

Technische Universität München

Zentrum Mathematik

Zur Wohlgestelltheit des Gurson-Modells

Hans Christoph Schnabel

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Naturwissenschaften genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. Bernd Simeon

Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr. Martin Brokate
2. Univ.-Prof. Dr. Markus Kunze, Universität
Duisburg Essen (schriftliche Beurteilung)
3. Univ.-Prof. Dr. Joachim G. Gwinner, Universität
der Bundeswehr München

Die Dissertation wurde am 7. Juni 2005 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am 21. Januar 2006 angenommen.

Danksagung

Ich möchte mich herzlich bedanken bei Herrn Prof. Dr. Brokate für die fruchtbaren Diskussionen über die Arbeit und seine Unterstützung bei der Abfassung der Dissertation und bei Herrn Prof. Dr. Pavel Krejčí für seine Anregungen, die mir sehr geholfen haben.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Kollegen und Kolleginnen am Lehrstuhl, besonders bei Dr. Götz Grammel, der jederzeit ein offenes Ohr für mathematische Fragen hatte.

Dr. Rainer Warnke danke ich für seinen Hinweis auf Koma-Script und seine Hilfe bei der Erstellung der endgültigen Fassung der Arbeit.

Marion Orth gilt mein besonderer Dank für ihre Unterstützung und ihre Hilfe bei der mühsamen Arbeit des Korrekturlesens.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	7
1.1 Das Gurson-Modell	7
1.2 Der Sweeping-Prozess	8
1.3 Wohlgestelltheit	9
2 Konvexe Mengen und Funktionen	13
3 Die Ableitung des Minkowskifunktional	19
4 Das Gurson-Modell	23
4.1 Aufstellung des Modells	23
4.2 Mathematische Formulierung	24
4.3 Transformation auf das abstrakte Modell	25
5 Der dehnungskontrollierte Fall	31
6 Modifikation der Mengen $Z_1(\varrho)$	33
7 Die Ableitung von M	39
8 Das zustandsunabhängige Problem	51
9 Existenz und Eindeutigkeit	59
10 Lipschitz-stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten	71
11 Beispiel	75
12 Der spannungskontrollierte Fall	81
13 Anhang	87
Bezeichnungen	91
Literatur	93

1 Einführung

1.1 Das Gurson-Modell

Klassische elastoplastische Spannungs-Verzerrungsgesetze (Materialgesetze) beschreiben den Zusammenhang zwischen dem zeitlichen Verlauf des Spannungstensors σ und dem des Verzerrungstensors ε an jedem Punkt eines materiellen Kontinuums. Dabei setzt sich ε aus seinem elastischen Anteil ε^e und seinem plastischen Anteil ε^p zusammen, das heißt

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p.$$

Anstelle von Verzerrung spricht man auch von Dehnung. Wir werden die beiden Begriffe im folgenden synonym verwenden.

Ein wichtiger Bestandteil eines solchen Materialgesetzes ist eine konvexe abgeschlossene Menge K im Raum der Tensoren $\mathbb{R}^{3,3}$, dem Raum der symmetrischen 3×3 -Matrizen. Zu jedem Zeitpunkt t befindet sich der Spannungstensor $\sigma(t)$ in K . Solange σ im Inneren von K verläuft, spricht man von elastischem Verhalten, das heißt näherungsweise gibt es einen linearen Zusammenhang zwischen σ und ε^e , der zum Beispiel über das Hookesche Gesetz vermittelt wird. Den Rand von K bildet die sogenannte Fließfläche, die durch eine Gleichung

$$\Phi(\sigma, a) = 0 \tag{1.1}$$

beschrieben wird. Dabei ist $\Phi(\cdot, a)$ jeweils eine konvexe Funktion und a ein Parametervektor von Systemvariablen, zu denen je nach Modell zum Beispiel die akkumulierte plastische Dehnung, die Rückspannung oder der Hohlraumanteil gehören können. Die zeitliche Änderung dieser Parameter ändert die Fließfläche und damit die Menge K im Spannungsraum.

Sobald σ die Fließfläche erreicht, hält das Material den auftretenden Spannungen nicht mehr stand und geht in den Zustand des plastischen Fließens über. Der Zusammenhang zwischen der Spannung σ und der plastischen Verzerrung ε^p wird durch die sogenannte Fließ- oder Normalenregel

$$\dot{\varepsilon}^p(t) \in N_K(\sigma(t)) \quad \text{für fast alle } t \tag{1.2}$$

beschrieben. Dabei ist

$$N_K(x) := \{n \in \mathbb{R}^{3,3}; \langle n, x - z \rangle \geq 0 \text{ für alle } z \in K\}$$

der Normalenkegel der konvexen Menge K im Punkt x und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{3,3}$.

Bei einem gegebenen Materialgesetz ist die Frage nach der Wohlgestelltheit dieses Gesetzes grundlegend, das heißt, ob sich einem vorgegebenen zeitlichen Verlauf der Verzerrung überhaupt ein, den Bedingungen des Modells genügender, zugehöriger Verlauf

der Spannung zuordnen lässt, ob diese Zuordnung eindeutig ist und ob kleine Änderungen im Verzerrungspfad auch nur kleine Änderungen im Spannungspfad bewirken. Der Gegenstand dieser Arbeit ist die Frage nach der Wohlgestelltheit eines bestimmten Materialgesetzes, des Hohlraumwachstumsmodells von Gurson, siehe [Gu1] und [Gu2]. Das Gurson-Modell wurde im Lauf der Zeit ergänzt, erweitert und modifiziert. Wir haben jedoch mit dem Modell in der ursprünglichen Fassung gearbeitet, siehe etwa [Tv], Seite 90, oder [Mü].

Im Gurson-Modell wird das Matrixmaterial als elastisch, ideal-plastisch vorausgesetzt. Bei einem Material ohne Hohlräume wird häufig die Fließfläche nach von Mises gewählt. Indem man gleichmäßig verteilte zylindrische oder kugelförmige Hohlräume im Material annimmt, kann man die von-Mises-Fließfläche näherungsweise umrechnen in eine Fließfläche, die vom Hohlraumanteil f abhängt. Zusammen mit der Normalenregel (1.2) und einer Differentialgleichung, die die Änderung des Hohlraumanteils durch den plastischen Anteil des Verzerrungstensors ε^p beschreibt, erhält man Beziehungen zwischen Spannungstensor und Verzerrungstensor. Eine genaue quantitative Aufstellung des Modells erfolgt in Paragraph 4.1.

In der abstrakten mathematischen Fassung des Gurson-Modells führen die Beziehungen auf eine Quasivariationsungleichung, beziehungsweise auf einen sogenannten impliziten oder zustandsabhängigen Sweeping-Prozess (siehe Bemerkung 4.3).

1.2 Der Sweeping-Prozess

Das Konzept des Sweeping-Prozesses wurde 1973 von Moreau eingeführt, siehe [Mo]. Der zustandsabhängige oder implizite Sweeping-Prozess beschreibt die Bewegung eines Punktes, die an die Bewegung einer konvexen Menge in einem Hilbertraum gekoppelt ist, und die ihrerseits wieder von der Bewegung des Punktes abhängt, genauer:

Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, $T > 0$. Für jedes $(t, \xi) \in [0, T] \times X$ sei $C(t, \xi)$ eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Teilmenge von X . Ferner sei $\xi_0 \in C(0, \xi_0)$ gegeben. Gesucht ist dann eine absolutstetige Funktion $\xi : [0, T] \rightarrow X$, die die folgenden Bedingungen erfüllt.

- (SP) (i) $\xi(0) = \xi_0$,
- (ii) $\xi(t) \in C(t, \xi(t))$ für jedes $t \in [0, T]$,
- (iii) $-\xi'(t) \in N_{C(t, \xi(t))}(\xi(t))$ für fast alle $t \in [0, T]$.

In [Mo] wird nur der Fall behandelt, dass C ausschließlich von t und nicht vom Zustand ξ selbst abhängt. Für diesen expliziten Sweeping-Prozess wird in [Mo] gezeigt, dass das oben aufgestellte Problem eindeutig lösbar ist, jedenfalls dann, wenn die Funktion $t \mapsto C(t)$ Lipschitz-stetig¹ bezüglich der Hausdorffmetrik d_H auf den nichtleeren kompakten Teilmengen von X ist.

¹Tatsächlich sind die Voraussetzungen in [Mo] etwas schwächer.

Anschaulich bewegt sich beim Sweeping-Prozess die Menge $C(t)$. Solange der Zustand $\xi(t)$ im Innern von $C(t)$ liegt, besteht der Normalenkegel im Punkt $\xi(t)$ nur aus dem Nullvektor, das heißt ξ bewegt sich nicht. Sobald $\xi(t)$ aber den Rand der konvexen Menge $C(t)$ erreicht, zeigt der Geschwindigkeitsvektor $\xi'(t)$ wegen Bedingung (iii) nach innen, das heißt der Punkt $\xi(t)$ wird gewissermaßen von der konvexen Menge $C(t)$ mitgezogen. Selbst wenn sich die Menge $C(t)$ gleichmäßig in eine Richtung bewegt, lässt sich ξ zu dem Zeitpunkt t , an dem es den Rand der Menge $C(t)$ erreicht, im allgemeinen nicht differenzieren. Daher kann man lediglich erwarten, Lösungen zu finden, die fast überall differenzierbar sind.

Einen Überblick über den zustandsabhängigen Sweeping-Prozess findet man in [KM2]. Setzt man voraus, dass C Lipschitz-stetig bezüglich der Hausdorffmetrik ist, das heißt, dass es $L_1, L_2 > 0$ mit

$$d_H(C(s, x), C(t, y)) \leq L_1|s - t| + L_2|x - y| \quad (1.3)$$

für alle $(s, x), (t, y) \in [0, T] \times X$ gibt, und stellt man an die Mengen C eine Kompaktheitsbedingung, so wird in [KM1] gezeigt, dass Lösungen von **(SP)** existieren, falls $L_2 < 1$ ist, während für den Fall $L_2 > 1$ in [KM2] Gegenbeispiele für die Existenz von Lösungen angegeben werden. Aber selbst wenn L_2 beliebig klein ist, muss die Lösung nicht eindeutig sein, siehe etwa [Ba].

1.3 Wohlgestellttheit

Um die Wohlgestellttheit des Gurson-Modells zu beweisen, können wir die Existenzaussage aus [KM1] nicht benutzen, da wir auch die Eindeutigkeit der Lösung benötigen. Stattdessen werden wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für den aus dem Gurson-Modell abgeleiteten zustandsabhängigen Sweeping-Prozess mit dem Banachschen Fixpunktsatz beweisen. Die mengenwertige Funktion C_1 ist im Gurson-Modell von der Gestalt

$$C_1(t, \xi) = u(t) + Z_1(\xi) \quad \text{für alle } (t, \xi) \in [0, T] \times X. \quad (1.4)$$

Dabei ist $u \in W^{1,1}(0, T; X)$ ² vorgegeben und $Z_1(\xi)$ für jedes $\xi \in X$ eine nicht leere, konvexe und abgeschlossene Teilmenge von X . Im Gurson-Modell entspricht u der Gesamtverzerrung ε .

Da die Lipschitz-Stetigkeit bezüglich des Hausdorffabstands zwischen den konvexen Mengen $Z_1(\cdot)$ nicht ausreicht, um Eindeutigkeit zu zeigen, messen wir den Abstand auch noch mit Hilfe der Ableitungen der den konvexen Mengen zugeordneten Minkowskifunktionale. Die Ableitungen der Minkowskifunktionale der Mengen $Z_1(\cdot)$ sind für diesen Zweck jedoch nicht regulär genug. Indem wir die Eingabewerte u und ξ_0 auf

²Der Raum der absolutstetigen Funktionen auf $[0, T]$ mit Werten in X

eine Teilmenge von $W^{1,1}(0, T; X) \times X$ einschränken, können wir die konvexen Mengen $Z_1(\cdot)$ im Gurson-Modell außerhalb einer Nullumgebung in konvexe Mengen $Z(\cdot)$ derart abändern, dass deren Minkowskifunktionale $M(\cdot)$ stärkere Eigenschaften als die der ursprünglichen Mengen besitzen. Zum Beispiel wird sich $M(\cdot)$ als differenzierbar und die Ableitung von $M^2(\cdot)$ als Lipschitz-stetig herausstellen.

Wir betrachten anschließend den impliziten Sweeping-Prozess **(SP)** mit den Mengen

$$C(t, \xi) = u(t) + Z(\xi) \quad \text{für alle } (t, \xi) \in [0, T] \times X. \quad (1.5)$$

Um Lösungen für diesen impliziten Sweeping-Prozess zu finden, definieren wir den folgenden zustandsunabhängigen Sweeping-Prozess:

Gegeben seien $\eta \in W^{1,1}(0, T; X)$ und $\xi_0 \in C(0, \eta(0))$. Gesucht ist $\xi \in W^{1,1}(0, T; X)$ mit:

- (i) $\xi(0) = \xi_0$,
- (ii) $\xi(t) \in C(t, \eta(t))$ für jedes $t \in [0, T]$,
- (iii) $-\xi'(t) \in N_{C(t, \eta(t))}(\xi(t))$ für fast alle $t \in [0, T]$.

Indem man die Eigenschaften der modifizierten Mengen $Z(\cdot)$ ausnutzt, folgt direkt aus der Arbeit von Moreau [Mo], dass dieser zustandsunabhängige Sweeping-Prozess genau eine Lösung $\xi = \mathcal{K}(\eta)$ besitzt. Indem wir erneut die stärkeren Eigenschaften der Mengen $Z(\cdot)$ verwenden, zeigen wir, dass die Abbildung $\mathcal{K}^2 : \eta \mapsto \mathcal{K}^2(\eta)$ eine Kontraktion ist, sofern wir uns auf ein eventuell kleineres Zeitintervall $[0, \hat{T}]$ beschränken. Der eindeutig bestimmte Fixpunkt ist dann die eindeutige Lösung des zustandsabhängigen Sweeping-Prozesses **(SP)** zu den Mengen C aus (1.5).

Die Modifikation der Mengen $Z(\cdot)$ ist gerade von der Art, dass für geeignet eingeschränkte Eingabewerte diese Lösung genau die Lösung des ursprünglichen Sweeping-Prozesses mit den Mengen C_1 aus (1.4) ist.

In Abschnitt 10 wird schließlich noch gezeigt, dass die Lösungen von **(SP)** mit den modifizierten Mengen Z Lipschitz-stetig von den Eingabewerten abhängen, sofern die L^1 -Norm der Ableitungen der Eingabefunktionen $u = \varepsilon$ gleichmäßig beschränkt ist.

Für das Gurson-Modell bedeutet das im wesentlichen, dass bei vorgegebener Gesamtverzerrung $\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$, deren Projektion auf einen gewissen eindimensionalen Teilraum beschränkt ist, bei einem vorgegebenen Startwert ε_0 , dessen Projektion auf denselben Teilraum auch beschränkt ist, und bei einem Startwert f_0 des Hohlraumanteils, der nicht zu groß sein darf, es auf einem eventuell kleineren Intervall $[0, \hat{T}]$ genau einen, den Bedingungen des Modells genügenden Spannungsverlauf gibt. Das Gurson-Modell ist also in einem gewissen Sinn wohlgestellt.

In Abschnitt 11 berechnen wir für ein konkretes Experiment den Bereich der Verzerrungen und der zugehörigen Spannungen, für den wir die Existenz von Lösungen nachgewiesen haben.

Abschließend zeigen wir in Abschnitt 12, dass im Gurson-Modell bei einem vorgegebenen Spannungsverlauf mehr als ein zugehöriger Verzerrungsverlauf möglich ist und dass man den Spannungsverlauf auch so wählen kann, dass überhaupt kein zugehöriger Verlauf der Verzerrung existiert.

2 Konvexe Mengen und Funktionen

In diesem Abschnitt sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein reeller Hilbertraum mit zugehöriger Norm

$$|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \text{für alle } x \in X,$$

$\emptyset \neq Z \subset X$ sei konvex und $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Bemerkung 2.1. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und stetig differenzierbar. Dann gilt

$$f(t) - f(a) = \int_a^t f'(s) ds \leq (t - a) f'(t) \quad (2.1)$$

für alle $t \in [a, b]$, da f' monoton wachsend ist.

Definition 2.2. Sei f konvex und $x \in Z$. Dann heißt die Menge

$$\partial f(x) := \{y \in X; f(z) - f(x) \geq \langle y, z - x \rangle \text{ für alle } z \in X\} \quad (2.2)$$

Subdifferential von f im Punkt x .

Der Zusammenhang zwischen dem Subdifferential und der Ableitung von differenzierbaren konvexen Funktionen wird hergestellt durch

Satz 2.3. Sei f konvex und differenzierbar in $x \in \text{int } Z$. Dann ist $\partial f(x) = \{Df(x)\}$. Im Endlichdimensionalen gilt auch die Umkehrung dieser Aussage.

Beweis. Theorem 25.1 in [Ro]. □

Definition 2.4. Sei $x \in Z$. Dann heißt die Menge

$$N_Z(x) := \{y \in X; \langle y, x - z \rangle \geq 0 \text{ für alle } z \in Z\} \quad (2.3)$$

der Normalenkegel der konvexen Menge Z im Punkt x .

Lemma 2.5. Sei $x \in Z$, $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$N_Z(x) = N_{Z \cap K(x, \varepsilon)}(x). \quad (2.4)$$

Beweis. Die Inklusion von links nach rechts ist klar. Sei umgekehrt $n \in N_{Z \cap K(x, \varepsilon)}(x)$ und $z \in Z \setminus K(x, \varepsilon)$. Dann ist

$$\frac{\varepsilon}{|z - x|}(z - x) + x = \frac{\varepsilon}{|z - x|}z + \left(1 - \frac{\varepsilon}{|z - x|}\right)x \in Z \cap K(x, \varepsilon).$$

Es folgt

$$0 \leq \left\langle n, x - \left(\frac{\varepsilon}{|z - x|}(z - x) + x\right) \right\rangle = \frac{\varepsilon}{|z - x|} \langle n, x - z \rangle.$$

□

Satz 2.6. Sei f konvex und differenzierbar in $x_0 \in \text{int } Z$ mit $Df(x_0) \neq 0$. Setzt man

$$K := \{x \in Z; f(x) \leq f(x_0)\},$$

so ist $N_K(x_0) = \{\lambda Df(x_0); \lambda \geq 0\}$.

Vor dem Beweis halten wir noch fest:

Bemerkung 2.7. Sind $x, y \in X$ linear unabhängig, so gibt es $w \in X$ mit $\langle w, x \rangle > 0$ und $\langle w, y \rangle < 0$.

Beweis. Setze $w := |x|^{-1}x - |y|^{-1}y$. Mit der Cauchy – Schwarzschen Ungleichung folgt die Behauptung. \square

Beweis. (von Satz 2.6) Wegen $Df(x_0) \in \partial f(x_0)$ gilt

$$\langle Df(x_0), x_0 - z \rangle \geq f(x_0) - f(z) \geq 0$$

für alle $z \in K$, also ist $Df(x_0) \in N_K(x_0)$.

Sei umgekehrt $u \in N_K(x_0)$. Angenommen $u \notin \{\lambda Df(x_0); \lambda \geq 0\}$. Wir zeigen zunächst: Es gibt $w \in X$ mit

$$\langle w, u \rangle > 0 \text{ und } \langle w, Df(x_0) \rangle < 0. \quad (2.5)$$

Sind u und $Df(x_0)$ linear unabhängig, so folgt die Existenz von w aus der vorausgeschickten Bemerkung. Sind u und $Df(x_0)$ linear abhängig, so ist wegen der Annahme $u = \mu Df(x_0)$ mit $\mu < 0$. Wir setzen dann $w := -Df(x_0)$. Damit gilt (2.5). Es folgt

$$0 > \langle Df(x_0), w \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon w) - f(x_0)}{\varepsilon}.$$

Also existiert $\varepsilon > 0$ mit $x_0 + \varepsilon w \in Z$ und $f(x_0 + \varepsilon w) < f(x_0)$, das heißt $x_0 + \varepsilon w \in K$. Somit ist wegen $u \in N_K(x_0)$ und der Wahl von w

$$0 \geq \langle u, (x_0 + \varepsilon w) - x_0 \rangle = \varepsilon \langle w, u \rangle > 0,$$

ein Widerspruch. \square

Voraussetzung 2.8. Sei im folgenden Z zusätzlich abgeschlossen und $0 \in Z$.

Wir definieren nun das Minkowskifunktional einer konvexen Menge.

Definition 2.9. Die Abbildung

$$M_Z : X \rightarrow [0, +\infty], \quad x \mapsto \inf \left\{ s > 0; \frac{x}{s} \in Z \right\} \quad (2.6)$$

heißt das zu Z gehörende *Minkowskifunktional*. Wenn klar ist, welche konvexe Menge gemeint ist, schreiben wir statt M_Z auch kurz M .

Einige grundlegende Eigenschaften des Minkowskifunktional fassen wir zusammen in

Satz 2.10. *Sei M das Minkowskifunktional der konvexen Menge Z . Dann gilt:*

(i) *M ist ein sublineares, positiv homogenes Funktional, das heißt*

$$M(tx) = tM(x) \quad \text{und} \quad M(x+y) \leq M(x) + M(y)$$

für alle $x, y \in X$, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

(ii) *M ist eine konvexe Funktion und*

(iii) $Z = \{x \in X; M(x) \leq 1\}$.

Beweis. Zu (i) siehe Lemma III.2.2 in [We]. (ii) ist eine direkte Folgerung aus (i).

Zu (iii). Sei $x \in X$. Ist $x \in Z$, so ist $x/1 = x \in Z$, also $M(x) \leq 1$. Sei umgekehrt $M(x) \leq 1$. Ist $M(x) = 0$, so existiert $s \leq 1/2$ mit $x/s \in Z$. Da x zwischen 0 und x/s liegt, $0 \in Z$ und Z konvex ist, folgt $x \in Z$. Sei jetzt $M(x) > 0$. Wähle eine Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{>0}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = M(x)$ und $x/s_n \in Z$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\frac{x}{M(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{s_n} \in Z,$$

da Z abgeschlossen ist. Wegen $M(x) \leq 1$ liegt x zwischen 0 und $x/M(x)$. Wie oben folgt $x \in Z$. \square

Wir beweisen noch eine nützliche Charakterisierung des Randes einer konvexen Menge:

Lemma 2.11. *Sei $Z \subset X$ konvex, abgeschlossen und $0 \in \text{int } Z$. Dann besteht der Rand ∂Z von Z genau aus denjenigen Punkten $x \in X$, für die $M(x) = 1$ ist.*

Beweis. Sei $x \in \partial Z$. Nach Proposition 3.2 aus [Kr] gibt es $n \in N_Z(x) \setminus \{0\}$. Angenommen, $M(x) < 1$. Dann gibt es $\lambda \in (0, 1)$ mit $\lambda^{-1}x \in Z$. Wegen $n \in N_Z(x)$ gilt:

$$(1 - \lambda)\langle n, x \rangle = \lambda\langle n, \lambda^{-1}x - x \rangle \leq 0,$$

also $\langle n, x \rangle \leq 0$. Andererseits ist $\langle n, x \rangle = \langle n, x - 0 \rangle \geq 0$, da $0 \in Z$ ist. Also ist $\langle n, x \rangle = 0$. Da 0 im Inneren von Z liegt, existiert $r > 0$ mit $nr \in Z$. Damit erreichen wir wegen

$$0 \leq \langle n, x - rn \rangle = -r|n|^2 < 0$$

einen Widerspruch.

Sei umgekehrt $x \in X$ mit $M(x) = 1$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ist $M((1 + 1/n)x) > 1$, also $(1 + 1/n)x \notin Z$. Somit ist $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)x \in \overline{X \setminus Z}$. Wegen $M(x) = 1$ ist $x \in Z$ und folglich $x \in \partial Z$. \square

Dass $0 \in \text{int } Z$ ist, wurde nur für die Implikation von links nach rechts benötigt. Das folgende Beispiel zeigt, dass man diese Bedingung nicht einfach fallen lassen kann: $X := \mathbb{R}^2$, $Z := [0, 1]^2$, $x := (0, 1/2) \in \partial Z$. Dann ist $M(x) = 1/2$.

Definition 2.12. Sei $A \subset X$. Wir definieren

$$A^* := \{y \in X; \langle y, x \rangle \leq 1 \text{ für alle } x \in A\},$$

die *Polare* der Menge A .

Bemerkung 2.13. Für jede Teilmenge $A \subset X$ ist A^* konvex und abgeschlossen, und es gilt $0 \in A^*$.

Lemma 2.14. (i) Ist $A \subset X$ konvex, abgeschlossen und $0 \in A$, so ist $(A^*)^* = A$.

(ii) Für jedes $A \subset X$ und $R > 0$ gilt:

$$A \subset K(0, R) \Leftrightarrow K(0, 1/R) \subset A^*. \quad (2.7)$$

Beweis. Zu (i) siehe Theorem 14.5. in [Ro].

Zu (ii) siehe Lemma 3.4 in [Kr]. □

Lemma 2.15. Es seien $c, C > 0$ so gegeben, dass

$$K(0, c) \subset Z \subset K(0, C) \quad (2.8)$$

erfüllt ist.

(i) Dann gilt:

$$K(0, 1/C) \subset Z^* \subset K(0, 1/c) \quad (2.9)$$

und

$$\frac{1}{C}|x| \leq M(x) \leq \frac{1}{c}|x| \quad \text{für alle } x \in X. \quad (2.10)$$

(ii) Sei M differenzierbar auf $X \setminus \{0\}$. Setze

$$J : X \rightarrow X, x \mapsto \begin{cases} M(x)DM(x), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Dann besitzt Z an jedem Randpunkt $x \in \partial Z$ einen eindeutig bestimmten äußeren Normaleneinheitsvektor $n(x)$, und es gilt:

$$n(x) = \frac{J(x)}{|J(x)|} \quad \text{für alle } x \in \partial Z \quad (2.11)$$

und

$$M_{Z^*}(J(x)) = M(x) \quad \text{für alle } x \in X. \quad (2.12)$$

Beweis. Zu (2.9). Die linke Inklusion steht in Lemma 2.14 (ii). Ferner gilt

$$Z^* \subset K(0, 1/c) \Leftrightarrow K(0, c) \subset (Z^*)^* = Z$$

nach Lemma 2.14 (i) und (ii).

Zu (2.10). Sei $x \in X$. Für $x = 0$ ist die Behauptung klar. Sei $x \neq 0$. Dann ist $|x/(c^{-1}|x|)| = c$, also $x/(c^{-1}|x|) \in Z$ und damit $M(x) \leq c^{-1}|x|$. Für jedes $s > 0$ ist $x/((C+s)^{-1}|x|) \notin Z$, also $M(x) \geq (C+s)^{-1}|x|$ und folglich $M(x) \geq C^{-1}|x|$.

Zu (ii). Da M positiv homogen ist, gilt

$$\langle DM(x), x \rangle = D_x M(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{M(x+hx) - M(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h-1)M(x)}{h} = M(x) \quad (2.13)$$

für alle $x \in X$. Sei $x \in \partial Z$. Dann ist $\langle DM(x), x \rangle = M(x) = 1$ wegen Lemma 2.11 und (2.13). Insbesondere ist $DM(x) \neq 0$. Weiter gilt

$$Z = \{y \in X; M(y) \leq 1\} = \{y \in X; M(y) \leq M(x)\}.$$

Somit besitzt Z nach Satz 2.6 einen eindeutig bestimmten, äußeren Normaleneinheitsvektor in x , nämlich

$$n(x) = \frac{DM(x)}{|DM(x)|} = \frac{J(x)}{|J(x)|}.$$

Sei nun $x \in X$. Wegen $J(0) = 0$ und $M_{Z^*}(0) = 0 = M(0)$ können wir $x \neq 0$ voraussetzen. Mit Satz 2.3 und (2.13) gilt

$$\langle DM(x), y \rangle - M(x) = \langle DM(x), y - x \rangle \leq M(y) - M(x),$$

also $\langle DM(x), y \rangle \leq M(y)$ für alle $y \in X$. Insbesondere gilt $\langle DM(x), y \rangle \leq M(y) \leq 1$ für alle $y \in Z$, das heißt $DM(x) \in Z^*$ und damit $M_{Z^*}(DM(x)) \leq 1$.

Sei $s < 1$. Dann gilt

$$\left\langle \frac{DM(x)}{s}, \frac{x}{M(x)} \right\rangle = \frac{1}{s} > 1$$

nach (2.13). Wegen $x/M(x) \in Z$ ist also $DM(x)/s \notin Z^*$. Nach Definition des Minkowskifunktional ist dann $M_{Z^*}(DM(x)) \geq 1$. Somit ist $M_{Z^*}(DM(x)) = 1$, und die Behauptung folgt. \square

Unter bestimmten Voraussetzungen ist das Minkowskifunktional Lipschitz-stetig:

Lemma 2.16. *Es gebe $c > 0$ so, dass $K(0, c) \subset Z$ ist. Dann ist $M := M_Z$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $1/c$.*

Beweis. Seien $x, y \in X$. Mit Satz 2.10 (i) und (2.10) gilt

$$M(x) - M(y) \leq M(x - y) + M(y) - M(y) \leq \frac{1}{c}|x - y|.$$

Analog zeigt man $M(y) - M(x) \leq |y - x|/c$, und die Behauptung folgt. \square

3 Die Ableitung des Minkowskifunktional

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass das Minkowskifunktional außerhalb des Ursprungs differenzierbar ist, wenn die zugrundeliegende konvexe Menge Niveaumenge einer konvexen differenzierbaren Funktion ist. Wie in Abschnitt 2 sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein reeller Hilbertraum mit zugehöriger Norm $|\cdot|$.

Lemma 3.1. *Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, stetig, $f(0) < 0$, $Z := f^{-1}((-\infty, 0])$ beschränkt. Sei M das Minkowskifunktional von Z . Dann gilt*

$$M(x) \neq 0 \quad \text{und} \quad f\left(\frac{x}{M(x)}\right) = 0 \quad \text{für alle } x \in X \setminus \{0\}. \quad (3.1)$$

Beweis. Es sei $Z \subset K(0, C)$ mit $C > 0$. Dann ist $C^{-1}|x| \leq M(x)$ für jedes $x \in X$ nach Lemma 2.15 (i), also $M(x) \neq 0$, sofern $x \neq 0$ ist. Sei $x \neq 0$. Es gibt eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in

$$L := \{\lambda > 0; \lambda^{-1}x \in Z\}$$

mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \inf L = M(x)$. Wegen der Stetigkeit von f folgt:

$$f\left(\frac{x}{M(x)}\right) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\lambda_n}\right) \leq 0.$$

Angenommen, es ist $f(M(x)^{-1}x) < 0$. Wegen der Stetigkeit von f existiert dann eine Umgebung U von $M(x)^{-1}x$ so, dass $f|_U < 0$ ist. Sei $\lambda > 0$ so gewählt, dass $\lambda^{-1}x \in U$ und $\lambda < M(x)$. Dann ist $f(\lambda^{-1}x) < 0$, also $\lambda \in L$ und $\lambda < M(x) = \inf L$, ein Widerspruch. \square

Voraussetzung 3.2. Sei Y ein Banachraum, $I \subset Y$ offen und $H : I \times X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Für jedes $\varrho \in I$ sei $H(\varrho, \cdot)$ konvex, $H(\varrho, 0) < 0$,

$$Z(\varrho) := \{x \in X; H(\varrho, x) \leq 0\}$$

beschränkt und $M(\varrho, \cdot)$ das Minkowskifunktional von $Z(\varrho)$. Weiter gebe es $c > 0$ so, dass

$$K(0, c) \subset Z(\varrho) \quad (3.2)$$

für alle $\varrho \in I$ ist. Schließlich setzen wir noch voraus, dass

$$D_2H\left(\varrho, \frac{x}{M(\varrho, x)}\right) \frac{x}{M(\varrho, x)} \neq 0 \quad (3.3)$$

für jedes $(\varrho, x) \in I \times (X \setminus \{0\})$ ist.

Lemma 3.3. *Es gelte 3.2. Dann ist M stetig differenzierbar auf $I \times (X \setminus \{0\})$, und es gilt:*

$$D_1M(\varrho, x) = \frac{M(\varrho, x)}{D_2H(\varrho, M(\varrho, x)^{-1}x)(M(\varrho, x)^{-1}x)} D_1H\left(\varrho, \frac{x}{M(\varrho, x)}\right), \quad (3.4)$$

$$D_2M(\varrho, x) = \frac{1}{D_2H(\varrho, M(\varrho, x)^{-1}x)(M(\varrho, x)^{-1}x)} D_2H\left(\varrho, \frac{x}{M(\varrho, x)}\right) \quad (3.5)$$

für alle $(\varrho, x) \in I \times (X \setminus \{0\})$.

Beweis. Sei $x \in X \setminus \{0\}$ und

$$G : I \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, (\varrho, \lambda) \mapsto H(\varrho, \lambda^{-1}x).$$

Sei $\varrho \in I$. Nach Lemma 3.1 ist $G(\varrho, M(\varrho, x)) = 0$ (mit $f = H(\varrho, \cdot)$). Da H differenzierbar ist, ist es auch G mit

$$D_1G(\varrho, \lambda) = D_1H(\varrho, \lambda^{-1}x),$$

$$D_2G(\varrho, \lambda) = D_2H(\varrho, \lambda^{-1}x)(-\lambda^{-2}x).$$

Wegen (3.3) ist $D_2G(\varrho, \lambda) \neq 0$ für jedes $\lambda > 0$. Also lässt sich G nach dem Satz über implizite Funktionen in einer Umgebung $U \times V \subset I \times \mathbb{R}_{>0}$ von $(\varrho, M(\varrho, x))$ eindeutig nach der zweiten Variablen auflösen, und die auflösende Funktion ist gerade $M(\cdot, x) : U \rightarrow V$. Außerdem ist $M(\cdot, x)$ differenzierbar in ϱ mit

$$\begin{aligned} D_1M(\varrho, x) &= -D_2G(\varrho, M(\varrho, x))^{-1} \circ D_1G(\varrho, M(\varrho, x)) \\ &= \frac{M(\varrho, x)}{D_2H(\varrho, M(\varrho, x)^{-1}x)(M(\varrho, x)^{-1}x)} D_1H\left(\varrho, \frac{x}{M(\varrho, x)}\right). \end{aligned}$$

Sei nun $\varrho \in I$ und

$$G : X \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, (x, \lambda) \mapsto H(\varrho, \lambda^{-1}x).$$

Sei $x \in X \setminus \{0\}$. Dann ist $G(x, M(\varrho, x)) = 0$ nach Lemma 3.1. Da H differenzierbar ist, ist es auch G mit

$$D_1G(x, \lambda) = D_2H(\varrho, \lambda^{-1}x) \circ (\lambda^{-1} \text{Id}_X),$$

$$D_2G(x, \lambda) = D_2H(\varrho, \lambda^{-1}x)(-\lambda^{-2}x).$$

Wegen (3.3) ist $D_2G(x, \lambda) \neq 0$ für jedes $\lambda > 0$. Also lässt sich G nach dem Satz über implizite Funktionen in einer Umgebung $U \times V \subset X \times \mathbb{R}_{>0}$ von $(x, M(\varrho, x))$ eindeutig nach der zweiten Variablen auflösen, und die auflösende Funktion ist gerade $M(\varrho, \cdot) : U \rightarrow V$. Außerdem ist $M(\varrho, \cdot)$ differenzierbar in x mit

$$\begin{aligned} D_2M(\varrho, x) &= -D_2G(x, M(\varrho, x))^{-1} \circ D_1G(x, M(\varrho, x)) \\ &= \frac{1}{D_2H(\varrho, M(\varrho, x)^{-1}x)(M(\varrho, x)^{-1}x)} D_2H\left(\varrho, \frac{x}{M(\varrho, x)}\right). \end{aligned}$$

Sei $x \neq 0$. Da $M(\cdot, x)$ differenzierbar ist, ist $M(\cdot, x)$ stetig. Wegen (3.2) und Lemma 2.16 ist M Lipschitz-stetig in der zweiten Variablen mit der von ϱ unabhängigen Lipschitzkonstante $1/c$. Also ist M insgesamt stetig auf $I \times (X \setminus \{0\})$. Da H stetig differenzierbar ist, sind D_1H und D_2H stetig und damit wegen der Stetigkeit von M auch D_1M und D_2M . Somit ist M stetig differenzierbar auf $I \times (X \setminus \{0\})$. \square

4 Das Gurson-Modell

4.1 Aufstellung des Modells

Ein grundlegendes Modell in der Schädigungsmechanik ist das Hohlraumwachstumsmodell von Gurson, welches später unter anderem von Tveergaard und Needleman erweitert worden ist. Wir werden das Modell nur in seiner ursprünglichen Form behandeln, siehe [Tv], [Mü].

Das Matrixmaterial wird als elastisch, ideal-plastisch mit zylindrischen oder kugelförmigen Hohlräumen vorausgesetzt. In der einfachsten Form des Modells geht man davon aus, dass der Hohlraumanteil f nur wachsen (Zugbelastung) oder schrumpfen (Druckbelastung) kann, es aber nicht zum Zusammenwachsen von Hohlräumen oder zur Entstehung neuer Hohlräume kommt.

Der Hohlraumanteil f genügt der Differentialgleichung

$$\dot{f}(t) = (1 - f(t)) \sum_{k=1}^3 E_{kk}^{pl}(t), \quad (4.1)$$

wobei (E_{ij}^{pl}) der plastische Anteil des mesoskopischen Verzerrungstensors ist. Die Gesamtverzerrung ist Summe des elastischen und plastischen Anteils:

$$E = E^{el} + E^{pl}. \quad (4.2)$$

Die Spannung Σ und der elastische Anteil E^{el} der Verzerrung sind durch das Hookesche Gesetz

$$\Sigma = AE^{el} \quad (4.3)$$

gekoppelt, wobei A eine lineare Abbildung ist. Die Fließfläche ist durch die Gleichung $\Phi(\Sigma, f) = 0$ gegeben mit

$$\Phi(\Sigma, f) = \frac{3}{2} \frac{\Sigma'_{ij} \Sigma'_{ij}}{R_0^2} + 2f \cosh \left(\frac{\sum_{k=1}^3 \Sigma_{kk}}{2R_0} \right) - 1 - f^2, \quad (4.4)$$

wobei (Σ_{ij}) der mesoskopische Spannungstensor, (Σ'_{ij}) sein deviatorischer Anteil und R_0 die Fließspannung des Matrixmaterials ist.

Für die plastischen Verzerrungsraten \dot{E}^{pl} gilt die Normalenregel:

$$\dot{E}^{pl} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma}, \quad \lambda > 0. \quad (4.5)$$

Das ist nur eine andere Formulierung dafür, dass \dot{E}^{pl} im Normalenkegel der durch $\Phi(\Sigma, f) = 0$ begrenzten konvexen Menge im Punkt Σ liegt.

4.2 Mathematische Formulierung

Wir werden jetzt die Bedingungen aus Abschnitt 4.1 als Gleichungen und Ungleichungen aufschreiben und außerdem genauer festlegen, aus welchen Funktionenräumen die betrachteten Größen stammen.

Sei $\mathbb{T} = \{v \in \mathbb{R}^{3 \times 3}; v \text{ symmetrisch}\}$ der Raum der symmetrischen 3×3 -Matrizen, ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$v : w := \text{tr}(vw) := \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 v_{ij}w_{ij} \quad \text{für alle } v = (v_{ij}), w = (w_{ij}) \in \mathbb{T} \quad (4.6)$$

mit der dazugehörigen Norm $\|v\| := (v : v)^{1/2}$ für alle $v \in \mathbb{T}$. Es sei $\Delta := (1/\sqrt{3})I_3$. Dabei ist I_3 die dreidimensionale Einheitsmatrix. Für jedes $v \in \mathbb{T}$ definieren wir den Deviator

$$Dv := v - (v : \Delta)\Delta. \quad (4.7)$$

Sei $F_0 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ konvex, unendlich oft differenzierbar und $F_0(0) = F_0'(0) = 0$. Speziell im Gurson-Modell ist

$$F_0(y) = 2(\cosh(by) - 1) \quad \text{für alle } y \geq 0 \quad (4.8)$$

mit einer positiven Konstante b . In \mathbb{T} betrachten wir eine Familie konvexer Mengen

$$Z_0(\varrho) = \{z \in \mathbb{T}; a\|Dz\|^2 + \varrho F_0(|z : \Delta|) \leq (1 - \varrho)^2\}, \quad (4.9)$$

die von $\varrho \in [0, 1]$ abhängen. Dabei ist $a > 0$ eine weitere Konstante. Seien $\mu > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ Lamé-Konstanten (siehe etwa [Ci], Seite 121) so, dass $2\mu + 3\lambda > 0$. Wir definieren eine lineare Abbildung (das Hookesche Gesetz, siehe [Ci], Seite 286)

$$A : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, v \mapsto 2\mu Dv + (2\mu + 3\lambda)(v : \Delta)\Delta. \quad (4.10)$$

Außerdem sei die Fließspannung des Matrixmaterials $\sigma_m := R_0 > 0$ gegeben. Setzen wir $b := \sqrt{3}/2$, $a := 3/2$, $\varepsilon := E$, $\varepsilon^p := E^p$, $\varepsilon^e := E^e$ und $\sigma := \Sigma$, so ergeben die Bedingungen aus Paragraph 4.1 die folgende Situation:

GURSON 1. Gegeben seien die Funktionen

$$\varepsilon, \varepsilon^p, \varepsilon^e, \sigma \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{T}), \quad r \in W^{1,1}(0, T; [0, 1])$$

und die Anfangswerte $r_0 \in (0, 1)$, $\sigma_0 \in \sigma_m Z_0(r_0)$. Die Bedingungen des Gurson-Modells lauten dann folgendermaßen: Für jedes $t \in [0, T]$ gilt:

$$(i) \quad \varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^p(t), \quad \text{siehe (4.2)}$$

(ii) $\sigma(t) = A\varepsilon^e(t)$, siehe (4.3)

(iii) $\frac{\sigma(t)}{\sigma_m} \in Z_0(r(t))$, siehe (4.4)

(iv) $\varepsilon^p(t) : \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_m} - y\right) \geq 0$ fast überall, für jedes $y \in Z_0(r(t))$, siehe (4.5)

(v) $\dot{r}(t) = (1 - r(t))\sqrt{3}(\varepsilon^p(t) : \Delta)$ fast überall, siehe (4.1)

(vi) $r(0) = r_0, \sigma(0) = \sigma_0$.

Da wir nicht erwarten können, dass die Funktionen $\varepsilon, \varepsilon^p, \varepsilon^e, \sigma$ und r differenzierbar sind (siehe Paragraph 1.2), ist es natürlich, die Bedingungen in den Räumen $W^{1,1}(0, T; \mathbb{T})$, beziehungsweise $W^{1,1}(0, T; [0, 1])$ aufzuschreiben.

Lemma 4.1. *Die Differentialgleichung aus (v) besitzt für jeden Anfangswert $r_0 \in (0, 1)$ eine lokal eindeutige Lösung, und zwar gibt es $T^* \leq T$ so, dass*

$$r(t) = 1 - (1 - r_0) \exp(-\sqrt{3}(\varepsilon^p(t) - \varepsilon^p(0)) : \Delta) \quad (4.11)$$

für alle $t \in [0, T^*]$ gilt.

Beweis. Seien $\varepsilon^p \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{T})$, $r_0 \in (0, 1)$ gegeben. Man rechnet einfach nach, dass die in (4.11) definierte Funktion eine Lösung des Anfangswertproblems ist. Die rechte Seite der Differentialgleichung (v) ist lokal Lipschitz-stetig in $r(t)$ und lokal integrierbar in t . Mit Theorem 36 aus [So] folgt die Behauptung. \square

Im folgenden werden wir untersuchen, ob bei vorgegebener Gesamtverzerrung ε , die anderen Größen in **GURSON 1** so gefunden werden können, dass sie die Bedingungen (i) bis (vi) erfüllen, und ob die Lösung durch ε^p und die Angabe geeigneter Anfangswerte jeweils eindeutig bestimmt ist.

Auf den spannungskontrollierten Fall gehen wir in Abschnitt 12 kurz ein.

Jetzt transformieren wir die Bedingungen aus **GURSON 1** noch einmal, um die Abbildung A und die Differentialgleichung (v) zu eliminieren.

4.3 Transformation auf das abstrakte Modell

Wir formulieren die Gleichungen (i) bis (vi) aus Abschnitt 4.2 jetzt in einem allgemeineren Rahmen:

Voraussetzung 4.2. Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein separabler Hilbertraum mit zugehöriger Norm $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für alle $x \in X$.

- $V \subset X$ sei ein abgeschlossener Teilraum und $\Pi : X \rightarrow V$ die orthogonale Projektion auf V .

- Es sei $d : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine streng monoton fallende, zweimal stetig differenzierbare Funktion.
- $F_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei konvex und dreimal stetig differenzierbar, F_1' sei streng monoton wachsend, und es sei $F_1(0) = F_1'(0) = 0$.
- Für jedes $\varrho \in [0, 1]$ sei

$$Z_1(\varrho) := \{x \in X; |(\text{Id} - \Pi)x|^2 + \varrho F_1(|\Pi x|) \leq d^2(\varrho)\}.$$

- Es sei $g : [0, 1] \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion.

GURSON ABSTRAKT. Für $T > 0$, $u, x, \xi \in W^{1,1}(0, T; X)$, $r_0 \in (0, 1)$ und $x_0 \in Z_1(r_0)$ betrachten wir die Bedingungen: Für jedes $t \in [0, T]$ gilt:

- (a) $g(r_0, \Pi(\xi(t) - \xi(0))) \in [0, 1]$,
- (b) $x(t) = u(t) - \xi(t) \in Z_1(g(r_0, \Pi(\xi(t) - \xi(0))))$,
- (c) $x(0) = x_0$,
- (d) $\langle \dot{\xi}(t), x(t) - y \rangle \geq 0$ fast überall, für jedes $y \in Z_1(g(r_0, \Pi(\xi(t) - \xi(0))))$.

Bemerkung 4.3. Die Bedingungen (b) bis (d) in **GURSON ABSTRAKT** sind äquivalent zu einem zustandsabhängigen Sweeping-Prozess (siehe **(SP)** in der Einführung).

Beweis. Wir definieren $\xi_0 := u(0) - x_0$ und

$$C(t, v) := u(t) - Z_1(g(r_0, \Pi(v - \xi_0))) \quad \text{für alle } (t, v) \in [0, T] \times X.$$

Aus (c) folgt $\xi(0) = u(0) - x(0) = u(0) - x_0 = \xi_0$. Mit (b) gilt

$$\xi(t) = u(t) - x(t) \in C(t, \xi(t)).$$

Schließlich bedeutet (d):

$$\langle \dot{\xi}(t), x(t) - y \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle -\dot{\xi}(t), \xi(t) - (u(t) - y) \rangle \geq 0$$

für fast alle $t \in [0, T]$ und für alle $y \in Z_1(g(r_0, \Pi(\xi(t) - \xi_0)))$, das heißt

$$-\dot{\xi}(t) \in N_{C(t, \xi(t))}(\xi(t)) \quad \text{für fast alle } t \in [0, T].$$

Genauso leicht kann man (b) bis (d) aus den entsprechenden Bedingungen von **(SP)** ableiten. \square

In Satz 4.4 werden wir zeigen, dass bei geeigneter Wahl von $\langle \cdot, \cdot \rangle$, V , d , F_1 , Z_1 und g die Bedingungen (i) bis (vi) aus Abschnitt 4.2 und die Bedingungen (a) bis (d) in diesem Abschnitt äquivalent sind.

Sei $X := \mathbb{T}$. Wir definieren ein neues Skalarprodukt

$$\langle v, w \rangle := \frac{a\sigma_m}{2\mu}(Dv) : (Dw) + \frac{a\sigma_m}{2\mu + 3\lambda}(v : \Delta)(w : \Delta),$$

auf X zusammen mit dazugehöriger Norm $|v| := \langle v, v \rangle^{1/2}$ für alle $v, w \in X$. Wegen

$$A^{-1} : X \rightarrow X, \quad A^{-1}v = \frac{1}{2\mu}Dv + \frac{1}{2\mu + 3\lambda}(v : \Delta)\Delta \quad (4.12)$$

ist

$$\langle v, w \rangle = a\sigma_m((A^{-1}v) : w) \quad (4.13)$$

für alle $v, w \in X$. Also sind die beiden Normen $|\cdot|$ und $\|\cdot\|$ äquivalent. Wir setzen

$$V := \langle \Delta \rangle, \quad \hat{\mu} = \frac{2\mu}{\sigma_m}, \quad \hat{\lambda} = \frac{2\mu + 3\lambda}{a\sigma_m}. \quad (4.14)$$

Insbesondere ist

$$\Pi : X \rightarrow V, \quad \Pi v = \frac{\langle v, \Delta \rangle}{\langle \Delta, \Delta \rangle} \Delta$$

die orthogonale Projektion von X auf V . Ferner definieren wir

$$F_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad F_1(y) = \frac{1}{\hat{\mu}}F_0(\sqrt{\hat{\lambda}}y); \quad d : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(\varrho) = \frac{1 - \varrho}{\sqrt{\hat{\mu}}}, \quad (4.15)$$

$$Z_1(\varrho) = \{z \in \mathbb{T}; |(\text{Id} - \Pi)z|^2 + \varrho F_1(|\Pi z|) \leq d^2(\varrho)\} \quad \text{für alle } \varrho \in [0, 1]$$

und

$$g : [0, 1] \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(r, v) = 1 - (1 - r) \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{a}\langle v, \Delta \rangle\right). \quad (4.16)$$

Satz 4.4. *Sei $T > 0$. (1) Es mögen $u, x, \xi \in W^{1,1}(0, T; X)$, $r_0 \in (0, 1)$ und $x_0 \in Z_1(r_0)$ die Bedingungen (a) bis (d) erfüllen. Setzt man mit $\sigma_m > 0$*

$$\sigma := \sigma_m x, \quad \varepsilon := \sigma_m A^{-1}u, \quad \varepsilon^p := \sigma_m A^{-1}\xi, \quad \varepsilon^e := \varepsilon - \varepsilon^p, \quad r := g(r_0, \Pi(\xi(\cdot) - \xi(0)))$$

und $\sigma_0 := \sigma_m x_0$, so sind $\sigma, \varepsilon, \varepsilon^p, \varepsilon^e \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{T})$, $r \in W^{1,1}(0, T; [0, 1])$, und sie genügen den Bedingungen (i) bis (vi) aus dem vorherigen Paragraphen.

(2) Seien umgekehrt $\sigma, \varepsilon, \varepsilon^p, \varepsilon^e \in W^{1,1}(0, T; X)$, $r \in W^{1,1}(0, T; [0, 1])$, $\sigma_m > 0$,

$r_0 \in (0, 1)$ und $x_0 \in Z_0(r_0)$ so gegeben, dass die Bedingungen (i) bis (vi) aus Paragraph 4.2 erfüllt sind. Setzt man

$$x := \frac{\sigma}{\sigma_m}, \quad \xi := \frac{1}{\sigma_m} A \varepsilon^p, \quad u := \frac{1}{\sigma_m} A \varepsilon, \quad x_0 := \frac{\sigma_0}{\sigma_m},$$

so sind $u, x, \xi \in W^{1,1}(0, T; X)$, und sie genügen den Bedingungen (a) bis (d) aus diesem Abschnitt.

Beweis. (1) Man verifiziert (i), (ii) und (vi) leicht durch Einsetzen.

(v) Für jedes $v \in X$ ist $\langle \Pi v, \Delta \rangle = \langle v, \Delta \rangle$. Es folgt

$$\langle \Pi(\xi(t) - \xi(0)), \Delta \rangle = a\sigma_m(A^{-1}(\xi(t) - \xi(0))) : \Delta = a(\varepsilon^p(t) - \varepsilon^p(0)) : \Delta.$$

Somit ist r nach nach (4.16) und Lemma 4.1 Lösung der Differentialgleichung (v).

(iii) Sei $\varrho \in [0, 1]$. Wir zeigen, dass $Z_0(\varrho) = Z_1(\varrho)$ ist: Man rechnet nach, dass

$$|(\text{Id} - \Pi)z|^2 = \frac{a\sigma_m}{2\mu} \|Dz\|^2 \quad \text{und} \quad |\Pi z| = \left(\frac{a\sigma_m}{2\mu + 3\lambda} \right)^{1/2} |z : \Delta| \quad (4.17)$$

für alle $z \in X$ ist. Nach Definition von $\hat{\mu}, \hat{\lambda}, d$ und F_1 gilt dann

$$\begin{aligned} z \in Z_1(\varrho) &\Leftrightarrow |(\text{Id} - \Pi)z|^2 + \varrho F_1(|\Pi z|) \leq d^2(\varrho) \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{\hat{\mu}} \|Dz\|^2 + \varrho \frac{1}{\hat{\mu}} F_0(|z : \Delta|) \leq \frac{(1 - \varrho)^2}{\hat{\mu}} \Leftrightarrow z \in Z_0(\varrho). \end{aligned}$$

(iv) Für fast jedes $t \in [0, T]$ und für alle $y \in Z_1(g(r_0, \Pi(\xi(t) - \xi(0)))) = Z_0(r(t))$ gilt:

$$\dot{\varepsilon}^p(t) : \left(\frac{\sigma}{\sigma_m} - y \right) = \frac{1}{a} a\sigma_m(A^{-1}\dot{\xi}(t)) : (x - y) = \frac{1}{a} \langle \dot{\xi}(t), x - y \rangle \geq 0.$$

(2) Durch analoge Umformungen wie in (1) erhält man aus (i) bis (vi) die Bedingungen (a) bis (d). \square

Für g aus (4.16) werden wir später noch die folgenden Abschätzungen brauchen:

Bemerkung 4.5. Zu jedem $R > 0$ gibt es $\gamma, C_g, \tilde{C}_g > 0$ so, dass für g aus (4.16) gilt:

$$|D_2g(r, v)| \leq \gamma \quad \text{und} \quad |D_2g(r, v) - D_2g(r, w)| \leq C_g |v - w|, \quad (4.18)$$

$$|g(r, v) - g(s, v)| \leq \tilde{C}_g |r - s| \quad \text{und} \quad |D_2g(r, v) - D_2g(s, v)| \leq \tilde{C}_g |r - s| \quad (4.19)$$

für alle $r, s \in [0, 1], v, w \in V \cap K(0, R)$.

Beweis. Mit $\alpha := -\sqrt{3}/a$ gilt:

$$|D_1g(r, v)| = \exp(\alpha\langle v, \Delta \rangle) \quad \text{und} \quad D_2g(r, v) = \alpha(r-1) \exp(\alpha\langle v, \Delta \rangle)\Delta,$$

$$D_1D_2g(r, v) = \alpha \exp(\alpha\langle v, \Delta \rangle)\Delta \quad \text{und} \quad D_2^2g(r, v) = \Delta\alpha^2(r-1) \exp(\alpha\langle v, \Delta \rangle)\langle \Delta, \cdot \rangle.$$

Man sieht, dass die Ableitungen auf beschränkten Mengen beschränkt sind. Somit findet man zu $R > 0$ Konstanten $\gamma, C_g, \tilde{C}_g > 0$, die (4.18) und (4.19) erfüllen. \square

5 Der dehnungskontrollierte Fall

Wir setzen voraus, dass der zeitliche Verlauf der Gesamtverzerrung ε , das heißt der Gesamtdehnung, gegeben ist und untersuchen die Frage, ob die übrigen Größen σ , ε^p , ε^e , r so gewählt werden können, dass sie (i) bis (vi) aus Paragraph 4.2 erfüllen, und ob σ , ε^p , ε^e , r durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt sind.

Nach Satz 4.4 genügt es, diese Frage in dem allgemeineren Rahmen aus Paragraph 4.3 zu untersuchen. Die Voraussetzungen seien im folgenden wie in Paragraph 4.3. Die oben aufgeworfene Frage formulieren wir genauer in:

GURSON D. Gegeben seien $T > 0$, $u \in W^{1,1}(0, T; X)$, $r_0 \in (0, 1)$ und $x_0 \in Z_1(r_0)$. Gesucht ist $\xi \in W^{1,1}(0, T; X)$ so, dass für alle $t \in [0, T]$ gilt:

- (a) $g(r_0, \Pi(\xi(t) - \xi(0))) \in [0, 1]$,
- (b) $x(t) := u(t) - \xi(t) \in Z_1(g(r_0, \Pi(\xi(t) - \xi(0))))$,
- (c) $x(0) = x_0$,
- (d) $\langle \dot{\xi}(t), x(t) - y \rangle \geq 0$ fast überall, für alle $y \in Z_1(g(r_0, \Pi(\xi(t) - \xi(0))))$.

Dabei entspricht u der Gesamtverzerrung ε , x der Spannung σ und ξ dem plastischen Anteil ε^p des Verzerrungstensors. Ferner ist r_0 der Startwert des Hohlraumanteils und $g(r_0, \Pi(\xi(t) - \xi(0)))$ der Hohlraumanteil zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$. Die Lösung von **GURSON D** wird durch mehrere Hindernisse erschwert:

Bedingung (a) spiegelt die Tatsache wider, dass der Hohlraumanteil nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann. Nach Satz 4.4 und Lemma 4.1 ist

$$g(r_0, \Pi(\xi(t) - \xi(0))) = 1 - (1 - r_0) \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{a} \langle \xi(t) - \xi(0), \Delta \rangle\right).$$

Damit ist $g < 1$ sicher erfüllt, aber g kann negative Werte annehmen: Es gilt

$$g(r_0, \Pi(\xi(t) - \xi(0))) \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{1 - r_0}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{a} \langle \xi(0) - \xi(t), \Delta \rangle$$

für jedes $t \in [0, t]$. Wegen dieser Einschränkung kann man nicht erwarten, globale, das heißt im gesamten Zeitintervall $[0, T]$ bestehende Lösungen zu finden, sondern wir werden uns mit lokalen Lösungen zufrieden geben müssen.

Eine weitere Schwierigkeit entsteht durch das Verhalten von $Z_1(\varrho)$ für $\varrho \rightarrow 0$ und $\varrho \rightarrow 1$. Für $\varrho \in (0, 1)$ ist $Z_1(\varrho)$ stets beschränkt und $0 \in \text{int } Z_1(\varrho)$. Im Gegensatz dazu ist $Z_1(0)$ ein unbeschränkter Zylinder, und $Z_1(1) = \{0\}$ enthält keinen inneren Punkt mehr (siehe Abbildung 1 auf der nächsten Seite).

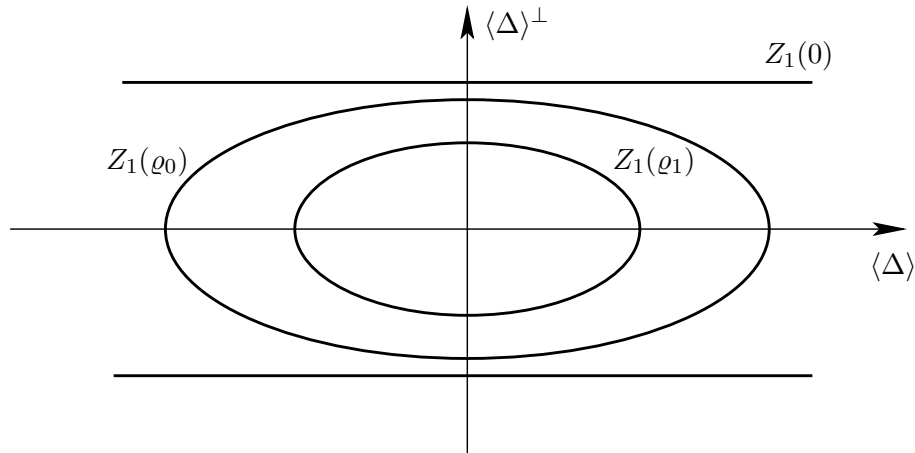


Abbildung 1: Die konvexen Mengen $Z_1(\varrho)$ für $0 < \varrho_0 < \varrho_1 < 1$.

Wir gehen jetzt folgendermaßen vor: Zum einen beschränken wir den Hohlraumanteil auf ein Intervall $[0, \varrho_1]$ mit $\varrho_1 < 1$ so, dass der Fall $Z_1(\varrho) = \{0\}$ nicht mehr auftritt. Das ist in gewisser Weise natürlich, da auch in der Praxis Hohlraumanteile in der Nähe von 1 nicht vorkommen.

Zum anderen ersetzen wir die Familie $(Z_1(\varrho))_{\varrho \in [0, \varrho_1]}$ durch eine Familie abgeschlossener konvexer Mengen $(Z(\varrho))_{\varrho \in [0, \varrho_1]}$, die gleichmäßig beschränkt sind, das heißt $Z(\varrho)$ liegt in einer von ϱ unabhängigen beschränkten Menge. Außerdem stimmen $Z(\varrho)$ und $Z_1(\varrho)$ in einem Bereich $\{x \in X; \|x\| \leq p\}$ überein.

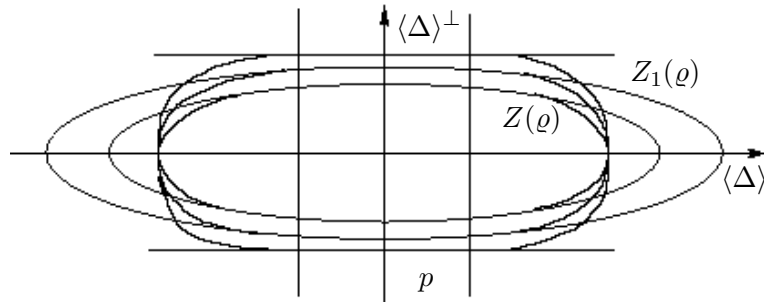


Abbildung 2: Die konvexen Mengen $Z_1(\varrho)$ und $Z(\varrho)$.

Beschränkt man sich dann auf Lösungen, die diesen Bereich nicht verlassen, so zeigt sich, dass Lösungen von **GURSON D** mit Z anstelle von Z_1 auch Lösungen des ursprünglichen Problems sind.

6 Modifikation der Mengen $Z_1(\varrho)$

In diesem Abschnitt führen wir, wie im vorigen Abschnitt angekündigt, anstelle der Mengen $Z_1(\varrho)$, $\varrho \in [0, 1]$, neue Mengen $Z(\varrho)$ ein. Die Voraussetzungen seien gemäß 4.2 aus Paragraph 4.3 gegeben.

Wir wählen $\varrho_1 \in (0, 1)$, $m, p > 0$ mit

$$m = F_1(p) + pF_1'(p) \leq \frac{d^2(\varrho_1)}{2\varrho_1}, \quad (6.1)$$

und für $\varrho \in [0, \varrho_1]$ setzen wir

$$G(\varrho) := d^2(\varrho) - 2\varrho m. \quad (6.2)$$

Wir modifizieren Z_1 , indem wir die konvexe Funktion F_1 ändern. Dazu brauchen wir noch die folgende

Definition 6.1. Sei

$$\alpha : [p, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto \frac{6}{p^3}(s - p).$$

Falls $\beta_0 := p^2 F_1''(p) - 2m \leq 0$ ist, sei

$$\beta : [p, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto F_1''(p) - \frac{3\beta_0}{p^3}(s - p).$$

Falls $\beta_0 > 0$ ist, setzen wir $\beta_1 := \beta_0/m$, $\beta_2 := F_1''(p)p^{-\beta_1}$ und

$$\beta : [p, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto \begin{cases} \beta_2(2p - s)^{\beta_1}, & \text{falls } s \leq 2p, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schließlich definieren wir noch

$$\varphi : [0, \varrho_1] \times [p, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(\varrho, y) = G(\varrho)\alpha(y) + \varrho\beta(y). \quad (6.3)$$

Zunächst notieren wir die wichtigsten Eigenschaften von α und β .

Hilfssatz 6.2. (i) α und β sind stetig.

(ii) Es gilt

$$\alpha(p) = 0, \quad \int_p^{2p} \alpha(s)(2p - s)ds = 1, \quad \alpha([p, \infty)) \subset [0, \infty), \quad (6.4)$$

$$\beta(p) = F_1''(p), \quad \int_p^{2p} \beta(s)(2p - s)ds = m \quad \beta([p, \infty)) \subset [0, \infty). \quad (6.5)$$

(iii) Falls $\beta_0 > 0$ ist, so fällt β monoton.

(iv) $\varphi([0, \varrho_1] \times [p, \infty)) \subset [0, \infty)$.

Beweis. (i) und (iii) sind klar, und (ii) rechnet man einfach nach.
Zu (iv). Für $(\varrho, y) \in [0, \varrho_1] \times [p, \infty)$ ist

$$2\varrho m \leq 2\varrho_1 m \leq d^2(\varrho_1) \leq d^2(\varrho),$$

da d monoton fallend ist. Also ist $G(\varrho) \geq 0$. Da auch α und β nicht negativ sind, ist $\varphi(\varrho, y) \geq 0$. \square

Im folgenden werden wir bis auf eine Ausnahme die genaue Definition von α und β nicht mehr benötigen, sondern lediglich die Eigenschaften aus Hilfssatz 6.2.

Definition 6.3. Wir definieren $F : [0, \varrho_1] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$(\varrho, y) \mapsto \begin{cases} \varrho F_1(y), & \text{falls } y \in [0, p], \\ \varrho(F_1(p) + (y-p)F_1'(p)) + \int_p^y \varphi(\varrho, s)(y-s)ds, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.6)$$

Die wesentlichen Eigenschaften von F fassen wir zusammen in

Lemma 6.4. F ist zweimal stetig differenzierbar auf $[0, \varrho_1] \times [0, \infty)$. Ferner existiert $D_2^3 F$ auf $[0, \varrho_1] \times [0, p)$, und für jedes $\varrho \in [0, \varrho_1]$ ist $F(\varrho, \cdot)$ konvex, $F(\varrho, 0) = 0$, $D_2 F(\varrho, 0) = 0$ und $F(\varrho, \cdot)$ monoton wachsend. Außerdem gilt:

$$F(\varrho, 2p) = d^2(\varrho). \quad (6.7)$$

Beweis. Sei $(\varrho, y) \in [0, \varrho_1] \times \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gelten:

$$D_2 F(\varrho, y) = \begin{cases} \varrho F_1'(y), & \text{falls } 0 \leq y < p, \\ \varrho F_1'(p) + \int_p^y \varphi(\varrho, s)ds, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (6.8)$$

$$D_2^2 F(\varrho, y) = \begin{cases} \varrho F_1''(y), & \text{falls } 0 \leq y < p, \\ \varphi(\varrho, y), & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$D_1 F(\varrho, y) = \begin{cases} F_1(y), & \text{falls } 0 \leq y < p, \\ F_1(p) + (y-p)F_1'(p) + \int_p^y D_1 \varphi(\varrho, s)(y-s)ds, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (6.9)$$

$$D_1^2 F(\varrho, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq y < p, \\ \int_p^y D_1^2 \varphi(\varrho, s)(y-s)ds, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (6.10)$$

$$D_1 D_2 F(\varrho, y) = D_2 D_1 F(\varrho, y) = \begin{cases} F_1'(y), & \text{falls } 0 \leq y < p, \\ F_1'(p) + \int_p^y D_1 \varphi(\varrho, s)ds, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit ist F zweimal stetig partiell differenzierbar, also zweimal stetig differenzierbar. Falls $y < p$ ist, gilt

$$D_2^3(\varrho, y) = \varrho F_1^{(3)}(y). \quad (6.11)$$

Da $D_2^2 F(\varrho, y) \geq 0$ ist, ist $F(\varrho, \cdot)$ konvex. Wegen der entsprechenden Eigenschaften von F_1 ist $D_2 F(\varrho, 0) = 0 = F(\varrho, 0)$. Das impliziert zusammen mit der Konvexität von $F(\varrho, \cdot)$, dass $F(\varrho, \cdot)$ monoton wächst. Mit (6.1) – (6.5) gilt weiter:

$$\begin{aligned} F(\varrho, 2p) &= \varrho(F_1(p) + pF_1'(p)) + \int_p^{2p} \varphi(\varrho, s)(2p - s)ds \\ &= \varrho m + (d^2(\varrho) - 2\varrho m) \cdot 1 + \varrho m = d^2(\varrho). \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe von F können wir jetzt die modifizierten Mengen Z definieren:

Definition 6.5. Für $\varrho \in [0, \varrho_1]$ sei

$$Z(\varrho) := \{x \in X; |(\text{Id} - \Pi)x|^2 + F(\varrho, |\Pi x|) \leq d^2(\varrho)\}. \quad (6.12)$$

Außerdem setzen wir

$$d_1 := d(\varrho_1), \quad d_0 := d(0), \quad C := \sqrt{d_0^2 + 4p^2}, \quad c := \min\left(\frac{\sqrt{3}d_1}{2}, p\right). \quad (6.13)$$

Da d monoton fällt, gilt für alle $\varrho \in [0, \varrho_1]$:

$$d_1 \leq d(\varrho) \leq d_0. \quad (6.14)$$

Lemma 6.6. Für alle $\varrho \in [0, \varrho_1]$ gilt:

$$Z(\varrho) \cap \{x \in X; |\Pi x| \leq p\} = Z_1(\varrho) \cap \{x \in X; |\Pi x| \leq p\}, \quad (6.15)$$

$$|\Pi x| \leq 2p \quad \text{für alle } x \in Z(\varrho), \quad (6.16)$$

$$K(0, c) \subset Z(\varrho) \subset K(0, C). \quad (6.17)$$

Beweis. Wegen $F(\varrho, y) = \varrho F_1(y)$ für alle $y \in [0, p]$ gilt (6.15).

Sei $x \in K(0, c)$. Dann ist

$$|(\text{Id} - \Pi)(x)|^2 + |\Pi x|^2 = |x|^2 \leq \min\left(\frac{3d_1^2}{4}, p^2\right).$$

Nach Bemerkung 2.1 ist $F_1(p) \leq pF_1'(p)$. Da $F(\varrho, \cdot)$ monoton wächst, gilt mit (6.1)

$$F(\varrho, |\Pi x|) \leq F(\varrho, p) = \varrho F_1(p) \leq \frac{\varrho}{2}(F_1(p) + pF_1'(p)) \leq \frac{\varrho_1 d^2(\varrho_1)}{4\varrho_1} = \frac{d_1^2}{4}.$$

Es folgt

$$|(\text{Id} - \Pi)(x)|^2 + F(\varrho, |\Pi x|) \leq \frac{3d_1^2}{4} + \frac{d_1^2}{4} = d_1^2 \leq d^2(\varrho).$$

Sei $x \in Z(\varrho)$. Dann gilt

$$|(\text{Id} - \Pi)(x)|^2 + F(\varrho, |\Pi x|) \leq d^2(\varrho).$$

Da $F(\varrho, \cdot)$ monoton wächst, folgt mit (6.7), dass $|\Pi x| \leq 2p$ ist. Weil F nicht negativ und $d^2(\varrho) \leq d_0^2$ ist, gilt $|(\text{Id} - \Pi)(x)| \leq d_0$. Es folgt

$$|x| = \sqrt{|(\text{Id} - \Pi)(x)|^2 + |\Pi x|^2} \leq \sqrt{d_0^2 + 4p^2} = C.$$

□

Wir führen hier noch eine Hilfsfunktion ein, die später benötigt wird.

Definition 6.7. Sei

$$\psi : [0, \varrho_1] \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, (\varrho, y) \mapsto \frac{D_2 F(\varrho, y)}{y}. \quad (6.18)$$

Bemerkung 6.8. (i) Für jedes $r > 0$ ist ψ Lipschitz-stetig auf $[0, \varrho_1] \times (0, r]$.

(ii) Die Funktion ψ läßt sich stetig auf $[0, \varrho_1] \times [0, \infty)$ fortsetzen. Die Fortsetzung sei weiterhin mit ψ bezeichnet. Insbesondere gilt

$$\psi_0 := \sup\{\psi(\varrho, y); (\varrho, y) \in [0, \varrho_1] \times [0, 2p]\} < \infty \quad (6.19)$$

und

$$\psi(\varrho, 0) = \varrho F_1''(0) \quad \text{für alle } \varrho \in [0, \varrho_1]. \quad (6.20)$$

Beweis. Zu (i). Sei $r > 0$ und $(\varrho, y) \in (0, \varrho_1) \times (0, r]$, $y \leq p$. Dann ist

$$D_1 \psi(\varrho, y) = \frac{D_1 D_2 F(\varrho, y)}{y} = \frac{F_1'(y)}{y}.$$

Nach der Regel von L'Hospital gilt:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{F_1'(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{F_1''(z)}{1} = F_1''(0). \quad (6.21)$$

Also ist $D_1 \psi$ auf $(0, \varrho_1) \times (0, r]$ beschränkt. Ferner ist

$$D_2 \psi(\varrho, y) = \frac{D_2^2 F(\varrho, y)y - D_2 F(\varrho, y)}{y^2}.$$

Wegen $D_2F(\varrho, 0) = 0$ gilt wieder nach der Regel von L'Hospital

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 0} \frac{D_2^2 F(\varrho, z)z - D_2 F(\varrho, z)}{z^2} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{D_2^2 F(\varrho, z) + D_2^3 F(\varrho, z)z - D_2^2 F(\varrho, z)}{2z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{D_2^3 F(\varrho, z)}{2} = \frac{1}{2} \varrho F_1^{(3)}(0).\end{aligned}$$

Also ist $D_2\psi$ auf $(0, \varrho_1) \times (0, r]$ beschränkt. Folglich ist ψ auf $(0, \varrho_1) \times (0, r]$ Lipschitzstetig und lässt sich eindeutig Lipschitzstetig auf $[0, \varrho_1] \times [0, r]$ fortsetzen.

Zu (ii). Wegen (6.21) ist

$$\psi(\varrho, 0) = \lim_{(\sigma, y) \rightarrow (\varrho, 0)} \frac{D_2 F(\sigma, y)}{y} = \varrho F_1''(0)$$

für alle $\varrho \in [0, \varrho_1]$. (6.19) folgt direkt aus (i). □

7 Die Ableitung von M

Die Voraussetzungen seien gemäß 4.2 aus Paragraph 4.3 gegeben. Sei $\varrho \in [0, \varrho_1]$ (siehe (6.1)). Nach (6.12) ist

$$Z(\varrho) := \{x \in X; |(\text{Id} - \Pi)x|^2 + F(\varrho, |\Pi x|) \leq d^2(\varrho)\}.$$

Für $\varrho \in [0, \varrho_1]$ sei $M(\varrho, \cdot)$ das Minkowskifunktional der konvexen Menge $Z(\varrho)$, das heißt

$$M(\varrho, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \inf \left\{ s > 0; \frac{x}{s} \in Z(\varrho) \right\}. \quad (7.1)$$

Bemerkung 7.1. Wegen (6.17) gilt nach Lemma 2.15

$$\frac{1}{C}|x| \leq M(\varrho, x) \leq \frac{1}{c}|x| \quad (7.2)$$

für alle $(\varrho, x) \in [0, \varrho_1] \times X$ und damit

$$0 \leq \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \leq C \quad (7.3)$$

für alle $(\varrho, x) \in [0, \varrho_1] \times (X \setminus \{0\})$. Da F zweimal stetig differenzierbar ist, gibt es also $\alpha_1 > 0$ so, dass

$$\left| D_1^k D_2^l F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \right| \leq \alpha_1 \quad (7.4)$$

für alle $(k, l) \in \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ mit $k + l \leq 2$ und $(\varrho, x) \in [0, \varrho_1] \times (X \setminus \{0\})$ gilt.

Wir wollen die Ableitung des Minkowski-Funktional berechnen und führen dazu eine neue Größe ein:

Definition und Satz 7.2. Sei

$$L : [0, \varrho_1] \times (X \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}, (\varrho, x) \mapsto 2 \frac{|(\text{Id} - \Pi)x|^2}{M^2(\varrho, x)} + D_2 F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)}. \quad (7.5)$$

Für alle $(\varrho, x) \in [0, \varrho_1] \times (X \setminus \{0\})$ gilt

$$L(\varrho, x) \geq d^2(\varrho) \geq d^2(\varrho_1) = d_1^2. \quad (7.6)$$

Beweis. Sei $(\varrho, x) \in [0, \varrho_1] \times (X \setminus \{0\})$. Es ist $Z(\varrho) = f^{-1}((-\infty, 0])$ mit

$$f(x) := |(\text{Id} - \Pi)x|^2 + F(\varrho, |\Pi x|) - d^2(\varrho).$$

Dann gilt nach Lemma 3.1

$$\frac{|(\text{Id} - \Pi)x|^2}{M^2(\varrho, x)} + F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) = d^2(\varrho).$$

Da $F(\varrho, \cdot)$ konvex und $F(\varrho, 0) = 0$ ist, gilt mit Bemerkung 2.1

$$F(\varrho, y) \leq yD_2F(\varrho, y)$$

für alle $(\varrho, y) \in [0, \varrho_1] \times \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wegen (6.14), und da d monoton fällt, ist

$$L(\varrho, x) \geq d^2(\varrho) \geq d^2(\varrho_1) = d_1^2.$$

□

Bemerkung 7.3. (i) Die orthogonale Projektion $\Pi : X \rightarrow V$ ist selbstadjungiert bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$, womit auch $\text{Id} - \Pi$ selbstadjungiert ist.

(ii) Insbesondere gilt

$$\langle \Pi x, y \rangle = \langle \Pi^2 x, y \rangle = \langle \Pi x, \Pi y \rangle \quad \text{und} \quad (7.7)$$

$$\langle (\text{Id} - \Pi)x, y \rangle = \langle (\text{Id} - \Pi)^2 x, y \rangle = \langle (\text{Id} - \Pi)x, (\text{Id} - \Pi)y \rangle \quad (7.8)$$

für alle $x, y \in X$.

(iii) Im folgenden werden wir ein Element aus X' nach Möglichkeit immer über den kanonischen Isomorphismus $X \rightarrow X'$, $x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$ mit dem zugehörigen Urbild aus X identifizieren.

Wir wenden jetzt das Ergebnis aus Abschnitt 3 an, um die Ableitung von M zu berechnen:

Lemma 7.4. M ist stetig differenzierbar auf $(0, \varrho_1) \times (X \setminus \{0\})$, und es gilt für alle $(\varrho, x) \in (0, \varrho_1) \times (X \setminus \{0\})$:

$$D_1M(\varrho, x) = \frac{M(\varrho, x)}{L(\varrho, x)} \left(D_1F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) - 2d(\varrho)d'(\varrho) \right) \quad (7.9)$$

uneingeschränkt,

$$D_2M(\varrho, x) = \frac{1}{M(\varrho, x)L(\varrho, x)} \left(2(\text{Id} - \Pi)x + D_2F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \frac{M(\varrho, x)}{|\Pi x|} \Pi x \right), \quad (7.10)$$

falls $\Pi x \neq 0$ ist, und

$$D_2M(\varrho, x) = \frac{1}{M(\varrho, x)L(\varrho, x)} 2(\text{Id} - \Pi)x, \quad (7.11)$$

falls $\Pi x = 0$ ist.

Beweis. Wir wenden Abschnitt 3 an mit $I := (0, \varrho_1)$,

$$H : I \times X \rightarrow \mathbb{R}, (\varrho, x) \mapsto |(\text{Id} - \Pi)x|^2 + F(\varrho, |\Pi x|) - d^2(\varrho).$$

Sei $\varrho \in I$. Dann ist $H(\varrho, \cdot)$ konvex, $H(\varrho, 0) < 0$ und $Z(\varrho)$ nach (6.17) beschränkt. Ebenfalls nach (6.17) ist $K(0, c) \subset Z(\varrho)$. Sei $U := (0, \varrho_1) \times X$. Wir müssen noch zeigen, dass H stetig differenzierbar auf U ist: Da

$$(\varrho, x) \mapsto |(\text{Id} - \Pi)x|^2 - d^2(\varrho)$$

offensichtlich stetig differenzierbar ist, genügt es zu beweisen, dass

$$k : U \rightarrow \mathbb{R}, (\varrho, x) \mapsto F(\varrho, |\Pi x|)$$

stetig differenzierbar auf U ist. Sei $(\varrho, x) \in U$. Es ist

$$D_1 k(\varrho, x) = D_1 F(\varrho, |\Pi x|). \quad (7.12)$$

Ist $\Pi x \neq 0$, so gilt

$$D_2 k(\varrho, x) = D_2 F(\varrho, |\Pi x|) \frac{\Pi x}{|\Pi x|}. \quad (7.13)$$

Sei $\Pi x = 0$ und $h \in X \setminus \{0\}$. Wegen $F(\varrho, 0) = 0$ ist dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{|h|} |k(\varrho, x+h) - k(\varrho, x) - \langle 0, h \rangle| &= \frac{F(\varrho, |\Pi h|)}{|h|} \leq \frac{|\Pi h| D_2 F(\varrho, |\Pi h|)}{|h|} \\ &\leq D_2 F(\varrho, |\Pi h|), \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Ungleichung nach Bemerkung 2.1 gilt. Wegen

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_2 F(\varrho, y) = D_2 F(\varrho, 0) = 0$$

ist k im Punkt (ϱ, x) nach der zweiten Variablen differenzierbar mit $D_2 k(\varrho, x) = 0$. Aus

$$\lim_{(\sigma, y) \rightarrow (\varrho, x)} D_2 F(\sigma, |\Pi y|) \frac{\Pi y}{|\Pi y|} = 0$$

folgt die Stetigkeit von $D_2 k$. Da $D_1 k$ ebenfalls stetig ist, ist k und somit auch H stetig differenzierbar mit

$$D_1 H(\varrho, x) = D_1 F(\varrho, |\Pi x|) - 2d(\varrho)d'(\varrho), \quad (7.14)$$

$$D_2 H(\varrho, x) = \begin{cases} 2(\text{Id} - \Pi)x + D_2 F(\varrho, |\Pi x|) \frac{\Pi x}{|\Pi x|}, & \text{falls } \Pi x \neq 0, \\ 2(\text{Id} - \Pi)x, & \text{falls } \Pi x = 0, \end{cases} \quad (7.15)$$

für alle $(\varrho, x) \in U$.

Sei $(\varrho, x) \in U$, $x \neq 0$. Ist $\Pi x = 0$, so ist

$$\begin{aligned} D_2H \left(\varrho, \frac{x}{M(\varrho, x)} \right) \frac{x}{M(\varrho, x)} &= \left\langle 2(\text{Id} - \Pi) \left(\frac{x}{M(\varrho, x)} \right), \frac{x}{M(\varrho, x)} \right\rangle \\ &= 2 \frac{|(\text{Id} - \Pi)x|^2}{M^2(\varrho, x)} = L(\varrho, x) \end{aligned} \quad (7.16)$$

nach Bemerkung 7.3 (ii),(iii) und (7.15). Ist $\Pi x \neq 0$, so gilt

$$\begin{aligned} D_2H \left(\varrho, \frac{x}{M(\varrho, x)} \right) \frac{x}{M(\varrho, x)} &= 2 \frac{|(\text{Id} - \Pi)x|^2}{M^2(\varrho, x)} + D_2F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \\ &= L(\varrho, x). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Mit (7.6) ist in beiden Fällen

$$D_2H \left(\varrho, \frac{x}{M(\varrho, x)} \right) \frac{x}{M(\varrho, x)} > 0.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 3.3 erfüllt. Also ist M stetig differenzierbar auf $(0, \varrho_1) \times (X \setminus \{0\})$, und mit (3.4), (3.5), (7.14) bis (7.17) gelten die Formeln (7.9) bis (7.11). \square

Folgerung 7.5. *Es gibt $m_1, m_2 > 0$ so, dass*

$$|D_1M(\varrho, x)| \leq m_1|x| \quad \text{und} \quad |D_2M(\varrho, x)| \leq m_2, \quad (7.18)$$

für alle $(\varrho, x) \in (0, \varrho_1) \times (X \setminus \{0\})$ ist.

Beweis. Sei $(\varrho, x) \in (0, \varrho_1) \times (X \setminus \{0\})$. Dann gilt mit (7.2), (7.4), (7.6), (7.9) und, da d stetig differenzierbar ist,

$$|D_1M(\varrho, x)| \leq \frac{|x|}{d_1^2 c} \left(\alpha_1 + 2 \max_{\sigma \in [0, \varrho_1]} d(\sigma) d'(\sigma) \right) =: m_1|x|$$

und zusätzlich mit (7.10) und (7.11)

$$|D_2M(\varrho, x)| \leq \frac{C}{|x|d_1^2} \left(2|x| + \alpha_1 \frac{|x|}{c} \right) =: m_2.$$

\square

Jetzt können wir die Ableitung von M^2 berechnen.

Lemma 7.6. $\frac{1}{2}M^2$ ist auf $(0, \varrho_1) \times X$ differenzierbar und für alle $(\varrho, x) \in (0, \varrho_1) \times X$ gilt:

$$\begin{aligned} K(\varrho, x) &:= D_1(M^2/2)(\varrho, x) & (7.19) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ \frac{M^2(\varrho, x)}{L(\varrho, x)} \left(D_1F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) - 2d(\varrho)d'(\varrho) \right), & \text{falls } x \neq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(\varrho, x) &:= D_2(M^2/2)(\varrho, x) & (7.20) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ \frac{1}{L(\varrho, x)} \left(2(\text{Id} - \Pi)x + D_2F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \frac{M(\varrho, x)}{|\Pi x|} \Pi x \right), & \text{falls } \Pi x \neq 0, \\ \frac{1}{L(\varrho, x)} 2(\text{Id} - \Pi)x, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Beweis. Sei $(\varrho, x) \in (0, \varrho_1) \times X$. Ist $x \neq 0$, so ist $\frac{1}{2}M^2$ nach der Kettenregel differenzierbar, und es gelten die behaupteten Formeln für J und K nach Lemma 7.4. Es bleibt der Fall $x = 0$. Für $(\sigma, h) \in (\mathbb{R} \times X) \setminus \{(0, 0)\}$ mit $\varrho + \sigma \in (0, \varrho_1)$ gilt mit (7.2)

$$\frac{|M^2(\varrho + \sigma, h) - M^2(\varrho, 0) - 0 \cdot (\sigma, h)|}{|\sigma| + |h|} = \frac{|M^2(\varrho + \sigma, h)|}{|\sigma| + |h|} \leq \frac{|h|^2}{c^2(|\sigma| + |h|)} \leq \frac{|h|}{c^2}.$$

Also ist $M^2/2$ differenzierbar in $(\varrho, 0)$ mit $D(M^2/2)(\varrho, 0) = 0$. \square

Bemerkung 7.7. K und J sind stetig.

Beweis. Da M stetig differenzierbar auf $(0, \varrho_1) \times (X \setminus \{0\})$ ist, sind K und J dort stetig. Sei $\varrho \in (0, \varrho_1)$. Die Funktion

$$(\varrho, x) \mapsto \frac{1}{L(\varrho, x)} \left(D_1F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) - 2d(\varrho)d'(\varrho) \right)$$

ist in einer Umgebung von $(\varrho, 0)$ beschränkt, und es gilt $M(\varrho, x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$ unabhängig von ϱ . Folglich ist K stetig in $(\varrho, 0)$. Ebenso sind $1/L$ und

$$(\varrho, x) \mapsto D_2F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \frac{M(\varrho, x)}{|\Pi x|} \Pi x = \psi \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \Pi x$$

in einer Umgebung von $(\varrho, 0)$ beschränkt, und es gilt $(\text{Id} - \Pi)x \rightarrow 0$, $M(\varrho, x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$ unabhängig von ϱ . Somit ist auch J in $(\varrho, 0)$ stetig. \square

Lemma 7.8. L ist differenzierbar auf $U := (0, \varrho_1) \times \{x \in X; \Pi x \neq 0\}$, und es gibt Konstanten $l_1, l_2 > 0$ so, dass

$$|D_1L(\varrho, x)| \leq l_1 \quad (7.21)$$

und

$$|D_2L(\varrho, x)| \leq \frac{l_2}{|x|} \quad (7.22)$$

für alle $(\varrho, x) \in U$ ist.

Beweis. Sei $(\varrho, x) \in U$. Dann gilt

$$\begin{aligned} D_1 L(\varrho, x) &= -4|(\text{Id} - \Pi)x|^2 \frac{D_1 M(\varrho, x)}{M^3(\varrho, x)} - D_2 F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \frac{|\Pi x| D_1 M(\varrho, x)}{M^2(\varrho, x)} \\ &\quad + \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \left[D_1 D_2 F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \right. \\ &\quad \left. - D_2^2 F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \frac{|\Pi x| D_1 M(\varrho, x)}{M^2(\varrho, x)} \right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D_2 L(\varrho, x) &= 2 \frac{2M^2(\varrho, x)(\text{Id} - \Pi)x - 2|(\text{Id} - \Pi)x|^2 J(\varrho, x)}{M^4(\varrho, x)} \\ &\quad + \left(D_2^2 F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \frac{\Pi x}{M(\varrho, x)} + D_2 F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \right) N(\varrho, x), \end{aligned}$$

wobei

$$N(\varrho, x) := \frac{M(\varrho, x)\Pi x - |\Pi x|^2 D_2 M(\varrho, x)}{|\Pi x| M^2(\varrho, x)} \quad (7.23)$$

die Ableitung der Funktion $(\varrho, x) \mapsto |\Pi x|/M(\varrho, x)$ nach der zweiten Variablen ist. Wegen (7.2) und (7.18) gilt

$$|N(\varrho, x)| \leq \frac{C}{|x|} + \frac{m_2 C^2}{|x|} =: \frac{\alpha_2}{|x|}. \quad (7.24)$$

Jetzt können wir $D_1 L$ und $D_2 L$ abschätzen: Mit (7.2), (7.4) und (7.18) gilt

$$|D_1 L(\varrho, x)| \leq 4C^3 m_1 + C(\alpha_1 + \alpha_1 m_1 C^2) + \alpha_1 m_1 C^2 =: l_1,$$

und mit (7.2), (7.4) und (7.24) gilt

$$|D_2 L(\varrho, x)| \leq \frac{4C^2}{|x|} + \frac{4C^3 m_2}{|x|} + \frac{\alpha_2}{|x|} \alpha(C + 1) =: \frac{l_2}{|x|}.$$

□

Lemma 7.9. J und K sind für jedes $r > 0$ Lipschitz-stetig auf $(0, \varrho_1) \times K(0, r)$.

Beweis. Sei $(\varrho, x) \in U := (0, \varrho_1) \times \{x \in X; \Pi x \neq 0\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} D_1 K(\varrho, x) &= \frac{2K(\varrho, x)L(\varrho, x) - M^2(\varrho, x)D_1 L(\varrho, x)}{L^2(\varrho, x)} \\ &\quad \cdot \left(D_1 F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) - 2d(\varrho)d'(\varrho) \right) \\ &\quad + \frac{M^2(\varrho, x)}{L(\varrho, x)} \left[D_1^2 F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \right. \\ &\quad \left. - D_2 D_1 F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \frac{|\Pi x| D_1 M(\varrho, x)}{M^2(\varrho, x)} - 2(d'(\varrho))^2 + d(\varrho)d''(\varrho) \right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
D_2K(\varrho, x) &= \frac{2L(\varrho, x)J(\varrho, x) - M^2(\varrho, x)D_2L(\varrho, x)}{L^2(\varrho, x)} \\
&\quad \cdot \left(D_1F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) - 2d(\varrho)d'(\varrho) \right) \\
&\quad + \frac{M^2(\varrho, x)}{L(\varrho, x)} D_2D_1F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) N(\varrho, x).
\end{aligned}$$

Zur Definition von N siehe (7.23). Sei

$$\alpha_3 := \sup_{\sigma \in [0, \varrho_1]} \max\{|d(\sigma)d'(\sigma)|, d'(\sigma)^2, |d(\sigma)d''(\sigma)|\} < \infty. \quad (7.25)$$

Unter Benutzung von (7.2), (7.4), (7.18), (7.21) schätzen wir ab:

$$|D_1K(\varrho, x)| \leq \left(\frac{2m_1|x|^2}{cd_1^2} + \frac{l_1|x|^2}{c^2d_1^4} \right) (\alpha_1 + 2\alpha_3) + \frac{|x|^2}{c^2d_1^2} (\alpha_1 + \alpha_1m_1C^2 + 4\alpha_3) =: k_1|x|^2.$$

Mit (7.2), (7.4), (7.18), (7.22) und (7.24) erhalten wir

$$|D_2K(\varrho, x)| \leq \left(\frac{2m_2|x|}{cd_1^2} + \frac{l_2|x|}{c^2d_1^4} \right) (\alpha_1 + 2\alpha_3) + \frac{\alpha_1\alpha_2|x|}{c^2d_1^2} =: k_2|x|. \quad (7.26)$$

Wir berechnen DJ :

$$\begin{aligned}
D_1J(\varrho, x) &= \frac{1}{L(\varrho, x)} \left\{ \left[D_1D_2F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) - D_2^2F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \frac{|\Pi x|D_1M(\varrho, x)}{M^2(\varrho, x)} \right] \right. \\
&\quad \cdot \left. \frac{M(\varrho, x)\Pi x}{|\Pi x|} + D_2F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \frac{D_1M(\varrho, x)\Pi x}{|\Pi x|} \right\} \\
&\quad - \frac{D_1L(\varrho, x)}{L^2(\varrho, x)} \left[2(\text{Id} - \Pi)x + D_2F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \frac{M(\varrho, x)}{|\Pi x|} \Pi x \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2J(\varrho, x) &= \frac{1}{L(\varrho, x)} \left[2(\text{Id} - \Pi) + D_2^2F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) N(\varrho, x) \frac{M(\varrho, x)\Pi x}{|\Pi x|} \right. \\
&\quad \left. + D_2F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \frac{1}{|\Pi x|^2} \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(|\Pi x|(\Pi x D_2M(\varrho, x) + M(\varrho, x)\Pi) - M(\varrho, x)\Pi x \frac{\langle \Pi x, \cdot \rangle}{|\Pi x|} \right) \right] \\
&\quad - \frac{D_2L(\varrho, x)}{L^2(\varrho, x)} \left(2(\text{Id} - \Pi)x + D_2F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \frac{M(\varrho, x)}{|\Pi x|} \Pi x \right).
\end{aligned}$$

Mit (7.2), (7.4), (7.18), (7.21) schätzen wir ab:

$$|D_1 J(\varrho, x)| \leq \frac{1}{d_1^2} \left(\frac{\alpha_1 |x|}{c} + m_1 \alpha_1 C |x| + \alpha_1 m_1 |x| \right) + \frac{l_1}{d_1^4} \left(2|x| + \frac{\alpha_1 |x|}{c} \right) =: j_1 |x|.$$

Mit (6.16) und nach Bemerkung 6.8 (ii) ist

$$\left| D_2 F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \frac{M(\varrho, x)}{|\Pi x|} \right| \leq \psi_0.$$

Also gilt mit (7.2), (7.4), (7.18), (7.22) und (7.24)

$$|D_2 J(\varrho, x)| \leq \frac{1}{d_1^2} \left(2 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{c} + \alpha_1 (m_2 + \psi_0 + \psi_0) \right) + \frac{l_2}{d_1^4} \left(2 + \frac{\alpha_1}{c} \right) =: j_2.$$

Aus diesen Abschätzungen für die Ableitungen von K und J kann man ablesen, dass K und J für jedes $r > 0$ auf $U \cap ([0, \varrho_1] \times K(0, r))$ beschränkte Ableitungen haben, also dort Lipschitz-stetig sind. Da $[0, \varrho_1] \times K(0, r) \subset \overline{U} \cap ([0, \varrho_1] \times \overline{K(0, r)})$ ist, besitzen K und J Lipschitz-stetige Fortsetzungen auf $[0, \varrho_1] \times K(0, r)$ und diese stimmen auf $(0, \varrho_1) \times K(0, r)$ wegen der Stetigkeit von K und J dort mit K und J überein. \square

Definition 7.10. Wir bezeichnen die Lipschitz-stetigen Fortsetzungen von K und J auf $[0, \varrho_1] \times K(0, C)$ weiterhin mit denselben Buchstaben. Es seien $C_J, C_K > 0$ die zugehörigen Lipschitzkonstanten, das heißt:

$$|J(\varrho, x) - J(\varrho', x')| \leq C_J (|\varrho - \varrho'| + |x - x'|), \quad (7.27)$$

$$|K(\varrho, x) - K(\varrho', x')| \leq C_K (|\varrho - \varrho'| + |x - x'|) \quad (7.28)$$

für alle $(\varrho, x), (\varrho', x') \in [0, \varrho_1] \times K(0, C)$.

An dieser Stelle schätzen wir K selbst möglichst genau ab:

Lemma 7.11. Für alle $\varrho \in [0, \varrho_1]$, $x \in Z(\varrho)$ gilt:

$$0 \leq K(\varrho, x) \leq \max_{\sigma \in [0, \varrho_1]} \left(\frac{2}{d^2(\sigma)} (m + d(\sigma) |d'(\sigma)|) \right) =: K_0. \quad (7.29)$$

Beweis. Sei $\varrho \in [0, \varrho_1]$ und $x \in Z(\varrho)$. Wegen $K(\varrho, 0) = 0$ können wir $x \neq 0$ voraussetzen. Es ist $x/M(\varrho, x) \in Z(\varrho)$. Mit (6.16) ist dann $|y| \leq 2p$ für $y := \Pi x/M(\varrho, x)$. Sei zunächst $y \in [0, p]$. Wegen $d'(\varrho) \leq 0$ und $L(\varrho, x) \geq d(\varrho)$ ist $K(\varrho, x) \geq 0$. Mit (6.1) folgt

$$K(\varrho, x) = \frac{M^2(\varrho, x)}{L(\varrho, x)} (F_1(y) - 2d(\varrho)d'(\varrho)) \leq K_0.$$

Sei jetzt $y \in [p, 2p]$. Wegen (6.2) und (6.9) gilt dann

$$K(\varrho, x) = \frac{M^2(\varrho, x)}{L(\varrho, x)} \left(2d(\varrho)|d'(\varrho)| \left(1 - \int_p^y \alpha(s)(y-s)ds \right) + r(y) \right) \quad (7.30)$$

mit

$$r(z) := F_1(p) + (z-p)F_1'(p) - 2m \int_p^z \alpha(s)(z-s)ds + \int_p^z \beta(s)(z-s)ds$$

für jedes $z \in [p, 2p]$. Mit Hilfssatz 6.2 ist $r(p) = F_1(p)$, $r(2p) = 0$, $r'(p) = F_1'(p) > 0$ und $r''(y) = \beta(y) - 2m\alpha(y)$. Bei der Definition von β (siehe 6.1) wurden zwei Fälle unterschieden:

Falls $\beta_0 = p^2 F_1''(p) - 2m \leq 0$ ist, gilt

$$r''(y) = \frac{3}{p^3}(y-p)(-\beta_0 - 4m) + F_1''(p).$$

Da $-\beta_0 - 4m$ negativ ist, fällt r'' monoton. Falls $\beta_0 > 0$ ist, fällt β monoton nach Hilfssatz 6.2. Da α offensichtlich monoton wächst, ist insgesamt r'' auch in diesem Fall eine monoton fallende Funktion.

Wir zeigen jetzt, dass $0 \leq r(y) \leq 2m$ für alle $y \in [p, 2p]$ gilt. Dann sind wir mit (7.30) und wegen $0 \leq \int_p^y \alpha(s)(y-s)ds \leq 1$ fertig.

Wegen $\alpha, \beta \geq 0$ und mit (6.5) folgt $r(y) \leq F_1(p) + pF_1'(p) + m = 2m$. Angenommen, es gibt $y_0 \in (p, 2p)$ mit $r(y_0) < 0$. Wegen $r(p), r'(p) > 0$, $r(2p) = 0$ gibt es dann $y_1, y_2 \in (p, 2p)$ mit $y_1 < y_2$ und $r'(y_1) = 0 = r'(y_2)$. Also findet man $y_3 \in (y_1, y_2)$ mit $r''(y_3) = 0$. Da r'' monoton fällt, ist r'' in $[p, y_3]$ nicht negativ, das heißt r' ist dort monoton wachsend, im Widerspruch zu $r'(p) > 0$, $r'(y_1) = 0$. \square

Definition 7.12. Wir definieren

$$S : [0, \varrho_1] \times \{x \in X; \Pi x \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(\varrho, x) = \frac{1}{L(\varrho, x)} D_2 F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \frac{M(\varrho, x)}{|\Pi x|}.$$

Lemma 7.13. (i) S lässt sich stetig auf $[0, \varrho_1] \times (X \setminus \{0\})$ fortsetzen.

(ii) S ist Lipschitz-stetig auf $W := (0, \varrho_1) \times \{x \in X; \Pi x \neq 0, c \leq |x| \leq C\}$.

Beweis. (i) Nach Bemerkung 6.8 (ii) ist

$$(\varrho, x) \rightarrow \frac{1}{L(\varrho, x)} \psi \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right)$$

die stetige Fortsetzung von S auf $[0, \varrho_1] \times (X \setminus \{0\})$.

(ii) Wir werden zeigen, dass $1/L$ und SL Lipschitz-stetig auf W sind. Dann sind $1/L$ und SL auf der beschränkten Menge W beschränkt und somit S selbst als Produkt von $1/L$ und SL Lipschitz-stetig auf W .

Nach Lemma 7.8 ist die Ableitung von L auf der beschränkten Menge W beschränkt, und wegen $1/L \geq d_1^2$ ist die Ableitung von $1/L$ beschränkt und damit $1/L$ Lipschitz-stetig auf W . Jetzt zeigen wir, dass

$$h : W \rightarrow \mathbb{R}, (\varrho, x) \mapsto \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \quad (7.31)$$

Lipschitz-stetig ist. Dann ist SL mit Bemerkung 6.8 (i) als Hintereinanderausführung der Lipschitz-stetigen Funktionen $(\varrho, x) \mapsto (\varrho, h(\varrho, x))$ und ψ Lipschitz-stetig auf W . Sei $(\varrho, x) \in W$. Mit (7.2) und (7.18) gilt dann:

$$|D_1 h(\varrho, x)| = |\Pi x| \frac{|D_1 M(\varrho, x)|}{M^2(\varrho, x)} \leq m_1 C^2.$$

Also ist $D_1 h$ beschränkt auf W . Mit (7.23) und (7.24) gilt weiter

$$|D_2 h(\varrho, x)| = |N(\varrho, x)| \leq \frac{\alpha_2}{|x|}.$$

Das bedeutet, dass auch $D_2 h$ auf W beschränkt ist, und damit auch Dh . Also ist h Lipschitz-stetig auf W . \square

Folgerung und Definition 7.14. Die stetige Fortsetzung von S auf $[0, \varrho_1] \times (X \setminus \{0\})$ sei weiterhin mit S bezeichnet. S ist Lipschitz-stetig auf $[0, \varrho_1] \times (K(0, C) \setminus B(0, c))$ nach Lemma 7.13. Es sei $C_S > 0$ die Lipschitzkonstante, das heißt, es gilt

$$|S(\varrho, x) - S(\sigma, y)| \leq C_S(|\varrho - \sigma| + |x - y|) \quad (7.32)$$

für alle $(\varrho, x), (\sigma, y) \in [0, \varrho_1] \times (K(0, C) \setminus B(0, c))$.

Wir vermerken noch zwei Eigenschaften von S :

Bemerkung 7.15. Für alle $(\varrho, x) \in [0, \varrho_1] \times (X \setminus \{0\})$ gilt

$$\Pi J(\varrho, x) = S(\varrho, x) \Pi x \quad (7.33)$$

und

$$0 \leq S(\varrho, x) \leq \frac{\psi_0}{d_1^2} \quad (7.34)$$

(zur Definition von ψ_0 siehe (6.19)).

Beweis. Sei $(\varrho, x) \in [0, \varrho_1] \times (X \setminus \{0\})$ und zunächst $\Pi x \neq 0$. Da Π linear und $\Pi^2 = \Pi$ ist, gilt

$$\begin{aligned} \Pi J(\varrho, x) &= \Pi \left(\frac{1}{L(\varrho, x)} \left(2(\text{Id} - \Pi)x + D_2 F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \frac{M(\varrho, x)}{|\Pi x|} \Pi x \right) \right) \\ &= \frac{1}{L(\varrho, x)} \left(2(\Pi x - \Pi^2 x) + D_2 F \left(\varrho, \frac{|\Pi x|}{M(\varrho, x)} \right) \frac{M(\varrho, x)}{|\Pi x|} \Pi^2 x \right) \\ &= S(\varrho, x) \Pi x. \end{aligned}$$

Ist $\Pi x = 0$, so gilt

$$\Pi J(\varrho, x) = 0 = S(\varrho, x)\Pi x.$$

Beweis von (7.34): Es ist $D_2 F(\varrho, y) \geq 0$ für alle $y \geq 0$. Da $L \geq 1/d_1^2$ gilt, ist $S \geq 0$. Mit (6.16), (7.6) und Bemerkung 6.8 (ii) folgt die rechte Ungleichung. \square

8 Das zustandsunabhängige Problem

Im gesamten Abschnitt setzen wir 4.2 aus Abschnitt 4.3 voraus. Seien $u \in W^{1,1}(0, T; X)$, $r \in W^{1,1}(0, T; [0, \varrho_1])$ und ein Anfangswert $x_0 \in Z(r(0))$ gegeben. Gesucht ist eine Lösung $\xi \in W^{1,1}(0, T; X)$ des folgenden Problems:

- (**P**) (i) $x(t) := u(t) - \xi(t) \in Z(r(t))$ für alle $t \in [0, T]$,
(ii) $\xi(0) = u(0) - x_0$,
(iii) $\langle \dot{\xi}(t), x(t) - y \rangle \geq 0$ für fast alle $t \in [0, T]$ und für alle $y \in Z(r(t))$.

Bemerkung 8.1. Analog zu Bemerkung 4.3 aus Paragraph 4.3 ist Problem (**P**) äquivalent zu einem zustandsunabhängigen Sweeping-Prozess (**SP**) aus der Einführung mit

$$C(t) := u(t) - Z(r(t)), \quad \xi_0 = u(0) - x_0.$$

Satz 8.2. Das Problem (**P**) hat eine eindeutige Lösung.

Beweis. Wegen (6.17), Definition 7.10 und (7.29) sind die Voraussetzungen von Lemma 5.1 aus [BKS] erfüllt, das heißt die Abbildung $\varrho \mapsto Z(\varrho)$ ist Lipschitz-stetig bezüglich der Hausdorffmetrik mit einer Lipschitzkonstante $L_Z > 0$. Also gilt

$$d_H(C(s), C(t)) \leq |u(s) - u(t)| + L_Z|r(s) - r(t)| \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Da u und r absolutstetig sind, hat Problem (**P**) als zustandsunabhängiger Sweeping-Prozess nach Proposition 3c in [Mo] genau eine Lösung. \square

Generalvoraussetzung 8.3. In diesem Abschnitt seien $r, s \in W^{1,1}(0, T; [0, \varrho_1])$ mit $r([0, T]), s([0, T]) \subset (0, \varrho_1)$; $u, v \in W^{1,1}(0, T; X)$ und Anfangswerte $x_0 \in Z(r(0))$, $y_0 \in Z(s(0))$ gegeben.

Ferner sei mit $\xi \in W^{1,1}(0, T; X)$, beziehungsweise $\eta \in W^{1,1}(0, T; X)$ immer die eindeutige Lösung des Problems (**P**) zu r, u, x_0 , beziehungsweise s, v, y_0 bezeichnet, und es sei $x := u - \xi$ und $y := v - \eta$.

Das nun folgende Lemma wurde in [BKS] als Lemma 5.1 bewiesen:

Lemma 8.4. Für jedes $t \in (0, T)$ setzen wir, sofern die vorkommenden Ableitungen existieren,

$$A[r, u](t) := \langle J(r(t), x(t)), \dot{\xi}(t) \rangle, \quad (8.1)$$

$$B[r, u](t) := \frac{1}{2}M^2(r(t), x(t)), \quad (8.2)$$

$$G[r, u](t) := \langle J(r(t), x(t)), \dot{u}(t) \rangle + K(r(t), x(t))\dot{r}(t). \quad (8.3)$$

Sei $L \subset (0, T)$ die Menge der Punkte, für die A, B und G definiert sind. Dann hat L volles Maß in $[0, T]$ und für alle $t \in L$ gilt entweder

(i) $\dot{\xi}(t) = 0$, $\frac{d}{dt}B[r, u](t) = G[r, u](t)$ oder

(ii) $\dot{\xi}(t) \neq 0$, $x(t) \in \partial Z(r(t))$, $A[r, u](t) = G[r, u](t) > 0$,

$$B[r, u](t) = \max_{s \in [0, T]} B[r, u](s) = \frac{1}{2}, \quad \frac{d}{dt}B[r, u](t) = 0, \quad |J(r(t), x(t))| \geq \frac{1}{C}$$

und

$$\dot{\xi}(t) = \frac{A[r, u](t)}{|J(r(t), x(t))|^2} J(r(t), x(t)). \quad (8.4)$$

Beweis. Als absolutstetige Funktionen sind u, r, ξ fast überall differenzierbar. Da M^2 auf $(0, \varrho_1) \times X$ differenzierbar ist, ist auch $M^2 \circ (r, u)$ fast überall differenzierbar. Da L die Menge der Punkte ist, in denen u, r, ξ und $B[r, u]$ differenzierbar sind, hat L volles Maß in $[0, T]$. Sei $t \in L$. Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{d}{dt}B[r, u](t) = \langle J(r(t), x(t)), \dot{x}(t) \rangle + K(r(t), x(t))\dot{r}(t).$$

Sei zunächst $\dot{\xi}(t) = 0$. Wegen $\dot{x}(t) = \dot{u}(t)$ folgt die Behauptung.

Sei nun $\dot{\xi}(t) \neq 0$. Dann ist $x(t) \in \partial Z(r(t))$ und deswegen

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}M^2(r(t), x(t)) = \max_{s \in [0, T]} B[r, u](s)$$

nach Lemma 2.11. Insbesondere ist $\frac{d}{dt}B[r, u](t) = 0$ und damit

$$\begin{aligned} G[r, u](t) &= \langle J(r(t), x(t)), \dot{u}(t) \rangle + K(r(t), x(t))\dot{r}(t) = \langle J(r(t), x(t)), \dot{u}(t) - \dot{x}(t) \rangle \\ &= A[r, u](t). \end{aligned}$$

Bezeichnet $n(r(t), x(t))$ den äußeren Normaleneinheitsvektor an $Z(r(t))$ im Punkt $x(t)$, so gibt es wegen (iii) von **(P)** ein $k > 0$ mit

$$\dot{\xi}(t) = k n(r(t), x(t)).$$

Also ist

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \langle \dot{\xi}(t), n(r(t), x(t)) \rangle n(r(t), x(t)) = \langle \dot{\xi}(t), J(r(t), x(t)) \rangle \frac{J(r(t), x(t))}{|J(r(t), x(t))|^2} \\ &= \frac{A[r, u](t)}{|J(r(t), x(t))|^2} J(r(t), x(t)) \end{aligned}$$

nach Lemma 2.15 (ii). Mit (2.9), (2.10) und (2.12) gilt schließlich:

$$1 = M(r(t), x(t)) = M_{Z(r(t))^*}(J(r(t), x(t))) \leq C|J(r(t), x(t))|.$$

□

Definition 8.5. Ist $f : [0, T] \rightarrow X$ eine Funktion, so setzen wir für jede Teilmenge $A \subset [0, T]$:

$$\|f\|_A := \|f|_A\|_\infty. \quad (8.5)$$

Falls f unbeschränkt auf $[0, T]$ ist, kann $\|f\|_A = \infty$ sein.

Lemma 8.6. Die Voraussetzungen seien gemäß 8.3 gegeben, und es gebe $T^* \in (0, T]$ und $R \in (0, p]$ mit

$$|\Pi x_0| + \|\Pi(u - u(0))\|_{[0, T^*]} < \frac{R}{2}. \quad (8.6)$$

Dann gilt

$$\|\Pi(\xi - \xi(0))\|_{[0, T^*]} \leq |\Pi x_0| + \|\Pi(u - u(0))\|_{[0, T^*]} \quad \text{und} \quad \|\Pi x\|_{[0, T^*]} < R. \quad (8.7)$$

Beweis. Sei

$$t_0 := \max\{s \in [0, T^*]; |\Pi x(t)| \leq R \text{ für alle } t \in [0, s]\}.$$

Wir definieren $\mu : [0, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\mu(t) := \begin{cases} \frac{A[r, u](t)}{|J(r(t), x(t))|^2} S(r(t), x(t)), & \text{falls } \dot{\xi}(t) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $t \in L \cap [0, t_0]$ und $\dot{\xi}(t) \neq 0$. Wegen $M(r(t), x(t)) = 1$ gilt dann

$$|\Pi x(t)| \leq R \leq pM(r(t), x(t)),$$

also nach Bemerkung 7.15 und Lemma 8.4

$$0 \leq \mu(t) \leq C \frac{\psi_0}{d_1^2} |\dot{\xi}(t)|. \quad (8.8)$$

Damit ist $\mu \in L^1([0, t_0]; \mathbb{R})$. Wieder nach Bemerkung 7.15 gilt

$$\Pi \dot{\xi}(t) = \frac{A[r, u](t)}{|J(r(t), x(t))|^2} \Pi J(r(t), x(t)) = \mu(t) \Pi x(t). \quad (8.9)$$

Ist $\dot{\xi}(t) = 0$, so gilt obige Gleichung nach Definition von μ . Wegen $x = u - \xi$ folgt

$$\Pi \dot{\xi}(t) + \mu(t)(\Pi \xi(t) - \xi(0)) = \mu(t) \Pi(u(t) - \xi(0)) \quad \text{für fast alle } t \in [0, t_0].$$

Nach Lemma 13.4 mit $y := \Pi(\xi - \xi(0))$, $v := \Pi(u - \xi(0))$ und $y_0 = y(0) = 0$ gilt

$$\|\Pi(\xi - \xi(0))\|_{[0, t]} \leq \|\Pi(u - \xi(0))\|_{[0, t]} \leq |\Pi x_0| + \|\Pi(u - u(0))\|_{[0, t]} \quad (8.10)$$

für alle $t \in [0, t_0]$. Insbesondere haben wir dann

$$\begin{aligned} \|\Pi x\|_{[0, t_0]} &\leq \|\Pi(\xi - \xi(0))\|_{[0, t_0]} + \|\Pi(u - \xi(0))\|_{[0, t_0]} \\ &\leq 2\left(\|\Pi x_0\| + \|\Pi(u - u(0))\|_{[0, t_0]}\right) < R. \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von Πx muss also $t_0 = T^*$ sein, und wir haben $\|\Pi x\|_{[0, T^*]} < R$ gezeigt. Die erste Behauptung folgt wegen $t_0 = T^*$ ebenfalls aus (8.10). \square

Lemma 8.7. *Die Voraussetzungen seien wie in Lemma 8.4. Dann gilt für fast alle $t \in [0, T]$:*

$$|G[r, u](t)| \leq |\dot{u}(t)| |J(r(t), x(t))| + K_0 |\dot{r}(t)|, \quad (8.11)$$

$$|\dot{\xi}(t)| \leq |\dot{u}(t)| + CK_0 |\dot{r}(t)|. \quad (8.12)$$

Sind T^* und R gemäß Lemma 8.6 gewählt, so gilt für fast alle $t \in [0, T^*]$:

$$|\Pi \dot{\xi}(t)| \leq \frac{\psi_0 RC}{d_1^2} |\dot{\xi}(t)|. \quad (8.13)$$

Beweis. Die erste Ungleichung ist klar nach Definition von G und (7.29). Sei $t \in L$ (siehe Lemma 8.4). Die zweite Ungleichung ist klar, wenn $\dot{\xi}(t) = 0$ ist. Falls $\dot{\xi}(t) \neq 0$ ist, gilt nach Lemma 8.4:

$$|\dot{\xi}(t)| = \frac{|A[r, u](t)|}{|J(r(t), x(t))|} = \frac{|G[r, u](t)|}{|J(r(t), x(t))|} \leq |\dot{u}(t)| + CK_0 |\dot{r}(t)|.$$

Sei $t \leq T^*$. Ist $\dot{\xi}(t) = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sei $\dot{\xi}(t) \neq 0$. Wie im vorigen Lemma gilt

$$|\Pi \dot{\xi}(t)| \leq \mu(t) |\Pi x(t)|.$$

Die Behauptung folgt nun aus (8.7), (8.8) und (8.9). \square

Lemma 8.8. *Seien die Voraussetzungen gemäß 8.3 gegeben. Dann gilt für fast alle $t \in [0, T]$:*

$$|A[r, u](t) - A[s, v](t)| + \frac{d}{dt} |B[r, u](t) - B[s, v](t)| \leq |G[r, u](t) - G[s, v](t)| \quad (8.14)$$

und

$$\begin{aligned} |\dot{\xi}(t) - \dot{\eta}(t)| &\leq C(|\dot{u}(t)| + CK_0 |\dot{r}(t)|) |J(r(t), x(t)) - J(s(t), y(t))| \\ &\quad + C|A[r, u](t) - A[s, v](t)|. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Setzt man zusätzlich voraus, dass es $T^* \in (0, T]$, $R \in (0, p]$ mit

$$|\Pi x_0| + \|\Pi(u - u(0))\|_{[0, T^*]} < \frac{R}{2} \quad \text{und} \quad |\Pi y_0| + \|\Pi(v - v(0))\|_{[0, T^*]} < \frac{R}{2} \quad (8.16)$$

gibt, so gilt für fast alle $t \in [0, T^*]$:

$$|\Pi\dot{\xi}(t) - \Pi\dot{\eta}(t)| \leq \frac{\psi_0 RC}{d_1^2} |\dot{\xi}(t) - \dot{\eta}(t)| + C_R^* |\dot{\xi}(t)| (|r(t) - s(t)| + |x(t) - y(t)|), \quad (8.17)$$

wobei

$$C_R^* := C(RC_S + \frac{\psi_0}{d_1^2}(1 + RCC_J))$$

ist.

Beweis. $B[r, u]$, $B[s, v]$ sind nach Lemma 8.4 absolutstetig, also ist $|B[r, u] - B[s, v]|$ nach Hilfssatz 13.1 absolutstetig. Sei $L \subset [0, T]$ die Menge der Punkte, an denen r , s , u , v , ξ , η , $B[r, u]$, $B[s, v]$ und $|B[r, u] - B[s, v]|$ differenzierbar sind. Dann hat L volles Lebesguemaß in $[0, T]$. Sei $t \in L$.

1. Fall: $\dot{\xi}(t) = 0 = \dot{\eta}(t)$.

Zu (8.14). Es ist $A[r, u](t) = 0 = A[s, v](t)$ nach Definition von A . Nach Hilfssatz 13.1 und Lemma 8.4 (i) gilt

$$\frac{d}{dt} |B[r, u](t) - B[s, v](t)| \leq |G[r, u](t) - G[s, v](t)|.$$

(8.15) und (8.17) sind klar.

2. Fall: $\dot{\xi}(t) \neq 0 \neq \dot{\eta}(t)$.

Zu (8.14). Nach Hilfssatz 13.1 und Lemma 8.4 (ii) ist

$$\frac{d}{dt} |B[r, u](t) - B[s, v](t)| \leq \left| \frac{d}{dt} B[r, u](t) - \frac{d}{dt} B[s, v](t) \right| = 0.$$

Wegen $A[r, u](t) = G[r, u](t)$, $A[s, v](t) = G[s, v](t)$ und Lemma 8.4 (ii) folgt die Behauptung auch in diesem Fall.

Zu (8.15). Mit Lemma 8.4 (ii) und Hilfssatz 13.2 gilt

$$\begin{aligned} |\dot{\xi}(t) - \dot{\eta}(t)| &\leq |A[r, u](t)| \left| \frac{J(r(t), x(t))}{|J(r(t), x(t))|^2} - \frac{J(s(t), y(t))}{|J(s(t), y(t))|^2} \right| \\ &\quad + \frac{1}{|J(s(t), y(t))|} |A[r, u](t) - A[s, v](t)| \\ &= \frac{1}{|J(r(t), x(t))| |J(s(t), y(t))|} |G[r, u](t) |J(r(t), x(t)) - J(s(t), y(t))| \\ &\quad + \frac{1}{|J(s(t), y(t))|} |A[r, u](t) - A[s, v](t)|. \end{aligned}$$

Nach Lemma 8.4 (ii) haben wir $|J(r(t), x(t))|, |J(s(t), y(t))| \geq C$, und mit (8.11) folgt die Behauptung.

Zu (8.17). Sei $t \leq T^*$. Wegen $x(t), y(t) \in \partial Z(r(t)) \cup \partial Z(s(t)) \subset K(0, C) \setminus B(0, c)$ ist Folgerung 7.14 anwendbar. Mit Bemerkung 7.15 und der Linearität von Π gilt:

$$\begin{aligned}
 |\Pi\dot{\xi}(t) - \Pi\dot{\eta}(t)| &\leq \frac{A[r, u](t)}{|J(r(t), x(t))|^2} |\Pi J(r(t), x(t)) - \Pi J(s(t), y(t))| \\
 &\quad + |\Pi J(s(t), y(t))| \left| \frac{A[r, u](t)}{|J(r(t), x(t))|^2} - \frac{A[s, v](t)}{|J(s(t), y(t))|^2} \right| \\
 &\leq \left(|S(r(t), x(t)) - S(s(t), y(t))| |\Pi x(t)| \right. \\
 &\quad \left. + |S(s(t), y(t))| |\Pi x(t) - \Pi y(t)| \right) \cdot \frac{|\dot{\xi}(t)|}{|J(r(t), x(t))|} \\
 &\quad + |S(s(t), y(t))| |\Pi y(t)| \underbrace{\left| \frac{A[r, u](t)}{|J(r(t), x(t))|^2} - \frac{A[s, v](t)}{|J(s(t), y(t))|^2} \right|}_{=: \alpha} \\
 &\leq |\dot{\xi}(t)| C \left[\left(C_S R + \frac{\psi_0}{d_1^2} \right) (|r(t) - s(t)| + |x(t) - y(t)|) \right] \\
 &\quad + \frac{\psi_0 R}{d_1^2} \alpha. \tag{8.18}
 \end{aligned}$$

Mit $|J(r(t), x(t))|, |J(s(t), y(t))| \geq C$, der Definition von A , Hilfssatz 13.2 und Definition 7.10 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \alpha &\leq \left| \frac{\langle J(r(t), x(t)), \dot{\xi}(t) \rangle}{|J(r(t), x(t))|^2} - \frac{\langle J(s(t), y(t)), \dot{\xi}(t) \rangle}{|J(s(t), y(t))|^2} \right| \\
 &\quad + \left| \frac{\langle J(s(t), y(t)), \dot{\xi}(t) \rangle}{|J(s(t), y(t))|^2} - \frac{\langle J(s(t), y(t)), \dot{\eta}(t) \rangle}{|J(s(t), y(t))|^2} \right| \\
 &\leq |\dot{\xi}(t)| \left| \frac{J(r(t), x(t))}{|J(r(t), x(t))|^2} - \frac{J(s(t), y(t))}{|J(s(t), y(t))|^2} \right| + \frac{1}{|J(s(t), y(t))|} |\dot{\xi}(t) - \dot{\eta}(t)| \\
 &\leq |\dot{\xi}(t)| \frac{1}{|J(r(t), x(t))| |J(s(t), y(t))|} |J(r(t), x(t)) - J(s(t), y(t))| + C |\dot{\xi}(t) - \dot{\eta}(t)| \\
 &\leq |\dot{\xi}(t)| C^2 C_J (|r(t) - s(t)| + |x(t) - y(t)|) + C |\dot{\xi}(t) - \dot{\eta}(t)|.
 \end{aligned}$$

Setzt man jetzt α in (8.18) ein, so ergibt sich (8.17).

3. Fall: $\dot{\xi}(t) \neq 0, \dot{\eta}(t) = 0$.

Zu (8.14). Nach Lemma 8.4 ist $|A[r, u](t) - A[s, v](t)| = A[r, u](t)$. Sei

$$b : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}, \quad b(t) = B[r, u] - B[s, v].$$

Gilt $B[s, v](t) = 1/2$, so ist $d/dt B[s, v](t) = 0$ und $b(t) = 0$. Da $|b|$ ein Minimum in t hat, folgt

$$\frac{d}{dt} |b(t)| = 0 = -\frac{d}{dt} B[s, v](t).$$

Ist $B[s, v](t) < 1/2$, so ist $b(t) > 0$ und damit

$$\frac{d}{dt}|b(t)| = \frac{d}{dt}b(t) = 0 - \frac{d}{dt}B[s, v](t).$$

Mit Lemma 8.4 folgt

$$\begin{aligned} |A[r, u](t) - A[s, v](t)| + \frac{d}{dt}|B[r, u](t) - B[s, v](t)| &= A[r, u](t) - \frac{d}{dt}B[s, v](t) \\ &= G[r, u](t) - G[s, v](t). \end{aligned}$$

Zu (8.15). Nach (8.4) ist

$$|\dot{\xi}(t) - \dot{\eta}(t)| = \frac{|A[r, u](t)|}{|J(r(t), x(t))|} \leq C|A[r, u](t) - A[s, v](t)|.$$

(8.17) folgt aus (8.13).

4. Fall: $\dot{\xi}(t) = 0$, $\dot{\eta}(t) \neq 0$. Beweis analog zum dritten Fall. \square

Das folgende Lemma steht als Proposition 5.4 in [BKS] und ist zusammen mit dem vorherigen Lemma das entscheidende Hilfsmittel, um die Existenz von Lösungen im dehnungskontrollierten Fall zu beweisen.

Lemma 8.9. *Die Voraussetzungen seien wie in Lemma 8.4. Für fast alle $t \in [0, T]$ gilt dann:*

$$\begin{aligned} &|\dot{\xi}(t) - \dot{\eta}(t)| + C \frac{d}{dt}|B[r, u](t) - B[s, v](t)| \\ &\leq C(2C_J|\dot{u}(t)| + (C_K + CC_JK_0)|\dot{r}(t)|)(|r(t) - s(t)| + |x(t) - y(t)|) \\ &\quad + \frac{C}{c}|\dot{u}(t) - \dot{v}(t)| + CK_0|\dot{r}(t) - \dot{s}(t)|. \end{aligned} \tag{8.19}$$

Beweis. Sei $L \subset [0, T]$ wie im Beweis von Lemma 8.8, und sei $t \in L$. Dann gilt mit (8.15) und (8.14):

$$\begin{aligned} &|\dot{\xi}(t) - \dot{\eta}(t)| + C \frac{d}{dt}|B[r, u](t) - B[s, v](t)| \\ &\leq C(|\dot{u}(t)| + CK_0|\dot{r}(t)|) |J(r(t), x(t)) - J(s(t), y(t))| + C|G[r, u](t) - G[s, v](t)|. \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.15 gilt

$$c|J(s(t), y(t))| \leq M_{Z(s(t))^*}(J(s(t), y(t))) = M_{Z(s(t))}(y(t)) = M(s(t), y(t)) \leq 1,$$

da $y(t) \in Z(s(t))$ ist. Mit Definition 7.10 und (7.29) erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
 & |G[r, u](t) - G[s, v](t)| \\
 \leq & \quad |\langle J(r(t), x(t)), \dot{u}(t) \rangle - \langle J(s(t), y(t)), \dot{u}(t) \rangle| \\
 & \quad + |\langle J(s(t), y(t)), \dot{u}(t) \rangle - \langle J(s(t), y(t)), \dot{v}(t) \rangle| \\
 & \quad + |K(r(t), x(t))\dot{r}(t) - K(s(t), y(t))\dot{r}(t)| \\
 & \quad + |K(s(t), y(t))\dot{r}(t) - K(s(t), y(t))\dot{s}(t)| \\
 \leq & \quad (C_J|\dot{u}(t)| + C_K|\dot{r}(t)|)(|r(t) - s(t)| + |x(t) - y(t)|) \\
 & \quad + \frac{1}{c}|\dot{u}(t) - \dot{v}(t)| + K_0|\dot{r}(t) - \dot{s}(t)|.
 \end{aligned}$$

Setzt man diese Ungleichung in die erste Ungleichung des Beweises ein und benutzt noch einmal die Lipschitz-stetigkeit von J , so erhält man die Behauptung. \square

9 Existenz und Eindeutigkeit

In diesem Abschnitt werden wir beweisen, dass das in Abschnitt 5 aufgestellte Problem mit Z anstelle von Z_1 lokal genau eine Lösung besitzt. Damit können wir dann unter eingeschränkten Voraussetzungen die Existenz und Eindeutigkeit für den dehnungskontrollierten Fall aus Abschnitt 5 zeigen.

Voraussetzung 9.1. $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sei ein separabler Hilbertraum, V ein abgeschlossener Teilraum, Π die orthogonale Projektion von X auf V und $g : [0, 1] \times V \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar nach der zweiten Variablen. Die Familie konvexer Mengen $(Z(\varrho))_{\varrho \in [0, \varrho_1]}$ sei gemäß (6.12) gegeben (ϱ_1 wurde in (6.1) gewählt). Ferner seien $u \in W^{1,1}(0, T; X)$, $r_0 \in (0, \varrho_1)$, $g(r_0, 0) = r_0$ und $x_0 \in Z(r_0)$.

Gesucht ist $\hat{T} \in (0, T)$ und eine Lösung $\xi \in W^{1,1}(0, \hat{T}; X)$ von:

- (I) (i) $g(r_0, \Pi(\xi(t) - \xi(0))) \in (0, \varrho_1)$ für alle $t \in [0, \hat{T}]$,
- (ii) $x(t) := u(t) - \xi(t) \in Z(g(r_0, \Pi(\xi(t) - \xi(0))))$ für alle $t \in [0, \hat{T}]$,
- (iii) $x(0) = x_0$,
- (iv) $\langle \dot{\xi}(t), x(t) - y \rangle \geq 0$ für fast alle $t \in [0, \hat{T}]$ und für alle $y \in Z(g(r_0, \Pi(\xi(t) - \xi(0))))$.

Wir stellen zunächst Bedingungen an g und die Konstanten aus Abschnitt 6, um (I) lösen zu können.

Voraussetzung 9.2. Es gebe $\gamma, C_g > 0$ so, dass

$$|D_2g(r, v)| \leq \gamma \quad \text{und} \quad |D_2g(r, v) - D_2g(r, w)| \leq C_g|v - w| \quad (9.1)$$

für alle $v, w \in V \cap K(0, p)$ und $r \in [0, \varrho_1]$ gilt. Zu den Konstanten: ϱ_1 und p siehe (6.1).

Voraussetzung 9.3. Sei $R \in (0, p]$ so gewählt, dass

$$\delta := \frac{\gamma\psi_0 C^2 K_0 R}{d_1^2} < 1 \quad \text{und} \quad \delta C K_0 \gamma < 1 \quad (9.2)$$

ist. Zu den Konstanten: ψ_0 siehe (6.19); C, d_1 siehe (6.13); K_0 siehe (7.29).

Für den Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis benötigen wir noch

Voraussetzung 9.4. Es sei $T^* \in (0, T]$ so gegeben, dass

$$\|\Pi x_0\| + \|\Pi(u - u(0))\|_{[0, T^*]} < \frac{R}{2} \quad (9.3)$$

ist.

Im folgenden setzen wir immer stillschweigend voraus, dass die Voraussetzungen 9.1 bis 9.4 erfüllt sind. Zunächst leiten wir notwendige Bedingungen für Lösungen des Problems **(I)** ab:

Lemma 9.5. *Sei $\hat{T} \in (0, T^*]$ und $\xi \in W^{1,1}(0, \hat{T}; X)$ eine Lösung von **(I)** zu den Eingabedaten in Voraussetzung 9.1. Dann gilt:*

$$\|\Pi(\xi - \xi(0))\|_{[0,t]} \leq \|\Pi x_0\| + \|\Pi(u - u(0))\|_{[0,t]} \quad (9.4)$$

für alle $t \in [0, \hat{T}]$ und

$$|\dot{\xi}(t)| \leq \frac{1}{1-\delta} |\dot{u}(t)|, \quad (9.5)$$

$$|\Pi\dot{\xi}(t)| \leq \frac{\psi_0 RC}{(1-\delta)d_1^2} |\dot{u}(t)| \quad (9.6)$$

für fast alle $t \in [0, \hat{T}]$.

Beweis. Setze $r : [0, \hat{T}] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto g(r_0, \Pi(\xi(t) - \xi(0)))$. Dann ist offenbar ξ Lösung von **(P)** aus Abschnitt 8 zu u, r und $x_0 \in Z(r(0))$. Wegen (9.3) gilt nach Lemma 8.6 die Ungleichung (9.4). Nach Voraussetzung 9.2, (8.12) und (8.13) gilt

$$\begin{aligned} |\dot{r}(t)| &= |D_2 g(r_0, \Pi(\xi(t) - \xi(0))) \Pi\dot{\xi}(t)| \leq \gamma |\Pi\dot{\xi}(t)| \leq \frac{\gamma \psi_0 RC}{d_1^2} |\dot{\xi}(t)| \\ &\leq \frac{\gamma \psi_0 RC}{d_1^2} (|\dot{u}(t)| + CK_0 |\dot{r}(t)|) = \frac{\gamma \psi_0 RC}{d_1^2} |\dot{u}(t)| + \delta |\dot{r}(t)| \end{aligned}$$

für fast alle $t \in [0, \hat{T}]$. Folglich ist

$$|\dot{r}(t)| \leq \frac{\gamma \psi_0 RC}{(1-\delta)d_1^2} |\dot{u}(t)|.$$

Wieder mit (8.12) erhalten wir

$$|\dot{\xi}(t)| \leq |\dot{u}(t)| + CK_0 |\dot{r}(t)| \leq |\dot{u}(t)| + \frac{\delta}{1-\delta} |\dot{u}(t)| = \frac{1}{1-\delta} |\dot{u}(t)|,$$

und mit (8.13) folgt schließlich

$$|\Pi\dot{\xi}(t)| \leq \frac{\psi_0 RC}{d_1^2} |\dot{\xi}(t)| \leq \frac{\psi_0 RC}{(1-\delta)d_1^2} |\dot{u}(t)|.$$

□

Definition 9.6. Sei $\hat{T} \in (0, T^*]$. Es sei $\Omega_u(\hat{T}) \subset W^{1,1}(0, \hat{T}; X)$ die Menge derjenigen $\xi \in W^{1,1}(0, \hat{T}; X)$, für die

$$\xi(0) = u(0) - x_0 \quad (9.7)$$

gilt, und die (9.4) bis (9.6) erfüllen. In diesem Abschnitt schreiben wir kurz $\Omega(\hat{T})$ anstelle von $\Omega_u(\hat{T})$, falls klar ist, welches u gemeint ist.

Bemerkung 9.7. Für $\hat{T} \in (0, T^*]$ ist $\Omega(\hat{T})$ eine nicht leere und abgeschlossene Teilmenge von $W^{1,1}(0, \hat{T}; X)$ bezüglich der Norm $|\cdot|_{1,1}$.

Beweis. Sei $\hat{T} \in (0, T^*]$. Die konstante Funktion $u(0) - x_0$ liegt offensichtlich in $\Omega(\hat{T})$, das heißt $\Omega(\hat{T})$ ist nicht leer. Sei $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen $\xi \in W^{1,1}(0, \hat{T}; X)$ konvergente Folge in $\Omega(\hat{T})$. Dann konvergiert die Folge gleichmäßig auf $[0, \hat{T}]$ gegen ξ , insbesondere gelten (9.4) und (9.7) für ξ . Nach dem Satz von Riesz-Fischer hat $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine punktweise fast überall gegen ξ konvergente Teilfolge, so dass (9.5) und (9.6) auch für den fast überall existierenden Grenzwert $\dot{\xi}(t)$ gelten. \square

Für ein geeignetes $\hat{T} \in (0, T^*]$ definieren wir jetzt eine Abbildung auf $\Omega(\hat{T})$.

Definition 9.8. Wähle $\hat{T} \in (0, T^*]$ so, dass

$$\frac{1}{1 - \delta} \int_0^{\hat{T}} \frac{\gamma \psi_0 RC}{d_1^2} |\dot{u}(t)| dt < \min\{r_0, \varrho_1 - r_0\} \quad (9.8)$$

erfüllt ist. Wir definieren eine Abbildung $\mathcal{K} : \Omega(\hat{T}) \rightarrow W^{1,1}(0, \hat{T}; X)$ auf folgende Weise: Sei $\eta \in \Omega(\hat{T})$. Setze

$$r : [0, \hat{T}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto g(r_0, \Pi(\eta(t) - \eta(0))).$$

Für fast alle $t \in [0, \hat{T}]$ gilt

$$|\dot{r}(t)| \leq |D_2 g(r_0, \Pi(\eta(t) - \eta(0))) \Pi \eta(t)| \leq \frac{\gamma \psi_0 RC}{(1 - \delta) d_1^2} |\dot{u}(t)| \quad (9.9)$$

nach (9.1), (9.3) und (9.6). Nach (9.8) ist somit

$$\int_0^{\hat{T}} |\dot{r}(t)| dt < \min\{r_0, \varrho_1 - r_0\},$$

also

$$r([0, \hat{T}]) \subset (0, \varrho_1). \quad (9.10)$$

Folglich existiert nach Satz 8.2 eine eindeutige Lösung

$$\mathcal{K}(\eta) := \xi \in W^{1,1}(0, \hat{T}; X)$$

von **(P)** zu $u \in W^{1,1}(0, \hat{T}; X)$, $r \in W^{1,1}(0, \hat{T}; [0, \varrho_1])$ und $x_0 \in Z(r(0))$.

Bemerkung 9.9. Ist \hat{T} gemäß (9.8) gewählt, so gilt $\mathcal{K}(\Omega(\hat{T})) \subset \Omega(\hat{T})$.

Beweis. Sei $\eta \in \Omega(\hat{T})$, r wie in Definition 9.8 und $\xi := \mathcal{K}(\eta)$. Wegen (9.10) sind die Voraussetzungen der Lemmata aus Abschnitt 8 erfüllt. Mit $x := u - \xi$ gilt

$$\|\Pi x\|_{[0,t]} < R \quad \text{und} \quad \|\Pi(\xi - \xi(0))\|_{[0,t]} \leq |\Pi x_0| + \|\Pi(u - u(0))\|_{[0,t]}$$

für alle $t \in [0, \hat{T}]$ nach Lemma 8.6. Für fast alle $t \in [0, \hat{T}]$ gilt wegen Lemma 8.7 und (9.9)

$$|\dot{\xi}(t)| \leq |\dot{u}(t)| + CK_0|\dot{r}(t)| \leq |\dot{u}(t)| + \frac{\delta}{1-\delta}|\dot{u}(t)| = \frac{1}{1-\delta}|\dot{u}(t)|, \quad (9.11)$$

und damit ebenfalls nach Lemma 8.7:

$$|\Pi\dot{\xi}(t)| \leq \frac{\psi_0 RC}{d_1^2} |\dot{\xi}(t)| \leq \frac{\psi_0 RC}{(1-\delta)d_1^2} |\dot{u}(t)|.$$

Da $\xi(0) = u(0) - x_0$ ist, gilt $\mathcal{K}(\eta) = \xi \in \Omega(\hat{T})$. □

Die Abbildung \mathcal{K} ist gerade so eingerichtet, dass wir die folgende Beobachtung machen können.

Bemerkung 9.10. Die Fixpunkte von \mathcal{K} sind genau die Lösungen von (I).

Hilfssatz 9.11. Sei \hat{T} gemäß (9.8) gewählt, seien $\eta_1, \eta_2 \in \Omega(\hat{T})$ und

$$r_i : [0, \hat{T}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad r_i(t) = g(r_0, \Pi(\eta_i(t) - \eta_i(0)))$$

für jedes $i \in \{1, 2\}$. Dann gilt:

$$|r_1(t) - r_2(t)| \leq \gamma |\eta_1(t) - \eta_2(t)| \quad (9.12)$$

für jedes $t \in [0, \hat{T}]$ und

$$|\dot{r}_1(t)| \leq \frac{\gamma}{1-\delta} |\dot{u}(t)|, \quad (9.13)$$

$$|\dot{r}_1(t) - \dot{r}_2(t)| \leq \gamma |\Pi\dot{\eta}_1(t) - \Pi\dot{\eta}_2(t)| + \frac{C_g}{1-\delta} |\dot{u}(t)| |\eta_1(t) - \eta_2(t)| \quad (9.14)$$

für fast alle $t \in [0, \hat{T}]$.

Beweis. Für fast alle $t \in [0, \hat{T}]$ gilt

$$|\dot{r}_1(t)| \leq \frac{\gamma}{1-\delta} |\dot{u}(t)|$$

nach Voraussetzung 9.2 und (9.5). Wegen $\|\Pi(\eta_i - \eta_i(0))\|_{[0, \hat{T}]} \leq R/2$ für $i \in \{1, 2\}$ und $\eta_1(0) = \eta_2(0)$ gilt wieder mit Voraussetzung 9.2:

$$|r_1(t) - r_2(t)| \leq \gamma |\Pi(\eta_1(t) - \eta_1(0)) - \Pi(\eta_2(t) - \eta_2(0))| \leq \gamma |\eta_1(t) - \eta_2(t)|$$

für alle $t \in [0, \hat{T}]$ und zusätzlich mit (9.5):

$$\begin{aligned} & |\dot{r}_1(t) - \dot{r}_2(t)| \\ &= |D_2g(r_0, \Pi(\eta_1(t) - \eta_1(0)))\Pi\dot{\eta}_1(t) - D_2g(r_0, \Pi(\eta_2(t) - \eta_2(0)))\Pi\dot{\eta}_2(t)| \\ &\leq \gamma |\Pi\dot{\eta}_1(t) - \Pi\dot{\eta}_2(t)| + \frac{C_g}{1-\delta} |\eta_1(t) - \eta_2(t)| |\dot{u}(t)| \end{aligned}$$

für fast alle $t \in [0, \hat{T}]$. □

Um weitere Normen auf $W^{1,1}(0, T; X)$ zu erhalten, benötigen wir die folgende

Definition 9.12. Seien $T, \varepsilon > 0$. Wir definieren

$$w_\varepsilon : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad w_\varepsilon(t) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t |\dot{u}(\tau)| d\tau\right)$$

und

$$|\eta|_{w_\varepsilon} := |\eta(0)| + \int_0^T w_\varepsilon(t) |\dot{\eta}(t)| dt$$

für jedes $\eta \in W^{1,1}(0, T; X)$.

Bemerkung 9.13. Seien $T, \varepsilon > 0$. Dann ist w_ε fast überall differenzierbar, $\dot{w}_\varepsilon(t) < 0$ für fast alle $t \in [0, T]$ und $0 < w_\varepsilon(t) \leq 1$ für jedes $t \in [0, T]$. Nach Satz 13.3 wird durch

$$|\eta|_{w_\varepsilon} := |\eta(0)| + \int_0^T w_\varepsilon(t) |\dot{\eta}(t)| dt$$

für jedes $\eta \in W^{1,1}(0, T; X)$ eine zu $|\cdot|_{1,1}$ äquivalente Norm auf $W^{1,1}(0, T; X)$ definiert.

Lemma 9.14. Seien $T, \varepsilon > 0$ und $\varphi \in W^{1,1}(0, T; X)$ mit $\varphi(0) = 0$. Dann gilt

$$\int_0^T w_\varepsilon(t) |\dot{u}(t)| |\varphi(t)| dt \leq \varepsilon \int_0^T w_\varepsilon(t) |\dot{\varphi}(t)| dt. \quad (9.15)$$

Beweis. Mit (13.2) und partieller Integration gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^T w_\varepsilon(t) |\dot{u}(t)| |\varphi(t)| dt &\leq -\varepsilon \int_0^T \dot{w}_\varepsilon(t) \int_0^t |\dot{\varphi}(\tau)| d\tau dt \\ &= -\varepsilon \left[w_\varepsilon(t) \int_0^t |\dot{\varphi}(\tau)| d\tau \right]_0^T + \varepsilon \int_0^T w_\varepsilon(t) |\dot{\varphi}(t)| dt \\ &\leq \varepsilon \int_0^T w_\varepsilon(t) |\dot{\varphi}(t)| dt. \end{aligned}$$

□

Lemma 9.15. Sei \hat{T} gemäß (9.8) gewählt, und seien $\eta_1, \eta_2 \in \Omega(\hat{T})$, $\xi_i := \mathcal{K}(\eta_i)$ und $r_i := g(r_0, \Pi(\eta_i - \eta_i(0)))$ für jedes $i \in \{1, 2\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & |\dot{\xi}_1(t) - \dot{\xi}_2(t)| + C \frac{d}{dt} |B[r_1, u](t) - B[r_2, u](t)| \\ & \leq CK_0 \gamma |\Pi \dot{\eta}_1(t) - \Pi \dot{\eta}_2(t)| + C_{\delta,1} |\dot{u}(t)| (|\eta_1(t) - \eta_2(t)| + |\xi_1(t) - \xi_2(t)|) \end{aligned} \quad (9.16)$$

für fast alle $t \in [0, \hat{T}]$, wobei

$$C_{\delta,1} := \max\{\gamma, 1\} C \left(2C_J + \frac{\gamma}{1-\delta} (C_K + CC_J K_0) + \frac{C_g K_0}{1-\delta} \right) \quad (9.17)$$

unabhängig von η_1 und η_2 ist.

Beweis. Setze $x_i := u - \xi_i$ für $i \in \{1, 2\}$. Mit Lemma 8.9 (man beachte, dass hier „ $u = v$ “ ist), (9.13), (9.12), (9.14) und wegen $x_1 - x_2 = \xi_2 - \xi_1$ folgt

$$\begin{aligned} & |\dot{\xi}_1(t) - \dot{\xi}_2(t)| + C \frac{d}{dt} |B[r_1, u](t) - B[r_2, u](t)| \\ & \leq C \left(2C_J + \frac{\gamma}{1-\delta} (C_K + CC_J K_0) \right) |\dot{u}(t)| (|r_1(t) - r_2(t)| + |x_1(t) - x_2(t)|) \\ & \quad + CK_0 |\dot{r}_1(t) - \dot{r}_2(t)| \\ & \leq C \left(2C_J + \frac{\gamma}{1-\delta} (C_K + CC_J K_0) \right) |\dot{u}(t)| (\gamma |\eta_1(t) - \eta_2(t)| + |\xi_1(t) - \xi_2(t)|) \\ & \quad + CK_0 \gamma |\Pi \dot{\eta}_1(t) - \Pi \dot{\eta}_2(t)| + CK_0 \frac{C_g}{1-\delta} |\dot{u}(t)| |\eta_1(t) - \eta_2(t)| \\ & \leq CK_0 \gamma |\Pi \dot{\eta}_1(t) - \Pi \dot{\eta}_2(t)| + C_{\delta,1} |\dot{u}(t)| (|\eta_1(t) - \eta_2(t)| + |\xi_1(t) - \xi_2(t)|) \end{aligned}$$

für fast alle $t \in [0, \hat{T}]$. □

Wir kommen zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die modifizierte Menge Z .

Satz 9.16. Es mögen die Voraussetzungen 9.1 bis 9.4 gelten. Dann gibt es $\hat{T} \in (0, T^*]$ so, dass das Problem **(I)** eine eindeutige Lösung $\xi \in \Omega(\hat{T})$ besitzt.

Beweis. Wähle $\hat{T} \in (0, T^*]$ so, dass (9.8) erfüllt ist. $\mathcal{K} : \Omega(\hat{T}) \rightarrow \Omega(\hat{T})$ ist nach Bemerkung 9.9 eine Selbstabbildung. Wir werden zeigen, dass \mathcal{K}^2 eine Kontraktion bezüglich einer geeigneten Norm auf $W^{1,1}(0, \hat{T}; X)$ ist.

Seien $\psi_1, \psi_2 \in \Omega(\hat{T})$ und $\eta_i := \mathcal{K}(\psi_i)$, $\xi_i := \mathcal{K}(\eta_i)$, $x_i := u - \xi_i$, $y_i := u - \eta_i$,

$r_i, s_i : [0, \hat{T}] \rightarrow (0, \varrho_1)$, $r_i(t) := g(r_0, \Pi(\eta_i(t) - \eta_i(0)))$, $s_i(t) := g(r_0, \Pi(\psi_i(t) - \psi_i(0)))$

für jedes $i \in \{1, 2\}$. Ferner seien

$$\beta : [0, \hat{T}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \beta(t) = C |B[r_1, u](t) - B[r_2, u](t)|$$

und

$$\alpha : [0, \hat{T}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha(t) = C|B[s_1, u](t) - B[s_2, u](t)|.$$

Mit Lemma 9.15 gilt:

$$\begin{aligned} & |\dot{\xi}_1(t) - \dot{\xi}_2(t)| + \dot{\beta}(t) + \delta\dot{\alpha}(t) \\ & \leq CK_0\gamma|\Pi\dot{\eta}_1(t) - \Pi\dot{\eta}_2(t)| + C_{\delta,1}|\dot{u}(t)|(|\eta_1(t) - \eta_2(t)| + |\xi_1(t) - \xi_2(t)|) + \delta\dot{\alpha}(t) \end{aligned}$$

für fast alle $t \in [0, \hat{T}]$, wobei $C_{\delta,1}$ unabhängig von η_1 und η_2 ist. Wendet man jetzt (8.17) auf $|\Pi\dot{\eta}_1(t) - \Pi\dot{\eta}_2(t)|$ an, so folgt mit (9.5), (9.12), $y_1 - y_2 = \eta_2 - \eta_1$ und der Wahl von δ :

$$\begin{aligned} & |\dot{\xi}_1(t) - \dot{\xi}_2(t)| + \dot{\beta}(t) + \delta\dot{\alpha}(t) \\ & \leq CK_0\gamma \left(\frac{\psi_0 RC}{d_1^2} |\dot{\eta}_1(t) - \dot{\eta}_2(t)| + C_R^* |\dot{\eta}_1(t)| (|s_1(t) - s_2(t)| + |y_1(t) - y_2(t)|) \right) \\ & \quad + C_{\delta,1} |\dot{u}(t)| (|\eta_1(t) - \eta_2(t)| + |\xi_1(t) - \xi_2(t)|) + \delta\dot{\alpha}(t) \\ & \leq C_{\delta,2} |\dot{u}(t)| (|\eta_1(t) - \eta_2(t)| + |\xi_1(t) - \xi_2(t)| + |\psi_1(t) - \psi_2(t)|) \\ & \quad + \delta |\dot{\eta}_1(t) - \dot{\eta}_2(t)| + \delta\dot{\alpha}(t) \end{aligned} \tag{9.18}$$

für fast alle $t \in [0, \hat{T}]$, wobei

$$C_{\delta,2} := C_{\delta,1} + \max\{\gamma, 1\} CK_0\gamma C_R^* \frac{1}{1 - \delta}$$

unabhängig von ψ_1 und ψ_2 ist. Wieder mit Lemma 9.15, angewendet auf ψ_i und $\eta_i = \mathcal{K}(\psi_i)$, und mit $\|\Pi\| \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} & |\dot{\eta}_1(t) - \dot{\eta}_2(t)| + \dot{\alpha}(t) \\ & \leq CK_0\gamma |\dot{\psi}_1(t) - \dot{\psi}_2(t)| + C_{\delta,1} |\dot{u}(t)| (|\psi_1(t) - \psi_2(t)| + |\eta_1(t) - \eta_2(t)|) \end{aligned} \tag{9.19}$$

für fast alle $t \in [0, \hat{T}]$. Setzt man diese Ungleichung in (9.18) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} & |\dot{\xi}_1(t) - \dot{\xi}_2(t)| + \dot{\beta}(t) + \delta\dot{\alpha}(t) \\ & \leq C_{\delta,3} |\dot{u}(t)| (|\eta_1(t) - \eta_2(t)| + |\xi_1(t) - \xi_2(t)| + |\psi_1(t) - \psi_2(t)|) \\ & \quad + \delta CK_0\gamma |\dot{\psi}_1(t) - \dot{\psi}_2(t)| \end{aligned} \tag{9.20}$$

für fast alle $t \in [0, \hat{T}]$, wobei $C_{\delta,3} := C_{\delta,2} + \delta C_{\delta,1}$ unabhängig von ψ_1 und ψ_2 ist. Wir wählen $\varepsilon > 0$ so, dass

$$0 < \frac{CK_0\gamma + \varepsilon C_{\delta,1}}{1 - \varepsilon C_{\delta,1}} \leq 2CK_0\gamma$$

und

$$0 < \delta^* := \frac{\delta CK_0\gamma + \varepsilon C_{\delta,3}(1 + 2CK_0\gamma)}{1 - \varepsilon C_{\delta,3}} < 1$$

ist. Die zweite Bedingung lässt sich wegen $\delta CK_0\gamma < 1$ erfüllen. Sei w_ε wie in Definition 9.12 gewählt. Wegen $s_1(0) = r_0 = s_2(0)$ ist $\alpha(0) = 0$. Außerdem ist $\alpha \geq 0$. Mit Bemerkung 9.13 und partieller Integration folgt

$$\int_0^{\hat{T}} w_\varepsilon(t) \dot{\alpha}(t) dt = [w_\varepsilon(t)\alpha(t)]_0^{\hat{T}} - \int_0^{\hat{T}} \dot{w}_\varepsilon(t)\alpha(t) dt \geq 0. \quad (9.21)$$

Da $\psi_1(0) - \psi_2(0) = 0 = \eta_1(0) - \eta_2(0)$ ist, liefert Lemma 9.14:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\hat{T}} w_\varepsilon(t) |\dot{\alpha}(t)| (|\psi_1(t) - \psi_2(t)| + |\eta_1(t) - \eta_2(t)|) dt \\ & \leq \varepsilon \int_0^{\hat{T}} w_\varepsilon(t) (|\dot{\psi}_1(t) - \dot{\psi}_2(t)| + |\dot{\eta}_1(t) - \dot{\eta}_2(t)|) dt. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Indem wir die mit w_ε multiplizierte Ungleichung (9.19) integrieren, erhalten wir mit (9.21) und (9.22):

$$\begin{aligned} \int_0^{\hat{T}} w_\varepsilon(t) |\dot{\eta}_1(t) - \dot{\eta}_2(t)| dt & \leq (CK_0\gamma + \varepsilon C_{\delta,1}) \int_0^{\hat{T}} w_\varepsilon(t) |\dot{\psi}_1(t) - \dot{\psi}_2(t)| dt \\ & \quad + \varepsilon C_{\delta,1} \int_0^{\hat{T}} w_\varepsilon(t) |\dot{\eta}_1(t) - \dot{\eta}_2(t)| dt, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \int_0^{\hat{T}} w_\varepsilon(t) |\dot{\eta}_1(t) - \dot{\eta}_2(t)| dt & \leq \frac{CK_0\gamma + \varepsilon C_{\delta,1}}{1 - \varepsilon C_{\delta,1}} \int_0^{\hat{T}} w_\varepsilon(t) |\dot{\psi}_1(t) - \dot{\psi}_2(t)| dt \\ & \leq 2CK_0\gamma \int_0^{\hat{T}} w_\varepsilon(t) |\dot{\psi}_1(t) - \dot{\psi}_2(t)| dt. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Indem wir die mit w_ε multiplizierte Ungleichung (9.20) integrieren, erhalten wir völlig analog (mit $\beta + \delta\alpha$ anstelle von α und $|\psi_1 - \psi_2| + |\eta_1 - \eta_2| + |\xi_1 - \xi_2|$ anstelle von $|\psi_1 - \psi_2| + |\eta_1 - \eta_2|$):

$$\begin{aligned} & \int_0^{\hat{T}} w_\varepsilon(t) |\dot{\xi}_1(t) - \dot{\xi}_2(t)| dt \\ & \leq \varepsilon C_{\delta,3} \int_0^{\hat{T}} w_\varepsilon(t) (|\dot{\eta}_1(t) - \dot{\eta}_2(t)| + |\dot{\xi}_1(t) - \dot{\xi}_2(t)| + |\dot{\psi}_1(t) - \dot{\psi}_2(t)|) dt \\ & \quad + \delta CK_0\gamma \int_0^{\hat{T}} w_\varepsilon(t) |\dot{\psi}_1(t) - \dot{\psi}_2(t)| dt. \end{aligned}$$

Setzen wir (9.23) in diese Ungleichung ein, so folgt

$$\int_0^{\hat{T}} w_\varepsilon(t) |\dot{\xi}_1(t) - \dot{\xi}_2(t)| dt \leq \delta^* \int_0^{\hat{T}} w_\varepsilon(t) |\dot{\psi}_1(t) - \dot{\psi}_2(t)| dt.$$

Da $\delta^* < 1$, $\xi_1(0) = \xi_2(0)$ und $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ gilt, haben wir gezeigt, dass \mathcal{K}^2 bezüglich der mit w_ε gewichteten Norm $|\cdot|_{w_\varepsilon}$ (siehe Bemerkung 9.13) eine Kontraktion ist. Da $\Omega(\hat{T})$ nach Bemerkung 9.7 abgeschlossen bezüglich $|\cdot|_{1,1}$ ist, ist $\Omega(\hat{T})$ nach Satz 13.3 abgeschlossen bezüglich der Norm $|\cdot|_{w_\varepsilon}$.

Weil $\Omega(\hat{T}) \neq \emptyset$ ist, hat \mathcal{K}^2 nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau einen Fixpunkt $\xi \in \Omega(\hat{T})$. Nach Satz 13.6 ist ξ dann auch der einzige Fixpunkt von \mathcal{K} und damit nach Bemerkung 9.10 die eindeutig bestimmte Lösung von Problem **(I)**. \square

Unter den Voraussetzungen 9.1 bis 9.4 liegt nach Lemma 9.5 jede Lösung von **(I)** in $\Omega(\hat{T})$. Also haben wir unter den Voraussetzungen 9.1 bis 9.4 die Existenz und Eindeutigkeit für das Problem **(I)** gezeigt.

Jetzt können wir unter eingeschränkten Voraussetzungen den Existenz- und Eindeutigkeitssatz für den dehnungskontrollierten Fall aus Abschnitt 5 beweisen:

Satz 9.17. *Sei $T > 0$, $u \in W^{1,1}(0, T; X)$, $r_0 \in (0, \varrho_1)$ und $x_0 \in Z_1(r_0)$. Sei $R \in (0, p]$ so gewählt, dass*

$$\delta := \frac{\gamma \psi_0 C^2 K_0 R}{d_1^2} < 1 \quad \text{und} \quad \delta C K_0 \gamma < 1 \quad (9.24)$$

gilt. Sei außerdem $T^ \in (0, T]$ derart gegeben, dass*

$$|\Pi x_0| + \|\Pi(u - u(0))\|_{[0, T^*]} < \frac{R}{2} \quad (9.25)$$

ist. Dann gibt es $T_1 \in (0, T^]$ so, dass das Problem **GURSON D** aus Abschnitt 5 eine eindeutige Lösung in $\Omega(T_1)$ besitzt.*

Beweis. Im folgenden schreiben wir kurz **GD** anstelle von **GURSON D**. Nach Bemerkung 4.5 erfüllt die Funktion g aus (4.16) die Voraussetzung 9.2. Außerdem gilt $g(r_0, 0) = r_0$. In Abschnitt 6 hatten wir gezeigt, dass

$$Z(\varrho) \cap \{x \in X; |\Pi x| \leq p\} = Z_1(\varrho) \cap \{x \in X; |\Pi x| \leq p\}, \quad (9.26)$$

für alle $\varrho \in [0, \varrho_1]$ gilt. Wegen (9.25) ist $|\Pi x_0| < R \leq p$, also $x_0 \in Z(r_0)$. Somit ist Voraussetzung 9.1 erfüllt. Da auch die Voraussetzungen 9.3 und 9.4 gelten, gibt es nach dem vorhergehenden Satz ein $\hat{T} \in (0, T^*]$ und eine Lösung $\xi \in \Omega(\hat{T})$ von Problem **(I)**. Wir zeigen zunächst, dass ξ eine Lösung von **GD** ist: (a) und (c) sind klar. Sei wie immer $x := u - \xi$, $r := g(r_0, \Pi(\xi - \xi(0)))$. Nach Lemma 8.6 ist

$$\|\Pi x\|_{[0, \hat{T}]} < R \leq p. \quad (9.27)$$

Nach (9.26) gilt also für alle $t \in [0, \hat{T}]$:

$$x(t) \in Z(r(t)) \cap \{z \in X; |\Pi z| \leq p\} \subset Z_1(r(t)),$$

womit (b) gezeigt ist. Bedingung (iv) bedeutet gerade, dass

$$\dot{\xi}(t) \in N_{Z(r(t))}(x(t)) \tag{9.28}$$

für fast alle $t \in [0, \hat{T}]$ gilt. Sei $t \in [0, \hat{T}]$ so, dass (9.28) gilt. Wegen (9.27) gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $|\Pi z| \leq p$ für alle $z \in K(x(t), \varepsilon) =: A$ ist. Mit Lemma 2.5 und (9.26) folgt

$$\dot{\xi}(t) \in N_{Z(r(t))}(x(t)) = N_{Z(r(t)) \cap A}(x(t)) = N_{Z_1(r(t)) \cap A}(x(t)) = N_{Z_1(r(t))}(x(t)).$$

Also gilt auch (d), und $\xi \in \Omega(\hat{T})$ ist eine Lösung von **GD**.

Sei umgekehrt $\tilde{T} \in (0, \hat{T}]$ und $\xi_1 \in \Omega(\tilde{T})$ eine Lösung von **GD**. Wie immer definieren wir $x := u - \xi_1$ und $r := g(r_0, \Pi(\xi_1 - \xi_1(0)))$. Wegen $r(0) = r_0 \in (0, \varrho_1)$ existiert $T_1 \in (0, \tilde{T}]$ so, dass $r([0, T_1]) \subset (0, \varrho_1)$ ist. Da $\xi_1 \in \Omega(\tilde{T})$ gilt, ist $\xi_1|_{[0, T_1]} \in \Omega(T_1)$, und mit (9.4) und Voraussetzung 9.4 folgt

$$\|\Pi x\|_{[0, T_1]} \leq |\Pi x_0| + \|\Pi(u - u(0))\|_{[0, T_1]} + \|\Pi(\xi_1 - \xi_1(0))\|_{[0, T_1]} < R \leq p.$$

Wie im ersten Teil des Beweises ist also

$$x(t) \in Z_1(r(t)) \cap \{z \in X; |\Pi z| \leq p\} \subset Z(r(t))$$

und

$$N_{Z(r(t))}(x(t)) = N_{Z_1(r(t))}(x(t))$$

für alle $t \in [0, T_1]$. Damit ist $\xi_1|_{[0, T_1]} \in \Omega(T_1)$ Lösung von **(I)**. Da **(I)** nach Satz 9.16 auf $\Omega(T_1)$ wegen $T_1 \leq \hat{T}$ erst recht eine eindeutige Lösung besitzt, stimmen ξ_1 und ξ auf $[0, T_1]$ überein. \square

Die Einschränkung der Voraussetzungen für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen wird im wesentlichen durch die Konstante $R \in (0, p]$ und damit durch p aus (6.1) bewirkt. Falls $CK_0\gamma \leq 1$ ist, kann man δ sehr nahe bei 1 wählen, so dass die Bedingungen (9.5) und (9.6) entschärft werden. Gilt $CK_0\gamma > 1$, so bedeuten (9.5) und (9.6) leider eine echte Restriktion.

Die Bedingung (9.25) schränkt die Anfangswerte und möglichen Verzerrungsverläufe ein. Dabei gilt aber: Ist $|\Pi x_0| < R/2$, so findet man wegen der Stetigkeit von u immer ein T^* mit

$$|\Pi x_0| + \|\Pi(u - u(0))\|_{[0, T^*]} < \frac{R}{2}.$$

Schließlich besagt (9.4), dass wir nur in einem durch die Eingabefunktion u beschränkten Bereich nach Lösungen suchen.

Im dehnungskontrollierten Fall existieren also im allgemeinen lokale Lösungen zu den Anfangswerten $r_0 \in (0, \varrho_1)$ und $x_0 \in X$ mit $|\Pi x_0| < R/2$. Die Eindeutigkeit dieser Lösungen haben wir aber nur auf den jeweils kleineren Mengen $\Omega(T_1)$ bewiesen.

10 Lipschitz-stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten

Lemma 10.1. Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein separabler Hilbertraum mit zugehöriger Norm $|\cdot|$. Seien $T > 0$, $p, k : [0, T] \rightarrow X$, $\beta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ absolutstetige Funktionen, $\omega \geq 0$ und $\alpha \in L^1([0, T], \mathbb{R}_{\geq 0})$. Es gebe $C_0, C_1 > 0$ so, dass

$$|\dot{p}(t)| + \dot{\beta}(t) \leq C_0 \left(\alpha(t) (|p(t)| + |k(t)| + |p(0)| + |k(0)| + \omega) + |\dot{k}(t)| \right) \quad (10.1)$$

für fast alle $t \in [0, T]$ und

$$\beta(0) \leq C_1 (|p(0)| + |k(0)| + \omega) \quad (10.2)$$

ist. Mit $D := \max\{C_0 + 1, C_1 + 2\}$ ist dann

$$\int_0^T |\dot{p}(t)| dt \leq D \exp \left(C_0 \int_0^T \alpha(t) dt \right) \left(|p(0)| + |k(0)| + \omega + \int_0^T |\dot{k}(t)| dt \right). \quad (10.3)$$

Beweis. Setze

$$w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \exp \left(-C_0 \int_0^t \alpha(s) ds \right).$$

Es gilt $1 = w(0) \geq w(t) \geq w(T) > 0$ für alle $t \in [0, T]$. Für fast alle $t \in [0, T]$ haben wir nach Voraussetzung und (10.1):

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(w(t) \int_0^t |\dot{p}(s)| ds \right) + w(t) \dot{\beta}(t) \\ & \leq \dot{w}(t) \int_0^t |\dot{p}(s)| ds + C_0 w(t) |\dot{k}(t)| + C_0 w(t) \alpha(t) \left(|p(t)| + |k(t)| + |p(0)| + |k(0)| + \omega \right) \\ & \leq C_0 |\dot{k}(t)| + C_0 w(t) \alpha(t) \left(|p(t)| + |k(t)| + |p(0)| + |k(0)| + \omega - \int_0^t |\dot{p}(s)| ds \right) \\ & \leq C_0 |\dot{k}(t)| + C_0 w(t) \alpha(t) \left(2|p(0)| + 2|k(0)| + \omega + \int_0^t |\dot{k}(s)| ds \right) \\ & = C_0 |\dot{k}(t)| - \dot{w}(t) \left(2|p(0)| + 2|k(0)| + \omega + \int_0^t |\dot{k}(s)| ds \right). \end{aligned} \quad (10.4)$$

Wenn wir den zweiten Summanden in der letzten Zeile von 0 bis T integrieren, erhalten wir:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \dot{w}(t) \left(2|p(0)| + 2|k(0)| + \omega + \int_0^t |\dot{k}(s)| ds \right) dt \\ & = - \left[w(t) \left(2|p(0)| + 2|k(0)| + \omega + \int_0^t |\dot{k}(s)| ds \right) \right]_0^T + \int_0^T w(t) |\dot{k}(t)| dt \\ & \leq 2|p(0)| + 2|k(0)| + \omega + \int_0^T |\dot{k}(t)| dt. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Ferner gilt mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int_0^T w(t)\dot{\beta}(t) dt &= w(T)\beta(T) - w(0)\beta(0) - \int_0^T \dot{w}(t)\beta(t) dt \\ &\geq -w(0)\beta(0) \geq -C_1(|p(0)| + |k(0)| + \omega). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Integriert man nun (10.4) von 0 bis T , so erhält man mit (10.5) und (10.6):

$$\begin{aligned} w(T) \int_0^T |\dot{p}(t)| dt &\leq C_0 \int_0^T |\dot{k}(t)| dt - \int_0^T w(t)\dot{\beta}(t) dt \\ &\quad - \int_0^T \dot{w}(t) \left(2|p(0)| + 2|k(0)| + \omega + \int_0^t |\dot{k}(s)| ds \right) dt \\ &\leq (C_0 + 1) \int_0^T |\dot{k}(t)| dt + 2|p(0)| + 2|k(0)| + \omega \\ &\quad + C_1(|p(0)| + |k(0)| + \omega). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. □

Wir zeigen jetzt, dass die Lösungen von Problem **(I)** aus Abschnitt 9 Lipschitz-stetig von den Anfangswerten abhängen.

Voraussetzung 10.2. Sei $R \in (0, p]$ so gewählt, dass

$$\delta := \frac{\gamma\psi_0 C^2 K_0 R}{d_1^2} < 1$$

ist. Es gelte Voraussetzung 9.2, und zusätzlich gebe es $\tilde{C}_g > 0$ so, dass

$$|g(r, v) - g(s, v)| \leq \tilde{C}_g |r - s| \quad \text{und} \quad |D_2 g(r, v) - D_2 g(s, w)| \leq \tilde{C}_g |r - s| \quad (10.7)$$

für alle $r, s \in [0, \varrho_1]$ und $v \in V \cap K(0, R)$ gilt.

Bemerkung 10.3. Nach Bemerkung 4.5 erfüllt g aus (4.16) die Bedingungen aus (10.7).

Satz 10.4. Sei $\hat{T} > 0$. Dann gibt es Konstanten $D_0, D_1 > 0$ so, dass folgendes gilt: Wählt man $u, v \in W^{1,1}(0, \hat{T}; X)$ derart, dass sie jeweils Bedingung (9.8) erfüllen, und sind $r_0, s_0 \in (0, \varrho_1)$, $x_0 \in Z(r_0)$, $y_0 \in Z(s_0)$ mit

$$|\Pi x_0| + \|\Pi(u - u(0))\|_{[0, \hat{T}]} < \frac{R}{2}, \quad |\Pi y_0| + \|\Pi(v - v(0))\|_{[0, \hat{T}]} < \frac{R}{2} \quad (10.8)$$

gegeben, und ist $\xi \in W^{1,1}(0, \hat{T}; X)$ Lösung von **(I)** zu u, r_0, x_0 , und $\eta \in W^{1,1}(0, \hat{T}; X)$ Lösung von **(I)** zu v, s_0, y_0 , so gilt

$$\int_0^{\hat{T}} |\dot{\xi}(t) - \dot{\eta}(t)| dt \leq \left(|x_0 - y_0| + |u(0) - v(0)| + |r_0 - s_0| + \int_0^{\hat{T}} |\dot{u}(t) - \dot{v}(t)| dt \right) \cdot D_1 \exp \left(D_0 \int_0^{\hat{T}} |\dot{u}(t)| dt \right). \quad (10.9)$$

Beweis. Nach Lemma 9.5 gilt $\xi \in \Omega_u(\hat{T})$ und $\eta \in \Omega_v(\hat{T})$. Wir setzen $x := u - \xi$, $y := v - \eta$, $r := g(r_0, \Pi(\xi - \xi(0)))$, $s := g(s_0, \Pi(\eta - \eta(0)))$. Wie in (9.12) und (9.14) beweist man, indem man zusätzlich (10.7) benutzt, dass es eine Konstante $B_0 > 0$ gibt mit

$$|r(t) - s(t)| \leq B_0(|r_0 - s_0| + |\xi(t) - \eta(t)| + |\xi(0) - \eta(0)|)$$

für alle $t \in [0, \hat{T}]$ und

$$|\dot{r}(t) - \dot{s}(t)| \leq \gamma |\Pi \dot{\xi}(t) - \Pi \dot{\eta}(t)| + B_0 |\dot{u}(t)| (|r_0 - s_0| + |\xi(t) - \eta(t)| + |\xi(0) - \eta(0)|)$$

für fast alle $t \in [0, \hat{T}]$. Analog zu Lemma 9.15 zeigt man mit Hilfe von Lemma 8.9 und unter Benutzung dieser beiden Ungleichungen: Es gibt eine Konstante B_1 (unabhängig von u, v, x_0, y_0, r_0, s_0) so, dass gilt:

$$\begin{aligned} |\dot{\xi}(t) - \dot{\eta}(t)| + \dot{\beta}(t) &\leq CK_0 \gamma |\Pi \dot{\xi}(t) - \Pi \dot{\eta}(t)| \\ + B_1 \left[|\dot{u}(t)| \left(|\xi(t) - \eta(t)| + |u(t) - v(t)| + |\xi(0) - \eta(0)| + |r_0 - s_0| \right) \right. \\ &\left. + |\dot{u}(t) - \dot{v}(t)| \right], \end{aligned}$$

wobei wie immer

$$\beta : [0, \hat{T}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \beta(t) = C |B[r, u](t) - B[s, v](t)|$$

gesetzt wird. Mit dieser Ungleichung und mit den beiden Ungleichungen darüber zeigt man wie beim Beweis von (9.18) ohne den Summanden $\delta \dot{\alpha}$:

$$\begin{aligned} &|\dot{\xi}(t) - \dot{\eta}(t)| + \dot{\beta}(t) \\ &\leq B_2 \left[|\dot{u}(t)| \left(|\eta(t) - \xi(t)| + |u(t) - v(t)| + |\xi(0) - \eta(0)| + |r_0 - s_0| \right) \right. \\ &\quad \left. + |\dot{u}(t) - \dot{v}(t)| \right] + \delta |\dot{\xi}(t) - \dot{\eta}(t)| \end{aligned} \quad (10.10)$$

für fast alle $t \in [0, \hat{T}]$, wobei B_2 eine von den Eingabedaten unabhängige Konstante ist. Der einzige Unterschied zur Abschätzung in Satz 9.16 besteht darin, dass die

Differenz von u und v , die Differenz der Ableitungen von u und v und die Differenz der Anfangswerte r_0 und s_0 vorkommt. Mit (6.17), (7.2) und (7.18) erhalten wir

$$\begin{aligned}\beta(0) &= C \left| \frac{1}{2}M^2(r_0, x_0) - \frac{1}{2}M^2(s_0, y_0) \right| \\ &\leq C \left(\frac{m_2 C}{c} |x_0 - y_0| + \frac{m_1 C^2}{c} |r_0 - s_0| \right) \\ &\leq B_3 (|\xi(0) - \eta(0)| + |u(0) - v(0)| + |r_0 - s_0|),\end{aligned}\tag{10.11}$$

wobei B_3 unabhängig von den Eingabewerten ist. Die Behauptung folgt jetzt, indem wir Lemma 10.1 mit

$$C_0 := \frac{B_2}{1 - \delta}, \quad C_1 := B_3, \quad \beta := \frac{\beta}{1 - \delta}, \quad p := \xi - \eta, \quad k := u - v, \quad \omega := |r_0 - s_0|, \quad \alpha := |\dot{u}|$$

auf (10.10) und (10.11) anwenden und beachten, dass

$$|\xi(0) - \eta(0)| \leq |x_0 - y_0| + |u(0) - v(0)|$$

ist. □

Folgerung 10.5. *Es gelte 10.2, und die Voraussetzungen seien wie in Satz 10.4. Sei $B > 0$ und*

$$U := \{u \in W^{1,1}(0, \hat{T}; X); \int_0^{\hat{T}} |\dot{u}(t)| dt \leq B\}.$$

Dann gibt es $L > 0$ so, dass

$$|\xi - \eta|_{1,1} \leq L(|x_0 - y_0| + |r_0 - s_0| + |u - v|_{1,1})$$

*für alle $r_0, s_0 \in (0, \varrho_1)$, $x_0 \in Z(r_0)$, $y_0 \in Z(s_0)$, $u, v \in U$ und die zugehörigen Lösungen ξ und η von Problem **(I)** gilt.*

11 Beispiel

Anhand konkreter Daten aus einem Experiment werden wir in diesem Abschnitt die Größe des durch den Parameter R (siehe (9.3)) bestimmten Bereichs

$$\{x \in \mathbb{T}; |\Pi x| < R\}$$

der Spannungen bestimmen. Die Daten stammen aus der Arbeit [BKKS], Seite 20, und zwar ist das Material Stahl S460N (StE 460 nach alter DIN).

Größe	Bedeutung	Wert	Zusammenhang
a	Konstante im Gurson-Modell	1.5	–
b	Konstante im Gurson-Modell	$\sqrt{3}/2$	–
E	Young-Modulus	210000 MPa	–
ν	Poisson-Ratio	0.3	–
λ	Lamé-Konstante	121154 MPa	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
μ	Lamé-Konstante	80769 MPa	$\frac{E}{2(1+\nu)}$
$\hat{\lambda}$	–	760.9	$\frac{2\mu + 3\lambda}{2\mu + 3\lambda}$
$\hat{\mu}$	–	351.2	$\frac{a\sigma_m}{2\mu}$
σ_m	Fließspannung des Matrixmaterials	460 MPa	–
$\varrho_1 = f_c$	kritischer Hohlraumanteil	0.021	–
$r_0 = f_0$	Startwert Hohlraumanteil	0.0025	–

Die Bedingungen an R ergeben sich zum einen aus (6.1):

$$m = F_1(p) + pF_1'(p) \leq \frac{d^2(\varrho_1)}{2\varrho_1}, \quad (11.1)$$

denn es muss $R \leq p$ sein, und zum anderen aus

$$\delta = \frac{\psi_0 C^2 K_0 R \gamma}{d_1^2} < 1 \quad \text{und} \quad \delta C K_0 \gamma < 1, \quad (11.2)$$

siehe (9.3). Dabei sind

$$C^2 = d_0^2 + 4p^2, \quad d_0 = d(0) = \frac{1}{\sqrt{\hat{\mu}}}, \quad d(\varrho) = \frac{1-\varrho}{\sqrt{\hat{\mu}}}, \quad d_1^2 = \frac{(1-\varrho_1)^2}{\hat{\mu}}. \quad (11.3)$$

Nach (7.29) ist

$$K_0 = \max_{\varrho \in [0, \varrho_1]} \left(\frac{2}{d^2(\varrho)} (m + d(\varrho)|d'(\varrho)|) \right),$$

γ eine Schranke für D_2g auf $[0, \varrho_1] \times K(0, R)$ und

$$\psi_0 = \max\{\psi(\varrho, y); (\varrho, y) \in [0, \varrho_1] \times [0, 2p]\}.$$

Wir schätzen die Größen K_0 , γ und ψ_0 ab: Nach (11.1) und (11.3) ist

$$K_0 \leq \max_{\varrho \in [0, \varrho_1]} \frac{2\hat{\mu}}{(1-\varrho)^2} \left(\frac{(1-\varrho_1)^2}{2\varrho_1\hat{\mu}} + \frac{1-\varrho}{\hat{\mu}} \right) \leq \frac{1+\varrho_1}{\varrho_1(1-\varrho_1)}.$$

Mit $\varrho_1 = 0.021$ aus der Tabelle oben ergibt sich

$$K_0 \leq 49.662$$

auf drei Stellen gerundet. Mit (4.12) bis (4.14) und wegen $\Delta : \Delta = 1$ gilt $|\Delta| = \sqrt{\hat{\lambda}}^{-1}$. Mit (4.16) folgt

$$\gamma \leq \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{a\sqrt{\hat{\lambda}}}R\right) \frac{\sqrt{3}}{a\sqrt{\hat{\lambda}}}.$$

Es fehlt noch eine Schranke für ψ . Wir stellen zunächst fest:

Bemerkung 11.1. Für alle $x > 0$ gilt $x > \sinh(x)/\cosh(x)$.

Beweis. Für $x = 0$ gilt Gleichheit. Wegen

$$\frac{d}{dx}x = 1 > \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{d}{dx} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

für alle $x > 0$ folgt die Behauptung. □

Weiter gilt

$$\int_p^{2p} \alpha(s) ds = \frac{3}{p},$$

$$\int_p^{2p} \beta(s) ds = -\frac{1}{2}pF_1''(p) + \frac{3m}{p} \leq \frac{3m}{p},$$

falls $p^2F_1''(p) - 2m \leq 0$ ist, und

$$\int_p^{2p} \beta(s) ds = \frac{pF_1''(p)m}{p^2F_1''(p) - m} \leq \frac{2m}{p},$$

falls $p^2F_1''(p) - 2m > 0$ ist. (Zur Definition von α und β siehe 6.1.)

Hilfssatz 11.2. Es gilt $\psi_0 \leq \frac{1}{p^2\hat{\mu}}$.

Beweis. Es gilt

$$\psi(\varrho, y) = \begin{cases} \frac{D_2F(\varrho, y)}{y}, & \text{falls } y \neq 0, \\ \varrho F_1''(0), & \text{falls } y = 0, \end{cases}$$

für alle $(\varrho, y) \in [0, \varrho] \times [0, \infty)$. Sei $U_1 := [0, \varrho_1] \times [0, p]$, $U_2 := [0, \varrho_1] \times [p, 2p]$. Da ψ auf U_1 bei festem y monoton wachsend in ϱ ist, liegt das Maximum von ψ auf U_1 in $\{\varrho_1\} \times [0, p]$. Sei $y \in [0, p]$. Nach (4.8) und (4.15) ist

$$F_1(y) = a_1(\cosh(a_2y) - 1)$$

mit $a_1, a_2 > 0$ und $D_2F(\varrho, y)/y = \varrho F_1'(y)/y$ nach (6.8), also

$$D_2\psi(\varrho_1, y) = \varrho_1 \frac{a_1 a_2^2 \cosh(a_2y)y - a_1 a_2 \sinh(a_2y)}{y^2}.$$

Somit gilt

$$D_2\psi(\varrho_1, y) > 0 \Leftrightarrow a_2y > \frac{\sinh(a_2y)}{\cosh(a_2y)}.$$

Letzteres gilt nach Bemerkung 11.1, falls $y \neq 0$ ist. Also ist $D_2\psi(\varrho_1, \cdot)$ monoton wachsend, und damit

$$\max_{(\varrho, y) \in U_1} \psi(\varrho, y) = \varrho_1 \frac{F_1'(p)}{p} \leq \frac{\varrho_1}{p^2} \left(\frac{d^2(\varrho_1)}{2\varrho_1} - F_1(p) \right) \leq \frac{1}{p^2} (d^2(\varrho) - \varrho F_1(p)),$$

da d monoton fällt, und nach (11.1).

Für $(\varrho, y) \in U_2$ gilt nach Definition von φ (siehe (6.3)), den oben berechneten Integralen über α und β und (11.1):

$$\begin{aligned} \psi(\varrho, y) &= \frac{1}{y} \left(\varrho F_1'(p) + \int_p^y (d^2(\varrho) - 2\varrho m)\alpha(s) + \varrho\beta(s) ds \right) \\ &\leq \frac{1}{p} \left(\varrho F_1'(p) + (d^2(\varrho) - 2\varrho m) \frac{3}{p} + \varrho \frac{3m}{p} \right) \\ &\leq \frac{\varrho F_1'(p)}{p} + \frac{1}{p^2} [d^2(\varrho) - \varrho(F_1(p) + pF_1'(p))] \\ &= \frac{1}{p^2} (d^2(\varrho) - \varrho F_1(p)). \end{aligned}$$

Damit haben wir insgesamt

$$\psi_0 \leq \frac{1}{p^2} d^2(0) = \frac{1}{p^2 \hat{\mu}}.$$

□

Aus (11.2) erhalten wir

$$C^2 R \gamma \psi_0 < \frac{d_1^2}{K_0} = 5.495 \cdot 10^{-5} =: c_0. \quad (11.4)$$

und

$$\delta C K_0 \gamma \leq 1. \quad (11.5)$$

Wir ersetzen jetzt auf der linken Seite der Ungleichung (11.4) R durch p , und γ und ψ_0 durch die oben berechneten Schranken, um eine obere Schranke für mögliche Werte von R zu gewinnen. Somit muss p so gewählt werden, dass

$$h(p) := c_1 \frac{1}{p} (d_0^2 + 4p^2) \exp(c_2 p) - c_0 < 0 \quad (11.6)$$

ist, wobei

$$c_1 := \frac{\sqrt{3}}{a\sqrt{\lambda}\hat{\mu}} \quad \text{und} \quad c_2 := \frac{\sqrt{3}}{a\sqrt{\lambda}} \quad (11.7)$$

ist. Die numerische Bestimmung der beiden positiven Nullstellen von h ergibt

$$p_1 = 0.00655 \quad \text{und} \quad p_2 = 0.108.$$

Zwischen p_1 und p_2 ist h negativ. Durch Einsetzen verifiziert man, dass p_2 auch Ungleichung (11.1) erfüllt. Da die linke Seite von (11.1) monoton in p wächst, erhalten wir als Bedingung an R :

$$R \in (p_1, p_2),$$

wobei der zugehörige Parameter p jeweils in $[R, p_2)$ gewählt werden muss. Da

$$C K_0 \gamma \leq (d_0^2 + 4p_2^2) \cdot 49.662 \cdot \exp(c_2 p_2) c_2 = 0.192 < 1$$

gilt, ist Bedingung (11.5) immer erfüllt, da p_2 so gewählt wurde, dass $\delta < 1$ ist.

Nun können wir den Bereich der möglichen Spannungen bestimmen. Zugleich werden wir noch den Bereich der Triaxialität nach oben abschätzen, das heißt eine obere Schranke für

$$\frac{|\operatorname{tr} \sigma(t)|}{\|D\sigma(t)\|}$$

finden, wobei $\operatorname{tr} \sigma$ die Spur von σ und $D\sigma$ den deviatorischen Anteil von σ bezeichnet (siehe Paragraph 4.2).

Die Voraussetzungen seien wie in Satz 9.17, insbesondere seien $T > 0$, $r_0 \in (0, \varrho_1)$, $u \in W^{1,1}(0, T; X)$ $T > 0$ und $x_0 \in Z_1(r_0)$ gegeben. Es sei $0 < T_1 < T$ und $\xi \in$

$W^{1,1}(0, T_1; X)$ die Lösung von **GURSON D** aus Abschnitt 9. Wie immer sei $x := u|_{[0, T_1]} - \xi$ und $r := g(r_0, \Pi(\xi - \xi(0)))$.

Wie im Beweis von Satz 9.17 ist ξ auch eine Lösung von Problem **(I)** am Beginn von Abschnitt 9 in einem eventuell kleineren Intervall $[0, \hat{T}]$. Sei $R \leq p_2$ und $t \in [0, \hat{T}]$. Mit (4.17) und (4.6) erhalten wir:

$$|\Pi x(t)| = \frac{|x(t) : \Delta|}{\sqrt{\hat{\lambda}}} = \frac{|\operatorname{tr} x(t)|}{\sqrt{3\hat{\lambda}}}.$$

Bedingung (9.25) aus Satz 9.17 liefert dann mit $\sigma = \sigma_m x$:

$$|\operatorname{tr} \sigma_0| = \sigma_m |\Pi x_0| \sqrt{3\hat{\lambda}} < \sigma_m \frac{R}{2} \sqrt{3\hat{\lambda}} \leq 1187 \text{ MPa},$$

und mit Lemma 8.6 folgt

$$|\operatorname{tr} \sigma(t)| = \sigma_m |\Pi x(t)| \sqrt{3\hat{\lambda}} < \sigma_m R \sqrt{3\hat{\lambda}} \leq 2374 \text{ MPa}$$

für alle $t \in [0, \hat{T}]$.

Wenn wir zusätzlich annehmen, dass $x(t)$ auf dem Rand $\partial Z_1(r(t))$ von $Z_1(r(t))$ liegt, so gilt

$$|(\operatorname{Id} - \Pi)x(t)|^2 = d^2(r(t)) - r(t)F_1(|\Pi x(t)|) \geq d^2(\varrho_1) - \varrho_1 F_1(p_2).$$

Mit den oben angegebenen Daten ist

$$\varrho_1 F_1(p) = \frac{2}{\hat{\mu}} \left(\cosh \left(\sqrt{\hat{\lambda}} b p_2 \right) - 1 \right) = 1.591 \cdot 10^{-4}.$$

und $d^2(\varrho_1) = 2.729 \cdot 10^{-3}$, also

$$|(\operatorname{Id} - \Pi)x(t)|^2 \geq 2.628 \cdot 10^{-3}.$$

Sei $z \in X$. Wegen $\langle z, \Delta \rangle = (z : \Delta) / \hat{\lambda}$ und $\langle \Delta, \Delta \rangle = 1 / \hat{\lambda}$ gilt

$$(\operatorname{Id} - \Pi)z = z - \frac{\langle z, \Delta \rangle}{\langle \Delta, \Delta \rangle} \Delta = z - (z : \Delta) \Delta = Dz.$$

Nach (4.12) und (4.13) ist also

$$|(\operatorname{Id} - \Pi)x(t)|^2 = |Dx(t)|^2 = \frac{a\sigma_m}{2\mu} \|Dx(t)\|^2,$$

und damit

$$\|Dx(t)\| \geq \sqrt{\frac{2\mu \cdot 2.628 \cdot 10^{-3}}{a\sigma_m}} = 0.792.$$

Da $x(t) = \sigma(t) / \sigma_m$ ist, folgt

$$\frac{|\operatorname{tr} \sigma(t)|}{\|D\sigma(t)\|} = \frac{|\operatorname{tr} x(t)|}{\|Dx(t)\|} \leq \frac{\sqrt{3\hat{\lambda}} p_2}{0.792} = 6.515.$$

12 Der spannungskontrollierte Fall

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass je nach Wahl des vorgegebenen Spannungsverlaufs das GURSON-Modell sowohl mehrere Lösungen (Verläufe der plastischen Verzerrung) als auch gar keine Lösung zulässt.

Die Bezeichnungen seien wie in Paragraph 4.2. Zusätzlich definieren wir

$$\Pi : \mathbb{T} \rightarrow \langle \Delta \rangle, \quad x \mapsto \frac{x : \Delta}{\Delta : \Delta} \Delta = (x : \Delta) \Delta, \quad (12.1)$$

die orthogonale Projektion auf den eindimensionalen von Δ erzeugten Teilraum. Dann gilt

$$(\text{Id} - \Pi)z = z - (z : \Delta) \Delta = Dz \quad (12.2)$$

für jedes $z \in \mathbb{T}$. Somit haben wir für jedes $\varrho \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} Z_0(\varrho) &= \{z \in \mathbb{T}; a\|Dz\|^2 + \varrho F_0(b|z : \Delta|) \leq (1 - \varrho)^2\} \\ &= \{z \in \mathbb{T}; a\|(\text{Id} - \Pi)z\|^2 + 2\varrho \cosh(b\|\Pi z\|) \leq 1 + \varrho^2\} \end{aligned} \quad (12.3)$$

nach (4.8).

Das GURSON-Modell bei vorgegebener Spannung führt dann auf das folgende

PROBLEM GS. Gegeben seien $T > 0$, $r_0 \in (0, 1)$, die Fließspannung des Matrixmaterials σ_m , die Spannung $\sigma \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{T})$ und der Anfangswert der plastischen Verzerrung ε_0^p .

Gesucht sind ε^p , ε , $\varepsilon^e \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{T})$, $r \in W^{1,1}(0, T; [0, 1])$ so, dass für alle $t \in [0, T]$ gilt:

- (i) $\varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^p(t)$,
- (ii) $\sigma(t) = A\varepsilon^e(t)$,
- (iii) $\frac{\sigma(t)}{\sigma_m} \in Z_0(r(t))$,
- (iv) $\dot{\varepsilon}^p(t) : \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_m} - y \right) \geq 0$ für alle $y \in Z_0(r(t))$ und für fast alle $t \in [0, T]$,
- (v) $\dot{r}(t) = (1 - r(t))\sqrt{3}(\dot{\varepsilon}^p(t) : \Delta)$ fast überall,
- (vi) $r(0) = r_0$, $\varepsilon^p(0) = \varepsilon_0^p$.

Bemerkung 12.1. Offenbar genügt es, ε und r so zu finden, dass die Bedingungen (iii) bis (vi) gelten. Mit (ii) ist $\varepsilon^e := A^{-1}\sigma$ eindeutig festgelegt, da A invertierbar ist, und damit wegen (i) auch $\varepsilon := \varepsilon^e + \varepsilon^p$.

Satz 12.2. Seien $r_0 \in (0, 1)$ und $\varepsilon_0^p \in \mathbb{T}$.

(i) Es gibt ein $T > 0$ und $\sigma \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{T})$ derart, dass das Problem **GS** zwei Lösungen besitzt.

(ii) Für jedes $T > 0$ gibt es $\sigma \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{T})$ so, dass das Problem **GS** auf keinem Intervall $[0, \hat{T}]$ mit $\hat{T} \in (0, T]$ eine Lösung besitzt.

Beweis. Anstelle von σ betrachten wir die dimensionslose Größe $x := \sigma/\sigma_m$. Wähle $p > 0$ so, dass

$$p < \frac{1}{b} \operatorname{arcosh} \left(\frac{1 + r_0^2}{2r_0} \right)$$

ist. Weiter wählen wir $w \in \langle \Delta \rangle^\perp \setminus \{0\}$ mit

$$\|w\|^2 = \frac{1 + r_0^2 - 2r_0 \cosh(b\|p\Delta\|)}{a}$$

(die rechte Seite ist nach Wahl von p positiv) und setzen

$$x_0 := w + p\Delta.$$

Dann gilt

$$\Pi x_0 = p\Delta \quad \text{und} \quad (\operatorname{Id} - \Pi)x_0 = w \tag{12.4}$$

und

$$a\|w\|^2 + 2r_0 \cosh(b\|\Pi x_0\|) = 1 + r_0^2 \tag{12.5}$$

nach Wahl von x_0 und w .

Zu (i). Wir definieren

$$x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}, t \mapsto x_0 + t(\Pi x_0 - x_0) = x_0 - tw. \tag{12.6}$$

Wir geben jetzt zu den Anfangswerten $r_0 \in (0, 1)$, $\varepsilon_0^p \in \mathbb{T}$ und $x \in W^{1,1}(0, 1; \mathbb{T})$ zwei verschiedene Lösungen $(r, \xi = \varepsilon^p)$ an.

1. Lösung: Setze $r(t) := r_0$, $\xi(t) := \varepsilon_0^p$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gilt $Z_0(r(t)) = Z_0(r_0)$ für alle $t \in [0, 1]$, $\dot{\xi}(t) = 0$ für alle $t \in (0, 1)$, das heißt (iv) gilt. Wegen $\dot{r} = 0$ ist (v) erfüllt. Mit Bemerkung 12.1 gelten (i) und (ii). Schließlich haben wir für alle $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} x(t) \in Z_0(r(t)) &\Leftrightarrow a\|(\operatorname{Id} - \Pi)x(t)\|^2 + 2r_0 \cosh(b\|\Pi x(t)\|) \leq 1 + r_0^2 \\ &\Leftrightarrow a(1 - t)^2\|w\|^2 + 2r_0 \cosh(b\|\Pi x_0\|) \leq 1 + r_0^2. \end{aligned}$$

Nach (12.5) gilt für $t = 0$ in der unteren Ungleichung Gleichheit. Da die linke Seite in $[0, 1]$ monoton fallend in t ist, gilt die Ungleichung für alle $t \in [0, 1]$. Damit ist auch (iii) erfüllt.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich $x(t)$ auf dem Rand von $Z_0(r_0)$. Danach ändert sich an Z_0 , r und $\xi = \varepsilon^p$ nichts mehr, während x sich auf der Verbindungslinie von x_0 und Πx_0 ins Innere von Z_0 bewegt und zum Zeitpunkt 1 den von Δ aufgespannten Teilraum erreicht.

2. Lösung: Mit der Abkürzung $c := \cosh(b\|\Pi x_0\|)$ setzen wir

$$r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto c - \sqrt{c - 1 + a\|w\|^2(1 - t)^2}.$$

Es ist $r(0)$ die kleinere der beiden Nullstellen der in r_0 quadratischen Gleichung (12.5). Also ist $r(0) = r_0$, da $r_0 < 1$ und die zweite Nullstelle wegen $c > 1$ größer als 1 ist. Da r stetig und $r(0) \in (0, 1)$ ist, findet man $T \in (0, 1]$, $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$ so, dass

$$r([0, T]) \subset [\delta_1, \delta_2] \quad (12.7)$$

ist. Mit den Abkürzungen $I := [0, T]$,

$$\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}, \alpha(t) := \frac{a(1 - t)\dot{r}(t)}{\sqrt{3}b(1 - r(t))r(t)\sinh(b\|\Pi x_0\|)}, \beta(t) := \frac{\dot{r}(t)}{\sqrt{3}(1 - r(t))}$$

definieren wir

$$\xi : I \rightarrow \mathbb{T}, t \mapsto \int_0^t \alpha(s)ds w + \int_0^t \beta(s)ds \frac{\Pi x_0}{\|\Pi x_0\|} + \varepsilon_0^p.$$

Wegen

$$\dot{r}(t) = \frac{a\|w\|^2(1 - t)}{\sqrt{c - 1 + a\|w\|^2(1 - t)^2}}$$

für alle $t \in I$ ist \dot{r} stetig. Es sind α und β stetig und wegen (12.7) auch beschränkt. Also existieren die Integrale in der Definition von ξ . Es ist $\xi(0) = \varepsilon_0^p$, und es gilt:

$$\dot{\xi}(t) = \alpha(t)(x_0 - \Pi x_0) + \beta(t) \frac{\Pi x_0}{\|\Pi x_0\|} \quad (12.8)$$

für alle $t \in I$. Nach Wahl von r ist $r(t)$ für jedes $t \in I$ die kleinere der beiden Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= r^2(t) - 2r(t)c + 1 - a\|w\|^2(1 - t)^2 \\ &= r^2(t) - 2r(t)\cosh(b\|\Pi x(t)\|) + 1 - a\|(\text{Id} - \Pi)x(t)\|^2. \end{aligned}$$

Das bedeutet aber gerade, dass

$$x(t) \in Z_0(r(t))$$

für alle $t \in I$ ist. Nach Satz 2.6 ist

$$N_{Z_0(r(t))}(x(t)) = \{\lambda Df(x(t)); \lambda \geq 0\} \quad (12.9)$$

mit

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto a\|(\text{Id} - \Pi)z\|^2 + 2r(t) \cosh(b\|\Pi z\|) - 1 - r^2(t).$$

Wenn wir den Dualraum \mathbb{T}' von \mathbb{T} mit \mathbb{T} identifizieren, so ist

$$\begin{aligned} Df(x(t)) &= 2 \left(a(\text{Id} - \Pi)x(t) + br(t) \sinh(b\|\Pi x(t)\|) \frac{\Pi x(t)}{\|\Pi x(t)\|} \right) \\ &= 2 \left(a(1-t)w + br(t) \sinh(b\|\Pi x_0\|) \frac{\Pi x_0}{\|\Pi x_0\|} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}b \sinh(b\|\Pi x_0\|)(1-r(t))r(t)}{\dot{r}(t)} \left(\alpha(t)w + \beta(t) \frac{\Pi x_0}{\|\Pi x_0\|} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}b \sinh(b\|\Pi x_0\|)(1-r(t))r(t)}{\dot{r}(t)} \dot{\xi}(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in I$. Da $\dot{r} > 0$ ist, ist der Vorfaktor vor $\dot{\xi}$ positiv. Nach (12.9) ist also

$$\dot{\xi}(t) \in N_{Z_0(r(t))}(x(t)),$$

das heißt

$$\dot{\xi}(t) : (x(t) - y) \geq 0$$

für alle $y \in Z_0(r(t))$ und für alle $t \in I$. Wegen $\Delta = \Pi x_0 / \|\Pi x_0\|$ und (12.8) ist schließlich

$$(1-r(t))\sqrt{3}(\dot{\xi}(t) : \Delta) = \sqrt{3}(1-r(t)) \left(0 + \frac{\dot{r}(t)}{\sqrt{3}(1-r(t))} \right) = \dot{r}(t)$$

für alle $t \in I$. Genauso wie in der ersten Lösung definiert man jetzt ε und ε^e . Wir haben gezeigt, daß (r, ξ) eine weitere, von der ersten Lösung verschiedene Lösung des Problems ist.

Bei der zweiten Lösung befindet sich $x(t)$ die ganze Zeit auf dem Rand der Menge $Z_0(r(t))$, während diese schrumpft. $\dot{\xi}(t)$ ist zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ ein von Null verschiedener Vektor aus dem Normalenkegel im Punkt $x(t)$ von $Z_0(r(t))$.

Zu (ii). Sei $T > 0$. Wir definieren

$$x : [0, T] \rightarrow \mathbb{T}, \quad t \mapsto x_0 + tw. \quad (12.10)$$

Angenommen, es gibt $\hat{T} \in (0, T]$ und $\xi := \varepsilon^p \in W^{1,1}(0, \hat{T}; \mathbb{T})$, $r \in W^{1,1}(0, \hat{T}; [0, 1])$ so, dass die Bedingungen (i) bis (vi) in **GS** erfüllt sind.

Sei $t \in (0, \hat{T}]$. Ist $x(t)$ im Inneren von $Z_0(r(t))$, so ist $\dot{\xi}(t) = 0$, sofern die Ableitung existiert. Ist $x(t) \in \partial Z_0(r(t))$, so gilt

$$a\|(\text{Id} - \Pi)x(t)\|^2 + 2r(t) \cosh(b\|\Pi x(t)\|) = 1 + r^2(t).$$

Sei

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto a\|(\text{Id} - \Pi)z\|^2 + 2r(t) \cosh(b\|\Pi z\|) - 1 - r^2(t).$$

Für $z \in X$ mit $\Pi z \neq 0$ ist

$$Df(z) = 2 \left(a(\text{Id} - \Pi)z + br(t) \sinh(b\|\Pi z\|) \frac{\Pi z}{\|\Pi z\|} \right).$$

Also ist $Df(x(t)) \neq 0$ wegen $(\text{Id} - \Pi)x(t) = (1 + t)w \neq 0$ und $\Pi x(t) = p\Delta \perp w$. Mit Satz 2.6 folgt

$$N_{Z_0(r(t))}(x(t)) = \{\lambda Df(x(t)); \lambda \geq 0\},$$

das heißt, es gibt $\lambda \geq 0$ mit

$$\dot{\xi}(t) = \lambda \left(a(1 + t)w + br(t) \sinh(b\|p\Delta\|) \frac{p\Delta}{\|p\Delta\|} \right).$$

Da $p\Delta/\|p\Delta\| = \Delta$ und $\|\Delta\| = 1$ ist, gilt

$$\begin{aligned} \langle \dot{\xi}(t), \Delta \rangle &= \lambda \left\langle \left(a(1 + t)w + br(t) \sinh(b\|p\Delta\|) \frac{p\Delta}{\|p\Delta\|} \right), \Delta \right\rangle \\ &= \lambda br(t) \sinh(b\|p\Delta\|) \geq 0. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\dot{r}(t) = (1 - r(t))\sqrt{3}\langle \dot{\xi}(t), \Delta \rangle \geq 0$$

für fast alle $t \in [0, \hat{T}]$, das heißt r wächst monoton. Sei $t > 0$. Mit (12.5) gilt dann

$$\begin{aligned} &a\|(\text{Id} - \Pi)x(t)\|^2 + 2r(t)(\cosh(b\|\Pi x(t)\|) - 1) \\ &\geq a(1 + t)^2\|w\|^2 + 2r_0(\cosh(b\|\Pi x_0\|) - 1) \\ &> a\|w\|^2 + 2r_0(\cosh(b\|\Pi x_0\|) - 1) \\ &= (1 - r_0)^2 \geq (1 - r(t))^2. \end{aligned}$$

Das bedeutet aber nach Definition von Z_0 (siehe (12.3)), dass $x(t)$ für kein $t \in (0, \hat{T}]$ in $Z_0(r(t))$ liegt. Also verletzen ξ und r Bedingung (iii) aus **GS**, ein Widerspruch.

Anschaulich befindet sich $x(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ gerade auf dem Rand von $Z_0(r(t))$. Dann bewegt sich x parallel zu $\langle w \rangle$ weg von $\langle \Delta \rangle$. Wegen der Richtung des äußeren Normalenvektors muss gleichzeitig r wachsen, was wiederum bedeutet, dass $Z_0(r(t))$ schrumpft. Daraus ergibt sich schließlich der Widerspruch. \square

13 Anhang

Im folgenden sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ immer ein reeller Hilbertraum mit zugehöriger Norm $|\cdot|$.

Hilfssatz 13.1. *Sei I ein Intervall in \mathbb{R} , $f : I \rightarrow X$ absolutstetig. Dann ist $|f|$ absolutstetig, und für fast alle Punkte $t \in I$ gilt*

$$\frac{d}{dt}|f(t)| \leq |\dot{f}(t)|. \quad (13.1)$$

Außerdem ist

$$|f(t)| - |f(s)| \leq \int_s^t |\dot{f}(\tau)| d\tau \quad (13.2)$$

für alle $s, t \in I$.

Beweis. Da $|\cdot|$ Lipschitz-stetig ist, ist $|f|$ als Hintereinanderausführung einer absolutstetigen und einer Lipschitz-stetigen Funktion absolutstetig. Also sind f und $|f|$ fast überall in I differenzierbar.

Sei $t \in I$, und $f, |f|$ seien differenzierbar in t . Gilt $f(t) = 0$, so hat $|f|$ ein Minimum in t , das heißt

$$\frac{d}{dt}|f(t)| = 0 \leq |\dot{f}(t)|.$$

Ist $f(t) \neq 0$, so gilt nach der Kettenregel und der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung

$$\frac{d}{dt}|f(t)| = \frac{\langle f(t), \dot{f}(t) \rangle}{|f(t)|} \leq |\dot{f}(t)|.$$

Seien $s, t \in I$. Mit der gerade gezeigten Ungleichung gilt

$$|f(t)| - |f(s)| = \int_s^t \frac{d}{d\tau}|f(\tau)| d\tau \leq \int_s^t |\dot{f}(\tau)| d\tau.$$

□

Hilfssatz 13.2. *Für alle $x, y \in X \setminus \{0\}$ gilt:*

$$\left| \frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2} \right| = \frac{1}{|x||y|} |x - y|. \quad (13.3)$$

Beweis. Seien $x, y \in X \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2}, \frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2} \right\rangle &= |x|^{-2} + |y|^{-2} - 2|x|^{-2}|y|^{-2}\langle x, y \rangle \\ &= |x|^{-2}|y|^{-2}(|x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y \rangle) \\ &= \frac{1}{(|x||y|)^2} \langle x - y, x - y \rangle. \end{aligned}$$

□

Satz 13.3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sei $W^{1,1}(a, b; X)$ der Raum der absolutstetigen Funktionen mit Werten in X . Dann ist $W^{1,1}(a, b; X)$ mit der Norm

$$|u|_{1,1} := |u(0)| + \int_a^b |\dot{u}(t)| dt \quad \text{für alle } u \in W^{1,1}(a, b; X)$$

ein Banachraum. Ist $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ stetig, so ist die durch

$$|u|_w := |u(0)| + \int_a^b w(t) |\dot{u}(t)| dt \quad \text{für alle } u \in W^{1,1}(a, b; X)$$

definierte Norm äquivalent zu der Norm $|\cdot|_{1,1}$. Insbesondere ist $(W^{1,1}(a, b; X), |\cdot|_w)$ auch ein Banachraum.

Lemma 13.4. Seien $T > 0$, $\mu \in L^1([0, T]; \mathbb{R}_{\geq 0})$, $v \in W^{1,1}(0, T; X)$ gegeben, und sei $y \in W^{1,1}(0, T; X)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) + \mu(t)y(t) = \mu(t)v(t) \quad \text{für fast alle } t \in [0, T]$$

zum Anfangswert $y(0) = y_0 \in X$. Dann gilt

$$\|y\|_\infty \leq \max(|y_0|, \|v\|_\infty).$$

Beweis. Sei $C := \max\{|y_0|, \|v\|_\infty\}$. Angenommen, der Satz ist falsch. Dann gibt es ein $t_0 \in [0, T]$ mit $|y(t_0)| > C$. Da $|y(0)| = |y_0| \leq C$ ist, findet man $t_1 < t_2 \in [0, T]$ mit $|y(t_1)| = C$ und $|y(t)| > C$ für alle $t \in (t_1, t_2]$. Sei $s \in [t_1, t_2]$ und y differenzierbar in s . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} |y(s)|^2 &= \langle \dot{y}(s), y(s) \rangle = \mu(s) (\langle y(s), v(s) \rangle - \langle y(s), y(s) \rangle) \\ &\leq \mu(s) |y(s)| (\|v\|_\infty - |y(s)|). \end{aligned}$$

Mit dem Hauptsatz über absolutstetige Funktionen folgt

$$0 < \frac{1}{2} (|y(t_2)|^2 - |y(t_1)|^2) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{ds} |y(s)|^2 ds \leq \int_{t_1}^{t_2} \mu(s) |y(s)| (\|v\|_\infty - |y(s)|) ds \leq 0,$$

ein Widerspruch. □

Satz 13.5 (Banachscher Fixpunktsatz). Sei $M \neq \emptyset$, (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $k : M \rightarrow M$ eine Kontraktion, das heißt Lipschitz-stetig mit einer Lipschitzkonstante, die echt kleiner als 1 ist. Dann besitzt k genau einen Fixpunkt auf M .

Folgerung 13.6. Sei $M \neq \emptyset$, (M, d) ein vollständiger metrischer Raum, $n \in \mathbb{N}$ und $k : M \rightarrow M$ eine Abbildung. Ist k^n , die n -fache Hintereinanderausführung von k , eine Kontraktion, so besitzt k selbst genau einen Fixpunkt auf M .

Beweis. Sei $c < 1$ die Lipschitzkonstante von k^n und $x \in M$ der Fixpunkt von k^n . Dann gilt

$$d(k(x), x) = d(k(k^n(x)), k^n(x)) = d(k^n(k(x)), k^n(x)) \leq c d(k(x), x).$$

Da $c < 1$ ist, folgt $k(x) = x$. Da umgekehrt jeder Fixpunkt von k einer von k^n ist und k^n nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau einen Fixpunkt besitzt, hat auch k genau einen Fixpunkt. \square

Bezeichnungen

Bezeichnungen

$[a, b], (a, b)$	abgeschlossenes, offenes Intervall
$(a, b], [a, b)$	halboffene Intervalle
$\mathbb{N}, \mathbb{R},$	natürliche, reelle Zahlen
\mathbb{T}	symmetrische 3×3 -Matrizen
$v : w$	Skalarprodukt von $v, w \in \mathbb{T}$, Seite 21
$K(x, r)$	abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt x und Radius r
$B(x, r)$	offene Kugel mit Mittelpunkt x und Radius r
$f _U$	Einschränkung der Funktion f auf U
$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$	Hilbertraum X mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$
$\langle u \rangle$	der von $u \in X$ erzeugte lineare Teilraum
$W^{1,1}(a, b; X)$	Raum der absolutstetigen Funktionen
$ \cdot _{1,1}$	Norm auf $W^{1,1}(a, b; X)$; $ u _{1,1} = u(a) + \int_a^b \dot{u}(t) dt$
$ \cdot _w$	Norm auf $W^{1,1}(a, b; X)$, Satz 13.3
$L^1(a, b; X)$	Raum der integrierbaren Funktionen
Df	totale/Frechét-Ableitung von f
$D_i^k f$	k -te partielle Ableitung von f nach der i -ten Variablen
$D_x f$	Richtungsableitung von f in Richtung x
$d_H(M, N)$	Hausdorffabstand der abgeschlossenen nichtleeren Mengen M, N
$N_K(x)$	Normalenkegel der konvexen Menge K in $x \in K$, Definition 2.3
∂M	Rand der Menge M
$\text{int } M$	Inneres der Menge M
\overline{M}	Abschluss der Menge M
Z^*	Polare der Menge Z , Definition 2.12
Π	orthogonale Projektion auf einen Teilraum
Id	Identische Abbildung $x \mapsto x$
$G(\varrho)$	siehe (6.2)
$Z(\varrho)$	siehe (6.12)
$M(\varrho, \cdot)$	Minkowskifunktional von $Z(\varrho)$, siehe (7.1)
ψ	siehe Definition 6.7
K	$D_1(M/2)$, siehe (7.19)
J	$D_2(M/2)$ siehe (7.20)
S	siehe Definition 7.12
A, B, G	siehe Lemma 8.4

Konstanten

m, p, ϱ_1	siehe (6.1)
d_1, d_0, c, C	siehe (6.13)
ψ_0	siehe (6.19)
C_J, C_K	siehe Definition 7.10
K_0	siehe (7.29)
C_S	siehe (7.32)
γ, C_g	siehe Voraussetzung 9.2
δ	siehe Voraussetzung 9.3

Literatur

- [Ba] Ballard, P., *A Counter-Example to Uniqueness in Quasi-Static Elastic Contact Problems with Friction*, International Journal of Engineering Science 37 (1999), 163-178.
- [BKKS] Brocks, W., Klingbeil, D., Künecke, G., and Sun, D. Z. *Application of the Gurson Model to Ductile Tearing Resistance*, Kirk, M. and Bakker, A. Constraint Effects in Fracture: Theory and Applications. STP 1244, 232-252. 95. Philadelphia, American Society for Testing and Materials.
- [BKS] Brokate, M., Krejčí, P., Schnabel, H., *On Uniqueness in Evolution Quasivariational Inequalities*, Journal of Convex Analysis 11 (2004), 111-130.
- [Ci] Ciarlet, P.G., *Mathematical Elasticity, Volume I: Three-Dimensional Elasticity*, North-Holland, Amsterdam (1988).
- [Gu1] Gurson, A.L., *Plastic Flow and Fracture Behaviour of Ductile Materials Incorporating Void Nucleation, Growth and Interaction*, Dissertation, Brown University (1975).
- [Gu2] Gurson, A.L., *Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I-Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media*, Journal of Engineering Materials and Technology 99 (1977), 2-15.
- [Kr] Krejčí, P. *Evolution Variational Inequalities and Multidimensional Hysteresis Operators*, Nonlinear Differential Equations, P. Drábek, P. Krejčí, P. Takáč (Hrg.), Research Notes in Mathematics 404, Chapman & Hall/CRC, London (1999), 47-110.
- [KM1] Kunze, M., Monteiro Marques, M. D. P., *On Parabolic Quasi-Variational Inequalities and State-Dependent Sweeping Processes*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 12 (1998), 179-191.
- [KM2] Kunze, M., Monteiro Marques, M. D. P., *An Introduction to Moreau's Sweeping Process, Impacts in Mechanical Systems – Analysis and Modeling*, B. Brogliato (Hrg.), Lecture Notes in Physics 551, Springer (2000), 1-60.
- [Mo] Moreau, J.-J., *Evolution Problem Associated with a Moving Convex Set in a Hilbert Space*, Journal of Differential Equations 26 (1977), 347-374.
- [Mü] Mühlich, U., *Nichtlokale Modifikation des GURSON-Modells*, Dissertation, Universität Bremen 1999.

Literatur

- [Ro] Rockafellar, R. T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton (1970).
- [So] Sontag, D., *Mathematical Control Theory*, Springer Verlag, New York (1990).
- [Tv] Tvergaard, V., *Material Failure by Void Growth to Coalescence*, Advances in Applied Mechanics 27 (1989), 83 - 151.
- [We] Werner, D., *Funktionalanalysis*, 3. Auflage, Springer Verlag, Berlin (2000).