot \mathbf{s}_x. \quad (4.54)$$

Die inverse Transformationsbeziehung, die diesmal für die Rücktransformation des globalen Elementknotenkraftvektors \mathbf{P}_X^e in das lokale System dargestellt wird, wobei Knoten P_1 und P_2 durch den Stab s_1 verbunden werden, lautet wie folgt:

$$\mathbf{P}_x^e = \underbrace{\begin{bmatrix} T(\alpha_{s_1}) & 0 \\ 0 & T(\alpha_{s_1}) \end{bmatrix}}_{= \mathbf{T}_{\text{lokal}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{x1} \\ \mathbf{P}_{y1} \\ \mathbf{P}_{x2} \\ \mathbf{P}_{y2} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{P}_x^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha_{s_1} & \sin \alpha_{s_1} & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_{s_1} & \cos \alpha_{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_{s_1} & \sin \alpha_{s_1} \\ 0 & 0 & -\sin \alpha_{s_1} & \cos \alpha_{s_1} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{T}_{\text{lokal}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{X1} \\ \mathbf{P}_{Y1} \\ \mathbf{P}_{X2} \\ \mathbf{P}_{Y2} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{P}_X^e}. \quad (4.55)$$

Die Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{\text{lokal}}$ kann ebenso für die Rücktransformation des Verschiebungsvektors \mathbf{u}_X^e verwendet werden.

Für die Transformation des lokalen Verschiebungsvektors in das globale Koordinatensystem X kann, unter Anwendung des Ausdrucks für \mathbf{P}_x^e aus Gl. (4.47), folgende Verkettung aufgebaut werden:

$$\mathbf{P}_X^e = \mathbf{T}_{\text{lokal}}^T \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{C} \cdot \underbrace{\mathbf{T}_{\text{lokal}} \cdot \mathbf{u}_X^e}_{= \mathbf{u}_x^e}. \quad (4.56)$$

Durch Transformation der Gl. (4.56) mit $\mathbf{T}_{\text{lokal}}$ kann diese wieder in die Ausgangsgleichung (4.47) überführt werden. Dabei gilt:

$$\mathbf{P}_x^e = \mathbf{T}_{\text{lokal}} \cdot \mathbf{P}_X^e \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_x^e = \mathbf{T}_{\text{lokal}} \cdot \mathbf{u}_X^e. \quad (4.57)$$

Die Multiplikation von $\mathbf{T}_{\text{lokal}}$ mit $\mathbf{T}_{\text{lokal}}^T$ ergibt eine Einheitsmatrix. Mit

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{T}_{\text{lokal}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T(\alpha_{s_i}) & 0 \\ 0 & T(\alpha_{s_i}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{s_i} & \sin \alpha_{s_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_{s_i} & \sin \alpha_{s_i} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

wird die im globalen Koordinatensystem X gegebene Element-Steifigkeitsmatrix \mathbf{k}_X^e [Felippa 2004, Barthold 2013]

$$\mathbf{k}_X^e = \begin{bmatrix} c_{s_i} & 0 \\ s_{s_i} & 0 \\ 0 & c_{s_i} \\ 0 & s_{s_i} \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{E \cdot A}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} c_{s_i} & s_{s_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{s_i} & s_{s_i} \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{l_e} \begin{bmatrix} c_{s_i}^2 & s_{s_i} c_{s_i} & -c_{s_i}^2 & -s_{s_i} c_{s_i} \\ s_{s_i} c_{s_i} & s_{s_i}^2 & -s_{s_i} c_{s_i} & -s_{s_i}^2 \\ -c_{s_i}^2 & -s_{s_i} c_{s_i} & c_{s_i}^2 & s_{s_i} c_{s_i} \\ -s_{s_i} c_{s_i} & -s_{s_i}^2 & s_{s_i} c_{s_i} & s_{s_i}^2 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

definiert. Die Element-Steifigkeitsmatrix \mathbf{k}_X^e besitzt eine Matrixdimension 4×4 , und ihre Einzel-Steifigkeitswerte k_{ij} sind nach Gl. (4.59) Linearkombinationen aus $\frac{E \cdot A}{l_e}$ und den trigonometrischen Funktionen $c_{s_i} = \cos \alpha_{s_i}$ und $s_{s_i} = \sin \alpha_{s_i}$.

Die Element-Steifigkeitsmatrix \mathbf{k}_X^e wird mit den Einzel-Steifigkeitswerten k_{ij} wie folgt aufgebaut:

$$\mathbf{k}_X^e = \begin{bmatrix} k_{11}^{s_i} & k_{12}^{s_i} & k_{13}^{s_i} & k_{14}^{s_i} \\ k_{21}^{s_i} & k_{22}^{s_i} & k_{23}^{s_i} & k_{24}^{s_i} \\ k_{31}^{s_i} & k_{32}^{s_i} & k_{33}^{s_i} & k_{34}^{s_i} \\ k_{41}^{s_i} & k_{42}^{s_i} & k_{43}^{s_i} & k_{44}^{s_i} \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

Für das Einzelement kann folgende Beziehung

$$\mathbf{P}_X^e = \underbrace{\begin{bmatrix} P_{X1} \\ P_{Y1} \\ P_{X2} \\ P_{Y2} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{P}_X^e} = \mathbf{k}_X^e \mathbf{u}_X \quad (4.61)$$

zwischen den äußeren Lasten \mathbf{P}_X^e und \mathbf{u}_X im globalen Koordinatensystem X hergestellt werden. Für Stabkräfte ergibt sich die Beziehung

$$\mathbf{s}_X = \mathbf{k}_X^e \mathbf{u}_X, \quad (4.62)$$

wobei wegen der Vorzeichenkonvention aus Gl. (4.33) analog gilt:

$$\mathbf{P}_X^e = \underbrace{\begin{bmatrix} P_{X1} \\ P_{Y1} \\ P_{X2} \\ P_{Y2} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{P}_X^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} -S_{X1} \\ -S_{Y1} \\ S_{X2} \\ S_{Y2} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{s}_X} = \mathbf{s}_X. \quad (4.63)$$

Mit Überführung der mechanischen Größen des Einzelements in das globale Koordinatensystem kann zum Aufbau des Gesamtsystems übergegangen werden. Nach Wunderlich und Kiener wird die Gesamtstruktur eines Stabtragwerks (Fachwerks) aus den Einzelementen über das Elementkonzept definiert [Wunderlich und Kiener 2004]. Die Autoren formulieren das Elementkonzept wie folgt:

$$\text{Elementkonzept :} \quad \text{Struktur (System)} = \sum \text{Elemente (Stäbe)}.$$

Zunächst müssen vorbereitend für den Aufbau der Gesamtstruktur globale Nummern für Knoten und Elemente vergeben werden. Das Elementkonzept ermöglicht, dass lokal auf Elementebene Knoten- und Elementnummern für den einzelnen Fachwerkstab zunächst unabhängig definiert werden können.

Für das in Abbildung 4.2 dargestellte Stabelement wurden beispielsweise die Knotennummern 1 und 2 lokal vergeben. Nachdem die Nummern der Knoten festgelegt wurden, konnten diese ebenso für die Bezeichnungen der äußeren Kräfte \mathbf{P}_1 und \mathbf{P}_2 und Verschiebungen d_1 und d_2 verwendet werden.

Auf globaler Ebene des Fachwerks werden die Knotennummern eindeutig und in der Regel unabhängig von den lokalen Knotennummern definiert. Für die Übertragung der lokalen Knotennummern in globale Nummern des Fachwerks kann eine Inzidenzmatrix [Bletzinger 2017b] eingesetzt werden, die wiederum als boolesche Tabelle mit Null- und Einswerten definiert ist. Synonym wird für diese Tabelle der Begriff Zuordnungstabelle verwendet.

Für die Zuordnungstabelle findet sich auch der Begriff „Element Freedom Table“, abgekürzt EFT [Bletzinger 2017b].

Das folgende Beispiel einer Zuordnungstabelle (Abb. 4.5) für ein Fachwerk verwendet ein Einführungsbeispiel für ein Streckennetz und ein analoges Fachwerk von [Linkwitz 1960a, S. 8], das in Abbildung 4.4 dargestellt ist. Aus der Zuordnungstabelle ist abzulesen, dass zunächst in der ersten Zeile die globalen Knotennummern definiert werden. Dann folgt die Zuordnung der lokalen Knotennummern der einzelnen Stabelemente.

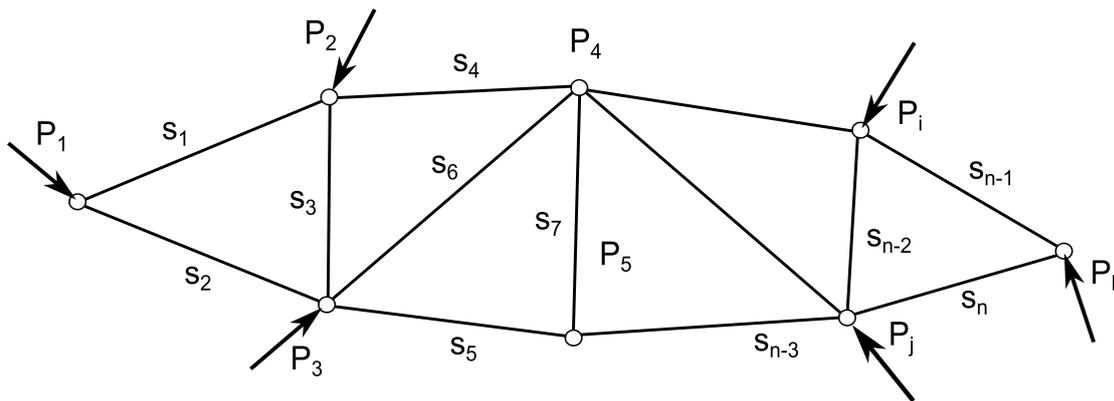


Abbildung 4.4.: Fachwerk mit n Stäben und k Knoten

Knotennummern Fachwerk	P_{1G}	P_{2G}	P_{3G}	...	P_{iG}	P_{jG}	P_{kG}
Knotennummern lokale Systeme							
Stabelement s_1	1_{s_1}	2_{s_1}			...		
s_2	1_{s_2}		2_{s_2}				...
s_3		1_{s_3}	2_{s_3}				...
\vdots	\vdots						
s_{n-2}			...		$1_{s_{n-2}}$	$2_{s_{n-2}}$	
s_{n-1}			...		$1_{s_{n-1}}$		$2_{s_{n-1}}$
s_n			...			1_{s_n}	2_{s_n}

Abbildung 4.5.: Zuordnungstabelle (Element Freedom Table) für das in Abb. 4.4 dargestellte Stabtragwerk mit k Knoten und n Stäben.

Zur konkreten Zuordnung

$$k = \text{EFT}(i_{s_j}) \quad \text{mit } k = \text{globale Knotennummer}, \quad i = \text{lokale Knotennummer des Stabes } j \quad (4.64)$$

werden die lokalen Knotennummern i in derjenigen Spalte eingetragen, in der sich für den Knoten innerhalb der ersten Zeile die globale Knotennummer befindet. So wird z. B. dem Anfangsknoten des Stabes s_2 , für den lokale Nummern $i = 1$ für den Stabanfangs- und $j = 2$ für den Stabendknoten vergeben wurden, über $\text{EFT}(1_{s_2}) = 1$ die globale Knotennummer $k = 1$ zugewiesen.

Nach Definition der globalen Knotennummern können im Koordinatensystem des Gesamtsystems aufzubauende Vektoren für die äußeren Kräfte \mathbf{P}_X^g und für die Knotenverschiebungen \mathbf{U}_X^g aus einzelnen lokalen Vektoren \mathbf{P}_X^e und \mathbf{u}_X^e zusammengesetzt werden. Für die Zuordnung der Vektorkomponenten einzelner Elemente zu den Komponenten globaler Vektoren kann erneut die Element Freedom Table (EFT) verwendet werden.

4.3.3. Einführung der globalen Gesamtsteifigkeitsmatrix und abschließende Definition der globalen Systemgleichung

Analog zur lokalen Ebene (Gl. (4.61)) wird für das Gesamtsystem ein konstitutiver Zusammenhang auf globaler Ebene aufgebaut (Gl. (4.65)). Mit dieser Konstitutivbeziehung wird ein Materialverhalten zwischen dem globalen Vektor \mathbf{P}_X^g , der sämtliche äußere Kräfte aufnimmt, die auf die Gesamtstruktur einwirken, und dem

globalen Vektor \mathbf{U}_X^g der Knotenverschiebungen über eine Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_X definiert, die für das Gesamtsystem aufgebaut ist. Diese Matrix \mathbf{K}_X wird als Gesamtsteifigkeitsmatrix bezeichnet [z. B. Krätzig, Harte, Meskouris u. a. 2010]:

$$\mathbf{P}_X^g = \mathbf{K}_X \cdot \mathbf{U}_X^g. \quad (4.65)$$

Für Gl. (4.65) wird der Begriff der globalen Struktur- oder globalen Systemgleichung verwendet [Barthold 2013]. Die globale Strukturgleichung bildet die Grundlage des Weggrößenverfahrens, für das Gl. (4.65) ein Gleichungssystem mit Beziehungen zwischen Kraft- und Weggrößen zur Verfügung stellt. In der Regel sind in Gl. (4.65) die einwirkenden Kräfte bekannt und die Weggrößen gesucht. Zur Berechnung der Weggrößen wird die vorliegende Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_X invertiert und mit dem Lastvektor \mathbf{P}_X^g multipliziert.

Für die Herausarbeitung der Analogien zwischen Weggrößen- und Ausgleichungsverfahren [siehe z. B. Tabelle 6.1 in Abschnitt 6.1.4] wird die globale Strukturgleichung im Folgenden über das Prinzip der virtuellen Arbeit hergeleitet. Dazu werden Vorarbeiten wie die Bildung der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_X durchgeführt, die z. B. über Assemblierung von Element-Steifigkeitsmatrizen [Bletzinger 2017b] erfolgen kann.

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_X der globalen Strukturgleichung (Gl. (4.65)) wird für die Herausarbeitung der Analogien über zwei unterschiedliche Ansätze aufgebaut. Der erste Ansatz zeigt die aktuelle moderne Vorgehensweise der Baustatik, der zweite Ansatz eine an der Geodäsie orientierte Vorgehensweise, die aus der Seilnetzrechnung entwickelt wurde und dabei Matrizen für ein funktionales Modell definiert, das unmittelbar in einer Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen eingesetzt werden kann (siehe Gl. (A.13) im Anhang A.1).

4.4. Direkte Steifigkeitsmethode und Aufbau von Strukturen für die geodätischen Ausgleichungsverfahren

Erläuterungen zum Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_X Die Dimension der quadratischen und symmetrisch aufgebauten Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_X ist abhängig von der Anzahl k der Knotenpunkte des Gesamttragwerks.

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_X erhält bei k Knotenpunkten die Dimension $2k \cdot 2k$, da zwei kinematische Freiheitsgrade u_{X_i} und u_{Y_i} in globaler x- und y-Richtung für einen Knoten definiert sind. Für den Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_X wird eine Element Freedom Table (siehe Abb. 4.5) verwendet. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix wird zunächst als Nullmatrix initialisiert:

$$\mathbf{K}_{pq,X} = \mathbf{0}_{(2k,2k)}. \quad (4.66)$$

Nach der Initialisierung wird \mathbf{K}_X über eine Assemblierung $\mathbf{K}_X = \sum_{e=1}^n \mathbf{k}_X^e$ aus Einzel-Steifigkeitswerten k_{ij} der Steifigkeitsmatrizen \mathbf{k}^{s_n} der n Stabelemente

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{s_n} & k_{12}^{s_n} & k_{13}^{s_n} & k_{14}^{s_n} \\ k_{21}^{s_n} & k_{22}^{s_n} & k_{23}^{s_n} & k_{24}^{s_n} \\ k_{31}^{s_n} & k_{32}^{s_n} & k_{33}^{s_n} & k_{34}^{s_n} \\ k_{41}^{s_n} & k_{42}^{s_n} & k_{43}^{s_n} & k_{44}^{s_n} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

durch Superposition (Gl. (4.68)) zusammengesetzt. Diese wird im nächsten Abschnitt detaillierter beschrieben.

Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_X durch Element Freedom Table (EFT) Zuordnungstabellen Beim Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_X über eine EFT Zuordnungstabelle erfolgt die Zuordnung der durch den Zeilen- und Spaltenindex definierten Position (p, q) in der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{pq,X}$ über Gl. (4.68).

Bei der Eintragung findet eine Überlagerung (Superposition) von Einzel-Steifigkeitswerten k_{pq} statt, falls bereits Steifigkeitswerte für eine definierte Position (p, q) in der Matrix existieren.

Die Überlagerung wird durch additive Zuweisung $k_{pq} := k_{pq} + k_{ij}$ des aktuellen Einzel-Steifigkeitswertes k_{ij} aus \mathbf{k}^{s_n} zu dem bereits in der globalen Position (p, q) in der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_X definierten Steifigkeitswert k_{pq} umgesetzt [Bletzinger 2017b].

Über folgende Gleichung werden der Aufbau der Gesamtstruktur $\mathbf{K}_{pq,X}$ aus Einzelementen und die Superposition der globalen Steifigkeitswerte beschrieben:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{pq,X} &= \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{k}_{ij,X} \quad \text{mit} \quad (p, q) = 1 \dots (2 \cdot k) \quad \text{und} \quad i, j = 1 \dots 4, \\ k_{pq,X} &= k_{pq,X} + k_{ij,X}, \\ (p, q) &= f(\text{EFT}(k_{ij}, s_e)) \quad \text{mit} \quad e = 1 \dots n_e \quad \text{und} \quad i, j = 1 \dots 4. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Infolge noch nicht definierter Randbedingungen, die die Lagerung festlegen, ist die Gesamtsteifigkeitsmatrix singulär, da in Zusammenhang mit möglichen Starrkörperbewegungen eine Zeilen- bzw. Spaltenabhängigkeit innerhalb der Steifigkeitsmatrix existiert.

Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_X durch kinematische Inzidenz- bzw. Verträglichkeitsmatrizen Der zweite Ansatz baut Strukturen für die Ausgleichsrechnung auf. Für den Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{pq,X}$ werden hier zunächst kinematische Inzidenzmatrizen herangezogen, die auf globaler Ebene definiert werden. Aus diesen können unmittelbar Gleichgewichtsmatrizen abgeleitet werden. Diese haben bei Fachwerken, darüber hinaus auch bei zugbelasteten Seilnetzen (z. B. Olympiadach von München), eine direkte Entsprechung zu den Jakobimatrizen der Ausgleichsrechnung.

Die kinetischen Inzidenzmatrizen besitzen als boolesche Matrizen ausschließlich Werte von Null (=false) und Eins (=true). Die Matrizen sind so aufgebaut, dass sie analog zu der Zuordnungstabelle EFT eine direkte Zuordnung zwischen den lokalen und globalen Freiheitsgraden herstellen können. Sie ermöglichen eine Identifizierung und Zuordnung der lokalen Strukturen innerhalb der Gesamtstruktur [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019]. Eine in der Inzidenzmatrix an die Stelle (j, i) eingetragene Eins kennzeichnet eine direkte Zuordnung eines lokalen Freiheitsgrades j zu einem globalen Freiheitsgrad i .

	U_{X_i}	U_{Y_i}		
u_{X_j}	1	0	mit	u_{X_j}, u_{Y_j}
u_{Y_j}	0	1		U_{X_i}, U_{Y_i}

lokale Freiheitsgraden und
globale Freiheitsgraden. (4.69)

Die für das Gesamtsystem aufzubauende Inzidenzmatrix \mathbf{A} drückt im globalen Koordinatensystem \mathbf{X} die Identität zwischen den Knotenverschiebungen U_{X_i} und U_{Y_i} und den lokalen Knotenverschiebungen u_{X_i} und u_{Y_i} aus.

In Abb. 4.6 ist eine Inzidenzmatrix für das Fachwerk aus Abb. 4.4 aufgebaut.

$$\begin{array}{c}
 U_{XP_1} \quad U_{YP_1} \quad U_{XP_2} \quad U_{YP_2} \quad U_{XP_3} \quad U_{YP_3} \quad \cdots \quad U_{XP_j} \quad U_{YP_j} \quad U_{XP_k} \quad U_{YP_k} \\
 \begin{array}{l}
 u_{X1}^{s_1} \\
 u_{Y1}^{s_1} \\
 u_{X2}^{s_1} \\
 u_{Y2}^{s_1} \\
 u_{X1}^{s_2} \\
 u_{Y1}^{s_2} \\
 u_{X2}^{s_2} \\
 u_{Y2}^{s_2} \\
 \vdots \\
 u_{X1}^{s_n} \\
 u_{Y1}^{s_n} \\
 u_{X2}^{s_n} \\
 u_{Y2}^{s_n}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & & & & & & \cdots & & & & & \\
 & 1 & & & & & \cdots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \cdots & & & & & \\
 & & & 1 & & & \cdots & & & & & \\
 1 & & & & & & \cdots & & & & & \\
 & 1 & & & & & \cdots & & & & & \\
 & & & & 1 & & \cdots & & & & & \\
 & & & & & 1 & \cdots & & & & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & \cdots & 1 & & & & \\
 & & & & & & \cdots & & 1 & & & \\
 & & & & & & \cdots & & & 1 & & \\
 & & & & & & \cdots & & & & 1 &
 \end{array} \right] \cdot \quad (4.70)
 \end{array}$$

Abbildung 4.6.: Inzidenzmatrix (Gl. (4.70)) für die Abbildung der Inzidenzbeziehungen zwischen lokalen und globalen Freiheitsgraden des Fachwerks aus Abb. 4.4.

Die globale Inzidenzmatrix A kann über die Beziehung $A = \sum_{n=1}^{n_e} A_X^{e_{s_i}}$ aus lokalen Inzidenzmatrizen $A_X^{e_{s_i}}$ zusammengesetzt werden.

In linearer Reihenfolge der Stäbe soll die globale Inzidenzmatrix A aus den einzelnen Inzidenzmatrizen $A_X^{e_{s_i}}, i = 1, \dots, n$ wie folgt aufgebaut werden:

$$A = \begin{bmatrix} A_X^{e_{s_1}} \\ A_X^{e_{s_2}} \\ \vdots \\ A_X^{e_{s_n}} \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Beispielsweise ist die lokale Inzidenzmatrix für das Stabelement s_2 (siehe Abb. 4.4) in der Inzidenzmatrix (Abb. 4.6) wie folgt enthalten:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_{X1}^{s_2} \\ u_{Y1}^{s_2} \\ u_{X2}^{s_2} \\ u_{Y2}^{s_2} \end{bmatrix}}_{=u_X^{e_{s_2}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_{XP_1} & U_{YP_1} & U_{XP_2} & U_{YP_2} & U_{XP_3} & U_{YP_3} & \cdots & U_{XP_j} & U_{YP_j} & U_{XP_k} & U_{YP_k} \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=A_X^{e_{s_2}}} \cdot u_X^g. \quad (4.72)$$

Die durch Gl. (4.72) ausgedrückte Inzidenzbeziehung zwischen dem lokalen Verschiebungsvektor $u_X^{e_{s_i}}$, dessen Komponenten u_{X_i}, u_{Y_i} durch Gl. (4.55) aus u_{x_i}, u_{y_i} in das globale Koordinatensystem transformiert wurden, und dem globalen Verschiebungsvektor U_X^g ist:

$$u_X^{e_{s_i}} = A_X^{e_{s_i}} \cdot U_X^g. \quad (4.73)$$

Der untere Index X der Inzidenzmatrix $\mathbf{A}_X^{e_{s_i}}$ von Gl. (4.73), der mit dem jeweiligen Index der weiteren Vektoren $\mathbf{u}_X^{e_{s_i}}$ und \mathbf{U}_X^g identisch ist, deutet an, dass kein Übergang von einem globalen zu einem lokalen Koordinatensystem erfolgt.

Wenn nun Gl. (4.72), linke Seite, mit der Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{\text{lokal}}$ aus Gl. (4.55) und der Vektor $\mathbf{u}_X^{e_{s_i}}$ mit unten angegebener Matrix $\mathbf{A}_x^{e_{s_i}}$ multipliziert werden, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}(\alpha_{s_2}) & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(\alpha_{s_2}) \end{bmatrix}}_{= \mathbf{T}_{\text{lokal}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_{X1}^{s_2} \\ u_{Y1}^{s_2} \\ u_{X2}^{s_2} \\ u_{Y2}^{s_2} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{u}_X^{e_{s_2}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha_{s_2} & \sin \alpha_{s_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_{s_2} & \cos \alpha_{s_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_{s_2} & \sin \alpha_{s_2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_{s_2} & \cos \alpha_{s_2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{= \mathbf{A}_x^{e_{s_2}}} \cdot \mathbf{u}_X^g$$

$$\mathbf{u}_x^{e_{s_2}} = \mathbf{T}_{\text{lokal}} \cdot \mathbf{u}_X^{e_{s_2}} = \mathbf{A}_x^{e_{s_2}} \cdot \mathbf{u}_X^g \quad (4.74)$$

Durch Nachrechnen lässt sich zeigen, dass linke und rechte Seite von Gl. (4.74) identisch sind. Der Index von $\mathbf{A}_x^{e_{s_2}}$, der gleich dem Index des Zielvektors $\mathbf{u}_x^{e_{s_i}}$ und verschieden vom Index des Ausgangsvektors \mathbf{u}_X^g ist, zeigt an, dass ein Übergang auf ein lokales Koordinatensystem x erfolgt ist.

Statt α_{s_2} für den lokalen Drehwinkel α_{s_2} des Stabes s_2 soll eine zusätzliche Bezeichnung α_{13} für den Drehwinkel α_{13} des Stabes s_2 mit den Stabanfangs- und -endknoten P_1 und P_3 gewählt werden.

Die Länge des Stabes berechnet sich, analog zu Gl. (2.12) in Abschnitt 2.2.2 bei den Seilnetzen, aus der Wurzel $w_{13} = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}$. Die Transformationsbeziehung in Gl. (4.74) kann mit Hilfe der Länge w_{13} wie folgt geschrieben werden:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}(\alpha_{13}) & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(\alpha_{13}) \end{bmatrix}}_{= \mathbf{T}_{\text{lokal}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_{X1}^{s_2} \\ u_{Y1}^{s_2} \\ u_{X2}^{s_2} \\ u_{Y2}^{s_2} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{u}_X^{e_{s_2}}} = \begin{bmatrix} \frac{x_1 - x_3}{w_{13}} & \frac{y_1 - y_3}{w_{13}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{y_1 - y_3}{w_{13}} & \frac{x_1 - x_3}{w_{13}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_1 - x_3}{w_{13}} & \frac{y_1 - y_3}{w_{13}} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{y_1 - y_3}{w_{13}} & \frac{x_1 - x_3}{w_{13}} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}_X^g \quad (4.75)$$

Die elementbezogene, kinematische Verträglichkeitsmatrix $\mathbf{A}_x^{e_{s_2}}$ für die lokalen und globalen Weggrößen des Stabes s_2 wird analog zu Gl. (2.23) aufgebaut. Die Matrix wird aus dem Matrizenprodukt $\mathbf{W}_{e_{s_2}}^{-1} \cdot \mathbf{X}_X^{e_{s_2}}$ mit der Matrix $\mathbf{W}_{e_{s_2}}^{-1}$, die die inversen Knotenabstände w_{13}^{-1} auf der Diagonale enthält, und der Matrix $\mathbf{X}_X^{e_{s_2}}$ der Koordinatendifferenzen des Stabes s_2 definiert.

Die globale kinematische Verträglichkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ (Gl. (4.77)) baut sich dann aus einzelnen elementbezogenen, kinematischen Verträglichkeitsmatrizen auf.

Die Matrix $\mathbf{W}_{e_{s_2}}^{-1}$ ist wie folgt gegeben:

$$\mathbf{W}_{e_{s_2}}^{-1} = \begin{bmatrix} w_{13}^{-1} & & & & & \\ & w_{13}^{-1} & & & & \\ & & w_{13}^{-1} & & & \\ & & & w_{13}^{-1} & & \\ & & & & w_{13}^{-1} & \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

Da der Aufbau der Matrix $\mathbf{X}_x^{e_{s_2}}$ der Koordinatendifferenzen, die analog zu der Matrix \mathbf{X} in Gl. (2.23) definiert wird, aus Gl. (4.75) ersichtlich ist, in der die Differenzausdrücke noch durch die Länge w_{13} dividiert werden, kann hier auf eine explizite Darstellung verzichtet werden.

Die globale kinematische Verträglichkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ kann dann wie folgt aufgebaut werden:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x^{e_{s_1}} \\ \mathbf{A}_x^{e_{s_2}} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_x^{e_{s_n}} \end{bmatrix}. \quad (4.77)$$

Die im lokalen zweidimensionalen Koordinatensystem x des Elements gegebenen Verschiebungen $\mathbf{u}_x^{e_{s_i}}$ und Stabkräfte $\mathbf{s}_x^{e_{s_i}}$ mit $i = 1, \dots, n$ (Gl. (4.42) und (4.43)) sollen zu globalen Vektoren \mathbf{U}_x^g und \mathbf{S}_x^g zusammengefasst werden. Diese bauen sich für n Fachwerkstäbe s_i wie folgt auf:

$$\mathbf{U}_x^g = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x^{e_{s_1}} \\ \mathbf{u}_x^{e_{s_2}} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_x^{e_{s_n}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_x^g = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_x^{e_{s_1}} \\ \mathbf{s}_x^{e_{s_2}} \\ \vdots \\ \mathbf{s}_x^{e_{s_n}} \end{bmatrix}. \quad (4.78)$$

Über das Skalarprodukt $-(\mathbf{U}_x^g)^T \cdot \mathbf{S}_x^g$ der energetisch korrespondierenden Weggrößen und inneren Kraftgrößen der Gl. (4.78) ergibt sich ein Ausdruck für die von den inneren Kräften \mathbf{S}_x^g verrichtete Arbeit W_{int} im Gesamtsystem.

Analog zu Gl. (4.38) werden beim Skalarprodukt $-(\mathbf{U}_x^g)^T \cdot \mathbf{S}_x^g$ variierte Verschiebungen $\mathbf{U}_x^g \rightarrow \delta\mathbf{U}_x^g$ eingeführt, um die virtuelle innere Arbeit δW_{int} des Gesamtsystems zu erhalten:

$$\delta W_{\text{int}} = -(\delta\mathbf{U}_x^g)^T \cdot \mathbf{S}_x^g. \quad (4.79)$$

Damit existiert neben Gl. (4.40) ein weiterer Ausdruck für den Gesamtbetrag δW_{int} der inneren virtuellen Arbeit.

Mit der globalen kinematischen Verträglichkeitsmatrix wird eine Zuordnung zwischen lokalen Freiheitsgraden u_{x_i}, u_{y_i} und globalen Freiheitsgraden U_{X_i}, U_{Y_i} möglich:

$$\mathbf{U}_x^g = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{U}_X^g. \quad (4.80)$$

Die kinematische Verträglichkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ stellt die kinematische Verträglichkeit zwischen lokalen und globalen Knotenverschiebungen dar.

Die kinematische Verträglichkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ ist bei Fachwerken in transponierter Form eine Gleichgewichtsmatrix, wenn die in Richtung der Stabachse wirkenden Kräfte (= Normalkräfte) konstant über die ganze Stabachse sind.

Diese Gleichgewichtsmatrix spielt bei der Analogiebetrachtung der mechanischen Verfahren zur Ausgleichungsrechnung eine gleichermaßen grundlegende Rolle wie die kinematische Verträglichkeitsmatrix. Bei idealen Fachwerken ist die Normalkraft nach Gl. (4.27) konstant.

Die Gleichgewichtsmatrix kann aus der kinematischen Verträglichkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeiten hergeleitet werden. Dies soll später nach Herleitung der globalen Strukturgleichung (Gl. (4.84)) über Gl. (4.90) durchgeführt werden.

Globale Strukturgleichung in Matrixformulierung Mit Hilfe von Gl. (4.74) werden Beziehungen zwischen lokalen, elementbezogenen Vektoren und den globalen Vektoren für Verschiebungen und virtuelle Verschiebungen $(\delta\mathbf{u}_x^e)^T = (\mathbf{A}_x^e \delta\mathbf{U}_X^g)^T$, $\mathbf{u}_x^e = \mathbf{A}_x^e \mathbf{U}_X^g$ und $(\delta\mathbf{u}_x^k)^T = (\mathbf{A}_x^k \delta\mathbf{U}_X^g)^T$ aufgebaut.

In das in Gl. (4.40) auf Basis von Elementen des Gesamtsystems ausgedrückte Prinzip der virtuellen Arbeit werden somit globale Vektoren \mathbf{U}_X^g und $\delta\mathbf{U}_X^g$ für Verschiebungen und virtuelle Verschiebungen eingeführt:

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = - \sum_{e=1}^{n_e} (\delta \mathbf{u}_x^e)^T \mathbf{k}_x^e \mathbf{u}_x^e + \sum_{k=1}^{n_k} (\delta \mathbf{u}_x^k)^T \mathbf{P}_x^k \\
 &= - \sum_{e=1}^{n_e} (\mathbf{A}_x^e \delta \mathbf{U}_X^g)^T \mathbf{k}_x^e \mathbf{A}_x^e \mathbf{U}_X^g + \sum_{k=1}^{n_k} (\mathbf{A}_x^k \delta \mathbf{U}_X^g)^T \mathbf{P}_x^k.
 \end{aligned} \quad (4.81)$$

Nun werden die assemblierten virtuellen Knotenverschiebungen $\delta \mathbf{U}_X^g$ vor das Summationszeichen gesetzt. Über den Term $\mathbf{K}_X = \sum_{e=1}^{n_e} (\mathbf{A}_x^e)^T \mathbf{k}_x^e \mathbf{A}_x^e$ erfolgt gleichfalls eine Assemblierung der lokalen Steifigkeitsmatrizen \mathbf{k}_x^e in die globale Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_X . Insgesamt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = - (\delta \mathbf{U}_X^g)^T \left(\underbrace{\sum_{e=1}^{n_e} (\mathbf{A}_x^e)^T \mathbf{k}_x^e \mathbf{A}_x^e}_{= \mathbf{K}_X} \right) \mathbf{U}_X^g + (\delta \mathbf{U}_X^g)^T \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n_k} (\mathbf{A}_x^k)^T \mathbf{P}_x^k}_{= \mathbf{P}_X^g} \right) \\
 &= \underbrace{- (\delta \mathbf{U}_X^g)^T \mathbf{K}_X \mathbf{U}_X^g}_{= \delta W_{\text{int}}} + \underbrace{(\delta \mathbf{U}_X^g)^T \mathbf{P}_X^g}_{\delta W_{\text{ext}}} = \mathbf{0}
 \end{aligned} \quad (4.82)$$

und schließlich

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = (\delta \mathbf{U}_X^g)^T (\mathbf{P}_X^g - \mathbf{K}_X \mathbf{U}_X^g) = \mathbf{0}. \quad (4.83)$$

Gleichung (4.83) muss für alle virtuellen Knotenverschiebungen $\delta \mathbf{U}_X^g \neq \mathbf{0}$ erfüllt sein. Es ergibt sich

$$\mathbf{P}_X^g = \mathbf{K}_X \cdot \mathbf{U}_X^g, \quad (4.84)$$

so dass die globale Systemgleichung (Gl. (4.65)) über das Elementkonzept [Wunderlich und Kiener 2004] in Verbindung mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten für den Fachwerkstab (Gl. (4.38) und (4.39)) nachgewiesen ist.

Als nächstes soll die Werkstoffgleichung Gl. (4.62), die für Weg- und Kraftgrößen auf lokaler Ebene formuliert wurde, auf Darstellungen des globalen Koordinatensystems \mathbf{X} übertragen werden:

$$\mathbf{S}_X^g = \mathbf{K}_X \mathbf{U}_X^g, \quad (4.85)$$

die dann global eine Beziehung zwischen den inneren Weggrößen \mathbf{U}_X^g und den inneren Kraftgrößen \mathbf{S}_X^g herstellen.

Über die Werkstoffgleichung Gl. (4.85) kann das für das Gesamtsystem formulierte Prinzip der virtuellen Arbeit (Gl. (4.82)) wie folgt ausgedrückt werden:

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = \underbrace{- (\delta \mathbf{U}_X^g)^T \mathbf{S}_X^g}_{= \delta W_{\text{int}}} + \underbrace{(\delta \mathbf{U}_X^g)^T \mathbf{P}_X^g}_{\delta W_{\text{ext}}} = \mathbf{0}. \quad (4.86)$$

Mit der Gleichheit von $(\delta \mathbf{U}_X^g)^T \cdot \mathbf{S}_X^g$ und $(\delta \mathbf{u}_x^g)^T \cdot \mathbf{s}_x^g$, die ausdrückt, dass der Betrag der virtuellen inneren Arbeit δW_{int} sich nicht ändern darf, wenn die energetisch korrespondierenden inneren Kraft- und Weggrößen auf ein globales statt auf ein lokales Koordinatensystem bezogen werden, ergibt sich:

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = \underbrace{- (\delta \mathbf{u}_x^g)^T \mathbf{s}_x^g}_{= \delta W_{\text{int}}} + \underbrace{(\delta \mathbf{u}_x^k)^T \mathbf{P}_x^g}_{\delta W_{\text{ext}}} = \mathbf{0}. \quad (4.87)$$

Mit Gl. (4.87) kann die Gleichgewichtsmatrix zwischen Stabkräften S_x^g und äußeren Kräften P_X^g aus der kinematischen Verträglichkeitsmatrix (Gl. (4.80)) hergeleitet werden. Durch Transponieren und anschließendes Variieren von Gl. (4.80) lassen sich virtuelle Verschiebungen analog zu Gl. (4.79) definieren:

$$(\delta \mathbf{U}_x^g)^T = \tilde{\mathbf{A}}^T \cdot (\delta \mathbf{U}_X^g)^T. \quad (4.88)$$

Einsetzen von Gl. (4.88) in Gl. (4.87) ergibt:

$$\begin{aligned} \delta W &= - (\delta \mathbf{U}_X^g)^T \tilde{\mathbf{A}}^T S_x^g + (\delta \mathbf{U}_X^g)^T P_X^g \\ &= (\delta \mathbf{U}_X^g)^T (P_X^g - \tilde{\mathbf{A}}^T \cdot S_x^g) = 0. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Gleichung (4.89) muss wieder für alle virtuellen Knotenverschiebungen $\delta \mathbf{U}_X^g$ erfüllt sein. Die Gleichgewichtsmatrix $\tilde{\mathbf{A}}^T$ ist in Gl. (4.89) aus der kinematischen Verträglichkeitsmatrix (Gl. (4.80)) über das Prinzip der virtuellen Arbeiten abgeleitet. Somit gilt:

$$P_X^g = \tilde{\mathbf{A}}^T \cdot S_x^g. \quad (4.90)$$

Anwendung des Weggrößenverfahrens auf ein gelagertes Tragwerk Gleichung (4.84) ist wegen Singularität der Gesamtsteifigkeitsmatrix K_X nicht lösbar.

Die innere Geometrie des Tragwerks ist jedoch bereits durch kinematische Vorgaben mit den festgelegten Knotenverschiebungen \mathbf{U}_X^g in Gl. (4.84) und dem Werkstoffverhalten definiert, für das Steifigkeiten der einzelnen Tragwerksteile in der Gesamtsteifigkeitsmatrix K_X in Gl. (4.84) vorgegeben werden. Die Festlegung der Lagerung erfolgt durch Definition von Randbedingungen für das System. Ohne Randbedingungen ist das Gesamttragwerk der Gl. (4.84) kinematisch verschieblich.

Der folgende Ansatz von Barthold 2013 definiert eine harte Lagerung des Tragwerks. Das bedeutet, dass die Lager nach Abschluss des Weggrößenverfahrens fest vorgegebene Verschiebungen einnehmen, die in der Regel als Null definiert werden. Für den Ortra-Ansatz ist die vorgegebene Lagerung bei den identischen Punkten analog. Dies wird bei der Ausgleichung durch hohe Gewichtung der identischen Punkte als direkte Beobachtungen erreicht (siehe Gl. (8.5) in Abschnitt 8.1.2). Der hier beschriebene Ansatz über Partitionierung des Gleichungssystems kann darüber hinaus eine weiche Lagerung ermöglichen, wie sie für den Aufbau der Referenzkonfiguration des Ortra-Verfahrens benötigt wird.

Die weiche Lagerung ermöglicht die Definition von großen Steifigkeiten bei den Tragwerkselementen, die die Geometrie des Tragwerks festlegen, und von kleinen Steifigkeiten, die weiche Randbedingungen realisieren und die Verbindung zu den Auflagerknoten herstellen.

Regularisierung der globalen Strukturgleichung Für die harte Lagerung des Tragwerks kann eine Regularisierung der globalen Strukturgleichung (Gl. (4.65)) wie folgt erreicht werden:

Durch Unterteilung der Knoten in äußere Knoten und in Auflagerknoten, die die Lagerung des Tragwerks über gelenkige, elastische oder starre Einspannung übernehmen, kann das Gleichungssystem so umorganisiert werden, dass äußere Kräfte für Knoten und Verschiebungen bei den Lagern vorgegeben werden können.

Dazu werden die Vektoren P_X^g für die äußeren Kräfte und \mathbf{U}_X für die Knotenverschiebungen und die Gesamtsteifigkeitsmatrix K_X partitioniert, so dass die Gleichungen für die Randknoten, die eine Lagerfunktion übernehmen, am Ende des Gleichungssystems stehen sollen.

Für die Partitionierung werden die Knotenverschiebungen \mathbf{U}_X wie folgt aufgespalten:

$$\mathbf{U}_X = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_X^a \\ \bar{\mathbf{U}}_X^b \end{bmatrix}. \quad (4.91)$$

\mathbf{U}_X^a enthält die noch unbekanntenen Knotenverschiebungen der äußeren Knoten, $\bar{\mathbf{U}}_X^b$ die vorgegebenen Randbedingungen. Der Vektor der äußeren Kräfte P_X^g wird analog zu Gl. (4.91) umorganisiert:

$$\mathbf{P}_X^g = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_X^a \\ \mathbf{P}_X^b \end{bmatrix}. \quad (4.92)$$

Der Vektor $\bar{\mathbf{P}}_X^a$ enthält die äußeren Kräfte als bekannte Größen des Gleichungssystems. Nach Auflösung des Gleichungssystems finden sich in \mathbf{P}_X^b die durch das Weggrößenverfahren berechneten Lagerreaktionen.

Bei der Definition der virtuellen Verschiebungen für die äußeren Knoten müssen die Randknoten wegen der kinematischen Verträglichkeit zu den vorgegebenen Randverschiebungen zu Null gesetzt werden:

$$\delta \mathbf{U}_X = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{U}_X^a \\ \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix}. \quad (4.93)$$

Partitionierung des Gleichungssystems Die Partition des Gleichungssystems kann wie folgt aufgebaut werden:

$$\delta W = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{U}_X^a \\ \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_X^a \\ \mathbf{P}_X^b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_X^{aa} & \mathbf{K}_X^{ab} \\ \mathbf{K}_X^{ba} & \mathbf{K}_X^{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_X^a \\ \bar{\mathbf{U}}_X^b \end{bmatrix} \right\} = \mathbf{0}. \quad (4.94)$$

Die erste Zeile des partitionierten Gleichungssystems (4.94) wird zur Auflösung nach \mathbf{U}_X^a ausgeschrieben:

$$\delta \mathbf{U}_X^a \left\{ \bar{\mathbf{P}}_X^a - \mathbf{K}_X^{aa} \cdot \mathbf{U}_X^a - \mathbf{K}_X^{ab} \cdot \bar{\mathbf{U}}_X^b \right\} = \mathbf{0}. \quad (4.95)$$

Bestimmungsgleichung für die gesuchten Verschiebungen Gleichung (4.95) muss für alle virtuellen Knotenverschiebungen $\delta \mathbf{U}_X^a$ erfüllt sein. Es ergibt sich Gl. (4.96)

$$\bar{\mathbf{P}}_X^a - \mathbf{K}_X^{aa} \cdot \mathbf{U}_X^a - \mathbf{K}_X^{ab} \cdot \bar{\mathbf{U}}_X^b = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}_X^a = (\mathbf{K}_X^{aa})^{-1} \left\{ \mathbf{K}_X^{ab} \cdot \bar{\mathbf{U}}_X^b - \bar{\mathbf{P}}_X^a \right\}, \quad (4.96)$$

die eine Gleichung für die Auflösung nach den gesuchten Verschiebungen \mathbf{U}_X^a darstellt. Analog wird die zweite Zeile des partitionierten Gleichungssystems (4.94) ausgeschrieben. Diese führt direkt auf eine Bestimmungsgleichung für die Lagerreaktionen \mathbf{P}_X^b

$$\mathbf{P}_X^b = \mathbf{K}_X^{ba} \cdot \mathbf{U}_X^a + \mathbf{K}_X^{bb} \cdot \bar{\mathbf{U}}_X^b. \quad (4.97)$$

Die durch Auflösung von Gl. (4.96) bestimmten Knotenverschiebungen \mathbf{U}_X^a und die für die Randknoten vorgegebenen Randbedingungen $\bar{\mathbf{U}}_X^b$ ermöglichen im Folgenden die Auflösung nach den gesuchten Lagerkräften \mathbf{P}_X^b .

Mit den Gleichungen (4.80) und (4.90), die in Verbindung mit der globalen Systemgleichung (4.65) des Weggrößenverfahrens hergeleitet wurden, stehen die Grundlagen bereit, um in Kapitel 6 weitere Analogien zu den Ausgleichungsverfahren herstellen zu können.

5. Arbeit und Energie in mechanischen Systemen

Auf dem Gebiet der Statik sehen wir, dass die in integraler Form formulierten Arbeits- und Energiesätze die Grundgleichungen ergänzen und in ihrer Ausprägung als Extremalprinzipien häufig als Ausgangspunkt leistungsfähiger analytischer und numerischer Verfahren dienen [H. Altenbach, J. Altenbach und Naumenko 2016]. Das auf Energiesätzen basierende Prinzip des Minimums des elastischen Gesamtpotentials beruht auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit [Holzapfel 2006, H. Altenbach, J. Altenbach und Naumenko 2016], das in Kapitel 3 eingeführt wurde. Die Energiesätze ermöglichen daneben auch Aussagen über das Gesamtverhalten eines statischen Systems. Arbeit und Energie sind eng miteinander verknüpft, wobei Energie die gespeicherte Arbeitsfähigkeit eines Systems darstellt [Mang und Hofstetter 2013].

Energie, eine Zustandsgröße von physikalischen Systemen, wie sie z. B. für Aufgabenstellungen der Elektrodynamik, der Thermodynamik oder der Mechanik definiert wird, ist eine fundamentale physikalische Größe. Die Bilanzgesetze der Kontinuumsmechanik, die quantitative Aussagen zur Erhaltung der Masse, des Impulses und des Drehimpulses ermöglichen, drücken entsprechend aus, dass Energie in einem abgeschlossenen System in einer oder mehreren Energieformen erhalten bleibt [H. Altenbach 2018, Parisch 2003, Stein und Barthold 1996].

Von besonderer Bedeutung in der Statik ist die Form der mechanischen Energie, die sich wie folgt zusammensetzt [Parisch 2003]:

1. innere Energie (Verzerrungsenergie bzw. elastische Energie)
2. äußere Energie (Potential der äußeren Kräfte) und
3. kinetische Energie.

Bei einem statischen Körper, der sich im Gleichgewicht befindet, fallen die für eine dynamische Formulierung notwendigen Bewegungsanteile für die kinetische Energie weg, und es finden sich ausschließlich Energieanteile der inneren und äußeren Kräfte.

Beim Prinzip der virtuellen Arbeit sind keine Aussagen zur Linearität bzw. Nichtlinearität von konstitutiven Gleichungen oder zu einem bestimmten Materialverhalten notwendig. Im Gegensatz zur Formulierung der mechanischen Energie, die auf einem bestimmten Materialverhalten basiert, das seinerseits mit dem Materialmodell der hyperelastischen Materialien verknüpft ist (siehe Gl. (3.100) in Abschnitt 3.5.1), sind Arbeitsprinzipien wie das Prinzip der virtuellen Verschiebung (Gl. (3.185) in Abschnitt 3.6.2) allgemeingültig formuliert und z. B. auch auf inelastische Materialien anwendbar [Stein und Barthold 1996, Mang und Hofstetter 2013, H. Altenbach, J. Altenbach und Naumenko 2016].

Im Folgenden soll beim Aufbau der Energiesätze von einem Material ausgegangen werden, das die notwendigen Potentialeigenschaften besitzt, um ein elastisches Potential auf Basis einer Formänderungsenergiefunktion W aufzubauen (siehe Gl. (3.100) in Abschnitt 3.5.1). Ausgehend von hyperelastischen Materialien besteht darüber hinaus die Möglichkeit, bei der Formulierung der Formänderungsenergiefunktion W durch Ableitung nach unterschiedlichen Verzerrungstensoren Piola-Kirchhoffsche Spannungsvektoren \mathbf{P} und \mathbf{S} zu erhalten (siehe Gl. (3.101) und (3.103) in Abschnitt 3.5.2).

5.1. Arbeit und Formänderungsenergie

Mit Hilfe des Bilanzsatzes der kinetischen Energie wird die wichtige Beziehung zwischen der Arbeit A , die die am Kontinuum angreifende Kräfte verrichten, zur Formänderungsenergie W hergestellt. Der Bilanzsatz

der kinetischen Energie drückt die Änderung des Impulses in einem System aus, der nach Newton gleich der Summe aller am Körper angreifenden Kräfte ist [Parisch 2003], und wird auch Impulsbilanz genannt.

Die Cauchysche Bewegungsgleichung (Gl. (3.182)) des Abschnitts 3.6.1 wird statt mit einer Testfunktion η mit dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{u}}$ multipliziert, der den Bewegungszustand eines materiellen Teilchens des sich verformenden Körpers beschreibt. Die Ableitung von $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ (siehe Gl. (3.20)) stellt die Geschwindigkeit des Teilchens beim Durchlaufen des Deformationsweges über eine finite Anzahl von i Verzerrungszuständen κ_{M_i} dar:

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}. \quad (5.1)$$

Für die Impulsbilanz wird die Aussage bezüglich sämtlicher Teilchen des Kontinuums erhalten, wenn Gl. (5.1), analog zu Gl. (3.183), über das gesamte Volumen Ω des Körpers integriert wird [Stein und Barthold 1996]:

$$\int_v (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dv = \mathbf{0}. \quad (5.2)$$

Durch Umstellung von Gl. (5.2) kann folgender Ausdruck in Gl. (5.3) für die zeitliche Ableitung der kinetischen Energie $\int_v \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dv$ (siehe Gl. (5.5)) gebildet werden:

$$\int_v \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dv = \int_v \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dv + \int_v \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dv. \quad (5.3)$$

Die kinetische Energie K eines Körpers, der zum Zeitpunkt t ein Volumen v in der Momentankonfiguration κ_{M_i} einnimmt, wird zur weiteren Bilanzierung formal definiert [Parisch 2003, Stein und Barthold 1996]:

$$K = \frac{1}{2} \int_v \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dv. \quad (5.4)$$

Die zeitliche Änderung $\frac{D}{Dt} K$ der kinetischen Energie ist:

$$\frac{D}{Dt} K = \dot{K} = \frac{D}{Dt} \int_v \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dv = \int_v \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \ddot{\mathbf{u}} \, dv. \quad (5.5)$$

Der zweite Term der rechten Seite von Gl. (5.3) wird weiter umgeformt. Die Integranden der Volumen- und Oberflächenintegrale von Gl. (3.172) im Abschnitt (3.6.1) werden mit dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{u}}$ multipliziert. Unter Nutzung der Rechenregel [Holzapfel 2006]

$$\int_a \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n} \, da = \int_v \operatorname{div} (\mathbf{A}^t \mathbf{u}) \, dv, \quad (5.6)$$

die das Vektor-Matrix-Produkt $\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}$ mit Hilfe des Gaußschen Divergenztheorems von der Oberfläche \int_a in das Volumen \int_v des Kontinuums abbildet, ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\int_a \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, da = \int_v (\mathbf{n} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dv = \int_v \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma}^t \dot{\mathbf{u}}) \, dv. \quad (5.7)$$

Der zweite Term der rechten Seite von Gl. (5.3) kann wie folgt umgeformt werden [Holzapfel 2006, Stein und Barthold 1996]:

$$\int_v \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dv = \int_v \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma}^t \dot{\mathbf{u}}) \, dv - \int_v \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \dot{\mathbf{u}}. \quad (5.8)$$

Gl. (5.7) wird auf den ersten Term $\int_v \operatorname{div}(\sigma^t \dot{\mathbf{u}}) dv$ von Gl. (5.8) rechts angewendet. Man erhält:

$$\int_v \operatorname{div} \sigma \cdot \dot{\mathbf{u}} dv = \int_a \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} da - \int_v \sigma : \operatorname{grad} \dot{\mathbf{u}}. \quad (5.9)$$

Gl. (5.9) wird in Gl. (5.3) eingesetzt. Daraus folgt für die zeitliche Ableitung der kinetischen Energie:

$$\underbrace{\int_v \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dv}_{= \dot{K}} = \underbrace{\int_v \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} dv + \int_a \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} da}_{= A_{\text{ext}}(t)} - \underbrace{\int_v \sigma : \operatorname{grad} \dot{\mathbf{u}}}_{= W_{\text{int}}(t)}. \quad (5.10)$$

Stein und Barthold 1996 bezeichnen die Terme für $A_{\text{ext}}(t)$ in Gl. (5.10) rechts als *Leistung der eingepprägten Oberflächen- und Volumenkräfte* und den Term $W_{\text{int}}(t)$ als *innere Spannungsleistung*.

Mit den in Gl. (5.10) eingeführten Bezeichnungen $W_{\text{int}}(t)$ für die innere Spannungsleistung und $A_{\text{ext}}(t)$ für die Leistung der Oberflächen- und Volumenkräfte lässt sich diese Gleichung auch wie folgt ausdrücken [Stein und Barthold 1996, Holzapfel 2006]:

$$\frac{D}{Dt} K = A_{\text{ext}}(t) - W_{\text{int}}(t). \quad (5.11)$$

Für die weiteren Betrachtungen der kinetischen Energie K wird vorausgesetzt, dass ein totales Differential dW_{int} der Formänderungsenergie existiert. Nach Argyris und Kelsey 1960 kann die Variation der inneren Arbeiten $\delta W_{\text{int}} = \int_v \sigma : \delta \mathbf{e} dv$ (siehe Gl. (3.207) in Abschnitt 3.6.2) als totales Differential dW_{int} von W_{int} angesehen werden, wenn das Kurvenintegral $\oint dW_{\text{int}}$, das längs einer geschlossenen Kurve gebildet wird, gleich Null ist. In diesem Fall ist die Arbeit W_{int} unabhängig von dem Weg, den der deformierte Körper von der Referenzkonfiguration κ_R zur Momentankonfiguration κ_M zurücklegt. Dann sind innere Kräfte, welche Formänderungsenergie verrichten, konservative Kräfte.

Eine Kraft heißt konservativ, wenn [Mang und Hofstetter 2013, Sigl 1973]

- die gesamte Arbeit $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ längs eines in sich geschlossenen Weges gleich Null ist, und
- die Arbeit, die eine Kraft an einem Massenpunkt verrichtet, nur von dessen Anfangs- und Endpunkt abhängig, aber unabhängig vom Weg ist.

Das totale Differential für Gl. (5.11) wird unter dieser Voraussetzung:

$$dK = dA - dW. \quad (5.12)$$

Die kinetische Energie K kann durch Integration

$$K = \int_{K_R}^{K_M} dA - \int_{K_R}^{K_M} dW \quad (5.13)$$

über den Deformationsweg von der Ausgangskonfiguration κ_R zur Momentankonfiguration κ_M erhalten werden. Für statische Prozesse, bei denen keine kinetische Energie auftritt, vereinfacht sich Gl. (5.13) zu [Stein und Barthold 1996]:

$$0 = \int_{K_R}^{K_M} dA - \int_{K_R}^{K_M} dW = A - W, \quad \Rightarrow \quad A = W. \quad (5.14)$$

Damit ist bei statischen Systemen, zu deren Kategorie das Ortra-Verfahren zu zählen ist, die Arbeit A der eingepprägten Kräfte gleich der Formänderungsenergie W .

5.2. Potentielle Energie in mechanischen Systemen

5.2.1. Potentielle elastische Energie der inneren Kräfte

Die elastischen Elemente eines mechanischen Tragwerks können bei einem Deformationsprozess potentielle elastische Energie speichern, wenn, wie später gezeigt wird, die Arbeit der äußeren Kräfte in Formänderungsenergie umgewandelt wird. Die Verzerrungen eines elastischen Körpers, die sich nach mechanischer Entlastung vollständig abbauen, hängen nur von Spannungen ab, die sich in Gegenwart äußerer Kräfte bei Einstellen der Gleichgewichtslage aufbauen [Mang und Hofstetter 2013]. Diese Verzerrungen verfügen, wie bereits erwähnt, über ein Potential, die sog. Verzerrungsenergiedichte W . Energie kann extern auf einen Körper übertragen werden, wenn z. B. Arbeit den Körper in Bewegung setzt. Dabei wird bereits Bewegungsenergie in Formänderungsenergie umgewandelt, wenn es sich nicht ausschließlich um eine Starrkörperbewegung handelt. Die Energiemenge, die durch Arbeit bei Formänderung an das Element übertragen wird, kann integral über das Volumen als Produkt aus der Kraft und der differentiellen Verschiebung des materiellen Punktes berechnet werden.

Nach [Stein und Barthold 1996, Argyris und Kelsey 1960] existiert unter der Bedingung, dass die Verzerrungen über ein Potential in der Form von Gl. (3.101) verfügen, ein vollständiges Differential dW für die spezifische Formänderungsenergie W . Diese wird über ein Paar von arbeitskonformen Größen über Tensorverjüngung gebildet, wobei das arbeitskonforme Paar mit Spannungs- und Verzerrungstensoren aus Referenzkonfiguration κ_R oder Momentankonfiguration κ_M definiert wird.

Das totale Differential dW der Formänderungsenergie bildet sich dann über die Kombination σ und de , die sich auf die aktuelle Konfiguration κ_M bezieht, oder über mittels verschiedener Piola-Kirchhoffscher Spannungsvektoren aufgebaute Kombinationen S und dE bzw. P und dF , die sich auf die Ausgangskonfiguration κ_R beziehen:

$$dW = \sigma : de = S : dE = P : dF. \quad (5.15)$$

Anmerkung: Die (zweifache) Tensorverjüngung zweier Tensoren ist zu dem Skalarprodukt zweier Vektoren analog. Das Differential für die gesamte Formänderungsenergie W lautet [Stein und Barthold 1996]:

$$dW_f = d\left(\int_V W dV\right) = \int_V dW dV = \int_V S : dE dV. \quad (5.16)$$

Die Formänderungsenergie W_f für den gesamten Körper kann über Integration von Gl. (5.16) erhalten werden:

$$W_f = \int_V W dV. \quad (5.17)$$

Gl. (5.15) wird über Gl. (5.17) in einen Ausdruck für die innere Energie überführt [Stein und Barthold 1996]:

$$\Pi_i(\mathbf{u}) = W_f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V S(\mathbf{u}) : E(\mathbf{u}) dV. \quad (5.18)$$

Die jeweiligen arbeitskonformen Spannungs- und Verzerrungstensoren wie z. B. $S(\mathbf{u})$ und $E(\mathbf{u})$ in Gl. (5.18) sollen als Funktion in Abhängigkeit des Verschiebungszustands \mathbf{u} (siehe Gl. (3.20) in Abschnitt 3.3.3) formuliert werden.

Für das Potential $\Pi_i(\mathbf{u})$, das wie folgt in Gl. (5.19) für den Gültigkeitsbereich der linearen Elastizitätstheorie definiert wird, geht man von dem Euler-Almansi-Verzerrungstensor e (vgl. Gl. (3.208) in Abschnitt 3.6.2) auf den linearisierten Verzerrungstensor ϵ (vgl. Gl. (3.209)) über:

$$\Pi_i(\mathbf{u}) = W_f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u}) dV. \quad (5.19)$$

Gleichung (5.19) wird auf eine dreidimensionale kartesische Basis bezogen [Mang und Hofstetter 2013, Stein und Barthold 1996]. Gleichzeitig wird ein allgemeines lineares Elastizitätsgesetz mit dem Materialtensor C_{ijkl} (siehe Gl. (3.158) in Abschnitt 3.5.3) eingeführt:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} dV. \quad (5.20)$$

Aus dem Energieausdruck von Gl. (5.20), der für allgemeine geometrische Formen definiert ist, soll ein spezieller Energieausdruck entwickelt werden, der für ein ideales Fachwerk gültig ist, für welches in Abschnitt 4.2.1 Modellannahmen definiert wurden.

Analog zum Vorgehen für die virtuellen Verschiebungen des eindimensional modellierten Stabes in Abschnitt 4.1.2 ergibt sich eine weitreichende Vereinfachung (siehe Gl. (5.23)) aufgrund der Annahmen der physikalisch möglichen Verzerrungen bei gegebener geometrischer Form und Mechanik des Stabes.

Für den Einzelstab, der jeweils erneut die einzelnen Elemente eines idealen Fachwerks bilden soll, werden die Verzerrungen ϵ_y , ϵ_z und γ_{yz} wie in Gl. (4.1) zu Null gesetzt. Daraus ergibt sich zunächst folgende Vereinfachung:

$$W_f = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \epsilon_x dV + \frac{1}{2} \int_V \tau_{xy} \gamma_{xy} dV + \frac{1}{2} \int_V \tau_{xz} \gamma_{xz} dV. \quad (5.21)$$

Mit Einführung von Schnittgrößen N , M_z , M_y , Q_z , Q_y , M_{xV} und $M_{x\omega}$ in Gl. (5.21) (analog zu Gl. (4.10)) erhält man mit weiteren Umformungen:

$$\begin{aligned} W_f = & \frac{1}{2} \int_x N \epsilon dx & + & \frac{1}{2} \int_x M_z \kappa_z dx & + & \frac{1}{2} \int_x M_y \kappa_y dx \\ & + \frac{1}{2} \int_x M_\omega \kappa_\omega dx & + & \frac{1}{2} \int_x Q_y \gamma_y dx & + & \frac{1}{2} \int_x Q_z \gamma_z dx \\ & + \frac{1}{2} \int_x M_{xV} \gamma_{xV} dx & + & \frac{1}{2} \int_x M_{x\omega} \gamma_{x\omega} dx. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Aufgrund der Modellannahmen des Abschnitts 4.2.1, dass keine Momente M und keine Querkräfte Q an die Stäbe übertragen werden, vereinfacht sich Gl. (5.22) weiter zur Ausgangsgleichung (5.23).

Auf Basis von Gl. (5.23) wird im Folgenden ein Skalarprodukt für die innere Energie des Stabtragwerks entwickelt.

Anmerkung: In folgender Gleichung werden für das unbestimmte Integral \int_x der Formänderungsenergie W_f Integrationsgrenzen 0 und l , entsprechend der gedehnten Länge des Stabes definiert:

$$W_f = \frac{1}{2} \int_x N \epsilon dx = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} N \epsilon_x dx. \quad (5.23)$$

Unter der Annahme eines linearen Hookschen Werkstoffgesetzes (siehe Gl. (4.25)) für den Stab wird Gl. (4.27) für die Normalkraft N eingesetzt und eine Integration durchgeführt. Ziel der weiteren Umformung ist die Bildung von Elementverformungen. Auf dieser Basis erfolgt die Definition von Arbeits- und Energiesätzen:

$$W_f = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} \underbrace{\epsilon_x \cdot E \cdot A}_{= N} \cdot \epsilon_x dx = \frac{1}{2} \underbrace{\epsilon_x \cdot E \cdot A}_{= N} \cdot \epsilon_x \cdot l_e. \quad (5.24)$$

Der untere Index e kennzeichnet wie im vorherigen Kapitel eine elementbezogene Größe. Für die Längsverzerrung ϵ_x wird ein Ausdruck $\epsilon_x = \frac{w_e - l_e}{l_e}$ aus Gl. (4.32) des Abschnitts 4.3.1 mit ungedehnter und gedehnter Länge eingesetzt:

$$W_f = \frac{1}{2} \underbrace{(w_e - l_e)}_{=v} \cdot \frac{E \cdot A}{l} \cdot \underbrace{(w_e - l_e)}_{=v}. \quad (5.25)$$

In Gl. (5.25) wird die Differenz zwischen ungedehnter und gedehnter Länge mit v bezeichnet, da dies, in Terminologie der Ausgleichsrechnung, bereits auf eine Verbesserung v hinweisen soll und w_e wurde in Zusammenhang mit Seilnetzen bereits in Kapitel 2 für die gedehnte Seillänge („Wurzel“) verwendet, siehe Gl. (2.12).

Die Differenz $v = w_e - l_e$ in Gl. (5.25) stellt ebenso eine Elementverformung dar, die sich als innere Weggröße in einem mechanischen System arbeitskonform zur Stabkraft s verhält. Die Größe v wurde beispielsweise in Gl. (2.7) in Abschnitt 2.2.2 als Verbesserung v einer nichtlinearen Ausgleichung im Zusammenhang mit Seilnetzen identifiziert. Die Elementverformungen v der Einzelstäbe eines Stabtragwerks werden im Folgenden, analog zu den Ansätzen der Seilnetze, in einem Vektor \boldsymbol{v} zusammenfasst, um arbeitskonforme Größen für einen skalarprodukt-basierten Energieausdruck bereitzustellen (siehe Gl. (5.26)).

Mit den Elementverformungen \boldsymbol{v} wird für die innere Energie Π_i eines Tragwerks der Ausdruck $\boldsymbol{v}^t \cdot \boldsymbol{s}$ gewonnen. Dies erfolgt über den Ansatz „Innere Energie ist das Produkt (= Skalarprodukt) von inneren Weggrößen und korrespondierenden inneren Kraftgrößen“ [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019]. Als innere Kraftgrößen finden sich analog zu Gl. (4.13) die bereits erwähnten Stabkräfte \boldsymbol{s} .

Die allgemeine Ausgangsgleichung (5.20) für die innere Energie $\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV$, die für Stabtragwerke über die Gleichungen (5.21) bis (5.25) unter den Annahmen des idealen Fachwerks schrittweise vereinfacht wurde, ergibt sich zu:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \boldsymbol{v}^t \cdot \boldsymbol{s}. \quad (5.26)$$

Die über den Ansatz eines Skalarprodukts $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{s}$ gebildete innere Energie Π_i stellt die Verzerrungsenergie des Stabtragwerks dar. Die innere Energie Π_i wird auch als Potential der inneren Kräfte, die äußere Energie Π_a (siehe Gl. (5.30)) als Potential der äußeren Kräfte bezeichnet [Mang und Hofstetter 2013].

Für die innere Energie Π_i wird im Folgenden ein Ausdruck über Gl. (5.27) aufgebaut, der innere Weggrößen in Beziehung mit Werkstoffeigenschaften bringt. Dieser kann für die Herleitung eines Weggrößenverfahrens über nachfolgende Ansätze der Ausgleichsrechnung eingesetzt werden (siehe Gl. (6.11) in Abschnitt 6.1.1). Die Werkstoffeigenschaften werden mit Hilfe einer von Gl. (4.85) bekannten Gesamtsteifigkeitsmatrix \boldsymbol{K} abgebildet.

In der Werkstoffgleichung $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{v}$ werden Elementverformungen \boldsymbol{v} anstelle von Knotenverschiebungen eingeführt, da diese analog verwendet werden dürfen. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix \boldsymbol{K} in Gl. (5.27) besitzt im Übrigen eine Analogie zur Gewichtsmatrix \boldsymbol{P} der Ausgleichsrechnung und es werden ausschließlich auf der Diagonalen Werte in Form von Steifigkeitswerten definiert [Bahndorf 1991].

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{1}{2} \boldsymbol{v}^t \cdot \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{s} &= \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{v} \\ \Pi_i &= \frac{1}{2} \boldsymbol{v}^t \cdot \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{v}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Gl. (5.27) stellt, neben Gl. (5.26), die innere Energie des Gesamtsystems und die Formänderungsenergie W_f auf Basis von Gl. (5.25) dar, die auf lokaler Ebene die Formänderungsenergie W_f des Stabes formuliert hatte (siehe auch [Felippa 2004]).

Ein weiterer Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie kann neben den Ausdrücken in Gl. (5.11) und (5.14) zwischen dem Potential der inneren Kräfte Π_i und der Arbeit der inneren Kraftgrößen W_{int} aufgebaut werden. Entsprechend stellt Gl. (5.26) die elastische Energie eines Systems dar, das bei positiver innerer Energie $\Pi_i > 0$ über sein Volumen oder seine Oberfläche verteilt Spannungen und Verzerrungen enthält und deswegen verformt sein muss.

Unter der Voraussetzung, dass das System nach vollständiger Wegnahme der Beanspruchung seinen ursprünglichen, unverformten Zustand wiederherstellt, verringert sich seine elastische Energie $\Pi_i = 0$ auf Null. Das elastische System muss zur Erreichung des ursprünglichen Zustands mechanische Arbeit W_{int} verrichten. Dann gilt bei Wiederherstellung des Zustands, den das System in der unverformten Referenzkonfiguration κ_R besaß, für W_{int} :

$$\Pi_i + W_{int} = 0 \implies W_{int} = -\Pi_i = -\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV. \quad (5.28)$$

5.2.2. Äußere Energie und Gesamtenergie eines statischen Systems

Die Gesamtenergie Π_{gesamt} eines statischen Systems setzt sich, da im Sinne von Gl. (5.14) keine kinetische Energie auftritt, aus innerer Energie Π_i (Formänderungsenergie) und äußerer Energie Π_a zusammen:

$$\Pi_{gesamt} = \Pi_i + \Pi_a. \quad (5.29)$$

Die äußere mechanische Energie Π_a existiert bei Einwirkung äußerer Kräfte auf den Körper. Wenn in dynamischer Betrachtung ($\frac{D}{Dt} K \neq 0$ in Gl. (5.11)) äußere Kräfte über die Starrkörperbewegung, die zum Aufbau von kinetischer Energie führt, hinaus Verzerrungen im Körper hervorrufen, führt dies zu einer Gestaltsänderung, die mit Formänderungsenergie Π_i verbunden ist [Parisch 2003]. Die äußere Energie ist definiert als das negative Produkt der äußeren Kräfte und der korrespondierenden Verschiebungen.

Mit den Volumenkräften $\int_V f_i dV$, den (eingepprägten) Oberflächenkräften $\int_A \bar{f}_i^{(n)} dA$ und den korrespondierenden Verschiebungen u_i ergibt sich die äußere Energie zu (vgl. Gl. (3.210)):

$$\Pi_a = - \int_A \bar{f}_i^{(n)} u_i dA - \int_V f_i \cdot u_i dV. \quad (5.30)$$

Mit Gl. (5.20) kann, im Bereich der linearen Elastizitätstheorie, für beliebig geformte Kontinua die potentielle Gesamtenergie Π_{gesamt} eines statischen Systems wie folgt formuliert werden:

$$\Pi_{gesamt} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV - \left(\int_A \bar{f}_i^{(n)} u_i dA + \int_V f_i \cdot u_i dV \right). \quad (5.31)$$

Analog zur Gl. (5.26), wo für die innere Energie über den Ansatz „Innere Energie ist Skalarprodukt von inneren Kraft- und Weggrößen“ ein Ausdruck für Π_i formuliert wurde, kann der Betrag für die äußere Energie Π_a eines Tragwerks, bei dem Punktlasten an diskreten Knoten einwirken, wie folgt ausgedrückt werden:

$$\Pi_a = - \sum_1^n P_{(i)} \cdot u_{(i)}. \quad (5.32)$$

$P_{(i)}$ soll in Gl. (5.32) den Betrag der i -ten auf den Knoten einwirkenden Kraft darstellen, $u_{(i)}$ die Verschiebung in Richtung der Lasteinwirkung. Die äußeren Kräfte verlieren in Gl. (5.32) an Potential infolge der Verformung. Die Variation von Gl. (5.32) ergibt:

$$\delta \Pi_a = - (P_1 \delta u_1 + P_2 \delta u_2 + P_3 \delta u_3 + \dots + P_n \delta u_n) = - \sum_1^n P_{(i)} \cdot \delta u_{(i)}. \quad (5.33)$$

Da analog zu Gl. (5.28) $\Pi_a + W_{ext} = 0$ gilt, sind die Variationen δu_n in Gl. (5.33) analog zu den virtuellen Verschiebungen, die in Abschnitt 4.4 in Gl. (4.82) mit Hilfe des Ausdrucks $\delta W_{ext} = (\delta \mathbf{U}_X^g)^T \mathbf{P}_X^g$ über Variation des globalen Verschiebungsvektors $(\mathbf{U}_X^g)^T$ dargestellt werden.

Ein Ausdruck für die äußere Energie Π_a bei einem mit Punktlasten in den Knoten belasteten Tragwerk, der die Energie über ein Skalarprodukt aus zwei Vektoren aufbaut, lautet:

$$\Pi_a = -\mathbf{r}^t \cdot \mathbf{p}, \quad (5.34)$$

wobei \mathbf{r} der Vektor der Knotenverschiebungen und \mathbf{p} der Vektor der äußeren Lasten ist.

Fügt man zur äußeren Energie die Gl. (5.26) für die innere Energie hinzu, erhält man die für Tragwerke und Fachwerke spezielle Formulierung der potentiellen Gesamtenergie Π_{gesamt} :

$$\Pi_{gesamt} = \Pi_i + \Pi_a = \frac{1}{2} \mathbf{v}^t \cdot \mathbf{s} - \mathbf{r}^t \cdot \mathbf{p}. \quad (5.35)$$

Die innere Energie Π_i ist identisch mit der elastischen Energie eines statischen Systems, wenn dieses sich im Gleichgewicht befindet und wenn äußere auf die Knoten einwirkende Lasten zu elastischen Formveränderungen im statischen System führen.

Es gilt folgende Beziehung (siehe Gl. (5.32), $\Pi_i = -\Pi_a$):

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \sum_1^n P_{(i)} \cdot u_{(i)}. \quad (5.36)$$

Die Variation $\delta\Pi_i$ der so definierten elastischen Energie Π_i führt bei jedem Knoten, auf den eine Last einwirkt, zu virtuellen Verschiebungen δu_i :

$$\delta\Pi_i = P_1 \delta u_1 + P_2 \delta u_2 + P_3 \delta u_3 + \dots + P_n \delta u_n = \sum_1^n P_{(i)} \cdot \delta u_{(i)}, \quad (5.37)$$

die wegen $\delta\Pi_a + \delta\Pi_i = 0$ bis auf das Vorzeichen der in Gl. (5.33) durchgeführten Variation von Gl. (5.32) entspricht.

6. Berechnung elastischer Verformungen von gekoppelten statischen Systemen

6.1. Weggrößenverfahren

Das Ortra-Verfahren kann als statisch gekoppeltes System durch das Weggrößenverfahren der Baustatik analysiert werden. Durch Verwendung der Abbildungsvorschriften und Rechengesetze des Weggrößenverfahrens kann das Verformungsverhalten des elastomechanischen Umformungsverfahrens bestimmt werden. Im Ergebnis zeigt sich die mechanische Steifigkeit bzw. Nachgiebigkeit des Umformungsverfahrens bei vorhandenen Netzspannungen.

Es können somit Aussagen zur Qualität eines Umformungsverfahrens entwickelt werden, die unter der bereits vorhandenen physikalischen Eigenschaft *minimale Formveränderung der elastischen Basiseinheiten* weitere praktische Eigenschaften umfassen, z. B. wie weit sich ein grober Fehler bei einem identischen Punkt auf die unmittelbare Netzumgebung auswirkt. Aus geodätischer Sicht sollen Netzspannungen bei der Umformung nicht zu größeren Verzerrungen des Grundrisses oder zu größeren Verschmierungseffekten bei der Transformation führen.

Das zugrunde gelegte Weggrößenverfahren ist ein Rechenverfahren der Baustatik und basiert auf den statischen Gleichgewichtsbedingungen, den Werkstoffbeziehungen und dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019, Wunderlich und Kiener 2004]. Ausgangspunkt der Herleitung des Weggrößenverfahrens werden in diesem Kapitel Energiegleichungen sein, die in integraler Form die Grundgleichungen der Mechanik zusammenfassen.

Diese Energiegleichungen bilden auch den Ausgangspunkt beim Aufbau der Analogie zwischen Mechanik und Ausgleichsrechnung bzw. zwischen dem Weggrößenverfahren und dem geodätischen Verfahren der vermittelnden Ausgleichung [Linkwitz, Bahndorf u. a. 1993, Bahndorf 1991, Ströbel 1995, Glock, Bauer u. a. 2019]. Das Weggrößenverfahren wird als grundlegendes Verfahren innerhalb der Baustatik angewendet, wenn bei einem Tragwerk, das auf verschiedene Art mit Einzellasten und Streckenlasten belastet ist, alle äußeren und inneren Kraft- und Weggrößen zu bestimmen sind. Zur Begutachtung der Tragfähigkeit des Tragwerks können diese Größen und daraus abgeleitete Zustands- und Einflusslinien herangezogen werden. Neben den Energiegleichungen ist das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, das in Kapitel 4 gezeigt wurde, Basis für die Herleitung des Weggrößenverfahrens (Gl. (4.84)). Das Prinzip der virtuellen Arbeiten bietet unter der Voraussetzung, dass die inneren Kräfte bekannt sind und der Verformungszustand nicht weiter ermittelt werden muss, den Vorteil, dass keine Aussagen zu Materialeigenschaften notwendig sind. Dann muss das Prinzip nicht auf Probleme der Elastizitätstheorie beschränkt bleiben [Mang und Hofstetter 2013].

Im Weggrößenverfahren sind im Tragwerk allgemein Beziehungen zwischen Verformungen, die entweder als gemessene oder vorgegebene Eingangsgrößen (z. B. Einheitsverformungen) vorliegen, und unbekanntem Lasten p zu bestimmen. Falls als Ausgangspunkt statt Verformungen Lasten gewählt wurden, lassen sich Verformungen aus inversen Beziehungen des Weggrößenverfahrens ermitteln.

Bei statisch unbestimmten Tragwerken, wenn Gleichgewichtsbedingungen für die Bestimmung der Beziehungen zwischen bekannten Ausgangs- und unbekanntem Zielgrößen nicht ausreichen, muss zusätzliches Wissen, wie das Werkstoffverhalten der elastischen Elemente, herangezogen werden.

Statisch unbestimmte Tragwerke werden als solche bezeichnet, wenn mehr Schnitt- und Auflagerkräfte als Gleichgewichtsbedingungen (Bestimmungsgleichungen) vorhanden sind.

6.1.1. Prinzip der minimalen Energie Π beim Weggrößenverfahren

Als Ausgangspunkt für das Weggrößenverfahren dient die Energiegleichung für die potentielle Gesamtenergie bei Tragwerken und Fachwerken (siehe Gl. (5.35) in Abschnitt 5.2.2):

$$\Pi_{\text{gesamt}} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^t \boldsymbol{\epsilon} dV - \mathbf{r}^t \cdot \mathbf{p} \Rightarrow \text{stat.}$$

Mit dem matriziellen Ausdruck für die innere Energie Π_i für ein Tragwerk (siehe Gl (5.27)) ergibt sich der Ausdruck für die Gesamtenergie:

$$\Pi_{\text{gesamt}} = \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{v}_{(1,n)}^t \mathbf{K}_{(n,n)} \mathbf{v}_{(n,1)}}_{\Pi_i} - \underbrace{\mathbf{r}_{(1,m)}^t \cdot \mathbf{p}_{(m,1)}}_{\Pi_a} \Rightarrow \text{stat.} \quad (6.1)$$

Eine weitere Formulierung Π des minimalen Energieprinzips erfolgt unter der Nebenbedingung der von Gl. (4.80) bekannten kinematischen Verträglichkeit $\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{r}$. Sie wird mit Hilfe der aus der Ausgleichsrechnung bekannten Lagrangeschen Korrelaten durchgeführt. Die Matrix \mathbf{A} wurde in Gl. (4.90) in der transponierten Form \mathbf{A}^T als Gleichgewichtsmatrix eingeführt. Der Vektor \mathbf{r} bezeichnet den Vektor der Knotenverschiebungen.

Als Korrelate wird ein Korrelatenvektor \mathbf{s} mit Stabkräften verwendet, um eine Gesetzmäßigkeit zwischen \mathbf{s} als Variable für Stabkräfte, den Elementverformungen \mathbf{v} und der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} (siehe Gl. (4.65)) bei den partiellen Ableitungen nach den Unbekannten \mathbf{r} , \mathbf{v} und \mathbf{s} zu erhalten.

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{v}_{(1,n)}^t \mathbf{K}_{(n,n)} \mathbf{v}_{(n,1)}}_{\Pi_i} - \mathbf{s}_{(1,n)}^t (\mathbf{v}_{(n,1)} - \mathbf{A}_{(n,m)} \cdot \mathbf{r}_{(m,1)}) - \underbrace{\mathbf{r}_{(1,m)}^t \cdot \mathbf{p}_{(m,1)}}_{\Pi_a} \Rightarrow \text{stat.} \quad (6.2)$$

Partielle Ableitungen von Π nach den Unbekannten \mathbf{r} , \mathbf{v} und \mathbf{s} ergeben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{s}^t \mathbf{A} - \mathbf{p}^t &= \mathbf{A}^t \mathbf{s} - \mathbf{p} = 0 \Rightarrow \mathbf{p}_{(m,1)} = \mathbf{A}_{(m,n)}^t \cdot \mathbf{s}_{(n,1)} && \text{(Gleichgewicht),} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{s} &= 0 \Rightarrow \mathbf{s}_{(n,1)} = \mathbf{K}_{(n,n)} \cdot \mathbf{v}_{(n,1)} && \text{(Werkstoff),} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{s}} = -\mathbf{v}^t + \mathbf{r}^t \mathbf{A}^t &= \mathbf{A} \mathbf{r} - \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_{(n,1)} = \mathbf{A}_{(n,m)} \cdot \mathbf{r}_{(m,1)} && \text{(kinematische Verträglichkeit).} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Als unbekannte Größen sollen beim Weggrößenverfahren, wie Gl. (6.6) darstellen wird, äußere Kräfte in Form von Lasten \mathbf{p} gegeben sein. Neben äußeren Kräften sind auch die inneren Kräfte unbekannt, die als Stabkräfte \mathbf{s} vorliegen sollen. Diese können jedoch nach der Bestimmung der Lasten durch das Weggrößenverfahren über die Gleichgewichtsbeziehung in Gl. (4.90) berechnet werden.

Allgemeine Ausgangsgrößen des Verfahrens sind äußere Weggrößen, die als Knotenverschiebungen \mathbf{r} vorliegen.

Nun ist [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019]

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{(m,1)} &= \mathbf{A}_{(m,n)}^t \mathbf{s}_{(n,1)} \\ \mathbf{s}_{(n,1)} &= \mathbf{K}_{(n,n)} \mathbf{v}_{(n,1)} \\ \mathbf{v}_{(n,1)} &= \mathbf{A}_{(n,m)} \mathbf{r}_{(m,1)}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Damit ist folgende Beziehung zwischen äußeren Kräften, der Last und der äußeren Verformung gegeben:

$$\mathbf{p}_{(m,1)} = (\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A})_{(m,m)} \cdot \mathbf{r}_{(m,1)}. \quad (6.5)$$

In der Regel sind in Gl. (6.5) die äußeren Lasten bekannt. Dann ergeben sich die unbekanntenen Knotenverschiebungen aus

$$\mathbf{r}_{(m,1)} = \left(\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A} \right)_{(m,m)}^{-1} \cdot \mathbf{p}_{(m,1)}. \quad (6.6)$$

Somit können über Gl. (6.3) mit zwei der drei Grundgleichungen der Statik, mit der kinematischen Verträglichkeit $\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ und mit der Werkstoffbeziehung $\mathbf{s} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}$, die weiteren Unbekannten \mathbf{v} und \mathbf{s} berechnet werden.

Der Ausdruck $\left(\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A} \right)$ für die Gesamtsteifigkeitsmatrix kann aus der mit Element-Steifigkeitsmatrizen assemblierten Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} (siehe $\mathbf{K}_{pq,X}$ in Gl. (4.68)) durch beidseitige Multiplikation mit der Gleichgewichtsmatrix

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A} \quad (6.7)$$

gebildet werden, die eine Kongruenztransformation [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019] oder Gaußsche Transformation darstellt. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_G stellt wegen der vorangegangenen Gaußschen Transformation eine quadratische, positiv definite Matrix dar, wenn die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} spaltenregulär ist.

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_G als quadratische, positiv definite Matrix hängt mit der Gesamtflexibilitätsmatrix \mathbf{F}_G durch folgende Beziehung zusammen:

$$\mathbf{F}_G = \mathbf{K}_G^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_G = \left(\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A} \right)^{-1}. \quad (6.8)$$

Die Gesamtflexibilitätsmatrix \mathbf{F}_G ist ebenfalls quadratisch und positiv definit [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019]. Mit \mathbf{K}_G und \mathbf{F}_G kann Gl. (6.5) zu

$$\mathbf{p}_{(m,1)} = \mathbf{K}_G \cdot \mathbf{r}_{(m,1)} \quad (6.9)$$

und Gl. (6.6) zu

$$\mathbf{r}_{(m,1)} = \mathbf{F}_G \cdot \mathbf{p}_{(m,1)} \quad (6.10)$$

zusammengefasst werden. Gl. (6.9) mit den Knotenverschiebungen $\mathbf{r} = f(\mathbf{p})$ als Funktion der äußeren Lasten wird als Gesamt-Steifigkeitsbeziehung bezeichnet.

Bei Tragwerken mit durch Temperatureinwirkung vorverformten Stabwerkselementen wird Gl. (6.2) zu

$$\begin{aligned} \Pi = & \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{v}_{(1,n)}^t \mathbf{K}_{(n,n)} \mathbf{v}_{(n,1)}}_{\Pi_i} - \mathbf{s}_{(n,1)}^t (\mathbf{v}_{(n,1)} - \mathbf{A}_{(n,m)} \cdot \mathbf{r}_{(m,1)} + \mathbf{v}_{u(n,1)}) \\ & - \underbrace{\mathbf{r}_{(1,m)}^t \cdot \mathbf{p}_{(m,1)}}_{\Pi_a} \quad \Rightarrow \quad stat. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Die Ableitungen nach den Unbekannten bleiben für Gleichgewicht und Werkstoffgleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{(m,1)} &= \mathbf{A}_{(m,n)}^t \cdot \mathbf{s}_{(n,1)} \\ \mathbf{s}_{(n,1)} &= \mathbf{K}_{(n,n)} \cdot \mathbf{v}_{(n,1)}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

unverändert, bei der kinematischen Verträglichkeit ergibt sich der Ausdruck

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{s}} = -\mathbf{v}^t + \mathbf{r}^t \mathbf{A}^t - \mathbf{v}_u^t = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{(n,1)} = \mathbf{A}_{(n,m)} \cdot \mathbf{r}_{(m,1)} - \mathbf{v}_{u(n,1)}. \quad (6.13)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{A}^t \mathbf{K} (\mathbf{A} \mathbf{r} - \mathbf{v}_u) \\ \mathbf{p} &= \mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{r} - \mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{v}_u \\ \mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{r} &= \mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{v}_u + \mathbf{p} \\ \mathbf{r}_{(m,1)} &= \left(\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A} \right)_{(m,m)}^{-1} \left(\mathbf{A}_{(m,n)}^t \mathbf{K}_{(n,n)} \mathbf{v}_{u(n,1)} + \mathbf{p}_{(m,1)} \right). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Ohne äußere Lasten, nur mit durch Vorverformungen v_u ausgelösten Elementverformungen wird Gl. (6.14) zu

$$\mathbf{r}_{vu(m,1)} = \left(\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A} \right)_{(m,m)}^{-1} \underbrace{\left(\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{v}_u \right)_{(m,1)}}_{\mathbf{f}_{vu}}. \quad (6.15)$$

Die direkte Gegenüberstellung von Gl. (6.6) mit Gl. (6.15) zeigt, dass der Term $\left(\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{v}_u \right)$ durch Vorverformung verursachte Kräfte ausdrückt, die Verschiebungen \mathbf{r}_{vu} zur Folge haben. Die Kräfte sollen, wie in Gl. (6.15) dargestellt, mit \mathbf{f}_{vu} bezeichnet werden.

Für das mit dem Prinzip der minimalen Gesamtenergie in Gl. (6.11) hergeleitete Weggrößenverfahren, das mit $\mathbf{r} = \left(\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A} \right)^{-1} \left(\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{v}_u + \mathbf{p} \right)$ definiert wird, erfolgt im nächsten Abschnitt 6.1.2 mit der Ausgleichsrechnung in Gl. (6.25) eine analoge Formulierung unter Verwendung des Prinzips der kleinsten Quadrate.

Das Weggrößenverfahren durchläuft folgende Schritte, um zunächst Weggrößen eines Tragwerks und im Anschluss weitere Kraftgrößen zu bestimmen. Wenn der Ansatz der Assemblierung der lokalen Strukturen in das Gesamtsystem verfolgt wird, wie er in Abschnitt 4.3.2 beschrieben wurde, dann beginnt das Verfahren mit dem zweiten Schritt und entspricht der direkten Steifigkeitsmethode [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019, Wunderlich und Kiener 2004, Felippa 2004], die in Lehrbüchern der Baustatik umfassend dargestellt wird und auf den Aufbau einer Gleichgewichtsmatrix \mathbf{A} verzichtet. Die folgende Aufzählung entspricht weitgehend den Verfahrensschritten von [Ströbel 1995]:

1. Aufbau eines Satzes von Gleichgewichtsbedingungen und Definition der Gleichgewichtsmatrix $\mathbf{A}_{(m,n)}^t$.
2. Definition der lokalen Elementflexibilitätsmatrizen \mathbf{F}_L oder Elementsteifigkeitsmatrizen $\mathbf{K}_L = \mathbf{F}_L^{-1}$ für die einzelnen statischen Basiseinheiten.
3. Definition der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{(n,n)}$ durch Assemblieren der Elementsteifigkeitsmatrizen über die direkte Steifigkeitsmethode bzw. Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_G über die Beziehung $\mathbf{K}_G = \mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A}$ (siehe Gl. (6.7)).
4. Zusammenstellen des Lastvektors $\mathbf{p}_{(m,1)}$, wenn äußere Kräfte als Eingangsgrößen gegeben sind, bzw. des Vektors der Knotenverschiebungen $\mathbf{r}_{(m,1)}$, falls Verschiebungen in das Weggrößenverfahren einfließen.
5. Berechnung der Unbekannten $\mathbf{r} = \mathbf{K}_G^{-1} \cdot \mathbf{p}$, falls Lasten \mathbf{p} gegeben sind, bzw. $\mathbf{p} = \mathbf{K}_G \cdot \mathbf{r}$, falls Knotenverschiebungen \mathbf{r} gegeben sind.
6. Berechnung der Stabendkräfte \mathbf{s} und der weiteren Schnittgrößen.

6.1.2. Weggrößenverfahren und vermittelnde Ausgleichung

In seiner Dissertation über Streckennetze und analoge mechanische Fachwerke hat Linkwitz auf die Analogie zwischen Ausgleichungsverfahren und Rechenverfahren der Statik hingewiesen [Linkwitz 1960a]. Das Kraftgrößenverfahren der Statik für die Bestimmung von statisch unbestimmten Tragwerken entspricht der bedingten Ausgleichung und das heute überwiegend eingesetzte Weggrößenverfahren entspricht, mit entsprechender Erweiterung, dem Verfahren der vermittelnden Ausgleichung [Linkwitz, Gründig u. a. 1987]. Sowohl die Verfahren der Statik als auch die Verfahren der Ausgleichsrechnung verwenden, wie bereits erwähnt, ein Minimumsprinzip.

Ein wesentlicher Unterschied ist die Darstellung von externen Lasten im Kraft- oder Weggrößenverfahren, die in der Ausgleichsrechnung nicht vorgesehen sind [Ströbel 1995]. Diese Lasten können als äußere Kraftgrößen Arbeit mit äußeren Weggrößen verrichten. Eine von Lasten verursachte Verschiebung von Knotenpunkten des Tragwerks kann durch den Vektorausdruck $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ dargestellt werden. Dabei sollen die unbelastete Ausgangsgeometrie durch den Vektor \mathbf{x}_0 und die Zielgeometrie, die das durch Belastung in einen Gleichgewichtszustand versetzte Tragwerk kennzeichnet, durch den Vektor \mathbf{x} beschrieben werden.

Da Energie, die mit der gespeicherten Arbeitsfähigkeit identisch ist, physikalisch in enger Verbindung mit Arbeit steht, und das geodätische Prinzip der kleinsten gewichteten Verbesserungssummen (Prinzip der kleinsten Quadrate) als einem Energiepotential äquivalentes Potential betrachtet werden kann, wird in Gl. (6.16) ein zusätzlicher Term $(-\mathbf{p}^t \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$ für die äußeren Lasten als Nebenbedingung definiert. Zugleich werden die äußeren Lasten \mathbf{p} als ein in der Ausgleichsrechnung zur Minimierung von Funktionen unter Nebenbedingungen eingesetzter Lagrangescher Korrelatenvektor verwendet [Glock, Bauer u. a. 2019].

Die Arbeit der äußeren Kräfte wird über das Produkt „äußere Kraftgrößen multipliziert mit äußeren Weggrößen“ zum Potential der kleinsten Quadrate addiert. Das Potential wird in Gl. (6.16) mit der negativen Arbeit $-W_a = \Pi_a$ der korrespondierenden äußeren Kraft- und Weggrößen erweitert:

$$\Pi = \underbrace{\mathbf{v}^t \mathbf{P} \mathbf{v}}_{\Pi_{v^t P v}} - 2k^t \underbrace{(l + v - f(x))}_{\text{Nebenbed.}} + 2 \underbrace{(-\mathbf{p}^t \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}_{-W_a = \Pi_a} \Rightarrow \text{stat.} \quad (6.16)$$

Der Korrelatenvektor \mathbf{k} in Gl. (6.16) kann in Analogie zur Mechanik dem Vektor \mathbf{s} der Stabkräfte gleichgesetzt werden. Bei Herleitung der vermittelnden Ausgleichung wird der Korrelatenvektor \mathbf{k} bzw. der analoge Vektor der Stabkräfte \mathbf{s} bei Zwischenrechnungen eliminiert. Der Vektor $\mathbf{s} \hat{=} \mathbf{k}$ kommt somit im bekannten Formelwerk der vermittelnden Ausgleichung nicht vor.

Bei den folgenden partiellen Ableitungen in Gl. (6.17) und (6.18) finden sich jedoch die bekannten Grundgleichungen der Mechanik zu Gleichgewicht und Werkstoffbeziehung wieder.

Die partiellen Ableitungen von Π nach den Unbekannten \mathbf{x} , dem Vektor der Unbekannten mit den Knotenpunkt-Koordinaten, nach den Verbesserungen v und dem Korrelatenvektor \mathbf{k} werden zu Null gesetzt, und man erhält:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} = 2 \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^t \mathbf{k} - 2 \mathbf{p} = \mathbf{0} \Rightarrow \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^t \mathbf{k} = \mathbf{p} \quad (\Leftrightarrow \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{s} = \mathbf{p} \quad \text{Gleichgewicht}) \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v} = 2 \mathbf{P} v - 2 \mathbf{k} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{k} = \mathbf{P} \cdot v \quad (\Leftrightarrow \mathbf{s} = \mathbf{K} \cdot v \quad \text{Werkstoff}) \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial k} = -2(l + v - f(x)) = \mathbf{0} \Rightarrow l + v = f(x). \quad (6.19)$$

Die Eliminierung des Korrelatenvektors \mathbf{k} bzw. des Vektors der Stabkräfte \mathbf{s} ergibt sich durch Einsetzen von Gl. (6.18) in Gl. (6.17). Die Jakobimatrix \mathbf{A} wird für $\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)$ eingeführt und ergibt folgenden Ausdruck:

$$\mathbf{A}^t \mathbf{P} v = \mathbf{p}. \quad (6.20)$$

Für die Verbesserungen v wird in Gl. (6.20) der Ausdruck $v = f(\mathbf{x}) - l$ eingesetzt:

$$\mathbf{A}^t \mathbf{P} (f(\mathbf{x}) - l) = \mathbf{p}. \quad (6.21)$$

$f(\mathbf{x})$ wird in einer Taylorreihe unter Vernachlässigung höherer Glieder entwickelt zu

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_i) + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta \mathbf{x} = f(\mathbf{x}_i) + \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x}. \quad (6.22)$$

Der Ausdruck für $f(\mathbf{x})$ von Gl. (6.22) wird in Gl. (6.21) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \cdot (f(\mathbf{x}_i) + \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x} - l) &= \mathbf{p} \\ \mathbf{A}^t \mathbf{P} \cdot (\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x} - \underbrace{(l - f(\mathbf{x}_i))}_{\tilde{l}}) &= \mathbf{p} \\ \mathbf{A}^t \mathbf{P} \cdot (\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x} - \tilde{l}) &= \mathbf{p} \\ \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x} - \mathbf{A}^t \mathbf{P} (l - f(\mathbf{x}_i)) &= \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Damit wird

$$\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{p} + \mathbf{A}^t \mathbf{P} (\mathbf{l} - f(\mathbf{x}_i))) \quad (6.24)$$

Als nichtlineares Ausgleichungsverfahren ergibt sich damit das iterative System

$$\Delta \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1} = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{p} + \mathbf{A}^t \mathbf{P} (\mathbf{l} - f(\mathbf{x}_{j-1}))). \quad (6.25)$$

Die direkte Gegenüberstellung der Gleichung (6.25) der Ausgleichungsrechnung, die für das Weggrößenverfahren hergeleitet wurde und der originären Gleichung (6.14) des Weggrößenverfahrens

$$\text{Gl. (6.25)} \quad \underbrace{\Delta \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{p} + \mathbf{A}^t \mathbf{P} \tilde{\mathbf{l}})}_{\text{vermittelnde Ausgleichung}} \Leftrightarrow \underbrace{\mathbf{r} = (\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{p} + \mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{v}_u)}_{\text{Weggrößenverfahren}}, \quad \text{Gl. (6.14)}$$

macht parallele Strukturen deutlich.

Ohne äußere Lasten entspricht das Weggrößenverfahren einer vermittelnden Ausgleichung:

$$\Delta \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \tilde{\mathbf{l}} \Leftrightarrow \mathbf{r} = (\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{v}_u. \quad (6.26)$$

Aus dem Vergleich von (6.25) mit (6.14) ist die Analogie

$$(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{N}^{-1} \hat{=} (\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{K}_G^{-1} = \mathbf{F}_G \quad (6.27)$$

zwischen der Matrix \mathbf{Q}_{xx} der Unbekannten $\Delta \hat{\mathbf{x}}$ und der Inversen der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_G^{-1} = (\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A})^{-1}$ des Weggrößenverfahrens ersichtlich. Die Matrix \mathbf{Q}_{xx} in Gl. (6.27), die der inversen Normalgleichungsmatrix \mathbf{N}^{-1} entspricht, wird als Matrix der Gewichtsreziproken oder als Kofaktorenmatrix der Unbekannten bezeichnet [Niemeier 2008, Großmann 1969, Linkwitz 1960b]. Die Inverse der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_G^{-1} ist nach Gl. (6.8) die Gesamtflexibilitätsmatrix \mathbf{F}_G [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019].

Die Grundgleichung (6.6) des Weggrößenverfahrens, bei der die Knotenverschiebungen über $\mathbf{r} = f(\mathbf{p})$ aus äußeren Lasten resultieren, kann mit gegebener Analogie nun wie folgt ausgedrückt werden:

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}_G^{-1} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{F}_G \cdot \mathbf{p} \hat{=} \mathbf{r} = \mathbf{Q}_{xx} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{p}. \quad (6.28)$$

Diese Gleichung stellt den für die Netzausgleichung der Geodäsie relevanten Zusammenhang zwischen Kräften und Knotenverschiebungen her. In Abschnitt 8.1.3, Gl. (8.41), werden Knotenverschiebungen als Koordinatenwidersprüche gedeutet, so dass Gl. (6.28) auch den Zusammenhang zwischen Kräften und Koordinatenwidersprüchen angibt.

Über Gl. (6.5) kann die Analogie

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}_G \cdot \mathbf{r} = \mathbf{F}_G^{-1} \cdot \mathbf{r} \hat{=} \mathbf{p} = \mathbf{Q}_{xx}^{-1} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{r} \quad (6.29)$$

hergestellt werden. Falls die äußeren Lasten \mathbf{p} durch Zuweisung des Vektors $\mathbf{p} = \mathbf{e}$ in den Gleichungen (6.6) bzw. (6.28) zu Eins gesetzt werden, ergibt sich für die Verschiebungen \mathbf{r} :

$$\mathbf{r}_e = (\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{e} \hat{=} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}_{xx} \cdot \mathbf{e}. \quad (6.30)$$

Mit Gl. (6.30) lassen sich die Gewichtsreziproken von \mathbf{Q}_{xx} als Verschiebungen in Koordinatenrichtungen unter Einheitsbelastung deuten [Linkwitz 1977].

6.1.3. Fortpflanzung der Verzerrungen innerhalb eines geodätischen Netzes, die durch einen mit einem groben Fehler behafteten Punkt verursacht werden

Für ein als UTM-Überführungsverfahren eingesetztes Ausgleichungsverfahren lässt sich mit Hilfe der Analogie des Weggrößenverfahrens zu einer über Gl. (6.25) erweiterten vermittelnden Ausgleichung, und mit Hilfe der Analogie der Gesamtflexibilitätsmatrix \mathbf{F}_G zur Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_{xx} , folgende Fragestellung beantworten.

Bei der Vorbereitung der UTM-Überführung in Bayern wurden Koordinatenwidersprüche über 20 cm als grobe Fehler klassifiziert. An einem identischen Punkt P_i soll ein als grober Fehler klassifizierter Koordinatenwiderspruch $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ vorliegen. Die Koordinatenwidersprüche $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ sollen den durch Gewichtsdivergenzen ermittelten Koordinatenwidersprüchen Δx des Kapitel 8, Gl. (8.23), entsprechen [Glock, Bauer u. a. 2019]. Bei dieser Fragestellung ist zu klären, in welchem Umfang der falsche Punkt die Nachbarschaftsgenauigkeit beeinflusst, und bis zu welcher Entfernung Verzerrungen im Grundriss spürbar sind.

Mit Gl. (6.28) wurde ein Zusammenhang aufgezeigt, wie mit Hilfe der Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_{xx} Kräfte auf Verschiebungen \mathbf{r} abgebildet werden. An einem Punkt P_i soll $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ als äußere Weggröße gegeben sein, die durch eine im Punkt P_i angreifende unbekannte Kraft \mathbf{k}_i verursacht wird. Gleichzeitig sollen keine weiteren Kräfte vorhanden sein, die an Punkten angreifen. Die unbekannte Kraft verursacht bei benachbarten Punkten von P_i weitere unbekannte Verschiebungen $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j), j \neq i$.

In Betrag und Richtung unterschiedliche Verschiebungen $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j), j \neq i$ stellen bei Betrachtungen einer Grundriss-Überführung von einem Ausgangs- in ein Zielkoordinatensystem zusätzliche Verzerrungen dar, die durch vorab als grobe Fehler klassifizierte Koordinatenwidersprüche verursacht werden.

Gleichung (6.28) wird für die weitere Herleitung ausgeschrieben:

$$\mathbf{r}_{(2m,1)} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \vdots \\ \Delta x_m \\ \Delta y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{x_1 x_1} & q_{x_1 y_1} & \cdots & q_{x_1 x_i} & q_{x_1 y_i} & \cdots & q_{x_1 x_m} & q_{x_1 y_m} \\ q_{y_1 x_1} & q_{y_1 y_1} & \cdots & q_{y_1 x_i} & q_{y_1 y_i} & \cdots & q_{y_1 x_m} & q_{y_1 y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{x_i x_1} & q_{x_i y_1} & \cdots & q_{x_i x_i} & q_{x_i y_i} & \cdots & q_{x_i x_m} & q_{x_i y_m} \\ q_{y_i x_1} & q_{y_i y_1} & \cdots & q_{y_i x_i} & q_{y_i y_i} & \cdots & q_{y_i x_m} & q_{y_i y_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & q_{x_m x_i} & q_{x_m y_i} & \cdots & q_{x_m x_m} & q_{x_m y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & q_{y_m x_i} & q_{y_m y_i} & \cdots & q_{y_m x_m} & q_{y_m y_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k_{x_i} \\ k_{y_i} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

Die Verschiebung $\mathbf{r}_i = [\Delta x_i \quad \Delta y_i]$ im Punkt P_i wird durch die Einzelkraft $\mathbf{k}_i = [k_{x_i} \quad k_{y_i}]$ verursacht. Mit Gleichung (6.31) ist für die Verschiebung in x - und y -Koordinatenrichtung in P_i ablesbar:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{x_i x_i} & q_{x_i y_i} \\ q_{y_i x_i} & q_{y_i y_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{x_i} \\ k_{y_i} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_{x_i} \\ k_{y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{x_i x_i} & q_{x_i y_i} \\ q_{y_i x_i} & q_{y_i y_i} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{i,i}^{-1} \cdot \Delta \mathbf{x}_i. \quad (6.32)$$

Die Gl. (6.32) ist zu Gl. (4.33) in Abschnitt 4.3.1 analog. Die Matrix $\mathbf{Q}_{i,i}$, die in Gl. (6.32) als Inverse auftritt, ist die in $(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$ enthaltene 2x2-Untermatrix für den Punkt P_i [Linkwitz 1988]. Durch Inversion dieser 2x2-Submatrix $\mathbf{Q}_{i,i}$ mit Hilfe der Adjunkte $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \text{Adj}(\mathbf{A})$ [z. B. Arens, Hettlich u. a. 2015] ergibt sich für k_{x_i} und k_{y_i} :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} k_{x_i} \\ k_{y_i} \end{bmatrix} &= \frac{1}{|\mathcal{Q}_{j,j}|} \cdot \text{Adj}(\mathcal{Q}_{j,j}) \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} = \frac{1}{q_{x_i x_i} q_{y_i y_i} - q_{x_i y_i}^2} \cdot \text{Adj}(\mathcal{Q}_{i,i}) \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{q_{x_i x_i} q_{y_i y_i} - q_{x_i y_i}^2} \cdot \begin{bmatrix} q_{y_i y_i} & -q_{x_i y_i} \\ -q_{y_i x_i} & q_{x_i x_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{q_{y_i y_i}}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} & \frac{-q_{x_i y_i}}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} \\ \frac{-q_{y_i x_i}}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} & \frac{q_{x_i x_i}}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} \hat{=} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} \quad \text{mit } \mathbf{K}_{i,i} := \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

Die Matrix $\mathbf{K}_{i,i}$ ist die zu $\mathcal{Q}_{i,i}^{-1}$ äquivalente Steifigkeitsmatrix (Definition siehe Gl. (4.33)). Der Vektor $\Delta \mathbf{x}$ der Punktverschiebungen bzw. der Grundrissverzerrungen kann damit wie folgt berechnet werden:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \vdots \\ \Delta x_m \\ \Delta y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{x_1 x_i} & q_{x_1 y_i} \\ q_{y_1 x_i} & q_{y_1 y_i} \\ \vdots & \vdots \\ q_{x_i x_i} & q_{x_i y_i} \\ q_{y_i x_i} & q_{y_i y_i} \\ \vdots & \vdots \\ q_{x_m x_i} & q_{x_m y_i} \\ q_{y_m x_i} & q_{y_m y_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{q_{y_i y_i}}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} & \frac{-q_{x_i y_i}}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} \\ \frac{-q_{y_i x_i}}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} & \frac{q_{x_i x_i}}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix}, \tag{6.34}$$

$$\text{in Kurzform :} \quad \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{1,i} \\ \mathcal{Q}_{2,i} \\ \vdots \\ \mathcal{Q}_{m,i} \end{bmatrix} \cdot \mathcal{Q}_{i,i}^{-1} \cdot \Delta x_i = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{1,i} \\ \mathcal{Q}_{2,i} \\ \vdots \\ \mathcal{Q}_{m,i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{q_{y_i y_i}}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} & \frac{-q_{x_i y_i}}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} \\ \frac{-q_{y_i x_i}}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} & \frac{q_{x_i x_i}}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} \end{bmatrix} \cdot \Delta x_i. \tag{6.35}$$

Aus Gl. (6.35) lässt sich ablesen, wie sich die Koordinatenwidersprüche Δx_i im Punkt \mathbf{P}_i , die durch die Ausgleichung auf die Nachbarschaft verteilt werden, als Koordinatenzuschläge auf die Nachbarschaftsgenauigkeit auswirken. Zur Verteilung der Koordinatenwidersprüche durch den Ortra-Ansatz siehe auch Abschnitt 8.2.

Für die Berechnung der inneren Formänderungsenergie, die der Summe der von den beiden Kraftkomponenten k_{x_i} und k_{y_i} der Einzelkraft \mathbf{k}_i entlang der Verschiebungswege $\Delta x_j, j = 1, \dots, m$ und $\Delta y_j, j = 1, \dots, m$ in Richtung der x - und y -Achse verrichteten Arbeit entspricht, sollen zuletzt noch einzelne Komponenten aus den Kofaktoren berechnet werden. Diese innere Formänderungsenergie kann bei der Voraussetzung einer unverformten Ausgangskonfiguration κ_R durch den Skalarwert der bei der Verformung zu verrichtenden Arbeit \mathbf{W} ausgedrückt werden (siehe Gl. (6.42)) und ergibt auf Basis der Koeffizienten der Kofaktorenmatrix \mathcal{Q}_{xx} (Gl. (6.31)) eine quantitative Aussage darüber, in welchem Ausmaß die Koordinatenwidersprüche zu Verzerrungen im Grundriss führen.

$$\begin{aligned}
k_{x_i} &= \begin{bmatrix} \frac{q_{y_i y_i}}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} & \frac{-q_{x_i y_i}}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} = [k_1 \quad k_2] \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} = k_1 \cdot \Delta x_i + k_2 \cdot \Delta y_i \\
k_{y_i} &= \begin{bmatrix} \frac{-q_{y_i x_i}}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} & \frac{q_{x_i x_i}}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} = [k_3 \quad k_4] \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} = k_3 \cdot \Delta x_i + k_4 \cdot \Delta y_i
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Für die Verschiebungen Δx_j und Δy_j auf Basis der Matrix der Gewichtsreziproken \mathcal{Q}_{xx} ergeben sich folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\Delta x_j &= q_{x_j x_i} \cdot k_{x_i} + q_{x_j y_i} \cdot k_{y_i} = q_{x_j x_i} \cdot [k_1 \quad k_2] \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} + q_{x_j y_i} \cdot [k_3 \quad k_4] \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} \quad j = 1, \dots, m \\
\Delta y_j &= q_{y_j x_i} \cdot k_{x_i} + q_{y_j y_i} \cdot k_{y_i} = q_{y_j x_i} \cdot [k_1 \quad k_2] \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} + q_{y_j y_i} \cdot [k_3 \quad k_4] \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} \quad j = 1, \dots, m
\end{aligned} \tag{6.37}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
\Delta x_j &= \left[\frac{(q_{x_j x_i} \cdot q_{y_i y_i}) - (q_{x_j y_i} \cdot q_{y_i x_i})}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} \quad \frac{-(q_{x_j x_i} \cdot q_{x_i y_i}) + (q_{x_j y_i} \cdot q_{x_i x_i})}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} \right] \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} \quad j = 1, \dots, m \\
\Delta y_j &= \left[\frac{(q_{y_j x_i} \cdot q_{y_i y_i}) - (q_{y_j y_i} \cdot q_{y_i x_i})}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} \quad \frac{-(q_{y_j x_i} \cdot q_{x_i y_i}) + (q_{y_j y_i} \cdot q_{x_i x_i})}{|\mathcal{Q}_{i,i}|} \right] \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} \quad j = 1, \dots, m
\end{aligned} \tag{6.38}$$

Die Summe der von den beiden Kraftkomponenten k_{x_i} und k_{y_i} über die Verschiebungswege Δx_j und Δy_j mit $j = 1, \dots, m$ verrichteten Arbeit ist

$$W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (k_{x_i} \cdot \Delta x_j + k_{y_i} \cdot \Delta y_j). \tag{6.39}$$

In folgender Gleichung werden Abkürzungen für einzelne, aus Kofaktoren gebildete Vektorkomponenten aus Gl. (6.36) gewählt:

$$\begin{aligned}
\Delta x_j &= [e \quad f] \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} = e \cdot \Delta x_i + f \cdot \Delta y_i \\
\Delta y_j &= [g \quad h] \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} = g \cdot \Delta x_i + h \cdot \Delta y_i,
\end{aligned} \tag{6.40}$$

mit $e = q_{x_j x_i} \cdot k_1 + q_{x_j y_i} \cdot k_3$, $f = q_{x_j x_i} \cdot k_2 + q_{x_j y_i} \cdot k_4$, $g = q_{y_j x_i} \cdot k_1 + q_{y_j y_i} \cdot k_3$ und $h = q_{y_j x_i} \cdot k_2 + q_{y_j y_i} \cdot k_4$. Die Arbeitsanteile $k_{x_i} \cdot \Delta x_j$ und $k_{y_i} \cdot \Delta y_j$ können wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
k_{x_i} \cdot \Delta x_j &= (k_1 \cdot \Delta x_i + k_2 \cdot \Delta y_i) \cdot (e \cdot \Delta x_i + f \cdot \Delta y_i) \\
&= (k_1 \cdot e) \cdot \Delta x_i^2 + (k_1 \cdot f + k_2 \cdot e) \cdot \Delta x_i \Delta y_i + (k_2 \cdot f) \cdot \Delta y_i^2 \\
k_{y_i} \cdot \Delta y_j &= (k_3 \cdot \Delta x_i + k_4 \cdot \Delta y_i) \cdot (g \cdot \Delta x_i + h \cdot \Delta y_i) \\
&= (k_3 \cdot g) \cdot \Delta x_i^2 + (k_3 \cdot h + k_4 \cdot g) \cdot \Delta x_i \Delta y_i + (k_4 \cdot h) \cdot \Delta y_i^2.
\end{aligned} \tag{6.41}$$

Der Betrag der bei den Verzerrungen aufzubringenden Formänderungsenergie lässt sich aus der Arbeit berechnen, die verrichtet wird, um einen unverformten Grundriss der Ausgangskonfiguration κ_R in den verformten Zustand zu bringen, der durch die Momentankonfiguration κ_M beschrieben wird:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m k_{xj} \cdot \Delta x_j + k_{yj} \cdot \Delta y_j \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (k_1 \cdot e + k_3 \cdot g) \cdot \Delta x_i^2 + (k_1 \cdot f + k_2 \cdot e + k_3 \cdot h + k_4 \cdot g) \Delta x_i \Delta y_i \\
 &\quad + (k_2 \cdot f + k_4 \cdot h) \cdot \Delta y_i^2.
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

Für den Punkt P_i ergibt sich die Verschiebung mit Hilfe von Gl. (6.34), wenn im Ergebnisvektor $\Delta \mathbf{x}$ ausschließlich die Auswirkung auf den Punkt P_i betrachtet wird:

$$\Delta \mathbf{x} = \underbrace{Q_{i,i} \cdot Q_{i,i}^{-1}}_{= I} \cdot \Delta \mathbf{x}_i = \Delta \mathbf{x}_i. \tag{6.43}$$

Eine ähnliche Aussage hat Linkwitz mit Hilfe einer vermittelnden Ausgleichung durch Einführen von Bedingungen zwischen den Unbekannten aufgebaut, deren Werte bereits über eine zuvor durchgeführte geodätische Netzausgleichung vorlagen [Linkwitz 1988]. Diese Bedingungen, die für einen Zwangsanschluss an identischen Punkten definiert werden, bewirken, dass das geodätische Netz analog zum Ortra-Verfahren auf Sollkoordinaten identischer Punkte hingezogen wird. Bei den Untersuchungen werden die Verschiebungen, die bei den benachbarten Punkten festgestellt werden, auf einen einzelnen Zwangsanschluss beim Punkt P_i bezogen. Linkwitz hat diese Erkenntnisse, ohne eine Analogie zwischen dem Weggrößenverfahren und der vermittelnden Ausgleichung aufzubauen, durch Interpretation der zusätzlichen Bedingungen auf Basis der Gewichtskoeffizientenmatrix Q_{xx} gewonnen.

6.1.4. Analogien zwischen Weggrößenverfahren und vermittelnder Ausgleichung

Zwischen dem Weggrößenverfahren und dem mit Konstanten für die äußeren Lasten erweiterten Verfahren der vermittelnden Ausgleichung ergeben sich folgende Analogien, die in Tabelle 6.1 zusammengestellt sind [Bahndorf 1991, Ströbel 1995].

6.2. Kraftgrößenverfahren

6.2.1. Prinzip der minimalen Energie Π beim Kraftgrößenverfahren für ein statisch bestimmtes Hauptsystem

Das Kraftgrößenverfahren der Baustatik wird analog zum Weggrößenverfahren über eine Energiegleichung (Gl. (6.46)) hergeleitet. Bei dieser Herleitung fließen als Nebenbedingungen, analog zum Weggrößenverfahren, wieder mechanische Grundgleichungen für das Gleichgewicht und die Kinematik ein.

Bei der nachfolgenden Energiegleichung (Gl. (6.46)) werden für den Aufbau der Analogie zwischen dem Kraftgrößenverfahren und der bedingten Ausgleichung vorbereitend alternative Formulierungen für das Gleichgewicht mit der Funktion

$$\mathbf{s}(\mathbf{p}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{p}, \quad \text{in Abhängigkeit von } \mathbf{p}, \tag{6.44}$$

und für die Kinematik mit der Funktion

$$\mathbf{r}(\mathbf{v}) = \mathbf{B}^t \cdot \mathbf{v}, \quad \text{in Abhängigkeit von } \mathbf{v}, \tag{6.45}$$

eingesetzt.

Für die Formulierung $\mathbf{s}(\mathbf{p}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{p}$ lässt sich die Gleichgewichtsmatrix \mathbf{B} , die wie Gl. (4.90) eine Beziehung zwischen inneren und äußeren Kraftgrößen ausdrückt, unter bestimmten Voraussetzungen durch Inversion aus der beim Weggrößenverfahren in Gl. (6.2) verwendeten Gleichgewichtsmatrix \mathbf{A} gewinnen. Eine Inversion ist unter der Voraussetzung möglich, dass beide Matrizen quadratisch sind (siehe Gl. (6.72)).

Vermittelnde Ausgleichung	Weggrößenverfahren
Methode der kleinsten Quadrate	Prinzip der minimalen Gesamtenergie
$v^t P v$ Summe der Verbesserungsquadrate	$W = \frac{1}{2} v^t K v$ bei Elementverformungen gespeicherte Formänderungsenergie
Beobachtungen l	Stablängen l_0 im kraftlosen Zustand, unverformtes Tragwerkselement
Verbesserungen v	Elementverformungen v
ausgeglichene Beobachtungen $l + v$	elastisch verformte Elemente $l_0 + v$, Abstände $l = l_0 + v$ der durch Stäbe verbundenen Knotenpunkte
Punktverschiebungen Δx	Knotenverschiebungen r
Jakobimatrix $\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right) = A$	Gleichgewichtsmatrix A^t
Gewichtsmatrix P	Steifigkeitsmatrix K
Konstante p	äußere Lasten p
Normalgleichungsmatrix N $N = A^t P A$	Gesamtsteifigkeitsmatrix $K_G = F_G^{-1}$ mit $K_G = A^t K A$
rechte Seite $n = A^t P l$ des Normalgleichungssystems $\left(\underbrace{(A^t P A)}_{= N} x = \underbrace{A^t P l}_{= n}\right)$	Kraft $f_{vu} = A^t P v_u$ im mechanischen System, die durch Vorverformungen v_u verursacht wird
$n = A^t P l$	$f_{vu} = A^t P v_u$
Kofaktorenmatrix Q_{xx}	Gesamtflexibilitätsmatrix F_G

Tabelle 6.1.: Analogien zwischen vermittelnder Ausgleichung und Weggrößenverfahren.

Die zu Gl. (6.44) kontragrediente Transformationsbeziehung $r(v) = B^t \cdot v$ [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019], die eine Beziehung zwischen inneren und äußeren Weggrößen mit Hilfe der kinematischen Verträglichkeitsmatrix B^t aufbaut, kann über das Prinzip der virtuellen Arbeit hergeleitet werden.

Auf eine weitere Herleitung einer kinematischen Verträglichkeitsmatrix (B^t in Gl. (6.45)) über das Prinzip der virtuellen Arbeit, wie sie detailliert in Kapitel 4 auf Basis der beim Weggrößenverfahren verwendeten Gleichgewichtsmatrix A durchgeführt wurde, wird an dieser Stelle verzichtet und auf die Literatur verwiesen [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019, S. 94].

Die nachfolgend betrachteten Beziehungen setzen ein statisch bestimmtes Tragwerk oder, wenn das Tragwerk statisch unbestimmt ist, ein bereits statisch bestimmtes Hauptsystem voraus. Im zweiten Fall, der im

Folgendes behandelt wird, enthält der Vektor der Stabkräfte \mathbf{s} ausschließlich m Stabkräfte des Hauptsystems. Die nachfolgende Energiegleichung (6.46) formuliert das Minimumsprinzip der minimal gewichteten Elementverformungen \mathbf{v} nur mit den verbliebenen Stäben des Hauptsystems. Bei der bedingten Ausgleichung sind dagegen später alle n Stäbe des Tragwerks in die Minimalgleichung aufzunehmen. In der folgenden Herleitung wird der Vektor \mathbf{s} der Stabkräfte um $r = n - m$ statisch unbestimmte Größen gekürzt.

Beim statisch bestimmten Hauptsystem nimmt die Gleichgewichtsmatrix \mathbf{B} eine quadratische Form an. Mit Hilfe der Gleichgewichtsmatrix \mathbf{B} und einer Flexibilitätsmatrix \mathbf{F} können die gesuchten äußeren Weggrößen \mathbf{r} in Abhängigkeit von gegebenen äußeren Kraftgrößen \mathbf{p} bestimmt werden.

Die in diesem Abschnitt hergeleiteten Beziehungen gelten auch für ein statisch unbestimmtes Tragwerk. Jedoch sind dort die Gleichgewichtsmatrix \mathbf{B} und die Flexibilitätsmatrix \mathbf{F} auf einem komplexeren Weg zu bestimmen [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019].

Unter den genannten Voraussetzungen kann \mathbf{B} aus der bisher im Weggrößenverfahren verwendeten Gleichgewichtsmatrix \mathbf{A} durch Inversion $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$ abgeleitet werden. Ebenso kann die Flexibilitätsmatrix \mathbf{F} durch Inversion der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} durch $\mathbf{F} = \mathbf{K}^{-1}$ und umgekehrt gebildet werden. Bei beiden Inversionen wird die Regularität der Ausgangsmatrizen vorausgesetzt.

Bisher wurde für die Formulierung des Ausdrucks des Potentials Π_i der inneren Kräfte (siehe z. B. Gl. (5.27)) eine Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} verwendet. Kraftgrößenverfahren sind durch Flexibilitätsmatrizen \mathbf{F} charakterisiert. Die Formulierung von Π_i mit Hilfe einer Flexibilitätsmatrix macht keine Probleme, da unter der gegebenen Voraussetzung eine Inversion von \mathbf{F} für den Aufbau von Π_i möglich ist.

$$\begin{aligned} \Pi_{gesamt} &= \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{v}_{(1,m)}^t \mathbf{F}_{(m,m)}^{-1} \mathbf{v}_{(m,1)}}_{\Pi_i} - \mathbf{k}_{1(1,m)}^t \left(\mathbf{B}_{(m,m)}^t \cdot \mathbf{v}_{(m,1)} - \mathbf{r}_{(m,1)} \right) \\ &- \mathbf{k}_{2(1,m)}^t \left(\mathbf{B}_{(m,m)} \cdot \mathbf{p}_{(m,1)} - \mathbf{s}_{(m,1)} \right) \\ &- \underbrace{\mathbf{r}_{(1,m)}^t \cdot \mathbf{p}_{(m,1)}}_{\Pi_a} \quad \Rightarrow \quad stat. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Die bei der Energiegleichung (6.46) eingeführte Matrix \mathbf{B}^t wird auch als dynamische Verträglichkeitsmatrix bezeichnet [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019].

Partielle Ableitungen von Π nach den unbekanntenen Elementverformungen \mathbf{v} , den Korrelaten \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 und den unbekanntenen Verschiebungen \mathbf{r} ergeben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{v}} &= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{v} - \mathbf{B} \mathbf{k}_1 = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{k}_1} &= \mathbf{B}^t \mathbf{v} - \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (\text{kinematische Verträglichkeit}), \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{k}_2} &= \mathbf{B} \mathbf{p} - \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (\text{Gleichgewicht}), \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}} &= \mathbf{k}_1 - \mathbf{p} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Die letzte Gleichung von (6.47) wird in die erste Gleichung von (6.47) eingesetzt. Man erhält:

$$\mathbf{F}_{(m,m)}^{-1} \cdot \mathbf{v}_{(m,1)} - \mathbf{B}_{(m,m)} \cdot \mathbf{p}_{(m,1)} = \mathbf{0}. \quad (6.48)$$

Durch die Voraussetzung, dass innerhalb eines Verfahrensablaufs des Kraftgrößenverfahrens ein statisch bestimmtes Hauptsystem gefunden worden ist, enthält die Flexibilitätsmatrix \mathbf{F} die gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten, da durch Lösen von Bindungen bei den statisch Überzähligen (siehe Gl. (6.59)) die Anzahl der unbekanntenen Kraftgrößen verringert wurde. Die Anzahl der unbekanntenen Kraftgrößen ist dann identisch mit der Anzahl der Gleichgewichtsgleichungen.

Die Gl. (6.48) wird nun von links mit der Flexibilitätsmatrix \mathbf{F} multipliziert. Dies ergibt folgendes Werkstoffgesetz:

$$\mathbf{F} \left(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{p} \right) = \underbrace{\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}}_{=\mathbf{I}} \mathbf{v} - \mathbf{F} \mathbf{B} \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \underbrace{\mathbf{B} \mathbf{p}}_{=\mathbf{s}}. \quad (6.49)$$

Die zweite Gleichung von (6.47) stellt die kinematische Verträglichkeit analog zur unteren Gleichung des Systems Gl. (6.3) dar, die dritte Gleichung von (6.47) das Gleichgewicht. Die in Gl. (6.49) hergeleitete Gleichung gibt als Werkstoffgesetz eine konstitutive Beziehung an.

Nun ist nach [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019]

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{(m,1)} &= \mathbf{B}_{(m,m)} \mathbf{p}_{(m,1)} \\ \mathbf{v}_{(m,1)} &= \mathbf{F}_{(m,m)} \mathbf{s}_{(m,1)} \\ \mathbf{r}_{(m,1)} &= \mathbf{B}_{(m,m)}^t \mathbf{v}_{(m,1)}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Damit ist die Beziehung zwischen der äußeren Verformung und den äußeren Kräften folgende:

$$\mathbf{r}_{(m,1)} = \left(\mathbf{B}^t \mathbf{F} \mathbf{B} \right)_{(m,m)} \cdot \mathbf{p}_{(m,1)}. \quad (6.51)$$

Gl. (6.6) zeigt in Verbindung mit Gl. (6.51) folgenden Zusammenhang zwischen $\mathbf{B}^t \mathbf{F} \mathbf{B}$ und $\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A}$:

$$\left(\underbrace{\mathbf{B}^t \mathbf{F} \mathbf{B}}_{\mathbf{F}_G} \right) = \left(\underbrace{\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A}}_{\mathbf{K}_G} \right)^{-1}. \quad (6.52)$$

Der Ausdruck $\mathbf{B}^t \mathbf{F} \mathbf{B}$ kann aus der Flexibilitätsmatrix \mathbf{F} durch Gaußsche Transformation mit der Gleichgewichtsmatrix \mathbf{B}

$$\mathbf{F}_G = \mathbf{B}^t \mathbf{F} \mathbf{B}, \quad (6.53)$$

analog zu dem Vorgehen bei Gl. (6.7) gebildet werden. Die Matrix \mathbf{F}_G wird als Gesamtflexibilitätsmatrix oder Gesamtnachgiebigkeitsmatrix \mathbf{F}_G bezeichnet.

Die dem Kraftgrößenverfahren zugrunde liegende Gesamt-Nachgiebigkeitsbeziehung

$$\mathbf{r}_{(m,1)} = \mathbf{F}_G \cdot \mathbf{p}_{(m,1)} \quad (6.54)$$

ist zugleich die Grundgleichung des Verfahrens.

Die Gesamt-Nachgiebigkeitsbeziehung beschreibt das elastische Deformationsverhalten des Gesamttragwerks [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019].

Bei Tragwerken mit vorverformten Stabwerkselementen wird Gl. (6.46) zu:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{gesamt}} &= \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{v}_{(1,m)}^t \mathbf{F}_{(m,m)}^{-1} \mathbf{v}_{(m,1)}}_{\Pi_i} - \mathbf{k}_{1(1,m)}^t \left(\mathbf{B}_{(m,m)}^t (\mathbf{v}_{(m,1)} + \mathbf{v}_u(m,1)) - \mathbf{r}_{(m,1)} \right) \\ &\quad - \mathbf{k}_{2(1,m)}^t \left(\mathbf{B}_{(m,m)} \cdot \mathbf{p}_{(m,1)} - \mathbf{s}_{(m,1)} \right) \\ &\quad - \underbrace{\mathbf{r}_{(1,m)}^t \cdot \mathbf{p}_{(m,1)}}_{\Pi_a} \quad \Rightarrow \quad \text{stat.} \end{aligned} \quad (6.55)$$

Die in Gl. (6.55) durchgeführte Ergänzung des Terms $\mathbf{B}^t \cdot \mathbf{v}$ mit \mathbf{v}_u , die die erste Nebenbedingung der Energiegleichung (6.46) erweitert hat, bedeutet, dass vorverformte elastische Elemente, die nach dem Einbau ins Tragwerk durch äußere Knotenkräfte belastet werden, kinematisch verträglich mit den Knotenverschiebungen \mathbf{r} sein müssen.

Die partiellen Ableitungen nach den Unbekannten in Gl. (6.47) ändern sich folglich bei der kinematischen Verträglichkeit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{k}_1} &= \mathbf{B}^t (\mathbf{v} + \mathbf{v}_u) - \mathbf{r} = \mathbf{B}^t \mathbf{v} + \mathbf{B}^t \mathbf{v}_u - \mathbf{r} = \mathbf{0}, \\ \Rightarrow \mathbf{r} &= \mathbf{B}^t (\mathbf{v} + \mathbf{v}_u). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Dann kann ein gestaffeltes Gleichungssystem aufgebaut werden [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019]:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{(m,1)} &= \mathbf{B}_{(m,m)} \mathbf{p}_{(m,1)} \\ \mathbf{v}_{(m,1)} &= \mathbf{F}_{(m,m)} \mathbf{s}_{(m,1)} \\ \mathbf{r}_{(m,1)} &= \mathbf{B}_{(m,m)}^t \mathbf{v}_{(m,1)} + \mathbf{B}_{(m,m)}^t \mathbf{v}_u(m,1). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Für r ergibt sich im Folgenden:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{(m,1)} &= \underbrace{(\mathbf{B}^t \mathbf{F} \mathbf{B})}_{\mathbf{F}_G(m,m)} \mathbf{p} + \mathbf{B}^t \mathbf{v}_u \\ &= \mathbf{F}_G(m,m) \mathbf{p}_{(m,1)} + \mathbf{B}_{(m,m)}^t \cdot \mathbf{v}_u(m,1). \end{aligned} \quad (6.58)$$

6.2.2. Herleitung des Ansatzes für das Kraftgrößenverfahren für ein statisch unbestimmtes Tragwerksystem

Ein statisch unbestimmtes Tragwerk ist dadurch gekennzeichnet, dass die Anzahl der existierenden Gleichgewichtsbedingungen nicht ausreicht, um die äußeren Kraftgrößen zu bestimmen [z. B. Linkwitz 1960a, Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019, Mang und Hofstetter 2013].

Die Differenz zwischen der Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen m und der Anzahl der äußeren Weggrößen n ist r , die als Grad der statischen Unbestimmtheit bezeichnet wird.

Durch Lösen von Bindungen werden r kinematische Freiheitsgrade V_{xi} eingeführt. Als korrespondierende Größen zu den r zusätzlichen äußeren Knotenkraftgrößen $X_i, i = 1, \dots, r$ werden die kinematischen Freiheitsgrade r_x definiert. Diese werden anstelle der gelösten Tragwerksverbindungen im Tragwerk eingeführt, um den Gleichgewichtszustand, der im statischen unbestimmten System vor Lösung der Verbindungen vorhanden war, wieder aufzubauen [Linkwitz 1960a, Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019]. Bei den gelösten Bindungen entstehen Klaffungen zwischen dem Ende des gelösten Stabes und dem Knoten. Aufgabe der neu eingeführten äußeren Kräfte ist es, die zusätzlich definierten Verschiebungen r_x zu Null zu bringen.

Für die neuen Knotenkraftgrößen $X_i, i = 1, \dots, r$, die auch als statisch Überzählige [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019] oder statisch Unbestimmte [Wunderlich und Kiener 2004] bekannt sind, wird folgender Vektor \mathbf{x} definiert:

$$\mathbf{x} = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_r\}. \quad (6.59)$$

Nun wird der bei der Grundgleichung des Kraftgrößenverfahrens in Gl. (6.54) verwendete Vektor \mathbf{p} der äußeren Lasten, der auch bei der für vorverformte Elemente hergeleiteten Gleichungsversion (6.58) auftritt, für den verallgemeinerten Ansatz am unteren Ende durch den Vektor \mathbf{x} ergänzt (siehe Gl. (6.60)) [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019]. Der so entstandene Vektor der ergänzten äußeren Kräfte enthält insgesamt n Elemente und wird mit $\tilde{\mathbf{p}}$ bezeichnet. Die Gleichgewichtsmatrix \mathbf{B} soll mit r zusätzlichen Spalten von rechts ergänzt werden (Gl. (6.60)), die durch die Matrix \mathbf{B}_x definiert werden.

$$\tilde{\mathbf{p}}_{(m+r,1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{(m,1)} \\ \mathbf{x}_{(r,1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{(m,m+r)} = [\mathbf{B}_0(m,m) \quad \mathbf{B}_x(m,r)]. \quad (6.60)$$

Die ursprüngliche Matrix \mathbf{B} aus Gl. (6.44) wird in der zusammengesetzten Gleichgewichtsmatrix oft mit einem Index 0 versehen [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019].

Die Gleichgewichtsbeziehung Gl. (6.44) mit den m Stäben des Hauptsystems und den r zusätzlich eingeführten statisch Unbestimmten wird:

$$\mathbf{s}_{(m,1)} = [\mathbf{B}_0 \quad \mathbf{B}_x] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_0(m,m) \cdot \mathbf{p}_{(m,1)} + \mathbf{B}_x(m,r) \cdot \mathbf{x}_{(r,1)}. \quad (6.61)$$

Nun werden in den Vektor der Stabkräfte \mathbf{s} sämtliche Stabkräfte s_1, \dots, s_{m+r} des statisch unbestimmten Systems aufgenommen [Linkwitz 1960a].

Die Gleichgewichtsbeziehung $\mathbf{s} = f(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ wird

$$\tilde{\mathbf{s}}_{(m+r,1)} = [\tilde{\mathbf{B}}_0 \quad \tilde{\mathbf{B}}_x] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{B}}_0(m+r,m) \cdot \mathbf{p}_{(m,1)} + \tilde{\mathbf{B}}_x(m+r,r) \cdot \mathbf{x}_{(r,1)}. \quad (6.62)$$

Der erweiterte Stabkräftevektor mit den $m+r$ Stabkräften soll mit $\tilde{\mathbf{s}}_{(m+r,1)}$ bezeichnet werden. Der Vektor besitzt wie $\tilde{\mathbf{p}}_{(m+r,1)}$ dann $m+r = n$ Elemente. Gleichung (6.62) mit den neu eingeführten, erweiterten Gleichgewichtsmatrizen $\tilde{\mathbf{B}}_0$ und $\tilde{\mathbf{B}}_x$ wird ausgeschrieben, um die Beziehung von $\tilde{\mathbf{B}}_0(m+r,m)$ und $\tilde{\mathbf{B}}_x(m+r,m)$ zu den in Gl. (6.60) definierten Gleichgewichtsmatrizen $\mathbf{B}_0(m,m)$ und $\mathbf{B}_x(m,r)$ zu verdeutlichen [Linkwitz 1960a]:

$$\begin{aligned}
s_1 &= b_{11} P_1 + b_{12} P_2 + \dots b_{1m} P_m & + b_{x11} X_1 + b_{x12} X_2 + \dots b_{x1r} X_r, \\
s_2 &= b_{21} P_1 + b_{22} P_2 + \dots b_{2m} P_m & + b_{x21} X_1 + b_{x22} X_2 + \dots b_{x2r} X_r, \\
&\vdots & \vdots \\
s_m &= b_{m1} P_1 + b_{m2} P_2 + \dots b_{mm} P_m & + b_{xm1} X_1 + b_{xm2} X_2 + \dots b_{xmr} X_r, \\
s_{m+1} &= 0 P_1 + 0 P_2 + \dots 0 P_m & + 1 X_1 + 0 X_2 + \dots 0 X_r, \\
s_{m+2} &= 0 P_1 + 0 P_2 + \dots 0 P_m & + 0 X_1 + 1 X_2 + \dots 0 X_r, \\
&\vdots & \vdots \\
s_{m+r} &= 0 P_1 + 0 P_2 + \dots 0 P_m & + 0 X_1 + 0 X_2 + \dots 1 X_r.
\end{aligned} \tag{6.63}$$

Gl. (6.63) kann in Matrizenform wie folgt ausgedrückt werden:

$$\tilde{s}_{(m+r,1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0(m,m) \\ \mathbf{0}_{(r,m)} \end{bmatrix}_{(m+r,m)} \cdot \mathbf{p}_{(m,1)} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x(m,r) \\ \mathbf{E}_{(r,r)} \end{bmatrix}_{(m+r,r)} \cdot \mathbf{x}_{(r,1)}. \tag{6.64}$$

Zwischen den verschiedenen Formen der Gleichgewichtsmatrizen $\tilde{\mathbf{B}}_0$, $\tilde{\mathbf{B}}_x$, \mathbf{B}_0 und \mathbf{B}_x (Gl. (6.61) und (6.62)) existieren nun folgende Beziehungen:

$$\tilde{\mathbf{B}}_{0(m+r,m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0(m,m) \\ \mathbf{0}_{(r,m)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{x(m+r,r)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x(m,r) \\ \mathbf{E}_{(r,r)} \end{bmatrix}. \tag{6.65}$$

Die mit der Gleichgewichtsmatrix \mathbf{A}^t aufgebaute Gleichgewichtsbeziehung Gl. (4.90) des Weggrößenverfahrens in Abschnitt 4.4 kann analog, wenn wiederum der Vektor \mathbf{p} am unteren Ende mit den r statisch Überzähligen \mathbf{x} wie in Gl. (6.60) ergänzt wird, in folgender Form definiert werden [Ströbel 1995]:

$$\tilde{\mathbf{p}}_{(m+r,1)} = \tilde{\mathbf{A}}_{(m+r,n)}^t \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{(m+r,1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{(m,1)} \\ \mathbf{x}_{(r,1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^t(m,n) \\ \mathbf{A}_x^t(r,n) \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{(n,1)}. \tag{6.66}$$

Der Vektor $\tilde{\mathbf{p}}_{(m+r,1)}$ kann analog zu Gl. (6.64) wieder mit Hilfe von Gleichgewichtsmatrizen aus m Stabkräften $\mathbf{s}_{(m,1)}$ des Hauptsystems und r statisch Überzähligen $\mathbf{x}_{(r,1)}$ wie folgt aufgebaut werden:

$$\tilde{\mathbf{p}}_{(m+r,1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0(m,m) \\ \mathbf{0}_{(r,m)} \end{bmatrix}_{(m+r,m)} \cdot \mathbf{s}_{(m,1)} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x(m,r) \\ \mathbf{E}_{(r,r)} \end{bmatrix}_{(m+r,r)} \cdot \mathbf{x}_{(r,1)}. \tag{6.67}$$

Anmerkung: Die Matrix \mathbf{A}_0 in Gl. (6.67) ist regulär und kann folglich invertiert werden; wegen der Symmetrie dieser Matrix gilt $\mathbf{A}_0^t = \mathbf{A}_0$.

Die Matrizen $\tilde{\mathbf{A}}_0^t$ und $\tilde{\mathbf{A}}_x^t$ können aus \mathbf{A}_0^t und \mathbf{A}_x^t wie folgt aufgebaut werden:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{0(m,n)}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^t(m,m) \\ \mathbf{0}_{(m,r)} \end{bmatrix}^t, \quad \tilde{\mathbf{A}}_{x(r,n)}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x^t(r,m) \\ \mathbf{E}_{(r,r)} \end{bmatrix}^t. \tag{6.68}$$

Die Matrix $\tilde{\mathbf{A}}^t = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{0(m,n)}^t & \tilde{\mathbf{A}}_{x(r,n)}^t \end{bmatrix}^t$ aus Gl. (6.68) wird mit der Matrix $\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{0(n,m)} & \tilde{\mathbf{B}}_{x(n,r)} \end{bmatrix}$ aus Gl. (6.65) multipliziert, um weitere Beziehungen zwischen den Gleichgewichtsmatrizen $\tilde{\mathbf{A}}_0^t$, $\tilde{\mathbf{A}}_x^t$, $\tilde{\mathbf{B}}_0$ und $\tilde{\mathbf{B}}_x$ zu erhalten. Die Multiplikation führt im Ergebnis zu einer Einheitsmatrix [Ströbel 1995]:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{0(m,n)}^t \\ \tilde{\mathbf{A}}_{x(r,n)}^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{0(n,m)} & \tilde{\mathbf{B}}_{x(n,r)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{0(m,n)}^t \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{0(n,m)} & \tilde{\mathbf{A}}_{0(m,n)}^t \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{x(n,r)} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{x(r,n)}^t \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{0(n,m)} & \tilde{\mathbf{A}}_{x(r,n)}^t \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{x(n,r)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(m,m)} & \mathbf{0}_{(m,r)} \\ \mathbf{0}_{(r,m)} & \mathbf{I}_{(r,r)} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.69}$$

Aus Gl. (6.69) können folgende Beziehungen zwischen \tilde{A}_0^t , \tilde{A}_x^t , \tilde{B}_0 und \tilde{B}_x entnommen werden:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_0^t(m,n) \cdot \tilde{B}_x(n,r) &= \mathbf{0}_{(m,r)} \quad , \quad \tilde{A}_x^t(r,n) \cdot \tilde{B}_0(n,m) = \mathbf{0}_{(r,m)}, \\ \tilde{A}_0^t(m,n) \cdot \tilde{B}_0(n,m) &= \mathbf{I}_{(m,m)} \quad , \quad \tilde{A}_x^t(r,n) \cdot \tilde{B}_x(n,r) = \mathbf{I}_{(r,r)}.\end{aligned}\quad (6.70)$$

Aus der unteren Zeile von Gl. (6.70) können für das statische Hauptsystem zunächst das Zwischenergebnis

$$A_0^t(m,m) \cdot B_0(m,m) = \mathbf{I}_{(m,m)} \quad , \quad A_x^t(r,m) \cdot B_x(m,r) = \mathbf{I}_{(r,r)} \quad (6.71)$$

und dann die Beziehung

$$\left(A_0^t(m,m)\right)^{-1} = B_0(m,m) \quad \text{bzw.} \quad \left(B_0(m,m)\right)^{-1} = A_0^t(m,m) \quad (6.72)$$

abgeleitet werden.

In den folgenden Ableitungen können alternativ zu den Gleichgewichtsmatrizen $B_0(m,m)$ und $B_x(m,r)$ die erweiterten Gleichgewichtsmatrizen $\tilde{B}_0(m+r,m)$ und $\tilde{B}_x(m+r,r)$ verwendet werden, um dann anstelle der für das statische Hauptsystem definierten Flexibilitätsmatrix $F_{(m,m)}$ die Flexibilitätsmatrix $F_{(m+r,m+r)}$ mit den Nachgiebigkeitseigenschaften aller Stäbe des statisch unbestimmten Tragwerks einzusetzen.

Für die in Gl. (6.59) im Vektor x zusammengefassten zusätzlichen äußeren Kraftgrößen werden n korrespondierende äußere Zusatzweggrößen r_x definiert:

$$r_x = [r_{x_1} \quad r_{x_2} \quad r_{x_3} \quad \dots \quad r_{x_r}]^t. \quad (6.73)$$

Die für das Kraftgrößenverfahren hergeleitete allgemeine Formel (Gl. (6.58)) wird in erweiterter Form bei gegebener Gleichgewichtsmatrix \tilde{B} und Vektor der äußeren Kraftgrößen \tilde{p} zu [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019, siehe auch Ströbel 1995]:

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{(m+r,1)} &= \left(\tilde{B}_{(m+r,m)}^t F_{(m,m)} \tilde{B}_{(m,m+r)}\right)_{(m+r,m+r)} \cdot \tilde{p}_{(m+r,1)} + \tilde{B}_{(m+r,m)}^t v_u(m,1) \\ &= \left(\begin{bmatrix} B_0^t \\ B_x^t \end{bmatrix} \cdot F \cdot [B_0 \quad B_x]\right)_{(m+r,m+r)} \cdot \begin{bmatrix} p \\ x \end{bmatrix}_{(m+r,1)} + \begin{bmatrix} B_0^t \\ B_x^t \end{bmatrix}_{(m+r,m)} v_u(m,1), \\ \begin{bmatrix} r \\ r_x \end{bmatrix}_{(m+r,1)} &= \begin{bmatrix} B_0^t F B_0 & B_0^t F B_x \\ B_x^t F B_0 & B_x^t F B_x \end{bmatrix}_{(m+r,m+r)} \cdot \begin{bmatrix} p \\ x \end{bmatrix}_{(m+r,1)} + \begin{bmatrix} B_0^t \cdot v_u \\ B_x^t \cdot v_u \end{bmatrix}_{(m+r,1)}.\end{aligned}\quad (6.74)$$

Für die kinematische Gleichung $r = f(v, v_u)$ gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{(m+r,1)} &= \tilde{B}_{(m+r,m)}^t (v + v_u)_{(m,1)}, \\ \begin{bmatrix} r \\ r_x \end{bmatrix}_{(m+r,1)} &= \begin{bmatrix} B_0^t \\ B_x^t \end{bmatrix}_{(m+r,m)} (v + v_u)_{(m,1)}.\end{aligned}\quad (6.75)$$

Damit ist

$$r_x(r,1) = B_x^t(r,m) \cdot (v + v_u)_{(m,1)}. \quad (6.76)$$

Das System der Elastizitätsgleichungen schreibt nun das Schließen der Klaffungen der gelösten Stäbe und damit das Verschwinden der Zusatzfreiheitsgrade r_x vor [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019].

Beim obigen Matrixausdruck für die Verschiebungen \tilde{r} in Gl. (6.74) sind dann die unteren Anteile r_x zu Null zu setzen:

$$r_x(r,1) = \left(B_x^t F B_0\right)_{(r,m)} \cdot p_{(m,1)} + \left(B_x^t F B_x\right)_{(r,r)} \cdot x_{(r,1)} + B_x^t(r,m) \cdot v_u(m,1) = \mathbf{0}. \quad (6.77)$$

Aus Gl. (6.77) kann für die zusätzlichen äußeren Kraftgrößen \mathbf{x} folgendes abgeleitet werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{(r,1)} &= -\left(\mathbf{B}_x^t \mathbf{F} \mathbf{B}_x\right)_{(r,r)}^{-1} \cdot \left(\left(\mathbf{B}_x^t \mathbf{F} \mathbf{B}_0\right) \cdot \mathbf{p} + \mathbf{B}_x^t \cdot \mathbf{v}_u\right)_{(r,1)} \\ &= \left(\mathbf{B}_x^t \mathbf{F} \mathbf{B}_x\right)_{(r,r)}^{-1} \cdot \left(-\left(\mathbf{B}_x^t \mathbf{F} \mathbf{B}_0\right) \cdot \mathbf{p} - \mathbf{B}_x^t \cdot \mathbf{v}_u\right)_{(r,1)}.\end{aligned}\quad (6.78)$$

Infolge Verschwindens der Zusatzfreiheitsgrade $\mathbf{r}_x = \mathbf{0}$ in Gl. (6.76) ergibt sich folgende Gleichung:

$$\mathbf{B}_x^t \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}_u) = \mathbf{0}, \quad (6.79)$$

die eine erste Gleichung für die geometrische Verträglichkeit darstellen soll. Die zweite Gleichung für die geometrische Verträglichkeit lässt sich aus Gl. (6.75) ablesen:

$$\mathbf{B}_0^t \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}_u) - \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (6.80)$$

Folgender Ausdruck ergibt sich für die Verschiebungen \mathbf{r} , die im Kraftgrößenverfahren als bekannte Größen vorgegeben sind:

$$\mathbf{r}_{(m,1)} = \left(\mathbf{B}_0^t \mathbf{F} \mathbf{B}_0\right)_{(m,m)} \cdot \mathbf{p}_{(m,1)} + \left(\mathbf{B}_0^t \mathbf{F} \mathbf{B}_x\right)_{(m,r)} \cdot \mathbf{x}_{(r,1)} + \mathbf{B}_0^t{}_{(m,m)} \cdot \mathbf{v}_u{}_{(m,1)}. \quad (6.81)$$

Folgende Abkürzungen sollen eingeführt werden in Anlehnung an [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019]:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{xx}{}_{(r,r)} &:= \left(\mathbf{B}_x^t \mathbf{F} \mathbf{B}_x\right)_{(r,r)}, & \mathbf{F}_{00}{}_{(m,m)} &:= \left(\mathbf{B}_0^t \mathbf{F} \mathbf{B}_0\right)_{(m,m)}, \\ \mathbf{F}_{0x}{}_{(m,r)} &:= \left(\mathbf{B}_0^t \mathbf{F} \mathbf{B}_x\right)_{(m,r)}, & \mathbf{F}_{x0}{}_{(r,m)} &:= \left(\mathbf{B}_x^t \mathbf{F} \mathbf{B}_0\right)_{(r,m)} = \left(\mathbf{B}_0^t \mathbf{F} \mathbf{B}_x\right)^t = \mathbf{F}_{0x}{}^t{}_{(r,m)}.\end{aligned}\quad (6.82)$$

Dann können die Gleichungen (6.78) und (6.81) auf folgende Ausdrücke verkürzt werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{(r,1)} &= -\mathbf{F}_{xx}^{-1}{}_{(r,r)} \cdot \left(\mathbf{F}_{x0}{}_{(r,m)} \cdot \mathbf{p}_{(m,1)} + \mathbf{B}_x^t{}_{(r,m)} \cdot \mathbf{v}_u{}_{(m,1)}\right)_{(r,1)} \\ &= \mathbf{F}_{xx}^{-1}{}_{(r,r)} \cdot \left(-\mathbf{F}_{x0}{}_{(r,m)} \cdot \mathbf{p}_{(m,1)} - \mathbf{B}_x^t{}_{(r,m)} \cdot \mathbf{v}_u{}_{(m,1)}\right)_{(r,1)}, \\ \mathbf{r}_{(m,1)} &= \mathbf{F}_{00}{}_{(m,m)} \cdot \mathbf{p}_{(m,1)} + \mathbf{F}_{0x}{}_{(m,r)} \cdot \mathbf{x}_{(r,1)} + \mathbf{B}_0^t{}_{(m,m)} \cdot \mathbf{v}_u{}_{(m,1)}.\end{aligned}\quad (6.83)$$

Gleichung (6.62) für die unabhängigen Stabkräfte kann berechnet werden zu

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_{(n,1)} &= \tilde{\mathbf{B}}_0 \cdot \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{B}}_x \cdot \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{B}}_0 \cdot \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{B}}_x \cdot \mathbf{F}_{xx}^{-1} \cdot \left(\mathbf{F}_{x0} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{B}_x^t \cdot \mathbf{v}_u\right) \\ &= \left(\tilde{\mathbf{B}}_0{}_{(n,m)} - \tilde{\mathbf{B}}_x{}_{(n,r)} \mathbf{F}_{xx}^{-1}{}_{(r,r)} \mathbf{F}_{x0}{}_{(r,m)}\right)_{(n,m)} \cdot \mathbf{p}_{(m,1)} \\ &\quad - \left(\tilde{\mathbf{B}}_x{}_{(n,r)} \mathbf{F}_{xx}^{-1}{}_{(r,r)} \mathbf{B}_x^t{}_{(r,m)}\right)_{(n,m)} \cdot \mathbf{v}_u{}_{(m,1)}.\end{aligned}\quad (6.84)$$

Mit Hilfe der aus Gl. (6.78) ableitbaren Knotenkraftgrößen \mathbf{x} hängen die Verschiebungen \mathbf{r} dann mit \mathbf{p} und \mathbf{v}_u wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{m,1} &= \mathbf{F}_{00} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{F}_{0x} \mathbf{F}_{xx}^{-1} \left(\mathbf{F}_{x0} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{B}_x^t \cdot \mathbf{v}_u\right) + \mathbf{B}_0^t \cdot \mathbf{v}_u \\ &= \underbrace{\left(\mathbf{F}_{00} - \mathbf{F}_{0x} \mathbf{F}_{xx}^{-1} \mathbf{F}_{x0}\right)}_{\tilde{\mathbf{F}}_G} \cdot \mathbf{p}_{(m,1)} + \underbrace{\left(\mathbf{B}_0^t - \mathbf{F}_{0x} \mathbf{F}_{xx}^{-1} \mathbf{B}_x^t\right)}_{\tilde{\mathbf{B}}^t} \cdot \mathbf{v}_u{}_{(n,1)} \\ &= \tilde{\mathbf{F}}_G{}_{(m,m)} \cdot \mathbf{p}_{(m,1)} + \tilde{\mathbf{B}}^t{}_{(m,n)} \cdot \mathbf{v}_u{}_{(n,1)}.\end{aligned}\quad (6.85)$$

Die Gesamtflexibilitätsmatrix $\tilde{\mathbf{F}}_G$ kann, ohne Betrachtung von Vorverformungen, ebenfalls über die Gleichgewichtsbeziehung $\mathbf{s} = \mathbf{f}(\mathbf{p})$ und die kinematische Beziehung $\mathbf{r} = \mathbf{g}(\mathbf{v})$ definiert werden.

Mit der Substitution $\mathbf{C} := \mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_x \mathbf{F}_{xx}^{-1} \mathbf{F}_{x0}$ können eine gewohnte kinematische Beziehung und Gleichgewichtsbeziehung

$$\mathbf{r} = \mathbf{C}^t \cdot \mathbf{v} \quad (\text{kinematische Beziehung}) \quad (6.86)$$

und

$$s = C \cdot p \quad (\text{Gleichgewichtsbeziehung}) \quad (6.87)$$

aufgebaut werden [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019]. Die Gesamtflexibilitätsmatrix F_G (Gl. (6.53)) ergibt sich zu

$$F_G = C^t \cdot F \cdot C. \quad (6.88)$$

6.2.3. Prinzip der minimalen Energie Π beim Kraftgrößenverfahren für ein statisch unbestimmtes Tragwerksystem

Die Energiegleichung (6.46) für das statisch bestimmte Hauptsystem wird nun für den Allgemeinfeld erweitert. Die in Gl. (6.46) für das Gleichgewicht verwendete Funktion $s = f(B)$ wird nun als Funktion $s = f(B_0, B_x)$ definiert. Die kinematische Beziehung $r = g(B)$ von Gl. (6.46) wird analog auf eine Funktion $r = g(B_0, B_x)$ der beiden Gleichgewichtsmatrizen B_0 und B_x erweitert. An dieser Stelle ist anzumerken, dass die kinematische Verträglichkeit für die statisch Unbestimmten in der zweiten Nebenbedingung allgemein eingeführt wird. Über eine weitere, die vierte Nebenbedingung $k_4^t r_x$ wird das Schließen der Klaffungen und das Verschwinden der Zusatzfreiheitsgrade r_x definiert.

Das stationäre Gesamtpotential $\Pi_{\text{gesamt}} = \Pi_i - \Pi_a$ mit den über vier Korrelaten k_1, \dots, k_4 definierten Nebenbedingungen wird wie folgt formuliert:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{gesamt}} &= \underbrace{\frac{1}{2} v^t F^{-1} v}_{\Pi_i} - k_1^t (B_0^t \cdot (v + v_u) - r) - k_2^t (B_x^t \cdot (v + v_u) - r_x) \\ &\quad - k_3^t (B_0 \cdot p + B_x \cdot x - s) - k_4^t r_x \\ &\quad - \underbrace{r^t \cdot p}_{\Pi_a} \Rightarrow \text{stat.} \end{aligned} \quad (6.89)$$

Partielle Ableitungen von Π nach den Unbekannten v, r, r_x und den Korrelaten k_1, \dots, k_4 ergeben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial v} &= F^{-1} v - B_0 k_1 - B_x k_2 = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial k_1} &= B_0^t (v + v_u) - r = 0 \quad (\text{kinematische Verträglichkeit}), \\ \frac{\partial \Pi}{\partial k_2} &= B_x^t (v + v_u) - r_x = 0 \quad (\text{kinematische Verträglichkeit}), \\ \frac{\partial \Pi}{\partial k_3} &= B_0 p + B_x x - s = 0 \quad (\text{Gleichgewicht}), \\ \frac{\partial \Pi}{\partial k_4} &= r_x = 0, \quad (\text{Schließen der Klaffungen } r_x) \\ \frac{\partial \Pi}{\partial r} &= k_1 - p = 0. \end{aligned} \quad (6.90)$$

Die letzte Gleichung von (6.90) in die erste Gleichung eingesetzt ergibt:

$$F^{-1} v - B_0 p - B_x k_2 = 0, \quad (6.91)$$

die als Werkstoffgleichung interpretiert werden kann. Addition der Werkstoffgleichung (6.91) und der vierten Gleichung von (6.90) ergibt:

$$\begin{aligned} F^{-1} v - B_0 p - B_x k_2 + B_0 p + B_x x - s &= 0, \\ \underbrace{F^{-1} v - s}_{=0} - \underbrace{B_0 p + B_0 p}_{=0} + B_x x &= B_x k_2, \\ \Rightarrow B_x x &= B_x k_2. \end{aligned} \quad (6.92)$$

Mit $B_x x = B_x k_2$ ergibt sich für k_2 der Wert x . Die erste Gleichung von (6.90) nimmt schließlich die Form an:

$$F^{-1} v - B_0 p - B_x x = 0. \quad (6.93)$$

Gl. (6.93) wird von links mit der Flexibilitätsmatrix F multipliziert und weiter umgeformt:

$$\underbrace{F F^{-1}}_{=I} v - F \cdot (B_0 p + B_x x) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = F \cdot \underbrace{(B_0 p + B_x x)}_{=s}. \quad (6.94)$$

Nun ist insgesamt [Krätzig, Harte, Könke u. a. 2019]:

$$\begin{aligned} s &= [B_0 \ B_x] \cdot \begin{bmatrix} p \\ x \end{bmatrix}, \\ v &= F \cdot s, \\ \begin{bmatrix} r \\ r_x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_0^t \\ B_x^t \end{bmatrix} \cdot v + \begin{bmatrix} B_0^t \\ B_x^t \end{bmatrix} \cdot v_u. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Aus Gl. (6.95) ist für r ablesbar (vgl. Gl. (6.81)) mit $s = B_0 p + B_x x$:

$$r = (B_0^t F B_0) \cdot p + (B_0^t F B_x) \cdot x + B_0^t \cdot v_u, \quad (6.96)$$

und für r_x (vgl. Gl. (6.77)):

$$r_x = (B_x^t F B_0) \cdot p + (B_x^t F B_x) \cdot x + B_x^t \cdot v_u. \quad (6.97)$$

Die fünfte Gleichung von (6.90) stellt dar, dass die zusätzlichen Freiheitsgrade

$$r_x = 0 \quad (6.98)$$

gleich Null werden. Damit werden die in Gl. (6.59) eingeführten zusätzlichen äußeren Kraftgrößen x über Gl. (6.78) bestimmbar.

Aus dem im gestaffelten Gleichungssystem abgelesenen Ausdruck für r wird mit der im letzten Abschnitt dargestellten weiteren Rechnung von Gl. (6.81) bis Gl. (6.84) schließlich die erweiterte Grundgleichung des Kraftgrößenverfahrens (Gl. (6.85)) hergeleitet.

6.2.4. Kraftgrößenverfahren ohne äußere Lasten und bedingte Ausglei chung

Für den ersten Schritt der Herstellung einer Analogie zur Ausglei chung nach bedingten Beobachtungen soll die für das allgemeine Kraftgrößenverfahren aufgebaute Energiegleichung Gl. (6.89) nun in der Weise vereinfacht werden, dass keine äußeren Lasten im Ausgangsgleichungssystem (6.89) existieren. Die Betrachtung ohne äußere Lasten ermöglicht es, für die bedingte Ausglei chung den unmittelbaren Bezug zu einem Kraftgrößenverfahren herzustellen, ohne dieses Gleichungssystem zusätzlich erweitern zu müssen [Linkwitz, Bahndorf u. a. 1993, Ströbel 1995].

Allerdings muss beim Aufbau der Analogie beachtet werden, dass alle Stäbe des statischen Systems einfließen und nicht nur die Stäbe des statisch bestimmten Hauptsystems. Gemäß dieser Vorgabe werden bei der folgenden Energiebetrachtung innerhalb der Ausglei chung alle Verbesserungen v miteinbezogen.

In der folgenden Herleitung kommen erweiterte Gleichgewichtsmatrizen $\tilde{B}_0 (n+r,m)$ und $\tilde{B}_x (n+r,m)$ zur Anwendung.

Ohne äußere Lasten wird Gl. (6.78) zu

$$x = - \left(\tilde{B}_x^t F \tilde{B}_x \right)^{-1} \cdot \left(\tilde{B}_x^t \cdot v_u \right)_{(r,1)}. \quad (6.99)$$

Mit Hilfe von Gl. (6.63) kann gezeigt werden, dass die durch Vorverformungen erzeugten zusätzlichen Knotenkraftgrößen x zu Stabkräften in allen Stäben des statisch unbestimmten Tragwerks führen. Damit kann

Gl. (6.99) so interpretiert werden, dass äußere Kräfte und Stabkräfte ausschließlich durch Vorverformungen verursacht werden.

Auf mathematischem Wege, allein durch Umformungen von Gl. (6.90), erfolgt die Herleitung der Analogie zur Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen.

Zuerst kann aus der letzten Gleichung von Gleichungssystem (6.90) die Korrelate k_1 bestimmt werden:

$$k_1 = \mathbf{0}, \quad \text{da} \quad p = \mathbf{0}. \quad (6.100)$$

Die erste Gleichung von (6.90) wird:

$$F^{-1} v - \tilde{B}_x k_2 = \mathbf{0}, \quad \text{da} \quad k_1 = \mathbf{0}. \quad (6.101)$$

Wegen $k_1 = \mathbf{0}$ kommt bei der Energiegleichung (6.89) der Term mit der ersten Korrelate k_1 nicht mehr vor. Die zweite Gleichung von (6.90) mit der partiellen Ableitung nach k_1 verschwindet. Die vierte Gleichung von (6.90) vereinfacht sich weiter zu:

$$\tilde{B}_x x - \tilde{s} = \mathbf{0}, \quad \text{da} \quad p = \mathbf{0}. \quad (6.102)$$

Infolge Verschwindens der Klaffungen $r_x = \mathbf{0}$, die in der fünften Gleichung des Gleichungssystems (6.90) dargestellt werden, fließt die kinematische Beziehung

$$B_x^t (v + v_u) = \mathbf{0} \quad (6.103)$$

unverändert in die weitere Betrachtung ein.

Im Folgenden wird der verbliebene Korrelatenvektor k_2 in k umbenannt. Damit vereinfacht sich das Gleichungssystem der partiellen Ableitungen (6.90) zu:

$$\begin{aligned} F^{-1} v - \tilde{B}_x k &= \mathbf{0}, \\ \tilde{B}_x x - s &= \mathbf{0} \quad (\text{Gleichgewicht}), \\ \tilde{B}_x^t (v + v_u) &= \mathbf{0} \quad (\text{kinematische Verträglichkeit}). \end{aligned} \quad (6.104)$$

Nach Abschluss der mathematischen Vereinfachung der Ausgangsgleichungen für ein Kraftgrößenverfahren ohne äußere Lasten, die zu dem Gleichungssystem (6.104) führt, wird auf dieser Grundlage eine Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen aufgebaut, ohne dieses Gleichungssystem im Weiteren verändern zu müssen.

Bei einer konkreten bedingten Ausgleichung eines statisch unbestimmten Fachwerks mit r statisch Überzähligen sind r Bedingungsgleichungen aufzustellen. Im Ausgleichungsansatz existiert damit eine Redundanz von r Beobachtungen. Nach Ströbel werden bei dem statisch unbestimmten Tragwerk nach einem Verfahren von Linkwitz r Beobachtungen solange eliminiert, bis ein redundanzfreies System, ein sog. Hauptsystem der bedingten Ausgleichung auf Basis von $n - r$ Beobachtungen entsteht [Ströbel 1995]. Mit den noch vorhandenen $m = n - r$ Streckenbeobachtungen kann, wenn diese nach der Ausgleichung mit Verbesserungen vorliegen, die endgültige Geometrie des Hauptsystems bestimmt werden.

Die Vorgehensweise, wie eine bedingte Ausgleichung für das Hauptsystem aus vorhandenen Netzbedingungen auf indirektem Wege sekundäre Streckenbedingungen formuliert, soll durch Gleichung $g(l + v) = c$ abstrahiert werden. Mit l sind ausschließlich Beobachtungen des Hauptsystems gemeint. Mit $g_i(l + v) = c$ mit $i = 1, \dots, r$ kann z. B. stellvertretend das auf Dreiecksinhalten als Funktion von Strecken basierende Verfahren von Hammer abstrahiert werden [Hammer 1911].

Ausgeschrieben erhalten die r Bedingungsgleichungen folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} g_1(\hat{l}_{h_1}, \hat{l}_{h_2}, \dots, \hat{l}_{h_m}) &= c_1 \\ g_2(\hat{l}_{h_1}, \hat{l}_{h_2}, \dots, \hat{l}_{h_m}) &= c_2 \\ &\vdots \\ g_r(\hat{l}_{h_1}, \hat{l}_{h_2}, \dots, \hat{l}_{h_m}) &= c_r. \end{aligned} \quad (6.105)$$

Ableitung der r Bedingungsgleichungen nach den m Beobachtungen ergibt folgende B_x -Matrix:

$$B_x(m,r) = \begin{bmatrix} b_{x_{11}} & b_{x_{12}} & \dots & b_{x_{1r}} \\ b_{x_{21}} & b_{x_{22}} & \dots & b_{x_{2r}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{x_{m1}} & b_{x_{m2}} & \dots & b_{x_{mr}} \end{bmatrix}. \quad (6.106)$$

Mit dem aus m Streckenbeobachtungen geometrisch definierten Hauptsystem können r weitere Bedingungsgleichungen $\tilde{g}_j(\hat{l}_{h_1}, \hat{l}_{h_2}, \dots, \hat{l}_{h_m})$ mit $j = m+1, \dots, m+r$ definiert werden, die jeweils eine eliminierte Beobachtung \hat{l}_e mit $e = m+1, \dots, m+r$ als Funktion $g(\hat{l}_{h_1}, \hat{l}_{h_2}, \dots, \hat{l}_{h_m})$ der m Beobachtungen des Hauptsystems ausdrücken [Ströbel 1995]. Diese Gleichungen werden wie folgt aufgebaut:

$$\begin{aligned} \hat{l}_{e_{m+1}} - g_{r+1}(\hat{l}_{h_1}, \hat{l}_{h_2}, \dots, \hat{l}_{h_m}) &= c_{r+1} \\ \hat{l}_{e_{m+2}} - g_{r+2}(\hat{l}_{h_1}, \hat{l}_{h_2}, \dots, \hat{l}_{h_m}) &= c_{r+2} \\ \vdots & \vdots \\ \hat{l}_{e_{m+r}} - g_{r+r}(\hat{l}_{h_1}, \hat{l}_{h_2}, \dots, \hat{l}_{h_m}) &= c_{r+r}. \end{aligned} \quad (6.107)$$

Deren Ableitung nach den r redundanten Beobachtungen ergibt folgende Matrix:

$$E_{(r,r)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (6.108)$$

Gleichungen (6.105) und (6.107) werden zu $\tilde{g}(l+v)$ zusammengefasst [Ströbel 1995]. Mit der Zusammenfassung $\tilde{g}(l+v)$ können beide Gleichungen als Nebenbedingung in einem Ansatz der Methode der kleinsten Quadrate nach bedingten Beobachtungen definiert werden (vgl. Gl. (A.24)).

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Phi &= \underbrace{v^t}_{\quad} P \underbrace{v}_{\quad} - 2k^t (\tilde{g}(l+v) - c) \\ &= (\hat{l} - l) P (\hat{l} - l) - 2k^t (\tilde{g}(\hat{l}) - c). \end{aligned} \quad (6.109)$$

Die partiellen Ableitungen der gewichteten minimalen Verbesserungssumme Φ in Gl. (6.109) nach den Unbekannten l und k sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial l} &= 2P \underbrace{(\hat{l} - l)}_{=v} - 2 \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{g}(\hat{l})}{\partial l} \right)^t}_{=B^t} k = 0 \\ &= 2Pv - 2B^t k = 0 \Rightarrow P\hat{v} - B^t k = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial k} &= (\tilde{g}(\hat{l}) - c) = 0. \end{aligned} \quad (6.110)$$

Der Vergleich der ersten Gleichung von (6.110) mit der ersten Gleichung von (6.104) lässt folgende Analogie zwischen der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen und dem Kraftgrößenverfahren ohne äußere Lasten erkennen:

$$\underbrace{P\hat{v} - B^t k = 0}_{\text{Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen}} \Leftrightarrow \underbrace{F^{-1}v - \tilde{B}_x k = 0}_{\text{Kraftgrößenverfahren ohne äußere Lasten}} \quad (6.111)$$

Gl. (6.111) zeigt folgende Analogie zwischen der Jakobimatrix $\mathbf{B}^t = \left(\frac{\partial \tilde{g}(\hat{l})}{\partial l} \right)^t$ der bedingten Ausglei-
 chung und der Gleichgewichtsmatrix $\tilde{\mathbf{B}}_x$ des Kraftgrößenverfahrens:

$$\left(\frac{\partial \tilde{g}(\hat{l})}{\partial l} \right)_{(m+r,r)}^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial l_{h_1}} & \frac{\partial g_2}{\partial l_{h_1}} & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial l_{h_1}} \\ \frac{\partial g_1}{\partial l_{h_2}} & \frac{\partial g_2}{\partial l_{h_2}} & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial l_{h_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial l_{h_m}} & \frac{\partial g_2}{\partial l_{h_m}} & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial l_{h_m}} \\ \frac{\partial g_{r+1}}{\partial l_{e_{m+1}}} & \frac{\partial g_{r+2}}{\partial l_{e_{m+1}}} & \cdots & \frac{\partial g_{r+r}}{\partial l_{e_{m+1}}} \\ \frac{\partial g_{r+1}}{\partial l_{e_{m+2}}} & \frac{\partial g_{r+2}}{\partial l_{e_{m+2}}} & \cdots & \frac{\partial g_{r+r}}{\partial l_{e_{m+2}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{r+1}}{\partial l_{e_{m+r}}} & \frac{\partial g_{r+2}}{\partial l_{e_{m+r}}} & \cdots & \frac{\partial g_{r+r}}{\partial l_{e_{m+r}}} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{B}}_{x(m+r,r)}. \quad (6.112)$$

Die Ableitungen der $n+r$ Bedingungsgleichungen \tilde{g}_i mit $i = 1, \dots, m+r$ von $\tilde{g}(\hat{l})$ nach den ausgeglichenen Beobachtungen \hat{l}_i mit $i = 1, \dots, m+r$ ergeben folgende Matrix:

$$\begin{bmatrix} b_{x_{11}} & b_{x_{12}} & \cdots & b_{x_{1r}} \\ b_{x_{21}} & b_{x_{22}} & \cdots & b_{x_{2r}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{x_{m1}} & b_{x_{m2}} & \cdots & b_{x_{mr}} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{x(m,r)} \\ \mathbf{E}_{(r,r)} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{B}}_x. \quad (6.113)$$

Der zweiten und dritten Gleichung des Gleichungssystems (6.104), die auf Seiten der Mechanik das Gleichgewicht und die kinematische Verträglichkeit mit Hilfe von Matrizen explizit ausdrücken, stehen die Gleichungen $\tilde{g}(\hat{l}) = c$ (Gl. (6.105)) auf Seiten der Ausglei-
 chung als Gleichungssystem gegenüber, das das Gleichgewicht und die kinematische Verträglichkeit implizit formuliert.

Mit diesen Erkenntnissen stellt das Kraftgrößenverfahren mit Vorverformungen und ohne äußere Lasten einen Spezialfall der bedingten Ausglei-
 chung dar.

6.2.5. Kraftgrößenverfahren mit äußeren Lasten und bedingte Ausglei- chung

Für die Herstellung der Analogie zu einem Kraftgrößenverfahren mit äußeren Lasten wird in die Ausgangsenergiegleichung (6.109) der Ausglei-
 chungsrechnung zusätzlich das Potential $\mathbf{p}^t \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ eingeführt. Das zusätzliche Potential wird über das Skalarprodukt der äußeren Kräfte \mathbf{p} und der korrespondierenden äußeren Weggrößen gebildet, analog zu Gl. (6.16) des Weggrößenverfahrens.

Dazu wird für die äußeren Lasten ein Gleichungssystem für eine Ausglei-
 chung nach bedingten Beobachtungen für das Hauptsystem in Abhängigkeit der Geometrie, d. h. in Abhängigkeit der Koordinaten \mathbf{x} der Knotenpunkte, definiert. Als Veränderung kommt somit hinzu, dass das bisherige r Bedingungsgleichungen umfassende Gleichungssystem $g_i(\hat{l}) = c$ mit $i = 1, \dots, r$ und den ausgeglichenen Beobachtungen $\hat{l} = l + v$

(Gl. (6.105)) für das Hauptsystem durch ein größeres Gleichungssystem $(\hat{l}_i - g_i(\hat{x}))$ mit $i = 1, \dots, n$ mit insgesamt n Bedingungsgleichungen für das gesamte System ersetzt wird. Damit wird für die Beobachtungen eine Formulierung analog zum Weggrößenverfahren vorbereitet.

Der im Abschnitt 6.2.4 über Gl. (6.107) aufgebaute Ansatz der Bedingungsgleichungen für die eliminierten Beobachtungen, die in Abhängigkeit des Hauptsystems definiert werden, fließt unverändert in den neuen Ansatz ein.

Eine Aufspaltung erfolgt auch dergestalt, dass die bisher für die Verbesserungen aller $m + r$ Beobachtungen definierte Summe der gewichteten Verbesserungsquadrate von Gl. (6.109) in eine gewichtete Summe der Verbesserungen der r redundanten Beobachtungen und in eine gewichtete Summe der Verbesserungen der m Beobachtungen, die die Geometrie des Hauptsystems vollständig bestimmen, zerlegt wird [Ströbel 1995].

$$\begin{aligned} \Phi &= \underbrace{(\hat{l}_e - l_e)^t}_{v_e^t} P_e \underbrace{(\hat{l}_e - l_e)}_{v_e} + \underbrace{(\hat{l}_h - l_h)^t}_{v_h^t} P_h \underbrace{(\hat{l}_h - l_h)}_{v_e} \\ &- 2k_1^t (\hat{l}_e - g(\hat{l}_{h_1}, \hat{l}_{h_2}, \dots, \hat{l}_{h_n})) \\ &- 2k_2^t (\hat{l}_h - g(\hat{x})) - p^t (x - x_0). \end{aligned} \quad (6.114)$$

Partielle Ableitungen von Φ nach den Unbekannten x , den unbekannt ausgeglichenen Beobachtungen \hat{l}_e und \hat{l}_h sowie den unbekannt Korrelaten k_1 und k_2 , ergeben folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 2 \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x} \right)^t k_2 - 2 p = 0, \\ &\Rightarrow p_{(m,1)} = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x} \right)_{(m,n)}^t \cdot k_{2(n,1)} \quad (\text{Gleichgewicht}). \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{l}_e} &= 2 P_e v_e - 2 k_1 = 0, \\ &\Rightarrow k_{1(r,1)} = P_{e(r,r)} \cdot v_{e(r,1)} \quad (\text{Werkstoffbeziehung 1}). \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{l}_h} &= 2 P_h v_h - 2 \left(\frac{\partial g(\hat{l}_h)}{\partial \hat{l}_h} \right)^t k_1 - 2 k_2 = 0, \\ &\Rightarrow k_{2(n,1)} = P_{h(n,n)} \cdot v_{h(n,1)} - \left(\frac{\partial g(\hat{l}_h)}{\partial \hat{l}_h} \right)_{(n,r)}^t \cdot k_{1(r,1)}. \\ \frac{\partial \Phi}{\partial k_1} &= \hat{l}_e - g(\hat{l}_{h_1}, \hat{l}_{h_2}, \dots, \hat{l}_{h_n}) = 0. \\ \frac{\partial \Phi}{\partial k_2} &= \hat{l}_h - g(\hat{x}) = 0. \end{aligned} \quad (6.115)$$

Die erste Gleichung des Gleichungssystems (6.115) kommt identisch beim Weggrößenverfahren in Gl. (6.17) vor. Die Jakobimatrix A wird im Folgenden genauso wie in Gl. (6.17) für $\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)$ eingeführt.

Für das Hauptsystem ist die Jakobimatrix A quadratisch mit der Dimension (m, m) und regulär. Die Anzahl der Beobachtungen für das Hauptsystem ist gleich der Anzahl der Knotenkoordinaten m der Zielgeometrie.

Die Korrelate k_2 , die physikalisch ein Vektor mit Stabkräften ist, wird mit der nächsten Gleichung eliminiert. Es gilt:

$$k_2 = (A_h^t)^{-1} \cdot p. \quad (6.116)$$

Dabei gibt der untere Index h an, dass sich die Gewichtsmatrix A auf das Hauptsystem bezieht.

Der Ausdruck für die Korrelate k_2 von Gl. (6.116) wird in die dritte Gleichung des Gleichungssystems

(6.115) eingeführt und ergibt:

$$\mathbf{P}_h (m,m) \cdot \mathbf{v}_h (m,1) - \left(\frac{\partial g(\hat{\mathbf{l}}_h)}{\partial \hat{\mathbf{l}}_h} \right)_{(m,r)}^t \cdot \mathbf{k}_1 (r,1) - (\mathbf{A}_h^t)_{(m,m)}^{-1} \cdot \mathbf{p}_{(m,1)} = \mathbf{0}. \quad (6.117)$$

Die ersten beiden Terme von Gl. (6.117) weisen Ähnlichkeit zu der Gleichung für eine analoge Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen für das Kraftgrößenverfahren ohne Lasten auf, siehe linke Seite von Gl. (6.111), wie die Gegenüberstellung zeigt.

$$(6.117) \quad \mathbf{P}_h \cdot \mathbf{v}_h - \left(\frac{\partial g(\hat{\mathbf{l}}_h)}{\partial \hat{\mathbf{l}}_h} \right) \cdot \mathbf{k}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{v}} - \left(\frac{\partial g(\hat{\mathbf{l}})}{\partial \hat{\mathbf{l}}} \right) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{P}_{(m+r,m+r)} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{(m+r,1)} - \tilde{\mathbf{B}}_x (m+r,n) \cdot \mathbf{k}_{(n,1)}. \quad (6.111)$$

Die linke Seite von Gl. (6.111), die für das gesamte System aufgestellt wird, ist allgemeingültiger als Gl. (6.117), die sich ausschließlich auf die m Beobachtungen des Hauptsystems bezieht.

Ergänzend zur linken Seite von Gl. (6.111) ist der Ausdruck $(\mathbf{A}_h^t)^{-1} \cdot \mathbf{p}$ für das Gesamtsystem zu definieren. Die Matrix $(\mathbf{A}_h^t)_{(n,n)}^{-1}$ wird von unten mit der Nullmatrix $\mathbf{0}_{(r,n)}$ erweitert [Ströbel 1995]:

$$\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{B}}_x \cdot \mathbf{k} - \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_h^t)^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (6.118)$$

Die Analogie des allgemeinen Kraftgrößenverfahrens mit äußeren Lasten zur bedingten Ausgleichung, die äußere Lasten mit berücksichtigt, ist hiermit nachgewiesen. Nach Gl. (6.72) ist die Gleichgewichtsmatrix \mathbf{B}_0 aufgrund $\mathbf{B}_0 (m,m) = (\mathbf{A}_0^t (m,m))^{-1}$ invers zur Gleichgewichtsmatrix $\mathbf{A}_0^t (m,m)$.

Die analoge Formel für ein Ausgleichungsverfahren nach bedingten Beobachtungen lautet:

$$\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{B}}_x \cdot \mathbf{k} - \tilde{\mathbf{B}}_0 \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (6.119)$$

Wenn Gl. (6.119) für ein Ausgleichungsverfahren nach bedingten Beobachtungen, das zu einem allgemeinen Kraftgrößenverfahren analog ist, von links mit $\tilde{\mathbf{B}}_x^t \mathbf{P}^{-1}$ multipliziert wird, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}_x^t \underbrace{\mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}}_{=I} \hat{\mathbf{v}} - (\tilde{\mathbf{B}}_x^t \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_x) \cdot \mathbf{k} - (\tilde{\mathbf{B}}_x^t \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_0) \cdot \mathbf{p} &= \mathbf{0} \\ (\tilde{\mathbf{B}}_x^t \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_x) \cdot \mathbf{k} &= -(\tilde{\mathbf{B}}_x^t \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_0) \cdot \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{B}}_x^t \hat{\mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (6.120)$$

Die untere Gleichung von (6.120) ist bis auf Vorzeichen vollständig analog zu Gl. (6.97). Die Normalgleichung wird:

$$\mathbf{k} = -(\tilde{\mathbf{B}}_x^t \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_x)^{-1} (\tilde{\mathbf{B}}_x^t \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_0) \cdot \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{B}}_x^t \hat{\mathbf{v}}. \quad (6.121)$$

Die folgende Zusammenstellung zeigt die Analogien zwischen dem Kraftgrößenverfahren und dem mit Konstanten für die äußeren Lasten erweiterten Verfahren der vermittelnden Ausgleichung [Bahndorf 1991, Ströbel 1995]:

Bedingte Ausgleichung	Kraftgrößenverfahren
<p>Normalgleichung</p> $\mathbf{k} = -\left(\tilde{\mathbf{B}}_x^t \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_x\right)^{-1} \left(\tilde{\mathbf{B}}_x^t \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_0\right) \cdot \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{B}}_x^t \hat{\mathbf{v}}$ <p>Korrelatengleichung für \mathbf{k}</p> $\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{B}}_x \cdot \mathbf{k} - \begin{bmatrix} \left(\mathbf{A}_h^t\right)^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0}$ <p>Bedingungsgleichungen</p> $\hat{\mathbf{l}}_e - g\left(\hat{l}_{h_1}, \hat{l}_{h_2}, \dots, \hat{l}_{h_n}\right)$ <p>Beobachtungen \mathbf{l}</p> <p>Verbesserungen \mathbf{v}</p> <p>ausgeglichene Beobachtungen $\mathbf{l} + \mathbf{v}$</p> <p>Jakobimatrix $\mathbf{B} = \frac{\partial \hat{g}(\hat{\mathbf{l}})}{\partial \mathbf{l}}$</p> <p>Konstante \mathbf{p}</p>	<p>Gleichung für Zusatzfreiheitsgrade r_x</p> $\mathbf{r}_x = \left(\mathbf{B}_x^t \mathbf{F} \mathbf{B}_0\right) \cdot \mathbf{p} + \left(\mathbf{B}_x^t \mathbf{F} \mathbf{B}_x\right) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}_x^t \cdot \mathbf{v}_u$ <p>Werkstoffgleichung</p> $\mathbf{F}^{-1} \mathbf{v} - \mathbf{B}_0 \mathbf{p} - \mathbf{B}_x \mathbf{k}_2 = \mathbf{0}$ <p>Kinematische Verträglichkeit</p> $\mathbf{B}_0^t (\mathbf{v} + \mathbf{v}_u) - \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}_x^t (\mathbf{v} + \mathbf{v}_u) - \mathbf{r}_x = \mathbf{0}$ <p>unverformte Stablängen \mathbf{l}_h und \mathbf{l}_e</p> <p>Elementverformungen \mathbf{v}</p> <p>elastisch verformte Elemente $\mathbf{l}_h \mathbf{l}_e + \mathbf{v}$</p> <p>Gleichgewichtsmatrix $\tilde{\mathbf{B}}$</p> <p>äußere Lasten \mathbf{p}</p>

Tabelle 6.2.: Analogien zwischen Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen und Kraftgrößenverfahren.

7. Ausgleichung und Homogenisierungsverfahren

7.1. Ansätze der Homogenisierungsverfahren

Die hier betrachteten Homogenisierungsverfahren wurden ursprünglich ab Mitte der 1980er Jahre bis in die 2000er Jahre als Kartenhomogenisierungsverfahren entwickelt, um aus analogen Karten mit Hilfe der Ausgleichsrechnung einen flächenhaften digitalen, gleichmäßig genauen Nachweis des Liegenschaftskatasters aufzubauen. Hettwer und Benning 2000 beschreiben die Kartenhomogenisierung als Zusammenfügung verschiedener digitaler Datenbestände zu einem einzigen homogenen Datenbestand. Die Datenquellen sind analoge Katasterkarten, für die Pseudobeobachtungen in den verschiedenen Ausgangskoordinatensystemen definiert werden. Diese können dann in ein übergeordnetes, homogenes System mit vereinheitlichter Genauigkeit integriert werden [Glock, Bauer u. a. 2019].

Der Begriff Homogenisierung wird für Prozesse im Zusammenhang mit der Bezugssystemumstellung nach ETRS89/UTM verwendet, die durch Minimierung der Netzspannungen ebenfalls zu homogenen Daten des Liegenschaftskatasters auf einem Genauigkeitsniveau von wenigen cm führen.

Bei der Umstellung des Bezugssystems des Liegenschaftskatasters in Bayern wurde die Strategie der „Homogenisierung durch Ausgleichung“ verfolgt, d. h. die ETRS89/UTM-Überführung und Homogenisierung der Daten in einem einzigen Prozess ausgeführt. Die praktische Umsetzung des Umstellungs- und Homogenisierungsprozesses gelang innerhalb weniger Tage vom 21. bis 24. Dezember 2018 und führte zu dem Resultat, das Joos und Glock 2016 als Transformationsergebnis „homogene Koordinaten“ im neuen Bezugssystem bezeichnen.

Eine Alternative bietet ein zweistufiger Ansatz, der in Stufe 1 zur Verbesserung der Genauigkeit zunächst vorbereitende Arbeiten zur Reduzierung der Netzspannungen bei den Lagefestpunktfeldern bis zur Ordnung des Katasterfestpunktfeldes im alten Bezugssystem durchführt. Daran schließt sich ein fortlaufender Prozess der rechnerischen Homogenisierung der von der Veränderung des Katasterfestpunktfeldes betroffenen Grundrisspunkte des Liegenschaftskatasters an.

Den Maßnahmen zur Homogenisierung der Daten, die konsequent im alten Bezugssystem durchgeführt werden, folgt anschließend, nach Abschluss der Arbeiten, in Stufe 2 der Bezugssystemwechsel in das neue Koordinatenreferenzsystem.

Beim zweistufigen Ansatz können für die Erneuerung des GK-Netzes einschließlich der damit verbundenen Neukoordinierung der Grundrisspunkte auch GK-GK-Transformationen eingesetzt werden, die Homogenisierungstechniken für die lokalen Bereiche wie die nachbarschaftstreue Restklaffungverteilung nutzen. Für die Anwender sind die meist durch das staatliche Vermessungswesen im betroffenen Gebiet ausgeführten, vorbereitenden Netzarbeiten mit Koordinatenänderungen im alten Bezugssystem verbunden. Für den abschließenden Schritt der Bezugssystemumstellung, der mathematischen Überführung der durch kontinuierliche Netzarbeiten in einem Ausgangs-Referenzsystem aufgebauten homogenen Koordinaten, können rechentechnisch weniger aufwändige Transformationen eingesetzt werden. Diese sind z. B. die bekannten zwei- oder dreidimensionalen geodätischen Transformationsansätze, die mit einer anschließenden Restklaffungverteilung arbeiten. Im Leitfaden *Bezugssystemwechsel auf ETRS89/UTM* des Runden Tisches GIS wurde für diese Strategie der Begriff „Homogenisierung durch Koordinatenerneuerung“ gewählt [Joos und Glock 2016].

Zum Verständnis der Begriffe „homogenes Koordinatensystem“ und „homogene Koordinaten“ geben Wübena, Bachmann und Schmitz 2004 folgende Erläuterungen:

Ein homogenes Koordinatensystem muss als notwendige Eigenschaften

- ein Ellipsoid,

- eine Projektion/Abbildung und
- einen unveränderlichen Satz von Transformationsparametern für den Übergang von einem Ausgangs- zu einem (Ziel-)Bezugsreferenzsystem.

besitzen. Als hinreichende Bedingung müssen homogene Koordinatensysteme sich

- ohne Genauigkeitsverlust
- jederzeit
- eineindeutig

ineinander transformieren lassen. Wübbena, Bachmann und Schmitz 2004 führen an, dass nur Koordinaten im ETRS89-Bezugssystem die für homogene Koordinatensysteme geforderten Eigenschaften hinreichend umsetzen können.

Homogene Koordinaten müssen hohe Genauigkeitsanforderungen erfüllen, z. B. quasidirekte Positionierungen mit modernen GNSS-Systemen ermöglichen und eine hohe Nachbarschaftsgenauigkeit besitzen [Glock, Bauer u. a. 2019, Joos und Glock 2016].

Wenn die theoretisch formulierten Genauigkeitsanforderungen an homogene Koordinaten auf die Aufgabenstellung der UTM-Umstellung beim Bayerischen Liegenschaftskataster übertragen werden, dann sollte die lokale Genauigkeit der transformierten Punkte im Bereich von wenigen cm liegen. Die erreichte lokale Nachbarschaftsgenauigkeit führt in Verbindung mit der Minimierung der Netzspannungen gleichzeitig zu einer Verbesserung der globalen Lagegenauigkeit [Glock, Bauer u. a. 2019]. Das mit GNSS im neuen Bezugssystem aufgebaute Katasterfestpunktfeld, dessen einzelne Festpunkte eine globale Lagegenauigkeit von 1 bis 2 cm besitzen, wird als netzspannungsfrei angesehen.

Für die Genauigkeitsanforderung des Liegenschaftskatasters, dass lokale Koordinatenwidersprüche bei Katastervermessungen 3 cm nicht überschreiten dürfen, wird der Begriff Katastergenauigkeit verwendet.

In Zusammenhang mit den Anforderungen an den Umformungs- und Homogenisierungsprozess wurden für die UTM-Umstellung des Liegenschaftskatasters in Bayern folgende Ziele definiert [Glock, Bauer u. a. 2019]:

- Das vorliegende, mit GNSS-Messungen aufgebaute Katasterfestpunktfeld soll durch die Umformung keine Veränderung im neuen Bezugssystem erfahren (Prinzip ein Punkt – *ein* Satz von Koordinaten).
- Zum Aufbau eines homogenen Koordinatensystems sollen Verfahren untersucht werden, die eine Überführung der ALKIS-Grundrissdaten nach UTM bei möglichst gutem Erhalt der Nachbarschaftsgenauigkeit unter gleichzeitiger Minimierung der Netzspannungen ermöglichen.
- Die Geometrie der Grundrissdaten soll bei vorhandenen Netzspannungen weitgehend erhalten bleiben.

Mit dem Übergang auf das geodätische Bezugssystem ETRS89/UTM werden die in historisch gewachsenen Lagebezugssystemen wie dem DHDN90/GK-System enthaltenen Netzspannungen durch Verteilung minimiert. Bei homogenen bzw. homogenisierten Koordinaten sind die Netzspannungen weitgehend abgebaut. Im neuen Koordinatenreferenzsystem sind die Auswirkungen der ursprünglich im alten Netz in einer vielfachen Größenordnung vorhandenen Netzspannungen kaum mehr spürbar.

Verfahren der Kartenhomogenisierung Die Verfahren der Kartenhomogenisierung stellen speziell definierte Ausgleichungsverfahren dar [A. Rose 1988, Hampp 1992, Benning und Scholz 1990, Gielsdorf, Grünig und Aschoff 2004].

Bei der Überführung von digitalisierten analogen Karten, die nach Benning und Scholz 1990 meist eine Genauigkeit von 10 - 20 cm oder schlechter besitzen, in einen homogenen digitalen Datenbestand ist es notwendig, dass Koordinaten im übergeordneten System durch ausgleichungstechnische Berücksichtigung aller verfügbaren Informationen zum individuellen Punkt geschätzt werden [Benning 1995]. Dies sind zunächst die digitalisierten Koordinaten der Punkte, zusätzlich fließen in die Ausgleichung Nachbarschaftsbeziehungen und geometrische Zusatzbedingungen ein.

Zu Ansätzen der Kartenhomogenisierung von Katasterkarten der 1990er und 2000er Jahre, die als klassische Kartenhomogenisierungsverfahren zu sehen sind, sind folgende Arbeiten zu nennen:

- Die Arbeiten von Benning [Benning und Scholz 1990, Benning 1995, Kampshoff und Benning 2005] für die Automatisierte Liegenschaftskarte (ALK),
- die Arbeiten von Rose [A. Rose 1988], die in ein kommerzielles Produkt mündeten,
- die Arbeiten von Hampp für die Homogenisierung der Digitalen Flurkarte (DFK) in Bayern [Hampp 1992] und
- die Arbeiten von Gründig, Gielsdorf und Aschoff [Gielsdorf und Gründig 1997, Gielsdorf, Gründig und Aschoff 2003, Gielsdorf, Gründig und Aschoff 2004].

Bei der Überführung der Lage der geometrischen Objekte aus einer analogen Karte ist darauf zu achten, dass die innerhalb der Teilbereiche vorhandenen Nachbarschaftsbeziehungen für den Aufbau der Nachbarschaftsgenauigkeit im übergeordneten System erhalten bleiben, in vollständiger Analogie zur Homogenisierung bei einer Bezugssystemumstellung.

Die neue Georeferenzierung der Kartenelemente im übergeordneten System wird durch jeweilige Definitionen von Beobachtungsgleichungen von geodätischen Transformationen erreicht. Dazu können Gleichungsdefinitionen der ebenen Ähnlichkeits- oder Affintransformation verwendet werden. Diese Transformationen werden innerhalb der Ausgleichung vollständig miteinander verkettet [siehe z. B. Gielsdorf, Gründig und Aschoff 2004, Benning 1995, Hampp und Glock 2017]. Im Allgemeinen sind die bei Kartenhomogenisierungsverfahren im Ausgleichungsmodell definierten Transformationen überbestimmt [Benning 1996].

Die Schätzung erfolgt im Modell der vermittelnden Ausgleichung, welches auch bei Verfahren zu Strecken- und Richtungsnetzausgleichungen verwendet wird, aus denen sich die Kartenhomogenisierung entwickelt hat.

In der Literatur zu Homogenisierungsverfahren [z. B. Hettwer und Benning 2000] findet sich für dieses Ausgleichungsmodell auch der Begriff Gauß-Markov-Modell [K.-R. Koch 2004], da dieses Modell für die in die Ausgleichung eingeführten Elemente einschließlich der a-priori-Schätzung der Elementgenauigkeit die beste lineare erwartungstreue Schätzung darstellt.

Allen Homogenisierungsverfahren ist gemeinsam, dass für die Beobachtungsdefinitionen zum Aufbau einer neuen Georeferenzierung im übergeordneten System neben den Gleichungen zur Transformation der lokalen Systeme weitere Punkte, die zusätzlich Koordinaten im übergeordneten System besitzen (= identische Punkte), in die Ausgleichung eingeführt werden.

Als in der Ausgleichung zu schätzende Unbekannten nennen z. B. Kampshoff und Benning 2005, Benning 1995:

- Zielsystemkoordinaten der Neupunkte und,
- die Lage des lokalen Systems definierende Transformationsparameter einer mehrparametrischen Transformation (4-/5-/6-Parameter), wobei in der Regel Ähnlichkeitstransformationen bevorzugt werden.

Als Beobachtungen schlagen Kampshoff und Benning 2005 folgende Gruppen vor:

- Koordinaten der Punkte (Neupunkte und identische Punkte) im Startsystem,
- Beobachtungen für die Definition von geometrischen Zusatzbedingungen.

Beim Übergang von lokalen Systemen unterschiedlicher Genauigkeit in das Zielsystem werden sich Koordinatenwidersprüche einstellen. Diese zeigen sich in den Restklaffungen der identischen Punkte.

Eine weitere Gruppe von Beobachtungen sorgt für die nachbarschaftstreue Anpassung bei der Übertragung in das Zielsystem [Benning 1995, Hettwer 2003]. Dabei geht es nicht nur um eine Verteilung der Restklaffungen, die die Nachbarschaft störend beeinflussen, sondern auch um Definitionen, die explizit Nachbarbeziehungen modellieren wie z. B. Beobachtungsgleichungen aus einer zusätzlich aufgebauten Delauney-Triangulation [Aurenhammer 1991].

Für die Verteilung der Restklaffungen durch Interpolation in die unmittelbare Nachbarschaft der identischen Punkte wurden in der Geodäsie neuere Ansätze entwickelt, von denen zu nennen sind:

- die Natural-Neighborhood-Methode von Hettwer und Benning 2003, die mit Hilfe von Voronoi-Diagrammen eine flächenanteilige Interpolation von Restklaffungen der unmittelbaren Nachbarn zur Erzeugung von Sibson-Koordinaten durchführt [Roschlaub 1999] und
- die bilineare Filterung von Heunecke 2018, die für Dreiecke und alternativ aus zwei Dreiecken geformte Vierecke für die Berechnung der normierten Koordinaten eines Punktes innerhalb oder in räumlicher Nähe des Drei- oder Vierecks eine neuartige Interpolation anwendet, die an der bilinearen Interpolation des NTv2-Verfahrens orientiert ist [Ahrens und Böhmer 2010]. Für den Aufbau der Drei- oder Vierecke im Interpolationsgebiet, bei deren Eckpunkte Restklaffungen definiert sind, ist eine Dreiecksvermaschung durchzuführen.

Bereits in den 1990er Jahren in der Praxis etabliert sind folgende Verfahren zur Restklaffungsverteilung:

- Die abstandsgewichtete Interpolation [siehe z. B. Benning 1995]. Bei der nachbarschaftstreuen Übertragung der Restklaffungen von den identischen Punkten auf die zu transformierenden Punkte über einen Interpolationsansatz kommen entfernungsabhängige Gewichte, sog. Abstandsgewichte zum Einsatz. Jeder Kleinpunkt erhält individuell interpolierte Restklaffungen, bei denen die Restklaffungen der benachbarten identischen Punkte einfließen, die über einen hyperbolischen Ansatz als Funktion der Strecke gewichtet werden.
- Die Sektormethode nach Overhoff 1994, bei der die Restklaffungen mit einem Abstandsgewicht S^{-1} gewichtet werden, das zusätzlich mit dem Verhältnis des Sektorenwinkels des Stützpunktes zum Vollkreis multipliziert wird.
- Die Multiquadratische Interpolation nach Hardy [Hardy 1972, Hardy 1990], die für eine durch diskrete Punkte beschriebene unregelmäßige Fläche eine Approximation der Fläche leistet. Diese Approximation wird über Flächen zweiten Grades, sog. Hyperboloiden erreicht [A. Koch 2017].

Diese zuletzt genannten Verfahren stellen im Gegensatz zur Natural-Neighborhood-Methode und bilinearen Filterung globale Interpolationsverfahren dar, bei denen alle Stützpunkte mit Restklaffungen Eingang in die Berechnung der Interpolationsfunktion für einen zu interpolierenden Punkt finden. Durch Gewichtung wird der Einfluss der Stützpunkte vorgegeben.

Elastomechanische Verfahren Anders als die Interpolationsverfahren, die mit mathematisch definierten Funktionen zur Übertragung der Restklaffungen auf die benachbarte Punkte arbeiten, nutzen Ausgleichungsverfahren wie z. B. das Membranverfahren von Gielsdorf und Gründig 1997 und das Ortra-Verfahren [Glock, Bauer u. a. 2019], die elastomechanische Analogien besitzen, die Mechanik.

Die Verteilung der Restklaffungen bei den umzuformenden Punkten erfolgt durch mechanische Vorgänge, die beim Gleichgewichtssystem unter Einwirkung äußerer Kräfte stattfinden, wenn die bekannten Restklaffungen der identischen Punkte durch äußere Kräfte eliminiert werden.

Elastomechanische Verfahren nutzen für die Minimierung der Netzspannungen eine Gleichgewichtsfigur. Die sich verformende Gleichgewichtsfigur führt mit den Knotenverschiebungen bei den nicht-identischen Punkten eine Verteilung der Restklaffungen durch.

Aus der Sicht der Elasto-Mechanik ist von elastischen Elementen des Umformungsverfahrens zu sprechen, die sich in ihrer Gesamtheit verformen, um bei den identischen Punkten im Zielsystem eine Identität der gemessenen und der transformierten Koordinate zu erreichen. Dies entspricht der Umsetzung des Prinzips ein Punkt – ein Satz von Koordinaten [Glock, Bauer u. a. 2019].

Durch Definition spezieller Beobachtungsgleichungen im Ausgleichungsmodell ist es möglich, die Restklaffungen bei den identischen Punkten gleich Null werden zu lassen. Alternativ können identische Punkte – jedoch ohne Möglichkeit zusätzlich ein Gewicht einzuführen – als bekannte Punkte im funktionalen Modell formuliert werden.

Durch die Formulierung, dass für den identischen Punkt eine bestimmte Weggröße (= Restklaffung) Null wird, werden aus Sicht der Mechanik gekoppelte Reaktionen ausgelöst. Von formverändernden elastischen

Elementen, die unmittelbar mit dem identischen Punkt inzidieren, werden Starrkörperbewegungen und elastische Reaktionen wie Stauchungen und Dehnungen bei den benachbarten formverändernden Elementen verursacht. Die Knoten zwischen den elastischen Elementen führen eine Verschiebung aus, die bei nicht-identischen Punkten die auf den Einzelpunkt verteilte Restklaffung darstellt. Aus Sicht des elastischen Netzes führen die elastischen Formveränderungen und Starrkörperbewegungen der Einzelemente zu dem gewünschten Gesamtverhalten, dass alle Widersprüche in den identischen Punkten kompensiert sind.

Durch das Prinzip der minimalen Formveränderung verändern sich alle elastischen Elemente aus Sicht der Gesamtbilanz minimal im Gesamten. Sie ändern sich auch minimal zum benachbarten Knoten, so dass eine Ähnlichkeit zu den benachbarten Restklaffungen in Betrag und Richtung aufgebaut wird. Somit wird mit der elastomechanischen Methode eine mit minimaler Verformungsenergie aufgebaute Verteilung der Restklaffungen erreicht.

Externes Verfahren zur Verteilung der Restklaffungen bei Kartenhomogenisierungsverfahren Die klassischen Kartenhomogenisierungsverfahren, die nicht explizit Beobachtungsgleichungen mit elastischen Elementen definieren, nutzen andere Berechnungsmechanismen, beispielsweise Interpolation der Restklaffungen bei den Neupunkten vor Durchführung der Ausgleichung. Diese werden dann als konstante Werte in die Ausgleichung eingeführt.

Benning bezeichnet diesen Mechanismus als hybriden Ansatz [Benning 1995, Hettwer und Benning 2000]. Die Interpolation der Restklaffungen kann dabei über die weiter oben genannten Interpolationsansätze erfolgen. In dem Homogenisierungsansatz KATHOM der RWTH Aachen von Hettwer und Benning 2003 sind folgende Verteilungsmethoden für Restklaffungen implementiert: Die abstandsgewichtete Interpolation, die multiquadratische Interpolation und die Natural-Neighborhood-Methode. In Verbindung mit der Definition von geometrischen Nachbarschaftsbeziehungen zwischen benachbarten Punkten über eine Delauney-Dreieckstriangulation kann ein Mechanismus für die Übertragung der Nachbarschaftsgenauigkeit aufgebaut werden.

Ein Nachteil des hybriden Ansatzes ist, dass die Ausgleichung für das Kartenhomogenisierungsverfahren zunächst eine Schätzung der Lage der einzelnen geometrischen Objekte des digitalisierten Kartenblatts im homogenen Rahmen durchführt (= Aufbau der Referenzkonfiguration), diese aber für die Durchführung der externen Restklaffungverteilung unterbrochen wird.

Im externen Interpolationsverfahren können nun für jeden umzuformenden Punkt P_i die Restklaffungen $r_i = (y_{r_i}, x_{r_i})$ bestimmt werden. Diese extern bestimmten Parameter r_i ermöglichen es, zusätzliche Bedingungsgleichungen für jede Verbindung zwischen den Punkten (= Dreiecksseite aus Delauney-Dreieckstriangulation) zu definieren, die die interpolierten Restklaffungen berücksichtigen. Diese Gleichungen werden wie folgt aufgebaut:

$$\begin{aligned} y_{r_i} &\hat{=} \Delta y_i = \hat{y}_i - y'_i \\ x_{r_i} &\hat{=} \Delta x_i = \hat{x}_i - x'_i \end{aligned} \quad (7.1)$$

Die Bedingungsgleichung (7.1) drückt aus, dass die interpolierten Restklaffungen (y_{r_i}, x_{r_i}) der Differenz zwischen den endgültigen Koordinaten (\hat{y}, \hat{x}) und den Koordinaten (y', x') eines Punktes entsprechen soll, die vor der Restklaffunginterpolation über die für das lokale System geschätzten Transformationsparameter berechnet wurde [Hettwer und Benning 2000].

Für eine Punktverbindung zwischen P_i und P_j , die eine über Dreiecksvermaschung aufgebaute Nachbarschaftsbeziehung darstellen soll, liefert die Ausgleichung Verbesserungen für die Differenzen der Koordinaten und für die Differenzen der extern bestimmten Restklaffungen [Hettwer und Benning 2000]:

$$\begin{aligned} l_y + v_y &= \Delta y_j - \Delta y_i - (r_{y_j} - r_{y_i}), \\ l_x + v_x &= \Delta x_j - \Delta x_i - (r_{x_j} - r_{x_i}). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Über Gl. (7.2) erfolgt die Modellierung der Nachbarschaft in der Ausgleichung. Diese erhält die Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Punkten bei gegebenen und interpolierten Restklaffungen, die sich als Folge von Koordinatenwidersprüchen bei den identischen Punkten als Weggröße (= Verschiebung) bei den identischen Punkten und den transformierten Punkten ergibt.

Als zusätzliche Ursachen für Verschiebungen können geometrisch induzierte Zwangskräfte vorliegen, die durch Berücksichtigung geometrischer Zusatzbedingungen wie z. B. Geraden- oder Winkelbedingungen entstehen. Geometrische Zusatzbedingungen wirken sich mechanisch analog zu den für die Restklaffungsverteilung definierten Bedingungen auf die Nachbarschaft aus. Sie lösen in der Regel unterschiedliche Verschiebungen bei den benachbarten Punkten aus, die Verzerrungen darstellen.

7.2. Homogenisierungsverfahren als ETRS89/UTM-Überführungsansatz

7.2.1. Nutzung des Kartenhomogenisierungsverfahrens nach Benning

Kartenhomogenisierungsverfahren als Umformungsverfahren zum Zweck einer Netztransformation zu nutzen, schlagen Benning und Scholz 2010 vor, konkret für die Überführung von Daten des Liegenschaftskatasters in das Bezugssystem ETRS89/UTM. Die Netztransformation (zum Begriff siehe z. B. [Kampshoff und Benning 2002]) ist im Anwendungsfall einer ETRS89/UTM-Überführung als Transformation von künstlichen, mit Pseudobeobachtungen aufgebauten Netzen zu verstehen.

Als Resultat einer über 20 Jahre währenden Forschungstätigkeit im Bereich der Kartenhomogenisierung an der RWTH Aachen überzeugt der Vorschlag von Benning und Scholz aus theoretischer Sicht, da die Kartenhomogenisierung zur Erzeugung eines homogenen Datenbestandes im wesentlichen aus der Transformation mit gleichzeitiger Überführung der Nachbarschaftstreue nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate besteht.

Über die theoretische Sicht hinaus ist die praktische Umsetzbarkeit des Vorschlags von entscheidender Bedeutung, auch unter dem Aspekt der Überführung des Liegenschaftskatasters eines ganzen Bundeslandes.

Verfahrensschritte der Kartenhomogenisierung und der Homogenisierungsverfahren für die Bezugssystemumstellung Wiens 1986 charakterisiert zu Beginn der Entwicklung dieser Technologie die einzelnen Verfahrensschritte der Kartenhomogenisierung wie folgt, die sich direkt auf die zwei bis drei Jahrzehnte später eingesetzten Homogenisierungsverfahren für die Bezugssystemumstellung übertragen lassen:

- Transformation der einzelnen Datenbestände in ein einheitliches Koordinatenreferenzsystem,
- Angleichung gemeinsamer Randbereiche,
- Nachbarschaftstreue Restklaffungsverteilung.

Bei Anwendung auf die Bezugssystemumstellung von Geobasisdaten ganzer Bundesländer bedeutet Schritt 1 die Überführung und Homogenisierung der Geobasisdaten jedes Bundeslandes für sich in das neue Koordinatenreferenzsystem. Die Angleichung gemeinsamer Randbereiche (Schritt 2) kann als Festlegung beiderseits gültiger Koordinaten der Grenzpunkte der gemeinsamen Landesgrenze verstanden werden. Bei der Bezugssystemumstellung in Bayern wurden diese Arbeiten an der Grenze zu Baden-Württemberg im Jahr danach von den benachbarten Katasterbehörden durchgeführt.

Praxisnachweis des Homogenisierungsverfahrens Kampshoff und Benning 2002 beschreiben ein Anwendungsszenario der integrierten Verarbeitung des Liegenschaftskatasters zusammen mit einer Netztransformation von DHDN90/GK nach ETRS89/UTM auf Basis einer ALK-Lösung (ALK = Automatisierte Liegenschaftskarte) für die Stadt Hagen in Nordrhein-Westfalen.

Benning und Scholz 2010 stellen nach Abschluss des Projekts den mehrtägigen Umformungsprozess mit den einzelnen Prozesszeiten dar, an dem sie technisch demonstrieren, dass eine Überführung nach ETRS89/UTM mittels Homogenisierung zumindest für kleinere Gebietseinheiten praktisch möglich ist [Benning und Scholz 2010]. Dabei wurden für die Ausgleichungen die Katasterdaten außerhalb des Kataster führenden Systems transferiert.

Für dieses Vorgehen wird später der Begriff *Transformation durch Migration* im Leitfaden Koordinatentransformation des Runden Tisch GIS gewählt [Joos und Glock 2016], der im Zusammenhang mit den Arbeitsweisen der Bundesländer Baden-Württemberg [Zöllner 2016] und Bayern [Glock, Bauer u. a. 2019] bei der Migration des Liegenschaftskatasters nach ETRS89/UTM verwendet wurde.

Der Begriff *Transformation durch Migration* sagt aus, dass die Daten zunächst vollständig aus einem amtlichen Liegenschaftskataster-Informationssystem (ALKIS) migriert werden, um dann in einem weiteren Schritt durch unabhängige Transformationssoftware, die für die Überführung aufgebaut wurde, nach UTM überführt zu werden. Danach werden die auf das neue Bezugssystem umgestellten Daten wieder in ALKIS eingespielt, um den neuen amtlichen Katasternachweis darzustellen [Joos und Glock 2016].

Praxisnachweis des Membranverfahrens für ein Bundesland Das erste Bundesland, das eine Überführung nach ETRS89-/UTM mittels Homogenisierung realisiert, war die Freie und Hansestadt Hamburg, die flächenmäßig fünfmal größer ist als die Stadt Hagen. Bei dem 2001 begonnenen und 2006 abgeschlossenen Vorhaben [Heidenreich, Makoschey und Nerkamp 2017] kam der Membranansatz [Gielsdorf und Gründig 1997] zur Anwendung, realisiert im Ausgleichs- und Homogenisierungsprogramm Systra, das in Prozessierungseinheiten von 200.000 Punkten arbeitete [Gielsdorf, Gründig und Aschoff 2004].

Besondere Anforderungen an die Numerik bei Homogenisierungsverfahren für die Bezugssystemumstellung Benning und Scholz 2010 geben für die rechnerische Homogenisierung des Liegenschaftskatasters der Stadt Hagen durch das Homogenisierungsprogramm KATHOM knapp einen Tag Laufzeit an. Näheres zu dem aus dem Programmsystem FLASH [Scholz 1992] weiterentwickelte KATHOM und der im System integrierten Numerik siehe [Kampshoff und Benning 2005, Hettwer 2003, Kampshoff 2005]. Benning und Scholz 2010 ergänzen, dass in die Ausgleichung für die Stadt Hagen 1.47 Millionen Punkte als Unbekannte eingeführt werden. Nach Hettwer 2003 werden im funktionalen Modell von KATHOM für jeden Punkt zwei Unbekannte definiert, was folglich für das Projekt Hagen eine Dimension der Normalgleichungsmatrix von 2,94 Millionen bedeutet. Die Auflösung des Normalgleichungssystems erfolgt über einen Sparse Cholesky Ansatz, der mit dem Left-Looking-Algorithmus arbeitet [Kampshoff 2005, George und Liu 1981]. Die hinter der symbolischen Faktorisierung stehende Algorithmen arbeiten analog zu den numerischen Algorithmen der ETRS89/UTM-Umstellung in Bayern mit einem Eliminierungsgraphen (siehe Abschnitt 9.3.1), der die numerische Abhängigkeit von einzelnen Spalten untereinander abbildet [Hettwer 2003]. Die für die Auflösung der Unbekannten benötigte Zeit von 20 Minuten auf einem Standard-PC [Hettwer und Benning 2000] liegt in einer Größenordnung, die auch für das Umstellungsprojekt in Bayern gut ein Jahrzehnt später noch ausreichend gewesen wäre.

Nicht direkt auf Bayern übertragbar sind laufzeit-intensive Prozesse, die für die Definition der Normalgleichungsmatrix über Pseudobeobachtungen mit zusätzlichem Aufbau von Nachbarschaftsbeziehungen über Delauney-Triangulation aufgewendet wurden und im Projekt Hagen eine Rechenzeit von 14 Stunden benötigten [Benning und Scholz 2010].

Der Gesamtprozess einschließlich des Aufbaus der GIS-Datenbank mit den auf die Katastergeometrien aufsetzenden Fachdaten dauerte vier Tage. Mit diesen Zahlen verdeutlichen Benning und Scholz 2010 die Herausforderung der Massenproblematik, wenn der für die Stadt Hagen mit 160 km^2 erprobte Ansatz auf größere Gebietseinheiten wie Hamburg mit 755 km^2 oder gar das flächenmäßig größte deutsche Bundesland Bayern mit rd. $70\,000 \text{ km}^2$ Fläche angewendet werden soll.

7.2.2. Mechanische Aspekte bei der Nutzung von Homogenisierungsverfahren

Bei dieser Netztransformation, einem Begriff, den Kampshoff und Benning 2002 auch für die Transformationsaufgabe von Homogenisierungsverfahren bei der Umstellung vom Koordinatenbezugs- und Abbildungssystem DHDN90/GK nach ETRS89/UTM verwenden, handelt es sich um eine Transformation ungleichartiger Koordinaten.

Diese spezifische Netztransformation ist dadurch charakterisiert, dass künstliche Netze über Pseudobeobachtungen aus Vorläufersystemen von ALKIS wie der Automatisierten Liegenschaftskarte (ALK) aufgebaut und über identische Punkten ins Zielsystem transformiert werden.

Nichtlineare Ortsfunktion für den Übergang von DHDN/GK nach ETRS89/UTM und ihre Approximation Theoretisch betrachtet geht die homogene Koordinatentransformation nach Wübbena, Bachmann und Schmitz 2004 von einer gegenseitig bekannten mathematischen Lagerung des Referenzsystems Bessel-Ellipsoid zum GRS80-Ellipsoid aus, die dann eine mathematische Ortsfunktion zur Umrechnung von DHDN/GK- nach ETRS89/UTM-Koordinaten bereitstellt.

Aufgrund der Homogenisierung des Liegenschaftskatasters ist die Funktion zur Transformation des spannungsbehafteten Ausgangssystems in das bei den Katasterfestpunkten mit einer Genauigkeit von 1 – 2 cm realisierte ETRS89-Referenzsystem nichtlinear.

Die nichtlineare Ortsfunktion lässt sich durch verkettete lokale Koordinatentransformationen, beispielsweise unter Nutzung von Ähnlichkeitstransformationen, annähern. Diese stellen dann mit ihren geschätzten Transformationsparametern die genäherte Ortsfunktion für lokale Bereiche dar, in dem einzelne Transformationen gültig sind. Die Ansätze der Kartenhomogenisierungsverfahren wurden aufgebaut, um die mathematisch-funktionale Verkettung von Koordinatensystemen zu leisten. Darüber hinaus können diese Verfahren, wieder mit Hilfe der vermittelnden Ausgleichung, eine Widerspruchsfreiheit der lokalen Koordinatentransformationen erreichen.

Die lokal definierten Koordinatensysteme, für die geschätzte Transformationsparameter nach der Ausgleichung vorliegen, können für folgende Verfahrensschritte verwendet werden:

- Transformation von zusätzlichen Koordinaten, die nicht in die Ausgleichung eingeführt waren,
- Bereitstellung von transformierten Koordinaten der identischen Punkte für eine Restklaffungsverteilung.

Mechanische Analyse der Netztransformation Bei Anwendung eines (Karten-)Homogenisierungsverfahrens als ETRS89/UTM-Überführungsverfahren verdient der Aspekt der mechanischen Analyse des aufgebauten geodätischen Netzes aus Sicht des Verfassers größere theoretische Beachtung.

Die Restklaffung wird in Abschnitt 8.1.3, Gleichungen (8.23) und (8.27) als Koordinatenwiderspruch zwischen einer unbelasteten Referenzkonfiguration κ_R und einer mechanisch belasteten Momentankonfiguration κ_M identifiziert. Der Koordinatenwiderspruch stellt damit eine Verschiebung des Knotens (= äußere Weggröße) bei der Verformung des Netzes dar. Sie kann in der Nachbearbeitung mit einer Analyse der Netzspannungen des alten Netzes verbunden werden.

Bei der Analyse können mit vorliegenden äußeren Weggrößen zugleich Kraftgrößen berechnet werden, die über einen analytischen Zusammenhang verknüpft sind (für den allgemeinen Fall siehe Gl. (6.29)). Für das Ortra-Verfahren im Speziellen wird in Gl. (8.43) dieser Zusammenhang hergeleitet. Bei anderen elasto-mechanischen Verfahren wie dem Membranverfahren [Gielsdorf und Gründig 1997] können Kraftgrößen alternativ über die Formeln des Weggrößenverfahrens aus den Weggrößen berechnet werden. Damit liegen die für die mechanische Analyse des geodätischen Netzes benötigten Größen im Form von inneren und äußeren Kraft- und Weggrößen vollständig vor.

Die Analyse der Verformung des Netzes beim Übergang auf ein neues Koordinatenreferenzsystem muss zwangsläufig mit der Netzspannungsanalyse des Ausgangsnetzes verbunden werden. Bei Übertragung der Verfahrensweise auf andere Ausgleichungsverfahren, die eine Homogenisierung anwenden, kann diese wie folgt durchgeführt werden:

Die Netztransformation soll analog zum Ortra-Verfahren durch Abbildung des unverformten Netzes der Referenzkonfiguration κ_R durch sog. „zwangsfreie Lagerung“ [Niemeier 2008] in das Zielsystem ausschließlich im Zielsystem erfolgen. Diese Lagerung stellt sicher, dass das Ausgangsnetz keinen mechanischen Belastungen ausgesetzt ist, die Verformungen bei der Netzgeometrie auslösen würden. Allein die innere Geometrie des weitgehend unverformten Ausgangsnetzes, die durch den Vorgang der „zwangsfreien Lagerung“ erhalten blieb, soll im Zielsystem begutachtet werden. Das unbelastete Netz ist auch Ausgangspunkt für die Bestimmung von Restklaffungen bei den identischen Punkten. Die Lagerung des durch die Netztransformation verformten Zielnetzes erfolgt in den identischen Punkten.

Durch die bekannten Analogien zwischen der Ausgleichungsrechnung und der Elastizitätstheorie lässt sich folgende neue Betrachtungsweise auf die Koordinatenwerte der Restklaffungen gewinnen: Die Koordinatenwerte für die Definition der Ausgangswerte für die Restklaffungsverteilung im Zielsystem sind aus mechanischer Sicht nicht nur reine Näherungskordinaten, sondern die mechanische Betrachtungsweise ermöglicht es,

die als Koordinatenwidersprüche identifizierten Restklaffungen als Basis für die Berechnung der Netzspannungen auf Grundlage von abgeleiteten äußeren Kräften zu verwenden (siehe Gl. (8.43) in Abschnitt 8.1.3).

Quasi-mechanische Eigenschaften der Kartenhomogenisierungsansätze und Steifigkeit der Ansätze bei mechanischer Belastung Bei linearisierten Ansätzen wie z. B. Ausgleichungen für Strecken- und Richtungsnetze kann es zu Umklappeffekten kommen, wenn Koordinatenwidersprüche eine bestimmte Größe überschreiten. Dadurch wird die Topologie von Linien und Flächen verletzt.

Hettwer 2003 schildert, dass beim Experimentieren mit dem Membranverfahren [Gielsdorf und Gründig 1997] in bestimmten Konstellationen ebenfalls Umklappeffekte bei Dreiecken aufgetreten sind, die die Topologie beeinträchtigen.

Eine vergleichbare Aufgabenstellung, die sich ebenfalls die Erhaltung der Topologie von Linien und Flächen zum Ziel setzt, ergibt sich bei der Geometrisierung und Rektifizierung manueller Skizzen für geodätische Aufnahmeprozesse [Helm 1998]. Eine moderne vermessungstechnische Planerstellung mittels eines Digitalen Feldplanes verwendet als Grundlage eine von Hand auf einem Touchscreen ausgefertigte, ins Digitale übertragene, unmaßstäbliche Feldskizze als graphische Information für die Felderfassung durch ein Tachymeter. Diese wird durch über Vermessung bestimmte Koordinaten fortlaufend ergänzt. Bei den dann geometrisch vorliegenden, maßstäblich und lagerichtig dargestellten Punkten wird anschließend die grafische Information der Feldskizze verankert [Helm 1995]. Dieser Prozess wird als Geometrisierung bezeichnet. Die Rektifizierung sorgt als folgender Prozess dafür, dass die bei der Geometrisierung in eine globale Lage versetzten Skizzeiteile mit den graphisch verbleibenden Planinhalten keine topologischen Fehler wie Überlappungen produzieren [Helm 1995]. Der Algorithmus für die Rektifizierung, der die Nachbarschaftsbeziehungen erhält, setzt eine auf Interpolation basierende, entfernungsabhängige Transformation um. Dabei ist es jedoch nicht wie bei Homogenisierungsverfahren notwendig, dass zusätzlich der unmaßstäbliche Planinhalt minimal verzerrt wird.

Nicht so stabil bei Erhaltung der Topologie wie das eben skizzierte Verfahren des digitalen Feldplans verhalten sich die klassischen Homogenisierungsverfahren, die den Nachteil haben, dass sie infolge der Linearisierungen im funktionalen Modell keine ausreichende mechanische Steifigkeit besitzen, um Topologiefehler im zugrunde liegenden Grundriss auszuschließen.

Die Analogie zwischen dem geodätischen Normalgleichungssystem und der Gesamtsteifigkeitsmatrix, die mit den Verfahren der Baustatik vertieft wurde (siehe Tabelle 6.1 in Abschnitt 6.2.1), erlaubt die Aussage, dass die Kräfteverhältnisse bei differentiellen Koordinatenänderungen für den umgeklappten Bereich nicht mit ausreichend gewichtbaren Beobachtungen ausgeglichen werden können.

Das Eintreten einer mechanischen Überlastungsreaktion, wenn die von den Koordinatenwidersprüchen verursachten äußeren Kräfte eine gewisse Größe überschreiten, kann auch mit den beim Linearisierungsvorgang entstehenden unterschiedlichen Steifigkeiten innerhalb der Beobachtungsgruppen erklärt werden. Beispielsweise enthält eine Ausgleichung, die mit einem klassischen Strecken- und Richtungsnetzansatz arbeitet, Beobachtungsgruppen für Streckennetz- und für Richtungsnetzbeobachtungen. Streckennetze, deren bei der Linearisierung auftretende Differentialgleichung von zweiter Ordnung ist, besitzen eine größere Steifigkeit als Richtungsnetze, deren Differentialgleichungen von vierter Ordnung sind [Borre 2001].

Dies entspricht auch den von der Bayerischen Vermessungsverwaltung in den 1990er Jahren gemachten Erfahrungen zur Homogenisierung von Strecken- und Richtungsnetzen [Hampp 1992].

Aus Sicht der Mechanik und der Numerik ist es von Vorteil, wenn im Zuge der Formulierung des funktionalen Modells der Ausgleichung bei den Beobachtungsgleichungen auf eine Linearisierung verzichtet werden kann. Die experimentelle Anwendung des Ortra-Ansatzes auf synthetische, extrem große Koordinatenwidersprüche von 30 m hat gezeigt, dass keine Umklappeffekte ausgelöst werden können. Bei großen Koordinatenwidersprüchen wurden große Verformungen beobachtet, die jedoch ohne Auswirkung auf die Topologie des Netzes der Pseudobeobachtungen und des zugrunde liegenden Katastergrundrisses blieben.

Mechanisch lässt sich die Robustheit des Systems mit den einzelnen Ortra-Kleinsystemen erklären (siehe Abb. 7.14), die die elastischen Einheiten des Ortra-Ansatzes bilden. Sie stellen ein mechanisches System von Stäben dar, die ausschließlich mit Dehnungen und Stauchungen in Richtung der Stabachse reagieren. Die Stäbe sind in einem im Koordinatenursprung liegenden, unverschieblichen Gelenk miteinander verbunden. Dieser Aufbau lässt keine Umklappeffekte der bei äußerer Belastung dehnweich reagierenden Stäbe zu.

Diese Robustheit lässt sich theoretisch auch bei Strecken- und Richtungsnetzen nachbilden, wenn allgemeine Winkelbedingungen (siehe Hettwer 2003) für jeden Punkt definiert werden. Diese können durch implizite Richtungsdefinitionen aufgebaut werden, wenn keine expliziten Definitionen vorhanden sind. Es finden sich jedoch in den Veröffentlichungen zur Kartenhomogenisierung keine Hinweise auf den Einsatz von Echtwinkelbedingungen, die einer numerischen Stabilisierung bei großen Widersprüchen dienen können.

Geraden- und Rechtwinkelbedingungen, Echtwinkelbedingungen In das funktionale Modell der Ausgleichung können als zusätzliche Gruppe von Beobachtungen geometrische Bedingungen der folgenden Art aufgenommen werden [Benning und Scholz 1990, Scholz 1992, Hettwer 2003]:

- Geradenbedingungen,
- Rechtwinkel- bzw. allgemein formulierte Winkelbedingungen,
- Abstände zwischen Punkten und Abstände zwischen Punkten und Geraden,
- Parallelitäten und
- Kreisbedingungen.

Liegen bei der Bezugssystemumstellung mittels Homogenisierungsverfahren große Netzspannungen im Ausgangssystem vor, dann führen sie zwangsläufig zu Grundrissverformungen bei der Verteilung der Koordinatenwidersprüche im Zielsystem (siehe Gl. (8.41) in Abschnitt 8.1.3).

Durch Einführung zusätzlicher geometrischer Bedingungen wird sichergestellt, dass die ursprünglichen, im Grundriss des Ausgangssystems implizit vorhandenen geometrischen Bedingungen bei der Minimierung der Netzspannungen in das Zielsystem überführt werden.

Die für den Grundriss definierbaren Bedingungen bilden einen großen Mehrwert für klassische Homogenisierungsverfahren beim Aufbau eines homogenen Datenbestandes und erhöhen die numerische Stabilität des Gleichungssystems. Dabei wird das funktionale Modell, das mit den verketteten Transformationen für die Neupunkte und zusätzlich mit Beobachtungen für die Nachbarschaftsbeziehungen der Neupunkte aufgebaut ist, durch ergänzende fiktive Beobachtungen l_B (siehe Gl. (7.3)) für die geometrischen Bedingungen erweitert.

Für die zusätzlichen geometrischen Beobachtungen l_B können außerdem stochastische Aussagen in Form von a-priori-Genauigkeiten formuliert werden, die in einer Kofaktorenmatrix Q_{BB} zusammengefasst werden. Durch Zuweisung eines hohen Gewichtes im stochastischen Modell wird eine geometrische Bedingung erzwungen.

Nach Definition der zusätzlichen Kofaktorenmatrix Q_{BB} kann mit Hilfe der Varianz der Gewichtseinheit σ_0^2 eine Gesamt-Kovarianzmatrix K_{BB} aufgebaut werden, die die ursprüngliche Kofaktorenmatrix Q_{ll} für die verkettete Transformationen einschließlich der Nachbarschaftsbeziehungen und die zusätzliche Kofaktorenmatrix Q_{BB} umfasst (siehe Gl. (7.3)). Mit dieser Formulierung wird es möglich, die unterschiedlichen Gruppen von Beobachtungen in Form einer Varianz-Komponentenschätzung zu überprüfen [Benning und Scholz 1990].

Der durch zusätzliche Gleichungen erweiterte Ausgleichungsansatz mit seinem funktionalen und stochastischen Modell kann in folgender Form dargestellt werden [Niemeier 2008]:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} l \\ l_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ v_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A_B \end{bmatrix} \cdot x}_{\text{funktionales Modell}} \quad \text{und} \quad \underbrace{K_{BB} = \sigma^2 \begin{bmatrix} Q_{ll} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_{BB} \end{bmatrix}}_{\text{stochastisches Modell}} \quad \text{und} \quad P_{BB} = \{Q_{BB}\}^{-1}. \quad (7.3)$$

Die fiktiven Beobachtungen für die zusätzlichen geometrischen Bedingungen werden über eine Funktion $f(x)$ der unbekanntenen Koordinaten x formuliert.

Für die Definition der vermittelnden Ausgleichung, wenn diese in linearisierter Form vorliegt, ist es für Hinzunahme der Zusatzbedingungen notwendig, die nichtlinearen Funktionen der unbekanntenen Koordinaten für die geometrischen Zusatzbedingungen ebenfalls in eine linearisierte Form zu übertragen. Diese Linearisierung drückt im funktionalen Modell der Term $A_B \cdot x$ in der unteren Zeile von Gl. (7.3) aus.

Mit der zusätzlichen Formulierung von geometrischen Bedingungen werden bei einer Kartenhomogenisierung, die in einer simultanen Ausgleichung durchgeführt wird, zusätzliche, wenn auch beabsichtigte Punktbewegungen in der Nachbarschaft ausgelöst, wenn vorher explizite Nachbarschaftsbeziehungen z. B. mit Hilfe von Dreiecksseiten aus einer Delauney-Triangulation [Aurenhammer 1991] definiert wurden. Der Begriff der simultanen Ausgleichung bezeichnet nach Hettwer und Benning 2003 den Fall, dass sämtliche Schritte einer Kartenhomogenisierung in einer einzigen Ausgleichung durchgeführt werden.

Der Gegenbegriff dazu ist die sequentielle Ausgleichung, wenn die Kartenhomogenisierung in mehreren Ausgleichungen abgebildet wird [Hettwer und Benning 2000]. Dort können, über die Grenzen der Ausgleichungen hinweg, keine Punktbewegungen in der Nachbarschaft ausgelöst werden.

Automatisch ermittelte geometrische Zusatzbedingungen Geometrische Zusatzbedingungen, die nicht im Zuge der Vorbereitung einer Kartenhomogenisierung interaktiv definiert werden, sind zunächst Hypothesen, deren Gültigkeit angenommen wird, jedoch nicht verifiziert ist. Diese Art von zusätzlichen Bedingungen können während der Phase der Beobachtungsdefinition durch das Ausgleichungssystem selbst automatisiert vorgenommen werden [A. Rose 1988].

Die automatisierte Definition der geometrischen Bedingungen erfordert zusätzliche Rechenzeit. Zudem kann durch Hinzunahme gegenseitiger Beziehungen zwischen den Geometrien im Liegenschaftskataster die Größe des Normalgleichungssystems beträchtlich wachsen. A. Rose 1988 gibt für die Anzahl der zusätzlichen Beobachtungen das 1,5-Fache der Anzahl der in der Ausgleichung eingeführten Punkte an. Hampp 1992 zeigt am Beispiel einer einzelnen Flurkarte, in der mehrere Flüsse vorkommen, dass dort 35 000 zusätzliche geometrische Bedingungen erzeugt werden.

Auswirkung der geometrischen Zusatzbedingungen auf die Rechenzeit Benning und Scholz 2010 stellen dar, wie sich die zusätzlichen geometrischen Bedingungen nach Abschluss der Definition der Beobachtungsgleichungen, die zum einen für die Verkettung der lokalen Koordinatentransformationen, zum anderen für den Aufbau der Nachbarschaftsbeziehungen über Delauney-Triangulation aufgestellt werden, auf die Rechenzeit auswirken. Die Rechenzeit verlängert sich um 40 % gegenüber dem alleinigen Aufbau des Raumbezugs im Zielsystem der lokalen verketteten Systeme und der Nachbarschaft.

Die systemtechnische Umsetzung der Ansätze zum automatischen Finden der geometrischen Zusatzbedingungen einschließlich der automatisierten Fehlersuche [siehe z. B. A. Rose 1988] durch Data Snooping [Baarda 1968] wurde vor gut 30 Jahren realisiert. A. Rose 1988 beschreibt einen Ansatz zur automatischen Aufstellung der Geraden- und Rechtwinkelbedingungen und zusätzlich der Fehlerkriterien, die zum Ausschluss von Zusatzbedingungen führen.

Gründe für die Einführung von Echtwinkelbedingungen bei einem Homogenisierungsverfahren für die Bezugssystemumstellung Das Verfahren nach A. Rose 1988 ist bei einem Umformungs- und Homogenisierungsverfahren für ein großes Bundesland wie Bayern aus praktischen Gründen kaum einsetzbar. Dort ist es nicht möglich, Ausgleichungen ein- oder mehrfach zu wiederholen, um beispielsweise fehlerhaft aufgestellte Zusatzbedingungen aus den Beobachtungsgleichungen auszuschließen. Im Falle der Benutzung von Geraden- und Winkelbedingungen wäre zusätzlich die organisatorische Aufgabe zu lösen, nach der Bezugssystemumstellung die Zusatzbedingungen auf unabhängigem Weg zu überprüfen und fehlerhafte Bereiche zu korrigieren.

Für die Umstellung des Liegenschaftskatasters in Bayern galt die Vorgabe, dass die Ausgleichungen in Verbindung mit notwendigen Vor- und Nachbearbeitungsprozessen einen Zeitraum von zwei Wochen nicht überschreiten sollen, um den notwendigen Produktionsstopp beim Liegenschaftskataster möglichst kurz zu halten.

Aufgrund der sich ergebenden Größen der Normalgleichungssysteme N (siehe Gl. (A.16)), die für größere Vermessungsamtsbezirke eine Dimension von 10×10 Millionen und größer erreichen (siehe Tabelle 9.1 in Abschnitt 9.1), und den sich daraus ergebenden Anforderungen an Numerik und Prozesse, mussten die verfügbaren Ressourcen und Rechenzeiten optimal genutzt werden.

So sollten Algorithmen vermieden werden, die die Laufzeit der Prozesse signifikant erhöhen. Benning und Scholz 2010 geben an, dass eine Delauney-Triangulation vom Algorithmus her zeitaufwändig sein kann. In Bayern konnte auf eine Dreiecksvermaschung mittels Delauney-Triangulation generell verzichtet werden, da die Nachbarschaftsbeziehungen implizit im Ortra-Ansatz enthalten sind.

Anstelle der zusätzlichen geometrischen Bedingungen wurde in Bayern mit dem Ortra-Verfahren ein Ansatz gewählt, der Rechtwinkelbedingungen im Modell enthält. Die Ortra-Kleinsysteme definieren mit Hilfe der Rechtwinkelbedingungen eine konforme Abbildung.

Die Rechtwinkelbedingungen werden im funktionalen Modell wie folgt umgesetzt: Innerhalb eines Ortra-Kleinsystems (siehe Abb. 7.3) werden für einen Winkel in Beobachtungsgleichung (7.5) zwei Beobachtungen vom Ursprung des Ortra-Systems in Richtung zweier weiterer Punkte (Gl. (7.4)) definiert, für die in der dazugehörigen Beobachtungsgleichung keine Richtungsverbesserungen vorgesehen sind. Das funktionale Modell definiert das einzelne Ortra-Kleinsystem als Ganzes, nicht die einzelnen Stäbe des Ortra-Kleinsystems, und weist diesem Gesamtsystem vermittelnd in der Ausgleichung eine Verschiebung, einen Maßstab und eine Drehung als Transformationsparameter zu.

Bei einer Grundstücksgrenze, von der eine Anzahl n Grundstücksgrenzen rechtwinklig oder auch schiefwinklig abgehen, werden für jede einzelne abgehende Grundstücksgrenze Rechtwinkelbedingungen definiert. Für den gesamten Grenzverlauf wird jedoch keine Geradenbedingung wie bei Hettwer und Benning 2000 in den Ortra-Ansatz eingeführt, die mit Punktbewegungen in der Nachbarschaft verbunden ist. Bei der Formulierung des funktionalen Modells im Ortra-Ansatz werden bei diesen Rechtwinkelbedingungen globale Verbesserungen zugelassen (siehe Abb. 7.14), die in Gl. (7.5) als Verbesserungen \hat{v}_{E_2} und \hat{v}_{N_2} auftreten und in Abschnitt (7.3.3) als Sekundärverschiebungen identifiziert werden.

Durch hohe Gewichtung der Beobachtungen, die in ihrer Gesamtheit eine zu erhaltende Gerade definieren, könnten theoretisch im Ortra-Ansatz Geradenbedingungen zur Verfügung gestellt werden, bei denen in den Teilabschnitten der Geraden die gegenseitigen Verbesserungen in den einzelnen Ortra-Kleinsystemen gleich Null werden. Diese nur automatisiert einführbaren Zusatzbedingungen würden jedoch analog zu den obigen Ausführungen eine praktisch kaum umsetzbare Verifizierung nach der ETRS89/UTM-Umstellung notwendig machen.

7.3. Das Ortra-Verfahren als ETRS89-/UTM-Überführungsansatz

7.3.1. Mathematischer und ausgleichungstechnischer Teil des Ortra-Verfahrens

Der mathematische und ausgleichungstechnische Teil des Ortra-Verfahrens verfolgt einen hierarchischen Ansatz. Dabei wird ein übergeordnetes Netz aus Pseudobeobachtungen gebildet und durch Einfügen weiterer Netze verdichtet (Abb. 7.1).

Für die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen (Gl. (A.14) in Abschnitt A.2) werden nacheinander Netze aus Pseudobeobachtungen für die Objektbereiche Flurstücke, Gebäude und sonstige Bauwerke aufgebaut [Hampp und Glock 2017, Glock und Birkenbeul 2018, Glock, Bauer u. a. 2019]. Der Objektbereich sonstige Bauwerke enthält in Bayern kleinere bauliche Anlagen wie Denkmäler, Brunnen, Treppen und Mauern.

Die hierarchische Netzverdichtung ist dadurch charakterisiert, dass bereits nach ETRS89/UTM überführte Punkte einer vorhergehenden Ausgleichung als fehlerfreie identische Punkte in die nachfolgenden Ausgleichungen eingeführt werden. Dort werden sie als Ausgangspunkte für die Definition von Anschlussbeobachtungen verwendet (Abb. 7.1).

In Bayern wird bei der Umstellung des Liegenschaftskatasters der Objektbereich Flurstücke als erstes nach ETRS89/UTM überführt, da er die höchste rechtliche Relevanz als Eigentumsnachweis besitzt. Darauf folgen die Ausgleichungen für die Gebäude und die sonstigen Bauwerke [Hampp und Glock 2017, Glock, Bauer u. a. 2019].

Mittels Pseudobeobachtungen werden Verbesserungsgleichungen (Gl. (7.5)) für die Grundrissgeometrie jedes Objektbereichs definiert. Zum Aufbau des künstlichen Netzes werden die im Liegenschaftskataster für den Grundriss vorliegenden Objektarten mit punkt-, linien- und flächenförmigen Geometrien verwendet.

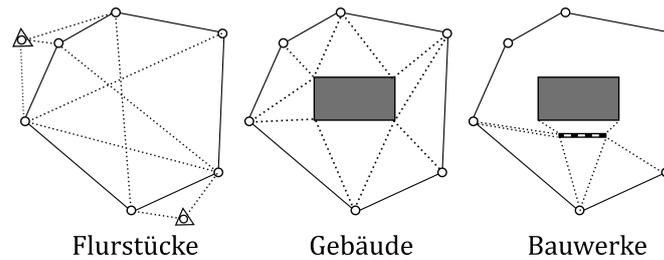


Abbildung 7.1.: Hierarchischer Ansatz beim Ortra-Verfahren.

Aufgabe der Pseudobeobachtungen ist es, den Grundriss exakt in Form von Beobachtungen nachzubilden. Darüber hinaus sorgen zusätzliche Beobachtungen für eine weitere Versteifung des Grundrisses.

Die Beobachtungen, die von einem nach ETRS89/UTM zu überführenden Punkt ausgehen, definieren ein Ortra-System. Später in Abschnitt 7.3.3 werden für die Darstellung der mechanischen Analogien, die im Ortra-Verfahren existieren, die Beobachtungen als mechanische Stäbe interpretiert (Abb. 7.12).

Da für jeden in die Ausgleichung einzuführenden Punkt mindestens zwei Pseudobeobachtungen aufgestellt werden, ergibt sich durch die Vielzahl der zu überführenden Punkte eine Massenproblematik (siehe Abb. 7.2). Meist werden je Grundrisspunkt zum Aufbau zusätzlicher Versteifungen zu gegenüberliegenden Polygonseiten drei bis vier Pseudobeobachtungen eingeführt. Für die identischen Punkte werden durch Einbeziehung aller benachbarten Punkte in einem durch das Projekt gewählten Umgebungsbereich (hier: 30 m Radius) eine Vielzahl von Pseudobeobachtungen definiert.

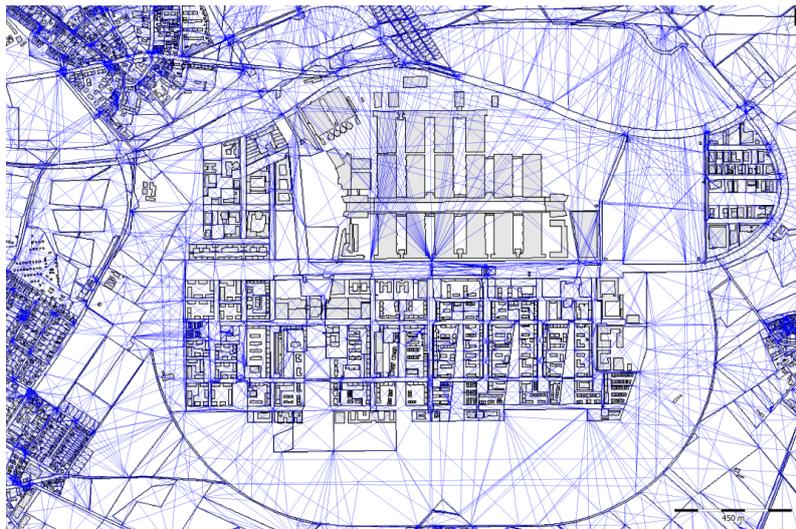


Abbildung 7.2.: Vernetzung der Flurstücksgeometrien durch künstliche Beobachtungen (Pseudobeobachtungen), München, Messegelände Riem.

Ausgleichung der Flurstücke

Für die Flurstücke werden zwei Typen von Grundrissbeobachtungen definiert [Hampp und Glock 2017, Glock und Birkenbeul 2018]:

- Beobachtungen in Richtung der Flurstücksgrenzen einschließlich der Beobachtungen zur Versteifung des Flurstücks entlang der Winkelhalbierenden und
- Beobachtungen zu den identischen Punkten.

Beobachtungen in Richtung der Flurstücksgrenze Für jeden Grenzpunkt eines Flurstücks wird ein Ortra-System aufgebaut (Abb. 7.3) und in diesem die Strecken- und Winkelbeziehungen zu den Grenzpunk-

ten in der unmittelbaren Nachbarschaft definiert. Durch Dehnung und Drehung des Koordinatensystems in Verbindung mit minimalen Verbesserungen bei den Nachbarschaftspunkten, die als $\hat{\nu}_{E_2}$ und $\hat{\nu}_{N_2}$ in Gl. (7.5) definiert sind, werden die Nachbarschaftsbeziehungen in ETRS89/UTM abgebildet.

Durch Definition von Beobachtungen über Koordinatendifferenzen zu den Nachbarpunkten wird eine lokale Metrik aufgebaut, die nach ETRS89/UTM übertragen wird. Auf diese Weise werden die definierten Nachbarschaftsbeziehungen im Zuge der Ausgleichung so gut wie möglich erhalten.

Die zweidimensionale kartesische Koordinatentransformation über vier Transformationsparameter, in der Geodäsie als Ähnlichkeitstransformation bezeichnet, ist Ausgangspunkt für die Definition von orthogonalen Beobachtungen des Ortra-Verfahrens (Gl. (7.4)). Sie baut Beziehungen zwischen Ausgangs- und Zielkoordinatensystem über die vier Transformationsparameter Maßstab, Drehwinkel und zwei Translationen auf.

In die Ausgleichung für das Ortra-Verfahren gehen die vier Parameter für jedes Ortra-System als Unbekannte ein.

Für die Definition von Beobachtungen zwischen benachbarten Flurstücksgrenzpunkten in Abb. 7.3 wird folgende Gleichung verwendet, die als Grundformel des Ortra-Verfahrens bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} E_2 &= E_1 + o_1 (x_2 - x_1) + a_1 (y_2 - y_1), \\ N_2 &= N_1 + a_1 (x_2 - x_1) - o_1 (y_2 - y_1). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Die von der Ausgleichung verwendeten korrespondierenden Verbesserungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} 0 + \hat{\nu}_{E_2} &= \hat{E}_1 + \hat{o}_1 (x_2 - x_1) + \hat{a}_1 (y_2 - y_1) - \hat{E}_2, \\ 0 + \hat{\nu}_{N_2} &= \hat{N}_1 + \hat{a}_1 (x_2 - x_1) - \hat{o}_1 (y_2 - y_1) - \hat{N}_2. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Das mechanisch motivierte Gewichtsmodell des Ortra-Verfahrens wird in Abschnitt 8.1.1 und 8.1.2 bei den Ausgleichungen zur Erzeugung der Referenzkonfiguration κ_R und Momentankonfiguration κ_m dargestellt.

Zu jedem benachbarten Grenzpunkt auf der gemeinsamen Flurstücksgrenze wird eine Pseudobeobachtung gebildet (siehe Abb. 7.3).

Dabei wird das Flurstückspolygon im Uhrzeigersinn durchlaufen und vom Grenzpunkt aus je ein Vorblick zu dem im Uhrzeigersinn folgenden Punkt des Polygons und ein Rückblick zum zurückliegenden Punkt definiert.

Mit Hilfe der so für das ganze Umformungsgebiet definierten Beobachtungen (Gl. (7.4)) wird eine exakte Nachbildung des Grundrisses des Objektbereichs Flurstücke erreicht.

Beobachtungen in Richtung der Winkelhalbierenden Zur Versteifung des Grundrisses sind zusätzliche Beobachtungen als Querverstrebungen zu den gegenüberliegenden Grenzen jedes Flurstücks erforderlich. Für deren Konstruktion werden jeweils Winkelhalbierende in die von den Ausgangspunkten abgehenden Grenzen definiert [Glock und Birkenbeul 2018].

In Abb. 7.3 wird beim Aufbau der Beobachtungsgleichungen, wenn das Straßenflurstück, in dem sich der Katasterfestpunkt (KFP) befindet, im Uhrzeigersinn durchlaufen wird, zunächst

1. für den Flurstücksgrenzpunkt 1 in Richtung Flurstücksgrenzpunkt 2 ein Vorblick und
2. für im Gegenuhrzeigersinn zurückliegenden Grenzpunkt 3 ein Rückblick

gebildet. Auf Basis der Vektoren für Vor- und Rückblick wird eine Winkelhalbierende definiert, die durch einen gestrichelten Vektor dargestellt ist. Dieser trifft auf der gegenüberliegenden Seite des Flurstücks im Schnittpunkt S auf die Flurstücksgrenze. Der dem Schnittpunkt S nächstgelegene Grenzpunkt 4 wird als Endpunkt der Beobachtung gewählt, und man erhält die Querverstrebungs-Beobachtung 1 - 4.

Durch die im Flurstückspolygon gebildeten Querverstrebungen wird einer geometrischen Entartung bei langgestreckten Flurstücken wie z. B. Flussläufen oder Straßen entgegengewirkt [Hampp und Glock 2017]

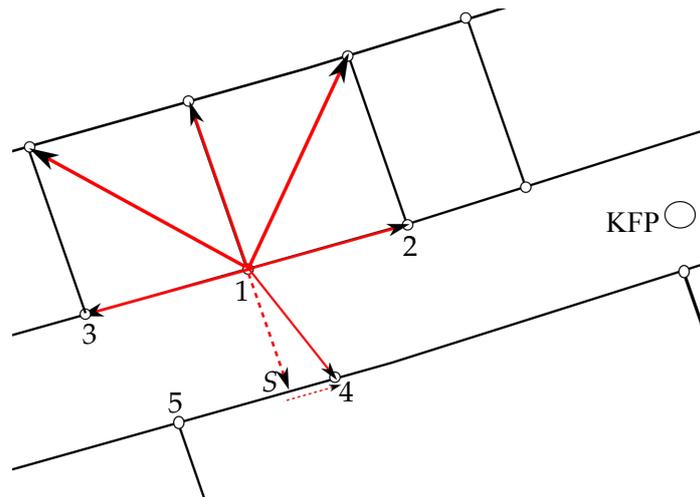


Abbildung 7.3.: Definition eines Ortra-Kleinsystems für den Flurstücksgrenzpunkt 1. Mit Hilfe der mit einer gestrichelten Linie angedeuteten Winkelhalbierenden erfolgt eine Beobachtungsdefinition für eine Querverstrebung zwischen dem Ausgangspunkt 1 und dem zum Schnittpunkt S der Winkelhalbierenden nächstgelegenen Flurstücksgrenzpunkt 4. (KFP = Katasterfestpunkt)

Grundrissbeobachtungen zu den identischen Punkten Für die Umformung der Flurstücke stehen in Bayern über 880.000 identische Punkte zur Verfügung [Glock, Bauer u. a. 2019], zum größten Teil Katasterfestpunkte übergeordneter Genauigkeit, die mit Hilfe von Globalen Navigations satellitensystemen (GNSS) wie dem Global Positioning System (GPS) bestimmt wurden. Als identische Punkte werden auch Flurstücksgrenzpunkte genutzt, für die Koordinaten in der Regel aus GPS-Messungen vorliegen. Die identischen Punkte sind für den Ortra-Ansatz der übergeordnete, in ETRS89/UTM vorgegebene, homogene Koordinatenrahmen, in dem das in GK aufgebaute künstliche Netz eingespannt wird.

Als Pseudobeobachtungen werden für jeden identischen Punkt Beobachtungen zu allen Flurstücksgrenzpunkten im Umkreis von 30 m gebildet (siehe Abb. 7.4). Der Wert von 30 m wurde empirisch festgelegt. Falls sich in dem Umkreis keine Flurstücksgrenzpunkte befinden, werden in dem Flurstück mit dem identischen Punkt über alle Richtungen verteilt Beobachtungen zu den Grenzpunkten des Flurstücks generiert.

Für die Beobachtungen von den identischen Punkten zu den benachbarten Flurstücksgrenzpunkten wird die Verbesserungsgleichung aus Gl. (7.4) angewendet. Die identischen Punkte gehen über den Ansatz *Koordinaten*

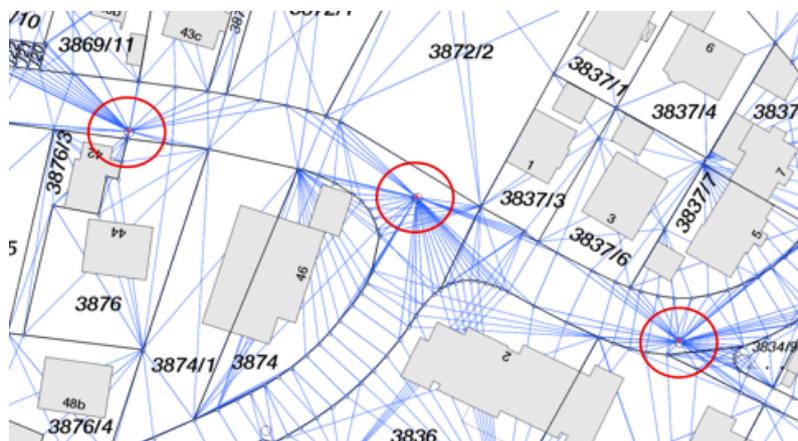


Abbildung 7.4.: Beobachtungsdefinition für die identischen Punkte.

als fiktive Beobachtungen [Niemeier 2008] in die Verbesserungsgleichungen ein:

$$\begin{aligned} E_i + \hat{\nu}_{E_i} &= \hat{E}_i, \\ N_i + \hat{\nu}_{N_i} &= \hat{N}_i, \end{aligned} \tag{7.6}$$

Ausgleichung der Gebäude und der sonstigen Bauwerke

Die Ausgleichung für Gebäude wird im hierarchischen Ansatz des Ortra-Verfahrens (Abb. 7.1) nach der Flurstücksausgleichung durchgeführt. Anschließend erfolgt die Ausgleichung für die sonstigen Bauwerke.

Mit Hilfe von zwei aufeinanderfolgenden Ausgleichungen erfolgt zunächst die Einpassung der Gebäude und anschließend der sonstigen Bauwerke in den bereits vorliegenden homogenisierten Flurstücksrahmen. Bei Durchführung der Ausgleichung für sonstige Bauwerke, z. B. Mauern, steht damit bereits ein homogenisierter Gebäudebestand zur Verfügung. Er dient als Grundlage für die Einhaltung von Abständen der Bauwerke zu Gebäuden, die wiederum über Definition von Beobachtungsgleichungen erfolgt. Der Aufbau des Ortra-Ansatzes für sonstige Bauwerke entspricht mit Ausnahme von Überdachungen dem Ansatz für Gebäude.

Als identische Punkte stehen der Gebäudeausgleichung zur Verfügung:

- Festpunkte des Objektbereichs Netzpunkte, die bereits bei der Flurstücksausgleichung als identische Punkte verwendet wurden und
- die in der Flurstücksausgleichung nach ETRS89/UTM überführten Flurstücksgrenzpunkte.

Folgende Anforderungen an die Gebäudeausgleichung sind im funktionalen Modell abzubilden [Hampff und Glock 2017]:

- Die im Ausgangssystem existierenden Abstände der Gebäude zu Flurstücksgrenzen sollen beim Übergang nach ETRS89/UTM erhalten bleiben.
- Bei vorhandenen Netzspannungen in der Umgebung des Gebäudes soll bei grenznahen Gebäuden die Erzeugung von Überbauten, d.h. dass Gebäudeteile im Nachbarflurstück zu liegen kommen, verhindert werden.
- Bei der Verteilung der Netzspannungen soll die Form der Gebäude möglichst gut erhalten bleiben.

Der bestmögliche Erhalt der Gebäudeform, der nur minimale Verzerrungen des Gebäudegrundrisses beim Übergang in das neue Koordinatenreferenzsystem erlaubt, ist als wichtigste Forderung an den Ansatz der Gebäudeausgleichung zu sehen. Mit Gl. (8.49) in Abschnitt 8.2.1 wird nachgewiesen, dass die Restklaffungen durch das funktionale Modell linear verteilt werden.

Zur Umsetzung der o. a. Anforderungen werden folgende Vernetzungsmethoden eingesetzt:

- Gebäudeinnenvernetzung,
- Gebäudezwischenvernetzung und
- Gebäudeaußenvernetzung.

Gebäudeinnenvernetzung Analog zu den Flurstücken werden zunächst für alle Gebäudelinienn Pseudo-beobachtungen in Form von Vor- und Rückblicken formuliert, so dass jede Gebäudelinie wieder zweimal, d. h. in originaler und in umgekehrter Richtung, in den über Gl. (7.5) aufgebauten Verbesserungsgleichungen definiert ist.

Die eigentliche Gebäudeinnenvernetzung sorgt durch Versteifung der Gebäudepolygone durch zusätzliche Elemente im Inneren dafür, dass die Gebäudeform verzerrungsarm übertragen wird. Der Aufbau der Gebäudeinnenvernetzung erfolgt wie bei der Flurstücksvernetzung. Zur Verstärkung des Gebäudegrundrisses wird bei jedem Gebäudepunkt eine Winkelhalbierende zwischen Vor- und Rückblick zu den benachbarten Punkten definiert. Als Endpunkt für eine Querverstrebung wird auf der gegenüberliegenden Seite des Gebäudes ein Anschlusspunkt gesucht, der sich in der Nähe des Schnittpunktes der Winkelhalbierenden mit der Gebäudelinie befindet.



Abbildung 7.5.: Beobachtungsdefinitionen für Gebäudeinnenvernetzung München, Messegelände Riem.

Gebäudezwischenvernetzung Bei der Gebäudezwischenvernetzung werden über Pseudobeobachtungen Abstände zwischen Gebäude definiert, um beim Abbau lokaler Netzspannungen im Zuge der Ausgleichung möglichen topologischen Fehlern wie Gebäudeüberlagerung und Gebäudeüberschneidung im Zielsystem entgegenzuwirken [Hampp und Glock 2017]. Im Hintergrund wirkt für die Erhaltung speziell der Gebäudeabstände das allgemeine Gesetz der minimalen Formänderung, das Basis für die verzerrungsarme Übertragung aller Geometriebeziehungen beim Übergang in das neue Koordinatenbezugssystem ETRS89/UTM ist. Bei der Gebäudezwischenvernetzung werden für jeden Gebäudepunkt im Umkreis von 30 m die nächstgelegenen Punkte benachbarter Gebäude ermittelt. Unter der Bedingung, dass die Gebäudelinie zwischen zwei gefundenen Gebäudepunkten ebenfalls im Fangkreis liegt, werden zwei Pseudobeobachtungen zu diesen Gebäudepunkten erstellt. Wenn die neu definierten Pseudobeobachtungen nicht das eigene Gebäude schneiden, werden diese in die Gebäudeausgleichung aufgenommen.

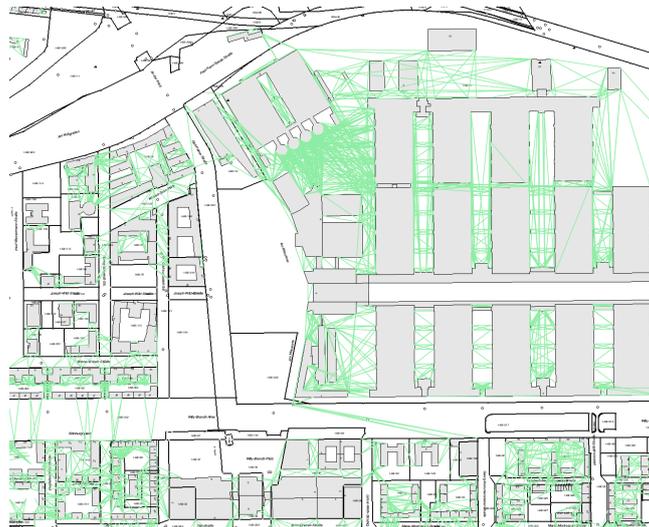


Abbildung 7.6.: Gebäudezwischenvernetzungen. Ausschnitt München, Messehallen Riem.

Gebäudeaußenvernetzung Bei der Gebäudeaußenvernetzung wird über Pseudobeobachtungen von Gebäudepunkten in Richtung der nächstgelegenen Flurstücksgrenzen und Grenzpunkte der Bezug des Gebäudes zum umgebenden Flurstück hergestellt. Dabei geht man folgendermaßen vor: Vom Gebäudepunkt aus werden die beiden Gebäudelinen, die im Gebäudepunkt enden, nach außen verlängert, bis sie eine Grenzlinie des

umgebenden Flurstücks schneidet. Anschließend werden vom Schnittpunkt aus Anfangs- und Endpunkt der gefundenen Flurstücksgrenze aufgesucht und mit dem Gebäudepunkt aus durch zwei Pseudobeobachtungen verknüpft. Falls ein Gebäude in der Verlängerung zum Flurstück steht, werden für die Gebäudelinie die Beobachtungen zum Flurstück verworfen und durch Beobachtungen zu dem gefundenen Gebäude ersetzt, die zu weiteren Beobachtungen für die Gebäudezwischenvernetzung führen.

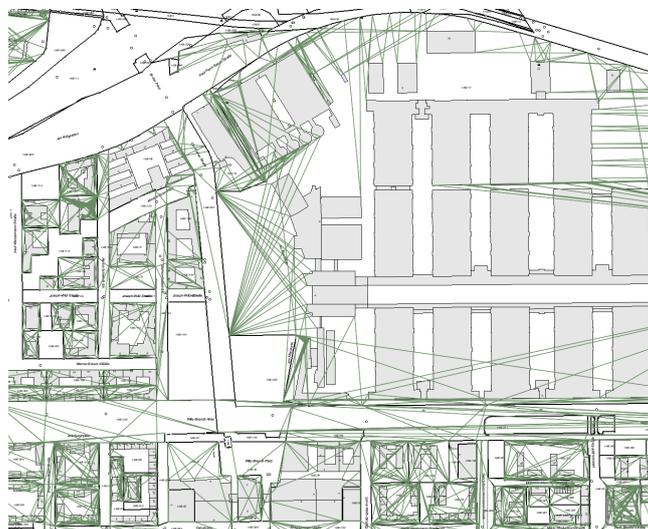


Abbildung 7.7.: Gebäudeaußenvernetzungen. Ausschnitt München, Messehallen Riem.

Ausgleichung für die Bestimmung der Gitterpunkte des NTV2-Kundenansatzes

NTv2 ist die Abkürzung für National Transformation Version 2, ein weit verbreitetes Transformationsverfahren, das in den 1990er Jahren in Kanada entwickelt wurde. Das Transformationsverfahren NTV2 ist ein gitterbasiertes Verfahren zur Umformung von Daten, die in ebenen kartesischen Koordinaten gegeben sind, von einem vordefinierten Ausgangs- in ein vordefiniertes Ziel-Koordinatenreferenzsystem [Ahrens und Böhmer 2010, Glock, Bauer u. a. 2019].

Der NTV2-Ansatz verarbeitet Differenzen in geographischen Koordinaten in Verbindung mit geodätischen Abbildungen. NTV2 stellt bei der Überführung des Liegenschaftskatasters nach ETRS89/UTM in Bayern den Kundentransformationsansatz dar, d. h. Anwender erhalten mit NTV2 ein einfaches Werkzeug, um ihre auf das Liegenschaftskataster referenzierten Fachdaten auf die neuen, in ETRS89/UTM definierten Koordinaten zu transformieren.

Basis für den Aufbau der Transformationsvorschrift ist eine Datei von Gitterpunkten mit einer Maschenweite von 30 m (≈ 1 Bogensekunde auf dem Meridian in mittlerer Breite).

Für das in Binärform in einer NTV2-Datei speicherbare regelmäßige Gitter werden für alle Gitterpunkte Verschiebungsvektoren definiert, die als geographische Shiftwerte bezeichnet werden, siehe auch Abb. 7.8 [Ahrens und Böhmer 2010, Glock und Birkenbeul 2018]. Für die Transformation vom Abbildungssystem des Ausgangs- in das Abbildungssystem des Ziel-Koordinatenreferenzsystem wie z. B. von GK4 nach UTM32 oder UTM33 werden die geographischen Shiftwerte als Differenzen zwischen den geographischen Koordinaten des Ausgangs- und Zielsystems gebildet. Diese Differenzen werden für die Gitterpunkte in der Einheit Bogensekunde bereitgestellt.

Zwischen den Gitterpunkten kann für eine gegebene Umformungsaufgabe die geographische Koordinate im Zielsystem bilinear aus den zur Verfügung gestellten Shiftwerten interpoliert werden, um in einem weiteren Schritt die vom Anwender gewünschte Abbildung zu berechnen.

Für die Bestimmung der Gitterpunkte des NTV2-Verfahrens wird in neuartiger Anwendung eine Ausgleichung mit den Beobachtungsgleichungen (7.5) und (7.6) des Ortra-Ansatzes durchgeführt (Abb. 7.9).

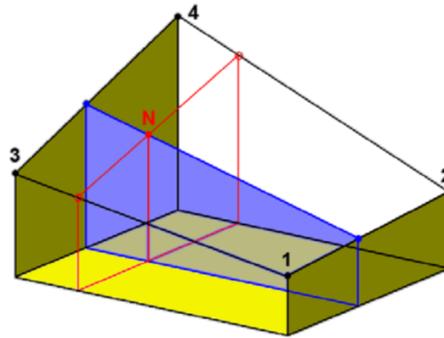


Abbildung 7.8.: NTV2-Gitter, bilineare Interpolation für Neupunkt N aus den Shiftwerten der 4 Gitterpunkte (Abb. aus [Ahrens und Böhmer 2010]).

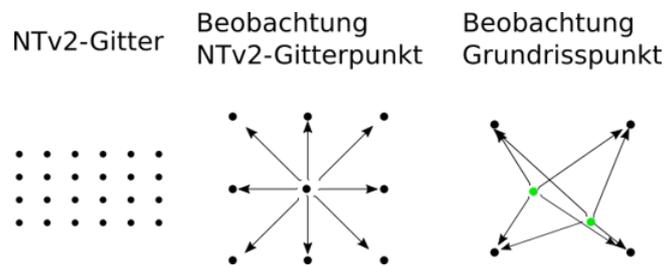


Abbildung 7.9.: Beobachtungsaufbau für Bestimmung der Gitterpunkte einer NTV2-Datei.

Definition der Beobachtungsgleichungen Dabei wird für den Aufbau der notwendigen mechanischen Steifigkeit des NTV2-Gitters von jedem NTV2-Gitterpunkt aus eine achtfache Nachbarschaft zu den umliegenden Gitterpunkten definiert (Abb. 7.9, mittleres Bild). Diese durch Ortra-Systeme aufgebaute Steifigkeit trägt zur Minimierung von Verzerrungen bei, wenn in der Umgebung eines NTV2-Gitterpunktes keine Anschlusspunkte aus den bereits nach ETRS89/UTM überföhrten Objekten existieren. Die Gitterpunkte des NTV2-Gitters werden als Unbekannte in die Ausgleichung eingeföhrt. Für die Definition der Beobachtungen wird Gl. (7.5) verwendet.

Bei vorhandenen Anschlusspunkten (Abb. 7.9, rechtes Bild) werden Beobachtungen vom Gitterpunkt zum Anschlusspunkt definiert. Die Anschlusspunkte werden ebenso wie in den vorhergehenden Ausgleichungen als Unbekannte eingeföhrt und für sie zusätzliche fiktive Koordinatenbeobachtungen nach (7.6) mit entsprechendem Gewicht definiert (siehe Gl. (8.5), (8.6) in Verbindung mit Gl. (8.4)).

7.3.2. Anwendung des Weggrößenverfahrens auf das Ortra-Verfahren, Beziehung zum Kraftgrößenverfahren

Weder das Weggrößenverfahren noch das Kraftgrößenverfahren lassen sich in ihrer Standardform unmittelbar auf das Ortra-Verfahren anwenden. Im Folgenden kann gezeigt werden, dass das Ortra-Verfahren in Anwendung von Kapitel 8 im weiten Sinne als Kraftgrößenverfahren interpretiert werden kann.

Weggrößenverfahren

Die in der vermittelnden Ausgleichung für den Ortra-Ansatz bestimmten Verbesserungen sind im Gegensatz zu einem Streckennetz keine elastischen Längenänderungen. Bestimmt man aus den im Ortra-System vorliegenden Gleichgewichtsbedingungen zunächst Kräfte und ordnet ihnen im Folgenden weitere Werkstoffeigenschaften zu, dann erhalten sie elastische Eigenschaften.

Eine weitere Besonderheit des Ortra-Verfahrens, die die Anwendung eines Standard-Weggrößenverfahrens einschränkt, ist die Identifizierung von Elementverformungen und Knotenverschiebungen aus den Ergebnissen

der Ortra-Ausgleichung. Zur Bereitstellung der Elementverformungen v müssen die sich als elastische Längenänderungen bei den Ortra-Kleinsystemen auswirkenden Maßstäbe m zunächst aus den für ein Ortra-System neben seiner Lage definierten Unbekannten a und o der Ausgleichung abgeleitet werden.

Anschließend sind zusätzliche, nicht elastisch begründete Knotenverschiebungen r in Analogie zu den Knotenverschiebungen der Stäbe eines Fachwerks zu definieren. Aus genannten Gründen muss für das Ortra-Verfahren ein erweitertes Weggrößenverfahren aufgebaut werden.

Kraftgrößenverfahren

Das Ortra-Verfahren kann in Anwendung von Kapitel 8, Abschnitt 8.1.3 als Kraftgrößenverfahren interpretiert werden. Aufgrund der v. a. in Kapitel 6 dargestellten Analogien von Rechenansätzen der Ausgleichungsverfahren und baustatischen Verfahren (siehe insbesondere Tabelle 6.1 und 6.2) können beim Ortra-Verfahren Schritte des Kraftgrößenverfahrens mit analogen Mitteln der Ausgleichungsrechnung durchgeführt werden.

Bei den im Ausgleichungssystem definierten n identischen Punkten existieren kinematische Bindungen, die nach dem Prinzip „ein Punkt, ein Satz von Koordinaten“ sicherstellen, dass die gemessene und die transformierte Koordinate identisch sind. Wenn durch niedrige Gewichtsdefinition nach Gl. (8.3) Bindungslösungen bei den Festpunkten erfolgen, ergeben sich bei der Ausgleichungssituation, die in paralleler Sichtweise auf das analoge Kraftgrößenverfahren als Hauptsystem interpretiert werden soll, an den n identischen Punkten zusätzliche Verformungen, um unbekannte Kraftgrößen des statischen Systems des Ortra-Verfahrens zu ermitteln. In Analogie zum Kraftgrößenverfahren benötigt das Ortra-Verfahren zur Bestimmung der Kraftgrößen ebenfalls Gleichgewichtsbedingungen. Der Lastzustand des Hauptsystems ist, wie in Kapitel 8 gezeigt wird, durch folgende Besonderheit gekennzeichnet: Durch niedrige Gewichtsvergabe ist sichergestellt, dass der im Ausgangssystem aus dem Liegenschaftskataster aufgebaute und schließlich durch den Ortra-Ansatz vernetzte Grundriss nahezu spannungsfrei nach ETRS89/UTM überführt wurde. Infolge der spannungsfreien Übertragung können die Schnittgrößen des Lastzustandes zu Null gesetzt werden.

Die beim Kraftgrößenverfahren folgende Bestimmung der Schnittuferklaffungen bei den gelösten kinematischen Bindungen, die in der Regel durch das Prinzip der virtuellen Kräfte erfolgt, wird beim Ortra-Verfahren durch einen Ausgleichungsansatz in Verbindung mit Gewichtsunterschieden nach Gl. (8.23) gelöst. Damit stehen n Verformungen in Größe und Richtung zur Bestimmung der Kraftgrößen des statischen Systems zur Verfügung. Die Schnittuferklaffungen werden analog zum Kraftgrößenverfahren durch das Ortra-Verfahren, wieder in Anwendung von Kapitel 8, Abschnitt 8.1.3 durch äußere Kräfte zum Verschwinden gebracht.

Die Bestimmung der numerischen Werte des statisch Überzähligen X_i , der beispielsweise in der Baustatik [Dallmann 2015b, Dinkler 2014, Krätzig, Harte, Meskouris u. a. 2010] beschrieben wird, zum nachfolgenden Aufbau des Ergänzungszustands wird beim Ortra-Verfahren nicht benötigt, da die Berechnung des Ergänzungszustands direkt über Gl. (8.43) erfolgen kann. Da der Lastzustand zu Null eingeführt wurde, ergibt sich durch Überlagerung des Ergänzungszustandes auch der endgültige Lastzustand (Gl. (8.43)) des statischen Systems mit äußeren Kräften, die zum Aufbau des endgültigen ETRS89-/UTM-Grundrisses auf sämtliche in das Ausgleichungssystem eingeführte Punkte wirken.

7.3.3. Definition der Primär- und Sekundärverschiebungen bei Ortra-Systemen

Zwei Ortra-Systeme mit den Ursprungspunkten P_1 und P_3 sollen gegeben sein, die ihrerseits aus den Stäben $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_{24}, s_{25}\}$ und $\{s_2, s_{12}, s_{31}, s_{33}\}$ bestehen (Abb. 7.10). Die beiden Systeme sind über einen gemeinsamen Stab (s_2) verknüpft. Seine Endpunkte P_1 und P_3 stellen zugleich die Ursprünge der beiden Ortra-Systeme P_1 und P_3 dar. Außer P_1 und P_3 sind keine weiteren Verknüpfungspunkte zwischen den beiden Ortra-Systemen definiert.

Durch Einwirken einer Kraft am Punkt P_2 in Verlängerung des Stabes s_1 wird zuerst im linken Ortra-System eine elastische Längenänderung des Stabes s_1 verursacht. Die Verformung des Stabes ergibt sich aus der Änderung des Maßstabs m des Ortra-Systems P_1 , die über Gl. (7.7) ausgedrückt wird. Daraus folgt, dass wegen des

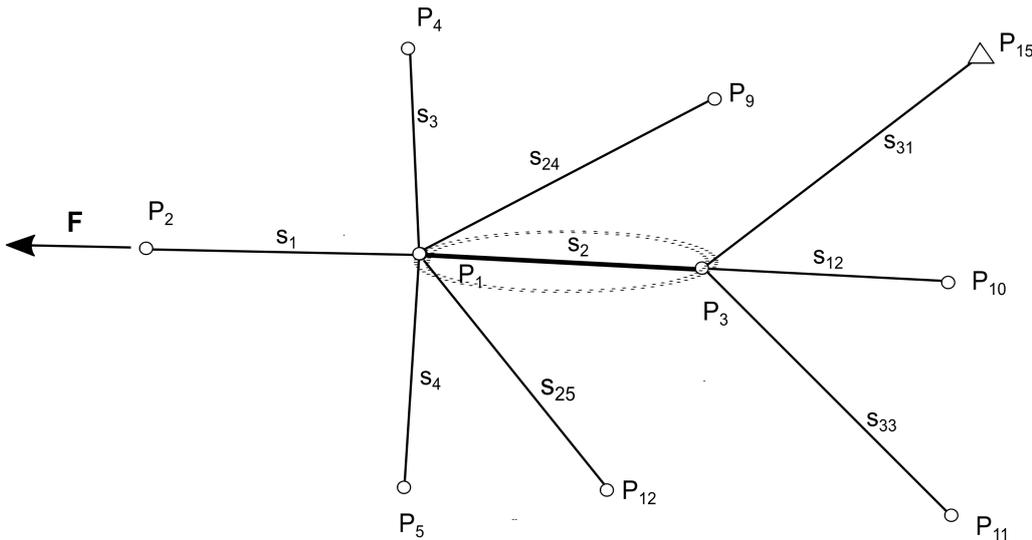


Abbildung 7.10.: Zwei gekoppelte Ortra-Systeme mit gemeinsamem Stab s_2 ohne weiteren Verknüpfungspunkt.

Maßstabsänderung m des Ortra-Systems P_1 natürlich die elastische Längenänderung bei allen weiteren Stäben $\{s_2, s_3, s_4, s_{24}, s_{25}\}$ des Ortra-Systems existiert. In der mechanischen Vorstellung kann diese gegenseitig abhängige Verformung anschaulich durch ein gekoppeltes Federsystem erklärt werden, dessen Einzelfedern die elastischen Stäbe umschließen und, da diese mit den Stäben gekoppelt sind, bei ihnen eine Dehnung oder Stauchung hervorrufen. Dazu müssen die Federn so mit den Dehnstäben verknüpft sein, dass die Federkraft zu einer gleichmäßigen Zug- oder Druckkraft im Stab führt, die in der Folge eine elastische Längenveränderung des Stabes auslöst, die dem veränderten Maßstab des Ortra-Systems entspricht. Der Kopplungsmechanismus des Federsystems bewirkt, dass beispielsweise bei Dehnung einer Einzelfeder die im System gekoppelten Federn sich synchron dehnen und über die Verbindung zu den eingeschlossenen Stäben einen einheitlichen Maßstab realisieren. Der Ursprung des gekoppelten Federsystems, der mit dem Ursprung des Ortra-Systems identisch ist, soll auch als Lager arbeiten. Dabei können sich die Stäbe beliebig drehen, wenn die Summe der ausschließlich bei den Stabendpunkten einwirkenden Drehmomente nicht Null ist und somit ein Gesamtdrehmoment vorliegt. Lediglich die Lage des Ursprungs soll unverändert bleiben. Mit dieser Funktion stellt der Ursprungspunkt des Ortra-Systems, unabhängig von der Betrachtungsweise als mechanisches System oder Ursprungspunkt eines Koordinatensystems, genau die Funktion eines identischen Punktes dar.

Nun soll der Ursprung des Ortra-Systems P_1 (in Abb. 7.10 links) in der beschriebenen Weise als Lager definiert werden. Per definitionem verändert sich bei Kräfteinwirkung die Lage des Punktes P_1 nicht.

Über den gemeinsamen Stab s_2 soll eine Koppelung mit dem Ortra-System P_3 (in Abb. 7.10 rechts) erfolgen. Die Kopplung bleibt solange erhalten, bis ein weiteres Ereignis, das später beschrieben wird, ihrer Lösung herbeiführt.

Das über den gemeinsamen Stab s_2 gekoppelte Ortra-System P_3 überträgt, da sich ein gemeinsamer Maßstab für das gesamte Ortra-System einstellt, die elastische Längenänderung auf die weiteren Stäbe $\{s_{12}, s_{31}, s_{33}\}$ des Systems P_3 . Der im P_1 -Ortra-System durch die äußere Kraft hervorgerufene Maßstab wird gleichzeitig Maßstab im Ortra-System P_3 und somit bei sämtlichen Stäben der Ortra-Systeme P_1 und P_3 .

Bisher wurde von einem gemeinsamen Stab s_2 gesprochen. Genau genommen besitzt jedoch sowohl das linke als auch das rechte Ortra-System jeweils einen eigenen Stab s_2 , wobei die beiden Stäbe s_2 vor der Kräfteinwirkung deckungsgleich sind, wie in Abb. 7.10 zu sehen ist. Die Kopplung führt zu einer Deckungsgleichheit des Stabes, die auch während der elastischen Längenänderung fortbesteht.

Wenn bei der Kräfteinwirkung auf die gekoppelten Ortra-Systeme P_1 und P_3 ein weiterer Verknüpfungspunkt wie z. B. P_{12} in Abb. 7.12 existiert, dann entsteht durch Maßstabsänderung, die bei einem Maßstab $m > 1$ beispielsweise ein Auseinanderdriften der Ortra-Systeme bewirkt, bei Punkt P_{12} eine Klaffung.

Einer stetigen Vergrößerung der Punktklaffung bei P_{12} , die sich theoretisch durch weitere kontinuierliche, elastische Längenänderung des Stabes s_2 bei $m > 1$ ergeben könnte, wird jedoch durch das Modell des Ortra-

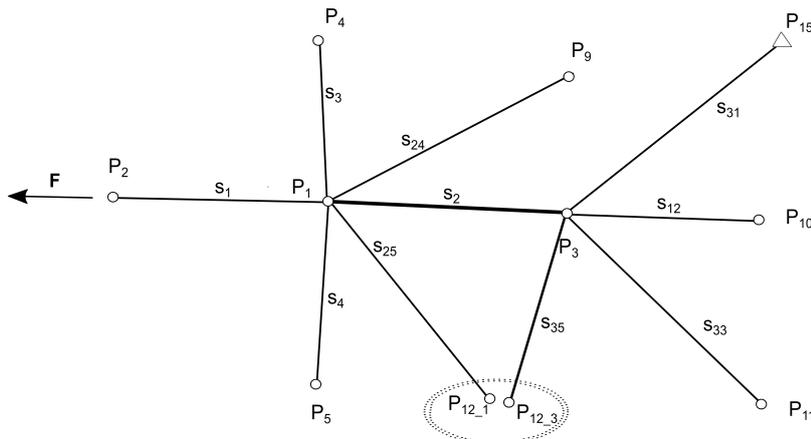


Abbildung 7.11.: Zwei gekoppelte Ortra-Systeme mit neuen Verknüpfungspunkt P_{12} , Problemstellung vor Ausgleichung, die eine Minimierung der in P_{12} entstandenen Klaffung durchführt.

Verfahrens entgegengewirkt. Denn das funktionale Modell der Ausgleichung des Ortra-Verfahrens erreicht im Zusammenspiel mit dem Gesetz der minimalen Formänderung, das hier anwendbar ist, weil sich ein mechanisches Gleichgewicht einstellt, als kleinste Quadrate-Methode eine rechnerische Minimierung der Punktklaffung $v_{12} = (\hat{v}_{E_{12}}, \hat{v}_{N_{12}})$ bei P_{12} und der weiteren Punktklaffungen v_i nach der Vorschrift $\sum v_i^2 = \min.$ bzw. $v^t P v = \min.$

Wegen des Aufbaus des Ortra-Systems mit starr verbundenen Stäben und der eingeschränkten Verformbarkeit des Ortra-Systems mit einheitlicher Dehnung oder Stauchung seiner Stäbe, die lediglich eine volumetrische Verformung (= größeres oder kleineres Ortra-System), aber keine gestaltsändernde Verformung zulässt, kann die Klaffung jedoch nicht generell verhindert werden.

Beide Systeme koppeln sich also durch Vorgabe des funktionalen Modells der Ausgleichung und durch Herstellung einer Gleichgewichtsfigur aus Sicht der Mechanik in der Weise miteinander, dass sowohl die Verbesserungen (= Klaffungen) zwischen den Systemen als auch die Formänderungen innerhalb der Systeme minimal werden ($\sum v_i^2 = \min.$ und $\sum \Pi_i = \min.$).

Beim Hinzufügen von n weiteren Ortra-Systemen, die gemeinsame Verknüpfungspunkte besitzen sollen, zu einem Gesamtsystem wird der Prozess der minimalen Formänderung fortgesetzt. Die in den benachbarten Systemen ausgelösten minimalen Formänderungen verursachen ebenso eine Rückkopplung auf das Originalsystem.

Die Problemstellung der beiden Ortra-Systeme in Abb. 7.12 soll schließlich mit einer Ausgleichung nach dem Ortra-Ansatz zur Minimierung der Widersprüche behandelt werden. Das ist das oben angekündigte Ereignis, das die bisherige Deckungsgleichheit eines gemeinsamen Stabes aufhebt. Im Ergebnis treten neben der ursprünglich durch eine äußere Kraft in P_2 verursachten Klaffung beim gemeinsamen Verknüpfungspunkt P_{12} als Folge der Ausgleichung weitere, jedoch insgesamt minimale Klaffungen auf (Abb. 7.12). Die Klaffungen sollen durch Punktpaare gekennzeichnet werden wie z. B. P_1 und $P_{1,3}$ sowie P_3 und $P_{3,1}$.

Folgende Namenskonvention wird für die spätere Definition von Primär- und Sekundärverschiebungen beim Ortra-Verfahren aufgebaut:

Namenskonvention Diese wird anhand der Klaffung zwischen P_1 und $P_{1,3}$ in Abb. 7.12 erklärt. Die Klaffung entspricht den Verbesserungen $(\hat{v}_{E_1}, \hat{v}_{N_1})$ einer zu Gl. (7.5) analogen Verbesserungsgleichung, die für den Punkt P_1 beispielsweise auf Basis des Ortra-Systems P_3 aufgebaut sein könnte.

Wie sich bei der Definition von Primär- und Sekundärverschiebungen zeigen wird, stellt diese Klaffung zugleich eine Sekundärverschiebung dar.

- Der *Anfangspunkt* der Klaffung (= $P_{1,3}$), der zugleich der Endpunkt eines Stabes (= s_2) des eigenen

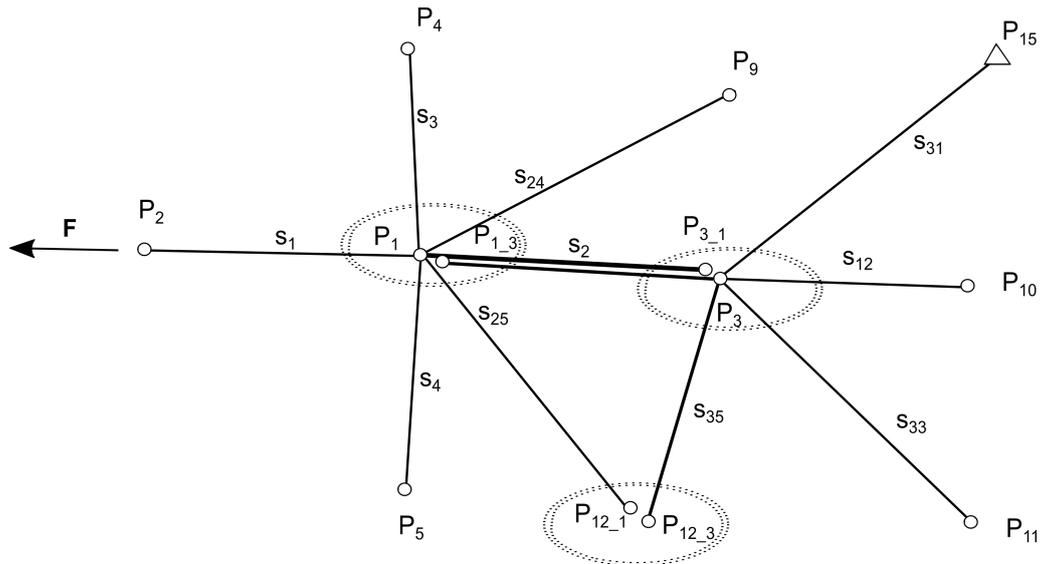


Abbildung 7.12.: Zwei Ortrasysteme mit gemeinsamem, auseinander klaffenden Verknüpfungspunkt P_{12} . Zusätzlich Klaffungen bei den Punkten P_1 und P_3 . Kopplung des zweiten Systems mit Aufbau von 3 Sekundärverschiebungen.

Ortra-Systems (= Ortra-System P_3) ist, erhält im Namen einen Hinweis (= $_3$) auf das eigene Ortra-System.

- Der *Anfangspunkt* der Klaffung (= P_{1_3}) wird gleichzeitig als *Endpunkt* einer weiteren Verschiebung definiert (\Rightarrow Primärverschiebung).
- Der *Endpunkt* der Klaffung, die mit den Verbesserungen ($\hat{v}_{E_1}, \hat{v}_{N_1}$) im Punkt identisch ist, erhält den ersten Teil des Punktnamens von dem Punkt, für den die Klaffung zugleich die Verbesserung darstellt (= P_1). Dieser Punkt ist identisch mit dem Ursprung des gekoppelten Ortra-Systems (= Ortra-System P_1).
- Der Klaffung wird der Name des Stabes (= s_2) zugewiesen, dessen Endpunkt durch den zugeordneten Zug- oder Druckstab in den Ursprung des Nachbar-Ortrasystems (= Ortra-System P_1) verschoben wird. Im Beispiel ist das der Stab s_2 . Der Name des Stabes wird durch eine Tilde ergänzt (= \tilde{s}_2).

Die Klaffung zwischen den Punkten P_{1_3} und P_1 erhält somit den Namen \tilde{s}_2 .

Primärverschiebung Primärverschiebungen werden beim Ortra-System als Knotenverschiebungen zwischen den Enden des unverformten und des verformten Systems definiert.

Zur Definition der Primärverschiebung wird die Lage der Stabendpunkte des ungedehnten Systems konkret auf das elastisch verformte System der aktuellen Konfiguration bezogen. Das ungedehnte Ortra-System wird dabei deckungsgleich zu dem elastisch verformten System gelagert.

Da mit dem Ursprung des Ortra-Systems alle Stäbe einen gemeinsamen Anfangspunkt besitzen, der keine individuelle Knotenverschiebung ausführen kann wie beispielsweise der Anfangsknoten eines Fachwerkstabes, wird stattdessen die durch innere Kräfte des Ortra-Systems verursachte Knotenverschiebung im Stabendknoten definiert [Glock, Bauer u. a. 2019].

Die Primärverschiebung wird als innere Weggröße dem Vektor der Knotenverschiebungen r beim modifizierten Weggrößenverfahren zugewiesen. Trotz geometrischer Definition beim Stabendknoten soll die Zuordnung der Weggröße beim Stabanfangspunkt im Ursprung des Ortra-Systems verbleiben.

Die Koordinaten der Stabendknoten des ungedehnten Ortra-Systems in der aktuellen Konfiguration berech-

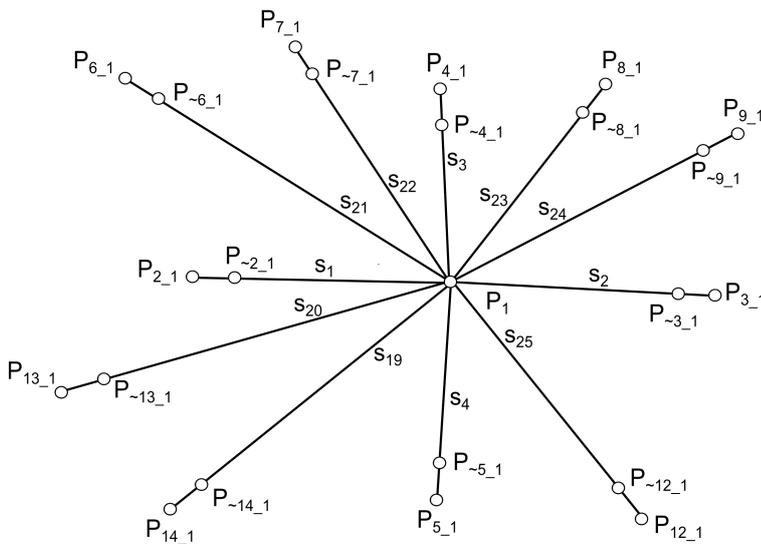


Abbildung 7.13.: Gedehtes Ortra-System mit Ursprung P_1 und $n = 11$ Stäben s_1, s_2, \dots, s_{25} . An den Stäbenden befinden sich die Primärverschiebungen, die zwischen den Stäbendpunkten des unverformten und des verformten Systems definiert werden, wobei die Drehung unberücksichtigt bleibt.

nen sich jeweils aus dem Anfangspunkt P_A und dem Endpunkt P_E eines Stabes zu

$$\begin{aligned}
 E_{P_E \text{ (ungedehnter Stab)}} &= E_{P_A} + \frac{o(x_{P_E} - x_{P_A}) + a(y_{P_E} - y_{P_A})}{m}, \\
 N_{P_E \text{ (ungedehnter Stab)}} &= N_{P_A} + \frac{a(x_{P_E} - x_{P_A}) - o(y_{P_E} - y_{P_A})}{m}.
 \end{aligned}
 \tag{7.7}$$

Sekundärverschiebung Als Sekundärverschiebung wird die Verschiebung des Stäbendknotens vom Stäbende in den Ursprung des gekoppelten Ortra-Systems definiert.

Für den aus der Ausgleichung geometrisch vorgegebenen Vektor wird physikalisch eine Kraftdichte definiert, da zwischen allen Ortra-Systemen ein Gleichgewicht einschließlich der äußeren Kräfte besteht, wie später gezeigt wird. Mit der Kraftdichte entsteht aus dem Vektor ein Zug- oder Druckstab.

Der Stäbendpunkt, der den Anfangspunkt der Sekundärverschiebung markieren soll, ist zugleich Anfangspunkt des über die Kraftdichte definierten sekundären Zug- oder Druckstab, der erst in der aktuellen Konfiguration κ_M zu existieren beginnt. Im Gegensatz dazu kann der bereits in der Referenzkonfiguration κ_R vorhandene Stab, der als elastische Reaktion sich dehnt oder staucht, als primärer Stab gesehen werden.

Dem sekundären Stab wird eine Stabkraft s zugeordnet, die entweder

- den Stäbendpunkt in Richtung des Ursprungs des Ortra-Systems zieht, falls ein Zugstab vorliegt, oder
- als Druckstab den Stäbendpunkt vom Ursprung des gekoppelten Ortra-Systems wegschiebt.

Die Sekundärverschiebung kann als weitere innerhalb der Mechanik auftretende Verformung gesehen werden, die ohne mechanische Einwirkung auftritt, hier im speziellen Fall sogar ohne jede physikalische Einwirkung (wie z. B. Temperatur).

Allerdings setzt eine Verformung eine Ausgangslänge ungleich Null voraus. Diese ist hier nicht gegeben. Die durch Ausgleichung entstehende Verbesserung, die aufseiten der Mechanik

- aus Sicht der Kinematik mit einer Sekundärverschiebung verknüpft wird und
- im Hinblick auf den Aufbau eines Gleichgewichtes als ein Zug- oder Druckstab definiert wird,

ist in der ursprünglichen Konfiguration (= Referenzkonfiguration) nicht vorhanden. Die Sekundärverschiebung kann mit der kinematischen Verträglichkeit der Verformungen der elastischen Basiseinheiten, den Ortra-Systemen, erklärt werden. Die kinematische Verträglichkeit muss beim Ortra-Ansatz zu zusätzlichen Verschiebungen in Verbindung mit Druck- oder Zugstäben im Gesamtsystem führen, damit bei Verformungen das statische Gesamtsystem erhalten bleibt [Glock, Bauer u. a. 2019] Da es theoretisch möglich ist, dass eine einzelne Last alleine elastische Längenänderungen von Ortra-Systemen im gesamten System auslöst, lässt sich die Sekundärverschiebung, zusätzlich zu der kinematischen Funktion, aus geometrischer Sicht als ein sich im gesamten System einstellender minimaler geometrischer Widerspruch deuten. Die ungedehnte Länge l_0 des sekundären Zug- oder Druckstabes ist in der Referenzkonfiguration mit $l_0 = 0$ gleich Null.

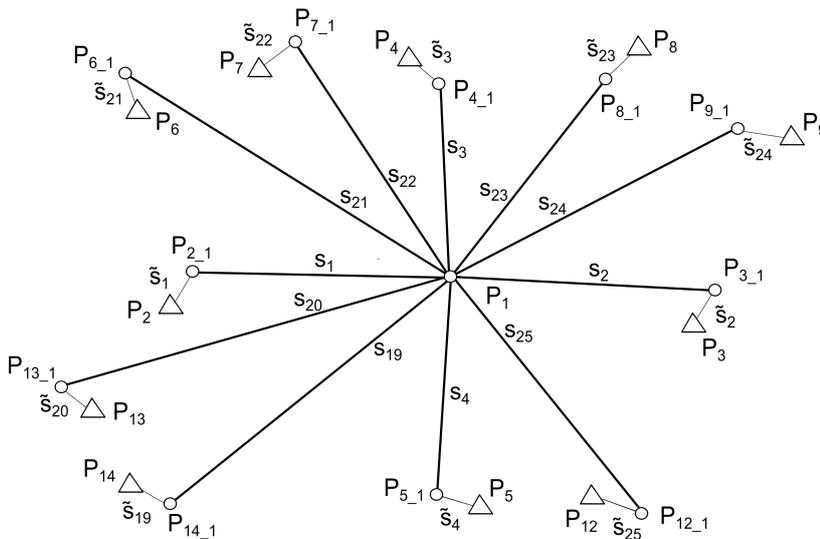


Abbildung 7.14.: Ortra-System 1 mit den Stäben s_1, s_2, \dots, s_{25} und den Sekundärverschiebungen $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_{25}$

Mechanische Aussagen zur Helmerttransformation Das Ortra-System in Abb. 7.14 soll für mechanische Aussagen zur Helmerttransformation aus einem größeren Verbund von verketteten Helmerttransformationen eines Ortra-Verfahrens herausgelöst worden sein. Aus geodätischer Sicht entspricht das einzelne Ortra-System dem einzelnen, zu transformierenden Koordinatensystem bei der Helmerttransformation. Dort spricht man statt von Sekundärverschiebungen von Restklaffungen.

Die für den Ortra-Ansatz innerhalb dieses Abschnitts, speziell mit Primär- und Sekundärverschiebungen aufgebaute mechanische Sichtweise und einige zusätzliche, in späteren Abschnitten (z. B. 7.3.5) gewonnenen mechanischen Kenntnisse über den Ortra-Ansatz ermöglichen folgende mechanische Interpretation des Helmert-Transformationsansatzes:

- Analog zum Ortra-Ansatz können beim Helmert-Transformationsansatz ebenfalls Stäbe mit mechanischen Eigenschaften definiert werden.
- Im Ausgangssystem (= Referenzkonfiguration) können die Stäbe vorgespannt sein. Die Vorspannung ermöglicht es den Stäben physikalisch, bei einem Maßstab > 1 das System durch innere Kräfte der Vorspannung zu dehnen. Im Ortra-System selbst liegt eine kinematische Kopplung sämtlicher Punkte vor, die in die Ausgleichung eingeführt werden. Damit ist es möglich, die Vorspannung auf den einen Freiheitsgrad des Maßstabsfaktors m zurückzuführen, den das funktionelle Modell des Ortra-Ansatzes als formverändernden Parameter vorsieht. Die Vorspannung bei Ortra-Systemen, speziell bei Maßstäben $m > 1$, wird in Abschnitt 7.3.5 erklärt.

- Die Kräfte der Zug- oder Druckstäbe der Restklaffungen stellen sich so ein, dass sie das Druck- und Zugstäbe-System des Helmert-Ansatzes im Gleichgewicht halten.
- Die identischen Punkte für die Helmerttransformation sind Lager des statischen Systems des Helmert-Ansatzes und führen die in den Zug- oder Druckstäben der Restklaffungen vorhandenen Kräfte in die Umgebung ab.

7.3.4. Entwicklung des modifizierten Weggrößenverfahrens für den Ortra-Ansatz

Zur Berechnung der Kräfte innerhalb des statischen Systems der miteinander gekoppelten Ortra-Systeme wird Gl. (6.5) des Weggrößenverfahrens angewandt.

Dabei ist durch einen Lösungsansatz die teilweise gegebene Singularität zu berücksichtigen, da in der Referenzkonfiguration κ_R ungedehnte Längen $l_0 = 0$ gleich Null bei den Sekundärverschiebungen vorliegen. Damit ist es zunächst nicht möglich, die Kräfte dieser Verschiebungen durch Anwendung des Weggrößenverfahrens endgültig zu bestimmen.

Näherungsweise Bestimmung der Kräfte der Sekundärverschiebungen, Verfahrensergänzung

Möglich ist die genäherte Zuweisung von Kräften durch das Weggrößenverfahren für die Verbesserungen der Ausgleichung (= Sekundärverschiebungen). Dafür wird ein zusätzlicher Verfahrensschritt aufgebaut und im Nachgang das Kräftegleichgewicht wiederhergestellt.

Den Sekundärbeziehungen sind für die Anwendung des klassischen Weggrößenverfahren zusätzlich Materialeigenschaften zuzuweisen. Zur Festlegung der Steifigkeit der Sekundärverschiebung kann näherungsweise die Materialeigenschaft des primären Stabs verwendet werden, der mit dem Sekundärstab verbunden ist und bei dem – am Stabende – die Primärverschiebung erfolgt. Die näherungsweise Zuordnung ist damit begründbar, dass die Größenordnung der Primär- und Sekundärverschiebung bei Belastung durch äußere Kräfte näherungsweise gleich groß ist.

Unterbestimmtheit des Gleichgewichtssystems der Sekundärverschiebungen Das Gleichgewichtssystem für die Bestimmung der Kräfte der Sekundärverschiebungen zum Aufbau des Gleichgewichtssystems ist, wie später gezeigt wird, unterbestimmt.

Als Folge ergibt sich eine unendliche Anzahl von Lösungen für die Sekundärverschiebungen. Die Lösungsmenge wird durch Formulierung einer Nebenbedingung für die Optimierungsaufgabe eingeschränkt, dass unter allen möglichen Lösungen dasjenige System zu bestimmen ist, das minimale Kräfte verwendet.

Dies führt unter dem Gesichtspunkt der minimalen Formveränderung zu einem physikalisch nachvollziehbaren Ergebnis. Bei der durch die Ausgleichung vorgegebenen Geometrie der Verbesserungen (Sekundärverschiebungen) wird die Lösung mit minimalen Kräften gleichzeitig eine Lösung, bei der minimale Formänderungsenergie eingesetzt wird.

Durchführung des Weggrößenverfahrens Durch die im vorigen Abschnitt erfolgte Definition von Primär- und Sekundärverschiebungen r beim Ortra-Verfahren sind die Eingangsgrößen des Weggrößenverfahrens definiert.

Als Zielgrößen des Weggrößenverfahrens werden m Unbekannte für die äußeren Kräfte $p_{(m,1)}$ gesucht, die sich aus endgültig bestimmten äußeren Kräften, die die Primärverschiebungen verursachen, und genäherten Kräften für die Sekundärverschiebungen zusammensetzen. Aus diesen können nach Herstellung des Gleichgewichts durch Nachprozessierung die endgültigen inneren Kräfte abgeleitet werden.

Die Gleichgewichtsmatrix A wird beim modifizierten Weggrößenverfahren für das Ortra-Verfahren aus Größen der unverformten Referenzkonfiguration aufgebaut, da per definitionem eine Problemstellung der linearen bzw. linearisierten Elastizitätstheorie vorliegen soll. Für Gl. (6.5) wird die Gleichgewichtsmatrix A aus der Geometrie der primären und sekundären Stäbe abgeleitet.

Die Koeffizienten der Gewichtsmatrix A für die Primärverschiebungen können analog zu den Koeffizienten der kinematischen Verträglichkeitsmatrix A in Gl. (4.77) des Abschnitts 4.4 mit Hilfe der Transformations-

parameter $\cos \alpha_i$ und $\sin \alpha_i$ aufgebaut werden. In Anwendung von Gl. (4.74) ist α_i der Drehwinkel der Primärverschiebung im übergeordneten Koordinatensystem.

Diese können ebenfalls wie in Gl. (4.75) aus Koordinatendifferenzen, dividiert durch die ungedehnte Länge l_{0_i} des Stabes i , berechnet werden:

$$c_i = \cos \alpha_i = \frac{x_{e_i} - x_{a_i}}{l_{0_i}}, \quad s_i = \sin \alpha_i = \frac{y_{e_i} - y_{a_i}}{l_{0_i}} \quad (7.8)$$

mit $l_{0_i} = \sqrt{(x_{e_i} - x_{a_i})^2 + (y_{e_i} - y_{a_i})^2}$.

Anmerkung: In Gl. (7.8) werden Indizes a_i und e_i verwendet, die sich auf den Anfangs- und den Endknoten der Primärverschiebung i beziehen.

Die Koeffizienten der Gewichtsmatrix für die *Sekundärverschiebungen* werden analog zu Gl. (7.8) gebildet, wobei strenggenommen die verwendeten Koordinatendifferenzen und Längen nicht in der unverformten Referenzkonfiguration κ_R vorliegen. Hier werden für die Definition der Gleichgewichtsmatrix, die die Bestimmung von genäherten Kräften für die Sekundärverschiebungen ermöglicht, die Größen der aktuellen Konfiguration κ_M verwendet.

Für die Beschreibung der elastisch wirkenden Elemente des Ortra-Verfahrens werden Diagonalelemente für die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} definiert. Für die Stäbe der Ortra-Systeme kann im Prinzip eine unveränderliche, beliebige Dehnsteifigkeit definiert werden. Im konkreten Fall wurde eine empirische, konstante Dehnsteifigkeit im Zusammenhang mit einer unveränderlichen Querschnittsfläche wie z. B. $E \cdot A = 10000 \text{ kN}$ verwendet. Der beispielhafte Wert wurde durch Anwendung eines Elastizitätsmoduls $E = 210000 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$ für Stahl und einer vorgegebenen Querschnittsfläche von $A = 50 \text{ mm}^2$ berechnet.

Die Dimension $n \times n$ der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} ist definiert über $n = 2 \cdot s$ mit $s = \text{Anzahl der Stäbe des Ortra-Gesamtsystems}$. Für jeden Stab des Ortra-Gesamtsystems existieren zwei Längenänderungen, eine elastische Längenänderung und eine aus der Ausgleichung entstandene, nicht-elastische Längenänderung.

Mit den gegebenen Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{K} und dem bekannten Vektor $\mathbf{r}_{(m,1)}$ der Primär- und Sekundärverschiebungen ergeben sich über

$$\mathbf{p}_{(m,1)} = \left(\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A} \right)_{(m,m)} \cdot \mathbf{r}_{(m,1)}$$

die gesuchten Kräfte.

Abb. 7.15 zeigt das Ergebnis des Weggrößenverfahrens für das in Abb. 7.13 vorliegende Ortra-System.

Für ein einzelnes Ortra-System, das sich bei Belastung elastisch dehnt, wenn der Maßstab in der Ausgleichung zu $m > 1$ bestimmt wurde, können den Primärverschiebungen in jedem Stab betragsmäßig gleiche äußere Kräfte zugeordnet werden, die radial vom Ursprung des Systems nach außen zeigen. Für einen Maßstab $m < 1$ zeigen die Kräfte nach innen in Richtung des Ursprungs des Systems.

Die radialen Kräfte können so interpretiert werden, dass ein Ortra-System in der Ausgangskonfiguration κ_R , die das Ausgangssystem der Koordinatenumformung darstellt, vorgespannt ist. Die Vorspannung kann dadurch erklärt werden, dass für den Fall der Dehnung des Koordinatensystems (Maßstab $m > 1$) die einzelnen Stäbe im Ausgangssystem zu kurz abgelängt worden sind.

In der Referenzkonfiguration κ_R wird durch Einspannen der zu kurz abgelängten Stäbe zwischen die Ursprünge gekoppelter Ortra-Systeme die Vorspannung aufgebaut. In der Ausgangskonfiguration κ_R existieren jedoch keine geometrischen Widersprüche, die, als Sekundärverschiebung zwischen Stabendpunkten und Stabanfangspunkten (Ursprünge) der benachbarten Ortra-Systeme identifiziert, erst unter Belastung zu existieren beginnen.

Mit Abschluss der Ausgleichung geben die Stäbe die gespeicherte elastische Energie frei und gehen in den gedehnten Zustand über. Über die Ausgleichung werden auch Verbesserungen als Zuschläge zu den Primärverschiebungen für den Aufbau einer Widerspruchsfreiheit zwischen ausgeglichenen Ausgangs- und Zielgrößen aufgebaut (siehe Verbesserungen \hat{v}_{E_2} und \hat{v}_{N_2} in Gl. (7.5)), die in dieser Arbeit durchgängig als Sekundärverschiebungen bezeichnet wurden.

Für die Sekundärverschiebungen (siehe Abb. 7.14) sind die durch das Weggrößenverfahren berechneten Kräfte als Näherungswerte zu verstehen, so dass noch kein Kräftegleichgewicht in den miteinander gekoppelten Ortra-Systemen besteht.

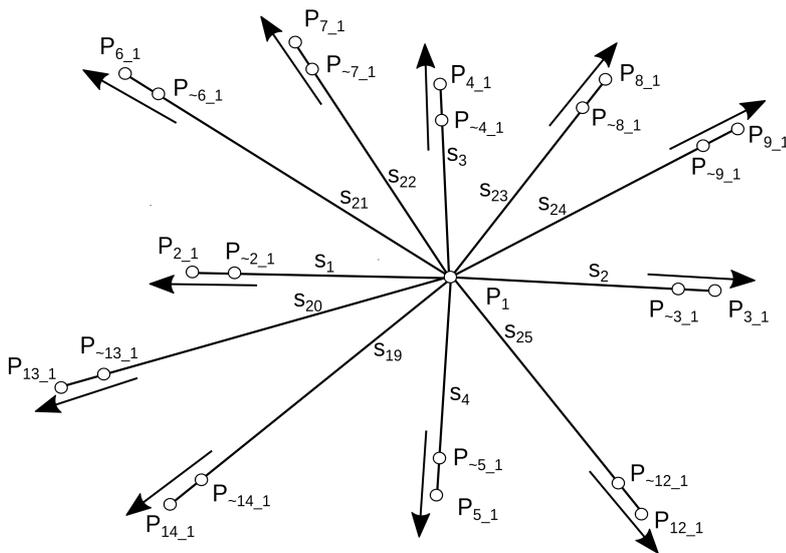


Abbildung 7.15.: Ortra-System 1 mit Kräften, die in Richtung der Stäbe s_1, s_2, \dots, s_{25} nach außen zeigen (Maßstab $m > 1$)

Die Sekundärverschiebungen sind als Zug- oder Druckstäbe zu interpretieren, die das Ortra-System in seiner Lage halten. Dafür müssen zwei Bedingungen erfüllt werden:

- Die Summe aller bei einem Knoten angreifenden inneren und äußeren Kräfte ist gleich Null. Für die Ursprünge der miteinander gekoppelten Ortra-Systeme bedeutet dies, dass die Summe der auf sie zu beziehenden Kräfte der Sekundärverschiebungen gleich Null ist.
- Die Kräfte der Sekundärverschiebungen eines Ortra-Systems dürfen weder Starrkörper- noch Drehbewegungen des eigenen Ortra-Systems hervorrufen. Eine Starrkörperbewegung wird durch die Kräfte der Sekundärverschiebungen verursacht, wenn die Summe der im Ursprung des Ortra-Systems in Richtung der Stäbe angreifenden axialen Kraftkomponenten der Sekundärverschiebungen ungleich Null ist. Und die Gleichgewichtsbedingungen für das Momentengleichgewicht werden verletzt, wenn die Gesamtsumme der radialen Kraftkomponenten der Sekundärverschiebungen quer zum Stab, die bei den Stabendpunkten des Ortra-Systems angreifen, ein Drehmoment erzeugt.

7.3.5. Herstellung des Drehmomenten- und Kräftegleichgewichts bei den Sekundärverschiebungen

Mit der Untersuchung des Drehmomenten- und Kräftegleichgewichts bei den Sekundärverschiebungen wird der Nachweis erbracht, dass es sich bei den verketteten Ortra-Systemen um ein statisches System handelt, das sich im Gleichgewicht befindet [Glock, Bauer u. a. 2019].

Beim Übergang des Ortra-Systems aus der unverformten Lage in die Momentankonfiguration wurden in Abschnitt 7.3.3 primäre und sekundäre Knotenverschiebungen und dazugehörige kinematisch verträgliche Elementverformungen identifiziert.

Die Knotenverschiebungen und Elementverformungen werden mit Vorspannung des Ortra-Systems und Einspannung zwischen den benachbarten Ortra-Systemen in der Referenzkonfiguration erklärt.

Die von den Kräften über den Verschiebeweg verrichtete Arbeit ist der Teil- oder Gesamtbeitrag der Verformungsarbeit desjenigen Ortra-Systems, das seine Vorspannung abbaut.

Für die weiteren Überlegungen können, ohne dass der Nachweis des Gleichgewichts erschwert wird, entweder ein teilweiser oder ein vollständiger Abbau der Vorspannung angenommen werden. Durch Einführung zusätzlicher Unbekannten im aufzubauenden Gleichungssystem können ein teilweiser Abbau der Vorspannung

bei einzelnen Ortra-Systemen und zusätzlich notwendige Kräfte, die der restlichen Vorspannung entgegenwirken, modelliert werden.

Für die weitere Berechnung der Sekundärverschiebungen wird der einfachste Fall angenommen, dass alle Ortra-Systeme nach Abbau der Vorspannung keine weiteren Kräfte an die Zug- oder Druckstäbe der Sekundärverschiebungen übertragen.

Für die Überprüfung des Drehmomenten- und Kräftegleichgewichts des Gesamtsystems wird zunächst untersucht, ob sich das einzelne Ortra-System in einem Drehmomenten- und Kräftegleichgewicht befindet. Danach wird untersucht, inwieweit dieselben, nun auf gekoppelte benachbarte Ortra-Systeme bezogenen Kräfte, die hinter den Sekundärverschiebungen stehen, ein Kräftegleichgewicht bilden.

Bei der Untersuchung des Gleichgewichts jedes einzelnen Ortra-Systems wird davon ausgegangen, dass es von seinen Restklaffungen, in denen aus statischer Sicht Kräfte gegeben sind, in seiner Lage gehalten wird. Des Weiteren ist bei der Untersuchung sicherzustellen, dass Kräfte tangential zu den einzelnen Stäben des Ortra-Systems kein Drehmoment erzeugen [Glock, Bauer u. a. 2019].

Für das Drehmomenten- und Kräftegleichgewicht werden die Kraftdichten der Sekundärverschiebungen gesucht, zu denen Näherungswerte aus dem modifizierten Weggrößenverfahren vorliegen. Mit endgültigen Kraftdichten sind durch die vorgegebenen Geometrien der Sekundärverschiebungen Betrag und Richtung der Kräfte bestimmt, die das Drehmomenten- und Kräftegleichgewicht herstellen.

Für die Berechnung des mechanischen Gleichgewichts im einzelnen Ortra-System wird überprüft, ob sich ein Kräftegleichgewicht

$$\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (7.9)$$

im Ursprungspunkt des Ortra-Systems einstellt. Die mit der Sekundärverschiebung \tilde{s}_i verbundene Kraft wird als \mathbf{F}_i bezeichnet.

\mathbf{F}_i soll mit positiver Kraftdichte q_{F_i} als Zugkraft in Richtung des Ursprungs des gekoppelten Ortra-Systems zeigen und einen Zugstab konstituieren. Bei negativer Kraftdichte liegt ein Druckstab in entgegengesetzter Richtung des sekundären Verschiebungsvektors vor.

Die Kräfte \mathbf{F}_i der Sekundärverschiebungen werden in zwei Komponenten \mathbf{F}_{l_i} und \mathbf{F}_{q_i} zerlegt, die längs und quer zur Stabachse und zueinander senkrecht stehen:

$$\mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{q_i} \\ \mathbf{F}_{l_i} \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n. \quad (7.10)$$

Dabei ist:

- \mathbf{F}_{l_i} die Kraftkomponente, die in entgegengesetzter Längsrichtung des Stabes s_i definiert wird. Ihr Anfangspunkt liegt im Stabende von s_i .
- \mathbf{F}_{q_i} die darauf senkrecht stehende Querkomponente, deren Anfangspunkt ebenfalls im Stabende von s_i liegt.

Da die Vektoren der Kräfte \mathbf{F}_i , die mit den Sekundärverschiebungen in Verbindung stehen, durch Länge und Richtung der Restklaffungen vorgegeben sind, werden für die Bestimmung der gesuchten unbekanntes Kräfte skalare Kraftdichten statt Vektoren in ein Gleichungssystem eingeführt.

Mit der Kraftdichte q_{F_i}

$$q_{F_i} = \frac{|\mathbf{F}_i|}{l_{F_i}} \quad (7.11)$$

kann die Kraft \mathbf{F}_i (7.10) auch wie folgt ausgedrückt werden:

$$\mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} q_{F_i} \cdot (x_{P_j} - x_{P_{j,i}}) \\ q_{F_i} \cdot (y_{P_j} - y_{P_{j,i}}) \end{pmatrix}. \quad (7.12)$$

Anmerkung: Für die in Gl. (7.12) verwendete Namenskonvention für Punktbezeichnungen von Anfangs- und Endpunkten der Sekundärverschiebungen siehe auch Abb. 7.14.

Für das Kräftegleichgewicht muss die Vektorsumme der $F_{l_i}, i = 1, \dots, n$ in Richtung oder Gegenrichtung der Stäbe s_i gleich Null sein.

$$\sum_{i=1}^n F_{l_i} = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} x_{F_{l_i}} \\ y_{F_{l_i}} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad \Rightarrow \quad \sum_i x_{F_{l_i}} = \sum_i y_{F_{l_i}} = 0. \quad (7.13)$$

Für das mit den F_{l_i} -Kräften aufgebaute Kräftegleichgewicht ergeben sich somit für jedes Ortra-System mit $\sum_i x_{F_{l_i}} = 0$ und $\sum_i y_{F_{l_i}} = 0$ zwei Gleichungen für die unbekannt Kraftdichten q_{F_i} .

Das Kräftegleichgewicht kann den Stabanfangspunkten im Ursprung des Ortra-Systems zugeordnet werden.

Als Weiteres muss beim einzelnen Ortra-System an den Stabendpunkten ein Drehmomentengleichgewicht vorliegen [Glock, Bauer u. a. 2019]. Die Berechnung des Drehmoments eines einzelnen Stabs s_i erfolgt über die Querkomponente $F_{q_{s_i}}$ und den mit der Länge l_{s_i} des Stabes \tilde{s}_i skalierten Einheitsvektor e_{s_i} , der in Stabrichtung zeigt:

$$M_{s_i, F_{q_{s_i}}} = s_i \times F_{q_{s_i}} = l_{s_i} \cdot (e_{s_i} \times F_{q_{s_i}}). \quad (7.14)$$

Das Drehmomentengleichgewicht ergibt für jedes Ortra-System eine weitere Gleichung für die unbekannt Kraftdichten q_{s_i} . Das Momentengleichgewicht kann den n Stabendpunkten des einzelnen Ortra-Systems zugeordnet werden.

Für die Gesamtsumme der Drehmomente ergibt sich

$$\sum_{i=1}^n M_{s_i, F_{q_{s_i}}} = \sum_{i=1}^n l_{s_i} \cdot (e_{s_i} \times F_{q_{s_i}}) = \mathbf{0}. \quad (7.15)$$

Bisher können für die n gesuchten Kraftgrößen $q_{s_i}, i = 1, \dots, n$ der an den n Stabenden eines Ortra-Systems angeknüpften elastischen Zug- und Druckstäbe drei Gleichungen gefunden werden.

Weitere Gleichungen ergeben sich, wenn die Auswirkungen der Kräfte \vec{F}_{s_i} auf benachbarte Ortra-Systeme untersucht werden.

Alle zum Ausgangs-Ortrasystem benachbarten Ortra-Systeme werden dann nicht durch die Zug- oder Druckstäbe beeinflusst, die mit den Sekundärverschiebungen verknüpft sind, wenn mit diesen in den einzelnen Nachbar-Ortrasystemen weitere Kräftegleichgewichte gebildet werden können. Bei den Ursprüngen der benachbarten Ortra-Systeme muss sich folgendes Kräftegleichgewicht einstellen, wenn im einzelnen Ortra-System-Ursprung l Kräfte von Sekundärverschiebungen angreifen [Glock, Bauer u. a. 2019]:

$$\sum_{i=1}^l F_i = \sum_{i=1}^l \begin{pmatrix} F_{x_i} \\ F_{y_i} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad \Rightarrow \quad \sum_i x_{F_i} = \sum_i y_{F_i} = 0. \quad (7.16)$$

Damit ergeben sich für jedes in Nachbarschaftsbeziehung zum Original-System verknüpfte Ortra-System mit $\sum_i x_{F_i} = 0$ und $\sum_i y_{F_i} = 0$ zwei weitere Gleichungen für die unbekannt Kraftdichten q_{F_i} .

Bei der gegebenen Vernetzung im Ortra-Verfahren erhält man in der Regel ein unterbestimmtes Gleichungssystem zur Bestimmung des Gleichgewichts der Kräfte der Restklaffungen bzw. der Kräfte, die die Sekundärverschiebungen verursachen.

Im Folgenden wird ein Verfahren zur Bestimmung der Kräfte vorgestellt, die trotz Vorliegens eines unterbestimmten Gleichungssystems den Gesichtspunkt der minimalen Formänderungsenergie einbezieht und zu eindeutigen Ergebnissen kommt. Das Verfahren wird über die Methode der kleinsten Quadrate begründet [Glock, Bauer u. a. 2019], die von der Forderung nach Minimierung der Verbesserungssumme zur Lösung eines *überbestimmten* Problems ausgeht. Aus Sicht der Mechanik und Baustatik verfolgt die Methode der kleinsten Quadrate die Forderung nach Minimierung der Kräfte zur Lösung eines *unterbestimmten* Problems. In Verbindung mit der vorgegebenen Geometrie für die Kräfte wird damit dem Gesetz der minimalen Formänderung entsprochen, da minimale Kräfte minimale Formveränderungen durchführen [Glock, Bauer u. a. 2019].

Zur Definition des Drehmomenten- und Kräftegleichgewichts muss als Zusatzbedingung an das unterbestimmte Gleichungssystem die Forderung gestellt werden, dass die das Gleichgewicht formulierende Funktionen in Abhängigkeit der Kräfte gleich Null werden.

Bestimmung des Drehmomenten- und Kräftegleichgewichts durch eine Least-Squares-Lösung Der Least-Squares-Ansatz zur Lösung des unterbestimmten Gleichungssystems soll wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned} \underbrace{(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{v}})^t}_{\hat{\mathbf{b}}^t} \mathbf{P} \underbrace{(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{v}})}_{\hat{\mathbf{b}}} &= \min, \\ \hat{\mathbf{b}}^t \mathbf{P} \hat{\mathbf{b}} &= \min \quad \text{und} \quad f(\hat{\mathbf{b}}) = f(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{v}}) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Die Beobachtungen \mathbf{b} sind mit Näherungswerte eingeföhrte Kraftdichten. Für die mit den Sekundärverschiebungen in Verbindung stehenden Kräften können in guter Näherung die im Weggrößenverfahren geschätzten Kraftdichten der zugehörigen Primärverschiebungen verwendet werden.

Das unterbestimmte Problem kann nach Schek 1975 als Extremwertaufgabe mit einer Nebenbedingung unter Verwendung von Lagrangeschen Korrelaten \mathbf{k} definiert werden.

$$\Phi = (\mathbf{b} + \hat{\mathbf{v}})^t \mathbf{P} (\mathbf{b} + \hat{\mathbf{v}}) - 2\mathbf{k}^t f(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{v}}). \quad (7.18)$$

Zur Lösung des Minimumsprinzips Φ wird Gl. (7.18) nach den unbekanntenen Beobachtungen und Korrelaten abgeleitet. Die partiellen Ableitungen sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{b}} &= 2\mathbf{P}(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{v}}) - 2\mathbf{k}^t \left(\frac{\partial f(\hat{\mathbf{b}})}{\partial \mathbf{b}} \right) = \mathbf{P}(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{v}}) - \left(\frac{\partial f(\hat{\mathbf{b}})}{\partial \mathbf{b}} \right)^t \mathbf{k} = \mathbf{0}, \\ \Rightarrow \mathbf{b} + \hat{\mathbf{v}} - \mathbf{P}^{-1} \left(\frac{\partial f(\hat{\mathbf{b}})}{\partial \mathbf{b}} \right)^t \mathbf{k} &= \mathbf{0}. \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{k}} &= f(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{v}}) = f(\hat{\mathbf{b}}) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Die zweite Gleichung von (7.19) wird über eine Taylorreihe unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung entwickelt. Dann ergibt sich für $f(\hat{\mathbf{b}})$:

$$f(\hat{\mathbf{b}}) = f(\mathbf{b}) + \frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (7.20)$$

Im Folgenden können aus Gl. (7.19) und Gl. (7.20) die beiden Ausgangsgleichungen des gesuchten Bestimmungsverfahrens für die Kraftdichten $\mathbf{q} = \mathbf{b} + \hat{\mathbf{v}}$ aufgebaut werden, die zu einem Gleichgewicht föhren.

$$\begin{aligned} \mathbf{b} + \mathbf{v} - \mathbf{P}^{-1} \left(\frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} \right)^t \mathbf{k} &= \mathbf{0}, \\ f(\mathbf{b}) + \frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{v} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Mit der inversen partiellen Ableitung $\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}}^{-1}$ von $f(\mathbf{b})$ multipliziert ergibt die zweite Gleichung von (7.21):

$$\left(\frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} \right)^{-1} \cdot f(\mathbf{b}) + \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (7.22)$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{v} = - \left(\frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} \right)^{-1} f(\mathbf{b}). \quad (7.23)$$

Die erste Gleichung von (7.21) wird mit der partiellen Ableitung $\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}}$ von $f(\mathbf{b})$ multipliziert:

$$\left(\frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\right)(\mathbf{b} + \mathbf{v}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\right) \mathbf{P}^{-1} \left(\frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\right)^t \mathbf{k}. \quad (7.24)$$

Gl. (7.23) in Gl. (7.24) eingesetzt führt zu einer Gleichung für den Korrelatenvektor \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} = \left[\left(\frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\right) \mathbf{P}^{-1} \left(\frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\right)^t \right]^{-1} \left[\left(\frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\right) \mathbf{b} - f(\mathbf{b}) \right]. \quad (7.25)$$

Dann kann die Verbesserung \mathbf{v} mit der ersten Gleichung von (7.21) bestimmt werden zu

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1} \left(\frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\right)^t \mathbf{k} - \mathbf{b}. \quad (7.26)$$

Die gesuchten „verbesserten“ Kraftdichten \mathbf{q} ergeben sich dann über

$$\mathbf{q} = \mathbf{b} + \hat{\mathbf{v}}. \quad (7.27)$$

Bei Untersuchung der Kraftdichten für ein aus verketteten Ortra-Systemen aufgebautes Ortra-Gesamtsystem hat sich gezeigt, dass am Rand des Umformungsgebiets Ortra-Systeme auftreten können, die keine mechanische Funktion besitzen, da sie keine Kräfte auf andere Ortra-Systeme übertragen können. Innere Ortra-Systeme weisen jedoch in den Simulationsrechnungen immer eine mechanische Funktion auf und tragen zum Kräftegleichgewicht gekoppelter Ortra-Systeme bei [Glock, Bauer u. a. 2019]

8. Homogenisierung der Netzspannungen durch lineare Verteilung im hierarchischen Ansatz

Die Mechanik führt bei elastomechanisch reagierenden geodätischen Netzen eine Verteilung der Netzspannungen bzw. der Koordinatenwidersprüche in die Nachbarschaft durch. Bei einem hierarchischen Netzaufbau dagegen erfolgt die Verteilung der Koordinatenwidersprüche von elastomechanisch reagierenden Netzen auch über „Netzgrenzen“ hinweg. Der hierarchische Netzaufbau stellt bei der Koordinatenumformung sicher, dass Flurstücke nicht von Koordinatenwidersprüchen und dadurch verursachten Spannungen nachfolgender, untergeordneter Objektbereiche wie z. B. den Gebäuden beeinflusst werden. Zur Visualisierung von Netzspannungen werden Verformungen bzw. Koordinatenwidersprüche bei identischen Punkten identifiziert.

8.1. Visualisierung der Netzspannungen durch Koordinatenwidersprüche

Als unmittelbare Auswirkung der im geodätischen Ausgangsnetz vorhandenen Netzspannungen sind bei der Koordinatenumformung Koordinatenwidersprüche bei Punkten zwischen GK und UTM wahrnehmbar.

In der Sprache der Mechanik können Koordinatenwidersprüche identifiziert werden zwischen einer unverformten Netzkonfiguration (= Referenzkonfiguration κ_R), die mit Mitteln der Ausgleichsrechnung aus dem Ausgangs-Raumbezug DHDN/GK mit vernachlässigbarer Spannung kleiner Größenordnung ohne signifikante Verformung in das Ziel-Lagebezugssystem ETRS89/UTM übertragen wurde, und einer Momentankonfiguration κ_M , die durch Zwangsanschluss an identische Punkte in einen festen UTM-Koordinatenreferenzrahmen eingespannt wurde. Die Momentankonfiguration wird durch Ausgleichung mit dem gleichen funktionalen Modell wie für die Referenzkonfiguration aufgebaut [Glock, Bauer u. a. 2019].

Der UTM-Koordinatenbezugsrahmen besitzt bei der Referenzkonfiguration zunächst identische Punkte, die als weiche und damit veränderliche mechanische Lager definiert werden. Beim UTM-Referenzrahmen der Momentankonfiguration repräsentieren die identischen Punkt dagegen unveränderliche Lager, in die der durch Pseudobeobachtungen vernetzte Grundriss eingespannt wird. Die identischen Punkte können die durch Zwangsanschluss entstandenen mechanischen Kräfte aufnehmen und an die Umgebung abtragen.

Zunächst lassen sich Differenzvektoren Δx mathematisch als Differenzen von Koordinaten auffassen, die in unterschiedlichen Ausgleichungen bestimmt wurden. Sie werden später als Koordinatenwidersprüche bei den identischen Punkten gedeutet, die diese über Fehlerfortpflanzung an die benachbarten Punkte weiter verteilen, so dass Koordinatenwidersprüche theoretisch im gesamten Grundriss auftreten können.

Die Differenzvektoren werden wie folgt gebildet [Glock, Bauer u. a. 2019]:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - \bar{x} \quad \text{mit} \quad x = \text{endgültiger UTM-Grundriss} \\ &\quad \text{und} \quad \bar{x} = \text{nach UTM übertragener GK-Grundriss als Referenzkonfiguration.} \end{aligned} \tag{8.1}$$

Das funktionale Modell in Gl. (8.1) wird wie bei jeder Ausgleichung mit fehlerbehafteten und widersprüchlichen Beobachtungen definiert. Im Fall der UTM-Umstellung gehen diese als Pseudobeobachtungen aus einem mit Spannungen behafteten GK-Grundriss hervor. Dieser Grundriss stellt das Ergebnis einer über viele Jahrzehnte laufenden Fortführung des Liegenschaftskatasters durch lokale Vermessungen unterschiedlicher Genauigkeit dar, die zunächst terrestrisch ausgeführt und später durch GNSS-Messungen ergänzt wurden.

Die Beobachtungen zum Aufbau des Grundrisses einschließlich ihrer Fehler fließen damit indirekt in die Ortra-Ausgleichung ein, wobei sich Fehler terrestrischer Messungen über Fehlerfortpflanzung in Koordinatenwidersprüche bei identischen Punkten abbilden (siehe Gl. (8.41) in Abschnitt 8.1.3).

Die Ausgleichung wird, eine Normalverteilung vorausgesetzt, die beste erwartungstreue und wahrscheinlichste Lösung liefern, die in sich widerspruchsfrei ist. Mit der Annahme, dass eine Normalverteilung bei der Ortra-Ausgleichung als statistische Verteilung vorliegt, sollte ausgeschlossen sein, dass grobe Fehler in den Koordinatenwidersprüchen der identischen Punkte existieren. Bei groben Fehlern im Grundriss, wie z. B. vom Vermessungsamt klassifizierte Fehler größer als 20 cm, die schließlich zu einer Ausgleichung mit nicht mehr normalverteilten Pseudobeobachtungen führen, wird durch das Prinzip der minimalen Formänderung, das in der Ausgleichung aufgrund der vorhandenen elastomechanischen Analogie wirkt, jedoch die geringste Verzerrung in der Lösung erreicht.

Die Grundrisskoordinaten \bar{x} der Referenzkonfiguration werden durch Einführung von gleichen Gewichten $p = 1$ im stochastischen Modell für alle Beobachtungstypen gebildet, mit Ausnahme der Passpunktgewichte, die nur mit $\frac{1}{10}$ des Gewichts der Grundrisskoordinaten angesetzt werden. Als Beobachtungen werden sowohl Linienbeobachtungen entlang der Flurstücksgrenzen für den Grundriss als auch Querverstrebungen über das Flurstück sowie zusätzlich direkte Koordinatenbeobachtungen für die identischen Punkte definiert (Beobachtungstyp „Koordinate als direkte Beobachtung“).

Unter temporärem Außerachtlassen des Prinzips „Ein Punkt, ein Satz von Koordinaten“ erhält der mit minimaler Grundrissverformung übertragene GK-Grundriss in den identischen Punkten neben seinen gemessenen Koordinaten x ein zweites Koordinatenpaar mit ausgeglichenen Koordinaten, die in der Regel nicht mit den gemessenen Koordinaten identisch sind.

Das Prinzip „Ein Punkt, ein Satz von Koordinaten“ besagt, dass die ursprüngliche, gemessene Koordinate des identischen Punktes anzuhalten ist, und der Punkt keine zusätzliche, transformierte Koordinate aus der Umformung erhalten darf [Hampp und Glock 2017]. Das Prinzip ist für die endgültige Ausgleichung wichtig, kann jedoch nicht Grundlage für die freie Netzausgleichung sein, die zunächst der indirekten Bestimmung der Koordinatendifferenzen dient.

Die zunächst bei den identischen Punkten ermittelten Koordinatendifferenzen liefern Koordinatenwidersprüche Δx , die die Netzspannungen sichtbar machen. Die Koordinatendifferenzen können aus der Sicht der Mechanik als Knotenverschiebungen interpretiert werden, da die Knotenwidersprüche aus unterschiedlichen Lagen der Knoten zwischen einer Referenzkonfiguration und einer Momentankonfiguration resultieren.

Der einzeln betrachtete Vektor der im Ursprung eines Ortra-Systems liegenden Knotenverschiebung ist jedoch ein resultierender Vektor aller Primär- und Sekundärverschiebungen sowie einer weiteren Festkörperverschiebung des jeweiligen Ortra-Systems, die in der Regel von einer Drehung des Systems begleitet wird [Glock, Bauer u. a. 2019].

Wie über

- die Strukturgleichung des Weggrößenverfahrens (Gl. (4.65) und
- die Gleichgewichtsbeziehung zwischen inneren und äußeren Kräften (Gl. (4.90))

dargestellt werden kann, hängen die Netzspannungen indirekt über eine Steifigkeits- und Gleichgewichtsmatrix mit den Knotenverschiebungen zusammen. Der Zusammenhang wird folgendermaßen aufgebaut: Die Netzspannungen leiten sich, wenn das geodätische Netz als Fachwerk gesehen wird, aus den inneren Kräften ab (Gl. (4.25)). Diese wirken mit entgegengesetzten Vorzeichen den äußeren Kräften entgegen, damit sich eine Gleichgewichtsfigur einstellt. Die äußeren Kräfte können über Gl. (4.65) mit den Knotenverschiebungen in Beziehung gesetzt werden.

Die Differenzvektoren Δx für die Knotenverschiebungen dienen den Vermessungsämtern als wichtige Information zur Visualisierung der Netzspannungen.

8.1.1. Ausgleichung zur Erzeugung der Referenzkonfiguration κ_R (Referenz-UTM-Grundriss)

Aus Sicht der Mechanik erfolgt die Überführung des GK-Grundrisses nach UTM mittels freier Netzausgleichung zu einem Grundriss mit vernachlässigbaren Spannungen kleiner Größenordnung [Glock, Bauer u. a. 2019].

Referenzkonfiguration) verstanden. Im Unbekanntenvektor x finden sich neben den UTM-Koordinaten der Momentankonfiguration auch die Transformationsparameter a und o für das einzelne Ortra-System, die die elastische Reaktion der mechanischen Basiseinheit Ortra-System auf die Einwirkung äußerer Kräfte vollständig beschreiben.

Für die Ausgleichung kommt beim stochastischen Modell ein streckenabhängiges Gewicht für die Grundrissbeobachtungen und eine hohe Punktpunktgewichtung zur Anwendung:

$$p_{\text{id. Pkt.}} = 10000 \quad \text{für die identischen Punkte.} \quad (8.5)$$

Für das Streckengewicht p_i wird folgender hyperbolischer Gewichtsansatz verwendet. Die Strecke s_i wird in Gl. (8.6) in der Einheit Meter eingeführt:

$$p_i = \frac{1}{2.0 + s_i + p_d} \quad \text{mit} \quad p_d = \frac{s^3}{d^2} \quad \text{und} \quad d = \text{Dämpfungsfaktor, z. B. der Wert 100.} \quad (8.6)$$

Das Dämpfungsgewicht p_d soll in Gl. (8.6) den Einflussbereich von größeren Punktdistanzen (z. B. $s_i > 100$ m) verringern [Wagenhöfer 2013]

Durch Zwangsanschluss des unverformten Grundrisses an die identischen Punkte werden die vorher existierenden Koordinatendifferenzen Δx eliminiert. Gleichzeitig bewirkt die Einspannung in den unveränderlichen, starren UTM-Rahmen die Erzeugung mechanischer Kräfte in der aktuellen Konfiguration [Glock, Bauer u. a. 2019].

8.1.3. Herleitung eines geränderten Normalgleichungssystems für die Bestimmung der Koordinatenwidersprüche

Die unterschiedlichen Gewichtsansätze der beiden Schätzungen, die, wie bereits dargestellt wurde, mechanisch motiviert sind, werden bei unveränderten funktionalen Modellen zueinander in Beziehung gebracht:

$$P_{xx} = P_{\bar{x}\bar{x}} + \Delta P. \quad (8.7)$$

Für die Kofaktorenmatrizen kann analog zu Gl. (8.7) eine Differenzmatrix in Gl. (8.8) eingeführt werden, die dann die Differenzen der Kofaktoren enthält. Man beachte, dass die Kofaktorenmatrizen Q_{xx} , $Q_{\bar{x}\bar{x}}$ und ΔQ_{xx} im Gegensatz zu den beim Ortra-Verfahren eingeführten verschiedenen Gewichtsmatrizen (Gl. (8.7)) keine Diagonalmatrizen sind.

$$Q_{xx} = Q_{\bar{x}\bar{x}} + \Delta Q_{xx}. \quad (8.8)$$

Die Diagonalmatrix ΔP bringt die unterschiedlichen Streckengewichtungen zwischen P_{xx} und $P_{\bar{x}\bar{x}}$ für die einzelnen Linienbeobachtungen und die unterschiedlichen Gewichte bei den identischen Punkten zum Ausdruck.

Die Koordinaten der aktuellen Konfiguration gehen aus dem Referenzgrundriss durch folgende Beziehung hervor:

$$x = \bar{x} + \Delta x. \quad (8.9)$$

Die Δx werden im Folgenden in Abhängigkeit der Gewichtsunterschiede ΔP definiert. Durch die Einspannung in den vorgegebenen Rahmen kommt es zu Spannungen im Zielsystem. Infolge der unterschiedlich definierten Gewichtungen bei unverändertem funktionalen Modell, das durch die A-Matrix repräsentiert wird, kann die Normalgleichungsmatrix N_{xx} für die UTM-Koordinaten x der verformten Momentankonfiguration aus der Normalgleichungsmatrix $N_{\bar{x}\bar{x}}$ der „unverformten“ UTM-Koordinaten \bar{x} durch Erweiterung mit dem Term $A^T \Delta P A$ gebildet werden. Der mechanisch beanspruchte Grundriss kann durch Einsetzen der in Gl. (8.7) ausgedrückten Beziehung zwischen den Gewichtsmatrizen in Gl. (8.4) wie folgt formuliert werden [Glock, Bauer u. a. 2019]:

$$\begin{aligned} x &= \underbrace{\left(A^T (P_{\bar{x}\bar{x}} + \Delta P) A \right)^{-1}}_{= N_{xx}^{-1}} A^T (P_{\bar{x}\bar{x}} + \Delta P) l \\ &= (N_{\bar{x}\bar{x}} + A^T \Delta P A)^{-1} (A^T P_{\bar{x}\bar{x}} l + A^T \Delta P l). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Mit Hilfe der aus Gl. (8.10) ableitbaren Beziehung zwischen den Normalgleichungsmatrizen

$$N_{xx} = N_{\bar{x}\bar{x}} + A^T \Delta P A \quad (8.11)$$

werden im Folgenden Ausdrücke für die Differenzen Δx entwickelt.

Zur Berechnung der Differenzen Δx zwischen den Schätzwerten für die Unbekannten der beiden Ausgleichungen müssen die Inversen $N_{\bar{x}\bar{x}}^{-1}$ und N_{xx}^{-1} gebildet werden. Um die Beziehung zwischen beiden Inversen herzustellen, wird die Matrix-Identität nach Schur-Frobenius-Woodbury [Zurmühl und Falk 1997] herangezogen. Diese Matrix-Identität ist wie folgt definiert:

$$\Delta^{-1} = (D^{-1} - CA^{-1}B)^{-1} = D + DC(A - BDC)^{-1}BD \quad (8.12)$$

Der Ausdruck $N_{xx}^{-1} = (N_{\bar{x}\bar{x}} + A^T \Delta P A)^{-1}$ für den Aufbau der Inversen N_{xx}^{-1} der in Gl. (8.11) formulierten Normalgleichungsmatrix N_{xx} kann durch folgende Substitutionen

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &\Rightarrow N_{xx}^{-1} \\ D^{-1} &\Rightarrow N_{\bar{x}\bar{x}} \\ C &\Rightarrow -A^T \\ A^{-1} &\Rightarrow \Delta P \\ B &\Rightarrow A \end{aligned} \quad (8.13)$$

sowohl in den Ausdruck (8.14)

$$N_{xx}^{-1} = (N_{\bar{x}\bar{x}} + A^T \Delta P A)^{-1} = N_{\bar{x}\bar{x}}^{-1} - N_{\bar{x}\bar{x}}^{-1} A^T (AN_{\bar{x}\bar{x}}^{-1} A^T + \Delta P^{-1})^{-1} AN_{\bar{x}\bar{x}}^{-1} \quad (8.14)$$

als auch in folgenden, analogen Ausdruck (8.15) übersetzt werden, da die Inverse der Diagonalmatrix $\Delta P^{-1} = \Delta Q$ und die Umkehrung $\Delta Q^{-1} = \Delta P$ ist:

$$Q_{xx} = (Q_{\bar{x}\bar{x}}^{-1} + A^T \Delta Q^{-1} A)^{-1} = Q_{\bar{x}\bar{x}} - Q_{\bar{x}\bar{x}} A^T (AQ_{\bar{x}\bar{x}} A^T + \Delta Q)^{-1} AQ_{\bar{x}\bar{x}}. \quad (8.15)$$

In den Ausdruck (8.14) wird analog zu [Niemeier 2008] eine Hilfsmatrix K eingeführt:

$$K = N_{\bar{x}\bar{x}}^{-1} A^T (AN_{\bar{x}\bar{x}}^{-1} A^T + \Delta P^{-1})^{-1} \quad \text{bzw.} \quad K = Q_{\bar{x}\bar{x}} A^T (AQ_{\bar{x}\bar{x}} A^T + \Delta Q)^{-1} \quad (8.16)$$

Mit der Hilfsmatrix K wird N_{xx}^{-1} zu

$$N_{xx}^{-1} = N_{\bar{x}\bar{x}}^{-1} - KAN_{\bar{x}\bar{x}}^{-1}. \quad (8.17)$$

Die Beziehung zwischen den Kofaktorenmatrizen $Q_{\bar{x}\bar{x}}$ und Q_{xx} der Gl. (8.15) kann dann wie folgt dargestellt werden:

$$Q_{xx} = Q_{\bar{x}\bar{x}} - KA Q_{\bar{x}\bar{x}} = (I - KA) Q_{\bar{x}\bar{x}}. \quad (8.18)$$

Für die Koordinaten x in der Referenzkonfiguration wird Gl. (8.10) mit der Hilfsmatrix K zu [Glock, Bauer u. a. 2019]:

$$x = (N_{\bar{x}\bar{x}}^{-1} - KAN_{\bar{x}\bar{x}}^{-1}) (A^T P_{\bar{x}\bar{x}} l + A^T \Delta P l). \quad (8.19)$$

Durch Ausmultiplizieren lässt sich Gl. (8.19) weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned} x &= \underbrace{N_{\bar{x}\bar{x}}^{-1} A^T P_{\bar{x}\bar{x}} l}_{=\bar{x}} - \underbrace{KAN_{\bar{x}\bar{x}}^{-1} A^T P_{\bar{x}\bar{x}} l}_{=\bar{x}} + N_{\bar{x}\bar{x}}^{-1} A^T \Delta P l - \underbrace{KAN_{\bar{x}\bar{x}}^{-1} A^T \Delta P l + Kl}_{=Kl} - \underbrace{K(\Delta P)^{-1} \Delta P l}_{=Kl} \\ &= \bar{x} - KA\bar{x} + N_{\bar{x}\bar{x}}^{-1} A^T \Delta P l + Kl - K(AN_{\bar{x}\bar{x}}^{-1} A^T + \Delta P^{-1}) \Delta P l. \end{aligned} \quad (8.20)$$

In die letzte Gleichung von (8.20) wird die Definitionsgleichung (8.16) für K eingesetzt. Dies ergibt weiter für die Koordinaten x :

$$\begin{aligned}
 x &= \bar{x} - KA\bar{x} + N_{\bar{x}\bar{x}}^{-1}A^T\Delta P l + Kl - N_{\bar{x}\bar{x}}^{-1}A^T \underbrace{\left(AN_{\bar{x}\bar{x}}^{-1}A^T + \Delta P^{-1}\right)^{-1} \left(AN_{\bar{x}\bar{x}}^{-1}A^T + \Delta P^{-1}\right)}_{=I} \Delta P l \\
 &= \bar{x} - KA\bar{x} + Kl + \underbrace{N_{\bar{x}\bar{x}}^{-1}A^T\Delta P l - N_{\bar{x}\bar{x}}^{-1}A^T\Delta P l}_{=0} \\
 &= \bar{x} + K(l - A\bar{x}).
 \end{aligned} \tag{8.21}$$

Die Koordinatenwidersprüche Δx sind somit

$$\Delta x = K(l - A\bar{x}) \tag{8.22}$$

oder ausgeschrieben [Glock, Bauer u. a. 2019]

$$\begin{aligned}
 \Delta x_{(u,1)} &= N_{\bar{x}\bar{x}(u,u)}^{-1}A_{(u,n)}^T \left(A_{(n,u)}N_{\bar{x}\bar{x}(u,u)}^{-1}A_{(u,n)}^T + \Delta P_{(n,n)}^{-1} \right)_{(u,u)}^{-1} \left(l_{(n,1)} - A_{(n,u)}\bar{x}_{(u,1)} \right) \\
 &= Q_{\bar{x}\bar{x}}A^T \left(A Q_{\bar{x}\bar{x}}A^T + \Delta Q \right)^{-1} (l - A\bar{x}).
 \end{aligned} \tag{8.23}$$

Vergleich des bestehenden Ansatzes über vermittelnde Ausgleichung mit Bedingungen zwischen den Unbekannten von Linkwitz

Die Definition der Koordinatenwidersprüche Δx und die nachfolgende Beseitigung der Koordinatenwidersprüche bei den identischen Punkten kann über eine Netzausgleichung und eine darauf folgende Ausgleichung mit zusätzlichen Bedingungen zwischen den Unbekannten (Gl. (A.44)) durchgeführt werden. Dieser alternative Ansatz [Linkwitz 1977] führt zu vergleichbar aufgebauten Formeln für Δx wie Gl. (8.23). Beide Ansätze sollen im Folgenden entwickelt und anschließend einander gegenüber gestellt werden.

Nach Linkwitz 1977 können die Koordinatenwidersprüche nach einer bereits durchgeführten freien Netzausgleichung, die z. B. Teil- oder Gesamtpurminimierung anwendet, durch Definition von weiteren Bedingungen zwischen den Unbekannten beseitigt werden.

Bei den identischen Punkten besteht nach der Überführung durch freie Netzausgleichung analog zum Ansatz Gl. (8.2) keine Übereinstimmung zwischen transformierter und gemessener Koordinate. Bei den identischen Punkten existiert dann eine Klaffung Δx .

Die Klaffung wird bei Linkwitz 1977 als Widerspruch w im Sinne der bedingten Ausgleichung definiert.

Die Definition von zusätzlichen Bedingungsgleichungen, die den Modellansatz der bereits erfolgten Netzausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen durch Ränderung erweitern, ermöglicht es mathematisch, den Widerspruch zu Null zu setzen.

Das Normalgleichungssystem des durch die zusätzlichen Bedingungsgleichungen

$$B_{n_f \cdot 2, u}^T \cdot x_{(u,1)} = u_{(u,1)} \quad \text{mit} \quad n_f = \text{Anzahl der identischen Punkte} \tag{8.24}$$

geränderten Ansatzes der vermittelnden Ausgleichung erhält folgende Struktur:

$$\begin{bmatrix} A^T P A_{(u,u)} & B_{u, n_f \cdot 2} \\ B_{n_f \cdot 2, u}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{(u,1)} \\ k_{(n_f \cdot 2, 1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A^T P l)_{(u,1)} \\ u_{(u,1)} \end{bmatrix}. \tag{8.25}$$

Anmerkung:

Die zusätzlichen Bedingungen B^T werden für die zwangsangeschlossenen Koordinaten x der identischen Punkte aufgebaut. Sodann wird Gl. (8.25) umgeformt und damit weiter entwickelt. Als „Nebenprodukt“ ergibt

sich ein Ausdruck für die Koordinatenwidersprüche Δx . Die erste Zeile von Gl. (8.25) wird

$$\begin{aligned}
 (A^T P A) \cdot x + B_{u,n_f \cdot 2} \cdot k_{n_f \cdot 2,1} &= A_{u,n}^T P_{(n,n)} l, \\
 (A^T P A) \cdot x &= A^T P l - B k, \\
 x &= (A^T P A)^{-1} (A^T P l - B k), \\
 x &= \underbrace{(A^T P A)^{-1} A^T P l}_{=\bar{x}} - \underbrace{(A^T P A)^{-1} B k}_{=\Delta x}.
 \end{aligned} \tag{8.26}$$

Nach Gl. (A.48) aus Anhang A.3 gilt für den Korrelatenvektor k :

$$k = \left(B^T \cdot (A^T P A)^{-1} B \right)^{-1} \cdot w.$$

Damit kann der Ausdruck für Δx mit entsprechender Definition des Widerspruchs w wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned}
 \Delta x &= (A^T P A)_{(u,u)}^{-1} B_{u,n_f \cdot 2} \left(B_{n_f \cdot 2,u}^T (A^T P A)_{(u,u)}^{-1} B_{u,n_f \cdot 2} \right)_{(n_f \cdot 2, n_f \cdot 2)}^{-1} \cdot w_{(n_f \cdot 2, 1)} \\
 &= Q_{xx} B \left(B^T Q_{xx} B \right)^{-1} \cdot w.
 \end{aligned} \tag{8.27}$$

Die zusammengesetzte Kofaktorenmatrix Q_{xx} für die endgültigen Koordinaten $x + \Delta x$ ergibt sich zu [Linkwitz 1977]:

$$\begin{aligned}
 Q_{xx} &= (A^T P A)^{-1} - (A^T P A)^{-1} B \left(B^T (A^T P A)^{-1} B \right)^{-1} B^T (A^T P A)^{-1} \\
 &= Q_{xx} \left(E - E B \left(B^T Q_{xx} B \right)^{-1} B^T Q_{xx} \right) \\
 &= Q_{xx} \left(E - E \tilde{Q}_0 \right) \quad \text{mit} \quad \tilde{Q}_0 = B \left(B^T Q_{xx} B \right)^{-1} B^T Q_{xx}.
 \end{aligned} \tag{8.28}$$

\tilde{Q}_0 ist idempotent: $\tilde{Q}_0^n = \tilde{Q}_0$.

$$\text{Es gilt z. B.: } \tilde{Q}_0^2 = B \left(B^T Q_{xx} B \right)^{-1} \underbrace{B^T Q_{xx} B \left(B^T Q_{xx} B \right)^{-1}}_{=I} B^T Q_{xx} = \tilde{Q}_0.$$

Nun kann man beide alternative Ansätze für die Bestimmung der Koordinatenwidersprüche Gl. (8.27) und (8.23) einander gegenüber stellen,

$$\begin{aligned}
 \Delta x &= Q_{\bar{x}\bar{x}} B \left(B^T Q_{\bar{x}\bar{x}} B \right)^{-1} \cdot w \quad \text{und} \\
 \Delta x &= Q_{\bar{x}\bar{x}} A^T \left(A Q_{\bar{x}\bar{x}} A^T + \Delta Q \right)^{-1} \cdot (l - A \bar{x}),
 \end{aligned} \tag{8.27 / 8.23}$$

und sieht folgende Ähnlichkeiten:

- Die Funktion des Widerspruchsvektors w , letzter Term auf der rechten Seite von Gl. (8.27), übernimmt der Vektor der negativen Verbesserungen v in Gl. (8.23).
- Die Gaußsche Transformation mit der Formmatrix $Q_{\bar{x}\bar{x}}$, die für die inverse Matrix in Gl. (8.27) zur Anwendung kommt, wird in Gl. (8.23) durch eine Matrix mit Gewichtskoeffizientendifferenzen ΔQ ergänzt, die implizit die Steifigkeitsinformationen für den Verschiebungsansatz einführt.

Bei dem Ansatz (8.23) werden durch die Matrizen A , $Q_{\bar{x}\bar{x}}$ und ΔQ vollständige Steifigkeitsinformationen für die nach UTM überführte GK-Referenzkonfiguration und die endgültige, aktuelle UTM-Momentankonfiguration mitgeführt.

Ebenfalls kann die über die Matrix-Identität nach Schur-Frobenius-Woodbury hergeleitete Gleichung (8.23) als gerändertes Normalgleichungssystem analog zur Gl. (8.25) aufgebaut werden [Glock, Bauer u. a. 2019].

Dieses enthält das funktionale Modell $(A^T PA)$ der Ausgangsnetzausgleichung zur Bestimmung der Koordinaten \bar{x} . Die Ermittlung der Unbekannten x der endgültigen Koordinaten erfolgt über Ränderung des Ausgangs-Normalgleichungssystems mit der Inversen der Differenz-Gewichtsmatrix $\Delta P^{-1} = \Delta Q$, die als Diagonalmatrix eingeführt wird, und der originalen bzw. transponierten Matrix A .

Für den Ansatz der Gl. (8.23) wird nun das folgende Gleichungssystem aufgebaut [Glock, Bauer u. a. 2019]:

$$\begin{bmatrix} (A^T PA)_{(u,u)} & A_{(u,n)}^T \\ A_{(n,u)} & -\Delta Q_{(n,n)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{(u,1)} \\ k_{(n,1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A^T Pl)_{(u,1)} \\ l_{(n,1)} \end{bmatrix}. \quad (8.29)$$

Dieses kann als analog zum Gleichungssystem (8.25) angesehen werden. In Gl. (8.29) werden wieder die endgültigen Koordinaten x in das Normalgleichungssystem eingeführt. Als Nebenprodukt der obigen Entwicklung kann analog ein Ausdruck für die Koordinatenwidersprüche gewonnen werden.

Das geränderte Normalgleichungssystem (8.29) ergibt ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} (A^T PA)x + A^T k &= A^T Pl, \\ A_{(n,u)}x_{(u,1)} - \Delta Q_{(n,n)} k_{(n,1)} &= l_{(n,1)}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Die erste Zeile von Gl. (8.30) wird mit dem Term $-A \cdot (A^T PA)^{-1} = -A \cdot N_{\bar{x}\bar{x}}^{-1}$ multipliziert. Der Term $-A \cdot N_{\bar{x}\bar{x}}^{-1}$ stellt die mit der (negativen) Jakobimatrix multiplizierte inverse Normalgleichungsmatrix $N_{\bar{x}\bar{x}}^{-1}$ der freien Netzausgleichung dar und wird zur zweiten Zeile addiert. Es ergibt sich folgender Zwischenausdruck (Gl. (8.31)), der dann weiter vereinfacht und umgestellt wird (Gl. (8.32)):

$$\underbrace{-A (A^T PA)^{-1} (A^T PA)x + Ax - A (A^T PA)^{-1} A^T k}_{= E} = -A (A^T PA)^{-1} (A^T Pl) + l + \Delta Q_{(n,n)} k_{(n,1)}. \quad (8.31)$$

Gleichung (8.31) wird mit dem Faktor -1 multipliziert und umgestellt:

$$A \cdot (A^T PA)^{-1} A^T k + \Delta Q_{(n,n)} k_{(n,1)} = A \cdot (A^T PA)^{-1} (A^T Pl) - l. \quad (8.32)$$

Aus Gl. (8.32) lässt sich schließlich die Korrelate k wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} k &= \left(A (A^T PA)^{-1} A^T + \Delta Q \right)^{-1} \left(A (A^T PA)^{-1} (A^T Pl) - l \right) \\ &= \left(A Q_{xx} A^T + \Delta Q \right)^{-1} \left(A Q_{xx} (A^T Pl) - l \right). \end{aligned} \quad (8.33)$$

Die erste Gleichung von (8.30) lässt sich als Ausdruck für ein Normalgleichungssystem interpretieren, der mit einer Korrelate k ergänzt wurde.

Für das erweiterte System ergibt sich nun, nach Auflösung nach k :

$$\begin{aligned} (A^T PA)x + A^T k &= A^T Pl \\ (A^T PA)x + A^T (A \cdot Q_{xx} A^T + \Delta Q)^{-1} (A \cdot Q_{xx} (A^T Pl) - l) &= A^T Pl. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Dieser Ausdruck lässt sich nach den endgültigen Koordinaten x auflösen:

$$\begin{aligned} (A^T PA)x &= A^T Pl - A^T (A \cdot Q_{xx} A^T + \Delta Q)^{-1} (A \cdot Q_{xx} (A^T Pl) - l) \\ x &= \underbrace{(A^T PA)^{-1} A^T Pl}_{=\bar{x}} - (A^T PA)^{-1} A^T (A \cdot Q_{xx} A^T + \Delta Q)^{-1} (A \cdot Q_{xx} (A^T Pl) - l). \end{aligned} \quad (8.35)$$

Für die Koordinatenwidersprüche Δx ergibt sich dann [Glock, Bauer u. a. 2019]

$$\begin{aligned}\Delta x &= -\left(A^T P A\right)^{-1} A^T \left(A \cdot Q_{xx} A^T + \Delta Q\right)^{-1} \left(A \cdot Q_{xx} \left(A^T P l\right) - l\right) \\ &= Q_{xx} A^T \left(A \cdot Q_{xx} A^T + \Delta Q\right)^{-1} \left(l - A \bar{x}\right).\end{aligned}\quad (8.36)$$

Wenn die Unbekannten \bar{x} bereits vorliegen, können die Δx auch über folgenden Ansatz berechnet werden:

$$\begin{bmatrix} \left(A^T P A\right)_{(u,u)} & A_{(u,n)}^T \\ A_{(n,u)} & -\Delta Q_{(n,n)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ k_{(n,1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ l_{(n,1)} - A_{(n,u)} \bar{x}_{(u,1)} \end{bmatrix}.\quad (8.37)$$

Die Δx und die nicht weiter interessierenden Korrelaten k können wie folgt aufgelöst werden:

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ k_{(n,1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(A^T P A\right)_{(u,u)} & A_{(u,n)}^T \\ A_{(n,u)} & -\Delta Q_{(n,n)} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ l_{(n,1)} - A_{(n,u)} \bar{x}_{(u,1)} \end{bmatrix}.\quad (8.38)$$

Zur Überprüfung des Ansatzes wird die erste Zeile von Gl. (8.37)

$$\left(A^T P A\right) \Delta x + A^T k = \mathbf{0}\quad (8.37)$$

mit $-A \cdot \left(A^T P A\right)^{-1}$ multipliziert und zur zweiten Zeile addiert. Daraus folgt

$$\begin{aligned}-A \left(A^T P A\right)^{-1} A^T k - \Delta Q_{(n,n)} k_{(n,1)} &= l_{(n,1)} - A_{(n,u)} x_{(u,1)} \\ k_{(n,1)} &= \left(A \left(A^T P A\right)^{-1} A^T + \Delta Q_{(n,n)}\right)^{-1} \left(A_{(n,u)} x_{(u,1)} - l_{(n,1)}\right)\end{aligned}\quad (8.39)$$

Mit Auflösung nach k wird nun die erste Gleichung von (8.37):

$$\left(A^T P A\right) \Delta x + A^T \left(A \left(A^T P A\right)^{-1} A^T + \Delta Q_{(n,n)}\right)^{-1} \left(A_{(n,u)} x_{(u,1)} - l_{(n,1)}\right) = \mathbf{0}.\quad (8.40)$$

Somit lassen sich die Koordinatenwidersprüche Δx wieder wie folgt berechnen:

$$\Delta x = -\left(A^T P A\right)^{-1} A^T \left(A Q_{xx} A^T + \Delta Q\right)^{-1} \left(A x - l\right) = \left(A^T P A\right)^{-1} A^T \left(A Q_{xx} A^T + \Delta Q\right)^{-1} \left(l - A x\right).\quad (8.41)$$

Berechnung der die Koordinatenwidersprüche Δx verursachenden Kräfte

In Gl. (6.28) im Abschnitt 6.1.2 wurde der funktionale Zusammenhang zwischen Knotenverschiebungen r und äußeren Kräften mit Hilfe der inversen Gesamtsteifigkeitsmatrix der Mechanik dargestellt.

Unter Ausnutzung der Analogie zwischen Mechanik und Ausgleichsrechnung kann Gl. (6.28) nun so umformuliert werden, dass die Knotenverschiebungen den Koordinatenwidersprüchen zugeordnet werden können. Darüber hinaus kann die inverse Gesamtsteifigkeitsmatrix $\left(A^T K A\right)^{-1}$ durch die inverse Normalgleichungsmatrix eines vermittelnden Ausgleichsansatzes substituiert werden. Die Formulierung der Gl. (6.28) mit den zuletzt in Gl. (8.41) ermittelten Koordinatenwidersprüchen und den Matrizen einer vermittelnden Ausgleichung wird zu [Glock, Bauer u. a. 2019]:

$$\Delta x = \left(A^T P A\right)^{-1} \cdot p = Q_{xx} \cdot p = N^{-1} \cdot p.\quad (8.42)$$

Gleichung (8.42), die Koordinatenwidersprüche Δx in den funktionalen Zusammenhang zu den äußeren Kräften p stellt, ist zur Gl. (6.28) der Mechanik äquivalent und analog.

Der über mehrere Ansätze hergeleitete Ausdruck für die Koordinatenwidersprüche wird der Gl. (8.42) direkt gegenübergestellt, um eine mechanische Interpretation für Gl. (8.41) zu erhalten.

Bei beiden Gleichungen ist der erste Term $(A^T P A)^{-1}$, der Ausdruck für die inverse Normalgleichungsmatrix N^{-1} , identisch. Der in Gl. (8.41) dem gemeinsamen Term folgende Teil kann dann als formelmäßiger Zusammenhang für äußere Kräfte p identifiziert werden [Glock, Bauer u. a. 2019].

Die Kräfte p können im Folgenden in Abhängigkeit der Inverse der Gewichtsdivergenz ΔQ und des funktionalen und stochastischen Modells der Ausgleichung für die Grundrisskoordinaten \bar{x} ausgedrückt werden.

Damit ergibt sich für äußere Kräfte, welche die Koordinatenwidersprüche Δx erzeugen, folgende Gleichung:

$$p = A^T (A Q_{xx} A^T + \Delta Q)^{-1} (I - A x). \quad (8.43)$$

8.2. Verteilung der Koordinatenwidersprüche bei der hierarchischen Netzverdichtung

Die zuerst ausgeführte Ausgleichung für die Flurstücke soll wie folgt mit dem Index 1 gekennzeichnet werden:

$$x_1 = (A_1^T P_1 A_1)^{-1} A_1^T P_1 l_1. \quad (8.44)$$

Die nachfolgende zweite Ortra-Ausgleichung für die Gebäude nutzt die Umformungsergebnisse der Flurstücksausgleichung als Anschlusspunkte im funktionalen Modell. Die in der Flurstücksausgleichung bestimmten Punkte werden als unveränderlich angesehen und stellen den bereits überführten homogenen Koordinatenreferenzrahmen im Ziel-Lagebezugssystem ETRS89/UTM dar, in dem die nachfolgenden Grundrisse ihre virtuellen Netze integrieren und ihre Nachbarschaftsbeziehungen und -genauigkeit zum übergeordneten Netz aufbauen. Die Flurstückspunkte dienen dem Gebäudenetz als mechanisches Lager [Glock, Bauer u. a. 2019]. Bei der nachfolgenden Ausgleichung für die den Gebäuden untergeordneten sonstigen Bauwerke wird der Netzverdichtungsansatz analog definiert.

Die Gebäudeausgleichung, die als zweite Ausgleichung ausgeführt wird, soll den Index 2 erhalten. Die im hierarchischen Ansatz der Netzverdichtung im Unbekanntenvektor zu definierenden UTM-Koordinaten der Gebäudepunkte x_2 werden über vermittelnde Ausgleichung wie folgt berechnet:

$$x_2 = (A_2^T P_2 A_2)^{-1} A_2^T P_2 l_2. \quad (8.45)$$

In Gl. (8.46) soll gezeigt werden, wie sich bereits vorliegende Koordinaten im hierarchischen Ansatz als Anschlusskoordinaten in die nachfolgende Ausgleichung einführen lassen. Dazu wird die Grundgleichung des Ortra-Verfahrens (Gl. (7.4)) zur Bestimmung der UTM-Koordinaten leicht modifiziert:

$$\begin{aligned} 0 &= E_2 + o_1 (x_{F_1} - x_2) + a_1 (y_{F_1} - y_2) - E_{F_1}, \\ 0 &= N_2 + a_1 (x_{F_1} - x_2) - o_1 (y_{F_1} - y_2) - N_{F_1}. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Gleichung (8.46) wird im Weiteren zur Definition der Beobachtungsgleichungen für die Ausgleichung (Gl. (8.45)) der Gebäude verwendet, dabei werden die Anschlusskoordinaten (E_{F_1}, N_{F_1}) des Punktes P_{F_1} als unveränderlich angenommen.

Im Folgenden wird gezeigt, wie die Koordinatenwidersprüche Δx_1 , die sich durch Differenzbildung zwischen dem unverformten, nach UTM übertragenen Referenz-Grundriss und dem endgültigen, nach dem Prinzip der minimalen Formveränderung aufgebauten Grundriss ergeben, zur Erhaltung der Nachbarschaftsgenauigkeit in den nachfolgenden Ausgleichungen weiter verteilt werden.

Für die Gebäudeausgleichung sind die in der vorangegangenen Ausgleichung durch Zwangsanschluss verursachten Knotenverschiebungen bei den Flurstückspunkten als zu eliminierende Koordinatenwidersprüche definiert, wenn nachfolgend die Flurstückspunkte beim Verdichtungsansatz für die Gebäude die Rolle von identischen Punkten übernehmen [Glock, Bauer u. a. 2019].

Zur Eliminierung der Koordinatenwidersprüche innerhalb der Gebäudeausgleichung müssen mechanische Kräfte p_2 aufgewendet werden, welche gemäß dem dritten Newton'schen Gesetzes *Actio gleich Reactio* Netzspannungen im lokalen virtuellen Gebäudenetz erzeugen. Die neuen Netzspannungen stehen mechanisch in keiner Beziehung zu den Netzspannungen der vorherigen Ausgleichung und bilden infolge der Entkoppelung keine Gleichgewichtsfigur mit den vorliegenden Flurstücksbeobachtungen.

8.2.1. Bestimmung der induzierten äußeren Kräfte im Verdichtungsnetz

Mit folgender Gleichung (8.47) können die Kräfte p_2 im Verdichtungsnetz über das funktionale Modell der Gebäude und der Flurstücke aus den Kräften p_1 bestimmt werden, die beim Zwangsanschluss an die identischen Punkte bei der Flurstücksausgleichung aufgewendet werden [Glock, Bauer u. a. 2019]:

$$p_2 = (A_2^T P_2 A_2) \cdot \Delta x_1 = (A_2^T P_2 A_2) \cdot \underbrace{(A_1^T P_1 A_1)^{-1}}_{=\Delta x_1} \cdot p_1. \quad (8.47)$$

Die in Gl. (8.46) vorliegenden Koordinaten (E_{F_1}, N_{F_1}) der Anschlusspunkte enthalten die Koordinatenwidersprüche wie folgt:

$$\begin{aligned} E_{F_1} &= \bar{E}_{F_1} + \Delta E_{F_1}, \\ N_{F_1} &= \bar{N}_{F_1} + \Delta N_{F_1}. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Die Koordinaten \bar{E}_{F_1} und \bar{N}_{F_1} repräsentieren die durch Ausgleichung nach UTM übertragenen Koordinaten, die nicht durch Netzspannungen im GK-Netz belastet sind, da diese Widersprüche durch Verschiebung der identischen Punkte in UTM im übergeordneten Bereich der Flurstücke noch nicht abgebaut wurden. Die Koordinaten \bar{E}_{F_1} und \bar{N}_{F_1} können aus der vorhergehenden Flurstücksausgleichung aus dem Vektor \bar{x}_1 der Koordinaten entnommen werden.

Die Koordinatenwidersprüche ΔE_{F_1} und ΔN_{F_1} finden sich im Vektor Δx_1 . Als unveränderliche Koordinaten können die Anschlusskoordinaten der Flurstückspunkte beim funktionalen Modell der Gebäudeausgleichung (Gl. (8.49)) in den Beobachtungsvektor l aufgenommen werden.

Neben den Anschlusspunkten werden die gesuchten Gebäudekoordinaten als weitere Unbekannte definiert. Im Beobachtungsvektor l werden für Gebäudebeobachtungen keine direkten Koordinatenbeobachtungswerte aufgebaut. Zur Verdeutlichung der Verteilung der Widersprüche wird das funktionale Modell ausgeschrieben [Glock, Bauer u. a. 2019]:

$$v = \begin{bmatrix} \hat{v}_{E_{F_1}} \\ \hat{v}_{N_{F_1}} \\ \hat{v}_{E_{F_2}} \\ \hat{v}_{N_{F_2}} \\ \vdots \\ \hat{v}_{E_{F_n}} \\ \hat{v}_{N_{F_n}} \end{bmatrix} = A \cdot x - l = A \cdot \begin{bmatrix} a_{F_1} \\ o_{F_1} \\ E_{F_1} \\ N_{F_1} \\ a_{F_2} \\ o_{F_2} \\ E_{F_2} \\ N_{F_2} \\ \vdots \\ a_{F_n} \\ o_{F_n} \\ E_{F_n} \\ N_{F_n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\bar{E}_{F_1} + \Delta E_{F_1}) \\ (\bar{N}_{F_1} + \Delta N_{F_1}) \\ (\bar{E}_{F_2} + \Delta E_{F_2}) \\ (\bar{N}_{F_2} + \Delta N_{F_2}) \\ \vdots \\ (\bar{E}_{F_n} + \Delta E_{F_n}) \\ (\bar{N}_{F_n} + \Delta N_{F_n}) \end{bmatrix}. \quad (8.49)$$

8.2.2. Zusammensetzung der Koordinatenwidersprüche im Verdichtungsnetz

Zur Herleitung der Verteilung der Koordinatenwidersprüche wird bei der Bestimmungsgleichung für die Berechnung der unbekanntenen Gebäudepunkte (siehe Gl. (8.45)) der Vektor der Beobachtungen l_2 in folgende

zwei Beobachtungsvektoren aufgeteilt:

1. in einen Beobachtungsvektor mit Koordinaten ohne Koordinatenwidersprüche $l_{2_{\bar{x}_1}}$, der die Anschlusskoordinaten aus der unverformten Referenzkonfiguration enthält, und
2. in einen Beobachtungsvektor mit den Koordinatenwidersprüchen $l_{2_{\Delta x_1}}$.

Die Unbekannten x_2 berechnen sich wie folgt [Glock, Bauer u. a. 2019]:

$$\begin{aligned} x_2 &= \bar{x}_2 + \Delta x_2 = \left(A_2^T P_2 A_2 \right)^{-1} A_2^T P_2 (l_{2_{\bar{x}_1}} + l_{2_{\Delta x_1}}) \\ &= \left(A_2^T P_2 A_2 \right)^{-1} A_2^T P_2 l_{2_{\bar{x}_1}} + \left(A_2^T P_2 A_2 \right)^{-1} A_2^T P_2 l_{2_{\Delta x_1}}. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Gleichung (8.50) zeigt, dass sowohl die Koordinatenwidersprüche Δx_2 als auch die Koordinaten \bar{x} identisch über $\left(A_2^T P_2 A_2 \right)^{-1} A_2^T P_2$ auf die Neupunkte übertragen werden. Ebenso wie die Anschlusskoordinaten \bar{E}_{F_1} und \bar{N}_{F_1} gehen die Koordinatenwidersprüche ΔE_{F_1} und ΔN_{F_1} linear in das Ausgleichsmodell ein.

Bei dem ersten Term $\left(A_2^T P_2 A_2 \right)^{-1} A_2^T P_2 l_{2_{\bar{x}_1}}$ in Gl. (8.50), der die Werte für die UTM-Koordinaten der Gebäudepunkte zum überwiegenden Teil bestimmt, muss davon ausgegangen werden, dass dieser einen weitaus größeren Anteil zu den Koordinatenwidersprüchen Δx_2 , wenn auch von kleiner Ordnung, beiträgt.

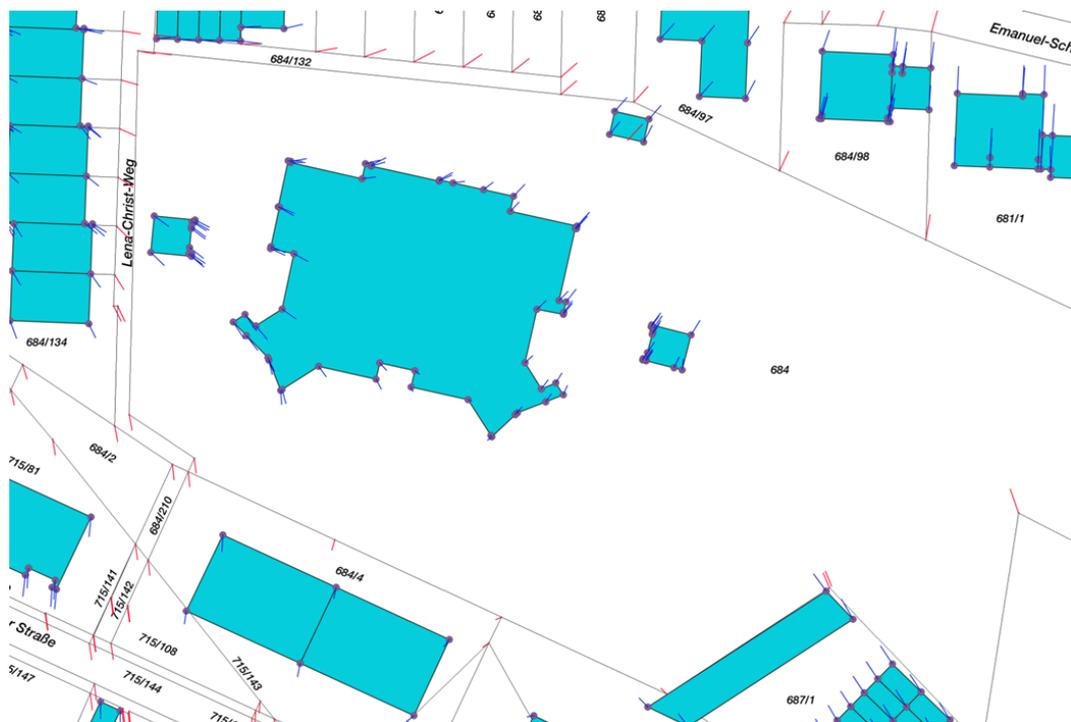


Abbildung 8.2.: Verteilung der Koordinatenwidersprüche im hierarchischen Verdichtungsansatz von den Flurstücken (rote Vektoren) in die durch nachfolgende Ausgleichung aufgebaute Gebäude (blaue Vektoren).

In diesem Fall setzen sich die durch Verteilung im hierarchischen Ansatz definierten Koordinatenwidersprüche bei den Gebäuden Δx_2 , neben dem Anteil der durch das funktionale Modell $v_2 = A_2 x_2 - l_2$ in die Unbekannten x_2 übertragenen Koordinatenwidersprüche Δx_1 , auch noch aus dem Anteil der Knotenverschiebungen der Gebäudeausgleichung zusammen.

Gleichung (8.50) zeigt weiter, dass die Koordinatenwidersprüche der Anschlusspunkte Δx_1 linear und absolut in vollem Umfang in den Gesamtanteil Δx_2 einfließen, da sie in dem gleichen funktionalen Modell berechnet werden wie die Anschlusskoordinaten E_{F_1} und N_{F_1} [Glock, Bauer u. a. 2019].

Die in die Folgeausgleichung eingehenden Koordinatenwidersprüche Δx_1 bei den Anschlusspunkten sind nach Gl. (8.47) mit den äußeren Kräften, die in der vorangegangenen Flurstücksausgleichung v. a. durch

Zwangsanschluss an die identischen Punkte entstanden sind, über den Term $(A_1^T P_1 A_1)^{-1}$ verknüpft. Damit stehen die Netzspannungen, die sich aus den äußeren Kräften mit $p_2 = (A_2^T P_2 A_2) \Delta x_2$ mit einer aufzubauenen Gleichgewichtsmatrix ableiten lassen, in direktem Zusammenhang mit den Netzspannungen im übergeordneten Netz. Über verschiedene mathematische Verknüpfungen der Normalgleichungsmatrizen $(A_1^T P_1 A_1)$ und $(A_2^T P_2 A_2)$ kann die Verteilung der Koordinatenwidersprüche von dem Objektbereich der Flurstücke in den Objektbereich der Gebäude erklärt werden. Generell kann somit ein mathematischer Zusammenhang zwischen den ursprünglichen Netzspannungen der übergeordneten Netzausgleichung und den nachfolgenden Netzspannungen der im hierarchischen Ansatz auszuführenden Netzverdichtungsausgleichungen gezeigt werden [Glock, Bauer u. a. 2019].

9. Numerik

9.1. Einleitung

Als ein besonderer Erfolgsfaktor bei der Homogenisierung des Liegenschaftskatasters durch das Ortra-Verfahren bei der UTM-Umstellung in Bayern hat sich der Einsatz von moderner Sparse Matrizen Technologie bei der Numerik erwiesen.

Bei der Ausgleichung der einzelnen Objektbereiche des Amtlichen Liegenschaftskataster-Informationssystems ALKIS wurden für die Auflösung der entstehenden Normalgleichungssysteme Sparse Matrizen und speziell dafür entwickelte Technologien eingesetzt wie z. B. die Sparse Cholesky-Faktorisierung auf Basis von Superknoten [Glock, Bauer u. a. 2019], die durch einen verteilten Ansatz gleichzeitig mehrere Prozessoren eines Servers für die numerische Faktorisierung nutzen konnten. Mit diesen Technologien konnte die Massenproblematik bei der Umstellung zuverlässig bewältigt werden.

Auf dem an zentraler Stelle am Landesamt für Digitalisierung, Breitband und Vermessung (LDBV) in München aufgebauten Server wurde die Prozessierung für ganz Bayern durchgeführt. Dabei wurden die Amtsbezirke der Ämter für Digitalisierung, Breitband und Vermessung (ADBV) für die Ausgleichungen als Bearbeitungseinheiten definiert. Jeweils auf einem Amtsbezirk wurden vorbereitende Prozesse, die die künstlichen Netze auf Basis von Grundrissdaten des Katasters und von identischen Punkten aufbauen, die Ausgleichung selbst und die weitere Verarbeitung der nach UTM überführten Grundrisselemente durchgeführt.

Wie bereits in Kapitel 7 in Zusammenhang mit den Arbeiten von Benning und Scholz 2010 für die UTM-Umstellung der Stadt Hagen mittels Ausgleichung ausgeführt wurde, ist neben einer ausreichenden Laufzeit für die direkte Ausgleichung, die auf Basis von Sparse Matrizen zu entwickeln ist, eine ausreichende Laufzeit bei den die Ausgleichung vorbereitenden Prozessen notwendig. Als Ziel war in Bayern die Durchführung der UTM-Umstellung des Liegenschaftskatasters innerhalb von 14 Tagen vorgegeben. Länger sollten die Einschränkungen für den Grundstücksverkehr nicht dauern.

Wie anhand der Größen der Normalgleichungssysteme einzelner Amtsbezirke der Ämter für Digitalisierung, Breitband und Vermessung im Folgenden nachvollzogen werden kann, war zu Beginn des Projekts die Massenproblematik bekannt und eine Schätzung vorhanden, dass die Anzahl der Unbekannten zwischen 10^8 und 10^9 betragen würde. Nicht bekannt war, wie viele Rechenschritte (Gleitkommaoperationen, oder *floating point operations*, abgekürzt flops) für die numerische Faktorisierung zur Bestimmung der Unbekannten notwendig werden würden. Deren Anzahl lässt sich über die symbolische Faktorisierung ermitteln und eine Abschätzung einer ausreichenden Laufzeit erreichen. Bei $7,26 \cdot 10^{14}$ (= 726 Billionen) erforderlichen Rechenschritten für die Ausgleichungen der UTM-Umstellung wird bei einem zeitlichen Rahmen von 14 Tagen, ohne Mitkalkulation der zusätzlichen Prozessierungen weiterer Prozessschritte, eine theoretisch ausreichende Laufzeit erreicht, wenn 0,1 Gigaflop pro Sekunde, d. h. 0,1 Gigaflops durchschnittlich geleistet werden. Tatsächlich wurde vom Abend des 21.12.18 bis in den Morgen des 22.12.18 bei den drei nacheinander ausgeführten Ausgleichungen für Flurstücke, Gebäude und sonstige Bauwerke eine Laufzeit erreicht, die 4,5 Gigaflops auf einem einzelnen Server entspricht. Wichtig bei der Auswahl des numerischen Verfahrens war, dass dieses effizient mit dem zur Verfügung stehenden Hauptspeicher arbeitet und damit eine Parallelisierung von Ausgleichungen erlaubt. Dies schließt mit ein, dass die speicher-optimale Darstellung von Sparse Matrizen genutzt wird. Nicht in die Entscheidung einbezogen wurden numerische Verfahren, die für die Auflösung der Unbekannten des Gleichungssystems eine orthogonale Basis mit vollbesetzten Vektoren aufbauen, wie z. B. das GMRES-Verfahren [Saad und Schultz 1986, Saad 2003]. Da mit den UTM-Koordinaten aus der Bundeseinheitlichen Transformation für ATKIS, BeTA2007, brauchbare Näherungslösungen für die Unbekannten vorliegen, ist dieses Verfahren als interessante Alternative zu betrachten, von der eine deutliche Beschleunigung bei der Konvergenz zu erwarten ist. Die Entscheidung für das moderne Sparse Cholesky Verfahren [T. A. Davis 2006] fiel auch deshalb, weil es besser in die bereits vorhandene Sparse Matrizen Software des Projekts integrieren ließ.

Bei der Sicherstellung einer ausreichenden Laufzeit bei der Prä- und Post-Prozessierung ist zu berücksichtigen, dass bei der UTM-Umstellung nach Durchführung der Ausgleichung die Grundrissdaten, die in der Georeferenzierung des alten Bezugssystems übergeben wurden, durch anschließende Post-Prozessierung mit dem neuen Raumbezug verknüpft werden müssen, um sie dem nachfolgenden Aufbau des Liegenschaftskatasters zur Verfügung zu stellen.

Die in Bayern gewählte Strategie, die Netzspannungen infolge rechnerischer Homogenisierung des Liegenschaftskatasters durch Aufbau einer numerisch aufwändigen Ausgleichung zu reduzieren, konnte weiterverfolgt werden, nachdem in einer frühen Projektphase erste Tests der Ausgleichung und der Numerik die Prognose ermöglichten, dass die Rechenzeiten voraussichtlich den Zeitraum einer Woche nicht überschreiten werden.

Die automatisiert durchgeführte Homogenisierung bei der UTM-Umstellung des Liegenschaftskatasters basiert auf dem direkten Verfahren nach Cholesky zur numerischen Lösung eines linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$. Das Cholesky-Verfahren arbeitet mit positiv definiten Matrizen A , die durch die Ausgleichung definiert werden und in dünner Besetzungsstruktur gegeben sind. Für diese Art von Matrizen, die zum größten Teil aus Nulleinträgen bestehen, und für die seit den 1970er Jahren Algorithmen für die Faktorisierung auf Basis der Graphentheorie verfügbar sind, die die spezielle Struktur der Matrizen ausnutzen, soll in dieser Arbeit durchgängig der Begriff Sparse Matrizen verwendet werden.

Für die Prozessierung der Ausgleichungen der UTM-Umstellung wurde, wie eingangs erwähnt, ein direktes statt eines indirekten Verfahrens ausgewählt, wie es beispielsweise in Baden-Württemberg bei der UTM-Umstellung in Form der konjugierten Gradienten [Hestenes und Stiefel 1952] verwendet wurde. Indirekte Verfahren sollen nicht Gegenstand dieser Arbeit sein. Weiter sollen numerisch als stabiler geltende, jedoch aufwändigere direkte Verfahren auf Basis von Orthogonalisierungen wie beispielsweise die Sparse QR-Faktorisierung [T. A. Davis 2011] nicht behandelt werden. Diese kamen für einen Einsatz in Bayern nicht in Frage, weil sie die Anforderungen an die Laufzeit nicht erfüllen konnten. Ein Test der Sparse QR-Faktorisierung auf Basis einer Normalgleichungsmatrix für das Liegenschaftskataster eines Amtsbezirks ergab auf dem Server des Landesamts für Digitalisierung, Breitband und Vermessung eine um Faktor 100 höhere Laufzeit als das Sparse Cholesky-Verfahren.

Da das Sparse Cholesky-Verfahren, das als wichtigster Vertreter der direkten Sparse Matrizen Verfahren für positiv definite Matrizen anzusehen ist, als numerisches Verfahren durchgängig bei der UTM-Umstellung in Bayern eingesetzt wurde, soll es in dieser Arbeit näher behandelt werden.

Bei der Ausgleichung für die bayernweit 11,8 Millionen Flurstücke treten die größten Normalgleichungssysteme auf. Die Matrizen wurden jeweils für die Flurstücke eines Amtsbezirks aufgebaut und auf dem zentralen Server am LDBV nacheinander, teilweise auch parallel gerechnet. Tabelle 9.1 gibt einen Überblick über die Dimensionen der Normalgleichungssysteme.

Amt für Digitalisierung, Breitband und Vermessung (ADBV)	Dimension der Normalgleichungsmatrix
Weilheim i. OB	15.6 x 15.6 Mio.
Bayreuth	13.9 x 13.9 Mio.
Marktoberdorf	12.7 x 12.7 Mio.
Traunstein	12.3 x 12.3 Mio.
⋮	⋮
München	10.9 x 10.9 Mio.

Tabelle 9.1.: Dimension des Normalgleichungssystems ausgewählter Amtsbezirke bei der Ausgleichung der Flurstücke nach dem Ortra-Verfahren.

Aus der Dimension des Normalgleichungssystems lässt sich die Information ableiten, wie viele Punkte als Unbekannte in die Ausgleichung eingeführt wurden. Zu jedem Punkt werden vier Unbekannte für die Ausgleichung definiert: Die East- und North-Koordinaten des zu transformierenden Punktes P und zwei Transformationsparameter für das Ortra-System, das für die Überführung des Punktes definiert wurde [Hampp und Glock 2017, Glock, Bauer u. a. 2019]. Damit ergeben sich beispielsweise für das ADBV Weilheim i. OB (Tabelle 9.1)

knapp 4 Millionen Punkte.

Als Grundlage für die Auflösung der bayernweit 880 Millionen Unbekannten der Ausgleichung zur Bestimmung von 220 Millionen Punkten der Objektbereiche Flurstücke, Gebäude und sonstige Bauwerke wurden insgesamt 2.0 Milliarden Beobachtungen definiert [Glock und Birkenbeul 2018, Glock, Bauer u. a. 2019].

Gemessen an der Anzahl der nach UTM zu überführenden Datensätze ist der Objektbereich der Flurstücke mit 60 % der größte, es folgen die Gebäude mit 36 % und die sonstigen Bauwerke mit 4 %.

Als Bearbeitungseinheiten für die Ausgleichung wurden Amtsbezirke zuzüglich eines Umgriffs von wenigen Kilometern gewählt, um stabile Grenzen zwischen den Vermessungsamtsbezirken gewährleisten zu können. Koordinatenwidersprüche bei identischen Punkten des Ausgangsamtes in der Nähe der Amtsbezirksgrenze pflanzen sich in die Umgebung des identischen Punktes fort und wirken sich möglicherweise auch auf Flurstücke des benachbarten Amtsbezirks aus. Dieser Verzerrungsbereich ist jedoch auch durch zusätzliche Flurstücke des benachbarten Amtsbezirks ausreichend eingebettet, so dass ein fester Rand des Gebiets existiert, der zu einer eindeutigen Funktion der Verzerrungen führt.

Hardwareseitig standen für den Server 196 GByte RAM Hauptspeicher und 8 CPUs zur Verfügung, die ein gleichzeitiges Berechnen von mehreren Ausgleichungen verschiedener Ämter erlaubten.

Die großen Matrizendimensionen der Normalgleichungssysteme (Tabelle 9.1) ermöglichen trotz dünner Besetzung der Matrizen, dass bei den größeren Ämtern zum Teil mehr als 200 Millionen Matrizen-elemente definiert werden. Tabelle 9.2 gibt einen Überblick, in welcher Größenordnung sich die Anzahl der Nichtnull-Elemente der Normalgleichungsmatrizen der größeren Ämter bewegt.

ADBV	Anzahl der Matrizen-elemente in der Normalgleichungsmatrix (nur linke untere Dreiecksmatrix)
Weilheim i. OB	272,6 Millionen
Bayreuth	255,4 Millionen
Marktoberdorf	251,2 Millionen
Neustadt an der Aisch	249,4 Millionen
⋮	⋮
München	228,4 Millionen

Tabelle 9.2.: Ämter mit einer großen Anzahl von definierten Matrizen-elementen im Normalgleichungssystem, Objektbereich Flurstücke.

Am Beispiel des ADBV München kann eine konkrete Aussage zu dem dünnbesetzten Aufbau der Matrix („Sparse Matrix“) gemacht werden. Mit einer Matrixdimension von 10,9 Millionen im Quadrat und 456,8 Millionen vorliegenden Nichtnull-Elementen, wenn von einer Besetzung der symmetrischen Matrix mit Elementen sowohl in der unteren als auch oberen Dreiecksmatrix ausgegangen wird, sind insgesamt 99,9996 % der Elemente der Sparse Matrix Nullelemente [Glock und Fischer 2020].

Damit ist nicht nur die Motivation zur weiteren Darstellung der Theorie der Numerik des Ortra-Verfahrens gegeben, sondern darüber hinaus belegt, dass ohne Einsatz von Sparse Matrizen die Aufgabenstellung nach heutigem Stand nicht lösbar wäre. Denn im Projekt waren neben der numerischen Stabilität und Richtigkeit des Rechenverfahrens aufgrund der gegebenen Massenproblematik auch eine maximale Laufzeit für die Auflösung der großen Normalgleichungssysteme mit der eingesetzten Sparse Matrizen-Technologie vorgegeben.

Tatsächlich konnte die Überführung des Liegenschaftskatasters mit ca. 220 Millionen Punkte der Objektbereiche Flurstücke, Gebäude und sonstige Bauwerke über Ausgleichung nach UTM in einem Nachtlauf vom 21. auf den 22.12.2018 in einer Laufzeit von weniger als 12 Stunden abgeschlossen werden.

9.2. Einsatz eines Sparse Cholesky-Verfahrens

9.2.1. Entwicklung des Sparse Cholesky-Verfahrens aus der Ausgleichung des Ortra-Verfahrens

Das Normalgleichungssystem des Ortra-Verfahrens lautet:

$$(A^t P A) x = A^t P l, \quad \text{abgekürzt: } N x = n. \quad (9.1)$$

Die Normalgleichungsmatrix $N = A^t P A$ ist symmetrisch und positiv definit. In Abschnitt 9.1 wurde am Beispiel der Normalgleichungsmatrix für den Flurstücksbestand des ADBV München gezeigt, dass diese in der Regel dünnbesetzt ist. Deshalb ist es konsequent, eine Sparse Matrix für N und einen Sparse Vektor für n in die Ausgleichung einzuführen.

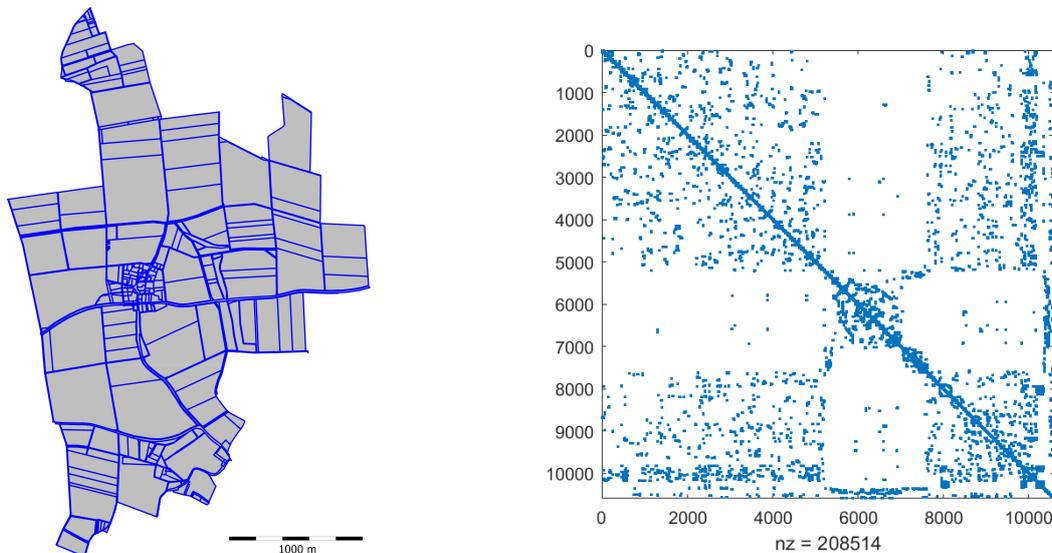


Abbildung 9.1.: Flurstücke einer Testgemarkung des Projekts KanU (links) und zugehörige Normalgleichungsmatrix.

Abb. 9.1 zeigt die Besetzung der Normalgleichungsmatrix mit Nichtnull-Elementen zum Aufbau des Ortra-Verfahrens für eine kleine Testgemarkung. Das Gebiet enthält 404 Flurstücke mit 2635 Grenzpunkten, deren Gauß-Krüger-Koordinaten im Ausgangssystem gegeben sind. Die Normalgleichungsmatrix besitzt 208514 Nichtnull-Elemente in 10540×10540 Zeilen und Spalten. Für jeden Punkt sind in der Normalgleichungsmatrix nacheinander vier Spalten für die vier Unbekannten des Punktes reserviert. Innerhalb einer Zeile oder Spalte finden sich Nichtnull-Einträge, wenn ein Punkt mit einem anderen Punkt über eine Beobachtung verbunden ist. Die auffällige Häufung der Elemente um die Diagonale zwischen Spalte 5400 und 7000 steht für die Matrixkoeffizienten derjenigen Flurstückspunkte, die sich innerhalb der Siedlung in der Mitte des Gebiets befinden. Die Kartendarstellung in Abb. 9.1 links lässt die Siedlung an den kleinen Parzellen und den zusammenlaufenden Verkehrswegen erkennen und ergänzt auf diese Weise das Bild der Matrixbesetzung durch Veranschaulichung des räumlichen Zusammenhangs der Elemente.

Wegen der in der Numerik üblichen Schreibweise wird für das Normalgleichungssystem ab sofort statt $N x = n$ in Gl. (9.1) die Notation

$$A x = b \quad \text{mit} \quad A = \{sparse\} \quad \text{und} \quad (b = \{sparse\} \quad \text{oder} \quad b = \{dense\}). \quad (9.2)$$

verwendet.

Eine Verwirrung ist durch Anwendung der neuen Notation bei den Sparse Matrizen nicht zu befürchten, da die Jakobimatrix A der vermittelnden Ausgleichung des Ortra-Verfahrens aus Gl. (9.1) im Folgenden bis auf den abschließenden Abschnitt des Numerik-Kapitels nicht mehr behandelt wird.

In Gl. (9.2) bedeutet die Schreibweise $A = \{sparse\}$, dass die Matrix A als Sparse Matrix vorliegt. Für den Vektor b gilt diese Schreibweise analog. $b = \{dense\}$ bedeutet, dass der Vektor b dichtbesetzt ist.

Für Gl. (9.2) wird eine Cholesky-Faktorisierung (9.3) mit der Definition eines Cholesky-Faktors L über

$$A = L \cdot L^T \quad \text{oder} \quad A = L D L^T \quad (9.3)$$

gebildet, wobei L eine untere und L^T eine obere Dreiecksmatrix darstellt. Bei einer positiv-definiten Matrix A sind die Diagonalelemente l_{ii} des Faktors L auf der linken Seite von Gl. (9.3) mit $l_{ii} > 0$ positiv. Mit einer positiv-definiten Matrix liegen auf der rechten Seite von Gl. (9.3) positive Elemente $d_{ij} > 0$ in der Diagonalmatrix D vor. Die Diagonalelemente l_{ii} der normierten Dreiecksmatrix L des Cholesky-Faktors sind mit $l_{ii} = 1$ definiert.

Die Ausgangsmatrix A kann bereits mit einer Permutation \mathcal{P} vorverarbeitet sein, die das Ziel hat, durch eine geeignete Sortierung eine möglichst niedrige Anzahl zusätzlicher Nichtnull-Elemente („Fill-Ins“) im Cholesky-Faktor L bei der Faktorisierung zu erzeugen. Die Permutation \mathcal{P} wird durch links- und rechtsseitige Multiplikation mit einer Permutationsmatrix P durchgeführt:

$$A^* = P A P^T. \quad (9.4)$$

Die Matrix P in Gl. (9.4) basiert auf einer Einheitsmatrix, bei der \mathcal{P} auf entsprechende elementare Zeilen- und Spaltenpermutationen abgebildet ist. Diese Zeilen- und Spaltenpermutationen stellen die Vertauschungen von Zeilen und Spalten der Matrix A in Gl. (9.4) dar.

Der allgemeine Cholesky-Algorithmus in Gl. (9.8), der später in Abschnitt 9.4 Ausgangspunkt der verschiedenen bei der UTM-Umstellung eingesetzten Varianten der Sparse Cholesky-Faktorisierung wie z. B. des Sparse Cholesky-Verfahrens mit Superknoten sein wird, kann aus Gl. (9.5) abgeleitet werden:

$$A = L L^T = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & & \\ l_{21} l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & \\ l_{31} l_{11} & l_{31} l_{21} + l_{32} l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix}. \quad (9.5)$$

Der Cholesky-Faktor L der dreizeiligen und -spaltigen Ausgangsmatrix A von Gl. (9.5) berechnet sich zu:

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 & 0 \\ a_{21} / l_{11} & \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} & 0 \\ a_{31} / l_{11} & (a_{32} - l_{31} l_{21}) / l_{22} & \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 + l_{32}^2} \end{bmatrix}. \quad (9.6)$$

Gleichung (9.5) kann für Matrizen $A \in R^{n \times n}$ allgemein wie folgt ausgedrückt werden [Golub und Van Loan 1996]:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^j l_{ik} l_{jk}, \quad i \geq j. \quad (9.7)$$

Aus Gl. (9.6) und Gl. (9.7) lässt sich folgender Zusammenhang für die Elemente l_{ij} mit $i, j = 1, \dots, n$ und $i \geq j$ des Cholesky-Faktors L ableiten:

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}, \quad (9.8)$$

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right).$$

Auf Basis von Gl. (9.8) werden später in Abschnitt 9.4, Gl. (9.24) die verschiedenen Varianten der numerischen Cholesky-Faktorisierung aufgebaut.

9.2.2. Phasen des Sparse Cholesky-Verfahrens

Als direktes Verfahren, das auf Basis von Sparse Matrizen in Verbindung mit der dafür aufgebauten Technologie arbeitet, nutzt das Sparse Cholesky-Verfahren die stark miteinander gekoppelten Techniken der numerischen linearen Algebra, der Graphentheorie und Graphenalgorithmien, der Permutationen und anderen Themen der diskreten Mathematik [T. Davis, Rajamanickam und Sid-Lakhdar 2016].

Das Sparse Cholesky-Verfahren ist wie die weiteren bekannten, modernen direkten Sparse Matrizen Methoden, z. B. Sparse QR [T. A. Davis 2011] durch eine Anzahl von verschiedenen Phasen charakterisiert [George und Liu 1981, Ng und Peyton 1993, T. A. Davis 2006, Gould, Scott und Hu 2007]. Die folgende Aufzählung der Phasen geht bei den Details speziell auf das Sparse Cholesky-Verfahren ein:

- Sortierungsphase, die mit Hilfe von heuristischen Algorithmen eine speicherplatz- und rechenzeitsparende Sortierung der Ausgangsmatrix durch Permutation zum Ziel hat. In der Regel wird die Minimierung der Nichtnull-Elemente bei der anschließenden Faktorisierung angestrebt.
- Analysephase, die auf Basis der Nichtnull-Elemente der Ausgangsmatrix A arbeitet. Diese wird im Allgemeinen als symbolische Faktorisierung bezeichnet. Liu sieht die symbolische Faktorisierung als Phase zur Bestimmung der Spaltenstrukturen des Cholesky-Faktors L , die dem direkten Aufbau der Datenstruktur des Faktors L dient [Liu 1990]. Die symbolische Analyse definiert den Eliminierungsbaum, führt eine Traversierung des Eliminierungsbaums zum Aufbau einer Postorder-Reihenfolge durch und berechnet die Anzahl der Nichtnull-Einträge für die Spalten des Faktors L [T. A. Davis 2006].
- Numerische Phase, die den Cholesky-Faktor L spalten-, zeilen- oder blöckeweise numerisch aufbaut. Diese Phase wird im Allgemeinen als numerische Faktorisierung bezeichnet und berücksichtigt die numerischen Abhängigkeiten von Spalten, Zeilen oder Blöcken, die aus dem Eliminierungsbaum abgeleitet werden können.
- Phase zur Lösung des Gleichungssystems $A \cdot x = b$, nachdem der Cholesky-Faktor L aus der numerischen Faktorisierung vorliegt. Durch Vorwärtssubstitution wird das Gleichungssystem $L \cdot y = b$ aufgelöst. Anschließend wird y verwendet, um durch eine Rückwärtssubstitution die Gleichung $L^T \cdot x = y$ nach den Unbekannten x zu bestimmen.

Tabelle 9.3 gibt als Leitfaden für die folgenden Abschnitte 9.3 (Symbolische Cholesky-Faktorisierung) und 9.4 (Numerische Cholesky-Faktorisierung) einen Überblick, welche Komponenten und Algorithmen bei dem eingesetzten numerischen Verfahren der Sparse Cholesky-Faktorisierung zum Einsatz kamen. Tatsächlich kamen ausnahmslos alle genannten Komponenten und Algorithmen der symbolischen Faktorisierung bei der UTM-Umstellung zur Anwendung. An dieser Stelle sei festgehalten, dass die Software zum direkten Aufbau des Normalgleichungssystems selbst implementiert wurde. Bei allen anderen Algorithmen der symbolischen und numerischen Faktorisierung wurde eine bestehende Bibliothek verwendet, und zwar die Cholmod-Bibliothek [T. A. Davis 2006, T. Davis, Rajamanickam und Sid-Lakhdar 2016].

9.3. Symbolische Cholesky-Faktorisierung

9.3.1. Definition des Eliminierungsbaums

Der Eliminierungsbaum spielt in vielen Aspekten der symbolischen und numerischen Sparse Matrix Faktorisierung für die Auflösung des Gleichungssystems $A \cdot x = b$ eine wichtige Rolle [Liu 1990]. Der Eliminierungsbaum soll ausschließlich in Zusammenhang mit dünnbesetzten, symmetrischen und positiv-definiten Matrizen A betrachtet werden.

Zunächst wird für die symmetrische, positiv-definite Matrix A ein ungerichteter Graph $\mathcal{G}(A) = (V, E)$ definiert und aus diesem Graphen \mathcal{G} der Eliminierungsbaum \mathcal{T} abgeleitet. Der Graph besteht aus einer endlichen Anzahl von Knoten V und Kanten E . Jede Kante $(u, v) \in E$ wird inzidiert mit den Anfangs- und Endknoten u und v , die durch $u \in V$ und $v \in V$ Elemente der Knotenmenge V sind. Der ungerichtete Graph $\mathcal{G}(A) = (V(A), E(A))$ einer $n \times n$ -Matrix A mit m Nichtnull-Elementen außerhalb der Diagonalen besitzt

Komponente bzw. Algorithmus	Phase
Aufbau des Eliminierungsbaums	Anfangsphase der symbolischen Faktorisierung (Abschnitt 9.3.1)
Aufbau der Postorder-Reihenfolge beim Eliminierungsbaum	Frühe Phase der symbolischen Faktorisierung, nach Aufbau des Eliminierungsbaums (Abschnitt 9.3.2)
Impliziter Aufbau der Zeilenbäume und der Skeleton-Matrix als Grundlage der Bestimmung der Anzahl der Nichtnull-Elemente in den Zeilen und Spalten des Cholesky-Faktors L	Mittlere Phase der symbolischen Faktorisierung (Abschnitte 9.3.2 und 9.3.4)
Aufbau der Datenstruktur des Cholesky-Faktors L	Abschlussphase der symbolischen Faktorisierung
Up-Looking Cholesky-Faktorisierung	Numerische Faktorisierung für den Ausnahmefall sehr dünn besetzter Matrizen (Abschnitt 9.4.1)
Sparse Cholesky-Faktorisierung auf Basis von Superknoten	Bei der UTM-Umstellung hauptsächlich eingesetzte numerische Faktorisierung (Abschnitt 9.4.3)
Lösung des Gleichungssystems $A \cdot x = b$ durch Vorwärts- und Rückwärtssubstitution über Cholesky-Faktor L	Abschlussphase aller numerischen Cholesky-Faktorisierungen

Tabelle 9.3.: Bei der symbolischen und numerischen Faktorisierung im Sparse Cholesky Verfahren eingesetzte Komponenten und Algorithmen.

n Knoten $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ und m Kanten $E = \{(v_i, v_j) : a_{ij} \neq 0 \text{ für } 1 \leq i \neq j \leq n\}$ [D. Rose, R. Tarjan und Lueker 1976, T. A. Davis 2006, Kaya und Uçar 2013]. Beim Graph $\mathcal{G}(A) = (V, E)$ der Sparse Matrix A wird von einem stark zusammenhängenden Graphen gesprochen, wenn zu jedem Knoten $v_i \in V$ und $v_j \in V$ ein Pfad in \mathcal{G} von v_i nach v_j existiert. Dieser Pfad soll durch $v_i \xrightarrow{\mathcal{G}(A)} v_j$ symbolisiert werden.

Der Graph $\mathcal{G}(L)$ mit $\mathcal{G}(L) = (V(L), E(L))$ soll den ungerichteten Graphen \mathcal{G} des Cholesky-Faktors L darstellen, der durch die bei der Faktorisierung entstehenden zusätzlichen Nichtnull-Elemente („Fill-Ins“) zwar eine identische Knotenanzahl, jedoch zusätzliche Kanten gegenüber dem Graphen $\mathcal{G}(A)$ für A besitzt.

Der Cholesky-Faktor L ist Ausgangspunkt für die Definition des weiteren Graphen $\mathcal{G}(F)$, dessen zugehörige Matrix F durch Addition $F = L + L^T$ der unteren und oberen Dreiecksmatrix L und L^T des Faktors gebildet wird. Die Matrix F wird in der englischsprachigen Literatur als „Filled Matrix“ von A bezeichnet [Liu 1990], während es in der deutschsprachigen Literatur für dünnbesetzte Matrizen keinen entsprechenden Fachbegriff gibt (z. B. „mit Fill-Ins ergänzte Ausgangsmatrix A “). Matrix F enthält neben allen Elementen der Matrix A auch die zusätzlichen Nichtnull-Elemente des Cholesky-Faktors L . Für den Graphen $\mathcal{G}(F)$ wird auch die synonyme Bezeichnung $\mathcal{G}(L + L^T)$ verwendet [T. A. Davis 2006].

Im Zusammenhang mit der Definition einer Knotenmenge v_j , die von einem Ausgangsknoten v_i durch Pfade in einem Graphen \mathcal{G} erreichbar sind, soll ein Mengenoperator $Reach_{\mathcal{G}(A)}(i)$ definiert werden:

Alle in $\mathcal{G}(A)$ vom Ausgangsknoten v_i definierbaren Pfade $v_i \xrightarrow{\mathcal{G}(A)} v_j$ fügen die jeweiligen Endknoten v_j der Pfade zu der Menge $Reach_{\mathcal{G}(A)}(i)$ hinzu [T. A. Davis 2006]. Später wird ein $Reach_{\mathcal{G}(A)}$ -Mengenoperator definiert, der nur Pfade über eine definierte Knotenmenge S zulässt.

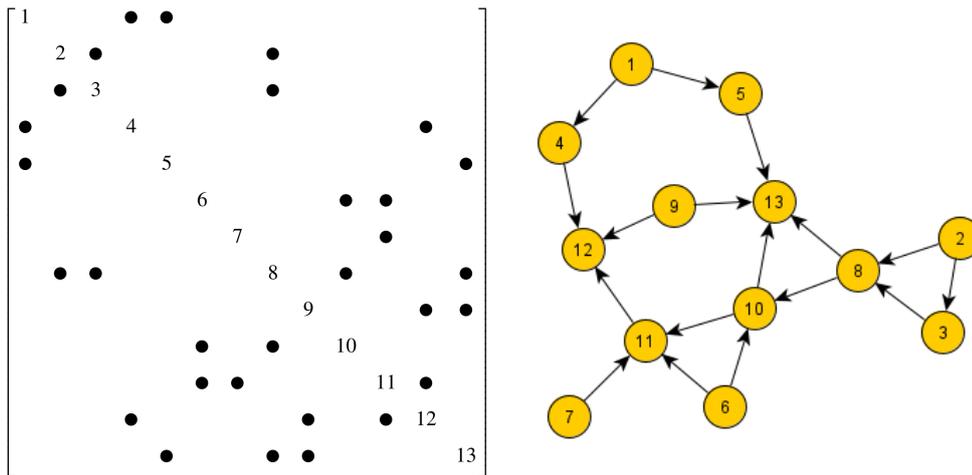


Abbildung 9.2.: Ausgangsmatrix A mit Nicht-Nullelementen \bullet und zugehöriger gerichteter Graph $\mathcal{G}(A)$ der Matrix A mit den Kanten $E = \{(v_i, v_j) : a_{ij} \neq 0 \text{ für } 1 \leq i \neq j \leq n\}$.

Den Aufbau des Graphen $\mathcal{L}(A)$ aus dem gegebenen Graphen $\mathcal{A}(A)$ der Ausgangsmatrix A haben D. Rose, R. Tarjan und Lueker 1976 durch einen in linearer Zeit arbeitenden Algorithmus ermöglicht, der auf folgendem Theorem basiert:

Theorem 1 (D. Rose, R. Tarjan und Lueker 1976) *Der Graph $\mathcal{G}(A)$ ist mit n Knoten $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ für die Matrix A gegeben. Eine Kante (v_v, v_w) wird dann als zusätzliche Kante des Graphen $\mathcal{G}(F)$ gebildet, wenn und nur wenn ein Pfad $\mu = [v_w = v_1, \dots, v_{k+1} = v_v]$ in $\mathcal{G}(A)$ existiert, so dass alle zwischen Anfangsknoten v_v und Endknoten v_w liegende Knoten v_i mit $i = 2, \dots, k$ kleinere Knotennummern $v_i < \min(v_v, v_w)$ als die Knoten v_v und v_w besitzen.*

Theorem 1 von D. Rose, R. Tarjan und Lueker 1976 wird von [Liu 1990] auch als Pfad-Theorem bezeichnet. Dieses Theorem wurde von ihm für die Definition von Pfaden innerhalb von Unterbäumen \mathcal{T}^{v_w} des Eliminierungsbaums \mathcal{T} erweitert [Liu 1986]:

Theorem 2 (Liu 1986) *Ein Nichtnull-Element $l_{ij} \neq 0$ ist mit $i > j$ gegeben. Dann ist das Element l_{ij} nur dann ungleich Null, wenn und nur wenn ein Pfad $\mu = [v_v, v_1, \dots, v_t, v_w]$ in $\mathcal{G}(L)$ existiert. Dann ist die Knotenmenge $v_1, \dots, v_t \subseteq \mathcal{T}^{v_j}$ im Unterbaum \mathcal{T}^{v_w} enthalten.*

George und Liu 1980 haben mit der Definition von *Reachable Sets* den von Parter 1961 und D. Rose 1972 graphentheoretisch abgebildeten Gaußschen Eliminierungsprozess weiter formalisiert. *Reachable Sets* können mit dem über die Teilmenge S erweiterten Mengenoperator $Reach_{\mathcal{G}(A)}(v_v, S)$ gebildet werden [Liu 1986]. Der Operator $Reach_{\mathcal{G}(A)}(v_v, S)$ definiert eine Menge von Knoten, die im Graphen $\mathcal{G}(A)$ von einem Ausgangsknoten v_v über eine Menge S erreicht werden.

Die Menge S soll eine Teilmenge der Knoten des Graphen $\mathcal{G}(A)$, ein Zielknoten $v_w \notin S$ soll dagegen nicht in dieser Teilmenge S enthalten sein. Der Knoten v_w wird als vom Knoten v_v durch die Teilmenge S erreichbar bezeichnet, falls ein Pfad $v_v, v_1, \dots, v_k, v_w$ vom Knoten v_v zum Knoten v_w besteht, so dass alle Knoten $v_i \in S$ mit $1 \leq i \leq k$ im Pfad $v_1, \dots, v_k \in S$ Elemente der Teilmenge S sind.

Die formelle Definition des Mengenoperators $Reach_{\mathcal{G}(A)}(v_v, S)$ für den Aufbau des *Reachable Sets* ist folgende:

$$Reach_{\mathcal{G}(A)}(v_v, S) = \{v_w \notin S \mid v_w \text{ ist erreichbar von } v_v \text{ durch } S\}. \tag{9.9}$$

Mit folgenden beiden Theoremen können unter Verwendung des in Gl. (9.9) eingeführten Mengenoperators $Reach_{\mathcal{G}(A)}(v_v, S)$ für eine gegebene Spalte j zugehörige Nichtnull-Elemente l_{ij} im Graphen $\mathcal{G}(L + L^T)$ bestimmt werden [T. A. Davis 2006, George und Liu 1981]:

Theorem 3 (T. A. Davis 2006) Für eine Cholesky-Faktorisierung $L L^T = A$ gilt, wenn bei der Faktorisierung numerische Auslöschung vernachlässigt wird: Wenn $a_{ij} \neq 0$ ein Nichtnull-Element ist, dann ist $l_{ij} \neq 0$ ebenfalls ein Nichtnull-Element.

Theorem 4 (George und Liu 1981) Mit $l_{ij} \neq 0$ und mit $j < i$ ist ein Nichtnull-Element gegeben, wenn und nur wenn $x_i \in \text{Reach}_{\mathcal{G}(A)}(x_j, S)$ mit $S = \{x_1, \dots, x_{j-1}\}$ ist.

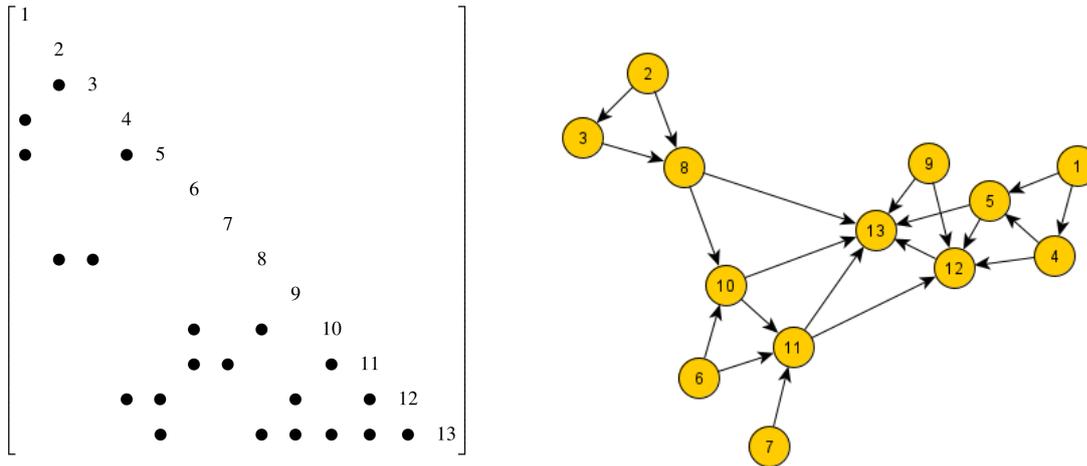


Abbildung 9.3.: Dünnes Dreiecksmatrix L mit Nichtnull-Elementen •, gerichteter Graph $\mathcal{G}(L + L^T)$.

In $\mathcal{G}(L + L^T)$ wird eine Kante (i, j) gebildet, falls im Cholesky-Faktor L der Koeffizient $l_{ij} \neq 0$ nicht Null ist. Das Nichtnull-Element l_{ij} des Cholesky-Faktors L stellt gleichzeitig die numerische Abhängigkeit der Spalte i von der Spalte j dar. Die Spalte i und j des Cholesky-Faktors L soll im Folgenden mit L_{*i} und L_{*j} bezeichnet werden. Die numerische Beziehung von L_{*j} zu L_{*i} wird durch folgende Proposition dargestellt [Liu 1990]:

Proposition 4.1 (Liu 1990) In der Spalte j ist unterhalb der Diagonale $i > j$ in der Zeile i ein Nichtnull-Element l_{ij} definiert. Die numerischen Werte der Spalte L_{*i} sind nur dann von den numerischen Werten der Spalte L_{*j} abhängig, wenn und nur wenn $l_{ij} \neq 0$ ist.

Aus Proposition 4.1 folgt, dass der Graph $\mathcal{G}(L + L^T)$ neben der Darstellung der zusätzlichen Nichtnull-Elemente in L auch eine Darstellung der numerischen Abhängigkeiten zwischen Spalten des Cholesky-Faktors L beinhaltet. Falls ausschließlich die numerischen Abhängigkeiten der Spalten untereinander von Interesse sind, besteht die Möglichkeit der transitiven Reduktion des Graphen [Aho, Hopcroft und Ullmann 1974, Liu 1990]:

Falls innerhalb der Spalte j

1. durch ein gegebenes Nichtnull-Element $l_{ij} \neq 0$ zunächst Spalte i von Spalte j mit $i > j$ numerisch abhängig ist und
2. zusätzlich Spalte k von Spalte j durch ein in Spalte j gegebenes weiteres Nichtnull-Element $l_{kj} \neq 0$ numerisch abhängig ist (mit $k > i > j$), dann ist
3. Spalte k auch von Spalte i abhängig.

Damit existiert nach Proposition 4.1 ein Nichtnull-Element $l_{ki} \neq 0$ und folglich eine direkte Kante (i, k) im Graphen $\mathcal{G}(F)$. Außerdem ist im Graphen $\mathcal{G}(F)$ ein Pfad vom Knoten i über den Knoten j zum Knoten k definiert. Die direkte Kante (i, k) erscheint zur Darstellung der numerischen Abhängigkeit redundant und

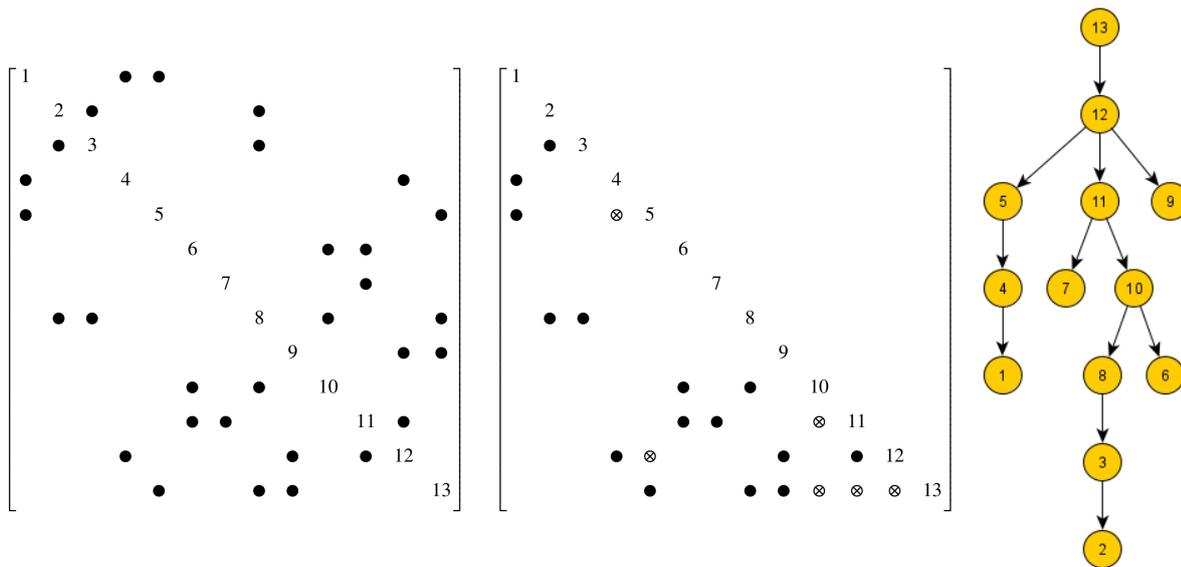


Abbildung 9.4.: Symmetrische Ausgangsmatrix A mit Nicht-Nullelementen • (links), Cholesky-Faktor L mit den Positionen der zusätzlichen Nicht-Nullelemente (mitte), Eliminierungsbaum des Cholesky-Faktors L (rechts).

kann durch transitives Reduzieren entfernt werden. Transitive Reduktion ist das Entfernen aller redundanten Kanten, die vom Graphen $\mathcal{G}(F)$ zum Eliminierungsbaum \mathcal{T} führt [Liu 1990].

Dies deckt sich mit der Aussage von Parter 1961 im Zusammenhang mit seinen graphentheoretischen Untersuchungen des Gaußschen Eliminationsverfahrens:

Theorem 5 (Parter 1961) *Wenn sowohl der Knoten k als auch der Knoten i mit dem Knoten j verbunden sind, dann sind mit $l_{ij} \neq 0 \wedge l_{kj} \neq 0$ Nichtnull-Elemente in Spalte j mit $j < i < k$ gegeben. Dann wird ein weiteres Nichtnull-Element $l_{ki} \neq 0$ definiert. In der k -ten Zeile existiert infolge von $l_{ij} \neq 0 \wedge l_{kj} \neq 0 \Rightarrow l_{ki} \neq 0$ in der i -ten Spalte ein Nichtnull-Element $l_{ki} \neq 0$.*

Damit kann ein Eliminierungsbaum \mathcal{T} aus dem Graphen $\mathcal{G}(F)$ durch Entfernen der in Theorem 5 dem Nichtnull-Element l_{ki} zugeordneten Kanten aufgebaut werden.

In der Praxis konnte spätestens seit Anfang der 1990er Jahre auf den Aufbau von $\mathcal{G}(F)$ und die Bestimmung der redundanten Kanten verzichtet werden. Bereits Schreiber 1982 hat erste direkte Eigenschaften des Eliminierungsbaums angegeben und durch folgendes Theorem die Zeilenstrukturen des Cholesky-Faktors L partiell charakterisiert:

Theorem 6 (Schreiber 1982) *Wenn mit $l_{ij} \neq 0$ ein Nichtnull-Element mit $i > j$ gegeben ist, dann ist der Knoten i ein Vorgänger des Knotens j im Eliminierungsbaum.*

Durch Einführung einer Verwandtschaft von Knoten im Cholesky-Faktor L in Form von Beziehungen zwischen Knotenvorgänger und Knotennachfolger ist der Eliminierungsbaum vollständig definiert. Theorem 6 bedeutet, dass im Eliminierungsbaum \mathcal{T} ein Pfad vom Knoten $j \xrightarrow{\mathcal{T}} i$ zum Knoten i definiert ist. Diese in Theorem 6 für Pfade im Eliminierungsbaum \mathcal{T} definierte Eigenschaft wird unter dem Gesichtspunkt des Aufbaus von Zeilenbäumen \mathcal{T}^i und den dazu benötigten Pfaden in \mathcal{T}^i durch folgendes Theorem von Liu 1986 ergänzt:

Theorem 7 (Liu 1986) *Wenn mit $l_{ij} \neq 0$ ein Nichtnull-Element mit $i > j$ gegeben ist, dann ist der Knoten j ein Vorgänger eines Knotens k , für den in der Ausgangsmatrix A in Zeile i das Element a_{ik} ein Nichtnull-Element $a_{ik} \neq 0$ ist.*

Ohne Einschränkung von Theorem 7 kann angenommen werden, dass a_{ik} keine weiteren Knotennachfolger in Zeile i besitzt. Dann kann auf Basis des Theorems gefolgert werden, dass ein Unterbaum des Eliminierungsbaums \mathcal{T} mit der Wurzel i die unterschiedlichen Pfade von verschiedenen Ausgangsknoten k über den Knoten

j zum Wurzelknoten i enthält. Für die Definition der Pfade ist es notwendig, dass für den Ausgangsknoten k des Pfades verschiedene Knoten aus den jeweiligen Nullelementen $a_{ik} \neq 0$ zugeordnet werden. Mit diesen Pfaden können einzelne Zeilenbäume \mathcal{T}^i aufgebaut werden.

Ein Unterbaum ist nicht zu verwechseln mit einem Zeilenbaum. In Theorem 8 von Liu 1986 wird definiert, unter welcher Bedingung ein Zeilenbaum \mathcal{T}^i unterhalb bestimmter Knoten a_{ij} (= Blätter) keine Knotennachfolger aus dem Unterbaum besitzen darf. Die Definition eines Zeilenbaums \mathcal{T}^i ist damit vollständig, da neben den Pfaden $j \xrightarrow{\mathcal{T}^i} i$ zusätzlich die Blätter des Zeilenbaums definiert werden. Die Definition der Blätter von \mathcal{T}^i entspricht dem Entfernen der Pfade $k \xrightarrow{\mathcal{T}^i} j$ aus dem Unterbaum \mathcal{T}^i unterhalb der Blätter des Zeilenbaums [Liu 1986]:

Theorem 8 (Liu 1986) *Der Knoten j ist ein Blatt des Zeilenbaums \mathcal{T}^i mit dem Wurzelknoten i , wenn und nur wenn ein Nichtnull-Element $a_{ij} \neq 0$ in der Zeile i vorliegt und für jeden Knotennachfolger k von j im Eliminierungsbaum das Element a_{ik} mit $a_{ik} = 0$ gleich Null ist.*

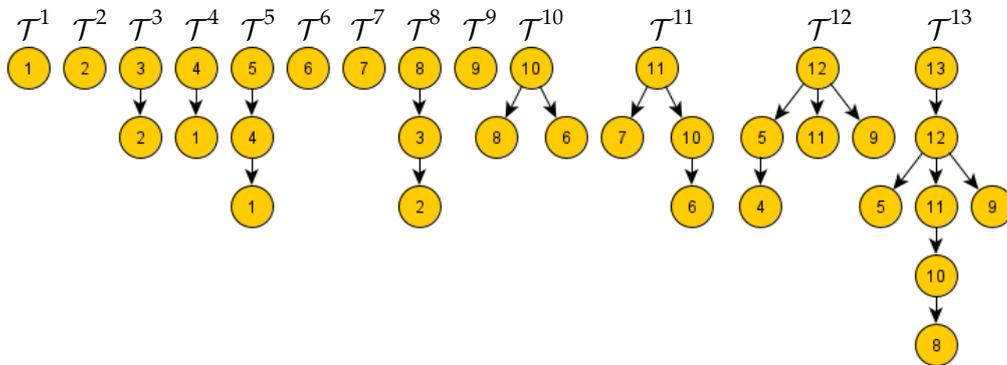


Abbildung 9.5.: $n = 13$ Zeilenbäume \mathcal{T}^i mit $i = 1 \dots n$ für die 13 Matrixzeilen des Cholesky-Faktors L der Matrix A aus Abb. 9.4.

Damit besitzt der Zeilenbaum \mathcal{T}^i eine Untermenge der Knoten des Unterbaums. Mit dem folgenden Korollar von T. A. Davis 2006 kann ein Eliminierungsbaum \mathcal{T} konstruiert werden. Mit dem Korollar wird Theorem 3, das die Übernahme aller Nichtnull-Elemente $a_{ij} \neq 0 \Rightarrow l_{ij} \neq 0$ von A in den Faktor L gefordert hat, durch Theorem 6 für die Definition aller Pfade des Eliminierungsbaums \mathcal{T} ergänzt:

Korollar 8.1 (T. A. Davis 2006) *Ein Nichtnull-Element $a_{ij} \neq 0$ mit $i > j$ bedeutet, dass der Knoten j ein Knotennachfolger des Knotens i im Eliminierungsbaum \mathcal{T} ist. Darüber hinaus bedeutet $a_{ij} \neq 0$, dass ein Pfad $j \xrightarrow{\mathcal{T}} i$ im Eliminierungsbaum \mathcal{T} definiert ist.*

Für den Algorithmus zur Bestimmung des Eliminierungsbaums \mathcal{T} wird eine genäherte Laufzeit der Ordnung $\mathcal{O}(|A|)$ [T. A. Davis 2006] benötigt. Der Eliminierungsbaum \mathcal{T} soll durch ein Parent-Feld der Größe n repräsentiert werden, das für die laufende Spalte $j = 1, \dots, n$ den Index p des ersten Nichtnull-Elements unterhalb der Diagonale enthält. Für den Knoten j ist der Parent-Knoten p mit $p = \text{Parent}(j) = \min\{i \mid i > j \text{ und } l_{ij} \neq 0\}$ definiert. Die Ausgangsmatrix A wird zeilenweise durchlaufen. In der i -ten Zeile soll mit a_{ij} ein Nichtnull-Element vorliegen. Damit existiert nach Korollar 8.1 ein Pfad $j \xrightarrow{\mathcal{T}} i$ im Eliminierungsbaum. Falls bisher für j noch kein $p = \text{Parent}(j)$ zugewiesen wurde, wird für den Knoten j ein Parent-Knoten $i = \text{Parent}(j)$ definiert. Dieser Knoten i bleibt als Parent-Knoten p von j erhalten, unabhängig davon, dass weitere Zeilen von A für den Aufbau von T verarbeitet werden. Nach dem Durchlaufen von $k - 1$ Zeilen von A liegt ein partiell konstruierter Eliminierungsbaum \mathcal{T}^{k-1} vor. Bei der Verarbeitung der k -ten Zeile wird der partielle Eliminierungsbaum \mathcal{T}^k aus \mathcal{T}^{k-1} aufgebaut. Der partiell konstruierte Ausgangs-Eliminierungsbaum \mathcal{T}^{k-1} bekommt die Wurzel k zugewiesen. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass der partielle Eliminierungsbaum \mathcal{T}^{k-1} nicht mit dem Wurzelbaum \mathcal{T}^{k-1} zu verwechseln ist. Direkte Nachfolgerknoten des neuen Wurzelknotens k

des partiellen Eliminierungsbaums \mathcal{T}^k sind Wurzelknoten von \mathcal{T}^{k-1} [T. A. Davis 2011]. Mit einem in Zeile k gegebenen Nichtnull-Element a_{kj} liegt nach Korollar 8.1 ein Pfad $j \xrightarrow{\mathcal{T}} k$ in \mathcal{T} vor. Im alten partiellen Eliminierungsbaum \mathcal{T}^{k-1} wird eine Traversierung mit dem durch $a_{kj} \neq 0$ gegebenen Ausgangsknoten j nach oben zur Wurzel gestartet. Der gefundene Wurzelknoten c in \mathcal{T}^{k-1} ist ein gesuchter Kindknoten von k zur Komplementierung von \mathcal{T}^k . Für diesen Kindknoten c ist abschließend ein Parent-Knoten $k = \text{Parent}(c)$ zu setzen. Mit dem Durchlaufen aller Nichtnull-Elemente der Zeile k ist der partielle Eliminierungsbaum \mathcal{T}^k vollständig.

Nach Liu wird der Aufbau des Parent-Felds des Eliminierungsbaums \mathcal{T} aus drei Operationen $\{\text{Union}, \text{Find}, \text{MakeSet}\}$ auf Basis von disjunkten Mengen gebildet [Liu 1986, Liu 1990]. Nach R. E. Tarjan 1983 können Pfad-Kompressionstechniken die Suche nach den die Menge repräsentierenden Knoten beschleunigen, da bei einem Find-Aufruf die Knoten eines partiellen Eliminierungsbaums näher zur Wurzel gerückt werden. Für die bei der Traversierung eines partiell konstruierten Eliminierungsbaums \mathcal{T}^{k-1} eingesetzte Pfadkompression wird für die Knoten des Baums ein Feld von Knotenvorgängern aufgebaut [T. A. Davis 2006].

Bei der Aufgabenstellung des Findens des Wurzelknotens in \mathcal{T}^{k-1} für ein Element a_{kj} ist der Knotenvorgänger idealerweise identisch mit dem gesuchten Wurzelknoten. Bei der Verarbeitung von n Zeilen der Matrix A werden Pfad-Traversierungen der Anzahl $|A|$ der Nichtnull-Elemente von A benötigt. R. E. Tarjan 1983 hat nachgewiesen, dass die Laufzeitkomplexität für die Pfad-Traversierungen in den partiell aufgebauten Eliminierungsbaum unter Nutzung der drei Operationen $\{\text{Union}, \text{Find}, \text{MakeSet}\}$ von der Ordnung $\mathcal{O}(|A| \cdot \alpha(|A|, n))$ ist.

Die Funktion $\alpha(|A|, n)$ ist die inverse Ackermann-Funktion [Ackermann 1928], eine sehr langsam wachsende Funktion. Die von T. A. Davis 2006 eingesetzte Methode ist einfacher aufgebaut und hat eine theoretische Laufzeitkomplexität der Ordnung $\mathcal{O}(|A| \log n)$, wobei sich beim praktischen Einsatz in der Regel eine kürzere Laufzeit zeigt. Das Laufzeitverhalten ist dann annähernd $\mathcal{O}(|A|)$.

Mit der Definition des Eliminierungsbaums steht für die symbolische und numerische Faktorisierung von Sparse Matrizen eine grundlegende Datenstruktur zur Verfügung.

Nach Liu 1990 ist der Eliminierungsbaum bei nahezu allen Algorithmen vertreten, die bei der symbolischen Faktorisierung benötigt werden und liefert Strukturinformationen für den anschließenden Faktorisierungsprozess. Wichtiges Merkmal des Eliminierungsbaums ist die Abbildung der bei der numerischen Faktorisierung zusätzlich im Cholesky-Faktor L entstehenden Nichtnull-Elemente („Fill-In“) durch eine Baumstruktur. Mit Hilfe des Eliminierungsbaums kann in jeder Phase der Faktorisierung das Besetzungsmuster (engl. *non zeros pattern*) einzelner Zeilen des Faktors L rekonstruiert werden. Die Kenntnis der Fill-Ins ermöglicht es, vor Durchführung der numerischen Auflösung der Matrix zur Auswahl stehende Permutationen \mathcal{P} auf ihre Eignung für einen Einsatz zu analysieren.

9.3.2. Aufbau der Postorder-Reihenfolge beim Eliminierungsbaum

Die Postorder-Reihenfolge eines Graphen oder Baumes entsteht durch Tiefensuche [Aho, Hopcroft und Ullmann 1974, R. E. Tarjan 1983, Turau und Weyer 2015]. Dabei erhält jeder Knoten nach Starten der Traversierung, ausgehend von der Wurzel des Baums aus, zunächst eine Markierung, dass dieser Knoten besucht wurde. Daraufhin werden seine Knotennachfolger durchlaufen, zuerst der linke Knotennachfolger und danach, falls der linke Teilbaum bereits durchsucht wurde oder kein linker Knotennachfolger existiert, der rechte Knotennachfolger, zum Schluss der Knoten selbst. Wenn beim Suchalgorithmus im Baum ein Knoten gefunden wird, der keine weiteren Knotennachfahren besitzt, erhält dieser die nächste Postorder-Nummerierung. Danach wird sein Knotenvorgänger daraufhin untersucht, ob weitere Knotennachfolger existieren und der Prozess der Nummerierung rekursiv fortgesetzt.

Die Postorder-Reihenfolge weist bestimmte Eigenschaften auf, die bei Anwendung der folgenden Algorithmen für die Faktorisierung von Sparse Matrizen notwendig werden [Liu 1990, T. Davis, Rajamanickam und Sid-Lakhdar 2016]. Der in Postorder-Reihenfolge aufgebaute Eliminierungsbaum stellt beispielsweise sicher, dass die in Proposition 4.1 ausgedrückte numerische Abhängigkeit zwischen Kinderspalten c und der Elternspalte p nur zwischen Kinderspalten c existieren, die sich links von der Elternspalte p befinden. Durch die Postorder-Reihenfolge im Eliminierungsbaum wird sichergestellt, dass die d Knotennachfolger eines Knotens k niedrigere Knotennummern als die Elternspalte erhalten und darüber hinaus konsequente Knotennummern

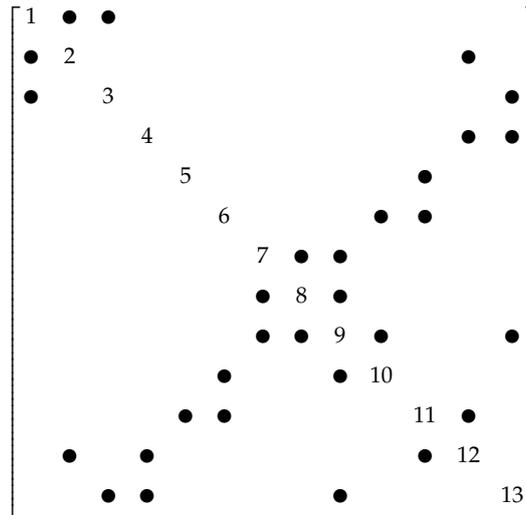


Abbildung 9.6.: Die mit der Postorder-Reihenfolge des Eliminierungsbaums \mathcal{T} aus Abb. 9.4 (rechts) permutierte Matrix A aus Abb. 9.4 (links).

$k - d$ bis $k - 1$ zugewiesen bekommen [Liu 1990, T. A. Davis 2006].

Beispiel für einen Algorithmus, der einen in Postorder-Reihenfolge vorliegenden Eliminierungsbaum benötigt, ist der Algorithmus zur Bestimmung der Anzahl der Nichtnull-Elemente, der in Abschnitt 9.3.3 beschrieben wird.

Liu 1990 weist nach, dass der Cholesky-Faktor L der Permutation PAP^T , die über eine aus der Postorder-Reihenfolge des Eliminierungsbaum \mathcal{T} definierte Permutationsmatrix P gebildet wurde, die gleiche Anzahl von Nichtnull-Elementen besitzt wie ein Cholesky-Faktor L , der ohne Permutation direkt von der Originalmatrix A gebildet wird. Die numerische Faktorisierung auf Basis eines mit Postorder-Reihenfolge aufgebauten Eliminierungsbaums benötigt folglich die gleiche Anzahl an Rechenoperationen. Liu 1987 stellt die Effizienz des Postorderings für die numerische Faktorisierung dar und zeigt darüber hinaus, dass die Permutation P mit einer Postorder-Reihenfolge zu einem besser strukturierten Aufbau der Nichtnull-Elemente führt (Abb. 9.6). Mit Hilfe von Laufzeituntersuchungen weist Liu 1987 nach, dass sich die Vorsortierung über die Postorder-Reihenfolge positiv auf die CPU-Zeit auswirkt. Dies ist auf die Verbesserung der Lokalität der Daten im Hauptspeicher zurückzuführen, die weniger irreguläre Speicherzugriffe erfordert.

Abschluss der Symbolischen Analyse nach Aufbau des Eliminierungsbaums

Nach Definition des Eliminierungsbaums werden für den Prozess der numerischen Faktorisierung Informationen über den strukturellen Aufbau des Cholesky-Faktors L benötigt.

In vielen Fällen ist es für Algorithmen ausreichend, zusammenfassende Informationen über die Nichtnull-Elemente einer Zeile oder Spalte zu erhalten, um in einer späteren Phase weitere Eigenschaften aus dem Eliminierungsbaum abzuleiten. Für den weiteren Aufbau des Faktors L ist die Information über die Anzahl der Nichtnull-Spalten- und Zeilenelemente von besonderer Bedeutung. Hierzu hat die Wissenschaft über einen Zeitraum von 20 Jahren Algorithmen zunächst auf Basis von Graphen und später auf Basis von Eliminierungs-bäumen entwickelt, die die gesuchten Informationen unter Laufzeitgesichtspunkten in optimaler Zeit, d. h. mit einer linearen Laufzeit der Ordnung $\mathcal{O}(|A|)$, bestimmen können. $\mathcal{O}(|A|)$ bedeutet, dass die Geschwindigkeit des Algorithmus proportional zur Anzahl der Nichtnull-Elemente $nnz(A) = |A|$ der Ausgangsmatrix A ist.

Mit Vorliegen der Anzahl der Elemente in den Spalten kann die Speicherstruktur für den Cholesky-Faktor L aufgebaut werden. In der Regel reicht nach Abschluss der symbolischen Faktorisierung der Eliminierungsbaum aus, um den konkreten Prozess der numerischen Faktorisierung auszuführen.

Noch in der symbolischen Faktorisierung wird die Ausführung eines mit Superknoten arbeitenden Sparse Cholesky-Verfahrens vorbereitet, indem im Nichtnull-Aufbau zueinander ähnliche und benachbarte Matrix-

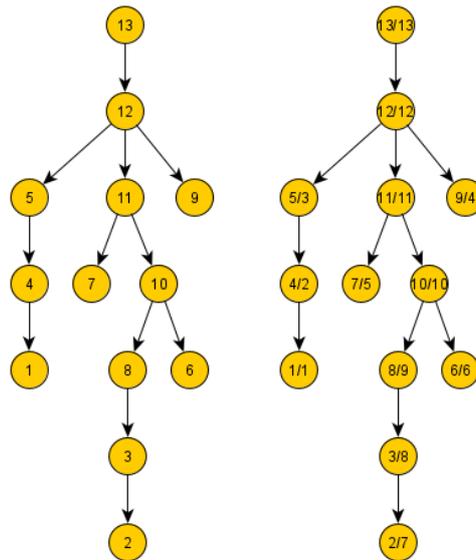


Abbildung 9.7.: Links der Eliminierungsbaum der Matrix A aus Abb. 9.4 (rechts). Rechts ist den Knotennamen zusätzlich die Postorder-Reihenfolge zugeordnet. Der Namenszusatz im Knotennamen (4/2) bedeutet beispielsweise, dass Knoten 4 als zweiter Knoten in der Postorder-Reihenfolge durchlaufen wird.

spalten gesucht und anschließend zu Superknoten verbunden werden. Diese werden, wie in Abschnitt 9.4.3 gezeigt wird, über den Eliminierungsbaum in Verbindung mit der Anzahl der Nichtnull-Spalten- und Zeilenelemente ermittelt.

9.3.3. Anzahl der Nichtnull-Elemente in den Zeilen und Spalten des Cholesky-Faktors L

Die Anzahl der Nichtnull-Elemente in den Zeilen und Spalten des Cholesky-Faktors L stellt die grundlegende Information über die Struktur eines Cholesky-Faktors L dar. Sie wird in der symbolischen Faktorisierung nach Definition des Eliminierungsbaums über Algorithmen ermittelt.

Die Algorithmen für die Bestimmung der Anzahl der Zeilen- (*row count*) und Spalteneinträge (*col count*) sollen die in der englischsprachigen Literatur üblichen Bezeichnungen der Funktionen $row\ count(i)$ und $col\ count(j)$ mit den Parametern i und j erhalten.

Die Funktion $col\ count(j)$ ist für den Aufbau der Struktur des Cholesky-Faktors L relevant, wenn die durchführende Numerik-Bibliothek für die interne Repräsentation der Sparse Matrizen das *Compressed-Column-Format* [Sherman 1975] verwendet. In diesem Fall kann vor Abschluss der symbolischen Faktorisierung mit Vorliegen der Anzahl der Spalteneinträge die Struktur des Cholesky-Faktors L aufgebaut werden. Bei der numerischen Faktorisierung wird die vorbereitete Struktur zusätzlich mit Zeilenzeigern ergänzt, die die Verwaltungsinformation der Sparse Matrix vervollständigen.

G. L. Gilbert, Ng und Peyton 1994 veröffentlichten Graphenalgorithmen, die die Informationen über Zeilen- und Spalteneinträge ohne expliziten Aufbau der Struktur des Cholesky-Faktors L ermitteln. Moderne Algorithmen, die in der Regel aus dem Verfahren von Gilbert et al. abgeleitet werden, bestimmen die Anzahl der Nichtnull-Einträge der Spalten und Zeilen in einer annähernd linearen Laufzeit der Ordnung $\mathcal{O}(|A|)$.

Ausgangspunkt für die Untersuchung der Anzahl der Nichtnull-Elemente sind die n Zeilenbäume \mathcal{T}^i für die $i = 1, \dots, n$ Zeilen eines Cholesky-Faktors L (siehe Abb. 9.5), die sich aus dem Eliminierungsbaum und der Struktur der Ausgangsmatrix A ableiten lassen. Die Knoten der Zeilenbäume \mathcal{T}^i bilden eine Untermenge $V_{\mathcal{T}^i} \subset V_{\mathcal{T}}$ der Knoten V des Eliminierungsbaums \mathcal{T} . Zeilenbäume stellen unterschiedliche Teilbäume des Eliminierungsbaums \mathcal{T} dar. Wurzel des Zeilenbaums \mathcal{T}^i für die i -te Zeile des Cholesky-Faktors L ist der Knoten i .

Die Zeilenbäume beinhalten umfassende Informationen, um die Anzahl der Zeilen- und Spalteneinträge über die Operationen $row\ count(i)$ und $col\ count(j)$ zu ermitteln. Ein nicht laufzeit-optimaler Algorithmus kann die n Zeilenbäume nacheinander traversieren, um die Anzahl der Zeilen- und Spalteneinträge der n Zeilen und Spalten der Sparse Matrix zu bestimmen.

Als Beispiel wird zunächst der Zeilenbaum \mathcal{T}^{12} aus Abb. 9.5 auf die Anzahl der Zeileneinträge untersucht. Für die Anzahl der Spalteneinträge müssen dagegen sämtliche Zeilenbäume herangezogen werden. Die aus Knoten des Zeilenbaums gebildete Menge $\mathcal{R}_{12} = \{4, 5, 9, 11, 12\}$ enthält fünf Elemente. Die Anzahl der Zeileneinträge $row\ count(12)$ für die 12. Zeile des Cholesky-Faktors L ist $row\ count(12) = 5$. Der die Spalte $j = 4$ repräsentierende Knoten 4 kommt jeweils in den Zeilenbäumen \mathcal{T}^4 , \mathcal{T}^5 und \mathcal{T}^{12} in Abb. 9.5 vor. Damit liegt für Spalte 4 des Cholesky-Faktors L jeweils ein Nichtnull-Element in den Zeilen 4, 5 und 12 vor. Die Anzahl der Spalteneinträge $col\ count(4)$ für Spalte 4 ist drei.

Die Laufzeit des nicht laufzeit-optimalen, die Zeilenbäume durchlaufenden Algorithmus, der sich beispielsweise bei [Liu 1990] im Zusammenhang mit der Darstellung der Theorie der Eliminierungsbäume findet, ist abhängig von der Anzahl der Nichtnull-Elemente $nnz(L) = |L|$ des Cholesky-Faktors L . Die Laufzeit entspricht damit der Ordnung $\mathcal{O}(|L|)$.

Der bei der UTM-Umstellung des Liegenschaftskatasters in Bayern in der symbolischen Cholesky-Faktorisierung angewandte Algorithmus von Gilbert et al., der durch Davis im Zuge des Aufbaus der Cholmod-Bibliothek weiter optimiert wurde, kann die gesuchten Informationen zum internen Aufbau des Cholesky-Faktors L in einer optimalen Laufzeit von $\mathcal{O}(|A|)$ ermitteln [G. L. Gilbert, Ng und Peyton 1994, J. R. Gilbert, Li u. a. 2001, Chen, T. A. Davis u. a. 2008, T. A. Davis 2006]. Laufzeit-optimale Algorithmen vermeiden es, die Knoten der Zeilenbäume \mathcal{T}^i einzeln zu durchlaufen. Stattdessen wird die Idee verfolgt, die Zeilenbäume \mathcal{T}^i in disjunkte Mengen zu zerlegen, die die Pfade von den Blättern des Zeilenbaums bis zur Wurzel und für weitere Pfade bis zu gemeinsam durchlaufenen Knoten darstellen. Für die Bestimmung der gemeinsamen Knotenvorgänger der Blätter wird zunächst ein Pfad vollständig von einem einzelnen Blatt bis zur Wurzel des Zeilenbaums aufgebaut. In einem gerichteten Graphen \mathcal{G} ist der Knoten x der Knotenvorgänger von y , wenn die verbindende Kante $x \xrightarrow{\mathcal{G}} y$ eine gerichtete Kante von \mathcal{G} ist [Turau und Weyer 2015]. Analog ist der Knoten y ein Knotennachfolger von x . Diese Aussage gilt auch für die aus dem Graphen \mathcal{G} abgeleiteten Bäume. Der Eliminierungsbaum ist nach Liu 1990 ein minimaler Spannbaum des Graphen $\mathcal{G}(L) = (V(L), E(L))$ mit den Kanten $E = \{(i, j) : l_{ij} \neq 0 \text{ für } 1 \leq i \neq j \leq n\}$. Beim Eliminierungsbaum \mathcal{T} gehen die gerichteten Kanten von der Wurzel aus. Der Wurzelknoten ist Knotenvorgänger aller weiteren Knoten im Baum.

Die Anzahl $row\ count(i)$ der Einträge in Zeile i ist die Summe der Elemente der durch Pfadzerlegung gebildeten disjunkten Mengen im Zeilenbaum \mathcal{T}^i [G. L. Gilbert, Ng und Peyton 1994]. Die Länge eines Pfades wird nicht durch Traversierung der Knoten ermittelt, sondern als Differenz zwischen der Ebene des Startknoten $level(v_s)$ und der Ebene des Endknoten $level(v_e)$ bestimmt. Die Ebene $level(v_i)$ eines Knoten v_i ist die Entfernung des Knotens v_i von der Wurzel v_w des Eliminierungsbaums \mathcal{T} .

Davis et al. [T. A. Davis 2006, Chen, T. A. Davis u. a. 2008] haben den Ansatz von G. L. Gilbert, Ng und Peyton 1994 mit folgenden fünf Schritten umgesetzt:

1. Zerlegung der Pfade bei Traversierung der Zeilenbäume aufwärts (bottom-up) von den Blättern zur Wurzel,
2. Bestimmung des *kleinsten gemeinsamen Knotenvorgängers* von zwei verschiedenen Blättern des Zeilenbaums auf Basis des Eliminierungsbaums,
3. Bestimmung der Ebene des jeweiligen Knotens im Eliminierungsbaum,
4. Aufbau der Skeleton-Matrix, die die Blätter der Zeilenbäume darstellt,
5. Definition des *ersten Knotennachfolgers* für jeden Knoten des Eliminierungsbaums, der auf die Knoten der Zeilenbäume übertragen wird.

Mit dem neuartigen Aufbau der Skeletonmatrix in Verbindung mit der Definition der ersten Knotennachfolger stellen diese fünf Schritte bereits bedeutsame Optimierungen des Ansatzes von Gilbert et al. dar.

Die n Blätter des in Postorder-Reihenfolge vorliegenden Eliminierungsbaums \mathcal{T} sollen mit v_{p_i} mit $i = 1, \dots, n$ bezeichnet werden. Blatt v_{p_1} besitzt die kleinste Postorder-Nummer, die weiteren Blätter v_{p_i} mit $i = 2, \dots, n$ höhere Postorder-Nummern mit $v_{p_i} < v_{p_{i+1}} < \dots < v_{p_n}$ in aufsteigender Reihenfolge.

Nun erfolgt der Übergang vom Eliminierungsbaum \mathcal{T} zum Zeilenbaum \mathcal{T}^i . Mit dem Aufbau des initialen Pfades vom Blatt v_{p_1} bis zur Wurzel v_w von \mathcal{T}^i , wobei p_1 jetzt die kleinste Postorder-Nummer im Zeilenbaum \mathcal{T}^i bezeichnet, werden die weiteren Pfade, die von benachbarten Blattknoten v_{p_i} mit $i > 1$ ausgehen, bei einem *kleinsten gemeinsamen Knotenvorgänger* enden. Dieser Knotenvorgänger wird für das aktuelle Blatt v_{p_i} mit $i = 2, \dots, n$ und für das vorherige benachbarte Blatt $v_{p_{i-1}}$ definiert. Die Pfadlängen werden vom Blatt bis zum letzten Knoten unterhalb des *kleinsten gemeinsamen Knotenvorgängers* gezählt.

Für den Zeilenbaum \mathcal{T}^{12} in Abb. 9.5 wurde beispielsweise der initiale Pfad von Knoten 4 über Knoten 5 zur Wurzel 12 mit der Pfadlänge 3 gebildet. Die Pfade von den nächsten Blättern 9 und 11 enden im Knoten 12, da dieser der gemeinsame kleinste Knotenvorgänger der Blätter 5, 9 und 11 ist. Die Pfadlänge des zweiten und dritten Pfades ist 1. Somit liegen die disjunkten Mengen $\{4, 5, 12\}$, $\{9\}$ und $\{11\}$ sowie ihre Pfadlängen vor. Diese Summe ist gleich 5 und entspricht der Anzahl der Zeileneinträge $col\ count(12) = 5$ im Zeilenbaum \mathcal{T}^{12} .

9.3.4. Umsetzung des Algorithmus von G. L. Gilbert, Ng und Peyton 1994, der durch T. A. Davis 2006 weiter optimiert wurde

Die initiale Phase des Algorithmus beinhaltet eine Untersuchung des Eliminierungsbaums, die als Ergebnis folgende zusätzliche Informationen für die Knoten bereitstellt:

- Ebene $level(v_i)$ des Knotens v_i im Eliminierungsbaum und
- *Erster Knotennachfolger*.

Der *erste Knotennachfolger* hängt mit dem im letzten Abschnitt behandelten Aufbau der disjunkten Pfade im Eliminierungsbaum zusammen. Die disjunkten Pfade werden bei der Traversierung des Eliminierungsbaums in einem Postorder-Durchlauf definiert.

Dabei erfolgt der initiale Durchlauf der Knoten vom Blatt mit der kleinsten Knotennummer zunächst in aufsteigender Richtung zur Wurzel. Dann erfolgt das Traversieren des Baumes von der Wurzel aus in absteigender Richtung zunächst auf der linken, dann auf der rechten Seite des Baumes, um weitere Blätter des Baumes zu finden. Bei der Traversierung von der Wurzel nach unten wird bei einem Knoten zunächst der linke Teilbaum durchlaufen, wenn dieser nicht bereits traversiert wurde, dann der rechte Teilbaum und zuletzt der Knoten selbst. Wird ein Blatt gefunden, erhält es die nächste Postorder-Nummer zugewiesen. Anschließend werden seinen Elternknoten bis zu einem *kleinsten gemeinsamen Knotenvorgänger* oder bis zur Wurzel Postorder-Nummern zugewiesen.

Für die Definition der *kleinsten Knotennachfolger* beginnt der initiale disjunkte Pfad beim Blatt v_{p_1} mit der kleinsten Knotennummer, die bei der Postorder-Reihenfolge zugewiesen wurde.

Beim Eliminierungsbaum \mathcal{T} des Cholesky-Faktors L in Abb. 9.7 links wird beispielsweise der initiale Pfad, der bei Knoten 1 beginnt und bei der Wurzel 13 endet, durch eine Knotenmenge $\{1, 4, 5, 12, 13\}$ repräsentiert. Der zweite Pfad geht von Knoten 9 aus und endet beim gemeinsamen Knotenvorgänger 12, die Knotenmenge ist $\{9\}$. Der bei Knoten 7 beginnende dritte Pfad mit $\{7, 11\}$ endet ebenfalls bei Knoten 12. Der vierte und fünfte Pfad im Eliminierungsbaum \mathcal{T} besitzt jeweils die Knotenmenge $\{6, 10\}$ und $\{2, 3, 8\}$.

Den Knotenmengen der disjunkten Pfade kann anschließend die Information *des kleinsten Knotennachfolgers* zugewiesen werden, die gleich der Postorder-Nummer des ermittelten *ersten Knotennachfolgers* ist. Beim Eliminierungsbaum in Abb. 9.7 erfolgt die Zuweisung des *ersten Knotennachfolgers* in Tabelle 9.4. Man beachte, dass das Attribut des *ersten Knotennachfolgers* bei allen Knoten der über eine Postorder-Reihenfolge aufgebauten disjunkten Pfade eines Eliminierungsbaums identisch ist.

Die beiden Informationen des *kleinsten Knotennachfolgers* und der *Ebene des Knotens* werden von den einzelnen Knoten des Eliminierungsbaum in einer späteren Phase des Algorithmus direkt auf die Knoten der $i = 1, \dots, n$ Zeilenbäume \mathcal{T}^i übertragen.

Kleinsten Knotennachfolger (Postorder-Nummer)		Knotenmenge des disjunkten Pfades
1	⇒	{1, 4, 5, 12, 13}
4	⇒	{9}
5	⇒	{7, 11}
6	⇒	{6, 10}
7	⇒	{2, 3, 8}

Tabelle 9.4.: Zuweisung des *kleinsten Knotennachfolgers* zu den Knoten des Eliminierungsbaums \mathcal{T} der Abb. 9.7. Die Postorder-Nummer des *kleinsten Knotennachfolgers* gilt für alle Knoten der Knotenmenge.

Aufbau der einzelnen Zeilenbäume Nach Aufbau der zusätzlichen Information *erster Knotennachfolger* und *Ebene des Knotens* können die einzelnen Zeilenbäume definiert werden, die Ausgangsinformationen für die Algorithmen $row\ count(i)$ und $col\ count(j)$ bereitstellen. Wurzelknoten des Zeilenbaums \mathcal{T}^i ist Knoten i . Für \mathcal{T}^i werden zunächst von oben diejenigen Knoten des Eliminierungsbaums \mathcal{T} entfernt, die eine höhere Nummer als die Wurzel des Baums \mathcal{T}^i besitzen. Anschließend werden von unten sämtliche Knoten des Eliminierungsbaums entfernt, wenn diese Nachfahren der durch Theorem 8 in Abschnitt 9.3.1 definierten Blätter des Zeilenbaums sind.

Definition der Blätter der Zeilenbäume, die mit den Einträgen der Skeletonmatrix identisch sind Die Skeletonmatrix, die über die Blätter der n Zeilenbäume \mathcal{T}^i mit $i = 1, \dots, n$ definiert wird, kann mit Hilfe des Theorems 8 aus der Ausgangsmatrix A gebildet werden.

Die Anzahl und die Positionen der Nichtnull-Elemente sind sowohl beim Cholesky-Faktor L , der aus der Skeletonmatrix \tilde{A} gebildet wird, als auch beim Cholesky-Faktor L , der aus der Originalmatrix A aufgebaut wurde, identisch [Liu 1986, Liu 1990, T. A. Davis 2006].

Einfache, aber nicht laufzeit-optimale Ansätze für die Definition einer Skeletonmatrix stellen zunächst den Graphen $\mathcal{G}(A)$ auf, um innerhalb einer Zeile j diejenigen Kanten E zu entfernen, die Blätterknoten a_{ij} mit höher nummeriertem Knotenvorgänger $k > j$ als dem unmittelbaren Vorgänger im Graphen verbinden.

Die mit einer Laufzeitkomplexität $\mathcal{O}(|A|)$ arbeitenden Algorithmen [T. A. Davis 2011, T. A. Davis 2006, J. R. Gilbert, Li u. a. 2001] verzichten auf den expliziten Aufbau eines Graphen für die Skeletonmatrix, sondern nutzen den Eliminierungsbaum, die Struktur der Matrix A und die zusätzlich für alle Knoten des Eliminierungsbaums aufgebauten Informationen.

Zunächst werden die Nichtnull-Elemente der Originalmatrix A nacheinander Spalte für Spalte in aufsteigender oder topologischer Reihenfolge durchlaufen. In der Spalte 1 bilden alle Nebendiagonalelemente $\{i > 1 \mid a_{i1} \neq 0\}$ Blätter der jeweiligen Zeilenbäume \mathcal{T}^i , da diese automatisch den kleinsten Wert eines *ersten Knotennachfolgers* darstellen. Der für einen Zeilenbaum \mathcal{T}^i ermittelte erste Blattknoten wird für die spätere Bestimmung des *kleinsten gemeinsamen Knotenvorgängers*, die als zweiten Operanden einen benachbarten Blattknoten benötigt, in eine Liste eingetragen.

In den folgenden Spalten $j = 2, \dots, n$ werden die Einträge a_{ij} unterhalb der Diagonale der Matrix A aus dem Blickwinkel der mit den Einträgen a_{ij} verbundenen Knoten j wiederum in aufsteigender Folge untersucht, beginnend mit dem ersten Nebendiagonalelement $\min\{i > j \mid a_{ij} \neq 0\}$. Die mit den Einträgen a_{ij} verbundenen Knoten sind dann Blattknoten, wenn ihr *kleinsten Knotennachfolger* größer als der bisher in Zeile i aufgetretene Wert ist [T. A. Davis 2006]. Ein als erster zum Zeilenbaum \mathcal{T}^i hinzukommender Spalteneintrag a_{ij} besitzt natürlich automatisch das Attribut des kleinsten *ersten Knotennachfolgers* innerhalb der untersuchten Zeile und ist somit Bestandteil der Skeletonmatrix.

Folgendes Theorem definiert mit Hilfe des *ersten Knotennachfolgers* das Kriterium, ob ein Knoten j_2 in Bezug zu einem Knoten j_1 ein neues Blatt des Zeilenbaums darstellt oder sich oberhalb des Knotens j_1 im Eliminierungsbaum \mathcal{T} und dem daraus abgeleiteten Zeilenbaum \mathcal{T}^i befindet:

Theorem 9 (T. A. Davis 2006) Die Knoten $j_1 < j_2$ werden in einem in Postorder-Reihenfolge durchlaufenen Eliminierungsbaum \mathcal{T} untersucht. f_{j_1} soll der erste Knotennachfolger von j_1 , f_{j_2} der erste Knotennachfolger von j_2 sein. Dann ist entweder (1) $f_{j_1} \leq j_1 < f_{j_2} \leq j_2 \Rightarrow j_1$ ist kein Knotennachfolger von j_2 oder (2) $f_{j_1} \leq f_{j_2} \leq j_1 < j_2 \Rightarrow j_1$ ist ein Knotennachfolger von j_2 .

Nachdem beim Durchlaufen der Spalten in aufsteigender oder topologischer Reihenfolge die Blätter des Zeilenbaums \mathcal{T}^i mit Hilfe des Theorems 9 bestimmt sind, wird für die Definition der disjunkten Pfade innerhalb des Zeilenbaums (siehe Tabelle 9.4) der *kleinste gemeinsame Knotenvorgänger* gesucht. Da die gefundenen Blätter j_i der Zeilenbäume \mathcal{T}^i kleiner sind als die Wurzel des Eliminierungsbaums, existiert für zwei nachfolgende Blätter im Zeilenbaum ein *kleinster gemeinsamer Knotenvorgänger*, der entweder die Wurzel selbst oder ein unterhalb der Wurzel liegender Knoten ist, wenn dieser die Voraussetzung erfüllt, dass er zwei oder mehr Knotennachfolger besitzt.

Definition der disjunkten Pfade im Zeilenbaum Grundlegendes Konzept für die Definition der disjunkten Pfade ist, wie bereits einleitend gesagt wurde, die Bestimmung des *kleinsten Knotenvorgängers* für das Paar $\{a, b\}$, die bei den frühen Ansätzen [z. B. J. R. Gilbert, Li u. a. 2001] größeren Aufwand beim zugehörigen Algorithmus erforderte.

Nach G. L. Gilbert, Ng und Peyton 1994 können die den k Paaren zuordenbaren *kleinsten Knotenvorgänger* in der Laufzeit $\mathcal{O}(k \cdot \alpha(k, n))$ bestimmt werden. Die Funktion $\alpha(k, n)$ stellt wiederum eine extrem langsam wachsende Inverse der Ackermannfunktion dar [R. E. Tarjan 1975]. Gilbert et al. nutzten den Algorithmus von R. E. Tarjan 1975 zur Bestimmung des *kleinsten gemeinsamen Knotenvorgängers*. Er arbeitet bereits mit Optimierungen, z. B. Pfadkompression bei den zugrundeliegenden Graphenoperationen. Der Algorithmus führt für ein gegebenes Paar von Knotenblättern $\{p_{i-1}, p\}$ eine Tiefensuche von der Wurzel des Baums aus. Dabei wird das Paar $\{p_{i-1}, p\}$ zweimal überprüft, zunächst wenn der Knoten p_{i-1} im Baum untersucht wird und ein weiteres Mal, wenn das Nachbarblatt p untersucht wird. Die Laufzeitkomplexität $\mathcal{O}(k \cdot \alpha(k, n))$ wird vor allem durch die Laufzeit für die Pfadkompression bestimmt, die für den ermittelten Pfad vom Blattknoten bis zum *kleinsten Knotenvorgänger* durchgeführt wird.

Gabow und R. E. Tarjan 1983 haben die Weiterentwicklung ihres Algorithmus vorgestellt, der die Aufgabe in linearer Laufzeit $\mathcal{O}(m + n)$ mit einem Speicherbedarf von $\mathcal{O}(n)$ erledigt und der dafür mit Lookup-Tabellen und Multisets arbeitet. Der Algorithmus erfordert eine komplexe Implementierung und wurde deswegen selten in numerischen Bibliotheken übernommen. T. A. Davis 2006 hat bei der Entwicklung der Cholmod-Bibliothek einen anderen Weg beschritten, der für die Bestimmung des *kleinsten gemeinsamen Knotenvorgängers* auf den Einsatz komplexer Graphen-Algorithmen verzichtet. Dieser Ansatz arbeitet anstelle eines Eliminierungsbaums mit teilweise konstruierten Zeilenbäumen, die beim einmaligen Durchlaufen der Spalten der Ausgangsmatrix A gebildet werden. T. A. Davis 2006 veranschaulicht das vereinfachte Auffinden des *kleinsten Knotenvorgängers* im Zeilenbaum \mathcal{T}^i durch folgendes Theorem:

Theorem 10 (T. A. Davis 2006) Für den Eliminierungsbaum wird eine Postorder-Reihenfolge vorausgesetzt. Der *kleinste Knotenvorgänger* von zwei Knoten a und b mit $a < b$ ist beim Traversieren der Knoten vom Blattknoten a aus in Richtung Wurzel derjenige Knoten $q > b$, dessen Postorder-Nummerierung im durchlaufenen Pfad erstmals größer ist als die Postorder-Nummerierung von b .

Ein vorliegender, partiell aufgebauter Zeilenbaum wird von den Blättern aus traversiert. Dabei werden wiederum Techniken wie Pfadkompression zur Optimierung der Laufzeit genutzt. Durchläuft man die Spalten in Postorder-Reihenfolge, während synchron in dieser Reihenfolge partiell die Zeilenbäume aufgebaut werden, dann ist es entbehrlich, die Postorder-Nummerierung der Nachbarknoten p_{i-1} und p_i zu vergleichen und die Postordering-Nummern der im ausgehenden Pfad vorkommenden Knoten oberhalb des Knoten p_{i-1} zu untersuchen. Die zuletzt vor dem Auftreten des Knotens p_i untersuchte Spalte, die gleichzeitig bei dem partiell konstruierten Zeilenbaum den Knoten mit der geringsten Entfernung zur Wurzel darstellt, bevor weitere Blätter neuer Spalten in der Postorder-Reihenfolge erscheinen, ist automatisch der *kleinste gemeinsame Knotenvorgänger*.

Abbildung 9.8 zeigt die Suche des *kleinsten Knotenvorgängers* von Knoten 5 und Knoten 9. Knoten 5 besitzt als zusätzliche in der initialen Phase des Algorithmus gewonnene Information die Postorder-Nummerierung 3,

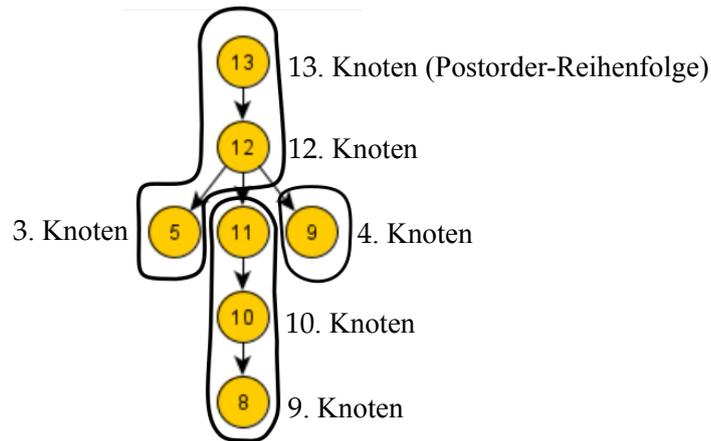


Abbildung 9.8.: Pfadzerlegung im Zeilenbaum \mathcal{T}^{12} , Bestimmung des *kleinsten gemeinsamen Knotenvorgängers* (= Knoten 12) der Blattknoten 5, 8 und 9 über Postorder-Reihenfolge.

Knoten 9 die Postorder-Nummerierung 4. Der Pfad wird von Knoten 5 aus in Richtung Knoten 13 durchlaufen. Knoten 12 ist bereits der kleinste Knotenvorgänger beider Knoten, da die Postorder-Nummerierung größer ist als die des Knotens 9.

Anzahl der Nichtnull-Elemente in den Spalten des Cholesky-Faktors L

Der Algorithmus $col\ count(j)$, der in Ordnung $\mathcal{O}(|A|)$ die Anzahl der Nichtnull-Elemente $|\mathcal{L}_j|$ der Spalten j mit $j = 1, \dots, n$ einer Sparse Matrix bestimmt, ist komplexer als der bereits vorgestellte Algorithmus $row\ count(i)$, baut jedoch auf den gleichen Konzepten auf, die für die Bestimmung der Anzahl der Nichtnull-Elemente der n Zeilen vorgestellt wurden.

Ein einfacher Algorithmus könnte zunächst so vorgehen, dass aus dem Eliminierungsbaum \mathcal{T} mit Hilfe der Skeletonmatrix \widehat{A} die Zeilenbäume \mathcal{T}^i mit $i = 1, \dots, n$ definiert werden. Anschließend könnte der Algorithmus die Zeilenbäume nach den n Spalteneinträgen untersuchen und ermitteln, in welchen Zeilenbäumen welche Spalten j mit $j = 1, \dots, n$ definiert sind. Mit diesem Ansatz könnte eine nicht-optimale Laufzeit $\mathcal{O}(|L|)$ proportional zur Größe des Cholesky-Faktors L erreicht werden [J. Gilbert 1994, T. A. Davis 2006].

Ein laufzeit-optimaler Algorithmus der Ordnung $\mathcal{O}(|A|)$ kann Strukturen von $row\ count(i)$ einschließlich der Schleifen wiederverwenden und damit Einträge a_{ij} der originalen Matrix A in einem einzigen Durchlauf untersuchen, ohne den Faktor L vollständig aufbauen zu müssen. Ein Algorithmus für $col\ count$ kann mit wenig Aufwand in den Algorithmus für die Funktion $row\ count(i)$ integriert werden [T. A. Davis 2006]. Der Algorithmus $col\ count(j)$ nutzt dann die für $row\ count(i)$ partiell konstruierten Zeilenbäume \mathcal{T}^i , die bei der zeilenweisen Verarbeitung der a_{ij} -Einträge der Matrix A entstehen. Bei den einzelnen Zeilenbäumen \mathcal{T}^i wird erneut auf die Blätter zugegriffen und die Information des *kleinsten gemeinsamen Knotenvorgängers* verwendet. Den Knoten der Zeilenbäume können zusätzlich spezielle Knotengewichte zur Ermittlung der Anzahl der Spalteneinträge zugeordnet werden. Die Anzahl der Spalteneinträge $col\ count(j)$ ergibt dann die Summe der Knotengewichte der untersuchten Spalte j einschließlich ihrer Kinderspalten c .

Sollwerte für die anschließend auf die l_{ij} bezogene Knotengewichtsfunktion $w_i(j)$ (Gl. (9.12)) definiert die Funktion $\chi_i(j)$ für alle Elemente l_{ij} des Cholesky-Faktors L :

$$\chi_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{für } l_{ij} \neq 0, \\ 0 & \text{für alle anderen Fälle.} \end{cases} \quad (9.10)$$

$$(9.11)$$

Die Knotengewichtsfunktion $w_i(j)$ wird als Differenz der Funktion $\chi_i(j)$ des Eintrags l_{ij} in Spalte j zu der Summe der Funktionen $\chi_i(k)$ definiert, die den in Zeile i links von j befindlichen Einträgen mit $k < j$ zugeordnet sind, wobei nicht unterschieden wird, ob Null- oder Nichtnull-Einträge $l_{ik} = 0 \vee l_{ik} \neq 0$ vorliegen (siehe Gl. (9.12)). Die von Null verschiedenen Einträge $l_{ik} \neq 0$ finden sich konkret in den unmittelbar mit j

verwandten Spalten, den Kinderspalten k von j , die im Eliminierungsbaum \mathcal{T} als Kindknoten k definiert sind. Die Anzahl der Kindknoten von j ist d .

$$w_i(j) = \chi_i(j) - \sum_{\text{Kindknoten } k \text{ von } j} \chi_i(k). \quad (9.12)$$

Die Knotengewichtsfunktion $w_i(j)$ gibt den Grad der Übereinstimmung zwischen Spalte j und ihren unmittelbar verwandten Spalten k an, die als Kinderspalten über die Beziehung $\text{parent}(k) = j$ gegeben sind.

Funktion $w_i(j)$ wird Null, falls genau eine Kinderspalte k mit dem Eintrag $l_{ik} \neq 0$ ein Nichtnull-Element für die Position i definiert hat. Ein Spaltengewicht $w(j)$ drückt für $l_{ij} \neq 0$ mit $w(j) > 0$ aus, dass Spalte j im Eliminierungsbaum \mathcal{T} als Blatt vorliegt.

Falls mehrere Kinderspalten k existieren, die in ihrer Spalte ein Nichtnull-Element für die untersuchte Zeile i definieren, nimmt Funktion $w_i(j)$ einen negativen Wert an. Dann werden für Spalte j die Nichtnull-Elemente aus mehreren Kinderspalten k in die Elternspalte vererbt.

Das Gesamtgewicht für die Spalte j ist die Summe der Einzelgewichte $w_i(j)$:

$$w(j) = \sum_{\text{alle Zeilen } i} w_i(j). \quad (9.13)$$

Die Nichtnull-Belegung $\chi_i(j)$ in Zeile i und Spalte j ist das Knotengewicht $w_i(j)$, dem die Belegungen mit Nichtnull-Elementen $\chi_i(k)$ der Kindknoten k hinzugefügt werden bzw. die Summe der Knotengewichte der Knotennachfolger s von j einschließlich j . Damit wird j in Gl. (9.14) zur Menge s der Knotennachfolger von j gezählt.

$$\chi_i(j) = w_i(j) + \sum_{\text{Kindknoten } k \text{ von } j} \chi_i(k) = \sum_{\text{Knotennachfolger } s \text{ von } j} w_i(s) \quad (9.14)$$

Die Anzahl der Nichtnull-Elemente $\text{col count}(j)$ in Spalte j ist die Summe $\chi_i(j)$ der Nichtnull-Belegungen der Spalte j und die Summe aller Knotengewichte der Knotennachfolger s von j :

$$\text{col count}(j) = \sum_{\text{alle Zeilen } i} \chi_i(j) = \sum_{\text{alle Zeilen } i} \sum_{\text{Knotennachfolger } s \text{ von } j} w_i(s) = \sum_{\text{Knotennachfolger } s \text{ von } j} w(s) \quad (9.15)$$

Die Knotengewichtsfunktion $w_i(j)$ kann nur folgende Werte ungleich Null annehmen [J. Gilbert 1994, J. R. Gilbert, Li u. a. 2001]:

$$w_i(j) = \begin{cases} -1 & \text{falls } j \text{ der Elternknoten } j = \text{parent}(i) \text{ von } i \text{ in } \mathcal{T} \text{ ist,} \\ 1 & \text{falls } j \text{ ein Blattknoten im Zeilenbaum } \mathcal{T}^i \text{ ist,} \\ 1 - d & \text{falls } j \text{ im Zeilenbaum } \mathcal{T}^i \text{ } d > 1 \text{ Kinder besitzt.} \end{cases} \quad (9.16)$$

Die Knoten j , die bei der Fallunterscheidung im unteren Zweig Gl. (9.18) mehr als ein Kind im Zeilenbaum \mathcal{T}^i besitzen, sind die *kleinsten gemeinsamen Knotenvorgänger* [J. Gilbert 1994].

Unter Verwendung der Knotengewichte von Gilbert lässt sich die Anzahl der Spalteneinträge der Spalte j direkt aus der Anzahl der Spalteneinträge der Kinderspalten k berechnen.

Die Überlegungen von Gilbert et al. [J. Gilbert 1994, J. R. Gilbert, Li u. a. 2001], die auf Zeilenbäume \mathcal{T}^i basieren, überträgt T. A. Davis 2006 bei der Integration der Funktionen $\text{row count}(i)$ und $\text{col count}(j)$ in einen einzigen Algorithmus auf den Eliminierungsbaum \mathcal{T} , der bei Verarbeitung der a_{ij} -Einträge der Matrix A insgesamt ein einziges Mal durchlaufen wird.

Davis drückt die Abhängigkeit der Belegung der Nichtnull-Elemente zwischen Eltern- und Kinderspalten beim Eliminierungsbaum aus, die bei Gilbert noch auf den Zeilenbäumen basieren. Die Abhängigkeit der

Belegung der Nichtnull-Elemente zwischen Eltern- und Kinderspalten wird bei Davis wie folgt dargestellt [T. A. Davis 2006, T. A. Davis und Hager 2009]:

Die Menge \mathcal{L}_j

$$\mathcal{L}_j = \mathcal{A}_j \cup \{j\} \cup \left(\bigcup_{j=\text{parent}(c)} \mathcal{L}_c \setminus \{c\} \right) \quad (9.19)$$

ist die Vereinigungsmenge der Nichtnull-Elemente der j -ten Spalte \mathcal{A}_j von A und der Nichtnull-Elemente \mathcal{L}_c der Kindknoten c . Für den Fall, dass Spalte j ein Blatt im Eliminierungsbaum \mathcal{T} ist und somit keine Kindknoten c besitzt, kann die Anzahl $\text{col count}(j)$ der Spalteneinträge wie folgt berechnet werden:

$$\text{col count}(j) = \sum_{\text{alle Zeilen } i} w_i(j) = \sum_{\text{alle Zeilen } i} \chi_i(j) = |\widehat{A}_j| + 1. \quad (9.20)$$

Falls $\text{col count}(j)$ mit Hilfe von Gl. (9.12) für eine Spalte j berechnet wird, die Kindknoten c im Eliminierungsbaum \mathcal{T} besitzt, wird die Anzahl $\text{col count}(j)$ der Spalteneinträge [T. A. Davis 2006, T. Davis, Rajamanickam und Sid-Lakhdar 2016]

$$\text{col count}(j) = \sum_{\text{alle Zeilen } i, \text{ für die } l_{ij} \neq 0 \text{ ist}} w_i(j) = |\widehat{A}_j| - d_j + \left| \bigcup_{j=\text{parent}(c)} \mathcal{L}_c \right|. \quad (9.21)$$

An dieser Stelle ist anzumerken, dass in Gl (9.21) d_j die Anzahl der Kindknoten j im Eliminierungsbaum \mathcal{T} darstellt. Die Anzahl d_j der Kindknoten j im Eliminierungsbaum muss nicht identisch mit der Anzahl d der Kinder im Zeilenbaum \mathcal{T}^i sein, da die Knoten des Zeilenbaums \mathcal{T}^i eine Untermenge der Knoten des Eliminierungsbaums \mathcal{T} bilden.

Die Vereinigungsmenge $\bigcup_{j=\text{parent}(c)} \mathcal{L}_c$ wird als Summe der Einträge $\sum_{j=\text{parent}(c)} \text{col count}(c)$ definiert, von der die Überlappung o_j abgezogen wird. Die Überlappung o_j in der Zeile j beziffert mehrfach vorhandenen Nichtnull-Elemente in der Elternspalte und in c Kinderspalten.

$$\text{col count}(j) = \sum_{\text{alle Zeilen } i, \text{ für die } l_{ij} \neq 0 \text{ ist}} w_i(j) = |\widehat{A}_j| - d_j - o_j + \sum_{j=\text{parent}(c)} \mathcal{L}_c. \quad (9.22)$$

Die Überlappung o_j kann über einen Vergleich der Zeilenbäume der c Kindspalten und der Elternspalte $j = \text{parent}(c)$ bestimmt werden mit folgender Fallunterscheidung [T. A. Davis 2006]:

- Falls j ein Blatt des Zeilenbaums \mathcal{T}^i und somit gleichzeitig ein Element der Skeletonmatrix \widehat{A} ist, wird das Nichtnull-Element i originär in Spalte j eingeführt. Damit befindet sich kein weiteres Nichtnull-Element in Zeile i links von j in Kinderspalten c mit $\text{parent}(c) = j$, falls Spalte j im Eliminierungsbaum Knotennachfolger besitzt. Folglich kann Zeile i nicht zu einer Überlappung o_j beitragen.
- Falls j nicht ein Blatt eines Zeilenbaum \mathcal{T}^i ist, besitzt dieser Knoten folglich mindestens ein Kind, in dem der Eintrag i bereits definiert wurde. Erneut ist darauf hinzuweisen, dass die Knoten der Kinder einer Spalte j im Zeilenbaum \mathcal{T}^i eine Untermenge der Knoten im Eliminierungsbaum \mathcal{T} bilden und dass die Anzahl der Kinder im Eliminierungsbaum \mathcal{T} nicht automatisch der Anzahl der Kinder im Zeilenbaum \mathcal{T}^i entspricht. Falls mehrere Kinder der Anzahl d_{ij} im Zeilenbaum \mathcal{T}^i existieren, erscheint Zeile i als Nichtnull-Element folglich in allen diesen Kindern von j . Da j nun auch einen *kleinsten gemeinsamen Knotenvorgänger* darstellt, tragen die Kindspalten mit $d_{ij} - 1$ zur Überlappung o_j bei.

Eine Überlappung o_j ist für Spalten j im Zeilenbaum \mathcal{T}^i zu berechnen, wenn diese Spalte j mehrere Kinder besitzt.

T. A. Davis 2006 führt mit diesen Überlegungen zur Vererbung von Nichtnull-Elementen zwischen verwandten Spalten im Eliminierungsbaum einen Korrekturterm Δ_j ein, der zur Vereinfachung von Gl. (9.22) beiträgt. Dieser Korrekturterm wird, falls j ein Blatt im Eliminierungsbaum \mathcal{T} ist, zu $col\ count(j) = \Delta_j = |\widehat{A}| + 1$ definiert, ansonsten zu $\Delta_j = |\widehat{A}| - d_j - o_j$.

Gl. (9.22) vereinfacht sich infolge des Korrekturterms zu:

$$col\ count(j) = \Delta_j + \sum_{j=\text{parent}(s)} col\ count(s). \quad (9.23)$$

Der Korrekturterm Δ_j wird schrittweise innerhalb des Algorithmus für $col\ count(j)$ wie folgt gebildet [T. A. Davis 2006, T. Davis, Rajamanickam und Sid-Lakhdar 2016].

Bei der zeilenweisen Verarbeitung der a_{ij} -Einträge der Matrix A wird beim Aufbau der Zeilenbäume \mathcal{T}^i mit $i = 1, \dots, n$ der Term Δ_j zu 1 initialisiert, falls das Nichtnull-Element j ein Blatt des Zeilenbaums \mathcal{T}^i darstellt, ansonsten zu Null. Danach erfolgen Modifikationen der folgenden Art:

- Für jedes weitere Blatt des Zeilenbaums \mathcal{T}^i erhöht sich der Korrekturterm Δ_j um eins.
- Für jedes Kind c der Spalte j im Zeilenbaum \mathcal{T}^i wird der Korrekturterm Δ_j um eins erniedrigt.
- Der Korrekturterm Δ_j wird jedes Mal um eins erniedrigt, wenn Spalte j ein *kleinster gemeinsamer Knotenvorgänger* für ein weiteres Paar $\{a, b\}$ benachbarter Blattknoten ist.

Nach Vorliegen der einzelnen Korrekturterme Δ_j für jede Spalte j mit $j = 1, \dots, n$ kann abschließend im Algorithmus $col\ count(j)$ die Anzahl der Nichtnull-Elemente der Spalte j aus der Summe der Anzahl der Nichtnull-Elemente der Kinderspalten k und des Korrekturterms Δ_j über Gl. (9.23) berechnet werden.

9.4. Numerische Cholesky-Faktorisierung

Die numerische Cholesky-Faktorisierung für eine symmetrische, positiv definite Matrix A kann über eine dreifache Schleife gebildet werden, die um die Anweisung

$$l_{ij} = a_{ij} - (l_{ik} l_{kj}) / l_{kk} \quad (9.24)$$

aufgebaut wird [Ng und Peyton 1993].

Je nachdem, wie die Schleifen über i , j und k definiert werden, ergeben sich drei verschiedene Varianten der Faktorisierung. Zwei davon bauen den Cholesky-Faktor L Spalte für Spalte auf, entweder von links nach rechts oder in umgekehrter Richtung.

In der englischsprachigen Literatur finden sich für diese Varianten die Bezeichnungen Left-Looking Cholesky und Right-Looking Cholesky, die auf die spezielle Arbeitsweise des Cholesky Verfahrens hindeuten. In der deutsche Sprache haben diese englischen Begriffe keine Entsprechung, wie etwa „ein nach links schauender Cholesky-Algorithmus“. Zur besseren Übertragung der Begrifflichkeit soll in Anlehnung an die von Rauber und Rüniger 2000 verwendeten Terminologie von Cholesky-Faktorisierungen gesprochen werden, die einen Left-, Right- oder einen Up-Looking-Algorithmus anwenden.

In Kurzform sollen diese im Folgenden als Left-, Right- und Up-Looking Cholesky Verfahren bezeichnet werden. Die erste Variante baut die linke untere Dreiecksmatrix L , dem Namen entsprechend, von links nach rechts auf, die zweite Variante mit dem Right-Looking-Algorithmus von rechts nach links, die dritte Variante von oben nach unten.

Das dritte, mit dem Up-Looking-Algorithmus arbeitende Verfahren ist eine zeilenbasierte Version, die die linke untere Dreiecksmatrix des Cholesky-Faktors L von oben nach unten aufbaut.

Die einzelnen Varianten besitzen folgende Arbeitsweisen [George und Liu 1981, Ng und Peyton 1993]:

1. *Up-Looking Cholesky-Faktorisierung*: Für die Zeilen der Matrix wird eine äußere Schleife i definiert, die sie von oben nach unten durchläuft. Die Schleifen j und k werden als innere Schleifen aufgebaut, die für jede neue Zeile des Faktors ein Dreieckssystem mit den bereits vorliegenden Zeilen auflösen [siehe auch T. A. Davis 2006].

2. *Left-Looking Cholesky-Faktorisierung*: Hier wird eine Schleife um die Variable j als äußere Schleife definiert. Dabei wird der Cholesky-Faktor L von links nach rechts aufgebaut. Die inneren Schleifen über i und k bilden ein Matrix-Vektor Produkt, das für die Berechnung der aktuellen Spalte die Informationen bereits vorliegender Spalten des Cholesky-Faktors L links der aktuellen Spalte verwendet.
3. *Right-Looking Cholesky-Faktorisierung*: Die äußere Schleife wird hier über k definiert. Auf diese Weise erfolgt der Aufbau des Faktors L von rechts nach links. Die inneren Schleifen führen für die aktuelle Spalte L_{*j} ein Rang-1 Update mit dem Produkt $L_{*j} \cdot L_{*j}^T$ auf der bisher rechts der aktuellen Spalte gebildeten Dreiecksmatrix durch [Ng und Peyton 1993].

Up-Looking- und Left-Looking-Methode kamen bei der UTM-Umstellung des Liegenschaftskatasters in Bayern zur Anwendung und sollen im Folgenden näher vorgestellt werden.

Die Cholesky-Faktorisierung mit dem Up-Looking-Algorithmus wurde für sehr dünn besetzte Matrizen gewählt. Für den überwiegenden Teil der numerischen Berechnungen für das Ortra-Verfahren kam die Left-Looking-Variante zum Einsatz, die mit kleinen Submatrizen blockorientiert arbeitet.

Up-Looking-Algorithmus für sehr dünnbesetzte Matrizen Sehr dünnbesetzte Sparse Matrizen traten bei der Ausgleichung für sonstige Bauwerke in Einzelfällen auf, wenn neben wenigen im Liegenschaftskataster erfassten Bauwerkspunkten eine große Anzahl von bereits nach UTM überführten Flurstücks- und Gebäudepunkte in das funktionale Modell der Bauwerks-Ausgleichung eingeführt, jedoch von den wenigen Bauwerkspunkten nur eine geringe Zahl an Beobachtungen zu diesen aufgebaut werden. Der Sachverhalt, dass die Anzahl der identischen (bekannten) Punkten größer ist als die der unbekanntenen Punkte, tritt prinzipiell auch im Objektbereich Gebäude auf. Jedoch kamen in der Praxis der UTM-Umstellung keine sehr dünnbesetzten Matrizen für Gebäude vor.

Left-Looking Variante mit kleinen Submatrizen In der englischsprachigen Literatur wird diese Methode als Left-Looking Supernodal Version bezeichnet [T. A. Davis und Hager 2009, Ng und Peyton 1993, T. Davis, Rajamanickam und Sid-Lakhdar 2016]. Diese Version soll im Folgenden als Cholesky-Verfahren bezeichnet werden, das den Left-Looking-Algorithmus auf Basis von Superknoten ausführt. Die Superknoten fassen benachbarte Spalten mit meist identischer Struktur der Null-Elemente zu numerischen Einheiten zusammen, auf denen dann die Berechnungen ausgeführt werden.

9.4.1. Up-Looking Cholesky-Faktorisierung

Die Sparse Cholesky-Faktorisierung, die über den Up-Looking-Algorithmus den Faktor L zeilenweise von oben nach unten aufbaut, basiert auf einer Dreiecksauflösung, die, unabhängig von der Anzahl der vorliegenden Dreieckszeilen, stets mit $L \cdot x = b$ bezeichnet werden soll [T. A. Davis 2006]. Der Up-Looking-Algorithmus verwendet die oberhalb der aktuellen Zeile k numerisch in endgültiger Form vorliegenden Faktorzeilen $L_{k-1,k-1}$ als unteres Dreieckssystem L . Als rechte Seite b wird die Spalte $A_{1:k-1,k}$ oberhalb der Diagonalen der Matrix A gewählt. Die Dreiecksauflösung stellt den ersten Schritt des Algorithmus 1 dar.

Als zweiter Schritt folgt die Zuweisung des Diagonalelements des Cholesky-Faktors L der aktuellen Zeile mit Hilfe der bei der Dreiecksauflösung gefundenen Lösung [Golub und Van Loan 1996, T. A. Davis 2016]. Algorithmus 1 kann durch folgenden Pseudocode beschrieben werden:

for $i = 1$ to n **do**

Schritt 1: Auflösen von $L_{1:i-1,1:i-1} y = A_{1:i-1,i}$ nach y , \Rightarrow i . Zeile in L : $L_{i,1:i-1} = y^T$;

Schritt 2: $L_{i,i} = \sqrt{A_{i,i} - y^T \cdot y}$;

end

Algorithm 1: Zeilenweise von oben nach unten durchgeführte Cholesky-Faktorisierung einer $n \times n$ Matrix A .

Algorithmus 1 kann aus folgender Gleichung abgeleitet werden [T. A. Davis 2006]:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ l_{12}^T & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11}^T & l_{12} \\ & l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} \\ a_{12}^T & a_{22} \end{bmatrix} \quad (9.25)$$

Falls in Gl. (9.25) die oberen $i - 1$ Zeilen des Cholesky-Faktors $L_{1:i-1,1:n} = [L_{11} \ 0]$ durch rekursive Auflösung der Gleichung $L_{11} L_{11}^T = A_{11}$ vorliegen, wie dies in Gl. (9.30) gezeigt wird, ist mit L_{11} eine Dreiecksmatrix L für $L \cdot x = b$ gegeben. Dann kann die i -te Zeile $L_{i,1:n} = [l_{12}^T \ l_{22}]$ wie folgt berechnet werden:

$$L_{11} l_{12} = a_{12} \quad (\text{Schritt 1}), \quad l_{12}^T l_{12} + l_{22}^2 = a_{22} \quad (\text{Schritt 2}). \quad (9.26)$$

1. Zeile l_{12} unter der Dreiecksmatrix L_{11} , für die eine Bestimmungsgleichung durch $L_{11} l_{12} = a_{12}$ (Gl. (9.26), Schritt 1) gegeben ist, kann durch eine Dreiecksauflösung berechnet werden.
2. Zur Bestimmung von l_{22} (Schritt 2) wird ein Wurzelausdruck mit dem Diagonalelement a_{22} und dem Skalarprodukt $l_{12}^T l_{12}$ über $l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{12}^T l_{12}}$ gebildet. Falls die Matrix positiv definit ist, wird der Ausdruck $a_{22} - l_{12}^T l_{12}$ unter der Wurzel größer als Null.

Zur Herleitung der Dreiecksauflösung für Gl. (9.26), Schritt 1 wird wegen der internen spaltenweisen Repräsentation der Sparse Matrix eine Auflösung über Spalten vorgenommen:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (9.27)$$

Gl. (9.27) stellt eine Vorwärts-Dreiecksauflösung (englisch: Forward Solve) dar. Zunächst sollen zur Herleitung einer rekursiven Formel nur die ersten beiden Zeilen betrachtet werden [Golub und Van Loan 1996]:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

Falls das Produkt $l_{11} \cdot l_{22}$ in Gl. (9.28) nicht Null ist, können die Unbekannten wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 / l_{11}, \\ x_2 &= (b_2 - l_{21} x_1) / l_{22}. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Die allgemeine Lösung für Gl. (9.27) wird durch Rekursion mit Auflösung der i -ten Gleichung in $L x = b$ erhalten [Golub und Van Loan 1996]:

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j \right) / l_{ii}. \quad (9.30)$$

Da die i -te Komponente b_i des Vektors b in Gl. (9.30) insgesamt nur einmal für die Bestimmung von x_i verwendet wird, kann der auf Basis von Gl. (9.30) entwickelte Algorithmus 2 den Vektor b nutzen, um den Unbekanntenvektor x zu initialisieren.

Zunächst wird für Gl. (9.27) ein Vektor b eingeführt, der vollbesetzt oder, Nullelemente zugelassen, fast vollbesetzt ist. Bei einem fast vollbesetzten Vektor $b = \{dense\}$ werden Nullelemente als numerische Werte in den Vektor eingeführt. Aus der Formulierung $L \cdot x = b$ mit einer vollbesetzten rechten Seite $b = \{dense\}$ wird dann der graphenbasierte Algorithmus für eine dünnbesetzte rechte Seite $b = \{sparse\}$ entwickelt.

Das rekursive Vorwärtseinsetzen in Gl. (9.30) für $L \cdot x = b$ mit $b = \{dense\}$ kann durch folgenden Pseudocode beschrieben werden [aus T. A. Davis 2006]:

```

x = b;
for j = 1 to n do
  xj = xj / ljj;
  foreach i > j for which lij ≠ 0 do
    xi = xi - lij xj;
  end
end

```

Algorithm 2: Dreiecksauflösung durch Vorwärtseinsetzen mit vollbesetzter rechten Seite \mathbf{b} .

Führt man nun einen dünnbesetzten Vektor $\mathbf{b} = \{sparse\}$ für die rechte Seite ein, dann ist für $x_j = b_j = 0$ in Algorithmus 2 die j -te äußere Schleife einschließlich der inneren Schleife, die die Untersuchung durchführt, ob $l_{ij} \neq 0$ ist, unnötig. Ein Algorithmus kann zunächst zur Laufzeit überprüfen, ob $x_j \neq 0$ ist. Diese Untersuchung benötigt jedoch für eine einzelne Matrixspalte $\mathcal{O}(n)$ Operationen, da im Prinzip alle Elemente einer Matrixspalte geprüft werden müssen. Dies führt zu einer inakzeptablen Laufzeit der Ordnung $\mathcal{O}(n^2)$ für n Matrixspalten einer Matrix [T. A. Davis 2006].

Ein optimaler Algorithmus wird stattdessen die Besetzungsstruktur des Unbekanntenvektors \mathbf{x} verwenden, die durch die Positionen der Nichtnull-Elemente $x_j \neq 0$ definiert ist. Der Pseudocode des Algorithmus 2 verändert sich wie folgt, wenn die Nichtnull-Elemente in der Menge $\mathcal{X} = \{j \mid x_j \neq 0\}$ vorliegen:

```

x = b;
foreach j ∈  $\mathcal{X}$  do
  xj = xj / ljj;
  foreach i > j for which lij ≠ 0 do
    xi = xi - lij xj;
  end
end

```

Algorithm 3: Dreiecksauflösung durch Vorwärtseinsetzen mit dünnbesetzter rechter Seite \mathbf{b} .

Alternative zu supernodalen Formen der Cholesky-Faktorisierung Das mit Algorithmus 1 beschriebene Up-Looking Cholesky-Verfahren wurde bei der UTM-Umstellung in Bayern automatisch für solche Ausgleichungen gewählt, bei denen die Matrizen sehr dünn besetzt waren. Als Richtwert für eine sehr dünn besetzte Matrix kann die Anzahl der bei der symbolischen Faktorisierung ermittelten Gleitkommaoperationen (flops) pro Nichtnull-Element in \mathbf{L} , abgekürzt $\text{flops}/|\mathbf{L}|$, verwendet werden [Chen, T. A. Davis u. a. 2008]. Empirische Untersuchungen durch Chen et al. zeigen, dass das *Up-Looking Sparse Cholesky-Verfahren*, wenn die Gleitkommaoperationen eine gewisse Schwelle unterschreiten, schneller ist als andere Verfahren, die mit dem Aufbau von Superknoten arbeiten, was mit einem gewissen Verwaltungsaufwand verbunden ist. Als Richtwert geben Chen, T. A. Davis u. a. 2008 den Wert 40 flops pro Nichtnull-Element des Cholesky-Faktors \mathbf{L} an.

Bei den Ausgleichungen zur UTM-Umstellung des Liegenschaftskatasters in Bayern wurde bei den sonstigen Bauwerken nur bei wenigen Amtsbezirken der Wert von 40 flops/| \mathbf{L} | unterschritten, bei den Flurstücken lagen meist vierstellige flops-Werte pro Nichtnull-Element vor.

Wie Algorithmus 1 zeigt, stellt die Up-Looking Cholesky-Faktorisierung eine einfachere Variante der Cholesky-Faktorisierung dar. Auf die symbolische Faktorisierung bezogen, erfordert dieses Verfahren den Aufbau eines Eliminierungsbaums, der in der symbolischen Phase primär für den Algorithmus zur Ermittlung der Spalteneinträge benötigt wird. Der in Abschnitt 9.3.3 vorgestellte Algorithmus *col count*(j) dient dabei zur Bestimmung der Anzahl der Nichtnull-Elemente $|\mathcal{L}_j|$ für alle j Spalten des Cholesky-Faktors \mathbf{L} , die anschließend zur internen Allokation des Faktors \mathbf{L} für die numerische Faktorisierung verwendet wird.

Durchführung der numerischen Auflösung J. R. Gilbert und Peierl 1988 haben nachgewiesen, dass das Dreieckssystem in Schritt 1 des Algorithmus 1 in einer Laufzeit $\mathcal{O}(\text{flops}(\mathbf{L}_{1:i-1,1:i-1} \mathbf{y}))$ aufgelöst werden kann. Die Auflösung des Dreieckssystems erfolgt in zwei Teilschritten: Zunächst werden die Positionen der Nichtnull-Elemente in der neuen Zeile $\mathbf{L}_{i,1:i-1}$ (= Vektor \mathbf{y}) bestimmt. Gleichzeitig wird festgelegt, in welcher

Reihenfolge die Elemente y_j des Vektors \mathbf{y} aufgelöst werden. Im zweiten Teilschritt folgen die numerischen Berechnungen für die Zeile i des Cholesky-Faktors L .

Mit Hilfe der Graphentheorie kann die Besetzungsstruktur der i -ten Zeile im Cholesky-Faktor L hergeleitet werden. Gegeben sei für die i -te Zeile der gerichtete Graph $\mathcal{G}(L_{i-1})$ mit $i-1$ Knoten, der dann eine zusätzliche Kante vom Knoten j zum Knoten i definiert, falls in $L_{i,1:i-1}$ das Element $l_{ij} \neq 0$ ungleich Null ist.

T. A. Davis 2006 baut auf Basis der frühen Arbeiten über Zeilen- und Eliminierungs bäume von Liu 1986 und J. Gilbert 1994 folgendes Theorem für die Nichtnull-Struktur \mathcal{L}_i der i -ten Zeile des Cholesky-Faktors L auf. Im Theorem 11 wird Bezug auf den *Reach*-Operator aus Abschnitt 9.3.1 genommen.

Theorem 11 (T. A. Davis 2006) *Die Nichtnull-Struktur $\mathcal{L}_i = \text{Reach}_{G(A_{i-1})}(\mathbf{y}) = \text{Reach}_{\mathcal{T}_{i-1}}(\mathbf{y})$ bildet sich aus der im Graphen $G(L_{i-1})$ bzw. im Eliminierungsbaum \mathcal{T}_{i-1} über die Pfade erreichbare Knotenmenge, wenn die Traversierung von Knoten aus der Menge \mathbf{y} begonnen wird.*

Die Aussage $\mathcal{L}_i = \text{Reach}_{G(A_{i-1})}(\mathbf{y})$ von Theorem 11, die den Aufbau der Knotenmenge $\mathcal{L}_i = \text{Reach}_{G(L_{i-1})}(\mathbf{y})$ über den Graphen $G(L_{i-1})$ definiert, entspricht dem Theorem 5.1 von J. Gilbert 1994: Die Positionen der Nichtnull-Elemente der i -ten Zeile $L_{i,1:i-1} = \mathbf{y}^T$ lassen sich dadurch ermitteln, dass sie als Knoten vorliegen, die im Graphen $\mathcal{G}(L_{i-1})$ von den Ausgangsknoten aus durch Traversierung über Kanten erreichbar sind [J. Gilbert 1994, J. R. Gilbert und Peierl 1988].

Die Knoten der Nichtnull-Elemente der Zeile i , die durch den Graphen $\mathcal{G}(L_{i-1})$ ermittelt wurden, sind identisch mit den Knoten des i -ten Zeilenbaums \mathcal{T}^i [T. A. Davis 2006]. Deshalb kann der Eliminierungsbaum für den Schritt 1 des Algorithmus 1 zur Bestimmung der Menge \mathcal{Y} für die Auflösung des Dreieckssystems $L_{1:i-1,1:i-1} \mathbf{y} = A_{1:i-1,i}$ eingesetzt werden.

Die numerische Abhängigkeit der Nichtnull-Elemente die i -ten Zeile untereinander wird ebenfalls durch den Graphen $\mathcal{G}(L_{i-1})$ oder äquivalent durch den Eliminierungsbaum \mathcal{T} ausgedrückt. Ein Element l_{ij} kann numerisch aufgelöst werden, wenn die auf dieses Element im Graphen $\mathcal{G}(L_{i-1})$ über eine gerichtete Kante verbundenen Elemente numerisch bereits aufgelöst vorliegen. Diese Eigenschaft setzt sich induktiv im Graphen $\mathcal{G}(L_{i-1})$ von den Knoten mit niedrigeren Knotennummern zu den höheren Knotennummern fort.

Im Eliminierungsbaum \mathcal{T} kann ein Knoten j_i , der beim Up-Looking Verfahren eine Spalte des Cholesky-Faktors repräsentiert, numerisch aufgelöst werden, wenn die Knotennachfolger mit der niedrigeren Postorder-Nummerierung j_1, j_2, \dots, j_{i-1} bereits numerisch vorliegen.

Bei einem Graphen kann die Reihenfolge der numerischen Eliminierung der Elemente durch eine Tiefensuche festgelegt werden [George und Liu 1981, J. Gilbert 1994]. Aufgrund der Darstellung der numerischen Abhängigkeit des aktuellen Knotens von Knoten mit niedrigerer Knotennummer gilt allgemein, dass z. B. die Elemente des Vektors \mathbf{y} bei der numerischen Faktorisierung in beliebiger topologischer Reihenfolge numerisch aufgelöst werden können [J. R. Gilbert und Peierl 1988, T. A. Davis 2006]. Eine geeignete topologische Reihenfolge, die die bei der Dreiecksauflösung zum Aufbau eines Sparse Cholesky-Faktors existierenden numerischen Abhängigkeiten auflöst, ist die umgekehrte Postorder-Reihenfolge [Aho, Hopcroft und Ullmann 1974, J. R. Gilbert und Peierl 1988, T. A. Davis 2006].

Bei einem Graphen $\mathcal{G}(L_{k-1,k-1})$ oder einem Eliminierungsbaum kann eine Datenstruktur, wie beispielsweise eine verkettete Liste oder ein Stapel, die Nichtnull-Elemente des Vektors \mathbf{y} in umgekehrter Postorder-Reihenfolge aufnehmen. Diese Datenstruktur enthält zu Beginn des Traversierens keine Elemente. Beim Algorithmus 4, der den Aufbau des Stapels mit den Positionen der Nicht-Nullelemente der Zeile i beschreibt, wird konkret von einem Eliminierungsbaum ausgegangen.

Beim Durchlaufen des Eliminierungsbaums \mathcal{T} von unten von den Einträgen a_{jk} der k -ten Spalte der rechten oberen Dreiecksmatrix A in Richtung der Wurzel ausgehend, erhält jeder traversierte Knoten j eine Kennzeichnung, dass er für den Aufbau der Positionen l_{ij} der Nichtnull-Elemente verarbeitet wurde. Gleichzeitig wird der Knoten dem Stapel hinzugefügt. Dieser Vorgang für einen besuchten Knoten wird bei dem aktuellen Pfad und bei den folgenden neuen Pfaden solange fortgesetzt, bis die Wurzel oder ein bereits markierter Knoten erreicht wird. Als Ergebnis erhält man einen Stapel mit den Positionen l_{ij} der Nichtnull-Elemente in topologischer Reihenfolge. Dieser Prozess kann durch folgenden Pseudocode beschrieben werden [T. Davis, Rajamanickam und Sid-Lakhdar 2016]:

w ist ein Feld der Größe n , das initial mit Nullen belegt wird;

Stapel ist ein Feld mit der initialen Größe 0;

for $i = 1$ to n **do**

$\mathcal{Y}_i = \{i\}$, der Diagonaleintrag i wird zur Menge \mathcal{Y} der aktuellen Zeile i hinzugefügt ;

$w(i) = i$, kennzeichne die Wurzel des i -ten Zeilenbaums \mathcal{T}^i als durchlaufen;

foreach $a_{ij} \neq 0$ where $j < i$ **do**

while $w(j) \neq i$ **do**

füge Spalte j zur Menge \mathcal{Y} der aktuellen Zeile i hinzu ;

$w(j) = i$, kennzeichne den Knoten j , dass dieser im Zeilenbaum \mathcal{T}^i durchlaufen wurde;

füge Spalte j von oben zum Stapel hinzu ;

$j = \text{parent}(j)$, traversiere den Eliminierungsbaum \mathcal{T} nach oben;

end

end

end

Algorithm 4: Ermittlung der symbolischen Struktur der Zeile i bei der *Up-Looking Sparse-Cholesky* Variante.

Auf den durch Algorithmus 4 bereitgestellten Stapel der Nichtnull-Elemente in topologischer Reihenfolge kann Algorithmus 3 angewendet werden, mit Verarbeitung des Stapels von unten beginnend.

9.4.2. Sequentielle Cholesky-Faktorisierung mit Left-Looking-Algorithmus

Der spaltenbasierte, relativ einfach aufgebaute Left-Looking-Algorithmus dieses Abschnitts, der sequentiell von links nach rechts die Cholesky-Faktorisierung durchführt, kam bei der UTM-Umstellung des Liegenschaftskatasters in Bayern nicht zum Einsatz, eignet sich aber als idealer Ausgangspunkt für die nachfolgende Cholesky-Faktorisierung (siehe Abschnitt 9.4.3), die Superknoten verwendet und dann auf modifizierte Weise, in Verbindung mit Superknoten, den von links nach rechts arbeitenden Algorithmus einsetzt. Die Left-Looking-Variante der Cholesky-Faktorisierung mit Superknoten kam auf breiter Basis bei der UTM-Umstellung in Bayern zum Einsatz.

Für diesen Algorithmus wird, falls auf der linken Seite des Cholesky-Faktors L bereits $j - 1$ numerisch berechnete Spalten in endgültiger Form vorliegen, über Gleichung (9.31) eine Beziehung zwischen der j -ten Spalte von A und der j -ten Spalte des Cholesky-Faktors L hergestellt [T. A. Davis 2006]:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & & \\ l_{12}^T & l_{22} & \\ L_{31} & l_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11}^T & l_{12} & L_{31}^T \\ & l_{22} & l_{32}^T \\ & & L_{33}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} & A_{31}^T \\ a_{12}^T & a_{22} & a_{32}^T \\ A_{31} & a_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (9.31)$$

In Gl. (9.31) sollen die $j - 1$ Spalten, wie bereits erwähnt, numerisch in endgültiger Form vorliegen. Die linke Seite des Cholesky-Faktors L wird, wie aus Gl. (9.31) ersichtlich, in $\begin{bmatrix} L_{11} & l_{12}^T & L_{31} \end{bmatrix}^T$ partitioniert, wobei der Vektor l_{12}^T und die Blockmatrix L_{31} numerisch berechnet sind. Die numerisch ebenso in endgültiger Form gegebene Dreiecksmatrix L_{11} bleibt bei der folgenden Berechnung unberücksichtigt. In Matrix A ist die j -te Spalte durch $\begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}^T$ gegeben. Dabei sind a_{12} und a_{32} die Spaltenvektoren ober- und unterhalb der Diagonalen und a_{22} der Skalarwert auf der Diagonale.

In Gl. (9.31) wird die mittlere Zeile von L mit der mittleren Spalte von L^T multipliziert. Dies führt zur Gleichung $a_{22} = l_{12}^T \cdot l_{12} + l_{22}^2$. Damit kann das Diagonalelement l_{22} über die Gleichung $l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{12}^T \cdot l_{12}}$ bestimmt werden.

Die untere Zeile $\begin{bmatrix} L_{31} & l_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$ von L wird mit der zweiten Spalte von L^T multipliziert. Damit wird eine Gleichung mit dem unbekanntem Vektor l_{32} über $L_{31} l_{12} + l_{22} l_{32} = a_{32}$ und bereits bekannten Größen aufgebaut. Für die j -te Spalte l_{32} unterhalb des Diagonalelements l_{22} ergibt sich die Bestimmungsgleichung $l_{32} = (a_{32} - L_{31} l_{12}) / l_{22}$.

Mit diesen drei Gleichungen ist die numerische Abhängigkeit der Spalte j von den Spalten $1, \dots, j-1$ erkennbar, da für die Bestimmung von l_{22} und l_{32} die linken Spalten von L in der Form l_{12}^T und L_{31} einfließen. In folgender Notation geben Golub und Van Loan 1996 bei $A = L L^T$ die numerische Abhängigkeit der Spalte j des Cholesky-Faktors L von den $j-1$ Spalten links und der j -ten Spalte von A an:

$$A(:, j) = \sum_{k=1}^j L(j, k) \cdot L(:, k). \quad (9.32)$$

Die in Gl. (9.32) gewählte Darstellung $A(:, j)$ der j -ten Spalte von A und $L(:, k)$ für die k -te Spalte von L verwendet die Doppelpunkt-Notation. Beispielsweise steht $A(:, j)$ bei einer gegebenen Matrix $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ für die Spalte

$$A(:, j) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \quad (9.33)$$

von A . Die Notation wird in der Regel für eine weniger detaillierte Darstellung von Iterationen benutzt [Golub und Van Loan 1996]. Die Doppelpunkt-Notation kann auch in Pseudocode eingesetzt werden, um im Quellcode die Darstellung von Schleifen einzusparen und somit einen Algorithmus prägnanter wiederzugeben.

$A(i, :)$ steht entsprechend für die i -te Zeile von A :

$$A(i, :) = [a_{i1} \quad \dots \quad a_{in}]. \quad (9.34)$$

Aus Gl. (9.32) kann für die mit dem Diagonalelement $L(j, j)$ multiplizierte j -te Spalte $L(:, j)$ des Cholesky-Faktors L folgende Gleichung (9.35) abgeleitet werden [Golub und Van Loan 1996]:

$$L(j, j) \cdot L(:, j) = A(:, j) - \sum_{k=1}^j L(j, k) \cdot L(:, k) \equiv c. \quad (9.35)$$

In Gl. (9.31) sind, vgl. mit Gl. (9.35), die linken $j-1$ Spalten $L_{1:n, 1:j-1} = [L_{11} \quad l_{12}^T \quad L_{31}]^T$ des Cholesky-Faktors L bekannt.

Unter diesen Voraussetzungen lässt sich der Vektor c berechnen und anschließend die j -te Spalte $L_{1:n, j} = [0 \quad l_{22} \quad l_{32}]^T$ wie folgt bestimmen:

$$L(j : n, j) = c(j : n) / \sqrt{c(j)}. \quad (9.36)$$

Dies führt zu folgendem Algorithmus [Golub und Van Loan 1996] für die spaltenweise, von links nach rechts durchgeführte, numerische Faktorisierung im Left-Looking Cholesky-Verfahren. Algorithmus 5 verwendet erneut die Doppelpunkt-Notation:

```

for  $j = 1$  to  $n$  do
     $c(j : n) = A(j : n, j)$ ;
    for  $k = 1$  to  $j - 1$  do
         $c(j : n) = c(j : n) - L(j, k) \cdot L(j : n, k)$ ;
    end
     $L(j, j) = \sqrt{c(j)}$ ;
     $L(j + 1 : n, j) = c(j + 1 : n) / \sqrt{c(j)}$ ;
end
    
```

Algorithm 5: Pseudocode für eine spaltenweise durchgeführte numerische Faktorisierung mit dem Left-Looking-Algorithmus.

Im Algorithmus 5 werden zwei grundsätzliche Operationen auf der Spalte j durchgeführt. Die Operationen verwenden zur Modifizierung der Zielspalte j eine Funktion, die auf einer oder zwei Eingabespalten definiert ist. George, Heath und Liu 1986 führen für die Operationen folgende Bezeichnungen ein:

$cmod(j, k)$: Modifizierung der Spalte j durch eine mit einem skalaren Wert multiplizierte Spalte k ($k < j$).

$cdiv(j)$: Division der Spalte j durch einen Skalarwert.

Ng und Peyton 1993 nennen im Zusammenhang mit Cholesky-Faktorisierungen für $cmod(j, k)$ und $cdiv(j)$ folgende konkrete Anweisungen:

$cdiv(j)$:

```

 $l_{jj} = \sqrt{a_{jj}}$ ;
for  $i = j + 1$  to  $n$  do
     $l_{ij} = l_{ij} / l_{jj}$ ;
end
    
```

Algorithm 6: Operation $cdiv(j)$ mit der Division der j -ten Spalte der Matrix L durch den Skalar $l_{jj} = \sqrt{a_{jj}}$.

$cmod(j, k), k < j$:

```

for  $i = j$  to  $n$  do
     $l_{ij} = a_{ij} - l_{jk} \cdot l_{ik}$ ;
end
    
```

Algorithm 7: Operation $cmod(j, k)$ für die Modifikation der j -ten Spalte der Matrix L über die k -te Spalte des Cholesky-Faktors L .

Mit den beiden Operationen $cmod(j, k)$ und $cdiv(j)$ kann Algorithmus 5 wie folgt verkürzt dargestellt werden:

```

for  $j = 1$  to  $n$  do
    for  $k = 1$  to  $j - 1$  do
         $cmod(j, k)$ ;
    end
     $cdiv(j)$ ;
end
    
```

Algorithm 8: Einsatz der die Spalte j modifizierenden Operationen $cmod(j, k)$ und $cdiv(j)$ bei der Left-Looking Cholesky-Faktorisierung.

Für Darstellung der Berechnung der j -ten Spalte $L_{j:n,j}$ des Cholesky-Faktors L , die als Grundlage Gleichung (9.31) für die Left-Looking-Faktorisierung verwendet, wird ein Spaltenvektor c mit $[c_1 \ c_2]^T$ und der Länge $n + 1 - j$ wie folgt aufgebaut [T. Davis, Rajamanickam und Sid-Lakhdar 2016]:

$$\begin{aligned}
 c &= \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(j) \\ c(j+1:n) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_{12}^T \\ l_{31} \end{bmatrix} l_{12} \quad (9.37) \\
 &= \begin{bmatrix} A(j, j) \\ A(j+1:n, j) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L(j, 1:j-1) \\ L(j+1:n, 1:j-1) \end{bmatrix} L(j, 1:j-1)^T.
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis für die j -te Spalte liegt dann in Gl. (9.38) und (9.39) vor:

$$\begin{aligned}
 l_{22} = L(j, j) &= \sqrt{c_1} \\
 &= \sqrt{A(j, j) - L(j, 1:j-1) \cdot L(j, 1:j-1)^T} \\
 &= \sqrt{a_{22} - l_{12}^T \cdot l_{12}}, \quad (9.38)
 \end{aligned}$$

Zunächst wird in Gl. (9.38) das Diagonalelement l_{22} durch die Rechenoperation $l_{12}^T \cdot l_{12}$ über eine Vektor-Vektor-Multiplikation mit dem dünnbesetzten Vektor $l_{12} = \{sparse\}$ bestimmt. Dann wird der Vektor l_{32} bei der Operation $L_{31} \cdot l_{12}$ über eine Matrix-Vektor-Multiplikation mit $l_{12} = \{sparse\}$ bestimmt.

$$\begin{aligned}
 l_{32} &= L(j+1:n, j) = && c_2 && / && l_{22} \\
 &= (A(j+1:n, j) - L(j+1:n, 1:j-1) \cdot L(j, 1:j-1)^T) / L(j, j) \\
 &= && (a_{32} - L_{31} \cdot l_{12}) && / && l_{22}.
 \end{aligned} \tag{9.39}$$

In den beiden Bestimmungsgleichungen Gl. (9.38) und (9.39) ist für die Berechnung der j -ten Spalte des Cholesky-Faktors jeweils eine Vektor-Vektor-Multiplikation Gl. (9.38) und eine Matrix-Vektor-Multiplikation Gl. (9.39) mit der dünnbesetzten j -ten Zeile l_{12}^T von L notwendig. Es sei darauf hingewiesen, dass die Positionen der Nichtnull-Elemente der j -ten Zeile l_{12}^T durch den Zeilenbaum \mathcal{T}^j bekannt sind. Ausschließlich für Elemente l_{jk} in Spalten k in \mathcal{L}^j , die nicht Null sind, wird eine Multiplikation mit sich selbst (Gl. (9.38)) oder mit der Zeile i mit $i = j+1, \dots, n$ von L_{31} (Gl. (9.39)) erforderlich.

Die Modifikation der Spalte j mit dem Operator $cm\text{od}(j, k)$ in Gl. (9.39) ist deshalb nur für die Spalten k erforderlich, die im Vektor l_{12}^T nicht Null sind. Die durch $l_{jk} \neq 0$ bedingte Modifizierung der Spalte j wird durch die **foreach**-Schleife über $l_{jk} \neq 0$ in Algorithmus 9 ausgedrückt [Ng und Peyton 1993]. Der die Gleichungen (9.38) und (9.39) kapselnde Algorithmus 9 wird bei Ng und Peyton als Spalten-Spalten-Algorithmus für das Left-Looking-Verfahren bezeichnet.

```

for  $j = 1$  to  $n$  do
    foreach  $l_{jk} \neq 0$  where  $k < j$  do
         $cm\text{od}(j, k)$ ;
    end
     $cdiv(j)$ ;
end
    
```

Algorithm 9: Modifizierter Algorithmus für die Left-Looking Cholesky-Faktorisierung, der die Nichtnull-Elemente $l_{jk} \neq 0$ der j -ten Zeile des Cholesky-Faktors L berücksichtigt.

Damit kann der sequentielle Left-Looking-Algorithmus wie folgt ausformuliert werden [T. Davis, Rajamanickam und Sid-Lakhdar 2016]. Für die Berechnung der j -ten Spalte $[l_{22} \ l_{23}]^T$ muss bei den Gleichungen (9.38) und (9.39) jeweils auf die j -te Zeile l_{12}^T zugegriffen werden, wobei die Matrix-Vektor-Multiplikation in Gl. (9.39) der $cm\text{od}(j, k)$ -Operator des Algorithmus 9 nur ausgeführt werden muss, wenn innerhalb der Zeile j in der Spalte k ein Nichtnull-Elemente $l_{jk} \neq 0$ vorliegt. Falls der Left-Looking-Algorithmus auf Basis eines *Compressed-Column-Formats* arbeitet [Sherman 1975], wird für den Zugriff auf die Zeile j eine Ersatzstruktur benötigt, welche die Daten innerhalb der Zeile bereitstellt. Dabei müssen die Elemente $l_{jk} \neq 0$ in den numerisch gebildeten Spalten k mit $k = 1, \dots, j-1$ in sortierter und aufsteigender Reihenfolge vorliegen. Der folgende Left-Looking-Algorithmus verwaltet über das Feld p mit dem zugehörigen Zeiger p_j den Zugriff innerhalb der Zeile j mit $l_{jk} \neq 0$ auf Spalten k und j . Dieser Mechanismus wird gebraucht, wenn in Algorithmus 10 zunächst die Nichtnull-Elemente \mathcal{L}_k der Spalte k und dann die Nichtnull-Elemente \mathcal{L}_j der Spalte j in aufsteigender Reihenfolge benötigt werden [T. Davis, Rajamanickam und Sid-Lakhdar 2016]:

9.4.3. Sparse Cholesky-Faktorisierung auf Basis von Superknoten

Mit dem Einsatz von Superknoten wurden durch die Sparse Cholesky-Faktorisierung Laufzeiten erreicht, die eine UTM-Umstellung des Liegenschaftskatasters in Bayern innerhalb weniger Tage ermöglichten. Dies geschah auf Basis einer Ausgleichung, die insgesamt 2 Milliarden Beobachtungen bei 880 Millionen Unbekannten definiert. Ebenso wie für die Up-Looking-Variante (Abschnitt 9.4.1) lassen sich auch für die spaltenbasierte, sequentiell arbeitende Left-Looking-Variante (Abschnitt 9.4.2) kürzere Laufzeiten als für die Superknoten-Variante erwarten, wenn die Sparse Matrix sehr dünn besetzt ist, d. h. unter dem Richtwert von 40 flops/ $|L|$ flops liegt. Die Laufzeitvorteile der Left-Looking-Verfahren auf Basis von Superknoten ergibt sich zum einen

```

p ist ein Integerfeld der Größe n, das nicht initialisiert wird;
c ist ein Vektor mit Gleitkommazahlen der Größe n, der mit Nullen initialisiert wird;
for  $j = 1$  to  $n$  do
  foreach  $a_{ij} \neq 0$  where  $i \geq j$  do
     $c_i = a_{ij}$ , Übertragung der Nichtnull-Elemente  $a_{ij} \neq 0$  des Vektors  $a_{32}$  in den Vektor
     $c = \{dense\}$ ;
  end
  foreach  $k \in \mathcal{T}^j$ , jedoch ohne Wurzel j von  $\mathcal{T}^j$  do
    Modifizierung der Spalte  $j$  durch Spalte  $k$  über  $cmod(j, k)$  ;
    Initialisiere  $p_j$  mit der Position des ersten Nichtnull-Elements  $l_{ij} \neq 0$  unterhalb der Diagonale
     $l_{jj}$  in Spalte  $j$ ;
    foreach  $i \in \mathcal{L}_k$ , Zugriff auf das Element  $l_{ik}$  an der Position  $p_j$  von  $\mathcal{L}_k$  do
       $c_i = c_i - l_{jk} \cdot l_{ik}$ ;
       $p_j = p_j + 1$ ;
    end
  end
  Berechne die  $j$ -te Spalte von  $\mathcal{L}$  über  $cdiv(j)$  ;
   $l_{jj} = \sqrt{c_j}$ ;
  foreach  $i \in \mathcal{L}_j$  mit  $l_{ij} \neq 0$ , if  $c_i \neq 0$ ,  $\mathcal{L}_j \setminus$  Diagonalelement  $l_{jj}$  do
     $l_{ij} = c_i / l_{jj}$ ;
     $c_i = 0$ , Vorbereitung der nächsten Iteration  $j$ ;
  end
end

```

Algorithm 10: Left-Looking Sparse Cholesky-Faktorisierung.

dadurch, dass sie kleine vollbesetzte Submatrizen als Blöcke verwenden können, statt auf einzelne Spalten zugreifen zu müssen [Ng und Peyton 1993; Liu 1993], zum anderen, dass optimierte Matrizenoperationen, die mit vollbesetzten Matrizen statt einzelnen Spalten arbeiten, die Speicherhierarchie weitaus effizienter ausnutzen können als die zeilen- oder spaltenorientierten Verfahren, die unregelmäßige Speicherzugriffe anwenden müssen [T. Davis, Rajamanickam und Sid-Lakhdar 2016]. Weiter lässt sich anführen, dass Superknoten eine massive Parallelisierung der numerischen Faktorisierung ermöglichen.

Die Verbesserung der Laufzeit wird somit über performance-optimierte Matrix-Operationen auf vollbesetzten kleinen Matrizen unterstützt. Den Sparse Matrizen Algorithmen werden diese Matrix-Operationen über meist unabhängig entwickelte, auf moderne Prozessoren zugeschnittene numerische Bibliotheken, den BLAS-Routinen (Basic Linear Algebra Subprograms) zur Verfügung gestellt [Lawson, Hanson und Kincaid 1979, Dongarra, Du Croz u. a. 1990]. Mit Hilfe von spezialisierten Bibliotheken wie z. B. GotoBLAS, die High-Performance Matrix Multiplikationen nach BLAS Level-3-Standard ermöglichen [Goto und Geijn 2008], konnten bereits während der ersten Vorarbeiten zur UTM-Umstellung in Bayern Rechenleistungen im Bereich von mehreren Gigaflops erreicht werden. Diese rechentechnischen Voraussetzungen begünstigte die Entscheidung für ein fachlich anspruchsvolles, aber rechenintensives Ausgleichungsverfahren anstelle eines Transformationsverfahrens.

Die auf hohe Performance optimierten numerischen Bibliotheken wurden durch Computerexperten für verbreitete Prozessorarchitekturen in Assembler entwickelt. Die anfänglich mit hohem Aufwand manuell erstellten Assemblerprogramme werden heute mit Hilfe eines template-basierten Optimierungsansatzes automatisch generiert [Wang, Zhang u. a. 2013] und in der Bibliothek OpenBLAS veröffentlicht. Der hinter dem template-basierten Ansatz stehende Generator überträgt automatisiert in einer Programmiersprache definierte Low-Level-Anweisungen für Matrixoperationen in optimierte Prozessor-Befehlssätze.

Der numerische Ansatz, auf dem die Cholesky-Faktorisierung mit Superknoten basieren soll, wird aus fol-

gendem, mit Blockmatrizen formuliertem Gleichungssystem abgeleitet:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21}^T & A_{31}^T \\ A_{21} & A_{22} & A_{32}^T \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{bmatrix} L_{11} \cdot L_{11}^T & & \\ L_{21} \cdot L_{11}^T & L_{21} \cdot L_{21}^T + L_{22} \cdot L_{22}^T & \\ L_{31} \cdot L_{11}^T & L_{31} \cdot L_{21}^T + L_{32} \cdot L_{22}^T & L_{31} \cdot L_{31}^T + L_{32} \cdot L_{32}^T + L_{33} \cdot L_{33}^T \end{bmatrix} \quad (9.40)
 \end{aligned}$$

Gl. (9.40) trifft zunächst keine Aussage, welche Dimension die jeweiligen Submatrizen besitzen sollen. Auch die Diagonal-Submatrizen können unterschiedlicher Dimension sein.

Im Folgenden werden die Submatrizen, die gedanklich mit Matrizen kleinerer Dimension ($n \leq 48$, Superknoten) assoziiert sein können, nacheinander spaltenweise aufgelöst [nach Golub und Van Loan 1996]:

1. Spalte:

- $A_{11} = L_{11} L_{11}^T$ Schritt 1: Führe eine Cholesky-Faktorisierung von A_{11} durch, um L_{11} zu erhalten.
- $A_{21} = L_{21} L_{11}^T$ Schritt 2: Führe eine Dreiecksauflösung über L_{11} mit der rechten Seite A_{21} durch, um L_{21} zu erhalten.
- $A_{31} = L_{31} L_{11}^T$ Schritt 3: Führe eine weitere Dreiecksauflösung über L_{11} mit der rechten Seite A_{31} durch, um L_{31} zu erhalten.

Anmerkung: Schritt 2 und Schritt 3 können zusammengefasst werden, doch muss nach der Dreiecksauflösung wieder auf gesonderte Blöcke L_{21} und L_{31} übergegangen werden, da diese individuell für spätere Schritte benötigt werden.

2. Spalte:

- $A_{22} = L_{21} \cdot L_{21}^T + L_{22} \cdot L_{22}^T$ Schritt 4: Führe eine Cholesky-Faktorisierung von $A_{22} - L_{21} \cdot L_{21}^T$ durch, um L_{22} zu erhalten.
- $A_{32} = L_{31} \cdot L_{21}^T + L_{32} \cdot L_{22}^T$ Schritt 5: Führe eine Dreiecksauflösung über L_{22} mit der rechten Seite $A_{32} - L_{31} \cdot L_{21}^T$ durch, um L_{32} zu erhalten.

3. Spalte:

- $A_{33} = L_{31} \cdot L_{31}^T + L_{32} \cdot L_{32}^T + L_{33} \cdot L_{33}^T$ Schritt 6: Führe eine Cholesky-Faktorisierung von $A_{33} - L_{31} \cdot L_{31}^T - L_{32} \cdot L_{32}^T$ durch, um L_{33} zu erhalten.

Mit diesen sechs Schritten kann eine numerische Faktorisierung von links nach rechts (Left-Looking-Algorithmus) durchgeführt werden. Ein großer Teil der Arbeit liegt in der Definition der Superknoten in der symbolischen Faktorisierung. Bei der numerischen Faktorisierung erfordert der Einsatz der Superknoten eine Definition der numerischen Abhängigkeit untereinander. Dafür kommt ein modifizierter Eliminierungsbaum zum Einsatz.

Einführung der Superknoten bei der symbolischen und der numerischen Cholesky-Faktorisierung

Ein Superknoten ist eine Gruppierung von numerisch voneinander abhängigen Spalten mit gleichem Besetzungsmuster zu einem Matrizenblock, der über Nichtnull-Elemente und den Eliminierungsbaum definiert wird. „Superknoten“ steht für den in der englischsprachigen Literatur üblichen Begriff *super node*, der von Ashcraft, Grimes u. a. 1987 eingeführt wurde.

Die Superknoten-Theorie und -Technologie soll im Folgenden bei der symbolischen und numerischen Cholesky-Faktorisierung zur Anwendung kommen. Von Superknoten-Technologie soll gesprochen werden, wenn

die Theorie der Superknoten bei der numerischen Faktorisierung in einer meist komplexen parallelen und verteilten Programmierung umgesetzt wird [Rauber und Runger 2000]. Bei der symbolischen Faktorisierung werden die Superknoten in ihrer Größe definiert und die Zeilen- und Spaltenbelegung im Superknoten aufgebaut. Für die Definition der Superknoten muss die Ausgangsmatrix in Postordering-Reihenfolge permutiert vorliegen [Liu 1993]. In der meist durch Tiefensuche des Eliminierungsbaum definierten Postordering-Reihenfolge sind die d Knotennachfolger des Knotens j , die d Spalten links von Spalte j im Faktor L darstellen, alle von $j - d$ bis $j - 1$ nummeriert [T. A. Davis 2006].

Bei der numerischen Faktorisierung werden Diagonal- und Blockmatrizen, die hinter den symbolisch definierten Superknoten stehen, in der durch einen modifizierten Eliminierungsbaum definierten Abhängigkeit numerisch aufgelöst. Die Matrixdimension der Superknoten, die sich nach der Registeranzahl bei den CPUs und GPUs aktueller Computerarchitekturen richtet, bewegte sich Ende der 2010er Jahre in ein- oder zweistelliger Zeilen- und Spaltenanzahl. T. A. Davis und Hager 2009 stellten in Zusammenhang mit ihren Untersuchungen für Rank-1 und Rank-n Updates von dynamischen Superknoten eine Größe von 160 Elementen zur Erreichung der maximalen Performance bei der Matrix-Vektor-Multiplikation (DGEMV) fest. Bei größer definierten Superknoten nimmt die Gesamt-Performance der Faktorisierung wieder ab, da Cache-Effekte auftreten und Speicherblöcke beim Zugriff auf die Daten der größeren Superknoten vom langsameren Speicher nachgeladen werden müssen.

Durch die Superknoten wird die numerische Cholesky-Faktorisierung auf parallel durchführbare Blockoperationen abgebildet, die mit Hilfe von *dense kernels* (BLAS-3-Routinen) durchgeführt werden.

In der Fachliteratur finden sich verschiedene Definitionen von Superknoten. Liu 1993 definiert einen maximalen Superknoten als Menge von benachbarten Spalten des Faktors L , deren Diagonalblock eine untere vollständige Dreiecksmatrix ist, und deren Off-Diagonal-Blockmatrix jeweils identische Spaltenstrukturen aufweist. Für die Definition der Superknoten soll $\mathcal{L}_j = \{i \mid l_{ij} \neq 0\}$ erneut die Menge der Nichtnull-Elemente der Spalte j des Cholesky-Faktors L , die Elementanzahl $|\mathcal{L}_j|$ die Anzahl der Nichtnull-Elemente der Spalte j darstellen. Meist reicht es modernen Algorithmen zur Bestimmung der Superknoten aus, die Parameter $|\mathcal{L}_j|$ der Nichtnull-Elemente einer Spalte j zu kennen.

Nach Liu 1993 ist ein maximaler Superknoten eine Menge von z Spalten $S = \{s, s + 1, \dots, s + z - 1\}$ der Matrix L , falls und nur falls die Menge benachbarter Spalten folgendes erfüllt:

$$\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_{s+z-1} \cup \{s, \dots, s + z - 2\}. \quad (9.41)$$

Falls der Cholesky-Faktor L durch einen gerichteten Graphen $G_L(V; E)$ (Digraph) mit den Kanten $E = \{(v_i, v_j) : l_{ij} \neq 0 \text{ für } 1 \leq i \neq j \leq n\}$ repräsentiert wird, ist ein maximaler Superknoten eine maximale Clique [Liu 1993]. Dies ist eine Menge von Knoten, die im Graphen direkt miteinander verbunden sind [Turau und Weyer 2015]. Die Verknüpfungen der direkt verbundenen Knoten einer maximalen Clique können durch eine Adjazenzliste oder Nachbarschaftsliste $\text{adj}_L(i)$ ausgedrückt werden. Diese enthält alle Knoten $j > i$, die im Graphen G_L benachbart über eine Kante (= adjazent) sind. Ein maximaler Superknoten mit z Spalten wird als Vereinigungsmenge der benachbarten Knoten und der Diagonalelemente definiert:

$$\text{adj}_L(s) = \text{adj}_L(s + z - 1) \cup \{s, \dots, s + z - 2\}. \quad (9.42)$$

Ein *fundamentaler* Superknoten ist nach T. A. Davis und Hager 2009 eine maximale Menge von z Spalten $S = \{s, s + 1, \dots, s + z - 1\}$, für die gilt: Für jedes beliebig aufeinanderfolgende Paar $j - 1$ und j innerhalb der Menge der z Spalten ist der erste Knoten des Paares $j - 1$ das einzige Kind der benachbarten Spalte j . Zusätzlich soll folgende Beziehung zwischen den Mengen der Nichtnull-Elemente der Spalten j und $j - 1$ existieren: $\mathcal{L}_j = \mathcal{L}_{j-1} \setminus \{j\}$. Damit liegen die Spalten j bis $j + z - 1$ eines fundamentalen Superknotens in einem Pfad des Eliminierungsbaums vor.

Optimierte BLAS-Routinen lassen zur weiteren Laufzeitverbesserung an moderne CPUs und GPUs angepasste, größere Matrixdimensionen zu und weichen dafür vom Prinzip des ausschließlichen Einsatzes von *maximalen* oder fundamentalen Superknoten ab, das sonst zu einer identischen Besetzungsstruktur der einzelnen Spalten in den Superknoten führt. Für die angestrebte Vergrößerung der Blockgrößen dürfen zu den bisher vollbesetzt definierten Diagonal- und Blockmatrizen sogar Spalten mit vereinzelt Nullen hinzukommen. Bei den in aktuellen Sparse Matrizen Bibliotheken vorliegenden fundamentalen Superknoten ist es üblich, vor

der numerischen Faktorisierung eine Verschmelzung zu größeren Einheiten, den sog. *Relaxed* Superknoten durchzuführen.

Aufbau von fundamentalen und maximalen Superknoten bei der symbolischen Faktorisierung

Die Superknoten können in einer Laufzeit $\mathcal{O}(|A|)$ linear zur Anzahl der Nichtnull-Elemente der Ausgangsmatrix A bestimmt werden [Liu 1993]. Die maximalen Superknoten, die implizit Knotenbeziehungen des Eliminierungsbaums verwenden und damit numerische Abhängigkeiten der Spalten berücksichtigen, können mit geringem Aufwand gefunden werden, wenn die Anzahl der Nichtnull-Elemente $|\mathcal{L}_i|$ der Spalten \mathcal{L}_i bekannt ist. Diese Anzahl der Spalteneinträge liefert der bereits in Abschnitt 9.3.4 eingeführte, von T. A. Davis 2006 beim Aufbau der Cholmod-Bibliothek modifizierte Algorithmus von J. R. Gilbert, Li u. a. 2001. Folgendes Theorem von Liu 1993 liefert die formale Grundlage zur Bestimmung der maximalen Superknoten:

Theorem 12 (Liu 1993) *Die Menge der Spalte $S = \{s, s + 1, \dots, s + z - 1\}$ ist ein maximaler Superknoten des Cholesky-Faktors L , falls S eine maximale Menge von aufeinanderfolgenden Spalten ist, so dass $s + i - 1$ ein Kindknoten im Eliminierungsbaum von $s + i$ ist für $i = 1, \dots, z - 1$ und $|\mathcal{L}_s| = |\mathcal{L}_{s+t-1}| + t - 1$.*

Liu 1993 weist darauf hin, dass sich bei der praktischen Anwendung nur geringe Unterschiede zwischen maximalen und fundamentalen Superknoten ergeben. Meist stellen wenige maximale Superknoten eine Menge von fundamentalen Superknoten dar, die bei einer Parallelisierung Vorteile besitzen.

Folgendes Theorem 13 bildet die Grundlage für eine Bestimmung der fundamentalen Superknoten, ohne dabei Spalteneinträge $|\mathcal{L}_j|$ verwenden zu müssen [Liu 1993]. Bei dieser Definition der fundamentalen Superknoten wird auf die Bedingung verzichtet, dass die Spalte j einziges Kind der nachfolgenden Spalte $j + 1$ ist:

Theorem 13 (Liu 1993) *Spalte j ist die erste Spalte eines fundamentalen Superknotens des Cholesky-Faktors L , falls j zwei oder mehr Nachfolgerknoten (Kindknoten) im Eliminierungsbaum besitzt oder j ein Blattknoten eines Zeilenbaumes des Eliminierungsbaums von A darstellt.*

Die Untersuchung des Kriteriums, ob mindestens zwei numerisch abhängige Spalten k_1 und k_2 mit $k_1, k_2 < j$ bei einer Spalte j vorliegen, ist trivial [Liu 1993]. Der folgende Algorithmus 11 zur Ermittlung der Anzahl der Nachfolgerknoten einer Spalte j benötigt eine Laufzeit der Ordnung $\mathcal{O}(n)$. Dieser setzt voraus, dass ein Eliminierungsbaum mit einem *Parent*-Feld gegeben ist [Liu 1990], das über $Parent(j) = \min \{i \mid i > j \text{ und } l_{ij} \neq 0\}$ definiert werden kann:

```
w[] ist ein Feld der Größe n, das initial mit Nullen belegt wird;
Parent[] enthält den Eliminierungsbaum;
parent ist der Elternknoten der j-ten Spalte;
EMPTY symbolisiert einen leeren Elternknoten, der z. B. für die Wurzel des Eliminierungsbaums
verwendet wird;
for j = 1 to n do
  parent = Parent[j];
  if parent ≠ EMPTY then
    Erhöhe die Anzahl der Kindknoten w[parent] für Spalte parent um Eins;
  end
end
```

Algorithm 11: Bestimmung der Anzahl n der Nachfolgerknoten einer Spalte j .

Im Feld w ist nach Ausführen von Algorithmus 11 die Anzahl der Kindknoten einer Spalte j enthalten. Beim Kriterium von Theorem 13, ob j ein Blattknoten eines Zeilenbaums von A darstellt, wird die aktuelle Spalte j des Cholesky-Faktors L daraufhin untersucht, ob sie in der Skeleton-Matrix enthalten ist. Die Bestimmung der Blätter der Zeilenbäume, die die Skeleton-Matrix definieren, wird in Abschnitt 9.3.4 dargestellt. Im allgemeinen Algorithmus von G. L. Gilbert, Ng und Peyton 1994 modifizierte T. A. Davis 2006 den Aufbau der Blätter der Zeilenbäume über die *kleinsten gemeinsamen Knotennachfolger*.

Unter Berücksichtigung des Kriteriums, dass innerhalb des Eliminierungsbaums bei in einem Pfad aufeinander folgenden Knotenpaaren $j - 1$ und j der niedrigere Knoten $j - 1$ der einzige Nachfolgerknoten von Knoten j ist, kann für Algorithmus 11 ergänzend folgende Bedingung formuliert werden, die T. A. Davis und Hager 2009 zum Aufbau von fundamentalen Superknoten verwenden.

Bedingung 1 (T. A. Davis und Hager 2009) *Die Spalten $j - 1$ und j gehören zu demselben fundamentalen Superknoten, falls und nur falls $|\mathcal{L}_j| = |\mathcal{L}_{j-1}|$ gilt und $j - 1$ das einzige Kind von j im Eliminierungsbaum ist.*

Der folgende Algorithmus 12 setzt die Bedingungen zum Auffinden der fundamentalen Superknoten mit wenigen Quellcode-Zeilen um [T. A. Davis und Hager 2009, T. Davis, Rajamanickam und Sid-Lakhdar 2016]. Danach wird ein neuer fundamentaler Superknoten begonnen, wenn eine der drei Bedingungen der bedingten if-Anweisung erfüllt ist:

```

Super[] ist ein Feld der Größe n zur Speicherung der Spalten der fundamentalen Superknoten, das
initial mit Nullen belegt wird;
nfsuper gibt die Anzahl der fundamentalen Superknoten an;
w[] ist ein Feld, das die Anzahl der Kindknoten für jeden Knoten des Eliminierungsbaums enthält;
Parent[] enthält den Eliminierungsbaum;
ColCount[] enthält für n Spalten des Cholesky-Faktors  $L$  die Anzahl der Spalteneinträge;
Super [0] = 0 ;
nfsuper = 0;
for  $j = 1$  to  $n-1$  do
    if  $Parent[j - 1] \neq j$  OR  $ColCount[j - 1] \neq ColCount[j] + 1$  OR  $w[j] > 1$  then
        Super [nfsuper++] =  $j$  ;
    end
end
Super [nfsuper] =  $n$  ;

```

Algorithm 12: Algorithmus zur Bestimmung der fundamentalen Superknoten.

Der Eliminierungsbaum muss mit Abschluss der Definition der Superknoten modifiziert werden, um z. B. numerische Abhängigkeiten zwischen Superknoten darzustellen. Die Baumstruktur muss dabei nicht vollständig neu aufgebaut werden. Die modifizierte Form wird als supernodaler Eliminierungsbaum bezeichnet [siehe z. B. T. Davis, Rajamanickam und Sid-Lakhdar 2016].

Die Spalten der fundamentalen Superknoten bilden eine Folge von Knoten, die im Eliminierungsbaum auf einen zusammenhängenden Pfad abgebildet wird. Dieser Pfad darf bei der Definition des supernodalen Eliminierungsbaums auf einen Knoten komprimiert werden [Pothen und Sun 1990]. Der Superknoten wird im neuen Eliminierungsbaum durch die letzte Spalte des fundamentalen Superknoten präsentiert.

Bedingung 1 kann zugunsten des Aufbaus von größeren Superknoten durch Verschmelzung von fundamentalen Superknoten aufgegeben werden [T. A. Davis und Hager 2009]. Ashcraft und Grimes 1989 haben für verschmolzene Superknoten den Begriff *relaxed super node* geprägt, was soviel wie *gelockerter* Superknoten bedeutet.

Folgende Bedingung liefert formal eine Grundlage für den Aufbau eines *Relaxed* Superknotens [T. A. Davis und Hager 2009]:

Bedingung 2 (T. A. Davis und Hager 2009) *Die Spalten $j - 1$ und j können Elemente desselben Superknoten werden, falls $|\mathcal{L}_j| = |\mathcal{L}_{j-1}|$ gilt und $j - 1$ ein Kind von j im Eliminierungsbaum ist.*

Beim Aufbau von *Relaxed* Superknoten ist die Verschmelzung von fundamentalen Superknoten in der Regel mit einer Untersuchung der Eigenschaften der entstehenden Superknoten verbunden, um zu beurteilen, ob die Verschmelzung zweier benachbarter fundamentaler Superknoten sinnvoll ist. Die folgenden Aussagen zu den bei der Bildung von *Relaxed* Superknoten anzustrebenden Eigenschaften sind in Zusammenhang mit der von T. A. Davis und Hager 2009 bei ihren Untersuchungen ermittelten optimalen Superknoten-Größe von 160 Elementen zu sehen.

Davis hat beim Aufbau der Cholmod-Bibliothek [Chen, T. A. Davis u. a. 2008, T. Davis, Rajamanickam und Sid-Lakhdar 2016] gezeigt, dass es bei Verschmelzung zweier fundamentaler Superknoten mit minimaler Spaltenanzahl nicht notwendig ist, den neuen Superknoten zu untersuchen, falls er nur wenige Spalten ($n < 5$) umfasst. Bei größeren Einheiten ($n < 16$) hat es sich als effektives Vorgehen erwiesen, Superknoten aufzubauen, deren Anzahl der Nullelemente einen Wert von 50 % der Gesamtelemente nicht überschreitet. Wenn sich eine größere Matrixdimension ($n < 48$) des *Relaxed* Superknotens bildet, ist sicherzustellen, dass sich ein höherer Grad an Nichtnull-Elementen von mindestens 90 % der Gesamtelemente einstellt.

Einsatz von Superknoten bei der numerischen Cholesky-Faktorisierung

Der Left-Looking-Algorithmus aus Abschnitt 9.4.2, dessen spaltenbasierte numerische Auflösung im Algorithmus 5 vorgestellt wurde, basiert auf $cmod(j, k)$ - und $cdiv(j)$ -Operationen, die die Spalten j des Faktors L schrittweise von links nach rechts aufbauen. Die numerische Cholesky-Faktorisierung, die mittels Superknoten durchgeführt wird, basiert auf Blockoperationen mit kleinen Submatrizen. Dieser Ansatz kann mit Hilfe von Gl. (9.40) nachvollzogen werden.

Die Definitionen der Superknoten sollen bereits durch Anwendung des Algorithmus 12 für die mittlere Spalte $[0 \quad L_{22} \quad L_{33}]^T$ in Gl. (9.40) vorliegen.

Da die linken Spalten des Cholesky-Faktors L mit L_{21} und L_{31} zu dem Zeitpunkt bereits numerisch aufgelöst sind, sollen für L_{21} und L_{31} ebenfalls Superknoten definiert sein. Allgemein enthält ein Superknoten im oberen Bereich eine Dreiecksmatrix mit Elementen auf der Diagonale und weiteren Nichtnull-Elementen neben der Diagonale, im unteren Bereich eine dichtbesetzte Blockmatrix. Die Matrixdimension des Superknotens soll $s \times z$ sein, wobei s die Anzahl der Nichtnull-Elemente der Spalte ganz links und z die Anzahl der Spalten des Superknotens sein soll.

Der Dreiecks- und der Rechtecksmatrix eines über Algorithmus 12 symbolisch definierten Superknotens sollen für den Einsatz von BLAS-Routinen [Lawson, Hanson und Kincaid 1979] vollbesetzte Submatrizen zugeordnet werden, beispielsweise für die mittlere Spalte von Gl. (9.40). Dem Superknoten $[S_1 \quad S_2]^T$ werden die Dreiecksmatrix L_{22} und die Rechtecksmatrix L_{32} zugeordnet. Die aus der Ausgangsmatrix A entnommenen Submatrizen A_{22} und A_{32} sollen die gleiche Anzahl von Spalten s besitzen wie der Superknoten $[S_1 \quad S_2]^T$:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} L_{22} \\ L_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} \\ A_{32} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{21} \\ L_{31} \end{bmatrix} L_{21}^T. \quad (9.43)$$

Zunächst müssen jedoch die Cholesky-Faktorisierung und die anschließende Dreiecksauflösung durch eine Sparse Matrix Multiplikation und anschließende Matrizensubtraktion vorbereitet werden.

Die Sparse Matrizen Multiplikation auf der rechten Seite von Gl. (9.43) wird für jeden Superknoten von L_{21} und L_{31} durchgeführt [T. A. Davis und Hager 2009]. Nach dem Vorliegen des numerischen Aufbaus von S_1 kann für den Superknoten eine Cholesky-Faktorisierung $S_1 = L_{22} \cdot L_{22}^T$ zum Aufbau der Dreiecksmatrix des Superknotens mit der BLAS-Routine DPOTRF [Dongarra, Du Croz u. a. 1990] berechnet werden. Mit der berechneten Dreiecksmatrix L_{22} , deren Spaltenanzahl gleich s ist, kann das Gleichungssystem $L_{32} \cdot L_{22}^T = S_2$ nach der dichtbesetzten Blockmatrix L_{32} des Superknotens aufgelöst werden, die wiederum die Spaltenanzahl s besitzt.

Nachdem durch Gl. (9.43) Schritt für Schritt der Cholesky-Faktor L aufgebaut wurde, kann anschließend eine Vorwärts- und Rückwärtssubstitution auf Basis der Superknoten durchgeführt werden. Diese ist identisch mit den Vorwärts- und Rückwärtssubstitutionen für in Blockmatrizen partitionierte Gleichungssysteme auf Basis von Vektor-Matrix-Multiplikationen, die in der Regel auf Basis von Level 2 BLAS-Routinen durchgeführt werden [Golub und Van Loan 1996, T. A. Davis und Hager 2009].

Numerische Stabilität des Cholesky-Algorithmus Eine Aussage über die numerische Stabilität des Cholesky-Algorithmus für große Matrizen ermöglichen die Konditionszahlen. Sie beschreiben quantitativ die Empfindlichkeit der Lösung eines linearen Systems gegenüber Störungen, die von fehlerbehafteten Eingangsdaten ausgehen [Dahmen und Reusken 2008]. Danach führt ein ungünstig konditioniertes Rechenverfahren

zur Auflösung eines Normalgleichungssystems, das auf einem aktuellen Serversystem ausgeführt wird, das nach der Norm IEEE 754 arbeitet und deswegen eine Maschinengenauigkeit $\epsilon = 2^{-53} \approx 1,1 \cdot 10^{-16}$ besitzt, infolge massiver Fehlerverstärkung zu einem nicht mehr akzeptablen Ergebnis, wenn der relative Fehler $\frac{\Delta \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ des Ergebnisses deutlich schlechter als 1 cm wird.

Krarup 1967 hat für den relativen Fehler $\frac{\Delta \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ der Lösung der Ausgleichung eines geodätischen Netzes, dessen Normalgleichungssystem in der Schreibweise der Gl. (9.2) mit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ formuliert werden soll, folgende Gleichung angegeben:

$$\frac{\Delta \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \left(\frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \right) \quad \text{mit} \quad \kappa(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}. \quad (9.44)$$

In Gl. (9.44) ist $\frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$ der relative Fehler der rechten Seite \mathbf{b} des Normalgleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Die Konditionszahl $\kappa(\mathbf{A})$ ist eine Funktion des kleinsten und größten Eigenwerts (λ_1, λ_n) der Matrix \mathbf{A} . In der numerischen Mathematik findet sich Gl. (9.44) durch weitere Terme ergänzt [Schaback und Wendland 2004, Dahmen und Reusken 2008], um relative Fehler in der Normalgleichungsmatrix \mathbf{A} zusätzlich zu berücksichtigen:

$$\frac{\Delta \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \left(1 - \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right)^{-1} \left(\frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right), \quad (9.45)$$

wobei für die relativen Fehler $\frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\Delta \mathbf{A}\|}$ und $\frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\Delta \mathbf{b}\|}$ die Maschinengenauigkeit $\epsilon = 2^{-53}$ eingesetzt wird.

Aussagen zur Konditionierung der UTM-Umstellung in Bayern enthält Tabelle 9.5. Sie zeigt aus der Ausgleichung für Flurstücke beispielhaft den größten Eigenwert λ_n für einen kleinen, mittleren und großen Amtsbezirk in Abhängigkeit von der Matrixdimension (n, n). Die kleinsten Eigenwerte λ_1 sind in der Regel kleiner als 10^{-4} .

Amtsbezirk (ADBV oder Außenstelle)	Matrixdimension	λ_n
ASt. Simbach	(3058768, 3058768)	342.401
ASt. Tirschenreuth	(7812900, 7812900)	391.779
ADBV München	(10946620, 10946620)	473.924

Tabelle 9.5.: Für repräsentativ ausgewählte Amtsbezirke (klein, mittel und groß) ermittelte größte Eigenwerte λ_n .

Bei Anwendung von Gl. (9.45) für die Bestimmung der Kondition des Cholesky-Verfahrens (Gl. (9.2)) ist es wichtig zu beachten, dass nicht die originale Matrix \mathbf{A} , sondern eine skalierte Matrix \mathbf{A}' eingeführt wird.

Nach Higham 2002 [S. 198f, Theorem 10.5/10.6], der auf Arbeiten von Demmel 1989 für die Bibliothek LAPACK verweist, ist beim Cholesky-Verfahren eine Diagonal-Skalierung durchzuführen, die zu einer Minimierung der Konditionszahl κ führt. Folglich ist die in Gl. (9.45) gegebene Fehlerabschätzung statt auf dem originalen Normalgleichungssystem \mathbf{N} auf dem skalierten System $\mathbf{N}' = \mathbf{D} \mathbf{N} \mathbf{D}$ mit $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{N})^{1/2}$ durchzuführen. Hierdurch verringert sich beispielsweise die Konditionszahl der in Abb. 9.1 dargestellten Matrix der Testgemarkung mit einer Matrixdimension (10592, 10592) von ca. 629 Millionen auf den Wert 477373. Der Konditionszahl liegt ein Spektrum mit minimalem Eigenwert $\lambda_1 = 4,69 \cdot 10^{-6}$ und maximalem Eigenwert $\lambda_n = 2,2435$ zugrunde. Damit erreicht die über Cholesky-Faktorisierung durchgeführte Ausgleichung auf der Testgemarkung für die unbekanntenen UTM-Koordinaten nach Gl. (9.45) eine Genauigkeit von 0,13 mm. Zur Schätzung der Kondition der Matrix des ADBV München mit der Dimension (10946620, 10946620) kann folgendes festgestellt werden: Der maximale Eigenwert λ_n nimmt bei der für die Flurstücksausgleichung aufgebauten Matrix für das ADBV München nur unwesentlich auf den Wert 2,5115 zu. Der kleinste Eigenwert von München wird auf 10^{-7} geschätzt.

Allerdings konnte dieser Wert numerisch weder durch ein als Standardverfahren geltendes Arnoldi-Verfahren [z. B. Saad 2003], das nach 24 Stunden keine Konvergenz mehr erreicht hat, noch durch das mit Krylov-Unterraum und polynomen Filtern arbeitende moderne Lanczos-Verfahren nach Fang und Saad 2012 bestätigt werden.

Mit Einsatz von Orthogonalisierungen (Householder, Modifiziertes Gram-Schmidt-Verfahren [Saad 2003]) kann eine ausreichende Genauigkeit für den unteren Eigenwert für München erreicht werden. Die über QR-Faktorisierungen die Hessenberg-Matrix aufbauende Schur-Faktorisierung, die eine optimale Kondition mit der Konditionszahl $\kappa = 1$ besitzt, sollte zu einem stabilen Ergebnis für den unteren Eigenwert führen. Auf dieser Basis wird über weitere QR-Zerlegungen schließlich die Schur-Dreiecksmatrix bzw. -Diagonalmatrix bestimmt [Saad 2003], die auf der Diagonalen die Eigenwerte enthält. Allerdings ist für dieses Verfahren von Saad eine Laufzeitkomplexität der Ordnung $\mathcal{O}\left(|4m^2n - \frac{4}{3}m^3|\right)$ angegeben [Saad 2003], wenn dieses mit Householder-Orthogonalisierung arbeitet. Die auf Basis der vorliegenden Laufzeitkomplexität zur Durchführung des Algorithmus erforderlichen 10^{22} Flops überschreiten um ein Vielfaches die Bilanz der Rechenoperationen bei den Cholesky-Faktorisierungen der UTM-Umstellung mit $7,262 \cdot 10^{14}$ Flops, so dass eine Abschätzung der Kondition auf einem anderen Weg erfolgt. Auf Basis des unteren Eigenwerts der Testgemarkung kann eine Rechengenauigkeit für München von mindestens 1 cm als gewährleistet angesehen werden, selbst wenn sich für die Münchner Matrix der minimale Eigenwert um den Faktor 100 (von $\approx 5 \cdot 10^{-6}$ nach $\approx 5 \cdot 10^{-8}$) gegenüber der Matrix der Testgemarkung ändert.

Gewinnen der UTM-Koordinaten nach Durchführung der Vorwärts- und Rückwärtssubstitution, Abschluss des Sparse Cholesky-Verfahrens Die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution $L \cdot y = b$ und $L^T \cdot x = y$ stellt den Abschluss der numerischen Faktorisierung des Sparse Cholesky-Verfahrens dar, das bei der UTM-Umstellung des Liegenschaftskatasters in Bayern vorwiegend in der supernodalen Form zum Einsatz kam. Damit liegt das Ergebnis der Ausgleichung von Gl. (9.1) in Abschnitt 9.2.1 vor. Aus Sicht des Cholesky-Verfahrens ist das Ergebnis ein nach den Unbekannten x aufgelöstes Gleichungssystem (9.2), das als Lösung die gesuchten unbekanntenen Koordinaten in UTM enthält.

Abschluss der Homogenisierung durch das Ortra-Verfahren, Aufbau der UTM-Datenhaltung in ALKIS Mit der Bestimmung der Unbekannten x für eine gegebene Aufgabenstellung der Ausgleichung $x = (A^T P A)^{-1} A^T P l$ (siehe Gl. (9.1)) ist die Aufgabe der Numerik erfüllt, in stabilen Prozessen und innerhalb der geforderten Laufzeit Massendaten mit einer Größenordnung von 2 Milliarden Beobachtungen zu verarbeiten.

Das Ergebnis der Numerik sind die in das Zielsystem (= neues Koordinatenreferenzsystem ETRS89_UTM32) überführten Koordinaten des Liegenschaftskatasters, die durch Reduzierung der Netzspannungen homogenisiert wurden. Wie in Kapitel 6 und 8 dargestellt, wurde bei der Überführung der Koordinaten des Liegenschaftskatasters in das europäische Lagebezugssystem ETRS89 mit dem Abbildungssystem der Universalen Mercator Projektion (UTM) durch das Ortra-Verfahren, das elastomechanische Analogien aufweist, minimale Formänderungsenergie eingesetzt.

Die Verknüpfung der UTM-Koordinaten mit den im Gauß-Krüger-Ausgangssystem vorliegenden punkt-, linien- und flächenförmigen Geometrieelementen des Grundrisses bildet den abschließenden Schritt bei der Überführung der Grundrissdaten des Liegenschaftskataster-Informationssystems ALKIS. Im Zuge des Koordinatenaustausches, d. h. dem Ersetzen der GK-Koordinatenwerte durch UTM-Koordinatenwerte, wurden Schnittstellendateien mit Grundrissdaten in UTM erzeugt, die die Grundlage für den Aufbau der neuen UTM-Datenhaltung im ALKIS-System bilden.

10. Zusammenfassung und Ausblick

Die UTM-Umstellung des Liegenschaftskatasters für das deutsche Bundesland Bayern stellt nicht nur eine umfangreiche Aufgabe und ein komplexes Projekt dar, sie gab auch Anlass für die Entwicklung eines speziellen Ortra-Ansatzes. Dessen wissenschaftliche Fragestellungen geht die vorliegende Arbeit nach.

Bei dem praktischen Aufbau eines Ausgleichungsverfahrens als spezielles UTM-Überführungsverfahren, das nach Projektvorgabe die Homogenisierung des Liegenschaftskatasters im neuen Raumbezug innerhalb weniger Tage durchführen sollte, erhob sich von Anfang an die Frage, aus welchem Grund die Ausgleichungsergebnisse nur geringe Verzerrungen bei den im Koordinatennetz vorhandenen Widersprüchen und damit verbundenen Spannungen zeigten. Die Analogie des Ausgleichungsansatzes zur Mechanik war von Anfang an ersichtlich, doch blieb offen, nach welchen Mechanismen und in welcher Größenordnung Kräfte verteilt werden, die mit den Netzspannungen zusammenhängen. Erst die vertiefte wissenschaftliche Analyse des Verfahrens zeigte, dass das Ortra-Verfahren Eigenschaften eines Formfindungsverfahrens besitzt, das bei gegebenen Randbedingungen, wie sie die UTM-Koordinaten der identischen Punkte definieren, eine Form aufbaut, die über minimale Formänderung aus der Ausgangsform hervorgeht. Um Aussagen zum Einsatz minimaler Formänderung bei der Umformung treffen zu können, war es erforderlich, die Gleichgewichtslage des künstlichen geodätischen Netzes nachzuweisen.

Als erstes wurde die Analogie des Ausgleichungsverfahrens des Ortra-Ansatzes zu Kraft- und Weggrößenverfahren der Baustatik untersucht. Die Analogien der mit dem Ortra-Verfahren verwandten Seilnetze zu baustatischen Verfahren waren Ziel der geodätischen Forschung, vor allem im SFB 64 der TU Stuttgart um [Linkwitz 1977, Linkwitz 1999] und sein Team seit den 1960er bis in die 2000er Jahre. Schon früher waren Analogien zu den klassischen Ansätzen der vermittelnden Ausgleichung von Richtungs- und Streckennetzen bekannt [Linkwitz 1960a, Westergaard 1915, Falkenberg 1993]. Diese Ansätze unterscheiden sich vom Ortra-Verfahren dadurch, dass sie nichtlinear arbeiten [Glock, Bauer u. a. 2019], was eine zusätzliche Linearisierung beim funktionalen Modell der Ausgleichung erforderlich macht. Im Unterschied zum Ortra-Verfahren existieren bei Seil- und Streckennetzen unmittelbar zu erfassende Weggrößen (= Streckenänderungen) und Knotengrößen, so dass die Analogie zwischen Streckennetzen zu einem Fach- bzw. Stabwerk deutlicher sichtbar ist. Für den Aufbau der Analogie zu Seilnetzen müssen bei Ausgleichungsverfahren deshalb zusätzliche Größen eingeführt werden, die mit den zweiten Ableitungen der Beobachtungsgleichungen zusammenhängen.

Zunächst wurden für das Ortra-Verfahren Bereiche identifiziert, die sich elastisch verhalten. Der beim Übergang nach UTM sich verändernde Maßstab der im Ausgleichungsansatz miteinander verketteten Ortra-Systeme wurde als formverändernder Freiheitsgrad bei der Formfindung des künstlichen geodätischen Netzes festgestellt. Die lokalen Ortra-Systeme wurden daraufhin als elastische Basiseinheiten identifiziert und später für eine Anwendung des Weggrößenverfahrens mit Materialeigenschaften versehen. Durch die Ausgleichungsvorschrift $v^T P v$ werden zusätzliche geometrische Widersprüche minimiert, die in ihrer minimalen Form zum Gleichgewicht und damit zum elastischen Gesamtverhalten des Ortra-Ansatzes beitragen. Diese minimalen geometrischen Widersprüche sind mechanisch zu deuten und in ein baustatisches Verfahren zu integrieren.

Anschließend wurden für die Definition von Verzerrungen Primär- und Sekundärverschiebungen der Knoten des Ortra-Systems identifiziert. Die auf das einzelne Ortra-System bezogenen Pseudobeobachtungen wurden als Stäbe eines lokalen Stabtragwerks interpretiert, und daraufhin im Ortra-Ansatz konsequent die Stabtheorie der Baustatik eingeführt. Mit ihrer Hilfe ließen sich Normalkräfte innerhalb der geodätischen Beobachtungen identifizieren und Steifigkeitsmatrizen für die Einzelstäbe des Ortra-Systems definieren. Somit konnte die Analogie zum Weggrößenverfahren aufgebaut werden. Mit Erweiterung des Ansatzes des Weggrößenverfahrens konnte auch nicht-elastische Verzerrungen in das Verfahrenskonzept aufgenommen werden, deren Geometrie durch die Ausgleichung gegeben ist. Für diese Verzerrungen wurden Kräfte- und Momentenbedingungen identifiziert, die ein unterbestimmtes Gleichungssystem definieren. Mit einem Kleinste-Quadrate-Ansatz, der zur Umsetzung des geodätischen Minimumsprinzips $v^T P v$ Kräfte im unterbestimmten Gleichungssystem mi-

nimiert, konnte ein konsistentes Gleichgewichtssystem mathematisch formuliert werden, in dem minimale Formänderungsenergie bei der Umformung aufgewendet wird.

Nach Vorliegen des modifizierten Weggrößenverfahrens wurde der Frage nachgegangen, nach welchen Gesetzmäßigkeiten die Gewichtsunterschiede im Ausgleichungsmodell des Ortra-Ansatzes, die für den Aufbau einer Referenz- und einer Momentankonfiguration im neuen Raumbezug maßgeblich sind, mit den Kräften zusammenhängen, die bei der endgültigen Umformung den homogenisierten Grundriss realisieren, in welchem die Netzspannungen minimiert sind. Für den Aufbau dieser gesetzmäßigen Beziehung wurden die Gewichtsunterschiede, die prinzipiell mit den unterschiedlichen Gewichtsansätzen bei zwei Ausgleichungen zusammenhängen, die über ein identisches funktionales Modell definiert sind, mathematisch in ein gerändertes Normalgleichungssystem überführt [Glock, Bauer u. a. 2019]. Das neuartige, geränderte Normalgleichungssystem wurde weiter ausformuliert, um mit Hilfe einzelner Komponenten des Systems einen unmittelbaren Vergleich zum Weggrößenverfahren zu ermöglichen. Dabei wurden, wiederum im geränderten Ausgleichungsmodell, Kräfte identifiziert, die bei der Umformung zur Anwendung kommen, um die Netzspannungen durch Verteilung der Koordinatenwidersprüche über das lineare Ausgleichungsmodell zu minimieren. Die Sichtweise, dass bei Bestimmung der Kräfte durch den Ausgleichungsansatz anfangs Weggrößen als Eingangsgrößen einfließen, erlaubt die Interpretierung des Ortra-Verfahrens als Kraftgrößenverfahren, das die gesuchten Kräfte mit Methoden der Ausgleichungsrechnung bestimmt.

Neben den klassischen Kraft- und Weggrößenverfahren wird das aktuelle Spektrum der baustatischen Verfahren durch Finite-Elemente-Methoden ergänzt, die für den Anwendungsbereich nichtlinearer Materialeigenschaften und nicht-infinitesimaler Verzerrungen kontinuumsmechanisch formuliert werden. Als wichtiger Vertreter dieser sich durch nichtlineare geometrische Gesetze auszeichnenden Verfahren ist die Updated Reference Strategy [Bletzinger und Ramm 1999] zu nennen. Mit Hilfe der Theorie der finiten Elemente lässt sich prinzipiell eine Koordinatentransformation durchführen, insbesondere dann, wenn beim Übergang von einem mit Netzspannungen belasteten Ausgangsbezugssystem in ein homogenes Zielbezugssystem nichtlineare Verzerrungen auftreten. Bei Definition der Kinematik der gegebenen Ausgangssituation, bezogen auf die identischen Punkte, kann eine Finite-Elemente-Methode über die Formulierung geeigneter Ansatzfunktionen mit minimalen Verzerrungseigenschaften im Kleinen die Aufgabe der Koordinatentransformation übernehmen. Für die Geodäsie betritt die Forschung in diesem Bereich Neuland, auch wenn vorliegende Arbeit über elastomechanische Koordinatentransformation mittels Ausgleichungsrechnung einen Bezug zu Grundlagen der nichtlinearen Elastizität herstellt. Um für die Aufgabenstellung der UTM-Überführung in Bayern ein passendes Modell abzuleiten, bietet es sich die moderne Darstellungsweise der Kontinuumsmechanik als Ausgangspunkt an. Der Übergang zur linearen Elastizität des Ortra-Verfahrens wird durchgängig dargestellt. Mit Hilfe der Stabtheorie und der Matrizen Schreibweise, die generell bei der Ausgleichung verwendet wird, lassen sich schließlich Analogien zum Weg- und Kraftgrößenverfahren aufbauen.

Weiterhin wird gezeigt, dass das Ortra-Verfahren beim Übergang zwischen konformen Abbildungssystemen nichtlineare Verzerrungen gut verarbeiten kann, da die entstehenden Verschiebungen durch das Ausgleichungsmodell linear verteilt werden.

Bei der Numerik des Ortra-Ansatzes haben sich die direkten Verfahren unter Einsatz des Cholesky-Verfahrens mit Superknoten als konkurrenzfähig zu den indirekten Verfahren erwiesen, deren prominentester Vertreter das GMRES-Verfahren ist [Saad 2003]. Sie erbrachten Vorteile bei der gleichzeitigen Prozessierung der Normalgleichungssysteme für die Amtsbezirke der Vermessungsämter. In der praktischen Anwendung konnte gezeigt werden, dass sehr kleine Blockmatrizen, deren gegenseitige numerische Abhängigkeit durch den Eliminierungsbaum dargestellt wird, sich exakt auf die verfügbaren Hardwareressourcen abbilden lassen, wodurch das Risiko einer unvorhergesehenen Überlastung des Systems ausgeschlossen werden konnte. Die symbolische Faktorisierung zeichnet sich durch geringen Verbrauch an Hauptspeicher und zügigen Aufbau der bei der Faktorisierung benötigten Informationen und Strukturen aus.

Für zukünftige Forschungen im Bereich der elastomechanischen Koordinatentransformationen stellt diese Arbeit eine solide Aufbereitung der Grundlagen bereit, sowohl für die Grundlagenforschung an weiteren Transformationsverfahren, etwa im Bereich der finiten Elemente, als auch für weitere Arbeiten über die durch den Ortra-Ansatz dargelegte Verkettung zweidimensionaler Koordinatensysteme, die als mit elastischen Fäden verbundene Stabtragwerke interpretiert werden können. Der Ortra-Ansatz erwies sich besonders wegen seiner explizit formulierten lokalen Strecken- und Winkelbeziehungen zu seinen Punktnachbarn als vorteilhaft für die

Umformung von Daten, die in einem konformen Abbildungssystem vorliegen. Diese günstigen Eigenschaften des Ortra-Verfahrens zeigten sich durch Definition eines einzigen Freiheitsgrades für die Formänderung in Verbindung mit minimalen Verbesserungen und Formänderungen.

Für den zukünftigen Einsatz von Finite-Elemente-Methoden wird der Frage nachzugehen sein, ob lokale Ansatzfunktionen die Winkeltreue bei lokaler Deformation gut erhalten können. Das bedeutet, dass Ansatzfunktionen der finiten Elemente mathematisch so aufzubauen sind, dass bei linearen und nichtlinearen Verzerrungen im Gesamten eine die Winkel erhaltende Abbildung des Kontinuums von der Referenzkonfiguration auf die Momentankonfiguration erreicht wird. Für die geodätische Anwendung von Finite-Elemente-Methoden im Bereich der linearen Elastizitätstheorie sind bereits Umformungsverfahren mit Dreiecken erforscht, die produktiv in Form des Membranverfahrens [Gielsdorf und Gründig 1997] bei der UTM-Umstellung in den Bundesländern Hamburg und Baden-Württemberg zum Einsatz kamen.

Einen Forschungsgegenstand bei zukünftigen elastomechanischen Umformungsvorhaben bietet erneut die Numerik, deren Fortschritte mit veränderter Logistik eine bessere Bewältigung der Massenproblematik großer Umformungen versprechen und die Wahl des Ausgleichungsansatzes weiter erleichtern werden. Reizvoll wäre die Fragestellung, inwieweit Fortschritte in der Numerik den Weg zu theoretisch komplexeren Ausgleichungsmodellen bei der Koordinatenumformung öffnen. In der Numerik stehen direkte und indirekte Verfahren im Wettbewerb miteinander, wobei aktuell größere Forschungsaktivitäten bei den indirekten Verfahren zu verzeichnen sind. Mit den zunehmend praxisrelevanten, auch durch KI-Plattformen forcierten GPU-Beschleunigungen, besteht für Choleky-Faktorisierungen kein zusätzlicher Forschungsbedarf [T. Davis, Rajamanickam und Sid-Lakhdar 2016]. Beim Einsatz von indirekten numerischen Verfahren ist die Frage von Interesse, inwieweit mit Hilfe guter Ausgangswerte der Unbekannten (z. B. durch bekannte NTv2-Transformation) eine Beschleunigung der Konvergenz des Verfahrens erreicht werden kann.

Ausgehend von einem Ansatz der Geodäsie zur Erreichung qualitativ guter Homogenisierungsergebnisse in kürzeren Prozessen ließe sich untersuchen, ob sich für den Aufbau der überbestimmten Gleichungssysteme weitere Wege zur Reduzierung des Vernetzungsaufwandes und der Modellierung der Nachbarschaft eröffnen, ohne Einbußen bei der Qualität der Transformationsergebnisse hinnehmen zu müssen. Gegenüber früheren Ansätzen (z. B. [Benning 1995]) wurde bei dem für die UTM-Umstellung des Liegenschaftskatasters in Bayern verwendeten Ortra-Ansatz bereits eine Reduktion der Algorithmik durch Verzicht auf explizite Dreiecksvermaschung erreicht. Ebenso konnte auf eine Modellierung der Restklaffungen im funktionalen Modell verzichtet werden, da die Verteilung der Restklaffungen durch Herstellung einer Gleichgewichtsfigur auf elastomechanischem Weg erfolgte.

Hier besteht noch weiteres Einsparungspotential bei der Algorithmik des hierarchischen Ansatzes. Zumindest mit der in der ersten Hierarchiestufe erreichten Verringerung der von außen einwirkenden Kräfte könnte auf eine weitere explizite, objektbezogene Vernetzung wie die Gebäudevernetzung verzichtet werden. Es bleibt zu erforschen, ob und unter welchen Bedingungen, beispielsweise mit der Methodik des Membranverfahrens [Gielsdorf und Gründig 1997], insgesamt eine objektbezogene Vernetzung eingespart werden kann. Diese Fragestellungen gelten gleichermaßen für den Einsatz eines neuartigen Finite-Elemente-Ansatzes. Praktisch kann ein Ortra-Verfahren die Vor- und Rückblicke für die Vernetzung über Dreiecksseiten aufbauen, die durch eine Delauney-Triangulation zur Verfügung gestellt werden. Als vielversprechend stellt sich aktuell ein Ansatz dar, der zum Aufbau der einzelnen Ortra-Systeme diese vereinfachte Vernetzung durchführt, wenn nach einer ersten Homogenisierung nur noch geringe äußere Kräfte vorhanden sind oder in einem Gebiet mit besserer Homogenität insgesamt geringere Kräfte vorliegen. Dies ist beispielsweise im Anwendungsfall einer UTM-UTM-Transformation gegeben. Das so vereinfachte Ortra-Verfahren ist es wert, für weitere Einsatzgebiete untersucht zu werden.

A. Ansätze der Ausgleichsrechnung

Nach Helmert 1907 werden folgende Hauptformen der Ausgleichsmethoden nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate unterschieden:

- Ausgleichung von direkten Beobachtungen („Direkte Beobachtungen“),
- Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen, auch als vermittelnde Ausgleichung bezeichnet („Vermittelnde Beobachtungen“) und,
- Ausgleichung von bedingten Beobachtungen, auch als bedingte Ausgleichung bezeichnet („Bedingte Beobachtungen“),

sowie als Mischformen zwischen vermittelnder und bedingter Ausgleichung:

- Vermittelnde Ausgleichung mit Bedingungen zwischen den Unbekannten („Vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen“).
- Bedingte Ausgleichung mit Unbekannten („Bedingte Beobachtungen mit Unbekannten“).

Wegen der Analogie des Weg- und Kraftgrößenverfahrens zur vermittelnden und bedingten Ausgleichung werden diese und ihre Mischformen in den folgenden Abschnitten näher behandelt.

A.1. Vermittelnde Ausgleichung

Der vermittelnden Ausgleichung liegt wie allen Hauptformen folgendes Minimumsprinzip der gewichteten Quadrate der Verbesserungen zugrunde [Gründig 2003, Niemeier 2008]:

$$\mathbf{v}^t \mathbf{P} \mathbf{v} \Rightarrow \min. \quad (\text{A.1})$$

weshalb sie als Methoden der kleinsten Quadrate (MdkQ) bezeichnet werden.

Als computergerechtes Verfahren lässt sich die vermittelnde Ausgleichung effizient in Software-Pakete umsetzen und hat dank der Möglichkeiten der Computertechnologie zur Verarbeitung immer größerer Matrizen in der Ausgleichsrechnung die bedingte Ausgleichung als meistverwendetes Ausgleichungsverfahren abgelöst.

Technologische Fortschritte in den letzten Jahren bei den numerischen Verfahren und bei der Sparse-Matrizen-Technologie, wie beispielsweise der Cholesky Faktorisierung auf Basis von Superknoten, ermöglichen Anwendungen mit Matrixgrößen im zweistelligen Millionenbereich.

Eine Ausgleichung besteht aus einem funktionalen und einem stochastischen Modell. Im funktionalen Modell wird für eine Problemstellung ein Gleichungssystem aufgebaut, das die Beobachtungen \mathbf{l} als Funktion $\mathbf{l} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ der Unbekannten \mathbf{x} ausdrückt. Da bei einem Ausgleichungsproblem von einer Redundanz $r = n - u$ mit einer größeren Anzahl n von Beobachtungen \mathbf{l} als gesuchten u Unbekannten \mathbf{x} auszugehen ist, wird sich in der Regel das überbestimmte Gleichungssystem nicht widerspruchsfrei nach den Unbekannten auflösen lassen. Um Widerspruchsfreiheit des Gleichungssystems zu erreichen, werden Verbesserungen \mathbf{v} zu den Beobachtungen hinzugefügt (Gl. (A.2)), die dem Minimumsprinzip $\mathbf{v}^t \mathbf{P} \mathbf{v} \Rightarrow \min.$ von Gl. (A.1) unterliegen. Das Gleichungssystem kann in Matrixform wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{l}_{(n,1)} + \mathbf{v}_{(n,1)} = \mathbf{A}_{(n,u)} \cdot \mathbf{x}_{(u,1)}. \quad (\text{A.2})$$

Gl. (A.2), nach den Verbesserungen \mathbf{v} aufgelöst, ergibt:

$$\boldsymbol{v}_{(n,1)} = \boldsymbol{A}_{(n,u)} \cdot \boldsymbol{x}_{(u,1)} - \boldsymbol{l}_{(n,1)}. \quad (\text{A.3})$$

Die unbekannt Verbesserungen \boldsymbol{v} werden mathematisch durch ein lineares Schätzverfahren über die Zielfunktion, das minimale gewichtete Summenprodukt der Verbesserungen, bestimmt.

Für das funktionale Modell, das einen mathematisch-funktionalen Zusammenhang zwischen Unbekannten und Beobachtungen herstellt, wird festgelegt, dass in jeder Zeile der Fehlergleichungen nur eine Beobachtung enthalten sein darf (siehe Gl. (A.4)).

Die Fehlergleichungen, auch als Verbesserungsgleichungen oder Beobachtungsgleichungen bezeichnet, können mathematisch oder physikalisch unterschiedliche Zusammenhänge beschreiben (Gl. (A.3)) und sind beispielsweise wie folgt aufgebaut:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1x + b_1y - l_1, \\ v_2 &= a_2x + b_2y - l_2, \\ v_3 &= a_3x + b_3y - l_3. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Falls ein nichtlineares Problem $f(\boldsymbol{x})$ für Gl. (A.3) bzw. (A.4) vorliegt, müssen, wie in Gl. (A.8) dargestellt, eine Linearisierung für $f(\boldsymbol{x})$ durchgeführt und Näherungswerte für die Unbekannten eingeführt werden.

Bei den n Beobachtungen wird angenommen, dass diese mit $\boldsymbol{l} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_{ll})$ normalverteilt vorliegen.

Die vermittelnde Ausgleichung wird in etwas anderer Formulierung (Gl. (A.5)) auch als Gauß-Markov-Modell bezeichnet. Neben dem im funktionalen Modell von Gl. (A.3) gegebenen

- $n \times 1$ Zufallsvektor \boldsymbol{l} von n Beobachtungen, dem
- $u \times 1$ Vektor der u Unbekannten \boldsymbol{x} und einer
- $n \times u$ Matrix \boldsymbol{A} mit zu bestimmenden Koeffizienten

wird dem Modell noch eine zusätzliche Beschreibung der Zufallseigenschaften der Beobachtungen hinzugefügt, die durch

- $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{l}) = \sigma^2 \boldsymbol{P}^{-1}$ mit der Dispersions- bzw. Kovarianzmatrix der Beobachtungen \boldsymbol{l}

definiert wird. Dann bezeichnet folgende Gleichung

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{l}) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{l}) = \sigma^2 \boldsymbol{P}^{-1} \quad (\text{A.5})$$

das Gauß-Markov-Modell.

Als Ausgangspunkt für die vermittelnde Ausgleichung werden hier noch einmal das Minimumsprinzip und die funktionale Beziehung angegeben:

$$\boldsymbol{v}^t \boldsymbol{P} \boldsymbol{v} \Rightarrow \min., \quad \text{und} \quad \boldsymbol{l} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x}). \quad (\text{A.6})$$

Wenn ein lineares Problem wie in Gl. (A.4) vorliegt, können unmittelbar Beobachtungen \boldsymbol{l} , Verbesserungen \boldsymbol{v} und Unbekannte \boldsymbol{x} für die Beobachtungsgleichungen aufgestellt und die Koeffizienten in der Koeffizientenmatrix \boldsymbol{A} aufgebaut werden.

Für Gl. (A.4) ergibt sich folgendes funktionales Modell in Matrixschreibweise:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Bei einem nichtlinearen Problem muss die Funktion $f(\boldsymbol{x})$ linearisiert werden. Mit Einführung von Näherungswerte für die Unbekannten \boldsymbol{x}_0 wird

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \Delta \boldsymbol{x}. \quad (\text{A.8})$$

Für $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ wird eine Jakobimatrix A wie folgt aufgebaut:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_u} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Die Lösung der Minimumsaufgabe $v^t P v \Rightarrow \min.$ unter der Nebenbedingung $l + v - A \cdot x = \mathbf{0}$ (A.6) ergibt, unter Verwendung eines Lagrangeschen Korrelatenvektors k , folgende Zielfunktion Φ :

$$\Phi = v^t P v - 2k^t (l + v - A \cdot x). \quad (\text{A.10})$$

Die partiellen Ableitungen nach den Unbekannten x , den unbekanntem Verbesserungen v und dem Korrelatenvektor k ergeben folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 2A^t k = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= 2Pv - 2k = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad k = Pv, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial k} &= -2(l + v - A \cdot x) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad v = A \cdot x - l. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Der Ausdruck für den Korrelatenvektor k aus der zweiten Gleichung von (A.11) wird in die erste Gleichung eingesetzt und ergibt:

$$A^t P v = \mathbf{0}. \quad (\text{A.12})$$

Der Ausdruck für die Verbesserungen v aus der dritten Gleichung von (A.11), in Gl. (A.12) eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned} A^t P (A \cdot x - l) &= A^t P A \cdot x - A^t P l = \mathbf{0} \\ \Rightarrow \quad (A^t P A) x &= A^t P l. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Damit folgt für den Unbekanntenvektor x :

$$x = (A^t P A)^{-1} A^t P l. \quad (\text{A.14})$$

Die untere Zeile von Gl. (A.13) wird als System der Normalgleichungen bezeichnet, das abgekürzt durch

$$N x = n \quad (\text{A.15})$$

dargestellt werden kann. In Gl. (A.15) ist

$$N = (A^t P A) \quad (\text{A.16})$$

die *Normalgleichungsmatrix*.

Der Vektor

$$n = (A^t P l), \quad (\text{A.17})$$

stellt das Absolutglied des Normalgleichungssystems (A.14) dar. Für diesen findet sich auch der Begriff *rechte Seite der Normalgleichungen*.

A.2. Bedingte Ausgleichung

Für das Ausgleichsproblem soll wieder eine Anzahl n Beobachtungen l für die Bestimmung der u Unbekannten x vorliegen.

Zur eindeutigen Lösung der Problemstellung z. B. eines geometrischen Sachverhalts wird aus den n Beobachtungen eine Untermenge m Beobachtungen ausgewählt. Die Problemstellung sei r -fach überbestimmt.

Neben der Untermenge existieren $r = n - m$ überschüssige Beobachtungen. Analog zum Vorgehen beim Kraftgrößenverfahren (Bestimmungsgleichungen siehe z. B. Gl. (6.85) in Abschnitt 6.2.2) wird durch Entfernen der r überschüssigen Beobachtungen das System wieder in ein eindeutig bestimmtes Hauptsystem mit m Beobachtungen überführt.

Dann besteht zwischen n , m und r der Zusammenhang [Gründig 2003]:

Anzahl aller Beobachtungen	-	Anzahl der notwendigen Beobachtungen	=	Anzahl der Bedingungsgleichungen
n	-	m	=	r

Zu jeder der r überschüssigen Beobachtungen wird eine Bedingungsgleichung in Abhängigkeit der m zur Bestimmung des Problems notwendigen Beobachtungen formuliert.

Für die Aufstellung des funktionalen Modells der bedingten Beobachtungen wird für *ausgegliche* Beobachtungen

$$\hat{l} = l + v \tag{A.18}$$

ein System mit r Bedingungsgleichungen in der Form $g_i(l + v) = s_i$ mit $i = 1, \dots, r$ aufgebaut:

$$\begin{aligned} g_1(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \dots, l_n + v_n) &= s_1, \\ g_2(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \dots, l_n + v_n) &= s_2, \\ \vdots & \\ g_r(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \dots, l_n + v_n) &= s_r. \end{aligned} \tag{A.19}$$

Die Funktionen g der r Bedingungsgleichungen in Gl. (A.19) können linear oder nicht linear sein.

Bei einem nichtlinearen Zusammenhang wird – für die mit den ausgeglichenen Beobachtungen $l_i + v_i$ definierten Gleichungen – eine Linearisierung ab der Entwicklungsstelle $g(l)$ mit den Originalbeobachtungen l_i durchgeführt:

$$\begin{aligned} g(\hat{l})_{(r,1)} &= \underbrace{g(l)_{(r,1)}}_{\mathbf{B}_{(r,n)} \cdot \mathbf{l}_{(n,1)}} + \underbrace{\frac{\partial g(\hat{l})}{\partial \mathbf{l}}}_{\mathbf{B}_{(r,n)}} \cdot \underbrace{(\hat{l} - \mathbf{l})}_{\mathbf{v}_{(n,1)}} = \mathbf{s}_{(r,1)} \\ \mathbf{B}_{(r,n)} \cdot \mathbf{l}_{(n,1)} + \mathbf{B}_{(r,n)} \cdot \mathbf{v}_{(n,1)} &= \mathbf{s}_{(r,1)} \\ \mathbf{B}_{(r,n)} \cdot (\mathbf{l} + \mathbf{v})_{(n,1)} &= \mathbf{s}_{(r,1)} \\ \mathbf{B}_{(r,n)} \cdot \mathbf{v}_{(n,1)} &= \underbrace{\mathbf{s} - g(\mathbf{l})}_{\mathbf{w}_{(r,1)}} \\ \mathbf{B}_{(r,n)} \cdot \mathbf{v}_{(n,1)} &= \mathbf{w}_{(r,1)} \quad \text{mit} \quad \mathbf{w}_{(r,1)} = \mathbf{s}_{(r,1)} - \mathbf{B}_{(r,n)} \cdot \mathbf{l}_{(n,1)}. \end{aligned} \tag{A.20}$$

Das funktionale Modell der bedingten Ausgleichung lautet:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w}. \tag{A.21}$$

Die Jakobimatrix \mathbf{B} der partiellen Ableitungen der Funktionen der ausgeglichenen Beobachtungen nach den Beobachtungen $\frac{\partial g(\hat{l})}{\partial \mathbf{l}}$ wird wie folgt aufgebaut:

$$\mathbf{B}_{(r,n)} = \frac{\partial g(\hat{\mathbf{l}})}{\partial \mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial l_1} & \frac{\partial g_1}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial l_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial l_1} & \frac{\partial g_2}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial l_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial l_1} & \frac{\partial g_r}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial l_n} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

Die bedingte Ausgleichung ist als Minimumsaufgabe wie folgt definiert:

$$\mathbf{v}^t \mathbf{P} \mathbf{v} \Rightarrow \min., \quad \text{und} \quad g(\mathbf{l} + \mathbf{v}) = \mathbf{s}. \quad (\text{A.23})$$

Die Lösung der Minimumsaufgabe $\mathbf{v}^t \mathbf{P} \mathbf{v} = \min.$ unter der Nebenbedingung $g(\mathbf{l} + \mathbf{v}) = \mathbf{s}$ erfolgt mit Hilfe der Zielfunktion Φ , deren partiellen Ableitungen nach den verschiedenen Unbekannten anschließend zu Null gesetzt werden:

$$\begin{aligned} \Phi &= \underbrace{\mathbf{v}_{(1,n)}^t}_{(\hat{\mathbf{l}} - \mathbf{l})_{(1,n)}^t} \mathbf{P}_{(n,n)} \underbrace{\mathbf{v}_{(n,1)}}_{(\hat{\mathbf{l}} - \mathbf{l})_{(n,1)}} - 2 \mathbf{k}_{(1,r)}^t \left(g(\mathbf{l} + \mathbf{v}) - \mathbf{s} \right)_{(r,1)} \\ &= (\hat{\mathbf{l}} - \mathbf{l})_{(1,n)}^t \mathbf{P}_{(n,n)} (\hat{\mathbf{l}} - \mathbf{l})_{(n,1)} - 2 \mathbf{k}_{(1,r)}^t (g(\hat{\mathbf{l}}) - \mathbf{s})_{(r,1)}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Partielle Ableitung von Φ aus Gl. (A.24) nach den Korrelaten \mathbf{k} liefert die in Gl. (A.19) eingeführten Beobachtungsgleichungen $g(\hat{\mathbf{l}}) = \mathbf{s}$, die im Folgenden zu Null gesetzt werden:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{k}} = (g(\hat{\mathbf{l}}) - \mathbf{s}) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.25})$$

Partielle Ableitung von Φ ((A.24)) nach den Beobachtungen \mathbf{l} ergibt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{l}} = 2 \mathbf{P} (\hat{\mathbf{l}} - \mathbf{l}) - 2 \left(\frac{\partial g(\hat{\mathbf{l}})}{\partial \mathbf{l}} \right)^t \mathbf{k} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \mathbf{v} - \mathbf{B}^t \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.26})$$

Mit $\mathbf{P} \mathbf{v} - \mathbf{B}^t \mathbf{k} = \mathbf{0}$ erhält man die sogenannte Korrelatengleichung:

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^t \mathbf{k} = \mathbf{Q}_{ll} \mathbf{B}^t \mathbf{k}. \quad (\text{A.27})$$

Der Ausdruck für \mathbf{v} von Gl. (A.27) wird in Gl. (A.21) eingesetzt und ergibt:

$$(\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^t) \mathbf{k} = \mathbf{w} \quad \text{mit} \quad \mathbf{w} = \mathbf{s} - g(\mathbf{l}). \quad (\text{A.28})$$

Die Normalgleichungen der bedingten Ausgleichung sind:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^t) \mathbf{k} = \mathbf{w} &\Rightarrow \mathbf{k} = (\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^t)^{-1} \mathbf{w} \\ &= \mathbf{Q}_{kk} \mathbf{w}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q}_{kk} = (\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^t)^{-1} \\ &= (\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^t)^{-1} (\mathbf{s} - g(\mathbf{l})), \\ &\Rightarrow \mathbf{w} = \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Damit ergibt sich für die Verbesserungen \mathbf{v}

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^t \mathbf{k} &= -\mathbf{Q}_{ll} \mathbf{B}^t (\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^t)^{-1} \mathbf{w} \\ &= -\mathbf{Q}_{ll} \mathbf{B}^t (\mathbf{B} \mathbf{Q}_{ll} \mathbf{B}^t)^{-1} \mathbf{w} \\ &= \mathbf{Q}_{ll} \mathbf{B}^t (\mathbf{B} \mathbf{Q}_{ll} \mathbf{B}^t)^{-1} (\mathbf{s} - g(\mathbf{l})) \\ &= \mathbf{Q}_{ll} \mathbf{B}^t (\mathbf{B} \mathbf{Q}_{ll} \mathbf{B}^t)^{-1} (\mathbf{s} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{l}). \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Die ausgeglichenen Beobachtungen $l + v$ werden:

$$\begin{aligned}
 l + v &= Q_{ll} B^t (B Q_{ll} B^t)^{-1} (s - B \cdot l) + l \\
 &= \underbrace{Q_{ll} B^t (B Q_{ll} B^t)^{-1} \cdot s}_{= \text{const.}} - Q_{ll} B^t (B Q_{ll} B^t)^{-1} B \cdot l + l \\
 &= - \underbrace{Q_{ll} B^t (B Q_{ll} B^t)^{-1} B}_{B_0} \cdot l + l + \text{const.} \\
 &= -B_0 \cdot l + l + \text{const.}
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

Die Summe der gewichteten Verbesserungsquadrate ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
 v^t P v &= \underbrace{k^t B P^{-1}}_{v^t} P \underbrace{P^{-1} B^t k}_v \\
 &= k^t \underbrace{(B P^{-1} B^t)}_w k \\
 &= k^t w.
 \end{aligned} \tag{A.32}$$

Streckennetzgleichung: Übergang von vermittelnden zu bedingten Beobachtungen Eine Streckennetzgleichung nach vermittelnden Beobachtungen, die in Abhängigkeit von $u = 2 \cdot m$ Koordinaten x_0 von m Streckennetzpunkten definiert ist, soll in eine Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen überführt werden.

Gegeben seien für die vermittelnde Ausgleichung $m + r$ linearisierte Verbesserungsgleichungen nach Gl. (A.3)

$$v_{(m+r,1)} = A_{(m+r,u)} \cdot x_{(u,1)} - l_{(m+r,1)}.$$

Die Verbesserungsgleichung für eine Strecke s_{ik} sei beispielsweise wie folgt mit Index i für den Anfangspunkt, Index k für den Endpunkt, t_{ik} und t_{ki} als Richtungswinkel zwischen beiden Punkten definiert:

$$\begin{aligned}
 v_{ik} &= -\cos t_{ik} \delta x_i - \sin t_{ik} \delta y_i - \cos t_{ki} \delta x_k - \sin t_{ki} \delta y_k - l_{ik}, \\
 \text{wobei } -l_{ik} &= \left((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - s_{ik}.
 \end{aligned} \tag{A.33}$$

Die in eine bedingte Ausgleichung überführte Ausgangsgleichung wird mit Bedingungsgleichungen folgender Art definiert:

$$B_{(r,m+r)} \cdot v_{(m+r,1)} = w_{(r,1)}.$$

Nach [Wolf 1997, Wolf 1973] gilt dann zwischen beiden Koeffizientenmatrizen A und B folgende Beziehung:

$$B_{(r,m+r)} \cdot A_{(m+r,u)} = 0_{(r,u)}. \tag{A.34}$$

Wie bei der Bestimmung des statischen Hauptsystems eines analogen Fachwerks wird zwischen Streckenbeobachtungen $l_{1(m,1)}$ unterschieden, die – ohne eine Redundanz aufzubauen – für die Bestimmung der Koordinaten der Streckennetzpunkte ausreichen (= statisch bestimmtes Hauptsystem beim Fachwerk), und Streckenbeobachtungen $l_{2(r,1)}$, die zusätzlich zur Redundanz r der Streckenausgleichung beitragen. In einem Fachwerk führen diese zusätzlichen Elemente zu einem statisch unbestimmtem System.

Das funktionale Ausgangsmodell $v = A \cdot x - l$ der Streckenausgleichung lautet dann:

$$v_{1(m,1)} = A_{1(m,u)} \cdot x_{(u,1)} - l_{1(m,1)} \quad \text{und} \quad v_{2(r,1)} = A_{2(r,u)} \cdot x_{(u,1)} - l_{2(r,1)}. \tag{A.35}$$

Für die abgeleitete bedingte Ausgleichung kann nach [Wolf 1997, Wolf 1973] die Koeffizientenmatrix B und der Widerspruchsvektor w wie folgt konstruiert werden:

$$B_{(r, m+r)} = \begin{bmatrix} A_{2(r,u)} & A_1^t(u,m) & -E_{(r,r)} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad w_{(r,1)} = l_{2(r,1)} - A_{2(r,u)} A_1^t(u,m) l_{1(m,1)}, \quad (\text{A.36})$$

so dass die Bedingungsgleichungen $B \cdot v = w$ lauten:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_2 & A_1^t & -E_{(r,r)} \end{bmatrix}}_B \cdot v = \underbrace{l_2 - A_2 A_1^t l_1}_w. \quad (\text{A.37})$$

A.3. Vermittelnde Ausgleichung mit Bedingungen zwischen den Unbekannten

Gegeben sei eine vermittelnde Ausgleichung als Minimumsaufgabe

$$v^t P v \Rightarrow \min., \quad \text{und} \quad l + v = A \cdot x, \quad (\text{A.38})$$

mit den zusätzlichen linearisierten Bedingungsgleichungen für die Unbekannten x

$$B^t \cdot x = u. \quad (\text{A.39})$$

Mit den in Gl. (A.38) und (A.39) zu findenden Nebenbedingungen $l + v - A \cdot x = 0$ und $B^t \cdot x = u$ kann nach der Methode von Lagrange folgende Minimumsfunktion formuliert werden:

$$\Phi = v^t P v - 2k^t (u - B^t \cdot x) - 2k_2^t (l + v - A \cdot x). \quad (\text{A.40})$$

Partielle Ableitungen nach den Unbekannten x , den unbekanntem Verbesserungen v und den beiden Korrelationsvektoren k und k_2 führen zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 2(A^t k_2 + Bk) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= 2(Pv - k_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 = Pv, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial k} &= -2(u - B^t x) = 0 \quad \Rightarrow \quad B^t x = u, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial k_2} &= -2(l + v - A \cdot x) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = A \cdot x - l. \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Für die Korrelate k_2 lässt sich ein Zwischenausdruck aufbauen, indem die letzte Gleichung von (A.41) in die zweite Gleichung eingesetzt wird:

$$k_2 = P(A \cdot x - l). \quad (\text{A.42})$$

Der Zwischenausdruck für k_2 aus Gl. (A.42) wird in die erste Gleichung von (A.41) eingesetzt:

$$\begin{aligned} A^t P(A \cdot x - l) + Bk &= (A^t P A) \cdot x - A^t P l + Bk = 0, \\ \Rightarrow (A^t P A) \cdot x + Bk &= A^t P l. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Mit Gl. (A.43) und der dritten Gleichung von (A.41) lässt sich folgendes Normalgleichungssystem aufbauen:

$$\begin{bmatrix} A^t P A & B \\ B^t & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^t P l \\ u \end{bmatrix}. \quad (\text{A.44})$$

Das Normalgleichungssystem wird weiter ausmultipliziert und ergibt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} (A^t P A) x + B k &= A^t P l, \\ B^t x &= u. \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Die zweite Zeile von Gl. (A.43) kann nach den Unbekannten x wie folgt aufgelöst werden:

$$x = (A^t P A)^{-1} \cdot (A^t P l - B k). \quad (\text{A.46})$$

Die erste Zeile von (A.45) wird mit $-B^t \cdot (A^t P A)^{-1}$ multipliziert und zur zweiten Zeile addiert. Man erhält:

$$\begin{aligned} \underbrace{-B^t \cdot (A^t P A)^{-1} \cdot (A^t P A) x + B^t x - B^t \cdot (A^t P A)^{-1} B k}_{= E} &= -B^t \cdot (A^t P A)^{-1} (A^t P l) + u, \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{= 0} & \\ B^t \cdot (A^t P A)^{-1} B k &= B^t \cdot (A^t P A)^{-1} (A^t P l) - u. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Für den Korrelatenvektor k ergibt sich:

$$\begin{aligned} k &= (B^t \cdot (A^t P A)^{-1} B)^{-1} \cdot \underbrace{(B^t \cdot (A^t P A)^{-1} (A^t P l) - u)}_{= w}, \\ k &= (B^t \cdot (A^t P A)^{-1} B)^{-1} \cdot w. \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Mit den in Gl. (A.48) bestimmten Korrelaten k lässt sich der Ausdruck für die Unbekannten x in Gl. (A.46) weiter umformen:

$$\begin{aligned} x &= (A^t P A)^{-1} \cdot (A^t P l - B k), \\ x &= (A^t P A)^{-1} \cdot \left(A^t P l - B (B^t \cdot (A^t P A)^{-1} B)^{-1} \cdot w \right). \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Mit dem Widerspruchsvektor w aus Gl. (A.48) und dem für $(A^t P A)^{-1}$ substituierten Symbol N^{-1} ergibt sich für die Unbekannten x folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} x &= N^{-1} A^t P l - N^{-1} B (B^t N^{-1} B)^{-1} B^t N^{-1} A^t P l - u, \\ x &= \underbrace{(N^{-1} - N^{-1} B (B^t N^{-1} B)^{-1} B^t N^{-1})}_{\tilde{N}^{-1}} A^t P l - u. \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Die Kofaktorenmatrix Q_{xx} ist identisch zu \tilde{N}^{-1} und damit

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= N^{-1} - N^{-1} B (B^t N^{-1} B)^{-1} B^t N^{-1} \\ &= (A^t P A)^{-1} - (A^t P A)^{-1} B (B^t (A^t P A)^{-1} B)^{-1} B^t (A^t P A)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Die Verbesserungen v ergeben sich aus:

$$\begin{aligned} v &= A x - l, \\ v &= A (A^t P A)^{-1} \cdot (A^t P l - B k) - l, \\ v &= \hat{l} - l. \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

A.4. Bedingte Ausgleichung mit Unbekannten

Bei der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen mit Unbekannten enthalten die Definitionen der Bedingungsgleichungen neben ausgeglichenen Beobachtungen auch Unbekannte.

Die b Beobachtungsgleichungen $g(\hat{l}, \hat{x}) = u$ mit n Beobachtungen und u Unbekannten sind in Anlehnung an [Gotthardt 1968] wie folgt aufgebaut:

$$\begin{aligned} g_1(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \dots, l_n + v_n, x_1, x_2, \dots, x_u) &= u_1 \\ g_2(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \dots, l_n + v_n, x_1, x_2, \dots, x_u) &= u_2 \\ \vdots & \\ g_b(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \dots, l_n + v_n, x_1, x_2, \dots, x_u) &= u_b \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Falls die Bedingungsgleichungen g in Gl. (A.53) nicht linear sind, werden sowohl für die Unbekannten x als auch für die Beobachtungen l Näherungswerte eingeführt und anschließend die Bedingungsgleichungen g nach Taylor wie folgt linearisiert:

$$g(\hat{l}, \hat{x}) = g(l, x_0) + \underbrace{\frac{\partial g(l, x_0)}{\partial l}}_{B_{(b,n)}} \underbrace{(\hat{l} - l)}_{v_{(n,1)}} + \underbrace{\frac{\partial g(l, x_0)}{\partial x_0}}_{A_{(b,u)}} \underbrace{(\hat{x} - x_0)}_{\Delta \hat{x}_{(u,1)}} = u_{(b,1)} \quad (\text{A.54})$$

mit den Jakobimatrizen

$$B_{(b,n)} = \frac{\partial g(l, x_0)}{\partial l} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial l_1} & \frac{\partial g_1}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial l_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial l_1} & \frac{\partial g_2}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial l_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_b}{\partial l_1} & \frac{\partial g_b}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial g_b}{\partial l_n} \end{bmatrix} \quad (\text{A.55})$$

und

$$A_{(b,u)} = \frac{\partial g(l, x_0)}{\partial x_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_u} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_b}{\partial x_1} & \frac{\partial g_b}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_b}{\partial x_u} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.56})$$

Die bedingte Ausgleichung mit Unbekannten besitzt ein funktionales Modell der Form

$$B \cdot v + A \cdot \Delta \hat{x} = w \quad (\text{A.57})$$

und wird als Minimumsaufgabe wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} v^t P v &\Rightarrow \min., \quad \text{und} \quad B \cdot v + A \cdot \Delta \hat{x} = w, \\ \Phi &= v^t P v - 2k^t (B \cdot v + A \cdot \Delta \hat{x} - w). \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Partielle Ableitungen nach den Verbesserungen v , dem Korrelatenvektor k und den Unbekannten x ergeben

folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= 2 P v - 2 B^t k = 0 \quad \Rightarrow \quad P v = B^t k, \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial k} &= B \cdot \hat{v} + A \cdot \Delta \hat{x} - w = 0, \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= -2 A^t k = 0 \quad \Rightarrow \quad A^t k = 0.
 \end{aligned}
 \tag{A.59}$$

Aus der mit P^{-1} multiplizierten ersten Gleichung von (A.59) folgt die Korrelatengleichung

$$v = P^{-1} B^t k. \tag{A.60}$$

Die zweite Gleichung von (A.59), in die die Korrelatengleichung (A.60) eingesetzt wird, und die dritte Gleichung von (A.59) führen zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 B^t P^{-1} B k + A \Delta x &= w, \\
 A^t k &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{A.61}$$

In Matrizenschreibweise:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} B^t P^{-1} B & A \\ A^t & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ \Delta x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 \begin{bmatrix} k \\ \Delta x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B^t P^{-1} B & A \\ A^t & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{A.62}$$

Das Gleichungssystem ergibt aufgelöst:

$$\begin{aligned}
 \Delta x &= \left\{ A^t (B^t P^{-1} B)^{-1} A \right\}^{-1} A^t (B^t P^{-1} B)^{-1} w, \\
 k &= (B^t P^{-1} B)^{-1} (w - A \Delta x), \\
 v &= P^{-1} B^t k,
 \end{aligned}
 \tag{A.63}$$

und die Kofaktorenmatrix Q_{xx} wird:

$$Q_{xx} = \left\{ A^t (B^t P^{-1} B)^{-1} A \right\}^{-1}. \tag{A.64}$$

Literatur

- Ackermann, W. (1928). »Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen«. In: *Mathematische Annalen* 99, S. 118–133.
- Aho, A. V., J. E. Hopcroft und J. D. Ullmann (1974). *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Ahrens, B. und K.-H. Böhmer (2010). »NTv2-Gitterdateien zur Überführung katasterbezogener Datenbestände ins ETRS«. In: *zfv - Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement, Heft 1/2010*, 135, S. 16–20.
- Altenbach, H. (2018). *Kontinuumsmechanik*. 4. Auflage. Springer Vieweg Verlag. ISBN: 978-3-662-57503-1.
- Altenbach, H., J. Altenbach und K. Naumenko (2016). *Ebene Flächentragwerke*. Springer Verlag. ISBN: 978-3-662-47230-9.
- Arens, T., F. Hettlich, C. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger und H. Stachel (2015). *Mathematik*. Springer Spektrum. ISBN: 978-3-642-44918-5.
- Argyris, J. H. (1964). »Recent advances in matrix methods of structural analysis«. In: *Progress in Aeronautical Sciences*. Pergamon Press.
- Argyris, J. H. und S. Kelsey (1960). *Energy Theorems and Structural Analysis*. Originally published in a series of articles in *Aircraft Engineering* Oct., Nov, 1954; Feb., March, April, May, 1955. Butterworth & Co. (Publishers) Ltd.
- Argyris, J. H. und D. Scharpf (1971). »Berechnung vorgespannter Netzwerke«. In: *Sitzungsbericht der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse, Bayerische Akademie der Wissenschaften*, S. 25–58.
- Ashcraft, C. und R. Grimes (1989). »The influence of relaxed supernode partitions on the multifrontal method.« In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 15, S. 291–309.
- Ashcraft, C., R. Grimes, J. Lewis, B. Peyton und H. Simon (1987). »Progress in sparse matrix methods for large linear systems on vector supercomputers.« In: *The International Journal of Supercomputing Applications*. 1.4, S. 10–30.
- Aurenhammer, F. (1991). »Voronoi Diagrams – a Survey of a Fundamental Geometric Data Structure«. In: *ACM Computing Surveys* 23.3, S. 345–405.
- Baarda, W. (1968). »A testing procedure for use in geodetic networks«. In: *Publications on geodesy. Netherlands Geodetic Commission* 2.5, S. 1–97.
- Bahndorf, J. (1991). »Zur Systematisierung der Seilnetzrechnung und zur Optimierung von Seilnetzen«. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München. Heft C 387. Dissertation. Universität Stuttgart.
- Barnes, M. R. (1977). »Form finding and analysis of tension space structures by dynamic relaxation.« Dissertation. City University London.
- Barthold, F.-J. (2013). »Einführung in die lineare Finite Elemente Methode: Stabtragwerke«. In: *Skriptum zum Studiengang BSc Bauingenieurwesen*.
- Benning, W. (1995). »Nachbarschaftstreue Restklaffenverteilung für Koordinatentransformationen«. In: *Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV)*, Heft 1/1995, 120, S. 16–25.
- (1996). »Zur Homogenisierung und Fortführung von grossmassstäblichen Karten.« In: *Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik*, 2, S. 75–80.
- Benning, W. und T. Scholz (1990). »Modell und Realisierung der Kartenhomogenisierung mit Hilfe strenger Ausgleichungstechniken«. In: *Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV)*, Heft 2/1990, 115, S. 45–55.
- (2010). »Zum Lagebezugswechsel ETRS89/UTM mittels Homogenisierung«. In: *Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV)*, Heft 1/2010, 135, S. 10–15.
- Bletzinger, K.-U. (2017a). *Statik 1*. Manuskript zur Vorlesung. Technische Universität München.
- (2017b). *Statik 2*. Manuskript zur Vorlesung. Technische Universität München.

- Bletzinger, K.-U. und E. Ramm (1999). »A General Finite Element Approach to the Form Finding of Tensile Structures by the Updated Reference Strategy«. In: *International Journal of Space Structures* 14.2, S. 131–145.
- Borre, K. (2001). *Plane Networks and their Applications*. Birkhäuser Verlag GmbH. Boston.
- Chen, Y., T. A. Davis, W. Hager und S. Rajamanickam (2008). »Algorithm 887: Cholmod, supernodal sparse Cholesky factorization and update/downdate.« In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 35.3, S. 1–23.
- Ciarlet, P. G. (1988). *Mathematical Elasticity: Three-dimensional Elasticity, Volume I, Studies in Mathematics and its Applications*. Elsevier Science Ltd. ISBN: 0-444-70259-8.
- Dahmen, W. und A. Reusken (2008). *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag. ISBN: 978-3-540-76492-2.
- Dallmann, R. (2015a). *Baustatik 1. Berechnung statisch bestimmter Tragwerke*. 5., aktualisierte Auflage. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag.
- (2015b). *Baustatik 2. Berechnung statisch bestimmter Tragwerke*. 4., aktualisierte Auflage. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag.
- Davis, T., S. Rajamanickam und W. Sid-Lakhdar (2016). »A survey of direct methods for sparse linear systems.« In: *Acta Numerica* 25, S. 383–566.
- Davis, T. A. (2006). *Direct Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial und Applied Mathematics. ISBN: 978-0-89871-613-9.
- (2011). »Algorithm 9xx, SuiteSparseQR: multifrontal multithreaded rank-revealing sparse QR factorization.« In: *ACM Transactions on Mathematical Software*, S. 1–24.
- (2016). »User Guide for LDL, a concise sparse Cholesky package. Version 2.2.6.« In: S. 1–11.
- Davis, T. A. und W. Hager (2009). »Dynamic Supernode in Sparse Cholesky Update/Downdate and Triangular Solves«. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 35.4.
- Demmel, J. (1989). *On floating point errors in Cholesky*. Technical Report. USA.
- Dieringer, F. (2014). »Numerical Methods for the Design and Analysis of Tensile Structures«. Dissertation. Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München.
- Dinkler, D. (2014). *Grundlagen der Baustatik. Modelle und Berechnungsmethoden für ebene Stabtragwerke*. Springer Vieweg Verlag. ISBN: 978-3-658-05171-6.
- Dongarra, J. J., J. Du Croz, S. Hammarling und I. S. Duff (1990). »A Set of Level 3 Basic Linear Algebra Subprograms«. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 16.1, S. 1–17.
- Falkenberg, T. (1993). »Genauigkeitsmaße in geodätischen Netzen und ihre elastostatischen Analogien«. Dissertation. Geodätisches Institut, Technische Universität München.
- Fang, H.-R. und Y. Saad (2012). »A Filtered Lanczos Procedure for Extreme and Interior Eigenvalue Problems«. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 34.
- Felippa, C. A. (2004). *Introduction to Finite Element Methods*. Hrsg. von U. o. C. Boulder. Lecture Notes for the course Introduction to Finite Elements Methods (ASEN 5007), S. 1–S. 733.
- Finsterwalder, S. (1899). »Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation«. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematischen Vereinigung, Band 6*, S. 45–90.
- (1903). »Bemerkungen zur Analogie zwischen Aufgaben der Ausgleichsrechnung und solchen der Statik«. In: *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften* 33, S. 683–689.
- Gabow, H. N. und R. E. Tarjan (1983). »A Linear-Time Algorithm for a Special Case of Disjoint Set Union«. In: *Proceedings of the 15th annual ACM symposium on Theory of computing*, S. 246–251.
- George, A., M. T. Heath und J. W. Liu (1986). »Parallel Cholesky factorization on a shared-memory multiprocessor«. In: *Linear Algebra and its Applications* 77, S. 165–187.
- George, A. und J. W. Liu (1980). »A Fast Implementation of the Minimum Degree Algorithm Using Quotient Graphs«. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 6.3, S. 337–358.
- (1981). *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite*. Prentice Hall Professional Technical Reference. ISBN: 0131652745.
- Gielsdorf, F. und L. Gründig (1997). »Nachbarschaftstreue Anpassung auf der Basis des Membranmodells«. In: *Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV), Heft 5/1997*, 122, S. 208–218.

- Gielsdorf, F., L. Gründig und B. Aschoff (2003). »Geo-Referencing of Analogue Maps with Special Emphasis on Positional Accuracy Improvement Updates«. In: *FIG Working Week 2003 Paris, France, April 13-17, 2003*, S. 1–8.
- (2004). »Positional Accuracy Improvement - A Necessary Tool for Updating and Integration of GIS data«. In: *FIG Working Week 2004 Athens, Greece, Mai 22-27, 2004*, S. 1–14.
- Gilbert, G. L., E. G. Ng und B. W. Peyton (1994). »An efficient algorithm to compute row and column counts for sparse Cholesky factorization.« In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 15.4, S. 1075–1091.
- Gilbert, J. (1994). »Predicting Structure in Sparse Matrix Computation«. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 15.1, S. 62–79.
- Gilbert, J. R., X. S. Li, E. G. Ng und B. W. Peyton (2001). »Computing Row and Column Counts for Sparse QR und LU Factorization.« In: *BIT Numerical Mathematics* 41.4, S. 693–710.
- Gilbert, J. R. und T. Peierl (1988). »Sparse Partial Pivoting in Time Proportional in Arithmetic Operation«. In: *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 9.5, S. 862–874.
- Glock, C., R. Bauer, T. Wunderlich, R. Pail und K.-U. Bletzinger (2019). »Das Ortra-Verfahren für die Überführung des Liegenschaftskatasters nach ETRS89/UTM in Bayern«. In: *zfv - Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement, Heft 1/2019*, 144, S. 25–40.
- Glock, C. und H. Birkenbeul (2018). »ETRS89/UTM-Umformungsstrategie in Bayern für das Liegenschaftskataster - Umformungsverfahren und Möglichkeiten der Umsetzung.« In: *Publikationen der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie, Fernerkundung und Geoinformation, Band 27, Tagungsband zur Wissenschaftlich-Technischen Jahrestagung der DGPF und DGfK*, S. 20–32.
- Glock, C. und E. Fischer (2020). »UTM-Umstellung des Liegenschaftskatasters im Projekt KanU«. In: *Mitteilungsblatt DVW Bayern, Heft 2/2020*, S. 145–161.
- Golub, G. H. und C. F. Van Loan (1996). *Matrix Computations*. 3. Edition. The Johns Hopkins University Press.
- Görres, B. und A. Nothnagel (2012). »Übergeordnete geodätische Koordinaten in Deutschland heute – Teil 1: Globale Koordinatensysteme und ihre Realisierungen«. In: *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), Heft 3/2012*, 119, S. 104–112.
- Goto, K. und R. A. van de Geijn (2008). »Anatomy of High-Performance Matrix Multiplication«. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 34.3, S. 1–25.
- Gotthardt, E. (1968). *Einführung in die Ausgleichsrechnung*. Karlsruhe: Herbert Wichmann Verlag.
- Gould, N., J. A. Scott und Y. Hu (2007). »A Numerical Evaluation of Sparse Direct Solvers for the Solution of Large Sparse Symmetric Linear Systems of Equations«. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 33.2, S. 1–32.
- Gross, D., W. Hauger, J. Schröder und W. A. Wall (2014). *Technische Mechanik 2. Elastostatik*. Springer Vieweg Verlag.
- Großmann, W. (1969). *Grundzüge der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate nebst Anwendung in der Geodäsie*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag.
- Gründig, L. (1975). »Die Berechnung vorgespannter Seil- und Hängenetze unter Berücksichtigung ihrer topologischen und physikalischen Eigenschaften und der Ausgleichsrechnung«. Mitteilungen 1975/34. Dissertation. SFB 64, Universität Stuttgart.
- (2003). »Grundlagen der Ausgleichsrechnung«. In: *Ausgleichsrechnung I, Vorlesungsskript Technische Universität Berlin*.
- Gründig, L., E. Moncrieff, P. Singer und D. Ströbel (2000). »A history of the principal developments and applications of the force density method in Germany 1970-1999«. In: *IASS-IACM 2000, Fourth International Colloquium on Computation of Shell and Spatial Structures*.
- Gründig, L., D. Ströbel und P. Singer (2003). »Recent Developments in the Analytical Design of Textile Membranes«. In: *Textile Composites and Inflatable Structures. Computational Methods in Applied Sciences*. Volume 3. Hrsg. von E. Onate und B. Kröplin. Springer Verlag, S. 29–46.
- Hammer, E. (1911). »Zur Ausgleichung von Streckennetzen«. In: *Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV)* 19, S. 517–532.

- Hampp, D. (1992). »Digitalisierung, Homogenisierung und numerische Fortführung, ein schneller Weg zur aktuellen Digitalen Flurkarte«. In: *Mitteilungsblatt DVW Bayern, Heft 3/1992*, S. 239–252.
- Hampp, D. und C. Glock (2017). »Ein ausgeglichenes Bayern«. In: *Mitteilungsblatt DVW Bayern, Heft 2/2017*, S. 115–135.
- Haponowicz, N. (1912). »Eine Studie über Ausgleichung von Polygonzügen«. In: *Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen*, S. 38–46.
- Hardy, R. (1972). »Geodetic applications of multiquadric analysis«. In: *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), Heft 10/1972*, 9, S. 398–406.
- (1990). »Theory and Applications of the Multiquadric-Biharmonic Method«. In: *Computers Math. Applications* 19.No. 8/9, S. 163–208.
- Heidenreich, S., B. Makoschey und K.-H. Nerkamp (2017). *Geschichte des Liegenschaftskatasters, Das Liegenschaftskataster von 1950 - 2015*. LGV-Sonderheft 8. Landesbetrieb Geoinformation und Vermessung, Freie und Hansestadt Hamburg.
- Helm, F. (1995). »Von der Feldskizze zum Digitalen Feldplan«. In: *VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation* 83.4, S. 200–208.
- (1998). »Strenge Geometrisierung und Rektifizierung manueller Skizzen für geodätische Aufnahmeprozesse«. Dissertation. Institut für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie, Technische Universität Wien.
- Helmert, F. R. (1880). *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*. B. G. Teubner Verlag, Leipzig.
- (1907). *Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie, die Physik und die Theorie der Messinstrumente*. 2. Auflage. B. G. Teubner Verlag, Leipzig und Berlin.
- Hestenes, M. R. und E. Stiefel (1952). »Methods of conjugate gradients for solving linear systems«. In: Bd. 49. 6.
- Hettwer, J. (2003). »Numerische Methoden zur Homogenisierung großer Geodatenbestände«. Dissertation. Geodätisches Institut, RWTH Aachen.
- Hettwer, J. und W. Benning (2000). »Nachbarschaftstreue Koordinatenberechnung in der Kartenhomogenisierung«. In: *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), Heft 6/2000*, 107, S. 122–129.
- (2003). »Restklaffenverteilung mit der Natural-Neighbour-Interpolation«. In: *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), Heft 4/2003*, 110, S. 122–129.
- Heunecke, O. (2018). »Nachbarschaftstreue Anpassung mittels bilinearer Filterung«. In: *zfv - Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement, Heft 3/2018*, 143, S. 177–184.
- Higham, N. J. (2002). *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. 2nd. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). ISBN: 0898715210.
- Holzapfel, G. A. (2006). *Nonlinear Solid Mechanics, A Continuum Approach for Engineering*. John Willey & Sons, Ltd.
- Itskov, M. (2018). *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers: With Applications to Continuum Mechanics (Mathematical Engineering)*. 5. Edition. Springer Verlag. ISBN: 978-3-319-98806-1.
- Jerie, H. G. (1958). »Block Adjustment by Means of Analogue Computers«. In: *Photogrammetria* 1958.14, S. 161–176.
- Joos, G. und C. Glock (2016). »Bezugssystemwechsel auf ETRS89/UTM«. In: *Donaubauer, A., Kolbe, T. (Hrsg.): Leitfaden Runder Tisch GIS e. V., Grundlagen, Kap. 2, München*, S. 16–45.
- Kampshoff, S. (2005). »Integration heterogener raumbezogener Objekte aus fragmentierten Geodatenbeständen«. Dissertation. Geodätisches Institut, RWTH Aachen.
- Kampshoff, S. und W. Benning (2002). »Integrierte Verarbeitung der Daten des Liegenschaftskataster einschließlich Homogenisierung«. In: *zfv - Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement, Heft 1/2002*, S. 9–18.
- (2005). »Homogenisierung von Massendaten im Kontext von Geodaten-Infrastrukturen«. In: *Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV), Heft 1/2005*, 127, S. 133–145.
- Kaya, K. und B. Uçar (2013). »Constructing elimination trees for sparse unsymmetric matrices«. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 34.2, S. 345–354.

- Koch, A. (2017). »Vergleich der Auswirkungen von Netzspannungen auf die Geometrie von Gebäuden beim Datumsübergang mit dem Ortra-Verfahren und der klassischen Transformation mit Interpolation«. Bachelorarbeit. Hochschule München, Studiengang Geoinformatik und Satellitenpositionierung.
- Koch, K.-R. (2004). *Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen*. 4. Auflage. ehemals Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn.
- Krarup, T. (1967). »The theory of rounding errors in the adjustment by elements of geodetic networks«. In: *Bulletin Géodésique* 84, S. 117–122.
- Krätzig, W. B., R. Harte, C. Könke und Y. S. Petryna (2019). *Tragwerke 2*. 5. Auflage. Theorie und Berechnungsmethoden statisch unbestimmter Stabtragwerke. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag. ISBN: 978-3-642-41723-8.
- Krätzig, W. B., R. Harte, K. Meskouris und U. Wittek (2010). *Tragwerke I*. 5. Auflage. Theorie und Berechnungsmethoden statisch bestimmter Stabtragwerke. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag. ISBN: 978-3-642-12283-5.
- Kreyszig, E. (1968). *Differentialgeometrie*. 2nd. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.
- Lawson, C. L., R. J. Hanson und D. P. Kincaid (1979). »Basic linear algebra subprograms for Fortran usage«. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 5, S. 308–323.
- Linkwitz, K. (1960a). »Fehlertheorie und Ausgleichung von Streckennetzen nach der Theorie elastischer Systeme«. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in Kommission der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München. Dissertation. Geodätisches Institut, Technische Hochschule München.
- (1960b). »Über die Systematik verschiedener Formen der Ausgleichungsrechnung«. In: *Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV)*, 5, S. 156–166.
- (1976). »Die Berechnung vorgespannter Seilnetze als Aufgabe der Ausgleichsrechnung«. In: *Internationaler Kurs für Ingenieurmessungen hoher Präzision*, S. 79–93.
- (1977). »Über ein neue Anwendung der Gauß'schen Methode der kleinsten Quadrate: Die Formfindung und statische Analyse von räumlichen Seil- und Hängennetzen.« In: *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 27*. Verlag Erich Goltze KG, Göttingen, S. 121–153.
- (1988). »Einige Bemerkungen zur Fehlerellipse und zum Fehlerellipsoid«. In: *Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik*, S. 345–358.
- (1999). »Formfinding by the Direct Approach and pertinent strategies for the conceptual design of prepressed and hanging structures.« In: *International Journal of Space Structures* 14, S. 73–88.
- Linkwitz, K., J. Bahndorf, R. Hördt, D. Ströbel und P. Singer (1993). »Least Square Methods in Nonlinear Formfinding and Analysis of Prestressed and Hanging Nets«. In: *Proceedings of SEIKEN-IASS Symposium of Nonlinear Analysis and Design for Shell and Spatial Structures*, S. 601–610.
- Linkwitz, K., L. Gründig, J. Bahndorf, M. Neureither und D. Ströbel (1987). »Strategies for Formfinding and Design of Cutting-patterns for large sensitive Membrane Structures«. In: *International Conference on Design and Construction of non-conventional Structures*.
- Linkwitz, K. und H.-J. Schek (1971). »Einige Bemerkungen zur Berechnung von vorgespannten Seilnetzkonstruktionen«. In: *Archive of Applied Mechanics* 40.3, S. 145–158.
- (1972). »Über eine Methode zur Berechnung vorgespannter Seilnetze und ihre praktische Anwendung auf die Olympiadächer München«. In: *IABSE congress report* 9, S. 393–397.
- Linkwitz, K., H.-J. Schek und L. Gründig (1974). »Die Gleichgewichtsberechnung von Seilnetzen unter Zusatzbedingungen«. In: *Ingenieur-Archiv* 43, S. 183–192.
- Liu, J. W. (1986). »A Compact Row Storage Scheme for Cholesky Factors Using Elimination Trees«. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 12.2, S. 127–148.
- (1987). »A Note on Sparse Factorization in a Paging Environment«. In: *SIAM Journal on Scientific Computing*. 8.6, S. 1085–1088.
- (1990). »The Role of Elimination Trees in Sparse Factorization«. In: *Siam Journal on Matrix Analysis and Applications* 11.1, S. 134–172.
- (1993). »On finding supernodes for sparse matrix computations«. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 14.1, S. 242–252.
- Lother, G. (2020). »Berechnungen mit UTM-Koordinaten im neuen amtlichen Koordinatenreferenzsystem in Bayern - ETRS89_UTM«. In: *Mitteilungsblatt DVW Bayern, Heft 2/2020*, S. 121–133.

- Mang, H. A. und G. Hofstetter (2013). *Festigkeitslehre*. 4. Auflage. Springer Vieweg Verlag.
- Neureither, M. (1992). »Modellierung geometrisch-topologischer Daten zur Beschreibung und Berechnung netzartiger und flächenhafter Strukturen«. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München. Heft C 387. Dissertation. Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen, Universität Stuttgart.
- Ng, E. G. und B. W. Peyton (1993). »Block Sparse Cholesky Algorithms on Advanced Uniprocessor Computers«. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 14, S. 1034–1056.
- Niemeier, W. (2008). *Ausgleichsrechnung. Statistische Auswertemethoden*. 2. Auflage. Walter de Gruyter Verlag.
- Ogden, R. (1997). *Non-linear Elastic Deformations*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications. ISBN: 978-0-486-69648-5.
- Overhoff, W. (1994). »Fehlerverteilung nach Winkel- und Abstandsgewichten bei der Koordinatentransformation.« In: *Vermessungswesen und Raumordnung* 46, S. 210–215.
- Parisch, H. (2003). *Festkörper-Kontinuumsmechanik*. B. G. Teubner Verlag. ISBN: 978-3-519-00434-9.
- Parter, S. (1961). »The Use of Linear Graphs in Gauss Elimination.« In: *SIAM Review* 3.2, S. 119–130.
- Passer, W. (1933). »Über die Anwendung statischer Methoden auf den Ausgleich von Liniennetzen«. In: *Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen*, S. 66.
- Pothen, A. und C. Sun (1990). »Compact clique tree data structures in sparse matrix factorizations.« In: Hrsg. von T. F. Coleman und e. Li Y. *SIAM Proceedings in Applied Mathematics*. Kap. 12, S. 180–204.
- Rauber, T. und G. Rüniger (2000). *Parallele und verteilte Programmierung*. Springer Verlag. ISBN: 978-3-540-66009-5.
- Roschlaub, R. (1999). »Klassifikation und Interpolation mittels affin invarianter Voronoidiagrammen auf der Basis eines Wahrscheinlichkeitsmaßes in großmaßstäbigen Geoinformationssystemen.« Dissertation. Fachgebiet Geoinformationssysteme, Geodätisches Institut, Technische Universität München.
- Rose, A. (1988). »Geraden- und Rechtwinkelausgleichung bei der Digitalisierung von Katasterkarten«. In: *Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV)*, Heft 4/1988, 113, S. 581–587.
- Rose, D. (1972). »A Graph Theoretic Study of the Numerical Solution of Sparse Postive Definite Systems of Linear Equations«. In: *Graph Theory and Computing*, S. 183–217.
- Rose, D., R. Tarjan und G. Lueker (1976). »Algorithmic Aspects of Vertex Elimination on Graphs.« In: *SIAM Journal on Computing* 5.2, S. 266–283.
- Saad, Y. (2003). *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Philadelphia: Society for Industrial und Applied Mathematics (SIAM). ISBN: 0898715342.
- Saad, Y. und M. Schultz (1986). »A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems«. In: *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 7.
- Schaback, R. und H. Wendland (2004). *Numerische Mathematik*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag. ISBN: 978-3-540-21394-9.
- Schek, H.-J. (1974). »The Force Densities Method for Form Finding and Computation of General Networks«. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, S. 115–134.
- (1975). »Least-Squares-Lösungen und optimale Dämpfung bei nichtlinearen Gleichungssystemen im Zusammenhang mit der bedingten Ausgleichung«. In: *Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV)*, Heft 2/1975, 100, S. 67–77.
- Schek, H.-J. und P. Maier (1976). »Nichtlineare Normalgleichungen zur Bestimmung der Unbekannten und deren Kovarianzmatrix«. In: *Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV)*, Heft 4/1976, 101, S. 149–159.
- Schnädelbach, K. (1998). »Die konforme Abbildung von C. F. Gauß.« In: *Lehrmaterialien zur Landesvermessung, Vorlesungsskript Technische Universität München (unveröffentlicht)*.
- Scholz, T. (1992). »Zur Kartenhomogenisierung mit Hilfe strenger Ausgleichungsmethoden«. Dissertation. Geodätisches Institut, RWTH Aachen.
- Schreiber, R. (1982). »A New Implementation of Sparse Gaussian Elimination«. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 8.3, S. 256–276.
- Schwedfsky, K. (1963). *Grundriß der Photogrammetrie*. 6., neubearbeitete und erweiterte Auflage. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft.

- Sherman, A. (1975). »On the efficient solution of sparse systems of linear and nonlinear equations.« Dissertation. Dept. of Computer Science, Yale University, New Haven, CT.
- Sigl, R. (1973). *Einführung in die Potentialtheorie*. Karlsruhe: H. Wichmann. ISBN: 3-87907-031-8.
- Singer, P. (1995). »Die Berechnung von Minimalflächen, Seifenblasen, Membrane und Pneus aus geodätischer Sicht.« Dissertation. Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen, Universität Stuttgart.
- Stein, E. und F.-J. Barthold (1996). »Elastizitätstheorie.« In: *Mehlhorn, G. (Hrsg.): Der Ingenieurbau, Grundwissen: Werkstoff, Elastizitätstheorie.*, S. 165–428.
- Ströbel, D. (1995). »Die Anwendung der Ausgleichsrechnung auf elastomechanische Systeme.« Dissertation. Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen, Universität Stuttgart.
- Tarjan, R. E. (1975). *Applications of Path Compression on Balanced Trees*. Technical Report. Stanford University.
- (1983). *Data Structures and Network Algorithms*. Society for Industrial und Applied Mathematics.
- Truesdell, C. und W. Noll (2004). *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. 3. Edition. Springer Verlag. ISBN: 978-3-642-05701-4.
- Turau, V. und C. Weyer (2015). *Algorithmische Graphentheorie*. Walter de Gruyter Verlag. ISBN: 978-3-110-41727-2.
- Veenendaal, D. und P. Block (2012). »An overview and comparison of structural form finding methods for general networks.« In: *International Journal of Solids and Structures* 49, S. 3741–3753.
- Wagenhöfer, F. (2013). »Untersuchung von Verfahren zum Übergang von GK nach UTM.« Diplomarbeit. Fakultät Kunststofftechnik und Vermessung, Hochschule für angewandte Wissenschaften Würzburg-Schweinfurt.
- Wang, Q., X. Zhang, Y. Zhang und Q. Yi (2013). »AUGEM: Automatically generate high performance Dense Linear Algebra kernels on x86 CPUs.« In: *SC '13: Proceedings of the International Conference on High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*, S. 1–12.
- Wellisch, S. (1907). »Über die Prinzipien der Ausgleichsrechnung.« In: *Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV)*.
- Westergaard, H. M. (1915). »Anwendung der Statik auf die Ausgleichsrechnung.« Dissertation. Geodätisches Institut, Technische Hochschule München.
- Wiens, H. (1986). »Flurkartenerneuerung mittels Digitalisierung und numerischer Bearbeitung unter besonderer Berücksichtigung des Zusammenschlusses von Inselkarten zu einem homogenen Rahmenkartenwerk.« Kirschbaum-Verlag, Bonn. Dissertation. Universität Bonn.
- Wieser, A., W. Lienhart und F. Brunner (2003). »Nachbarschaftstreue Transformation zur Berücksichtigung von Spannungen im amtlichen Festpunktfeld.« In: *Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Geoinformation* 91.2, S. 115–121.
- Wolf, H. (1973). »Über die Handhabung einer Koeffizienten-Relation zwischen bedingter und vermittelnder Ausgleichung.« In: *Hristow-Festschrift*, S. 85ff.
- (1997). *Ausgleichsrechnung I und II*. 3. Auflage. Ferdinand Dümmlers Verlag.
- Wriggers, P. (2001). *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer Verlag. ISBN: 978-3-540-67747-5.
- Wübber, G., M. Bachmann und M. Schmitz (2004). »Bundesweite präzise eindeutige 3D-Transformation zwischen homogenen ETRS89 und amtlichen Landeskoordinaten mit Geo++ GNTRANS.« In: *Kolloquium „Einheitliche Lage- und Höhenbezugssysteme für Geodaten“*.
- Wüchner, R. (2006). »Mechanik und Numerik der Formfindung und Fluid-Struktur-Interaktion von Membrantragwerken.« Dissertation. Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München.
- Wüchner, R. und K.-U. Bletzinger (2005). »Stress-adapted numerical form finding of pre-stressed surfaces by the updated reference strategy.« In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 64, S. 143–166.
- Wunderlich, W. und G. Kiener (2004). *Statik der Stabtragwerke*. 1. Auflage. Vieweg+Teubner Verlag. ISBN: 978-3-519-05061-2.
- Zöllner, M. (2016). »ETRS89/UTM Baden-Württemberg stellt um.« In: *Geodätisches Kolloquium am KIT Karlsruhe am 27.10.2016*, S. 1–52.
- Zurmühl, R. und S. Falk (1997). *Matrizen und ihre Anwendungen I: Grundlagen für Ingenieure, Physiker und Angewandte Mathematiker*. 7. Auflage. Springer Verlag. ISBN: 3-540-61436-2.

Symbolverzeichnis

Kontinuumsmechanik

κ_R	Referenzkonfiguration	κ_M	Momentankonfiguration
\mathbf{X}	Ortsvektor eines materiellen Punktes des Kontinuums in κ_R	\mathbf{x}	Ortsvektor eines materiellen Punktes des Kontinuums in κ_M
$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$	Verschiebungsvektor Ortsvektor \mathbf{X} in κ_R und t	Parameter: $\chi(\mathbf{X}, t)$	Platzierungsfunktion, Ortsvektor \mathbf{X} in κ_R und t
$d\mathbf{X}$	Differential des Ortsvektors \mathbf{X} in κ_R	$d\mathbf{x}$	Differential des Ortsvektors \mathbf{x} in κ_M
\mathbf{F}	materieller Deformationsgradient	\mathbf{F}^{-1}	räumlicher Deformationsgradient
\mathbf{H}	materieller Verschiebungsgradient	$\bar{\mathbf{H}}$	räumlicher Verschiebungsgradient
$\det F$	Jacobi-Determinante	δ_α^β	Kronecker-Symbol
χ_*	Push-forward-Operation	χ_*^{-1}	Pull-back-Operation
\mathbf{C}	rechter Cauchy-Green-Deformations-tensor	\mathbf{b}	linker Cauchy-Green-Deformations-tensor
$I_C^{(i)}$	Invarianten des rechten Cauchy-Green-Deformationstensors	$I_b^{(i)}$	Invarianten des linken Cauchy-Green-Deformationstensors
\mathbf{E}	Green-Lagrangescher Verzerrungstensor	$\boldsymbol{\epsilon}$	linearisierter Verzerrungstensor
\mathbf{e}	Euler-Almansi Verzerrungstensor	\mathbf{n}, N	Flächennormale in Konfiguration κ_M bzw. κ_R
da, dA	differentiale Flächenelemente in Konfiguration κ_M bzw. κ_R	dv, dV	differentiale Volumenelemente in Konfiguration κ_M bzw. κ_R
$\mathbf{Q}(t)$	orthogonale Transformationsmatrix	\mathbf{t}	Spannungstensor einer Schnittfläche
\mathbf{f}	Volumenkraft	$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchyscher Spannungsvektor
J	Verhältnis des infinitesimalen Volumens dv in κ_M zu dV in κ_R	\mathbf{P}	1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
\mathbf{S}	2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor	$\boldsymbol{\tau}$	Kirchhoffscher Spannungstensor
$W(\mathbf{X}, \mathbf{F})$	Dehnungsenergiefunktion, parametrisiert über Ortsvektor \mathbf{X} in κ_R und Deformationsgradient \mathbf{F}	\mathbb{C}_{ijkl}	Materialtensor
λ	erste Lamé-Konstante	μ, G	zweite Lamé-Konstante, Schubmodul
ν	Querdehnungszahl, Poissonzahl	E	Elastizitätsmodul
$\partial\Omega$	Gesamtrand des Kontinuums	$\partial\Omega_\sigma$	Neumann-Rand
$\partial\Omega_u$	Dirichlet-Rand	$\ddot{\mathbf{x}}$	zweite Ableitung des Ortsvektors in κ_M
$\ddot{\mathbf{u}}$	zweite Ableitung des Verschiebungsvektors \mathbf{u}	η	Testfunktion

Elastomechanik

N	Längskraft	$p(x)$	Linienlast
Q_x, Q_y	Querkräfte	M_z, M_y	Biegemomente
M_ω	Wölb-Bimoment	M_{xV}	Torsionsmoment nach St. Venant
$M_{x\omega}$	Torsionsmoment aus Wölbschub	u_x, u_y, u_z	Verschiebung in x-, y-, z-Richtung
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normalspannungen	$\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$	Schubspannungen
S_1, S_2	Stabendkräfte	P_1, P_2	äußere Kräfte, die an Stabenden angreifen
$\delta d_1, \delta d_2$	virtuelle Verschiebungen an Stabenden	ϵ_x	Längsdehnung
σ_x	Normalspannung	A	Querschnittsfläche des Stabes
l_0, l_l	ungedehnte Länge	l, w_l	gedehnte Länge
s	Stabkraft	E	Elastizitätsmodul
EA	Dehnsteifigkeit	EI	Biegesteifigkeit
s_e	Vektor der Stabkräfte	u_e	Vektor der Verschiebungen
k_e	Elementsteifigkeitsmatrix	δu_e	Vektor der virtuellen Verschiebungen
P_e^l	Elementknotenkraftvektor	C	Verknüpfungsmatrix
u_x^e	Elementverschiebungsvektor im lokalen Koordinatensystem	P_x^e	Elementknotenkraftvektor im lokalen Koordinatensystem
s_x^e	Vektor der Stabkräfte im lokalen Koordinatensystem	k_x^e	Elementsteifigkeitsmatrix, gegeben im lokalen Koordinatensystem x
$T(\alpha_{s_i})$	Transformationsmatrix für i-tes Stabelement	$T_{\text{global}}, T_{\text{lokal}}$	Transformationsmatrizen
k_X^e	Elementsteifigkeitsmatrix, gegeben im globalen Koordinatensystem X	P_X^e	Vektor der äußeren Lasten im globalen Koordinatensystem
EFT	Element Freedom Table, Zuordnungstabelle		
k	globale Knotennummer des Stabes j	i	lokale Knotennummer des Stabes j
P_X^g	äußere Kräfte des Gesamtsystems	U_X^g	globaler Vektor der Knotenverschiebungen
K_X	Gesamtsteifigkeitsmatrix	A	globale Inzidenzmatrix
$A_X^{e_{s_i}}$	lokale Inzidenzmatrix	\tilde{A}	kinematische Verträglichkeitsmatrix
δU_X^g	virtuelle Knotenverschiebungen	S_X^g	globaler Vektor der Stabkräfte
\tilde{A}^T	Gleichgewichtsmatrix		

noch Elastomechanik

W	Arbeit	W_{int}	innere Arbeit
W_{ext}	äußere Arbeit	δ	Variationszeichen
δW_{int}	virtuelle innere Arbeit	δW_{ext}	virtuelle äußere Arbeit
Π_{gesamt}	potentielle Gesamtenergie	Π_i	Potential der inneren Energie
Π_a	Potential der äußeren Energie	K	Kinetische Energie
W_f	Formänderungsenergie	A	Arbeit der eingepprägten Kräfte
dK	Differential der kinetischen Energie	dA	Differential der Arbeit der eingepprägten Kräfte
s	Vektor der Stabkräfte	p	Vektor der äußeren Lasten
r	Vektor der Knotenverschiebungen	v	Vektor der Elementverformungen
K_G	Gesamtsteifigkeitsmatrix	F_G	Gesamtflexibilitätsmatrix
x_0	Ausgangsgeometrie	x	Zielgeometrie
Q_{xx}	Matrix der Gewichtsreziproken	$Q_{i,j}$	in Q_{xx} enthaltene 2×2 -Untermatrix
B	Gleichgewichtsmatrix	B^T	kinematische Verträglichkeitsmatrix
x	Vektor der statisch Unbestimmten	B_x	Gleichgewichtsmatrix für statisch Unbestimmte
r_x	Zusatzweggrößen für statisch Unbestimmte	B_x^T	kinematische Verträglichkeitsmatrix für statisch Unbestimmte
B_0	Gleichgewichtsmatrix für statisch bestimmtes Hauptsystem	B_0^T	kinematische Verträglichkeitsmatrix für statisch bestimmtes Hauptsystem
v_u	Vektor der Vorverformungen		

Differentialgeometrie im dreidimensionalen Raum

g_α	kovariante Basisvektoren eines krummlinigen Koordinatensystems in der Momentankonfiguration κ_M	g^β	kontravariante Basisvektoren eines krummlinigen Koordinatensystems in der Momentankonfiguration κ_M
G_α	kovariante Basisvektoren eines krummlinigen Koordinatensystems in der Referenzkonfiguration κ_R	G^β	kontravariante Basisvektoren eines krummlinigen Koordinatensystems in der Referenzkonfiguration κ_R
$g_{\alpha\alpha}$	Metrikoeffizient eines Metrikensors	e_1, e_2, e_3	kartesisches Vektortripel einer Koordinatenbasis
r	Ortsvektor r zu einem Punkt einer Flächenkurve	dr	Koordinatendifferential des Ortsvektors
θ_1, θ_2	Gaußsche Flächenparameter	$r_{,1}, r_{,2}$	Tangentenvektoren an Flächenparameterlinien θ_1 und θ_2
J	Funktionalmatrix		

Ortra-Verfahren

E, N, a, o	Unbekannte in Ortra-Ausgleichung für Ortra-Kleinsystem	P_i	Ursprung des Ortra-Kleinsystems
a_i, o_i	Transformationsparameter des Ortra-Kleinsystems	E_i, N_i	Koordinaten des Ursprungs des Ortra-Kleinsystems
m	Maßstab $m = \sqrt{a^2 + o^2}$ des Ortra-Kleinsystems	s_i	Stab des Ortra-Kleinsystem
\tilde{s}_i	Sekundärverschiebung	$\hat{v}_{E_i}, \hat{v}_{N_i}$	Koordinatenkomponenten der Sekundärverschiebung
F_i	die Sekundärverschiebung verursachende Kraft	F_{q_i}	Querkomponente der Kraft, die die Sekundärverschiebung verursacht
F_{l_i}	Längskomponente der Kraft, die die Sekundärverschiebung verursacht	q_{F_i}	Kraftdichte der Sekundärverschiebung
$M_{s_i, F_{q_i}}$	Drehmoment für einzelnen Stab s_i im Ortra-Kleinsystem	b	Vektor im unterbestimmten Ausgleichungsansatz mit genäherten Kraftdichten
v	Vektor der Verbesserungen im unterbestimmten Ausgleichungsansatz	q	Vektor mit ausgeglichenen Kraftdichten
Δx	Differenzvektoren, Koordinatenwidersprüche	x	endgültiger UTM-Grundriss
\bar{x}	nach UTM übertragener GK-Grundriss	P_{xx}	Gewichtsmatrix des endgültigen UTM-Grundrisses
$P_{\bar{x}\bar{x}}$	Gewichtsmatrix des nach UTM übertragenen GK-Grundrisses	ΔP	Differenz-Gewichtsmatrix
Q_{xx}	Kofaktorenmatrix des endgültigen UTM-Grundrisses	ΔQ	Matrix der Kofaktorendifferenzen
$Q_{\bar{x}\bar{x}}$	Kofaktorenmatrix des nach UTM übertragenen GK-Grundrisses	w	Koordinatenwidersprüche, die Widersprüche in Sinne der bedingten Ausgleichung darstellen
B	Matrix mit zusätzlichen Bedingungen für identische Punkte (Ansatz von Linkwitz 1988)	p	Koordinatenwidersprüche Δx erzeugende äußere Kräfte

Geodäsie

$DHDN$	Deutsches Hauptdreiecksnetz	$ETRS89$	Europäisches Terrestrisches Referenzsystem 1989
GK	Gauß-Krüger-Abbildungssystem (konforme Abbildung)	UTM	UTM-Abbildungssystem (konforme Abbildung)
$UTM32$	UTM-Abbildungssystem Zone 32 (Deutschland, Bayern)	$NTV2$	National Transformation Version 2, gitterbasierter Transformationsansatz

noch Geodäsie

B, L	Geographische Breite und Länge	<i>Rechtswert, Hochwert</i>	Gauß-Krüger-Koordinaten
$East, North$	UTM-Koordinaten	m	Maßstab der Ähnlichkeitstransformation
o, a	Transformationsparameter der Ähnlichkeitstransformation	E, N, a, o	Unbekannte in Ortra-Ausgleichung für Ortra-Kleinsystem
BVV	Bayerische Vermessungsverwaltung	LDBV	Landesamt für Digitalisierung, Breitband und Vermessung
ADBV	Amt für Digitalisierung, Breitband und Vermessung	ÄDBV	Mehrzahl von ADBV

Ausgleichsrechnung

A	Matrix mit partiellen Ableitungen der Verbesserungsgleichungen nach den Unbekannten	B	Matrix mit partiellen Ableitungen der Beobachtungsgleichungen nach den Beobachtungen
l	Beobachtungsvektor	w	Widerspruchsvektor
v	Vektor der Verbesserungen	P	Gewichtsmatrix der Beobachtungen
N	Normalgleichungsmatrix $N = (A^t P A)$	Q_{xx}	Kofaktorenmatrix der Unbekannten $Q_{xx} = N^{-1}$
n	rechte Seite der Normalgleichungen $n = (A^t P l)$	σ_0^2	theoretischer Varianzfaktor
σ_0	mittlerer Gewichtseinheitsfehler	K_{xx}	Kovarianzmatrix der Unbekannten
k	Korrelatenvektor	E	Einheitsmatrix

Seilnetze und Updated Reference Strategy

$G(r)$	Gleichgewichtsfunktion	r	Ortsvektoren von diskreten Punkten des mechanischen Systems
\tilde{G}	linearisierte Gleichgewichtsfunktion	r_0	Näherungskoordinaten für diskrete Punkte des mechanischen Systems
Δr	Koordinatenzuschläge	$l + v = f(x)$	nichtlineare Fehlergleichungen für Seilnetze
v	Elementverformungen des Seilnetzes	s	Vektor der Seilkräfte
l	gedehnte Seillängen des Seilnetzes	w	ungedehnte Seillängen des Seilnetzes
u	Vektor der Koordinatendifferenzen	x	unbekannte räumliche Koordinaten
C	Knoten-Kanten-Matrix	A^T	Gleichgewichtsmatrix

noch Seilnetze und Updated Reference Strategy

p	Vektor der äußeren Kräfte	W	Diagonalmatrix mit ungedehnten Seillängen des Seilnetzes
$g(x)$	nichtlineares Normalgleichungssystem des Seilnetzes	q	Vektor der Kraftdichten
H	Matrix der Elastizitätskoeffizienten $h_i = E_i \cdot A_i$	K	Gesamtsteifigkeitsmatrix
$R_{(x_0)}$	Vektor der Ungleichgewichtskräfte bei Seilnetzen	A_R^t	Jakobi-Matrix mit partiellen Ableitungen nach den Stabkräften
Δs_R	Spannungszuschläge		
δW	virtuelle Arbeit	σ	Cauchyscher Spannungstensor
e	Euler-Almansi-Verzerrungstensor	t	Materialdicke
a	Fläche	δu	virtuelle Verschiebung
F	Deformationsgradient	S	2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
R	Vektor der Ungleichgewichtskräfte $R = G(r_0)$ bei Updated Reference Strategy	Δu_R	Zuschläge zum Knotenverschiebungsvektor
K_{rs}	Tangentensteifigkeitsmatrix	$h_\lambda(x)$	Homotopieabbildung
$K_{\lambda rs}$	modifizierte Tangentensteifigkeitsmatrix	$R_{\lambda r}$	modifizierter Vektor der Gleichgewichtskräfte

Numerik

$A \cdot x = b$	lineares Gleichungssystem, das mit dünnbesetzten Matrizen aufgebaut sein soll	L	Cholesky-Faktor der positiv definiten Matrix A
$L \cdot y = b$	Vorwärtssubstitution des Gleichungssystems $A \cdot x = b$	$L^T \cdot x = y$	Rückwärtssubstitution des Gleichungssystems $A \cdot x = b$
Q	Orthogonale Matrix der QR -Zerlegung der Matrix A	R	obere Dreiecksmatrix der QR -Zerlegung der Matrix A
D	Diagonalmatrix	P	Permutationsmatrix
\mathcal{P}	Permutation	A^*	über Permutation \mathcal{P} vorverarbeitete Matrix A
$\mathcal{G}(A)$	ungerichteter Graph für Matrix A	$\mathcal{V}(A)$	Knoten \mathcal{V} des ungerichteten Graphen
$\mathcal{E}(A)$	Knoten \mathcal{E} des ungerichteten Graphen	$\mathcal{G}(L)$	ungerichteter Graph des Cholesky-Faktors L
$\mathcal{G}(F)$	ungerichteter Graph der Matrix $F = L + L^T$ („Filled Matrix“)	$Reach_{\mathcal{G}(A)}$	Mengenoperator der von einem Ausgangsknoten im Graphen erreichbaren Knoten
\hat{A}	Skeletonmatrix	$\mathcal{O}(A)$	Laufzeitordnung in linearer Abhängigkeit zur Anzahl der Nichtnull-Einträge von A

noch Numerik

$nnz(A)$	Anzahl der Nichtnull-Elemente von A	\mathcal{T}	Eliminierungsbaum
\mathcal{T}^i	Zeilenbäume	v_i	Knoten i im Eliminierungsbaum
v_w	Wurzel des Eliminierungsbaums	$j \xrightarrow{\mathcal{T}^i} i$	Pfad vom Knoten j zum Knoten i im Zeilenbaum
$j \xrightarrow{\mathcal{T}} i$	Pfad vom Knoten j zum Knoten i im Eliminierungsbaum	$p = Parent(j)$	Parent-Knoten p des Knoten j im Eliminierungsbaum
$\alpha(A , n)$	Ackermannfunktion	$w_i(j)$	Knotengewichtsfunktion
$\chi_i(j)$	Sollwertfunktion für Knotengewichte	\mathcal{L}_j	Anzahl der Nichtnull-Elemente in Spalte j des Cholesky-Faktors L
d_j	Anzahl der Kindknoten vom Knoten j im Eliminierungsbaum	o_j	Überlappung der Nichtnull-Elemente zwischen Spalten im Cholesky-Faktor L
Δ_j	Korrekturterm, T. A. Davis 2006	$A(:, j)$	j -te Spalte von A , in Doppelpunktnotation
$A(i, :)$	i -te Zeile von A , in Doppelpunktnotation	$cdiv(j)$	Division der j -ten Spalte von L durch $l_{jj} = \sqrt{a_{jj}}$
$cmod(j, k)$	Modifikation der j -ten Spalte von L durch k -te Spalte	S	Superknoten (<i>fundamental</i> bzw. <i>maximal</i>)
$\kappa(A)$	Konditionszahl von A	λ_1	kleinster Eigenwert einer Matrix
λ_n	größter Eigenwert	$\frac{\Delta x}{\ x\ }$	relativer Fehler der Unbekannten x des Gleichungssystems $A \cdot x = b$

Abbildungsverzeichnis

1.1. Gauß-Krüger-Abbildung (links) und Universale Transversale Mercatorprojektion (rechts).	10
3.1. Tonti-Schema für die Grundgleichungen der Statik (nach [Dinkler 2014])	50
3.2. Referenz- und Momentankonfiguration	55
3.3. Gedrehter Stab eines Ortra-Kleinsystems	64
3.4. Unverformtes Ausgangsdreieck und verformtes Zieldreieck	66
4.1. Virtuell definierte Verschiebungen δd_1 und δd_2 bei einem Stab, der durch äußere Kräfte P_1 und P_2 belastet wird und der sich im Gleichgewicht befindet.	97
4.2. Einführung von äußeren Kräften P_1 und P_2 in den lokalen Elementknotenkraftvektor P_e^1 eines Stabelements.	99
4.3. Lokales zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem mit den neuen Bezeichnungen u_{x1} und u_{x2} für die an den Knoten 1 und 2 auftretenden Verschiebungen.	101
4.4. Fachwerk mit n Stäben und k Knoten	106
4.5. Zuordnungstabelle (Element Freedom Table) für das in Abb. 4.4 dargestellte Stabtragwerk mit k Knoten und n Stäben.	106
4.6. Inzidenzmatrix (Gl. (4.70)) für die Abbildung der Inzidenzbeziehungen zwischen lokalen und globalen Freiheitsgraden des Fachwerks aus Abb. 4.4.	109
7.1. Hierarchischer Ansatz beim Ortra-Verfahren.	161
7.2. Vernetzung der Flurstücksgeometrien durch künstliche Beobachtungen (Pseudobeobachtungen), München, Messegelände Riem.	161
7.3. Definition eines Ortra-Kleinsystems für den Flurstücksgrenzpunkt 1. Mit Hilfe der mit einer gestrichelten Linie angedeuteten Winkelhalbierenden erfolgt eine Beobachtungsdefinition für eine Querverstrebung zwischen dem Ausgangspunkt 1 und dem zum Schnittpunkt S der Winkelhalbierenden nächstgelegenen Flurstücksgrenzpunkt 4. (KFP = Katasterfestpunkt)	163
7.4. Beobachtungsdefinition für die identischen Punkte.	163
7.5. Beobachtungsdefinitionen für Gebäudeinnenvernetzung München, Messegelände Riem.	165
7.6. Gebäudezwischenvernetzungen. Ausschnitt München, Messehallen Riem.	165
7.7. Gebäudeaußenvernetzungen. Ausschnitt München, Messehallen Riem.	166
7.8. NTV2-Gitter, bilineare Interpolation für Neupunkt N aus den Shiftwerten der 4 Gitterpunkte (Abb. aus [Ahrens und Böhmer 2010]).	167
7.9. Beobachtungsaufbau für Bestimmung der Gitterpunkte einer NTV2-Datei.	167
7.10. Zwei gekoppelte Ortra-Systeme mit gemeinsamem Stab s_2 ohne weiteren Verknüpfungspunkt.	169
7.11. Zwei gekoppelte Ortra-Systeme mit neuen Verknüpfungspunkt P_{12} , Problemstellung vor Ausgleichung, die eine Minimierung der in P_{12} entstandenen Klaffung durchführt.	170
7.12. Zwei Ortrasysteme mit gemeinsamem, auseinander klaffenden Verknüpfungspunkt P_{12} . Zusätzlich Klaffungen bei den Punkten P_1 und P_3 . Kopplung des zweiten Systems mit Aufbau von 3 Sekundärverschiebungen.	171
7.13. Gedehtes Ortra-System mit Ursprung P_1 und $n = 11$ Stäben s_1, s_2, \dots, s_{25} . An den Stabenden befinden sich die Primärverschiebungen, die zwischen den Stabendpunkten des unverformten und des verformten Systems definiert werden, wobei die Drehung unberücksichtigt bleibt.	172
7.14. Ortra-System 1 mit den Stäben s_1, s_2, \dots, s_{25} und den Sekundärverschiebungen $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_{25}$	173
7.15. Ortra-System 1 mit Kräften, die in Richtung der Stäbe s_1, s_2, \dots, s_{25} nach außen zeigen (Maßstab $m > 1$)	176
8.1. Gleichgewichtsmatrix für Aufbau des Referenz-UTM-Grundrisses.	183

8.2.	Verteilung der Koordinatenwidersprüche im hierarchischen Verdichtungsansatz von den Flurstücken (rote Vektoren) in die durch nachfolgende Ausgleichung aufgebaute Gebäude (blaue Vektoren).	192
9.1.	Flurstücke einer Testgemarkung des Projekts KanU (links) und zugehörige Normalgleichungsmatrix.	198
9.2.	Ausgangsmatrix A mit Nicht-Nullelementen \bullet und zugehöriger gerichteter Graph $\mathcal{G}(A)$ der Matrix A mit den Kanten $E = \{(v_i, v_j) : a_{ij} \neq 0 \text{ für } 1 \leq i \neq j \leq n\}$	202
9.3.	Dünnbesetzte Dreiecksmatrix L mit Nichtnull-Elementen \bullet , gerichteter Graph $\mathcal{G}(L + L^T)$	203
9.4.	Symmetrische Ausgangsmatrix A mit Nicht-Nullelementen \bullet (links), Cholesky-Faktor L mit den Positionen der zusätzlichen Nicht-Nullelemente (mitte), Eliminierungsbaum des Cholesky-Faktors L (rechts).	204
9.5.	$n = 13$ Zeilenbäume \mathcal{T}^i mit $i = 1 \dots n$ für die 13 Matrixzeilen des Cholesky-Faktors L der Matrix A aus Abb. 9.4.	205
9.6.	Die mit der Postorder-Reihenfolge des Eliminierungsbaums \mathcal{T} aus Abb. 9.4 (rechts) permutierte Matrix A aus Abb. 9.4 (links).	207
9.7.	Links der Eliminierungsbaum der Matrix A aus Abb. 9.4 (rechts). Rechts ist den Knotennamen zusätzlich die Postorder-Reihenfolge zugeordnet. Der Namenszusatz im Knotennamen (4/2) bedeutet beispielsweise, dass Knoten 4 als zweiter Knoten in der Postorder-Reihenfolge durchlaufen wird.	208
9.8.	Pfadzerlegung im Zeilenbaum \mathcal{T}^{12} , Bestimmung des <i>kleinsten gemeinsamen Knotenvorgängers</i> (= Knoten 12) der Blattknoten 5, 8 und 9 über Postorder-Reihenfolge.	213

Tabellenverzeichnis

3.1. Gegenüberstellung von mechanischen Zustandsgrößen bei einem Fachwerk und einem elastischen Umformungsverfahren	51
6.1. Analogien zwischen vermittelnder Ausgleichung und Weggrößenverfahren.	133
6.2. Analogien zwischen Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen und Kraftgrößenverfahren.	147
9.1. Dimension des Normalgleichungssystems ausgewählter Amtsbezirke bei der Ausgleichung der Flurstücke nach dem Ortra-Verfahren.	196
9.2. Ämter mit einer großen Anzahl von definierten Matrizelementen im Normalgleichungssystem, Objektbereich Flurstücke.	197
9.3. Bei der symbolischen und numerischen Faktorisierung im Sparse Cholesky Verfahren eingesetzte Komponenten und Algorithmen.	201
9.4. Zuweisung des <i>kleinsten Knotennachfolgers</i> zu den Knoten des Eliminierungsbaums \mathcal{T} der Abb. 9.7. Die Postorder-Nummer des <i>kleinsten Knotennachfolgers</i> gilt für alle Knoten der Knotenmenge.	211
9.5. Für repräsentativ ausgewählte Amtsbezirke (klein, mittel und groß) ermittelte größte Eigenwerte λ_n	231

Dank

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2016 bis 2020 im Zusammenhang mit der UTM-Umstellung des Liegenschaftskatasters Anfang 2019 in Bayern. Der Bayerischen Vermessungsverwaltung, namentlich Frau Angelika Jais und Herrn Dr. Rainer Bauer, gilt mein aufrichtiger Dank, dass ich das Thema ETRS89/UTM-Umstellung des Liegenschaftskatasters zum Gegenstand meiner Promotion machen durfte.

Einen großen Dank möchte ich dem Leiter des Lehrstuhls für Geodäsie und Hauptberichter dieser Arbeit, Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Wunderlich aussprechen. Die vertrauensvolle Zusammenarbeit und Förderung der Arbeit machten es mir möglich, die Promotion durchzuführen. Ein besonderer Dank gilt meinem Mentor Dr. Wolf-Rüdiger Barth für seine tatkräftige Unterstützung und für die vielen angeregten Diskussionen im Themenfeld der Baustatik und Geodäsie.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Roland Pail vom Lehrstuhl für Astronomische und Physikalische Geodäsie danke ich sehr herzlich für die Übernahme des Mitberichts. Sein Interesse an der Numerik motivierte mich dazu, mich intensiv mit weiteren Fragestellungen im Zusammenhang mit numerischen Verfahren zu beschäftigen. Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr. Rolf Moeckel vom Institute for Advanced Study der Technischen Universität München für sein Interesse an meiner Arbeit und für die Übernahme der Leitung der Prüfungskommission.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger möchte ich für seine große Unterstützung bei den komplexen Themen der Baustatik danken. Seine wissenschaftliche Kompetenz und wertvolle Hilfestellung gab mir das Vertrauen, einen unkonventionellen Ansatz zu aktuellen Analogien der baustatischen Verfahren einschließlich der Finite-Elemente-Methode und der Ausgleichsrechnung zu verfolgen. Für seine konstruktive und kooperative Art der Kritik möchte ich mich besonders bei ihm bedanken.

Den größten Dank möchte ich meiner Lebensgefährtin Maria aussprechen. Sie hat mit größtem Verständnis und Geduld diese Arbeit mitgetragen und durch unermüdliche Unterstützung beim Korrekturlesen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.