

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
INSTITUT FÜR ENERGIETECHNIK MW7

LEHRSTUHL FÜR FLUIDMECHANIK

**Multi-Level CFD-Technik**  
**zur Optimierung von Beschaukelungen**  
**Hydraulischer Maschinen**

Norbert Müller

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Th. Sattelmayer

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. R. Schilling
2. Univ.-Prof. W.H. Polifke, Ph.D. (CCNY)

Die Dissertation wurde am 16.11.2005 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 13.02.2006 angenommen.



# Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Fluidmechanik, vormals Lehrstuhl für Hydraulische Maschinen und Anlagen, der Technischen Universität München.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Rudolf Schilling, der mir diese Arbeit ermöglichte und wesentlich zu ihrem Gelingen beitrug. Seine wertvollen Hinweise und die lehrreichen Diskussionen waren mir stets eine große Hilfe.

Herrn Prof. Wolfgang Polifke, Ph.D. danke ich für die Übernahme des Koreferates und das Interesse, das er meiner Arbeit entgegenbrachte. Für den Vorsitz der Prüfungskommission darf ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattelmayer freundlich danken.

Für die außerordentlich gute Zusammenarbeit gebührt meinen Kollegen, die mich in einer ausgezeichneten Arbeitsatmosphäre während der Arbeit begleitet und unterstützt haben, mein aufrichtiger Dank.

Schließlich geht mein Dank ganz besonders herzlich an meine Eltern, die mich durch ihre vielfältige Unterstützung überhaupt erst auf den Weg bis zur Promotion gebracht haben.

München, den 15. Nov. 2005

Norbert Müller





# Inhaltsverzeichnis

<b>Verwendete Formelzeichen und Abkürzungen</b>	<b>VII</b>
<b>Zusammenfassung</b>	<b>XI</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Problemstellung . . . . .	1
1.2 Stand des Wissens . . . . .	2
1.2.1 Anwendung von CFD-Verfahren im Turbomaschinenbau . . . . .	2
1.2.2 Numerische Methoden . . . . .	3
1.3 Zielsetzung . . . . .	6
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>8</b>
2.1 Fluiddynamische Erhaltungsgleichungen . . . . .	8
2.2 Mittelung der Erhaltungsgleichungen . . . . .	9
2.2.1 Reynolds'scher Separationsansatz . . . . .	9
2.2.2 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	10
2.3 Turbulenzmodellierung . . . . .	10
2.3.1 Das Standard- $k$ - $\epsilon$ -Modell von Launder und Spalding . . . . .	11
2.4 Rotierendes Bezugssystem . . . . .	12
2.5 Quasi-dreidimensionale (Q3D) Verfahren . . . . .	13
2.5.1 Q3D-Modellvorstellung . . . . .	13
2.5.2 Euler Q3D-Code mit Stromfunktionsverfahren . . . . .	14
2.5.3 Navier-Stokes Q3D-Code in der Stromfunktion-Vorticity Formulierung . . . . .	17
<b>3 Numerische Verfahren</b>	<b>21</b>
3.1 Finite-Volumen-Diskretisierung . . . . .	21
3.1.1 Definition des Kontrollvolumens . . . . .	22

3.1.2	Approximation der Oberflächen- und Volumenintegrale . . . . .	23
3.1.3	Interpolationsmethoden . . . . .	24
3.1.4	Diskretisierung der konvektiven Flüsse . . . . .	26
3.1.5	Diskretisierung der diffusiven Flüsse . . . . .	27
3.1.6	Diskretisierung beim Stromfunktions-Vorticity-Verfahren . . . . .	28
3.1.7	Diskretisierung der Quellterme . . . . .	30
3.1.8	Allgemeine diskretisierte Transportgleichung . . . . .	32
3.2	Lösung des Gleichungssystems . . . . .	33
3.3	Randbedingungen . . . . .	35
3.3.1	Einströmränder . . . . .	36
3.3.2	Ausströmränder . . . . .	37
3.3.3	Periodische Ränder . . . . .	38
3.3.4	Wände . . . . .	39
3.3.5	Interfaces zwischen Netzblöcken . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Validierung</b>	<b>43</b>
4.1	Ebene Kanalströmung . . . . .	43
4.2	Strömung durch radiale Schaufelgitter . . . . .	50
4.2.1	Gerade Schaufeln mit $\beta_S = 90^\circ$ . . . . .	50
4.2.2	Logarithmisch spiralförmige Schaufeln mit $\beta_S = 30^\circ$ . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>89</b>
5.1	Radiallaufrad RP39 . . . . .	89
5.1.1	Vergleich der Berechnungsverfahren . . . . .	90
5.1.2	Optimierung des Laufrades . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Bewertung und Ausblick</b>	<b>112</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>113</b>

# Verwendete Formelzeichen und Abkürzungen

## Abkürzungen

CAD	Computer Aided Design
CDS	Central Differencing Scheme
CFD	Computational Fluid Dynamics
FLM	Lehrstuhl für Fluidmechanik
E3D	Euler 3D
EQ3D	Euler Quasi-3D
Gl.	Gleichung
NS3D	Navier-Stokes 3D
NSQ3D	Navier-Stokes Quasi-3D
MLCFD	Multi Level CFD
MPI	Message Passing Interface
Q3D	Quasi-3D
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes
RTD	Real-Time Design
stat	statisch, stationär
SIP	Strongly Implicit Procedure
UDS	Upwind Differencing Scheme

## Lateinische Zeichen

$A$	$[m^2]$	Fläche
$\underline{c}$		Vektor der Absolutgeschwindigkeit
$D$		Durchmesser
$E, W, S, N, B, T$		Nachbarzellen
$e, w, s, n, b, t$		Zellflächenmittelpunkte
$F$		Zielfunktion
$\underline{f}$	$[N/m^3]$	Kraftdichte
$g$		Jacobi-Determinante
$\dot{i}$		Koordinaten-Basisvektor
$i$		Zählvariable
$j$		Zählvariable
$k$		Zählvariable
$k$	$[m^2/s^2]$	Turbulente Kinetische Energie

$m$	$[m; Nm]$	Meridiankoordinate; Momentenkomponente
$\dot{m}$	$[kg/s]$	Massenstrom
$\underline{n}$		Normalenvektor
$N$		Zählvariable
$p$	$[N/m^2]$	Druck
$P$		Zellmittelpunkt
$P_k$	$[m^2/s^3]$	Quellterm in k-Gleichung
$q$	$[[\Phi]/s]$	Quellterm allg. Transportgleichung
$r$	$[m]$	Radius
$\underline{r}$	$[m]$	Ortsvektor
$S$	$[m/s^3]$	Quellterm Wirbeltransportgleichung
$t$	$[s; m]$	Zeit; Schaufelteilung
$u$	$[m/s]$	Geschwindigkeitskomponente in $x$ -Richtung
$\underline{u}$	$[m/s]$	Vektor der Führungsgeschwindigkeit bei Rotation
$v$	$[m/s]$	Geschwindigkeitskomponente in $y$ -Richtung
$V$	$[m^3]$	Volumen
$w$	$[m/s]$	Geschwindigkeitskomponente in $z$ -Richtung
$\underline{w}$	$[m/s]$	Vektor der Relativgeschwindigkeit bei Rotation
$\underline{x}$		Vektor im allg. Parameterraum
$x$	$[m]$	Ortskoordinate
$y$	$[m]$	Ortskoordinate
$z$	$[m]$	Ortskoordinate
$Z$		Anzahl der Schaufeln

### Griechische Zeichen

$\alpha$	$[^\circ]$	Stromliniensteigung
$\beta$	$[^\circ]$	Strömungswinkel auf Stromfläche
$\beta_s$	$[^\circ]$	Schaufelwinkel auf Stromfläche
$\delta$	$[m]$	Stromröhrendicke
$\delta_{ij}$	$[1]$	Kronecker-Symbol $i = j : 1 \quad i \neq j : 0$
$\Delta$		Differenzwert; normierte Stromröhrendicke
$\epsilon$	$[m^2/s^3]$	Dissipationsrate
$\epsilon_{ijk}$		Antisymmetrischer Tensor
$\Gamma$		Allg. Diffusionskoeffizient
$\gamma$	$[^\circ]$	Teilungswinkel
$\lambda$	$[1/s]$	Vorticity; Interpolationsfaktor
$\mu$	$[kg/(m s)]$	Dynamische Viskosität
$\nu$	$[m^2/s]$	Kinematische Viskosität
$\varrho$	$[kg/m^3]$	Dichte
$\tau$	$[N/m^2]$	Schubspannung
$\varphi$	$[^\circ]$	Umfangswinkel, Durchflusszahl
$\phi, \bar{\phi}, \phi'$		Momentangröße, Mittelwert, Schwankungsanteil
$\psi$	$[m^3/s; 1]$	Stromfunktion; Druckzahl
$\Theta$	$[m^2/s]$	Drall
$\Omega$	$[1/s]$	Winkelgeschwindigkeit

**Hochgestellte Zeichen**

$c$	convective
$d$	diffusive
$n$	Iterationsschleifenzähler
$T$	Transponierte

**Tiefgestellte Zeichen**

DS	druckseitig
$i, j, k$	Index-Zählvariablen
$g$	Gitterströmung
ges	gesamt
lam	laminar
M	Meridianströmung
$n$	normal
num	numerisch
S	Schaufel
SS	saugseitig
$t$	turbulent; tangential
$x$	$x$ -Richtung
$y$	$y$ -Richtung
$z$	$z$ -Richtung

**Sonstige**

$\partial / \partial t$	Partielle Ableitung nach der Zeit
$\partial / \partial x_i$	Partielle Ableitung nach der Ortskoordinate $x_i$
div	Divergenz
grad	Gradient
rot	Rotation
$\infty$	unendlich



# Zusammenfassung

Für eine zeit- und kostengünstige Optimierung der Geometrie hydraulischer Maschinen, wie z.B. Kreiselpumpen, Turbinen etc., werden zunehmend effiziente numerische Werkzeuge eingesetzt. Ziel ist hierbei, den bestmöglichen hydraulischen Wirkungsgrad zu erreichen unter Einhaltung weiterer Nebenbedingungen, z.B. Kavitationssicherheit, ausreichende Festigkeit und geringe Geräuschentwicklung sowie kleine Baugröße. Eine geeignete Beschreibung der Geometrie dreidimensional (3D) gekrümmter Beschaukelungen mit Hilfe einer B-Spline-Formulierung ist dabei genauso wesentlich wie eine leistungsfähige CFD-Technik, mit deren Hilfe die hydraulischen Eigenschaften des Entwurfs ermittelt und analysiert werden können. Beide Bausteine sollten in einem Programmsystem für den Entwurf und die Optimierung von Beschaukelungen integriert sein. Oft steht das Ziel einer möglichst genauen Erfassung komplexer Geometrien und der exakten Berechnung des Strömungsbetriebsverhaltens im Widerspruch zu den Anforderungen der Industrie, Entwicklungsdauer und -kosten möglichst gering zu halten.

Für eine hinreichend genaue Beschreibung dreidimensional gekrümmter Beschaukelungen von Turbomaschinen wird eine große Anzahl von Parametern benötigt. Somit ist zur Optimierung ihrer Form eine effiziente Strategie erforderlich, die mit einer möglichst kleinen Zahl von Parametervariationen schnell zum Ziel führt. Um den numerischen Aufwand dabei so gering wie möglich zu halten, soll das Konzept einer Multi-Level CFD-Technik (MLCFD-Technik) angewendet werden. Den verschiedenen CFD-Codes liegt hierbei jeweils ein spezifisches Rechenmodell zugrunde. Sie unterscheiden sich in Bezug auf Rechengenauigkeit und -geschwindigkeit: Quasi-dreidimensionale Verfahren ermöglichen aufgrund ihrer reduzierten Betrachtungsweise eine schnelle Aussage über die Strömung, während voll dreidimensionale Verfahren für eine exakte Auswertung eingesetzt werden. Während bei Euler-Verfahren die Reibung vernachlässigt wird und somit ein relativ grobes Rechenetz verwendet werden kann, ist für die Beurteilung der realen Strömungsverluste ein Navier-Stokes-Verfahren erforderlich. Im Einzelnen wurden ein Quasi-3D Euler- (Q3D) und ein Quasi-3D Navier-Stokes-Verfahren (NSQ3D) implementiert und mit den jeweils korrespondierenden 3D Euler- (E3D) bzw. Navier-Stokes-Verfahren (NS3D) verglichen.

Zu Beginn einer Optimierung wird für die initiale Geometrie eines Erstentwurfs die Strömung mit allen Codes nachgerechnet, was u.a. einer Kalibrierung der ungenaueren Q3D-Verfahren mit Hilfe eines 3D-Ergebnisses dient. Eine schnelle Beurteilung einer modifizierten Geometrie kann zunächst auf der Basis einer Berechnung mit einem der Q3D-Codes erfolgen, während eine Feinjustierung der Beschaukelung auf den geforderten Betriebspunkt und eine exakte Bewertung der als optimal eingestuften Variante mit dem NS3D-Code durchgeführt wird. Somit kann der Optimierungsprozess effizient und zeitsparend durchgeführt werden.





# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Problemstellung

Strömungsmaschinen kommen als Arbeits- und Kraftmaschinen in zahlreichen Branchen zum Einsatz, wie z.B. in der Energietechnik, Verfahrenstechnik, Fördertechnik, Fahrzeugtechnik, Gebäudeklimatisierung sowie der Luft- und Raumfahrttechnik. Der Markt dafür steht globalen Wettbewerbern zunehmend offen und ist hart umkämpft.

Hydraulische Strömungsmaschinen sind als Unterklasse von Strömungsmaschinen ein weit verbreitetes Produkt des klassischen Maschinenbaus. Die Gestaltung von Beschaukelungen, Gehäusegeometrie sowie Bauteilen für Zu- und Ablauf beruht auf der Erfahrung von vielen Jahrzehnten. Für viele Standardanwendungen genügt es, katalogisierte und bereits im Einsatz befindliche Bautypen einzusetzen. Bei Großprojekten sind jedoch oftmals individuelle Maßanfertigungen gefragt, die sehr hohen Qualitätsanforderungen genügen müssen.

Aufgrund der Wettbewerbssituation müssen Unternehmen in der Lage sein, immer schneller mit einem Angebot zu reagieren, zunehmend bessere Leistungsmerkmale ihres Produktes anzubieten und die im Angebot gemachten Zusagen auch zuverlässig einzuhalten. Die Anwendung von Computational Fluid Dynamics (CFD), d.h. die Berechnung von Strömungsvorgängen mit Hilfe numerischer Werkzeuge, steht heute in den meisten Großunternehmen vor dem Bau eines Prototyps und dessen experimenteller Untersuchung. Auch mittelständische Unternehmen arbeiten zunehmend daran, den Einsatz numerischer Methoden zur Strömungssimulation fest zu etablieren, um die Entwicklungskosten und -zeiten zu senken.

Dennoch sind bei einer numerisch durchgeführten Auslegung bzw. Optimierung einer neuen Strömungsmaschine viele Einzelschritte erforderlich, die häufig nur von Ingenieuren durchgeführt werden können, die sowohl im Entwerfen als auch im Einsatz numerischer Techniken geschult sind. Ein vollständiger Optimierungszyklus beinhaltet die Auswahl eines auf den geforderten Betriebspunkt zugeschnittenen Erstentwurfs, die Modifikation einer vorhandenen Geometrie aufgrund der Rechenergebnisse, die Nachrechnung und Analyse vieler einzelner Varianten, bis die optimale Variante, d.h. eine Geometrie, die den Anforderungen gerecht wird, gefunden wird.

Der zu variierende Parameterraum kann unter Umständen sehr groß sein, und die

Strömungsnachrechnung für eine einzelne Variante kann je nach verfügbarer Rechnerleistung, geforderter Genauigkeit und Anzahl der zu simulierenden Bauteile zwischen einer halben Stunde und mehreren Tagen dauern. Es sind daher effiziente Strategien erforderlich, die eine Reduktion der Entwicklungszeit für eine neue Strömungsmaschine bei gleichbleibender Genauigkeit der Vorhersage ermöglichen.

## 1.2 Stand des Wissens

### 1.2.1 Anwendung von CFD-Verfahren im Turbomaschinenbau

Im Strömungsmaschinenbau wurden anfänglich mangels Rechnerleistung quasi-dreidimensionale (Q3D) Verfahren zur Berechnung der Strömung in Turbomaschinen eingesetzt. Diese nähern nach der Theorie von WU [55] die tatsächlich dreidimensionale Strömung durch eine Superposition von drei zweidimensionalen Strömungen an. SCHILLING [38, 39] verwendet ein vereinfachtes Q3D-Verfahren im Zusammenhang mit hydraulischen Strömungsmaschinen, in dem eine Anzahl von Gitterströmungen auf rotationssymmetrischen Stromflächen  $S1_i$  mit der Meridianströmung in nur einer repräsentativen Ebene  $S2_m$  superponiert wird. Aufgrund der sehr geringen Rechenzeiten wurden diese Verfahren auch später erfolgreich für den rechnergestützten Entwurf von Beschauelungen im Bereich des Optimalpunktes eingesetzt, s. WÄTZELT [53] und FERNÁNDEZ [7].

Mit steigender Rechnerleistung wurden für die Nachrechnung von Turbomaschinen voll-dreidimensionale Verfahren auf Basis der Euler- bzw. Navier-Stokes-Gleichungen sowie der Energiegleichung herangezogen. Die numerische Berechnung dieser Strömungen basiert auf der Lösung der Erhaltungsgleichungen für die Masse, den Impuls und die Energie. Je nach Art der Strömung wurden in der Vergangenheit spezielle Methoden für inkompressible und kompressible Fluide entwickelt. Abhängig vom Anwendungsbereich der Verfahren wird eine spezielle Formulierung der Gleichungen gewählt. SCHILLING [37] entwickelte ein Navier-Stokes-Verfahren speziell für die Berechnung rotationssymmetrischer Strömungen in Radseitenräumen von Kreiselpumpen.

Die Diskretisierung des Gleichungssystems erfolgt meist über den Finite-Volumen-Ansatz. Hierbei wird das Rechengebiet in kleine Teilvolumina aufgeteilt, über die die Gleichungen integriert werden. Zur Lösung des resultierenden linearen Gleichungssystems werden iterative Verfahren eingesetzt, deren Güte erheblich zur Gesamteffizienz des Verfahrens beiträgt. Da gerade die Rechenzeit ein wichtiges Kriterium für den Einsatz in der Industrie ist, werden im Wesentlichen zwei Methoden zur Effizienzsteigerung eingesetzt. Zum einen sind lineare und nichtlineare Mehrgitterverfahren bei elliptischen Randwertproblemen äußerst erfolgreich, s. HACKBUSCH [10] und SCHRECK und PERIĆ [42]. Zum anderen gibt es einen Trend in Richtung paralleler Verfahren. Vor allem zeichnet sich eine Entwicklung zu heterogenen Rechnernetzen ab. Diese sind im Vergleich zu Hochleistungsparallelrechnern außerordentlich preiswert und in jedem Industrieunternehmen verfügbar.

Mit steigender Rechnerleistung wird auch die zeitechte Simulation von instationären Effekten in Turbomaschinen immer attraktiver. Dabei werden die zeitabhängigen Navier-Stokes-Gleichungen mit einem geeigneten Zeitschrittverfahren gelöst.

Zum Anwendungsbereich von instationären Simulationen gehören die Rotor-Stator-Wechselwirkung und das sogenannte *Clocking* in Turbinenstufen sowie die rotierende Ablösung in Verdichtern. FRITZ [9] simulierte z.B. das zeitechte Verhalten der Interaktion zwischen dem Laufrad und der Spirale einer Kreiselpumpenstufe.

Im Zusammenhang mit der mathematischen Optimierung von Turbomaschinen, in der die Strömungssimulation als extrem zeitkritisch zu bewerten ist, erfahren rechenzeit-sparende Q3D-Verfahren trotz der ausgereiften Entwicklung vorhandener 3D-CFD-Techniken eine vermehrte Anwendung, s. THUM UND SCHILLING [49], SCHILLING ET AL. [40], MÜLLER [24]. Bei SHEN [43] wird ein Quasi-3D Navier-Stokes-Verfahren zur Berechnung der Umströmung eines NACA-Profiles eingesetzt.

## 1.2.2 Numerische Methoden

### 1.2.2.1 CFD-Verfahren

Reale Strömungsvorgänge unterliegen physikalischen Erhaltungsprinzipien, deren Bilanz durch einen bestimmten Satz von mathematischen Differenzialgleichungen ausgedrückt werden kann. Die numerischen Verfahren können daher zunächst nach dem zugrunde liegenden Satz von Gleichungen klassifiziert werden. Bei inkompressiblen Strömungen sind die originären Erhaltungsgrößen für die Masse und den Impuls durch die Kontinuitätsgleichung und die Impulsgleichungen beschrieben, die für reibungsbehaftete Fluide, deren Reibungskräfte durch die Stoke'sche Hypothese ausreichend genau beschrieben werden, auch als Navier-Stokes-Gleichungen bekannt sind. Alternativ dazu kann durch Anwendung des Rotationsoperators auf die Impulsgleichungen und Einführung einer Stromfunktion eine Formulierung in den abgeleiteten fluidodynamischen Variablen Stromfunktion und Vorticity erfolgen.

Eine Stromfunktions-Vorticity-Formulierung bringt insbesondere bei Betrachtung einer zweidimensionalen Strömung Vorteile, da die Lösung des kinematischen Problems, das in diesem Fall durch die zwei skalaren Funktionen, Stromfunktion und Vorticity, definiert ist, entkoppelt von der Verteilung des statischen Druckes erfolgen kann, der bei Bedarf in einem nachfolgenden Schritt aus der Lösung des Stromfeldes berechnet werden kann. Anwendungsbeispiele eines solchen Verfahrens zur Berechnung der Strömung in Turbomaschinen finden sich u.a. bei SCHILLING [36], KHALIL [14], KOSCHEL [16] und SHEN [43].

Die numerischen Verfahren zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen lassen sich entsprechend der von der Kontinuitätsgleichung berechneten Größe nach dichte- und druckbasierten Verfahren klassifizieren. Naturgemäß eignen sich dichtebasierte Verfahren zur Berechnung von kompressiblen Strömungen. Eine Simulation von inkompressiblen Strömungen ist mit dichtebasierten Verfahren – wenn überhaupt – nur sehr ineffizient möglich, da sich die Kontinuitätsgleichung in diesem Fall auf die Forderung nach Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes reduziert und keine unabhängige Gleichung zur Bestimmung des Druckfeldes mehr übrig bleibt. Um diesem Problem zu begegnen, wird in einem sog. Pseudokompressibilitätsverfahren nach einer Idee von CHORIN [4] der Kontinuitätsgleichung ein zusätzlicher Term hinzugefügt, der eine Pseudo-Schallgeschwindigkeit enthält und nach Erreichen der stationären Lösung verschwindet, s. YUAN [56]. Eine detaillierte Beschreibung der Pseudokompressibilitäts-

verfahren findet sich bei KWAK ET AL. [19]. Im Turbomaschinenbau finden Pseudokompressibilitätsverfahren Verwendung z.B. bei RIEDEL [33], der die Strömung durch Wasserturbinen auf Basis der Euler-Gleichungen simuliert.

Druckbasierte Verfahren wurden dagegen zunächst ausschließlich zur Berechnung von inkompressiblen Strömungen entwickelt. Sie setzen sich in der letzten Zeit immer mehr für kompressible Strömungen moderater Mach-Zahlen durch, weil sie keiner besonderen Maßnahmen zur stabilen Berechnung inkompressibler Strömungen bedürfen, s. BADER [1], LILEK [23] und LIEN UND LESCHZINER [22]. Die sog. Druckkorrekturverfahren gewährleisten die Massenerhaltung über eine aus der Kontinuitätsgleichung abgeleitete Gleichung für eine Druckkorrektur. Die bekannteste Form dieser Verfahren ist der SIMPLE<sup>1</sup>-Algorithmus, der in PATANKAR [27] ausführlich dargestellt ist. In der Literatur findet man außerdem Modifikationen dieser Methode, die als SIMPLER [27], SIMPLEC [51] und PISO [12] bezeichnet werden. Ein für komplexe Geometrien modifiziertes Druckkorrekturverfahren findet sich in FERZIGER UND PERIĆ [8]. Im Gegensatz zu den Pseudokompressibilitätsverfahren wird bei den Druckkorrekturverfahren nicht das gekoppelte Gleichungssystem betrachtet, sondern die Erhaltungsgleichungen werden sequentiell gelöst. Tatsächlich ist diese Methodik attraktiv, da durch das sequentielle Vorgehen auch Modellgleichungen für den Transport weiterer fluiddynamischer Größen relativ einfach in das Simulationssystem implementiert werden können.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich dichtebeständige Strömungen untersucht.

### 1.2.2.2 Designoptimierung

#### Real-Time Design

Ein Real-Time Design-System für Turbomaschinen wurde am Lehrstuhl für Fluidmechanik entwickelt und ist bei LEPACH [21] vorgestellt. Es dient als integriertes numerisches Werkzeug zur Nachrechnung und Optimierung und beinhaltet Module für

- problemgerechte Beschreibung der Geometrie,
- Entwurf einer initialen Geometrie nach Vorgabe von Betriebspunktparametern,
- interaktive Modifikation von Beschauungen und Meridiankonturen,
- Strömungsnachrechnung mit einer MLCFD-Technik,
- Postprocessing zur Auswertung lokaler und globaler Ergebnisse.

Komplexe Berechnungen können auf ein Rechner-Cluster verteilt und mit der MPI-Software parallelisiert durchgeführt werden.

Der Erstentwurf kann wahlweise nach diversen Konstruktionsprinzipien, wie z.B. Verwendung von NACA-Profilen bei axialen oder Auslegung nach PFLEIDERER [29] bei radialen Strömungsmaschinen, interaktiv erfolgen. Alternativ kann ein neuronales Netz

---

<sup>1</sup>SIMPLE = Semi Implicit Procedure for Pressure-Linked Equations

zum Einsatz kommen, das eine initiale Geometrie auf der Basis der gewünschten Betriebspunktdaten liefert, s. hierzu KRÄMER [17].

Eine initiale Strömungsnachrechnung wird mit allen in der MLCFD-Technik zur Auswahl stehenden Codes durchgeführt, um eine initiale Lösung auf allen verfügbaren Genauigkeitsebenen zu erzeugen, was u.a. auch der Kalibrierung der Q3D-Ergebnisse durch ein NS3D-Ergebnis dient. Je nach Fortschritt der Optimierung kann der Anwender nun eines der CFD-Verfahren zur Berechnung einer aktuellen Variante auswählen und anhand der Auswertung globaler und lokaler Strömungsergebnisse interaktiv die Geometrie von Beschau felung und Meridiankontur modifizieren. Eine endgültige Verifikation einer optimierten Geometrie wird selbstverständlich auf der Basis des genauesten Rechenverfahrens, also eines NS3D-Codes mit einem geeigneten Turbulenzmodell auf einem sehr fein aufgelösten Netz, erfolgen.

### Optimierungsalgorithmen

Anstelle einer interaktiven Geometriemodifikation durch den Anwender kann auch eine automatische Optimierung gewählt werden, die eine Bewertung der Strömungsergebnisse hinsichtlich der Erfüllung bestimmter Kriterien überprüft und ggf. eine Modifikation von Geometrieparametern vornimmt.

Hierzu wird auf dem  $N$ -dimensionalen Parameterraum  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  eine Zielfunktion  $F(\underline{x})$  definiert, deren Minimierung unter Beachtung von Nebenbedingungen in Form von Gleichungen oder Ungleichungen das Ziel der Optimierung ist, s. ESCHENAUER [6]. Dabei können unterschiedliche Suchalgorithmen zum Einsatz kommen, wie z.B. der sog. „Pattern Search“-Algorithmus von HOOKE & JEEVES [11] oder ein gradientenbasiertes Verfahren wie der FSQP-Algorithmus [20].

Besondere Aufmerksamkeit gebührt an dieser Stelle einer geeigneten Parametrisierung, die mit möglichst wenigen Freiheitsgraden eine vollständige Erfassung der wesentlichen zu modifizierenden Geometriemerkmale liefert. Es hat sich gezeigt, dass ein Optimierungslauf nur dann zielführend ist, wenn immer nur ein Teilaspekt zur Modifikation freigegeben wird, z.B. Veränderungen nur im Bereich der Eintrittskante oder ausschließlich Anpassung der Meridiankontur, s. SCHILLING [40] und THUM [48].

Eine schematische Darstellung der Bausteine dieses integrierten Real-Time Design-Systems ist in der folgenden Abbildung gezeigt.

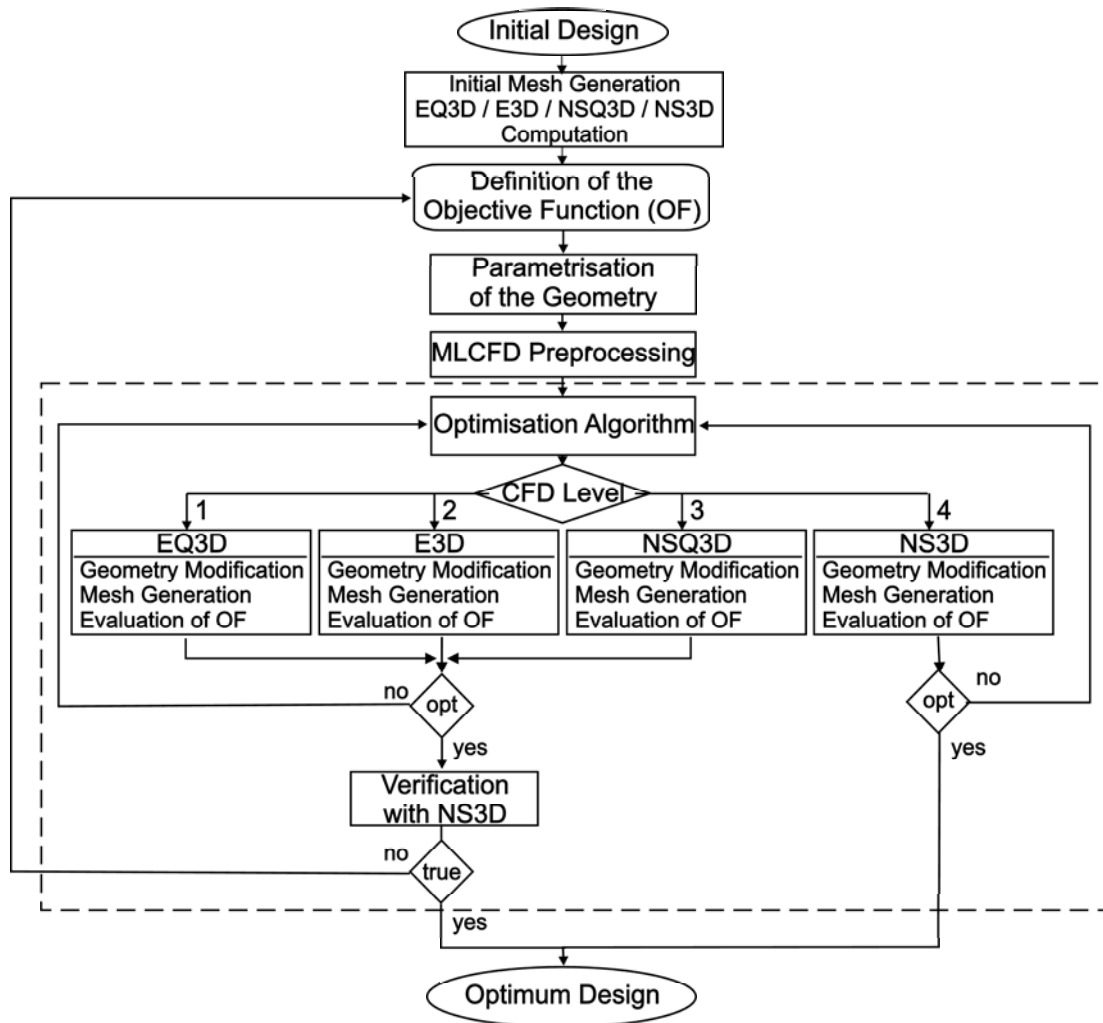


Bild 1.1: Schematische Darstellung der Module des Real-Time Design-Systems.

### 1.3 Zielsetzung

Im Rahmen dieser Arbeit soll eine MLCFD-Technik für den Einsatz bei der Optimierung der Geometrie von Turbomaschinen entwickelt und der Einsatzbereich der unterschiedlichen Rechenverfahren untersucht werden. Dabei sollen in zielführender Weise der Vorteil an Rechengeschwindigkeit durch ein einfaches Verfahren und der Gewinn an Genauigkeit durch ein komplexeres Verfahren miteinander kombiniert werden, um für den gesamten Optimierungsprozess eine Steigerung an Effizienz zu erzielen.

Die einfacheren Berechnungsverfahren sollen auf der Basis einer Q3D-Philosophie eine möglichst genaue Aussage über lokale Druck- und Geschwindigkeitsverteilungen und auch über umfangsgemittelte Verläufe von Strömungsvariablen innerhalb des Schaufelkanals einer Turbomaschine liefern. Für eine schnelle Beurteilung der Schaufelumströmung genügt eine Strömungsnachrechnung auf einigen wenigen repräsentativen Gitterebenen. Eine abschließende exakte Bewertung erfolgt mit einem NS3D-Verfahren, das am Lehrstuhl für Fluidmechanik auch in anderen Forschungsprojekten erfolgreich eingesetzt wird. Erst im finalen Stadium der Optimierung ist eine genaue Analyse der

Strömung unter Verwendung eines geeigneten Turbulenzmodells auf einem hoch aufgelösten Rechengitter erforderlich.

Da dreidimensionale Effekte mit einem Q3D-Verfahren naturgemäß nur unvollständig wiedergegeben werden können, soll untersucht werden, inwiefern eine Kalibrierung einer Q3D-Rechnung mit dem Ergebnis einer volldreidimensional gerechneten Strömung für dieselbe Geometrie zu einer Verbesserung an Genauigkeit führt. Auf der Basis einer solchen Kalibrierung für eine initiale Geometrie können dann auch für modifizierte Geometrien verbesserte Q3D-Ergebnisse erzielt werden, sofern die Geometriemodifikation keine wesentliche Veränderung der Strömung mit sich bringt.

Eine weitere Klassifizierung der Verfahren erfolgt unter den Stichworten „Euler“ und „Navier-Stokes“, je nachdem ob der Einfluss der Reibung in der Berechnung mit berücksichtigt werden soll. REINELT [31] konnte bereits anhand von 3D-Berechnungen bei Turbomaschinen nachweisen, dass unter Vernachlässigung der turbulenten Reibung und mit der Annahme von Euler-Wandrandbedingungen auf einem größeren Rechenetz die lokalen Verteilungen der Strömungsgrößen in sehr guter Übereinstimmung mit einem NS3D-Ergebnis stehen, das unter Verwendung eines  $k$ - $\epsilon$ -Turbulenzmodells gewonnen wurde. Die Idee soll auch auf die Q3D-Philosophie übertragen werden, so dass für die MLCFD-Technik schließlich vier CFD-Verfahren auf unterschiedlichem Niveau zur Verfügung stehen, s. auch Bild 1.1:

- Euler-Verfahren unter Vernachlässigung der Reibung
  - EQ3D-Code
  - E3D-Code
- Navier-Stokes-Verfahren unter Berücksichtigung laminarer und turbulenter Reibung
  - NSQ3D-Code
  - NS3D-Code

Ein detaillierter Vergleich der Verfahren für verschiedene Testfälle soll zeigen, wo die Grenzen bei der Anwendbarkeit und der Rechengenauigkeit liegen und wie die Vorteile der einzelnen Verfahren miteinander kombiniert werden können. Ziel hierbei ist es, den Einsatz der MLCFD-Technik für die Optimierung der Beschaukelung einer realen Turbomaschine aufzuzeigen und so effizient wie möglich zu gestalten.

## Kapitel 2

# Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die wesentlichen theoretischen Grundlagen behandelt, die für die Entwicklung der eingesetzten Multi Level CFD-Verfahren von Bedeutung sind. Nach der Vorstellung der Grundgleichungen wird kurz auf die zeitlich gemittelten Gleichungen und deren Schließung mit einem Turbulenzmodell eingegangen.

Während das Navier-Stokes 3D-Verfahren auf den fluiddynamischen Erhaltungsgleichungen für die Masse und den Impuls basiert, wurde das Navier-Stokes Q3D-Verfahren auf der Grundlage eines Stromfunktions-Vorticity-Verfahrens entwickelt. Für beide Beschreibungen werden die physikalischen Gleichungen dargestellt.

Die korrespondierenden Euler-Verfahren ergeben sich jeweils aus einer Vereinfachung der Navier-Stokes-Verfahren, indem man den Effekt der Reibung formal vernachlässigt. In dem hier verwendeten 3D „Euler-Verfahren“ wird nur die turbulente Reibung vernachlässigt und zur numerischen Dämpfung des Lösungsverhaltens eine effektive Reynolds-Zahl verwendet. Diese wird mit einer effektiven Viskosität gebildet, wobei die turbulente Viskosität aus der Erfahrung abgeschätzt wird bzw. aus Navier-Stokes-Lösungen ermittelt wird, s. REINELT [31].

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Nachrechnung inkompressibler Strömungen in Turbomaschinen. Auf die Besonderheiten in einem rotierenden Bezugssystem wird ebenfalls kurz eingegangen.

### 2.1 Fluiddynamische Erhaltungsgleichungen

Das dreidimensionale Strömungsfeld eines inkompressiblen Fluids ist durch die drei kartesischen Komponenten eines Geschwindigkeitsvektors  $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)^T = c_i = (u, v, w)^T$  in die Koordinatenrichtungen  $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = x_i = (x, y, z)^T$  und den statischen Druck  $p$  definiert. Zur Berechnung dieser Größen stehen vier Erhaltungsgleichungen zur Verfügung, die Kontinuitätsgleichung sowie drei Impulserhaltungsgleichungen. Eine Bestimmungsgleichung für die Temperatur braucht nicht gelöst zu werden, da die Energiegleichung von der Massen- und Impulsbilanz unter der Annahme einer von der Temperatur unabhängigen dynamischen Viskosität  $\mu$  entkoppelt ist. Für ein kartesisches Inertialsystem stellen sich die Erhaltungsgleichungen unter Verwendung der Einsteinschen Summationskonvention wie folgt dar, s. z.B. ZIEREP [57]:



$$\frac{\partial c_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial c_j c_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (2.2)$$

Mit der Annahme der Stokeschen Hypothese für Newtonsche Fluide sowie einer orts-abhängigen dynamischen Viskosität gilt für den viskosen Spannungstensor  $\tau_{ij}$ :

$$\tau_{ij} = \left[ \mu \left( \frac{\partial c_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (2.3)$$

Hierbei bezeichnet  $t$  die Zeit,  $\rho$  die Dichte und  $\mu$  die kinematische Viskosität des Fluids. Da dieses System gekoppelter, nichtlinearer Differenzialgleichungen selbst für laminare Strömungen nur in wenigen Sonderfällen eine analytische Lösung erlaubt, müssen zur Lösung numerische Verfahren herangezogen werden.

Das Gleichungssystem 2.1 und 2.2 gilt sowohl für laminare als auch für turbulente Strömungen. Für technische Berechnungen bei realen Reynolds-Zahlen, wie z.B. im Auslegungsprozess von Turbomaschinen, würde eine Auflösung der komplexen und hoch instationären turbulenten Wirbelstrukturen zu völlig inakzeptablen Rechenzeiten führen. Deshalb geht man zu einer statistischen Beschreibung der Turbulenz über.

## 2.2 Mittelung der Erhaltungsgleichungen

### 2.2.1 Reynolds'scher Separationsansatz

Bei stationären Problemstellungen lässt sich nach einer Idee von REYNOLDS [32] die lokal an einem Ort vorherrschende Strömungsgröße  $\phi$  aufteilen in einen zeitlichen Mittelwert  $\bar{\phi}$  und einen Schwankungsanteil  $\phi'$ :

$$\phi(x_i, t) = \bar{\phi}(x_i) + \phi'(x_i, t). \quad (2.4)$$

Die zeitlich gemittelte Größe ergibt sich nach Gl. 2.5 zu

$$\bar{\phi}(x_i) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \phi(x_i, t) dt, \quad (2.5)$$

wobei der zeitliche Mittelwert des Schwankungsanteils  $\bar{\phi}'(x_i, t)$  verschwindet.

Diese Vorgehensweise lässt sich auch auf instationäre Strömungen anwenden, solange die Voraussetzung erfüllt ist, dass die globale zeitliche Änderung der Strömung wesentlich langsamer verläuft als die turbulenten Schwankungen. Dabei muss die Integrationszeit  $\Delta t$  groß genug sein, um einen repräsentativen Mittelwert zu bestimmen, jedoch klein gegenüber der globalen Zeitskala.

## 2.2.2 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

Eine zeitliche Mittelung der für inkompressible Fluide gültigen Navier-Stokes-Gleichungen 2.1 und 2.2 eliminiert die turbulenten Schwankungsanteile der Geschwindigkeitskomponenten und des statischen Druckes, s. z.B. WILCOX [54], und liefert die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen in der Form:

$$\frac{\partial \bar{c}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \bar{c}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{c}_j \bar{c}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{c'_i c'_j}}{\partial x_j} \quad (2.7)$$

Diese Gleichungen beschreiben im Gegensatz zu den originären Erhaltungsgleichungen nun den Transport der mittleren Stromfeldgrößen, was durch den Balken über der entsprechenden Variablen angedeutet werden soll. Die darin zusätzlich vorhandenen Korrelationen der Form  $-\overline{c'_i c'_j}$  werden als Komponenten des Reynolds-Spannungstensors bezeichnet und sind a priori unbekannt. Das betrachtete Gleichungssystem ist somit unterbestimmt.

Zur Lösung dieses Schließungsproblems stehen zwei Ansätze zur Verfügung: Entweder modelliert man die unbekanntenen Korrelationen über sog. Reynolds-Spannungsmodelle direkt oder man verknüpft die Komponenten des Reynolds-Spannungstensor über den Wirbelviskositätsansatz nach BOUSSINESQ [2] mit dem mittleren Stromfeld. Hierfür ergibt sich im Falle inkompressibler Fluide

$$-\overline{c'_i c'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{c}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2.8)$$

wobei

$$k = \frac{1}{2} \overline{c'_i c'_i} \quad (2.9)$$

die spezifische turbulente kinetische Energie darstellt.

Durch die Verwendung des Wirbelviskositätsansatzes wurde zwar die Anzahl der zu modellierenden Unbekannten reduziert, es liegt aber nach wie vor ein Schließungsproblem vor, da die Verteilungen der neu eingeführten turbulenten kinematischen Viskosität  $\nu_t$  und der spezifischen turbulenten kinetischen Energie  $k$  nicht bekannt sind. Die Berechnung einer sinnvollen Verteilung für  $\nu_t$  und  $k$  ist Aufgabe des Turbulenzmodells, das in Kap. 2.3 eingeführt wird.

## 2.3 Turbulenzmodellierung

Die Anwendung des Wirbelviskositätsansatzes zur Modellierung der Reynolds-Spannungstensen, Gl. 2.8, bewirkt die Einführung der spezifischen turbulenten kinetischen Energie  $k$  und der turbulenten Viskosität  $\nu_t$ , die a priori unbekannt sind. Um

wieder ein geschlossenes Gleichungssystem zu erhalten, müssen diese beiden Variablen durch ein Turbulenzmodell beschrieben werden.

Die primäre Anforderung an ein geeignetes Turbulenzmodell ist die korrekte Vorhersage der gesuchten Lösung für  $k$  und  $\nu_t$ , und zwar möglichst allgemein gültig, zumindest jedoch für die betrachteten Problemstellungen. Dies muss mit möglichst geringem rechentechnischen Zusatzaufwand realisiert werden, d.h. das Modell muss einfach aufgebaut sein und ein möglichst gutes Konvergenzverhalten zeigen. Letztendlich ist hier ein Kompromiss zu definieren zwischen Aussagekraft des Turbulenzmodells und dem damit verbundenen Zusatzaufwand.

Zur Berechnung von  $k$  und  $\nu_t$  gibt es eine Vielzahl von Turbulenzmodellen, die nach der Anzahl der hierfür zusätzlich zu lösenden Differenzialgleichungen klassifiziert und entsprechend als Null-, Ein-, Zwei- oder Mehrgleichungsmodelle bezeichnet werden.

Zweigliedungsmodelle haben sich im CFD-Bereich als Standard-Turbulenzmodelle etabliert und liefern für viele technische Strömungsprobleme gute Ergebnisse. Sie sind leicht zu implementieren und bereiten hinsichtlich der numerischen Berechnung in der Regel keine Probleme. Insbesondere vor dem Hintergrund, dass der zeitliche Aufwand einer Simulationsrechnung möglichst gering gehalten werden soll, erscheint die Verwendung von Zweigliedungsmodellen deshalb ein geeigneter Kompromiss zwischen der Forderung nach bestmöglicher Turbulenzmodellierung und kurzen Antwortzeiten zu sein.

In der Arbeit von SKODA [44] und den dort angegebenen Referenzen sind die unterschiedlichen Klassen von Turbulenzmodellen im Detail beschrieben, die in dem NS3D-Code zur Auswahl stehen. Neben algebraischen und differenziellen Reynoldsspannungsmodellen wurden auch lineare und nichtlineare Wirbelviskositätsmodelle, basierend auf dem Ansatz von Boussinesq, implementiert. Die wandnahe Strömung kann hierbei durch einen Low-Reynolds-Ansatz oder die Verwendung eines Wandfunktionsansatzes behandelt werden.

### 2.3.1 Das Standard- $k$ - $\epsilon$ -Modell von Launder und Spalding

Bei der Verwendung des Standard- $k$ - $\epsilon$ -Modells werden zwei zusätzliche Differenzialgleichungen gelöst, eine für die spezifische turbulente kinetische Energie  $k$  und eine für die Dissipationsrate  $\epsilon$ , s. Gl. 2.10 bzw. 2.11, und aus beiden Lösungen wird über Gl. 2.12 dann die gesuchte Verteilung von  $\nu_t$  berechnet:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial c_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \epsilon, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial c_j \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\epsilon}{k} (C_{\epsilon 1} P_k - C_{\epsilon 2} \epsilon), \quad (2.11)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}. \quad (2.12)$$

Für Strömungen inkompressibler Fluide ist der in Gl. 2.10 und 2.11 als Quelle enthaltene Produktionsterm  $P_k$  definiert als

$$P_k = -\overline{c'_i c'_j} \frac{\partial c_i}{\partial x_j} \quad (2.13)$$

und lautet nach Einsetzen des Wirbelviskositätsansatzes aus Gl. 2.8:

$$P_k = \nu_t \left( \frac{\partial c_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial c_i}{\partial x_j}. \quad (2.14)$$

Die im Standard- $k$ - $\epsilon$ -Modell enthaltenen Konstanten sind in Tab. 2.1 zusammengefasst.

$C_\mu$	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

Tabelle 2.1: Konstanten des Standard- $k$ - $\epsilon$ -Modells

## 2.4 Rotierendes Bezugssystem

Die Strömung in Turbomaschinen ist u.a. durch das Wirken von Trägheitskräften gekennzeichnet, die durch die Stromlinienkrümmung und ggf. durch eine Rotation des Bezugssystems aufgeprägt werden. In der Regel haben beide Effekte einen unmittelbaren Einfluss auf die Hauptströmung und auf die Turbulenz. Während der Einfluss der Stromlinienkrümmung auf die Hauptströmung implizit in den Impulsgleichungen berücksichtigt wird, muss die Systemrotation durch eine geeignete Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen berücksichtigt werden. Dem Einfluss der Stromlinienkrümmung und der Systemrotation auf die Turbulenz muss durch entsprechende Maßnahmen bei der Formulierung der Turbulenzmodelle Rechnung getragen werden.

Strömungen in Laufrädern von Turbomaschinen stellen sich durch die rotierenden Bauteile für einen Beobachter im Absolutsystem instationär dar. Durch eine Transformation in das mit dem Laufrad mitbewegte Koordinatensystem, das Relativsystem, kann in vielen Fällen die Strömung als stationär betrachtet werden.

Die Absolutgeschwindigkeit  $\underline{c}$  und die Relativgeschwindigkeit  $\underline{w}$ , die von einem Beobachter im rotierenden Bezugssystem wahrgenommen wird, stehen in folgender Beziehung zueinander:

$$\underline{c} = \underline{w} + \underline{u}. \quad (2.15)$$

Die Führungsgeschwindigkeit der Rotation  $\underline{u}$  ist über das Kreuzprodukt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\underline{\Omega}$  und dem Ortsvektor  $\underline{r}$  definiert:

$$u_k = (\underline{\Omega} \times \underline{r})_k = \epsilon_{ijk} \Omega_i r_j. \quad (2.16)$$

Bedingt durch die Transformation der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen 2.6 und 2.7, s. z.B. TRUCKENBRODT [50], treten in den Impulsgleichungen

zusätzliche Terme  $\underline{S}^{rot}$  auf, die bei einer zeitlich konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\underline{\Omega}$  den Zentrifugal- und Corioliskräften entsprechen:

$$\underline{S}^{rot} = \underbrace{-\underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times \underline{r})}_{\text{Zentrifugalkraft}} - \underbrace{2 \underline{\Omega} \times \underline{w}}_{\text{Corioliskraft}}. \quad (2.17)$$

Somit lauten die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen im Relativsystem:

$$\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}_j \bar{w}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_i} \right) - \bar{c}'_i \bar{c}'_j \right] + S_i^{rot}. \quad (2.19)$$

KROLL [18] schlägt eine Form der Gl. 2.19 vor, in der die Zentrifugalkraft und die Hälfte der Corioliskraft in die Differenziale der linken Seite eingebracht werden:

$$\frac{\partial \bar{c}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}_j \bar{c}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{c}_j}{\partial x_i} \right) - \bar{c}'_i \bar{c}'_j \right] + S_i^{rot,a}, \quad (2.20)$$

wobei der modifizierte Quellterm  $\underline{S}^{rot,a}$  wie folgt definiert ist:

$$\underline{S}^{rot,a} = -\underline{\Omega} \times \underline{u}_\varphi. \quad (2.21)$$

Die Formulierung nach Gl. 2.21 wird so implementiert, dass die Absolutgeschwindigkeiten  $c_i$  die abhängigen Lösungsvariablen sind. In der Regel führt diese Formulierung zu einem stabileren numerischen Verhalten, s. RITZINGER [34]. Sie hat aber auch den Vorteil, dass bei der Berechnung des Übergangs von einem rotierenden in ein stehendes System, z.B. bei einer Laufrad-Leitrad-Interaktion, die Transformation der Geschwindigkeiten entfällt.

## 2.5 Quasi-dreidimensionale (Q3D) Verfahren

### 2.5.1 Q3D-Modellvorstellung

Nach der Vorstellung von WU [55] kann die dreidimensionale Strömung vereinfacht durch eine quasi-dreidimensionale (Q3D) Betrachtungsweise beschrieben werden. Der dreidimensionale Charakter der Strömung wird dabei durch die Superposition von drei zweidimensionalen Strömungen in den  $S1_i$  Gitterebenen, den  $S2_j$  Meridianebenen und den  $S3_k$  Normalenebenen angenähert. Diese Vorgehensweise kann nochmals vereinfacht werden, indem aus Rechenzeitgründen die Strömung in den  $S3_k$ -Ebenen vernachlässigt wird und nur eine repräsentative  $S2_m$  Meridianebene in der Kanalmitte verwendet wird, vgl. Abb. 2.1 und SCHILLING [41].

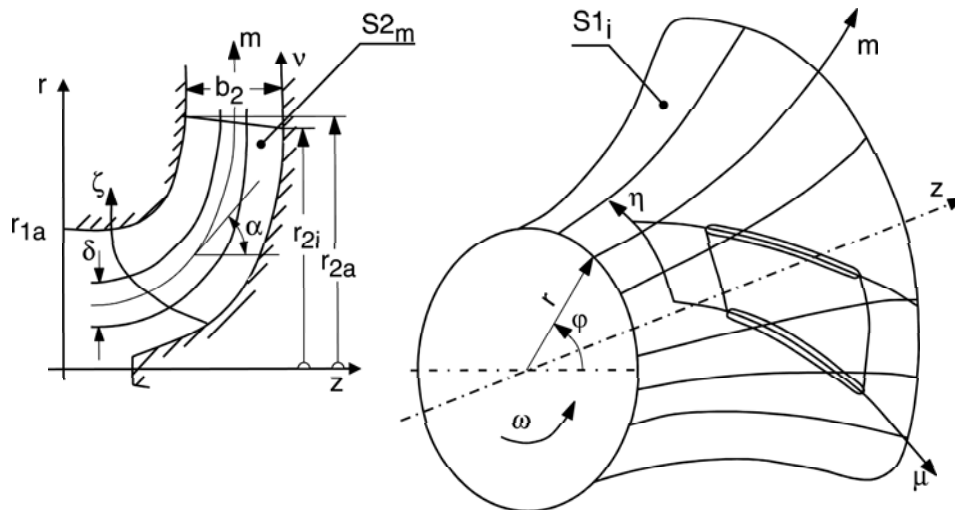


Bild 2.1: Q3D Modellvorstellung

Voraussetzung für die Anwendbarkeit der vereinfachten Q3D Vorstellung ist, dass die Strömung angenähert auf rotationssymmetrischen Stromflächen verläuft.

Eine Berechnung der reibungsbehafteten Strömung durch Laufradbeschaufelungen mit einem quasi-dreidimensionalen Verfahren wurde bisher nur von wenigen Autoren realisiert, z.B. KHALIL [13, 14], KOSCHEL [16] oder QI [30]

## 2.5.2 Euler Q3D-Code mit Stromfunktionsverfahren

Unter den Voraussetzungen, dass die Relativströmung

- reibungsfrei
- stationär und
- inkompressibel

ist sowie außerdem auf

- rotationssymmetrischen Stromflächen verläuft,

kann die Laufradströmung mit dem im folgenden beschriebenen EQ3D-Verfahren berechnet werden. Die Herleitung der Stromfunktionsgleichung für die Gitterströmung ( $S1_i$ -Ebene) wird in Abschnitt 2.5.2.1 und für die Meridianströmung in Abschnitt 2.5.2.2 kurz wiedergegeben. Eine detaillierte Herleitung der Gleichungen ist bei SCHILLING [38] und WATZELT [53] nachzulesen.

### 2.5.2.1 EQ3D-Gitterströmung in der $S1_i$ - Ebene

Der Kontrollraum für die Gitterströmung liegt auf einer rotationssymmetrischen Stromfläche und wird seitlich begrenzt von der Schaufeldruck- bzw. -saugseite, den periodischen Rändern in Zulauf und Nachlauf sowie einem Ein- bzw. Ausströmrand, s. Abb. 2.1, rechte Seite.

Ausgangspunkt zur Berechnung der Gitterströmung sind die Kontinuitätsgleichung und die Rotation der Relativgeschwindigkeit in einer  $S1_i$ -Ebene in einem zweidimensionalen  $(m - \varphi)$  - Koordinatensystem:

$$\operatorname{div}(\underline{w}) = \frac{1}{r \delta} \frac{\partial}{\partial m} (r \delta w_m) + \frac{1}{r \delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\delta w_\varphi) = 0 \quad (2.22)$$

$$\operatorname{rot}(\underline{w}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial m} (r w_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (w_m) = 2 \Omega \sin \alpha = \lambda_g \quad (2.23)$$

Aufgrund der stromflächenhaften Betrachtungsweise geht die Schichtdicke  $\delta$  in die Kontinuitätsbilanz mit ein. Die Rotation der Relativgeschwindigkeit wird bestimmt durch die Steigung  $\sin \alpha = dr/dm$  der Stromlinie in der Meridianebene, vgl. Abb. 2.1, linke Seite. Mit den Geschwindigkeitsbeziehungen

$$w_m = \frac{1}{r \delta} \frac{\partial \psi_g}{\partial \varphi} \quad , \quad w_\varphi = -\frac{1}{\delta} \frac{\partial \psi_g}{\partial m} \quad (2.24)$$

erhält man die Stromfunktionsgleichung der Euler Q3D Gitterströmung:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{r}{\delta} \frac{\partial \psi_g}{\partial m} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r \delta} \frac{\partial \psi_g}{\partial \varphi} \right) = -2 \Omega \sin \alpha = -\lambda_g \quad (2.25)$$

### 2.5.2.2 EQ3D-Meridianströmung in der $S2_m$ - Ebene

In der repräsentativen  $S2_m$ -Meridianebene erfolgt die numerische Behandlung der Strömung entsprechend der Q3D-Modellvorstellung in einem zweidimensionalen kartesischen  $(r - z)$  - Koordinatensystem. Der Kontrollraum wird hierbei begrenzt durch Nabe und Deckscheibe bzw. Boden und Kranz, s. Abb. 2.1, linke Seite. Ausgangspunkt zur Berechnung der Meridianströmung sind die Euler-Gleichungen in Zylinderkoordinaten, die in  $\varphi$  - Richtung umfangsgemittelt werden. Die Schaufelkräfte auf das Fluid werden in Form eines zusätzlichen Quellterms berücksichtigt.

Die Ausgangsgleichungen zur Herleitung der Stromfunktionsgleichung in der Meridianebene bilden die Kontinuitätsgleichung und die Definition der Rotation der Absolutgeschwindigkeit:

$$\operatorname{div}(\underline{c}_m) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r t c_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r t c_z) = 0 \quad , \quad (2.26)$$

$$\operatorname{rot}(\underline{c}_m) = \frac{\partial c_r}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial r} = \lambda_m \quad . \quad (2.27)$$

Dabei wird die Versperrung des Schaufelkanals durch die Schaufelprofile über eine ortsabhängige Teilung  $t$  mit berücksichtigt.

Führt man eine Stromfunktion  $\psi_m$  für die Meridianströmung mit der Definition

$$c_r = \frac{1}{r t} \frac{\partial \psi_m}{\partial z} \quad , \quad c_z = -\frac{1}{r t} \frac{\partial \psi_m}{\partial r} \quad (2.28)$$

ein, so erhält man die Stromfunktionsgleichung für die Meridianströmung:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r t} \frac{\partial \psi_m}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r t} \frac{\partial \psi_m}{\partial z} \right) = \lambda_m \quad (2.29)$$

mit

$$\lambda_m = r t \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{ges}}{\partial \psi_m} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial r} \cot \beta^{r_1} + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \cot \beta^{z_1} \right) \quad , \quad \Theta = r c_\varphi. \quad (2.30)$$

Die rechte Seite der Gleichung  $\lambda_m$  setzt sich zusammen aus einem Vorticity-Anteil ohne Schaufelkraft und einem Anteil, der durch die Schaufelkraft hervorgerufen wird. Die Superskripte  $r_1, z_1$  bezeichnen hierbei die Projektionen des Strömungswinkels  $\beta$  in der Ebene  $r = const.$  bzw.  $z = const.$

Die Schwierigkeit bei der Lösung der Stromfunktionsgleichung in der  $S2_m$ -Ebene ( $S2_m$ -Verfahren) besteht in der Bestimmung der Vorticity  $\lambda_m$ . Normalerweise weicht der umfangsgemittelte Strömungswinkel  $\beta$  vom Schaufelwinkel  $\beta_S$  an der entsprechenden Position im Meridianschnitt ab, vgl. Abb. 2.2. Diese Winkelabweichung kann entweder durch eine entsprechende  $\beta$ -Kalibrierung mit Hilfe eines z.B. aus einer NS3D-Berechnung gewonnenen Strömungsergebnisses berücksichtigt werden, oder man koppelt die Berechnung in der  $S2_m$ -Meridianebene an die Lösung der Strömung in den  $S1_i$ -Gitterebenen, wie im folgenden Abschnitt beschrieben wird.

Am Schaufeleintritt wird diese Winkelabweichung mit Inzidenzwinkel  $i$  bezeichnet, der wie folgt definiert ist:

$$i = \beta_{S1} - \beta_1. \quad (2.31)$$

Am Schaufelaustritt dagegen spricht man vom Deviationswinkel  $\delta$ , der folgendermaßen gegeben ist:

$$\delta = \beta_{S2} - \beta_2. \quad (2.32)$$



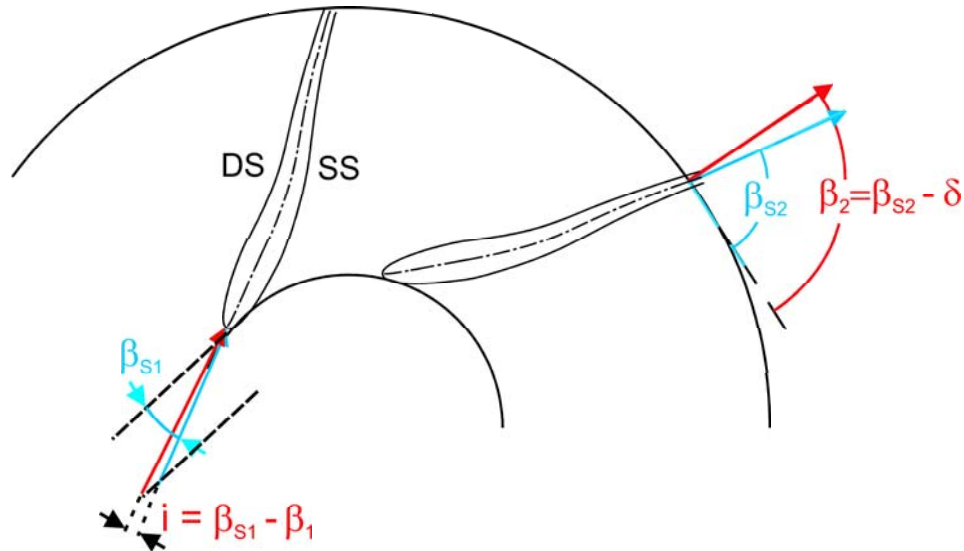


Bild 2.2: Strömungswinkel, Schaufelwinkel sowie Inzidenz und Deviation bei dem Laufrad einer Radialpumpe.

### 2.5.2.3 Gekoppelte Lösung der beiden EQ3D-Stromfunktionsgleichungen

Die beiden 2D-Probleme sind physikalisch miteinander gekoppelt: Die Lösung der Stromfunktionsgleichung (Gl. 2.29) in der  $S2_m$ -Meridianebene liefert die Stromlinien in  $(r-z)$ -Koordinaten, durch deren Rotation um die  $z$ -Achse die  $S1_i$ -Stromflächen in  $(m-\varphi)$ -Koordinaten erzeugt werden, vgl. Abb. 2.1. Die in Umfangsrichtung gemittelten Werte für die Strömungswinkel  $\beta$ , d.h. das Verhältnis der umfangsgemittelten Geschwindigkeitskomponenten  $w_\varphi/w_m = \cot\beta$  aus der Lösung der Stromfunktionsgleichung auf den  $S1_i$ -Stromflächen (Gl. 2.25) liefert wiederum eine Verbesserung für die rechte Seite von Gl. 2.29.

Mit dieser Kopplung kann man relativ genaue Vorhersagen über den Strömungswinkel  $\beta$  auch ohne eine Kalibrierung des EQ3D-Verfahrens mit einem NS3D-Rechenergebnis erzielen. Eine optionale Kalibrierung kann jedoch zu einer weiteren Verbesserung der Genauigkeit eingesetzt werden.

Mit diesem vereinfachten EQ3D-Verfahren lassen sich Beschauelungen hinsichtlich des geforderten Betriebspunktes und der Druckverteilungen relativ gut voroptimieren, vgl. [7] und [52]. Reibungs- oder Sekundärströmungseffekte können mit dem so definierten Verfahren jedoch nicht erfasst werden.

### 2.5.3 Navier-Stokes Q3D-Code in der Stromfunktion-Vorticity Formulierung

Mit dem Euler Q3D-Verfahren sind aufgrund der Voraussetzung der Reibungsfreiheit keine Aussagen über Strömungsverluste möglich. Um jedoch Laufräder analysieren und optimieren zu können, müssen auch die Verluste berücksichtigt werden. Die zweidimensionalen stationären Navier-Stokes-Gleichungen können durch Einführung der Vorticity in kartesischen Koordinaten

$$\lambda_g = \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \quad (2.33)$$

zu einer Transportgleichung für die Wirbelstärke umgeformt werden, vgl. RITZINGER [34],

$$\frac{\partial}{\partial x} (w_x \lambda_g) + \frac{\partial}{\partial y} (w_y \lambda_g) = \nu \left( \frac{\partial^2 \lambda_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda_g}{\partial y^2} \right), \quad (2.34)$$

in der der statische Druck eliminiert ist. Zusammen mit der Lösung der Stromfunktionsgleichung,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\lambda_g \quad (2.35)$$

und der Definition für die Stromfunktion,

$$w_x = \frac{\partial \psi_g}{\partial y}, \quad w_y = -\frac{\partial \psi_g}{\partial x} \quad (2.36)$$

lässt sich die zweidimensionale reibungsbehaftete Strömung rein kinematisch berechnen. Der Druck kann über ein nachfolgendes Integrationsverfahren aus den Beziehungen

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{p_{ges}^*}{\varrho} = (\lambda + 2\Omega) w_y - \nu \frac{\partial \lambda}{\partial y} \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{p_{ges}^*}{\varrho} = -(\lambda + 2\Omega) w_x + \nu \frac{\partial \lambda}{\partial x} \quad (2.38)$$

bestimmt werden, in dem der reduzierte Gesamtdruck  $p_{ges}^*$  wie folgt definiert ist:

$$p_{ges}^* = p - \frac{\varrho}{2} r^2 \Omega^2 + \frac{\varrho}{2} (w_x^2 + w_y^2). \quad (2.39)$$

Im Falle einer reibungsfreien Potenzialströmung fällt die Integration über die Druckverlustanteile weg, und aufgrund der Rotationsfreiheit im Absolutsystem gilt die einfache Beziehung  $p_{ges}^* = \text{const.}$  auf einer Stromfläche  $S1_i$ .

### 2.5.3.1 NSQ3D-Gitterströmung in der $S1_i$ - Ebene

Analog zum EQ3D-Verfahren wird auch die NSQ3D-Berechnung auf den rotationssymmetrischen  $S1_i$ -Stromflächen durchgeführt. Die Stromflächen selbst können mit guter Näherung direkt aus der EQ3D-Berechnung übernommen werden.

Neben der bereits in Kap. 2.5.2.1 erwähnten Stromfunktionsgleichung, Gl. 2.25,

$$\frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{r}{\delta} \frac{\partial \psi_g}{\partial m} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r \delta} \frac{\partial \psi_g}{\partial \varphi} \right) = -r \lambda_g \quad (2.40)$$

wird eine zusätzliche Gleichung gelöst, die den Transport der Vorticity beschreibt. Durch Transformation auf  $(m - \varphi)$  - Koordinaten erhält man die Wirbeltransportgleichung, vgl. z.B. KOSCHEL [16]:

$$\frac{\partial}{\partial m} (r w_m \lambda_g) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (w_\varphi \lambda_g) = S + \frac{\partial}{\partial m} \left( r \frac{\partial}{\partial m} (\nu \lambda_g) \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\nu \lambda_g) \right) \quad (2.41)$$

Hierin taucht ein zusätzlicher Quellterm  $S$  auf, in dem der Einfluss der Stromflächenkrümmung enthalten ist.

$$S = 2 \Omega \left[ \frac{\partial}{\partial m} (r w_m \sin \alpha) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (w_\varphi \sin \alpha) \right] \quad (2.42)$$

Die den Gl. 2.37 und 2.38 analogen Beziehungen für den Druck in  $(m - \varphi)$  - Koordinaten lauten:

$$\frac{\partial}{\partial m} \frac{p_{ges}^*}{\varrho} = (\lambda_g + 2\Omega \sin \alpha) w_\varphi - \frac{\nu}{r} \frac{\partial \lambda_g}{\partial \varphi} \quad (2.43)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{p_{ges}^*}{\varrho} = -(\lambda_g + 2\Omega \sin \alpha) w_m + \nu \frac{\partial \lambda_g}{\partial m} \quad (2.44)$$

### 2.5.3.2 Momentenbilanz

Die Navier-Stokes-Gleichungen 2.2 bzw. in der Reynolds-gemittelten Form 2.7 bilanzieren die Gleichgewichte der angreifenden Kräfte an einem Kontrollvolumen und besitzen in der angeschriebenen Form die Dimension einer Kraftdichte. Die infinitesimalen Beiträge der Momente  $d\underline{m}$  ergeben sich formal aus dem Kreuzprodukt des Ortsvektors  $\underline{r}$  mit der über die mit dem Volumen  $dV$  multiplizierten lokalen Kraftdichte  $\underline{f}$ :

$$d\underline{m} = \underline{r} \times \underline{f} dV \quad (2.45)$$

Im vorliegenden Fall der Gitterströmung auf rotationssymmetrischen Stromflächen interessiert nur die Momentenbilanz bzgl. der Drehachse, s. STECK [45]. Eine Integration über die azimutale Komponente der konvektiven Terme liefert für das Impulsmoment

$$m_{RC_\varphi} = -\dot{m} \Delta_{0-3} (r c_\varphi), \quad (2.46)$$

wobei  $\Delta_{0-3}$  die Differenz zwischen Kontrollraumaustritt und -eintritt bezeichnet.

Als äußere Momente wirken auf die Strömung im Absolutsystem das Schaufelmoment  $m_S$ , das sich aus einem Druckanteil  $m_{S,P}$  und einem durch die Reibungskräfte hervorgerufenen Anteil  $m_{S,R}$  zusammensetzt, sowie das durch die Schubspannungen  $\tau_{r\varphi}$  an den ein- und austrittsseitigen Kontrollraumgrenzflächen hervorgerufene Moment  $m_T$ ,

$$m_{S,P} = Z \sum_{i=1}^N \int_{m_0}^{m_3} r \delta (p_{DS} - p_{SS}) dm \quad (2.47)$$

$$m_{S,R} = Z \sum_{i=1}^N \int_{m_0}^{m_3} r \delta \cot \beta_S (\tau_{DS} + \tau_{SS}) dm \quad (2.48)$$

$$m_T = Z \sum_{i=1}^N \gamma \Delta_{0-3} (r^2 \delta \tau_{r\varphi}) \quad (2.49)$$

Das Gesamtmoment muss über alle  $Z$  Schaufelkanäle und  $N$  Stromflächen summiert werden. Der Term  $\cot \beta_S$  in Gl. 2.48 berücksichtigt den in Umfangsrichtung wirkenden Anteil der Schubspannungen an den Schaufelwänden. Mit der Vorticity lässt sich die Wandschubspannung auch ausdrücken als

$$\tau_{DS/SS} = \mp \nu \lambda_{DS/SS}, \quad (2.50)$$

während für die Komponente der Schubspannung in Gl. 2.49 näherungsweise

$$\tau_{r\varphi} = \nu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{c_\varphi}{r} \right) \quad (2.51)$$

geschrieben werden kann.

# Kapitel 3

## Numerische Verfahren

In diesem Kapitel werden die numerischen Verfahren beschrieben, die zur Lösung der in Kapitel 2 dargestellten Grundgleichungen eingesetzt werden.

Die verwendete Diskretisierungstechnik basiert sowohl für die 3D- wie auch für die Q3D-Verfahren auf einer Finite-Volumen-Diskretisierung. Hierbei wird der zu analysierende durchströmte Kontrollraum durch ein geeignetes Rechnetz in  $N$  kleine Teilvolumina aufgeteilt. Durch Anwendung der Transportgleichungen auf jedes dieser Volumina entsteht eine für die Zelle gültige Bilanzgleichung. Diese beschreibt die Beziehung zwischen der lokalen Änderung einer Erhaltungsgröße, den über die Berandungsflächen ein- und austretenden Flüssen und den im Volumen wirkenden Quellen und Senken. Sowohl die Oberflächen- als auch die Volumenterme werden dabei durch geeignete Funktionen approximiert.

Nach einer mathematischen Umformung erhält man für jedes betrachtete Kontrollvolumen eine linearisierte, algebraische Beziehung, die die Erhaltungsgröße an einem Punkt  $P$  im Rechengebiet mit den Werten an den benachbarten Punkten und weiteren Einflussgrößen korreliert. Zur Lösung dieses linearen Gleichungssystems mit  $N$  Unbekannten wird ein geeignetes numerisches Lösungsverfahren eingesetzt.

Die wichtigsten Grundlagen der Finite-Volumen-Diskretisierung werden im Folgenden aufgezeigt. Weitere Einzelheiten sind bei FERZIGER [8] sowie den Arbeiten von BADER [1] und SKODA [44] zu entnehmen.

### 3.1 Finite-Volumen-Diskretisierung

Die zu lösenden Erhaltungsgleichungen besitzen eine mathematisch ähnliche Struktur und können formal in einer allgemeinen Transportgleichung für die Erhaltungsgröße  $\phi$  dargestellt werden:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(c_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + q_\phi \quad (3.1)$$

Die darin enthaltene Variable  $\phi$  steht stellvertretend für z.B. eine Geschwindigkeitskomponente  $c_i$  oder die spezifische turbulente kinetische Energie  $k$  oder eine der skalaren

Größen beim NSQ3D-Verfahren, der Faktor  $\Gamma$  bezeichnet den auf die Dichte bezogenen zugehörigen Austauschkoeffizienten.

Die Transportgleichung 3.1 besteht aus vier unterschiedlichen Termen. Der erste, zeitabhängige Term auf der linken Seite der Gleichung repräsentiert die lokale zeitliche Änderung der Größe  $\phi$ , der zweite  $\frac{\partial}{\partial x_j}(c_j \phi)$  beschreibt den konvektiven Transport von  $\phi$  mit dem Stromfeld. Auf der rechten Seite der Gleichung findet sich ein Term zur Beschreibung diffusiver Transportvorgänge  $\frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j})$ . Alle weiteren Einflüsse, die nicht durch die ersten drei Terme abgebildet werden, sind im Quellterm  $q_\phi$  zusammengefasst.

Bei der Finite-Volumen Diskretisierung wird das zu betrachtende Strömungsgebiet in eine Vielzahl kleiner aneinander grenzender Zellen unterteilt, die in ihrer Gesamtheit das Rechnetz bilden. Über jede dieser Zellen wird die differenzielle Erhaltungsgleichung integriert. Für ein einzelnes Kontrollvolumen  $V$  folgt daraus zunächst

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \phi dV + \int_V \frac{\partial(c_j \phi)}{\partial x_j} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) dV + \int_V q_\phi dV. \quad (3.2)$$

Durch Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes werden alle Volumenintegrale, die in dem Integranden einen Divergenzterm enthalten, in Oberflächenintegrale umgewandelt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \phi dV + \int_A \phi \underline{c} \cdot \underline{n} dA = \int_A \Gamma \text{grad}(\phi) \cdot \underline{n} dA + \int_V q_\phi dV. \quad (3.3)$$

Gl. 3.3 gilt für beliebige geschlossene Kontrollvolumina  $V$ . Mit der Annahme, dass die Oberfläche des Bilanzvolumens aus einer endlichen Anzahl von Teilflächen  $A_k$  gebildet wird, lässt sich das allgemeine Oberflächenintegral als eine Summe von Oberflächenintegralen über diese Teilflächen darstellen.

$$\int_A f dA = \sum_k \int_{A_k} f dA \quad (3.4)$$

Der Integrand  $f$  steht hier für den auf die Dichte bezogenen konvektiven und diffusiven Fluss  $f^c$  bzw.  $f^d$ :

$$f^c = \phi \underline{c} \cdot \underline{n} \quad f^d = \Gamma \text{grad}(\phi) \cdot \underline{n} \quad (3.5)$$

Bisher wurden keine Approximationen eingeführt. Die allgemeine Ausgangsgleichung, Gl. 3.1, wurde durch mathematische Operationen in eine für die weitere Behandlung günstigere Form gebracht, ist aber nach wie vor exakt erfüllt.

Unabhängig davon enthält die Ableitung der differenziellen Erhaltungsgleichungen bereits Annahmen, die vom Fluid zu erfüllen sind.

### 3.1.1 Definition des Kontrollvolumens

Für die entwickelten Verfahren werden in 3D ausschließlich Kontrollvolumina in Form von Hexaedern bzw. in 2D von Vierecken verwendet. Der Übersichtlichkeit halber werden die für das Kontrollvolumen verwendeten Bezeichnungen in einer zweidimensionalen Skizze, s. Bild 3.1, definiert.

Die aktuelle Zelle mit dem Volumen  $\Delta V$  umgibt den Punkt  $P$ , der innerhalb dieser mittig angeordnet ist. Die Stromfeldvariablen werden an den Zellmittelpunkten berechnet und gespeichert. Diese Art der Datenverwaltung wird als zellzentrierte Anordnung bzw. cell-centered variable arrangement bezeichnet. In negativer bzw. positiver  $i$ -Richtung befinden sich die Nachbarzellen  $W$ (est) und  $E$ (ast). Entsprechend werden für die beiden anderen Koordinatenrichtungen  $j$  und  $k$  die Bezeichnungen  $S$ (outh) und  $N$ (orth) sowie  $B$ (ottom) und  $T$ (op) eingeführt.

Grenzflächen zwischen der Zelle um  $P$  und einer benachbarten Zelle werden mit dem Namen der Nachbarzelle, jedoch mit Kleinbuchstaben beschrieben. Jede dieser Grenzflächen besitzt eine Fläche  $A$ , einen Einheits-Normalenvektor  $\underline{n}$  und einen Einheits-Richtungsvektor  $\underline{i}_\xi$  entlang der Verbindungslinie zweier Zellmittelpunkte.

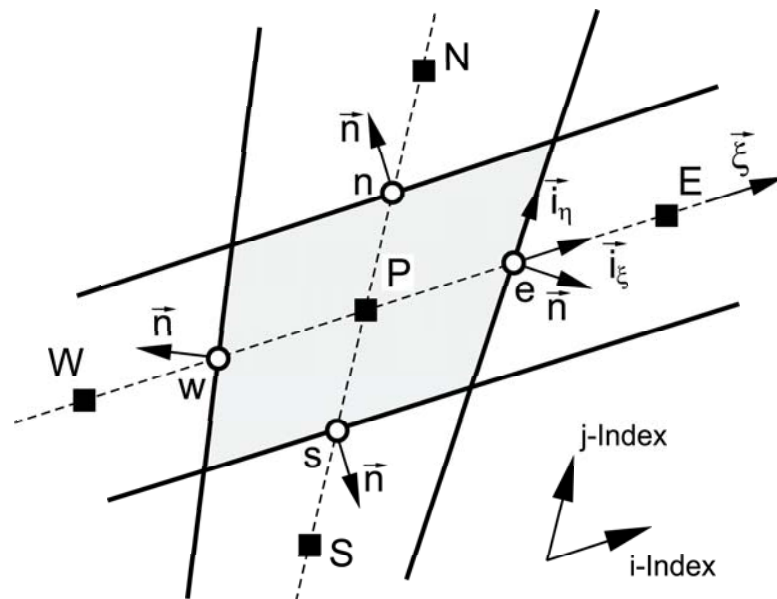


Bild 3.1: Vereinfachte zweidimensionale Darstellung eines Kontrollvolumens mit der Definition der verwendeten Bezeichnungen

### 3.1.2 Approximation der Oberflächen- und Volumenintegrale

Für eine konsistente Berechnung der integralen Terme müssen die Teilvolumina des verwendeten Rechnernetzes den gesamten durchströmten Kontrollraum vollständig ausfüllen und dürfen sich dabei nicht überlappen. Die Grenzflächen zweier benachbarter Zellen müssen eindeutig definiert sein. Ist darüber hinaus sichergestellt, dass der Fluss, der aus einer Fläche austritt, genau so in das benachbarte Element eintritt, wird das Verfahren als konservativ bezeichnet.

Im Folgenden wird stellvertretend für alle Teilflächen eines Kontrollvolumens nur die repräsentative Zellfläche  $e$  betrachtet. Die Größen an den anderen Seiten des Bilanzelements ergeben sich durch eine Vertauschung entsprechender Indizes.

### Oberflächenintegrale

Da die lokale Verteilung der über die Fläche zu integrierenden Strömungsvariablen a priori nicht bekannt ist, ist eine exakte Auswertung der Oberflächenintegrale in Gl. 3.4 nicht möglich. Zur Bestimmung des Flusses sind damit zwei Annahmen erforderlich: Zum einen muss die Verteilung durch eine analytische Funktion, die durch eine oder mehrere Stützstellen definiert ist, angenähert werden, und zum zweiten müssen die Werte an diesen Stützstellen durch geeignete Interpolationsalgorithmen aus den Werten an den Zellmittelpunkten bestimmt werden.

Für das vorliegende Verfahren wird angenommen, dass der integrale Fluss durch die Teilfläche  $A_e$  durch einen Mittelwert repräsentiert wird, der in der Mitte der Zellfläche definiert ist.

$$F_e = \int_{A_e} f dA = \bar{f}_e A_e \approx f_e A_e \quad (3.6)$$

### Volumenintegrale

Neben den Oberflächenintegralen treten in der Transportgleichung 3.3 auch Terme auf, die über das Volumen zu integrieren sind. Hierfür wird näherungsweise angenommen, dass sich das Volumenintegral als Produkt aus dem Wert am Zellmittelpunkt und dem Zellvolumen darstellen lässt. Der integrale Quell- bzw. Senkenterm  $Q_P$  berechnet sich somit aus

$$Q_P = \int_V q dV = \bar{q} \Delta V \approx q_P \Delta V. \quad (3.7)$$

Diese Annahme besitzt eine Genauigkeit zweiter Ordnung, wenn  $P$  in der Mitte der Zelle definiert ist und wenn  $q$  konstant oder linear veränderlich ist. Da der Wert der Variablen am Zellmittelpunkt selbst berechnet wird, ist bei dieser Approximation keine Interpolation erforderlich.

### 3.1.3 Interpolationsmethoden

Wie oben gezeigt, erfordert die Berechnung der Oberflächenintegrale Werte der Variablen an den Mittelpunkten der Zellflächen. Da diese nicht unmittelbar bekannt sind, müssen sie über geeignete Interpolationsmethoden bestimmt werden. Im Folgenden werden die zwei am häufigsten angewendeten Verfahren vorgestellt.

#### Stromauf-Interpolation

Bei der Stromauf-Interpolation wird der gesuchte Wert  $\phi_e$  abhängig von der an der Zellfläche vorherrschenden Geschwindigkeit durch den stromauf gelegenen Zellwert angenähert. Im englischen Sprachraum wurde hierfür der Begriff „Upwind Differencing Scheme“ (UDS) eingeführt:

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P & \text{falls } (\underline{c} \cdot \underline{n})_e > 0, \\ \phi_E & \text{falls } (\underline{c} \cdot \underline{n})_e < 0. \end{cases} \quad (3.8)$$



### Lineare Interpolation

Durch eine lineare Interpolation, die auch als „Central Differencing Scheme“ (CDS) bezeichnet wird, berechnet sich der gesuchte Wert an der Zellfläche  $\phi_e$  zwischen zwei benachbarten Zellmittelpunkten zu:

$$\phi_e = \lambda_e \phi_E + (1 - \lambda_e) \phi_P, \quad (3.9)$$

wobei der Interpolationsfaktor  $\lambda$  Unregelmäßigkeiten in den Netzabständen berücksichtigt und z.B. wie folgt berechnet werden kann:

$$\lambda_e = \frac{|r_e - r_P|}{|r_E - r_P|}. \quad (3.10)$$

### Diskussion obiger Interpolationsvorschriften

Die Problematik bei der Anwendung der Interpolationsvorschriften zur Approximation des konvektiven Flusses wurde in der Fachliteratur ausführlich diskutiert. Der Konflikt zwischen Stabilität und Genauigkeit der Lösung soll im Folgenden kurz dargestellt werden.

Das Upwind Differencing Scheme besitzt eine Genauigkeit erster Ordnung und ist ohne Einschränkung stabil. Der Nachteil dieser Interpolationsmethode besteht darin, dass sie sich numerisch diffusiv verhält. Durch eine Taylor-Reihenentwicklung um den Punkt P für ein kartesisches Netz und eine positive Geschwindigkeit  $c \cdot n$  ergibt sich:

$$\phi_e = \phi_P + (x_e - x_P) \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_P + \frac{(x_e - x_P)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_P + \dots \quad (3.11)$$

Mit dem ersten der vernachlässigten Terme bleibt formal ein zusätzlicher diffusiver Anteil mit dem Koeffizienten  $\Gamma_e^{num}$  übrig, der oft als numerische Diffusion bezeichnet wird:

$$f_e^{d,num} = \Gamma_e^{num} \frac{\partial \phi}{\partial x} = c_e \Delta x_{e-P} \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (3.12)$$

Beim Central Differencing Scheme ist die Genauigkeit der linear interpolierten Werte zweiter Ordnung, also höherwertiger als die Stromauf-Interpolation. Bei dieser Methode, angewendet auf den konvektiven Transportterm, können während der iterativen Lösungsprozedur jedoch oszillierende Lösungen auftreten, was die Stabilität des Verfahrens beeinträchtigt oder eine Konvergenz gänzlich unmöglich macht. PATANKAR [27] zeigt am vereinfachten Beispiel einer eindimensionalen stationären Konvektions-Diffusionsgleichung, dass die Verwendung von CDS für den konvektiven Term ab einer Zell-Peclet-Zahl größer als zwei physikalisch unsinnige Lösungen liefert und damit eine schlechte Approximation des Zellflächenwerts darstellt. Die Peclet-Zahl ist hierbei wie folgt definiert:

$$Pe = \frac{c_e (\delta x)_e}{\Gamma_e}, \quad (3.13)$$

wobei  $(\delta x)_e$  der Abstand zwischen zwei Zellmittelpunkten bedeutet. Sie beschreibt analog zur Reynolds-Zahl das Verhältnis aus konvektivem und diffusivem Transport,

allerdings bezogen auf die Zellwerte und nicht auf die globalen Abmessungen einer Problemstellung.

Eine Auswahl an verbesserten Verfahren wird z.B. in den Arbeiten von BADER [1] und SKODA [44] vorgestellt. Maßgeblich für den entwickelten CFD-Code ist hierbei die Forderung, dass die Interpolationsmethode eine Approximation mit einer Ordnung größer als eins ermöglicht und gleichzeitig keinen erheblich größeren zusätzlichen Rechenaufwand mit sich bringt.

In diesem Zusammenhang ist der Ansatz einer sogenannten nachgeführten Korrektur zu erwähnen, der im englischen Sprachraum als „Deferred Correction Scheme“ bezeichnet wird. Diese Methode wurde erstmalig von KHOSLA und RUBIN [15] vorgeschlagen und von anderen Autoren erfolgreich angewendet, s. z.B. [5, 8]. Der Grundgedanke besteht darin, den iterativ zu lösenden impliziten Teil des Gleichungssystems über eine stabile Approximation erster Ordnung zu diskretisieren und eine nachträgliche Korrektur höherer Ordnung explizit vorzunehmen.

### 3.1.4 Diskretisierung der konvektiven Flüsse

Der konvektive Transport einer Strömungsgröße  $\phi$  wird durch den in Gl. 3.3 definierten konvektiven Fluss beschrieben. Mit dem für die Zellfläche repräsentativen Mittelwert  $\phi_e$  lässt sich dieser als

$$F_e^c = \int_{A_e} \phi \underline{c} \cdot \underline{n} dA \approx \dot{m}_e \phi_e \quad (3.14)$$

approximieren. Das Geschwindigkeitsfeld bzw. der dichtebezogene Massenstrom  $\dot{m}_e = \underline{c} \cdot \underline{n} A_e$  an der Zellfläche  $e$  wird in jedem Iterationsschritt mit den aktuellen Werten neu berechnet.

Die transportierte Größe  $\phi_e$  steht stellvertretend für eine Geschwindigkeitskomponente  $c_i$ , die Turbulenzgrößen  $k$  und  $\epsilon$  oder die Vorticity  $\lambda$ . Sie wird über das in Kap. 3.1.3 erwähnte Deferred Correction Scheme bestimmt, was einerseits eine stabile Berechnung des Terms und gleichzeitig eine hinreichende Genauigkeit ermöglicht.

Der konvektive Fluss durch die Zellfläche  $e$  lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$F_e^c = (\dot{m}_e \phi_e^{UDS})^{n+1} + \beta [(\dot{m}_e \phi_e^{CDS})^n - (\dot{m}_e \phi_e^{UDS})^n], \quad (3.15)$$

wobei die zwei Diskretisierungsansätze in ausgeschriebener Form lauten:

$$\begin{aligned} \dot{m}_e \phi_e^{UDS} &= \max(\dot{m}_e, 0) \phi_P + \min(\dot{m}_e, 0) \phi_E, \\ \dot{m}_e \phi_e^{CDS} &= \dot{m}_e [\lambda_e \phi_E + (1 - \lambda_e) \phi_P]. \end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite in Gl. 3.15 bezeichnet den mit UDS diskretisierten Fluss, der zum neuen Iterationsschritt  $n + 1$  implizit gelöst wird, während der Klammerausdruck die mit dem Übergangsfaktor  $\beta$ , in der Literatur als Blending Factor bezeichnet, gewichtete Differenz der mit CDS bzw. UDS diskretisierten Flüsse darstellt,

die aus den nach dem alten Iterationsschritt  $n$  bekannten Werten explizit berechnet und jeweils vor der neuen Iteration zum Quellterm addiert wird.

Um die konvektiven Transportterme vollständig zu bilanzieren, muss die oben für Zellfläche  $e$  angeführte Diskretisierung auf alle sechs Teilflächen des Kontrollvolumens angewendet werden.

### 3.1.5 Diskretisierung der diffusiven Flüsse

Die numerische Berechnung des in Gl. 3.3 enthaltenen diffusiven Transportterms wird durch den für die Zellfläche gemittelten Fluss

$$F_e^d = \int_{A_e} \Gamma \operatorname{grad}(\phi) \cdot \underline{n} dA \approx (\Gamma \operatorname{grad} \phi \cdot \underline{n})_e A_e \quad (3.16)$$

approximiert. Die hierbei auf der Zellfläche benötigten Werte des Austauschkoeffizienten  $\Gamma$  und des Gradienten von  $\phi$  werden beide durch eine lineare Interpolation nach Gl. 3.9 bestimmt.

Die Berechnung des Gradienten am Zellmittelpunkt  $P$  kann unter der Annahme, dass ein für die gesamte Zelle repräsentativer mittlerer Gradient existiert:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|_P \approx \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dV, \quad (3.17)$$

und mit Hilfe des Satzes von Gauß erfolgen:

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dV = \int_A \phi (\underline{i}_i \cdot \underline{n}) dA \approx \sum_k \phi_k (\underline{i}_i \cdot \underline{n})_k A_k. \quad (3.18)$$

Hier steht  $\underline{i}_i$  für den Basisvektor in  $x_i$ -Richtung und  $k$  für die Summation über alle Teilflächen. Die Variable  $\phi_k$  an den Zellflächen wird wiederum durch lineare Interpolation, s. Gl. 3.9, bestimmt.

BADER [1] zeigt, dass die Implementierung dieses Algorithmus in implizite Diskretisierungsschemata schwierig ist, da bei der Berechnung der Gradienten von  $\phi$  in den benachbarten Volumina aufgrund der Interpolation auch Werte von  $\phi$  an den jeweils übernächsten Zellmittelpunkten benötigt werden, was zu großen und aus numerischer Sicht nicht einfach zu behandelnden Rechenmolekülen führt.

Aus diesem Grund wird die Berechnung der Gradienten aufgespalten in eine vereinfachte implizite Diskretisierung und eine nachgeführte explizit behandelte Korrektur, die den Fehler bei der einfacheren Betrachtungsweise durch die korrekte Approximation ersetzt. Das Vorgehen ist ähnlich wie bei dem „Deferred Correction Scheme“ für die konvektiven Terme.

Bei Verwendung eines lokalen und orthogonal an der Zellfläche ausgerichteten Koordinatensystems  $(n, s, t)^T$  trägt nur die Normalkomponente zum diffusiven Fluss bei:

$$F_e^d = \Gamma_e A_e \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_e. \quad (3.19)$$

Nach einer Idee von MUZAFERIJA [25] kann der Gradient in  $n$ -Richtung durch einen entsprechenden Gradienten in die Indexrichtung  $\xi$  ersetzt werden, solange sich diese nicht allzu sehr unterscheiden, vgl. Abb. 3.1.

Mit dieser Annahme lässt sich der diffusive Fluss in der folgenden Form darstellen:

$$F_e^d = \Gamma_e A_e \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_e^{n+1} + \Gamma_e A_e \left( \frac{\overline{\partial \phi}}{\partial n} \Big|_e - \frac{\overline{\partial \phi}}{\partial \xi} \Big|_e \right)^n. \quad (3.20)$$

Der im Iterationsschritt  $n + 1$  implizit zu lösende Term schreibt sich unter Verwendung einer zentralen Differenz

$$\Gamma_e A_e \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_e = \Gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{|\underline{x}_E - \underline{x}_P|}, \quad (3.21)$$

während der explizit nachgeführte Term die einfache Betrachtungsweise korrigiert:

$$\Gamma_e A_e \left( \frac{\overline{\partial \phi}}{\partial n} \Big|_e - \frac{\overline{\partial \phi}}{\partial \xi} \Big|_e \right)^n = \Gamma_e A_e \overline{(\text{grad } \phi)} \Big|_e^n (\underline{n} - \underline{i}_\xi). \quad (3.22)$$

Die in obiger Gleichung überstrichenen Terme bezeichnen dabei die von den Zellmittelpunkten an die Zellflächen interpolierten Gradienten.

Die Größenordnung des explizit betrachteten Korrekturterms, der die Differenz zwischen der lokalen  $\xi$ - und  $n$ -Richtung enthält, ist in der Regel klein gegenüber dem implizit diskretisierten Anteil, so dass diese Approximation keinen großen Einfluss auf das Konvergenzverhalten nimmt.

Für eine vollständige Bilanz der diffusiven Flüsse muss die Diskretisierung wie bei den konvektiven Termen auf alle sechs Teilflächen des Kontrollvolumens angewendet werden.

### 3.1.6 Diskretisierung beim Stromfunktions-Vorticity-Verfahren

Die Gleichung für die Stromfunktion  $\psi$  in der Gitterebene, Gl. 2.25, bzw. in der Meridianebene, Gl. 2.29, enthält keine konvektiven Terme. Für die Gleichung in der  $(m - \varphi)$ -Gitterebene ergibt sich beispielsweise mit

$$f = \frac{r}{\delta} \frac{\partial \psi_g}{\partial m}, \quad g = \frac{1}{r \delta} \frac{\partial \psi_g}{\partial \varphi} \quad (3.23)$$

nach Integration über ein 2D Kontrollvolumen  $A$  um den Punkt  $P(i, j)$ , Überführung in ein Linienintegral über die geschlossene Berandung  $\partial A$  der 2D Gitternetzelle mit Hilfe des Satzes von Gauß und Approximation durch die entsprechenden Werte am Mittelpunkt des jeweiligen Randlinienelements:

$$\int_A \left( \frac{\partial f}{\partial m} + \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right) dA = \oint_{\partial A} dl (n_m \cdot f + n_\varphi \cdot g) \approx \sum_k l_k (n_m \cdot f + n_\varphi \cdot g)_k. \quad (3.24)$$

$n_m$  und  $n_\varphi$  bezeichnen hierbei die Komponenten des 2D Normalenvektors und  $l_k$  die Länge des Linienelements  $k$ , wie in Bild 3.2 am Beispiel der East-Randlinie mit dem Zählindex  $i + 1/2, j$  dargestellt ist.

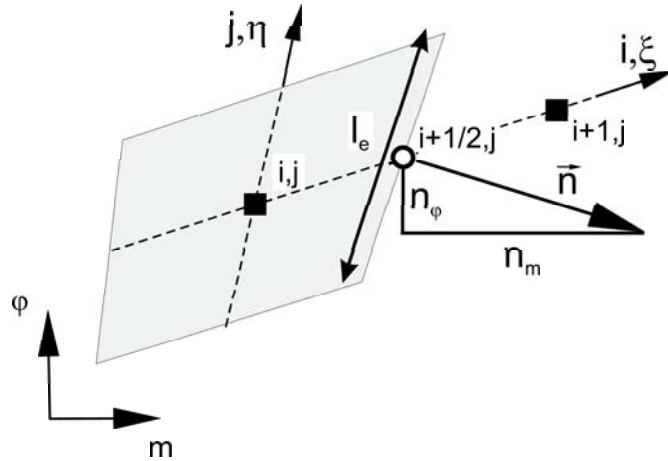


Bild 3.2: 2D Kontrollvolumen in der  $m - \varphi$  - Ebene.

Die Produkte der Normalenvektoren mit den Längen der jeweiligen Linienelemente können wie folgt ausgedrückt werden:

$$i \pm \frac{1}{2}, j : n_m \cdot l = \pm \frac{\Delta \varphi}{\Delta \eta} = \pm \varphi_\eta \quad n_\varphi \cdot l = \mp \frac{\Delta m}{\Delta \eta} = \mp m_\eta, \quad (3.25)$$

$$i, j \pm \frac{1}{2} : n_m \cdot l = \mp \frac{\Delta \varphi}{\Delta \xi} = \mp \varphi_\xi \quad n_\varphi \cdot l = \pm \frac{\Delta m}{\Delta \xi} = \pm m_\xi. \quad (3.26)$$

In Gl. 3.24 sind noch die Werte der Flüsse  $f$  und  $g$  an den Linienmittelpunkten einzusetzen, die gemäß Gl. 3.23 die partiellen Ableitungen der Stromfunktion  $\psi_g$  jeweils in  $m$ - bzw.  $\varphi$ -Richtung enthalten. Diese Ableitungen werden über eine Koordinatentransformation der physikalischen Koordinaten  $(m, \varphi)$  auf die Indexvariablen  $(\xi, \eta)$  bestimmt:

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial \xi} \xi_m + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta_m \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \xi_\varphi + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta_\varphi \quad (3.28)$$

Die partiellen Koordinatenableitungen für  $m = const.$  bzw.  $\varphi = const.$  lassen sich auf einem krummlinigen Rechnetz nicht direkt berechnen. Mit Hilfe der Umkehrtransformation lassen sie sich jedoch in eine verwertbare Form bringen:

$$\xi_m = \frac{1}{g} \varphi_\eta \quad , \quad \xi_\varphi = -\frac{1}{g} m_\eta \quad , \quad \eta_m = -\frac{1}{g} \varphi_\xi \quad , \quad \eta_\varphi = \frac{1}{g} m_\xi \quad , \quad (3.29)$$

wobei  $g$  hier die Jacobi-Determinante der Transformation bezeichnet:

$$g = m_\xi \varphi_\eta - m_\eta \varphi_\xi. \quad (3.30)$$

Folglich lassen sich die Ableitungen der Stromfunktion  $\psi$  darstellen als

$$\frac{\partial \psi}{\partial m} = \frac{1}{g} (\psi_\xi \varphi_\eta - \psi_\eta \varphi_\xi), \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \frac{1}{g} (-\psi_\xi m_\eta + \psi_\eta m_\xi). \quad (3.32)$$

Auf der rechten Seite sind alle Ableitungen in Richtung der Indexlinien zu bilden, so dass beispielsweise am Mittelpunkt  $(i + 1/2, j)$  der East-Randlinie eine CDS-Diskretisierung zweiter Ordnung unter Verwendung der Werte von  $\psi$  an den Zellmittelpunkten folgendermaßen aussieht:

$$\psi_\xi|_{i \pm \frac{1}{2}, j} = \psi_{i+1, j} - \psi_{i, j}, \quad (3.33)$$

$$\psi_\eta|_{i \pm \frac{1}{2}, j} = 0.25 (\psi_{i+1, j+1} - \psi_{i+1, j-1} + \psi_{i, j+1} - \psi_{i, j-1}). \quad (3.34)$$

Der Ausdruck in der zweiten Zeile ergibt sich, weil am Mittelpunkt einer Randlinie eine Ableitung in  $j$ -Richtung betrachtet wird, die in  $i$ -Richtung vom Zellmittelpunkt verschoben liegt. Durch analoge Überlegungen erhält man für alle anderen Ableitungen an den übrigen Randlinien entsprechende Ausdrücke, mit deren Hilfe die Summe der Flüsse in Gl. 3.24 berechnet werden kann.

Die diffusiven Terme in der Transportgleichung für die Vorticity  $\lambda$  lassen sich exakt in derselben Weise diskretisieren, während die konvektiven Terme wie in Kapitel 3.1.4 beschrieben zu behandeln sind.

### 3.1.7 Diskretisierung der Quellterme

Alle in den zu lösenden Transportgleichungen auftretenden Quellterme werden über den in Kap. 3.1.2 vorgestellten Ansatz approximiert.

#### Berechnung des Druckgradienten in den Impulsgleichungen

Im Falle der Impulsgleichungen wird der darin enthaltene Druckgradient, s. Gl. 2.2, in eine konservative Form von Oberflächenintegralen umgewandelt:

$$-\int_{\Delta V} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = -\int_A p \underline{\hat{i}}_i \cdot \underline{n} dA. \quad (3.35)$$

In diskretisierter Form ergibt sich:

$$-\left. \frac{\partial p}{\partial x_i} \right|_P \Delta V_P = -\sum_k p_k \underline{\hat{i}}_i \cdot \underline{n} A_k. \quad (3.36)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass beide Ausdrücke in Gl. 3.36 gleichwertig sind, solange zur Berechnung des Druckgradienten  $\partial p/\partial x_i$  an der Stelle P der Gauß'sche Integralsatz angewendet wird.

### Berechnung der Transportgleichungen des Turbulenzmodells

Bei Zweigleichungs-Turbulenzmodellen, wie z.B. dem verwendeten Standard- $k$ - $\epsilon$ -Modell, wird je eine Transportgleichung, z.B. für  $k$  und  $\epsilon$ , s. Gl. 2.10 und 2.11, gelöst, die besondere Aufmerksamkeit erfordert.

Die Turbulenzgrößen  $k$  und  $\epsilon$  sind definitionsgemäß stets positiv, während die rechten Seiten der Transportgleichungen jeweils einen echten Quellterm mit positivem Vorzeichen und einen Senkenterm mit negativem Vorzeichen enthalten. Dies kann während der iterativen Lösungsprozedur unter Umständen lokal zu unphysikalischen negativen Werten der Turbulenzgrößen führen. In [1] wird gezeigt, wie durch eine geeignete Erweiterung der Senkenterm der  $k$ -Gleichung implizit diskretisiert werden kann und damit eine Erhöhung des zentralen Koeffizienten  $a_P$  und eine Stärkung der Diagonaldominanz der Lösungsmatrix erreicht werden kann. Der Senkenterm auf der rechten Seite in Gl. 2.10 wird bzgl.  $k^{n+1}$  linearisiert und mit positivem Vorzeichen dem impliziten Teil auf der linken Seite hinzu addiert. Die Endlösung der  $k$ -Gleichung wird dadurch nicht beeinflusst, da im auskonvergierten Zustand  $k^{n+1} = k^n$  gilt und somit die originäre Transportgleichung erhalten bleibt.

$$\dots + P_k - \varrho \epsilon \quad \Rightarrow \quad \dots + P_k - \varrho \frac{\epsilon^n}{k^n} k^{n+1} \quad (3.37)$$

Eine ähnliche Linearisierung kann auch für den Senkenterm der  $\epsilon$ -Gleichung 2.11 durchgeführt werden:

$$\dots + \frac{\epsilon}{k} (C_{\epsilon 1} P_k - \varrho C_{\epsilon 2} \epsilon) \quad \Rightarrow \quad \dots + \frac{\epsilon^n}{k^n} (C_{\epsilon 1} P_k - \varrho C_{\epsilon 2} \epsilon^{n+1}) \quad (3.38)$$

### Quellterm beim Stromfunktions-Vorticity-Verfahren

Der Quellterm  $S$  in der Wirbeltransportgleichung 2.41 wird über das Zellvolumen integriert, das in 2D mit der Jacobi-Determinante aus Gl. 3.30 ausgedrückt werden kann:

$$\int_A S dA \approx (g \cdot S)_P \quad (3.39)$$

Die in dem Quellterm  $S$  nach Gl. 2.42 numerisch zu berechnenden Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten  $w_m$  und  $w_\varphi$  stellen eine mögliche Fehlerquelle dar, da die Geschwindigkeiten in dem Verfahren selbst nicht gelöst, sondern ihrerseits durch numerische Differenziation aus der Lösung für die Stromfunktion gewonnen werden. Eine mathematisch äquivalente, aus numerischer Sicht jedoch günstigere Formulierung des Quellterms erhält man nach einigen Umformungen mit Hilfe der Kontinuität 2.22:

$$S = 2 \Omega r w_m \left[ \frac{\partial \sin \alpha}{\partial m} - \frac{\sin \alpha}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial m} \right]. \quad (3.40)$$

Die Differenziation beschränkt sich in dieser Formulierung ausschließlich auf geometrische, netzabhängige Größen. Der Klammerausdruck muss daher vor der eigentlichen Lösung auf einer  $S1_i$ -Gitterebene nur ein einziges Mal berechnet und abgespeichert werden.

### 3.1.8 Allgemeine diskretisierte Transportgleichung

Die allgemeine Transportgleichung in integraler Form, Gl. 3.3, lässt sich mit Hilfe der in den vorangegangenen Kapiteln beschriebenen Diskretisierungstechniken für konvektive, diffusive und Quellterme in eine diskrete algebraische Beziehung für die allgemeine Variable  $\phi$  umformen, die an jedem Rechenpunkt P die jeweiligen Flüsse durch die sechs Teilflächen eines Kontrollvolumens in 3D bzw. durch die vier Randlinien einer Zelle in 2D und die in der Zelle enthaltenen Quellen bilanziert:

$$a_P \phi_P + \sum a_{nb} \phi_{nb} = b_\phi \quad (3.41)$$

Die Terme werden dabei sortiert nach den Beiträgen zu  $\phi$  am zentralen Punkt P, an den unmittelbaren Nachbarpunkten  $nb$  und sonstigen Einflüssen. Die Koeffizienten  $a_{nb}$  beschreiben also den Einfluss der Umgebung auf den Punkt P durch Konvektion und Diffusion, während der Quellterm  $b_\phi$  sowohl die im Kontrollvolumen wirkenden Kräfte, wie z.B. die Coriolisterme im Falle der Impulsgleichungen, als auch die aus dem Deferred Correction Scheme stammenden Korrekturterme beinhaltet.

Um das Stromfeld vollständig zu beschreiben, wird für jeden Punkt im Rechnernetz eine Bilanzgleichung 3.41 aufgestellt, wobei durch die konservative Formulierung sichergestellt ist, dass ein Massen- oder Impulsfluss, der aus einer Zellfläche austritt, vollständig in die benachbarte Zelle einströmt. Bei  $N$  Finiten Volumina im Rechnernetz erhält man demnach für jede der diskretisierten Transportgleichungen ein lineares algebraisches Gleichungssystem mit  $N$  Gleichungen, das in folgender Weise angeschrieben werden kann:

$$A \underline{\phi} = \underline{b} \quad (3.42)$$

Darin bezeichnet  $A$  eine  $N \times N$ -Matrix mit einer die Koeffizienten  $a_P$  beinhaltenden Hauptdiagonalen und den Koeffizienten  $a_{nb}$  auf den entsprechenden Nebendiagonalen.

Die einzelnen Transportgleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten, die Turbulenzgrößen bzw. Stromfunktion und Vorticity bei den Q3D-Verfahren werden sequentiell gelöst. Da die Erhaltungsgleichungen zum einen nicht-linear und zum anderen stark wechselseitig gekoppelt sind, müssen die linearisierten Gleichungen iterativ gelöst werden.

Kontrollvolumen, die an Berandungsflächen angrenzen, werden mit Randbedingungen versehen, die die Problemstellung beschreiben. Diese werden in Kap. 3.3 näher erläutert.



## 3.2 Lösung des Gleichungssystems

### 3D-Verfahren

Zur Berechnung des Gleichungssystems 3.42 wird die „Strongly Implicit Procedure“ von STONE [47] verwendet. Dieser Algorithmus wurde speziell für die Lösung algebraischer Gleichungen, die aus einer Diskretisierung partieller Differenzialgleichungen stammen, entwickelt und basiert auf einer unvollständigen Zerlegung der Matrix  $A$  in eine obere und untere, schwach besetzte Dreiecksmatrix. Es handelt sich hierbei um einen feldweisen Löser, d.h. die Matrixgleichung 3.42 für den Kontrollraum wird voll implizit gelöst. Das führt in 2D zu fünf, in 3D zu sieben besetzten Diagonalen in der Koeffizientenmatrix  $A$ . Die Inversion der Matrix  $A$  wird hierbei in einer iterativen Prozedur, die hinsichtlich der gesamten Problemlösung als „Innere Iteration“ bezeichnet wird, durchgeführt. Nähere Informationen zum kurz als SIP bezeichneten Lösungsverfahren finden sich z.B. in [26] und [8].

Die Navier-Stokes-Gleichungen 2.2 sind nichtlinear und in den drei Geschwindigkeitskomponenten  $c_i$  wechselseitig gekoppelt. Die vierte fluiddynamische Variable, der Druck  $p$ , tritt allerdings in der Kontinuitätsgleichung 2.1 nicht auf, die deshalb insbesondere bei inkompressiblen Fluiden als weitere Bestimmungsgleichung schlecht geeignet ist. In der Literatur werden unterschiedliche Ansätze zur Lösung dieses Problems vorgeschlagen, wie z.B. die Einführung einer „Künstlichen Kompressibilität“ nach CHORIN [4], die auf der Annahme einer variablen Dichte basiert. Zur Bestimmung des Stromfeldes unter Erhaltung der Masse bei nahezu inkompressiblen Strömungen haben sich jedoch die sogenannten Druckkorrektur-Verfahren als vorteilhaft erwiesen.

Bei den vorliegenden 3D-Verfahren kommt der weitverbreitete SIMPLE<sup>1</sup>-Algorithmus, s. z.B. PATANKAR [27, 28], zur Anwendung. Die Impulsgleichungen werden aufgrund von Nichtlinearitäten und einer starken wechselseitigen Kopplung nicht direkt, sondern iterativ gelöst. Diese iterative Prozedur wird auch als „Äußere Iteration“ bezeichnet. Die diskretisierte Impulsgleichung für die Geschwindigkeitskomponente  $c_i$  lautet:

$$a_P^{c_i} c_{i,P}^{n*} + \sum a_{nb}^{c_i} c_{i,nb}^{n*} = b_{c_i}^{n-1} - \Delta V \left( \frac{\partial p^{n-1}}{\partial x_i} \right)_P. \quad (3.43)$$

Die in einem Iterationsschritt  $n$  sequentiell gelösten Geschwindigkeitskomponenten  $c_{i,P}^{n*}$  erfüllen die jeweils entsprechende  $i$ -te Impulsgleichung, in der die Werte  $p^{n-1}$  für den Druck aus der vorangehenden Iteration explizit vorgegeben werden und deren Koeffizienten  $a_P^{c_i}$  und  $a_{nb}^{c_i}$  aufgrund der Linearisierung ebenfalls mit den Geschwindigkeiten aus dem Iterationsschritt  $n-1$  gebildet sind. Die Kontinuität wird durch diese vorläufigen, mit \* gekennzeichneten Geschwindigkeiten in der Regel nicht erfüllt sein. Hierfür sollen nun der Druck aus dem vorangegangenen Iterationsschritt  $p^{n-1}$  und die (vorläufigen) Geschwindigkeiten  $c_i^{n*}$  um einen kleinen Wert korrigiert werden, so dass im neuen Iterationsschritt auch die Massenerhaltung gewährleistet ist:

$$c_i^n = c_i^{n*} + c_i' \quad p^n = p^{n-1} + p'. \quad (3.44)$$

---

<sup>1</sup>SIMPLE=Semi IMplicit procedure for Pressure-Linked Equations

Beim SIMPLE-Verfahren wird ein Zusammenhang dieser vier unbekanntenen Korrekturen abgeleitet, der das Problem auf die Bestimmung einer einzigen Unbekannten, der Druckkorrektur  $p'$  reduziert:

$$c'_{i,P} = -\frac{\Delta V}{a_P^{c_i}} \left( \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_P. \quad (3.45)$$

Durch Umformung der Kontinuitätsgleichung und Einsetzen dieses Zusammenhanges erhält man die sogenannte Druckkorrekturgleichung 3.46, die die mathematische Form einer Poisson-Gleichung für die Korrektur  $p'$  mit einem Quellterm  $\text{div}(\underline{c}_P)^{n*}$  auf der rechten Seite besitzt und nach deren Lösung sich die nachfolgenden Korrekturen  $c'_i$  aus Gl. 3.45 leicht berechnen lassen:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\Delta V}{a_P^{c_i}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_P = \frac{\partial c_{i,P}^{n*}}{\partial x_i}. \quad (3.46)$$

Bei diesen Ableitungen wurden allerdings einige Vereinfachungen getroffen, weshalb die Korrekturwerte allenfalls eine Annäherung darstellen, die erst nach einer ausreichenden Anzahl von äußeren Iterationen zu einer auskonvergierten numerischen Lösung des fluiddynamischen Problems führt. Erfüllt das Geschwindigkeitsfeld  $\underline{c}_P^{n*}$  schließlich die Kontinuitätsgleichung, so ist der Quellterm für die Druckkorrektur gleich Null.

### Q3D-Verfahren

Bei den Q3D-Verfahren wird der zweidimensionale Kontrollraum wechselweise mit dem STONE-Algorithmus und einem linienweise durchgeführten Gaußalgorithmus, dem sog. TDMA (Tridiagonal Matrix Algorithm) gelöst. In dem Gleichungssystem 3.41 werden hierbei die Terme für die Nachbarpunkte abwechselnd in einer Indexrichtung explizit auf die rechte Seite gebracht, die zweite Indexrichtung wird implizit gelöst. Die Koeffizientenmatrix besitzt dann eine tridiagonale Struktur und ist somit für eine effiziente Lösung mit dem TDMA geeignet.

Zur Aktualisierung der Randbedingungen von Stromfunktion und ggf. Vorticity wird bei jeder Iteration eine Lösung der Transportgleichungen für die Stromfunktion, Gl. 2.40, und ggf. der Vorticity, Gl. 2.41, auf den periodischen Rändern durchgeführt. Um die Kopplung der beiden Variablen beim NSQ3D-Verfahren zu stärken, wird dort ein spezieller Matrixalgorithmus eingesetzt, der beide Gleichungen gemeinsam löst. Im Feld erfolgt stattdessen eine sequentielle Lösung der beiden Transportgleichungen.

Diese Lösungsprozedur auf den  $S1_i$ -Gitterebenen eines Schaufelkanals ist in Bild 3.3 schematisch dargestellt. Beim EQ3D-Verfahren entfällt voraussetzungsgemäß die Lösung der Vorticity-Transportgleichung.

- 1) Gekoppelte Lösung auf dem seitlichen periodischen Rand vor der Schaufel
- 2) Gekoppelte Lösung auf dem seitlichen periodischen Rand nach der Schaufel
- 3) Aktualisierung der Randwerte am Kontrollraumeintritt
- 4) Aktualisierung der Randwerte am Kontrollraumaustritt
- 5) Berechnung der Vorticity-Randbedingung an den Wänden
- 6) Sequentielle Lösung der Variablen im Strömungsgebiet

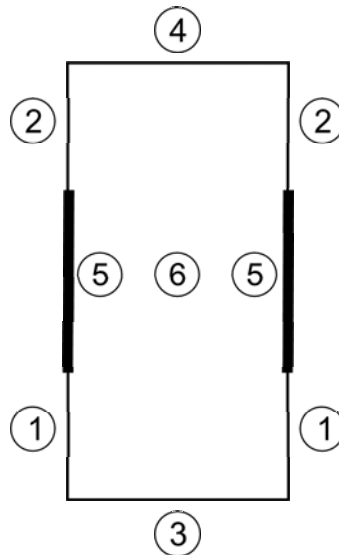


Bild 3.3: Lösungsprozedur im 2D-Kontrollraum für eine  $S1_i$ -Gitterebene eines Schaufelkanals, schematische Darstellung.

### 3.3 Randbedingungen

In Abschnitt 3.1.8 wurde eine diskretisierte Transportgleichung abgeleitet, die den Wert der allgemeinen Variablen  $\phi$  an jedem betrachteten Punkt P des Rechnernetzes in Beziehung zu seinen Nachbarn und sonstigen Einflüssen setzt. An den Zellen, die an die Berandungsflächen des betrachteten Strömungsgebiets angrenzen, fehlen Informationen für die Bilanzgleichung, weshalb zur Lösung des linearisierten Gleichungssystems an diesen Orten für jede Variable Randbedingungen vorgegeben werden müssen.

An diesen Randflächenelementen sind also Aussagen über die drei Geschwindigkeitskomponenten  $(c_x, c_y, c_z)^T$  und die Druckkorrektur  $p'$ , über die Turbulenzgrößen  $k$  und  $\epsilon$  oder im Falle der Q3D-Verfahren über die Stromfunktion  $\psi$  und die Vorticity  $\lambda$  zu treffen.

Dies kann über die Vorgabe eines Gradienten oder über eine direkte Wertzuweisung geschehen, was entsprechend als Neumann- oder Dirichlet-Randbedingung bezeichnet wird.

Die Genauigkeit und die Stabilität des Verfahrens hängt im starken Maße von den gewählten Randbedingungen ab, weshalb diese im folgenden näher erläutert werden.

### 3.3.1 Einströmränder

#### Geschwindigkeiten

An Einströmrändern werden die Geschwindigkeitskomponenten direkt vorgeschrieben. Dies kann z.B. im kartesischen Koordinatensystem  $\underline{c} = (c_x, c_y, c_z)^T$  oder im Zylinderkoordinatensystem  $\underline{c} = (c_r, c_\varphi, c_z)^T$  durchgeführt werden.

#### Druck und Druckkorrektur

Da am Einströmrand die Geschwindigkeiten vorgegeben sind, leitet sich für dichtebe-ständige Fluide aus Gl. 3.45 unmittelbar die Bedingung  $\partial p' / \partial n = 0$  ab. Der statische Druck am Einströmrand wird aus den Werten im Feld linear extrapoliert.

#### Turbulenzgrößen

Zusätzlich zu den Stromfeldgrößen müssen an Einströmrändern Werte für die spezifi-sche turbulente kinetische Energie  $k$  und die Dissipationsrate  $\epsilon$  definiert werden. Der Eintrittswert für  $k$  wird aus Gl. 3.47 über einen Turbulenzgrad  $Tu$  definiert. Die Größe  $c_\infty$  bezeichnet dabei den Betrag der Absolutgeschwindigkeit an der betrachteten Stelle.

$$k = \frac{3}{2} Tu^2 c_\infty^2 \quad (3.47)$$

Im Falle eines  $k$ - $\epsilon$ -basierten Turbulenzmodells wird die Dissipationsrate  $\epsilon$  am Eintritt über ein sogenanntes turbulentes Längenmaß  $L_\epsilon$  bestimmt und nach Gl. 3.48 berechnet.

$$\epsilon = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L_\epsilon} \quad (3.48)$$

Aus der Literatur ergeben sich für den Turbulenzgrad  $Tu$  Werte zwischen 1% und 10% sowie für das turbulente Längenmaß  $L_\epsilon$  Werte zwischen 1% und 100% einer charakte-ristischen Abmessung der betrachteten Geometrie, d.h. des Schaufelgitters.

Ein anderer Ansatz, das turbulente Längenmaß  $L$  abzuschätzen, ist die Vorgabe eines gewünschten Verhältnisses zwischen turbulenter und laminarer Viskosität  $(\mu_t / \mu_l)_\infty$  am Eintritt. Aus Gl. 2.12 kann zusammen mit Gl. 3.47 und Gl. 3.48 folgender funktionaler Zusammenhang abgeleitet werden:

$$L_\epsilon = \frac{\mu \left( \frac{\mu_t}{\mu_l} \right)_\infty}{\sqrt{\frac{3}{2}} \varrho C_\mu Tu c_\infty}. \quad (3.49)$$

#### Stromfunktion

Aus der Vorgabe eines Geschwindigkeitsprofils am Einströmrand kann über die Be-ziehungen 2.24 in der Gitterebene bzw. 2.28 in der Meridianebene der Verlauf der Stromfunktion durch Integration berechnet werden.

### Vorticity

Falls für die Vorticity am Einströmrand keine andere Verteilung bekannt ist, empfiehlt sich als sinnvolle Vorgabe die Annahme einer im Absolutsystem drehungsfreien Strömung, d.h.  $\text{rot } \underline{c} = 0$  bzw. im Relativsystem  $\text{rot } \underline{w} = -\text{rot } \underline{u}$ . Das führt in der  $S1_i$ -Gitterebene auf Gl. 2.25,  $\lambda_{G,in} = -2\Omega \sin \alpha$ . Da die Umfangskomponente der Vorticity einer im Absolutsystem drehungsfreien Strömung in der  $S2_m$ -Meridianebene verschwindet, kann  $\lambda_m = 0$  gesetzt werden, wenn keine anderen Daten für die Zuströmung, z.B. aus einem vorangehenden Rechenblock, bekannt sind. Der Einfluss des Randwertes auf die Lösung ist hierbei innerhalb einer realistischen Bandbreite relativ gering, da der Hauptanteil der Vorticity im Bereich zwischen den Schaufeln durch die Schaufelkräfte erzeugt wird.

### 3.3.2 Ausströmränder

#### Geschwindigkeiten

Am Ausströmrand ist die Strömung vorab nicht bekannt, sondern Ergebnis der Rechnung. Aus diesem Grund definiert man die Geschwindigkeitskomponenten hier über eine Extrapolation der Form  $\partial c_i / \partial \xi = 0$ . Diese Art von Randbedingung ist streng genommen nur dann gültig, wenn der Ausströmrand möglichst weit stromab liegt und keinen Einfluss auf die Strömung in der Turbomaschine nimmt.

#### Druck und Druckkorrektur

Die Druckkorrektur wird analog zu den Einströmrändern über die Bedingung  $\partial p' / \partial n = 0$  berechnet. Der statische Druck kann als konstanter oder als flächengemittelter Wert über der Austrittsfläche festgeschrieben werden. Über einen Faktor  $0 \leq \alpha_p \leq 1$  kann zwischen den beiden Zuständen linear variiert werden:

$$p_{out} = \alpha_p p_{mittel} + (1 - \alpha_p) p_{const.} \quad (3.50)$$

#### Turbulenzgrößen

Im Falle turbulenter Strömung werden die Turbulenzgrößen  $k$  und  $\epsilon$  linear entlang der Netzlinien extrapoliert.

#### Stromfunktion und Vorticity

Die Werte der Stromfunktion  $\psi$  und im Falle des NSQ3D-Verfahrens der Vorticity  $\lambda$  können entweder über eine Transportgleichung für den Ausströmrand gelöst oder einfach linear extrapoliert werden. Detaillierte numerische Ansätze hierzu finden sich z.B. bei ROACHE [35]. Es hat sich gezeigt, dass eine lineare Extrapolation bei guter Netzqualität am Kontrollraumaustritt vergleichbar gute Ergebnisse liefert und die Lösung damit deutlich schneller konvergiert. Der Wert der Vorticity am Ausströmrand hat insbesondere bei größeren Reynolds-Zahlen kaum Einfluss auf stromaufwärts gelegene Gebiete.

### 3.3.3 Periodische Ränder

An den seitlichen Kontrollraumgrenzen vor und nach der Beschaufelung werden in der Regel periodische Ränder definiert. Numerisch werden diese wie innere Zellgrenzflächen behandelt, weshalb hier keine direkte Wertzuweisung erfolgen muss.

Skalare Transportgrößen werden unmittelbar an die entsprechenden periodischen Randflächen übergeben, die Geschwindigkeitsvektoren müssen zusätzlich über eine Rotationsmatrix um den Teilungswinkel  $\gamma$  gedreht werden.

Die Behandlung periodisch gedrehter Gradienten erfordert im Falle der Geschwindigkeiten besondere Aufmerksamkeit. Nähere Informationen hierzu finden sich z.B. bei RITZINGER [34].

### Q3D-Verfahren

Eine Besonderheit liegt bei der Anwendung der Q3D-Verfahren auf den  $S1_i$ -Ebenen vor, weil hier die Transportgleichungen in jedem Iterationsschritt auch auf den seitlichen periodischen Rändern gelöst werden, vgl. Bild 3.3. Der Wert der Stromfunktion ist auf der Schaufel konstant, s. Kap. 3.3.4, somit liegt der schaufelseitige Wert der Stromfunktion auf dem Rand fest. Beim periodischen Rand im Zulauf ergibt sich aus den Zuströmbedingungen mit Gl. 2.24 am einströmseitig gelegenen Eckpunkt eine differenzielle Randbedingung für die Stromfunktion.

Bei reibungsfrei umströmten Profilen wird an der Hinterkante üblicherweise eine differenzielle Kutta-Abflussbedingung, d.h. gerade Abströmung angenommen, s. z.B. [3, 45], da der Drallsatz bei reibungsfreien Fluiden für jeden Wert der Schaufelzirkulation identisch erfüllt ist und somit nicht als Bestimmungsgleichung zur Verfügung steht. Um die Formulierung in diskreten Differenzen zu erleichtern, wird die Richtung der Skelettlinie bei der Netzgenerierung für die nachfolgenden drei Stützstellen auf der Randlinie beibehalten.

Im Falle einer reibungsbehafteten Strömung ersetzt der Impulsmomentensatz die Kutta-Abströmbedingung. Aus der Bilanzierung der in Kapitel 2.5.3.2 beschriebenen in Umfangsrichtung wirkenden Momente erhält man die resultierende Umlenkung, Gl. 2.46, und somit über Gl. 2.24 eine differenzielle Randbedingung für die Stromfunktion  $\psi$  am Kontrollraumaustritt. Aufgrund des zweifach differenziellen Zusammenhangs von Stromfunktion und Vorticity reagiert das numerische Verfahren jedoch sehr sensibel auf numerische Ungenauigkeiten. Deshalb wird anstelle der Neumann-Randbedingung für  $\psi$  der Randwert der Stromfunktion am Eckpunkt des Kontrollraumaustritts selbst so eingestellt, dass die Drallerhaltung von dem nachträglich aus den umfangsgemittelten Ergebnissen berechneten Drallverlauf im Bereich des Nachlaufs der Schaufel identisch erfüllt ist. Da bei größeren Reynolds-Zahlen der Drall  $\theta = rc_\varphi$  im schaufelfreien Raum nahezu konstant ist und die Reibungsverluste dort klein sind, führt dieses Vorgehen auch auf gröberen Rechnernetzen zu einer hinreichend genauen Lösung, die bei einer numerischen Auswertung der Impulsmomentenbedingung nur bei sehr fein aufgelösten Netzen erzielt werden kann. Einzelheiten hierzu sind im Kapitel 4.2.1 am Beispiel von Validierungsrechnungen erläutert.

Der Wert der Vorticity an den Schaufelkanten wird über den Gradienten der Tangentialgeschwindigkeit genauso ermittelt wie an den seitlichen Wänden, vgl. 3.3.4. Am

einströmseitigen Eckpunkt wird eine Dirichlet-Bedingung, am ausströmseitigen Eckpunkt eine Neumann-Bedingung gesetzt.

### 3.3.4 Wände

#### Geschwindigkeiten und Wandschubspannungen

Bei stoffundurchlässigen Wänden verschwindet die Normalkomponente der Relativgeschwindigkeit. Im Falle reibungsfreier Strömungen ist jedoch eine Tangentialkomponente erlaubt. Bei reibungsbehafteten Strömungen sind aufgrund der Haftbedingung die Geschwindigkeiten an der Wand gleich der Wandgeschwindigkeit selbst. Für im Absolutsystem drehende Wände gilt  $\underline{w} = 0$  bzw.  $\underline{c} = \underline{\omega} \times \underline{r}$ , für stehende Wände  $\underline{c} = 0$ .

Sowohl für die Lösung der Impulsgleichungen wie auch zur Bestimmung des Wandwertes der Vorticity ist es erforderlich, die Wandschubspannungen  $\tau_w$  nach Betrag und Richtung zu bestimmen.

Nach FERZIGER und PERIĆ [8] wird die Wandschubspannung mit Hilfe der wandparallelen Geschwindigkeitskomponente im Zellmittelpunkt der wandnächsten Zelle approximiert. In einem lokalen Koordinatensystem  $(t, n, s)^T$  mit  $t$  als der wandparallelen Richtung,  $n$  als wandnormaler Richtung und  $s$  als der auf  $t$  und  $n$  senkrecht stehenden Richtung lassen sich die angreifenden Wandschubspannungskomponenten wie folgt darstellen:

$$\tau_{nn} = 2\mu \frac{\partial w_n}{\partial n} = 0, \quad (3.51)$$

$$\tau_{nt} = \mu \frac{\partial w_t}{\partial n}, \quad (3.52)$$

$$\tau_{ns} = 0. \quad (3.53)$$

Die Richtung der wandparallelen Geschwindigkeit  $\underline{w}_{t,P}$ , die in Bild 3.4 dargestellt ist, wird näherungsweise definiert durch

$$\underline{t} = \frac{\underline{w}_{t,P}}{|\underline{w}_{t,P}|} \quad (3.54)$$

mit

$$\underline{w}_{t,P} = \underline{w}_P - |\underline{w}_{n,P}| \cdot \underline{n} = \underline{w}_P - (\underline{w}_P \circ \underline{n}) \cdot \underline{n}. \quad (3.55)$$

Der gesuchte Impulsfluss an der Wand  $\vec{f}_{Wand}$  lässt sich mit diesen Approximationen wie folgt berechnen:

$$\underline{f}_{Wand} = \int_A \tau_{nt} \underline{t} dA \approx \tau_{nt} \underline{t} \Delta A. \quad (3.56)$$

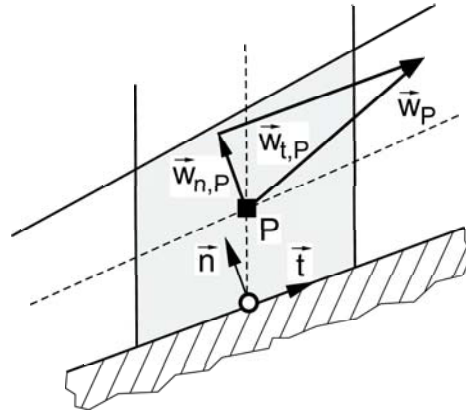


Bild 3.4: Vereinfachte Darstellung einer Wandzelle zur Berechnung der wandparallelen Geschwindigkeitskomponente.

### Die logarithmische Wandfunktion

Bei der Simulation reibungsbehafteter Strömungen bei größeren Reynolds-Zahlen treten in den Grenzschichten große Gradienten auf. Eine korrekte numerische Behandlung würde im wandnahen Bereich eine sehr hohe Netzauflösung erfordern, was aus Gründen der Rechenzeit nicht wünschenswert ist. Durch die Modellierung mit dem logarithmischen Wandgesetz kann dieser Bereich überbrückt werden, so dass die Anzahl der Gitterpunkte in Wandnähe wesentlich reduziert wird.

Der dimensionslose Verlauf eines turbulenten Grenzschichtprofils mit den typischen Bereichen der viskosen Unterschicht, der turbulenten Kernströmung und des sogenannten logarithmischen Bereiches ist in Bild 3.5 dargestellt. Die verwendeten Größen  $u^+$  und  $y^+$  sind dabei wie folgt definiert:

$$u^+ = \frac{w}{u_\tau} \quad , \quad y^+ = \frac{u_\tau \Delta y}{\nu} \quad , \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad . \quad (3.57)$$

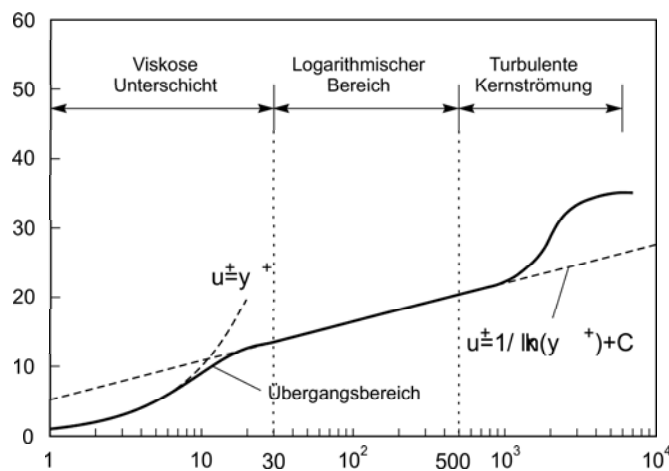


Bild 3.5: Geschwindigkeitsprofil einer turbulenten Grenzschicht in einfach logarithmischer Darstellung.



Im logarithmischen Bereich erfolgt die Berechnung der Wandschubspannung durch Lösen der folgenden transzendenten Gleichung nach  $u_\tau$ ,

$$\frac{w_t}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_\tau \Delta y}{\nu} + C, \quad (3.58)$$

wobei die darin enthaltenen Konstanten im entwickelten Programm auf  $\kappa = 0.41$  und  $C = 5.2$  gesetzt wurden.

Voraussetzung für die Gültigkeit dieses Zusammenhangs ist, dass der wandnächste Rechenpunkt im logarithmischen Bereich der Grenzschicht, d.h. bei hydraulisch glatten Wänden in den Bereich  $30 < y^+ < 500$ , gelegt wird. Diese Gleichung kann nur iterativ während der Lösung des Strömungsfeldes berechnet werden. Der tatsächlich vorliegende Wert von  $y^+$  ergibt sich hierbei erst aus dem Rechenergebnis. Bei extremen Werten muss daher das Rechnetz ggf. angepasst und die Rechnung wiederholt werden, um ein physikalisch sinnvolles Ergebnis zu erzielen.

Weitere Details zur Verwendung des logarithmischen Wandgesetzes und alternativen Ansätzen bei speziellen Problemen wie z.B. Transition oder abgelösten Strömungen finden sich z.B. in [1, 44].

### Druck und Druckkorrektur

Aufgrund der Undurchlässigkeit der Wände muss der resultierende normale Massenstrom gleich Null sein und es gilt dort die Bedingung  $\partial p' / \partial n = 0$ . Der statische Druck wird linear aus dem Rechengebiet an die Wände extrapoliert.

### Turbulenzgrößen bei Verwendung des logarithmischen Wandgesetzes

Bei der Verwendung des logarithmischen Wandgesetzes werden die Randwerte der Turbulenzgrößen nicht an der Randfläche, sondern am wandnächsten Punkt vorgeschrieben. Die Werte für  $k$  und  $\epsilon$  in Wandnähe lassen sich unmittelbar aus Gl. 3.58 ableiten, s. z.B. [54], und ergeben mit  $u_\tau$  aus Gl. 3.57 im Falle eines  $k$ - $\epsilon$ -basierten Turbulenzmodells folgende Beziehungen:

$$k_P = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \text{und} \quad \epsilon_P = \frac{u_\tau^3}{\kappa y}, \quad (3.59)$$

wobei  $P$  den wandnächsten Zellmittelpunkt kennzeichnet.

### Stromfunktion und Vorticity

Der Wandwert für die Vorticity beim NSQ3D-Verfahren folgt unmittelbar aus der Wandschubspannung über die Beziehung

$$\tau_{wall} = \nu \lambda_{wand}, \quad (3.60)$$

während die stoffundurchlässige Wand selbst eine Stromlinie darstellt, d.h. der Wert der Stromfunktion ist dort konstant und erfordert keine gesonderte Berechnung.

### 3.3.5 Interfaces zwischen Netzblöcken

Die Datenverwaltung in einer „non-matching“ Multiblock-Topologie erfordert spezielle Interpolationsalgorithmen, die den Austausch der Variablen an den aneinandergrenzenden Flächen unterschiedlicher Netzblöcke ohne einen Genauigkeitsverlust ermöglichen.

Ein Sonderfall liegt an der Grenze zwischen einem rotierenden und einem stehenden Gitter vor, wie z.B. einer Stufe aus Laufrad und Leitrad. Die genaueste Erfassung der wechselseitigen Interaktion der Strömung erfolgt dort durch eine Nachrechnung unter Berücksichtigung der zeitabhängigen Terme, was jedoch bei einer in der Regel ungleichen Schaufelteilung in den einzelnen Elementen in einem erheblichen Rechenaufwand resultiert.

Falls diese Interaktion nur eine untergeordnete Rolle spielt und die Strömung in den einzelnen Elementen im Wesentlichen als im Relativsystem stationär angesehen werden kann, werden in der Literatur weitere sog. Kopplungsalgorithmen diskutiert. Beim sog. „Stage-Interface“ werden die Strömungsgrößen in Umfangsrichtung gemittelt und an den nachfolgenden Netzblock übergeben. Eine Schichtung in radialer Richtung bleibt dabei erhalten. Der „Frozen-Rotor-Ansatz“ geht indessen von einer Momentanaufnahme einer bestimmten Position von Laufrad und Leitrad aus und berechnet dort eine stationäre Strömung. Durch eine Mittelung der stationären Strömungen in verschiedenen Positionen erhält man eine globale Aussage über die Strömung.

Im Rahmen dieser Arbeit sollte ein Vergleich der verschiedenen Rechenverfahren innerhalb des MLCFD-Ansatzes durchgeführt werden. Da die Q3D-Verfahren schon aufgrund des Modellierungsansatzes nur eine begrenzte Flexibilität hinsichtlich geometrischer Feinheiten besitzen, liegt der Schwerpunkt bei den hier durchgeführten Berechnungen auf einer Bewertung der Verfahren in einer stationären Relativströmung durch einen einfachen Schaufelkanal. Details zur Implementierung einer Multiblock-Datenverwaltung und unterschiedlicher Kopplungsalgorithmen finden sich z.B. in den Arbeiten von BADER [1] und SKODA [44].

# Kapitel 4

## Validierung

In diesem Kapitel werden die vorgestellten numerischen Verfahren einer Validierung unterzogen. Dazu wurden drei einfache Testgeometrien verwendet, die jeweils mit den beiden Q3D-Verfahren und dem NS3D-Code als Referenz für verschiedene Parameter-Konfigurationen gerechnet wurden.

### 4.1 Ebene Kanalströmung

Die einfachste Geometrie für die Durchführung von Vergleichsrechnungen ist in Bild 4.1 dargestellt. In Anlehnung an die bei Strömungsmaschinen auftretenden Kontrollräume mit Zulauf, beschauftem Bereich und Nachlauf wurden entsprechende Abschnitte in diesem nicht rotierenden ebenen Kanal vorgesehen. Die Absolutabmessungen betragen  $b = 0.1m$  und  $l = 10b$ .

Der Volumenstrom wird am linksseitigen Einströmrand vorgegeben, an den Wänden zwischen  $x/l = 0.1$  und  $x/l = 0.6$  gilt entweder Haftbedingung (NSQ3D und NS3D) oder die Vorschrift einer wandtangentialen Geschwindigkeit (EQ3D). An den seitlichen Rändern bei Zu- und Nachlauf werden periodische Randbedingungen vorgeschrieben, am Austritt die für den jeweiligen Code diskutierten sinnvollen Abströmrandbedingungen.

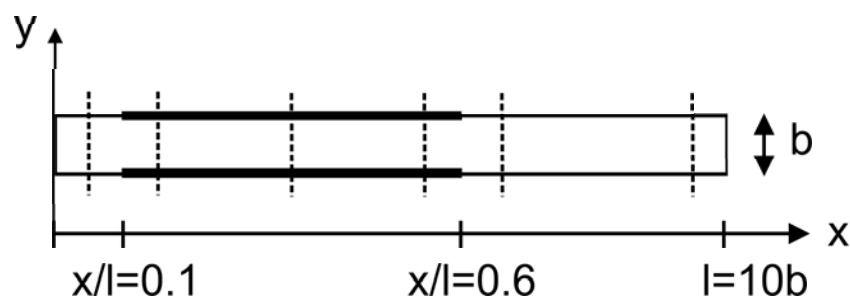
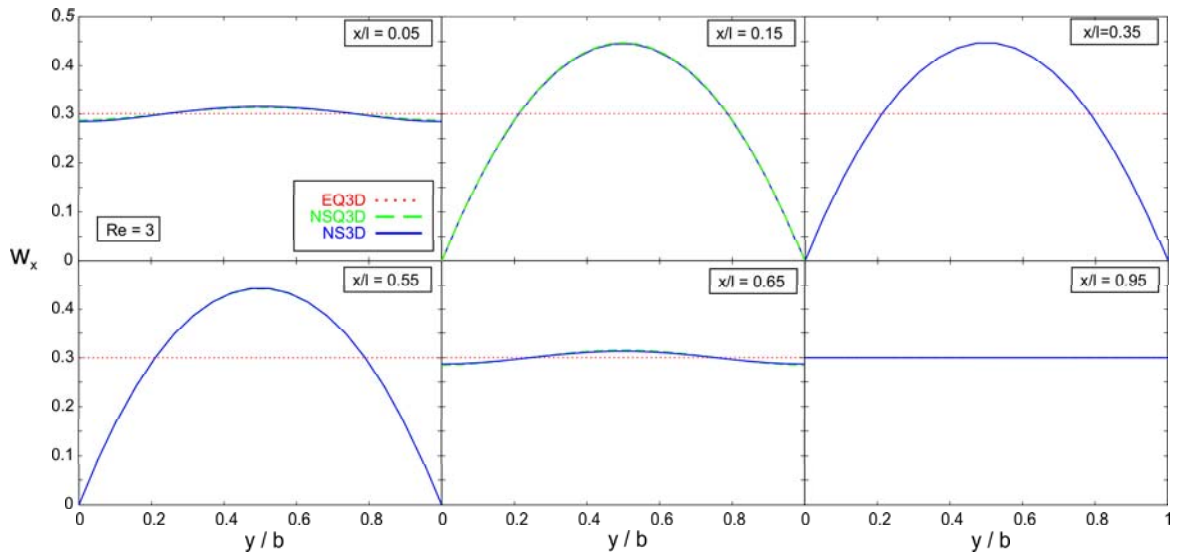


Bild 4.1: Geometrie eines ebenen Rechteckkanals mit Zu- und Nachlaufabschnitten

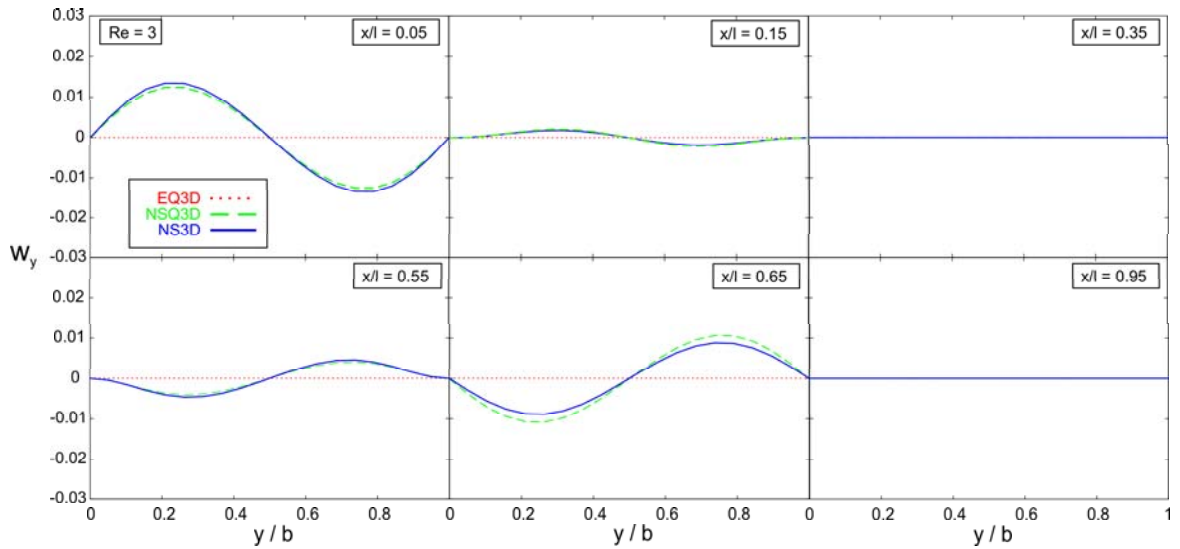
Zur Untersuchung der laminaren Strömung in einem ebenen, nicht rotierenden Kanal wurde eine homogene Zuströmung von  $w_x = 0.3m/s$  gewählt, was dem einem Volumenstrom von  $Q = 0.03m^3/s$  entspricht. Die untersuchten Reynolds-Zahlen liegen im Bereich von 3 bis 3000. Bei kleinen Reynolds-Zahlen ist eine Netzfeinheit von  $100 \times 20$  Gitterpunkten ausreichend, während ab  $Re = 300$  zuverlässige Ergebnisse erst mit  $200 \times 40$  Punkten erzielt werden können.

In Bild 4.2 bis Bild 4.5 sind die Verteilungen der Geschwindigkeiten in Hauptströmungsrichtung und senkrecht dazu,  $w_x$  und  $w_y$ , sowie die Vorticity dargestellt, die mit beiden Q3D-Codes und dem NS3D-Code als Referenz berechnet wurden. Die Verteilungen senkrecht zur Hauptströmungsrichtung wurden an sechs repräsentativen Positionen ausgewertet, die als gestrichelte Linien in Bild 4.1 eingezeichnet sind. Die Geschwindigkeiten aus der EQ3D-Rechnung sind aus Symmetriegründen erwartungsgemäß konstant, da die Wandreibung wegfällt. Die Übereinstimmung der beiden Navier-Stokes Codes ist sehr gut. Mit zunehmender Reynolds-Zahl wird der Einfluss der Einlaufänge in den Profilen von  $w_x$  erkennbar, was sich auch am Verlauf der Stromlinien in Bild 4.6 erkennen lässt.

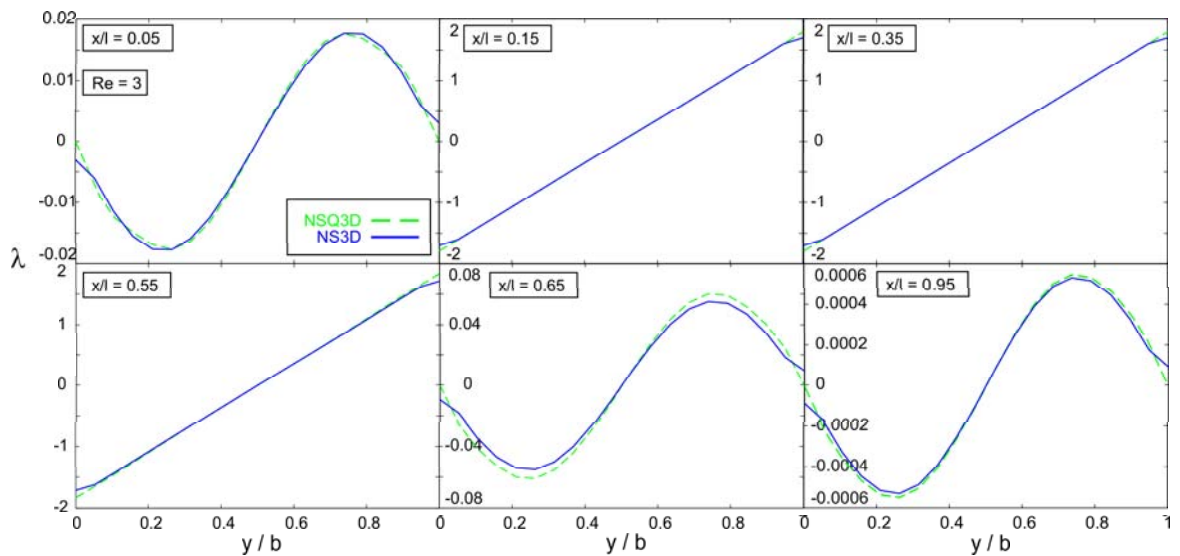
Das NSQ3D-Verfahren erweist sich für diesen einfachen Testfall als zuverlässig.



(a)  $w_x$

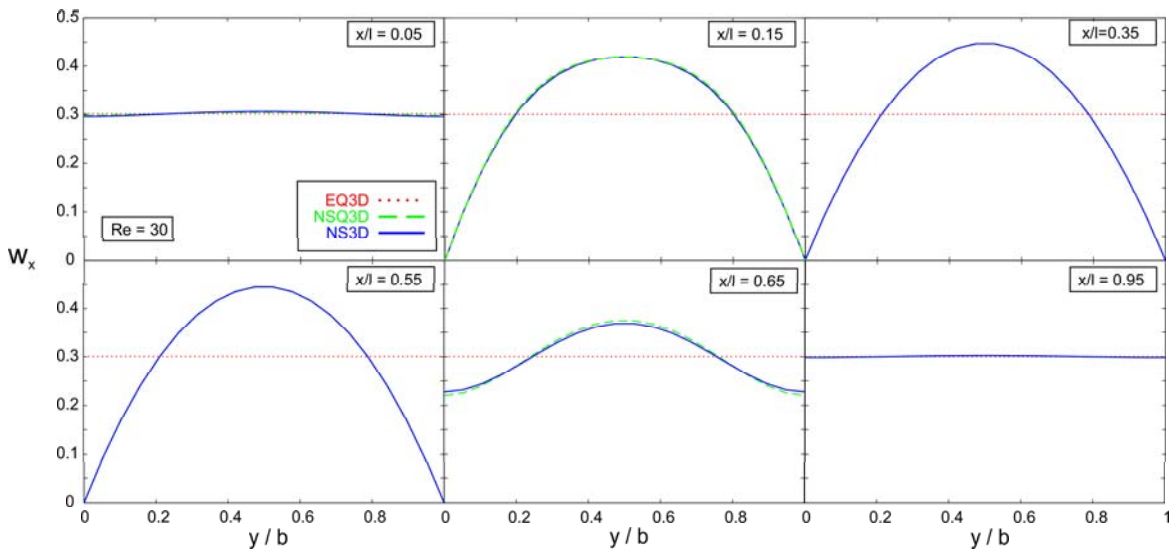


(b)  $w_y$

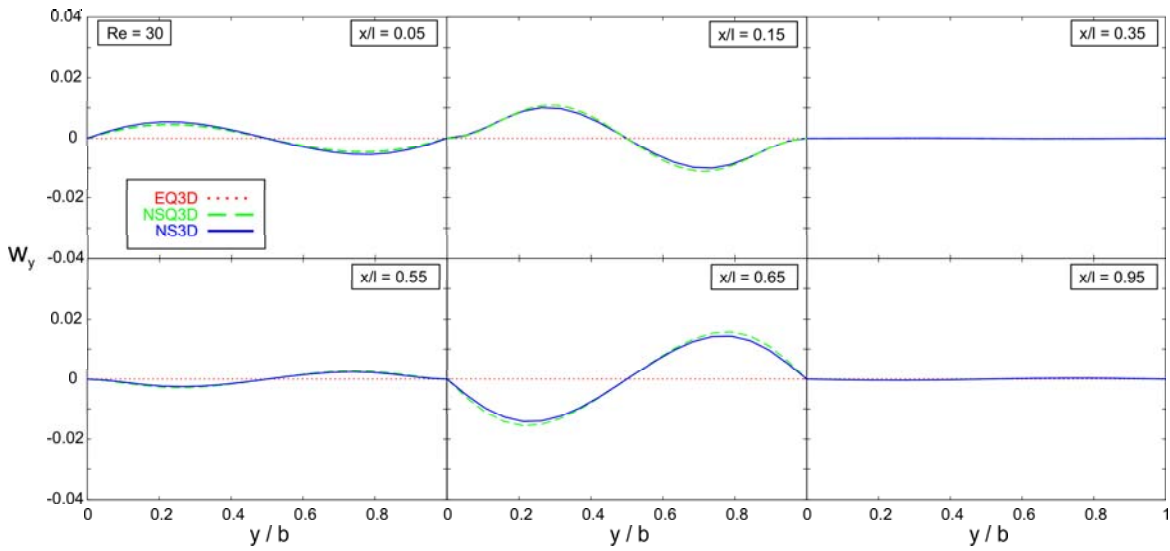


(c)  $\lambda$

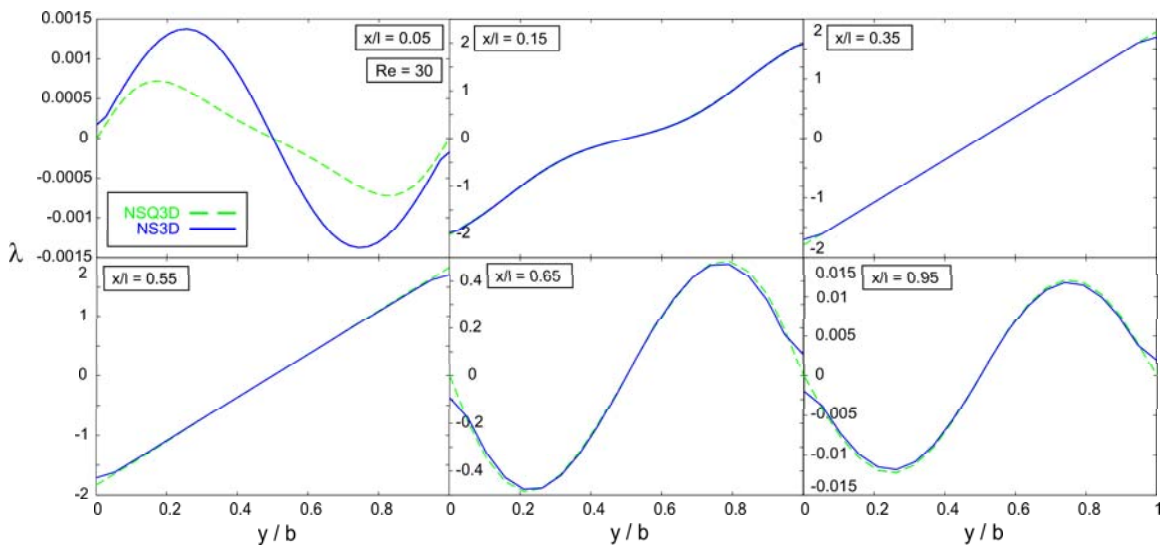
Bild 4.2:  $Re = 3$ , Rechteckskanal.  
Entwicklung der Geschwindigkeiten  $w_x(Y)$  und  $w_y(Y)$  sowie der Vorticity  $\lambda(Y)$  mit der bezogenen Lauflänge.



(a)  $w_x$



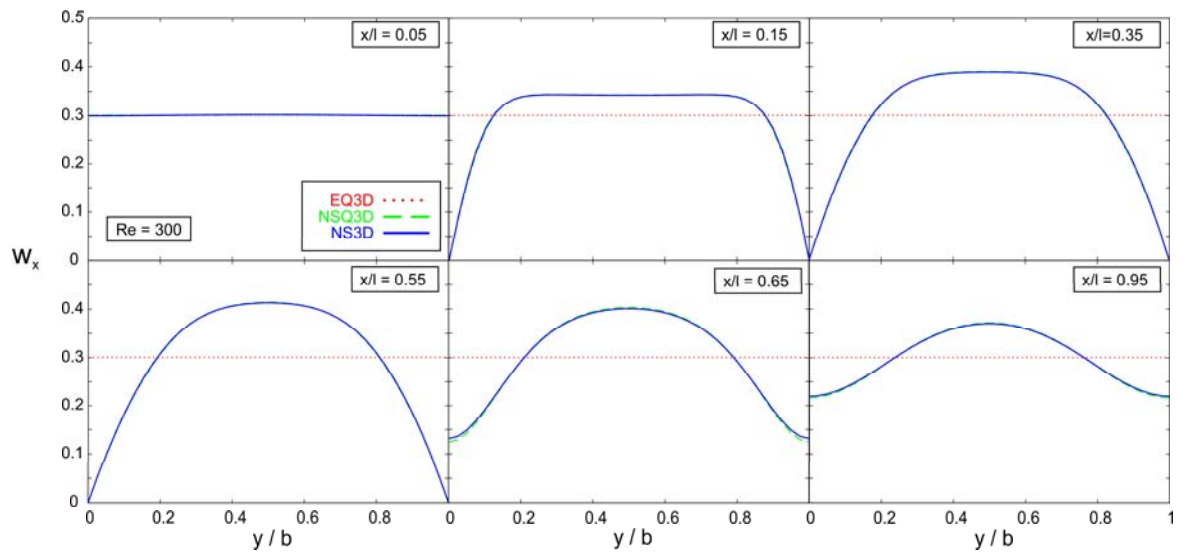
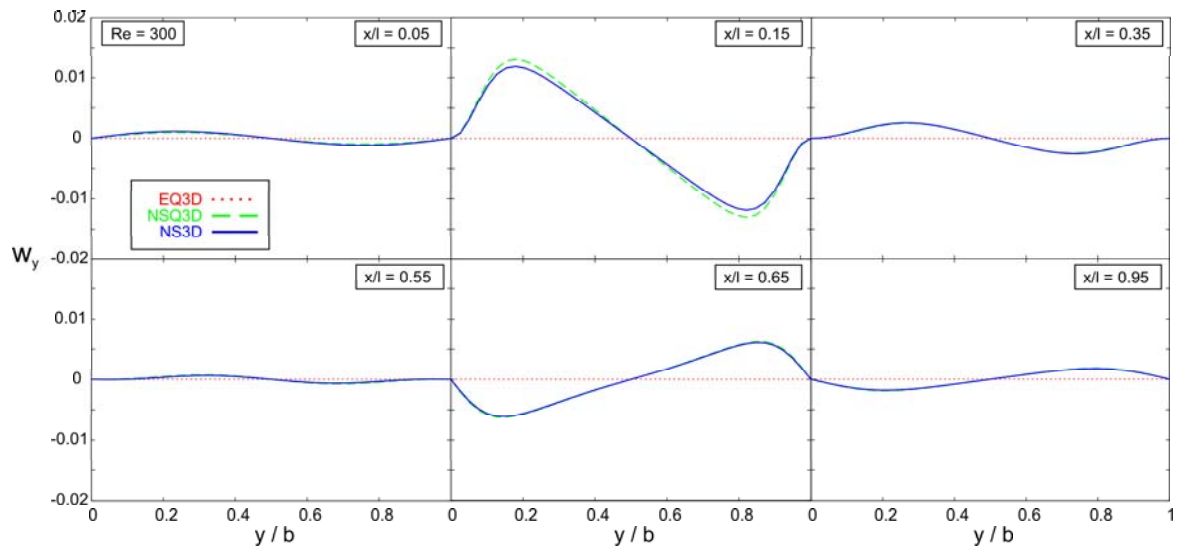
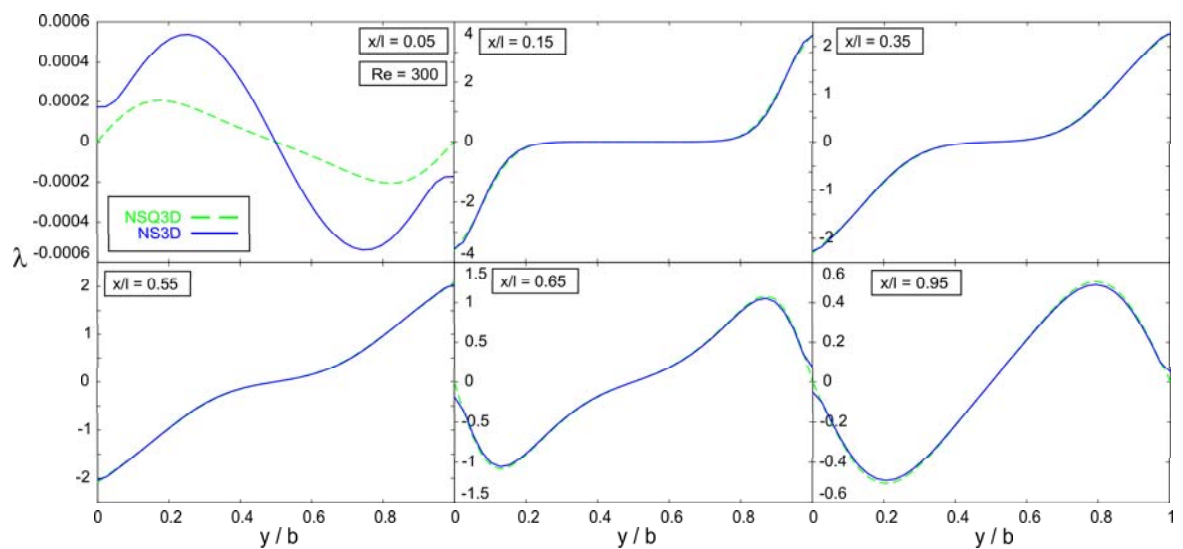
(b)  $w_y$



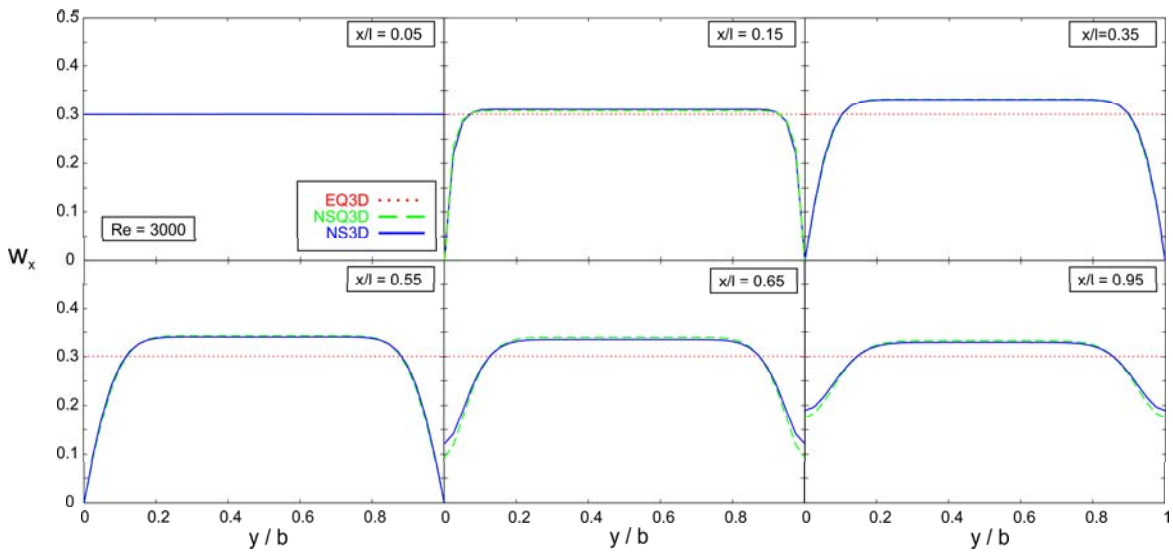
(c)  $\lambda$

Bild 4.3:  $Re = 30$ , Rechteckskanal.

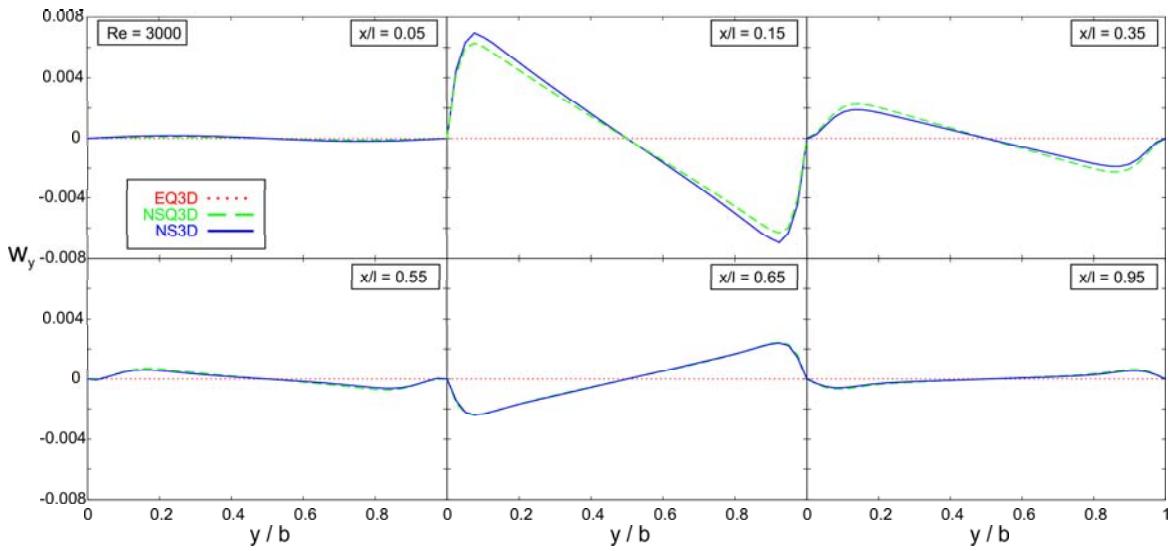
Entwicklung der Geschwindigkeiten  $w_x(Y)$  und  $w_y(Y)$  sowie der Vorticity  $\lambda(Y)$  mit der bezogenen Lauflänge.

(a)  $w_x$ (b)  $w_y$ (c)  $\lambda$ Bild 4.4:  $Re = 300$ , Rechteckskanal.

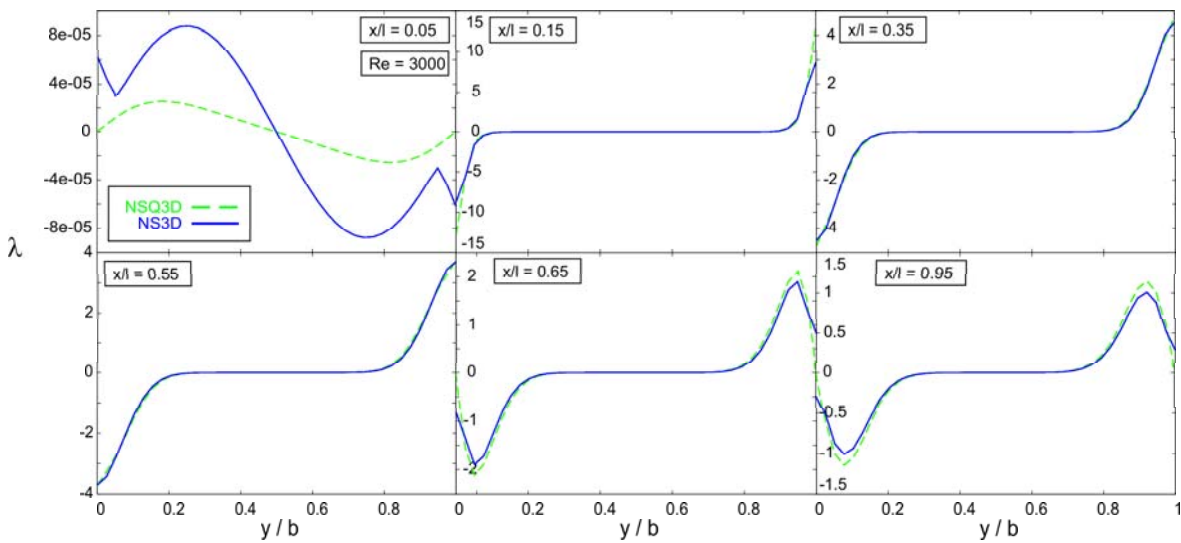
Entwicklung der Geschwindigkeiten  $w_x(Y)$  und  $w_y(Y)$  sowie der Vorticity  $\lambda(Y)$  mit der bezogenen Lauflänge.



(a)  $w_x$



(b)  $w_y$



(c)  $\lambda$

Bild 4.5:  $Re = 3000$ , Rechteckskanal.

Entwicklung der Geschwindigkeiten  $w_x(Y)$  und  $w_y(Y)$  sowie der Vorticity  $\lambda(Y)$  mit der bezogenen Lauflänge.



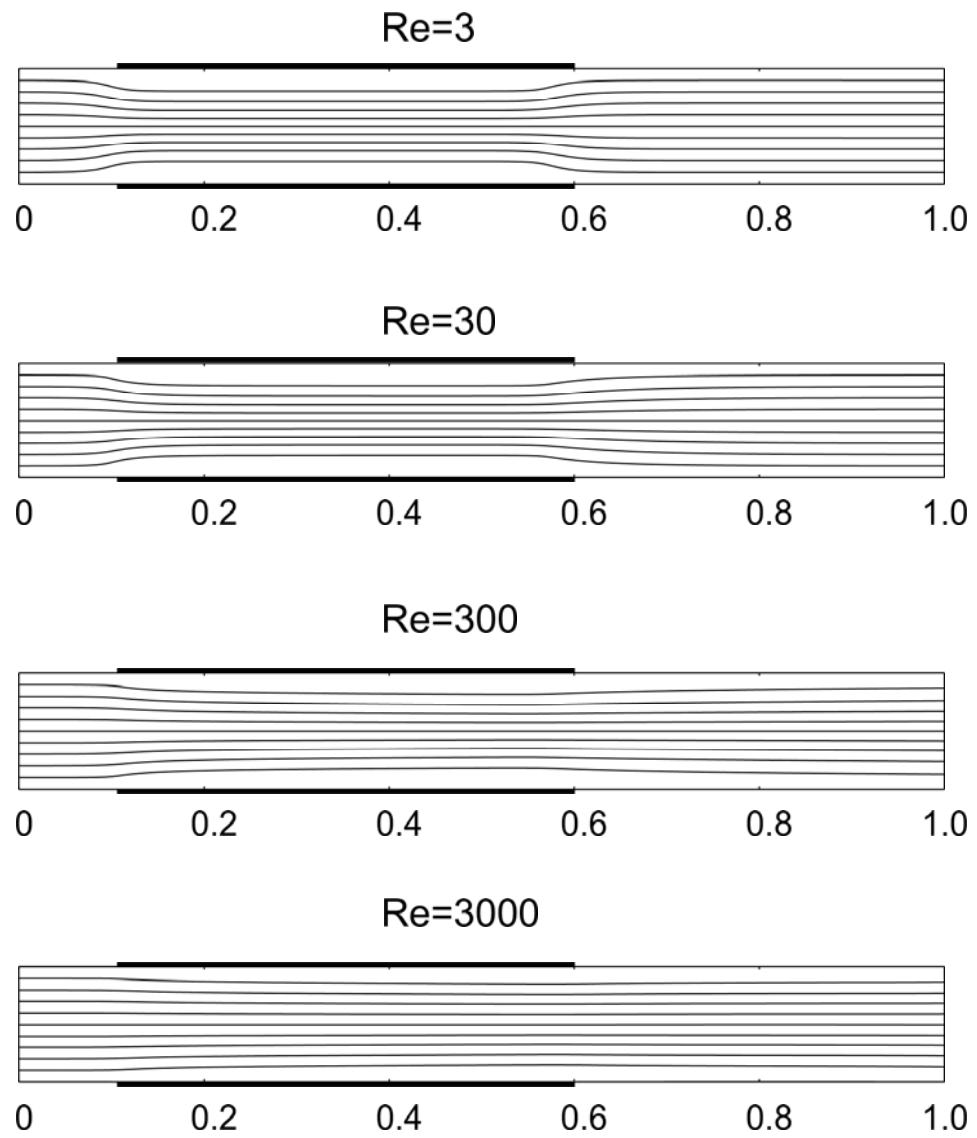


Bild 4.6: Verlauf der Stromlinien beim Rechteckskanal für unterschiedliche Reynolds-Zahlen.

## 4.2 Strömung durch radiale Schaufelgitter

### 4.2.1 Gerade Schaufeln mit $\beta_S = 90^\circ$

Als weiterer Testfall zur Validierung der Q3D-Codes wird ein sog. rotierender Schaufelstern gewählt. Der radial nach außen durchströmte Schaufelkanal wird von in radialer Richtung verlaufenden geraden Schaufeln ohne Profildicke begrenzt. Der Teilungswinkel beträgt 10 Grad, was  $Z = 36$  Schaufeln entspricht. In Anlehnung an den Kontrollraum bei realen Strömungsmaschinen wurden wieder die Bereiche Zulauf, beschauelter Bereich und Nachlauf definiert, s. Bild 4.7. Die Angaben der normierten Radien  $R = r/r_{ref}$  für die jeweiligen Bereichsgrenzen sind auf einen Referenzradius von  $r_{ref} = 0.2m$  bezogen. Dabei wurden die folgenden Normierungen gewählt:

$$R = \frac{r}{r_{ref}} \quad , \quad W_{M,\Phi} = \frac{w_{m,\varphi}}{r_{ref} \Omega} \quad , \quad \Phi = \varphi \quad , \quad \Lambda = \frac{\lambda}{\Omega} \quad , \quad c_p = \frac{2(p - p_0)}{\rho r_{ref}^2 \Omega^2}. \quad (4.1)$$

Die Winkelgeschwindigkeit der Rotation beträgt  $\Omega = 50s^{-1}$ . Eine stoßfreie Anströmung kann hierbei nur mit Vordrall erreicht werden, wie in Bild 4.8 gezeigt ist.

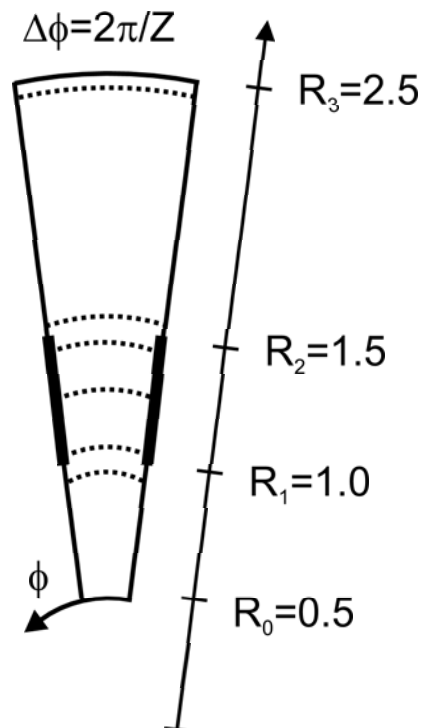


Bild 4.7: Geometrie des radial nach außen durchströmten rotierenden Schaufelsterns mit  $Z = 36$  Schaufeln.

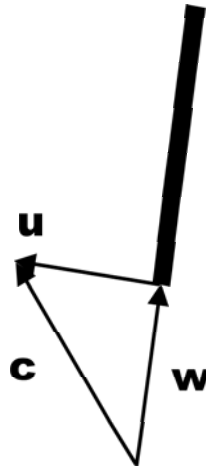


Bild 4.8: Kinematik der Zuströmung beim radialen Schaufelgitter mit  $\beta_s = 90^\circ$ .

Die laminaren Strömungsverhältnisse wurden in einem Bereich von  $Re = 4$  bis  $Re = 4000$  untersucht. Die Anzahl der Rechennetzpunkte lag bei  $160 \times 20$  Gitterpunkten und wurde bei den höheren Reynolds-Zahlen zwischen  $80 \times 10$  und  $320 \times 40$  Punkten variiert, um die erforderliche Auflösung für das NSQ3D-Verfahren zu ermitteln.

In Bild 4.9 bis Bild 4.12 sind die normierten Verteilungen der Meridiangeschwindigkeit, der Umfangsgeschwindigkeit und der Vorticity über der bezogenen Winkelkoordinate  $\tilde{\Phi} = (\Phi - \Phi_{DS}) / (\Phi_{SS} - \Phi_{DS})$  dargestellt, die jeweils mit beiden Q3D-Codes und dem NS3D-Code als Referenz berechnet wurden. Die Verteilungen wurden an sechs repräsentativen radialen Positionen ausgewertet, die als gestrichelte Linien in Bild 4.7 eingezeichnet sind. Die Stromlinien für  $Re = 4$  bis  $Re = 4000$  sind in Bild 4.17 dargestellt. Die unterschiedliche Ausbildung der Grenzschichten bei verschiedenen Reynolds-Zahlen zeigt sich an den  $W_M$ -Profilen und damit konsistent in einem unterschiedlichen Verlauf der Stromlinien.

Die mit dem NSQ3D-Verfahren berechneten Verläufe der Strömungsgrößen stimmen bis zum Austritt aus dem beschauelten Bereich sehr gut überein mit den entsprechenden NS3D-Ergebnissen. Im Nachlauf fällt jedoch eine Abweichung bei den Umfangskomponenten der Geschwindigkeit  $W_\Phi$  sowie der Vorticity  $\Lambda$  auf.

Die normierten Verläufe des umfangsgemittelten Dralls, der umfangsgemittelten Vorticity sowie die druck- und saugseitigen  $c_p$ -Verläufe über dem Radius sind in den Abb. 4.13 und 4.14 für  $Re = 4000$  dargestellt. Die Differenz im Druckanstieg zwischen verlustfreier und verlustbehafteter Rechnung ist deutlich erkennbar. Der Vergleich der NS3D- zu den NSQ3D-Ergebnissen zeigt bis auf Ungenauigkeiten in der Druckverlustberechnung wieder gute Übereinstimmung vom Kontrollraumeintritt bis zur Schaufelhinterkante. Im Nachlaufbereich ist jedoch die Drallerhaltung verletzt. Für eine im Absolutsystem drehungsfreie und verlustfreie Strömung ergibt sich für die mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  normierte Vorticity der Wert  $\Lambda_g = -2 \sin \alpha$ . Beim EQ3D-Ergebnis wird diese kinematische Beziehung von selbst erfüllt, da dort nicht die Vorticity-Transportgleichung gelöst wird, sondern ihr Wert aus der Stromliniensteigung vorgegeben wird. Bei einer verlustbehafteten Strömung treten je nach Reynolds-Zahl mehr oder weniger geringfügige Abweichungen von dem theoretischen Wert der Vorticity für Potenzialströmungen auf. Korrespondierend dazu ist die Drallerhaltung dann nicht mehr exakt erfüllt. Ein Ergebnis, das wie in Abb. 4.13 im Falle des

mit dem NSQ3D-Verfahren berechneten Verlaufs eine Zunahme des Dralls im Bereich des Schaufelnachlaufs aufweist, ist allerdings unphysikalisch und deutet auf numerische Ungenauigkeiten oder Modellierungsfehler hin.

Eine genauere Untersuchung hat gezeigt, dass die Abweichungen aus der Formulierung der Randbedingungen resultieren. Für die dargestellte Testreihe wurde zur Bestimmung der Stromfunktions-Randbedingung am Kontrollraumaustritt zunächst die Bilanz „Impulsmoment = Druckmoment + Reibmomente“ gemäß Kapitel 2.5.3.2 zugrunde gelegt. Die Druckverlustanteile werden durch das Wegintegral über die Beziehungen 2.43 und 2.44 gewonnen. Wie bereits in Kapitel 3.3.3 angedeutet wurde, können numerische Diskretisierungsfehler sowie eine unzureichende Auflösung der Grenzschicht in der wandnächsten Netzzelle bei höheren Reynolds-Zahlen leicht dazu führen, dass der so ermittelte Wert der Randableitung der Stromfunktion am Kontrollraumaustritt mit der physikalisch korrekten Kinematik nicht ganz konsistent ist. Die Abweichungen der NSQ3D- von den NS3D-Ergebnissen hinsichtlich des berechneten Druckmoments lagen je nach Netzfeinheit und Reynolds-Zahl im Bereich von ca. 1% - 15%.

Während bei dem verwendeten NS3D-Verfahren die originären fluidodynamischen Erhaltungsgleichungen mit einem Druckkorrekturverfahren gelöst werden und somit die Impulsbilanz im Rahmen der numerischen Genauigkeit per se erfüllt ist, hat es sich für das hier verwendete NSQ3D-Verfahren als sinnvoller erwiesen, die Kinematik am Austritt bzw. die Steigung der Stromfunktion nach Gl. 2.24

$$W_{\Phi} = -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Psi_g}{\partial M}, \quad (4.2)$$

so zu steuern, dass ein physikalisch sinnvoller Wert für die umfangsgemittelte Vorticity im Nachlauf resultiert. Aufgrund des zweifach differenziellen Zusammenhangs zwischen der Stromfunktion und der Vorticity, Gl. 2.40, wird die Kinematik am Kontrollraumaustritt insbesondere bei radial nach außen verlaufenden Strömungen sehr empfindlich beeinflusst vom Wert der Vorticity. Dies lässt sich am besten erkennen, wenn man die Vorticity aus Gl. 2.23 in Umfangsrichtung mittelt:

$$\Lambda_g = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial M} (R W_{\Phi}) - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \Phi} (W_M) \Rightarrow \overline{\Lambda}_g \approx \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial M} (\overline{R W_{\Phi}}), \quad (4.3)$$

und den kinematischen Zusammenhang zwischen Absolut- und Relativgeschwindigkeit, Gl. 2.15, einsetzt:

$$C_{\Phi} = R + W_{\Phi} \quad (4.4)$$

Mit dem Drall  $\Theta = \overline{R C_{\Phi}}$  folgt

$$\frac{\partial \Theta}{\partial m} = R \left( 2 \sin \alpha + \overline{\Lambda}_g \right). \quad (4.5)$$

Die Drallerhaltung im schaufelfreien Raum wird genau dann erfüllt, wenn für die umfangsgemittelte Vorticity dort gilt:

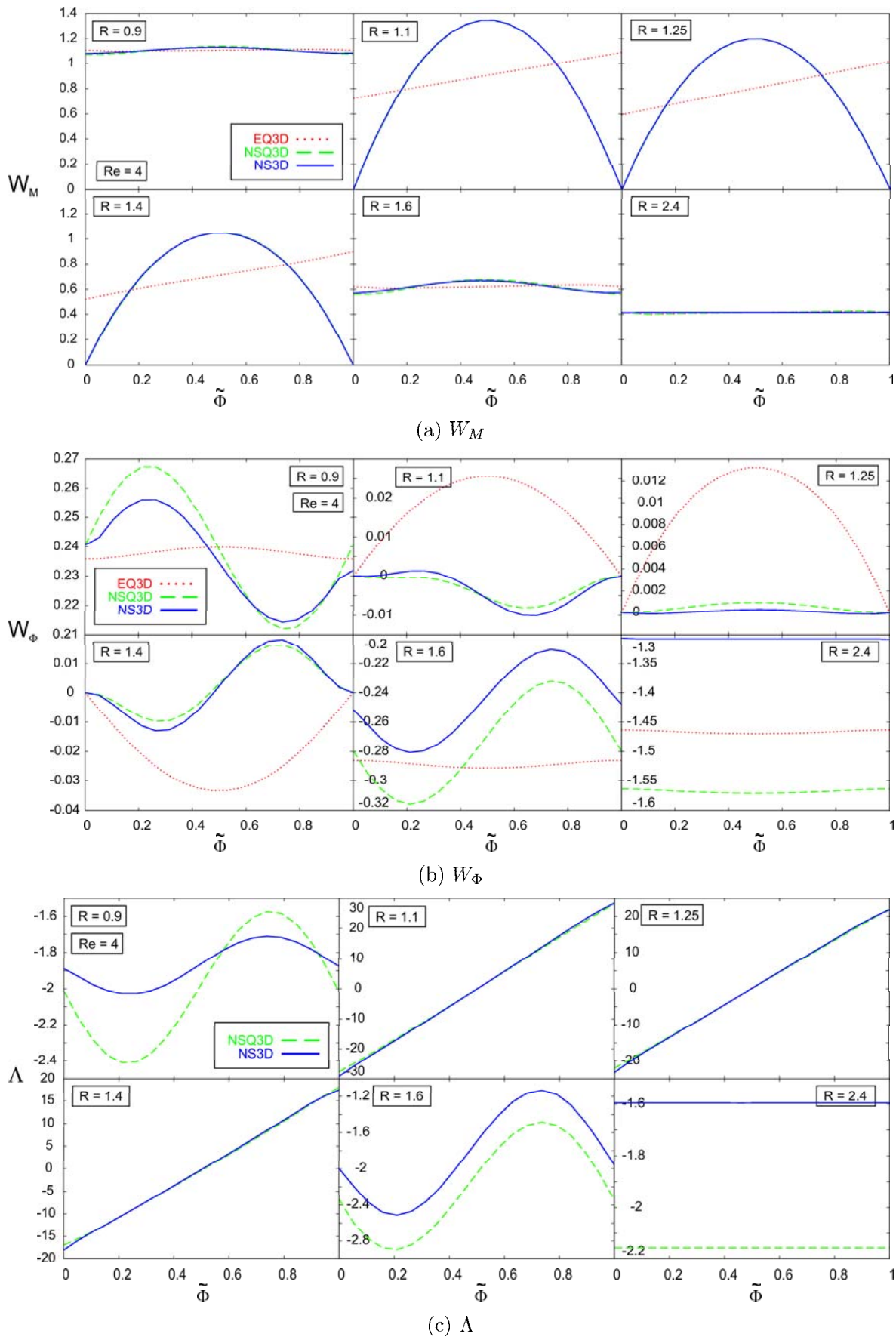
$$\overline{\Lambda}_g = -2 \sin \alpha. \quad (4.6)$$

Aufgrund dieser Schlussfolgerungen wurde eine Alternative in der Formulierung der Austritts-Randbedingung für die Stromfunktion implementiert. Der Algorithmus sucht sich den Randwert der Stromfunktion  $\Psi_g$  iterativ so, dass die Lösung der Wirbeltransportgleichung mit einer differentiellen Randbedingung am Kontrollraumaustritt exakt auf den erforderlichen Wert  $\Lambda_g = -2 \sin \alpha$  führt, der durch Auswertung der NS3D-Ergebnisse bereits bei Reynolds-Zahlen  $Re \geq 40$  durchgehend verifizierbar ist.

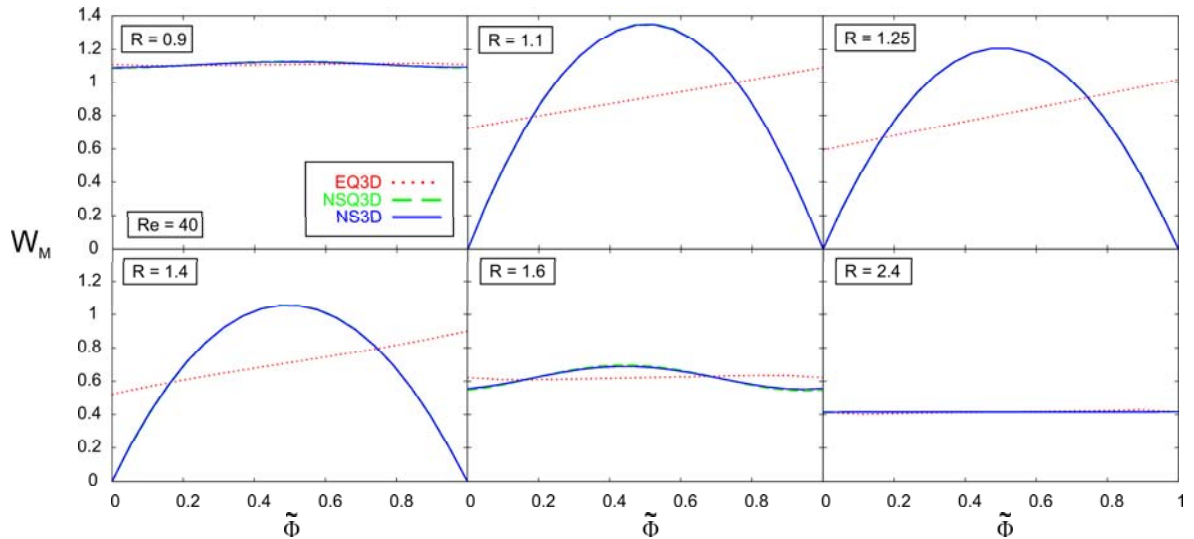
Durch die direkte Einflussnahme auf die im Verfahren gelösten Variablen, d.h. Stromfunktion und Vorticity, lässt sich ein besseres Ergebnis erzielen als durch Anwendung einer numerisch integrierten Momentenbilanz, in die Druckverlustanteile mit eingehen, die ihrerseits wieder aus diskreten Ableitungen der Lösungsvariablen berechnet werden und damit insbesondere auf größeren Rechenetzen fehlerbehaftet sind. Zudem ermöglicht dieses Vorgehen eine nachträgliche programminterne Kalibrierung der saug- und druckseitigen Druckverluste, mit der die Impulsmomentenbilanz exakt erfüllt wird.

Dieses Vorgehen wurde auf drei Netzen unterschiedlicher Feinheit untersucht. In Abb. 4.15 und 4.16 sind die Verläufe von Drall, Vorticity und die  $c_p$ -Verläufe im Vergleich zum NS3D-Ergebnis dargestellt, das auf dem Netz mittlerer Feinheit berechnet wurde. Während die gröbste Auflösung von  $80 \times 10$  Gitterpunkten nicht in der Lage ist, den Verlauf der Vorticity qualitativ korrekt wiederzugeben, kann mit der mittleren Auflösung bereits ein zufriedenstellendes Ergebnis erzielt werden. Hierfür war allerdings eine entsprechend starke Netzverzerrung hin zu den Wänden notwendig, um den Verlauf der Vorticity an den Wänden hinreichend genau zu approximieren.

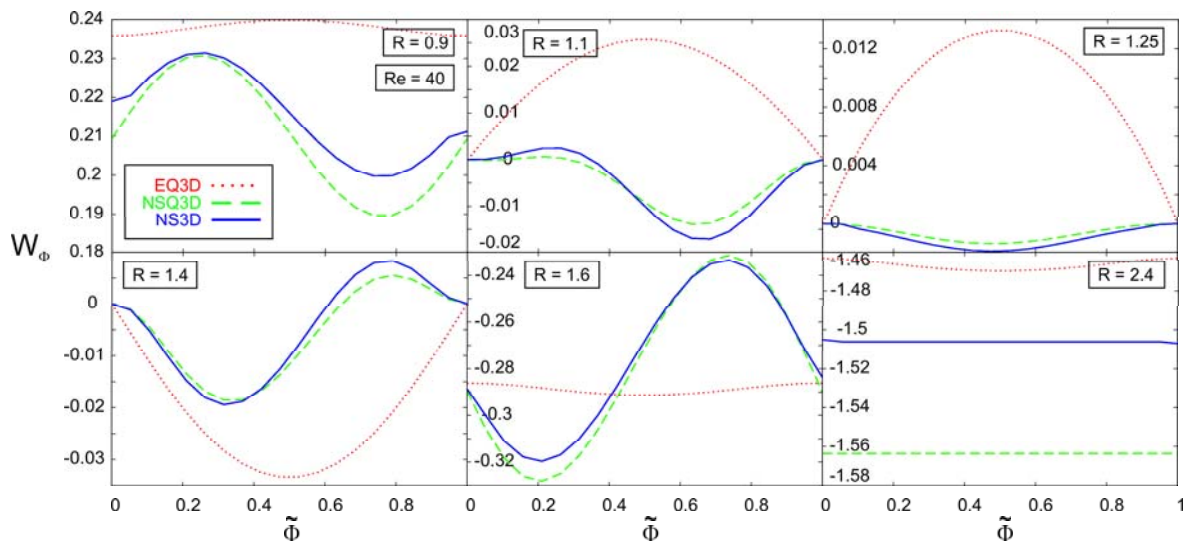
Während das Moment der aus dem Verlustintegral berechneten Druckverläufe noch eine sichtbare Abweichung vom NS3D-Ergebnis aufweist, vgl. Abb. 4.14, kann mit der Kalibrierung der Druckverläufe mit Hilfe der Impulsmomentenbilanz eine sehr gute Übereinstimmung mit den Verläufen aus der NS3D-Rechnung erzielt werden, vgl. Abb. 4.16.

Bild 4.9:  $Re = 4$ , Schaufelstern.

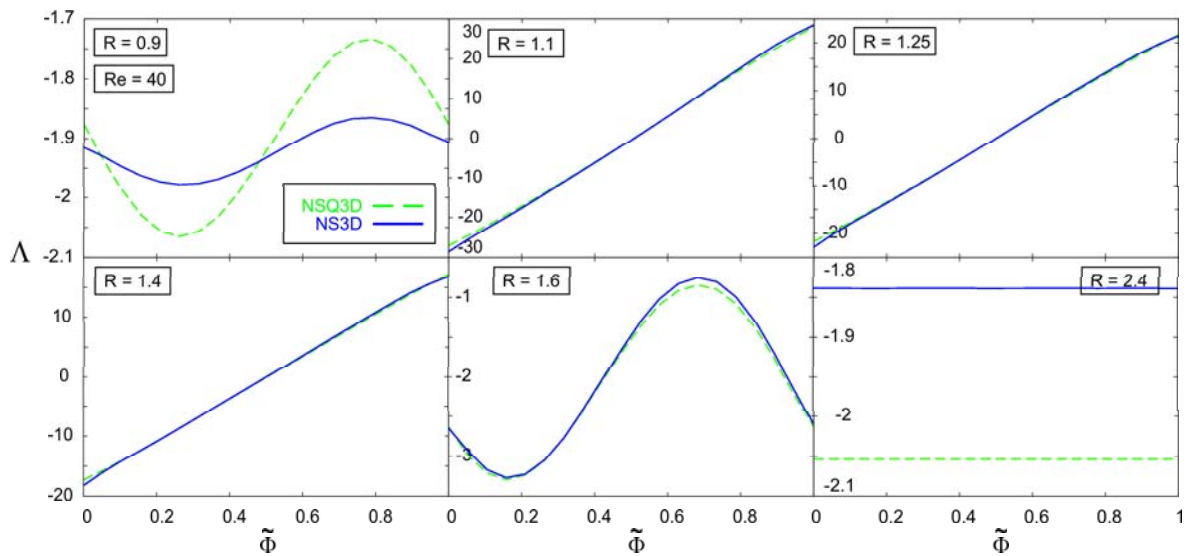
Entwicklung der Geschwindigkeiten  $W_M(\tilde{\Phi})$  und  $W_\Phi(\tilde{\Phi})$  sowie der Vorticity  $\Lambda(\tilde{\Phi})$  mit dem bezogenen Radius.



(a)  $W_M$

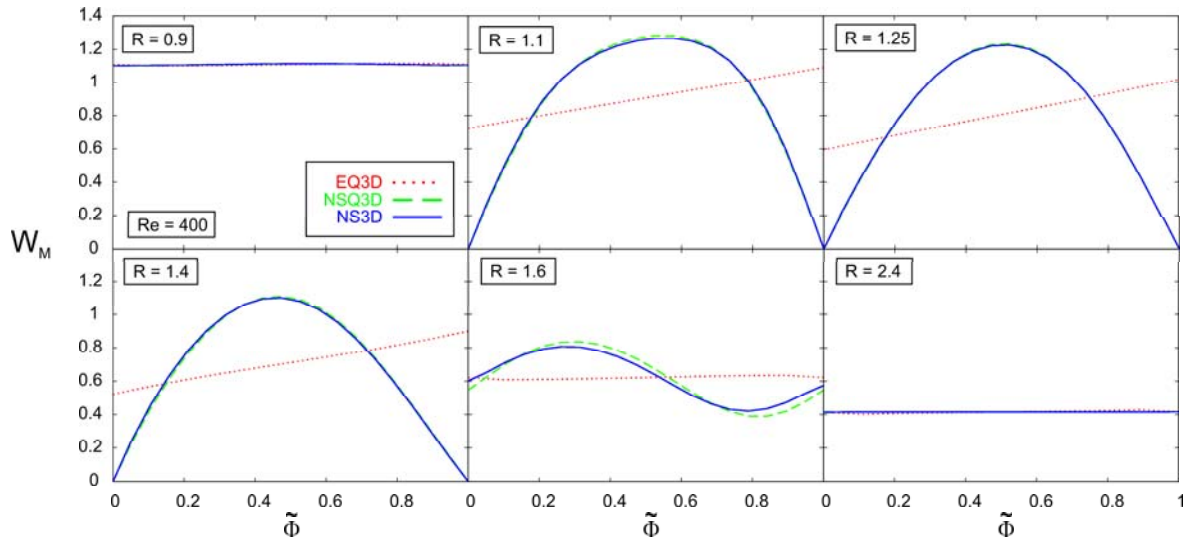
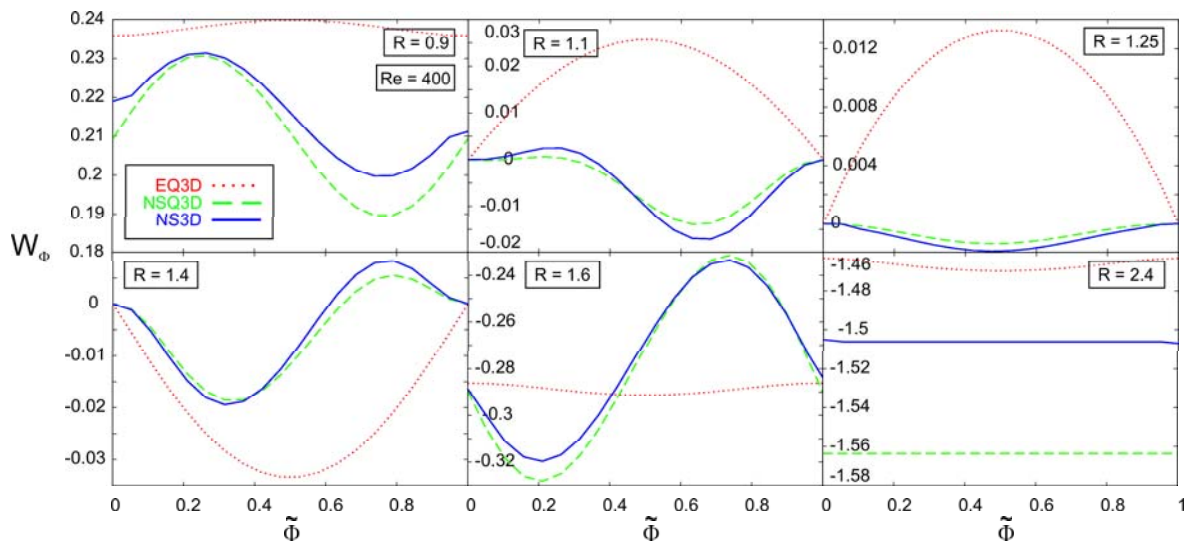
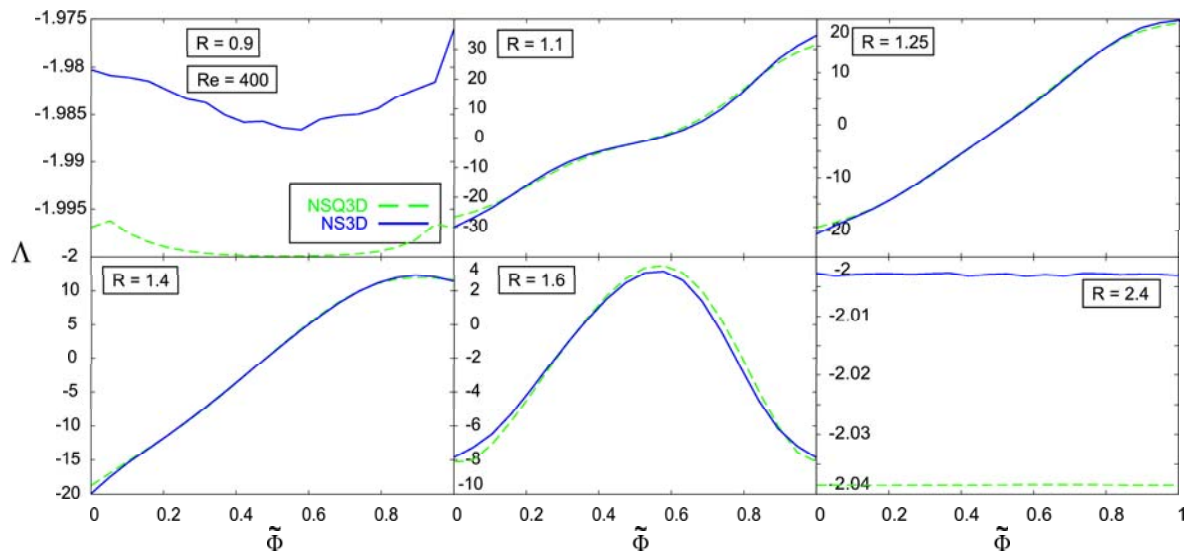


(b)  $W_\Phi$



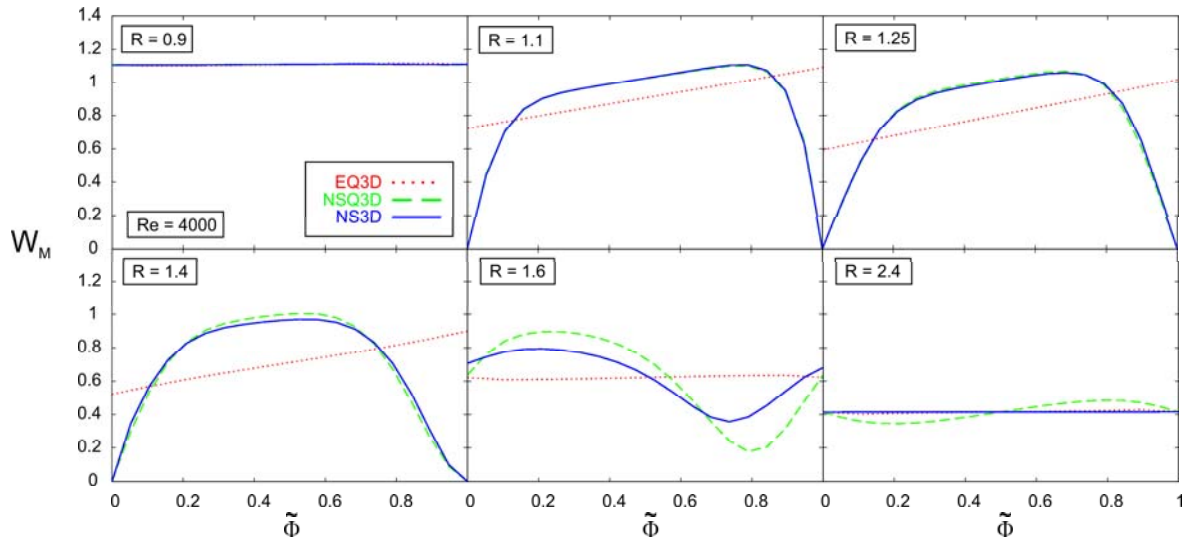
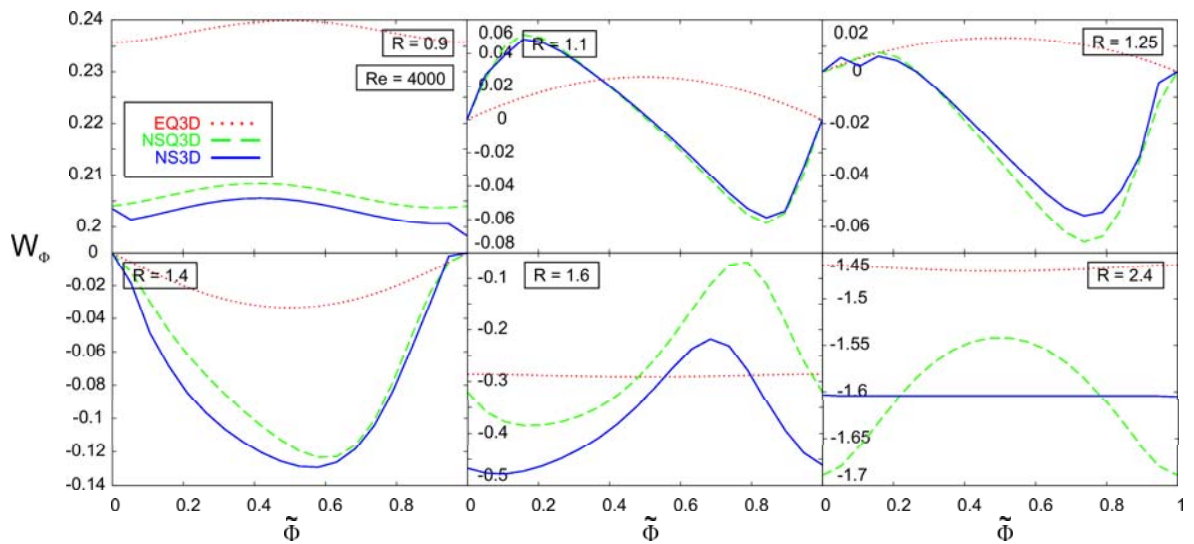
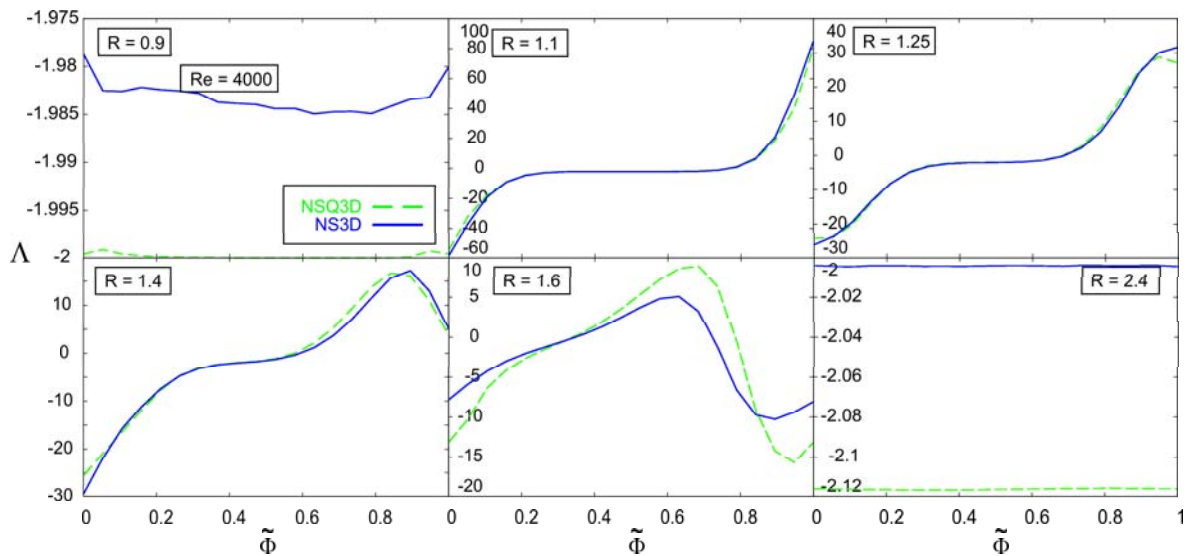
(c)  $\Lambda$

Bild 4.10:  $Re = 40$ , Schaufelstern.  
Entwicklung der Geschwindigkeiten  $W_M(\tilde{\Phi})$  und  $W_\Phi(\tilde{\Phi})$  sowie der Vorticity  $\Lambda(\tilde{\Phi})$  mit dem bezogenen Radius.

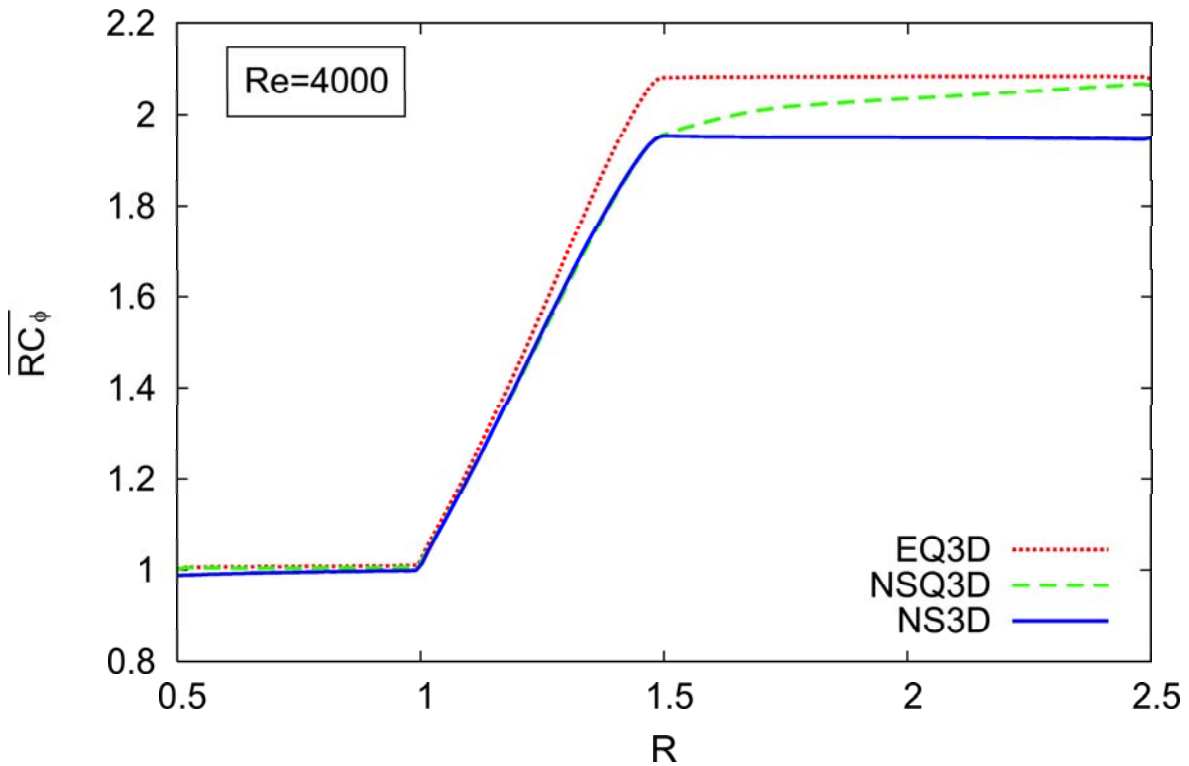
(a)  $W_M$ (b)  $W_\Phi$ (c)  $\Lambda$ Bild 4.11:  $Re = 400$ , Schaufelstern.

Entwicklung der Geschwindigkeiten  $W_M(\tilde{\Phi})$  und  $W_\Phi(\tilde{\Phi})$  sowie der Vorticity  $\Lambda(\tilde{\Phi})$  mit dem bezogenen Radius.

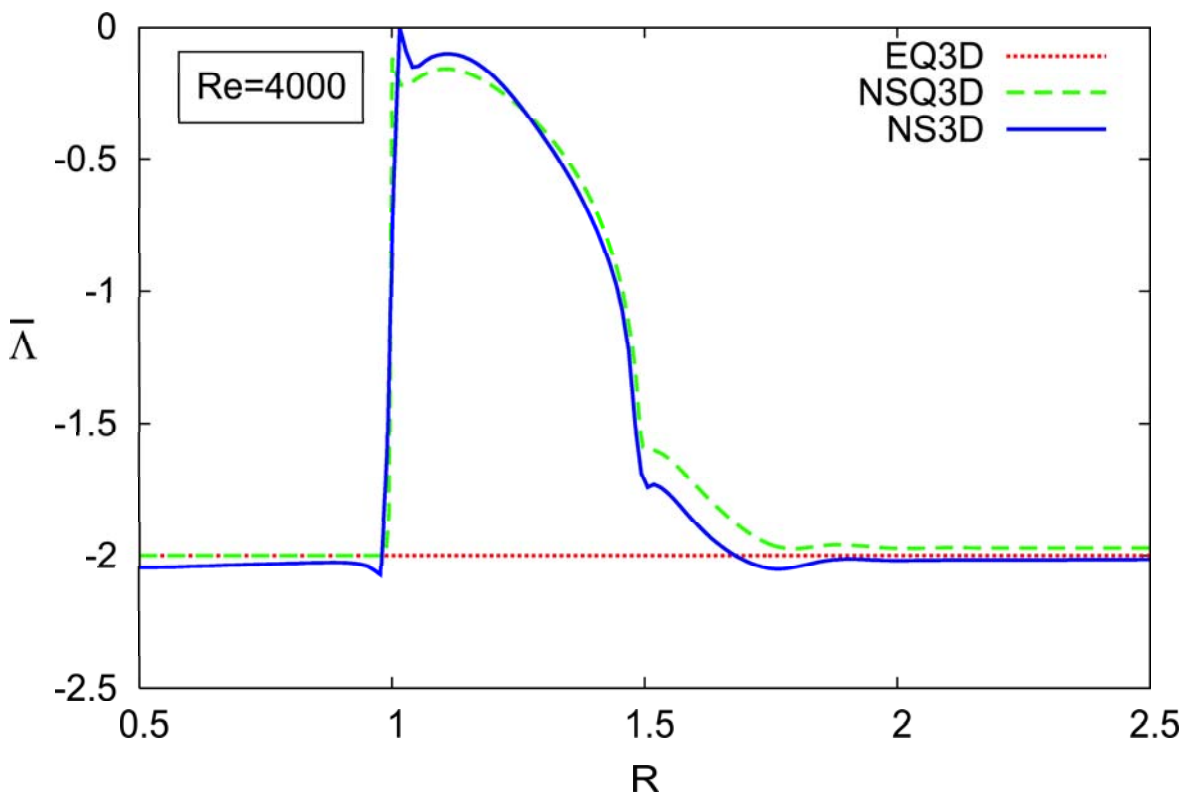


(a)  $W_M$ (b)  $W_\Phi$ (c)  $\Lambda$ Bild 4.12:  $Re = 4000$ , Schaufelstern.

Entwicklung der Geschwindigkeiten  $W_M(\tilde{\Phi})$  und  $W_\Phi(\tilde{\Phi})$  sowie der Vorticity  $\Lambda(\tilde{\Phi})$  mit dem bezogenen Radius.



(a) Gemittelter Drall



(b) Gemittelte Vorticity

Bild 4.13:  $Re = 4000$ , Schaufelstern.

Vergleich der Verläufe des gemittelten Dralls und der gemittelten Vorticity bei Verwendung der Momentenrandbedingung.

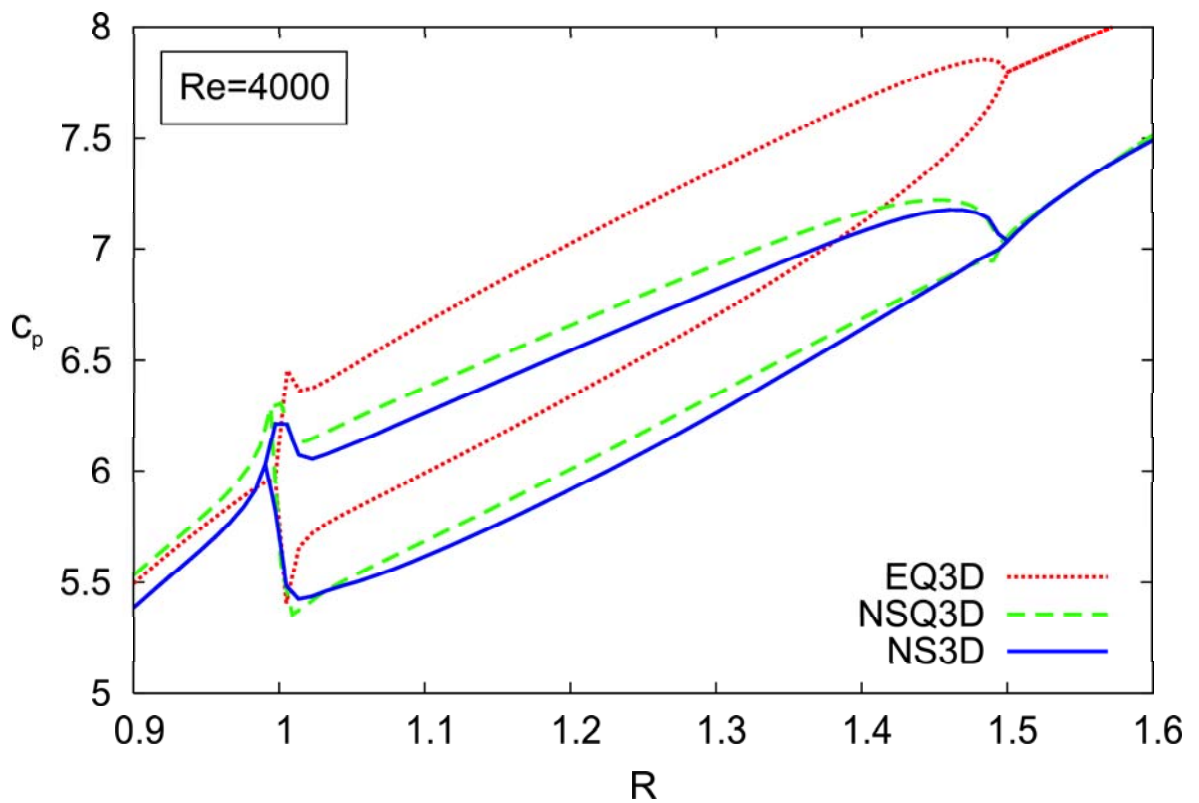
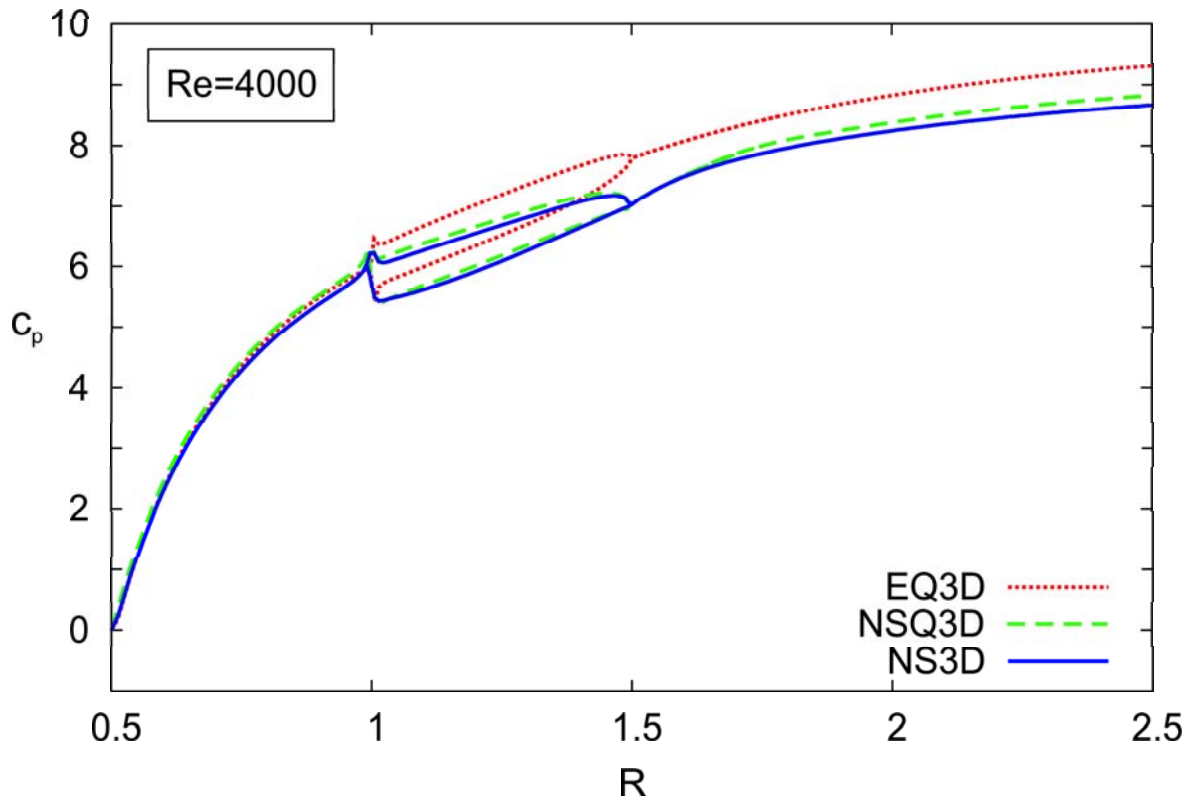
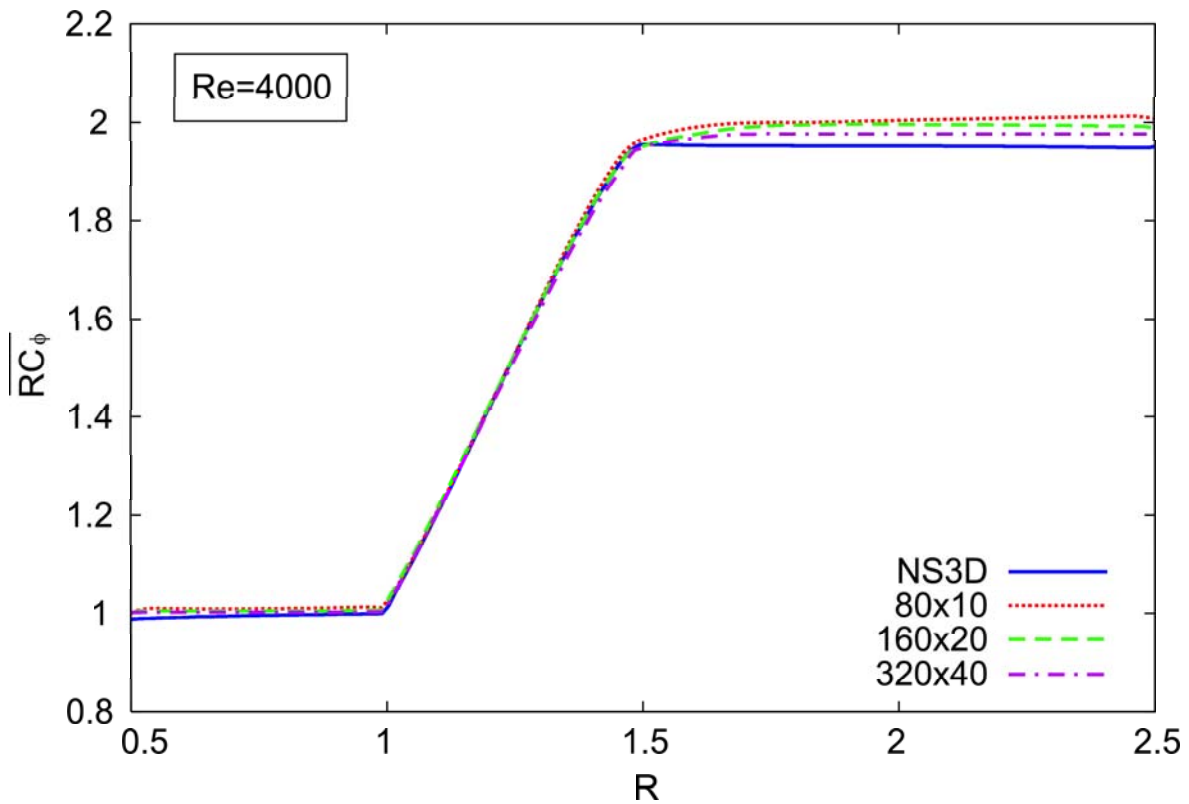
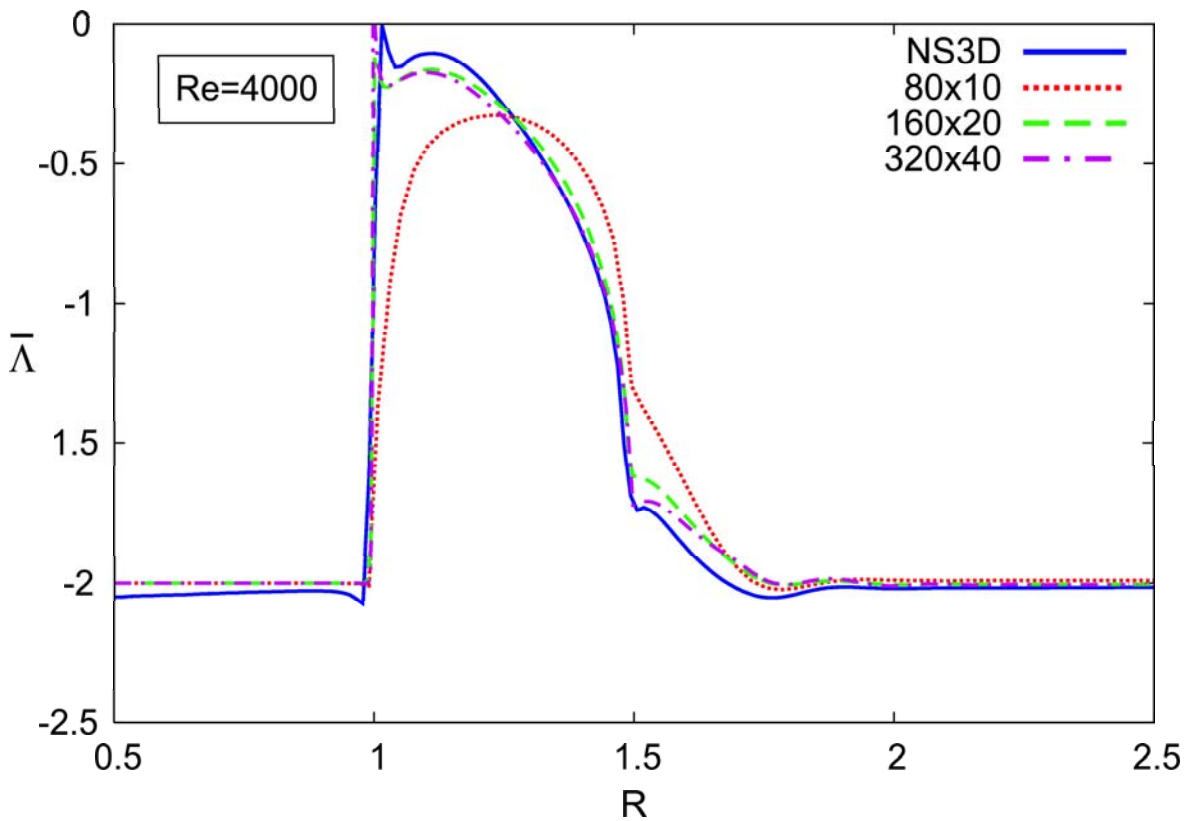


Bild 4.14:  $Re = 4000$ , Schaufelstern.  
Vergleich der normierten Druckverläufe bei Verwendung der Momentenrandbedingung.



(a) Gemittelter Drall



(b) Gemittelte Vorticity

Bild 4.15:  $Re = 4000$ , Schaufelstern.  
 Vergleich der Verläufe von Drall und Vorticity für unterschiedliche Netzauflösungen bei Verwendung der Vorticity-Randbedingung.

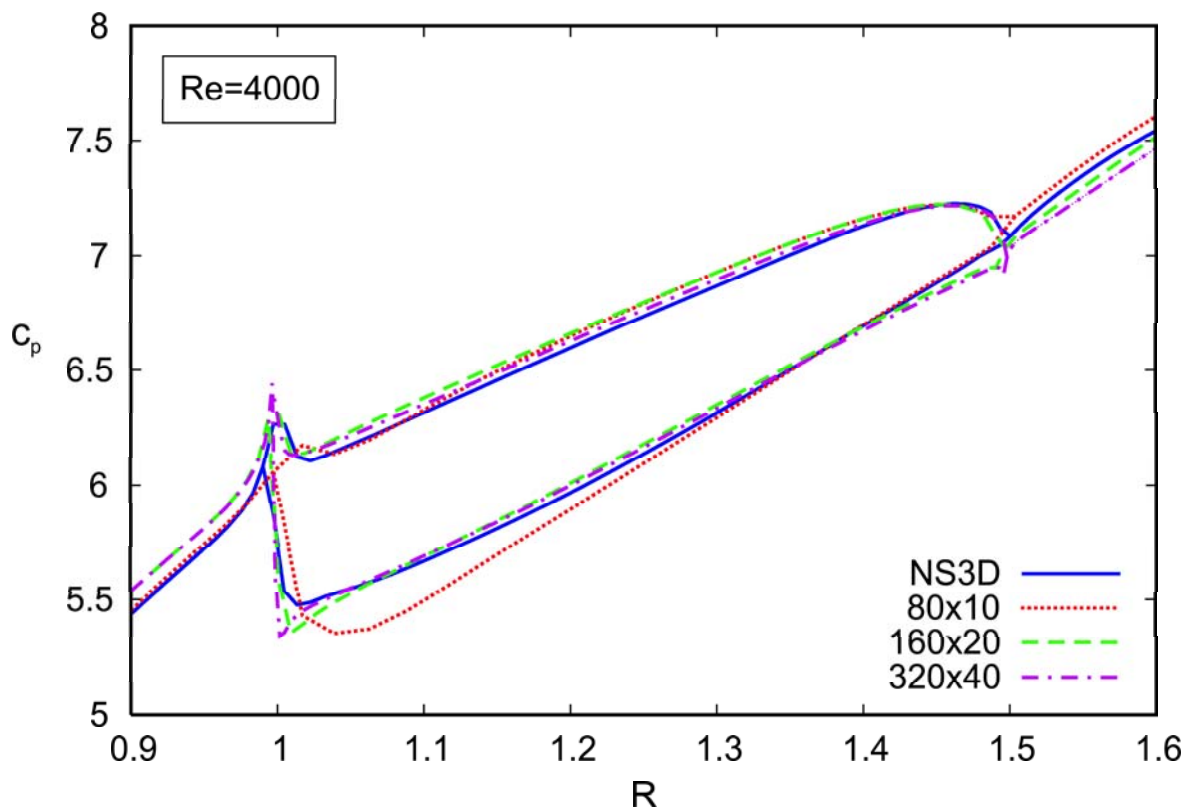
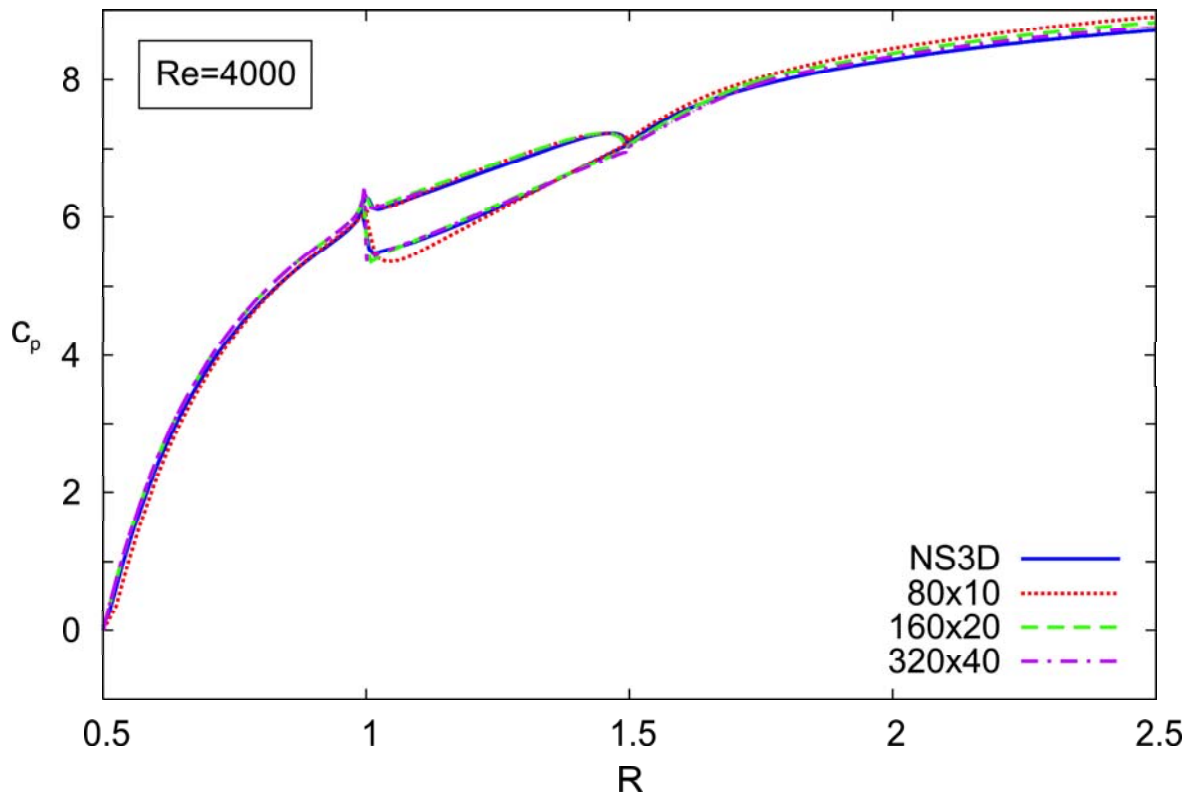


Bild 4.16:  $Re = 4000$ , Schaufelstern.  
Vergleich der normierten Druckverläufe für unterschiedliche Netzauflösungen bei Verwendung der Vorticity-Randbedingung.

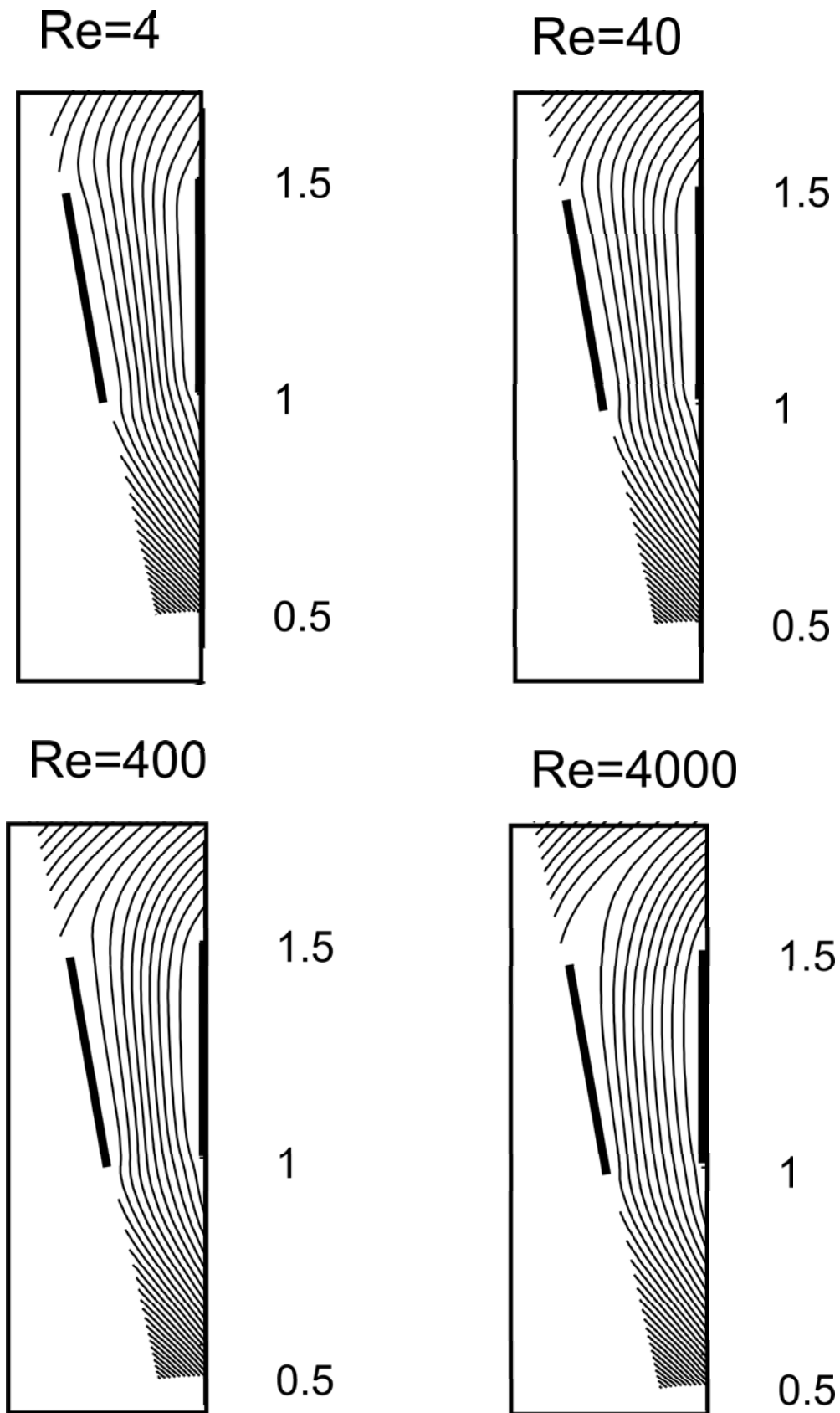


Bild 4.17: Verlauf der Stromlinien beim Schaufelstern für unterschiedliche Reynolds-Zahlen.

### 4.2.2 Logarithmisch spiralförmige Schaufeln mit $\beta_S = 30^\circ$

Ein in der Literatur über Gittertheorie häufig diskutierter Testfall ist das Radialgitter mit logarithmisch spiralförmigen Schaufeln. Es besitzt die Eigenschaft, dass der Schaufelwinkel  $\beta_S$  vom Eintritt bis zum Austritt konstant ist, s. Bild 4.18. Für die vorliegenden Rechnungen wurde  $\beta_S = 30^\circ$  gewählt. Die Radien für Kontrollraumeintritt bzw. -austritt sowie Schaufelein- und -austrittskante sind dieselben wie beim Schaufelstern in Bild 4.7. Für diesen rein akademischen Testfall wurden die Referenzgrößen aus Kapitel 4.2.1 für  $\beta_S = 90^\circ$  übernommen. Die Zuströmung wurde lediglich so angepasst, dass bei unverändertem Volumenstrom und gleicher Winkelgeschwindigkeit eine stoßfreie Anströmung der Schaufeln erfolgt. Dies resultiert in einer für reale Strömungsmaschinen dieser Bauart untypischen Zuströmung mit Gegendrall, s. Bild 4.40. Auf den qualitativen Verlauf und die Vergleichbarkeit der Ergebnisse untereinander hat das jedoch keinen Einfluss. Das Rechenetz mit Zulauf, Schaufelbereich und Nachlauf ist in Bild 4.20 dargestellt und besteht aus  $160 \times 20$  Zellen.

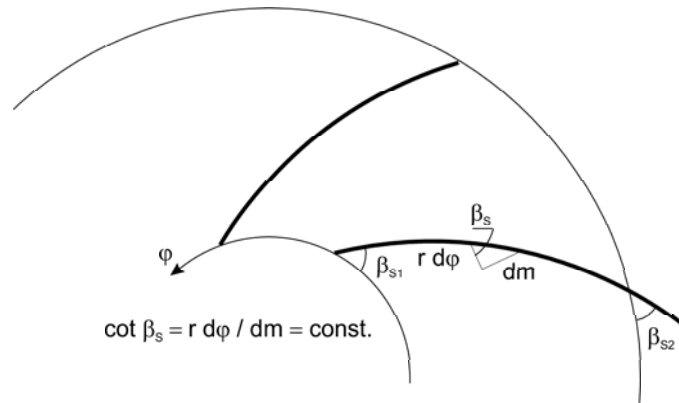


Bild 4.18: Definition eines Radialgitters mit logarithmisch spiralförmigen Schaufeln.

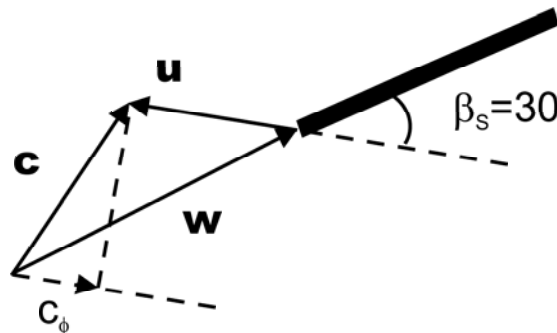


Bild 4.19: Kinematik der Zuströmung beim radialen Schaufelgitter mit  $\beta_S = 30^\circ$ .

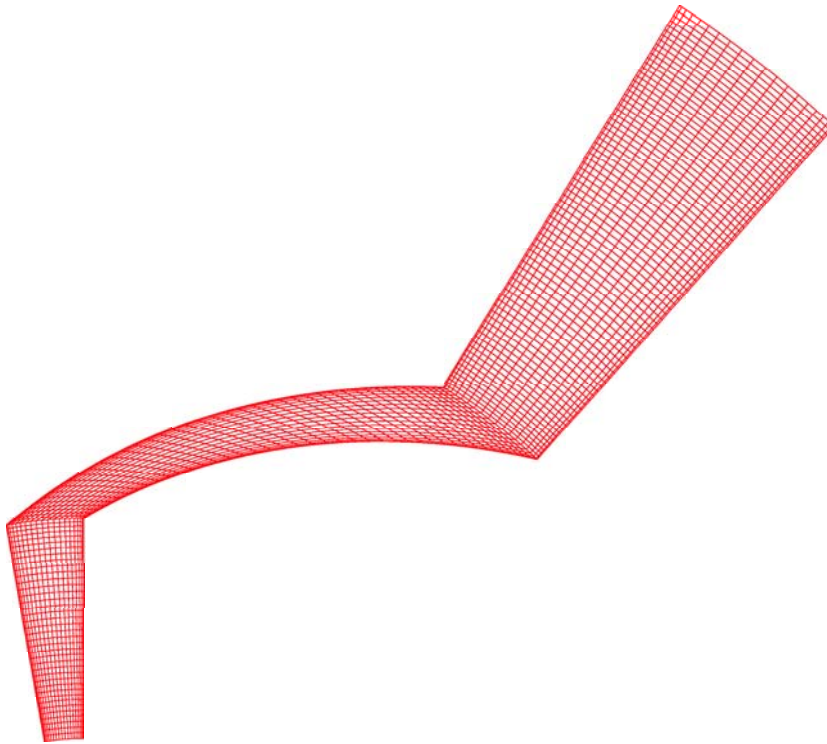


Bild 4.20: Rechennetz für das Radialgitter mit  $\beta_S = 30^\circ$  und  $Z = 36$  Schaufeln.

In den Abbildungen 4.21 bis 4.35 sind für  $Re = 4$  bis  $Re = 40000$  die Verteilungen der normierten Meridiangeschwindigkeit, Umfangsgeschwindigkeit und Vorticity über der normierten Winkelcoordinate  $\tilde{\Phi}$ , die umfangsgemittelten Verläufe des Dralls und der Vorticity sowie die Druckverteilungen dargestellt. Die mit den beiden Q3D-Codes berechneten Ergebnisse werden jeweils den NS3D-Ergebnissen als Referenz gegenüber gestellt. Die Positionen, an denen die Verteilungen ausgewertet sind, entsprechen den Radienwerten beim Schaufelstern in Kapitel 4.2.1, vgl. Bild 4.7. Der Verlauf der Stromlinien bei den untersuchten Reynolds-Zahlen ist in den Abb. 4.36 bis ?? dargestellt.

Als Randbedingung am Kontrollraumaustritt wurde hier für  $Re \geq 40$  die in Kapitel 4.2.1 ausführlich erläuterte iterative Steuerung über den umfangsgemittelten Randwert der Vorticity gewählt, die sich bereits für den Testfall „Schaufelstern“ als besser erwiesen hat.

Die Übereinstimmung der Verteilungen sowohl der lokalen wie auch der umfangsgemittelten Strömungsgrößen beim NSQ3D- und NS3D-Verfahren kann im mittleren Bereich von  $Re = 40$  bis  $Re = 4000$  als sehr gut bezeichnet werden.

Aufgrund der hohen Reibungsverluste bei  $Re = 4$  fällt der Drall im Nachlaufbereich ab, s. Abb. 4.22. Anstelle der Vorticity-Randbedingung für  $\Theta = const.$  wird hier die Momentenrandbedingung verwendet. Während sich beim NS3D-Verfahren der Drall als integrale Größe direkt aus den gelösten Werten für die Geschwindigkeiten berechnen lässt, wird er vom NSQ3D-Verfahren erst in einem Nachschritt durch Differenzieren der eigentlichen Lösungsvariable, der Stromfunktion  $\Psi$ , geliefert. Deshalb wird das NS3D-Ergebnis in diesem Fall als das zuverlässigere angesehen.

Bei  $Re = 40000$  reagiert insbesondere das NSQ3D-Verfahren sehr empfindlich auf die Netzqualität. Konvergenz konnte nur dann erzielt werden, wenn nicht nur die Netz-

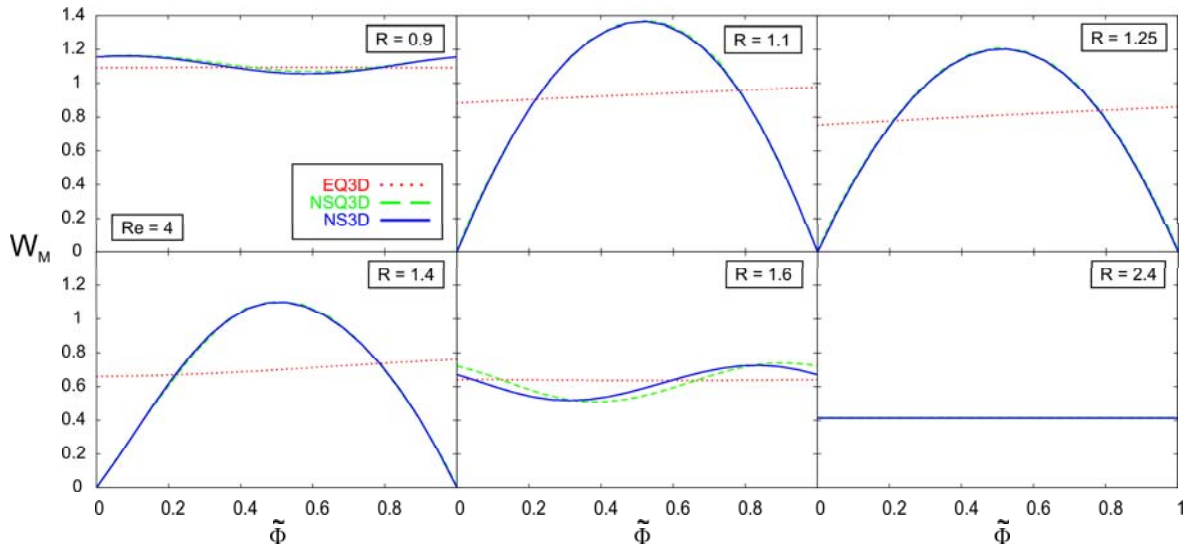
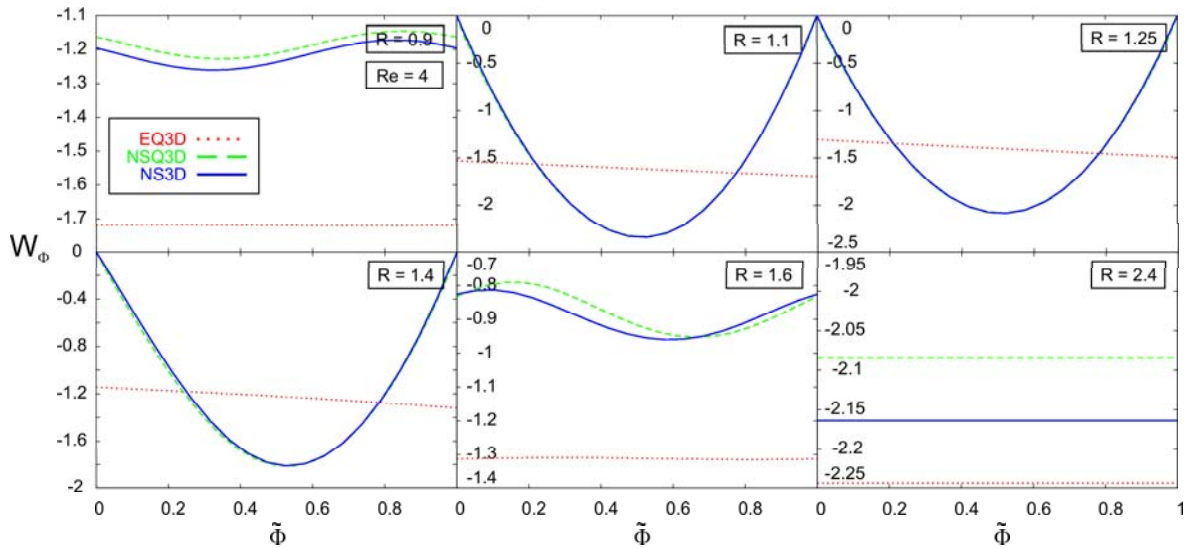
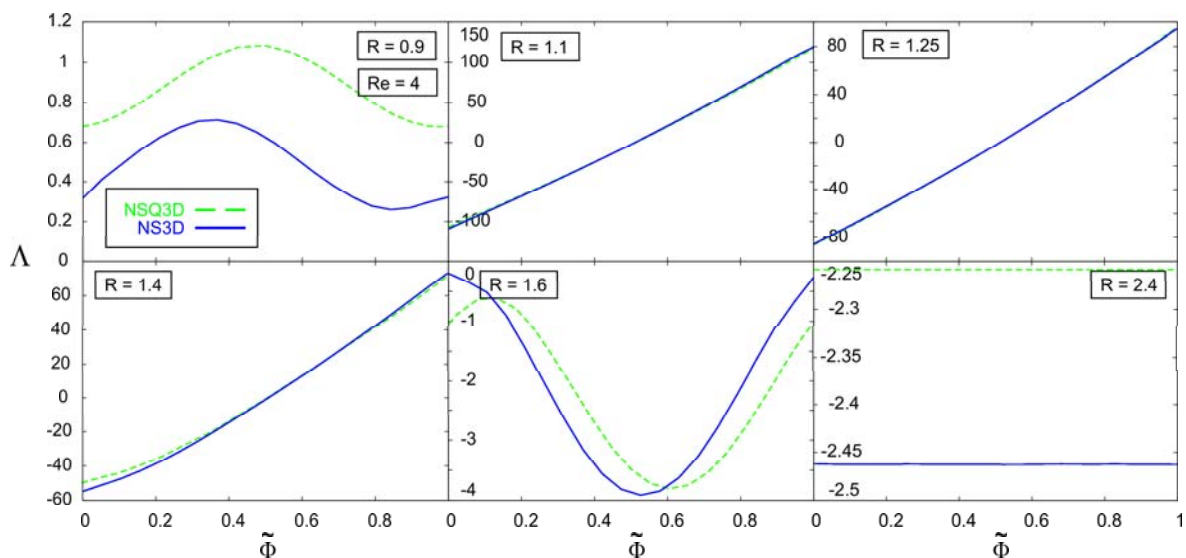


zellen stark zur Wand hin verzerrt wurden, sondern insbesondere bei Schaufelvorder- und -hinterkante auf ein möglichst uniformes Verhältnis der Zellseitenlängen geachtet wurde. In diesem Fall konnte wieder eine gute Übereinstimmung zwischen den beiden Verfahren erreicht werden. Beim Verlauf der Vorticity sind allerdings Abweichungen erkennbar, vgl. 4.33 und 4.34. Sie können mit den sehr dünnen Grenzschichten erklärt werden. Während beim NSQ3D-Verfahren die Vorticity selbst Lösungsvariable ist und ihre Randwerte direkt in die Berechnung mit eingehen, werden ihre Werte beim NS3D-Verfahren in einem Nachschritt aus der Differenziation der gelösten Geschwindigkeiten berechnet. Je ungenauer die Auflösung der Grenzschichten bzw. je größer die Reynolds-Zahl bei turbulenter Strömung ist, desto größer die Abweichungen zwischen beiden Verfahren.

Abb. 4.38 zeigt einen Vergleich der lokalen Querverteilungen von  $W_M$ ,  $W_\Phi$  und der Vorticity bei unterschiedlichen Reynolds-Zahlen. Der Einfluss der Grenzschichtdicke spiegelt sich konsistent in den Verläufen wider. Die Auswertung erfolgte wieder an den repräsentativen radialen Positionen von Bild 4.7. Anstelle der Position im Nachlauf vor dem Kontrollraumaustritt, wo die Strömung bereits weitestgehend ausgeglichen ist, wurde jedoch eine zusätzliche Position unmittelbar nach der Schaufeleintrittskante bei  $R = 1.0$  gewählt.

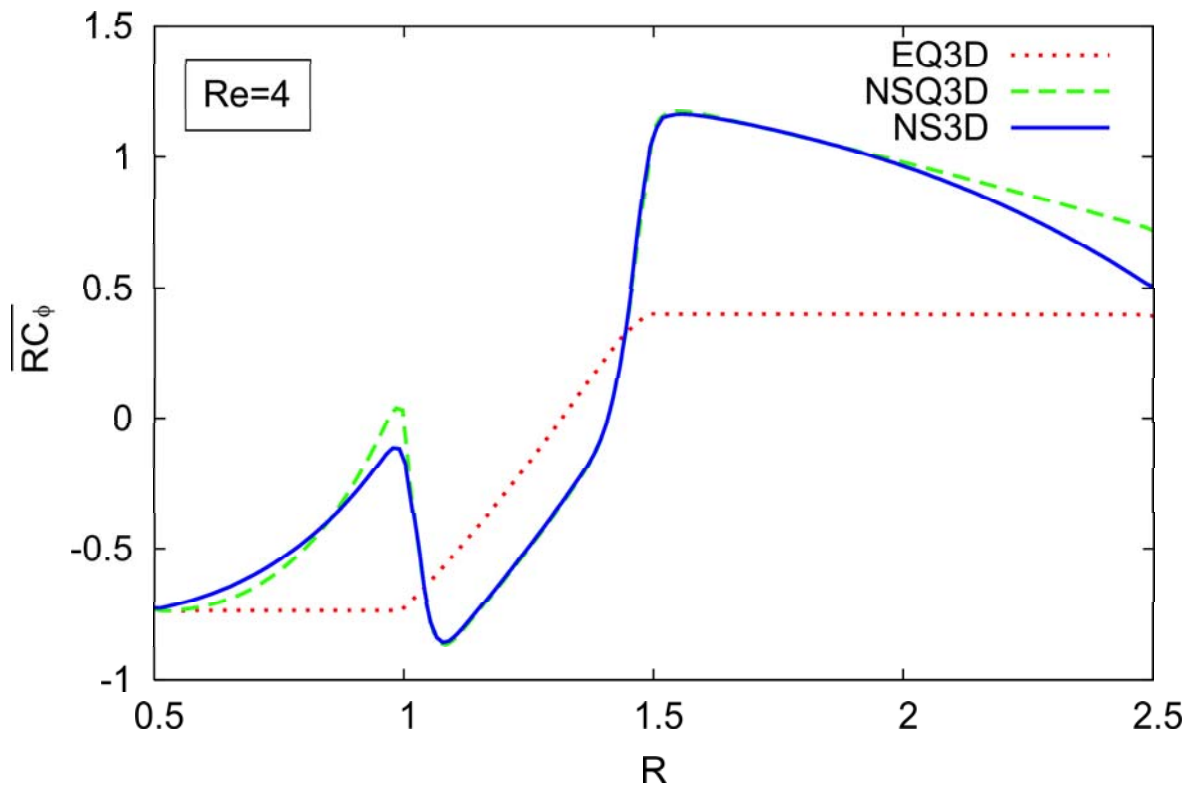
Neben einer Auswertung der lokalen und umfangsgemittelten Verteilungen wurde auch ein Vergleich der Momentenbilanz für die beiden Verfahren NSQ3D und NS3D durchgeführt. Nach dem Drehimpulssatz müssen das Schaufeldruckmoment  $M_{S,P}$ , das durch Reibungskräfte an der Schaufelwand hervorgerufene Moment  $M_{S,R}$  sowie das Impulsmoment  $M_{RC_\varphi}$  im Gleichgewicht stehen. Das durch die Reibungskräfte an den Kontrollraumein- und -austrittsflächen in der Strömung bedingte Moment  $M_T$  ist im gesamten Bereich der untersuchten Reynolds-Zahlen zwei bis drei Größenordnungen kleiner als die Reibmomente an den Schaufelwänden und wird daher in den Diagrammen in Abb. 4.39 nicht mit aufgetragen.

Es sind zwei Regimes erkennbar: Im Bereich niedriger Reynolds-Zahlen dominieren die Reibungskräfte die Impulskräfte um ein Vielfaches. Die Momentenbilanz steht im Gleichgewicht, weil die entsprechend hohen Druckverluste mit negativem Vorzeichen eingehen. Der Schleppeffekt der rotierenden Schaufeln zeigt sich in der Impulsmomentenbilanz deutlich anhand eines höheren Drallaufbaus in diesem Regime. Bei  $Re = 4$  wird allerdings der Einfluss des strömungsinhärenten Reibmoments  $M_T$  so groß, dass im schaufelfreien Nachlaufbereich der Zusammenhang  $\overline{RC_\varphi} = const.$  nicht mehr erfüllt ist, vgl. auch Bild 4.22. Im Bereich großer Reynolds-Zahlen hingegen werden die laminaren Reibungskräfte klein im Vergleich zu den Druckkräften. Das Impulsmoment ergibt sich als Summe der Reib- und Druckmomente, die hier mit positivem Vorzeichen eingehen, d.h. es findet ein Aufbau statischen Druckes statt. Der Übergang zwischen diesen beiden Regimes liegt ungefähr bei  $Re = 4000$ , s. auch Abb. 4.32 und 4.39. Dort wechseln Druck- und Saugseite der Schaufel, und anstatt des Druckverlustes bei kleinen Re-Zahlen findet nun ein Aufbau statischen Druckes statt.

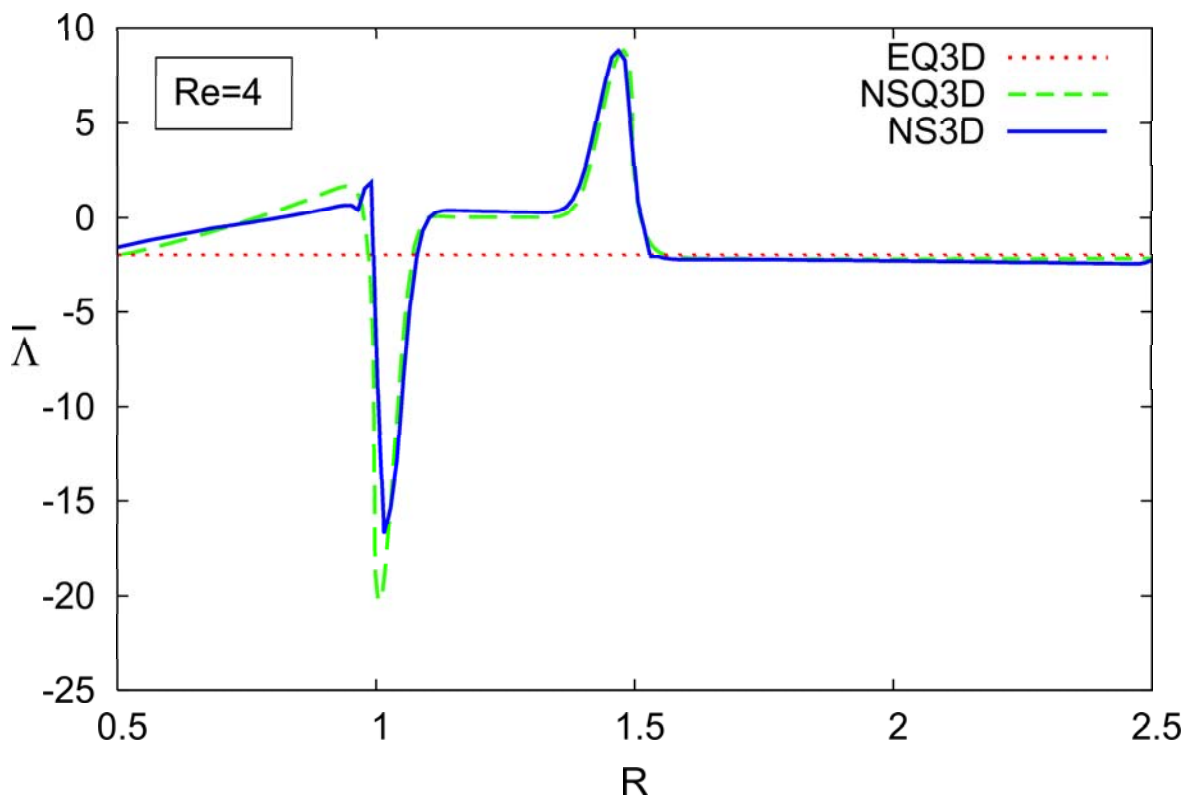
(a)  $W_M$ (b)  $W_\Phi$ 

(c) Vorticity

Bild 4.21:  $Re = 4$ , logarithmisch spiralförmige Schaufeln.  
Entwicklung der Geschwindigkeiten  $W_M(\tilde{\Phi})$  und  $W_\Phi(\tilde{\Phi})$  sowie der Vorticity  $\Lambda(\tilde{\Phi})$  mit dem bezogenen Radius.



(a) Gemittelter Drall



(b) Gemittelte Vorticity

Bild 4.22:  $Re = 4$ , logarithmisch spirale Schaufeln.  
Vergleich der umfangsgemittelten Verläufe des Dralls und der Vorticity.

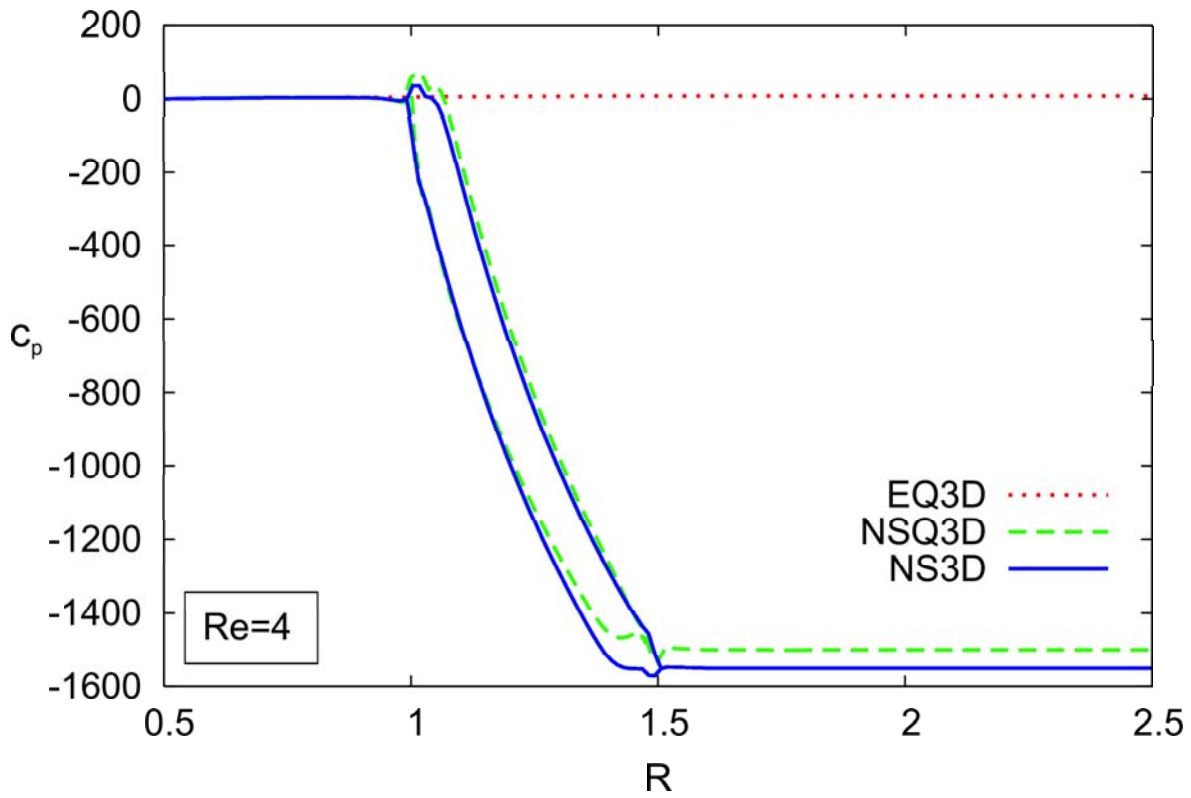
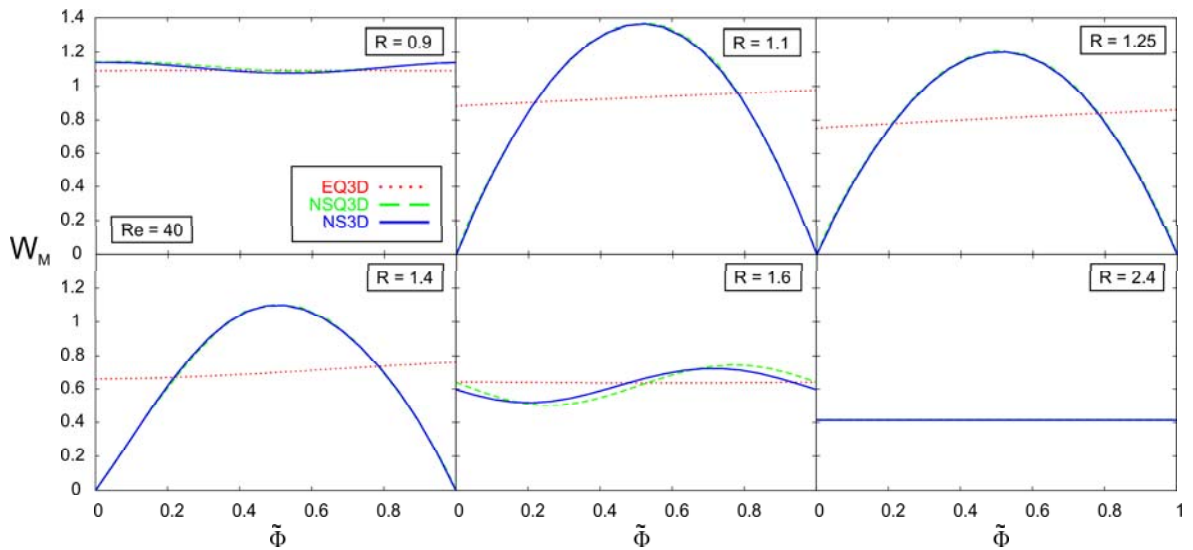
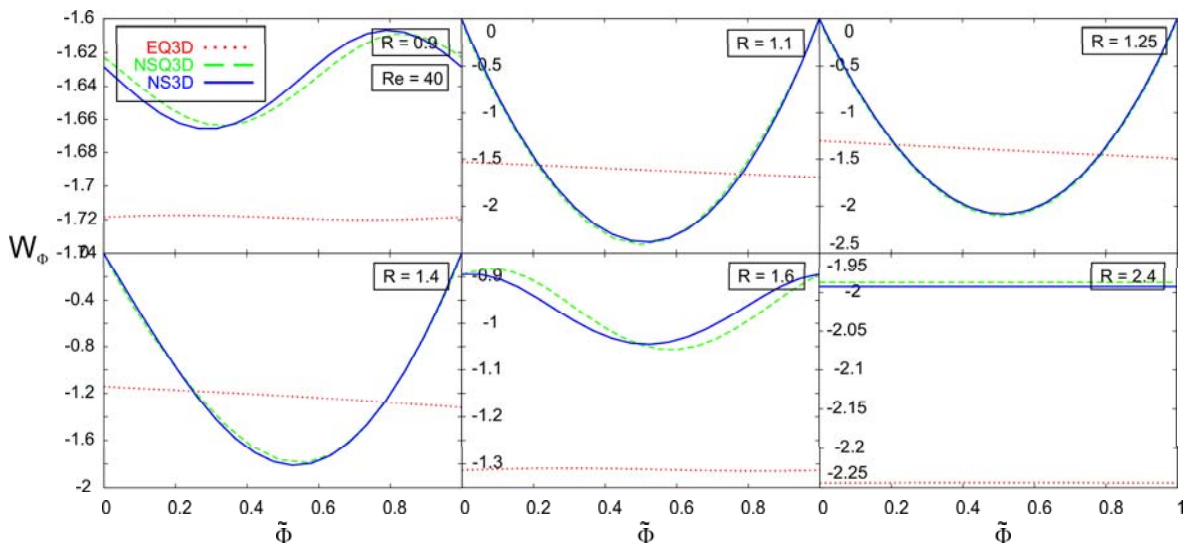


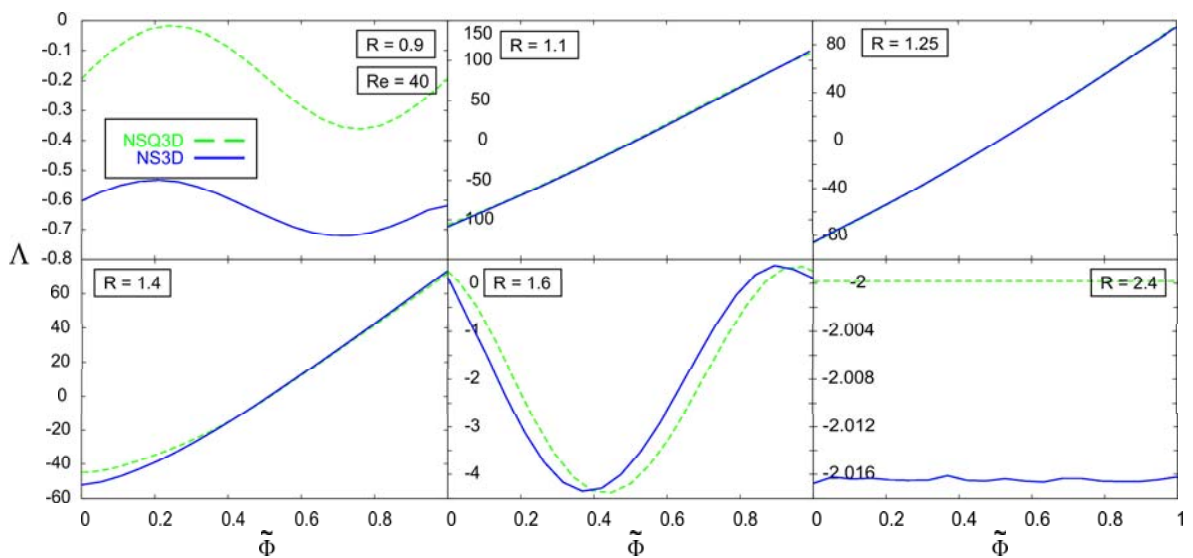
Bild 4.23:  $Re = 4$ , logarithmisch spiralförmige Schaufeln.  
Vergleich der normierten Druckverläufe.



(a)  $W_M$

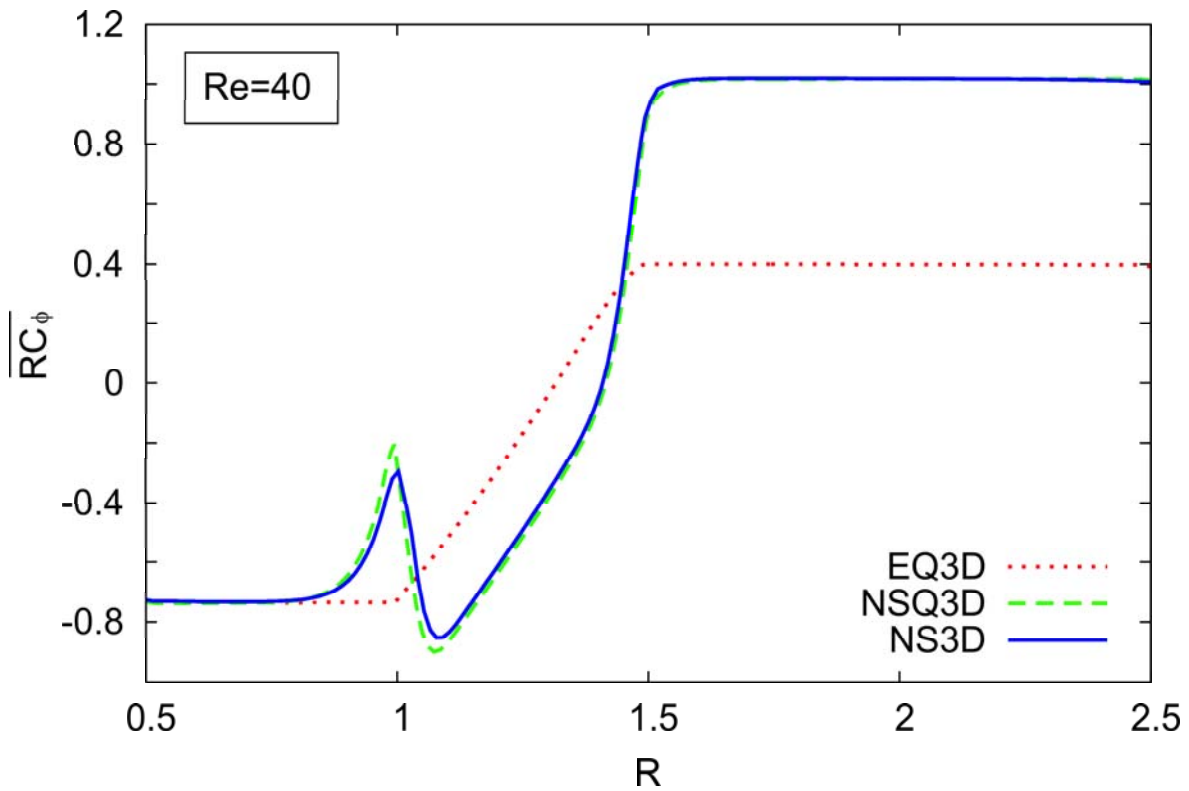


(b)  $W_\Phi$

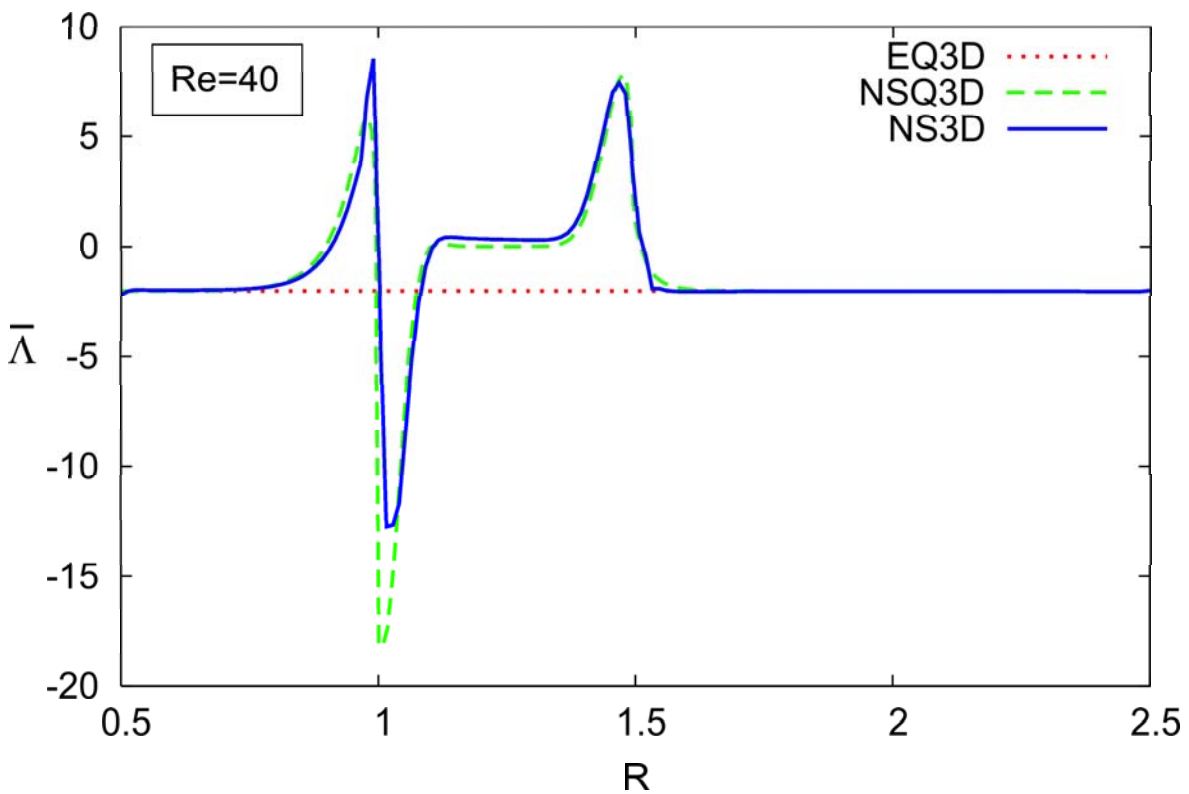


(c) Vorticity

Bild 4.24:  $Re = 40$ , logarithmisch spiralförmige Schaufeln.  
Entwicklung der Geschwindigkeiten  $W_M(\tilde{\Phi})$  und  $W_\Phi(\tilde{\Phi})$  sowie der Vorticity  $\Lambda(\tilde{\Phi})$  mit dem bezogenen Radius.



(a) Gemittelter Drall



(b) Gemittelte Vorticity

Bild 4.25:  $Re = 40$ , logarithmisch spirale Schaufeln.  
Vergleich der umfangsgemittelten Verläufe des Dralls und der Vorticity.

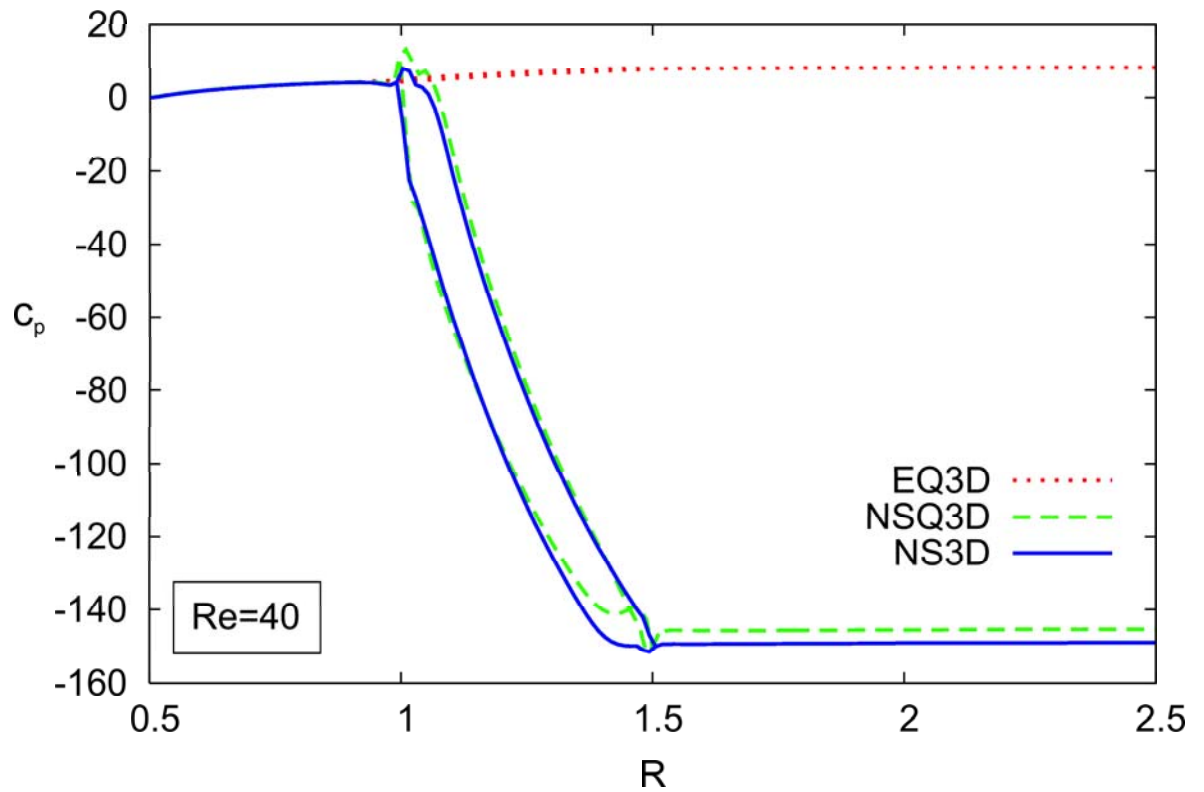
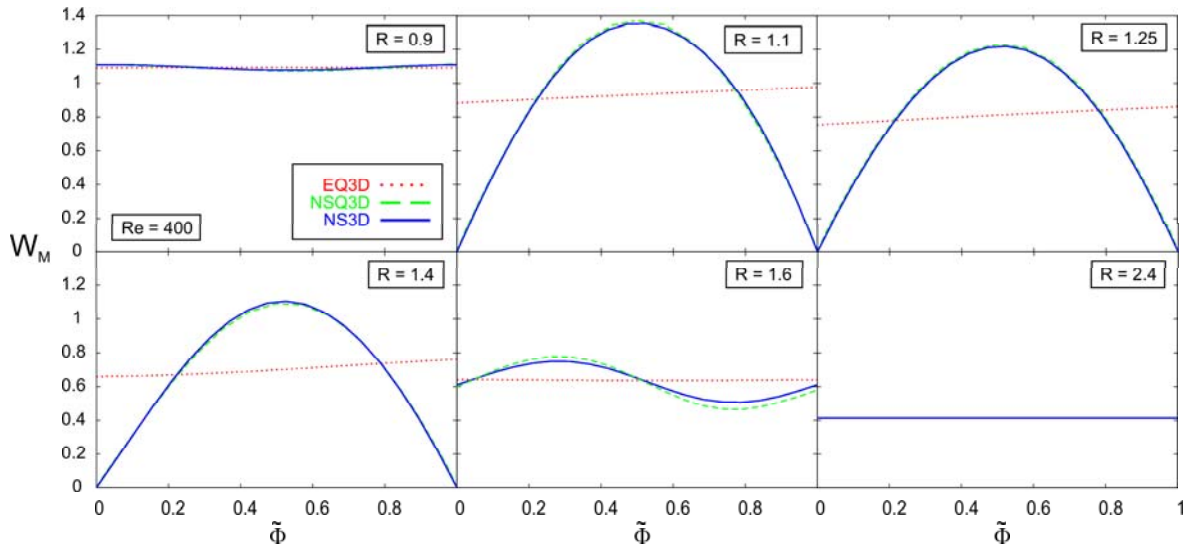
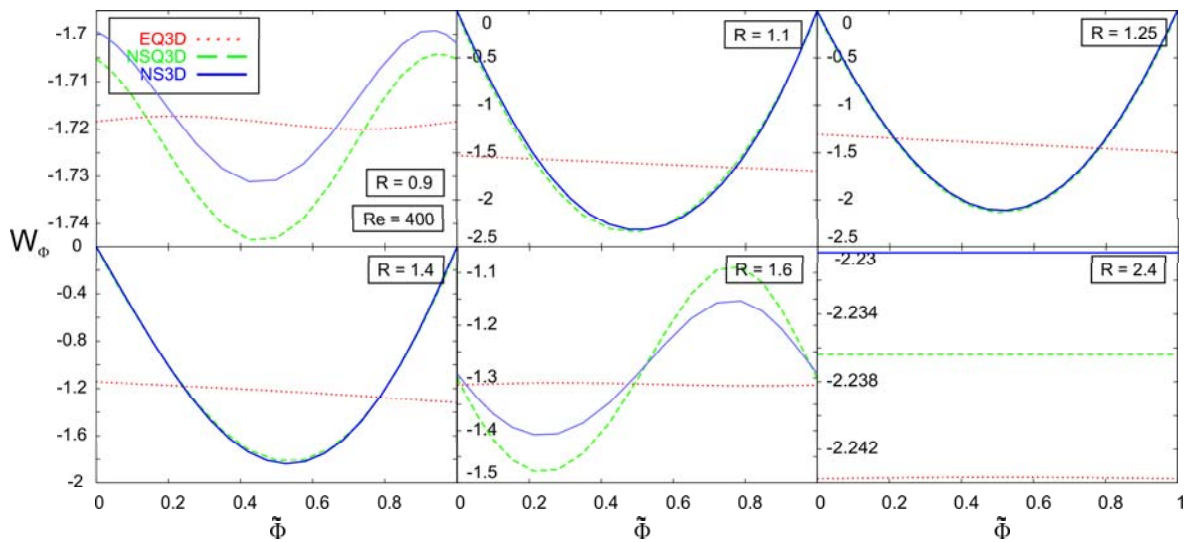
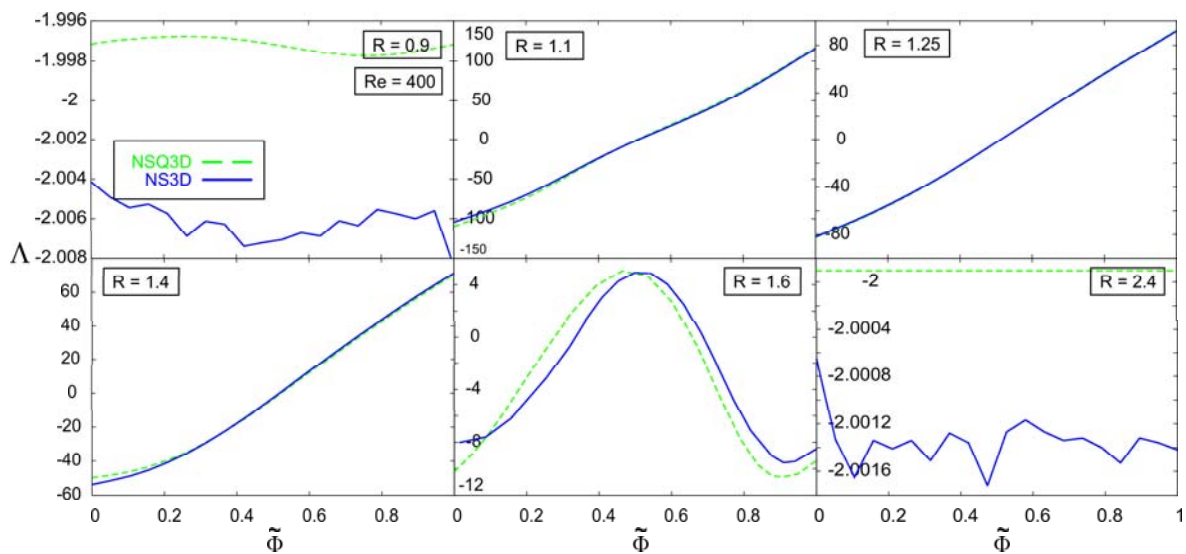


Bild 4.26:  $Re = 40$ , logarithmisch spirale Schaufeln.  
Vergleich der normierten Druckverläufe.

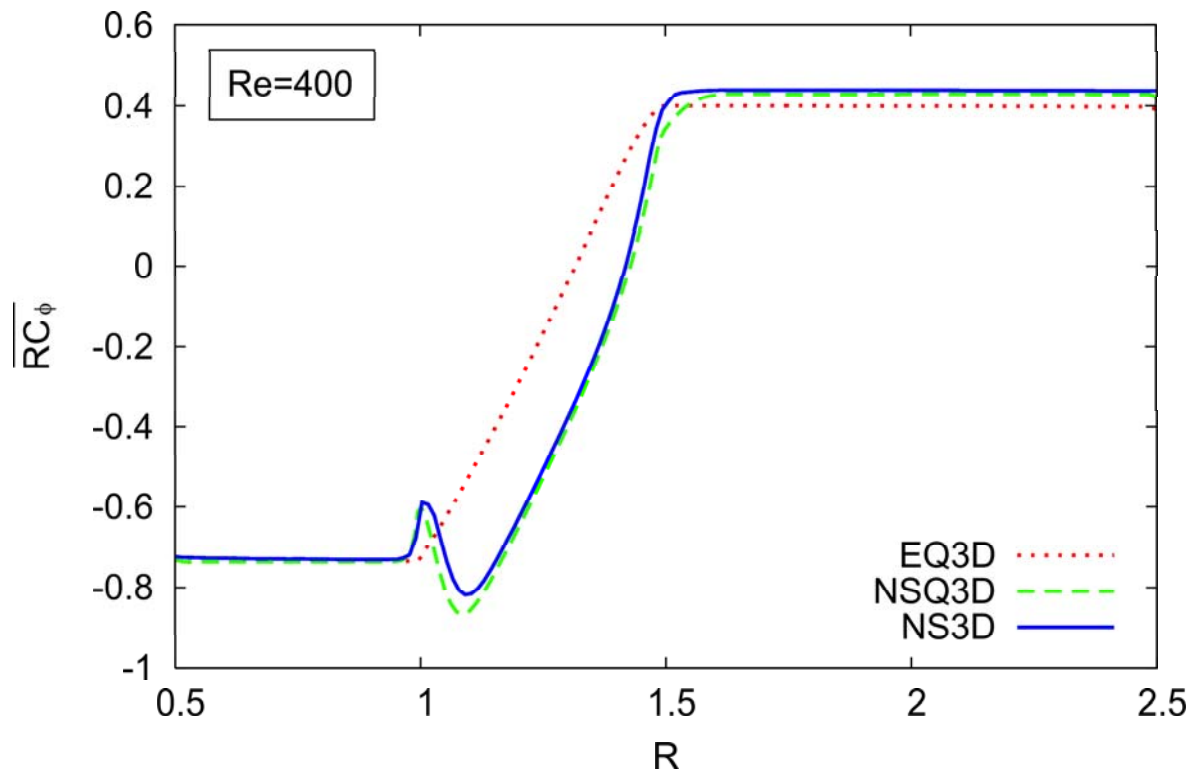


(a)  $W_M$ (b)  $W_\Phi$ 

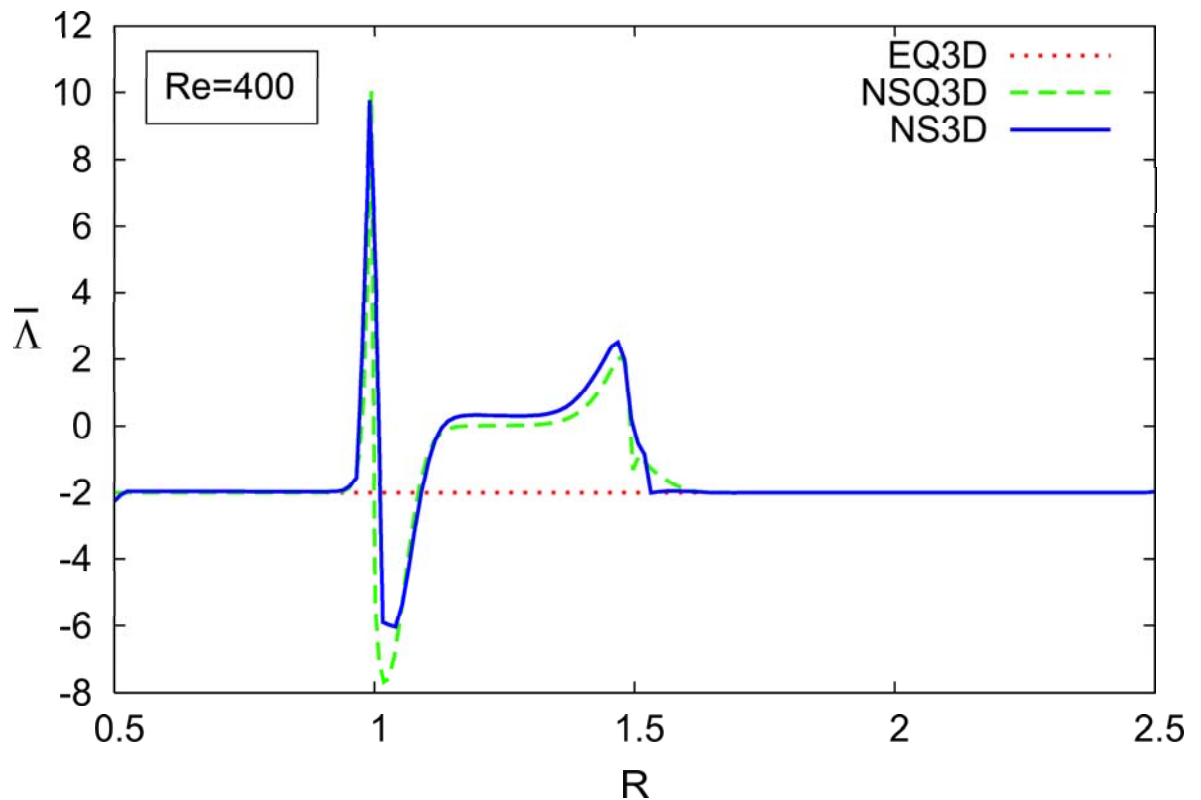
(c) Vorticity

Bild 4.27:  $Re = 400$ , logarithmisch spirale Schaufeln.  
Entwicklung der Geschwindigkeiten  $W_M(\tilde{\Phi})$  und  $W_\Phi(\tilde{\Phi})$  sowie der Vorticity  $\Lambda(\tilde{\Phi})$  mit dem bezogenen Radius.





(a) Gemittelter Drall



(b) Gemittelte Vorticity

Bild 4.28:  $Re = 400$ , logarithmisch spiralförmige Schaufeln.  
Vergleich der umfangsgemittelten Verläufe des Dralls und der Vorticity.

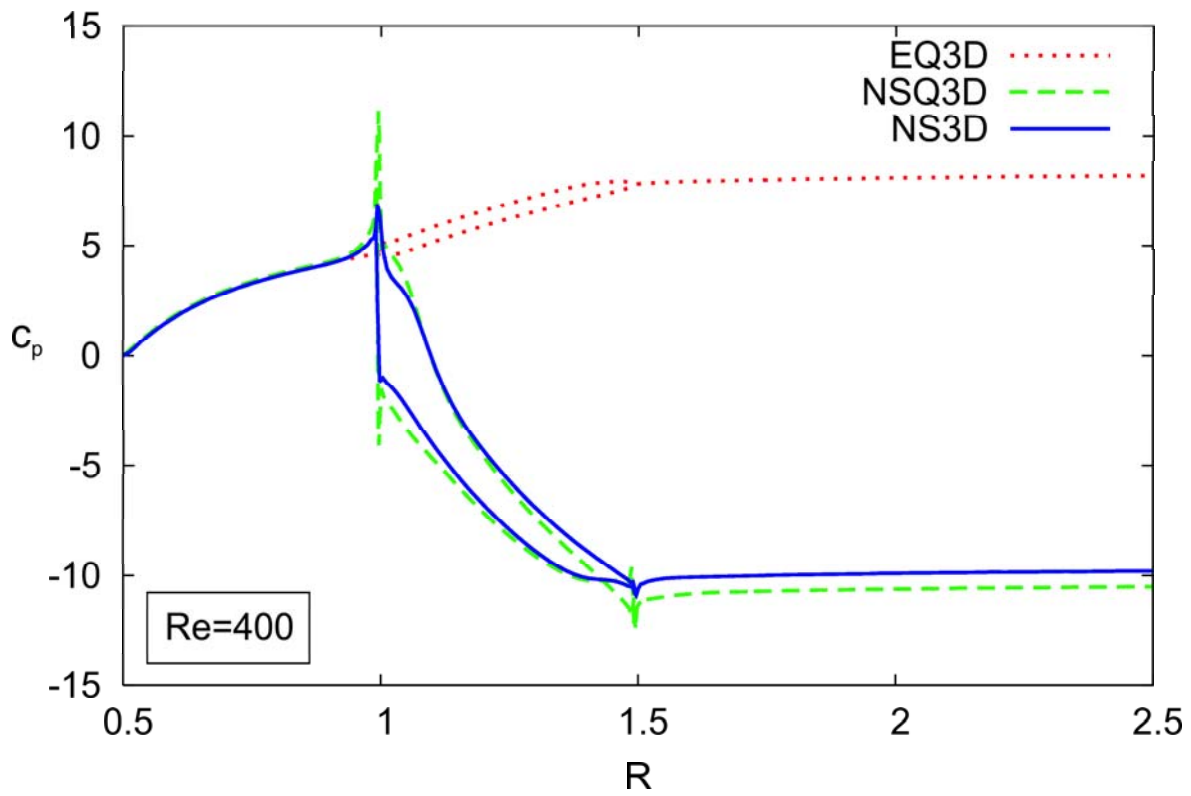


Bild 4.29:  $Re = 400$ , logarithmisch spiralförmige Schaufeln.  
Vergleich der normierten Druckverläufe.

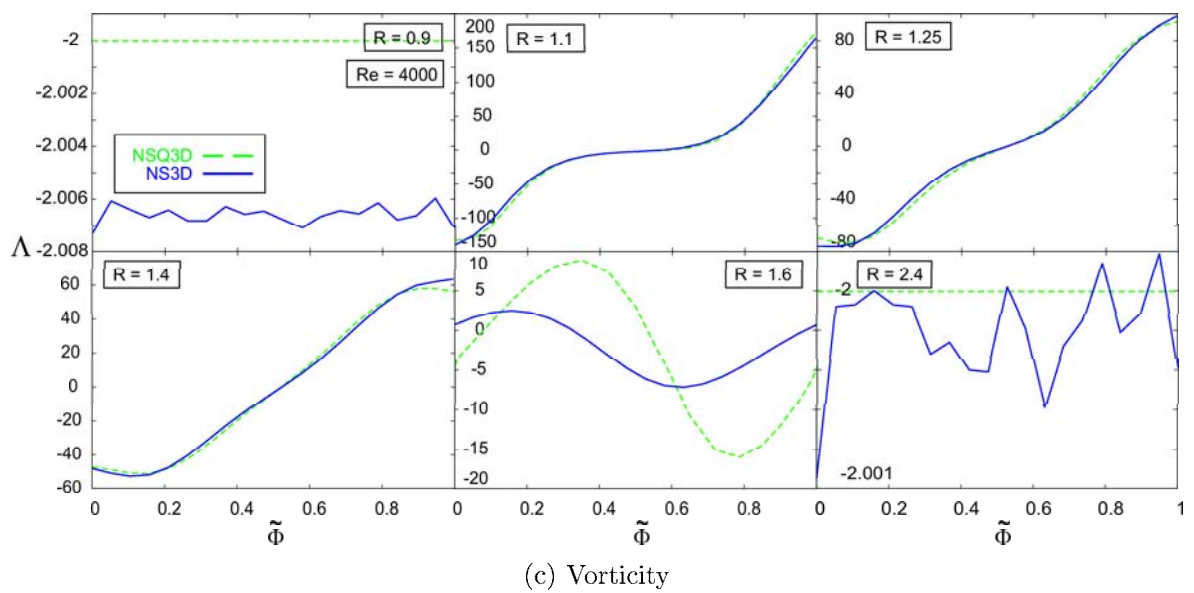
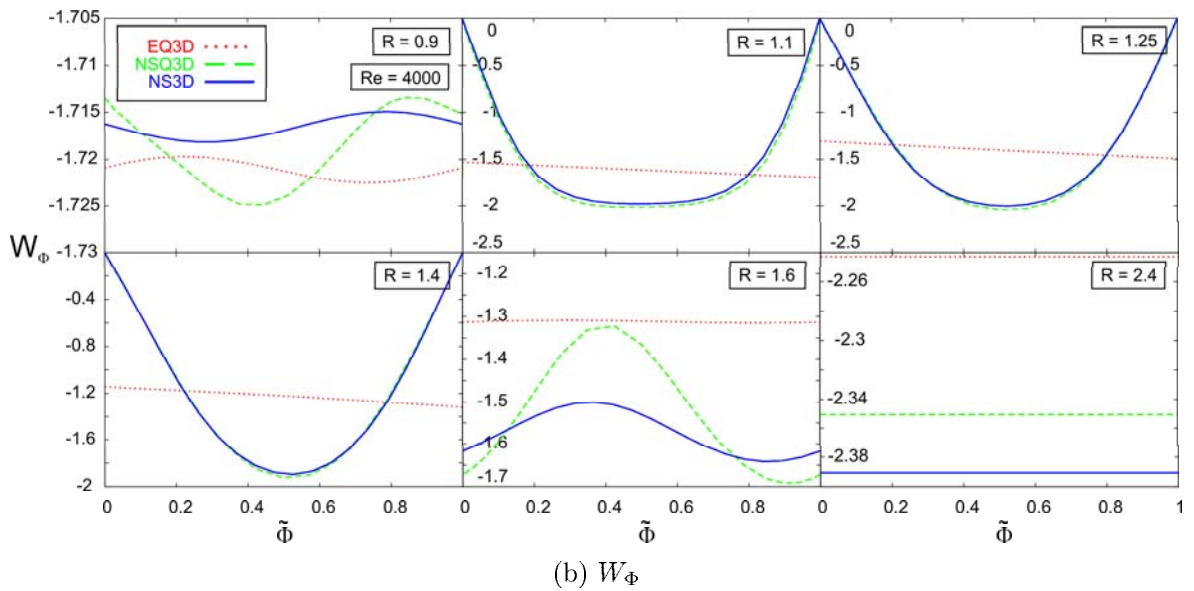
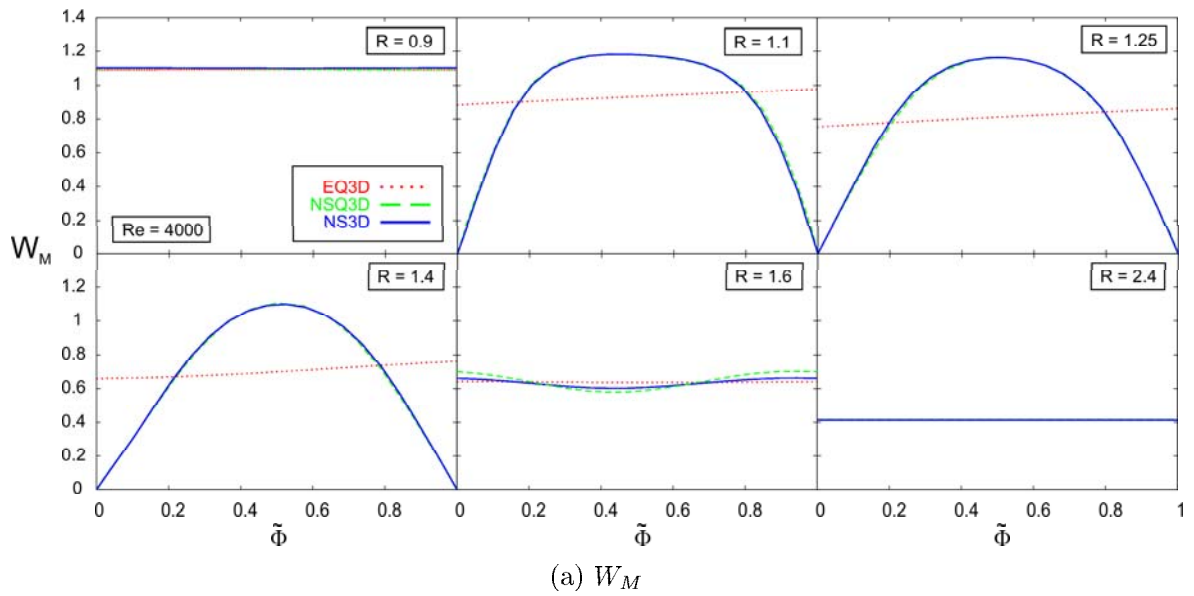
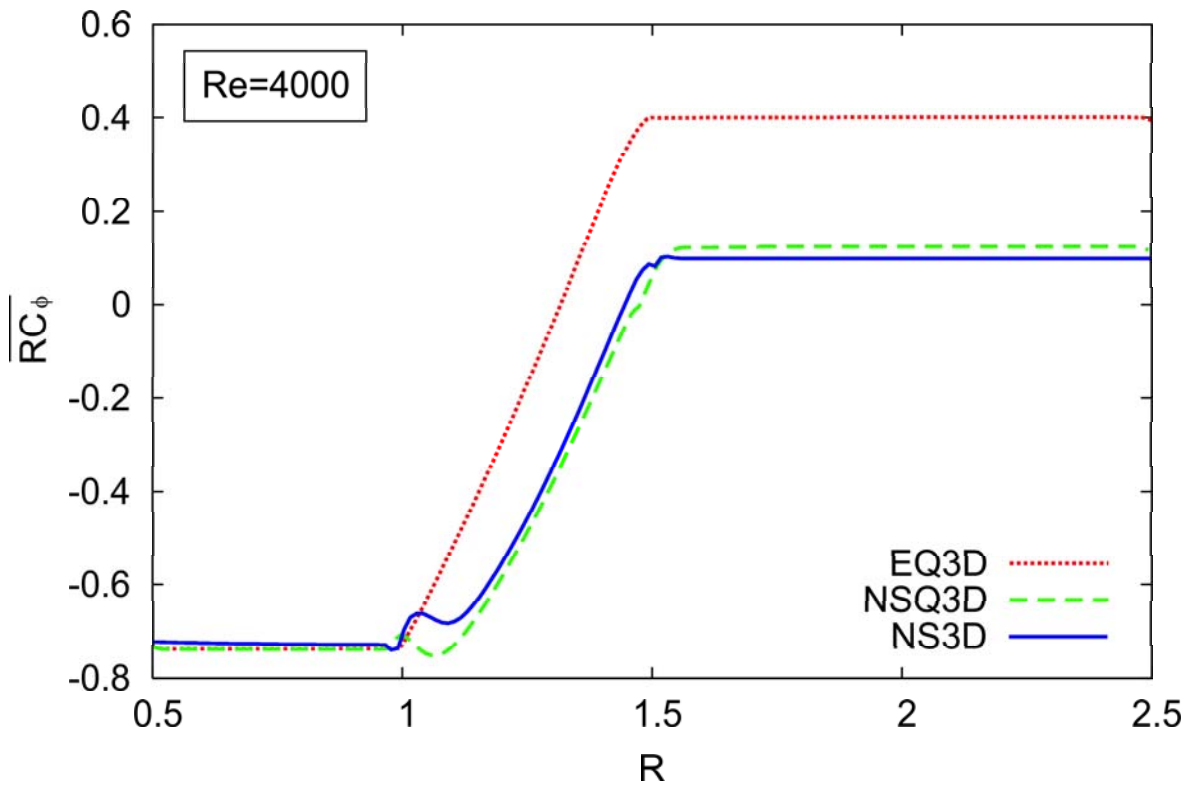
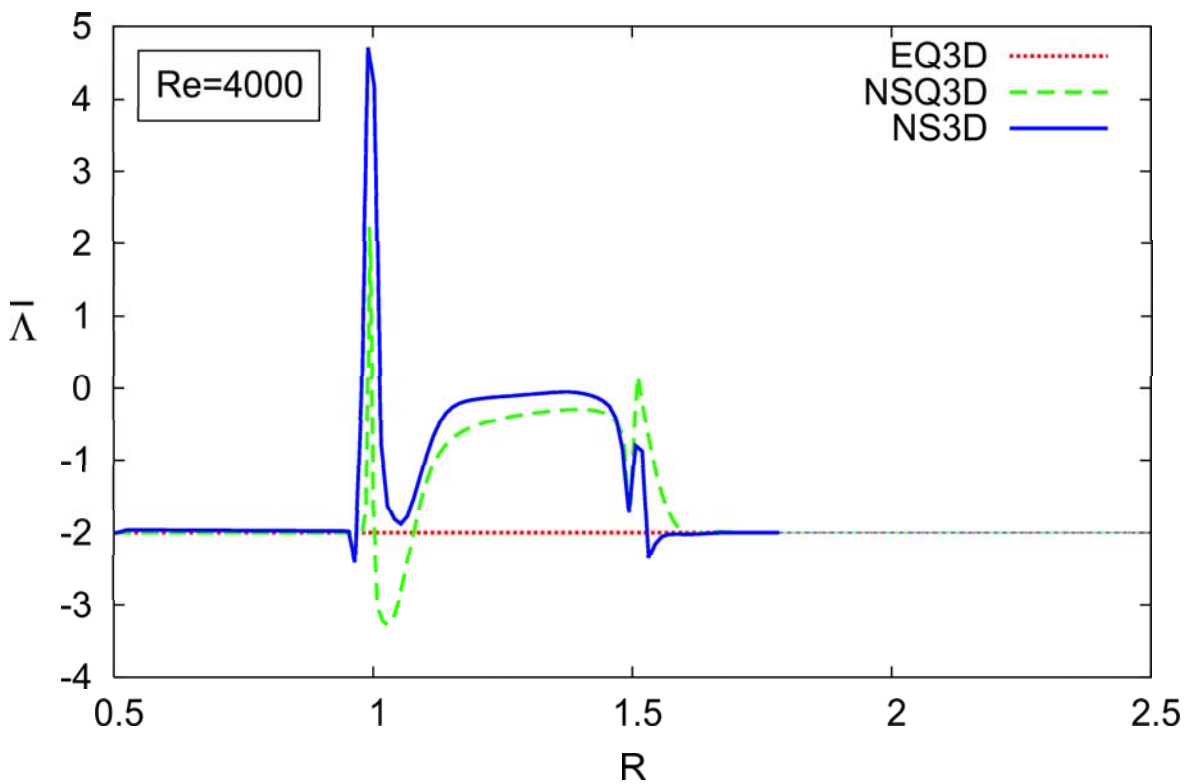


Bild 4.30:  $Re = 4000$ , logarithmisch spirale Schaufeln.  
Entwicklung der Geschwindigkeiten  $W_M(\tilde{\Phi})$  und  $W_\Phi(\tilde{\Phi})$  sowie der Vorticity  $\Lambda(\tilde{\Phi})$  mit dem bezogenen Radius.



(a) Gemittelter Drall



(b) Gemittelte Vorticity

Bild 4.31:  $Re = 4000$ , logarithmisch spiralförmige Schaufeln.  
Vergleich der umfangsgemittelten Verläufe des Dralls und der Vorticity.

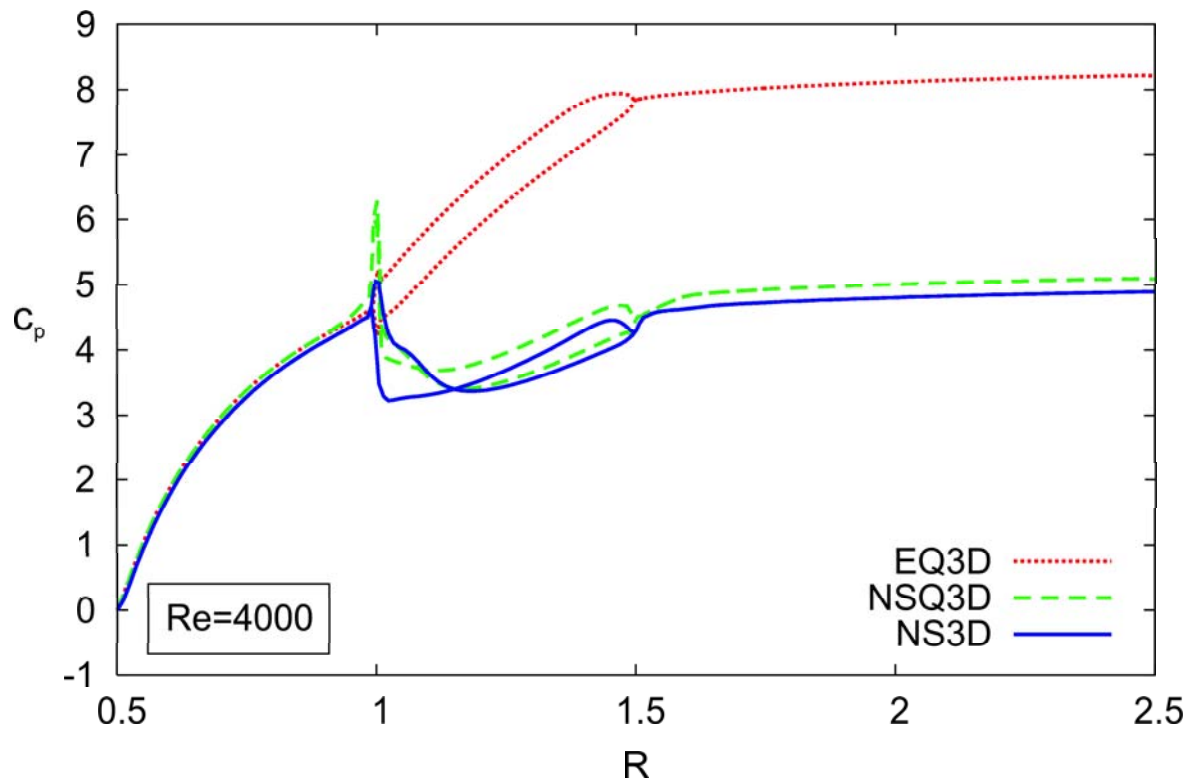
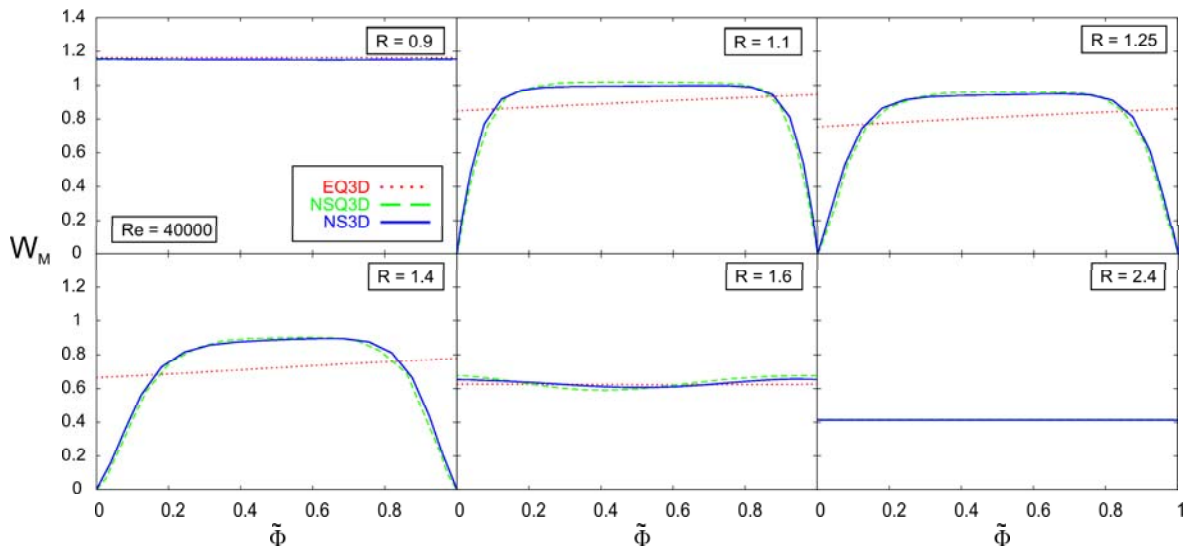
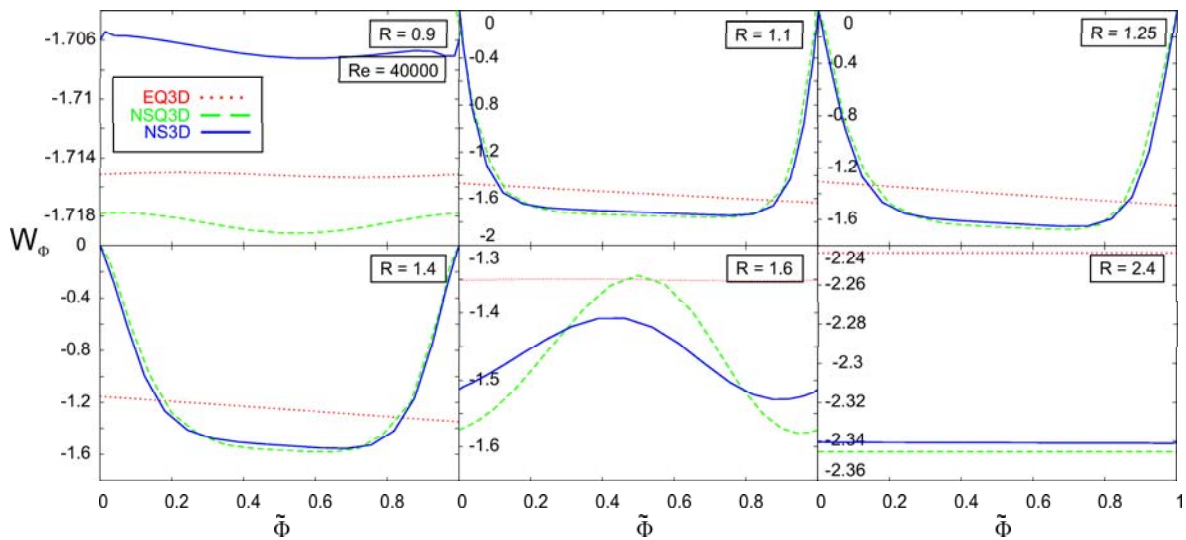
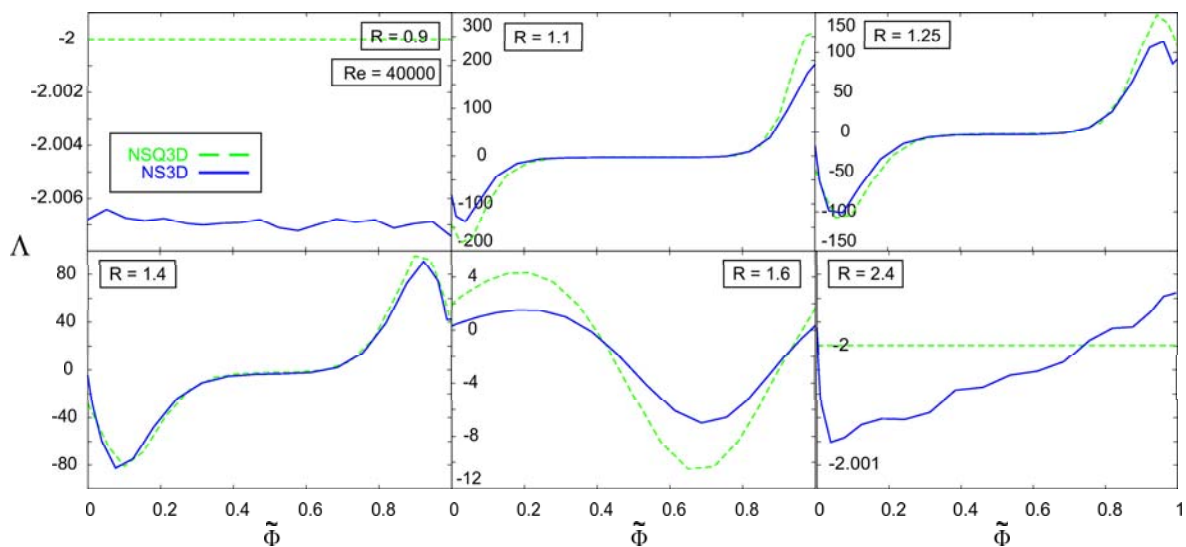
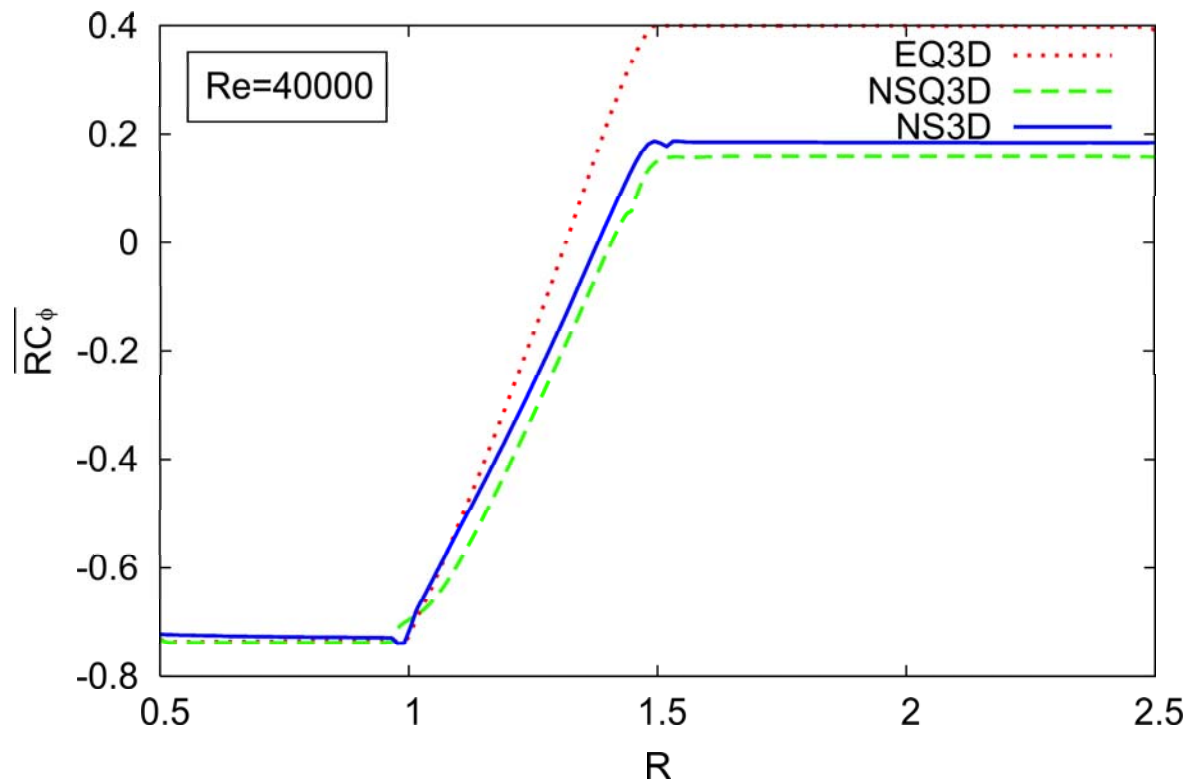


Bild 4.32:  $Re = 4000$ , logarithmisch spiralförmige Schaufeln.  
Vergleich der normierten Druckverläufe. Hier deutet sich der Vorzeichenwechsel beim  
Druckmoment an, vgl. auch Abb. 4.39.

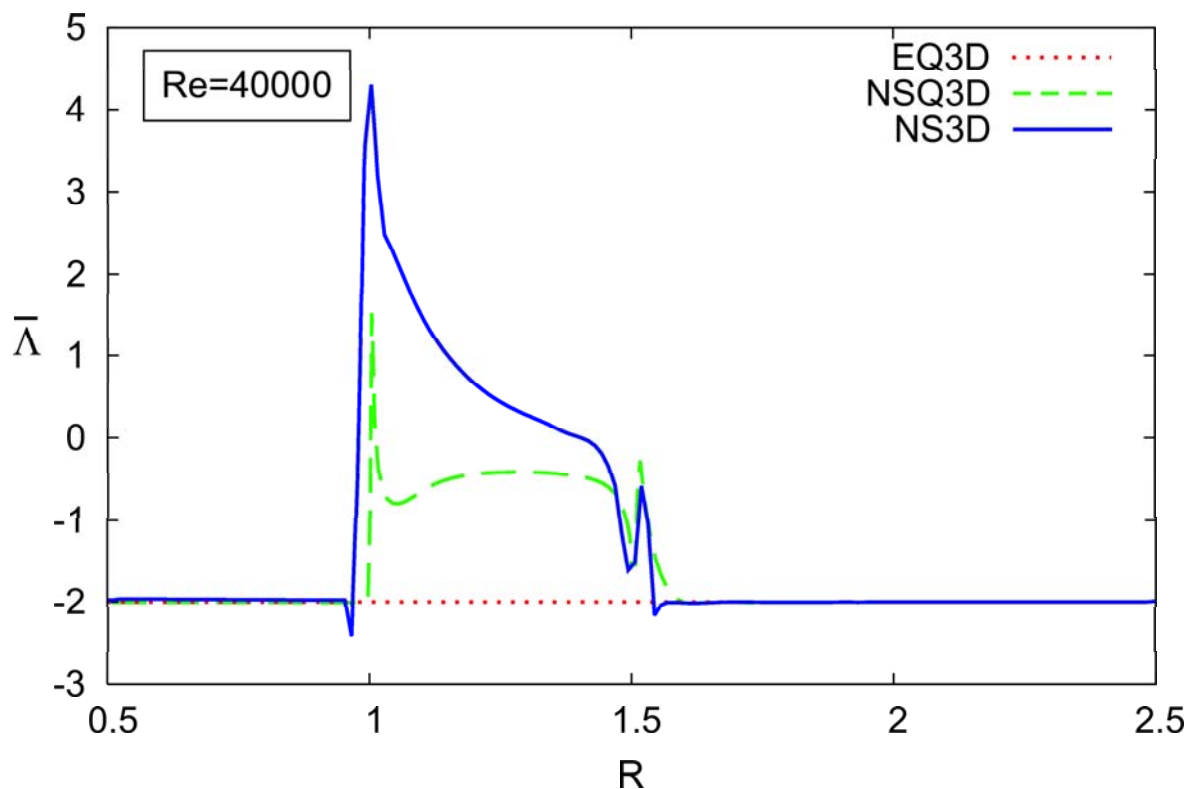
(a)  $W_M$ (b)  $W_\phi$ 

(c) Vorticity

Bild 4.33:  $Re = 40000$ , logarithmisch spiralförmige Schaufeln.  
Entwicklung der Geschwindigkeiten  $W_M(\tilde{\Phi})$  und  $W_\phi(\tilde{\Phi})$  sowie der Vorticity  $\Lambda(\tilde{\Phi})$  mit dem bezogenen Radius.



(a) Gemittelter Drall



(b) Gemittelte Vorticity

Bild 4.34:  $Re = 40000$ , logarithmisch spirale Schaufeln.  
Vergleich der umfangsgemittelten Verläufe des Dralls und der Vorticity.

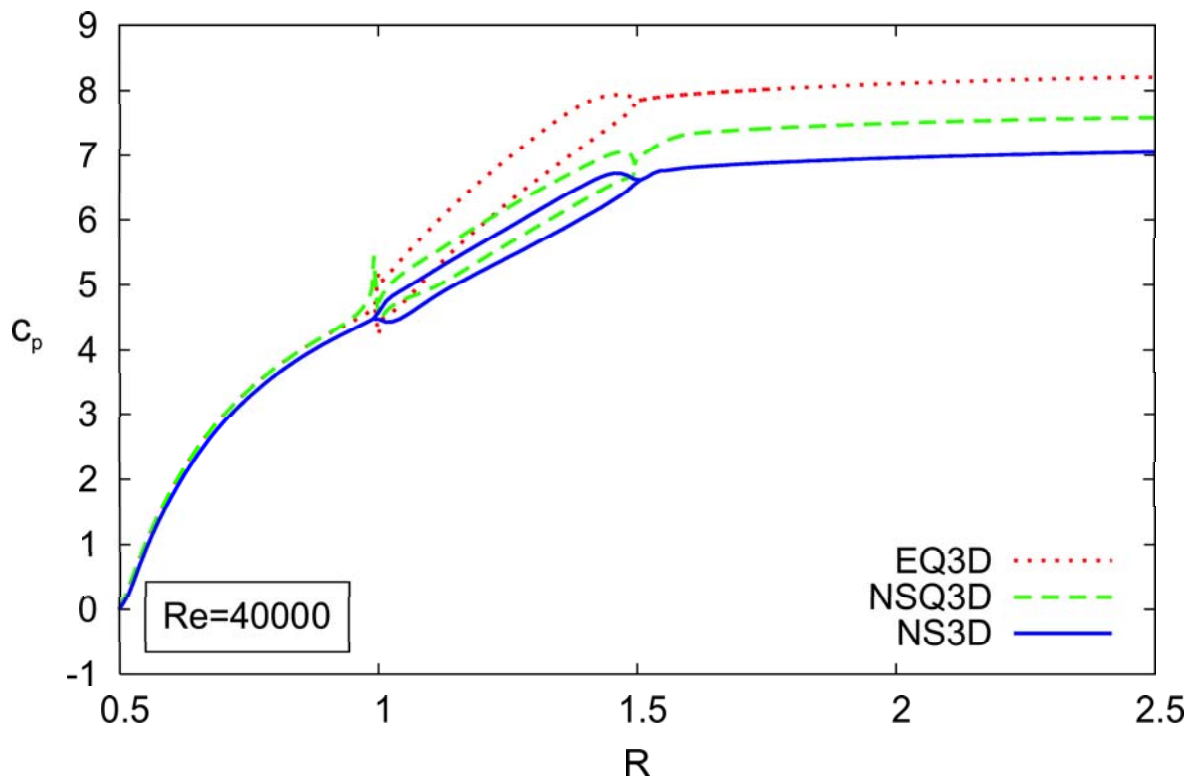


Bild 4.35:  $Re = 40000$ , logarithmisch spiralförmige Schaufeln.  
Vergleich der normierten Druckverläufe.



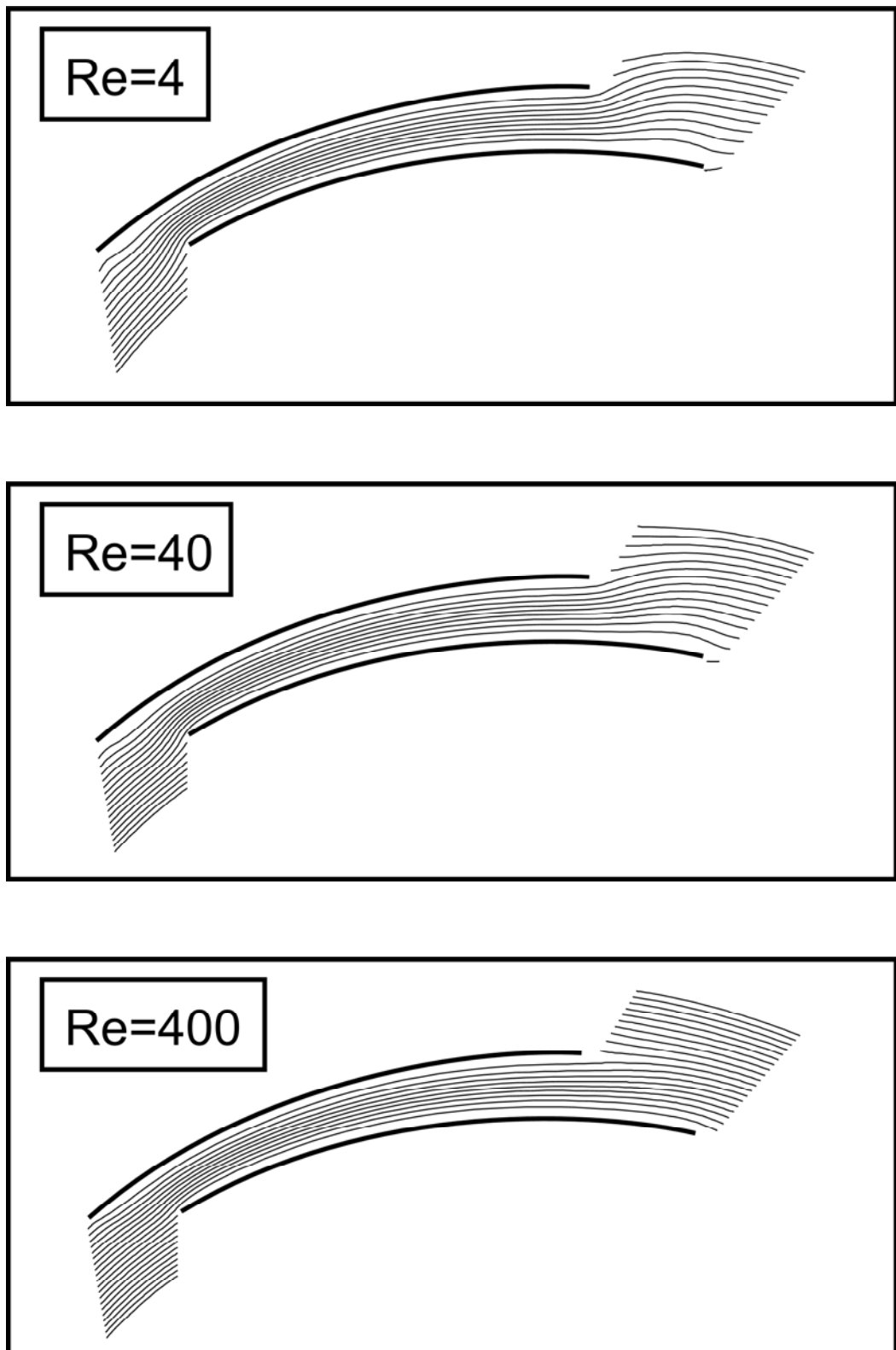


Bild 4.36: Verlauf der Stromlinien bei logarithmisch spiraligen Schaufeln für unterschiedliche Reynolds-Zahlen.

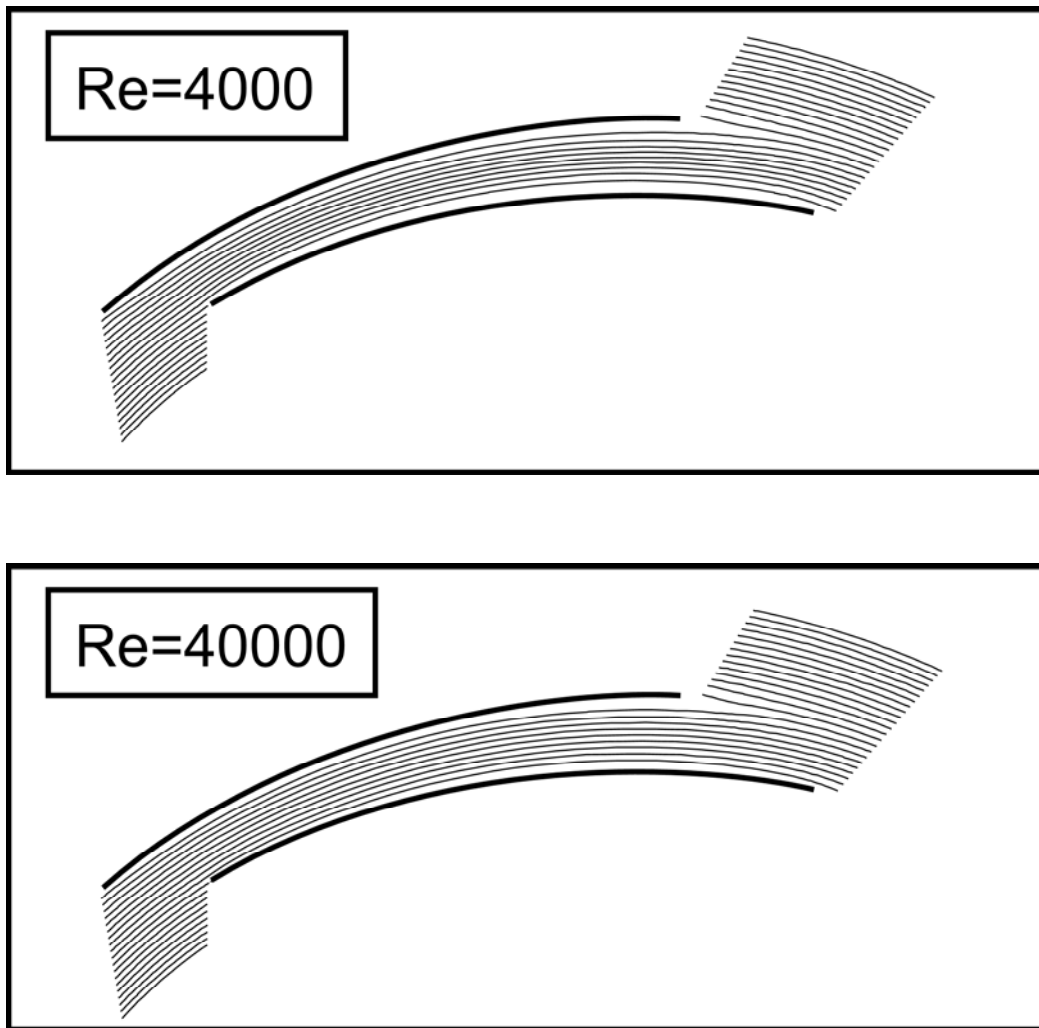


Bild 4.37: Verlauf der Stromlinien bei logarithmisch spiralförmigen Schaufeln für unterschiedliche Reynoldszahlen.

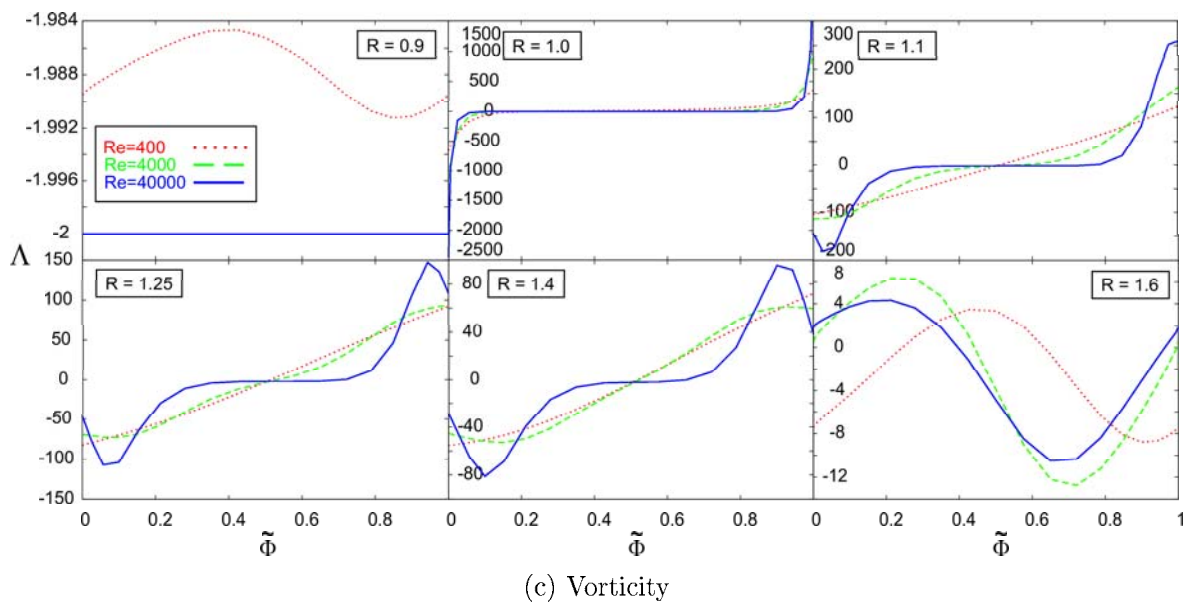
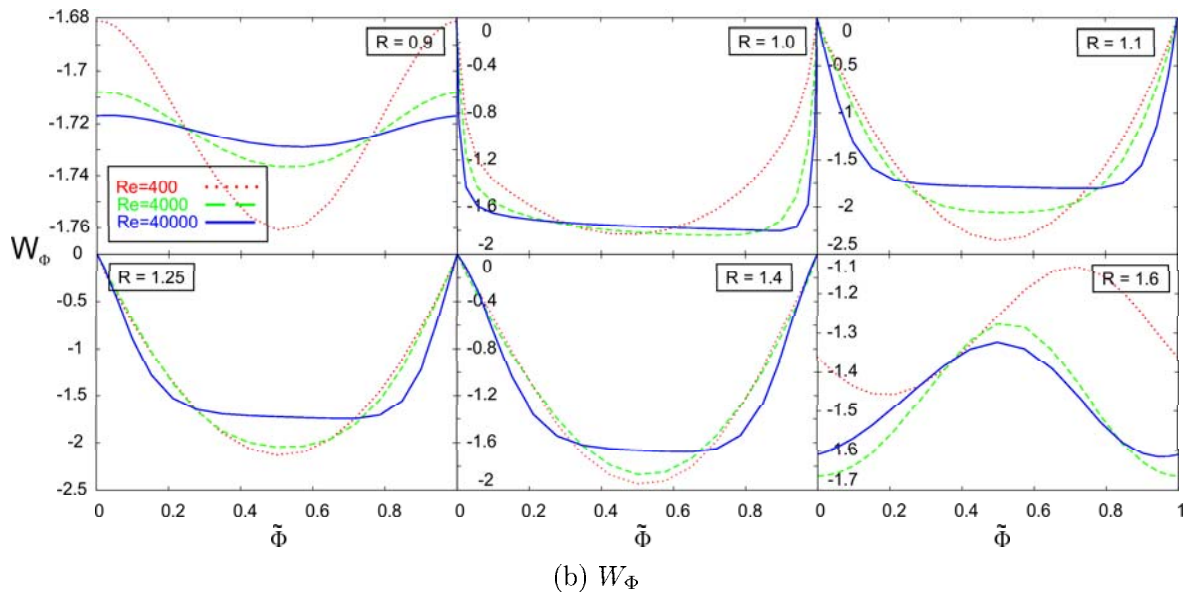
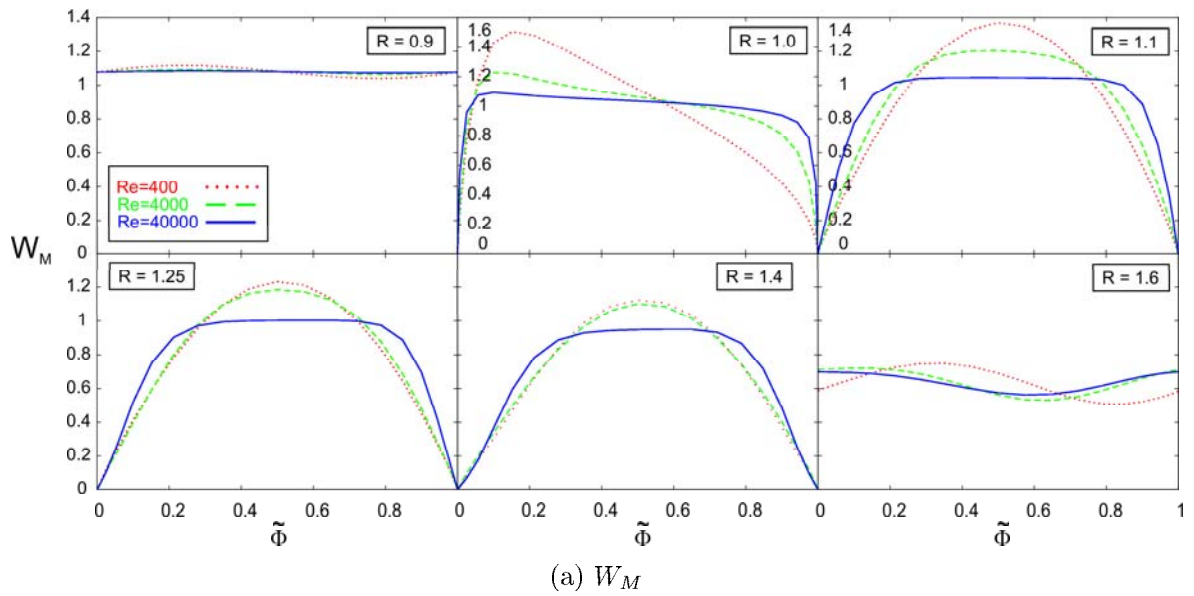


Bild 4.38: Logarithmisch spirale Schaufeln.  
 Vergleich der Geschwindigkeitsverteilungen  $W_M(\tilde{\Phi})$  und  $W_\Phi(\tilde{\Phi})$  sowie der Vorticity  $\Lambda(\tilde{\Phi})$  bei verschiedenen Reynolds-Zahlen.

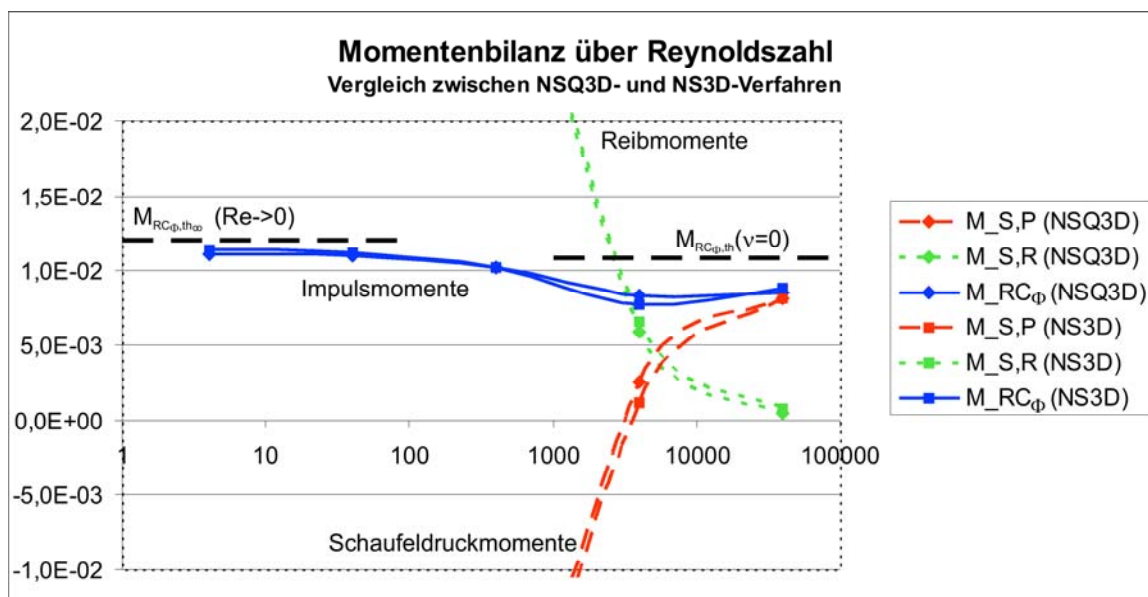
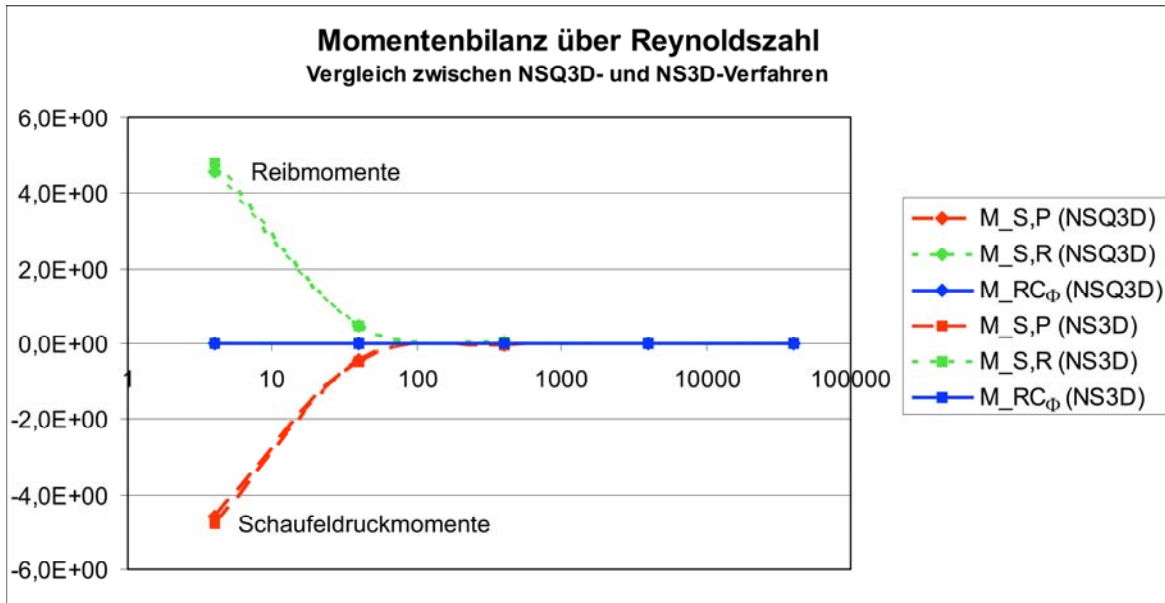


Bild 4.39: Logarithmisch spiralförmige Schaufeln.

Momentenbilanz von Druckmoment  $M_{S,P}$ , Reibmoment  $M_{S,R}$  sowie Impulsmoment  $M_{RC_\varphi}$  in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl. Die waagrecht gestrichelten Linien stellen die Grenzwerte für das theoretische Impulsmoment bei einer schaufelkongruenten schleichenden Strömung dar,  $M_{RC_\varphi, th}$  für  $Re \rightarrow 0$  und  $Z \rightarrow \infty$ , sowie für das Impulsmoment, dass aus der EQ3D-Lösung für eine reibungsfreie Strömung ( $\nu = 0$ ) resultiert.

### Vergleich der Ergebnisse bei stoßfreier und drallbehafteter Zuströmung

Wie zu Beginn von Kapitel 4.2.2 bereits erwähnt, wurde in Anlehnung an das vorangehende Beispiel „Schaufelstern“ aus Kapitel 4.2.1 für diesen rein akademischen Testfall eine für Radialmaschinen dieser Bauart untypische Zuströmung mit Gegendrall angenommen. Um das entwickelte NSQ3D-Verfahren auch anhand eines realitätsnahen Falls zu validieren, wurde bei sonst unveränderten Bedingungen der Volumenstrom so reduziert, dass eine rein axiale Zuströmung erfolgt. Die Verhältnisse sind in dem unten stehenden Geschwindigkeitsdiagramm dargestellt.

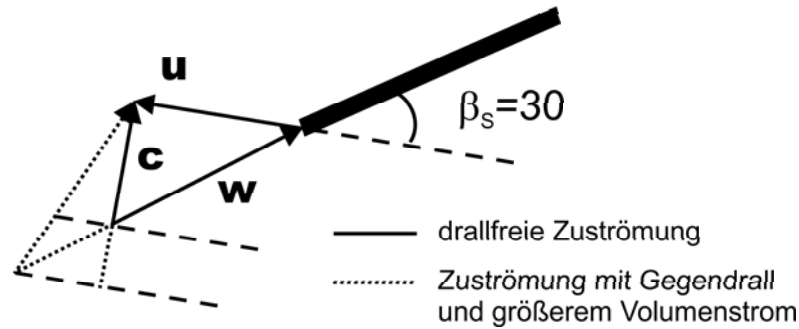


Bild 4.40: Kinematik der axialen Zuströmung beim radialen Schaufelgitter mit  $\beta_S = 30^\circ$ .

Eine einfache Abschätzung zeigt, dass im Falle logarithmisch spiralförmiger Schaufeln mit  $\beta_S = \text{const.}$  und unter der Annahme schaufelkongruenter Strömung eine solche Variation der Zuströmgeschwindigkeit keinen Einfluss auf die theoretische Druckzahl  $\Psi_{t,th}$  hat:

$$\begin{aligned}\Psi_{t,th} &= 2 [(RC_\Phi)_2 - (RC_\Phi)_1] \\ &= 2 [R_2 (W_{\Phi,2} + R_2) - R_1 (W_{\Phi,1} + R_1)] \\ &= 2 [R_2^2 - R_1^2 + (R_2 W_{M,2} - R_1 W_{M,1}) \cot \beta_S].\end{aligned}$$

Aus Kontinuitätsgründen gilt:  $R_2 W_{M,2} - R_1 W_{M,1} = 0$ . Somit folgt für die theoretische Druckzahl bei logarithmisch spiralförmigen Schaufeln und der Annahme  $Z \rightarrow \infty$ :

$$\Psi_{t,th} = 2 (R_2^2 - R_1^2) \quad (4.7)$$

Es ist also zu erwarten, dass die drallfreie Zuströmung in der Struktur ähnliche Ergebnisse liefert wie in dem ausführlich diskutierten Fall mit Gegendrall und einem höheren Volumenstrom. Unterschiede treten lediglich im Absolutniveau beim umfangsgemittelten Verlauf des Dralls und bei den schaufeldruck- und -saugseitigen Druckverläufen auf, da die Variation des Volumenstroms unterschiedliche dynamische Druckanteile mit sich bringt. Die umfangsgemittelten Verläufe des Dralls und der Vorticity sowie die normierten Druckverläufe sind für die beiden Fälle in den Abbildungen 4.41 bis 4.43 für  $Re = 4$  und  $Re = 40000$  miteinander verglichen.

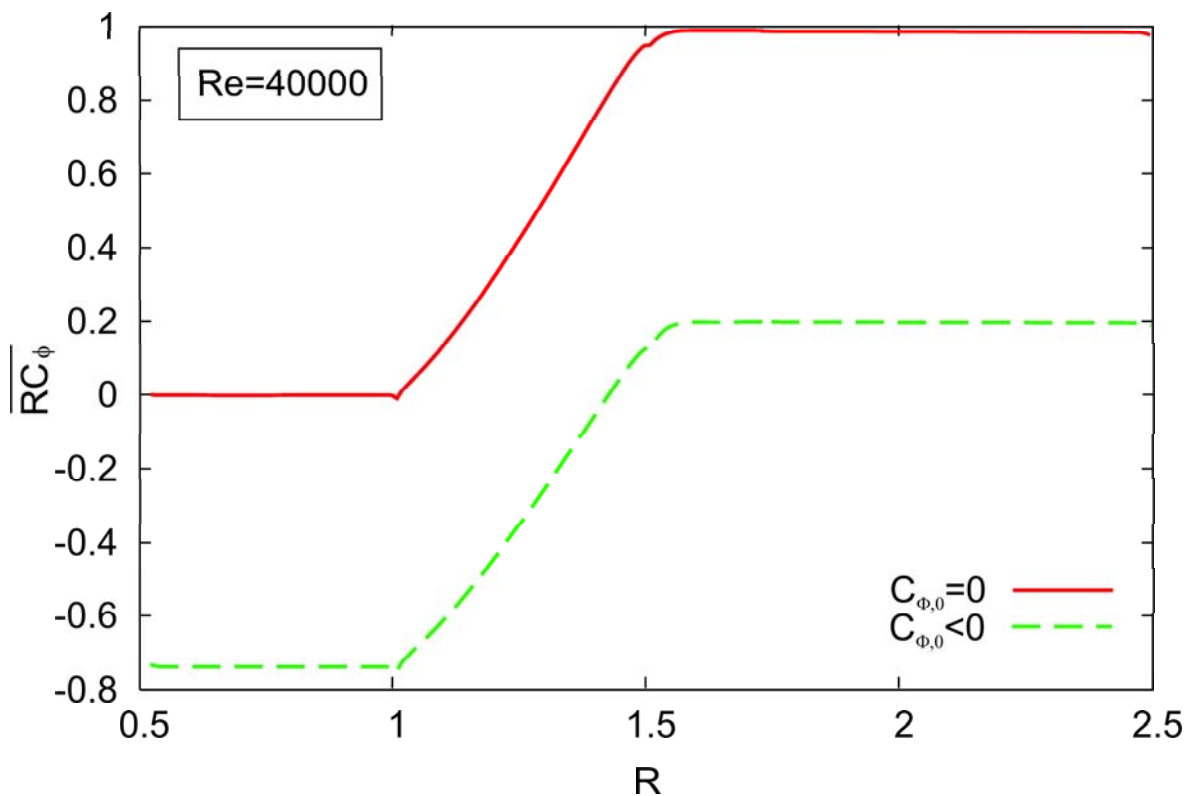
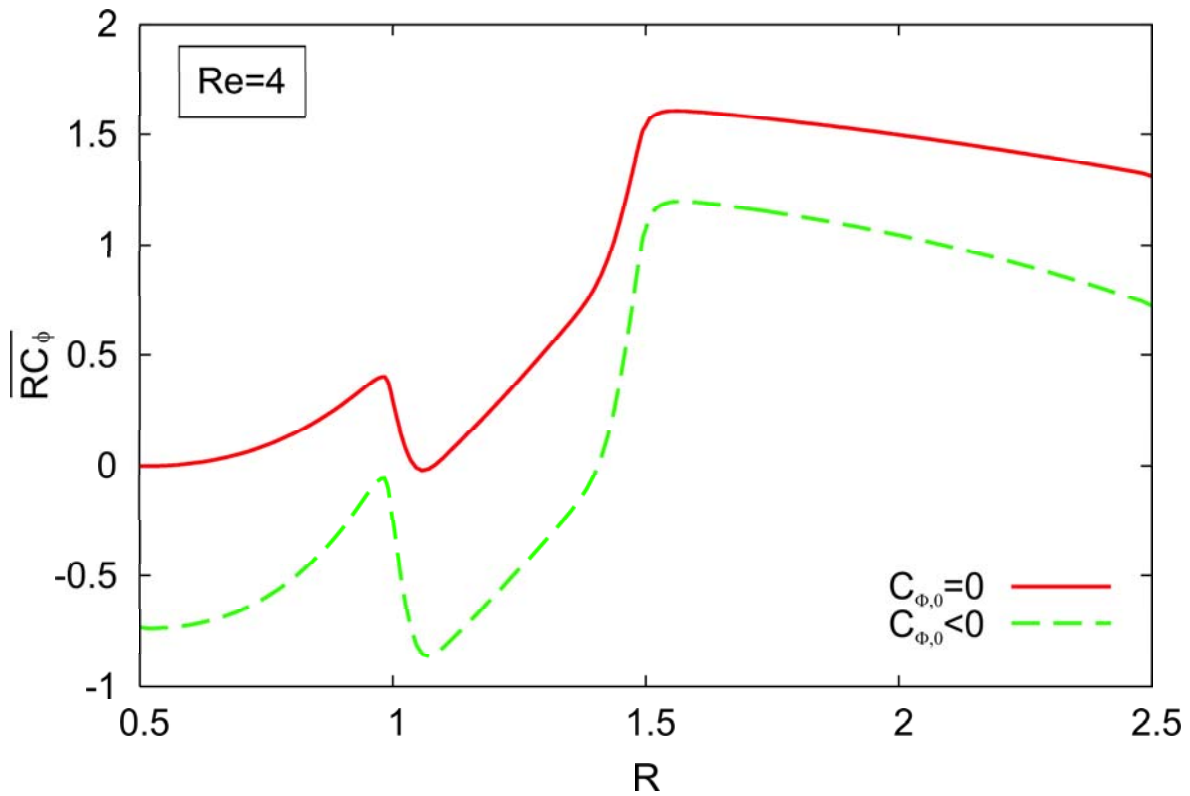


Bild 4.41: Logarithmisch spiralförmige Schaufeln.  
 Vergleich der umfangsgemittelten Verläufe des Dralls bei drall- und stoßfreier sowie gendrallbehafteter und stoßfreier Zuströmung für  $Re = 4$  und  $Re = 40000$ .

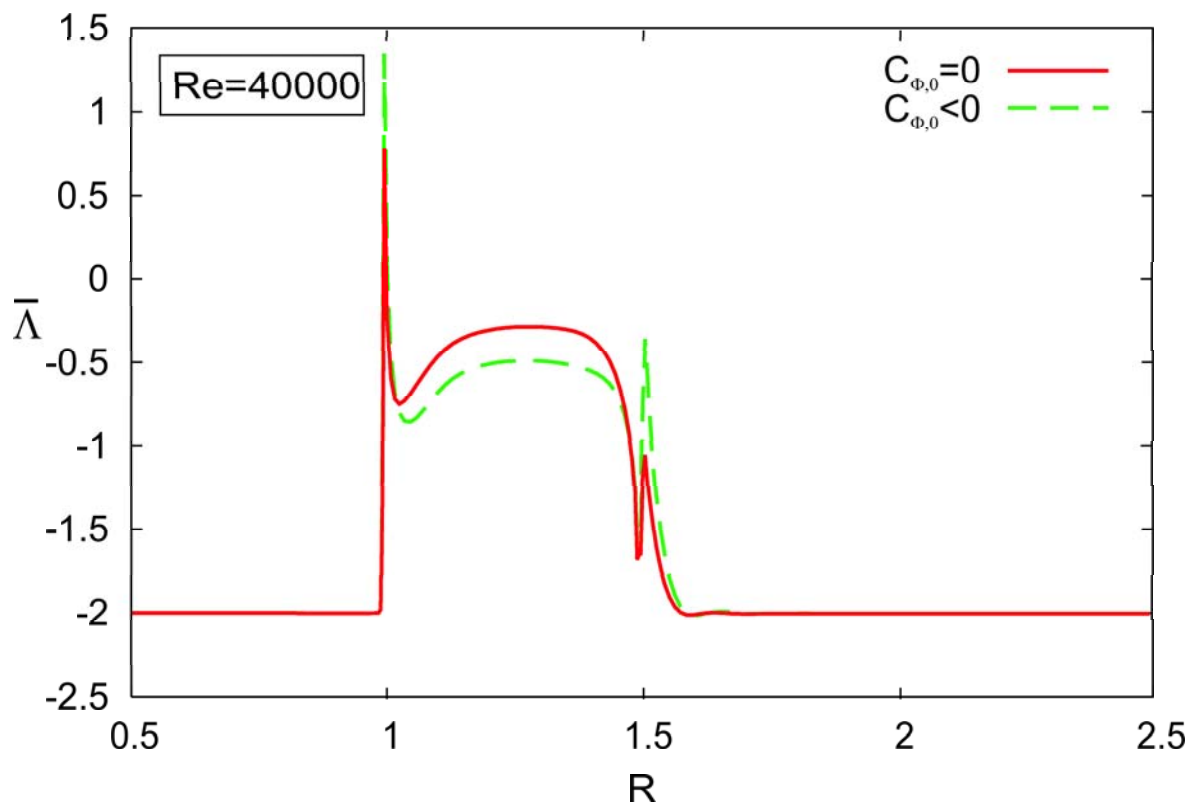
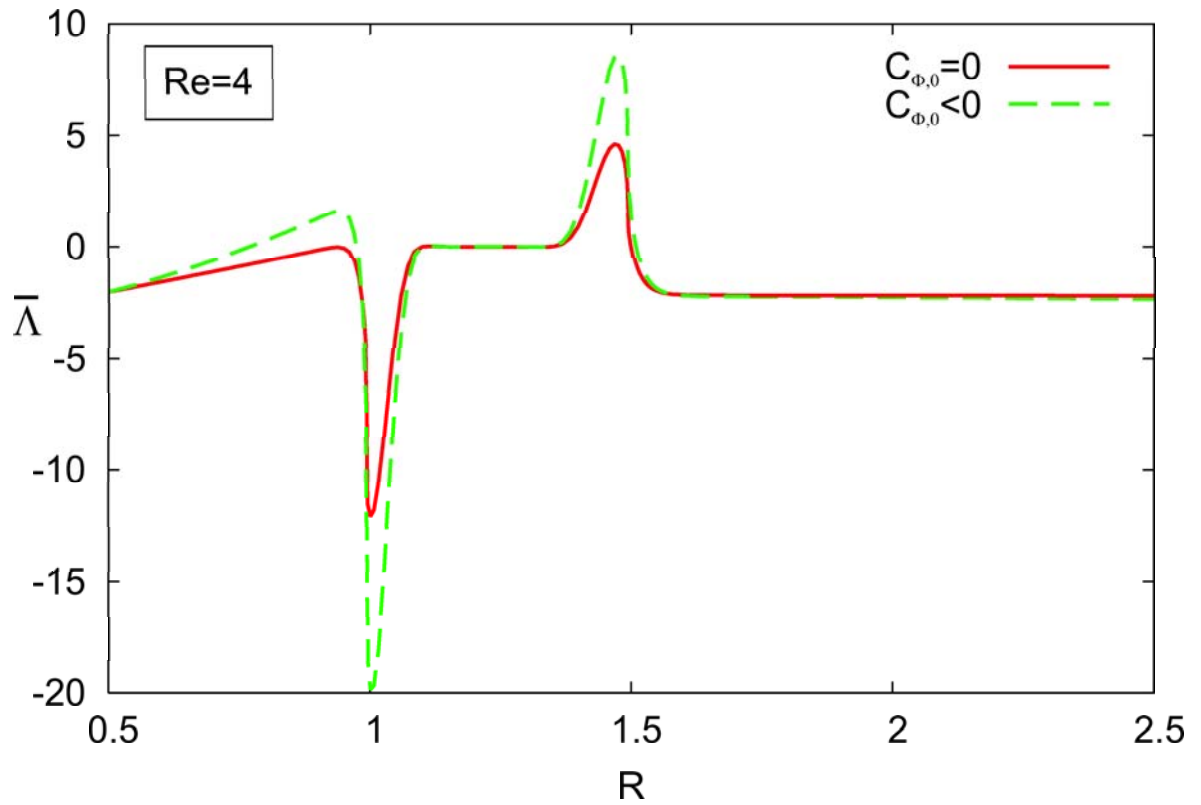


Bild 4.42: Logarithmisch spiralförmige Schaufeln.  
 Vergleich der umfangsgemittelten Verläufe des Dralls bei drall- und stoßfreier sowie gegendrallbehafteter und stoßfreier Zuströmung für  $Re = 4$  und  $Re = 40000$ .

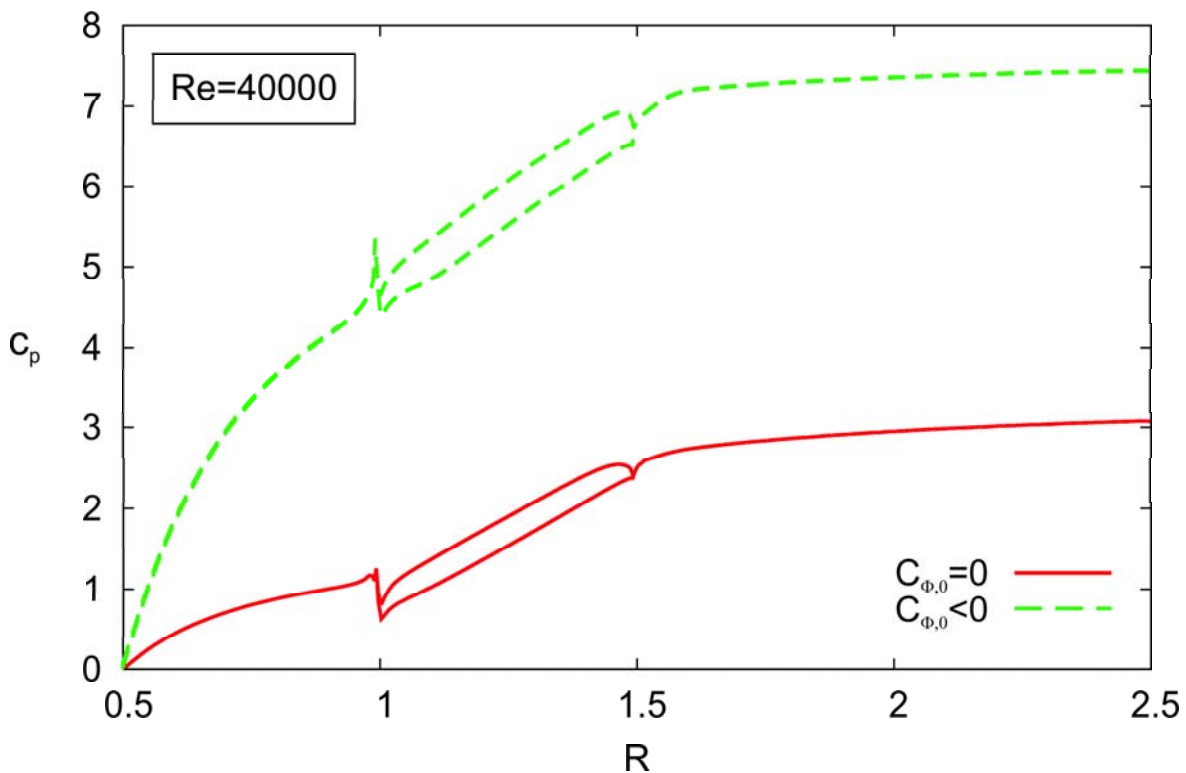
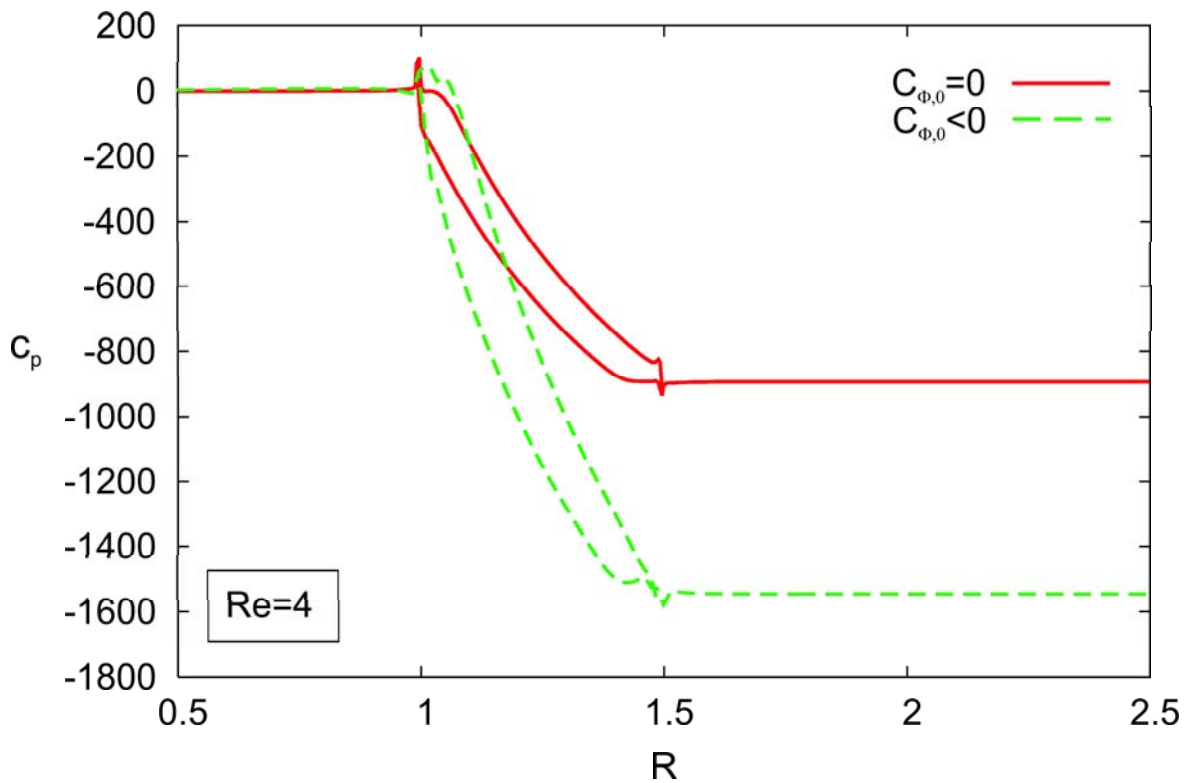


Bild 4.43: Logarithmisch spiraleige Schaufeln.  
 Vergleich der umfangsgemittelten Verläufe des Dralls bei drall- und stoßfreier sowie gendrallbehafteter und stoßfreier Zuströmung für  $Re = 4$  und  $Re = 40000$ .



# Kapitel 5

## Ergebnisse

Nachdem die entwickelten MLCFD-Verfahren an den diskutierten Testfällen validiert wurden und dort in sich konsistente Ergebnisse geliefert haben, wird in diesem Abschnitt ihr Einsatz an einem realen Beispiel untersucht.

### 5.1 Radiallaufrad RP39

Die Leistungsfähigkeit der MLCFD-Technik ist in MÜLLER [24] anhand der Optimierung des Laufrades RP39 einer Radialpumpe mit der spezifischen Drehzahl  $n_q = 39 \text{min}^{-1}$  nachgewiesen. Das untersuchte Laufrad hat einen Außendurchmesser von  $D = 360 \text{mm}$ . Eine schematische Draufsicht auf das Laufrad ohne Deckscheibe zeigt Abb. 5.1.

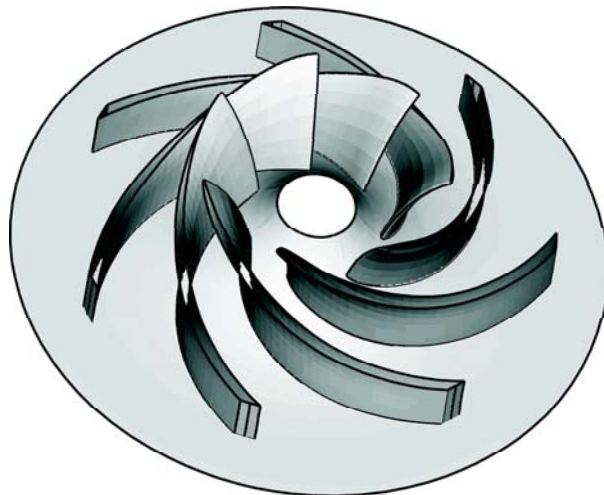


Bild 5.1: Schematische Darstellung des Radiallaufrades RP39.

An diesem Beispiel sollen zunächst die unterschiedlichen Strömungsrechenverfahren verglichen werden. Anschließend wird die Vorgehensweise bei der Optimierung mit einer MLCFD-Technik erläutert.

### 5.1.1 Vergleich der Berechnungsverfahren

#### 3D-Nachrechnungen der turbulenten und laminaren Strömung

Wie in der Arbeit von REINELT [31] dargestellt ist, sind die Ergebnisse einer Nachrechnung einer laminaren Strömung bei Turbomaschinen in sehr guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen für eine vollturbulente Strömung, wenn die laminare Viskosität, die aus Stabilitätsgründen bei dem vorliegenden Druckkorrekturverfahren nicht ganz verschwinden darf, so gewählt wird, dass die effektive Reynolds-Zahl im Bereich  $Re > 4000$  liegt. Durch den Verzicht auf die Lösung der turbulenten Gleichungen und den Einsatz von Euler-Wandrandbedingungen, d.h. Zulassen tangentialer Geschwindigkeitskomponenten, kann die Berechnung auf einem sehr viel gröberem Rechenetz durchgeführt werden. Dies führt zu einer deutlichen Beschleunigung des in dieser Weise durchgeführten Rechenverfahrens, das hier als Euler 3D-Verfahren (E3D) bezeichnet wird. Die E3D-Ergebnisse sind im Kernbereich der Strömung in guter Übereinstimmung mit den NS3D-Ergebnissen.

Eine Auswertung der turbulenten Viskosität  $\nu_t$  für eine hydraulische Strömung zeigt im Mittel Werte, die um zwei bis drei Größenordnungen oberhalb der laminaren Viskosität liegen, vgl. Abb. 5.2 und 5.3. Dies ist auch ein Indiz für die gute Übereinstimmung der NSQ3D-Ergebnisse für  $Re > 4000$  mit den NS3D-Ergebnissen, so dass beim Einsatz des NSQ3D-Verfahrens für reale Maschinen mit einer entsprechend erhöhten laminaren Viskosität gerechnet wurde. Die effektive Reynolds-Zahl kann über einen Vergleich mit einem NS3D-Ergebnis so eingestellt werden, dass die Verluste qualitativ richtig und relativ genau ermittelt werden können.

In Bild 5.4 sind die  $c_p$ -Verteilungen auf einer Stromfläche in Deckscheibennähe gezeigt. Die mit dem E3D- und dem NS3D-Verfahren berechneten Ergebnisse weisen eine sehr gute Übereinstimmung auf. Lediglich im Bereich der Schaufeleintrittskante treten kleinere Abweichungen auf. Das Rechenzeit sparende E3D-Verfahren kann daher in einer Optimierung mit einer MLCFD-Technik bereits auf einem sehr hohen Niveau eingesetzt werden und liefert hinsichtlich der lokalen Verteilungen und auch der umfangsgemittelten Verläufe von Strömungsgrößen relativ genaue Ergebnisse, wenn auf die Vorhersage der Verluste in dieser Phase noch verzichtet wird. Eine NS3D-Nachrechnung der turbulenten Strömung dient im Wesentlichen zur genauest möglichen Beurteilung der finalen Geometrie und zur Ermittlung der hydraulischen Verluste.

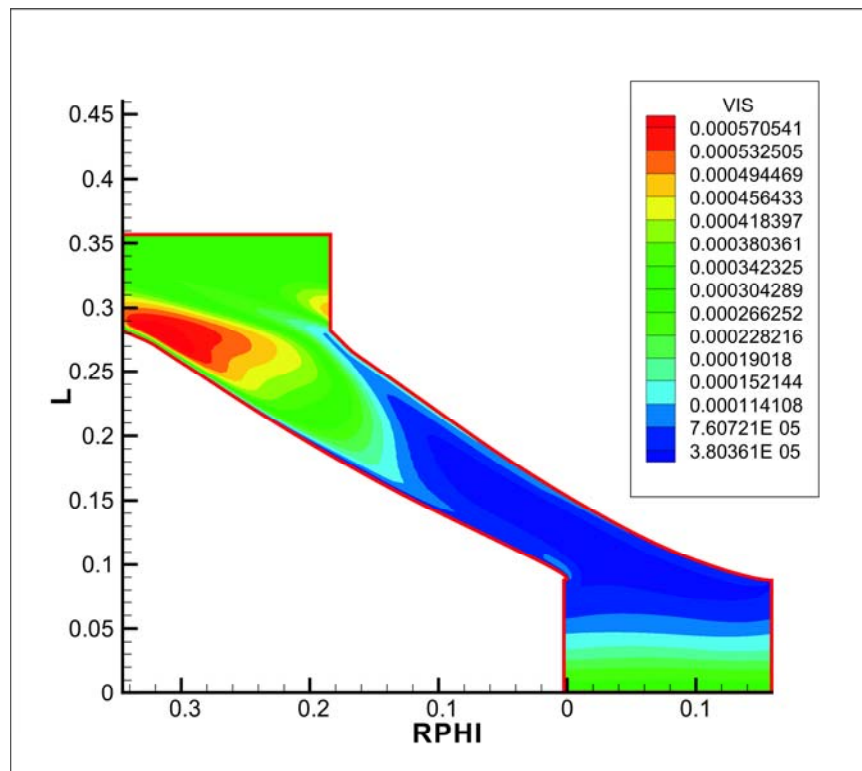


Bild 5.2: Contourplot der turbulenten kinematischen Viskosität  $\nu_t$  [ $\text{m/s}^2$ ] auf einer Stromfläche in der Nähe der Deckscheibe in der konformen Abbildung. Zum Vergleich:  
 $\nu_{lam} = 10^{-6} \text{m/s}^2$

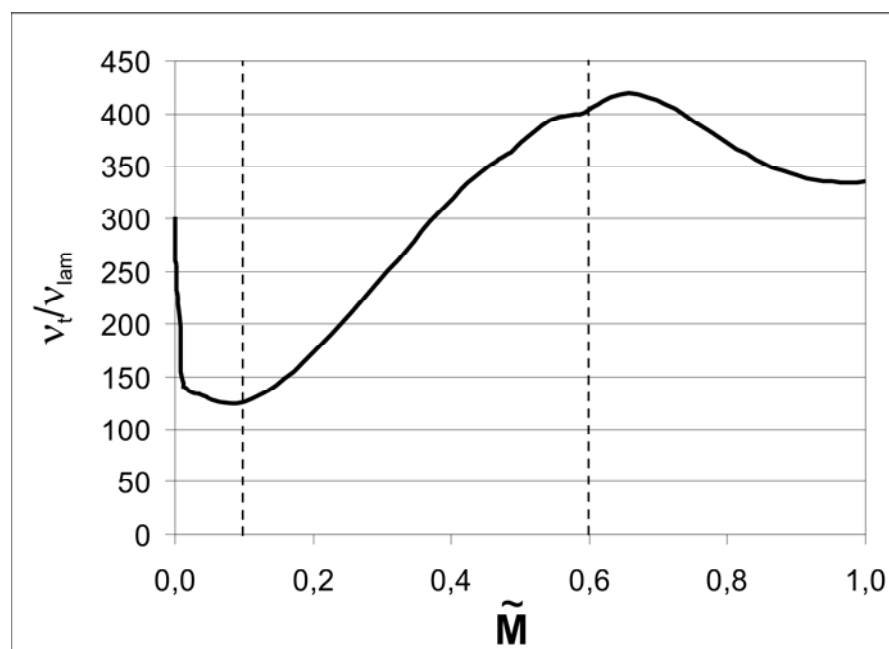


Bild 5.3: Umfangsgemittelte und auf die laminare Viskosität bezogene turbulente kinematische Viskosität  $\nu_t/\nu_{lam}$  über der normierten Lauflänge  $\tilde{M}$  auf einer Stromfläche in der Nähe der Deckscheibe. Die Lage der Schaufelkanten ist durch die gestrichelten Linien angedeutet.

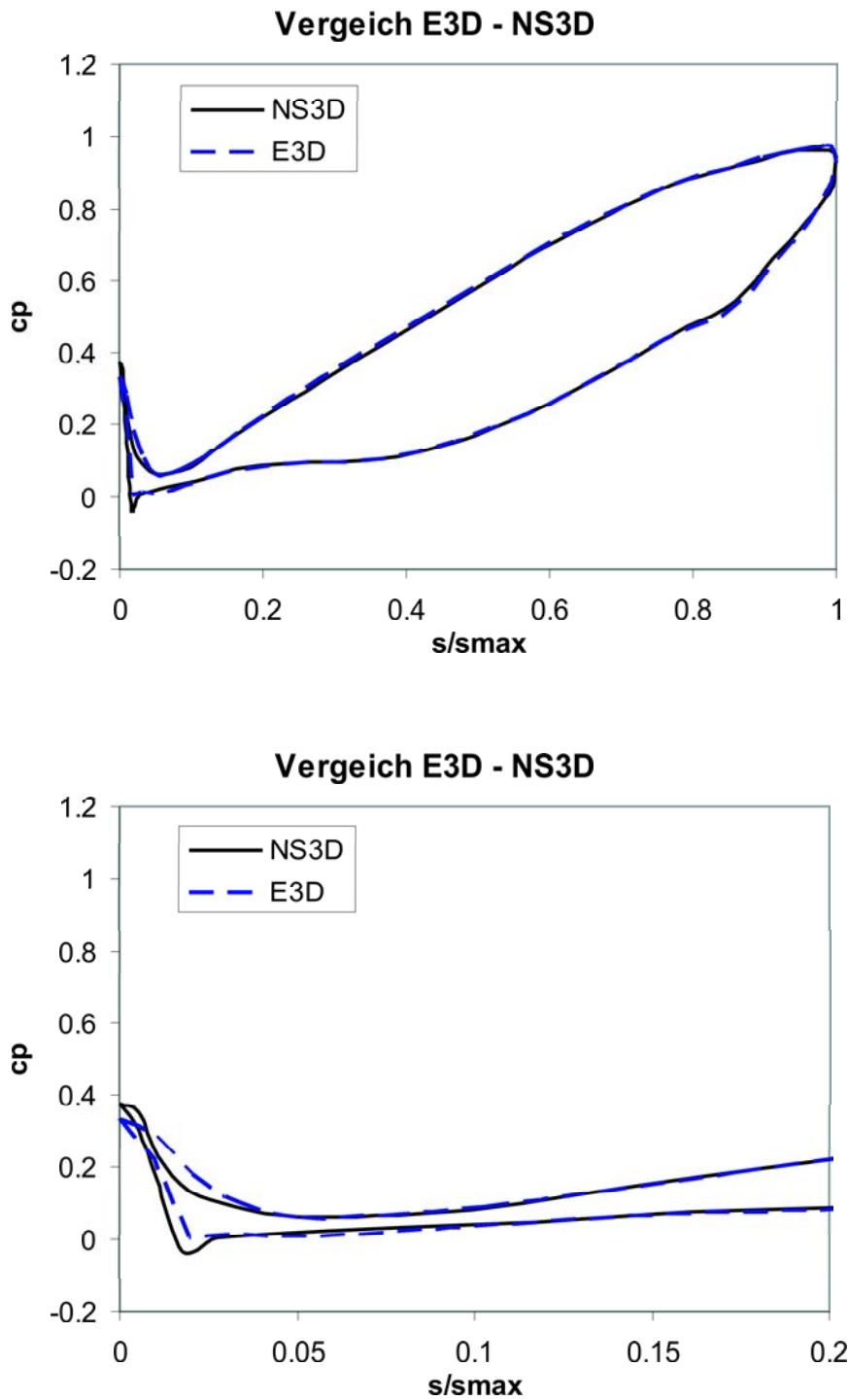


Bild 5.4: Radiallaufrad RP39.

Vergleich der mit dem E3D- und NS3D-Verfahren berechneten Druckverteilungen auf einer Stromfläche in der Nähe der Deckscheibe.

### Rechennetze für die Q3D-Verfahren

Das verwendete Stromfunktions-Vorticity-Verfahren stellt höhere Anforderungen an die Qualität der Rechennetze als ein Finite-Volumen-Verfahren zur Lösung der originären Impulsgleichungen. Aufgrund der zweifach differenziellen Beziehung zwischen der Stromfunktion und der Wirbelstärke reagiert das Verfahren bei numerischen Ableitungen über krummlinige Netzzellen wesentlich empfindlicher.

Für die in Kapitel 4 untersuchten Testfälle mit geometrisch einfachen Rändern wurden ausschließlich algebraisch erzeugte Netze verwendet. Dagegen ist bei Radialgittern mit profilierten Schaufeln eine solche Vernetzung nur bedingt einsatzfähig. Die kritischen Stellen bei Schaufelprofilen liegen insbesondere im Bereich der Vorder- und Hinterkante. Zur strukturierten Vernetzung solcher Geometrien stehen unterschiedliche Methoden zur Verfügung. Eine Multiblocknetztopologie mit einem O-Netzblock um die Schaufel und H-Netzblöcken im schaufelfreien Bereich bzw. zwischen den Schaufeln ermöglicht die größtmögliche Flexibilität bei gleichzeitig bester Netzqualität. Dies erfordert jedoch auch einen multiblockfähigen Strömungslöser. Im Falle des NS3D-Codes, der am Lehrstuhl für Fluidmechanik in vielen Anwendungsbereichen eingesetzt wird, ist diese Voraussetzung gegeben. Die Q3D-Verfahren wurden von Grund auf neu entwickelt und können derzeit nur einen Netzblock in einem Lösungsprozess verarbeiten. Deshalb wurden zur Vernetzung des realen Schaufelkanals elliptische Einblock-H-Netze erzeugt. Nach der Theorie von STEGER und SORENSON [46] kann der Verlauf der Netzlinien so beeinflusst werden, dass in den kritischen Bereichen in Wandnähe nahezu optimale Zellen entstehen.

Um den Einfluss profilierter Schaufeln auf die Ergebnisse der Q3D-Verfahren zu demonstrieren, wurde auch mit unendlich dünnen Schaufeln und auf algebraisch erzeugten Netzen gerechnet, die denen in Abschnitt 4.2.2 ähnlich sind.

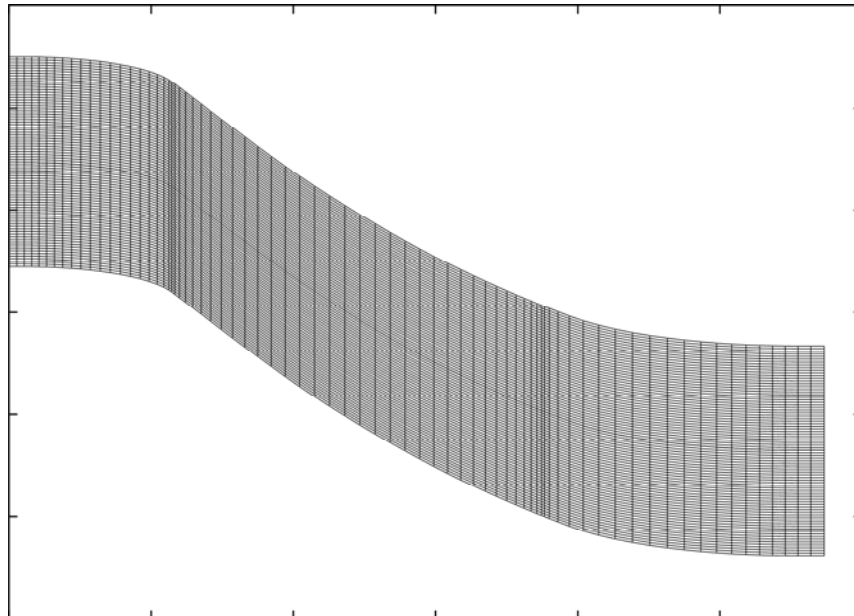


Bild 5.5: Algebraisch erzeugtes Netz für den Schaufelkanal des Laufrades RP39, wobei zwei Schaufeln nebeneinander im konformen Abbild dargestellt sind.

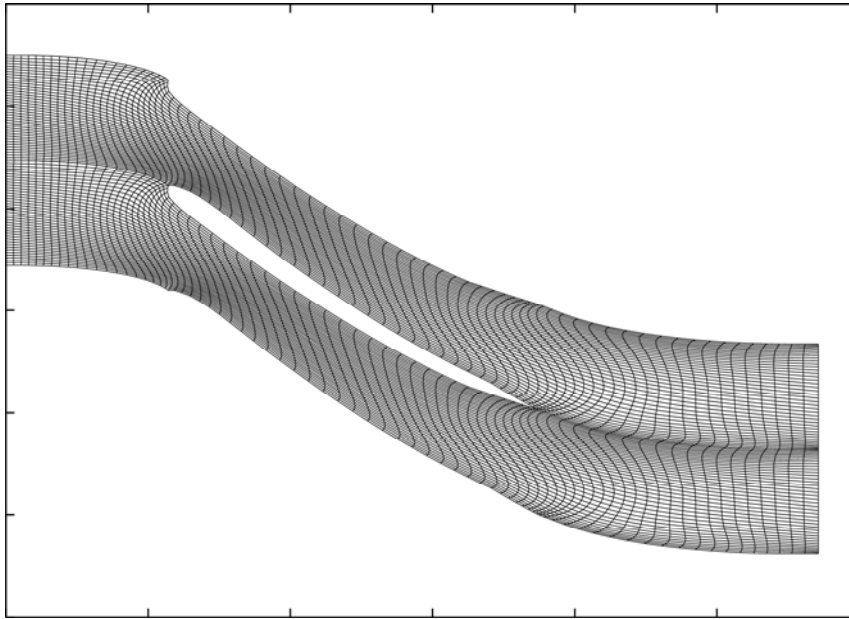


Bild 5.6: Numerisch erzeugtes Netz für den Schaufelkanal des Laufrades RP39 mit profilierten Schaufeln.

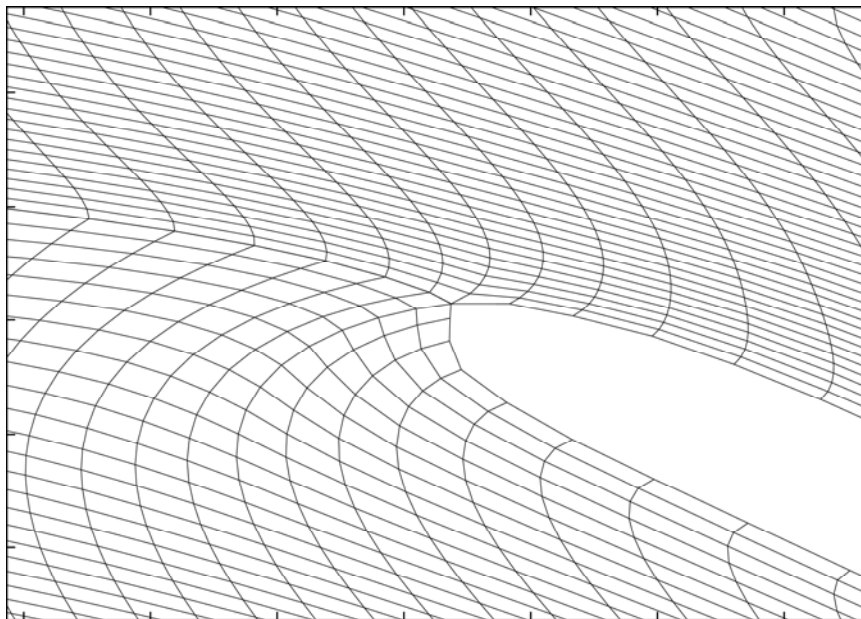


Bild 5.7: Numerisch erzeugtes Netz für den Schaufelkanal des Laufrades RP39 mit profilierten Schaufeln, Bereich der Schaufelnase.

### Kalibrierung des EQ3D-Verfahrens

Wie in Kapitel 2.5.2 beschrieben, erfolgt die Strömungsberechnung mit dem EQ3D-Verfahren abwechselnd auf  $S1_i$ -Gitterebenen sowie auf einer repräsentativen  $S2_m$ -Meridianebene. Die Gitterebenen ergeben sich als Rotationsflächen aus den in der  $S2_m$ -Lösung ermittelten Stromlinien. Die Lösung kann mit dem EQ3D-Verfahren in

sich konsistent ermittelt werden. Liegt für eine gegebene Schaufelgeometrie gleichzeitig ein Ergebnis aus einer NS3D-Berechnung vor, so kann das Verfahren zusätzlich kalibriert werden, indem man die Differenz der Strömungswinkel aus einer NS3D-Lösung und einer nicht kalibrierten EQ3D-Lösung  $\Delta\beta = \beta_{NS3D} - \beta_{EQ3D}$  als Korrektur in der Gleichung für die  $S2_m$ -Ebene auf der rechten Seite, Gl. 2.30, addiert, vgl. auch Bild 2.2. Dieses Vorgehen liefert einen realitätsnäheren Verlauf der Stromlinien und damit auch realistischere Lösungen auf den  $S1_i$ -Gitterebenen.

Für die Optimierung einer realen Beschaukelung wird eine 3D-Lösung einer initialen Geometrie als Referenz zur Kalibrierung herangezogen. Die Nachrechnung einzelner modifizierter Geometrien mit einem EQ3D-Verfahren kann nun auf der Basis der anfangs ermittelten Kalibrierung erfolgen, bis nach einer bestimmten Anzahl von Varianten wieder eine voll-dreidimensionale Strömungslösung zur Kontrolle und ggf. erneuten Kalibrierung erfolgt.

Wie Abb. 5.8 zeigt, unterscheiden sich die mit dem EQ3D-Verfahren berechneten Stromlinien, je nachdem ob mit oder ohne Kalibrierung gerechnet wird. Der Effekt macht sich auch in den Geschwindigkeitsverteilungen bemerkbar. Die Lösung in den  $S1_i$ -Gitterebenen erfolgt auf Stromflächen mit einer Schichtdicke  $\delta$ , die in der  $S2_m$ -Berechnung ermittelt wird. Da der Volumenstrom je Stromfläche konstant ist, hängt die Meridiangeschwindigkeitskomponente  $c_m = w_m$  von dieser Schichtdicke ab. Somit ändert sich der lokale Strömungswinkel, wenn die Schichtung der Strömung in der Meridianebene durch eine  $\beta$ -Kalibrierung verändert wird. Abb. 5.9 zeigt den Einfluss einer solchen Schichtung anhand von zwei verschiedenen Geschwindigkeitsdreiecken mit der Absolutgeschwindigkeit  $\underline{c}$ , der Relativgeschwindigkeit  $\underline{w}$  und der Führungsgeschwindigkeit  $\underline{u}$  in Umfangsrichtung an der Schaufeleintrittskante. Die Abbildungen 5.10 zeigen den Verlauf der normierten umfangsgemittelten Meridiangeschwindigkeiten entlang der Schaufelkanten von der Nabe zur Deckscheibe im Vergleich. Während bei der Eintrittskante noch gute Übereinstimmung vorliegt, wird die Schichtung der Strömung im Bereich des Schaufelaustritts nur vom  $\beta$ -kalibrierten EQ3D-Verfahren realistisch wiedergegeben. Die beim kalibrierten Verfahren auftretende Überhöhung der Meridiangeschwindigkeit in der Nähe der Deckscheibe steht in direkter Korrelation zu der Verlagerung der Strömung zur Deckscheibe hin, die aus dem Stromlinienbild Abb. 5.8 ersichtlich ist.

In den Abbildungen 5.11 ist der Verlauf der Umfangsgeschwindigkeiten entlang der Schaufelein- und -austrittskante im Vergleich NS3D - NSQ3D dargestellt. Auch hier zeigt sich der Einfluss der  $\beta$ -Kalibrierung, da das NSQ3D-Verfahren ja direkt auf den mit dem EQ3D-Code berechneten Stromflächen rechnet. Die Abweichungen zu den NS3D-Ergebnissen in unmittelbarer Nähe von Trag- bzw. Deckscheibe rühren aus den Wandhaftbedingungen an der Kontur, die in der zweidimensionalen Gitterebene vom NSQ3D-Verfahren natürlich nicht mit erfasst werden können. Dort gilt für die NS3D-Rechnung  $c_m = 0$ , im drehenden Laufrad  $c_u = u$  bzw. nach der Schaufel  $c_u = 0$ .

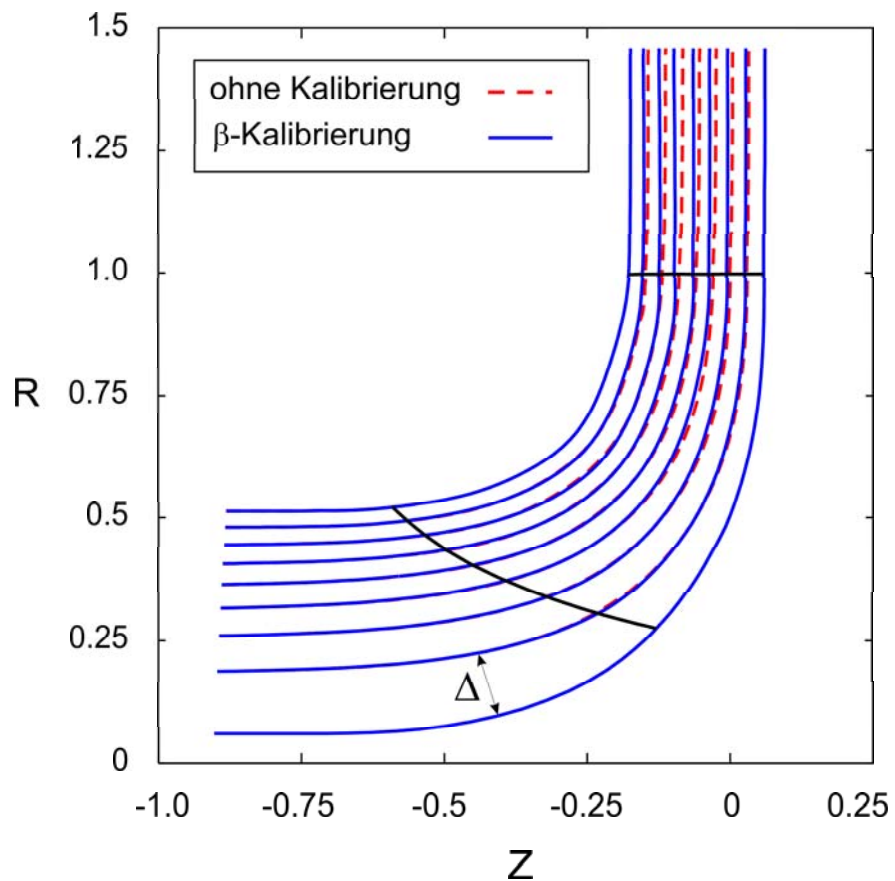


Bild 5.8: Vergleich der mit dem EQ3D-Verfahren berechneten Stromlinien ohne und mit  $\beta$ -Kalibrierung.

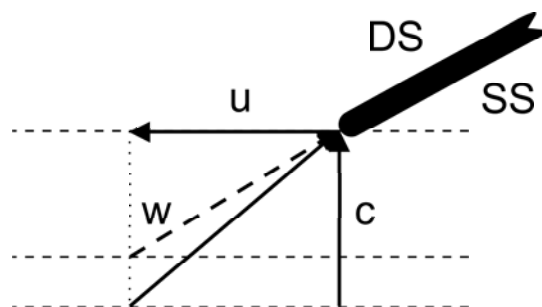


Bild 5.9: Geschwindigkeitsdreieck an der Schaufeleintrittskante bei unterschiedlicher Anströmgeschwindigkeit  $c$ .



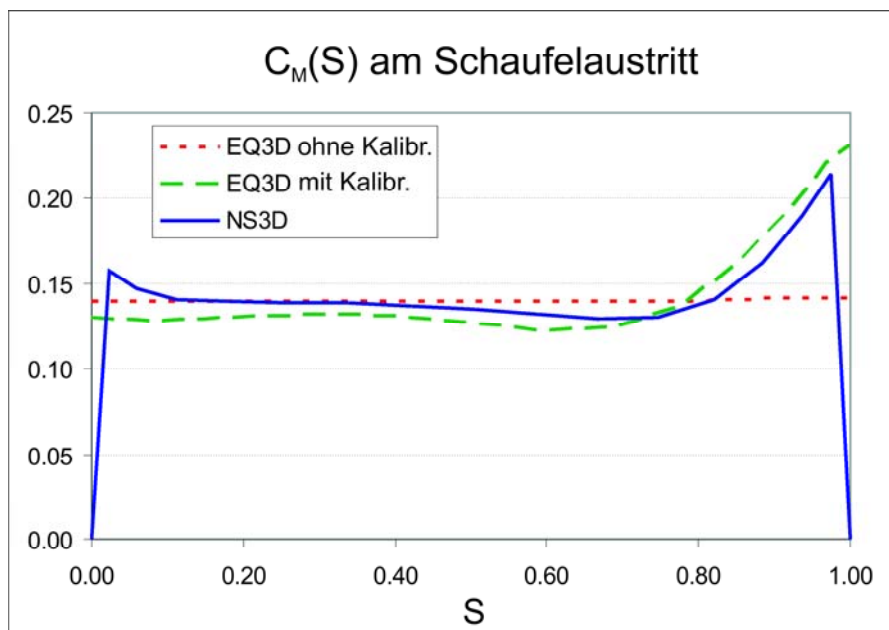
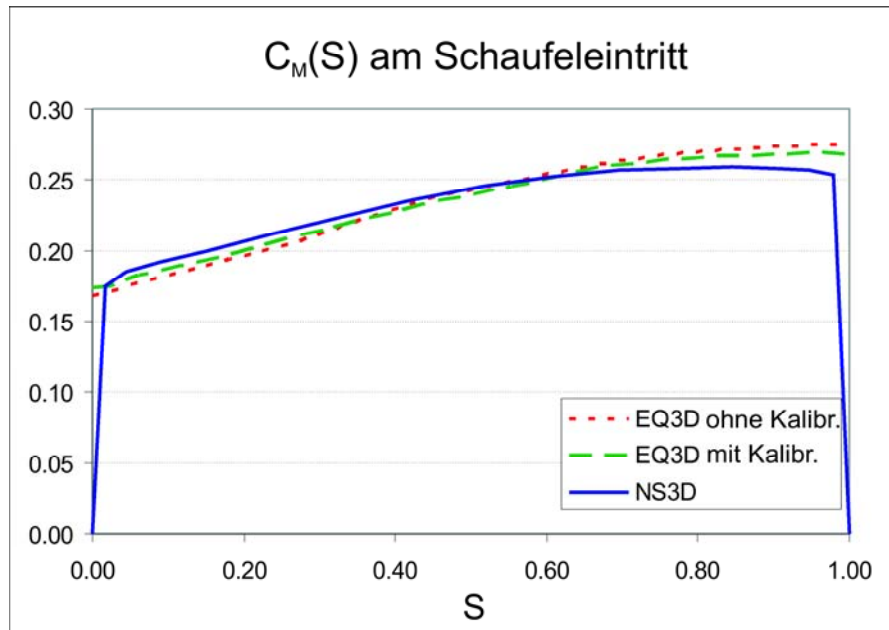


Bild 5.10: RP39.

Vergleich der berechneten Verläufe der bezogenen Meridiangeschwindigkeit über die normierte Bogenlänge  $S$  von der Nabe bis zur Deckscheibe am Schaufelein- und -austritt.

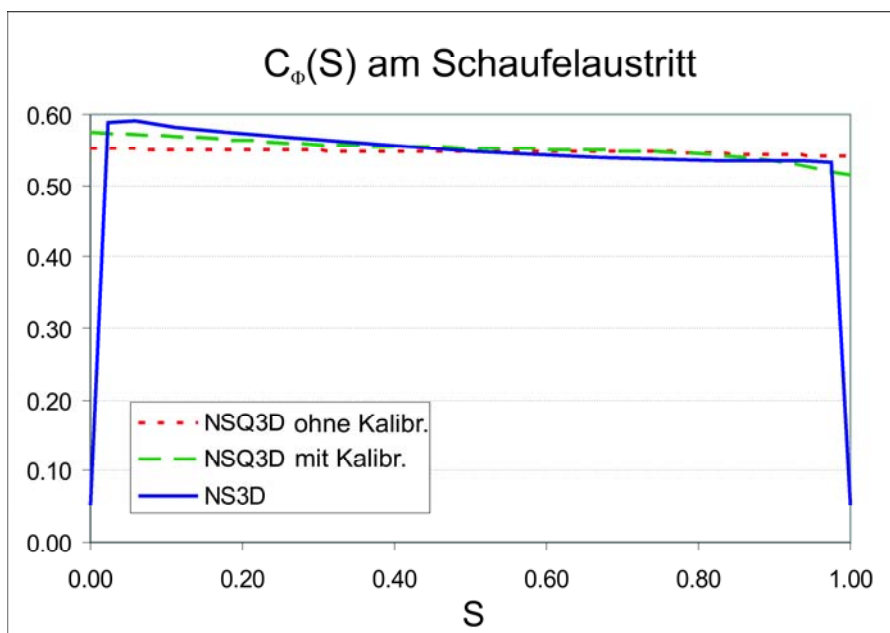
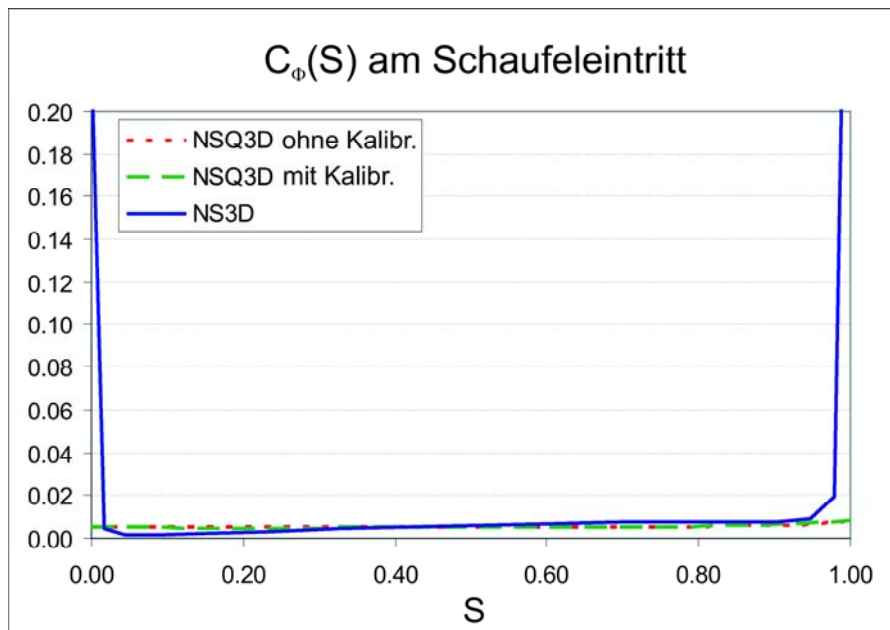


Bild 5.11: RP39.

Vergleich der berechneten Verläufe der bezogenen Umfangsgeschwindigkeit über die normierte Bogenlänge  $S$  von der Nabe bis zur Deckscheibe am Schaufelein- und -austritt.

### Vergleich der CFD-Verfahren

Bild 5.12 zeigt die auf dem Netz aus Bild 5.5 berechneten Druckverteilungen entlang der unendlich dünn vorausgesetzten Schaufeln auf einer Stromfläche in der Nähe der Deckscheibe für jeweils eine EQ3D-Rechnung mit und ohne  $\beta$ -Kalibrierung. Die Druckverläufe reagieren im Bereich des Eintritts in den beschaufelten Bereich voraussetzungsgemäß sehr sensitiv auf eine veränderte Anströmung. Bei dem vorliegenden Beispiel erfolgt die Anströmung offensichtlich mit einem leicht saugseitigen Stoß bzgl. der Richtung der Skelettlinie, d.h. zu steil, was sich im Ergebnis der kalibrierten Rechnung an der Überschneidung der druck- und saugseitigen Druckverläufe im Bereich der Schaufelvorderkante zeigt. Mit einer nicht kalibrierten Rechnung würde hier das vermeintlich „bessere“ Ergebnis erzielt werden, das jedoch nicht den realen Strömungsverhältnissen entspricht. Der unterschiedliche Anstieg im statischen Druck steht in unmittelbarer Relation mit den unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten infolge der Stromschichtdicken, vgl. Bild 5.8.

Bei Berücksichtigung der Schaufelprofile mit dem Rechennetz aus Bild 5.6 verschwindet diese Sensitivität gegenüber der Anströmung. Bild 5.13 zeigt die beiden Ergebnisse mit und ohne Kalibrierung auf dem profilierten Rechennetz, während Bild 5.14 die Ergebnisse mit  $\beta$ -Kalibrierung auf den beiden Rechennetzen mit und ohne Profil vergleicht.

Um die Qualität dieser mit dem EQ3D-Verfahren berechneten Ergebnisse zu beurteilen, ist in Bild 5.15 der Vergleich mit den Druckverteilungen aus einer volldreidimensionalen Strömungslösung mit dem E3D-Verfahren gezeigt. Mit einer  $\beta$ -Kalibrierung wird die Meridianströmung und damit auch die Gitterströmung auf einem profilierten Netz realitätsnäher wiedergegeben.

Ausgehend von diesen Ergebnissen wurde auch eine Rechnung mit dem NSQ3D-Verfahren durchgeführt, das empfindlich reagiert auf die Netzqualität in Wandnähe, insbesondere im Bereich der Schaufelvorder- und -hinterkante. Scharfe Ecken und Kanten längs einer Netzlinie wirken sich aufgrund des bereits erwähnten zweifachen numerischen Differenzierens sehr schlecht auf die Konvergenzeigenschaften bei der Lösung aus. Die Geometrie muss an kritischen Stellen ggf. etwas „abgeflacht“ werden, vgl. Bild 5.7.

Bild 5.16 zeigt einen Vergleich zwischen EQ3D- und NSQ3D-Verfahren. Im Vergleich zur reibungsfreien Potenzialströmung gehen hierbei die Druckverluste mit ein, was auch im Einklang mit Abb. 4.39 und den in Kapitel 4.2.2 gezeigten Druckverteilungen bei größeren Reynolds-Zahlen steht. Einen abschließenden Vergleich zwischen NS3D- und NSQ3D-Verfahren liefert Bild 5.17. Bei Verwendung der Stromflächen aus dem  $\beta$ -kalibrierten EQ3D-Verfahren und profilierten Netzen kann sehr gute Übereinstimmung erzielt werden. Lediglich im Bereich der Schaufelnase treten merkliche Abweichungen auf, was allerdings auch auf die Grenzen des eingesetzten Stromfunktionsvorticity-Verfahrens bei stark gekrümmten Berandungen hindeutet.

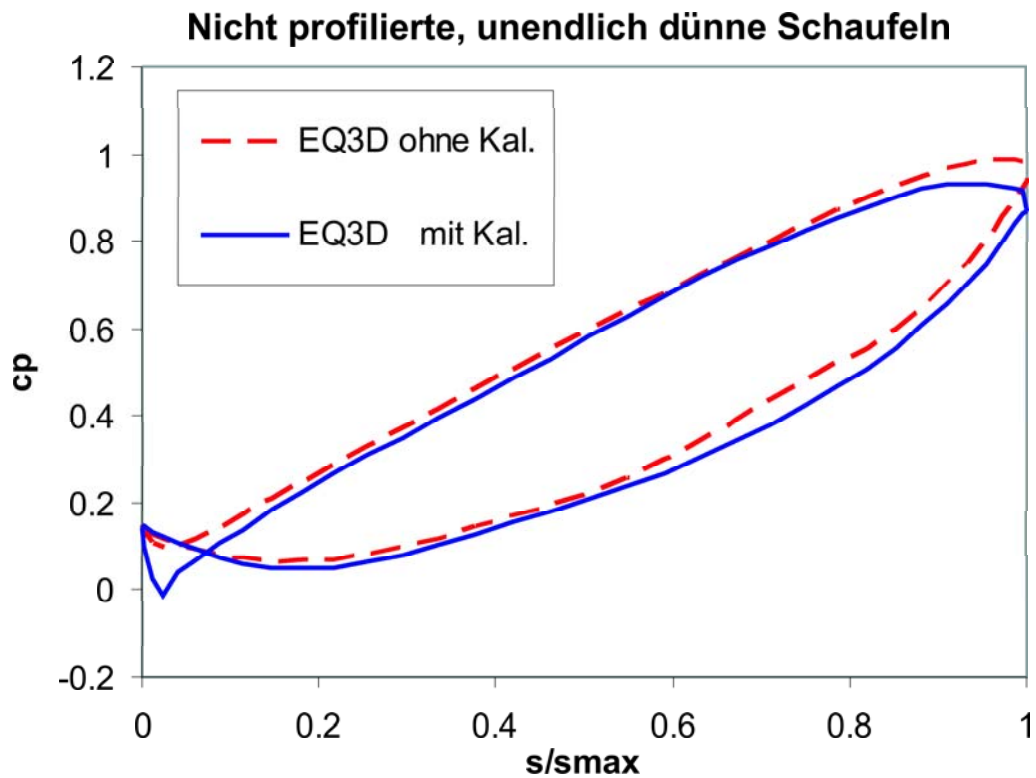


Bild 5.12: Vergleich der Druckverteilungen ohne und mit  $\beta$ -Kalibrierung bei unendlich dünnen Schaufeln.

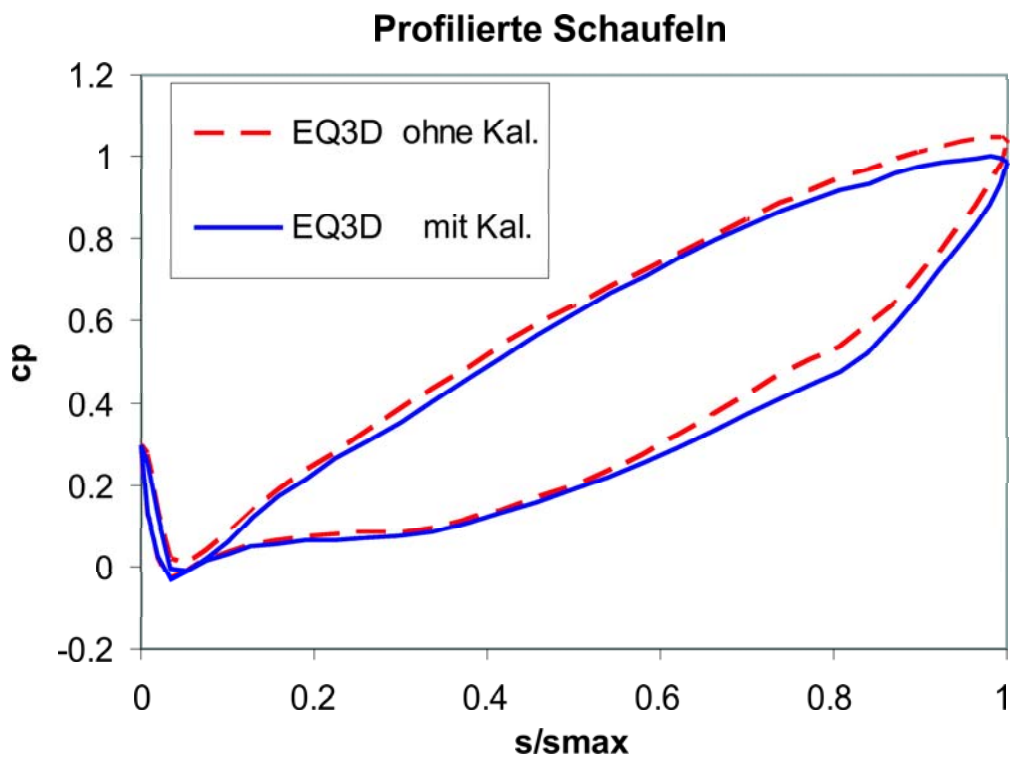


Bild 5.13: Vergleich der Druckverteilungen ohne und mit  $\beta$ -Kalibrierung bei profilierten Schaufeln.

### Vergleich profilierte - nicht profilierte Schaufeln bei EQ3D

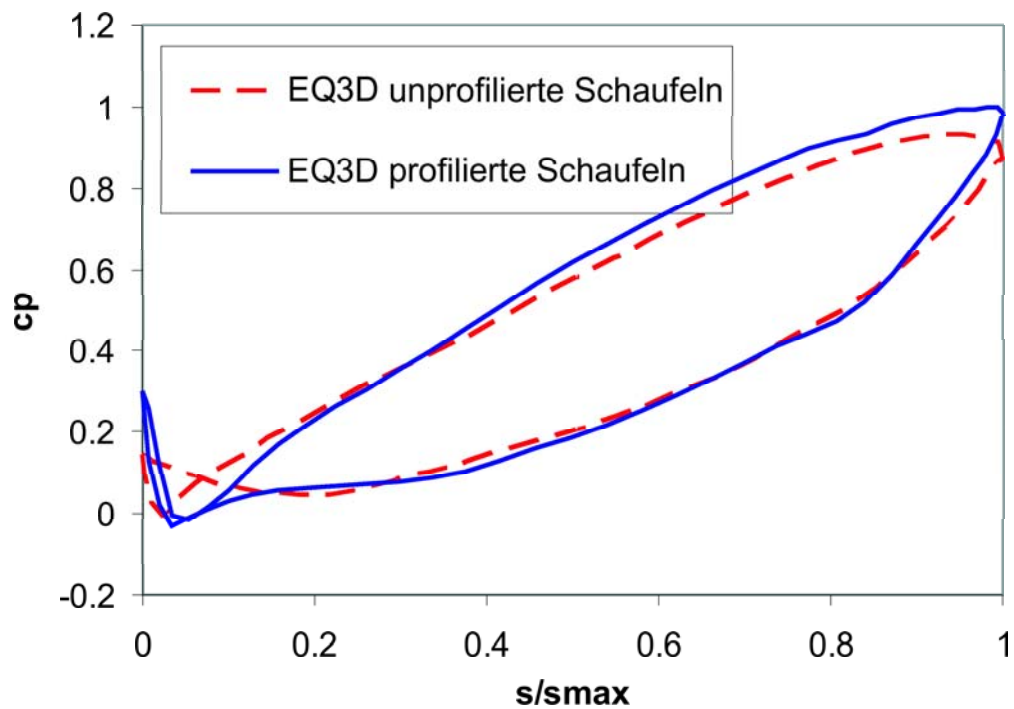


Bild 5.14: Vergleich der mit dem EQ3D-Verfahren berechneten Druckverteilungen bei profilierten und unprofilten Schaufeln.

### Vergleich E3D - EQ3D bei profilierten Schaufeln

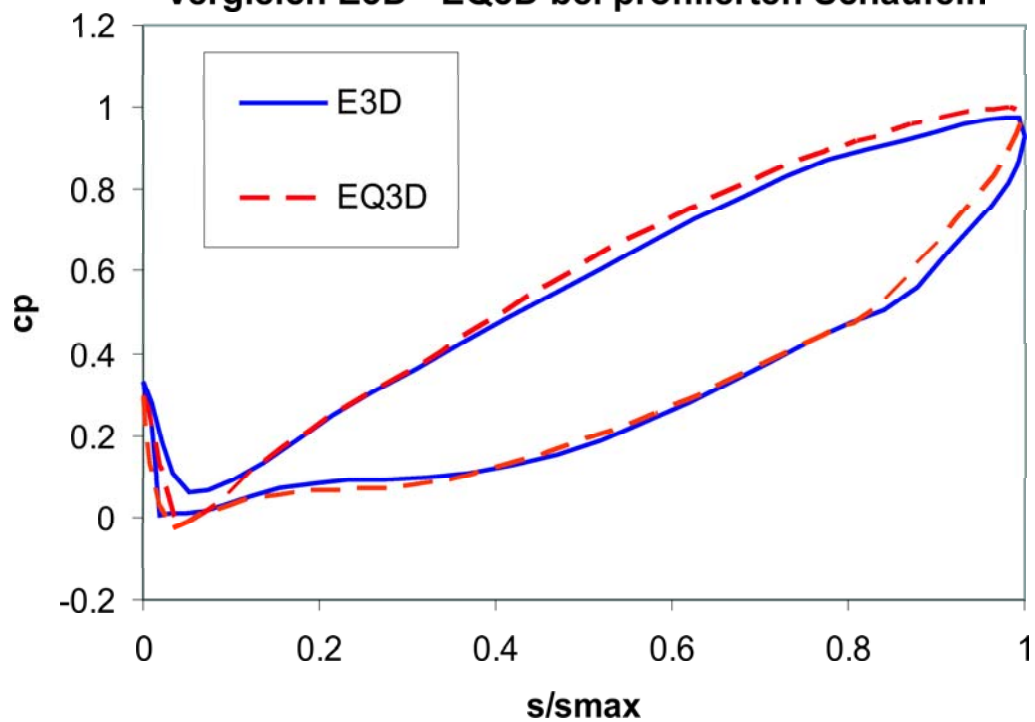


Bild 5.15: Vergleich der mit dem E3D- und EQ3D-Verfahren berechneten Druckverteilungen bei profilierten Schaufeln.

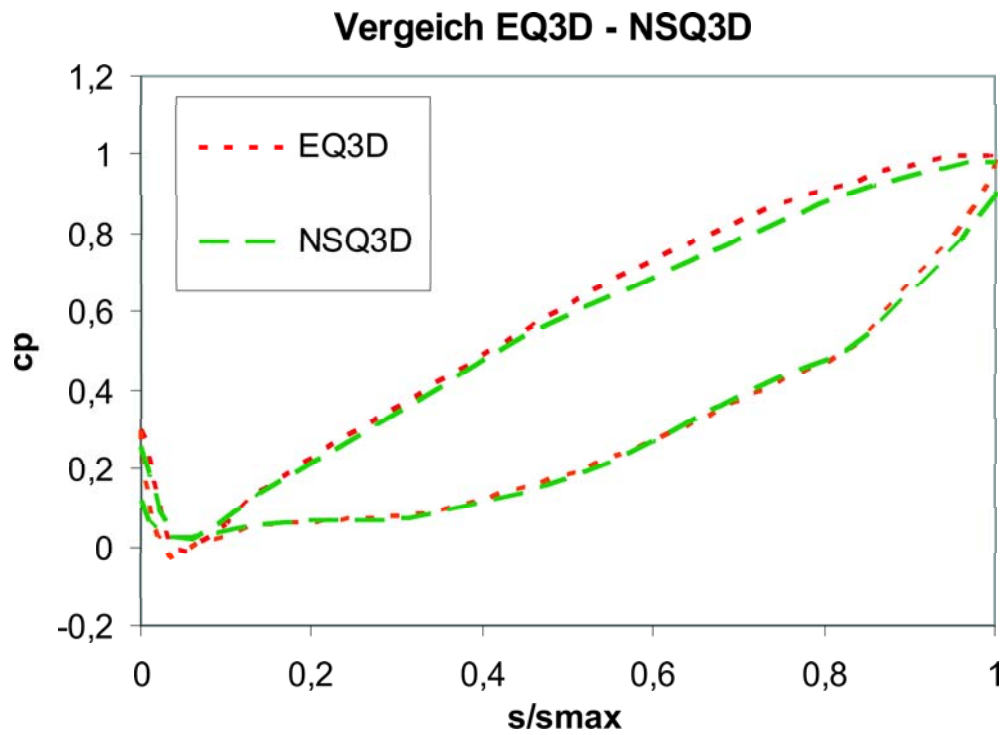


Bild 5.16: Vergleich der mit dem EQ3D- und NSQ3D-Verfahren berechneten Druckverteilungen bei profilierten Schaufeln.

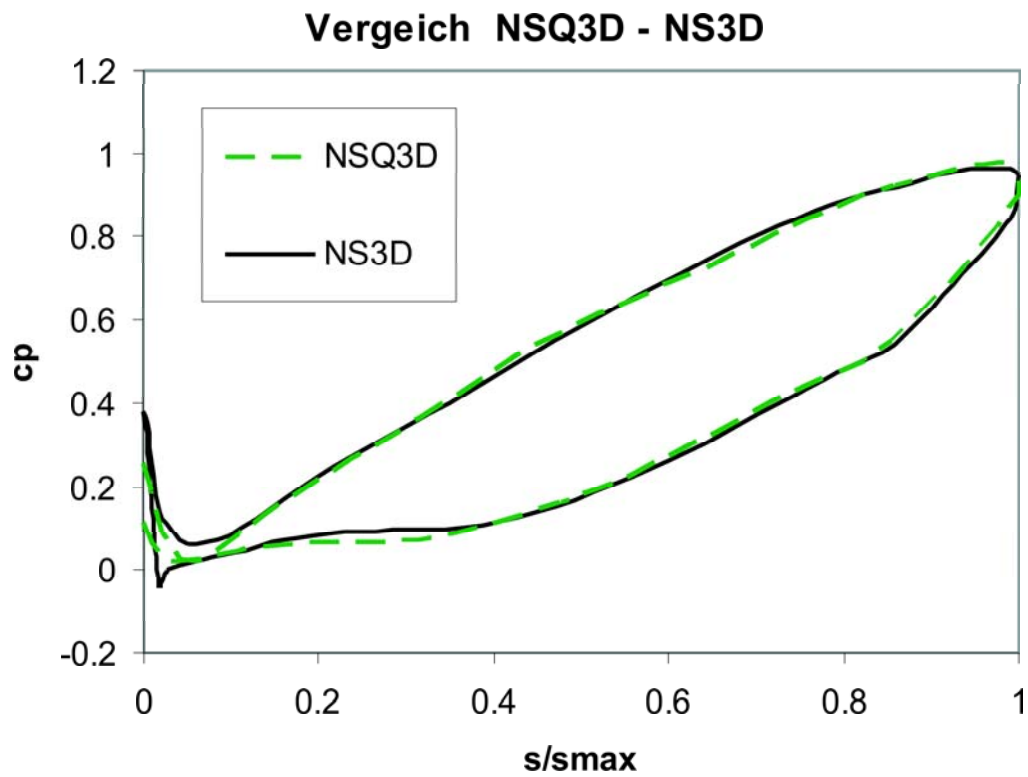


Bild 5.17: Vergleich der mit dem NSQ3D- und NS3D-Verfahren berechneten Druckverteilungen bei profilierten Schaufeln.

### 5.1.2 Optimierung des Laufrades

Das Vorgehen bei einer Optimierung mit Hilfe der MLCFD-Technik wird nun am Beispiel des Radiallaufrades RP39 gezeigt. Die Aufgabenstellung lautet, bei einem vorgegebenen Betriebspunkt mit der Durchflusszahl  $\varphi_r = 0.14$  und  $\psi_t = 1.06$  eine Minimierung der hydraulischen Verluste zu erzielen und gleichzeitig eine ausgewogene Schaufelbelastung ohne Kavitationsgefahr zu gewährleisten. Die zur Modifikation freigegebenen Parameter sind die Schaufelein- und -austrittswinkel sowie der Umschlingungswinkel, der die Länge der Schaufel bestimmt. Die Lage der Schaufelkanten in der Meridianebene und die Meridiankontur selbst dürfen nicht verändert werden. Eine solche Problemstellung entspricht einem typischen Anwendungsfall, wenn z.B. eine bereits auf dem Markt befindliche Pumpe für den Einsatz unter veränderten Bedingungen möglichst kostengünstig optimiert werden soll, d.h. die baulichen Veränderungen sollen im Hinblick auf die Fertigung und den Einbau in bestehende Komponenten möglichst gering sein.

Zu Beginn einer Optimierung mit Hilfe der MLCFD-Technik wird die initiale Geometrie mit allen zur Verfügung stehenden Verfahren nachgerechnet. Aus den Differenzen zwischen der EQ3D- und der NS3D-Lösung ergeben sich die Daten für die oben beschriebene  $\beta$ -Kalibrierung. Auch die in Kapitel 5.1.1 beschriebene effektive Reynoldszahl wird anhand des NS3D-Ergebnisses eingestellt, so dass die Verluste relativ genau ermittelt werden können. Die initialen Werte der zu variierenden Parameter sind:

- Schaufeleintrittswinkel an der Deckscheibe  $\beta_{S1} = 20^\circ$
- Austrittswinkel  $\beta_{S2} = 35^\circ$
- Umschlingungswinkel  $\Delta\varphi_w = 110^\circ$

Ausgehend von dieser initialen Geometrie und basierend auf dieser Kalibrierung können die ersten Modifikationen nun mit einem schnellen Q3D-Verfahren nachgerechnet werden, um den Bereich des Optimums grob einzugrenzen. Die 3D-Verfahren dienen dann lediglich zur Feinjustierung der Geometrie auf den geforderten Betriebspunkt sowie der abschließenden Beurteilung hinsichtlich der Verluste. Die Geometriemodifikation, die Strömungsnachrechnung und die Auswertung der Ergebnisse werden mit dem am Lehrstuhl für Fluidmechanik entwickelten Real-Time-Design-System für Strömungsmaschinen durchgeführt, das in der Arbeit von LEPACH [21] genauer beschrieben ist.

Bei dem vorliegenden Beispiel wurden zunächst die Schaufelwinkel an der Eintrittskante variiert, um eine optimale Anströmung zu gewährleisten. Danach wurde der Schaufelwinkel an der Austrittskante angepasst, damit der gewünschte Betriebspunkt bzw. die dazu erforderliche Umlenkung erreicht wird. Eine Variation des Umschlingungswinkels, d.h. also der Länge der Schaufel, wurde anschließend bei konstanten Schaufelein- und Austrittswinkeln durchgeführt. Da die Umlenkung auch durch die Länge der Schaufel beeinflusst wird, ist eine wechselseitige Abstimmung von Schaufelwinkel an der Austrittskante und Umschlingung erforderlich. Diese Feinjustierung sollte mit Hilfe des exakten NS3D-Verfahrens durchgeführt werden, während für die ersten Modifikationsschritte eine Nachrechnung mit einem schnelleren Q3D-Verfahren genügt. Um die Genauigkeit und den Einsatzbereich der Q3D-Verfahren zu bewerten, wurden in dieser Optimierungsstudie jedoch alle Varianten gleichzeitig auch mit dem NS3D-Verfahren nachgerechnet.

### Optimale Auslegung des Schaufelwinkels $\beta_{S1}$ am Eintritt

Der Schaufelwinkel  $\beta_{S1}$  an der Eintrittskante und damit auch der Inzidenzwinkel  $i = \beta_{S1} - \beta_1$  wurde über einen weiten Bereich variiert, wobei der Strömungswinkel  $\beta_1 = 30^\circ$  am Eintritt und die Durchflusszahl  $\varphi_r$  konstant gehalten wurden. Die Druckverteilungen in der Nähe der Deckscheibe sind in Bild 5.19 für unterschiedliche Schaufelwinkel  $\beta_{S1}$  gezeigt. Die Überschneidung in den Druckverteilungen bei der initialen Schaufel mit  $\beta_{S1} = 20^\circ$  als Folge der Fehlanströmung wird sowohl von dem NSQ3D- als auch von dem NS3D-Verfahren abgebildet. Bei einem Winkel von  $\beta_{S1} = 40^\circ$  hingegen liegen eine druckseitig stoßbehaftete Anströmung und infolgedessen eine saugseitige Spitze in den Druckverteilungen vor. In beiden Fällen besteht auf der jeweiligen Seite der Schaufel Kavitationsgefahr. Schließlich hat sich  $\beta_{S1} = 30^\circ$  als optimaler Schaufeleintrittswinkel an der Deckscheibe herausgestellt, wobei die Anströmung nahezu stoßfrei erfolgt, d.h. der lokale Inzidenzwinkel beträgt  $i = 0$ . Mit Verweis auf Bild 5.16 ist anzumerken, dass die dargestellten Einflüsse auf die Druckverteilungen genauso gut mit dem noch schnelleren EQ3D-Verfahren aufgelöst werden können, das allerdings keine Aussage über die Verluste liefert.

Zur Darstellung der integralen Ergebnisse sind in Bild 5.18 die Totaldruckzahl  $\psi_t$  und die hydraulischen Verluste  $(1 - \eta_h)$  über dem Inzidenzwinkel  $i$  aufgetragen. Die zu Beginn mit dem NS3D-Ergebnis kalibrierte initiale Geometrie mit  $\beta_{S1} = 20^\circ$  entspricht hier dem Ergebnis bei  $i = -10^\circ$ . Die NSQ3D-Ergebnisse für die modifizierten Varianten weichen von den NS3D-Ergebnissen sichtbar ab. Die Tendenz wird allerdings richtig wiedergegeben, so dass auf diesem Niveau einer Voroptimierung eine qualitative Beurteilung mit einem Q3D-Verfahren zuverlässig durchgeführt werden kann. Die Förderleistung des Pumpenlaufrades passt noch nicht zum geforderten Betriebspunkt: Die Druckzahlen liegen durchwegs ca. 10% über dem Sollwert von  $\psi_t = 1.06$ .

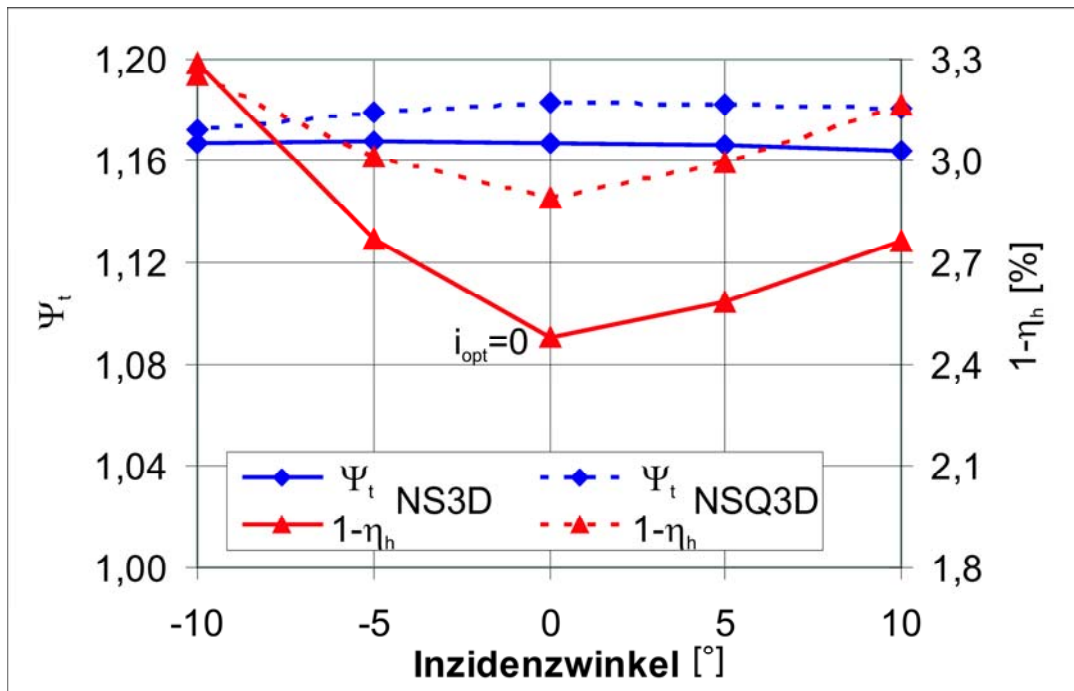


Bild 5.18: Einfluss des Inzidenzwinkels auf die Totaldruckzahl  $\psi_t$  und die hydraulischen Verluste  $1 - \eta_h$ .



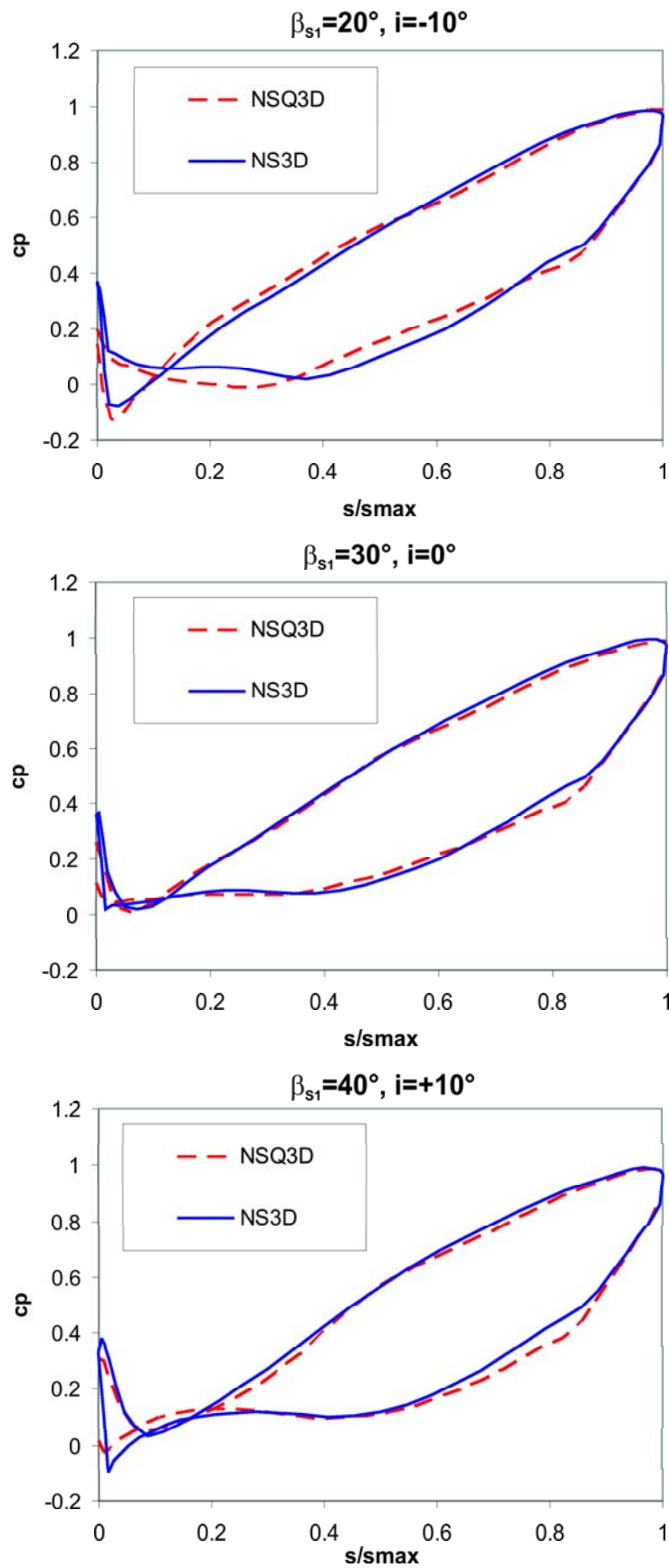


Bild 5.19: Optimierung Laufrad RP39.

Vergleich der Druckverteilungen bei Variation des Schaufelwinkels am Eintritt,  $\beta_{s1}$ , bzw. des Inzidenzwinkels.

### Variation des Schaufelwinkels $\beta_{S2}$ an der Austrittskante

Um den gewünschten Betriebspunkt bzw. die erforderliche Umlenkung zu erzielen, wurde als weiterer freier Parameter der Schaufelwinkel an der Hinterkante variiert. Bild 5.20 zeigt die Totaldruckzahl  $\Psi_t$  und die hydraulischen Verluste  $(1 - \eta_h)$  über dem Schaufelwinkel  $\beta_{S2}$ .

Mit einer Zunahme von  $\beta_{S2}$  nehmen auch die Belastung der Schaufel und damit die Verluste zu. Die Variante mit dem optimalen Inzidenzwinkel aus Bild 5.18 entspricht hier dem Ergebnis für  $\beta_{S2} = 35^\circ$ . Wenn man ausschließlich die NSQ3D-Ergebnisse betrachtet, würde der Betriebspunkt (BEP)  $\Psi_t = 1.06$  mit einem Schaufelwinkel  $\beta_{S2} \approx 21.5^\circ$  erreicht. Die Abweichungen von den NS3D-Ergebnissen zeigen, dass die anfängliche Kalibrierung über den breiten Variationsbereich von  $\beta_{S2} = 35^\circ$  bis  $\beta_{S2} = 20^\circ$  offensichtlich nicht mehr genau zutrifft. Dennoch liefert auch das schnellere NSQ3D-Verfahren eine Annäherung an den in der NS3D-Rechnung ermittelten Wert von  $\beta_{S2} = 25^\circ$  und ist somit im Stadium einer Voroptimierung einsetzbar.

Da man in der Praxis mit der Auslegung einer initialen Geometrie normalerweise nicht so weit vom geforderten Betriebspunkt entfernt liegt wie in dem hier vorgeführten Beispiel, wurde für die Variante  $\beta_{S2} = 30^\circ$  exemplarisch noch einmal eine  $\beta$ -Kalibrierung anhand des NS3D-Ergebnisses durchgeführt und die effektive Reynolds-Zahl angepasst. Die Ergebnisse in Bild 5.21 zeigen erwartungsgemäß eine bessere Übereinstimmung: Der mit dem NSQ3D-Verfahren für den geforderten Betriebspunkt ermittelte Schaufelwinkel  $\beta_{S2}$  weicht nur noch etwas mehr als ein Grad von dem NS3D-Ergebnis ab.

Die nachfolgenden Modifikationsschritte wurden allerdings auf der Grundlage der ursprünglichen Kalibrierung durchgeführt, um den Zuverlässigkeitsbereich der NSQ3D-Ergebnisse zu ermitteln.

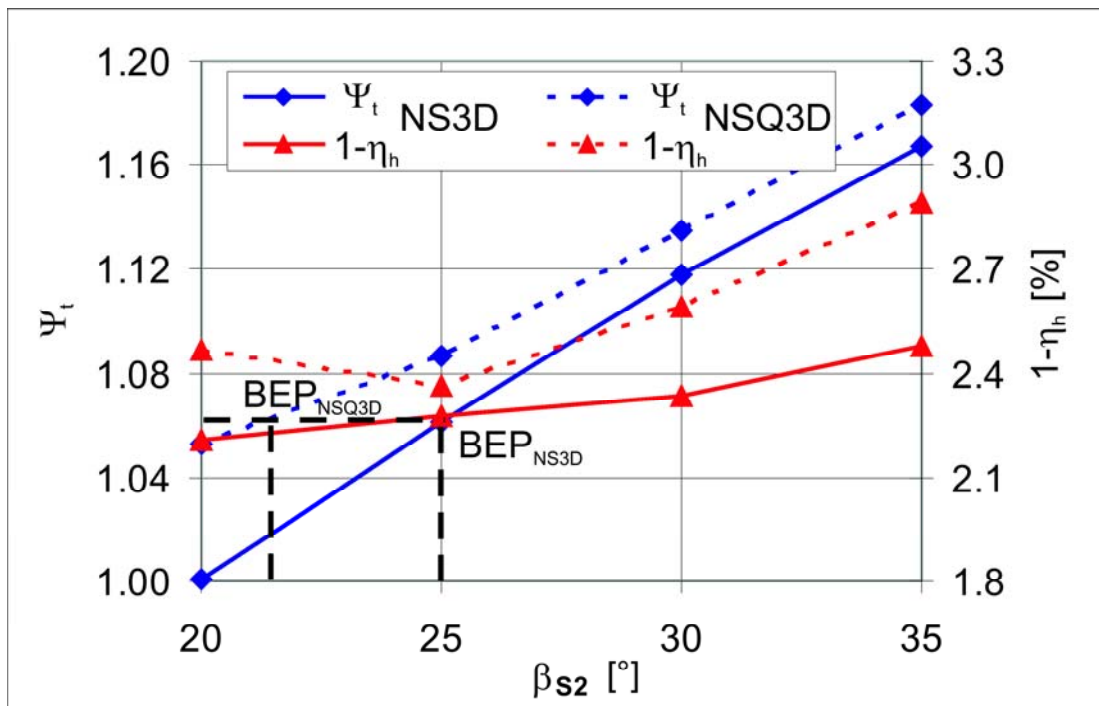


Bild 5.20: Variation des Schaufelwinkels  $\beta_{S2}$  an der Austrittskante.

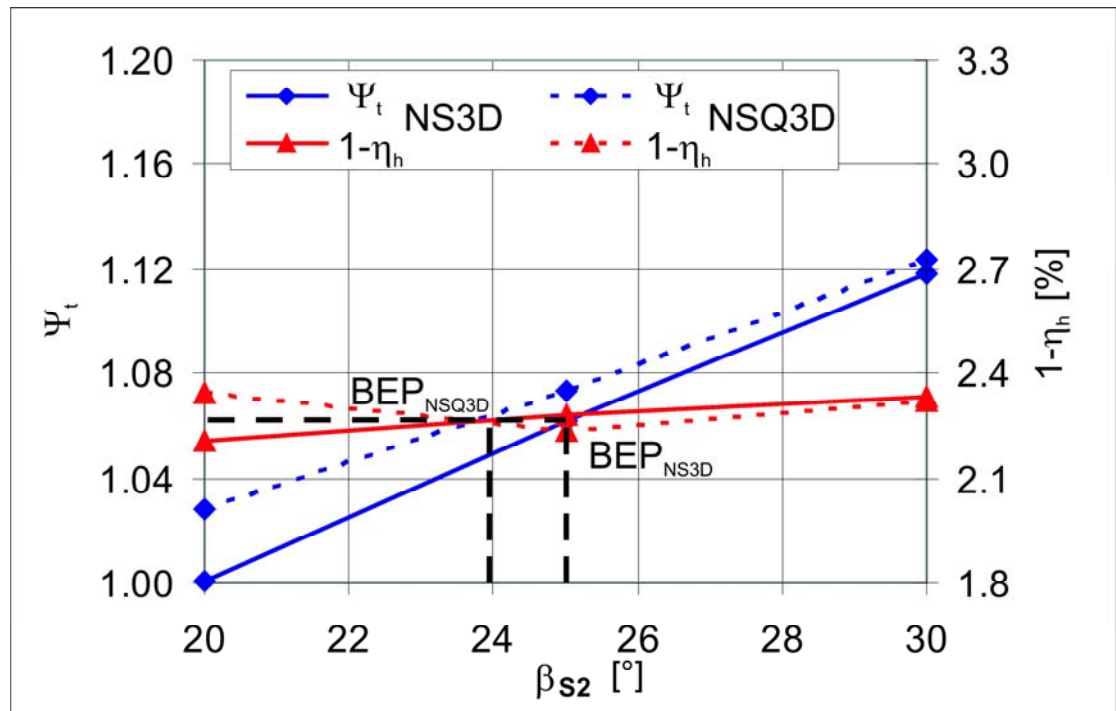


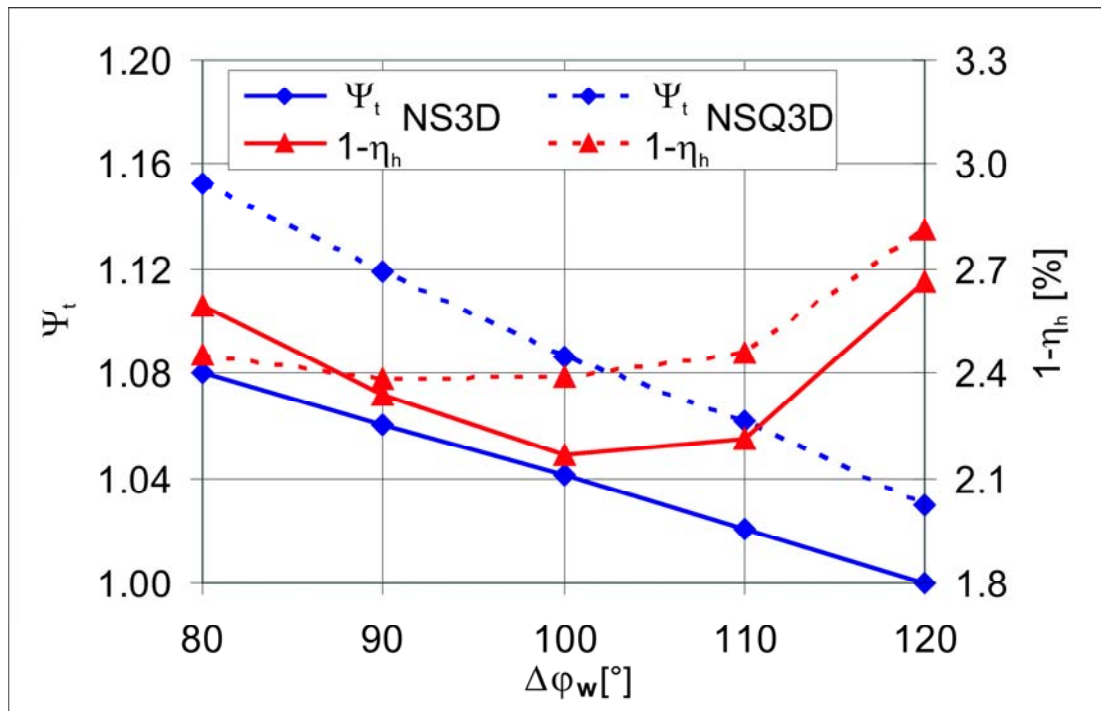
Bild 5.21: Variation des Schaufelaustrittswinkels  $\beta_{S2}$  bei erneuter Kalibrierung.

### Optimale Umschlingung der Schaufel

Nachdem die Schaufelein- und -austrittswinkel optimiert wurden, kann als weiterer freier Parameter die Umschlingung  $\Delta\varphi_w$  variiert werden, die die Länge der Schaufel bestimmt. Da sich hierdurch allerdings auch die Umlenkung ändert, wird in der Regel eine nachfolgende Anpassung von  $\beta_{S2}$  erfolgen müssen. Als Ausgangsvariante wird die Schaufel mit  $\beta_{S2} = 21.5^\circ$  und  $\Delta\varphi_w = 110^\circ$  gewählt, die in dem vorangehenden Optimierungsschritt mit dem NSQ3D-Verfahren auf der Basis der ursprünglichen Kalibrierung als die „Richtige“ ermittelt wurde, ungeachtet des im Vergleich dargestellten NS3D-Ergebnisses.

Der Bereich minimaler Verluste wird anhand der NSQ3D-Ergebnisse bei einer Umschlingung von  $\Delta\varphi_w = 90^\circ$  bis  $\Delta\varphi_w = 100^\circ$  ermittelt, vgl. Bild 5.22. Eine Wahl von  $\Delta\varphi_w = 95^\circ$  erscheint „optimal“.

Diese Variante würde man nun erstmals mit einem genauen NS3D-Verfahren nachrechnen, was aus Gründen der Vergleichbarkeit hier jedoch für alle bisher untersuchten Varianten bereits erfolgt ist. Wenn man nun eine Variation der Umschlingung auf der Basis der NS3D-Ergebnisse betrachtet, wird der geforderte Betriebspunkt  $\Psi_t = 1.06$  von der Variante mit  $\Delta\varphi_w = 95^\circ$  zufälligerweise nahezu erreicht. Der Verlauf der NS3D-Verlustkurve über  $\Delta\varphi_w$  zeigt allerdings, dass eine Wahl von  $\Delta\varphi_w = 100^\circ$  noch etwas günstiger ist. Da die gewünschte Umlenkung hiermit jedoch nicht erzielt wird, muss der Schaufelwinkel  $\beta_{S2}$  in einem weiteren Optimierungszyklus korrigiert werden.

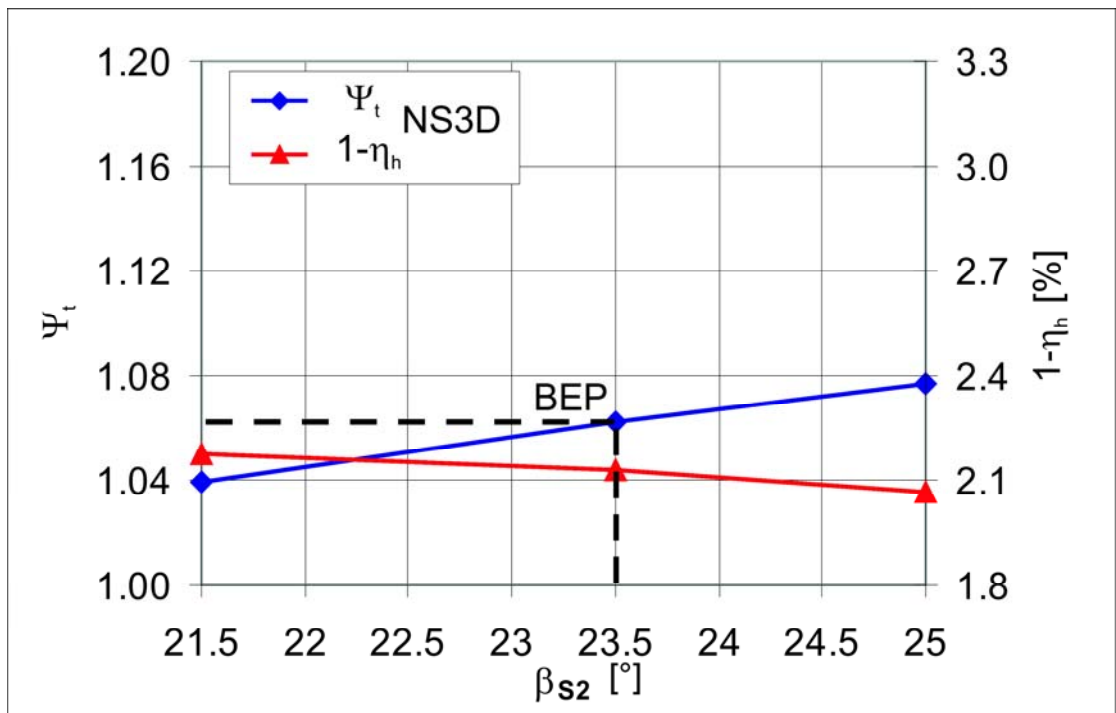
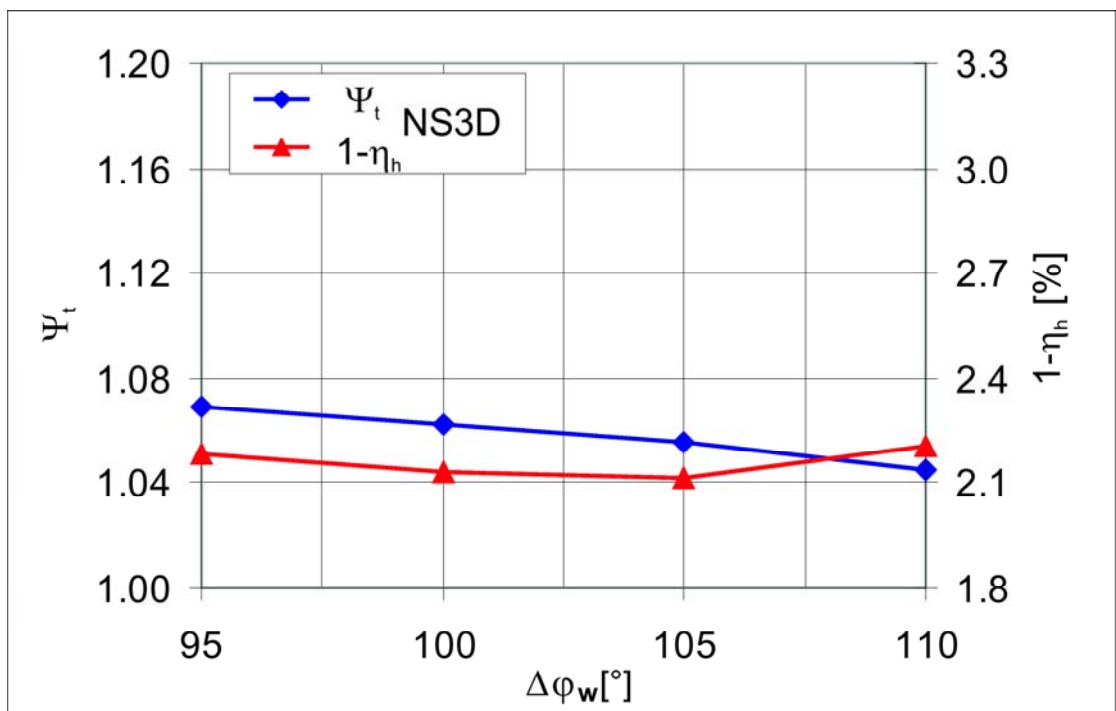
Bild 5.22: Variation der Umschlingung  $\Delta\varphi_w$ .

### Feinjustierung des Schaufelwinkels an der Austrittskante

Die Abweichungen zwischen den NSQ3D- und den NS3D-Ergebnissen sind inzwischen doch beträchtlich. Da es sich bei den nachfolgenden Modifikationen nur noch um Nuancen handeln wird, ist jetzt die genauest mögliche Nachrechnung der Strömung gefragt. Mit dem NS3D-Verfahren wird nun für die Schaufel mit  $\Delta\varphi_w = 100^\circ$  eine Anpassung des Schaufelwinkels  $\beta_{S2}$  durchgeführt. Wie in Bild 5.23 zu erkennen ist, wird der Betriebspunkt mit  $\beta_{S2} = 23.5^\circ$  erreicht.

### Kontrolle der Umschlingung

Aufgrund der wechselseitigen Beeinflussung der variablen Parameter wird nun in einem weiteren Zyklus noch einmal die Schaufelumschlingung für die Variante mit  $\beta_{S2} = 23.5^\circ$  mit einer NS3D-Rechnung überprüft. Wie in Bild 5.24 ersichtlich, ist das Minimum der Verlustkurve sehr flach und liegt etwas oberhalb von  $\Delta\varphi_w = 100^\circ$ . Die Differenzen sind jedoch sehr gering und liegen innerhalb der Bandbreite numerischer Genauigkeit. Auf eine weitere Modifikation wurde deshalb verzichtet.

Bild 5.23: Variation des Schaufelaustrittswinkels  $\beta_{S2}$ .Bild 5.24: Variation der Umschlingung  $\Delta\phi_w$ .

## Resultat

Die Optimierung ergibt schließlich eine Schaufel in der Nähe der Deckscheibe mit den folgenden Parametern:

- Schaufeleintrittswinkel  $\beta_{S1} = 30^\circ$ ,
- Schaufelaustrittswinkel  $\beta_{S2} = 23.5^\circ$ ,
- Umschlingungswinkel  $\Delta\varphi_w = 100^\circ$ .

Ausgehend von einer Strömungsnachrechnung mit Kalibrierung für die ursprüngliche Variante wurde die Schaufel des Radiallaufrades RP39 in vier Optimierungszyklen an den neuen Betriebspunkt angepasst.

1. Anpassung der Schaufelwinkel  $\beta_{S1}$  am Eintritt, Bild 5.18 und 5.19: Sofern ausschließlich die Druckverteilungen auf eine stoßfreie Anströmung ohne Kavitation hin optimiert werden, kann dieser Zyklus mit einem sehr schnellen EQ3D-Verfahren durchgeführt werden.
2. Anpassung des Schaufelwinkels  $\beta_{S2}$  am Austritt, um die erforderliche Umlenkung zu erzielen, Bild 5.20 und 5.21. Eine Annäherung an den tatsächlich erforderlichen Winkel kann im Sinne einer Voroptimierung auf der Grundlage eines NSQ3D-Verfahrens erfolgen. Je näher die kalibrierte Ausgangsvariante am tatsächlichen Optimum liegt, desto besser gelingt diese Annäherung.
3. Optimale Schaufellänge in Umfangsrichtung  $\Delta\varphi_w$ , Bild 5.22: Auch hierfür kann das NSQ3D-Verfahren noch einmal eingesetzt werden. Die quasi-dreidimensional berechneten Ergebnisse weichen allerdings von voll dreidimensional berechneten Ergebnissen inzwischen doch so stark ab, dass eine Kontrolle mit einem NS3D-Verfahren empfehlenswert erscheint.
4. Feinjustierung des Schaufelwinkels  $\beta_{S2}$ , Bild 5.23: Um den Betriebspunkt genau einzustellen, ist eine Nachrechnung mit dem exakten NS3D-Verfahren erforderlich.

Eine weitere Anpassung der Umschlingung  $\Delta\varphi_w$  muss danach nicht mehr durchgeführt werden.

Die in den jeweiligen Optimierungszyklen erzielten Verbesserungen im hydraulischen Wirkungsgrad  $\eta_h$  sind in Bild 5.25 gezeigt. Dabei sind ausgehend von einem Wirkungsgrad der Ausgangsvariante von  $\eta_h = 96.7\%$  die relativen Gewinne aufgetragen, die sich aus einer NS3D-Strömungsnachrechnung für die in jedem Zyklus als optimal ermittelte Variante ergeben. Die größte Verbesserung lässt sich in sehr kurzer Zeit bereits durch die Justierung der Eintrittskante auf eine stoßfreie Anströmung erzielen. Es muss allerdings betont werden, dass gerade die exakte Einstellung des Betriebspunktes nur mit Hilfe des genauen NS3D-Verfahrens in den Schritten 3 und 4 möglich gewesen ist.

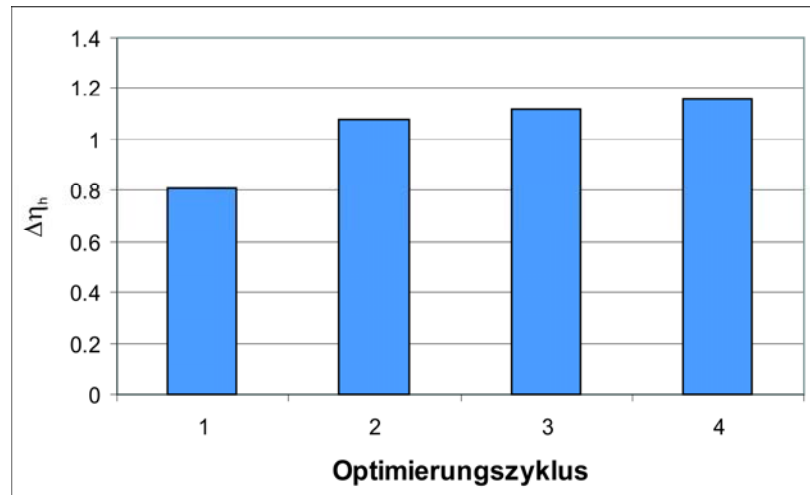


Bild 5.25: Gewinn an hydraulischem Wirkungsgrad über den Optimierungszyklen.

Das E3D-Verfahren kam bei dem vorliegenden Beispiel nicht zum Einsatz. Zur Ermittlung der Verluste ist es nicht geeignet, denkbar wäre allerdings eine optimale Gestaltung der Schaufelbelastung, also der Druckverteilungen, über einen variablen Schaufelwinkelverlauf zwischen Ein- und Austrittskante. Nachdem die originäre Schaufel bereits für einen anderen Betriebspunkt optimiert war, bestand diesbzgl. über den Rahmen der Q3D-Berechnungen hinaus kein Bedarf.

Die Anzahl der durchgeführten Variantenrechnungen sowie die dafür benötigte CPU-Zeiten sind in Tabelle 5.1 aufgeführt. Dabei wurden nur die NS3D-Berechnungen im fortgeschrittenen Stadium der Optimierung mitgezählt, wo sie unerlässlich sind. Vereinfachend gesagt kann von einem Rechenzeitverhältnis EQ3D : E3D : NSQ3D : NS3D von 1 : 10 : 20 : 100 ausgegangen werden, das im Einzelfall je nach Netzqualität und der vorhandenen Startlösung jedoch variieren kann. Die in Kapitel 4 angesprochenen Konvergenzschwierigkeiten beim Stromfunktions-Vorticity-Verfahren treten bei dieser Abschätzung doch deutlich hervor: Der Zeitvorteil gegenüber dem NS3D-Verfahren ist im Wesentlichen dadurch begründet, dass beim quasi-dreidimensionalen Verfahren nur eine kleine Anzahl von repräsentativen Stromflächen nachgerechnet wird, während das Netz für eine voll dreidimensionale Navier-Stokes-Rechnung auch in der dritten Dimension sehr fein aufgelöst sein muss. Würde man alle in diesem Optimierungslauf notwendigen Variantenrechnungen von Beginn an mit einem NS3D-Verfahren durchführen, so ergäbe sich eine CPU-Rechenzeit von 2000 Zeiteinheiten gegenüber den hier erforderlichen 965 Einheiten. Der Rechenzeitbedarf kann durch den Einsatz der MLCFD-Technik also auf weniger als die Hälfte reduziert werden.

	EQ3D	NSQ3D	NS3D
Berechnete Varianten	5	8	8
Zeitbedarf, normiert	5	160	800

Tabelle 5.1: CPU-Zeiten für MLCFD-Optimierung

# Kapitel 6

## Bewertung und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden unterschiedliche numerische Verfahren zur Strömungsnachrechnung in Turbomaschinen entwickelt, angewendet und verglichen. Die hier entwickelten Q3D-Verfahren beruhen auf einem Stromfunktions-Vorticity-Ansatz, die 3D-Verfahren lösen die originären Impulsgleichungen.

Der Rechenzeitvorteil eines Q3D-Verfahrens wurde nach der Idee des MLCFD-Ansatzes mit der Genauigkeit eines 3D-Verfahrens so kombiniert, dass eine Laufradoptimierung effizient durchgeführt werden kann. Eine schnelle Vorooptimierung ist insbesondere mit dem EQ3D-Code möglich, während der NSQ3D-Code sehr empfindlich auf die Netzqualität anspricht und eine vergleichsweise langsame Konvergenzrate zeigt. Die Q3D-Verfahren sind aufgrund ihres Einsatzes auf rotationssymmetrischen Stromflächen nur in bestimmten geometrisch einfachen Kontrollräumen einsetzbar. Im Bereich von Beschauelungen von Turbomaschinen sind diese Voraussetzungen oftmals erfüllt oder können durch eine Vereinfachung geometrischer Details erreicht werden.

Im Stadium der Vorooptimierung einer Beschauelung liefern die Q3D-Verfahren eine gute Annäherung an die optimale Geometrie, wenn man anhand eines NS3D-Ergebnisses für die initiale Geometrie eine Kalibrierung vornimmt und diese Ausgangsvariante nicht allzu weit von dem Optimum für den neuen Betriebspunkt entfernt liegt. Für eine qualitative Beurteilung der Druckverteilungen ist das sehr schnelle EQ3D-Verfahren ausreichend genau. Eine Abschätzung der Verluste ist mit dem NSQ3D-Verfahren möglich, wenn die effektive Reynoldszahl ebenfalls über das initiale NS3D-Ergebnis eingestellt wird. Die Feinjustierung der Geometrie auf den Optimalpunkt muss allerdings mit einem NS3D-Verfahren erfolgen, da oftmals eine diffizile wechselseitige Abhängigkeit der freien Parameter vorliegt, die eine genaue Auflösung dreidimensionaler Strömungseffekte erforderlich macht. Durch den kombinierten Einsatz von Q3D- und 3D-Verfahren kann während eines Optimierungsprozesses ca. die Hälfte an CPU-Zeit eingespart werden.

Zum effizienten Einsatz der MLCFD-Technik in einem Entwicklungssystem für Turbomaschinen müssen eine standardisierte Geometrieaufbereitung und eine weitgehend automatisierte Netzgenerierung bereit gestellt werden, die den Anforderungen der einzelnen CFD-Verfahren optimal gerecht wird. Eine Verbesserung der Konvergenzeigenschaften des NSQ3D-Verfahrens wird erwartet, wenn anstatt des vorliegenden Stromfunktions-Vorticity-Ansatzes eine Lösung der originären Impulsgleichungen erfolgt.



## Literaturverzeichnis

- [1] BADER, R.: *Simulation kompressibler und inkompressibler Strömungen in Turbomachinen*. Technische Universität München, Lehrstuhl und Laboratorium für Hydraulische Maschinen und Anlagen, Dissertation, 2000
- [2] BOUSSINESQ, J.: Essai sur la théorie des eaux courantes. In: *Mémoires Acad. des Sciences* 23 (1872), Nr. 1
- [3] BUSEMANN, A.: Das Förderverhältnis radialer Kreiselpumpen mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln. In: *Z. f. angew. Math. Mech.* (1928), Nr. 8, 5
- [4] CHORIN, A. J.: A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems. In: *J. Comp. Phys.* 2 (1967), S. 12–26
- [5] DEMIRDŽIĆ, I. ; Ž. LILEK ; PERIĆ, M.: A colocated finite volume method for predicting flows at all speeds. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 16 (1993), S. 1029–1050
- [6] ESCHENAUER, H. ; KOSKI, J. ; OSYCZKA, A.: *Multicriteria Design Optimization, Procedures and Applications*. Berlin Heidelberg : Springer Verlag, 1990
- [7] FERNÁNDEZ, A.: *Strömungstechnische Optimierung von Beschaukelungen hydraulischer Maschinen*. Technische Universität München, Lehrstuhl und Laboratorium für Hydraulische Maschinen und Anlagen, Dissertation, 1997
- [8] FERZIGER, J. H. ; PERIĆ, M.: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin Heidelberg : Springer Verlag, 1996
- [9] FRITZ, J.: *Strömungswechselwirkungen in hydraulischen Maschinen*. Technische Universität München, Lehrstuhl und Laboratorium für Hydraulische Maschinen und Anlagen, Dissertation, 1999
- [10] HACKBUSCH, W.: *Multi-Grid Methods and Applications*. Springer Verlag, 1985
- [11] HOOKE, R. ; JEEVES, T. A.: Direct Search Solution of Numerical and Statistical Problems. In: *Association for Computing Machinery* 8 (1961), S. 212–229
- [12] ISSA, R.I.: Solution of implicitly discretized fluid flow equations by operator-splitting. In: *Journal of Computational Physics* 62 (1986), S. 40–65
- [13] KHALIL, I.: *A Study of the Viscous Flow in Turbomachines*, University of Cincinnati, PhD Thesis, 1978

- [14] KHALIL, I. ; TABAKOFF, W. ; HAMED, A.: Viscous Flow Analysis in Mixed Flow Rotors. In: *ASME Trans., Journal of Engineering for Power* 102 (1980), S. 192–201
- [15] KHOSLA, P.K. ; RUBIN, S.G.: A Diagonal Dominant Second-Order Accurate Implicit Scheme. In: *Computers & Fluids* 2 (1974), S. 207–209
- [16] KOSCHEL, W. ; LÖTZERICH, M. ; VORNBERGER, A.: Explicit Method for Solving Navier Stokes Equations Using a Finite Element Formulation. In: HIRSCHL, E. H. (Hrsg.): *Finite Approximations in Fluid Mechanics*. Braunschweig : Vieweg (DFG Priority Research Programme, Results 1983-1985)
- [17] KRÄMER, S.: *Entwurf von Beschaufelungen hydraulischer Maschinen mit Hilfe künstlicher Neuronaler Netze*. Technische Universität München, Lehrstuhl für Fluidmechanik, Dissertation, 2005
- [18] KROLL, N.: Berechnung von Strömungsfeldern um Propeller und Rotoren im Schwebeflug durch die Lösung der Euler-Gleichungen / Deutsche Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt, Institut für Entwurfsaerodynamik. Braunschweig, Juni 1989 ( 89-37). – Forschungsbericht
- [19] KWAK, D. ; CHANG, J.L.C. ; S.P. SHANKS, S.P. ; CHAKRAVARTHY, S.R.: A three-dimensional incompressible Navier-Stokes flow solver using primitive variables. In: *AIAA Journal* 24 (1986), S. 390–396
- [20] LAWRENCE, C.T. ; ZHOU, J.L. ; TITS, A.L.: *User's Guide for CFSQP Version 2.3: A C Code for Solving Constrained Nonlinear Optimisation Problems, Generating Iterates Satisfying all Inequality Constraints*. College Park, Maryland: Institute for System Research, 1995
- [21] LEPACH, T.: *Entwurf und Optimierung von Francis Turbinen*. Technische Universität München, Lehrstuhl für Fluidmechanik, Dissertation, 2005
- [22] LIEN, F.S. ; LESCHZINER, M.A.: A general non-orthogonal collocated finite volume algorithm for turbulent flow at all speeds incorporating second-moment turbulence-transport closure, Part 1: Computational implementation; Part 2: Application. In: *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering* Bd. 114. Elsevier Science B.V., 1994, S. 123–148
- [23] Ž. LILEK: *Ein Finite-Volumen Verfahren zur Berechnung von inkompressiblen und kompressiblen Strömungen in komplexen Geometrien mit beweglichen Rändern und freien Oberflächen*, Universität Hamburg, Diss., 1995
- [24] MÜLLER, N. ; SCHILLING, R. et a.: Application of a Multi Level CFD-Technique for the Design Optimisation of Hydraulic Machinery Bladings. In: *Proceedings of the ASME Heat Transfer/Fluids Engineering Summer Conference*. Charlotte, North Carolina, USA, July 11-15 2004
- [25] MUZAFERIJA, S.: *Adaptive finite volume method for flow predictions using unstructured meshes and multigrid approach*, University of London, PhD Thesis, 1994

- [26] NOLL, B.: *Numerische Strömungsmechanik*. Berlin Heidelberg New York : Springer Verlag, 1993
- [27] PATANKAR, S. V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. 1. Washington, London, New York : Hemisphere Publishing Corporation, 1980
- [28] PATANKAR, S. V. ; SPALDING, D. B.: A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows. In: *Int. Journal of Heat and Mass Transfer* 15 (1972), S. 1787–1806
- [29] PFLEIDERER, C. ; PETERMANN, H.: *Strömungsmaschinen*. 6. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1993
- [30] QI, W. ; URANISHI, K.: Quasi-Three-Dimensional flow Calculations in a Mixed Flow Pump. In: *Proceedings of the XVII IAHR Symposium*. Beijing, China, 1994
- [31] REINELT, R.: *Ein unstrukturiertes Finite-Volumen-Verfahren für hydraulische Strömungsmaschinen*, Technische Universität München, Diss., 2001
- [32] REYNOLDS, O.: On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A* 186 (1895), S. 123
- [33] RIEDEL, Norbert: *Rotor-Stator Wechselwirkung in hydraulischen Maschinen*. Technische Universität München, Lehrstuhl und Laboratorium für Hydraulische Maschinen und Anlagen, Dissertation, 1997
- [34] RITZINGER, S.: *Simulation realer Laufradströmungen*, Technische Universität München, Lehrstuhl und Laboratorium für Hydraulische Maschinen und Anlagen, Dissertation, 1997
- [35] ROACHE, P. J.: *Computational Fluid Dynamics*. Albuquerque : Hermosa Publishers, 1972
- [36] SCHILLING, R.: *Berechnung von Radialgittern zur Förderung hochviskoser Medien*. Universität (TH) Karlsruhe, Institut für Strömungslehre und Strömungsmaschinen, Dissertation, 1976
- [37] SCHILLING, R.: Strömung in Radseitenräumen von Kreiselpumpen. In: *Strömungsmechanik und Strömungsmaschinen* 27 (1979). – Habilitationsschrift
- [38] SCHILLING, R.: Numerical Calculation of the Q3D Incompressible, Inviscid Flow in Turbomachines. In: *Proceedings of the 11<sup>th</sup> IAHR Symposium*. Amsterdam, 1982
- [39] SCHILLING, R.: CFD Aided Design of Hydraulic Machinery Bladings. In: VELENSEK, B. (Hrsg.): *CFD'91 Intensive Course on Computational Fluid Dynamics*. Ljubljana, 1991
- [40] SCHILLING, R. ; THUM, S. ; MÜLLER, N. ; KRÄMER, S. ; RIEDEL, N. ; MOSER, W.: Design optimisation of hydraulic machinery blading by multi level CFD technique. In: *Proceedings of the 21<sup>th</sup> IAHR Symposium*. Lausanne, 2002

- [41] SCHILLING, R. ; WATZELT, C. ; HAAS, H.: A Fast CAE/CAD-Procedure for the Optimum Design of Arbitrary Impellers. In: KIM, J. H. (Hrsg.): *Proceedings of ISROMAC-3*. Honolulu : EPRI, April 1990, S. 480–494
- [42] SCHRECK, E. ; PERIĆ, M.: Computation of fluid flow with a parallel multigrid solver. In: *Int. J. f. Numerical Methods in Fluids* 16 (1993), S. 303–327
- [43] SHEN, W.Z. ; SORENSEN, J.N.: Quasi-3D navier-stokes model for rotating airfoil. In: *The Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics* 604 (1999)
- [44] SKODA, R.: *Numerische Simulation abgelöster und transitionaler Strömungen in Turbomaschinen*. Technische Universität München, Lehrstuhl für Fluidmechanik, Dissertation, 2003
- [45] STECK, E.: *Berechnung des Betriebsverhaltens rotierender Radialgitter*, Instituts für Strömungslehre und Strömungsmaschinen, Universität Karlsruhe, Dissertation, 1981
- [46] STEGER ; SORENSON: Automatic Mesh-Point Clustering Near a Boundary in Grid Generation with Elliptic Partial Differential Equations. In: *Journal of Computational Physics* 33 (1979), Nr. 3, S. 405–410
- [47] STONE, H.L.: Iterative Solution of Implicit Approximations of Multidimensional Partial Differential Equations. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 5 (1968), Nr. 3, S. 530–558
- [48] THUM, S.: *Optimierung von Beschaukelungen von Turbomaschinen*. Technische Universität München, Lehrstuhl für Fluidmechanik, Dissertation, 2005
- [49] THUM, S. ; SCHILLING, R.: Optimization of hydraulic machinery bladings by multilevel CFD techniques. In: *Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, Honolulu, Hawaii, February 10-14, 2002*
- [50] TRUCKENBRODT, E.: *Strömungsmechanik, Grundlagen und technische Anwendungen*. 1. Auflage. Berlin Heidelberg New York : Springer Verlag, 1968
- [51] VAN DOORMAL, J.P. ; RAITHBY, G.D.: Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows. In: *Journal of Numerical Heat Transfer* 7 (1984), S. 147–163
- [52] WATZELT, C. ; SCHILLING, R.: Abschlußbericht zum Forschungsvorhaben Echtzeit-Entwurfssystem. Technische Universität München, 1993. – Forschungsbericht
- [53] WATZELT, Christian: *Echtzeit-Entwurf radialer Beschaukelungen auf einem Multiprozessorsystem*. Technische Universität München, Lehrstuhl und Laboratorium für Hydraulische Maschinen und Anlagen, Dissertation, 1995
- [54] WILCOX, D.C.: *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, La Canada, California., 1998

- [55] WU, C. H.: A General Theory of the 3D Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial, Radial and Mixed Flow Type / NACA. 1952 ( TN 2604). – Forschungsbericht
- [56] YUAN, W.: *Simulation der Saugrohr-Unterwasser-Wechselwirkung*. Technische Universität München, Lehrstuhl und Laboratorium für Hydraulische Maschinen und Anlagen, Dissertation, 1999
- [57] ZIEREP, J.: *Grundzüge der Strömungslehre*. C. Braun, Karlsruhe, 1990