

Wavelet-Galerkin-Methoden zur Berechnung elektromagnetischer Felder im Zeitbereich

Martin Aidam

Wavelet-Galerkin-Methoden zur Berechnung elektromagnetischer Felder im Zeitbereich

Martin Aidam

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.techn. J.A. Nossek
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.techn. P. Russer
2. Prof. Doct.Ing. W.J.R. Hoefer, Univ. of Victoria,
Victoria/Kanada

Die Dissertation wurde am 24. August 1999 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik am 20. Dezember 1999 angenommen.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik der Technischen Universität München. An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit ergreifen, Herrn Prof. Dr. techn. Peter Russer zu danken, der diese Arbeit ermöglicht hat, nicht zuletzt weil er mich überzeugte, Berlin den Rücken zu kehren und mich neuen Problemen zuzuwenden, die in München darauf warteten, von mir in Angriff genommen zu werden.

Der Siemens AG gilt mein besonderer Dank für die Gewährung eines Ernst-von-Siemens-Stipendiums. Insbesondere danke ich Herrn Dr. Gross und Frau Fehn für die freundliche Betreuung und Herrn Dr. L. Treitinger für seine Unterstützung und seinen Rat.

Nicht unerwähnt möchte ich Frau Prof. L.P.B. Katehis Engagement lassen, die mir einen dreiwöchigen Studienaufenthalt an den Radiation Labs der University of Michigan ermöglichte, der mich schließlich sozusagen mit Wavelets infizierte.

Wie immer, wenn man mit Rechnern zu tun hat, spielen die Systemadministratoren eine zentrale Rolle für die Arbeit. Für ihren Einsatz, Rechnerprobleme unverzüglich zu beheben, Wünschen nach Software nachzukommen und ihre Geduld möchte ich Herrn Dipl.-Ing. Bertram Isele, Frau Dipl.-Ing. Dorothee Schobert und Herrn Dipl.-Ing. Tobias Mangold herzlich danken. Herrn Mangold möchte ich auch für all seine hilfreichen Ratschläge zur Programmierung danken, ohne die ich sicher so manche Stunde mehr am Rechner zugebracht hätte.

Danken möchte ich auch all meinen Freunden, die mich unterstützt haben, und ganz besonders Christiane Bolt.

Reutlingen, im August 1999

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Einleitung	1
Kapitel 2. Darstellung der Prinzipien	5
1. Gewinnung von Differenzgleichungen	5
2. Wavelets	11
3. Zeitintegration	22
Kapitel 3. Stand der Forschung	23
Kapitel 4. Waveletbasierte Multiskalenverfahren	31
1. Vorbetrachtung	31
2. Modellproblem	36
3. Biorthogonale B-Spline-Wavelets	38
4. Berechnung der Entwicklungskoeffizienten	48
5. Räumliche Diskretisierung	51
6. Funktions- und Integralwerte verfeinerbarer Funktionen	56
7. Zeitintegration	60
8. Implementierungsaspekte	68
Kapitel 5. Dispersionsanalyse	71
1. Analytische Dispersionsrelation	72
2. Vorbetrachtungen	73
3. Lineare Mehrschrittverfahren	77
4. Energieerhaltende Mehrschrittverfahren	82
5. Prädiktor-Korrektor-Verfahren	85
6. Runge-Kutta-Verfahren	91
7. Anmerkungen zu MRTD	95
Kapitel 6. Numerische Experimente	99
1. Waveletverfahren mit zeitlichen Zentraldifferenzen	99
2. Verfahren höherer Ordnung	104
3. Performancevergleich zweier Implementierungen: Nur Skalierungsfunktionen—Skalierungsfunktionen und Wavelets	108

Kapitel 7. Ausblicke	111
1. Maxwell'sche Gleichungen	111
2. Allgemeine Gebiete	114
3. Dispersionsanalyse	115
4. Integrationsverfahren	117
5. Statische Gitterverfeinerung mit Wavelets	118
Kapitel 8. Zusammenfassung	121
Literaturverzeichnis	125
Anhang A. Runge-Kutta-Verfahren	129
Anhang B. Differenzenoperatoren	137

Einleitung

Im Laufe der letzten drei Jahrzehnte haben sich unter den raumdiskretisierenden numerischen Verfahren im Zeitbereich zur Approximation elektromagnetischer Felder für Probleme der Hochfrequenz- und Mikrowellentechnik hauptsächlich finite Differenzen (FDTD) und die Transmission Line Matrixmethode (TLM) durchgesetzt. Die Entwicklung von FDTD geht zurück auf eine Arbeit von Yee (1966), in der ein neuartiges Gitter vorgeschlagen wurde, das sich als besonders vorteilhaft erwies. Es handelt sich um ein gestaffeltes Gitter, bei dem in einem Gitterpunkt lediglich eine Feldkomponente definiert ist. Einen sehr guten und umfassenden Überblick über FDTD verschafft z.B. das Buch von Taflove (1995). Einen ganz anderen Ansatz verfolgt TLM, die auf einer Arbeit von Johns & Beurlle (1971) basiert. Darin wird ein Algorithmus zur Lösung zweidimensionaler Streuprobleme vorgeschlagen, der nicht auf einer Diskretisierung der zugrundeliegenden partiellen Differentialgleichung beruht, sondern die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen durch die Ausbreitung von Pulsen auf einem Gitter oder eben einer Matrix von Leitungen beschreibt. In der Folge wurde der Ansatz auf dreidimensionale Probleme erweitert, an krummlinige Gitter angepaßt und sogar auf andere Gleichungstypen übertragen. Eine ausgezeichnete Übersicht über die Entwicklung bis 1985 gibt der Artikel von Hoefler (1985).

Trotz dieser langen Entwicklungszeit der Algorithmen und der enormen Leistungssteigerung der Computer ist es aber auch heute noch eine Herausforderung, das elektromagnetische Verhalten etwas komplizierterer Geometrien vorherzusagen. Die elektromagnetische Simulation kompletter MMICs etwa überfordert jeden existierenden Rechner und Algorithmus. Aber auch einzelne Bauelemente, wie planare Spulen oder Transformatoren, oder auch Gehäusedurchführungen bereiten immer wieder Probleme beim Versuch, sie zu charakterisieren.

Um die Menge der lösbaren Probleme zu vergrößern, gibt es viele Ansätze. Eine Möglichkeit ist der Einsatz von Parallelrechnern. Ein eindrucksvolles Beispiel wurde kürzlich auf der ACES 99 von Andersson & Ledfelt (1999) mit der Berechnung des Feldes einer Dipolantenne eines Flugzeugs gegeben, wobei FDTD mit einer Milliarde Zellen benutzt wurden. Andere Möglichkeiten sind z.B. die Verwendung von Differenzenoperatoren mit einer höheren Konvergenzordnung

(Young, Gaitonde & Shang 1997) und die lokale Gitterverfeinerung (Thoma & Weiland 1996).

Anfang der achtziger Jahre wurden die Grundsteine dessen gelegt, was heute Wavelets genannt wird. Wavelets können als Basisfunktionen zur Darstellung von Funktionen benutzt werden. Sie ermöglichen eine Zeit-Frequenzanalyse ähnlich einer gefensterten Fouriertransformation (Kaiser 1994). Durch diese Zeit-Frequenzanalyse wird es möglich, Daten zu komprimieren, d.h. eine Funktion wird durch eine möglichst wenig abweichende approximiert, die aber zur Beschreibung viel weniger Koeffizienten benötigt. Dies wird erreicht, indem man die zu approximierende Funktion wavelettransformiert und anschließend alle hinreichend kleinen Entwicklungskoeffizienten zu Null setzt. Vor allem in der Datenkompression von Bildern wird dies angewandt. Am bekanntesten ist die Verwendung waveletbasierter Kompressionsverfahren bei der Kodierung von Fingerabdrücken beim FBI in den USA („Wavelet Scalar Quantization (WSQ)“ standardisiert in: ANSI/NIST-CLS 1-1993).

Bei der numerischen Feldberechnung wurden Wavelets zunächst bei Integralgleichungsmethoden im Frequenzbereich verwendet. Vereinfachend gesprochen stellt man die Matrix wie gewohnt auf, führt dann eine Wavelettransformation durch und ersetzt kleine Matrixeinträge durch Nullen. Man kann dies sehr gut mit der Kompression von Bildern vergleichen, wobei das Bild hier durch die Matrixeinträge gegeben ist. Man erhält so statt einer vollbesetzten Matrix eine schwachbesetzte, so daß das Gleichungssystem besser lösbar ist. Insbesondere läßt sich durch eine einfache Vorkonditionierung der komprimierten Matrix eine Verkleinerung der Konditionszahl und damit eine Erhöhung der Genauigkeit der Lösung erreichen und bei iterativen Gleichungslösern zusätzlich die notwendige Anzahl der Iterationsschritte verringern. Oberschmidt & Jacob (1998) berichten von einer Rechenzeitersparnis insgesamt von etwa 66-75% gegenüber der konventionellen Implementierung.

Krumpholz & Katehi (1996) untersuchten die Möglichkeit der Verwendung von Wavelets als Entwicklungsfunktionen in der Momentenmethode angewandt auf die Maxwell'schen Gleichungen im Zeitbereich. Ihre Ergebnisse waren sehr vielversprechend, die Rede war von einer Reduktion der Anzahl der Unbekannten um zwei Größenordnungen und der Rechenzeit um eine.

In dieser Arbeit wird der Versuch unternommen, eine Antwort auf die Frage, welche Vorteile bieten Wavelets bei der Lösung elektromagnetischer Probleme im Zeitbereich, zu finden. Oder anders formuliert: Haben waveletbasierte Methoden das Potential, FDTD und TLM als dominierende Verfahren abzulösen?

Hierzu werden zunächst in Kapitel 2 die grundlegenden Prinzipien zusammengestellt, um dann in Kapitel 3 über den Stand der Forschung zu berichten. In Kapitel 4 werden ganze Klassen von waveletbasierten Multiskalenverfahren entwickelt. Ihre Dispersionseigenschaften werden in Kapitel 5 untersucht. Diese

Untersuchung führte zur Entwicklung von neuen energieerhaltenden zeitlichen Integrationsverfahren. Numerische Ergebnisse der Algorithmen werden in Kapitel 6 präsentiert. Anschließend werden in Kapitel 7 einige Ausblicke gegeben, was noch zu tun ist, um Wavelets zur Lösung praktischer Probleme effektiv einsetzen zu können. Abschließend folgt die Zusammenfassung in Kapitel 8.

Darstellung der Prinzipien

Zunächst sollen einige für diese Arbeit grundlegende und das Verständnis der folgenden Kapitel notwendige Prinzipien erläutert werden. Dieses Kapitel gliedert sich in drei Abschnitte.

Im ersten werden zwei Grundmethoden zur Diskretisierung partieller Differentialgleichungen beschrieben. Ziel ist es, Begriffe zu klären sowie Unterschiede und Gemeinsamkeiten der Verfahren herauszuarbeiten. Dies ist notwendig, um prinzipielle Unterschiede zwischen der von Werthen (1998) und der von Krumpholz & Katehi (1996) vorgeschlagenen Vorgehensweisen zu verstehen.

Danach werden Wavelets und einige ihrer Eigenschaften beleuchtet, um dem Leser ein Grundverständnis zu vermitteln. Besonderer Wert wird hierbei auf die Tatsache gelegt, daß für lineare Operatoren die diskreten Gleichungen, die entstehen, wenn man nur Skalierungsfunktionen benutzt, und die, wenn man sowohl Skalierungsfunktionen als auch Wavelets benutzt, äquivalent sind. Das bedeutet, man hat zwei Wege, um zu genau demselben¹ Ergebnis zu kommen.

Der letzte Abschnitt stellt den Unterschied, den es macht, wenn man erst die zeitliche und dann die räumliche Diskretisierung vornimmt, oder wenn man erst die räumliche und dann die zeitliche durchführt, heraus. Im Grunde ist die Reihenfolge vertauschbar. Zunächst jedoch räumlich zu diskretisieren erleichtert nach Ansicht des Autors die Entwicklung von Verfahren höherer Konvergenzordnung erheblich.

1. Gewinnung von Differenzgleichungen

Leider sind die Maxwell'schen Gleichungen nur für recht wenige praktische Probleme analytisch lösbar. Man sucht daher die Gleichungen numerisch zu lösen. Numerisch heißt hier, daß die partiellen Differentialgleichungen durch Differenzgleichungen zwischen endlich vielen Freiheitsgraden approximiert werden. Diese Differenzgleichungen werden algorithmisiert und auf Computern implementiert. Es gibt nun verschiedene Wege, zu diesen Differenzgleichungen zu gelangen.

Einer besteht darin, sich auf eine endliche Punktmenge im Raum zu beschränken und den Differentialoperator direkt durch einen Differenzenoperator

¹ Von Rundungsfehlern sei hier einmal abgesehen.

auf dem so eingeführten Gitter zu ersetzen. Dabei wird der Differenzenoperator so gewählt, daß der Abbruchfehler zwischen ihm und dem Differentialoperator hinreichend schnell gegen null geht. Wichtigstes Hilfsmittel hierbei ist die Taylorreihenentwicklung. Dieses Verfahren nennt man finite Differenzen. FDTD gehört zu dieser Kategorie.

Anstatt die Menge der Freiheitsgrade durch die Beschränkung auf ein Punktgitter zu reduzieren, kann man auch die gesuchte Funktion durch eine endliche Linearkombination von Basisfunktionen approximieren. Die Basisfunktionen müssen so gewählt sein, daß sie Basen von Unterräumen des Funktionenraums, in dem man die Lösung sucht, sind. Diese Unterräume müssen dem eigentlich interessierenden Funktionenraum, häufig $L_2(\Omega)$ oder $H^1(\Omega)$, beliebig nahe kommen, so daß man im Prinzip jede in Frage kommende Funktion beliebig genau darstellen kann. In einem zweiten Schritt setzt man die Linearkombination in die partielle Differentialgleichung ein und bildet innere Produkte mit Testfunktionen. Dieses Vorgehen wird Petrov-Galerkin-Methode genannt. Beispiele hierfür sind die Methode der finiten Elemente (FEM) und Randelemente (BEM) (Großmann & Roos 1994, Brenner & Scott 1994).

Obwohl beide Ansätze recht unterschiedlich sind, können sie zu derselben Differenzgleichung führen. So haben Krumpholz, Huber & Russer (1995) das FDTD-Schema für den Freiraum mit Hilfe der Petrov-Galerkin-Methode hergeleitet. Oder Jameson (1996) bemerkt, daß die Galerkin Diskretisierung des Differentialoperators d/dx mit den Daubechies-Wavelets D4 dasselbe Differenzschema liefert, wie wenn man das Schema vierter Ordnung mit minimaler Anzahl der Stützstellen mit klassischen Methoden (Collatz 1955) bestimmt. Das bedeutet, daß Differenzgleichungen unterschiedlich interpretiert werden können. Man kann die Unbekannten von FDTD einerseits als Werte einer Gitterfunktion, d.h. als Punktwerte, auffassen oder andererseits als Stufenhöhen einer Treppenapproximation, d.h. als Mittelwerte über Intervalle der Längen Δx . Im einen Fall ist die Lösung nur an den Gitterpunkten definiert, im anderen überall.

1.1. Finite Differenzen. Die Methode der finiten Differenzen besteht aus zwei Schritten. Zunächst wird das kontinuierliche Gebiet Ω der unabhängigen Variablen durch ein diskretes Gebiet ω ersetzt (Abbildung 2.1). Dieses diskrete Gebiet ω ist eine (endliche) Punktmenge aus Ω und heißt Gitter, die Punkte entsprechend Gitterpunkte. Meist wird der Einfachheit halber ein kubisches Gitter gewählt. Aber auch hexagonale oder gar unstrukturierte Gitter sind möglich. Hierbei werden die Funktionen kontinuierlichen Arguments durch sog. Gitterfunktionen mit diskretem Argument, die nur auf dem Gitter ω definiert sind, ersetzt. Der Funktionenraum, in dem man die Lösung der partiellen Differentialgleichung sucht, wird also durch den Funktionenraum der Gitterfunktionen approximiert.

Im nächsten Schritt wird in jedem Gitterpunkt $x_i \in \omega$ die Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Randbedingungen durch Differenzenoperatoren approximiert. D.h. man sucht eine Linearkombination von Funktionswerten an

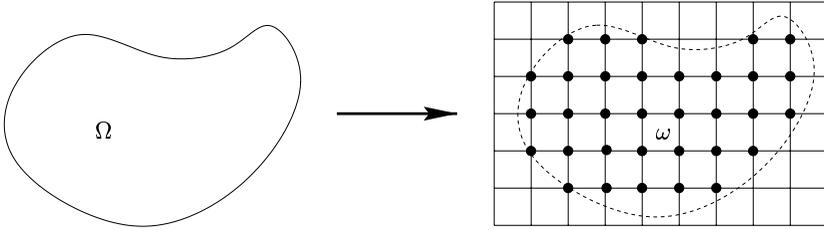


ABBILDUNG 2.1. Einschränkung des Gebiets Ω auf ein quadratisches Gitter ω .

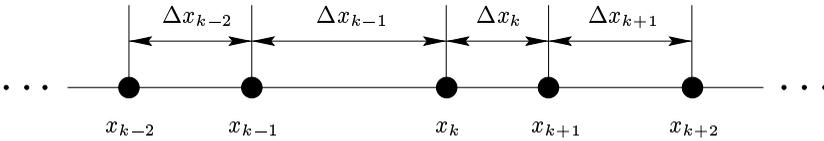


ABBILDUNG 2.2. Inhomogenes eindimensionales Gitter.

Gitterpunkten aus der Umgebung von x_i , so daß im Punkt x_i die Differentialgleichung näherungsweise erfüllt ist, wenn man die echte Lösung in die Differentialgleichung einsetzt. Der Fehler, den man hierbei macht, heißt lokaler Diskretisierungsfehler. Seine Asymptotik bestimmt die Konsistenzordnung des finiten Differenzenschemas. Die Umgebung um x_i , die man mehr oder weniger willkürlich gewählt hat, nennt man den Stern oder Gitterpunktstern des Differenzenoperators.

Die Vorgehensweise soll am eindimensionalen Beispiel des Differentialoperators d/dx illustriert werden. Gegeben sei das inhomogene Gitter nach Abbildung 2.2. Ein möglicher Stern $S(x_k)$ um x_k aus drei Punkten ist

$$(2.1) \quad S(x_k) = \{x_{k-1}, x_k, x_{k+1}\}.$$

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ die zu differenzierende Funktion und dreimal differenzierbar. Zunächst wird f in den Gitterpunkten in Taylorreihen um x_k mit Lagrangeschem Restglied entwickelt mit $p, q \in [0, 1]$

$$(2.2) \quad f(x_{k+1}) = f(x_k) + \Delta x_k \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_k} + \frac{\Delta x_k^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_k} + \frac{\Delta x_k^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_k + p \Delta x_k}$$

$$(2.3) \quad f(x_{k-1}) = f(x_k) - \Delta x_{k-1} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_k} + \frac{\Delta x_{k-1}^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_k} - \frac{\Delta x_{k-1}^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_k - q \Delta x_{k-1}}.$$

Als Linearkombination der Funktionswerte ergibt sich so

$$\begin{aligned}
 \sum_{x_i \in \mathcal{S}(x_k)} a_i f(x_i) &= a_{k-1} f(x_{k-1}) + a_k f(x_k) + a_{k+1} f(x_{k+1}) \\
 &= (a_{k-1} + a_k + a_{k+1}) f(x_k) + (a_{k+1} \Delta x_k - a_{k-1} \Delta x_{k-1}) \frac{df}{dx} \Big|_{x_k} \\
 (2.4) \quad &+ (a_{k+1} \frac{\Delta x_k^2}{2} + a_{k-1} \frac{\Delta x_{k-1}^2}{2}) \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x_k} \\
 &+ a_{k+1} \frac{\Delta x_k^3}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_{x_k + p \Delta x_k} - a_{k-1} \frac{\Delta x_{k-1}^3}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_{x_k - q \Delta x_{k-1}}.
 \end{aligned}$$

Um die erste Ableitung möglichst gut zu approximieren, müssen die drei Gleichungen

$$(2.5) \quad a_{k-1} + a_k + a_{k+1} = 0$$

$$(2.6) \quad a_{k+1} \Delta x_k - a_{k-1} \Delta x_{k-1} = 1$$

$$(2.7) \quad a_{k+1} \frac{\Delta x_k^2}{2} + a_{k-1} \frac{\Delta x_{k-1}^2}{2} = 0$$

erfüllt sein. Als Lösung erhält man

$$(2.8) \quad a_{k-1} = - \frac{\Delta x_k}{\Delta x_{k-1} (\Delta x_k + \Delta x_{k-1})}$$

$$(2.9) \quad a_k = \frac{\Delta x_k - \Delta x_{k-1}}{\Delta x_k + \Delta x_{k-1}}$$

$$(2.10) \quad a_{k+1} = \frac{\Delta x_{k-1}}{\Delta x_k (\Delta x_k + \Delta x_{k-1})}$$

und als Fehler R

$$(2.11)$$

$$\begin{aligned}
 R &= a_{k+1} \frac{\Delta x_k^3}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_{x_k + p \Delta x_k} - a_{k-1} \frac{\Delta x_{k-1}^3}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_{x_k - q \Delta x_{k-1}} \\
 &= - \frac{\Delta x_k^4}{6 \Delta x_{k-1} (\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_{x_k + p \Delta x_k} - \frac{\Delta x_k \Delta x_{k-1}^2}{6 (\Delta x_k + \Delta x_{k-1})} \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_{x_k - q \Delta x_{k-1}}
 \end{aligned}$$

Offensichtlich geht R wie Δx^2 , wobei $\Delta x = \max(\Delta x_k : k \in \mathbb{Z})$, gegen null. Der lokale Diskretisierungsfehler geht also quadratisch gegen null, und man schreibt dafür kurz $R = O(2)$. Die Konsistenzordnung des Differenzenoperators ist also zwei.

Im Falle eines äquidistanten Gitters, d.h. $\Delta x_k = \Delta x$ für alle k , erhält man die bekannten Zentralfdifferenzen

$$(2.12) \quad a_{k-1} = - \frac{1}{2 \Delta x}, \quad a_k = 0, \quad a_{k+1} = \frac{1}{2 \Delta x}.$$

Außerordentlich wichtig ist selbstverständlich die Frage nach der Konvergenz des Schemas. Das Laxsche Äquivalenztheorem besagt, daß für konsistente Differenzenschemata für lineare Probleme Konvergenz gleichbedeutend mit Stabilität ist. Dies hat zur Folge, daß für alle expliziten Differenzenverfahren für hyperbolische Differentialgleichungen, und damit insbesondere auch für die Maxwell'schen Gleichungen, der Zeitschritt nach oben durch den Ortsschritt beschränkt wird. Dies ist die Aussage des Stabilitätskriteriums von Courant, Friedrichs und Lewy, das besagt, daß die Ausbreitung der Funktionswerte wenigstens so schnell wie die Ausbreitungsgeschwindigkeit erfolgen muß. Allerdings ist dieses Kriterium nur notwendig aber nicht hinreichend. Ein hinreichendes Kriterium liefert eine Stabilitätsanalyse des Verfahrens.

Ausführliche Darstellungen der Theorie der finiten Differenzen findet man bei Collatz (1955), Samarskij (1984), Thomas (1995) oder bei Meis & Marcowitz (1978).

1.2. Petrov-Galerkin Diskretisierung. Neben der Methode der finiten Differenzen zur Diskretisierung partieller Differentialgleichungen sind Petrov-Galerkin Diskretisierungen von großer Bedeutung. Hierbei wird nicht wie bei finiten Differenzen das Gebiet durch ein Gitter ersetzt und alle Funktionen durch ihre Werte in den Gitterpunkten, sondern die gesuchten Funktionen werden durch Linearkombinationen einer endlichen Anzahl von Ansatz- oder Basisfunktionen approximiert. Um nun ein Gleichungssystem zu generieren, wird gefordert, daß die gesuchte Approximation die ursprünglichen Gleichungen in dem Sinne erfüllt, daß die Gleichheit für Projektionen auf einen von (endlich vielen) Testfunktionen aufgespannten Funktionenraum gegeben ist. Die folgende knappe Darstellung orientiert sich im wesentlichen an Reinhardt (1985).

Sei A eine Abbildung des Unterraums $D(A)$ eines Banachraums E in einen Banachraum F . Gesucht sei $u \in D(A)$, so daß

$$(2.13) \quad Au = w, \quad w \in F$$

gilt. Ferner bezeichne E_n einen endlichdimensionalen Unterraum von $D(A)$ der Dimension $\dim E_n = n$ und P_m eine Projektion von F auf den Unterraum $F_m \subset F$ der Dimension $\dim F_m = m < \infty$. Eine Projektionsmethode besteht darin, daß man eine Lösung $u_n \in E_n$ für ein gegebenes $w \in F$ der Gleichung

$$(2.14) \quad P_m Au_n = P_m w$$

sucht. Im Fall $m = n$ ist (2.14) für jedes $w \in F$ eindeutig lösbar, falls die Einschränkung $P_n A|_{E_n}$ eine injektive Abbildung von E_n in F_n ist.

Sei $\{\psi_1, \dots, \psi_M\}$ eine Basis von F_m . Dann gibt es für jedes $y \in F$ eindeutig bestimmte Konstanten $\alpha_j = \alpha_j(y)$, $j = 1, \dots, M$, so daß

$$(2.15) \quad P_m y = \sum_{j=1}^M \alpha_j(y) \psi_j$$

gilt. Definiert man die Abbildungen Ψ_j , $j = 1, \dots, M$ über

$$(2.16) \quad \Psi_j : y \in F \rightarrow \alpha_j(y) \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, M,$$

so erhalten wir die linearen Funktionale Ψ_j , $j = 1, \dots, M$ im zu F dualen Raum \tilde{F} , die

$$(2.17) \quad \Psi_j(\psi_k) = \delta_{kj}$$

erfüllen sollen und damit eine Basis von \tilde{F} bilden. (2.14) ist daher äquivalent zu

$$(2.18) \quad \Psi_j(Au_n) = \Psi_j(w), \quad j = 1, \dots, M.$$

Die gesuchte Lösung $u_n \in E_n$ kann als

$$(2.19) \quad u_n = \sum_{k=1}^N c_k \phi_k$$

dargestellt werden, wobei $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ eine Basis des E_n ist. Setzt man (2.19) in (2.18) ein, so erhält man ein (evtl. nichtlineares) Gleichungssystem mit M Gleichungen in N Unbekannten.

Ist F ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt (f, g)

$$(2.20) \quad (f, g) : F \times F \rightarrow \mathbb{C},$$

so läßt sich (2.18) nach dem Rieszschen Darstellungssatz, d.h. für jedes beschränkte lineare Funktional $L : F \rightarrow \mathbb{C}$ existiert genau ein $l \in F$, so daß $L(g) = (g, l)$ für alle $g \in F$, als

$$(2.21) \quad (Au_n, \tilde{\psi}_j) = (w, \tilde{\psi}_j), \quad j = 1, \dots, M$$

schreiben, wobei $\{\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_M\}$ ebenfalls eine Basis von F_m bildet und zu $\{\psi_1, \dots, \psi_M\}$ biorthogonal ist

$$(2.22) \quad (\psi_j, \tilde{\psi}_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, M.$$

Die Zurückführung des Operatorproblems (2.13) auf das Gleichungssystem (2.21) nennt man *Petrov-Galerkin Methode*².

Ist darüberhinaus A eine lineare Abbildung, so erhält man das lineare Gleichungssystem

$$(2.23) \quad \sum_{k=1}^N (A\phi_k, \tilde{\psi}_j) c_k = (w, \tilde{\psi}_j), \quad j = 1, \dots, M.$$

Ist $M = N$ und die Systemmatrix S mit $s_{jk} = (A\phi_k, \tilde{\psi}_j)$ regulär, so sind die gesuchten Koeffizienten c_k eindeutig bestimmt. Die Funktionen ϕ_k , $k = 1, \dots, N$

²In der elektrotechnischen Literatur findet sich stattdessen in Anlehnung an das Buch von Harrington (1968) meist die Bezeichnung *Momentenmethode*.

nennt man Ansatz- oder Basisfunktionen, die Funktionen $\tilde{\psi}_j$, $j = 1, \dots, M$ Testfunktionen. Man unterscheidet nun noch einige Spezialfälle (Reinhardt 1985), wobei der Raum der Ansatzfunktionen E_n sowie der der Testfunktionen F_n Unterräume desselben Hilbertraums $H (= E = F)$ sind:

- *Bubnov-Galerkin Methode* (häufig auch nur Galerkin Methode): in diesem Fall wählt man $\tilde{\psi}_j = \phi_j$, $j = 1, \dots, N$ (also $F_n = E_n$).

$$(2.24) \quad \sum_{k=1}^N (A\phi_k, \phi_j) c_k = (w, \phi_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

- *Ritz Methode* (oder Rayleigh-Ritz Methode): Dies ist ein Spezialfall der Galerkin Methode, falls A positiv semidefinit ist.
- *Momentenmethode*: Sei B eine injektive Abbildung von $D(A)$ in H . Nun wählt man $\tilde{\psi}_j = B\phi_j$, $j = 1, \dots, N$ (also $F_n = BE_n := \text{span}\{B\phi_j : j = 1, \dots, N\}$) und erhält

$$(2.25) \quad \sum_{k=1}^N (A\phi_k, B\phi_j) c_k = (w, B\phi_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

- *Methode der kleinsten Quadrate*: Dies ist ein Sonderfall der Momentenmethode, falls A selbst injektiv ist. Man wählt dann $B = A$ und erhält

$$(2.26) \quad \sum_{k=1}^N (A\phi_k, A\phi_j) c_k = (w, A\phi_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

2. Wavelets

Dieser Abschnitt erläutert zunächst sehr pragmatisch den Grundgedanken der Multiskalenanalyse anhand der Approximation einer Funktion durch zwei unterschiedlich feine Treppenfunktionen. Anschließend wird die Definition der Multiskalenanalyse gegeben. Sie ist die Grundlage der Konstruktion einiger wichtiger Waveletfamilien wie der Daubechieschen Wavelets oder der biorthogonalen B-Spline-Wavelets. Zudem liefert sie das Konzept zur Darstellung von Funktionen in Waveletbasen sowie die schnelle Wavelettransformation. Damit ist die Multiskalenanalyse der zentrale Ausgangspunkt für die Entwicklung waveletbasierter Methoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen.

Um die in dieser Arbeit getroffene Wahl der Waveletfamilie begründen zu können, wird eine kurze Übersicht über die wichtigsten Familien und ihre Eigenschaften gegeben.

Im letzten Teil dieses Abschnitts wird die Äquivalenz von Algorithmen, die nur Skalierungsfunktionen, und solchen, die sowohl Skalierungsfunktionen als auch Wavelets verwenden, gezeigt. Diese Äquivalenz ist bei allen Algorithmen für lineare Probleme gegeben. In den bisher im hochfrequententechnischen Bereich publizierten Arbeiten gewinnt man jedoch häufig den Eindruck, daß die Verwendung von

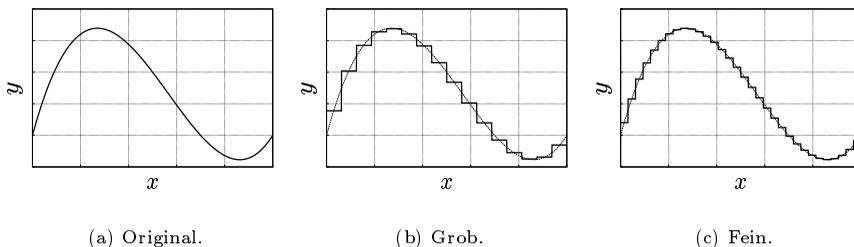


ABBILDUNG 2.3. Approximation einer Funktion durch Treppenstufen.

Wavelets eine Erhöhung der Genauigkeit mit sich brächte. Dem ist nicht so, und deshalb wird dieser Aspekt hier besonders betont.

2.1. Grundzüge der Theorie. Im folgenden werden nur ein paar wenige Aspekte der Wavelettheorie beleuchtet, die für das prinzipielle Verständnis waveletbasierter Verfahren zur numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen essentiell sind. Für ausführliche Darstellungen der Wavelettheorie sei auf die Bücher von Kaiser (1994), Louis, Maaß & Rieder (1994), Meyer (1992) sowie Erlebacher, Hussaini & Jameson (1996) verwiesen.

2.1.1. *Vorüberlegung.* Wir betrachten die Approximation einer Funktion f durch Treppenstufen. Der Graph $y = f(x)$ ist in Abbildung 2.3(a) dargestellt. In einer ersten groben Approximation g_0 verwenden wir recht breite Rechteckfunktionen, so daß der Fehler noch recht groß ist

$$(2.27) \quad g_0(x) = \sum_n c_{0,n} \varphi(x - n).$$

Die $c_{0,n}$ sind die Entwicklungskoeffizienten, hier die Höhen der Treppenstufen, und φ ist die charakteristische Funktion, die so breit wie eine Treppenstufe ist. Der Graph von g_0 ist in Abbildung 2.3(b) zu sehen. Im nächsten Schritt halbieren wir die Breite der Treppenstufen, approximieren also f durch g_1

$$(2.28) \quad g_1(x) = \sum_n c_{1,n} \varphi(2x - n).$$

Abbildung 2.3(c) stellt dies dar.

Was haben wir gemacht? Wir waren unzufrieden mit der Approximation g_0 und haben eine neue Approximation g_1 durchgeführt, die uns jetzt gut genug erscheint. Bei dieser erneuten Approximation haben wir nicht auf bereits vorhandenes Wissen, nämlich g_0 , zurückgegriffen. In beiden Fällen sind die Entwicklungskoeffizienten die Mittelwerte über Intervalle, allerdings unterschiedlicher Breite. Es stellt sich die Frage, ob es nicht möglich wäre, nur sozusagen den Unterschied

der Approximationen zu berechnen, d.h. wir suchen eine Darstellung der Form

$$(2.29) \quad g_1(x) = \sum_n c_{1,n} \varphi(2x - n) = \sum_n c_{0,n} \varphi(x - n) + \sum_n d_{0,n} \psi(x - n).$$

Gibt es solche Funktionen ψ ? Und wie hängen die Koeffizienten $c_{1,n}$ mit $c_{0,n}$ und $d_{0,n}$ zusammen?

Die Antworten lauten

- Es gibt sie, sie heißen Wavelets.
- Und den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten stellt die schnelle Wavelettransformation her.

Abstrahieren wir dies noch ein wenig. In einem ersten Schritt haben wir versucht, eine Funktion f durch eine Funktion φ und ihre verschobenen Versionen darzustellen und erhielten die Approximation g_0 . Im zweiten Schritt führten wir eine gleichartige Approximation durch, aber mit der mit den Faktor zwei gestauchten Funktion $\varphi(2x)$ (und ihren verschobenen Versionen). Hierbei ist natürlich zu fordern, daß der Fehler der zweiten Approximation zumindest nicht größer sein darf als der der ersten

$$(2.30) \quad \|f - g_1\| \leq \|f - g_0\|.$$

Das hat zur Folge, daß φ verfeinerbar sein muß, d.h. es müssen Koeffizienten a_n existieren, so daß

$$(2.31) \quad \varphi(x) = \sum_n a_n \varphi(2x - n)$$

gilt. Dies sieht man ganz leicht ein, wenn man $f(x) = \varphi(x)$ wählt. Der Fehler von g_0 ist dann null, also muß auch der Fehler von g_1 null sein, d.h. φ muß exakt darstellbar sein. Die Koeffizienten a_n spielen eine außerordentlich wichtige Rolle in der Wavelettheorie, da aus ihnen die Koeffizienten der schnellen Wavelettransformation folgen, sowie die Funktionswerte der Skalierungsfunktionen und der Wavelets an den dyadischen Punkten $x_{j,k} = k2^{-j}$, $k, j \in \mathbb{Z}$ festgelegt werden.

2.1.2. Multiskalenanalyse. Die Idee der Multiskalenanalyse besteht darin, daß man eine Folge ineinandergeschachtelter Unterräume des Funktionenraums, in dem man die Lösung sucht, betrachtet. Ein Raum enthält alle anderen Räume größerer Auflösung. Die Wavelets sind nun die Funktionen, die gewissermaßen zwischen den Räumen liegen. Betrachtet man Projektionen einer Funktion auf Unterräume verschiedener Skalen oder Auflösung, so stellen die Waveletkoeffizienten ein Maß für die Verbesserung der Approximation dar. Diese Eigenschaft erlaubt die Konstruktion adaptiver Algorithmen zur Lösung von Operatorgleichungen, und zwar erlaubt die berechnete Näherungslösung selbst eine Schätzung, wo die Diskretisierung fein genug war, und wo nicht.

DEFINITION 1. Eine Multiskalenanalyse des $L_2(\mathbb{R})$ ist eine aufsteigende Folge V_j , $j \in \mathbb{Z}$ abgeschlossener linearer Unterräume des $L_2(\mathbb{R})$

$$(2.32a) \quad \{0\} \subset \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset L_2(\mathbb{R})$$

mit den Eigenschaften:

$$(2.32b) \quad \bigcap_{-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}, \quad \bigcup_{-\infty}^{+\infty} V_j \text{ ist dicht in } L_2(\mathbb{R});$$

für alle $f \in L_2(\mathbb{R})$ und alle $j \in \mathbb{Z}$ gilt

$$(2.32c) \quad f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1};$$

für alle $f \in L_2(\mathbb{R})$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$(2.32d) \quad f(x) \in V_0 \iff f(x - k) \in V_0;$$

es existiert eine Funktion $\varphi(x) \in V_0$, deren ganzzahlige Translate $\varphi(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$ eine Riesz-Basis von V_0 erzeugen, d.h.

$$(2.32e) \quad V_0 = \overline{\text{span}\{\varphi(x - k) : k \in \mathbb{Z}\}}.$$

Die einzelnen Funktionenräume V_j werden also von Translationen der skalierten Funktion $\varphi(2^j x)$ aufgespannt, d.h. ihre Basen sind durch

$$(2.33) \quad \varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

gegeben. φ wird daher auch Skalierungsfunktion genannt. Sie erfüllt wegen (2.32c), (2.32d) und (2.32e) eine Skalierungsgleichung (oder besser Verfeinerungsgleichung), d.h. es gibt eine Folge $\{h_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$ reeller Zahlen mit

$$(2.34) \quad \varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k).$$

Die Funktionenräume V_j selbst werden auch als unterschiedliche Skalen bezeichnet. Je größer j ist, umso mehr Details einer Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ können dargestellt werden; umgekehrt je kleiner j , umso gröber ist eine Darstellung einer Funktion auf der Skala j , d.h. umso größer ist der Approximationsfehler³.

2.1.3. *Wavelets*. Die Idee zur Konstruktion von Wavelets besteht darin, daß man die Komplementräume W_j von V_j in V_{j+1} betrachtet

$$(2.35) \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

Offensichtlich ist

$$(2.36) \quad V_j = \bigoplus_{k \leq j-1} W_k$$

³Es ist zu bemerken, daß einige Autoren die Unterräume V_j andersherum numerieren, d.h. je kleiner der Index, umso feinere Details können dargestellt werden.

und damit

$$(2.37) \quad L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} W_k.$$

Die Räume W_j erben die Skalierungseigenschaften der Räume V_j

$$(2.38) \quad f(x) \in W_0 \iff f(2^j x) \in W_j.$$

Eine Funktion ψ , deren skalierte und verschobene Versionen

$$(2.39) \quad \psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$$

eine Riesz-Basis für den Raum W_j bilden, heißt Wavelet.

Von großem Interesse sind Orthonormalbasen. Hierfür ist der folgende Satz (z.B. Louis et al. (1994)) grundlegend.

SATZ 1. *Sei $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ eine Multiskalenanalyse, die von der Skalierungsfunktion $\varphi \in V_0$ — die orthogonal zu ihren verschobenen Versionen ist — erzeugt wird. Die Funktion $\psi \in V_1$, definiert durch*

$$(2.40a) \quad \psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2x - k),$$

$$(2.40b) \quad g_k = (-1)^k h_{1-k},$$

wobei $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ die Koeffizienten der Skalierungsgleichung (2.34) sind, besitzt die folgenden Eigenschaften

1. $\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Orthonormalbasis für W_j ,
2. $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Orthonormalbasis für $L_2(\mathbb{R})$,
3. ψ ist ein Wavelet mit $c_\psi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\omega|^{-1} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega = 2 \ln 2$.

Verallgemeinerungen von Multiskalenanalysen auf mehrere Dimensionen sind problemlos möglich (Louis et al. 1994).

Die gebräuchlichste Methode zur Konstruktion von Wavelets und Skalierungsfunktionen ist die Suche nach Koeffizienten für die Skalierungsgleichungen (2.34) und (2.40a), wobei gewisse Nebenbedingungen zu stellen sind (z.B. kompakte Träger, Symmetrie, ...).

Solche Konstruktionen von Wavelets basieren wesentlich auf der Translations- und Dilatationsinvarianz, d.h. letzten Endes auf der Anwendung der Fouriertransformation. Wenn nun aber das Problem nur leicht geändert wird, ist dies nicht mehr möglich. Das einfachste Beispiel hierfür ist die Einschränkung des Definitionsbereichs auf ein Intervall, d.h. man sucht Lösungen in $L_2(\Omega)$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Verallgemeinerungen der Definition der Multiskalenanalyse für derartige Fälle findet man bei Sweldens (1995).

2.1.4. *Biorthogonale Wavelets.* Im wichtigen Fall biorthogonaler Wavelets benötigt man neben der eigentlichen Multiskalenanalyse eine weitere, zu der ersten duale. Sie besteht aus Räumen \tilde{V}_j die dual zu den Räumen V_j sind. Ihre Basen sind durch die duale Skalierungsfunktion $\tilde{\varphi}$ und ihre entsprechend gestauchten und verschobenen Versionen $\tilde{\varphi}_{j,k}$ gegeben. Diese dualen Skalierungsfunktionen sind biorthogonal zu den Skalierungsfunktionen, in dem Sinne daß

$$(2.41) \quad (\varphi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k'}) = \delta_{k,k'} \quad \text{für} \quad k, k' \in \mathbb{Z}$$

gilt, und sie erfüllen selbst eine Verfeinerungsgleichung

$$(2.42) \quad \tilde{\varphi}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_k \tilde{\varphi}(2x - k).$$

Duale Wavelets werden ganz ähnlich wie im orthogonalen Fall definiert. Und zwar gilt hier

$$(2.43) \quad \tilde{\psi}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_k \tilde{\varphi}(2x - k),$$

$$(2.44) \quad \tilde{g}_k = (-1)^k h_{1-k}$$

und (ganz wichtig)

$$(2.45) \quad g_k = (-1)^k \tilde{h}_{1-k}.$$

Die dualen Wavelets sind biorthogonal zu den Wavelets

$$(2.46) \quad (\psi_{j,m}, \tilde{\psi}_{j',m'}) = \delta_{m,m'} \delta_{j,j'} \quad \text{für} \quad m, m', j, j' \in \mathbb{Z}$$

und spannen die Räume \tilde{W}_j auf, die das Komplement von \tilde{V}_j in \tilde{V}_{j+1} sind, und es gilt $\tilde{W}_j \perp V_j$. Daher sind sie zu den Skalierungsfunktionen derselben und größerer Skalen (aber nicht feinerer!) orthogonal

$$(2.47) \quad (\varphi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j',m}) = 0 \quad \text{für} \quad k, m, j, j' \in \mathbb{Z}, j' \geq j,$$

ebenso

$$(2.48) \quad (\tilde{\varphi}_{j,k}, \psi_{j',m}) = 0 \quad \text{für} \quad k, m, j, j' \in \mathbb{Z}, j' \geq j.$$

2.1.5. *Schnelle Wavelettransformation.* Aufbauend auf der Multiskalenanalyse lassen sich mit Hilfe der Skalierungsgleichungen bzw. der Verfeinerungsgleichungen Algorithmen zur schnellen Wavelettransformation konstruieren. Dabei geht man davon aus, daß die Darstellung einer Funktion f , deren Waveletkoeffizienten man wissen möchte, auf einer feinsten Skala V_M gegeben sei

$$(2.49) \quad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{M,k} \varphi_{M,k}.$$

Wegen $V_M = V_{M-1} \oplus W_{M-1}$ kann f auch dargestellt werden als

$$(2.50) \quad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{M-1,k} \varphi_{M-1,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{M-1,k} \psi_{M-1,k}.$$

Diese Zerlegung kann man natürlich auch mehrfach anwenden. Nach M -facher Anwendung, d.h. $V_M = V_0 \oplus W_0 \oplus \dots \oplus W_{M-1}$, erhält man

$$(2.51) \quad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{0,k} \varphi_{0,k} + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{m,k} \psi_{m,k}.$$

Die Umformung von (2.49) nach (2.51) nennt man *schnelle Wavelettransformation*.

Hierzu müssen für orthogonale Skalierungs- und Waveletfunktionen die inneren Produkte $(f, \varphi_{m,k})$ und $(f, \psi_{m,k})$ berechnet werden. Unter Berücksichtigung der Skalierungsgleichungen (2.34) und (2.40a) erhält man

$$(2.52) \quad c_{m,k} = (f, \varphi_{m,k}) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l (f, \varphi_{m+1,2k+l}) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-2k} c_{m+1,l}$$

$$(2.53) \quad d_{m,k} = (f, \psi_{m,k}) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l (f, \varphi_{m+1,2k+l}) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{l-2k} c_{m+1,l}.$$

In der Sprache der Signalverarbeitung entspricht dies gerade einer Filterung der Koeffizienten $c_{m+1,k}$ mit den Filtern h und g (die allerdings quasi „umgedreht“ werden) und einem anschließenden „Sub-Sampling“ um den Faktor zwei. Mit Hilfe der Zerlegungsoperatoren H und G

$$(2.54) \quad H : l_2(\mathbb{Z}) \rightarrow l_2(\mathbb{Z})$$

$$(2.55) \quad c \mapsto Hc = \{(Hc)_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-2k} c_l\}$$

$$(2.56) \quad G : l_2(\mathbb{Z}) \rightarrow l_2(\mathbb{Z})$$

$$(2.57) \quad c \mapsto Gc = \{(Gc)_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{l-2k} c_l\}$$

kann man den Algorithmus zur schnellen Wavelettransformation auf den ersten M Skalen schematisch so darstellen:

$$\begin{array}{ccccccc} c_M & \xrightarrow{H} & c_{M-1} & \xrightarrow{H} & c_{M-2} & \cdots & c_1 & \xrightarrow{H} & c_0 \\ & \searrow G & & \searrow G & & & & \searrow G & \\ & & d_{M-1} & & d_{M-2} & \cdots & d_1 & & d_0 \end{array}$$

Auch die Rekonstruktion läßt sich einfach mit Hilfe der Skalierungsgleichungen und der Orthogonalität herleiten. Wegen $V_{m+1} = V_m \oplus W_m$ gilt

$$(2.58) \quad \sum_k c_{m+1,k} \varphi_{m+1,k} = \sum_k c_{m,k} \varphi_{m,k} + \sum_k d_{m,k} \psi_{m,k},$$

oder mit den Skalierungsgleichungen

$$(2.59) \quad \sum_k c_{m+1,k} \varphi_{m+1,k} = \sum_k c_{m,k} \sum_l h_l \varphi_{m+1,2k+l} + \sum_k d_{m,k} \sum_l g_l \varphi_{m+1,2k+l}.$$

Aus einem Koeffizientenvergleich oder unter Ausnutzung der Orthogonalität der Basis $\{\varphi_{m+1,k}\}$, $k \in \mathbb{Z}$ erhält man die Rekonstruktionsformel

$$(2.60) \quad c_{m+1,n} = \sum_l h_{n-2l} c_{m,l} + \sum_l g_{n-2l} d_{m,l}.$$

Dies entspricht einem „Up-Sampling“ mit dem Faktor zwei, d.h. zwischen zwei Koeffizienten $c_{m,i}$ und $c_{m,i+1}$ bzw. $d_{m,i}$ und $d_{m,i+1}$ wird eine Null eingefügt, dann werden die so modifizierten Koeffizientenfolgen c' und d' mit den Filtern h bzw. g gefiltert und danach addiert.

Mit den zu H und G adjungierten Operatoren H^* und G^*

$$(2.61) \quad H^* : l_2(\mathbb{Z}) \rightarrow l_2(\mathbb{Z})$$

$$(2.62) \quad c \mapsto H^* c = \{(H^* c)_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{k-2l} c_l\}$$

$$(2.63) \quad G^* : l_2(\mathbb{Z}) \rightarrow l_2(\mathbb{Z})$$

$$(2.64) \quad c \mapsto G^* c = \{(G^* c)_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{k-2l} c_l\}$$

ergibt sich folgendes Schema zur inversen schnellen Wavelettransformation:

$$\begin{array}{ccccccc} c_0 & \xrightarrow{H^*} & c_1 & \xrightarrow{H^*} & c_2 & \cdots & c_{M-1} & \xrightarrow{H^*} & c_M \\ & \nearrow G^* & & \nearrow G^* & & & & \nearrow G^* & \\ d_0 & & d_1 & & d_2 & \cdots & d_{M-1} & & \end{array}$$

Wie bereits angedeutet, kann man die Koeffizienten der Skalierungsgleichungen als Filter auffassen, mit denen die Daten zerlegt bzw. rekonstruiert werden. Analyse- und Synthesefilter unterscheiden sich im Falle orthogonaler Wavelets nur in der Reihenfolge der Filterkoeffizienten.

Im allgemeineren Fall biorthogonaler Wavelets benötigt man unterschiedliche Filter. Und zwar gilt hier für die schnelle Wavelettransformation

$$(2.65) \quad c_{m,k} = (f, \tilde{\varphi}_{m,k}) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_l(f, \tilde{\varphi}_{m+1,2k+l}) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{l-2k} c_{m+1,l}$$

$$(2.66) \quad d_{m,k} = (f, \tilde{\psi}_{m,k}) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_l(f, \tilde{\varphi}_{m+1,2k+l}) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{l-2k} c_{m+1,l}$$

und für die inverse

$$(2.67) \quad c_{m+1,n} = \sum_l h_{n-2l} c_{m,l} + \sum_l g_{n-2l} d_{m,l}.$$

Zu bemerken ist noch, daß die schnelle Wavelettransformation ihren Namen zurecht trägt. Sie ist von der Ordnung $O(N)$, d.h. der Rechenaufwand steigt linear mit der Länge des Signals, wohingegen die schnelle Fouriertransformation (FFT) „nur“ von der Ordnung $O(N \log N)$ ist.

2.1.6. *Kompressionsvermögen.* Zum Verhalten der Waveletkoeffizienten zu immer feineren Skalen hin findet man bei Dahmen (1997) die für Haar-Wavelets gültige Beziehung

$$(2.68) \quad |d_{j,k}| \leq 2^{-j} \|f'\|_{L_2([2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)])}.$$

Aus ihr läßt sich ablesen, daß die Waveletkoeffizienten zu immer feineren Skalen hin exponentiell kleiner werden, überall dort, wo die Funktion f eine beschränkte Ableitung besitzt. Hierdurch ergibt sich die Möglichkeit, Daten zu komprimieren und für partielle Differentialgleichungen die adaptive Gittergenerierung.

Außerdem konzentrieren sich die Koeffizienten um Singularitäten. Man kann also aus den Maxima auf jeder einzelnen Skala Orte großer Ableitung gut erkennen und umso genauer, je feiner die Skala ist. Diese Eigenschaft kann man z.B. zur Erkennung von Kanten in Bildern nutzen.

Bei der Kompression der Daten, werden einfach alle Koeffizienten, die kleiner als ein Schwellwert sind, zu Null gesetzt. Man kann diesen Wert konstant für alle verschiedenen Skalen wählen, oder auch so, daß er variiert. So schlägt Göttemann (1998) vor, die Schwelle abhängig von den zwei Parametern $\varepsilon > 0$ und $\sigma \geq 0$ zu wählen

$$(2.69) \quad \tilde{c}_{J_0,k} := \begin{cases} 0 & \text{für } |c_{J_0,k}| < \varepsilon \\ c_{J_0,k} & \text{für } |c_{J_0,k}| \geq \varepsilon \end{cases}$$

$$(2.70) \quad \tilde{d}_{j,k} := \begin{cases} 0 & \text{für } j \geq J_M \text{ oder } |d_{j,k}| < \varepsilon 2^{-j\sigma} \\ d_{j,k} & \text{für } J_0 \leq j < J_M \text{ und } |d_{j,k}| \geq \varepsilon 2^{-j\sigma} \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet $J_M > J_0$ die feinste Skala, d.h. die Skala, die äquivalent zur Darstellung mit den Wavelets ist (deswegen werden alle Waveletkoeffizienten ab Level J_M zu Null gesetzt), J_0 entsprechend die gröbste Skala. Göttemann beweist unter gewissen Voraussetzungen an die zugrundeliegenden Skalierungsfunktionen, daß es möglich ist, den Fehler zwischen der unkomprimierten und der komprimierten Darstellung zu beschränken, dann aber wächst die Anzahl der Koeffizienten ungleich Null exponentiell mit zunehmender feinsten Skala J_M . Die Zunahme hängt von der Glattheit der darzustellenden Funktion (gemessen in einer entsprechenden Sobolev-Norm) und von der Anzahl der Raumdimensionen ab. Das bedeutet aber, daß die ε und σ optimalerweise auch adaptiv gewählt werden müßten.

2.2. Klassifizierung von Wavelets. Die verschiedenen Waveletfamilien unterscheiden sich darin, ob sie einen kompakten Träger haben (d.h. im Reellen sind die Funktionen außerhalb eines endlichen Intervalls identisch null), ob sie symmetrisch sind und welche Orthogonalitätsrelationen sie erfüllen.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die in dieser Arbeit angesprochenen Waveletfamilien.

Name	kompakt	symmetrisch	orthogonal	biorthogonal
Haar	×	×	×	
Battle-Lemarié		×	×	
Daubechies	×		×	
biorth. B-Splines	×	×		×

Die Haar-Wavelets sind die einzigen existierenden reellen Wavelets mit kompaktem Träger, die symmetrisch und orthogonal sind. Ansonsten läßt sich eine der drei Eigenschaften nicht erfüllen.

In der elektrotechnischen Literatur fanden bisher die Wavelets von Battle und Lemarié (Krumpholz & Katehi 1996), die zwar symmetrisch und orthogonal sind, allerdings keinen kompakten Träger haben, die von Daubechies (Werthen & Wolff 1996, Werthen 1998, Cheong 1999), die kompakten Träger haben und orthogonal aber nicht symmetrisch sind, und die Haar-Wavelets (Goverdhanam & Katehi 1997, Fujii 1999), die kompakten Träger haben und sowohl symmetrisch als auch orthogonal, dafür aber nicht differenzierbar sind, Anwendung. In dieser Arbeit werden die biorthogonalen B-Spline-Wavelets verwendet, da sie kompakten Träger haben und symmetrisch sind. Leider muß man dadurch auf Orthogonalität verzichten, was zur Folge hat, daß man mit vier Sätzen von Filterkoeffizienten anstatt mit zweien zu tun hat.

2.3. Lineare Operatoren in Waveletbasen. Eine Funktion $f \in V_{J_M} \subset L_2$ läßt sich nach den Gleichungen (2.49) und (2.51) äquivalent nur durch Skalierungsfunktionen der Skala J_M ausdrücken oder durch Skalierungsfunktionen der Skala J_0 und Wavelets der Skalen J_0, \dots, J_{M-1} . Die beiden Darstellungen sind zueinander wavelettransformiert. In der folgenden Rechnung wird im eindimensionalen beispielhaft gezeigt, daß die Bilder linearer Operatoren wieder zueinander wavelettransformiert sind. Das hat zur Folge, daß es (von numerischen Rundungsfehlern abgesehen) egal ist, welche Darstellung einer Funktion man wählt, um ihr Bild zu bestimmen. Mit anderen Worten, man gewinnt nichts, verliert aber auch nichts an Genauigkeit durch die Verwendung von Wavelets.

Sei L ein linearer Operator. Das Bild g der Funktion f , dargestellt durch die Skalierungsfunktionen der Skala J_M , ergibt sich zu

$$(2.71) \quad g = Lf = L \sum_k c_{J_M,k} \varphi_{J_M,k}(x) = \sum_k c_{J_M,k} L\varphi_{J_M,k}(x).$$

Entsprechend ergibt sich das Bild \hat{g} der Funktion f , dargestellt durch die Skalierungsfunktionen der Skala $J_0 < J_M$ und der Wavelets der Skalen J_0, \dots, J_{M-1} ,

zu

$$(2.72) \quad \begin{aligned} \hat{g} = Lf &= L \left(\sum_k c_{J_0,k} \varphi_{J_0,k}(x) + \sum_{j=J_0}^{J_{M-1}} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x) \right) \\ &= \sum_k c_{J_0,k} L\varphi_{J_0,k}(x) + \sum_{j=J_0}^{J_{M-1}} \sum_k d_{j,k} L\psi_{j,k}(x). \end{aligned}$$

Die Verfeinerungsrelationen, etwas anders geschrieben, lauten

$$(2.73) \quad \varphi_{j,k}(x) = \sum_l h_{l-2k} \varphi_{j+1,l}(x)$$

$$(2.74) \quad \psi_{j,k}(x) = \sum_l g_{l-2k} \varphi_{j+1,l}(x).$$

Einsetzen in die Summanden der Skala J_0 ergibt

$$(2.75) \quad \begin{aligned} \hat{g} &= \sum_k c_{J_0,k} L \sum_l h_{l-2k} \varphi_{J_0+1,l}(x) + \sum_k d_{J_0,k} L \sum_l g_{l-2k} \varphi_{J_0+1,l}(x) + \\ &\quad + \sum_{j=J_0+1}^{J_{M-1}} \sum_k d_{j,k} L \psi_{j,k}(x) \\ &= \sum_l \left(\underbrace{\sum_k c_{J_0,k} h_{l-2k} + \sum_k d_{J_0,k} g_{l-2k}}_{=c_{J_0+1,l}} \right) L\varphi_{J_0+1,l} + \sum_{j=J_0+1}^{J_{M-1}} \sum_k d_{j,k} L\psi_{j,k}(x). \end{aligned}$$

Der eingeklammerte Ausdruck ist aber gerade die Formel zur inversen Wavelettransformation. Wir erhalten also

$$(2.76) \quad \hat{g} = \sum_k c_{J_0+1,k} L\varphi_{J_0+1,k}(x) + \sum_{j=J_0+1}^{J_{M-1}} \sum_k d_{j,k} L\psi_{j,k}(x).$$

Wiederholte Anwendung liefert schließlich

$$(2.77) \quad \hat{g} = \sum_k c_{J_M,k} L\varphi_{J_M,k}(x) = g,$$

was zu zeigen war.

Das Ergebnis überträgt sich offenbar entsprechend auf mehrdimensionale Fälle und solche mit einfachen Randbedingungen, d.h. periodische bzw. (anti-)symmetrische Fortsetzung.

3. Zeitintegration

Die meisten Untersuchungen von Wavelets in der Literatur zur Hochfrequenztechnik diskretisierten zuerst zeitlich und anschließend räumlich. Eine Operatorgleichung der Form

$$(2.78) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + L \right) f = 0$$

wird durch Ersetzen der zeitlichen Ableitung durch Zentralfdifferenzen in die Form

$$(2.79) \quad f_{k+1} = f_{k-1} - 2\Delta t L f_k$$

gebracht, wobei Δt der Zeitschritt und f_k die Approximation von f zum Zeitpunkt $k\Delta t$ ist. Anschließend wird L diskretisiert.

Möchte man eine ganze Familie von verschiedenen räumlichen Diskretisierungen mit unterschiedlichen Wavelets studieren, erscheint dieser Ansatz auf den ersten Blick günstig. Allerdings wird sich herausstellen, daß die Approximation mit Zentralfdifferenzen die Asymptotik des Fehlers begrenzt. D.h. daß unter Umständen durch die Genauigkeit der räumlichen Diskretisierung eine viel höhere Genauigkeit erzielt werden könnte, wenn man zeitlich genauere Verfahren nutzen würde.

Es ist also (im Prinzip) kein Problem, mit Wavelets den Operator L räumlich zu diskretisieren, aber nach geeigneten Verfahren zur zeitlichen Integration muß erst gesucht werden. Diese Überlegung führt gerade zur Umkehrung der Reihenfolge der Diskretisierung. Wir approximieren zunächst L räumlich durch D , wobei g der Vektor der Unbekannten der Entwicklung sei

$$(2.80) \quad \frac{dg}{dt} = Dg.$$

Nun ist ein (hochdimensionales) gewöhnliches Differentialgleichungssystem entstanden, dessen Unbekannte die Entwicklungskoeffizienten sind. Es liegt natürlich nahe, zur Integration die bekannten Standardverfahren wie Mehrschritt- und Runge-Kutta-Verfahren einzusetzen.

Im Grunde ist die Reihenfolge der Diskretisierung unerheblich. Man kann geeignete zeitliche Diskretisierungen finden, so daß man zu denselben Algorithmen gelangt. Allein der zweite Weg scheint natürlicher. Deshalb wird dieser Weg gewählt. Er wird auch als Methode der Geraden (Großmann & Roos 1994) bezeichnet.⁴

⁴Am bekanntesten —aus der hochfrequenztechnischen Literatur— auf dem Gebiet der Methode der Geraden dürften die Arbeiten von Pregla et.al. sein. Dabei wird im Frequenzbereich räumlich bis auf eine Dimension diskretisiert, so daß man ebenfalls ein hochdimensionales gewöhnliches Differentialgleichungssystem erhält. Allerdings wird dieses dann nicht durch numerische Integration gelöst, sondern durch Hauptachsentransformation und anschließende analytische Integration. Eine Übersicht findet man bei Pregla & Pascher (1989).

Stand der Forschung

Seit Anfang der 90er wurden Arbeiten publiziert, die sich mit der Anwendung von Wavelets zur Lösung partieller Differentialgleichungen beschäftigten. Liandrat, Perrier & Tchamitchian (1992) und Liandrat & Tchamitchian (1990) lösen die eindimensionale Burgersschen Gleichung mit periodischen Randbedingungen, wobei Spline-wavelets und davon abgeleitete Funktionen (Vaguelettes) zur räumlichen Diskretisierung eingesetzt werden. In Latta & Tenenbaum (1990) werden für dasselbe Problem räumlich Daubechies-Wavelets eingesetzt, allerdings wohl nur die Skalierungsfunktionen. Restrepo & Leaf (1994) setzen ebenfalls Daubechies-Wavelets ein (wohl auch nur die Skalierungsfunktionen) und lösen im eindimensionalen die Wellengleichung, die Wellengleichung für seichte Gewässer und die Boussinesq'sche Gleichung. Verbrennungsvorgänge (ein- und zweidimensional) werden von Fröhlich & Schneider (1993) betrachtet. Von Chen (1994) werden die Vlasov-Gleichungen gelöst, von Urban (1995) und von Weiss (1996) die Navier-Stokes-Gleichungen. Göttelmann (1998) untersucht die Anwendbarkeit von Wavelets zur Berechnung der Advektionsgleichung auf der Kugel, wozu spezielle Wavelets entwickelt werden.

Die hier zitierten Arbeiten sollen nur einen groben Überblick der Arbeiten außerhalb der Hochfrequenztechnik geben und zeigen, für welche Probleme Wavelets bereits eingesetzt wurden. Glowinski, Periaux, Ravachol, Pan, Wells & Zhou (1993) und Dahmen (1997) geben ausführlichere Darstellungen. Insbesondere Dahmen (1997) führt sehr gut aus, wie Wavelets zur Lösung von Operatorgleichungen eingesetzt werden können.

Die zitierten Arbeiten bestätigen die Vermutung, daß sich mit Wavelets adaptive Algorithmen entwerfen lassen. Allerdings stellt sich heraus, daß sie numerisch sehr aufwendig sind. Auch erfordert die Anwendung auf realistische Geometrien (und nicht auf Kuben oder Toren) die Entwicklung spezieller Randwavelets. Dies allein ist schon, sogar abgesehen von der numerischen Effektivität, keine triviale Aufgabe. So heißt es auf der Homepage des EU-TMR-Projekts „Wavelets in Numerical Simulation“¹ am Ende der Projektbeschreibung:

¹<http://www.ann.jussieu.fr/wavelet/waveRT.html>

„In spite of these promising perspectives, present implementations cannot yet compete with the best existing schemes that have been developed over the years. This will probably remain the case for quite some while. This is partly because new complex data structures have to be developed to exploit the full potential of wavelet based multiscale methods.“

Im gleichen Sinne urteilen Glowinski et al. (1993, S. 273f) in ihrer Schlußfolgerung:

„On the basis of few experiments we can expect compactly supported wavelets to have a most interesting potential for the numerical solution of fluid flow problems. However the practical implementation of this new kind of approximation gives rise to highly nontrivial difficulties which have to be successfully addressed if one wishes to see wavelet-based approximations successfully competing with finite difference and finite element approximations.“

Einen interessanten Aspekt der Effektivität von waveletbasierten Algorithmen spricht Göttelmann (1998) an. Und zwar werden ja durch die Wavelettransformation die Differenzenoperatoren breiter, bekommen also mehr Koeffizienten. Dadurch steigt natürlich die Zahl der Rechenoperationen. Für seine Anwendungen schätzt er die Zunahme des Rechenaufwandes ab. Andererseits konnte er das Kompressionsvermögen abschätzen. Daraus läßt sich erhoffen, daß es möglich sein könnte, in der Waveletdarstellung bei geeigneter Kompression sogar mit weniger Rechenoperationen auszukommen als in der Darstellung nur mit Skalierungsfunktionen. Numerische Experimente bestätigen dies. Allerdings nur wenn die Daten starke Variationen in kleinen Gebieten aufweisen, sonst aber eher glatt sind. Leider war die Implementierung wohl nicht auf Effizienz ausgelegt, so daß lediglich die notwendigen Rechenoperationen gezählt wurden, der Algorithmus mit Wavelets aber trotzdem sehr viel mehr Rechenzeit in Anspruch nahm.

Die ersten Publikationen über Versuche, waveletbasierte Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen in der Hochfrequenztechnik anzuwenden, sind Krumpholz & Katehi (1995) und Krumpholz & Katehi (1996). Darin wird vorgeschlagen, die Maxwell'schen Gleichungen mit Hilfe des Galerkinverfahren zu diskretisieren. Die zeitliche Entwicklung wird mit Rechteckfunktionen beschrieben, die räumliche Feldverteilung mit Hilfe der Battle-Lemarié-Wavelets (Battle 1987, Lemarié 1988). Dabei werden in Anlehnung an die Yeezelle in FDTD die Schwerpunkte der Ansatzfunktionen entsprechend verschoben. Dies führt zeitlich zu einem Zentralfdifferenzschema für die Entwicklungskoeffizienten, wobei elektrisches und magnetisches Feld um einen halben Zeitschritt versetzt sind. Die Battle-Lemarié-Wavelets haben den Vorteil, daß sie symmetrisch und orthogonal sind. Allerdings haben sie keinen kompakten Träger und klingen nur exponentiell ab. Dies hat zur Folge, daß die Differenzenoperatoren unendlich viele Koeffizienten

haben. Um trotzdem praktisch damit rechnen zu können, werden die Differenzenoperatoren auf 18 bzw. 19 Koeffizienten eingeschränkt. Dadurch ist der numerische Aufwand je Zeitschritt und Entwicklungskoeffizient etwa neunmal größer als bei FDTD. Zur Modellierung perfekt leitender Wände wird das Spiegelungsprinzip angewandt.

Dieses Konzept wird in zwei Versionen weiteruntersucht: S-MRTD (nur Skalierungsfunktionen und keine Wavelets) und W-MRTD (Skalierungsfunktionen und ein einziger Waveletlevel). Die Dispersionsanalyse zeigt, daß beide Varianten sich wesentlich besser als FDTD verhalten, abgesehen von sehr großen Wellenlängen. Allerdings zeigt sich, daß W-MRTD „spurious modes“ aufweist. Das Stabilitätslimit reduziert sich im Vergleich zu FDTD auf 68% (S-MRTD) bzw. 43% (W-MRTD). Darüberhinaus wird aufgrund praktischer Erfahrungen empfohlen, als Zeitschritt nur ein Fünftel des Limits zu wählen. Praktisch ausprobiert werden die beiden Algorithmen (wobei bei W-MRTD Wavelets nur in einer Raumrichtung verwendet werden!) an der Berechnung der Resonanzfrequenzen kubischer Hohlraumresonatoren, die leer bzw. zur Hälfte mit einem Dielektrikum gefüllt sind. Die Algorithmen sind nicht adaptiv. Es zeigt sich auch im numerischen Experiment, daß W-MRTD im Gegensatz zu S-MRTD Probleme mit „spurious modes“ hat. Um einen mit FDTD vergleichbaren Fehler zu erreichen, benötigt man bei S-MRTD und W-MRTD (abgesehen von „spurious modes“) nur etwa ein Fünftel der Unbekannten je Raumrichtung, d.h. insgesamt also nur $1/125 \approx 1\%$. Da man je Unbekannte zehnmal soviel rechnen muß, ergibt sich insgesamt eine Rechenzeitersparnis von 90%.

Hierzu sind zwei Bemerkungen angebracht. Zunächst zu den „spurious modes“ von W-MRTD. Wie im vorhergehenden Kapitel gezeigt wurde, muß es eigentlich egal sein, ob Wavelets verwendet werden oder nicht. Hier jedoch werden die Differenzenoperatoren durch endliche approximiert. Dies führt dazu, daß W-MRTD und S-MRTD, die ja eigentlich mit der schnellen Wavelettransformation ineinander überführbar sein sollten, nicht mehr äquivalent sind. Die „spurious modes“ sind also Folge der Beschneidung der Differenzenoperatoren. Zum zweiten wurde beim Rechenzeitvergleich auch FDTD mit einem Fünftel des Stabilitätslimits betrieben. Üblicherweise wählt man jedoch einen Wert so nahe wie möglich an der Stabilitätsgrenze, wodurch sich der Rechenzeitvorteil von MRTD aber auf nur noch etwa 50% verringert.

In der Folge wurde mit Battle-Lemarié-Wavelets im wesentlichen S-MRTD untersucht, d.h. Wavelets nur sporadisch und wenn in sehr simplen Geometrien eingesetzt: In Krumpholz, Winful & Katehi (1996) wird S-MRTD zur Berechnung einer Pulsausbreitung in einem nichtlinearen Medium benutzt (räumlich eindimensional). In Robertson, Tentzeris, Krumpholz & Katehi (1996) und Robertson, Tentzeris, Krumpholz & Katehi (1998) werden wieder Resonanzfrequenzen kubischer Hohlraumresonatoren untersucht. Diesmal mit dielektrischer Platte, mit dielektrischem Balken und mit dielektrischem Würfel. W-MRTD in nur einer

Raumrichtung wird nur an der Platte untersucht. In Tentzeris, Krumpholz & Katehi (1996) wird die Leitungsimpedanz einer geschirmten Streifenleitung mit einer 2D-Variante von S-MRTD berechnet. Bei all diesen Untersuchungen wird bestätigt, daß man durch die besseren Dispersionseigenschaften je Raumrichtung nur ein fünfteil der bei FDTD benötigten Unbekannten braucht, und daß die Rechenzeit bei einer Raumdimension nahezu doppelt so groß ist, bei zweien etwa ein fünfteil bis ein viertel und bei drei etwa ein Zehntel beträgt. Für MRTD wurde PML formuliert und in der S-MRTD-Variante erfolgreich bei der Berechnung einer Patch-Antenne eingesetzt (Tentzeris, Robertson & Katehi 1998). Inwieweit die W-MRTD-Methode die Möglichkeit zur Adaptivität bietet, wurde in Tentzeris, Cangellaris & Katehi (1997) und Tentzeris, Robertson & Katehi (1997) anhand einer Parallelplattenleitung mit einem dielektrischen Einsatz —als zweidimensionales Problem formuliert (eigentlich ja nur ein eindimensionales Problem für den TEM-Mode)— untersucht. Eingesetzt wurde wiederum nur ein Waveletlevel in nur einer Raumrichtung, in der anderen lediglich Skalierungsfunktionen. Es zeigt sich, daß die Wavelets lediglich in räumlich begrenztem Gebiet signifikant beitragen, genaue Fehlerangaben fehlen aber leider. In Tentzeris & Katehi (1998) schließlich wird W-MRTD mit einem Level in einer Richtung auf Hohlleiterfilter angewandt und gezeigt, daß Wavelets eine adaptive Gitterverfeinerung ermöglichen, nicht aber, daß sich der Aufwand auch lohnt.

In Goverdhanam, Tentzeris, Krumpholz & Katehi (1996), Goverdhanam & Katehi (1997) und Goverdhanam, Tentzeris & Katehi (1998) wird die Möglichkeit untersucht, statt der Battle-Lemarié- die Haar-Wavelets für die räumliche Diskretisierung zu nehmen. Ausgehend von der Yeezelle werden auch hier über eine Galerkin-Diskretisierung Differenzgleichungen erzeugt.² Zeitlich erhält man Zentraldifferenzen, räumlich durch die Haar-Wavelets ebenfalls. Wiederum wird maximal ein Waveletlevel benutzt. Hierbei entstehen entkoppelte Schemata, d.h. die Skalierungskoeffizienten werden für sich berechnet, die Waveletkoeffizienten für sich und die Entwicklungskoeffizienten der gemischten Terme für sich. Die Schemata sind lediglich über Randbedingungen gekoppelt. Perfekt leitende Wände werden hier nicht durch das Spiegelungsprinzip approximiert, sondern durch lineare Interpolation. Angewandt wurde dieses Verfahren auf Rechteckhohlleiter, geschirmte Streifenleitung und Parallelplattenleitung mit und ohne dielektrischen Einsatz. Leider fehlen Performancevergleiche und Genauigkeitsvergleiche zu FDTD.

²Es muß darauf hingewiesen werden, daß zwar die entstehenden Algorithmen korrekt sind, nicht aber die mathematische Herleitung. Es werden nämlich dabei innere Produkte zwischen der Deltadistribution und Rechteckfunktionen ausgewertet, wobei die Ausblendeigenschaft der Deltadistribution verwendet wird, allerdings zum Teil an Stellen, an denen die Rechteckfunktion nicht stetig ist! D.h. einige Integrale existieren gar nicht und werden willkürlich auf einen „passenden“ Wert gesetzt. Korrekt wäre eine umgekehrte Vorgehensweise, und zwar räumlich Zentraldifferenzen verwenden, kein gestaffeltes Gitter, und dann mit der schnellen Wavelettransformation den Rest ausrechnen (vgl. die Arbeiten von Werthen).

Fujii untersuchte ebenfalls dieses Verfahren (Fujii & Hofer 1998, Fujii 1999). Auch er benutzt lediglich einen Waveletlevel, allerdings in alle Raumrichtungen. Es werden im Rahmen seiner Arbeiten ein-, zwei- und dreidimensionale Algorithmen entwickelt.

Seine Dispersionsanalyse zeigt, daß der Algorithmus sich genau wie FDTD verhält, d.h. mit doppelt bis achtmal sovielen Unbekannten wie FDTD dieselbe Genauigkeit liefert! Allerdings kann dabei der Zeitschritt gegenüber FDTD verdoppelt werden. Dieses Ergebnis wird durch folgende Überlegung gestützt. Der Algorithmus mit Wavelets ist äquivalent zu einem, der nur Skalierungsfunktionen verwendet, dafür aber doppelt so viele Unbekannte je Raumrichtung hat. Das ist aber gerade eine finite Differenzenapproximation mit Zentraldifferenzen ohne gestaffeltes Gitter, d.h. elektrisches und magnetisches Feld sind in jedem Gitterpunkt definiert. Natur dieses Zentraldifferenzschemas ist es nun, in gegeneinander verschobene Yeeschemata mit der doppelten Ortsschrittweite zu zerfallen. Dadurch wird der Waveletalgorithmus natürlich nicht genauer, man rechnet das Feld nur an mehr Gitterpunkten aus. Außerdem verdoppelt sich scheinbar der maximal mögliche Zeitschritt, da der Ortsschritt nur noch halb so groß ist.

Numerische Experimente mit den Randbedingungen nach Goverdhanam et. al. bestätigten dies. Fujii entwickelte dann neue Randbedingungen für perfekt leitende Wände, indem er sie um einen viertel Ortsschritt verschob. Durch diese Korrektur gelingt es, mit gleich vielen Unbekannten wie bei FDTD ähnliche Genauigkeit zu erlangen. Was bleibt ist der doppelte Zeitschritt. Man benötigt mit den Randbedingungen nach Fujii also etwa denselben Speicherplatz wie bei FDTD, die Simulationen sind aber nach der halben Zeit fertig.

Zahlreiche Anwendungen stützen dies: Fujii wendete seine Algorithmen zur Berechnung der Resonanzfrequenzen einer an beiden Enden kurzgeschlossenen Leitung (1D) und von Hohlraumresonatoren mit oben genannten dielektrischen Einsätzen (3D) an. Darüberhinaus berechnete er S-Parameter eines Rechteckhohlleiters mit dünner und dicker Irisblende (inklusive Kanten- und Eckenkorrektur des Feldes sowie PML; 2D), einen Mikrostreifenleitungstiefpaß und eine planare Spiralinduktivität (mit Murs absorbierende Randbedingung erster Ordnung), und Rechteckhohlleiter mit dielektrischer Längsplatte und mit dielektrischem Pfosten.

Allerdings untersuchte Fujii nicht die Möglichkeit der Konstruktion adaptiver Algorithmen.

Eine weitere Variante der MRTD-Methode, nun aber mit Daubechies-Wavelets, findet sich in der Arbeit von Cheong (1999). Auch seine Diskretisierung basiert auf der Yeezelle und benutzt zeitlich Zentraldifferenzen. Zur räumlichen Modellierung verwendet er allerdings Daubechies Wavelets mit zwei verschwindenden Momenten. Diese Wavelets sind orthogonal und haben kompakten Träger, sind aber nicht symmetrisch. Auch hier wird mit der Galerkin-Methode diskretisiert. Cheong verwendet ausschließlich die Skalierungsfunktionen, seine Methode

entspricht also S-MRTD. Zur Erfüllung perfekt leitender Randbedingungen findet einmal mehr die Spiegelungsmethode Anwendung.

Zur Spiegelungsmethode ist anzumerken — abgesehen davon, daß sie ohnehin strenggenommen nur in Spezialfällen gilt — daß ihre Verwendung, also die Spiegelung der Koeffizienten am Rand, bei nichtsymmetrischen Basisfunktionen nicht zwingend zu einem symmetrischen Funktionsverlauf führt. Näherungsweise vielleicht, aber Bedenken sind wohl auf jeden Fall angebracht.

Cheong führt eine Dispersionsanalyse durch und vergleicht sein Verfahren mit FDTD und S-MRTD mit Battle-Lemarié-Wavelets. Seine Methode verhält sich deutlich besser als FDTD, und für kleine Wellenzahlen auch besser als S-MRTD. Sein Ergebnis belegt das schlechte Verhalten von S-MRTD für kleine Wellenzahlen, genaugenommen konvergiert S-MRTD gegen eine falsche Lichtgeschwindigkeit (Fehler im Prozentbereich! Grund ist auch hier die Beschränkung der Differenzenoperatoren). Als Anwendung werden (einmal mehr) die Resonanzfrequenzen eines kubischen Hohlraumresonators berechnet, der leer ist, oder eine Platte, einen Balken oder einen Würfel als dielektrische Inhomogenität enthält. Sein Vergleich mit FDTD ergibt, daß die von ihm vorgeschlagene Methode eine Reduzierung des Speicherbedarfs um den Faktor 32 und der Rechenzeit um den Faktor 13,4 erlaubt. Mit anderen Worten seine Methode ist etwas schneller als S-MRTD mit Battle-Lemarié-Wavelets, benötigt aber etwas mehr Speicher.

Ein davon abweichender Weg wird in Werthen & Wolff (1996), Werthen (1998) und Werthen & Wolff (1998) besprochen. Zwar beschreibt auch Werthen zunächst eine Galerkin-Diskretisierung, die zeitlich zu Zentralfdifferenzen und räumlich durch die Verwendung von Daubechies-Wavelets mit zwei verschwindenden Momenten zu einem Differenzenoperator führt, wobei er gleich mehrere Waveletlevel in Erwägung zieht. Dabei stellt er fest, daß zur Berechnung der Matrixdarstellung des partiellen Differentialoperators, d.h. hier des Rotationsoperators, lediglich die Kenntnis des Differenzenoperators zwischen Skalierungsfunktionen ausreicht, um mit Hilfe der schnellen Wavelettransformation alle weiteren Matrixelemente auszurechnen. Er schließt daraus, daß man ja nun keineswegs gezwungen ist, den Differenzenoperator, der durch die Verwendung von Daubechies-Wavelets impliziert wird, auch wirklich zu verwenden, sondern statt dessen z.B. Zentralfdifferenzen.

Hierbei deutet er selbstverständlich die Unbekannten, mit denen er rechnet, um. Diese repräsentieren nun keineswegs mehr Entwicklungskoeffizienten, sondern im Grunde Feldstärkewerte an den Gitterpunkten. Wavelets finden hier nun keine Anwendung mehr als Entwicklungsfunktionen, sondern nur noch die zugehörige Wavelettransformation hat Bedeutung. Mit anderen Worten: Hier wird ganz normal FDTD aufgestellt, alles in einen kubischen Kasten hineingepackt und die schnelle Wavelettransformation (mit periodischen Randbedingungen) durchgeführt. Dieses Vorgehen ist prinzipiell so auf alle raumdiskretisierenden Verfahren mit logisch kubischem Gitter übertragbar. Logisch kubisch heißt, daß das Gitter

nicht kubisch zu sein braucht, es kann auch krummlinig sein, aber daß die einzelnen Gitterpunkte genauso wie in einem kubischen Gitter durchnummeriert werden können. Es kann sich beispielsweise um ein verzerrtes kubisches Gitter handeln. Diese Vorgehensweise ließe sich z.B. auch auf TLM übertragen.

Auf einen gravierenden Nachteil solch einer Vorgehensweise muß jedoch hingewiesen werden. Vor Beginn der eigentlichen Rechnung muß der Operator mit Hilfe der Wavelettransformation aufbereitet werden, d.h. man muß ihn kennen. Das aber wiederum bedeutet, daß man sich für eine feinste Diskretisierung von vornherein entschieden haben muß. Dies widerspricht ein wenig dem Gedanken der Adaptivität. Schöner wäre es, wenn man im Laufe der Rechnung immer mehr Waveletlevel hinzufügen könnte, um das Gitter im Grunde beliebig zu verfeinern.

Werthen untersuchte seine Vorgehensweise an zwei Beispielen, einer Mäanderleitung in Streifenleitungstechnik und an einem dielektrischen Pfosten in einem Rechteckhohlleiter. Er benutzte drei Wavelettransformationen, also drei Waveletlevel, und setzte nach jedem Zeitschritt hinreichend kleine Koeffizienten zu null. Damit hatte er ein adaptives Verfahren und bemerkte, daß dies die Möglichkeit zur Aufwandsreduzierung biete. Leider fehlen genauere Untersuchungen über den Einfluß des Zunullsetzens und der Anzahl der Waveletlevel auf den Fehler und auf die Anzahl der relevanten Koeffizienten. Zur Genauigkeit findet sich lediglich der Hinweis, daß sein Algorithmus von der Genauigkeit so gut wie FDTD sei, was nicht verwundert, da es ja letztlich FDTD nur halt wavelettransformiert ist. In der Zusammenfassung seiner Dissertation äußert er sich indirekt zur Rechenzeit (Werthen 1998, S. 134):

„Allerdings ist im Vergleich zur FDTD-Methode das Verfahren an sich erheblich komplexer, so daß eine äußerst effiziente Implementierung der Verfahrens erforderlich ist, um die Vorteile des Verfahrens nutzen zu können.“

Alles in allem läßt sich zu Wavelets also sagen, daß sie in der Tat in der Lage sind, die Grundlage adaptiver Verfahren zu bilden, daß ihre Anwendung allerdings den numerischen Aufwand beträchtlich erhöht, es aber mit einer Unterdrückung der Nulloperationen gelingen könnte, wieder Boden gutzumachen. Das Hauptproblem ist die Implementierung der Algorithmen und die Entwicklung effizienter Datenstrukturen.

Die bisher im Bereich der Hochfrequenztechnik angestellten Untersuchungen haben sich jedoch durchweg nicht mit dieser Frage beschäftigt. In den verschiedenen MRTD-Varianten (mit Battle-Lemarié-, Haar- und Daubechies-Wavelets) tauchte das Problem der Vergrößerung des numerischen Aufwands nicht auf, weil Wavelets entweder gar nicht in Betracht gezogen wurden (Daubechies-Wavelets), nur ein Waveletlevel betrachtet wurde (Haar-Wavelets haben die Eigenschaft, daß bei nur einem Waveletlevel das Schema in einzelne FDTD-Schemata zerfällt, erst beim zweiten Waveletlevel werden die Differenzenoperatoren breiter und treten Verkoppelungen auf), oder die Differenzenoperatoren so beschränkt wurden, daß

der numerische Aufwand in etwa konstant blieb (womit man sich allerdings „spurious modes“ einhandelte). Werthen schweigt sich zu diesem Thema leider aus. Die berichteten Vorteile von MRTD mit Battle-Lemarié-Wavelets haben ihre Ursache in der höheren Approximationsordnung der kubischen Splines, nicht in der Verwendung von Wavelets. Und wenn man bedenkt, daß z.B. Differenzenoperatoren vierter Ordnung auch mit vier statt 18 Koeffizienten auskommen, stellt sich die Frage nach dem Sinn eines solchen Ansatzes ganz massiv.

Diese Arbeit versucht, die Lücke zu füllen und Anhaltspunkte zu liefern, ob und wie Wavelets zur Berechnung elektromagnetischer Felder im Zeitbereich effektiv eingesetzt werden können.

Waveletbasierte Multiskalenverfahren

1. Vorbetrachtung

Um zu klären, inwieweit Wavelets von Nutzen sind, wird zunächst versucht abzuschätzen, wie gut sich elektromagnetische Felder mit Wavelets komprimieren lassen. Hierfür werden als Beispiele die transversalen Verteilungen des elektrischen Feldes einer Koplanarleitung und eines Leitungsübergangs betrachtet. In beiden Fällen handelt es sich um Approximationen der Lösungen, die von Herrn Tobias Mangold mit TLM berechnet wurden.

Der Einfachheit halber wird bei der Wavelettransformation keine Rücksicht auf Randbedingungen genommen. Werthen (1998) weist zum Beispiel darauf hin, daß in diesem Fall in der Nähe von Rändern nicht komprimiert werden darf, da sonst die Simulation stark gestört wird. Trotzdem läßt sich so aber zumindest die Größenordnung abschätzen, wieviele Freiheitsgrade sich durch Wavelets einsparen lassen.

Es werden drei unterschiedliche Transformationen betrachtet:

Fall 1: Jede Zeile und jede Spalte werden einzeln wavelettransformiert und komprimiert. Die erreichten Besetzungen und dabei auftretenden Fehler werden über alle Zeilen und Spalten gemittelt.

Fall 2: Es wird zweidimensional wavelettransformiert, zunächst die Spalten und dann die Zeilen. Dadurch erhält man eine Aufteilung gemäß Abbildung 4.1(a). Dies entspricht einem Tensorproduktansatz, bei dem alle Kombinationen der Basisfunktionen verwendet werden.

Fall 3: Zweidimensionale Wavelettransformation, wobei aber nur der tieffrequente Anteil wiederum transformiert wird. Die Aufteilung der Koeffizienten ist in Abbildung 4.1(b) zu sehen.

Nach der Wavelettransformation werden alle Koeffizienten der Transformierten, deren Betrag kleiner als ein fest vorgegebener Schwellwert sind, zu Null gesetzt. Die Besetzung ist durch das Verhältnis von der Zahl der Koeffizienten ungleich Null zur Gesamtzahl der Koeffizienten gegeben. Den Fehler, der durch diese nicht-lineare Approximation entsteht, erhält man, indem man die inverse Wavelettransformation durchführt und mit den Originalkoeffizienten vergleicht. Hier wird die übliche l_2 -Norm benutzt.

$\varphi_0 \varphi_0$	$\psi_0 \varphi_0$	$\psi_1 \varphi_0$	$\psi_2 \varphi_0$
$\varphi_0 \psi_0$	$\psi_0 \psi_0$	$\psi_1 \psi_0$	$\psi_2 \psi_0$
$\varphi_0 \psi_1$	$\psi_0 \psi_1$	$\psi_1 \psi_1$	$\psi_2 \psi_1$
$\varphi_0 \psi_2$	$\psi_0 \psi_2$	$\psi_1 \psi_2$	$\psi_2 \psi_2$

(a) Tensorproduktansatz.

$\varphi_0 \varphi_0$	$\psi_0 \varphi_0$	$\psi_1 \varphi_1$	$\psi_2 \varphi_2$
$\varphi_0 \psi_0$	$\psi_0 \psi_0$		
$\varphi_1 \psi_1$		$\psi_1 \psi_1$	
$\varphi_2 \psi_2$		$\psi_2 \psi_2$	

(b) Nur tieffrequente Anteile werden weitertransformiert.

ABBILDUNG 4.1. Möglichkeiten zur zweidimensionalen Wavelettransformation.

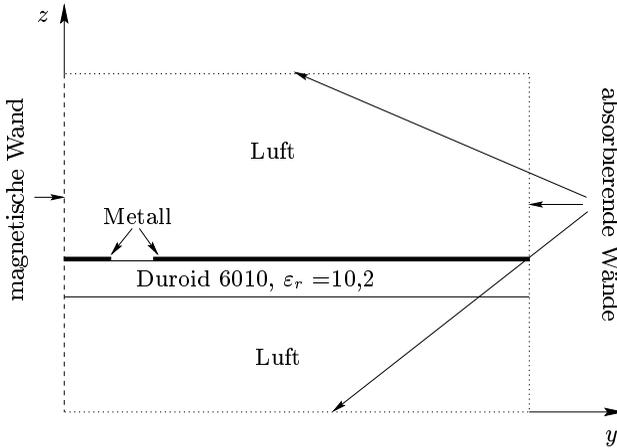


ABBILDUNG 4.2. Skizze der Koplanarleitung.

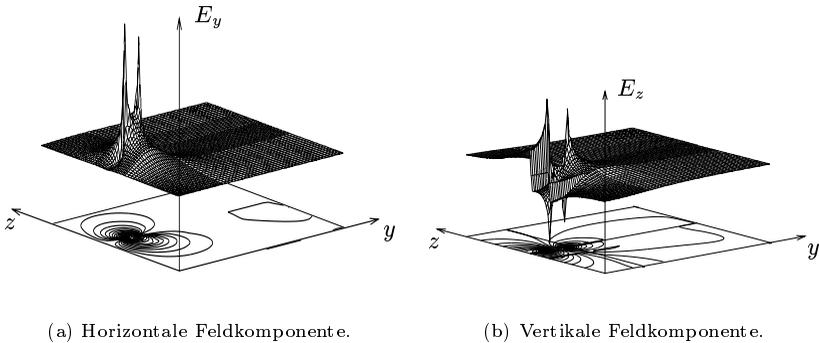
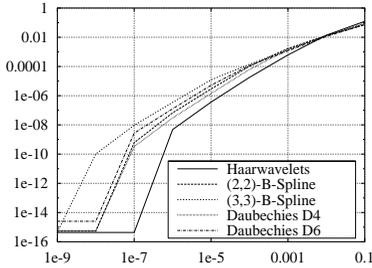
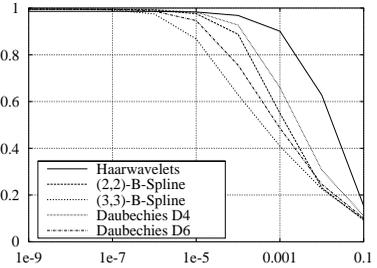


ABBILDUNG 4.3. Transversales elektrisches Feld einer Koplanarleitung.

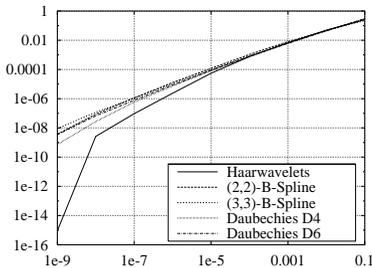
Abbildung 4.2 zeigt schematisch die Koplanarleitung im Querschnitt. Durch die magnetische Wand wurden in der Simulation nur die ungeraden Moden bezüglich der Symmetrieebene der Leitung berücksichtigt. Als absorbierende Randbedingungen wurden nichtreflektierende Leitungsabschlüsse verwendet. Die transversalen Komponenten des elektrischen Feldes des ungeraden Grundmodus in einem Querschnitt der Leitung sind in Abbildung 4.3 dargestellt.



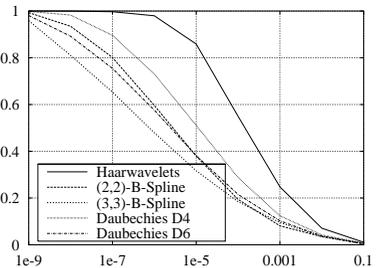
(a) Relativer Fehler über dem Schwellwert.



(b) Besetzung über dem Schwellwert.

ABBILDUNG 4.4. Fall 1: Kopplanarleitung, E_y .

(a) Relativer Fehler über dem Schwellwert.

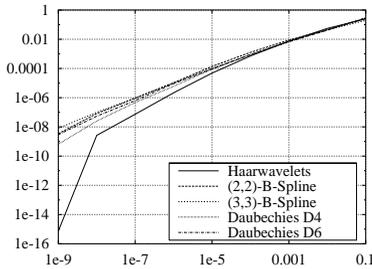


(b) Besetzung über dem Schwellwert.

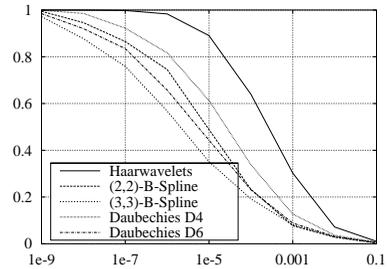
ABBILDUNG 4.5. Fall 2: Kopplanarleitung, E_y .

In den Abbildungen 4.4, 4.5 und 4.6 sind die Ergebnisse der drei unterschiedlichen Approximationen der y -Komponente der elektrischen Feldstärke der Kopplanarleitung zu sehen.

Im Fall 1 ist der Fehler kleiner als in den beiden anderen Fällen, was aber damit zusammenhängt, daß es sich ja nur etwa um ein Fünzigstel der Koeffizienten handelt und die l_2 -Norm benutzt wird. Zudem benötigt man mehr Koeffizienten als in den Fällen 2 und 3. Quadriert man jedoch die Besetzung, so kommt man



(a) Relativer Fehler über dem Schwellwert.



(b) Besetzung über dem Schwellwert.

ABBILDUNG 4.6. Fall 3: Koplantarleitung, E_y .

wieder nahezu in dieselbe Größenordnung. Man kann also grob das mehrdimensionale Verhalten durch das eindimensionale abschätzen. In den Fällen 2 und 3 ist der Fehler praktisch gleich und die Besetzung im Fall 2 etwas niedriger als im Fall 3. Dafür allerdings ist die Rechenzeit für die Transformationen im Fall 3 geringer. Für Fehler kleiner 1% sollten Schwellen kleiner als 10^{-3} gewählt werden, wobei dann mit Besetzungen im eindimensionalen zwischen 40% und 90% und im zweidimensionalen zwischen 10% und 25% zu rechnen ist. Auf drei Dimensionen scheinen also Besetzungen von 5% bis 10% möglich. Für sehr kleine Fehler (kleiner als 10^{-6} etwa) ist jedoch mit Besetzungen von vielleicht 50% zu rechnen. Dies legt den Schluß nahe, daß Waveletkompression nur für Gesamtsimulationsfehler im Promille- bis Prozentbereich sinnvoll einsetzbar ist, andernfalls wird die Besetzung zu groß, um den Mehraufwand zu rechtfertigen. Darüberhinaus ist zu erkennen, daß die Haar-Wavelets den kleinsten Fehler zu einer Schwelle erzeugen, aber auch zur schlechtesten Kompression führen. Bezüglich der Kompression scheinen B-Splines vorteilhaft zu sein. Die Ergebnisse für die E_z -Komponente sind sehr ähnlich.

Zum Vergleich wurde die transversale Feldverteilung der elektrischen Feldstärke eines horizontalen Längsschnitts eines Leitungsübergangs von Koplantar- auf Mikrostreifen- und wieder auf Koplantarleitung herangezogen. Die Struktur ist in Abbildung 4.7 zu sehen. Simuliert wurde aus Symmetriegründen nur die rechte Hälfte der Leitung. Der Puls läuft in positive x -Richtung. Die Feldverteilungen in den Abbildungen 4.8(a) und 4.8(b) zeigen die elektrischen Feldkomponenten E_y und E_z kurz nach dem ersten Übergang von der Koplantarleitung auf die Mikrostreifenleitung.

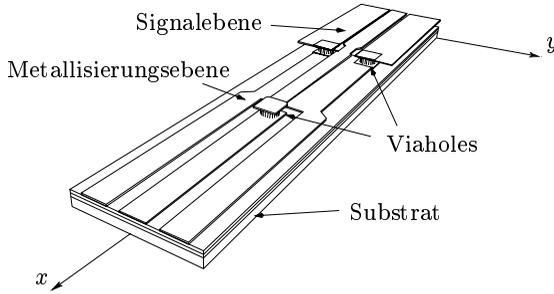


ABBILDUNG 4.7. Skizze des Leitungsübergangs.

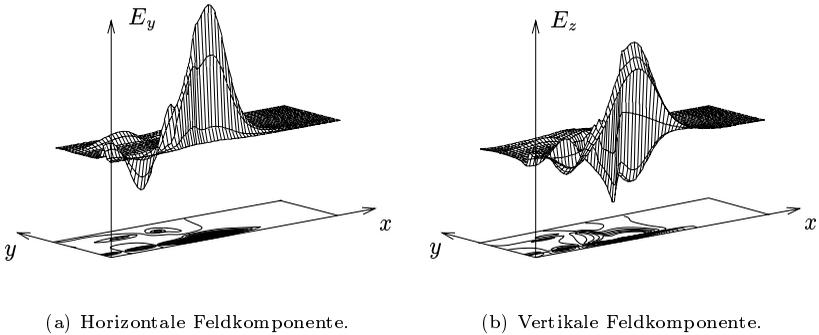
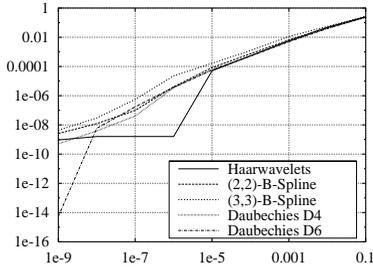


ABBILDUNG 4.8. Transversales elektrisches Feld eines Leitungsübergangs.

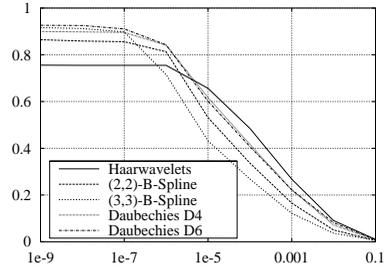
Die Ergebnisse sind im großen und ganzen recht ähnlich zu denen der Ko-planarleitung. Allerdings ließ sich aufgrund der räumlichen Begrenztheit des elektromagnetischen Pulses auch für sehr kleine Schwellwerte eine Datenkompression erzielen, und zwar für E_y und E_z unterschiedlich (siehe Abbildungen 4.9 und 4.10).

2. Modellproblem

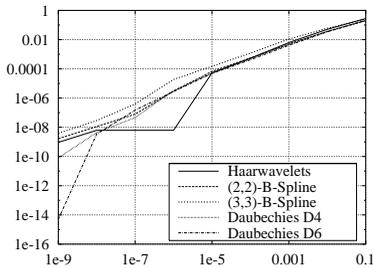
Als einfaches Modellproblem werden die Leitungsgleichungen gewählt. Um die Verwendung von speziell konstruierten Randwavelets zu vermeiden, werden als Randbedingungen lediglich periodische sowie ideal elektrische (Kurzschluß) bzw. magnetische (Leerlauf) betrachtet. Diese Randbedingungen lassen sich einfach durch Periodisierung oder durch Anwendung des Spiegelungsprinzips erfüllen.



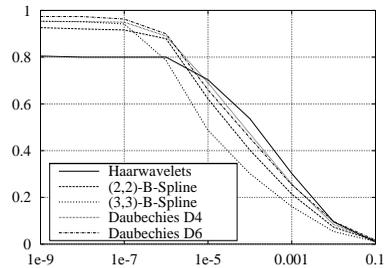
(a) Relativer Fehler über dem Schwellwert.



(b) Besetzung über dem Schwellwert.

ABBILDUNG 4.9. Fall 2: Leitungsübergang, E_y .

(a) Relativer Fehler über dem Schwellwert.



(b) Besetzung über dem Schwellwert.

ABBILDUNG 4.10. Fall 2: Leitungsübergang, E_z .

Für eine verlustbehaftete Leitung der Länge l sucht man die räumliche und zeitliche Spannungsverteilung $u : \mathbb{R}_0^+ \times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ und Stromverteilung $i : \mathbb{R}_0^+ \times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$, die die partiellen Differentialgleichungen

$$(4.1a) \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = -\frac{G}{C} u(t, x) - \frac{1}{C} \frac{\partial i(t, x)}{\partial x},$$

$$(4.1b) \quad \frac{\partial i(t, x)}{\partial t} = -\frac{R}{L} i(t, x) - \frac{1}{L} \frac{\partial u(t, x)}{\partial x},$$

wobei $t \in \mathbb{R}_0^+$ die Zeit, $x \in [0, l] \subset \mathbb{R}$ den Ort, C den Kapazitäts-, L den Induktivitäts-, R den Widerstands- und G den Leitwertbelag bezeichnen, die Anfangsbedingungen

$$(4.1c) \quad u_0(x) = u(0, x),$$

$$(4.1d) \quad i_0(x) = i(0, x)$$

und im Falle

periodischer Randbedingungen:

$$(4.1e) \quad u(t, 0) = u(t, l),$$

$$(4.1f) \quad i(t, 0) = i(t, l)$$

ideal elektrischer Randbedingungen: mit $x_0 = 0$ bzw. $x_0 = l$

$$(4.1g) \quad u(t, x_0) = 0,$$

$$(4.1h) \quad \left. \frac{\partial i(t, x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0$$

ideal magnetischer Randbedingungen: mit $x_0 = 0$ bzw. $x_0 = l$

$$(4.1i) \quad \left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0,$$

$$(4.1j) \quad i(t, x_0) = 0$$

erfüllen. Daß die Normalableitungen des Stroms bei ideal elektrischen bzw. der Spannung bei ideal magnetischen Randbedingungen verschwinden, ist Folge der Leitungsgleichungen und ermöglicht das Spiegelungsprinzip.

Im verlustfreien Fall lassen sich die Leitungsgleichungen normieren

$$(4.2a) \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = -c \frac{\partial i(t, x)}{\partial x},$$

$$(4.2b) \quad \frac{\partial i(t, x)}{\partial t} = -c \frac{\partial u(t, x)}{\partial x},$$

wobei die Leitungslänge auf 1 normiert ist und $c \in \mathbb{R}, c > 0$ die normierte Ausbreitungsgeschwindigkeit bezeichnet.

3. Biorthogonale B-Spline-Wavelets

3.1. Definition. Die biorthogonalen kardinalen B-Spline-Wavelets wurden von Cohen, Daubechies & Feauveau (1992) konstruiert. Sie sind symmetrisch, biorthogonal und haben kompakten Träger. Hier wird die Nomenklatur aus Dahmen, Kunoth & Urban (1996) verwendet.

Als Skalierungsfunktion φ_d werden die kardinalen B-Splines der Ordnung $d \in \mathbb{N} \geq 1$ verwendet. Sie sind durch

$$(4.3) \quad \varphi_d(x) := d [0, 1, \dots, d] \left(\cdot - x - \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor \right)_+^{d-1}$$

definiert, wobei $[t_i, \dots, t_{i+d}]f$ die dividierte Differenz von $f \in C^d(\mathbb{R})$ für die Knotenfolge $t_i \leq \dots \leq t_{i+d}$ ist, und

$$(4.4) \quad x_+^d := (\max\{0, x\})^d$$

$$(4.5) \quad \lfloor x \rfloor := \max\{z : z \in \mathbb{Z} \wedge z \leq x\} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(4.6) \quad \lceil x \rceil := \min\{z : z \in \mathbb{Z} \wedge z \geq x\} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die so definierten B-Splines sind symmetrisch um $l(d)/2$, mit

$$(4.7) \quad l(d) := d \bmod 2 = \begin{cases} 0 & \text{für } d \text{ gerade,} \\ 1 & \text{für } d \text{ ungerade,} \end{cases}$$

d.h.

$$(4.8) \quad \varphi_d(x + l(d)) = \varphi_d(-x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Der Träger von φ_d ist

$$(4.9) \quad \text{supp } \varphi_d = [l_1, l_2]$$

mit

$$(4.10) \quad l_1 := -\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor, \quad l_2 := \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil.$$

B-Splines sind bekanntlich verfeinerbar, und zwar gilt

$$(4.11) \quad \varphi_d(x) = \sqrt{2} \sum_{k=l_1}^{l_2} \frac{\sqrt{2}}{2^d} \binom{d}{k + \lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \varphi_d(2x - k).$$

Cohen et al. (1992) haben hierzu nun biorthogonale, symmetrische Basen mit kompaktem Träger konstruiert. Die Ordnung \tilde{d} der dualen Skalierungsfunktion $\tilde{\varphi}_{d, \tilde{d}}$ muß wenigstens so groß sein wie die des B-Splines und beide entweder von gerader oder ungerader Ordnung, d.h. $\tilde{d} \geq d$, $\tilde{d} \in \mathbb{N}$, $l(\tilde{d} + d) = 0$.

Die duale Skalierungsfunktion $\tilde{\varphi}_{d, \tilde{d}}$

- hat kompakten Träger

$$(4.12) \quad \text{supp } \tilde{\varphi}_{d, \tilde{d}} = [l_1 - \tilde{d} + 1, l_2 + \tilde{d} - 1],$$

- dieselbe Symmetrieeigenschaft wie φ_d

$$(4.13) \quad \tilde{\varphi}_{d, \tilde{d}}(x + l(d)) = \tilde{\varphi}_{d, \tilde{d}}(-x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

- ist biorthogonal zu φ_d

$$(4.14) \quad (\varphi_d, \tilde{\varphi}_{d, \tilde{d}}(\cdot - k))_{L_2(\mathbb{R})} = \delta_{0, k} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z},$$

- von der Ordnung \tilde{d} , d.h. alle Polynome höchstens vom Grad $\tilde{d} - 1$ können exakt als Linearkombination der Translate $\tilde{\varphi}_{d, \tilde{d}}(\cdot - k)$, $k \in \mathbb{Z}$ dargestellt werden,
- die Regularität von $\tilde{\varphi}_{d, \tilde{d}}$ wächst proportional zu \tilde{d} ,

- und ist verfeinerbar

$$(4.15) \quad \tilde{\varphi}_{d,\tilde{d}}(x) = \sqrt{2} \sum_{k=\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_2} \tilde{h}_k \tilde{\varphi}_{d,\tilde{d}}(2x - k)$$

mit

$$(4.16) \quad \tilde{l}_1 := l_1 - \tilde{d} + 1, \quad \tilde{l}_2 := l_2 + \tilde{d} - 1$$

$$(4.17) \quad \tilde{h}_k := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_j \tilde{r}_j \tilde{p}_{k-j},$$

$$k \in \left\{ - \left\lfloor \frac{\tilde{d}}{2} \right\rfloor - \frac{d+\tilde{d}}{2} + 1, \dots, \left\lceil \frac{\tilde{d}}{2} \right\rceil + \frac{d+\tilde{d}}{2} - 1 \right\}$$

$$(4.18) \quad \tilde{r}_j := 2^{1-\tilde{d}} \binom{\tilde{d}}{j + \lfloor \frac{\tilde{d}}{2} \rfloor}, \quad j \in \{\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_1 + \tilde{d}\}$$

$$(4.19) \quad \tilde{p}_j = (-1)^j \sum_{n=|j|}^{\frac{d+\tilde{d}}{2}-1} \frac{1}{4^n} \binom{\frac{d+\tilde{d}}{2}-1+n}{n} \binom{2n}{n+j},$$

$$j \in \left\{ -\frac{d+\tilde{d}}{2} + 1, \dots, \frac{d+\tilde{d}}{2} - 1 \right\}.$$

Die Wavelets hierzu sind durch

$$(4.20) \quad \psi_{d,\tilde{d}}(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \varphi_d(2x - k)$$

$$(4.21) \quad \tilde{\psi}_{d,\tilde{d}}(x) = \sqrt{2} \sum_k \tilde{g}_k \tilde{\varphi}_{d,\tilde{d}}(2x - k)$$

mit

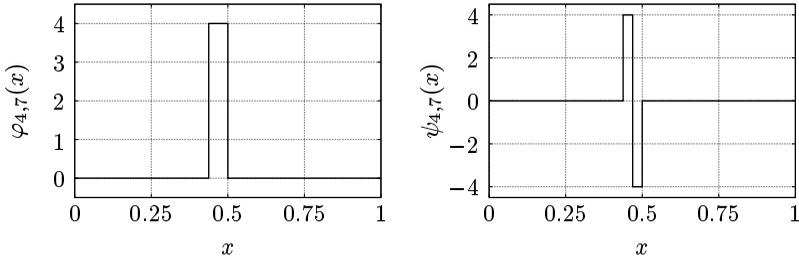
$$(4.22) \quad g_k = (-1)^k \tilde{h}_{1-k} \quad 2 - l_2 - \tilde{d} \leq k \leq \tilde{d} - l_1$$

$$(4.23) \quad \tilde{g}_k = (-1)^k h_{1-k} \quad 1 - \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor \leq k \leq 1 + \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor.$$

gegeben.

Da die Abhängigkeit der Skalierungsfunktionen und der Wavelets von d und \tilde{d} offensichtlich ist, wird im weiteren auf ihre Angabe verzichtet. Die aktuellen Werte sollten wenn nötig aus dem Kontext ersichtlich werden. Im folgenden bezeichnen tiefergestellte Indizes im allgemeinen die Skala und den Verschiebeparameter der Funktionen, d.h.

$$(4.24) \quad \Xi_{i,l}(x) = 2^{i/2} \Xi(2^i x - l), \quad \Xi \in \{\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}\}.$$



(a) Skalierungsfunktion.

(b) Wavelet.

ABBILDUNG 4.11. Haar-Wavelets ((1,1)-B-Spline-Wavelets).

Zur Illustration sind die Skalierungsfunktionen und Wavelets der Skala $i = 4$ mit dem Verschiebeparameter $l = 7$ der Haar-Wavelets (identisch zu den (1,1)-B-Spline-Wavelets, Abb. 4.11), der (2,4)-, der (3,3)- und der (3,5)-B-Spline-Wavelets dargestellt (Abb. 4.12, 4.13 und 4.14) ¹.

Lemire (1998) zeigte, daß man die dualen Skalierungsfunktionen der biorthogonalen B-Spline-Wavelets auch durch Ableitungen der Fundamentalfunktion F der iterativen Lagrange-Interpolation mit Polynomen vom Grad $d + \tilde{d} - 1$ darstellen kann

$$(4.25) \quad \tilde{\varphi}_{d,\tilde{d}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d-1+k}{d-1} F_{d+\tilde{d}-1}^{(d)} \left(x - k - \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor \right).$$

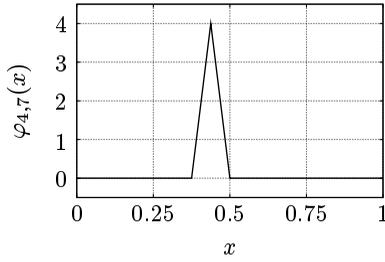
$F^{(d)}$ steht dabei für die d -te Ableitung. Bei der Berechnung der Differenzenoperatoren wird diese Beziehung hilfreich sein, da sich mit ihr zeigen läßt, daß Petrov-Galerkin-Diskretisierungen des Operators d/dx z.B. mit (4,4)-, (3,5)- und mit (2,6)-B-Spline-Wavelets (d.h. Skalierungsfunktion als Entwicklungs- und duale Skalierungsfunktion als Testfunktion) zu denselben Differenzenoperatoren führen.

3.2. Symmetrie der B-Spline-Wavelets. Die Skalierungsfunktionen der biorthogonalen kardinalen B-Spline-Wavelets nach Dahmen et al. (1996) haben die Symmetrieeigenschaften

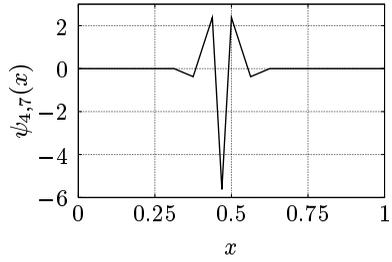
$$(4.26) \quad \varphi(x + l(d)) = \varphi(-x)$$

$$(4.27) \quad \tilde{\varphi}(x + l(d)) = \tilde{\varphi}(-x)$$

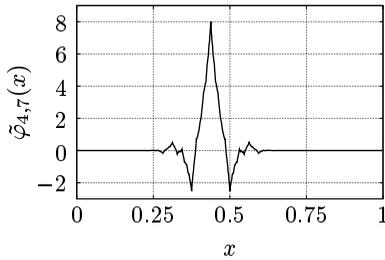
¹Die (2,2)-B-Spline-Wavelets werden in dieser Arbeit nicht benutzt, da in diesem Fall die duale Skalierungsfunktion nicht quadratintegabel ist.



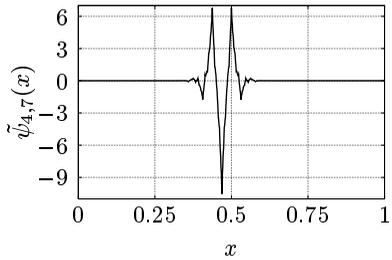
(a) Skalierungsfunktion.



(b) Wavelet.



(c) Duale Skalierungsfunktion.



(d) Duales Wavelet.

ABBILDUNG 4.12. (2,4)-B-Spline-Wavelets.

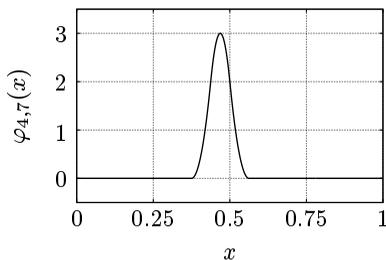
und die Filter

$$(4.28) \quad h_k = h_{l(d)-k} \quad l_1 = -\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor \leq k \leq \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil = l_2$$

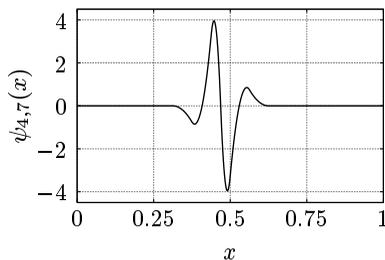
$$(4.29) \quad \tilde{h}_k = \tilde{h}_{l(d)-k} \quad \tilde{l}_1 = l_1 - \tilde{d} + 1 \leq k \leq l_2 + \tilde{d} - 1 = \tilde{l}_2.$$

Daraus folgt

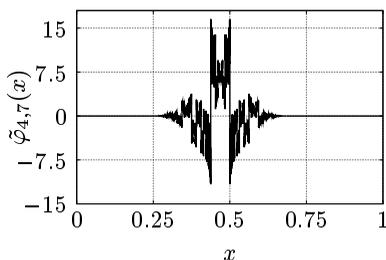
$$(4.30) \quad \begin{aligned} g_k &= (-1)^k \tilde{h}_{1-k} = (-1)^k \tilde{h}_{l(d)-1+k} = (-1)^k \tilde{h}_{1-(2-l(d)-k)} \\ &= (-1)^{-k} (-1)^{2-l(d)} (-1)^{l(d)-2} \tilde{h}_{1-(2-l(d)-k)} \\ &= (-1)^{l(d)} (-1)^{2-l(d)-k} \tilde{h}_{1-(2-l(d)-k)}. \end{aligned}$$



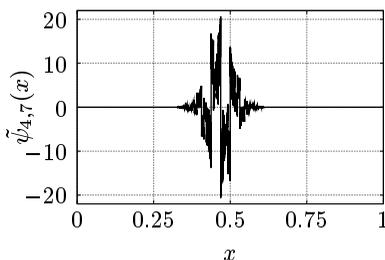
(a) Skalierungsfunktion.



(b) Wavelet.



(c) Duale Skalierungsfunktion.



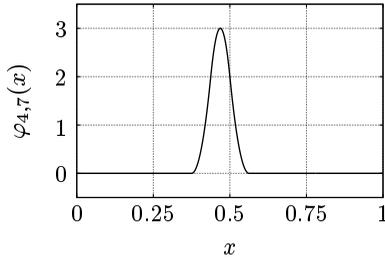
(d) Duales Wavelet.

ABBILDUNG 4.13. (3,3)-B-Spline-Wavelets.

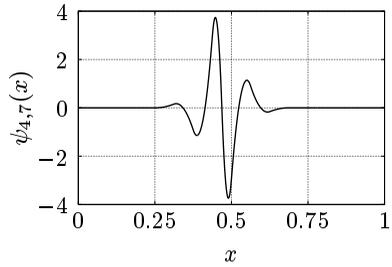
Somit haben die Waveletfilter die Symmetrieeigenschaften

$$(4.31) \quad g_k = (-1)^{l(d)} g_{2^{-l(d)}-k}$$

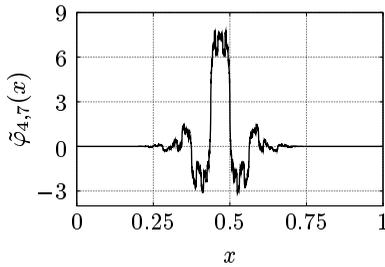
$$(4.32) \quad \tilde{g}_k = (-1)^{l(d)} \tilde{g}_{2^{-l(d)}-k} .$$



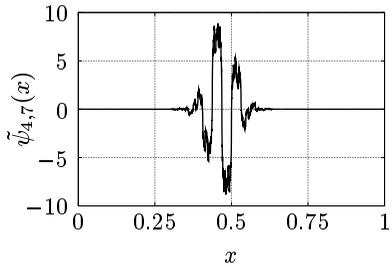
(a) Skalierungsfunktion.



(b) Wavelet.



(c) Duale Skalierungsfunktion.



(d) Duales Wavelet.

ABBILDUNG 4.14. (3,5)-B-Spline-Wavelets.

Für die Wavelets selbst ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \psi(-x) &= \sum_k g_k \varphi(-2x - k) = \sum_k g_k \varphi(2x + k + l(d)) \\
 &= \sum_k (-1)^{l(d)} g_{2-l(d)-k} \varphi(2x + k + l(d)) \\
 (4.33) \quad &= \sum_k (-1)^{l(d)} g_{2-l(d)-k} \varphi(2(x+1) - (2-k-l(d))) \\
 &= (-1)^{l(d)} \sum_m g_m \varphi(2(x+1) - m).
 \end{aligned}$$

Ihre Symmetrien sind also

$$(4.34) \quad \psi(-x) = (-1)^{l(d)} \psi(x+1)$$

$$(4.35) \quad \tilde{\psi}(-x) = (-1)^{l(d)} \tilde{\psi}(x+1),$$

d.h. beide Wavelets sind abhängig davon, ob d gerade oder ungerade ist, gerade oder schiefsymmetrisch um $x = 1/2$. Die Träger der Wavelets sind gleich groß, und es gilt

$$(4.36) \quad \text{supp } \psi(x) = \text{supp } \tilde{\psi}(x) = \left[1 - \frac{d+\tilde{d}}{2}, \frac{d+\tilde{d}}{2} \right].$$

3.3. Entwicklung von Funktionen bei einfachen Randbedingungen.

Von entscheidendem Interesse in der Elektrodynamik sind Randbedingungen. Sie sind es, die das Verhalten der Lösung der Maxwell'schen Gleichungen festlegen und die Geometrie der interessierenden Struktur beschreiben. Häufig lassen sich die charakteristischen Merkmale der Lösung an idealisierten Randbedingungen gut studieren. Hierzu gehören ideal elektrisch oder magnetisch leitende Wände. Sie erlauben bei bestimmten Geometrien die Anwendung des Spiegelungsprinzips, d.h. der gerade- bzw. schiefsymmetrischen Fortsetzung der Lösung über das eigentliche Definitionsgebiet des Problems hinaus. Bei der Verwendung finiter Differenzen stellt dies eine beliebte Methode zur Konstruktion von Randbedingungen dar, unabhängig davon, ob man das Spiegelungsprinzip in der vorliegenden Geometrie des Problems tatsächlich anwenden darf oder nicht. Daher soll das Spiegelungsprinzip auch in dieser Arbeit Anwendung finden². Periodische Randbedingungen sind ebenfalls einfach zu verwirklichen. Nützlich sind diese beim Studium von Leitungen im Zeitbereich zur Bestimmung der Moden (insbesondere des Grundmodus), d.h. den das Rechengebiet verlassenden Puls speist man auf der gegenüberliegenden Seite einfach wieder ein. Den Grundmodus benötigt man beispielsweise zur Berechnung der S-Parameter einer Struktur.

Es werden ausschließlich Probleme auf dem Einheitswürfel $[0, 1]^n$ betrachtet, für praktische Probleme muß also erst gegebenenfalls auf den Einheitswürfel transformiert werden. Zudem werden ausschließlich Tensorprodukte verwendet, so daß es im folgenden genügt univariate Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ zu betrachten.

²Aus diesem Grund ist es unerlässlich symmetrische Wavelets zu verwenden, d.h. man muß leider auf Orthogonalität verzichten und sich mit Biorthogonalität begnügen, wenn man auf kompakten Träger Wert legt. Nichtsymmetrische Wavelets wie die Daubechies-Wavelets sind somit nicht als Basisfunktionen von Petrov-Galerkin-Verfahren geeignet. Allerdings kann man die Autokorrelationsfunktion der Daubechies-Wavelets, die ja symmetrisch ist, als Basisfunktion verwenden und Point-matching durchführen. Der entstehende Algorithmus unterscheidet sich von der Galerkin-Diskretisierung im Innern eines Intervalls nicht, nur an den Rändern (Bertolozza, Naldi & Ravel 1994).

3.3.1. *Entwicklung periodischer Funktionen.* Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodisch mit der Periode 1

$$(4.37) \quad f(x+n) = f(x) \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

Für die Entwicklungskoeffizienten $c_{m,k}$ ergibt sich

$$(4.38) \quad \begin{aligned} c_{m,k} &= (f, \tilde{\varphi}_{m,k}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 2^{m/2} \tilde{\varphi}(2^m x - k) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+n) 2^{m/2} \tilde{\varphi}(2^m x - k) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 2^{m/2} \tilde{\varphi}(2^m(x+n) - (k+2^m n)) dx \\ &= (f, \tilde{\varphi}_{m,k+2^m n}) = c_{m,k+2^m n}. \end{aligned}$$

Dasselbe erhält man für die Waveletentwicklungskoeffizienten

$$(4.39) \quad d_{m,k} = d_{m,k+2^m n} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

Ebenso bei einer Entwicklung nach den dualen Funktionen

$$(4.40) \quad (f, \varphi_{m,k}) = (f, \varphi_{m,k+2^m n})$$

$$(4.41) \quad (f, \psi_{m,k}) = (f, \psi_{m,k+2^m n}).$$

Praktisch wird dies umgesetzt, indem Arrays mit 2^m Elementen benutzt werden, für die Indizierungsoperatoren definiert sind, die den richtigen Wert zurückliefern, z.B. statt $d_{m,-2}$ den Wert von $d_{m,2^m-2}$.

3.3.2. *Entwicklung symmetrisch fortgesetzter Funktionen.* Zunächst betrachte man die gerad- bzw. schiefssymmetrische Fortsetzung einer Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ für $x < 0$ (es wird nur einmal fortgesetzt, das reicht für die hier angestrebten Anwendungen), d.h.

$$(4.42) \quad f(x) = \pm f(-x) \quad \text{für } x \in [-1, 1].$$

Dies bedeutet für die Skalierungskoeffizienten

$$(4.43) \quad \begin{aligned} c_{j,k} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \tilde{\varphi}_{j,k}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 2^{j/2} \tilde{\varphi}(2^j x - k) dx \\ &= \pm \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) 2^{j/2} \tilde{\varphi}(-2^j x + k + l(d)) dx \\ &= \pm \int_{-\infty}^{\infty} f(y) 2^{j/2} \tilde{\varphi}(2^j y + k + l(d)) dy \end{aligned}$$

Somit erhält man

$$(4.44) \quad c_{j,k} = \pm c_{j, -(k+l(d))} \begin{cases} f \text{ geradsymmetrisch um } x = 0, \\ f \text{ schiefssymmetrisch um } x = 0. \end{cases}$$

Für die Waveletkoeffizienten rechnet man

$$\begin{aligned}
 d_{j,k} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \tilde{\psi}_{j,k}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 2^{j/2} \tilde{\psi}(2^j x - k) dx \\
 (4.45) \quad &= \pm \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) 2^{j/2} (-1)^{l(d)} \tilde{\psi}(-2^j x + k + 1) dx \\
 &= \pm \int_{-\infty}^{\infty} f(y) 2^{j/2} (-1)^{l(d)} \tilde{\psi}(2^j y + k + 1) dy,
 \end{aligned}$$

d.h.

$$(4.46) \quad d_{j,k} = \pm (-1)^{l(d)} d_{j, -(k+1)} \begin{cases} f \text{ geradsymmetrisch um } x = 0, \\ f \text{ schiefsymmetrisch um } x = 0. \end{cases}$$

Nun betrachte man den rechten Rand des Definitionsgebiets und setze f symmetrisch um $x = 1$ fort, d.h.

$$(4.47) \quad f(-x) = \pm f(2 + x).$$

Hiermit ergibt sich für die Skalierungskoeffizienten

$$\begin{aligned}
 c_{j,k} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \tilde{\varphi}_{j,k}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 2^{j/2} \tilde{\varphi}(2^j x - k) dx \\
 &= \pm \int_{-\infty}^{\infty} f(-y) 2^{j/2} \tilde{\varphi}(-2^j y - k) dy \\
 (4.48) \quad &= \pm \int_{-\infty}^{\infty} f(y + 2) 2^{j/2} \tilde{\varphi}(2^j y + k + l(d)) dy \\
 &= \pm \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 2^{j/2} \tilde{\varphi}(2^j(x - 2) + k + l(d)) dx \\
 &= \pm \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 2^{j/2} \tilde{\varphi}(2^j x - (2^{j+1} - k - l(d))) dx,
 \end{aligned}$$

also

$$(4.49) \quad c_{j,k} = \pm c_{j, 2^{j+1} - (k + l(d))} \begin{cases} f \text{ geradsymmetrisch um } x = 1, \\ f \text{ schiefsymmetrisch um } x = 1, \end{cases}$$

und für die Waveletkoeffizienten

$$\begin{aligned}
 d_{j,k} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \tilde{\psi}_{j,k}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 2^{j/2} \tilde{\psi}(2^j x - k) dx \\
 (4.50) \quad &= \pm \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) 2^{j/2} \tilde{\psi}(-2^j x - k) dx \\
 &= \pm \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2) 2^{j/2} (-1)^{l(d)} \tilde{\psi}(2^j x + k + 1) dx \\
 &= \pm \int_{-\infty}^{\infty} f(y) 2^{j/2} (-1)^{l(d)} \tilde{\psi}(2^j y - (2^{j+1} - k - 1)) dy,
 \end{aligned}$$

d.h. hier gilt

$$(4.51) \quad d_{j,k} = \pm(-1)^{l(d)} d_{j,2^{j+1}-(k+1)} \begin{cases} f \text{ geradsymmetrisch um } x = 1, \\ f \text{ schiefsymmetrisch um } x = 1. \end{cases}$$

Dasselbe erhält man auch bei Entwicklungen nach den dualen Funktionen, da sie dieselben Symmetrieeigenschaften besitzen.

Offensichtlich muß man bei Anwendung des Spiegelungsprinzips abhängig von der Ordnung der Skalierungsfunktion die Koeffizienten unterschiedlich spiegeln. Gilt $l(d) = 0$, so werden die Waveletkoeffizienten für gerade Funktionen gerade fortgesetzt und für ungerade ungerade. Ist aber $l(d) = 1$, also d ungerade, so verhält es sich umgekehrt, d.h. für gerade Funktionen wird ungerade fortgesetzt und für ungerade gerade. Bei den Skalierungsfunktionen wird zwar für gerade Funktionen immer gerade fortgesetzt und für ungerade ungerade, aber dafür wird der Spiegelungspunkt geringfügig verändert. Mal liegt er auf dem letzten Element, mal zwischen dem letzten und dem ersten virtuellen (also dem gespiegelten) Element.

3.3.3. *Zur Implementierung.* Aus dem gerade dargestellten geht offenbar hervor, daß abhängig von der Ordnung der Skalierungsfunktion unterschiedlich gespiegelt werden muß. Darüberhinaus hängt die Anzahl der unabhängigen Skalierungskoeffizienten im Gegensatz zu der der unabhängigen Waveletkoeffizienten ebenfalls von der Ordnung ab. Und zwar ergibt sich im Falle

periodischer Randbedingungen:

$$(4.52a) \quad c_{i,l}, \quad l \in \{0, 1, \dots, 2^i - 1\},$$

$$(4.52b) \quad d_{i,l}, \quad l \in \{0, 1, \dots, 2^i - 1\},$$

idealer Randbedingungen und ungerader Filterordnung d :

$$(4.53a) \quad c_{i,l}, \quad l \in \{0, 1, \dots, 2^i - 1\},$$

$$(4.53b) \quad d_{i,l}, \quad l \in \{0, 1, \dots, 2^i - 1\},$$

idealer Randbedingungen und gerader Filterordnung d :

$$(4.54a) \quad c_{i,l}, \quad l \in \{0, 1, \dots, 2^i\},$$

$$(4.54b) \quad d_{i,l}, \quad l \in \{0, 1, \dots, 2^i - 1\}.$$

4. Berechnung der Entwicklungskoeffizienten

Um eine Funktion f durch Wavelets darzustellen, müssen die Skalierungskoeffizienten $c_{J_0,l}$ und die Waveletkoeffizienten $d_{i,l}$, $i = J_0, \dots, J_M$ berechnet werden. Theoretisch sind die inneren Produkte mit den dualen Skalierungsfunktionen und

Wavelets zu bestimmen

$$(4.55a) \quad c_{J_0,l} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \tilde{\varphi}_{J_0,l} dx,$$

$$(4.55b) \quad d_{i,l} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \tilde{\psi}_{i,l} dx.$$

(Im Falle orthogonaler Wavelets sind die dualen identisch mit den Entwicklungsfunktionen, die Tilden fallen dann also weg.) Da es sich bei den Wavelets um oszillierende Funktionen handelt, sind diese inneren Produkte aufwendig zu berechnen. Zudem gibt es nur in Ausnahmefällen analytische Ausdrücke für die dualen Funktionen (z.B. bei den Haar- oder den Battle-Lemarié-Wavelets), so daß man sehr viele Summanden brauchte, um eine gute Näherung für die Integrale durch eine Riemannsumme zu erreichen, auch wenn f eine sehr glatte Funktion wäre.

Um zu einem vertretbaren Rechenaufwand zu kommen, hat man nun versucht, Approximationsoperatoren P_i

$$(4.56) \quad P_i f := \sum_l \theta_{i,l}(f) \varphi_{i,l}$$

mit diskreten linearen Funktionalen $\theta_{i,l}$ zu finden, die hinreichend gute Approximationen der Skalierungskoeffizienten liefern. Hat man solch einen Operator, so berechnet man mit P_{M+1} die Skalierungskoeffizienten auf der feinsten Skala und führt anschließend schnelle Wavelettransformationen durch.

Sweldens (1994) untersuchte Funktionale der Form

$$(4.57) \quad \theta_{i,l}(f) = 2^{-i/2} \sum_{k=0}^r w_k f(2^{-i}(x_k + l))$$

mit $x_k = k + \tau$, wobei $0 \leq \tau < 1$. Die Idee hinter der Konstruktion ist, f äquidistant abzutasten, so daß man genauso viele Abtastwerte wie Entwicklungskoeffizienten hat. r , τ und die w_k werden so gewählt, daß man Polynome möglichst hoher Ordnung mit möglichst kleinem Aufwand exakt integriert. Dieses Vorgehen ist jedoch problematisch, weil das numerische Problem zur Bestimmung der Gewichte $w - k$ schlecht konditioniert ist.

Einen anderen Ansatz untersuchte Ware (1997). Wenn die Operatoren P_i Projektoren sein sollen, dann müssen sie

$$(4.58) \quad \theta_{i,l}(\varphi_{i,k}) = \delta_{l,k}$$

erfüllen. Will man auch in diesem Fall mit genauso vielen Abtastwerten der Funktion f wie Entwicklungskoeffizienten auskommen, so werden leider i.a. alle Abtastwerte in die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten involviert (z.B. bei B-Splines (de Boor 1978)). Bei interpolierenden Skalierungsfunktionen (z.B. die

d	2	3	4	5	6
w_{-4}					0,00977564
w_{-3}					-0,312821
w_{-2}			0,166667	-0,0444444	2,29808
w_{-1}			-1,33333	0,711111	-7,53333
w_0	1,00000	-0,500000	3,33333	-3,27778	12,0766
w_1		2,00000	-1,33333	6,22222	-7,53333
w_2		0,500000	0,166667	-3,27778	2,29808
w_3				0,711111	-0,312821
w_4				-0,0444444	0,00977564

TABELLE 4.1. Gewichte der diskreten Projektoren.

(2,2m)-B-Spline-Familie) hingegen genügt ein einziger Abtastwert. Eine Möglichkeit, um auch im allgemeinen nur endlich viele Abtastwerte in die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten zu involvieren, bietet die Überabtastung. Dabei sucht man Gewichte w_k , so daß

$$(4.59) \quad \theta(\varphi(x-l)) = \sum_k w_k \varphi(k/2-l) = \delta_{0,l}$$

gilt. Durch Verschiebung und Skalierung erhält man die benötigten Funktionale

$$(4.60) \quad \theta_{i,l}(f) = 2^{-i/2} \sum_k w_k f\left(2^{-i}(k/2+l)\right).$$

Im Falle, daß f selbst abgetastet ist, ist solch eine Vorgehensweise eventuell ineffizient, weil man wohl einiges an Information verliert, schließlich halbiert man die Anzahl der Freiheitsgrade. Wenn f aber analytisch bekannt ist, stellt dies keinen nennenswerten Nachteil dar. Da bei der Lösung partieller Differentialgleichungen lediglich für bekannte Funktionen (Anfangs-, Randbedingungen und Quellterme) die Entwicklungskoeffizienten berechnet werden müssen, kann man hiervon ausgehen. Meist handelt es sich in der Hochfrequenztechnik um gefensterete Gauß- oder Sinusfunktionen.

Die Wahl der Gewichte w_k in (4.59) ist nicht eindeutig. In dieser Arbeit werden die Gewichte so gewählt, daß sie dieselbe Symmetrie wie die Skalierungsfunktion besitzen, d.h. um 0 bzw. $1/2$ (also um w_0 bzw. w_1), und möglichst wenige sind. Für die B-Spline-Familie ergeben sich die Tabelle 4.1 angegebenen Gewichte (auf 6 Ziffern gerundet). Sie hängen nicht von der dualen Ordnung ab. Die Gewichte wurden numerisch mit doppelter Genauigkeit durch lösen des Gleichungssystems (4.59) errechnet. Zum Einsatz kam dabei die QR-Zerlegung des LAPACK-Pakets (Anderson, Bai, Bischof, Demmel, Dongarra, DuCroz, Greenbaum, Hammarling, McKenney, Ostrouchov & Sorensen 1992).

5. Räumliche Diskretisierung

Im ersten Schritt der räumlichen Petrov-Galerkin-Diskretisierung werden Strom $i(t, x)$ und Spannung $u(t, x)$ durch Linearkombinationen von Skalierungsfunktionen der Skala J_0 und von Wavelets der Skalen J_0, \dots, J_M approximiert

$$(4.61a) \quad u(t, x) \approx \sum_{l \in \mathcal{L}_{-1}} u_{-1,l}(t) \varphi_{J_0,l}(x) + \sum_{j=0}^M \sum_{l \in \mathcal{L}_j} u_{j,l}(t) \psi_{J_j,l}(x),$$

$$(4.61b) \quad i(t, x) \approx \sum_{l \in \mathcal{L}_{-1}} i_{-1,l}(t) \varphi_{J_0,l}(x) + \sum_{j=0}^M \sum_{l \in \mathcal{L}_j} i_{j,l}(t) \psi_{J_j,l}(x).$$

Die Entwicklungskoeffizienten $u_{j,l}$ und $i_{j,l}$ sind zeitabhängig. Zur Vereinfachung der Schreibweise bekommen die Skalierungskoeffizienten den ersten Index -1 , die Waveletkoeffizienten der unterschiedlichen Skalen werden mit $0, \dots, M$ indiziert. Die Indexmengen \mathcal{L}_j sind geeignet, d.h. hier unter Berücksichtigung der Randbedingungen und der Ordnung der Skalierungsfunktion, zu wählen. Setzt man $\psi_{J_{-1},l}(x) := \varphi_{J_0,l}(x)$, so läßt sich der Ansatz kompakter schreiben

$$(4.62a) \quad u(t, x) \approx \sum_{j=-1}^M \sum_{l \in \mathcal{L}_j} u_{j,l}(t) \psi_{J_j,l}(x),$$

$$(4.62b) \quad i(t, x) \approx \sum_{j=-1}^M \sum_{l \in \mathcal{L}_j} i_{j,l}(t) \psi_{J_j,l}(x).$$

Im Gegensatz zu den vorgestellten Arbeiten anderer Autoren zur Lösung elektromagnetischer Probleme mit Wavelets im Zeitbereich werden die Feldkomponenten nicht gemäß der Yeezelle verschoben. Ein Ansatz mit verschobenen Feldkomponenten, der die Skalierungsfunktionen und den ersten Waveletlevel verwendet, ist äquivalent zu einem mit nichtverschobenen Feldkomponenten, der nur Skalierungsfunktionen der nächstfeineren Skala benutzt. Mit anderen Worten: Bei Algorithmen, die Wavelets verwenden, bietet ein Ansatz gemäß der Yeezelle keinen Genauigkeitsvorteil³, verkompliziert aber die Programmierung, da jede Feldkomponente geringfügig anders zu behandeln ist.

³Betrachtet man finite Differenzenalgorithmen zur Lösung der Maxwell'schen oder auch Leitungsgleichungen für den homogenen unendlich ausgedehnten Raum, die kein verschobenes Gitter, also keine Yeezelle benutzen, sondern in jedem Gitterpunkt alle Feldkomponenten definieren, so stellt man fest, daß die Algorithmen in voneinander völlig unabhängige Unterschemata zerfallen. Das bedeutet, daß der Yeealgorithmus im homogenen Freiraum dieselbe Genauigkeit liefert, wie ein Algorithmus mit Zentraldifferenzen und Feldkomponenten in jedem Gitterpunkt, aber halben Schrittweiten Δt und Δx . Der Yeealgorithmus ist also bei gleicher Anzahl von Unbekannten genauer. Daß dies im begrenzten Raum nicht mehr gilt, illustriert die Dissertation von Fujii (1999), der Randbedingungen konstruiert hat, mit denen er bei gleicher Anzahl von Unbekannten gleiche Genauigkeit erreicht (und das bei doppelt so großer Zeitschrittweite also halber Rechenzeit!).

Durch Periodisierung bzw. Spiegelung der Koeffizienten bei symmetrischen Basisfunktionen erreicht man die Erfüllung der Randbedingungen durch den Ansatz. Bleibt die Erfüllung der partiellen Differentialgleichungen (4.1a) und (4.1b).

Im allgemeinen lassen sich die partiellen Differentialgleichungen natürlich nicht durch einen Ansatz der gesuchten Funktionen als Linearkombinationen beliebiger Entwicklungsfunktionen erfüllen. Man fordert daher lediglich die Übereinstimmung der Projektionen auf einen durch Testfunktionen $g_{i,k}(x)$ gegebenen Funktionenraum. Bei Petrov-Galerkin-Diskretisierungen sind diese Projektionen durch die inneren Produkte mit den Testfunktionen gegeben. Man erhält so für Gl. (4.1a)

(4.63)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-1}^M \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \frac{du_{j,l}(t)}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{J_j,l}(x) g_{i,k}(x) dx = \\ & - \sum_{j=-1}^M \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \left(\frac{G}{C} u_{j,l} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{J_j,l}(x) g_{i,k}(x) dx + \frac{1}{C} i_{j,l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi_{J_j,l}}{dx}(x) g_{i,k}(x) dx \right) \end{aligned}$$

Eigentlich wäre das Integrationsintervall lediglich $[0, 1]$. Da in dieser Arbeit jedoch sowohl die Basis- als auch die Testfunktionen kompakten Träger besitzen und die Randbedingungen durch Periodisierung bzw. Spiegelung erfüllt werden, kann man ab einer größten Skala J_G , die wenigstens eine Basisfunktion ganz im Innern des Intervalls $[0, 1]$ besitzt, die Integrationsgrenzen bis ins Unendliche verschieben.

Sind nun die $g_{i,k}$ orthogonal zu den $\psi_{J_j,l}$, d.h. gilt

$$(4.64) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{J_j,l}(x) g_{i,k}(x) dx = \delta_{J_j,i} \delta_{l,k},$$

so sind die Zeitableitungen explizit. Ansonsten erhielte man i.a. ein implizites System, es müßte also in jedem Zeitschritt ein Gleichungssystem gelöst werden. Da dieses Gleichungssystem von der Geometrie des Problems abhinge erscheint ein solches Vorgehen nicht erstrebenswert. Hierin liegt die besondere Bedeutung orthogonaler und biorthogonaler Basen für Zeitbereichssimulationen.

In unserem Fall benötigt man also die Integrale

$$(4.65a) \quad A_n(j, i, l, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{j,l}^{(n)}(x) \tilde{\varphi}_{i,k}(x) dx,$$

$$(4.65b) \quad B_n(j, i, l, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,l}^{(n)}(x) \tilde{\varphi}_{i,k}(x) dx,$$

$$(4.65c) \quad C_n(j, i, l, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{j,l}^{(n)}(x) \tilde{\psi}_{i,k}(x) dx,$$

$$(4.65d) \quad D_n(j, i, l, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,l}^{(n)}(x) \tilde{\psi}_{i,k}(x) dx,$$

wobei n die Werte 0 oder 1 annimmt. Durch wiederholte Anwendung der der Multiskalenanalyse zugrundeliegenden Skalierungsgleichungen lassen sich alle vier Integralklassen auf die Kenntnis des Integrals

$$(4.66) \quad K_n(i) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(n)}(x - i) \tilde{\varphi}(x) dx$$

zurückführen. Und zwar erhält man

1. $A_n(j, i, l, k)$
 - (a) $i = j$

$$A_n(j, j, l, k) = 2^{jn} K_n(l - k)$$

- (b) $i < j$

$$q = j - i$$

$$A_{1,0}(p) = 2^n \sum_{\nu} \tilde{h}_{\nu} K_n(-\nu + p)$$

$$A_{q,0}(p) = 2^n \sum_{\nu} \tilde{h}_{\nu} A_{q-1,0}(p - 2^{q-1}\nu)$$

$$A_n(j, i, l, k) = 2^{in} A_{q,0}(l - 2^q k)$$

(c) $i > j$

$$\begin{aligned}
 q &= i - j \\
 A_{0,1}(p) &= 2^n \sum_{\nu} h_{\nu} K_n(\nu - p) \\
 A_{0,q}(p) &= 2^n \sum_{\nu} h_{\nu} A_{0,q-1}(p - 2^{q-1}\nu) \\
 A_n(j, i, l, k) &= 2^{jn} A_{0,q}(k - 2^q l)
 \end{aligned}$$

2. $B_n(j, i, l, k)$ (hier ist immer $j \geq i$)

$$\begin{aligned}
 q &= j - i \\
 B_q(p) &= \sum_{\nu} g_{\nu} A_{q+1,0}(\nu + 2p) \\
 B_n(j, i, l, k) &= 2^{in} B_q(l - 2^q k)
 \end{aligned}$$

3. $C_n(j, i, l, k)$ (hier ist immer $i \geq j$)

$$\begin{aligned}
 q &= i - j \\
 C_q(p) &= \sum_{\nu} \tilde{g}_{\nu} A_{0,q+1}(\nu + 2p) \\
 C_n(j, i, l, k) &= 2^{jn} C_q(k - 2^q l)
 \end{aligned}$$

4. $D_n(j, i, l, k)$ (a) $i = j$

$$\begin{aligned}
 D_{0,0}(p) &= \sum_{\nu} g_{\nu} \sum_{\mu} \tilde{g}_{\mu} K_n(\nu - \mu + 2p) \\
 D_n(j, j, l, k) &= 2^{(j+1)n} D_{0,0}(l - k)
 \end{aligned}$$

(b) $i < j$

$$\begin{aligned}
 q &= j - i \\
 D_{q,0}(p) &= \sum_{\nu} g_{\nu} \sum_{\mu} \tilde{g}_{\mu} A_{q,0}(\nu - 2^q \mu + 2p) \\
 D_n(j, i, l, k) &= 2^{(i+1)n} D_{q,0}(l - 2^q k)
 \end{aligned}$$

(c) $i > j$

$$\begin{aligned}
 q &= i - j \\
 D_{0,q}(p) &= \sum_{\nu} g_{\nu} \sum_{\mu} \tilde{g}_{\mu} A_{0,q}(\mu - 2^q \nu + 2p) \\
 D_n(j, i, l, k) &= 2^{(j+1)n} D_{0,q}(k - 2^q l)
 \end{aligned}$$

Faßt man die Entwicklungskoeffizienten zu Spaltenvektoren $U(t)$ und $I(t)$ zusammen

$$(4.67) \quad U(t) = \begin{pmatrix} u_{-1,l_{-1},\mu} \\ \vdots \\ u_{-1,l_{-1},\nu} \\ u_{0,l_{0},\mu} \\ \vdots \\ u_{0,l_{0},\nu} \\ \vdots \\ u_{M,l_{M},\mu} \\ \vdots \\ u_{M,l_{M},\nu} \end{pmatrix}, \quad I(t) = \begin{pmatrix} i_{-1,l_{-1},\mu} \\ \vdots \\ i_{-1,l_{-1},\nu} \\ i_{0,l_{0},\mu} \\ \vdots \\ i_{0,l_{0},\nu} \\ \vdots \\ i_{M,l_{M},\mu} \\ \vdots \\ i_{M,l_{M},\nu} \end{pmatrix}$$

($l_{j,\mu}$ und $l_{j,\nu}$ stehen für das erste und das letzte Element der Skala j), und die Werte der inneren Produkte aus den Ableitungen der Entwicklungsfunktionen mit den Testfunktionen zu den Zeilenvektoren $D_{i,k}$ ($i = -1, \dots, m$; $k \in \mathcal{K}_i$ mit $\dim \mathcal{K}_i = \dim \mathcal{L}_i$)

$$(4.68a) \quad \mathcal{D}_{-1,k} = \begin{pmatrix} A_1(J_0, J_0, l_{-1,\mu}, k) \\ \vdots \\ A_1(J_0, J_0, l_{-1,\nu}, k) \\ B_1(J_0, J_0, l_{0,\mu}, k) \\ \vdots \\ B_1(J_M, J_0, l_{M,\nu}, k) \end{pmatrix}^T,$$

$$(4.68b) \quad \mathcal{D}_{i,k} = \begin{pmatrix} C_1(J_0, J_i, l_{-1,\mu}, k) \\ \vdots \\ C_1(J_0, J_i, l_{-1,\nu}, k) \\ D_1(J_0, J_i, l_{0,\mu}, k) \\ \vdots \\ D_1(J_M, J_i, l_{M,\nu}, k), \quad i \geq 0 \end{pmatrix}^T$$

	φ_0	ψ_0	ψ_1	ψ_2	
$\bar{\varphi}_0$	A_{00}	B_{00}	B_{10}	B_{20}	
$\bar{\psi}_0$	C_{00}	D_{00}	D_{10}	D_{20}	
$\bar{\psi}_1$	C_{01}	D_{01}	D_{11}	D_{21}	
$\bar{\psi}_2$	C_{02}	D_{02}	D_{12}	D_{22}	

ABBILDUNG 4.15. Struktur des Differenzenoperators \mathcal{D} .

und schließlich zur Matrix D

$$(4.69) \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{-1,k-1,\mu} \\ \vdots \\ \mathcal{D}_{-1,k-1,\nu} \\ \mathcal{D}_{0,k_0,\mu} \\ \dots \\ \mathcal{D}_{M,k_{M,\nu}} \end{pmatrix},$$

so ergibt sich mit geeigneten Einheitsmatrizen \mathcal{E} als Approximation der Gln. (4.1a) und (4.1b) das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(4.70) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U(t) \\ I(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{G}{C} \mathcal{E} & \frac{1}{C} \mathcal{D} \\ \frac{1}{L} \mathcal{D} & \frac{R}{L} \mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(t) \\ I(t) \end{pmatrix}.$$

Bild 4.15 zeigt die Struktur des Differenzenoperators \mathcal{D} . Dunkle Stellen symbolisieren Einträge ungleich Null. Randbedingungen sind nicht berücksichtigt.

6. Funktions- und Integralwerte verfeinerbarer Funktionen

Um den Projektor nach Ware zu berechnen, benötigt man die Funktionswerte der Skalierungsfunktion an den ganzzahligen Stützstellen; um den Differenzenoperator aufstellen zu können, das Integral über die n -te Ableitung der Skalierungsfunktion (verschoben um ganzzahlige Werte) multipliziert mit der dualen Skalierungsfunktion. In beiden Fällen findet zur Berechnung dasselbe Prinzip Anwendung:

1. Einsetzen der Skalierungsgleichungen führt zu einem Eigenwertproblem für die Funktions- bzw. Integralwerte.

2. Geeignete Nebenbedingungen erlauben eine eindeutige Lösung des Eigenwertproblems, sofern sie existiert.

Diese Vorgehensweise soll kurz am Beispiel der Berechnung der Funktionswerte einer Skalierungsfunktion mit kompaktem Träger an den ganzzahligen Stützstellen illustriert werden. Gesucht also ist $\varphi(i)$, $i \in \mathbb{Z}$. Einsetzen der Skalierungsgleichung liefert das Eigenwertproblem

$$(4.71) \quad \varphi(i) = \sqrt{2} \sum_{k=N}^M h_k \varphi(2i - k), \quad N < M.$$

Der Träger von φ ist durch

$$(4.72) \quad \text{supp}(\varphi(x)) = [N, M]$$

gegeben, wie folgende Überlegung zeigt: Angenommen $\varphi(x)$ habe den Träger $[a, b]$. Dann hat $\varphi(2x)$ den Träger $[a/2, b/2]$ bzw. $\varphi(2x - k)$ $[a/2 + k/2, b/2 + k/2]$. Also ist

$$\begin{aligned} \text{supp}(\varphi(x)) &= \bigcup_{k=N}^M \text{supp}(\varphi(2x - k)) \\ &= \left[\frac{a + N}{2}, \frac{b + N}{2} \right] \cup \left[\frac{a + N + 1}{2}, \frac{b + N + 1}{2} \right] \cup \dots \cup \left[\frac{a + M}{2}, \frac{b + M}{2} \right] \\ &= \left[\frac{a + N}{2}, \frac{b + M}{2} \right] \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit besteht unter der Bedingung, daß $a + 1 \leq b$ gilt. Dies muß aber erfüllt sein, da sonst $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n \neq L_2(\mathbb{R})$ (Grund: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \text{supp}(\varphi(x - k)) \neq \mathbb{R}$). Folglich müssen $a = N$ und $b = M$ sein.

Mit dem Vektor Φ der Funktionswerte von φ an den ganzzahligen Abszissenwerten innerhalb des Trägers

$$(4.73) \quad \Phi = (\varphi(N), \varphi(N + 1), \varphi(N + 2), \dots, \varphi(M))^T$$

ergibt sich die Eigenwertgleichung

$$(4.74) \quad \Phi = A\Phi$$

mit der Matrix A

$$(4.75) \quad A = \sqrt{2} \begin{pmatrix} h_N & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ h_{N+2} & h_{N+1} & h_N & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ h_{N+4} & h_{N+3} & h_{N+2} & h_{N+1} & h_N & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_M & h_{M-1} & h_{M-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & h_M \end{pmatrix}.$$

Der gesuchte Vektor Φ ist also Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert 1. Ist der Rang von A nur um eins kleiner als die Dimension, so ist der Eigenvektor bis auf einen skalaren Faktor eindeutig berechenbar, indem man eine Komponente ungleich null setzt und das entstehende Gleichungssystem löst.

Zur Berechnung der Integrale haben Dahmen & Micchelli (1993) die Grundlagen bereitgestellt. Auf ihnen baut ein Programm von Kunoth (1995) auf. Mit Hilfe dieses Programms ist es möglich, sowohl die Funktionswerte verfeinerbarer Funktionen an den ganzzahligen Stützpunkten als auch die inneren Produkte aus den (Ableitungen der) Skalierungsfunktionen und den dualen Skalierungsfunktionen zu berechnen. Damit sind also die Projektoren nach Ware und die Differenzoperatoren berechenbar. Da diese Arbeit mit der Anwendung des Kunothschen Programms auskommt, wird auf eine ausführliche Darstellung der Berechnung von Integralen verfeinerbarer Funktionen verzichtet und auf die o.g. Arbeiten verwiesen.

Verwendet man die biorthogonalen B-Spline-Wavelets zur Diskretisierung, d.h. die Skalierungsfunktionen und Wavelets als Entwicklungsfunktionen und die dualen Skalierungsfunktionen und dualen Wavelets als Testfunktionen, so beobachtet man bei der Approximation des Operators d/dx , daß z.B. die Differenzoperatoren bei Verwendung der (2,4)- und der (3,3)-B-Spline-Wavelets gleich sind. Auch (2,6), (3,5) und (4,4) oder (2,8), (3,7), (4,6) und (5,5) sind praktisch (bis auf kleine Rundungsfehler) gleich. Dies führte zu der Vermutung, daß

$$(4.76) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'_d(x-n) \tilde{\varphi}_{d,\tilde{d}}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'_{d+1}(x-n) \tilde{\varphi}_{d+1,\tilde{d}-1}(x) dx$$

gilt (wobei natürlich die Einschränkungen zur Wahl von d und \tilde{d} zu beachten sind). Die tiefgestellten Indizes bezeichnen hier ausnahmsweise wieder die Ordnung d und die duale Ordnung \tilde{d} der gewählten B-Spline-Wavelets. In der Tat läßt sich diese Beziehung unter Zuhilfenahme der Darstellung der dualen Skalierungsfunktion durch die d -te Ableitung der Fundamentalfunktion der iterativen Lagrange-Interpolation nach Gl. (4.25) zeigen.

Partielle Integration der linken Seite von Gl. (4.76)

$$(4.77) \quad \begin{aligned} L(n) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'_d(x-n) \tilde{\varphi}_{d,\tilde{d}}(x) dx \\ &= \varphi_d(x-n) \tilde{\varphi}_{d,\tilde{d}}(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_d(x-n) \tilde{\varphi}'_{d,\tilde{d}}(x) dx \end{aligned}$$

ergibt wegen des kompakten Trägers beider Skalierungsfunktionen nach Einsetzen von (4.25)

$$(4.78) \quad L(n) = - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d-1+k}{d-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_d(x-n) F_{d+\tilde{d}-1}^{(d+1)} \left(x-k - \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor \right) dx.$$

Die Skalierungsfunktionen sind ja kardinale B-Splines der Ordnung d , d.h. es sind stückweise Polynome vom Grad $d-1$. Durch Differentiation erniedrigt sich der Grad der Polynome um eins; die Ableitungen der Skalierungsfunktionen lassen sich also wieder durch B-Splines, allerdings der Ordnung $d-1$, ausdrücken. Für die Ableitung des um n verschobenen B-Splines der Ordnung $d+1$ erhält man

$$(4.79) \quad \varphi'_{d+1}(x-n) = \varphi_d(x-n+1-l(d+1)) - \varphi_d(x-n-l(d+1)).$$

Eingesetzt in die rechte Seite $R(n)$ von Gl. (4.76) ergibt sich unter Zuhilfenahme von

$$(4.80) \quad \binom{d+k}{d} = \binom{d+k-1}{d} + \binom{d+k-1}{d-1}$$

(z.B. Korn & Korn (1968))

$$(4.81) \quad R(n) = R_1 + R_2 + R_3$$

mit

$$R_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d+k}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_d(x-n+1-l(d+1)) F_{d+\tilde{d}-1}^{(d+1)} \left(x-k - \left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor \right) dx$$

$$R_2 = - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d+k-1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_d(x-n-l(d+1)) F_{d+\tilde{d}-1}^{(d+1)} \left(x-k - \left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor \right) dx$$

$$R_3 = - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d-1+k}{d-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_d(x-n-l(d+1)) F_{d+\tilde{d}-1}^{(d+1)} \left(x-k - \left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor \right) dx.$$

Durch Umindizierung der Summe im Term R_2 ($m = k-1$) und anschließende Substitution $y = x-1$ im Integral erhält man wegen $\binom{d-1}{d} = 0$

$$(4.82) \quad R_2 = -R_1.$$

Ist d gerade, so ergibt das Integral im Term R_3

$$(4.83) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_d(x-n-1) F_{d+\tilde{d}-1}^{(d+1)} \left(x-k - \frac{d}{2} - 1 \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_d(y-n) F_{d+\tilde{d}-1}^{(d+1)} \left(y-k - \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor \right) dy,$$

und ist d ungerade (hier gilt $\lceil \frac{d}{2} \rceil = \lceil \frac{d+1}{2} \rceil$)

$$(4.84) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_d(x-n) F_{d+\tilde{d}-1}^{(d+1)} \left(x-k - \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil \right) dx.$$

Mithin erhält man

$$(4.85) \quad R(n) = R_3 = L(n),$$

was zu zeigen war.

Für lineare partielle Differentialgleichungssysteme erster Ordnung hat dies zur Folge, daß Petrov-Galerkin-Diskretisierungen mit (Tensorprodukten von) biorthogonalen B-Spline-Wavelets trotz unterschiedlicher Wahl der Basisfunktionen zueinander äquivalent sein können. Verwendet man nur Skalierungsfunktionen, so sind die numerischen Algorithmen sogar gleich (einmal abgesehen von der Berechnung der Anfangsbedingungen und der Feldwerte). Ein durchaus überraschendes Ergebnis.

7. Zeitintegration

Wie in den einführenden Abschnitten dargestellt wurde, führt die Anwendung der Methode der Geraden auf ein Anfangswertproblem für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Die Dimension dieses Systems entspricht der Anzahl der Freiheitsgrade, d.h. der Unbekannten der räumlichen Diskretisierung der partiellen Differentialgleichung. Da wir im allgemeinen nicht hoffen können, in der Lage zu sein, dieses System zu diagonalisieren und damit explizit zu lösen, müssen wir uns mit einer numerischen Lösung begnügen.

Im folgenden werden explizite Einschrittverfahren vom Runge-Kutta-Typ sowie lineare Mehrschrittverfahren dargestellt. Die Darstellung beschränkt sich auf die elementaren Methoden mit fester Schrittweite, d.h. mit festem Zeitschritt Δt . Eine automatische Schrittweitensteuerung ist immer dann von Vorteil, wenn die Variablen sich nur zeitweise sehr schnell ändern, sonst aber eher langsam. Während der schnellen Änderungen ist ein kleiner Zeitschritt notwendig, sonst aber genügt ein großer. Bei der Ausbreitung von Wellen jedoch ist immer ein kleiner Zeitschritt notwendig, da —sehr vereinfachend gesprochen— die Welle lediglich ihre momentane Position verändert. Außerdem handelt es sich um hochdimensionale Gleichungssysteme, d.h. der numerische Aufwand und daher die Rechenzeit sind sehr groß, so daß man an einem möglichst großen Zeitschritt schon aus Gründen der praktischen Anwendbarkeit interessiert ist. Darüberhinaus zeigt die Dispersionsanalyse, daß bei geeigneter Wahl des Zeitintegrators der numerische Fehler weitgehend unabhängig von der Wahl des Zeitschritts ist, so dieser nur hinreichend klein ist, um die Stabilität des Verfahrens zu gewährleisten. All dies läßt den Mehraufwand einer automatischen Schrittweitensteuerung bei Wellenausbreitungsphänomenen, wie sie in der Hochfrequenz- und Mikrowellentechnik

typischerweise auftreten, ungerechtfertigt erscheinen. Der Zeitschritt sollte so nah wie möglich am Stabilitätslimit liegen.

Zu lösen ist also das Anfangswertproblem

$$(4.86a) \quad y'(t) = f(t, y),$$

$$(4.86b) \quad y(t_0) = y_0,$$

wobei

$$(4.86c) \quad t \in [t_0, t_e] \subset \mathbb{R},$$

$$(4.86d) \quad y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$(4.86e) \quad f \in \{f : f \in C(S) \text{ und } f \text{ Lipschitz-stetig in } S\},$$

$$(4.86f) \quad S = \{(t, y) : t_0 \leq t \leq t_e, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Die Stetigkeit der Funktion f sichert die Lösbarkeit des Anfangswertproblems (Satz von Peano), die Lipschitz-Stetigkeit auf dem Streifen S

$$(4.87) \quad \|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L\|u - v\| \quad \text{für alle } (t, u), (t, v) \in S$$

(L ist eine positive Konstante) die Eindeutigkeit der Lösung (Satz von Picard-Lindelöf).

Die zu beschreibenden numerischen Verfahren konstruieren auf einem Punktgitter

$$(4.88) \quad I_h = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}, \quad \text{mit } t_0 < t_1 < \dots < t_N \leq t_e$$

und den Schrittweiten $h_m = t_{m+1} - t_m$, $m = 0, \dots, N - 1$ als Näherungslösung für $y(t)$ eine Gitterfunktion

$$(4.89) \quad u_h(t) : I_h \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Die Funktionswerte $u_h(t_m)$ zum Zeitpunkt t_m werden kurz mit u_m bezeichnet.

Ein äquidistantes Gitter, und nur solche werden im weiteren betrachtet, ist durch eine konstante Schrittweite h , also

$$(4.90) \quad h_m = h \quad \text{für alle } m = 0, \dots, N - 1,$$

gekennzeichnet.

7.1. Runge-Kutta-Verfahren. Die expliziten Runge-Kutta-Verfahren sind explizite Einschrittverfahren, d.h. es handelt sich um Verfahren, die es ermöglichen, direkt aus dem Anfangswert y_0 eine Näherungslösung u_h auf dem Gitter I_h zu berechnen, ohne dabei ein Gleichungssystem lösen zu müssen. Sie sind gegeben durch

$c_1 = 0$					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\cdots	$a_{s,s-1}$	
	b_1	b_2	\cdots	b_{s-1}	b_s

TABELLE 4.2. Butcher-Schema eines s -stufigen expliziten Runge-Kutta-Verfahrens.

DEFINITION 2. Sei $s \in \mathbb{N}$. Ein Einschrittverfahren der Gestalt

$$(4.91) \quad \begin{aligned} u_{m+1} &= u_m + h_m \sum_{i=1}^s b_i f(t_m + c_i h_m, u_{m+1}^{(i)}) \\ u_{m+1}^{(i)} &= u_m + h_m \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t_m + c_j h_m, u_{m+1}^{(j)}), \quad i = 1, \dots, s \end{aligned}$$

heißt s -stufiges explizites Runge-Kutta-Verfahren. Das Verfahren wird vollständig bestimmt durch geeignete reelle Zahlen a_{ij} , b_i und c_i .

Die Koeffizienten a_{ij} , b_i und c_i werden gewöhnlich im Butcher-Schema angegeben (siehe Tabelle 4.2).

Es können prinzipiell Verfahren beliebig hoher Konvergenzordnung konstruiert werden, die Konstruktion wird jedoch immer komplizierter, je höher die Ordnung werden soll. Die Stufenzahl ist immer wenigstens so groß wie die Konvergenzordnung des Verfahrens, d.h. mit zunehmender Ordnung steigt der Speicherbedarf und die Rechenzeit. Für Details und weiterführende Literatur sei auf Strehmel & Weiner (1995), Grigorieff (1972) und Butcher (1987) verwiesen.

Im Anhang werden die Butcher-Schemata einiger sich als brauchbar für die Hochfrequenz- und Mikrowellentechnik (im Sinne der noch zu diskutierenden Dispersionsanalysen) herausgestellten expliziten Runge-Kutta-Verfahren angegeben.

7.2. Mehrschrittverfahren. Lineare Mehrschrittverfahren unterscheiden sich von den Einschrittverfahren durch das Auftreten unphysikalischer Lösungen. Für die Hochfrequenz- und Mikrowellentechnik heißt das folgendes. Bei Einschrittverfahren werden ausschließlich numerische Approximationen physikalischer Moden, soweit dies im Rahmen der gewählten Diskretisierungen möglich ist, berechnet. Bei Mehrschrittverfahren treten jedoch zusätzliche unphysikalische Moden auf. Allerdings kann die Anregung dieser Moden bei geeigneter Diskretisierung vermieden werden. Bei stark stabilen Mehrschrittverfahren werden die unphysikalischen Lösungen zudem exponentiell gedämpft. Ihre Bedeutung bekommen Mehrschrittverfahren vor allem dadurch, daß sie im allgemeinen weniger Funktionsaufrufe als Einschrittverfahren benötigen. Dies ist insbesondere bei der Lösung

zeitabhängiger partieller Differentialgleichungen in unserem Sinne wichtig, da im Funktionsaufruf —also in der Berechnung der räumlichen Ableitungen, Wirbel usw.— die Hauptrechenarbeit steckt.

Ein weiterer Unterschied ist, daß man außer dem Anfangswert y_0 noch weitere sogenannte Startwerte benötigt, um ein Mehrschrittverfahren anwenden zu können. Diese zusätzlichen Werte kann man beispielsweise durch geeignete Einschrittverfahren berechnen.

Wir gehen aus von

DEFINITION 3. *Ein lineares Mehrschrittverfahren mit k Schritten auf einem äquidistanten Gitter der Schrittweite h ist durch die Vorgabe der k Startwerte*

$$(4.92) \quad u_h(t_m) = u_h(mh) = u_m, \quad m = 0, 1, \dots, k-1$$

und einer Differenzgleichung

$$(4.93) \quad \sum_{l=0}^k \alpha_l u_{m+l} = h \sum_{l=0}^k \beta_l f(t_{m+l}, u_{m+l}), \quad m = 0, 1, N-k$$

mit

$$\alpha_l, \beta_l \in \mathbb{R} \text{ und } \alpha_k \neq 0, |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$$

festgelegt.

Verfahren mit $\beta_k \neq 0$ heißen implizit, weil sie die Lösung eines Gleichungssystems erfordern; Verfahren mit $\beta_k = 0$ explizit, weil sie die direkte Konstruktion der Lösung

$$(4.94) \quad u_k = \frac{1}{\alpha_k} \left(h \sum_{l=0}^{k-1} \beta_l f(t_{m+l}, u_{m+l}) - \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_l u_{m+l} \right)$$

ermöglichen.

Es lassen sich auch lineare Mehrschrittverfahren beliebig hoher Konvergenzordnung konstruieren. Da später von den Bedingungen hierfür Gebrauch gemacht werden wird, werden diese hier angegeben. Für Beweise und Details sei auf Strehmel & Weiner (1995) verwiesen.

Es gilt der

SATZ 2. *Sei $f(t, y)$ genügend oft differenzierbar auf S , und sei das lineare Mehrschrittverfahren nullstabil und konsistent von der Ordnung p . Dann ist es auch konvergent von der Ordnung p .*

DEFINITION 4. *Ein lineares Mehrschrittverfahren heißt nullstabil, wenn das erzeugende Polynom $\rho(\xi)$*

$$(4.95) \quad \rho(\xi) = \sum_{l=0}^k \alpha_l \xi^l, \quad \xi \in \mathbb{C}$$

der Wurzelbedingung genügt, d.h.

1. Die Wurzeln von $\rho(\xi)$ liegen im oder auf dem Einheitskreis $|\xi| \leq 1$ der komplexen ξ -Ebene.
2. Die auf dem Einheitskreis $|\xi| = 1$ liegenden Wurzeln von $\rho(\xi)$ sind einfach.

Liegt nur eine Nullstelle auf dem Einheitskreis und alle anderen im Inneren, so nennt man das Verfahren *stark stabil*; liegen mindestens zwei auf dem Einheitskreis, so nennt man es *schwach stabil*.

SATZ 3. Ein lineares Mehrschrittverfahren besitzt die Konsistenzordnung p genau dann, wenn die Bedingungen

$$(4.96a) \quad C_0 := \sum_{l=0}^k \alpha_l = 0$$

$$(4.96b) \quad C_1 := \sum_{l=0}^k (l\alpha_l - \beta_l) = 0$$

$$(4.96c) \quad C_\nu := \sum_{l=0}^k \left(\frac{l^\nu}{\nu!} \alpha_l - \frac{l^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \beta_l \right) = 0, \quad \nu = 2, 3, \dots, p$$

erfüllt sind.

Die Fehlerkonstante

$$(4.97) \quad C_{p+1}^* := \frac{C_{p+1}}{\sum_{l=0}^k \beta_l}$$

stellt ein Maß für die Genauigkeit des Verfahrens dar und ermöglicht den Vergleich verschiedener Verfahren gleicher Konsistenzordnung.

Die bekannten Adams-Verfahren ergeben sich durch die Wahl

$$(4.98) \quad \alpha_k = 1, \quad \alpha_{k-1} = -1, \quad \alpha_l = 0, \quad l = 0, 1, \dots, k-2$$

und der Forderung, daß die Konvergenzordnung maximal werden soll (für $k \geq 1$; üblicherweise werden Adams-Verfahren durch Interpolation und Integration hergeleitet, so daß es noch ein Adams-Moulton-Verfahren mit $k = 0$ gibt).

Dies ergibt die impliziten, stark stabilen Adams-Moulton-Verfahren. Ihre Koeffizienten

$$(4.99) \quad \beta_l = (-1)^{k-l} \sum_{i=k-l}^k \gamma_i^* \binom{i}{k-l}, \quad l = 0, \dots, k$$

lassen sich rekursiv mit

$$(4.100) \quad \gamma_l^* + \frac{1}{2}\gamma_{l-1}^* + \frac{1}{3}\gamma_{l-2}^* + \dots + \frac{1}{l+1}\gamma_0^* = \begin{cases} 1 & \text{für } l = 0 \\ 0 & \text{für } l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

berechnen. Die ersten vier Verfahren sind gegeben durch

$$k = 0 : \quad u_{m+1} = u_m + hf_{m+1} \quad (\text{implizites Euler-Verfahren})$$

$$k = 1 : \quad u_{m+1} = u_m + \frac{h}{2}(f_{m+1} + f_m) \quad (\text{Trapezregel})$$

$$k = 2 : \quad u_{m+2} = u_{m+1} + \frac{h}{12}(5f_{m+2} + 8f_{m+1} - f_m)$$

$$k = 3 : \quad u_{m+3} = u_{m+2} + \frac{h}{24}(9f_{m+3} + 19f_{m+2} - 5f_{m+1} + f_m).$$

Fordert man, daß die Verfahren explizit, also $\beta_k = 0$ sein sollen, erhält man die expliziten, ebenfalls stark stabilen Adams-Bashforth-Verfahren mit den Koeffizienten

$$(4.101) \quad \beta_l = (-1)^{k-l-1} \sum_{k-l-1}^{k-1} \gamma_i \binom{i}{k-l-1}, \quad l = 0, 1, \dots, k-1$$

und der Rekursionsformel

$$(4.102) \quad \gamma_l + \frac{1}{2}\gamma_{l-1} + \frac{1}{3}\gamma_{l-2} + \dots + \frac{1}{l+1}\gamma_0 = 1, \quad l = 0, 1, \dots$$

Die ersten vier Verfahren lauten

$$k = 1 : \quad u_{m+1} = u_m + hf_m \quad (\text{explizites Euler-Verfahren})$$

$$k = 2 : \quad u_{m+2} = u_{m+1} + \frac{h}{2}(3f_{m+1} - f_m)$$

$$k = 3 : \quad u_{m+3} = u_{m+2} + \frac{h}{12}(23f_{m+2} - 16f_{m+1} + 5f_m)$$

$$k = 4 : \quad u_{m+4} = u_{m+3} + \frac{h}{24}(55f_{m+3} - 59f_{m+2} + 37f_{m+1} - 9f_m).$$

Wählt man hingegen ($k \geq 2$)

$$(4.103) \quad \alpha_k = 1, \quad \alpha_{k-1} = 0, \quad \alpha_{k-2} = -1, \quad \alpha_l = 0, \quad l = 0, 1, \dots, k-3,$$

so erhält man die expliziten Nyström- und die impliziten Milne- bzw. Milne-Simpson-Verfahren.

Die expliziten Nyström-Verfahren sind gegeben durch

$$(4.104) \quad \beta_l = (-1)^{k-l-1} \sum_{i=k-l-1}^{k-1} \kappa_i \binom{i}{k-l-1}$$

und

$$(4.105a) \quad \kappa_0 = 2$$

$$(4.105b) \quad \kappa_l + \frac{1}{2}\kappa_{l-1} + \frac{1}{3}\kappa_{l-2} + \dots + \frac{1}{l+1}\kappa_0 = 1, \quad l = 1, 2, \dots$$

Die ersten drei Verfahren sind

$$k = 2 : \quad u_{m+2} = u_m + 2hf_{m+1} \quad (\text{explizite Mittelpunkregel})$$

$$k = 3 : \quad u_{m+3} = u_{m+1} + \frac{h}{3}(7f_{m+2} - 2f_{m+1} + f_m)$$

$$k = 4 : \quad u_{m+4} = u_{m+2} + \frac{h}{3}(8f_{m+3} - 5f_{m+2} + 4f_{m+1} - f_m).$$

Die explizite Mittelpunkregel erhält man auch durch Approximation der zeitlichen Differentiation mit Zentralfdifferenzen, einem in der elektrotechnischen Literatur häufig gewählten Ansatz (Yee 1966, Krumpholz & Katehi 1996, Werthen & Wolff 1996, Haussmann & Piket-May 1997).

Die impliziten Verfahren ergeben sich aus

$$(4.106) \quad \beta_l = (-1)^{k-l} \sum_{i=k-l}^k \kappa_i^* \binom{i}{k-l}$$

und

$$(4.107a) \quad \kappa_0^* = 2$$

$$(4.107b) \quad \kappa_1^* = -2$$

$$(4.107c) \quad \kappa_l^* + \frac{1}{2}\kappa_{l-1}^* + \frac{1}{3}\kappa_{l-2}^* + \dots + \frac{1}{l+1}\kappa_0^* = 0, \quad l = 2, 3, \dots$$

Für $k = 2$ und $k = 3$ erhält man das Milne-Verfahren

$$(4.108) \quad u_{m+2} = u_m + \frac{h}{3}(f_{m+2} + 4f_{m+1} + f_m),$$

für $k \geq 4$ die Milne-Simpson-Verfahren, z.B. für $k = 4$

$$(4.109) \quad u_{m+4} = u_{m+2} + \frac{h}{90}(29f_{m+4} + 124f_{m+3} + 24f_{m+2} + 4f_{m+1} - f_m).$$

Tabelle 4.3 gibt eine Übersicht über die Konsistenzordnungen und Fehlerkonstanten der angegebenen linearen Mehrschrittverfahren.

7.3. Prädiktor-Korrektor-Verfahren. Meist werden lineare Mehrschrittverfahren als Prädiktor-Korrektor-Verfahren implementiert. Dabei wird das Gleichungssystem, das bei Anwendung eines impliziten Verfahrens entsteht, durch Iteration gelöst. Als Startwert verwendet man das Ergebnis eines expliziten Verfahrens. Es läßt sich zeigen, daß schon mit wenigen Iterationsschritten die Konvergenzordnung des Prädiktor-Korrektor-Verfahrens der des impliziten Mehrschrittverfahrens entspricht.

Man unterscheidet $P(EC)^M E$ - und $P(EC)^M$ -Verfahren. Dabei steht P für den Prädiktorschritt („predict“), E für die Funktionsauswertung („evaluate“) und C für den Korrektorschritt („correct“).⁴

⁴Die Koeffizienten vor den Näherungen $u_{m+k}^{(\kappa)}$ wurden auf 1 normiert.

Verfahren	Ordnung	Fehlerkonstante
Adams-Bashforth	k	γ_k
$k = 1$	1	1/2
$k = 2$	2	5/12
$k = 3$	3	3/8
$k = 4$	4	251/720
Adams-Moulton	$k + 1$	γ_{k+1}^*
$k = 0$	1	-1/2
$k = 1$	2	-1/12
$k = 2$	3	-1/24
$k = 3$	4	-19/720
Nyström	k	$\kappa_k/2$
$k = 2$	2	1/6
$k = 3$	3	1/6
$k = 4$	4	29/180
Milne	4	-1/180
Milne-Simpson $k = 4$	5	-1/180
$(k > 4)$	$k + 1$	$\kappa_{k+1}^*/2$

TABELLE 4.3. Konsistenzordnungen und Fehlerkonstanten der angegebenen linearen Mehrschrittverfahren.

1. $P(EC)^M E$ -Verfahren:

$$\begin{aligned}
 (4.110) \quad P : \quad & u_{m+k}^0 + \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_l^P u_{m+l} = h \sum_{l=0}^{k-1} \beta_l^P f_{m+l} \\
 E : \quad & f_{m+k}^{(\kappa-1)} = f(t_{m+k}, u_{m+k}^{(\kappa-1)}), \quad \kappa = 1, 2, \dots, M \\
 C : \quad & u_{m+k}^{(\kappa)} + \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_l u_{m+l} = h \beta_k f_{m+k}^{(\kappa-1)} + h \sum_{l=0}^{k-1} \beta_l f_{m+l}, \quad \kappa = 1, 2, \dots, M \\
 E : \quad & f_{m+k}^{(M)} = f(t_{m+k}, u_{m+k}^{(M)})
 \end{aligned}$$

Man setzt dann

$$(4.111a) \quad u_{m+k} = u_{m+k}^{(M)}$$

$$(4.111b) \quad f_{m+k} = f(t_{m+k}, u_{m+k}^{(M)}).$$

2. $P(EC)^M$ -Verfahren:

$$(4.112) \quad \begin{aligned} P : \quad & u_{m+k}^0 + \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_l^P u_{m+l} = h \sum_{l=0}^{k-1} \beta_l^P f_{m+l} \\ E : \quad & f_{m+k}^{(\kappa-1)} = f(t_{m+k}, u_{m+k}^{(\kappa-1)}), \quad \kappa = 1, 2, \dots, M \\ C : \quad & u_{m+k}^{(\kappa)} + \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_l u_{m+l} = h \beta_k f_{m+k}^{(\kappa-1)} + h \sum_{l=0}^{k-1} \beta_l f_{m+l}, \quad \kappa = 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

Hier setzt man

$$(4.113a) \quad u_{m+k} = u_{m+k}^{(M)}$$

$$(4.113b) \quad f_{m+k} = f(t_{m+k}, u_{m+k}^{(M-1)}).$$

Bezüglich der Konvergenz der Prädiktor-Korrektor-Verfahren gilt der Satz

SATZ 4. Seien $f(t, y)$ hinreichend oft stetig differenzierbar, p^* die Konsistenzordnung des Prädiktors und p die Konsistenzordnung des Korrektors. Ferner sei der Korrektor nullstabil. Dann konvergieren das $P(EC)^M E$ - und das $P(EC)^M$ -Verfahren von der Ordnung

$$(4.114) \quad p_M = \min(p^* + M, p),$$

falls die Startwerte die Ordnung p_M besitzen.

Praktisch verwendet man z.B. ein Adams-Bashforth-Verfahren mit L Schritten als Prädiktor und ein Adams-Moulton-Verfahren mit ebenfalls L Schritten als Korrektor. Aus obigem Satz folgt, daß wir in diesem Fall lediglich *einen* Korrektorschritt benötigen, um bereits die Konvergenzordnung des Korrektors zu erreichen.

Ebenso böte sich eine Kombination aus Nyström- und Milne(-Simpson)-Verfahren an.

8. Implementierungsaspekte

Während sich finite Differenzen recht direkt und einfach implementieren lassen, sind Waveletverfahren sehr viel aufwendiger:

- Der Differenzenoperator ist skalenabhängig und recht kompliziert zu berechnen (Abschnitt 5).
- Die Koeffizienten, mit denen gerechnet wird, entsprechen nicht Feldwerten an einem Ort. Daher werden Projektoren, mit denen die Entwicklungskoeffizienten der Anfangs- und ggf. Randbedingungen sowie der Quellterme erst berechnet werden müssen, benötigt. Zudem braucht man Routinen, die die Funktionswerte aus den Koeffizienten berechnen.
- Diese Berechnung der Koeffizienten aus den Funktionswerten und umgekehrt läßt sich nur für die Darstellung ohne Wavelets einfach durchführen. Daher muß die schnelle Wavelettransformation implementiert sein, um zwischen verschiedenen äquivalenten Darstellungen umschalten zu können.

Also muß die größte Skala und damit die benötigte Anzahl von Waveletleveln, um eine feinste Auflösung zu gewährleisten, während des Programmlaufs veränderbar sein.

- Zudem sollte die Datenstruktur dynamisch sein, um eine adaptive Diskretisierung zu ermöglichen, und um Speicherplatz und Rechenzeit einzusparen.

In der Literatur wird die Effizienz dynamischer Datenstrukturen durch den Aufwand, um ein neues Element einzufügen, eines zu löschen und ein bestimmtes zu suchen, beurteilt. Für Datenbankanwendungen sind dies die richtigen Kriterien. Aber bei der Anwendung von Differenzenoperatoren auf die Datenstruktur oder bei der schnellen Wavelettransformation werden benachbarte Elemente miteinander verknüpft. Die Datenstruktur sollte also diese Nachbarschaft erhalten.

Hash-Tables zerstören diese Nachbarschaft der Elemente, d.h. jedes Element muß erst gesucht werden, bevor es benutzt werden kann. Diese Suche aber macht das Programm langsam. Viel günstiger sind Arrays, die direkt indiziert werden können oder verkettete, geordnete Listen, da eine Suche entfällt.

Baumstrukturen repräsentieren zwar die Struktur der Koeffizienten zwischen den verschiedenen Skalen sehr gut, dafür aber erlauben sie kein direktes Operieren innerhalb einer Skala, wie es z.B. bei der schnellen Wavelettransformation benötigt wird. Man müßte diese Verbindungen innerhalb einer Skala erst sozusagen durch zusätzliche horizontale Zeigerstrukturen erzeugen, wodurch aber zusätzlicher Speicherbedarf entsteht.

Um Operationen innerhalb einer Skala zu unterstützen und Differenzenoperatoren effektiv implementieren zu können, werden also für die Koeffizienten der einzelnen Skalen $c_0, d_0, d_1, d_2, \dots$ jeweils eigene Datenstrukturen verwendet. Die einzelnen Datenstrukturen werden als Arrays oder als geordnete, verkettete Listen ausgeführt. Als Zwischenstufe zwischen Array und verketteter Liste wird auch eine Variante von Arrays verwendet, bei der nur die Koeffizienten ungleich Null bei Rechenoperationen berücksichtigt werden. Dabei werden die Bereiche ungleich Null in einer verketteten Liste gespeichert. Dieser Ansatz ist von der Rechenzeit effektiver als eine verkettete Liste, wenn die Elemente im Array geclustert —also in mehreren zusammenhängenden Bereichen— vorliegen.

Um den Differenzenoperator zu implementieren, speichert man die berechneten Koeffizienten in verschiedenen Arrays. Drumherum schreibt man eine Indexfunktion, die den richtigen Koeffizienten zurückgibt und ggf. neue vorher berechnet. Außerdem empfiehlt es sich Funktionen zu schreiben, die optimiert den Differenzenoperator auf die Entwicklungskoeffizientendatenstruktur anwenden, wobei von Codeinlinen und Ausrollen von Schleifen Gebrauch gemacht werden sollte. Hierdurch konnte z.B. die Anwendung eines Differenzenoperators auf ein Array um den Faktor 50 beschleunigt werden.

Als Implementierungssprache wurde C++ gewählt, da damit einerseits sehr effektiver Code geschrieben werden kann (vergleichbar C oder Fortran) und andererseits objektorientierte Programmierung unterstützt wird, um eine nachträgliche Veränderung der zugrundeliegenden Datenstrukturen zu erleichtern.

Dispersionsanalyse

Beim Studium elektromagnetischer Wellenausbreitungsphänomene haben sich Dispersionsrelationen als sehr hilfreich erwiesen. Man erhält sie durch Fouriertransformation des Systems partieller Differentialgleichungen vom Orts/Zeit-Bereich in den Wellenzahl/Frequenz-Bereich und Bestimmung der Eigenlösungen des Gleichungssystems. Die Dispersionsrelationen sind die Beziehungen zwischen den Wellenzahlen und der Frequenz der Eigenlösungen, genauer: es sind die Eigenwerte des Gleichungssystems.

Aus den Dispersionsrelationen kann man die Ausbreitungsgeschwindigkeiten in die verschiedenen Raumrichtungen, die Verzerrung von Wellenpaketen sowie die Dämpfung ablesen. Die charakteristischen Größen, die dies ermöglichen sind die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit, sowie der Dämpfungsfaktor. Mit ihrer Angabe lassen sich verschiedenartige Medien und unterschiedliche Wellentypen charakterisieren.

Der Vergleich von diskreten Dispersionsrelationen der angewandten numerischen Verfahren zur Lösung der partiellen Differentialgleichungen mit ihren analytischen Entsprechungen sind seit langem üblich in der Numerik. Daraus läßt sich der Fehler, den man bei der numerischen Lösung macht, in einen Amplituden- und einen Geschwindigkeitsfehler unterscheiden. Aus dem Geschwindigkeitsfehler kann man ablesen, wie groß der Fehler der Ausbreitungsgeschwindigkeit in die verschiedenen Raumrichtungen ist. Meist wird dies als Dispersionsfehler bezeichnet. Zusätzlich kann jedoch ein Amplitudenfehler auftreten. Führt der Amplitudenfehler zu einem exponentiellen Wachstum, so kann man daraus schließen, daß das numerische Verfahren instabil ist. Charakteristisch für Wellenausbreitungsphänomene ist, daß Orts- und Zeitschritt im numerischen Verfahren nicht frei gewählt werden können, da es sonst zu instabilem Verhalten kommt. Die Berechnung der Grenze —also wie groß kann man den Zeitschritt bei vorgegebenem Ortsschritt maximal machen— kann mit Hilfe der Dispersionsrelation erfolgen, indem man den maximalen Zeitschritt sucht, bei dem gerade noch kein exponentielles Wachstum eintritt.

Es wird die Dispersionsanalyse aller dreier Klassen von Zeitintegratoren in Kombination mit translationsinvarianten Differenzenoperatoren durchgeführt. Dabei ist es unerheblich, ob die Differenzenoperatoren durch Anwendung finiter

Differenzen, finiter Elemente oder Petrov-Galerkin-Diskretisierungen entstehen. Die gewonnenen Dispersionsanalysen bleiben gültig. Sie sind also von grundlegender Bedeutung für die Entwicklung von Approximationsverfahren höherer Ordnung.

1. Analytische Dispersionsrelation

Wie eingangs erwähnt wird das bestimmende partielle Differentialgleichungssystem vom Orts/Zeit-Bereich in den Wellenzahl/Frequenz-Bereich fouriertransformiert und die Eigenwerte des Gleichungssystems bestimmt. Zur Interpretation des Ergebnisses ist es jedoch sinnvoll, die Synthesegleichung zu betrachten. Eine monofrequente Welle der Wellenzahl β_0 und der Frequenz ω_0 hat im Wellenzahl/Frequenz-Bereich die Darstellung

$$(5.1) \quad A(\beta, \omega) = C\delta(\omega - \omega_0)\delta(\beta - \beta_0)$$

und im Orts/Zeit-Bereich

$$(5.2) \quad a(x, t) = Ce^{j(\omega_0 t + \beta_0 x)}.$$

Betrachtet man komplexe Frequenzen, also $\omega_0 = u + iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}$, ergibt sich

$$(5.3) \quad a(x, t) = Ce^{-vt}e^{ju(t + \frac{\beta}{u}x)}.$$

Daraus ergibt sich, daß eine monofrequente Welle exponentiell gedämpft ($v > 0$) oder verstärkt ($v < 0$) wird, wenn ω_0 einen Imaginärteil aufweist, und die Welle sich mit der Phasengeschwindigkeit

$$(5.4) \quad c_{\text{ph}} = -\frac{u}{\beta}$$

ausbreitet.

Im Wellenzahl/Frequenzbereich lautet das Modellproblem (4.1a) und (4.1b)

$$(5.5) \quad \begin{pmatrix} j\frac{G}{C} - \omega & -\frac{\beta}{C} \\ -\frac{\beta}{L} & j\frac{R}{L} - \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus dem charakteristischen Polynom

$$(5.6) \quad \omega^2 - j\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)\omega - \left(\frac{\beta^2}{LC} + \frac{RG}{LC}\right) = 0$$

folgen die beiden Eigenwerte

$$(5.7) \quad \omega_{1,2} = j\left(\frac{R}{2L} + \frac{G}{2C}\right) \pm \frac{\beta}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} - \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\right)^2},$$

und schließlich die Phasengeschwindigkeiten

$$(5.8) \quad c_{\text{ph}} = \begin{cases} \mp \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} - \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \right)^2} & \text{für } \beta^2 \geq \left(\frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} - \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \right)^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Als Lösung erhält man also eine nach links und eine nach rechts laufende gedämpfte Welle mit einer wellenzahlabhängigen Phasengeschwindigkeit. D.h. die Maxima von Wellenpaketen werden im Laufe ihrer Ausbreitung kleiner und die Pakete werden i.a. breiter, außerdem ist eine Wellenausbreitung bei einer Frequenz ω nur bis zu einer maximalen Wellenlänge möglich, Wellen mit größerer Wellenlänge werden nur exponentiell gedämpft. Im Sonderfall $R/L = G/C$ jedoch ist die Phasengeschwindigkeit unabhängig von der Wellenzahl, die Wellenpakete laufen daher nicht auseinander sondern behalten ihre Form. Dies wurde bereits von Heaviside (1887) (wiederveröffentlicht in Heaviside (1970a)) erkannt. Bemerkenswerterweise wurden in der Folge der Publizierung dieser Ergebnisse auf Druck aus dem Postministerium die Publikation weiterer Arbeiten unterbunden (Heaviside 1971) (z.B. der schon 1887 entstandene aber erst 1970 veröffentlichte Beitrag Heaviside (1970b)), da die Ergebnisse der Auffassung des Ministeriums widersprachen. Heaviside forderte eine Erhöhung der Induktivität der Telegraphenleitungen, um eine möglichst verzerrungsfreie Übertragung zu gewährleisten, das Ministerium meinte jedoch, daß die Induktivität der Leitung schuld an den Verzerrungen und damit zu vermeiden sei.

2. Vorbetrachtungen

Die Herleitung diskreter Dispersionsrelationen für Finite-Differenzen-Verfahren verlaufen analog zu denen der analytischen, wobei allerdings die diskrete Fouriertransformation verwendet wird, um dem Punktcharakter der Verfahren —schließlich handelt es sich um Gitterfunktionen— Rechnung zu tragen. Bei Petrov-Galerkin-Diskretisierungen jedoch ist nicht ohne weiteres klar, ob die diskrete Fouriertransformation der Differenzgleichungen zwischen den Entwicklungsfunktionen adäquat ist. Der Kernunterschied zwischen finiten Differenzen und Petrov-Galerkin-Diskretisierungen besteht darin, daß die Unbekannten im ersten Fall Funktionswerte an diskreten Punkten darstellen, im zweiten Fall aber lediglich Entwicklungskoeffizienten. In beiden Fällen werden Differenzgleichungen gelöst, für die Dispersionsrelationen aufgestellt werden können. Im ersten Fall beschreiben sie das Ausbreitungsverhalten der Felder im abgetasteten dreidimensionalen Raum, im zweiten das der Koeffizienten im diskreten Raum der Indizes. Trotzdem wurde z.B. in Krumpholz et al. (1995) oder Krumpholz & Katehi (1996) kommentarlos die Dispersionsrelation der Koeffizienten berechnet.

Betrachten wir also ein zeitabhängiges, lineares, partielles Differentialgleichungssystem im n -dimensionalen Raum

$$(5.9) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = Lf.$$

Im Rahmen der hier betrachteten Petrov-Galerkin-Diskretisierung wird f durch eine Linearkombination verschobener Basisfunktionen approximiert, wobei ein Tensorproduktansatz verwendet wird

$$(5.10) \quad f \approx \tilde{f}(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{k, l_1, \dots, l_n = -\infty}^{\infty} u_{k, l_1, \dots, l_n} g_{k, l_1, \dots, l_n}(t, x_1, \dots, x_n)$$

mit

$$(5.11) \quad g_{k, l_1, \dots, l_n}(t, x_1, \dots, x_n) = \delta(t - k\Delta t) h_1(x_1 - l_1\Delta x_1) \cdots h_n(x_n - l_n\Delta x_n).$$

Die Zeitachse wird durch ein Punktgitter ersetzt, und räumlich werden die verschobenen Produkte der Funktionen h_1, \dots, h_n verwendet¹.

Die Approximationslösung u erfüllt statt des partiellen Differentialgleichungssystem die Differenzengleichung

$$(5.12) \quad u_{k+1} = Du_k,$$

wobei die Koeffizienten zu jedem Zeitpunkt in Vektoren zusammengefaßt werden.

Die diskret fouriertransformierten Entwicklungskoeffizienten \hat{U} erfüllen die Dispersionsrelation

$$(5.13) \quad \hat{U} = e^{i\Omega} \hat{D} \hat{U},$$

wobei Ω die normierte Frequenz und \hat{D} die durch die diskrete Fouriertransformation entstehende Matrix sind.

Die Fouriertransformierte \hat{F} der Approximation ergibt sich aufgrund der gewählten Form der Entwicklungsfunktionen als Produkt der diskreten Fouriertransformierten der Entwicklungskoeffizienten mit den Fouriertransformierten der Entwicklungsfunktionen

$$(5.14) \quad \hat{F}(\Omega, \eta_1, \dots, \eta_n) = \hat{U}(\Omega, \eta_1, \dots, \eta_n) \hat{H}_1(\eta_1) \cdots \hat{H}_n(\eta_n),$$

wobei η_1, \dots, η_n die normierten Wellenzahlen bezeichnen. Um die Frage zu beantworten, inwieweit sich die Dispersionsrelation der Entwicklungskoeffizienten auf die Funktion überträgt, setzen wir diese ein und führen die inverse Fouriertransformation durch. Das Ergebnis lautet

$$(5.15) \quad \tilde{f}((k+1)\Delta t, x_1, \dots, x_n) = D\tilde{f}(k\Delta t, x_1, \dots, x_n).$$

Diese Gleichung jedoch ist sicherlich im allgemeinen nicht wahr. D.h. die Dispersionseigenschaften übertragen sich nicht. Allerdings ließe sich offenbar das Gleichheitszeichen durch ein Ungefähr ersetzen und für konvergente Verfahren

¹Die oben zitierten Beispiele von Krumpholz et.al. fallen in diese Kategorie. Ebenso finite Differenzen.

ginge der Fehler für immer mehr Entwicklungsfunktionen gegen Null. Daraus läßt sich schließen, daß für gute Verfahren auch die Dispersionseigenschaften der Entwicklungskoeffizienten gut mit denen der gesuchten Lösung übereinstimmen. Den Umkehrschluß kann man daraus leider nicht ziehen. Hierzu müßte man den Fehlerterm genauer untersuchen, was jedoch abhängig von den Entwicklungsfunktionen ist.

Trotzdem ist die Dispersionsanalyse der Entwicklungskoeffizienten sehr aufschlußreich. Z.B. folgt aus der Beschränktheit der Koeffizienten die Beschränktheit der Funktion und umgekehrt². Man kann also zumindest die aus den Dispersionsanalysen der Entwicklungskoeffizienten gewonnenen Stabilitätsgrenzen auf die Verfahren übertragen. Außerdem scheint es nicht ganz abwegig zu sein, daß Verfahren mit besseren Dispersionseigenschaften der Koeffizienten auch selbst bessere Dispersionseigenschaften haben.

Zur Interpretation der numerischen Dispersionsrelationen empfiehlt es sich wiederum die Synthesgleichung, diesmal jedoch der diskreten Fouriertransformation, zu betrachten. Hier lautet der Phasenterm

$$e^{i(\Omega k + \eta l)}$$

mit $k, l \in \mathbb{Z}$, der normierten Frequenz

$$\Omega = \omega \Delta t$$

und der normierten Wellenzahl

$$\eta = \beta \Delta x.$$

Wiederum erlauben wir komplexe Frequenzen, d.h. $\Omega = U + iV = u \Delta t + iv \Delta t$. Damit ergibt sich

$$e^{-Vk} e^{iU(k + \frac{\eta}{U}l)} = e^{-\frac{V}{\Delta t} \Delta t k} e^{i \frac{U}{\Delta t} (\Delta t k + \frac{\Delta t \eta}{\Delta x U} \Delta x l)} = e^{-vk \Delta t} e^{iu(k \Delta t + \frac{\beta}{u} l \Delta x)}.$$

Daraus folgen die Phasengeschwindigkeit c_{ph} der diskreten Welle

$$(5.16) \quad c_{\text{ph}} = -\frac{\Delta x U}{\Delta t \eta}$$

und die Dämpfung α

$$(5.17) \quad \alpha = \frac{V}{\Delta t}.$$

Eine weitere Schwierigkeit ergibt sich bei der Durchführung der Dispersionsanalyse bei Wavelet-Galerkin-Diskretisierungen. Die Verkopplung zwischen den Koeffizienten auf verschiedenen Skalen ist sehr unübersichtlich, schwer zu interpretieren und kaum handhabbar. Wenn wir uns jedoch auf lineare Operatoren beschränken, gestaltet sich die Dispersionsanalyse wesentlich einfacher. Wie gezeigt

²Genauer wäre es zu sagen: Sind die Entwicklungsfunktionen geeignet gewählt, d.h. bilden sie eine Riesz-Basis des zu approximierenden Funktionenraums, so gilt eine Normäquivalenz. Ist die Norm der Koeffizienten endlich, so ist es auch die der Funktion und umgekehrt. Für die in dieser Arbeit gewählten Entwicklungsfunktionen ist dies der Fall.

wurde, sind in diesem Fall die Algorithmen, die nur die Skalierungsfunktionen auf einer entsprechend feinen Skala verwenden, und die, die sowohl mit Skalierungsfunktionen als auch mit Wavelets arbeiten, äquivalent. Die Dispersionsanalysen also gleichwertig. Es genügt daher, lediglich für Entwicklungen mit Skalierungsfunktionen die Dispersionsanalysen durchzuführen.

In diesem Fall sind die Dispersionsanalysen für finite Differenzen und Wavelet-Galerkin-Verfahren praktisch dieselben. Sie unterscheiden sich lediglich in der Wahl des zugrundeliegenden räumlichen Differenzenoperators und natürlich darin, daß man im einen Fall die Dispersionsrelation der Gitterfunktionen betrachtet und im anderen die der Entwicklungskoeffizienten. Das heißt aber, daß die folgenden allgemeinen Analysen verschiedener Integrationsverfahren gültig sind für finite Differenzen und für Petrov-Galerkin-Verfahren mit translationsinvarianten räumlichen Basisfunktionen.

Dem wird Rechnung getragen, indem verschiedene Differenzenoperatoren analysiert werden. Im einzelnen sind dies

- Zentralfdifferenzen
- finite Differenzen 4. Ordnung (Collatz 1955)
- Differenzenoperatoren aus Diskretisierungen mit den Skalierungsfunktionen der biorthogonalen B-Spline-Wavelets, wobei es wie ausgeführt genügt, die Verfahren (2,4), (2,6), (2,8), usw. zu betrachten.

Die Koeffizienten der Approximationen des Differentialoperators d/dx sind im Anhang gegeben.

Bezeichne also D den verwendeten translationsinvarianten Differenzenoperator. Durch Einführung des räumlichen Verschiebeoperators S_x ³

$$(5.18) \quad S_x u_i(t) = u_{i+1}(t)$$

läßt sich der Differenzenoperator als Potenzreihe schreiben

$$(5.19) \quad D = \sum_{n=N_1}^{N_2} p_n S_x^n,$$

wobei für die hier betrachteten antisymmetrische Differenzenoperatoren $N_1 = -N_2 \leq -1$ gilt, und das gewöhnliche Differentialgleichungssystem erhält formal Blockdiagonalstruktur. Dadurch genügt es, lediglich einen Block zu untersuchen

$$(5.20) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_i(t) \\ i_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{G}{C} & -\frac{1}{C}D \\ -\frac{1}{L}D & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i(t) \\ i_i(t) \end{pmatrix}.$$

³Da die Entwicklungskoeffizienten im folgenden immer nur Skalierungskoeffizienten sind, wird der Skalenindex weggelassen, also z.B. $u_i(t)$ statt $u_{-1,i}(t)$ geschrieben.

3. Lineare Mehrschrittverfahren

Für ein lineares Mehrschrittverfahren mit K Schritten erhält man also mit $u_{k,l} := u_l(k\Delta t)$ den Algorithmus

$$(5.21) \quad \sum_{k=0}^K \alpha_k \begin{pmatrix} u_{m+k,l} \\ i_{m+k,l} \end{pmatrix} = \Delta t \sum_{k=0}^K \beta_k \begin{pmatrix} -\frac{G}{C} & -\frac{1}{C}D \\ -\frac{1}{L}D & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{m+k,l} \\ i_{m+k,l} \end{pmatrix}.$$

Diskrete Fouriertransformation liefert das Eigenwertproblem

$$(5.22) \quad M(\Omega, \eta) \begin{pmatrix} U(\Omega, \eta) \\ I(\Omega, \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$M(\Omega, \eta) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^K \alpha_k e^{ik\Omega} + \Delta t \frac{G}{C} \sum_{k=0}^K \beta_k e^{ik\Omega} & \frac{\Delta t}{C} \left(\sum_{k=0}^K \beta_k e^{ik\Omega} \right) \begin{pmatrix} N_2 \\ n=N_1 \end{pmatrix} p_n e^{in\eta} \\ \frac{\Delta t}{L} \left(\sum_{k=0}^K \beta_k e^{ik\Omega} \right) \begin{pmatrix} N_2 \\ n=N_1 \end{pmatrix} p_n e^{in\eta} & \sum_{k=0}^K \alpha_k e^{ik\Omega} + \Delta t \frac{G}{C} \sum_{k=0}^K \beta_k e^{ik\Omega} \end{pmatrix}$$

und den beiden Eigenwerten

$$(5.23) \quad \frac{\sum_{k=0}^K \alpha_k e^{ik\Omega}}{\sum_{k=0}^K \beta_k e^{ik\Omega}} = -\Delta t \left(\frac{G}{2C} + \frac{R}{2L} \right) \pm \frac{\Delta t}{\sqrt{LC}} S(\eta),$$

wobei

$$S(\eta) = \sqrt{\left(\sum_{n=N_1}^{N_2} p_n e^{in\eta} \right)^2 + \left(\frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} - \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \right)^2}.$$

Diese implizite Gleichung für Ω läßt sich im allgemeinen nicht nach Ω explizieren. Numerisch aber lassen sich die insgesamt $2K$ Lösungen trotzdem näherungsweise bestimmen.

Hierzu kann man $\eta \in [0, \pi]$ vorgeben und die Nullstellen suchen. Praktischerweise multipliziert man dafür mit dem Nenner der linken Seite, substituiert $z = e^{i\Omega}$ und erhält ein komplexes Polynom in z . Man muß also die Nullstellen eines komplexen Polynoms berechnen, wozu in dieser Arbeit der Algorithmus von Jenkins & Traub (1972) benutzt wird.

Aus den Näherungslösungen für die Ω_i kann man auch iterativ die Stabilitätsgrenze bestimmen (näherungsweise natürlich). Dazu gibt man ein Δt_0 vor, berechnet die $2K$ Eigenwerte für hinreichend viele Werte von $\eta \in [0, \pi]$ und prüft,

daß alle $\text{Im}\{\Omega_i(\eta_k)\} \geq 0$ sind.⁴ Ist dies der Fall, so vergrößert man Δt , sonst verkleinert man es. Implementiert wurde ein Bisektionsverfahren, daß solange iteriert, bis zwei aufeinanderfolgende Näherungswerte für Δt_{\max} hinreichend nah beieinanderliegen.

Im weiteren wird der verlustlose Fall nach Gl. (4.2) betrachtet. Die Eigenwerte vereinfachen sich zu

$$(5.24) \quad \frac{\sum_{k=0}^K \alpha_k e^{ik\Omega}}{\sum_{k=0}^K \beta_k e^{ik\Omega}} = \pm c\Delta t \sum_{n=N_1}^{N_2} p_n e^{in\eta}.$$

Da wir ausschließlich schiefsymmetrische Differenzenoperatoren betrachten, ist die rechte Seite rein imaginär und hat den Wertebereich $[-iw, iw]$ mit $w = \max \left| \sum_{n=N_1}^{N_2} p_n e^{in\eta} \right|$. Bei der Stabilitätsanalyse interessieren lediglich die Grenzen $\pm w$ des Intervalls, nicht aber für welche Werte von η sie angenommen werden. Daher braucht man die Bestimmung der Stabilitätsgrenze lediglich für einen Differenzenoperator durchführen. Z.B. kennt man das Stabilitätslimit für Zentralfdifferenzen, so braucht man es lediglich mit 0,7287 zu multiplizieren, um das Stabilitätslimit für den Differenzenoperator vierter Ordnung nach Collatz (1955) zu erhalten.

Es empfiehlt sich, Δx aus den Koeffizienten des Differenzenoperators herauszuziehen, so daß die Summe unabhängig von der gewählten Diskretisierung wird. Dadurch wird es möglich, Stabilitätsgrenzen γ unabhängig von der Feinheit der räumlichen Diskretisierung anzugeben.⁵ Und zwar müssen Δt und Δx die Ungleichung

$$(5.25) \quad \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq \gamma$$

erfüllen.

Zur Illustration werden in Abb. 5.1 die Real- und Imaginärteile der sich in negative x -Richtung ausbreitenden vier Moden eines Adams-Bashforth-Verfahrens mit vier Schritten und dem Differenzenoperator aus einer Petrov-Galerkin-Diskretisierung mit (2,4)- oder (3,3)-B-Splines am Rande der Stabilitätsgrenze dargestellt.

Der Realteil der Eigenfrequenz des physikalisch sinnvollen Modes geht für η gegen Null auch gegen Null. Die Realteile der drei anderen Moden nicht. Dafür weisen diese aber recht große Imaginärteile auf, so daß sie sehr schnell exponentiell

⁴Praktisch gesehen ist die Grenze 0 etwas zu groß, da es durch Rundungsfehler zu sehr kleinen negativen Imaginärteilen kommen kann. Praktisch bewährt hat sich bei doppelt genauer Rechnung die Forderung $\text{Im}\{\Omega_i(\eta_k)\} \geq -10^{-14}$.

⁵Im allgemeineren Fall mit Verlusten ist dies offenbar nicht möglich. D.h. man kann nur für gegebenes Δx das maximal mögliche Δt_{\max} berechnen.

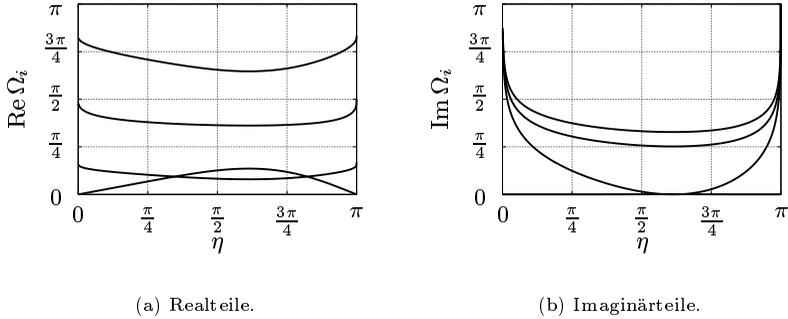


ABBILDUNG 5.1. Eigenfrequenzen Ω_i von 4 der 8 Moden eines 4-Schritt-Adams-Bashforth-Verfahrens mit $(2,4)$ -B-Splines.

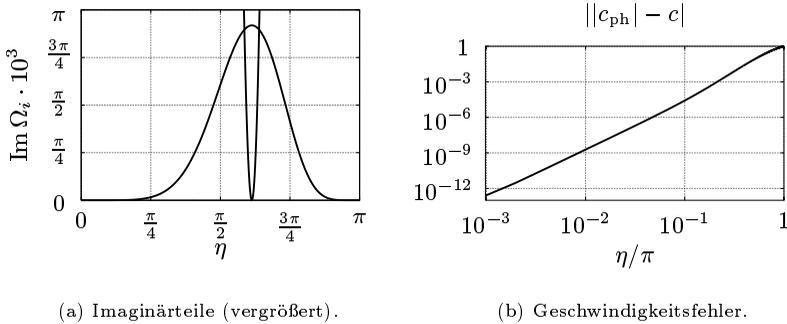


ABBILDUNG 5.2. Imaginärteile der Eigenfrequenzen und Phasengeschwindigkeitsfehler der physikalischen Moden eines 4-Schritt-Adams-Bashforth-Verfahrens mit $(2,4)$ -B-Splines.

gedämpft werden und die Lösung nicht stören. Leider weist jedoch auch der Imaginärteil des physikalisch sinnvollen Modes einen schwachen Imaginärteil auf, wie in Abb. 5.2(a) zu sehen, d.h. auch er wird —wenngleich nur schwach— gedämpft.

Abb. 5.2(b) schließlich zeigt noch den absoluten (und zugleich relativen wegen $c = 1$) Fehler des Betrags der Phasengeschwindigkeit der beiden physikalischen

L	1	2	3	4	5
γ	$1.425 \cdot 10^{-7}$	$4.489 \cdot 10^{-4}$	0.7236	0.4299	0.005602
α	-10^{-14}	-10^{-14}	0.136	0.00288	-10^{-14}

L	6	7	8	9	10
γ	0.01833	0.05808	0.02948	0.01496	0.007587
α	-10^{-14}	$3.88 \cdot 10^{-11}$	10^{-14}	-10^{-14}	$3.5 \cdot 10^{-15}$

TABELLE 5.1. L -Schritt Adams-Bashforth-Verfahren: γ und α für Zentralkdifferenzen.

Moden in doppelt logarithmischer Darstellung. Sehr gut zu erkennen ist die Konvergenzordnung 4 des Verfahrens.

In den Tabellen 5.1, 5.2, 5.3 und 5.4 sind die jeweiligen Stabilitätsgrenzen γ und gegebenenfalls die Imaginärteile α der beiden physikalischen Moden an den jeweiligen Stabilitätsgrenzen für die Standardmehrschrittverfahren nach Adams-Bashforth, Adams-Moulton, Nyström und Milne-Simpson unter Benutzung von Zentralkdifferenzen angegeben. α bezeichnet den Maximalwert des Imaginärteils des physikalischen Modes einschließlich des Vorzeichens. Die Imaginärteile der unphysikalischen Moden sind im Stabilitätsbereich stets positiv, d.h. sie werden exponentiell gedämpft. Von den Adams-Bashforth-Verfahren erscheinen lediglich die Verfahren mit 3 und 4 Schritten interessant zu sein. Alle anderen benötigen wenigstens 20 Mal mehr Zeitschritte als zeitliche Zentralkdifferenzen. Leider weisen die physikalischen Moden einen positiven Imaginärteil in Ω auf, d.h. sie werden gedämpft. Verkleinert man den Zeitschritt, so wird der Dämpfungsfaktor schnell kleiner. Man sollte also nicht direkt am Stabilitätslimit mit ihnen arbeiten.

Das implizite Eulerverfahren (Adams-Moulton mit einem Schritt) fällt aus der Reihe, da es wohl für alle Zeitschrittweiten Δt stabil bleibt. Bei der Vergrößerung des Zeitschritts vergrößert sich jedoch auch der Phasengeschwindigkeitsfehler drastisch, so daß man praktisch auch mit γ in der Größenordnung von 1 arbeiten sollte. Des weiteren liefern die Adams-Moulton-Verfahren mit 4, 5, 6, 8 und 9 Schritten durchaus akzeptable Schrittweiten, wenngleich auch hier die Moden schwach gedämpft werden. Leider muß man in jedem Zeitschritt ein Gleichungssystem lösen, so daß die direkte Implementierung der impliziten Verfahren nicht sehr sinnvoll erscheint, da sie nicht zu wesentlich größeren Zeitschritten führen als Zentralkdifferenzen.

L	1	2	3	4	5
γ	$1.7 \cdot 10^{38}$	0.000701	0.008877	1.211	1.376
α	-10^{-14}	-10^{-14}	-10^{-14}	0.007	0.15

L	6	7	8	9	10
γ	1.061	0.05773	0.4265	0.2518	0.1054
α	0.00849	-10^{-14}	$3.43 \cdot 10^{-7}$	$1.35 \cdot 10^{-9}$	-10^{-14}

TABELLE 5.2. L -Schritt Adams-Moulton-Verfahren: γ und α für Zentralkdifferenzen.

L	2	3	4	5
γ	1.0	$9.566 \cdot 10^{-8}$	$3.56 \cdot 10^{-8}$	$1.52 \cdot 10^{-8}$

L	6	7	8	9	10
γ	$6.86 \cdot 10^{-9}$	$3.63 \cdot 10^{-9}$	$1.5 \cdot 10^{-9}$	$7.21 \cdot 10^{-10}$	$3.43 \cdot 10^{-10}$

TABELLE 5.3. L -Schritt Nyström-Verfahren: γ für Zentralkdifferenzen.

L	2	(3)	4	5
γ	1.731	(1.731)	$5.2 \cdot 10^{-7}$	$2.15 \cdot 10^{-7}$

L	6	7	8	9	10
γ	$1.06 \cdot 10^{-7}$	$6.25 \cdot 10^{-8}$	$2.86 \cdot 10^{-8}$	$1.52 \cdot 10^{-8}$	$7.97 \cdot 10^{-9}$

TABELLE 5.4. L -Schritt Milne-Simpson-Verfahren: γ für Zentralkdifferenzen.

Außer dem Nyström-Verfahren mit zwei Schritten (entspricht Zentraldifferenzen) und dem Milne-Verfahren mit zwei Schritten —das 3-Schrittverfahren ist in diesem Fall identisch mit dem 2-Schrittverfahren— sind alle anderen Nyström- und Milne-Simpson-Verfahren instabil, d.h. für Imaginärteile größer -10^{-14} wären inakzeptabel kleine Zeitschritte nötig. Die beiden stabilen Verfahren weisen im Stabilitätsbereich keine Imaginärteile der Eigenwerte Ω_i auf, wie eine analytische Rechnung zeigt, daher kann ganz auf die Angabe von α verzichtet werden.

4. Energieerhaltende Mehrschrittverfahren

Offensichtlich arbeiten abgesehen vom Nyström- und vom Milne-Verfahren der Ordnung 2 alle anderen, hier untersuchten Mehrschrittverfahren nicht recht zufriedenstellend. Entweder wird der zulässige Zeitschritt inakzeptabel klein, oder die physikalischen Moden werden exponentiell gedämpft, wenngleich nur schwach.

Das Nyström-Verfahren der Ordnung 2 unterscheidet sich von allen anderen untersuchten Mehrschrittverfahren dadurch, daß nicht nur die rechte Seite von Gl. (5.24) für reelle Argumente rein imaginär ist, sondern auch die linke Seite für reelle Argumente Ω . Mit anderen Worten Ω kompensiert mit dem Imaginärteil einen Realteil der Summe. Die Idee, energieerhaltende Verfahren zu konstruieren, besteht nun darin, die Koeffizienten des Mehrschrittverfahrens so zu wählen, daß auch die linke Seite für reelles Ω rein imaginär bleibt.

Offensichtlich ist dies möglich, wenn man die Koeffizienten α_i antisymmetrisch

$$(5.26) \quad \alpha_{K-i} = -\alpha_i, \quad i \in \{0, \dots, K\}$$

und die Koeffizienten β_i symmetrisch

$$(5.27) \quad \beta_{K-i} = \beta_i, \quad i \in \{0, \dots, K\}$$

wählen könnte.

Um neue Verfahren zu konstruieren, die diese Bedingungen erfüllen, kann man die α_i so vorgeben, daß das Verfahren nullstabil ist, d.h. alle Wurzeln des Polynoms $\sum \alpha_i z^i$ liegen im Einheitskreis, und aus den Konsistenzbedingungen (4.96a), (4.96b) und (4.96c) die Koeffizienten β_i berechnen.

Die einfachste Wahl ist $\alpha_K = 1$, $\alpha_0 = -1$ und $\alpha_i = 0$ für $i = 1, \dots, K-1$. Offensichtlich sind die α_i antisymmetrisch und die Nullstellen liegen alle auf dem Einheitskreis und sind einfach. Die mit diesem Ansatz konstruierten Verfahren sind also schwach stabil. Dieser Ansatz stellt gewissermaßen eine Verallgemeinerung der Nyström- und Milne-Verfahren der Ordnung 2 dar.

Aus den Konsistenzbedingungen berechnet man nun die zugehörigen β_i , so daß die Konvergenzordnung möglichst groß wird. Dabei stellt sich heraus, daß die expliziten Schemata mit ungerader Schrittzahl K nicht symmetrisch sind, und daß sie ebenfalls zu inakzeptabel kleinen Zeitschritten führen. In den anderen Fällen ergeben sich tatsächlich symmetrische Koeffizienten β_i , so daß sich die Forderungen erfüllen lassen. Die Koeffizienten β_i der sich ergebenden expliziten Verfahren sind in Tabelle 5.5 aufgeführt, die der impliziten in Tabelle 5.6. Das

K	β_L, \dots, β_0
2	0, 2, 0
4	0, $\frac{8}{3}$, $-\frac{4}{3}$, $\frac{8}{3}$, 0
6	0, $\frac{33}{10}$, $-\frac{21}{5}$, $\frac{39}{5}$, $-\frac{21}{5}$, $\frac{33}{10}$, 0
8	0, $\frac{736}{189}$, $-\frac{848}{105}$, $\frac{1952}{105}$, $-\frac{19672}{945}$, $\frac{1952}{105}$, $-\frac{848}{105}$, $\frac{736}{189}$, 0
10	0, $\frac{20225}{4536}$, $-\frac{4175}{324}$, $\frac{41675}{1143}$, $-\frac{137675}{2268}$, $\frac{169555}{2268}$, $-\frac{137675}{2268}$, $\frac{41675}{1143}$, $-\frac{4175}{324}$, $\frac{20225}{4536}$, 0

TABELLE 5.5. Koeffizienten β_i der energieerhaltenden expliziten Mehrschrittverfahren.

K	β_K, \dots, β_0
1	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{3}$
3	$\frac{3}{8}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{3}{8}$
4	$\frac{14}{45}$, $\frac{64}{45}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{64}{45}$, $\frac{14}{45}$
5	$\frac{95}{288}$, $\frac{125}{96}$, $\frac{125}{144}$, $\frac{125}{144}$, $\frac{125}{96}$, $\frac{95}{288}$
6	$\frac{41}{140}$, $\frac{54}{35}$, $\frac{27}{140}$, $\frac{68}{35}$, $\frac{27}{140}$, $\frac{54}{35}$, $\frac{41}{140}$
7	$\frac{5257}{17280}$, $\frac{25039}{17280}$, $\frac{343}{640}$, $\frac{20923}{17280}$, $\frac{20923}{17280}$, $\frac{343}{640}$, $\frac{25039}{17280}$, $\frac{5257}{17280}$
8	$\frac{3956}{14175}$, $\frac{23552}{14175}$, $-\frac{3712}{14175}$, $\frac{41984}{14175}$, $-\frac{3632}{2835}$, $\frac{41984}{14175}$, $-\frac{3712}{14175}$, $\frac{23552}{14175}$, $\frac{3956}{14175}$
9	$\frac{25713}{89600}$, $\frac{141669}{89600}$, $\frac{243}{2240}$, $\frac{10881}{5600}$, $\frac{26001}{44800}$, $\frac{26001}{44800}$, $\frac{10881}{5600}$, $\frac{243}{2240}$, $\frac{141669}{89600}$, $\frac{25713}{89600}$
10	$\frac{80335}{299376}$, $\frac{132875}{74844}$, $-\frac{80875}{99792}$, $\frac{28375}{6237}$, $-\frac{24125}{5544}$, $\frac{89035}{12474}$, $-\frac{24125}{5544}$, $\frac{28375}{6237}$, $-\frac{80875}{99792}$, $\frac{132875}{74844}$, $\frac{80335}{299376}$

TABELLE 5.6. Koeffizienten β_i der energieerhaltenden impliziten Mehrschrittverfahren.

explizite Verfahren der Länge 2 ist identisch mit dem Nyström-Verfahren der Länge 2, das implizite Verfahren der Länge 2 mit dem Milne-Verfahren der Länge

Länge K	Konvergenz- ordnung	Fehler- konstante	Stabilitäts- grenze γ
2	2	$\frac{1}{6}$	1.0
4	4	$\frac{7}{90}$	0.4330
6	6	$\frac{41}{840}$	0.1143
8	8	$\frac{989}{28350}$	0.02949
10	10	$\frac{16067}{598752}$	0.007587

TABELLE 5.7. Charakteristika der expliziten energieerhaltenden Schemata.

2 und das implizite Verfahren der Länge 1 mit dem Adams-Moulton-Verfahren für $k = 1$.

Die Dispersionsanalyse zeigt, daß tatsächlich keine störende Dämpfung der physikalischen Moden auftritt. Allerdings werden auch die unphysikalischen Lösungen nicht gedämpft, was nachteilig ist. Zudem ist der Feldzustand zu den $K - 1$ Zwischenzeitpunkten zu speichern, der Speicherbedarf gegenüber den Adams-Methoden also größer.

Die Charakteristika der hier entwickelten Verfahren sind in den Tabellen 5.7 und 5.8 zusammengefaßt. Die sich ergebenden Stabilitätsgrenzen der neuen expliziten Schemata der Längen 4 und vielleicht noch 6 erscheinen akzeptabel, ebenso die aller neuen impliziten Schemata bis zur Länge 9.

Abschließend werden die Phasengeschwindigkeitsfehler $||c_{ph} - c|$ der neuen expliziten Verfahren für verschiedene Differenzenoperatoren in Abbildung 5.3 angegeben. Deutlich zu erkennen ist die enorme Verringerung des Phasengeschwindigkeitsfehlers, wenn man die neuen Verfahren höherer Konvergenzordnung zur Integration verwendet. Gut zu erkennen ist auch, daß es sich bei doppelt genauer Rechnung praktisch nicht lohnt, zeitlich mit höherer Ordnung als 6 zu integrieren, da die Verbesserungen jenseits des numerischen Rauschens liegen. Ebenso scheinen die Verbesserungen der Dispersionseigenschaften der physikalischen Moden jenseits der Verwendung der (2,8)-B-Splines (bzw. (3,7), (4,6) oder (5,5)) eher marginal.

Diese Analysen lassen eine räumliche Approximation mit (2,4)- bis (2,8)-B-Splines bzw. mit finiten Differenzen höherer Ordnung in Verbindung mit einem Integrationsschema 4. bis 6. Ordnung (z.B. den hier vorgeschlagenen) als sinnvoll erscheinen.

Länge K	Konvergenz- ordnung	Fehler- konstante	Stabilitäts- grenze γ
1	2	$\frac{1}{6}$	$> 1.7 \cdot 10^{38}$
2	4	$\frac{1}{6}$	1.731
3	4	$\frac{1}{6}$	1.332
4	6	$\frac{7}{90}$	1.443
5	6	$\frac{1}{6}$	1.382
6	8	$\frac{41}{840}$	0.6995
7	8	$\frac{1}{6}$	0.8553
8	10	$\frac{989}{28350}$	0.2519
9	10	$\frac{1}{6}$	0.4258
10	12	$\frac{16067}{598752}$	0.08301

TABELLE 5.8. Charakteristika der impliziten energieerhaltenen Schemata.

5. Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Die Hauptidee hinter Prädiktor-Korrektor-Verfahren ist die approximative Lösung des impliziten Gleichungssystems durch Iteration. Als Prädiktor, d.h. zur Gewinnung des Startwerts, wird ein explizites Verfahren derselben Anzahl von Schritten verwendet. Dadurch läßt sich mit derselben Schrittzahl, d.h. demselben notwendigen Speicherplatz, die Konvergenzordnung gegenüber dem expliziten Verfahren bis zu der des impliziten Verfahrens erhöhen. Die hierzu notwendige Anzahl der Schritte ist gerade die Differenz der Konvergenzordnungen. Konkret würde das z.B. für das hier entwickelte explizite Mehrschrittverfahren der Länge 4 bedeuten, daß man mit zwei Korrektorschritten ähnliche Resultate wie bei Verwendung des impliziten Verfahrens der Länge 4 erhielte. Die Hoffnung ist nun, daß sich das Stabilitätslimit nicht wesentlich verändert, so daß man quasi mit demselben Rechenaufwand —schließlich kann man den Zeitschritt beim impliziten Verfahren etwa dreimal so groß wie beim expliziten wählen, muß aber zwei zusätzliche Korrektorschritte durchführen— die Konvergenzordnung erhöhen und damit den Fehler verkleinern kann.

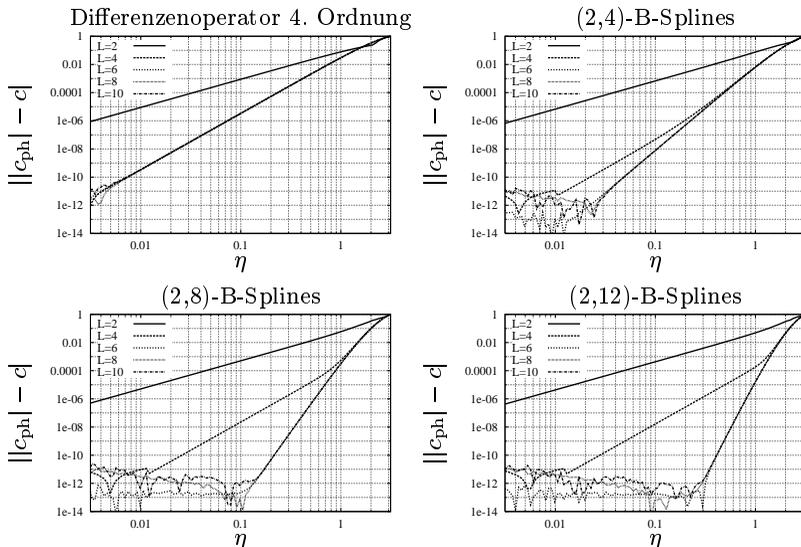


ABBILDUNG 5.3. Phasengeschwindigkeitsfehler der neuen expliziten Schemata im Zusammenwirken mit verschiedenen (räumlichen) Differenzenoperatoren höherer Ordnung.

Sei f wiederum linear und nicht explizit zeitabhängig. Dadurch können wir den linearen Operator F

$$(5.28) \quad F u_m := f(u_m)$$

introduzieren. Für $P(EC)^M E$ -Verfahren gilt

$$(5.29) \quad f_m = f_m^{(M)} = f(u_m^{(M)}) = f(u_m) = F u_m,$$

das bedeutet, die gespeicherten Approximationen der Ableitungen lassen sich ohne weiteres auf die Werte u_m durch Anwendung des Operators F zurückführen. Für $P(EC)^M$ -Verfahren gilt dieser einfache Zusammenhang nicht. Die weitere Betrachtung wird daher auf $P(EC)^M E$ -Verfahren eingeschränkt.

Führen wir also die Schritte, die zur Berechnung von u_{m+L} nötig sind, nacheinander durch. Zunächst erfolgt die Berechnung des ersten Schätzwertes durch den Prädiktor

$$(5.30) \quad u_{m+L}^{(0)} = \sum_{l=0}^{L-1} \left(\tilde{\alpha}_l^{(P)} + \tilde{\beta}_l^{(P)} F \right) u_{m+l}$$

mit

$$(5.31) \quad \tilde{\alpha}_l^{(P)} := -\frac{\alpha_l^P}{\alpha_L^P}$$

und

$$(5.32) \quad \tilde{\beta}_l^{(P)} := h \frac{\beta_l^P}{\alpha_L^P}.$$

Mit

$$(5.33) \quad u_{m+L}^{(\nu)} = \tilde{\beta}_L F u_{m+L}^{(\nu-1)} + \sum_{l=0}^{L-1} (\tilde{\alpha}_l + \tilde{\beta}_l F) u_{m+l},$$

wobei

$$(5.34) \quad \tilde{\alpha}_l := -\frac{\alpha_l}{\alpha_L}$$

und

$$(5.35) \quad \tilde{\beta}_l := h \frac{\beta_l}{\alpha_L},$$

erhält man mit der Abkürzung

$$(5.36) \quad C_m := \sum_{l=0}^{L-1} (\tilde{\alpha}_l + \tilde{\beta}_l F) u_{m+l}$$

nach der ersten Iteration

$$(5.37) \quad u_{m+L}^{(1)} = \tilde{\beta}_L F u_{m+L}^{(0)} + C_m.$$

Entsprechend nach der M -ten

$$(5.38) \quad u_{m+L}^{(M)} = (\tilde{\beta}_L F)^M u_{m+L}^{(0)} + \sum_{k=0}^{M-1} (\tilde{\beta}_L F)^k C_m.$$

Geordnet nach den u_{m+l} ergibt sich so mit dem Einsoperator I

$$(5.39) \quad u_{m+L} = u_{m+L}^{(M)} = \sum_{k=0}^{L-1} \left\{ \tilde{\beta}_l^{(P)} \tilde{\beta}_L^M F^{M+1} + (\tilde{\alpha}_l^{(P)} \tilde{\beta}_L^M + \tilde{\beta}_l \tilde{\beta}_L^{M-1}) F^M \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{M-1} (\tilde{\alpha}_l \tilde{\beta}_L^k + \tilde{\beta}_l \tilde{\beta}_L^{k-1}) F^k + \tilde{\alpha}_l I \right\} u_{m+l}.$$

Dies läßt sich schreiben als

$$(5.40) \quad \sum_{l=0}^L \sum_{k=0}^{M+1} \gamma_{l,k} F^k u_{m+l} = 0$$

mit

$$(5.41) \quad \gamma_{L,0} = -1$$

$$(5.42) \quad \gamma_{L,k} = 0, \quad k = 1, \dots, M+1$$

und für $l = 0, \dots, L-1$

$$(5.43) \quad \gamma_{l,0} = \tilde{\alpha}_l$$

$$(5.44) \quad \gamma_{l,k} = (\tilde{\alpha}_l \tilde{\beta}_L + \tilde{\beta}_l) \tilde{\beta}_L^{k-1}, \quad k = 1, \dots, M-1$$

$$(5.45) \quad \gamma_{l,M} = (\tilde{\alpha}_l^{(P)} \tilde{\beta}_L + \tilde{\beta}_l) \tilde{\beta}_L^{M-1}$$

$$(5.46) \quad \gamma_{l,M+1} = \tilde{\beta}_l^{(P)} \tilde{\beta}_L^M.$$

Dieses Gleichungssystem ist nun für den jeweiligen Anwendungsfall in den Frequenzbereich zu transformieren, um anschließend die Eigenwerte bestimmen zu können. Im verlustfreien Fall der Leitungsgleichungen ergeben sich die Eigenwerte Ω wiederum als Nullstellen zweier komplexer Polynome

$$(5.47) \quad \sum_{k=0}^L \sum_{l=0}^{M+1} \delta_{k,l} (c\tilde{D})^l z^k = 0,$$

wobei

$$(5.48) \quad z = e^{i\Omega}$$

$$(5.49) \quad \tilde{D} = \sum_{n=N_1}^{N_2} p_n e^{in\eta}$$

$$(5.50) \quad \delta_{k,l} = \begin{cases} \gamma_{k,l} & l \text{ gerade} \\ \mp \gamma_{k,l} & l \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Wiederum wurde die Untersuchung numerisch durchgeführt und die Nullstellen mit Hilfe des Algorithmus von Jenkins & Traub (1972) bestimmt.

Die Ergebnisse der Dispersionsanalysen der Adams-Verfahren und der neuen energieerhaltenden Mehrschrittverfahren lassen lediglich die Verfahren mit 3, 4 und 5 bzw. 2, 4 und 6 Schritten interessant erscheinen. Für diese wurde die Dispersionsanalyse numerisch durchgeführt. Dabei stellte sich heraus, daß zum Teil erheblich mehr Iterationen als die Differenz zwischen den Konvergenzordnungen des Prädiktors und des Korrektors nötig sind. Die Verbindung von Nyström mit Milne-Simpson-Verfahren erscheint abgesehen von der Kombination der zweischrittigen Verfahren, die ja energieerhaltend sind, angesichts der katastrophalen Stabilitätseigenschaften sowohl der expliziten als auch der impliziten Verfahren wenig sinnvoll und wird nicht näher untersucht.

Bei Verwendung der neuen energieerhaltenden Integrationsverfahren sind wenigstens zwei Iterationen des Korrektors nötig, um die Konvergenzordnung des Korrektorverfahrens zu erreichen. Zur Bestimmung der Stabilitätsgrenzen wurde

Anzahl M der Iterationen	Länge L		
	2	4	6
2	0.001418	0.001245	0.001062
4	0.05895	0.02184	0.01805
6	0.06524	0.0641	0.05967
10	0.2336	0.2361	0.2299
15	0.5224	0.4804	0.4575
30	1.143	1.187	0.5898
60	1.731	1.429	0.5898

TABELLE 5.9. Stabilitätsgrenzen der $P(EC)^M E$ -Verfahren aus den energieerhaltenden Verfahren mit Zentraldifferenzen.

gefordert, daß die Imaginärteile aller Moden größer als -10^{-13} bleiben; der Abbruch der iterativen Bestimmung erfolgte, wenn zwei aufeinanderfolgende Werte sich um weniger als 10^{-8} unterschieden. Die Ergebnisse bei Verwendung von Zentraldifferenzen sind in Tab. 5.9 zusammengestellt. Je mehr Iterationen man mit dem Korrektor durchführt, desto besser wird offensichtlich das zugehörige implizite Verfahren approximiert. Leider wird bei zuwenig Iterationen die Stabilitätsgrenze unbrauchbar klein, obwohl die Prädiktoren allein größere Schrittweiten erlauben würden. Das ist auf den ersten Blick sehr erstaunlich, allerdings wird durch Anwendung des Korrektors ja die Konvergenzordnung des Gesamtverfahrens erhöht. Da jedoch recht viele Iterationen für brauchbare Schrittweiten benötigt werden, erscheinen die Verfahren ungünstig, die alleinige Verwendung der Prädiktorverfahren sinnvoller.

Eine Frage, die sich unmittelbar anschließt, ist, wie sich die Wahl des Differenzenoperators auf die Stabilitätsgrenze auswirkt. Da in der Gleichung zur Berechnung der Dispersionsrelationen die Differenzenoperatoren direkt eingehen und nicht wie bei linearen Mehrschrittverfahren eine rechte Seite bilden, läßt sie sich nicht sofort beantworten. Es stellt sich aber heraus, daß sie sich praktisch wie bei linearen Mehrschrittverfahren verhalten. Als Beispiel sind die Ergebnisse des $P(EC)^M E$ -Verfahrens mit den energieerhaltenden Verfahren mit zwei Schritten und dem Differenzenoperator aus einer Petrov-Galerkin-Diskretisierung mit (2,4)-B-Spline-Wavelets in Tab. 5.10 zusammengefaßt. Bei linearen Mehrschrittverfahren beträgt das Verhältnis der Stabilitätsgrenzen mit Zentraldifferenzen zu denen

Anzahl M der Iterationen	Stabilitätsgrenze γ	Verhältnis zu γ mit Zentraldifferenzen
2	0.0009017	0.6359
4	0.003747	0.6356
6	0.04146	0.6366
10	0.1484	0.6352
15	0.332	0.6355
30	0.7267	0.6357
60	1.1	0.6354

TABELLE 5.10. Vergleich von Zentraldifferenzen mit (2,4)-B-Spline-Differenzen.

mit den Differenzen aus (2,4)-B-Spline-Diskretisierungen stets 0.6356 (gerundet). Offenbar scheint dies auch für $P(EC)^M E$ -Verfahren zu gelten.

Tab. 5.11 faßt die Ergebnisse der Stabilitätsanalyse der $P(EC)^M E$ -Verfahren mit einem Adams-Bashforth-Verfahren mit L Schritten als Prädiktor und dem Adams-Moulton-Verfahren mit ebenfalls L Schritten zusammen. Als Differenzenoperator wurden Zentraldifferenzen verwendet. Bei der Analyse wurde verlangt, daß alle Imaginärteile größer als -10^{-14} sein müssen; das Bisektionsverfahren wurde bei einer relativen Abweichung kleiner als 10^{-8} zweier aufeinanderfolgender Iterationen abgebrochen. Auch hier gilt, daß man der Stabilitätsgrenze der impliziten Verfahren immer näher kommt, je mehr Iterationen man mit dem Korrektor durchführt. Ebenso wird die Stabilitätsgrenze für wenige Iterationen kleiner als die des expliziten Verfahrens. Interessant am Verfahren der Länge 3 ist, daß es mit nur einer Iteration eine etwas größere Stabilitätsgrenze als das explizite Verfahren hat.

Jeder Iterationsschritt mit dem Korrektor erfordert ungefähr denselben Rechenaufwand wie der Prädiktorschritt. Um nun die $P(EC)^M E$ -Verfahren besser mit den linearen Mehrschrittverfahren vergleichen zu können, sollte man die Stabilitätsgrenzen sozusagen noch durch die Anzahl der Unterschritte teilen, also bei einem $P(EC)^2 E$ -Verfahrens durch 3, bei einem $P(EC)^1 E$ -Verfahrens durch 2. Daraus ergibt sich, daß insbesondere bei Verwendung der Adams-Verfahren als Prädiktor und Korrektor das $P(EC)^1 E$ -Verfahren mit 3 Schritten (γ normiert: 0.589), das $P(EC)^2 E$ -Verfahren mit 5 Schritten (γ normiert: 0.272) und

Anzahl M der Iterationen	Länge L		
	3	4	5
1	1.178	0.006792	0.02121
2	0.007181	0.4742	0.817
4	0.008857	1.288	1.24
6	0.008862	1.177	1.426
10	0.008849	1.211	1.378
15	0.008849	1.212	1.376
30	0.008849	1.212	1.376
60	0.008849	1.212	1.376

TABELLE 5.11. Stabilitätsgrenzen der $P(EC)^M E$ -Verfahren aus Adams-Verfahren mit Zentralkifferenzen.

das $P(EC)^4 E$ -Verfahren mit 4 Schritten (γ normiert: 0.257) interessant sind, da sie etwas größere Zeitschritte (ggf. durch die Anzahl der Unterschritte geteilt) als die untersuchten linearen Mehrschrittverfahren derselben Konvergenzordnung erlauben.

Bezüglich der Dispersionsfehler ergibt sich keine neue Erkenntnis. Stellt man den Fehler der Phasengeschwindigkeit doppelt logarithmisch dar, läßt sich gut die Konvergenzordnung des Verfahrens ablesen. Die energieerhaltenden Verfahren bleiben auch als Prädiktor-Korrektor-Verfahren energieerhaltend, aber auch die unphysikalischen Moden bleiben unbedämpft. Die Adams-Verfahren als Prädiktor-Korrektor-Verfahren bedämpfen zwar die unphysikalischen Moden, aber leider wird auch der physikalische etwas bedämpft.⁶

6. Runge-Kutta-Verfahren

Für nicht explizit zeitabhängige, lineare Funktionen f lassen sich die Runge-Kutta-Verfahren mit Hilfe des linearen Operators G

$$(5.51) \quad Gu_m := \Delta t f(u_m)$$

⁶Aber selbstverständlich umso weniger, je kleiner die Ortsfrequenz ist. Sonst könnten die Verfahren ja nicht konvergieren.

schreiben als

$$(5.52a) \quad u_{m+1} = u_m + \sum_{i=1}^s b_i G u_{m+1}^{(i)}$$

$$(5.52b) \quad u_{m+1}^{(i)} = u_m + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} G u_{m+1}^{(j)}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Rekursives Ineinandereinssetzen und umsortieren nach Potenzen von G ergibt

$$(5.53) \quad u_{m+1}^{(i)} = \sum_{l=1}^i k_{il} G^{l-1} u_m,$$

wobei

$$(5.54) \quad G^0 := I, \quad (I \text{ ist der Einheitsoperator}),$$

$$(5.55) \quad k_{i,1} = 1$$

und

$$(5.56) \quad k_{i,j+1} = \sum_{l=j}^{i-1} a_{il} k_{lj}, \quad j = 1, \dots, i-1.$$

Schließlich erhält man

$$(5.57) \quad u_{m+1} = \sum_{i=0}^s w_i G^i u_m$$

mit

$$(5.58) \quad w_0 = 0$$

und

$$(5.59) \quad w_i = \sum_{l=i}^s b_l k_{li} \quad \text{für } i = 1, \dots, s.$$

Es ergibt sich also ein Gleichungssystem, das dem der $P(EC)^M E$ -Verfahren sehr ähnelt. Für einen konkreten Anwendungsfall muß man auch hier wieder in den Frequenzbereich transformieren und die Eigenwerte bestimmen.

Für die verlustfreien Leitungsgleichungen lassen sich die Eigenfrequenzen sogar explizit angeben. Mit

$$(5.60) \quad r = \frac{\Delta tc}{\Delta x}$$

und

$$(5.61) \quad \tilde{D} = \sum_{n=N_1}^{N_2} p_n e^{in\eta},$$

Schema	A.1	A.2	A.3	A.4	A.5	A.6	A.7	A.8	A.9
s	3	3	3	3	4	4	4	4	4
Ordnung	2	3	3	3	3	4	4	4	4
γ	1.72	1.73	1.73	1.73	1.71	2.82	2.82	2.82	2.82
Schema	A.10	A.11	A.12	A.13	A.14	A.15	A.16	A.17	
s	4	6	6	6	8	11	9	11	
Ordnung	4	5	5	5	6	7	7	8	
γ	2.82	0.997	0.852	1.14	1.30	1.88	1.37	3.00	

TABELLE 5.12. Stabilitätsgrenzen der Runge-Kutta-Verfahren mit Zentralfdifferenzen.

wobei wieder $1/\Delta x$ aus den Koeffizienten p_n herausgezogen wurde, sind die beiden Eigenfrequenzen gegeben durch

$$(5.62a) \quad \Omega_{1,2} = -i \ln \left(\sum_{n=0}^s \delta_n r^n \tilde{D}^n \right)$$

$$(5.62b) \quad \delta_n = \begin{cases} \gamma_n & \text{für } n \text{ gerade} \\ \mp \gamma_n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases},$$

wobei man einmal das Minus- und einmal das Pluszeichen zu wählen hat.

Die Dispersionsanalyse zeigt, daß auch Runge-Kutta-Verfahren schwach dissipativ sind und die Fehler sich asymptotisch wie die Konvergenzordnung verhalten. Daher wird auf die graphische Darstellung der Eigenwerte Ω_i verzichtet, da sie keine neue Erkenntnis vermittelt.

Von den zahlreichen untersuchten Verfahren wurden nur von denen, die einen akzeptablen Zeitschritt erlauben, die Koeffizienten im Anhang aufgeführt. Die Stabilitätsgrenzen für die Verwendung von Zentralfdifferenzen sind in Tab. 5.12 zusammengefaßt. Die Verfahren werden der Einfachheit halber mit der Bezeichnung der jeweiligen Tabelle, die das Butcher-Schema zeigt, bezeichnet, also z.B. A.3 für das Verfahren 3. Ordnung nach Kutta. Zudem werden Konvergenzordnung und Anzahl der Schritte mit angegeben.

Daß die Verfahren A.2, A.3 und A.4 sowie die Verfahren A.6 bis A.10 dieselbe Stabilitätsgrenze besitzen ist kein Zufall. Gl. (5.57) läßt sich als Taylorreihe um u_m interpretieren, die Koeffizienten w_i sollten also gerade die Taylorkoeffizienten darstellen. Und in der Tat zeigt sich, daß die w_i bis zur Konsistenzordnung mit den Taylorkoeffizienten übereinstimmen, danach nicht mehr. D.h. für A.5 stimmen w_0, w_1, w_2 und w_3 mit den Taylorkoeffizienten $1, 1/1!, 1/2!$ überein, aber w_4 nicht mehr mit $1/4!$, schließlich handelt es sich um ein Verfahren 3. Ordnung.

Berücksichtigt man die Anzahl der Schritte und teilt die Stabilitätsgrenze γ dadurch⁷, so ergibt sich, daß insbesondere die 4-stufigen Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung sehr effektiv sind. Gut erscheinen noch die 3-stufigen 3. Ordnung und (für sehr hohe Genauigkeitsanforderungen) vielleicht noch das 8. Ordnung. Die anderen dürften wohl nicht ganz so effektiv sein.

Numerische Experimente mit verschiedenen Differenzenoperatoren haben gezeigt, daß man auch bei den untersuchten Runge-Kutta-Verfahren wohl lediglich die Stabilitätsgrenze γ für Zentralfdifferenzen mit dem Stabilitätsfaktor Γ des Differenzenoperators zu multiplizieren braucht, um die Stabilitätsgrenze $\tilde{\gamma}$ für den jeweils entstehenden Algorithmus zu erhalten.

Im allgemeineren verlustbehafteten Fall kann man die Eigenwerte nicht mehr explizit angeben. Vielmehr hat man das Eigenwertproblem

$$(5.63) \quad \sum_{n=0}^s w_n \begin{pmatrix} -\frac{G}{C} \Delta t & -\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{C} \tilde{D} \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{L} \tilde{D} & -\frac{R}{L} \Delta t \end{pmatrix}^n - e^{i\Omega} I = 0$$

mit der Identität I und dem fouriertransformierten Differenzenoperator \tilde{D} , aus dem wiederum der diskretisierungsabhängige Faktor $1/\Delta x$ herausgezogen wurde, zu lösen. Mit der Substitution $\lambda = e^{i\Omega}$ erhält man die klassische Eigenwertformulierung. Für gegebenes Δt , Δx und η kann man die Potenzen der Matrix ausrechnen und gewichtet addieren. Dann berechnet man z.B. wie in dieser Arbeit mit Hilfe der LAPACK-Routinen die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ und daraus schließlich $\Omega_{1,2}$.

Leider kann man in diesem Fall die Diskretisierungsparameter Δx und Δt nicht mehr zu einer einzigen Größe zusammenfassen, man kann also nicht mehr eine Stabilitätsgrenze angeben, die unabhängig von Δx ist. Beispielfhaft soll für verschiedene Verluste der maximal mögliche Zeitschritt eines klassischen Runge-Kutta-Verfahrens mit Zentralfdifferenzen und dem (2,4)-B-Spline-Differenzenoperator berechnet werden. Zugrundegelegt wird eine räumliche Diskretisierung mit $\Delta x = 10 \mu\text{m}$ einer 50 Ω -Leitung auf einem Substrat mit einer effektiven Dielektrizitätskonstante von $\varepsilon_{\text{eff}} = 6$. Daraus ergeben sich ein Induktivitätsbelag von $L = 0.408 \mu\text{H}/\text{m}$ und ein Kapazitätsbelag von $C = 0.163 \text{nF}/\text{m}$. Es werden zwei Fälle untersucht:

1. Das Dielektrikum ist ideal, so daß für den Leitwertbelag $G = 0 \text{ S}/\text{m}$ angesetzt wird. Es wird der Einfluß der Leiterverluste auf den maximal möglichen Zeitschritt untersucht.
2. Die Leiter sind ideal, d.h. es gilt $R = 0 \Omega/\text{m}$. Hier wird der Einfluß des Querleitwerts untersucht.

Die Ergebnisse sind in Tab. 5.13 aufgeführt. Offenbar haben die Verluste bis zu einer bestimmten Größe praktisch keinen Einfluß auf den Zeitschritt. Oberhalb dieser Grenze (im einen Fall liegt sie zwischen $R = 10^6 \Omega/\text{m}$ und $R = 10^7 \Omega/\text{m}$,

⁷Selbstverständlich ist dies eine grob vereinfachte Abschätzung des numerischen Aufwands, aber für diese Zwecke wohl ausreichend.

$G = 0 \text{ S/m}$			$R = 0 \text{ } \Omega/\text{m}$		
$R/(\Omega/\text{m})$	ZD	(2,4)	$G/(\text{S/m})$	ZD	(2,4)
0	0.230 ps	0.146 ps	0	0.230 ps	0.146 ps
10^2	0.230 ps	0.146 ps	10	0.231 ps	0.146 ps
10^4	0.230 ps	0.146 ps	10^2	0.234 ps	0.148 ps
10^6	0.240 ps	0.151 ps	10^3	0.236 ps	0.153 ps
10^7	0.113 ps	0.113 ps	$5 \cdot 10^3$	0.0908 ps	0.0908 ps
10^8	0.0113 ps	0.0113 ps	10^4	0.0454 ps	0.0454 ps
10^{10}	0.000113 ps	0.000113 ps	10^5	0.000454 ps	0.000454 ps

TABELLE 5.13. Verhalten des maximal möglichen Zeitschritts bei Variation der Verluste.

im anderen zwischen $G = 10^3 \text{ S/m}$ und $G = 5 \cdot 10^3 \text{ S/m}$) hängt der Zeitschritt nur noch von den Verlusten ab und ist unabhängig (!) vom Differenzenoperator. Numerische Experimente zeigten, daß sich diese Grenze hin zu größeren Widerstands- bzw. Leitwertsbelägen verschiebt, wenn man den Ortsschritt verkleinert. Dieses Verhalten läßt sich wie folgt erklären: Der Ortsschritt legt die maximal auftretende Ortsfrequenz fest und ist umgekehrt proportional zu dieser. Auf einer verlustbehafteten Leitung findet erst ab einer von den Verlusten abhängenden kleinsten Ortsfrequenz eine Wellenausbreitung statt. Unterhalb dieser Grenzfrequenz wird eine Anfangsverteilung lediglich exponentiell gedämpft. Sind also die Verluste klein, so findet eine Wellenausbreitung statt und der Zeitschritt ist abhängig vom Differenzenoperator. Sind die Verluste jedoch sehr groß, so spielt der Differenzenoperator gar keine Rolle mehr, der Zeitschritt ist nur noch davon abhängig, wie schnell exponentiell gedämpft wird. Durch Verkleinerung des Ortsschritts wird die maximal auftretende Ortsfrequenz erhöht, es findet wieder eine Wellenausbreitung statt.

7. Anmerkungen zu MRTD

Wie bereits erwähnt wird für MRTD mit Battle-Lemarié-Wavelets empfohlen, als Zeitschritt nur ein Fünftel des Stabilitätslimits zu wählen. Diese Empfehlung läßt sich ausgezeichnet mit Hilfe von Dispersionsanalysen begründen.

Bild 5.4(a) zeigt die Phasengeschwindigkeitsfehler der Algorithmen zur Simulation der verlustfreien Leitungsgleichungen, wenn man Zentraldifferenzen bzw. (2,4)-B-Spline-Differenzen und zeitlich Zentraldifferenzen nahe des Stabilitätslimits verwendet.⁸ Sehr gut ist zu erkennen, daß beide Algorithmen von zweiter Ordnung sind. Sie unterscheiden sich lediglich geringfügig in der Fehlerkonstante. Wenn man als Zeitschritt ein Zehntel des Stabilitätslimits wählt,

⁸Hier muß man nah des Stabilitätslimits bleiben, weil Zentraldifferenzen an der Stabilitätsgrenze die Leitungsgleichungen exakt integrieren und der Fehler somit null wäre. Im dreidimensionalen gilt dies nicht.

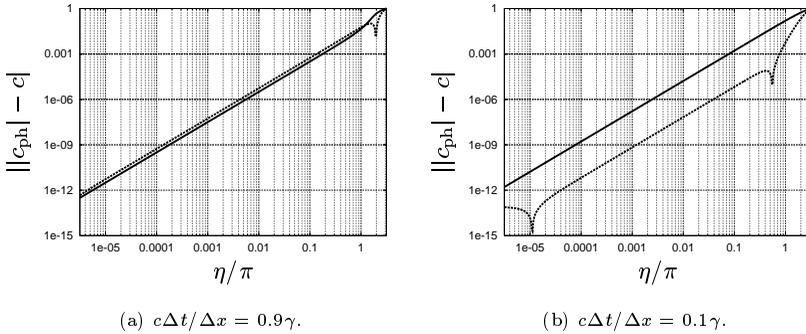


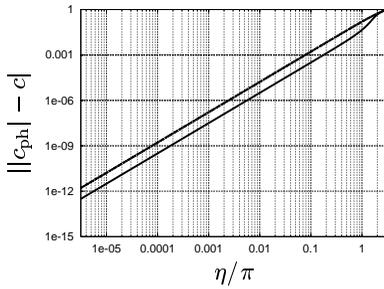
ABBILDUNG 5.4. Vergleich Zentral-/ (2,4)-B-Spline-Differenzen (durchgezogene / gestrichelte Linie).

so verändert sich die Genauigkeit von Zentralfdifferenzen nur unwesentlich; bei Verwendung des (2,4)-Differenzenoperators reduziert sich der Fehler auf ein Hundertstel (Abbildung 5.4(b)).

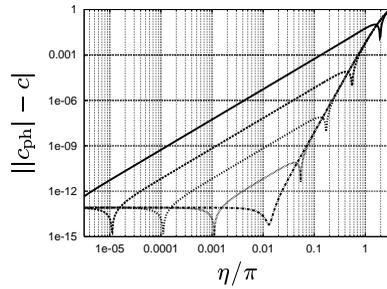
Das liegt daran, daß im Fall der Zentralfdifferenzen diese den Diskretisierungsfehler dominieren. Der (2,4)-Differenzenoperator ist aber von sechster Ordnung, der Diskretisierungsfehler also viel kleiner, die Verkleinerung des Zeitschritts resultiert damit in einer Verkleinerung des Fehlers. Verkleinert man den Zeitschritt immer weiter, so tritt deutlich das Fehlerverhalten des Differenzenoperators hervor (Abbildung 5.5). Eine Verkleinerung des Zeitschritts hat also bei Zentralfdifferenzen praktisch keinen wesentlichen Einfluß auf den Dispersionsfehler, die Kurven liegen aufeinander. Ganz anders bei Verwendung der (2,4)-B-Spline-Differenzen. Hier resultiert aus der Verkleinerung des Zeitschritts eine Verringerung des Fehlers.

Diese Verringerung des Dispersionsfehlers durch Verringerung des Zeitschritts ist also dafür verantwortlich, daß man bei MRTD mit nur einem Fünftel der Unbekannten je Raumrichtung auskommt.

Verallgemeinert bedeutet dieser Sachverhalt, daß wenn ein Verfahren räumlich und zeitlich von der gleichen Ordnung ist, hat die Wahl des Zeitschritts keinen wesentlichen Einfluß auf die Genauigkeit. Ist aber die räumliche Ordnung größer, so läßt sich der Dispersionsfehler durch Verringern des Zeitschritts verkleinern. Um räumliche Diskretisierungen hoher Ordnung auszunutzen, muß man also entweder den Zeitschritt sehr klein machen, wenn man nicht auf Zentralfdifferenzen verzichten möchte, oder man muß einen Zeitintegrator höherer Ordnung wählen.



(a) Zentraldifferenzen.



(b) (2,4)-B-Spline-Differenzen.

ABBILDUNG 5.5. Verhalten bei Verkleinerung des Zeitschritts ($c\Delta t/(\gamma\Delta x) = 0.9, 0.1, 10^{-2}, 10^{-3}$ und 10^{-4}).

Numerische Experimente

Im ersten Abschnitt über Waveletverfahren mit zeitlichen Zentralfdifferenzen finden sich die Beobachtungen der Arbeitsgruppe um L.P.B. Katehi bestätigt, aber es zeigt sich, daß Zentralfdifferenzen zu ungenau sind, um in Verbindung mit räumlichen Differenzenoperatoren höherer Ordnung ein Höchstmaß an Effektivität zu erzielen.

Bezüglich des Kompressionsaspektes von Wavelets läßt sich sagen, daß adaptive Algorithmen in der Tat funktionieren, daß sich Pulse verfolgen lassen, und daß man schon im Eindimensionalen durchaus Kompressionsraten von 1–10% erreichen kann. Allerdings ist es nachteilig, daß sich der Rechenaufwand allein durch die Verwendung von Wavelets erheblich erhöht.

Zeitliche Integrationsverfahren höherer Ordnung erweisen sich sowohl in Genauigkeits- als auch in Rechenzeitbelangen den Zentralfdifferenzen deutlich überlegen. Insbesondere das Adams-Bashforth-Verfahren dritter Ordnung und das energieerhaltende Verfahren vierter Ordnung sind sehr effektiv.

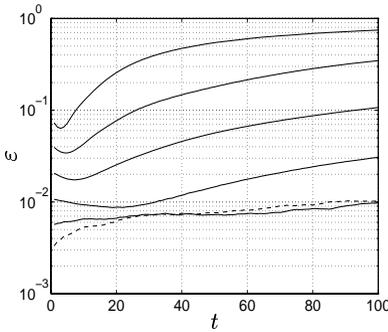
Abschließend werden Performanceauswirkungen der Entscheidung, nur mit Skalierungskoeffizienten oder auch mit Wavelets zu rechnen, illustriert.

1. Waveletverfahren mit zeitlichen Zentralfdifferenzen

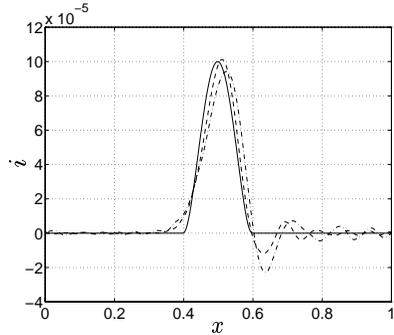
Zunächst werden Waveletverfahren mit zeitlichen Zentralfdifferenzen untersucht. Da die Ergebnisse für periodische und ideal elektrische bzw. magnetische Randbedingungen praktisch identisch sind, werden nur die für periodische dargestellt. Die Länge der Leitung und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen sind auf 1 normiert. Als Anfangsbedingungen wählen wir

$$(6.1a) \quad u_0(x) = \begin{cases} (x - 0.4)^2(x - 0.6)^2 & \text{für } 0.4 \leq x \leq 0.6, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(6.1b) \quad i_0(x) = \begin{cases} (x - 0.4)^2(x - 0.6)^2 & \text{für } 0.4 \leq x \leq 0.6, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



(a) Fehler in Abhängigkeit von t für verschiedene Zeitschrittweiten.



(b) Strom zu 3 Zeitpunkten.

ABBILDUNG 6.1. Zeitabhängigkeit des Fehlers.

In Anlehnung an die L_2 -Norm definieren wir den zeitabhängigen Fehler als

$$(6.2) \quad \varepsilon(nK\Delta t) = \frac{\|i(nK\Delta t, x) - i_0(x)\|_{M+1}}{\|i_0(x)\|_{M+1}}, n \in \mathbb{N}$$

mit

$$(6.3) \quad \|f(x)\|_n = \sqrt{2^{-n} \sum_{\nu=0}^{2^n-1} |f(2^{-n}\nu)|}.$$

Bild 6.1(a) zeigt den Zeitverlauf des Fehlers, wenn man die Leitung mit (3,3)-B-Splines der Skala 8 (also 256 Unbekannte) diskretisiert. Aufgrund der Äquivalenz der Algorithmen mit und ohne Wavelets sind die Ergebnisse unabhängig von der tatsächlich benutzten größten Skala J_0 (abgesehen von Rundungsfehlern). Bei der Berechnung der Ergebnisse wurde hier $J_0 = 3$ (also 8 Unbekannte) gewählt. Die Kurven von oben nach unten zeigen den Fehler ε über der Zeit für die Zeitschrittweiten $\Delta t = \Delta t_{\max}, \Delta t_{\max}/2, \Delta t_{\max}/4, \Delta t_{\max}/8, \Delta t_{\max}/16$ und $\Delta t_{\max}/32$. Die Kurve für $\Delta t = \Delta t_{\max}/32$ ist der Deutlichkeit wegen gestrichelt gezeichnet. Im ersten Fall entsprechen $t = 100$ etwa 40 Tausend Zeitschritte, im letzten etwa 1,2 Millionen.

Ebenso wie bei MRTD mit kubischen Battle-Lemarié-Wavelets verkleinert sich der Fehler durch Verkleinerung des Zeitschritts. Dies geht aber nicht beliebig; die letzten beiden Kurven unterscheiden sich nur unwesentlich, der kleinste erreichbare Fehler wird also durch die räumliche Diskretisierung festgelegt.

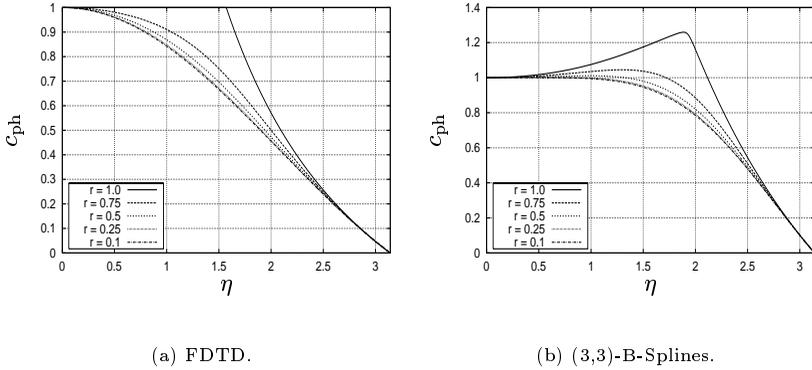


ABBILDUNG 6.2. Phasengeschwindigkeiten in Abhängigkeit des relativen Zeitschritts.

Um den Fehler ε zu veranschaulichen, ist in Bild 6.1(b) die räumliche Stromverteilung zu den Zeitpunkten $t = 0$, $t = 50$ und $t = 100$ bei einer Zeitschrittweite von $\Delta t_{\max}/2$ dargestellt, der Fehler beträgt also ca. 18% bzw. 35%. Der Puls breitet sich nach rechts aus, d.h. der Bereich vor dem Puls ist gestört. Bei FDTD, die —anschaulich gesprochen— einen Schwanz hinter sich herziehen, ist dies gerade umgekehrt. Grund hierfür ist, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit höherer Frequenzen bei FDTD kleiner ist, als sie sein müßte, bei den (3,3)- (bzw. (2,4)-) B-Splines ist sie in diesem Fall jedoch größer. Bild 6.2 zeigt dies für verschiedene relative Zeitschrittweiten $r = \Delta t/\Delta x$. Bemerkenswert ist noch, daß bei FDTD die Phasengeschwindigkeit immer zu klein ist, während sie bei (3,3)-B-Splines und großen Zeitschritten zu groß, bei kleinen aber zu klein ist.

Leider begrenzen die zeitlichen Zentralfdifferenzen die Konvergenzordnung auf zwei, was in Bild 6.3 gut zu erkennen ist. Es zeigt das Verhalten des Fehlers, wenn man ausgehend von einer größten Skala immer mehr Waveletlevel hinzunimmt, also immer genauer wird. Hier wurde ausgehend von $J_0 = 3$ und $J_M = 5$ auf $J_M = 11$ gesteigert.

Daß bei Hinzunahme von immer mehr Waveletleveln der numerische Aufwand immer weiter steigt, ist natürlich, da ja immer mehr Koeffizienten je Zeitschritt berechnet werden müssen. Von großer Bedeutung ist jedoch die Frage, wie sich die Rechenzeit gegenüber einem äquivalenten Algorithmus, der nur Skalierungsfunktionen verwendet, verhält. Dazu werden die Rechenzeiten (auf HP C160) für (3,3)-B-Splines verglichen (Bild 6.4). Im Fall des Algorithmus nur mit Skalierungsfunktionen gilt $J_0 = J_F$, im andern $J_0 = 3$ und $J_{M+1} = J_F$. Offensichtlich steigt

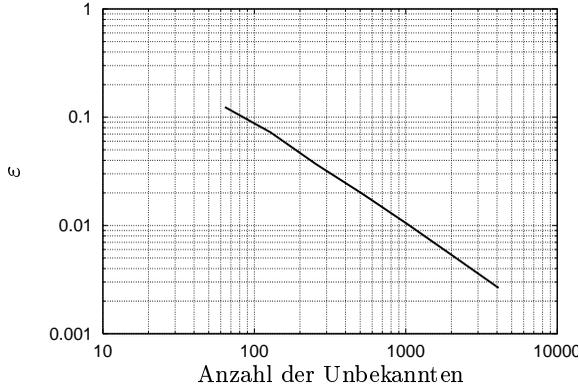
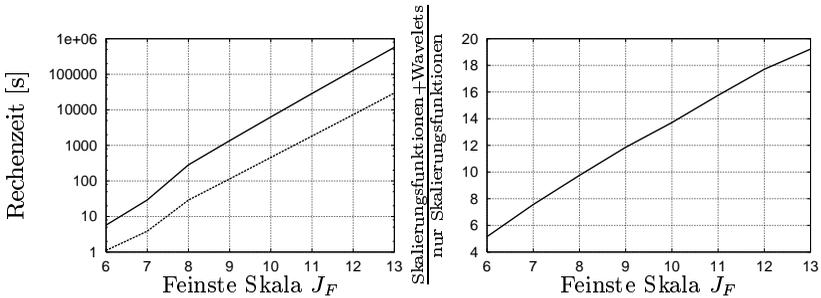


ABBILDUNG 6.3. Konvergenzverhalten.



(a) Skalierungsfunktionen und Wavelets (durchgezogene Linie); nur Skalierungsfunktionen (gestrichelt).

(b) Verhältnis der Rechenzeiten.

ABBILDUNG 6.4. Rechenzeitvergleich von Algorithmen, die nur Skalierungsfunktionen, und solchen, die Skalierungsfunktionen und Wavelets verwenden, und zueinander äquivalent sind.

der Rechenaufwand bei Verwendung von Wavelets deutlich an. Und zwar umso mehr, je mehr Skalen man verwendet (Bild 6.4(b)). Das muß auch so sein, wie folgende Überlegung zeigt: Benutzt man nur Skalierungsfunktionen, so sind zur Berechnung eines Koeffizienten der Entwicklung lediglich ein paar benachbarte

Koeffizienten zu berücksichtigen. Dies ist unabhängig von der Skala. Zur Berechnung der Wechselwirkung mit Wavelets sind dagegen umso mehr Koeffizienten zu berücksichtigen, je größer der Abstand der Skalen ist, da die Wavelets immer schmaler werden. Dies ist auch sehr gut an der Berechnung der Matrixelemente eines Differentialoperators in einer Waveletbasis zu erkennen. Hierbei wird der Ausgangsdifferenzenoperator K_n , der die Verkoppelung der Skalierungskoeffizienten derselben Skala beschreibt, im Grunde immer wieder mit den Filtern h, \tilde{h}, g und \tilde{g} gefaltet (ggf. wird vorher gespiegelt). Dadurch werden die Differenzenoperatoren A_n, B_n, C_n und D_n immer breiter, je weiter die Skalenindizes i und j auseinanderliegen.

Diese Ergebnisse stützen die Erfahrungen der Gruppe um L.P.B. Katehi, daß man bei Verwendung räumlicher Differenzenoperatoren höherer Ordnung durch Verkleinerung des Zeitschritts die Genauigkeit des Verfahrens erheblich verbessern kann. Allerdings wird dadurch nicht die Konvergenzordnung des Verfahrens verbessert, und auch das Potential des räumlichen Differenzenoperators wird unter Umständen nicht vollständig ausgenutzt. Ergebnisse dieser Art führten zum Schluß, daß Zeitintegratoren höherer Ordnung essentiell für eine erfolgreiche Anwendung von räumlichen Differenzenoperatoren höherer Ordnung —und damit auch für die hier vorgeschlagenen Waveletverfahren— ist. Zudem erhöht die Verwendung von Wavelets den Rechenaufwand, und zwar umso mehr, je mehr Waveletlevel benutzt werden. Dies zeigt, daß nichtadaptive Implementierungen von Waveletalgorithmen —abgesehen von Studienzwecken— unnützlich sind, da sie keine Speichervorteile bieten, aber zu deutlich längeren Rechenzeiten führen.

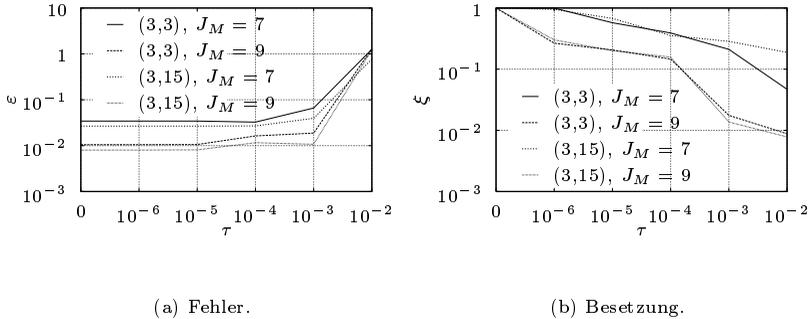
1.1. Untersuchungen zur Adaptivität. Durch Zunullsetzen kleiner Koeffizienten nach jedem bzw. einer gewissen Anzahl von Zeitschritten ist es möglich, adaptive Algorithmen zu implementieren.

Es werden alle Koeffizienten, deren Betrag kleiner als τI_{\max} , $I_{\max} = \max\{|i_{-1,k}| : k \in \mathcal{L}_{-1}\}$ ist, nach jedem Zeitschritt zu Null gesetzt.

Es werden (3,3)-B-Splines mit $J_0 = 5$ und $J_M = 7$ sowie $J_M = 9$ untersucht. Als Zeitschritt wird $\Delta t = \Delta t_{\max}/2$ gewählt, die Stromverläufe werden zum Zeitpunkt $t = 5$, also nach 5 Umläufen, ausgewertet. Zum Vergleich werden die (3,15)-B-Splines untersucht. Eine Erhöhung der dualen Ordnung soll zu einer besseren Kompressionsrate führen. Zur Beurteilung des Kompressionsverhaltens der adaptiven Algorithmen definieren wir die Besetzung ξ

$$(6.4) \quad \xi = \frac{\text{Anzahl der Koeffizienten ungleich Null}}{\text{Gesamtanzahl der Koeffizienten}}.$$

Bild 6.5 zeigt die Ergebnisse in Abhängigkeit der Schwelle τ . Für $J_M = 7$ kann man τ bis 10^{-4} erhöhen, ohne daß sich der Fehler nennenswert verändert. Dabei erreicht man eine Besetzung von etwa 30–40%, was den Erwartungen aus den Vorbetrachtungen entspricht. Erhöht man τ weiter, so steigt der Fehler stark an.



ABILDUNG 6.5. Fehler- und Kompressionsverhalten adaptiver Algorithmen.

D.h. bei stärkerer Kompression der Daten wird die Simulation gestört. Die Unterschiede zwischen $(3,3)$ - und $(3,15)$ -B-Splines sind —abgesehen von einer etwas besseren Grundgenauigkeit der $(3,15)$ -B-Splines und unterschiedlichem Verhalten bei zu starker Kompression— eher unwesentlich. Für $J_M = 9$ erhält man erwartungsgemäß einen kleineren Fehler. Es lassen sich Besetzungen von 20% ohne Erhöhung des Fehlers erreichen. Bemerkenswert ist, daß eine Besetzung von unter 2% bei geringfügiger Erhöhung des Fehlers (weniger als Faktor 2) möglich ist. Das ist deutlich besser als die Vorbetrachtungen vermuten ließen.

Hieraus ist zu schließen, daß Wavelets umso besser sich zur Datenkompression eignen, je höher die Grundgenauigkeit (d.h. je größer J_{M+1}) ist, und je mehr Waveletlevel verwendet werden.

2. Verfahren höherer Ordnung

Die Verbesserung der Konvergenzeigenschaften durch Verwendung von Integrationsverfahren höherer Ordnung soll anhand der in dieser Arbeit entwickelten energieerhaltenden Mehrschrittverfahren demonstriert werden.

Dabei wählen wir als Randbedingungen ideal elektrische und als Anfangsbedingungen

$$(6.5a) \quad u_0 = \begin{cases} 10^8(x - 0.4)^4(x - 0.6)^4 & \text{für } 0.4 \leq x \leq 0.6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(6.5b) \quad i_0 = 0.$$

Die normierte Länge beträgt wiederum 1, ebenso die normierte Geschwindigkeit. Zu den Zeitpunkten $t_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ müssen sich also gerade wieder die Anfangsbedingungen einstellen. Als Startwerte für die Mehrschrittverfahren werden die

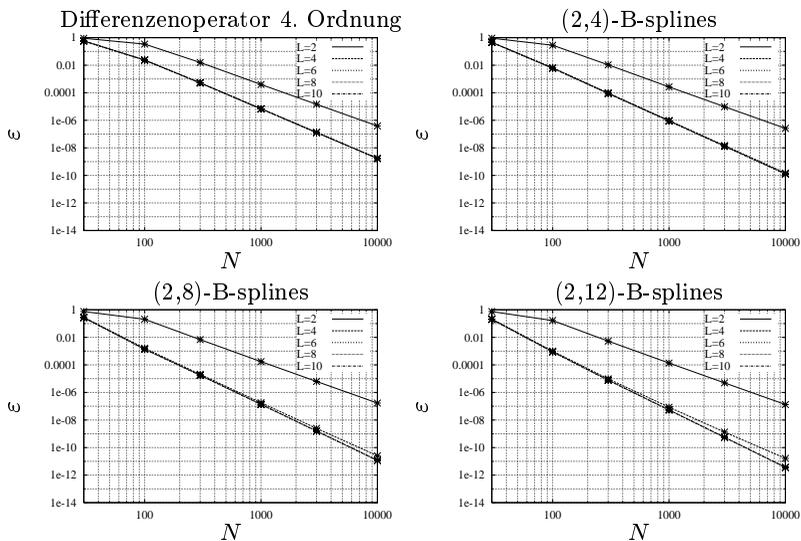


ABBILDUNG 6.6. Fehler in Anhängigkeit der Anzahl der Unbekannten und der Ordnung des Integrationsverfahrens für verschiedene Differenzenoperatoren.

analytischen Werte gemäß der d'Alembertschen Lösung der partiellen Differentialgleichungen gewählt.

In Bild 6.6 sind die Fehler ε über der Anzahl der Unbekannten N für verschiedene Differenzenoperatoren dargestellt. Dabei wird der Parameter L , der die Ordnung des Integrationsverfahrens angibt, variiert. Sehr deutlich ist die Verbesserung durch Verwendung eines Integrationsverfahrens höherer Ordnung. Allerdings liegt die Konvergenzordnung unabhängig vom Differenzenoperator und von L bei etwa vier. Der Grund liegt in der Wahl der Anfangsbedingungen, die lediglich dreimal stetig differenzierbar sind. Dadurch klingt das Spektrum der Anfangsbedingungen wie $1/\omega^4$ ab, d.h. obwohl die Verfahren genauere Ergebnisse liefern könnten, begrenzt die mangelnde Regularität der Anfangsbedingungen die Konvergenzgeschwindigkeit.

Wählt man glattere Anfangsbedingungen

$$(6.6a) \quad u_0 = \begin{cases} 10^{16}(x - 0.4)^8(x - 0.6)^8 & \text{für } 0.4 \leq x \leq 0.6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(6.6b) \quad i_0 = 0,$$

so kann man wesentlich schnellere Konvergenz erreichen (Bild 6.7). Auffällig ist,

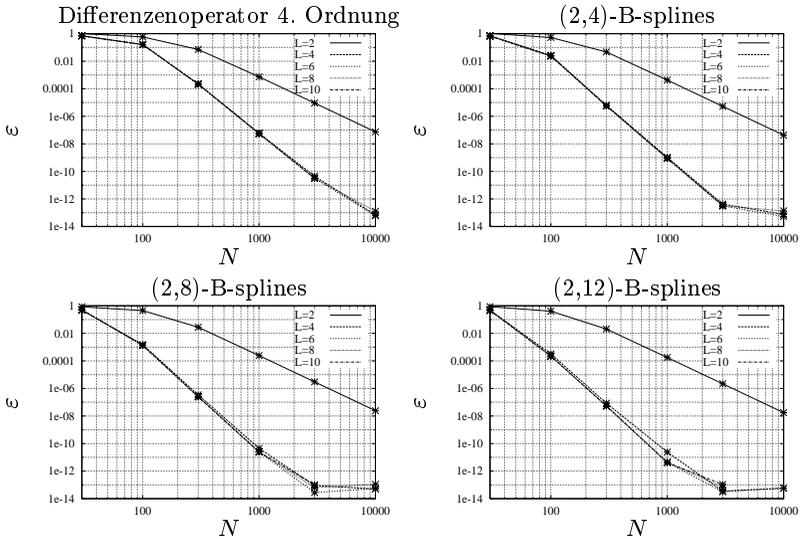


ABBILDUNG 6.7. Fehler für glattere Anfangsbedingungen.

daß die Fehler zum Teil sogar schneller als vorhergesagt kleiner werden: z.B. beim Differenzenoperator 4. Ordnung müßte der Fehler mit Vierter Potenz kleiner werden, aber offensichtlich wird er schneller kleiner. Zudem hat die Ordnung des Integrators —abgesehen von $L = 2$ — keinen nennenswerten Einfluß. Schon die Dispersionsanalyse ergab, daß Integrationsverfahren höherer Ordnung als 6 keine weitere Verbesserung des Fehlers mehr bei doppeltgenauer Rechnung bringen. Sehr schön zu sehen ist auch die Begrenzung der Genauigkeit durch Rundungsfehler auf ca. 10^{-13} .

In dieser Arbeit wurde eine Vielzahl von Integrationsverfahren höherer Ordnung vorgestellt. Von größtem Interesse ist die Frage, nach dem effektivsten Verfahren für einen zugrundeliegenden Differenzenoperator. Je höher die Ordnung des Integrators, umso höher wird im allgemeinen der Speicherbedarf und der Rechenaufwand. Zur Bewertung wird der Fehler ε über der benötigten Rechenzeit (auf HP C160) dargestellt. Untersucht wurden die energierhaltenden Mehrschrittverfahren 2., 4. und 6. Ordnung, die Adams-Bashforth-Verfahren 3. und 4. Ordnung sowie alle angegebenen Runge-Kutta-Verfahren. Die Ergebnisse für Zentralfdifferenzen, den Differenzenoperator 4. Ordnung sowie (2,4)- und (2,8)-B-Splines sind in Bild 6.8 dargestellt. Bei räumlichen Zentralfdifferenzen führt die Verwendung von Integrationsverfahren höherer Ordnung wie erwartet lediglich zu einer

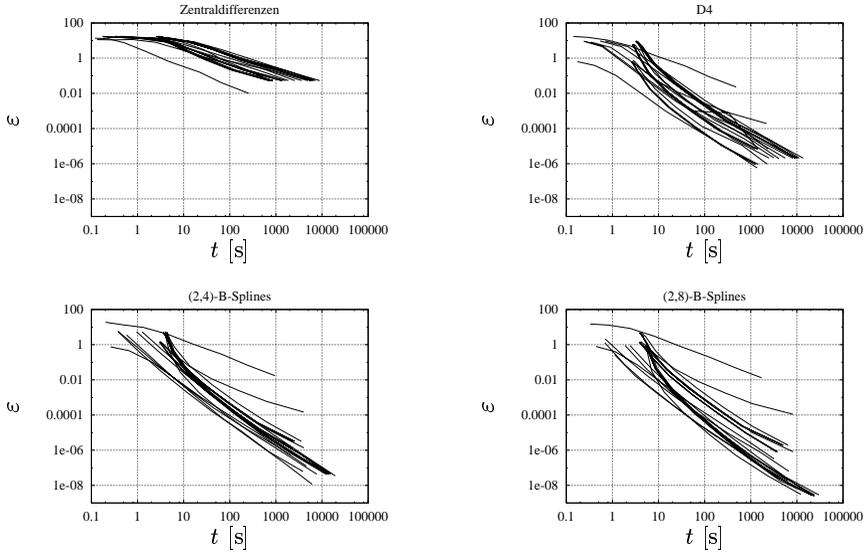


ABBILDUNG 6.8. Fehler über der Rechenzeit.

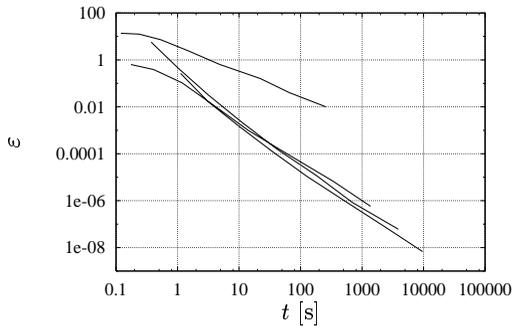


ABBILDUNG 6.9. Gegenüberstellung der jeweils effektivsten Verfahren.

Erhöhung der Rechenzeit (und des Speicherbedarfs) gegenüber zeitlichen Zentralkifferenzen. Ganz anders, wenn die räumlichen Differenzenoperatoren höherer Ordnung ist. In diesen Fällen sind bezüglich der Rechenzeit alle Integrationsverfahren effektiver als Zentralkifferenzen. Zum besseren Vergleich wurden die jeweils effektivsten Verfahren in Bild 6.9 gegenübergestellt. Hierbei handelt es sich um die

vier Kombinationen

- räumliche Zentralfdifferenzen mit zeitlichen Zentralfdifferenzen (also FDTD),
- Differenzenoperator 4. Ordnung mit Adams-Bashforth-Verfahren 3. Ordnung ($\Delta t = 0.9\Delta t_{\max}$),
- (2,4)-B-Splines mit energieerhaltendem Mehrschrittverfahren 4. Ordnung,
- (2,8)-B-Splines mit Adams-Bashforth-Verfahren 3. Ordnung ($\Delta t = 0.3\Delta t_{\max}$).

FDTD schneidet mit Abstand am schlechtesten ab, die anderen Kombinationen unterscheiden sich bezüglich der Rechenzeit nur unwesentlich. Der Speicherbedarf des Vierschrittverfahrens ist etwas größer als der des Dreischrittverfahrens.

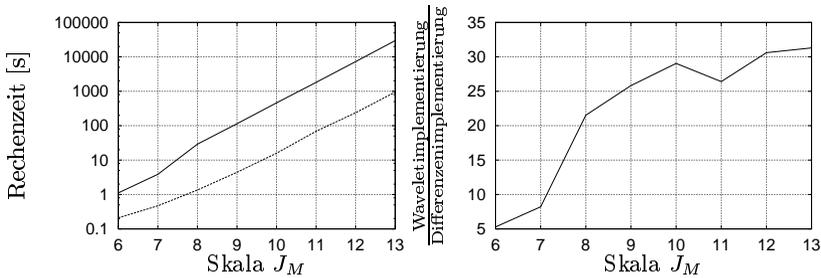
Insgesamt erscheinen somit Zeitintegrationsverfahren dritter oder vierter Ordnung am geeignetsten. Insbesondere das Adams-Bashforth-Verfahren 3. Ordnung (trotz seiner schwachen Bedämpfung des physikalischen Modes) und das energieerhaltende Verfahren 4. Ordnung scheinen sehr interessant. Runge-Kutta-Verfahren benötigen im allgemeinen mehr Zeit als Mehrschrittverfahren.

3. Performancevergleich zweier Implementierungen: Nur Skalierungsfunktionen—Skalierungsfunktionen und Wavelets

Wie bereits gesehen, erhöht sich die Rechenzeit durch die Verwendung von Wavelets erheblich, da die Differenzenoperatoren breiter werden. Neben diesem Effekt, gibt es noch implementierungsspezifische Effekte. Je nachdem ob man Wavelets berücksichtigen möchte, oder nur mit den Skalierungsfunktionen rechnen, ergeben sich verschiedene Optimierungsmöglichkeiten bei der Implementierung.

Ohne Wavelets läßt sich der Differenzenoperator einfach implementieren, so daß er über den ganzen Datenvektor geführt wird. Durch Ausrollen von Schleifen und ausschließliche Berücksichtigung der Elemente ungleich Null des Differenzenoperators wird es sogar möglich, daß man erst bei Ausführung des Programms den Differenzenoperator kennen muß, praktisch ohne mehr Rechenzeit gegenüber einer statischen Implementierung, bei der der Operator unveränderlich einprogrammiert ist, zu benötigen. Im folgenden wird diese Implementierung *Differenzenimplementierung* genannt.

Verwendet man hingegen auch Wavelets, so sind derartige Optimierungen sehr schwer durchzuführen. Viel näher liegt eine Implementierung des Differenzenoperators, die die Koeffizienten $A_n(j, i, l, k)$, $B_n(j, i, l, k)$, $C_n(j, i, l, k)$ und $D_n(j, i, l, k)$ verwendet, d.h. es werden Funktionen (bzw. im objektorientierten Umfeld Methoden) implementiert, die den richtigen Koeffizienten in Abhängigkeit von j , i , l und k zurückliefern. Zusätzliche Funktionen liefern die Bereichsgrenzen der l , wenn i , j und k festliegen, um nur die relevanten Werte von l zu berücksichtigen. D.h. bei solch einer Implementierung erfolgen erheblich mehr Funktionsaufrufe, ständig werden Daten auf dem Stack abgelegt und wieder zurückgeladen. Dadurch erhöht



(a) Waveletimplementierung (durchgezogene Linie); Differenzenimplementierung (gestrichelt).

(b) Verhältnis der Rechenzeiten.

ABBILDUNG 6.10. Rechenzeitvergleich der beiden Implementierungen.

sich natürlich die Rechenzeit. Diese Implementierung wird im folgenden als *Waveletimplementierung* bezeichnet.

Um den Rechenzeitunterschied beider Implementierungen zu demonstrieren, werden die Berechnungen aus Abschnitt 1 mit der Differenzenimplementierung wiederholt. Bild 6.10 vergleicht die Rechenzeiten beider Implementierungen. Bei der Waveletimplementierung wird ebenfalls nur mit den Skalierungskoeffizienten gerechnet, d.h. gröbste und feinste Skala stimmen überein. Schon bei recht „kurzen“ Vektoren ist die Differenzenimplementierung fünf- bis zehnmal schneller als die Waveletimplementierung, bei längeren —d.h. feineren Skalen— sogar etwa dreißigmal.

Würde man bei der Waveletimplementierung auch noch Wavelets verwenden statt nur Skalierungsfunktionen, so wäre die Differenzenimplementierung also etwa 600mal schneller! Selbst wenn man die Nulloperationen ohne Overhead implementieren könnte, wäre eine statische Differenzenimplementierung deutlich schneller bei gleicher Genauigkeit (selbst bei einer Kompression durch Wavelets auf 5% der Koeffizienten).

Ausblicke

In diesem Kapitel werden einerseits Ansätze vorgestellt, die es im Prinzip ermöglichen, nahezu beliebige elektromagnetische Probleme zu lösen. Dies wäre die Erweiterung auf den dreidimensionalen Raum durch die Verwendung von Tensorproduktwavelets und die Gebietsunterteilung, um Wavelets für allgemeine Strukturen flexibel einsetzen zu können. Ebenso wird die Erweiterung der Dispersionsanalysen dargestellt. Andererseits werden auf den gemachten Erfahrungen aufbauende Vorschläge gemacht, um den Wavelet-Galerkin-Verfahren zu mehr numerischer Effizienz zu verhelfen. Dies wäre zum einen eine Optimierung des Runge-Kutta-Ansatzes und zum anderen der Verzicht auf „echte“ Adaptivität zugunsten statischer Gitterverfeinerung.

1. Maxwell'sche Gleichungen

Um waveletbasierte Konzepte auf den dreidimensionalen Fall der Maxwell'schen Gleichungen zu übertragen, benötigt man zunächst eine Multiskalenanalyse des $L_2(\mathbb{R}^3)$, also Wavelets im Dreidimensionalen. Hierfür gibt es zwei Ansätze:

1. Man konstruiert neue, nichtseparable Wavelets, d.h. Wavelets, die sich nicht als Produkt dreier univariater Funktionen darstellen lassen.
2. Man bildet aus den bekannten Wavelets im Eindimensionalen mit Hilfe des Tensorprodukts separable Wavelets im Dreidimensionalen.

Die erste Möglichkeit ist deutlich komplizierter, erlaubt jedoch die Konstruktion von Wavelets mit geringerer Anisotropie. Der Tensorproduktansatz führt zudem zu einem dreidimensionalen Koeffizientenarray, das die quaderförmige Gitterstruktur der Koeffizienten widerspiegelt, also einfach zu implementieren ist (wenn man von Adaptivität absieht). Zudem lassen sich die Differenzenoperatoren auf die Operatoren im Eindimensionalen zurückführen.

Am einfachsten entwickelt man jede Feldkomponente für sich in eine Waveletreihe. Verwendet man für alle Feldkomponenten dieselben Entwicklungs- und Testfunktionen, so kann man die sechs Feldkomponenten zu einem 6-Tupel zusammenfassen. Dies hat insbesondere für adaptive Verfahren Vorteile: man findet zu einem Orte gleich alle Feldkomponenten, d.h. die Suchzeit in einer dynamischen Datenstruktur bei Anwendung eines Differenzenoperators läßt sich auf ein

Sechstel reduzieren, zudem läßt sich der zusätzliche Speicher der Datenstruktur zur Ermöglichung der Adaptivität ebenfalls auf maximal ein Sechstel reduzieren, da in vielen Fällen im felderfüllten Gebiet alle sechs Komponenten ungleich Null sind, wenn auch nur durch numerische Fehler bedingt. Dies legt den Ansatz

$$(7.1) \quad \begin{pmatrix} E_x(t, x, y, z) \\ E_y(t, x, y, z) \\ E_z(t, x, y, z) \\ H_x(t, x, y, z) \\ H_y(t, x, y, z) \\ H_z(t, x, y, z) \end{pmatrix} \approx \sum_{p=-1}^{M_x} \sum_{q=-1}^{M_y} \sum_{r=-1}^{M_z} \sum_{k \in \mathcal{L}_p} \sum_{l \in \mathcal{L}_q} \sum_{m \in \mathcal{L}_r} C_{k,l,m}^{p,q,r}(t) \Psi_{k,l,m}^{p,q,r}(x, y, z)$$

mit

$$(7.2) \quad C_{k,l,m}^{p,q,r}(t) = \begin{pmatrix} E_{x;k,l,m}^{p,q,r}(t) \\ E_{y;k,l,m}^{p,q,r}(t) \\ E_{z;k,l,m}^{p,q,r}(t) \\ H_{x;k,l,m}^{p,q,r}(t) \\ H_{y;k,l,m}^{p,q,r}(t) \\ H_{z;k,l,m}^{p,q,r}(t) \end{pmatrix}$$

und

$$(7.3) \quad \Psi_{k,l,m}^{p,q,r}(x, y, z) = \psi_{J_p,k}(x) \psi_{J_q,l}(y) \psi_{J_r,m}(z)$$

nahe. Einsetzen in die Maxwellschen Gleichungen im homogenen, isotropen Fall

$$(7.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$$

und testen mit den biorthogonalen Wavelets

$$(7.5) \quad \tilde{\Psi}_{k,l,m}^{p,q,r}(x, y, z) = \tilde{\psi}_{J_p,k}(x) \tilde{\psi}_{J_q,l}(y) \tilde{\psi}_{J_r,m}(z)$$

ergibt das System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das dann mit den vorgestellten Methoden integriert werden kann. So ergibt sich z.B. für die erste der

Maxwellschen Gleichungen

(7.6)

$$\sum_{p,q,r;k,l,m} \frac{d}{dt} E_{x;k,l,m}^{p,q,r} (\Psi_{k,l,m}^{p,q,r}, \tilde{\Psi}_{k',l',m'}^{p',q',r'})_{3D} = \sum_{p,q,r;k,l,m} \frac{1}{\varepsilon} \left(-H_{y;k,l,m}^{p,q,r} \left(\frac{\partial}{\partial z} \Psi_{k,l,m}^{p,q,r}, \tilde{\Psi}_{k',l',m'}^{p',q',r'} \right)_{3D} + H_{z;k,l,m}^{p,q,r} \left(\frac{\partial}{\partial y} \Psi_{k,l,m}^{p,q,r}, \tilde{\Psi}_{k',l',m'}^{p',q',r'} \right)_{3D} \right)$$

wobei $(\cdot, \cdot)_{3D}$ das innere Produkt im Dreidimensionalen kennzeichnet, um es von dem im Eindimensionalen (\cdot, \cdot) zu unterscheiden. Es müssen also die inneren Produkte $(\Psi_{k,l,m}^{p,q,r}, \tilde{\Psi}_{k',l',m'}^{p',q',r'})_{3D}$, $(\frac{\partial}{\partial x} \Psi_{k,l,m}^{p,q,r}, \tilde{\Psi}_{k',l',m'}^{p',q',r'})_{3D}$, $(\frac{\partial}{\partial y} \Psi_{k,l,m}^{p,q,r}, \tilde{\Psi}_{k',l',m'}^{p',q',r'})_{3D}$ und $(\frac{\partial}{\partial z} \Psi_{k,l,m}^{p,q,r}, \tilde{\Psi}_{k',l',m'}^{p',q',r'})_{3D}$ berechnet werden. Aufgrund des Tensorproduktansatzes zerfallen die inneren Produkte im Dreidimensionalen in Produkte dreier innerer Produkte im Eindimensionalen, die ja bereits bekannt sind:

$$(7.7) \quad (\Psi_{k,l,m}^{p,q,r}, \tilde{\Psi}_{k',l',m'}^{p',q',r'})_{3D} = (\psi_{J_p,k}, \tilde{\psi}_{J_{p'},k'}) (\psi_{J_q,l}, \tilde{\psi}_{J_{q'},l'}) (\psi_{J_r,m}, \tilde{\psi}_{J_{r'},m'}) \\ = \delta_{p,p'} \delta_{k,k'} \delta_{q,q'} \delta_{l,l'} \delta_{r,r'} \delta_{m,m'}$$

$$(7.8) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi_{k,l,m}^{p,q,r}, \tilde{\Psi}_{k',l',m'}^{p',q',r'} \right)_{3D} = (\psi'_{J_p,k}, \tilde{\psi}_{J_{p'},k'}) (\psi_{J_q,l}, \tilde{\psi}_{J_{q'},l'}) (\psi_{J_r,m}, \tilde{\psi}_{J_{r'},m'}) \\ = \mathcal{A}_1(J_p, J_{p'}, k, k') \delta_{q,q'} \delta_{l,l'} \delta_{r,r'} \delta_{m,m'}$$

$$(7.9) \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} \Psi_{k,l,m}^{p,q,r}, \tilde{\Psi}_{k',l',m'}^{p',q',r'} \right)_{3D} = (\psi_{J_p,k}, \tilde{\psi}_{J_{p'},k'}) (\psi'_{J_q,l}, \tilde{\psi}_{J_{q'},l'}) (\psi_{J_r,m}, \tilde{\psi}_{J_{r'},m'}) \\ = \delta_{p,p'} \delta_{k,k'} \mathcal{A}_1(J_q, J_{q'}, l, l') \delta_{r,r'} \delta_{m,m'}$$

$$(7.10) \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} \Psi_{k,l,m}^{p,q,r}, \tilde{\Psi}_{k',l',m'}^{p',q',r'} \right)_{3D} = (\psi_{J_p,k}, \tilde{\psi}_{J_{p'},k'}) (\psi_{J_q,l}, \tilde{\psi}_{J_{q'},l'}) (\psi'_{J_r,m}, \tilde{\psi}_{J_{r'},m'}) \\ = \delta_{p,p'} \delta_{k,k'} \delta_{q,q'} \delta_{l,l'} \mathcal{A}_1(J_r, J_{r'}, m, m')$$

wobei \mathcal{A}_n für das geeignete Integral nach den Gleichungen (4.65a)–(4.65d) steht. Damit erhält man für die erste der sechs Maxwellschen Gleichungen

(7.11)

$$\frac{d}{dt} E_{x;k',l',m'}^{p',q',r'} = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{r,m} \mathcal{A}_1(J_r, J_{r'}, m, m') H_{y;k',l',m}^{p',q',r'} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{q,l} \mathcal{A}_1(J_q, J_{q'}, l, l') H_{y;k',l,m}^{p',q',r'}$$

Definiert man die drei Differenzenoperatoren

$$(7.12) \quad \mathcal{D}_x a_{k',l',m'}^{p',q',r'} := \sum_{p,k} \mathcal{A}_1(J_p, J_{p'}, k, k') a_{k,l',m'}^{p,q',r'}$$

$$(7.13) \quad \mathcal{D}_y a_{k',l',m'}^{p',q',r'} := \sum_{q,l} \mathcal{A}_1(J_q, J_{q'}, l, l') a_{k',l,m}^{p',q,r'}$$

und

$$(7.14) \quad \mathcal{D}_z a_{k',l',m'}^{p',q',r'} := \sum_{r,m} \mathcal{A}_1(J_r, J_{r'}, m, m') a_{k',l',m}^{p',q',r},$$

wobei $a \in \{E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z\}$, so erhält man schließlich

$$(7.15) \quad \frac{d}{dt} C_{k,l,m}^{p,q,r}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{D}_z & \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{D}_y \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{D}_z & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{D}_x \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{D}_y & \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{D}_x & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \mathcal{D}_z & -\frac{1}{\mu} \mathcal{D}_y & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\mu} \mathcal{D}_z & 0 & \frac{1}{\mu} \mathcal{D}_x & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\mu} \mathcal{D}_y & -\frac{1}{\mu} \mathcal{D}_x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C_{k,l,m}^{p,q,r}(t)$$

Damit ist der dreidimensionale Fall auf den eindimensionalen zurückgeführt. Offensichtlich ist die Programmierung erheblich komplizierter als im eindimensionalen Fall der Leitungsgleichungen. Es macht also erst dann Sinn¹, sich mit der Lösung der Maxwell'schen Gleichungen mit Hilfe von Wavelets zu beschäftigen, wenn man den eindimensionalen Fall beherrscht, d.h. hinreichend effektive Datenstrukturen gefunden hat.

2. Allgemeine Gebiete

Bisher wurden lediglich sehr einfache Gebiete betrachtet: der unendlich ausgedehnte homogene Raum, der Torus (periodische Randbedingungen), und symmetrische Fortsetzungen (d.h. Kuben mit ideal magnetischen oder elektrischen Wänden). Diese Gebiete bereiten wie im Eindimensionalen aufgrund ihrer Homogenität und der Einfachheit der Randbedingungen keine zusätzlichen Schwierigkeiten. Allerdings beschränkt sich damit die Anwendung in der Hochfrequenztechnik im wesentlichen auf den quaderförmigen Hohlraumresonator. Bereits geringe Modifikationen führen zu nichttrivialen Schwierigkeiten: füllt man den Hohlraumresonator zur Hälfte mit einem Dielektrikum, so muß der Grenzübergang Luft–Dielektrikum gesondert betrachtet werden. Krumpholz & Katehi (1996) schlugen vor, die relative Dielektrizitätszahl als ortsabhängige Größe im Integranden bei der Berechnung der inneren Produkte zu berücksichtigen. Dieser Ansatz zerstört allerdings die (Bi-)Orthogonalität der Basis- und Testfunktionen, so daß z.B. die Berücksichtigung von Verlusten deutlich aufwendiger wird. Zudem scheint dieser Ansatz recht unflexibel, da für jede neue Geometrie zunächst die inneren Produkte

¹Mit Sinn ist hier lediglich im Sinne einer ingenieurmäßigen Anwendung gemeint, d.h. wie kann ich am schnellsten und mit geringstem Arbeitszeitaufwand ein elektromagnetisches Verhalten abschätzen. Und in diesem Punkt sind die Standardverfahren Waveletmethoden (noch) deutlich überlegen.

berechnet werden müssen. Werthens Ansatz einer schnellen Wavelettransformation eines zugrundeliegenden Differenzalgorithmus ignoriert die Material- und Geometriestruktur, was dazu führt, daß in der Nähe von Materialvariationen oder Leiterecken und -kanten nicht komprimiert werden kann, ohne deutlich an Genauigkeit zu verlieren.

Alternativ hierzu bietet sich die Unterteilung des Gebiets in homogene quaderförmige Untergebiete an. Dies hat den Vorteil, das alle Quader im Grunde gleich —abgesehen von unterschiedlichen Längen und Materialparametern— behandelt werden können. Dies erleichtert die Implementierung und auch eine Parallelisierung des Algorithmus. Natürlich hat dieser Ansatz Nachteile bei Geometrien, die sich nicht gut mit Quadern approximieren lassen.

Man benötigt also eine Multiskalenanalyse des Intervalls bzw. des Kubus für beliebige Randbedingungen. Eine einfache Einschränkung der Skalierungsfunktionen und Wavelets auf das betrachtete Intervall zerstört die (Bi-)Orthogonalität der Funktionen, so daß in diesem Fall ein implizites gewöhnliches Differentialgleichungssystem entstehen würde. Allerdings kann man sogenannte randangepaßte Wavelets auf dem Intervall konstruieren (Auscher 1992, Bertoluzza et al. 1994, Dahmen et al. 1996, Jameson 1993), die (bi-)orthogonal sind. Im allgemeinen gibt es dann allerdings mehrere Funktionen, die nicht am Rand verschwinden und deren Ableitungen auch nicht. Dies erschwert natürlich die Erfüllung von Rand- und Stetigkeitsbedingungen. Durch geeignete Linearkombinationen kann man es erreichen, daß nur noch eine Skalierungsfunktion am Rand nicht verschwindet und nur die Ableitung einer anderen auch nicht. Dadurch wird die Erfüllung von Randbedingungen nahezu trivial. Allerdings hängt die Linearkombination von der Anzahl der Waveletlevel ab. Um dies zu umgehen, kann man eine andere Linearkombination wählen, bei der auch auf jedem Waveletlevel ein Wavelet am Rand nicht verschwindet und die Ableitung eines anderen auch nicht. Stetigkeitsbedingungen werden dann skalenweise erfüllt (Canuto, Tabacco & Urban 1997*a*, Canuto, Tabacco & Urban 1997*b*).

Durch die Modifikationen an den Rändern werden natürlich die Differenzoperatoren wie auch die Implementierung erheblich komplizierter und damit der Rechenaufwand größer. Ohne effiziente zugrundeliegende Datenstrukturen bleibt somit die Behandlung komplexerer Gebiete mit Waveletmethoden von eher theoretischem Interesse.

3. Dispersionsanalyse

Selbstverständlich kann man die Dispersionsanalysen auch für die Maxwell'schen Gleichungen diskutieren. Im Fall linearer Mehrschrittverfahren ist dies verhältnismäßig einfach für kubische Gitter möglich, so daß hier lediglich die sechs Eigenwertgleichungen, aus denen dann die $6L$ Eigenmoden bestimmt werden

können, angegeben werden. Es seien die drei Differenzenoperatoren

$$(7.16) \quad D_x = \sum_{l=N_{1x}}^{N_{2x}} q_l S_x^l,$$

$$(7.17) \quad D_y = \sum_{l=N_{1y}}^{N_{2y}} p_l S_y^l$$

und

$$(7.18) \quad D_z = \sum_{l=N_{1z}}^{N_{2z}} r_l S_z^l$$

mit den räumlichen Verschiebeoperatoren S_x , S_y und S_z gegeben, so erhält man mit den Abkürzungen

$$(7.19) \quad A(\Omega) := \sum_{k=0}^L \alpha_k e^{ik\Omega}$$

$$(7.20) \quad B(\Omega) := \sum_{k=0}^L \beta_k e^{ik\Omega}$$

und

$$(7.21) \quad C(\eta_x, \eta_y, \eta_z) := \left(\sum_{l=N_{1x}}^{N_{2x}} q_l e^{il\eta_x} \right)^2 + \left(\sum_{l=N_{1y}}^{N_{2y}} p_l e^{il\eta_y} \right)^2 + \left(\sum_{l=N_{1z}}^{N_{2z}} r_l e^{il\eta_z} \right)^2$$

die sechs Eigenwertgleichungen

$$(7.22) \quad A(\Omega) = 0$$

$$(7.23) \quad \frac{A(\Omega)}{B(\Omega)} = -\frac{\Delta t \kappa}{\varepsilon}$$

$$(7.24) \quad \frac{A(\Omega)}{B(\Omega)} = -\frac{\Delta t \kappa}{2\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{\Delta t \kappa}{2\varepsilon} \right)^2 + \frac{(\Delta t)^2}{\mu\varepsilon} C(\eta_x, \eta_y, \eta_z)}$$

$$(7.25) \quad \frac{A(\Omega)}{B(\Omega)} = -\frac{\Delta t \kappa}{2\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{\Delta t \kappa}{2\varepsilon} \right)^2 + \frac{(\Delta t)^2}{\mu\varepsilon} C(\eta_x, \eta_y, \eta_z)}$$

$$(7.26) \quad \frac{A(\Omega)}{B(\Omega)} = -\frac{\Delta t \kappa}{2\varepsilon} - \sqrt{\left(\frac{\Delta t \kappa}{2\varepsilon} \right)^2 + \frac{(\Delta t)^2}{\mu\varepsilon} C(\eta_x, \eta_y, \eta_z)}$$

$$(7.27) \quad \frac{A(\Omega)}{B(\Omega)} = -\frac{\Delta t \kappa}{2\varepsilon} - \sqrt{\left(\frac{\Delta t \kappa}{2\varepsilon} \right)^2 + \frac{(\Delta t)^2}{\mu\varepsilon} C(\eta_x, \eta_y, \eta_z)}$$

Als Eigenmoden erhält man bei vorgegebenem $\boldsymbol{\eta} = (\eta_x, \eta_y, \eta_z)^T$ in Ausbreitungsrichtung vier sich ausbreitende Moden (positive und negative Richtung mit je zwei Polarisationen), einen statischen und einen exponentiell abklingenden Mode.

Sehr interessant hieran ist, daß sich die Lösungen von denen der Telegraphengleichungen eigentlich nur darin unterscheiden, daß C hier von η_x , η_y und η_z abhängt, bei den Telegraphengleichungen nur von η . Dadurch übertragen sich aber die Eigenschaften in einer Raumdimension auf drei. Mit anderen Worten: Verfahren, die sich für die Telegraphengleichungen als besser als andere erweisen, sind es auch, wenn man sie auf die Maxwell'schen Gleichungen überträgt und dabei ein kubisches Gitter bzw. einen Tensorproduktansatz wählt.

Für eine Dispersionsanalyse der $P(EC)^M E$ - und Runge-Kutta-Verfahren ist man wieder zu einem numerischen Vorgehen gezwungen. Dabei kann man ganz analog zur Betrachtung verlust behafteter Leitungen bei Runge-Kutta-Verfahren vorgehen.

Interessant könnte es dabei sein, den Gedanken von Lynch & Paulsen (1991) aufzugreifen und neben den Eigenwerten auch die zugehörigen Eigenvektoren zu betrachten. Da ohnehin ein Matrizeigenwertproblem gelöst werden muß, hielte sich der programmiertechnische Aufwand zur Berechnung der Eigenvektoren in Grenzen; man muß lediglich den Aufruf der LAPACK-Routinen abändern und zusätzlichen Speicher allozieren und verwalten. Das Hauptproblem besteht in einer automatischen Sortierung der Eigenwerte und -vektoren, damit die Fehler zu den analytischen Werten berechnet werden können, ohne daß nicht korrespondierende Moden miteinander verglichen werden. Im Eindimensionalen kann man aus den Eigenvektoren die Leitungsimpedanz bestimmen, im Dreidimensionalen die Richtung des Leistungsflusses und den Feldwellenwiderstand.

4. Integrationsverfahren

Untersucht man Runge-Kutta-Verfahren für lineare, zeitinvariante Funktionen f , auf äquidistantem Gitter, wie in dieser Arbeit, so kommt man zu dem Ergebnis, daß man im Grunde u_{m+1} aus u_m mit Gl. (5.57), also mit der Taylorreihe, berechnet. Hierbei benötigt man verhältnismäßig viel Speicherplatz, da man die Zwischenwerte $u_{m+1}^{(i)}$ bzw. $f(u_{m+1}^{(i)})$ speichern muß. Außerdem werden in jedem Zwischenschritt mehrere Vektoren zueinander addiert. Das ganze könnte man doch direkt mit Gl. (5.57) berechnen. Dabei brauchte man lediglich drei Vektoren und müßte je Zwischenschritt nur zwei Vektoren zueinander addieren. Zudem könnte man mit genau sovielen Schritten auskommen, wie man für eine gegebene Konvergenzordnung brauchte. Abb. 7.1 zeigt den Algorithmus. Mit Hinzunahme zusätzlicher Schritte könnte man außerdem noch versuchen, die Verfahren weiter zu stabilisieren, um den möglichen Zeitschritt zu vergrößern.

Eine solche Vorgehensweise könnte allerdings zu numerischen Schwierigkeiten führen. Durch mehrfache Anwendung des Differenzenoperators D werden immer höhere Ableitungen approximiert. Dies könnte dazu führen, daß Rundungsfehler

RK-alternativ — Daten in V_1, V_2 und V_3 .
 „Anfangswert“ u_m in V_1 . Differentiation entspricht
 der Anwendung von D .

$V_2 \leftarrow DV_1$
$V_1 \leftarrow V_1 + w_1 V_2$
$i = 2, \dots, s$
V_3 und V_2 vertauschen
$V_2 \leftarrow DV_3$
$V_1 \leftarrow V_1 + w_i V_2$

ABBILDUNG 7.1. Alternativer Algorithmus zu Runge-Kutta-Verfahren.

recht stark ansteigen (durch Verstärkung der Stellenauslöschung bei Berechnung der Ableitung). Durch den Runge-Kutta-Algorithmus wird dies vermieden. Allerdings auf Kosten der Rechenzeit und des Speicherbedarfs.

Die Runge-Kutta-Algorithmen haben außerdem noch den Nachteil, daß bei Verfahren höherer Ordnung als vier stets die Stufenzahl größer ist als die Ordnung (Butcher 1987). Mit dem alternativen Algorithmus wäre dies nicht nötig. Allerdings sind diese erst noch zu untersuchen auf Stabilitäts- und Rundungsfehlerigenschaften.

5. Statische Gitterverfeinerung mit Wavelets

Die durchgeführten Studien adaptiver auf Wavelets basierender Algorithmen zeigen, daß der Rechenaufwand durch die Verwendung von Wavelets erheblich steigt. Zum einen durch die Verbreiterung der Differenzenoperatoren und zum anderen durch die wesentlich kompliziertere Implementierung der Algorithmen. Der Rechenzeitunterschied betrug bis zum Faktor 600. Versuche, die Rechenzeit durch Unterdrückung der Nulloperationen um diesen Faktor zu senken, schlugen fehl.

Diese Erfahrungen führen zu dem Schluß, daß adaptive Verfahren nicht nur sehr schwierig zu implementieren sind, sondern darüberhinaus eventuell sogar auch noch rechenzeitintensiver sind als äquivalente nichtadaptive Verfahren. Bliebe also

lediglich die Speicherersparnis durch das Kompressionsvermögen der Wavelets als Vorteil.

Ein anderer Ansatz wäre eine statische Gitterverfeinerung. D.h. in einem lokal von vornherein begrenzten Gebiet wird feiner diskretisiert als im Rest des Rechengebiets, dort also auf einer feineren Skala gerechnet. Dabei rechnet man sowohl im feiner als auch im gröber diskretisierten Gebiet mit dem zugrundeliegenden Differenzenoperator — natürlich mit $1/\Delta x$ skaliert— und verknüpft die Gitter im Übergangsbereich der unterschiedlich diskretisierten Gebiete mit Hilfe der schnellen Wavelettransformation. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, daß man keine adaptiven Datenstrukturen benötigt, keine kleinen Werte zu null setzen muß, und auch die Differenzenoperatoren nicht breiter werden. An Mehraufwand fällt lediglich die schnelle Wavelettransformation des Übergangsbereichs an. Die Dekomposition in Skalierungs- und Waveletkoeffizienten erlaubt zudem im Gegensatz zu üblichen Gitterverfeinerungsstrategien mittels Interpolation eine Abschätzung des Fehlers, der durch die Restriktion der Lösung im feiner diskretisierten Gebiet auf das gröber diskretisierte entsteht. Von Nachteil ist natürlich, daß man von vornherein festlegt, wo feiner diskretisiert wird und wo nicht, man also den Feldverlauf a priori qualitativ kennen muß.

Zusammenfassung

Diese Arbeit untersucht, auf welche Weise die numerische Lösung der Maxwell'schen Gleichungen im Zeitbereich mit Hilfe von Wavelets verbessert werden kann. Im Grunde versucht man dabei, die Kompressionseigenschaften von Wavelets auszunutzen: die Feldfunktionen werden nach Wavelets entwickelt, wobei betragsmäßig kleine Koeffizienten durch Nullen ersetzt werden. Dort wo die Funktionen glatt sind, benötigt man nur sehr wenige Koeffizienten, lediglich an Orten starker Feldänderungen werden alle Koeffizienten gebraucht. Dies ermöglicht nun eine sehr simple Konstruktion adaptiver Algorithmen im Zeitbereich: Berechne das Feld zum nächsten Zeitpunkt und vernachlässige betragsmäßig kleine Koeffizienten. Hierdurch wird eine automatische Anpassung der Diskretisierung an die Feldverhältnisse erreicht: viele Unbekannte nur in Bereichen starker Feldänderungen und wenige im Rest des Gebietes. Offensichtlich braucht man hierbei im Gegensatz zu den üblichen Gitterverfeinerungsverfahren in FDTD oder TLM a priori keine Information über die Lösung.

Zur Gewinnung von Differenzgleichungen zwischen den Entwicklungskoeffizienten wird räumlich eine Petrov-Galerkin-Diskretisierung mit zu den Entwicklungsfunktionen orthogonalen Testfunktionen gewählt. Die Orthogonalität gewährleistet, daß ein explizites System gewöhnlicher Differentialgleichungen entsteht. Zusätzliche Forderungen an Entwicklungs- und Testfunktionen sind Kompaktheit des Trägers, um Differenzenoperatoren mit nur endlich vielen Koeffizienten zu erhalten, sowie Symmetrie, um das Spiegelungsprinzip für ideal elektrisch bzw. magnetisch leitende Wände einsetzen zu können. Keine dieser drei Forderungen ist verzichtbar:

- Ohne Orthogonalität zwischen Entwicklungs- und Testfunktionen müßte man zu jedem Zeitschritt ein Gleichungssystem lösen.
- Ohne kompakten Träger müssen die Differenzenoperatoren auf endlich viele Koeffizienten beschränkt werden. Diese Begrenzung führt zu „spurious modes“ und zu falschen Ausbreitungsgeschwindigkeiten.
- Ohne Symmetrie der Entwicklungs- und Testfunktionen überträgt sich das Spiegelungsprinzip nicht auf die Koeffizienten.

Alle drei Forderungen werden von der Familie der biorthogonalen B-Spline-Wavelets erfüllt. Als Entwicklungsfunktionen werden B-Splines bzw. Linearkombinationen von ihnen verwendet, und als Testfunktionen zu diesen orthogonale Funktionen. In bisherigen Arbeiten auf dem Gebiet elektromagnetischer Zeitbereichssimulation wurde —außer in den Arbeiten, die auf Haarwavelets basieren— stets eine dieser drei Forderungen außer acht gelassen. Der hier gewählte Ansatz ermöglicht jedoch im Gegensatz zu Haarwavelets die Konstruktion von Verfahren höherer Konvergenzordnung.

Der bisher in der Literatur verfolgte Einsatz von Zentraldifferenzen zur zeitlichen Integration des Differentialgleichungssystems erweist sich außer für räumliche Zentraldifferenzen sowohl in der Dispersionsanalyse als auch im numerischen Experiment als ineffektiv. Es werden die drei Standardverfahrensklassen zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen, also lineare Mehrschritt-, Prädiktor-Korrektor- und Runge-Kutta-Verfahren, untersucht. Im Rahmen dieser Untersuchungen werden neue, energieerhaltende lineare Mehrschrittverfahren konstruiert.

Sehr wichtig ist die Äquivalenz der Darstellung einer Funktion nur mit den Skalierungsfunktionen und der Darstellung mit sowohl Skalierungsfunktionen als auch Wavelets. Die beiden Darstellungen sind durch die schnelle Wavelettransformation ineinander überführbar. Die Äquivalenz überträgt sich auch auf lineare Operatoren in diesen Basen. D.h. Algorithmen für lineare Probleme, die ausschließlich die Skalierungsfunktionen verwenden, und solche, die sowohl Skalierungsfunktionen als auch Wavelets verwenden, sind äquivalent, liefern also dieselben Feldstärkewerte. Daraus folgt, daß die Analyse der Algorithmen nur mit Skalierungsfunktionen ausreicht, die Ergebnisse übertragen sich auf den allgemeineren Fall mit Wavelets. Hiervon wird bei der Bestimmung der Stabilitätsgrenzen und bei der Dispersionsanalyse der entwickelten Verfahren Gebrauch gemacht.

Aus dieser Äquivalenz folgt auch das Kriterium, wann sich der Einsatz von Wavelets lohnt, nämlich dann, wenn der Algorithmus mit sowohl Skalierungsfunktionen als auch Wavelets effektiver ist —also weniger Rechenzeit und/oder Speicherplatz benötigt— als der äquivalente Algorithmus, der ausschließlich Skalierungsfunktionen verwendet. Bisher finden sich in der Literatur allenfalls Vergleiche zu FDTD, so daß bei Verfahren höherer Ordnung als FDTD die kleineren Fehler —bedingt durch die höhere Ordnung und nicht durch Wavelets— das Ergebnis verfälschen.

Als Studienobjekt werden die Leitungsgleichungen mit periodischen Randbedingungen und mit ideal elektrisch oder magnetisch leitenden Wänden gewählt.

Die durchgeführten Dispersionsanalysen sind keineswegs nur für auf biorthogonalen B-Spline-Wavelets basierenden Algorithmen gültig, sondern auf Algorithmen mit beliebigen Differenzenoperatoren übertragbar. Dabei zeigt sich, daß

- von den Adams-Bashforth-Verfahren lediglich die Verfahren mit 3 und 4 Schritten geeignete Zeitschritte zulassen, aber dissipativ sind,

- von den Adams-Moulton-Verfahren lediglich die Verfahren mit 4, 5 und 6 Schritten, die aber auch dissipativ sind,
- von den Nyström-Verfahren nur das Zweischrittverfahren stabil ist, dafür ist es aber energieerhaltend,
- von den Milne-Simpson-Verfahren nur das Zweischrittverfahren interessant ist,
- von den expliziten energieerhaltenden Verfahren die Verfahren der Längen 2, 4 und 6 sinnvoll Zeitschritte erlauben,
- die impliziten energieerhaltenden Verfahren der Längen 2 bis 9 ebenfalls sinnvolle Zeitschritte erlauben,
- Prädiktor-Korrektor-Verfahren in der Regel zu viele Iterationen benötigen, um sinnvolle Zeitschritte zu ermöglichen; Ausnahmen sind die auf den Adams-Verfahren beruhenden $P(EC)^1E$ -Verfahren mit 3 Schritten, das $P(EC)^2E$ -Verfahren mit 5 Schritten und das $P(EC)^4E$ -Verfahren mit 4 Schritten,
- Runge-Kutta-Verfahren sehr attraktive Zeitschritte erlauben, aber dissipativ sind.

Numerische Experimente stützen die Aussage, daß bei Verwendung von Differenzenoperatoren höherer Ordnung Zentraldifferenzen zur zeitlichen Integration nicht ausreichen. Sie begrenzen die Konvergenzordnung auf zwei.

Durch Zunullsetzen kleiner Koeffizienten lassen sich tatsächlich adaptive Algorithmen konstruieren. Durch vergrößern der Schwelle erreicht man eine Verkleinerung der Besetzung, ohne dabei den Fehler zu vergrößern. Erst ab einer gewissen Schwelle wird dieser rapide größer. Dabei bewegen sich die signifikanten Koeffizienten mit den Wellen auf der Leitung.

Darüberhinaus bestätigt sich, daß die Algorithmen, die sowohl Skalierungsfunktionen als auch Wavelets verwenden, wesentlich mehr Rechenzeit benötigen als die äquivalenten Algorithmen nur mit Skalierungsfunktionen, und zwar umso mehr je mehr Waveletlevel verwendet werden. Daraus folgt, daß der Unterdrückung von Nulloperationen in der adaptiven Variante eine zentrale Schlüsselrolle in der Frage, ob sich der Einsatz von Wavelets lohnt, zukommt. Es wurden zwei Ansätze untersucht:

- Die Datenstruktur wird aus verketteten Listen aufgebaut.
- Es werden lediglich Nulloperationen unterdrückt.

Während der erste Ansatz versucht, auch Speicherplatz durch die Verwendung von Wavelets einzusparen, beschränkt sich der zweite auf eine Verkürzung der Rechenzeit. Allerdings ist es mit keinem der beiden Ansätze gelungen, zu einer nichtadaptiven Implementierung des äquivalenten Algorithmus konkurrenzfähig zu werden.

Bezüglich der zeitlichen Integratoren höherer Ordnung zeigt sich, daß

- zeitliche Integratoren höherer Ordnung als 6 innerhalb doppeltgenauer Rechnung keine weitere Verringerung des Fehlers erlauben,

- die Glattheit der Anfangsbedingungen die Konvergenzordnung beschränken kann,
- Verfahren höherer Ordnung deutlich kleinere Fehler bei gleicher Rechenzeit liefern als FDTD,
- die drei effektivsten Verfahren sind:
 - Differenzenoperator 4. Ordnung nach Collatz (1955) in Verbindung mit dem Adams-Bashforth-Verfahren mit 3 Schritten
 - (2,4)-B-Splines mit energieerhaltendem Vierschrittverfahren
 - (2,8)-B-Splines mit Adams-Bashforth-Dreischrittverfahren
- Runge-Kutta-Verfahren mehr Rechenzeit benötigen als Mehrschrittverfahren.

Insgesamt lautet das Resümee: Wavelets bieten die Möglichkeit, sehr einfach adaptive Algorithmen zu konstruieren. Allerdings läßt sich selbst unter einfachsten Bedingungen kein Performancevorteil gegenüber einer einfacheren Implementierung ohne Wavelets erreichen. Im Gegenteil: die Algorithmen mit Wavelets sind deutlich langsamer. Bisher berichtete Vorteile von Waveletverfahren zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen im Zeitbereich haben ihren Grund in der Verwendung von Differenzenoperatoren höherer Ordnung, nicht von Wavelets. Bei Verwendung von Differenzenoperatoren höherer Ordnung ist eine zeitliche Integration mit Zentralknoten nicht ausreichend, statt dessen sollte ein Verfahren der Ordnung 3 bis 6 eingesetzt werden.

Literaturverzeichnis

- Anderson, E., Bai, Z., Bischof, C., Demmel, J., Dongarra, J., DuCroz, J., Greenbaum, A., Hammarling, S., McKenney, A., Ostouchov, S. & Sorensen, D. (1992), *LAPACK Users' Guide*, Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Andersson, U. & Ledfelt, G. (1999), Large scale FD-TD — a billion cells, in '15th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics, Monterey, 15.–20.3.1999', pp. 572–577.
- Auscher, P. (1992), Wavelets with boundary conditions on the interval, in C. K. Chui, ed., 'Wavelets — A Tutorial in Theory and Applications', Academic Press, pp. 217–236.
- Battle, G. (1987), 'A block spin construction of ondelettes, Part I: Lemarié functions', *Comm. Math. Phys.* **110**, 601–615.
- Bertoluzza, S., Naldi, G. & Ravel, J. (1994), Wavelet methods for the numerical solution of boundary value problems on the interval, in C. Chui, L. Montefusco & L. Puccio, eds, 'Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications', Academic Press, Inc., San Diego, pp. 425–448.
- Brenner, S. C. & Scott, L. R. (1994), *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag, New York.
- Butcher, J. (1987), *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations: Runge-Kutta and General Linear Methods*, John Wiley & Sons.
- Canuto, C., Tabacco, A. & Urban, K. (1997a), The wavelet element method, part I: Construction and analysis, Technical Report Preprint No. 1038, Istituto di Analisi Numerica del CNR, Pavia.
- Canuto, C., Tabacco, A. & Urban, K. (1997b), The wavelet element method, part II: Realization and additional features in 2d and 3d, Technical Report Preprint No. 97-28, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino.
- Chen, Q. (1994), Numerische Analyse der Vlasov-Gleichung mittels Wavelets, Dissertation, Universität Kaiserslautern.
- Cheong, Y. (1999), Wavelet-Galerkin Scheme of Inhomogeneous Electromagnetic Problems Using the Time-Dependent Maxwell's Equations, Master thesis, Kwang Woon University, Seoul, South Korea.
- Cohen, A., Daubechies, I. & Feauveau, J.-C. (1992), 'Biorthogonal bases of compactly supported wavelets', *Comm. Pure Appl. Math.* **45**, 485–560.
- Collatz, L. (1955), *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, 2. edn, Springer-Verlag, Berlin.
- Dahmen, W. (1997), Wavelet and multiscale methods for operator equations, in A. Iserles, ed., 'Acta Numerica', Vol. 6, Cambridge University Press, pp. 55–228.
- Dahmen, W., Kunoth, A. & Urban, K. (1996), Biorthogonal spline-wavelets on the interval — stability and moment conditions, Technical Report IGPM-Report Nr. 129, Institut für Geometrie und Praktische Mathematik, RWTH-Aachen.
- Dahmen, W. & Micchelli, C. (1993), 'Using the refinement equation for computing integrals of wavelets', *SIAM Journal on Numerical Analysis* **30**, 507–537.
- de Boor, C. (1978), *A Practical Guide to Splines*, Springer-Verlag.
- Erlebacher, G., Hussaini, M. Y. & Jameson, L. M., eds (1996), *Wavelets: Theory and Application*, Oxford University Press, New York.

- Fröhlich, J. & Schneider, K. (1993), An adaptive wavelet galerkin algorithm for one and two dimensional flame computations, Technical Report 92, Berichte der Arbeitsgruppe Technomathematik, Universität Kaiserslautern.
- Fujii, M. (1999), A Time-Domain Haar-Wavelet-Based Multiresolution Technique for Electromagnetic Field Analysis, Dissertation, University of Victoria, Victoria, Canada.
- Fujii, M. & Hofer, W. (1998), Formulation of a Haar-wavelet-based multi-resolution analysis similar to the 3-D FDTD method, in 'IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest, June 7–12, Baltimore', pp. 1393–1396.
- Glowinski, R., Periaux, J., Ravachol, M., Pan, T. W., Wells, R. O. & Zhou, X. (1993), Wavelet methods in computational fluid dynamics, in M. Y. Hussaini, A. Kumar & M. D. Salas, eds, 'Algorithmic Trends in Computational Fluid Dynamics', Springer-Verlag, New York, pp. 259–276.
- Göttelmann, J. (1998), Construction of Splines and Wavelets on the Sphere and Numerical Solutions to the Shallow Water Equations of Global Atmospheric Dynamics, Dissertation, Johannes-Gutenberg-Universität, Mainz.
- Goverdhanam, K. & Katehi, L. P. B. (1997), Applications of multiresolution based FDTD multigrid, in 'IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest, June 8–13, Denver', pp. 333–336.
- Goverdhanam, K., Tentzeris, E. & Katehi, L. P. B. (1998), Treatment of boundaries in multiresolution based FDTD multigrid, in '14th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics, Monterey, 16.–20.3.1998', pp. 127–134.
- Goverdhanam, K., Tentzeris, E., Krumpholz, M. & Katehi, L. P. B. (1996), An FDTD multigrid based on multiresolution analysis, in 'IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium 1996, July 21–26, Baltimore', pp. 352–355.
- Grigorieff, R. (1972), *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen. Band 1: Einzschrittvorfahren*, B.G. Teubner, Stuttgart.
- Großmann, C. & Roos, H.-G. (1994), *Numerik partieller Differentialgleichungen*, 2. edn, Teubner, Stuttgart.
- Harrington, R. F. (1968), *Field Computation by Moment Methods*, Macmillan, New York.
- Haussmann, G. & Piket-May, M. (1997), FD-TD M24 dispersion and stability in three dimensions, in '13th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics, Monterey, 17.–21.3.1997', pp. 82–89.
- Heaviside, O. (1887), *Electrician* p. 124ff.
- Heaviside, O. (1970a), *Electrical Papers*, Vol. 2, Chelsea Publishing Company, New York, chapter Art. 35: Electromagnetic Induction and its Propagation. (Second Half.). Sec. 41: Nomenclature Scheme. Simple Properties of the Ideally Perfect Telegraph Circuit., p. 124ff.
- Heaviside, O. (1970b), *Electrical Papers*, Vol. 2, Chelsea Publishing Company, New York, chapter Art. 40: On the Self-Induction of Wires. Part 8: The Transmission of Electromagnetic Waves along Wires without Distortion., p. 307ff.
- Heaviside, O. (1971), *Electromagnetic Theory*, Vol. 1, Chelsea Publishing Company, New York, chapter Oliver Heaviside (by E.T. Whittaker), p. XXII.
- Hofer, W. (1985), 'The transmission-line-matrix method — theory and applications', *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **35**(4), 882–893.
- Jameson, L. (1993), On the differentiation matrix for daubechies-based wavelets on an interval, Technical Report ICASE 93-94, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, NASA Langley Research Center, Hampton.
- Jameson, L. (1996), Introduction to wavelets and their application to partial differential equations, in G. Erlebacher, M. Hussaini & L. Jameson, eds, 'Wavelets: Theory and Application', Oxford University Press, New York, pp. 1–37.
- Jenkins, M. & Traub, J. (1972), 'Algorithm 419: Zeros of a complex polynomial', *Communications of the ACM* **15**(2), 97–99.
- Johns, P. & Beurle, R. (1971), 'Numerical solution of 2-dimensional scattering problems using a transmission-line matrix', *Proceedings of the IEEE* **118**(9), 1203–1208.
- Kaiser, G. (1994), *A Friendly Guide to Wavelets*, Birkhäuser, Boston.
- Korn, G. & Korn, T. (1968), *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, 2. edn, McGraw-Hill, New York etc.
- Krumpholz, M., Huber, C. & Russer, P. (1995), 'A field theoretical comparison of FDTD and TLM', *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **43**(8), 1935–1950.

- Krumpholz, M. & Katehi, L. (1995), 'New prospects for time domain analysis', *IEEE Microwave and Guided Wave Letters* **5**(11), 382–384.
- Krumpholz, M. & Katehi, L. (1996), 'MRTD: New time domain schemes based on multiresolution analysis', *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **44**(4), 555–571.
- Krumpholz, M., Winful, H. & Katehi, L. (1996), MRTD modeling of nonlinear pulse propagation, in 'IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest, June 17–21, San Francisco', pp. 597–600.
- Kunoth, A. (1995), Computing refinable integrals — documentation of the program — version 1.1, Technical Report ISC-95-02-MATH, Institute for Scientific Computation, Texas A&M University.
- Latto, A. & Tenenbaum, E. (1990), Compactly supported wavelets and the numerical solution of burgers' equation, in 'Comptes Rendus, French Academy of Science, t.311, Serie I', pp. 903–909.
- Lemarié, P. (1988), 'Ondelettes à localisation exponentielle', *J. Math. Pures et Appl.* **67**, 227–236.
- Lemire, D. (1998), Schémas d'interpolation et ondelettes, Dissertation, Université de Montréal. Département de Mathématiques et de Génie Industriel. École Polytechnique de Montréal.
- Liandrat, J., Perrier, V. & Tchamitchian, P. (1992), Numerical resolution of the regularized burgers equation using the wavelet transform, in Y. Meyer, ed., 'Wavelets and Applications. Proceedings of the International Conference Marseille, France, May 1989', Springer-Verlag, Berlin, pp. 420–433.
- Liandrat, J. & Tchamitchian, P. (1990), Resolution of the 1d regularized Burgers equation using a spatial wavelet approximation, Technical Report ICASE Report No. 90-83, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, NASA Langley Research Center, Hampton.
- Louis, A., Maaß, P. & Rieder, A. (1994), *Wavelets: Theorie und Anwendungen*, Teubner, Stuttgart.
- Lynch, D. & Paulsen, K. (1991), 'Origin of vector parasites in numerical maxwell solutions', *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **39**(3), 383–394.
- Meis, T. & Marcowitz, U. (1978), *Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Meyer, Y. (1992), *Wavelets and Operators*, Cambridge University Press.
- Oberschmidt, G. & Jacob, A. (1998), Accelerated simulation of planar circuits by means of wavelets, in '28th European Microwave Conference, Amsterdam, Holland, 6.–8.10.1998', Vol. II, pp. 305–310.
- Pregla, R. & Pascher, W. (1989), The method of lines, in T. Itoh, ed., 'Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures', John Wiley & Sons, New York, chapter 6, pp. 381–446.
- Reinhardt, H.-J. (1985), *Analysis of Approximation Methods for Differential and Integral Equations*, Springer-Verlag, New York.
- Restrepo, J. & Leaf, G. (1994), Wavelet-galerkin discretization of hyperbolic equations, Technical Report MCS-P448-0694, Mathematics and Computer Science Division, Argonne National Laboratory, Illinois. Preprint.
- Robertson, R., Tentzeris, E., Krumpholz, M. & Katehi, L. (1996), MRTD analysis of dielectric cavity structures, in 'IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest, June 17–21, San Francisco', pp. 1861–1864.
- Robertson, R., Tentzeris, E., Krumpholz, M. & Katehi, L. (1998), 'Modelling of dielectric cavity structures using multiresolution time-domain analysis', *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields* **11**(1), 55–68.
- Samarskij, A. (1984), *Theorie der Differenzenverfahren*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig.
- Strehmel, K. & Weiner, R. (1995), *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Teubner, Stuttgart.
- Sweldens, W. (1994), Construction and Application of Wavelets in Numerical Analysis, Dissertation, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.
- Sweldens, W. (1995), The lifting scheme: A construction of second generation wavelets, Technical Report IMI 1995:06, Industrial Mathematics Initiative, Department of Mathematics, University of South Carolina.

- Taflove, A. (1995), *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, Artech House, Norwood.
- Tentzeris, E., Cangellaris, A. & Katehi, L. (1997), Space/time adaptive meshing and multiresolution time domain method (MRTD), in 'Proc. ACES', pp. 1509–1514.
- Tentzeris, E. & Katehi, L. (1998), Space adaptive analysis of evanescent waveguide filters, in 'IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest, June 7–12, Baltimore', pp. 481–484.
- Tentzeris, E., Krumpholz, M. & Katehi, L. (1996), Application of MRTD to printed transmission lines, in 'IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest, June 17–21, San Francisco', pp. 573–576.
- Tentzeris, E., Robertson, R. & Katehi, L. (1997), Space- and time-adaptive gridding using MRTD technique, in 'IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest, June 8–13, Denver', pp. 337–340.
- Tentzeris, E., Robertson, R. & Katehi, L. (1998), PML implementation for the Battle-Lemarie multiresolution time-domain schemes, in '14th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics, Monterey, 16.–20.3.1998', pp. 647–654.
- Thoma, P. & Weiland, T. (1996), 'A consistent subgridding scheme for the finite difference time domain method', *Int. J. Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields* 9(5), 359–374.
- Thomas, J. (1995), *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Springer-Verlag, New York.
- Urban, K. (1995), Multiskalenverfahren für das Stokes-Problem und angepaßte Wavelet-Basen, Dissertation, RWTH Aachen.
- Ware, A. (1997), Discrete projections on wavelet subspaces, Numerical Analysis Report NA-97/04, Department of Mathematical Sciences, University of Durham.
- Weiss, J. (1996), 'The numerical resolution of turbulence and boundary value problems using the wavelet-galerkin method', Applied Math Group, preprint.
- Werthen, M. (1998), *Analyse von dreidimensionalen Komponenten der Mikro- und Millimeterwellentechnik mit Hilfe numerischer Zeitbereichsverfahren*, Berichte aus der Hochfrequenztechnik, Shaker Verlag, Aachen. Dissertation: Gerhard-Mercator-Universität Gesamthochschule Duisburg, 1997.
- Werthen, M. & Wolff, I. (1996), 'A novel wavelet based time domain simulation approach', *IEEE Microwave and Guided Wave Letters* 6(12), 438–440.
- Werthen, M. & Wolff, I. (1998), A wavelet based time domain moment method for the analysis of three-dimensional electromagnetic fields, in 'IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest, June 7–12, Baltimore', pp. 1251–1254.
- Yee, K. (1966), 'Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media', *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 14(3), 302–307.
- Young, J., Gaitonde, D. & Shang, J. (1997), 'Towards the construction of a fourth-order difference scheme for transient EM wave simulation: Staggered grid approach', *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 45(11), 1573–1580.

ANHANG A

Runge-Kutta-Verfahren

Es folgt eine Auflistung der Butcher-Schemata der sich im Rahmen der Dispersionsanalyse und anhand der verlustbehafteten Leitungsgleichungen als nützlich erwiesenen expliziten Runge-Kutta-Verfahren. Die Schemata wurden Strehmel & Weiner (1995), Grigorieff (1972) und Butcher (1987) entnommen.

0		
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
$\frac{27}{40}$	$-\frac{189}{800}$	$\frac{729}{800}$
	$\frac{214}{891}$	$\frac{1}{33}$
		$\frac{650}{891}$

TABELLE A.1. Verfahren 2. Ordnung des 2(3)-Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahrens.

0		
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{4}$	0
		$\frac{3}{4}$

TABELLE A.2. Verfahren 3. Ordnung nach Heun.

0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
1	-1	2	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

TABELLE A.3. Verfahren 3. Ordnung nach Kutta.

0			
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$		
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

TABELLE A.4. Verfahren 3. Ordnung nach Nyström.

0				
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$			
$\frac{27}{40}$	$-\frac{189}{800}$	$\frac{729}{800}$		
1	$\frac{214}{891}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{650}{891}$	
	$\frac{533}{2106}$	0	$\frac{800}{1053}$	$-\frac{1}{78}$

TABELLE A.5. Verfahren 3. Ordnung des 2(3)-Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahrens.

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

TABELLE A.6. Klassisches Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung.

0				
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$			
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1		
1	1	-1	1	
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

TABELLE A.7. Verfahren 4. Ordnung. 3/8-Regel.

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$		
1	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{6}$	$\frac{1}{6}$

TABELLE A.8. Verfahren 4. Ordnung nach Gills.

0				
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$			
$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{3}{4}$		
1	$\frac{19}{44}$	$-\frac{15}{44}$	$\frac{40}{44}$	
	$\frac{55}{360}$	$\frac{125}{360}$	$\frac{125}{360}$	$\frac{55}{360}$

TABELLE A.9. Verfahren 4. Ordnung nach Kuntzmann.

0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
1	0	-1	2
	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$

TABELLE A.10. Verfahren 4. Ordnung nach England.

0					
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$				
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$			
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$		
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$	
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$
	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$ $\frac{11}{84}$

TABELLE A.11. Verfahren 5. Ordnung des Dopri5-Verfahrens.

0					
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$				
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1		
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	0	0	$\frac{9}{16}$	
1	$-\frac{5}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{12}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$\frac{8}{7}$
	$\frac{7}{90}$	0	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$ $\frac{7}{90}$

TABELLE A.12. Verfahren 5. Ordnung nach Butcher.

0						
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$					
$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{75}$	$\frac{16}{75}$				
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{5}{2}$			
$\frac{4}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$\frac{144}{25}$	-4	$\frac{16}{25}$		
1	$\frac{361}{320}$	$-\frac{18}{5}$	$\frac{407}{128}$	$-\frac{11}{80}$	$\frac{55}{128}$	
	$\frac{31}{384}$	0	$\frac{1125}{2816}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{125}{768}$	$\frac{5}{66}$

TABELLE A.13. Verfahren 5. Ordnung nach Fehlberg.

0								
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$							
$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{75}$	$\frac{16}{75}$						
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{5}{2}$					
$\frac{4}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$\frac{144}{25}$	-4	$\frac{16}{25}$				
1	$\frac{361}{320}$	$-\frac{18}{5}$	$\frac{407}{128}$	$-\frac{11}{80}$	$\frac{55}{128}$			
0	$-\frac{11}{640}$	0	$\frac{11}{256}$	$-\frac{11}{160}$	$\frac{11}{256}$	0		
1	$\frac{93}{640}$	$-\frac{18}{5}$	$\frac{803}{256}$	$-\frac{11}{160}$	$\frac{99}{256}$	0	1	
	$\frac{7}{1408}$	0	$\frac{1125}{2816}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{125}{768}$	0	$\frac{5}{66}$	$\frac{5}{66}$

TABELLE A.14. Verfahren 6. Ordnung nach Fehlberg.

0											
$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$										
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$									
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{8}$								
$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	0	$-\frac{25}{16}$	$\frac{25}{16}$							
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$						
$\frac{5}{6}$	$-\frac{25}{108}$	0	0	$\frac{125}{108}$	$-\frac{65}{27}$	$\frac{125}{54}$					
$\frac{1}{6}$	$\frac{31}{300}$	0	0	0	$\frac{61}{225}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{13}{900}$				
$\frac{2}{3}$	2	0	0	$-\frac{53}{6}$	$\frac{704}{45}$	$-\frac{107}{9}$	$\frac{67}{90}$	3			
$\frac{1}{3}$	$-\frac{91}{108}$	0	0	$\frac{23}{108}$	$-\frac{976}{135}$	$\frac{311}{54}$	$-\frac{19}{60}$	$\frac{17}{6}$	$-\frac{1}{12}$		
1	$\frac{2383}{4100}$	0	0	$-\frac{341}{164}$	$\frac{4496}{1025}$	$-\frac{301}{82}$	$\frac{2133}{4100}$	$\frac{45}{82}$	$\frac{45}{164}$	$\frac{18}{41}$	
	$\frac{41}{840}$	0	0	0	0	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{41}{840}$

TABELLE A.15. Verfahren 7. Ordnung nach Fehlberg.

0										
$\frac{7,1}{42}$	$\frac{7,1}{42}$									
$\frac{7,1}{21}$	0	$\frac{7,1}{21}$								
$\frac{7,1}{14}$	$\frac{7,1}{56}$	0	$\frac{21,3}{56}$							
$\frac{1}{2}$	$\frac{8,-1}{16}$	0	$\frac{-21,6}{16}$	$\frac{21,-5}{16}$						
$\frac{7,-1}{14}$	$\frac{-1687,374}{196}$	0	$\frac{969,-210}{28}$	$\frac{-381,83}{14}$	$\frac{84,-20}{49}$					
$\frac{1}{2}$	$\frac{583,-131}{128}$	0	$\frac{-2373,501}{128}$	$\frac{4221,-914}{288}$	$\frac{-9,4}{18}$	$\frac{189,35}{576}$				
$\frac{7,1}{14}$	$\frac{-623,169}{392}$	0	$\frac{435,-81}{56}$	$\frac{-1437,307}{252}$	$\frac{-2028,-1468}{7497}$	$\frac{-21,-4}{126}$	$\frac{384,80}{833}$			
1	$\frac{579,-131}{24}$	0	$\frac{-791,167}{8}$	$\frac{8099,-1765}{108}$	$\frac{-1976,784}{459}$	$\frac{70,7}{54}$	$\frac{160,-80}{153}$	$\frac{49,-7}{18}$		
	$\frac{1}{20}$	0	0	0	0	$\frac{49}{180}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{49}{180}$	$\frac{1}{20}$	

TABELLE A.16. Verfahren 7. Ordnung nach Cooper und Verner.

Notation: $\frac{a,b}{c}$ steht für $\frac{a+b\sqrt{21}}{c}$.

Differenzenoperatoren

Im Rahmen dieser Arbeit wurden zur Approximation des Differentialoperators d/dx Zentralfdifferenzen, ein finite Differenzenoperator vierter Ordnung (Collatz 1955) und die Differenzenoperatoren aus den geschilderten Petrov-Galerkin-Diskretisierungen mit den Skalierungsfunktionen der (2,4)-, (2,6)-, ..., (2,12)-B-Spline-Wavelets untersucht. Die Differenzenoperatoren sind allesamt schiefsymmetrisch um null, es werden also nur die Koeffizienten mit einem Index größer als null angegeben. Die Koeffizienten beziehen sich auf $\Delta x = 1$ bzw. die Skala $J = 0$. Im allgemeinen sind sie also noch durch Δx zu dividieren. Die Koeffizienten für die B-Spline-Wavelet-Diskretisierungen entsprechen $K_1(n)$ und wurden mit dem Kunothschen Programm berechnet. Es handelt sich also lediglich um numerisch gewonnene Werte.

Zu den normierten Koeffizienten wird auch noch der jeweilige Stabilitätsfaktor Γ angegeben, mit dem die Stabilitätsgrenze γ des Zeitintegrationsverfahrens, die ja unter Verwendung von Zentralfdifferenzen berechnet wurde, zu multiplizieren ist, um zu einem stabilen Algorithmus zu kommen.

Zentralfdifferenzen: Insgesamt 3 Koeffizienten:

$$(B.1) \quad p_1 = \frac{1}{2}$$

$$(B.2) \quad \Gamma = 1.0$$

Finite Differenzen 4. Ordnung: Aus Collatz (1955). Insgesamt 5 Koeffizienten:

$$(B.3) \quad p_1 = \frac{2}{3}$$

$$p_2 = -\frac{1}{12}$$

$$(B.4) \quad \Gamma = 0.7287$$

(2,4)-B-Spline-Wavelets: Insgesamt 9 Koeffizienten:

$$(B.5) \quad \begin{aligned} p_1 &= 0.7452054794521 \\ p_2 &= -0.1452054794521 \\ p_3 &= 0.01461187214612 \\ p_4 &= 0.0003424657534247 \end{aligned}$$

$$(B.6) \quad \Gamma = 0.6356$$

(2,6)-B-Spline-Wavelets: Insgesamt 13 Koeffizienten:

$$(B.7) \quad \begin{aligned} p_1 &= 0.7930095049745 \\ p_2 &= -0.1919989707989 \\ p_3 &= 0.03358020705104 \\ p_4 &= -0.002224049670723 \\ p_5 &= -0.0001722061900053 \\ p_6 &= 8.408505371549 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

$$(B.8) \quad \Gamma = 0.5847$$

(2,8)-B-Spline-Wavelets: Insgesamt 17 Koeffizienten:

$$(B.9) \quad \begin{aligned} p_1 &= 0.8259060118502 \\ p_2 &= -0.228820187067 \\ p_3 &= 0.05335257193267 \\ p_4 &= -0.007461396365776 \\ p_5 &= 0.0002392358200239 \\ p_6 &= 5.404730164476 \cdot 10^{-5} \\ p_7 &= 2.52411711354 \cdot 10^{-7} \\ p_8 &= 2.696047871222 \cdot 10^{-10} \end{aligned}$$

$$(B.10) \quad \Gamma = 0.5513$$

(2,10)-B-Spline-Wavelets: Insgesamt 19 Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= 0.850136661556 \\
 p_2 &= -0.2585529441415 \\
 p_3 &= 0.07244058999766 \\
 p_4 &= -0.01454551104199 \\
 p_5 &= 0.001588561543476 \\
 p_6 &= -4.296891570974 \cdot 10^{-6} \\
 p_7 &= -1.202657519573 \cdot 10^{-5} \\
 p_8 &= -4.206912045112 \cdot 10^{-7} \\
 p_9 &= 2.899666806706 \cdot 10^{-9}
 \end{aligned}$$

(B.11)

$$(B.12) \quad \Gamma = 0.5273$$

(2,12)-B-Spline-Wavelets: Insgesamt 23 Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= 0.8687439145242 \\
 p_2 &= -0.2829650945262 \\
 p_3 &= 0.09018906621785 \\
 p_4 &= -0.02268741101467 \\
 p_5 &= 0.003881454657632 \\
 p_6 &= -0.0003373440477643 \\
 p_7 &= -4.23639468007 \cdot 10^{-6} \\
 p_8 &= 1.650167921079 \cdot 10^{-6} \\
 p_9 &= 2.187113033213 \cdot 10^{-7} \\
 p_{10} &= -4.183054776477 \cdot 10^{-10} \\
 p_{11} &= 1.203528320681 \cdot 10^{-11}
 \end{aligned}$$

(B.13)

$$(B.14) \quad \Gamma = 0.5089$$

(2,14)-B-Spline-Wavelets: Insgesamt 23 Koeffizienten:

$$\begin{aligned} p_1 &= 0.8834460460908 \\ p_2 &= -0.3032593514766 \\ p_3 &= 0.1063640682894 \\ p_4 &= -0.03129014783948 \\ p_5 &= 0.006958379116451 \\ p_6 &= -0.001031530213375 \\ p_7 &= 7.667706908381 \cdot 10^{-5} \\ p_8 &= 2.451992111067 \cdot 10^{-7} \\ p_9 &= 3.993810456513 \cdot 10^{-8} \\ p_{10} &= -7.207948238494 \cdot 10^{-8} \\ p_{11} &= -9.69718491783 \cdot 10^{-10} \end{aligned}$$

$$(B.16) \quad \Gamma = 0.4943$$