

**Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik  
Technische Universität München**

**Ein robustes Fahrdynamik-Regelungskonzept für  
die Kippvermeidung von Kraftfahrzeugen**

**Dirk Odenthal**

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktor-Ingenieurs**

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. A. Koch

Prüfer der Dissertation:

1. apl. Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. J. Ackermann
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. G. Schmidt

Die Dissertation wurde am 14. September 2001 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik am 28. Januar 2002 angenommen.

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Doktorand und wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Robotik und Mechatronik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt e. V. (DLR) in Oberpfaffenhofen.

Dem ehemaligen Institutsleiter, Herrn Prof. Jürgen Ackermann, möchte ich für die engagierte Betreuung und Förderung dieser Arbeit danken, sowie für die Bereitstellung eines außerordentlich guten und internationalen Forschungsumfeldes. Die enge Zusammenarbeit mit ihm hat wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Herrn Prof. Günther Schmidt, Leiter des Lehrstuhls für Steuerungs- und Regelungstechnik (LSR) der Technischen Universität München, danke ich herzlich für sein Interesse an der Arbeit und die freundliche Übernahme des Koreferates.

Für eine sehr gute und intensive Zusammenarbeit bedanke ich mich bei meinen Kollegen vom Institut. Besonders hervorheben möchte ich hierbei die sehr enge Kooperation mit meinem Freund und Kollegen Dr. Tilman Bünte. Auch möchte ich mich herzlich bei Paul Blue vom Control Science and Dynamical Systems Center, University of Minnesota – Minneapolis bedanken, während dessen zweijährigen Forschungsaufenthalts am Institut für Robotik und Mechatronik viele gemeinsame Ideen für die methodische Erweiterung des Parameterraumverfahrens entstanden sind. Thank you Paul! Den Kollegen vom DLR–Innovationsmanagement danke ich für die Unterstützung und finanzielle Förderung des Technologietransfer-Projekts zur „Kippvermeidung von Fahrzeugen“. Für die konstruktive Durchsicht meiner Arbeit gehört mein besonderer Dank Herrn Dr. Wolfgang Hirschberg, Universitätslektor und Beratender Ingenieur der Firma MAN, sowie einigen Freunden und Kollegen sowohl der ehemaligen Abteilung Robuste Regelung als auch der Abteilung für Entwurfsorientierte Regelungstechnik. Meiner Mutter danke ich (nicht nur) für den Beistand im Umgang mit der neuen deutschen Rechtschreibung.

Abschließend möchte ich mich in besonderer Weise bei meiner Partnerin Sonja für die liebevolle Unterstützung bedanken. Ihr und der vielseitigen Ablenkung durch unsere Kinder verdanke ich die Motivation, ohne die die Durchführung einer Promotion nicht möglich gewesen wäre.

München, im Juli 2002

Dirk Odenthal

*Für Sonja,  
Matthias und Hannah*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführende Übersicht</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Kippvermeidung</b>	<b>6</b>
2.1	Unfallanalyse . . . . .	6
2.2	Quantifizierung der Kippgefahr . . . . .	7
2.2.1	Definition eines Kippkoeffizienten . . . . .	8
2.2.2	Ermittlung des Kippkoeffizienten . . . . .	8
2.3	Prinzipielle Überlegungen zur Reduktion der Kippgefahr . . . . .	12
2.4	Übersicht über bestehende Systeme zur Verbesserung der Fahrdynamik .	15
2.4.1	Aktive/semiaktive Fahrwerkregelsysteme . . . . .	15
2.4.2	Fahrdynamikregelung ESP . . . . .	16
2.5	Grundlagen der Lenkregelung . . . . .	18
2.5.1	Prinzip der aktiven Lenkung . . . . .	18
2.5.2	Gierstabilisierung durch robuste Lenkregelung . . . . .	21
2.5.3	Vergleich von aktivem Lenk- und Bremseneingriff . . . . .	23
2.6	Auswahl eines geeigneten Fahrzeugmodells . . . . .	24
2.7	Anforderungen an den robusten Reglerentwurf . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Entwurf und Analyse robuster Regelungssysteme im Parameterraum</b>	<b>27</b>
3.1	Nominelle Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis . . . . .	29
3.1.1	Interne Stabilität . . . . .	29
3.1.2	Eigenwertabhängige Entwurfsanforderungen . . . . .	30
3.1.3	Frequenzabhängige Entwurfsanforderungen . . . . .	32
3.1.4	Quantifizierung frequenzabhängiger Entwurfsanforderungen . . . . .	36
3.2	Robustheitsanforderungen an den geschlossenen Regelkreis . . . . .	38

3.2.1	Beschreibung von Modellunsicherheiten . . . . .	38
3.2.2	Robuste Stabilität . . . . .	42
3.2.3	Robust gutes Regelverhalten . . . . .	45
3.3	$\Gamma$ -Stabilität . . . . .	47
3.4	$\mathcal{B}$ -Stabilität . . . . .	47
3.5	Abbildung von $\mathcal{B}$ -Stabilitätsgrenzen in den Parameterraum . . . . .	49
3.5.1	Die Punktbedingung . . . . .	51
3.5.2	Die Tangentenbedingung . . . . .	52
3.6	Multiple Entwurfsanforderungen im Parameterraum . . . . .	53
3.7	Beispiele . . . . .	54
3.7.1	Feder-Masse-Schwinger . . . . .	54
3.7.2	Gierstabilisierung Einspurmodell . . . . .	55
3.8	Einschätzung . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Indirekte Kippvermeidung: Bedämpfung der Wankdynamik durch kontinuierlich betriebene Lenkregelung</b> . . . . .	<b>63</b>
4.1	Vorgehensweise . . . . .	64
4.2	Struktur des Regelungssystems . . . . .	64
4.2.1	Regelstrecke und Aktuatordynamik . . . . .	64
4.2.2	Modellunsicherheiten . . . . .	67
4.2.3	Lineare Analyse des Fahrzeugmodells . . . . .	69
4.2.4	Spezifikation der Entwurfsanforderungen . . . . .	72
4.2.5	Auswahl einer geeigneten Reglerstruktur . . . . .	76
4.3	Entwurf im Parameterraum . . . . .	80
4.3.1	Abbildung der Eigenwertspezifikationen . . . . .	81
4.3.2	Abbildung der Frequenzbereichsspezifikationen . . . . .	84
4.3.3	Simultane $\Gamma$ - und $\mathcal{B}$ -Stabilität . . . . .	85
4.3.4	Auswahl der Reglerparameter . . . . .	89
4.4	Analyse des Regelungskonzepts . . . . .	91
4.4.1	Eigenwertanalyse . . . . .	91
4.4.2	Sensitivitätsanalyse . . . . .	92
4.4.3	Robustheit gegenüber unsicheren Fahrzeugparametern . . . . .	94
4.4.4	Simulationsergebnisse . . . . .	95
4.5	Einschätzung . . . . .	96

<b>5 Direkte Kippvermeidung durch koordinierte Lenk- und Bremsregelung</b>	97
5.1 Struktur der nichtlinearen Notfall-Lenk- und Bremsregelung . . . . .	98
5.2 Nichtlineare Notfall-Lenkregelung . . . . .	98
5.3 Absolute Stabilität der Lenkregelung . . . . .	99
5.3.1 Nominelle absolute Stabilität . . . . .	101
5.3.2 Robuste absolute Stabilität . . . . .	102
5.4 Nichtlineare Bremsregelung . . . . .	106
5.5 Auslegungskriterien für die Notfall-Lenk- und Bremsregelung . . . . .	109
5.6 Simulationsergebnisse . . . . .	111
5.7 Einschätzung . . . . .	112
<b>6 Resultierendes Regelungssystem zur robusten Kippvermeidung</b>	114
6.1 Struktur des Gesamtsystems . . . . .	114
6.2 Robuste absolute Stabilität des Lenkregelungssystems . . . . .	114
6.2.1 Robuste absolute Stabilität bei nichtlinearem Lenkregelgesetz . .	115
6.2.2 Robuste absolute Stabilität bei Stellratenbeschränkung des Lenkaktuators . . . . .	117
6.3 Analyse unterschiedlicher Reglerkonfigurationen . . . . .	118
6.3.1 Simulationen mit erweitertem Einspurmodell . . . . .	119
6.3.2 Simulationen mit nichtlinearem Zweispurmodell . . . . .	120
6.4 Zusammenwirken der einzelnen Regelungssysteme und Mensch/Maschine-Schnittstelle . . . . .	125
<b>7 Zusammenfassung und Ausblick</b>	127
<b>A Ein Fahrdynamikmodell für die Beschreibung der Quer-, Gier- und Wankdynamik von Fahrzeugen: Das Einspurmodell mit Wankerweiterung</b>	131
A.1 Modellannahmen . . . . .	131
A.2 Aufstellen der Bewegungsgleichungen . . . . .	134
A.2.1 Kinematik . . . . .	134
A.2.2 Bewegungsgrößen der Körper in Minimalform . . . . .	138
A.2.3 Kräfte und Momente . . . . .	139
A.2.4 Gleichungen von NEWTON und EULER . . . . .	143
A.2.5 Reduktion der Bewegungsgleichungen auf Minimalform . . . . .	144

A.3	Nichtlineare Zustandsgleichungen . . . . .	145
A.3.1	Zusätzliche Ausgabegleichungen . . . . .	146
A.3.2	Nichtlineare Zustandsgleichungen bei konstanter Geschwindigkeit	146
A.4	Linearisierte Bewegungsgleichungen . . . . .	146
A.5	Gleichungen des linearen Einspurmodells . . . . .	150
A.6	Lineare Zustandsgleichungen . . . . .	150
A.7	Lineare Ausgangsgleichungen . . . . .	151
A.7.1	Ein-/Ausgangsgleichungen in Übertragungsform . . . . .	151
A.7.2	Stationäre Verstärkungen . . . . .	152
A.8	Numerische Werte der Fahrzeugparameter . . . . .	153
<b>B</b>	<b>Modell des Lenkactuators</b>	<b>154</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>157</b>

# 1 Einführende Übersicht

Das grundlegende Bedürfnis einer modernen Gesellschaft nach Mobilität ist mit einem stetig wachsendem Aufkommen im Personen- und Güterverkehr verbunden und damit auch mit einer Zunahme der Gefahr von Verkehrsunfällen. Neben wichtigen Verkehrsforschungsthemen wie der Verkehrsvermeidung und der Verlagerung von Verkehr ist die Verbesserung der Verkehrssicherheit durch neue Technologien von besonderer Bedeutung für die zukünftige Sicherung von Mobilität. Der Einsatz moderner Informations- und Kommunikationstechniken und die Entwicklung neuartiger mechatronischer Komponenten kann in Fahrerassistenzsystemen verstärkt für eine Unterstützung des Fahrers in kritischen Situationen genutzt werden. Aktive Fahrsicherheitssysteme können dabei helfen, das Unfallrisiko zu minimieren. Bei Personenkraftwagen ist eine häufige Unfallursache der Verlust der Fahrstabilität durch Schleudern, bei Nutzfahrzeugen und Fahrzeugen mit hohem Schwerpunkt kommt als weitere Ursache das Umkippen hinzu.

Verkehrsunfälle mit Fahrzeugüberschlag sind meist mit schweren Verletzungen oder Todesfolge der Beteiligten verbunden und stehen in besonderer Weise im Blickpunkt der Öffentlichkeit. Eine ständige Verbesserung der passiven und aktiven Sicherheit von Kraftfahrzeugen hat in den letzten Jahren dazu geführt, dass die Anzahl der schweren Unfälle mit Personenschäden deutlich zurückgegangen ist. Zumeist stehen diese Systeme jedoch nicht in direktem Bezug zum Fahrzeugüberschlag, was dazu führte, dass in den vergangenen Jahren der Anteil von Überschlagunfällen an der Gesamtanzahl der sehr schweren Unfälle prozentual stark gestiegen ist.

Eine häufige Unfallursache bei Pkw ist das Schleudern bspw. bei Straßenglätte, zu schneller Kurveneinfahrt, bei schnellen (Hindernis-) Ausweichmanövern, bei plötzlichem einseitigen Reifendruckverlust, bei schnellen Lastwechseln, beim Bremsen bzw. Beschleunigen auf unterschiedlich griffigem Fahrbahnbelag („ $\mu$ -split“) oder bei plötzlich auftretendem heftigem Seitenwind. Ähnliche Fahrmanöver können bei Fahrzeugen mit erhöhtem Schwerpunkt, schon weit bevor das Fahrzeug in den, durch das Erreichen der Reifensättigung induzierten, fahrdynamischen Grenzbereich kommt, ein Umkippen verursachen. Typische Fahrsituationen sind hierbei vor allem eine zu schnelle Einfahrt in eine Kurve und Ausweich- bzw. Spurwechselmanöver, wie etwa der „Elchtest“. Diese direkt durch das Fahrmanöver verursachten Unfälle ereignen sich im Gegensatz zu Schleuderunfällen insbesondere bei gutem Kraftschluss zwischen Reifen und Straße. Andererseits werden Überschlagunfälle auch indirekt durch das Fahrmanöver verursacht, bspw. indem nach vorherigem Schleudern das Fahrzeug von der Straße abkommt oder

die Räder seitlich auf ein Hindernis aufprallen. Fahrzeuge mit einem ungünstig hohen Verhältnis zwischen Schwerpunkthöhe und Spurweite sind in all diesen Situationen besonders kippgefährdet. Auch resultieren Kippunfälle häufig aus einer Fehleinschätzung der Fahrdynamik seitens des Fahrers bei stark variierender beladungsabhängiger Schwerpunkthöhe, vor allem dann, wenn die Beladung unbekannt ist und/oder bei eigener Dynamik der Beladung (baumelnde Schweinehälften, schwappende flüssige Ladung in Tankfahrzeugen, Verrutschen der Beladung). Diese Aussagen werden gestützt von Unfallanalysen der National Highway Traffic and Safety Administration (NHTSA) [17]. Die maximale Querschleunigung des Fahrzeugs wird einerseits durch die Schleudergrenze, d. h. durch die maximal zwischen Reifen und Fahrbahn übertragbaren Kräfte, bestimmt und andererseits durch die vom Fahrzeugtyp und Beladungszustand abhängige Kippgrenze. Bei Pkw ist zumeist unabhängig vom Straßenzustand die Schleudergrenze maßgeblich, bei Nutzfahrzeugen bzw. Fahrzeugen mit hohem Schwerpunkt zumindest auf trockener Straße die Kippgrenze. Es bietet sich nun an, „Überschlagunfälle“ hinsichtlich ihrer Ursache in zwei Kategorien zu unterteilen [17, 127], in Überschlagunfälle, bei denen der Fahrer zunächst die Kontrolle über das Fahrzeug verliert und dann das Fahrzeug entweder von der Straße abkommt und umkippt oder die Räder des Fahrzeugs auf ein Hindernis auftreffen, wodurch das Umkippen verursacht wird (“tripped rollover”) und in Überschlagunfälle auf ebener Fahrbahn, die durch das Fahrmanöver selbst verursacht werden (“untripped rollover”).

### *Stand der Technik*

Im Brennpunkt einer Vielzahl neuerer Entwicklungen mit dem Ziel einer Verbesserung der Kippsicherheit stehen in jüngster Zeit neben passiven Systemen zum Insassenschutz [46] auch verstärkt aktive Fahrsicherheitssysteme basierend auf automatischen Eingriffen in Fahrwerk, Bremsen und Antriebsstrang. Bereits erfolgreich in den Markt eingeführte bzw. kurz vor der Einführung stehende aktive Fahrwerkregelungssysteme, z. B. ABC (“Active Body Control”), ACE (“Active Cornering Enhancement”) und “Dynamic Drive”, werden in [55, 75] beschrieben. Bei diesen Systemen wird durch aktive Stabilisatoren bzw. Federung in Abhängigkeit des Fahrzustands die Neigung des Fahrzeugaufbaus begrenzt, wodurch auch indirekt die Kippgefahr durch kleinere Wankwinkel und geringeres Überschwingen des Fahrzeugaufbaus reduziert werden kann. Fahrdynamikregelungssysteme, die auf Eingriffen in die Motorsteuerung und dem selektiven Abbremsen einzelner Räder basieren, z. B. ESP (“Electronic Stability Program”, [90]), FDR („Fahrdynamikregelung“, [121, 122]), DSC (“Dynamic Stability Control”, [41]), PSM („Porsche Stability Management“), mit integriertem ABS („Anti-Blockier-System“) und ASR („Anti-Schlupf-Regelung“) werden bislang insbesondere im Pkw-Bereich für eine Stabilisierung der Quer- und Gierdynamik eingesetzt, sind aber auch prinzipiell geeignet, um in direkter Weise die Kippgefahr bei Fahrzeugen zu reduzieren [63, 24, 102].

Eine aktive Beeinflussung der Fahrdynamik durch Lenkwinkelkorrekturen kann entweder nach dem Prinzip der Überlagerungslenkung [72, 76, 8, 50] oder mittels eines Steer-by-Wire Systems [48, 85, 50] realisiert werden. Bei der mechanischen Überlagerungslenkung erfolgt die Korrektur durch ein aktives Stellelement, welches, verbunden mit einem Überlagerungsgetriebe, einen kleinen Zusatzlenkwinkel zusätzlich zu dem vom Fahrer vorgegebenen Lenkradwinkel stellen kann. Bei Steer-by-Wire Lenksysteme-

men ist das Lenkrad von den gelenkten Rädern mechanisch vollständig entkoppelt und der gesamte Vorderradlenkwinkel wird mittels einer entsprechenden (z. B. elektrischen oder hydraulischen) Stelleinrichtung aufgebracht. Auf Grund des geringen Verschleißes und Energieverbrauchs ist die aktive Lenkung dabei nicht auf fahrdynamisch kritische Situationen begrenzt sondern kann im Dauerbetrieb verwendet werden, um Fahrsicherheit und Fahrkomfort zu verbessern.

Am Institut für Robotik und Mechatronik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt (DLR) sind in den vergangenen Jahren robuste Regelungskonzepte entwickelt worden, die diesen Zusatzlenkwinkel nutzen, um durch Regelung der Quer- und Gierdynamik das Schleudern von Fahrzeugen zu vermeiden [2, 9, 6, 7, 35]. Auch hiermit wird die Kippgefahr indirekt durch Vermeidung von "tripped rollover" deutlich reduziert, bei direkt durch das Fahrmanöver induzierten Kippunfällen jedoch ist dies nicht der Fall.

### *Ziel der Arbeit*

Wesentliches Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Fahrdynamikregelungskonzepts zur Reduktion der Kippgefahr von Fahrzeugen. Dabei soll, basierend auf automatischen zusätzlichen Regeleingriffen in Vorderradlenkung und Längsdynamik, die Kippgefahr in typischen Fahrsituationen, die direkt ein Umkippen bewirken, deutlich reduziert werden.

Wichtige Randbedingungen für die Entwicklung eines solchen Systems müssen den Erfordernissen der Fahrzeughersteller und deren Zulieferer angepasst werden. Geht man davon aus, dass der aktiven Lenkung (Zusatzlenkung, Steer-by-Wire) technisch der Weg geebnet wird und dass innerhalb der nächsten Jahre (im Pkw-Bereich kurz- bis mittelfristig, im Lkw-Bereich mittel- bis langfristig) solche Systeme in Serie produziert werden, so bleibt als Hauptanforderung die Kundenakzeptanz. Im Wesentlichen stehen den mit dieser Technik erzielbaren operationellen Vorteilen, dem verbesserten Fahrgefühl und dem hohen Potenzial an Sicherheitsgewinn im Sinne einer verbesserten Fahrdynamik, sicherheitskritische Belange, im Sinne eines Systemausfalls oder einer Fehlfunktion und die Mehrkosten die mit der Realisierung eines solchen Systems verbunden sind, einschränkend entgegen. Im Vordergrund bei der Entwicklung des Regelungssystems zur Kippvermeidung muss deswegen stehen, dieses mit möglichst geringem Aufwand und Anforderungen hinsichtlich Aktuatorik und Sensorik zu realisieren. Zudem muss bei der Entwicklung des Systems sichergestellt werden, dass die Verbesserung der Fahrsicherheit nicht zu Lasten des Fahrgefühls bzw. Komforts geht.

In regelungstechnischer Hinsicht besteht die größte Herausforderung darin, dass das System auch bei variierenden Betriebsbedingungen, d. h. im gesamten Geschwindigkeitsbereich, bei unterschiedlicher Beladung und sowohl auf glatter bzw. regennasser als auch auf trockener Straße gleichermaßen gut funktioniert, d. h. dass es sich um eine robuste Regelung handelt. Man unterscheidet zwischen Fahrzeugparametern, die relativ genau bekannt sind (Spurweite, Radstand, Feder-/Dämpferkonstanten bzw. -kennlinien), Parametern, die sich von Fahrt zu Fahrt ändern können aber während der Fahrt konstant sind (Fahrzeugmasse, Trägheitsmomente, Schwerpunktlage) und Parametern, die sich während der Fahrt ändern (Geschwindigkeit, Kraftschluss zwischen Reifen und Fahrbahn). Dabei müssen fahrzeugtypbedingt sehr unterschiedliche Anforderungen an die Auswahl der zu messenden Parameter gestellt sowie geeignete Systeme bzw. Methoden

für deren Bestimmung berücksichtigt werden. An einen Pkw ergeben sich grundsätzlich ganz andere Systemanforderungen als bspw. an einen schweren Lkw mit Luftfederung. Von zentraler Bedeutung beim regelungstechnischen Entwurf sind die Robustheit der Eigenschaften „verbesserte Fahrsicherheit“ und „gutes Fahrgefühl“ gegenüber unsicheren nicht genau bekannten bzw. sich schnell ändernden Fahrzeugparametern und die Adaption des Systems an messbare, sich von Fahrt zu Fahrt bzw. während der Fahrt ändernde, Parameter.

### *Gliederung der Arbeit*

In Kapitel 2 werden zunächst die für eine Realisierung des Fahrdynamikregelungskonzepts im Fahrzeug notwendigen Grundlagen und mechatronischen Kernelemente beschrieben. Ein Kippkoeffizient wird eingeführt, der eine Quantifizierung der Kippgefahr ermöglicht. Für eine Ermittlung des Kippkoeffizienten während der Fahrt werden verschiedene aus der Literatur bekannte Ansätze beschrieben. Prinzipiellen Überlegungen zur Reduktion der Kippgefahr folgt eine Übersicht über dazu im Kontext stehende Fahrwerk- und Fahrdynamikregelungssysteme. Die Lenkregelung bildet das Kernelement der Fahrdynamikregelung in dieser Arbeit. Neben einer Übersicht über bestehende Lenkregelungskonzepte zur Schleudervermeidung werden unterschiedliche Möglichkeiten für die Realisierung eines mechatronischen Lenkaktuators diskutiert. Grundsätzliche Überlegungen zu den regelungstechnischen Spezifikationen und Robustheitsanforderungen bezüglich variierender und unsicherer Fahrzeugparameter schließen die Grundlagen zur Kippvermeidung in Kapitel 2 ab.

Die methodischen Grundlagen für den in den Kapiteln 4 und 5 durchgeführten Entwurf der Fahrdynamikregelung zur indirekten bzw. direkten Kippvermeidung werden in Kapitel 3 geschaffen. Hier wird eine Erweiterung des in der parametrischen robusten Regelungstechnik bekannten Parameterraumverfahrens vorgenommen, welches es ermöglicht, frequenzabhängige Betragskriterien in exakter Weise in den Parameterraum, d. h. in die Ebene zweier Strecken- und/oder Reglerparameter, abzubilden. Hierdurch können die von Frequenzbereichsverfahren, bspw. dem  $H_\infty$ -Verfahren, verwendeten „Loop-Shaping“-Spezifikationen für den Entwurf und die Analyse parametrisch robuster Regelungssysteme nutzbar gemacht werden.

Ein detailliertes Fahrzeugmodell für die Beschreibung der fahrdynamischen Zusammenhänge zwischen Quer-, Gier- und Wankdynamik wird in Anhang A hergeleitet. Das als Einspurmodell mit Wankerweiterung bezeichnete Modell dient zusammen mit dem in Anhang B beschriebenen Lenkaktuatormodell als Grundlage für die in den Kapiteln 4, 5 und 6 durchgeführten regelungstechnischen Entwurfs- bzw. Analyseschritte.

In Kapitel 4 wird ein Regelungssystem basierend auf der kontinuierlich betriebenen Lenkregelung vorgestellt, bei dem unabhängig vom Betriebspunkt, d. h. unabhängig vom Beladungszustand, von Straßenverhältnissen und von der Fahrgeschwindigkeit, die Kippgefahr in transienten Fahrmanövern durch Bedämpfung der Wankdynamik reduziert wird. Der Nutzen des Systems im Sinne einer Reduktion der Kippgefahr wird anhand einer Analyse im Eigenwert- und Frequenzbereich sowie durch nichtlineare Simulationen nachgewiesen.

Kapitel 5 beschreibt ein Notfallkonzept basierend auf einem koordinierten nichtlinearen Lenk- und Bremsingriff zur direkten Kippvermeidung. Als Rückführgröße wird der in Kapitel 2 eingeführte Kippkoeffizient verwendet. Der automatische Notfall-Lenkeingriff wird dabei über eine nichtlineare Kennlinie angesteuert. Um in robuster Weise sicherzustellen, dass durch diese Kennlinie bzw. durch die Sättigung im Lenkaktuator keine Grenzyklen induziert werden, wird das Popow-Verfahren im Zusammenhang mit dem Parameterraumverfahren angewandt. Ein zusätzlicher Eingriff in die Längsdynamik über die Bremsen wird hinsichtlich der Minimierung des Spurfehlers mit dem Lenkeingriff abgestimmt. Unterschiedliche Konfigurationen und Einflussparameter werden diskutiert und die Wirkungsweise der Notfall-Lenk- und -Bremsregelung wird durch nichtlineare Simulationen demonstriert.

Das Gesamtregelungskonzept wird aus einer Kombination der in den Kapiteln 4 und 5 entworfenen Regler in Kapitel 6 gebildet und analysiert. Zunächst wird dies anhand des relativ einfachen Einspurmodells mit Wankerweiterung durchgeführt. Die Validierung des Konzepts erfolgt schließlich anhand von open-loop-Simulationen mit einem komplexen räumlichen Gesamtfahrzeugmodell. Dies ermöglicht, den Effekt der im Entwurfsmodell nicht berücksichtigten Dynamik auf das Systemverhalten zu untersuchen.

In Kapitel 7 werden schließlich die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und bewertet.

## 2 Grundlagen der Kippvermeidung

### 2.1 Unfallanalyse

Seit Ende der 80er, Anfang der 90er Jahre gibt es von Seiten des amerikanischen Verkehrsministeriums NHTSA (“National Highway Traffic Safety Administration”) verstärkt Bemühungen, den Fahrzeugüberschlag sowie dessen Ursachen zu untersuchen [17, 40, 57, 64, 74, 127]. 1989 wurden beispielsweise in den USA 137600 Unfälle mit Fahrzeugüberschlag von Pkw und insbesondere von relativ leichten Fahrzeugen mit einem auf die Spurweite bezogenen sehr hohen Schwerpunkt, bspw. LTV (“Light Trucks and Vans”) und SUV (“Sport Utility Vehicles”), registriert [64, 74]. Bei 124800 dieser Unfälle war nur ein einzelnes Fahrzeug beteiligt (Alleinunfälle) und 114800 Unfälle erfolgten abseits konventioneller Straßen “off-road”. 1990 betrug die Anzahl der schwer verletzten Personen bei Alleinunfällen mit Fahrzeugüberschlag 8088, davon 4798 bei Pkw und 3290 bei LTV, von insgesamt 15901 bei Alleinunfällen schwer verletzten Personen. In besonderer Weise kippgefährdet waren dabei leichte Fahrzeuge mit einem auf die Spurweite bezogenen sehr hohen Schwerpunkt. Bei Lastkraftwagen sind etwa 20 % der schweren Verkehrsunfälle mit einem Umkippen des Fahrzeugs verbunden [127]. Lkw sind insbesondere bei zu schneller Einfahrt in Kurven, bspw. in Highway- bzw. Autobahnausfahrten, kippgefährdet. In den USA beträgt der Anteil solcher Unfälle allein 5 % an der Gesamtanzahl der sehr schweren Unfälle [118].

Auf deutschen bzw. (mittel-)europäischen Straßen spielen LTV- und SUV-Überschlagunfälle abseits normaler Straßen eine eher untergeordnete Rolle. Allerdings kann in etwa seit Mitte der 90er Jahre ein starker Anstieg von Pkw mit erhöhtem Schwerpunkt (z. B. A-Klasse, Smart) und MiniVans/Vans verzeichnet werden. Thema einer Studie, der von der Bundesanstalt für Straßenwesen (BASt) beauftragten DEKRA-Unfallforschung [60], war die Sicherheitsanalyse im Straßengüterverkehr, bei der unter anderem auch das Umkippen von Lkw, insbesondere von Tankfahrzeugen, analysiert wurde. Ergebnis der dort erwähnten beiden BMFT-Projekte TOPAS („Tankfahrzeug mit optimierten passiven und aktiven Sicherheitseinrichtungen“) und THESEUS („Tankfahrzeug mit höchst erreichbarer Sicherheit durch experimentelle Unfallsimulation“) war unter anderem, dass bei Tankwagen eine Absenkung des Ladungsschwerpunktes um 30 cm und eine um 6 cm auf 210 cm vergrößerte Spurweite die Kippsicherheit um 30 % steigert.

## 2.2 Quantifizierung der Kippgefahr

Eine genaue Analyse der Kippvorgänge von Fahrzeugen erfordert es, zwischen statischer und dynamischer Kippgrenze zu unterscheiden.

In der Literatur [17, 64, 40, 127, 78, 112] werden für eine Beschreibung der statischen Kippgrenze verschiedene Kenngrößen angegeben, sowie Versuchsaufbauten bzw. Verfahren für deren experimentelle Ermittlung beschrieben:

- Der statische Stabilitätsfaktor ( $SSF \equiv$  “Static Stability Factor”) ist definiert als das Verhältnis von halber Spurweite  $T/2$  zur Schwerpunkthöhe des Fahrzeugs  $h_{SP}$ , d. h.

$$SSF = \frac{T/2}{h_{SP}}. \quad (2.2.1)$$

Betrachtet man das Fahrzeug als einen starren Körper, so entspricht diese Größe dem Verhältnis der Querbeschleunigung zur Gravitationsbeschleunigung, bei dem die Innenräder des Fahrzeugs gerade abheben. Als destabilisierend wirkt sich bei Fahrzeugen die Neigung des Fahrzeugaufbaus relativ zu den Achsen zum Kurvenäußeren aus. In [78, 112] wird beschrieben, wie die statische Kippgrenze aus stationären Kreisfahrten ermittelt werden kann.

- Die Größe  $TTR = \tan \phi$  (“Tilt Table Ratio”) beschreibt einen weiteren statischen Stabilitätskoeffizienten, der dem Einfluss der Aufbauquerneigung Rechnung trägt. Dabei ist  $\phi$  der Winkel, bei dem, wenn man eine Plattform auf die ein Fahrzeug gestellt ist um die Längsachse dreht, gerade die Innenräder abheben.
- Die Größe  $SPR = F_y/(m g)$  (“Side Pull Ratio”) ist das Verhältnis zwischen der Querkraft im Fahrzeugschwerpunkt  $F_y$ , die aufgebracht werden muss, damit gerade die Räder auf einer Seite abheben und dem Gewicht des Fahrzeugs  $m g$ .
- Der Größe  $RPM$  (“Rollover Prevention Metric”) liegen Energiebetrachtungen zu Grunde, d. h. die Umwandlung der Translationsenergie der Querbewegung in Rotationsenergie der Kippbewegung.
- Die kritische Gleitgeschwindigkeit  $CSV$  (“Critical Sliding Velocity”) ist die (reine) Quergeschwindigkeit, die aufgebracht werden muss, um ein Umkippen des Fahrzeugs zu bewirken.

Diese statischen Kenngrößen können allesamt vom Fahrzeughersteller einmalig bestimmt werden, wobei die Ermittlung der numerischen Werte für diese Kenngrößen zum Teil sehr aufwändige Versuchsanordnungen erfordert [118, 127, 64, 40]. Die erhaltenen Werte sind für eine Grobabschätzung der Kippgefährdung bestimmter Fahrzeugtypen bzw. Fahrzeugklassen durchaus geeignet; geht man jedoch von stark variierenden Betriebsbedingungen auf Grund unterschiedlicher Beladungszustände und/oder Straßenzustände aus, sind sie nur sehr bedingt geeignet, um eine Kippgefahr zu präzisieren. Hierfür ist es erforderlich, die Kippgefahr während der Fahrt kontinuierlich in Abhängigkeit des Beladungs- und Fahrzustands zu detektieren.

### 2.2.1 Definition eines Kippkoeffizienten

Ein geeigneter Indikator für die quantitative dynamische Beurteilung der Kippgefahr ist die Verteilung der Reifenaufstandskräfte (dynamischen Radlasten) zwischen links und rechts, aus der sich die folgende Definition eines Kippkoeffizienten ergibt:

$$R = \frac{F_{z,R} - F_{z,L}}{F_{z,R} + F_{z,L}}. \quad (2.2.2)$$

Die Reifenaufstandskräfte links  $F_{z,L}$  und rechts  $F_{z,R}$  werden vereinfachend jeweils vorne und hinten zusammengefasst. Siehe hierzu auch Bild 2.1. In stationärer Geradeausfahrt bei symmetrischer Beladung ist  $F_{z,L} = F_{z,R}$  und somit ist  $R = 0$ . Heben die linken bzw. rechten Räder von der Fahrbahn ab, so wird  $F_{z,L} = 0$  bzw.  $F_{z,R} = 0$  und entsprechend  $R = \pm 1$ . Hebt keines der Räder ab, d. h.  $|R| < 1$ , wird das Fahrzeug als „kippstabil“ bezeichnet.

Bei abgehobenen Rädern wird das Fahrzeug schwer kontrollierbar. Ziel einer Strategie zur Kippvermeidung muss es deswegen sein, grundsätzlich das Abheben der Räder von der Straße zu verhindern und somit einem Umkippen des Fahrzeugs von vornherein entgegenzuwirken.

### 2.2.2 Ermittlung des Kippkoeffizienten

Will man den Kippkoeffizienten dazu verwenden, in kippkritischen Situationen aktiv in die Fahrdynamik einzugreifen und/oder den Fahrer über ein visuelles, akustisches oder auch haptisches Signal zu warnen, so muss dieser während der Fahrt ständig ermittelt werden. Für die Bestimmung des Kippkoeffizienten kommen unterschiedliche Messgrößen und -prinzipien in Frage.

#### *Direkte Bestimmung von $R$ über dynamische Radlasten*

Nach Gl. (2.2.2) ist die direkte Bestimmung des Kippkoeffizienten gleich bedeutend mit der Bestimmung der dynamischen Radlasten. In [59] wurden vier Verfahren zur Messung von Radlastschwankungen miteinander verglichen. Beim so genannten Verfahren nach Kotitschke werden Vertikalbeschleunigungen an je einer bestimmten Stelle von Achse und Aufbau gemessen, mit den jeweils an der Schwingung beteiligten Massen multipliziert und als Massenkkräfte zur dynamischen Radlast summiert. Das Reifenfederweg-Verfahren basiert auf der Messung des Federweges (induktiver Wegaufnehmer) sowie auf einer auf dem Prüfstand ermittelten Eichkurve, die Reifenfederweg und Radlastschwankung einander zuordnet. Ähnlich hierzu funktionieren das Reifeninnendruck- und das Achsbiegespannungsverfahren. Der Reifeninnendruck bzw. die Achsbiegespannung wird über entsprechende Sensorik (piezoelektrischer Druckaufnehmer bzw. Dehnungsmessstreifen) gemessen und mit Hilfe einer jeweils auf dem Prüfstand ermittelten Eichkurve wird auf die zugehörige Radlast geschlossen. Unter anderem auf Grund der starken Frequenzabhängigkeit der Messergebnisse konnte mit keinem der vier Verfahren ein voll befriedigendes Ergebnis erzielt werden. Jedoch konnte die in [59] geäußerte Vermutung, dass mit einer Kombination zweier der Verfahren deutlich bessere Ergebnisse

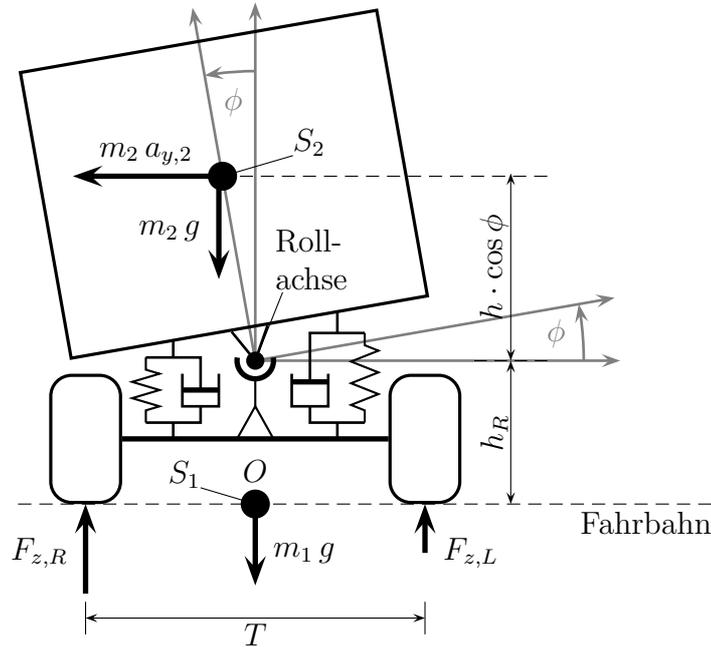
erreicht werden können, in [21] bestätigt werden. Dort wird ein verbessertes Achsbiegespannungsverfahren beschrieben, bei dem die dynamischen Radlasten über Dehnungsmessstreifen (DMS) und an den Achsen befestigte induktive Beschleunigungsaufnehmer ermittelt werden. Über die DMS werden dabei die Normalspannungen in der Achse gemessen, die auf Grund der von dynamischen Radlastschwankungen verursachten Schubbeanspruchung entstehen. Um den Fehler, der durch die Trägheiten der Massen zwischen Reifenaufstandsfläche (Latsch) und Sensorposition entsteht, zu kompensieren, wird das Produkt aus Achsbeschleunigung und anteiliger Masse zu dem eigentlichen Messsignal hinzu addiert. Laut Autor ist die mit diesem Verfahren erzielte *Auflösung deutlich genauer als 200 N*. Dieses Verfahren ist allerdings mit einigen Nachteilen behaftet. Zum einen erfordert das Verfahren mehrere Sensoren und zum anderen erscheint es zweifelhaft, ob auf Vorder- bzw. Hinterachse montierte DMS den hohen Anforderungen an Serienprodukte genügen können. Ein weiterer Nachteil des Achsbiegespannungsverfahrens liegt in der starken Beeinflussung der Messung durch Seitenkräfte, was sich insbesondere in kippkritischen Situationen im fahrdynamischen Grenzbereich negativ auswirken kann.

In den letzten Jahren ist die Verbreitung der Luftfederung und -dämpfung im Nutzfahrzeugbereich relativ weit vorangeschritten. Diese Technologie ermöglicht es, auf Grundlage der Druckmessung in den Federbalgen der Luftfedern, relativ genau die dynamischen Feder- und Dämpferkräfte über entsprechende Kennlinien zu ermitteln [68, 65]. Ähnlich sollte dies auch bei Fahrzeugen, die mit aktiven Fahrwerksregelsystemen, z. B. ABC, ACE oder Dynamic Drive [55, 75], ausgestattet sind, möglich sein. Korrigiert man entsprechend der oben angegebenen Vorgehensweise den Fehler, der durch die ungefederten Massen entsteht, sollte eine relativ genaue Bestimmung der dynamischen Radlasten während der Fahrt möglich sein.

#### *Ermittlung über geschätzte Schwerpunkthöhe, Querbeschleunigung und Wankwinkel*

Bei Fahrzeugen mit konventioneller Federung und Dämpfung besteht nicht die Möglichkeit, ohne zusätzlichen Aufwand bspw. den Reifenfederweg zu messen. Es bietet sich bei diesen Fahrzeugen an, den Kippkoeffizienten über eine Näherungsformel zu bestimmen. Eine Approximation des Kippkoeffizienten lässt sich anhand grundlegender physikalischer Überlegungen bezüglich eines sich in stationärer Kurvenfahrt befindenden Fahrzeugs ableiten. Bild 2.1 kann hierzu als vereinfachte Schnittdarstellung eines Fahrzeuges in stationärer Kurvenfahrt von vorne interpretiert werden. Da nur die wesentlichen Effekte betrachtet werden sollen, werden vereinfachend folgende Annahmen getroffen:

1. Hub- und Nickbewegung können für wankdynamische Betrachtungen vernachlässigt werden,
2. der Schwerpunkt  $S_1$  des Fahrwerks (ungefederte Masse  $m_1$ ) befindet sich in der Fahrbahnebene,
3. die Lage der Rollachse, die sich primär aus der Kinematik der Radaufhängung ergibt, wird als konstant angenommen; die Rollachse wird als feste Achse in Fahrzeuglängsrichtung in einer Höhe  $h_R$  über der Fahrbahn angenommen,



**Bild 2.1:** Für die Bestimmung eines Kippkoeffizienten relevante Größen.

4. die Einfederung der Reifen wird vernachlässigt,
5. der Schwerpunkt des Aufbaus samt Ladung  $S_2$  (zusammengefasst zur gefederten Masse  $m_2$ ) befindet sich in einer Höhe  $h$  über der Rollachse und
6. die Beladung wird als symmetrisch angenommen (keine Exzentrizität des Aufbauswerpunkts).

Die für die Bestimmung einer Kippbedingung relevanten auf das System wirkenden Kräfte sind die Gravitationskräfte  $m_1 g$  und  $m_2 g$ , die dynamischen Radlasten links  $F_{z,L}$  und rechts  $F_{z,R}$  sowie die Zentrifugalkraft im Aufbauswerpunkt  $m_2 a_{y,2}$ . Das Kräftegleichgewicht in  $z_1$ -Richtung lautet

$$\sum F_z = F_{z,R} + F_{z,L} - (m_1 + m_2)g \equiv 0, \quad (2.2.3)$$

und das Momentengleichgewicht um den Punkt  $O$  entsprechend Bild 2.1

$$\sum M_x = \frac{T}{2}(F_{z,L} - F_{z,R}) + m_2 g h \sin \phi + (h_R + h \cos \phi)m_2 a_{y,2} \equiv 0. \quad (2.2.4)$$

Einsetzen der Gln. (2.2.3) und (2.2.4) in Gl. (2.2.2) ergibt den folgenden Zusammenhang

$$R = \frac{m_2}{m T/2} \left( (h_R + h \cos \phi) \frac{a_{y,2}}{g} + h \sin \phi \right), \quad (2.2.5)$$

wobei  $m = m_1 + m_2$  die Fahrzeuggesamtmasse ist.

Für eine messtechnische Erfassung von  $R$  muss vorausgesetzt werden, dass entweder entsprechend einem der oben beschriebenen Verfahren die Radlasten direkt ermittelt werden können oder dass entsprechend Gl. (2.2.5) die Höhen  $h$  und  $h_R$  sowie die Massen  $m_2$  und  $m_1$  bekannt sind und die Querschleunigung  $a_{y,2}$  sowie der Wankwinkel  $\phi$  messbar ist. Soll aus Kostengründen auf eine Messung von  $\phi$  verzichtet werden (diese kann z. B. indirekt durch Messen der Federwege erfolgen), so ist es sinnvoll, unter den weiteren Annahmen  $m_1 \ll m_2$ ,  $\cos \phi \approx 1$  und  $h \sin \phi \ll (h_R + h)a_{y,2}/g$ , einen Näherungswert für den Kippkoeffizienten zu verwenden, der durch den Zusammenhang

$$R_{approx} = \frac{h_R + h}{T/2} \frac{a_{y,2}}{g}, \quad (2.2.6)$$

beschrieben wird. Die Annahme  $m_1 \ll m_2$  bedeutet auch, dass die Gesamtschwerpunkthöhe mit der Schwerpunkthöhe des Wankaufbaus zusammenfällt.  $R_{approx}$  wird somit bestimmt durch das Verhältnis von Schwerpunkthöhe über der Fahrbahn  $h_R + h$  zu halber Spurweite  $T/2$ , dies entspricht dem inversen statischen Stabilitätsfaktor SSF aus Gl. (2.2.1), und dem Verhältnis von Querschleunigung  $a_{y,2}$  zu Gravitationsbeschleunigung  $g$ . Dabei ist  $T$  die unveränderliche Spurweite (Mittelwert der Spurweiten vorne und hinten),  $h_R$  die Höhe der Rollachse über der Fahrbahn, die als konstant angenommen wird und die Höhe  $h$  ein beladungsabhängiger Fahrzeugparameter. Das Querschleunigungssignal  $a_{y,2}$  ist im einfachsten Fall messbar durch einen im Aufbauswerpunkt angebrachten Querschleunigungssensor. In der Regel wird es aus praktischen Gründen nicht möglich sein, dort einen Sensor anzubringen, oder eine feste Anbringung ist nicht möglich, da die Schwerpunkthöhe variiert. Dann kann das entsprechende Signal durch Interpolation der Messwerte zweier z. B. an Boden und Dach des Aufbaus angebrachter Sensoren ermittelt werden. Der in einer Höhe  $h_d$  bzw.  $h_b$  über der Rollachse am Dach bzw. Boden des Fahrzeugaufbaus befestigte Beschleunigungssensor misst die Beschleunigung

$$a_{y_{d/b,m}} = \cos(\phi) a_{y_{d/b}} + \sin(\phi) g. \quad (2.2.7)$$

Unter der Annahme der Kenntnis eines Schätzwertes für die Schwerpunkthöhe  $h$  lässt sich nun die Querschleunigung im Aufbauswerpunkt über den Strahlensatz berechnen zu

$$a_{y,2} = \frac{(h - h_b)a_{y_{d,m}} + (h_d - h)a_{y_{b,m}}}{(h_d - h_b) \cos \phi} - g \tan \phi. \quad (2.2.8)$$

bzw. linearisiert und unter Vernachlässigung des Einflusses der Gravitationsbeschleunigung

$$a_{y,2} = \frac{(h - h_b)a_{y_{d,m}} + (h_d - h)a_{y_{b,m}}}{(h_d - h_b)}. \quad (2.2.9)$$

Eine praktikablere Möglichkeit der Bestimmung der Aufbauquerschleunigung besteht darin, das Querschleunigungssignal  $a_{y_{b,m}}$  und zusätzlich das Wankbeschleunigungssignal  $\ddot{\phi}$  zu verwenden. Letzteres Signal kann beispielsweise über zwei links und rechts am Aufbau befestigte Vertikalbeschleunigungssensoren oder durch Differenzieren der Wankrate ermittelt werden. Die Wankrate selbst kann dabei bspw. über einen Drehratensensor gemessen werden. Für die Aufbauquerschleunigung folgt aus Gl. (A.7.90) und unter Anwendung des Strahlensatzes

$$a_{y,2} = a_{y_{b,m}} + (h_b - h) \ddot{\phi}. \quad (2.2.10)$$

Legt man für die Ermittlung der Wankbeschleunigung die Messung über vier Vertikalbeschleunigungssensoren, die in Höhe der Vorder- bzw. Hinterachse seitlich in einem Abstand  $l_z$  von der Mittellinie des Fahrzeugs angebracht sind, zu Grunde, so folgt

$$a_{y,2} = a_{y_{b,m}} + \frac{h_b - h}{l_z} (a_{z,L} - a_{z,R}) , \quad (2.2.11)$$

wobei  $a_{z,L}$  bzw.  $a_{z,R}$  die Mittelwerte der Vertikalbeschleunigungen links bzw. rechts zwischen vorne und hinten sind.

### *Schätzen der Schwerpunkthöhe*

In [58, 62] wird ein rekursives Online-Parameterschätzverfahren angewandt, bei dem über die fahrdynamische Auswertung der Längs-, Hub- und Nickdynamik bzw. Wankdynamik anhand gemessener Federwege und zugehöriger Geschwindigkeiten in der Rad-aufhängung die Schwerpunkthöhe eines Pkw's während der Fahrt ermittelt wird. Nachteilig bei diesem Verfahren kann es sich auswirken, dass die Kenntnis der Federkennlinien und der Dämpfercharakteristiken vorausgesetzt wird. Ändern sich diese auf Grund des natürlichen Alterungsprozesses oder eines Defektes wird das Ergebnis der Schätzung unbrauchbar.

Ein Verfahren für eine dreidimensionale Online-Schwerpunktbestimmung bei luftgefederten Lkw wird in [68, 65] beschrieben. Über den, in den Luftfedern gemessenen, Druck wird der Schwerpunkt unter Zuhilfenahme der, über statische Beladungstests ermittelten, Federkennlinien bestimmt.

## 2.3 Prinzipielle Überlegungen zur Reduktion der Kippgefahr

Ein Umkippen des Fahrzeugs ist dann ausgeschlossen, wenn zu jedem Zeitpunkt das Abheben aller Räder verhindert wird. Diese Bedingung lässt sich durch die Ungleichung  $|R| < 1$  formulieren. Legt man statische Betrachtungen zu Grunde, so muss das Ziel von Regelungssystemen für eine aktive Kippvermeidung sein, diese Forderung zu erfüllen, indem man näherungsweise die Querbeschleunigung in Abhängigkeit von Schwerpunkthöhe und Spurweite in kippkritischen Situationen betragsmäßig auf einen Wert von unter

$$|a_{y,2}| < a_{y,KG} \quad (2.3.12)$$

begrenzt. Der Grenzwert  $a_{y,KG}$  (KG  $\equiv$  Kippgrenze) ergibt sich für  $R_{approx} = \pm 1$  aus Gl. (2.2.6) näherungsweise zu

$$a_{y,KG} = \frac{T/2}{h + h_R} g . \quad (2.3.13)$$

Auf Grund der beschränkten Seitenkräfte der Reifen, liegen bei allen Fahrzeugen die Maximalwerte der auftretenden Zentripetalbeschleunigungen

$$a_{y,SG} = (v^2 \rho)_{max}, \quad (2.3.14)$$

wobei  $v$  die Fahrgeschwindigkeit und  $\rho$  die Bahnkrümmung ist, unter einem bestimmten Wert<sup>1</sup> (SG  $\equiv$  Schleudergrenze). Tabelle 2.1 zeigt hierzu typische Werte für die maximal auftretenden Zentripetalbeschleunigungen. Fahrzeuge sind dementsprechend nur dann

**Tabelle 2.1:** Maximalwerte der auftretenden Zentripetalbeschleunigungen [86].

Pkw	$(v^2 \rho)_{max} \approx 0.73 \dots 0.8 g$
Sattel-Kfz	$(v^2 \rho)_{max} \approx 0.34 \dots 0.36 g$
schwere Lkw	$(v^2 \rho)_{max} \approx 0.35 \dots 0.4 g$
leichte Lkw	$(v^2 \rho)_{max} \approx 0.5 \dots 0.6 g$

direkt kippgefährdet, wenn die Kippgrenze unterhalb der Schleudergrenze liegt, d. h. wenn  $a_{y,KG} \leq a_{y,SG}$  bzw.  $2(h + h_R) \leq T g / (v^2 \rho)_{max}$ . Dies trifft nur auf einige wenige Pkw zu. Bei Sattel-Kfz, leichten und schweren Lkw, Bussen sowie SUV, Geländewagen, Transporter, Wohnmobile, etc. hingegen ist auf Grund des häufig sehr hohen und zudem mit dem Beladungszustand variierenden Aufbauschwerpunkts die Kippgefahr wesentlich präsenter. Mit steigender Schwerpunkthöhe verringert sich antiproportional die kritische Querbeschleunigung  $a_{y,KG}$ . Die dynamische Kippgrenze kann deutlich unterhalb aber auch oberhalb der statischen Kippgrenze liegen. Bei wankender/schwappender Beladung muss auf Grund deren Eigendynamik ein zusätzlicher Sicherheitsabstand zur statischen Kippgrenze eingehalten werden. Bei anderen Fahrzeugen wird die dynamische Kippgrenze mehr oder weniger deutlich oberhalb der statischen Kippgrenze liegen, weswegen hier eine Begrenzung auf die statische Kippgrenze zu konservativen Ergebnissen führt.

Die Begrenzung der Querbeschleunigung des Fahrzeugaufbaus lässt sich mit unterschiedlichen regelungstechnischen Eingriffsmöglichkeiten in die Fahrzeugdynamik erreichen. Dafür ist es zunächst hilfreich, zwischen stationärer Kreisfahrt und instationärer Kreisfahrt zu unterscheiden.

In stationärer Kreisfahrt gilt für die Querbeschleunigung allgemein und damit auch für die Querbeschleunigung im Fahrzeugaufbau der Zusammenhang

$$a_{y,st} = v^2 \rho. \quad (2.3.15)$$

Will man  $a_{y,st}$  reduzieren, so kann man dies tun, indem man durch Bremsen die Fahrgeschwindigkeit  $v$  verringert oder durch Lenken die Bahnkrümmung  $\rho$  verkleinert bzw. den Bahnradius  $1/\rho$  vergrößert. Dabei ist ein vergleichbarer Effekt durch Verkleinerung der

<sup>1</sup>Sämtliche Werte gelten für trockene Straße ( $\mu=1$ ).

Bahnkrümmung auf Grund der geringen zu bewegenden Vorderrad- und Lenkungsmasse wesentlich schneller zu erzielen, als der durch Verzögerung der gesamten Fahrzeugmasse erreichbaren Geschwindigkeitsreduktion. Es ist daher nahe liegend, bei Kippgefahr als Soforthilfe über die Lenkung die Krümmung  $\rho$  zu verkleinern, um damit das Umkippen zu verhindern. Durch gleichzeitiges, aber langsamer wirkendes gleichmäßiges Bremsen wird die Geschwindigkeit  $v$  soweit zurückgenommen, dass  $\rho$  wieder erhöht und das Fahrzeug auf die gewünschte Fahrspur zurückgelenkt werden kann.

Für dynamische Abweichungen von der stationären Kreisfahrt ist es darüber hinaus möglich, durch aktive/semi-aktive Dämpfung bzw. Federung die Wankdämpfung zu verbessern, und damit die Kippgefahr in dynamischen Manövern (z. B. Ausweichmanöver) zu reduzieren. Dieser Effekt kann auch mit geringem Energie- und Aktuatorikaufwand durch aktives Lenken erzielt werden.

Eine weitere Möglichkeit, die Kippgefahr zu reduzieren, liegt darin, den Fahrzeugaufbau aktiv zum Kurveninneren zu neigen (aktive Gegenneigung). In stationärer Kurvenfahrt bleibt die Querschleunigung unberührt durch diesen Regelungseingriff. Die Reduktion der Kippgefahr liegt in dem „Gravitationsterm“  $hm_2 \sin \phi / (mT/2)$  aus Gl. (2.2.5) begründet. Beim aktiv gegeneinigten Fahrzeug führt dementsprechend erst eine höhere Querschleunigung im Fahrzeugaufbau zum Umkippen. Insbesondere bei niedrigen Geschwindigkeiten kann mit aktiver Gegenneigung ein deutlicher Sicherheitsgewinn erzielt werden, d. h. die Kippgrenze wird entsprechend der höheren Zentripetalbeschleunigung, die das Fahrzeug aufnehmen kann, verschoben. Bei entsprechender Lenkwinkeingabe, Fahrgeschwindigkeit bzw. Störeinflüssen kann ein Umkippen des Fahrzeugs jedoch nicht generell verhindert werden.

In der vorliegenden Arbeit wird die Beladung vereinfachend als fest mit dem Fahrzeug verbunden angenommen. Für sämtliche lineare analytische Untersuchungen in dieser Arbeit, wird die aus den stationären Überlegungen abgeleitete Approximation des Kippkoeffizienten verwendet. Diese ergibt sich nach Linearisierung aus Gl. (2.2.5) zu

$$R = \frac{m_2}{mT/2} \left( (h_R + h) \frac{a_{y,2}}{g} + h \phi \right) = a_R a_{y,2} + b_R \phi, \quad (2.3.16)$$

wobei

$$a_R = \frac{2m_2(h_R + h)}{Tmg} \quad \text{und} \quad b_R = \frac{2m_2h}{Tm}.$$

Aus den oben beschriebenen Zusammenhängen geht hervor, dass es bei der Umsetzung des Fahrdynamik-Regelungskonzepts in die Praxis erforderlich ist, möglichst genau den Kippkoeffizienten dynamisch zu messen bzw. zu schätzen. Bei den vorgeschlagenen Konzepten zur Kippvermeidung, insbesondere in den Kapiteln 5 und 6, wird deswegen idealerweise von einem exakt ermittelten Kippkoeffizienten entsprechend Gl. (2.2.2) ausgegangen. Lässt sich der Kippkoeffizient nur näherungsweise anhand der geschätzten Schwerpunkthöhe und der Querschleunigung bestimmen, so kann dies in transienten Fahrmanövern zu konservativen Ergebnissen führen. Konservativ bedeutet hier, dass das Regelungssystem früher eingreift als es erforderlich wäre, um in effizienter

Weise ein Umkippen zu verhindern. Idealerweise wird man versuchen, durch eine Fahrzustandserkennung die Differenz zwischen stationärer und dynamischer (tatsächlicher) Kippgrenze zu ermitteln und damit einen Notfall-Eingriff in kippkritischen Situationen entsprechend anzupassen.

## 2.4 Übersicht über bestehende Systeme zur Verbesserung der Fahrdynamik

Nachfolgend werden einige bestehende und bereits in den Markt eingeführte Fahrwerk- bzw. Fahrdynamikregelungssysteme beschrieben. Das Augenmerk liegt hierbei insbesondere auf Systemen zur Beeinflussung der Wankdynamik und auf solchen, die eine Reduktion der Kippgefahr bewirken.

### 2.4.1 Aktive/semiaktive Fahrwerkregelsysteme

Bei der Abstimmung des Fahrwerks muss ein Kompromiss zwischen Fahrsicherheit und Fahrkomfort bzw. Ladegutschonung getroffen werden. Eine Fahrwerksabstimmung mit weicher Feder-/Dämpferkennung wirkt sich günstig auf den Schwingungskomfort und die Ladegutschonung aus. Fahrmanöver von Fahrzeugen mit weicher Aufbaudämpfung haben jedoch große Radlastschwankungen und ein kräftiges Überschwingen des Wankwinkels zur Folge. Neben einer vergrößerten Fahrbahnbeanspruchung ist dabei mit dem trägen Ansprechen des Fahrzeugs auf Lenkbewegungen ein schlechtes Handling verbunden. Bei Anregungsfrequenzen durch Lenkung oder Störgrößen im Bereich der Aufbau- und Achsresonanzfrequenz ist zudem aus Sicherheitsgründen eine straffe Dämpfung vorteilhaft. Der Bedämpfung der Wankdynamik durch eine harte Auslegung der Radaufhängungen, d. h. der Fahrzeugfederung und -dämpfung, sowie der Wankstabilisatoren, sind andererseits auf Grund der Nachgiebigkeit der Reifen Grenzen gesetzt.

Ein nahe liegender Weg, um eine Reduktion der Kippgefahr zu erzielen, ist der, direkt über aktive bzw. semiaktive Systeme in die Wankdynamik einzugreifen. Als historischer Vordenker aktiver/semi-aktiver Fahrwerkregelsysteme gilt Citroën. Bereits 1955 wurde in den Citroën DS erstmals serienmäßig die Niveauregulierung eingebaut. U. a. war es hiermit möglich die Wanksteifigkeit (manuell) einzustellen. Bei semi-aktiven Systemen wie bei der damaligen Niveauregulierung erfolgt kein Energieeintrag durch Aktuatoren. Durch semi-aktive Auslegung der Fahrzeugfederung bzw. -dämpfung eines Fahrzeugs kann dessen Wankdynamik beeinflusst werden, indem beispielsweise die Wankdämpfung in Abhängigkeit der Zuladung oder des Fahrzustands (z. B. Wankrate bzw. -beschleunigung) verhärtet wird. In [79] wird ein, von den Firmen Mannesmann Sachs und Wabco entwickelter, auf der Luftfederung basierender, Stoßdämpfer beschrieben, bei dem automatisch über das Regelungssystem CDC ("Continuous Damping Control") bzw. PDC ("Pneumatic Damping Control"), in Abhängigkeit des Beladungszustands,

stufenlos die Kennlinie des Dämpfers eingestellt wird. Diese Technologie wird bereits von mehreren Lkw-Firmen in Serie eingesetzt.

Bei aktiven Systemen wird die Reaktion auf eine Kraftänderung durch in Abhängigkeit von fahrdynamischen Größen elektronisch geregelte elektrische, hydraulische oder pneumatische Aktuatoren unterstützt. Eine aktive Gegenneigung des Fahrzeugaufbaus bzw. eine Begrenzung der Neigung lässt sich entweder durch aktive Stabilisatoren oder durch aktive Fahrzeugfederung erzielen. In [80] wird ein Regelungssystem beschrieben, bei dem ein aktiver Stabilisator, in Abhängigkeit der Wankrate und -beschleunigung, einen bestimmten Neigungswinkel des Fahrzeugaufbaus einstellen kann, womit eine Reduktion der Kippgefahr erzielt wird. Die Technologie der aktiven Stabilisatorregelung wird im Land Rover bereits in Serie unter der Bezeichnung ACE (“Active Cornering Enhancement”) ausgeliefert. Ähnlich hierzu auch das System Dynamic Drive der Firma BMW [75]. In [55] wird mit dem ABC (“Active Body Control”) ein aktives Feder-Dämpfer-System beschrieben, dessen Ziel es ist, das Fahrzeug – in diesem Fall einen Bus – in horizontaler Position zu halten und gleichzeitig die Aufbauschwingungen zu bedämpfen. Über eine aktive Hydropneumatik, d. h. einen Hydraulikzylinder mit Drosselmodul, wird individuell an jedem der vier Radzylinder in Abhängigkeit des Fahrzustands der dafür notwendige Druck erzeugt. Auf Stabilisatoren kann dabei ganz verzichtet werden. Ende 1999 wurde diese Technologie der aktiven Fahrwerksabstimmung erstmals im Mercedes CL-Coupé von DaimlerChrysler in Serie eingeführt. Dem Einsatz im Nutzfahrzeugbereich stehen allerdings die mit aktiven Stabilisatoren, bzw. mit dem ABC, verbundenen hohen Kosten für Sensorik und Aktuatorik sowie der für das aktive System erforderliche Energieaufwand entgegen.

## 2.4.2 Fahrdynamikregelung ESP

Bei Fahrdynamikregelungssystemen, die auf dem selektiven Abbremsen einzelner Räder bzw. dem Eingriff in das Motormanagement, basieren (ESP/FDR/DSC/PSM, [121, 122, 90, 41]), wird in längs-, quer- und gierendynamisch kritischen Situationen in die Fahrdynamik in der Weise stabilisierend eingegriffen, dass das Fahrzeug vom Fahrer möglichst in gewohnter Weise handhabbar bleibt. Damit wird eine Stabilisierung des Fahrzustandes erreicht und auch eine Reduktion der indirekt durch kritische Fahrsituationen induzierten Kippgefahr.

Bei diesen Systemen werden durch gezielte Änderung des Längsschlupfes anhand der integrierten Brems- und Antriebsschlupfregelung (ABS bzw. ASR/TCS/ASC) die Längskräfte an den verschiedenen Rädern eingestellt, womit indirekt die Querkräfte beeinflusst werden können. Aus dem Lenkradwinkel, der Fahrgeschwindigkeit und der Querbeschleunigung wird die Sollgiergeschwindigkeit ermittelt und mit der tatsächlichen Gierrate verglichen. Anhand der Differenz der beiden Signale wird bestimmt, ob sich ein wesentlich vom normalen Fahrzustand abweichendes unter- bzw. übersteuerndes Fahrverhalten einstellt. Sobald ein diesbezüglich festgelegtes Toleranzband über- bzw. unterschritten wird, so wird bei Übersteuern aktiv das kurvenäußere Vorderrad abgebremst und bei untersteuerndem Verhalten das kurveninnere Hinterrad. Dadurch wird

es möglich, das aus dem Über- bzw. Untersteuern resultierende Gierstörmoment durch ein entgegengerichtetes stabilisierendes Giermoment zu kompensieren.

Im Nutzfahrzeubereich bezeichnet EBS (Electronic Braking System) das elektronische Bremssystem, welches auf der konventionellen Druckluft-Bremsanlage mit Druckluftversorgung, Feststellbremsanlage und Anhängersteuerung aufbaut und Eingriffsmöglichkeiten über die elektrisch gesteuerte Betriebsbremsanlage, ABS, ASR, die Motorbremsanlage und den Retarder ermöglicht [28]. Basierend auf einem Eingriff über das EBS wird in [63, 24, 102] das von der Robert Bosch GmbH (bzw. Knorr Bremse AG) entwickelte ESP für Nutzfahrzeuge beschrieben. Die erweiterte Funktionalität des ESP bezieht sich hierbei vor allem auf die Kippvermeidung sowie auf das Verhindern des “Jack-Knifings” bei Sattelschleppern. Die zusätzliche Funktionalität der Kippvermeidung wird als Subsystem des ESPs in [24, 102] unter der Bezeichnung ROP (“Rollover Prevention System”) beschrieben, wobei zwei unterschiedliche Ansätze für die Ermittlung der Kippgefahr Verwendung finden. In [102] wird die Kippgefahr zu diskreten Zeitpunkten während der Fahrt aus der Schlupfdifferenz zwischen den Rädern auf der linken und rechten Seite durch Bremsen bzw. Gas Wegnehmen (entsprechend einer Verzögerung von 0.4 g) ermittelt. Überschreitet die Schlupfdifferenz einen bestimmten Betrag, bedeutet dies, dass die Räder auf einer Seite des Fahrzeugs kurz davor sind, den Bodenkontakt zu verlieren. In [24] wird die Kippgefahr anhand des Beladungszustands und der Querbeschleunigung ermittelt. Bei Auftreten einer Notfallsituation greift ROP durch einen automatischen Eingriff in die Bremsen ein und erzielt den Effekt der Kippvermeidung durch die beiden Effekte: Reduktion der Querbeschleunigung durch Verringerung der Fahrgeschwindigkeit und Reduktion des Wankmoments des Fahrzeugs durch gezielte Reduktion der Reifenseitenkräfte beim Bremsen. Die Ermittlung des Kippkoeffizienten aus der Schlupfdifferenz erfordert, dass ständig in sehr kurzen Zeitabständen in Motormanagement und Bremsen eingegriffen werden muss, um eine permanente Überwachung der Kippgefahr zu gewährleisten. Neben dem Verschleiss und dem zusätzlichen Energieverbrauch ist hierbei zu beachten, dass ein schneller und permanenter Zugriff auf das Kommunikationssystem (z. B. CAN-Bus) erforderlich ist. Die Verwendung der Querbeschleunigung als Indikator für die Kippgefahr erfordert die Kenntnis der Schwerpunktöhe. Insbesondere bei transienten Fahrmanövern gibt die Querbeschleunigung jedoch u. U. nur unzureichend Auskunft über die tatsächliche Kippgefahr wie in Abschnitt 2.3 beschrieben. Dies kann zu konservativen Ergebnissen führen bzw. zu Fahrsituationen in denen das Umkippen nicht verhindert werden kann.

Eine detaillierte Abschätzung des Potenzials radselektiver Bremseingriffe im Nutzfahrzeubereich wird in [66] vorgenommen und hinsichtlich der technischen Umsetzbarkeit bewertet.

Die Längskraftregelung einzelner Räder ist also grundsätzlich geeignet für eine Längs-, Quer-, Gier- und Wankstabilisierung von Straßenfahrzeugen. Die Beeinflussung der Quer-, Gier- und Wankdynamik mit diesem Verfahren erfolgt indirekt über die Längsdynamik und ist deswegen prinzipiell weniger effektiv als der aktive Eingriff über die Lenkung. Zudem gestatten Energie-, Verschleiß- und Komfortüberlegungen keinen Einsatz der gezielten Bremseingriffe an einzelnen Rädern im Dauerbetrieb sondern lediglich als Notfallsystem. Eine kontinuierliche Verbesserung der Wankdynamik durch aktive

Bremseingriffe scheidet somit aus.

## 2.5 Grundlagen der Lenkregelung

Gefährliche Situationen im Straßenverkehr werden häufig durch unerwartete und plötzlich auftretende Gierstörungen, beispielsweise durch Bremsen auf unterschiedlich griffigem Fahrbahnbelag links/rechts ( $\mu$ -split), Seitenwind oder einseitigen Reifendruckverlust, verursacht. Der durchschnittlich geübte (normale) Fahrer neigt bei solchen Situationen auf Grund seiner verzögerten Reaktion und seiner Unerfahrenheit im fahrdynamischen Grenzbereich zu unangemessenen Überreaktionen. Unter Umständen wird hierdurch die Fahrsituation noch ungünstiger und ein Unfall verursacht.

Wie mit dem ESP, so kann auch mit der aktiven Lenkung unmittelbar und wesentlich schneller, als dies dem normalen Fahrer möglich ist, regulierend in die Fahrdynamik des Fahrzeugs eingriffen werden. Wegen des geringen Energiebedarfs und Verschleißes ist die aktive Lenkung nicht beschränkt auf fahrdynamisch kritische Situationen sondern kann auch im Dauerbetrieb verwendet werden, um Sicherheit und Fahrkomfort zu verbessern.

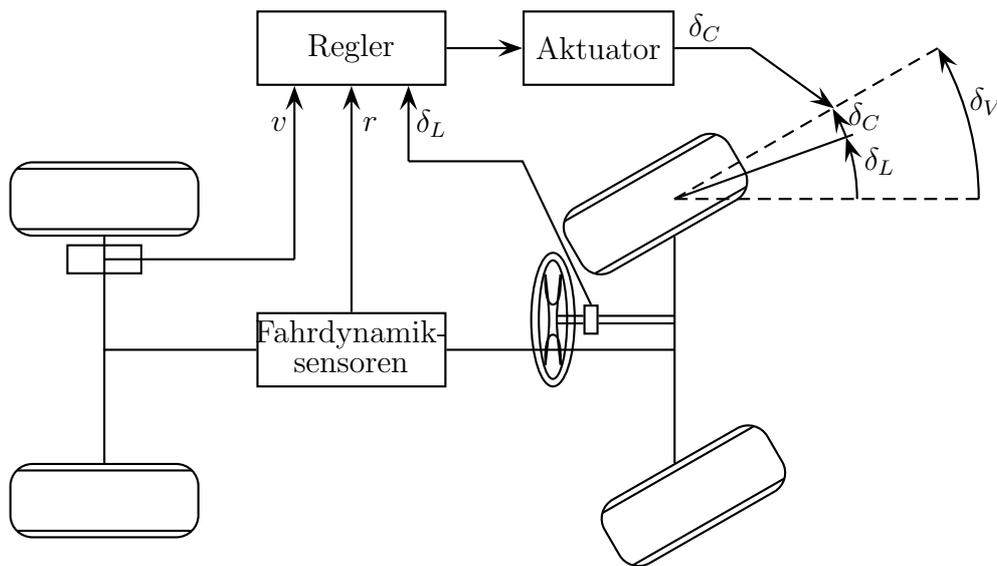
### 2.5.1 Prinzip der aktiven Lenkung

Für eine aktive Lenkung kommen unterschiedliche Prinzipien in Frage: eine Lenkwinkelüberlagerung (mechanische Zusatzlenkung bzw. Überlagerungslenkung) und Steer-by-Wire.

#### *Mechanische Zusatzlenkung*

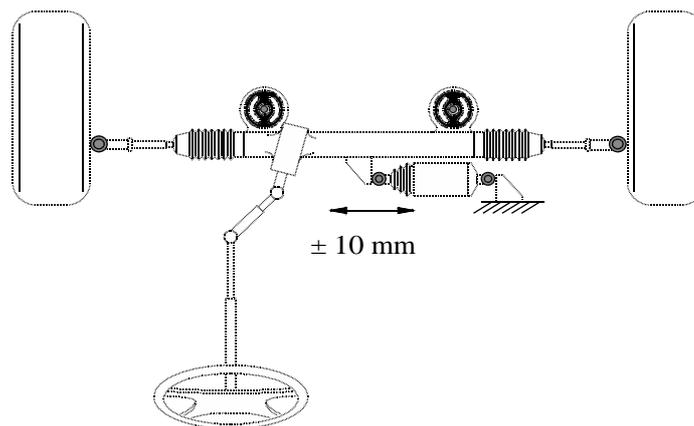
Bei konventionell gelenkten Fahrzeugen besteht, abgesehen von der Elastizität der Lenkung, ein festes Verhältnis zwischen Lenkradeinschlag und dem Vorderradlenkwinkel. Mittels einer aktiven Zusatzlenkung kann, zusätzlich zu dem vom Fahrer aufgebrachten Lenkwinkelanteil  $\delta_L$ , ein kleiner Zusatzlenkwinkel  $\delta_C$  gestellt werden. Wie in Bild 2.2 dargestellt, wird dabei der dynamische Fahrzustand durch geeignete Sensorik erfasst. Ein Regelgesetz generiert einen Sollwert für den Zusatzlenkwinkel, der über einen Lenkaktuator gestellt wird.

Bereits 1969 wurde in [72] eine in ein Versuchsfahrzeug integrierte mechanische Zusatzlenkung beschrieben. Hierbei wurde ein hydraulisches Stellglied eingesetzt, um über eine seitliche Verschiebung des Lenkgetriebes einen Zusatzlenkwinkel, zu dem über das Lenkrad aufgebrachten Lenkwinkelanteil, zu stellen. Damals scheiterte ein weiteres Verfolgen dieser Technologie u. a. an den hohen Kosten für Aktuatorik und Sensorik. 1996 wurde von Bosch eine Zusatzlenkung entwickelt, bei der der Zusatzlenkwinkel mechanisch durch eine Relativverdrehung der geteilten Lenksäule mittels eines Planetengetriebes erzeugt wird [76]. Mit dieser Technologie wurde bei der Firma BMW unter der Bezeichnung AFS (“Active Front Steering”) bereits ein Prototyp entwickelt [50].



**Bild 2.2:** Prinzip der aktiven Zusatzlenkung.

Bild 2.3 zeigt einen weiteren Realisierungsvorschlag der Firma TRW für eine aktive Zusatzlenkung. Das Lenktriebegehäuse ist über Gummilager gegenüber der Karosserie um ca.  $\pm 10$  mm in Richtung der Spurstangen verschiebbar gelagert. Ein Linearaktuator kann einen dieser Verschiebung entsprechenden Zusatzlenkwinkel  $\delta_C$  von ca.  $\pm 3$  Grad stellen. Der Aktuator selbst kann dabei elektrisch, hydraulisch oder pneumatisch ausgeführt werden.



**Bild 2.3:** Realisierungsvorschlag für eine aktive Zusatzlenkung (TRW).

### *Steer-by-Wire*

Mittel- bis langfristig zeichnet sich die Einführung von Steer-by-Wire ab, wobei der gesamte Lenkwinkel von einem bzw. mehreren Lenkmotoren gestellt wird. Die bis dato vom Gesetzgeber vorgeschriebene mechanische Verbindung zwischen Lenkrad und Vorderrädern wird unterbrochen und durch ein elektrisches Signal ersetzt.

SbW bietet die idealen Voraussetzungen für die Implementierung von Lenkregelungsgesetzen zur Verbesserung der Fahrdynamik und damit zur Verbesserung von Fahr-sicherheit und Fahrkomfort. Weitere wichtige Vorteile von SbW ohne Anspruch auf Vollständigkeit sind (siehe auch [85, 129]):

- Eine variable, an den Fahrzustand (z. B. Geschwindigkeit und Lenkradwinkel) angepasste, Lenkübersetzung,
- eine variable, z. B. an Fahrgeschwindigkeit, Lenkradwinkelgeschwindigkeit und gemessenes Handkraftmoment angepasste, Lenkkraftunterstützung,
- der Gewinn an konstruktivem Freiraum (Innenraumgestaltung, vereinfachte Rechts-/Linksauslegung der Lenkung),
- eine Reduktion der Teilevielfalt und des Montageaufwands,
- eine verbesserte passive Sicherheit (Crash-Sicherheit) durch Wegfall der Lenksäule,
- die Möglichkeit der Verwendung alternativer Lenkwinkleingabegeräte (z. B. Side-Stick) und
- als Basis für autonomes bzw. teilautonomes Fahren (“Automated Highway Systems”, Parkassistenzsysteme, Folgen im Stop and Go-Verkehr).

Auch ist mit SbW eine haptische Rückmeldung fahrdynamisch kritischer Zustände an den Fahrer möglich und eröffnet somit neue Perspektiven für die Gestaltung der Mensch/Maschine-Schnittstelle. Am Ende der Entwicklung von Steer-by-Wire Lenksystemen steht, nach Klärung der rechtlichen Grundlagen für Zulassungs- und Haftungsfragen, langfristig eine rein elektrische Lenkung, auch mit der Möglichkeit von separaten Lenkaktuatoren für die einzelnen Räder. Mittelfristig ist aber eher die Markteinführung von Steer-by-Wire mit Übergangslösungen basierend auf einer mechanischen oder hydraulischen Rückfallebene vorstellbar [50]. Diesen Vorteilen steht ein erheblicher Aufwand bzgl. der für eine Umsetzung dieser neuen Technologie erforderlichen Sicherheitsvorkehrungen bspw. für ein fehlerfreies Funktionieren von Aktuatorik und Sensorik sowie die Umsetzung von Ausfall- (“Fail-Safe”-)Strategien gegenüber [48]. In diesem Zusammenhang sind neue Anforderungen an elektrische Lenkanlagen in einen Entwurf für die überarbeitete ECE-Regelung 79 eingeflossen.

Für die regelungstechnische Realisierung von SbW wird neben dem Lenkaktuator eine zweite Stelleinrichtung, ein kraftreflektierendes Lenkrad oder Sidestick, benötigt, die dem Fahrer durch haptisches Feedback das Lenkgefühl vermittelt. In regelungstechnischer Hinsicht kann man sich die funktionale Entwicklung einer Steer-by-Wire-Lenkung

in drei Schritten vorstellen. Im ersten Schritt wird, bspw. durch bidirektionale Rückführung der Positionen über dynamische Regelgesetze auf die beiden Aktuatoren, zunächst das Lenkgefühl entsprechend einer konventionellen Lenkung dargestellt. Im zweiten Schritt wird eine variable an Lenkradwinkel und Fahrgeschwindigkeit angepasste Lenkübersetzung realisiert bevor im letzten Schritt diverse Fahrdynamikregelungskonzepte und Einstellungen für haptisches Feedback realisiert werden können. Regelungskonzepte für SbW werden u. a. in [36, 37, 38, 97, 98, 99] beschrieben.

## 2.5.2 Gierstabilisierung durch robuste Lenkregelung

Zwei primäre regelungstechnische Ziele werden mit den aus der Literatur bekannten Ansätzen zur Gierstabilisierung basierend auf den oben genannten aktiven Lenkunterstützungssystemen verfolgt. Das erste Ziel ist die Unterdrückung von Gierstörungen, das zweite Ziel bezieht sich auf die Verbesserung des Lenkübertragungsverhaltens (“Handling”).

Nachfolgend werden für die Umsetzung dieser Ziele beispielhaft zwei beim DLR entwickelte Reglerstrukturen erläutert. Hierbei wird von einer mechanischen Überlagerungslenkung ausgegangen.

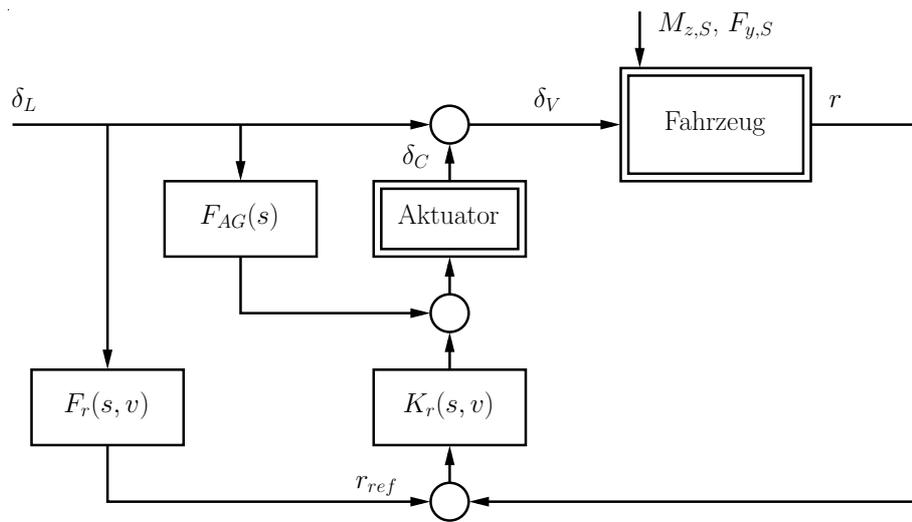
### *Robuste Entkopplung*

Kernelement der robusten Lenkregelung zur Gierstabilisierung von Fahrzeugen ist die robuste Entkopplung, mit deren Hilfe eine robuste, d. h. eine vom Fahr- und Straßenzustand unabhängige, einseitige systemdynamische Trennung der Gierbewegung von der Querbewegung des Fahrzeugs realisiert werden kann [2, 9, 6, 7]. Eine zusammenfassende Darstellung der Arbeiten zu diesem Thema wird in [31] gegeben. Dort werden auch Anpassungen an die praktischen Erfordernisse vorgenommen.

Realisiert werden können verschiedene im Zusammenhang mit der robusten Entkopplung entwickelte Regler mit der in Bild 2.4 dargestellten Reglerstruktur. Die Gierrate  $r$  wird mit der Referenzierrate  $r_{ref}$  verglichen und die Differenz über ein Regelgesetz  $K_r(s, v)$  und die Überlagerungslenkung auf die Vorderradlenkung zurückgeführt. Als Modell für die Berechnung der Sollgierrate  $r_{ref}$  kann bspw. ein komplexes realitätsnahes Fahrdynamikmodell, das lineare Einspurmodell mit nominellen bzw. zu Beginn der Fahrt geschätzten Fahrzeugparametern oder eine Übertragungsfunktion erster Ordnung verwendet werden [31]. Eine Anpassung des Vorfilters an die Geschwindigkeit ist in jedem Fall notwendig, eine Anpassung an den Kraftschluss zwischen Reifen und Straße, zumindest was stationäre Straßenverhältnisse anbelangt, wünschenswert.

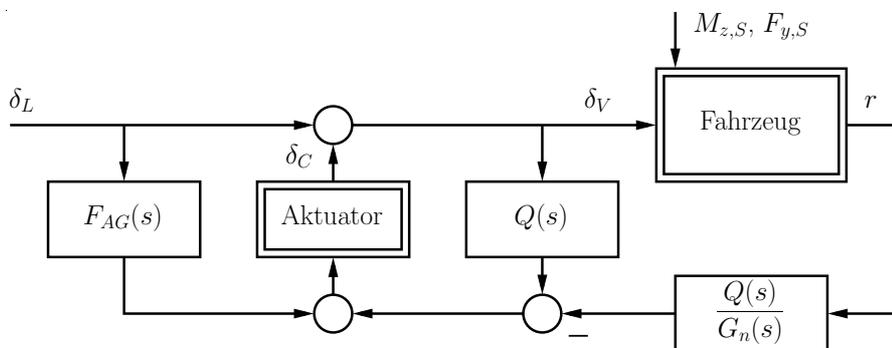
### *Inverse Modellfolgeregelung*

Die inverse Modellfolgeregelung mit zwei Freiheitsgraden [67, 100, 77], in der Literatur auch als “Disturbance Observer” oder “Model Regulator” bezeichnet, stellt einen Ansatz dar, der, angewandt auf die Gierstabilisierung, in seiner störunterdrückenden Wirkung der robusten Entkopplung [3] sehr ähnlich ist [34, 35, 15, 16, 61]. Dieser Ansatz wurde auch erfolgreich auf Problemstellungen in der Flugregelung übertragen [25, 26]. Die



**Bild 2.4:** Allgemeine Struktur der robusten Entkopplung zur Gierstabilisierung.

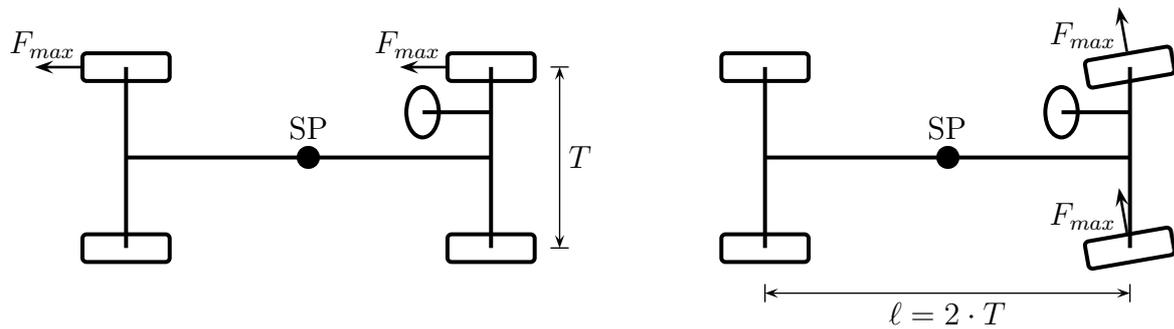
Struktur der inversen Modellfolgeregelung ist in Bild 2.5 dargestellt. Aus der Gierrate  $r$  und dem Vorderradlenkwinkel  $\delta_V$  wird das Stellsignal für den Lenkaktuator berechnet. Das gewünschte Lenkübertragungsverhalten wird dabei durch die „Wunschübertragungsfunktion“  $G_n(s)$  vorgegeben. Das Vorfilter  $F_{AG}$  lässt sich nutzen, um das An-



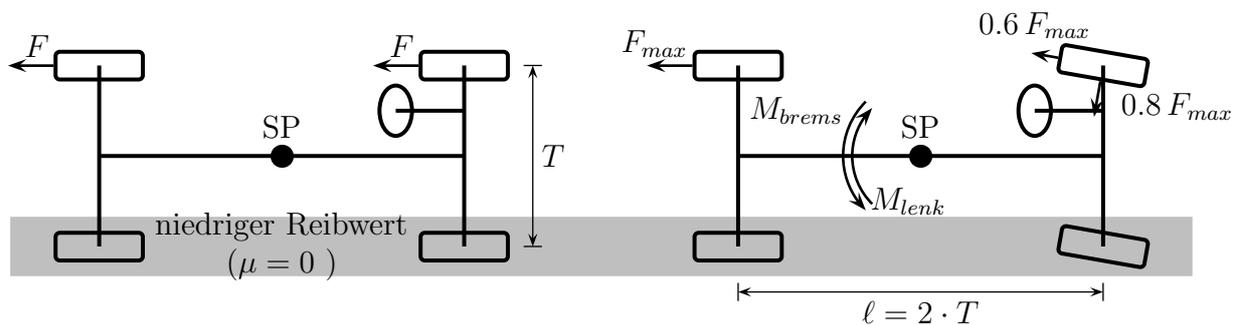
**Bild 2.5:** Inverse Modellfolgeregelung mit zwei Freiheitsgraden zur Gierstabilisierung.

sprechverhalten (die Agilität) der Lenkung, bspw. in Abhängigkeit der Lenkraddrehrate  $\dot{\delta}_L$ , zu verbessern.

Beide in Bild 2.4 und 2.5 dargestellten Reglerstrukturen verwenden eine Überlagerungslenkung, die Strukturen lassen sich aber zwanglos auf eine Steer-by-Wire-Lenkung übertragen.



**Bild 2.6:** Vergleich der Gierkompensationsmomente beim einseitigen Bremsen und beim Lenken.



**Bild 2.7:** Vergleich der Effektivität der Lenkung gegenüber dem einseitigen Bremsen bei einer  $\mu$ -split Bremsung.

### 2.5.3 Vergleich von aktivem Lenk- und Bremseneingriff

In [12] wird u. a. ein Vergleich von radselektivem Bremsen und der aktiven Lenkung hinsichtlich ihrer Effektivität zur Gierstabilisierung vorgenommen. Dargestellt in Bild 2.6 ist ein Vergleich der beiden Systeme hinsichtlich der prinzipiell zur Verfügung stehenden Gierkompensationsmomente. Unter der Annahme, dass der Radstand in etwa gleich der doppelten Spurweite ist, d. h.  $\ell = 2T$  ist das erreichbare Gierkompensationsmoment beim einseitigen Bremsen  $M_{komp} = T F_{max}$  und beim Lenken  $M_{komp} = 2T F_{max}$ , d. h. doppelt so hoch.  $F_{max}$  ist dabei die maximal vom Reifen auf die Straße übertragbare Kraft. Bei einer  $\mu$ -split Bremsung müsste das bremsgeregelte Fahrzeug, um das Störgiermoment vollständig zu kompensieren, ein entsprechendes stabilisierendes Giermoment aufbringen, indem der Kraftschluss auf der Fahrbahnseite mit gutem Reibwert zurückgenommen wird. Im akademischen Extremfall mit  $\mu = 0$ , wie in Bild 2.6 gezeigt, müssen die Bremsen vollständig gelöst werden und das Fahrzeug wird nicht abgebremst. Da die Vergrößerung des Bremsweges nicht oder nur bedingt akzeptiert werden kann, wird beim ESP das Störgiermoment durch die sogenannte Giermomentaufbauverzögerung nur zu Beginn eines solchen Manövers abgeschwächt. Im weiteren Verlauf des Manövers wird dann dem Fahrer selbst diese Aufgabe übertragen und der Längsstabilisierung, im Sinne eines möglichst kurzen Bremsweges, wird wieder Priorität eingeräumt. Wie in Bild 2.7 gezeigt, kann durch einen automatischen Lenkeingriff das Störgiermo-

ment vollständig kompensiert werden und gleichzeitig kann nahezu das vollständige Kraftschlusspotenzial auf der Seite mit hohem Kraftschluss ausgenutzt werden, um das Fahrzeug abzubremesen.

Dieses Beispiel zeigt deutlich den prinzipbedingten Zusatznutzen der aktiven Lenkung gegenüber dem reinen radselektiven Bremsen.

## 2.6 Auswahl eines geeigneten Fahrzeugmodells

Bei der Entwicklung von Fahrdynamikregelsystemen für Pkw hat sich das bereits 1940 von Riekert und Schunck [107] entwickelte *Einspurmodell* bewährt, welches den Zusammenhang zwischen Quer- und Gierdynamik für mit einer gemessen an der Einfachheit des Modells sehr hohen Präzision beschreibt (für Querbeschleunigungen  $a_y < 0.4 g$ ).

Die Wankdynamik, die eine wesentliche Rolle beim Kippen spielt, wird in diesem Modell jedoch vernachlässigt. Aus diesem Grund wird in Anhang A detailliert ein erweitertes Einspurmodell hergeleitet, welches die gegenseitige Beeinflussung der Quer-, Gier- und Wankdynamik beschreibt. Auf Basis des als *Einspurmodell mit Wankerweiterung* bezeichneten Modells wird in den folgenden Kapiteln der Reglerentwurf durchgeführt. Die Fahrgeschwindigkeit  $v$  wird hierbei als Fahrzeugparameter interpretiert. Diese Vereinfachung ist zulässig, wenn man davon ausgeht, dass die Längsdynamik langsam gegenüber der Quer-, Gier- und Wankdynamik ist.

In der Fahrdynamik wird unterschieden zwischen unveränderlichen Fahrzeugparametern (z. B. Spurweite, Radstand), sich von Fahrt zu Fahrt ändernden aber während der Fahrt unveränderlichen Parametern (z. B. Masse, Schwerpunktlage) und während der Fahrt variierenden Parametern (z. B. Fahrgeschwindigkeit  $v$ , Kraftschluss Reifen/Straße  $\mu$ ). Hierbei wird zudem unterschieden zwischen messbaren Parametern (z. B. Fahrgeschwindigkeit) und nicht bzw. nur schwer messbaren Parametern (z. B. Kraftschluss).

Die Definition des Kippkoeffizienten hat gezeigt, dass der wesentliche beladungsabhängige Einflussparameter die Schwerpunkthöhe bzw. die Höhe des Aufbauschwerpunkts über der Rollachse ist. Man kann zudem davon ausgehen, dass Überschlagunfälle, die direkt durch Fahrmanöver verursacht werden, sich vorzugsweise auf trockener Straße ( $\mu = 1$ ) ereignen. Als die beiden wesentlichen im Zusammenhang mit der Kippvermeidung das Fahrverhalten bestimmenden unsicheren bzw. variierenden Parameter werden deswegen im Folgenden die Fahrgeschwindigkeit  $v$  und die Schwerpunkthöhe  $h$  betrachtet. Die Fahrgeschwindigkeit  $v$  wird als messbar angenommen [73]. Bei der Schwerpunkthöhe wird zunächst nicht festgelegt, ob sie messbar bzw. schätzbar oder unsicher ist. Alle anderen Fahrzeugparameter werden als unveränderlich angenommen. Für die numerischen Werte der Fahrzeugparameter wurde der Datensatz eines Lkw's aus der Literatur [80] übernommen.

Hierbei sei angemerkt, dass sich je nach Fahrzeugtyp grundsätzlich sehr unterschiedliche Anforderungen bzgl. der beim Entwurf einer Fahrdynamikregelung zu berücksichtigen-

den Betriebsbedingungen ergeben. So können beispielsweise bei luftgefederten Nutzfahrzeugen oder bei Fahrzeugen, die mit aktiver Fahrwerksregelung ausgestattet sind, verschiedene Fahrzeugparameter bestimmt werden. Bspw. können über die Druckmessung in den Federbalgen die Masse des Fahrzeugaufbaus, Massenträgheitsmomente, lineare Feder-Ersatzsteifigkeiten, lineare Dämpfer-Ersatzraten und die Lage des Schwerpunkts geschätzt werden. Auf Grund der sich teilweise sehr stark ändernden Beladungszustände bei diesen Fahrzeugen kann es sehr hilfreich sein, diese Informationen in den regelungstechnischen Entwurf mit einzubeziehen. Beispielsweise kann als zusätzlicher messbarer Parameter die Fahrzeugmasse bzw. die Masse des Aufbaus angenommen werden, die somit für eine Anpassung der Fahrdynamikregelgesetze zur Verfügung steht.

Bei der Entwicklung des Fahrdynamikregelungssystems muss darauf geachtet werden, dass die Verbesserung der Fahrsicherheit und des Fahrgefühls für alle Betriebsbedingungen, d. h. robust bzgl. variierender oder unsicherer Fahrzeugparameter, erfolgt. Hieraus ergeben sich die Anforderungen an den robusten Reglerentwurf.

## 2.7 Anforderungen an den robusten Reglerentwurf

Das Einspurmodell bzw. das Einspurmodell mit Wankerweiterung eignet sich auf Grund seiner geringen Komplexität, der guten Übereinstimmung mit der Fahrdynamik des realen Fahrzeugs (für  $a_y < 0.4g$ ) und der relativ geringen Anzahl variierender bzw. unsicherer Parameter ideal für eine Anwendung der Verfahren der parametrischen robusten Regelungstechnik, insbesondere des Parameterraumverfahrens [5]. Dieses wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit in systematischer Weise für den Entwurf und die Robustheitsanalyse des Fahrdynamikregelungssystems zur Kippvermeidung eingesetzt.

Fünf Eigenschaften sind beim Entwurf von parametrischen Regelungssystemen von zentraler Bedeutung: *Stabilität*, *Regelgüte*, *Robustheit*, *Einfachheit* und *Transparenz*.

*Stabilität:* Bei sich nicht ändernden Betriebsbedingungen ist der Entwurf eines stabilen Regelungssystems eine Standardaufgabe der Regelungstechnik.

*Regelgüte:* Gutes Regelverhalten lässt sich durch mathematische Bedingungen im Zeit-, Eigenwert- und Frequenzbereich formulieren. Zeitbereichskriterien sind leicht interpretierbar, mathematisch jedoch schwierig zu handhaben. Sie eignen sich insbesondere für optimierungsbasierte Verfahren, die Zeitschriebe von Simulationen auswerten. Viele analytische regelungstechnische Entwurfsverfahren wie auch das Parameterraumverfahren verwenden dagegen einfacher handhabbare Eigenwert- bzw. Frequenzbereichsspezifikationen.

*Robustheit:* Die Robustheit der Eigenschaften Stabilität und Regelgüte ist dann von Bedeutung, wenn die zu regelnde Strecke, wie in diesem Fall das Fahrzeug, stark von variierenden Betriebsparametern wie Masse, Schwerpunkthöhe, Kraftschluss und Geschwindigkeit abhängt oder wenn Parameter nur ungenau bekannt sind. Auf Grund

vereinfachender Modellannahmen ist es auch notwendig, im regelungstechnischen Entwurf einen möglichen Einfluss nichtmodellierter Dynamik zu berücksichtigen. So wird beim Einspurmodell mit Wankerweiterung beispielsweise der Einfluss der Nick- und Hubdynamik auf das Fahrverhalten vernachlässigt. Diese Moden können jedoch vor allem beim Abbremsen bzw. Beschleunigen in der Kurve deutlichen Einfluss auf das Fahrverhalten haben und unter Umständen bei Nichtberücksichtigung das gute Regelverhalten zerstören.

*Einfachheit:* Geht man beim Entwurf von einfachen Reglerstrukturen aus, so dient dies einem übersichtlichen Entwurfsprozess sowie möglicherweise physikalisch interpretierbaren Reglerparametern. Ziel der parametrischen robusten Regelungstechnik ist es, das Potenzial einfacher Reglerstrukturen möglichst gut auszunutzen.

*Transparenz:* Das Formulieren regelungstechnischer Entwurfsspezifikationen und das Festlegen der Reglerstruktur ist ein iterativer Prozess, der ein hohes Maß an Transparenz der Ergebnisse verlangt. Diese Transparenz ermöglicht es, Rückschlüsse der Ergebnisse auf Reglerstruktur und Spezifikationen vorzunehmen und diese gegebenenfalls zu modifizieren.

Bei der Entwicklung von Regelungsstrategien für die Verbesserung der Fahrdynamik eignet sich deswegen das Parameterraumverfahren in vielerlei Hinsicht. Auf Grund der wirtschaftlichen Restriktionen hinsichtlich zusätzlicher Sensorik und Aktuatorik muss man sich auf den Einsatz weniger Sensoren beschränken. Einfache Reglerstrukturen und die Transparenz beim Reglerentwurf fördern die Applizierbarkeit, d. h. das Übertragen der regelungstechnischen Vorgehensweise von einem Fahrzeugtyp auf den anderen unter Berücksichtigung der veränderten Dynamik.

### 3 Entwurf und Analyse robuster Regelungssysteme im Parameterraum

Die Analyse und Synthese linearer Regelungssysteme ist relativ einfach, wenn entweder das Eingangs/Ausgangs-Verhalten oder die Systemstruktur mit sämtlichen Streckenparametern hinreichend genau bekannt ist und über den gesamten Betriebsbereich als konstant angenommen werden kann. Reale Systeme unterscheiden sich jedoch vom mathematischen Modell und Parameter variieren auf Grund stark veränderlicher Betriebsbedingungen. Beim robusten Reglerentwurf geht man deswegen nicht nur von einem nominellen Entwurfsmodell aus sondern von einer ganzen Klasse von Streckenmodellen. Die Wahl der Modellklasse ist eng verbunden mit der Wahl des Analyse- bzw. Syntheseverfahrens. So werden die von Frequenzbereichsverfahren verwendeten Modelle meist durch Identifikation, d. h. über die Auswertung experimenteller Daten, gewonnen. Modellfehler können dann entsprechend durch Fehlerschranken für Frequenzgänge oder Frequenzgangmatrizen beschrieben werden [43, 81, 105, 18]. Die Anwendung von Frequenzbereichsverfahren hat weite Verbreitung in kommerzieller Software [19, 39, 56] gefunden und stellt insbesondere bei Mehrgrößen-Systemen höherer Ordnung ein effizientes Mittel für den Reglerentwurf dar. Allerdings führt die Anwendung selbst bei relativ einfachen Systemen oft zu Reglern hoher Ordnung, die damit auch schwer implementierbar sind, sowie teilweise zu konservativen Ergebnissen. Die Verfahren der parametrischen robusten Regelungstechnik hingegen verwenden ein analytisches Modell der Regelstrecke [4, 5]. Die Modellgleichungen werden dabei zunächst aus physikalischen Überlegungen hergeleitet und linearisiert. Die eingehenden physikalischen Streckenparameter werden entweder gemessen oder als variierend bzw. unsicher innerhalb von zu bestimmenden Intervallen angenommen. Das so gebildete Modell wird als lineares System mit unsicheren physikalischen Parametern oder als parametrisches lineares zeitinvariantes (LTI-) System bezeichnet. Für diese Systemklasse hat sich das Parameterraumverfahren [1, 4, 5] in einer Vielzahl von Anwendungen im Bereich des Entwurfs und der Analyse robuster Regelungssysteme bewährt.

Beim Parameterraumverfahren werden Spezifikationen, die sich auf Stabilität und Regelgüte des geschlossenen Regelkreises beziehen, in die Ebene zweier Strecken- und/oder Reglerparameter abgebildet. In der Robustheitsanalyse wird der geschlossene Regelkreis hinsichtlich seiner Robustheit gegenüber variierenden bzw. unsicheren Betriebsbedingungen untersucht. Die Regelgüte-Spezifikationen werden dabei in die Ebene zweier Streckenparameter abgebildet und auf Robustheit überprüft. Hängt der geschlossene

Regelkreis von mehr als zwei Parametern ab, so wird der dritte, vierte, etc. Parameter gerastert. Bei der Reglersynthese werden bei vorgegebener Reglerstruktur die Spezifikationen in die Ebene zweier (freier) Reglerparameter abgebildet. Die Abbildung von Regelgüte-Spezifikationen in eine gemischte Ebene bestehend aus einem Strecken- und einem Reglerparameter erfolgt schließlich, um systematisch Regelgesetze mit Verstärkungsanpassung ableiten zu können. Die Spezifikationen die beim Parameterraumverfahren abgebildet werden, können unterschiedlicher Natur sein. In der klassischen Version des Parameterraumverfahrens werden Eigenwertspezifikationen verwendet [1, 4, 5]. Für die Pole des geschlossenen Regelkreises werden dabei Pol-Wunschgebiete in der Eigenwertebene, sogenannte  $\Gamma$ -stabile Gebiete, formuliert. Die Berandung  $\partial\Gamma$  dieser Gebiete wird dann in die Ebene der Strecken- und/oder Reglerparameter abgebildet.

Das Parameterraumverfahren für Ortskurvenkriterien („ $\Theta$ -Stabilität“) wird in [31, 32, 33, 5] beschrieben. Hierbei werden in der Nyquist- oder Popow-Ebene formulierte Entwurfsanforderungen in den Parameterraum abgebildet. Beispiele für Nyquist-Spezifikationen sind Anforderungen hinsichtlich Amplitudenreserve, Phasenreserve, Stabilitätsreserve, das Zweiortskurvenverfahren und das Kreiskriterium. Die beiden letzteren Methoden sowie das Popow-Verfahren werden eingesetzt, um in der Robustheitsanalyse die physikalischen Bedingungen für das Auftreten von Grenzzyklen zu untersuchen.

Das in diesem Kapitel vorgestellte Verfahren stellt eine Erweiterung des Parameterraum-Verfahrens auf frequenzabhängige Betragskriterien dar. Die Erweiterung umfasst die Abbildung im Frequenzbereich formulierter Anforderungen an Stabilität und an quantitative Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises, die Regelgüte betreffend. Damit wird die Einbeziehung der von Frequenzbereichsverfahren, beispielsweise beim  $H_\infty$ -Reglerentwurf, verwendeten so genannten „Loop Shaping“-Kriterien für den Entwurf und die Analyse möglich. Diese Kriterien werden über Gewichtsfunktionen formuliert und beziehen sich u. a. auf die Sensitivität des Regelkreises gegenüber Störgrößeneinflüssen und Messrauschen, auf das Führungsübertragungsverhalten sowie auf die Robustheit dieser Eigenschaften gegenüber strukturierten und unstrukturierten Modellunsicherheiten. Im Gegensatz zu den, von Frequenzbereichsverfahren auf Grund der Methodik bei Entwurf bzw. Analyse erforderlichen, kontinuierlichen Gewichtsfunktionen kann hierbei von diskontinuierlichen und für einzelne Frequenzabschnitte definierten Gewichtsfunktionen ausgegangen werden. Im Zusammenhang mit der Abbildung frequenzabhängiger Betragskriterien in den Parameterraum für die Analyse und Synthese robuster Regelungssysteme wird der neue Begriff der  $\mathcal{B}$ -Stabilität eingeführt (siehe auch [94, 5]).

Frequenzabhängige Entwurfsspezifikationen bzw.  $H_\infty$ -Kriterien im Zusammenhang mit der Synthese parametrischer LTI-Systeme wurden bereits in der Literatur behandelt [69, 22, 23, 114, 109]. In [69] wird beschrieben, wie  $H_\infty$ -Kriterien mit Hilfe der Hurwitz-Bedingung für Systeme mit parametrischen Unsicherheiten bei der Synthese eingesetzt werden können. In Arbeiten von Besson und Shenton [22, 23, 114] wird eine interaktive grafische Entwurfsmethode vorgestellt, bei der aus dem gemischten Sensitivitätsproblem motivierte Frequenzbereichsspezifikationen in die Ebene zweier Reglerparameter abgebildet werden. Der dort angegebene Algorithmus ermöglicht es, das Gebiet in der Ebene der Reglerparameter näherungsweise darzustellen, welches die im Bode-

Amplitudengang spezifizierten Anforderungen an Sensitivitätsfunktionen erfüllt. Ein sehr ähnliches Verfahren hierzu wird in [109] vorgeschlagen.

Das Kapitel ist in 8 Abschnitte unterteilt. In Abschnitt 3.1 werden Anforderungen an die Stabilität und die Regelgüte des geschlossenen Regelkreises im Eigenwert- und Frequenzbereich beschrieben. Dabei wird zunächst von einem nominellen Entwurfsmodell ausgegangen. Abschnitt 3.2 beschreibt die Anforderungen bezüglich Robustheit, die sich aus der Erweiterung nomineller Entwurfsmodelle auf Modelle mit unsicheren bzw. variierenden Parametern und/oder mit unstrukturierten Unsicherheiten ergeben. Das Parameterraumverfahren in seiner klassischen Version, bei dem eigenwertabhängige Entwurfsanforderungen in den Parameterraum abgebildet werden ( $\Gamma$ -Stabilität), wird in Abschnitt 3.3 kurz zusammengefasst. In Abschnitt 3.4 wird der neue Begriff der  $\mathcal{B}$ -Stabilität für frequenzabhängige Entwurfsanforderungen eingeführt. Abschnitt 3.5 zeigt, wie  $\mathcal{B}$ -Stabilitätsanforderungen in den Parameterraum abgebildet werden und in Abschnitt 3.6 wird erläutert, auf welche Weise  $\Gamma$ - und  $\mathcal{B}$ -Spezifikationen simultan abgebildet werden können. Anhand zweier Beispiele, der Analyse eines einfachen Feder-Dämpfer-Systems und eines robusten PI-Reglerentwurfs für eine Gierstabilisierung durch aktive Lenkung, wird in Abschnitt 3.7 das Parameterraumverfahren für  $\mathcal{B}$ -Stabilität im Detail beschrieben, bevor abschließend in Abschnitt 3.8 eine Einschätzung des Verfahrens vorgenommen wird.

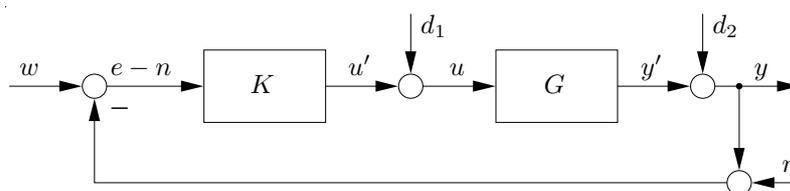
## 3.1 Nominelle Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis

Betrachtet wird zunächst der Standard-Regelkreis in Bild 3.1 mit nominellem Streckenmodell  $G(s)$  und Regler  $K(s)$ .

Nominelle Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis beziehen sich auf interne Stabilität und Regelgüte des nominellen Kreises. Diese Anforderungen lassen sich in geeigneter Form durch mathematische Bedingungen im Eigenwert- und Frequenzbereich spezifizieren.

### 3.1.1 Interne Stabilität

Unter der asymptotischen Stabilität des (nominellen) Regelkreises entsprechend Bild 3.1 versteht man, dass nach Verschwinden der externen Eingangssignale  $w$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  und  $n$  sämtliche internen Signale auf Null abklingen. In diesem Zusammenhang wird der Regelkreis als *intern stabil* bezeichnet. Eine hinreichende und notwendige Bedingung für die interne bzw. innere Stabilität lautet entsprechend [43]:



**Bild 3.1:** Standard-Regelkreis mit Einheitsrückführung im Eingrößenfall.

In Bild 3.1 gelten folgende Bezeichnungen:

$y$	Regelgröße	$d_1$	Eingangsstörung
$u$	Stellgröße	$d_2$	Ausgangsstörung
$e$	Regelfehler	$y'$	Streckenausgang
$w$	Führungsgröße	$u'$	Reglerausgang
$n$	Messrauschen	$e - n$	Reglereingang

*Satz 3.1. (Interne Stabilität)*

Der Standard-Regelkreis ist genau dann intern stabil, falls

1. sämtliche Nullstellen von  $1 + K(s)G(s)$  in der linken Hälfte der Eigenwert-Ebene  $\operatorname{Re}(s) < 0$  liegen und
2. keine Pol/Nullstellen-Kürzungen bei der Bildung des Produkts  $K(s)G(s)$  in  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$  auftreten.

□

Für ein lineares zeitinvariantes System in Zustandsform bedeutet interne Stabilität, dass die Eigenwerte der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  eines entsprechend formulierten Zustandsraummodells in der linken Halbebene  $\operatorname{Re}(s) < 0$  liegen.

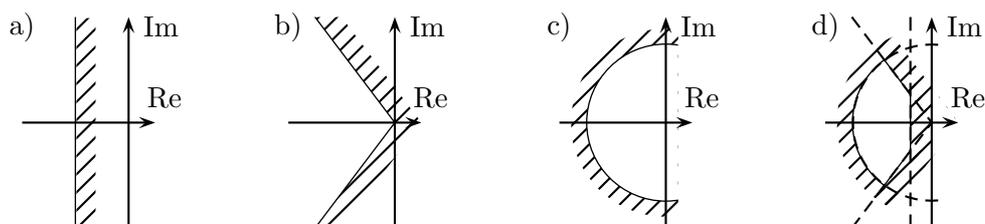
*Anmerkung 3.1.* Treten Pol/Nullstellenkürzungen in der rechten Halbebene auf, so ist dies mit dem Aufklingen einzelner interner Signale verbunden, d. h. einzelne Zustände des Systems sind instabil. Ergo ist das Gesamtsystem instabil. Bestimmte Übertragungsfunktionen (bestimmter externer Eingangssignale zu abklingenden internen Signalen) können jedoch stabil sein.

□

### 3.1.2 Eigenwertabhängige Entwurfsanforderungen

Die Güte eines geregelten Systems lässt sich sehr gut anhand der Lage seiner Pole beurteilen. So werden Anforderungen u. a. an Stabilität, Einschwingzeit, Dämpfung

und Begrenzung der maximalen natürlichen Frequenz des geschlossenen Regelkreises direkt als Pol-Wunschgebiete, so genannte  $\Gamma$ -stabile Gebiete oder kurz  $\Gamma$ -Gebiete, in der Eigenwertebene formuliert. Zu einigen im Zeitbereich spezifizierten Kriterien lassen sich analoge  $\Gamma$ -Gebiete finden. Die Berandung  $\partial\Gamma$  des  $\Gamma$ -Gebietes wird idealerweise durch zusammengesetzte Kegelschnitte also durch Kreise, Ellipsen, Hyperbeln und Geraden beschrieben [4, 5]. Bild 3.2 zeigt Beispiele für  $\Gamma$ -Gebiete in der Eigenwertebene:



**Bild 3.2:** Beispiele für  $\Gamma$ -Gebiete in der Eigenwert-Ebene.

- a) Parallele zur imaginären Achse begrenzt maximale Einschwingzeit,
- b) Geradenpaar konstanter Dämpfung bestimmt die Mindestdämpfung,
- c) Kreis begrenzt maximale natürliche Frequenz und
- d) die Schnittmenge der drei Gebiete erfüllt die Bedingungen a)-c) simultan.

Der Begriff „Interne Stabilität“ entsprechend Satz 3.1 lässt sich auf den der „Internen  $\Gamma$ -Stabilität“ erweitern [4, 5].

*Satz 3.2. (Interne  $\Gamma$ -Stabilität)*

Der Standard-Regelkreis ist genau dann intern  $\Gamma$ -stabil, falls

1. sämtliche Nullstellen von  $1 + K(s)G(s)$  im  $\Gamma$ -stabilen Gebiet liegen, d. h.  $\text{roots}(\text{num}(1 + K(s)G(s))) \subset \Gamma$  und
2. keine Pol/Nullstellen-Kürzungen bei der Bildung des Produkts  $K(s)G(s)$  in  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  auftreten.

□

Interne  $\Gamma$ -Stabilität bedeutet für ein lineares zeitinvariantes System in Zustandsform, dass die Eigenwerte der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  des geschlossenen Regelkreises in  $\Gamma$  liegen, d. h.  $\text{roots}(\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})) \subset \Gamma$ . Eigenwertabhängige Entwurfsbedingungen beziehen sich ausschließlich auf die Pole des geregelten Systems. Der Einfluss der Nullstellen auf die Regelgüte bleibt jedoch unberücksichtigt.

### 3.1.3 Frequenzabhängige Entwurfsanforderungen

Entwurfsanforderungen bezüglich der Regelgüte im Sinne einer Quantifizierung der Sensitivität des Regelkreises gegenüber externen Eingangssignalen lassen sich anschaulich über frequenzabhängige Betragsbedingungen formulieren.

Nach Auswertung von Bild 3.1 ergibt sich für den geschlossenen Regelkreis folgender Zusammenhang

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e \\ u \\ y \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} S & T & -S_G & -S \\ S_K & -S_K & S & -S_K \\ T & -T & S_G & S \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ n \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}}. \quad (3.1.1)$$

Dabei ist  $\mathbf{w}$  der Vektor der externen Eingangssignale und  $\mathbf{z}$  der Vektor der internen Signale, die für die Beurteilung der Regelgüte herangezogen werden sollen. Für die einzelnen Einträge in der Übertragungsmatrix  $\mathbf{R}$  gelten die folgenden Bezeichnungen:

- Die Übertragungsfunktion

$$S(s) = \frac{1}{1 + K(s)G(s)} \quad (3.1.2)$$

heißt *Sensitivitätsfunktion*. Sie beschreibt die Empfindlichkeit des geschlossenen Regelkreises (des Regelfehlers  $e$ ) gegenüber Ausgangsstörungen  $d_2$  bzw. Änderungen der Führungsgröße  $w$ . Die Sensitivitätsfunktion  $S$  wird auch als Störübertragungsfunktion oder Empfindlichkeitsfunktion bezeichnet.

- Die Übertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = K(s)G(s)S(s) \quad (3.1.3)$$

heißt *komplementäre Sensitivitätsfunktion*. Sie gibt bspw. den Einfluss des Messrauschens  $n$  auf die Regelgröße  $y$  bzw. den Regelfehler  $e$  an. Bezogen auf das Führungsübertragungsverhalten von  $w$  zu  $y$  wird  $T$  auch als Führungsübertragungsfunktion bezeichnet.

- Die Übertragungsfunktion

$$S_K(s) = \frac{K(s)}{1 + K(s)G(s)} = K(s)S(s) \quad (3.1.4)$$

heißt *Eingangs-Sensitivitätsfunktion*. Sie gibt den Einfluss der Führungsgröße  $w$ , des Messrauschens  $n$  und von Ausgangsstörungen  $d_2$  auf die Stellgröße  $u$  an.

- Die Übertragungsfunktion

$$S_G(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} = G(s)S(s) \quad (3.1.5)$$

heißt *Ausgangs-Sensitivitätsfunktion* und beschreibt die Empfindlichkeit des Regelkreises, d. h. in diesem Fall der Regelgröße und des Regelfehlers, gegenüber Eingangsstörungen.

- Weiterhin sei die Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$G_0(s) = K(s)G(s) \quad (3.1.6)$$

und das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises

$$p(s) = \text{num}(1 + K(s)G(s)) \quad (3.1.7)$$

*Anmerkung 3.2.* Die Bezeichnung Sensitivitätsfunktion rührt her von der Frage: Wie empfindlich (sensitiv) ist die Führungsübertragungsfunktion  $T$  gegenüber Variationen in  $G$ , d. h. wie wirkt sich eine veränderliche bzw. unsichere Regelstrecke auf den geschlossenen Regelkreis aus. Eine Möglichkeit dies zu quantifizieren, ist es, den Grenzwert des Verhältnisses der relativen Unsicherheiten in  $\Delta T/T$  und  $\Delta G/G$  zu berechnen [43], indem man  $G$  als Veränderliche betrachtet. Die Berechnung der rechten Seite von

$$\lim_{\Delta G \rightarrow 0} \frac{\Delta T/T}{\Delta G/G} = \frac{dT}{dG} \frac{G}{T}$$

liefert die Sensitivitätsfunktion  $S$ .

□

Eine Beurteilung der Regelgüte lässt sich nun anhand des Übertragungsverhaltens von den externen Eingangssignalen  $w$  zu den Ausgangssignalen  $z$ , gekennzeichnet durch die Übertragungsmatrix  $\mathbf{R}$ , vornehmen. Dabei kann anhand des Verlaufs der Amplitudengänge der einzelnen Übertragungspfade eine Beurteilung der Regelgüte, hinsichtlich der Eigenschaften *Führungsverhalten*, *Störunterdrückung*, *Unterdrückung von Messrauschen* und *Stellgrößenbedarf*, durchgeführt werden. Dies wird im Folgenden für die ersten drei Eigenschaften beispielhaft anhand des Regelfehlers

$$\begin{aligned} e &= w - y \\ &= S w + T n - S d_2 - G S d_1 \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

und für die vierte anhand der Eingangssensitivitätsfunktion  $S_K$  gezeigt.

1. *Führungsverhalten*: Gutes Führungsverhalten in einem Frequenzbereich  $[0, \omega_S]$  ist dadurch gekennzeichnet, dass der Einfluss von Änderungen der Führungsgröße  $w$  auf den Regelfehler  $e$  entsprechend Gl. (3.1.8) gering ist, d. h.

$$|S(j\omega)| \ll 1 \quad \text{für} \quad 0 \leq \omega \leq \omega_S \quad (3.1.9)$$

Weiterhin sollte die bleibende Regelabweichung als Spezifikation mit einbezogen werden. Asymptotische Genauigkeit des Ausgangssignals  $y(t)$  für einen Führungssprung  $w = konst$  (eine Rampe  $w = konst \cdot t$ ), d. h. die Regelabweichung geht gegen Null für  $t \rightarrow \infty$ , erfordert, dass  $S$  eine (zwei) Nullstelle(n) im Ursprung besitzt [43]. Aus dem 2. Grenzwertsatz folgt, dass die bleibende Regelabweichung bei einem Führungssprung den Wert  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = S(0)$  annimmt.

2. *Störunterdrückung*: Analog zum guten Führungsverhalten wird der Einfluss von Ausgangsstörungen  $d_2$  auf die Regelgröße  $y$  im Frequenzbereich  $[0, \omega_S]$  gut unterdrückt, falls Ungleichung (3.1.9) erfüllt ist. Damit gilt für die Wirkung von Eingangsstörungen  $d_1$  auf  $y$

$$|S_G(j\omega)| \ll 1 \quad \text{für} \quad 0 \leq \omega \leq \omega_S. \quad (3.1.10)$$

3. *Unterdrückung von Messrauschen*: Der Einfluss von Messrauschen auf den Regelfehler, der besonders signifikant bei hohen Frequenzen ist, kann im Frequenzbereich  $[\omega_T, \infty)$  weitestgehend unterdrückt werden, falls gilt

$$|T(j\omega)| \ll 1 \quad \text{für} \quad \omega_T \leq \omega < \infty. \quad (3.1.11)$$

4. *Stellgrößenbedarf*: Der Stellenergiebedarf lässt sich angeben zu [81]

$$\int_0^\infty u^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |u(j\omega)|^2 d\omega. \quad (3.1.12)$$

Aus Gl. (3.1.1) folgt, dass der Integralterm  $\int |u(j\omega)|^2 d\omega$  klein bleibt, falls die Eingangs-Sensitivitätsfunktion  $S_K$  nach (3.1.4) innerhalb der Aktuatorbandbreite  $[0, \omega_{akt}]$  klein ist, d. h.

$$|S_K(j\omega)| \quad \text{klein für} \quad 0 \leq \omega \leq \omega_{akt}. \quad (3.1.13)$$

Leider widersprechen sich diese Wunschanforderungen und erzwingen die Suche nach Kompromisslösungen. Deswegen werden im Folgenden einige limitierende Faktoren der erreichbaren Regelgüte diskutiert, die sich aus dem Zusammenhang zwischen den Sensitivitätsfunktionen, aus der Lage der Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Regelkreises und deren Differenzgrad ergeben.

#### *Limitierende Faktoren der erreichbaren Regelgüte*

Eine algebraische Einschränkung stellt der Zusammenhang zwischen Sensitivitätsfunktion und komplementärer Sensitivitätsfunktion

$$S + T = 1 \quad (3.1.14)$$

dar. Für eine bestimmte Frequenz kann wegen

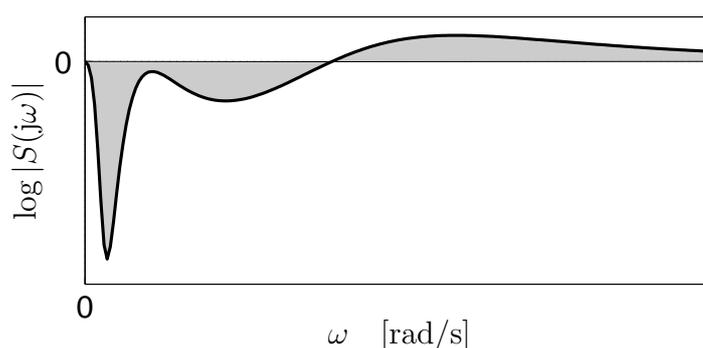
$$|S(j\omega)| + |T(j\omega)| \geq 1 \quad (3.1.15)$$

nicht gleichzeitig ein beliebig gutes Führungs- bzw. Störverhalten also  $|S(j\omega)| \ll 1$  und Unterdrückung von Messrauschen  $|T(j\omega)| \ll 1$  erzielt werden.

Weiterhin gilt, dass wachsende Anforderungen an den Amplitudengang von  $S$  für kleine Frequenzen eine Vergrößerung des Amplitudengangs für hohe Frequenzen bewirken. Dieser Effekt wird auch als *Wasserbetteffekt* bezeichnet. Der Wasserbetteffekt wird durch *Bode's Integraltheorem* [54] quantifiziert, welches lautet

$$\int_0^\infty \log S(j\omega) d\omega = \pi \log e^{\sum_i \operatorname{Re}(z_i)}, \quad (3.1.16)$$

wobei  $\{z_i\}$  die Menge der instabilen Pole der Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $G_0(s)$  in  $\text{Re} > 0$  ist. Bode's Integraltheorem gilt für Systeme mit einem Differenzgrad von mindestens zwei, d. h. der Grad des Nenners der Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Kreises  $G_0$  bzw. der der komplementären Sensitivitätsfunktion  $T$  ist mindestens um zwei größer als der des Zählers. Das Integral des logarithmierten Betrags der Sensitivitätsfunktion ist entsprechend der rechten Seite in Gl. (3.1.16) eine Konstante, die unabhängig von den Werten der Reglerparameter ist. Besitzt  $G_0(s)$  keine Pole in  $\text{Re} > 0$ , so ist diese Konstante gleich Null [27], d. h. der Flächeninhalt



**Bild 3.3:** Graphische Interpretation von Bode's Integraltheorem für  $\{z_i\} = \{\}$ .

unter- und oberhalb der Null-Linie des logarithmierten Amplitudengangs ist gleich, wie beispielhaft in Bild 3.3 illustriert ist. Eine Begleiterscheinung für eine Verbesserung der Störunterdrückung in einem bestimmten Frequenzbereich ist eine, dazu entsprechend Gl. (3.1.16) in betragsmäßiger Relation stehende, Verschlechterung bzw. Amplitudenverstärkung der Störung in einem anderen Frequenzbereich. Die Verschlechterung ist desto ungünstiger, je mehr instabile Pole von  $G_0(s)$  existieren und je weiter rechts diese liegen.

Eine wichtige Kenngröße für das Störverhalten ist die (*Nyquist-*)*Stabilitätsreserve*  $\rho_S$ , die definiert ist als der minimale Abstand der Ortskurve  $G_0(j\omega)$  zum kritischen Punkt  $(-1, 0)$ . Gleichzeitig ist  $\rho_S$  der Kehrwert der maximalen Amplitudenverstärkung der Sensitivitätsfunktion. Somit ist die Stabilitätsreserve definiert als

$$\begin{aligned} \rho_S &= \inf_{\omega \in [0, \infty)} |1 + G_0(j\omega)| \\ &= \|S(s)\|_{\infty}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Versucht man für niedrige Frequenzen ein gutes Störunterdrückungsverhalten zu erzielen, so muss man gleichzeitig darauf achten, dass bei höheren Frequenzen noch eine ausreichende Stabilitätsreserve vorhanden ist. Ist dies nicht der Fall, so kann bspw. der Einfluss nichmodellierter bzw. vernachlässigter Dynamik im Frequenzbereich mit geringer Stabilitätsreserve zur Instabilität des Gesamtsystems führen.

### 3.1.4 Quantifizierung frequenzabhängiger Entwurfsanforderungen

Aus den oben beschriebenen Zusammenhängen geht hervor, dass sich Eigenschaften des Regelkreises, das Führungsverhalten sowie die Unterdrückung von Störungen und Messrauschen betreffend, sehr gut anhand des Verlaufs der Amplitudengänge der Sensitivitätsfunktionen  $S$ ,  $T$ ,  $S_K$  und  $S_G$  interpretieren lassen. Die Diskussion der limitierenden Faktoren der erreichbaren Regelgüte im vorangegangenen Abschnitt hat gezeigt, dass sich Anforderungen an die Sensitivitätsfunktionen widersprechen. Man kann also beispielsweise nicht gleichzeitig für den gesamten Frequenzbereich den Einfluss von Eingangs-, Ausgangsstörungen und Messrauschen unterdrücken. Aus diesem Grund werden, entsprechend der Vorgehensweise beim  $H_\infty$ -Reglerentwurf, geeignete frequenzabhängige "Loop-Shaping"-Funktionen vorgegeben, die die Amplitudengänge von  $S$ ,  $T$ ,  $S_K$  bzw.  $S_G$  nach oben hin begrenzen, d. h.

$$\left. \begin{array}{l} |S(j\omega)| < \partial\mathcal{B}_S(\omega) \\ |T(j\omega)| < \partial\mathcal{B}_T(\omega) \\ |S_K(j\omega)| < \partial\mathcal{B}_{S_K}(\omega) \\ |S_G(j\omega)| < \partial\mathcal{B}_{S_G}(\omega) \end{array} \right\} \forall \omega \in [\omega^-, \omega^+]. \quad (3.1.18)$$

Üblicherweise werden Spezifikationen dieser Art, bedingt durch die von Frequenzbereichsverfahren verwendete Methodik, für den gesamten Frequenzbereich  $\omega \in [0, \infty)$  formuliert. Das nachfolgend vorgestellte Parameterraumverfahren für frequenzabhängige Betragskriterien ermöglicht es jedoch, von bandbreitenspezifischen Spezifikationen auszugehen. Einige Anforderungen sollen nun anhand der Sensitivitätsfunktion  $S$  näher erläutert werden. Spezifikationen bezüglich  $T$ ,  $S_K$  und  $S_G$  und auch anderer Übertragungsfunktionen lassen sich aus ähnlichen Überlegungen ableiten.

Typische Anforderungen an die Sensitivitätsfunktion  $S$  beziehen sich auf eine Begrenzung der maximal erlaubten bleibenden Regelabweichung, d. h.  $S(0) < l_g$ , und die Begrenzung der größtmöglichen Verstärkung einer Störung  $|S(j\omega)| < h_g, \forall \omega$ . Letztere stellt gleichzeitig eine obere Schranke für die inverse Nyquist-Reserve  $1/\rho_S = \|S(s)\|_\infty$ , d. h.  $1/\rho_S < h_g$ , dar. Für eine kontinuierliche Beschreibung der Berandungen der vier Sensitivitätsfunktionen eignen sich vor allem die Amplitudengänge von Übertragungsfunktionen. Obige Spezifikation bzgl.  $S$  lässt sich bspw. näherungsweise durch die Verwendung des Amplitudengangs der Übertragungsfunktion  $B(s)$  mit

$$\partial\mathcal{B}_S(\omega) = |B(j\omega)|, \quad \text{wobei} \quad B(s) = h_g \frac{s + \omega_c l_g}{s + \omega_c h_g} \quad (3.1.19)$$

als obere Grenze für die Sensitivitätsfunktion angeben. Die Frequenz  $\omega_c$  kennzeichnet hierbei die Frequenz bei der der Übergang von störunterdrückendem zu störverstärkendem Verhalten stattfindet. Im niederfrequenten ( $\omega \ll \omega_c$ ) bzw. hochfrequenten Bereich ( $\omega \gg \omega_c$ ) wird die Amplitudenunterdrückung bzw. -verstärkung durch den Betrag der Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Regelkreises  $G_0$  entsprechend Gl. (3.1.6) bestimmt. Für mittlere Frequenzen, d. h. im Bereich der Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$ , für

die  $|S(j\omega_D)| = 1$  ist, hängt der Amplitudengang des geschlossenen Kreises darüber hinaus auch von der Phase von  $G_0$  ab. Dieser Bereich bestimmt das dynamische Verhalten des Regelkreises. Die Wahl der Frequenz  $\omega_c$  ist deswegen in engem Zusammenhang mit der Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  zu sehen.

Obige Anforderungen lassen sich auch in diskontinuierlicher Form wie folgt beschreiben:

$$\partial\mathcal{B}_S(\omega) = \begin{cases} l_g & \forall \omega \in [0, \omega_c] \\ h_g & \forall \omega \in (\omega_c, \infty) . \end{cases} \quad (3.1.20)$$

Diese Form der Darstellung von frequenzabhängigen Betragskriterien ermöglicht es, sehr gezielt Anforderungen bzgl. einzelner Frequenzabschnitte zu formulieren, ohne transiente Übergangsbereiche formulieren zu müssen. Bei Frequenzbereichsverfahren, z. B. beim  $H_\infty$ -Entwurf, ist die Verwendung diskontinuierlicher Gewichtsfunktionen nicht möglich, da die Gewichtsfunktion selbst in die Struktur des Reglers mit eingeht und aus diesem Grund kontinuierlich sein muss.

*Beispiel 3.1.* (Quantifizierung der Anforderungen an  $S$ )

Die Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Kreises sei

$$G_0(s) = k \frac{\Omega^2}{s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2} , \quad (3.1.21)$$

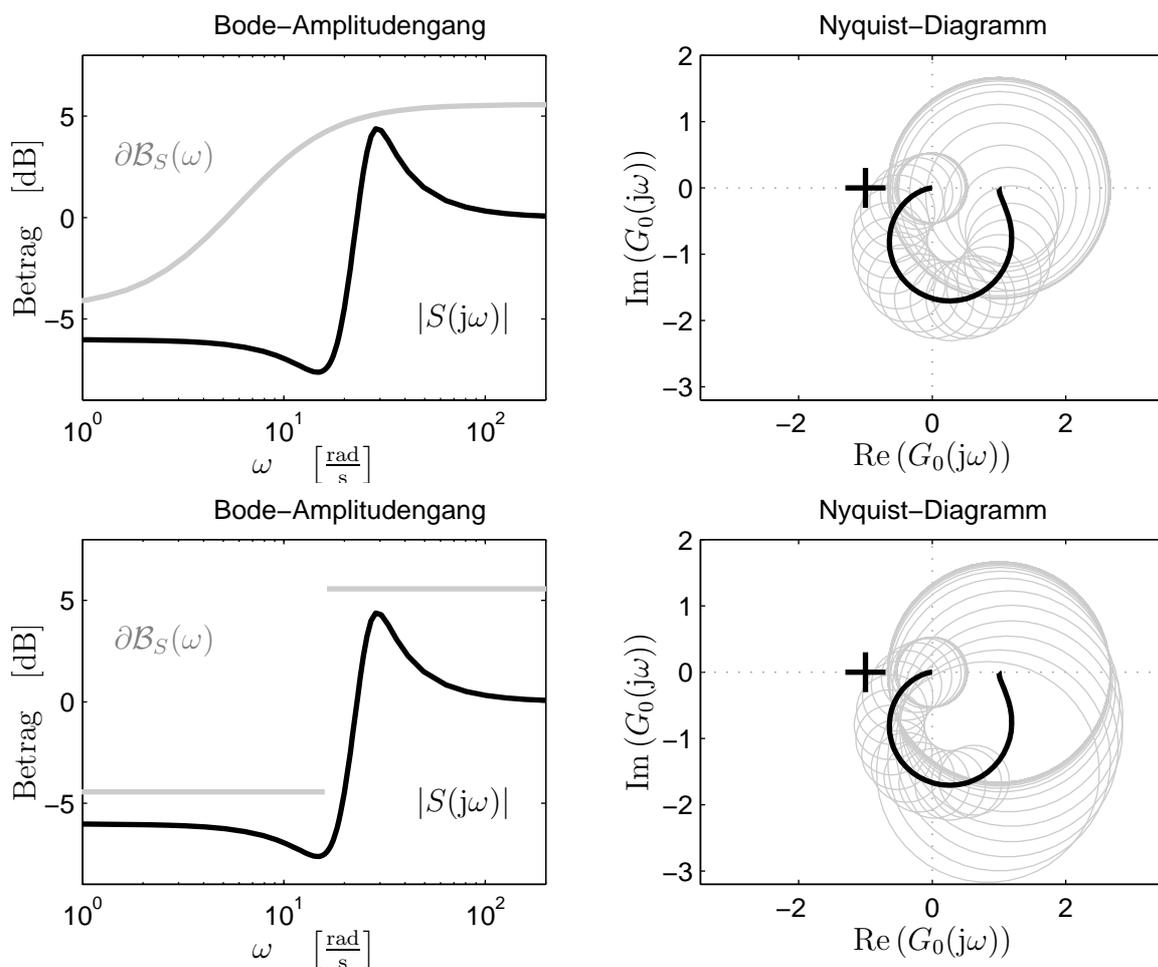
wobei  $k = 1$ ,  $\zeta = 0.3$ ,  $\Omega = 6\pi$ . Die beiden Diagramme links in Bild 3.4 zeigen die Bode-Amplitudengänge der Sensitivitätsfunktion mit den Berandungen  $\partial\mathcal{B}_S$  entsprechend Gl. (3.1.19) bzw. (3.1.20) mit maximal zulässiger bleibender Regelabweichung  $l_g = 0.6$ , maximaler Störverstärkung  $h_g = 1.9$  und  $\omega_c = 2\pi$ . Für den gesamten Frequenzbereich verläuft der Amplitudengang von  $S$  unterhalb der Berandungen, die Spezifikationen sind also jeweils erfüllt.

Die beiden rechten Diagramme in Bild 3.4 zeigen eine graphische Interpretation der Berandung im Nyquist-Diagramm, die sich aus folgender Überlegung ergeben. Es gilt:

$$|S(j\omega)| < \partial\mathcal{B}_S(\omega) \Leftrightarrow |1 + G_0(j\omega)| > \partial\mathcal{B}_S(\omega)^{-1}, \quad \forall \omega \quad (3.1.22)$$

Die letzte Ungleichung besagt, dass bei jeder Frequenz der Punkt  $(-1, 0)$  außerhalb des Kreises mit Mittelpunkt  $G_0(j\omega)$  und Radius  $\partial\mathcal{B}_S(\omega)^{-1}$  liegen muss. Für ein Frequenzraster sind die jeweiligen Kreise grau rechts in Bild 3.4 eingezeichnet und die Nyquist-Ortskurve in schwarz. Der Punkt  $(-1, 0)$  liegt außerhalb der Einhüllenden aller Kreise, d. h. Ungleichung (3.1.22) ist erfüllt.

□



**Bild 3.4:** Graphische Interpretation der Anforderungen an die Sensitivitätsfunktion im Bode-Amplituden- bzw. Nyquist-Diagramm.

## 3.2 Robustheitsanforderungen an den geschlossenen Regelkreis

### 3.2.1 Beschreibung von Modellunsicherheiten

Häufig ist es nicht ausreichend, beim Reglerentwurf lediglich von einem nominellen Modell der Strecke auszugehen, da das Modell in der Regel vom Betriebszustand, also von variierenden oder unsicheren Betriebsparametern, abhängt. Diese Modellunsicherheiten werden im Folgenden über strukturierte (parametrische) Unsicherheiten im Entwurfsmodell berücksichtigt. Darüber hinaus basiert der Reglerentwurf oft auf vereinfachten Modellen, d. h. ein Teil der Dynamik wird nicht modelliert. Dieser Typ von Modellierungsfehler findet nachfolgend über ein unstrukturiertes Unsicherheitsmodell, einer multiplikativen Ausgangsunsicherheit, Berücksichtigung.

### Parametrische Unsicherheiten

Bei mathematischen Modellen der Strecke, die sich auf Grund physikalischer Überlegungen ergeben, ist die Modellstruktur bekannt. Weiterhin sind die in die Struktur eingehenden Parameter entweder fest und bekannt oder werden als variierend bzw. unsicher angenommen. Letztere Klasse von Unsicherheiten bezeichnet man als strukturierte oder auch parametrische Unsicherheiten.

In der parametrischen robusten Regelungstechnik [4, 5] werden üblicherweise sämtliche variierenden und unsicheren Parameter des Modells in einen Parametervektor  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{l_q}$  zusammengefasst. Dieser Parametervektor  $\mathbf{q}$  variiert in einem gegebenen Betriebsbereich  $Q$ , der auch als  $Q$ -Box bezeichnet wird. Für jedes Element von  $\mathbf{q}$  wird ein Intervall  $q_i \in [q_i^-, q_i^+]$  angegeben, in dem der Parameter  $q_i$  als variierend oder unsicher angenommen wird. Die Definition von  $Q$  lautet somit

$$Q = \{\mathbf{q} = [q_1 \dots q_{l_q}]^T \mid q_i \in [q_i^-, q_i^+], i = 1, \dots, l_q\}. \quad (3.2.23)$$

Die Ecken und Kanten des Betriebsbereiches  $Q$  spielen bei der Analyse und Synthese eine besondere Rolle. Die Menge der Ecken ist

$$Q_E = \{\mathbf{q} \mid q_i \in \{q_i^-, q_i^+\}, i = 1, \dots, l_q\}, \quad (3.2.24)$$

und die Menge der Kanten

$$Q_K = \{\mathbf{q} \mid q_i \in [q_i^-, q_i^+], q_j \in \{q_j^-, q_j^+\}, i = 1, \dots, l_q, j = 1, \dots, l_q, \forall j \neq i\}. \quad (3.2.25)$$

Grundlage der Behandlung frequenzabhängiger Entwurfsanforderungen ist entsprechend die unsichere Übertragungsfunktion  $G(s, \mathbf{q})$ , die bei gegebenem  $Q$  im Folgenden als *Streckenfamilie*

$$\mathcal{G}(s, Q) = \{G(s, \mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in Q\} \quad (3.2.26)$$

bezeichnet wird. Weiterhin sei  $G(s, \mathbf{q})$  proper und in allgemeiner Form gegeben durch

$$G(s, \mathbf{q}) = \frac{\text{num}(G(s, \mathbf{q}))}{\text{den}(G(s, \mathbf{q}))} = \frac{b_q(\mathbf{q})s^m + b_{q-1}(\mathbf{q})s^{m-1} + \dots + b_1(\mathbf{q})s + b_0(\mathbf{q})}{a_n(\mathbf{q})s^n + a_{n-1}(\mathbf{q})s^{n-1} + \dots + a_1(\mathbf{q})s + a_0(\mathbf{q})}, \quad (3.2.27)$$

wobei die Koeffizienten von Nenner- und Zählerpolynom  $a_i(\mathbf{q})$ ,  $i = 0, \dots, n$  bzw.  $b_k(\mathbf{q})$ ,  $k = 0, \dots, m$  mit  $m \leq n$  reelle Polynome in  $\mathbf{q}$  sind.

Eigenwertabhängige Entwurfsspezifikationen beziehen sich auf das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises. Entsprechend wird ein unsicheres Polynom mit gegebenem  $Q$  im Folgenden als *Polynomfamilie*

$$P(s, Q) = \{p(s, \mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in Q\} \quad (3.2.28)$$

bezeichnet. Die Koeffizienten  $a_i$  des unsicheren Polynoms

$$p(s, \mathbf{q}) = a_n(\mathbf{q})s^n + a_{n-1}(\mathbf{q})s^{n-1} + \dots + a_1(\mathbf{q})s + a_0(\mathbf{q}) \quad (3.2.29)$$

wiederum sind reelle Polynome in  $\mathbf{q}$ .

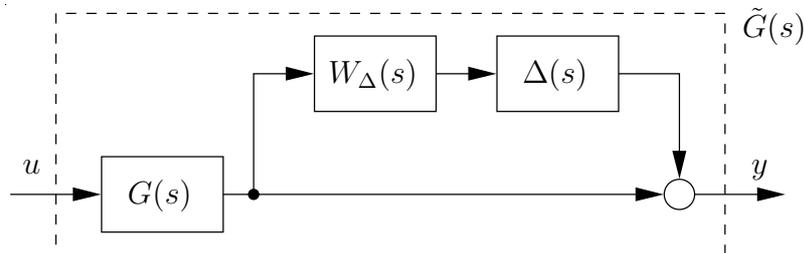
*Anmerkung 3.3.* Betrachtet man den Standardregelkreis aus Bild 3.1, so kann man die Definition der Streckenfamilie in (3.2.26) auf die Definition der Familie der Sensitivitätsfunktionen, der komplementären Sensitivitätsfunktionen, etc. übertragen. Im geschlossenen Regelkreis hängen die vier Sensitivitätsfunktionen und das charakteristische Polynom bei vorgegebener Reglerstruktur auch von zu bestimmenden Reglerparametern  $\mathbf{k} = [k_1 \dots k_{l_k}]$  ab, wobei  $l_k$  die Anzahl der freien Reglerparameter ist. Der Parametervektor  $\mathbf{q}$  in (3.2.27) und (3.2.29) bezieht sich in diesem Fall auf Strecken- und/oder Reglerparameter.

□

Entsprechend ihrer Parameterabhängigkeit werden die Polynome  $p(s, \mathbf{q})$ ,  $\text{num}(G(s, \mathbf{q}))$ ,  $\text{den}(G(s, \mathbf{q}))$  in vier Klassen eingeteilt, in Intervallpolynome, in Polynome mit affinen, multilinearen und polynomialen Koeffizienten [4, 5]. Dies ist insbesondere für die mathematische Behandlung der Polynome von Bedeutung.

### *Unstrukturierte Unsicherheiten*

Für die nichtmodellerte Dynamik der Strecke ist die Struktur unbekannt. Im Reglerentwurf kann diese Art von Modellunsicherheit durch die Annahme sogenannter unstrukturierter Unsicherheiten berücksichtigt werden. Ein häufig verwendetes Fehlermodell für die Beschreibung dieser Unsicherheitsklasse ist das Modell der multiplikativen Eingangs- bzw. Ausgangsunsicherheit [43].



**Bild 3.5:** Strecke mit multiplikativer Ausgangsunsicherheit.

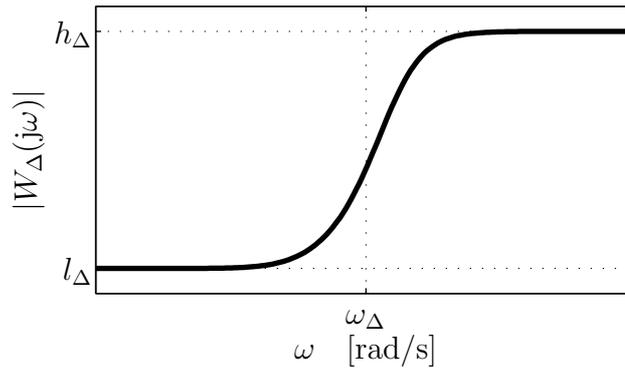
*Anmerkung 3.4.* Für Stabilitätsuntersuchungen von linearen Eingrößensystemen ist es mathematisch nicht relevant, ob von einer Eingangs- oder Ausgangsunsicherheit ausgegangen wird, d. h. es ist unerheblich, an welcher Stelle des Regelkreises die Unsicherheit eingeführt wird. Erst bei Mehrgrößensystemen macht sich dieser Unterschied bemerkbar.

□

Das Fehlermodell der multiplikativen Ausgangsunsicherheit entsprechend Bild 3.5 wird durch den Zusammenhang

$$\tilde{G}(s) = (1 + W_{\Delta}(s)\Delta(s))G(s) \quad (3.2.30)$$

beschrieben. Dabei bezeichnet  $\Delta(s)$  die (*zulässige*) multiplikative Unsicherheit mit  $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$ , wobei  $\|\Delta(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}^+} |\Delta(j\omega)|$ . Die Phase  $\angle \Delta(j\omega)$  wird als beliebig angenommen. Durch den Amplitudengang der Gewichtsfunktion  $|W_\Delta(j\omega)|$  wird frequenzabhängig die Amplitude der Unsicherheit nach oben hin beschränkt. Ein typischer Verlauf für den Amplitudengang der Gewichtsfunktion  $W_\Delta$  über der Frequenz ist in Bild 3.6 dargestellt. Für niedrige Frequenzen  $\omega \ll \omega_\Delta$  wird angenommen, dass der



**Bild 3.6:** Gewichtsfunktion für multiplikatives Unsicherheitsmodell.

(unstrukturierte) Modellfehler betragsmäßig klein, d. h. kleiner als  $\pm l_\Delta$ , ist. Im hochfrequenten Bereich, d. h.  $\omega \gg \omega_\Delta$  kann der Fehler bei maximal  $\pm h_\Delta$  liegen. Die Frequenz  $\omega_\Delta$  bezeichnet die Frequenz, ab der die Dynamik nicht modelliert wurde (z. B. vernachlässigte Moden bei flexiblen Strukturen oder höherfrequente Aktuator- oder Sensordynamik). Die Frequenz  $\omega_\Delta$ , bei der der Übergang vom „guten Modell“ zum „schlechten Modell“ stattfindet, sollte in engem Zusammenhang mit der Bandbreite  $\omega_B$  des geschlossenen Regelkreises gesehen werden<sup>1</sup>. Gilt  $\omega_\Delta \ll \omega_B$ , so bedeutet dies, dass die nichtmodellerte Dynamik wesentlichen Einfluss auf die Gesamtdynamik des Systems ausübt. Wird ein Regler mit dieser sehr hohen Robustheitsanforderung ausgelegt, so führt dies zu konservativen Ergebnissen und gegebenenfalls sogar zur Instabilität des geschlossenen Regelkreises. Abhilfe kann man in einem solchen Fall durch eine genauere physikalische Modellierung der Strecke schaffen. Gilt andererseits  $\omega_\Delta \gg \omega_B$ , so bedeutet dies, dass die in diesem Frequenzbereich bei der Modellierung vernachlässigte Dynamik keinen Einfluss auf das Regelverhalten hat. Folglich sollten die Frequenzen  $\omega_\Delta$  und  $\omega_B$  in etwa in der gleichen Größenordnung liegen.

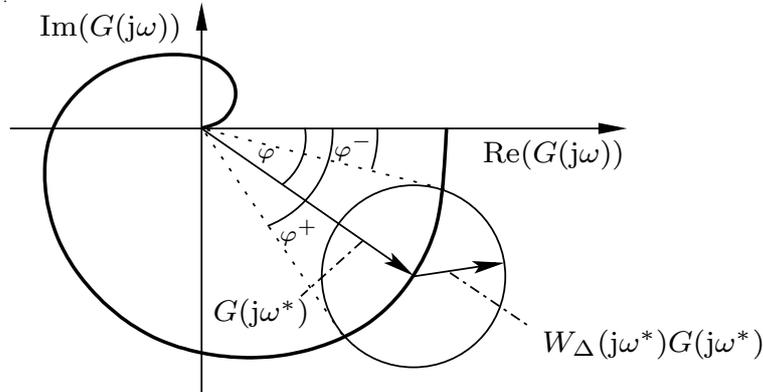
Typische Gewichtsfunktionen, die die Anforderungen  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |W_\Delta(j\omega)| = l_\Delta$  und  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |W_\Delta(j\omega)| = h_\Delta$  erfüllen, sind beispielsweise

$$|W_\Delta(j\omega)| = \left| h_\Delta \frac{j\omega + \omega_\Delta l_\Delta}{j\omega + \omega_\Delta h_\Delta} \right| \quad (3.2.31)$$

<sup>1</sup>Die Bandbreite  $\omega_B$  ist definiert als die Frequenz, für die der Amplitudengang von  $T(s)/T(0)$  die  $-3$ dB-Linie unterschreitet, d. h. für die gilt  $|T(j\omega_B)/T(0)| = 1/\sqrt{2}$ .

oder

$$|W_{\Delta}(j\omega)| = \begin{cases} l_{\Delta} & \forall \omega \in [0, \omega_{\Delta}] \\ h_{\Delta} & \forall \omega \in (\omega_{\Delta}, \infty) \end{cases} \quad (3.2.32)$$



**Bild 3.7:** Ortskurve des multiplikativen Unsicherheitsmodells.

Bild 3.7 zeigt den Frequenzgang des multiplikativen Unsicherheitsmodells. Für eine Frequenz  $\omega^*$  ist der Kreis mit Mittelpunkt  $G(j\omega^*)$  und Radius  $|W_{\Delta}(j\omega^*)G(j\omega^*)|$  eingezeichnet. Mit obiger Modellbeschreibung ist die Klasse von Übertragungsfunktionen abgedeckt, deren Frequenzgang  $\tilde{G}(j\omega)$  für jede beliebige Frequenz innerhalb des Kreises mit frequenzgewichtetem Radius verläuft (siehe auch Bild 3.9). Für die Phase gilt entsprechend die Unsicherheit  $\varphi^- < \tilde{\varphi} < \varphi^+$ .

### 3.2.2 Robuste Stabilität

Satz 3.1 beschreibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für die interne Stabilität des Regelkreises in Bild 3.1, wobei für die Strecke ein nominales Modell  $G(s)$  angenommen wurde. Wird entsprechend Abschnitt 3.2.1 das nominelle Modell durch ein Unsicherheitsmodell mit parameterischer und/oder multiplikativer Unsicherheit ersetzt, muss dies bei Stabilitätsbetrachtungen mit berücksichtigt werden.

#### *Robuste Stabilität bei parametrischem Unsicherheitsmodell*

Betrachtet wird der Regelkreis in Bild 3.1 mit Regelstrecke  $G(s, \mathbf{q})$ .

*Satz 3.3. (Robuste interne Stabilität bei parametrischem Unsicherheitsmodell)*

Der Regelkreis ist robust intern stabil bezüglich des Betriebsbereichs  $Q$ , wenn

1. sämtliche Nullstellen von  $1 + K(s)G(s, \mathbf{q})$  für alle  $\mathbf{q} \in Q$  in der linken Halbebene liegen, d. h.  $\text{roots}(\text{num}(1 + K(s)G(s, \mathbf{q}))) \subset \mathbb{C}^-$  und

2. für kein  $\mathbf{q} \in Q$  Pol/Nullstellen-Kürzungen bei der Bildung des Produkts  $K(s)G(s, \mathbf{q})$  in  $\mathbb{C}_0^+$  auftreten.

□

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für robuste Stabilität von Frazer und Duncan [53] bezieht sich auf das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises entsprechend Gl. (3.1.7).

*Satz 3.4. (Grenzüberschreitungssatz von Frazer und Duncan)*

Die Polynomfamilie

$$P(s, Q) = \{p \mid p(s, \mathbf{q}) = \text{num}(1 + G_0(s, \mathbf{q})), \mathbf{q} \in Q\} \quad (3.2.33)$$

ist dann und nur dann robust stabil, wenn

1. ein stabiles Polynom  $p(s, \mathbf{q}) \in P(s, Q)$  existiert und
2.  $j\omega \notin \text{roots}(P(s, Q)) \forall \omega \in [0, \infty)$ .

□

Satz 3.4 besagt, dass das System robust stabil ist, wenn ein stabiler Betriebspunkt  $\mathbf{q}$  existiert, und die Wurzeln des charakteristischen Polynoms  $p(s, \mathbf{q})$  für stetige Variationen von  $\mathbf{q}$  innerhalb des Betriebsbereichs  $Q$  die imaginäre Achse nicht überschreiten.

*Robuste Stabilität bei multiplikativem Unsicherheitsmodell*

Bild 3.8 zeigt den Standard-Eingrößenregelkreis aus Bild 3.1 mit multiplikativem Unsicherheitsmodell entsprechend (3.2.30) und verschwindenden externen Eingangssignalen. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die robuste Stabilität dieses Regelkreises lautet [43]:

*Satz 3.5. (Robuste Stabilität bei multiplikativem Unsicherheitsmodell)*

Der Regelkreises in Bild 3.8 ist robust stabil, falls

$$|W_\Delta(j\omega)T(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega \in [0, \infty) . \quad (3.2.34)$$

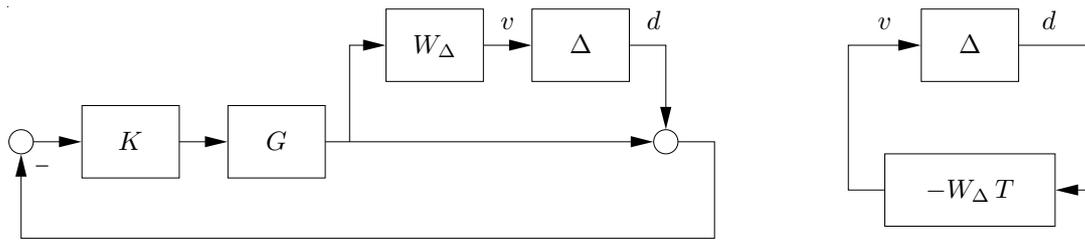
□

Für eine einfache Interpretation der Bedingung (3.2.34) soll der geschlossene Regelkreis links in Bild 3.8 betrachtet werden. Die Übertragungsfunktion von  $d$  zu  $v$  ist

$$\frac{v}{d} = -W_\Delta T . \quad (3.2.35)$$

Hieraus folgt, dass das in 2-Block-Form gegebene System rechts in Bild 3.8 zu dem links gegebenen System äquivalent bzgl. der Signale  $v$  und  $d$  ist. Aus dem Satz der kleinen Verstärkungen (“small gain Theorem”, [128]) angewandt auf das in 2-Block-Form gegebene System folgt direkt Satz 3.5.

Für andere unstrukturierte Unsicherheitsmodelle, z. B. die additive Unsicherheit, lassen sich ähnliche Bedingungen angeben [43].



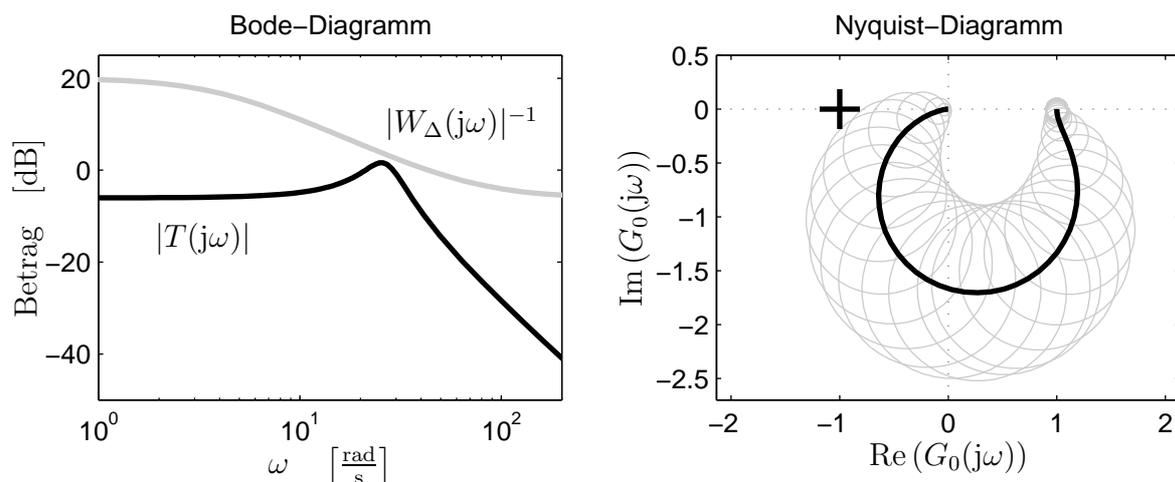
**Bild 3.8:** Anwendung des small-gain-Theorems auf den Regelkreis mit multiplikativer Unsicherheit.

*Beispiel 3.2.* (Robuste Stabilität)

Es soll der Regelkreis aus Beispiel 3.1 auf robuste absolute Stabilität bzgl. einer multiplikativen Unsicherheit untersucht werden. Die Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Regelkreises sei entsprechend Gl. (3.1.21) gegeben. Im Frequenzbereich  $\omega \ll 6$  Hz wird der (unstrukturierte) Modellfehler kleiner als 10 % angenommen, d. h.  $|W_\Delta(j\omega)| = 0.1$ , im Frequenzbereich  $\omega \gg 6$  Hz darf der Fehler 200 % nicht überschreiten, d. h.  $|W_\Delta(j\omega)| = 2$ . Im Bereich um 6 Hz soll ein kontinuierlicher Übergang stattfinden. Eine sinnvolle Gewichtsfunktion  $W_\Delta$  lautet

$$W_\Delta(s) = 2 \frac{s + 1.2\pi}{s + 24\pi} . \quad (3.2.36)$$

Bild 3.9 zeigt die grafische Interpretation des Kriteriums „Robuste Stabilität“ im Bode- bzw. Nyquist-Diagramm. Der Amplitudengang der komplementären Sensitivitätsfunktion verläuft unterhalb des Amplitudengangs der inversen Gewichtsfunktion, d. h.  $|T(j\omega)| < |W_\Delta(j\omega)|^{-1}$ ,  $\forall \omega$  wie links in Bild 3.9 zu sehen ist. Somit ist der geschlos-



**Bild 3.9:** Kriterium „Robuste Stabilität“ in Bode- und Nyquist-Diagramm.

sene Regelkreis robust stabil bezüglich des angenommenen Fehlermodells. Rechts in

Bild 3.9 ist die Interpretation der Bedingung  $|W_\Delta(j\omega)T(j\omega)| < 1$  im Nyquist-Diagramm dargestellt. Aus (3.1.3) und (3.1.6) folgt die äquivalente Darstellung

$$|W_\Delta(j\omega)G_0(j\omega)| < |1 + G_0(j\omega)| \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (3.2.37)$$

Die Ungleichung besagt, dass der geschlossene Regelkreis robust stabil ist, falls für jede Frequenz der Punkt  $(-1, 0)$  außerhalb des Kreises mit Mittelpunkt  $G_0(j\omega)$  und Radius  $|W_\Delta(j\omega)G_0(j\omega)|$  liegt.

□

Hängt der Regelkreis gleichzeitig von parametrischen und einer multiplikativen Unsicherheit ab, so lässt sich aus den Sätzen 3.3 und 3.5 der folgende Satz ableiten:

*Satz 3.6. (Robuste interne Stabilität)*

Der Standardregelkreis aus Bild 3.5 mit multiplikativer Unsicherheit und Regelstrecke  $G(s, \mathbf{q})$  wird als robust intern stabil bezüglich des Betriebsbereichs  $Q$  und der zulässigen multiplikativen Unsicherheit  $\Delta(s)$  bezeichnet, falls

1. sämtliche Nullstellen von  $1 + K(s)G(s, \mathbf{q}) \forall \mathbf{q} \in Q$  in der linken Halbebene liegen, d. h.  $\text{roots}(\text{num}(1 + K(s)G(s, \mathbf{q}))) \subset \mathbb{C}^-$ ,
2. für kein  $\mathbf{q} \in Q$  Pol/Nullstellen-Kürzungen bei der Bildung des Produkts  $K(s)G(s, \mathbf{q})$  in  $\mathbb{C}_0^+$  auftreten, und
3.  $|W_\Delta(j\omega)T(j\omega, \mathbf{q})| < 1 \forall \omega \in [0, \infty), \forall \mathbf{q} \in Q$ .

□

### 3.2.3 Robust gutes Regelverhalten

Robust gutes Regelverhalten eines Regelkreises wird erzielt, falls über die robuste Stabilität des Systems hinausgehende, im Eigenwert- und/oder Frequenzbereich spezifizierte, Anforderungen robust gegenüber parametrischen und/oder unstrukturierten Modellunsicherheiten erfüllt werden.

*Robust gutes Regelverhalten bei parametrischem Unsicherheitsmodell*

*Satz 3.7. (Robuste interne  $\Gamma$ -Stabilität bei parametrischem Unsicherheitsmodell [4, 5])*

Der Regelkreis ist robust intern  $\Gamma$ -stabil bezüglich des Betriebsbereichs  $Q$ , falls

1. sämtliche Nullstellen von  $1 + K(s)G(s, \mathbf{q})$  für alle  $\mathbf{q} \in Q$  innerhalb des  $\Gamma$ -stabilen Gebiets liegen, d. h.  $\text{roots}(\text{num}(1 + K(s)G(s, \mathbf{q}))) \subset \Gamma$  und
2. für kein  $\mathbf{q} \in Q$  Pol/Nullstellen-Kürzungen bei der Bildung des Produkts  $K(s)G(s, \mathbf{q})$  in  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  auftreten.

□

*Robust gutes Regelverhalten bei unstrukturiertem Unsicherheitsmodell*

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Robustheit einer frequenzabhängigen Entwurfsanforderung an die Sensitivitätsfunktion, d. h.  $|W_S(j\omega)S(j\omega)| < 1$ , gegenüber einer zulässigen multiplikativen Unsicherheit  $\Delta(s)$  lautet [43]:

*Satz 3.8.* („Robuste Regelgüte“-Kriterium)

$$|W_S(j\omega)S(j\omega)| + |W_\Delta(j\omega)T(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega \in [0, \infty) \quad (3.2.38)$$

□

*Anmerkung 3.5.* Ähnliche Bedingungen lassen sich leicht für andere Anforderungen herleiten, also z. B. an die Amplitudengänge von  $T(s)$ ,  $S_K(s)$  oder  $S_G(s)$ , auch bezüglich anderer unstrukturierter Unsicherheiten [43].

□

In Tabelle 3.1 sind Kriterien zusammengefasst, die die Robustheit der Eigenschaften Stabilität und Regelgüte je nach verwendetem Entwurfsmodell beschreiben. Für die

**Tabelle 3.1:** Übersicht über Stabilitäts- und Regelgüte-Kriterien.

	Stabilität	Regelgüte	
		im Eigenwertbereich	im Frequenzbereich
nominelles Modell	$\text{roots}(p(s)) \subset \mathbb{C}^-$	$\text{roots}(p(s)) \subset \Gamma$	$ S(j\omega)  <  S_W(j\omega) $
parametrisches Unsicherheitsmodell	$\text{roots}(P(s, Q)) \subset \mathbb{C}^-$	$\text{roots}(P(s, Q)) \subset \Gamma$	$ S(j\omega, \mathbf{q})  <  S_W(j\omega) $
multiplikatives Unsicherheitsmodell	$\text{roots}(p(s)) \subset \mathbb{C}^-$ $\cap$ $ W_\Delta(j\omega)T(j\omega)  < 1$	$\text{roots}(p(s)) \subset \Gamma$	$ W_S(j\omega)S(j\omega)  +  W_\Delta(j\omega)T(j\omega)  < 1$
parametrisches + multiplikatives Unsicherheitsmodell	$\text{roots}(P(s, Q)) \subset \mathbb{C}^-$ $\cap$ $ W_\Delta(j\omega)T(j\omega, \mathbf{q})  < 1$	$\text{roots}(P(s, Q)) \subset \Gamma$	$ W_S(j\omega)S(j\omega, \mathbf{q})  +  W_\Delta(j\omega)T(j\omega, \mathbf{q})  < 1$

beiden Einträge in Tabelle 3.1 bzgl. Regelgüte im Eigenwertbereich ( $\Gamma$ -Stabilität) für multiplikatives bzw. parametrisches und multiplikatives Unsicherheitsmodell sei angemerkt, dass die Veränderung der Pollage durch nichtmodellerte Dynamik nicht berücksichtigt wird.

### 3.3 $\Gamma$ -Stabilität

Das Parameterraum-Verfahren für den Entwurf und die Analyse parametrischer LTI-Systeme verwendet zur Beurteilung der Regelgüte bislang Eigenwert- und Ortskurven-Spezifikationen ( $\Gamma$ - und  $\Theta$ -Stabilität). Unabhängig von der Art der Spezifikation ist es für die Anwendung des Parameterraumverfahrens erforderlich, die Struktur des Reglers vorzugeben. Diese kann beispielsweise aus physikalischen Überlegungen oder aus anderen regelungstechnischen Ansätzen wie Wurzelortskurven, Nyquist, Bode, etc. resultieren.

Nachfolgend wird  $\Gamma$ -Stabilität betrachtet. Bei vorgegebener Reglerstruktur sind die Pole des geschlossenen Regelkreises durch das charakteristische Polynom  $p(s, \mathbf{q}, \mathbf{k})$  bestimmt, wobei  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{l_q}$  der Vektor der variierenden bzw. unsicheren Streckenparameter ist und  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{l_k}$  der Vektor der freien Reglerparameter. Der Parametervektor  $\mathbf{q}$  ist in einem Betriebsbereich  $Q$  enthalten. Aufgabe des robusten Reglerentwurfs ist es, den Vektor der freien Reglerparameter  $\mathbf{k} = \mathbf{k}^*$  zu bestimmen, so dass die Polynomfamilie

$$P(s, Q, \mathbf{k}^*) = \{p(s, \mathbf{q}, \mathbf{k}^*) \mid \mathbf{q} \in Q\} \quad (3.3.39)$$

in robuster Weise sämtliche  $\Gamma$ -Spezifikationen erfüllt.

Dafür ist eine zweistufige Vorgehensweise sinnvoll. Im ersten Schritt wird das Kontinuum des Betriebsbereichs  $Q$  durch eine endliche Anzahl von Betriebspunkten, zur Testmenge  $Q_{test}$  zusammengefasst, approximiert. Für die Testmenge  $Q_{test}$ , z. B. die Menge der Eckpunkte des Betriebsbereichs  $Q_E$  entsprechend (3.2.24), wird dann die Menge der Reglerparameter  $\mathcal{K}_\Gamma$  bestimmt, die  $P(s, Q_{test}, \mathbf{k})$  robust  $\Gamma$ -stabilisiert. Im zweiten Schritt wird bei einer nachgeschalteten Analyse überprüft, ob für feste Reglerparameter  $\mathbf{k}^* \in \mathcal{K}_\Gamma$  das gesamte Kontinuum des Betriebsbereichs, d. h. die Polynomfamilie  $P(s, Q, \mathbf{k}^*)$ ,  $\Gamma$ -stabil ist. Ist es nicht möglich, Reglerparameter zu finden, die bezüglich  $Q$  für den geschlossenen Regelkreis  $\Gamma$ -Stabilität gewährleisten, so können beispielsweise messbare Streckenparameter  $\mathbf{q}$  für eine Verstärkungsanpassung herangezogen werden.

Eine andere Problemstellung ergibt sich, wenn das  $\Gamma$ -Gebiet als über den Betriebsbereich variierend angenommen wird, d. h.  $\Gamma = \Gamma(\mathbf{q})$ , wenn also eine qualitative und/oder quantitative Bewertung der Regelgüte vom Betriebszustand abhängig gemacht werden soll. Auf diesen Aspekt wird ausführlich in Kapitel 4 eingegangen.

### 3.4 $\mathcal{B}$ -Stabilität

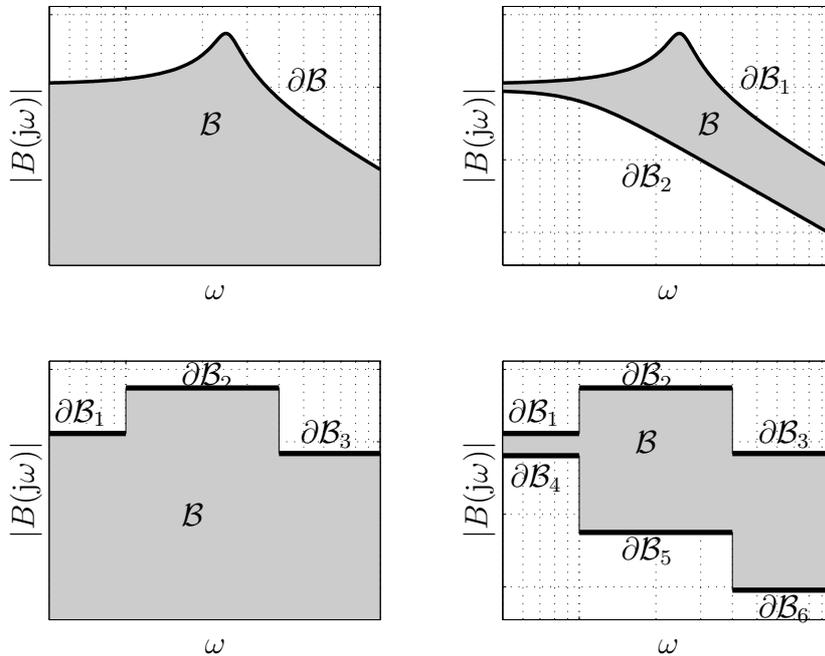
In Analogie zum Begriff der  $\Gamma$ -Stabilität für Eigenwertkriterien und  $\Theta$ -Stabilität für Ortskurvenkriterien wird der Begriff der  $\mathcal{B}$ -Stabilität für frequenzabhängige Betragskriterien eingeführt.

Wie in den Abschnitten 3.1 und 3.2 erläutert, lassen sich Entwurfsanforderungen an Stabilität und Regelgüte für Eingrößensysteme anschaulich durch Grenzen in

der Darstellungsebene der Amplitudengänge der verschiedenen Sensitivitätsfunktionen  $S$ ,  $T$ ,  $S_G$ ,  $S_k$  oder allgemeiner, einer beliebigen Übertragungsfunktion  $G$  formulieren. Eine Übertragungsfunktion wird nun als  $\mathcal{B}$ -stabil bezeichnet, falls ihr Amplitudengang innerhalb eines Wunschgebiets  $\mathcal{B}$  verläuft. Die mathematische Beschreibung der Berandung  $\partial\mathcal{B}$  des  $\mathcal{B}$ -stabilen Gebiets erfolgt durch den Zusammenhang

$$\partial\mathcal{B} = |B(j\omega)|, \quad \omega \in [\omega^-, \omega^+], \quad (3.4.40)$$

wobei  $B(s)$  vereinfachend als eine rationale Übertragungsfunktion in  $s$  mit reellen Koeffizienten angenommen wird.  $\partial\mathcal{B}$  kann sich auch aus abschnittsweise definierten stetigen Berandungsstücken in der Ebene der Betragskennlinien zusammensetzen. Geht man von positiven reellen Frequenzen aus, können untere und obere Grenze  $\omega^-$  bzw.  $\omega^+$  Werte zwischen einschließlich 0 und  $+\infty$  annehmen. Typische  $\mathcal{B}$ -Berandungen für Amplitu-



**Bild 3.10:** Repräsentation verschiedener  $\mathcal{B}$ -stabiler Gebiete im Amplitudengang.

dengänge, wie sie bereits für Sensitivitätsfunktionen in Abschnitt 3.1.3 gezeigt wurden, sind in verallgemeinerter Form in Bild 3.10 dargestellt.

Der Begriff der  $\mathcal{B}$ -Stabilität lässt sich sowohl auf gewöhnliche LTI Systeme als auch auf parametrische LTI Systeme anwenden. Eine nominelle Übertragungsfunktion  $G(s)$  wird als  $\mathcal{B}$ -stabil im Intervall  $\omega \in [\omega^-, \omega^+]$  bezeichnet, wenn

$$|G(j\omega)| \subset \mathcal{B}, \quad \forall \omega \in [\omega^-, \omega^+], \quad (3.4.41)$$

wobei  $\omega^- \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $\omega^+ \in \mathbb{R}_0^+$ . Im Falle parametrischer LTI Systeme mit unsicheren bzw. variierenden Parametern  $\mathbf{q}$ , wobei der Parametervektor  $\mathbf{q}$  in einem vordefinierten Betriebsbereich  $Q$  enthalten ist, wird die Familie der Übertragungsfunktionen  $\mathcal{G}(j\omega, Q)$

entsprechend (3.2.26) dann als  $\mathcal{B}$ -stabil bezeichnet, wenn

$$\mathcal{G}(j\omega, Q) \subset \mathcal{B} \quad \forall \omega \in [\omega^-, \omega^+] . \quad (3.4.42)$$

Aufgabe einer Analyse der Streckenparameter ist es, die Menge  $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$  zu bestimmen, so dass  $\mathcal{G}(j\omega, \mathcal{Q}_{\mathcal{B}})$   $\mathcal{B}$ -stabil ist. Falls ein vorgegebener Betriebsbereich  $Q$  in dieser Menge enthalten ist, d. h.  $Q \subseteq \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$ , wird  $\mathcal{G}(j\omega, Q)$  als  $\mathcal{B}$ -stabil bezüglich der in  $Q$  enthaltenen Streckenparameter bezeichnet.

Beim Reglerentwurf ist es die Aufgabe, die Menge der Reglerparameter  $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$  so zu bestimmen, dass für alle  $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$  und für ein vorgegebenes  $Q$ , die Streckenfamilie  $\mathcal{G}(j\omega, Q)$   $\mathcal{B}$ -stabil ist. Dabei wird sinnvollerweise zunächst  $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$  in einem Syntheseschritt über einen Multi-Modell-Ansatz bzgl. einer endlichen Testmenge von Betriebspunkten  $Q_{test}$  berechnet. In einem anschließenden Analyseschritt wird überprüft, ob für ein festes  $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$  der kontinuierliche Betriebsbereich  $\mathcal{B}$ -stabil ist.

Im weiteren Verlauf soll nicht mehr zwischen Analyse und Synthese unterschieden werden, da Streckenparameter und Reglerparameter mathematisch in derselben Weise behandelt werden können (der Entwurf kann als Analyse einer vorgegebenen Reglerstruktur aufgefasst werden). Aus diesem Grund kann nachfolgend, wenn nicht anders angegeben, der Parametervektor  $\mathbf{q}$  als Vektor von Strecken- und/oder Reglerparametern interpretiert werden.

## 3.5 Abbildung von $\mathcal{B}$ -Stabilitätsgrenzen in den Parameterraum

In diesem Abschnitt werden die mathematischen Gleichungen für die Abbildung der frequenzabhängigen Betragskriterien in den Parameterraum hergeleitet. Diese Herleitung lässt sich aus Stetigkeitsüberlegungen (Zwischenwertsatz, [30]) ableiten: Betrachtet werde der Betrag einer kontinuierlichen Übertragungsfunktion  $G(j\omega, q_1)$  für eine feste Frequenz  $\omega = \omega^*$  gegeben durch

$$g(q_1) = |G(j\omega^*, q_1)| , \quad (3.5.43)$$

wobei  $q_1 \in \mathbb{R}$ . Der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen besagt, dass die im Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion  $g(q_1)$  mit  $g(a) \neq g(b)$  alle Werte zwischen  $g(a)$  und  $g(b)$  annimmt. Es sei  $g(a) < \partial\mathcal{B}(\omega^*) < g(b)$ , wobei  $\partial\mathcal{B}(\omega)$  ein frequenzabhängiger Berandungsabschnitt ist. Dann gilt, dass für stetige Variation von  $q_1$  zwischen  $a$  und  $b$  die Berandung  $\partial\mathcal{B}(\omega^*)$  überschritten wird.

Aus diesen Überlegungen und in Analogie zum Grenzüberschreitungssatz von Frazer und Duncan entsprechend Satz 3.4 folgt der Grenzüberschreitungssatz für frequenzabhängige Betragskriterien:

*Satz 3.9. (Grenzüberschreitungssatz für frequenzabhängige Betragskriterien)*

Die Familie der Übertragungsfunktionen

$$\mathcal{G}(j\omega, \mathcal{Q}_B) = \{G(j\omega, \mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in \mathcal{Q}_B\} \quad (3.5.44)$$

ist genau dann  $\mathcal{B}$ -stabil bezüglich des Frequenzbereichs  $\omega \in [\omega^-, \omega^+]$ , wenn

1. eine  $\mathcal{B}$ -stabile Strecke  $G(j\omega) \in \mathcal{G}(j\omega, \mathcal{Q}_B)$  existiert, d. h.  $|G(j\omega)| \in \mathcal{B}$ ,  $\forall \omega \in [\omega^-, \omega^+]$  und
2.  $|\mathcal{G}(j\omega, \mathcal{Q}_B)| \neq \partial\mathcal{B}$ ,  $\forall \omega \in [\omega^-, \omega^+]$ .

□

Satz 3.9 besagt, dass die Übertragungsfunktion  $G(j\omega, \mathbf{q}_0)$  solange  $\mathcal{B}$ -stabil ist bis durch stetige Variation von  $\mathbf{q}_0$  eine  $\mathcal{B}$ -Stabilitätsgrenze  $\partial\mathcal{B}$  überschritten wird. Das heisst, dass  $G(j\omega, \mathbf{q}_0)$  für  $\mathbf{q}_0 \in \mathcal{Q}_B$   $\mathcal{B}$ -stabil ist.

*Anmerkung 3.6.* Ist eine Familie von Übertragungsfunktionen  $\mathcal{G}(s, \mathcal{Q}_B)$   $\mathcal{B}$ -stabil, so bedeutet dies nicht, dass sie auch per se asymptotisch stabil ist. Hierfür muss der Phasenverlauf mitberücksichtigt werden. Ein einfache Möglichkeit Stabilität von  $\mathcal{G}(s, \mathcal{Q}_B)$  zu gewährleisten ist, die Polynomfamilie  $P(s, \mathcal{Q}_B) = \text{den}(\mathcal{G}(s, \mathcal{Q}_B))$  auf Hurwitz-Stabilität zu überprüfen.

□

Falls sich die Berandung aus mehreren Abschnitten  $\partial\mathcal{B}_i$  zusammensetzt, bezieht sich Satz 3.9 auf alle Berandungsabschnitte. Das Gebiet  $\mathcal{Q}_B$  setzt sich dann zusammen aus der Schnittmenge der Einzelgebiete  $\mathcal{Q}_{B_i}$ , d. h.

$$\mathcal{Q}_B = \bigcap_i \mathcal{Q}_{B_i} . \quad (3.5.45)$$

Im Folgenden soll der Amplitudengang der Übertragungsfunktion  $G(j\omega, \mathbf{q})$  betrachtet werden. Dieser soll im  $\mathcal{B}$ -stabilen Gebiet verlaufen, welches von  $\partial\mathcal{B} = |B(j\omega)|$  begrenzt wird. In diesem Sinne lässt sich eine verallgemeinerte  $\mathcal{B}$ -Spezifikation durch die Ungleichung

$$|G(j\omega, \mathbf{q})| < |B(j\omega)|, \quad \forall \omega \in [\omega^-, \omega^+] \quad (3.5.46)$$

angeben.

*Anmerkung 3.7.* Die verallgemeinerte  $\mathcal{B}$ -Spezifikation in (3.5.46) lässt sich auch in Form einer äquivalenten  $\infty$ -Norm angeben zu

$$\|B(s)^{-1}G(s, \mathbf{q})\|_\infty < 1, \quad (3.5.47)$$

□

*Anmerkung 3.8.* Anstelle einer oberen Grenze kann auch eine untere Grenze wie in Bild 3.10 vorgeschlagen verwendet werden, d. h.

$$|G(j\omega, \mathbf{q})| > |B(j\omega)|, \quad \forall \omega \in [\omega^-, \omega^+] \quad (3.5.48)$$

□

*Anmerkung 3.9.* Bei Systemen, deren Dynamik sich sehr stark mit Betriebsparametern ändert, ist es unter Umständen sinnvoll (und mit dieser Methode möglich), die Berandung  $\partial\mathcal{B}$  vom Betriebszustand abhängig zu machen, d. h.  $\partial\mathcal{B} = |B(j\omega, \mathbf{q})|$ .

□

Die Aufgabe, die verallgemeinerte  $\mathcal{B}$ -Spezifikation (3.5.46) in den Parameterraum abzubilden, besteht darin, die Parametermenge  $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$  zu bestimmen, so dass  $\mathcal{G}(j\omega, \mathcal{Q}_{\mathcal{B}})$   $\mathcal{B}$ -stabil ist. Um die Abbildungsgleichung für Ungleichung (3.5.46) zu ermitteln, ist es ausreichend, zwei mathematische Bedingungen zu untersuchen, die Punkt- und die Tangentenbedingung. Die Punktbedingung wird verwendet, falls  $|G(j\omega, \mathbf{q})|$  auf einem Berandungsabschnitt beginnt oder endet bzw. durch einen Anfangs- oder Endpunkt eines Berandungsabschnitts verläuft. Die Tangentenbedingung ermöglicht die Abbildung von Berührungspunkten, d. h. von solchen Punkten, bei denen  $|G(j\omega, \mathbf{q})|$  tangential an einem glatten Berandungsabschnitt  $\partial\mathcal{B}$  anliegt.

### 3.5.1 Die Punktbedingung

Bei der Anwendung der Punktbedingung wird für eine feste Frequenz  $\omega = \omega^*$  die Menge der Parameter  $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathbb{R}^2$  mit  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2]^T$  durch Ermittlung der Berandung  $\partial\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$  bestimmt, so dass

$$|G(j\omega^*, \mathbf{q})| = |B(j\omega^*)| \quad \forall \mathbf{q} \in \partial\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}. \quad (3.5.49)$$

Dies bedeutet, dass die Amplitudengänge von  $G(s, \mathbf{q})$  und  $B(s)$  bei der Frequenz  $\omega = \omega^*$  einen gemeinsamen Punkt besitzen. Die Berandung  $\partial\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$  unterteilt die  $(q_1, q_2)$ -Ebene in eine endliche Anzahl von Gebieten. Ein jedes dieser Gebiete muss nun auf  $\mathcal{B}$ -Stabilität mit Hilfe des Grenzüberschreitungssatzes für frequenzabhängige Betragskriterien, Satz 3.9, überprüft werden. Umformung und Quadrieren von Gl. (3.5.49) führt auf den Zusammenhang

$$\xi = \operatorname{Re} \left( \frac{G(j\omega, \mathbf{q})}{B(j\omega)} \right)^2 + \operatorname{Im} \left( \frac{G(j\omega, \mathbf{q})}{B(j\omega)} \right)^2 - 1 = 0, \quad (3.5.50)$$

wobei  $\xi = \xi(\omega, \mathbf{q})$  ist. Weiterhin sei

$$\xi(\omega, \mathbf{q}) = \frac{p_1(\omega, \mathbf{q})}{d(\omega, \mathbf{q})}. \quad (3.5.51)$$

Vorausgesetzt, es gilt,  $d(\omega, \mathbf{q}) \neq 0$  (diese Bedingung muss gesondert geprüft werden), dann kann die Punktbedingung folgendermaßen definiert werden: Gegeben sei ein festes  $\omega = \omega^*$ . Finde  $\mathbf{q}$ , d. h.  $q_1$  und  $q_2$ , so dass

$$p_1(\omega^*, \mathbf{q}) = 0. \quad (3.5.52)$$

Für ein festes  $\omega = \omega^*$  ist Gl. (3.5.52) eine polynomiale Gleichung in zwei Variablen und kann als implizite Darstellung einer reellen Kurve in der Ebene der Parameter  $(q_1, q_2)$  aufgefasst werden. Gezeichnet werden kann die Kurve, indem ein Parameter, z. B.  $q_1$ , gerastert wird;  $q_2$  ergibt sich dann aus der Berechnung der Nullstellen von  $p_1(\omega^*, q_1^*, q_2) = 0$ . Da komplexe Nullstellen auftreten können und damit die Anzahl der reellen Lösungspaare variiert, ist es sinnvoll, die Werte von  $q_1$  zu bestimmen, für die sich die Anzahl der reellen Lösungen ändert, was dann ein „intelligentes Rastern“ ermöglicht. Dies erfolgt über die Berechnung der Nullstellen der Diskriminante

$$\text{Dis}(p_1(\omega^*, q_1, q_2)) = \text{Res}_{q_2} \left( p_1(\omega^*, q_1, q_2), \frac{\partial p_1(\omega^*, q_1, q_2)}{\partial q_2} \right) = 0. \quad (3.5.53)$$

Mit Hilfe der Resultanten-Methode, einem Eliminationsverfahren der linearen Algebra, wird hierbei aus den beiden Polynomen  $p_1$  und  $p_1'$  der Parameter  $q_2$  eliminiert. Der Operator Res in (3.5.53) bezeichnet die Resultante von  $p_1$  und  $p_1'$ . Für eine fest vorgegebene Frequenz  $\omega^*$  liefert die Resultanten-Methode eine polynomiale Gleichung in  $q_1$ . Die Wurzeln dieses Polynoms sind die Nullstellen der Diskriminante. Für weitere Details bzgl. der Resultanten-Methode und der damit im Zusammenhang stehenden linearen Algebra wird auf [5, 70, 20] verwiesen.

### 3.5.2 Die Tangentenbedingung

Die Bedingung, dass  $|G(j\omega, \mathbf{q})|$  die Berandung  $|B(j\omega)|$  bei der Frequenz  $\omega = \omega^*$  berührt, impliziert, dass die beiden Kurven eine gemeinsame Tangente besitzen, d. h.

$$\frac{\partial |G(j\omega, \mathbf{q})|}{\partial \omega} = \frac{\partial |B(j\omega)|}{\partial \omega} \quad (3.5.54)$$

und gleichzeitig die Punktbedingung (3.5.52) erfüllt ist. Wie leicht zu zeigen ist, ist die Lösung von (3.5.54) äquivalent zur Lösung von

$$\frac{\partial \xi(\omega, \mathbf{q})}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{p_1(\omega, \mathbf{q})}{d(\omega, \mathbf{q})} \right) = 0. \quad (3.5.55)$$

Die Anwendung der Produktregel liefert

$$\left( \frac{p_1}{d} \right)' = \frac{p_1' d - p_1 d'}{d^2}. \quad (3.5.56)$$

Wiederum muss überprüft werden, ob  $d \neq 0$  ist. Falls (3.5.52) erfüllt ist (d. h.  $p_1 = 0$ ), folgt aus (3.5.56), dass (3.5.55) dann erfüllt ist, falls  $p_1' = 0$ . Es sei

$$p_2(\omega, \mathbf{q}) = p_1'(\omega, \mathbf{q}) = \frac{\partial p_1(\omega, \mathbf{q})}{\partial \omega}. \quad (3.5.57)$$

Die Bedingung für die Existenz eines Berührungspunkts, d. h. die Tangentenbedingung, kann nun folgendermaßen formuliert werden: Gegeben sei eine feste Frequenz  $\omega = \omega^*$ . Gesucht wird der Parametervektor  $\mathbf{q}$ , so dass

$$\begin{aligned} p_1(\omega, \mathbf{q}) &= 0 \\ p_2(\omega, \mathbf{q}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5.58)$$

Bei der praktischen Anwendung der Tangentenbedingung sollen nicht Berührungspunkte für diskrete Frequenzen berechnet werden sondern es soll die Tangentenbedingung für einen ganzen Berandungsabschnitt, also für einen kontinuierlichen Frequenzbereich  $[\omega^-, \omega^+]$ , in den Parameterraum abgebildet werden. Mit Bedingung (3.5.58) stehen zwei polynomiale Gleichungen für drei Unbekannte  $\omega$ ,  $q_1$  und  $q_2$  zur Verfügung. Das Lösen der Gleichungen erfordert das Rastern eines Parameters. Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten dies durchzuführen. Beispielsweise kann ein Parameter gerastert werden und für jeden dieser Rasterpunkte werden dann aus (3.5.58) die entsprechenden Lösungen für die anderen beiden Parameter ermittelt. Eine andere Möglichkeit besteht darin, zunächst aus (3.5.58) einen Parameter algebraisch anhand der Resultanten-Methode zu eliminieren und anschließend einen der beiden anderen Parameter zu rastern. Weitergehende Details für die mathematische Behandlung der Tangentenbedingung sind in [5, 70] angegeben.

## 3.6 Multiple Entwurfsanforderungen im Parameterraum

Die Abbildung von  $\mathcal{B}$ -Stabilitätsgrenzen in den Parameterraum garantiert per se noch keine Hurwitz-Stabilität der Regelstrecke. Es ist deswegen bei der Anwendung des Verfahrens erforderlich, zusätzlich zumindest die Hurwitz-Stabilitätsgrenzen mit in den Parameterraum abzubilden. Eine Kombination mit der Abbildung von  $\Gamma$ -Stabilitätsgrenzen (worunter auch die Hurwitz-Stabilitätsgrenze fällt) ermöglicht es darüber hinaus, sehr flexibel und vielseitig eine große Klasse von Entwurfsspezifikationen im Frequenz- und Eigenwertbereich in den Parameterraum abzubilden. Es sei zunächst

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{B}} = \bigcap_i \mathcal{Q}_{\mathcal{B}_i} \quad (3.6.59)$$

die Menge der Parameter, die die einzelnen  $\mathcal{B}$ -Spezifikationen  $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}_i}$  simultan erfüllt. Der Index  $i$  kennzeichnet dabei Spezifikationen, die sich auf unterschiedliche Betriebspunkte  $\mathbf{q}_i$ , Frequenzbereiche  $[\omega_i^-, \omega_i^+]$  und/oder auf die Art der Spezifikation (Sensitivität, komplementäre Sensitivität, etc.) und damit auf unterschiedliche Familien von Übertragungsfunktionen  $\mathcal{G}_i$  beziehen können. Weiterhin sei

$$\mathcal{Q}_{\Gamma} = \bigcap_j \mathcal{Q}_{\Gamma_j} \quad (3.6.60)$$

die Menge, die sämtliche  $\Gamma$ -Spezifikationen  $\mathcal{Q}_{\Gamma_j}$  im Eigenwertbereich simultan erfüllt und

$$\mathcal{Q}_{\Theta} = \bigcap_k \mathcal{Q}_{\Theta_k} \quad (3.6.61)$$

die Menge, die alle  $\Theta$ -Spezifikationen an Ortskurven in Nyquist- und/oder Popow-Ebene erfüllt. Die Indices  $j$  und  $k$  in (3.6.60) und (3.6.61) stehen für unterschiedliche Betriebspunkte, Berandungsabschnitte und/oder für unterschiedliche Ortskurventypen (Popow,

Nyquist), d. h. bezogen auf verschiedene Familien von Übertragungsfunktionen  $\mathcal{G}_k$ . Die Schnittmenge

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}} \cap \mathcal{Q}_{\Gamma} \cap \mathcal{Q}_{\Theta} \quad (3.6.62)$$

erfüllt alle frequenz- und eigenwertabhängigen Entwurfsanforderungen simultan, d. h. die Familien der Übertragungsfunktionen  $\mathcal{G}_i(s, \mathcal{Q})$  bzw.  $\mathcal{G}_k(s, \mathcal{Q})$  sind  $\mathcal{B}_i$ - bzw.  $\Theta_k$ -stabil und gleichzeitig ist die Polynomfamilie  $P(s, \mathcal{Q})$   $\Gamma$ -stabil.

Mitunter erhält man bei der Abbildung einer Vielzahl von Spezifikationen in den Parameterraum sehr unübersichtliche Kurvengebilde. Eine Möglichkeit dem entgegenzuwirken besteht darin, nur die aktiven Berandungsabschnitte der einzelnen Spezifikationen bzw. nur die Berandung der Schnittmenge zu berechnen [70, 106]. Ein anderer Ansatz wird in [87] vorgeschlagen. Hierbei werden Entwurfsanforderungen farblich kodiert, so dass der Betrachter ein so erzeugtes Bild im Parameterraum intuitiv interpretieren kann.

## 3.7 Beispiele

### 3.7.1 Feder-Masse-Schwinger

Betrachtet wird die Übertragungsfunktion eines Feder-Masse-Schwingers

$$G(s, \Omega, \zeta) = \frac{\Omega^2}{s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2} \quad (3.7.63)$$

mit den unsicheren Parametern  $\zeta \in \mathbb{R}^+$  und  $\Omega \in \mathbb{R}^+$ . Gesucht sei das Gebiet  $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$  in der Ebene der Parameter  $\zeta$  und  $\Omega$ , für das der Amplitudengang  $|G(j\omega, \Omega, \zeta)|$  zwischen einer unteren und einer oberen Grenze  $|G^-(j\omega)|$  bzw.  $|G^+(j\omega)|$  wie links in Bild 3.11 gezeigt verläuft, d. h.

$$|G^-(j\omega)| < |G(j\omega, \Omega, \zeta)| < |G^+(j\omega)| .$$

Als  $\mathcal{B}$ -Berandungen werden die Amplitudengänge der Übertragungsfunktionen

$$G^-(s) = \kappa_1 G(s, \Omega_1, \zeta_1) = \frac{90}{s^2 + 14s + 100} \quad (3.7.64)$$

$$G^+(s) = \kappa_2 G(s, \Omega_2, \zeta_2) = \frac{1375}{2(s^2 + 5s + 625)} \quad (3.7.65)$$

mit den Parameterwerten

$$\begin{array}{lll} \kappa_1 = 9/10 & \zeta_1 = 7/10 & \Omega_1 = 10 \\ \kappa_2 = 11/10 & \zeta_2 = 1/10 & \Omega_2 = 25 \end{array}$$

gewählt. Wegen

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega, \Omega, \zeta) = 1, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} G^-(j\omega) = \kappa_1, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} G^+(j\omega) = \kappa_2$$

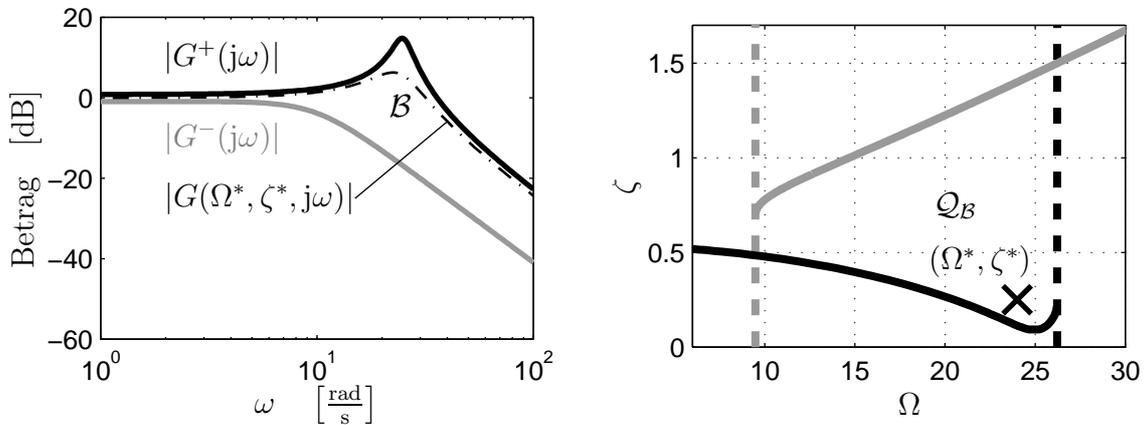
beginnen die Ortskurve  $G(j\omega, \Omega, \zeta)$ , die obere Grenze  $G^+(j\omega)$  sowie die untere Grenze  $G^-(j\omega)$  unabhängig von den unsicheren Parametern  $\Omega$  und  $\zeta$  für  $\omega = 0$  auf der reellen Achse bei 1,  $\kappa_2$  und  $\kappa_1$ . Für  $\kappa_2 \neq 1$  bzw.  $\kappa_1 \neq 1$  existiert kein gemeinsamer Anfangspunkt von Ortskurve und unterer bzw. oberer Grenze. Weiterhin enden die Ortskurven  $G(j\omega, \Omega, \zeta)$ ,  $G^+(j\omega)$  und  $G^-(j\omega)$  im Ursprung, wegen

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega, \Omega, \zeta) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} G^+(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} G^-(j\omega) = 0. \quad (3.7.66)$$

Die Ortskurve hat also für  $\omega \rightarrow \infty$  einen gemeinsamen Punkt mit der oberen und unteren Schranke. Aus der Punktbedingung (3.5.52) folgt das Ergebnis

$$\Omega = \Omega_1 \sqrt{\kappa_1} \quad \text{bzw.} \quad \Omega = \Omega_2 \sqrt{\kappa_2}.$$

Die beiden Lösungen sind gestrichelt auf der rechten Seite in Bild 3.11 eingezeichnet. Die beiden Polynome, deren gemeinsame Lösung der Tangentenbedingung (3.5.58) ent-



**Bild 3.11:** Abbildung der oberen und unteren Grenze in den Parameterraum.

sprechen, lauten für die untere ( $i = 1$ ) bzw. obere Grenze ( $i=2$ ):

$$\begin{aligned} p_1(\alpha, \Omega, \zeta) &= \alpha^2 \Omega^4 - 2\alpha \Omega^4 \Omega_i^2 + 4\alpha \zeta_i^2 \Omega^4 \Omega_i^2 - \alpha^2 \kappa_i^2 \Omega_i^4 \\ &\quad + 2\alpha \kappa_i^2 \Omega^2 \Omega_i^4 - 4\alpha \zeta_i^2 \kappa_i^2 \Omega^2 \Omega_i^4 + \Omega^4 \Omega_i^4 - \kappa_i^2 \Omega^4 \Omega_i^4 \\ p_2(\alpha, \Omega, \zeta) &= 2(\alpha \Omega^4 - \Omega^4 \Omega_i^2 + 2\zeta_i^2 \Omega^4 \Omega_i^2 - \alpha \kappa_i^2 \Omega_i^4 \\ &\quad + \kappa_i^2 \Omega^2 \Omega_i^4 - 2\zeta_i^2 \kappa_i^2 \Omega^2 \Omega_i^4), \end{aligned}$$

wobei  $\alpha = \omega^2$ . Die Berechnung der Kurven erfolgt dann mit Hilfe des Resultantenverfahrens entsprechend [4, 5, 70]. Bild 3.11 rechts zeigt die in die Ebene der unsicheren Parameter abgebildete Tangentenbedingung für die untere und obere Schranke  $|G^-(j\omega)|$  bzw.  $|G^+(j\omega)|$ . Für den mit einem  $\times$  gekennzeichneten  $\mathcal{B}$ -stabilen Punkt  $[\Omega^*, \zeta^*] \in \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$  rechts in Bild 3.11 ist links strichpunktiert der Amplitudengang eingezeichnet, der entsprechend zwischen unterer und oberer Grenze verläuft.

### 3.7.2 Gierstabilisierung Einspurmodell

Das Störunterdrückungsverhalten des Einspurmodells aus (A.5.86) soll durch PI-Gieratenrückführung auf den Vorderradlenkwinkel gegenüber dem des konventionellen

Fahrzeugs verbessert werden. Dabei werden Fahrgeschwindigkeit  $v$  und Kraftschlusskoeffizient  $\mu$  als variierend bzw. unsicher innerhalb des Variationsbereiches

$$Q = \{ \mathbf{q} = [v \ \mu]^T \mid v \in [20 \text{ km/h}, 100 \text{ km/h}], \mu \in [0.5, 1] \} \quad (3.7.67)$$

angenommen. Setzt man für die übrigen Parameter die nominellen Werte aus Tabelle A.2 ein, so folgt für die Übertragungsfunktion von Vorderradlenkwinkel  $\delta_V$  zur Gierrate  $r$

$$G_{\delta_V}^r(s, v, \mu) = \frac{145500 \mu v (182178 \mu + 1859 v s)}{92509077510 \mu^2 + 16902600 \mu v^2 + 1847511159 \mu v s + 9192755 v^2 s^2} . \quad (3.7.68)$$

Für den Aktuator wird ein Modell 3. Ordnung mit multiplikativer Ausgangsunsicherheit angenommen, d. h.

$$\tilde{G}_a(s) = (1 + W_\Delta(s)\Delta(s))G_a(s)$$

mit

$$G_a(s) = \frac{\omega_a^3}{(s^2 + 2d_a\omega_a s + \omega_a^2)(s + \omega_a)} ,$$

wobei  $d_a = 1/\sqrt{2}$  und  $\omega_a = 10\pi$  ist, und die Gewichtsfunktion

$$W_\Delta(s) = 5 \frac{s + \pi}{s + 50\pi} .$$

Mit dem Regelgesetz

$$K_r(s, k_p, k_i) = k_p + \frac{k_i}{s} \quad (3.7.69)$$

lautet die Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Kreises (ohne multiplikative Unsicherheit)

$$G_0(s, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = K_r(s, \mathbf{k}) G_a(s) G_{\delta_V}^r(s, \mathbf{q}) , \quad (3.7.70)$$

wobei  $\mathbf{q} = [v \ \mu]^T$ ,  $\mathbf{k} = [k_p \ k_i]^T$ . Sensitivitätsfunktion und komplementäre Sensitivitätsfunktion ergeben sich entsprechend zu

$$S(s, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = \frac{1}{1 + K_r(s, \mathbf{k}) G_a(s) G_{\delta_V}^r(s, \mathbf{q})} \quad \text{und} \quad (3.7.71)$$

$$T(s, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = \frac{K_r(s, \mathbf{k}) G_a(s) G_{\delta_V}^r(s, \mathbf{q})}{1 + K_r(s, \mathbf{k}) G_a(s) G_{\delta_V}^r(s, \mathbf{q})} . \quad (3.7.72)$$

Die komplementäre Sensitivitätsfunktion entspricht dabei der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises von Referenzgierrate  $r_{ref}$  zur Gierrate  $r$ . Das charakteristische Polynom des Einspurmodells ergibt sich zu

$$p(s, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = \text{num}(1 + G_0(s, \mathbf{q}, \mathbf{k})) = 0 . \quad (3.7.73)$$

Folgende Spezifikationen bezüglich Stabilität und Regelgüte soll der geschlossene Regelkreis erfüllen:

1. Robuste Hurwitz-Stabilität gegenüber den parametrischen Unsicherheiten  $v$  und  $\mu$ : Dies ist gewährleistet, falls sämtliche Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises für alle  $\mathbf{q} \in Q$  in der linken Halbebene liegen, d. h. links der Berandung

$$\partial\Gamma : s = j\omega \quad \text{für} \quad \omega \in [0, \infty). \quad (3.7.74)$$

2. Robuste Stabilität gegenüber der multiplikativen Ausgangsunsicherheit  $W_\Delta(s)\Delta(s)$ : Dies ist der Fall, falls der Amplitudengang der komplementären Sensitivitätsfunktion  $|T(j\omega, \mathbf{q}, \mathbf{k}^*)|$  für alle  $\mathbf{q} \in Q$  unterhalb dem des inversen Performance-Gewichts für das Fehlermodell, d. h. unterhalb der  $\mathcal{B}$ -Berandung

$$\partial\mathcal{B}_\Delta(\omega) = |W_\Delta(j\omega)|^{-1} = \left| \frac{j\omega + 50\pi}{5(j\omega + \pi)} \right| \quad \text{für} \quad \omega \in [0, \infty) \quad (3.7.75)$$

verläuft.

3. Die Störunterdrückung soll gegenüber der des konventionellen Fahrzeugs im Frequenzbereich zwischen 0 und 1 Hz um mindestens 20 % verbessert werden: Entsprechend muss der Amplitudengang der Sensitivitätsfunktion  $|S(j\omega, \mathbf{q}, \mathbf{k}^*)|$  für alle  $\mathbf{q} \in Q$  unterhalb der Berandung

$$\partial\mathcal{B}_S = f(\omega) = 5/6 \quad \text{für} \quad \omega \in [0, 2\pi] \quad (3.7.76)$$

bleiben.

Gesucht sind also die Reglerparameter  $\mathbf{k} = \mathbf{k}^*$ , so dass die Streckenfamilie

$$\mathcal{G}(s, Q, \mathbf{k}^*) = \{T(s, \mathbf{q}, \mathbf{k}^*) | \mathbf{q} \in Q\} \quad (3.7.77)$$

robust Hurwitz-stabil ist, die Sensitivitätsfunktion der Bedingung

$$|S(j\omega, \mathbf{q}, \mathbf{k}^*)| < 5/6, \quad \forall \omega \in [0, 2\pi] \quad (3.7.78)$$

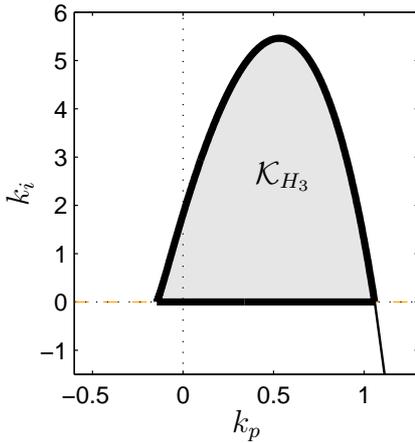
genügt und die komplementäre Sensitivitätsfunktion der Bedingung

$$|T(j\omega, \mathbf{q}, \mathbf{k}^*)| < \partial\mathcal{B}_\Delta(\omega), \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (3.7.79)$$

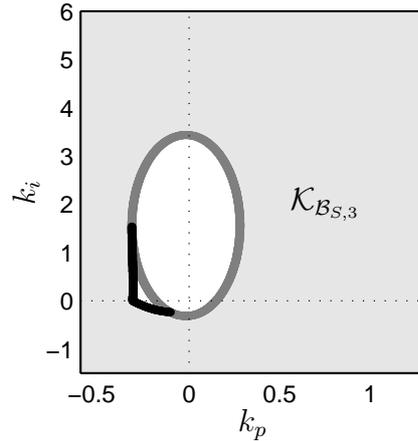
Entsprechend der in Abschnitt 3.3 vorgeschlagenen Vorgehensweise beim robusten Reglerentwurf werden zunächst die Reglerparameter  $\mathbf{k}^*$  bezüglich einer endlichen Testmenge  $Q_E \subset Q$  bestimmt. Die Testmenge soll in diesem Fall die vier Eckpunkte des Betriebsbereichs enthalten, d. h.

$$Q_E = \{\mathbf{q} = [v \ \mu]^T \mid v \in \{20 \text{ km/h}, 100 \text{ km/h}\}, \mu \in \{0.5, 1\}\} . \quad (3.7.80)$$

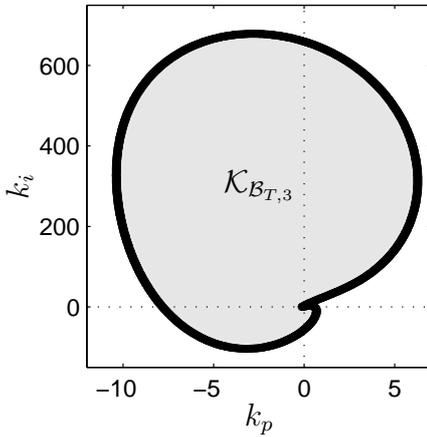
Für den Eckpunkt des Betriebsbereichs  $E_3$  mit  $v = 100 \text{ km/h}$  und  $\mu = 1$  zeigen Bild 3.12–3.14, die aus der Abbildung der Berandungen (3.7.74), (3.7.76) und (3.7.75) resultierenden Gebiete  $\mathcal{K}_{H_3}$ ,  $\mathcal{K}_{B_{S,3}}$  und  $\mathcal{K}_{B_{T,3}}$  in der Ebene der Reglerparameter  $k_p$  und  $k_i$ . Die Schnittmenge dieser drei Gebiete  $\mathcal{K}_3 = \mathcal{K}_{H_3} \cap \mathcal{K}_{B_{S,3}} \cap \mathcal{K}_{B_{T,3}}$  ist rechts oben in Bild 3.15 dargestellt. Für ein beliebiges  $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_3$  ist gewährleistet, dass sämtliche Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis für diesen Betriebspunkt simultan erfüllt sind.



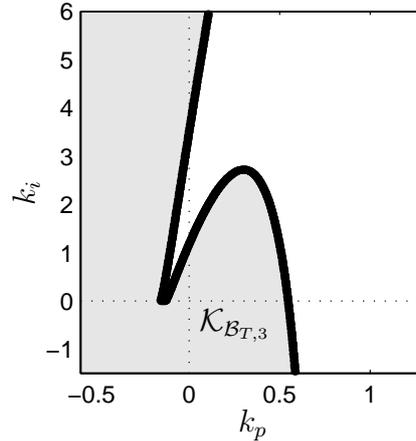
**Bild 3.12:** Individuelle Hurwitz-Stabilität im Reglerparameterraum.



**Bild 3.13:** Individuelle nominelle Regelgüte im Reglerparameterraum.



**Bild 3.14:** Individuelle robuste Stabilität im Reglerparameterraum.



*Anmerkung 3.10.* In Bild 3.12 verläuft die Berandung des Hurwitz-stabilen Gebiets teilweise auf der reellen Achse ( $k_i = 0$ ), die somit nicht Hurwitz-stabil ist. Dies liegt darin begründet, dass durch den Strukturansatz für den Regler ein neuer Systemzustand eingeführt wurde, der für  $k_i = 0$  unabhängig vom Betriebszustand gleich Null ist. Das charakteristische Polynom kann für  $k_i = 0$  entsprechend

$$p(s, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = s \cdot (\text{den}(G_a(s)G_{\delta_v}^r(s, \mathbf{q})) + k_p \text{num}(G_a(s)G_{\delta_v}^r(s, \mathbf{q})))$$

in zwei Teilpolynome zerlegt werden. Das Teilpolynom  $s$  lässt sich unabhängig vom Betriebspunkt durch Variation von  $k_p$  nicht verschieben. Somit ist der geschlossene Regelkreis für  $k_i = 0$  nicht Hurwitz-stabil.

□

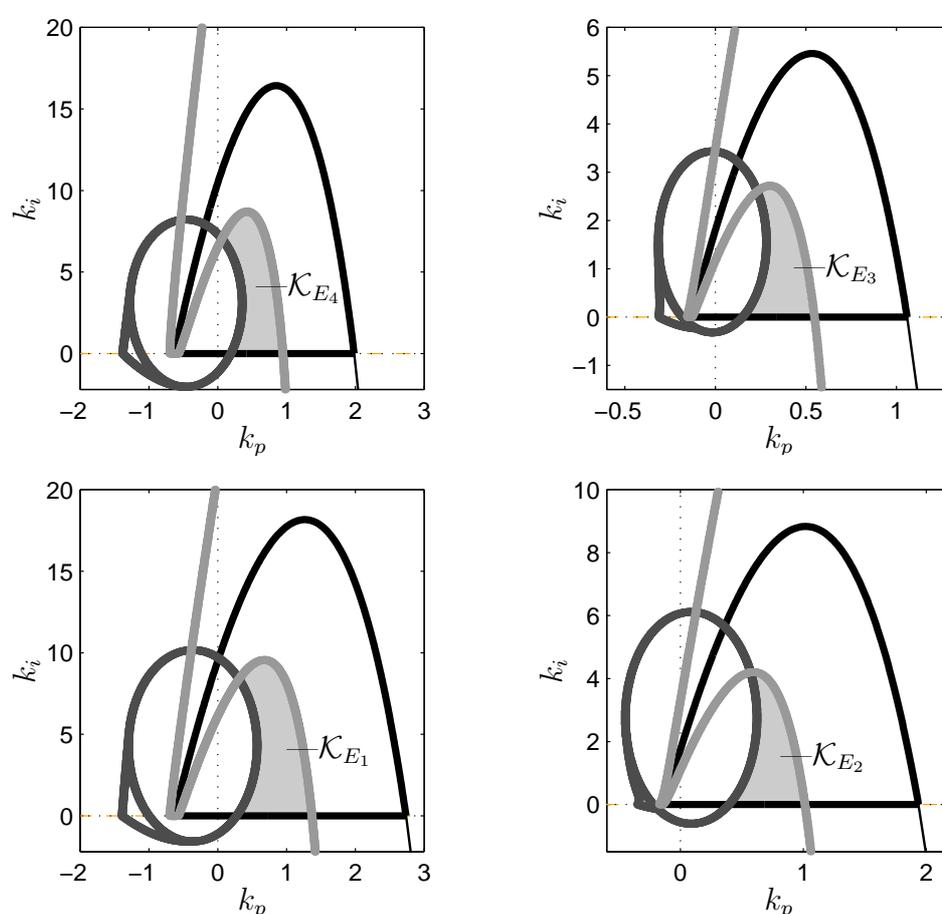
In analoger Vorgehensweise werden nun für die übrigen drei Eckpunkte des Betriebsbe-

reichs die entsprechenden Schnittmengen  $\mathcal{K}_{E_i}$  gebildet, wie ebenfalls in Bild 3.15 dargestellt. Die Schnittmenge der vier Reglermengen  $\mathcal{K}_{E_i}$  liefert die in Bild 3.16 dargestellte Reglermenge  $\mathcal{K}_E$  mit

$$\mathcal{K}_E = \bigcap_{i=1}^4 (\mathcal{K}_{H_i} \cap \mathcal{K}_{B_{T,i}} \cap \mathcal{K}_{B_{S,i}}) , \quad (3.7.81)$$

die bezüglich  $Q_E$  sämtliche Anforderungen robust erfüllt. Aus der Menge  $\mathcal{K}_E$  wird ein Regler ausgewählt (in Bild 3.16 mit einem Kreuz gekennzeichnet):  $\mathbf{k}^* \in \mathcal{K}_E$  mit

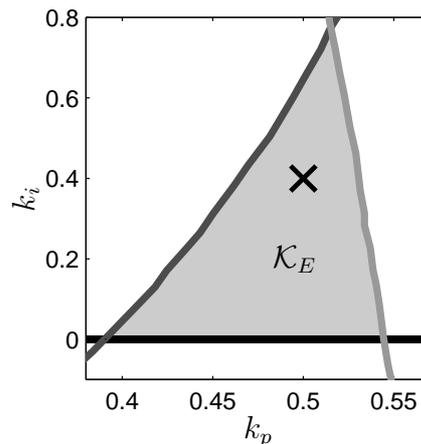
$$\mathbf{k}^* = [0.5 \ 0.4]^T .$$



**Bild 3.15:** Hurwitz- und  $\mathcal{B}$ -stabile Reglergebiete für die Eckpunkte  $E_1 - E_4$ .

In einem Analyseschritt muss jetzt noch überprüft werden, ob sämtliche Spezifikationen auch für das Kontinuum des Betriebsbereichs  $Q$  erfüllt sind. Für den Regelkreis mit

$$K_r(s) = 0.5 + 0.4/s$$



**Bild 3.16:** Robuste Hurwitz- und  $\mathcal{B}$ -Stabilität im Reglerparameterraum.

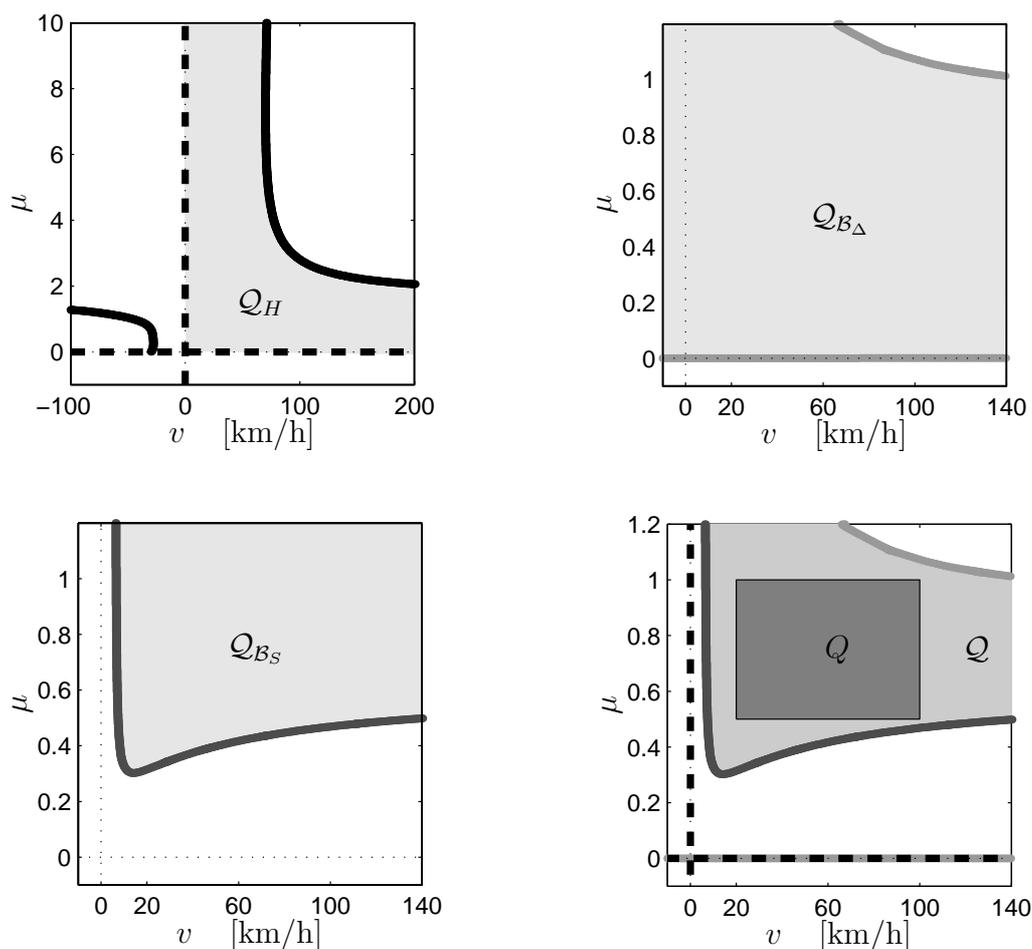
werden nun die Anforderungen 1. – 3. in die Ebene der Streckenparameter  $v$  und  $\mu$  abgebildet. Als Ergebnis, wie in Bild 3.17 dargestellt, erhält man  $\mathcal{Q}_H$ ,  $\mathcal{Q}_{B_\Delta}$ ,  $\mathcal{Q}_{B_S}$  und die Schnittmenge  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_H \cap \mathcal{Q}_{B_\Delta} \cap \mathcal{Q}_{B_S}$ , die sämtliche Anforderungen simultan erfüllt. Wegen  $Q \subset \mathcal{Q}$  kann für den geschlossenen Regelkreis mit der Gierratenrückführung  $K_r = 0.5 + 0.4/s$  robuste Stabilität sowohl gegenüber der variierenden Fahrgeschwindigkeit  $v$  und dem unsicheren Kraftschluss  $\mu$  als auch gegenüber der multiplikativen Ausgangsunsicherheit  $W_\Delta \Delta$  gewährleistet werden. Darüber hinaus werden für den gesamten Betriebsbereich niederfrequente Störungen robust unterdrückt.

Der entworfene Regler ist natürlich weit davon entfernt eine gute Wahl für die Auslegung einer Gierstabilisierung zu sein und ist nur als erster Schritt eines iterativen Entwurfsprozesses zu sehen, bei dem sukzessive die Anforderungen erhöht werden und gegebenenfalls die Reglerstruktur modifiziert werden muss.

Eine Verbesserung der Regelgüte ist beispielsweise mit einer Anpassung der Verstärkungen  $k_p$  und  $k_i$  an die Fahrgeschwindigkeit oder an weitere messbare Fahrzeugparameter möglich. Auch kann durch die Verwendung zusätzlicher Rückführgrößen wie bspw. der Querbeschleunigung oder des Vorderradlenkwinkels [35] eine weitere Verbesserung erzielt werden.

### 3.8 Einschätzung

Das vorgestellte Verfahren erlaubt es, im Frequenzbereich spezifizierte Anforderungen an den Amplitudengang, die als  $\mathcal{B}$ -Spezifikationen bezeichnet werden, in den Parameterraum abzubilden. Die prinzipbedingten Vorteile des Parameterraumverfahrens, die vor allem in einer einfachen Reglerstruktur, der Transparenz des Reglerentwurfs und der exakten (nicht konservativen) Behandlung parametrischer Unsicherheiten liegen,



**Bild 3.17:** Robustheitsanalyse im Parameterraum.

bleiben erhalten und darüber hinaus können weitere Robustheitskriterien und Kriterien die Regelgüte betreffend in Entwurf und Analyse miteinbezogen werden. Damit wird es möglich, eine Vielzahl von so genannten “Loop-shaping”-Kriterien, die weite Verbreitung durch die Anwendung von  $H_\infty$ -Frequenzbereichsverfahren gefunden haben, zu verwenden. Diese Kriterien beziehen sich u. a. auf Stabilität, Führungsübertragungsverhalten sowie die Unterdrückung von Störungen und Messrauschen und werden in den Reglerentwurf durch bandbreitenspezifische obere Schranken im Amplitudengang der Sensitivitätsfunktionen integriert.

In Kombination mit der Abbildung eigenwertabhängiger Entwurfsanforderungen ( $\Gamma$ -Stabilität) und von Anforderungen an Ortskurven ( $\Theta$ -Stabilität) steht somit ein Werkzeug zur Verfügung, welches es ermöglicht, ein breites Spektrum an Entwurfsspezifikationen zu verwenden und damit sowohl parametrische als auch unstrukturierte Unsicherheiten zu behandeln.

Praktische Anwendung hat das hier entwickelte Verfahren bereits gefunden in der Entwicklung von Fahrdynamikregelungssystemen zur Wankbedämpfung, wie im nächsten

Kapitel gezeigt werden wird, und zur Gierstabilisierung mit inverser Modellfolgeregelung entsprechend Abschnitt 2.5.2 [34, 35, 15, 16, 61]. Auch in der Flugregelung sowohl im Zusammenhang mit der Flattervermeidung [94] als auch der Regelung der Nickbewegung [25, 26] sind vielversprechende Ergebnisse erzielt worden.

## 4 Indirekte Kippvermeidung: Bedämpfung der Wankdynamik durch kontinuierlich betriebene Lenkregelung

Kraftfahrzeuge mit einem auf die Spurweite bezogenen hohen Schwerpunkt neigen zu ausgeprägten Wankbewegungen, welche unter Umständen zu einem Umkippen führen können. Wankbewegungen treten insbesondere bei transienten Fahrmanövern also bei Spurwechsel- oder Ausweichmanövern und bei Störgrößeneinflüssen wie böigem Seitenwind oder Straßenunebenheiten bzw. Spurrillen auf. Bei Anregungen des Fahrzeugs im Bereich der Wankeigenfrequenz kann es zu einem regelrechten Aufschwingen des Fahrzeugaufbaus kommen. Zudem kann durch das Überschwingen des Aufbaus der Fahrer zu einer an sich nicht notwendigen Korrektur am Lenkrad veranlasst werden, die zu einer Destabilisierung des Fahrzustands führen kann (“Driver Induced Oscillations”<sup>1</sup>).

In diesem Kapitel wird beschrieben, wie mit einem aktiven Eingriff in die Vorderadlenkung die Wankdynamik verbessert und somit auch *indirekt* die Kippgefahr im transienten Bereich reduziert werden kann. Anhand des im vorangegangenen Kapitel vorgestellten Verfahrens wird unter Berücksichtigung unterschiedlicher im Eigenwert- und Frequenzbereich formulierter Entwurfsanforderungen der regelungstechnische Entwurf im Parameterraum durchgeführt. Im Vordergrund dieses Kapitels steht neben der Auswahl sinnvoller Spezifikationen bezüglich Fahrsicherheit und Fahrkomfort und der Wahl der Reglerstruktur vor allem der Aspekt der Robustheit gegenüber unsicheren Parametern (beladungsabhängige Schwerpunkthöhe  $h$ , Kraftschluss Reifen/Straße  $\mu$ , nichtmodellerte Dynamik) und die Adaption des Regelgesetzes an die Fahrgeschwindigkeit  $v$  (welche beispielsweise über die Messung von Raddrehzahlen ermittelt werden kann [73]). Grundlage der Ausführungen bilden [10, 11].

---

<sup>1</sup>In der Flugregelung werden destabilisierend wirkende Stelleingriffe des Piloten als “Pilot Induced Oscillations” [44] bezeichnet.

## 4.1 Vorgehensweise

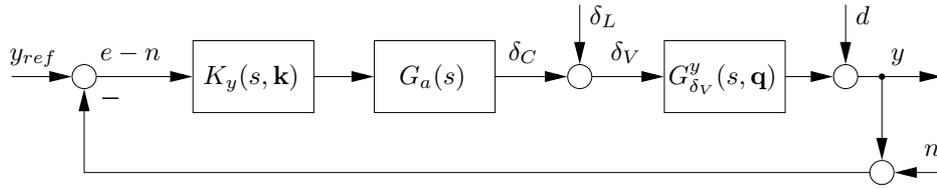
Der regelungstechnische Entwurfsprozess erfordert eine schrittweise Vorgehensweise, bei der zunächst das betrachtete Fahrzeug entsprechend der Zielsetzung und der zu verwendenden Aktuatorik und Sensorik modelliert und analysiert wird. Bezug nehmend auf die dynamischen und stationären Eigenschaften des Fahrzeugs werden im darauf folgenden Schritt die regelungstechnischen Entwurfsspezifikationen, die sich auf die Stabilität, die Regelgüte und auf die Robustheit dieser beiden Eigenschaften beziehen, formuliert. Die Auswahl der Reglerstruktur erfolgt auf Grundlage eines nominalen Entwurfsmodells anhand von Wurzelortskurven und struktureller Überlegungen. Mit der resultierenden Reglerstruktur wird der eigentliche regelungstechnische Entwurf durchgeführt, welcher es ermöglicht, sämtliche Entwurfsspezifikationen in robuster Weise zu erfüllen.

## 4.2 Struktur des Regelungssystems

### 4.2.1 Regelstrecke und Aktuatordynamik

In Anhang A wird detailliert das erweiterte Einspurmodell eines Fahrzeugs mit Vorderadlenkung erläutert, welches die wechselseitige Beeinflussung von Längs-, Quer-, Gier- und Wankdynamik beschreibt. Linearisiert werden diese Zusammenhänge in Abschnitt A, unter der Annahme einer konstanten Fahrgeschwindigkeit  $v$  (Vernachlässigung der Längsdynamik), durch drei verkoppelte Differentialgleichungen 2. Ordnung entsprechend Gl. (A.4.84) beschrieben. Die vier für die Beschreibung der Fahrdynamik gewählten Systemzustände sind der Schwimmwinkel  $\beta$ , die Gierrate  $r$ , sowie Wankwinkel  $\phi$  und Wankrate  $\dot{\phi}$ , zusammengefasst zum Zustandsvektor  $\mathbf{x} = [\beta \ r \ \phi \ \dot{\phi}]^T$ . Die Systemzustände des Fahrzeugs auf Positionsebene — seitliche Position  $y$  und Gierwinkel  $\psi$  — sind für die Fahrdynamik ohne Bedeutung. Erst im Zusammenhang mit automatisch spurgeführten Fahrzeugen (die in dieser Arbeit jedoch nicht untersucht werden) sind diese Zustände für den regelungstechnischen Entwurf relevant. Das zu regelnde Fahrzeug sei mit einer mechanischen Überlagerungslenkung für die Vorderräder ausgestattet. Stellgröße des Systems ist somit der Vorderradlenkwinkel  $\delta_V$ . Störgrößen sind die Störseitenkraft  $F_{y,S}$ , das Störgiermoment  $M_{z,S}$  und das Störwankmoment  $M_{x,S}$ . Der Einfluss jeder beliebigen Störung (z. B. auf Grund von Seitenwind, Spurrillen,  $\mu$ -Split Bremsung) kann, aus diesen drei Kräften bzw. Momenten zusammengesetzt, im Modell berücksichtigt werden.

Für den regelungstechnischen Entwurf der Wankstabilisierung wird zunächst von einer Eingrößenreglerstruktur entsprechend Bild 4.1 mit noch zu definierender Regelgröße  $y$  und Reglerstruktur  $K_y = K_y(s, \mathbf{k})$  ausgegangen, wobei  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{l_k}$  der Vektor der zu bestimmenden Reglerparameter ist. Die externen auf den geschlossenen Regelkreis einwirkenden Signale sind die Führungsgröße  $y_{ref}$ , der Lenkraddrehwinkel  $\delta_L$ , die



**Bild 4.1:** Eingrößenreglerstruktur für Wankstabilisierung.

Ausgangsstörung  $d$  und das Messrauschsignal  $n$ . Der vom Fahrer vorgegebene Lenkwinkel  $\delta_L$  kann im Sinne des im vorangegangenen Kapitel eingeführten Standard-Eingrößenregelkreises entsprechend Bild 3.1 (zumindest teilweise) auch als Eingangsstörung aufgefasst werden. Die Ausgangsstörung  $d$  wird im Reglerentwurf stellvertretend für die drei Störgrößen  $F_{y,S}$ ,  $M_{z,S}$  und  $M_{x,S}$  betrachtet.

Als potenzielle Regelgrößen für eine Verbesserung der Wankdynamik kommen neben den die Gier- und Wankdynamik repräsentierenden Größen (Drehwinkel, -rate, -beschleunigung) die Aufbauquerbeschleunigung  $a_{y,2}$  und der Kippkoeffizient  $R$  in Frage. Geht man von dynamischen Reglern aus, ist es ausreichend, die im Ausgangsvektor  $\mathbf{y} = [r \ \dot{\phi} \ a_{y,2} \ R]^T$  zusammengefassten Rückführgrößen zu betrachten; Drehwinkel und -beschleunigung lassen sich durch integrierenden bzw. differenzierenden Anteil im Regler realisieren.

In Bild 4.1 wird mit  $G_{\delta_V}^y = G_{\delta_V}^y(s, \mathbf{q})$  stellvertretend eine der vier Übertragungsfunktionen

$$\begin{aligned} G_{\delta_V}^r &:= \frac{r}{\delta_V} & G_{\delta_V}^{\dot{\phi}} &:= \frac{\dot{\phi}}{\delta_V} \\ G_{\delta_V}^{a_{y,2}} &:= \frac{a_{y,2}}{\delta_V} & G_{\delta_V}^R &:= \frac{R}{\delta_V} \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

bezeichnet, die von unsicheren bzw. variierenden Fahrzeugparametern  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{l_q}$  abhängen. Wie im nächsten Abschnitt erläutert, werden als parametrische Unsicherheiten die beladungsabhängige Schwerpunkthöhe  $h$  und die Fahrgeschwindigkeit  $v$  gewählt, d. h.  $\mathbf{q} = [v, h]^T$ . Die vier Übertragungsfunktionen ergeben sich symbolisch nach Einsetzen von Gl. (A.4.84) in Gl. (A.7.92) aus den einzelnen Einträgen in die Übertragungsmatrix  $\mathbf{G}_u^y$ .

*Anmerkung 4.1.* Die Wahl der Führungsgröße  $y_{ref}$  in Bild 4.1 ergibt sich zunächst aus stationären Überlegungen. Bei verschwindenden Störgrößen  $F_{y,S} = M_{z,S} = M_{x,S} = 0$  lautet der stationäre Zusammenhang zwischen Stellgröße  $\delta_V$  und potenzieller Regelgröße  $y$

$$\frac{y_\infty}{\delta_{V_\infty}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{\delta_V(t)}. \quad (4.2.2)$$

In Abschnitt A.7.2 werden die stationären Verstärkungen hergeleitet. Aus Gln. (A.7.93)-(A.7.97) mit Bezeichnungen der Variablen aus Tabelle A.2 lauten die Stationärwerte

$$\begin{aligned} \frac{r_\infty}{\delta_{V_\infty}} &= \frac{v v_{char}^2}{l (v^2 + v_{char}^2)}, & \frac{a_{y,2_\infty}}{\delta_{V_\infty}} &= \frac{v^2 v_{char}^2}{l (v^2 + v_{char}^2)}, \\ \frac{\dot{\phi}_\infty}{\delta_{V_\infty}} &= 0 & \text{und} & & \frac{R_\infty}{\delta_{V_\infty}} &= \left( a_R + \frac{h m_2 b_R}{(c_\phi - m_2 g h)} \right) \frac{v^2 v_{char}^2}{l (v^2 + v_{char}^2)}. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Da die Wankrate  $\dot{\phi}$  stationär verschwindet, ist bei einer Rückführung dieser Größe keine Vorsteuerung notwendig. Jedoch stellen sich auf einen Lenkwinkelsprung Stationärwerte für die Gierrate, die Querbeschleunigung und den Kippkoeffizienten ein. Entsprechend muss bei einer Rückführung dieser Größen über eine modellgestützte Vorsteuerung (vgl. Bild 2.4) und/oder entsprechende regelungstechnische Maßnahmen in der Rückführung dafür gesorgt werden, dass der stationäre Fehler

$$e_\infty = y_{ref_\infty} - y_\infty$$

verschwindet. Bei Rückführung der Gierrate  $r$  kann bspw. die Referenzgierrate  $r_{ref}$  über ein Filter 1. Ordnung mit Stationärwert entsprechend dem Einspurmodell gemäß Abschnitt A.5 oder ein Filter 2. Ordnung, welches dem linearen Einspurmodell entspricht, ermittelt werden [31]. Der Stationärwert von  $r$ ,  $a_{y,2}$  bzw.  $R$  hängt von nicht genau bekannten, unsicheren und/oder variierenden Fahrzeugparametern (Kraftschlusskoeffizient  $\mu$ , Schräglaufsteifigkeiten  $c_{V,0}$  und  $c_{H,0}$ , Schwerpunkthöhe  $h$ , etc.) ab. Dies kann trotz Vorfilter zu stationären Regelfehlern führen, die das Lenkverhalten des Fahrers negativ beeinflussen (“Wind-Up”). Entsprechende Modifikationen der Rückführschleife (Anti-Windup-Filter, Kurzzeit-/Bandpass-Filter) können jedoch dafür sorgen, dass der stationäre Fehler verschwindet [7, 31, 15]. Sämtliche Überlegungen lassen sich ohne Weiteres auch auf die anderen beiden Rückführgrößen Aufbauquerbeschleunigung  $a_{y,2}$  und Kippkoeffizient  $R$  übertragen.

□

Das Regelverhalten des geschlossenen Regelkreises in Bild 4.1 wird durch die Übertragungsmatrix zwischen den externen Eingangssignalen — der Führungsgröße  $y_{ref}$ , Messrauschen  $n$ , Lenkraddrehwinkel  $\delta_L$  und Störgröße  $d$  — und den internen Signalen — Regelfehler  $e$ , Zusatzlenkwinkel  $\delta_C$ , Vorderradlenkwinkel  $\delta_V$  und Regelgröße  $y$  — durch den Zusammenhang

$$\begin{bmatrix} e \\ \delta_C \\ \delta_V \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & T & S_G & -S \\ S_K & -S_K & -T & -S_K \\ S_K & -S_K & S & -S_K \\ T & -T & S_G & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{ref} \\ n \\ \delta_L \\ d \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

beschrieben. Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises  $G_0$ , charakteristisches Polynom des geschlossenen Regelkreises  $p$ , Sensitivitätsfunktion  $S$ , komplementäre Sensitivitätsfunktion  $T$ , Eingangs-Sensitivitätsfunktion  $S_K$  und Ausgangs-Sensitivitätsfunktion

$S_G$  sind entsprechend Abschnitt 3.1.3 und Abschnitt 3.2.1 folgendermaßen definiert:

$$G_0(s, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = K_y(s, \mathbf{k}) G_a(s) G_{\delta_V}^y(s, \mathbf{q}) \quad (4.2.5)$$

$$p(s, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = \text{num} \left( 1 + K_y(s, \mathbf{k}) G_a(s) G_{\delta_V}^y(s, \mathbf{q}) \right) \quad (4.2.6)$$

$$S(s, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = \frac{1}{1 + K_y(s, \mathbf{k}) G_a(s) G_{\delta_V}^y(s, \mathbf{q})} \quad (4.2.7)$$

$$T(s, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = \frac{K_y(s, \mathbf{k}) G_a(s) G_{\delta_V}^y(s, \mathbf{q})}{1 + K_y(s, \mathbf{k}) G_a(s) G_{\delta_V}^y(s, \mathbf{q})} \quad (4.2.8)$$

$$S_K(s, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = \frac{K_y(s, \mathbf{k}) G_a(s)}{1 + K_y(s, \mathbf{k}) G_a(s) G_{\delta_V}^y(s, \mathbf{q})} \quad (4.2.9)$$

$$S_G(s, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = \frac{G_{\delta_V}^y(s, \mathbf{q})}{1 + K_y(s, \mathbf{k}) G_a(s) G_{\delta_V}^y(s, \mathbf{q})} \quad (4.2.10)$$

Die Bedeutung der einzelnen Sensitivitätsfunktionen wird detailliert in Abschnitt 3.1.3 erläutert. Die Ausgangs-Sensitivitätsfunktion  $S_G$  entspricht der Lenkübertragungsfunktion des geschlossenen Kreises von Lenkraddrehwinkel  $\delta_L$  zur Ausgangsgröße  $y$ .

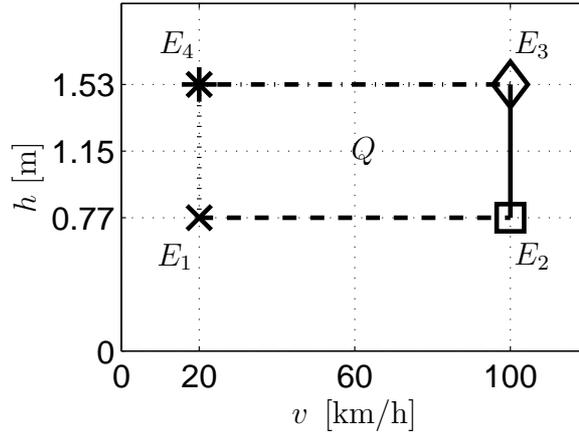
Der Lenkaktuator wird für den linearen Entwurf als Übertragungsfunktion 3. Ordnung entsprechend Gl. (B.0.3) bzw. Gl. (B.0.4) mit Dämpfung  $d_a = 1/\sqrt{2}$  und einer Eigenfrequenz von 5 Hz, d. h.  $\omega_a = 10 \pi$ , angenommen (das gleiche Aktuatormodell wurde bereits in Abschnitt 3.7.2 verwendet). Dies entspricht einer Bandbreite der reinen Aktuatordynamik von 3.7 Hz, d. h.  $\omega_B = 7.4 \pi$  rad/s, entsprechend  $|G_a(j\omega_B)| = |G_a(0)|/\sqrt{2}$ .

## 4.2.2 Modellunsicherheiten

Die Strategie, die beim robusten Reglerentwurf verfolgt wird, ist, dass die wesentlichen Einflussparameter möglichst genau in der Regelstrecke als strukturierte (parametrische) Unsicherheiten berücksichtigt werden, was im Zusammenhang mit dem Parameterraumverfahren zu nicht-konservativen Ergebnissen führt. Nicht genau spezifizierbare Unsicherheiten, die entweder parametrischer Natur sind oder die auf Grund nichtmodellierter Dynamik das Systemverhalten insbesondere im hochfrequenten Bereich beeinflussen, werden darüber hinaus über ein unstrukturiertes Unsicherheitsmodell berücksichtigt.

### *Parametrische Unsicherheiten*

Die wesentlichen Parameter, von denen der in Abschnitt 2.2 eingeführte Kippkoeffizient  $R$  abhängt, sind die Fahrgeschwindigkeit  $v$  und die beladungsabhängige Schwerpunkthöhe  $h$ . Für den regelungstechnischen Entwurf werden  $v$  und  $h$  entsprechend dem in Bild 4.2 angegebenen Betriebsbereich  $Q$  als variierende bzw. unsichere Parameter angenommen.

Bild 4.2: Betriebsbereich  $Q$ .

Der Betriebsbereich  $Q$ , die vier Ecken des Betriebsbereichs  $Q_E$ , die vier Kanten  $Q_K$  und die Ecken  $E_i$  sind wie folgt definiert:

$$Q = \left\{ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} v & h \end{bmatrix}^T \mid v \in [v^-, v^+], h \in [h^-, h^+] \right\} \quad (4.2.11)$$

$$Q_E = \left\{ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} v & h \end{bmatrix}^T \mid v \in \{v^-, v^+\}, h \in \{h^-, h^+\} \right\} \quad (4.2.12)$$

$$Q_K = \left\{ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} v & h \end{bmatrix}^T \mid q_i \in [q_i^-, q_i^+], q_j \in \{q_j^-, q_j^+\}, i = 1, 2, j = 1, 2, i \neq j, \right. \\ \left. q_1 = v, q_2 = h \right\} \quad (4.2.13)$$

$$\begin{aligned} E_1 : \quad \mathbf{q}_{E_1} &= \begin{bmatrix} v^- & h^- \end{bmatrix}^T & E_2 : \quad \mathbf{q}_{E_2} &= \begin{bmatrix} v^+ & h^- \end{bmatrix}^T \\ E_3 : \quad \mathbf{q}_{E_3} &= \begin{bmatrix} v^+ & h^+ \end{bmatrix}^T & E_4 : \quad \mathbf{q}_{E_4} &= \begin{bmatrix} v^- & h^+ \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

wobei

$$\begin{aligned} v^- &= 20 \text{ km/h} & v^+ &= 100 \text{ km/h} \\ h^- &= 0.67 \text{ m} & h^+ &= 1.55 \text{ m} . \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Aus der sehr großen Variation der Betriebsbedingungen hinsichtlich Beladung und Fahrgeschwindigkeit, gekennzeichnet durch den Betriebsbereich  $Q$ , ergeben sich die wesentlichen Anforderungen an die Robustheit des Gesamtsystems. Die Robustheit des resultierenden Regelungssystems gegenüber der Unsicherheit im Kraftschluss zwischen Reifen und Straße, repräsentiert durch den Kraftschlusskoeffizienten  $\mu$ , spielt insbesondere bei der kombinierten Wank- und Gierstabilisierung eine wichtige Rolle. Für die reine Wankbedämpfung wird diese ergänzend in einem späteren Analyseschritt in Abschnitt 4.4.3 untersucht.

### Unstrukturierte Unsicherheiten

Weitere beladungsabhängige Parameter, die je nach Fahrzeugtyp größeren Schwankungen unterworfen sein können, sind die Aufbaumasse  $m_2$ , die Massenträgheitsmomente  $J_{x,2}$ ,  $J_{z,2}$ , die lineare (Wank-)Drehfedersteifigkeit bzw. Feder-Ersatzsteifigkeit  $c_\phi$  und die lineare (Wank-)Dämpfungskonstante bzw. Dämpfer-Ersatzrate  $d_\phi$ , die (nominellen) Schräglaufsteifigkeiten  $c_{V,0}$  und  $c_{H,0}$  bzw. deren Verhältnis und der Ort des Schwerpunkts in Längsrichtung, d. h.  $l_V$  und  $l_H$ . Diese Unsicherheiten werden im weiteren Verlauf, unter der Annahme, dass diese nur geringfügig variieren, durch ein multiplikatives Unsicherheitsmodell  $W_\Delta(s)\Delta(s)$  mit zulässigem  $\Delta(s)$  ( $\|\Delta(s)\|_\infty < 1$ ), entsprechend der in Abschnitt 3.2.1 vorgeschlagenen Vorgehensweise, indirekt im Reglerentwurf berücksichtigt. Da es sich bei dem betrachteten Regelungssystem um einen Eingrößenregelkreis handelt, kann das multiplikative Unsicherheitsmodell in seiner physikalischen Bedeutung auch der Aktuator- oder der Sensordynamik zugeordnet werden. Verallgemeinert kann man sich die multiplikative Unsicherheit deswegen als auf die Übertragungsfunktion des offenen Kreises bezogen vorstellen, d. h.

$$\tilde{G}_0(s, \mathbf{q}) = G_0(s, \mathbf{q})(1 + W_\Delta(s)\Delta(s)) . \quad (4.2.16)$$

Das Frequenzgewicht  $W_\Delta(s)$  kann beispielsweise durch experimentell oder simulativ über Parametervariationen ermittelte Frequenzgänge bestimmt werden, indem dieses aus den in verschiedenen Versuchen aufgenommenen Amplitudengängen durch eine worst-case Identifikation berechnet wird.

Da ein Versuchsfahrzeug nicht zur Verfügung stand, wird vereinfachend angenommen, dass im niederfrequenten Bereich für  $\omega \ll 10\pi$  rad/s die Modellierung der Strecke durch das parametrische Modell hinreichend genau ist, d. h. der Amplitudenfehler sei kleiner 10 %, und im hochfrequenten Bereich  $\omega \gg 10\pi$  rad/s sehr schlecht, d. h. der Fehler kann sich bis auf maximal 200 % belaufen. Für  $W_\Delta$  wird entsprechend die Übertragungsfunktion

$$W_\Delta(s) = 2 \frac{s + \pi}{s + 20\pi} \quad (4.2.17)$$

angenommen.

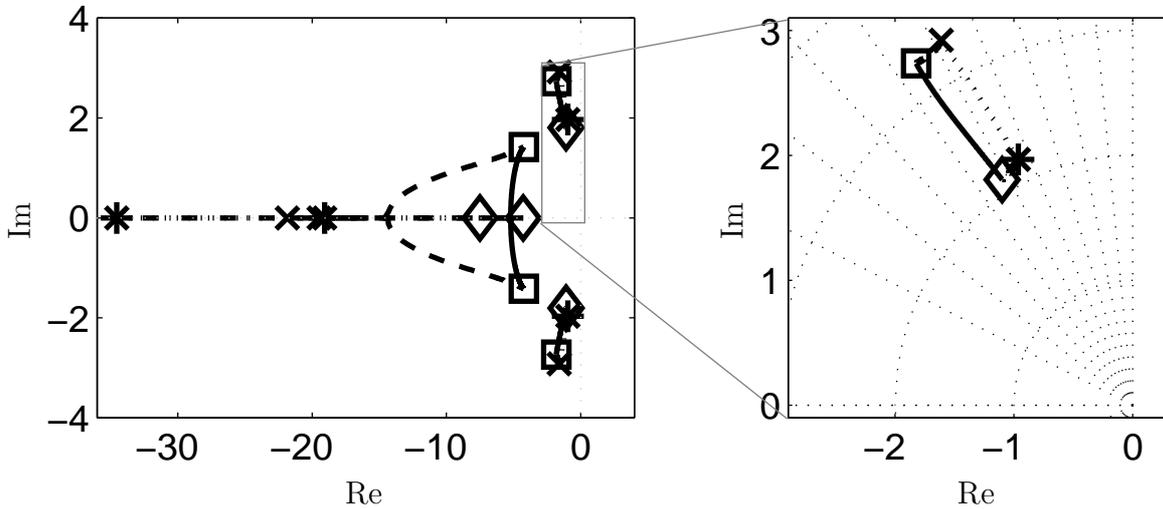
Die Einführung der multiplikativen Unsicherheit birgt ein gewisses Maß an Konservativität durch Überabschätzung. Da diese sich jedoch hauptsächlich auf den hochfrequenten, bei der Modellierung vernachlässigten Bereich bezieht, sollte die Robustheit des Systems gegenüber der multiplikativen Unsicherheit als Kriterium für eine Sicherheitsabschätzung nicht aber als dominantes Auslegungskriterium dienen. Sind die Anforderungen hingegen dominant, so sollte das physikalische (parametrische) Modell der Strecke erweitert werden und für die Stabilität relevante höherfrequente zuvor vernachlässigte Modi sollten im Modell Berücksichtigung finden.

## 4.2.3 Lineare Analyse des Fahrzeugmodells

### Eigenwerte

Bild 4.3 zeigt die Lage der Eigenwerte des unregulierten Systems für die Kanten des Betriebsbereichs  $Q_K$  entsprechend Bild 4.2, d. h. die Wurzelortskurve bei Variation

von  $v$  und  $h$  entlang der Kanten von  $Q$ . Das System ist robust stabil, d. h. sämtliche Eigenwerte liegen für den gesamten Betriebsbereich in der linken Halbebene. In einer Ausschnittsvergrößerung rechts in Bild 4.3 ist die Lage der Wankeigenwerte dargestellt. Die Wankdämpfung nimmt mit zunehmender Fahrgeschwindigkeit zu, ist jedoch nahezu

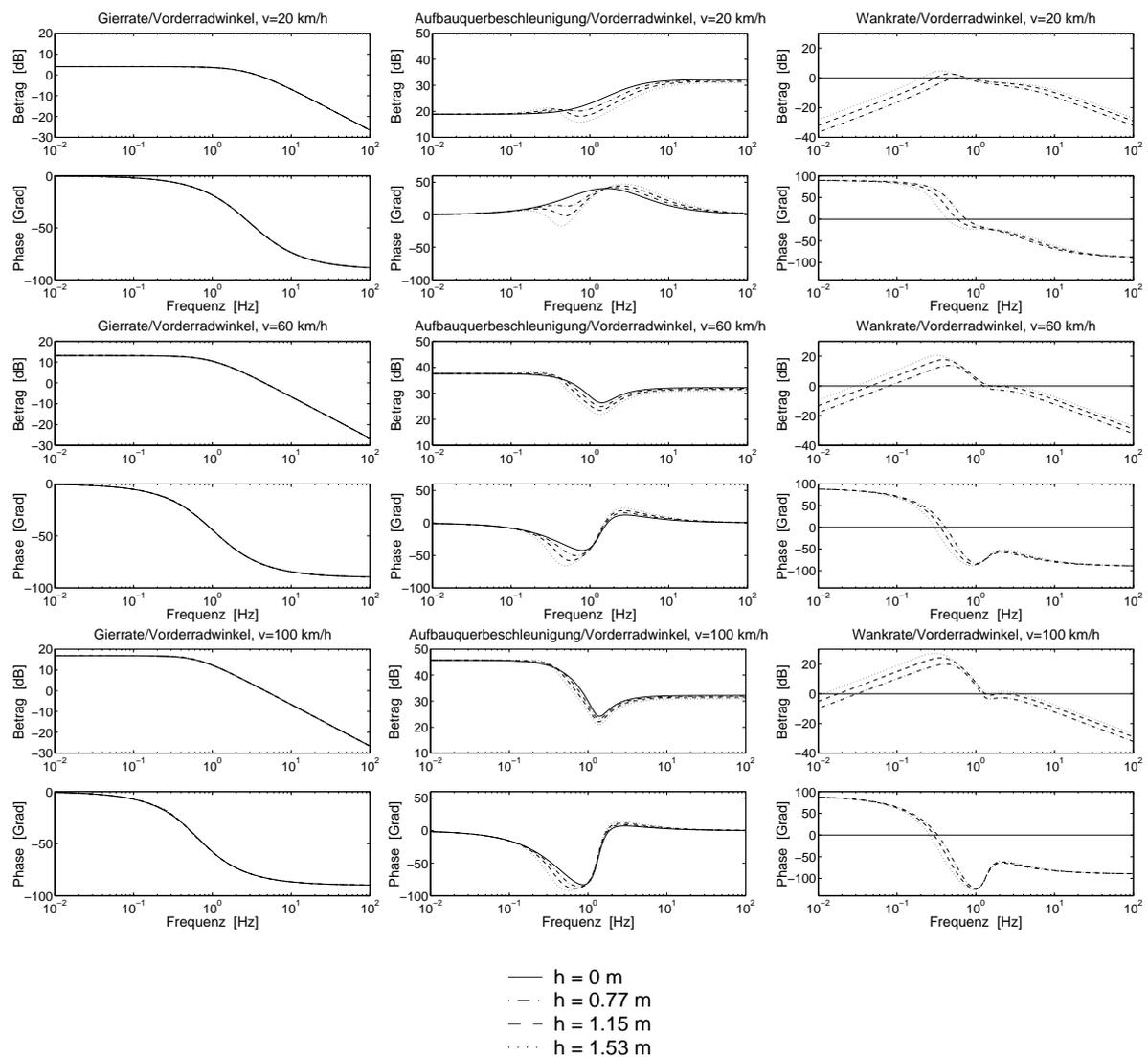


**Bild 4.3:** Eigenwerte des unregulierten Fahrzeugs für die Kanten des Betriebsbereichs  $Q_K$  (das rechte Bild ist eine Ausschnittsvergrößerung des linken).

unabhängig von der Schwerpunkthöhe. Für die Wankeigenfrequenz gilt, dass diese nahezu unabhängig von der Fahrgeschwindigkeit ist und mit zunehmender Schwerpunkthöhe kleiner wird. Die Quer- und Gierdynamik kann für den gesamten Betriebsbereich als gut bedämpft bezeichnet werden.

#### *Bode-Frequenzantworten*

Bild 4.4 zeigt Bode-Frequenzantworten vom Vorderradlenkwinkel  $\delta_V$  zu den Ausgangsgrößen Gierrate  $r$ , Aufbauquerbeschleunigung  $a_{y,2}$  und Wankrate  $\dot{\phi}$  für unterschiedliche Fahrgeschwindigkeiten  $v = 20, 60, 100$  km/h und Schwerpunkthöhen  $h = 0, 0.77, 1.15, 1.53$  m. Der Differenzgrad der jeweiligen Übertragungsfunktionen beträgt 1 für die Gierrate, 0 für die Querbeschleunigung und 1 für die Wankrate. Für  $h = 0$  m entspricht die Frequenzantwort der des linearen Einspurmodells. Diese Antwort ist für einen Vergleich als durchgezogene Linie in allen Diagrammen von Bild 4.4 eingezeichnet. Die Frequenzantwort der Gierrate (links in Bild 4.4) ist nahezu unabhängig von der Schwerpunkthöhe, die Ergebnisse für das Einspurmodell und das erweiterte Einspurmodell stimmen fast genau überein. Die Wankeigenfrequenz liegt bei allen Betriebsbedingungen bei etwa 0.4-0.5 Hz wie rechts in Bild 4.4 zu sehen ist. Im mittleren Frequenzbereich, im Bereich der Wankeigenfrequenz, ist der Einfluss der Wankdynamik auf die Frequenzantwort der Querbeschleunigung signifikant. Sämtliche Frequenzantworten sind stark geschwindigkeitsabhängig.



**Bild 4.4:** Vergleich von Bode-Frequenzantworten mit Eingang Vorderraddrehwinkel und Ausgängen Gierrate (links), Aufbauquerbeschleunigung (mitte) und Wankrate (rechts) bei  $v = 20, 60, 100$  km/h für unterschiedliche Schwerpunkthöhen.

### Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Eine Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsanalyse anhand des linearen parametrischen Zustandsraummodells des Fahrzeugs aus Abschnitt A.6 hat ergeben, dass das System für den gesamten Betriebsbereich  $Q$  vollständig steuerbar bzw. störbar und beobachtbar ist [5].

#### 4.2.4 Spezifikation der Entwurfsanforderungen

Primäres Ziel des Reglerentwurfs ist es, das Überschwingen des Fahrzeugaufbaus bei dynamischen Fahrmanövern bzw. Störgrößeneinflüssen durch Verbesserung der Wankdynamik zu reduzieren. Gleichzeitig soll sich jedoch nicht das übrige Systemverhalten verschlechtern. Im einzelnen sollen folgende Spezifikationen erfüllt bzw. Randbedingungen eingehalten werden.

- i. Die Dämpfung der Wankdynamik (Dämpfer-Ersatzrate) des geregelten Fahrzeugs soll sich gegenüber der des ungeregelten Fahrzeugs verbessern.
- ii. Das Lenkübertragungsverhalten des geregelten Fahrzeugs soll sich gegenüber dem des ungeregelten nicht verschlechtern (gute Gierdämpfung, gutes Ansprechverhalten).
- iii. Entsprechend einer Grundregel des robusten Regelungsentwurfs [4] soll sich die Dynamik der einzelnen Moden (Wank- bzw. Quer- und Gierdynamik, Aktuatordynamik) nicht grundsätzlich ändern, d. h. ein langsamer Mode soll langsam bleiben, ein schneller schnell. Die der Quer-, Gier- und Wankdynamik sowie der Aktuatordynamik zuzuordnenden natürlichen Frequenzen (d. h. die natürlichen Frequenzen der Eigenwerte des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Regelkreises) sollen in etwa denen des konventionellen Fahrzeugs und des Aktuators entsprechen.
- iv. Störungen, beispielsweise verursacht durch Seitenwind oder durch eine  $\mu$ -Split Bremsung, sollen in dem für die Fahrdynamik relevanten niederfrequenten Bereich unterdrückt werden.
- v. Hochfrequente Störungen dürfen nicht zu einer Destabilisierung des Fahrzustands führen. Im Bereich von etwa 4-8 Hz werden beispielsweise Schwingungen in der Vertikal- und Wankdynamik vom Fahrer als besonders unangenehm empfunden.
- vi. Modellfehler, beispielsweise verursacht durch nichtmodellerte Dynamik dürfen keine Auswirkungen auf die Stabilität des Systems haben.
- vii. Der Einfluss von Messrauschen soll die Regelgüte möglichst wenig beeinträchtigen.
- viii. Grenzyklen, die beispielsweise durch die Stellratenbegrenzung des Aktuators verursacht werden können, sollen von vornherein ausgeschlossen werden.
- ix. Sämtliche vorgenannten Eigenschaften sollen für alle Betriebsbedingungen in robuster Weise erfüllt werden.

Die Anforderungen i.-iii. werden als Eigenwertspezifikationen ( $\Gamma$ -Stabilität) umgesetzt, iv.-vii. als Betragskriterien im Frequenzbereich ( $\mathcal{B}$ -Stabilität), viii. als Ortskurvenkriterium ( $\Theta$ -Stabilität) und Anforderung ix. wird durch Anwendung des Parameterraumverfahrens unter Integration der Spezifikationen i.-viii. realisiert. Nicht alle Spezifikationen werden im Folgenden für die Reglersynthese verwendet, jedoch in einer nachgeschalteten Analyse berücksichtigt. Spezifikation viii. wird erst in der abschließenden Analyse des Gesamtsystems in Abschnitt 6.2.2 untersucht.

*Eigenwertanforderungen*

In Abschnitt 4.2.3 wurde gezeigt, dass Dämpfung und natürliche Frequenz der Wankdynamikpole des konventionellen Fahrzeugs mit herkömmlicher Federung sehr stark mit dem Betriebszustand variieren. Tabelle 4.1 zeigt die Dämpfungskoeffizienten  $d_{\dot{\phi},0}$ , die Eigenfrequenzen  $\omega_0$  in rad/s und die maximalen Realteile  $\sigma_0$  der entsprechenden Wankdynamikeigenwerte des konventionellen Fahrzeugs für die vier Eckpunkte des Betriebsbereichs  $Q_E$ . Um sicherzustellen, dass Dämpfung und Realteil der Wankdynamik des geschlossenen Regelkreises nicht schlechter werden als beim unregulierten System und dies für den gesamten Betriebsbereich, werden die Eigenwert-Spezifikationen vom Betriebszustand abhängig gemacht.

**Tabelle 4.1:** Wankdynamikenngrößen für das konventionelle Fahrzeug.

	$v = 20 \text{ km/h}$	$v = 100 \text{ km/h}$
$h = 1.53 \text{ m}$	$d_{\dot{\phi},0} = 0.44$ $V_4 : \omega_0 = 2.19$ $\sigma_0 = -0.96$	$d_{\dot{\phi},0} = 0.52$ $V_3 : \omega_0 = 2.11$ $\sigma_0 = -1.10$
$h = 0.77 \text{ m}$	$d_{\dot{\phi},0} = 0.48$ $V_1 : \omega_0 = 3.43$ $\sigma_0 = -1.61$	$d_{\dot{\phi},0} = 0.55$ $V_2 : \omega_0 = 3.29$ $\sigma_0 = -1.82$

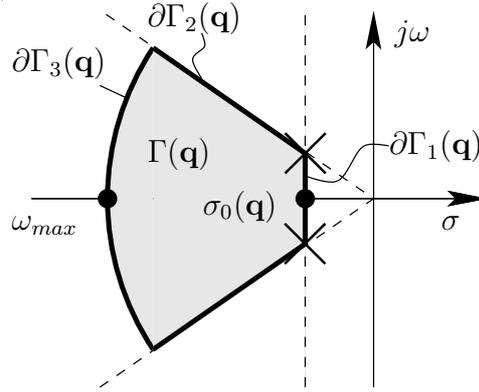
*Anmerkung 4.2.* Bei luftgefederten Fahrzeugen die mit einer elektronischen Niveauregulierung (z. B. ECAS) und einer elektronisch geregelten Fahrwerksdämpfung (z. B. ESAC) ausgestattet sind [79], wird die Wankdämpfung und damit die Lage der Wankpole in Abhängigkeit des Beladungszustands automatisch eingestellt. Die Wankdynamik hängt damit lediglich noch vom Fahrzustand, d. h. in erster Linie von der Fahrgeschwindigkeit ab. Entsprechend sollte es bei solchen Fahrzeugsystemen ausreichend sein, die Spezifikationen mit der Fahrgeschwindigkeit zu variieren. Ähnliches gilt für Fahrzeuge mit hydraulischen aktiven bzw. semi-aktiven Fahrwerksystemen (CDC = “Continuous Damping Control” [79], ABC = “Active Body Control” [55], “Dynamic Drive”, [75]). Der regelungstechnische Eingriff über die Lenkung im Dauerbetrieb dient dann in erster Linie einer fahrzustandsabhängigen Bedämpfung der Wankdynamik. Auch kann der Eingriff für eine Feinabstimmung von Fahrwerk und Lenkung verwendet werden.

□

Die mathematische Beschreibung der Eigenwertanforderungen erfolgt durch die Berandung  $\partial\Gamma$  in der Ebene der Eigenwerte des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Regelkreises

$$\partial\Gamma := \{s \mid s = \sigma(\omega) + j\omega, \omega \in [\omega^-; \omega^+]\} . \quad (4.2.18)$$

Eine obere Grenze für die Einschwingzeit  $-1/\sigma_0$  wird gewährleistet, falls die Eigenwerte des charakteristischen Polynoms in einer Ebene links der verschobenen imaginären



**Bild 4.5:** Definition des  $\Gamma$ -Stabilitätsgebietes in Abhängigkeit vom Betriebspunkt  $\mathbf{q}$ .

Achse  $s = \sigma_0 + j\omega$  liegen (Spezifikation iii.). Ein bestimmtes Mindestmaß an Dämpfung wird garantiert, falls die Eigenwerte innerhalb eines Sektors liegen, der durch zwei Geraden konstanter Dämpfung  $d_{\dot{\phi},0}$  begrenzt wird (Spezifikation i.). Weiterhin soll die maximale natürliche Frequenz aller Pole des geschlossenen Regelkreises auf einen Wert kleiner als  $\omega_{max} = 20\pi$  rad/s begrenzt sein (Spezifikation iii.). Bild 4.5 zeigt das Eigenwertgebiet  $\Gamma(\mathbf{q})$ , in dem die drei beschriebenen Anforderungen für einen Betriebspunkt  $\mathbf{q} \in Q$  simultan erfüllt sind.

Für einen vorgegebenen Betriebspunkt  $\mathbf{q}$  mit  $\sigma_0(\mathbf{q})$  und  $d_{\dot{\phi},0}(\mathbf{q})$  lautet eine geeignete Parametrisierung der Berandungsabschnitte  $\partial\Gamma_k(\mathbf{q})$  des  $\Gamma$ -stabilen Gebiets in Bild 4.5.

$$\begin{aligned} \partial\Gamma_1(\mathbf{q}) : s(\mathbf{q}) &= \sigma_0(\mathbf{q}) + j\omega(\mathbf{q}), \\ &\text{für } \omega(\mathbf{q}) \in \left[ 0, -\frac{\sqrt{1-d_{\dot{\phi},0}(\mathbf{q})^2}}{d_{\dot{\phi},0}(\mathbf{q})} \sigma_0(\mathbf{q}) \right] \\ \partial\Gamma_2(\mathbf{q}) : s(\mathbf{q}) &= \frac{d_{\dot{\phi},0}(\mathbf{q})}{\sqrt{1-d_{\dot{\phi},0}(\mathbf{q})^2}} \omega(\mathbf{q}) + j\omega(\mathbf{q}), \\ &\text{für } \omega(\mathbf{q}) \in \left[ -\frac{\sqrt{1-d_{\dot{\phi},0}(\mathbf{q})^2}}{d_{\dot{\phi},0}(\mathbf{q})} \sigma_0(\mathbf{q}), \omega_{max} \sqrt{1-d_{\dot{\phi},0}(\mathbf{q})^2} \right] \\ \partial\Gamma_3(\mathbf{q}) : s(\mathbf{q}) &= -\sqrt{\omega_{max}^2 - \omega(\mathbf{q})^2} + j\omega(\mathbf{q}), \\ &\text{für } \omega(\mathbf{q}) \in \left[ 0, \omega_{max} \sqrt{1-d_{\dot{\phi},0}(\mathbf{q})^2} \right] \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Die Lage der Eigenwerte der Quer- und Gierdynamik (Spezifikation ii.) wird im Entwurf nicht gesondert berücksichtigt, jedoch in einer nachgeschalteten Analyse.

*Anmerkung 4.3.* Die Lage der Nullstellen der einzelnen Übertragungspfade wird ebenfalls nicht gesondert berücksichtigt. Beispielsweise ließe sich hiermit die Forderung nach

(robuster) Minimalphasigkeit einzelner (oder auch sämtlicher) interner Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises aufstellen und in den Parameterraum abbilden. Indirekt werden Spezifikationen bezüglich der (Pole und) Nullstellen nachfolgend über betragsabhängige Betragskriterien in den Entwurf mit einbezogen.

□

### *Frequenzabhängige Entwurfsanforderungen*

Die im Frequenzbereich formulierten Entwurfsanforderungen an Stabilität und Regelgüte ( $\mathcal{B}$ -Spezifikationen) sollen für das geregelte System sicher stellen, dass Störungen und Messrauschen robust sowohl gegenüber variierenden bzw. unsicheren Betriebsparametern ( $v, h$ ) als auch gegenüber nichtmodellierter Dynamik (Strecken-, Aktuator-, Sensordynamik) unterdrückt werden. Entsprechende Anforderungen können wie in Abschnitt 3.2 mit Hilfe von Sensitivitätsfunktionen als  $\mathcal{B}$ -Stabilitätsgrenzen formuliert werden.

*Störunterdrückung* Es soll gewährleistet werden, dass Störgrößeneinflüsse, im Regelkreis repräsentiert durch die Ausgangsstörung  $d$ , in dem für die Fahrdynamik relevanten Frequenzbereich zwischen 0 und 3 Hz unterdrückt werden (Spezifikation iv.), d. h.

$$|S(j\omega, \mathbf{q}, \mathbf{k})| \leq 1, \quad \forall \omega \in [0, 6\pi]. \quad (4.2.20)$$

Entsprechend dem in Abschnitt 3.1.3 beschriebenen Integraltheorem von Bode kann jedoch nicht Störunterdrückung im gesamten Frequenzbereich erzielt werden; man muss im höherfrequenten Bereich Amplitudenverstärkungen zulassen (Spezifikation v.). Dies wird hier realisiert, indem Amplitudenverstärkungen auf einen Wert von maximal 10 % begrenzt werden, d. h.

$$|S(j\omega, \mathbf{q}, \mathbf{k})| < 1.1, \quad \forall \omega \in (6\pi, \infty), \quad (4.2.21)$$

entsprechend einer Nyquist-Stabilitätsreserve von  $\rho_S(\mathbf{q}) > 1/1.1$ . Falls Bedingung (4.2.20) erfüllt ist, bedeutet dies, dass die Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$ , das ist die Frequenz, bei der der Übergang von störunterdrückendem zu störungsverstärkendem Verhalten stattfindet, für den gesamten Betriebsbereich größer als 3 Hz ist.

Die Berandung  $\partial\mathcal{B}_S$  für den Amplitudengang der Sensitivitätsfunktion  $S(j\omega, \mathbf{q}, \mathbf{k})$  setzt sich somit zusammen aus den beiden Berandungsabschnitten

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{B}_{S,1} &= |B_{S,1}(j\omega)| = 1, \quad \forall \omega \in [0, 6\pi] \\ \partial\mathcal{B}_{S,2} &= |B_{S,2}(j\omega)| = 1.1, \quad \forall \omega \in (6\pi, \infty) \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

□

*Unterdrückung von Messrauschen* Mikromechanische Drehratensensoren, einsetzbar für die Messung von Wank- und Gierrate, liefern relative präzise Meßsignale bis mindestens 20 Hz. Im Frequenzbereich  $\omega \in [0, 40\pi]$  rad/s ist somit der Einfluss des Messrauschsignal  $n$  auf die Regelgröße  $y$  gering, für darüber liegende Frequenzen  $\omega > 40\pi$  rad/s können jedoch unerwünschte Effekte das gute Regelverhalten beeinträchtigen. Es ist

deswegen darauf zu achten, dass Messrauschen jenseits von 20 Hz das Regelverhalten nicht beeinträchtigt und keinen Einfluss auf den Regelfehler hat, d. h.

$$|T(j\omega, \mathbf{q}, \mathbf{k})| \ll 1 \quad \text{für } \omega > 40 \pi \text{ rad/s} . \quad (4.2.23)$$

□

*Robuste Stabilität gegenüber unstrukturierten Unsicherheiten* Die Umsetzung von Anforderung vi. bedeutet, dass entsprechend Satz 3.6 der Amplitudengang der komplementären Sensitivitätsfunktion unterhalb des inversen Performance-Gewichts  $|W_{\Delta}^{-1}(j\omega)|$  liegen muss, d. h.

$$|W_{\Delta}(j\omega)T(j\omega, \mathbf{q}, \mathbf{k})| < 1, \quad \omega \in [0, \infty) . \quad (4.2.24)$$

□

Die Berandung für den Amplitudengang der komplementären Sensitivitätsfunktion lautet:

$$\partial\mathcal{B}_{\Delta}(\omega) = |B_{\Delta}(j\omega)| = |W_{\Delta}^{-1}(j\omega)| \quad \forall \omega \in [0, \infty) . \quad (4.2.25)$$

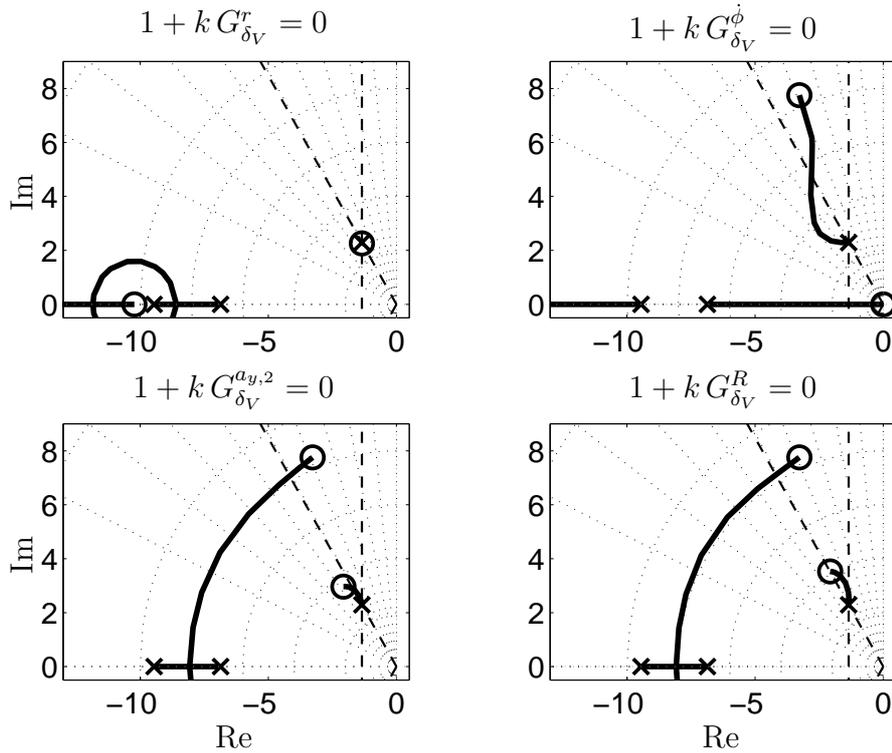
Für die Reglersynthese in Abschnitt 4.3 werden im Folgenden die Berandungsabschnitte  $\partial\mathcal{B}_S = \partial\mathcal{B}_{S,1}$  und  $\partial\mathcal{B}_{\Delta}$  verwendet. Die anderen beiden Spezifikationen entsprechend (4.2.21) und (4.2.23) werden in der Analyse in Abschnitt 4.4 berücksichtigt.

## 4.2.5 Auswahl einer geeigneten Reglerstruktur

Die Auswahl einer geeigneten Reglerstruktur erfolgt anhand von Wurzelortskurven in Kombination mit den Eigenwertanforderungen und anhand vereinfachter Modellrechnungen. Dabei wird zunächst von einem nominellen Entwurfsmodell ausgegangen, wobei für die Strecke eine mittlere Geschwindigkeit  $v = 60 \text{ km/h}$  und eine mittlere Schwerpunkthöhe  $h = 1.15 \text{ m}$  entsprechend dem Mittelpunkt des Betriebsbereichs angenommen wird.

### *Wurzelortskurven*

Bild 4.6 zeigt vier Wurzelortskurven für die proportionale Rückführung von Gierrate  $r$  (oben links), Wankrate  $\dot{\phi}$  (oben rechts), Aufbauquerbeschleunigung  $a_{y,2}$  (unten links) und vom Kippkoeffizienten  $R$  (unten rechts) jeweils für den Mittelpunkt des Betriebsbereichs ( $v = 60 \text{ km/h}$  und  $h = 1.15 \text{ m}$ ) unter Vernachlässigung der Aktuatordynamik, d. h.  $G_a(s) = 1$ . In die Diagramme sind gestrichelt die  $\Gamma$ -Berandungen aus Abschnitt 4.2.4 eingezeichnet. Wie bereits aus der Systemstruktur und den Bode-Untersuchungen in Abschnitt 4.2.3 ersichtlich wurde, ist die Wankdynamik nur indirekt über die Querdynamik mit der Gierdynamik verkoppelt und somit werden die Wankewerte bei proportionaler Rückführung der Gierrate nur unwesentlich beeinflusst. Bei proportionaler Rückführung von  $a_{y,2}$  und  $R$  wird für kleine Verstärkungen die Wankdämpfung verschlechtert und bei hohen Verstärkungen  $k \rightarrow \infty$  diese zwar geringfügig



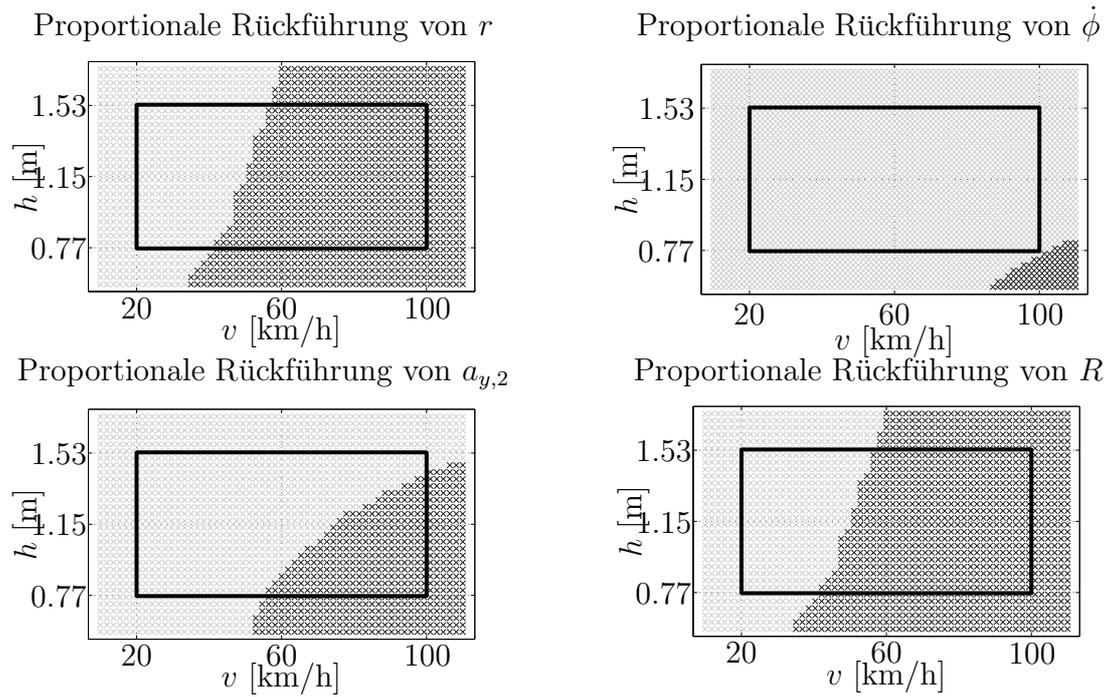
**Bild 4.6:** Wurzelortskurven bei proportionaler Rückführung von Gierrate  $r$ , Wankrate  $\dot{\phi}$ , Querbeschleunigung  $a_{y,2}$  und Kippkoeffizient  $R$  für  $v = 60$  km/h und  $h = 1.15$  m.

verbessert, jedoch nimmt dabei gleichzeitig beträchtlich die Gierdämpfung ab. Geeigneter Kandidat für die Verbesserung der Wankdämpfung ist für diesen Betriebspunkt die Wankrate. Die Frage ist, ob dies auch in robuster Weise für den gesamten Betriebsbereich gilt. Hierzu zeigt Bild 4.7, für welche Betriebsbedingungen bei proportionaler Rückführung der vier Ausgangsgrößen eine Verbesserung der Wankdämpfung möglich ist (hellgrau) und für welche Betriebsbedingungen nicht (dunkelgrau). Durch Rückführung der Wankrate kann für den gesamten Betriebsbereich robuste  $\Gamma$ -Stabilität erzielt werden. Bild 4.8 zeigt die Wurzelortskurven für  $E_1 - E_4$ . Die Robustheit ist nicht erfüllt, wenn die Aktuatordynamik mit berücksichtigt wird, wie in Bild 4.9 dargestellt. Bei hohen Geschwindigkeiten und niedriger Schwerpunkthöhe ist eine Verbesserung der Wankdämpfung nicht möglich. Für diesen Betriebspunkt kann jedoch durch zusätzliche proportionale Rückführung der Wankbeschleunigung  $\ddot{\phi}$   $\Gamma$ -Stabilität erzielt werden.

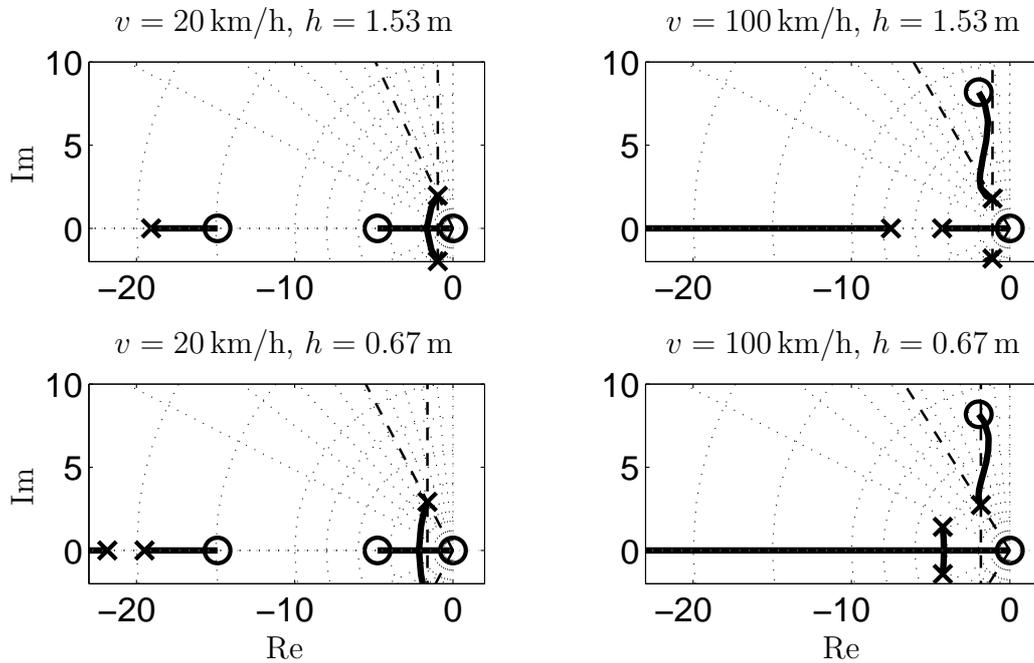
#### Modellüberlegungen

Betrachtet wird Gl. (A.4.84). Vernachlässigung der Gierdynamik führt auf das Gleichungssystem

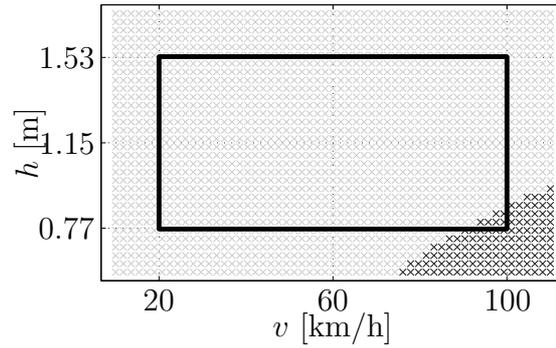
$$\begin{bmatrix} m v s + c_V + c_H & -h m_2 s^2 \\ -h m_2 v s & c_\phi - m_2 g h + d_\phi s + (J_{x,2} + h^2 m_2) s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_V \\ 0 \end{bmatrix} \delta_V, \quad (4.2.26)$$



**Bild 4.7:**  $\Gamma$ -stabile Betriebsbedingungen bei proportionaler Rückführung von Gierrate  $r$ , Wankrate  $\dot{\phi}$ , Querbeschleunigung  $a_{y,2}$  und Kippkoeffizient  $R$ .



**Bild 4.8:** Wurzelortskurven bei proportionaler Rückführung der Wankrate  $\dot{\phi}$  für die Eckpunkte des Betriebsbereichs.



**Bild 4.9:**  $\Gamma$ -stabile Betriebsbedingungen bei proportionaler Rückführung der Wankrate  $\dot{\phi}$  unter Berücksichtigung der Aktuatorndynamik.

welches die wechselseitige Beeinflussung von Quer- und Wankdynamik beschreibt. Führt man die Wankrate proportional auf den Vorderradlenkwinkel zurück entsprechend dem Regelgesetz

$$\delta_V = \delta_L + k_{\dot{\phi}} \dot{\phi}, \quad (4.2.27)$$

so erhält man für das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises

$$\begin{aligned} p(s) = & (c_V + c_H) (c_{\phi} - m_2 g h + d_{\dot{\phi}} s + (J_{x,2} + h^2 m_2) s^2) \\ & + s \left( m (c_{\phi} - m_2 g h) + (m d_{\dot{\phi}} + c_V h m_2 k_{\dot{\phi}}) s \right. \\ & \left. + (J_{x,2} m + h^2 (m - m_2) m_2) s^2 \right) v. \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

Zwei Grenzfälle sind bei der Betrachtung des charakteristischen Polynoms in Gl. (4.2.28) von besonderem Interesse. Für  $v = 0$  ergibt sich

$$\lim_{v \rightarrow 0} p(s) = (c_V + c_H) (c_{\phi} - m_2 g h + d_{\dot{\phi}} s + (J_{x,2} + h^2 m_2) s^2), \quad (4.2.29)$$

und für  $v \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} p(s) = & s \left( (c_{\phi} - m_2 g h) + \left( d_{\dot{\phi}} + c_V h \frac{m_2}{m} k_{\dot{\phi}} \right) s \right. \\ & \left. + \left( J_{x,2} + h^2 (m - m_2) \frac{m_2}{m} \right) s^2 \right). \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

Gl. (4.2.29) beschreibt die reine Wankbewegung bezüglich der Rollachse. Im Stand lässt sich die Wankdämpfung nicht durch einen Eingriff in die Vorderradlenkung beeinflussen. Gl. (4.2.30) zeigt, dass bei hohen Geschwindigkeiten die Wankdämpfung durch die Wankratenrückführung entsprechend Gl. (4.2.27) verbessert werden kann. Der Dämpfungsterm  $d_{\dot{\phi}} + c_V h \frac{m_2}{m} k_{\dot{\phi}}$  in Gl. (4.2.30) wird durch ein positives  $k_{\dot{\phi}}$  robust vergrößert, da  $c_V h \frac{m_2}{m} > 0$ . Der Einfluss ist besonders prägnant auf trockener Straße ( $c_V = \mu c_{V0}$ ,  $\mu = 1$ ) und bei hoher und schwerer Zuladung ( $h$  bzw.  $m_2/m$  groß).

Ähnliche Untersuchungen in [71] führten zu der Aussage, dass generell durch proportionale Rückführung der Wankrate  $\dot{\phi}$  die Wankdämpfung verbessert werden kann. Für den betrachteten Datensatz aus Tabelle A.2 eines Lkw [80] und unter Berücksichtigung der Aktuatordynamik trifft diese Aussage jedoch nicht in robuster Weise für den gesamten Betriebsbereich zu und macht eine zusätzliche proportionale Rückführung der Wankbeschleunigung notwendig. Die Einbindung der Frequenzbereichsspezifikationen in den Reglerentwurf wird darüber hinaus zeigen, dass durch die zusätzliche Rückführung der Wankbeschleunigung eine wesentlich bessere Performance erzielt werden kann.

### Resultierende Reglerstruktur

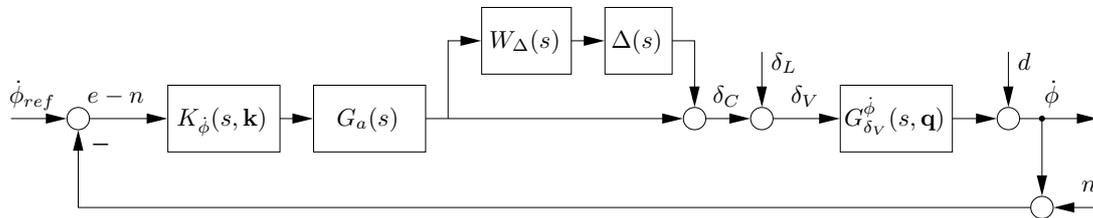
Bild 4.10 zeigt die resultierende Reglerstruktur, von der nachfolgend ausgegangen wird. Die Regelgröße  $y = \dot{\phi}$  wird über das Regelgesetz

$$K_{\dot{\phi}}(s, \mathbf{k}) = k_p + k_d s \quad (4.2.31)$$

und den Lenkaktor  $G_a(s)$  auf den Vorderradlenkwinkel  $\delta_V$  zurückgeführt. Der Vektor der Reglerparameter ist somit

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_p & k_d \end{bmatrix}^T. \quad (4.2.32)$$

Der geschlossene Regelkreis hängt ab von den parametrischen Unsicherheiten  $\mathbf{q} = [v, h]^T$  und der unstrukturierten Unsicherheit  $W_{\Delta}(s)\Delta(s)$ , die in Bild 4.10 als Aktuatorunsicherheit dargestellt ist.



**Bild 4.10:** Resultierende Reglerstruktur für Wankstabilisierung.

## 4.3 Entwurf im Parameterraum

Der Entwurf der Reglerparameter  $k_p$  und  $k_d$  erfolgt im Parameterraum anhand eines Multi-Modell-Ansatzes. Der Betriebsbereich  $Q$  wird dabei durch seine vier Eckpunkte  $E_1$ - $E_4$ , d. h. durch die Menge  $Q_E$  entsprechend (4.2.12), approximiert. Für jeden der vier Eckpunkte  $E_i$  werden sukzessive die in Abschnitt 4.2.4 formulierten  $\Gamma$ - und  $\mathcal{B}$ -Spezifikationen in die Ebene der Reglerparameter  $(k_p, k_d)$  abgebildet. Aus den resultierenden Reglerparameter-Gebieten werden dann entsprechende Parameterwerte für  $k_p$

und  $k_d$  anhand weiter gehender Kriterien ausgewählt. In einem anschließenden Analyseschritt wird der Betriebsbereich  $Q$  durch ein äquidistantes Raster von 81 Betriebspunkten (Repräsentanten) approximiert, d. h. 9 Stützwerte für die Geschwindigkeit  $v$  mal 9 für die Schwerpunkthöhe  $h$ . Hierbei wird überprüft, ob sämtliche Eigenwert- und Frequenzbereichsspezifikationen für die ausgewählten Reglerparameter in robuster Weise erfüllt sind.

### 4.3.1 Abbildung der Eigenwertspezifikationen

Für einen festen Betriebspunkt  $(v^*, h^*)$  ist der geschlossene Regelkreis  $\Gamma$ -stabil, falls sämtliche Eigenwerte des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Regelkreises

$$p(s, k_p, k_d, v^*, h^*) = \text{num} \left( 1 + K_\phi(s, k_p, k_d) G_a(s) G_{\delta_V}^\phi(s, v^*, h^*) \right), \quad (4.3.33)$$

welches sich aus Einsetzen des Regelgesetzes Gl. (4.2.31) in Gl. (4.2.6) ergibt, innerhalb des von den  $\Gamma$ -Stabilitätsgrenzen  $\partial\Gamma_k$  aus Gl. (4.2.19) berandeten  $\Gamma$ -Gebietes liegen. Das für den Betriebspunkt  $E_i$  zu bestimmende  $\Gamma$ -stabile Gebiet in der Ebene der Reglerparameter  $(k_p, k_d)$  ist somit definiert als

$$\mathcal{K}_{\Gamma_i} = \{ \mathbf{k} \mid \text{roots}(p(s, k_p, k_d, v_i, h_i)) \subset \Gamma(v_i, h_i) \}. \quad (4.3.34)$$

Die Abbildung der  $\Gamma$ -Stabilitätsgrenzen in den Parameterraum erfolgt, indem die Lösungen für die Grenzbedingung, dass Eigenwerte des charakteristischen Polynoms  $p(s, k_p, k_d, v^*, h^*)$  genau auf einem Berandungsabschnitt  $\partial\Gamma_k$  liegen, berechnet werden. Hierfür wird die Berandung  $\partial\Gamma_k = s(\omega) = \sigma(\omega) + j\omega$  in das charakteristische Polynom aus Gl. (4.3.33) eingesetzt, d. h.  $p = p(s(\omega), k_p, k_d, v^*, h^*)$ . Bei den Lösungen unterscheidet man zwischen

- den reellen Grenzen, das sind die Lösungen für die rein reellen Berandungsabschnitte ( $\omega = 0$ ) für die

$$\text{Re}(p(s(0), k_p, k_d, v^*, h^*)) = 0, \quad (4.3.35)$$

wobei für  $s(0)$  die beiden Schnittpunkte der reellen Achse mit  $\partial\Gamma_1$  und  $\partial\Gamma_3$ , d. h.

$$\begin{aligned} s(0) &= \sigma_0(v^*, h^*) \\ s(0) &= -w_{max} \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

eingesetzt werden

- und den komplexen Grenzen, das sind die Lösungen für die komplexen Berandungsabschnitte ( $\omega \neq 0$ ) entsprechend (4.2.19) für die simultan die beiden Gleichungen

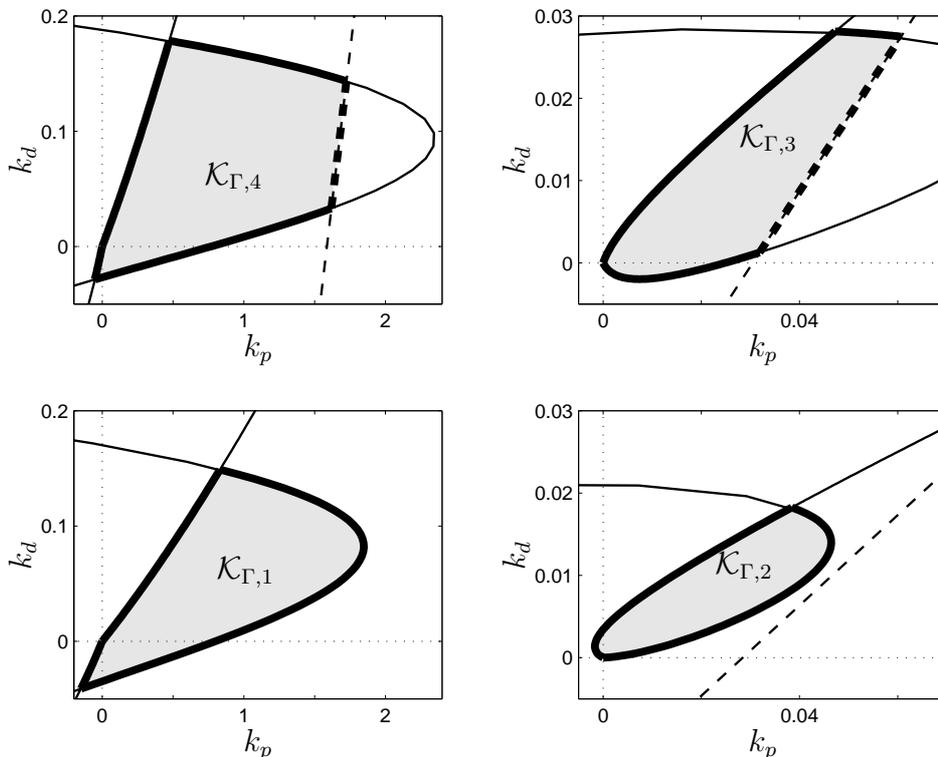
$$\begin{aligned} \text{Re}(p(w, k_p, k_d, v^*, h^*)) &= 0 \\ \frac{1}{\omega} \text{Im}(p(w, k_p, k_d, v^*, h^*)) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

erfüllt sind.

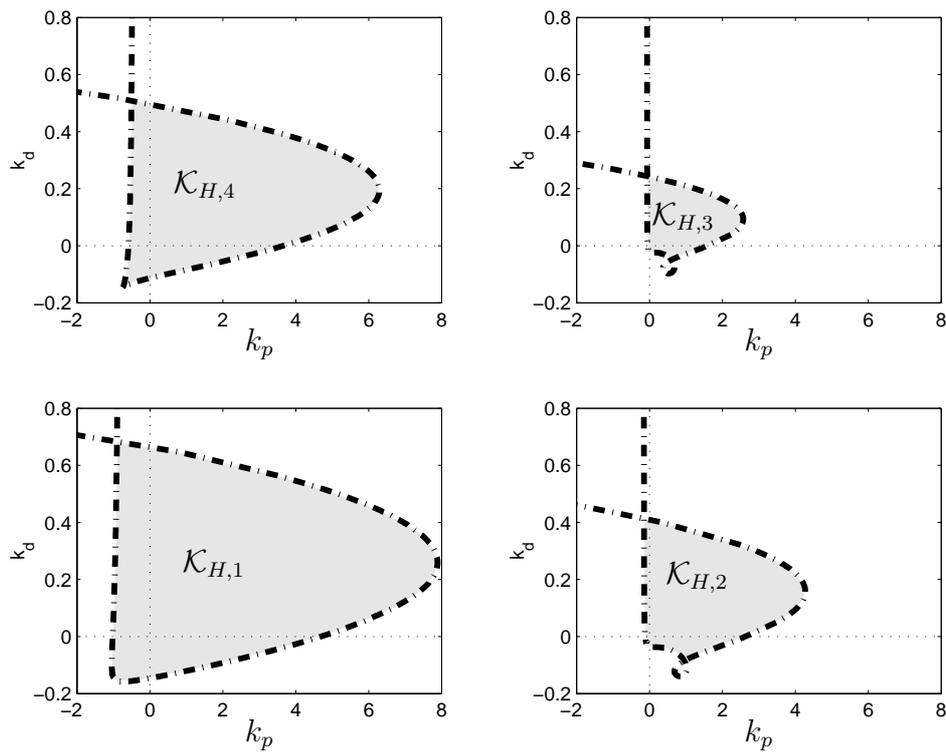
Die Abbildung der  $\Gamma$ -Stabilitätsgrenzen in die Ebene der Reglerparameter  $(k_p, k_d)$  erfordert die algebraische Lösung von Gl. (4.3.36) bzw. Gl. (4.3.37), d. h. die Lösung einer bzw. zweier polynomialer Gleichungen in zwei Unbekannten [4, 70]. Als Ergebnis der Abbildung zeigt Bild 4.11 in grafischer Darstellung die  $\Gamma$ -stabilen Gebiete  $\mathcal{K}_{\Gamma_i}$  in der Ebene der Reglerparameter  $(k_p, k_d)$  für  $E_1$ - $E_4$ . Die reellen Grenzen sind gestrichelt eingezeichnet, die komplexen Grenzen durchgezogen und die aktiven, das  $\Gamma$ -stabile Gebiet  $\mathcal{K}_{\Gamma_i}$  eingrenzenden, Berandungen in doppelter Linienstärke. Die abgebildeten Grenzkurven unterteilen die Ebene  $(k_p, k_d)$  in eine endliche Anzahl von Gebieten, von denen ein jedes auf  $\Gamma$ -Stabilität überprüft werden muss.

*Anmerkung 4.4.* Entsprechend der Definition der  $\Gamma$ -Gebiete in Abhängigkeit von  $\mathbf{q}$  liegt der Punkt  $(k_p, k_d) = (0, 0)$  genau auf der Stabilitätsgrenze. □

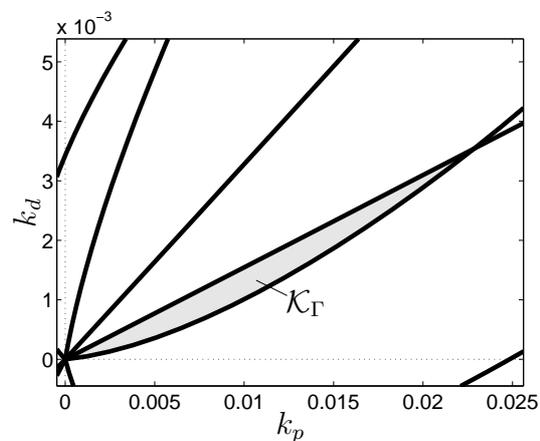
Die Abbildung der  $\Gamma$ -Stabilitätsgrenzen wurde mit der beim DLR entwickelten Matlab-Toolbox PARADISE [116, 89] durchgeführt. Auf Grund der affinen Abhängigkeit des charakteristischen Polynoms von den Reglerparametern konnten die aktiven Berandungsabschnitte und damit die  $\Gamma$ -stabilen Gebiete  $\mathcal{K}_{\Gamma_i}$  automatisch erzeugt werden [106]. In Bild 4.12 sind zusätzlich die Gebiete der Hurwitz-stabilisierenden Reglerparameter  $(k_p, k_d)$  dargestellt. Diese werden im nächsten Abschnitt für die Abbildung der beiden Kriterien „Robuste Stabilität“ und „Nominelle Regelgüte“ benötigt.



**Bild 4.11:**  $\Gamma$ -stabile Gebiete in der Ebene der Reglerparameter  $(k_p, k_d)$  für  $E_1 - E_4$ .



**Bild 4.12:** Hurwitz-stabile Gebiete in der Ebene der Reglerparameter  $(k_p, k_d)$  für  $E_1 - E_4$ .



**Bild 4.13:** Menge der robust  $\Gamma$ -stabilisierenden Regler.

### Robuste $\Gamma$ -Stabilität

Die simultan  $\Gamma$ -stabilisierende Reglermenge

$$\mathcal{K}_\Gamma = \bigcap_{i=1}^4 \mathcal{K}_{\Gamma_i} . \quad (4.3.38)$$

in Bild 4.13 ergibt sich aus der Schnittmenge der vier in Bild 4.11 grau schattiert dargestellten  $\Gamma$ -stabilen Gebiete  $\mathcal{K}_{\Gamma_i}$ .

### 4.3.2 Abbildung der Frequenzbereichsspezifikationen

Der geschlossene Regelkreis ist  $\mathcal{B}$ -stabil, falls der Amplitudengang  $|S(j\omega, k_p, k_d, v^*, h^*)|$  bzw.  $|T(j\omega, k_p, k_d, v^*, h^*)|$  unterhalb der in Gl. (4.2.22) bzw. Gl. (4.2.25) definierten  $\mathcal{B}$ -Stabilitätsgrenzen  $\mathcal{B}_S$  bzw.  $\mathcal{B}_\Delta$  verlaufen. Die für einen festen Betriebspunkt  $E_i$  zu bestimmenden  $\mathcal{B}$ -stabilen Gebiete sind folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{K}_{\mathcal{B}_{S,i}} = \{ \mathbf{k} \mid |S(j\omega, k_p, k_d, v_i, h_i)| < \partial\mathcal{B}_S \} \quad (4.3.39)$$

$$\mathcal{K}_{\mathcal{B}_{\Delta,i}} = \{ \mathbf{k} \mid |T(j\omega, k_p, k_d, v_i, h_i)| < \partial\mathcal{B}_\Delta \} . \quad (4.3.40)$$

Die Abbildung der  $\mathcal{B}$ -Stabilitätsgrenzen erfolgt durch algebraische Lösung der Punkt- und Tangentenbedingung. Bild 4.14 zeigt das Ergebnis der Abbildung der Spezifikation an  $S$  für  $E_1 - E_4$ .

Für  $\omega = 0$  beginnt der Amplitudengang von  $S$  unabhängig von Betriebspunkt und Reglerparametern auf der Berandung, d. h.  $|S(j\omega, k_p, k_d, v^*, h^*)| = 1$ . Die hellgraue Parabel in den vier Diagrammen in Bild 4.14 kennzeichnet die Werte der Reglerparameter  $k_p$  und  $k_d$ , für die zusätzlich gilt, dass der Anfangspunkt  $\omega = 0$  gleichzeitig auch Tangentenpunkt ist, d. h.  $\partial|S(j\omega, k_p, k_d, v^*, h^*)|/\partial\omega = 0$ . Die hellgrauen Ellipsen kennzeichnen den Endpunkt des Berandungsabschnitts, für den Störunterdrückung gewährleistet werden soll, d. h. für den gilt  $|S(j\omega, k_p, k_d, v^*, h^*)| = 1$ , wobei  $\omega = 6\pi$ . In dunkelgrauem Liniestil sind die der Tangentenbedingung, für den dazwischen liegenden Berandungsabschnitt, entsprechenden Grenzen eingezeichnet und hellgrau hinterlegt sind schließlich die  $\mathcal{B}_S$ -stabilen Gebiete  $\mathcal{K}_{\mathcal{B}_{S,i}}$ , die sich nach Überprüfen der, durch die Berandungskurven unterteilten, einzelnen Teilgebiete ergeben.

Bild 4.15 zeigt das Ergebnis der Abbildung der Amplitudenspezifikation an  $T$ . Da der Amplitudengang von  $T$  unabhängig vom Betriebspunkt und Reglerparametern nicht auf der Berandung beginnt bzw. endet, d. h.  $|T(j\omega, k_p, k_d, v^*, h^*)| \neq \partial\mathcal{B}_\Delta(\omega)$  für  $\omega \in \{0, \infty\}$ , werden nur die der Tangentenbedingung entsprechenden Stabilitätsgrenzen abgebildet. Die Ähnlichkeit der Form der  $\mathcal{B}$ -stabilen Gebiete in Bild 4.15 mit den entsprechenden Hurwitz-stabilen Gebieten in Bild 4.12 ist deutlich erkennbar.

*Anmerkung 4.5.* Die Darstellung der Kriterien „Nominelle Regelgüte“ bzw. „Robuste Stabilität“ bezüglich der multiplikativen Unsicherheit  $W_\Delta(s)\Delta(s)$  im Parameterraum erfordert zusätzlich zur Abbildung der oben beschriebenen  $\mathcal{B}$ -Stabilitätsgrenzen die Abbildung des Kriteriums „Nominelle Stabilität“, d. h. der Hurwitz-Stabilitätsgrenzen. Die entsprechenden Reglermengen können durch Schnittmengenbildung der  $\mathcal{B}$ -stabilen Gebiete in Bild 4.14 bzw. Bild 4.15 mit den entsprechenden Hurwitz-stabilen Gebieten aus Bild 4.12 für  $E_1 - E_4$  erzeugt werden. Die entsprechenden Gebiete ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \text{Nominelle Regelgüte für } E_i : & \quad \mathcal{K}_{\mathcal{B}_{S,i}} \cap \mathcal{K}_{H,i} \\ \text{Robuste Stabilität für } E_i : & \quad \mathcal{K}_{\mathcal{B}_{\Delta,i}} \cap \mathcal{K}_{H,i} \end{aligned}$$

und sind in Bild 4.16 bzw. Bild 4.17 dargestellt.

□

*Anmerkung 4.6.* Regler aus der Schnittmenge

$$\bigcap_{i=1}^4 (\mathcal{K}_{\mathcal{B},i} \cap \mathcal{K}_{\mathcal{H},i})$$

gewährleisten robuste Stabilität sowohl gegenüber der multiplikativen Unsicherheit als auch gegenüber  $Q_E$  und damit gegenüber den parametrischen Unsicherheiten  $v$  und  $h$ .

□

Die Menge der  $\mathcal{B}$ -stabilisierenden Regler werden durch Schnittmengenbildung entsprechend

$$\mathcal{K}_{\mathcal{B},i} = \mathcal{K}_{\mathcal{H},i} \cap \mathcal{K}_{\mathcal{B}_S,i} \cap \mathcal{K}_{\mathcal{B}_\Delta,i} \quad \text{für } i = 1, \dots, 4 \quad (4.3.41)$$

erzeugt und sind in Bild 4.18 dargestellt. Der geschlossene Regelkreis für  $E_i$  mit Reglerparametern  $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_{\mathcal{B},i}$  erfüllt die Kriterien „Robuste Stabilität“ gegenüber der multiplikativen Unsicherheit und „Nominelle Regelgüte“ bezgl. des geforderten Störunterdrückungsverhalten gleichzeitig.

### 4.3.3 Simultane $\Gamma$ - und $\mathcal{B}$ -Stabilität

Die Mengen der simultan  $\Gamma$ - und  $\mathcal{B}$ -stabilisierenden Regler ergeben sich schließlich zu

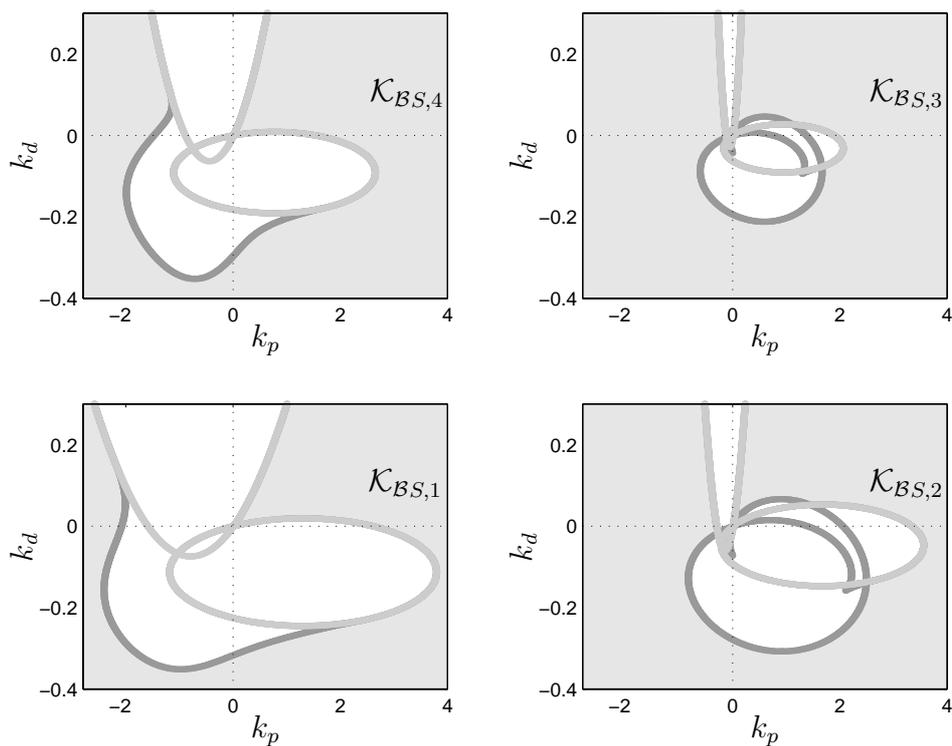
$$\mathcal{K}_i = \mathcal{K}_{\mathcal{B},i} \cap \mathcal{K}_{\Gamma,i} \quad \text{für } i = 1, \dots, 4 \quad (4.3.42)$$

und sind in Bild 4.19 dargestellt. Für Reglerparameter  $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_i$  erfüllt der geschlossene Regelkreis sämtliche Eigenwert- und Frequenzbereichsspezifikationen für den Betriebspunkt  $E_i$ .

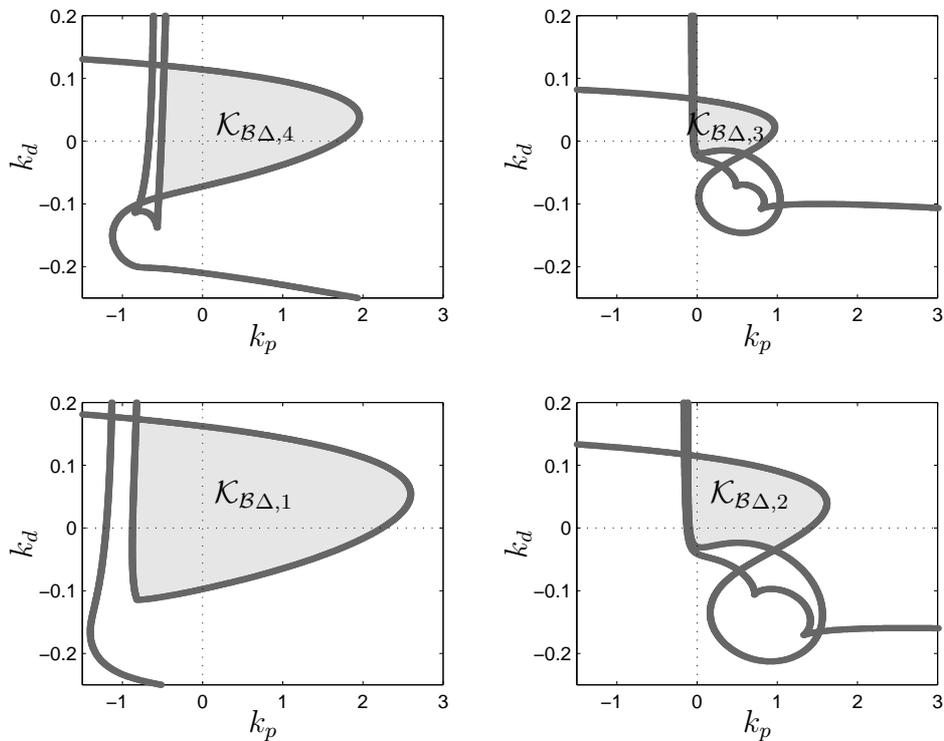
Es lassen sich jedoch keine Reglerparameter finden, für die dies in robuster Weise für den gesamten Betriebsbereich  $Q$  möglich ist, d. h. die Schnittmenge der robust simultan  $\Gamma$ - und  $\mathcal{B}$ -stabilisierenden Regler ist die leere Menge

$$\bigcap_{i=1}^4 \mathcal{K}_i = \{\} .$$

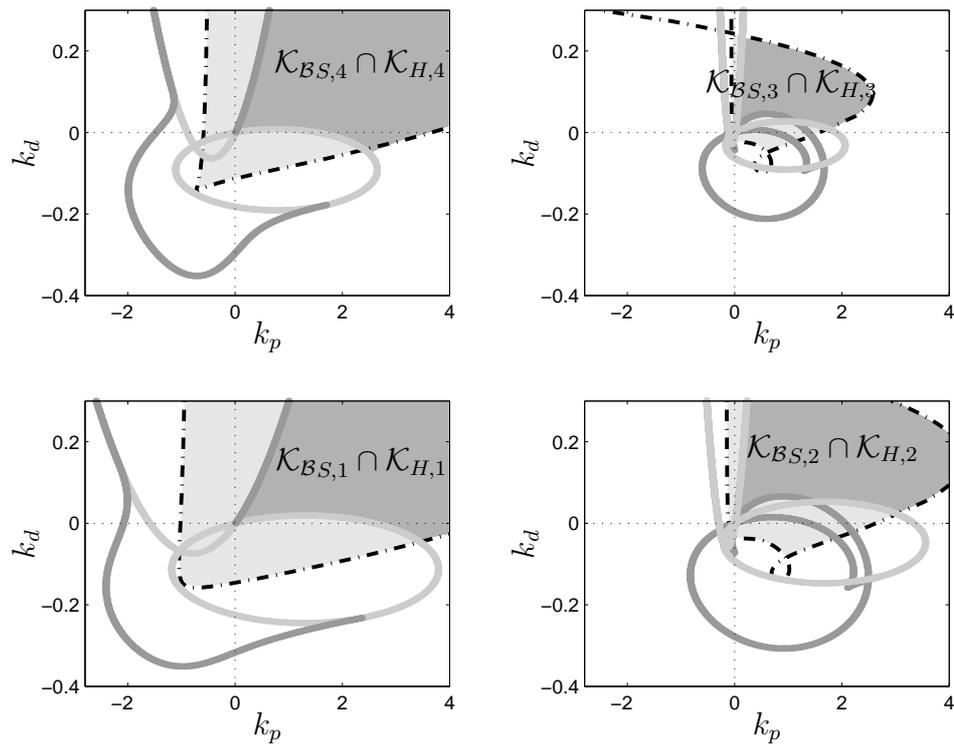
Um dennoch sämtliche Entwurfsspezifikationen robust erfüllen zu können, wird im Folgenden eine Anpassung der Reglerverstärkungen an die Geschwindigkeit  $v$  und falls verfügbar auch an die Schwerpunkthöhe  $h$  vorgenommen, wobei zunächst davon ausgegangen wird, dass beide Größen für eine Verstärkungsanpassung zur Verfügung stehen.



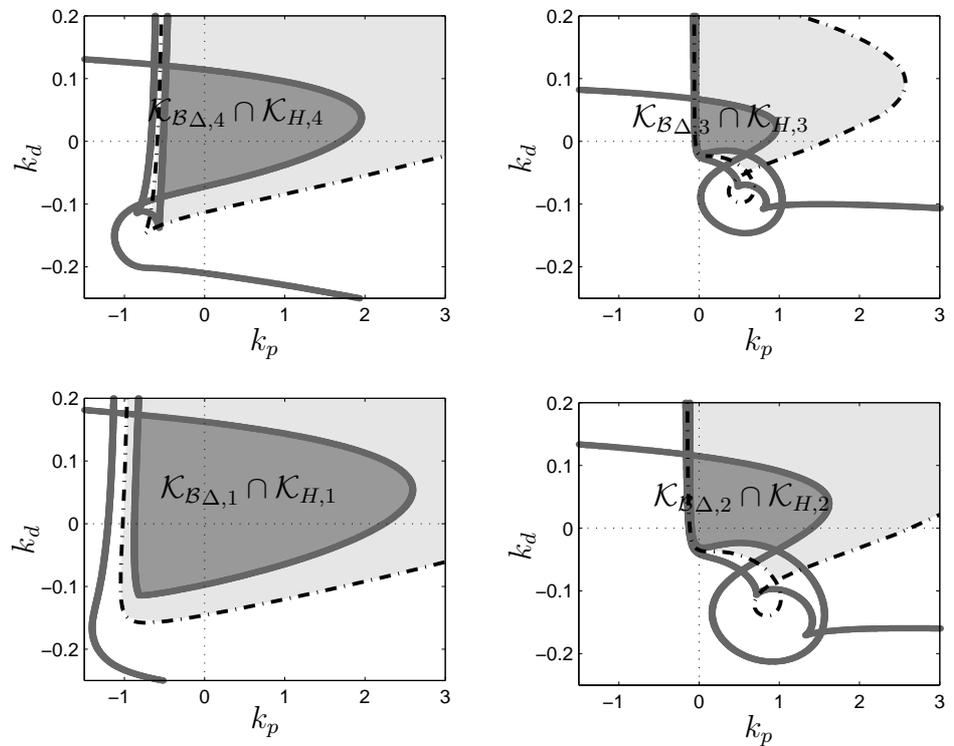
**Bild 4.14:** Gebiete in der Ebene der Reglerparameter  $(k_p, k_d)$ , die die Spezifikationen an  $S$  für  $E_1 - E_4$  erfüllen.



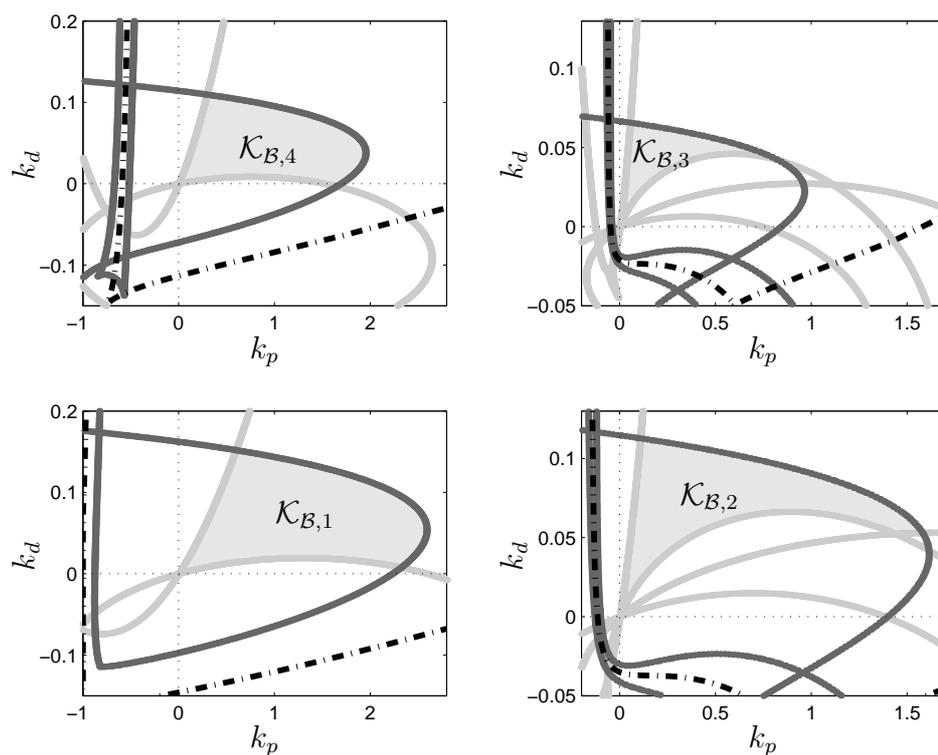
**Bild 4.15:** Gebiete in der Ebene der Reglerparameter  $(k_p, k_d)$ , die die Spezifikation an  $T$  für  $E_1 - E_4$  erfüllen.



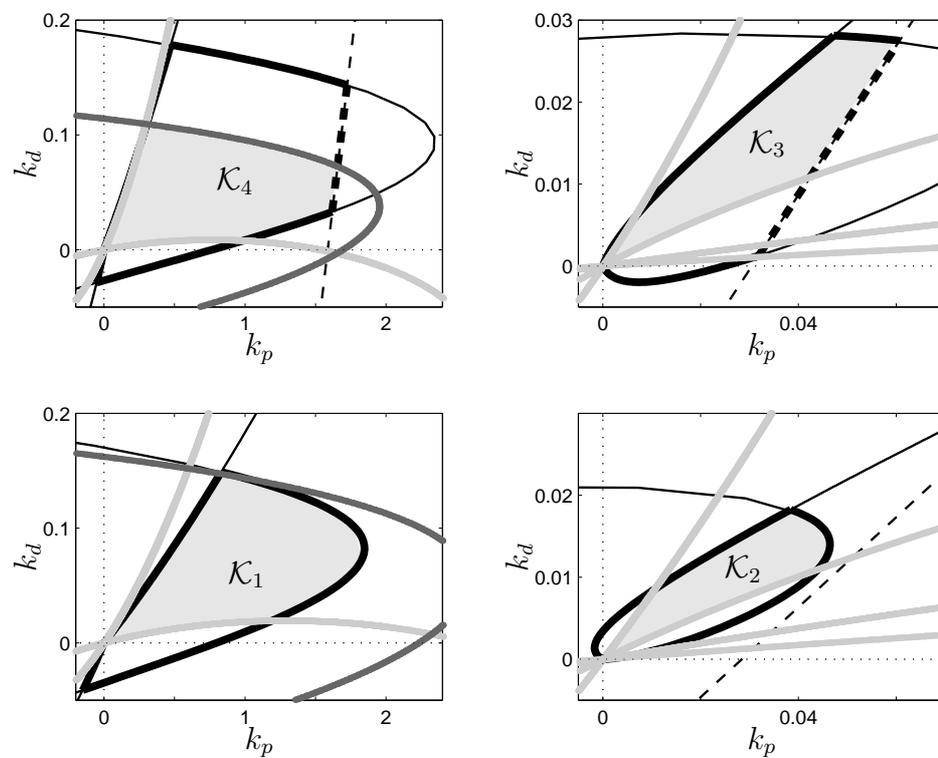
**Bild 4.16:** „Nominelle Regelgüte“ in der Ebene der Reglerparameter  $(k_p, k_d)$  für  $E_1 - E_4$ .



**Bild 4.17:** „Robuste Stabilität“ in der Ebene der Reglerparameter  $(k_p, k_d)$  für  $E_1 - E_4$ .



**Bild 4.18:**  $\mathcal{B}$ -stabilisierende Gebiete in der Ebene der Reglerparameter  $(k_p, k_d)$  für  $E_1 - E_4$ .



**Bild 4.19:** Simultan  $\Gamma$ - und  $\mathcal{B}$ -stabilisierende Gebiete in der Ebene der Reglerparameter  $(k_p, k_d)$  für  $E_1 - E_4$ .

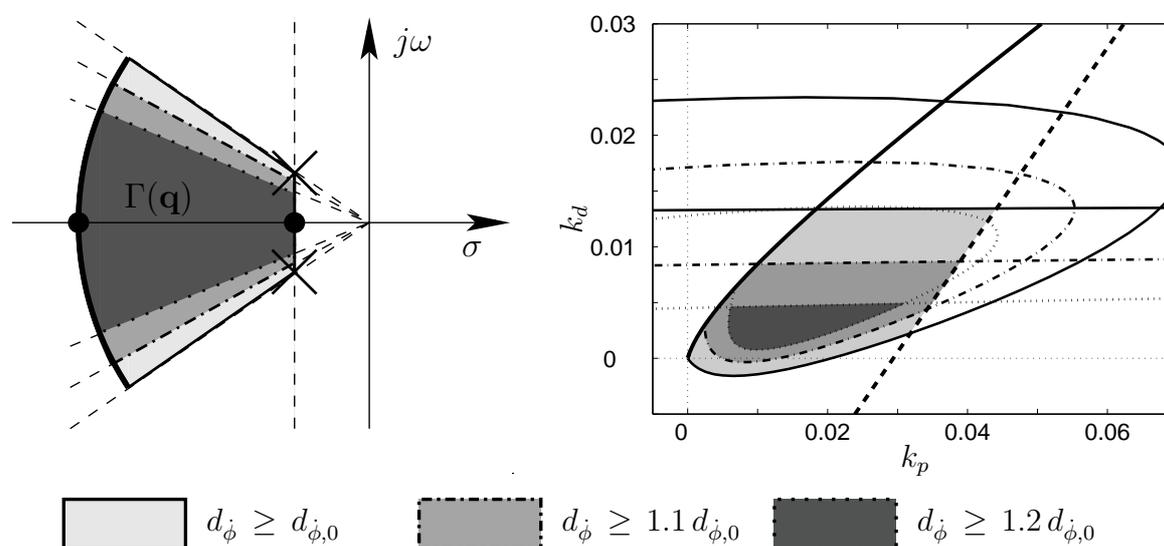
### 4.3.4 Auswahl der Reglerparameter

Die Auswahl der Reglerparameter  $k_{p,i}$  und  $k_{d,i}$  für den Betriebspunkt  $E_i$  aus der zulässigen Menge  $\mathcal{K}_i$  kann nach unterschiedlichen Gesichtspunkten erfolgen. Beispielsweise können in einem iterativen Prozess die  $\Gamma$ - und  $\mathcal{B}$ -Stabilitätsgrenzen sukzessive „verschärft“ werden, d. h. die entsprechenden Polgebiete bzw. Gebiete in der Ebene der Amplitudengänge von  $S$  und  $T$  werden kontrahiert. Die Kontraktion kann entweder im Parameterraum oder durch Lösen eines nichtlinearen Optimierungsproblems mit Nebenbedingungen erfolgen.

#### *Kontraktion des $\Gamma$ -stabilen Gebiets im Parameterraum*

Das regelungstechnische Hauptziel dieses Kapitels ist die Verbesserung der Wankdämpfung. Dementsprechend sollen die Reglerparameter  $k_p$  und  $k_d$  in Abhängigkeit des Betriebspunktes möglichst so gewählt werden, dass maximale Wankdämpfung erzielt wird bei gleichzeitiger Einhaltung der übrigen Eigenwert- und Frequenzbereichsspezifikationen.

Die Vorgehensweise wird anhand des Betriebspunktes  $E_3$  für die  $\Gamma$ -Stabilitätsgrenzen veranschaulicht. Im Diagramm links in Bild 4.20 sind in unterschiedlichen Grautönen kodiert drei  $\Gamma$ -Gebiete dargestellt, die sich teilweise überdecken. Die drei Dämpfungsgeraden wurden dabei entsprechend einer Verbesserung der Dämpfung gegenüber der des unregulierten Fahrzeugs um 0 %, 10 % bzw. 20 % gewählt. Das rechte Diagramm in



**Bild 4.20:** Kontraktion des  $\Gamma$ -stabilen Gebietes.

Bild 4.20 zeigt die abgebildeten Grenzen und Gebiete in der  $(k_p, k_d)$ -Ebene. Mit zunehmender Dämpfung kontrahiert das  $\Gamma$ -stabile Gebiet. Für den kritischen Betriebspunkt  $E_3$  kann die Wankdämpfung somit um mehr als 20 % verbessert werden. Ein weiteres Steigern der Anforderungen führt dazu, dass das Gebiet zu einem Punkt schrumpft, zu dem Punkt mit maximaler Wankdämpfung innerhalb  $\mathcal{K}_{\Gamma_3}$ . Dieser Punkt

kennzeichnet auch das globale Optimum eines entsprechend formulierten Optimierungsproblems.

Nicht dargestellt in Bild 4.20 sind die  $\mathcal{B}$ -Stabilitätsgrenzen, die das zulässige Gebiet weiter einschränken und für eine Gesamtbeurteilung mit berücksichtigt werden müssen.

Führt man die oben beschriebene Vorgehensweise auch für die anderen Eckpunkte  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_4$  durch, so gewinnt man einen Eindruck über das Potenzial der erreichbaren Wankdämpfung in Abhängigkeit des Betriebszustands und erkennt, welche Stabilitätsgrenzen einer noch höheren Wankdämpfung einschränkend gegenüberstehen. Hierbei stellt sich heraus, dass der limitierende Faktor die Spezifikation bzgl. der Sensitivitätsfunktion  $S$  entsprechend (4.2.20) ist, die für eine gute Störunterdrückung steht.

#### *Optimierungsbasierte Auswahl der Reglerparameter*

Im nächsten Entwurfsschritt soll eine "Look-up-Table" für die Reglerparameter  $k_p(v, h)$  und  $k_d(v, h)$  für ein dichtes äquidistantes Raster des Betriebsbereichs von 81 Betriebspunkten erzeugt werden. Hierfür wird ein optimierungsbasierter Ansatz gewählt, bei der eine nichtlineare, nicht-konvexe Optimierungsaufgabe mit nichtlinearen Nebenbedingungen gelöst wird.

Die Reglerparameter  $k_p$  und  $k_d$  werden dabei für jeden Rasterpunkt des Betriebsbereichs  $(v^*, h^*)$  durch Lösen der Optimierungsaufgabe

$$\min_{\substack{k_p \in \mathbb{R} \\ k_d \in \mathbb{R}}} 1 - d_{\dot{\phi}}(v^*, h^*, k_p, k_d) \quad (4.3.43)$$

mit nichtlinearen Nebenbedingungen

$$\max_{\omega \in [0, 6\pi]} |S(j\omega, v^*, h^*, k_p, k_d)| - 1 \leq 0 \quad (4.3.44)$$

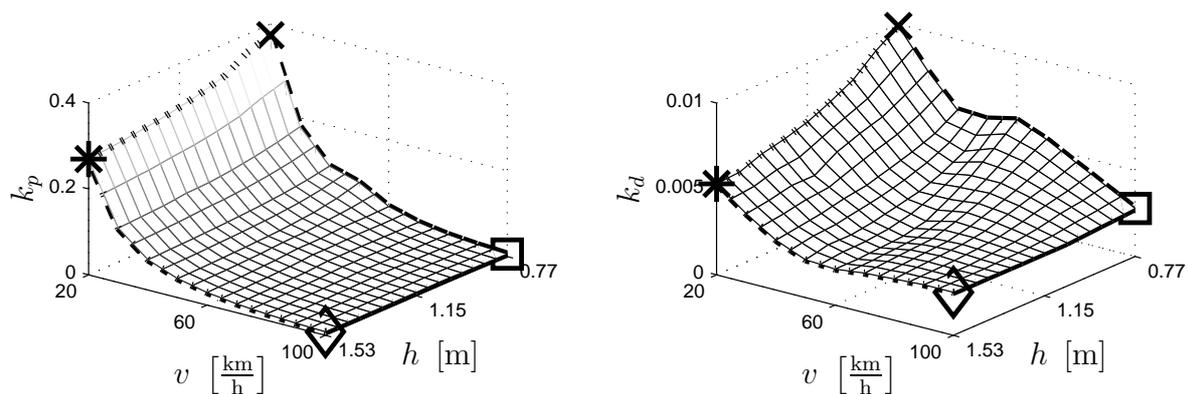
$$\max_{\omega \in [0, \infty)} |W_{\Delta}(j\omega)T(j\omega, v^*, h^*, k_p, k_d)| - 1 \leq 0 \quad (4.3.45)$$

$$\sigma(v^*, h^*, k_p, k_d) - \sigma_0(v^*, h^*) \leq 0 \quad (4.3.46)$$

berechnet.  $\sigma$  bzw.  $\sigma_0$  bezeichnen dabei den Realteil des am weitesten rechts liegenden Pols des geregelten bzw. unregulierten Fahrzeugs. Bild 4.21 zeigt das Ergebnis der Optimierung. Sehr deutlich ist die starke Abhängigkeit der Reglerkoeffizienten von der Geschwindigkeit erkennbar. Die Schwerpunkthöhe spielte eine untergeordnete Rolle für die Verstärkungsanpassung.

*Anmerkung 4.7.* Anhand der Parameterraumuntersuchungen können darüber hinaus obere und untere Schranken für  $k_p$  und  $k_d$  angegeben werden, die als lineare Nebenbedingungen in die Optimierungsaufgabe eingehen. Auch kann der Startwert der Optimierung für den Betriebspunkt  $E_i$  innerhalb des Gebiets  $\mathcal{K}_i$  gewählt werden, was das Auffinden des globalen Optimums, erleichtert.

□

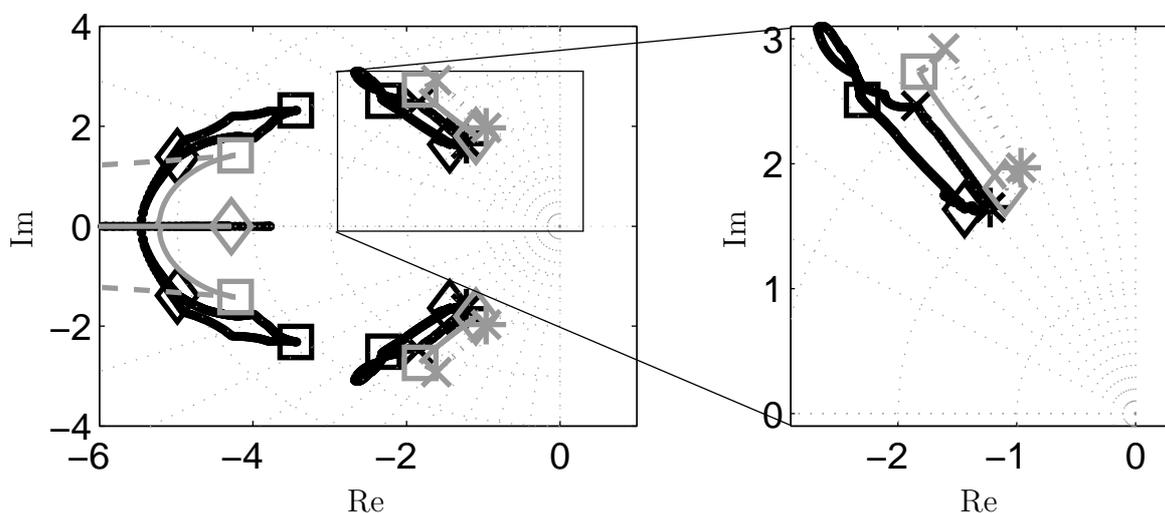


**Bild 4.21:** “Look-up-table” für die Anpassung der Reglerverstärkungen an Geschwindigkeit und Schwerpunkthöhe.

## 4.4 Analyse des Regelungskonzepts

### 4.4.1 Eigenwertanalyse

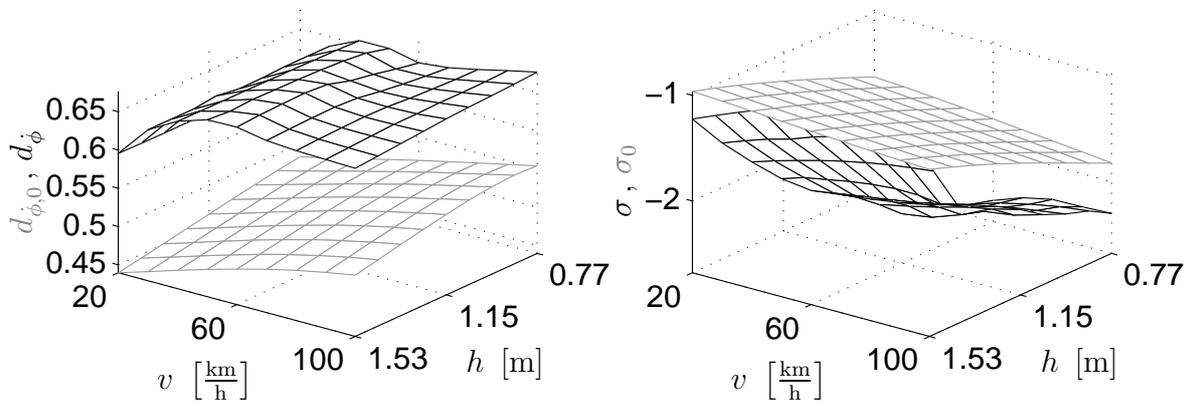
Bild 4.22 und Bild 4.23 zeigen einen Vergleich der Eigenwerte bzw. der Kenngrößen der Wankdynamik des geregelten (schwarz) und des ungeregelten Fahrzeugs (grau) für die Kanten des Betriebsbereichs  $Q_K$  entsprechend (4.2.13). Die Wankdämpfung kann



**Bild 4.22:** Vergleich der Eigenwerte des geregelten (schwarz) mit denen des ungeregelten Fahrzeugs (grau) für die Kanten des Betriebsbereichs  $Q$  (das rechte Bild ist eine Ausschnittsvergrößerung des linken).

durch Rückführung der Wankrate und -beschleunigung mit an Geschwindigkeit und Schwerpunkthöhe angepassten Reglerverstärkungen robust um ca. 15-25% verbessert

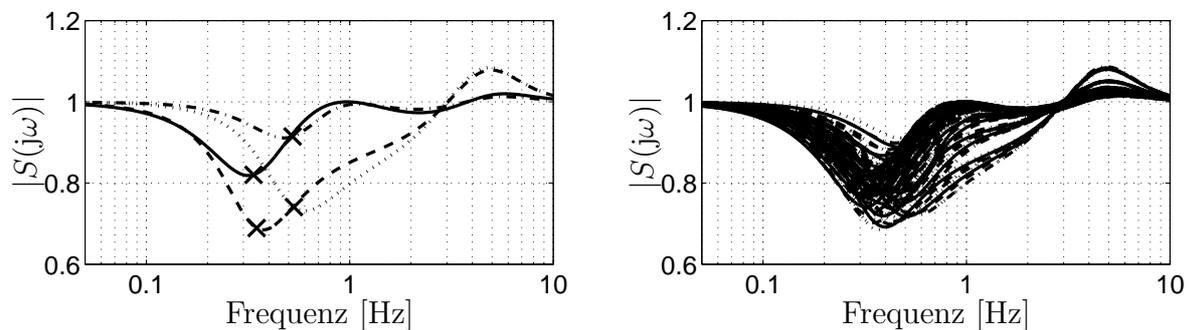
werden. Die Dämpfung der Gierdynamik verschlechtert sich, ist aber robust für den gesamten Betriebsbereich größer 0.82 und damit immer noch sehr gut bedämpft. Die natürliche Frequenz der der Wank- und Gierdynamik zuzuordnenden Eigenwerte ist in etwa gleich geblieben. Die Spezifikationen i.-iii. aus Abschnitt 4.2.4 sind somit erfüllt.



**Bild 4.23:** Vergleich der Wankdämpfung und des maximalen Realteils von geregelter (schwarz) und unregulierter (grau) Fahrzeug.

#### 4.4.2 Sensitivitätsanalyse

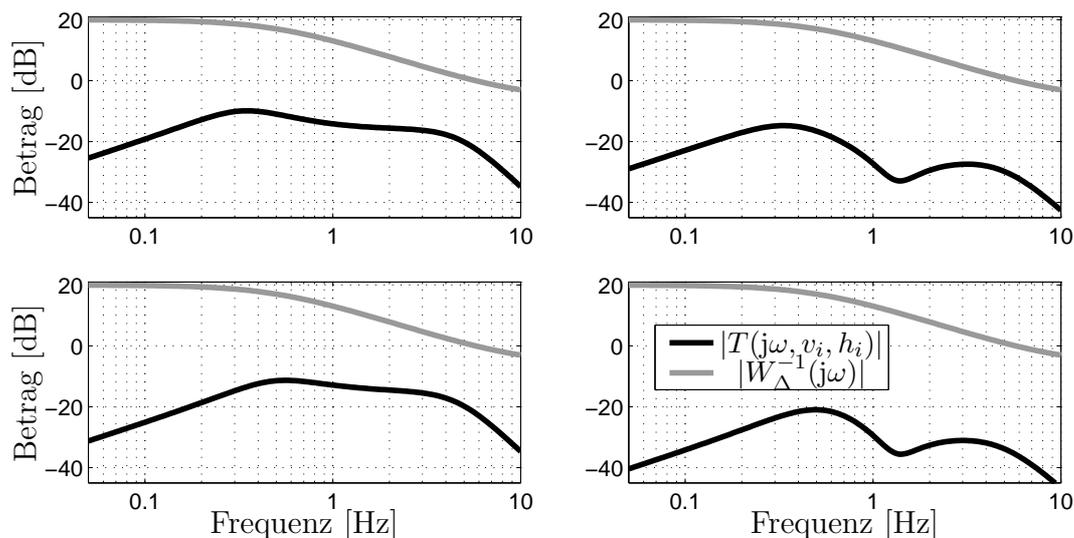
Bild 4.24 zeigt die Amplitudengänge der Sensitivitätsfunktion für  $E_1 - E_4$  (links) bzw. für ein dichtes Raster des Betriebsbereichs (rechts). Die Störunterdrückung ist besonders deutlich im Bereich der Wankeigenfrequenz (gekennzeichnet mit einem  $\times$  in Bild 4.24). Die Amplitudenverstärkung beträgt maximal etwa 108 % bei einer Frequenz von 5 Hz, es ist also zum einen noch ausreichend Stabilitätsreserve vorhanden ( $\rho_S = 1/1.08$ ) und zum anderen wird der Fahrkomfort im Bereich 4-8 Hz nur unwesentlich verschlechtert.



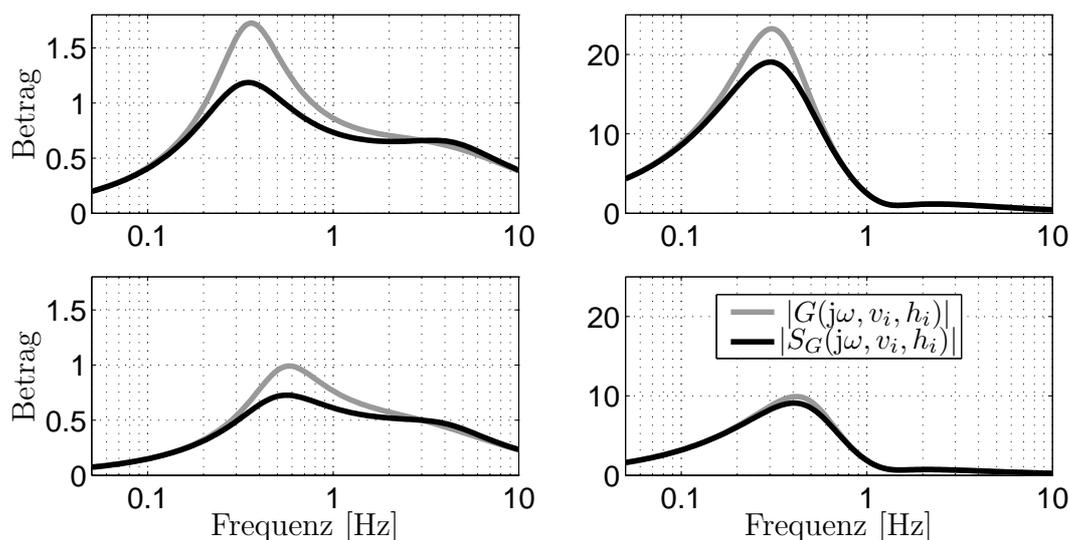
**Bild 4.24:** Sensitivitätsfunktion für  $E_1 - E_4$  (links) bzw. ein dichtes Raster des Betriebsbereichs (rechts) bei Anpassung der Rückführverstärkungen an  $v$  und  $h$ .

Die Durchtrittsfrequenz liegt für alle Repräsentanten bei mindestens 3 Hz. Die Spezifikationen aus Gl. (4.2.20) und Gl. (4.2.21) sind robust erfüllt.

Bild 4.25 zeigt, dass robuste Stabilität mit ausreichend großer Reserve bezüglich nicht-modellierter Dynamik gewährleistet werden kann. Der Verlauf des Amplitudengangs der Ausgangs-Sensitivitätsfunktion  $S_G$  im Vergleich zu dem der Übertragungsfunktion der Regelstrecke  $G$  in Bild 4.26 zeigt die Bandpasscharakteristik des Regelgesetzes. Lediglich in einem mittleren Frequenzbereich von ca. 0.2 – 2 Hz ist der automatische Reglereingriff wirksam.



**Bild 4.25:** Bode-Amplitudengang der Komplementären Sensitivitätsfunktion für  $E_1 - E_4$ .

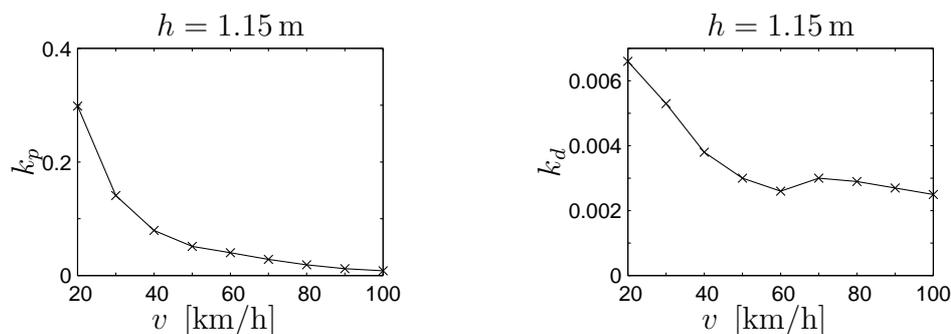


**Bild 4.26:** Bode-Amplitudengang von Ausgangs-Sensitivitätsfunktion  $S_G$  und Regelstrecke  $G$  für  $E_1 - E_4$ .

### 4.4.3 Robustheit gegenüber unsicheren Fahrzeugparametern

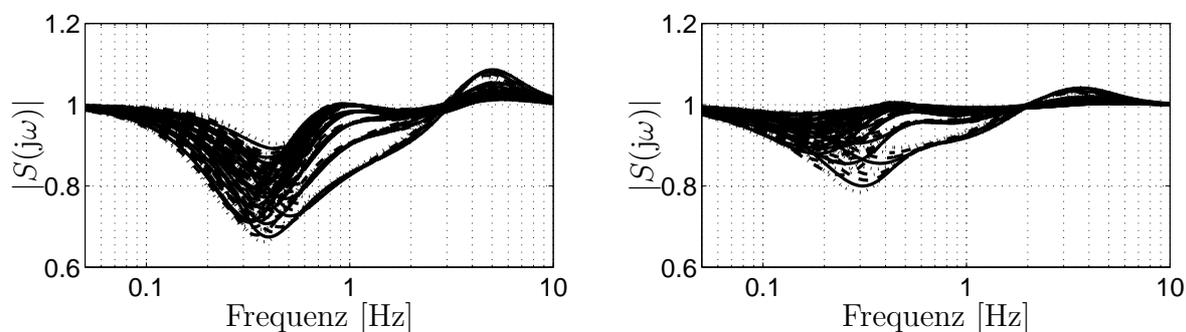
#### *Robustheit gegenüber unsicherer Schwerpunkthöhe*

Steht ein Schätzwert für die Schwerpunkthöhe  $h$  nicht zur Verfügung, so wird wie in Bild 4.27 gezeigt, die Verstärkungsanpassung allein anhand der Fahrgeschwindigkeit bei nomineller Schwerpunkthöhe durchgeführt. Die  $\Gamma$ - und  $\mathcal{B}$ -Stabilitätsanforderungen



**Bild 4.27:** Anpassung der Reglerverstärkungen  $k_p$  und  $k_d$  an die Geschwindigkeit bei unsicherer Schwerpunkthöhe.

können dennoch erfüllt werden, wenn sich dadurch auch geringe Performance-Einbußen ergeben. Hierzu zeigt das Diagramm links in Bild 4.28 den Verlauf des Amplitudengangs der Sensitivitätsfunktion für das dichte Raster des Betriebsbereichs. Auch mit unsicherer



**Bild 4.28:** Sensitivitätsfunktion für ein dichtes Raster des Betriebsbereichs bei Anpassung der Rückführverstärkungen an  $v$  bei hohem Kraftschlusskoeffizienten  $\mu = 1$  (links) bzw. niedrigem Kraftschlusskoeffizienten  $\mu = 0.2$  (rechts).

Schwerpunkthöhe können sämtliche Entwurfsanforderungen robust erfüllt werden.

#### *Robustheit gegenüber unsicherem Kraftschluss Reifen/Straße*

Das rechte Diagramm in Bild 4.28 zeigt den Amplitudengang der Sensitivitätsfunktion bei eisglatter Straße ( $\mu = 0.2$ ). Die Störunterdrückung ist weniger ausgeprägt, dennoch ist eine robuste Verbesserung gegenüber dem konventionellen Fahrzeug immer noch deutlich erkennbar.

### 4.4.4 Simulationsergebnisse

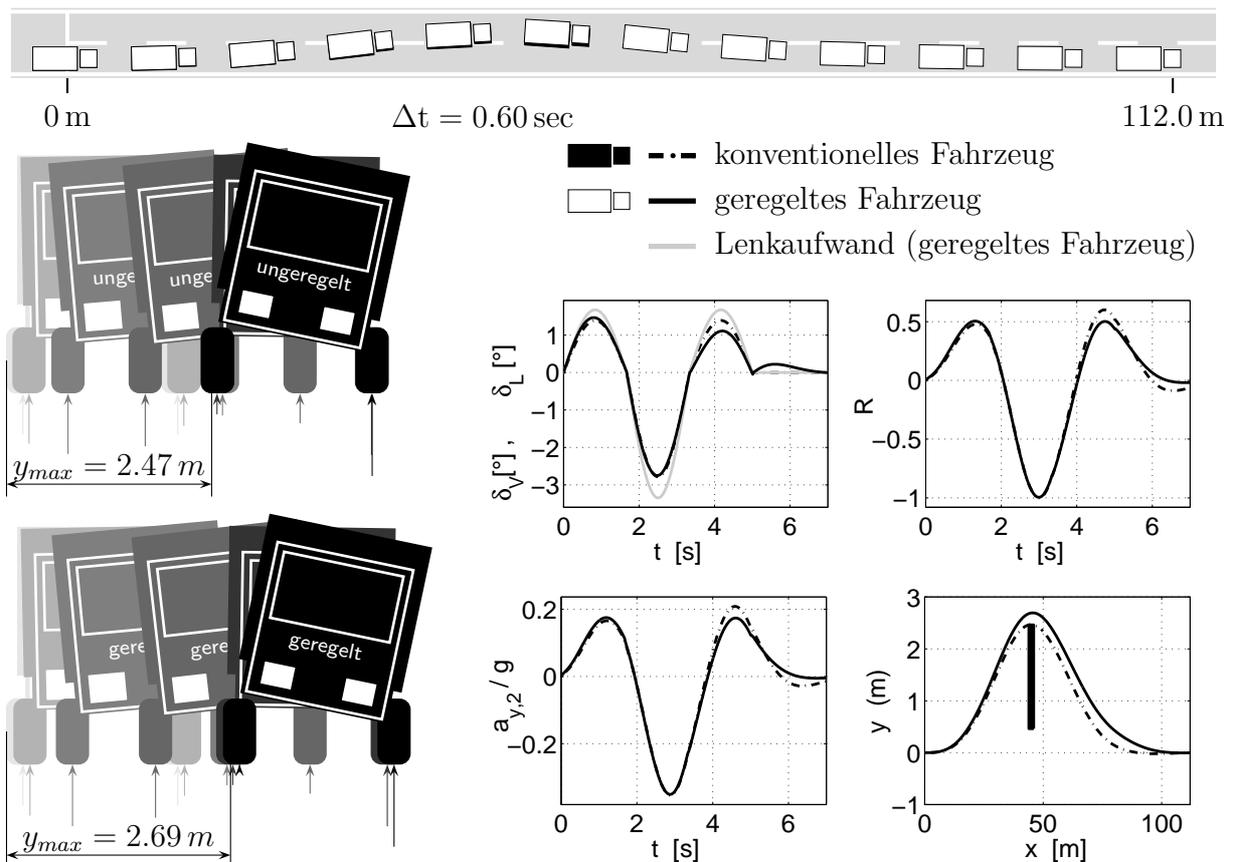
Für eine Veranschaulichung der Funktionsweise der Wankbedämpfung werden im Folgenden Simulationen anhand des nichtlinearen erweiterten Einspurmodells mit Fahrzeugdaten entsprechend Tabelle A.2 durchgeführt. In Bild 4.29 werden zwei Fahrzeuge verglichen, das konventionelle (ungeregelte) und das mit der Wankbedämpfung ausgestattete Fahrzeug (geregelt), jeweils bei konstanter Fahrgeschwindigkeit  $v = 60 \text{ km/h}$ , auf trockener Straße ( $\mu = 1$ ) und maximaler Schwerpunkthöhe  $h = 1.53 \text{ m}$ . Der Regler für diesen Betriebspunkt ist entsprechend Bild 4.21  $K_{\phi}(s) = 0.0295 + 0.002 s$ . Der vom Fahrer vorgegebene Lenkradwinkel ist

$$\delta_L(t) = \hat{\delta}_L \sin(2\pi f \cdot t) \left( \sigma(t) + \sigma\left(t - \frac{1}{2f}\right) - \sigma\left(t - \frac{1}{f}\right) - \sigma\left(t - \frac{3}{2f}\right) \right), \quad (4.4.47)$$

wobei die Anregungsfrequenz  $f = 0.3 \text{ Hz}$  gewählt wurde.  $\sigma(t)$  ist der Einheitssprung:

$$\sigma(t - T_d) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq T_d \\ 1 & \text{for } t > T_d. \end{cases} \quad (4.4.48)$$

Die Amplitude  $\hat{\delta}_L$  des Lenkradwinkels wird in beiden Simulationen so gewählt, dass sich



**Bild 4.29:** Schnelles Ausweichmanöver bei  $v = 60 \text{ km/h}$  und  $h = 1.53 \text{ m}$ .

für beide Fahrzeuge  $\max_t |R(t)| = 1$  einstellt, d. h. dass sich beide Fahrzeuge an der

Kippgrenze befinden. Der Verlauf des Lenkradwinkels  $\delta_L$  über der Zeit entsprechend (4.4.48) ist in Bild 4.29 für das konventionelle Fahrzeug strichpunktiert dargestellt und für das geregelte Fahrzeug in durchgezogenem Linienstil in grau. Die stroboskopische Visualisierung der Simulationsergebnisse in Bild 4.29 zeigen den Spurverlauf und das Wankverhalten beider Fahrzeuge. Das geregelte Fahrzeug mit Wankbedämpfung kann bei gleichem Maximalbetrag des Kippkoeffizienten  $R$ , d. h. bei gleicher Kippgefahr, einem Hindernis weiter ausweichen (2.69 m gegenüber 2.47 m beim konventionellen Fahrzeug). Da die Wirkung der Wankbedämpfung stark frequenzabhängig ist, können bei Anregungen im Bereich der Wank Eigenfrequenz, d. h. zwischen 0.3–0.5 Hz, noch bessere Ergebnisse erzielt werden.

## 4.5 Einschätzung

Die geschwindigkeitsangepasste Rückführung von Wankrate und Wankbeschleunigung auf die Vorderradlenkung ermöglicht es, die Bedämpfung der Wankdynamik vom Fahrzustand abhängig zu machen, wodurch ein deutlicher Sicherheitsgewinn, im Sinne der Reduktion des Überschwingens bei transienten Fahrmanövern oder Störgrößeneinflüssen, möglich ist. Insbesondere Anregungen im Bereich der Wank Eigenfrequenz können mit diesem System stark bedämpft werden. Die Erhöhung der Wankdämpfung und die Unterdrückung von Störgrößeneinflüssen in dem für die Fahrdynamik relevanten Frequenzbereich erfolgt unabhängig von der Ursache für die Störung und unabhängig vom Fahrmanöver in robuster Weise gegenüber sich von Fahrt zu Fahrt ändernder Schwerpunkthöhe, sich während der Fahrt änderndem Kraftschlusskoeffizienten und gegenüber nichtmodellierter Dynamik bzw. Modellierungsfehlern. Neben den Sicherheitsaspekten besteht auch die Möglichkeit, Komfortüberlegungen in die Auslegungskriterien des Reglers mit einfließen zu lassen.

Die Funktionsweise der kontinuierlich betriebenen Lenkregelung ermöglicht eine saubere Trennung zwischen den Aufgaben des Fahrers und des automatischen Regelungssystems im Sinne der Gestaltung der Mensch/Maschine-Schnittstelle. Lediglich in einem mittleren Frequenzbereich greift das Regelungssystem ein; bei quasistationären Manövern, z. B. bei einer Einfahrt in eine Kurve mit klotoidalem Übergang mit angepasster Geschwindigkeit, wird die Wankdynamik nur unwesentlich angeregt ( $\dot{\phi} \approx 0$ ) und damit auch kein Regeleingriff vorgenommen.

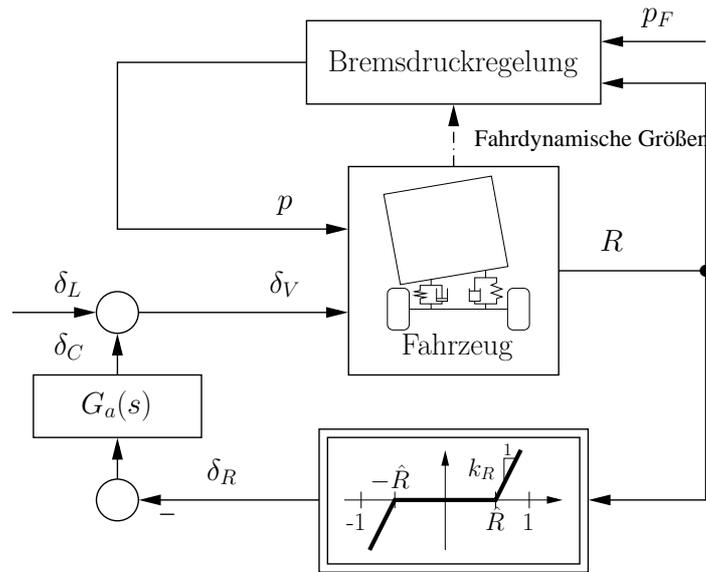
## 5 Direkte Kippvermeidung durch koordinierte Lenk- und Bremsregelung

Im vorangegangenen Kapitel wurde gezeigt, dass durch eine kontinuierlich betriebene Lenkregelung mittels Rückführung der Wank- und Gierrate großes Potenzial besteht, das fahrdynamische Verhalten zu verbessern und somit auch indirekt die Kippgefahr, insbesondere in transienten Fahrmanövern und bei Störgrößeneinflüssen, zu reduzieren. Bei quasistationären Manövern, z. B. einer Einfahrt in eine Kurve mit kontinuierlichem Übergang der Kurvenkrümmung von Geradeausfahrt ( $\rho = 0$ ) in stationäre Kreisfahrt ( $\rho = konst$ ), wird die Wankdynamik jedoch nicht bzw. nur unwesentlich angeregt ( $\dot{\phi} \approx 0$ ,  $\ddot{\phi} \approx 0$ ). Entsprechend gering ist der Effekt der mit der Wankbedämpfung zu erzielen ist bei diesen Manövern. Bei der Wankbedämpfung erfolgte der Eingriff zudem unabhängig von der tatsächlichen Kippgefahr, wobei der Sollwert für den Zusatzlenkwinkel über lineare Regelgesetze berechnet wurde.

In diesem Kapitel wird ein regelungstechnisches Konzept vorgestellt, dessen Ziel die generelle Vermeidung von Überschlagunfällen ist, d. h. sowohl bei transienten als auch bei quasistationären Fahrmanövern. In kippkritischen Situationen wird ein Notfall-System aktiviert, das durch einen koordinierten automatischen Lenk- und Bremsingriff stabilisierend in die Fahrdynamik eingreift und dadurch ein Umkippen des Fahrzeugs verhindert und gleichzeitig das bestmögliche Spurhalten des Fahrzeugs auf der Fahrbahn ermöglicht. Als Maß für die Kippstabilität wurde im zweiten Kapitel der Kippkoeffizient  $R$  eingeführt. Von diesem wird angenommen, dass er dynamisch nach einem der in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen Verfahren während der Fahrt ermittelt werden kann und als Rückführgröße zur Verfügung steht. Wie im vorangegangenen Kapitel wird für den aktiven Lenkeingriff das Prinzip der Überlagerungslenkung angenommen. Der aktive Bremsingriff erfolgt im Sinne einer reinen Bremsverzögerung ohne ESP, indem beispielsweise Hydraulikaggregate an den einzelnen Rädern, wie sie beim automatischen Bremsassistenten [28] zum Einsatz kommen, angesteuert werden, um damit den erforderlichen Bremsdruck zu erzeugen.

## 5.1 Struktur der nichtlinearen Notfall-Lenk- und Bremsregelung

Schematisiert und stark vereinfacht zeigt Bild 5.1 die prinzipielle Struktur des Notfall-Regelungssystems bestehend aus den beiden Rückführschleifen Notfall-Lenkregelung und Notfall-Bremsdruckregelung. Der Fahrer gibt über das Bremspedal den Bremsdruck



**Bild 5.1:** Struktur des Notfall-Regelungssystems.

$p_F$  und über das Lenkrad den Lenkraddrehwinkel  $\delta_L$  vor. Aus dem Kippkoeffizientensignal  $R$  werden über nichtlineare Regelgesetze die erforderlichen zusätzlichen Stellgrößensignale für Lenk- und Bremskraftaktuatorik berechnet.

Im Brennpunkt der Untersuchungen dieses Kapitels steht die Auslegung und die Überprüfung auf robuste absolute Stabilität der nichtlinearen Lenkregelung, die Überlegungen zur Bremsregelung sind prinzipieller Natur. Das in diesem Kapitel vorgestellte Regelungskonzept wurde bereits in Teilen in [95, 96, 12, 93] beschrieben.

## 5.2 Nichtlineare Notfall-Lenkregelung

Überschreitet der Kippkoeffizient betragsmäßig einen vorgegebenen Grenzwert  $\hat{R}$  (z. B.  $\hat{R} = 0.9$ ), der signalisiert, dass sich das Fahrzeug nahe der Kippgrenze befindet, wird über ein nichtlineares Regelgesetz ein Lenkeingriff eingeleitet, um unmittelbar die Querschleunigung zu reduzieren und damit die Kippstabilität zu vergrößern. Das nichtlineare Regelgesetz bewirkt dabei, dass je näher der Betrag des Kippkoeffizienten dem

Wert 1 kommt, desto stärker in die Lenkung eingegriffen wird. Wird der Grenzwert  $\hat{R}$  unterschritten, so wird die Notfall-Lenkregelung wieder unwirksam. Dieser Zusammenhang wird durch

$$\delta_R = \begin{cases} k_R \operatorname{sign}(R) (|R| - \hat{R}) & \text{für } |R| > \hat{R} \\ 0 & \text{für } |R| \leq \hat{R} \end{cases} \quad (5.2.1)$$

beschrieben, wobei  $-\delta_R$  der Sollwert für den Lenkaktuator ist. Der Lenkeingriff bewirkt, dass der Vorderradlenkwinkel reduziert wird und eine Spurabweichung des Fahrzeugs zum Kurvenäußeren in Kauf genommen wird. Der Vermeidung des Umkippens wird kurzfristig Priorität gegenüber der Kurshaltung eingeräumt. Im Extremfall, d. h. bei  $|\hat{R}|$  nahe 1 und idealerweise exakt bestimmtem Kippkoeffizienten  $R$  sowie hoher Kennliniensteigung  $k_R$ , würde das Fahrzeug mit der beschriebenen Notfall-Lenkregelung den engsten Kurvenradius fahren, der physikalisch gerade noch möglich ist, ohne dass die kurveninneren Räder von der Fahrbahn abheben.

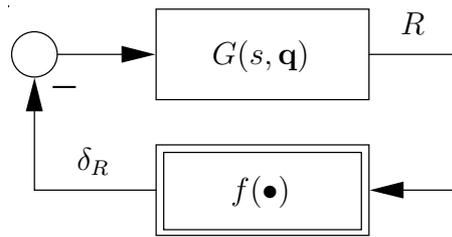
Ein auf der Invarianzregelung basierender regelungstechnischer Ansatz für eine aktive Vorderradlenkung zur Kippvermeidung wird in [83, 126] beschrieben der die gleiche regelungstechnische Zielsetzung verfolgt wie die hier beschriebene Notfall-Lenkregelung. Hierbei wird als Grundlage für den regelungstechnischen Entwurf ein modellbasierter nichtlinearer Ansatz gewählt der es erforderlich macht, auf geschätzte bzw. gemessene Fahrzeugparameter zurückzugreifen.

Der Forderung nach hoher Kennliniensteigung für einen effizienten und massiven Lenkeingriff in kippkritischen Situationen bei dem hier beschriebenen Ansatz steht die Gefahr nichtlinearer Grenzyklen, die durch die eingeführte Kennlinien-Nichtlinearität induziert werden können, gegenüber. Um Grenzyklen von vornherein für den gesamten Betriebsbereich auszuschließen, wird im folgenden Abschnitt mit Hilfe des Popow-Kriteriums der Nachweis der *robusten absoluten Stabilität* der nichtlinearen Lenkregelung erbracht. Das Popow-Kriterium für Eingrößensysteme bietet den Vorteil, dass es eine hinreichende Stabilitätsbedingung liefert und dass es auf Grund der graphischen Interpretation sehr anschaulich und einfach zu handhaben ist. Die Aussage der absoluten Stabilität beim Popow-Kriterium bezieht sich nicht allein auf eine genau spezifizierte Kennliniennichtlinearität, sondern auf eine ganze Klasse nichtlinearer Kennlinien. Für Variationen der Kennliniennichtlinearität muss somit kein neuer Stabilitätsnachweis erbracht werden.

### 5.3 Absolute Stabilität der Lenkregelung

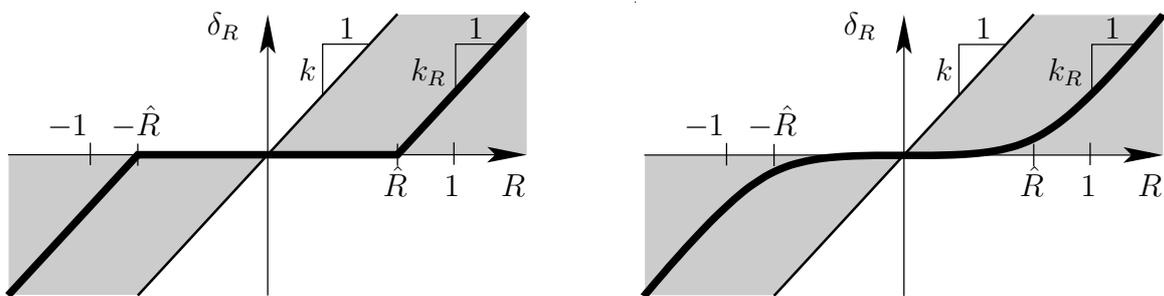
Als Ausgangspunkt für die nichtlinearen Untersuchungen wird der entsprechend Bild 5.2 umgeformte nichtlineare Regelkreis, bestehend aus einer eindeutigen Kennlinien-Nichtlinearität  $\delta_R = f(R)$  und der parametrischen linearen zeitinvarianten Übertragungsfunktion

$$G(s, \mathbf{q}) := -\frac{R}{\delta_R} = G_a(s) G_{\delta_v}^R(s, \mathbf{q}), \quad (5.3.2)$$



**Bild 5.2:** Regelkreis bestehend aus Kennliniennichtlinearität und linearem Anteil.

betrachtet, wobei  $G_a(s)$  die Übertragungsfunktion des Lenkaktuators entsprechend Gl. (B.0.4) ist und  $G_{\delta_V}^R(s, \mathbf{q})$  die Übertragungsfunktion von Vorderradlenkwinkel  $\delta_V$  zum Kippkoeffizienten  $R$ .  $G(s, \mathbf{q})$  ist eine Übertragungsfunktion 7. Ordnung (4 Strecken- und 3 Aktuatorzustände) mit Differenzgrad 3. Die im Vektor  $\mathbf{q}$  zusammengefassten Parameter  $v$  und  $h$  werden als innerhalb des Betriebsbereichs  $Q$  variierend bzw. unsichere Parameter betrachtet, für die die in Abschnitt 4.2.2 getroffenen Annahmen gelten sollen. Vereinfachend wird auf Grund der vorliegenden Fragestellung im Folgenden robuste asymptotische Stabilität des linearen Gliedes  $G(s, \mathbf{q})$ , d. h. der „Hauptfall“, dass alle Pole von  $G(s, \mathbf{q})$  für  $\mathbf{q} \in Q$  in der linken Halbebene liegen, vorausgesetzt. Weiterhin sei die nichtlineare Kennlinie  $f$  eindeutig, stückweise stetig und für alle  $R \in (-\infty, \infty)$  definiert. Wie in Bild 5.3 gezeigt, verlaufe der Graph von  $f$  in einem Winkelbereich  $[0, k]$  – im Folgenden als *Popow-Sektor* bezeichnet [51] –, der nach unten durch die Abszisse  $\delta_R = 0$  und nach oben durch die Gerade  $\delta_R = k R$  begrenzt wird.



**Bild 5.3:** Popow-Sektor mit möglichen Realisierungen der Kennliniennichtlinearität für die Notfall-Lenkregelung.

Die Grundlagen der dem Popow-Kriterium zu Grunde liegenden nichtlinearen Stabilitätstheorie sind beispielsweise in [52, 51] nachzulesen.

### 5.3.1 Nominelle absolute Stabilität

Betrachtet wird zunächst ein nomineller (zulässiger) Betriebspunkt  $\mathbf{q}^* \in Q$  mit linearer Übertragungsfunktion  $G(s) = G(s, \mathbf{q}^*)$ . Ist für diese Übertragungsfunktion  $G(s)$  der geschlossene Regelkreis stabil, so bezeichnet man das System als *nominell absolut stabil*. Als hinreichende Bedingung für die absolute Stabilität des nominellen geschlossenen Regelkreises dient das Popow-Kriterium, [103, 123]:

*Satz 5.1. (Nominelle absolute Stabilität)*

Der oben beschriebene nominelle Regelkreis mit nichtlinearer stetiger Funktion  $f$  und asymptotisch stabiler Übertragungsfunktion  $G(s)$  ist bezüglich des Winkelbereichs  $[0, k]$  mit  $k \in \mathbb{R}_0^+$  absolut stabil, falls eine Zahl  $\theta \in \mathbb{R}$  existiert, mit der die Ungleichung

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}((1 + j\omega\theta)G(j\omega)) > 0, \quad \forall \omega \geq 0 \quad (5.3.3)$$

erfüllt ist. □

Für eine geometrische Deutung des Popow-Kriteriums wird die *Popow-Ortskurve*

$$G_P(j\omega) = \operatorname{Re}(G(j\omega)) + j\omega \cdot \operatorname{Im}(G(j\omega)), \quad \forall \omega \geq 0 \quad (5.3.4)$$

eingeführt, die aus der Nyquist-Ortskurve  $G(j\omega)$  durch Multiplikation des Imaginärteils mit  $\omega$  hervorgeht. Liegt  $G_P(j\omega)$  für alle  $\omega \geq 0$  rechts der *Popow-Geraden* bzw. der *kritischen Geraden*

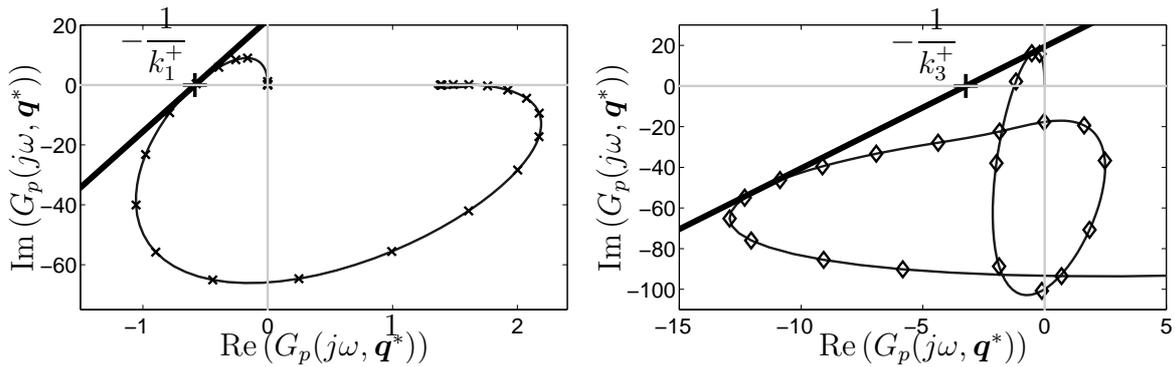
$$\operatorname{Im}(G_P(j\omega)) = \frac{1}{\theta} \left( \operatorname{Re}(G_P(j\omega)) + \frac{1}{k} \right) \quad (5.3.5)$$

mit Steigung  $1/\theta$ , die durch den Punkt  $(-1/k, 0)$  verläuft, so ist Ungleichung (5.3.3) erfüllt. Satz 5.1 fordert, dass die Popow-Ortskurve  $G_P(j\omega)$  rechts der Popow-Geraden verläuft. Lässt man auch gemeinsame Punkte der Popow-Geraden mit  $G_P(j\omega)$  zu, dann kann absolute Stabilität für den Popow-Sektor  $[0, k]$  bzw.  $[0, k - \varepsilon]$  garantiert werden, wobei  $\varepsilon$  eine beliebig kleine positive Zahl ist.

Bild 5.4 zeigt die Popow-Ortskurven für die Eckpunkte  $E_1$  (links) und  $E_3$  (rechts) des Betriebsbereichs mit entsprechenden Popow-Geraden, die so gewählt sind, dass sie linksseitig tangential an den Popow-Ortskurven anliegen, d. h. so dass Geraden und Ortskurven einen bzw. zwei gemeinsame Punkte besitzen. Die kritische Popow-Gerade und damit der maximale Popow-Sektor kann entweder symbolisch über eine Tangenten- bzw. Doppel-Tangentenbedingung berechnet werden [70] oder numerisch durch Lösen der Optimierungsaufgabe

$$\frac{1}{k^+} = \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \sup_{\omega \in \mathbb{R}_0^+} -\operatorname{Re}((1 + j\omega\theta)G(j\omega)), \quad (5.3.6)$$

die sich direkt aus Satz 5.1 ableiten lässt. Für  $E_1$  bzw.  $E_3$  ist somit absolute Stabilität bezüglich des Popow-Sektors  $[0, k_1^+)$  bzw.  $[0, k_3^+)$  garantiert. Aus Bild 5.4 wird darüber



**Bild 5.4:** Popow-Gerade und Popow-Ortskurve für die beiden Eckpunkte  $E_1$  (links) und  $E_3$  (rechts).

hinaus ersichtlich, dass für den Betriebspunkt  $E_1$  Popow-Sektor und Nyquist-Sektor<sup>1</sup> zusammenfallen. In diesem Fall ist die Bedingung (5.3.3) notwendig und hinreichend (Aiserman's Vermutung [14] gilt). Für den Betriebspunkt  $E_3$  unterscheiden sich Popow- und Nyquist-Sektor und somit hinreichende und notwendige Bedingung für absolute Stabilität.

### 5.3.2 Robuste absolute Stabilität

Die Frage nach der größtmöglichen Wirkung der Notfall-Lenkregelung ist verbunden mit der Frage nach der größtmöglichen Steigung der Kennlinie, bei der das Auftreten von Grenzyklen für den gesamten Betriebsbereich  $Q$  ausgeschlossen werden kann.

Betrachtet wird der nichtlineare Standardregelkreis aus Bild 5.2 mit der unsicheren Streckenübertragungsfunktion  $G(s, \mathbf{q})$  entsprechend Gl. (5.3.2). Die Aufgabe besteht darin, den maximalen Popow-Sektor  $[0, k_{\max})$  zu bestimmen der robuste absolute Stabilität der Streckenfamilie

$$\mathcal{G}(s, Q) = \{G(s, \mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in Q\}$$

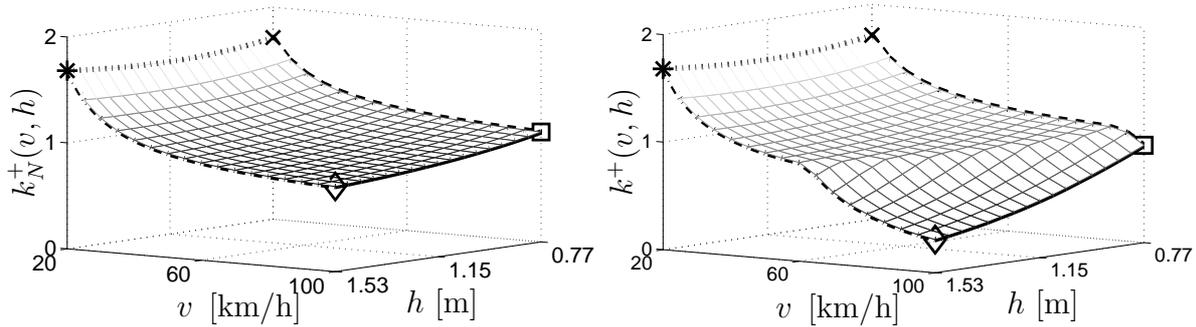
gewährleistet.

Eine Möglichkeit, um robuste absolute Stabilität für ein festes  $k_R$  nachzuweisen, ist die Anwendung des Popow-Kriteriums auf die *Popow-Wertemenge* [115, 4]. Ein auf dem Parameterraumverfahren basierender Ansatz, der nachfolgend verwendet werden soll, erfolgt in Anlehnung an die in [32] eingeführte  $\Theta$ -Stabilität. Im ersten Schritt wird dabei der maximale Popow-Sektor numerisch bzgl. einer endlichen Anzahl von Betriebspunkten bestimmt und in einem zweiten Schritt die robuste absolute Stabilität bezüglich des Kontinuums des Betriebsbereichs nachgewiesen.

<sup>1</sup>Der Nyquist-Sektor ist der Sektor der stabilen linearen Rückführverstärkungen der angibt für welche Werte von  $k$  der Regelkreis mit  $\delta_R = k \cdot R$  Hurwitz-stabil ist.

### Maximaler Popow-Sektor

Für die Berechnung des maximalen Popow-Sektors wird für ein dichtes äquidistantes Raster des Betriebsbereichs von  $17 \times 17$  Betriebspunkten  $\mathbf{q}_i$ ,  $i = 1, \dots, 289$ , zusammengefasst zur Testmenge  $Q_{test} \subset Q$ , die jeweilige Popow-Gerade mit Steigung  $1/\theta(\mathbf{q}_i)$  und Achsenabschnitt  $1/k^+(\mathbf{q}_i)$  bestimmt, die linksseitig tangential an der Popow-Ortskurve  $G_P(s, \mathbf{q}_i)$  anliegt, d. h. es wird für jeden Betriebspunkt  $\mathbf{q}_i$  der Popow-Sektor  $[0, k^+(\mathbf{q}_i))$  durch Lösen der Optimierungsaufgabe (5.3.6) berechnet. Das Ergebnis der Optimierung ist rechts in Bild 5.5 dargestellt. Zum Vergleich ist links die obere Grenze des Nyquist-Sektors  $k_N^+(\mathbf{q}_i)$  über dem Betriebsbereich aufgetragen. Der „Knick“ in der Lösungsfläche



**Bild 5.5:** Obere Grenze von Nyquist- (links) und Popow-Sektor (rechts) für ein äquidistantes Raster des Betriebsbereichs bei reiner Notfall-Lenkregelung.

rechts in Bild 5.5 kennzeichnet den Übergang von den Betriebszuständen für die Popow- und Nyquist-Sektor gleich sind und den Betriebszuständen bei denen sich diese unterscheiden, d. h. die Lösungsfläche links kennzeichnet die notwendige die Lösungsfläche rechts die hinreichende Bedingung für absolute Stabilität.

Die obere Grenze  $k_{\max}$  des maximalen Popow-Sektors  $[0, k_{\max})$  ergibt sich aus

$$k_{\max} = \inf_{\mathbf{q} \in Q_{test}} k^+(\mathbf{q}) \quad (5.3.7)$$

zu  $k_{\max} = k^+(\mathbf{q}_{E_3}) = 0.3091$  (zum Vergleich der Wert der oberen Grenze des maximalen Nyquist-Sektors:  $\inf_{\mathbf{q}_i} k_N^+(\mathbf{q}_i) = 0.8031$ ).  $k^+(\mathbf{q}_{E_3})$  ist der Wert für den kritischen Betriebspunkt  $E_3$  mit  $v = 100$  km/h und  $h = 1.53$  m. Für die Steigung der zugehörigen Popow-Gerade ergibt sich der Wert  $1/\theta^+(\mathbf{q}_{E_3}) = 5.984$ . Für alle  $\mathbf{q} \in Q_{test}$  ist der Regelkreis absolut stabil bezüglich  $k \in [0, k(\mathbf{q}_{E_3}))$ .

### Robuste absolute Stabilität im Parameterraum

Aus Satz 5.1 folgt direkt, dass der Regelkreis aus Bild 5.2 mit nichtlinearer stetiger Funktion  $f$  und robust asymptotisch stabiler Familie von Übertragungsfunktionen  $\mathcal{G}(s, \mathbf{Q})$  bezüglich des Winkelbereichs  $[0, k]$  mit  $k \in \mathbb{R}_0^+$  robust absolut stabil ist, falls für jedes  $\mathbf{q} \in Q$  eine Zahl  $\theta(\mathbf{q})$  existiert, so dass die Ungleichung

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}((1 + j\omega\theta(\mathbf{q}))G(j\omega, \mathbf{q})) > 0, \quad \forall \omega \geq 0 \quad (5.3.8)$$

erfüllt ist. Dies bedeutet, dass die Popow-Ortskurve  $G_P(j\omega, \mathbf{q})$  rechts der Popow-Geraden mit Steigung  $1/\theta(\mathbf{q})$  verläuft, wobei  $\theta(\mathbf{q})$  mit dem Betriebspunkt variieren kann. Eine konservative Abschätzung des hinreichenden Popow-Kriteriums erhält man, wenn über den gesamten Betriebsbereich die Steigung der Popow-Geraden als konstant angenommen wird, d. h.  $\theta(\mathbf{q}) = \theta = \text{konst.}$  Diese Einschränkung gelten auch für den folgenden Satz, der eine hinreichende Bedingung für absolute Stabilität beschreibt und der sich aus ähnlichen Stetigkeitsüberlegungen (Zwischenwertsatz), wie sie dem Grenzüberschreitungssatz von Frazer und Duncan [53] zu Grunde liegen, ableiten lässt:

*Satz 5.2. (Grenzüberschreitungssatz für robuste absolute Stabilität)*

Der Regelkreis aus Bild 5.2 mit nichtlinearer stetiger Funktion  $f$  und robust asymptotisch stabiler Familie von Übertragungsfunktionen  $\mathcal{G}(s, \mathbf{Q}) = \{G(s, \mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in \mathbf{Q}\}$  ist bezüglich des Winkelbereichs  $[0, k]$  mit  $k \in \mathbb{R}_0^+$  robust absolut stabil, falls

1. eine absolut stabile Übertragungsfunktion  $G(s) \in \mathcal{G}(s, \mathbf{Q})$  existiert, deren Popow-Ortskurve rechts der Popow-Geraden mit fest vorgegebener Steigung  $1/\theta$  verläuft und
2.  $\frac{1}{k} + \operatorname{Re}((1 + j\omega\theta)G(j\omega, \mathbf{q})) \neq 0, \quad \forall \omega \in [0, \infty), \mathbf{q} \in \mathbf{Q}.$

□

Es sei

$$\hat{G}(\omega, \mathbf{q}, \theta, k) = \frac{1}{k} + \operatorname{Re}((1 + j\omega\theta)G(j\omega, \mathbf{q})) . \quad (5.3.9)$$

Dann wird mit

$$Q_{\Theta_P, \theta} = \left\{ \mathbf{q} \mid \hat{G}(\omega, \mathbf{q}, \theta) > 0, \forall \omega \in \mathbb{R}_0^+, \theta \in \mathbb{R}_0 \right\} \quad (5.3.10)$$

das Gebiet in der Ebene der Betriebsparameter  $\mathbf{q}$  bezeichnet, für den die Popow-Ortskurven für alle  $\mathbf{q} \in Q_{\Theta_P, \theta}$  rechts der Popow-Geraden mit Steigung  $1/\theta$  verlaufen. Der Regelkreis ist robust absolut stabil, falls  $\mathbf{Q} \in Q_{\Theta_P, \theta}$ .

*Anmerkung 5.1.* Man beachte, dass Parameterwerte  $\mathbf{q} \notin Q_{\Theta_P, \theta}$  existieren können, die dennoch das hinreichende Popow-Kriterium erfüllen, nämlich solche, die die Popow-Bedingung mit gleichem  $k$  aber unterschiedlichem  $\theta$  erfüllen. Entsprechend setzt sich der robust absolut stabile Betriebsbereich  $Q_{\Theta_P}$ , für den das hinreichende Popow-Kriterium erfüllt ist, zusammen aus der Vereinigungsmenge aller  $Q_{\Theta_P, \theta}$  mit beliebigem  $\theta$ , d. h.

$$Q_{\Theta_P} = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} Q_{\Theta_P, \theta} . \quad (5.3.11)$$

In der Praxis würde man  $Q_{\Theta_P}$  durch die Abbildung einer endlichen Anzahl von Popow-Bedingungen mit  $n$  Popow-Geraden approximieren, d. h.

$$Q_{\Theta_P} \supseteq \tilde{Q}_{\Theta_P} = \bigcup_{i=1}^n Q_{\Theta_P, \theta_i} \quad \theta_i \in \mathbb{R}_0 . \quad (5.3.12)$$

In der Regel wird man dabei Steigungen der Popow-Geraden äquidistant zwischen 0 und 360° wählen.

□

Die Berechnung der Abbildungsgleichungen für die Berandung von  $Q_{\Theta_P, \theta}$  erfolgt, indem die Bedingung, dass Popow-Ortskurve und Popow-Gerade für ein vorgegebenes  $\theta = \theta^*$  einen oder mehrere gemeinsame Punkte haben (Anfangspunkt für  $\omega = 0$ , Endpunkt für  $\omega \rightarrow \infty$ , Einfach- oder Mehrfachtangente) in die Ebene der Streckenparameter  $(v, h)$  abgebildet wird [32].

Die Bedingung, dass Popow-Ortskurve und -Gerade gemeinsame Punkte besitzen (Punktbedingung), ist erfüllt, falls

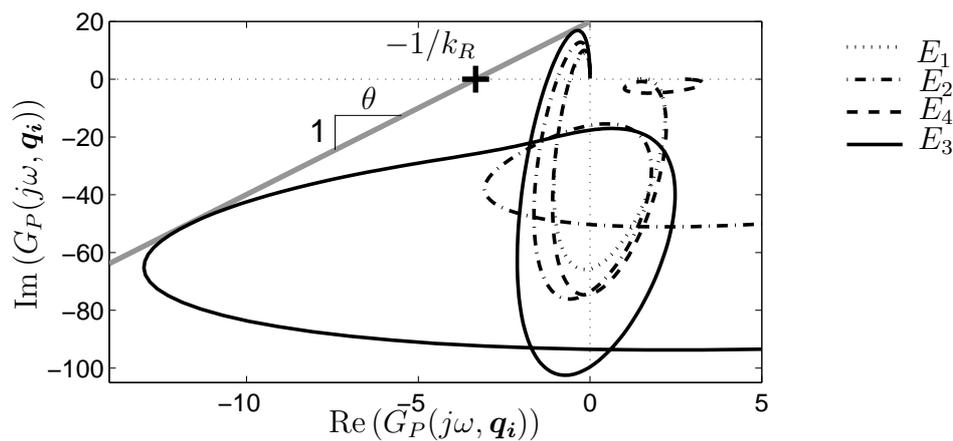
$$\hat{G}(\omega, \mathbf{q}, \theta, k) = 0. \quad (5.3.13)$$

Die Bedingung, dass die Popow-Gerade eine Tangente bzw. Mehrfach-Tangente an die Popow-Ortskurve ist (Tangentenbedingung), ist erfüllt, falls Gl. (5.3.13) erfüllt ist und gleichzeitig die Bedingung

$$\frac{\partial \hat{G}(\omega, \mathbf{q})}{\partial \omega} = 0. \quad (5.3.14)$$

Der Vergleich der Definition von  $\hat{G}$  in Gl. (5.3.9) und in Abschnitt 3.5.1 von Gl. (5.3.13) bzw. Gl. (5.3.14) mit Gl. (3.5.49) bzw. Gl. (3.5.54) zeigt die Analogie zur  $\mathcal{B}$ -Stabilität. Punkt- und Tangentenbedingung können mit der gleichen Vorgehensweise, wie sie in Abschnitt 3.5 vorgeschlagen wird, ermittelt werden und die Lösung ergibt sich analog nach dem in [4, 70] beschriebenen Verfahren.

In Bild 5.6 sind die Popow-Ortskurven  $G_P(s, \mathbf{q})$ ,  $\forall \mathbf{q} \in Q_E$  für die Notfall-Lenkregelung dargestellt. Die linksseitige Tangente an die kritische Popow-Ortskurve für den Eck-

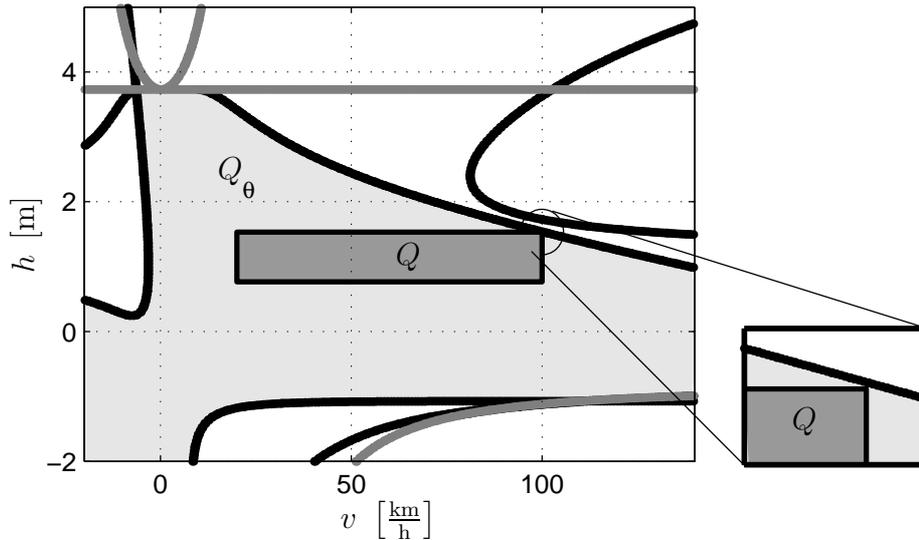


**Bild 5.6:** Popow-Gerade und Popow-Ortskurven für die vier Eckpunkte des Betriebsbereichs.

punkt  $E_3$  mit Steigung  $1/\theta(\mathbf{q}_{E_3})$  und  $x$ -Achsenabschnitt  $1/k^+(\mathbf{q}_{E_3})$  liegt gleichzeitig

auch links der übrigen Ortskurven, so dass die hinreichende Bedingung für absolute Stabilität bezüglich  $Q_E$  für den Popow-Sektor  $[0, k^+(\mathbf{q}_{E_3}))$  erfüllt ist.

Um dies für das Kontinuum des Betriebsbereichs  $Q$  zu überprüfen, werden Punktbedingung, d. h. hier die Bedingung, dass die Popow-Ortskurve auf der Popow-Geraden beginnt ( $\omega = 0$ ), und Tangentenbedingung für  $k = k^+(\mathbf{q}_{E_3}) - \varepsilon$  und  $\theta = \theta(\mathbf{q}_{E_3})$  in die Ebene der Streckenparameter  $(v, h)$  abgebildet. Das Ergebnis ist in Bild 5.7 dargestellt. Die der Punkt- bzw. Tangentenbedingung entsprechenden Grenzlinien in grau



**Bild 5.7:** Die Popow-Stabilitätsgrenzen in der  $(v, h)$ -Ebene.

bzw. schwarz unterteilen die Ebene  $(v, h)$  in eine endliche Anzahl zusammenhängender Gebiete. Innerhalb eines jeden Gebietes wird ein Betriebspunkt ausgewählt und überprüft, ob die zugehörige Popow-Ortskurve rechts der Popow-Geraden mit Steigung  $1/\theta$  verläuft. Ist dies der Fall, so ist entsprechend Satz 5.2 das diesen Punkt enthaltende Gebiet absolut stabil. In Bild 5.7 ist das absolut stabile Gebiet  $Q_{\Theta_{P,\theta}}$  hellgrau schattiert. Der Betriebsbereich  $Q$  ist vollständig in  $Q_{\Theta_{P,\theta}}$  enthalten und somit ist die nichtlineare Notfall-Lenkregelung für alle  $k_R \in [0, k^+(\mathbf{q}_{E_3}))$  robust absolut stabil.

## 5.4 Nichtlineare Bremsregelung

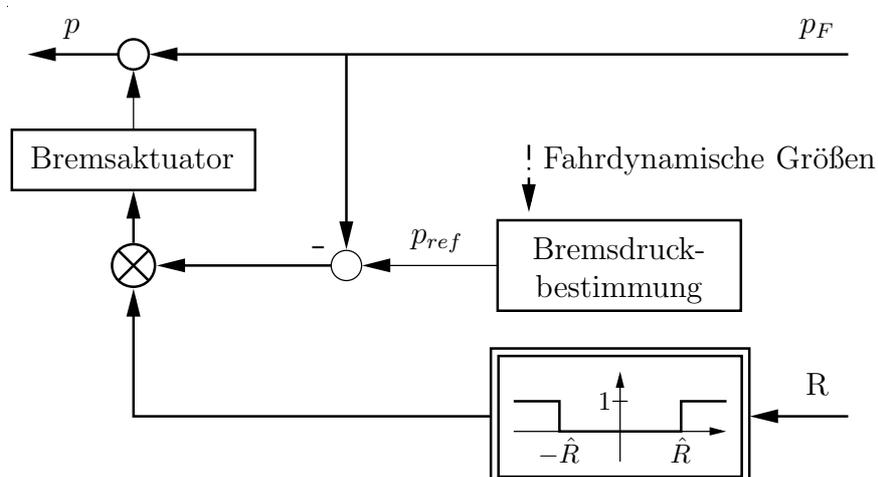
Ein automatischer Eingriff in die Lenkung in kippkritischen Situationen kommt einer nichtlinearen Begrenzung des Vorderradlenkwinkels in Abhängigkeit vom Beladungs-, Straßen- und Fahrzustand gleich, wobei die Kippvermeidung mit einer Abweichung der vom Fahrer vorgegebenen Spur verbunden ist. Diese Abweichung, beispielsweise bei der Einfahrt in eine Kurve mit überhöhter Geschwindigkeit, gilt es, möglichst klein zu

halten, indem gleichzeitig oder kurze Zeit vor oder nach Aktivieren der Lenkregelung ein automatischer Bremsengriff eingeleitet wird.

Der Effekt der im Wesentlichen die Kippvermeidung bei gleichzeitiger Spurhaltung begünstigt ist der, dass durch Reduktion der Geschwindigkeit auch mittelbar die Querschleunigung reduziert und damit Energie aus dem System genommen wird. Zwei weitere Effekte sind mit dem Bremsengriff verbunden und sollten bei der Abstimmung von Lenk- und Bremsengriff berücksichtigt werden:

- Durch die Massenträgheit wird beim Abbremsen die Achslast vorne erhöht und hinten um den gleichen Betrag vermindert. Nach dem Abklingen der dynamischen Radlastschwankungen sind die Schräglaufwinkel an den Rädern vorne und hinten unterschiedlich stark angewachsen und zwar hinten stärker als vorne. Durch die Vergrößerung der Schräglaufwinkel hinten wird eine Gierdrehung und eine Spurabweichung des Fahrzeugs zur Kurveninnenseite verursacht [86].
- Weiterhin hat das unter- bzw. übersteuernde Verhalten des Fahrzeugs Einfluss auf die Spurhaltung. Wird bei untersteuerndem Verhalten (Regelfall) die Fahrgeschwindigkeit und damit die Zentripetalbeschleunigung langsam (quasistationär) reduziert, so muss der Vorderradlenkwinkel zurückgenommen werden, um auf dem vorgesehenen Kreisradius zu bleiben.

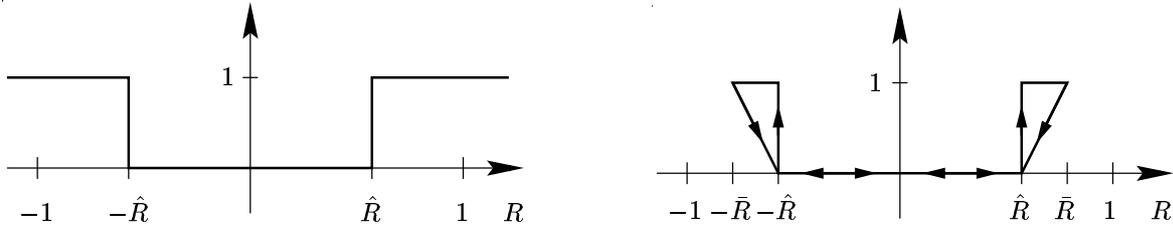
Ziel ist es, den Brems- und Lenkeingriff so abzustimmen, dass die Spurabweichung gegenüber dem vom Fahrer gewünschten Kurs klein bleibt.



**Bild 5.8:** Struktur der Bremsregelung.

Die Einleitung des Bremsengriffs erfolgt einer Notfall-Bremsung entsprechend möglichst schnell. Wird der Grenzwert  $\hat{R}$  überschritten, so wird das Fahrzeug mit einer dem Bremsdruck  $p_{ref}$  entsprechenden Bremskraft abgebremst. Hierzu zeigt Bild 5.8 in stark vereinfachter und schematisierter Darstellung die Struktur der Bremsregelung. Es

wird im Folgenden angenommen, dass der Fahrer das Bremspedal nicht betätigt, d. h.  $p_F = 0$ . Der Bremsdruck  $p_{ref}$  kann der maximale Bremsdruck sein, der durch das ABS an den einzelnen Rädern begrenzt wird, oder aber auch von weiteren fahrdynamischen Größen, wie beispielsweise Fahrgeschwindigkeit, Gierrate und der daraus ermittelten Fahrbahnkrümmung, Lenkraddrehwinkel und geschätzten Fahrzeugparametern wie beispielsweise dem Kraftschluss zwischen Reifen und Fahrbahn zur Bestimmung des momentanen Eigenlenkverhaltens, abhängen. Wird der Grenzwert  $\hat{R}$  wieder unterschritten,



**Bild 5.9:** Statische und dynamische Kennlinie für die Bremsregelung.

so wird der Bremsengriff deaktiviert. Dies kann beispielsweise mit der Schaltfunktion

$$p = \begin{cases} 0 & \text{für } |R| \leq \hat{R} \\ p_{ref} & \text{für } |R| > \hat{R}, \end{cases} \quad (5.4.15)$$

wie links in Bild 5.9 dargestellt, bewerkstelligt werden. Alternativ hierzu kann in einer etwas aufwändigeren Variante über eine dynamische Kennlinie zwischen abnehmender Kippstabilität ( $\dot{R} \text{sign}(R) > 0$ ) und zunehmender Kippstabilität ( $\dot{R} \text{sign}(R) < 0$ ) unterschieden werden. Bei abnehmender Kippstabilität soll möglichst massiv in die Bremsen eingegriffen werden, bei zunehmender Kippstabilität soll der Bremsdruck wieder zurückgenommen werden, wie beispielsweise durch den dynamischen Zusammenhang

$$p = \begin{cases} 0 & \text{für } |R| \leq \hat{R} \\ p_{ref} & \text{für } |R| > \hat{R} \wedge \dot{R} \text{sign}(R) > 0 \\ \frac{|R| - \hat{R}}{\bar{R} - \hat{R}} p_{ref} & \text{für } |R| > \hat{R} \wedge \dot{R} \text{sign}(R) < 0 \end{cases} \quad (5.4.16)$$

beschrieben wird. Auch bei dieser Kennlinie wird bei Unterschreiten des Grenzwertes  $\hat{R}$  der zusätzliche Bremsengriff deaktiviert, jedoch wird der Bremsdruck nach Überschreiten des betragsmäßigen Maximums  $\bar{R}$  für  $R$  kontinuierlich zurückgenommen. Hierfür ist es notwendig, den Wert des Maximums  $\bar{R}$  (auf dem Steuergerät) zu speichern. Dieser Zusammenhang kann der rechten Abbildung von Bild 5.9 entnommen werden. Die Lastwechselreaktion ist bei der dynamischen Variante durch das kontinuierliche Zurücknehmen des Bremsdrucks nicht so ausgeprägt wie bei der Variante nach Gl. (5.4.15).

## 5.5 Auslegungskriterien für die Notfall-Lenk- und Bremsregelung

### *Wahl der Kennliniensteigung $k_R$*

Die Kennliniensteigung  $k_R$  der Lenkung soll im weiteren Verlauf dieser Arbeit als konstant angenommen werden. Um das Auftreten von Grenzyklen robust für den gesamten Betriebsbereich auszuschließen, wird für die nachfolgenden Abschnitte dieses Kapitels der Wert

$$k_R = 0.3$$

gewählt, der innerhalb des in Abschnitt 5.3 bestimmten maximalen Popow-Sektors liegt.

Prinzipiell kann  $k_R$  auch an Fahrgeschwindigkeit ( $k_R = k_R(v)$ ) oder an Fahrgeschwindigkeit und Schwerpunkthöhe angepasst werden ( $k_R = k_R(v, h)$ ), um das Potenzial dieses Eingriffs noch besser ausschöpfen zu können. Für die Erzeugung einer "Look-up-Table" können beispielsweise die für die Darstellung in Bild 5.5 berechneten Werte für den maximalen Popow-Sektor herangezogen werden.

### *Wahl des Schwellwertes $\hat{R}$ für Lenk- und Bremsregelung*

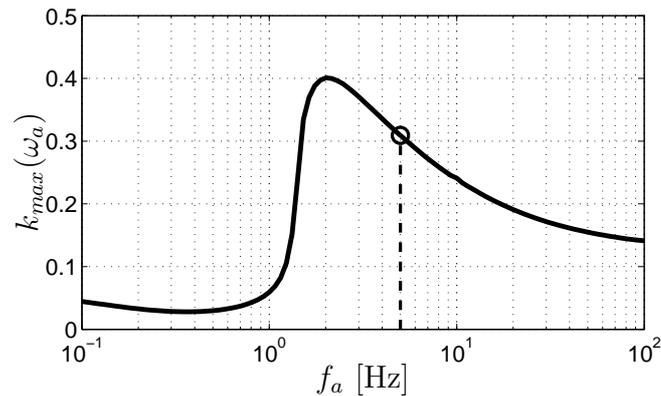
Der Schwellwert  $\hat{R}$  ist neben der Kennliniensteigung  $k_R$  ein weiterer Auslegungsparameter, der an Sicherheitsanforderungen und Genauigkeit angepasst werden sollte. Auch kann der Schwellwert für Lenk- und Bremseneingriff unterschiedlich angenommen werden. Beispielsweise kann  $\hat{R}_{brems} < \hat{R}_{lenk}$  gewählt werden, um den Effekt des verzögerten und totzeitbehafteten Bremsdruckaufbaus zu berücksichtigen. Auf die Gestaltung der Mensch/Maschine-Schnittstelle sollte dabei ebenfalls Wert gelegt werden, in etwa, um anhand des Subjektivurteils von Fahrern zu überprüfen, ob plötzliche automatische Lenkeingriffe gegenläufige Lenkbewegungen des Fahrers provozieren. Sollte dies der Fall sein, so kann durch Abstimmung der beiden Schwellwerte  $\hat{R}_{brems}$  und  $\hat{R}_{lenk}$  der Fahrer durch automatische Eingriffe in Motormanagement und Bremsen „schonend“ auf den bevorstehenden massiveren Notfall-Lenkeingriff vorbereitet werden.

Je genauer und vertrauenswürdiger die Messung von  $R$  ist, desto präziser kann der Regeleingriff an der Stabilitätsgrenze erfolgen ( $\hat{R} \approx 1$ ). Bei unendlich schneller Aktuatordynamik und unendlich hoher Kennliniensteigung  $k_R \rightarrow \infty$  ist theoretisch der Wert  $\hat{R} = 1$  möglich. Die bestmögliche Spurhaltung bei idealer Bremsaktuatorik ist dabei limitiert durch die physikalischen Grenzen auf Grund der beschränkten Längs- und Seitenkräfte.

Auf Grund der real vorhandenen Aktuatordynamik, der Stellratenbeschränkung des Aktuators, der nach oben hin begrenzten Kennliniensteigung, sowie der Ungenauigkeit in der Messung von  $R$ , muss ein gewisser Sicherheitsabstand zwischen der Kippgrenze  $R = 1$  und dem Schwellwert  $\hat{R}$ , bzw.  $\hat{R}_{brems}$  und  $\hat{R}_{lenk}$ , gewählt werden. Auf Grund dieser Restriktionen ist es auch nicht möglich, mit Sicherheit ein Umkippen des Fahrzeugs in allen vorstellbaren Fahrsituationen zu verhindern.

### *Einfluss der Aktuatordynamik*

Die Schnelligkeit des Lenkeingriffs, d. h. der maximale Wert für  $k_R$ , hängt wesentlich von der Bandbreite des Lenkaktuators ab. Je schneller der Aktuator ist, desto schneller kann auch der Zusatzlenkwinkel aufgebaut werden, der notwendig ist, um ein Umkippen zu verhindern. Mit einer höheren Aktuatordynamik wächst allerdings auch die Gefahr von Grenzyklen. Hierzu zeigt Bild 5.10 den Verlauf des Wertes der oberen Grenze

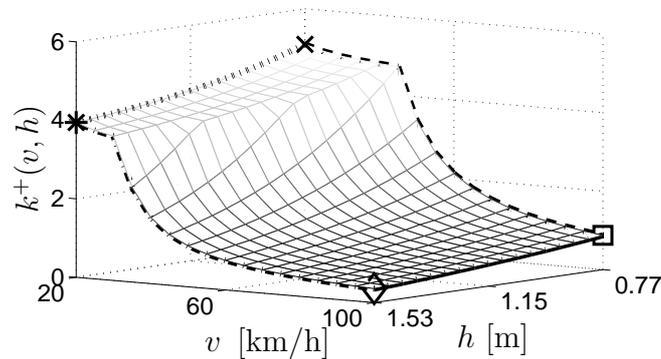


**Bild 5.10:** Einfluss der Aktuator-Bandbreite auf den maximalen Popow-Sektor.

für den maximalen Popow-Sektor  $k_{max}(\omega_a) = \inf_{v,h} k^+(v, h, \omega_a)$  über der natürlichen Frequenz  $f_a = \omega_a/2\pi$  der Aktuatordynamik. Mit zunehmender Aktuatorbandbreite ( $f_a > 1$  Hz), d. h. je schneller der Aktuator ist, desto größer wird die Gefahr nichtlinearer Grenzyklen. Der Verlauf der Kurve in Bild 5.10 resultiert aus dem großen Einfluss des hochfrequenten Teils der Popow-Ortskurve auf die hinreichende Popow-Bedingung.

### *Einfluss des Kraftschlusskoeffizienten zwischen Reifen und Straße*

Bild 5.11 zeigt den Verlauf der oberen Grenze des Popow-Sektors über  $v$  und  $h$  bei



**Bild 5.11:** Obere Grenze des Popow-Sektors für ein äquidistantes Raster des Betriebsbereichs bei reiner Notfall-Lenkregelung und  $\mu = 0.2$ .

niedrigem Kraftschluss ( $\mu = 0.2$ ). Der maximale Popow-Sektor ergibt sich zu  $[0, 0.34)$ .

Die Gefahr von Grenzyklen ist also bei niedrigem Kraftschluss geringer als auf trockener Straße ( $\mu = 1$ ) und somit unkritisch. Durch das Fahrmanöver direkt verursachte Überschlagunfälle sind auf ebener eisglatter Straße nicht zu erwarten. In der Regel wird in diesem Fall das Fahrzeug bei kritischen Fahrmanövern zunächst schleudern bevor es umkippt (bspw. verursacht durch einen Aufprall der Räder auf eine Bordsteinkante oder durch das Abkommen des Fahrzeugs von der Straße). Das Umkippen wird in diesem Fall indirekt durch das Fahrmanöver verursacht.

## 5.6 Simulationsergebnisse

Die Wirkungsweise der nichtlinearen Notfall-Lenk- und Bremsregelung lässt sich sehr gut, anhand von Simulationsergebnissen einer Einfahrt in eine Kurve mit klotoidalem Übergang, einer vom Fahrer vorgegebenen begrenzten Lenkwinkelrampe entsprechend, erläutern. Den in Bild 5.12 gezeigten Simulationsergebnissen liegen die nichtlinearen Zustandsgleichungen des erweiterten Einspurmodells aus Abschnitt A.3 mit numerischen Werten für die Fahrzeugparametern aus Tabelle A.2 und Schwerpunkthöhe  $h = 1.55$  m zu Grunde. Verglichen werden drei Fahrzeuge in einer “open-loop”-Simulation: Das konventionelle ungeregelte Fahrzeug, ein geregeltes Fahrzeug mit statischer Notfall-Lenkregelung, d. h. mit Notfall-Lenkregelung entsprechend Gl. (5.2.1) ( $\hat{R} = 0.9$ ,  $k_R = 0.3$ ), und statischer Bremsregelung entsprechend Gl. (5.4.15) ( $\hat{R} = 0.9$ ,  $p_{ref} = 4$  m/s<sup>2</sup>), und ein geregeltes Fahrzeug mit dynamischer Notfall-Regelung, wobei sich letzteres Fahrzeug von dem mit statischer Notfall-Regelung in der Verwendung von Gl. (5.4.16) anstelle von Gl. (5.4.15) unterscheidet.

Nach etwa 2 s heben die Räder des unregulierten Fahrzeugs auf einer Seite von der Straße ab ( $R \geq 1$ ). Hierbei sei angemerkt, dass  $R$  entsprechend Gl. (A.3.67) berechnet wurde. Das betragsmäßige Überschreiten des Wertes 1 resultiert daraus, dass auf eine, für die Modellierung des Kippvorgangs notwendige, Strukturumschaltung in der Simulation verzichtet wird. Die Notfall-Lenk- und Bremsregelung der geregelten Fahrzeuge wird nach etwa 1.8 s eingeschaltet, sobald für  $R$  ein kritischer Schwellwert von  $\hat{R} = 0.9$  überschritten wird. Durch den schnellen und präzisen Lenkeingriff wird der Fahrzeugüberschlag verhindert. Gleichzeitig wird durch den Bremsingriff die Geschwindigkeit und damit auch die Querbeschleunigung soweit reduziert, dass nach etwa 1 s der Zusatzlenkwinkel wieder zurückgenommen werden kann. Die Darstellung des Spurverlaufs  $(x, y)$  in Bild 5.12 zeigt, dass durch den simultanen Lenk- und Bremsingriff der Spurfehler klein gehalten werden kann.

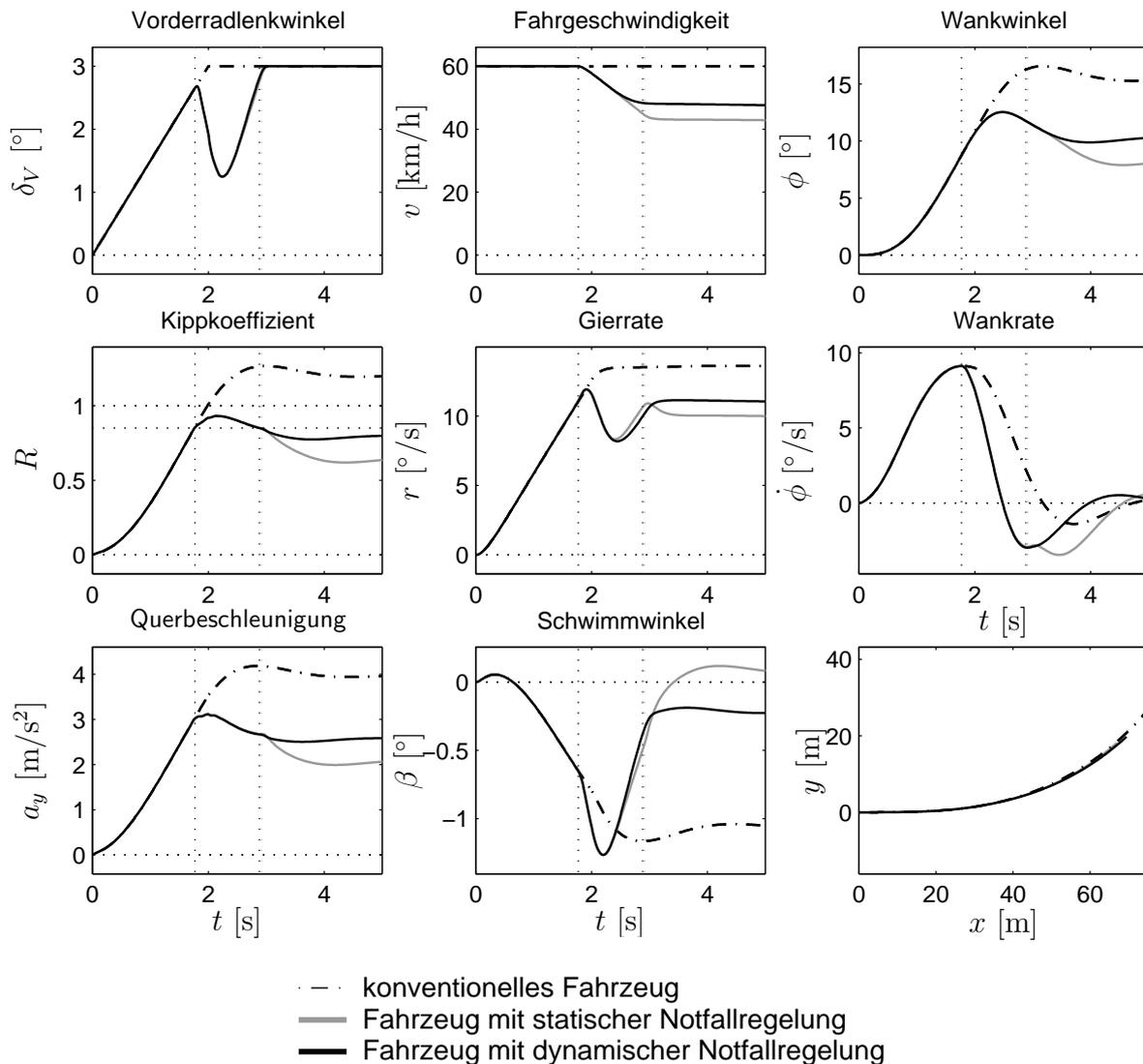


Bild 5.12: Typische Einfahrt in eine Kurve mit klotoidalem Übergang.

## 5.7 Einschätzung

Das in diesem Kapitel vorgestellte nichtlineare Regelgesetz zur direkten Kippvermeidung kann als intelligente Lenkwinkelbegrenzung aufgefasst werden mit der Wirkung, dass das Umkippen auf ebener Straße in einer Vielzahl kritischer Fahrsituationen vermieden werden kann. Die Schlüsselidee dabei ist, dass zunächst der Kippvermeidung Priorität gegenüber der Spurhaltung eingeräumt wird, da ein Fahrzeug, bei dem die Räder einer Seite abgehoben sind, für den normalen Fahrer nicht mehr lenkbar ist. Durch einen effizienten und mit der Lenkregelung abgestimmten automatischen Bremsingriff kann die Abweichung von der vom Fahrer vorgegebenen Spur klein gehalten werden.

Das Ergebnis ist robust bezüglich variierender Fahrgeschwindigkeit, mit dem Beladungszustand variierender Schwerpunkthöhe und mit dem Straßenzustand variierendem Kraftschluss zwischen Reifen und Straße. Verschiedene Einstellparameter der nichtlinearen Lenk- und Bremsregelung ermöglichen die Anpassung des Regelgesetzes an unterschiedliche Fahrzeugtypen, um unterschiedlichen Sicherheitsanforderungen gerecht zu werden.

## 6 Resultierendes Regelungssystem zur robusten Kippvermeidung

Die in den beiden vorangegangenen Kapiteln entwickelten Regelungssysteme zur Wankbedämpfung und Kippvermeidung werden im Folgenden zu einem Gesamtsystem zusammengefügt. Die sich dabei ergebenden Implikationen und Synergieeffekte werden untersucht und hinsichtlich der Gestaltung der Mensch/Maschine-Schnittstelle diskutiert. Die abschließende Analyse des Konzepts wird gestützt durch nichtlineare Stabilitätsuntersuchungen des Lenkregelungssystems sowie durch Simulationsrechnungen mittels eines räumlichen Gesamtfahrzeugsimulationsmodells.

### 6.1 Struktur des Gesamtsystems

Bild 6.1 zeigt die Struktur des resultierenden Gesamtsystems, welches eine Kombination aus den in den Kapiteln 4 und 5 hergeleiteten und in Bild 4.10 und Bild 5.1 dargestellten Regelgesetzen ist. Zurückgeführt werden Wankrate  $\dot{\phi}$  und Kippkoeffizient  $R$  entsprechend der Regelgesetze (4.2.31), (5.2.1), (5.4.15) bzw. (5.4.16). Ein mathematisches Modell des Lenkaktuators, für den das nichtlineare Modell eines positionsgeregelten Gleichstrommotors angenommen wird, ist in Anhang B beschrieben.

### 6.2 Robuste absolute Stabilität des Lenkregelungssystems

Die wesentlichen Nichtlinearitäten im Regelkreis, die Grenzyklen verursachen können, sind die Stellratenbeschränkung des Aktuators [31] und die in Kapitel 5 beschriebene nichtlineare Kennlinie der Notfall-Lenkregelung. Weitere Nichtlinearitäten, die hier nicht behandelt werden sollen, sind beispielsweise die Reifennichtlinearitäten, die Nichtlinearitäten der Fahrzeugfederung und die der Stabilisatoren. Insbesondere bei höheren

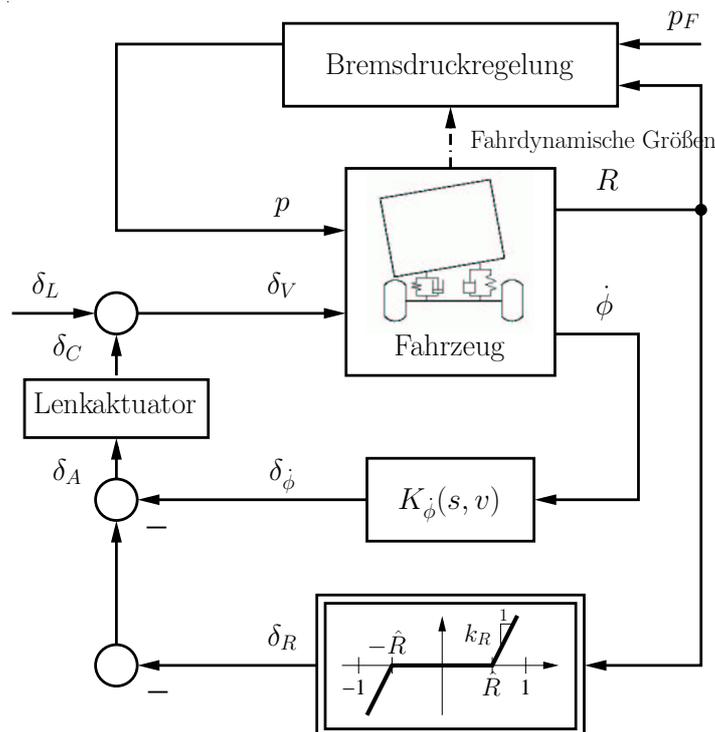


Bild 6.1: Gesamtregelungssystem.

Geschwindigkeiten und hohem Beladungsschwerpunkt ist davon auszugehen, dass letztere Nichtlinearitäten nur geringen Einfluss auf die Kippstabilität haben. In diesem Fall wird die Kippgrenze bereits bei kleinen Schräglaufwinkeln und geringer Wankneigung erreicht.

In den folgenden beiden Abschnitten wird jeweils nur eine Kennliniennichtlinearität betrachtet und auf robuste absolute Stabilität hin überprüft. Für die Untersuchung des Regelkreises auf absolute Stabilität bezüglich mehrerer Nichtlinearitäten kann beispielsweise das Multi-Popow-Kriterium [111] angewandt werden.

### 6.2.1 Robuste absolute Stabilität bei nichtlinearem Lenkregelgesetz

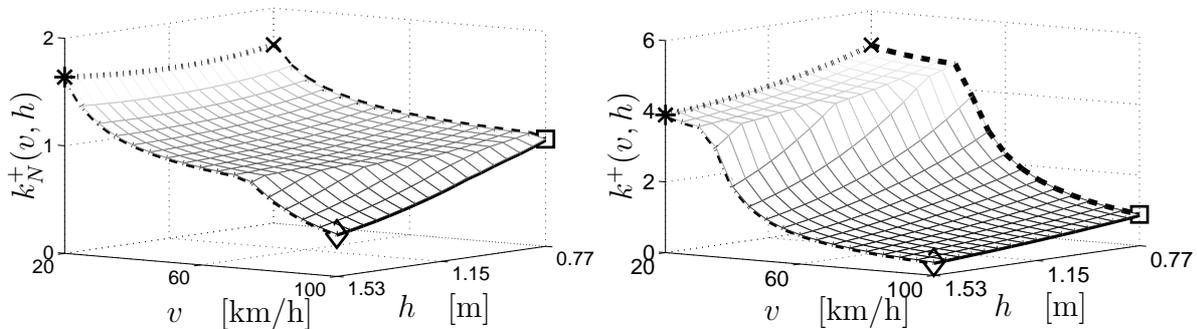
In Abschnitt 5.3 wurde die reine Notfall-Lenkregelung bei linearer Aktuatordynamik auf robuste absolute Stabilität überprüft. Sämtliche dort durchgeführten Untersuchungen lassen sich für die Kombinationen aus Wankbedämpfung und Notfall-Lenkregelung wiederholen. Der lineare Anteil des vor bzw. hinter der Kennliniennichtlinearität in Bild 6.1 aufgeschnittenen Regelkreises ist bei kombinierter Wankbedämpfung und

Notfall-Lenkregelung

$$G(s, \mathbf{q}) := -\frac{R}{\delta_R} = \frac{G_a(s)G_{\delta_V}^R(s, \mathbf{q})}{1 + G_a(s)K_{\dot{\phi}}(\mathbf{k}(\mathbf{q}))G_{\delta_V}^{\dot{\phi}}(s, \mathbf{q})}, \quad (6.2.1)$$

wobei Reglerwerte  $K_{\dot{\phi}}(\mathbf{k}(\mathbf{q}))$  für feste Betriebspunkte entsprechend der Look-up-Table in Bild 4.21 gewählt werden, die Übertragungsfunktionen  $G_{\delta_V}^R(s, \mathbf{q})$  und  $G_{\delta_V}^{\dot{\phi}}(s, \mathbf{q})$  entsprechend Gl. (4.2.1) und Gl. (A.7.92), bzw. die Übertragungsfunktion des Lenkaktuators  $G_a(s)$  entsprechend Gl. (B.0.3) bzw. Gl. (B.0.4). Für den Parametervektor  $\mathbf{q} = [v, h]^T$  gelten die in Abschnitt 4.2.2 getroffenen Annahmen bez. des Betriebsbereichs  $Q$ .

Bild 6.2 zeigt den Verlauf der oberen Grenze von Nyquist- und Popow-Sektor für ein dichtes Raster des Betriebsbereichs  $Q$ . Für alle  $k_R \in [0, k_{max})$  mit  $k_{max} =$



**Bild 6.2:** Obere Grenze des Popow-Sektors bei  $\mu = 1$  (links) und  $\mu = 0.2$  (rechts) für ein äquidistantes Raster des Betriebsbereichs bei kombinierter Notfall-Lenkregelung und Wankstabilisierung.

$\inf_{v,h} k^+(v, h) = 0.394$  ( $\mu = 1$ ) bzw.  $k^+(v, h) = 0.372$  ( $\mu = 0.2$ ) ist der Regelkreis aus Bild 6.1 unter Vernachlässigung der Bremsregelung robust absolut stabil. Die Dämpfung der Wankdynamik wirkt sich positiv auf die absolute Stabilität aus, der maximale Popow-Sektor ist größer als der bezüglich der reinen Notfall-Lenkregelung ( $[0, 0.394)$  gegenüber  $[0, 0.309)$  bei  $\mu = 1$  bzw.  $[0, 0.372)$  gegenüber  $[0, 0.34)$  bei  $\mu = 0.2$ ). Die Kennliniensteigung  $k_R$  kann also in jedem Fall größer gewählt und das Notfallkonzept entsprechend „straffer“ eingestellt werden.

*Anmerkung 6.1.* Will man für diesen Regelkreis die kritische Popow-Gerade mit dem Parameterraumverfahren in die Ebene  $(v, h)$  abbilden, so ist es notwendig das Regelgesetz  $K_{\dot{\phi}}(\mathbf{k}(\mathbf{q}))$  explizit als Funktion der Parameter  $v$  und  $h$  anzugeben, bspw. indem aus den Daten der Look-up-Table in Bild 4.21 optimierungsbasiert die Koeffizienten  $a_{il}$  und  $b_{il}$  der gebrochen rationalen Funktionen der Form

$$\left. \begin{aligned} k_p(v, h) &= \sum_i \sum_l \frac{a_{il}}{v^i h^l} \\ k_d(v, h) &= \sum_i \sum_l \frac{b_{il}}{v^i h^l} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a_{il} &\in \mathbb{R}, \quad i \subseteq [i^-, i^+], \quad i^- \in \mathbb{N}, \quad i^+ \in \mathbb{N} \\ b_{il} &\in \mathbb{R}, \quad l \subseteq [l^-, l^+], \quad l^- \in \mathbb{N}, \quad l^+ \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

berechnet werden. Auf diese Weise erhält man polynomiale Gleichungen für die Punkt- und Tangentenbedingung, wobei die Koeffizienten der Polynome in polynomialer Weise von  $v$  und  $h$  abhängen.

□

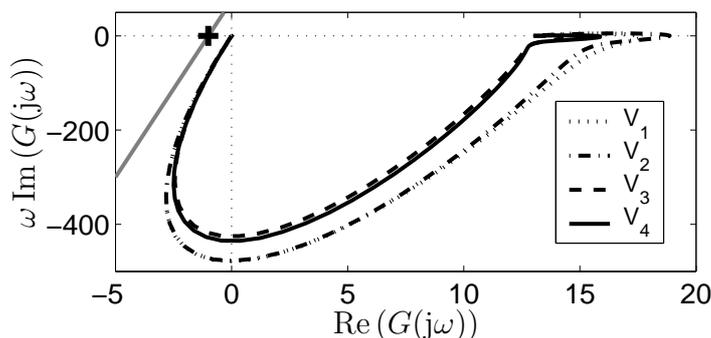
## 6.2.2 Robuste absolute Stabilität bei Stellratenbeschränkung des Lenkaktuators

In Fahrversuchen, die im Rahmen eines Verbundprojekts des DLR mit der Firma BMW Technik GmbH zum Thema Gierstabilisierung durch robuste Lenkregelung durchgeführt wurden, traten in einer frühen Versuchsphase Grenzyklen auf [13]. Eine Analyse ergab, dass die Ursache hierfür die nichtlineare Stellratenbeschränkung des Lenkaktuators bei zu großen Reglerverstärkungen war. Die daraufhin entwickelten Maßnahmen zur Grenzyklenvermeidung für die robuste Lenkregelung und methodischen Neuentwicklungen werden ausführlich in [31] beschrieben. In Anhang B wird das Modell eines Lenkaktuators beschrieben, wobei die Stellratenbeschränkung im Modell als nichtlineare Begrenzung der Spannung interpretiert wird. Bezüglich dieses Modells soll nachfolgend die kontinuierlich betriebene Lenkregelung zur Wankbedämpfung auf robuste absolute Stabilität hin überprüft werden.

Betrachtet wird die reine Wankbedämpfung bei ausgeschalteter Notfall-Lenk- und Bremsregelung mit nichtlinearer Aktuatordynamik entsprechend Bild B.1. Die Übertragungsfunktion des vor und hinter der Sättigungskennlinie aufgeschnittenen Regelkreises lautet

$$G(s, \mathbf{q}) := -\frac{u_1}{u} = \frac{k_{em}k_a(1 + K_{\dot{\phi}}(\mathbf{k}(\mathbf{q}))G_{\delta_V}^{\dot{\phi}}(s, \mathbf{q}))}{k_{em}k_{me} + (J_a s + k_f)(L_a s + R_a)}. \quad (6.2.2)$$

Die Bezeichnungen der physikalischen Größen des Lenkaktuators können Tabelle B.1 entnommen werden.



**Bild 6.3:** Popow-Gerade und Popow-Ortskurven für  $E_1$ - $E_4$  bei Spannungsbegrenzung des Lenkaktuators.

Um robuste absolute Stabilität nachzuweisen, wird wiederum das Popow-Verfahren eingesetzt. In Bild 6.3 in grau dargestellt ist die Popow-Gerade durch den Punkt -1 die

links sämtlicher Popow-Ortskurven für  $E_1 - E_4$  verläuft, so dass Grenzyklen für diese Betriebspunkte ausgeschlossen werden können.

Um diese Aussage auf das Kontinuum des Betriebsbereichs zu übertragen, kann die Bedingung für robuste absolute Stabilität entsprechend Abschnitt 5.3.2 in die Ebene  $(v, h)$  abgebildet werden. Auch besteht die Möglichkeit, dieses Kriterium in den Reglerentwurf in Kapitel 4 einzubinden, indem die Bedingung für nominelle absolute Stabilität für jeden Betriebspunkt  $E_i$  in die Ebene der Reglerparameter  $(k_p, k_d)$  der Wankratenrückführung abgebildet wird. Auf die Abbildung der Popow-Bedingung in den Parameterraum für die Analyse bzw. Synthese wird jedoch verzichtet, da eine weiter gehende Analyse gezeigt hat, dass für die angenommenen Daten für Fahrzeug-, und Aktuatormodell mit entsprechenden Parameterunsicherheiten im Zusammenhang mit den hierfür berechneten Reglerparametern der Wankratenrückführung die Stellratenbeschränkung unkritisch ist.

*Anmerkung 6.2.* Der Nachweis der absoluten Stabilität des Regelkreises gegenüber der Stellratenbeschränkung ist unabhängig von deren Absolutwert und somit auch unabhängig vom Maximalbetrag der Spannung, d. h. es spielt für den Nachweis keine Rolle, ob von einem 12 V oder bspw. einem 42 V-Bordnetz bei der Spannungsversorgung ausgegangen wird. Allerdings kann dann eventuell eine weitere Nichtlinearität, die nichtlineare Strombegrenzung die als Überlastschutz fungiert, Grenzyklen verursachen und muss berücksichtigt werden.

□

### 6.3 Analyse unterschiedlicher Reglerkonfigurationen

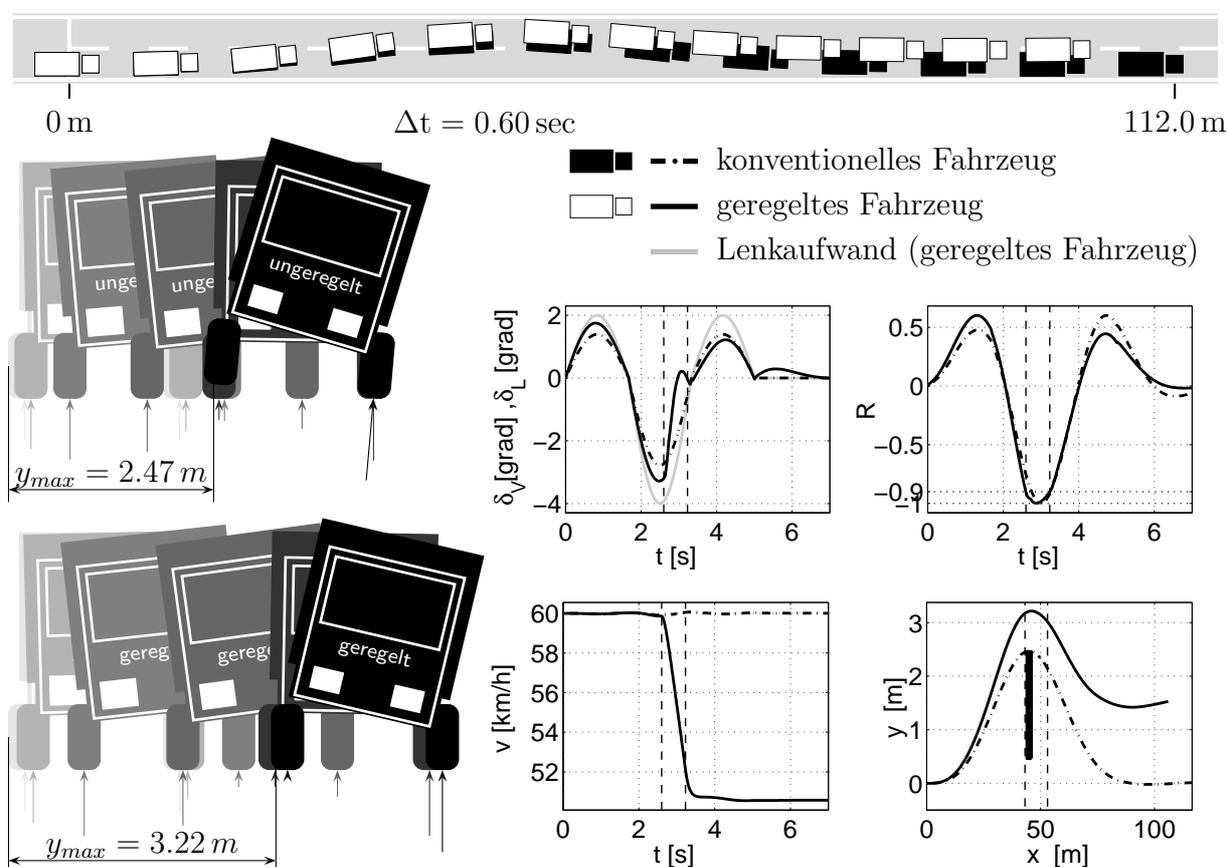
Bereits in den Abschnitten 4.4.4 und 5.6 wurde mit Simulationsrechnungen anhand des nichtlinearen erweiterten Einspurmodells die Funktionsweise der Wankbedämpfung und der Notfall-Lenk- und Bremsregelung erläutert.

Im Folgenden soll das Zusammenwirken der drei Rückführschleifen näher untersucht werden. Dabei wird zunächst für die Untersuchung der prinzipiellen Funktionsweise vom erweiterten Einspurmodell ausgegangen. In einem weiteren Schritt wird der Frage nachgegangen, inwiefern beim erweiterten Einspurmodell vernachlässigte Dynamiken und nichtlineare Effekte die Qualität der Lenkregelung beeinflussen. Hierfür werden "Open-loop"-Simulationen anhand des Fahrdynamikmodells Vedyndyn [119], einem nichtlinearen Zweispurmodell, der Firma Tesis Dynaware durchgeführt. Die diesem räumlichen Fahrzeugmodell zu Grunde liegende Mehrkörperdynamik wird in [108] beschrieben.

### 6.3.1 Simulationen mit erweitertem Einspurmodell

#### *Schneller doppelter Spurwechsel*

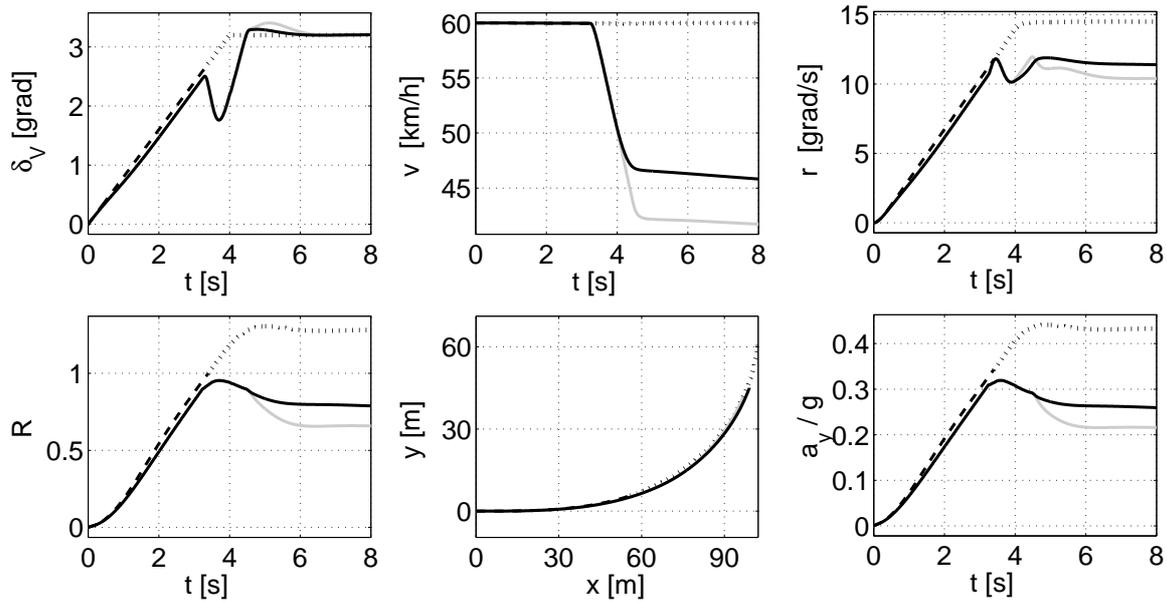
Für die Simulation eines schnellen doppelten Spurwechsels werden die gleichen Annahmen für Betriebspunkt, Lenkradwinkel und Regelgesetz für die Wankbedämpfung getroffen wie in Abschnitt 4.4.4. Zusätzlich zur Wankbedämpfung wird beim geregelten Fahrzeug die nichtlineare Notfall-Lenk- und Bremsregelung mit  $k_R = 0.3$ ,  $\hat{R} = 0.9$  eingeschaltet. Bild 6.4 zeigt das Ergebnis der Simulation. Durch koordinierte Wankbedämpfung und Notfall-Lenk- und Bremsregelung kann der Fahrer bei gleicher Kippgefahr wesentlich weiter um ein Hindernis herum fahren (3.22 m gegenüber 2.47 m beim konventionellen Fahrzeug). Die mit dem Notfall-Eingriff verbundene Kursabweichung kann quasistationär leicht vom Fahrer korrigiert werden.



**Bild 6.4:** Schnelles Ausweichmanöver bei  $v = 60 \text{ km/h}$  und  $h = 1.53 \text{ m}$ .

#### *Begrenzte Lenkwinkelrampe*

Die in Bild 6.5 dargestellten Simulationsergebnisse einer Einfahrt in eine Kurve wurden entsprechend Abschnitt 5.6 durchgeführt, jedoch mit zusätzlich eingeschalteter Wankbedämpfung. Die Unterschiede zu den in Bild 5.12 gezeigten Ergebnissen liegen darin, dass der für die Kippvermeidung erforderliche Zusatzlenkwinkel bei zusätzlicher Wankbedämpfung deutlich geringer ist als der bei reiner Notfall-Lenk- und Bremsregelung.



**Bild 6.5:** Typische Einfahrt in eine Kurve mit klotoidalem Übergang.

Auch lässt der Verlauf des Gierratensignals auf eine geringfügigere Spurabweichung bzw. geringere Irritation des Fahrers schließen.

### 6.3.2 Simulationen mit nichtlinearem Zweispurmodell

Die Auslegung des Systems zur Kippvermeidung, d. h. sämtliche bisher durchgeführten Synthese- und Analyseschritte, wurde anhand der Daten eines Lkw aus [80] durchgeführt. Da ein validiertes Zweispurmodell dieses Fahrzeugs nicht zur Verfügung stand, wurden die nichtlinearen Simulationsrechnungen mit Vedyne anhand der Daten eines BMW E30 mit zusätzlicher Dachlast vorgenommen. Die für den Lkw ermittelten Reglerkoeffizienten wurden hierbei beibehalten. Der Übergang auf ein anderes Fahrzeug kann somit auch als Robustheit des Regelungskonzepts gegenüber Modellierungsfehlern interpretiert werden. Aus diesem Grund sind die nachfolgend gezeigten Ergebnisse nicht optimiert und es ist möglich, dass mit einer Anpassung der Reglerparameter an die Daten des E30 eine u. U. noch weitaus bessere Performance erzielbar ist.

Untersucht werden das konventionelle unregelmäßige Fahrzeug im Vergleich zu drei verschiedenen Reglerversionen, der reinen Wankbedämpfung, der reinen Notfall-Lenkregelung und der kombinierten Wankbedämpfung und Notfall-Lenkregelung. Sämtliche in diesem Abschnitt gezeigten Simulationen wurden bei einer konstanten Geschwindigkeit von  $v=80\text{ km/h}$ , d. h. bei ausgeschalteter Notfall-Bremsregelung, und trockener Straße durchgeführt. Um das Fahrzeug „kippfähig“ zu machen, wurde hierbei eine Dachlast von 200 kg mit Schwerpunkt 2 m über der Fahrbahn angenommen. Das Kippkoeffizientensignal wurde mittels den in der Simulation zur Verfügung stehenden dynamischen Radlasten bestimmt.

*Schneller doppelter Spurwechsel*

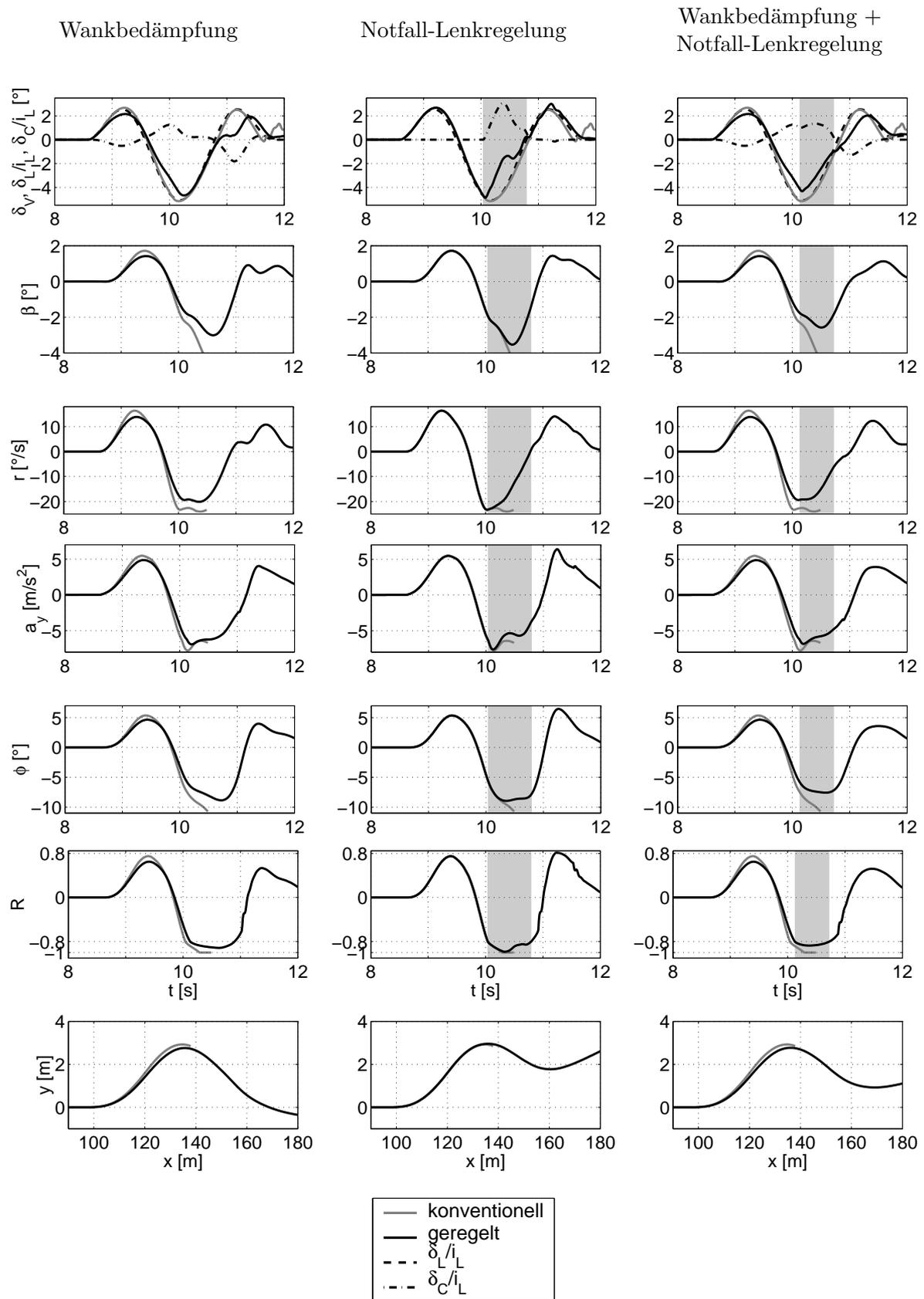
Bild 6.6 zeigt die Simulationsergebnisse eines schnellen doppelten Spurwechsels bei einer konstanten Fahrgeschwindigkeit von 80 km/h, in etwa einem plötzlichen heftigen Ausweichmanöver bei Gegenverkehr entsprechend. In der linken, mittleren bzw. rechten Spalte sind die Zeitschriebe für drei Reglerversionen jeweils im Vergleich zum konventionellen Fahrzeug dargestellt. Die Zeitschriebe für das konventionelle Fahrzeug enden nach etwa 10.5s mit dem Umkippen des Fahrzeugs ( $R = -1$ ). Bei den drei geregelten Fahrzeugen kann das Umkippen jeweils vermieden werden. In den Diagrammen in Bild 6.6 ist der Zeithorizont in dem die Notfall-Lenkregelung aktiv ist grau hinterlegt.

Bei keinem der vier Fahrzeuge treten besonders große Schwimmwinkel bzw. Schräglaufwinkel auf und die maximale Querbeschleunigung beträgt  $6 \text{ m/s}^2$ . Aus dem Verlauf der Zeitantworten für das konventionelle Fahrzeug kann geschlossen werden, dass der Verlust der Fahrstabilität durch Umkippen sehr plötzlich und ohne vorhergehendes Schleudern eintritt.

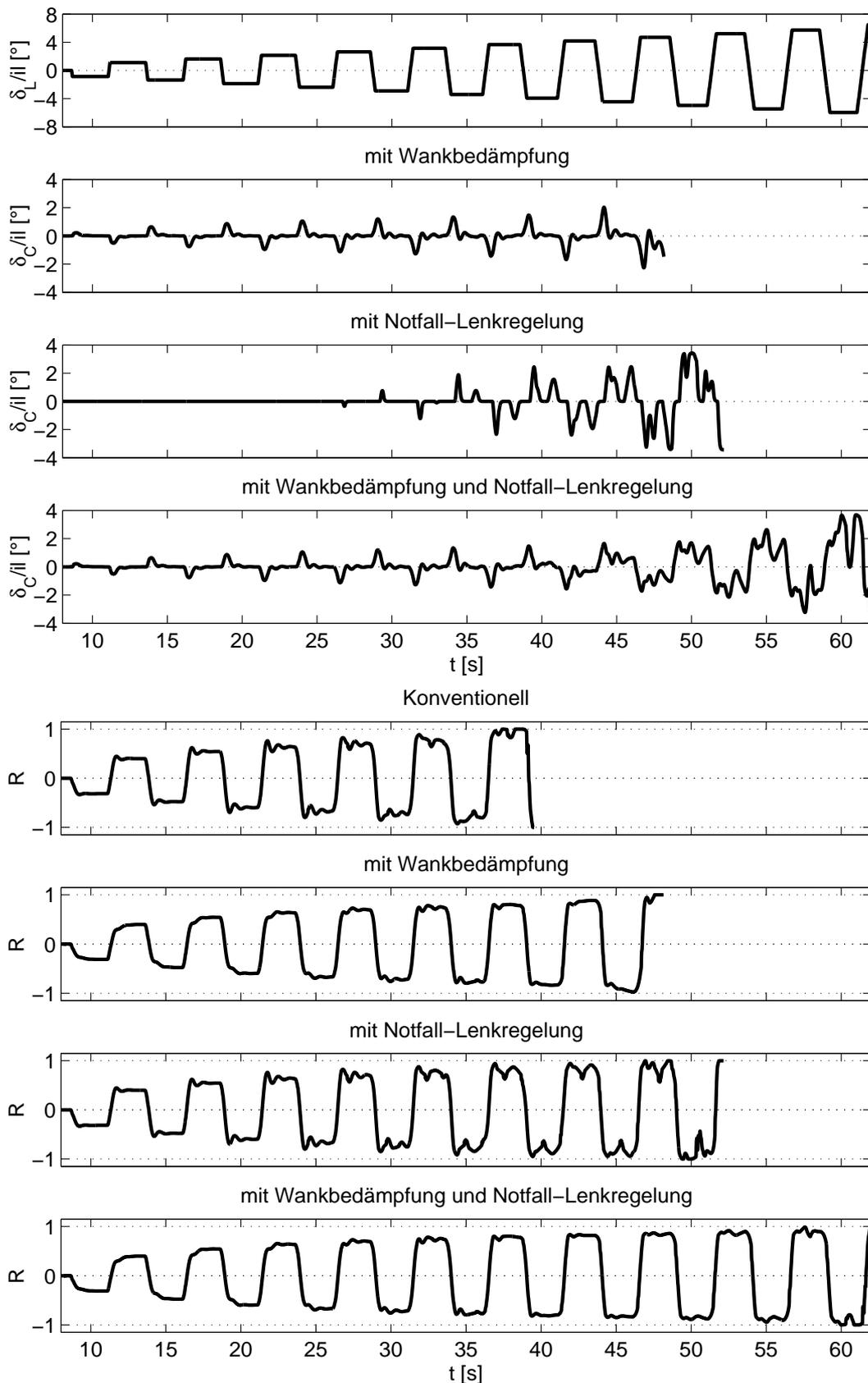
*Bidirektionale Lenkradwinkeleingabe mit zunehmender Amplitude*

Um das Lenkverhalten des Fahrzeugs im fahrdynamischen Grenzbereich zu untersuchen, werden für die Simulationen als Lenkradwinkeleingaben bidirektionale, sprungförmige Signale mit stetig zunehmender Amplitude verwendet [124]. Die Lenkradwinkelgeschwindigkeit wird auf  $720 \text{ }^\circ/\text{s}$  beschränkt. Für die vier Fahrzeuge wird die Amplitude der Lenkradwinkeleingabe so lange erhöht, bis das jeweilige Fahrzeug die Kippgrenze erreicht und umkippt.

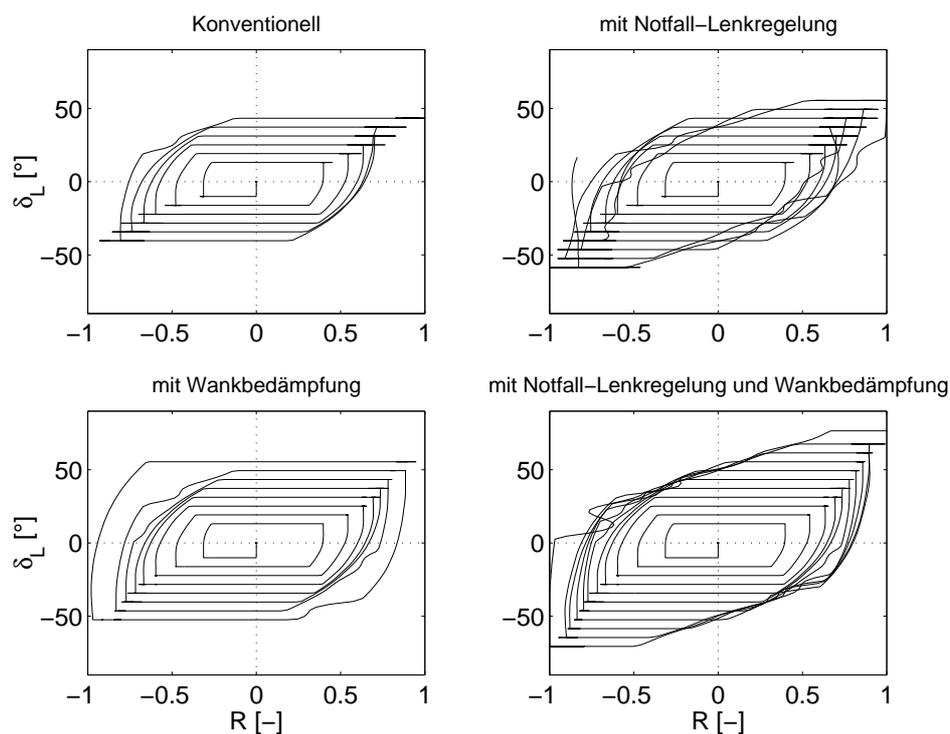
Bild 6.7 zeigt hierzu den zeitlichen Verlauf von bezogenem Lenkradwinkel  $\delta_L/i_L$ , bezogenem Zusatzlenkwinkel  $\delta_C/i_L$  und Kippkoeffizientsignal  $R$  für die verschiedenen Reglerversionen im Vergleich zum konventionellen Fahrzeug. In Bild 6.8 und 6.9 sind Lenkradwinkel und Wankrate als Funktionen des Kippkoeffizienten in Phasendiagrammen dargestellt. Die Einzelsysteme Wankbedämpfung und Notfall-Lenkregelung bewirken bereits eine deutliche Verbesserung der Kippstabilität. Darüber hinaus zeigt sich durch die Kombination der beiden Systeme deutlich der zusätzliche Synergieeffekt.



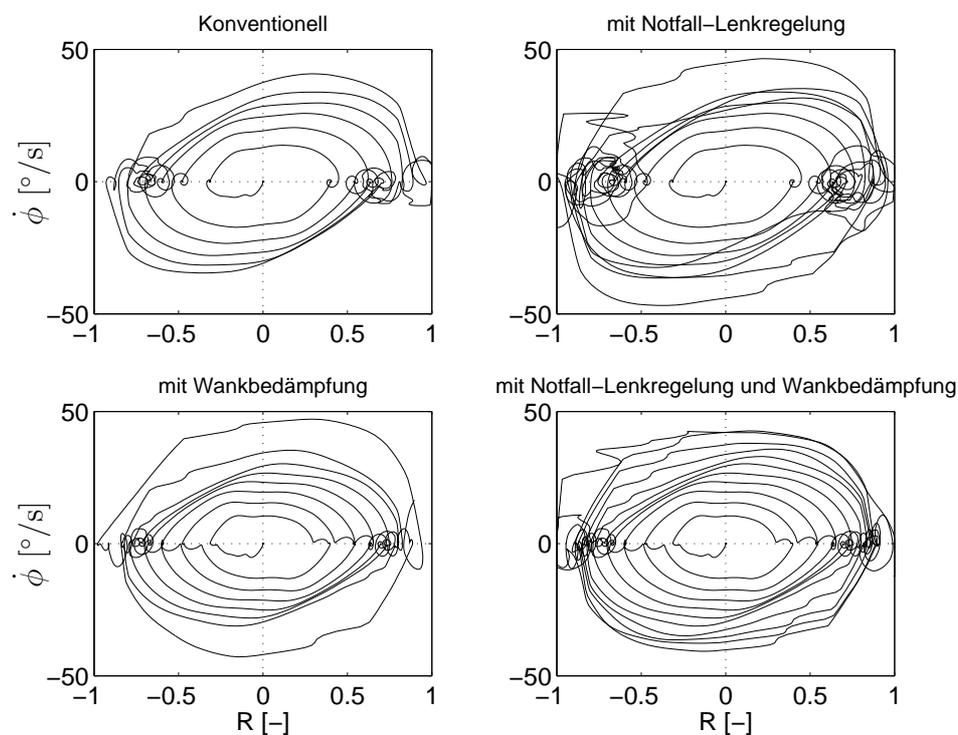
**Bild 6.6:** Schneller doppelter Spurwechsel: Vergleich konventionelles Fahrzeug.



**Bild 6.7:** Simulationsergebnisse bei bidirektionaler Lenkwinkel­eingabe bei  $v = 80$  km/h und  $\mu = 1$  für unterschiedliche Regler­versionen.



**Bild 6.8:** Lenkradwinkel als Funktion des Kippkoeffizienten für unterschiedliche Reglerversionen.



**Bild 6.9:** Wankrate als Funktion des Kippkoeffizienten für unterschiedliche Reglerversionen.

## 6.4 Zusammenwirken der einzelnen Regelungssysteme und Mensch/Maschine-Schnittstelle

Die Akzeptanz von Fahrerunterstützungssystemen wird bestimmt sowohl durch die technische Funktionalität des einzelnen Systems als auch durch die subjektive Beurteilung des Fahrers. Der Fahrer darf in Fahrsituationen, bei denen das Fahrerunterstützungssystem eingreift, nicht von seiner eigentlichen Fahraufgabe, der Spurführung, abgelenkt werden (siehe auch [120]). Die zusätzlich dem Fahrer durch das System zur Verfügung gestellten Informationen, bspw. durch haptische oder visuelle Rückkopplung, müssen so abgestimmt werden, dass sie der Verarbeitungskapazität des Fahrers entsprechen und diesen nicht überfordern. In diesem Zusammenhang müssen elektronische Systeme für Kommunikation und Information (z. B. Infotainment über Telematiksysteme, Navigationssysteme) sowie Fahrerassistenz im Fahrzeug aufeinander abgestimmt werden. In ihrer Gesamtheit sollten diese Systeme den Fahrer situationsgerecht unterstützen, nicht überfordern und kritische Situationen teilautomatisch meistern.

Zukünftige, im Fahrzeugbau momentan in der Entwicklung befindliche, X-by-Wire-Systeme (Brake-by-Wire, Steer-by-Wire, etc.) werden sich voraussichtlich langfristig auf dem Markt durchsetzen. In diesem Zusammenhang birgt das Ersetzen von konventionellen, bspw. rein mechanischen oder hydraulischen, Komponenten durch elektromechanische Komponenten ein großes Potenzial für neue Konzepte der Gestaltung der Mensch/Maschine-Schnittstelle in vielerlei Hinsicht. Beispielsweise können hiermit neue Konzepte für die Innenraumgestaltung realisiert werden, da der Anbringungsort für einzelne Komponenten deutlich flexibler gestaltet werden kann. Auch ergeben sich Möglichkeiten, dem Fahrer zusätzliche (z. B. haptische) Informationen über den Fahrzustand zugänglich zu machen, und ihn dadurch insbesondere in kritischen Situationen intuitiv anzuleiten oder auch zu warnen. Zudem ist es vorstellbar, das Fahrverhalten gezielt über die Variation regelungstechnischer Algorithmen, bspw. im Rahmen der Abstimmung von Fahrwerk, Bremsen und Lenkung, für den Fahrer veränderlich zu gestalten. Damit wird es möglich dem Fahrer zu erlauben, u. U. auch während der Fahrt, zwischen unterschiedlichen Einstellungen des gewünschten Fahrverhaltens (z. B. normal, sportlich) zu wählen.

Im Zusammenhang mit dem in dieser Arbeit entwickelten Regelungssystem ist es wichtig, die Aufgabenverteilung zwischen Mensch und aktiver Lenk- und Bremsunterstützung zu beleuchten. Die in Kapitel 4 eingeführte kontinuierlich betriebene Zusatzlenkung zur Wankbedämpfung ist nur bei signifikanter Anregung der Wankdynamik wirksam. Bei entsprechend hochdynamischen Fahrmanövern oder auch Störgrößeneinflüssen bewirkt der Regeleingriff frequenzselektiv eine Bedämpfung der Wankdynamik. Diese Aussage lässt sich sehr anschaulich anhand von Bild 4.26 erläutern: Im niederfrequenten stationären bzw. quasi-stationären Bereich und im hochfrequenten Bereich wirkt die Regelung nicht bzw. nur sehr schwach. In einem mittleren Frequenzbereich in etwa zwischen 0.2 und 2 Hz, d. h. insbesondere im Bereich der Wankeigenfrequenz des Fahrzeugaufbaus, entfaltet sich die Wirkung der Wankbedämpfung. Auf Grund dieser Bandpasscharakteristik der Wankbedämpfung ist davon auszugehen, dass für den Fah-

rer der Regeleingriff nicht direkt spürbar ist (der stationäre Fehler ist gleich Null). Er erfährt dagegen ein verbessertes fahrdynamisches Verhalten. Der Lenkeingriff ist mit einem erhöhten Lenkaufwand für den Fahrer verbunden. Dieser Effekt lässt sich jedoch bspw. über eine Vorhaltelenkung kompensieren. In kippkritischen Situationen, wenn zusätzlich die Notfall-Lenk- und Bremsregelung aktiviert wird, wird für den Fahrer deutlich spürbar in die Fahrdynamik eingegriffen. Dies wurde detailliert in Kapitel 5 erläutert. Die Gestaltung des Notfalleingriffs, d. h. die Wahl der Auslegungsparameter des Notfallsystems entsprechend Abschnitt 5.5, erfordert, dass neben den bereits ausführlich beschriebenen technischen Kriterien die subjektive Beurteilung durch Testfahrer im Fahrversuch Berücksichtigung findet. Eine Möglichkeit besteht darin, den automatischen Eingriff in Lenkung und Bremsen zeitlich versetzt durchzuführen. Der Fahrer kann bspw. durch saches Anbremsen auf einen bevorstehenden massiveren Lenk- und Bremseneingriff vorbereitet werden (siehe auch Abschnitt 5.5). Unter Umständen ist es sinnvoll, zusätzlich bei Kippgefahr den Fahrer durch ein optisches oder akustisches Signal zu warnen. Mit zukünftigen X-by-Wire-Systemen ist darüber hinaus die Möglichkeit gegeben, dem Fahrer ein vom Fahrzustand abhängiges haptisches Feedback über ein aktives Gas-/Bremspedal oder ein kraftreflektierendes Lenkrad einzuspielen.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Zukünftige Fahrerunterstützungssysteme haben ein großes Potenzial für die Verbesserung der Sicherheit im Straßenverkehr. Fahrsicherheitssysteme zur Stabilisierung des dynamischen Fahrzustands, basierend auf aktiven Stelleingriffen in Bremsen, Antriebstrang und Fahrwerk sind bereits Stand der Technik. Diese Systeme stellen, wie bspw. die breite Einführung des ESP gezeigt hat, einen immer größer werdenden Wettbewerbsfaktor dar. Im Pkw-Bereich werden in naher Zukunft neuartige Lenksysteme in den Markt eingeführt werden, die auf dem Prinzip der Überlagerungslenkung oder auch der vollständigen mechanischen Entkopplung von Lenkrad und Lenkung (Steer-by-Wire) basieren. Diese Systeme ermöglichen neben sicherheitstechnischen, funktionellen und operationellen Vorteilen eine Stabilisierung des Fahrzustands und eine Verbesserung des Fahrzeug-Handlings durch automatisch vorgenommene Lenkkorrekturen.

In der vorliegenden Arbeit wurde ein neues Fahrdynamik-Regelungskonzept vorgestellt, das von der Möglichkeit des aktiven Lenkeingriffs Gebrauch macht, um die Kippgefahr von Fahrzeugen zu reduzieren. Das Regelungskonzept ist insbesondere geeignet für Straßenfahrzeuge mit einem ungünstig hohen Verhältnis zwischen Schwerpunkthöhe und Spurweite. Es konnte gezeigt werden, dass durch kontinuierliche Rückführung der Wankrate auf die Vorderradlenkung die Wankdynamik bedämpft und durch die damit verbundene Reduktion des Überschwingens des Fahrzeugaufbaus bei transienten Spurwechsel- und Hindernisausweichmanövern auch wesentlich die Kippgefahr reduziert werden kann. Befindet sich das Fahrzeug nahe der Kippgrenze, wird zusätzlich durch Rückführung des Kippkoeffizienten auf die Vorderradlenkung, durch eine intelligente Fahrzustandsbegrenzung, das Umkippen des Fahrzeugs verhindert. Insbesondere in quasistationären Fahrsituationen, bspw. der Einfahrt eines Lkw in eine Autobahnausfahrt mit überhöhter Geschwindigkeit, kann hiermit dem Umkippen von vornherein entgegengewirkt werden. Durch die Überlagerung der Lenkeingriffe zur Wankbedämpfung und Kippvermeidung konnte analytisch und anhand nichtlinearer Simulationen mit einem räumlichen Gesamtfahrzeugmodell ein deutlicher Synergieeffekt festgestellt werden. Um die Abweichung von der vom Fahrer gewünschten Spur möglichst klein zu halten, wurde der Lenkeingriff mit einem automatischen Bremsingriff koordiniert. Dass dies in effizienter Weise möglich ist, wurde anhand prinzipieller Überlegungen gezeigt. Eine genaue Abstimmung muss jedoch anhand weitergehender simulativer Untersuchungen mit entsprechend detaillierten längsdynamischen Modellen, Modellen der Bremsaktuatorik und des ESP bzw. anhand von Fahrversuchen vorgenommen werden.

Eine präzise Ermittlung des Kippkoeffizienten während der Fahrt ist Voraussetzung für ein gutes Funktionieren des Notfalleingriffs über Lenkung und Bremsen. Noch existieren keine marktfähigen Systeme, die die Messung des Kippkoeffizienten ermöglichen. Auf Grund des technischen Fortschritts im Bereich der Fahrwerkregelsysteme und der zunehmenden Verbreitung der Luftfederung besteht die Hoffnung, dass in naher Zukunft verlässliche Systeme für die Bestimmung der dynamischen Radlasten auf dem Markt verfügbar sein werden. Für das der Kippvermeidung zu Grunde liegende in dieser Arbeit beschriebene Verfahren wurde ein Patent erteilt [95].

Der regelungstechnische Entwurf wurde anhand eines neu entwickelten parametrischen Fahrdynamikmodells und dem Modell eines Lenkaktuators durchgeführt. Das Fahrdynamikmodell, das in der Arbeit als Einspurmodell mit Wankerweiterung bezeichnet wird, beschreibt den dynamischen Zusammenhang zwischen Quer-, Gier- und Wankdynamik und ist insbesondere geeignet, um das Lenkverhalten von Fahrzeugen mit hohem Schwerpunkt darzustellen. Die Reglersynthese in den Kapiteln 4, 5 und 6 erfolgte anhand des um die Geradeausfahrt linearisierten Einspurmodells mit Wankerweiterung. Als parametrische Unsicherheiten wurden hierbei die Fahrgeschwindigkeit und die Schwerpunkthöhe sowie für die Analyse der Kraftschluss zwischen Reifen und Straße angenommen. Für den Lenkaktuator wurde das lineare Modell eines Elektromotors mit unterlagerter Positionsregelung verwendet und um eine nichtlineare Spannungsbegrenzung erweitert. Hierdurch gelang es, ein physikalisch motiviertes Modell für die Stellratenbeschränkung des Lenkaktuators zu erstellen.

Durch den systematischen Einsatz des Parameterraumverfahrens, einem Verfahren der parametrischen robusten Regelungstechnik, konnte beim Entwurf der Lenkregelung eine Vielzahl regelungstechnischer Spezifikationen berücksichtigt werden. Diese beziehen sich auf die Stabilität, Regelgüte und Robustheit dieser beiden Eigenschaften gegenüber variierenden Beladungs- und Straßenzuständen sowie auf die im parametrischen Entwurfsmodell vernachlässigte bzw. nichtmodellierete Dynamik.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Erweiterung des Parameterraumverfahrens auf frequenzabhängige Betragskriterien vorgenommen. Hierdurch wird es möglich, "Loop-shaping"-Kriterien im Frequenzbereich, die weite Verbreitung durch den  $H_\infty$ -Reglerentwurf gefunden haben, in Entwurf und Analyse robuster Regelungssysteme zu berücksichtigen. Neben der exakten, nicht-konservativen Behandlung der Eigenwert- und Frequenzbereichsspezifikationen für parametrische Unsicherheiten können damit auch unstrukturierte Unsicherheiten, bspw. auf Grund nichtmodellierter Dynamik, behandelt werden. In diesem Zusammenhang wurde in der vorliegenden Arbeit der Begriff der  $\mathcal{B}$ -Stabilität [94] für frequenzabhängige Betragskriterien eingeführt. Damit stehen dem Parameterraumverfahren zusammen mit der  $\Gamma$ -Stabilität [1, 4] für Eigenwertspezifikationen und  $\Theta$ -Stabilität [32, 33] für Ortskurven-Spezifikationen eine Vielzahl regelungstechnischer Entwurfsanforderungen zu Verfügung, die einen systematischen Entwurf und die Analyse parametrisch robuster Regelungssysteme ermöglichen. Die Anwendung des Parameterraumverfahrens beim Entwurf des Lenkregelungssystems ermöglicht eine optimale Ausnutzung einfacher Reglerstrukturen. Die Spezifikationen werden als Randbedingungen in den Parameterraum abgebildet. Die eindeutige Zuordnung der Kurven im Parameterraum zu den Eigenwert- bzw. Frequenzbereichs-Spezifikationen

ermöglichen einen sehr hohen Grad an Transparenz. Die erhaltenen Regelgesetze bzw. Reglerparameter sind dadurch leicht interpretierbar. Auch wird hierdurch eine iterative Vorgehensweise beim Reglerentwurf unterstützt, bspw. indem schrittweise die Spezifikationen modifiziert („verschärft“) werden. Das Regelungssystem kommt mit der Rückführung von Kippkoeffizient und Wankrate sowie einer Verstärkungsanpassung der Reglerkoeffizienten an die Fahrgeschwindigkeit aus. Die einfache Reglerstruktur sowie der transparente Reglerentwurf ist insbesondere für eine schnelle Applizierbarkeit auf unterschiedliche Fahrzeugtypen wichtig. Auch bei anderen Anwendungen, der Gierstabilisierung von Fahrzeugen in [35, 34, 15, 16, 61] und der Flugregelung [94, 25, 26] hat sich dieses Verfahren bereits bewährt. Um die teilweise mit sehr aufwändigen symbolischen Berechnungen verbundene Realisierung dieses Verfahrens verfügbar zu machen, ist die Implementierung in die Matlab-Toolbox PARADISE [116, 89, 88] geplant. Dieses beim DLR entwickelte Werkzeug für den Entwurf und die Analyse robuster Regelungssysteme stellt in der aktuellen Version das Parameterraumverfahren für Eigenwertspezifikationen bereit. In einer interaktiven und grafisch orientierten Entwurfsumgebung wird der Anwender während des Entwurfsprozesses begleitet. Die symbolischen und numerischen Berechnungen laufen hierbei modularisiert im Hintergrund ab. In der vorliegenden Arbeit wurden die für die Ermittlung der Grenzen notwendigen Berechnungen mit Mathematica [125] bzw. Matlab [84] durchgeführt.

Die wesentlichen Nichtlinearitäten, die u. U. bei der praktischen Implementierung der Kippvermeidung eine Rolle spielen können, sind die Stellratenbeschränkung des Lenkaktuators sowie das nichtlineare Regelgesetz für die Notfall-Lenkregelung. Beide Nichtlinearitäten wurden im regelungstechnischen Entwurf bzw. bei der Analyse explizit berücksichtigt. Anhand des Popow-Verfahrens konnte nachgewiesen werden, dass nichtlineare Grenzzyklen (Dauerschwingungen) für das resultierende Regelungssystem in robuster Weise ausgeschlossen werden können.

Die aktuellste Entwicklung in der Fahrzeugindustrie geht dahin, die unterschiedlichen Fahrdynamik- bzw. Fahrwerkregelungssysteme aufeinander abzustimmen und in ein übergeordnetes Konzept zu integrieren. Hierdurch soll verhindert werden, dass die einzelnen Systeme gegeneinander arbeiten. Außerdem sollen zusätzliche Synergieeffekte nutzbar gemacht werden. Als Erweiterungsmöglichkeiten für das hier vorgestellte Fahrdynamik-Regelungskonzept kommen u. a. die Kombination mit Gierstabilisierung durch robuste Lenkregelung, mit ESP und mit aktiven Fahrwerkregelungssystemen in Frage. Der regelungstechnische Entwurf der Lenkregelung erfolgte unter Voraussetzung einer mechanischen Überlagerungslenkung, die Ergebnisse können aber auch auf Steer-by-Wire übertragen werden. Um das konventionelle Lenkverhalten abzubilden, erfordert eine Steer-by-Wire-Lenkung zunächst bspw. eine bidirektionale Positionsrückführung zum Vorderadlenkwinkelaktuator einerseits und zum Aktuator des kraftreflektierenden Lenkrads andererseits [48, 36, 97, 98, 99]. Eine Realisierung der Fahrdynamikregelung mit Steer-by-Wire wiederum muss unter Berücksichtigung der Kopplung zwischen Fahrdynamikregelung und bidirektionaler Positionsregelung erfolgen. Weitere Aspekte ergeben sich darüber hinaus aus der Anpassung der Kippvermeidung auf automatisch spurgeführte Fahrzeuge [104].

Bei Fahrsicherheitssystemen sollte stets gewährleistet werden, dass die Verantwortung

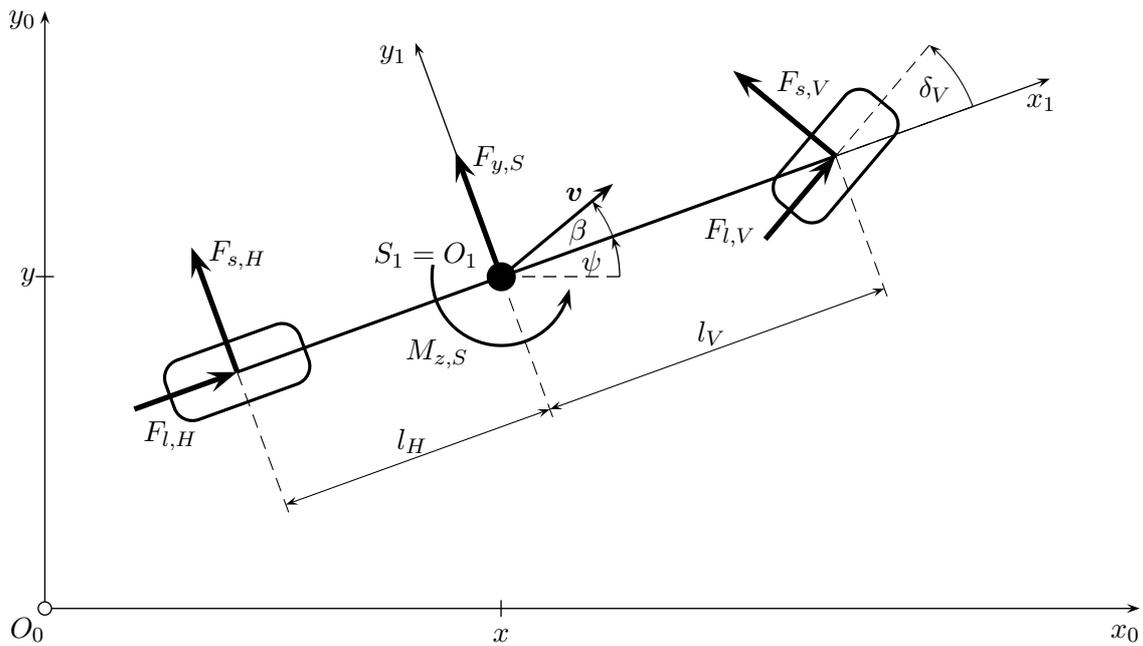
für die „Führungsfunktion“ beim Fahrer verbleibt. Bei dem hier vorgestellten Fahrdynamikregelungssystem wurde diese Vorstellung durch die regelungstechnische Gestaltung der Mensch/Maschine-Schnittstelle berücksichtigt.

# A Ein Fahrdynamikmodell für die Beschreibung der Quer-, Gier- und Wankdynamik von Fahrzeugen: Das Einspurmodell mit Wankerweiterung

## A.1 Modellannahmen

Für prinzipielle Untersuchungen des fahrdynamischen Lenk- und Stabilitätsverhaltens hat sich bei Personenkraftwagen das von Riekert und Schunck [107] entwickelte *Einspurmodell* bewährt. Bei diesem ebenen Modell liegt der Fahrzeugschwerpunkt in der Fahrbahnebene und Vorder- und Hinterräder werden jeweils zu einem Rad in der Fahrzeugmitte vereinigt. Hub-, Nick- und Wankbewegung des Fahrzeugaufbaus werden vernachlässigt.

Bei Fahrzeugen mit erhöhtem Schwerpunkt ist es notwendig, für fahrdynamische Untersuchungen zusätzlich den Einfluss der Wankbewegung des Aufbaus gegenüber dem Fahrwerk zu berücksichtigen. Das in diesem Sinne erweiterte Einspurmodell wird im Folgenden als *Einspurmodell mit Wankerweiterung* bezeichnet und dient als Grundlage für den Entwurf des Fahrdynamikregelungssystems, der in den Kapiteln 4, 5 und 6 vorgenommen wird. Das Fahrzeug wird durch zwei starre Körper, das Fahrwerk (Körper 1 mit ungedeckelter Masse  $m_1$ ) und den Fahrzeugaufbau (Körper 2 mit gedeckelter Masse  $m_2$ ), als Mehrkörpersystem modelliert. Für das in Bild A.1 dargestellte Fahrwerk sollen die gleichen Annahmen wie für das Einspurmodell gelten. In Bild A.1 wird mit  $l_V$  bzw.  $l_H$  der Abstand zwischen Schwerpunkt  $S_1$  und Vorder- bzw. Hinterachse bezeichnet, ihre Summe  $l = l_V + l_H$  ist der Radstand.  $\delta_V$  ist der Vorderradlenkwinkel und  $\mathbf{v}$  der Geschwindigkeitsvektor. Der Winkel  $\beta$  den  $\mathbf{v}$  mit der Fahrzeuglängsrichtung einschließt wird als *Schwimmwinkel* bezeichnet. Das fahrwerksfeste Koordinatensystem  $\mathfrak{K}_1$  mit  $(x_1, y_1, z_1)$  hat seinen Ursprung  $O_1$  im Fahrzeugschwerpunkt  $S_1$  und ist gegenüber dem Inertialsystem  $\mathfrak{K}_0$  mit  $(x_0, y_0, z_0)$  und Ursprung  $O_0$  um den *Gierwinkel*  $\psi$  gedreht. Die Drehgeschwindigkeit um die Hochachse ( $z_0$ - bzw.  $z_1$ -Achse) wird als *Gierrate*  $r = \dot{\psi}$  bezeichnet. Im Fahrzeug werden fahrdynamische Größen bspw. die Geschwindigkeit in Längsrichtung  $v_x$ , die Gierrate  $r$  und die Wankrate  $\dot{\phi}$  über Drehzahlsensoren bzw. Drehratensensoren gemessen. Diese Messungen erfolgen bzgl. des fahrzeugfesten Koordina-



**Bild A.1:** Modellannahmen für das Fahrwerk.

tensystems  $\mathfrak{K}_1$ , weswegen nachfolgend alle Gleichungen die sich auf die Fahrdynamik beziehen bzgl.  $\mathfrak{K}_1$  angeschrieben werden<sup>1</sup>. Die Position des Fahrzeugs wird bestimmt durch das Triple  $(x, y, \psi)$  und wird vorzugsweise bzgl. des Inertialsystems  $\mathfrak{K}_0$  angegeben.

Es wird angenommen, dass der Aufbau gegenüber dem Fahrwerk lediglich einen Freiheitsgrad besitzt, d. h. er kann eine Drehbewegung um die Rollachse des Fahrzeugs durchführen. Der Einfluss der Hub- und Nickdynamik wird vernachlässigt. Die Wankbewegung des Aufbaus vorne bzw. hinten erfolgt um das jeweilige Momentanzentrum (Rollzentrum) vorne bzw. hinten. Die geometrische Lage der beiden Momentanzentren ergibt sich aus der Kinematik der Radaufhängung. Der Aufbau dreht sich entsprechend um eine Achse die durch beide Momentanzentren verläuft und die als Momentanachse oder auch Rollachse bezeichnet wird. Die Lage der Momentanzentren und damit der Rollachse ändert sich je nach Radaufhängung mit der Aufbauneigung. Vereinfachend wird die Rollachse im Folgenden als feste Achse in Fahrzeuginnenrichtung in einer Höhe  $h_R$  über der Fahrbahn angenommen.

*Anmerkung 1.1.* Der oben beschriebenen Wankbewegung können höherfrequente Seitenschwingungen des Fahrzeugaufbaus, sogenannte Schüttelschwingungen, überlagert sein [86]. Diese werden durch die Radkinematik verursacht und werden hier vernachlässigt.

□

<sup>1</sup>In der Fahrzeugtechnik ist es üblich, den Ursprung des fahrzeugfesten Systems auf die Mitte der Vorderachse zu legen, um zu vermeiden, dass mit variierenden Betriebsbedingungen auch das Bezugssystem variiert. In der vorliegenden Arbeit wird dennoch der Schwerpunkt als Ursprung gewählt, um eine möglichst einfache Darstellung der Bewegungsgleichungen zu erhalten.

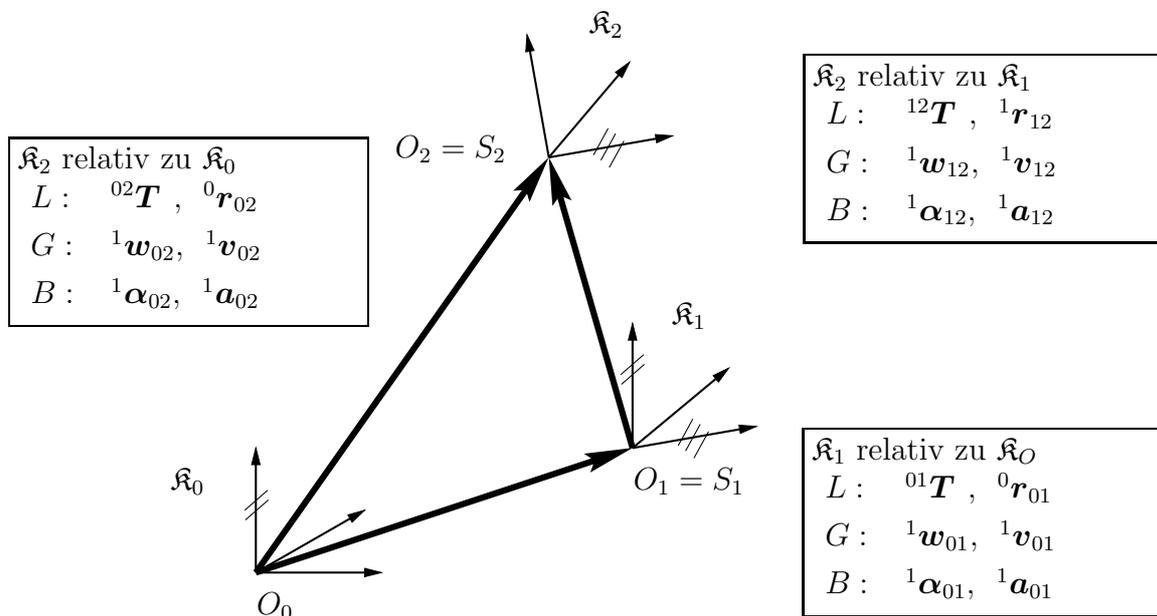


diesem Grund sollen im Folgenden die nichtlinearen bzw. linearen Differentialgleichungen für das Einspurmodell mit Wankerweiterung analytisch anhand eines Mehrkörperformalismus hergeleitet werden. Für eine ausführliche Beschreibung der verwendeten Mehrkörpermethode wird auf [110, 29] verwiesen.

## A.2 Aufstellen der Bewegungsgleichungen

### A.2.1 Kinematik

Bei der Modellierung als Starrkörpersystem wird jeder Körper  $i$  durch ein körperfestes Koordinatensystem  $\mathfrak{K}_i$  in eindeutiger Weise beschrieben. Dieses körperfeste Koordinatensystem  $\mathfrak{K}_i$  mit Ursprung  $O_i$  wird durch den Ortsvektor  $\mathbf{r}_{0i}$  vom Ursprung  $O_0$  des Inertialsystems  $\mathfrak{K}_0$  zu  $O_i$  und durch die Drehmatrix  ${}^{0i}\mathbf{T}$  festgelegt. Bei zwei bzw. mehreren Körpern kann es sinnvoll sein, die resultierende Gesamtbewegung (Lage, Geschwindigkeit, Beschleunigung) aus hintereinander ausgeführten Teilbewegungen zu berechnen. Der Zusammenhang zwischen den drei Bezugssystemen für das Einspurmodell mit Wankerweiterung ist in Bild A.3 dargestellt. Es bezeichnet  $\mathfrak{K}_0$  das Inertialsystem,  $\mathfrak{K}_1$  das fahrwerksfeste System und  $\mathfrak{K}_2$  das aufbaufeste System. Der Ursprung  $O_1$  bzw.  $O_2$  des Koordinatensystems  $\mathfrak{K}_1$  bzw.  $\mathfrak{K}_2$  befindet sich dabei im Massenmittelpunkt  $S_1$  des Fahrwerks bzw.  $S_2$  des Aufbaus.



**Bild A.3:** Zusammengesetzte Bewegungen für das Einspurmodell mit Wankerweiterung.

*Anmerkung 1.2.* Die Darstellung der Drehungen erfolgt hier mit EULER-Winkeln [82]. Transformation der Koordinaten eines beliebigen Vektors  $\mathbf{r}$  werden folgendermaßen dargestellt:

$${}^i\mathbf{r} = {}^{ij}\mathbf{T} {}^j\mathbf{r} . \quad (\text{A.2.1})$$

Der vorgestellte Index links oben in  ${}^i\mathbf{r}$  bzw.  ${}^j\mathbf{r}$  zeigt dabei an, bezüglich eines welchen Koordinatensystems  $\mathfrak{K}_i$  bzw.  $\mathfrak{K}_j$  der Vektor  $\mathbf{r}$  angegeben wird. Die Drehmatrix  ${}^{ij}\mathbf{T}$  beschreibt die Verknüpfung der Darstellung eines Vektors in zwei Koordinatensystemen  $\mathfrak{K}_i$  und  $\mathfrak{K}_j$ . Die zeitliche Änderung eines Vektors bzgl. des Koordinatensystems  $\mathfrak{K}_i$  wird durch einen voran und tief gestellten Index entsprechend

$${}^i\dot{\mathbf{r}} := \frac{d {}^i\mathbf{r}}{dt} \quad (\text{A.2.2})$$

gekennzeichnet. Für die zeitliche Ableitung bezüglich  $\mathfrak{K}_i$  eines in  $\mathfrak{K}_j$  angegebenen Vektors  ${}^j\mathbf{r}$  gelten folgende Beziehungen dargestellt in  $\mathfrak{K}_j$

$$\begin{aligned} {}^j\dot{\mathbf{r}} &= {}^{ji}\mathbf{T} \frac{d {}^i\mathbf{r}}{dt} \\ &= {}^j\dot{\mathbf{r}} + {}^j\boldsymbol{\omega}_{ij} \times {}^j\mathbf{r} , \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

wobei  ${}^j\boldsymbol{\omega}_{ij}$  die Drehung von  $\mathfrak{K}_j$  bzgl.  $\mathfrak{K}_i$  in Koordinaten von  $\mathfrak{K}_j$  angibt.

□

Für das Einspurmodell mit Wankerweiterung sind die Relativbewegungen der Koordinatensysteme zueinander wie folgt gegeben:

### $\mathfrak{K}_1$ relativ zu $\mathfrak{K}_0$

a.) Lage:

Transformationsmatrix der Drehung von  $\mathfrak{K}_0$  nach  $\mathfrak{K}_1$

$${}^{01}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.4})$$

Verbindungsvektor von  $\mathfrak{K}_0$  nach  $\mathfrak{K}_1$

$${}^0\mathbf{r}_{01} = \begin{bmatrix} x & y & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.2.5})$$

b.) Geschwindigkeit:

Winkelgeschwindigkeit von  $\mathfrak{K}_1$  relativ zu  $\mathfrak{K}_0$

$${}^1\boldsymbol{\omega}_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.2.6})$$

Geschwindigkeit von  $\mathfrak{K}_1$  relativ zu  $\mathfrak{K}_0$

$${}^1\mathbf{v}_{01} := {}^1_0\dot{\mathbf{r}}_{01} = {}^{10}\mathbf{T} \frac{d}{dt} {}^0\mathbf{r}_{01} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.2.7})$$

c.) Beschleunigung:

Winkelbeschleunigung von  $\mathfrak{K}_1$  relativ zu  $\mathfrak{K}_0$

$${}^1\boldsymbol{\alpha}_{01} := {}^1_0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{r} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.2.8})$$

Beschleunigung von  $\mathfrak{K}_1$  relativ zu  $\mathfrak{K}_0$

$${}^1\mathbf{a}_{01} := {}^1_0\dot{\mathbf{v}}_{01} = {}^1_1\dot{\mathbf{v}}_{01} + {}^1\boldsymbol{\omega}_{01} \times {}^1\mathbf{v}_{01} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x - r v_y & \dot{v}_y + r v_x & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.2.9})$$

$\mathfrak{K}_2$  relativ zu  $\mathfrak{K}_1$

a.) Lage:

Transformationsmatrix der Drehung von  $\mathfrak{K}_1$  nach  $\mathfrak{K}_2$

$${}^{12}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.10})$$

Verbindungsvektor von  $\mathfrak{K}_1$  nach  $\mathfrak{K}_2$

$${}^1\mathbf{r}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_R \end{bmatrix}^T + {}^{12}\mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & h \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -h \sin \phi & h_R + h \cos \phi \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.2.11})$$

b.) Geschwindigkeit:

Winkelgeschwindigkeit von  $\mathfrak{K}_2$  relativ zu  $\mathfrak{K}_1$

$${}^1\boldsymbol{\omega}_{12} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.2.12})$$

Geschwindigkeit von  $\mathfrak{K}_2$  relativ zu  $\mathfrak{K}_1$

$${}^1\mathbf{v}_{12} := {}^1_1\dot{\mathbf{r}}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -h \dot{\phi} \cos \phi & -h \dot{\phi} \sin \phi \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.2.13})$$

c.) Beschleunigung:

Winkelbeschleunigung von  $\mathfrak{K}_2$  relativ zu  $\mathfrak{K}_1$

$${}^1\boldsymbol{\alpha}_{12} := {}^1_1\dot{\boldsymbol{\omega}}_{12} = \begin{bmatrix} \ddot{\phi} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.2.14})$$

Beschleunigung von  $\mathfrak{K}_2$  relativ zu  $\mathfrak{K}_1$

$${}^1\mathbf{a}_{12} := {}^1_1\dot{\mathbf{v}}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & h \left( \dot{\phi}^2 \sin \phi - \ddot{\phi} \cos \phi \right) & -h \left( \dot{\phi}^2 \cos \phi + \ddot{\phi} \sin \phi \right) \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.2.15})$$

$\mathfrak{K}_2$  relativ zu  $\mathfrak{K}_0$ 

a.) Lage:

Transformationsmatrix der Drehung von  $\mathfrak{K}_0$  nach  $\mathfrak{K}_2$ 

$${}^{02}\mathbf{T} = {}^{01}\mathbf{T} {}^{12}\mathbf{T} \quad (\text{A.2.16})$$

Verbindungsvektor von  $\mathfrak{K}_0$  nach  $\mathfrak{K}_2$ 

$${}^0\mathbf{r}_{02} = {}^0\mathbf{r}_{01} + {}^0\mathbf{r}_{12} \quad (\text{A.2.17})$$

b.) Geschwindigkeit:

Winkelgeschwindigkeit von  $\mathfrak{K}_2$  relativ zu  $\mathfrak{K}_0$ 

$${}^1\boldsymbol{\omega}_{02} = {}^1\boldsymbol{\omega}_{01} + {}^1\boldsymbol{\omega}_{12} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} & 0 & r \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.2.18})$$

Geschwindigkeit von  $\mathfrak{K}_2$  relativ zu  $\mathfrak{K}_0$ 

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{v}_{02} &= {}^1\mathbf{v}_{01} + {}^1\mathbf{v}_{12} + {}^1\boldsymbol{\omega}_{01} \times {}^1\mathbf{r}_{12} \\ &= \begin{bmatrix} v_x + h r \sin \phi & v_y - h \dot{\phi} \cos \phi & -h \dot{\phi} \sin \phi \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (\text{A.2.19})$$

c.) Beschleunigung:

Winkelbeschleunigung von  $\mathfrak{K}_2$  relativ zu  $\mathfrak{K}_0$ 

$${}^1\boldsymbol{\alpha}_{02} = {}^1\boldsymbol{\alpha}_{01} + {}^1\boldsymbol{\alpha}_{12} + {}^1\boldsymbol{\omega}_{01} \times {}^1\boldsymbol{\omega}_{12} = \begin{bmatrix} \ddot{\phi} & r \dot{\phi} & \dot{r} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.2.20})$$

Beschleunigung von  $\mathfrak{K}_2$  relativ zu  $\mathfrak{K}_0$ 

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{a}_{02} &= {}^1\mathbf{a}_{01} + \underbrace{{}^1\mathbf{a}_{12}}_{\text{Relativ-}} + \underbrace{{}^1\boldsymbol{\alpha}_{01} \times {}^1\mathbf{r}_{12}}_{\text{Euler-}} + \underbrace{2 {}^1\boldsymbol{\omega}_{01} \times {}^1\mathbf{v}_{12}}_{\text{Coriolis-}} + \\ &\quad \underbrace{{}^1\boldsymbol{\omega}_{01} \times ({}^1\boldsymbol{\omega}_{01} \times {}^1\mathbf{r}_{12})}_{\text{Zentripetalbeschleunigung}} \end{aligned} \quad (\text{A.2.21})$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{v}_x - r v_y + h(\dot{r} \sin \phi + 2 r \dot{\phi} \cos \phi) \\ \dot{v}_y + r v_x - h(\ddot{\phi} \cos \phi - (\dot{\phi}^2 + r^2) \sin \phi) \\ -h(\dot{\phi}^2 \cos \phi + \ddot{\phi} \sin \phi) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.22})$$

Die einzelnen Terme in Gl. (A.2.21) sind wie folgt gegeben: Absolutbeschleunigung  ${}^1\mathbf{a}_{01}$  bzw. Relativbeschleunigung  ${}^1\mathbf{a}_{12}$  entsprechend (A.2.9) bzw. (A.2.15), Euler-, Coriolis- und Zentripetalbeschleunigung entsprechend

$$\begin{aligned} {}^1\boldsymbol{\alpha}_{01} \times {}^1\mathbf{r}_{12} &= \begin{bmatrix} h \dot{r} \sin \phi & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ 2 {}^1\boldsymbol{\omega}_{01} \times {}^1\mathbf{v}_{12} &= \begin{bmatrix} 2 h r \dot{\phi} \cos \phi & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ {}^1\boldsymbol{\omega}_{01} \times ({}^1\boldsymbol{\omega}_{01} \times {}^1\mathbf{r}_{12}) &= \begin{bmatrix} 0 & h r^2 \sin \phi & 0 \end{bmatrix}^T . \end{aligned} \quad (\text{A.2.23})$$

Die Koordinatensysteme  $\mathfrak{K}_1$  und  $\mathfrak{K}_2$  wurden so gewählt, dass Ursprung  $O_1$  bzw.  $O_2$  und Massenmittelpunkt  $S_1$  bzw.  $S_2$  zusammenfallen. Entsprechend gilt für die Bewegungsgrößen der Körper auf Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene dargestellt in Koordinaten von  $\mathfrak{K}_1$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{S_1} &= {}^1\mathbf{v}_{01} & \mathbf{v}_{S_2} &= {}^1\mathbf{v}_{02} \\ \mathbf{w}_1 &= {}^1\mathbf{w}_{01} & \mathbf{w}_2 &= {}^1\mathbf{w}_{02} \\ \mathbf{a}_{S_1} &= {}^1\mathbf{a}_{01} & \mathbf{a}_{S_2} &= {}^1\mathbf{a}_{02} \\ \boldsymbol{\alpha}_1 &= {}^1\boldsymbol{\alpha}_{01} & \boldsymbol{\alpha}_2 &= {}^1\boldsymbol{\alpha}_{02} \end{aligned} \quad (\text{A.2.24})$$

Für die Herleitung der Bewegungsgleichungen werden alle Größen in fahrwerksfesten Koordinaten angeschrieben. Deswegen wird in Gl. (A.2.24) und nachfolgend auf die Angabe der entsprechenden Indices verzichtet.

## A.2.2 Bewegungsgrößen der Körper in Minimalform

Das aus  $n_B = 2$  starren Körpern bestehende System unterliegt  $g = 8$  holonomen geometrischen (skleronomen) Bindungen — für das Fahrwerk sind Hub-, Nick- und Wankbewegung gesperrt, für den Aufbau die drei Translationsbewegungen sowie die Gier- und Nickbewegung. Entsprechend ist die Anzahl  $f$  der Freiheitsgrade bzw. der voneinander unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten (Minimalkoordinaten)

$$f = 6n_B - g = 4. \quad (\text{A.2.25})$$

Minimalkoordinaten  $\mathbf{z}$ , Minimalgeschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{z}} = d\mathbf{z}/dt$  und Minimalbeschleunigungen  $\ddot{\mathbf{z}} = d^2\mathbf{z}/dt^2$  werden wie folgt festgelegt:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= [\tilde{x} \quad \tilde{y} \quad \psi \quad \phi]^T \\ \dot{\mathbf{z}} &= [v_x \quad v_y \quad r \quad \dot{\phi}]^T \\ \ddot{\mathbf{z}} &= [\dot{v}_x \quad \dot{v}_y \quad \dot{r} \quad \ddot{\phi}]^T \end{aligned} \quad (\text{A.2.26})$$

wobei das Tripel  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \psi)$  mit

$$\begin{aligned} \tilde{x} &:= \int v_x dt + const. \\ \tilde{y} &:= \int v_y dt + const. \end{aligned}$$

die Lage von  $S_1$  bezüglich  $O_0$ , d. h. die Position des Fahrzeugs, in fahrwerksfesten Koordinaten beschreibt. Die Zwangsbedingungen werden nun unter Verwendung der Minimalkoordinaten in die kinematische Beschreibung eingearbeitet. Da keine explizite Zeitabhängigkeit der Bewegungsgrößen besteht (keine rheonomen Bindungen), können Geschwindigkeit von  $S_i$  und Winkelgeschwindigkeit direkt in Abhängigkeit der Minimalgeschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{z}}$  angegeben werden

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) &= \mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{z}) \dot{\mathbf{z}} \\ \mathbf{v}_{S_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) &= \mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{z}) \dot{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (\text{A.2.27})$$

wobei  $\mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{z})$  die  $3 \times f$ -Jakobi-Matrix der Translation des Körpers  $i$  ist und  $\mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{z})$  die  $3 \times f$ -Jakobi-Matrix der Rotation. Aus Gln. (A.2.24), (A.2.6), (A.2.7), (A.2.18) und (A.2.19) folgt mit Gl. (A.2.27) für die Jakobi-Matrizen

$$\begin{aligned} J_{R,1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & J_{R,2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ J_{T,1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & J_{T,2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -h \cos \phi \\ 0 & 0 & 0 & -h \sin \phi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.28})$$

Winkelbeschleunigung und Beschleunigung lassen sich entsprechend durch Minimalkoordinaten, -geschwindigkeiten und -beschleunigungen ausdrücken:

$$\boldsymbol{\alpha}_{S_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}) = \mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{z}) \ddot{\mathbf{z}} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{S_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) \quad (\text{A.2.29})$$

$$\mathbf{a}_{S_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}) = \mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{z}) \ddot{\mathbf{z}} + \bar{\mathbf{a}}_{S_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}), \quad (\text{A.2.30})$$

wobei  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{S_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$  die Restwinkelbeschleunigung und  $\bar{\mathbf{a}}_{S_i}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$  die Restbeschleunigung ist. Für  $S_1$  bzw.  $S_2$  ergeben sich für diese Größen

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{S_1}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T & \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{S_2}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) &= \begin{bmatrix} 0 & r \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix}^T \\ \bar{\mathbf{a}}_{S_1}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) &= \begin{bmatrix} -r v_y \\ r v_x \\ 0 \end{bmatrix} & \bar{\mathbf{a}}_{S_2}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) &= \begin{bmatrix} -r v_y + 2 h r \dot{\phi} \cos \phi \\ r v_x + h (\dot{\phi}^2 + r^2) \sin \phi \\ -h \dot{\phi}^2 \cos \phi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.31})$$

Für die virtuelle (infinitesimale, mit den Bindungen verträgliche) Drehgeschwindigkeit  $\delta \boldsymbol{w}_i$  und Geschwindigkeit  $\delta \mathbf{v}_i$  von  $S_i$  gilt

$$\delta \boldsymbol{w}_i = \mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{z}) \delta \dot{\mathbf{z}} \quad (\text{A.2.32})$$

$$\delta \mathbf{v}_i = \mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{z}) \delta \dot{\mathbf{z}}. \quad (\text{A.2.33})$$

### A.2.3 Kräfte und Momente

Die auf das System wirkenden eingprägten Kräfte sind die Reifenlängs- und -seitenkräfte vorne und hinten  $F_{l,H}, F_{l,V}, F_{s,H}, F_{s,V}$ , die Störseitenkraft  $F_{y,S}$  sowie die Gravitationskraft des Fahrzeugaufbaus  $m_2 g$ . Die eingprägten Momente sind die Störmomente um die Hoch- bzw. Gierachse  $M_{z,S}$ , um die Rollachse  $M_{x,S}$  und ein eingprägtes Moment auf Grund der Fahrzeugfederung und -dämpfung  $M_x$ . Die eingprägten Kräfte und Momente sind in Bild A.1 und Bild A.2 eingezeichnet. In fahrwerksfesten

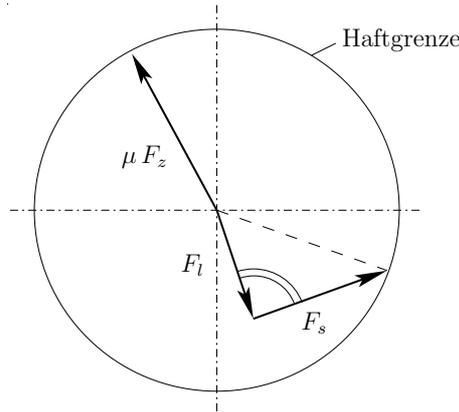
Koordinaten ergeben sich für diese:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_1^e &= \begin{bmatrix} F_{l,H} + F_{l,V} \cos \delta_V - F_{s,V} \sin \delta_V \\ F_{s,H} + F_{s,V} \cos \delta_V + F_{l,V} \sin \delta_V + F_{y,S} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_2^e &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_2 g \end{bmatrix} \\
 \mathbf{M}_{S_1}^e &= \begin{bmatrix} M_x \\ 0 \\ -l_H F_{s,H} + M_{z,S} + l_V (F_{s,V} \cos \delta_V + F_{l,V} \sin \delta_V) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{M}_{S_2}^e &= \begin{bmatrix} M_{x,S} - M_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.2.34}$$

Der Reifen-Fahrbahnkontakt wird durch die Reifenlängs- und -seitenkräfte beschrieben. Zu beachten ist, dass an jedem einzelnen Rad Längskraft (Umfangskraft)  $F_l$ , Seitenkraft  $F_s$  und dynamische Radlast  $F_z$  über die Beziehung

$$\sqrt{F_l^2 + F_s^2} \leq \mu F_z \tag{A.2.35}$$

verknüpft sind [86]. Der Parameter  $\mu$  bezeichnet hierbei den Kraftschlusskoeffizienten zwischen Reifen und Straße. Bild A.4 zeigt hierzu den Kammschen Kreis mit dessen Hilfe Gl. (A.2.35) dargestellt werden kann. Liegt der aus Superposition von Längs- und



**Bild A.4:** Kammscher Kreis.

Seitenkraft resultierende Kraftvektor innerhalb des Kammschen Kreises, so rollt das Rad. Ist die geometrische Summe von  $F_l$  und  $F_s$  größer als der Radius  $\mu F_z$ , so gleitet es.

Die Reifenlängskräfte werden im Folgenden nicht gesondert modelliert. Die Reifenseitenkräfte

$$\begin{aligned} F_{s,V} &= F_{s,V}(\alpha_V, F_{z,V}) \\ F_{s,H} &= F_{s,H}(\alpha_H, F_{z,H}) \end{aligned} \quad (\text{A.2.36})$$

werden über Kraftgesetze ermittelt und können näherungsweise als nichtlineare Funktionen der Schräglaufwinkel  $\alpha_V$  bzw.  $\alpha_H$  und der Radlasten  $F_{z,V}$  bzw.  $F_{z,H}$  angegeben werden. Reifenmodelle bzw. -kennlinien die diesen Zusammenhang beschreiben sind bspw. die Pacejka Magic Formula [101] oder das HSRI-Reifenmodell [45]. Fahrzeuge mit hohem Schwerpunkt können bei Fahrmanövern schon weit bevor die Reifen in Sättigung gehen umkippen. Für diese Fahrzeuge ist es zulässig, zumindest für den regelungstechnischen Entwurf, von einer rein linearen Betrachtungsweise auszugehen. Deswegen werden im Folgenden die Reifenseitenkräfte durch den linearen Zusammenhang

$$\begin{aligned} F_{s,V} &= c_V \alpha_V \\ F_{s,H} &= c_H \alpha_H \end{aligned} \quad (\text{A.2.37})$$

beschrieben. Hierbei kennzeichnen  $c_V$  und  $c_H$  die Schräglaufsteifigkeiten vorne bzw. hinten. Die Schräglaufsteifigkeit hängen von der Beschaffenheit der Fahrbahn, d. h. dem Kraftschluss zwischen Reifen und Fahrbahn, ab. Damit gilt

$$c_V = \mu c_{V,0} \quad c_H = \mu c_{H,0} , \quad (\text{A.2.38})$$

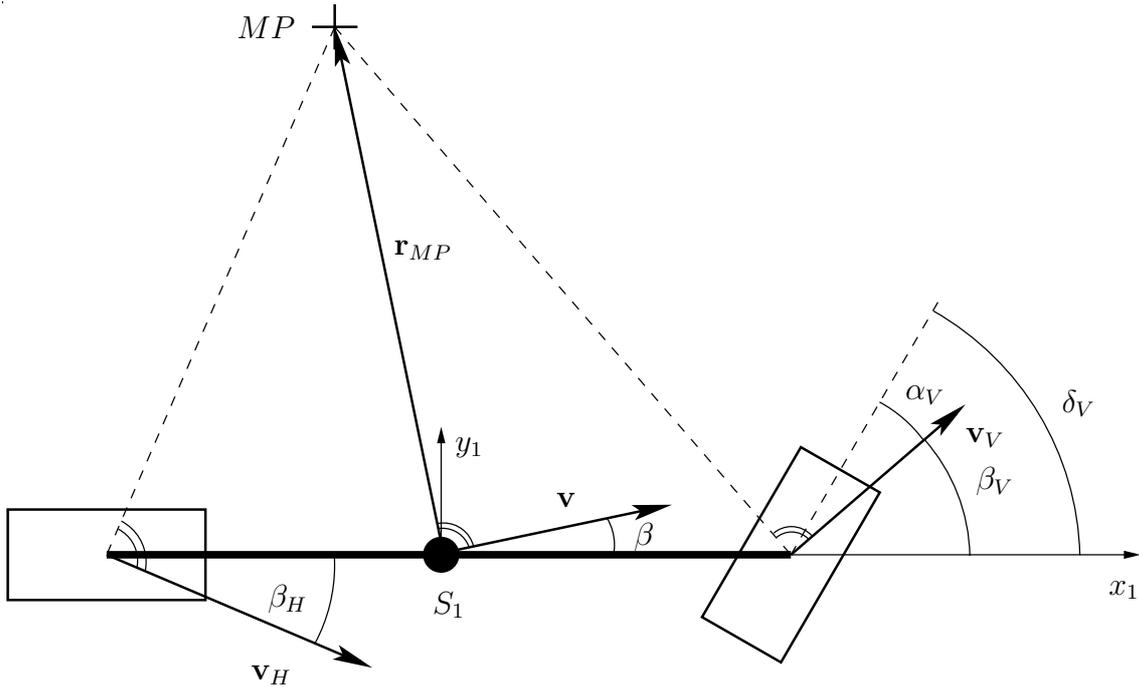
wobei  $c_{V,0}$  bzw.  $c_{H,0}$  die nominellen Schräglaufsteifigkeit (bei nomineller Radlast und trockener Straße) vorne bzw. hinten ist und  $\mu$  der Kraftschlusskoeffizient zwischen Reifen und Straße. Typische numerische Werte für  $\mu$  sind in Tabelle A.1 angegeben.

**Tabelle A.1:** Typische Werte für den Kraftschlusskoeffizienten  $\mu$ .

$\mu = 1$	trockene Straße
$\mu = 0.5 \dots 0.8$	nasse Straße
$\mu = 0.4$	Schnee
$\mu = 0.15$	eisglatte Straße
$\mu = 0.1$	bewässerte Kacheln

Für die Ermittlung der Schräglaufwinkel  $\alpha_V$  und  $\alpha_H$  zeigt Bild A.5 die relevanten kinematischen Größen des Fahrzeugs (Fahrwerks) und die Variablen des Reifenmodells. Die Fahrzeugbewegung lässt sich durch eine Drehbewegung um den Momentanpol MP beschreiben. Dessen Relativkoordinaten zu  $S_1$  lauten:

$${}^1\mathbf{r}_{S_1MP} = \begin{bmatrix} -\frac{v_y}{r} & \frac{v_x}{r} & 0 \end{bmatrix}^T . \quad (\text{A.2.39})$$



**Bild A.5:** Kinematische Größen des Fahrwerks und Variablen des Reifenmodells.

Die Schräglaufwinkel ergeben sich aus der Differenz von Radlenkwinkel und lokalem Schwimmwinkel

$$\begin{aligned}\alpha_V &= \delta_V - \beta_V \\ \alpha_H &= -\beta_H.\end{aligned}\tag{A.2.40}$$

Für die lokalen Geschwindigkeitsvektoren gilt

$$\begin{aligned}{}^1\mathbf{v}_V &= {}^1\mathbf{v}_{S_1} + {}^1\boldsymbol{\omega}_{01} \times {}^1\mathbf{r}_{S_1V} \\ {}^1\mathbf{v}_H &= {}^1\mathbf{v}_{S_1} + {}^1\boldsymbol{\omega}_{01} \times {}^1\mathbf{r}_{S_1H}.\end{aligned}\tag{A.2.41}$$

Mit  ${}^1\mathbf{r}_{S_1V} = [l_V \ 0 \ 0]^T$  und  ${}^1\mathbf{r}_{S_1H} = [-l_H \ 0 \ 0]^T$  werden diese

$${}^1\mathbf{v}_V = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y + l_V r \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{v}_H = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y - l_H r \\ 0 \end{bmatrix}.\tag{A.2.42}$$

Weiter gilt

$$v_x = v \cos \beta \quad v_y = v \sin \beta\tag{A.2.43}$$

und damit ergeben sich die lokalen Schwimmwinkel vorne und hinten aus

$$\begin{aligned}\tan \beta_V &= \frac{v_y + l_V r}{v_x} = \tan \beta + \frac{l_V r}{v \cos \beta} \\ \tan \beta_H &= \frac{v_y - l_H r}{v_x} = \tan \beta - \frac{l_H r}{v \cos \beta}.\end{aligned}\tag{A.2.44}$$

Ermittlung von  $\beta_V$  und  $\beta_H$  aus Gl. (A.2.44) und Einsetzen in Gl. (A.2.40) liefert die Schräglaufwinkel und mit Gl. (A.2.37) die Reifenseitenkräfte.

Das eingeprägte Moment auf Grund der Fahrzeugfederung und -dämpfung hängt im Allgemeinen von der Beladung, dem Federweg und der -geschwindigkeit, d. h. vom Wankwinkel  $\phi$  und der Wankwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\phi}$ , ab und lässt sich in einen Steifigkeits- und einen Dämpfungsterm aufteilen. Vernachlässigt man den Einfluss der Beladung und linearisiert den durch nichtlineare Kennlinien beschreibbaren Zusammenhang zwischen Wankwinkel und Steifigkeitsmoment bzw. Wankwinkelgeschwindigkeit und Dämpfungsmoment, so lässt sich  $M_x$  durch den Zusammenhang

$$M_x = c_\phi \phi + d_\dot{\phi} \dot{\phi} \quad (\text{A.2.45})$$

angeben. Die Größe  $c_\phi$  ist hierbei die resultierende Wanksteifigkeit bzw. lineare Feder-Ersatzsteifigkeit

$$c_\phi = c_{\phi,V} + c_{\phi,H} + c_{\phi,StV} + c_{\phi,StH} , \quad (\text{A.2.46})$$

die sich aus den Wankfedersteifigkeiten der Vorder- und Hinterachse  $c_{\phi,V}$  und  $c_{\phi,H}$  sowie den Stabilisatorsteifigkeiten  $c_{\phi,StV}$  und  $c_{\phi,StH}$  zusammensetzt. Die Größe  $d_\dot{\phi}$  ist der resultierende Dämpfungskoeffizient bzw. die lineare Dämpfer-Ersatzrate, d. h.

$$d_\dot{\phi} = d_{\dot{\phi},V} + d_{\dot{\phi},H} . \quad (\text{A.2.47})$$

## A.2.4 Gleichungen von NEWTON und EULER

Der Impulssatz (Newton-Gleichung) für den Massenmittelpunkt  $S_i$  des freigeschnittenen Körpers  $i$  lautet

$$m_i \mathbf{a}_{S_i} = \mathbf{F}_i^e + \mathbf{F}_i^z , \quad (\text{A.2.48})$$

wobei  $\mathbf{F}_i^e$  die Resultierende aller eingepprägten Kräfte ist und  $\mathbf{F}_i^z$  die Resultierende aller Zwangskräfte.

Der Drallsatz (Euler-Gleichungen) bzgl. des Massenmittelpunktes  $S_i$  des starren Körpers  $i$  lautet

$$\Theta_{S_i} \cdot \boldsymbol{\alpha}_i + \mathbf{w}_i \times \Theta_{S_i} \cdot \mathbf{w}_i = \mathbf{M}_{S_i}^e + \mathbf{M}_{S_i}^z , \quad (\text{A.2.49})$$

wobei  $\mathbf{M}_{S_i}^e$  das resultierende Moment der eingepprägten Kräfte und Momente bzgl. des Massenmittelpunktes ist und  $\mathbf{M}_{S_i}^z$  das resultierende Moment der Zwangskräfte und -momente bzgl.  $S_i$ . Die Trägheitsmomente bezüglich  $S_1$  bzw.  $S_2$  dargestellt in  $\mathfrak{K}_1$  sind

$$\Theta_{S_1} = \begin{bmatrix} J_{x,1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y,1} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z,1} \end{bmatrix} \quad \Theta_{S_2} = {}^{12}\mathbf{T} \begin{bmatrix} J_{x,2} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y,2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z,2} \end{bmatrix} , \quad (\text{A.2.50})$$

wobei  ${}^{12}\mathbf{T}$  entsprechend Gl. (A.2.10) gegeben ist. Vereinfachend werden hier nur die Hauptträgheitsmomente berücksichtigt. Die Bewegungsgleichungen des Systems werden in Minimalkoordinaten und -geschwindigkeiten als gewöhnliche Differentialgleichungen angeschrieben. Wie im Folgenden gezeigt werden wird, können die Zwangskräfte eliminiert werden und gehen nicht in die Bewegungsgleichungen mit ein.

### A.2.5 Reduktion der Bewegungsgleichungen auf Minimalform

Die Bewegungsgleichungen in Minimalform erhält man bspw. nach Anwendung des Prinzips der virtuellen Leistung von JOURDAIN in der Fassung von Lagrange. Die Bewegungsgleichungen für das Mehrkörpersystem lassen sich dann in Form von  $f$  nicht-linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung in den verallgemeinerten Bewegungsgrößen  $\mathbf{z}$  anschreiben:

$$\mathbf{M}(\mathbf{z}) \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{k}(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z}, \mathbf{u}), \quad (\text{A.2.51})$$

wobei  $\mathbf{M}(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{f \times f}$  die symmetrische positiv definite Massenmatrix

$$\mathbf{M}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n_B} m_i \mathbf{J}_{T_i}^T \mathbf{J}_{T_i} + \mathbf{J}_{R_i}^T \Theta_{S_i} \mathbf{J}_{R_i} \quad (\text{A.2.52})$$

ist,  $\mathbf{k}(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{f \times 1}$  der Vektor der verallgemeinerten Kreisel- und Zentrifugalkräfte

$$\mathbf{k}(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n_B} m_i \mathbf{J}_{T_i}^T \bar{\mathbf{a}}_{S_i} + \mathbf{J}_{R_i}^T (\Theta_{S_i} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{S_i} + \mathbf{w}_i \times \Theta_{S_i} \mathbf{w}_i) \quad (\text{A.2.53})$$

und  $\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{f \times 1}$  der Vektor der verallgemeinerten eingprägten Kräfte

$$\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n_B} \mathbf{J}_{T_i}^T \mathbf{F}_i^e + \mathbf{J}_{R_i}^T \mathbf{M}_{S_i}^e, \quad (\text{A.2.54})$$

der von Eingangsgrößen

$$\mathbf{u} = \left[ \delta_V \quad F_{l,V} \quad F_{l,H} \quad F_{y,S} \quad M_{z,S} \quad M_{x,S} \right]^T \quad (\text{A.2.55})$$

abhängt. Damit erhält man für das Einspurmodell mit Wankerweiterung

$$\mathbf{M}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} m & 0 & h m_2 \sin \phi & 0 \\ 0 & m & 0 & -h m_2 \cos \phi \\ h m_2 \sin \phi & 0 & M_{(3,3)} & 0 \\ 0 & -h m_2 \cos \phi & 0 & J_{x,2} + h^2 m_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.56})$$

mit

$$\mathbf{k}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = \begin{bmatrix} -m r v_y + 2 h m_2 \dot{\phi} r \cos \phi \\ m r v_x + h m_2 (\dot{\phi}^2 + r^2) \sin \phi \\ r \sin \phi (-h m_2 v_y + 2 (J_{y,2} - J_{z,2} + h^2 m_2) \dot{\phi} \cos \phi) \\ -r \cos \phi (h m_2 v_x + (J_{y,2} - J_{z,2} + h^2 m_2) r \sin \phi) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.57})$$

$$\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} F_{l,H} + F_{l,V} \cos \delta_V - F_{s,V} \sin \delta_V \\ F_{s,V} \cos \delta_V + F_{l,V} \sin \delta_V + F_{s,H} + F_{y,S} \\ l_V (F_{s,V} \cos \delta_V + F_{l,V} \sin \delta_V) - l_H F_{s,H} + M_{z,S} \\ h m_2 g \sin \phi - M_x + M_{x,S} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2.58})$$

## A.3 Nichtlineare Zustandsgleichungen

Regelungs- und systemtheoretische Überlegungen legen es nahe, die in Abschnitt A.2 hergeleiteten Bewegungsgleichungen in Zustandsform darzustellen. Eine geeignete Wahl für den Zustandsvektor ist der Vektor  $[\mathbf{x}_1^T \ \mathbf{x}_2^T]^T$  mit

$$\mathbf{x}_1 = [x \ y \ \psi \ \phi]^T \quad (\text{A.3.59})$$

$$\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{z}} = [v_x \ v_y \ r \ \dot{\phi}] . \quad (\text{A.3.60})$$

Die Bewegungsgleichungen in Gl. (A.2.51) lauten nach entsprechenden Umformungen, d. h. Sortieren der Terme und Linksmultiplikation mit der Inversen der Massenmatrix, in Zustandsform

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{M}(\mathbf{x}_1)^{-1} (\mathbf{Q}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}) - \mathbf{k}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(0) \\ \mathbf{x}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{10} \\ \mathbf{x}_{20} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.61})$$

wobei die Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.62})$$

die Abbildung der Minimalgeschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{z}}$  in  $\dot{\mathbf{x}}_1$  beschreibt, d. h.  $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{T} \dot{\mathbf{z}}$ .

Eine Möglichkeit die Inverse der Massenmatrix symbolisch zu berechnen, besteht in der Berechnung der Adjunktenmatrix. Nach der Cramer'schen Regel lautet das Element  $[\mathbf{M}^{-1}]_{ik}$  der Inversen der Massenmatrix

$$[\mathbf{M}^{-1}]_{ik} = \frac{\text{adj}_{ik}(\mathbf{M})}{\text{Det}(\mathbf{M})}, \quad (\text{A.3.63})$$

wobei das Polynom  $\text{adj}_{ik}(\mathbf{M})$  die Adjunkte des Elements  $\mathbf{M}_{ki}$  ist, die aus  $\mathbf{M}$  durch Streichen der  $k$ -ten Zeile und der  $i$ -ten Spalte entsteht, multipliziert mit dem Faktor  $(-1)^{i+k}$ . Dabei kann man es sich zunutze machen, dass die Inverse einer symmetrischen Matrix wieder eine symmetrische Matrix ist. Für die Inverse der Massenmatrix ergibt sich

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(\mathbf{M})} \begin{bmatrix} \text{adj}_{11}(\mathbf{M}) & 0 & \text{adj}_{13}(\mathbf{M}) & 0 \\ 0 & \text{adj}_{22}(\mathbf{M}) & 0 & \text{adj}_{24}(\mathbf{M}) \\ \text{adj}_{13}(\mathbf{M}) & 0 & \text{adj}_{33}(\mathbf{M}) & 0 \\ 0 & \text{adj}_{24}(\mathbf{M}) & 0 & \text{adj}_{44}(\mathbf{M}) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3.64})$$

### A.3.1 Zusätzliche Ausgabegleichungen

Als zusätzliche Ausgabegleichungen interessieren vor allem die Querbeschleunigung des Fahrwerks  $a_{y,1}$ , die Aufbauquerbeschleunigung  $a_{y,2}$  und der Kippkoeffizient  $R$ , wie er sich aus Gl. (2.2.5) ergibt:

$$a_{y,1} = \dot{v}_y + r v_x \quad (\text{A.3.65})$$

$$a_{y,2} = \dot{v}_y + r v_x - \ddot{\phi} h \cos \phi + h (\dot{\phi}^2 + r^2) \sin \phi \quad (\text{A.3.66})$$

$$R = \frac{2 m_2}{T m} \left( h \sin \phi + \frac{1}{g} (h_R + h \cos \phi) (\dot{v}_y + r v_x - \ddot{\phi} h \cos \phi + h (\dot{\phi}^2 + r^2) \sin \phi) \right) \quad (\text{A.3.67})$$

### A.3.2 Nichtlineare Zustandsgleichungen bei konstanter Geschwindigkeit

Bei konstanter Fahrgeschwindigkeit können z. B. bei Hinterradantrieb ( $F_{l,V} = 0$ ) die nichtlinearen Bewegungsgleichungen ohne Berücksichtigung der Gleichung für die Längsdynamik angegeben werden, indem die Gleichung für die Längsdynamik

$$\dot{v}_x = \frac{1}{\text{Det}(\mathbf{M})} \left[ \text{adj}_{11}(\mathbf{M}) \quad 0 \quad \text{adj}_{13}(\mathbf{M}) \quad 0 \right] (\mathbf{Q} - \mathbf{k}) \equiv 0 \quad (\text{A.3.68})$$

nach der, für ein konstant halten der Fahrgeschwindigkeit, entsprechend  $\dot{v}_x = 0$ , erforderlichen, Längskraft hinten  $F_{l,H}$  aufgelöst wird und das Ergebnis in Gl. (A.3.61) substituiert wird.

## A.4 Linearisierte Bewegungsgleichungen

Ausgangspunkt der Linearisierung der Bewegungsgleichungen (A.2.51) um eine konstante Gleichgewichtslage (z. B. stationäre Geradeausfahrt bzw. Kurvenfahrt) mit  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_{st}$ ,  $\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{z}}_{st}$ ,  $\ddot{\mathbf{z}} = \ddot{\mathbf{z}}_{st}$  und  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{st}$  ist die nichtlineare Vektorfunktion entsprechend Gl. (A.2.51)

$$\boldsymbol{\xi} := \mathbf{M}(\mathbf{z}) \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{k}(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) - \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) = 0. \quad (\text{A.4.69})$$

In der Umgebung der Gleichgewichtslage werden die Bewegungsgrößen ersetzt durch

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{z}_{st} + \Delta \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} &= \dot{\mathbf{z}}_{st} + \Delta \dot{\mathbf{z}} \\ \ddot{\mathbf{z}} &= \ddot{\mathbf{z}}_{st} + \Delta \ddot{\mathbf{z}} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_{st} + \Delta \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (\text{A.4.70})$$

und  $\xi = \xi(\ddot{z}, \dot{z}, z, \mathbf{u})$  aus Gl. (A.4.69) wird in eine TAYLOR-Reihe bis zu Termen 1. Ordnung in  $\Delta z$ ,  $\Delta \dot{z}$ ,  $\Delta \ddot{z}$  und  $\Delta \mathbf{u}$ , den Abweichungen bzgl. der Gleichgewichtslage, entwickelt:

$$\xi = \xi_{st} + \left. \frac{\partial \xi}{\partial \ddot{z}} \right|_{st} \Delta \ddot{z} + \left. \frac{\partial \xi}{\partial \dot{z}} \right|_{st} \Delta \dot{z} + \left. \frac{\partial \xi}{\partial z} \right|_{st} \Delta z + \left. \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{u}} \right|_{st} \Delta \mathbf{u} + \dots \quad (\text{A.4.71})$$

Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung in Gl. (A.4.71) führt mit  $\xi_{st} = 0$  auf die linearisierten Bewegungsgleichungen

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{z} + (\mathbf{D} + \mathbf{G}) \Delta \dot{z} + (\mathbf{K} + \mathbf{N}) \Delta z = \mathbf{S} \Delta \mathbf{u} \quad (\text{A.4.72})$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \left. \frac{\partial \xi}{\partial \ddot{z}} \right|_{st} \\ \mathbf{D} + \mathbf{G} &=: \mathbf{DG} = \left. \frac{\partial \xi}{\partial \dot{z}} \right|_{st} \\ \mathbf{K} + \mathbf{N} &=: \mathbf{KN} = \left. \frac{\partial \xi}{\partial z} \right|_{st} \\ \mathbf{S} &= - \left. \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{u}} \right|_{st}, \end{aligned} \quad (\text{A.4.73})$$

wobei sich die Matrizen  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{G}$  bzw.  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{N}$  aus Aufspaltung der Matrix  $\mathbf{DG}$  bzw.  $\mathbf{KN}$  in ihren symmetrischen und schiefsymmetrischen (antisymmetrischen) Anteil ergeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2} (\mathbf{DG} + \mathbf{DG}^T) & \mathbf{K} &= \frac{1}{2} (\mathbf{KN} + \mathbf{KN}^T) \\ \mathbf{G} &= \frac{1}{2} (\mathbf{DG} - \mathbf{DG}^T) & \mathbf{N} &= \frac{1}{2} (\mathbf{KN} - \mathbf{KN}^T). \end{aligned} \quad (\text{A.4.74})$$

Es gelten folgende Bezeichnungen [91]:

- $\mathbf{M}$  Massenmatrix (symmetrisch, positiv definit)
- $\mathbf{D}$  Dämpfungsmatrix (symmetrisch)
- $\mathbf{G}$  Gyroskopische Matrix (schiefsymmetrisch)
- $\mathbf{K}$  Konservative Fesselungsmatrix (symmetrisch)
- $\mathbf{N}$  Zirkulatorische Matrix (schiefsymmetrisch)
- $\mathbf{S}$  Steuermatrix

Für die Linearisierung um die Geradeausfahrt bei konstanter Fahrgeschwindigkeit  $v_x = v$  (dies entspricht der Gleichgewichtslage mit  $z_{st} = \dot{z}_{st} = \ddot{z}_{st} = \mathbf{u}_{st} = \mathbf{0}$  und

$\dot{\mathbf{z}}_{st} = [v \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ) erhält man:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & -h m_2 \\ 0 & 0 & J_z & 0 \\ 0 & -h m_2 & 0 & J_{x,2} + h^2 m_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.75})$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (c_{V,0} + c_{H,0}) \frac{\mu}{v} & (c_{V,0} l_V - c_{H,0} l_H) \frac{\mu}{v} + \frac{1}{2} m v & 0 \\ 0 & (c_{V,0} l_V - c_{H,0} l_H) \frac{\mu}{v} + \frac{1}{2} m v & (c_{V,0} l_V^2 + c_{H,0} l_H^2) \frac{\mu}{v} & -\frac{1}{2} h m_2 v \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} h m_2 v & d_{\dot{\phi}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.76})$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m v & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} m v & 0 & \frac{1}{2} h m_2 v \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} h m_2 v & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.77})$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{\phi} - m_2 g h \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.78})$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (\text{A.4.79})$$

und

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{V,0} \mu & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_{V,0} l_V \mu & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.80})$$

Die konservative Fesselungsmatrix  $\mathbf{K}$  verschwindet für  $c_{\phi} = m_2 g h$ . Betrachtet man den Aufbau als invertiertes Pendel, so bedeutet diese Bedingung, dass sich der Aufbau in einer metastabilen Gleichgewichtslage befindet. Für  $c_{\phi} < m_2 g h$  ist die obere Pendelposition aus systemtheoretischer Sicht eine instabile Gleichgewichtslage. Beim Fahrzeug gilt  $c_{\phi} \gg m_2 g h$ .

*Anmerkung 1.3.* Ähnlich der Linearisierung um die Geradeausfahrt kann die Linearisierung um die stationäre Kurvenfahrt durchgeführt werden. Diese erfolgt bei konstanter Fahrgeschwindigkeit und entweder bei vorgegebener Kurvenkrümmung  $\rho_{ref}$  oder bei vorgegebenem Lenkwinkel  $\delta_{V,st}$ . Die Giergeschwindigkeit der Bahntangente, d. h. die stationäre Gierrate, ist  $r_{st} = v \rho_{ref}$ . Die Linearisierung um die Gleichgewichtslage  $\mathbf{z} = [0 \ 0 \ 0 \ \phi_{st}]$ ,  $\dot{\mathbf{z}} = [v \ v_{y_{st}} \ v \ \rho_{ref} \ 0]^T$ ,  $\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{u} = [\delta_{V,st} \ 0 \ \dots \ 0]^T$  erfordert zunächst

die numerische Berechnung der Stationärwerte  $\phi_{st}$ ,  $v_{y, st}$  und  $\rho_{ref}$  bzw.  $\delta_{V, st}$  beispielsweise durch Anwendung des Newton-Raphson-Verfahrens. Untersuchungen des hierbei entstehenden Systems haben ergeben, dass die zusätzlichen Kopplungsterme (Coriolisterme) nur sehr schwach die Dynamik des Gesamtsystems beeinflussen.

Die wesentlichen Nichtlinearitäten, die das quer-, gier- und wankdynamische Fahrverhalten beeinflussen, sind die Reifensättigung und die nichtlinearen Feder- und Dämpferkräfte der Fahrzeugfederung bzw. -dämpfung. Die kinematischen Nichtlinearitäten spielen eine untergeordnete Rolle. Der nichtlineare Effekt der Reifensättigung in der Kurvenfahrt findet im Kraftschlusskoeffizienten  $\mu$  Berücksichtigung.

□

Geht man davon aus, dass sich bei den betrachteten typischen Fahrmanövern die Längsdynamik nur langsam im Vergleich zu Quer-, Gier- und Wankdynamik ändert, so kann man diese als quasistationär annehmen. Entsprechend wird die Längsgeschwindigkeit als variierender Fahrzeugparameter betrachtet. Im Folgenden werden der Schwimmwinkel  $\beta$  und die Gierrate  $r$  als Zustände angenommen und der Vorderradlenkwinkel  $\delta_V$  als Eingangsgröße bildet zusammen mit den Störgrößen der Seitenkraft  $F_{y,S}$  und den Störmomenten um die Hoch- und Längsachse  $M_{z,S}$  und  $M_{x,S}$  den Eingangsvektor  $\mathbf{u}$ , d. h.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \delta_V & F_{y,S} & M_{z,S} & M_{x,S} \end{bmatrix}^T. \quad (\text{A.4.81})$$

Die Laplace-Transformation von Gl. (A.4.72) entsprechend

$$(\mathbf{M} \text{diag}(1, v, 1, s) s + (\mathbf{D} + \mathbf{G}) \text{diag}(1, v, 1, s) + (\mathbf{K} + \mathbf{N}) \text{diag}(1, v, 1, 1)) \mathbf{x} = \mathbf{S} \mathbf{u} \quad (\text{A.4.82})$$

mit

$$\begin{bmatrix} v_x & v_y & r & \dot{\phi} \end{bmatrix}^T = \text{diag}(1, v, 1, s) \begin{bmatrix} v_x & \beta & r & \phi \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.4.83})$$

liefert, vernachlässigt man die Längsdynamik, d. h. die jeweils erste Zeile und Spalte aller Matrizen in Gl. (A.4.82), folgendes lineares Gleichungssystem für eine Beschreibung des Einspurmodells mit Wankerweiterung:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_V + c_H + m v s & \frac{c_V l_V - c_H l_H}{v} + m v & -h m_2 s^2 \\ c_V l_V - c_H l_H & J_z s + \frac{c_V l_V^2 + c_H l_H^2}{v} & 0 \\ -h m_2 v s & -h m_2 v & G_{N(3,3)} \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{G}_N} \begin{bmatrix} \beta \\ r \\ \phi \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_V & 1 & 0 & 0 \\ c_V l_V & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{G}_Z} \begin{bmatrix} \delta_V \\ F_{y,S} \\ M_{z,S} \\ M_{x,S} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.84})$$

wobei

$$G_{N(3,3)} = c_\phi - m_2 g h + d_\phi s + (J_{x,2} + h^2 m_2) s^2.$$

Die Übertragungsmatrix des linearen Einspurmodells mit Wankerweiterung von  $\begin{bmatrix} \delta_V & F_{y,S} & M_{z,S} & M_{x,S} \end{bmatrix}^T$  zu  $\begin{bmatrix} \beta & r & \phi \end{bmatrix}^T$  lautet

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_N^{-1} \mathbf{G}_Z. \quad (\text{A.4.85})$$

## A.5 Gleichungen des linearen Einspurmodells

Die Vernachlässigung der Wankdynamik, d. h. das Streichen der letzten Zeile der vektoriellen Gleichung (A.4.84), liefert die Gleichungen des linearen Einspurmodells (vgl. [107] oder [4, 5]) mit den Zuständen  $\beta$  und  $r$  und den Eingangs- bzw. Störgrößen  $\delta_V$ ,  $F_{y,S}$  und  $M_{z,S}$

$$\begin{bmatrix} c_V + c_H + m v s & \frac{c_V l_V - c_H l_H}{v} + m v \\ c_V l_V - c_H l_H & J_z s + \frac{c_V l_V^2 + c_H l_H^2}{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_V & 1 & 0 \\ c_V l_V & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_V \\ F_{y,S} \\ M_{z,S} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5.86})$$

## A.6 Lineare Zustandsgleichungen

Das vereinfachte Fahrzeugmodell dient in erster Linie der Untersuchung der fahrdynamischen Zusammenhänge zwischen Quer-, Gier- und Wankdynamik und rudimentär auch der Längsdynamik. Um Struktureigenschaften des Systems, in erster Linie Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit, untersuchen zu können, ist eine Darstellung der linearen Bewegungsgleichungen in Zustandsform erforderlich.

Gl. (A.3.61) beschreibt eine nichtlineare Differentialgleichung der Form

$$\dot{\mathbf{x}}_{nl} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{nl}, \mathbf{u}_{nl}), \quad (\text{A.6.87})$$

wobei

$$\mathbf{x}_{nl} = \begin{bmatrix} x & y & \psi & \phi & v_x & v_y & r & \dot{\phi} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{u}_{nl} = \begin{bmatrix} \delta_V & F_{l,V} & F_{l,H} & F_{y,S} & M_{z,S} & M_{x,S} \end{bmatrix}^T.$$

Die Linearisierung um die Gleichgewichtslage

$$\mathbf{x}_{nl} = \mathbf{x}_{nl}|_s + \mathbf{x}_l$$

$$\mathbf{u}_{nl} = \mathbf{u}_{nl}|_s + \mathbf{u}_l$$

liefert nach Durchführung einer Ähnlichkeitstransformation die linearen Zustandsgleichungen

$$\underbrace{\mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}_l}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\mathbf{T}\mathbf{A}_l\mathbf{x}_l}_{\mathbf{A}\mathbf{x}} + \underbrace{\mathbf{T}\mathbf{B}_l\mathbf{u}_l}_{\mathbf{B}\mathbf{u}}, \quad (\text{A.6.88})$$

mit  $\mathbf{x}_{nl} = \begin{bmatrix} \beta & r & \phi & \dot{\phi} \end{bmatrix}^T$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{nl}$ ,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{A}_l = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{nl}, \mathbf{u}_{nl})}{\partial \mathbf{x}_{nl}} \right|_s \quad \mathbf{B}_l = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{nl}, \mathbf{u}_{nl})}{\partial \mathbf{u}_{nl}} \right|_s .$$

## A.7 Lineare Ausgangsgleichungen

### A.7.1 Ein-/Ausgangsgleichungen in Übertragungsform

In den Kapiteln 4 und 5 werden verschiedene Rückführungen für die Auslegung der indirekten bzw. direkten Kippvermeidung verwendet. Als mögliche Rückführgrößen, d. h. als Ausgabegleichungen des mechanischen Systems, sollen im Folgenden die Gierrate  $r$ , die Wankrate  $\dot{\phi}$ , die Aufbauquerbeschleunigung  $a_{y,2}$  und der Kippkoeffizienten  $R$  betrachtet werden. Entsprechend ist der Ausgangsvektor definiert als

$$\mathbf{y} := \begin{bmatrix} r & \dot{\phi} & a_{y,2} & R \end{bmatrix}^T . \quad (\text{A.7.89})$$

Aufbauquerbeschleunigung  $a_{y,2}$  und Kippkoeffizient  $R$  ergeben sich aus der Linearisierung der Gln. (A.3.66) und (A.3.67) um die stationäre Geradeausfahrt (entsprechend (2.3.16)) zu

$$a_{y,2} = v(\dot{\beta} + r) - h \ddot{\phi} \quad (\text{A.7.90})$$

und

$$R = \frac{2m_2}{Tm} \left( (h_R + h) \frac{a_{y,2}}{g} + h \dot{\phi} \right) = a_R a_{y,2} + b_R \dot{\phi} , \quad (\text{A.7.91})$$

wobei

$$a_R = \frac{2m_2(h_R + h)}{Tmg} \quad \text{und} \quad b_R = \frac{2m_2 h}{Tm} .$$

Aus (A.4.84), (A.4.85), (A.7.90) und (A.7.91) folgt die Ein-Ausgangsbeziehung

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}_u^y \mathbf{u} \quad (\text{A.7.92})$$

mit

$$\mathbf{G}_u^y = \mathbf{T} \cdot \mathbf{G}_N^{-1} \cdot \mathbf{G}_Z$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \\ v s & v & -h s^2 \\ a_R v s & a_R v & -a_R h s^2 + b_R \end{bmatrix} .$$

### A.7.2 Stationäre Verstärkungen

Die Matrix der stationären Verstärkungen vom Vektor der Eingangs- und Störgrößen  $\begin{bmatrix} \delta_V & F_{y,S} & M_{z,S} & M_{x,S} \end{bmatrix}^T$  zum Vektor  $\begin{bmatrix} \beta & r & \phi \end{bmatrix}^T$  ergibt sich aus Gl. (A.4.85) zu

$$\mathbf{G}_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{c_V (c_H l_H l - l_V m v^2)}{M^*} & \frac{-c_V l_V + c_H l_H - m v^2}{M^*} & \frac{c_V l_V^2 + c_H l_H^2}{M^*} & 0 \\ \frac{c_V c_H l v}{M^*} & \frac{(c_V + c_H) v}{M^*} & \frac{-c_V l_V v + c_H l_H v}{M^*} & 0 \\ \frac{c_V c_H h l m_2 v^2}{c_\phi^* M^*} & \frac{(c_V + c_H) h m_2 v^2}{c_\phi^* M^*} & -\frac{h (c_V l_V - c_H l_H) m_2 v^2}{c_\phi^* M^*} & \frac{1}{c_\phi^*} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7.93})$$

mit

$$M^* = c_V c_H l^2 + (c_H l_H - c_V l_V) m v^2$$

$$c_\phi^* = (c_\phi - m_2 g h) .$$

Eine in der Fahrzeugtechnik häufig verwendete Größe ist die *charakteristische Geschwindigkeit* [86]:

$$v_{char} = \sqrt{\frac{c_V c_H l^2}{(c_H l_H - c_V l_V) m}} . \quad (\text{A.7.94})$$

Diese eingesetzt in Gl. (A.7.93) ergibt

$$\mathbf{G}_\infty = \begin{bmatrix} \frac{(c_H l l_H - l_V m v^2) v_{char}^2}{c_H l^2 (v^2 + v_{char}^2)} & \frac{c_V c_H l^2 - m^2 v^2 v_{char}^2}{c_V c_H l^2 m (v^2 + v_{char}^2)} & \frac{(c_V l_V^2 + c_H l_H^2) v_{char}^2}{c_V c_H l^2 (v^2 + v_{char}^2)} & 0 \\ \frac{v v_{char}^2}{l (v^2 + v_{char}^2)} & \frac{(c_V + c_H) v v_{char}^2}{c_V c_H l^2 (v^2 + v_{char}^2)} & \frac{v}{m (v^2 + v_{char}^2)} & 0 \\ \frac{h m_2 v^2 v_{char}^2}{l c_\phi^* (v^2 + v_{char}^2)} & \frac{(c_V + c_H) h m_2 v^2 v_{char}^2}{c_V c_H l^2 c_\phi^* (v^2 + v_{char}^2)} & \frac{h m_2 v^2}{m c_\phi^* (v^2 + v_{char}^2)} & \frac{1}{c_\phi^*} \end{bmatrix} . \quad (\text{A.7.95})$$

Weiterhin gilt bei stationärer Kurvenfahrt der Zusammenhang:

$$a_{y,1\infty} = a_{y,2\infty} = v r_\infty . \quad (\text{A.7.96})$$

Mit Gl. (A.7.91) folgt für die stationäre Verstärkung des Kippkoeffizienten

$$R_\infty = a_R v r_\infty + b_R \phi_\infty . \quad (\text{A.7.97})$$

## A.8 Numerische Werte der Fahrzeugparameter

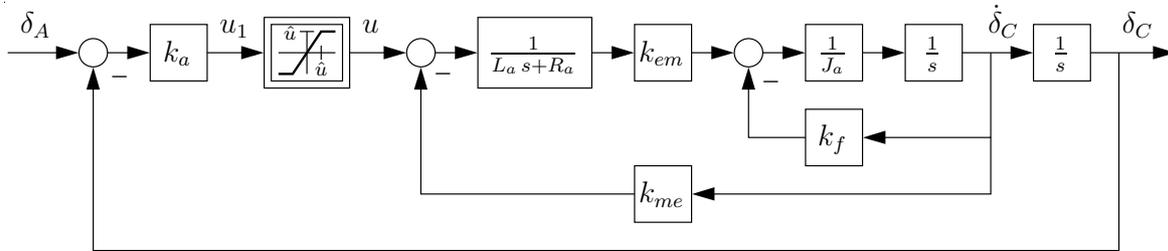
Die in Tabelle A.2 aufgeführten numerische Werte für die Fahrzeugparameter wurden aus [80] übernommen bzw. angenommen.

**Tabelle A.2:** Bezeichnungen und nominelle numerische Werte der Fahrzeugparameter.

$c_{V,0}$	582 kN/rad	Schräglaufsteifigkeit vorne
$c_{H,0}$	783 kN/rad	Schräglaufsteifigkeit hinten
$c_\phi$	457 kN m/rad	Wanksteifigkeit
$d_\phi$	1.75 kN/grad	Wankdämpfung
$g$	9.81 m/s <sup>2</sup>	Gravitationsbeschleunigung
$h$	1.15 m	Nominelle Höhe des Aufbauswerpunkts über der Rollachse
$h_R$	0.68 m	Höhe der Rollachse über der Straße
$J_{1,z}$	3654 kg m <sup>2</sup>	Trägheitsmoment um die Hochachse (Fahrwerk)
$J_{2,x}$	24201 kg m <sup>2</sup>	Trägheitsmoment um die Rollachse (Aufbau)
$J_{2,z}$	34917 kg m <sup>2</sup>	Trägheitsmoment um die Hochachse (Aufbau)
$l_V$	1.95 m	Abstand SP <sub>1</sub> -Vorderachse
$l_H$	1.54 m	Abstand SP <sub>1</sub> -Hinterachse
$l$	3.49 m	Radstand: $l = l_V + l_H$
$m_1$	1813 kg	Masse des Fahrwerks
$m_2$	12487 kg	Masse des Aufbaus
$m$	14300 kg	Gesamtmasse des Fahrzeugs: $m = m_1 + m_2$
$\mu$	1	Kraftschlusskoeffizient Reifen/Straße (nomineller Wert)
$T$	1.86 m	Gemittelte Spurweite vorne/hinten

## B Modell des Lenkaktuators

Bild B.1 zeigt das Modell eines Lenkaktuators, d. h. eines Elektromotors mit unterlagerter Positionsregelung, der dazu verwendet wird, den Zusatzlenkwinkel  $\delta_C$  für die Vorderradlenkung zu stellen. Bezeichnungen und numerische Werte der Modellpara-



**Bild B.1:** Struktur des Aktuatormodells mit nichtlinearer Spannungsbegrenzung.

meter sind in Tabelle B.1 angegeben. Die dort gewählten Werte wurden angenommen bzw. aus [42] übernommen. Die nichtlineare Spannungsbegrenzung zwischen  $u_1$  und  $u$  in Bild B.1 entspricht näherungsweise einer Begrenzung der Stellrate  $\dot{\delta}_C$ . Unter der Annahme eines 12 V-Bordnetzes ist die Spannung auf einen Wert  $|u| \leq \hat{u} = 12 \text{ V}$  begrenzt. Stationär beträgt das Verhältnis zwischen Zusatzlenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\delta}_C$  und Spannung  $u$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{\delta}_C(t)}{u(t)} = \frac{k_{em}}{R_a k_f + k_{me} k_{em}}. \quad (\text{B.0.1})$$

Der Betrag der Stellratenbegrenzung im eingeschwungenen Zustand lässt sich damit angeben zu

$$\hat{\delta}_C = \frac{k_{em} \hat{u}}{R_a k_f + k_{me} k_{em}}. \quad (\text{B.0.2})$$

Nach Einsetzen der numerischen Werte aus Tabelle B.1 ergibt sich der Wert  $\hat{\delta}_C \approx 550^\circ/\text{s}$ . Die Übertragungsfunktion des linearisierten Aktuatormodells ergibt sich aus

**Tabelle B.1:** Bezeichnungen und numerische Werte des Lenkaktuatormodells.

$J_a$	0.00619 kg m <sup>2</sup>	Trägheitsmoment Motor
$k_f$	0.0619	Dämpfungskoeffizient Motor
$L_a$	0.0759 H	Induktivität Rotor
$R_a$	5 $\Omega$	Ohmscher Widerstand Rotor
$k_{me} = k_{em}$	0.9	Elektromechanische Konstante
$k_a$	16.186	Reglerverstärkung der Aktuator-Positionsregelung
$\hat{u}$	12 V	Spannungsbegrenzung

Bild B.1 unter Vernachlässigung der Sättigung zu

$$G_a(s) = \frac{k_{em}k_a}{J_a L_a s^3 + (k_f L_a + J_a R_a) s^2 + (k_{me} k_{em} + k_f R_a) s + k_{em} k_a} \quad (\text{B.0.3})$$

Nachfolgend soll vereinfachend von der Aktuator-Übertragungsfunktion

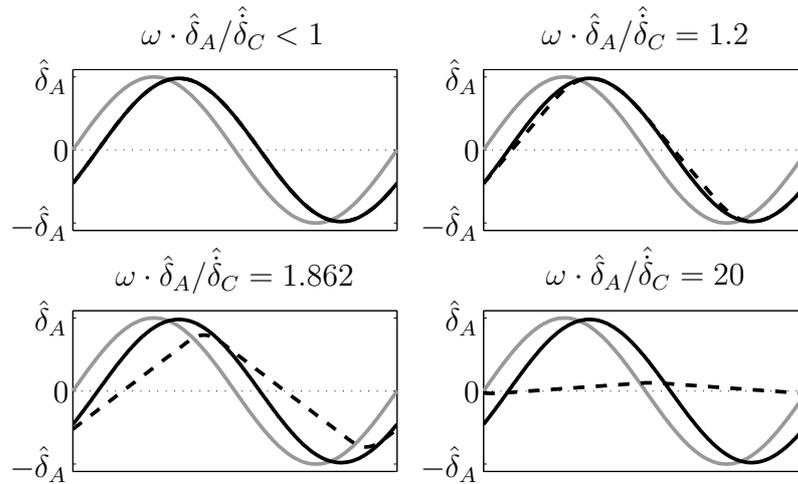
$$G_a(s) = \frac{\omega_a^3}{(s^2 + 2d_a \omega_a s + \omega_a^2)(s + \omega_a)} \quad (\text{B.0.4})$$

mit

$$\omega_a = \sqrt[3]{\frac{k_{em} k_a}{J_a L_a}} \quad \text{und} \quad d_a = \frac{1}{2} \left( \frac{k_f L_a + J_a R_a}{J_a L \omega_a} - 1 \right)$$

ausgegangen werden. Einsetzen der numerischen Werte aus Tabelle B.1 ergibt für Dämpfung und Eigenfrequenz des Aktuators  $d_a = 1/\sqrt{2}$  und  $\omega_a = 10\pi$ . Hierbei sei angemerkt, dass eine entsprechende Butterworth-Konfiguration des Aktuators entsprechend (B.0.4) eine Dämpfung von  $d_a = 0.5$  implizieren würde. Ergebnisse aus Fahrversuchen in [9] zeigen jedoch, dass die Aktuatordynamik wesentlich besser, d. h. entsprechend des oben angegebenen Werts von  $1/\sqrt{2}$ , bedämpft ist.

Um die Wirkungsweise der Spannungsbegrenzung und ihren Einfluss auf das Systemverhalten zu verdeutlichen, wird, entsprechend der Vorgehensweise in [31], der Lenkaktuator mit sinusförmigen Eingangssignalen unterschiedlicher Frequenz  $\omega$  angeregt. In Bild B.2 ist der zeitliche Verlauf des Eingangssignals  $\delta_A(t) = \hat{\delta}_A \cdot \sin(\omega t)$  sowie die Zeitantworten des eingeschwingenen Aktuators im Vergleich mit und ohne Spannungsbegrenzung zu sehen. Die Aussage, dass die Form der Zeitantworten beim nichtlinearen Stellratenbegrenzer nur vom Wert des Verhältnisses  $\omega \cdot \hat{\delta}_A / \hat{\delta}_C < 1$  abhängen [44, 31], lässt sich näherungsweise auch auf dieses Aktuatormodell übertragen. Ist die Spannungsbegrenzung aktiv, kann eine zusätzliche Phasenverzögerung von bis zu  $-90^\circ$  auftreten.



**Bild B.2:** Zeitantworten des eingeschwingenen Aktuatorsmodells ohne Spannungsbegrenzung (durchgezogen, schwarz) und mit Spannungsbegrenzung (gestrichelt, schwarz) auf sinusförmige Eingangssignale  $\delta_A(t) = \hat{\delta}_A \cdot \sin(\omega t)$  (durchgezogen, grau) für unterschiedliche Werte von  $\omega \cdot \hat{\delta}_A / \hat{\delta}_C$ .

Ein weiterer nichtlinearer Effekt, der zu Grenzyklen führen kann, jedoch hier vernachlässigt wurde, ist die Strombegrenzung. Diese entspricht einer Begrenzung des Motordrehmoments und dient als Überlastschutz. Wird anstelle des 12 V-Bordnetzes von einem 42 V-Bordnetz ausgegangen, so wird theoretisch auch der Betrag der Stellratenbegrenzung um den entsprechenden Wert erhöht. In diesem Fall wird in der Regel bei entsprechendem Aktuatorstellsignal die Strombegrenzung als Überlastschutz noch vor der Spannungsbegrenzung ansprechen.

## Literaturverzeichnis

- [1] J. Ackermann, „Parameter space design of robust control systems“, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Bd. 25, S. 1058–1072, 1980.
- [2] J. Ackermann, „Robust control prevents car skidding“, *IEEE Control Systems Magazine*, S. 23–31, June 1997. Bode Prize Lecture 1996.
- [3] J. Ackermann, „Robust unilateral decoupling of the influence of the yaw motion on the lateral acceleration of a car“, in *Proc. International Conference on Advances in Vehicle Control and Safety*, (Amiens, France), S. 105–111, July 1998.
- [4] J. Ackermann, A. Bartlett, D. Kaesbauer, W. Sienel und R. Steinhauser, *Robuste Regelung. Analyse und Entwurf von linearen Regelungssystemen mit unsicheren physikalischen Parametern*. Berlin: Springer, 1993.
- [5] J. Ackermann, P. Blue, T. Bünte, L. Güvenc, D. Kaesbauer, M. Kordt, M. Muhler und D. Odenthal, *Robust Control: The Parameter Space Approach*. London: Springer, 2002.
- [6] J. Ackermann und T. Bünte, „Handling improvement for robustly decoupled car steering dynamics“, in *Proc. 4th IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control & Automation*, (Chania, Crete, Greece), 1996.
- [7] J. Ackermann und T. Bünte, „Automatic car steering control bridges over the driver reaction time“, *Kybernetika*, Bd. 33, Nr. 1, S. 61–74, 1997.
- [8] J. Ackermann, T. Bünte, J. Dietrich, B. Gombert und B. Willberg, „Aktuator zum Korrigieren eines über das Lenkrad eines Fahrzeugs an die Räder einer gelenkten Achse eingegebenen Lenkwinkels“. Patentanmeldung 197 50 585.6 Deutsches Patentamt München, Europäisches Patentamt EP 0 916 568 A2, 1997. Anmeldung 17.11.1997, erteilt im August 2001.
- [9] J. Ackermann, T. Bünte, H. Jeebe, K. Naab und W. Sienel, „Fahrsicherheit durch robuste Lenkregelung“, *Automatisierungstechnik*, S. 219–225, May 1996.
- [10] J. Ackermann und D. Odenthal, „Robust steering control for active rollover avoidance of vehicles with elevated center of gravity“, in *Proc. International Conference on Advances in Vehicle Control and Safety*, (Amiens, France), S. 118–123, July 1998.

- [11] J. Ackermann und D. Odenthal, „Damping of vehicle roll dynamics by gain scheduled active steering“, in *Proc. European Control Conference*, (Karlsruhe, Germany), 1999.
- [12] J. Ackermann, D. Odenthal und T. Bunte, „Advantages of active steering for vehicle dynamics control“, in *Proc. 32nd International Symposium on Automotive Technology and Automation*, (Vienna), S. 263–270, 1999.
- [13] J. Ackermann, W. Sienel, T. Bunte, H. Jeebe und K. Naab, „Aktiv geregelte Autolenkung“, Techn. Ber., DLR, Oberpfaffenhofen, Germany, 1995. Projektabschlussbericht Verbundprojekt BMW/DLR.
- [14] M. A. Aiserman und F. R. Gantmacher, *Die absolute Stabilität von Regelsystemen*. München: Oldenbourg, 1965.
- [15] B. Aksun Güvenc, T. Bunte, D. Odenthal und L. Güvenc, „Robust two degree of freedom vehicle steering controller design“, in *Proc. American Control Conference*, (Arlington, VA, USA), June 2001.
- [16] B. Aksun Güvenc, L. Güvenc, D. Odenthal und T. Bunte, „Robust two degree of freedom vehicle steering control satisfying mixed sensitivity constraint“, in *Proc. European Control Conference*, (Porto, Portugal), Sept. 2001.
- [17] R. W. Allen, H. T. Szostak, D. H. Klyde, T. J. Rosenthal und K. J. Owens, „Vehicle dynamic stability and rollover“, Techn. Ber., Systems Technology, Inc., Hawthorne, CA, 1992. U.S.-D.O.T., NHTSA.
- [18] F. Allgöwer, „Neue Methoden der Mehrgrößenregelung“, Skriptum zur Vorlesung, Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik, Universität Stuttgart, 1994.
- [19] G. Balas, J. Doyle, K. Glover, A. Packard und R. Smith, *The  $\mu$  analysis and synthesis toolbox*. The MathWorks, Inc., 1995.
- [20] S. Barnett, *Polynomials and Linear Control Systems*. New York: M. Dekker, 1983.
- [21] H. O. Becher, *Wankstabilisierung*. Dissertation, Universität Darmstadt, 1991.
- [22] V. Besson und A. T. Shenton, „Interactive control system design by a mixed  $H_\infty$ -parameter space method“, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Bd. 42, S. 946–955, July 1997.
- [23] V. Besson und A. T. Shenton, „An interactive parameter space method for robust performance in mixed sensitivity problems“, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Bd. 44, S. 1272–1276, June 1999.
- [24] C. Beyer, F. Hecker und H. Schramm, „Electronic stability program for commercial vehicles“. Internationale Automobil-Ausstellung für Nutzfahrzeuge, Frankfurt, 1998.

- [25] P. Blue, L. Güvenc und D. Odenthal, „Large envelope flight control satisfying  $H_\infty$  robustness and performance specifications“, in *Proc. American Control Conference*, (Arlington, VA, USA), June 2001.
- [26] P. Blue, D. Odenthal und M. Muhler, „Large envelope flight control with guaranteed robust performance without gain-scheduling“, in *Proc. AIAA, Guidance, Navigation and Control Conference*, (Monterey, CA, USA), August 2002.
- [27] H. Bode, *Network analysis and feedback amplifier design*. New York: D. van Nostrand Company, Inc., 1945.
- [28] „Fahrsicherheitssysteme“. Robert Bosch GmbH (Hrsg.), Vieweg Verlag, Wiesbaden, 1998. 2. Auflage.
- [29] H. Bremer, *Dynamik und Regelung mechanischer Systeme*. Stuttgart: Teubner Studienbücher, 1988.
- [30] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*. Thun und Frankfurt (Main): Harri Deutsch Verlag, 1987.
- [31] T. Bünte, *Beiträge zur robusten Lenkregelung von Personenkraftwagen*. Dissertation, RWTH Aachen, 1998. VDI Fortschritt-Bericht, Reihe 12, Nr. 366, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1998.
- [32] T. Bünte, „Mapping of Nyquist/Popov Theta-stability margins into parameter space“, in *Proc. 3rd IFAC Symposium on Robust Control Design*, (Prague, Czech Republic), 2000.
- [33] T. Bünte, „Die Anwendung des Parameterraumverfahrens auf Ortskurvenkriterien“, *Automatisierungstechnik*, Bd. 49, S. 547–556, December 2001.
- [34] T. Bünte, D. Odenthal, B. Aksun Güvenc und L. Güvenc, „Robust vehicle steering control design based on the disturbance observer“, in *Proc. 3rd IFAC Workshop on Advances in Automotive Control*, (Karlsruhe), S. 107–116, 2001.
- [35] T. Bünte, D. Odenthal, B. Aksun Güvenc und L. Güvenc, „Robust vehicle steering control design based on the disturbance observer“, *accepted for Annual Reviews of Control*, 2002.
- [36] C. Canudas-De-Wit und P. Billot, „Human-friendly control design for drive-by-wire steering vehicles“, in *Proc. 3rd IFAC Workshop on Advances in Automotive Control*, (Karlsruhe), S. 69–74, 2001.
- [37] C. Canudas-De-Wit, S. Guegan und A. Richard, „Control design for an electro power steering system: Part I the reference model“, in *Proc. European Control Conference*, (Porto, Portugal), S. 3611–3616, 2001.
- [38] C. Canudas-De-Wit, S. Guegan und A. Richard, „Control design for an electro power steering system: Part II the control design“, in *Proc. European Control Conference*, (Porto, Portugal), S. 3617–3623, 2001.

- [39] R. Y. Chiang und M. G. Safonov, *Robust control toolbox*. The MathWorks, Inc., 1992.
- [40] J. Chrstos und D. Guenther, *Vehicle dynamics and rollover propensity research*, Bd. SP-909, ch. The measurement of static rollover metrics, S. 131–142. Society of Automotive Engineers, Inc., 1992.
- [41] M. Debes, E. Herb, R. Müller, G. Sokoll und A. Straub, „Dynamische Stabilitäts Control DSC der Baureihe 7 von BMW - Teil 1/2“, *Automobiltechnische Zeitschrift*, Bd. 99, Nr. 3/4, S. 134–140, 208–213, 1997.
- [42] D.M.Dawson, J. Hu und T. Burg, *Nonlinear Control of Electric Machinery*. New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker Inc., 1998.
- [43] J. C. Doyle, B. A. Francis und A. R. Tannenbaum, *Feedback control theory*. New York: MacMillan Publishing Company, 1992.
- [44] H. Duda, *Fliegbarkeitskriterien bei begrenzter Stellgeschwindigkeit*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, April 1997. Forschungsbericht 97-15, Deutsche Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt e.V., Köln.
- [45] H. Dugoff, P. Fancher und L. Segel, „Tire performance characteristics affecting vehicle response to steering and braking control inputs“, Techn. Ber., Highway Safety Research Institute (HSRI), University of Michigan, Ann Arbor, 1969. Final Report National Bureau of Standards Contract CST-460.
- [46] R. Eger, *Schätzung von Fahrzeugüberschlägen*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1999. Shaker Verlag.
- [47] R. Eger, R. Majjad und N. Nasr, „Rollover simulation based on a nonlinear model“, *SAE*, Nr. 980208, 1998.
- [48] S. Feick, M. Pandit, M. Zimmer und R. Uhler, „Steer-by-wire as a mechatronic implementation“, *SAE*, Nr. 2000-01-0823, 2000.
- [49] K.-T. Feng, H.-S. Tan und M. Tomizuka, „Automatic steering control of vehicle lateral motion with the effect of roll dynamics“, in *Proc. American Control Conference*, (Philadelphia), 1998.
- [50] R. Fleck, D. Hennecke und A. Pauly, „Active Front Steering: Das Steer-by-Wire system der BMW-Group zur Optimierung von Lenkkomfort, Fahrzeugagilität und -stabilität“. Veranstaltungsunterlagen, PKW-Lenksysteme – Vorbereitung auf die Technik von morgen, Haus der Technik, Essen, 3./4. Apr. 2001.
- [51] O. Föllinger, *Nichtlineare Regelungen II*. München: Oldenbourg, 1993.
- [52] O. Föllinger, *Nichtlineare Regelungen I*. München: Oldenbourg, 1998.
- [53] R. Frazer und W. Duncan, „On the criteria for the stability of small motions“, in *Proc. Royal Society A*, Bd. 124, S. 642–654, 1929.

- [54] J. S. Freudenberg und D. P. Looze, „Right half plane poles and zeros and design tradeoffs in feedback systems“, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Bd. 30, Nr. 6, S. 555–565, 1985.
- [55] F. Frühauf und R. Rutz, „Innovisia – eine aktive Federung für den Reisebus“, *Automatisierungstechnik*, Bd. 46, S. 120–127, 1998.
- [56] P. Gahinet, A. Nemirovsky, A. Laub und M. Chilali, *The LMI Control Toolbox*. The MathWorks, Inc., 1995.
- [57] W. Garrott und G. Heydinger, *Vehicle dynamics and rollover propensity research*, Bd. SP-909, ch. An investigation, via simulation, of vehicle characteristics that contribute to steering maneuver induced rollover, S. 159–174. Society of Automotive Engineers, Inc., 1992.
- [58] S. Germann und R. Isermann, „Determination of the centre of gravity height of a vehicle with parameter estimation“, in *IFAC Symposium on System Identification*, (Copenhagen), 1994.
- [59] V. Gersbach, I. Schmid und W. Rasch, „Vergleich von Verfahren zur Messung von Radlastschwankungen“, *ATZ Automobiltechnische Zeitschrift 80*, Nr. 7/8, 1978.
- [60] J. Grandel, F. Berg und W. Niewöhner, „Sicherheitsanalyse im Straßengüterverkehr“. Berichte der Bundesanstalt für Straßenwesen, 1993. Mensch und Sicherheit, Heft Nr. 7.
- [61] L. Güvenc, T. Bünte, B. Aksun Güvenc und D. Odenthal, „Regelung des dynamischen Verhaltens eines Fahrzeugs um eine definierte Achse“. Patentanmeldung 100 61 966.5, Deutsches Patentamt München, 2000. Anmeldung 13.12.2000, European Patent Application 01129567.2, 12.12.2001.
- [62] C. Halfmann, H. Holzmann, R. Schwarz und M. Würtenberger, „Identifikation der Wankdynamik eines Kraftfahrzeugs mit Parameterschätzverfahren und Neuronalen Netzen“, *Automatisierungstechnik*, Bd. 46, Nr. 9, S. 420–425, 1998.
- [63] F. Hecker, S. Hummel, O. Jundt, K.-D. Leimbach, I. Faye und H. Schramm, „Vehicle dynamics control for commercial vehicles“, *SAE*, Nr. 973284, 1997.
- [64] J. Hinch, S. Shadle und T. Klein, *Vehicle dynamics and rollover propensity research*, Bd. SP-909, ch. NHTSA’s rollover rulemaking program – results of testing and analysis, S. 117–130. Society of Automotive Engineers, Inc., 1992.
- [65] W. Hirschberg, „Beladungs-Identifikation als eine Basis für die Dynamik von Nutzfahrzeugen“. Kolloquium über neuere Arbeiten auf dem Gebiet der Mechanik, Technische Universität Wien, 1999.
- [66] W. Hirschberg, H. Weinfurter und C. Jung, *Ermittlung der Potenziale zur LKW-Stabilisierung durch Fahrdynamiksimulation*. VDI-Berichte 1559, Berechnung und Simulation im Fahrzeugbau, VDI, Düsseldorf, 2000.

- [67] I. Horowitz, *Synthesis of feedback systems*. New York: Academic Press, 1963.
- [68] C. Jung und W. Hirschberg, *EUROMOTOR Seminar: Understanding human monitoring and assesment, TNO Delft, November 20-21, 1997*, ch. Payload monitoring as one basis for commercial vehicles dynamics. Amsterdam: Swets & Zeitlinger, 1998.
- [69] P. T. Kabamba und S. Boyd, „On parametric  $H_\infty$  optimization“, in *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, Bd. 2, S. 1354–1355, 1988.
- [70] D. Kaesbauer, „Solving nonlinear parametric mapping equations“, in *Proc. 3rd IFAC Symposium on Robust Control Design*, (Prague, Czech Republic), 2000.
- [71] D. Karnopp, „System zur Verbesserung der Wankdynamik eines Kraftfahrzeuges“. Patent No. P 40 31 317 A1 Deutsches Patentamt München, 1992. Anmeldung 4.10.90, erteilt 9.4.92.
- [72] J. Kasselmann und T. Keranen, „Adaptive steering“, *Bendix Technical Journal*, Bd. 2, S. 26–35, 1969.
- [73] U. Kiencke und L. Nielsen, *Automotive Control Systems for Engine Driveline and Vehicle*. Berlin: Springer, 2000.
- [74] T. Klein, *Vehicle dynamics and rollover propensity research*, Bd. SP-909, ch. A statistical analysis of vehicle rollover propensity and vehicle stability, S. 143–158. Society of Automotive Engineers, Inc., 1992.
- [75] D. Konik, R. Bartz, F. Bärnthol, H. Bruns und M. Wimmer, „Dynamic Drive – the new active roll stabilization system from BMW Group – system description and functional improvements“, in *Proceedings of AVEC 2000, 5th Int'l Symposium on Advanced Vehicle Control*, (Ann Arbor, Michigan), June 2000.
- [76] W. Krämer und M. Hackl, „Potential functions and benefits of electronic steering assistance“, in *XXVI Fisista Congress*, (Praha), June 17-21 1996.
- [77] G. Kreisselmeier, „Struktur mit zwei Freiheitsgraden (two-degree of freedom controller structure)“, *Automatisierungstechnik*, Bd. 47, S. 266–269, 1999.
- [78] G. Krisper und J. Reichweger, „Die stationäre Kreisfahrt von Lastkraftwagen“, *AI Automobil-Industrie*, Bd. 26, Nr. 1, S. 89–98, 1981.
- [79] T. Kutsche und H. O. Becher, „Pneumatische und elektronische Fahrwerksregelung für Nutzfahrzeuge“, *System Partners 98*, Bd. 11, S. 74–79, 1998. Sonderausgabe ATZ/MTZ.
- [80] R. C. Lin, D. Cebon und D. J. Cole, „Optimal roll control of a single-unit lorry“, in *Proc. IMechE*, Bd. 210, Part D, S. 45–55, 1996.
- [81] J. M. Maciejowski, *Multivariable Feedback Design*. Electronic Systems Engineering Series, Addison-Wesley, 1989.

- [82] K. Magnus, *Kreisel — Theorie und Anwendungen*. Berlin: Springer, 1974.
- [83] J. Mareczek, D. Wollherr, M. Buss und G. Schmidt, „Überschlagsvermeidung bei Kraftfahrzeugen durch Invarianzregelung“, *at - Automatisierungstechnik*, Bd. 50, Nr. 2, S. 70–78, 2002.
- [84] The MathWorks, Inc., Natick, MA, USA, *Using MATLAB*, Nov. 2000.
- [85] H.-G. Metzler, „Assistenzsysteme in der Fahrzeugführung“, in *Wohin führen Unterstützungssysteme? Entscheidungshilfe und Assistenz in Mensch-Maschine-Systemen*, ZMMS Spektrum Band 5, (Sinzheim), S. 206–225, Pro Universitate Verl., 1998.
- [86] M. Mitschke, *Dynamik der Kraftfahrzeuge*, Bd. C. Berlin: Springer, 1990.
- [87] M. Muhler und J. Ackermann, „Representing multiple objectives in parameter space using color coding“, in *Proc. 3rd IFAC Symposium on Robust Control Design*, (Prague, Czech Republic), 2000.
- [88] M. Muhler und D. Odenthal, „PARADISE: Ein Werkzeug für Entwurf und Analyse robuster Regelungssysteme im Parameterraum“, in *3. VDI/VDE-GMA Aussprachetag, Rechnergestützter Entwurf von Regelungssystemen*, (Dresden), Sept 2001.
- [89] M. Muhler, D. Odenthal und W. Sienel, *PARADISE User's Manual*. Deutsches Zentrum für Luft und Raumfahrt e. V., Oberpfaffenhofen, 2001. <http://www.op.dlr.de/FF-DR-RR/paradise>.
- [90] A. Müller, W. Achenbach, E. Schindler, T. Wohland und F.-W. Mohn, „Das neue Fahrsicherheitssystem Electronic Stability Program von Mercedes Benz“, *Automobiltechnische Zeitschrift 96*, Bd. 11, S. 656–670, 1994.
- [91] P. C. Müller, *Stabilität und Matrizen. Matrizenverfahren in der Stabilitätstheorie linearer dynamischer Systeme*. Berlin: Springer, 1977.
- [92] A. G. Nalecz, „Development and validation of light vehicle dynamics simulation (LVDS)“, *SAE*, Nr. 920056, 1992.
- [93] D. Odenthal, „Kippvermeidung von Fahrzeugen durch robuste Lenk- und Bremsregelung“, in *Proc. Fahrwerk-Tech 2001*, (München), TÜV Akademie GmbH, 2001.
- [94] D. Odenthal und P. Blue, „Mapping of frequency response magnitude specifications into parameter space“, in *Proc. 3rd IFAC Symposium on Robust Control Design*, (Prague, Czech Republic), 2000.
- [95] D. Odenthal und T. Bünte, „Verfahren zur Reduktion der Kippgefahr von Straßenfahrzeugen“. Patent No. P 19918597 C2 Deutsches Patent- und Markenamt München, 2001. Anmeldung 23.04.1999, erteilt 08.03.2001.

- [96] D. Odenthal, T. Bünte und J. Ackermann, „Nonlinear steering and braking control for vehicle rollover avoidance“, in *Proc. European Control Conference*, (Karlsruhe, Germany), 1999.
- [97] D. Odenthal, T. Bünte, H.-D. Heitzer und C. Eicker, „How to make steer-by-wire feel like power steering“, in *Proc. 15th IFAC World Congress on Automatic Control*, (Barcelona), 2002.
- [98] D. Odenthal, T. Bünte, H.-D. Heitzer und C. Eicker, „Übertragung des Lenkgefühls einer Servo-Lenkung auf Steer-by-Wire“, in *Fachtagung, Steuerung und Regelung von Fahrzeugen und Motoren – AUTOREG 2002*, (Mannheim), Apr. 2002. VDI-Berichte 1672.
- [99] D. Odenthal, T. Bünte und R. Koeppe, „Regelung von Systemen mit kinästhetischer Kopplung“. Patentanmeldung 102 16 247.6, Deutsches Patent- und Markenamt München, 2002. Anmeldung 12.04.2002.
- [100] K. Ohnishi, „A new servo method in mechatronics“, *Trans. Japanese Soc. Electr. Eng.*, Bd. 107-D, S. 83–86, 1987.
- [101] H. Pacejka und E. Bakker, „The magic formula tyre model“, in *Proc. 1st International Colloquium on Tyre Models for Vehicle Dynamic Analysis* (H. Pacejka, ed.), (Delft, The Netherlands), S. 1–18, Amsterdam/Lisse: Swets & Zeitlinger 1993, Oct. 21-22 1991. Supplement to Vehicle System Dynamics, Volume 21.
- [102] L. Palkovics, A. Semsey und E. Gerum, „Roll-over prevention systems for commercial vehicles – additional sensorless function of the electronic brake system“, *Vehicle System Dynamics*, Bd. 32, S. 285–297, 1999.
- [103] V. Popov, „Absolute stability of nonlinear systems of automatic control“, *Autom. & Rem. Control*, Bd. 22, S. 857–875, 1962.
- [104] U. Potthoff, „Robuste Lenkregelung zur Minderung der Kippgefahr von Lastkraftwagen“, Techn. Ber. IB 515-98-20, DLR, Oberpfaffenhofen, Germany, 1998. Betreuer J. Ackermann und D. Odenthal.
- [105] J. Raisch, *Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich*. München: Oldenbourg Verlag, 1994.
- [106] M. Reiter, „Das Parameterraumverfahren: Theorie und Berechnung stabiler Gebiete“. Diplomarbeit, Universität Augsburg, Lehrstuhl für Diskrete Mathematik, Optimierung und Operations Research, 2000. Durchgeführt beim Deutschen Zentrum für Luft und Raumfahrt e. V. Oberpfaffenhofen.
- [107] P. Riekert und T. Schunck, „Zur Fahrmechanik des gummbereiften Kraftfahrzeugs“, *Ingenieur Archiv*, Bd. 11, S. 210–224, 1940.
- [108] G. Rill, *Simulation von Kraftfahrzeugen*. Wiesbaden: Vieweg Verlag, 1994.

- [109] M. Saeki und K. Aimoto, „PID controller optimization for  $H_\infty$  control by linear programming“, *Int. Journal of Nonlinear and Robust Control*, Bd. 10, S. 83–99, 1992.
- [110] W. Schiehlen, *Technische Dynamik*. Stuttgart: Teubner Studienbücher, 1992.
- [111] G. Schmitt, *Der Einsatz von Multisektorenkriterien zur Stabilitätsanalyse nicht-linearer Mehrgrößenregelkreise*. Dissertation, Erlangen, 1997. VDI Fortschritt-Bericht, Reihe 8, Nr. 661, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1997.
- [112] K. H. Schönfeld, „Statische und dynamische Kippgrenzen von Sattelkraftfahrzeugen“, *ATZ Automobiltechnische Zeitschrift* 82, S. 119–124, 1980.
- [113] L. Segel, „Theoretical prediction and experimental substantiation of the response of the automobile to steering control“, in *IMEchE*, S. 310–330, 1956-1957.
- [114] A. T. Shenton und V. Besson, „Robust performance s. i. engine idle-speed control by a mixed-sensitivity parameter-space method“, in *Proc. 3rd IFAC Symposium on Robust Control Design*, (Prague, Czech Republic), 2000.
- [115] W. Sienel, *Analyse und Entwurf von robusten Regelungssystemen durch Konstruktion von komplexen Wertemengen*. Dissertation, Technische Universität München, 1994. erhältlich als VDI Fortschritt-Bericht, Reihe 8, Nr. 476, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1995.
- [116] W. Sienel und T. Bünte, „PARADISE - Eine Matlab-Toolbox für Entwurf und Analyse robuster Regelungen“, *Automatisierungstechnik*, S. 503–512, November 1996.
- [117] S.-G. So und D. Karnopp, „Active dual mode tilt control for narrow ground vehicles“, *Vehicle System Dynamics*, Bd. 27, S. 19–36, 1997.
- [118] R. Strickland und H. McGee, „Evaluation of prototype automatic truck roll-over warning system“, Techn. Ber., U.S. Department of Transportation, Federal Highway Administration, 6300 Georgetown Pike, McLean, VA 22101-2296, 1998. Publication NO. FHWA-RD-97-124.
- [119] Tesis DYNAware Technische Simulation Dynamischer Systeme GmbH, München, *ve-DYNA User manual*, 2000.
- [120] K.-P. Timpe, „Unterstützungssysteme als interdisziplinäre Herausforderung – Einführung in die Tagung „Wohin führen Unterstützungssysteme?““, in *Wohin führen Unterstützungssysteme? Entscheidungshilfe und Assistenz in Mensch-Maschine-Systemen*, ZMMS Spektrum Band 5, (Sinzheim), S. 1–20, Pro Universitate Verl., 1998.
- [121] A. v. Zanten, R. Erhardt und G. Pfaff, „FDR - die Fahrdynamikregelung von Bosch“, *Automobiltechnische Zeitschrift*, Bd. 96, S. 674–689, 1994.

- [122] A. v. Zanten, R. Erhardt und G. Pfaff, „Die Fahrdynamikregelung von Bosch“, *Automatisierungstechnik*, Bd. 44, Nr. 7, S. 359–365, 1996.
- [123] D. Šiljak, *Nonlinear systems: the parameter analysis and design*. New York: Wiley, 1969.
- [124] H. Wallentowitz, E. Donges und J. Wimberger, „Die Aktive-Hinterachs-Kinematik (AHK) des BMW 850 Ci, 850 CSi“, *ATZ Automobiltechnische Zeitschrift*, Bd. 94, S. 618–628, 1992.
- [125] S. Wolfram, *The Mathematica Book*. Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999. 4th ed.
- [126] D. Wollherr, J. Mareczek, M. Buss und G. Schmidt, „Rollover avoidance for steerable vehicles by invariance control“, in *Proc. European Control Conference*, (Porto, Portugal), S. 3522–3527, 2001.
- [127] D. N. Wormley, „Analysis of automotive roll-over dynamics“. Course at Carl Cranz Gesellschaft, Oberpfaffenhofen, Germany, 1992.
- [128] K. Zhou, J. Doyle und K. Glover, *Robust and optimal control*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [129] M. Zimmer, „Steer-by-Wire – Eine Herausforderung“, in *Fachtagung, Steuerung und Regelung von Fahrzeugen und Motoren – AUTOREG 2002*, (Mannheim), Apr. 2002. VDI-Berichte 1672.