

LABORATORIUM FÜR DEN KONSTRUKTIVEN INGENIEURBAU (LKI)
TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

BERICHTE
zur
ZUVERLÄSSIGKEITSTHEORIE DER BAUWERKE

MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DER ZUVERLÄSSIGKEITS-
METHODE ERSTER ORDNUNG, UND EINIGE ERWEITERUNGEN

M. Hohenbichler

SONDERFORSCHUNGSBEREICH 96

LABORATORIUM FÜR DEN KONSTRUKTIVEN INGENIEURBAU (LKI)
TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

BERICHTE
ZUR
ZUVERLÄSSIGKEITSTHEORIE DER BAUWERKE

Heft 72/1984

MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DER ZUVERLÄSSIGKEITS-
METHODE ERSTER ORDNUNG, UND EINIGE ERWEITERUNGEN

M. Hohenbichler

SONDERFORSCHUNGSBEREICH 96 (SFB 96)

Der SFB 96 "Zuverlässigkeit von Bauwerken" ist eine Einrichtung der Technischen Universität München und der Deutschen Forschungsgemeinschaft. Der SFB hat sich die Entwicklung baustoff- und bauartenübergreifender Sicherheitssysteme auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlage zum Ziel gesetzt.

LABORATORIUM FÜR DEN KONSTRUKTIVEN INGENIEURBAU (LKI)

Am LKI beteiligte Institute:

Institut für Bauingenieurwesen I

| | |
|-------------|--------------------------|
| Baumechanik | Prof. Dr.-Ing. Grundmann |
| Baustatik | Prof. Dr.-Ing. Knittel |

Institut für Bauingenieurwesen III

| | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| Baukonstruktion und Holzbau | Prof. Dr.-Ing. Heimeshoff |
| Baustoffkunde und Werkstoffprüfung | Prof. Dr.-techn. Springenschmid |

Institut für Bauingenieurwesen III

| | |
|-----------|-------------------------|
| Massivbau | Prof. Dr.-Ing. Kupfer |
| Stahlbau | Prof. Dipl.-Ing. Nather |

Der Verfasser des vorliegenden Berichtes ist Angehöriger des Instituts für Bauingenieurwesen III, Lehrstuhl Massivbau.

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand im Rahmen meiner Tätigkeit am Sonderforschungsbereich 96. Sie versucht eine mathematisch saubere Begründung für die Zuverlässigkeitsmethode erster Ordnung zu liefern. Ihre thematische Rechtfertigung erfährt sie daher vorwiegend durch ein im Bauwesen praktiziertes Verfahren zur Zuverlässigkeitsanalyse, während sie inhaltlich eher mathematisch-abstrakter Natur ist.

Das Thema der Arbeit wurde von Herrn Dr.-Ing. R. Rackwitz angeregt. Auf die fruchtbare Idee der asymptotischen Betrachtungsweise wurde ich von meinem Kollegen K. Breitung aufmerksam gemacht. Den Gutachtern Prof. H. Kupfer und Prof. K. W. Gaede danke ich für das wohlwollende Interesse, das sie dieser etwas abseits ihrer eigentlichen Forschungsgebiete liegenden Arbeit entgegengebracht haben; ihr ermutigender Zuspruch hat ganz wesentlich zum Fortgang meiner Untersuchungen beigetragen.

München, Juli 1984

Michael Hohenbichler

MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DER ZUVERLÄSSIGKEITS-
METHODE ERSTER ORDNUNG, UND EINIGE ERWEITERUNGEN

Inhalt

| | |
|---|----|
| Kapitel 1 : Vorbemerkungen | 1 |
| 1.1 Einführung | 1 |
| 1.2 Allgemeine Voraussetzungen und Bezeichnungen | 9 |
| Kapitel 2 : Definition und Beschreibung wichtiger Begriffe | 14 |
| 2.1 Klassische Begriffe der Zuverlässigkeits- methode erster Ordnung | 14 |
| 2.2 Äquivalenter Sicherheitsindex, und Alpha- -Werte von Parametern | 19 |
| 2.3 Alpha-Werte von Parametern in Bayesschen Modellen | 26 |
| Kapitel 3 : Asymptotische Näherungen | 28 |
| 3.1 Asymptotische Äquivalenz von β_D und β_E .. | 28 |
| 3.2 Asymptotische Äquivalenz von α_D und α_E ; Teil 1 | 32 |
| 3.3 Asymptotische Äquivalenz von α_D und α_E ; Teil 2 | 38 |
| 3.4 Der Fehler der Methode erster Ordnung im Vergleich zum Fehler aus Parameterunsi- cherheiten | 45 |

Kapitel 4 : Alpha-Werte in der Zuverlässigkeitsmethode erster Ordnung 47

4.1 Alpha-Werte von Variablen 47

4.2 Linearisierung in der Zuverlässigkeitsmethode erster Ordnung 56

Kapitel 5 : Diskussion und Erläuterung der Ergebnisse 60

5.1 Vorbemerkungen 60

5.2 Beispiel: Effekt von Parameteränderungen . 61

5.3 Hinweise zur Anwendung von Satz 3.2.3 69

5.4 α_i als Wichtungsfaktor für $\alpha[\tau]$ 74

5.5 Optimierung 76

Teil B : Beweise

B 2.1 Beweise zu Abschnitt 2.1 81

B 3.1 Beweise zu Abschnitt 3.1 84

B 3.2 Beweise zu Abschnitt 3.2 95

B 3.3 Beweise zu Abschnitt 3.3 108

B 3.4 Beweise zu Abschnitt 3.4 125

B 4.1 Beweise zu Abschnitt 4.1 127

B 4.2 Beweise zu Abschnitt 4.2 131

Literaturverzeichnis 134

stochastisch unabhängig. Durch Auflösen nach X_1 und X_2 erhält man die Darstellung

$$X_1 = \mu_1 + \sigma_1 U_1 \quad \text{und} \quad X_2 = \mu_2 + \sigma_2 U_2 ,$$

für die x-Variablen. Die Verteilungsgesetze von X_1 und X_2 , hier gekennzeichnet durch die Parameter μ und σ , werden hierbei vollständig durch den funktionalen Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens dargestellt.

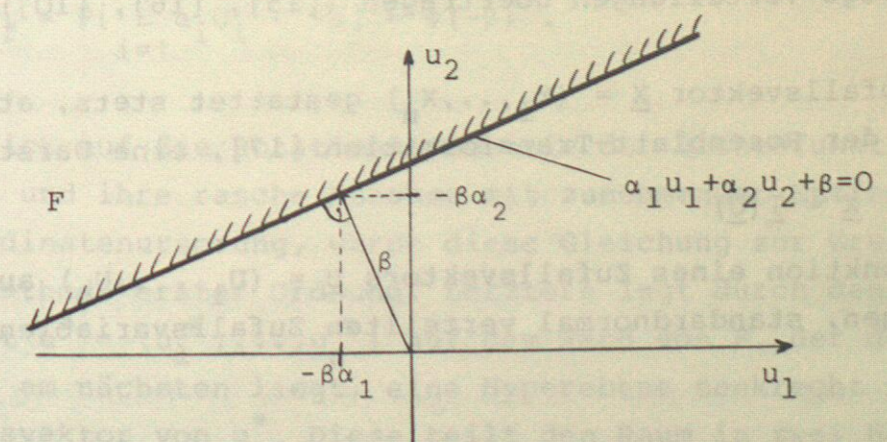
Wird nun durch Substitution der Variablen X_i das Versagenskriterium mit Hilfe der standardnormalen Variablen U_i formuliert, so äußern sich die Verteilungsparameter der x-Variablen allein in den Koeffizienten der neuen Zustandsfunktion $g(\underline{u})$:

$$g_x(\underline{x}) = x_1 - x_2 = (\mu_1 + \sigma_1 u_1) - (\mu_2 + \sigma_2 u_2) = \sigma_1 u_1 - \sigma_2 u_2 + (\mu_1 - \mu_2) =: g(\underline{u}) .$$

Division durch $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ liefert das Versagenskriterium schließlich in der Hesseschen Normalenform

$$F = \{g(\underline{u}) < 0\} = \left\{ \frac{\sigma_1}{\sigma} U_1 - \frac{\sigma_2}{\sigma} U_2 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} < 0 \right\} =: \{ \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \beta < 0 \} .$$

Jetzt sind alle Kenngrößen der Verteilungsgesetze und des Versagenskriteriums in den Koeffizienten $\alpha_1 = \sigma_1/\sigma$, $\alpha_2 = -\sigma_2/\sigma$ und $\beta = (\mu_1 - \mu_2)/\sigma$ enthalten.



Die Versagenswahrscheinlichkeit P_f ergibt sich etwa zu

$$P_f = P[X_1 - X_2 < 0] = P[\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 < -\beta] = \Phi(-\beta)$$

Hierbei ist Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Dieses einfache Beispiel enthält bereits die wesentlichen Elemente der Zuverlässigkeitsmethode erster Ordnung. Weil aber der funktionale Ausdruck der Zustandsfunktion und die Verteilungsgesetze der Variablen meist von erheblich komplizierterer Gestalt sind, werden noch einige Verallgemeinerungen des hier geschilderten Verfahrens notwendig.

Die numerische Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit erweist sich im Bauwesen aus verschiedenen Gründen als schwierig: Numerische Integration verbietet sich, wenn die Anzahl n der Variablen zu groß wird, und Simulationsverfahren scheitern oft an den typischerweise kleinen Wahrscheinlichkeiten, zumal wenn sich die Berechnung der Zustandsfunktion g_x sehr aufwendig gestaltet und deshalb die Anzahl der Funktionsauswertungen klein zu halten ist. Aus diesen Gründen bürgerte sich im Laufe der Zeit als Näherungsverfahren die "Zuverlässigkeitsmethode erster Ordnung" ein. Diese entwickelte sich aus den sogenannten "second-moment reliability code formats" ([3], [5], [9]), wurde zunächst für normalverteilte Variablen formuliert und allmählich auf beliebige Verteilungen übertragen ([15], [16], [10]):

Der Zufallsvektor $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ gestattet stets, etwa mit Hilfe der Rosenblatt-Transformation [17], eine Darstellung

$$\underline{X} = \underline{T}(\underline{U})$$

als Funktion eines Zufallsvektors $\underline{U} = (U_1, \dots, U_n)$ aus unabhängigen, standardnormal verteilten Zufallsvariablen U_i .

(Auch wenn der Einfachheit halber die Dimensionen von \underline{X} und \underline{U} beide mit "n" bezeichnet werden, dürfen sie sich doch voneinander unterscheiden.)

F bezeichnet die Menge derjenigen Werte des Vektors \underline{U} , für die $\underline{X} = \underline{T}(\underline{U})$ in F_x liegt:

$$F = \{\underline{u}: \underline{T}(\underline{u}) \in F_x\} = \underline{T}^{-1}(F_x)$$

Falls nun $F_x = \{\underline{x}: g_x(\underline{x}) < 0\}$ durch eine Zustandsfunktion g_x beschrieben wird, gilt demnach

$$F = \{\underline{u}: \underline{T}(\underline{u}) \in F_x\} = \{\underline{u}: g_x(\underline{T}(\underline{u})) < 0\} = \{\underline{u}: g(\underline{u}) < 0\}$$

$$\text{mit } g(\underline{u}) := g_x(\underline{T}(\underline{u}))$$

Damit läßt sich die Versagenswahrscheinlichkeit auch mit Hilfe des standardisierten Vektors \underline{U} ausdrücken:

$$P_f = P[\underline{X} \in F_x] = P[\underline{U} \in F] = P[g(\underline{U}) < 0] = \int_F \varphi(\underline{u}) d\underline{u} = \int_{\{g < 0\}} \varphi(\underline{u}) d\underline{u}$$

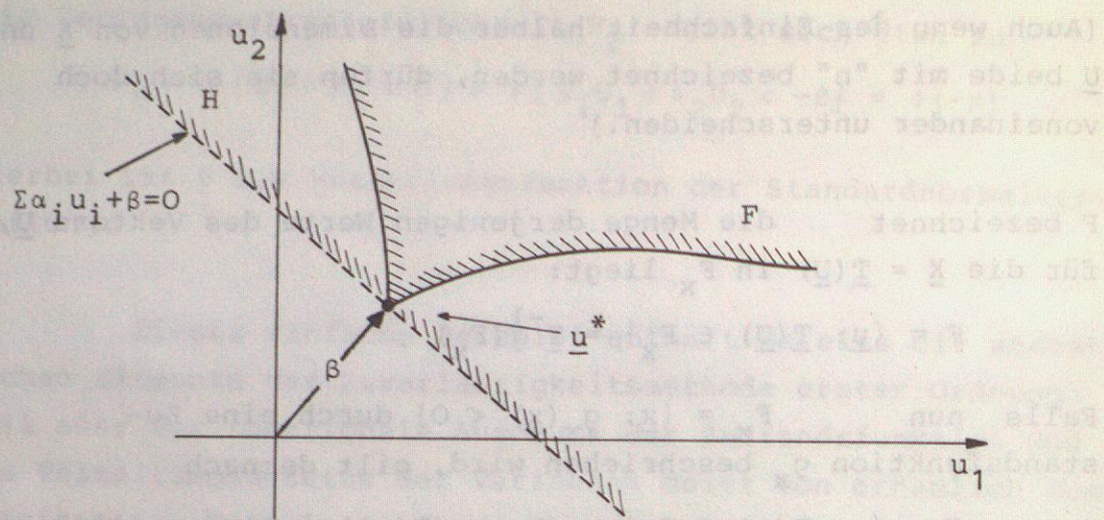
$\varphi(\underline{u}) = \varphi(u_1) \cdot \dots \cdot \varphi(u_n)$ ist hierbei die Wahrscheinlichkeitsdichte von \underline{U} . Ist speziell F ein Halbraum, also von der Form

$$(1) F = \{\underline{u}: \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i + \beta < 0\}$$

wobei $\sum \alpha_i^2 = 1$ angenommen werden darf ("Hessesche Normalform"), dann ergibt sich die Versagenswahrscheinlichkeit zu

$$P_f = P[\sum_{i=1}^n \alpha_i U_i < -\beta] = \Phi(-\beta)$$

Im Hinblick auf die Rotationssymmetrie der Dichtefunktion $\varphi = \varphi(\underline{u})$ und ihre rasche Abnahme mit zunehmender Entfernung vom Koordinatenursprung, wurde diese Gleichung zur Grundlage der Methode erster Ordnung. Letztere legt durch denjenigen Punkt $\underline{u}^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ auf dem Rand von F , der dem Ursprung am nächsten liegt, eine Hyperebene senkrecht zum Richtungsvektor von \underline{u}^* . Diese teilt den Raum in zwei Halb-



räume. Derjenige in der Skizze veranschaulichte Halbraum H, der in der Umgebung von \underline{u}^* zu F hin gerichtet ist, wird als Approximation an F angesehen:

$$(2) \quad F \sim H = \{ \underline{u}: \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i + \beta < 0 \} \quad \text{mit}$$

$$\beta := \begin{cases} \|\underline{u}^*\| & \text{falls } \underline{0} \notin F \\ -\|\underline{u}^*\| & \text{falls } \underline{0} \in F \end{cases}$$

$$\alpha_i := -\frac{1}{\beta} u_i^*$$

β ist der (Hasofer-Lind-)Sicherheitsindex, und die α_i heißen "Alpha-Werte" oder "Gewichtungswerte". Die Approximation (2) führt schließlich zur Näherung

$$P_f = P[F] \sim P[H] = \Phi(-\beta)$$

Ist F von der Form $F = \{g < 0\}$ und ist g in \underline{u}^* differenzierbar, so ergibt sich der approximierende Halbraum H durch lineare Entwicklung (Taylorentwicklung bis zu Gliedern erster Ordnung) von g im Beta-Punkt \underline{u}^* . Daraus bezog die Methode erster Ordnung ihren Namen.

Im Vergleich zum Beta-Index β spielen die Alpha-Werte α_i bis heute eine eher nachgeordnete Rolle. Da sie der Normierungsbedingung $\sum \alpha_i^2 = 1$ genügen und in Gleichung (2) als Faktoren bei U_i stehen, werden sie als ein Maß für die Be-

deutung der Variablen U_i angesehen. Sie werden zwar oft in diesem Sinne interpretiert, doch bisher ohne klare Rechtfertigung. Auch die Deutung des Sicherheitsindex β , im folgenden β_d genannt, als Maß für die Zuverlässigkeit war bisher in erster Linie aus der Anschauung motiviert; bis auf die Abschätzung

$$P_f = P[F] \leq P[\sum U_i^2 \geq \beta_d^2]$$

ergibt sich aus seiner Definition kein unmittelbarer Bezug zur Versagenswahrscheinlichkeit. Aus diesem Grunde führte Ditlevsen [6] den verallgemeinerten Sicherheitsindex

$$\beta_E := -\Phi^{-1}[P_f]$$

ein, der in direkter Beziehung zur Versagenswahrscheinlichkeit steht und sich, in Analogie zu β_d , als Sicherheitsindex eines Halbraums genau gleicher Wahrscheinlichkeit veranschaulichen läßt. Der praktische Nutzen dieses Begriffs ist jedoch beschränkt, da seine numerische Berechnung der Ermittlung von P_f äquivalent und daher mit denselben Schwierigkeiten behaftet ist. Immerhin existiert aber damit ein zu β_d "verwandtes", aber eindeutiges Sicherheitsmaß. Ein den Alpha-Werten α_i entsprechendes Gegenstück ist jedoch nicht geläufig.

Die vorliegende Arbeit zielt zunächst darauf ab, den Zusammenhang zwischen β_d und β_E zu präzisieren und ferner den Alpha-Werten α_i einen ähnlich klaren Begriff gegenüberzustellen. Als geeignet erwiesen sich hierfür die Ableitungen von β_E und β_d nach dem Mittelwert μ_i und der Standardabweichung σ_i einer normalverteilten Basisvariablen U_i . Diese Ableitungen beschreiben die Änderung der Sicherheit bei kleinen Variationen der Parameter und folglich auch die "Bedeutung" dieser Parameter. Eine Beschränkung auf μ_i und σ_i erweist sich jedoch als unnötig, und der Einfluß anderer Parameter ist häufig wichtiger. Deshalb wird ganz allgemein die Ableitung von β_E und β_d nach einem beliebigen Parameter τ als Maß für dessen Bedeutung eingeführt

und wegen der Analogie zu den Alpha-Werten α_i , dem "Einfluß der Variablen U_i ", als Alpha-Wert $\alpha_E[\tau]$ bzw. $\alpha_D[\tau]$ bezeichnet. In den Spezialfällen $\tau = \mu_i$ und $\tau = \sigma_i$ ergibt sich mit

$$\alpha_D[\mu_i] = \alpha_i \quad \text{und} \quad \alpha_D[\sigma_i] = -\beta_D \alpha_i^2$$

ein geeigneter Ausgangspunkt zur Interpretation von α_i .

Die Definition und Klärung dieser neuen Begriffe, sowie eine für mathematische Aussagen geeignete Verschärfung der klassischen Begriffe bilden den Inhalt des zweiten Kapitels. Analog zu den von Breitung [2] und Lindgren [12] in die Zuverlässigkeitstheorie eingebrachten Denkweisen der asymptotischen Analysis [1] gelingt im dritten Kapitel der Beweis, daß bei hohem Zuverlässigkeitsniveau der Sicherheitsindex β_D als asymptotische Näherung für β_E anzusehen ist. Hierdurch wird auch β_D als Maß für die Zuverlässigkeit interpretierbar. Andererseits ist, wie gezeigt wird, bei Vorliegen statistischer Unsicherheiten β_D als Sicherheitsmaß hinreichend scharf. Sodann erweisen sich die Alpha-Werte $\alpha_D[\tau]$ als asymptotische Näherungen für $\alpha_E[\tau]$; zu ihrer Berechnung werden einfache Formeln bereitgestellt. Diese Resultate ermöglichen im vierten Kapitel eine fundierte Diskussion der Alpha-Werte α_i , wobei deren bisherige Interpretation weitgehend bestätigt werden kann. Das Schlußkapitel schließlich illustriert die Sätze des dritten Kapitels anhand ausformulierter Beispiele und weist auf typische Anwendungsmöglichkeiten für die Alpha-Werte von Parametern hin.

Um die Lesbarkeit der Arbeit zu fördern, sind im Hauptteil nur die zum Verständnis der wesentlichen Ergebnisse notwendigen Begriffe und Aussagen beschrieben. Die Vorstadien der Sätze sowie alle Hilfssätze wurden dagegen, zusammen mit den Beweisen, in einem eigenen Teil B zusammengefaßt.

1.2 Allgemeine Voraussetzungen und Bezeichnungen

Im folgenden bezeichnet $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ stets einen beliebig verteilten Zufallsvektor mit Werten in \mathbb{R}^n , während $\underline{U} = (U_1, \dots, U_n)$ aus unabhängigen, standardnormal verteilten Zufallsvariablen U_i besteht. Auch wenn sich die Dimensionen von \underline{X} und \underline{U} unterscheiden, werden beide Dimensionen mit "n" bezeichnet, denn folgenschwere Verwechslungen sind nicht möglich. Der Raum, in dem sich die x-Variablen realisieren, heißt kurz "x-Raum", der entsprechende Raum für die u-Variablen "u-Raum". Der Einfachheit halber wird auch nicht explizit zwischen dem Wahrscheinlichkeitsraum und dem Wertebereich der Variablen (d. h. x- bzw. u-Raum) unterschieden.

$P[\]$ und $E[\]$ bezeichnen Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert, und zwar ohne genaueren Hinweis stets bezüglich \underline{U} . So ist $P[\underline{X} \in F_x]$ die Wahrscheinlichkeit bezüglich \underline{X} ; aber anstelle $P[\underline{U} \in F]$ steht oft auch kurz $P[F]$. Für eine meßbare Teilmenge F von \mathbb{R}^n und eine reellwertige meßbare Funktion $f = f(\underline{u})$ auf \mathbb{R}^n ist also

$$E[f] = E[f(\underline{U})] = \int f(\underline{u}) \varphi(\underline{u}) \, d\underline{u}$$

$$P[F] = P[\underline{U} \in F] = \int_F \varphi(\underline{u}) \, d\underline{u} .$$

$\varphi(\underline{u})$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte von \underline{U} . Meßbarkeit der auftretenden Mengen wird im folgenden stets stillschweigend unterstellt. Ohne anderslautenden Hinweis sind alle Integrale, auch wenn sie wie Riemann-Integrale geschrieben sind, als Lebesgue-Integrale zu lesen.

Die Zufallsvektoren \underline{X} und \underline{U} sind über eine (meßbare) Transformation \underline{T} in der Form

$$\underline{X} = \underline{T}(\underline{U})$$

verbunden. Dies bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit. Ist die Verteilung des Zufallsvektors \underline{X} von einem Parametervektor $\underline{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ abhängig (wir sprechen auch

kurz vom Parameter τ), so symbolisieren wir dies gelegentlich durch die Schreibweise $\underline{X}(\tau)$. In diesem Falle hängt natürlich auch die Transformation \underline{T} vom Parameter τ ab:

$$\underline{X}(\tau) = \underline{T}(\underline{U}, \tau) .$$

F_x bezeichnet stets eine (meßbare) Teilmenge des x-Raums, die als "Versagensbereich" für die x-Variablen interpretiert wird; ein Versagensfall tritt also ein, wenn \underline{X} einen Wert in F_x annimmt. Mittels der Transformation $\underline{X} = \underline{T}(\underline{U})$ entspricht dem Bereich F_x ein Bereich F im u-Raum:

$$F = \{ \underline{u} : \underline{T}(\underline{u}) \in F_x \} = \underline{T}^{-1}(F_x) .$$

\underline{u} liegt also genau dann in F , wenn $\underline{T}(\underline{u})$ in F_x liegt. Die Versagenswahrscheinlichkeit P_f ist somit

$$P_f = P[\underline{X} \in F_x] = P[\underline{U} \in F] = P[F] = \int_F \varphi(\underline{u}) \, d\underline{u} .$$

Wir setzen stillschweigend voraus, daß P_f von Null verschieden ist.

In Anwendungen ist der Versagensbereich F_x meist in der Form

$$F_x = \{ \underline{x} : g_x(\underline{x}) < 0 \} = \{ g_x < 0 \}$$

gegeben. Letzteres wird häufig als bequeme Kurzschreibweise verwendet. Die Funktion g_x heißt "Zustandsfunktion". Wie F_x läßt sich auch g_x in den u-Raum übertragen:

$$F = \{ \underline{u} : \underline{T}(\underline{u}) \in F_x \} = \{ \underline{u} : g_x(\underline{T}(\underline{u})) < 0 \} = \\ = \{ \underline{u} : g(\underline{u}) < 0 \} = \{ g < 0 \} .$$

Auch $g = g(\underline{u}) = g_x(\underline{T}(\underline{u}))$ wird als Zustandsfunktion (im u-Raum) bezeichnet.

Ist die Abbildung $\underline{T} = \underline{T}(\cdot, \tau) = \underline{T}(\underline{u}, \tau)$ von einem Parameter τ abhängig, so bezieht sich die Umkehrung $\underline{T}^{-1}(\underline{u}, \tau)$ nur auf die Variable \underline{u} , bei festem τ . Es ist also $\underline{T}(\underline{T}^{-1}(\underline{u}, \tau), \tau) = \underline{u}$. Dasselbe gilt für die später eingeführte Abbildung $\underline{G} = \underline{G}(\underline{u}, \tau)$. Entsprechend bezieht sich das Symbol "grad" für den Gradienten nur auf die Variable und nicht auf den

Parameter:

$$\text{grad } g(\underline{u}, \tau) = \left(\frac{\partial}{\partial u_1} g(\underline{u}, \tau), \dots, \frac{\partial}{\partial u_n} g(\underline{u}, \tau) \right) .$$

$\frac{\partial G(\underline{u}, \tau)}{\partial \underline{u}}$ ist die Funktionaldeterminante der Abbildung $\underline{G}(\cdot, \tau) = \underline{G}(\underline{u}, \tau)$ als Funktion von \underline{u} , bei festem τ .

Schließlich werden noch einige Symbole aus Topologie und Mengenlehre benötigt:

\setminus ist das mengentheoretische "Minus": $A \setminus B = \{ a \in A : a \notin B \}$. Das Komplement von $A \subset \mathbb{R}^n$ ist somit $\mathbb{R}^n \setminus A$.

\bar{A} ist der topologische Abschluß von A ; \bar{A} ist also "A vereinigt mit all seinen Randpunkten".

$\| \cdot \|$ ist die euklidische Norm auf \mathbb{R}^n , d. h. $\| \underline{u} \| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$.

Ist A die leere Menge, so definieren wir

$$\inf\{ \| \underline{u} \| : \underline{u} \in A \} := +\infty .$$

$K_\epsilon(\underline{u})$ ist der Kreis um \underline{u} mit Radius ϵ , das ist die Menge aller Punkte, deren Abstand von \underline{u} kleiner ist als ϵ :

$$K_\epsilon(\underline{u}) := \{ \underline{v} : \| \underline{v} - \underline{u} \| < \epsilon \} .$$

Ist der Koordinatenursprung Kreismittelpunkt, so schreiben wir auch kurz

$$K_\epsilon := K_\epsilon(\underline{0}) .$$

Für $\epsilon \leq 0$ ist $K_\epsilon(\underline{u})$ die leere Menge.

Weitere Bezeichnungen:

$\lim_{s \downarrow 0}$: Rechtsseitiger Grenzwert (d.h. s konvergiert gegen 0, bleibt aber stets positiv)

$$\limsup_{s \rightarrow 0} : \limsup_{s \rightarrow 0} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} [\sup_{|t| < s} f(t)] ,$$

und entsprechend ist \liminf definiert.

$$\{ g(\cdot, \tau) < 0 \} = \{ \underline{u} : g(\underline{u}, \tau) < 0 \} : \text{Menge aller } \underline{u} \text{ mit } g(\underline{u}, \tau) < 0 .$$

\mathbb{N} : Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$

\mathbb{R} : Menge der reellen Zahlen (Zahlenstrahl)

\mathbb{R}^n : n-dimensionaler Raum; Menge aller Punkte (r_1, \dots, r_n) mit $r_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$

Φ : Verteilungsfunktion der eindimensionalen Standardnormalverteilung; $\Phi(u) = P[U_1 \leq u]$

$\varphi(u)$: Dichtefunktion der eindimensionalen Standardnormalverteilung

$\varphi(\underline{u})$: Dichtefunktion der n-dimensionalen Standardnormalverteilung, also Dichte von \underline{u} .

"standardnormal" impliziert im mehrdimensionalen stets die Unabhängigkeit der Komponenten.

$f(\underline{u}) = \mathcal{O}(\|\underline{u} - \underline{u}_0\|)$ heißt: $\lim_{\underline{u} \rightarrow \underline{u}_0} \frac{f(\underline{u})}{\|\underline{u} - \underline{u}_0\|} = 0.$

$f(\underline{u}) = \mathcal{O}(\|\underline{u} - \underline{u}_0\|)$ heißt: $\limsup_{\underline{u} \rightarrow \underline{u}_0} \left| \frac{f(\underline{u})}{\|\underline{u} - \underline{u}_0\|} \right| < \infty$

Einfach unterstrichene Größen sind Vektoren, doppelt unterstrichene sind Matrizen. Alle Vektoren sind grundsätzlich als Spaltenvektoren zu verstehen, auch wenn sie der Einfachheit halber als Zeilenvektoren geschrieben sind, etwa

$\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$, aber

$\underline{\underline{A}} \underline{u} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

Diese Schreibweise bietet kaum Anlaß zu Mißverständnissen. Lediglich im Beweis des Satzes 3.3.5 sind Verwechslungen möglich, wo deshalb explizit zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren unterschieden wird.

Stehen Vektoren und Matrizen "ohne Malpunkt" nebeneinander, so sind stets die Rechenregeln der Matrixmultiplikation an-

zuwenden. Ein Malpunkt zwischen Vektoren bezeichnet hingegen das Skalarprodukt:

$\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u}^t \underline{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$

$\underline{u} \cdot \underline{G}(\underline{u}, \underline{I}) = \sum_{i=1}^n u_i G_i(\underline{u}, \underline{I})$

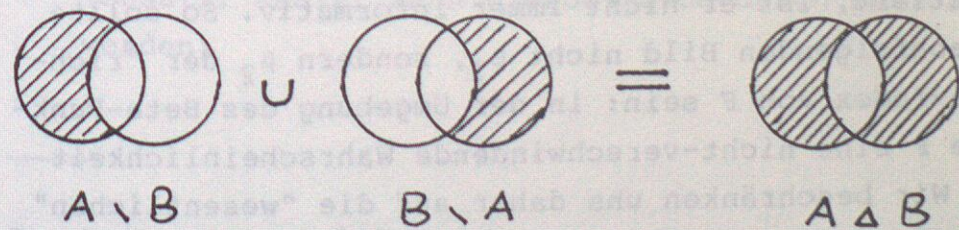
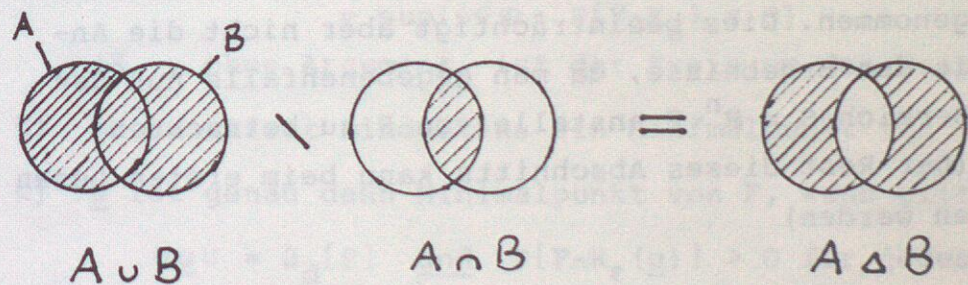
$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ heißt "symmetrische Differenz" (Siehe unten).

$A \stackrel{p}{\approx} B$: A und B sind "in Wahrscheinlichkeit gleich"; Es ist also

$A \stackrel{p}{\approx} B \Leftrightarrow P[A \Delta B] = 0$

\sim : Wird als Zeichen für Approximation verwendet ("ungefähr gleich")

Veranschaulichung von $A \Delta B$:



KAPITEL 2 : DEFINITION UND BESCHREIBUNG WICHTIGER BEGRIFFE

2.1 Klassische Begriffe der Zuverlässigkeitsmethode erster Ordnung

Die bisher eher anschauliche Beschreibung der Begriffe "Beta-Punkt", "Beta-Index" und "Alpha-Wert" erweist sich für die Sätze des dritten Kapitels als unzulänglich und ist daher zu präzisieren. Wer allerdings nicht an größtmöglicher Allgemeinheit der Aussagen interessiert ist, kann diesen Abschnitt 2.1 überschlagen. Es ist jedoch zu beachten, daß hier, abweichend vom üblichen Sprachgebrauch, der Beta-Index $\beta_d[F]$ von F "der kleinste Abstand eines Punktes aus F vom Ursprung", und der Beta-Punkt \underline{u}^* "derjenige Punkt aus F mit kleinstem Abstand vom Ursprung" ist, falls ein solcher Punkt eindeutig bestimmt ist. Somit gilt stets

$$\beta_d[F] \geq 0 ;$$

liegt der Ursprung in F, so ist $\beta_d[F] = 0$ und $\underline{u}^* = \underline{0}$. Die übliche Fallunterscheidung " $\underline{0} \in F$ " bzw. " $\underline{0} \notin F$ " wird hier nicht vorgenommen. Dies beeinträchtigt aber nicht die Anwendbarkeit der Ergebnisse, da man gegebenenfalls nur den sicheren Bereich $S = \mathbb{R}^n \setminus F$ anstelle von F zu betrachten braucht. (Der Rest dieses Abschnitts kann beim ersten Lesen ausgelassen werden)

Die übliche Definition wird noch in anderer Hinsicht modifiziert; denn einmal muß in F kein Punkt mit kleinstem Abstand zum Ursprung existieren, etwa wenn F offen ist und der Ursprung nicht in F liegt. Aber selbst wenn ein solcher Punkt existiert, ist er nicht immer informativ. So sollte etwa im nachfolgenden Bild nicht β_1 , sondern β_2 der "richtige" Beta-Index von F sein: in der Umgebung des Beta-Punktes sollte F eine nicht-verschwindende Wahrscheinlichkeit besitzen. Wir beschränken uns daher auf die "wesentlichen" Punkte von F:

Definition 2.1.3

a) Der "(geometrische) Beta-Index" von F ist

$$\beta_d[F] := \inf\{\|\underline{u}\| : \underline{u} \in \text{Ess}(F)\}$$

b) Ein Punkt $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ (der nicht notwendig in F liegen muß) heißt "Minimalpunkt" von F, wenn gilt

$$\|\underline{u}\| = \beta_d[F] \quad \text{und} \quad \underline{u} \in \overline{\text{Ess}(F)}$$

c) Gibt es genau einen Minimalpunkt von F, so heißt dieser auch "Beta-Punkt".

d) Besitzt F einen Beta-Punkt \underline{u}^* , und ist $\underline{u}^* \neq \underline{0}$, so sind die "(geometrischen) Alpha-Werte"

$$\alpha_i = \alpha_i[F] = - \frac{1}{\|\underline{u}^*\|} u_i^* \quad (\text{für } 1 \leq i \leq n) .$$

Satz 2.1.4

a) Es ist $\beta_d[F] = \inf\{\|\underline{u}\| : \underline{u} \in \overline{\text{Ess}(F)}\} = \sup\{\beta \in \mathbb{R} : P[F \cap K_\beta] = 0\}$

(K_β , ohne Argument, ist der Kreis um den Ursprung)

b) Es existiert mindestens ein Minimalpunkt von F

c) \underline{u} ist genau dann Minimalpunkt von F, wenn gilt:

$$\|\underline{u}\| = \beta_d[F] \quad \text{und} \quad P[F \cap K_\epsilon(\underline{u})] > 0 \quad \text{für jedes } \epsilon > 0$$

d) \underline{u}^* ist genau dann Beta-Punkt von F, wenn gilt:

$$\text{Für jedes } \epsilon > 0 \text{ ist } P[F \cap K_\epsilon(\underline{u}^*)] > 0 \quad \text{und} \\ \inf\{\|\underline{u}\| : \underline{u} \in \text{Ess}(F) \setminus K_\epsilon(\underline{u}^*)\} > \beta_d[F]$$

(Zusatz: $\text{Ess}(F)$ kann hierbei auch durch $\overline{\text{Ess}(F)}$ ersetzt werden)

Der Beta-Index $\beta_d[F]$ ist also der kleinste Abstand eines

Punktes aus $\text{Ess}(F)$, oder dessen Rand, vom Ursprung. Ist K_β ein Kreis um den Ursprung mit Radius $\beta \leq \beta_d[F]$, so folgt $P[F \cap K_\beta] = 0$. Für $\beta > \beta_d[F]$ ist jedoch $P[F \cap K_\beta] > 0$. Satz 2.1.4a (in Verbindung mit Satz 2.1.2c) garantiert, daß Beta-Index β_d , Minimalpunkte und gegebenenfalls der Beta-Punkt fast-gleicher Mengen übereinstimmen. Ist \mathcal{U} eine beliebig kleine Umgebung des Beta-Punkts, so gibt es stets ein $\delta > 0$ derart, daß $\|\underline{u}\| \geq \beta_d[F] + \delta$ für alle diejenigen wesentlichen Punkte von F gilt, die nicht in \mathcal{U} liegen.

2.2 Äquivalenter Sicherheitsindex, und Alpha-Werte von Parametern

Der Beta-Index β_d und die Alpha-Werte α_i lassen sich zwar verhältnismäßig einfach berechnen, doch bleibt zunächst ihre zuverlässigkeitstheoretische Bedeutung unklar. Der historisch wichtige Spezialfall

$$F = \{\sum \alpha_i U_i + \beta < 0\} \quad (\text{mit } \sum \alpha_i^2 = 1)$$

(d. h. F ist ein Halbraum) gestattet allerdings weitergehende Interpretationen, denn offenbar gilt hier (falls $\beta > 0$)

$$\beta = \beta_d[F] \quad \text{und} \quad \alpha_i = \alpha_i[F] = -\frac{1}{\beta} u_i^*$$

Wegen $P[F] = P[\underline{\alpha} \cdot \underline{U} < -\beta] = \Phi(-\beta)$ folgt daher

$$P[F] = \begin{cases} \Phi(-\beta_d[F]) & \text{falls } \beta > 0 \\ \Phi(\beta_d[R^n \setminus F]) & \text{falls } \beta \leq 0 \end{cases}$$

Bei "linearen" Versagensbereichen F steht also $\beta_d[F]$ in direktem Zusammenhang zur Versagenswahrscheinlichkeit. Wie in Abschnitt 1.1 geschildert, übertrug die Zuverlässigkeitsmethode erster Ordnung diese Interpretation von β_d , mittels "Linearisierung" von F im Beta-Punkt \underline{u}^*

$$(1) \quad F \sim \{\sum \alpha_i[F] U_i + \beta_d[F] < 0\} \quad (\text{falls } \beta_d[F] > 0)$$

auf beliebige Versagensbereiche F und postulierte

$$(2) \quad P[F] \sim \Phi(-\beta_d[F]) \quad (\text{falls } \beta_d[F] > 0)$$

Diese Näherung wurde aber kürzlich von Breitung [2] entscheidend verbessert. Ausgehend von der Feststellung, daß P_F in der Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke gewöhnlich sehr klein, bzw. β_d groß ist, betrachtete er für $b > 0$ die Menge

$$bF := \{b\underline{u} : \underline{u} \in F\}$$

d. h. er streckte die Menge F zentrisch um den Ursprung mit dem Streckungsfaktor b , und führte einen Grenzübergang " $b \rightarrow \infty$ " durch. Die Menge bF besitzt zwar dieselbe Gestalt

wie F und dieselbe relative Lage zum Ursprung, doch ihr Beta-Index $\beta_d[bF] = b\beta_d[F]$ wird, bei positivem $\beta_d[F]$ und wachsendem b, beliebig groß. Besitzt nun F einen Beta-Punkt $\underline{u}^* \neq \underline{0}$, und läßt sich F in einer Umgebung von \underline{u}^* mit Hilfe einer zweimal stetig differenzierbaren Grenzzustandsfunktion $g = g(\underline{u})$ darstellen, so folgt laut Breitung, mit $\beta = \beta_d[F] = \|\underline{u}^*\|$

$$(3) \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{P[bF]}{c\Phi(-\beta)} = 1 \quad \text{mit} \quad c = \frac{n-1}{\prod_{i=1}^{n-1} \sqrt{1-\beta\kappa_i}}$$

falls $\kappa_i < \frac{1}{\beta}$ für $1 \leq i \leq n-1$.

Die Koeffizienten κ_i sind die Hauptkrümmungen der Fläche $\{g=0\}$ im Beta-Punkt \underline{u}^* ; die Fläche $\{g=0\}$ muß also in \underline{u}^* weniger stark zum Ursprung hin gekrümmt sein als die Oberfläche der Kugel K_β um den Ursprung mit Radius $\beta = \beta_d[F]$. Dieses Ergebnis begründet die "asymptotische Näherung"

$$(4) \quad P[F] \sim c \cdot \Phi(-\beta_d[F]) \quad \text{für "große } \beta_d[F] \text{"}.$$

Insbesondere ist die Näherung (2) nicht asymptotisch exakt, da ihr relativer Fehler beim Grenzübergang nicht verschwindet. Dennoch läßt sich, von (3) ausgehend, eine asymptotische Näherung formulieren, in der nur β_d , nicht aber die Krümmungen κ_i vorkommen. Aus (3) folgt nämlich [2]

$$\lim_{b \rightarrow \infty} |\beta_d[bF] + \Phi^{-1}(P[bF])| = 0,$$

was für große $\beta_d[F]$ Anlaß gibt zur Approximation

$$(5) \quad \beta_E[F] \sim \beta_d[F] \quad \text{mit} \quad \beta_E[F] := -\Phi^{-1}(P[F]).$$

Im Verlauf des Kapitels 3 wird sich zeigen, daß Aussagen dieser Art sogar unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen gelten, aber auch in einem gewissen Sinne ausreichen. Zunächst halten wir fest

Definition 2.2.1

Der (äquivalente) Sicherheitsindex β_E ist

$$\beta_E[\underline{X} \in F_x] = \beta_E[\underline{U} \in F] = \beta_E[F] :=$$

$$:= -\Phi^{-1}(P[F]) = -\Phi^{-1}(P[\underline{U} \in F]) = -\Phi^{-1}(P[\underline{X} \in F_x])$$

Das Gleichheitszeichen "=" verbindet hier nur verschiedene Schreibweisen desselben Ausdrucks. Die eigentliche Definition wird durch den Doppelpunkt in "==" angezeigt.

Der äquivalente Sicherheitsindex β_E wurde bereits in [13] als "verbesserter Sicherheitsindex" vorwiegend zur graphischen Darstellung numerischer Ergebnisse eingeführt und als Beta-Index β_d eines Halbraums mit gleicher Wahrscheinlichkeit und gleichen geometrischen Alpha-Werten wie F veranschaulicht. Seine allgemeine Bedeutung wurde insbesondere von Ditlevsen [6] diskutiert; dort heißt er "generalized reliability index".

Im Gegensatz zu β_d ist β_E von der jeweiligen Darstellung der Zufallsvariablen, insbesondere auch von der Transformation $\underline{X} = \underline{T}(\underline{U})$, unabhängig. β_E steht in direktem Bezug zur Versagenswahrscheinlichkeit und ist dieser sogar "äquivalent" (daher die Namensgebung). Für Halbräume $F = \{\alpha \cdot \underline{U} + \beta < 0\}$ mit $\beta \geq 0$ stimmen $\beta_E[F]$ und $\beta_d[F]$ überein und sind gleich β .

Eine fundierte Deutung der Alpha-Werte, welche über die unpräzise Wertung als ein "Maß für die Bedeutung von U_i ", so wie sie in Abschnitt 1.1 vorgestellt wurde, hinausgeht, erfordert größere Umwege. Immerhin wurde bereits in [14] versucht, die Größe α_i als Empfindlichkeit des Beta-Index β_d gegenüber Koordinatenverschiebungen darzustellen. Hierdurch wird auch der Einfluß des Mittelwerts von U_i auf die Zuverlässigkeit erfaßt. Dieser Ansatz wird nun präzisiert und verallgemeinert.

Wir nehmen dazu an, daß die Verteilung von $\underline{X} = \underline{X}(\underline{\tau})$ von einem Parametervektor $\underline{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ (kurz auch nur "Pa-

parameter" genannt) abhängt. Auch der Versagensbereich F_x darf von $\underline{\tau}$ abhängen. Zwar werden in der Regel die Parameter von F_x Konstruktionsparameter sein und sich daher von den Verteilungsparametern von \underline{X} unterscheiden. Dennoch bedeutet es keine Einschränkung, sowohl \underline{X} als auch F_x mit Hilfe desselben Parametervektors $\underline{\tau}$ zu beschreiben, da auf $\underline{\tau}$ gegebenenfalls alle vorkommenden Parameter zusammengefaßt werden können.

Ebenso wie die Verteilung von \underline{X} muß nun auch die Transformation $\underline{X}(\underline{\tau}) = \underline{T}(\underline{U}, \underline{\tau})$ vom Parameter $\underline{\tau}$ abhängen. Hierdurch überträgt sich $\underline{\tau}$ wiederum auf den in den u-Raum transformierten Versagensbereich:

$$(6) \quad F = F(\underline{\tau}) = \underline{T}^{-1}[F_x(\underline{\tau}), \underline{\tau}] = \{ \underline{u} : \underline{T}(\underline{u}, \underline{\tau}) \in F_x(\underline{\tau}) \},$$

während er die Verteilung von \underline{U} nicht beeinflussen kann, denn diese ist ja als Standardnormalverteilung festgeschrieben. Letztendlich erscheint der Parameter $\underline{\tau}$ auch im Sicherheitsindex:

$$(7a) \quad \beta_d = \beta_d(\underline{\tau}) = \beta_d[F(\underline{\tau})]$$

$$(7b) \quad \beta_E = \beta_E(\underline{\tau}) = \beta_E[F(\underline{\tau})] = \beta_E[\underline{U} \in F(\underline{\tau})] = \beta_E[\underline{X}(\underline{\tau}) \in F_x(\underline{\tau})]$$

Der Einfluß kleiner Parameteränderungen ist in erster Näherung durch die Ableitungen nach den Parametern gegeben:

Definition 2.2.2

Hängt das Versagensereignis $\{ \underline{X}(\underline{\tau}) \in F_x(\underline{\tau}) \} = \{ \underline{U} \in F(\underline{\tau}) \}$ (bzw. hängt $F(\underline{\tau})$) von einem Parameter $\underline{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ ab mit "Anfangswert" $\underline{\tau}_0$ (um den herum der Parameter variiert wird), und existieren die entsprechenden partiellen Ableitungen, so ist

$$a) \quad \alpha_d[\tau_i | \underline{\tau}_0] = \alpha_d[F(\tau_i) | \underline{\tau}_0] := \frac{\partial}{\partial \tau_i} \beta_d[F(\underline{\tau}_0)]$$

$$\alpha_E[\tau_i | \underline{\tau}_0] = \alpha_E[F(\tau_i) | \underline{\tau}_0] = \alpha_E[\underline{U} \in F(\tau_i) | \underline{\tau}_0] =$$

$$= \alpha_E[\underline{X}(\tau_i) \in F_x(\tau_i) | \underline{\tau}_0] := \frac{\partial}{\partial \tau_i} \beta_E[F(\underline{\tau}_0)]$$

$$b) \quad \underline{\alpha}_d[\underline{\tau} | \underline{\tau}_0] = \underline{\alpha}_d[F(\underline{\tau}) | \underline{\tau}_0] := (\alpha_d[\tau_1 | \underline{\tau}_0], \dots, \alpha_d[\tau_k | \underline{\tau}_0])$$

ist der Vektor aller $\alpha_d[\tau_i | \underline{\tau}_0]$ ($1 \leq i \leq k$).

(Entsprechend für α_E)

c) Das zweite Argument, $\underline{\tau}_0$, wird oft weggelassen, wo dies ohne Einbuße an Deutlichkeit möglich erscheint. Sind sowohl α_d als auch α_E gemeint, so schreiben wir auch kurz α (und entsprechend $\beta[]$ für $\beta_d[]$ bzw. $\beta_E[]$)

d) $\alpha_d[\tau_i | \underline{\tau}_0]$ bzw. $\underline{\alpha}_d[\underline{\tau} | \underline{\tau}_0]$ heißt "asymptotischer Alpha-Wert des Parameters τ_i bzw. $\underline{\tau}$ (an der Stelle $\underline{\tau}_0$)", und $\alpha_E[\tau_i | \underline{\tau}_0]$ bzw. $\underline{\alpha}_E[\underline{\tau} | \underline{\tau}_0]$ heißt "äquivalenter Alpha-wert des Parameters τ_i bzw. $\underline{\tau}$ (an der Stelle $\underline{\tau}_0$)".

Wir sprechen auch kurz von den Alpha-Werten α_d und α_E .

Die Alpha-Werte α_d und α_E von Parametern dürfen keinesfalls mit den (besser bekannten) geometrischen Alpha-Werten α_i aus Definition 2.1.3d verwechselt werden. Die Ähnlichkeit zwischen α_d und α_E einerseits sowie α_i andererseits besteht also zunächst nur im Namen. Die tiefere Beziehung zwischen ihnen wird erst in Kapitel 4 herausgearbeitet werden.

Die Namensgebung "asymptotischer" Alpha-Wert erklärt sich aus den Sätzen des Kapitels 3. Während α_d von der, in gewissen Grenzen willkürlichen, Transformation $\underline{T}(\cdot, \underline{\tau})$ abhängt [diese muß letztendlich nur der Bedingung genügen, daß $\underline{X}(\underline{\tau})$ und $\underline{T}(\underline{U}, \underline{\tau})$ dieselbe Verteilung besitzen], bleibt α_E wie auch β_E von der speziellen Wahl dieser Transformation unbeeinflusst.

In Definition 2.2.2 ist ferner zu beachten, daß das jeweils erste Argument τ_i bzw. $\underline{\tau}$ in $\alpha[]$ nur rein formale Bedeutung

besitzt, vergleichbar dem " τ_i " im Symbol $\frac{\partial}{\partial \tau_i}$ der partiellen Ableitung, durch welche $\alpha[\]$ definiert wird.

Eine Verallgemeinerung der partiellen Ableitung bildet der Begriff der Richtungsableitung, der auch bezogen auf die Ableitungen des Beta-Index eine wichtige Rolle spielt. Während die partielle Ableitung

$$\alpha[\tau_i | \underline{\tau}_0] = \frac{\partial}{\partial \tau_i} \beta[F(\underline{\tau}_0)] = \frac{d}{d\tau} \beta[F(\underline{\tau}_0 + \tau \underline{e}_i)]_{\tau=0}$$

(\underline{e}_i ist der i-te Einheitsvektor im Raum \mathbb{R}^k des Parameters $\underline{\tau}$) den Zuwachs des Beta-Index bei Variation von $\underline{\tau}$ entlang der zur i-ten Koordinatenachse parallelen Geraden $\{\underline{\tau}_0 + \tau \underline{e}_i : \tau \in \mathbb{R}\}$ charakterisiert, wird in der Richtungsableitung eine Variation des Arguments $\underline{\tau}$ entlang einer beliebigen Geraden $\{\underline{\tau}_0 + \tau \underline{e} : \tau \in \mathbb{R}\}$ (mit beliebigem $\underline{e} \in \mathbb{R}^k$) zugrunde gelegt:

Definition 2.2.3

Ist $\underline{e} \in \mathbb{R}^k$ ein beliebiger Vektor im Raum \mathbb{R}^k des Parameters $\underline{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_k)$, so ist

$$\alpha_E[\tau \underline{e} | \underline{\tau}_0] = \alpha_E[\tau \underline{e}] = \alpha_E[F(\tau \underline{e})] = \alpha_E[X(\tau \underline{e}) \in F_x(\tau \underline{e})] := \frac{d}{d\tau} \beta_E[F(\underline{\tau}_0 + \tau \underline{e})]_{\tau=0}$$

Entsprechend ist $\alpha_d[\tau \underline{e} | \underline{\tau}_0]$ erklärt.

Ist speziell $\underline{e} = \underline{e}_i$ der i-te Einheitsvektor in \mathbb{R}^k , so ergibt sich

$$\alpha[\tau \underline{e}_i] = \alpha[\tau_i]$$

Ist die Funktion $\beta[F(\underline{\tau})]$ in $\underline{\tau} = \underline{\tau}_0$ total differenzierbar (oder gar in einer Umgebung von $\underline{\tau}_0$ stetig partiell differenzierbar), so sind umgekehrt durch die "partiellen Ableitungen" $\alpha[\tau_i]$ bereits alle "Richtungsableitungen" $\alpha[\tau \underline{e}]$

bestimmt, denn aus der Kettenregel der Differentialrechnung folgt für beliebiges $\underline{e} = (e_1, \dots, e_k) \in \mathbb{R}^k$

$$(8) \quad \alpha[\tau \underline{e} | \underline{\tau}_0] = \frac{d}{d\tau} \beta[F(\tau_{01} + \tau e_1, \dots, \tau_{0k} + \tau e_k)]_{\tau=0} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial \tau_i} \beta[F(\underline{\tau}_0)] \cdot e_i = \sum_{i=1}^k e_i \alpha[\tau_i | \underline{\tau}_0] = \underline{e} \cdot \alpha[\underline{\tau} | \underline{\tau}_0]$$

Eine Variation des Vektors $\underline{\tau}_0$ in Richtung des Gradienten $\alpha[\underline{\tau} | \underline{\tau}_0]$ bewirkt also den stärksten Anstieg des Sicherheitsindex, und in die entgegengesetzte Richtung erhält man die stärkste Abnahme, während in alle Richtungen senkrecht dazu keinen differentiellen Veränderungen des Sicherheitsindex festzustellen sind. Die Eigenschaft (8) zusammen mit der Kenntnis der Alpha-Werte $\alpha[\tau_i]$ erweist sich daher für Optimierungen als äußerst bedeutsam; andererseits erspart der direkte Beweis von (8) in vielen Fällen den Nachweis der totalen bzw. stetigen Differenzierbarkeit der Funktion $\beta_E[F(\underline{\tau})]$ oder von $\beta_d[F(\underline{\tau})]$.

2.3 Alpha-Werte von Parametern in Bayesschen Modellen

Häufig sind einige oder gar alle Verteilungsparameter des Vektors X der Basisvariablen nicht genau bekannt, sondern mit statistischen Fehlern behaftet. Solche unsicheren Parameter Q modelliert die Bayessche Theorie ebenfalls als zufällige Größen. Die Alpha-Werte alpha_D und alpha_E dieser streuenden Parameter Q sind in den Definitionen des vorigen Abschnitts nicht erfaßt, denn dort war ein fester und wohlbekannter "Anfangswert" vonnöten. Andererseits besitzt aber die sogenannte Priori- oder Posteriori-Verteilung von Q meistens gewöhnliche, deterministische Parameter theta, deren Alpha-Werte alpha_D und alpha_E sehr wohl erklärt sind.

Ist etwa f(.|xi) = f(x|xi) die Wahrscheinlichkeitsdichte von X, und xi der Vektor aller Verteilungsparameter von X, so zerfällt xi = (Q, tau) in die beiden Teilvektoren der unsicheren Parameter Q und der deterministischen Parameter tau. Die Verteilung von Q wiederum besitze eine Dichte h(.|theta) = h(q|theta) mit deterministischen Parametern theta. Es existieren nun mindestens zwei äquivalente Methoden zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit P[X in F_x]. Die eine eliminiert, durch Integration über Q, die unsicheren Parameter Q aus f und weist X = X(theta, tau) die Prediktorverteilung mit Dichte

f'(x|theta, tau) = integral f(x|q, tau) h(q|theta) dq

zu. Die andere nimmt Q in den Vektor der Basisvariablen auf, bildet also X-tilde = (Q, X) als neuen Vektor der Basisvariablen und definiert dessen Verteilung durch die Dichte h(q|theta) von Q, in Verbindung mit der bedingten Dichte f(x|xi) = f(x|q, tau) von X bei gegebenem Wert von Q = q [10]. Die Versagenswahrscheinlichkeit P_f = P_f(theta, tau) = P[X in F_x], und damit auch der äquivalente Sicherheitsindex beta_E = beta_E(theta, tau) sowie die Alpha-Werte alpha_E von theta und tau hängen natürlich nicht von der jeweiligen Rechenmethode ab. Hinge-

gen können die beiden Methoden, bedingt durch die unterschiedlichen Transformationen in den u-Raum, voneinander abweichende geometrische Beta-Indizes beta_D und Alpha-Werte alpha_D liefern.

KAPITEL 3 : ASYMPTOTISCHE NÄHERUNGEN

Zuverlässigkeitsprobleme für Bauwerke enthalten regelmä-
sig eine große Anzahl von unsicheren Variablen. Meist ver-
bietet sich dann die Anwendung numerischer Integrations-
verfahren zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit,
zumal wenn die Grenzzustandsfunktion g durch einen itera-
tiven Prozeß definiert und folglich ihre Auswertung äus-
serst zeitraubend wird. Letzteres erschwert auch, zusam-
men mit den im Bauwesen typischen kleinen Versagenswahr-
scheinlichkeiten, den Einsatz von Simulationsmethoden ganz
erheblich. Die Berechnung der Alpha-Werte α_E mittels nu-
merischer Differentiation von β_E erfordert sogar noch
deutlich gesteigerten Aufwand. Im Vergleich dazu sind der
Beta-Index β_d und, wie sich noch zeigen wird, die Alpha-
-Werte α_d recht einfach zu ermitteln. Die folgenden Sätze
rechtfertigen nun β_d und α_d als "asymptotische Näherungen"
an β_E und α_E , im Falle "kleiner Versagenswahrscheinlich-
keiten".

3.1 Asymptotische Äquivalenz von β_d und β_E

Durch Grenzwertbetrachtungen an

$$bF = \{b\underline{u} : \underline{u} \in F\} ,$$

dem Bild von F bei einer zentrischen Streckung um den Ko-
ordinatenursprung, werden asymptotische Näherungen für den
äquivalenten Beta-Index β_E und , in den nachfolgenden Ab-
schnitten, auch für die Alpha-Werte α_E hergeleitet. Für
positives b ist der geometrische Beta-Index β_d von bF

$$\beta_d[bF] = b\beta_d[F] .$$

Folglich gilt für $b \rightarrow \infty$, falls $\beta_d[F] > 0$,

$$P[bF] \rightarrow 0 , \beta_E[bF] \rightarrow \infty , \beta_d[bF] \rightarrow \infty .$$

Wie der folgende Satz zeigt, konvergiert bei diesem Grenz-
übergang sogar β_d "relativ" gegen β_E :

Satz 3.1.1

Ist $\beta_d[F] > 0$, so folgt

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\beta_E[bF]}{\beta_d[bF]} = 1$$

Bis auf die Voraussetzung " $\beta_d[F] > 0$ " und die allgemeine
Voraussetzung (siehe Abschnitt 1.2) " $P[F] > 0$ ", bzw.
" $\beta_d[F] < \infty$ ", erfordert Satz 3.1.1 keine weiteren Eigen-
schaften von F, nicht einmal die Existenz eines Beta-Punk-
tes. Er gestattet bei "kleiner" Versagenswahrscheinlich-
keit P_f bzw. bei "großem" $\beta_E[F]$, den asymptotischen Sicher-
heitsindex β_d als Näherung an β_E mit "kleinem" relativen
Fehler anzusehen. Dies wurde in der Vergangenheit schon
wiederholt und mit gutem Erfolg empirisch überprüft. Meist
ist, bei "großem" Sicherheitsindex, sogar der absolute Un-
terschied zwischen β_E und β_d gering:

Satz 3.1.2

Ist $\beta := \beta_d[F] > 0$, und gilt für jedes $a > 0$

$$(*) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \exp\left(-\frac{a}{\epsilon}\right) \cdot \frac{1}{P[F \wedge K_{\beta+\epsilon}]} \right\} = 0 ,$$

so folgt

$$\lim_{b \rightarrow \infty} |\beta_E[bF] - \beta_d[bF]| = 0$$

Diese beiden Sätze sind zwar in ihrer Aussage schwächer als das entsprechende Ergebnis von Breitung (siehe Abschnitt 2.2), dafür aber an erheblich schwächere Voraussetzungen geknüpft (die Voraussetzung (*) wird noch ausführlicher diskutiert werden), leichter auszuwerten (da keine zweiten Ableitungen der Zustandsfunktion erforderlich sind) und bei Vorliegen von statistischen Unsicherheiten oder Modellunsicherheiten meist auch "asymptotisch" ausreichend. Ist etwa die Standardabweichung σ einer Normalverteilung mit einem statistischen Fehler $\Delta\sigma$ behaftet und bleibt dieser Fehler beim Grenzübergang konstant, so konvergiert der daraus resultierende relative Fehler $\Delta\beta_E/\beta_E$ beim Grenzübergang " $b \rightarrow \infty$ " gegen eine von Null verschiedene Konstante und ist somit "für große Werte von b " erheblich größer als der relative Fehler $(\beta_E - \beta_d)/\beta_E$ der Approximation $\beta_d \sim \beta_E$, welcher gemäß Satz 3.1.1 gegen Null konvergiert. Im gleichen Sinn überwiegt ein aus statistischen Unsicherheiten über den Mittelwert zu erwartender Fehler $\Delta\beta_E$, unter den Voraussetzungen von Satz 3.1.2, asymptotisch stets den Fehler $\beta_d - \beta_E$. Diese Gesichtspunkte werden im Abschnitt 3.4 ausführlicher behandelt werden.

Bei der Beurteilung der Bedingung (*) ist zu beachten, daß, aufgrund von Satz 2.1.4a, stets

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P[F \cap K_{\beta+\epsilon}] = 0$$

gilt. Allerdings sollte im Sinne von (*) diese Wahrscheinlichkeit nicht allzu stark mit ϵ abfallen. Die folgende Anmerkung gewährleistet indes, daß (*) in Anwendungen zu meist erfüllt ist:

Anmerkung 3.1.3

Es sei \underline{y} ein Minimalpunkt von F (siehe Def. 2.1.3) und \mathcal{U} eine Umgebung von \underline{y} . Für ein $t \in \mathbb{N}$ gebe es auf \mathcal{U} definierte, im Punkte \underline{y} total differenzierbare (oder gar in \mathcal{U}

stetig differenzierbare) Funktionen g_1, g_2, \dots, g_t mit $g_1(\underline{y}) = g_2(\underline{y}) = \dots = g_t(\underline{y}) = 0$ und der Eigenschaft

$$(**) \quad F \cap \mathcal{U} \supset \bigcap_{j=1}^t \{g_j < 0\}$$

Sind ferner die Gradienten $\underline{a}_1 = \text{grad } g_1(\underline{y}), \dots, \underline{a}_t = \text{grad } g_t(\underline{y})$ linear unabhängig, so ist die Bedingung (*) von Satz 3.1.2 erfüllt.

Satz 3.1.2 ist also auch dann anwendbar, wenn der Beta-Punkt von F auf einer "Ecke" oder "Kante" von F liegt; die Existenz eines Beta-Punktes ist aber nicht gefordert. So ist etwa jeder Randpunkt \underline{y} von $F = \mathbb{R}^n \setminus K_\beta$ ($\beta > 0$) auch Minimalpunkt und erfüllt die Bedingungen der Anmerkung 3.1.3. Schließlich ist zu beachten, daß in Bedingung (**) keine Gleichheit, sondern nur eine Inklusion gefordert wird, und diese wiederum nur in einer beliebig klein wählbaren Umgebung des Minimalpunktes \underline{y} . So greift (**) auch dann, wenn

$$F = \bigcup_{j=1}^t \{g_j < 0\}$$

als Vereinigung darstellbar ist; dennes gilt die triviale Relation

$$\bigcup_{j=1}^t \{g_j < 0\} \supset \{g_1 < 0\} = \bigcap_{j=1}^1 \{g_j < 0\}$$

3.2 Asymptotische Äquivalenz von α_d und α_E ; Teil 1

Im Gegensatz zu den asymptotischen Aussagen über den Beta-Index erfordern entsprechende Sätze über die Alpha-Werte die Existenz eines Beta-Punkts, sowie Voraussetzungen über das Verhalten des Versagensbereichs $F = F(\underline{\tau})$ in Abhängigkeit vom Parameter $\underline{\tau}$. Wie bereits im Abschnitt 2.2 bezeichnet $\underline{\tau}_0$ den Anfangswert von $\underline{\tau}$; anstelle von $F(\underline{\tau}_0)$ schreiben wir auch kurz F .

Bei der Berechnung der Alpha-Werte sind zwei typische Darstellungsweisen für $F(\underline{\tau})$ zu unterscheiden. Besteht $\underline{\tau}$ aus Verteilungsparametern des Zufallsvektors $\underline{X} = \underline{X}(\underline{\tau})$, so erscheint $\underline{\tau}$ folgerichtig auch als Parameter der Transformation \underline{T}

$$\underline{X}(\underline{\tau}) = \underline{T}(\underline{U}, \underline{\tau})$$

Ist nun für jedes $\underline{\tau}$ die Transformation $\underline{T} = \underline{T}(\cdot, \underline{\tau})$ (als Funktion von \underline{u} , bei festem $\underline{\tau}$) umkehrbar und die Inverse $\underline{T}^{-1} = \underline{T}^{-1}(\cdot, \underline{\tau})$ auf ganz F_x erklärt, so läßt sich der in den u -Raum transformierte Bereich

$$F(\underline{\tau}) = \underline{T}^{-1}(F_x, \underline{\tau}) = \{\underline{u}: \underline{T}(\underline{u}, \underline{\tau}) \in F_x\}$$

wegen

$$F_x = \underline{T}(F, \underline{\tau}_0) \quad (\text{mit } F := F(\underline{\tau}_0))$$

darstellen in der Form

$$(1) \quad F(\underline{\tau}) = \underline{T}^{-1}[\underline{T}(F, \underline{\tau}_0), \underline{\tau}] = \underline{G}(F, \underline{\tau})$$

$$\text{mit } \underline{G}(\underline{u}, \underline{\tau}) = \underline{T}^{-1}[\underline{T}(\underline{u}, \underline{\tau}_0), \underline{\tau}]$$

$F(\underline{\tau})$ ist also Bild des Bereichs F . Die Abbildung $\underline{G}(\cdot, \underline{\tau})$, welche F in $F(\underline{\tau})$ überführt, ist gewöhnlich differenzierbar.

Ist hingegen $\underline{\tau}$ ein Konstruktionsparameter, oder genauer, ein Parameter von F_x , so läßt sich eine (1) entsprechende Darstellung für $F(\underline{\tau})$ nicht ähnlich einfach herleiten. Meist

ist nun aber $F_x(\underline{\tau})$ über eine vom Parameter $\underline{\tau}$ abhängige Zustandsfunktion $g_x = g_x(\underline{x}, \underline{\tau})$ erklärt:

$$F_x(\underline{\tau}) = \{g_x(\cdot, \underline{\tau}) < 0\} = \{\underline{x}: g_x(\underline{x}, \underline{\tau}) < 0\},$$

so daß sich der transformierte Versagensbereich $F(\underline{\tau})$ im u -Raum wegen $\underline{x} = \underline{T}(\underline{u})$ schreiben läßt als

$$\begin{aligned} F(\underline{\tau}) &= \underline{T}^{-1}[F_x(\underline{\tau})] = \{\underline{u}: \underline{T}(\underline{u}) \in F_x(\underline{\tau})\} = \\ &= \{\underline{u}: g_x(\underline{T}(\underline{u}), \underline{\tau}) < 0\} = \{\underline{u}: g(\underline{u}, \underline{\tau}) < 0\} = \\ &= \{g(\cdot, \underline{\tau}) < 0\}, \end{aligned}$$

mit $g(\underline{u}, \underline{\tau}) = g_x(\underline{T}(\underline{u}), \underline{\tau})$. Gewöhnlich ist hierbei $g = g(\underline{u}, \underline{\tau})$ stetig. Die Darstellung

$$(2) \quad F(\underline{\tau}) = \{g(\cdot, \underline{\tau}) < 0\}$$

ergibt sich sogar, wenn neben F auch die Transformation \underline{T} vom Parameter $\underline{\tau}$ abhängt.

Wir beschäftigen uns nun zunächst mit dem Fall (1)

$$F(\underline{\tau}) = \underline{G}(F, \underline{\tau}) \quad \text{mit } F = F(\underline{\tau}_0)$$

An die Abbildung \underline{G} sowie an F sind natürlich einige Voraussetzungen zu stellen. Der einfacheren Formulierung dient die Abkürzung

$$W_\delta = W_\delta(\underline{\tau}_0) := \{\underline{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_k): |\tau_i - \tau_{0i}| < \delta \text{ für } 1 \leq i \leq k\}$$

Dies ist der Würfel mit Zentrum $\underline{\tau}_0$ und Kantenlänge 2δ .

3.2.1 Voraussetzungen

- (1) F hat einen Beta-Punkt \underline{u}^* , und es ist $\underline{u}^* \neq \underline{0}$.
- (2) Für ein $\delta > 0$ und jedes $\underline{\tau} \in W_\delta$ ist $\underline{G}(\cdot, \underline{\tau})$ eine bijektive Abbildung des \mathbb{R}^n auf sich [d. h. für $\underline{u}_1 \neq \underline{u}_2$ ist $\underline{G}(\underline{u}_1, \underline{\tau}) \neq \underline{G}(\underline{u}_2, \underline{\tau})$; $\underline{G}(\underline{u}, \underline{\tau})$ ist für jedes $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ definiert, und jedes $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ ist Bildpunkt $\underline{v} = \underline{G}(\underline{u}, \underline{\tau})$ eines $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$]. Für $\underline{\tau} = \underline{\tau}_0$ ist $\underline{G}(\cdot, \underline{\tau}_0)$ die identische Abbildung [d. h. $\underline{G}(\underline{u}, \underline{\tau}_0) = \underline{u}$].

(3) $G: \mathbb{R}^n \times W_\delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ [d. h. G als Funktion von \underline{u} und $\underline{\tau}$, für alle $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\underline{\tau} \in W_\delta$] ist zweimal stetig differenzierbar.

(4) Für $1 \leq i \leq k$ sind die Funktionen

$$h_{1,i}(\underline{u}) := \sup_{\underline{\tau} \in W_\delta} \left| \varphi[G(\underline{u}, \underline{\tau})] \frac{\partial G(\underline{u}, \underline{\tau})}{\partial \underline{u}} [G(\underline{u}, \underline{\tau}) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau_i} G(\underline{u}, \underline{\tau})] \right|$$

$$h_{2,i}(\underline{u}) := \sup_{\underline{\tau} \in W_\delta} \left| \varphi[G(\underline{u}, \underline{\tau})] \frac{\partial}{\partial \tau_i} \frac{\partial G(\underline{u}, \underline{\tau})}{\partial \underline{u}} \right|$$

über F (Lebesgue-) integrierbar.

[$\frac{\partial G}{\partial \underline{u}}$ ist die Funktionaldeterminante, und " \cdot " das Skalarprodukt]

(5) Für jedes $\underline{\tau} \in W_\delta$ ist $P \left[\frac{\partial G(\underline{u}, \underline{\tau})}{\partial \underline{u}} = 0 \right] = 0$

3.2.2 Anmerkungen zu den Voraussetzungen

- a) $\delta > 0$ darf beliebig klein gewählt werden
- b) $G(\cdot, \underline{\tau})$ und $G^{-1}(\cdot, \underline{\tau})$ sind meßbar
- c) Mit F ist auch $F(\underline{\tau})$ meßbar
- d) Die Bedingung " $G(\underline{u}, \underline{\tau}_0) = \underline{u}$ " gewährleistet insbesondere $F(\underline{\tau}_0) = G(F, \underline{\tau}_0) = F$.

Unter den oben beschriebenen Voraussetzungen gilt folgender Satz:

Satz 3.2.3

Ist $F(\underline{\tau}) = G(F, \underline{\tau})$ und sind die Voraussetzungen 3.2.1 erfüllt, so ist für jedes $b \geq 1$ die Funktion $\beta_E[bF(\underline{\tau})]$ (als Funktion von $\underline{\tau}$) in W_δ stetig partiell differenzierbar. Außerdem ist für jedes $b > 0$ und jedes $\underline{e} \in \mathbb{R}^k$ die Funktion $\beta_d[bF(\underline{\tau}_0 + \tau \underline{e})]$ als Funktion von τ in $\tau = 0$ differenzierbar. Daher existieren die Alpha-Werte $\alpha_E[bF(\tau \underline{e})]$ und $\alpha_d[bF(\tau \underline{e})]$, insbesondere auch $\alpha_E[bF(\tau_i)]$ und $\alpha_d[bF(\tau_i)]$. Für diese gilt:

a) $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \alpha_E[bF(\tau \underline{e})] = \alpha_d[F(\tau \underline{e})]$ und speziell

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \alpha_E[bF(\tau_i)] = \alpha_d[F(\tau_i)]$$

b) Es ist $\alpha_d[F(\tau \underline{e})] = \alpha_d[\tau \underline{e}] = \underline{e} \cdot \alpha_d[\underline{\tau}]$

mit

$$\alpha_d[\underline{\tau}] = (\alpha_d[\tau_1], \dots, \alpha_d[\tau_k])$$

und

$$\begin{aligned} \alpha_d[\tau_i] &= \alpha_d[F(\tau_i)] = \frac{\partial}{\partial \tau_i} \|G(\underline{u}^*, \underline{\tau}_0)\| = \\ &= \frac{1}{\|\underline{u}^*\|} \left[\underline{u}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \tau_i} G(\underline{u}^*, \underline{\tau}_0) \right] \end{aligned}$$

Wegen der stetigen Differenzierbarkeit von $\beta_E[bF(\underline{\tau})]$ gilt analog zu Teil b des Satzes (vgl. auch Abschnitt 2.2, Gl.

(8))

$$\alpha_E[bF(\tau \underline{e})] = \underline{e} \cdot \alpha_E[bF(\underline{\tau})] = \sum_{i=1}^k e_i \alpha_E[bF(\tau_i)]$$

Aufgrund von Teil a des Satzes und wegen $\beta_d[bF] = b\beta_d[F]$ sowie $\alpha_d[bF(\tau \underline{e})] = b\alpha_d[F(\tau \underline{e})]$ ergibt sich

$$\frac{\alpha_E[bF(\tau_e)]}{\beta_d[bF]} = \frac{\alpha_E[bF(\tau_e)]}{b\beta_d[F]} \sim \frac{\alpha_d[F(\tau_e)]}{\beta_d[F]} = \frac{\alpha_d[bF(\tau_e)]}{\beta_d[bF]}$$

als Näherung mit asymptotisch (für großes b) kleinem absoluten Fehler. Da sich ein Bereich mit "großem" Sicherheitsindex in der Form $F = b\hat{F}$ darstellen läßt, wobei b "groß" und \hat{F} ein Bereich mit "mittlerem" Sicherheitsindex ist, rechtfertigt dies die asymptotische Näherung

(N1) $\frac{\alpha_E[F(\tau_e)]}{\beta_d[F]} \sim \frac{\alpha_d[F(\tau_e)]}{\beta_d[F]}$ mit kleinem absoluten Fehler für großes $\beta_d[F]$.

Der Nenner $\beta_d[F]$ dient hierbei nur zur Beschreibung des Fehlerverhaltens und ist für Anwendungen weniger bedeutsam.

Weil α_E als Ableitung von β_E definiert ist, eröffnet (N1) die Möglichkeit, die ungefähren Veränderungen des Sicherheitsindex β_E abzuschätzen, die von kleinen Variationen $\Delta \tau$ des Parameters τ_0 ausgehen. Mit $e = \frac{1}{\|\Delta \tau\|} \Delta \tau$ folgt wegen

$$\frac{1}{\|\Delta \tau\|} \{ \beta_E[F(\tau_0 + \|\Delta \tau\|e)] - \beta_E[F(\tau_0)] \} \sim \alpha_E[F(\tau_e)]$$

aus (N1) und Satz 3.2.3b auch die Näherung

(N2) $\frac{\beta_E[F(\tau_0 + \Delta \tau)] - \beta_E[F(\tau_0)]}{\|\Delta \tau\| \beta_d[F]} \sim \frac{\Delta \tau \cdot \alpha_d[\tau]}{\|\Delta \tau\| \beta_d[F]}$

mit kleinem absoluten Fehler für großes $\beta_d[F]$ und kleines $\Delta \tau$.

Der Nenner dient wiederum nur zur Normierung des Fehlers.

Die Näherung (N1) gilt exakt, falls $F(\tau)$ für jedes τ (in

einer Umgebung von τ_0) ein Halbraum ist. So etwa, wenn $F = F(\tau_0)$ ein Halbraum ist:

$$F = \{ \underline{\alpha} \cdot \underline{u} + \beta < 0 \},$$

und die Abbildungen $\underline{G}(\cdot, \tau) = \underline{G}(\underline{u}, \tau)$ linear in \underline{u} sind:

$$\underline{G}(\underline{u}, \tau) = \underline{A}(\tau) \underline{u} + \underline{a}(\tau).$$

[Wegen $\underline{G}(\underline{u}, \tau_0) = \underline{u}$ muß $\underline{A}(\tau_0)$ die Einheitsmatrix und $\underline{a}(\tau_0)$ der Nullvektor sein.] Denn in diesem Fall ist $\beta_E = \beta_d$ und folglich $\alpha_E = \alpha_d$. Trotzdem ist vor allzu bedenkenloser Anwendung der asymptotischen Näherungen (N1) und (N2) zu warnen:

Warnung

Vermutlich gibt es zu jedem Bereich F mit Beta-Punkt $\underline{u}^* \neq 0$ Abbildungen $\underline{G}(\cdot, \tau)$ so, daß alle Voraussetzungen des Satzes 3.2.3 erfüllt sind, und für $F(\tau) = \underline{G}(F, \tau)$ der Fehler der Näherung (N1) jede beliebige Größe annimmt.

Es bleibt nur zu hoffen, daß allzu pathologische Beispiele in der Praxis nicht auftreten und die Näherung (N1) jedenfalls bessere Ergebnisse ermöglicht, als ohne jede Information über die Alpha-Werte α_E zu erzielen wären.

Bemerkung 3.2.4

Ist die Transformation $\underline{T}(\cdot, \tau)$ für jedes feste $\tau \in W_\delta$ (als Funktion von \underline{u}) umkehrbar, ihr Wertebereich unabhängig von τ und genügt die dann definierte Abbildung $\underline{G}(\underline{u}, \tau) := \underline{T}^{-1}[\underline{T}(\underline{u}, \tau_0), \tau]$ den Voraussetzungen 3.2.1, so nimmt das Ergebnis des Satzes 3.2.3b die einfache Gestalt an

$$\alpha_d[\tau_i] = \frac{1}{\beta} \left[\underline{u}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \tau_i} \underline{T}^{-1}(\underline{x}^*, \tau_0) \right] \quad \text{mit } \beta = \beta_d[F]$$

und $\underline{x}^* = \underline{T}(\underline{u}^*, \tau_0)$ (der sogenannte "Bemessungspunkt")

3.3 Asymptotische Äquivalenz von α_d und α_E ; Teil 2

In diesem Abschnitt ist $F(\underline{\tau})$ durch eine stetige Zustandsfunktion g beschrieben, die von Parametern $\underline{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ abhängt:

$$F(\underline{\tau}) = \{ \underline{u} : g(\underline{u}, \underline{\tau}) < 0 \} = \{ g(\cdot, \underline{\tau}) < 0 \} .$$

Aus der Differenzierbarkeit der Zustandsfunktion g folgt hier nicht die Differenzierbarkeit von $\beta_E[F(\underline{\tau})]$. Gibt es zum Beispiel einen Punkt $\underline{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ so, daß in einer Umgebung \mathcal{U} von \underline{u}_0 gilt

$$g(\underline{u}, \tau) = \| \underline{u} - \underline{u}_0 \|^{\frac{n+1}{\tau}} - \tau ,$$

so ist für $\tau \geq 0$ das n -dimensionale Flächenmaß von $\mathcal{U} \cap F(\tau)$

$$\lambda_n[\mathcal{U} \cap F(\tau)] = \lambda_n[\{ \underline{u} \in \mathcal{U} : \| \underline{u} - \underline{u}_0 \| < \tau^{1/(n+1)} \}] =$$

$$= (\text{für kleines } \tau) \lambda_n[K_\epsilon] \text{ mit } \epsilon = \tau^{1/(n+1)}$$

Da $\lambda_n[K_\epsilon]$ proportional ist zu ϵ^n , folgt für $\tau \geq 0$

$$\lambda_n[\mathcal{U} \cap F(\tau)] \approx \tau^{n/(n+1)} \quad (\text{"proportional"})$$

und daher ist $\lambda_n[\mathcal{U} \cap F(\tau)]$ nicht in $\tau=0$ differenzierbar; Differenzierbarkeit von $\beta_E[F(\tau)]$ ist dann auch nicht zu erwarten. Ähnliche Effekte könnten auftreten, wenn es für "zu viele" Werte von $\underline{\tau}$ "nahe bei" $\underline{\tau}_0$ Nullstellen von $g(\cdot, \underline{\tau})$ hoher Ordnung gibt, oder wenn für "große" Werte von \underline{u} , und $\underline{\tau}$ "nahe bei" $\underline{\tau}_0$, die Ableitung $\frac{\partial}{\partial \tau} g(\underline{u}, \underline{\tau})$ im Verhältnis zu $g(\underline{u}, \underline{\tau})$ "zu groß" wird. Hinreichende Bedingungen an g , welche die Differenzierbarkeit von $\beta_E[F(\underline{\tau})]$ sichern, dürften also sehr umfänglich oder restriktiv sein. Andererseits betreffen sie, wie noch gezeigt werden wird, vor allem das Verhalten von g "im Unendlichen" (d. h. für "große" \underline{u}) und sind daher in der Ingenieurpraxis selten in Strenge nachweisbar, zumal aufgrund der regelmäßig vorhandenen Verteilungs- und Modellunsicherheiten g "im Unendlichen" nur unzureichend bekannt, aus physikalischen Gründen häufig auch nicht relevant ist. Die Voraussetzungen dieses Abschnitts garantieren infolgedessen nur die Differenzierbarkeit von

$\beta_E[F(\underline{\tau}) \cap \mathcal{U}]$ für eine Umgebung \mathcal{U} des Beta-Punkts, sind aber für praktische Anwendungen den Sätzen des vorausgehenden Abschnitts weitgehend gleichwertig.

3.3.1 Voraussetzungen

- (1) $F = F(\underline{\tau}_0)$ besitzt einen Beta-Punkt $\underline{u}^* \neq \underline{0}$
- (2) Für ein $\delta > 0$ ist W_δ der δ -Würfel um den Anfangswert $\underline{\tau}_0$ von $\underline{\tau}$, und es ist $g = g(\underline{u}, \underline{\tau})$, als Funktion beider Argumente, auf $\mathbb{R}^n \times W_\delta$ (d. h. für $\underline{u} \in \mathbb{R}^n, \underline{\tau} \in W_\delta$) stetig.
- (3) Es ist $F(\underline{\tau}) = \{ g(\cdot, \underline{\tau}) < 0 \} = \{ \underline{u} : g(\underline{u}, \underline{\tau}) < 0 \}$, und $\text{Rand}(F) = \{ g(\cdot, \underline{\tau}_0) = 0 \} = \{ \underline{u} : g(\underline{u}, \underline{\tau}_0) = 0 \}$.
- (4) In einer Umgebung \mathcal{U} des Beta-Punkts \underline{u}^* ist, für jedes $\underline{\tau} \in W_\delta$, $F(\underline{\tau})$ in der Form

$$F(\underline{\tau}) \cap \mathcal{U} = \bigcap_{j=1}^t \{ g_j(\cdot, \underline{\tau}) < 0 \} \cap \mathcal{U}$$

darstellbar, wobei die Funktionen $g_1(\underline{u}, \underline{\tau}), \dots, g_t(\underline{u}, \underline{\tau})$ auf $\mathcal{U} \times W_\delta$ definiert und (bezüglich beider Argumente) zweimal stetig differenzierbar sind.

- (5) Die Gradienten $\underline{a}_1 = \text{grad } g_1(\underline{u}^*, \underline{\tau}_0), \dots, \underline{a}_t = \text{grad } g_t(\underline{u}^*, \underline{\tau}_0)$ sind linear unabhängig. Insbesondere sind also alle $\underline{a}_j \neq \underline{0}$.
- (6) Für jedes $\underline{e} \in \mathbb{R}^k$ ist

$$\limsup_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{|\tau|} P[F(\underline{\tau}_0 + \tau \underline{e}) \Delta F(\underline{\tau}_0)] < \infty .$$

(Zur Erklärung von "limsup" und " Δ " siehe Abschnitt 1.2)

3.3.2 Anmerkungen zu den Voraussetzungen

- a) [Zu (2) und (3)]: Ist $F(\underline{\tau})$ durch endlich viele Durchschnitte und Vereinigungen von Mengen der Gestalt $\{ g_j(\cdot, \underline{\tau}) < 0 \}$ darstellbar, wie etwa

$$F(\underline{\tau}) = \bigcap_{i=1}^{t_1} \bigcap_{j=1}^{t_2} \bigcap_{s=1}^{t_3} \{g_{ijs}(\cdot, \underline{\tau}) < 0\},$$

und sind die $g_j = g_j(\underline{u}, \underline{\tau})$ auf $\mathbb{R}^n \times W_\delta$ stetig, so ist $F(\underline{\tau})$ von der Form

$$F(\underline{\tau}) = \{g(\cdot, \underline{\tau}) < 0\}$$

mit stetigem $g = g(\underline{u}, \underline{\tau})$, etwa

$$g(\underline{u}, \underline{\tau}) = \max_{1 \leq i \leq t_1} \min_{1 \leq j \leq t_2} \max_{1 \leq s \leq t_3} g_{ijs}(\underline{u}, \underline{\tau}).$$

b) [Zu (4) und (5)] Man kann sich stets, eventuell durch entsprechendes Verkleinern der Umgebung \mathcal{U} des Beta-Punktes \underline{u}^* , auf diejenigen g_j beschränken mit $g_j(\underline{u}^*, \underline{\tau}_0) = 0$. Details hierzu sind in Abschnitt B3.3 zu finden.

c) [Zu (4)] Der alternative Fall

$$F(\underline{\tau}) \cap \mathcal{U} = \bigcup_{j=1}^t \{g_j(\cdot, \underline{\tau}) < 0\} \cap \mathcal{U}$$

ist vergleichsweise unbedeutend. Hieraus folgt nämlich für $1 \leq j \leq t$

$$\{g_j(\cdot, \underline{\tau}_0) < 0\} \cap \mathcal{U} \subset F \cap \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus K_\beta.$$

[$\beta = \|\underline{u}^*\|$; $\{g_j(\cdot, \underline{\tau}_0) < 0\}$ liegt also außerhalb des Kreises K_β um den Ursprung mit Radius β .] Daraus folgt wiederum, da $\underline{u}^* \neq \underline{0}$ bzw. $\beta > 0$ vorausgesetzt ist, daß alle Gradienten $\underline{a}_j = \text{grad } g_j(\underline{u}^*, \underline{\tau}_0)$ einheitlich in Richtung von $-\underline{u}^*$, also genau zum Koordinatenursprung hin, weisen. Eine solche Situation ist außer in konstruierten Beispielen nur selten anzutreffen.

d) [Zu (6)] Gilt für alle $1 \leq j \leq t$ und alle $\underline{u} \in \mathcal{U}$ mit $g_j(\underline{u}, \underline{\tau}_0) = 0$ die Voraussetzung

$$(V^*) \quad \text{grad } g_j(\underline{u}, \underline{\tau}_0) \neq \underline{0},$$

so folgt für jede abgeschlossene Teilmenge A von \mathcal{U} mit endlichem Durchmesser, und jedes $\underline{e} \in \mathbb{R}^k$

$$(6^*) \quad \limsup_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{|\tau|} P[A \cap (F(\underline{\tau}_0 + \tau \underline{e}) \Delta F(\underline{\tau}_0))] < \infty.$$

Da wegen Voraussetzung 3.3.1(5) sämtliche Gradienten $\text{grad } g_j(\underline{u}^*, \underline{\tau}_0)$ von Null verschieden sind und sich zudem bezüglich \underline{u} nur stetig ändern, gibt es stets eine Umgebung \mathcal{U}^* des Beta-Punktes \underline{u}^* so, daß (V^*) für alle j und alle $\underline{u} \in \mathcal{U}^*$ erfüllt ist. Somit existiert stets eine Umgebung A des Beta-Punktes, welche der Bedingung (6^*) genügt. Die Bedingung 3.3.1(6) kann also nur durch übermäßig starkes Fluktuieren der Menge $F(\underline{\tau})$ (bei veränderlichem $\underline{\tau}$) im Bereich "weit außerhalb" des Beta-Punktes gestört werden. Trotzdem bleibt die Voraussetzung (6) recht unanschaulich. Demgegenüber erscheinen die in der nachfolgenden Anmerkung genannten Bedingungen zumindest plausibel und lassen, wenn sie auch in Strenge schwer nachzuprüfen sind, doch hoffen, daß (6) in der Regel erfüllt sein wird:

3.3.3 Anmerkung

Läßt sich $F(\underline{\tau})$ mit Hilfe von endlich vielen Durchschnitten und Vereinigungen von Mengen der Form $\{g_j(\cdot, \underline{\tau}) < 0\}$ darstellen (vgl. 3.3.2a), und sind die Funktionen $g_j = g_j(\underline{u}, \underline{\tau})$, als Funktion beider Argumente, auf $\mathbb{R}^n \times W_\delta$ stetig partiell differenzierbar, so ist die Voraussetzung 3.3.1(6) erfüllt, falls jedes g_j folgenden Bedingungen genügt:

(1) Die Verteilung der Zufallsvariablen $g_j(\underline{U}, \underline{\tau}_0)$ [wie \underline{U} ist auch $g_j(\underline{U}, \underline{\tau}_0)$ eine Zufallsvariable!] besitzt eine in einer Umgebung von $s=0$ beschränkte Wahrscheinlichkeitsdichte $f_j = f_j(s)$ [d.h. es gibt ein $s_0 > 0$ und ein $c < \infty$ so, daß $f_j(s) \leq c$ gilt für alle s mit $|s| \leq s_0$]

(2) Für ein $\varepsilon > 0$ besitzt die Zufallsvariable

$$H_j = \sup_{|\tau| < \varepsilon} \left| \frac{d}{d\tau} g_j(\underline{U}, \underline{\tau}_0 + \tau \underline{e}) \right|$$

endliche Varianz, das heißt es ist $E[H_j^2] < \infty$

(3) Es existiert eine in einer Umgebung von $s=0$ beschränkte Version der bedingten Erwartung

$$E[H_j^2 \mid g_j(\underline{U}, \underline{\tau}_0) = s].$$

Im Gegensatz zum vorigen Abschnitt 3.2 ist unter den Voraussetzungen 3.3.1 die Differenzierbarkeit von $\beta_E[F(\underline{\tau})]$ nicht gewährleistet, wie sich am Gegenbeispiel

$$g(u, \tau) = \tau + \begin{cases} 4 - (u-1)^2 & \text{für } u \leq 3 \\ 2(3-u) & \text{für } u \geq 3 \end{cases}$$

$$(\tau_0 := 0 ; u^* = -1)$$

leicht nachprüfen läßt. Ist aber $\beta_E[F(\underline{\tau})]$ nicht in $\underline{\tau}_0$ differenzierbar, so existieren die Alpha-Werte α_E nicht.

Stattdessen betrachten wir hier zwei allgemeinere, ganz ähnliche Begriffe, die, sofern unendliche Werte zugelassen werden, stets erklärt sind:

Definition 3.3.4

Für $\underline{e} \in \mathbb{R}^k$ ist

$$\alpha_E^O[\underline{\tau} | \underline{\tau}_0] = \alpha_E^O[F(\underline{\tau} | \underline{\tau}_0)] := \limsup_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \{ \beta_E[F(\underline{\tau}_0 + \tau \underline{e})] - \beta_E[F(\underline{\tau}_0)] \}$$

$$\alpha_E^U[\underline{\tau} | \underline{\tau}_0] = \alpha_E^U[F(\underline{\tau} | \underline{\tau}_0)] := \liminf_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \{ \beta_E[F(\underline{\tau}_0 + \tau \underline{e})] - \beta_E[F(\underline{\tau}_0)] \}$$

Die für α_E geltenden Konventionen, die Schreibweise betreffend, werden analog auf α_E^O und α_E^U übertragen.

Wegen Voraussetzung 3.3.1(6) haben α_E^O und α_E^U sogar einen endlichen Wert. Es ist stets $\alpha_E^U \leq \alpha_E^O$; stimmen die beiden überein, so existiert auch α_E (und es ist dann $\alpha_E^U = \alpha_E = \alpha_E^O$), und umgekehrt. Für diese "unteren und oberen" Alpha-Werten läßt sich eine dem Satz 3.2.3 ähnliche Aussage formulieren:

Satz 3.3.5

Sind die Voraussetzungen 3.3.1 erfüllt, so ist für jedes $b > 0$ und jedes $\underline{e} = (e_1, \dots, e_k) \in \mathbb{R}^k$ die Funktion $\beta_d[bF(\underline{\tau}_0 + \tau \underline{e})]$ in $\tau = 0$ differenzierbar. Insbesondere existieren die asymptotischen Alpha-Werte $\alpha_d[bF(\tau \underline{e})]$, und es gilt:

a) $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \alpha_E^O[bF(\tau \underline{e})] = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \alpha_E^U[bF(\tau \underline{e})] = \alpha_d[F(\tau \underline{e})]$

b) Der Beta-Punkt \underline{u}^* ist eindeutig in der Form

$$\underline{u}^* = \sum_{j=1}^t \lambda_j \underline{a}_j \quad (\text{vgl. Vorauss. 3.3.1(5)})$$

darstellbar. Dabei ist $\lambda_j = 0$, falls $g_j(\underline{u}^*, \underline{\tau}_0) \neq 0$.

c) Es ist $\alpha_d[bF(\tau \underline{e})] = b \alpha_d[F(\tau \underline{e})] = b \alpha_d[\tau \underline{e}]$.

Bezeichnen wir mit

$$\underline{c}_i := \left(\frac{\partial}{\partial \tau_i} g_1(\underline{u}^*, \underline{\tau}_0), \dots, \frac{\partial}{\partial \tau_i} g_t(\underline{u}^*, \underline{\tau}_0) \right) \in \mathbb{R}^t$$

$$\underline{\lambda} := (\lambda_1, \dots, \lambda_t) \in \mathbb{R}^t$$

so ist mit $\beta := \beta_d[F] = \|\underline{u}^*\|$

$$\alpha_d[\tau \underline{e}] = -\frac{1}{\beta} (\underline{\lambda} \cdot \underline{c}_i)$$

und allgemein

$$\alpha_d[\tau \underline{e}] = \underline{e} \cdot \underline{\alpha}_d[\underline{\tau}] = \sum_{i=1}^k e_i \alpha_d[\tau_i]$$

Ist $t=1$, nimmt also nur eine einzige der Funktionen g_j in \underline{u}^* und $\underline{\tau}_0$ den Wert Null an, so erhält das Resultat dieses Satzes im Teil c eine einfachere Gestalt:

Anmerkung 3.3.6

Ist $t=1$, d.h. $F(\underline{\tau}) \cap \mathcal{U} = \{g_1(\cdot, \underline{\tau}) < 0\}$, und sind die Voraus-

setzungen des Satzes 3.3.5 erfüllt, so ergibt sich

$$\alpha_d[\tau_i] = \frac{\frac{\partial}{\partial \tau_i} g_1(\underline{u}^*, \tau_0)}{\|\text{grad } g_1(\underline{u}^*, \tau_0)\|}$$

Mit derselben Begründung wie im vorigen Abschnitt ergeben sich aus Satz 3.3.5 wieder die Näherungen

$$(N1) \quad \frac{\alpha_E^O[F(\tau_e)]}{\beta_d[F]} \sim \frac{\alpha_E^U[F(\tau_e)]}{\beta_d[F]} \sim \frac{\alpha_d[F(\tau_e)]}{\beta_d[F]}$$

mit kleinem absoluten Fehler für großes $\beta_d[F]$

und

$$(N2) \quad \frac{\beta_E[F(\tau_0 + \Delta\tau)] - \beta_E[F(\tau_0)]}{\|\Delta\tau\| \beta_d[F]} \sim \frac{\Delta\tau \cdot \alpha_d[\tau]}{\|\Delta\tau\| \beta_d[F]}$$

mit kleinem absoluten Fehler für großes $\beta_d[F]$ und kleines $\Delta\tau$

Lediglich die numerische Berechnung von α_d erfolgt jetzt mit Hilfe von Satz 3.3.5 (b und c) anstatt mit Satz 3.2.3b.

Häufig sind nun sowohl Satz 3.2.3 als auch Satz 3.3.5 anwendbar; eine vergleichende Diskussion erfolgt in Abschnitt 5.3 .

3.4 Der Fehler der Methode erster Ordnung im Vergleich zum Fehler aus Parameterunsicherheiten

Die Methode erster Ordnung verwendet β_d als Näherung an β_E ; die Sätze 3.1.1 und 3.1.2 beschäftigen sich mit dem dadurch verursachten relativen und absoluten Fehler. Ein davon unabhängiger Fehler resultiert aus den meist unvermeidlichen Parameterunsicherheiten. In einem wichtigen Spezialfall lassen sich nun diese beiden Fehlerarten gegeneinander aufwiegen.

Seien $(\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n)$ unabhängige, standardnormal verteilte Zufallsvariablen mit Mittelwerten μ_i und Standardabweichungen σ_i :

$$\tilde{U}_i = \mu_i + \sigma_i U_i$$

Der Anfangswert des Parameters $\tau = (\mu_1, \dots, \mu_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ sei $\tau_0 = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$. Somit ist

$$\tilde{U}(\tau_0) = \underline{U}$$

F sei ein beliebiger Versagensbereich im Raum der \tilde{u} -Variablen. Wir "verkleinern" nun F wieder durch eine zentrische Streckung mit einem großen Faktor $b > 0$

$$F_b := bF$$

und untersuchen für kleine Wahrscheinlichkeiten von F_b die Auswirkungen statistischer Unsicherheiten $\Delta\mu_i$ und $\Delta\sigma_i$ auf den äquivalenten Sicherheitsindex. Diese Auswirkungen werden in erster Näherung durch die Ableitungen der Funktion $\beta_E[\tilde{U}(\tau) \in F_b]$ nach μ_i und σ_i beschrieben:

Satz 3.4.1

Besitzt F einen Beta-Punkt \underline{u}^* , und ist $\beta := \beta_d[F] > 0$, so gilt

$$a) \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \mu_i} \beta_E[\tilde{U}(\tau_0) \in F_b] = -\frac{1}{\beta} u_i^* = \alpha_i$$

$$b) \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \beta_E[\tilde{U}(\tau_0) \in F_b] = -\frac{1}{\beta} (u_i^*)^2 = -\beta \alpha_i^2$$

Eine kleine Änderung $\Delta\mu_i$ von μ_i bzw. $\Delta\sigma_i$ von σ_i verursacht daher, für große Werte von b , eine Änderung von β_E in der Größenordnung

$$\Delta\beta_E \sim \alpha_i \Delta\mu_i \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{\Delta\beta_E}{\beta} \sim -\alpha_i^2 \Delta\sigma_i$$

Ein Vergleich mit den Sätzen

$$(3.1.2) \quad \beta_E[F_b] - \beta_d[F_b] \rightarrow 0 \quad (\text{für } b \rightarrow \infty)$$

bzw.

$$(3.1.1) \quad \frac{\beta_E[F_b] - \beta_d[F_b]}{b\beta} \rightarrow 0 \quad (\text{für } b \rightarrow \infty)$$

zeigt (falls $\alpha_i \neq 0$): Für große Werte von b , also kleine Wahrscheinlichkeiten von F_b , ist der Fehler der Methode erster Ordnung kleiner als die Schwankungsbreite $\Delta\beta_E$, die von Unsicherheiten $\Delta\sigma_i$ hervorgerufen wird (Satz 3.1.1), und falls die Voraussetzungen des Satzes 3.1.2 vorliegen, sogar kleiner als die von Unsicherheiten $\Delta\mu_i$ hervorgerufene Schwankungsbreite des Sicherheitsindex β_E . Vorausgesetzt wird hierbei lediglich, daß die Größe der statistischen Unsicherheiten unabhängig ist von b , d. h. unabhängig von der geforderten Versagenswahrscheinlichkeit.

Vermutlich verursachen die in der Praxis tatsächlich auftretenden Parameterunsicherheiten mindestens ebenso große Fehler wie die hier diskutierten, weil in der Regel nicht einmal der Verteilungstyp zweifelsfrei feststeht.

KAPITEL 4 : ALPHA-WERTE IN DER ZUVERLÄSSIGKEITSMETHODE ERSTER ORDNUNG

4.1 Alpha-Werte von Variablen

Die Sätze des Kapitels 3 rechtfertigen den in der Zuverlässigkeitsmethode erster Ordnung gebräuchlichen Sicherheitsindex β_d als asymptotische Näherung an den äquivalenten Sicherheitsindex β_E . Die ebenfalls gebräuchlichen (geometrischen) Alpha-Werte $\alpha_i = -\frac{1}{\beta} u_i^*$ ($\beta = \|\underline{u}^*\|$) hingegen bedürfen noch einer ausführlicheren Diskussion. Wie in Abschnitt 1.1 geschildert, wurden sie mittels der Linearisierung des Versagensbereichs F im Beta-Punkt \underline{u}^*

$$(1) \quad F \sim \{\sum \alpha_i U_i + \beta < 0\}$$

als "Wichtungsfaktoren" bzw. als "Maß für die Bedeutung" der Variablen U_i eingeführt. Ist die Basisvariable X_j eine Funktion von U_i , d. h. $X_j = T_j(U_i)$ und T_j eine streng monoton wachsende Funktion, so ist X_j mit U_i bis auf eine unterschiedliche Maßeinheit weitgehend identisch; folglich wird α_i auch als "Alpha-Wert" für die Variable X_j angesehen. Die vorne bereitgestellten Begriffe gestatten nun eine leichter interpretierbare Definition für den Alpha-Wert einer Variablen, welche in bestimmten Fällen mit der herkömmlichen übereinstimmt und ihr ansonsten zumindest "asymptotisch" gleichkommt. Sie ist an eine von den ursprünglichen Basisvariablen weitgehend unabhängige, standardisierte Verteilungsänderung im u -Raum geknüpft.

Weil aber die Verteilung von $\underline{U} = (U_1, \dots, U_n)$ bereits unabänderlich festliegt, führen wir wie bereits in Abschnitt 3.4 einen Zufallsvektor $\tilde{\underline{U}} = (\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n)$ gleicher Dimension, aus unabhängigen und normalverteilten Variablen \tilde{U}_i , mit beliebigen Mittelwerten μ_i und Standardabweichungen σ_i , ein. Die Parameter werden im Vektor

$$\underline{\tau} = (\mu_1, \dots, \mu_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

zusammengefaßt. Da $\tilde{U}(\underline{\tau}_0)$ mit \underline{U} identifiziert werden soll, ist $\underline{\tau}_0 = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ der Anfangswert des Parameters $\underline{\tau}$.

Diejenige Änderung $\Delta\beta_E$ von β_E , welche aus einer hypothetischen Reduktion der Standardabweichung, von $\sigma_i = 1$ auf $\sigma_i = 0$, resultiert, ist ein Maß für die "stochastische Bedeutung" der Variablen U_i , oder genauer, für den Einfluß der Unsicherheit bezüglich U_i auf die Sicherheit. Bei kleinem $\Delta\beta_E$ ließe sich nämlich die Zufallsgröße U_i ebenso gut als Konstante mit festem Wert $U_i = \mu_i$ behandeln, ihre Streuung wäre unwesentlich. Aus technischen Gründen, aber auch um schließlich auf die geometrischen Alpha-Werte α_i zurückzukommen, betrachten wir hier nur differentielle Änderungen von σ_i ; diese sind bereits im Alpha-Wert $\alpha_E[\sigma_i]$ des Parameters σ_i erfaßt:

Definition 4.1.1

a) Der Alpha-Wert α_σ der Variablen U_i ist

$$\alpha_\sigma[U_i] = \alpha_\sigma[U_i|F] := \alpha_E[\tilde{U}(\sigma_i) \in F | \underline{\tau}_0] = \alpha_E[\sigma_i]$$

b) Ist $\underline{X} = \underline{T}(\underline{U})$, $F = \underline{T}^{-1}(F_x)$ und $X_j = T_j(U_i)$ mit streng monoton wachsendem T_j , so ist der Alpha-Wert α_σ der Variablen X_j

$$\alpha_\sigma[X_j] = \alpha_\sigma[X_j|F_x] := \alpha_\sigma[U_i|F]$$

Teil b der Definition ist eine Konsequenz der Forderung, für physikalische äquivalente Variablen dieselben Alpha-Werte zu erhalten.

Parallel zur vorausgehenden Definition erfaßt die folgende

den Einfluß einer differentiellen Änderung des Mittelwerts im u-Raum:

Definition 4.1.2

Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen der Definition 4.1.1. Dann ist

a) $\alpha_\mu[U_i] = \alpha_\mu[U_i|F] := \alpha_E[\tilde{U}(\mu_i) \in F | \underline{\tau}_0] = \alpha_E[\mu_i]$

b) $\alpha_\mu[X_j] = \alpha_\mu[X_j|F_x] := \alpha_\mu[U_i|F]$

Gemäß Satz 3.2.3 existieren die äquivalenten Alpha-Werte α_E der Parameter μ_i und σ_i stets (vgl. Beweis von Satz 3.4.1), und somit auch die Alpha-Werte α_μ und α_σ der Variablen U_i bzw. X_j . Die Definitionen 4.1.1 und 4.1.2 erfassen bereits beliebig verteilte, nicht "entartete" Zufallsvariablen X_j (d. h. Zufallsvariablen X_j mit stetiger Verteilungsfunktion, oder gleichbedeutend $P[X_j=x] = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Denn ist \underline{X} ein beliebig verteilter Zufallsvektor und die Komponenten-Variable X_j nicht entartet, so existiert stets eine Transformation $\underline{X} = \underline{T}(\underline{U})$, welche den Anforderungen der Definition 4.1.1b genügt. Durch Ummieren der Komponenten des Vektors \underline{X} kann man nämlich stets $j=1$ erreichen. Die in [10] beschriebene Transformation \underline{T} lautet dann für die erste Komponente

$$X_1 = F_1^{-1}[\Phi(U_1)] := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_1(x) \geq \Phi(U_1)\}$$

Hierbei ist F_1 die Verteilungsfunktion von X_1 . Da X_1 nicht entartet und daher F_1 stetig ist, ist $T_1 = F_1^{-1} \circ \Phi$ streng monoton wachsend.

Allerdings gibt es gewöhnlich eine Anzahl unterschiedlicher Transformationen mit den in 4.1.1b vorausgesetzten Eigenschaften. Nicht einmal die Dimension des Zufallsvektors \underline{U} ist eindeutig festgelegt. Wie aber in Satz B4.1.1

im Abschnitt B4.1 gezeigt wird, führt jede solche Transformation \underline{T} zu denselben Alpha-Werten $\alpha_\mu[X_j]$ und $\alpha_\sigma[X_j]$. Die Definitionen sind also eindeutig. Ferner besitzen nach Satz B4.1.1 äquivalente Variablen X_j und Y_t (d. h. $X_j = S_j(Y_t)$, S_j streng monoton wachsend) auch identische Alpha-Werte.

Die Alpha-Werte α_μ und α_σ sind bisher nur über eine differentielle Änderung der Parameter μ und σ im, physikalisch meist irrelevanten, u-Raum erklärt; die Parameter μ und σ besitzen aber keine unmittelbare Bedeutung für die Basisvariablen \underline{X} . Mittels der Transformation $\underline{X} = \underline{T}(\underline{U})$ lassen sich μ und σ jedoch auch als "künstliche" Parameter der Verteilung von \underline{X} einführen. Definiert man nämlich

$$\tilde{X}(\underline{\tau}) := \underline{T}[\tilde{U}(\underline{\tau})],$$

so ist $\underline{\tau}$ Verteilungsparameter von \tilde{X} und wegen $\tilde{U}(\underline{\tau}_0) = \underline{U}$ ist $\tilde{X}(\underline{\tau}_0) = \underline{X}$. Die Alpha-Werte

$$\alpha_\mu[X_j] = \alpha_E[\tilde{U}(\mu_i) \in F] = \alpha_E[\tilde{X}(\mu_i) \in F_x]$$

$$\alpha_\sigma[X_j] = \alpha_E[\tilde{U}(\sigma_i) \in F] = \alpha_E[\tilde{X}(\sigma_i) \in F_x]$$

beschreiben also ebenfalls den Effekt einer differentiellen Änderung der "künstlichen" Verteilungsparameter μ_i und σ_i von \tilde{X} im x-Raum:

Die Transformation $X_j = T_j(U_i)$ kann, da T_j streng monoton wächst, als ein Wechsel des Maßstabs auf der x_j -Achse gedeutet werden; an der Stelle $x_j = T_j(u_i)$ wird die Markierung " x_j " ersetzt durch die neue Marke " u_i ". Diese besitzt die Eigenschaft $P[X_j \leq x_j] = P[U_i \leq u_i] = \Phi(u_i)$. Der Nullpunkt des neuen Maßstabs etwa liegt am Median (50%-Fraktile) von X_j . Bezüglich dieses neuen Maßstabs ist X_j standardnormal verteilt; $\tilde{X}_j(\mu_i, \sigma_i)$ besitzt, bezogen auf den neuen Maßstab, eine Normalverteilung mit Parametern μ_i und σ_i . Hingegen bleibt die bedingte Verteilung von \tilde{X} , bei gegebenem Wert von $\tilde{X}_j = x$, von einer Variation der μ_i und σ_i unberührt und hängt nur vom Wert x ab. Die Verteilung al-

Satz 4.1.4

Ist X_j nicht entartet, d. h. die Verteilungsfunktion F_j von X_j stetig, so gilt, mit $\beta_E := \beta_E[X \in F_x]$

$$E[\phi^{-1}F_j(X_j) | X \in F_x] = -\alpha_\mu[X_j | F_x] \frac{\phi(-\beta_E)}{\Phi(-\beta_E)}$$

Bei gegebener Versagenswahrscheinlichkeit $P[X \in F_x] = \Phi(-\beta_E)$ ist also der bedingte Erwartungswert von X_j im Versagensfall [das ist der mittlere Wert von X_j , wenn nur über die Versagensfälle gemittelt wird], gemessen bezüglich des standardnormalen Maßstabs $u = \phi^{-1}F_j(x)$ auf der x_j -Achse, proportional zum Alpha-Wert $\alpha_\mu[X_j]$. Der Proportionalitätsfaktor $-\phi(-\beta_E)/\Phi(-\beta_E)$ ist, für große Werte von β_E , ungefähr gleich $-\beta_E$. Nun ist, wie im folgenden Abschnitt 4.2 gezeigt wird, $|\alpha_\mu[X_j]| \leq 1$; für unabhängige Variablen gilt sogar $\sum \alpha_\mu[X_j]^2 \leq 1$. Der Durchschnittswert einer Variablen X_j mit $\alpha_\mu[X_j] \sim 1$ (meist eine Widerstandsgröße) ist also, wenn nur über die Versagensfälle gemittelt wird, ungewöhnlich klein. Ist dagegen $\alpha_\mu[X_j] \sim -1$ (meist eine Lastgröße), so ist der mittlere Wert von X_j im Versagensfall ungewöhnlich groß. Die Durchschnittswerte aller von einem solchen X_j unabhängigen Variablen aber unterscheiden sich bei Mittelung nur über die Versagensfälle nur unwesentlich von ihrem globalen Mittel. Dies deutet auf einen ursächlichen Zusammenhang hin zwischen dem Versagen (eines Tragwerks) einerseits, und den sehr kleinen bzw. sehr großen Realisierungen der Variablen X_j andererseits.

Die Alpha-Werte α_μ und α_σ von Variablen präzisieren somit den etwas schwammigen Begriff eines "Maßes für die Bedeutung der Variablen", und dies auf recht anschauliche Weise. Ihre exakte numerische Berechnung jedoch, direkt von der

Definition ausgehend, bereitet erhebliche Schwierigkeiten, während die Sätze des Kapitels 3 ohne großen Aufwand asymptotische Näherungen für die Alpha-Werte α_μ und α_σ begründen. Dabei offenbart sich auch deren Bezug zu den geometrischen Alpha-Werten α_i :

Satz 4.1.5

Ist F ein Versagensbereich im u-Raum mit Beta-Punkt $\underline{u}^* \neq \underline{0}$, so gilt, mit $\beta := \|\underline{u}^*\|$ und $\alpha_i = -\frac{1}{\beta} u_i^*$:

a) $\lim_{b \rightarrow \infty} \alpha_\mu[U_i | bF] = \alpha_i$

b) $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\alpha_\sigma[U_i | bF]}{\beta_d[bF]} = -\alpha_i^2$

Wegen $\sum \alpha_i^2 = 1$ folgt hieraus insbesondere

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \sum \alpha_\mu[U_i | bF]^2 = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \sum \frac{1}{b\beta} \alpha_\sigma[U_i | bF] = -1.$$

Analog zum Kapitel 3 rechtfertigt Satz 4.1.5 die Näherungen

(N3) $\alpha_\mu[U_i | F] \sim \alpha_i$ für großes $\beta_d[F]$

(N4) $\alpha_\sigma[U_i | F] \sim -\beta \alpha_i^2$ für großes $\beta_d[F]$

Hiermit ist α_i^2 als ein grobes Maß für die stochastische Bedeutung der Variablen U_i identifiziert, während α_i mit den mittleren Werten von U_i im Versagensfall zusammenhängt. Ist X_j eine zu U_i äquivalente Variable (vgl. Definition 4.1.1b), so überträgt sich diese Deutung entsprechend auf X_j . In Abschnitt 5.4 wird α_i noch eine weitere Deutung als "Wichtungsfaktor für die Alpha-Werte α_E von

Verteilungsparametern der Variablen X_j " erfahren.

Wegen $\alpha_E[\mu_i] = \alpha_\mu[U_i]$ und $\alpha_E[\sigma_i] = \alpha_\sigma[U_i]$ läßt sich aus (N3) und (N4) bzw. Satz 4.1.5 entnehmen, daß die Alpha-Werte α_E der Parameter μ und σ derselben Variablen zueinander in Beziehung stehen. Dies gilt auch allgemeiner für beliebige Verteilungsparameter einer Variablen; ein weiteres Beispiel für einen solchen Zusammenhang ist in Abschnitt 5.2 dargestellt ["Beziehung zwischen $\alpha_E[\epsilon_1]$ und $\alpha_E[\epsilon_2]$ "].

Abschließend notieren wir noch eine Eigenschaft, welche die Berechnung von Alpha-Werten korrelierter, normalverteilter Variablen erleichtert; denn letztere lassen sich stets als Linearkombination von unabhängigen U_i 's darstellen:

Bemerkung 4.1.6

Sind a und b_i reelle Konstanten, und ist $b := \sqrt{\sum b_i^2} \neq 0$, so gilt für $X := a + \sum b_i U_i$

$$\alpha_\mu[X] = \sum \frac{b_i}{b} \alpha_\mu[U_i]$$

4.2 Linearisierung in der Zuverlässigkeitsmethode erster Ordnung

Wie im Abschnitt 1.1 (Gl. (2)) dargestellt wurde, spielte der Gedanke der "Linearisierung von F im Beta-Punkt" in Entwicklung und Anwendung der Zuverlässigkeitsmethode erster Ordnung eine entscheidende Rolle. Durch die Sätze des Kapitels 3 rückt diese Anschauung zwar in den Hintergrund, doch scheint sie sich immer noch bei der Berechnung von Vereinigungen

$$(1) \quad F = \bigcup_{i=1}^m F_i$$

zu bewähren. Mit zunehmender Anzahl m der "Versagensmodi" F_i , und zunehmender "Korrelation" von annähernd gleichwahrscheinlichen F_i 's, wächst der Fehler der Approximation $\beta_E[F] \sim \beta_d[F]$ deutlich an, während mit der Näherung

$$(2) \quad \beta_E[F] \sim \beta_E[\bigcup_{i=1}^m H_i]$$

wesentlich bessere Ergebnisse erzielt werden. Hierbei ist H_i eine "geeignete" Linearisierung von F_i , etwa die in [7] vorgeschlagene "zu F_i äquivalente Hyperebene"

$$(3) \quad H_i := \{ \underline{\alpha}_{\mu,i}^N \cdot \underline{U} + \beta_E[F_i] < 0 \}$$

$$\text{mit } \underline{\alpha}_{\mu,i} := (\alpha_{\mu,1}[U_1|F_i], \dots, \alpha_{\mu,n}[U_n|F_i]) ,$$

$$\text{und } \underline{\alpha}_{\mu,i}^N := \frac{1}{\|\underline{\alpha}_{\mu,i}\|} \underline{\alpha}_{\mu,i}$$

oder ersatzweise

$$(4) \quad H_i := \{ \underline{\alpha}_i \cdot \underline{U} + \beta_i < 0 \} .$$

Hier ist $\underline{\alpha}_i$ der Vektor der geometrischen Alpha-Werte von F_i , der gemäß Näherung (N3) im vorigen Abschnitt als Approximation an $\underline{\alpha}_{\mu,i}$ bzw. $\underline{\alpha}_{\mu,i}^N$ aufgefaßt werden kann, und β_i ist eine Näherung für $\beta_E[F_i]$, etwa $\beta_i = \beta_d[F_i]$ oder $\beta_i = -\Phi^{-1}(p_i)$, wobei p_i Breitungsnäherung für $P[F_i]$ darstellt.

Zwar ist es bisher nicht gelungen, die Näherung (2) theoretisch befriedigend zu rechtfertigen, doch immerhin scheint ein enger Zusammenhang zwischen der "äquivalenten Hyperebene" (Gl. (3)) und F_i zu bestehen. Um diesen zu formulieren, benötigen wir die Funktionen ($\beta \in \mathbb{R}$ ist ein konstanter Parameter) (siehe Bild, übernächste Seite)

$$\hat{d}_\beta = \hat{d}_\beta(\delta) := \frac{1}{\varphi(\beta)} \{ \varphi(\beta) - 2 \varphi\Phi^{-1}(\delta) \}$$

$$d_\beta = d_\beta(\delta) := \frac{1}{\varphi(\beta)} \{ \varphi\Phi^{-1}[\Phi(-\beta)+\delta] + \varphi\Phi^{-1}[\Phi(-\beta)-\delta] - \varphi(-\beta) \}$$

Diese sind definiert für $0 \leq \delta \leq \min\{\Phi(-\beta), 1-\Phi(-\beta)\}$

Anmerkung 4.2.1

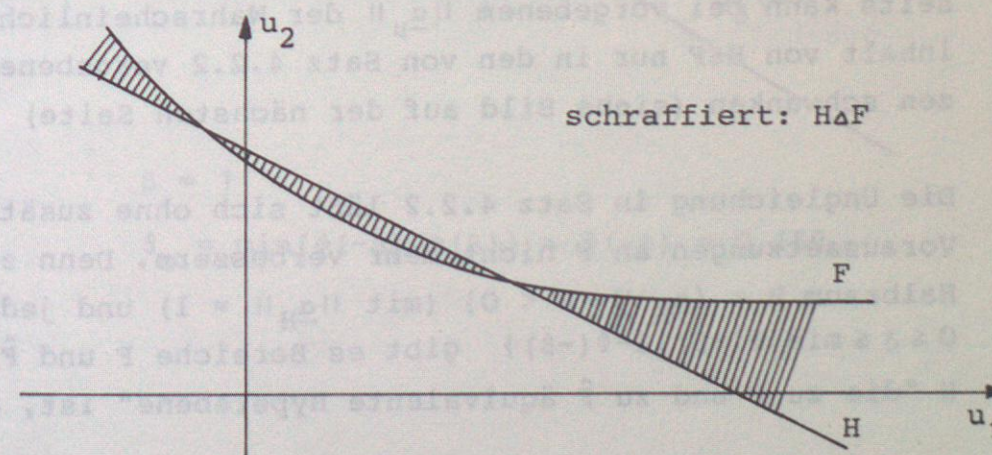
d_β und \hat{d}_β sind stetig und streng monoton fallend, und es gilt

$$d_\beta(0) = \hat{d}_\beta(0) = 1$$

Der folgende Satz stellt nun eine Beziehung her zwischen den Alpha-Werten $\underline{\alpha}_{\mu,i}$ und dem Fehler bei der Approximation von F_i durch die "äquivalente Hyperebene" H_i . Dieser Fehler wird durch die Wahrscheinlichkeit der symmetrischen Differenz

$$P[H_i \Delta F_i] = P[(H_i \cup F_i) \setminus (H_i \cap F_i)]$$

gemessen.



Satz 4.2.2

Ist F ein beliebiger Versagensbereich, $P_f := P[F]$, $\beta_E := \beta_E[F]$, und ist H "die zu F äquivalente Hyperebene", d. h.

$$H = \{\underline{\alpha}_\mu^N \cdot \underline{U} + \beta_E < 0\} \quad \text{mit}$$

$$\underline{\alpha}_\mu = (\alpha_\mu[U_1|F], \dots, \alpha_\mu[U_n|F]),$$

$$\underline{\alpha}_\mu^N = \frac{1}{\|\underline{\alpha}_\mu\|} \cdot \underline{\alpha}_\mu,$$

so gilt für den Approximationsfehler $\delta = \frac{1}{2} P[H \Delta F]$:

Es ist $0 \leq \delta \leq \min\{P_f, 1-P_f\}$ und

$$\hat{d}_{\beta_E}(\delta) \leq \|\underline{\alpha}_\mu\| \leq d_{\beta_E}(\delta)$$

Insbesondere gilt stets

$$\sum_{i=1}^n \alpha_\mu[U_i]^2 \leq 1 \quad \text{und}$$

$$-1 \leq \alpha_\mu[U_i] \leq 1.$$

Ferner folgt die Äquivalenz

$$\sum_{i=1}^n \alpha_\mu[U_i|F]^2 = 1 \iff P[H \Delta F] = 0 \iff H \bar{P} F.$$

Ist F ein Halbraum, so ist $H = F$ und $\|\underline{\alpha}_\mu\| = 1$. Ist aber F kein Halbraum (und einem solchen auch nicht in Wahrscheinlichkeit gleich), so ist $0 \leq \|\underline{\alpha}_\mu\| < 1$. Andererseits kann bei vorgebenem $\|\underline{\alpha}_\mu\|$ der Wahrscheinlichkeitsinhalt von $H \Delta F$ nur in den von Satz 4.2.2 vorgegebenen Grenzen schwanken (siehe Bild auf der nächsten Seite).

Die Ungleichung in Satz 4.2.2 läßt sich ohne zusätzliche Voraussetzungen an F nicht mehr verbessern. Denn zu jedem Halbraum $H = \{\underline{\alpha}_H \cdot \underline{U} + \beta < 0\}$ (mit $\|\underline{\alpha}_H\| = 1$) und jedem δ mit $0 \leq \delta \leq \min\{\Phi(-\beta), 1-\Phi(-\beta)\}$ gibt es Bereiche F und \hat{F} so, daß H "die zu F und zu \hat{F} äquivalente Hyperebene" ist, der Ap-

proximationsfehler

$$\delta = \frac{1}{2} P[H \Delta F] = \frac{1}{2} P[H \Delta \hat{F}]$$

den Wert δ und $\|\underline{\alpha}_\mu\|$ genau die nach Satz 4.2.2 zulässigen extremen Werte

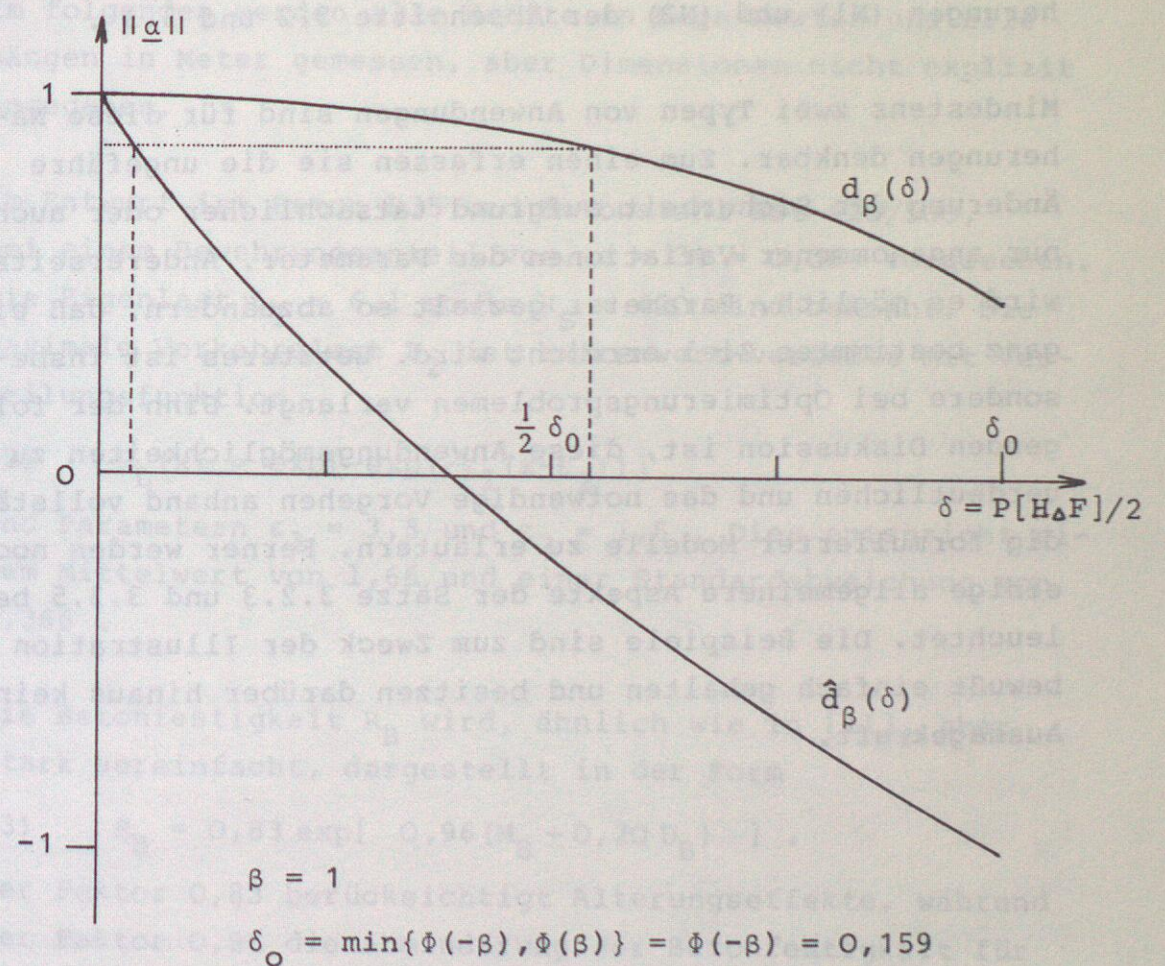
$$\|\underline{\alpha}_\mu[U|F]\| = d_\beta(\delta) \quad \text{und} \quad \|\underline{\alpha}_\mu[U|\hat{F}]\| = \hat{d}_\beta(\delta)$$

annimmt. Dies erreicht man mit

$$F = \{\underline{\alpha}_H \cdot \underline{U} < \Phi^{-1}[\Phi(-\beta) - \delta]\} \cup \{-\beta < \underline{\alpha}_H \cdot \underline{U} < \Phi^{-1}[\Phi(-\beta) + \delta]\}$$

und

$$\hat{F} = \{\Phi^{-1}(\delta) < \underline{\alpha}_H \cdot \underline{U} < -\beta\} \cup \{-\Phi^{-1}(\delta) < \underline{\alpha}_H \cdot \underline{U}\}.$$



KAPITEL 5 : DISKUSSION UND ERLÄUTERUNG DER ERGEBNISSE

5.1 Vorbemerkungen

Die Näherung " $\beta_d \sim \beta_E$ ", welche durch die Sätze 3.1.1 und 3.1.2 asymptotisch begründet wird, ersetzt nur die im Rahmen der Zuverlässigkeitsmethode erster Ordnung bereits ausgiebig diskutierte und angewandte Näherung " $P_f \sim \Phi(-\beta)$ " und bedarf deshalb, über die Kommentare des Abschnitts 3.1 hinaus, keiner ausführlicheren Besprechung. Der Rest dieser Arbeit befaßt sich daher vor allem mit den Ergebnissen über die Alpha-Werte von Parametern, insbesondere den Näherungen (N1) und (N2) der Abschnitte 3.2 und 3.3.

Mindestens zwei Typen von Anwendungen sind für diese Näherungen denkbar. Zum einen erfassen sie die ungefähre Änderung der Sicherheit aufgrund tatsächlicher oder auch nur angenommener Variationen der Parameter. Andererseits wird es möglich, Parameter gezielt so abzuändern, daß ein ganz bestimmtes Ziel erreicht wird. Letzteres ist insbesondere bei Optimierungsproblemen verlangt. Sinn der folgenden Diskussion ist, diese Anwendungsmöglichkeiten zu verdeutlichen und das notwendige Vorgehen anhand vollständig formulierter Modelle zu erläutern. Ferner werden noch einige allgemeinere Aspekte der Sätze 3.2.3 und 3.3.5 beleuchtet. Die Beispiele sind zum Zweck der Illustration bewußt einfach gehalten und besitzen darüber hinaus keine Aussagekraft.

5.2 Beispiel: Effekt von Parameteränderungen

Das Versagenskriterium für eine mittig beanspruchte, nicht knickgefährdete Stahlbetonstütze in einem Bürogebäude, mit Querschnittsfläche $0,25 \text{ m}^2$ und einem Bewehrungsanteil a , kann wie folgt formuliert werden:

$$(1) \quad 0,25(1-a)R_B + 0,25aR_S - L_1 - L_2 < 0 \quad .$$

R_B und R_S sind die Druckfestigkeiten von Beton und Stahl bei einer Stauchung von 2 ‰ . L_1 ist das auf der Stütze lastende Eigengewicht des Gebäudes und L_2 die maximale Verkehrslast im Verlauf von 50 Jahren. Eine ungewollte Ausmitte wird nicht berücksichtigt.

Im folgenden werden alle Kräfte in Mega-Newton und alle Längen in Meter gemessen, aber Dimensionen nicht explizit angegeben.

Im Entwurf ist Beton B35 und Betonstahl BSt 420/500, bei einem Bewehrungsanteil von $a = 3\% = 0,03$ vorgesehen. Die Eigenlast $L_1 = 6,1$ sowie $R_S = 420$ sind bekannt. Die maximale Verkehrslast L_2 ist extremwert-verteilt mit Verteilungsfunktion

$$(2) \quad F_L(x) = \exp[-\exp(-\varepsilon_1(x-\varepsilon_2))] \quad .$$

und Parametern $\varepsilon_1 = 3,5$ und $\varepsilon_2 = 1,5$. Dies entspricht einem Mittelwert von $1,66$ und einer Standardabweichung von $0,366$.

Die Betonfestigkeit R_B wird, ähnlich wie in [11], aber stark vereinfacht, dargestellt in der Form

$$(3) \quad R_B = 0,83 \exp[0,96(M_B + 0,20 U_B)] \quad .$$

Der Faktor $0,83$ berücksichtigt Alterungseffekte, während der Faktor $0,96$ die Abminderung der Betonfestigkeit für die gesamte Stütze, im Verhältnis zur Druckfestigkeit eines Standard-Probezyinders, reflektiert. Die standardnormal verteilte Variable U_B beschreibt die unvermeidlichen

Schwankungen der Betonfestigkeit innerhalb einer Produktionsphase, während der Parameter M_B nur von den jeweiligen Produktionsverhältnissen abhängt und innerhalb jeder Produktionsphase konstant bleibt. Allerdings ist im Entwurfsstadium der genaue Wert von M_B noch nicht bekannt. In einem Bayesschen Ansatz (vgl. Abschnitt 2.3) wird deshalb M_B als unsicherer, normalverteilter Parameter mit Mittelwert $\mu_M = 3,85$ und Standardabweichung $\sigma_M = 0,20/\sqrt{3} = 0,115$ modelliert. Diese Werte stammen aus einer übergreifenden Studie über Ortbeton B35 [11].

Durch Messung von Betonproben, die einige Wochen vor dem Bau der Stützen aus dem vorgesehenen Rohmaterial im richtigen Mischungsverhältnis angefertigt werden, läßt sich mehr Information über M_B gewinnen. Die Prüfung von 30 Standard- Probezylindern im Alter von 28 Tagen liefere die Statistik

$R_{B,1}, \dots, R_{B,30}$ mit $R_{B,i} = \exp(M_B + 0,20 U_{B,i})$ ihrer 2 % -Druckfestigkeiten bzw. den Stichprobenmittelwert

$$(4) \quad \bar{M} = M_B + 0,20 \bar{U}_B = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} \log(R_{B,i})$$

(log ist der natürliche Logarithmus). Gemäß [11] ergibt sich daraus die Posteriori-Verteilung von M_B als Normalverteilung mit Mittelwert und Standardabweichung

$$(5) \quad \mu'_M = \frac{1}{33} (3\mu_M + 30 \bar{M}) = 0,350 + 0,909 \bar{M}$$

$$\sigma'_M = 0,20 / \sqrt{33} = 0,035$$

Weil das Versuchsergebnis \bar{M} im Planungsstadium aber noch nicht bekannt ist, wird zunächst mit den Priori-Parametern gerechnet. Gleichzeitig werden aber die Alpha-Werte von μ_M und σ_M bereitgestellt. Die Änderung des Sicherheitsindex β_E , welche durch den Übergang von (μ_M, σ_M) zu (μ'_M, σ'_M) verursacht wird, läßt sich dann nach Abschluß der Versuche ohne nennenswerten Aufwand abschätzen. Sollte sich dabei ein rechnerischer Zuwachs an Sicherheit herausstellen, so darf die Bewehrung etwas reduziert werden. Im gegenteili-

gen Fall ist der Bewehrungsgrad a zu erhöhen. Für eine entsprechende Überschlagsrechnung genügt wiederum die Kenntnis des Alpha-Werts von a .

Schließlich werden noch rein vorsorglich die Alpha-Werte der Verteilungsparameter ϵ_1 und ϵ_2 der maximalen Verkehrslast L_2 ausgerechnet, um die Empfindlichkeit des Sicherheitsindex gegenüber diesen Parametern festzustellen.

Zur numerischen Berechnung der genannten Größen wird zunächst das Versagenskriterium (1) durch unabhängige, standardnormal verteilte Variablen beschrieben. Weil im Beispiel alle stochastischen Variablen unabhängig sind, darf komponentenweise nach der Formel " $X = F^{-1}\Phi(U)$ " (F ist hierbei die Verteilungsfunktion von X) transformiert werden:

$$(6) \quad M_B = \mu_M + \sigma_M U_M \\ L_2 = F_L^{-1}\Phi(U_L) = \epsilon_2 - \frac{1}{\epsilon_1} \log[-\log \Phi(U_L)]$$

In Verbindung mit Gl. (3) ist damit der Vektor $\underline{X} = (R_B, L_2)$ der Basisvariablen vollständig durch die standardnormalen, unabhängigen Variablen (U_M, U_B, U_L) ausgedrückt. Die Anzahl der u-Variablen ist hier zwar größer als die Anzahl der x-Variablen, doch dies spielt keine Rolle. Wichtig ist allein, daß sich das Versagensereignis (1) vollständig durch (U_M, U_B, U_L) beschreiben läßt. Um aber das Versagensereignis auch graphisch darstellen zu können, wird die Anzahl der u-Variablen auf zwei verringert, indem R_B bzw.

$$M_B + 0,20 U_B = \mu_M + \sigma_M U_M + 0,20 U_B = \mu_M + \sqrt{0,04 + \sigma_M^2} U$$

durch die standardnormale Variable $U = \sqrt{(0,04 + \sigma_M^2)^{-1}} (\sigma_M U_M + 0,20 U_B)$ dargestellt wird. Die endgültige Fassung der Transformation lautet somit

$$(7) \quad R_B = 0,83 \exp [0,96 (\mu_M + \sqrt{0,04 + \sigma_M^2} U)] \\ L_2 = \epsilon_2 - \frac{1}{\epsilon_1} \log[-\log \Phi(U_L)]$$

und das in den u-Raum transformierte Versagensereignis ist

$$(8) \quad 0,208(1-a) \exp[0,96(\mu_M + \sqrt{0,04 + \sigma_M^2} U)] + 0,25 a R_S - L_1 - \epsilon_2 + \frac{1}{\epsilon_1} \log[-\log \Phi(U_L)] =: g(\underline{u}, \underline{\tau}) < 0$$

mit

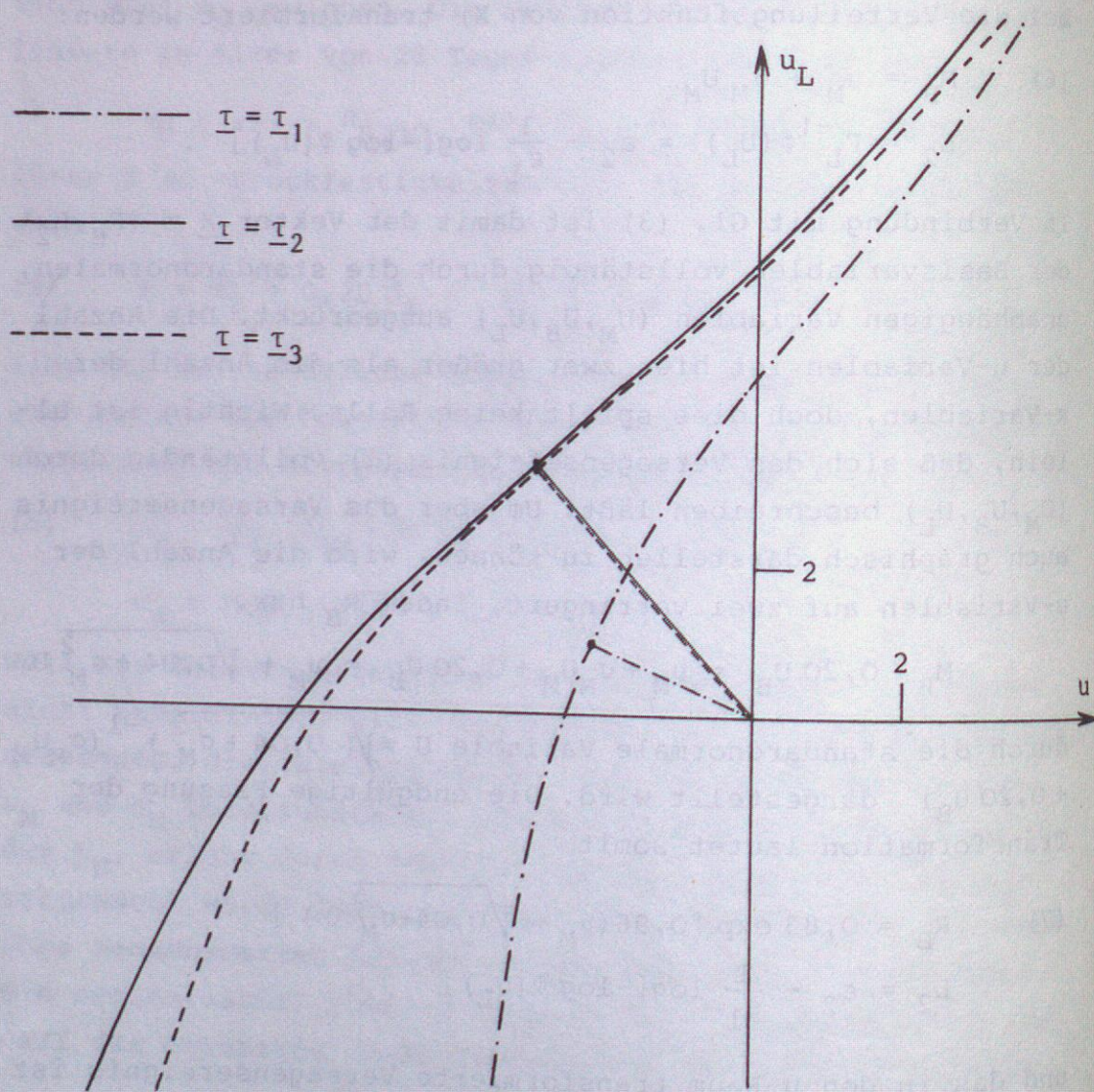
$$\underline{u} = (u, u_L) \quad \text{und}$$

$$\underline{\tau} = (a, \mu_M, \sigma_M, \epsilon_1, \epsilon_2) .$$

Somit hat $F(\underline{\tau})$ die in Satz 3.3.5 bzw. dem Spezialfall 3.3.6 zugrundegelegte Gestalt

$$F(\underline{\tau}) = \{g(\cdot, \underline{\tau}) < 0\} .$$

Für den Anfangswert $\underline{\tau}_1 := (0,03 ; 3,85 ; 0,115 ; 3,5 ; 1,5)$ von $\underline{\tau}$ ist $F(\underline{\tau})$ graphisch dargestellt. Der Beta-Punkt ist $\underline{u}^* = (-2,25 ; 0,967)$.



Daraus errechnet sich $\beta_E[F(\underline{\tau}_1)] \sim \beta_d[F(\underline{\tau}_1)] = \|\underline{u}^*\| = 2,45$. Aus den partiellen Ableitungen von g an der Stelle $(\underline{u}^*, \underline{\tau}_1)$ erhält man nach den Formeln von Satz 3.3.5 bzw. 3.3.6 die asymptotischen Alpha-Werte α_d der Parameter, wie etwa

$$\alpha_d[a] = \alpha_d[a | \underline{\tau}_1] = \frac{\frac{\partial}{\partial a} g(\underline{u}^*, \underline{\tau}_1)}{\sqrt{[\frac{\partial}{\partial u} g(\underline{u}^*, \underline{\tau}_1)]^2 + [\frac{\partial}{\partial u_L} g(\underline{u}^*, \underline{\tau}_1)]^2}} = 84,0 .$$

Die erste Zeile der Tabelle auf der nächsten Seite enthält den Beta-Index $\beta_d[F(\underline{\tau}_1)]$ sowie die asymptotischen Alpha-Werte α_d aller Parameter an der Stelle $\underline{\tau}_1$. Unmittelbar darunter stehen die entsprechenden äquivalenten Werte β_E und α_E , die mittels numerischer Integration und Differentiation ermittelt wurden.

Der errechnete Sicherheitsindex $\beta_d = 2,45$ bzw. $\beta_E = 2,40$ ist für ein Bürogebäude zu gering. Er soll daher, durch einen höheren Bewehrungsgrad a , auf $\beta_E \sim 4,5$ angehoben werden. Die dazu nötige Änderung Δa des Bewehrungsgrads a errechnet sich für kleine Werte von Δa aus der Näherung (N2) (siehe Abschnitte 3.2, 3.3) :

$$\Delta \beta_E \sim \Delta a \cdot \alpha_d[a] \quad , \quad \Delta a \sim (\Delta \beta_E) / (\alpha_d[a])$$

Im Beispiel ergibt sich

$$\Delta a \sim (4,50 - 2,45) / 84,0 = 0,0244 .$$

Deshalb wird als neuer Bewehrungsgrad $a = 0,03 + 0,0244 \sim 0,055$ gewählt. Tatsächlich hat der Sicherheitsindex β_E für die neue Parameterkonstellation

$$\underline{\tau}_2 = (0,055 ; 3,85 ; 0,115 ; 3,5 ; 1,5)$$

ungefähr die gewünschte Größe (siehe Tabelle und Bild). Auch die Alpha-Werte an der Stelle $\underline{\tau}_2$ sind in der Tabelle aufgeführt. Der "Entwurf" der Stütze ist damit abgeschlossen.

Die spätere Prüfung der Beton-Probekörper von der Baustel-

$$\underline{I} = (a; \mu_M; \sigma_M; \epsilon_1; \epsilon_2)$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= (0,030; 3,850; 0,115; 3,5; 1,5) \\ \underline{I}_2 &= (0,055; 3,850; 0,115; 3,5; 1,5) \\ \underline{I}_3 &= (0,049; 3,895; 0,035; 3,5; 1,5) \end{aligned}$$

| | β_d | $\alpha_d[a \underline{I}_i]$ | $\alpha_d[\mu_M \underline{I}_i]$ | $\alpha_d[\sigma_M \underline{I}_i]$ | $\alpha_d[\epsilon_1 \underline{I}_i]$ | $\alpha_d[\epsilon_2 \underline{I}_i]$ |
|-------------------------------------|-----------|-------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|--|--|
| | β_E | $\alpha_E[a \underline{I}_i]$ | $\alpha_E[\mu_M \underline{I}_i]$ | $\alpha_E[\sigma_M \underline{I}_i]$ | $\alpha_E[\epsilon_1 \underline{I}_i]$ | $\alpha_E[\epsilon_2 \underline{I}_i]$ |
| $\underline{I}_i = \underline{I}_1$ | 2,45 | 84,0 | 3,98 | -4,47 | 0,117 | -0,840 |
| | 2,40 | 83,4 | 3,97 | -4,39 | 0,120 | -0,835 |
| $\underline{I}_i = \underline{I}_2$ | 4,51 | 72,6 | 2,85 | -4,20 | 0,471 | -0,722 |
| | 4,51 | 74,7 | 2,87 | -4,27 | 0,467 | -0,742 |
| $\underline{I}_i = \underline{I}_3$ | 4,46 | 72,8 | 3,27 | -1,67 | 0,462 | -0,728 |
| | 4,45 | 75,1 | 3,30 | -1,71 | 0,456 | -0,749 |

le ergibt den Mittelwert $\bar{M} = 3,90$ (Gleichung (4)). Gemäß (5) haben dann die Parameter μ_M und σ_M der Posteriori-Verteilung von M den Wert

$$\begin{aligned} \mu_M^i &= 0,350 + 0,909 \cdot 3,90 = 3,895 \\ \sigma_M^i &= 0,035 \end{aligned}$$

Somit ist $\Delta\mu_M = 0,045$ und $\Delta\sigma_M = -0,080$. Ferner soll der Bewehrungsgrad a um einen Betrag Δa derart geändert werden, daß die Sicherheit trotzdem weitgehend erhalten bleibt. Näherung (N2) liefert dafür die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &\sim \Delta\beta_E \sim \Delta\underline{I} \cdot \underline{\alpha}_d[\underline{I}|\underline{I}_2] = \\ &= (\Delta a; \Delta\mu_M; \Delta\sigma_M; 0; 0) \cdot (72,6; 2,85; -4,20; 0,471; -0,722) \\ &= 72,6 \Delta a + 2,85 \cdot 0,045 + (-4,20) \cdot (-0,080) = \\ &= 72,6 \Delta a + 0,46 \end{aligned}$$

bzw.

$$\Delta a \sim -0,46 / 72,6 = -0,0063$$

Das günstige Ergebnis der Betonprüfung erlaubt somit näherungsweise eine Rücknahme des Bewehrungsgrades a auf $a = 0,055 - 0,006 = 0,049$, ohne die im Entwurf vorgesehene Sicherheit zu beeinträchtigen. Eine genauere Sicherheitsanalyse für den neuen Parameter

$$\underline{I}_3 = (0,049; 3,895; 0,035; 3,5; 1,5)$$

erbringt mit $\beta_E = 4,45$ eine Bestätigung dieser Behauptung. Trotzdem muß allgemein davor gewarnt werden, allzu schwerwiegende Entscheidungen in dieser Weise zu treffen, da die Bedingung "kleines \underline{I} " für die Näherung (N2) schwer zu verifizieren ist.

Die Alpha-Werte der Verkehrslast-Parameter ϵ_1 und ϵ_2 sind im Bemessungsfall $\underline{I} = \underline{I}_2$ (siehe Tabelle)

$$\begin{aligned} \alpha_d[\epsilon_1] &= 0,471 \sim 0,467 = \alpha_E[\epsilon_1] \\ \alpha_d[\epsilon_2] &= -0,722 \sim -0,742 = \alpha_E[\epsilon_2] \end{aligned}$$

ϵ_1 ist umgekehrt proportional zur Standardabweichung von L_2 , während der Mittelwert in etwa mit ϵ_2 übereinstimmt. Eine Fehleinschätzung der Standardabweichung um 10% hätte

also gemäß Näherung (N2) einen ungefähren Fehler in der Beurteilung der Sicherheit zur Folge von

$$|\Delta\beta_E| \sim 0,47 \cdot \Delta\varepsilon_1 = 0,47 \cdot (3,5/10) = 0,16 .$$

Eine Abweichung des Parameters ε_2 vom angenommenen Wert $\varepsilon_2 = 1,5$ um 10% der Standardabweichung, d. h. 10% von 0,366, bewirkt

$$|\Delta\beta_E| \sim 0,72 \cdot (0,366/10) = 0,03 .$$

Ein nicht allzu großer statistischer Fehler in den Annahmen über die Verkehrslast führt also nur zu mäßigen Fehlern bei der Beurteilung der Sicherheit.

5.3 Hinweise zur Anwendung von Satz 3.2.3

Bereits im Abschnitt 3.3 wurde auf die Möglichkeit hingewiesen, die asymptotischen Alpha-Werte α_d oft sowohl mit Hilfe von Satz 3.3.5 als auch mit Satz 3.2.3 berechnen zu können. Meistens ist zwar die Anwendung von Satz 3.3.5 naheliegender und formal einfacher; jedoch erfordert Satz 3.2.3, bei bekanntem \underline{u}^* , keine weitere Auswertung der Zustandsfunktion. Dies ist vorteilhaft, wenn, wie etwa bei finite-Elemente-Verfahren, die Auswertung der Zustandsfunktion erheblichen Aufwand verursacht oder numerische Ungenauigkeiten ihre (numerische) Differentiation erschweren. Ferner gestattet Satz 3.2.3 oft eine analytische Darstellung der Alpha-Werte, die es ermöglicht, allgemeine Zusammenhänge zwischen den Alpha-Werten verschiedener Parameter zu erkennen.

Für die Anwendung von Satz 3.2.3 ist $F(\underline{\tau})$ in der Form

$$F(\underline{\tau}) = \underline{G}(F, \underline{\tau})$$

darzustellen. Zunächst wird der bereits in Abschnitt 3.2 kurz umrissene Weg zur Konstruktion der Abbildung \underline{G} etwas ausführlicher diskutiert und an einem Beispiel nachvollzogen. Wir nehmen an, der Beta-Punkt \underline{u}^* sei für den Wert $\underline{\tau}_0$ des Verteilungsparameters $\underline{\tau}$ bereits bekannt, wobei die Transformation

$$\underline{X} = \underline{T}(\underline{u}, \underline{\tau}_0)$$

zugrunde gelegt war. Für beliebiges $\underline{\tau}$ ist der transformierte Versagensbereich $F(\underline{\tau})$ im u -Raum

$$(1) \quad F(\underline{\tau}) = \underline{T}^{-1}(F_x, \underline{\tau}) = \{ \underline{u} : \underline{T}(\underline{u}, \underline{\tau}) \in F_x \} .$$

Ist für jedes feste $\underline{\tau}$ die Transformation $\underline{T} = \underline{T}(\cdot, \underline{\tau})$ umkehrbar und der Wertebereich W des Zufallsvektors $\underline{X}(\underline{\tau})$ bzw. der Transformation $\underline{T}(\cdot, \underline{\tau})$ unabhängig von $\underline{\tau}$, so wird mittels Gleichung (1) $F(\underline{\tau})$ als Bild von $F_x \cap W$ dargestellt. Zu jedem $\underline{v} \in F(\underline{\tau})$ gibt es also ein $\underline{x} \in F_x \cap W$ mit

$$(2) \quad \underline{v} = \underline{S}(\underline{x}, \underline{\tau}) := \underline{T}^{-1}(\underline{x}, \underline{\tau}) \quad (\underline{x} \in F_x \cap W)$$

Da nun jedes $x \in F_x \cap W$ auch Bild eines Punktes aus $F = F(\tau_0)$ ist:

$$(3) \quad \underline{x} = \underline{T}(\underline{u}, \tau_0) \quad (\underline{u} \in F(\tau_0)) ,$$

liegt es nahe, (2) und (3) zu verknüpfen; zu jedem $\underline{v} \in F(\tau)$ gibt es ein $\underline{u} \in F(\tau_0)$ so, daß

$$\underline{v} = \underline{S}[\underline{T}(\underline{u}, \tau_0), \tau] \quad \text{mit } \underline{u} \in F(\tau_0) ,$$

während umgekehrt für jedes $\underline{u} \in F(\tau_0)$ auch $\underline{T}(\underline{u}, \tau_0)$ in $F_x \cap W$ liegt und somit $\underline{S}[\underline{T}(\underline{u}, \tau_0), \tau]$ in $F(\tau)$ liegt. Folglich ist

$$(4) \quad F(\tau) = \underline{G}(F(\tau_0), \tau) \quad \text{mit } \underline{G}(\underline{u}, \tau) = \underline{S}[\underline{T}(\underline{u}, \tau_0), \tau] .$$

Die Abbildung \underline{G} hat die geforderte Eigenschaft

$$\underline{G}(\underline{u}, \tau_0) = \underline{u}$$

und ist umkehrbar eindeutig. Aus Satz 3.2.3 folgt nun, falls $F = F(\tau_0)$ einen Beta-Punkt $\underline{u}^* \neq \underline{0}$ besitzt und \underline{G} die geforderten Differenzierbarkeits- und Integrierbarkeits-eigenschaften aufweist,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \alpha_E[bF(\tau_i) | \tau_0] = \alpha_d[F(\tau_i) | \tau_0]$$

und

$$(5a) \quad \alpha_d[F(\tau_i) | \tau_0] = \frac{1}{\|\underline{u}^*\|} \left[\underline{u}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \tau_i} \underline{G}(\underline{u}^*, \tau_0) \right] .$$

Führt man nun wie üblich den Bemessungspunkt

$$(6) \quad \underline{x}^* = \underline{T}(\underline{u}^*, \tau_0)$$

ein, der im x -Raum dem Punkt \underline{u}^* entspricht, so wird dies wegen $\underline{S} = \underline{T}^{-1}$ zu

$$(5b) \quad \alpha_d[F(\tau_i) | \tau_0] = \frac{1}{\|\underline{u}^*\|} \left[\underline{u}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \tau_i} \underline{T}^{-1}(\underline{x}^*, \tau_0) \right] .$$

Zur Verdeutlichung wenden wir diese Formeln auf das Beispiel des Abschnitts 5.2 an, und berechnen die Alpha-Werte $\alpha_d[\epsilon_1 | \tau_1]$ und $\alpha_d[\epsilon_2 | \tau_1]$ für den Anfangswert τ_1 des dortigen Parameters (siehe Tabelle in Abschnitt 5.2). Aus der Transformation, Gleichung 5.2 (7), und $\underline{u}^* = (u^*, u_L^*) = (-2,25; 0,967)$ ergibt sich der Bemessungspunkt $\underline{x}^* = (r_B^*; l_2^*)$ zu

$$r_B^* = 0,83 \exp\{0,96[\mu_M + \sqrt{0,04 + \sigma_M^2} u^*]\} = 20,3$$

$$l_2^* = \epsilon_2 - \frac{1}{\epsilon_1} \log[-\log \Phi(u_L^*)] = 1,99 .$$

Die inverse Transformation $\underline{S}(\underline{x}, \tau) = (S_1(\underline{x}, \tau), S_2(\underline{x}, \tau))$ zur Transformation Gleichung 5.2 (7) lautet, mit $\underline{x} = (r_B, l_2)$

$$u = S_1(\underline{x}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{0,04 + \sigma_M^2}} \left[\frac{1}{0,96} \log\left(\frac{r_B}{0,83}\right) - \mu_M \right]$$

$$u_L = S_2(\underline{x}, \tau) = \Phi^{-1} \exp\{-\exp[-\epsilon_1(l_2 - \epsilon_2)]\} .$$

Folglich ist

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_1} S_1(\underline{x}^*, \tau_1) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_2} S_1(\underline{x}^*, \tau_1) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_1} S_2(\underline{x}^*, \tau_1) = \frac{1}{\varphi(u_L^*)} \exp\{-\exp[-\epsilon_1(l_2^* - \epsilon_2)]\} \cdot$$

$$\cdot \{-\exp[-\epsilon_1(l_2^* - \epsilon_2)]\} \cdot \{-(l_2^* - \epsilon_2)\} = 0,296$$

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_2} S_2(\underline{x}^*, \tau_1) = \frac{1}{\varphi(u_L^*)} \exp\{-\exp[-\epsilon_1(l_2^* - \epsilon_2)]\} \cdot$$

$$\cdot \{-\exp[-\epsilon_1(l_2^* - \epsilon_2)]\} \cdot \epsilon_1 = -2,13$$

Für die Parameter ϵ_1 und ϵ_2 sind hierbei die unter τ_1 in der Tabelle des Abschnitts 5.2 angegebenen Werte einzusetzen.

Gleichung (5b) liefert somit die Alpha-Werte

$$\alpha_d[\epsilon_1 | \tau_1] = \frac{1}{\|\underline{u}^*\|} \cdot \left[u^* \frac{\partial}{\partial \epsilon_1} S_1(\underline{x}^*, \tau_1) + u_L^* \frac{\partial}{\partial \epsilon_1} S_2(\underline{x}^*, \tau_1) \right] =$$

$$= \frac{1}{2,45} (0 + 0,967 \cdot 0,296) = 0,117$$

$$\alpha_d[\epsilon_2 | \tau_1] = \frac{1}{\|\underline{u}^*\|} \cdot \left[u^* \frac{\partial}{\partial \epsilon_2} S_1(\underline{x}^*, \tau_1) + u_L^* \frac{\partial}{\partial \epsilon_2} S_2(\underline{x}^*, \tau_1) \right] =$$

$$= \frac{1}{2,45} [0 + 0,967 \cdot (-2,13)] = -0,840 .$$

Man erkennt auch die zwischen den Alpha-Werten von ϵ_1 und ϵ_2 herrschende allgemeine Beziehung

$$\frac{\alpha_d[\epsilon_1 | \tau_1]}{\alpha_d[\epsilon_2 | \tau_1]} = \frac{\frac{\partial}{\partial \epsilon_1} S_2(\underline{x}^*, \tau_1)}{\frac{\partial}{\partial \epsilon_2} S_2(\underline{x}^*, \tau_1)} = - \frac{l_2^* - \epsilon_2}{\epsilon_1} \sim \frac{\alpha_E[\epsilon_1 | \tau_1]}{\alpha_E[\epsilon_2 | \tau_1]}$$

Mit zunehmender Sicherheit, oder präziser, wachsendem l_2^* gewinnt also der Alpha-Wert von ϵ_1 zunehmend an Bedeutung gegenüber dem Alpha-Wert von ϵ_2 .

Die bisherige Diskussion setzte die Umkehrbarkeit der Transformation \underline{T} voraus. Häufig kann man aber viel leichter eine nicht umkehrbare Transformation angeben, in der die Anzahl der u-Variablen größer ist als die Anzahl der x-Variablen (wie es etwa bei der in Beispiel 5.2 zuerst angegebenen Transformation der Fall war). Dieser Mangel läßt sich oft mit einem einfachen Kunstgriff beheben. Ist etwa $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+m})$ und $\underline{x} = \underline{T}(\underline{u}, \tau)$, so führt eine künstliche Erweiterung des x-Raums um die Variablen u_{n+1}, \dots, u_{n+m} (oder um m andere geeignete u-Variablen) :

$$\tilde{\underline{x}} = (x_1, \dots, x_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+m}) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n+m})$$

vielfach zu einer umkehrbaren Transformation in den \tilde{x} -Raum:

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{T}}(\underline{u}, \tau) &= (\underline{T}(\underline{u}, \tau), u_{n+1}, \dots, u_{n+m}) = \\ &= (T_1(\underline{u}, \tau), \dots, T_n(\underline{u}, \tau), u_{n+1}, \dots, u_{n+m}) = \\ &= (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n+m}) \end{aligned}$$

Der Versagensbereich $\tilde{F}_x = \{(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n+m}) : (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in F_x\}$ hängt dann zwar nicht von den zusätzlichen Variablen ab, doch dies ist auch nicht erforderlich. Da wegen

$$\{\underline{x} \in F_x\} = \{\tilde{\underline{x}} \in \tilde{F}_x\}$$

das neu konstruierte Sicherheitsproblem dem alten äquivalent ist, können die Alpha-Werte auch unter Verwendung des \tilde{x} -Raums anstelle des x-Raums, mit der oben beschriebenen Methode, berechnet werden. Die Abbildung

$$\underline{v} = \tilde{\underline{G}}(\underline{u}, \tau) = \tilde{\underline{T}}^{-1}[\tilde{\underline{T}}(\underline{u}, \tau), \tau]$$

welche $\tilde{F}(\tau_0)$ in $\tilde{F}(\tau)$ überführt, hat dann die Eigenschaft

$$(7) \quad v_i = \tilde{G}_i(\underline{u}, \tau) = u_i \quad \text{für} \quad n+1 \leq i \leq n+m.$$

Somit ist, bei gegebenem \underline{u} und τ , $\underline{v} = \tilde{\underline{G}}(\underline{u}, \tau)$ derjenige Punkt des u-Raums, der sowohl den m Gleichungen (7) als den weiteren n Gleichungen

$$(8) \quad \underline{T}(\underline{v}, \tau) = \underline{T}(\underline{u}, \tau_0)$$

genügt. Durch (7) und (8) ist normalerweise der Bildpunkt $\underline{v} = \tilde{\underline{G}}(\underline{u}, \tau)$ von \underline{u} festgelegt.

5.4 α_i als Wichtungsfaktor für $\alpha[\tau]$

Häufig ist eine Basisvariable X_i des Zufallsvektors $\underline{X} = (X_i, \hat{X}_i)$ [mit $\hat{X}_i = (X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$] vom Restvektor \hat{X}_i stochastisch unabhängig, und τ ist ein Verteilungsparameter von X_i , der die Verteilung von \hat{X}_i nicht beeinflusst. Alle anderen Parameter, sofern vorhanden, werden am Anfangswert festgehalten und nicht explizit erwähnt. τ_0 sei der Anfangswert von τ . Die Transformation $\underline{X}(\tau) = \underline{T}(\underline{U}, \tau)$ läßt sich dann aufspalten in

$$X_i(\tau) = T_i(U_1, \tau) \quad (T_i \text{ sei streng monoton wachsend})$$

$$\hat{X}_i = \hat{T}_i(\hat{U}_1)$$

Die Transformation von \hat{X}_i enthält den Parameter τ nicht mehr. Der transformierte Versagensbereich besitze einen Beta-Punkt $\underline{u}^* \neq \underline{0}$. Diesem entspricht im x -Raum der Bemessungspunkt

$$\underline{x}^* = \underline{T}(\underline{u}^*, \tau_0) = (x_i^*, \hat{x}_i^*) = (T_i(u_1^*, \tau_0), \hat{T}_i(\hat{u}_1^*))$$

Aus Gleichung 5.3 (5b) folgt nun, da \hat{T}_i nicht von τ abhängt,

$$(1) \quad \alpha_d[F(\tau)] = \frac{1}{\|\underline{u}^*\|} u_1^* \frac{\partial}{\partial \tau} T_i^{-1}(x_i^*, \tau_0)$$

Hierbei ist zu beachten, daß T_i^{-1} die erste Komponente von \underline{T}^{-1} ist.

Da wegen der strengen Monotonie von $T_i(\cdot, \tau)$ gilt

$$\beta_E[X_i(\tau) < x_i^*] = \beta_E[T_i(U_1, \tau) < x_i^*] = \beta_E[U_1 < T_i^{-1}(x_i^*, \tau)] = -T_i^{-1}(x_i^*, \tau)$$

folgt ferner

$$(2) \quad \alpha_E[X_i(\tau) < x_i^*] = -\frac{\partial}{\partial \tau} T_i^{-1}(x_i^*, \tau_0)$$

Bezeichnen wir nun mit

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\|\underline{u}^*\|} u_1^*$$

den geometrischen Alpha-Wert zur Variablen U_1 bzw. X_i , so

so ergibt sich aus (1)

$$(3) \quad \alpha_d[F(\tau)] = \alpha_1 \cdot \alpha_E[X_i(\tau) < x_i^*]$$

und schließlich, wegen $\alpha_d \sim \alpha_E$

$$(4) \quad \alpha_E[F(\tau)] \sim \alpha_1 \cdot \alpha_E[X_i(\tau) < x_i^*]$$

Der Alpha-Wert des Parameters τ , bezogen auf das eindimensionale Ereignis $\{X_i < x_i^*\}$, schlägt also auf das Versagensereignis F_x , an dem alle Variablen beteiligt sind, nur mit dem "Wichtungsfaktor" α_1 durch.

Randbemerkung

Bezeichnen wir mit $F_{i\tau}$ (nicht zu verwechseln mit $F(\tau)$!) die Verteilungsfunktion der Variablen $X_i(\tau)$, so ist gewöhnlich

$$T_i^{-1}(x, \tau) = \Phi^{-1} F_{i\tau}(x)$$

und zwar immer dann, wenn $T_i(\cdot, \tau)$ (bei festem τ , als Funktion von u) streng monoton wächst. In diesem Fall impliziert Gleichung (1)

$$\alpha_E[F(\tau)] \sim \alpha_d[F(\tau)] = -\alpha_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi^{-1} F_{i\tau}(x_i^*) \Big|_{\tau=\tau_0}$$

Dies ist die differentielle Form der von Diamantidis [4] in seinem Abschnitt "Nachträglicher Nachweis der Sicherheit" mit Linearisierungstechniken, unter der Annahme konstanter, das heißt nicht von τ abhängender, Alpha-Werte α_i , hergeleiteten Approximation

$$\Delta \beta_i \sim -\alpha_1 [\Phi^{-1} F_{i\tau}(x_i^*) - \Phi^{-1} F_{i\tau_0}(x_i^*)]$$

[α_1 entspricht hier dem bei Diamantidis mit α_i bezeichneten geometrischen Alpha-Wert].

5.5 Optimierung

Wie im Abschnitt 5.2 festgestellt wurde, ist die Anwendung der Näherung (N2) (siehe Abschnitte 3.2 und 3.3) gelegentlich fragwürdig, da die Voraussetzung "kleines $\Delta \underline{\tau}$ " sich nur schwer verifizieren läßt. Die Näherung (N1) bzw.

$$\underline{\alpha}_E[\underline{\tau}|\underline{\tau}_0] \sim \underline{\alpha}_d[\underline{\tau}|\underline{\tau}_0] \quad (\text{für großes } \beta_d[F])$$

enthält diese Voraussetzung nicht und ist entsprechend unproblematischer in der Handhabung; sie findet ein wichtiges Aufgabenfeld bei Optimierungsproblemen.

Stellt etwa ein Ingenieur bei der Sicherheitsanalyse (die Methode ist hierbei beliebig) seines Entwurfs ein unzureichendes Sicherheitsniveau fest, so wird er gewöhnlich Verbesserungen anstreben. Dies gelänge möglicherweise mit einer völlig neuartigen Konstruktion, doch in der Regel ist es weit einfacher, nur einige Parameter des bestehenden Entwurfs in geeigneter Weise zu verändern. Diese Parameter können Verteilungsparameter, aber auch "exakt" bestimmbare Konstruktionsmerkmale wie Abmessungen, sein.

Eine Parameteränderung ist dann "geeignet", wenn sie den geforderten Zuwachs an Sicherheit mit möglichst niedrigen Kosten realisiert. Diese Kosten werden formal durch eine Kostenfunktion $K(\underline{\tau}) = K(\tau_1, \dots, \tau_k)$ ausgedrückt, die angibt, welche Kosten die mit Parametern τ_1, \dots, τ_k ausgeführte Konstruktion verursacht. Die Kostenfunktion $K(\underline{\tau})$ sei in einer Umgebung des Anfangswerts $\underline{\tau}_0$ stetig differenzierbar. Ausgehend vom Anfangswert $\underline{\tau}_0$ des Parameters ist dann der Kostenanstieg bei einer infinitesimalen Änderung $d\underline{\tau}$ des Parameters $\underline{\tau}$

$$(1) \quad dK = \text{grad } K(\underline{\tau}_0) \cdot d\underline{\tau} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial K(\underline{\tau}_0)}{\partial \tau_i} d\tau_i$$

Das Gradientensymbol "grad" bezeichnet hier die partiellen Ableitungen nach den Parametern τ_i . Ist auch die Funktion

$$\beta_E(\underline{\tau}) := \beta_E[F(\underline{\tau})]$$

in einer Umgebung von $\underline{\tau}_0$ stetig differenzierbar (vgl. Satz 3.2.3), so gilt analog

$$(2) \quad d\beta_E = \text{grad } \beta_E(\underline{\tau}_0) \cdot d\underline{\tau} = \sum_{i=1}^k \alpha_E[\tau_i] d\tau_i$$

Die Gradienten von $K(\underline{\tau})$ und $\beta_E(\underline{\tau})$ an der Stelle $\underline{\tau}_0$ seien nicht entartet:

$$\underline{a}_K := \text{grad } K(\underline{\tau}_0) \neq \underline{0} \quad \text{und}$$

$$\underline{\alpha}_E := \underline{\alpha}_E[\underline{\tau}] = \alpha_E[\underline{\tau}|\underline{\tau}_0] \neq \underline{0}$$

Die Schwierigkeiten einer genauen numerischen Berechnung von $\underline{\alpha}_E$ lassen es vorteilhaft erscheinen, eine Näherung wie $\underline{\alpha}_E \sim \underline{\alpha}_d$ zu verwenden. Für Optimierungszwecke besonders wichtig ist der normierte Vektor

$$\underline{\alpha}_E^N := \frac{1}{\|\underline{\alpha}_E\|} \underline{\alpha}_E$$

Dessen Approximation durch den normierten Vektor $\underline{\alpha}_d^N$ verursacht gemäß Näherung (N1) einen asymptotisch kleinen absoluten Fehler, während die Approximation

$$\|\underline{\alpha}_E\| \sim \|\underline{\alpha}_d\|$$

mit einem asymptotisch kleinen relativen Fehler behaftet ist. Im allgemeinen führt daher die Verwendung von $\underline{\alpha}_d$ anstelle von $\underline{\alpha}_E$ bei Optimierungsproblemen zu (asymptotisch) befriedigenden Lösungen. Wenn die Voraussetzungen des Satzes 3.3.5 vorliegen, läßt sich diese Argumentation auf die "unteren und oberen Alpha-Werte" α_E^u und α_E^o übertragen. Die im folgenden mit α_d formulierten Näherungen gelten dann sinngemäß, auch wenn α_E nicht existieren sollte.

Die dem Ingenieur gestellte Aufgabe, die Bestimmung eines günstigeren Konstruktionsparameters $\underline{\tau}_1 = \underline{\tau}_0 + \Delta \underline{\tau}$, läßt sich in zwei Schritte zergliedern: Berechnung der Richtung \underline{a} von $\Delta \underline{\tau}$ und der Länge von $\Delta \underline{\tau}$ bzw. der Größe ϵ in der Gleichung

$$(3) \quad \Delta \underline{\tau} = \epsilon \underline{a} \quad (\epsilon \geq 0)$$

Eine "optimale" Suchrichtung schlechthin existiert im allgemeinen nicht, da sie von der subjektiven Gewichtung der verfolgten Ziele, Sicherheit und geringe Kosten, abhängt. Soll aber, wie in der geschilderten Situation zunächst angemessen, eine größere Sicherheit möglichst ohne zusätzliche Kosten erzielt werden, so ist die natürliche Suchrichtung

$$(4) \quad \underline{a} = \underline{\alpha}_E^N - (\underline{\alpha}_E^N \cdot \underline{g}_K^N) \underline{g}_K^N \sim \underline{\alpha}_d^N - (\underline{\alpha}_d^N \cdot \underline{g}_K^N) \underline{g}_K^N,$$

denn in dieser Richtung wird, zumindest differentiell, der Zuwachs an Sicherheit bei gleichbleibenden Kosten maximal. [\underline{a} ist die Projektion von $\underline{\alpha}_E^N$ auf die zu \underline{g}_K^N senkrechte Ebene] Für die Größe ϵ in Gleichung (3) bietet sich

$$\epsilon = \frac{\Delta\beta}{\|\underline{\alpha}_E^N\| [1 - (\underline{\alpha}_E^N \cdot \underline{g}_K^N)^2]} \sim \frac{\Delta\beta}{\|\underline{\alpha}_d^N\| [1 - (\underline{\alpha}_d^N \cdot \underline{g}_K^N)^2]}$$

an. Hierbei ist $\Delta\beta$ der gewünschte Zuwachs an Sicherheit. Wäre nämlich $\underline{\alpha}_E[\underline{1} | \underline{1}_0 + \epsilon \underline{a}]$ unabhängig von ϵ , so ergäbe sich damit genau der gewünschte Zuwachs an Sicherheit. Ansonsten sei auf die einschlägige Literatur über Gradientenverfahren bei der Optimierung verwiesen.

Auch die gegenteilige Aufgabe ist, oft nach Lösung der ersten, denkbar: Die geforderte Sicherheit ist bereits erreicht, aber es soll die Möglichkeit für eine Kostenminderung bei gleichbleibender Sicherheit ausgelotet werden. Die natürliche Suchrichtung ist dann

$$(5) \quad \underline{a} = -[\underline{g}_K^N - (\underline{g}_K^N \cdot \underline{\alpha}_E^N) \underline{\alpha}_E^N] \sim -[\underline{g}_K^N - (\underline{g}_K^N \cdot \underline{\alpha}_d^N) \underline{\alpha}_d^N]$$

(die Projektion von $-\underline{g}_K^N$ auf die Ebene senkrecht zu $\underline{\alpha}_E^N$), denn dies ist die Richtung maximaler Kostenminderung bei gleichbleibender Sicherheit. Für weitere Einzelheiten sei wieder auf die Literatur verwiesen.

Ein "optimales" $\underline{1}_0$ liegt vor, wenn sich ohne Kostensteigerungen die Sicherheit nicht mehr verbessern läßt, oder ohne Einbuße an Sicherheit sich die Kosten nicht mehr ver-

mindern lassen. Formal werden dann die Suchvektoren \underline{a} in den Gleichungen (4) bzw. (5) zu Null. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn die Vektoren $\underline{\alpha}_E$ und \underline{g}_K linear abhängig sind. Sind allerdings $\underline{\alpha}_E$ und \underline{g}_K antiparallel, so stimmt die Richtung der maximalen Kostenminderung mit der Richtung des maximalen Sicherheitszuwachses überein, und folglich führt jede (kleine) Verringerung der Kosten zu einer Verbesserung der Sicherheit (In der Praxis wird dieser Sonderfall aber keine große Rolle spielen). $\underline{1}_0$ ist also nur dann ein "optimaler" Parameter, wenn gilt

$$(6) \quad \underline{\alpha}_E^N = \underline{g}_K^N$$

In diesem Fall ist (bei kleinen Variationen der Parameter) Zugewinn an Sicherheit gleichbedeutend mit Kostensteigerung. Definiert man als Näherung dessen die " $\underline{\alpha}_d$ -optimalen" Parameter durch

$$(7) \quad \underline{\alpha}_d^N = \underline{g}_K^N,$$

so ist (bei kleinen Variationen der Parameter) ohne Kostensteigerung nur ein unbedeutender Zugewinn an Sicherheit möglich, und eine nennenswerte Kostenersparnis ist stets begleitet von deutlichen Einbußen an Sicherheit.

Zusatz

Die normierten Gradienten von $\beta_E[F(\underline{1})]$ und $P[F(\underline{1})]$ stimmen bis auf ein unterschiedliches Vorzeichen überein. Somit eignet sich $-\underline{\alpha}_d^N$ auch als Näherung für den normierten Gradienten von $P[F(\underline{1})]$, wenn in Optimierungsproblemen die Kosten zu minimieren sind und dabei eine bestimmte, sehr kleine Versagenswahrscheinlichkeit nur mit kleiner relativer Toleranz überschritten werden darf. Zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit selbst oder der Länge ihres Gradienten reicht hierbei aber die Methode erster Ordnung nicht aus.

Das duale Problem hingegen, die Minimierung von P_f bei ga-

rantierten Kosten, läßt sich (asymptotisch) vollständig mit den hier dargestellten Begriffen der Methode erster Ordnung behandeln, denn dieses ist der Maximierung von β_E äquivalent.

TEIL B : BEWEISE

B2.1 Beweise zu Abschnitt 2.1

Beweis von Satz 2.1.2

a) Es sei P_F die Einschränkung von P auf F . Für $Für A := F \setminus \text{Ess}(F)$ ist zu zeigen: $P_F[A] = 0$

Da es für jedes $a \in A$ eine offene Umgebung U_a gibt mit $P_F[U_a] = 0$, folgt aus der τ -Stetigkeit von P_F

$$0 \leq P_F[A] \leq P_F[\bigcup_{a \in A} U_a] = 0$$

b) Folgt aus a) und der Definition 2.1.1

c) Es genügt zu zeigen: $\text{Ess}(F_1) \subset \overline{\text{Ess}(F_2)}$ (denn aus $A \subset \bar{B}$ folgt $\bar{A} \subset \bar{B}$).

Sei $\underline{u} \in \text{Ess}(F_1)$. Wegen $F_1 \bar{\cap} \text{Ess}(F_2)$ gilt für jedes $\epsilon > 0$

$$P[K_\epsilon(\underline{u}) \cap \text{Ess}(F_2)] > 0, \text{ somit } K_\epsilon(\underline{u}) \cap \text{Ess}(F_2) \neq \emptyset,$$

d. h. $\underline{u} \in \overline{\text{Ess}(F_2)}$

d) \subset : klar

$$\supset : \begin{matrix} a) \\ P[F \cap K_\epsilon(\underline{u})] > 0 \Rightarrow P[\text{Ess}(F) \cap K_\epsilon(\underline{u})] > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{Ess}(F) \cap K_\epsilon(\underline{u}) \neq \emptyset \end{matrix}$$

e) \subset : klar

$$\supset : \begin{matrix} d) & a) \\ \underline{u} \in \overline{\text{Ess}(F)} \Rightarrow \forall \epsilon > 0: P[F \cap K_\epsilon(\underline{u})] > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall \epsilon > 0: P[\overline{\text{Ess}(F)} \cap K_\epsilon(\underline{u})] > 0 ; \text{ also } \underline{u} \in \text{Ess}(\overline{\text{Ess}(F)}) \end{matrix}$$

Beweis von Satz 2.1.4

- a) 1. Gleichung: Trivial ("Stetigkeit der Norm")
- 2. Gleichung: Folgt aus der Definition von $\text{Ess}(F)$ und Satz 2.1.2a

b) Wegen $P[F] > 0$ und Teil a) (2.Gleichung) ist $\beta_d[F] < \infty$.
Wiederum mit Teil a) (1.Gleichung) folgt die Behauptung.

c) Folgt aus Satz 2.1.2d

d) \Rightarrow : Wäre $\inf\{\|\underline{u}\| : \underline{u} \in \overline{\text{Ess}(F)} \setminus K_\epsilon(\underline{u}^*)\} \leq$
 $\leq \inf\{\|\underline{u}\| : \underline{u} \in \text{Ess}(F) \setminus K_\epsilon(\underline{u}^*)\} \stackrel{!}{\leq} \beta_d[F],$

so gäbe es wegen der Abgeschlossenheit von $A :=$
 $:= \overline{\text{Ess}(F)} \setminus K_\epsilon(\underline{u}^*)$ ein $\underline{u} \in \overline{\text{Ess}(F)}$, $\underline{u} \notin K_\epsilon(\underline{u}^*)$ mit
 $\|\underline{u}\| \leq \beta_d[F]$, d. h. einen von \underline{u}^* verschiedenen Minimalpunkt
im Widerspruch zur Voraussetzung.

Folglich ist die zweite Bedingung erfüllt - die erste folgt
aus Teil c).

\Leftarrow : Satz 2.1.2d $\Rightarrow \underline{u}^* \in \overline{\text{Ess}(F)}$.

Wäre nun $\|\underline{u}^*\| - \beta_d[F] =: 2\delta > 0$, so folgte für
 $\underline{u} \in K_\delta(\underline{u}^*)$

$\|\underline{u}\| \geq \|\underline{u}^*\| - \|\underline{u}^* - \underline{u}\| > \beta_d[F] + \delta,$
folglich

$\beta_d[F] = \inf\{\|\underline{u}\| : \underline{u} \in \text{Ess}(F)\} = \inf\{\|\underline{u}\| : \underline{u} \in \text{Ess}(F) \setminus K_\delta(\underline{u}^*)\}$
im Widerspruch zur zweiten Voraussetzung. Also ist

$$\|\underline{u}^*\| \leq \beta_d[F].$$

bzw. (wegen $\underline{u}^* \in \overline{\text{Ess}(F)}$ und Teil a))

$$\|\underline{u}^*\| = \beta_d[F].$$

Daher ist \underline{u}^* Minimalpunkt von F . Gäbe es nun einen von \underline{u}^*
verschiedenen Minimalpunkt \underline{v}^* , so wäre

$$\underline{v}^* \in \overline{\text{Ess}(F)} \text{ und } \|\underline{v}^*\| = \beta_d[F].$$

Für $\epsilon := \frac{1}{2}\|\underline{u}^* - \underline{v}^*\|$ folgt dann wegen $\text{Ess}(F) \setminus K_\epsilon(\underline{u}^*) \supset$
 $\supset \text{Ess}(F) \cap K_\epsilon(\underline{v}^*)$:

$$\inf\{\|\underline{u}\| : \underline{u} \in \text{Ess}(F) \setminus K_\epsilon(\underline{u}^*)\} \leq \inf\{\|\underline{u}\| : \underline{u} \in \text{Ess}(F) \cap K_\epsilon(\underline{v}^*)\}$$

$$\leq (\text{da } \underline{v}^* \in \overline{\text{Ess}(F)}) \|\underline{v}^*\| = \beta_d[F],$$

im Widerspruch zur zweiten Voraussetzung.

Zusatz: \Rightarrow : Gleicher Beweis

\Leftarrow : Folgt aus Satz 2.1.4d wegen

$$\inf\{\|\underline{u}\| : \underline{u} \in \text{Ess}(F) \setminus K_\epsilon(\underline{u}^*)\} \geq \inf\{\|\underline{u}\| : \underline{u} \in \overline{\text{Ess}(F)} \setminus K_\epsilon(\underline{u}^*)\}.$$

B 3.1 Beweise zu Abschnitt 3.1

Hilfssatz B 3.1.1

Es sei (X, α) ein Meßraum, $f: (X, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar und für $b > 0$ seien μ_b Wahrscheinlichkeitsmaße auf (X, α) mit

$$\mu_b(|f|) := \int |f| d\mu_b < \infty .$$

Für ein $r_0 \in \mathbb{R}$ und alle $\epsilon > 0$ gelte, mit $V_\epsilon := \{x \in X: |f(x) - r_0| < \epsilon\}$

(1) $\lim_{b \rightarrow \infty} \mu_b(X \setminus V_\epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$

und

(2) $\lim_{b \rightarrow \infty} \mu_b(f \cdot 1_{X \setminus V_\epsilon}) = 0 \quad \forall \epsilon > 0 .$

Dann folgt

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \mu_b(f) = r_0 .$$

Der folgende Hilfssatz ist nützlich, um die Voraussetzungen von Hilfssatz B 3.1.1 zu verifizieren:

Hilfssatz B 3.1.2

Es seien $F, G \subset \mathbb{R}^n$ mit $\beta_d[F] < \beta_d[G]$ und $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine (meßbare) Funktion mit

$$\int_G |g(\underline{u})| \varphi(\underline{u}) d\underline{u} < \infty .$$

μ_b sei das Maß auf \mathbb{R}^n mit Lebesgue-Dichte $\psi_b(\underline{u}) = \varphi(b\underline{u})$.

Dann gilt

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\mu_b(g \cdot 1_G)}{\mu_b(F)} = 0 .$$

Hilfssatz B 3.1.3

$F \subset \mathbb{R}^n$ besitze einen Beta-Punkt \underline{u}^* . Für die Funktion $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ existiere der Limes

$$f^* := \lim_{\underline{u} \rightarrow \underline{u}^*} f(\underline{u}) ,$$

und es sei

$$\int_F |f(\underline{u})| \varphi(\underline{u}) d\underline{u} < \infty .$$

μ_b sei das Maß auf F mit Lebesgue-Dichte $\varphi(b\underline{u})$. Dann gilt

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\mu_b(f)}{\mu_b(F)} = f^* .$$

Anmerkung

Ist f beschränkt, so folgt dies aus der schwachen Konvergenz der zu μ_b gehörenden normierten Maße gegen das in \underline{u}^* konzentrierte Dirac-Maß. Letzteres ist eine Konsequenz aus Hilfssatz B 3.1.2

Beweis von Hilfssatz B 3.1.1

Sei $\epsilon > 0$ beliebig, aber fest, und $V := V_\epsilon$. Wegen

$$\mu_b(f) = \mu_b(f \cdot 1_V) + \mu_b(f \cdot 1_{X \setminus V})$$

und Voraussetzung (2) ist

$$\begin{aligned} \limsup_{b \rightarrow \infty} \mu_b(f) &= \limsup_{b \rightarrow \infty} \mu_b(f \cdot 1_V) \leq (r_0 + \epsilon) \limsup_{b \rightarrow \infty} \mu_b(V) = \\ &= (r_0 + \epsilon) \limsup_{b \rightarrow \infty} [1 - \mu_b(X \setminus V)] \stackrel{(1)}{=} r_0 + \epsilon . \end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\liminf_{b \rightarrow \infty} \mu_b(f) \geq r_0 - \epsilon .$$

Dies gilt für jedes $\epsilon > 0$, folglich

$$r_0 \leq \liminf_{b \rightarrow \infty} \mu_b(f) \leq \limsup_{b \rightarrow \infty} \mu_b(f) \leq r_0 .$$

Beweis von Hilfssatz B 3.1.2

o.E.d.A.: $G = \text{Ess}(G)$. Wegen

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}^n \psi_b(\underline{u}) &= \exp(-\frac{1}{2} b^2 \|\underline{u}\|^2) = \\ &= \exp[-\frac{1}{2} (b^2-1) \|\underline{u}\|^2] \exp[-\frac{1}{2} \|\underline{u}\|^2] \end{aligned}$$

ist

$$(1) \quad \varphi(b\underline{u}) = \psi_b(\underline{u}) = \exp[-\frac{1}{2} (b^2-1) \|\underline{u}\|^2] \varphi(\underline{u}) .$$

Seien nun $\beta := \beta_d[F]$ und $\delta := \frac{1}{2} (\beta_d[G] - \beta_d[F])$, also nach Vorausss. $\delta > 0$; o.E.d.A.: $\delta < \infty$. Ferner ist $0 \leq \beta < \infty$.

Sei $F_1 := \{\underline{u} \in F: \|\underline{u}\| \leq \beta + \delta\}$. Es ist also

$$\begin{aligned} \|\underline{u}\| &\leq \beta + \delta \quad \text{für alle } \underline{u} \in F_1 \\ \|\underline{u}\| &\geq \beta + 2\delta \quad \text{für alle } \underline{u} \in G \end{aligned}$$

Aus (1) folgt daher für $b \geq 1$

$$\mu_b(F_1) \geq \exp[-\frac{1}{2} (b^2-1) (\beta+\delta)^2] \int_{F_1} \varphi(\underline{u}) \, d\underline{u}$$

und

$$\begin{aligned} |\mu_b(g \cdot 1_G)| &\leq \exp[-\frac{1}{2} (b^2-1) (\beta+2\delta)^2] \underbrace{\int_G |g(\underline{u})| \varphi(\underline{u}) \, d\underline{u}}_{=: c_2 < \infty \text{ nach Vorausss.}} \\ &=: c_2 < \infty \text{ nach Vorausss.} \end{aligned}$$

Nach Satz 2.1.4a ist $c_1 := \int_{F_1} \varphi(\underline{u}) \, d\underline{u} > 0$.
Es folgt

$$\left| \frac{\mu_b(g \cdot 1_G)}{\mu_b(F_1)} \right| \leq \exp[-\frac{1}{2} (b^2-1) (2\beta\delta+3\delta^2)] \cdot \frac{c_2}{c_1} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 0$$

und somit wegen $\mu_b(F) \geq \mu_b(F_1)$ auch

$$\frac{\mu_b(g \cdot 1_G)}{\mu_b(F)} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 0, \quad \text{q.e.d.}$$

Beweis von Hilfssatz B 3.1.3

Mit Hilfe von Hilfssatz B3.1.2 lassen sich leicht die Voraussetzungen von Hilfssatz B3.1.1 verifizieren.

Sei $X := F$ und $V_\epsilon := \{\underline{u} \in F: |f(\underline{u}) - f^*| < \epsilon\}$ ($\epsilon > 0$)

Da $f^* = \lim_{\underline{u} \rightarrow \underline{u}^*} f(\underline{u})$ existiert, ist V_ϵ eine Umgebung von \underline{u}^*

in $X = F$. Insbesondere ist nach Satz 2.1.2a und 2.1.4d

$$\begin{aligned} (1) \quad \beta_d[F \setminus V_\epsilon] &= \beta_d[\text{Ess}(F) \setminus V_\epsilon] = \inf\{\|\underline{u}\| : \underline{u} \in \text{Ess}(\text{Ess}(F) \setminus V_\epsilon)\} \\ &\geq \inf\{\|\underline{u}\| : \underline{u} \in \text{Ess}(F) \setminus V_\epsilon\} > \beta_d[F] . \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist ferner

$$(2) \quad \int_{F \setminus V_\epsilon} |f(\underline{u})| \varphi(\underline{u}) \, d\underline{u} \leq \int_F |f(\underline{u})| \varphi(\underline{u}) \, d\underline{u} < \infty .$$

Aus B3.1.2 folgt somit

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\mu_b(1_{F \setminus V_\epsilon} \cdot f)}{\mu_b(F)} = 0 \quad (\forall \epsilon > 0) .$$

Dasselbe Argument, angewandt auf die konstante Funktion "f = 1", liefert

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\mu_b(F \setminus V_\epsilon)}{\mu_b(F)} = 0 \quad (\forall \epsilon > 0) .$$

Damit sind für die Wahrscheinlichkeitsmaße $\tilde{\mu}_b := \frac{1}{\mu_b(F)} \mu_b$ und für $r_0 := f^*$ die Voraussetzungen von B3.1.1 erfüllt, und es folgt

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\mu_b(f)}{\mu_b(F)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_b(f) = f^* .$$

Beweis von Satz 3.1.1

Sei $\beta := \beta_d[F]$ und für $0 < \epsilon < \beta$ sei

$$H_\epsilon := \{u: u_1 \leq -\beta - \epsilon\}, \quad G_\epsilon := \{u: u_1 \leq -\beta + \epsilon\}.$$

Es gilt also

$$(1) \quad \beta_d[G_\epsilon] = \beta - \epsilon < \beta_d[F] = \beta < \beta_d[H_\epsilon] = \beta + \epsilon.$$

Bezeichnet man mit μ_b das Maß mit Lebesgue-Dichte $\varphi(bu)$, so folgt

$$P[bF] = \int_{bF} \varphi(u) du = b^n \int_F \varphi(bu) du = b^n \mu_b[F],$$

ebenso

$$P[bG_\epsilon] = b^n \mu_b[G_\epsilon], \quad P[bH_\epsilon] = b^n \mu_b[H_\epsilon].$$

Aus Hilfssatz B3.1.2 (mit "g=1") und (1) folgt

$$(2) \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{P[bF]}{P[bG_\epsilon]} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\mu_b[F]}{\mu_b[G_\epsilon]} = 0 \quad \text{und}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{P[bH_\epsilon]}{P[bF]} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\mu_b[H_\epsilon]}{\mu_b[F]} = 0.$$

Für hinreichende großes b , $b \geq b(\epsilon)$, ist somit

$$\beta_E[bF] \geq \beta_E[bG_\epsilon] \quad \text{und} \quad \beta_E[bH_\epsilon] \geq \beta_E[bF].$$

Mit (1) ergibt sich daraus für jedes $0 < \epsilon < \beta$

$$\liminf_{b \rightarrow \infty} \frac{\beta_E[bF]}{b\beta} \geq \frac{\beta - \epsilon}{\beta} = 1 - \frac{\epsilon}{\beta} \quad \text{und}$$

$$\limsup_{b \rightarrow \infty} \frac{\beta_E[bF]}{b\beta} \leq \frac{\beta + \epsilon}{\beta} = 1 + \frac{\epsilon}{\beta}.$$

Wegen $\beta_d[bF] = b\beta$ folgt hieraus die Behauptung des Satzes.

Beweis von Satz 3.1.2

Sei $\beta := \beta_d[F]$, somit $b\beta = \beta_d[bF]$. Wir zeigen zuerst

$$(1) \quad \limsup_{b \rightarrow \infty} \{b\beta - \beta_E[bF]\} \leq 0$$

Diese Aussage gilt auch ohne die Voraussetzung (*).

Bezeichnet χ_n^2 die Chi-Quadrat Verteilung, so ist

$$P[bF] \leq 1 - \chi_n^2(b^2\beta^2) = 2^{-\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})^{-1} \int_{b^2\beta^2}^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{x}{2}) dx$$

Mit $C := 2^{-\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})^{-1}$ gilt daher für $b \geq \frac{1}{\beta}$ bzw. $b\beta \geq 1$

$$P[bF] \leq C \int_{b^2\beta^2}^{\infty} x^n \exp(-\frac{x}{2}) dx =: Q(b^2\beta^2) \varphi(b\beta).$$

Q ist ein Polynom, $Q(b^2\beta^2) \geq 0$. Da für $x < 0$ gilt

$$(2) \quad -x \leq \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)} \leq -\frac{1+x^2}{x},$$

folgt für $b \geq \frac{1}{\beta}$

$$(3) \quad \frac{P[bF]}{\Phi(-b\beta)} = \frac{P[bF]}{\varphi(b\beta)} \frac{\varphi(-b\beta)}{\Phi(-b\beta)} \leq Q(b^2\beta^2) \frac{1+b^2\beta^2}{b\beta} \leq 2Q(b^2\beta^2) b\beta.$$

Andererseits gilt wegen (2) für jedes $\delta > 0$ und jedes $b > \frac{\delta}{\beta}$

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(-b\beta+\delta)}{\Phi(-b\beta)} &= \frac{\Phi(-b\beta+\delta)}{\varphi(-b\beta+\delta)} \frac{\varphi(-b\beta+\delta)}{\varphi(-b\beta)} \frac{\varphi(-b\beta)}{\Phi(-b\beta)} \geq \\ &\geq \frac{-(-b\beta+\delta)}{1+(-b\beta+\delta)^2} \exp(b\beta\delta) \exp(-\frac{1}{2}\delta^2) (b\beta) \geq 2Q(b^2\beta^2) b\beta \geq \\ &\geq \frac{P[bF]}{\Phi(-b\beta)}. \end{aligned} \quad (3)$$

für große b

Für große Werte von b , $b \geq b(\delta, \beta)$ ist deswegen

$$P[bF] \leq \Phi(-b\beta+\delta) \quad \text{bzw.} \quad b\beta - \delta \leq \beta_E[bF],$$

d. h.

$$\limsup_{b \rightarrow \infty} \{b\beta - \beta_E[bF]\} \leq \delta \quad (\forall \delta > 0),$$

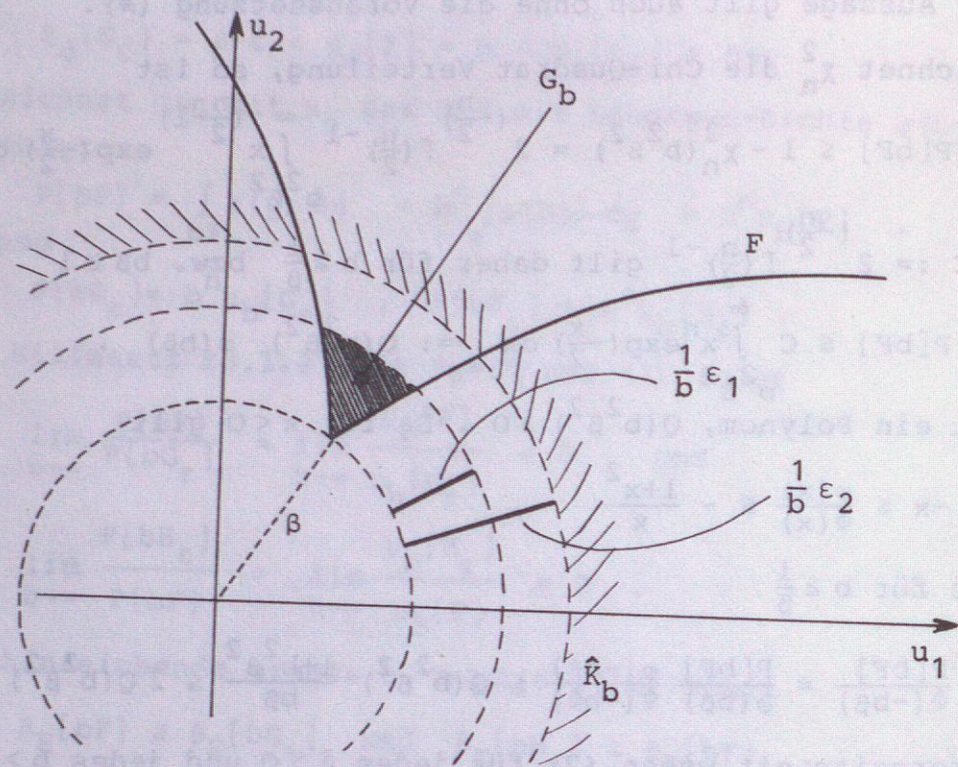
womit (1) nachgewiesen ist.

Wir beweisen nun

$$(4) \quad \liminf_{b \rightarrow \infty} \{b\beta - \beta_E[bF]\} \geq 0$$

Dazu seien $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ beliebig, aber fest gewählt und

$$G_b := F \cap K_{(\beta + \frac{1}{b} \varepsilon_1)} \quad , \quad \hat{K}_b := \mathbb{R}^n \setminus K_{(\beta + \frac{1}{b} \varepsilon_2)}$$



Dann ist für $\underline{u} \in G_b$ und $b \geq 1$ (vgl. (1) im Beweis von Hilfsatz B3.1.2)

$$\varphi(b\underline{u}) \geq \varphi(\underline{u}) \exp\{-\frac{1}{2}(b^2-1)(\beta + \frac{1}{b} \varepsilon_1)^2\}$$

und für $\underline{u} \in \hat{K}_b$ und $b \geq 1$

$$\varphi(b\underline{u}) \leq \varphi(\underline{u}) \exp\{-\frac{1}{2}(b^2-1)(\beta + \frac{1}{b} \varepsilon_2)^2\}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \limsup_{b \rightarrow \infty} \frac{P[b\hat{K}_b]}{P[bG_b]} &\leq \\ &\leq \limsup_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{P[\hat{K}_b]}{P[G_b]} \exp\{-\frac{1}{2}(b^2-1)[(\beta + \frac{1}{b} \varepsilon_2)^2 - (\beta + \frac{1}{b} \varepsilon_1)^2]\} \right\} \leq \\ &= \frac{2\beta}{b}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \frac{1}{b^2}(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{b \rightarrow \infty} \exp[-\frac{1}{2} \frac{b^2-1}{b^2} (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)] \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \exp[\frac{\beta}{b} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)] \cdot \\ &\cdot \limsup_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{P[G_b]} \exp[-b\beta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)] \right\} = 0 \end{aligned}$$

[Die letzte Gleichheit gilt, da die ersten beiden Grenzwerte existieren (in \mathbb{R}), und der "limsup" gemäß der Voraussetzung (*), angewandt mit $\varepsilon := \frac{1}{b} \varepsilon_1$ und $a := \beta \varepsilon_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$, den Wert Null annimmt]

Wegen

$$P[b\hat{K}_b] \geq \Phi(-b\beta - \varepsilon_2) \quad \text{und} \quad G_b \subset F$$

folgt daraus

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\Phi(-b\beta - \varepsilon_2)}{P[bF]} = 0$$

und somit

$$\liminf_{b \rightarrow \infty} \{b\beta - \beta_E[bF]\} \geq -\varepsilon_2$$

Da dies für alle $\varepsilon_2 > 0$ gilt, folgt die Behauptung (4). Diese wiederum impliziert zusammen mit (1) die Behauptung des Satzes.

Beweis der Anmerkung 3.1.3

o.E.d.A.: $t = n$ (Durch Hinzunahme weiterer g_j verkleinert sich der Durchschnitt der Mengen $\{g_j < 0\}$)

Sei $X_j := \underline{a}_j \cdot \underline{U}$ ($1 \leq j \leq n$), $\underline{X} := (X_1, \dots, X_n)$.

\underline{X} ist normalverteilt, und die Verteilung von \underline{X} ist nicht entartet, d. h. die Verteilung von \underline{X} hat eine stetige Dichte $\varphi_{\underline{X}}$ mit

$$0 < \varphi_{\underline{X}} < \infty.$$

Da $\|\underline{u}\|_a := \max\{|\underline{a}_j \cdot \underline{u}| : 1 \leq j \leq n\}$ eine Norm auf \mathbb{R}^n definiert, und alle Normen auf \mathbb{R}^n äquivalent sind, gibt es Konstanten c_1 und c_2 mit $0 < c_1, c_2 < \infty$ so, daß für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$(1) \quad \|\underline{u}\| < \varepsilon \Rightarrow \|\underline{u}\|_a < c_1 \varepsilon \quad \text{und} \\ \|\underline{u}\|_a < c_2 \varepsilon \Rightarrow \|\underline{u}\| < \varepsilon.$$

Nach Voraussetzung ist für genügend kleines ε wegen $g_j(\underline{v}) = 0$ und der totalen Differenzierbarkeit von g_j im Punkte \underline{v}

$$F(\varepsilon) := F \cap K_\varepsilon(\underline{v}) \supset \bigcap_{j=1}^n \{g_j(\underline{U}) < 0\} \cap K_\varepsilon(\underline{v}) = \\ = \bigcap_{j=1}^n \{\underline{a}_j \cdot (\underline{U} - \underline{v}) - \sigma_j(\|\underline{U} - \underline{v}\|) < 0\} \cap K_\varepsilon(\underline{v}) =: F_1(\varepsilon)$$

↑
"klein oh" (siehe Abschnitt 1.2)

Sei ferner

$$F_2 := \bigcap_{j=1}^n \{\underline{a}_j \cdot (\underline{U} - \underline{v}) < 0\}$$

$$F_2(\varepsilon) := F_2 \cap K_\varepsilon(\underline{v}).$$

Dann ist

$$F_1(\varepsilon) \Delta F_2(\varepsilon) \subset \\ \subset \bigcup_{j=1}^n [\{ \underline{a}_j \cdot (\underline{U} - \underline{v}) < \sigma_j(\|\underline{U} - \underline{v}\|) \} \Delta \{ \underline{a}_j \cdot (\underline{U} - \underline{v}) < 0 \}] \cap K_\varepsilon(\underline{v}) = \\ = \bigcup_{j=1}^n [\{ \sigma_j(\|\underline{U} - \underline{v}\|) \leq \underline{a}_j \cdot (\underline{U} - \underline{v}) < 0 \} \cup \{ 0 \leq \underline{a}_j \cdot (\underline{U} - \underline{v}) < \sigma_j(\|\underline{U} - \underline{v}\|) \}] \cap \\ \cap K_\varepsilon(\underline{v}) \subset \\ \subset \bigcup_{j=1}^n \{ |\underline{a}_j \cdot (\underline{U} - \underline{v})| \leq |\sigma_j(\|\underline{U} - \underline{v}\|)| \} \cap K_\varepsilon(\underline{v}) \subset \\ \subset \bigcup_{j=1}^n [\{ |\underline{a}_j \cdot (\underline{U} - \underline{v})| \leq \sigma(\varepsilon) \} \cap K_\varepsilon(\underline{v})].$$

Hierbei ist $\sigma(\varepsilon) := \max_{1 \leq j \leq n} \sup\{\sigma_j(\|\underline{u} - \underline{v}\|) : \underline{u} \in K_\varepsilon(\underline{v})\}$, und es gilt

$$(2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \sigma(\varepsilon) = 0.$$

Wegen (1), bzw. $K_\varepsilon(\underline{v}) \subset \bigcap_{i=1}^n \{\underline{u} : |\underline{a}_i \cdot (\underline{u} - \underline{v})| < c_1 \varepsilon\}$ folgt

$$P[F_1(\varepsilon) \Delta F_2(\varepsilon)] \leq \\ \leq \sum_{j=1}^n P[\{|\underline{a}_j \cdot (\underline{U} - \underline{v})| \leq \sigma(\varepsilon)\} \cap \bigcap_{i=1}^n \{|\underline{a}_i \cdot (\underline{U} - \underline{v})| < c_1 \varepsilon\}] = \\ = \sum_{j=1}^n P[\{|X_j - y_j| \leq \sigma(\varepsilon)\} \cap \bigcap_{i=1}^n \{|X_i - y_i| < c_1 \varepsilon\}].$$

↑
[mit $y_j := \underline{a}_j \cdot \underline{v}$, $X_j = \underline{a}_j \cdot \underline{U}$]

Sei nun $A := \bigcap_{i=1}^n \{\underline{x} : |x_i - y_i| < c_1 \varepsilon\}$. Dann gilt für die Dichte $\varphi_{\underline{X}}$ von \underline{X}

$$d_1 := \sup\{\varphi_{\underline{X}}(\underline{x}) : \underline{x} \in A\} < \infty.$$

Für kleine ε ist nun $\sigma(\varepsilon) \leq c_1 \varepsilon \leq c_1$, und es folgt

$$P[F_1(\varepsilon) \Delta F_2(\varepsilon)] \leq n d_1 (2c_1 \varepsilon)^{n-1} (2\sigma(\varepsilon))$$

und daher wegen (2)

$$(3) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^n} P[F_1(\varepsilon) \Delta F_2(\varepsilon)] = 0.$$

Andererseits ist wegen (1)

$$K_\varepsilon(\underline{v}) \supset \bigcap_{j=1}^n \{|X_j - y_j| < c_2 \varepsilon\}$$

bzw.

$$P[F_2(\varepsilon)] \geq P[\bigcap_{j=1}^n \{X_j - y_j < 0\} \cap \bigcap_{j=1}^n \{|X_j - y_j| < c_2 \varepsilon\}] = \\ = P[\bigcap_{j=1}^n \{-c_2 \varepsilon < X_j - y_j < 0\}] =: P[\underline{X} \in A_\varepsilon].$$

Da die Dichte $\varphi_{\underline{X}}$ von \underline{X} stetig und strikt positiv, und A_1 kompakt ist, gilt

$$\inf\{\varphi_{\underline{X}}(\underline{a}) : \underline{a} \in A_1\} =: d_2 > 0$$

bzw.

$$(4) \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^n} P[F_2(\varepsilon)] \geq c_2^n d_2 > 0.$$

Mit (3) folgt daraus

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P[F_1(\varepsilon) \Delta F_2(\varepsilon)]}{P[F_2(\varepsilon)]} = 0.$$

Da

$$|P[F_1(\epsilon)] - P[F_2(\epsilon)]| \leq P[F_1(\epsilon) \Delta F_2(\epsilon)]$$

ergibt sich weiter

$$(5) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P[F_1(\epsilon)]}{P[F_2(\epsilon)]} = 1$$

bzw. [(4) und (5)]

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^n} P[F(\epsilon)] \geq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^n} P[F_1(\epsilon)] > 0$$

Zusammen mit $P[F \cap K_{\beta+\epsilon}] \geq P[F(\epsilon)]$ und

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^n} \exp(-\frac{a}{\epsilon}) = 0 \text{ für } a > 0$$

folgt hieraus die Gültigkeit der Bedingung (*) von Satz 3.1.2 .

B 3.2 Beweise zu Abschnitt 3.2

Im unmittelbaren Anschluß und auch später werden folgende Hilfssätze benötigt:

Hilfssatz B 3.2.1

Ist $\beta := \beta_d[F] > 0$, so gilt

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b \beta P[bF]}{\varphi \Phi^{-1} P[bF]} = 1$$

Hilfssatz B 3.2.2

Ist \mathcal{U} eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n , $\delta > 0$ und

$$G : \mathcal{U} \times (-\delta, \delta) \ni (\underline{u}, \tau) \mapsto G(\underline{u}, \tau) \in \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Abbildung, mit $G(\underline{u}, 0) = \underline{u}$ für alle $\underline{u} \in \mathcal{U}$, und ist

$$(1) \sup\{\|\frac{\partial}{\partial \tau} G(\underline{u}, \tau)\| : \underline{u} \in \mathcal{U}, |\tau| < \delta\} =: \eta < \infty$$

so folgt

$$a) \ \|G(\underline{u}, \tau) - \underline{u}\| \leq \eta |\tau| \text{ für alle } \underline{u} \in \mathcal{U}, |\tau| < \delta$$

Falls zusätzlich die Bedingung

$$(2) \ \frac{\partial G(\underline{u}, \tau)}{\partial \underline{u}} \neq 0 \text{ für alle } \underline{u} \in \mathcal{U}, |\tau| < \delta$$

erfüllt ist, so gilt sogar

b) Für jedes $\underline{u}_0 \in \mathcal{U}$ und jedes $\epsilon > 0$ mit $K_\epsilon(\underline{u}_0) \subset \mathcal{U}$, und für jedes τ mit $|\tau| < \min\{\delta, \frac{\epsilon}{2\eta}\}$ gilt

$$K_{(\epsilon-\eta|\tau|)}(\underline{u}_0) \subset G(K_\epsilon(\underline{u}_0), \tau) \subset K_{(\epsilon+\eta|\tau|)}(\underline{u}_0)$$

Hilfssatz B 3.2.3

Es sei \mathcal{U} eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n , $\delta > 0$ und

$$\underline{G} : \mathcal{U} \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\underline{u}, \tau) \mapsto \underline{G}(\underline{u}, \tau)$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. $\underline{G}(\cdot, \tau)$ sei für jedes (feste) $\tau \in (-\delta, \delta)$ injektiv. F besitze einen Beta-Punkt $\underline{u}^* \neq \underline{0}$, und es sei $\underline{u}^* \in \mathcal{U}$. Ferner gebe es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta_\epsilon > 0$ so, daß für alle τ mit $|\tau| < \delta_\epsilon$ gilt

$$(1) \quad \beta_d[\underline{G}(F \cap \mathcal{U}, \tau)] = \inf\{\|\underline{G}(\underline{u}, \tau)\| : \underline{u} \in \text{Ess}(F) \cap \mathcal{U} \cap K_\epsilon(\underline{u}^*)\}.$$

Dann ist $\beta_d[\underline{G}(F \cap \mathcal{U}, \tau)]$ in $\tau = 0$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{d\tau} \beta_d[\underline{G}(F \cap \mathcal{U}, 0)] = \frac{\partial}{\partial \tau} \|\underline{G}(\underline{u}^*, 0)\|.$$

Hilfssatz B 3.2.4

Es sei \mathcal{U} eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n und $\underline{G} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive, stetig differenzierbare Abbildung.

a) Ist $\underline{u}_0 \in \mathcal{U} \cap \overline{\text{Ess}(F)}$ und $\frac{\partial \underline{G}(\underline{u}_0)}{\partial \underline{u}} \neq 0$, so ist

$$\underline{G}(\underline{u}_0) \in \overline{\text{Ess}(\underline{G}(\mathcal{U} \cap F))}.$$

b) Ist $\frac{\partial \underline{G}(\underline{u})}{\partial \underline{u}} \neq 0$ für alle $\underline{u} \in \mathcal{U}$, so ist

$$\underline{G}(\mathcal{U} \cap \text{Ess}(F)) = \text{Ess}(\underline{G}(\mathcal{U} \cap F)).$$

Im Hinblick auf Abschnitt 3.3 beweisen wir zunächst eine lokale Fassung für einen Teil des Satzes 3.2.3. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir dabei stets annehmen, daß $\underline{1}_0 = \underline{0}$ der Anfangswert des Parameters $\underline{1}$ ist.

Voraussetzungen B 3.2.5

- (1) F hat einen Beta-Punkt $\underline{u}^* \neq \underline{0}$. \mathcal{U} ist eine offene Umgebung von \underline{u}^* .
- (2) Für ein $\delta > 0$ und jedes $\underline{1} = (\tau_1, \dots, \tau_k) \in W_\delta := (-\delta, \delta)^k$ ist $\underline{G}(\cdot, \underline{1}) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive Abbildung. Für $\underline{1} = \underline{0}$ ist $\underline{G}(\underline{u}, \underline{1}) = \underline{u}$. Für jedes $\underline{1} \in W_\delta$ ist $\underline{G}(\mathcal{U}, \underline{1})$ offen.
- (3) $\underline{G} : \mathcal{U} \times W_\delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist zweimal stetig differenzierbar.
- (4) Die in Voraussetzung 3.2.1 definierten Funktionen $h_{j,i}$ ($1 \leq j \leq 2, 1 \leq i \leq k$) sind über $F \cap \mathcal{U}$ Lebesgue-integrierbar.
- (5) Für $\underline{1} \in W_\delta$ ist $P[\mathcal{U} \cap \{\frac{\partial \underline{G}(\cdot, \underline{1})}{\partial \underline{u}} = 0\}] = 0$.

Lemma B 3.2.6

Sind die Voraussetzungen B 3.2.5 erfüllt, so ist für $b \geq 1$ die Funktion $\beta_E[b \underline{G}(F \cap \mathcal{U}, \underline{1})]$ (bzgl. $\underline{1}$) in W_δ stetig differenzierbar. Insbesondere existieren für $b \geq 1$ die Alpha-Werte $\alpha_E[b \underline{G}(F \cap \mathcal{U}, \tau_i)]$ ($1 \leq i \leq k$), und es gilt

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \alpha_E[b \underline{G}(F \cap \mathcal{U}, \tau_i)] = \frac{1}{\|\underline{u}^*\|} [\underline{u}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \tau_i} \underline{G}(\underline{u}^*, \underline{0})]$$

Warnung: Die Differenzierbarkeit von $\beta_d[\underline{G}(F \cap \mathcal{U}, \underline{1})]$ läßt sich mit diesen Voraussetzungen vermutlich nicht folgern, falls \mathcal{U} eine echte Teilmenge des \mathbb{R}^n ist (wegen möglicher Störungen, die von großen $\underline{u} \in \mathcal{U}$ verursacht werden)

Beweis von Hilfssatz B 3.2.1

$$\begin{aligned} \frac{b \beta P[bF]}{\varphi \Phi^{-1} P[bF]} &= b \beta \frac{\Phi \Phi^{-1} P[bF]}{\varphi \Phi^{-1} P[bF]} = b \beta \frac{\Phi(-\beta_E[bF])}{\varphi(-\beta_E[bF])} = (1) \\ &= \frac{\beta_d[bF]}{\beta_E[bF]} \frac{\beta_E[bF] \Phi(-\beta_E[bF])}{\varphi(-\beta_E[bF])} = (2) \end{aligned}$$

Für $b \rightarrow \infty$ konvergiert der erste Faktor gegen Eins (Satz 3.1.1), der zweite Faktor ebenso [siehe (2) im Beweis von Satz 3.1.2; beachte dabei, daß wegen Satz 3.1.1 gilt " $\beta_E[bF] \rightarrow \infty$ ".]

Beweis von Hilfssatz B 3.2.2

a) $\|G(\underline{u}, \tau) - \underline{u}\| = \|G(\underline{u}, \tau) - G(\underline{u}, 0)\| =$
 $= \left\| \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial s} G(\underline{u}, s) ds \right\| \leq \left| \int_0^\tau \left\| \frac{\partial}{\partial s} G(\underline{u}, s) \right\| ds \right| \leq \eta |\tau|$

Riemann-Integral

b) Wir schreiben hier, im Gegensatz zur sonstigen Vereinbarung, kurz $K_\epsilon := K_\epsilon(\underline{u}_0)$ und $K_\epsilon(\tau) := G(K_\epsilon, \tau) = G(K_\epsilon(\underline{u}_0), \tau)$.

Die zweite der beiden zu beweisenden Inklusionen folgt unmittelbar aus Teil a.

Zum Beweis der ersten zerlegen wir

$$A_1 := K_{(\epsilon - \eta|\tau|)}$$

disjunkt in die beiden Teile

$$A_1 = (A_1 \cap K_\epsilon(\tau)) \cup (A_1 \setminus K_\epsilon(\tau)).$$

Nun ist wegen Vorauss. (2) die Menge $K_\epsilon(\tau)$ offen, und folglich ist auch $A_1 \cap K_\epsilon(\tau)$ offen.

Andererseits ist für \underline{u} mit $\|\underline{u} - \underline{u}_0\| = \epsilon$ und für τ mit $|\tau| < \delta$ wegen Teil a

$$\|G(\underline{u}, \tau) - \underline{u}_0\| \geq \|\underline{u} - \underline{u}_0\| - \|\underline{u} - G(\underline{u}, \tau)\| \geq \epsilon - \eta|\tau|,$$

d. h. $G(\underline{u}, \tau) \notin A_1$. Daher ist $A_1 \setminus K_\epsilon(\tau) = A_1 \setminus G(\overline{K_\epsilon}, \tau)$ ebenfalls offen (denn $G(\overline{K_\epsilon}, \tau)$ ist kompakt, somit abgeschlossen)

Ferner ist

$$A_1 \cap K_\epsilon(\tau) \neq \emptyset,$$

denn für $|\tau| < \frac{\epsilon}{2\eta}$ gilt wegen Teil a

$$G(\underline{u}_0, \tau) \in \overline{K_{\eta|\tau|}} \subset K_{(\epsilon - \eta|\tau|)} = A_1,$$

sowie $G(\underline{u}_0, \tau) \in K_\epsilon(\tau)$. Da nun A_1 zusammenhängend ist, impliziert dies

$$A_1 \setminus K_\epsilon(\tau) = \emptyset \quad \text{bzw.} \quad A_1 \subset K_\epsilon(\tau), \quad \text{q.e.d.}$$

Beweis von Hilfssatz B 3.2.3

Da $\mathcal{U} \cap K_\epsilon(\underline{u}^*)$ offen ist, gilt

$$\text{Ess}(F) \cap \mathcal{U} \cap K_\epsilon(\underline{u}^*) \subset \overline{\text{Ess}(F) \cap \mathcal{U} \cap K_\epsilon(\underline{u}^*)} \subset \overline{\text{Ess}(F) \cap \mathcal{U} \cap K_\epsilon(\underline{u}^*)}.$$

Wegen der Stetigkeit von $\|G(\cdot, \tau)\|$ folgt hieraus und aus Vorauss. (1)

$$(1^*) \beta_d[G(F \cap \mathcal{U}, \tau)] = \inf\{\|G(\underline{u}, \tau)\| : \underline{u} \in \overline{\text{Ess}(F) \cap \mathcal{U} \cap K_\epsilon(\underline{u}^*)}\} \text{ für } |\tau| < \delta_\epsilon.$$

Sei nun $D := \frac{\partial}{\partial \tau} \|G(\underline{u}^*, 0)\|$ (definiert, da $\underline{u}^* \neq \underline{0}$). Sei $\gamma > 0$ beliebig.

Da $\frac{\partial}{\partial \tau} \|G\|$ auf der offenen Menge

$$A := \{(\underline{u}, \tau) \in \mathcal{U} \times (-\delta, \delta) : G(\underline{u}, \tau) \neq \underline{0}\}$$

definiert und stetig ist, und $(\underline{u}^*, 0)$ in A liegt, gibt es ein $\epsilon_1 > 0$ und ein $\delta_1 > 0$ so, daß

$$K_{\epsilon_1}(\underline{u}^*) \times (-\delta_1, \delta_1) \subset A \quad \text{und} \\ \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \|G(\underline{u}, \tau)\| - D \right| < \gamma \quad \text{für } \underline{u} \in K_{\epsilon_1}(\underline{u}^*), |\tau| < \delta_1.$$

Dann ist für $\underline{u} \in K_{\epsilon_1}(\underline{u}^*) \cap \text{Ess}(F)$

$$(2a) \quad \|G(\underline{u}, \tau)\| \geq \|G(\underline{u}, 0)\| + \tau(D - \gamma) \geq \|\underline{u}^*\| + \tau(D - \gamma) \text{ für } 0 \leq \tau < \delta_1.$$

$$(2b) \quad \|\underline{G}(\underline{u}, \tau)\| \geq \|\underline{G}(\underline{u}, 0)\| + \tau(D+\gamma) \geq \|\underline{u}^*\| + \tau(D+\gamma)$$

für $-\delta_1 < \tau \leq 0$.

Wählt man nun δ_ϵ zu $\epsilon := \epsilon_1$ gemäß Vorausss. (1), so folgt aus (1) für $\delta_2 := \min\{\delta_1, \delta_\epsilon\}$ und alle $|\tau| < \delta_2$ wegen (2)

$$(3) \quad \beta_d[\underline{G}(F \cap \mathcal{U}, \tau)] \geq \|\underline{u}^*\| + \tau(D \mp \gamma).$$

Andererseits ist $\underline{u}^* \in \overline{\text{Ess}(F)}$, und aus (1*) folgt für $|\tau| < \delta_2$

$$(4) \quad \beta_d[\underline{G}(F \cap \mathcal{U}, \tau)] \leq \|\underline{G}(\underline{u}^*, \tau)\| \leq \|\underline{u}^*\| + \tau(D \pm \gamma).$$

Aus (3) und (4) ergibt sich schließlich für $|\tau| < \delta_2$, $\tau \neq 0$ (Fallunterscheidung $\tau > 0$, $\tau < 0$)

$$\left| \frac{1}{\tau} (\beta_d[\underline{G}(F \cap \mathcal{U}, \tau)] - \|\underline{u}^*\|) - D \right| \leq \gamma.$$

Da $\gamma > 0$ beliebig gewählt war, und wegen $\|\underline{u}^*\| = \beta_d[\underline{G}(F \cap \mathcal{U}, 0)]$, folgt hieraus die Behauptung.

Beweis von Hilfssatz B 3.2.4

a) (Beachte Satz 2.1.2d !)

Sei $\underline{u}_0 \in \mathcal{U}$, $\underline{u}_0 \in \overline{\text{Ess}(F)}$. Sei \mathcal{V} eine beliebige Umgebung von $\underline{G}(\underline{u}_0)$. Es ist zu zeigen: $P[\underline{G}(F \cap \mathcal{U}) \cap \mathcal{V}] > 0$.

Nach Voraussetzung ist $\underline{G}(\underline{u}_0)$ innerer Punkt von $\underline{G}(\mathcal{U})$. Es gibt daher eine offene Menge \mathcal{W} mit $\underline{u}_0 \in \mathcal{W} \subset \mathcal{V} \cap \underline{G}(\mathcal{U})$. $\underline{G}^{-1}(\mathcal{W})$ ist Umgebung von \underline{u}_0 (denn \underline{G} ist stetig). Wegen $\frac{\partial \underline{G}(\underline{u}_0)}{\partial \underline{u}} \neq 0$ und der Stetigkeit von \underline{G} und $\frac{\partial \underline{G}}{\partial \underline{u}}$ gibt es eine Umgebung $\mathcal{W}_1 \subset \underline{G}^{-1}(\mathcal{W})$ von \underline{u}_0 und ein $\epsilon > 0$ so, daß

$$\varphi(\underline{G}(\underline{u})) \left| \frac{\partial \underline{G}(\underline{u})}{\partial \underline{u}} \right| \geq \epsilon \varphi(\underline{u}) \quad \text{für } \underline{u} \in \mathcal{W}_1.$$

Ferner ist $\underline{u}_0 \in \overline{\text{Ess}(F)}$, somit nach Satz 2.1.2d

$$\begin{aligned} 0 < P[\mathcal{W}_1 \cap F] &= \int_{\mathcal{W}_1 \cap F} \varphi(\underline{u}) \, d\underline{u} \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{W}_1 \cap F} \varphi(\underline{G}(\underline{u})) \left| \frac{\partial \underline{G}(\underline{u})}{\partial \underline{u}} \right| \, d\underline{u} \leq \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\underline{G}^{-1}(\mathcal{W}) \cap F} \dots \, d\underline{u} = \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{W} \cap \underline{G}(F \cap \mathcal{U})} \varphi(\underline{v}) \, d\underline{v} = \frac{1}{\epsilon} P[\mathcal{W} \cap \underline{G}(F \cap \mathcal{U})] \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\epsilon} P[\mathcal{V} \cap \underline{G}(F \cap \mathcal{U})],$$

also

$$P[\mathcal{V} \cap \underline{G}(F \cap \mathcal{U})] > 0.$$

b) c: Nach Teil a ist $\underline{G}(\mathcal{U} \cap \text{Ess}(F)) \subset \overline{\text{Ess}(\underline{G}(\mathcal{U} \cap F))}$.

Andererseits ist $\underline{G}(\mathcal{U} \cap \text{Ess}(F)) \subset \underline{G}(\mathcal{U} \cap F)$.

Aus Satz 2.1.2d und Definition 2.1.1 folgt daher

$$\underline{G}(\mathcal{U} \cap \text{Ess}(F)) \subset \text{Ess}(\underline{G}(\mathcal{U} \cap F))$$

$$[x \in A \text{ und } x \in \overline{\text{Ess}(A)} \Rightarrow x \in \text{Ess}(A)]$$

d: Ist $\underline{u} \in \mathcal{U}$, $\underline{u} \notin \text{Ess}(F)$, so gibt es eine offene Umgebung $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ von \underline{u} mit

$$0 = P[\mathcal{V} \cap F] = \int_{\mathcal{V} \cap F} \varphi(\underline{u}) \, d\underline{u} = \int_{\underline{G}(\mathcal{V} \cap F)} \varphi(\underline{G}^{-1}(\underline{v})) \left| \frac{\partial \underline{G}^{-1}(\underline{v})}{\partial \underline{u}} \right|^{-1} d\underline{v}$$

Der letzte Integrand ist strikt positiv; folglich ist das Lebesgue-Maß des Integrationsbereichs gleich Null, bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\underline{G}(\mathcal{V} \cap F)} d\underline{v} = \int_{\underline{G}(\mathcal{V} \cap F)} \varphi(\underline{v}) \, d\underline{v} = P[\underline{G}(\mathcal{V} \cap F)] = \\ &= P[\underline{G}(\mathcal{V}) \cap \underline{G}(\mathcal{U} \cap F)]. \end{aligned}$$

Nun ist die Abbildung \underline{G} offen, folglich ist $\underline{G}(\mathcal{V})$ eine Umgebung von $\underline{G}(\underline{u})$. Die letzte Gleichung impliziert daher

$$\underline{G}(\underline{u}) \notin \text{Ess}(\underline{G}(\mathcal{U} \cap F)).$$

Es ist also für $\underline{u} \in \mathcal{U}$ gezeigt:

$$\begin{aligned} \underline{G}(\underline{u}) \in \text{Ess}(\underline{G}(\mathcal{U} \cap F)) &\Rightarrow \underline{u} \in \text{Ess}(F) \\ &[\Rightarrow \underline{G}(\underline{u}) \in \underline{G}(\mathcal{U} \cap \text{Ess}(F))] \end{aligned}$$

Da jedes $\underline{v} \in \text{Ess}(\underline{G}(\mathcal{U} \cap F))$ von der Form " $\underline{v} = \underline{G}(\underline{u})$ mit $\underline{u} \in \mathcal{U}$ " ist, folgt hieraus die Behauptung.

Beweis von Lemma B 3.2.6

Für $u \in \mathcal{U}$, $\tau \in W_\delta$ und $b > 0$ sei

$$A(u, \tau, b) := \varphi[bG(u, \tau)] \frac{\partial G(u, \tau)}{\partial u}$$

Nach Vorauss. ist A stetig partiell nach τ differenzierbar, und es ist

$$(1) \frac{\partial}{\partial \tau_i} A(u, \tau, b) = \varphi[bG(u, \tau)] \left\{ -b^2 \frac{\partial G(u, \tau)}{\partial u} \left[G(u, \tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau_i} G(u, \tau) \right] + \frac{\partial}{\partial \tau_i} \frac{\partial G(u, \tau)}{\partial u} \right\}$$

Nach Vorauss. ist daher $\frac{\partial}{\partial \tau_i} A(u, \tau, b)$ für jedes $b > 0$ und jedes $u \in \mathcal{U}$, als Funktion von τ , stetig, so daß aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für $e_i \in \mathbb{R}^k$ (den i-ten Einheitsvektor), $\tau \in W_\delta$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $\tau + te_i \in W_\delta$ folgt:

$$\frac{1}{t} [A(u, \tau + te_i, b) - A(u, \tau, b)] = \frac{\partial}{\partial \tau_i} A(u, \tau + se_i, b)$$

für ein $s = \theta t$, $0 \leq \theta \leq 1$ ($t \neq 0$ wird stets vorausgesetzt)

Insbesondere ist für jedes $u \in \mathcal{U}$, $\tau \in W_\delta$ und $b > 0$, mit

$$t(\tau) := \min_{1 \leq i \leq k} \min\{\delta - \tau_i, \delta + \tau_i\} \quad (\text{also } t(\tau) > 0)$$

$$(2) \sup_{|t| < t(\tau)} \left| \frac{1}{t} [A(u, \tau + te_i, b) - A(u, \tau, b)] \right| \leq (da |a| - |b| \leq |a-b|) \\ \leq \sup_{|t| < t(\tau)} \frac{1}{t} |A(u, \tau + te_i, b) - A(u, \tau, b)| \leq \\ \leq \sup_{|s| < t(\tau)} \left| \frac{\partial}{\partial \tau_i} A(u, \tau + se_i, b) \right| \leq \\ \leq \sup_{\tau \in W_\delta} \left| \frac{\partial}{\partial \tau_i} A(u, \tau, b) \right| =: h_b(u)$$

Ferner ist, aufgrund des Integraltransformationssatzes für Lebesgue-Dichten auf offenen Mengen

$$P[bG(F \cap \mathcal{U}, \tau)] = \int \varphi(y) dy = \int_{bG(F \cap \mathcal{U}, \tau)} b^n \varphi(by) dy =$$

$$= \int_{F \cap \mathcal{U}} b^n \varphi(bG(u, \tau)) \left| \frac{\partial G(u, \tau)}{\partial u} \right| du$$

daher

$$\frac{\partial}{\partial \tau_i} P[bG(F \cap \mathcal{U}, \tau)] = \\ = b^n \lim_{t \rightarrow 0} \int_{F \cap \mathcal{U}} \frac{1}{t} \left\{ \varphi(bG(u, \tau + te_i)) \left| \frac{\partial G(u, \tau + te_i)}{\partial u} \right| - \varphi(bG(u, \tau)) \left| \frac{\partial G(u, \tau)}{\partial u} \right| \right\} du$$

Wir bezeichnen nun den Integranden mit $B(u, \tau, t, b)$. Für jedes $\tau \in W_\delta$ und $|t| < t(\tau)$ ist wegen (2)

$$|B(u, \tau, t, b)| \leq h_b(u)$$

Ferner ist für $b \geq 1$ aufgrund der Voraussetzungen h_b über $F \cap \mathcal{U}$ Lebesgue-integrierbar (denn für $b \geq 1$ ist $\varphi(by) \leq \varphi(y)$). Da ferner wegen Vorauss. B3.2.5 (5) der Integrand fast sicher konvergiert:

$$\lim_{t \rightarrow 0} B(u, \tau, t, b) = \underbrace{\text{sign} \left[\frac{\partial G(u, \tau)}{\partial u} \right]}_{=: \sigma(u, \tau)} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau_i} A(u, \tau, b)$$

folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz für $b \geq 1$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_i} P[bG(F \cap \mathcal{U}, \tau)] = b^n \int_{F \cap \mathcal{U}} \sigma(u, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau_i} A(u, \tau, b) du$$

Wegen der fast-sicheren Stetigkeit des Integranden bzgl. τ (Vorauss. B3.2.5 (3)+(5)) und der Voraussetzung B3.2.5 (4) der mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz die Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial \tau_i} P[bG(F \cap \mathcal{U}, \tau)]$, d. h.

$P[bG(F \cap \mathcal{U}, \tau)]$ ist stetig partiell nach τ differenzierbar (falls $b \geq 1$)

Schließlich ist noch der Wert der Ableitung für $\tau = \underline{0}$ zu berechnen. Da für $\tau = \underline{0}$ gilt $G(u, \tau) = u$ und

$$\frac{\partial G(u, \tau)}{\partial u} = 1, \text{ insbesondere } \sigma(u, \tau) = 1, \text{ folgt}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_i} P[bG(F \cap \mathcal{U}, \underline{0})] =$$

$$= b^n \left\{ \int_{F \cap \mathcal{U}} (-b^2) \left[\underline{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau_i} \underline{G}(\underline{u}, \underline{0}) \right] \varphi(b\underline{u}) d\underline{u} + \int_{F \cap \mathcal{U}} \frac{\partial}{\partial \tau_i} \frac{\partial \underline{G}(\underline{u}, \underline{0})}{\partial \underline{u}} \varphi(b\underline{u}) d\underline{u} \right\}$$

Aus dem Hilfssatz B3.1.3 folgt nun wegen

$$P[b(F \cap \mathcal{U})] = b^n \int_{F \cap \mathcal{U}} \varphi(b\underline{u}) d\underline{u}$$

der Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\frac{\partial}{\partial \tau_i} P[b \underline{G}(F \cap \mathcal{U}, \underline{0})]}{b^2 P[b(F \cap \mathcal{U})]} &= \\ &= -\underline{u}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \tau_i} \underline{G}(\underline{u}^*, \underline{0}) + \frac{\partial}{\partial \tau_i} \frac{\partial \underline{G}(\underline{u}^*, \underline{0})}{\partial \underline{u}} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b^2} = \\ &= -\underline{u}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \tau_i} \underline{G}(\underline{u}^*, \underline{0}) \end{aligned}$$

Zusammen mit Hilfssatz B3.2.1 folgt daraus

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\frac{\partial}{\partial \tau_i} P[b \underline{G}(F \cap \mathcal{U}, \underline{0})]}{b \varphi \Phi^{-1} P[b(F \cap \mathcal{U})]} &= -\frac{1}{\|\underline{u}^*\|} \underline{u}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \tau_i} \underline{G}(\underline{u}^*, \underline{0}) \\ &= -\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \tau_i} \{-\Phi^{-1}(P[b \underline{G}(F \cap \mathcal{U}, \underline{0})])\} = -\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \tau_i} \beta_E[b \underline{G}(F \cap \mathcal{U}, \underline{0})] \end{aligned}$$

Beweis der Anmerkungen 3.2.2

b) $\underline{G}(\cdot, \underline{\tau})$ ist stetig, also meßbar

Da für jede kompakte Teilmenge K von \mathbb{R}^n auch $\underline{G}(K, \underline{\tau}) = [\underline{G}^{-1}(\cdot, \underline{\tau})]^{-1}(K)$ kompakt und somit meßbar ist, und die Borel- σ -Algebra auf \mathbb{R}^n von den kompakten Mengen erzeugt wird, ist auch $\underline{G}^{-1}(\cdot, \underline{\tau})$ meßbar.

c) folgt aus der Meßbarkeit von $\underline{G}^{-1}(\cdot, \underline{\tau})$ und aus $F(\underline{\tau}) = [\underline{G}^{-1}(\cdot, \underline{\tau})]^{-1}(F)$

Beweis des Satzes 3.2.3

Sei $\beta := \beta_d[F]$.

Aus Lemma B3.2.6 folgt, mit $\mathcal{U} := \mathbb{R}^n$

$$(1) \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \alpha_E[b \underline{G}(F, \tau_i)] = \frac{1}{\beta} \left[\underline{u}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \tau_i} \underline{G}(\underline{u}^*, \underline{0}) \right] =: a_i$$

sowie die stetige Differenzierbarkeit von $\beta_E[b \underline{G}(F, \underline{\tau})]$ in W_δ . Satz 3.2.3 ist also vollständig bewiesen, wenn für jedes $\underline{e} \in \mathbb{R}^k$ die Differenzierbarkeit von $\beta_d[b \underline{G}(F, \tau_{\underline{e}})]$ in $\tau = 0$ gezeigt werden kann mit

$$(2) \alpha_d[\underline{G}(F, \tau_{\underline{e}})] = \underline{a} \cdot \underline{e} \quad (\text{wobei } \underline{a} := (a_1, \dots, a_k))$$

Wir beweisen dies durch Anwendung des Hilfssatzes B3.2.3, mit $\mathcal{U} := \mathbb{R}^n$ und mit

$$\underline{G}(\underline{u}, \tau) := \underline{G}(\underline{u}, \tau_{\underline{e}}) \quad (\underline{e} \in \mathbb{R}^k \text{ fest})$$

Es ist somit die Voraussetzung (1) des Hilfssatzes B3.2.3 nachzuweisen.

Sei zunächst $\delta_1 > 0$ so gewählt, daß $\tau_{\underline{e}} \in W_\delta$ gilt für alle τ mit $|\tau| \leq \delta_1$. Wegen der Stetigkeit von

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \underline{G}(\underline{u}, \tau)}{\partial \underline{u}} \text{ in } \mathbb{R}^n \times [-\delta_1, \delta_1] \text{ und der Kompaktheit von}$$

$\overline{K_{3\beta}} \times [-\delta_1, \delta_1]$ ist

$$\mu := \sup \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \underline{G}(\underline{u}, \tau)}{\partial \underline{u}} \right| : \|\underline{u}\| \leq 3\beta, |\tau| < \delta_1 \right\} < \infty.$$

Wegen $\frac{\partial \underline{G}(\underline{u}, 0)}{\partial \underline{u}} = 1$ und $\left| \frac{\partial \underline{G}(\underline{u}, \tau)}{\partial \underline{u}} - \frac{\partial \underline{G}(\underline{u}, 0)}{\partial \underline{u}} \right| \leq \mu |\tau|$

gibt es nun ein δ_2 mit $0 < \delta_2 < \delta_1$ (etwa $\delta_2 := \frac{1}{2} \min\{\delta_1, \frac{1}{\mu}\}$)

so, daß

$$(3) \quad \frac{\partial \underline{G}(\underline{u}, \tau)}{\partial \underline{u}} > 0 \quad \text{für alle } \underline{u} \in K_{3\beta} \text{ und } |\tau| < \delta_2.$$

Ferner ist wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial \tau} \underline{G}(\underline{u}, \tau)$ und der Kompaktheit von $\overline{K_{3\beta}} \times [-\delta_2, \delta_2]$ auch

$$\eta := \sup \left\{ \left\| \frac{\partial}{\partial \tau} \underline{G}(\underline{u}, \tau) \right\| : \underline{u} \in K_{3\beta}, |\tau| < \delta_2 \right\} < \infty.$$

Aus Hilfssatz B3.2.2 folgt daher

$$(4) \quad \|\underline{G}(\underline{u}, \tau) - \underline{u}\| \leq \eta |\tau| \quad \forall \underline{u} \in K_{2\beta}, \forall |\tau| < \delta_2$$

$$(5) \quad K_{(2\beta - \eta|\tau|)} \subset \underline{G}(K_{2\beta}, \tau) \quad \forall |\tau| < \delta_3 := \min\{\delta_2, \frac{\beta}{\eta}\}.$$

Aus (5) folgt wegen der Injektivität von $\underline{G}(\cdot, \tau)$ mit $\delta_4 := \min\{\delta_3, \frac{\beta}{2\eta}\}$

$$(6) \quad \|\underline{G}(\underline{u}, \tau)\| \geq 2\beta - \eta |\tau| \geq \frac{3}{2}\beta \quad \forall \underline{u} \notin K_{2\beta}, \forall |\tau| < \delta_4$$

Andererseits ist $\underline{u}^* \in \overline{\text{Ess}(F)}$, nach Hilfssatz B3.2.4 also für $|\tau| < \delta_2$ auch $\underline{G}(\underline{u}^*, \tau) \in \overline{\text{Ess}(\underline{G}(F, \tau))}$ und folglich, wegen (4)

$$(7) \quad \beta_d[\underline{G}(F, \tau)] \leq \|\underline{G}(\underline{u}^*, \tau)\| \leq \beta + \eta |\tau| < \frac{3}{2}\beta \quad \text{für } |\tau| < \delta_4.$$

Aus (6) und (7) folgt für $\mathcal{U} := K_{2\beta}$

$$(8) \quad \beta_d[\underline{G}(F, \tau)] = \beta_d[\underline{G}(F \cap \mathcal{U}, \tau)] \quad \text{für } |\tau| < \delta_4.$$

Wegen (3) und Hilfssatz B3.2.4b ist ferner für $|\tau| < \delta_4$

$$(9) \quad \beta_d[\underline{G}(F \cap \mathcal{U}, \tau)] = \inf \{ \|\underline{G}(\underline{u}, \tau)\| : \underline{u} \in \text{Ess}(F) \cap \mathcal{U} \}.$$

Wir verifizieren nun die Voraussetzung (1) von Hilfssatz B3.2.3. Sei dazu ε mit $0 < \varepsilon < \beta$ beliebig vorgegeben. Nach Satz 2.1.4d gibt es dazu ein $\gamma > 0$ so, daß

$$\|\underline{u}\| \geq \beta + \gamma \quad \forall \underline{u} \in \text{Ess}(F) \setminus K_\varepsilon(\underline{u}^*).$$

Aus (4) folgt mit $\delta_1(\varepsilon) := \min\{\delta_4, \frac{\gamma}{2\eta}\}$

$$(10) \quad \|\underline{G}(\underline{u}, \tau)\| \geq \beta + \frac{\gamma}{2} \quad \forall \underline{u} \in (\text{Ess}(F) \cap \mathcal{U}) \setminus K_\varepsilon(\underline{u}^*) \quad \forall |\tau| < \delta_1(\varepsilon).$$

Da aber gemäß (7) und (8) gilt

$$\beta_d[\underline{G}(F \cap \mathcal{U}, \tau)] < \beta + \frac{\gamma}{2} \quad \forall |\tau| < \delta_1(\varepsilon),$$

zeigt ein Vergleich von (10) mit (9)

$$(11) \quad \beta_d[\underline{G}(F \cap \mathcal{U}, \tau)] = \inf \{ \|\underline{G}(\underline{u}, \tau)\| : \underline{u} \in \text{Ess}(F) \cap \mathcal{U} \setminus K_\varepsilon(\underline{u}^*) \} \quad \forall |\tau| < \delta_1(\varepsilon).$$

Hiermit sind alle Voraussetzungen des Hilfssatzes B3.2.3 nachgewiesen, und aus dessen Aussage, in Verbindung mit (8), ergibt sich schließlich:

$\beta_d[\underline{G}(F, \tau)]$ ist in $\tau=0$ differenzierbar, und es ist

$$\begin{aligned} \alpha_d[\underline{G}(F, \tau)] &= \frac{d}{d\tau} \beta_d[\underline{G}(F, 0)] = \frac{d}{d\tau} \beta_d[\underline{G}(F \cap \mathcal{U}, 0)] = \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \|\underline{G}(\underline{u}^*, 0)\|. \end{aligned}$$

Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung (2), womit der Satz bewiesen ist.

B 3.3 Beweise zu Abschnitt 3.3

Auch im Abschnitt B 3.3 wird, wie schon in B 3.2, stets $\underline{1}_0 = \underline{0}$ angenommen.

Beweis der Anmerkungen 3.3.2

b) Wegen $\underline{u}^* \in \overline{\text{Ess}(F)}$ ist $g_j(\underline{u}^*, \underline{0}) \leq 0$. Ist nun $g_j(\underline{u}^*, \underline{0}) < 0$, so gibt es wegen der Stetigkeit von g_j eine Umgebung \mathcal{U}_j von \underline{u}^* und ein $0 < \delta_j \leq \delta$ so, daß

$$g_j(\underline{u}, \underline{1}) < 0 \quad \text{für } \underline{u} \in \mathcal{U}_j, \underline{1} \in W(\delta_j)$$

Folglich ist für $I := \{j: g_j(\underline{u}^*, \underline{0}) < 0\}$, $J := \{1, \dots, t\} \setminus I$,

$$\mathcal{U}_J := \bigcap_{j \in J} \mathcal{U}_j, \text{ und } \epsilon := \min_{j \in J} \delta_j$$

$$\bigcap_{j \in J} \{g_j(\cdot, \underline{1}) < 0\} \supset \mathcal{U}_J \quad \text{für alle } \underline{1} \in W_\epsilon$$

bzw. für alle $\underline{1} \in W_\epsilon$

$$\begin{aligned} F(\underline{1}) \cap \mathcal{U}_J &= \bigcap_{j \in I} \{g_j(\cdot, \underline{1}) < 0\} \cap \bigcap_{j \in J} \{g_j(\cdot, \underline{1}) < 0\} \cap \mathcal{U}_J = \\ &= \bigcap_{j \in I} \{g_j(\cdot, \underline{1}) < 0\} \cap \mathcal{U}_J \end{aligned}$$

wobei $g_j(\underline{u}^*, \underline{0}) = 0$ gilt für alle $j \in I$.

d) Sei $\underline{e} \in \mathbb{R}^k$ fest, $g_j(\underline{u}, \tau) := g_j(\underline{u}, \tau \underline{e})$. A sei eine kompakte Teilmenge von \mathcal{U} . Wir zeigen zunächst

$$(1) \quad \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} P[A \cap \{|g_j(\cdot, \underline{0})| \leq \epsilon\}] < \infty$$

Da $A \subset \mathcal{U}$ kompakt ist, folgt dies aus

(2) Zu jedem $\underline{u}_0 \in \mathcal{U}$ mit $g_j(\underline{u}_0, \underline{0}) = 0$ gibt es eine Umgebung $\mathcal{U}_j(\underline{u}_0) \subset \mathcal{U}$ so, daß

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} P[\mathcal{U}_j(\underline{u}_0) \cap \{|g_j(\cdot, \underline{0})| \leq \epsilon\}] < \infty$$

[Denn offensichtlich gibt es eine solche Umgebung auch für

jedes $\underline{u}_0 \in \mathcal{U}$ mit $g_j(\underline{u}_0, \underline{0}) \neq 0$, etwa $\{|g_j(\cdot, \underline{0})| > \frac{1}{2}|g_j(\underline{u}_0, \underline{0})|\}$; überdecke nun A durch endlich viele solcher Umgebungen]

Um wiederum (2) einzusehen, beachten wir, daß gemäß Voraussetzung (V^*) und wegen $g_j(\underline{u}_0, \underline{0}) = 0$ gilt:

$$\text{grad } g_j(\underline{u}_0, \underline{0}) \neq \underline{0}$$

Es gibt also ein i mit $1 \leq i \leq n$ und $\frac{\partial}{\partial u_i} g_j(\underline{u}_0, \underline{0}) \neq 0$; o.E.d.A. kann dabei $i = 1$ angenommen werden.

Wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial u_1} g_j$ gibt es sogar eine Umgebung $\mathcal{U}_j(\underline{u}_0)$ von \underline{u}_0 und ein $\epsilon_j(\underline{u}_0) > 0$ so, daß

$$|\frac{\partial}{\partial u_1} g_j(\underline{u}, \underline{0})| \geq \epsilon_j(\underline{u}_0) \quad \text{für } \underline{u} \in \mathcal{U}_j(\underline{u}_0)$$

Für $\underline{u}, \underline{v} \in \mathcal{U}_j(\underline{u}_0)$ mit $(u_2, \dots, u_n) =: \hat{\underline{u}} = \hat{\underline{v}} := (v_2, \dots, v_n)$

gilt daher wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial u_1} g_j$

$$|g_j(\underline{u}, \underline{0}) - g_j(\underline{v}, \underline{0})| \geq |u_1 - v_1| \cdot \epsilon_j(\underline{u}_0)$$

Folglich gilt für jedes $\hat{\underline{v}} \in \mathbb{R}^{n-1}$ und jedes $\epsilon > 0$ [λ bezeichnet das n-dimensionale Lebesgue-Maß]

$$\begin{aligned} \lambda[(\mathcal{U}_j(\underline{u}_0) \cap \{|g_j(\cdot, \underline{0})| \leq \epsilon\})_{\hat{\underline{v}}}] &:= \\ &:= \lambda[\{u_1: (u_1, \hat{\underline{v}}) \in \mathcal{U}_j(\underline{u}_0) \cap \{|g_j(\cdot, \underline{0})| \leq \epsilon\}\}] \leq \frac{2\epsilon}{\epsilon_j(\underline{u}_0)} \end{aligned}$$

Wegen $\varphi \leq 1$ folgt hieraus durch Anwendung des Satzes von Fubini

$$P[\mathcal{U}_j(\underline{u}_0) \cap \{|g_j(\cdot, \underline{0})| \leq \epsilon\}] \leq \frac{2\epsilon}{\epsilon_j(\underline{u}_0)} \quad \forall \epsilon > 0$$

Hierdurch ist (2), und somit auch (1), nachgewiesen.

Sei nun $\delta'_e := \sup\{|\tau|: \tau \underline{e} \in W_\delta\}$, also $\delta'_e > 0$, und sei $\delta_e := \frac{1}{2} \delta'_e$. Wegen

$$\sup\{|\frac{\partial}{\partial \tau} g_j(\underline{u}, \tau)|: \underline{u} \in A, |\tau| \leq \delta_e\} =: S_j < \infty$$

folgt für $|\tau| \leq \delta_e$

$$\begin{aligned} (F(\tau) \Delta F) \cap A &\subset \bigcup_{j=1}^t [(\{g_j(\cdot, \tau) < 0\} \Delta \{g_j(\cdot, \underline{0}) < 0\}) \cap A] \subset \\ &\subset \bigcup_{j=1}^t [(\{|g_j(\cdot, \tau) - g_j(\cdot, \underline{0})| \geq |g_j(\cdot, \underline{0})|\}) \cap A] \subset \end{aligned}$$

$$\bigcup_{j=1}^t [A \cap \{|\tau| S_j \geq |g_j(\cdot, 0)|\}]$$

Zusammen mit (1) ergibt sich hieraus die Behauptung (6*).

Beweis der Anmerkung 3.3.3

Sei wieder $\underline{e} \in \mathbb{R}^k$ fest, $g(\underline{u}, \tau) := g(\underline{u}, \tau \underline{e})$.

Wie oben gezeigt wurde, ist für $|\tau| < \varepsilon$ (vgl. Vorausss. (2) der Anmerkung 3.3.3) und jedes j

$$\{g_j(\underline{u}, \tau) < 0\} \Delta \{g_j(\underline{u}, 0) < 0\} \subset \{|\tau| H_j \geq |g_j(\underline{u}, 0)|\}.$$

Wegen $F(\tau) \Delta F \subset \bigcup_j [\{g_j(\cdot, \tau) < 0\} \Delta \{g_j(\cdot, 0) < 0\}]$ folgt

$$P[F(\tau) \Delta F] \leq \sum_j P[\{|\tau| H_j \geq |g_j(\underline{u}, 0)|\}] \leq \sum_j \int d_{j,\tau}(g) f_j(g) dg$$

mit $d_{j,\tau}(g) := P[|\tau| H_j \geq |g_j(\underline{u}, 0)| \mid g_j(\underline{u}, 0) = g]$
(bedingte Wahrscheinlichkeit!)

f_j ist die Dichtefunktion der Zufallsvariablen $g_j(\underline{u}, 0)$.

Nach Vorausss. gibt es ein $c < \infty$ und ein $g_0 > 0$ so, daß

$$(1) \quad f_j(g) \leq c \quad \text{und} \quad E[H_j^2 \mid g_j(\underline{u}, 0) = g] =: h_j(g) \leq c$$

für alle g mit $|g| \leq g_0$.

Ferner ist für jedes $|\tau| < \delta_e := \sup\{|\tau| : \tau \underline{e} \in W_\delta\}$ und (fast) jedes g

$$(2) \quad d_{j,\tau}(g) \leq \min\{1, \frac{\tau^2}{g} h_j(g)\} \quad \text{(Markov-Ungleichung),}$$

insbesondere für jedes $|g| \leq g_0$

$$(3) \quad d_{j,\tau}(g) \leq \min\{1, \frac{\tau^2}{g} c\}.$$

Es folgt nun für jedes $|\tau| < \delta_0 := \min\{\delta_e, g_0\}$

$$\begin{aligned} \int_{(\delta_0, \infty)} d_{j,\tau}(g) f_j(g) dg &\leq \tau^2 \int_{(\delta_0, \infty)} g^{-2} h_j(g) f_j(g) dg \leq \\ &\leq \frac{\tau^2}{\delta_0} \int h_j(g) f_j(g) dg = \frac{\tau^2}{\delta_0} E[H_j^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{[|\tau|, \delta_0]} d_{j,\tau}(g) f_j(g) dg &\leq c \tau^2 \int_{[|\tau|, \delta_0]} g^{-2} f_j(g) dg \leq \\ &\leq c^2 \tau^2 \int_{[|\tau|, \delta_0]} g^{-2} dg \leq c^2 \tau^2 \int_{[|\tau|, \infty)} g^{-2} dg = c^2 |\tau| \end{aligned} \quad (1)$$

$$\int_{[0, |\tau|]} d_{j,\tau}(g) f_j(g) dg \leq \int_{[0, |\tau|]} 1 f_j(g) dg \leq c |\tau| \quad (1)$$

Dieselben Abschätzungen gelten auch für die entsprechenden Integrale über die spiegelbildlichen Intervalle auf dem negativen Teil der reellen Achse. Somit erhält man für jedes $|\tau| < \delta_0$

$$\int d_{j,\tau}(g) f_j(g) dg \leq 2 \cdot \left\{ \frac{\tau^2}{\delta_0} E[H_j^2] + c^2 |\tau| + c |\tau| \right\}$$

und daraus schließlich

$$\limsup_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{|\tau|} P[F(\tau) \Delta F] \leq 2 \sum_j (c^2 + c) < \infty.$$

(c ist abhängig von j)

Der folgende Hilfssatz dient, ebenso wie das daran anschließende Lemma, zum Beweis des Satzes 3.3.5 :

Hilfssatz B 3.3.1

Besitzt F einen Beta-Punkt $\underline{u}^* \neq \underline{0}$, und ist \mathcal{U} eine Umgebung von \underline{u}^* , so gilt:

- a) $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{P[bF]}{P[b(F \cap \mathcal{U})]} = 1$
 b) $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\varphi[b(\beta + \epsilon)]}{P[bF]} = 0 \quad \forall \epsilon > 0 \quad (\text{mit } \beta := \beta_d[F])$

Beweis des Hilfssatzes B 3.3.1

a) o.E.d.A.: $F = \text{Ess}(F)$.

Aus Satz 2.1.4d folgt dann

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \underline{u} \in F \setminus \mathcal{U} : \|\underline{u}\| \geq \beta + \epsilon \quad (\text{mit } \beta := \beta_d[F])$$

Folglich ist $\beta_d[F \setminus \mathcal{U}] \geq \beta + \epsilon > \beta_d[F]$. Aus Hilfssatz B3.1.2 (angewandt mit $g:=1$) folgt deshalb

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{P[b(F \setminus \mathcal{U})]}{P[bF]} = 0,$$

und hieraus folgt die Behauptung.

- b) Es ist, mit $\epsilon_1 := \frac{1}{3}\epsilon$ und $\epsilon_2 := \frac{2}{3}\epsilon$
- $$\frac{\varphi[b(\beta + \epsilon)]}{P[bF]} = \frac{\varphi[b(\beta + \epsilon)]}{\varphi[b(\beta + \epsilon_2)]} \cdot \frac{\varphi[b(\beta + \epsilon_2)]}{b \varphi[-b(\beta + \epsilon_2)]} \cdot \frac{b \varphi[-b(\beta + \epsilon_2)]}{\varphi[-b(\beta + \epsilon_1)]} \cdot \frac{\varphi[-b(\beta + \epsilon_1)]}{P[bF]} =: A_1(b) A_2(b) A_3(b) A_4(b)$$

wobei gilt

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} A_1(b) &= 0 = \lim_{b \rightarrow \infty} A_3(b) \\ \lim_{b \rightarrow \infty} A_4(b) &= 0 \quad (\text{wegen Hilfssatz B 3.1.2}) \\ \lim_{b \rightarrow \infty} A_2(b) &= \beta + \epsilon_2 \quad (\text{vgl. (2) im Beweis von Satz 3.1.2}) \end{aligned}$$

Lemma B 3.3.2

$F = F(0)$ besitze einen Beta-Punkt \underline{u}^* mit $\beta := \|\underline{u}^*\| > 0$. \mathcal{U} sei eine offene Umgebung von \underline{u}^* . Für ein $\delta > 0$ und jedes $|\tau| < \delta$ sei $\underline{G}(\cdot, \tau): \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- (G1) $\underline{G}(\underline{u}, 0) = \underline{u} \quad \forall \underline{u} \in \mathcal{U}$
 (G2) $\underline{G} : \mathcal{U} \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(\underline{u}, \tau) \mapsto \underline{G}(\underline{u}, \tau)$ ist zweimal stetig differenzierbar

$F(\tau)$ sei lokal, in $\mathcal{U}(\tau) := \underline{G}(\mathcal{U}, \tau)$, darstellbar in der Form

$$(F1) \quad F(\tau) \cap \mathcal{U}(\tau) = \underline{G}(F \cap \mathcal{U}, \tau) \quad \forall |\tau| < \delta$$

Ferner gelte

$$(F2) \quad \limsup_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{|\tau|} P[F(\tau) \Delta F] < \infty,$$

und zu jeder Umgebung \mathcal{V} von \underline{u}^* gebe es ein $\gamma > 0$ und ein δ_0 mit $0 < \delta_0 \leq \delta$ so, daß

$$(F3) \quad \|\underline{u}\| \geq \beta + \gamma \quad \forall \underline{u} \in F(\tau) \setminus \mathcal{V} \quad \forall |\tau| < \delta_0.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{b} \alpha_E^O[bF(\tau)] \right\} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{b} \alpha_E^U[bF(\tau)] \right\} = \\ &= \frac{1}{\beta} [\underline{u}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \underline{G}(\underline{u}^*, 0)] = \frac{\partial}{\partial \tau} \|\underline{G}(\underline{u}^*, 0)\| = \alpha_d[F(\tau)]. \end{aligned}$$

Anmerkung: Im Unterschied zur Aussage des Satzes 2.1.4d wird die Voraussetzung (F3) gleichmäßig für alle $|\tau| < \delta_0$ gefordert.

Beweis des Lemmas B 3.3.2

Wir führen den Beweis nur für α_E^u ; für α_E^0 ergibt er sich daraus durch die Substitution "liminf \rightarrow limsup".

Wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial G}{\partial u}$ zusammen mit $\frac{\partial G(u^*, 0)}{\partial u} = 1$, und wegen der Stetigkeit von $\| \frac{\partial}{\partial \tau} G \|$, gibt es ein $\varepsilon_1 > 0$

mit $K_{\varepsilon_1}(u^*) \subset \mathcal{U}$ und ein $0 < \delta_1 < \delta$ so, daß

$$(1) \quad \frac{\partial G(u, \tau)}{\partial u} > 0 \quad \forall u \in K_{\varepsilon_1}(u^*) \quad \forall |\tau| < \delta_1$$

$$(2) \quad \eta := \sup \{ \| \frac{\partial}{\partial \tau} G(u, \tau) \| : u \in K_{\varepsilon_1}(u^*), |\tau| < \delta_1 \} < \infty.$$

Aus dem Hilfssatz B3.2.2 folgt nun (wähle dort $\mathcal{U} := K_{\varepsilon_1}(u^*)$, $\delta := \delta_1$ und $u_0 := u^*$)

$$(3) \quad K_{(\varepsilon - \eta|\tau|)}(u^*) \subset G(K_\varepsilon(u^*), \tau) \subset K_{(\varepsilon + \eta|\tau|)}(u^*)$$

für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ und alle $|\tau| < \min\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2\eta}\}$.

Daher ist für $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ und $|\tau| < \min\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2\eta}\}$

$$G(K_\varepsilon(u^*), \tau) \Delta K_\varepsilon(u^*) \subset K_{(\varepsilon + \eta|\tau|)}(u^*) \setminus K_{(\varepsilon - \eta|\tau|)}(u^*)$$

und folglich für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$

$$(4) \quad \limsup_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{|\tau|} P[G(K_\varepsilon(u^*), \tau) \Delta K_\varepsilon(u^*)] < \infty.$$

Ferner folgt aus (3) und Voraussetzung (F3)

$$(5) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1) \exists \gamma > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall |\tau| < \delta_2 \forall u \in F(\tau) \setminus G(K_\varepsilon(u^*), \tau) : \|u\| \geq \beta + \gamma.$$

Sei nun $U^* := K_{\frac{1}{2}\varepsilon_1}(u^*)$ und $\delta^* := \frac{1}{2}\delta_1$. Da

$U^* \times (-\delta^*, \delta^*)$ relativ kompakte Teilmenge von $\mathcal{U} \times (-\delta, \delta)$ ist, sind (mit $\mathcal{U} := U^*$, $\delta := \delta^*$, $\tau := \tau$) alle Voraussetzungen des Lemmas B3.2.6 erfüllt, und es folgt mit

$$U^*(\tau) := G(U^*, \tau)$$

(beachte die Vorauss. (F1): $F(\tau) \cap U^*(\tau) = G(F \cap U^*, \tau)$!)

(6) $\beta_E[b(F(\tau) \cap U^*(\tau))]$ ist in $\tau = 0$ differenzierbar, und es gilt

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \frac{d}{d\tau} \beta_E[b(F(0) \cap U^*(0))] =: \alpha = \frac{1}{\beta} [u^* \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} G(u^*, 0)].$$

Wir berechnen nun

$$(7) \quad \liminf_{\tau \rightarrow 0} A_1(b, \tau) := \liminf_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{b^{2\tau}} \frac{P[bF(\tau)] - P[bF]}{P[bF]} =$$

$$= \liminf_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{b^{2\tau}} \frac{P[b(F(\tau) \cap U^*(\tau))] - P[b(F \cap U^*)]}{P[bF]} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{b^{2\tau}} \frac{P[b(F(\tau) \setminus U^*(\tau))] - P[b(F \setminus U^*)]}{P[bF]} \right\} =:$$

$$=: \liminf_{\tau \rightarrow 0} \{A_2(b, \tau) + A_3(b, \tau)\}$$

Wegen der unter (6) notierten Differenzierbarkeit folgt

$$b^2 P[bF] \lim_{\tau \rightarrow 0} A_2(b, \tau) = \frac{d}{d\tau} P[b(F(0) \cap U^*(0))] =$$

$$= -\varphi \Phi^{-1} P[b(F \cap U^*)] \frac{d}{d\tau} \beta_E[b(F(0) \cap U^*(0))].$$

Ferner folgt aus den Hilfssätzen B3.3.1a und B3.2.1

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\varphi \Phi^{-1} P[b(F \cap U^*)]}{b P[bF]} =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \beta \frac{\varphi \Phi^{-1} P[b(F \cap U^*)]}{b \beta P[b(F \cap U^*)]} \frac{P[b(F \cap U^*)]}{P[bF]} = \beta.$$

Zusammen mit (6) impliziert dies

$$(8) \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow 0} A_2(b, \tau) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b P[bF]} \left\{ \frac{1}{b} \lim_{\tau \rightarrow 0} b^2 P[bF] A_2(b, \tau) \right\} =$$

$$= -\alpha \beta = -u^* \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} G(u^*, 0).$$

Zur Abschätzung von $A_3(b, \tau)$ beachten wir, daß

$$|P[b(F(\tau) \setminus U^*(\tau))] - P[b(F \setminus U^*)]| \leq$$

$$\leq P[b\{(F(\tau) \setminus U^*(\tau)) \Delta (F \setminus U^*)\}] =: A_4(b, \tau).$$

Ferner gilt für $u \in \mathbb{R}^n$ mit $\|u\| \geq \beta + \gamma$ und für $b \geq 1$ (vgl. (1) im Beweis von Hilfssatz B3.1.2)

$$(9) \quad \varphi(bu) \leq \varphi(u) \exp\{-\frac{1}{2}(b^2 - 1)(\beta + \gamma)^2\}.$$

Wählt man also γ und δ_2 gemäß (5) zu $\varepsilon := \frac{1}{2}\varepsilon_1$, so erhält

man für $|\tau| < \delta_2$ (und $b \geq 1$)
 $A_4(b, \tau) \leq b^n \exp\{-\frac{1}{2}(b^2-1)(\beta+\gamma)^2\} P[(F(\tau) \setminus \mathcal{U}^*(\tau)) \Delta (F \setminus \mathcal{U}^*)]$.

Wegen $(A_1 \setminus B_1) \Delta (A_2 \setminus B_2) \subset (A_1 \Delta A_2) \cup (B_1 \Delta B_2)$ folgt weiter

$$A_4(b, \tau) \leq b^n \exp\{-\frac{1}{2}(b^2-1)(\beta+\gamma)^2\} \cdot \{P[F(\tau) \Delta F] + P[\mathcal{U}^*(\tau) \Delta \mathcal{U}^*]\} .$$

Wegen (4) und Vorauss. (F2) existiert also ein $L < \infty$ mit

$$\limsup_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{|\tau|} A_4(b, \tau) \leq L b^n \exp\{-\frac{1}{2}(b^2-1)(\beta+\gamma)^2\} .$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{b \rightarrow \infty} \liminf_{\tau \rightarrow 0} A_3(b, \tau) \right| \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \limsup_{\tau \rightarrow 0} |A_3(b, \tau)| \leq \\ & \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \limsup_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{b^2 P[bF]} \frac{A_4(b, \tau)}{|\tau|} \right\} \leq \\ & \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{b^2 P[bF]} L b^n \exp\{-\frac{1}{2}(b^2-1)(\beta+\gamma)^2\} \right\} = \\ & = \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ b^{n-2} L \frac{\exp\{-\frac{1}{2}(b^2-1)(\beta+\gamma)^2\}}{\varphi[b(\beta + \frac{1}{2}\gamma)]} \right\} . \\ & \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\varphi[b(\beta + \frac{1}{2}\gamma)]}{P[bF]} \right\} = \quad (\text{wegen Hilfssatz B3.3.1b}) \\ & = 0 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

d. h. $\lim_{b \rightarrow \infty} \liminf_{\tau \rightarrow 0} A_3(b, \tau) = 0$ und somit wegen (7) und (8)

$$\begin{aligned} (10a) \quad & \lim_{b \rightarrow \infty} \liminf_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{b^2 \tau P[bF]} (P[bF(\tau)] - P[bF]) = \\ & = -\underline{u}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} G(\underline{u}^*, 0) . \end{aligned}$$

Ebenso erhält man

$$\begin{aligned} (10b) \quad & \lim_{b \rightarrow \infty} \limsup_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{b^2 \tau P[bF]} (P[bF(\tau)] - P[bF]) = \\ & = -\underline{u}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} G(\underline{u}^*, 0) . \end{aligned}$$

Wegen $P[bA] \leq b^n P[A]$ ($b \geq 1$) und Voraussetzung (F2) gilt nun

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} P[bF(\tau)] = P[bF] ,$$

daher

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\beta_E[bF(\tau)] - \beta_E[bF]}{P[bF(\tau)] - P[bF]} = (-\phi^{-1})'(P[bF]) = \frac{-1}{\phi \phi^{-1} P[bF]}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} & \liminf_{\tau \rightarrow 0} \frac{\beta_E[bF(\tau)] - \beta_E[bF]}{\tau} = \\ & = - \frac{1}{\phi \phi^{-1} P[bF]} \cdot \liminf_{\tau \rightarrow 0} \frac{P[bF(\tau)] - P[bF]}{\tau} . \end{aligned}$$

Zusammen mit (10a) sowie Hilfssatz B3.2.1 ergibt sich nun

$$\begin{aligned} & \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \liminf_{\tau \rightarrow 0} \frac{\beta_E[bF(\tau)] - \beta_E[bF]}{\tau} = \\ & = - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b P[bF]}{\phi \phi^{-1} P[bF]} \cdot \liminf_{\tau \rightarrow 0} \frac{P[bF(\tau)] - P[bF]}{b^2 \tau P[bF]} = \\ & = - \frac{1}{\beta} [-\underline{u}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} G(\underline{u}^*, 0)] . \end{aligned}$$

Dieselben Argumente gelten auch für "limsup" anstelle von "liminf", und somit ist gezeigt:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \alpha_E^u[bF(\tau)] = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \alpha_E^0[bF(\tau)] = \frac{1}{\beta} [\underline{u}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} G(\underline{u}^*, 0)]$$

Es bleibt daher nur noch zu zeigen:

(11) $\beta_d[F(\tau)]$ ist in $\tau=0$ differenzierbar, und es ist

$$\alpha_d[F(\tau)] = \frac{\partial}{\partial \tau} \|G(\underline{u}^*, 0)\| .$$

Wir verwenden dazu den Hilfssatz B3.2.3 . Sei $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}\varepsilon_1)$ beliebig vorgegeben.

Wegen $F(\tau) \cap G(\underline{u}, \tau) \subset F(\tau)$, und Vorauss. (F1) ist für $|\tau| < \delta$

$$\beta_d[F(\tau)] \leq \beta_d[F(\tau) \cap G(\underline{u}, \tau)] = \beta_d[G(F \cap \underline{u}, \tau)] ,$$

und aus Hilfssatz B3.2.4a (angewandt auf $\underline{u}_0 := \underline{u}^*$; beachte

auch (1)) sowie Hilfssatz B3.2.2a (in Verbindung mit (2)) ergibt sich damit

$$(12) \quad \beta_d[F(\tau)] \leq \|G(\underline{u}^*, \tau)\| \leq \beta + \eta|\tau| \quad \forall |\tau| < \delta_1.$$

Da \mathcal{U}^* eine Kugel vom Typ $K_\varepsilon(\underline{u}^*)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, ist, folgt weiter aus (5) und (12) für ein δ_3 , $0 < \delta_3 \leq \delta_1$, und alle $|\tau| < \delta_3$

$$\beta_d[F(\tau)] = \inf\{\| \underline{u} \| : \underline{u} \in \text{Ess}(F(\tau)) \cap G(\underline{u}^*, \tau)\}.$$

Da $G(\underline{u}^*, \tau)$ offen ist, gilt

$$\text{Ess}(F(\tau)) \cap G(\underline{u}^*, \tau) = \text{Ess}(F(\tau) \cap G(\underline{u}^*, \tau)),$$

und es folgt weiter (wegen Vorauss. (F1)) für $|\tau| < \delta_3$

$$(13) \quad \beta_d[F(\tau)] = \inf\{\| \underline{u} \| : \underline{u} \in \text{Ess}(G(F \cap \mathcal{U}^*, \tau))\} = \beta_d[G(F \cap \mathcal{U}^*, \tau)].$$

Ebenso folgt für ein $0 < \delta_3(\varepsilon) \leq \delta_1$ und alle $|\tau| < \delta_3(\varepsilon)$

$$(14) \quad \beta_d[F(\tau)] = \beta_d[G(F \cap K_\varepsilon(\underline{u}^*), \tau)] = \text{(Hilfssatz B3.2.4b)} \\ = \inf\{\|G(\underline{u}, \tau)\| : \underline{u} \in \text{Ess}(F) \cap K_\varepsilon(\underline{u}^*)\} = \text{(da } K_\varepsilon(\underline{u}^*) \subset \mathcal{U}^*) \\ = \inf\{\|G(\underline{u}, \tau)\| : \underline{u} \in \text{Ess}(F) \cap \mathcal{U}^* \cap K_\varepsilon(\underline{u}^*)\}.$$

Durch Vergleich von (13) und (14) zeigt sich, daß die Bedingung (1) des Hilfssatzes B3.2.3 erfüllt ist, und aus diesem, zusammen mit (13), folgt schließlich die Behauptung (11). Damit ist Lemma B3.3.2 vollständig bewiesen.

Beweis des Satzes 3.3.5

Sei $\underline{e} \in \mathbb{R}^k$ fest, $F(\tau) := F(\tau \underline{e})$, $g_j(\underline{u}, \tau) := g_j(\underline{u}, \tau \underline{e})$,

$$\underline{d} := (d_1, \dots, d_t, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit } d_j := \frac{\partial}{\partial \tau} g_j(\underline{u}^*, 0)$$

$$\underline{a}_j := \text{grad } g_j(\underline{u}^*, 0) =: (a_{j1}, \dots, a_{jn})^t$$

$$\tilde{\underline{a}}_j := (a_{j1}, \dots, a_{jn}, d_j)^t$$

$$\tilde{\underline{b}}_j := (a_{j1}, \dots, a_{jn}, 0)^t$$

\underline{e}_i sei der i -te Einheitsvektor in \mathbb{R}^n , $\tilde{\underline{e}}_i$ der i -te Einheitsvektor in \mathbb{R}^{n+1} . Ferner seien

$$\underline{A} := (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_t, \underline{e}_{t+1}, \dots, \underline{e}_n)^t$$

$$\tilde{\underline{A}} := (\tilde{\underline{a}}_1, \dots, \tilde{\underline{a}}_t, \tilde{\underline{e}}_{t+1}, \dots, \tilde{\underline{e}}_n, \tilde{\underline{e}}_{n+1})^t$$

$$\tilde{\underline{B}} := (\tilde{\underline{b}}_1, \dots, \tilde{\underline{b}}_t, \tilde{\underline{e}}_{t+1}, \dots, \tilde{\underline{e}}_n, \tilde{\underline{e}}_{n+1})^t.$$

(Hochgestelltes "t" bedeutet "Transposition")

Insbesondere ist ($\underline{0}$ ist der Nullvektor im \mathbb{R}^n)

$$\tilde{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{d} \\ \underline{0}^t & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\underline{B}} = \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{0} \\ \underline{0}^t & 1 \end{pmatrix}$$

und $\det(\tilde{\underline{A}}) = \det(\underline{A}) = \det(\tilde{\underline{B}})$ (Determinante).

Sei nun \mathcal{U} die in Voraussetzung 3.3.1 (4) genannte Umgebung von \underline{u}^* , und $\delta_e > 0$ sei so gewählt, daß $\delta_e \underline{e} \in W_\delta$. ($\underline{e} \in \mathbb{R}^k$ ist hierbei der im Satz genannte Vektor)

Um $F(\tau)$ lokal, in einer Umgebung von \underline{u}^* , als Bild von F darzustellen, betrachten wir die Abbildung

$$\underline{T} : \mathcal{U} \times (-\delta_e, \delta_e) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{mit}$$

$$\underline{T}(\underline{u}, \tau) := (g_1(\underline{u}, \tau), \dots, g_t(\underline{u}, \tau), u_{t+1}, \dots, u_n, \tau)^t.$$

O.E.d.A. dürfen wir voraussetzen, daß die Vektoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_t, \underline{e}_{t+1}, \dots, \underline{e}_n$ linear unabhängig sind (vgl. Vorauss. 3.3.1 (5)). Somit gilt

\underline{T} ist zweimal stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial \underline{T}(\underline{u}^*, 0)}{\partial (\underline{u}, \tau)} = \det(\tilde{\underline{A}}) = \det(\underline{A}) \neq 0.$$

Nach dem Satz über inverse Abbildungen existiert also eine offene Umgebung $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{U} \times (-\delta_e, \delta_e)$ von $(\underline{u}^*, 0)$ so, daß die Einschränkung

$$\underline{T} : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{W}_1 := \underline{T}(\mathcal{V}_1)$$

bijektiv ist mit

$$\frac{\partial \underline{T}(\underline{u}, \tau)}{\partial (\underline{u}, \tau)} \neq 0 \quad \forall (\underline{u}, \tau) \in \mathcal{V}_1.$$

Insbesondere ist \mathcal{W}_1 offen. Die Inverse

$$\underline{T}^{-1} : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{V}_1$$

ist ebenfalls zweimal stetig differenzierbar [8].

Wir betrachten außerdem die Abbildung

$$\underline{S} : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

$$\underline{S}(\underline{u}, \tau) := (g_1(\underline{u}, 0), \dots, g_t(\underline{u}, 0), u_{t+1}, \dots, u_n, \tau).$$

Diese ist zweimal stetig differenzierbar mit

$$\underline{S}(\underline{u}, 0) = \underline{T}(\underline{u}, 0) \quad \forall \underline{u}, (\underline{u}, 0) \in \mathcal{V}_1.$$

Insbesondere ist $\underline{S}(\underline{u}^*, 0) = \underline{T}(\underline{u}^*, 0)$. Daher gilt auch (beachte: \mathcal{W}_1 ist offen!)

$$\mathcal{V}_2 := \underline{S}^{-1}(\mathcal{W}_1) \subset \mathcal{V}_1 \text{ ist offene Umgebung von } (\underline{u}^*, 0).$$

Wir definieren nun eine Abbildung \underline{H} auf \mathcal{V}_2 durch

$$\underline{H} := \underline{T}^{-1} \underline{S}$$

(wohldefiniert, da $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$ und $\underline{S}(\mathcal{V}_2) \subset \mathcal{W}_1$). Wieder ist \underline{H} zweimal stetig differenzierbar, mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{H}(\underline{u}^*, 0)}{\partial (\underline{u}, \tau)} &= \frac{\partial \underline{T}^{-1}}{\partial (\underline{u}, \tau)} [\underline{T}(\underline{u}^*, 0)] \cdot \frac{\partial \underline{S}(\underline{u}^*, 0)}{\partial (\underline{u}, \tau)} = \\ &= \left[1 \ / \ \frac{\partial \underline{T}(\underline{u}^*, 0)}{\partial (\underline{u}, \tau)} \right] \cdot \frac{\partial \underline{S}(\underline{u}^*, 0)}{\partial (\underline{u}, \tau)} = \frac{1}{\det(\tilde{\underline{A}})} \cdot \det(\tilde{\underline{B}}) = 1. \end{aligned}$$

Deshalb existiert eine offene Umgebung von $(\underline{u}^*, 0)$ der Form $\mathcal{U}^* \times (-\delta^*, \delta^*)$ (mit $0 < \delta^* < \delta_e$) so, daß

$$\mathcal{U}^* \times (-\delta^*, \delta^*) \subset \mathcal{V}_2$$

und die Einschränkung

$$\underline{H} : \mathcal{U}^* \times (-\delta^*, \delta^*) \rightarrow \mathcal{W}_3 := \underline{H}[\mathcal{U}^* \times (-\delta^*, \delta^*)]$$

bijektiv ist. Nach Definition von \underline{H} ist für $(\underline{u}, \tau) \in \mathcal{U}^* \times (-\delta^*, \delta^*)$

$$\underline{T}(\underline{H}(\underline{u}, \tau)) = \underline{S}(\underline{u}, \tau) \quad \text{bzw.}$$

$$g_j(\underline{H}(\underline{u}, \tau)) = g_j(\underline{u}, 0) \quad \forall 1 \leq j \leq t$$

Spalten wir nun von $\underline{H} = (H_1, \dots, H_{n+1})$ den Anteil

$$\underline{G} := (H_1, \dots, H_n)$$

ab und beachten, daß $H_{n+1}(\underline{u}, \tau) = \tau$ gilt, so ist

$$\underline{H}(\underline{u}, \tau) = (\underline{G}(\underline{u}, \tau), \tau)$$

und für $1 \leq j \leq t$

$$(1) \quad g_j(\underline{G}(\underline{u}, \tau), \tau) = g_j(\underline{u}, 0) \quad \forall \underline{u} \in \mathcal{U}^* \quad \forall |\tau| < \delta^*.$$

\underline{G} ist zweimal stetig differenzierbar, für jedes $|\tau| < \delta^*$ ist

$$\underline{G}(\cdot, \tau) : \mathcal{U}^* \rightarrow \mathcal{U}^*(\tau) := \underline{G}(\mathcal{U}^*, \tau)$$

bijektiv, es ist $\underline{G}(\underline{u}, 0) = \underline{u}$ (da $\underline{S}(\underline{u}, 0) = \underline{T}(\underline{u}, 0)$), und aus (1) folgt für $\underline{u} \in \mathcal{U}^*$, $|\tau| < \delta^*$ und $1 \leq j \leq t$

$$g_j(\underline{G}(\underline{u}, \tau), \tau) < 0 \iff g_j(\underline{u}, 0) < 0$$

bzw. wegen Vorauss. 3.3.1 (4) (beachte, daß $\underline{G}(\mathcal{U}^*, \tau) \subset \mathcal{U}$ für $|\tau| < \delta^*$, und $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}$)

$$\underline{G}(\underline{u}, \tau) \in F(\tau) \iff \underline{u} \in F \quad \forall \underline{u} \in \mathcal{U}^* \quad \forall |\tau| < \delta^*$$

bzw.

$$\underline{G}(F \cap \mathcal{U}^*, \tau) = F(\tau) \cap \underline{G}(\mathcal{U}^*, \tau) \quad \forall |\tau| < \delta^*.$$

Da die Bedingung (F2) des Lemmas B3.3.2 auch im Satz 3.3.5 vorausgesetzt ist, sind (mit $\mathcal{U} := \mathcal{U}^*$ und $\delta := \delta^*$) alle Voraussetzungen des Lemmas B3.3.2 erfüllt bis auf (F3). Wir zeigen nun, daß auch (F3) erfüllt ist.

Sei \mathcal{U} eine beliebige Umgebung von \underline{u}^* . Dazu gibt es eine abgeschlossene Umgebung \mathcal{U}_a und eine offene Umgebung \mathcal{U}_o von \underline{u}^* mit

$$\mathcal{U}_a \subset \mathcal{U}_o \subset \mathcal{U} .$$

Gemäß Satz 2.1.4d existiert ferner ein $s > 0$ derart, daß

$$(2) \quad \|\underline{u}\| \geq \beta + 3s \quad \forall \underline{u} \in F \setminus \mathcal{U}_a .$$

(denn F ist wegen Vorauss. 3.3.1, (2) und (3), offen, folglich $\text{Ess}(F) = F$). Sei nun

$$K := \overline{K_{\beta+s}} \setminus \mathcal{U}_o \quad \text{und} \quad K^o := K_{\beta+2s} \setminus \mathcal{U}_a .$$

Es ist also K kompakt, K^o offen und $K \subset K^o$, ferner wegen

$$(2) \quad F \cap K^o = (F \setminus \mathcal{U}_a) \cap K_{\beta+2s} = \emptyset .$$

Da K^o offen ist, impliziert dies sogar $\overline{F} \cap K^o = \emptyset$, und wegen $K \subset K^o$

$$\overline{F} \cap K = \emptyset .$$

Gemäß Vorauss. 3.3.1 (3) ist nun $\overline{F} = \{g(\cdot, 0) \leq 0\}$, d. h.

$$g(\underline{u}, 0) > 0 \quad \forall \underline{u} \in K .$$

Da K kompakt und $g(\cdot, 0)$ stetig ist, folgt weiter

$$(3) \quad \inf \{g(\underline{u}, 0) : \underline{u} \in K\} =: g_K > 0 .$$

Weil aber g auf der kompakten Menge $K \times [-\delta^*, \delta^*]$ sogar gleichmäßig stetig ist, existiert ein $0 < \nu \leq \delta^*$ so, daß für alle $(\underline{u}_1, \tau_1)$ und $(\underline{u}_2, \tau_2)$ aus $K \times [-\delta^*, \delta^*]$ gilt

$$|g(\underline{u}_1, \tau_1) - g(\underline{u}_2, \tau_2)| < \frac{1}{2} g_K$$

falls $\|(\underline{u}_1 - \underline{u}_2, \tau_1 - \tau_2)\| < \nu$.

Für jedes $\underline{u} \in K$ und $|\tau| < \nu$ ist also

$$|g(\underline{u}, \tau) - g(\underline{u}, 0)| < \frac{1}{2} g_K ,$$

und somit wegen (3)

$$g(\underline{u}, \tau) > \frac{1}{2} g_K > 0 \quad \forall \underline{u} \in K \quad \forall |\tau| < \nu$$

d. h. $F(\tau) \cap K = \emptyset = (F(\tau) \setminus \mathcal{U}_o) \cap \overline{K_{\beta+s}} \supset (F(\tau) \setminus \mathcal{U}) \cap K_{\beta+s}$
bzw.

$$(4) \quad \|\underline{u}\| \geq \beta + s \quad \forall \underline{u} \in F(\tau) \setminus \mathcal{U} \quad \forall |\tau| < \nu .$$

Damit ist auch die Voraussetzung (F3) des Lemmas B3.3.2 nachgewiesen, und aus dem Lemma folgt

$$(5) \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \alpha_E^o[bF(\tau)] = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \alpha_E^u[bF(\tau)] =$$

$$= \frac{1}{\beta} [\underline{u}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \underline{G}(\underline{u}^*, 0)] = \frac{d}{d\tau} \beta_d[F(0)] = \alpha_d[F(\tau)] .$$

Wir berechnen nun $\frac{\partial}{\partial \tau} \underline{G}(\underline{u}^*, 0)$ bzw. $\frac{\partial}{\partial \tau} \underline{H}(\underline{u}^*, 0)$.

Wegen $\underline{H} = \underline{T}^{-1} \underline{S}$ ist die Funktionalmatrix von H an der Stelle $(\underline{u}^*, 0)$

$$\underline{D}[\underline{H}](\underline{u}^*, 0) = \underline{D}[\underline{T}^{-1}](\underline{S}(\underline{u}^*, 0)) \cdot \underline{D}[\underline{S}](\underline{u}^*, 0) =$$

$$= \{\underline{D}[\underline{T}](\underline{T}^{-1} \underline{S}(\underline{u}^*, 0))\}^{-1} \cdot \underline{D}[\underline{S}](\underline{u}^*, 0) =$$

$$= \{\underline{D}[\underline{T}](\underline{u}^*, 0)\}^{-1} \cdot \underline{D}[\underline{S}](\underline{u}^*, 0) = \tilde{\underline{A}}^{-1} \tilde{\underline{B}} .$$

Man verifiziert leicht, daß

$$\tilde{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{d} \\ \underline{0}^t & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{A}^{-1} & -\underline{A}^{-1} \underline{d} \\ \underline{0}^t & 1 \end{pmatrix} ,$$

also (\underline{E} bezeichnet die n -dimensionale Einheitsmatrix)

$$\underline{D}[\underline{H}](\underline{u}^*, 0) = \begin{pmatrix} \underline{A}^{-1} & -\underline{A}^{-1} \underline{d} \\ \underline{0}^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{0} \\ \underline{0}^t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{E} & -\underline{A}^{-1} \underline{d} \\ \underline{0}^t & 1 \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \underline{G}(\underline{u}^*, 0) = -\underline{A}^{-1} \underline{d} .$$

Da nun \underline{u}^* lokale Lösung der Extremwertaufgabe

$$h(\underline{u}) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_i^2 \stackrel{!}{=} \min$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_j(\underline{u}, 0) \leq 0 \quad \forall 1 \leq j \leq t$$

ist, läßt sich der Gradient $\text{grad} h(\underline{u}^*) = \underline{u}^*$ als Linearkombination der Gradienten der aktiven Nebenbedingungen dar-

stellen, d. h.

$$\underline{u}^* = \sum_{j=1}^t \lambda_j \underline{a}_j, \text{ wobei } \lambda_j = 0 \text{ falls } g_j(\underline{u}^*, 0) \neq 0.$$

Da die \underline{a}_j linear unabhängig sind, ist diese Darstellung eindeutig. Insgesamt ergibt sich

$$-\underline{u}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} G(\underline{u}^*, 0) = \left(\sum_{j=1}^t \lambda_j \underline{a}_j \right) \cdot \underline{A}^{-1} \underline{d} = \sum_{j=1}^t \lambda_j (\underline{a}_j^t \underline{A}^{-1} \underline{d}).$$

Weil nach Definition von \underline{A} gilt

$$\underline{a}_j^t \underline{A}^{-1} = \underline{e}_j^t,$$

folgt weiter

$$\underline{u}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} G(\underline{u}^*, 0) = - \sum_{j=1}^t \lambda_j \underline{e}_j^t \underline{d} = - \sum_{j=1}^t \lambda_j d_j = -\underline{\lambda} \cdot \underline{\hat{d}}.$$

$$(\underline{\lambda} := (\lambda_1, \dots, \lambda_t)^t, \underline{\hat{d}} := (d_1, \dots, d_t)^t)$$

Dies, in Verbindung mit (5) und

$$\underline{\hat{d}} = \sum_{i=1}^k e_i c_i$$

ergibt die Behauptung des Satzes 3.3.5.

Beweis von Satz 3.4.1

O.E.d.A.: $i = 1$

a) Sei $G(\underline{u}, \mu) := (u_1 - \mu, u_2, \dots, u_n)$. Dann ist

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{u}} = 1, \quad G(\underline{u}, \mu) \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} G(\underline{u}, \mu) = -(u_1 - \mu).$$

Es ist leicht nachzuweisen, daß für $-1 \leq \mu \leq 1$ gilt

$$(u_1 - \mu)^2 \geq \frac{1}{2} u_1^2 - 1.$$

Daher ist (e bezeichnet die Eulersche Zahl)

$$\sup_{-1 \leq \mu \leq 1} \varphi[G(\underline{u}, \mu)] \leq \sqrt{e} \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}} u_1\right) \prod_{i=2}^n \varphi(u_i).$$

Ferner ist

$$\sup_{-1 \leq \mu \leq 1} |-(u_1 - \mu)| \leq |u_1| + 1.$$

Aus all dem läßt sich leicht erkennen, daß G die Voraussetzungen des Satzes 3.2.3 (insbesondere die Integrierbarkeitsvoraussetzungen) erfüllt. Es folgt daher aus Satz 3.2.3:

$$\alpha_d[G(F, \mu)] = \frac{d}{d\mu} \beta_d[G(F, 0)] = \frac{1}{\beta} (-u_1^*) = \alpha_1$$

und

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \frac{d}{d\mu} \beta_E[bG(F, 0)] = \alpha_1.$$

Wegen $G(b\underline{u}, \mu) = bG(\underline{u}, \frac{1}{b}\mu)$ ist ferner

$$G(F_b, \mu) = G(bF, \mu) = bG(F, \frac{1}{b}\mu)$$

und daher (\tilde{U} ist wie im Satz 3.4.1 definiert)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu_1} \beta_E[\tilde{U}(\underline{1}_O) \in F_b] &= \frac{d}{d\mu} \beta_E[G(F_b, 0)] = \\ &= \frac{d}{d\mu} \beta_E[bG(F, \frac{1}{b}\mu)]_{\mu=0} = \frac{1}{b} \frac{d}{d\mu} \beta_E[bG(F, 0)]. \end{aligned}$$

Hieraus folgt Teil a des Satzes.

b) Sei $\underline{G}(\underline{u}, \sigma) := (\frac{1}{\sigma} u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Dann ist

$$\frac{\partial \underline{G}(\underline{u}, \sigma)}{\partial \underline{u}} = \frac{1}{\sigma}, \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \underline{G}(\underline{u}, \sigma)}{\partial \underline{u}} = -\frac{1}{\sigma^2}$$

$$\underline{G}(\underline{u}, \sigma) \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma} \underline{G}(\underline{u}, \sigma) = -u_1^2 \sigma^{-3}$$

Hieraus folgt für $W := \{\sigma: 1 - \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 + \frac{1}{2}\}$

$$\sup_{\sigma \in W} \varphi[\underline{G}(\underline{u}, \sigma)] \leq \varphi(\frac{2}{3} u_1) \prod_{i=2}^n \varphi(u_i)$$

$$\sup_{\sigma \in W} \left| \frac{\partial \underline{G}(\underline{u}, \sigma)}{\partial \underline{u}} \right| \leq 2, \quad \sup_{\sigma \in W} \left| \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \underline{G}(\underline{u}, \sigma)}{\partial \underline{u}} \right| \leq 4$$

$$\sup_{\sigma \in W} \left| \underline{G}(\underline{u}, \sigma) \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma} \underline{G}(\underline{u}, \sigma) \right| \leq 8 u_1^2$$

Wiederum sind also die Voraussetzungen des Satzes 3.2.3 erfüllt, und es folgt

$$\alpha_d[\underline{G}(F, \sigma)] = \frac{1}{\beta} [-(u_1^*)^2] = -\beta \alpha_1^2$$

sowie

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \frac{d}{d\sigma} \beta_E[b\underline{G}(F, 1)] = -\beta \alpha_1^2$$

Wegen

$$\beta_E[b\underline{G}(F, \sigma)] = \beta_E[\underline{G}(bF, \sigma)] = \beta_E[\tilde{U}(\sigma) \in F_b]$$

folgt die Behauptung.

B 4.1 Beweise zu Abschnitt 4.1

Satz B 4.1.1

a) Es sei $\underline{X} = \underline{T}(\underline{U})$ mit $X_1 = T_1(U_1)$, T_1 streng monoton wachsend. Ferner sei $\tilde{U}(\mu, \sigma) := (\mu + \sigma U_1, U_2, \dots, U_n)$, $\tilde{X}(\mu, \sigma) := \underline{T}(\tilde{U}(\mu, \sigma))$. Dann gilt:

- (1) Die Verteilung von $\tilde{X}_1(\mu, \sigma)$ ist unabhängig von der Wahl der Transformation \underline{T} .
- (2) Bezeichnet $\mathcal{L}[\cdot | \cdot]$ die bedingte Verteilung, so ist $\mathcal{L}[\tilde{X}(\mu, \sigma) | \tilde{X}_1(\mu, \sigma) = x] = \mathcal{L}[\underline{X} | X_1 = x]$, und ist somit unabhängig von μ, σ und der Wahl der Transformation \underline{T} .
- (3) Insbesondere ist die Verteilung von $\tilde{X}(\mu, \sigma)$ unabhängig von der Wahl der Transformation \underline{T} . Damit sind auch die Alpha-Werte $\alpha_\mu[X_1 | F_x] = \alpha_E[\tilde{X}(\mu) \in F_x]$ und $\alpha_\sigma[X_1 | F_x] = \alpha_E[\tilde{X}(\sigma) \in F_x]$ unabhängig von der Wahl der Transformation \underline{T} .

b) Ist $\underline{Y} = \underline{R}(\underline{X})$ mit $Y_1 = R_1(X_1)$, R_1 streng monoton wachsend, und ist $F_x = \underline{R}^{-1}(F_y)$, so folgt

$$\alpha_\mu[X_1 | F_x] = \alpha_\mu[Y_1 | F_y] \quad \text{und} \\ \alpha_\sigma[X_1 | F_x] = \alpha_\sigma[Y_1 | F_y]$$

(Vorausgesetzt, die Verteilung von X_1 ist nicht entartet; ansonsten sind die Alpha-Werte nicht definiert)

Beweis von Satz B 4.1.1

a (1): Folgt aus

(1*) $T_1 = T_1(u)$ ist bis auf höchstens abzählbar viele u eindeutig bestimmt.

Zum Beweis von (1*) bezeichnen wir die Verteilungsfunktion von X_1 mit $W = W(x) := P[X_1 \leq x]$ und betrachten die Funktionen

$$G(u) := \inf \{x: W(x) \geq \phi(u)\}$$

$$H(u) := \inf \{x: W(x) > \phi(u)\}.$$

Dann gilt

$$(a1) \quad G(u_1) \leq H(u_1) \leq G(u_2) \quad \forall u_1 < u_2.$$

Sei $M := \{u: G(u) < H(u)\}$. Wegen (a1) sind die Intervalle $I_u := (G(u), H(u)]$, $u \in M$, paarweise disjunkt mit $P[U_1 \in I_u] > 0$. Folglich ist M abzählbar. Ferner gilt nach Definition von G und H

$$(a2) \quad \begin{aligned} W(x) < \phi(u) & \text{ falls } x < G(u) \\ W(x) > \phi(u) & \text{ falls } x > H(u) \end{aligned}$$

und aus der strengen Monotonie von T_1 folgt für jedes u

$$(a3) \quad W[T_1(u)] = P[X_1 \leq T_1(u)] = P[U_1 \leq u] = \phi(u).$$

Aus (a2) in Verbindung mit (a3) ergibt sich (setze $T_1(u) = x$)

$$G(u) \leq T_1(u) \leq H(u) \quad \forall u.$$

Da M abzählbar ist, impliziert dies die Behauptung (1*).

a (2): Wegen der Bijektivität von T_1 sowie der Unabhängigkeit der U_i , und wegen $\tilde{X}(\mu, \sigma) = T_1(\tilde{U}(\mu, \sigma))$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\tilde{X}(\mu, \sigma) \mid \tilde{X}_1(\mu, \sigma) = x] &= \mathcal{L}[\tilde{U}(\mu, \sigma) \mid \tilde{U}_1(\mu, \sigma) = T_1^{-1}(x)] \circ T_1^{-1} = \\ &= \mathcal{L}[U \mid U_1 = T_1^{-1}(x)] \circ T_1^{-1} = \mathcal{L}[X \mid X_1 = x]. \end{aligned}$$

b) : Ist $X = T(U)$, $X_1 = T_1(U_1)$, T_1 streng monoton wachsend, und $F := T_1^{-1}(F_x)$, so ist auch $Y = R T(U)$, $R_1 T_1$ streng monoton steigend und $F = (R T)^{-1}(F_y)$. Mit $\tilde{U}(\mu, \sigma) := (\mu + \sigma U_1, U_2, \dots, U_n)$ ist daher etwa

$$\begin{aligned} \alpha_\mu[X_1 \mid F_x] &= \alpha_E[T(\tilde{U}(\mu)) \in F_x] = \alpha_E[\tilde{U}(\mu) \in F] = \\ &= \alpha_E[(R T)(\tilde{U}(\mu)) \in F_y] = \alpha_\mu[Y_1 \mid F_y]. \end{aligned}$$

Beweis von Satz 4.1.4

O.E.d.A.: $j = 1$

Es existiert eine Transformation $X = T(U)$ so, daß $X_1 = T_1(U_1)$, $T_1 = F_1^{-1} \phi$, gilt (F_1 ist die Verteilungsfunktion von X_1). T_1 ist nach Voraussetzung über F_1 streng monoton wachsend.

Sei $G(u, \mu) := (u_1 - \mu, u_2, \dots, u_n)$

$$F := T_1^{-1}(F_x).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha_\mu[X_1] &= \alpha_\mu[U_1] = \alpha_E[\mu] = \frac{d}{d\mu} \beta_E[(U_1 + \mu, U_2, \dots, U_n) \in F]_{\mu=0} \\ &= \frac{d}{d\mu} \beta_E[U \in G(F, 0)] = - \frac{1}{\phi(\beta_E)} \frac{d}{d\mu} P[U \in G(F, 0)]. \end{aligned}$$

Aus dem Beweis von Lemma B3.2.6 folgt weiter [G erfüllt die dort gestellten Bedingungen; vgl. hierzu den Beweis des Satzes 3.4.1a]

$$\frac{d}{d\mu} P[U \in G(F, 0)] = \int_F u_1 \phi(u) du = P[U \in F] \cdot E[U_1 \mid U \in F].$$

Zusammen mit $U_1 = \phi^{-1} F_1(X_1)$ und $\{U \in F\} = \{X \in F_x\}$ folgt nun die Behauptung.

Beweis von Satz 4.1.5

Satz 4.1.5 ist nur eine andere Formulierung des Satzes 3.4.1.

Beweis von Satz 4.1.6

Sei $c_i := \frac{1}{b} b_i$. Gemäß Satz B4.1.1b ist dann

$$\alpha_\mu[X] = \alpha_\mu \left[\sum_{i=1}^n c_i U_i \right]$$

Sei nun $\underline{d}_1 := (c_1, \dots, c_n)^t$ (Spaltenvektor!), und

$$\underline{d}_2, \dots, \underline{d}_n$$

seien weitere "linear unabhängige" Vektoren der Länge $\|\underline{d}_i\| = 1$. (Genauer: Die Vektoren $\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_n$ bilden ein Orthonormal-System)

Die Matrix

$$\underline{D} := (\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_n)$$

ist folglich orthogonal, bzw. $\underline{D}^{-1} = \underline{D}^t$. Der Zufallsvektor

$$\underline{V} := \underline{D}^t \underline{U} \quad (\text{bzw. } V_i = \underline{d}_i \cdot \underline{U})$$

besteht aus unabhängigen, standardnormalen Variablen, und es ist

$$V_1 = \sum_{i=1}^n c_i U_i$$

Es folgt (\underline{e}_i bezeichnet den i -ten Einheitsvektor in \mathbb{R}^n)

$$\begin{aligned} \alpha_\mu \left[\sum_{i=1}^n c_i U_i \mid \underline{U} \in F \right] &= \alpha_\mu [V_1 \mid \underline{V} \in \underline{D}^t F] = \\ &= \frac{d}{d\mu} \beta_E [V_1 \in \underline{D}^t F - \mu \underline{e}_1]_{\mu=0} = \frac{d}{d\mu} \beta_E [U \in F - \mu \underline{D} \underline{e}_1]_{\mu=0} = \\ &= \frac{d}{d\mu} \beta_E [U \in F - \mu \underline{d}_1]_{\mu=0} = \sum_{i=1}^n c_i \frac{d}{d\mu} \beta_E [U \in F - \mu \underline{e}_i]_{\mu=0} = \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \alpha_\mu [U_i \mid F] . \end{aligned}$$

B 4.2 : Beweise zu Abschnitt 4.2

Beweis von Satz 4.2.2 und Anmerkung 4.2.1

Da der Satz von eher marginaler Bedeutung ist, wird sein Beweis etwas knapper formuliert. Ohne Beweis notieren wir zunächst

(1) Ist $A \subset \mathbb{R}$ meßbar und $\beta_E := -\Phi^{-1} \left(\int_A \varphi(u) du \right)$, so ist

$$\int_{-\infty}^{-\beta_E} u \varphi(u) du \leq \int_A u \varphi(u) du \leq \int_{\beta_E}^{\infty} u \varphi(u) du .$$

[Beachte hierbei, daß $(-\infty, -\beta_E)$, A und (β_E, ∞) bezüglich der Standardnormalverteilung gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen]

Aus (1) folgt

(2) Für $\beta_E := \beta_E[F]$ gilt

$$-\varphi(-\beta_E) \leq \int_F u_1 \varphi(\underline{u}) d\underline{u} \leq \varphi(\beta_E) .$$

Denn mit $\hat{\underline{u}} := (u_2, \dots, u_n)$ und $F_{\hat{\underline{u}}} := \{u_1 \in \mathbb{R} : (u_1, \hat{\underline{u}}) \in F\}$ gilt

$$\int_F u_1 \varphi(\underline{u}) d\underline{u} = \int_{F_{\hat{\underline{u}}}} \left[\int u_1 \varphi(u_1) du_1 \right] \varphi(\hat{\underline{u}}) d\hat{\underline{u}} .$$

Mit $p(\hat{\underline{u}}) := \int_{F_{\hat{\underline{u}}}} \varphi(u_1) du_1$, $\beta_E(\hat{\underline{u}}) := -\Phi^{-1}(p(\hat{\underline{u}}))$ gilt hierbei

$$\begin{aligned} \text{wegen (1)} \quad & \int_F u_1 \varphi(\underline{u}) d\underline{u} \geq \int_{F_{\hat{\underline{u}}}} \left[\int_{-\infty}^{-\beta_E(\hat{\underline{u}})} u_1 \varphi(u_1) du_1 \right] \varphi(\hat{\underline{u}}) d\hat{\underline{u}} = \\ & = - \int \varphi(-\beta_E(\hat{\underline{u}})) \varphi(\hat{\underline{u}}) d\hat{\underline{u}} = \int -\varphi\Phi^{-1}(p(\hat{\underline{u}})) \varphi(\hat{\underline{u}}) d\hat{\underline{u}} . \end{aligned}$$

Da die Funktion $(-\varphi\Phi^{-1})$ konvex ist, ergibt Anwendung der Jensenschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_F u_1 \varphi(\underline{u}) d\underline{u} &\geq -\varphi\Phi^{-1} \left[\int p(\hat{\underline{u}}) \varphi(\hat{\underline{u}}) d\hat{\underline{u}} \right] = -\varphi\Phi^{-1}(P[F]) = \\ &= -\varphi(-\beta_E) \end{aligned}$$

Die Abschätzung nach oben ergibt sich analog, oder aus Symmetriegründen.

Sei nun im folgenden stets $\beta_E := \beta_E[F]$ und $P_f := P[F]$. Für $0 \leq \delta \leq \min\{P_f, 1-P_f\}$ definieren wir

$$\hat{H}_\delta := \{\phi^{-1}(\delta) < U_1 < -\beta_E\} \cup \{-\phi^{-1}(\delta) < U_1 < \infty\}$$

$$H_\delta := \{-\infty < U_1 < \phi^{-1}(P_f - \delta)\} \cup \{-\beta_E < U_1 < \phi^{-1}(P_f + \delta)\}$$

Die "Vereinigungen" sind hierbei disjunkt; die jeweils linke Menge ist Teilmenge von

$$L := \{U_1 < -\beta_E\},$$

die rechte ist Teilmenge von

$$R := \{U_1 > -\beta_E\},$$

und es gelten die Beziehungen

$$(3) \quad P[H_\delta \Delta L] = P[\hat{H}_\delta \Delta L] = 2\delta$$

$$P[H_\delta] = P[\hat{H}_\delta] = P_f = \phi(-\beta_E) = P[F]$$

und

$$(4) \quad \int_{H_\delta} u_1 \varphi(u) du = -\varphi(\beta_E) d_{\beta_E}(\delta)$$

$$\int_{\hat{H}_\delta} u_1 \varphi(u) du = -\varphi(\beta_E) \hat{d}_{\beta_E}(\delta).$$

Durch Vergleich von H_δ und H_ϵ ($\delta < \epsilon$) bzw. \hat{H}_δ und \hat{H}_ϵ kann man zeigen, daß

$$\int_{H_\delta} u_1 \varphi(u) du < \int_{H_\epsilon} u_1 \varphi(u) du$$

$$\int_{\hat{H}_\delta} u_1 \varphi(u) du < \int_{\hat{H}_\epsilon} u_1 \varphi(u) du.$$

Hieraus folgt mit (4), daß d_{β_E} und \hat{d}_{β_E} streng monoton fallen.

Sei nun speziell $\delta := \delta_F := \frac{1}{2} P[F \Delta L]$. Wegen $P[F] = P[L] = P_f$ und $2\delta_F = P[F] + P[L] - 2P[F \cap L]$ ist dann

$$P[F \cap L] = P_f - \delta_F \quad \text{und} \quad P[F \cap R] = \delta_F.$$

Aus (2) folgt daher

$$-\varphi\phi^{-1}(P_f - \delta_F) \leq \int_{F \cap L} u_1 \varphi(u) du \quad \text{und}$$

$$\int_{F \cap R} u_1 \varphi(u) du \leq \varphi\phi^{-1}(\delta_F).$$

Wegen $P[(F \cap L) \cup R] = P_f - \delta_F + (1 - P_f) = 1 - \delta_F$

und $P[(F \cap R) \cup L] = \delta_F + P_f$ folgt aus (2) ebenso

$$-\varphi\phi^{-1}(\delta_F + P_f) \leq \int_{(F \cap R) \cup L} u_1 \varphi(u) du = \int_{F \cap R} u_1 \varphi(u) du - \varphi(-\beta_E)$$

(2)

und

$$\int_{F \cap L} u_1 \varphi(u) du + \varphi(-\beta_E) = \int_{(F \cap L) \cup R} u_1 \varphi(u) du \leq \varphi\phi^{-1}(1 - \delta_F) = \varphi\phi^{-1}(\delta_F).$$

(2)

Zusammengefaßt, ergibt dies wegen $\int_F = \int_{F \cap L} + \int_{F \cap R}$

$$\begin{aligned} [-\varphi\phi^{-1}(P_f - \delta_F)] + [-\varphi\phi^{-1}(P_f + \delta_F) + \varphi(\beta_E)] &\leq \\ &\leq \int_F u_1 \varphi(u) du \leq \varphi\phi^{-1}(\delta_F) + [\varphi\phi^{-1}(\delta_F) - \varphi(\beta_E)]. \end{aligned}$$

Gemäß Satz 4.1.4 ist nun

$$\alpha_\mu[U_1|F] = -\frac{1}{\varphi(\beta_E)} \int_F u_1 \varphi(u) du,$$

so daß schließlich folgt

$$(5) \quad \hat{d}_{\beta_E}(\delta_F) \leq \alpha_\mu[U_1|F] \leq d_{\beta_E}(\delta_F).$$

Definiert man nun $V := \alpha_\mu^N \cdot U$ (α_μ^N wie im Satz), so ist, gemäß Satz 4.1.6, V diejenige Linearkombination von U_i 's mit maximalem Alpha-Wert α_μ :

$$\alpha_\mu[V|F] = \alpha_\mu^N \cdot \alpha_\mu = \|\alpha_\mu\|.$$

Durch Übergang zu einem Koordinatensystem mit V als erster Variabler folgt aus (5) schließlich

$$\hat{d}_{\beta_E}(\delta) \leq \|\alpha_\mu\| \leq d_{\beta_E}(\delta),$$

womit der Satz 4.2.1 bewiesen ist.

Literatur

- [1] Bleistein, N.; Handelsmann, R. A.: "Asymptotic Expansions of Integrals". Holt, Rinehart and Winston, New York, N.Y. (USA), 1975
- [2] Breitung, K.: "Asymptotic Approximations for Multivariate Domain and Surface Integrals". Proceedings of the 4th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP-4), Università di Firenze, Florenz (Italien), 1983, S. 755-768
- [3] Cornell, C. A.: "Structural Safety Specifications Based on Second-Moment Reliability Analysis, Final Report". Symposium on Concepts of Safety of Structures and Methods of Design (London, England), IVBH, Zürich (Schweiz), S. 235-246, 1969
- [4] Diamantidis, D.: "Zuverlässigkeitsanalyse schlanker Stahlbetonstützen unter Berücksichtigung des Kriechens". Eingereicht als Dissertation am 4. 5. 1983 bei der Technischen Universität München am Fachbereich für Bau- und Vermessungswesen.
- [5] Ditlevsen, O.: "Structural Reliability and the Invariance Problem". Report No. 22, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Ontario (Kanada), 1973
- [6] Ditlevsen, O.: "Generalized Second Moment Reliability Index". Journal of Structural Mechanics, Vol. 7, No. 4, Dezember 1979, S. 435-451
- [7] Gollwitzer, S.; Rackwitz, R.: "Equivalent Components in First-Order System Reliability". Reliability Engineering, No. 5 1983, S. 99-115.

- [8] Grauert, H.; Fischer, W.: "Differential- und Integralrechnung II". Springer-Verlag Berlin, 1973
- [9] Hasofer, A. M.; Lind, N. C.: "An Exact and Invariant First-Order Reliability Format". Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol 100, No. 1, Februar 1974, S. 111-121
- [10] Hohenbichler, M.; Rackwitz, R.: "Non-Normal Dependent Vectors in Structural Safety". Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 107, No. 6, Dezember 1981, S. 1227-1249
- [11] Joint Committee on Structural Safety CEB-CECM-CIB-IABSE-RILEM: "Basic Notes on Resistances, R-01, R-02". München, 1982.
- [12] Lindgren, G. "Extreme Values and Crossings for the χ^2 -Process and other Functions of Multidimensional Gaussian Processes with Reliability Applications". Advances in Applied Probability, Vol 12, 1980, S. 746-774
- [13] Neumann, H. J.; Fießler, B.; Rackwitz, R.: "Die genäherte Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit mit Hilfe rotationssymmetrischer Grenzzustandsflächen 2. Ordnung". Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, Heft 22, Technische Universität München (SFB 96), München 1977
- [14] Normenausschuß Bauwesen im DIN (NABAU): "Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen". Beuth Verlag, Berlin 1981
- [15] Paloheimo, E.; Hannus, M.: "Structural Design Based on Weighted Fractiles". Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 100, No. 9, September 1974, S. 1789-1811

- [16] Rackwitz, R.; Fießler, B.: "Non-Normal Vectors in Structural Reliability". Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, Heft 29, Technische Universität München, München 1978, S. 1-22
- [17] Rosenblatt, M. "Remarks on a Multivariate Transformation". Annals of Mathematical Statistics, Vol. 23, 1952, S. 470-472

In der Berichtsreihe sind bisher erschienen:

- Heft 1/1972*) Mathematische Hilfsmittel zur Sicherheitstheorie (7 Beiträge)
- Heft 2/1973*) Seminarvorträge zur Sicherheitstheorie (7 Beiträge)
- Heft 3/1973*) Beiträge zur Zuverlässigkeit von Betonbauwerken (11 Beiträge)
- Heft 4/1973*) Wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchung der Knicksicherheit von schlanken Stahlbetonstützen O. Knappe
R. Rackwitz
- Heft 5/1974*) Zur Sicherheitstheorie im konstruktiven Stahlbau Chr. Petersen
R. Hawranek
- Heft 6/1975 Monte Carlo-Studie zur Zuverlässigkeit von durchlaufenden Stahlbetondecken in Bürogebäuden U. Kraemer
R. Rackwitz
E. Grasser
- Heft 7/1973*) Festigkeitsverhalten von Fichtenbrettschichtholz; Teil 1: Versuchseinrichtung für Kurzzeit-Druckversuche P. Glos
W. Maier
U. Weigle
- Heft 8/1975*) Sicherheit gedrückter Stahlstützen, Teil I: Grundlagenvergleich mit den Versuchen der Europäischen Konvention der Stahlbauverbände am Profil IPE 160 R. Hawranek
Chr. Petersen
- Heft 9/1975 Zur Sicherheit von statisch beanspruchten HV-Verbindungen unter besonderem Bezug auf die DAST-Richtlinien der Jahre 1956, 1963 und 1974 R. Hawranek
- Heft 10/1975*) Deterministische und stochastische Analyse des Tragverhaltens von Stahlbetonbauteilen unter Last- und Zwangbeanspruchungen G. Thielen
- Heft 11/1976*) Statistische Untersuchungen von geometrischen Abweichungen an ausgeführten Stahlbetonbauteilen, Teil 1: Geometrische Imperfektionen bei Stahlbetonstützen G. Maaß
R. Rackwitz
- Heft 12/1976*) Wahrscheinlichkeitstheoretische Analyse der Lebensdauervertelung nach Freudenthal et al. B. Krzykacz
M. Kersken-Bradley
- Heft 13/1976*) Studien für ein stochastisches Modell der Betondruckfestigkeit, Teil 1: Untersuchung zur Betondruckfestigkeit im Bauwerk sowie zum Qualitätsangebot von Beton R. Rackwitz
K.F. Müller
G. Maaß
- Heft 14/1976 Numerische Methoden probabilistischer Bemessungsverfahren und Sicherheitsnachweise B. Fießler
H. Hawranek
R. Rackwitz

- Heft 15/1976 Die Anwendung der Bayesschen statistischen Entscheidungstheorie auf Probleme der Qualitätskontrolle von Beton R. Rackwitz
- Heft 16/1977*) Zur Ermittlung optimaler Sortiermethoden bei der Herstellung von Brettschichtbauteilen M. Kersken-Bradley
W. Maier
- Heft 17/1977*) Zwei Anwendungen der Zuverlässigkeitstheorie erster Ordnung bei zeitlich veränderlichen Lasten R. Rackwitz
B. Fießler
- Heft 18/1977*) Zuverlässigkeitsuntersuchungen an Brett-schichtträgern, bemessen nach DIN 1052 M. Kersken-Bradley
- Heft 19/1977*) Zur Untersuchung stationärer Lastwirkungsprozesse von statisch reagierenden Straßen- und Eisenbahnbrücken mit der Spektralmethode T. Geidner
- Heft 20/1977*) Zur Verteilung der Parameter der Wöhlerlinie für St 37 und St 52 R. Quel
- Heft 21/1977*) Einige Beiträge zur Zuverlässigkeit von Bauwerken R. Rackwitz
- Heft 22/1977*) Die genäherte Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit mit Hilfe rotationssymmetrischer Grenzzustandsflächen 2. Ordnung B. Fießler
H.-J. Neumann
R. Rackwitz
- Heft 23/1978 Zur Statistik der Lage und Größe der Vorspannbewehrung G. Maaß
- Heft 24/1978*) Beiträge zur Risiko- und Zuverlässigkeitsbeurteilung von Tragwerken J. Bauer, H.S.Choi
H.Kappler, O.W.Knappe
H.-J.Melzer
H.Panggabean
K.-H.Reichmann
G.I.Schuëller
R.F.Schwarz
- Heft 25/1978*) Neuere Ergebnisse aus der Theorie der Normung, Beiträge zum 43. SFB-Kolloquium, München, 1.März 1978
- Heft 26/1978*) Statistische Methoden und ihre Anwendungen im Ingenieurbau - Teil I: Grundlagen H. Kappler
O.W.Knappe
K.-H.Reichmann
G.I.Schuëller
R.F.Schwarz
- Heft 27/1978*) Statistische Methoden und ihre Anwendungen im Ingenieurbau - Teil II: Anwendungen H.-J.Melzer
H.-J.Niemann
G.I.Schuëller
- Heft 28/1978*) Statistische Untersuchungen von geometrischen Abweichungen an ausgeführten Stahlbetonbauteilen, Teil II: Meßergebnisse geometrischer Abweichungen bei Stützen, Wänden, Balken und Decken des Stahlbetonhochbaus G. Maaß
- Heft 29/1978*) Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung und nichtnormale Vektoren, quadratische Grenzzustandsflächen, Tragsysteme bzw. außergewöhnliche Einwirkungen B. Fießler
B. Krzykacz
H.-J. Neumann
R. Rackwitz
- Heft 30/1978*) Beitrag zu einem Zuverlässigkeitsmodell für Dackbalken aus Brettschichtholz unter besonderer Berücksichtigung seines Festigkeitsverhaltens W. Maier
- Heft 31/1978*) Darstellung und Auswertung von Schneehöhenmessungen in der Bundesrepublik Deutschland H.
R.
- Heft 32/1978*) Niveauüberschreitungen von Summen von Zufallsprozessen, deren Pfade Sprungfunktionen sind K.
Gjos
- Heft 34/1978*) Optimierung von Sicherheitsnachweisen mit besonderem Bezug auf den Tragsicherheitsnachweis von Stützen aus Formstahl R
- Heft 35/1978*) Zur Bestimmung von Festigkeitsverhalten von Brettschichtholz bei Druckbeanspruchung aus Werkstoff- und Einwirkungskenngrößen P. Glos
- Heft 36/1978*) Zur Zuverlässigkeit von ermüdungsbeanspruchten Konstruktionselementen in Stahl R. Quel
- Heft 37/1978*) Zur Anwendung der Spektralmethode auf Lasten und Beanspruchungen bei Straßen- und Eisenbahnbrücken T. Geidner
- Heft 38/1979*) Theoretische Grundlagen für die Bestimmung des Bemessungswertes von Bauteilwiderständen aus Versuchen R. Rackwitz
- Heft 39/1979*) Neuere Erkenntnisse in der Risiko- und Zuverlässigkeitsbeurteilung von Tragwerken J. Bauer,
H. S. Choi
H. Kappler
H.-J. Melzer
H. Pangabean
K.-H. Reichmann
G. I. Schuëller
R. F. Schwarz
- Heft 42/1979*) Überschreitungsrate für Lastprozesse mit rechteckförmigen Impulsen K. Breitung
R. Rackwitz
- Heft 43/1979*) Das Programmsystem FORM zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit von Komponenten von Tragsystemen B. Fießler

- Heft 44/1979*) Beitrag zur Bestimmung der Zuverlässigkeit nichtlinearer Strukturen unter Berücksichtigung kombinierter stochastischer Einwirkungen R. F. Schwarz
- Heft 45/1979*) Nichtlineare Lastkombination von Poissonschen Erneuerungsprozessen K. Breitung
R. Rackwitz
- Heft 46/1980 Überlegungen zur Zuverlässigkeit von Tragsystemen U. Kraemer
- Heft 47/1980*) Ausgewählte Beispiele der probabilistischen Behandlung von Problemen der Bruchmechanik, Lastkombination und Strukturdynamik P. Kafka
H. Krawinkler
H.-J. Melzer
G.F. Oswald
W. Schmitt
G.I. Schuëller
Y.K. Wen
- Heft 48/1980 Zur zuverlässigkeitstheoretischen Untersuchung von Seriensystemen M. Hohenbichler
- Heft 49/1980*) Seminar über stochastische Tragwerksmechanik und Zuverlässigkeit
- Heft 51/190 *) Benchmark Study on Methods to Determine Collaps failure probability of Redundant Structures M. Grimmelt
G.I. Schuëller
- Heft 52/1980 Numerische Unsicherheitsanalyse von Böschungen B. Peintinger
R. Rackwitz
- Heft 53/1980 *) Zwei Schätzprobleme bei Gauß'schen Folgen S. Pöhlmann
R. Rackwitz
- Heft 54/1980 Tragwerksschwingungen unter Zufallslast mit nicht-Gaußischer Wahrscheinlichkeitsverteilung H.-J. Melzer
- Heft 55/1981 Zwei Anwendungen der Bayesschen Statistik K. Breitung
- Heft 56/1981 Beanspruchbarkeit von Bauteilquerschnitten bei streuenden Kenngrößen des Kraftverformungsverhaltens innerhalb des Querschnitts M. Kersken-Bradley
- Heft 57/1981 Zufällige Systemeigenschaften bei dynamisch belasteten Tragwerken mit einem Freiheitsgrad E. Großmann
R. Juli
- Heft 58/1981 Studien zur Zuverlässigkeit von redundanten Tragsystemen R. Rackwitz
M. Hohenbichler
S. Gollwitzer
B. Peintinger
- Heft 60/1981 Die Genauigkeit und Leistungsfähigkeit der Spektralmethode R.J. Scherer
G.I. Schuëller
- Heft 61/1981 Zur Modellierung des Festigkeitsverhaltens von Bauholz bei Druck-, Zug- und Biegebeanspruchung P. Glos