

Zentrum Mathematik
der
Technischen Universität München

**Raumkurven konstanter Krümmung,
insbesondere Gewundene Kreise**

Christoph Engelhardt

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. J. Scheuerle
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr. R. Koch
2. Univ.-Prof. Dr. O. Giering
3. apl. Prof. Dr. H. Pabel,
Julius Maximilians Universität Würzburg
(schriftliche Beurteilung)

Die Dissertation wurde am 11.11.2004 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am 15.09.2005 angenommen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Windschiefe und Gewundene Kreise:	
	Definition, Eigenschaften	7
2.1	Windschiefe und Gewundene Kreise	7
2.2	Sphärische Kurven konstanter Krümmung	9
3	Windschiefe und Gewundene Kreise zu vorgegebenem sphärischem Tangentenbild	12
3.1	Aus Schraublinienbögen zusammengesetzte Gewundene Kreise	12
3.2	Windschiefe und Gewundene Kreise zu einem sphärischen Tangentenbild c^* , dessen Grundriss vorgegeben ist	17
3.2.1	Parameterdarstellung des sphärischen Tangentenbildes c^*	17
3.2.2	Regularität und Bogenlänge von c^*	19
3.2.3	Die Torsion der zu c^* gehörigen Windschiefen Kreise .	20
3.2.4	Windschiefe und Gewundene Kreise zu vorgegebenem sphärischem Tangentenbild mit einer Basisfunktion $f(\varphi) = m\varphi$	22
3.2.5	Durch elementare Funktionen parametrisierbare Gewundene Kreise zu Basisfunktionen $f(\varphi) = \frac{\varphi}{2k}$, $k \in \mathbb{N}$.	50
3.2.6	Windschiefe und Gewundene Kreise zu vorgegebenem sphärischem Tangentenbild mit einer Basisfunktion $f(\varphi) = A \sin(m\varphi)$	72
3.3	Eine Schar Windschiefer Kreise c mit asymptotischem Kreispaar	93
3.3.1	Eine spezielle sphärische Kurve c^*	93
3.3.2	Geometrische Eigenschaften von c^*	98
3.3.3	Krümmung und Torsion von c^*	99
3.3.4	Die zu c^* gehörigen Windschiefen Kreise c	103
3.3.5	Symmetrieeigenschaften der Windschiefen Kreise c . . .	105
3.3.6	Das asymptotische Verhalten der Windschiefen Kreise c	106
4	Vervollständigung eines Kurvenbogens konstanter Krümmung zu einem Gewundenen C^2-Kreis	111
4.1	Vervollständigung über das sphärische Tangentenbild	111
4.2	Vervollständigung eines C^2 -Kurvenbogens konstanter Krümmung zu einem Gewundenen Kreis mittels Schraublinienbögen	116

5	Windschiefe und Gewundene Kreise auf Zylinderflächen	124
5.1	Parameterdarstellung der Kurven auf einer vorgegebenen Zylinderfläche Φ	125
5.2	Geodätische Krümmung und Normalschnittkrümmung der Kurven auf einer vorgegebenen Zylinderfläche Φ	126
5.3	Abwicklung einer Zylinderfläche Φ und ihrer Kurven c konstanter Krümmung	127
5.3.1	Parameterdarstellung einer verebneten Kurve \hat{c}	127
5.3.2	Algorithmus zur Bestimmung einer Parameterdarstellung einer verebneten Kurve \hat{c}	130
5.3.3	Parameterdarstellung einer konstant gekrümmten, auf einer vorgegebenen Zylinderfläche verlaufenden Raumkurve	133
5.4	Windschiefe und Gewundene Kreise auf einem Kettenlinienzylinder	134
5.5	Windschiefe und Gewundene Kreise auf einem Drehzylinder	140
5.5.1	Parameterdarstellung der Windschiefen und Gewundenen Kreise auf einem Drehzylinder vom Radius r	140
5.5.2	Der Grenzfall $\kappa_0 = 1/r$	151
5.6	Zylinderflächen Φ mit einem geodätischen Kreis c konstanter Krümmung	154
5.6.1	Natürliche Gleichung und Parameterdarstellung einer Profilkurve \bar{c} der Zylinderfläche Φ	154
5.6.2	Parameterdarstellung eines auf Φ verlaufenden Windschiefen Kreises c konstanter geodätischer Krümmung	158
5.6.3	Krümmungseigenschaften eines Windschiefen Kreises $c \subset \Phi$ konstanter geodätischer Krümmung	160
5.6.4	Torsion des Windschiefen Kreises $c \subset \Phi$	162
	Literatur	177

1 Einleitung

Im 3-dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{E}^3 sind die einzigen geschlossenen *ebenen* Raumkurven konstanter Krümmung $\kappa_0 > 0$ die Kreise mit Radius $1/\kappa_0$ (siehe zum Beispiel [11], S.16: Nr. 1.12 a). Ihre Torsion τ ist in jedem Kurvenpunkt gleich 0.

Eine nichtebene reguläre C^2 -Kurve konstanter Krümmung $\kappa_0 > 0$ ist im \mathbb{E}^3 nicht notwendig geschlossen, wie die Schraublinien zeigen, die Raumkurven konstanter Krümmung und zugleich konstanter Torsion $\tau \neq 0$, aber nicht geschlossen sind.

In dieser Arbeit werden drei verschiedenartige *Konstruktionsprinzipien* für *nichtebene Kurven im \mathbb{E}^3* mit vorgegebener *konstanter Krümmung $\kappa_0 > 0$* entwickelt; diese Konstruktionsprinzipien werden in dieser Einleitung mit (I), (II) und (III) bezeichnet. Hierbei gelangt man zu einer Vielzahl konkreter Beispiele, insbesondere für geschlossene nichtebene Kurven konstanter Krümmung, sogenannte “Gewundene Kreise”. Für die letztgenannte Kurvenklasse hat der Verfasser erste Ergebnisse bereits in [10] (als Koautor) beziehungsweise in seiner Diplomarbeit [3] erzielt. Auszüge hiervon wurden, eingeordnet in das Gesamtkonzept, in diese Arbeit übernommen, und zwar in den beiden Abschnitten 3.1 über Gewundene C^2 -Kreise aus Schraublini-
enbögen gemäß [10] beziehungsweise 5.5 über Windschiefe und Gewundene Kreise auf Drehzylindern gemäß [3].

Das Konstruktionsprinzip (I) (siehe Abschnitt 3) gibt eine – im Prinzip beliebige – auf der Einheitssphäre S^2 verlaufende reguläre C^1 -Kurve c^* vor. Mittels geeigneter Quadraturen erhält man aus der Kurve c^* , die als sphärisches Tangentenbild aufgefasst wird, eine Parameterdarstellung einer Raumkurve c konstanter Krümmung κ_0 , welche in der Literatur (zum Beispiel [13], S. 163, 283) als “Windschiefer Kreis” bezeichnet wird. Ist c^* eine *geschlossene* reguläre C^1 -Kurve und liegt der geometrische Schwerpunkt von c^* im Mittelpunkt von S^2 , dann (und nur dann) ist die zugehörige Raumkurve c sogar eine *geschlossene* C^2 -Raumkurve konstanter Krümmung, also ein Gewundener Kreis. Ein diesbezüglicher Lehrsatz wurde in [10] und [3] bewiesen. Bei der Anwendung dieses Prinzips wird besonders die Vorgabe von solchen “sphärischen Tangentenbildern” c^* untersucht, die günstige Symmetrieeigenschaften besitzen, welche die Inzidenz des geometrischen Schwerpunkts von c^* mit dem Mittelpunkt der Trägersphäre S^2 garantieren. Insbesondere lassen sich zu gewissen sphärischen Tangentenbildern c^* spezielle Klassen Gewundener Kreise finden, die unter Verwendung elementarer Funktionen parame-

trisiert werden können. Schließlich wird eine besondere nichtebene sphärische Kurve $c^* \subset S^2$ betrachtet, deren Bogenlänge gleich ihrer beim Kurvendurchlauf fortschreitenden, längs des Äquators gemessenen geographischen Länge ist. Diese Kurve c^* wird dann als sphärisches Tangentenbild aufgefasst, und die zugehörige – bis auf Ähnlichkeiten eindeutige – Raumkurve c konstanter Krümmung wird bestimmt: diese nähert sich asymptotisch einem Paar translationsgleicher Kreise.

Beim Konstruktionsprinzip (II) (siehe Abschnitt 4) wird gezeigt, dass – und wie – ein beliebig vorgegebener C^2 -Kurvenbogen c konstanter Krümmung κ_0 mit Hilfe gewisser Ergänzungen seines sphärischen Tangentenbildes c^* zu einem Gewundenen C^2 -Kreis vervollständigt werden kann.

Ohne Einbeziehung des sphärischen Tangentenbildes wird in Abschnitt 5 das Konstruktionsprinzip (III) für Raumkurven c konstanter Krümmung beschrieben, die auf einer durch ihre Profilkurve \bar{c} vorgegebenen Zylinderfläche Φ verlaufen. Ist insbesondere Φ ein Kettenlinienzylinder (Abschnitt 5.4) oder ein Drehzylinder (Abschnitt 5.5), so finden sich – wie für den Drehzylinder schon in [3] gezeigt wurde – sogar auf Φ verlaufende geschlossene, nichtebene Raumkurven c konstanter Krümmung der Differenzierbarkeitsklasse C^ω . Schließlich wird in Abschnitt 5.6 eine Schar von Zylinderflächen Φ bestimmt, auf denen jeweils eine (nichtgeschlossene) Raumkurve c konstanter Krümmung κ_0 derart verläuft, dass auch ihre geodätische Krümmung κ_g bezüglich Φ konstant ist.

2 Windschiefe und Gewundene Kreise: Definition, Eigenschaften

2.1 Windschiefe und Gewundene Kreise

In diesem Abschnitt werden die Begriffe *Windschiefer Kreis* und *Gewundener Kreis* eingeführt und ein Satz über die Geschlossenheit konstant gekrümmter Raumkurven formuliert (siehe auch [10]). Dieser Satz liefert das Konstruktionsprinzip (I) für konstant gekrümmte Raumkurven c zu deren vorgegebenem sphärischem Tangentenbild c^* .

Definition 2.1 (*Windschiefer Kreis*)

Eine nichtebene, reguläre C^k -Kurve ($k \geq 2$) konstanter Krümmung $\kappa_0 > 0$ im 3-dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{E}^3 heißt ein *Windschiefer C^k -Kreis*.

Definition 2.2 (*Gewundener Kreis*)

Ein geschlossener Windschiefer Kreis der Differenzierbarkeitsklasse C^k ($k \geq 2$) gemäß Definition 2.1 heißt ein Gewundener C^k -Kreis.

In [10] wurden *Gewundene Kreise* der Differenzierbarkeitsklasse C^2 bestimmt über das zu einer regulären C^1 -Kurve $c : \mathbf{r}(s), s \in I$ (ohne Einschränkung sei s Bogenlänge von c) definierte *sphärische Tangentenbild*

$$c^* : \quad \mathbf{r}^*(s) := \frac{d\mathbf{r}}{ds} =: \mathbf{r}'(s), \quad s \in I. \quad (2.1)$$

Bei diesem methodischen Ansatz wird ein Konstruktionsprinzip benutzt (siehe [10]), welches in folgendem Satz begründet ist:

Satz 2.1 Gegeben sei im 3-dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{E}^3 eine geschlossene, regulär parametrisierte C^{r-1} -Kurve ($r \geq 2$)

$$c^* : \quad \mathbf{r}^*(s^*), \quad s^* \in I^* := [0, L^*]$$

(ohne Einschränkung sei s^* Bogenlänge) auf der Einheitssphäre S^2 (Mittelpunkt $O^*(0, 0, 0)$) der Länge L^* bei einmaliger Durchlaufung. Also gelte

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}^*(s^*)\| &= \left\| \frac{d\mathbf{r}^*}{ds^*}(s^*) \right\| = 1 \quad \forall s^* \in I^*, \\ \mathbf{r}^*(0) &= \mathbf{r}^*(L^*), \\ \frac{d^k \mathbf{r}^*}{ds^{*k}}(0) &= \frac{d^k \mathbf{r}^*}{ds^{*k}}(L^*) \quad (k = 1, \dots, r-1). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Unter den Voraussetzungen (2.2) gilt dann:

(a) Für jedes reelle $\kappa_0 > 0$ ist die mit $\mathfrak{x}^*(s^*)$ gemäß (2.2) definierte Kurve

$$c: \quad \mathfrak{x}(s) = \frac{1}{\kappa_0} \int_0^{\kappa_0 s} \mathfrak{x}^*(s^*) ds^*, \quad s \in I := [0, L], \quad L := \frac{L^*}{\kappa_0} \quad (2.3)$$

eine reguläre, auf ihre Bogenlänge s bezogene, C^r -Kurve mit der Länge $L = L^*/\kappa_0$ und der konstanten Krümmung $\kappa(s) = \kappa_0$.

(b) Eine durch (2.2) und (2.3) definierte Kurve ist genau dann geschlossen, wenn der geometrische Schwerpunkt G^* ihres sphärischen Tangentenbildes c^* mit dem Mittelpunkt O^* von S^2 zusammenfällt. Dies ist gleichbedeutend mit der Bedingung

$$L^* \cdot \overrightarrow{O^*G^*} := \int_0^{L^*} \mathfrak{x}^*(s^*) ds^* = \mathbf{o}. \quad (2.4)$$

(c) Eine geschlossene C^r -Kurve ($r \geq 2$) c konstanter Krümmung, definiert durch (2.2), (2.3), (2.4) ist nichteben, damit also ein Gewundener Kreis, genau dann, wenn ihr (geschlossenes) sphärisches Tangentenbild c^* nicht in einem Großkreis der Sphäre S^2 enthalten ist.

Der Beweis dieses Satzes kann in [10], Seite 19 nachgelesen werden; vergleiche auch [13], S. 162-163: Satz 1 und Bemerkung 1.

Satz 2.1 liefert ein allgemeines Konstruktionsprinzip für Raumkurven $c \in \mathbb{E}^3$ konstanter Krümmung $\kappa_0 > 0$, deren reguläres und nicht in einem Großkreis der Sphäre S^2 enthaltenes sphärisches Tangentenbild $c^* \in C^1$ vorgegeben wird. Hat die sphärische Kurve c^* zudem noch die Schwerpunkteigenschaft (2.4) in Satz 2.1, zum Beispiel aufgrund gewisser Symmetrieeigenschaften, so ist der mittels Integration gemäß (2.3) erhaltene Windschiefe Kreis c insbesondere ein Gewundener Kreis (mit Krümmung κ_0). Hierbei kann man die Kurve c^* zum Beispiel – wie in [10] – als sphärische C^1 -Kurve, zusammengesetzt aus Kreisbögen der Trägersphäre S^2 , vorgeben (vergleiche Abschnitt 3.1). Der geometrische Schwerpunkt G^* von c^* koinzidiert in [10] aufgrund geeigneter Symmetrieeigenschaften von c^* mit dem Mittelpunkt O^* von S^2 . Wie im Abschnitt 3.1 kurz vorgestellt wird (siehe auch [10] und [3]), setzen sich die hieraus resultierenden Gewundenen Kreise c aus Schraublinienbögen zusammen.

2.2 Sphärische Kurven konstanter Krümmung

In diesem Abschnitt wird zunächst eine elementare Beziehung zwischen der Krümmung $\kappa(s)$ und der Torsion $\tau(s)$ einer auf ihre Bogenlänge $s \in I$ bezogenen sphärischen Kurve c mit Parameterdarstellung $\mathbf{r}(s)$ hergeleitet. Als Resultat dessen lässt sich dann eine Aussage über die Existenz und Art konstant gekrümmter sphärischer Kurven ableiten. Wir benutzen die Ableitungsgleichungen für das FRENETSche Dreibein einer regulären, W-Punkt-freien C^r -Kurve ($r \geq 3$), das heißt $\kappa(s) \neq 0$, mit Bogenlängenparameter s und darauf bezogener Parameterdarstellung $\mathbf{r}(s)$, Krümmung $\kappa(s) \in C^{r-2}$ und Torsion $\tau(s) \in C^{r-3}$.

Seien im Folgenden bezüglich der auf Bogenlänge s bezogenen Parameterdarstellung $\mathbf{r}(s)$ der regulären C^3 -Raumkurve c in Nicht-W-Punkten ($\kappa(s) \neq 0$) der Tangenteneinheitsvektor mit $\mathbf{e}_1(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$, der Hauptnormaleneinheitsvektor mit $\mathbf{e}_2(s)$, der Binormaleneinheitsvektor mit $\mathbf{e}_3(s)$ bezeichnet. Dieses *begleitende Dreibein* $\{\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)\}$ der Kurve c bildet im Kurvenpunkt $\mathbf{r}(s)$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{E}^3 .

Bezeichnen wir abkürzend die (einmalige) Differentiation nach s mit einem oberen *Strichindex* " ' ", so lauten die Ableitungsregeln für das Begleitende Dreibein nach FRENET

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \kappa \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_2 &= -\kappa \mathbf{e}_1 + \tau \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= -\tau \mathbf{e}_2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Nun sei der Mittelpunkt der Kugel Σ mit Radius $\rho > 0$ ohne Einschränkung der Nullpunkt O des 3-dimensionalen euklidischen Raumes \mathbb{E}^3 . Dann erfüllt die Parameterdarstellung $\mathbf{r}(s)$ einer Kurve $c \subset \Sigma$ notwendig die Gleichung $|\mathbf{r}(s)| \equiv \rho$, äquivalent dazu

$$\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{r}(s) = \rho^2. \tag{2.6}$$

Differentiation von (2.6) nach der Bogenlänge s liefert (unter Weglassen des Funktionsarguments s) mit (2.5)

$$0 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1. \tag{2.7}$$

Nochmaliges Differenzieren ergibt

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}'_1 = 1 + \kappa \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2) = 0. \quad (2.8)$$

Wegen (2.8) muss stets $0 \neq \kappa(s) := |\mathbf{x}''(s)|$, also

$$\kappa(s) > 0 \quad (2.9)$$

gelten. Somit verschwindet bei sphärischen Kurven c die Krümmung κ in keinem Kurvenpunkt, c besitzt also *keine W-Punkte*. Man kann deshalb (2.8) umformen zu

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2 = -\frac{1}{\kappa}. \quad (2.10)$$

Differentiation von (2.10) ergibt

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}'_2 = \frac{\kappa'}{\kappa^2}.$$

Mit (2.5) folgt

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{x} \cdot \left(-\kappa \mathbf{e}_1 + \tau \mathbf{e}_3 \right) = \frac{\kappa'}{\kappa^2},$$

was wegen der Orthogonalität der Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ und (2.7) zu

$$\tau \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3) = \frac{\kappa'}{\kappa^2} \quad (2.11)$$

wird. Für Kurvenpunkte X von c mit $\tau \neq 0$, also *Nicht-Henkelpunkte*, erhält man schließlich

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau}. \quad (2.12)$$

Mit (2.7), (2.10) und (2.12) haben wir in Nicht-Henkelpunkten ($\tau \neq 0$) von c die folgende Zerlegung von $\mathbf{x}(s)$:

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{\kappa} \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \cdot \mathbf{e}_3. \quad (2.13)$$

Für Kurven c ohne Henkelpunkte, also $\tau(s) \neq 0$ für alle $s \in I$, und konstante Krümmung $\kappa =: \kappa_0 \geq \frac{1}{\rho}$, also für $\kappa'(s) \equiv 0$, lautet die Zerlegung (2.13) von $\mathbf{x}(s)$ im begleitenden FRENETSchen Dreibein von c :

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{\kappa_0} \cdot \mathbf{e}_2. \quad (2.14)$$

Wegen $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{x}''}{|\mathbf{x}''|} = \frac{\mathbf{x}''}{\kappa}$ und $\kappa = \kappa_0 = \text{const}$ bedeutet (2.14) umgeformt

$$\mathbf{x}'' + \kappa_0^2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o} . \quad (2.15)$$

Die auf Bogenlänge s bezogene Parameterdarstellung $\mathbf{x}(s)$ einer *sphärischen* Kurve c mit konstanter Krümmung κ_0 erfüllt also eine 3-dimensionale Schwingungsgleichung der Form (2.15).

Leicht ist einzusehen, dass die Lösung von (2.15) unter den notwendigen Nebenbedingungen

$$\mathbf{x}(s)^2 = \rho^2 \quad \text{und} \quad (\mathbf{x}'(s))^2 = 1$$

zu den damit verträglichen Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{x}_0\| = \rho , \\ \mathbf{x}'(0) &= \bar{\mathbf{x}}_0 \quad \text{mit} \quad \|\bar{\mathbf{x}}_0\| = 1 \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_0 \cdot \bar{\mathbf{x}}_0 = 0 \end{aligned}$$

mit Definitionsbereich $s \in I := [0, L] \subset \mathbb{R}$, ($L > 0$) in einem Kreis c der Sphäre $\Sigma : \mathbf{x}^2 = \rho^2$ enthalten, also eine ebene geschlossene Kurve konstanter Krümmung $\kappa_0 \geq \frac{1}{\rho}$ ist. Damit verschwindet – entgegen der Annahme – die Torsion τ der auf der Sphäre Σ (Radius ρ) verlaufenden Kurve c konstanter Krümmung $\kappa_0 \geq 1/\rho$ in jedem Kurvenpunkt, c ist also notwendig ein ebener Schnitt von Σ . Dies ist wiederum hinreichend für die Konstanz der Krümmung von c . Folglich gilt:

Satz 2.2 *Eine auf einer Sphäre Σ verlaufende Kurve c besitzt genau dann konstante Krümmung, wenn c ein ebener Schnitt von Σ ist, das heißt c liegt in einem Groß- oder Kleinkreis der Sphäre Σ .*

Anmerkung: Die Aussage des Satzes 2.2 ist – ohne Beweis – in [11], S. 16 als Aufgabe 1.12 b) formuliert.

3 Windschiefe und Gewundene Kreise zu vorgegebenem sphärischem Tangentenbild

In diesem Abschnitt werden wir konstant gekrümmte Raumkurven c zu speziell vorgegebenen sphärischen Tangentenbildern c^* vorstellen. Hierbei sind die endgültigen Parameterdarstellungen der Raumkurven nicht immer analytisch geschlossen darstellbar. Deren in Abbildungen veranschaulichte Gestalt zeigt aber die Vielfalt und Formschönheit der so gefundenen Windschiefen und Gewundenen Kreise.

3.1 Aus Schraublinienbögen zusammengesetzte Gewundene Kreise

Wie schon in [10] ausführlich behandelt und in [3] weitergeführt, werden im Folgenden Gewundene Kreise c (genau von) der Differenzierbarkeitsklasse C^2 vorgestellt, deren reguläre sphärische Tangentenbilder $c^* \in C^1$ aus Kreisbögen der Sphäre S^2 zusammengesetzt sind. Aufgrund geeigneter Symmetrieeigenschaften erfüllen diese sphärischen Kurven c^* zudem die Schwerpunktsbedingung (2.4) in Satz 2.1.

Die Formel (2.3) für die Parameterdarstellung der aus dem sphärischen Tangentenbild c^* resultierenden Raumkurve c konstanter Krümmung $\kappa_0 > 0$ zeigt, dass jedem *Kleinkreisbogen* von c^* ein Bogen einer *Schraublinie* und jedem *Großkreisbogen* von c^* ein Kreisbogen mit Radius $\frac{1}{\kappa_0}$ entspricht.

Die folgenden Abbildungen 3.1 bis 3.6, von denen Abbildung 3.4 aus [3] und Abbildung 3.6 aus [10] entnommen ist, zeigen Beispiele Gewundener C^2 -Kreise und teilweise auch die ihnen zugrundeliegenden sphärischen Tangentenbilder, die aus Kreisbögen der Sphäre S^2 zusammengesetzt sind:

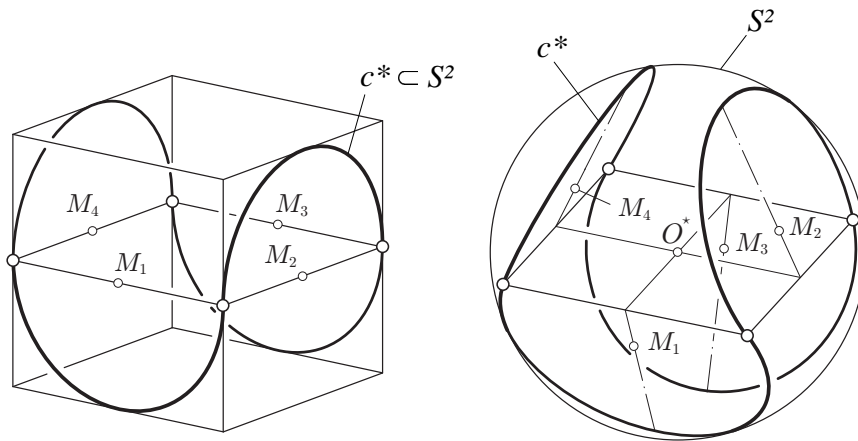


Abbildung 3.1: Konstruktion zweier Varianten des sphärischen Tangentbildes c^* eines Gewundenen C^2 -Kreises, der aus vier kongruenten Schraublinienbögen zusammengesetzt ist. Beim Kippen der Kleinkreisträgerebenen in gleichem Winkel zu einer festen Ebene bleibt die Koinzidenz des geometrischen Schwerpunkts von c^* mit dem Mittelpunkt O^* der Trägersphäre S^2 erhalten.

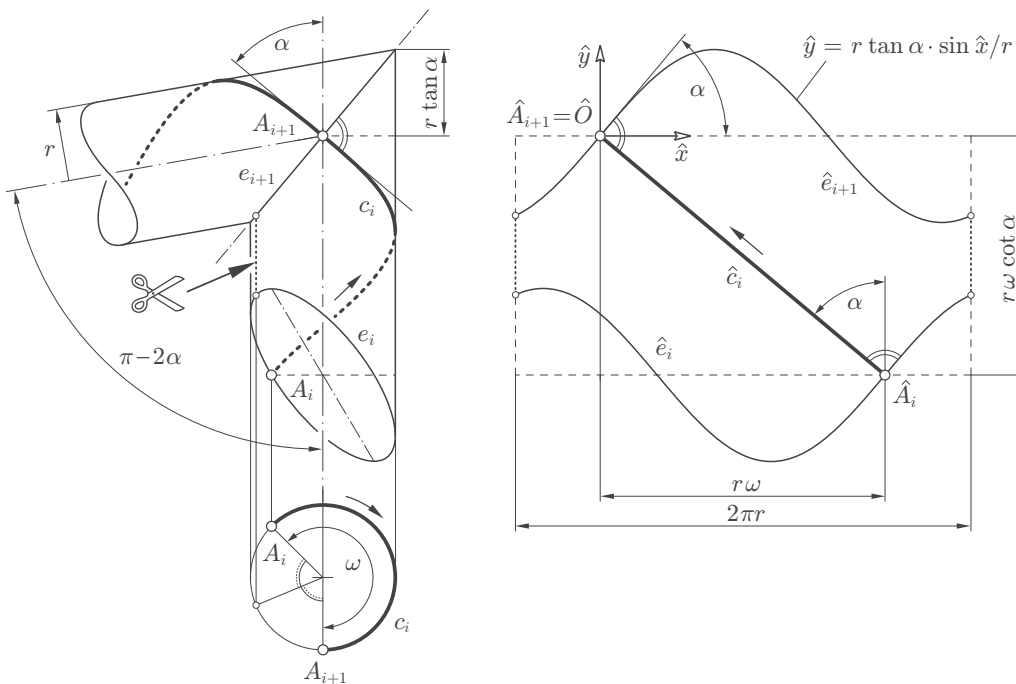


Abbildung 3.2: Zwei aufeinanderfolgende Schraublinienbögen c_i, c_{i+1} eines Windschiefen C^2 -Kreises und die Abwicklung des Trägerdrehzylinders samt der Schraublinie c_i und der Schnittkurve e_{i+1} mit dem Trägerdrehzylinder des angrenzenden Schraublinienbogens c_{i+1} in die Ebene.

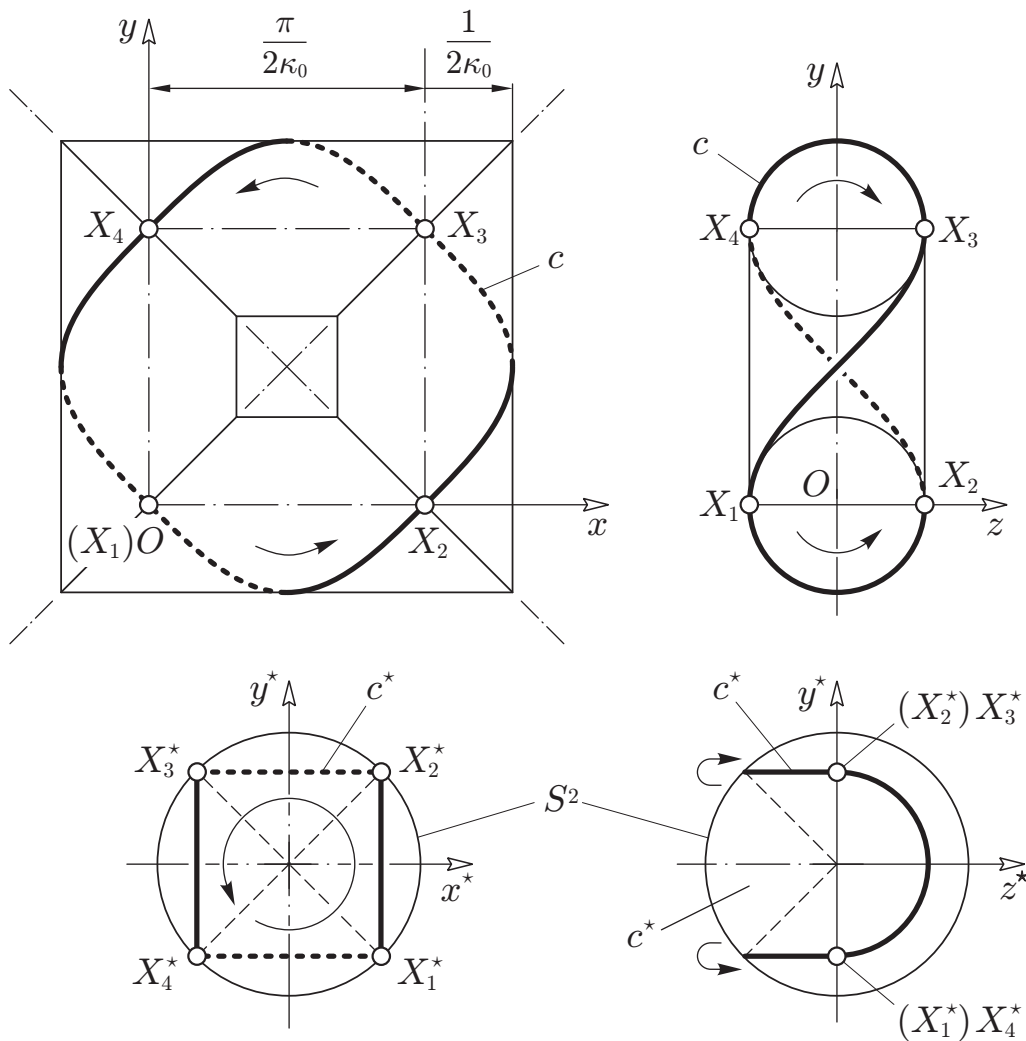


Abbildung 3.3: Gewundener C^2 -Kreis c , zusammengesetzt aus vier Schraublinienbögen, deren Achsenpolygon ein Quadrat, also eben ist, in zwei Normalrissen samt sphärischem Tangentenbild c^* .

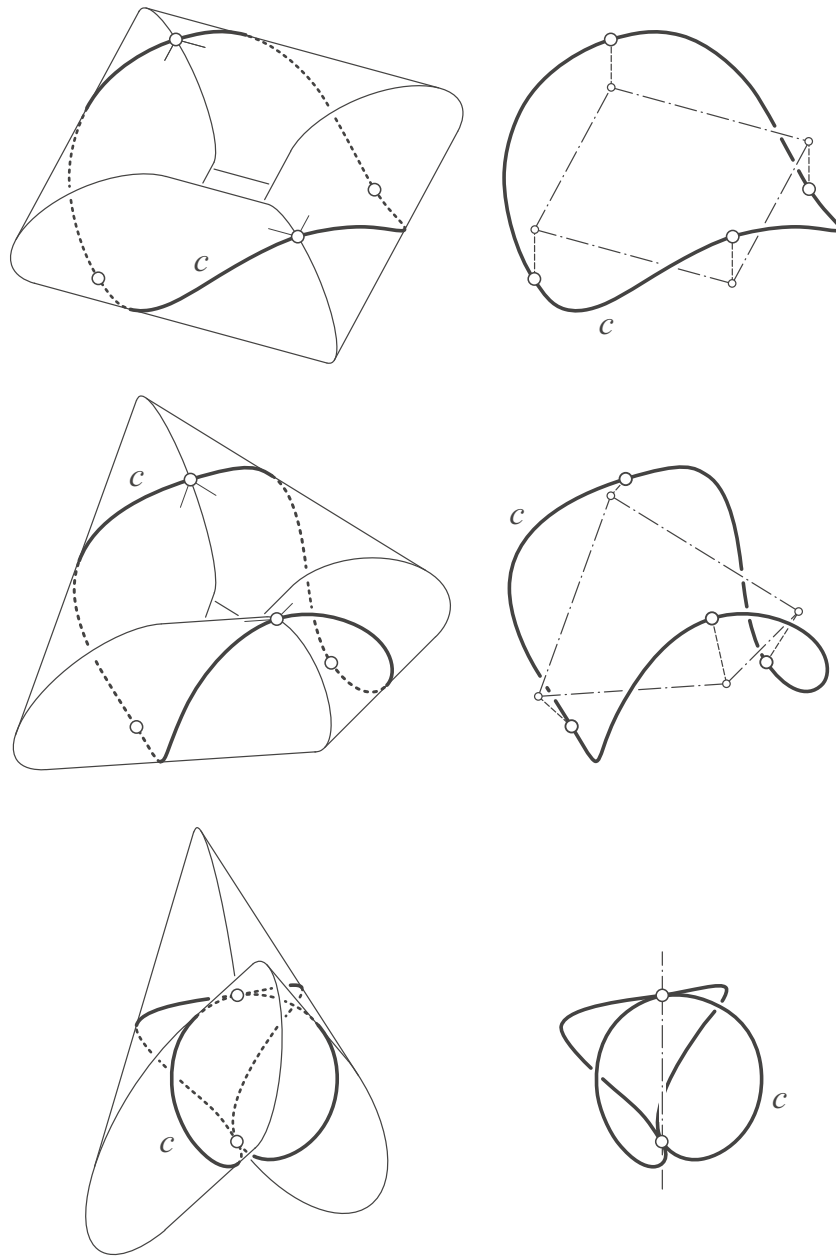


Abbildung 3.4: Gewundene C^2 -Kreise c , zusammengesetzt aus vier Schraublinienbögen samt der Verschneidung ihrer jeweiligen Trägerdrehzylinder.

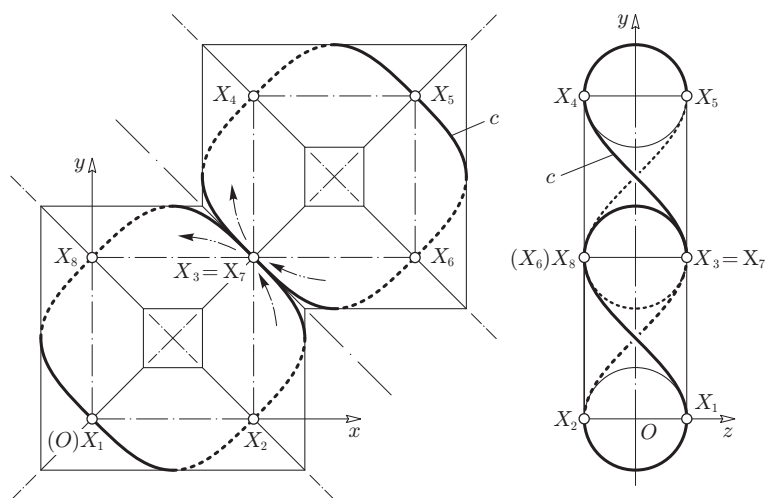


Abbildung 3.5: Gewundener C^2 -Kreis c , zusammengesetzt aus sechs Schraublinienbögen, deren Achsenpolygon eben ist, in zwei Normalrissen. c besitzt einen Selbstberührungspunkt $X_3 = X_7$.

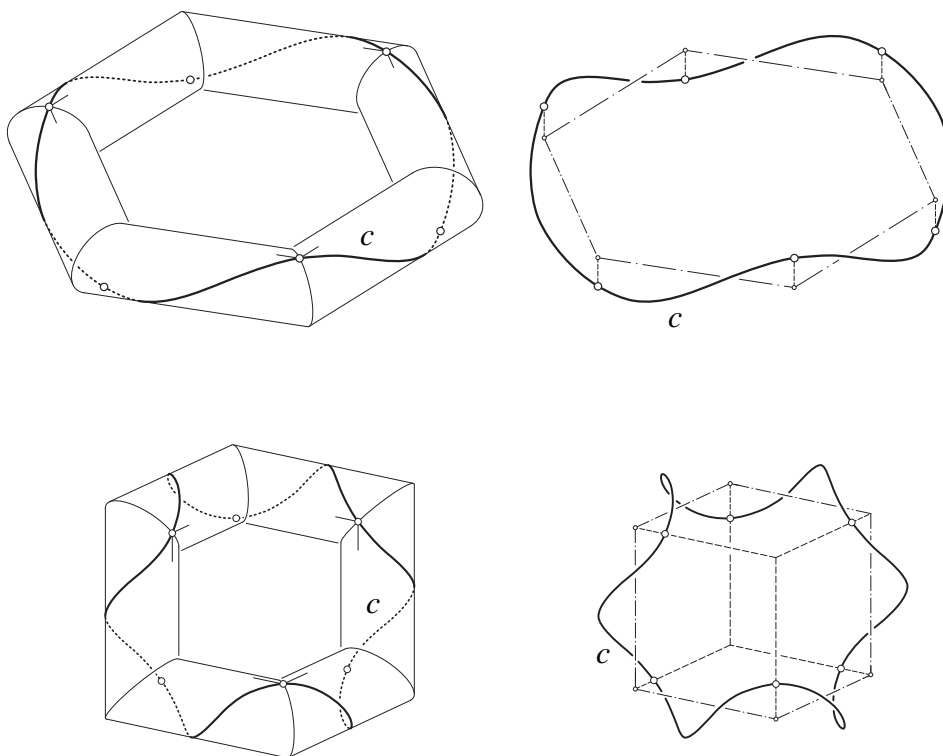


Abbildung 3.6: Gewundene C^2 -Kreise c , jeweils zusammengesetzt aus sechs Schraublinienbögen, mit ebenem beziehungsweise aus Kanten eines Würfels zusammengesetztem Achsenpolygon.

3.2 Windschiefe und Gewundene Kreise zu einem sphärischen Tangentenbild c^* , dessen Grundriss vorgegeben ist

Wie im Abschnitt 3.1 diskutieren wir in den folgenden Abschnitten 3.2 und 3.3 Windschiefe und Gewundene Kreise $c \subset \mathbb{E}^3$ zu vorgegebenem sphärischem Tangentenbild c^* . In Abschnitt 3.2 werden spezielle Parameteransätze für c^* zu konkreten Beispielen – sogar auch der Differenzierbarkeitsklasse C^ω – führen. Den Ausgangspunkt der Betrachtungen in Abschnitt 3.3 bildet eine spezielle sphärische Kurve c^* , die interessante differentialgeometrische Deutungen zulässt und insbesondere die Konstruktion eines Windschiefen Kreises c mit asymptotischem Kreispaar ermöglicht.

3.2.1 Parameterdarstellung des sphärischen Tangentenbildes c^*

Im Folgenden wollen wir den Ansatz für c^* formulieren: Wir setzen dazu die Kurve c^* durch ihren Grundriss \bar{c}^* bezüglich einer beliebigen Großkreisebene π_1 (in einem kartesischen xyz -Koordinatensystem als xy -Ebene gewählt) der Sphäre S^2 (mit Mittelpunkt $O(0,0,0)$) an. Hierbei sei \bar{c}^* in Polarkoordinaten (r, φ) beschrieben, also durch Vorgabe einer Radiusfunktion $r = r(\varphi)$ in Abhängigkeit von dem zur positiven x -Achse gemessenen Winkel φ , mit der Einschränkung $|r(\varphi)| \leq 1$. Diese Forderungen werden durch die Polarkoordinatendarstellung

$$\bar{c}^* : r(\varphi) =: \cos f(\varphi), \quad \varphi \in I \subseteq \mathbb{R} \quad (3.1)$$

mit (vorerst) beliebiger, auf den Polarwinkel φ bezogener, C^k -Funktion ($k \geq 1$)

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto f(\varphi)$$

realisiert. Als Kurve in der Ebene $\pi_1 : z = 0$ lässt sich \bar{c}^* nun im zugehörigen kartesischen xy -Koordinatensystem wie folgt parametrisieren:

$$\bar{c}^* : \bar{\mathbf{x}}^*(\varphi) = \begin{pmatrix} \bar{x}^*(\varphi) \\ \bar{y}^*(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos f(\varphi) \cdot \cos \varphi \\ \cos f(\varphi) \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in I. \quad (3.2)$$

Hierbei liegt der Mittelpunkt der Trägersphäre S^2 von c^* im Koordinatenursprung $O(0,0,0) \in \pi_1$.

Nun erhalten wir die Kurve c^* durch Orthogonalprojektion von \bar{c}^* aus der "Äquatorebene" $\pi_1 : z = 0$ heraus auf die Sphäre S^2 . Im kartesischen

xyz -Koordinatensystem setzen wir daher ausgehend von (3.2) die Parameterdarstellung $\mathbf{r}^*(\varphi) = (x^*(\varphi), y^*(\varphi), z^*(\varphi))$ der Kurve $c^* \subset S^2$ an als

$$\mathbf{r}^*(\varphi) =: \begin{pmatrix} \cos f(\varphi) \cos \varphi \\ \cos f(\varphi) \sin \varphi \\ g(\varphi) \end{pmatrix}, \varphi \in I \quad (3.3)$$

mit einer C^k -Funktion ($k \geq 1$) $g(\varphi)$, $\varphi \in I$, welche der Bedingung

$$1 = \mathbf{r}^*(\varphi)^2 = \cos^2 f(\varphi) + g(\varphi)^2 \quad \forall \varphi \in I$$

genügt.

Die Funktion $g(\varphi)$ in (3.3) ist also durch $f(\varphi)$ – zunächst zweideutig – bestimmt gemäß der Beziehung

$$g(\varphi)^2 = 1 - \cos^2 f(\varphi) = \sin^2 f(\varphi),$$

also $g(\varphi) = \pm \sin f(\varphi)$. Wir wählen hier $g(\varphi)$ als die C^k -Funktion ($k \geq 1$)

$$g(\varphi) := \sin f(\varphi). \quad (3.4)$$

Eine Beispielklasse sphärischer C^k -Kurven $c^* \subset S^2$ ($k \geq 1$) mit Parameterdarstellung (3.3) ist dann mit (3.4) gegeben durch

$$c^* : \mathbf{r}^*(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos f(\varphi) \cdot \cos \varphi \\ \cos f(\varphi) \cdot \sin \varphi \\ \sin f(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in I. \quad (3.5)$$

Wir nennen die C^k -Funktion $f : I(\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto f(\varphi)$ ($k \geq 1$) im Folgenden die “Basisfunktion” der sphärischen Kurve c^* gemäß (3.5).

Für die weiteren Betrachtungen bestimmen wir im folgenden Teilabschnitt den Tangentenvektor und die Bogenlänge von c^* gemäß (3.5).

3.2.2 Regularität und Bogenlänge von c^*

Der Tangentenvektor $\dot{\mathbf{x}}^* := \frac{d\mathbf{x}^*}{d\varphi}$ von c^* ergibt sich gemäß (3.5) mit $\dot{f}(\varphi) := \frac{df}{d\varphi}$ zu

$$\dot{\mathbf{x}}^*(\varphi) = \begin{pmatrix} -\dot{f}(\varphi) \cdot \sin f(\varphi) \cdot \cos \varphi - \cos f(\varphi) \cdot \sin \varphi \\ -\dot{f}(\varphi) \cdot \sin f(\varphi) \cdot \sin \varphi + \cos f(\varphi) \cdot \cos \varphi \\ \dot{f}(\varphi) \cdot \cos f(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Für die Bogenlänge s^* der Kurve c^* gilt gemäß (3.6)

$$\left(\frac{ds^*}{d\varphi}\right)^2 = (\dot{\mathbf{x}}^*)^2 = \dot{f}^2 + \cos^2 f,$$

also

$$\frac{ds^*}{d\varphi} = |\dot{\mathbf{x}}^*(\varphi)| = \sqrt{\dot{f}(\varphi)^2 + \cos^2 f(\varphi)}. \quad (3.7)$$

Damit ist c^* genau dann eine *reguläre* C^1 -Kurve, wenn $\mathbf{o} \neq \dot{\mathbf{x}}^*$, also gemäß (3.7)

$$\dot{f}(\varphi)^2 + \cos^2 f(\varphi) > 0 \quad (3.8)$$

zu gegebener Funktion $f(\varphi)$ ist. Nun ist

$$|\dot{\mathbf{x}}^*(\varphi)|^2 = \dot{f}(\varphi)^2 + \cos^2 f(\varphi) = 0$$

genau dann, wenn für bestimmtes $\varphi = \varphi_0 \in I$

$$\dot{f}(\varphi_0) = 0 \quad \text{und zugleich} \quad \cos f(\varphi_0) = 0 \quad (3.9)$$

gilt, wobei die letzte Gleichung $f(\varphi_0) \in \left\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$ bedeutet.

Mit (3.9) ist demnach die sphärische Kurve c^* mit der Parameterdarstellung (3.5) genau dann eine *reguläre* C^k -Kurve ($k \geq 1$), wenn für alle $\varphi \in I$

$$\dot{f}(\varphi) \neq 0 \quad \text{oder (auch)} \quad f(\varphi) \notin \left\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\} \quad (3.10)$$

ist.

3.2.3 Die Torsion der zu c^* gehörigen Windschiefen Kreise

Als Nächstes werden wir die Torsion τ einer Raumkurve c konstanter Krümmung $\kappa_0 > 0$ berechnen, die durch ihr sphärisches Tangentenbild c^* in folgendem Sinne gegeben ist:

Das sphärische Tangentenbild c^* der Raumkurve c sei in einer Parameterdarstellung $\mathbf{r}^*(\varphi) \in C^k$ ($k \geq 2$) bezüglich eines allgemeinen Parameters $\varphi \in I \subseteq \mathbb{R}$ gegeben, φ sei im Allgemeinen weder die Bogenlänge s von c , noch die Bogenlänge s^* von c^* . Wir berechnen nun aus $\mathbf{r}^*(\varphi)$ die Torsion τ der Raumkurve c mit dem durch $\mathbf{r}^*(\varphi)$ gegebenen sphärischen Tangentenbild c^* von c .

Bezüglich der Bogenlänge s berechnet sich die Torsion eines Windschiefen Kreises c nach [13], S. 156 mit $\kappa(s) = \kappa_0$ zu

$$\tau(s) = \frac{\det(\mathbf{r}'(s), \mathbf{r}''(s), \mathbf{r}'''(s))}{\kappa_0^2}, \quad (3.11)$$

wobei $\kappa_0 > 0$ die konstante Kurvenkrümmung von c bezeichne. Gemäß der Definition des sphärischen Tangentenbildes ist

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{x}^*$$

und damit

$$\mathbf{r}'' = \frac{d\mathbf{x}'}{ds} = \frac{d\mathbf{x}'}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds},$$

also wegen

$$\frac{ds^*}{d\varphi} = |\dot{\mathbf{x}}^*| \quad \text{und} \quad \frac{ds^*}{ds} = \left| \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{x}'}{ds} \right| = |\mathbf{r}''| = \kappa_0 \quad (> 0)$$

insgesamt:

$$\mathbf{r}'' = \kappa_0 \cdot \frac{\dot{\mathbf{x}}^*}{|\dot{\mathbf{x}}^*|}. \quad (3.12)$$

Die Differentiation von (3.12) nach der Bogenlänge s ergibt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''' &= \frac{d\mathbf{r}''}{ds} = \frac{d\mathbf{r}''}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \kappa_0^2 \cdot \frac{1}{|\dot{\mathbf{x}}^*|} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}^*}{|\dot{\mathbf{x}}^*|} \right) \\ &= \frac{\kappa_0^2}{|\dot{\mathbf{x}}^*|} \cdot \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{|\dot{\mathbf{x}}^*|} \right) \cdot \dot{\mathbf{x}}^* + \frac{1}{|\dot{\mathbf{x}}^*|} \cdot \ddot{\mathbf{x}}^* \right]. \end{aligned}$$

Die Torsion $\tau = \det(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')/\kappa_0^2$ berechnet sich damit in Abhängigkeit vom allgemeinen Kurvenparameter φ der Raumkurve c und von der Parameterdarstellung $\mathbf{r}^*(\varphi)$ des sphärischen Tangentenbildes c^* von c zu

$$\tau(\varphi) = \frac{1}{\kappa_0^2} \det \left(\mathbf{r}^*, \kappa_0 \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}^*}{|\dot{\mathbf{r}}^*|}, \frac{\kappa_0^2}{|\dot{\mathbf{r}}^*|} \cdot \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}^*|} \right) \cdot \dot{\mathbf{r}}^* + \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}^*|} \cdot \ddot{\mathbf{r}}^* \right] \right).$$

Dies liefert schließlich die gesuchte Formel

$$\tau(\varphi) = \kappa_0 \cdot \frac{\det \left(\mathbf{r}^*(\varphi), \dot{\mathbf{r}}^*(\varphi), \ddot{\mathbf{r}}^*(\varphi) \right)}{|\dot{\mathbf{r}}^*(\varphi)|^3}. \quad (3.13)$$

Diese Formel (3.13) werden wir nun verwenden, um die Torsion einer konstant gekrümmten Raumkurve c zu speziell vorgegebenem sphärischem Tangentenbild c^* gemäß (3.5) zu bestimmen:

Für die mit einer allgemeinen C^k -Funktion $f(\varphi)$ ($k \geq 2$) angesetzte Parameterdarstellung (3.5) der sphärischen Kurve c^* erhält man durch Differentiation die Formel (3.6) und weiter

$$\ddot{\mathbf{r}}^*(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 \sin \varphi \cdot \sin f \cdot \dot{f} - \cos \varphi \cdot \cos f \cdot \dot{f}^2 - \cos \varphi \cdot (\cos f + \sin f \cdot \ddot{f}) \\ -2 \cos \varphi \cdot \sin f \cdot \dot{f} - \sin \varphi \cdot \cos f \cdot \dot{f}^2 - \sin \varphi \cdot (\cos f + \sin f \cdot \ddot{f}) \\ -\sin f \cdot \dot{f}^2 + \cos f \cdot \ddot{f} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Durch Einsetzen von (3.5), (3.6), (3.7) und (3.14) in (3.13) folgt insgesamt die Formel

$$\tau(\varphi) = \frac{\kappa_0}{2} \cdot \frac{4 \sin f(\varphi) \cdot \dot{f}(\varphi)^2 + \cos f(\varphi) \cdot [\sin(2f(\varphi)) + 2\ddot{f}(\varphi)]}{\sqrt{\dot{f}(\varphi)^2 + \cos^2 f(\varphi)}^3}. \quad (3.15)$$

Alle *Henkelpunkte* von c , also genau die Punkte mit verschwindender Torsion $\tau(\varphi)$, sind demnach bestimmt durch die Parameterwerte φ , die

$$4 \sin f(\varphi) \cdot \dot{f}(\varphi)^2 + \cos f(\varphi) \cdot [\sin(2f(\varphi)) + 2\ddot{f}(\varphi)] = 0 \quad (3.16)$$

und die Regularitätsbedingung (3.10) erfüllen.

Die Ermittlung der *Henkelpunkte* der Raumkurve c aus (3.16) muss zu speziell vorgegebener Basisfunktion $f(\varphi)$ jeweils einzeln diskutiert werden. Im

folgenden Abschnitt 3.2.4 wird uns zum Beispiel zu jeder der Funktionen $f(\varphi) = m \cdot \varphi$ mit $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Bestimmung *aller* Henkelpunkte der zu f gehörenden Raumkurven c konstanter Krümmung κ_0 gelingen (Satz 3.2).

3.2.4 Windschiefe und Gewundene Kreise zu vorgegebenem sphärischem Tangentenbild mit einer Basisfunktion $f(\varphi) = m\varphi$

In den folgenden Abschnitten 3.2.4 bis 3.2.6 werden wir als konkrete Beispiele verschiedene Klassen von Windschiefen und Gewundenen Kreisen vorstellen, deren sphärisches Tangentenbild c^* gemäß der Konstruktion in den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.2 angesetzt wird, wobei die Basisfunktion $f(\varphi)$ in der Parameterdarstellung (3.5) von c^* in unterschiedlicher Weise – gemäß (3.17) beziehungsweise (3.44) beziehungsweise (3.68) – gewählt wird. Wir wählen zunächst, für den vorliegenden Abschnitt 3.2.4, in der allgemeinen Darstellung aus Abschnitt 3.2.1 die spezielle Klasse von Basisfunktionen

$$f(\varphi) = m\varphi, \quad (3.17)$$

mit $\varphi \in \mathbb{R}$ und einer Konstante $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Bemerkt sei hierzu, dass in (3.17) die – hier ausgeschlossene – Wahl $m = 0$, also $f(\varphi) \equiv 0$, gemäß (3.5) den trivialen Fall liefert, dass das sphärische Tangentenbild c^* in einem Großkreis, nämlich in dem Äquatorkreis von S^2 enthalten ist. Der zugehörige Windschiefe Kreis c ist damit in einem Kreis enthalten.

Die Parameterdarstellung des sphärischen Tangentenbildes c^* lautet dann gemäß (3.17) und (3.5)

$$\mathbf{r}^*(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(m\varphi) \cdot \cos \varphi \\ \cos(m\varphi) \cdot \sin \varphi \\ \sin(m\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in I \subseteq \mathbb{R}. \quad (3.18)$$

Bemerkung: Die zu c^* gemäß (3.1) mit (3.17) gehörige Grundrisskurve \bar{c}^* in der Äquatorebene $z = 0$ – mit der Polarkoordinatendarstellung $r = r(\varphi) := \cos(m\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$ – ist nach [6], S. 336 für jedes $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine “Rosenkurve” mit dem Umkreisradius 1.

Geschlossene sphärische Tangentenbilder c^* der Klasse C^ω

Wir untersuchen nun die Kurve c^* mit der Parameterdarstellung (3.18) auf Geschlossenheit und Zugehörigkeit zur Differenzierbarkeitsklasse C^ω in Abhängigkeit von der Konstante $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

Wir wählen dazu in der Parameterdarstellung $\mathbf{r}^*(\varphi)$ gemäß (3.18) den Definitionsbereich $I = \mathbb{R}$. Nun ist c^* eine geschlossene C^ω -Kurve, wenn ein $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert mit

$$\mathbf{r}^*(\varphi + p) = \mathbf{r}^*(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in I = \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

Bezüglich (3.18) bedeutet (3.19), dass dann für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\cos(m\varphi + mp) = \cos \varphi \quad \text{und} \quad \sin(m\varphi + mp) = \sin \varphi \quad (3.20)$$

sowie

$$\cos(\varphi + p) = \cos \varphi \quad \text{und} \quad \sin(\varphi + p) = \sin \varphi \quad (3.21)$$

gilt. Da ja nach Voraussetzung $mp \neq 0$ gilt, ist (3.20) erfüllt, wenn mp von der Gestalt

$$mp = 2q\pi, \quad q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (3.22)$$

ist; (3.21) gilt, wenn p die Darstellung

$$p = 2q'\pi, \quad q' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (3.23)$$

hat. Die Gleichungen (3.22) und (3.23) gelten, wenn die Zahl $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ von der Gestalt

$$m = \frac{q}{q'} \quad \text{mit} \quad q, q' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (3.24)$$

also $m \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist. Insgesamt lässt sich mit (3.23) und (3.24) folgender Satz formulieren:

Satz 3.1 *Die sphärische Kurve $c^* \subset S^2$ mit der Parameterdarstellung*

$$\mathbf{r}^*(\varphi) =: \begin{pmatrix} \cos(m\varphi) \cdot \cos \varphi \\ \cos(m\varphi) \cdot \sin \varphi \\ \sin(m\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R} \quad (3.25)$$

ist für jedes $m \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ eine nichtebene, geschlossene C^ω -Kurve. Hat dann m in gekürzter Form die Darstellung

$$m = \frac{q}{q'} \quad (q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, q' \in \mathbb{N}; q, q' \text{ teilerfremd}), \quad (3.26)$$

so gilt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{r}^*(\varphi) = \mathbf{r}^*(\varphi + 2q'\pi); \quad (3.27)$$

das heißt $p := 2q'\pi$ ist eine Periode von $\mathbf{r}^(\varphi)$.*

Parameterdarstellung der zum sphärischen Tangentenbild c^* gehörigen Windschiefen Kreise c

Für die Bogenlänge s^* der sphärischen Kurve c^* gemäß (3.18) gilt wegen (3.7) und (3.17) mit $\dot{f}(\varphi) = m$ nun

$$\frac{ds^*}{d\varphi} = \sqrt{m^2 + \cos^2(m\varphi)}. \quad (3.28)$$

Fassen wir nun die sphärische Kurve c^* mit Darstellung (3.18) als sphärisches Tangentenbild einer Raumkurve konstanter Krümmung $\kappa_0 > 0$ auf, so folgt aus Satz 2.1, Formel (2.3) oder auch mit (2.1), dass die Bogenlänge s von c zur Bogenlänge s^* des zugehörigen sphärischen Tangentenbildes c^* in der einfachen Beziehung

$$\frac{ds^*}{ds} = \left| \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \right| = |\mathbf{x}''(s)| = \kappa_0, \quad (3.29)$$

also

$$\frac{ds^*}{ds} = \kappa_0 \quad (3.30)$$

steht. Außerdem ist dann

$$\mathbf{x}^* = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{d\varphi} \cdot \left(\frac{ds^*}{d\varphi} \right)^{-1} \cdot \kappa_0$$

und folglich

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\varphi} = \frac{1}{\kappa_0} \cdot \mathbf{x}^* \cdot \frac{ds^*}{d\varphi}, \quad (3.31)$$

was für unsere Basisfunktion $f(\varphi) = m\varphi$ mit (3.18) und (3.28) zu

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\varphi} = \frac{1}{\kappa_0} \begin{pmatrix} \cos(m\varphi) \cdot \cos \varphi \\ \cos(m\varphi) \cdot \sin \varphi \\ \sin(m\varphi) \end{pmatrix} \cdot \sqrt{m^2 + \cos^2(m\varphi)} \quad (3.32)$$

wird. Die Integration von (3.32) ergibt die folgende auf den Parameter φ (= Polarwinkel im Grundriss von c^*) bezogene Parameterdarstellung $\mathbf{x}(\varphi)$ der zum sphärischen Tangentenbild c^* gemäß (3.18) gehörigen Raumkurve c konstanter Krümmung $\kappa_0 > 0$ zur Basisfunktion $f(\varphi) = m\varphi$:

$$c : \quad \mathbf{x}(\varphi) = \frac{1}{\kappa_0} \int_0^\varphi \begin{pmatrix} \cos(mt) \cdot \cos t \\ \cos(mt) \cdot \sin t \\ \sin(mt) \end{pmatrix} \cdot \sqrt{m^2 + \cos^2(mt)} dt, \quad (3.33)$$

mit Definitionsbereich $\varphi \in I \subseteq \mathbb{R}$.

Nun betrachten wir die Koordinatenfunktionen obiger Parameterdarstellung (3.33) von c im Hinblick auf geschlossene Integrierbarkeit:

Die vom Parameter m abhängigen Integrale in den Koordinatenfunktionen $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$, jeweils in der unbestimmten Form

$$\int \cos(mt) \cdot \cos t \cdot \sqrt{m^2 + \cos^2(mt)} dt$$

beziehungsweise

$$\int \cos(mt) \cdot \sin t \cdot \sqrt{m^2 + \cos^2(mt)} dt$$

lassen sich für beliebigen Parameter $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *nicht* geschlossen mittels elementarer Funktionen, etwa durch geschickte Substitution, darstellen. Zumindest existieren für alle $m \in \mathbb{R}$ die Integrale für die Koordinatenfunktionen $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$ aufgrund der stetigen Integranden und wegen

$$m^2 + \cos^2(mt) \geq 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $m \in \mathbb{R}$.

Die Koordinatenfunktion $z(\varphi)$ in (3.33) lässt sich allerdings stets elementar darstellen. Mittels der Substitution

$$u(t) := \cos(mt)$$

erhält man nämlich für $m \neq 0$ zunächst

$$\begin{aligned} \int \sin(mt) \sqrt{m^2 + \cos^2(mt)} dt &= -\frac{1}{m} \int \sqrt{m^2 + u^2} du \\ &= -\frac{1}{2m} \left[u \sqrt{m^2 + u^2} + m^2 \operatorname{arsinh} \frac{u}{m} \right]. \end{aligned}$$

Die Rücksubstitution $u = \cos(mt)$ liefert mit der Abkürzung

$$T(\varphi) := \sqrt{m^2 + \cos^2(m\varphi)} \tag{3.34}$$

für $m \neq 0$ die Beziehung

$$\int \sin(mt) T(t) dt = -\frac{1}{2m} \left[\cos(mt) T(t) + m^2 \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{m} \cos(mt)\right) \right].$$

An der Stelle $t = 0$ nimmt die rechte Seite dieser Gleichung den Wert

$$C := -\frac{1}{2m} \left[\sqrt{m^2 + 1} + m^2 \operatorname{arsinh}\frac{1}{m} \right] \quad (3.35)$$

an; die Koordinatenfunktion $z(\varphi)$ aus (3.33) lässt sich demnach integralfrei darstellen als

$$z(\varphi) = -\frac{1}{2\kappa_0 m} \left[\cos(m\varphi) T(\varphi) + m^2 \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{m} \cos(m\varphi)\right) \right] - \frac{C}{\kappa_0}. \quad (3.36)$$

Unter Vernachlässigung der additiven Konstante $-C/\kappa_0$ in dieser Darstellung von $z(\varphi)$, das heißt bis auf Translation im \mathbb{R}^3 , erhalten wir damit – bis auf Quadraturen in $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$ – folgende Parameterdarstellung $\mathfrak{r}(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi))$, $\varphi \in \mathbb{R}$ des Windschiefen Kreises c mit Krümmung $\kappa_0 > 0$:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= \frac{1}{\kappa_0} \int_0^\varphi \cos(mt) \cdot \cos t \cdot \sqrt{m^2 + \cos^2(mt)} dt, \\ y(\varphi) &= \frac{1}{\kappa_0} \int_0^\varphi \cos(mt) \cdot \sin t \cdot \sqrt{m^2 + \cos^2(mt)} dt, \\ z(\varphi) &= -\frac{1}{2\kappa_0 m} \left[\cos(m\varphi) T(\varphi) + m^2 \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{m} \cos(m\varphi)\right) \right], \end{aligned} \quad (3.37)$$

mit $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $T(\varphi)$ gemäß (3.34).

Anmerkung: Für $\varphi = 0$ gehören zu obiger Parameterdarstellung (3.37) des Windschiefen Kreises c nach (3.32) die “Anfangsbedingungen”

$$\mathfrak{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{C}{\kappa_0} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{d\mathfrak{r}}{d\varphi}(0) = \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{\kappa_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit Konstante C gemäß (3.35).

Eine Symmetrieeigenschaft der Windschiefen Kreise c

Zur Diskussion etwaiger Symmetrieeigenschaften der zu verschiedenen Werten $\kappa_0 > 0$ gehörigen Schar von Raumkurven c mit Parameterdarstellung (3.37) untersuchen wir nun die Koordinatenfunktionen von (3.37):

Wegen des *geraden* Integranden

$$\cos(mt) \cos t \sqrt{m^2 + \cos^2(mt)}$$

in $x(\varphi)$ und des *ungeraden* Integranden

$$\cos(mt) \sin t \sqrt{m^2 + \cos^2(mt)}$$

in $y(\varphi)$ gilt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\int_0^\varphi \cos(mt) \cos t \sqrt{m^2 + \cos^2(mt)} dt = - \int_0^{-\varphi} \cos(mt) \cos t \sqrt{m^2 + \cos^2(mt)} dt$$

beziehungsweise

$$\int_0^\varphi \cos(mt) \sin t \sqrt{m^2 + \cos^2(mt)} dt = \int_0^{-\varphi} \cos(mt) \sin t \sqrt{m^2 + \cos^2(mt)} dt$$

und damit für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$x(\varphi) = -x(-\varphi) \quad \text{und} \quad y(\varphi) = y(-\varphi) . \quad (3.38)$$

Die Koordinatenfunktion $z(\varphi)$ aus (3.37) mit (3.34) ist offenbar eine *gerade* Funktion in φ , also ist

$$z(\varphi) = z(-\varphi) . \quad (3.39)$$

für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.

Ergebnis: Insgesamt bedeuten die drei Funktionalgleichungen in (3.38) und (3.39), dass die Raumkurve c mit der Parameterdarstellung (3.37) symmetrisch zur Ebene $x = 0$, also zur yz -Ebene verläuft.

Die Torsion der Windschiefen Kreise c

Die allgemeine Formel (3.15) werten wir nun für das spezielle sphärische Tangentenbild c^* der Parameterdarstellung (3.18) aus: Für $f(\varphi) = m\varphi$ berechnet sich gemäß (3.15) die Torsion der Raumkurven c mit Parameterdarstellung (3.37) zu

$$\tau(\varphi) = \kappa_0 \cdot \frac{\left(2m^2 + \cos^2(m\varphi)\right) \cdot \sin(m\varphi)}{\sqrt{m^2 + \cos^2(m\varphi)}^3}. \quad (3.40)$$

Ist es nun noch möglich, die Torsion auf die Bogenlänge s der Raumkurve c zu beziehen, das heißt die zweite natürliche Gleichung des Windschiefen Kreises c zu ermitteln? Dazu betrachten wir die vorausgesetzten, aus der Konstanz der Raumkurvenkrümmung $\kappa = \kappa_0$ resultierenden Beziehungen

$$\frac{ds^*}{d\varphi} = \sqrt{m^2 + \cos^2(m\varphi)} \quad \text{und} \quad \frac{ds^*}{ds} = \kappa_0.$$

Es ist allgemein $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{d\varphi}$, was hier

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{\kappa_0} \sqrt{m^2 + \cos^2(m\varphi)} \quad (3.41)$$

bedeutet. Die Differentialgleichung (3.41) für $s(\varphi)$ ist aber im Fall $m \neq 0$ nicht elementar integrierbar, ihre allgemeine Lösung $s(\varphi)$ wird dann durch ein elliptisches Integral und eine additive Konstante dargestellt. Somit ist φ auch nicht lokal mittels elementarer Funktionen von s darstellbar, damit auch nicht die Torsion τ in (3.40). Die natürliche Gleichung $\tau = \tau(s)$ der konstant gekrümmten Raumkurve c lässt sich somit nicht mittels elementarer Funktionen angeben.

Die Henkelpunkte der Windschiefen Kreise c

Aus der Formel (3.40) für die Torsion τ der Raumkurve c konstanter Krümmung κ_0 gemäß (3.37) ermitteln wir die Henkelpunkte von c , also die Kurvenpunkte mit verschwindender Torsion: Da in (3.40) für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stets

$$2m^2 + \cos^2(m\varphi) > 0 \quad \text{und} \quad m^2 + \cos^2(m\varphi) > 0$$

gilt, verschwindet die Torsion $\tau(\varphi)$ genau für solche Kurvenpunkte $X(\varphi) \in c$, für die

$$\sin(m\varphi) = 0$$

ist. Wegen (3.18) bedeutet dies im zugehörigen sphärischen Tangentenbild c^*

$$z^*(\varphi) = \sin(m\varphi) = 0 . \quad (3.42)$$

Die Bedingung (3.42) beschreibt genau diejenigen Punkte X^* des sphärischen Tangentenbildes $c^* \subset S^2$, die auf dem Äquatorkreis (in der xy -Ebene) liegen. Diese Punkte X^* entsprechen genau den Kurvenpunkten $X \in c$ mit – bezüglich unserem Koordinatensystem – *horizontalen*, also zur xy -Ebene parallelen Tangenten.

Insgesamt lassen sich die Kurvenpunkte $X \in c$ mit verschwindender Torsion, also die Henkelpunkte von c , in folgendem Satz charakterisieren:

Satz 3.2 *Die Henkelpunkte H der in einem kartesischen xyz -Koordinatensystem des \mathbb{E}^3 durch die Parameterdarstellung (3.37) gegebenen Raumkurve c konstanter Krümmung sind genau die Kurvenpunkte mit zur Ebene $z = 0$ parallelen Tangenten.*

Demnach sind insbesondere die Punkte der Raumkurve c mit vertikaler Tangente (siehe dazu die folgenden Abbildungen!) *keine* Henkelpunkte. Somit sind auch die in den folgenden Abbildungen 3.7, 3.9 und 3.13 augenscheinlich auftretenden Selbstberührungspunkte von Kurven c zu diversen Basisfunktionen $f(\varphi) = m\varphi$, mit $m \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, keine Henkelpunkte.

Die folgenden Abbildungen 3.7 bis 3.13 zeigen die Gestalt der zur Basisfunktion $f(\varphi) = m\varphi$ gehörenden Windschiefen Kreise c gemäß (3.33) beziehungsweise (3.37) für spezielle Werte $m \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, für die nach Satz 3.1 die zugehörigen (teilweise im Grundriss in die Äquatorebene $z = 0$ abgebildeten) sphärischen Tangentenbilder c^* gemäß (3.18) geschlossene nichtebene C^ω -Kurven der Sphäre S^2 sind. Nach [6], S. 336 sind die Grundrisskurven der sphärischen Tangentenbilder c^* gemäß (3.18) für jedes $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ "Rosenkurven". Experimentell wird die Vermutung nahegelegt, dass diese Windschiefen Kreise c für geeignete Definitionsbereiche $I \subset \mathbb{R}$ sogar Gewundene Kreise sind, das heißt ihre nach Satz 3.5 geschlossenen sphärischen Tangentenbilder $c^* \in C^\omega$ erfüllen jeweils auch die Schwerpunktsbedingung (2.4) aus Satz 2.1.

Die Abbildungen 3.8 - 3.13 wurden jeweils durch numerische Integration von (3.33) mittels des Computeralgebrapaketes MATHEMATICA erzeugt, welches keine Sichtbarkeiten berücksichtigt. Experimentell wird die Vermutung nahegelegt, dass (3.33) unter Verwendung der vollständig gekürzten Darstellung

$$m = \frac{q}{q'} \quad (q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, q' \in \mathbb{N}; q, q' \text{ teilerfremd})$$

für den Definitionsbereich

$$I = [0, 2q'\pi]$$

genau eine Kurvendurchlaufung von c beschreibt.

Für die Krümmung κ_0 der Raumkurven c wurde jeweils $\kappa_0 = 1$ gesetzt. An dem im Koordinatenursprung $O(0, 0, 0)$ eingezeichneten xyz -Koordinatenkreuz sind auf den Koordinatenachsen die Punkte $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ markiert.

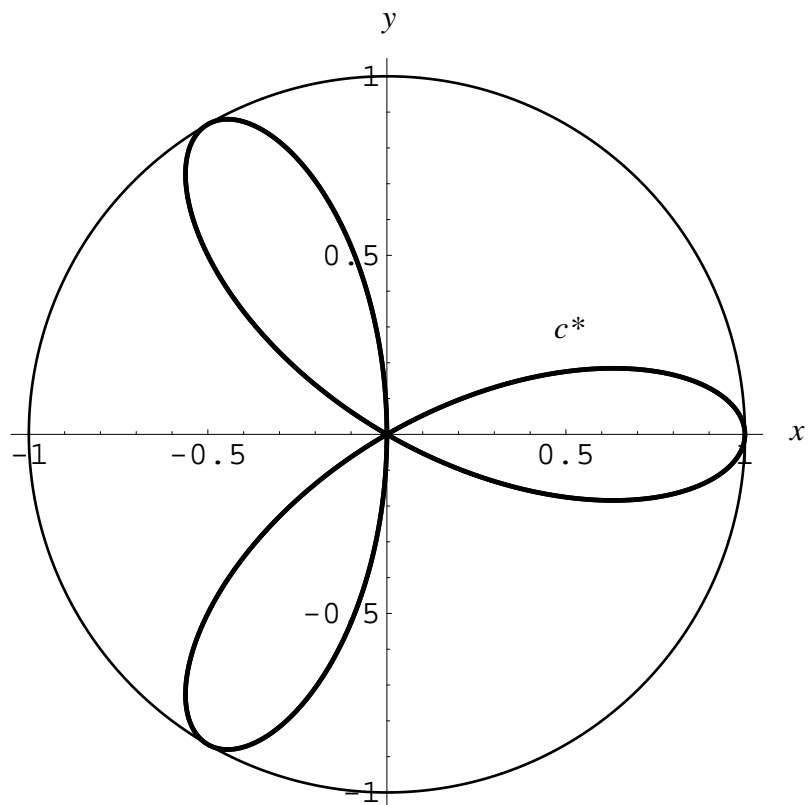


Abbildung 3.7a): Das sphärische Tangentenbild c^* des Gewundenen Kreises c gemäß der Parameterdarstellung (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 3\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Grundriss in die Äquatorebene (xy -Ebene). c^* wird im Grundriss doppelt durchlaufen.

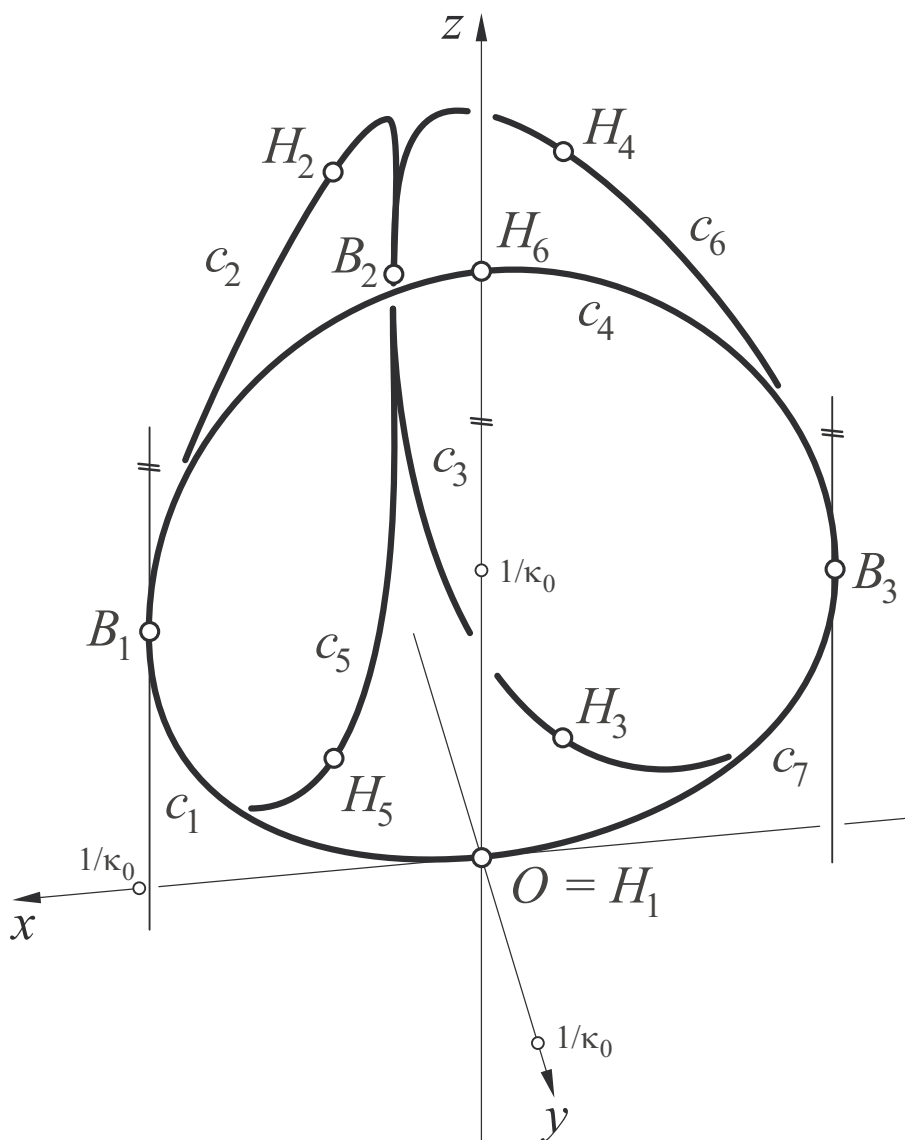


Abbildung 3.7b): Der Gewundene Kreis c gemäß (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 3\varphi$ und dem minimalen Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$.

c besitzt drei Selbstberührungspunkte $B_1 = X(\pi/6) = X(7\pi/6)$, $B_2 = X(\pi/2) = X(3\pi/2)$, $B_3 = X(5\pi/6) = X(11\pi/6)$ und 6 Henkelpunkte $H_j = X(j\pi/3)$, $j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Die Kurvendurchlaufung erfolgt vom Startpunkt $O = H_1$ über den Bogen c_1 nach B_1 , von dort über den Bogen c_2 zum Punkt B_2 , dann weiter über c_3 zu B_3 , von dort über c_4 zum Punkt B_1 , dann über c_5 zu B_2 , weiter über c_6 nach C_3 und über c_7 zurück zum Startpunkt $H_1 = O$.

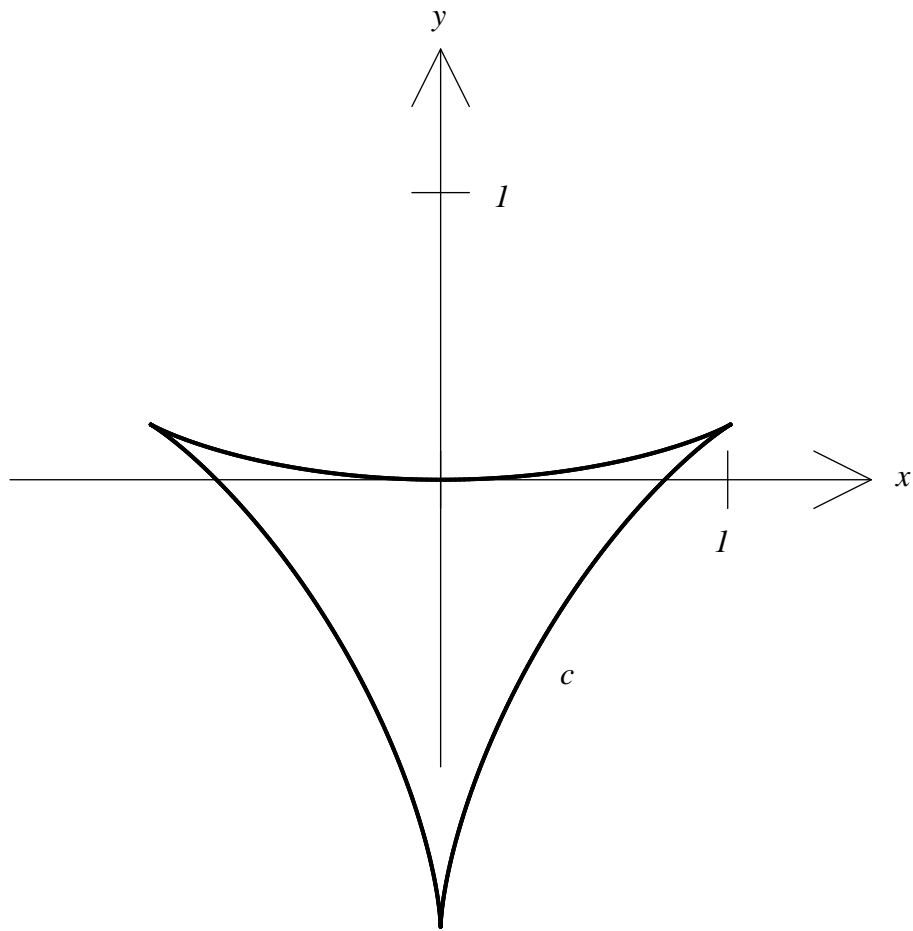


Abbildung 3.7c): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 3\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Grundriss in die xy -Ebene.

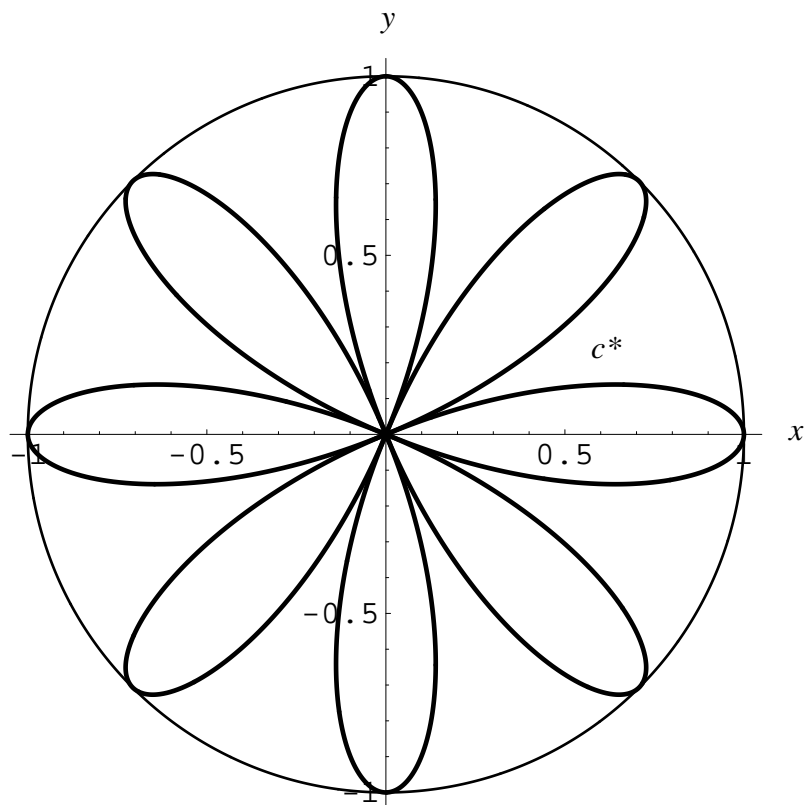


Abbildung 3.8a): Das sphärische Tangentenbild c^* des Gewundenen Kreises c gemäß der Parameterdarstellung (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 4\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Grundriss in die Äquatorebene (xy -Ebene).

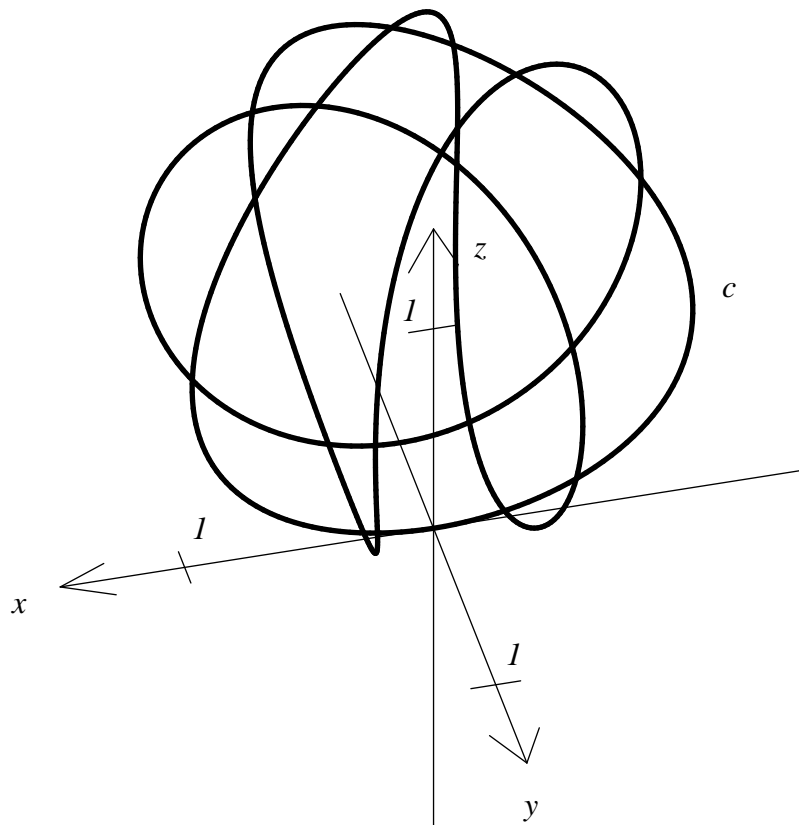


Abbildung 3.8b): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 4\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$.

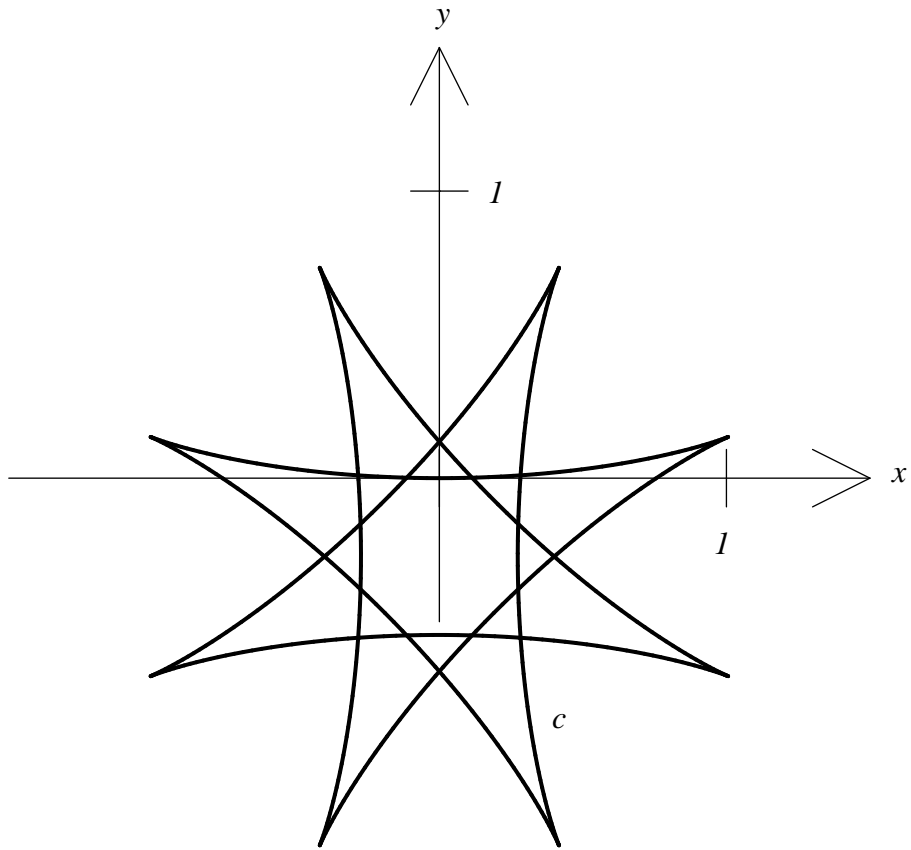


Abbildung 3.8c): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 4\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Grundriss in die xy -Ebene.

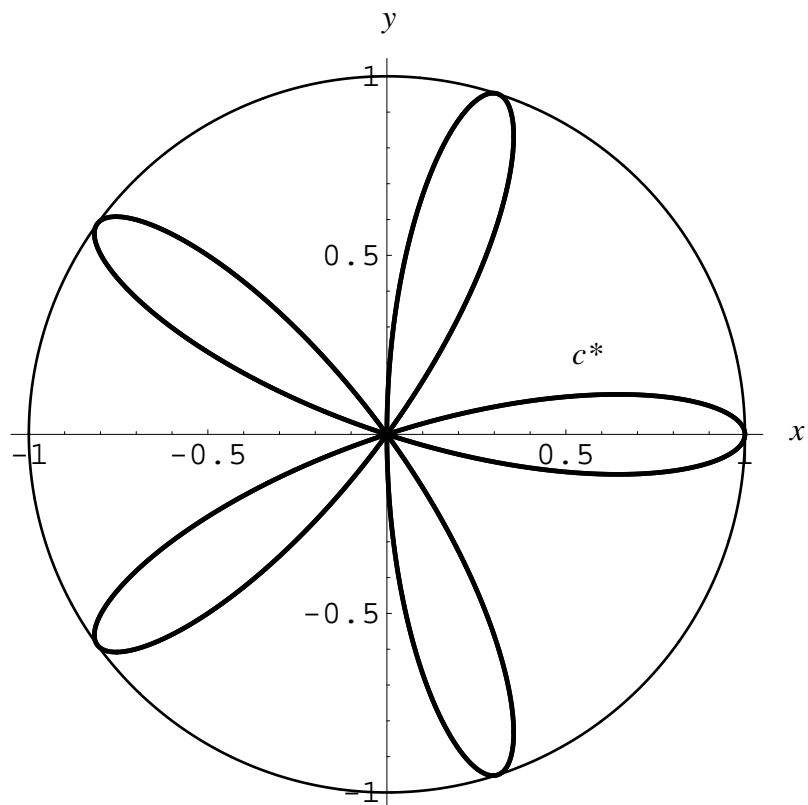


Abbildung 3.9a): Das sphärische Tangentenbild c^* des Gewundenen Kreises c gemäß der Parameterdarstellung (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 5\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Grundriss in die Äquatorebene (xy -Ebene). c^* wird im Grundriss doppelt durchlaufen.

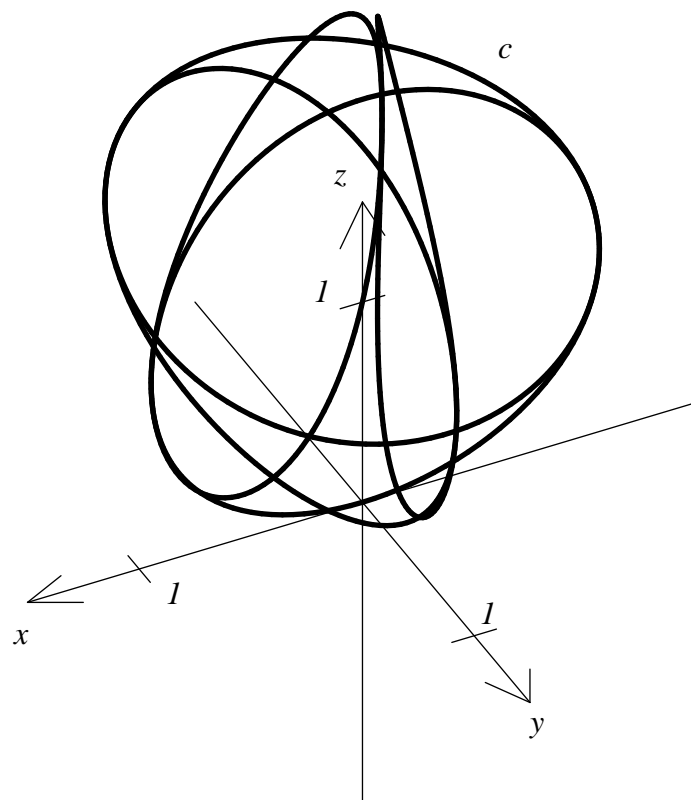


Abbildung 3.9b): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 5\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$.

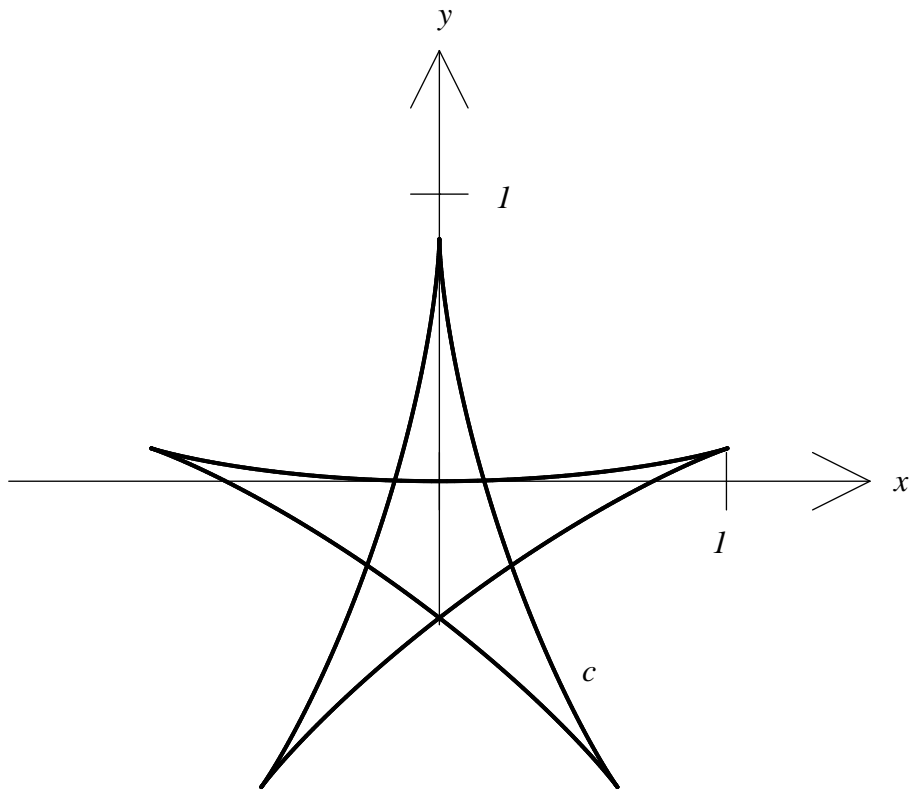


Abbildung 3.9c): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 5\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Grundriss in die xy -Ebene.

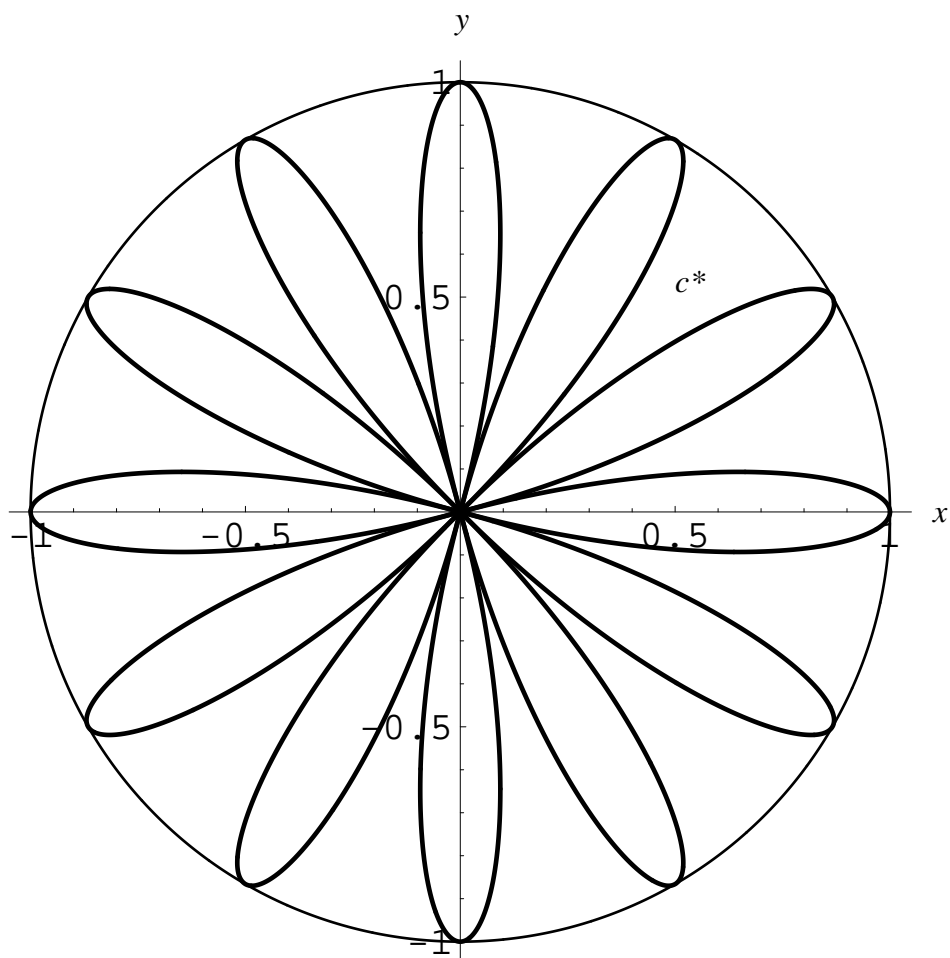


Abbildung 3.10a): Das sphärische Tangentenbild c^* des Gewundenen Kreises c gemäß der Parameterdarstellung (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 6\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Grundriss in die Äquatorebene (xy -Ebene).

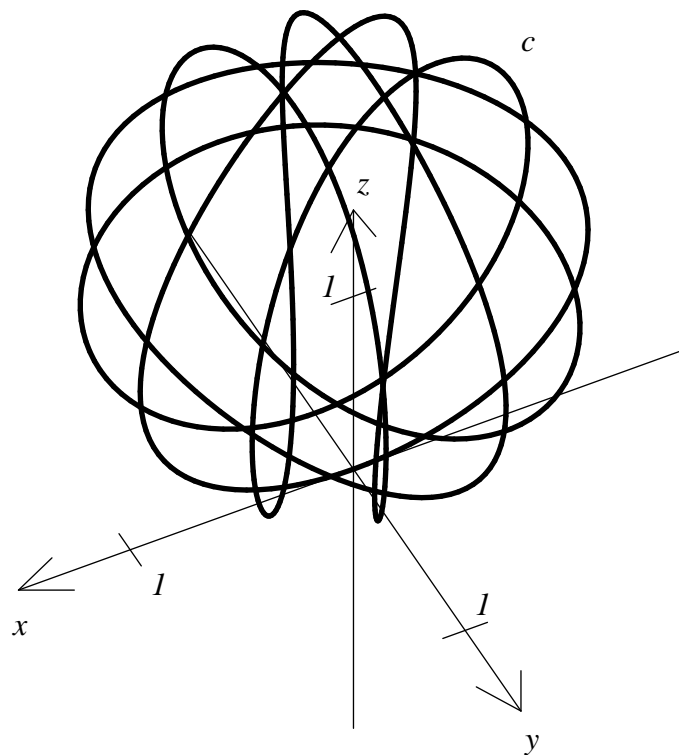


Abbildung 3.10b): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 6\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$.

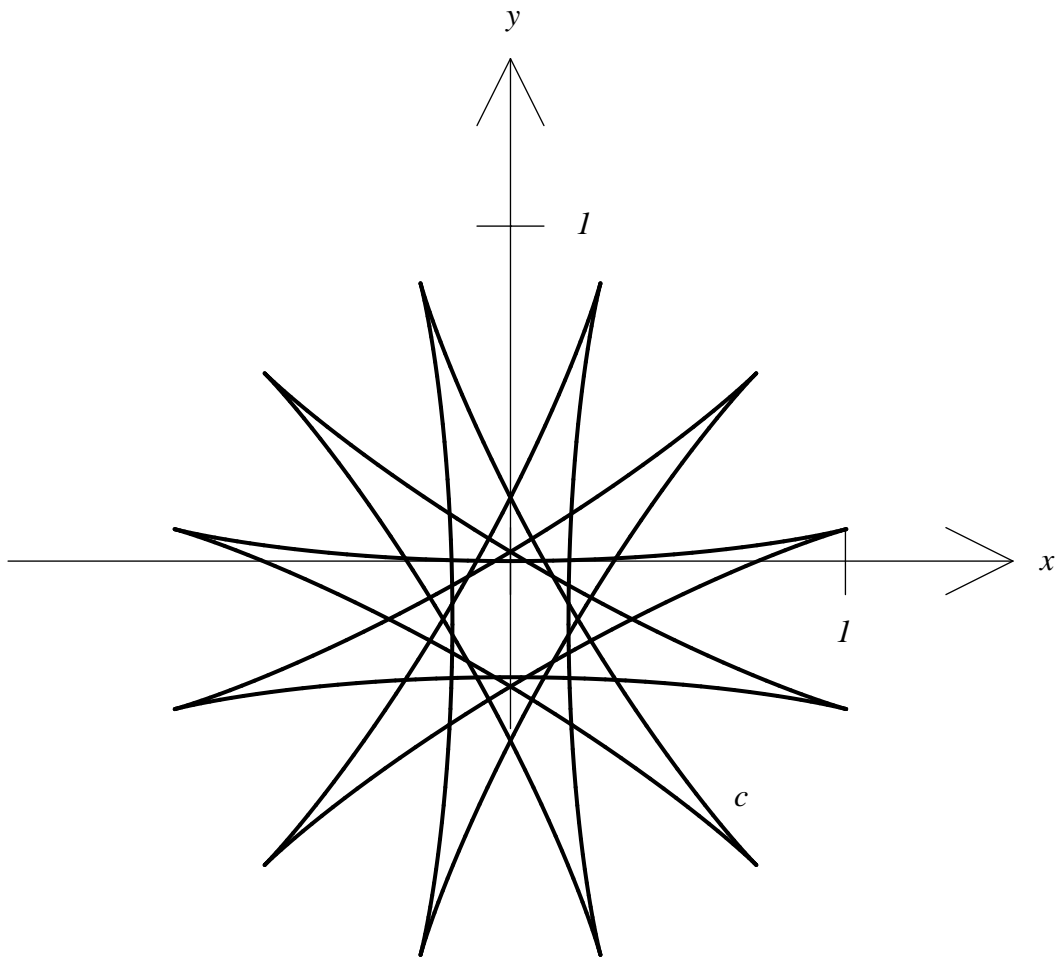


Abbildung 3.10c): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 6\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Grundriss in die xy -Ebene.

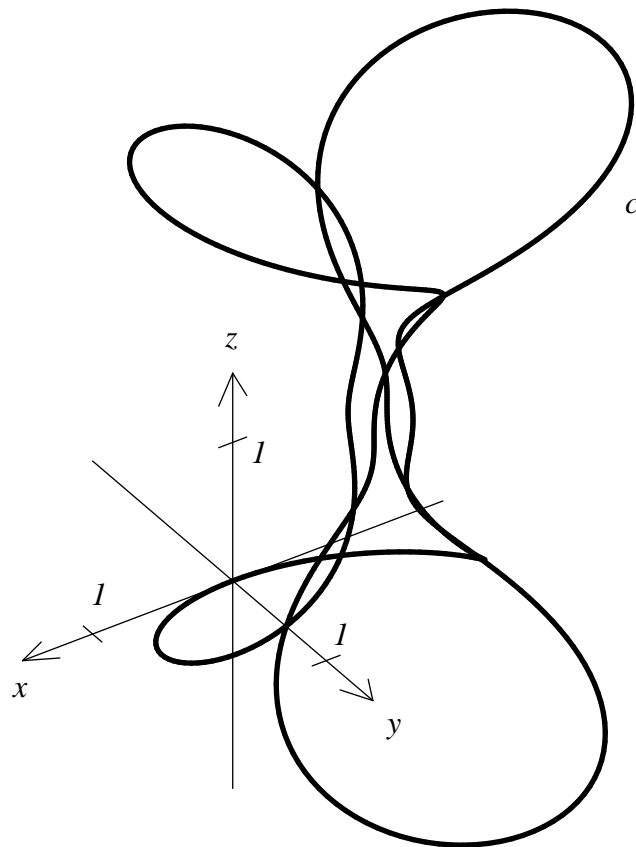


Abbildung 3.11a): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{2}{7}\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 14\pi]$.

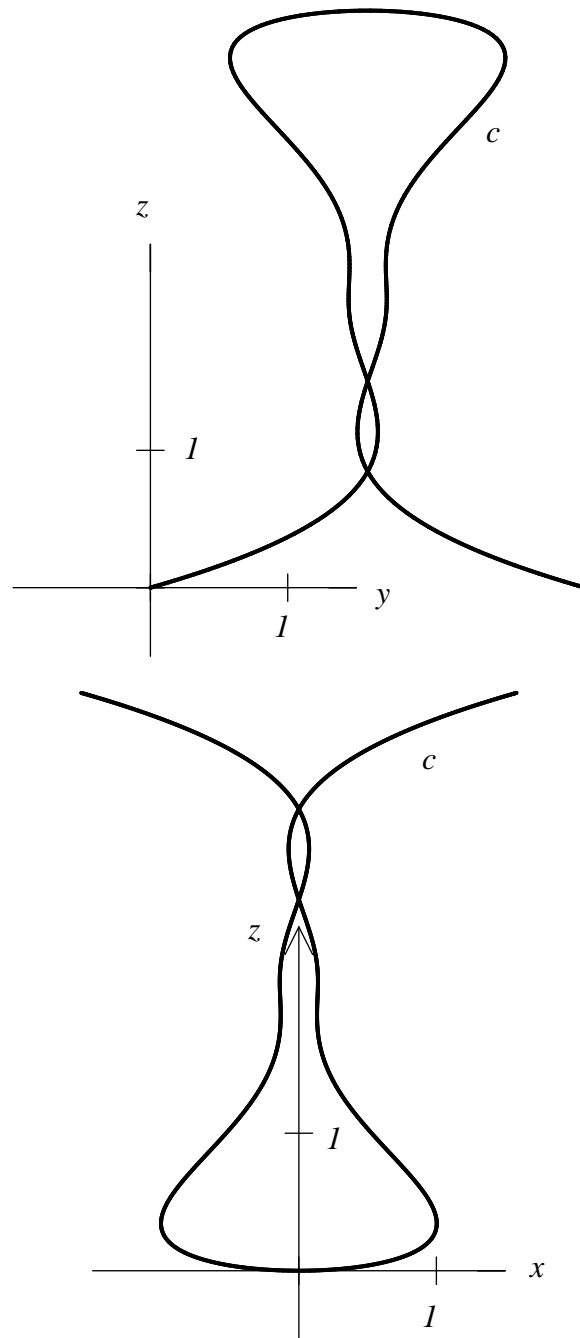


Abbildung 3.11b): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{2}{7}\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 14\pi]$ im Normalriss in die yz -Ebene (oben) und die xz -Ebene (unten).

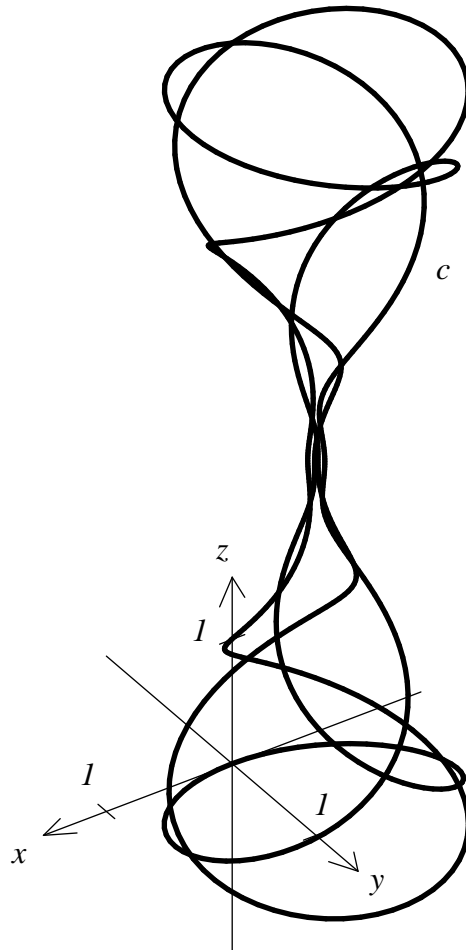


Abbildung 3.12a): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung
 (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{2}{11}\varphi$ mit dem Definitionsbereich
 $I = [0, 22\pi]$.

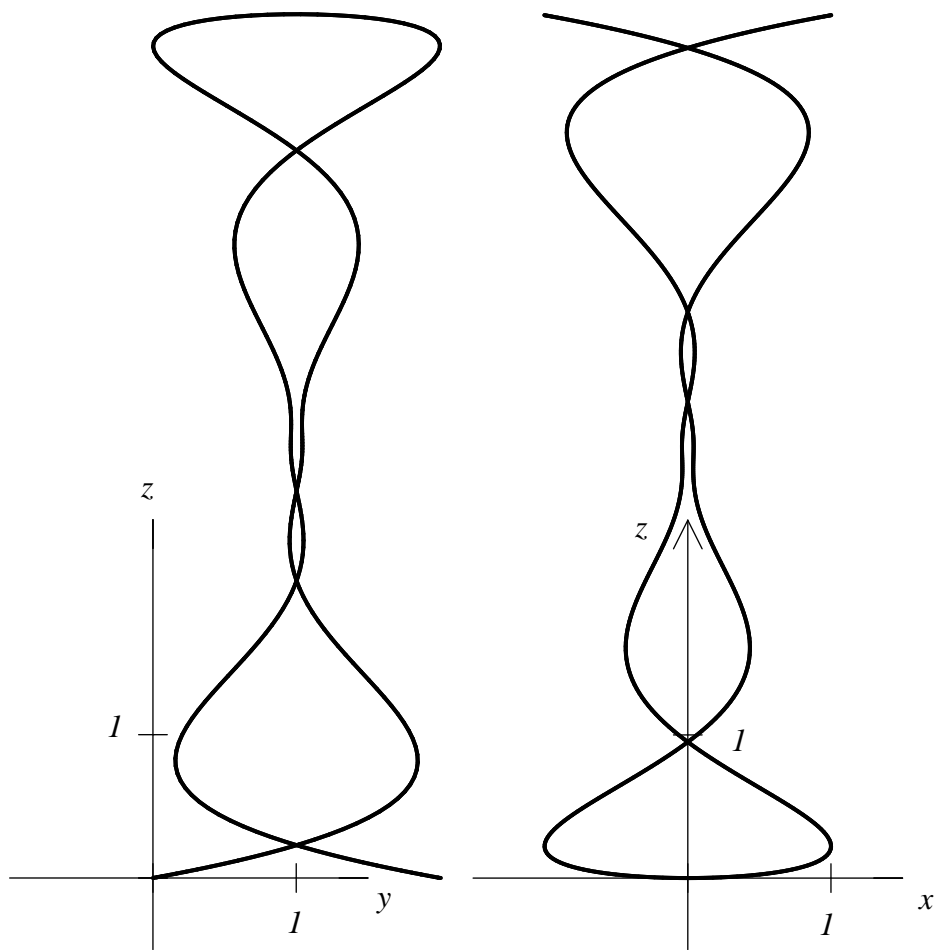


Abbildung 3.12b): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{2}{11} \varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 22\pi]$ im Normalriss in die yz -Ebene (links) und die xz -Ebene (rechts).

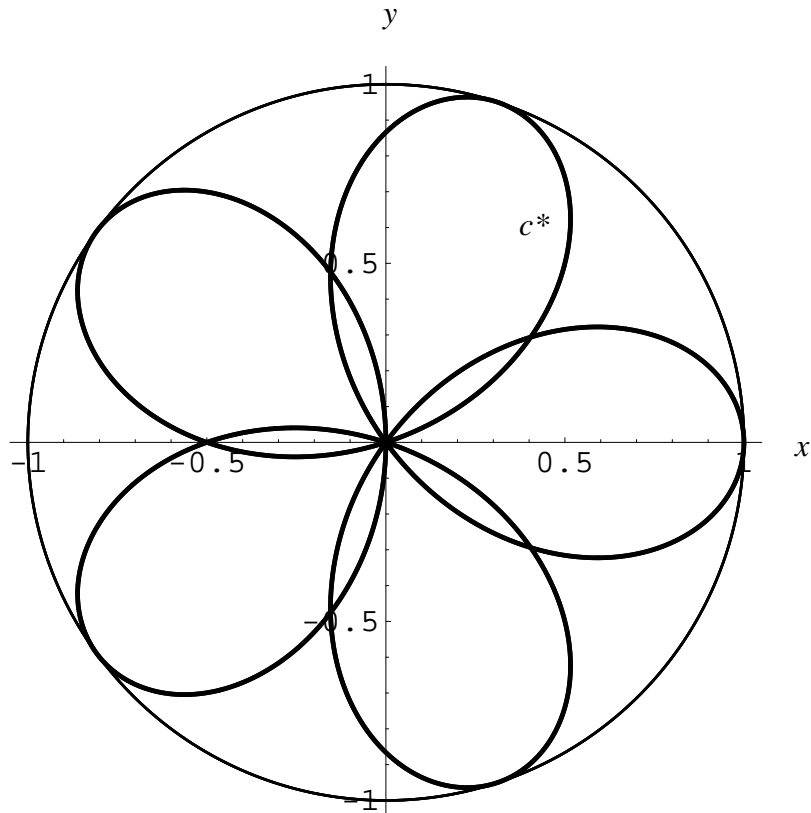


Abbildung 3.13a): Das sphärische Tangentenbild c^* des Gewundenen Kreises c gemäß der Parameterdarstellung (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{5}{3}\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 6\pi]$ im Grundriss in die Äquatorebene (xy -Ebene).

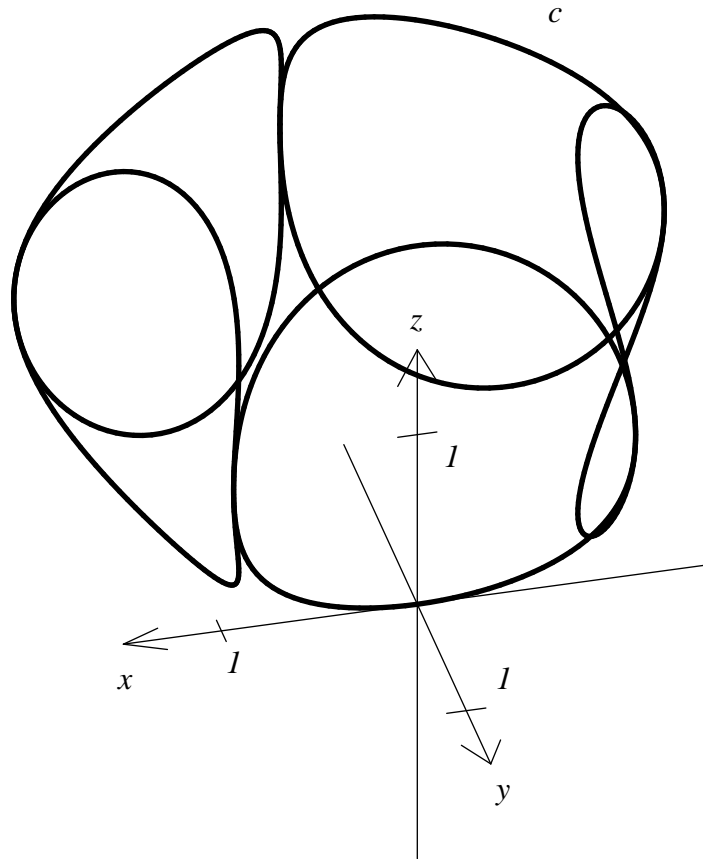


Abbildung 3.13b): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung
 (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{5}{3}\varphi$ mit dem Definitionsbereich
 $I = [0, 6\pi]$.

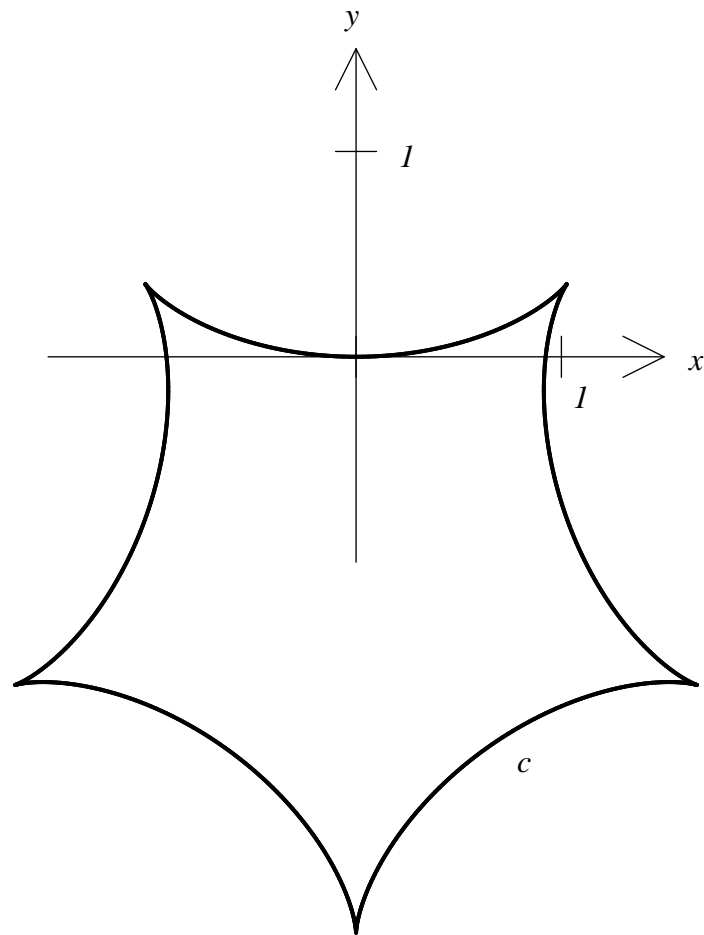


Abbildung 3.13c): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{5}{3}\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 6\pi]$ im Grundriss in die xy -Ebene.

3.2.5 Durch elementare Funktionen parametrisierbare Gewundene Kreise zu Basisfunktionen $f(\varphi) = \frac{\varphi}{2k}$, $k \in \mathbb{N}$

Wie schon erwähnt wurde, ist die Klasse der zur Basisfunktion

$$f(\varphi) = m \varphi \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{R}$$

gehörigen Windschiefen Kreise mit Parameterdarstellung (3.37) für beliebige Parameter $m \in \mathbb{R}$ im allgemeinen nicht mittels elementarer Funktionen parametrisierbar, denn die Integrale für die x - und y -Koordinatenfunktion in (3.37) sind im allgemeinen für $m \in \mathbb{R}$ nicht elementar lösbar.

Setzt man jedoch spezielle Parameter $m \in \mathbb{R}$ an, so zum Beispiel

$$m = \frac{1}{2k} \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.43)$$

so lässt sich folgender Satz zeigen:

Satz 3.3 *Die gemäß der Parameterdarstellung (3.37) zu Basisfunktionen der Gestalt*

$$f(\varphi) = \frac{\varphi}{2k} \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.44)$$

gehörige Klasse Windschiefer Kreise ist durch elementare Funktionen parametrisierbar.

Beweis: Nach (3.37), (3.34) ist mit $m = \frac{1}{2k}$ gemäß (3.43):

$$z(\varphi) = \frac{-1}{4k\kappa_0} \left[2k \cdot \cos \frac{\varphi}{2k} \cdot \sqrt{(1 + 2k^2) + 2k^2 \cdot \cos \frac{\varphi}{k}} + \operatorname{arsinh} \left(2k \cdot \cos \frac{\varphi}{2k} \right) \right].$$

Gemäß (3.37) enthalten die Koordinatenfunktionen $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$ des zur Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{\varphi}{q}$ ($q \in \mathbb{N}$) gehörigen Windschiefen Kreises c der Krümmung κ_0 die beiden Integrale der Form

$$\begin{aligned} I_1 &:= \kappa_0 x(\varphi) = \int_0^\varphi \cos \frac{t}{q} \cdot \cos t \cdot \sqrt{\frac{1}{q^2} + \cos^2 \frac{t}{q}} dt, \\ I_2 &:= \kappa_0 y(\varphi) = \int_0^\varphi \cos \frac{t}{q} \cdot \sin t \cdot \sqrt{\frac{1}{q^2} + \cos^2 \frac{t}{q}} dt. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Die Substitution

$$u := \frac{t}{q}$$

und die Identität $\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$ bringen (3.45) auf die Gestalt

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \cos(qu) \cdot \sqrt{1 + q^2 - q^2 \sin^2 u} \cdot \cos u \, du, \\ I_2 &= \int \sin(qu) \cdot \sqrt{1 + q^2 \cos^2 u} \cdot \cos u \, du. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Wir betrachten nun die Terme $\cos(qu)$ und $\sin(qu)$ in (3.46) für geradzahlige $q =: 2k$, $k \in \mathbb{N}$: Aus der Entwicklungsformel von MOIVRE und der Identität $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ erhält man dann zunächst:

$$\begin{aligned} \cos(2ku) + i \cdot \sin(2ku) &= (\cos u + i \sin u)^{2k} \\ &= \sum_{p=0}^{2k} \binom{2k}{p} \cdot (\cos u)^{2k-p} \cdot i^p \cdot (\sin u)^p \\ &= \sum_{l=0}^k \binom{2k}{2l} \cdot (1 - \sin^2 u)^{k-l} \cdot (-1)^l \cdot (\sin u)^{2l} \\ &\quad + i \cdot \sin u \cdot \sum_{l=1}^k \binom{2k}{2l-1} \cdot (\cos u)^{2k-2l+1} \cdot (-1)^{l-1} \cdot (1 - \cos^2 u)^{l-1} \\ &=: P_k(\sin u) + i \cdot \sin u \cdot Q_k(\cos u). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Unter Verwendung des geraden Polynoms $P_k(\lambda)$ vom Grad $2k$ und des ungeraden Polynoms $Q_k(\mu)$ vom Grad $2k - 1$ gemäß

$$\begin{aligned} P_k(\lambda) &= \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{2k}{2l} (1 - \lambda^2)^{k-l} \lambda^{2l}, \\ Q_k(\mu) &= \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} \binom{2k}{2l-1} \mu^{2k-2l+1} (1 - \mu^2)^{l-1} \end{aligned} \quad (3.48)$$

gilt dann also für alle $u \in \mathbb{R}$

$$\cos(2ku) = P_k(\sin u), \quad \sin(2ku) = \sin u \cdot Q_k(\cos u). \quad (3.49)$$

Speziell für die Werte $k \in \{1, 2, 3\}$ erhält man (vergleiche auch [12], S.125, Nr. 6) die Polynome

$$\begin{aligned} P_1(\lambda) &= 1 - 2\lambda^2, & Q_1(\mu) &= 2\mu, \\ P_2(\lambda) &= 1 - 8\lambda^2 + 8\lambda^4, & Q_2(\mu) &= -4\mu + 8\mu^3, \\ P_3(\lambda) &= 1 - 18\lambda^2 + 48\lambda^4 - 32\lambda^6, & Q_3(\mu) &= 6\mu - 32\mu^3 + 32\mu^5. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Setzt man nun in (3.46) mit $q = 2k$ die Substitutionen

$$\lambda = \sin u \in [-1, 1]$$

für das Integral I_1 und

$$\mu = \cos u \in [-1, 1]$$

für das Integral I_2 ein, erhält man die Integrale I_1 und I_2 in der Gestalt

$$\begin{aligned} I_1 &= \int P_k(\lambda) \cdot \sqrt{1 + q^2 - q^2\lambda^2} d\lambda, \\ I_2 &= - \int \mu \cdot Q_k(\mu) \cdot \sqrt{1 + q^2\mu^2} d\mu, \quad \text{mit } q = 2k, \end{aligned} \quad (3.51)$$

die dann jeweils Linearkombinationen von Integralen der Gestalt

$$\int t^n \cdot \sqrt{a + bt^2} dt \quad (t = \lambda \text{ beziehungsweise } t = \mu) \quad (3.52)$$

mit Exponenten $n \in \mathbb{N}_0$ und ganzzahligen Konstanten $a > 0, b \neq 0$ sind. Nun gilt: In (3.52) existieren alle Integrale I_1 auf dem hier maßgeblichen Intervall $|\lambda| \leq 1$, sowie alle Integrale I_2 sogar für $\mu \in \mathbb{R}$; alle Integrale der Gestalt (3.52) lassen sich elementar ermitteln (siehe [7], S. 81-82: Paragraph 2.26). Damit sind also alle Windschiefen Kreise aus Satz 3.3 durch elementare Funktionen parametrisierbar.

w.z.b.w.

Als Nächstes werden wir zeigen, dass die Klasse Windschiefer Kreise aus Satz 3.3 für geeignete Wahl des Definitionsbereichs $I \subseteq \mathbb{R}$ in der Parameterdarstellung (3.33) sogar Gewundene Kreise sind: Es gilt der

Satz 3.4 Die für $\kappa_0 > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ durch

$$c : \mathbf{r}(\varphi) = \frac{1}{\kappa_0} \int_0^\varphi \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{2k}\right) \cdot \cos t \\ \cos\left(\frac{t}{2k}\right) \cdot \sin t \\ \sin\left(\frac{t}{2k}\right) \end{pmatrix} \cdot \sqrt{\frac{1}{4k^2} + \cos^2\left(\frac{t}{2k}\right)} dt, \quad (3.53)$$

$$\varphi \in I = [0, 4k\pi]$$

parametrisierten Raumkurven konstanter Krümmung κ_0 zu den Basisfunktionen $f(\varphi) = \frac{\varphi}{2k}$ gemäß (3.44) sind Gewundene Kreise der Differentiationsklasse C^ω und der Kurvenlänge

$$L := \int_0^{4k\pi} \sqrt{\frac{1}{4k^2} + \cos^2\left(\frac{t}{2k}\right)} dt. \quad (3.54)$$

Beweis:

Gemäß (3.33) ist (3.53) die Parameterdarstellung eines Windschiefen Kreises c der Krümmung κ_0 zum sphärischen Tangentenbild c^* mit der Darstellung (3.18) zu Werten $m = \frac{1}{2k}$ mit $k \in \mathbb{N}$. Es gilt also

$$m = \frac{1}{2k} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

Nach Satz 3.1 ist damit das sphärische Tangentenbild $c^* \subset S^2$ mit der Parameterdarstellung

$$c^* : \mathbf{r}^*(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2k}\right) \cdot \cos \varphi \\ \cos\left(\frac{\varphi}{2k}\right) \cdot \sin \varphi \\ \sin\left(\frac{\varphi}{2k}\right) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in I = [0, 4k\pi] \quad (3.55)$$

eine geschlossene C^ω -Kurve mit einmaliger Durchlaufung.

Wir untersuchen nun, ob der geometrische Schwerpunkt der Kurve c^* in (3.55) mit dem Mittelpunkt $O(0, 0, 0)$ von S^2 zusammenfällt. Gemäß (2.4),

(3.53) und (3.55) ist dies genau dann der Fall, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ mit der Abkürzung

$$W(\varphi) := \sqrt{\frac{1}{4k^2} + \cos^2\left(\frac{\varphi}{2k}\right)} \quad (3.56)$$

gilt:

$$\mathbf{o} = \int_0^{4k\pi} \mathbf{r}^*(\varphi) \cdot W(\varphi) d\varphi. \quad (3.57)$$

Nun ist

$$\int_0^{4k\pi} \mathbf{r}^*(\varphi) \cdot W(\varphi) d\varphi = \int_0^{2k\pi} \mathbf{r}^*(\varphi) \cdot W(\varphi) d\varphi + \int_{2k\pi}^{4k\pi} \mathbf{r}^*(\varphi) \cdot W(\varphi) d\varphi \quad (3.58)$$

und mittels der Substitution $\varphi =: u + 2k\pi$ erhält man

$$\int_{2k\pi}^{4k\pi} \mathbf{r}^*(\varphi) \cdot W(\varphi) d\varphi = \int_0^{2k\pi} \mathbf{r}^*(\varphi + 2k\pi) \cdot W(\varphi + 2k\pi) d\varphi. \quad (3.59)$$

Wegen $k \in \mathbb{N}$ gilt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} W(\varphi + 2k\pi) &= \sqrt{\frac{1}{4k^2} + \cos^2\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{2k}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4k^2} + \cos^2\left(\frac{\varphi}{2k} + \pi\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4k^2} + \left(-\cos\frac{\varphi}{2k}\right)^2} = W(\varphi) \end{aligned} \quad (3.60)$$

sowie

$$\cos(\varphi + 2k\pi) = \cos \varphi, \quad \sin(\varphi + 2k\pi) = \sin \varphi \quad (3.61)$$

und

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{2k}\right) &= \cos\left(\frac{\varphi}{2k} + k\pi\right) = -\cos\left(\frac{\varphi}{2k}\right), \\ \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{2k}\right) &= \sin\left(\frac{\varphi}{2k} + k\pi\right) = -\sin\left(\frac{\varphi}{2k}\right). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Die Gleichungen (3.61) und (3.62) bedeuten, dass die Vektorfunktion $\mathbf{r}^*(\varphi)$ gemäß (3.55) für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ (sogar für alle $k \in \mathbb{Z}$)

$$\mathbf{r}^*(\varphi + 2k\pi) = -\mathbf{r}^*(\varphi) \quad (3.63)$$

erfüllt. Mit (3.63) und (3.60) lautet dann die Gleichung (3.59)

$$\int_{2k\pi}^{4k\pi} \mathfrak{r}^*(\varphi) \cdot W(\varphi) d\varphi = - \int_0^{2k\pi} \mathfrak{r}^*(\varphi) \cdot W(\varphi) d\varphi, \quad (3.64)$$

wodurch (3.58) die Schwerpunktsbedingung (3.57) liefert. Insgesamt ist damit jede Raumkurve c gemäß der Parameterdarstellung (3.53) ein Gewundener Kreis der Differentiationsklasse C^ω . Die Gesamtlänge L von c ergibt sich dann mit (3.28) und (3.44) zu

$$L = \int_0^{4k\pi} \sqrt{\frac{1}{4k^2} + \cos^2\left(\frac{\varphi}{2k}\right)} d\varphi,$$

einem elliptischen Integral.

w.z.b.w.

Die folgenden Abbildungen 3.14 - 3.16 zeigen drei Beispiele von *Gewundenen* Kreisen c gemäß Satz 3.4 mit der Parameterdarstellung (3.53), und zwar für die Werte $k \in \{1, 2, 3\}$. Die Abbildungen 3.14a), 3.15a), 3.16a) zeigen jeweils den Grundriss der zugehörigen sphärischen Tangentenbilder c^* in die xy -Ebene.

Die zugehörigen Parameterdarstellungen (3.65), (3.66) und (3.67) der Kurve c gemäß (3.37) mit $k \in \{1, 2, 3\}$ sind nach Satz 3.3 *integralfrei* darstellbar. Die integralfreien Darstellungen der in (3.65), (3.66) und (3.67) aufgeführten Koordinatenfunktionen $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$ wurden jeweils ausgehend von (3.37) mit dem Computeralgebrapaket MATHEMATICA ermittelt; über die Integrationskonstanten in (3.65), (3.66) und (3.67) wurde – von (3.37) abweichend – jeweils geeignet verfügt. Die Koordinatenfunktion $z(\varphi)$ in (3.65), (3.66) und (3.67) erhält man aus der Darstellung (3.37) durch Einsetzen des jeweiligen Wertes $m = \frac{1}{2k}$; vgl. auch die explizite Formel für $z(\varphi)$ am Beginn des Beweises zu Satz 3.3!

Die Abbildungen 3.14b-d), 3.15b-d), 3.16b-d) wurden durch numerische Integration von (3.33) mittels des Computeralgebrapakets MATHEMATICA erzeugt, welches keine Sichtbarkeiten berücksichtigt. Hierbei wurde die Krümmung der Kurven c zu $\kappa_0 = 1$ gesetzt. Die Abbildungen 3.14b-d), 3.15b-d), 3.16b-d) zeigen die zu den Parameterdarstellungen (3.65), (3.66) und (3.67) gehörigen Gewundenen Kreise c jeweils bis auf eine Translation; gemäß ihrer tatsächlichen Berechnung nach (3.33) enthalten die Kurven c in den Abbildungen 3.14b-d), 3.15b-d), 3.16b-d) nämlich jeweils den Koordinatenursprung $O(0, 0, 0)$ mit der x -Achse als Tangente. An dem eingezeichneten xyz -Koordinatenkreuz sind jeweils auf den Koordinatenachsen die Punkte $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ markiert.

Fall $k = 1$:

Für $f(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \varphi$ lautet die Parameterdarstellung

$\mathbf{r}(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi))$ der Gewundenen Kreise c konstanter Krümmung $\kappa_0 > 0$ gemäß (3.53), bis auf Integrationskonstanten bei $y(\varphi)$ und $z(\varphi)$:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= \frac{1}{32 \kappa_0} \left[2 \sqrt{3 + 2 \cos \varphi} \cdot \left(7 \sin \frac{\varphi}{2} + 2 \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 15 \arcsin \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right], \\ y(\varphi) &= \frac{-1}{32 \kappa_0} \left[2 \sqrt{3 + 2 \cos \varphi} \cdot \left(7 \cos \frac{\varphi}{2} + 2 \cos \frac{3\varphi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{arsinh} \left(2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \right], \\ z(\varphi) &= \frac{-1}{4 \kappa_0} \left[2 \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 + 2 \cos \varphi} + \operatorname{arsinh} \left(2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.65)$$

mit dem Definitionsbereich $\varphi \in [0, 4\pi]$. Nach Satz 3.4 gilt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{r}(\varphi) = \mathbf{r}(\varphi + 4\pi),$$

das heißt 4π ist eine Periode von $\mathbf{r}(\varphi)$.

Ferner gilt nach (3.65):

$$\mathbf{r}(\varphi \pm 2\pi) = -\mathbf{r}(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbb{R},$$

das heißt: c ist punktsymmetrisch zum (der Parameterdarstellung (3.65) als Koordinatenursprung zugrundegelegten) Punkt $O(0, 0, 0)$.

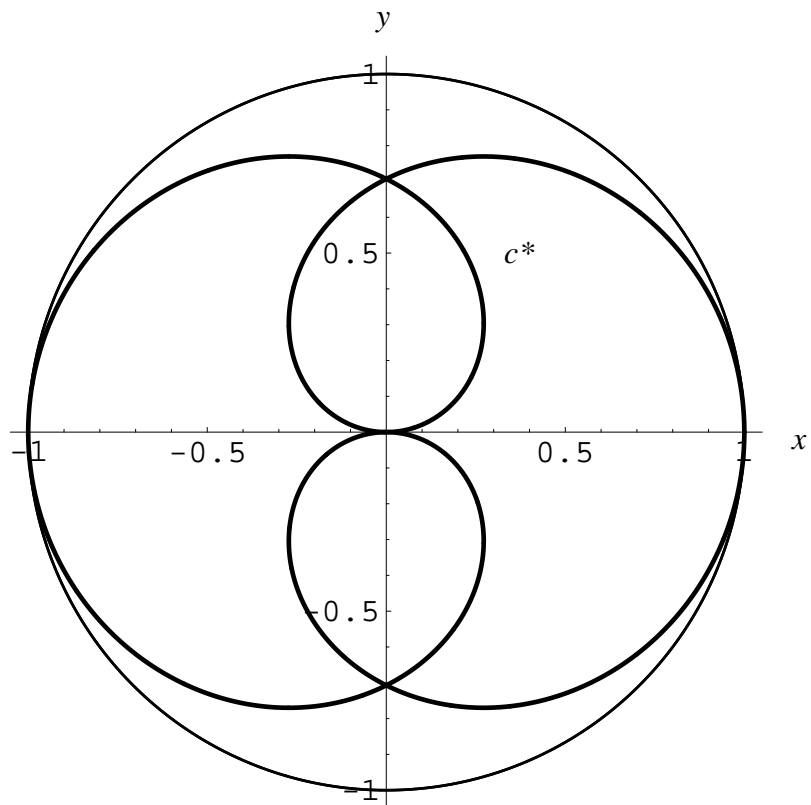


Abbildung 3.14a): Das sphärische Tangentenbild c^* des Gewundenen Kreises c gemäß der Parameterdarstellung (3.33) zur Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 4\pi]$ im Grundriss in die Äquatorebene (xy -Ebene).

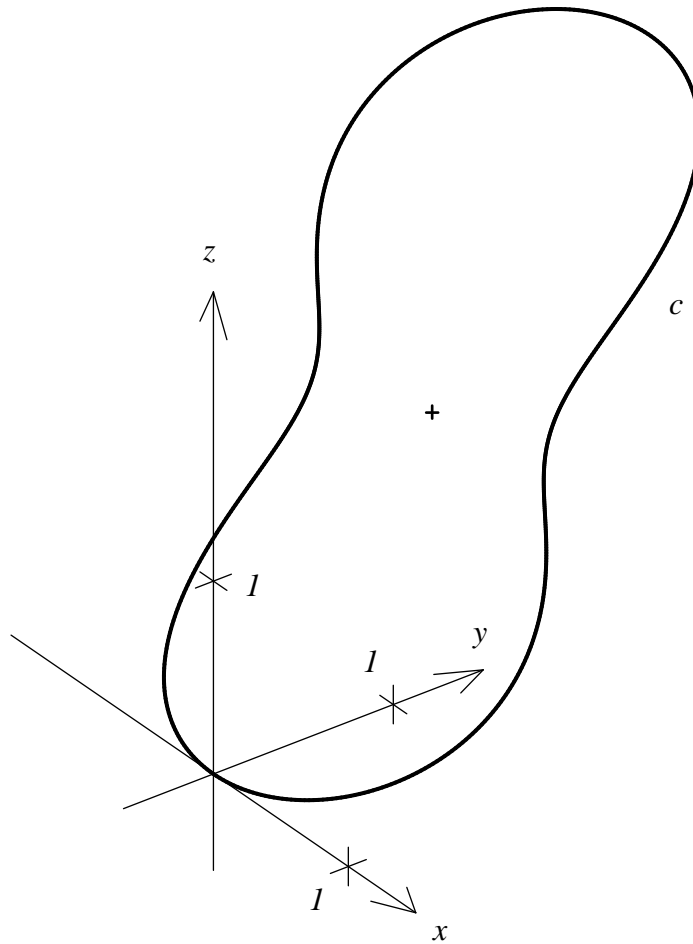


Abbildung 3.14b): Der Gewundene Kreis c zur Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 4\pi]$ und der Krümmung $\kappa_0 = 1$ ist bis auf eine Translation durch die Parameterdarstellung (3.65) gegeben und hier im Schrägriss abgebildet.

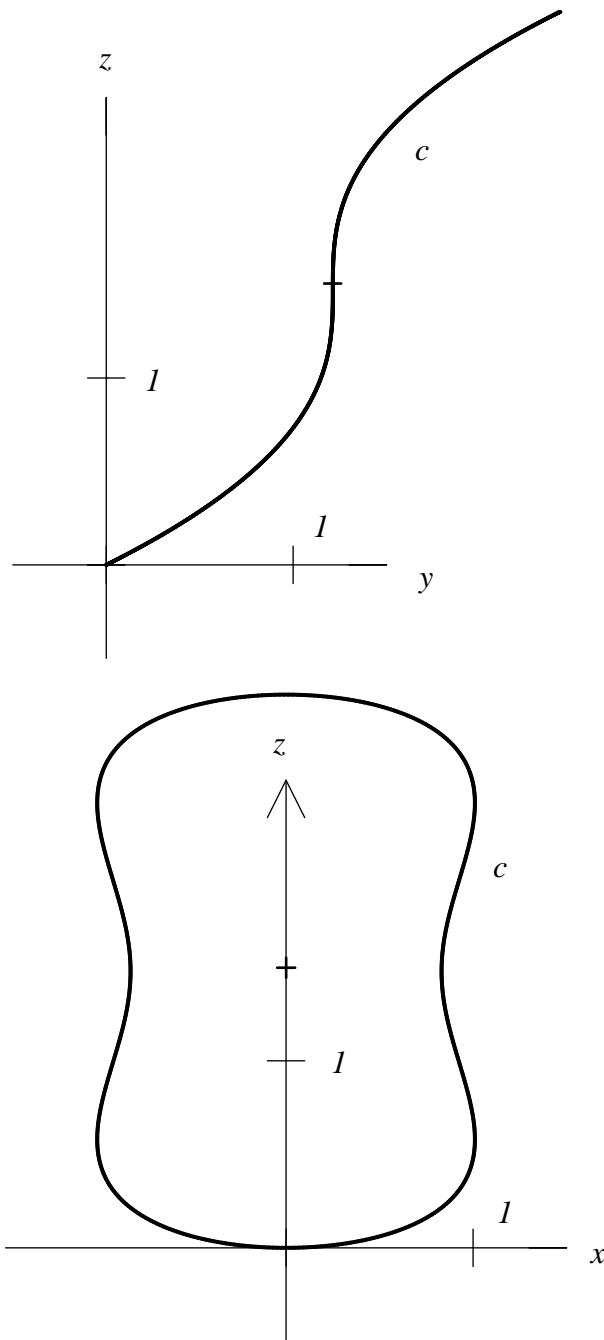


Abbildung 3.14c): Der Gewundene Kreis c zur Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{1}{2} \varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 4\pi]$ und der Krümmung $\kappa_0 = 1$ ist bis auf eine Translation durch die Parameterdarstellung (3.65) gegeben und hier im Normalriss in die yz -Ebene (oben) und die xz -Ebene (unten) abgebildet.

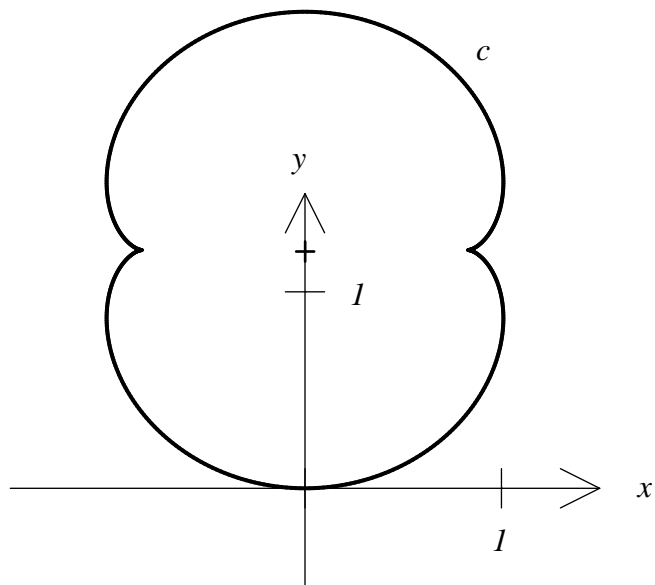


Abbildung 3.14d): Der Gewundene Kreis c zur Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{1}{2} \varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 4\pi]$ und der Krümmung $\kappa_0 = 1$ ist bis auf eine Translation durch die Parameterdarstellung (3.65) gegeben und hier im Grundriss in die xy -Ebene abgebildet.

Fall $k = 2$:

Für $f(\varphi) = \frac{1}{4} \cdot \varphi$ lautet die Parameterdarstellung

$\mathbf{r}(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi))$ der Gewundenen Kreise c konstanter Krümmung $\kappa_0 > 0$ gemäß (3.53), bis auf Integrationskonstanten bei $y(\varphi)$ und $z(\varphi)$:

$$\begin{aligned}
 x(\varphi) &= \frac{1}{6144 \kappa_0} \left[4 \sqrt{9 + 8 \cos \frac{\varphi}{2}} \cdot \left(101 \sin \frac{\varphi}{4} + 264 \sin \frac{3\varphi}{4} + 128 \sin \frac{5\varphi}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 51 \arcsin \left(\frac{4}{\sqrt{17}} \sin \frac{\varphi}{4} \right) \right], \\
 y(\varphi) &= \frac{-1}{6144 \kappa_0} \left[4 \sqrt{9 + 8 \cos \frac{\varphi}{2}} \cdot \left(101 \cos \frac{\varphi}{4} + 264 \cos \frac{3\varphi}{4} + 128 \cos \frac{5\varphi}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 51 \operatorname{arsinh} \left(4 \cos \frac{\varphi}{4} \right) \right], \\
 z(\varphi) &= \frac{-1}{8\kappa_0} \left[4 \cos \frac{\varphi}{4} \sqrt{9 + 8 \cos \frac{\varphi}{2}} + \operatorname{arsinh} \left(4 \cos \frac{\varphi}{4} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

mit dem Definitionsbereich $\varphi \in [0, 8\pi]$. Nach Satz 3.4 gilt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{r}(\varphi) = \mathbf{r}(\varphi + 8\pi),$$

das heißt 8π ist eine Periode von $\mathbf{r}(\varphi)$.

Ferner gilt nach (3.66):

$$\mathbf{r}(\varphi \pm 4\pi) = -\mathbf{r}(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbb{R},$$

das heißt: c ist punktsymmetrisch zum (der Parameterdarstellung (3.66) als Koordinatenursprung zugrundegelegten) Punkt $O(0, 0, 0)$.

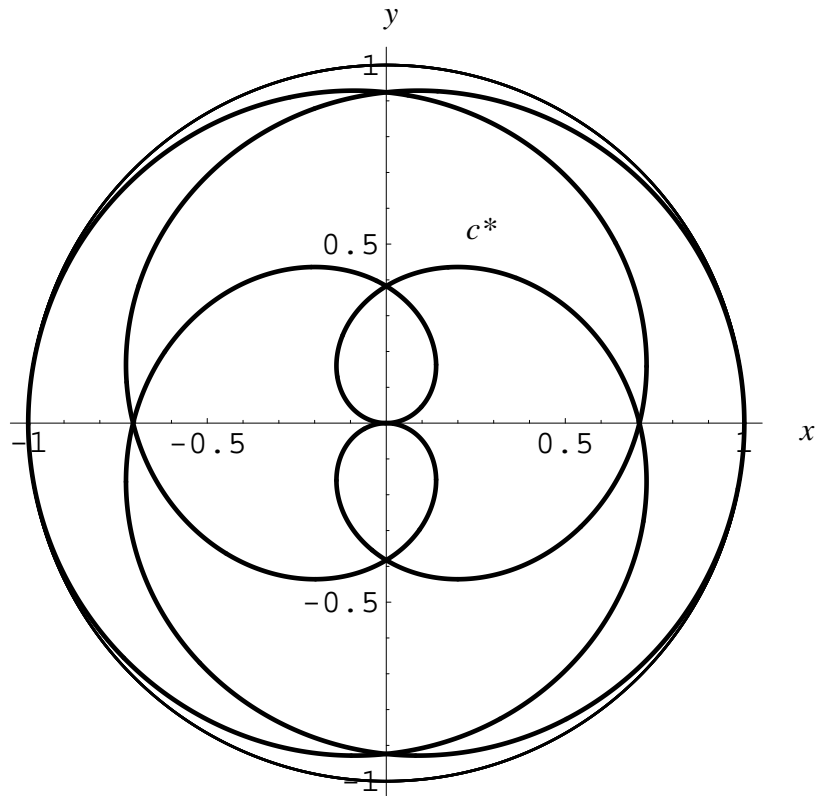


Abbildung 3.15a): Das sphärische Tangentenbild c^* des Gewundenen Kreises c gemäß der Parameterdarstellung (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{1}{4}\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 8\pi]$ im Grundriss in die Äquatorebene (xy -Ebene).

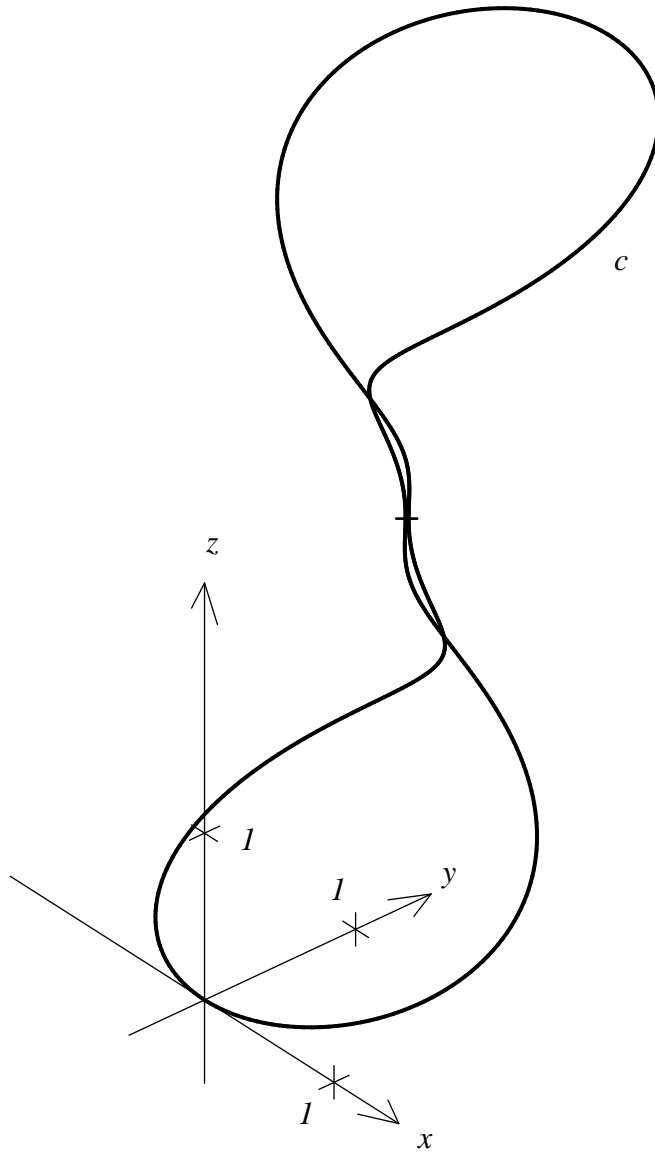


Abbildung 3.15b): Der Gewundene Kreis c zur Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{1}{4}\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 8\pi]$ und der Krümmung $\kappa_0 = 1$ ist bis auf eine Translation durch die Parameterdarstellung (3.66) gegeben und hier im Schrägriss abgebildet.

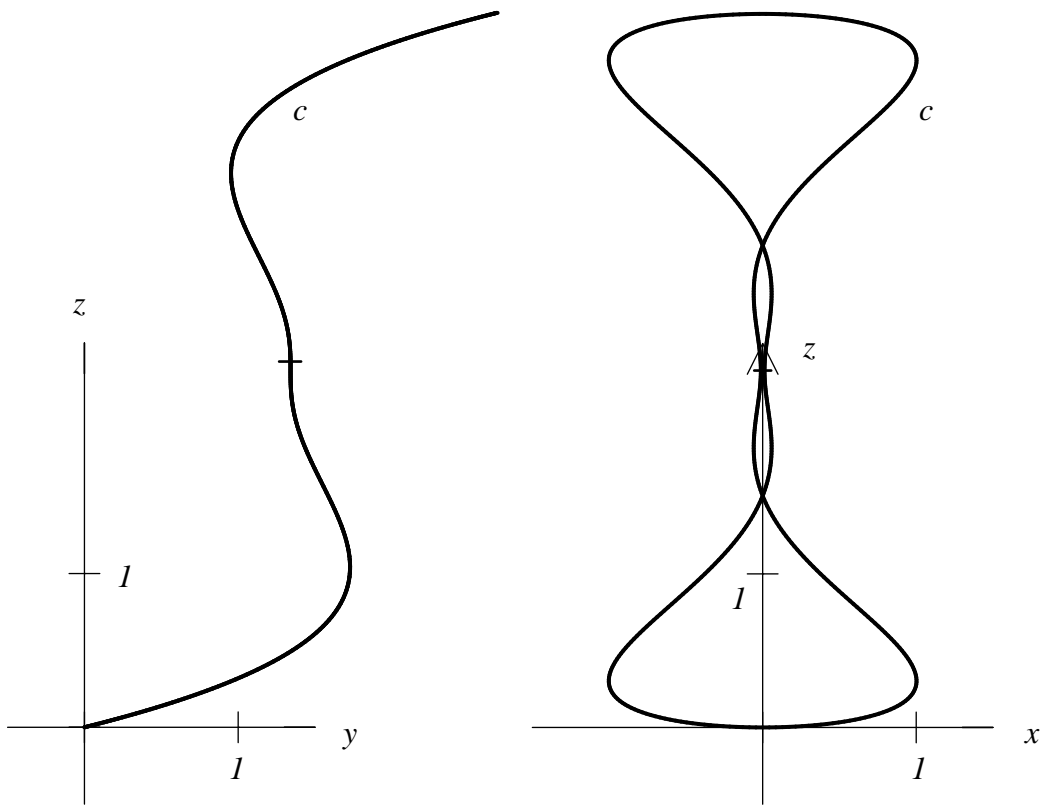


Abbildung 3.15c): Der Gewundene Kreis c zur Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{1}{4}\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 8\pi]$ und der Krümmung $\kappa_0 = 1$ ist bis auf eine Translation durch die Parameterdarstellung (3.66) gegeben und hier im Normalriss in die yz -Ebene (links) und die xz -Ebene (rechts) abgebildet.

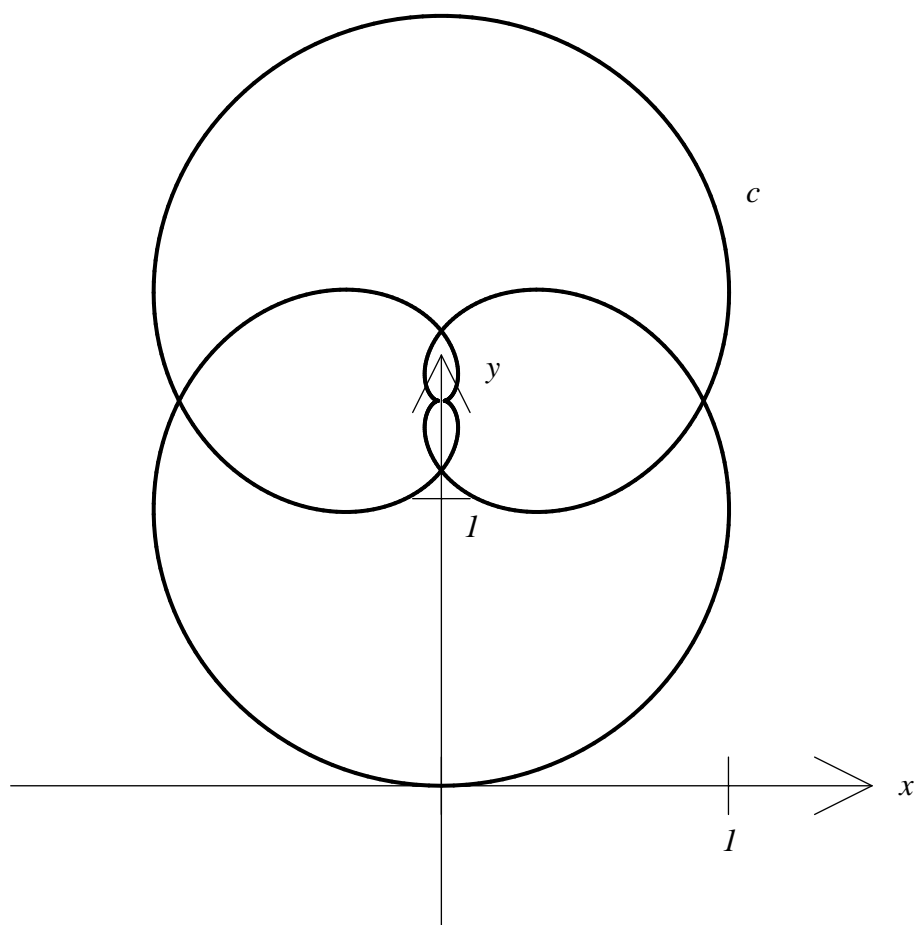


Abbildung 3.15d): Der Gewundene Kreis c zur Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{1}{4}\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 8\pi]$ und der Krümmung $\kappa_0 = 1$ ist bis auf eine Translation durch die Parameterdarstellung (3.66) gegeben und hier im Grundriss in die xy -Ebene abgebildet.

Fall $k = 3$:

Für $f(\varphi) = \frac{1}{6} \cdot \varphi$ lautet die Parameterdarstellung

$\mathbf{r}(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi))$ der Gewundenen Kreise c konstanter Krümmung $\kappa_0 > 0$ gemäß (3.53), bis auf Integrationskonstanten bei $y(\varphi)$ und $z(\varphi)$:

$$\begin{aligned}
 x(\varphi) &= \frac{1}{1119744 \kappa_0} \left[6 \sqrt{19 + 18 \cos \frac{\varphi}{3}} \cdot \left(-2821 \sin \frac{\varphi}{6} + 3210 \sin \frac{\varphi}{2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 19656 \sin \frac{5\varphi}{6} + 11664 \sin \frac{7\varphi}{6} \right) \right. \\
 &\quad \left. - 4181 \arcsin \left(\frac{6}{\sqrt{37}} \sin \frac{\varphi}{6} \right) \right], \\
 y(\varphi) &= \frac{-1}{1119744 \kappa_0} \left[6 \sqrt{19 + 18 \cos \frac{\varphi}{3}} \cdot \left(-2821 \cos \frac{\varphi}{6} + 3210 \cos \frac{\varphi}{2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 19656 \cos \frac{5\varphi}{6} + 11664 \cos \frac{7\varphi}{6} \right) \right. \\
 &\quad \left. - 4181 \operatorname{arsinh} \left(6 \cos \frac{\varphi}{6} \right) \right], \\
 z(\varphi) &= \frac{-1}{12 \kappa_0} \left[6 \cos \frac{\varphi}{6} \sqrt{19 + 18 \cos \frac{\varphi}{3}} + \operatorname{arsinh} \left(6 \cos \frac{\varphi}{6} \right) \right], \tag{3.67}
 \end{aligned}$$

mit dem Definitionsbereich $\varphi \in [0, 12\pi]$. Nach Satz 3.4 gilt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{r}(\varphi) = \mathbf{r}(\varphi + 12\pi),$$

das heißt 12π ist eine Periode von $\mathbf{r}(\varphi)$.

Ferner gilt nach (3.67):

$$\mathbf{r}(\varphi \pm 6\pi) = -\mathbf{r}(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbb{R},$$

das heißt: c ist punktsymmetrisch zum (der Parameterdarstellung (3.67) als Koordinatenursprung zugrundegelegten) Punkt $O(0, 0, 0)$.

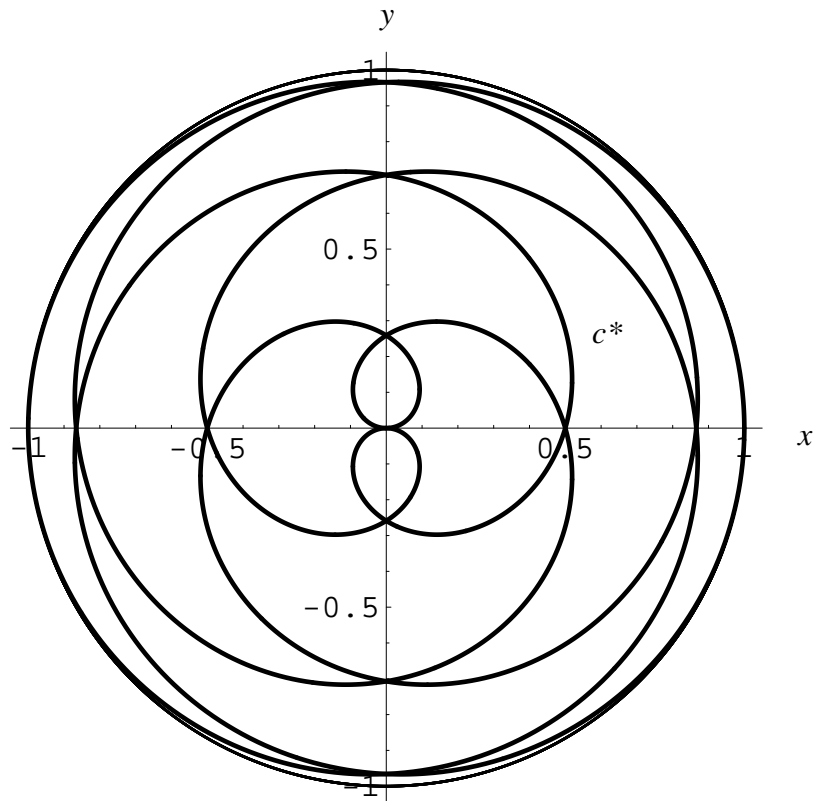


Abbildung 3.16a): Das sphärische Tangentenbild c^* des Gewundenen Kreises c gemäß der Parameterdarstellung (3.33) für die Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{1}{6}\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 12\pi]$ im Grundriss in die Äquatorebene (xy -Ebene).

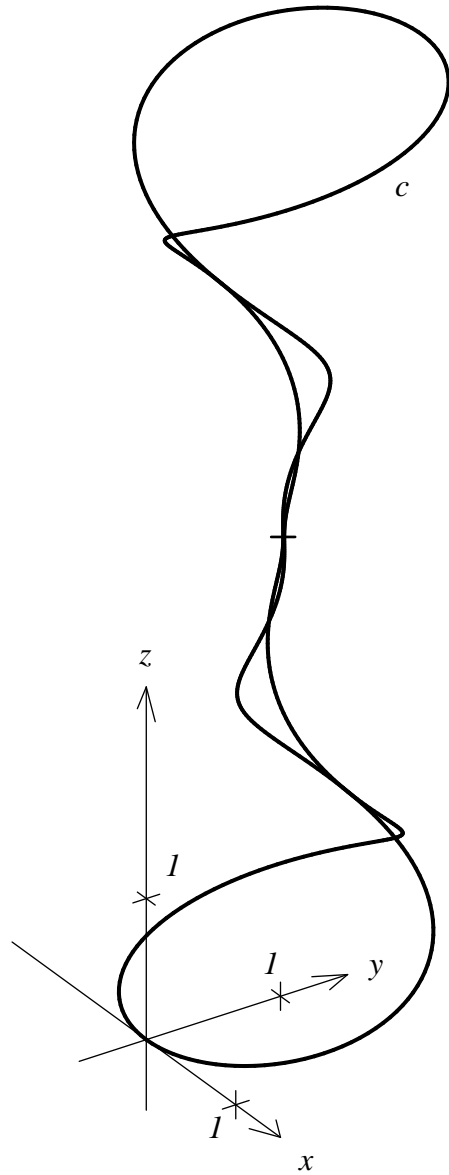


Abbildung 3.16b): Der Gewundene Kreis c zur Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{1}{6}\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 12\pi]$ und der Krümmung $\kappa_0 = 1$ ist bis auf eine Translation durch die Parameterdarstellung (3.67) gegeben und hier im Schrägriss abgebildet.

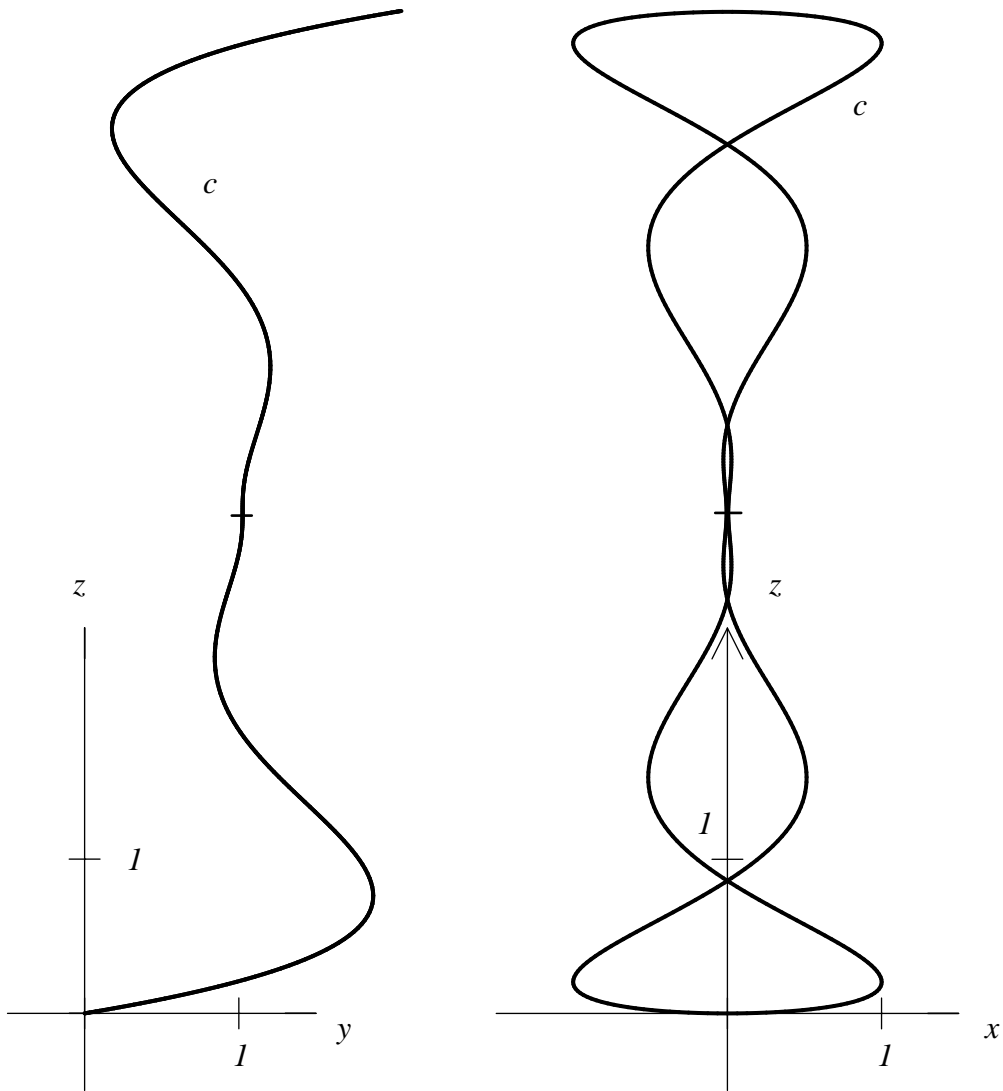


Abbildung 3.16c): Der Gewundene Kreis c zur Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{1}{6} \varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 12\pi]$ und der Krümmung $\kappa_0 = 1$ ist bis auf eine Translation durch die Parameterdarstellung (3.67) gegeben und hier im Normalriss in die yz -Ebene (links) und die xz -Ebene (rechts) abgebildet.

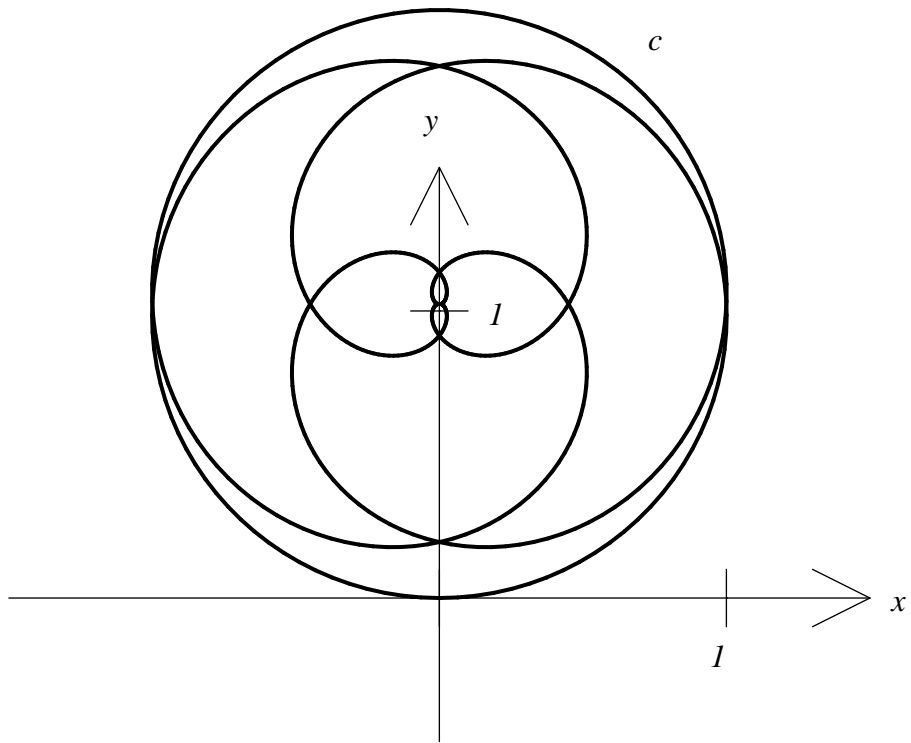


Abbildung 3.16d): Der Gewundene Kreis c zur Basisfunktion $f(\varphi) = \frac{1}{6}\varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 12\pi]$ und der Krümmung $\kappa_0 = 1$ ist bis auf eine Translation durch die Parameterdarstellung (3.67) gegeben und hier im Grundriss in die xy -Ebene abgebildet.

**3.2.6 Windschiefe und Gewundene Kreise
zu vorgegebenem sphärischem Tangentenbild
mit einer Basisfunktion $f(\varphi) = A \sin(m\varphi)$**

Als Nächstes betrachten wir eine weitere Klasse von Windschiefen und Gewundenen Kreisen, deren sphärisches Tangentenbild c^* gemäß (3.5) gebildet wird mit der speziellen Klasse von Basisfunktionen

$$f(\varphi) = A \sin(m\varphi) , \quad (3.68)$$

mit den Parametern $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Bemerkt sei hierzu, dass in (3.17) die Wahl $A = 0$ oder $m = 0$, also $f(\varphi) \equiv 0$, gemäß (3.5) genau den trivialen Fall liefert, dass das sphärische Tangentenbild c^* in einem Großkreis, insbesondere hier im Äquatorkreis von S^2 enthalten ist. Der zugehörige Windschiefe Kreis c ist damit in einem Kreis enthalten.

Mit (3.68) lautet die Parameterdarstellung des sphärischen Tangentenbildes c^* gemäß (3.5)

$$\mathfrak{r}^*(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(A \sin(m\varphi)) \cdot \cos \varphi \\ \cos(A \sin(m\varphi)) \cdot \sin \varphi \\ \sin(A \sin(m\varphi)) \end{pmatrix} , \quad \varphi \in I \subseteq \mathbb{R} . \quad (3.69)$$

Geschlossene sphärische Tangentenbilder c^* der Klasse C^ω

Wir untersuchen zunächst, für welche Wahl der beiden Parameter $A, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Kurve c^* mit der Parameterdarstellung (3.69) eine geschlossene reguläre C^ω -Kurve ist.

Wir wählen dazu in der Parameterdarstellung $\mathfrak{r}^*(\varphi)$ gemäß (3.69) den Definitionsbereich $I = \mathbb{R}$. Die Kurve c^* ist geschlossen und von der Differenzierbarkeitsklasse C^ω , wenn ein $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert mit

$$\mathfrak{r}^*(\varphi + p) = \mathfrak{r}^*(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in I = \mathbb{R} . \quad (3.70)$$

Bezüglich (3.69) gilt (3.70) jedenfalls dann, wenn für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ die folgenden (hinreichenden) Bedingungen

$$\begin{aligned} \cos(A \sin(m\varphi + mp)) &= \cos(A \sin(m\varphi)) \\ \text{und } \sin(A \sin(m\varphi + mp)) &= \sin(A \sin(m\varphi)) \end{aligned} \quad (3.71)$$

sowie

$$\cos(\varphi + p) = \cos \varphi \quad \text{und} \quad \sin(\varphi + p) = \sin \varphi \quad (3.72)$$

erfüllt sind. Die Gleichung (3.72) gilt, wenn p die Darstellung

$$p = 2q'\pi, \quad q' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (3.73)$$

hat. Als Nächstes wenden wir uns (3.71) zu: Unter Verwendung der Formel

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

lässt sich (3.71) schreiben wie folgt:

$$\begin{aligned} \cos \left(A \sin(m\varphi) \cdot \cos(mp) + A \cos(m\varphi) \cdot \sin(mp) \right) &= \cos \left(A \sin(m\varphi) \right), \\ \sin \left(A \sin(m\varphi) \cdot \cos(mp) + A \cos(m\varphi) \cdot \sin(mp) \right) &= \sin \left(A \sin(m\varphi) \right). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Nun gelten die Gleichungen (3.74) für alle $\varphi \in \mathbb{R}$, wenn

$$\cos(mp) = 1 \quad \text{und} \quad \sin(mp) = 0,$$

also – da nach Voraussetzung $mp \neq 0$ – für

$$mp = 2q\pi, \quad q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (3.75)$$

Die Gleichungen (3.75) und (3.73) gelten, wenn die Zahl $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ von der Gestalt

$$m = \frac{q}{q'} \quad \text{mit} \quad q, q' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (3.76)$$

ist, also $m \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Insgesamt lässt sich mit (3.73) und (3.76) folgender Satz formulieren:

Satz 3.5 *Die sphärische Kurve $c^* \subset S^2$ mit der Parameterdarstellung*

$$\mathbf{r}^*(\varphi) =: \begin{pmatrix} \cos \left(A \sin(m\varphi) \right) \cdot \cos \varphi \\ \cos \left(A \sin(m\varphi) \right) \cdot \sin \varphi \\ \sin \left(A \sin(m\varphi) \right) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R} \quad (3.77)$$

ist eine nichtebene, geschlossene C^ω -Kurve, wenn $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gilt. Hat dann m in gekürzter Form die Darstellung

$$m = \frac{q}{q'} \quad (q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, q' \in \mathbb{N}; q, q' \text{ teilerfremd}), \quad (3.78)$$

so gilt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{r}^*(\varphi) = \mathbf{r}^*(\varphi + 2q'\pi), \quad (3.79)$$

das heißt $p := 2q'\pi$ ist eine Periode von $\mathbf{r}^(\varphi)$.*

Parameterdarstellung der zum sphärischen Tangentenbild c^* gehörigen Windschiefen Kreise c

Aus (3.68) erhält man

$$\dot{f}(\varphi) := \frac{df}{d\varphi} = A m \cos(m\varphi) ,$$

damit gilt für die Bogenlänge s^* von c^* gemäß (3.7)

$$\frac{ds^*}{d\varphi} = \sqrt{A^2 m^2 \cos^2(m\varphi) + \cos^2(A \sin(m\varphi))} =: U(\varphi) . \quad (3.80)$$

Ausgehend von (3.31) erhält man mit (3.68), (3.69) und (3.80) die Parameterdarstellung $\mathbf{r}(\varphi)$ eines Windschiefen Kreises c der Krümmung $\kappa_0 > 0$ zur Basisfunktion $f(\varphi) = A \sin(m\varphi)$:

$$\mathbf{r}(\varphi) = \frac{1}{\kappa_0} \int_0^\varphi \begin{pmatrix} \cos(A \sin(mt)) \cdot \cos t \\ \cos(A \sin(mt)) \cdot \sin t \\ \sin(A \sin(mt)) \end{pmatrix} \cdot U(t) dt , \quad \varphi \in I \subseteq \mathbb{R} . \quad (3.81)$$

Die folgenden Abbildungen 3.17 - 3.24 zeigen die Gestalt der zur Basisfunktion $f(\varphi) = A \sin(m\varphi)$ gehörenden Windschiefen Kreise c gemäß (3.81) (teilweise mit zugehörigem sphärischem Tangentenbild c^*) für spezielle Wertepaare $(A, m) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\})$, für die nach Satz 3.5 die zugehörigen sphärischen Tangentenbilder c^* gemäß (3.18) geschlossene nichtebene C^ω -Kurven der Sphäre S^2 sind. Experimentell wird die Vermutung nahegelegt, dass diese Windschiefen Kreise c für geeignete Definitionsbereiche $I \subset \mathbb{R}$ sogar Gewundene Kreise sind, das heißt ihre nach Satz 3.5 dann geschlossenen sphärischen Tangentenbilder $c^* \in C^\omega$ erfüllen jeweils auch die Schwerpunktsbedingung (2.4) aus Satz 2.1.

Die Kurven c in den Abbildungen 3.17 - 3.24 wurden jeweils durch numerische Integration von (3.81) mittels des Computeralgebrapaketes MATHEMATICA erzeugt. Experimentell wird die Vermutung nahegelegt, dass (3.81) unter Verwendung der vollständig gekürzten Darstellung

$$m = \frac{q}{q'} \quad (q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, q' \in \mathbb{N}; q, q' \text{ teilerfremd})$$

für den Definitionsbereich

$$I = [0, 2q'\pi]$$

genau eine Kurvendurchlaufung von c beschreibt.

Für die Krümmung κ_0 von c wurde jeweils $\kappa_0 = 1$ gesetzt. An dem im Koordinatenursprung $O(0, 0, 0)$ eingezeichneten xyz -Koordinatenkreuz sind auf den Koordinatenachsen die Punkte $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ markiert.

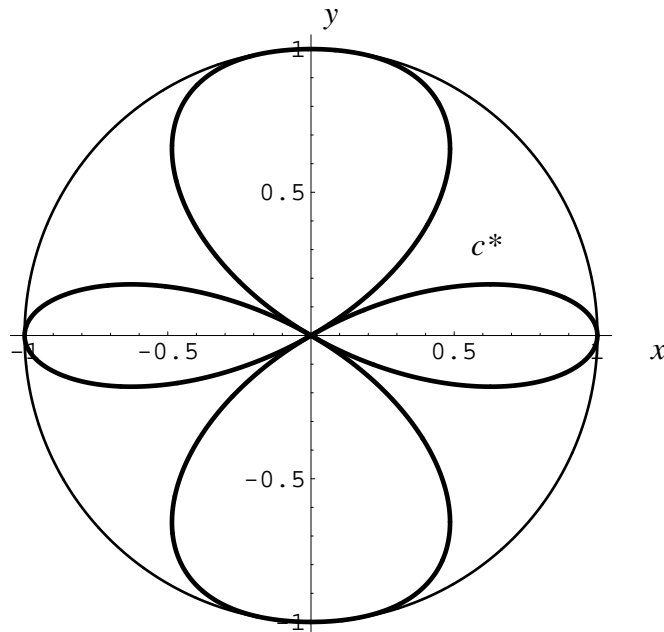


Abbildung 3.17a): Das sphärische Tangentenbild c^* des Gewundenen Kreises c gemäß der Parameterdarstellung (3.81) für die Basisfunktion $f(\varphi) = \pi \sin \varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Grundriss in die Äquatorebene (xy -Ebene). c^* wird im Grundriss einfach durchlaufen.

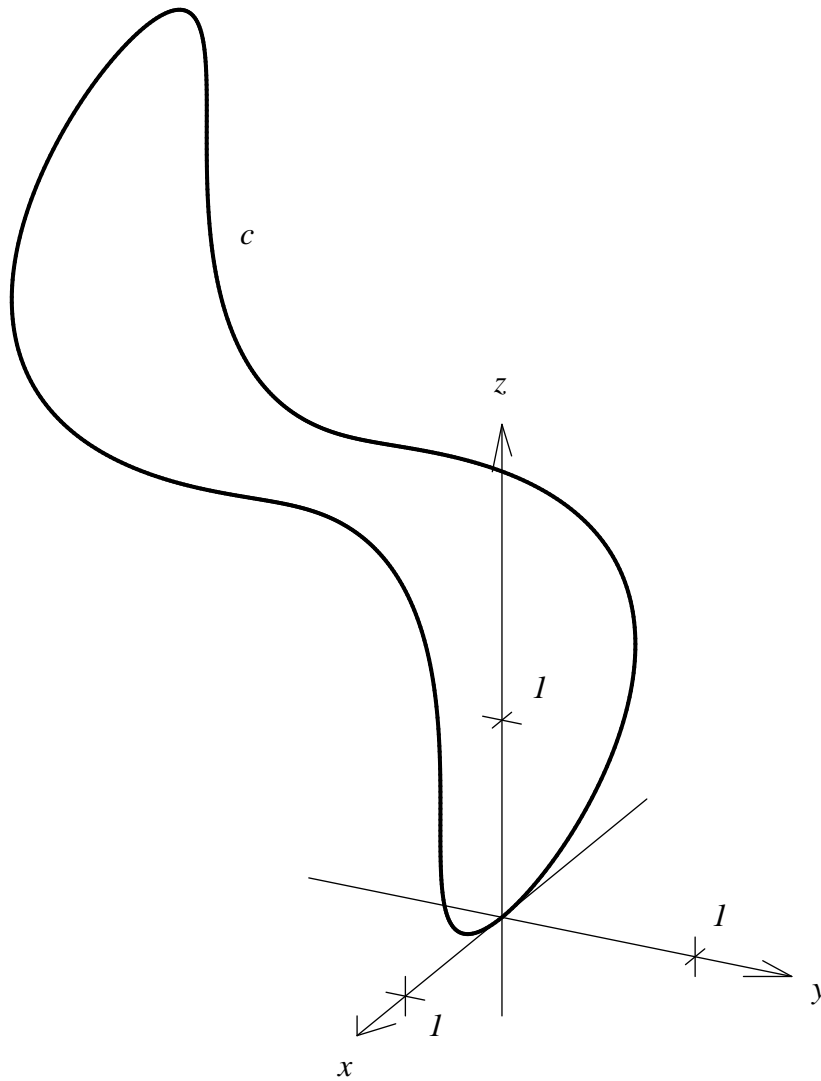


Abbildung 3.17b): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.81) für die Basisfunktion $f(\varphi) = \pi \cdot \sin \varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Schrägriss. Die Kurve c besitzt keine Selbstschnitte und ist vom topologischen Typ des Kreises.

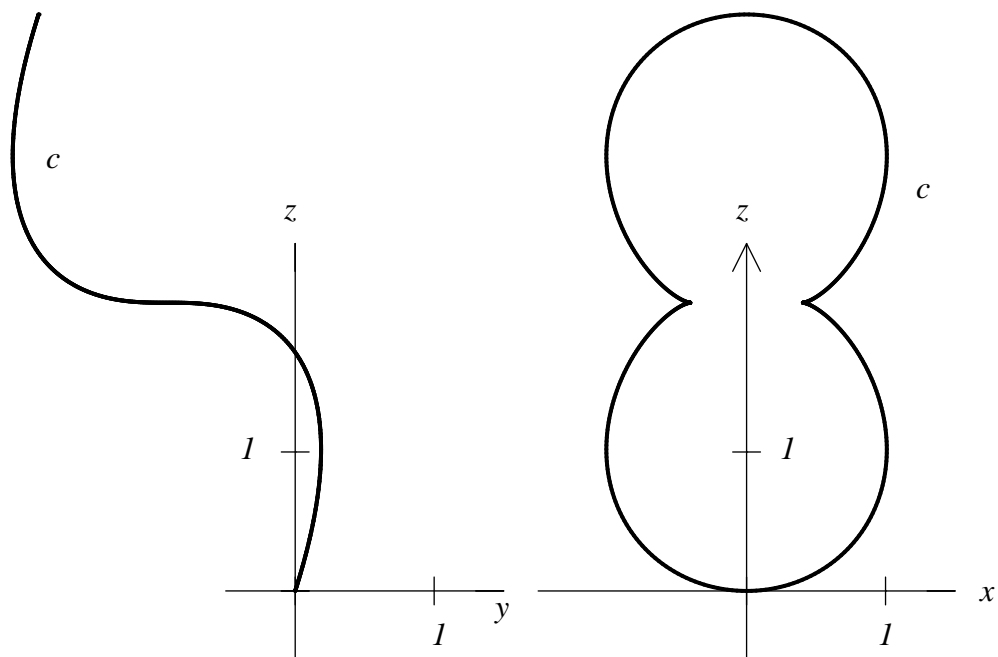


Abbildung 3.17c): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.81) für die Basisfunktion $f(\varphi) = \pi \cdot \sin \varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Normalriss in die yz -Ebene (links) und die xz -Ebene (rechts). Die Kurve c besitzt keine Selbstschnitte und ist vom topologischen Typ des Kreises.

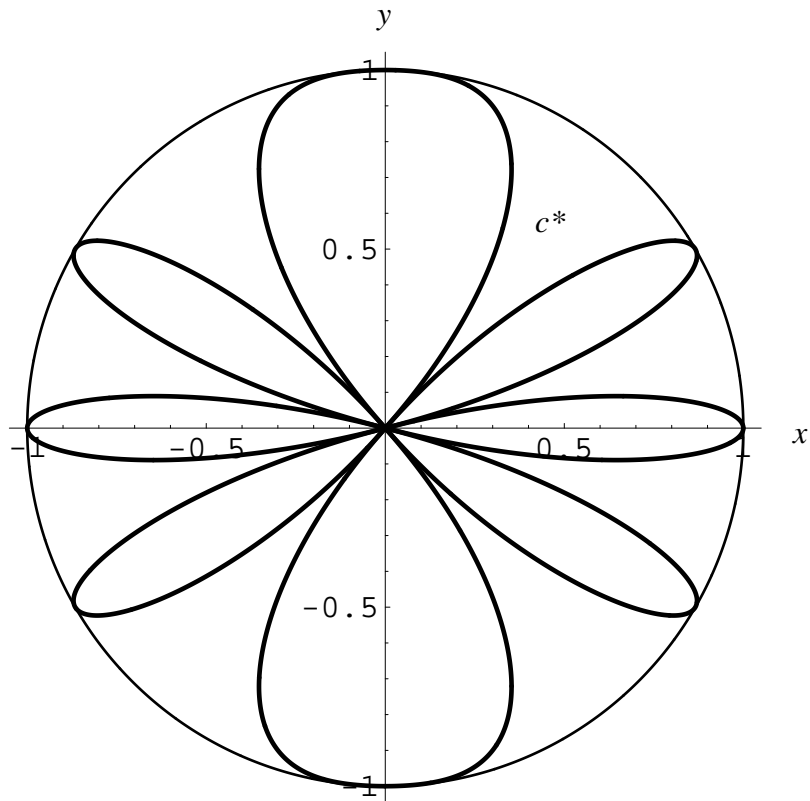


Abbildung 3.18a): Das sphärische Tangentenbild c^* des Gewundenen Kreises c gemäß der Parameterdarstellung (3.81) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 2\pi \sin \varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Grundriss in die Äquatorebene (xy -Ebene). c^* wird im Grundriss einfach durchlaufen.

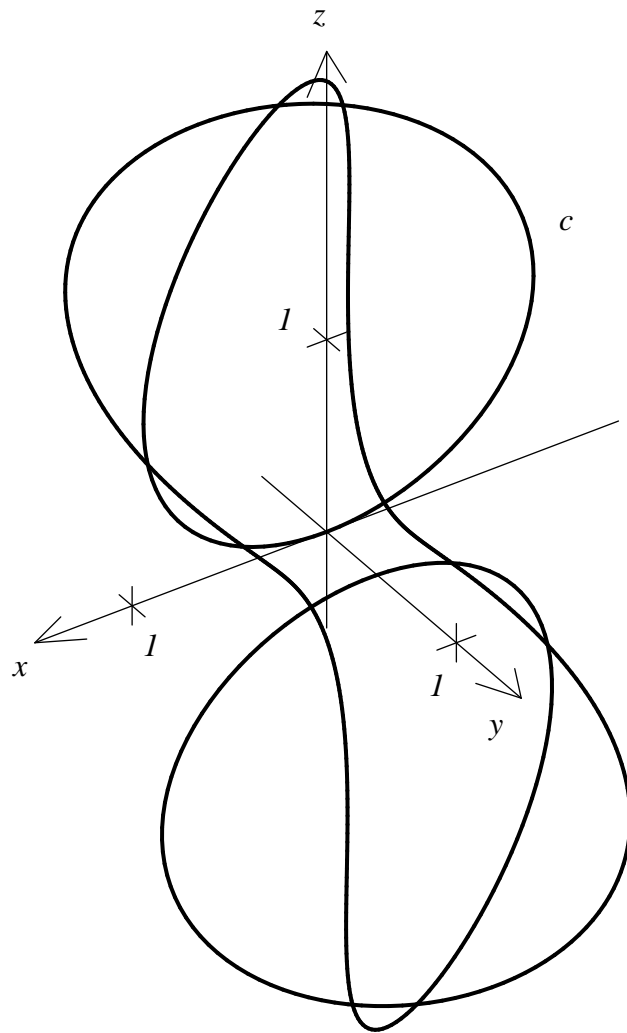


Abbildung 3.18b): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.81) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 2\pi \cdot \sin \varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Schrägriss.

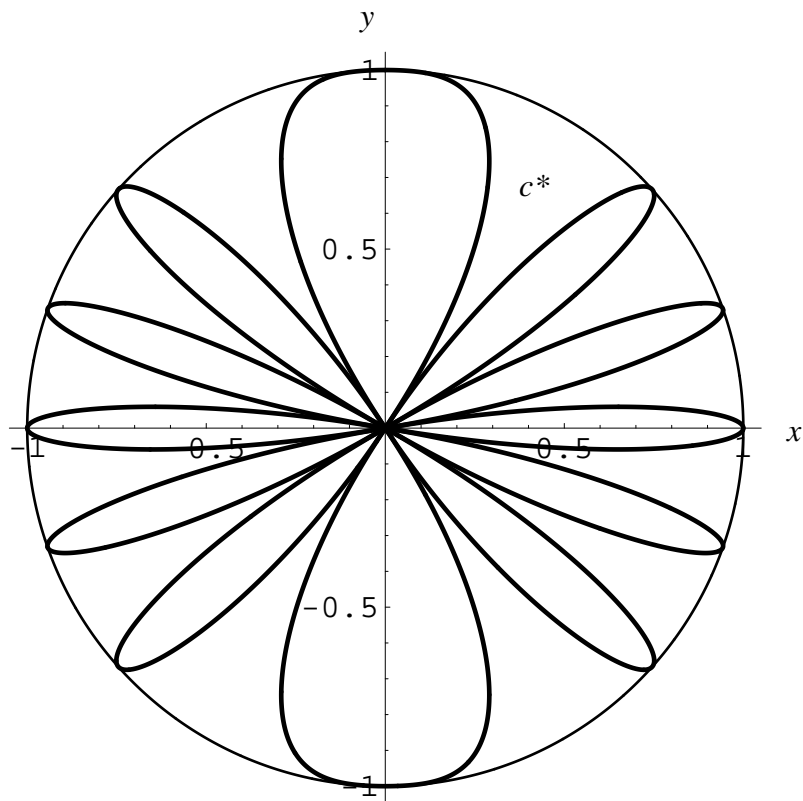


Abbildung 3.19a): Das sphärische Tangentenbild c^* des Gewundenen Kreises c gemäß der Parameterdarstellung (3.81) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 3\pi \sin \varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Grundriss in die Äquatorebene (xy -Ebene). c^* wird im Grundriss einfach durchlaufen.

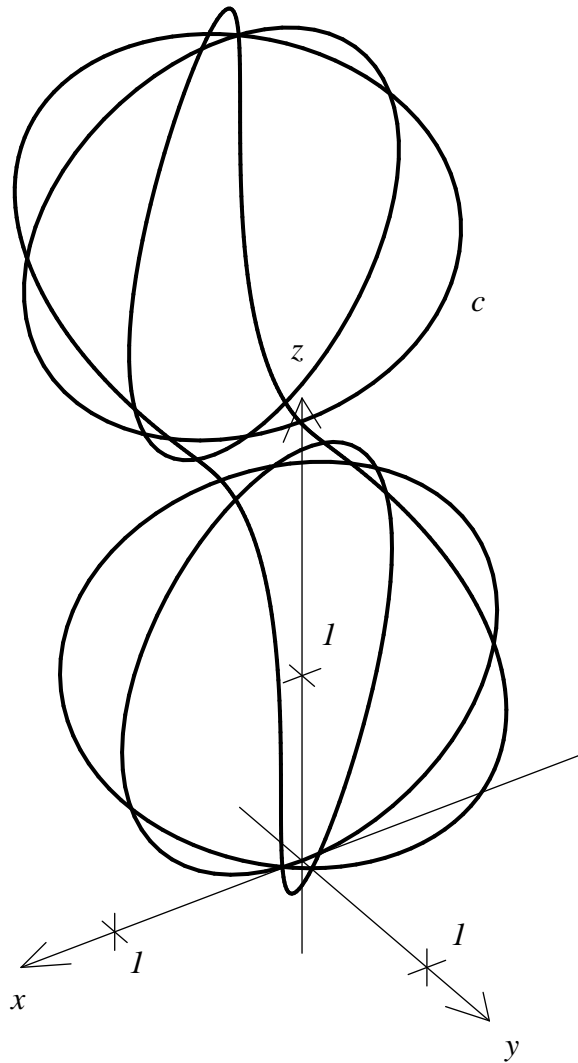


Abbildung 3.19b): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.81) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 3\pi \cdot \sin \varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Schrägriss.

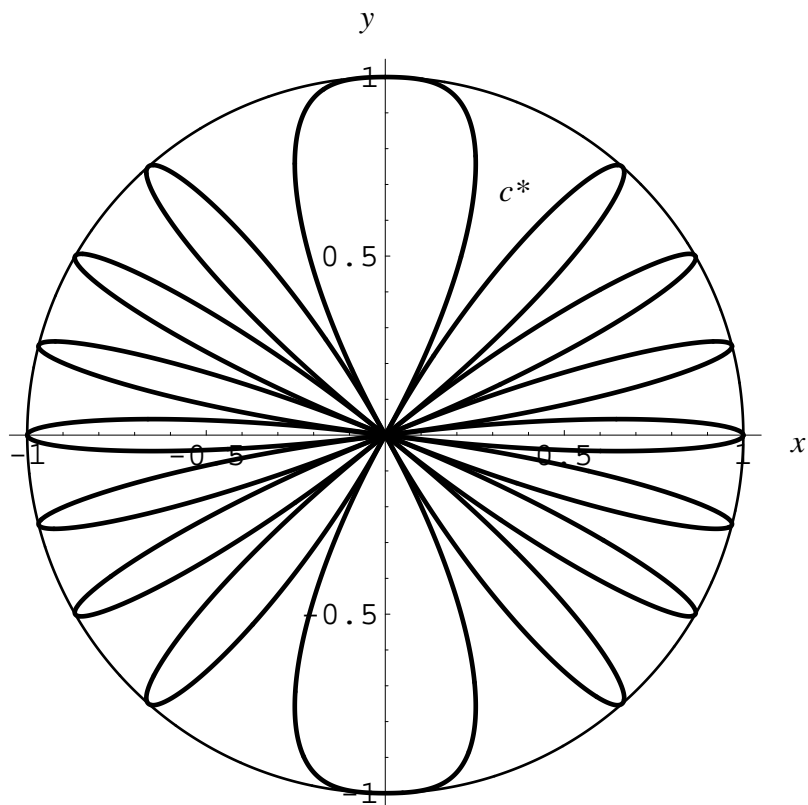


Abbildung 3.20a): Das sphärische Tangentenbild c^* des Gewundenen Kreises c gemäß der Parameterdarstellung (3.81) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 4\pi \sin \varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Grundriss in die Äquatorebene (xy -Ebene).

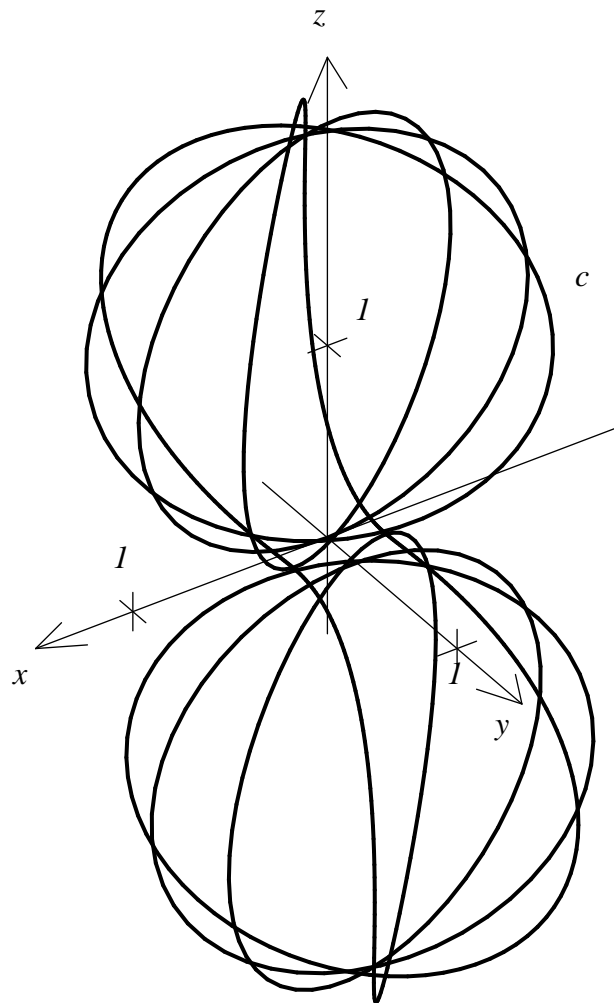


Abbildung 3.20b): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.81) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 4\pi \cdot \sin \varphi$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Schrägriss.

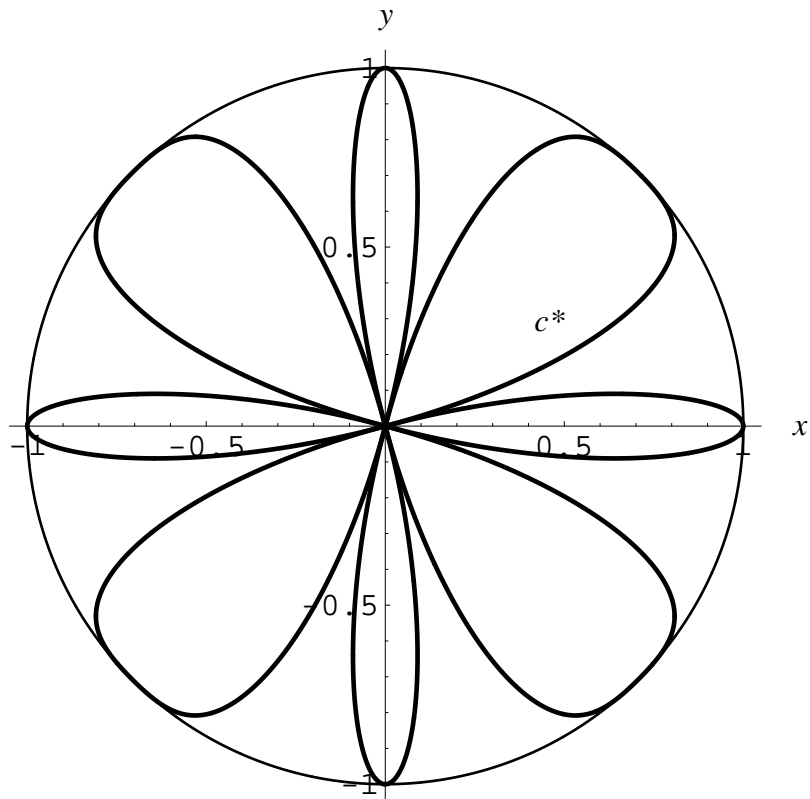


Abbildung 3.21a): Das sphärische Tangentenbild c^* des Gewundenen Kreises c gemäß der Parameterdarstellung (3.81) für die Basisfunktion $f(\varphi) = \pi \sin(2\varphi)$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Grundriss in die Äquatorebene (xy -Ebene).

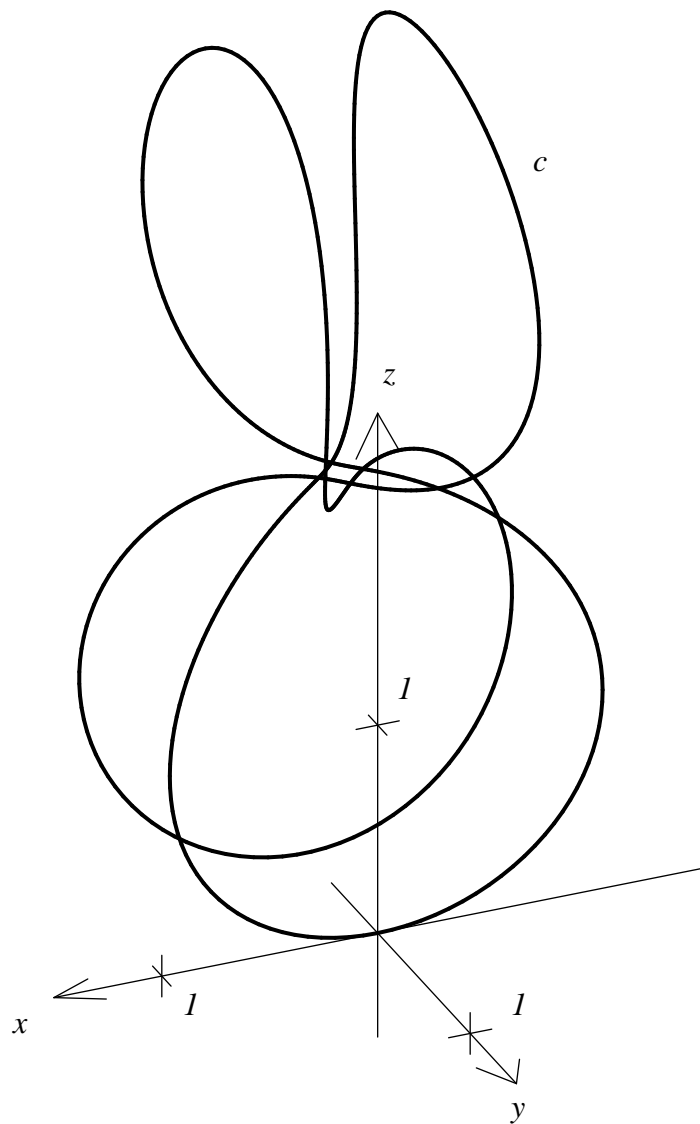


Abbildung 3.21b): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.81) für die Basisfunktion $f(\varphi) = \pi \cdot \sin(2\varphi)$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Schrägriss.

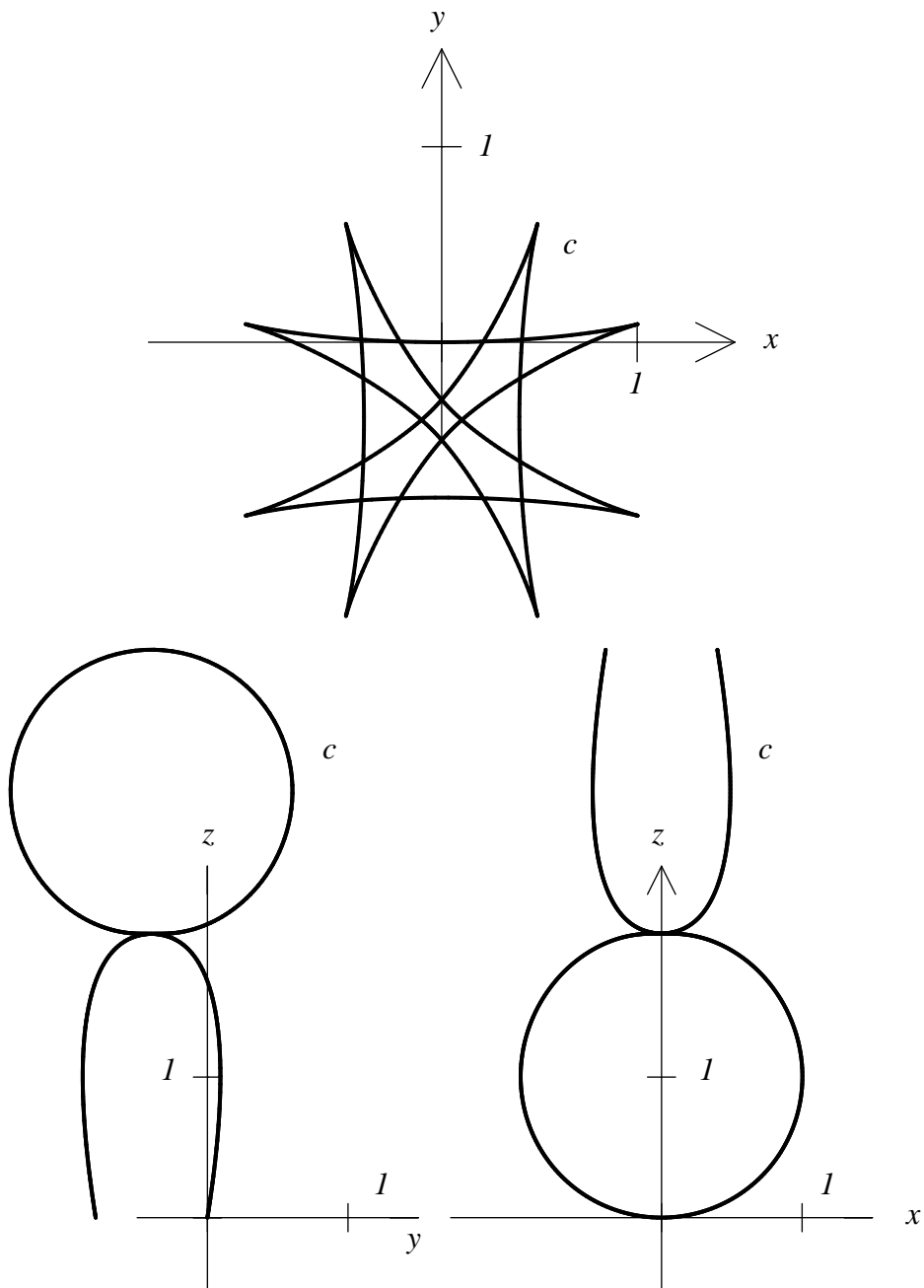


Abbildung 3.21c): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.81) für die Basisfunktion $f(\varphi) = \pi \cdot \sin(2\varphi)$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Grundriss in die xy -Ebene (oben) und in zwei Normalrissen in die yz -Ebene (unten links) und die xz -Ebene (unten rechts).

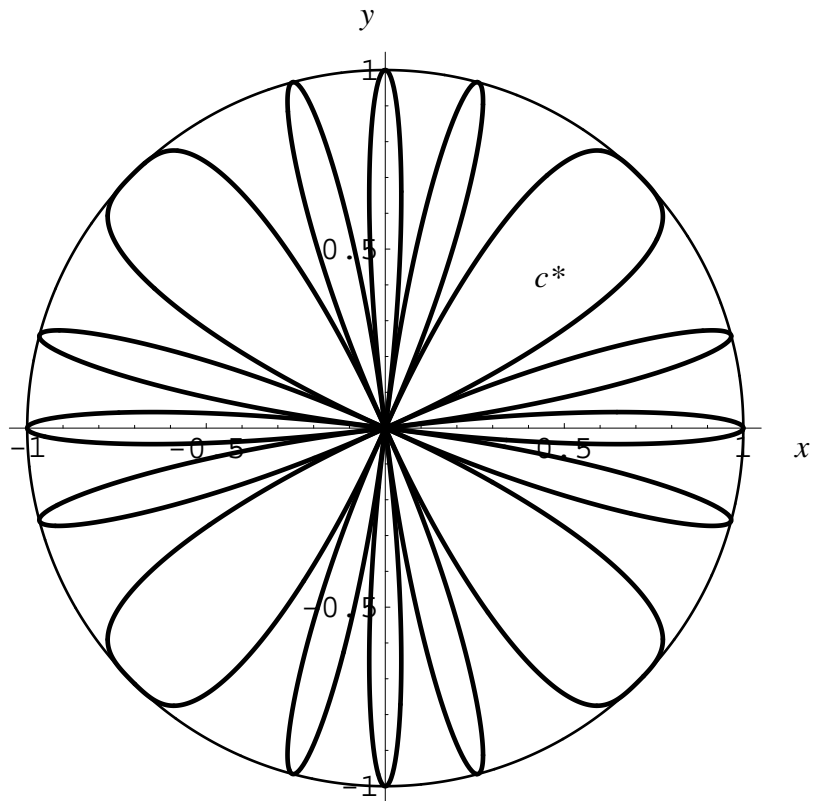


Abbildung 3.22a): Das sphärische Tangentenbild c^* des Gewundenen Kreises c gemäß der Parameterdarstellung (3.81) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 2\pi \sin(2\varphi)$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Grundriss in die Äquatorebene (xy -Ebene).

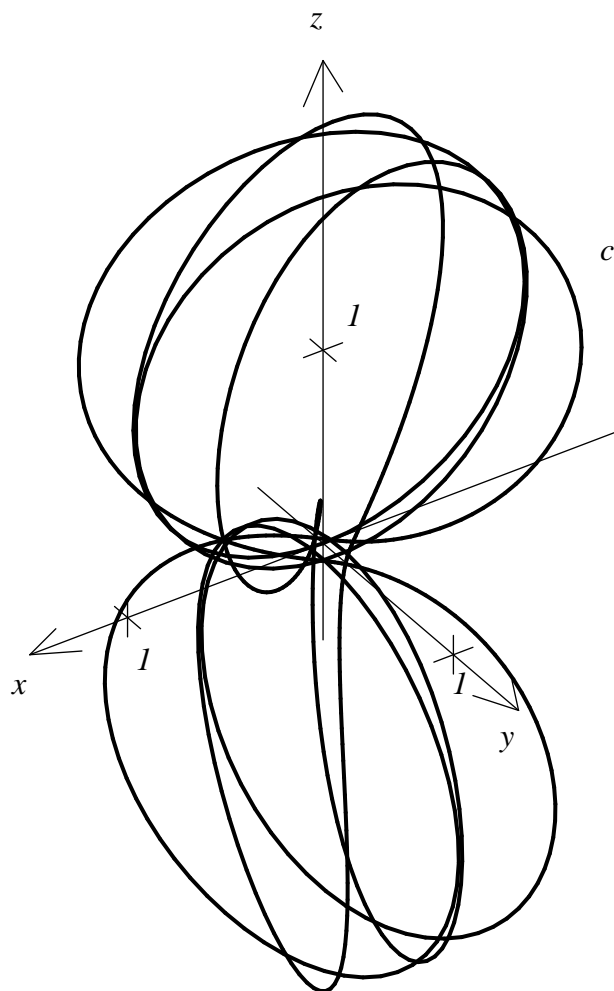


Abbildung 3.22b): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.81) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 2\pi \cdot \sin(2\varphi)$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Schrägriss.

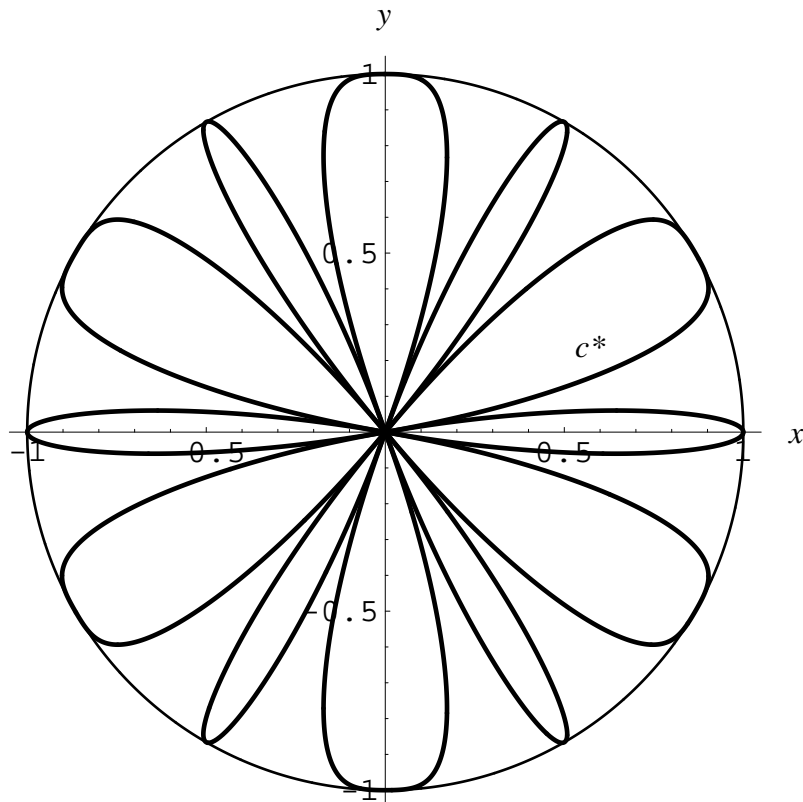


Abbildung 3.23a): Das sphärische Tangentenbild c^* des Gewundenen Kreises c gemäß der Parameterdarstellung (3.81) für die Basisfunktion $f(\varphi) = \pi \sin(3\varphi)$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Grundriss in die Äquatorebene (xy -Ebene).

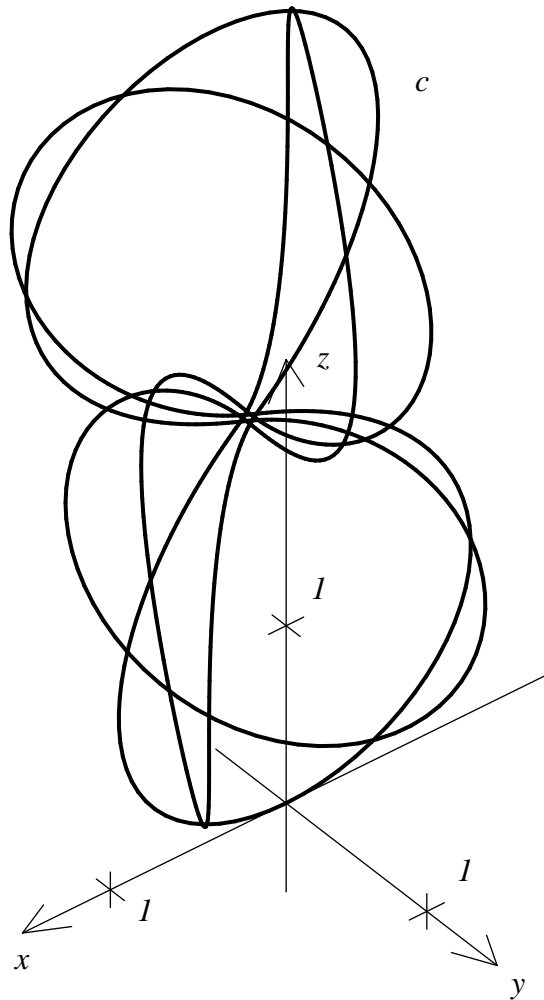


Abbildung 3.23b): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.81) für die Basisfunktion $f(\varphi) = \pi \cdot \sin(3\varphi)$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ im Schrägriss.

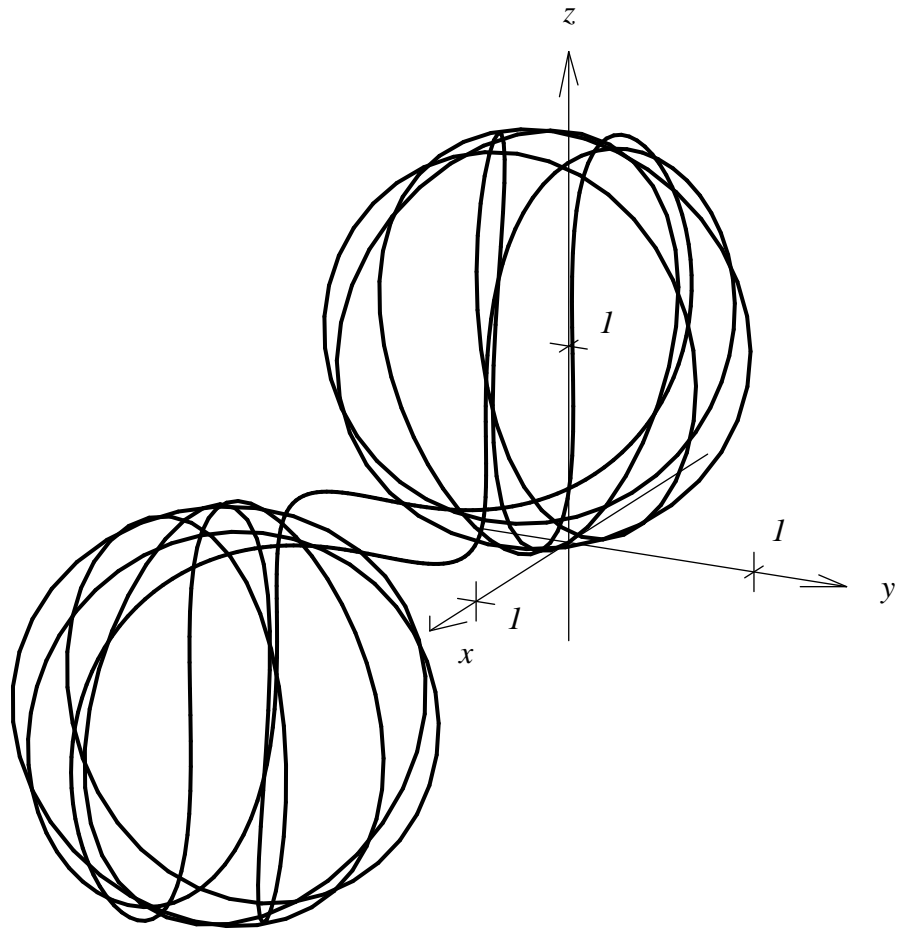


Abbildung 3.24a): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.81) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 6\pi \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{3}\right)$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 6\pi]$ im Schrägriss. Man beachte die beiden – offenbar kongruenten – “wollknäuelartigen” Teile der Raumkurve.

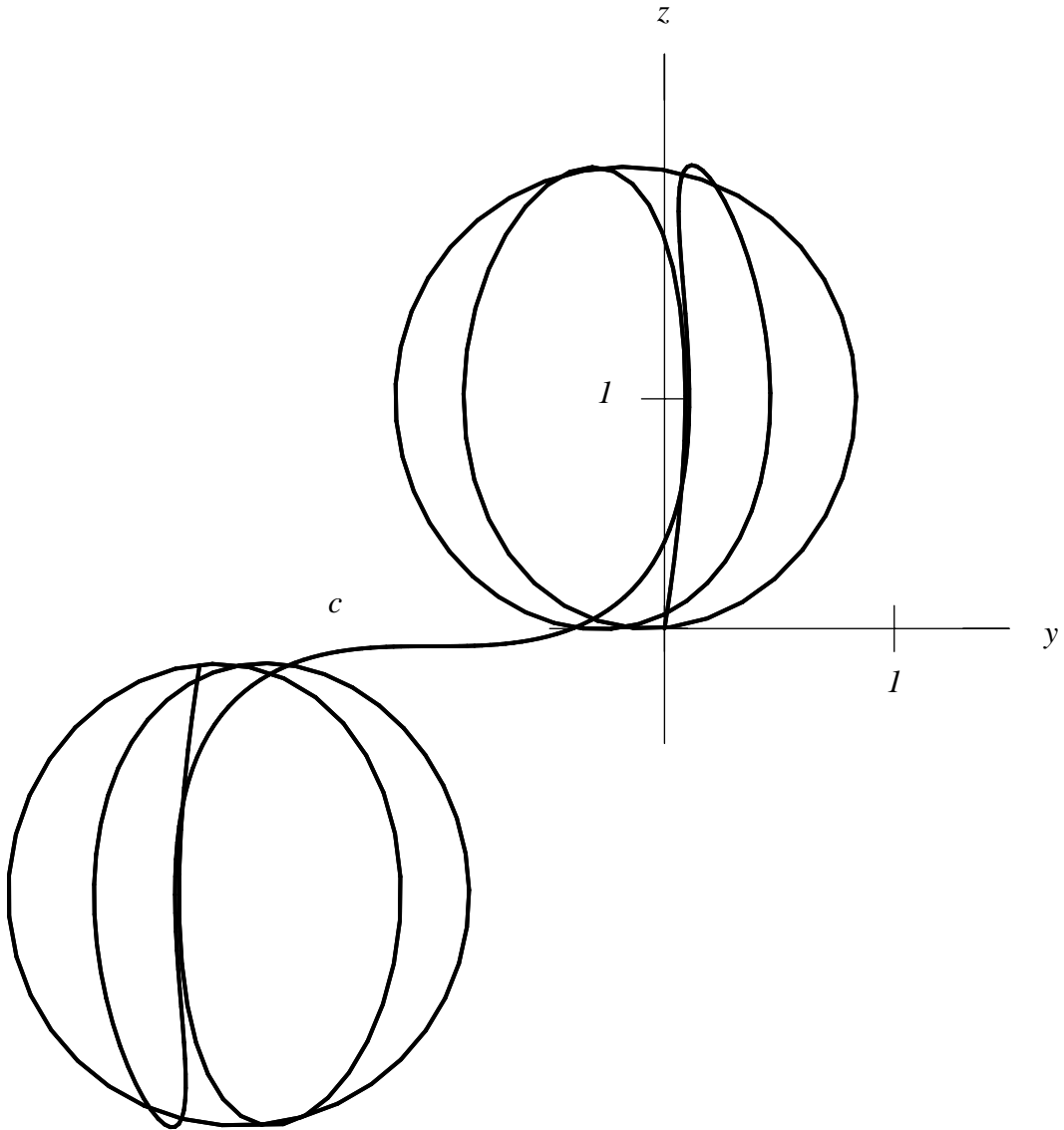


Abbildung 3.24b): Der Gewundene Kreis c gemäß der Parameterdarstellung (3.81) für die Basisfunktion $f(\varphi) = 6\pi \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{3}\right)$ mit dem Definitionsbereich $I = [0, 6\pi]$ im Normalriss in die yz -Ebene. In diesem Riss erscheint c doppelt überdeckt.

3.3 Eine Schar Windschiefer Kreise c mit asymptotischem Kreispaar

3.3.1 Eine spezielle sphärische Kurve c^*

Im Folgenden wollen wir ein interessantes Detail, ausgehend von der Gleichung (3.7) für die Bogenlänge s^* der sphärischen Kurve c^* , gemäß dem Ansatz (3.5) diskutieren. Laut der Koppelgleichung (3.7) ist ja

$$\left(\frac{ds^*}{d\varphi}\right)^2 = \dot{f}(\varphi)^2 + \cos^2 f(\varphi); \quad (3.82)$$

diese Gleichung beschreibt die differentielle Beziehung zwischen der Bogenlänge s^* der sphärischen Kurve c^* und dem Polarwinkel φ der Grundrisskurve \bar{c}^* von c^* .

Wir suchen nun sphärische Kurven c^* , deren Bogenlänge s^* mit dem Kurvenparameter φ in folgender Beziehung steht:

$$\frac{ds^*}{d\varphi} = a \quad \text{für alle } \varphi \in I \quad (3.83)$$

mit konstantem $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Bezüglich (3.83) suchen wir nun eine (wenn möglich geschlossen darstellbare) Parameterform der zugehörigen sphärischen Kurve c^* : Gemäß (3.82) ist (3.83) gleichbedeutend mit

$$\dot{f}(\varphi)^2 + \cos^2 f(\varphi) = a^2$$

oder mit $\dot{f} = \frac{df}{d\varphi}$ ohne Einschränkung, das heißt bis auf Spiegelung von c^* an der xy -Ebene, mit

$$\frac{df}{d\varphi} = -\sqrt{a^2 - \cos^2 f(\varphi)}. \quad (3.84)$$

Dies ist eine *trennbare* gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung für gesuchte C^1 -Funktionen f . Sie besitzt für $|a| \leq 1$ auch konstante Lösungen

$$f(\varphi) = \arccos(\pm a),$$

für die die zugehörige sphärische Kurve c^* gemäß (3.5) jeweils in einem Breitenkreis der Sphäre S^2 enthalten ist. Diese Lösungen seien daher im Folgenden als trivial ausgeschlossen.

Mittels des Prinzips der *Variablentrennung* können wir (3.84) dann umschreiben auf die differentielle Form

$$\frac{df}{\sqrt{a^2 - \cos^2 f}} = -d\varphi .$$

Beidseitige partielle Integration liefert ohne Einschränkung, das heißt bis auf eine additive Integrationskonstante

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - \cos^2 f}} df = -\varphi . \quad (3.85)$$

In letzter Gleichung (3.85) versuchen wir nun, die linke Seite elementar zu integrieren, was leider im Allgemeinen, das heißt für beliebige Konstante $a \in \mathbb{R}$, nicht möglich ist, da das Integral in (3.85) von allgemeinem *elliptischen Typ* ist.

Nun wollen wir die Konstante a so wählen, dass (3.85) geschlossen integrierbar ist. Dies ist genau dann möglich, wenn man $a = 1$ setzt, also

$$\frac{ds^*}{d\varphi} = 1 \quad \text{für alle } \varphi \in I \quad (3.86)$$

fordert. Man erhält dann wegen $1 - \cos^2 f = \sin^2 f$ im Einklang mit (3.84) die Differentialgleichung

$$\frac{df}{d\varphi} = -\sin f . \quad (3.87)$$

Diese besitzt, entsprechend obiger Bemerkung, die konstanten Lösungen

$$f(\varphi) = \text{const} \in \pi\mathbb{Z} .$$

Die zugehörige sphärische Kurve \bar{c}^* liegt dann gemäß (3.1) im Äquatorkreis der Sphäre S^2 , also dem Schnittkreis mit der Ebene $z = 0$. Die Kurve c^* besitzt dann – im Einklang mit (3.7) – die Bogenlänge $s^* = \varphi$.

Wir wollen jetzt die Existenz und Gestalt nichtkonstanter Lösungen der Differentialgleichung (3.87) untersuchen. Zu (3.85) äquivalent ist dann die Differentialgleichung

$$\int \frac{1}{\sin f} df = -\varphi , \quad (3.88)$$

die sich geschlossen integrieren lässt in der Form

$$\ln \tan \frac{f}{2} = -\varphi + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Hieraus erhalten wir als allgemeine Lösung von (3.87)

$$f(\varphi) = 2 \arctan e^{-\varphi+C}, \quad \varphi \in \mathbb{R} \quad (3.89)$$

mit maximalem zulässigem Definitionsintervall $I = \mathbb{R}$.

Zur Ermittlung geometrischer Eigenschaften der zur Funktion f aus (3.89) gehörenden sphärischen Kurve c^* gemäß (3.5) diskutieren wir, indem ohne Einschränkung $C = 0$ gesetzt wird, die Funktion

$$f(\varphi) = 2 \arctan e^{-\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \quad (3.90)$$

Diese Funktion f ist *analytisch* auf \mathbb{R} und bildet \mathbb{R} *surjektiv* auf den Wertebereich $W :=]0, \pi[$ ab. Ferner ist leicht einzusehen, dass gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow -\infty} f(\varphi) &= 2 \lim_{u \rightarrow +\infty} \arctan u = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \quad \text{und} \\ \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} f(\varphi) &= 2 \arctan 0 = 0. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Die 1. Ableitung von f berechnet sich gemäß (3.90) zu

$$\dot{f}(\varphi) := \frac{df}{d\varphi} = -\frac{2e^\varphi}{1+e^{2\varphi}} = -\frac{1}{\cosh \varphi}. \quad (3.92)$$

Da $\dot{f}(\varphi) < 0$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt, ist f *streng monoton* fallend und besitzt demnach *keine* Extrempunkte, $f(\varphi)$ bildet damit \mathbb{R} *bijektiv* auf $W =]0, \pi[$ ab.

Die Ableitung $\dot{f}(\varphi) = -1/\cosh \varphi$ erfüllt die Funktionalgleichung

$$\dot{f}(-\varphi) = \dot{f}(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}. \quad (3.93)$$

Mit der Eigenschaft (3.93) der Ableitung $\dot{f}(\varphi)$ lässt sich auch für deren Stammfunktion $f(\varphi)$ eine Funktionalgleichung herleiten: Wir integrieren (3.93) wie folgt:

$$\int_0^\varphi \dot{f}(-t) dt = \int_0^\varphi \dot{f}(t) dt.$$

Mit der Substitution $u := -t$ im Integral der linken Seite letzter Gleichung erhalten wir

$$-\int_0^{-\varphi} \dot{f}(u) du = f(\varphi) - f(0)$$

und schließlich

$$-[f(-\varphi) - f(0)] = f(\varphi) - f(0),$$

was äquivalent ist zu

$$f(\varphi) + f(-\varphi) = 2f(0).$$

Nun ist $f(0) = 2 \arctan e^0 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, damit ergibt sich folgende Funktionalgleichung für $f(\varphi)$:

$$f(\varphi) + f(-\varphi) = \pi. \quad (3.94)$$

Damit ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Zentrum

$$\left(0, f(0)\right) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

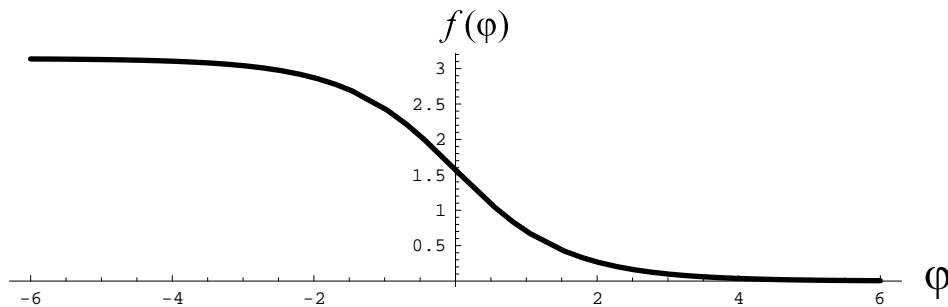
Aus (3.92) ergibt sich außerdem

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\infty} \dot{f}(\varphi) = 0. \quad (3.95)$$

Für die 2. Ableitung $\ddot{f} := \frac{d^2 f}{d\varphi^2}$ ergibt die Differentiation von (3.92)

$$\ddot{f}(\varphi) = \frac{\sinh \varphi}{\cosh^2 \varphi}. \quad (3.96)$$

Die Funktion $\ddot{f}(\varphi)$ verschwindet genau für $\varphi = 0$, wo auch ein Vorzeichenwechsel vorliegt. Demnach ist dort der einzige Wendepunkt von $f(\varphi)$. Zusammenfassend zeigt die nachstehende Abbildung den Graphen von $f(\varphi) = 2 \arctan e^{-\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$: Auf der horizontalen Achse wird φ , auf der vertikalen Achse $f(\varphi)$ abgetragen.



Als Nächstes setzen wir $f(\varphi) = 2 \arctan e^{-\varphi}$ in die allgemeine Parameterdarstellung (3.5) ein und erhalten so eine Parameterdarstellung $\mathfrak{r}^*(\varphi)$ der auf der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{E}^3$ verlaufenden Kurve c^* , deren weitere geometrische Eigenschaften wir im Folgenden erörtern wollen: Es ist

$$\mathfrak{r}^*(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(2 \arctan e^{-\varphi}) \cdot \cos \varphi \\ \cos(2 \arctan e^{-\varphi}) \cdot \sin \varphi \\ \sin(2 \arctan e^{-\varphi}) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \quad (3.97)$$

Zur Umformung von (3.97) verwenden wir, dass für alle $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sin(2u) &= 2 \sin u \cdot \cos u, \\ \cos(2u) &= 2 \cos^2 u - 1 \end{aligned} \quad (3.98)$$

und

$$\begin{aligned} \sin(\arctan u) &= \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \\ \cos(\arctan u) &= \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \end{aligned} \quad (3.99)$$

gilt. Aus (3.98) und (3.99) folgt

$$\begin{aligned} \sin(2 \arctan u) &= 2 \sin(\arctan u) \cdot \cos(\arctan u) \\ &= 2 \cdot \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{2u}{1+u^2}, \\ \cos(2 \arctan u) &= 2 \cos^2(\arctan u) - 1 \\ &= \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Mit (3.100) lassen sich die Terme $\cos(2 \arctan e^{-\varphi})$ und $\sin(2 \arctan e^{-\varphi})$ in (3.97) schreiben als

$$\begin{aligned} \sin(2 \arctan e^{-\varphi}) &= \frac{2e^{-\varphi}}{1+e^{-2\varphi}} = \frac{2}{e^\varphi + e^{-\varphi}} = \frac{1}{\cosh \varphi}, \\ \cos(2 \arctan e^{-\varphi}) &= \frac{1-e^{-2\varphi}}{1+e^{-2\varphi}} = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{e^\varphi + e^{-\varphi}} = \tanh \varphi. \end{aligned}$$

Damit lässt sich die Parameterdarstellung (3.97) der sphärischen Kurve c^* schreiben als:

$$c^* : \mathbf{r}^*(\varphi) = \begin{pmatrix} x^*(\varphi) \\ y^*(\varphi) \\ z^*(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tanh \varphi \cdot \cos \varphi \\ \tanh \varphi \cdot \sin \varphi \\ \frac{1}{\cosh \varphi} \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \quad (3.101)$$

Nachfolgend werden wir elementare differentialgeometrische Eigenschaften und Größen der sphärischen Kurve c^* untersuchen.

3.3.2 Geometrische Eigenschaften von c^*

Für die z -Koordinatenfunktion der Parameterform $\mathbf{r}^*(\varphi)$ in (3.101) gilt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$0 < z^*(\varphi) = \frac{1}{\cosh \varphi} \leq 1 \quad (3.102)$$

sowie

$$z^*(\varphi) = 1 \iff \varphi = 0, \quad \lim_{\varphi \rightarrow \pm\infty} z^*(\varphi) = 0.$$

Damit verläuft c^* auf der oberen Halbkugel, nähert sich aber asymptotisch dem Äquatorkreis der Trägersphäre S^2 .

Als auf der Einheitssphäre S^2 verlaufende Kurve hat c^* gemäß ihrer Konstruktion und ihrer Parameterdarstellung folgende weitere Eigenschaften:

Wegen (3.83) verhalten sich im zugrundegelegten Fall $a = 1$ die Bogenlänge s^* und der Kurvenparameter φ gemäß

$$\frac{ds^*}{d\varphi} = 1, \quad (3.103)$$

es ist also ohne Einschränkung $s^* = \varphi$. Damit ist c^* in der Darstellung (3.101) bereits auf *Bogenlänge* $s^* = \varphi$ parametrisiert.

Wir können die Beziehung $s^* = \varphi$ auch anschaulich auf der Trägersphäre S^2 deuten: Wir versehen dazu die Sphäre S^2 mit einem Koordinatennetz aus Längen- und Breitenkreisen. Da wir auf der Einheitssphäre sind, lässt sich der Parameter φ gemäß seiner Deutung als Polarwinkel in der Äquatorebene auch als fortschreitende Geographische Länge deuten.

Wir formulieren diese ausgezeichneten Eigenschaften der im vorherigen Abschnitt bestimmten sphärischen Kurve c^* in dem folgenden

Satz 3.6 *Die auf der Einheitssphäre S^2 verlaufende nichtebene Kurve c^* , deren laufende Bogenlänge s^* mit der beim Kurvendurchlauf fortschreitenden geographischen Länge φ übereinstimmt, hat als Grundriss \bar{c}^* in die Äquatorebene die auf die geographische Länge φ und die Polarform $r = r(\varphi)$ zum Mittelpunkt O^* von S^2 bezogene Darstellung*

$$\bar{c}^* : r(\varphi) = \tanh \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \quad (3.104)$$

Damit lautet die auf ihre Bogenlänge bezogene Parameterdarstellung von c^ in einem mit dem Mittelpunkt O^* von S^2 als Koordinatenursprung gewählten kartesischen Koordinatensystem:*

$$c^* : \mathbf{r}^*(\varphi) = \frac{1}{\cosh \varphi} \cdot \begin{pmatrix} \sinh \varphi \cdot \cos \varphi \\ \sinh \varphi \cdot \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \quad (3.105)$$

3.3.3 Krümmung und Torsion von c^*

Als Nächstes bestimmen wir die *natürlichen Gleichungen*, das heißt Krümmung $\kappa^*(\varphi)$ und Torsion $\tau^*(\varphi)$ der durch die Parameterdarstellung (3.101) gegebenen sphärischen Kurve c^* .

Da nach Satz 3.6 der Kurvenparameter φ schon Bogenlängenparameter von c^* ist, berechnen sich allgemein die Krümmung κ^* und Torsion τ^* aus den bekannten Formeln (siehe [13], S. 149 und S. 156)

$$\begin{aligned} \kappa^*(\varphi) &= |\mathbf{r}^{*''}(\varphi)| \quad \text{und} \\ \tau^*(\varphi) &= \frac{\det(\mathbf{r}^{*'}(\varphi), \mathbf{r}^{*''}(\varphi), \mathbf{r}^{*'''}(\varphi))}{(\kappa^*(\varphi))^2}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Ausgehend von der Parameterdarstellung (3.101) der Kurve c^* erhält man

$$\mathbf{r}^{*\prime} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \varphi}{\cosh^2 \varphi} - \tanh \varphi \cdot \sin \varphi \\ \frac{\sin \varphi}{\cosh^2 \varphi} + \tanh \varphi \cdot \cos \varphi \\ -\frac{\sinh \varphi}{\cosh^2 \varphi} \end{pmatrix}, \quad (3.107)$$

$$\mathbf{r}^{*\prime\prime} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \cdot \tanh \varphi - \frac{2}{\cosh^2 \varphi} \cdot (\sin \varphi + \tanh \varphi \cdot \cos \varphi) \\ -\sin \varphi \cdot \tanh \varphi + \frac{2}{\cosh^2 \varphi} \cdot (\cos \varphi - \tanh \varphi \cdot \sin \varphi) \\ \frac{\cosh(2\varphi) - 3}{2 \cosh^3 \varphi} \end{pmatrix} \quad (3.108)$$

und

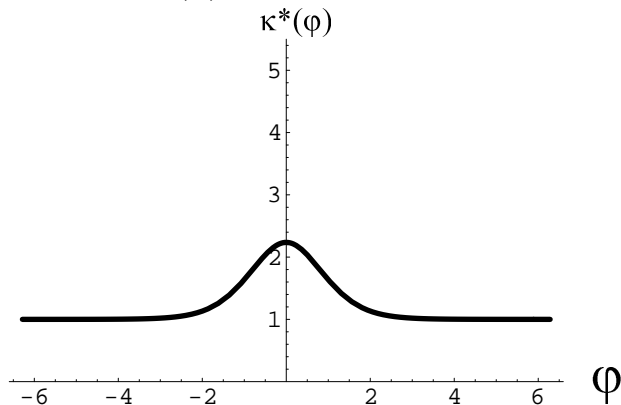
$$\mathbf{r}^{*\prime\prime\prime} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8 \cosh^4 \varphi} \left[4 \cdot (\cosh(2\varphi) - 11) \cdot \cos \varphi + (26 \sinh(2\varphi) + \sinh(4\varphi)) \cdot \sin \varphi \right] \\ \frac{1}{8 \cosh^4 \varphi} \left[4 \cdot (\cosh(2\varphi) - 11) \cdot \sin \varphi - (26 \sinh(2\varphi) + \sinh(4\varphi)) \cdot \cos \varphi \right] \\ \frac{\sinh \varphi}{\cosh^4 \varphi} (5 - \sinh^2 \varphi) \end{pmatrix}. \quad (3.109)$$

Da $\varphi = s^*$ Bogenlängenparameter von c^* ist, gilt insbesondere $|\mathbf{r}^{*\prime}| = 1$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$. Mit (3.106) erhält man schließlich nach umfangreicher Rechnung Krümmung $\kappa^*(\varphi)$ und Torsion $\tau^*(\varphi)$ der sphärischen Kurve c^* . Die *natürlichen Gleichungen* der sphärischen Raumkurve c^* gemäß (3.105) lauten damit:

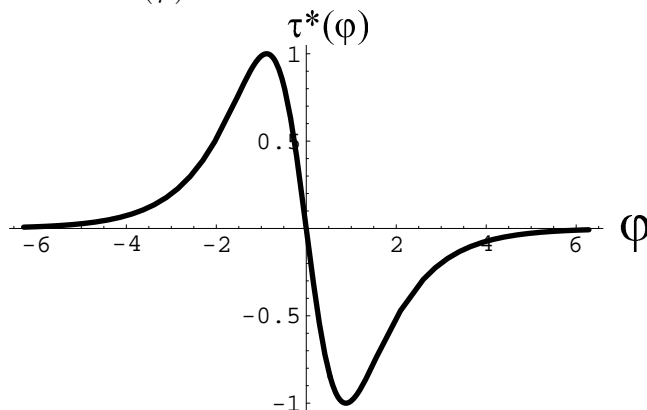
$$\begin{aligned} \kappa^*(\varphi) &= \sqrt{5 - 4 \tanh^2 \varphi}, \\ \tau^*(\varphi) &= -\frac{2 \sinh \varphi}{5 + \sinh^2 \varphi}, \quad \varphi = s^* \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Folgende Abbildungen zeigen die Graphen von Krümmung und Torsion:

Der Graph der Krümmung $\kappa^*(\varphi)$:



Der Graph der Torsion $\tau^*(\varphi)$:



Die Diskussion der natürlichen Gleichungen (3.110) zeigt:

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\infty} \kappa^*(\varphi) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\varphi \rightarrow \pm\infty} \tau^*(\varphi) = 0.$$

Aus der Formel (3.110) für die Torsion von c^* ersieht man ferner, dass der einzige Henkelpunkt von c^* der Kurvenpunkt zum Parameterwert $\varphi = 0$ ist, also gemäß der Parameterform (3.105) der Nordpol $(0, 0, 1)$ der Sphäre S^2 .

Die folgende Abbildung 3.25 zeigt die sphärische Kurve $c^* \subset S^2$ mit der Parameterdarstellung (3.105):

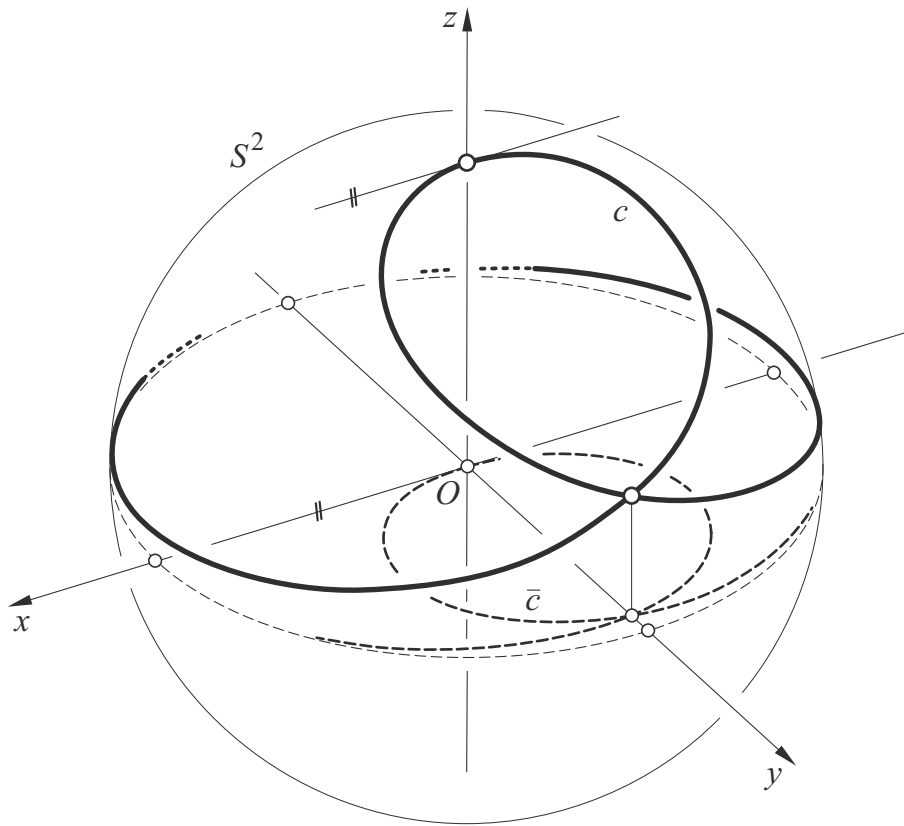


Abbildung 3.25: Die (bis auf Drehungen um die z -Achse) auf der Sphäre S^2 verlaufende und nicht in einem Großkreis enthaltene Kurve c^* gemäß (3.105), deren beim Kurvendurchlauf fortschreitende Bogenlänge gleich der fortschreitenden geographischen Länge ist, samt ihrem Grundriss \bar{c} in die xy -Ebene, im Schrägriss. Die Kurve c ist symmetrisch zur yz -Ebene und nähert sich (wie auch \bar{c}) asymptotisch dem Äquatorkreis von S^2 in der xy -Ebene.

3.3.4 Die zu c^* gehörigen Windschiefen Kreise c

Die in Satz 3.6 gefundene, auf Bogenlänge $\varphi = s^*$ bezogene sphärische Kurve c^* der Parameterdarstellung (3.105) lässt sich als Tangentenbild konstant gekrümmter Raumkurven c auffassen. Wir ermitteln durch Integration von (3.105) eine Parameterdarstellung dieser Kurven c mit vorgegebener konstanter Krümmung $\kappa_0 > 0$:

Gemäß (3.105) ist c^* in auf Bogenlänge φ bezogener Parameterform gegeben durch

$$c^* : \quad \mathbf{r}^*(\varphi) = \begin{pmatrix} x^*(\varphi) \\ y^*(\varphi) \\ z^*(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tanh \varphi \cdot \cos \varphi \\ \tanh \varphi \cdot \sin \varphi \\ \frac{1}{\cosh \varphi} \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \quad (3.111)$$

Nach Satz 2.1 ist die Parameterdarstellung $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ einer regulären, auf ihre Bogenlänge s bezogenen (nicht notwendig geschlossenen) Raumkurve c konstanter Krümmung $\kappa_0 > 0$, deren sphärisches Tangentenbild c^* ist, bestimmt durch

$$\mathbf{r}(s) = \frac{1}{\kappa_0} \int_0^{\kappa_0 s} \mathbf{r}^*(\varphi) d\varphi. \quad (3.112)$$

Für die drei Koordinatenfunktionen von $\mathbf{r}(s)$ ergeben sich die Integrale

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{1}{\kappa_0} \int_0^{\kappa_0 s} x^*(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\kappa_0} \int_0^{\kappa_0 s} \tanh \varphi \cdot \cos \varphi d\varphi, \\ y(s) &= \frac{1}{\kappa_0} \int_0^{\kappa_0 s} y^*(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\kappa_0} \int_0^{\kappa_0 s} \tanh \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi, \\ z(s) &= \frac{1}{\kappa_0} \int_0^{\kappa_0 s} z^*(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\kappa_0} \int_0^{\kappa_0 s} \frac{2e^\varphi}{1 + e^{2\varphi}} d\varphi, \end{aligned} \quad (3.113)$$

wobei in $z(s)$ die Identität $\frac{1}{\cosh \varphi} = \frac{2e^\varphi}{1 + e^{2\varphi}}$ verwendet wurde.

Für den Parameterwert $s = 0$ hat man damit die Anfangswerte

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{o} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}'(0) = \mathbf{r}^*(0) = (0, 0, 1)^T,$$

das heißt: im Koordinatenursprung $O(0, 0, 0) \in c$ besitzt die Raumkurve c mit der Parameterdarstellung (3.113) die z -Achse als Kurventangente.

Nun untersuchen wir die in (3.113) auftretenden Integrale auf elementare Integrierbarkeit: Die Koordinatenfunktionen $x(s)$ und $y(s)$ sind nicht elementar darstellbar. Die Koordinatenfunktion $z(s)$ dagegen lässt sich elementar integrieren, denn es ist

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{e^\varphi}{1 + (e^\varphi)^2} d\varphi &= \int_1^{e^t} \frac{1}{1 + u^2} du = \left[\arctan u \right]_1^{e^t} \\ &= \arctan e^t - \arctan 1 = \arctan e^t - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

und damit

$$z(s) = \frac{1}{\kappa_0} \left(2 \arctan e^{\kappa_0 s} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Die Parameterdarstellung des Windschiefen Kreises c lautet somit

$$c : \quad \mathfrak{r}(s) = \frac{1}{\kappa_0} \cdot \begin{pmatrix} \int_0^{\kappa_0 s} \tanh \varphi \cdot \cos \varphi d\varphi \\ \int_0^{\kappa_0 s} \tanh \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi \\ 2 \arctan e^{\kappa_0 s} - \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \quad (3.114)$$

Für die z -Koordinatenfunktion $z(s) = \frac{1}{\kappa_0} \left(2 \arctan e^{\kappa_0 s} - \frac{\pi}{2} \right)$ gilt

$$-\frac{\pi}{2\kappa_0} < z(s) < \frac{\pi}{2\kappa_0}$$

und

$$\lim_{s \rightarrow \infty} z(s) = \frac{\pi}{2\kappa_0}, \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} z(s) = -\frac{\pi}{2\kappa_0}. \quad (3.115)$$

3.3.5 Symmetrieeigenschaften der Windschiefen Kreise c

Wir untersuchen die Koordinatenfunktionen $x(s)$, $y(s)$ und $z(s)$ der Parameterdarstellung (3.114) des Windschiefen Kreises c der konstanten Krümmung $\kappa_0 > 0$:

Wegen des *ungeraden* Integranden $\tanh \varphi \cdot \cos \varphi$ und des *geraden* Integranden $\tanh \varphi \cdot \sin \varphi$ gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\int_0^t \tanh \varphi \cdot \cos \varphi d\varphi = \int_0^{-t} \tanh \varphi \cdot \cos \varphi d\varphi$$

beziehungsweise

$$\int_0^t \tanh \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi = - \int_0^{-t} \tanh \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi$$

und damit für alle $s \in \mathbb{R}$

$$x(s) = x(-s) \quad \text{und} \quad y(s) = -y(-s). \quad (3.116)$$

Weiter erfüllt wegen (3.90) und (3.94) die Funktion $h(u) := 2 \arctan e^{-u}$ die Funktionalgleichung

$$h(u) + h(-u) = \pi$$

für alle $u \in \mathbb{R}$, und damit die Funktion $h(-\kappa_0 s) = 2 \arctan e^{\kappa_0 s}$ für alle $s \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$2 \arctan e^{-\kappa_0 s} + 2 \arctan e^{\kappa_0 s} = \pi,$$

welche äquivalent ist zu

$$2 \arctan e^{-\kappa_0 s} - \frac{\pi}{2} + 2 \arctan e^{\kappa_0 s} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Die Division der letzten Gleichung durch $\kappa_0 > 0$ zeigt schließlich im Vergleich mit (3.114), dass für alle $s \in \mathbb{R}$

$$z(-s) + z(s) = 0 \quad \text{also} \quad z(-s) = -z(s), \quad (3.117)$$

gilt.

Ergebnis: Insgesamt bedeuten die drei Funktionalgleichungen in (3.116) und (3.117), dass die Raumkurve c gemäß der Parameterdarstellung (3.114) achsensymmetrisch zur x -Achse ist.

3.3.6 Das asymptotische Verhalten der Windschiefen Kreise c

Nun untersuchen wir die Raumkurven c gemäß (3.114) auf ihr asymptotisches Verhalten für $s \rightarrow \pm\infty$: Wir führen dazu in der Parameterdarstellung (3.114) von $\mathbf{r}(s)$ in der x - und y - Koordinatenfunktion jeweils partielle Integration durch. Mit

$$u(\varphi) := \tanh \varphi \quad \text{und} \quad v'(\varphi) = \cos \varphi \quad \text{beziehungsweise} \quad v'(\varphi) = \sin \varphi$$

erhalten wir für $x(s)$ die Darstellung

$$\begin{aligned} \kappa_0 \cdot x(s) &= \left[\tanh \varphi \cdot \sin \varphi \right]_0^{\kappa_0 s} - \int_0^{\kappa_0 s} \frac{1}{\cosh^2 \varphi} \cdot \sin \varphi \, d\varphi \\ &= \tanh(\kappa_0 s) \cdot \sin(\kappa_0 s) - \int_0^{\kappa_0 s} \frac{1}{\cosh^2 \varphi} \cdot \sin \varphi \, d\varphi . \end{aligned}$$

beziehungsweise für $y(s)$ die Darstellung

$$\kappa_0 \cdot y(s) = -\tanh(\kappa_0 s) \cdot \cos(\kappa_0 s) + \int_0^{\kappa_0 s} \frac{1}{\cosh^2 \varphi} \cdot \cos \varphi \, d\varphi$$

und damit insgesamt eine Parameterdarstellung von c der Gestalt

$$\mathbf{r}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa_0} \cdot \tanh(\kappa_0 s) \cdot \sin(\kappa_0 s) + x_m(s) \\ -\frac{1}{\kappa_0} \cdot \tanh(\kappa_0 s) \cdot \cos(\kappa_0 s) + y_m(s) \\ \frac{1}{\kappa_0} \cdot \left(2 \arctan e^{\kappa_0 s} - \frac{\pi}{2} \right) \end{pmatrix} \quad (3.118)$$

mit

$$\begin{aligned} x_m(s) &:= -\frac{1}{\kappa_0} \cdot \int_0^{\kappa_0 s} \frac{1}{\cosh^2 \varphi} \cdot \sin \varphi \, d\varphi , \\ y_m(s) &:= \frac{1}{\kappa_0} \cdot \int_0^{\kappa_0 s} \frac{1}{\cosh^2 \varphi} \cdot \cos \varphi \, d\varphi . \end{aligned} \quad (3.119)$$

Anhand der Parameterdarstellung (3.118), (3.119) von c können wir das asymptotische Verhalten der Raumkurve c für Parameterwerte $s \rightarrow +\infty$ und $s \rightarrow -\infty$ ermitteln. Wir benötigen dazu folgende Grenzwerte und uneigentliche Integrale: Es ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tanh t = +1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \tanh t = -1, \quad (3.120)$$

und gemäß [7], S.505, Nr. 3.928

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2 \varphi} \cdot \cos \varphi \, d\varphi &= - \int_0^{-\infty} \frac{1}{\cosh^2 \varphi} \cdot \cos \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2 \sinh(\pi/2)} \approx 0.682. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Für das uneigentliche Integral

$$K := \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2 \varphi} \cdot \sin \varphi \, d\varphi = \int_0^{-\infty} \frac{1}{\cosh^2 \varphi} \cdot \sin \varphi \, d\varphi \quad (3.122)$$

scheint in der Literatur kein Grenzwert angegeben zu sein, die Existenz eines Grenzwertes ist aber gesichert durch die absolute Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2 \varphi} \cdot \sin \varphi \, d\varphi$, denn es ist

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin \varphi}{\cosh^2 \varphi} \right| d\varphi \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{\cosh^2 \varphi} d\varphi = \left[\tanh \varphi \right]_0^{\infty} = 1.$$

Das Computeralgebrapaket MATHEMATICA liefert den Näherungswert

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \varphi}{\cosh^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{-\infty} \frac{\sin \varphi}{\cosh^2 \varphi} d\varphi \approx 0.516. \quad (3.123)$$

Mit (3.121) und (3.123) erhält man somit folgende Grenzwerte für (3.119):

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow +\infty} x_m(s) &= -\frac{K}{\kappa_0}, \\ \lim_{s \rightarrow +\infty} y_m(s) &= \frac{1}{\kappa_0} \cdot \frac{\pi}{2 \sinh(\pi/2)}, \\ \lim_{s \rightarrow -\infty} x_m(s) &= -\frac{K}{\kappa_0}, \\ \lim_{s \rightarrow -\infty} y_m(s) &= -\frac{1}{\kappa_0} \cdot \frac{\pi}{2 \sinh(\pi/2)}. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Insgesamt lässt sich nun mit (3.115), (3.120), (3.123), (3.124) in der Parameterdarstellung (3.118) das Grenzwverhalten der Raumkurve c für Parameterwerte $s \rightarrow \pm\infty$ ermitteln:

Für $s \rightarrow +\infty$ nähert sich $\mathfrak{r}(s)$ aus (3.118) asymptotisch der Vektorfunktion

$$\mathfrak{r}_+(s) := \frac{1}{\kappa_0} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\kappa_0 s) \\ -\cos(\kappa_0 s) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{K}{\kappa_0} \\ \frac{\pi}{2 \kappa_0 \sinh(\pi/2)} \\ \frac{\pi}{2\kappa_0} \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (3.125)$$

Dies ist die Parameterdarstellung eines in der Ebene

$$E_+ : \quad z = \frac{\pi}{2\kappa_0}$$

gelegenen Kreises k_+ mit Radius $\frac{1}{\kappa_0}$ und Kreismittelpunkt

$$M_+ \left(-\frac{K}{\kappa_0}, \frac{\pi}{2 \kappa_0 \sinh(\pi/2)}, \frac{\pi}{2\kappa_0} \right).$$

Für $s \rightarrow -\infty$ nähert sich $\mathfrak{r}(s)$ aus (3.118) asymptotisch der Vektorfunktion

$$\mathfrak{r}_-(s) := \frac{1}{\kappa_0} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\kappa_0 s) \\ \cos(\kappa_0 s) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{K}{\kappa_0} \\ -\frac{\pi}{2 \kappa_0 \sinh(\pi/2)} \\ -\frac{\pi}{2\kappa_0} \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (3.126)$$

Dies ist die Parameterdarstellung eines in der Ebene

$$E_- : \quad z = -\frac{\pi}{2\kappa_0}$$

gelegenen Kreises k_- mit Radius $\frac{1}{\kappa_0}$ und Kreismittelpunkt

$$M_- \left(-\frac{K}{\kappa_0}, -\frac{\pi}{2 \kappa_0 \sinh(\pi/2)}, -\frac{\pi}{2\kappa_0} \right).$$

Damit besitzt der Windschiefe Kreis c ein asymptotisches Kreispaar k_+ und k_- . Die Kreise k_+ und k_- haben jeweils den Radius $1/\kappa_0$ und liegen in zwei parallelen Ebenen E_+ und E_- mit Abstand π/κ_0 . Die Kreisachsen von k_+ und k_- haben den Abstand

$$\frac{\pi}{\sinh(\pi/2) \kappa_0} \approx \frac{1.364}{\kappa_0}.$$

Die folgende Abbildung 3.26 zeigt die konstant gekrümmte Raumkurve c gemäß der Parameterform (3.114).

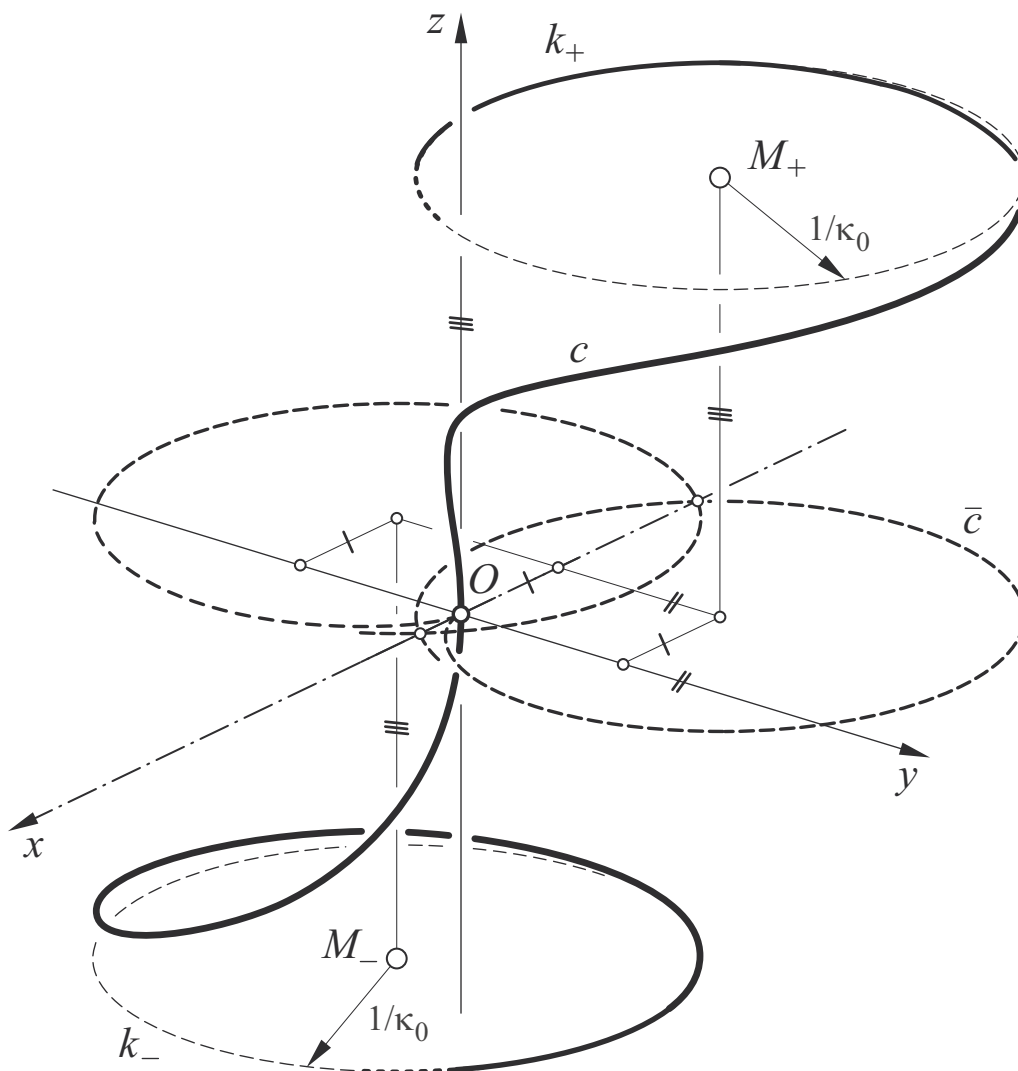


Abbildung 3.26: Die konstant gekrümmte Raumkurve c gemäß der Parameterdarstellung (3.114) im Schrägriss samt ihrer Grundrisskurve \bar{c} in die xy -Ebene; c ist achsensymmetrisch zur x -Achse und besitzt ein translationsgleiches asymptotisches Kreispaar k_+ , k_- , das in zwei zur xy -Ebene parallelen Ebenen liegt. Die Raumkurve c besitzt im Punkt $O(0, 0, 0) = X(0)$ die z -Achse als Tangente und die xz -Ebene als Schmiegebene. Die Grundrisskurve \bar{c} in der xy -Ebene besitzt im Punkt O eine Spitze.

4 Vervollständigung eines Kurvenbogens konstanter Krümmung zu einem Gewundenen C^2 -Kreis

Im vorangegangenen Abschnitt 3 wurden ausgehend von Satz 2.1 Gewundene Kreise gewonnen durch die Vorgabe von speziellen Klassen sphärischer Tangentenbilder c^* , die aufgrund ihrer Symmetrieeigenschaften die Schwerpunktsbedingung (2.4) für das Tangentenbild erfüllen. Die gemäß (2.3) zugehörigen Windschiefen Kreise c sind demnach Gewundene Kreise. In diesem Abschnitt wird ein Prinzip vorgestellt, das einen vorgegebenen (nicht notwendig geschlossenen) C^2 -Kurvenbogen $c_1 \subset \mathbb{E}^3$ konstanter Krümmung $\kappa_0 > 0$ über dessen zugehöriges sphärisches Tangentenbild c_1^* vervollständigt zu einem Gewundenen Kreis c der Differentiationsklasse C^2 . Hierbei wird das sphärische Tangentenbild c_1^* so zu einer geschlossenen regulären C^1 -Kurve $c^* \subset S^2$ vervollständigt, dass die Kurve c^* die Eigenschaft der Punktsymmetrie zum Mittelpunkt O ihrer Trägersphäre S^2 besitzt und damit die Schwerpunktsbedingung (2.4) erfüllt.

4.1 Vervollständigung über das sphärische Tangentenbild

Im \mathbb{E}^3 sei durch die Parameterdarstellung

$$c_1 : \quad \mathfrak{r}_1(s), \quad s \in [0, L_1] \quad (4.1)$$

eine auf ihre Bogenlänge s bezogene, reguläre (nicht notwendig geschlossene) C^2 -Kurve c_1 mit der konstanten Krümmung $\kappa_0 > 0$ und der Kurvenlänge $L_1 > 0$ gegeben – c_1 ist damit gemäß der Definition 2.1 ein Windschiefer C^2 -Kreis. Die Parameterdarstellung des zu c_1 gemäß (4.1) gehörigen, ohne Einschränkung auf seine Bogenlänge s^* bezogenen, sphärischen Tangentenbildes c_1^* lautet dann wegen Satz 2.1(a):

$$c_1^* : \quad \mathfrak{r}_1^*(s^*) := \mathfrak{r}_1' \left(\frac{s^*}{\kappa_0} \right), \quad s^* \in [0, L_1^*], \quad L_1^* := \kappa_0 \cdot L_1. \quad (4.2)$$

Da die vorgegebene Kurve c_1 gemäß (4.1) nicht notwendig eine *geschlossene*, reguläre C^2 -Kurve konstanter Krümmung – also nicht notwendig ein Gewundener C^2 -Kreis – ist, erfüllt das zugehörige sphärische Tangentenbild $c_1^* \subset S^2$ gemäß (4.2) *nicht notwendig* die Schwerpunktsbedingung (2.4). Damit ist $c_1^* \subset S^2$ nicht zwingend eine geschlossene, reguläre sphärische C^1 -Kurve, deren geometrischer Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt O ihrer Trägersphäre

S^2 zusammenfällt.

Im Folgenden werden wir ein allgemein gültiges Prinzip formulieren, welches das sphärische Tangentenbild c_1^* ergänzt – wir sagen auch: *vervollständigt* – zu einer *geschlossenen* regulären sphärischen C^1 -Kurve $c^* \subset S^2$, die auch die Schwerpunktsbedingung (2.4) erfüllt. Der geometrische Schwerpunkt von c^* fällt also mit dem Mittelpunkt O der Trägersphäre S^2 zusammen. Dann ist die zu c^* als sphärisches Tangentenbild gehörige, derart nach Satz 2.1 in der Parameterdarstellung (2.3) gegebene Raumkurve c – von der c_1 ein Teilbogen ist – ein Gewundener Kreis. Man gehe hierbei gemäß folgendem Algorithmus I - V vor:

Wir führen hierbei folgende Bezeichnungen ein: Die Tangentenvektoren von c_1^* gemäß (4.2) in den Randpunkten

$$\begin{aligned} A_1^* &:= X_1^*(0) \quad \text{mit Ortsvektor} \quad \mathbf{a}_1^* := \mathbf{r}_1(0) \quad \text{und} \\ B_1^* &:= X_1^*(L_1^*) \quad \text{mit Ortsvektor} \quad \mathbf{b}_1^* := \mathbf{r}_1(L_1^*) \end{aligned} \quad (4.3)$$

seien

$$\mathbf{u}_1^* := \frac{d\mathbf{r}_1^*}{ds^*}(0) \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_1^* := \frac{d\mathbf{r}_1^*}{ds^*}(L_1^*) . \quad (4.4)$$

- I. Wir *spiegeln* die Kurve c_1^* am Mittelpunkt O der Sphäre S^2 und erhalten eine ebenfalls auf S^2 verlaufende, zu c_1^* kongruente Kurve c_2^* mit der auf ihre Bogenlänge s^* bezogenen Parameterdarstellung

$$c_2^* : \quad \mathbf{r}_2^*(s^*) := -\mathbf{r}_1^*(s^*) , \quad s^* \in [0, L_1^*] . \quad (4.5)$$

Die Kurven c_1^* und c_2^* liegen also punktsymmetrisch zu O . Der geometrische Schwerpunkt der Punktmenge $c_1^* \cup c_2^*$ fällt deshalb mit dem Mittelpunkt O der Sphäre S^2 zusammen, $c_1^* \cup c_2^*$ braucht keine geschlossene C^1 -Kurve auf S^2 zu sein.

Bezüglich der Darstellung (4.5) ergeben sich dann mit (4.3) in den Randpunkten

$$\begin{aligned} A_2^* &:= X_2^*(0) \quad \text{mit Ortsvektor} \quad \mathbf{a}_2^* := \mathbf{r}_2(0) = -\mathbf{a}_1^* \quad \text{und} \\ B_2^* &:= X_2^*(L_1^*) \quad \text{mit Ortsvektor} \quad \mathbf{b}_2^* := \mathbf{r}_2(L_1^*) = -\mathbf{b}_1^* \end{aligned} \quad (4.6)$$

die Tangentenvektoren zu

$$\mathbf{u}_2^* := \frac{d\mathbf{r}_2^*}{ds^*}(0) = -\mathbf{u}_1^* \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_2^* := \frac{d\mathbf{r}_2^*}{ds^*}(L_1^*) = -\mathbf{v}_1^*. \quad (4.7)$$

Wir ergänzen nun – was immer möglich ist – wie folgt das Kurvenpaar $c_1^* \cup c_2^*$ zu einer sphärischen C^1 -Kurve c^* , deren geometrischer Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt O der Sphäre S^2 koinzidiert:

- II. Man verbinde die *orientierten Linienelemente* (B_1^*, \mathbf{v}_1^*) und (A_2^*, \mathbf{u}_2^*) durch eine – sicher existierende – geeignete reguläre, auf der Sphäre S^2 verlaufende und auf Bogenlänge s^* bezogene C^1 -Kurve

$$c_3^* : \quad \mathbf{r}_3^*(s^*), \quad s^* \in [0, M^*] \quad \text{der Länge} \quad M^* > 0$$

derart, dass die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_3^*(0) &= \mathbf{b}_1^*, & \mathbf{r}_3^*(M^*) &= \mathbf{a}_2^* = -\mathbf{a}_1^*, \\ \frac{d\mathbf{r}_3^*}{ds^*}(0) &= \mathbf{v}_1^*, & \frac{d\mathbf{r}_3^*}{ds^*}(M^*) &= \mathbf{u}_2^* = -\mathbf{u}_1^* \end{aligned} \quad (4.8)$$

erfüllt sind.

Nun ergibt sich: die Kurve $c_1^* \cup c_2^* \cup c_3^*$ ist eine reguläre, aber im allgemeinen noch nicht geschlossene C^1 -Kurve der Sphäre S^2 . Wir müssen noch die “Lücke” zwischen den *orientierten Linienelementen* (A_1^*, \mathbf{u}_1^*) und (B_2^*, \mathbf{v}_2^*) durch eine geeignete Kurve $c_4^* \subset S^2$ schließen, und zwar so, dass die Kurve $c^* := c_1^* \cup c_2^* \cup c_3^* \cup c_4^*$ eine geschlossene C^1 -Kurve ist und der Schwerpunkt von c^* in den Mittelpunkt O der Sphäre S^2 fällt.

- III. Wir spiegeln nun die Kurve c_3^* am Punkt O und erhalten so eine auf ihre Bogenlänge s^* bezogene, reguläre Kurve c_4^* mit der Parameterdarstellung

$$c_4^* : \quad \mathbf{r}_4^*(s^*) := -\mathbf{r}_3^*(s^*), \quad s^* \in [0, M^*]. \quad (4.9)$$

Wegen (4.7) und (4.8) verbindet c_4^* die *orientierten Linienelemente* (A_1^*, \mathbf{u}_1^*) und (B_2^*, \mathbf{v}_2^*) in der Art, dass

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_4^*(0) &= \mathbf{b}_2^* = -\mathbf{b}_1^* , & \mathbf{r}_4^*(M^*) &= \mathbf{a}_1^* \\
\frac{d\mathbf{r}_4^*}{ds^*}(0) &= \mathbf{v}_2^* = -\mathbf{v}_1^* , & \frac{d\mathbf{r}_4^*}{ds^*}(M^*) &= \mathbf{u}_1^*
\end{aligned} \tag{4.10}$$

gilt. Die insgesamt erhaltene Kurve $c^* := c_1^* \cup c_2^* \cup c_3^* \cup c_4^*$ ist nach Konstruktion eine *geschlossene*, reguläre C^1 -Kurve auf der Sphäre S^2 und besitzt die Länge $L^* := 2L_1^* + 2M^*$. Eine auf Bogenlänge s^* bezogene, über $\mathbf{r}_1^*(s^*)$, $\mathbf{r}_2^*(s^*)$, $\mathbf{r}_3^*(s^*)$ und $\mathbf{r}_4^*(s^*)$ stückweise definierte Parameterdarstellung von c^* lautet:

$$\mathbf{r}^*(s^*) = \begin{cases} \mathbf{r}_1^*(s^*) & \text{für } 0 \leq s^* \leq L_1^* , \\ \mathbf{r}_3^*(s^* - L_1^*) & \text{für } L_1^* \leq s^* \leq L_1^* + M^* , \\ \mathbf{r}_2^*(s^* - L_1^* - M^*) & \text{für } L_1^* + M^* \leq s^* \leq 2L_1^* + M^* , \\ \mathbf{r}_4^*(s^* - 2L_1^* - M^*) & \text{für } 2L_1^* + M^* \leq s^* \leq 2L_1^* + 2M^* . \end{cases}$$

IV. Mit (4.5) und (4.9) bedeutet dies unter alleiniger Verwendung der Parameterdarstellungen der Ausgangskurve c_1^* und der gemäß (4.8) gewählten “Verbindungskurve” c_3^* :

$$\mathbf{r}^*(s^*) = \begin{cases} \mathbf{r}_1^*(s^*) & \text{für } 0 \leq s^* \leq L_1^* , \\ \mathbf{r}_3^*(s^* - L_1^*) & \text{für } L_1^* \leq s^* \leq L_1^* + M^* , \\ -\mathbf{r}_1^*(s^* - L_1^* - M^*) & \text{für } L_1^* + M^* \leq s^* \leq 2L_1^* + M^* , \\ -\mathbf{r}_3^*(s^* - 2L_1^* - M^*) & \text{für } 2L_1^* + M^* \leq s^* \leq 2L_1^* + 2M^* . \end{cases} \tag{4.11}$$

Man erkennt nun: Die Kurve c^* ist wegen (4.11) zusammen mit (4.5), (4.9) *punktsymmetrisch* zum Mittelpunkt O der Sphäre S^2 . Damit ist auch der geometrische Schwerpunkt von c^* gleich O . Es gilt also

$$\int_0^{2L_1^*+2M^*} \mathbf{r}^*(s^*) ds^* = \mathbf{o} . \tag{4.12}$$

V. Mit (4.12) ist nach Satz 2.1 der zu c^* gemäß (4.11) gehörige Windschiefe Kreis c mit Krümmung κ_0 und der auf Bogenlänge s bezogenen Parameterdarstellung

$$\mathfrak{r}(s) = \frac{1}{\kappa_0} \int_0^{\kappa_0 s} \mathfrak{r}^*(s^*) ds^*, \quad s \in \left[0, \frac{2L_1^* + 2M^*}{\kappa_0} \right] \quad (4.13)$$

gemäß der Konstruktion seines sphärischen Tangentenbildes c^* ein Gewundener C^2 -Kreis der Gesamtlänge $L = \frac{2}{\kappa_0} (L_1^* + M^*)$.

Anmerkungen:

- 1) Will man einen vorgegebenen Kurvenbogen c_1 konstanter Krümmung κ_0 mittels des vorgestellten Algorithmus I-V zu einem Gewundenen C^2 -Kreis c vervollständigen, so ist dies immer möglich, zum Beispiel durch eine gewisse Anzahl von geeigneten Schraublinienbögen. Diese Vervollständigung durch Schraublinienbögen wird im zugehörigen Tangentenbild dadurch erreicht, dass man die *orientierten Linienelemente* (B_1^*, \mathbf{v}_1^*) und (A_2^*, \mathbf{u}_2^*) in den Randpunkten $A_1^* \in c_1^*$ und $B_2^* \in c_2^*$ der Kurvenbögen c_1^* und c_2^* unter der Randbedingung (4.7) verbindet durch eine C^1 -Kurve c_3^* , die sich aus Kreisbögen der Sphäre S^2 zusammensetzt. Dies ist – mit einer hinreichenden Anzahl von Kreisbögen der Sphäre S^2 – immer möglich. Ein Beispiel hierzu wird im folgenden Abschnitt 4.2 behandelt.
- 2) Auch die Vervollständigung eines C^k -Kurvenbogens c_1 ($k \geq 2$) konstanter Krümmung zu einem Gewundenen Kreis c der Differentiationsklasse C^m ($2 \leq m \leq k$) ist immer möglich, denn sphärische Kurven c_3^* , die die Kurven c_1^* und c_2^* zu einer Kurve der Differentiationsordnung C^{m-1} verbinden, existieren stets.
- 3) Die Vervollständigung eines vorgegebenen C^ω -Kurvenbogens c_1 konstanter Krümmung κ_0 zu einem Gewundenen C^ω -Kreis ist im Allgemeinen *nicht* möglich, da die analytische Fortsetzung von c_1 durch die jeweils vorgegebene Parameterdarstellung $\mathfrak{r}_1(s)$ beziehungsweise $\mathfrak{r}_1^*(s^*)$ des zugehörigen sphärischen Tangentenbildes c_1^* eindeutig bestimmt ist. Gibt man sich zum Beispiel einen nicht zu einem Kreisbogen entarteten Schraublinienbogen c_1 vor, so ergeben alle möglichen analytischen Fortsetzungen c von c_1 wieder einen Schraublinienbogen (unbegrenzter Länge), der bekanntlich im \mathbb{E}^3 keine geschlossene C^ω -Kurve darstellt.

4.2 Vervollständigung eines C^2 -Kurvenbogens konstanter Krümmung zu einem Gewundenen Kreis mittels Schraublinienbögen

Schraublinien entsprechen im sphärischen Tangentenbild auf der Sphäre S^2 genau Kreisbögen von S^2 – hierbei entsprechen Kreisbögen c_1 genau den Großkreisbögen c_1^* auf S^2 beziehungsweise nichtebene Schraublinienbögen c_1 genau Kleinkreisbögen c_1^* auf S^2 . Damit entspricht die Vervollständigung einer konstant gekrümmten Raumkurve zu einem Gewundenen Kreis durch *Schraublinienbögen* im sphärischen Tangentenbild der Vervollständigung durch *Kreisbögen* der Sphäre S^2 . Hinsichtlich unserer Notation im Abschnitt 4.1 sind dabei die beiden gerichteten Linienelemente (A_2^*, \mathbf{u}_2^*) und (B_1^*, \mathbf{v}_1^*) durch eine (4.7) genügende C^1 -Kurve c_3^* zu verbinden, die aus Kreisbögen der Sphäre S^2 zusammengesetzt ist.

Folgendes Beispiel zeigt die Anwendung des Prinzips der Vervollständigung einer konstant gekrümmten Raumkurve zu einem Gewundenen Kreis:

Beispiel für die Vervollständigung eines gegebenen Schraublinienbogens zu einem Gewundenen Kreis

Wir geben uns die Ausgangskurve c_1 , einen Schraublinienbogen konstanter Krümmung κ_0 , durch ihr sphärisches Tangentenbild vor:

Wir wählen in einem kartesischen xyz -Koordinatensystem des \mathbb{E}^3 als Mittelpunkt der Einheitssphäre S^2 den Koordinatenursprung $O(0, 0, 0)$. Als sphärisches Tangentenbild $c_1^* \subset S^2$ wählen wir den folgenden, in einer zur yz -Ebene im Abstand $\frac{1}{\sqrt{2}}$ parallelen Ebene verlaufenden Halbkreis(-bogen) mit der auf Bogenlänge s^* bezogenen Parameterdarstellung

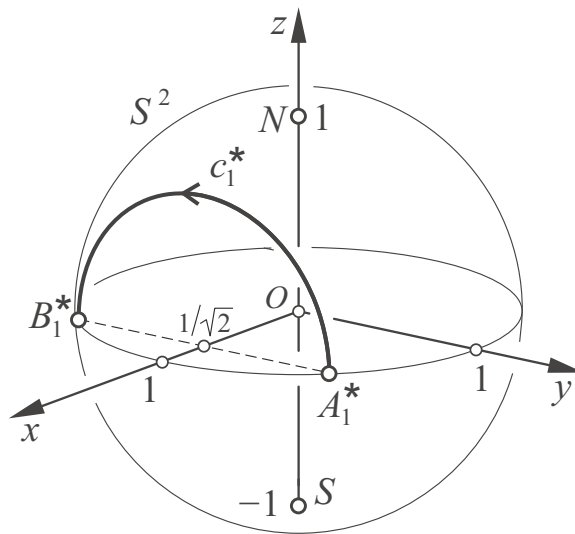
$$\mathfrak{x}_1^*(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\sqrt{2}s^*) \\ \sin(\sqrt{2}s^*) \end{pmatrix}, \quad s^* \in [0, \frac{\pi}{\sqrt{2}}]. \quad (4.14)$$

Die Kurve c_1^* gemäß der Parameterdarstellung (4.14) ist ein *orientierter Kleinkreisbogen* vom Radius $\rho^* = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und damit von der Länge $L_1^* = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$; der geometrische Schwerpunkt von c_1^* liegt nicht im Mittelpunkt O der Sphäre S^2 . Der zugehörige Windschiefe Kreis c_1 gemäß (2.3) ist damit *kein* Gewundener Kreis. Insbesondere ist zu vorgegebener konstanter Krümmung κ_0 die Kurve

c_1 , wie mit (2.3) leicht einzusehen ist, ein Schraublinienbogen der Ganghöhe $\frac{\pi}{\kappa_0}$, dem Radius $\frac{1}{2\kappa_0}$ und der Länge $L_1 = \frac{L_1^*}{\kappa_0} = \frac{\pi}{\sqrt{2}\kappa_0}$.

Nun werden wir die Kurve c_1 mittels des in Abschnitt 4.1 vorgestellten Algorithmus I-V durch geeignete *Schraublinienbögen* zu einem Gewundenen C^2 -Kreis c vervollständigen:

Die folgende Abbildung zeigt das auf der Einheitssphäre verlaufende orientierte sphärische Tangentenbild c_1^* gemäß der Parameterdarstellung (4.14):



Der Halbkreis c_1^* hat gemäß der Parameterdarstellung (4.14) die in der xy -Ebene liegenden Randpunkte $A_1^* := X_1^*(0)$ und $B_1^* := X_1^*(\pi/\sqrt{2})$ mit den Ortsvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^* &:= \mathbf{x}_1^*(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \quad \text{und} \\ \mathbf{b}_1^* &:= \mathbf{x}_1^*(\pi/\sqrt{2}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \end{aligned} \tag{4.15}$$

mit den gemäß (4.4) zugehörigen Tangentenvektoren

$$\mathbf{u}_1^* := \frac{d\mathbf{x}_1^*}{ds^*}(0) = (0, 0, 1) \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_1^* := \frac{d\mathbf{x}_1^*}{ds^*}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = (0, 0, -1).$$

Nun führen wir gemäß des Vervollständigungsverfahrens die Punktspiegelung von c_1^* am Kugelmittelpunkt O durch. Wir erhalten dadurch den zu c_1^* kongruenten Halbkreisbogen c_2^* mit der Parameterdarstellung

$$\mathbf{r}_3^*(s^*) = -\mathbf{r}_1^*(s^*) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\sqrt{2}s^*) \\ \sin(\sqrt{2}s^*) \end{pmatrix}, \quad s^* \in \left[0, \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right], \quad (4.16)$$

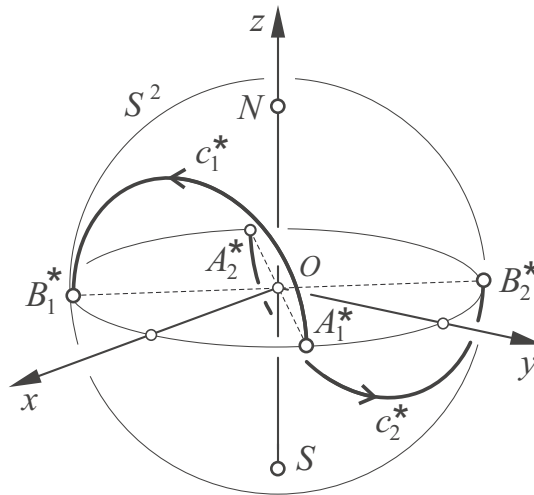
und den Randpunkten $A_2^* = X_2^*(0)$ und $B_2^* = X_2^*(\pi/\sqrt{2})$, deren Ortsvektoren gemäß (4.6)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2^* &:= -\mathbf{a}_1^* = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \text{und} \\ \mathbf{b}_2^* &:= -\mathbf{b}_1^* = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

lauten. Die Tangentenvektoren an c_2^* in den Randpunkten $A_2^* = X_2^*(0)$ und $B_2^* = X_2^*(\pi/\sqrt{2})$ lauten dann

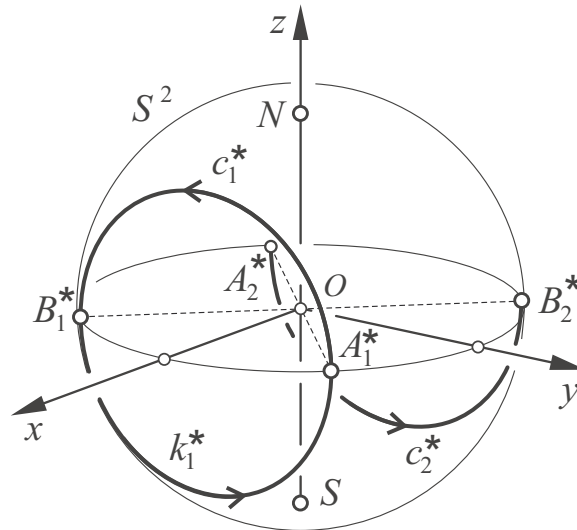
$$\mathbf{u}_2^* := \frac{d\mathbf{r}_2^*}{ds^*}(0) = (0, 0, -1) \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_2^* := \frac{d\mathbf{r}_2^*}{ds^*}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = (0, 0, 1).$$

Folgende Abbildung zeigt die orientierten, zum Kugelmittelpunkt O punktsymmetrischen Kleinkreisbögen c_1^* und c_2^* gemäß ihrer Parameterdarstellungen (4.14) und (4.16):

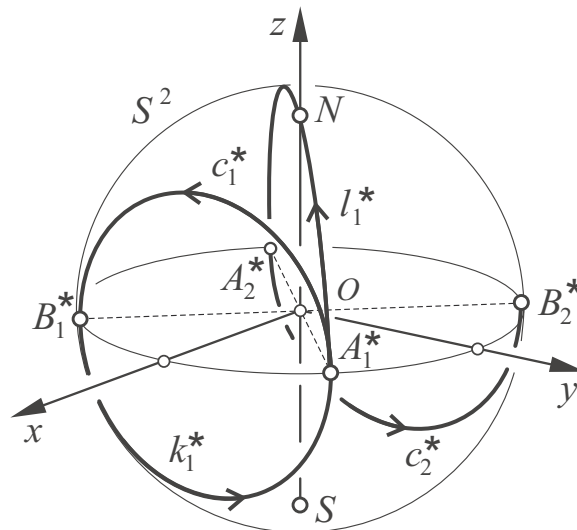


Wir verbinden nun c_1^* und c_2^* zwischen den Kurvenpunkten $B_1^* \in c_1^*$ und $A_2^* \in c_2^*$ zu einer orientierten C^1 -Kurve auf S^2 durch eine orientierte sphärische C^1 -Kurve c_3^* , die sich zusammensetzt aus zwei orientierten Kreisbögen k_1^* und l_1^* , welche wir wählen wie folgt:

Der Kleinkreisbogen k_1^* ergänze c_1^* zu einem vollen Kleinkreis, wie in der folgenden Abbildung dargestellt:

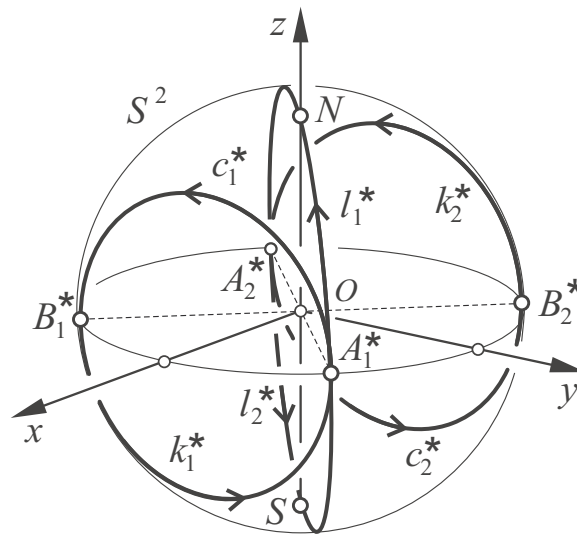


Als zweiten Kreisbogen $l_1^* \subset c_3^*$, der schließlich die Punktmenge $c_1^* \cup k_1^* \cup c_2^*$ zwischen den Punkten A_1^* und A_2^* zu einer sphärischen C^1 -Kurve verbindet, wählen wir den *halben Großkreis* durch die beiden antipodalen Punkte A_1^* und A_2^* , der über den Punkt $N(0, 0, 1)$ verläuft, wie in der folgenden Abbildung dargestellt:



Offenbar erfüllt dann $c_3^* = k_1^* \cup l_1^*$ die Randbedingung (4.8) des Vervollständigungsprinzips.

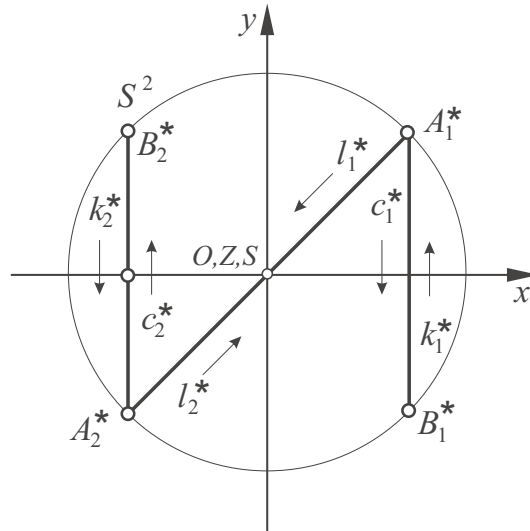
Schließlich vervollständigen wir die C^1 -Kurve $c_1^* \cup c_2^* \cup c_3^*$ gemäß des Vervollständigungsprinzips zu einer geschlossenen C^1 -Kurve c^* durch Hinzunahme der am Mittelpunkt O von S^2 gespiegelten Kurve c_3^* , die wir gemäß des Prinzips c_4^* nennen. Der Kurvenbogen c_4^* setzt sich zusammen aus dem restlichen (halben) Kleinkreis k_2^* des Trägerkreises von c_2^* und dem von A_2^* nach A_1^* über den zu $N(0, 0, 1)$ antipodalen Punkt $S(0, 0, -1)$ verlaufenden, restlichen (halben) Großkreis l_2^* des Trägerkreises von l_1^* . Die gesamte, gemäß ihrer Konstruktion, reguläre sphärische C^1 -Kurve $c^* = c_1^* \cup c_2^* \cup c_3^* \cup c_4^*$ ist in folgender Abbildung dargestellt, inklusive der Teilbögen k_1^* , l_1^* , k_2^* und l_2^* von c_3^* und c_4^* und des jeweiligen Durchlaufsinns aller Kurvenbögen:



Zur richtigen Interpretation der letzten Abbildung sei noch kurz in Worten der Durchlauf der Kurve c^* beschrieben:

Die sphärische Kurve c^* wird durchlaufen vom Punkt A_1^* über den Kleinkreisbogen c_1^* zum Punkt B_1^* , dann weiter über k_1^* zurück zum Punkt A_1^* . Von A_1^* geht der Kurvenverlauf weiter über den Großkreisbogen l_1^* zum Punkt A_2^* , von dort über den Kleinkreisbogen c_2^* zum Punkt B_2^* und weiter über k_2^* zum Punkt A_2^* . Von A_2^* gelangt man über den Großkreisbogen l_2^* zum Startpunkt A_1^* zurück. Insgesamt besteht die Punktmenge $c^* = c_1^* \cup k_1^* \cup l_1^* \cup c_2^* \cup k_2^* \cup l_2^*$ aus drei Kreisen der Sphäre S^2 , den beiden kongruenten, in parallelen Ebenen verlaufenden Kleinkreisen $c_1^* \cup k_1^*$ und $c_2^* \cup k_2^*$ und dem Großkreis $l_1^* \cup l_2^*$. Beim hier vorgeschriebenen Kurvendurchlauf werden die Kreise $c_1^* \cup k_1^*$ und $c_2^* \cup k_2^*$ in einem Zug durchlaufen, nicht so der Kreis $l_1^* \cup l_2^*$, welcher jeweils nur zur Hälfte durchlaufen wird. Die Trägerebenen der beiden Kreise $c_1^* \cup k_1^*$ und $c_2^* \cup k_2^*$ schneiden die Kreisebene von $l_1^* \cup l_2^*$ jeweils unter einem Winkel von $\frac{\pi}{4}$.

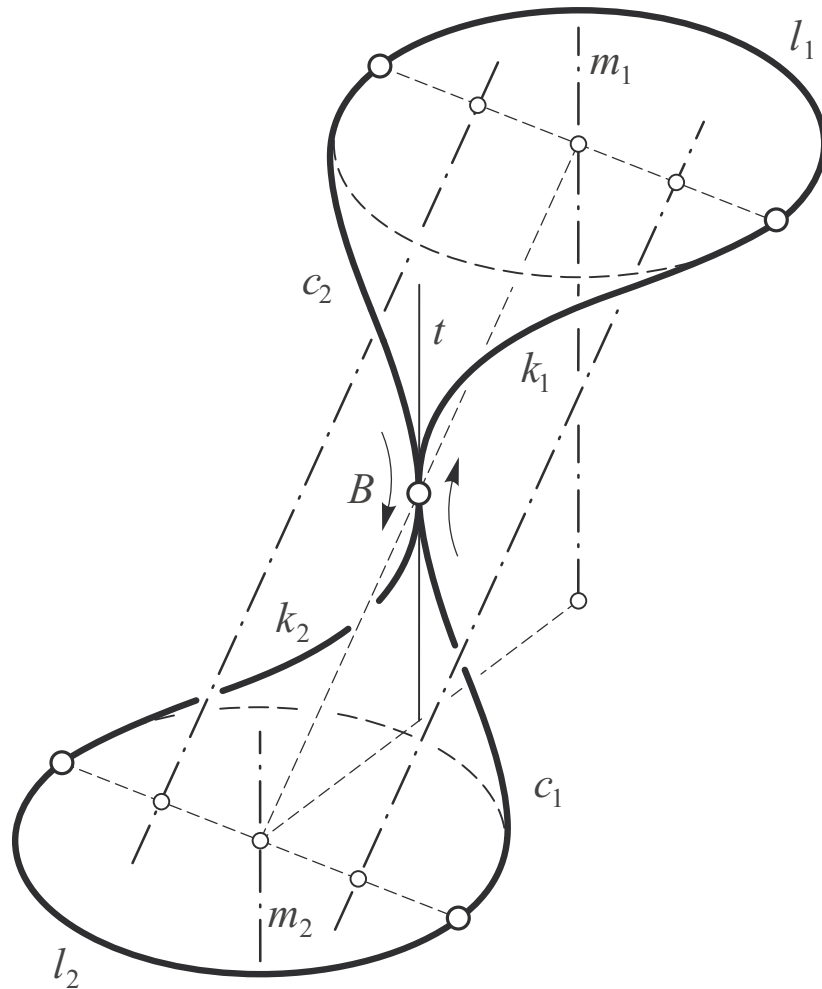
Im Grundriss in die xy -Ebene sind die Trägerebenen der drei Kreise $c_1^* \cup k_1^*$, $c_2^* \cup k_2^*$ und $l_1^* \cup l_2^*$ projizierend, die Kurve c^* zeigt sich in dieser Ansicht zusammengesetzt aus drei zweifach durchlaufenen Geradenstücken:



Gemäß ihrer Konstruktion erfüllt die geschlossene sphärische C^1 -Kurve $c^* = c_1^* \cup c_2^* \cup c_3^* \cup c_4^*$ die Schwerpunktsbedingung (2.4), eine Integration über c^* gemäß der Formel (2.3) liefert damit eine Parameterdarstellung eines Gewundenen C^2 -Kreises c . Die Raumkurve c setzt sich zusammen aus den folgenden, den einzelnen Teilkurvenbögen c_1^* , k_1^* , l_1^* , c_2^* , k_2^* , l_2^* des sphärischen Tangentenbildes c^* vermöge (2.3) entsprechenden Kurvenbögen:

Zum Kleinkreis $s_1^* := c_1^* \cup k_1^*$ gehört ein Schraublinienbogen mit konstanter Krümmung κ_0 , der Ganghöhe $\frac{\pi}{\kappa_0}$, dem Radius $\frac{1}{2\kappa_0}$ und der Länge $\frac{\sqrt{2}\pi}{\kappa_0}$. Zum Kleinkreis $s_2^* := c_2^* \cup k_2^*$ gehört ein zu s_1^* *gegensinnig kongruenter* Schraublinienbogen. Die zu den Großkreisbögen l_1^* und l_2^* gehörigen Kurvenbögen l_1 und l_2 konstanter Krümmung κ_0 sind jeweils Halbkreisbögen vom Radius $\frac{1}{\kappa_0}$.

Den zum vervollständigten Tangentenbild c^* gehörigen Gewundenen Kreis c , dessen Parameterdarstellung (zu konstanter Krümmung $\kappa_0 > 0$) man aus der allgemeinen Formel (2.3) erhält, zeigt folgende Abbildung:



Bezogen auf die letzte Abbildung seien noch geometrische Daten bemerkt, die sich nach elementargeometrischen Überlegungen ermitteln lassen und die Gestalt des Gewundenen Kreises c der Krümmung $\kappa_0 > 0$ beschreiben:

c besteht aus zwei gegenseitig kongruenten Schraublinienbögen $s_1 := c_1 \cup k_1$ und $s_2 := c_2 \cup k_2$ mit Trägerdrehzylinderradius $\frac{1}{2\kappa_0}$ und parallelen Schraubachsen mit Abstand $\frac{\pi}{\kappa_0}$. Die Schraublinien s_1 und s_2 berühren einander im Selbstberührungspunkt B von c . Die ebenen Anteile von c sind die beiden in zwei parallelen Ebenen verlaufenden Halbkreisbögen l_1 und l_2 , jeweils vom Radius $\frac{1}{\kappa_0}$. Der Abstand der Trägerebenen der Kreisbögen l_1 und l_2 ist $\frac{\pi}{\sqrt{2}\kappa_0}$ und gleich dem Abstand der Kreisachsen der Trägerkreise von l_1 und l_2 . Die Achsenrichtungen der Schraublinienbögen $s_1 = c_1 \cup k_1$ und $s_2 = c_2 \cup k_2$

schließen mit der Richtung der Kreisachsen m_1 von l_1 beziehungsweise m_2 von l_2 den Winkel $\frac{\pi}{4}$ ein.

Hinsichtlich der in obigem Beispiel vorhandenen Selbstberührung im Punkt B (siehe die letzte Abbildung) sei noch Folgendes bemerkt: Wählt man für das sphärische Tangentenbild als Ausgangskurve $c_1^* \subset S^2$ (siehe (4.14)) einen Halbkreis vom Radius ρ mit

$$0 < \rho^* < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.18)$$

so lässt sich die Vervollständigung wie in letztem Beispiel durchführen, also unter Hinzunahme des Großkreises $l_1^* \cup l_2^*$, des restlichen Halbkreisbogens k_1^* des Trägerkreises von c_1^* und des Spiegelbildes $c_2^* \cup k_2^*$ des Kleinkreises $c_1^* \cup k_1^*$ bezüglich des Kugelmittelpunkts O der Sphäre S^2 . Der zu vorgegebener Krümmung $\kappa_0 > 0$ gehörige Gewundene Kreis c gemäß (2.3) setzt sich dann aus den beiden, im sphärischen Tangentenbild c^* den Großkreishalbbögen l_1^* und l_2^* entsprechenden Halbkreisbögen l_1 und l_2 , jeweils mit Radius

$$r = \frac{1}{\kappa_0}$$

und den beiden, den Kleinkreisen $c_1^* \cup l_1^*$ und $c_2^* \cup l_2^*$ entsprechenden (gegensinnig kongruenten) Schraublinienbögen $s_1 := c_1 \cup l_1$ und $s_2 := c_2 \cup l_2$ zusammen, deren Trägerdrehzylinderradius gemäß (2.3) gleich

$$\rho = \frac{\rho^{*2}}{\kappa_0}$$

ist und die die beiden Halbkreisbögen l_1 und l_2 zu einer geschlossenen C^2 -Kurve verbinden. Damit haben die Schraubachsen der Trägerdrehzylinder – siehe dazu die letzte Abbildung – den Abstand

$$d := 2r - 2\rho = \frac{2}{\kappa_0} - 2 \cdot \frac{\rho^{*2}}{\kappa_0} = 2 \cdot \frac{1 - \rho^{*2}}{\kappa_0},$$

für den wegen (4.18)

$$\frac{1}{\kappa_0} < d < \frac{2}{\kappa_0}$$

gilt. Damit berühren sich die beiden Trägerdrehzylinder der Schraublinienbögen s_1 und s_2 nicht, die beiden Kurven s_1 und s_2 haben also sicher keinen gemeinsamen Punkt. Damit ist mit (4.18) der Gewundene Kreis c ohne Selbstberührungspunkte, damit vom topologischen Typ des Kreises.

5 Windschiefe und Gewundene Kreise auf Zylinderflächen

Im diesem Abschnitt werden differentialgeometrische Ansätze zur Bestimmung Gewundener Kreise, die auf einer allgemeinen Zylinderfläche verlaufen, hergeleitet.

Zuerst wählen wir einen analytischen Ansatz für eine auf einem Zylinder Φ verlaufende Raumkurve c gemäß folgenden Überlegungen: Der Trägerzylinder Φ der Kurve c sei gegeben durch seine *Profilkurve* $\bar{c} \subset \Phi$; \bar{c} ist damit eine *Orthogonaltrajektorie* der Erzeugenden von Φ . Sei nun \bar{c} als reguläre C^2 -Kurve gegeben durch ihre *natürliche Gleichung*

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}(\bar{s}) \in C^0, \quad \bar{s} \in \bar{I} := [\bar{s}_1, \bar{s}_2] \subset \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

wobei \bar{s} die Bogenlänge und $\bar{\kappa}$ die Krümmung von \bar{c} bezeichnet. In einem kartesischen xyz -Koordinatensystem des \mathbb{E}^3 lautet dann eine Parameterdarstellung von \bar{c} mit der Abkürzung

$$\bar{\alpha}(\bar{s}) := \int_{\bar{s}_1}^{\bar{s}} \bar{\kappa}(u) du, \quad \bar{s} \in [\bar{s}_1, \bar{s}_2]. \quad (5.2)$$

wie folgt:

$$\bar{\mathbf{r}}(\bar{s}) = \begin{pmatrix} \bar{x}(\bar{s}) \\ \bar{y}(\bar{s}) \\ \bar{z}(\bar{s}) \end{pmatrix} = \int_{\bar{s}_1}^{\bar{s}} \begin{pmatrix} \cos \bar{\alpha}(u) \\ \sin \bar{\alpha}(u) \\ 0 \end{pmatrix} du \quad \bar{s} \in [\bar{s}_1, \bar{s}_2] \quad (5.3)$$

Die Profilkurve \bar{c} liegt dann in der xy -Ebene. Die oben in (5.2) eingeführte Größe $\bar{\alpha}$ läßt sich hierbei als (orientierter) in der xy -Ebene gemessener Winkel zwischen der x -Achse und dem Tangentenvektor $\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\bar{s}}$ deuten. Die Erzeugendenrichtung des Trägerzylinders Φ ist

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Außerdem kann die Krümmung $\bar{\kappa}$, da die Kurve \bar{c} als *ebene* Kurve angesetzt ist, sowohl positive als auch *negative* Werte, sowie den Wert $\bar{\kappa} = 0$ annehmen.

5.1 Parameterdarstellung der Kurven auf einer vorgegebenen Zylinderfläche Φ

Mit den obigen Vorbereitungen und eingeführten Größen können wir nun für unsere auf der Zylinderfläche Φ verlaufende Raumkurve c mit einer C^2 -Funktion $f(\bar{s})$ folgende Parameterdarstellung ansetzen:

$$\mathbf{r}(\bar{s}) = \begin{pmatrix} x(\bar{s}) \\ y(\bar{s}) \\ z(\bar{s}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}(\bar{s}) \\ \bar{y}(\bar{s}) \\ f(\bar{s}) \end{pmatrix}, \quad \bar{s} \in [\bar{s}_1, \bar{s}_2]; f(\bar{s}) \in C^2. \quad (5.5)$$

Als Nächstes bestimmen wir die Bogenlänge s der Raumkurve c gemäß (5.5) in Abhängigkeit von der Bogenlänge \bar{s} von \bar{c} : Dazu bilden wir die Ableitung $\frac{d\mathbf{x}}{d\bar{s}}$, erhalten mit (5.3) und $\dot{f} := \frac{df}{d\bar{s}}$

$$\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}}{d\bar{s}} = \begin{pmatrix} \cos \bar{\alpha} \\ \sin \bar{\alpha} \\ \dot{f} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Somit ergibt sich für die Bogenlänge s der Kurve c die Bestimmungsgleichung

$$\frac{ds}{d\bar{s}} = \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\bar{s}} \right| = \sqrt{1 + \dot{f}^2}. \quad (5.7)$$

Führen wir nun als neuen Kurvenparameter den Winkel α zwischen der xy -Ebene und dem Tangentenvektor $\dot{\mathbf{x}}$ von c ein, so gelangen wir aufgrund der allgemeinen Ansätze (5.3), (5.4) und (5.7) zur Deutung

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \angle(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{x}}) = \angle\left(\dot{\mathbf{x}}, \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\bar{s}}\right). \quad (5.8)$$

Mit (5.3) und (5.6) erhält man dann die Bedingung

$$\cos \alpha = \frac{\dot{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{x}}'}{|\dot{\mathbf{x}}| \cdot |\bar{\mathbf{x}}'|} = \frac{\begin{pmatrix} \cos \bar{\alpha} \\ \sin \bar{\alpha} \\ \dot{f} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \bar{\alpha} \\ \sin \bar{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{1 + \dot{f}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{f}^2}}. \quad (5.9)$$

Damit lässt sich (5.7) schreiben als

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = \cos \alpha. \quad (5.10)$$

Diese Gleichung wird in den folgenden Betrachtungen eine zentrale Rolle spielen, da die Koppelung zwischen der Bogenlänge s der auf dem Zylinder Φ verlaufenden Kurve c und der Bogenlänge \bar{s} ihrer Grundrisskurve \bar{c} in einer Φ orthogonal schneidenden Ebene (in der Darstellung (5.5) die xy -Ebene) mittels der geometrisch deutbaren Größe α beschrieben werden kann. Dies wird in den späteren Betrachtungen helfen, ein Verfahren zu formulieren, das zu einer Parameterdarstellung von c , bezogen auf den Winkelparameter α , führt.

5.2 Geodätische Krümmung und Normalschnittkrümmung der Kurven auf einer vorgegebenen Zylinderfläche Φ

Im Folgenden werden wir Bestimmungsgleichungen für die samt Φ isometrisch in die Ebene abgewickelte Kurve c durch folgende Überlegungen (siehe auch [3]) ermitteln:

Mittels der Größen \bar{s} , $\bar{\kappa}$, s und α lässt sich unter Verwendung des Satzes von EULER über die Normalschnittkrümmung von Flächenkurven die orientierte geodätische Krümmung κ_g von c auf Φ bestimmen. Wir betrachten hierzu das *Krümmungslinien*-Netz auf der Zylinderfläche Φ , also (vergleiche [14], S. 72: Beispiel 5) die beiden Scharen der (geradlinigen) *Erzeugenden* und ihrer (ebenen) *Orthogonaltrajektorien*. Wir verwenden die Größen $\bar{\kappa}$ und α aus (5.2) und (5.8), sowie den Satz von EULER (siehe [11], S. 48: Satz 5.5 und [14], S. 14, 62) zur Berechnung der Normalschnittkrümmung κ_n der Flächenkurve $c \subset \Phi$ im Kurvenpunkt X in Richtung ihres Tangentenvektors $\mathbf{x}' := \frac{d\mathbf{x}}{ds}$ gemäß der Parameterdarstellung (5.5): da die Normalschnittkrümmung in Richtung der (geradlinigen) Erzeugenden von Φ verschwindet und in Richtung von deren Orthogonaltrajektorien gleich $\bar{\kappa}$ ist, erhalten wir mit (5.8)

$$\kappa_n(\mathbf{x}') = \bar{\kappa} \cos^2 \alpha . \quad (5.11)$$

Zwischen der Krümmung κ der Raumkurve c , der (orientierten) geodätischen Krümmung κ_g von c auf Φ und der Normalschnittkrümmung $\kappa_n(\mathbf{x}')$ von c (im Punkt X in der Richtung \mathbf{x}') auf Φ gilt andererseits stets die Beziehung (vergleiche [11], S. 28)

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2 .$$

In unserem Fall ist, wie man anhand der Abwicklung des Zylinders Φ in die Ebene \mathbb{E}^2 erkennt, $\kappa_g = \frac{d\alpha}{ds} =: \alpha'$. Mit (5.11) lässt sich letzte Gleichung

umformen in

$$\alpha'^2 = \kappa^2 - \bar{\kappa}^2 \cos^4 \alpha .$$

Setzt man nun für die Krümmung κ der Raumkurve einen *konstanten* Wert $\kappa_0 > 0$ an, so erhalten wir aus letzter Gleichung die für die weiteren Betrachtungen in Abschnitt 5 grundlegende *Schlüsselgleichung*

$$\left(\frac{d\alpha}{ds} \right)^2 = \kappa_0^2 - \bar{\kappa}^2 \cos^4 \alpha . \quad (5.12)$$

Ausgehend von (5.12) wählen wir

$$\frac{d\alpha}{ds} = +\sqrt{\kappa_0^2 - \bar{\kappa}^2 \cos^4 \alpha} . \quad (5.13)$$

Diese Gleichung beschreibt die (orientierte) geodätische Krümmung $\kappa_g = d\alpha/ds$ von c auf Φ , beziehungsweise die Krümmung $\hat{\kappa}$ der durch Abwicklung von Φ in die Ebene verebneten Kurve \hat{c} , die wir im Folgenden \hat{c} nennen.

Insbesondere setzen wir im Folgenden stets eine *positive* geodätische Krümmung κ_g der auf der Zylinderfläche Φ verlaufenden Kurven c konstanter Krümmung $\kappa_0 > 0$ voraus, das heißt unter Verschärfung von (5.13) gelte immer

$$\kappa_g = \frac{d\alpha}{ds} = \sqrt{\kappa_0^2 - \bar{\kappa}^2 \cos^4 \alpha} > 0 . \quad (5.14)$$

Eine Konsequenz der Forderung (5.14) ist, dass wir ausgehend von (5.13) nur – sofern existierend – solche auf der Zylinderfläche Φ verlaufenden Kurven c konstanter Krümmung κ_0 ermitteln können, deren Verebnung \hat{c} keine W-Punkte besitzt.

5.3 Abwicklung einer Zylinderfläche Φ und ihrer Kurven c konstanter Krümmung

Zunächst zur Bestimmung einer Parameterdarstellung der Abwicklung \hat{c} der Kurve $c \subset \Phi$ bei Abwicklung des Trägerzylinders Φ in die Ebene.

5.3.1 Parameterdarstellung einer verebneten Kurve \hat{c}

Die Ebene \mathbb{E}^2 sei mit einem kartesischen xy -Koordinatensystem versehen. Die Erzeugenden $\bar{s} = \text{const}$ von Φ werden auf zur y -Achse parallele Geraden, die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden von Φ in zur x -Achse parallele Geraden abgebildet. Dann lässt sich zunächst eine Parameterdarstellung $\hat{\mathbf{x}}(\bar{s})$

der Abwicklung \hat{c} unter Verwendung der Bogenlänge \bar{s} der Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden von Φ als Parameter ansetzen als

$$\hat{\mathbf{x}}(\bar{s}) = \begin{pmatrix} \bar{s} \\ \hat{y}(\bar{s}) \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

mit noch zu bestimmender Koordinatenfunktion $\hat{y}(\bar{s})$.

Im Folgenden führen wir als neuen Kurvenparameter in (5.15) den, gegen den Uhrzeigersinn gemessenen, Winkel α zwischen der positiven x -Achse und dem Tangentenvektor $\hat{\mathbf{x}}'$ ein.

Die in (5.15) auftretende Größe \bar{s} soll nun als Funktion von α dargestellt werden. Ausgehend von

$$\frac{d\bar{s}}{d\alpha} = \frac{d\bar{s}}{ds} \cdot \frac{ds}{d\alpha} = \frac{d\bar{s}}{ds} : \frac{d\alpha}{ds}$$

erhält man mit (5.10), (5.13) und (5.14) zunächst

$$\frac{d\bar{s}}{d\alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\kappa_0^2 - \bar{\kappa}^2 \cos^4 \alpha}}.$$

Unter Verwendung der natürlichen Gleichung $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}(\bar{s})$ der Profilkurve \bar{c} (siehe deren Darstellung (5.3)) des Trägerzylinders Φ folgt dann:

$$\frac{d\bar{s}}{d\alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\kappa_0^2 - \bar{\kappa}(\bar{s})^2 \cos^4 \alpha}}. \quad (5.16)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich nun die allgemeine Vorgehensweise zur Bestimmung einer Parameterdarstellung von \hat{c} mit Kurvenparameter α formulieren, wenn ein Trägerzylinder Φ vorgeben ist:

Zu gegebener Trägerzylinderfläche Φ , die durch die *natürliche Gleichung* $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}(\bar{s})$ ihrer Profilkurve bestimmt ist, löse man die gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung (5.16), die im Allgemeinen nicht *trennbar* ist. Sei $\bar{s} = \bar{S}(\alpha)$ eine Lösungsfunktion.

Bemerkt sei, dass die Differentialgleichung (5.16) genau dann trennbar ist, wenn die Krümmungsfunktion $\bar{\kappa}$ konstant ist, das heißt

$$\bar{\kappa}(\bar{s}) = \frac{1}{r} = \text{const.}, \quad \text{mit } r > 0.$$

Dann ist Φ ein Drehzylinder mit Radius r , auf dem – wie bereits in [3] gezeigt wurde – Gewundene Kreise c existieren.

Bei beliebiger Krümmungsfunktion $\bar{\kappa}(\bar{s})$ ist für das weitere Vorgehen zu gegebenem $\bar{\kappa}(\bar{s})$ eine lokal existierende Lösung

$$\bar{s} = \bar{S}(\alpha), \quad \alpha \in J \subset \mathbb{R} \quad (5.17)$$

von (5.16) über einem Intervall $J =: [\alpha_1, \alpha_2]$ voranzusetzen.

Mit dieser Lösungsfunktion $\bar{s} = \bar{S}(\alpha)$ kann man nun bis auf Quadraturen die Parameterdarstellung $\hat{\mathbf{x}}(\alpha)$ der Abwicklung \hat{c} einer auf dem Zylinder Φ verlaufenden Raumkurve c aufstellen: Aufgrund der geometrischen Deutung von α ist

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{ds} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 .$$

Wegen

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{d\bar{s}} \cdot \frac{d\bar{s}}{ds}$$

ergibt sich mit (5.13) und $\frac{d\bar{s}}{ds} = \cos \alpha$ aus (5.10)

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{d\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_0^2 - \bar{\kappa}(\bar{S}(\alpha))^2 \cos^4 \alpha}} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} . \quad (5.18)$$

Damit erhält man vermöge einmaliger Integration nach α über das Intervall $J = [\alpha_1, \alpha_2]$ der Lösungsfunktion $\bar{s} = \bar{S}(\alpha)$ von (5.16) (zu gegebenem $\bar{\kappa}(\bar{s})$) die gesuchte Parameterdarstellung der (ebenen) Kurve \hat{c} :

$$\begin{aligned} \hat{c}: \quad \hat{\mathbf{x}}(\alpha) &= \begin{pmatrix} \hat{x}(\alpha) \\ \hat{y}(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\kappa_0^2 - \bar{\kappa}(\bar{S}(u))^2 \cos^4 u}} \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix} du , \end{aligned} \quad (5.19)$$

mit $\alpha \in J$. Nach (5.15) und (5.17) ist hierbei $\hat{x}(\alpha)$ gleich der Lösung $\bar{S}(\alpha)$ von (5.16).

Somit erhält man schließlich bis auf Quadraturen als Parameterdarstellung von \hat{c} :

$$\begin{aligned} \hat{c}: \hat{\mathfrak{r}}(\alpha) &= \begin{pmatrix} \hat{x}(\alpha) \\ \hat{y}(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{S}(\alpha) \\ \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{\sin u}{\sqrt{\kappa_0^2 - \bar{\kappa}(\bar{S}(u))^2 \cos^4 u}} du \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.20)$$

mit $\bar{S}(\alpha)$ gemäß (5.16) und (5.17).

5.3.2 Algorithmus zur Bestimmung einer Parameterdarstellung einer verebneten Kurve \hat{c}

Insgesamt können wir nun einen Algorithmus formulieren, der uns zu einem Zylinder Φ , der durch die natürliche Gleichung $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}(\bar{s})$ seiner Profilkurve \bar{c} gegeben ist, gemäß (5.14) die Klasse, der auf Φ mit konstanter Raumkurvenkrümmung κ_0 verlaufenden Kurven c liefert, deren *Verebnung* \hat{c} (zusammen mit Φ) stets positive Krümmung besitzt:

Ist die Profilkurve \bar{c} der Zylinderfläche Φ in einer auf ihre Bogenlänge \bar{s} bezogenen Parameterdarstellung (5.3), kurz $\bar{c}: \bar{x}(\bar{s}), \bar{y}(\bar{s}); s \in I$ gegeben, so erhält man folgende Differentialgleichungen, die für alle auf der Zylinderfläche Φ mit konstanter Krümmung κ_0 verlaufenden Kurven c jeweils deren Abwicklung \hat{c} (bei Verebnung von Φ) in die Ebene als Lösung bestimmen:

1. Zu gegebenem Startwert $\bar{s}_0 = S_0 \in I$ auf \bar{c} und Startwinkel α_0 der Tangente der gesuchten Lösungskurven c gegenüber der *horizontalen xy-Ebene* ist das *Anfangswertproblem*

$$\frac{d\bar{s}}{d\alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\kappa_0^2 - \bar{\kappa}(\bar{s})^2 \cos^4 \alpha}} \quad \text{und} \quad \bar{s}(\alpha_0) = \bar{S}_0 \quad (5.21)$$

zu lösen.

2. Existiert eine Lösung $\bar{s} = \bar{S}(\alpha)$, $\alpha \in J = [\alpha_1, \alpha_2] \subseteq \mathbb{R}$ (wobei dann auch $\alpha_0 \in J$) des Anfangswertproblems (5.21), so ist die Parameterdarstellung $\hat{\mathfrak{r}}(\alpha) = (\hat{x}(\alpha), \hat{y}(\alpha))$ der Abwicklung \hat{c} der konstant gekrümmten Raumkurve $c \subset \Phi$ in die Ebene bis auf Quadratur gegeben durch (5.20) mit $\alpha \in J$.

Sei nun die (ebene) C^2 -Profilkurve \bar{c} des Zylinders Φ nicht durch ihre *natürliche Gleichung* gegeben, sondern im kartesischen xyz -Koordinatensystem des \mathbb{E}^3 durch eine allgemeine *reguläre* Parameterdarstellung

$$\bar{c} : \quad \bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in U \subseteq \mathbb{R}. \quad (5.22)$$

Für die Bogenlänge \bar{s} und die Krümmung $\bar{\kappa}$ der Kurve \bar{c} gilt dann (siehe [13], S. 18 und 43)

$$\frac{d\bar{s}}{dt} = \left| \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} \right| = \sqrt{\dot{\bar{x}}(t)^2 + \dot{\bar{y}}(t)^2}, \quad (5.23)$$

$$\bar{\kappa}(t)^2 = \frac{\left(\dot{\bar{x}}(t)\ddot{\bar{y}}(t) - \ddot{\bar{x}}(t)\dot{\bar{y}}(t) \right)^2}{\left(\dot{\bar{x}}(t)^2 + \dot{\bar{y}}(t)^2 \right)^3}. \quad (5.24)$$

Mit (5.23) und (5.24) lässt sich nun die Differentialgleichung (5.21) für den allgemeinen Kurvenparameter t von \bar{c} formulieren:

Wegen $\frac{d\alpha}{d\bar{s}} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{d\bar{s}}$ ist mit (5.16) und (5.23)

$$\frac{dt}{d\alpha} = \frac{d\bar{s}}{d\alpha} \cdot \left(\frac{d\bar{s}}{dt} \right)^{-1} = \frac{\cos \alpha}{|\dot{\bar{\mathbf{x}}}| \sqrt{\kappa_0^2 - \bar{\kappa}^2 \cos^4 \alpha}}. \quad (5.25)$$

Existiert zu vorgegebenen Startwerten eine Lösung $t = T(\alpha)$ von (5.25), so ist analog zu (5.18)

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{d\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_0^2 - \bar{\kappa}(T(\alpha))^2 \cos^4 \alpha}} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Eine Lösungskurve \hat{c} in Parameterdarstellung erhält man schließlich durch Integration der Gleichung (5.26).

Damit lässt sich der zuvor bezüglich des Bogenlängenparameters formulierte Algorithmus für einen allgemeinen Kurvenparameter t der Kurve \bar{c} formulieren:

Ist die Profilkurve \bar{c} der Zylinderfläche Φ in einer nicht notwendig auf Bogenlänge bezogenen Parameterdarstellung (5.22) gegeben, so erhält man folgende Differentialgleichungen, die die Abwicklung aller auf der Zylinderfläche

Φ mit konstanter Raumkurvenkrümmung κ_0 verlaufenden Raumkurven c über deren Abwicklung \hat{c} in die Ebene als Lösung bestimmen:

1. Zu gegebenem Startwert $t = T_0 \in U$ und Startwinkel α_0 der Tangente der gesuchten Lösungskurven c gegenüber der *horizontalen* xy -Ebene ist das *Anfangswertproblem*

$$\frac{dt}{d\alpha} = \frac{\cos \alpha}{|\dot{\mathbf{x}}(t)| \sqrt{\kappa_0^2 - \bar{\kappa}(t)^2} \cos^4 \alpha} \quad \text{mit} \quad t(\alpha_0) = T_0 \quad (5.27)$$

und den Bezeichnungen

$$|\dot{\mathbf{x}}(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \quad \text{und} \quad \bar{\kappa}(t)^2 = \frac{(\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t))^2}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^3}$$

zu lösen.

2. Existiert eine Lösung $t = T(\alpha)$, $\alpha \in J := [\alpha_1, \alpha_2] \subseteq \mathbb{R}$ (wobei dann auch $\alpha_0 \in J$) des Anfangswertproblems (5.27), so ist die Parameterdarstellung $\hat{\mathbf{x}}(\alpha) = (\hat{x}(\alpha), \hat{y}(\alpha))$ der Abwicklung \hat{c} der konstant gekrümmten, auf Φ verlaufenden Raumkurve c in die Ebene bis auf Quadratur gegeben durch

$$\hat{c} : \begin{cases} \hat{x}(\alpha) = \bar{s}(T(\alpha)) \\ \hat{y}(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\sin u}{\sqrt{\kappa_0^2 - \bar{\kappa}(T(u))^2} \cos^4 u} du, \quad \alpha \in J. \end{cases} \quad (5.28)$$

5.3.3 Parameterdarstellung einer konstant gekrümmten, auf einer vorgegebenen Zylinderfläche verlaufenden Raumkurve

Die Parameterdarstellung der gesuchten (konstant gekrümmten Raum-)Kurve c , also der auf den Zylinder Φ aufgewickelten ebenen Kurve \hat{c} gemäß obigem Algorithmus, erhält man aufgrund der Betrachtungen aus Abschnitt 5.3.2 wie folgt:

Der Tangentenvektor $\frac{d\mathbf{x}}{ds} \in \mathbb{R}^3$ von c ist gemäß der Konstruktion der Kurve c als einer auf dem Zylinder Φ über dessen Profilkurve \bar{c} verlaufenden Kurve unter Verwendung der in Abschnitt 5.1 eingeführten Winkelgröße α und (5.6) gegeben wie folgt: Mit vorgegebener Krümmung $\bar{\kappa}(\bar{s})$ der Profilkurve \bar{c} der Trägerzylinderfläche Φ ist

$$\bar{\alpha}(\bar{s}) := \int_{\bar{s}_1}^{\bar{s}} \bar{\kappa}(u) du \quad \bar{s} \in [\bar{s}_1, \bar{s}_2] \quad (5.29)$$

und dann wegen der daraus resultierenden Lösungsfunktion $\bar{s} = \bar{S}(\alpha)$ gemäß des Algorithmus in Abschnitt 5.3.2

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \begin{pmatrix} \cos \bar{\alpha}(\bar{S}(\alpha)) \cdot \cos \alpha \\ \sin \bar{\alpha}(\bar{S}(\alpha)) \cdot \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Aus der Ableitungskettenregel $\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{ds}$ folgt

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\alpha} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \left(\frac{d\alpha}{ds} \right)^{-1}.$$

Nun gilt *hier* für die geodätische Krümmung $\kappa_g = \frac{d\alpha}{ds}$ von c auf der Fläche Φ nach (5.13)

$$\frac{d\alpha}{ds} = \sqrt{\kappa_0^2 - \bar{\kappa}(\bar{S}(\alpha))^2} \cos^4 \alpha.$$

Damit lautet der Tangentenvektor von c

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_0^2 - \bar{\kappa}(\bar{S}(\alpha))^2} \cos^4 \alpha} \begin{pmatrix} \cos \bar{\alpha}(\bar{S}(\alpha)) \cdot \cos \alpha \\ \sin \bar{\alpha}(\bar{S}(\alpha)) \cdot \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Die Integration der letzten Gleichung liefert schließlich die Parameterdarstellung $\mathfrak{r}(\alpha)$ der gesuchten Raumkurve c konstanter Krümmung κ_0 :

$$c : \quad \mathfrak{r}(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{\kappa_0^2 - \bar{\kappa}(\bar{S}(u))^2 \cos^4 u}} \begin{pmatrix} \cos \bar{\alpha}(\bar{S}(u)) \cdot \cos u \\ \sin \bar{\alpha}(\bar{S}(u)) \cdot \cos u \\ \sin u \end{pmatrix} du \quad (5.30)$$

zu geeignetem, gemäß dem Algorithmus aus Abschnitt 5.3.2 gewonnenem Definitionsbereich J für den Kurvenparameter α .

Unter Beachtung von (5.18), (5.19), (5.20) lässt sich die Darstellung (5.30) von c mittels der Funktionen $\hat{x}(\alpha)$, $\hat{y}(\alpha)$ gemäß (5.19) auch wie folgt schreiben:

$$c : \quad \begin{cases} x(\alpha) = \int_0^{\hat{x}(\alpha)} \cos \bar{\alpha}(\bar{s}) d\bar{s} + x_0, \\ y(\alpha) = \int_0^{\hat{x}(\alpha)} \sin \bar{\alpha}(\bar{s}) d\bar{s} + y_0, \\ z(\alpha) = \hat{y}(\alpha) + z_0, \quad \alpha \in J, \end{cases} \quad (5.31)$$

hierbei sind $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ Integrationskonstanten.

5.4 Windschiefe und Gewundene Kreise auf einem Kettenlinienzylinder

Im Folgenden wenden wir den Algorithmus aus Abschnitt 5.3.2 an, um Abbildungen der Verebnung \hat{c} von Windschiefen und Gewundenen Kreisen c auf einer speziellen Zylinderfläche – einem Kettenlinienzylinder – numerisch zu bestimmen.

Ein Kettenlinienzylinder Φ sei gegeben durch seine ebene Profilkurve $\bar{c} \subset \mathbb{E}^2$ mit der Parameterdarstellung

$$\bar{c} : \quad \bar{\mathfrak{r}}(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t - 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.32)$$

Eine Parameterdarstellung von Φ lautet dann

$$\Phi : \quad \bar{\eta}(t, v) = \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \quad (5.33)$$

Gemäß (5.32) besteht zwischen der Bogenlänge \bar{s} und t wegen

$$\frac{d\bar{s}}{dt} = |\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)| = \cosh t \quad (5.34)$$

ohne Einschränkung, das heißt bis auf Integrationskonstanten, die Beziehung

$$\bar{s} = \sinh t \quad \text{beziehungsweise} \quad t = \operatorname{arsinh} \bar{s}. \quad (5.35)$$

Damit lässt sich die Kurve \bar{c} auf ihre Bogenlänge \bar{s} parametrisieren: Mit (5.35) und (5.32) erhält man

$$\bar{c} : \quad \bar{\mathbf{x}}(\bar{s}) = \begin{pmatrix} \operatorname{arsinh} \bar{s} \\ \sqrt{1 + \bar{s}^2} - 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{s} \in \mathbb{R}. \quad (5.36)$$

Nun bestimmen wir die Krümmung $\bar{\kappa}$ in Abhängigkeit von der Bogenlänge \bar{s} . Allgemein gilt

$$\bar{\kappa}(t) = \frac{\det(\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t), \ddot{\bar{\mathbf{x}}}(t))}{|\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)|^3},$$

was hier gemäß (5.32) und (5.34) mit (5.35)

$$\bar{\kappa}(\bar{s}) = \frac{1}{1 + \bar{s}^2}, \quad \bar{s} \in \mathbb{R} \quad (5.37)$$

liefert. Für $\bar{s} = 0$, gemäß (5.35) und (5.32) also im Punkt $\bar{X}(t = 0) = O(0, 0)$, hat \bar{c} die maximale Krümmung $\bar{\kappa}_{max} = 1$. Ferner gilt

$$\lim_{\bar{s} \rightarrow \pm\infty} \bar{\kappa}(\bar{s}) = 0.$$

Nun können wir mit (5.21) und (5.20) ein Differentialgleichungssystem für eine Parameterdarstellung $\hat{\mathbf{x}}(\alpha) = (\hat{x}(\alpha), \hat{y}(\alpha))$ der Verebnung \hat{c} von auf dem Kettenlinienzylinder Φ verlaufenden Kurven c konstanter Krümmung $\kappa_0 \geq \bar{\kappa}_{max} = 1$, formulieren:

Für $\kappa_0 \geq 1$ und $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1] \subset \mathbb{R}$ löse man zuerst das Anfangswertproblem

$$\frac{d\hat{x}}{d\alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\kappa_0^2 - \frac{1}{(1 + \hat{x}^2)^2} \cdot \cos^4 \alpha}} \quad \text{mit} \quad \hat{x}(\alpha_0) = \bar{S}_0 \in \mathbb{R} \quad (5.38)$$

und dann unter Verwendung der Lösung $\hat{x}(\alpha)$ von (5.38) das Anfangswertproblem

$$\frac{d\hat{y}}{d\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\kappa_0^2 - \frac{1}{(1 + \hat{x}(\alpha)^2)^2} \cdot \cos^4 \alpha}} \quad \text{mit} \quad \bar{y}(\alpha_0) = 0. \quad (5.39)$$

Die Lösungen $\hat{x}(\alpha)$ und $\hat{y}(\alpha)$ des Differentialgleichungssystems (5.38), (5.39) lassen sich nur numerisch bestimmen.

Die Lösungskurve $\hat{c} : \hat{\mathbf{x}}(\alpha) = (\hat{x}(\alpha), \hat{y}(\alpha))$ von (5.38) und (5.39) liefert dann mit (5.36), (5.33) und (5.35) die Parameterdarstellung $\mathbf{x}(\alpha)$ des auf Φ mit den gemäß (5.38) und (5.39) gewählten Startwerten verlaufenden Windschiefen Kreises c mit Krümmung $\kappa_0 \geq 1$:

$$c : \mathbf{x}(\alpha) = \begin{pmatrix} \operatorname{arsinh} \hat{x}(\alpha) \\ \sqrt{1 + \hat{x}(\alpha)^2} - 1 \\ \hat{y}(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1] \subset \mathbb{R}. \quad (5.40)$$

Die Anfangswerte α_0, \bar{S}_0 in (5.38) und (5.39) lassen sich geometrisch deuten: Die Lösungskurve c gemäß (5.40) startet im Punkt

$$\hat{X}_0 := \left(\operatorname{arsinh}(\bar{S}_0), \sqrt{1 + \bar{S}_0^2} - 1, 0 \right) \in \Phi$$

mit dem Winkel $\pi/2 - \alpha_0$ zwischen Tangente an \hat{c} in \hat{X}_0 und der Erzeugendenrichtung $(0, 0, 1)^T$ von Φ .

Mittels des Computeralgebrapaketes MATHEMATICA wurden durch numerische Integration von (5.38) und (5.39) zu gewissen Wertetripeln $(\kappa_0, \bar{S}_0, \alpha_0)$ und zugehörigen Definitionsbereichen $I := [\alpha_0, \alpha_1] \subset \mathbb{R}$ experimentell die folgenden Abbildungen A - D der Verebnung \hat{c} erzeugt:

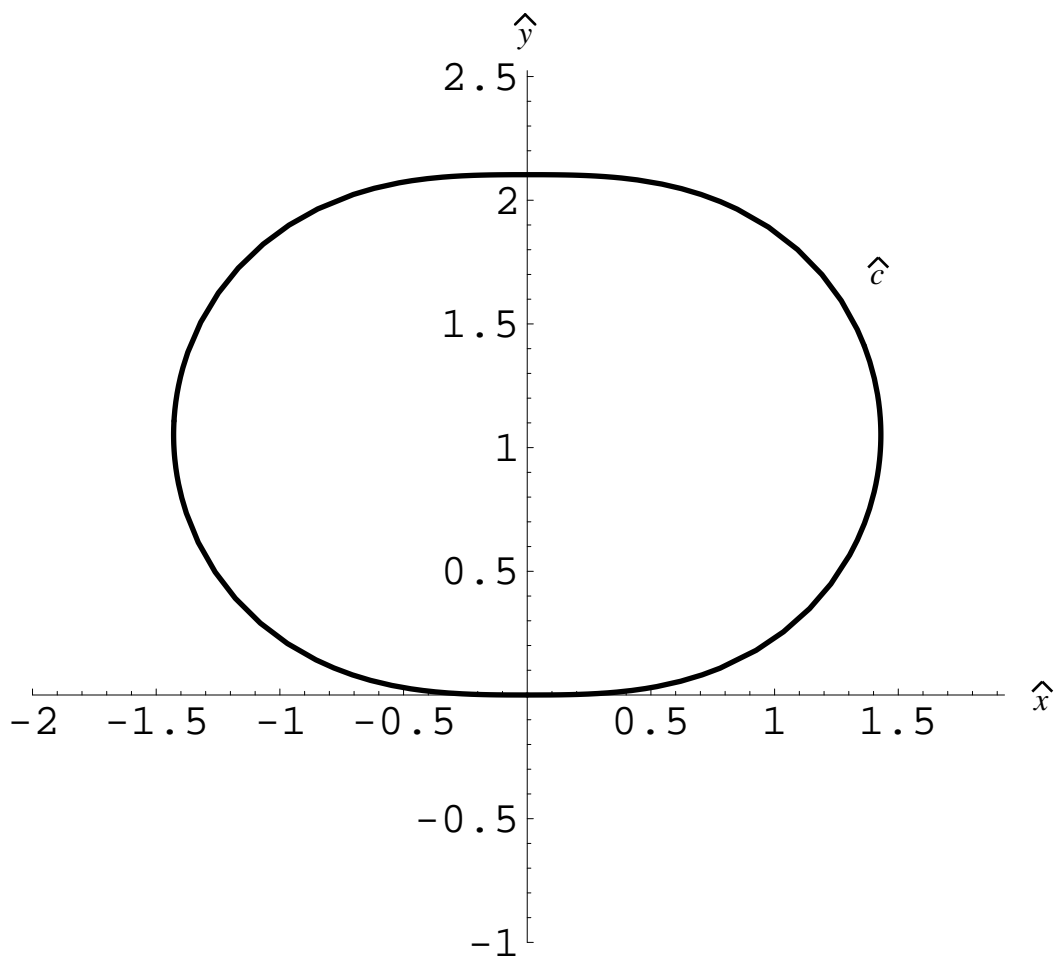


Abbildung A: Die Lösungskurve \hat{c} von (5.38) und (5.39) zu der Raumkurvenkrümmung $\kappa_0 = 1.001$, den Anfangswerten $\alpha_0 = 0$, $\bar{S}_0 = 0$, also dem Startpunkt $\hat{X}_0 = O(0, 0)$, und dem Definitionsbereich $I = [0, 2\pi]$ ist eine geschlossene C^ω -Kurve; die zugehörige auf der Zylinderfläche Φ verlaufende Raumkurve c konstanter Krümmung κ_0 ist damit ein Gewundener Kreis.

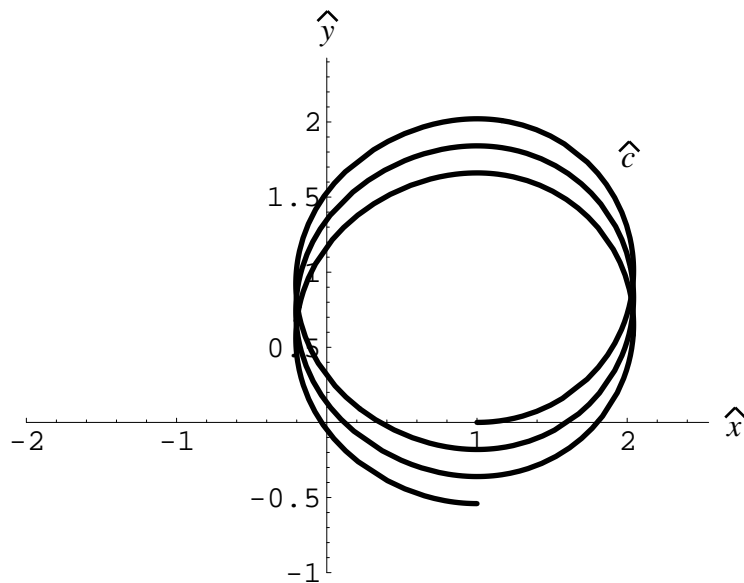


Abbildung B: Die Lösungskurve \hat{c} von (5.38) und (5.39) zu der Raumkurvenkrümmung $\kappa_0 = 1$, den Anfangswerten $\alpha_0 = 0$, $\bar{S}_0 = 1$, also dem Startpunkt $\hat{X}_0(1, 0)$, und dem Definitionsbereich $I = [0, 6\pi]$ ist offenbar keine geschlossene C^ω -Kurve; die zugehörige auf der Zylinderfläche Φ verlaufende Raumkurve c konstanter Krümmung κ_0 ist damit kein Gewundener Kreis.

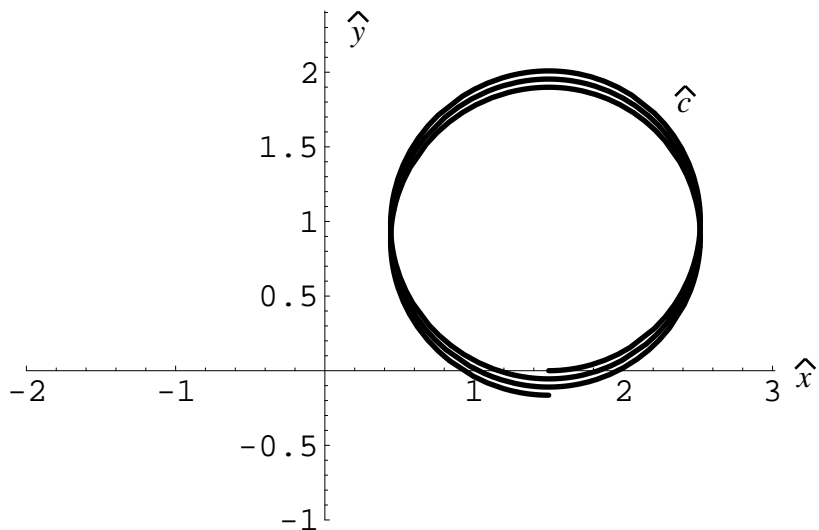


Abbildung C: Die Lösungskurve \hat{c} von (5.38) und (5.39) zu der Raumkurvenkrümmung $\kappa_0 = 1$, den Anfangswerten $\alpha_0 = 0$, $\bar{S}_0 = 1.5$, also dem Startpunkt $\hat{X}_0(1.5, 0)$, und dem Definitionsbereich $I = [0, 6\pi]$ ist offenbar keine geschlossene C^ω -Kurve; die zugehörige auf der Zylinderfläche Φ verlaufende Raumkurve c konstanter Krümmung κ_0 ist damit kein Gewundener Kreis.

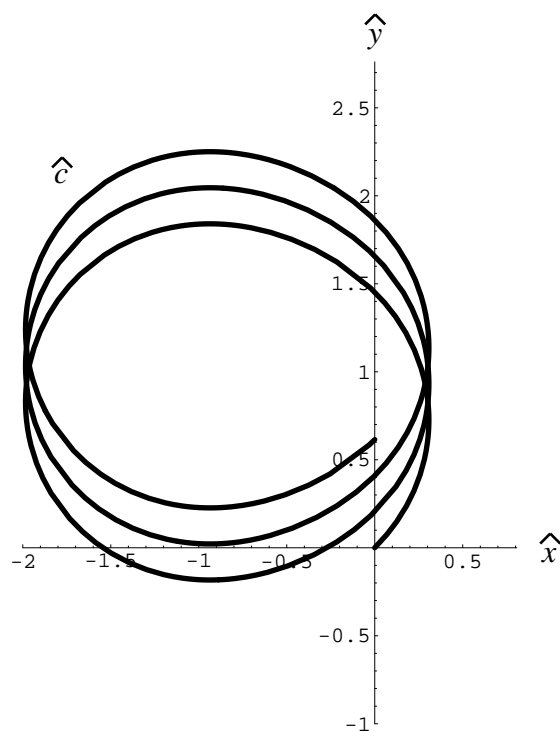


Abbildung D: Die Lösungskurve \hat{c} von (5.38) und (5.39) zu der Raumkurvenkrümmung $\kappa_0 = 1$, den Anfangswerten $\alpha_0 = \pi/4$, $\bar{S}_0 = 0$, also dem Startpunkt $\hat{X}_0 = O(0, 0)$, und dem Definitionsbereich $I = [0, 6\pi]$ ist offenbar keine geschlossene C^ω -Kurve; die zugehörige auf der Zylinderfläche Φ verlaufende Raumkurve c konstanter Krümmung κ_0 ist damit kein Gewundener Kreis.

5.5 Windschiefe und Gewundene Kreise auf einem Drehzylinder

Die im Abschnitt 3.1 vorgestellten, aus Schraublinienbögen zusammengesetzten Gewundenen (C^2 -)Kreise verlaufen auf einer Konfiguration aus *mehrereren* (kongruenten) Drehzylindern – den (jeweils eindeutig bestimmten) Trägerdrehzylindern der jeweiligen Schraublinienbögen.

In diesem Abschnitt werden – unter Verwendung von Ergebnissen aus [3] – Gewundene Kreise vorgestellt, die ganz auf *einem* Drehzylinder (Radius $r > 0$) verlaufen und überdies eine C^ω -Parameterdarstellung erlauben.

5.5.1 Parameterdarstellung der Windschiefen und Gewundenen Kreise auf einem Drehzylinder vom Radius r

Bereits in [3] hergeleitet wurde die Parameterdarstellung $\hat{\mathbf{x}}(\alpha)$ der samt ihrem Trägerdrehzylinder (Radius r) verebneten Raumkurve c konstanter Krümmung $\kappa_0 > \frac{1}{r}$: Die verebnete Kurve \hat{c} ist – wenn man in [3] α durch $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ersetzt – in einem kartesischen $\hat{x}\hat{y}$ -Koordinatensystem des \mathbb{E}^2 gegeben durch

$$\hat{c} : \hat{\mathbf{x}}(\alpha) = \begin{pmatrix} \hat{x}(\alpha) \\ \hat{y}(\alpha) \end{pmatrix} = r \int_{-\pi/2}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{r^2\kappa_0^2 - \cos^4\varphi}} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} d\varphi, \quad (5.41)$$

$$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right].$$

Der Kurvenparameter α in (5.41) ist – im Einklang mit der Definition des Winkels α gemäß (5.8) in Abschnitt 5.1 – der (im Gegenuhrzeigersinn orientierte) Winkel zwischen der \hat{x} -Achse und dem Tangentenrichtungsvektor $\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{d\alpha}$ der Kurve \hat{c} , wie in Abbildung 5.1 veranschaulicht.

Die Darstellung (5.41) von \hat{c} ergibt sich hier mittels des in Abschnitt 5.3.2 vorgestellten Algorithmus unmittelbar aus (5.18) für den Spezialfall, dass für die Profilschnittkrümmung des Zylinders Φ

$$\bar{\kappa}(\bar{s}) = \text{const.} =: \frac{1}{r} > 0 \quad (5.42)$$

gilt. Mit (5.18) gilt dann nämlich

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{d\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_0^2 - \frac{1}{r^2} \cos^4 \alpha}} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad (5.43)$$

woraus durch Integration (5.41) folgt.

Wegen $\kappa_0 > 1/r$, also $\kappa_0 \cdot r > 1$, ist (5.41) eine reguläre C^ω -Parameterdarstellung. Die Koordinatenfunktionen von (5.41) sind *elliptische Integrale* (siehe [7]). Die Kurve $\hat{c} \subset \mathbb{E}^2$ ist – wie bereits in [3], Abschnitt 4 gezeigt wurde – eine (C^ω -) *Eilinie* mit der Krümmung

$$\bar{\kappa}(\alpha) = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{r^2 \kappa_0^2 - \cos^4 \alpha} > 0.$$

Des Weiteren gilt: \hat{c} besitzt zwei Symmetrieachsen, welche in dem für die Parameterdarstellung (5.41) gewählten kartesischen Koordinatensystem des \mathbb{E}^2 die Geraden

$$\hat{y} = 0 \quad \text{und} \quad \hat{x} = \hat{x}(0) \quad (5.44)$$

sind. Außerdem besitzt \hat{c} genau *vier Scheitel* (Punkte extremaler Krümmung). Diese sind bezüglich der Parameterdarstellung (5.41) die Punkte $\hat{\mathbf{x}}(0)$ beziehungsweise $\hat{\mathbf{x}}(\pi)$ (jeweils mit Scheitelkrümmung $\hat{\kappa} = \sqrt{\kappa_0^2 - r^{-2}}$) und $\hat{\mathbf{x}}(\pm\pi/2)$ (jeweils mit Scheitelkrümmung $\hat{\kappa} = \kappa_0$). Man betrachte dazu die Abbildungen 5.1 und 5.2.

Die auf den Drehzylinder Φ (mit Radius r) aufgewickelte Kurve \hat{c} ist eine geschlossene, nichtebene C^ω -Kurve c konstanter Krümmung $\kappa_0 > \frac{1}{r}$, also ein gewundener C^ω -Kreis, der die Parameterdarstellung

$$c: \quad \mathbf{x}(\alpha) = \begin{pmatrix} r \cos \frac{\hat{x}(\alpha)}{r} \\ r \sin \frac{\hat{x}(\alpha)}{r} \\ \hat{y}(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \quad (5.45)$$

gestattet, wobei $\hat{x}(\alpha)$ und $\hat{y}(\alpha)$ die Koordinatenfunktionen der Abwicklung (5.41) von c in die Ebene sind. Die Achse des Trägerdrehzylinders Φ von c ist die z -Achse, und c besitzt wegen (5.44) die Symmetrieebenen

$$z = 0 \quad \text{und} \quad -x \sin \frac{\hat{x}(0)}{r} + y \cos \frac{\hat{x}(0)}{r} = 0.$$

Anmerkung: Die Parameterdarstellung (5.45) von c erhält man auch mit dem im Abschnitt 5.3 bereitgestellten Kalkül wie folgt: Mit $\bar{\kappa}(\bar{s}) = 1/r$ gemäß (5.42) führt (5.29) auf

$$\bar{\alpha}(\bar{s}) = \frac{1}{r} \cdot \bar{s} + \bar{\alpha}_0 \quad (\bar{\alpha}_0 \in \mathbb{R}).$$

Wählt man nun $\bar{\alpha}_0 := \frac{\pi}{2}$ sowie $x_0 := r$, $y_0 = z_0 := 0$, so ergibt (5.31) unmittelbar die Darstellung (5.45) des Gewundenen Kreises c der Krümmung $\kappa_0 > \frac{1}{r}$ auf dem Drehzylinder $\Phi : x^2 + y^2 = r^2$.

Im Folgenden werden unter Verwendung von (5.41) zwei Größen angegeben, welche die räumliche Ausdehnung der auf einem Drehzylinder Φ (Radius r) verlaufenden Gewundenen Kreise c gemäß (5.45) kennzeichnen:

Der Grundriss von c in eine zur Achse des Drehzylinders Φ senkrechte Ebene ist ein Kreisbogen, dessen Parameterdarstellung, ausgehend von (5.45), nicht regulär ist. Dann ist wegen der Symmetrieeigenschaften von c beziehungsweise \hat{c}

$$\delta := \frac{1}{r} \cdot \left[\hat{x} \left(\frac{\pi}{2} \right) - \hat{x} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \alpha \, d\alpha}{\sqrt{r^2 \kappa_0^2 - \cos^4 \alpha}} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \alpha \, d\alpha}{\sqrt{r^2 \kappa_0^2 - \cos^4 \alpha}}$$

der Öffnungswinkel des Grundriss-Kreisbogens von c . Mittels der Substitution $u := \sin \alpha$ ergibt sich das *elliptische Integral* (vergleiche auch [7])

$$\delta = 2 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(r\kappa_0 + 1 - u^2)(r\kappa_0 - 1 + u^2)}}. \quad (5.46)$$

Bezüglich der Parameterdarstellung (5.45) des Gewundenen Kreises c berechnet sich (im xyz -Koordinatensystem) die maximale Ausdehnung von c in z -Richtung (also längs der Erzeugenden gemessen) wie folgt:

$$M := \hat{y}(\pi) - \hat{y}(0) = r \int_0^{\pi} \frac{\sin \alpha \, d\alpha}{\sqrt{r^2 \kappa_0^2 - \cos^4 \alpha}}. \quad (5.47)$$

Mittels der Substitution $u := \cos \alpha$ erhält man das elliptische Integral

$$M = 2r \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(r\kappa_0 - u^2)(r\kappa_0 + u^2)}}. \quad (5.48)$$

Die mit (5.46) und (5.48) eingeführten Abmessungen M und δ eines, auf einem Drehzylinder Φ vom Radius r verlaufenden, Gewundenen Kreises c sind in den Abbildungen 5.4 und 5.2 veranschaulicht.

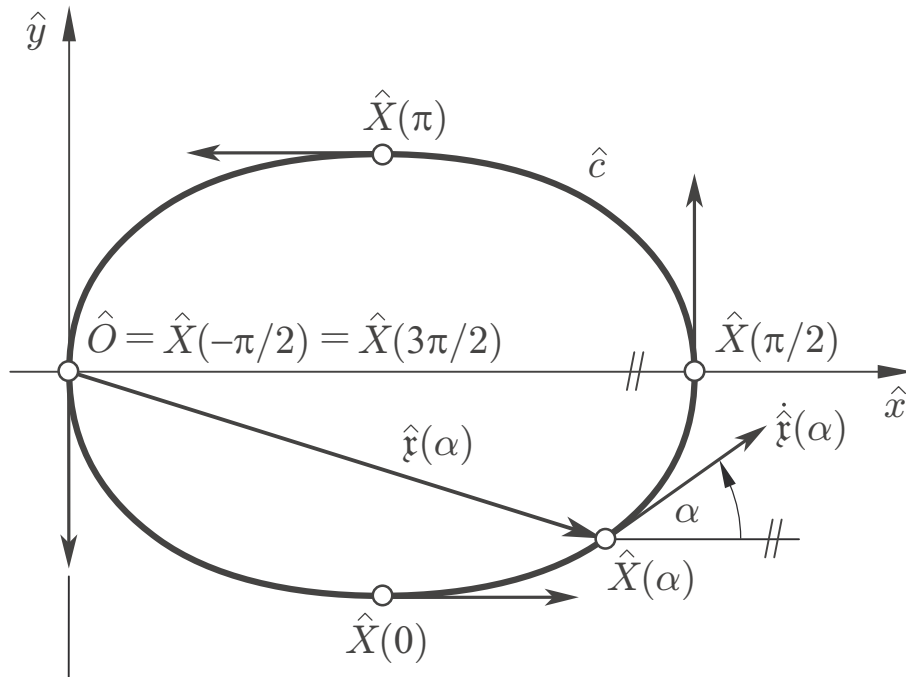


Abbildung 5.1: Der Kurvenparameter α in der Parameterdarstellung (5.41) von \hat{c} (hier zu $\kappa_0 r = 1.06$) ist der im Gegenuhrzeigersinn orientierte Winkel zwischen der orientierten Tangente an \hat{c} und der positiven \hat{x} -Achse

Sucht man zu vorgegebenem Grundrissöffnungswinkel $\delta = \delta_0 > 0$ einen (bis auf Bewegungen eindeutigen) auf dem Drehzylinder Φ (Radius r) verlaufenden Gewundenen Kreis c mit Krümmung $\kappa_0 > 1/r$, so ist gemäß (5.46) das *Parameterintegral* (5.46) nach κ_0 aufzulösen, was nur numerisch, zum Beispiel mit dem Computeralgebrapaket MATHEMATICA, gelingt. Die aus [3] entnommene Abbildung 5.4 veranschaulicht allgemein die Größen δ und M gemäß (5.46) beziehungsweise (5.48) für einen Gewundenen Kreis c mit der Parameterdarstellung (5.45) Die vier Abbildungen 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, die ebenfalls aus [3] entnommen sind, zeigen Gewundene C^ω -Kreise zu den Grundrissöffnungswinkeln $\delta_0 \in \{\pi/2, \pi, 2\pi, 5\pi/2\}$.

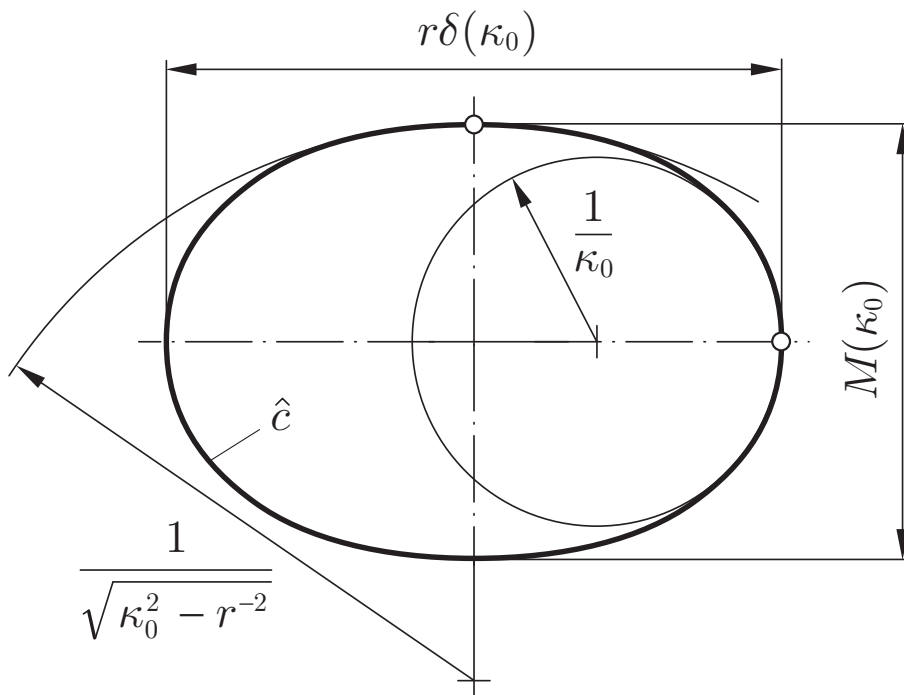


Abbildung 5.2: Wickelt man einen auf einem Drehzylinder vom Radius r verlaufenden Gewundenen C^ω -Kreis c mit der Krümmung $\kappa_0 > \frac{1}{r}$ gemäß (5.41) in die Ebene ab, so erhält man eine Eilinie \hat{c} mit genau vier Scheiteln und zwei Symmetrieachsen.

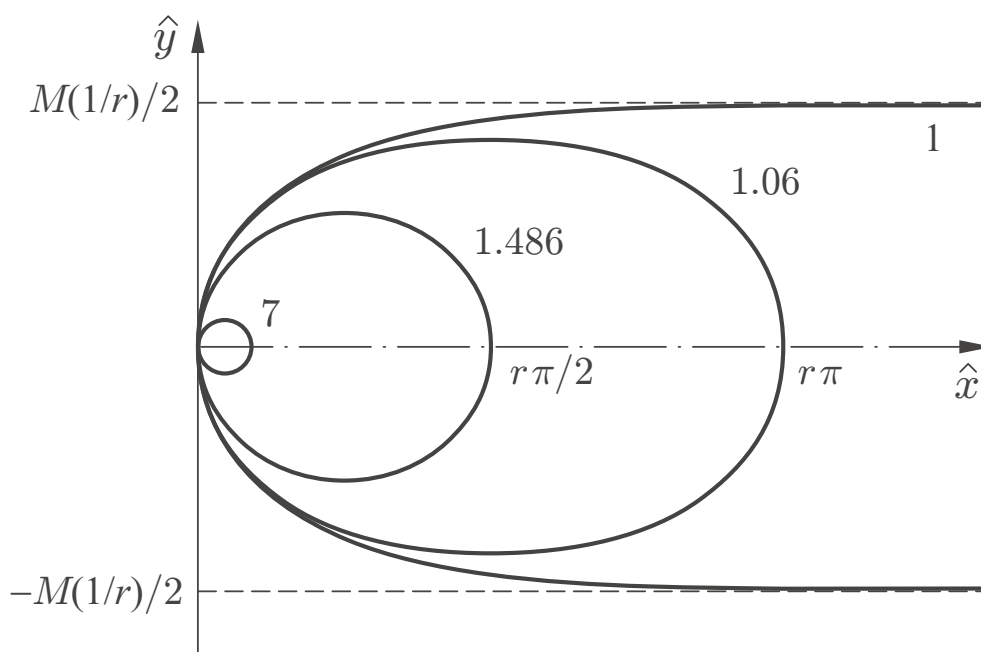


Abbildung 5.3: Kurven \hat{c} gemäß (5.41) zu verschiedenen Werten $\kappa_0 r > 1$, sowie gemäß (5.49) zu dem Grenzfall $\kappa_0 r = 1$, der gesondert in Abschnitt 5.5.2 vorgestellt wird.

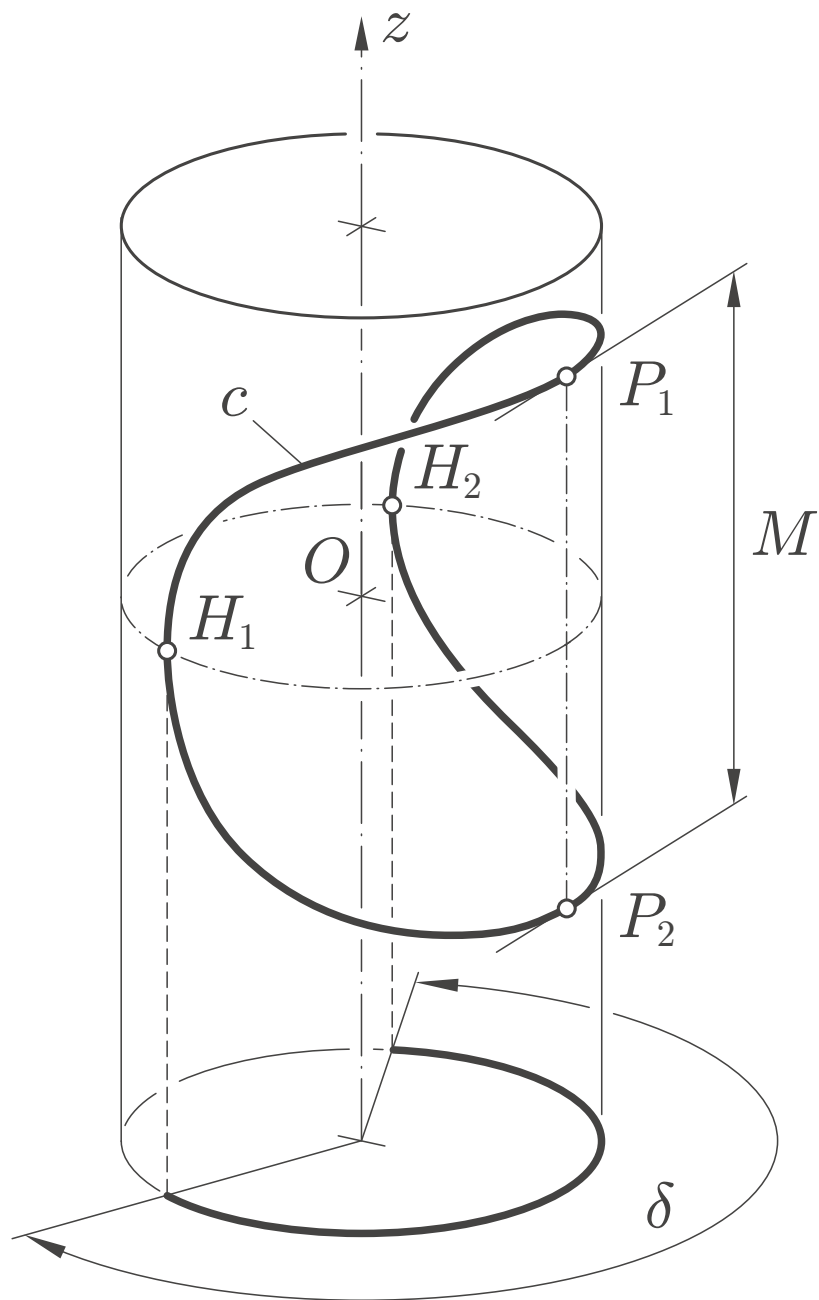


Abbildung 5.4: Ein auf einem Drehzylinder Φ (Radius r) verlaufender Gewundener Kreis c , samt Kennzeichnung seines Öffnungswinkels δ im Grundriss in eine zur Achse von Φ orthogonale Ebene und der maximalen Ausdehnung M in Achsenrichtung von Φ . Die Punkte H_1, H_2, P_1 und P_2 sind die einzigen Henkelpunkte von c .

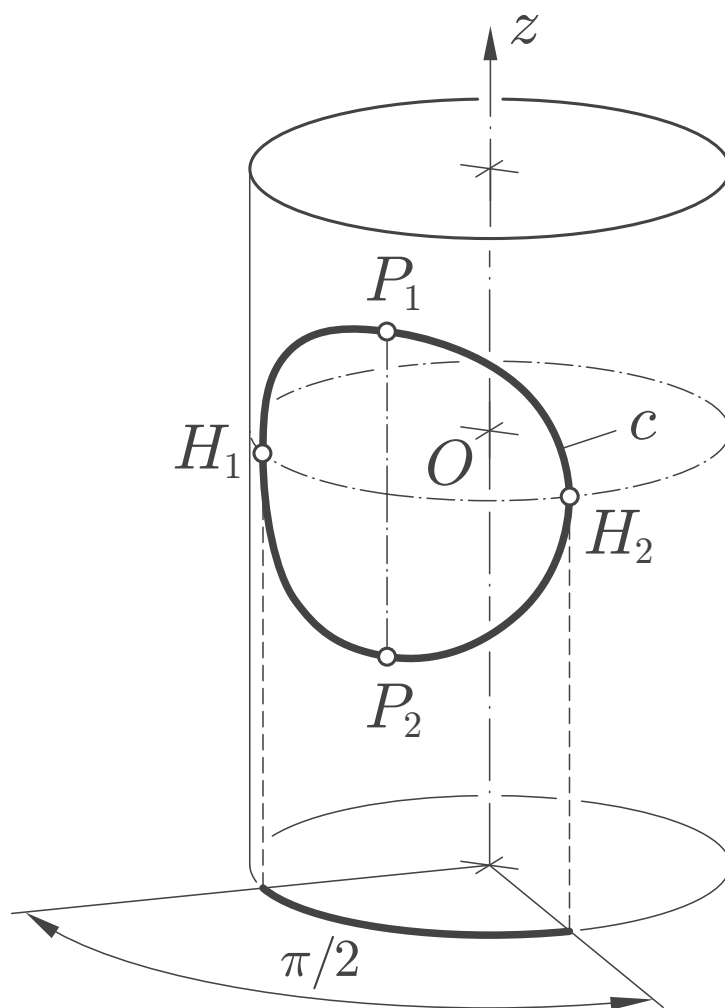


Abbildung 5.5: Ein auf einem Drehzylinder Φ (Radius r) verlaufender Gewundener Kreis c mit dem Grundrissöffnungswinkel $\delta = \pi/2$ und der Krümmung $\kappa_0 \approx 1.458/r$. Die Punkte H_1 , H_2 , P_1 und P_2 sind die einzigen Henkelpunkte von c .

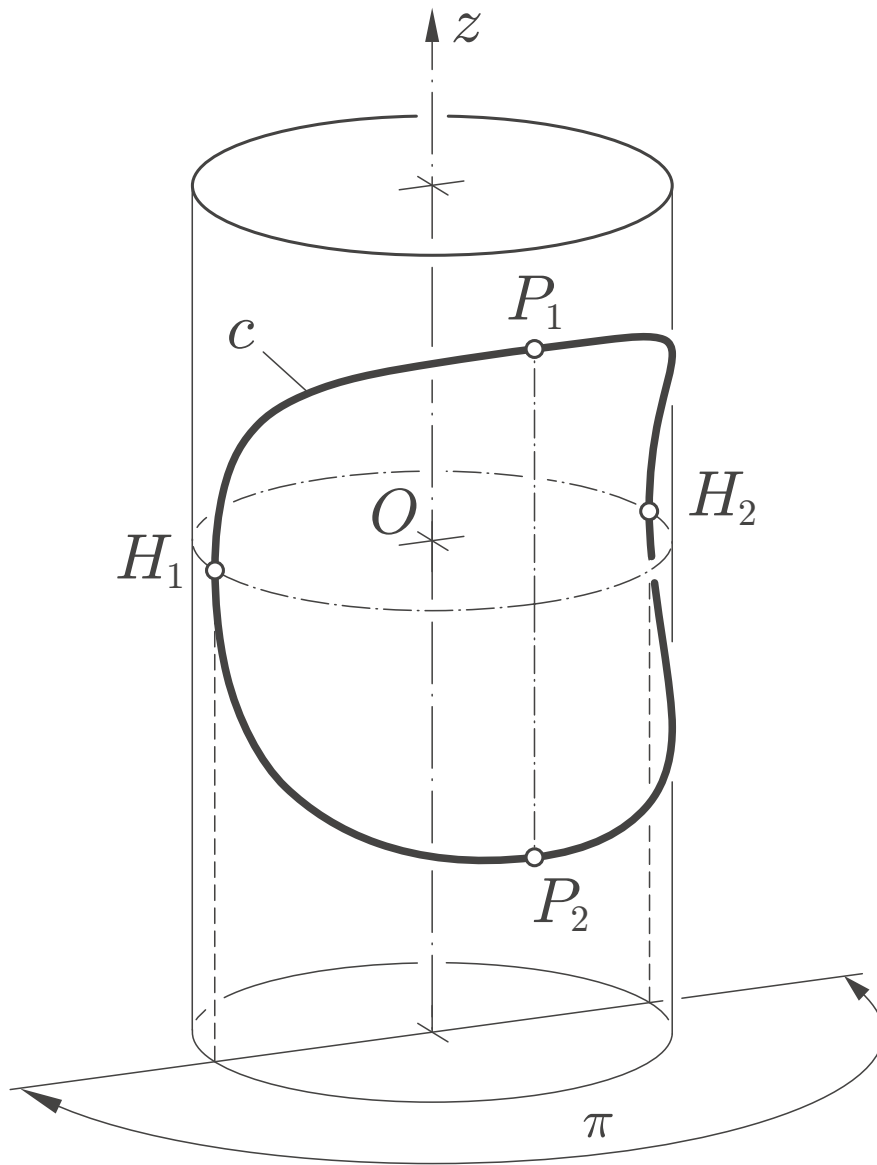


Abbildung 5.6: Ein auf einem Drehzylinder Φ (Radius r) verlaufender Gewundener Kreis c mit dem Grundrissöffnungswinkel $\delta = \pi$ und der Krümmung $\kappa_0 \approx 1.0634/r$. Die Punkte H_1 , H_2 , P_1 und P_2 sind die einzigen Henkelpunkte von c .

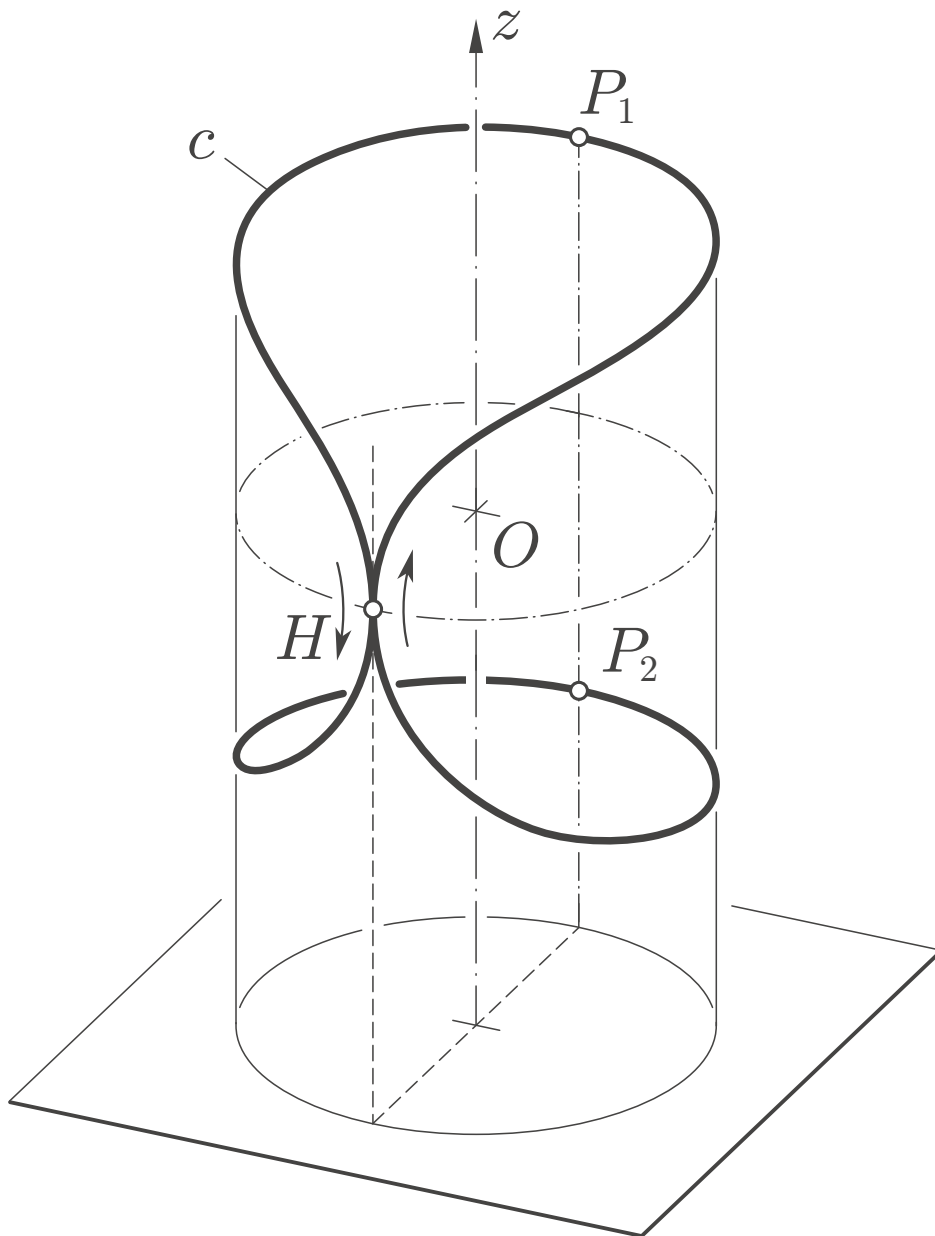


Abbildung 5.7: Ein sich selbst berührender, auf einem Drehzylinder Φ (Radius r) verlaufender, Gewundener Kreis c mit dem Grundrissöffnungswinkel $\delta = 2\pi$ und der Krümmung $\kappa_0 \approx 1.000764/r$. Die Punkte P_1 , P_2 und der Selbstberührungspunkt H von c sind die einzigen Henkelpunkte der Raumkurve c .

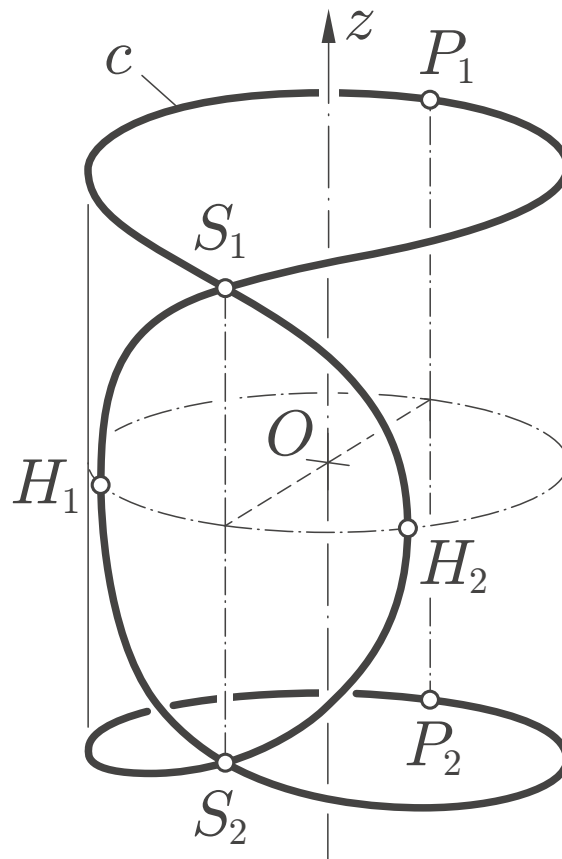


Abbildung 5.8: Ein sich selbst überschneidender, auf einem Drehzylinder Φ (Radius r) verlaufender, Gewundener Kreis c mit dem Grundrissöffnungswinkel $\delta = 5\pi/2$ und der Krümmung $\kappa_0 \approx 1.00000834/r$. Die Punkte H_1 , H_2 , P_1 und P_2 sind die einzigen Henkelpunkte von c .

5.5.2 Der Grenzfall $\kappa_0 = 1/r$

Der im Abschnitt 5.4.2 ausgeschlossene Fall einer auf einem Drehzylinder Φ (Radius r) verlaufenden nichtebenen Kurve c mit konstanter Krümmung $\kappa_0 = 1/r$, also der Krümmung eines (ebenen) Parallelkreises von Φ , wird (vergleiche auch [3]) im Folgenden vorgestellt.

Eine Parameterdarstellung dieser verebneten Kurve lautet dann (gemäß (5.41)) mit maximal gewähltem Definitionsbereich

$$\hat{c}: \quad \hat{\mathbf{x}}(\alpha) = \begin{pmatrix} \hat{x}(\alpha) \\ \hat{y}(\alpha) \end{pmatrix} = r \int_{-\pi/2}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^4 t}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} dt, \quad \alpha \in]-\pi, 0[. \quad (5.49)$$

Diese Kurve ist *nicht* geschlossen und besitzt offenbar die Symmetrieachse $\hat{y} = 0$ sowie die beiden zur \hat{x} -Achse parallelen Asymptoten

$$\hat{y} = \mp r \cdot \int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin t dt}{\sqrt{1 - \cos^4 t}} = \pm r \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^4}} du \approx \pm 1.311 r.$$

Die Abbildung 5.3 zeigt die Gestalt von \hat{c} (Fall $\kappa_0 r = 1$).

Eine Parameterdarstellung des zugehörigen auf einem Drehzylinder Φ (Radius r) mit Kurvenkrümmung $\kappa_0 = \frac{1}{r}$ verlaufenden Windschiefen Kreises c lautet dann mit $\hat{x}(\alpha)$, $\hat{y}(\alpha)$ gemäß (5.49) – analog zu (5.45) –

$$c: \quad \mathbf{x}(\alpha) = \begin{pmatrix} r \cos \frac{\hat{x}(\alpha)}{r} \\ r \sin \frac{\hat{x}(\alpha)}{r} \\ \hat{y}(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in]-\pi, 0[. \quad (5.50)$$

Die Achse des Trägerdrehzylinders Φ ist damit die z -Achse. Die Raumkurve c besitzt ein Paar asymptotischer Parallelkreise $k_1, k_2 \subset \Phi$ (vergleiche Abbildung 5.9).

In den folgenden Abbildungen 5.9 (aus [3]) und 5.10 sind die auf dem Drehzylinder Φ verlaufende C^ω -Kurve c mit Krümmung $\kappa_0 = 1/r$, beziehungsweise ihr sphärisches Tangentenbild c^* dargestellt:

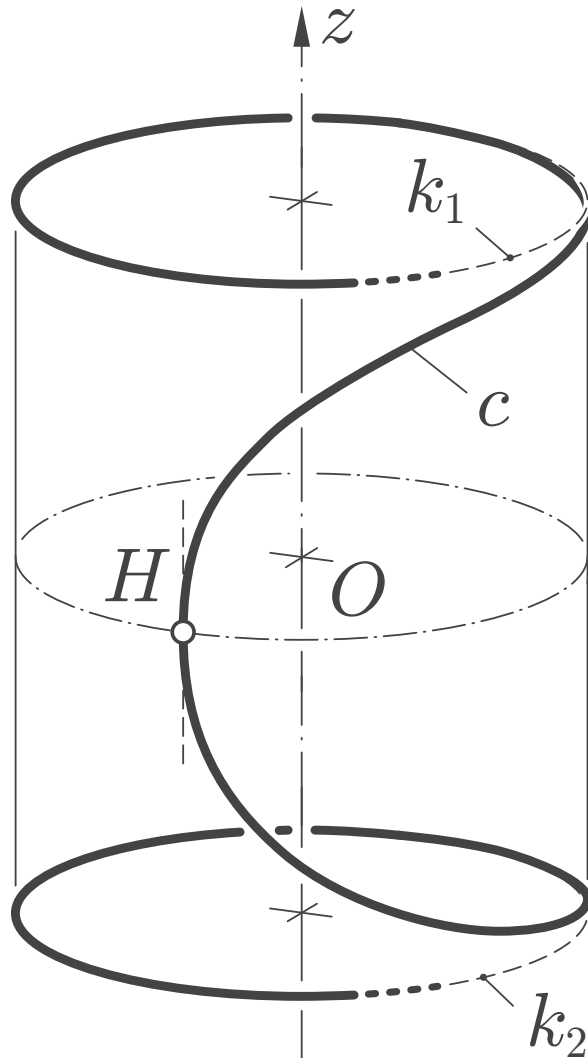


Abbildung 5.9: Eine auf einem Drehzylinder Φ (Radius r) verlaufende konstant gekrümmte, nichtebene C^ω -Kurve c mit Krümmung $\kappa_0 = 1/r$. Die Kurve c nähert sich jeweils asymptotisch zwei Parallelkreisen k_1 und k_2 des Drehzylinders; der Abstand der Trägerebenen von k_1 und k_2 ist der Wert des elliptischen Integrals $2r \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^4}} du \approx 2.622 r$. Im Punkt $H \in c$ fällt die Schmieg Ebene von c mit der Tangentialebene von Φ zusammen; H ist der einzige Henkelpunkt von c .

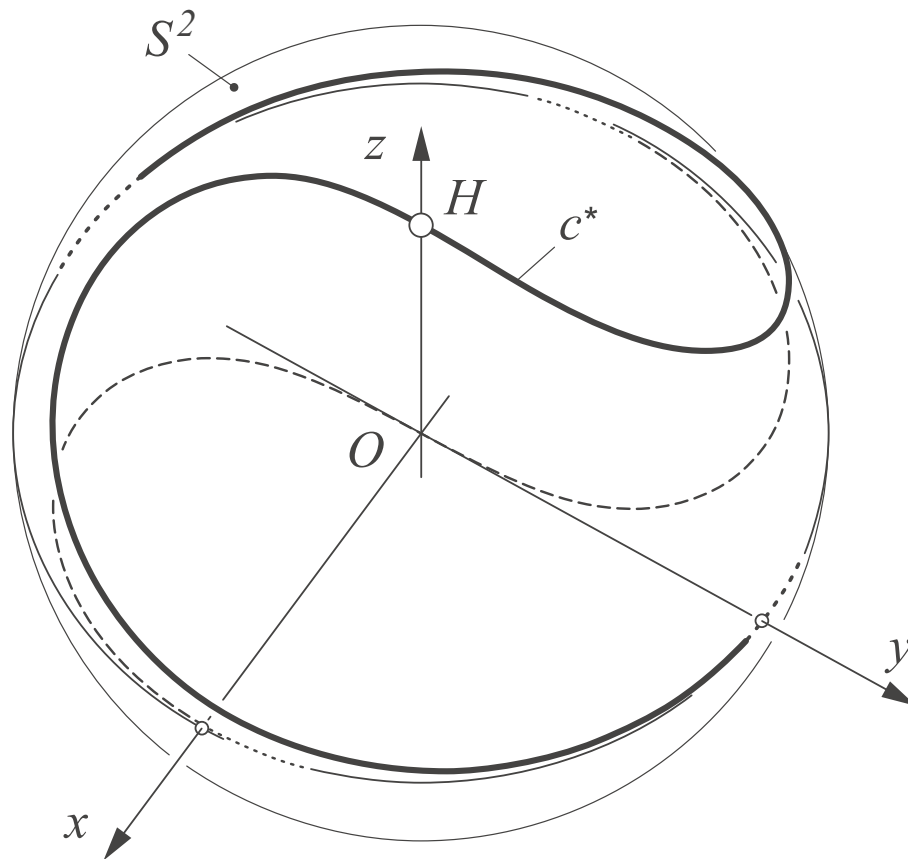


Abbildung 5.10: Das sphärische Tangentenbild c^* der nichtebenen und nicht geschlossenen, auf einem Drehzylinder Φ (Radius r) verlaufenden Raumkurve c konstanter Krümmung $\kappa_0 = 1/r$ (siehe Abbildung 5.9) samt dessen Grundriss in die Äquatorebene $z = 0$. Die sphärische Kurve c^* verläuft oberhalb der Äquatorebene und nähert sich dem Äquatorkreis asymptotisch.

5.6 Zylinderflächen Φ mit einem geodätischen Kreis c konstanter Krümmung

Wir untersuchen in diesem Abschnitt folgende Fragestellung:

Gesucht sind die Zylinderflächen, auf denen eine Raumkurve mit konstanter Raumkurvenkrümmung und zusätzlich noch mit konstanter geodätischer Krümmung verläuft.

Unter Verwendung der Ergebnisse aus Abschnitt 5.1 werden wir solche Zylinder Φ und den Verlauf der darauf mit konstanter Raumkurvenkrümmung κ_0 verlaufenden Kurven c diskutieren. Insbesondere bestimmen wir die Profilkurven \bar{c} der Zylinder Φ und jeweils deren natürliche Gleichung $\kappa = \bar{\kappa}(\bar{s})$.

5.6.1 Natürliche Gleichung und Parameterdarstellung einer Profilkurve \bar{c} der Zylinderfläche Φ

Seien die konstante Krümmung der Raumkurve c mit $\kappa = \kappa_0 (> 0)$, die konstante geodätische Krümmung von c auf Φ mit $\kappa_g =: 1/\rho$, (ohne Einschränkung $\rho > 0$) bezeichnet. Letztere Bezeichnung dient der Anschauung, denn die Abwicklung \hat{c} von c (samt dem Zylinder Φ) in die Ebene ist dann ein Kreisbogen mit Radius ρ ; dies geht unmittelbar daraus hervor, dass die geodätische Krümmung einer Kurve $c \subset \Phi$ eine Größe der inneren Geometrie der Fläche Φ ist (siehe [11], S. 36).

Wir verwenden außerdem die in den Abschnitten 5.1, 5.2. und 5.3.1 eingeführten Bezeichnungen und Größen \bar{c} , $\bar{\kappa}$, \bar{s} , α und die mit diesen verbundenen Beziehungen, die in diesem Fall wie folgt lauten:

Zwischen der Bogenlänge \bar{s} der Profilkurve \bar{c} von Φ , der Bogenlänge s der Kurve c auf Φ und dem Winkel α (gemäß seiner Definition in Abschnitt 5.2) gilt nach (5.10) die Beziehung

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = \cos \alpha . \quad (5.51)$$

Für die (konstante) geodätische Krümmung κ_g von c bezüglich Φ gilt

$$\kappa_g = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho} \quad (5.52)$$

und wegen (5.12) auch

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = \kappa_g^2 = \kappa_0^2 - \bar{\kappa}^2 \cos^4 \alpha . \quad (5.53)$$

Ausgehend von (5.52) werden wir nun die Krümmung $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}(\bar{s})$, das heißt die *natürliche Gleichung* einer Profilkurve \bar{c} des Zylinders Φ bestimmen:

Die Integration von (5.52) ergibt

$$\alpha = \frac{1}{\rho} s + \alpha_0 \quad \text{mit} \quad \alpha_0 \in \mathbb{R} . \quad (5.54)$$

Einsetzen von $\alpha(s)$ aus (5.54) in (5.51) liefert

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = \cos\left(\frac{1}{\rho} s + \alpha_0\right) ,$$

was integriert

$$\bar{s} = \rho \cdot \sin\left(\frac{1}{\rho} s + \alpha_0\right) + \bar{s}_0 \quad \text{mit} \quad \bar{s}_0 \in \mathbb{R} .$$

liefert. Wegen (5.54) bedeutet dies

$$\bar{s} = \rho \cdot \sin \alpha + \bar{s}_0 , \quad (5.55)$$

beziehungsweise

$$\sin \alpha = \frac{\bar{s} - \bar{s}_0}{\rho} . \quad (5.56)$$

Mit der letzten Gleichung können wir nun den Winkel α in (5.53) eliminieren: Wegen (5.56) ist

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{(\bar{s} - \bar{s}_0)^2}{\rho^2} .$$

Dies eingesetzt in (5.53) ergibt die Gleichung

$$\frac{1}{\rho^2} = \kappa_0^2 - \bar{\kappa}^2 \cdot \left[1 - \frac{(\bar{s} - \bar{s}_0)^2}{\rho^2}\right]^2 ,$$

welche man nach $\bar{\kappa} = \kappa(\bar{s})$ auflösen kann. Setzen wir noch ohne Einschränkung die Integrationskonstante \bar{s}_0 gleich 0, so erhalten wir die *natürliche Gleichung* der Profilkurve \bar{c} der gesuchten Zylinderfläche Φ :

$$\bar{\kappa} = \frac{\sqrt{\kappa_0^2 - \frac{1}{\rho^2}}}{1 - \frac{\bar{s}^2}{\rho^2}} =: \bar{K}(\bar{s}). \quad (5.57)$$

Aus (5.57) folgt, dass die konstante Krümmung $\kappa_0 > 0$ der Raumkurve c nur unter der Bedingung

$$\kappa_0 \geq \frac{1}{\rho} \quad (5.58)$$

gewählt werden darf.

Als Nächstes wollen wir die durch (5.57) gegebene Profilkurve \bar{c} des gesuchten (offenbar existierenden) Zylinders Φ diskutieren:

Zuerst betrachten wir in (5.57) den zulässigen *maximalen* Definitionsbereich $I \subset \mathbb{R}$: Wir ersehen aus (5.57), dass wir maximal

$$\bar{s} \in \bar{I} :=] -\rho, \rho [\quad (5.59)$$

wählen können. Gemäß (5.2) benötigen wir dann für die auf Bogenlänge \bar{s} bezogene Parameterdarstellung $\bar{\mathfrak{r}}(\bar{s})$ von \bar{c} die Funktion

$$\bar{\alpha}(\bar{s}) := \int_{\bar{s}_0}^{\bar{s}} \bar{K}(u) du \quad \bar{s} \in \bar{I} =] -\rho, \rho [, \quad (5.60)$$

wobei wir im Folgenden für den Startwert $\bar{s}_0 \in I$ ohne Einschränkung $\bar{s}_0 = 0$ setzen. Hierbei ist $\bar{\alpha}$ gemäß der Parameterdarstellung (5.3) von \bar{c} der (gegen den Uhrzeigersinn orientierte) Winkel zwischen der positiven x -Achse und dem Tangentenvektor $\bar{\mathfrak{r}}'$ von \bar{c} .

Für \bar{K} gemäß (5.57) lässt sich (5.60) geschlossen integrieren, denn es ist allgemein:

$$\int \frac{1}{1-u^2} du = \ln \sqrt{\frac{u+1}{1-u}} = \operatorname{artanh} u$$

für $|u| < 1$ und damit

$$\bar{\alpha}(\bar{s}) = \sqrt{\kappa_0^2 - \frac{1}{\rho^2}} \int_0^{\bar{s}} \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{\rho}\right)^2} dv = \sqrt{\rho^2 \kappa_0^2 - 1} \cdot \operatorname{artanh} \frac{\bar{s}}{\rho} \quad (5.61)$$

für $|\bar{s}| < \rho$. Insgesamt erhalten wir so bis auf Quadraturen eine auf Bogenlänge \bar{s} bezogene Parameterdarstellung $\bar{\mathbf{x}}(\bar{s}) = (\bar{x}(\bar{s}), \bar{y}(\bar{s}))$ der ohne Einschränkung in der Ebene $z = 0$ gelegenen Kurve \bar{c} mit der Abkürzung

$$A(\bar{s}) := \sqrt{\rho^2 \kappa_0^2 - 1} \cdot \operatorname{artanh} \frac{\bar{s}}{\rho} \quad (5.62)$$

in der Form

$$\bar{c} : \bar{\mathbf{x}}(\bar{s}) = \begin{pmatrix} \bar{x}(\bar{s}) \\ \bar{y}(\bar{s}) \end{pmatrix} = \int_0^{\bar{s}} \begin{pmatrix} \cos A(u) \\ \sin A(u) \end{pmatrix} du, \quad \bar{s} \in] -\rho, \rho [\quad (5.63)$$

Aus dieser Darstellung findet man die folgenden Eigenschaften der Kurve \bar{c} :

Es gilt gemäß (5.57) für die Krümmung $\bar{\kappa} = \bar{K}(\bar{s})$ der (ebenen) Kurve \bar{c}

$$\lim_{\bar{s} \rightarrow \pm \rho} \bar{K}(\bar{s}) = +\infty, \quad (5.64)$$

und gemäß (5.61) für alle $\bar{s}_0 \in] -\rho, +\rho [$

$$\lim_{\bar{s} \rightarrow \pm \rho} \int_{\bar{s}_0}^{\bar{s}} \bar{K}(u) du = \lim_{\bar{s} \rightarrow \pm \rho} \bar{\alpha}(\bar{s}) = \pm \infty. \quad (5.65)$$

Die Kurve \bar{c} ist somit in den Randpunkten ihres Definitionsbereichs (also bei $\bar{s} = \pm \rho$) *singulär*, insbesondere existiert wegen (5.65) auch keine Tangentengrenzlage für $\bar{s} \rightarrow \pm \rho$. Die Kurve \bar{c} besitzt, wie die Abbildungen 5.12 - 5.21 zeigen, zwei asymptotische Punkte $S_1 = \lim_{\bar{s} \rightarrow -\rho} \bar{X}(\bar{s})$ und $S_2 = \lim_{\bar{s} \rightarrow +\rho} \bar{X}(\bar{s})$. Längs \bar{c} gemäß (5.62), (5.63) gelangt man jeweils vom Startpunkt $\bar{X}(0) = (0, 0)$ zu S_1 beziehungsweise S_2 nach endlicher Weglänge ρ , wobei dabei S_1 beziehungsweise S_2 von \bar{c} unendlich oft umlaufen werden.

5.6.2 Parameterdarstellung eines auf Φ verlaufenden Windschiefen Kreises c konstanter geodätischer Krümmung

Eine Parameterdarstellung der auf dem Zylinder Φ über dessen Profilkurve \bar{c} verlaufenden Raumkurve $c \subset \mathbb{E}^3$ ergibt sich gemäß den Gleichungen aus Abschnitt 5.6.1 wie folgt:

Wählen wir in (5.55) ohne Einschränkung $\bar{s}_0 = 0$, so erhalten wir

$$\bar{s} = \rho \cdot \sin \alpha =: \bar{S}(\alpha). \quad (5.66)$$

Wegen (5.59) kann dann der Wertebereich für α maximal zu $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ oder $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$, ohne Einschränkung zu

$$\alpha \in J := \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\quad (5.67)$$

gewählt werden.

Nun ist die Gleichung (5.66) die Parameterdarstellung $\hat{x}(\alpha)$ der x -Koordinate der Abwicklung \hat{c} (samt Φ) in die Ebene \mathbb{E}^2 . Da \hat{c} aufgrund der konstanten geodätischen Krümmung $\kappa_g =: 1/\rho$ von c auf Φ ein Kreisbogen vom Radius $1/\kappa_g = \rho$ ist, lautet die Parameterdarstellung $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}(\alpha), \hat{y}(\alpha))$ von \hat{c} wegen (5.66) und der Intervallbeschränkung (5.67) für α

$$\hat{c} : \begin{cases} \hat{x}(\alpha) = \rho \sin \alpha \\ \hat{y}(\alpha) = \rho \cos \alpha \end{cases} \quad (5.68)$$

mit $\alpha \in J = \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$.

Der Tangenteneinheitsvektor $d\bar{\mathbf{x}}/d\bar{s}$ von \bar{c} ergibt sich aus (5.63) mit der Abkürzung $A(\bar{s})$ gemäß (5.62) zu

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\bar{s}} = \begin{pmatrix} \cos A(\bar{s}) \\ \sin A(\bar{s}) \end{pmatrix}$$

und ist der normierte *Grundrissanteil* des *Tangentenvektors* $\frac{d\mathbf{x}}{ds}$ der auf den Zylinder Φ aufgewickelten Kurve \hat{c} . Damit ist

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \begin{pmatrix} \cos A(\bar{s}) \cdot \cos \alpha \\ \sin A(\bar{s}) \cdot \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A(\bar{s}) := \sqrt{\rho^2 \kappa_0^2 - 1} \cdot \operatorname{artanh} \frac{\bar{s}}{\rho}. \quad (5.69)$$

Setzt man nun die Abhängigkeit $\bar{s} = \bar{S}(\alpha) = \rho \cdot \sin \alpha$ aus (5.66) in $A(\bar{s})$ ein, so lässt sich die Größe A nur als Funktion von α schreiben: es ist dann

$$\tilde{A}(\alpha) := A(\rho \sin \alpha) = \sqrt{\rho^2 \kappa_0^2 - 1} \cdot \operatorname{artanh}(\sin \alpha). \quad (5.70)$$

Damit wird aus (5.69)

$$\frac{d\mathfrak{x}}{ds} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{A}(\alpha) \cdot \cos \alpha \\ \sin \tilde{A}(\alpha) \cdot \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tilde{A}(\alpha) := \sqrt{\rho^2 \kappa_0^2 - 1} \cdot \operatorname{artanh}(\sin \alpha). \quad (5.71)$$

Wegen $\frac{d\mathfrak{x}}{ds} = \frac{d\mathfrak{x}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{ds}$ und

$$\frac{d\alpha}{ds} = \kappa_g = \frac{1}{\rho} \quad (5.72)$$

ist $\frac{d\mathfrak{x}}{d\alpha} = \rho \cdot \frac{d\mathfrak{x}}{ds}$ und somit

$$\frac{d\mathfrak{x}}{d\alpha} = \rho \cdot \begin{pmatrix} \cos \tilde{A}(\alpha) \cdot \cos \alpha \\ \sin \tilde{A}(\alpha) \cdot \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (5.73)$$

Diese nur noch vom Parameter α abhängende Gleichung führt nach Integration schließlich zu der Parameterdarstellung $\mathfrak{x}(\alpha)$ der Raumkurve $c \subset \Phi$: Mit $\tilde{A}(\alpha)$ gemäß (5.70) ist die auf dem Zylinder Φ verlaufende Raumkurve c bis auf ihre Lage im \mathbb{E}^3 und bis auf Quadraturen gegeben durch die Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x}(\alpha) = \rho \cdot \int_0^\alpha \begin{pmatrix} \cos \tilde{A}(u) \cdot \cos u \\ \sin \tilde{A}(u) \cdot \cos u \\ \sin u \end{pmatrix} du = \rho \cdot \begin{pmatrix} \int_0^\alpha \cos \tilde{A}(u) \cdot \cos u \, du \\ \int_0^\alpha \sin \tilde{A}(u) \cdot \cos u \, du \\ 1 - \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (5.74)$$

mit $\alpha \in J = \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$.

Wegen (5.72) ist der Kurvenparameter α ohne Einschränkung proportional zur Bogenlänge s von c gemäß

$$s = \rho \cdot \alpha, \quad (5.75)$$

und es gilt

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{d\alpha} \cdot \left(\frac{d\alpha}{ds} \right) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\alpha}.$$

Damit lautet nach Integration über s mit (5.73), (5.75) und (5.67) die auf Bogenlänge s bezogene Parameterdarstellung von c :

$$\mathbf{r}(s) = \begin{pmatrix} \int_0^s \cos \tilde{A} \left(\frac{v}{\rho} \right) \cdot \cos \frac{v}{\rho} dv \\ \int_0^s \sin \tilde{A} \left(\frac{v}{\rho} \right) \cdot \cos \frac{v}{\rho} dv \\ \rho \left(1 - \cos \frac{s}{\rho} \right) \end{pmatrix}, \quad (5.76)$$

mit $\tilde{A}(\alpha)$ gemäß (5.70) und $s \in I := \left] \rho \cdot \frac{\pi}{2}, \rho \cdot \frac{3\pi}{2} \right[$ gemäß (5.75) und (5.67).

5.6.3 Krümmungseigenschaften eines Windschiefen Kreises $c \subset \Phi$ konstanter geodätischer Krümmung

Eine weitere Krümmungseigenschaft der auf dem Zylinder Φ mit der Profilkurve \bar{c} verlaufenden konstant gekrümmten Raumkurve c , betrachtet als Flächenkurve $c \subset \Phi$, ist folgende:

Die Normalschnittkrümmung κ_n von c auf Φ ist wegen der Konstanz der Raumkurvenkrümmung $\kappa = \kappa_0$ und der geodätischen Krümmung $\kappa_g = 1/\rho$ ebenfalls konstant: Aus der allgemeinen Beziehung $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$ (vergleiche [11], S. 28) folgt nämlich

$$\kappa_n \Big|_c = \sqrt{\kappa_0^2 - \frac{1}{\rho^2}} = \text{const.}$$

Mit Abschnitt 5.6.2 lassen sich die beiden folgenden Sätze über die auf einen derartigen Zylinder Φ aufgewickelten Kreisbögen, deren Raumkurvenkrümmung konstant ist, formulieren:

Satz 5.1 a) Die Profilkurve \bar{c} einer nichtebenen Zylinderfläche Φ , auf der ein geodätischer Kreisbogen c (das heißt $\kappa_g =: \frac{1}{\rho} = \text{const}$, $\rho > 0$) verläuft,

dessen (Raumkurven-)Krümmung den konstanten Wert $\kappa = \kappa_0 \geq 1/\rho$ hat, besitzt die natürliche Gleichung

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}(\bar{s}) := \frac{\sqrt{\kappa_0^2 - \frac{1}{\rho^2}}}{1 - \frac{\bar{s}^2}{\rho^2}}, \quad \text{wobei } \bar{s} \in] -\rho, \rho[.$$

b) Eine Parameterdarstellung der Profilkurve \bar{c} lautet

$$\bar{c} : \begin{cases} \bar{x}(\bar{s}) = \int_0^{\bar{s}} \cos \left(\sqrt{\rho^2 \kappa_0^2 - 1} \cdot \operatorname{artanh} \frac{u}{\rho} \right) du, \\ \bar{y}(\bar{s}) = \int_0^{\bar{s}} \sin \left(\sqrt{\rho^2 \kappa_0^2 - 1} \cdot \operatorname{artanh} \frac{u}{\rho} \right) du, \end{cases} \quad (5.77)$$

wobei $\bar{s} \in \bar{I} =] -\rho, \rho[$ Bogenlänge von \bar{c} ist.

c) Eine auf die Bogenlänge $s \in \left] \rho \cdot \frac{\pi}{2}, \rho \cdot \frac{3\pi}{2} \right[$ von c bezogene Parameterdarstellung der auf der Zylinderfläche Φ mit Profilkurve \bar{c} gemäß (5.77) verlaufenden Raumkurve c konstanter Krümmung κ_0 ist – bis auf Translationen in z -Richtung – gegeben durch (5.76).

Wegen $\kappa_0^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$ gilt auch noch der folgende Satz:

Satz 5.2 Für die in Satz 5.1 genannten, gemäß der Parameterdarstellung (5.76) auf der Zylinderfläche Φ verlaufenden Kurven c ist neben der Raumkurven- und geodätischen Krümmung auch die Normalschnittkrümmung längs c (auf Φ) konstant.

Im folgenden Abschnitt 5.6.4 bestimmen wir die Torsion der gemäß (5.74) beziehungsweise (5.76) parametrisierten Raumkurve c .

5.6.4 Torsion des Windschiefen Kreises $c \subset \Phi$

Wir werden nun, ausgehend von der Parameterdarstellung (5.76) der Raumkurve c , deren natürliche Gleichungen $\kappa = \kappa(s)$, $\tau = \tau(s)$ bestimmen. Nach Konstruktion der Raumkurve c im Abschnitt 5.6.2 ist deren Krümmung

$$\kappa(s) = \kappa_0 = \text{const} , \quad (5.78)$$

wobei wegen (5.58) $\kappa_0 \geq \frac{1}{\rho}$ zu wählen ist, also stets größer als der oder gleich dem Betrag der ebenfalls konstanten geodätischen Krümmung $\kappa_g =: \frac{1}{\rho}$.

Wir bestimmen nun auch die Torsion τ von c als Funktion des Bogenlängenparameters s von c : Mit der Abkürzung

$$\gamma := \sqrt{\rho^2 \kappa_0^2 - 1} \quad (5.79)$$

erhalten wir aus (5.76) mit (5.70), wenn in (5.76) $v/\rho =: u \in \mathbb{R}$ gesetzt wird, folgende auf die Bogenlänge s bezogene Parameterdarstellung von c :

$$\mathfrak{r}(s) = \rho \cdot \int_0^{s/\rho} \begin{pmatrix} \cos(\gamma \cdot \text{artanh}(\sin u)) \cdot \cos u \\ \sin(\gamma \cdot \text{artanh}(\sin u)) \cdot \cos u \\ \sin u \end{pmatrix} du , \quad (5.80)$$

mit $s \in I := \left] \rho \cdot \frac{\pi}{2}, \rho \cdot \frac{3\pi}{2} \right[$.

Für die Komponente $z(s)$ von $\mathfrak{r}(s)$ gilt $z(s) = \rho \cdot \left(1 - \cos \frac{s}{\rho}\right)$ und somit

$$z'(s) = \sin \frac{s}{\rho} , \quad z''(s) = \frac{1}{\rho} \cdot \cos \frac{s}{\rho} , \quad z'''(s) = -\frac{1}{\rho^2} \cdot \sin \frac{s}{\rho} . \quad (5.81)$$

Die Ableitungen der Komponenten $x(s)$ und $y(s)$ ergeben sich wegen

$$\frac{d}{dt} \text{artanh } t = \frac{1}{1-t^2} ,$$

$$\frac{d}{du} \text{artanh}(\sin u) = \frac{1}{1-\sin^2 u} \cdot \cos u = \frac{1}{\cos u}$$

mit den Abkürzungen $\sigma := s/\rho$ sowie – gemäß (5.70), (5.79) –

$\tilde{A}(\sigma) = \gamma \cdot \operatorname{artanh}(\sin \sigma)$ zu

$$\begin{aligned} x'(s) &= \cos \tilde{A}(\sigma) \cdot \cos \sigma, \\ x''(s) &= -\frac{1}{\rho} \cdot \left[\cos \tilde{A}(\sigma) \cdot \sin \sigma + \gamma \sin \tilde{A}(\sigma) \right], \\ x'''(s) &= \frac{1}{2\rho^2 \cos \sigma} \cdot \left[- (1 + 2\gamma^2 + \cos(2\sigma)) \cdot \cos \tilde{A}(\sigma) \right. \\ &\quad \left. + 2\gamma \cdot \sin \tilde{A}(\sigma) \cdot \sin \sigma \right] \end{aligned} \quad (5.82)$$

und

$$\begin{aligned} y'(s) &= \sin \tilde{A}(\sigma) \cdot \cos \sigma, \\ y''(s) &= \frac{1}{\rho} \cdot \left[-\sin \tilde{A}(\sigma) \cdot \sin \sigma + \gamma \cos \tilde{A}(\sigma) \right], \\ y'''(s) &= -\frac{1}{2\rho^2 \cos \sigma} \cdot \left[(1 + 2\gamma^2 + \cos(2\sigma)) \cdot \sin \tilde{A}(\sigma) \right. \\ &\quad \left. + 2\gamma \cdot \cos \tilde{A}(\sigma) \cdot \sin \sigma \right]. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Die Torsion $\tau = \frac{\det(\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''')}{\kappa_0^2}$ von c berechnet sich dann gemäß (3.11) mit (5.81), (5.82), (5.83) sowie (5.79) zu

$$\tau(s) = \sqrt{\kappa_0^2 - \frac{1}{\rho^2}} \cdot \tan \frac{s}{\rho}, \quad (5.84)$$

wobei nach Voraussetzung $s \in]\rho\pi/2, \rho \cdot 3\pi/2[$ zu wählen ist. Die Torsion $\tau(s)$ ist für $s = \frac{\pi}{2}\rho$ beziehungsweise $s = \frac{3\pi}{2}\rho$ nicht definiert, denn es gilt offenbar

$$\lim_{s \rightarrow \rho\pi/2+0} \tau(s) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{s \rightarrow \rho \cdot 3\pi/2-0} \tau(s) = +\infty. \quad (5.85)$$

Als reguläre C^k -Kurve ($k \geq 3$) aufgefasst kann die Raumkurve c deshalb nicht an der Grundebene gespiegelt auf Φ verlaufend zu einem vollen, das heißt geschlossenen geodätischen Kreis fortgesetzt werden. Einen Gewundenen Kreis hat man zwar mit dieser Raumkurve c nicht gefunden, wohl aber eine interessante Raumkurve verlaufend auf einer Trägerzylinderfläche Φ mit den in den Sätzen 5.1 und 5.2 aufgeführten Eigenschaften.

Im Folgenden veranschaulichen die Abbildungen 5.11-5.21 die Profilkurve \bar{c} des Zylinders Φ (dessen Erzeugenden stehen senkrecht auf der Zeichenebene!) gemäß der Parameterdarstellung (5.63) zu fester Raumkurvenkrümmung κ_0 und verschiedenen (konstanten) geodätischen Krümmungen $\kappa_g = \frac{1}{\rho} \in]0, \kappa_0]$.

Man beachte hierbei, dass die singulären Rand-*Strudel*-Punkte der Profilkurve \bar{c} – der Grundrisskurve von c gemäß (5.76) in die xy -Ebene – in den Abbildungen 5.12 - 5.21 nicht ohne weiteres als solche erkennbar sind. Tatsächlich windet sich die Profilkurve \bar{c} um diese Strudelpunkte unendlich oft, aber nach endlicher Bogenlänge.

Die Abbildungen 5.22 - 5.31 zeigen zu vorgegebener Raumkurvenkrümmung κ_0 und geodätischer Krümmung $\kappa_g = \frac{1}{\rho}$ die auf dem jeweils zugehörigen Zylinder Φ mit Profilkurve \bar{c} gemäß Satz 5.1 verlaufende Raumkurve c , deren Abwicklung (samt Φ) in die Ebene ein (Halb-)Kreisbogen ist. Diese Abbildungen wurden mit dem Computeralgebrapaket MATHEMATICA erzeugt, welches keine Sichtbarkeiten berücksichtigt. Hierbei wurde $\kappa_0 = 1$ gesetzt. Auf den Koordinatenachsen sind die Punkte $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ markiert.

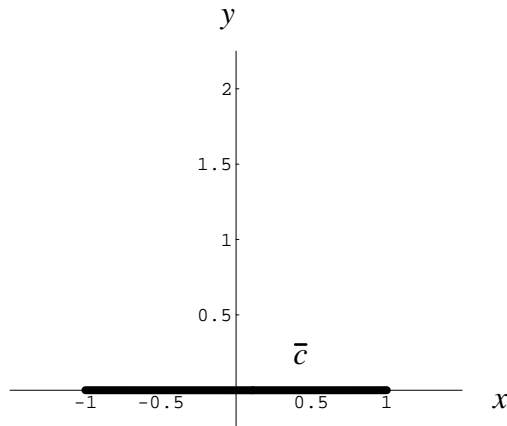


Abbildung 5.11: $\kappa_g = \kappa_0$; Die Profilkurve \bar{c} ist eine (geradlinige) Strecke, der Zylinder Φ (dessen Erzeugenden orthogonal zur Bildebene sind) entartet damit zu einer Ebene, $c \subset \Phi$ zu einem (ebenen) Kreisbogen.

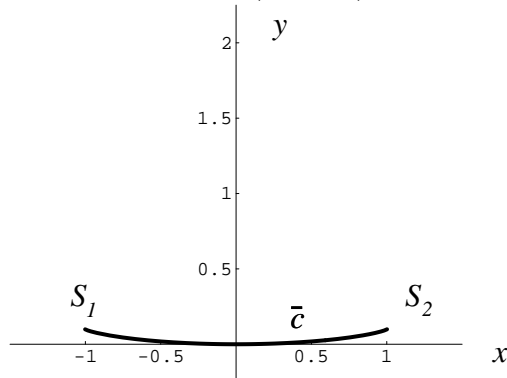


Abbildung 5.12: $\kappa_g = 0.99\kappa_0$; die Endpunkte von \bar{c} sind singuläre Punkte mit (wenn auch in der Abbildung nur schwer zu vermutenden) unendlich großer Krümmung.

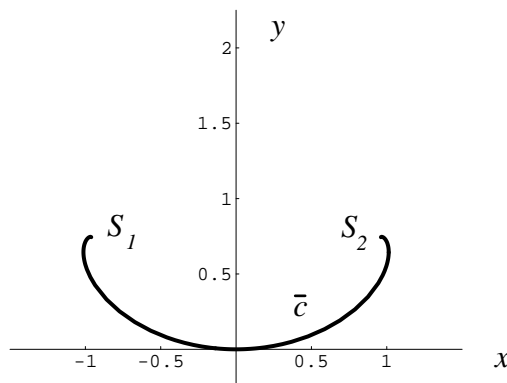


Abbildung 5.13: $\kappa_g = 0.7\kappa_0$.

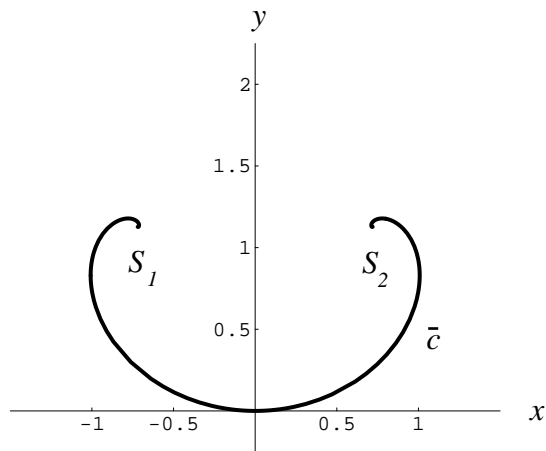


Abbildung 5.14: $\kappa_g = 0.5\kappa_0$; \bar{c} windet sich für (betragsmäßig) kleiner werdendes κ_g im Gesamten stärker zusammen.

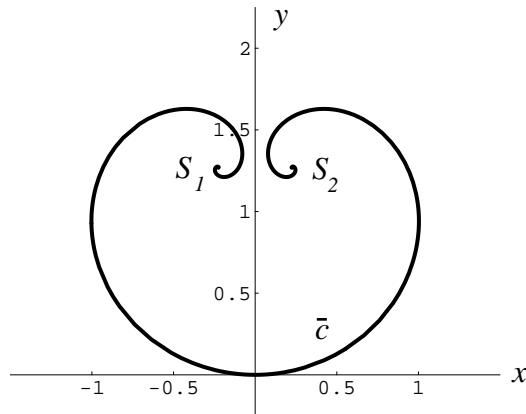


Abbildung 5.15: $\kappa_g = 0.3\kappa_0$; die beiden zur y -Achse symmetrischen Teile von \bar{c} nähern sich.

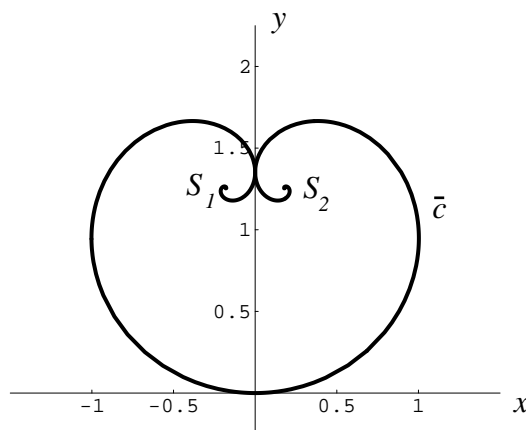


Abbildung 5.16: $\kappa_g \approx 0.282\kappa_0$; \bar{c} besitzt offenbar einen Selbstberührungspunkt auf der y -Achse.

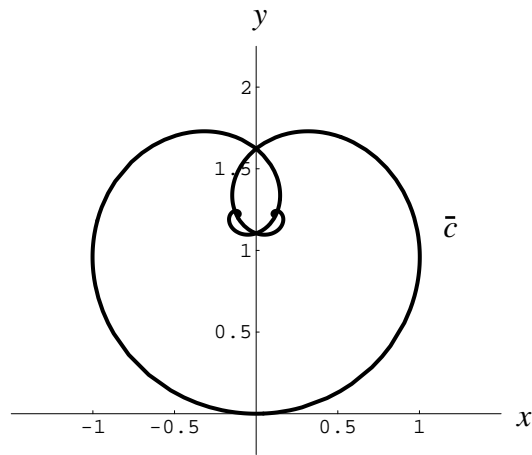


Abbildung 5.17: $\kappa_g = 0.25\kappa_0$; \bar{c} hat Selbstüberschneidungen.

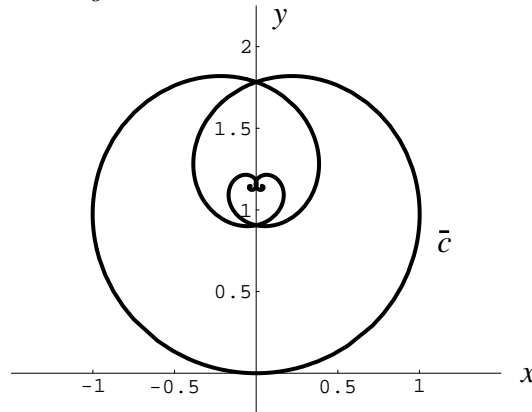


Abbildung 5.18: $\kappa_g = 0.2\kappa_0$; die Kurve \bar{c} rollt sich stärker zusammen.

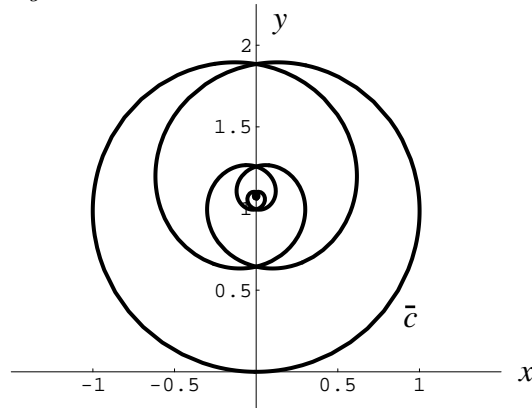


Abbildung 5.19: $\kappa_g = 0.15\kappa_0$; der Rand der konvexen Hülle von \bar{c} scheint gegen einen Kreis k mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0, 1)$ zu konvergieren.

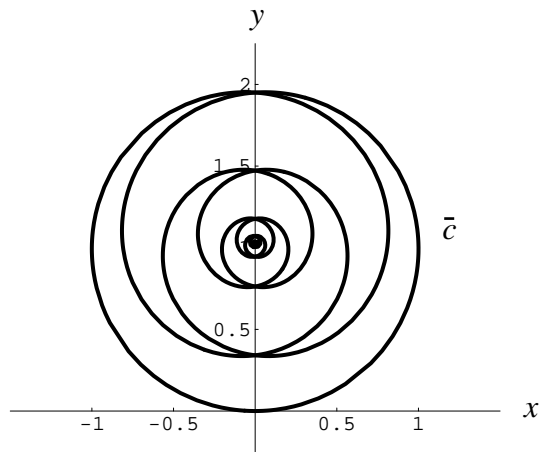


Abbildung 5.20: $\kappa_g = 0.1\kappa_0$; die singulären Randpunkte nähern sich vermutlich dem Punkt $(0, 1)$.

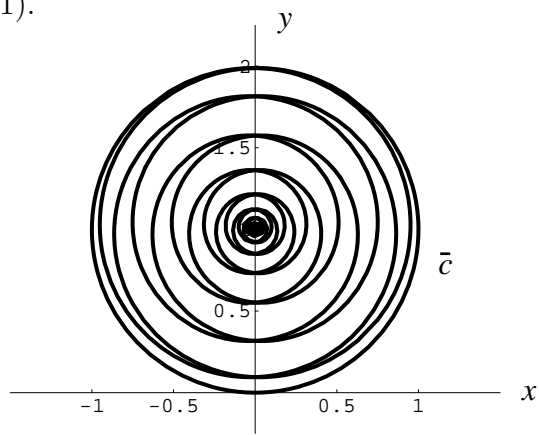


Abbildung 5.21: $\kappa_g = 0.05\kappa_0$.

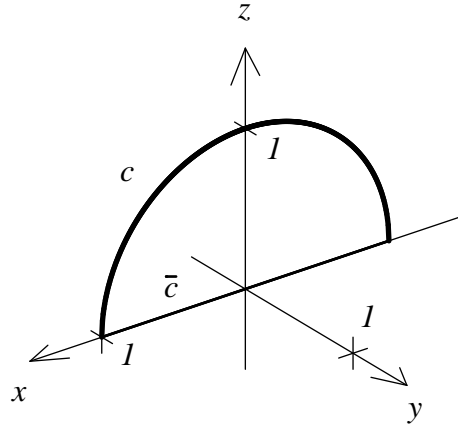


Abbildung 5.22: $\kappa_g = \kappa_0$; \bar{c} ist eine (geradlinige) Strecke, Φ entartet damit zu einer Ebene, $c \subset \Phi$ zu einem Kreisbogen.

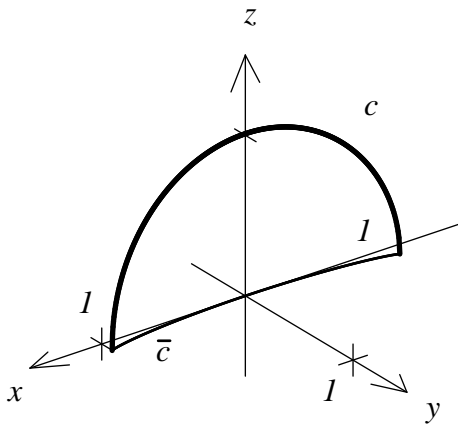


Abbildung 5.23: $\kappa_g = 0.99\kappa_0$; Φ und $c \subset \Phi$ sind ab jetzt nicht mehr eben; c windet sich aus der xz -Ebene heraus. Die Randpunkte von \bar{c} sind Punkte von c mit (wenn auch in der Abbildung nur schwer zu vermutenden) unendlich großer Torsion.

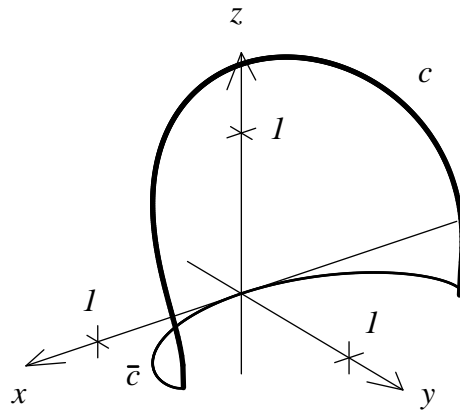


Abbildung 5.24: $\kappa_g = 0.7\kappa_0$.

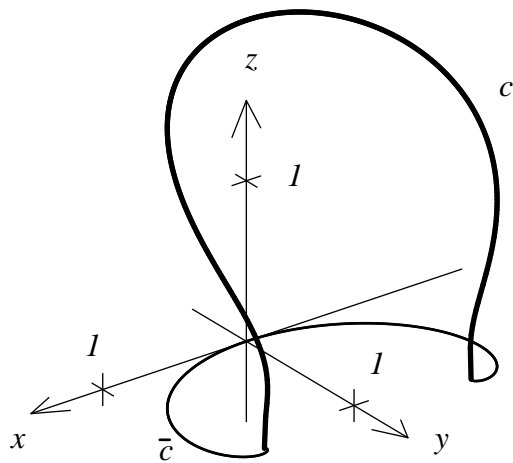


Abbildung 5.25: $\kappa_g = 0.5\kappa_0$.

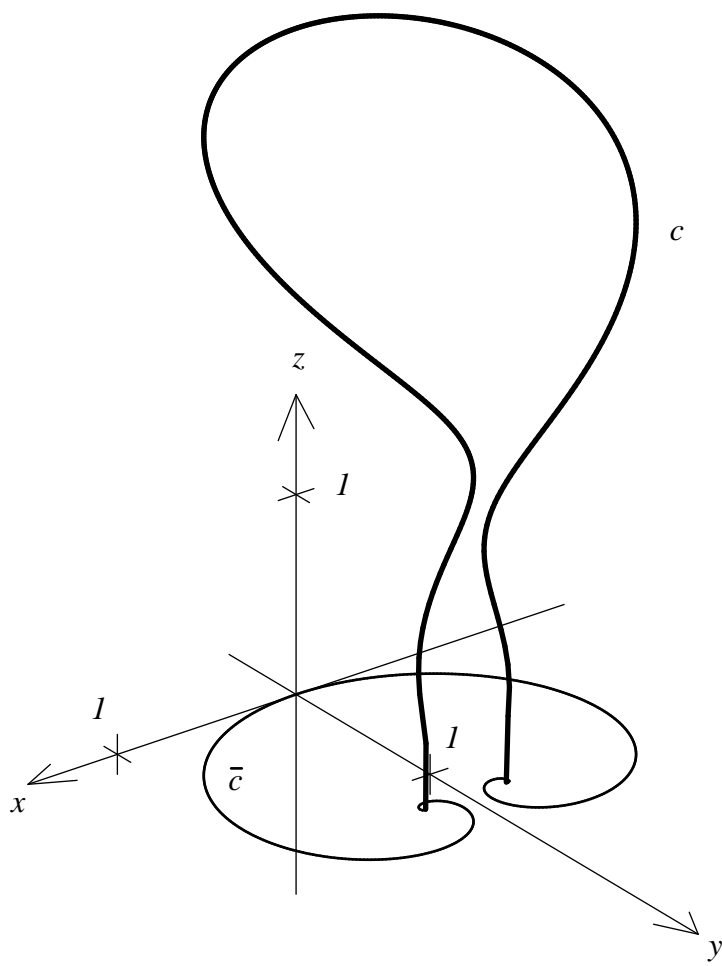


Abbildung 5.26: $\kappa_g = 0.3\kappa_0$.

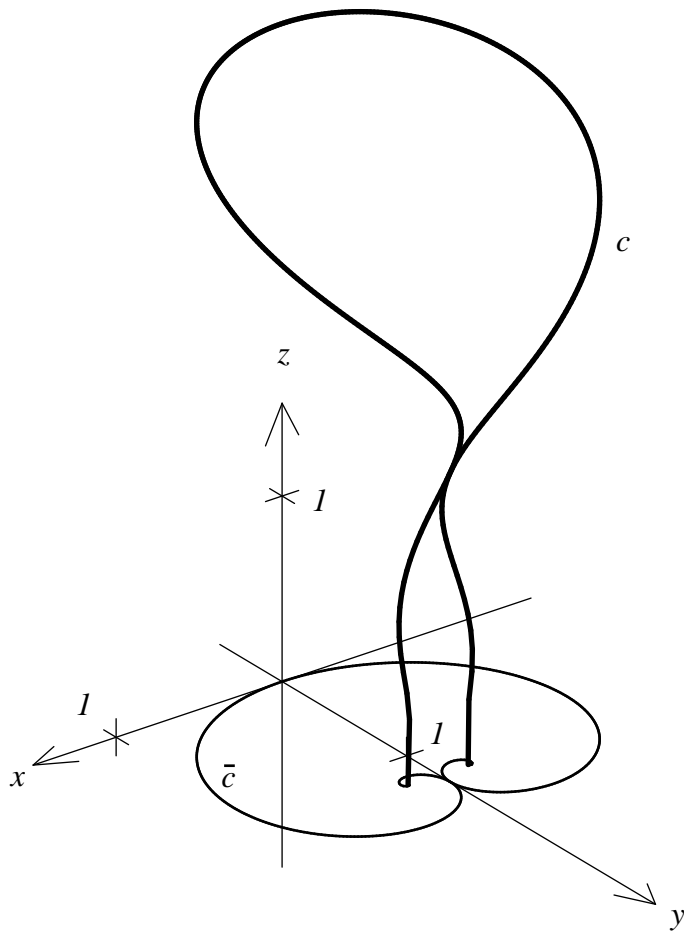


Abbildung 5.27: $\kappa_g \approx 0.282\kappa_0$; $c \subset \Phi$ und \bar{c} besitzen jeweils einen Selbstberührungspunkt in der yz -Ebene.

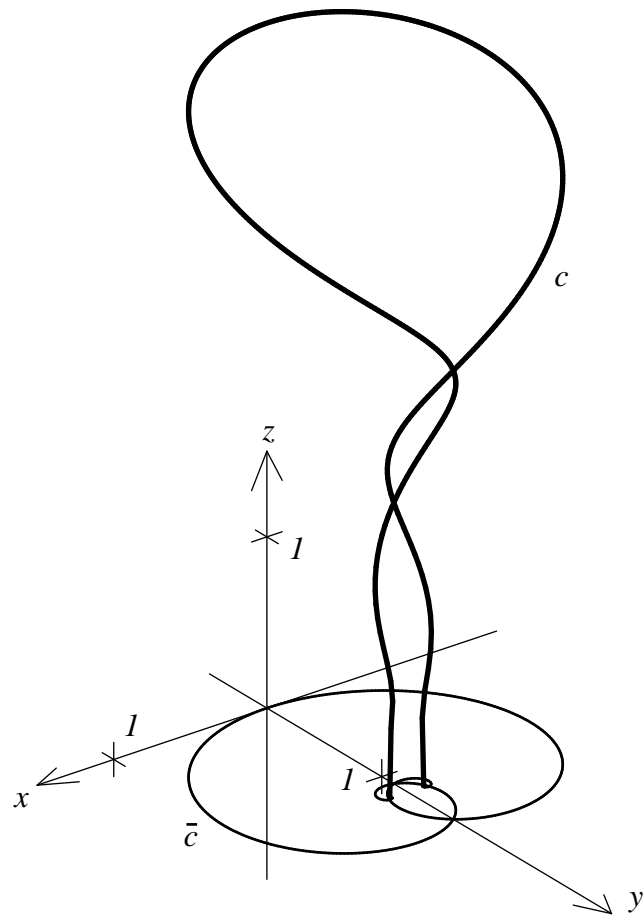


Abbildung 5.28: $\kappa_g = 0.25\kappa_0$; \bar{c} und c haben mehrere Selbstüberschneidungen.

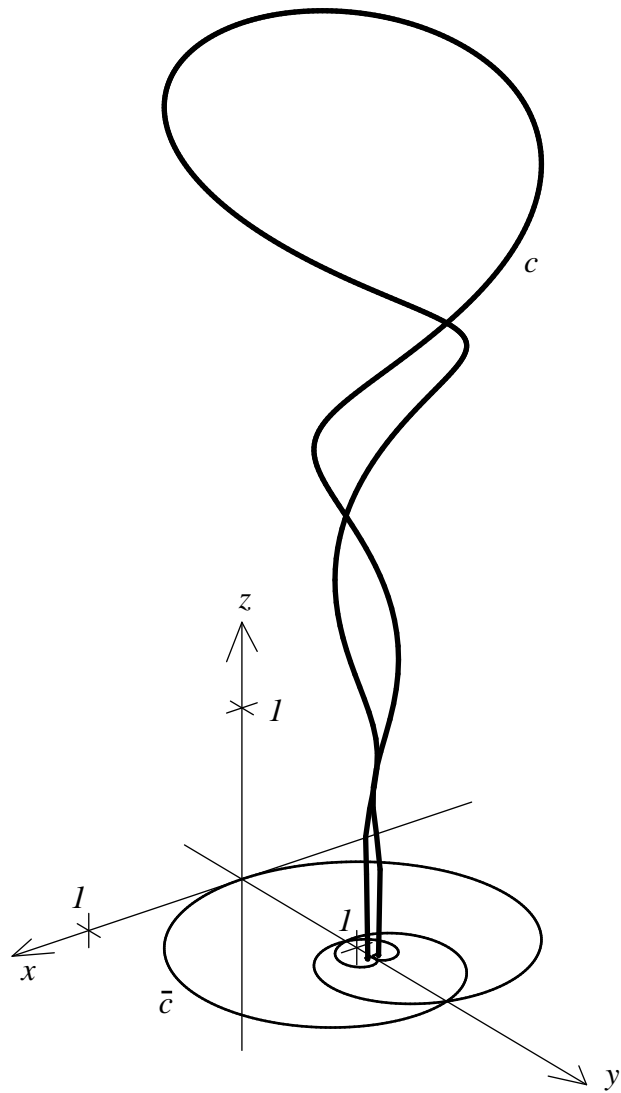


Abbildung 5.29: $\kappa_g = 0.2\kappa_0$; die gemeinsamen singulären Endpunkte von \bar{c} und c rücken immer mehr zueinander.

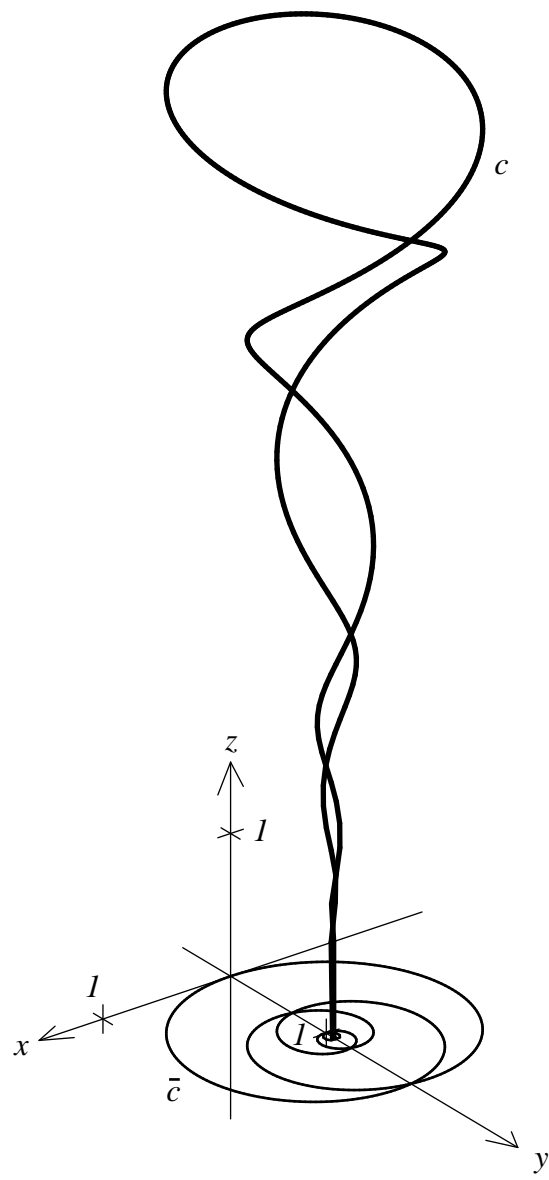


Abbildung 5.30: $\kappa_g = 0.15\kappa_0$.

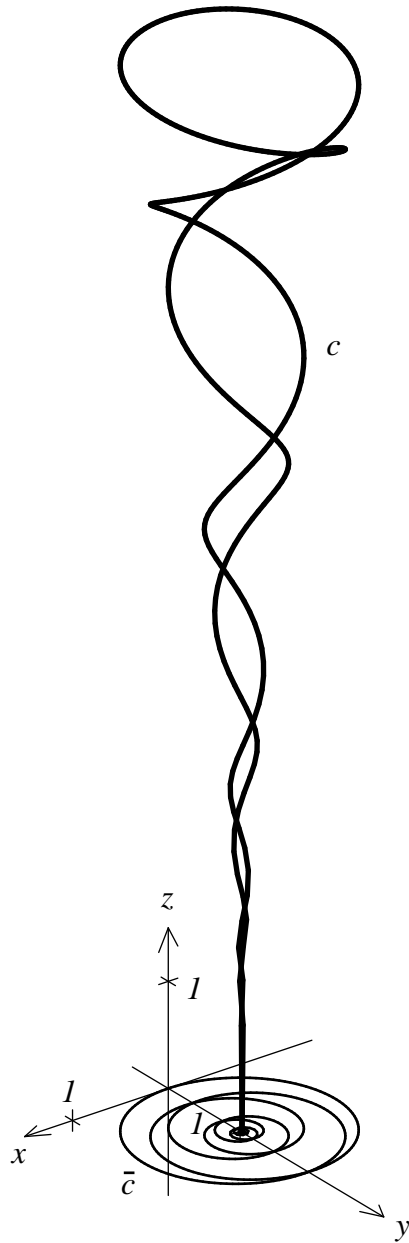


Abbildung 5.31: $\kappa_g = 0.1\kappa_0$; im Grenzfall $\kappa_g \rightarrow 0$ wird die vertikale Ausdehnung von c in z -Richtung unendlich groß.

Literatur

- [1] W. BLASCHKE/K. LEICHTWEISS: *Elementare Differentialgeometrie*. 5. Aufl., Springer, Berlin/Heidelberg/New York 1973.
- [2] E. CESÀRO/G. KOWALEWSKI: *Vorlesungen über natürliche Geometrie*. 2. Aufl., Teubner, Leipzig/Berlin 1926.
- [3] C. ENGELHARDT: *Geschlossene Raumkurven konstanter Krümmung*. Diplomarbeit, Technische Universität München (1999).
- [4] W. FENCHEL: *Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven*. Math. Ann. **101**, 238-252 (1929).
- [5] W. FENCHEL: *Geschlossene Raumkurven mit vorgeschriebenem Tangentenbild*. Jahresb. DMV **39**, 183-185 (1930).
- [6] K. FLADT: *Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven*. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main 1962.
- [7] I. S. GRADSTHEYN, I. M. RYZHIK: *Table of Integrals, Series, and Products*. 4th edition, Academic Press, New York / San Francisco / London 1965.
- [8] H. GRELL, K. MARUHN, W. RINOW (editors): *Enzyklopädie der Elementarmathematik, vol. IV (Geometrie)*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969.
- [9] W. KLINGENBERG: *A Course in Differential Geometry*. Springer, New York/Berlin/Heidelberg 1978.
- [10] R. KOCH, C. ENGELHARDT: *Closed Space Curves of Constant Curvature Consisting of Arcs of Circular Helices*. Journal for Geometry and Graphics (Heldermann Verlag) **2**, 17-31 (1998).
- [11] D. LAUGWITZ: *Differentialgeometrie*, 2. Aufl., Teubner, Stuttgart 1960.
- [12] L. RÄDE, B. WESTERGREN: *Springers Mathematische Formeln*. 2. Aufl., Springer, Berlin / Heidelberg / New York 1997.
- [13] K. STRUBECKER: *Differentialgeometrie I (Kurventheorie der Ebene und des Raumes)*. 2. Aufl., de Gruyter, Berlin 1964.
- [14] K. STRUBECKER: *Differentialgeometrie III (Theorie der Flächenkrümmung)*. 2. Aufl., de Gruyter, Berlin 1969.