

Max-Planck-Institut für Plasmaphysik
Bereich Experimentelle Plasmaphysik 3

Driftwellen in Helias-Konfigurationen

Alexander Kendl

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Physik
der Technischen Universität München
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr.rer.nat.)
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. H.-J. Körner

Prüfer der Dissertation: 1. Hon.-Prof. Dr. D. Pfirsch
2. Univ.-Prof. Dr. H. Friedrich

Die Dissertation wurde am 1.3.2000 bei der
Technischen Universität München eingereicht und
durch die Fakultät für Physik am 10.7.2000 angenommen.

Abstrakt

Kendl, Alexander: Driftwellen in Helias-Konfigurationen

Konvektiver Transport durch turbulente Wirbel ist ein wesentlicher Verlustmechanismus von Energie und Teilchen aus einem Fusionsplasma. Ursache dieser Turbulenz sind destabilisierte niederfrequente Anregungen der Driftbewegung im inhomogenen magnetisierten Plasma. In dieser Arbeit werden Driftwellen und Turbulenz in fortgeschrittenen helikalen Stellarator-Konfigurationen ("Helias") und die Auswirkungen der hochgradig dreidimensionalen Magnetfeldgeometrie auf Instabilität und Transport untersucht. Es zeigt sich, daß durch geeignete Optimierung der Form des Magnetfelds eine Reduzierung des turbulenten Transports möglich ist.

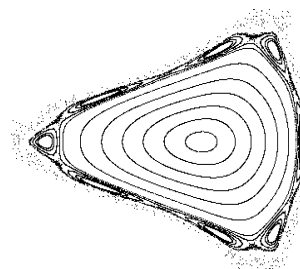
Inhalt

Abstrakt	iii
Inhalt	v
1 Einleitung	1
2 Magnetischer Plasmaeinschluß	3
2.1 Unterschiede in toroidalen Einschlußkonzepten	4
2.2 „Helias“: Helikale avancierte Stellaratoren	5
2.3 Flußflächenkoordinaten und Magnetfeldstruktur	6
2.4 Strukturbildung und Transport fern vom Gleichgewicht	8
3 Driftinstabilitäten in magnetisierten inhomogenen Plasmen	9
3.1 Klassifizierung von niederfrequenten Driftinstabilitäten	10
3.2 Driftwellen und kinetische Scherungs-Alfvénwellen	12
3.3 Einfluß der Geometrie auf Driftwellen	14
4 Lineare Theorie: Driftwellen	15
4.1 Driftwellengleichung für allgemeine Geometrie	16
4.2 Numerische Lösung des Eigenwertproblems	19
4.3 Lineares Spektrum für konstante Dissipation	20
4.4 DTEM: Dissipative Moden durch gefangene Elektronen	22
4.5 Die Rolle der lokalen Verscherung	25
4.6 Radiale und poloidale Abhängigkeiten	26
4.7 Zusammenfassung	28
5 Lineare Theorie: Elektromagnetische ITG-Moden	29
5.1 Die elektromagnetische gyrokinetische Gleichung	30
5.2 Numerische Lösung als Anfangswertproblem	33
5.3 Endlich-Beta-Effekte in einem Helias-Reaktor	36
5.4 Zusammenfassung	37
6 Driftwellen: Direkte Numerische Simulation	39
6.1 Fluid- und Gyrofluidsimulation von Drift-Alfvén-Turbulenz	40
6.2 Scherungskorrigierte Flußschlauchmetrik	42
6.3 Übergang vom Tokamak zur Stellaratorgeometrie	45
6.4 Effektive Lokalisierung der Turbulenz	47
6.5 Geometrische Skalierung von Transport und Spektren	50
6.6 Zusammenfassung	52

7	Interpretation experimenteller Befunde	53
7.1	Simulationen für Wendelstein 7-AS	54
7.2	Korrelationslängen von Fluktuationen	56
7.3	Resonante Flächen und magnetische Inseln	57
7.4	Zusammenfassung	59
8	Anomaler Transport	61
8.1	Lineares Bild: Mischungsweg-Näherung	62
8.2	Teilchenbild: Aufbrechen von Driftflächen	63
8.3	Flüssigkeitsbild: konvektiver turbulenter Transport	69
8.4	Turbulenzreduzierende Optimierung von Stellaratoren	69
8.5	Zusammenfassung	71
9	Zusammenfassung	73
A	Flußflächenkoordinaten	79
B	Ballooning-Transformation	81
C	Gyrofluid-Gleichungen	83
D	Flußerhaltende Abbildungen	85
E	Daten der Helias-Konfigurationen	87
	Literatur	89
	Danksagung	97

Kapitel 1

Einleitung



*Ceci n'est pas un Stellarator.*¹

In inhomogenen magnetisierten Plasmen können niederfrequente kollektive Anregungen der Gyrozentrenbewegung von Teilchenbahnen auftreten. Diese *Driftwellen* sind in toroidalen Plasmen mit hohem Dichte- und Temperaturgradienten nahezu immer destabilisiert [62]. Im Labor dienen durch starke Magnetfelder eingeschlossene toroidale Plasmen in erster Linie zur Erforschung der Energieerzeugung durch thermonukleare Fusion [39]. Die konvektive Durchmischung der Fusionsplasmen mittels von instabilen Driftwellen generierter Turbulenz führt zu einem verstärkten Verlust von Energie und Teilchen aus dem Plasma und einer geringeren Einschlußzeit. Ein Verständnis dieser turbulenten Prozesse und den zugrundeliegenden Instabilitäten ist daher von grundsätzlicher Bedeutung für die Konzeption fortgeschrittener Fusionskonfigurationen auf dem Weg zu einem Kraftwerk.

Derzeit werden weltweit im wesentlichen zwei Ansätze zum toroidalen magnetischen Einschluß von Plasmen verfolgt [121]. Die zum Teilcheneinschluß nötige Verschraubung der Feldlinien wird beim axialsymmetrischen Konzept des Tokamaks zusätzlich zu den Toroidalfeldspulen durch von einem toroidalen Plasmastrom erzeugte poloidale Magnetfelder gewährleistet [124]. Beim Stellarator wird die Verschraubung alleine aus externen Feldspulen erhalten, was die Möglichkeit zu einem Dauerbetrieb schafft, jedoch eine stark dreidimensionale Formung des Magnetfelds zur Folge hat [17]. Zur Familie der Stellaratoren gehören auch die optimierten *Helias-Konfigurationen*².

Die grundsätzlichen Instabilitätsmechanismen von Driftwellen sind in den verschiedenen Einschlußkonzepten gleich. Die freie Energie aus dem Druckgradienten führt in Verbindung mit einer nichtidealen Wechselwirkung zwischen Ionen und paralleler Elektronendynamik zu einem nichtlinearen Wachstum der Wellenamplitude. Die Kopplung mehrerer Wellenzahlen untereinander resultiert auf einer räumlichen Größenordnung des Ionengyroradius charakteristisch in einem homogenen turbulenten Zustand [114].

¹ Trotz mancher Ähnlichkeit zeigt das Bild keinen Poincaré-Schnitt durch die Flußfläche eines Stellarators. Doch ist es verwandt: Eine flußerhaltende zweidimensionale Hénon-Abbildung mit kleiner Störung. Derartige Abbildungen und deren Zusammenhang mit Driftwellen werden in Kapitel 8.2 und Anhang D erläutert.

² Helias: (engl.) Helical advanced Stellarator [88]

Dämpfende und katalysierende Faktoren bezüglich Driftwellen, wie globale und lokale Verscherung und Krümmung des Magnetfelds, sind dagegen wesentlich von der Geometrie des Einschlusses bestimmt. Berechnungen zu Driftwelleninstabilitäten in der dreidimensionalen Feldgeometrie eines toroidalen Stellarators wurden in der Literatur bisher nur vereinzelt und immer in der linearen Näherung im Flüssigkeitsbild behandelt [123, 33, 75, 77, 78]. Die Frage nach den Auswirkungen der beteiligten geometrischen Größen eines Stellarators im einzelnen blieb bisher ebenso offen wie eine Untersuchung der aus der Instabilität resultierenden Turbulenz und der Möglichkeit zu einer gezielten Reduzierung dieser Turbulenz durch geeignete Änderungen der Geometrie.

Die zentrale Fragestellung der vorliegenden Arbeit zielt auf die Untersuchung zum Einfluß der spezifischen Geometrie des Helias-Konzepts auf Driftwellen und Turbulenz im Plasma. Diese fortgeschrittenen Stellaratoren zeichnen sich durch einen guten Einschluß von Einzelteilchen und damit durch eine hohe Reaktorrelevanz aus. Von grundsätzlichem Interesse ist somit auch ein Verständnis des kollektiven Transports durch Driftwellenturbulenz, welcher diesen Einschluß beträchtlich verschlechtern kann.

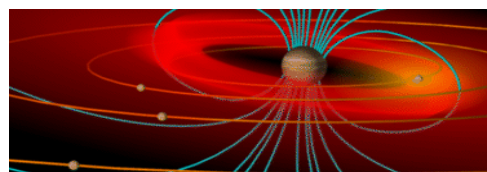
Dazu werden die bestehenden linearen Modelle wesentlich erweitert und für Helias-Konfigurationen numerisch gelöst und diskutiert. Erstmals werden auch generell direkte nichtlineare Simulationen zur Driftwellenturbulenz in der Geometrie von Stellaratoren durchgeführt und die entscheidenden geometrischen Faktoren identifiziert. Es zeigt sich dabei, daß für Stellaratoren mit global geringer Verscherung der lokalen Verscherung der Feldlinien eine bedeutende Rolle in der Stabilisierung zukommt.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: In den einleitenden Kapiteln 2 und 3 werden die Grundlagen des magnetischen Plasmaeinschlusses in besonderem Hinblick auf Helias-Konfigurationen besprochen und eine Einführung in die Mechanismen von Driftwellen gegeben. Anhand eines einfachen linearen Flüssigkeitsmodells elektrostatischer Driftwellen werden in Kapitel 4 Unterschiede in der Geometrie und den resultierenden Eigenwertspektren verschiedener Helias-Stellaratoren diskutiert. Ein lineares elektromagnetisches gyrokinetisches Modell, das die konsistente Berücksichtigung von Effekten endlicher Iontemperatur und endlichen Plasmadrucks erlaubt, wird in Kapitel 5 aufgestellt und für verschiedene Parameter einer Helias-Reaktorstudie gelöst. Die direkte nichtlineare Simulation von Driftwellenturbulenz wird in Kapitel 7 in einem Flußschlauchansatz der Randschichtgeometrie des projektierten Stellarators *Wendelstein 7-X* und in geeigneten Interpolationen zu einem einfachen Tokamak betrieben. Ausblickend werden anhand des Experiments *Wendelstein 7-AS* in Kapitel 7 die Möglichkeiten zu einem Vergleich dieser Simulationen mit experimentellen Messungen erläutert und gleichzeitig die Grenzen des bisher verwendeten Flußschlauchansatzes diskutiert. In Kapitel 8 werden resümierend die Auswirkungen der behandelten Driftwellenmodelle auf den turbulenten, sogenannten “anomalen” Transport besprochen und Möglichkeiten zu einer turbulenzreduzierenden Optimierung von Stellaratoren erörtert. Die Ergebnisse werden schließlich in Kapitel 9 zusammengefaßt. Einige zum Verständnis nötige, in der Literatur aber bereits gut behandelte Ausführungen sind der Übersichtlichkeit halber im Anhang wiedergegeben.

Teilaspekte der vorliegenden Arbeit wurden in *Phys. Plasmas* veröffentlicht [69].

Kapitel 2

Magnetischer Plasmaeinschluß



Io-Plasmatorus um Jupiter.

Die elektrisch geladenen Ionen und Elektronen eines Plasmas unterliegen im starken Magnetfeld einer Gyrationbewegung um eine Achse parallel zur Feldrichtung. Eine charakteristische Größe dieser Spiralbahn ist der Gyroradius, welcher von der Energie der Teilchenbewegung senkrecht zum Feld und invers von der Magnetfeldstärke selbst abhängt. Unter Vernachlässigung von Stößen zwischen Teilchen verschiedener Feldlinien ist deren Bewegung an die Magnetfeldrichtung gebunden. Hinsichtlich des magnetischen Einschlusses eines Plasmas auf ein beschränktes räumliches Gebiet lassen sich so zwei Konzepte verwirklichen. Beim Spiegeleinschluß ist die Magnetfeldstärke an den Enden der Plasmaeinschlußzone erhöht, wodurch aufgrund der Erhaltung von Bewegungsenergie und magnetischem Moment alle Teilchen mit genügend hoher senkrechter Energie reflektiert werden (so wie auch in der Magnetosphäre der Erde). Die andere Realisierung beruht auf der Verbiegung der Feldlinien zu einem geschlossenen System, das in der Topologie eines Torus resultiert.¹ Im Labor haben durch Spulenströme erzeugte toroidale Magnetfeldkonfigurationen vorrangig die Erforschung des Einschlusses eines thermonuklearen Plasmas für die Kernfusion zum Ziel [39, 11].

Ein wesentliches Merkmal solcher Fusionskonfigurationen ist die Notwendigkeit zur Aufrechterhaltung einer genügend hohen Temperatur und Dichte im Plasmazentrum, wobei gleichzeitig eine möglichst gute Isolation von den viel kälteren Wandmaterialien zu fordern ist. Das führt unvermeidbar zu räumlichen Gradienten dieser Plasmagrößen. Einzelteilchenstöße, aber auch kollektive Phänomene, versuchen die Gradienten abzubauen, und bewirken einen stetigen Fluß von Energie und Teilchen vom heißen Zentrum zum Plasmarand mit dafür charakteristischen Einschlußzeiten $\tau_{E,p}$.

Von großem Interesse ist es daher, die Verlustmechanismen zu charakterisieren und eine optimale, zur möglichst selbständigen und stationären Aufrechterhaltung von Fusionsreaktionen geeignete Magnetfeldkonfiguration zu finden. Das Konzept helikaler avancierter Stellaratoren (“Helias”) und die Unterschiede zu anderen Einschlußkonfigurationen werden in diesem Kapitel erläutert.

¹ Ein toroidales Plasma läßt sich in natürlicher Weise beim sogenannten *Io-Torus* um den Planeten Jupiter beobachten. Die toroidale Magnetfeldkomponente ist darin jedoch sehr gering, weswegen es sich nicht um einen Einschluß durch ein toroidales Feld im eigentlichen Sinne dieses Kapitels handelt [85]. Bild oben: J. Spencer, Lowell Observatory.

2.1 Unterschiede in toroidalen Einschlußkonzepten

Ein rein toroidales Feld führt aufgrund des Magnetfeldunterschiedes zwischen Torusinnenseite und Außenseite nicht zu einem Gleichgewicht [54]: Im allgemeinen bewirkt eine Kraft \mathbf{F}_K auf Plasmateilchen mit der Ladung q und magnetischem Moment μ eine Verformung der Kreisbahn senkrecht zum Feld der Stärke B . Der Führungsmittelpunkt der Bahn “driftet” mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{v}_F = \mathbf{F}_K \times \mathbf{B} / (qB^2)$ senkrecht zu Feld und Kraft. Im Falle des Feldgradienten bewirken eine Ladungstrennung durch $\mathbf{F}_K = -\mu \nabla B$ und weitere $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ Drift durch das entstandene elektrische Feld E einen raschen radialen Plasmaverlust. Abhilfe schafft eine Ausmittelung dieses Effekts durch helikale Verschraubung der Feldlinien um den Torus, wonach das Magnetfeld ineinander geschachtelte Flußflächen aufweist. Gegenwärtig werden zwei Konzepte hinsichtlich dieser Verschraubung verfolgt [121]: Die interne Erzeugung einer poloidalen Feldkomponente durch starke toroidale Plasmaströme führt zu der axialsymmetrischen zweidimensionalen Struktur eines Tokamaks [124]. In einem Stellarator [17, 122] wird der Einschluß alleine durch von außen erzeugte Magnetfelder gewährleistet. Dies erlaubt die prinzipielle Möglichkeit zum Dauerbetrieb, hat aber ein stark dreidimensionales Plasma zur Folge (Abb. 2.1).

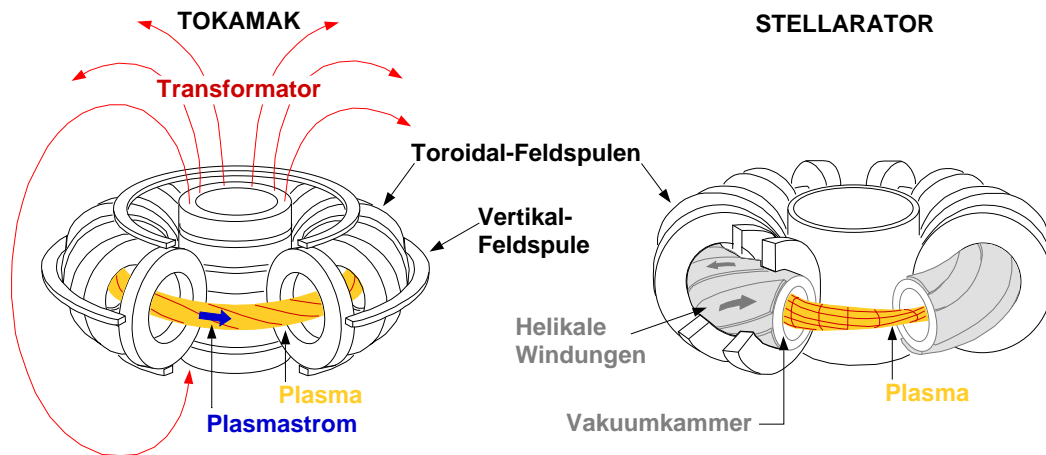


Abbildung 2.1. Skizze des toroidalen Plasmaeinschlusses bei Tokamak und klassischem Stellarator.

Die dreidimensionale Form des Magnetfelds bei einem Stellarator führt bei einfachen Verwirklichungen dieses Konzepts zu bedeutenden Abweichungen der Driftbahnen gegenüber den Feldlinien, und damit zusammen mit Coulombstößen zu einem hohen sogenannten “neoklassischen” Transport [83]. Optimierte helikale Konzepte können dem durch geeignete Formgebung des Magnetfelds Rechnung tragen und bewirken einen genügend verringerten stoßbedingten Verlust, besonders von α -Teilchen, in einem Stellaratorreaktor. Andererseits zeigen theoretische Untersuchungen zu turbulenten Instabilitäten auch bereits in zweidimensionalen Tokamaks einen deutlichen Einfluß der Flußflächenform auf den sogenannten “anomalen” turbulenten Transport [107]. Dies motiviert genauere Untersuchungen der zugrundeliegenden Instabilitäten auch in Stellaratoren mit ihrer generisch komplexen Geometrie und der prinzipiellen Möglichkeit zu diesbezüglicher Optimierung.

2.2 „Helias“: Helikale avancierte Stellaratoren

Helikale avancierte Stellarator-Konfigurationen [88] sind in einer langfristigen analytischen und numerischen Entwicklungsphase ausgehend von den grundlegenden Ideen von A. Schlüter mit dem Ziel entworfen worden, die Einschluß- und Gleichgewichtseigenschaften eines klassischen Stellarators zu verbessern. Das erste Experiment dieser fortgeschrittenen Linie, der teLOPTimierte modulare Stellarator Wendelstein 7-AS [100], ist seit 1988 in Betrieb und vermochte die Anwendbarkeit des Konzepts erfolgreich zu demonstrieren [51, 60]. Als nächste (im Bau befindliche) Generation wurde Wendelstein 7-X entwickelt [8], um die Reaktoreignung von Helias-Konfigurationen zu testen. „HSR“ ist eine darauf basierende Konzeptstudie eines Stellarator-Kraftwerks [125].

Die grundlegenden Eigenschaften einer Helias-Konfiguration bestehen aus einem magnetohydrodynamisch (MHD) stabilen Plasma mit der Temperatur T und Dichte n bis zu einem hohen Druck bei einem über das gesamte Plasma gemittelten Wert $\langle\beta\rangle = \langle 2\mu_0 n k_B T / B^2 \rangle \approx 5\%$ unter geringer Shafranov-Verschiebung² durch Reduzierung der Pfirsch-Schlüter-Ströme³. Letzteres führt auch zu geringen neoklassischen Verlusten. Weitere Optimierungskriterien sind gute Einschluß-eigenschaften für α -Teilchen, geringe aus neoklassischer Diffusion erzeugte Ströme („Bootstrapstrom“) und wohlbehaltene magnetische Flächen des Vakuumfeldes ohne größere Resonanzen [126, 16].

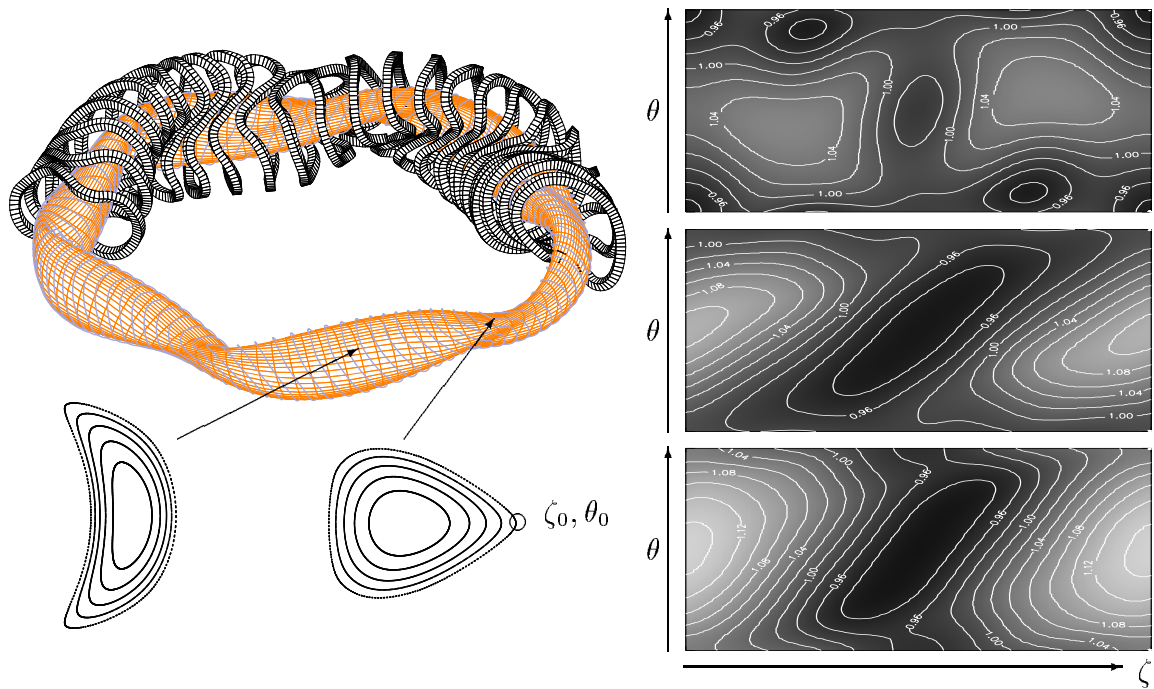


Abbildung 2.2. Links: Ein modularer Helias-Stellarator. Flußfläche von Wendelstein 7-X mit Feldlinien (orange), Stromlinien (grau) und Teil des modularen Spulensystems. Poloidale Schnitte der beiden Symmetrieebenen sind für eine der fünf Feldperioden angedeutet. Rechts: $|B|$ ist auf einer Flußfläche in einer Periode in der (ζ, θ) Ebene für W7-AS, W7-X und HSR (von oben nach unten) dargestellt. Eine analoge Darstellung von Krümmung und Verscherung auf einer Flußfläche von W7-X findet sich in Abschnitt 6.4.

² Verschiebung von Flußflächen zu höheren Radien R durch „Fahrradschlaucheffect“ bei wachsendem Plasmadruck [54].

³ Nettostromfreier Anteil der parallelen Ausgleichsströme j_{\parallel} zur Aufrechterhaltung der Divergenzfreiheit $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ des Gesamtstroms in einem Kräftegleichgewicht $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p$ für ein magnetisch eingeschlossenes Plasma mit Druck p [97].

2.3 Flußflächenkoordinaten und Magnetfeldstruktur

Alle bisher genannten Helias-Konfigurationen weisen fünffache toroidale Periodizität auf. Die Rotationstransformation ι , welche die Verschraubung der Feldlinien durch die poloidale Steigung pro toroidalem Umlauf beschreibt, ist charakterisiert durch geringen radialen Anstieg (globale Verscherung). Das Aspektverhältnis zwischen mittlerem großen und kleinen Plasmaradius $A_0 = R_0/a_0$ ist in der Ordnung von 10.6 (W7-X).

Zur Darstellung des Magnetfelds wird bei Stellaratoren meist auf ein *Straight field line* (SFL) Koordinatensystem zurückgegriffen, in dem die Feldlinien auf einer Flußfläche Geraden darstellen [32, 99]. In dieser Arbeit werden hauptsächlich die in der Stellaratorphysik üblichen Boozer-Koordinaten verwendet [15]; in Kapitel 6 werden Hamada-Koordinaten benutzt, in denen zusätzlich die Stromlinien Geraden bilden [49]. Beide Systeme lassen sich aber zunächst formell gleichwertig behandeln.

Es bezeichnen $\theta \in [0..2\pi]$ die poloidale Koordinate und $\zeta \in [0..2\pi]$ die toroidale Koordinate. Als Flußflächenmarke wird eine radiale Koordinate $s \approx (r/a_0)^2$ eingeführt, die einen mittleren kleinen Radius r gegenüber dem der letzten geschlossenen Flußfläche bei a_0 beschreibt. Sie wird definiert aus dem toroidalen Fluß $\Psi = (1/2)B_0 a_0^2 s$. Der poloidale Fluß ist $\chi = \int_V d\tau \mathbf{B} \cdot \nabla \theta$, wobei $\mathbf{B} \cdot \nabla \chi = 0$. Das Verhältnis $\iota = \partial \chi / \partial \Psi = \partial \theta / \partial \zeta$ ist die Rotationstransformation, wobei die letzte Identität nur in einem SFL-System gilt. Dann ist auch die Größe $\alpha \equiv \theta - \iota \zeta$ konstant entlang einer Feldlinie und wird als Feldlinienmarke bezeichnet. In der Tokamakliteratur findet sich stattdessen auch oft $\xi = -q\alpha$ mit $q = 1/\iota$. Das Magnetfeld läßt sich in dieser Notation schreiben als

$$\mathbf{B} = \nabla \Psi \times \nabla \alpha. \quad (2.1)$$

Die globale Verscherung $\Sigma = -(2s/\iota)\partial_s \iota$ der Feldlinien beschreibt die radiale Änderung der Verschraubung. Die Helias-Konfigurationen zeichnen sich durch geringe globale Verscherung aus. Allerdings können radial benachbarte Feldlinien durch die geometrische Verformung der Flußflächen stellenweise voneinander wegscheren und wieder zusammenlaufen, obwohl die mittlere (globale) Verscherung verschwindet. Eine entsprechende lokale Beschreibung dieser für die Stabilitätstheorie wichtigen Größe läßt sich finden durch eine Definition (nach Ref. [30]) von

$$\mathbf{Q} = \frac{\nabla \chi \times \mathbf{B}}{|\nabla \chi|^2}, \quad (2.2)$$

womit sich auch $\mathbf{B} = \mathbf{Q} \times \nabla \chi$ schreiben läßt. Es gilt weiter $\mathbf{Q} = \nabla \xi - \Lambda \nabla \chi$, worin

$$\Lambda \equiv \frac{\nabla \chi \cdot \nabla \xi}{|\nabla \chi|^2} = -\left(R + \frac{\partial q}{\partial \chi} \theta\right) \quad \text{mit} \quad R = -(\nabla \chi \cdot \nabla \zeta - q \nabla \chi \cdot \nabla \theta) / |\nabla \chi|^2 \quad (2.3)$$

die sogenannte integrierte lokale Verscherung ist. Anschaulich hat die Größe Λ Ähnlichkeit mit der euklidischen Norm zweier anfangs radial benachbarter Punkte beim Umlauf entlang den jeweiligen Feldlinien um den Torus. Ihr tatsächlicher Wert ist säkular, das heißt vom ursprünglichen Startpunkt abhängig und nichtperiodisch nach einem Umlauf proportional zu θ wachsend. Die Größe R wird als integrierte residuale Verscherung bezeichnet. Damit läßt sich die *lokale Verscherung* S als eine Größe

definieren, die bei Mittelung über eine Flußfläche die globale Verscherung $\Sigma = \langle S \rangle_\Psi$ erzeugt. Die übliche Definition dazu ist [30]

$$S \equiv -\mathbf{B} \cdot \nabla \Lambda. \quad (2.4)$$

Das ist identisch mit $S = -\mathbf{Q} \cdot \text{rot} \mathbf{Q}$ und hat die Dimension eines inversen Volumens. Da es in der Literatur keine standardisierte Normierung gibt, läßt sich als entsprechende dimensionslose Größe $\hat{S} \equiv \iota V(s) \cdot S$ definieren, wobei $V = (2\pi R_0)(r^2 \pi) = 2\pi^2 A_0 a_0^3 s$ das Volumen eines korrespondierenden zirkularen Torus darstellen soll. In stellaratorüblicher Notation definieren wir analog $L \equiv (\hat{\nabla} s \cdot \hat{\nabla} \alpha) / |\hat{\nabla} s|^2$, worin $\hat{\nabla} \equiv a_0 \nabla$ ist. Unter Benutzung der Jacobideterminante $\hat{J}_s = \hat{\nabla} s \cdot (\hat{\nabla} \theta \times \hat{\nabla} \zeta)$ und $\hat{B} = B/B_0$ wird die parallele Ableitung (als Ableitung entlang einer Koordinate τ entlang der Feldline) auf die toroidale Boozer-Koordinate ζ projiziert [32]: $\mathbf{b} \cdot \hat{\nabla} = \hat{\nabla}_\parallel = \partial_\tau = (\hat{B} \hat{J}_s)^{-1} \partial_\zeta$. Damit ist

$$\hat{S} = -2\pi^2 A_0 a_0^3 \iota s \frac{1}{\chi'_s} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{\hat{\nabla} s \cdot \hat{\nabla} \alpha}{|\hat{\nabla} s|^2} = (2\pi)^2 \cdot \frac{A_0 s}{\iota \hat{J}_s} \cdot \partial_\zeta L. \quad (2.5)$$

In Hamada-Koordinaten ist $\hat{J}_s = 2\pi^2 A_0$ konstant und damit $\hat{S} = \frac{2s}{\iota} \partial_\zeta L$. In Abb. 2.3 sind radiale Profile der Rotationstransformation, unter anderem in Wendelstein 7-X, und die integrierte lokale Verscherung Λ dargestellt.

Neben der Verscherung und der Feldstärke \hat{B} ist die Krümmung κ des Magnetfelds eine für den Einschluß charakteristische Größe. Für niedriges β wird $\kappa = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} = \nabla_\perp \ln B$ und wird durch zwei Komponenten ausgedrückt: Die Normalkrümmung ist

$$\kappa_N = \nabla s \cdot \nabla \ln B$$

und die geodätische Krümmung

$$\kappa_G = \nabla \alpha \cdot \nabla \ln B - L \cdot \kappa_N.$$

Die numerische Beschreibung und die Darstellung der Feldkonfigurationen durch metrische Elemente in kontra- und kovarianter Form wird in Anhang A behandelt.

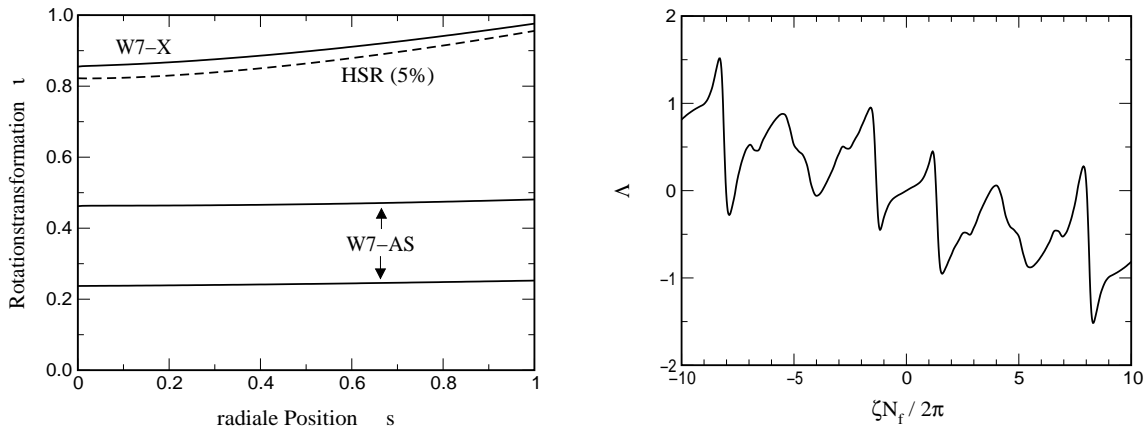


Abbildung 2.3. Links: Rotationstransformation $\iota(s)$ in W7-X und HSR. In W7-AS ist ι variabel in $1/4 \leq \iota(a_0) \leq 1/2$ und für die beiden extremen Fälle dargestellt. Rechts: Integrierte lokale Verscherung Λ bezogen auf einen Aufpunkt $\zeta_m = 0$ entlang der Feldlinie $\alpha = 0$ in W7-X.

2.4 Strukturbildung und Transport fern vom Gleichgewicht

Der große Dichte- und Temperaturgradient⁴ in einem magnetisch eingeschlossenen Fusionsplasma bewirkt eine Situation fern vom globalen thermodynamischen Gleichgewicht (vergleiche Abb. 2.4). Es treten Instabilitäten auf, die eine Abweichung von gleichmäßiger Dichte- und Temperaturverteilung verursachen und zur Bildung von mannigfaltigen sowohl makroskopischen als auch turbulenten kleinskaligen Strukturen führen [63]. Gegenstand intensiver Forschung ist besonders die niederfrequente Mikroturbulenz, da sie universell auftritt und somit für den experimentell beobachteten erhöhten Verlust an Energie und Teilchen aus dem Plasma aufgrund turbulenter Durchmischung verantwortlich gemacht wird.

Die Klassifizierung in eine Vielzahl von Instabilitäten erscheint zuweilen willkürlich, da sich diese in einem realen Fusionsplasma als eine Unterteilung in einzelne Grenzfälle (z.B. kalte Ionen; adiabatische Elektronen; elektrostatische Fluktuationen; ...) nicht aufrecht erhalten läßt. Zum einen aus didaktischen Gründen, aber auch aus praktischen Erwägungen der mathematischen Lösbarkeit der resultierenden Systeme werden die Instabilitäten kategorisiert [86]. Im folgenden Kapitel findet sich eine knappe und bei weitem nicht vollständige Behandlung der wichtigsten anregbaren Moden in einem inhomogenen magnetisierten Plasma.

Eine tragende Rolle wird allgemein den *Driftwellen* zugesprochen. Diese treten als kollektive Anregung des Plasmas unter der in Abschnitt 2.1 skizzierten Driftdynamik auf, sind leicht zu destabilisieren und vermögen mit ihren charakteristischen spektralen Eigenschaften viele experimentelle Fluktuationsmessungen gut zu beschreiben.

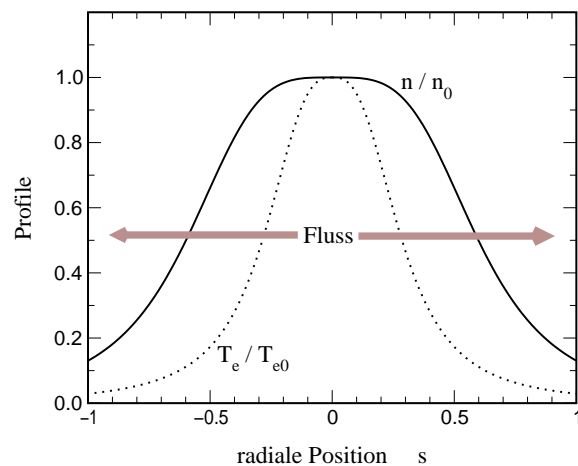
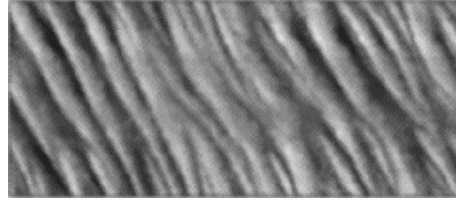


Abbildung 2.4. Typische Temperatur- und Dichteprofile im Stellarator Wendelstein 7-AS.

⁴ Etwa 25 Millionen Grad Kelvin Unterschied in Wendelstein 7-AS über einen kleinen Radius von $a_0 = 20$ cm.

Kapitel 3

Driftinstabilitäten in magnetisierten inhomogenen Plasmen



Experimentell gemessene Dichtefluktuationen durch schwach turbulente Driftwellen. Aus Ref. [45].

Zur Beschreibung kollektiver Phänomene im Plasma wird meist das Flüssigkeitsbild im Rahmen der Magnetohydrodynamik (MHD) herangezogen [112]. Diese Näherung ist dann gerechtfertigt, wenn Hintergrundskalen und Modenstrukturen groß gegenüber der parallelen freien Weglänge und dem Gyoradius sind und andere kinetische Effekte wie Landaudämpfung [112] vernachlässigt werden können. Flüssigkeitsgleichungen werden aus der kinetischen Beschreibung eines Plasmas durch Bildung von Momenten der Verteilungsfunktion $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ gewonnen¹. In niedrigster Ordnung werden daraus Dichte, Geschwindigkeit und Temperatur² erhalten:

$$n = \int d^3v f, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{V} = (1/n) \int d^3v f \mathbf{v}, \quad (3.2)$$

$$T = (m/3n) \int d^3v f (\mathbf{v} - \mathbf{V})^2. \quad (3.3)$$

Unter den oben genannten Annahmen weicht die Distribution lokal nicht wesentlich von der Maxwellverteilung ab, und die eigentlich unendliche Hierarchie ist nach diesen ersten drei Momenten abgeschlossen. Die resultierende Flüssigkeitsbeschreibung erfolgt dann durch die Erhaltungsgleichungen für Dichte, Impuls und Energie. Die *ideale MHD* geht von Einflüssigkeitsgleichungen ohne Resistivität aus, bei der alle Plasmakomponenten dieselbe Dichte n , Geschwindigkeit \mathbf{v} und Temperatur T besitzen [112]. Damit lassen sich bereits das globale Plasmagleichgewicht und dessen makroskopische Stabilität sowie einfache Anregungen (Schallwellen, Alfvénwellen) beschreiben [86]. Eine große Klasse von Instabilitäten wird dadurch jedoch nicht erfaßt, sondern ergibt sich erst durch die im folgenden zu diskutierende Berücksichtigung getrennter Elektronen- und Ionendynamik sowie Kopplung durch Resistivität.

¹ Die kinetische Theorie wird in Kapitel 5 behandelt.

² Temperaturen werden im folgenden in Energieeinheiten (z.B. eV) dargestellt, in denen k_B bereits enthalten ist.

3.1 Klassifizierung von niederfrequenten Driftinstabilitäten

Die Dynamik des Plasmas wird meist paradigmatisch in der oben genannten Flüssigkeitsnäherung beschrieben durch die *Braginskii-Gleichungen* [18], bestehend aus den Kontinuitätsgleichungen, den Bewegungsgleichungen und Energieerhaltungsgleichungen der einzelnen Spezies (Index j):

$$\partial_t n_j + \nabla \cdot (n_j \mathbf{v}_j) = 0, \quad (3.4)$$

$$m_j n_j D_t \mathbf{v}_j = q_j n_j (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}) - \nabla p_j - \nabla \Pi_j + \mathbf{R}, \quad (3.5)$$

$$\frac{3}{2} n_j \partial_t T_j + p_j \nabla \cdot \mathbf{v}_j = -\nabla \cdot \mathbf{q}_j - \Pi_j \nabla \cdot \mathbf{v}_j + Q_j. \quad (3.6)$$

Darin sind $D_t = \partial_t + \mathbf{v}_j \cdot \nabla$ die totale Zeitableitung, \mathbf{q}_j der Wärmefluß, Π der nichtskalare Teil des Drucktensors, \mathbf{R} Impulsaustausch aus Stößen und Q_j ein Energieaustausch jeweils in der durch Braginskii aufgestellten Form [112]. Ein einfacher Abschluß der Gleichungen kann durch eine (adiabatische oder isotherme) Zustandsgleichung $p(T)$ erreicht werden. Diese sind noch gekoppelt an die Maxwellgleichungen

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sum_j \mathbf{j}_j + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E} \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}. \quad (3.7)$$

Wird zudem Quasineutralität angenommen ($n_i = n_e$), läßt sich eine der Gleichungen (3.4) auch als Divergenzfreiheit des Stroms, $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, schreiben.

Die Braginskii-Gleichungen in der Form (3.4)-(3.6) beschreiben die Plasmadynamik über einen weiten Bereich von Zeitskalen. Für die in einem Fusionsplasma zum turbulenten Transport relevanten Fluktuationen gilt für typische Skalen der Frequenz $\omega \ll \Omega_j$ im Vergleich zu den Gyrofrequenzen $\Omega_j = q_j B / m_j$. Für deren räumliche Ausdehnung Δ gilt $\Delta \ll L$ gegenüber einer typischen Längenskala L der zeitlich und räumlich schwach veränderlichen Hintergrundgrößen. Die Dynamik läßt sich dann in der Bewegungsgleichung (3.5) auf diese relevanten Skalen durch eine *Driftordnung* reduzieren [102, 118]: Es erfolgt eine Störungsrechnung im kleinen Parameter

$$\epsilon \equiv \frac{\rho_s}{L} \sim \frac{\omega}{\Omega_j} \sim \frac{\Delta}{L} \ll 1. \quad (3.8)$$

Weiterhin wird angenommen, daß fluktuierende Größen ebenfalls in der Ordnung ϵ klein gegenüber ihren Hintergrundwerten sind. Damit werden aus der senkrechten Komponente von (3.5) in niedrigster Ordnung in ϵ die Driftgeschwindigkeiten erhalten:

$$\mathbf{v}_{\perp i} = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{D_i} + \mathbf{v}_{p_i} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_{\perp e} = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{D_e}. \quad (3.9)$$

Darin beschreibt $\mathbf{v}_E = (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) / B^2$ die Konvektion durch die $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ Drift, $\mathbf{v}_{D_j} = (\mathbf{B} \times \nabla p_j) / (q_j n_j B^2)$ die aufgrund unterschiedlicher Ladung q_j für Elektronen und Ionen entgegengesetzte diamagnetische Drift und $\mathbf{v}_{p_i} = (m_i / e B^2) D_t \mathbf{E}$ die Polarisationsdrift der Ionen aufgrund ihrer endlichen Massenträgheit. \mathbf{v}_{p_i} ist eigentlich eine Ordnung kleiner in ϵ als die restlichen Terme, verschwindet jedoch aufgrund der Raumladung bei homogenem Magnetfeld als einziger Term nicht unter der Divergenz und wird deshalb beibehalten. Für die Elektronen wird dieser Term vernachlässigt. In Gl. (3.4) und (3.6) werden $\mathbf{v}_j = \mathbf{b} v_{\parallel j} + \mathbf{v}_{\perp j}$ substituiert und ebenfalls die Driftordnung angewandt

[118, 102]. Im Ampereschen Gesetz in (3.7) läßt sich außerdem der Verschiebungsstrom bei niedrigen Frequenzen und hoher elektrischer Leitfähigkeit vernachlässigen [64].

- Die kollektiven Phänomene aus diesen driftreduzierten Gleichungen werden oft unter dem Sammelbegriff *Driftwellen* zusammengefaßt. Andererseits wird unter Driftwellen im engeren Sinne meist speziell die wechselseitige Dynamik aus Störungen des Drucks p und des elektrostatischen Potentials Φ unter einem Druckgradienten verstanden, bei der wesentlich die von Ionen getragene senkrechte $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ Bewegung über die parallele Stromkomponente j_{\parallel} mit der parallelen Elektronendynamik bei endlichem $\nabla p_{e\parallel}$ gekoppelt ist [87, 113, 56]. Das Magnetfeld kann dabei homogen sein. Driftwellen weisen eine nichtlineare Charakteristik auf, aus der sich selbsterhaltende Turbulenz bereits auch ohne lineare Instabilität ergeben kann: Eine nichtlineare advektive Kopplung von \mathbf{v}_E mit der Wirbelstärke $\nabla_{\perp}^2 \Phi$ eröffnet gegenüber den linearen Störungen einen größeren Freiheitsraum für den Zugriff auf Quellen freier Energie und ermöglicht dadurch starke Turbulenz auch ohne lineare Instabilität [89, 53, 103]. Diese eigentlichen Driftwellen werden im Abschnitt 3.2 näher behandelt. Im folgenden ist zunächst die Nomenklatur verwandter Instabilitäten kurz erläutert, die für andere Quellen freier Energie im inhomogenen Plasma auftreten.

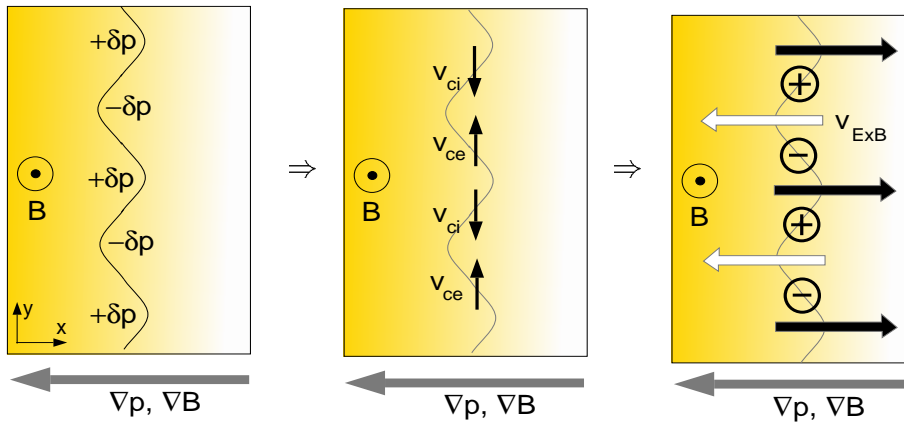


Abbildung 3.1. Schema der Austausch-Instabilität in einem inhomogenen Plasma.

- *Austauschmoden*: Das Magnetfeld sei, wie in Abbildung 3.1 skizziert, gerade und konstant in z -Richtung und inhomogen in x . Eine anfängliche Störung des Drucks $p(x)$ mit $\delta p = \delta p_0 \exp(iky)$ und eine resultierende $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ Konvektion kann bei gleichgerichteten Gradienten $\nabla B \cdot \nabla p > 0$ durch die diamagnetischen Ströme destabilisiert werden. Die dargestellten Driften $\mathbf{v}_{cj} = (2p_j/q_j n_j B^2) \mathbf{B} \times \nabla \ln B$ entsprechen dabei (für $\beta \ll 1$) dem wesentlichen Bestandteil von \mathbf{v}_{Dj} , der unter der Divergenz nicht verschwindet. Die Phasenverschiebung zwischen Druck und Potential ist dabei $\pi/2$. Antiparallele Gradienten wirken stabilisierend (“magnetischen Mulde”). Läßt man für die Störung eine endliche parallele Wellenzahl k_{\parallel} zu, etwa als Folge einer Verscherung der Feldlinien, so ergibt sich lineare Instabilität erst ab einem Grenzwert des Plasmadrucks ($\beta > 2k_{\parallel}^2/[\nabla \ln p \cdot \nabla \ln B]$), welcher durch endliche Resistivität verringert wird.

- *Ballooningmoden*: Lokalisieren die linearen Modenstrukturen oder die Mikroturbulenz selbst aufgrund einer lokal “ungünstigen Krümmung” ($\nabla B \cdot \nabla p > 0$) der Feldlinien bezüglich der Austauschinstabilität, was z.B. in einem Tokamak auf der Außenseite

des Torus zutrifft, so spricht man von “Ballooning”³ [40]. *Resistive Ballooningmoden* werden durch Teilchenstöße destabilisiert und *ideale Ballooningmoden* durch den Plasmadruck bei hohem β .

- *Ionentemperaturgradienten (ITG) - Moden*: Eine Ionenschallwelle kann durch einen endlichen Gradienten $\nabla_x T_i$ auch bei Homogenität von Feld und Dichte durch eine Kopplung der parallelen mit senkrechter Bewegung durch die parallele Kompressibilität destabilisieren [41]. Die Instabilität wird verstärkt durch eine ∇B Drift bei ungünstiger Krümmung in toroidaler Geometrie. Den ITG-Moden wird besonders für den Transport im Plasmazentrum Relevanz zugesprochen [129].

In einem realen Fusionsplasma koexistieren alle diese Instabilitätsmechanismen und müssen gemeinsam betrachtet werden. Die praktische Behandlung (hinsichtlich der Komplexität der Gleichungen und damit resultierenden Rechenzeit) vereinfacht sich wesentlich, wenn je nach vorherrschendem Parameterregime ein Mechanismus als führend identifiziert werden kann [130, 106]. Auch in der vorliegenden Arbeit werden Driftwellen in Stellaratoren in verschiedenen Modellen betrachtet. Als erstes wird die lineare Theorie von krümmungs- und dichtegradientgetriebenen Driftwellen für zwei verschiedene Destabilisierungsmechanismen diskutiert (Kapitel 4). In Kapitel 5 werden ITG-Moden in einem kinetischen Modell betrachtet. Die nichtlineare Theorie wird in Kapitel 6 auf Basis eines Gleichungssatzes, in dem alle Effekte des Ballooning, resistiver Driftwellen und Ionentemperaturgradienten enthalten sind, direkt numerisch simuliert. Dabei wird aus praktischen Gründen der Schwerpunkt auf einem eingeschränkten Modell mit kalten Ionen, also ohne ITG, liegen.

3.2 Driftwellen und kinetische Scherungs-Alfvénwellen

Driftwellen im engeren Sinne sind Anregungen von Druck- und Potentialstörungen aus der $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ Drift senkrecht zum Magnetfeld unter einem Druckgradienten. Sie werden destabilisiert durch eine parallele Elektronenbewegung, die von einem schnellen sogenannten “adiabatischen” Ausgleich der Potentialstörung abweicht [62]. Driftwellen treten universell in jedem magnetisch eingeschlossenen Plasma bereits ohne Magnetfeldinhomogenitäten und bei kalten Ionen auf.

Abbildung 3.2 zeigt schematisch eine lokalisierte Störung der Ionendichte n_i (links), die aufgrund der ambipolaren Diffusion in einer positiven Potentialstörung $\Phi > 0$ resultiert (rechts). Das Magnetfeld sei in z -Richtung angeordnet. Für typische Skalen Δ der Störung gilt dabei $\Delta \gg \lambda_D = \sqrt{\varepsilon_0 T_e / (n e^2)}$, der Debyelänge, über der sich eine Ladungstrennung aufrecht erhalten läßt. Es kann deshalb von Quasineutralität $n_i \approx n_e$ ausgegangen werden. Entlang des Felds versuchen die Elektronen, gemäß der parallelen Komponente ihrer Bewegungsgleichung (3.5), lokal eine Boltzmannrelation $n_e = n_0(x) \exp(e\Phi/T_e)$ herzustellen. Ohne eine Behinderung der parallelen Elektronendynamik (etwa durch Stöße, Alfvénwellen oder kinetische Effekte wie Landaudämpfung [65] und in Magnetfeldinhomogenitäten gefangene Teilchen) geschieht dieser Ausgleich bezüglich der Driftzeitskala instantan und wird oft als “adiabatisch” bezeichnet [62].

³ Der in den folgenden Kapiteln verwendete “Ballooningformalismus” hat seinen Namen von der erstmaligen Anwendung auf diese Moden, ist jedoch nicht auf Ballooningmoden alleine beschränkt. Siehe auch Anhang B.

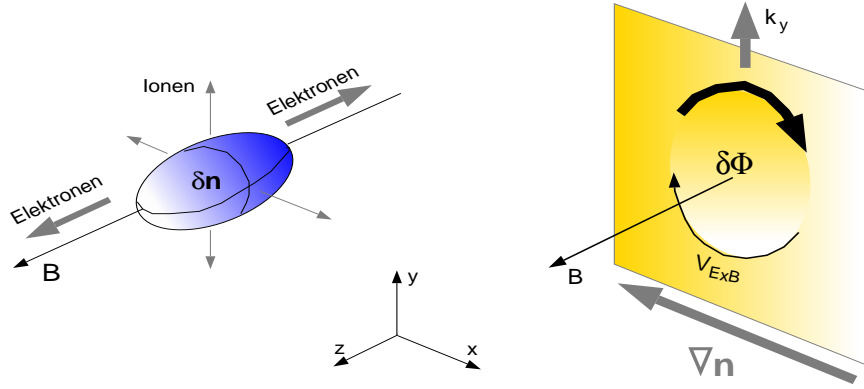


Abbildung 3.2. Schema einer durch den Dichtegradienten getriebenen Driftwelle.

Bereits bei homogener Hintergrunddichte konvektiert die Störung das gesamte Plasma aufgrund der für Ionen und Elektronen gleichgerichteten $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ Drift mit $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}_E$ im Uhrzeigersinn. Kommt ein Dichtegradient in negativer x -Richtung hinzu, so ergibt sich eine Propagation der gesamten Struktur in y -Richtung: Aus der Kontinuitätsgleichung (3.4) folgt bei homogenem Feld und unter Vernachlässigung der Ionenträgheit

$$\partial_t n_i + \nabla(\mathbf{v}_E n_i) = 0. \quad (3.10)$$

Unter Quasineutralität $n_i = n_e = n_0(x) + \tilde{n}_e$ folgt aus der stationären Impulsbilanz

$$-en_0 \mathbf{E}_\parallel - \nabla_\parallel p_e = 0$$

für isotherme Elektronen ohne Stöße dann

$$n_i = n_0 \exp(e\Phi/T_e).$$

Zusammen mit der Driftgeschwindigkeit $\mathbf{v}_E = B^{-2}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -B^{-2}(\nabla\Phi \times \mathbf{B})$ schreibt sich Gleichung (3.10) nun

$$\partial_t n_0 \exp(e\Phi/T_e) - \nabla \left[B^{-2}(\nabla\Phi \times \mathbf{B}) n_0 \exp(e\Phi/T_e) \right] = 0.$$

und man erhält aufgrund $B = B_z$ dann

$$\partial_t \Phi - (T_e/eB) \partial_x \ln n_0 \partial_y \Phi = 0.$$

Unter Annahme einer in y periodischen Störung $\Phi = \tilde{\Phi} \exp[-i\omega t + ik_y y]$ erhält man daraus als typische Frequenz die diamagnetische Driftfrequenz der Elektronen

$$\hat{\omega}_{*e} = (\omega_{*e} a_0 / c_s) = \rho_s k_y L_n^{-1}. \quad (3.11)$$

Darin wurden die Dichtegradientenlänge $L_n = |a_0 \nabla_x \ln n_0|^{-1}$ und ein bei Elektronentemperatur berechneter thermischer Ionengyroradius, $\rho_s = \sqrt{m_i T_e / (eB)}$, eingeführt. Die Bewegung der Struktur senkrecht zu Feld und Dichtegradient ist noch stabil und hat keinen erhöhten Transport in x -Richtung zur Folge.

Erst eine Phasenverschiebung $\delta_{\mathbf{k}}$ zwischen Potential und Dichtestörung durch eine "nichtadiabatische" Elektronendynamik

$$\tilde{n}_e = n_0(1 - i\delta_{\mathbf{k}}) e\Phi/T_e \quad (3.12)$$

destabilisiert die Driftwelle. Der imaginäre Term $i\delta_{\mathbf{k}}$ ist im allgemeinen Fall ein antihermitescher Operator und beschreibt die Dissipation der Elektronen, durch welche aufgrund des verlangsamten parallelen Ausgleichs die Dichtestörungen den Potentialstörungen in y vorauseilen können. Dies führt zu einem exponentiellen Wachstum $\exp(\gamma_k t)$ mit $\gamma_k \sim \delta_k \omega_k$, was etwa im Falle resistiver Driftmoden näherungsweise durch $\delta_k \approx (\omega \nu_e / k_{\parallel} c_e^2)$ beschrieben wird [62].

In Kapitel 4 wird ein lineares Driftwellenmodell für kalte Ionen und isotherme Elektronen mit zwei verschiedenen einfachen Ansätzen für $\delta_{\mathbf{k}}$ auf Stellaratoren angewandt. Aufgrund der durch die schnelle Elektronenbewegung getragenen hohen parallelen Kopplung orientiert sich die parallele Wellenzahl der Driftmoden an der Skala L_{\parallel} von Inhomogenitäten des Magnetfeldhintergrunds zu $k_{\parallel} \sim 1/L_{\parallel}$ und ergibt eine typische Anisotropie mit $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$. In toroidaler Geometrie koppeln die Driftwellen bei endlichem k_{\parallel} an Ionenschallwellen, wodurch sich Eigenmodenstrukturen entlang der Feldlinie ergeben. Aufgrund der oben diskutierten Austauschereffekte bei inhomogenem Magnetfeld können die Moden z.B. auf der Torusaußenseite lokalisieren. Das Aufbrechen dieser mesoskopischen Strukturen in mikroskopische Wirbel auf der experimentell beobachteten Größenordnung von ρ_s wird durch sekundäre nichtlineare Effekte oder Verscherung des poloidalen Geschwindigkeitsprofils aufgrund eines radialen Potentials $\Phi_0(s)$ bewirkt [62].

Driftwellen koppeln über die Elektronenbewegung auch an parallel propagierende, senkrechte Störungen des Magnetfeldes, den *Scherungs-Alfvénwellen*. Mit dem Vektorpotential A_{\parallel} als einer weiteren abhängigen Variablen werden das parallele elektrische Feld E_{\parallel} , die parallele Elektronengeschwindigkeit, und nichtlinear der parallele Gradient modifiziert [106]. Die sich daraus ergebenden Gleichungen werden in Kapitel 6 im Rahmen der nichtlinearen Simulation von Drift-Alfvénwellenturbulenz diskutiert.

3.3 Einfluß der Geometrie auf Driftwellen

Driftwellen werden durch Verscherung des Magnetfeldes stabilisiert [93]. Im linearen Bild führt die Verscherung Σ zu einer Ortsabhängigkeit von k_{\parallel} quer zu den Feldlinien, die für lokalisierte Eigenmoden über die Randbedingung einer nach außen konvektierten Wellenenergie zu einer effektiven Dämpfung führt [24, 25, 62]. Eine absolute Verscherungsstabilisierung auch von dissipativen Driftmoden, wie sie für konstantes Magnetfeld gefunden wurde, tritt in einem Torus durch die endliche Krümmung nicht mehr auf [25]. Zur Frage eines Dämpfungsmechanismus bei global nahezu verscherungsfreien Stellaratoren wurde 1993 von Waltz und Boozer [123] die Vermutung aufgestellt, daß dieser durch die lokale Verscherung S (aus Gleichung 2.4) übernommen wird. Im nächsten Kapitel wird erstmals eine numerische Untersuchung über Lokalisierung und einer derartigen Stabilisierung von Driftwellen in Helias-Stellaratoren durchgeführt. Solche Konfigurationen sind gegenüber dem Auftreten der idealen Ballooninginstabilität bis zu einem Beta von $\sim 5\%$ durch geeignete Formung des Felds unter weitgehender Vermeidung im Mittel ungünstiger Krümmung optimiert. Es kann erwartet werden, daß sich dies auch auf krümmungsgetriebene Driftinstabilitäten positiv auswirkt.

Kapitel 4

Lineare Theorie: Driftwellen

Die lineare Stabilität von Driftwellen in Helias-Konfigurationen wird in diesem Kapitel in einem einfachen elektrostatischen Flüssigkeitsmodell untersucht. Die Dissipation in der Elektronendynamik wird entweder als konstant angenommen (siehe Abschnitt 3.2) oder perturbativ aus der Rückwirkung gefangener Teilchen gewonnen. Mittels einer Ballooningmodendarstellung können Eigenschaften allgemeiner Geometrie, wie lokale Krümmung und Verscherung, in einem effektiv eindimensionalen Modell wiedergegeben werden. Modenzahlspektren und lineare Anwachsraten werden numerisch durch einen Eigenwertcode für allgemeine dreidimensionale Plasmagleichgewichte berechnet.

Mit einem linearen Flüssigkeitsmodell wurde zuerst von Bhattacharjee *et al.* [10] gezeigt, daß in gerader helikaler Symmetrie elektrostatische Driftmoden in helikalen Mulden lokalisieren. Waltz und Boozer [123] wiesen darauf hin, daß diese Moden wiederum mehr durch die lokale Muldenverscherung als durch globale mittlere Verscherung beeinflußt werden sollten. Das Eigenmodenspektrum in gerader helikaler Symmetrie wurde dann von Persson *et al.* [95] untersucht.

Über die einfache gerade helikale Geometrie hinausgehend wurde für reale Stellaratoren die Driftwellenstabilität als spektrales Eigenwertproblem bisher nur einmal betrachtet: Dominguez *et al.* [33] berechneten lineare Anwachsraten durch gefangene Elektronen in einem $l=2$ Torsatron und fanden, daß die Stabilität wiederum durch helikal gefangene Teilchen entscheidend beeinflußt wird. Als Anfangswertproblem wurden mittlerweile von Lewandowski resistive Driftwellen in einer dreifach periodischen Geometrie mittels eines linearen Drei-Felder Fluidmodells [75] und eines einfachen gyrokinetischen Modells (siehe Kapitel 5) entlang der Feldlinie untersucht und die Abhängigkeit der Anwachsraten von Gradienten und Modenzahl numerisch diskutiert.

Im folgenden werden die Auswirkungen lokaler geometrischer Eigenschaften auf die lineare Driftwellenstabilität betrachtet und Modenspektren in verschiedenen Helias-Konfigurationen (W7-AS, W7-X und HSR) verglichen. Insbesondere die stabilisierende Rolle der lokalen Verscherung wird numerisch in realer Stellaratorgeometrie untersucht.

4.1 Driftwellengleichung für allgemeine Geometrie

Wir bedienen uns zunächst des einfachsten gebräuchlichen Modells elektrostatischer Driftwellen in der Näherung für kalte Ionen und einer quasi-adiabatischen Elektronendynamik. Dazu geht man aus von den Braginskii-Gleichungen im Flüssigkeitsbild des Plasmas (siehe Abschnitt 3.1), die bezüglich der Potentialstörung Φ linearisiert werden: Die Kontinuitätsgleichung für Ionen

$$\partial_t n_i + \nabla \cdot (n_0 \mathbf{v}_i) = 0, \quad (4.1)$$

und die Bewegungsgleichung für kalte Ionen ($p_i = 0$)

$$-i\omega n_0 M \mathbf{v}_i = en_0 \mathbf{E} + en_0 (\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}), \quad (4.2)$$

bilden mit der linearisierten Quasineutralitätsbedingung

$$n_i \approx n_e = n_0 \left(1 + \xi \frac{e\Phi}{T_e} \right), \quad (4.3)$$

ein geschlossenes Gleichungssystem. Letztere ersetzt die Poissongleichung [112]. Nicht-Adiabaticität wird durch die Phase $\xi = 1 - i\delta$ mit $\delta > 0$ wiedergegeben (vergleiche Abschnitt 3.1). Im allgemeinen Fall ist $\delta = \delta(\mathbf{k})$ eine Funktion des Wellenvektors \mathbf{k} [76]. Im folgenden wird δ entweder zur Vereinfachung als konstanter Parameter angenommen (Kap. 4.3) oder perturbativ aus der Wirkung gefangener Elektronen berechnet (Kap. 4.4). Aus den senkrechten und parallelen Komponenten der Bewegungsgleichung (4.2) erhält man mit $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ und $\nabla_{\parallel} = \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla)$ die parallele Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{\parallel i} = \frac{1}{i\omega} \cdot \frac{e}{m_i} \nabla_{\parallel} \Phi, \quad (4.4)$$

und unter Driftordnung (siehe Abschnitt 3.1) die senkrechte Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{\perp i} = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{pi}. \quad (4.5)$$

Hierin sind $\mathbf{v}_E = \frac{1}{B} \mathbf{b} \times \nabla_{\perp} \Phi$ die $E \times B$ Driftgeschwindigkeit und $\mathbf{v}_{pi} = -(e/m_i \Omega_s^2) \partial_t \nabla_{\perp} \Phi$ die Ionen-Polarisationsdrift. Hier wurde der Einheitsvektor $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ parallel zum magnetischen Feld \mathbf{B} benutzt. $\Omega_s = c_s/\rho_s$ ist die Zyklotronfrequenz, worin $c_s = \sqrt{T_e/m_i}$ eine Schallgeschwindigkeit und $\rho_s = \sqrt{m_i T_e}/(eB)$ einen Gyroradius für Ionen bezeichnen, für deren Berechnung die Elektronentemperatur T_e verwendet wird.

Die Geschwindigkeiten (4.4), (4.5) werden in Gleichung (4.1) eingesetzt, und es wird linearisiert bezüglich des elektrostatischen Potentials Φ :

$$-i\omega n_0 \xi \frac{e\Phi}{T_e} + \nabla \cdot (n_0 \mathbf{v}_E) + \nabla \cdot (n_0 \mathbf{v}_{pi}) + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_{\parallel i} = 0. \quad (4.6)$$

Dazu werden die Divergenzen in linearer Näherung umgeschrieben:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_E = \frac{1}{B} (\mathbf{b} \times \nabla \ln B) \cdot \nabla \Phi, \quad (4.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{pi} = \frac{i\omega}{\Omega_s B} \nabla^2 \Phi, \quad (4.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{\parallel i} = \frac{e}{i\omega m_i} \nabla_{\parallel}^2 \Phi, \quad (4.9)$$

Zur Darstellung der Geometrie werden Feldlinienkoordinaten nach Boozer verwendet (siehe Anhang A), in denen $s = (x_r/a_0)^2$ die radiale Position beim kleinen Radius x_r bezeichnet, und die Feldlinienmarke $\alpha = \theta - \iota\zeta$ ist eine Funktion des poloidalen Winkels θ und toroidalen Winkels ζ . Für das gestörte Potential wird eine Eikonaldarstellung im Ballooning-Formalismus verwendet (siehe Anhang B). Dabei wird die Modenstruktur entlang der Feldlinie explizit ausgewertet und für die Richtung senkrecht zur Feldlinie eine rasche Variation der Mode gegenüber Hintergrundgrößen angenommen. Dies entspricht dem üblichen Bild von Driftwellen mit $\nabla_{\parallel}\Phi \ll \nabla_{\perp}\Phi$ und einer kleinen Driftskala $r_* = \rho_s/a_0 \ll 1$. Ein eventuelles statisches radiales Hintergrundfeld wird hier nicht berücksichtigt ($\Phi_0(s) = 0$). Es läßt sich daher schreiben:

$$\Phi = \Phi(\zeta, s) \cdot \exp[-i\omega t + im\alpha], \quad (4.10)$$

Darin ist m die (hohe) senkrechte Modenzahl. Man erhält aus (4.6-4.10) eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für das elektrostatische Potential $\hat{\Phi}$:

$$\nabla_{\parallel}^2 \hat{\Phi} = U(\zeta, \omega) \hat{\Phi}. \quad (4.11)$$

Das normierte komplexwertige Potential $\hat{U} = a_0^2 U$ (siehe auch [10, 123, 95, 33]) ist hierin gegeben durch

$$\hat{U} = -\frac{\hat{\omega}}{\hat{B}} \left[\hat{\omega} \left(r_*^2 m^2 |\hat{\nabla}\alpha|^2 + \frac{\hat{B}\xi}{\hat{T}_e} \right) - r_* m (\mathbf{b} \times \hat{\nabla}\alpha) \cdot \hat{\kappa}_{\Delta} \right]. \quad (4.12)$$

Hier wurden die dimensionslosen Größen $\hat{\Phi} \equiv e\Phi/T_{e0}$, $\hat{\nabla} \equiv a_0\nabla$, $\hat{T}_e \equiv T_e/T_{e0}$, $\hat{B} \equiv B/B_0$ und $\hat{\omega} \equiv \omega a_0/c_s$ eingeführt. T_{e0} ist die Elektronentemperatur auf der Achse, a_0 ist der kleine Radius, und wir kürzen ab $\hat{\kappa}_{\Delta} \equiv \hat{\nabla} \ln n_0 - \hat{\nabla} \ln B$. Das Magnetfeld wurde ausgedrückt durch $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B = \frac{1}{2\hat{B}}(\hat{\nabla}s \times \hat{\nabla}\alpha)$.

Bedenkt man, daß $\xi = 1 - i\delta$ und $\hat{\omega} = \hat{\omega}_R + i\hat{\gamma}$ beides komplexwertige Größen sind und schreibt weiter $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_R + i\hat{\Phi}_I$, $\hat{U} = u_R + iu_I$, so erhält man schließlich einen Satz gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$F^2 \partial_{\zeta}^2 \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_R \\ \hat{\Phi}_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_R & -u_I \\ u_I & u_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_R \\ \hat{\Phi}_I \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

$F = 1/(2\hat{B}\hat{J})$ ist ein metrischer Faktor, wobei $\hat{J} = [\hat{\nabla}s \cdot (\hat{\nabla}\Theta \times \hat{\nabla}\zeta)]^{-1}$ die Jacobideterminante der Transformation zu Boozer-Koordinaten darstellt. Damit ist

$$F^{-2}\hat{U} = -4\hat{\omega}\hat{J}^2 \left[\hat{\omega} \left(\frac{\hat{B}^2\xi}{\hat{T}_e} + r_*^2 m^2 \hat{B}\hat{K} \right) + \frac{r_* m}{2} \left(\frac{4\hat{B}^2}{L_n} - \hat{C} \right) \right]. \quad (4.14)$$

Die Skalenlänge L_n des Dichtegradienten ist definiert als $L_n^{-1} = \partial_s \ln n_0$. Unter Benutzung metrischer Elemente $g^{\mu\nu} = \hat{\nabla}\mu \cdot \hat{\nabla}\nu$ mit $(\mu, \nu) \in (s, \theta, \zeta)$ erhält man

$$\hat{K} = g^{\alpha\alpha} = g^{ss} \left[(2\hat{B}/g^{ss})^2 + \Lambda^2 \right], \quad (4.15)$$

$$\hat{C} = g^{ss} \left[(2\hat{B}/g^{ss})^2 \cdot \hat{\kappa}_N + \Lambda \cdot \hat{\kappa}_G \right]. \quad (4.16)$$

Alle metrischen Elemente $g^{\mu\nu}$ sind periodisch in ζ . Säkularität (siehe Abschnitt 2.3) bezüglich einer Lokalisierung ζ_m erfolgt durch Terme proportional zur globalen Verscherung $\partial_{s\iota}$. Man beachte, daß $\hat{K} \sim k_{\perp}^2$ proportional zum Quadrat des senkrechten Wellenvektors ist. Die säkulare Größe

$$\Lambda = \frac{g^{s\alpha}}{g^{ss}} \quad (4.17)$$

wird interpretiert als integrierte lokale Verscherung (siehe Abschnitt 2.3). Es wird ferner die Notation

$$\hat{\kappa}_N = \hat{\nabla} \ln \hat{B} \cdot \hat{\nabla}_s = \sum_{\mu} g^{s\mu} \partial_{\mu} \ln \hat{B} \quad (4.18)$$

für die normierte Normalkrümmung benutzt und

$$\hat{\kappa}_G = \hat{\nabla} \ln \hat{B} \cdot (\hat{\nabla} \alpha - \Lambda \hat{\nabla}_s) \quad (4.19)$$

für die geodätische Krümmung. Magnetfeld und alle metrischen Größen werden, wie in Anhang A beschrieben, aus Gleichgewichtscodes ermittelt. Die Driftwellengleichung (4.13) mit der Darstellung (4.14-4.16) ist zur Behandlung genereller toroidaler Magnetfeldgeometrie gültig.

Die im folgenden verwendeten Feldgeometrien beziehen sich für die Konfigurationen Wendelstein 7-AS und Wendelstein 7-X auf deren Vakuumfeld ($\beta = 0$). Für die Reaktorkonfiguration HSR wird ein Gleichgewichtsfeld für $\beta = 5\%$ zugrundegelegt. Die Feldgeometrien für $\beta = 0$ von HSR und Wendelstein 7-X sind nahezu identisch, wenn sie (wie im folgenden getan) auf den jeweiligen kleinen Plasmaradius skaliert werden.

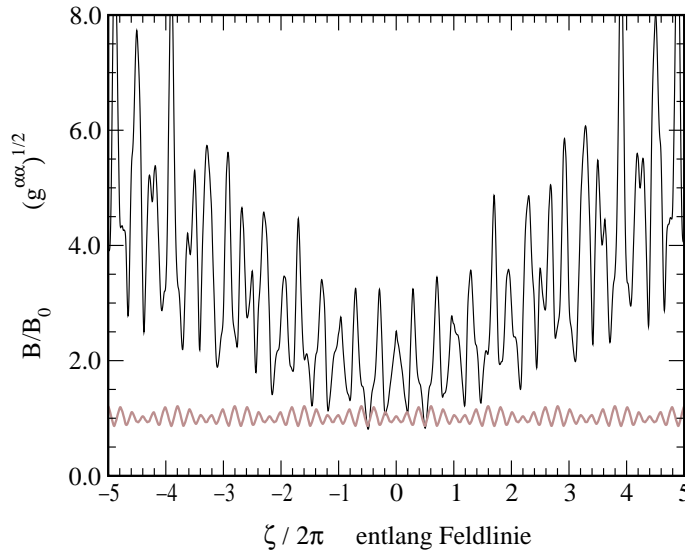


Abbildung 4.1. Die säkulare Größe $g^{\alpha\alpha}$ ist proportional zum senkrechten Wellenvektor k_{\perp} . Die Darstellung zeigt $g^{\alpha\alpha}(\zeta)$ und $B(\zeta)$ entlang einer Feldlinie ($s=1/2$, $\alpha=0$) in HSR.

4.2 Numerische Lösung des Eigenwertproblems

Das System (4.13) gewöhnlicher schrodingerartiger Differentialgleichungen wird mit herkömmlichen Schießmethoden gelöst. Hierfür wurde im Rahmen dieser Arbeit ein komplexwertiger Eigenwertcode für allgemeine dreidimensionale Magnetfeldgeometrien entwickelt. Die Helias-Konfigurationen setzen sich aus fünf identischen Feldperioden mit jeweils zwei Symmetrieebenen zusammen (vergl. Abb. 2.2). Eine Symmetrieebene ist eine poloidale Ebene, die eine fünffache toroidale Rotationssymmetrie aufweist und gleichzeitig eine Linie zur Stellaratorsymmetrie [31] schneidet. Das magnetisches Koordinatensystem sei derart definiert, daß der Ursprung $\theta_0 = \zeta_0 = 0$ (und damit auch $\alpha = 0$) auf der Torusaußenseite an der ‐Dreiecksebene‐ liegt (vergleiche Abbildung 2.2). Die andere (‐bohnenförmige‐) Symmetrieebene liegt bei $\zeta_1 = \pi/5$. Entlang einer durch (θ_0, ζ_0) oder (θ_0, ζ_1) führenden Feldlinie erfüllt eine Gleichgewichtsgröße $f(\zeta)$ die Symmetrie $f(\zeta_{0,1} + \zeta) = f(\zeta_{0,1} - \zeta)$. Alle bisherigen Behandlungen in der Literatur zu Driftwellen in stellaratorähnlichen Konfigurationen [95, 96, 33] als Eigenwertproblem hatten lediglich symmetrische Moden lokal zu derartigen symmetrischen Feldlinien zum Gegenstand. Hier werden diese Ansätze auf beliebige Modenstrukturen erweitert, da die instabilste Mode a priori nicht unbedingt als symmetrisch zu erwarten ist, und eine solche Erweiterung die Behandlung nicht nur auf symmetrische Feldlinien beschränkt.

Der Schießalgorithmus basiert auf einem Runge-Kutta-Schema als Randwertaufgabe [50]. Entlang der Feldlinie werden im Rahmen der Ballooning-Transformation (siehe Anhang B) für $\zeta \rightarrow \pm\infty$ WKB-Randbedingungen angenommen. Für eine Gleichung der Form (4.11) ergibt sich für einen genügend weit ausserhalb des Lokalisierungsgebiets von quadratintegrablen Moden liegenden Randpunkt ζ_∞ [9]:

$$\hat{\Phi}_{\pm\zeta_\infty} = U^{-1/4} \cdot \exp \left[\pm \int_0^{\pm\zeta_\infty} d\zeta \sqrt{U} \right]. \quad (4.20)$$

Der Lösungszweig für nach außen konvektierte Energie [93] ergibt weiterhin

$$\left. \frac{d\hat{\Phi}}{d\zeta} \right|_{\pm\zeta_\infty} = \left(\pm\sqrt{U} - \frac{1}{4U} \frac{dU}{d\zeta} \right) \hat{\Phi}. \quad (4.21)$$

Die Frequenzeigenwerte werden iteriert, bis das komplexwertige $\hat{\Phi}$ und dessen Ableitungen im Rahmen einer festgesetzten Toleranz an einem Aufpunkt ζ_m von beiden Seiten (\pm) übereinstimmen. Als Routine zur Nullstellensuche wird ein zweidimensionales Müller-Verfahren verwendet [115]. Die Startpunkte der Iteration werden auf einem vorgegebenen Raster in der Frequenzebene variiert. Die Differentialgleichung selbst wird auf einem diskreten Gitter entlang der Feldlinie mit einer Auflösung von 1000 Punkten in ζ pro toroidalem Umlauf (2π) durch Schießen von $\zeta_\infty = \zeta_m \pm 10 \cdot 2\pi$ gelöst. Das numerische Verfahren wurde durch Vergleich mit der analytisch bekannten Eigenwertlösung [73] eines Parabelpotentials für U getestet. Da die Lösung von Gl. (4.13) entlang einer festgelegten Feldlinie unabhängig vom Aufpunkt ζ_m ist, läßt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\zeta_m = \zeta_0$ festlegen. Es bleiben durch die Wahl von α und der radialen Position s zwei Freiheitsgrade unbestimmt. Um die instabilste Mode einer gesamten Konfiguration zu ermitteln, muß eine Variation dieser Variablen vorgenommen werden.

4.3 Lineares Spektrum für konstante Dissipation

Durch Lösung der Gleichungen (4.13) für ein gegebenes Plasmagleichgewicht erhält man die Eigenfunktionen und ein Spektrum von Eigenwerten in der komplexen Frequenzebene (ω_R, γ) . Nicht-quadratintegrale Lösungen der Eigenfunktionen, wie sie von Persson et al. [95] gefunden wurden, werden als unphysikalisch verworfen und im Code automatisch unterdrückt.

Dieser Abschnitt beschränkt sich auf die Untersuchung von Lösungen entlang der einen Feldlinie $\alpha = 0$, und es werden die Abhängigkeiten der Lösung von geometrischen Eigenschaften lokal zu dieser Feldlinie betrachtet. Die Abhängigkeit von α und s wird explizit später in Abschnitt 4.6 diskutiert.

Als Aufpunkt entlang der Feldlinie wird $\zeta_m = \zeta_0$ und als Flußfläche $s=1/4$ gewählt, was der Hälfte des kleinen Radius bezüglich der letzten geschlossenen Flußfläche entspricht. Für die Dichte wird ein glockenförmiges Profil mit $n = n_0(1-s)^2$ angenommen. Die lokale Temperatur sei $\hat{T}_e(s=1/4) \equiv 0.65$. Für den Parameter δ in Gleichung (4.3), der beispielsweise Dissipation durch Stoßprozesse beschreibt, wird beliebig ein Wert $\delta = 0.01$ festgelegt (wie etwa auch bei Ref. [95]). Für $\delta = 0$ sind alle erhaltenen Lösungen marginal stabil. Die Abhängigkeit von diesem Parameter wird hier nicht weiter diskutiert. In Abschnitt 4.4 werden später Moden aus dissipativen gefangenen Elektronen in einem störungstheoretischen Ansatz für δ untersucht. Zunächst wird der Einfluß der Geometrie ohne die weitere Komplikation von gefangenen Teilchen betrachtet.

Ein typisches Frequenzspektrum zu einer Modenzahl $m = 50$ für den Helias-Stellarator Wendelstein 7-X mit $\delta = 0.01$ ist in Abb. 4.2 dargestellt. Gezeigt sind darin auch reelle Eigenfunktionen Φ_R dieses Spektrums. In Übereinstimmung mit den Referenzen [10, 95, 33] erhält man je nach Wahl der Parameter sowohl schwach wie auch stark lokalisierte Moden.

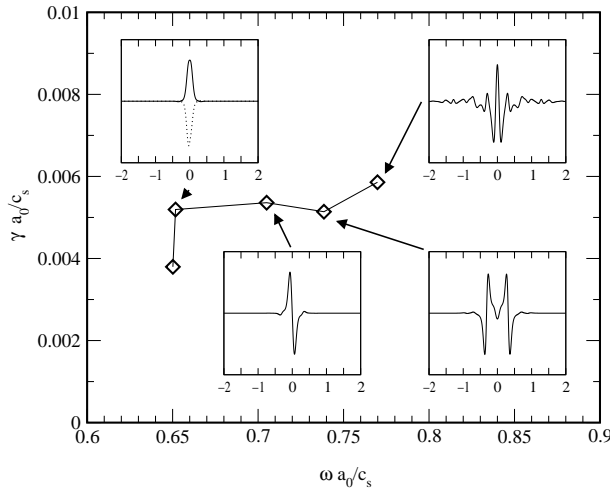


Abbildung 4.2. Frequenzspektrum und Eigenfunktionen von Driftwellen in Wendelstein 7-X für eine Modenzahl $m = 50$ und Nichtadiabazität $\delta = 0.01$ lokal zu einer Feldlinie ($s=1/4$, $\alpha=0$).

Ein derartiges Spektrum wird für eine Reihe von senkrechten Modenzahlen m in den drei Helias-Konfigurationen berechnet, woraus sich jeweils die Anwachsrate γ und reelle Frequenz ω_R der instabilsten Mode (lokal zur betrachteten Feldlinie) ablesen

läßt. Damit Effekte der Geometrie auf die Anwachsrate nicht durch Artefakte aus den unterschiedlichen Größen der Experimente verfälscht werden, sind Längenskalen auf den jeweiligen kleinen Radius normiert. In Abb. 4.3 werden die drei somit erhaltenen Modenzahlspektren verglichen. Die Driftskala $r_* = \rho_s/a_0$ wurde identisch mit $r_* = 0.005$ auf den ungefähren Wert für W7-X festgesetzt.

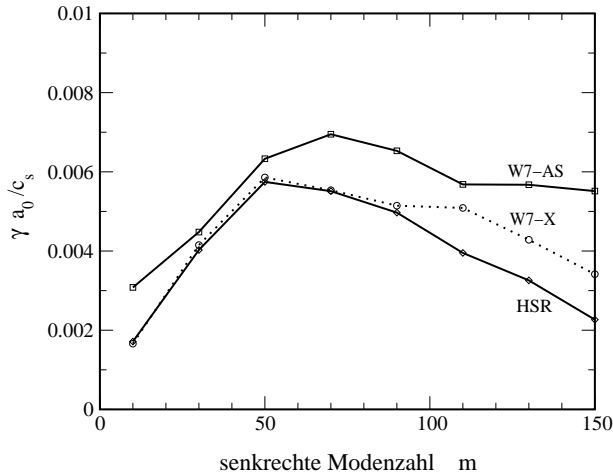


Abbildung 4.3. Modenzahlspektren der Helias-Konfigurationen W7-AS, W7-X und HSR im $i\delta$ -Modell ($\alpha=0$).

Eine Verringerung der Anwachsrate, wie sie hier von W7-AS nach W7-X und HSR zu erkennen ist, ist größtenteils ein Effekt der lokalen Verscherung. In Abb. 4.4(a) ist die lokale Verscherung S für alle Konfigurationen auf der betrachteten Feldlinie dargestellt. Dem Anstieg des Absolutbetrags von S kann dabei eine maßgebende Bedeutung in den zu beobachtenden Unterschieden zwischen den Konfigurationen zukommen, da Verscherung gemeinhin eine Stabilisierung von Driftwellen bewirkt [123].

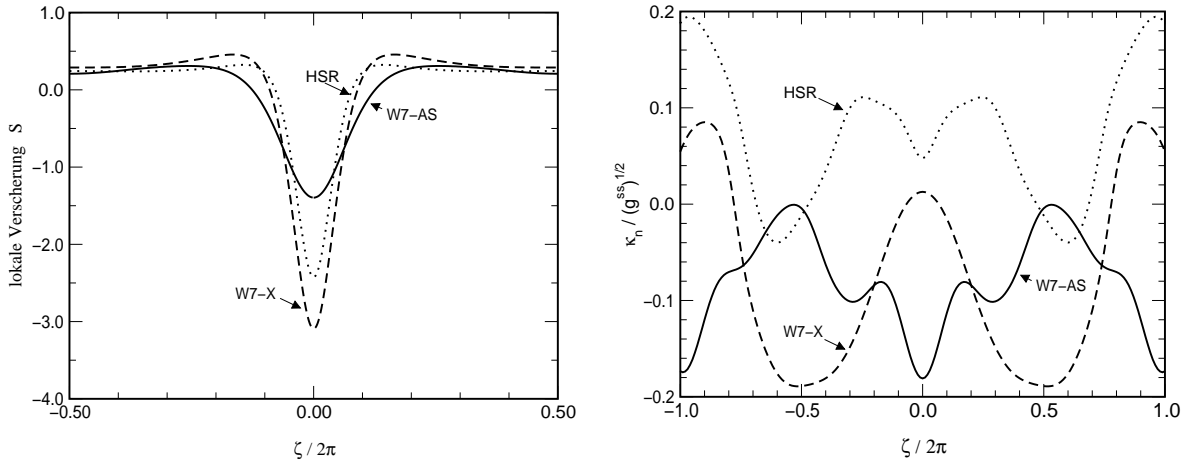


Abbildung 4.4. (a) Lokale Verscherung und (b) normierte Normalkrümmung ($\alpha=0$).

Jedoch zeigt HSR in Abb. 4.3 trotz geringerer absoluter lokaler Verscherung ein günstigeres Verhalten als W7-X. Neben der lokalen Verscherung kommt im gegenwärtigen ballooning-artigen Driftwellenmodell als weiterer geometrischer Mechanismus, wie

in Abb. 4.4(b) dargestellt, die Normalkrümmung (normiert als $\kappa_N/\sqrt{g^{ss}}$) in Betracht. Diese ist auf der betrachteten Feldlinie für HSR günstiger im Gegensatz zu einem wesentlichen Bereich mit destabilisierenden negativem κ_N für W7-X (vgl. Ref. [77]).

4.4 DTEM: Dissipative Moden durch gefangene Elektronen

In einem magnetischen Spiegel eingeschlossene Teilchen können durch Stöße befreit werden und damit eine Instabilität treiben [67]. Die effektive Stoßfrequenz ν_{eff} ist durch die reziproke Zeit gegeben, die ein Teilchen benötigt, um seinen Steigungswinkel durch Stöße so zu verändern, daß es den Spiegel verlassen kann. Für Elektronen der Energie E ist $\nu_{\text{eff}} = (\nu_{ei}/\epsilon)(T_e/E)^{3/2}$, wobei ν_{ei} die Elektron-Ion-Stoßfrequenz für thermische Elektronen ist. $\epsilon(s) = (B_{max} - B_0)/B_0$ stellt in einem Stellarator den Anteil (überwiegend helikal) gefangener Elektronen dar (siehe z.B. Ref. [7]). In einem Tokamak ist der Beitrag toroidal gefangener Elektronen $\epsilon \sim 1/A_0$.

Die lineare Theorie dissipativer Moden durch gefangene Elektronen¹ wurde bereits von Dominguez *et al.* [33] für die Geometrie eines Torsatrons mit hoher globaler Verscherung diskutiert. Hier wird diesem störungstheoretischen Ansatz im wesentlichen gefolgt, welcher ausgeht von der Gleichung

$$\hat{\nabla}_{\parallel}^2 \hat{\Phi} = (\hat{U}_0 + \hat{U}_1) \hat{\Phi}. \quad (4.22)$$

Darin ist \hat{U}_0 reell und entspricht Gleichung (4.12). $\hat{U}_1 = i\hat{\omega}_0^2 \delta$ ist der imaginäre gestörte Anteil des effektiven Potentials, wobei nun δ aus der Wirkung der gefangenen Elektronen ermittelt wird. Man berechnet $\hat{\Phi}(\zeta)$ und die reellen Eigenfrequenzen ω_0 zunächst aus der reellen Gleichung $\hat{\nabla}_{\parallel}^2 \hat{\Phi} \equiv \partial_{\eta}^2 \hat{\Phi} = \hat{U}_0 \hat{\Phi}$ und bestimmt durch Störungsrechnung die komplexe Änderung der Eigenfrequenz zu

$$i\gamma = - \frac{\int d\eta \hat{\Phi}_0 \hat{U}_1(\omega_0) \langle \hat{\Phi}_0 \rangle}{\int d\eta \hat{\Phi}_0^2 \left. \frac{\partial \hat{U}_0}{\partial \omega} \right|_{\omega_0}}. \quad (4.23)$$

Ein expliziter Ausdruck für \hat{U}_1 läßt sich durch Integration des nichtadiabatischen Anteils g der gestörten Verteilungsfunktion der Elektronen angeben. Dieser ist für stoß-behaftete gefangene Elektronen gegeben durch [33]:

$$g(E, \mu) = \frac{iF_0}{\nu_{\text{eff}}} \left(\omega - \omega_* \left[1 + \eta_e \left(\frac{E}{T_e} - \frac{3}{2} \right) \right] \right) \langle \hat{\Phi} \rangle \equiv ig_0 \langle \hat{\Phi} \rangle. \quad (4.24)$$

Darin ist F_0 die Gleichgewichtsverteilung der Elektronen. Die Mittelung der elektrostatischen Potentialstörung, $\langle \hat{\Phi} \rangle = (\int dt_b \hat{\Phi}) / (\int dt_b)$, wird über die Pendelzeit $t_b = \eta/v_{\parallel}$ entlang der Feldlinie berechnet. Der nichtadiabatische Anteil der gestörten Dichte,

$$\frac{\tilde{n}_1}{n_0} = -i\delta \hat{\Phi} = 2\pi i \int dv_{\parallel} \int dv_{\perp} v_{\perp} g_0 \langle \hat{\Phi} \rangle, \quad (4.25)$$

wird durch Integration von g über den Geschwindigkeitsraum erhalten. Anders als im letzten Abschnitt ist δ nun nicht länger konstant, sondern wirkt als Operator auf $\langle \hat{\Phi} \rangle$.

¹ DTEM: (engl.) dissipative trapped electron mode.

Es läßt sich δ explizit durch einen Wechsel der Variablen von

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{2}{m} \hat{B} \frac{E}{\Lambda}} \quad \text{und} \quad v_{\parallel} = \sqrt{\frac{2E}{m} (1 - \hat{B}/\Lambda)} \quad (4.26)$$

zu E und $\Lambda = E/\mu B$ auswerten. Unter Berücksichtigung von $\nu_{\text{eff}}(E) = (E/T)^{3/2} \nu_{\text{eff}}^{(0)}$ läßt sich die Integration über E durchführen:

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\hat{\omega}_{*}^{(0)}}{\hat{\nu}_{\text{eff}}^{(0)}} \left[\left(1 - \frac{\hat{\omega}_0}{\hat{\omega}_{*}} \right) + \frac{3}{2} \eta_e \right] \cdot \int \frac{d\Lambda/\Lambda^{3/2}}{\sqrt{\Lambda - \hat{B}}}. \quad (4.27)$$

Die diamagnetische Frequenz der Elektronen ist darin gegeben durch $\hat{\omega}_{*} = -2r_{*}m \cdot \partial_s \ln n_0 \hat{T}_e / \hat{B} \equiv r_{*} \hat{\omega}_{*}^{(0)} / \hat{B}$. Mit \hat{U}_1 wie oben und $\hat{U}_0 = \hat{U}(\xi = 1)$ erhält man schließlich

$$i\hat{\gamma} = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \frac{\hat{\omega}_0^2 \hat{\omega}_{*}^{(0)}}{\hat{T}_e \hat{\nu}_{\text{eff}}^{(0)}} \left[\frac{3}{2} \eta_e + \left(1 - \frac{\hat{\omega}_0}{\hat{\omega}_{*}} \right) \right] \cdot \frac{H_1}{H_2}, \quad (4.28)$$

$$H_1 = \sum_{\text{Interv}} \int d\Lambda \Lambda^{-3/2} \left| \int \frac{d\zeta}{F} \frac{\Phi_0(\zeta)}{\sqrt{\Lambda - \hat{B}(\zeta)}} \right|^2 / \left(\int \frac{d\zeta}{F} \frac{1}{\sqrt{\Lambda - \hat{B}(\zeta)}} \right),$$

$$H_2 = \int \frac{d\zeta}{F \hat{B}} |\Phi_0|^2 \left[2\hat{\omega}_0 \left(r m^2 |\hat{\nabla} \alpha|^2 + \frac{\hat{B}}{r \hat{T}_e} \right) - m(\mathbf{b} \times \hat{\nabla} \alpha) \cdot \hat{\mathbf{k}}_{\Delta} \right].$$

Die Integration über ζ entlang der Feldlinie wird zwischen den Umkehrpunkten durchgeführt, und die über die Teilchenenergie $\Lambda = E/(\mu B_0)$ zwischen Maxima von B entlang der Feldlinie in einem Spiegelintervall; hieraus ergibt sich ein Faktor 2 in Gl. (4.28) gegenüber Ref. [33]. Einige weitere Unterschiede folgen u.a. aus der expliziten Berücksichtigung der B-Abhängigkeit von ρ_s . In H_1 ist über alle helikalen und toroidalen Spiegelintervalle zu summieren.

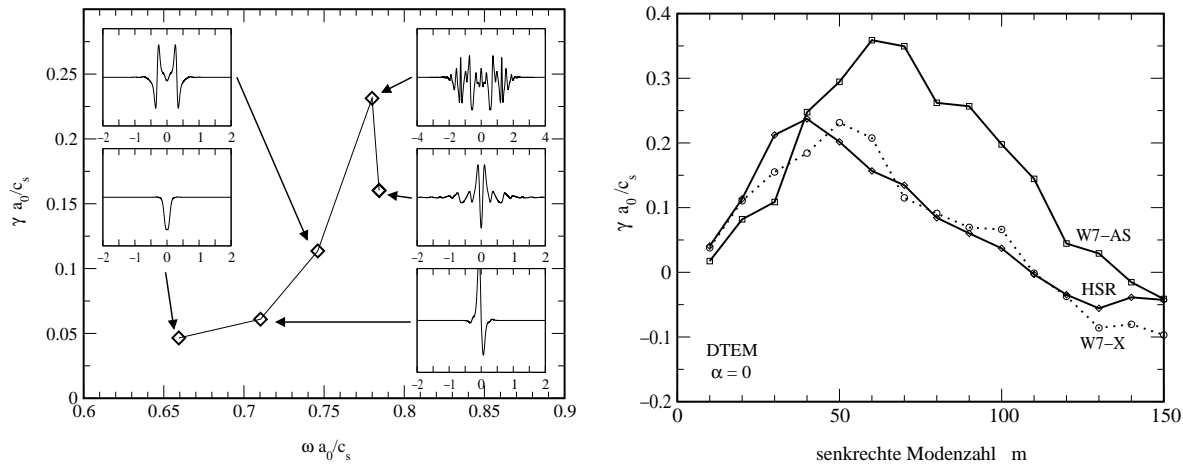


Abbildung 4.5. Links: DTEM Frequenzspektrum für Wendelstein 7-X ($m = 50$). In den Fenstern dargestellt sind Wellenfunktionen Φ_R einiger helikal oder toroidal lokalisierter Eigenmoden. Rechts: DTEM Modenzahlenspektren für W7-AS, W7-X und HSR.

Damit ergeben sich wiederum Modenzahlspektren für die drei Konfigurationen. Es wird in allen Fällen $\hat{v}_{\text{eff}} \equiv 0.2$ gleichgesetzt. Für W7-X und $m = 50$ ist das lokale Frequenzspektrum auf $\alpha = 0$ in Abb. 4.5(a) gezeigt. Die instabilsten Lösungen (lokal zur Feldlinie) für alle untersuchten Modenzahlen m sind in Abb. 4.5(b) zusammengestellt. Zusätzlich zur Rolle der lokalen Verscherung, wie sie im letzten Abschnitt diskutiert wurde, hat hier auch das Zusammenwirken zwischen Spiegelintervallen und Bereichen mit guter und schlechter magnetischer Krümmung eine Bedeutung. In W7-X sind Elektronen generell zum Großteil in Bereichen günstiger Magnetfeldkrümmung gefangen. Andererseits entstehen in W7-AS durch die dort nahe am Plasma gelegenen Feldspulen zusätzliche magnetische Fallen.

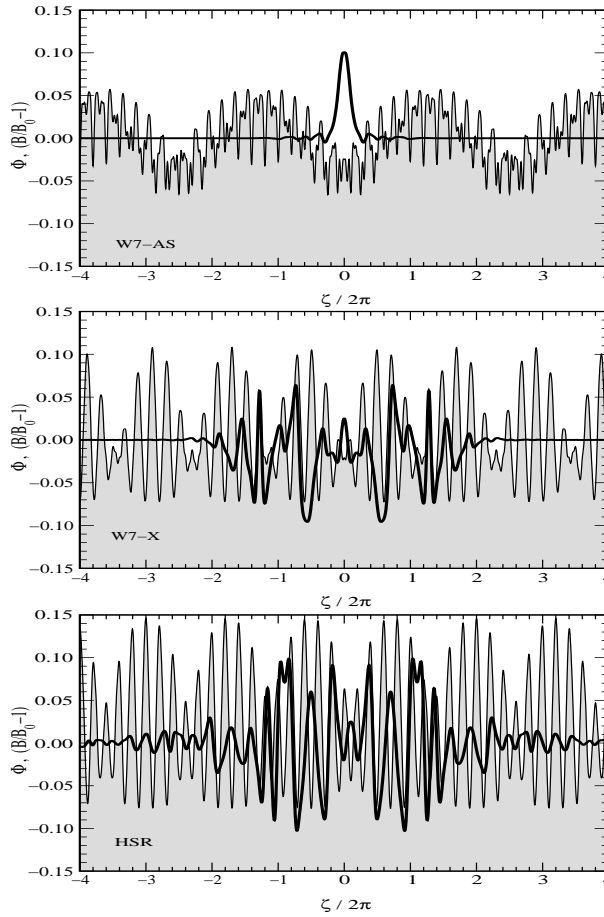


Abbildung 4.6. Lokalisierung der instabilsten $m = 50$ Moden in W7-AS, W7-X und HSR, zusammen mit der jeweiligen Magnetfeldstärke $B(\zeta)$ (schattiert) entlang der Feldlinie $\alpha = 0$.

Für die bisher betrachtete Feldlinie ($\alpha=0$, $s=1/4$) sind die Eigenfunktionen des elektrostatischen Potentials $\Phi(\zeta)$ zusammen mit dem Magnetfeld \hat{B} für die instabilsten $m = 50$ Moden in Abb. 4.6 dargestellt. Man erkennt die starke Lokalisierung der Wellenfunktion in einer einzigen helikalen Mulde von W7-AS. Wie in Ref. [33] dargelegt wurde, trägt eine wachsende Lokalisierung zur höherer Instabilität bei. Demgegenüber zeigen die Moden von W7-X und HSR eine Delokalisierung in mehrere Mulden.

4.5 Die Rolle der lokalen Verscherung

Die Ergebnisse der beiden letzten Kapitel implizieren eine bedeutende Rolle der lokalen Eigenschaften von Verscherung und Krümmung für die Driftwellenstabilität. Um die Abhängigkeit von diesen Größen näher zu untersuchen, wird wieder das bisher einfachste Modell in der “ $i\delta$ ”-Beschreibung (aus Abschnitt 4.3) verwendet.

Gleichungen (4.16) sind bereits explizit durch Λ , κ_N und κ_G ausgedrückt. Jede dieser Größen wird nun unabhängig voneinander mit einem konstanten Faktor skaliert: $\Lambda \rightarrow \lambda_s \Lambda$, $\kappa_N \rightarrow \lambda_N \kappa_N$ und $\kappa_G \rightarrow \lambda_G \kappa_G$. Für ansonsten gleiche Parameter wie in Abschnitt 4.3 wird für eine bestimmte Konfiguration (W7-X, $m=50$) einer der Faktoren λ variiert und die anderen beiden konstant auf eins gehalten. Da jedoch das Gleichgewicht selbst nicht konsistent mitmodifiziert wird, ist dieses Verfahren genaugenommen nur für kleine Variationen um $\lambda \approx 1$ sinnvoll.

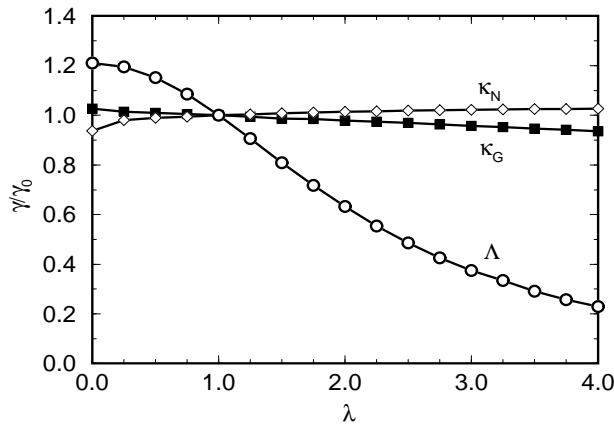


Abbildung 4.7. Modifikation der Anwachsraten durch Variation von lokaler Verscherung (Λ) und Krümmungen (κ) durch einen konstanten Faktor λ .

Es ergibt sich die in Abb. 4.7 dargestellte Abhängigkeit. Mit steigender integrierter lokaler Verscherung Λ nimmt die Anwachsraten deutlich ab. Dies gibt weitere klare Evidenz für die Vermutung aus den letzten Kapiteln, daß die ermittelten Verhältnisse bezüglich Stabilität für die verschiedenen Helias-Konfigurationen hauptsächlich aus den Unterschieden in den Eigenschaften der lokalen Verscherung rührt. Diese geht in das effektive Potential \hat{U} als Λ^2 in erster Linie über $k_{\perp}^2 \sim g^{\alpha\alpha}$ ein und vergrößert den Realteil des ersten Terms in (4.12) gegenüber dem destabilisierenden Imaginärteil δ der Phase ξ .

Damit wurde numerisch in einer realen Geometrie gezeigt, daß in “verscherungsfreien” Stellaratoren die lokale Verscherung eine stabilisierende Rolle übernimmt, im Gegensatz zu globalen Verscherungseigenschaften und den damit verbundenen Iota-Abhängigkeiten, die sich in dem in Ref. [33] untersuchten Torsatron (“ATF”) und in Tokamaks als bedeutend erwiesen. Entlang der untersuchten Feldlinie ist κ_N größtenteils negativ im Bereich der Modenlokalisierung, wie aus Abb. 4.4(b) hervorgeht. Ein hoher Vorfaktor λ_N bewirkt daher hier eine leichte Verstärkung der Instabilität. Die geodätische Krümmung, welche in Helias-Konfigurationen minimiert ist, zeigt ein nur geringfügig ausgeprägtes gegensätzliches Verhalten.

4.6 Radiale und poloidale Abhängigkeiten

In diesem Abschnitt wird als erstes die Einschränkung auf eine festgesetzte Feldlinienmarke α aufgegeben. Es wird dazu das DTEM-Modell aus Abschnitt 4.4 verwendet. Es erweist sich, daß die Abhängigkeit des Frequenzspektrums von dieser Feldlinienmarke α , selbst für eine einzige betrachtete Modenzahl (hier $m=50$) und eine radiale Position ($s = 0.25$), zu einer komplexen Bandstruktur führt. Reelle und imaginäre Eigenfrequenzen sind in Abb. 4.8 gegen α aufgetragen. In einem Fenster in der Abbildung ist ein Ausschnitt vergrößert dargestellt, um zu zeigen, daß die reellen Frequenzbänder sich nicht schneiden, sondern vielmehr kleine Bandlücken aufweisen. Die gesamte Struktur konnte numerisch nicht in allen Details aufgelöst werden. Aus dem Detailreichtum der Abbildung geht auch deutlich hervor, daß es rechnerisch sehr aufwendig wird, die komplette Bandstruktur in den beiden verbleibenden Dimensionen des Parameterraums auflösen zu wollen, also für eine Vielzahl radialer Positionen und Modenzahlen. Aus selbem Grund ist das Auffinden der global instabilsten Mode einer gesamten Konfiguration im Rahmen des hier verwendeten Modells nur schwerlich zu realisieren. In der folgenden Diskussion zu radialen Aspekten des Spektrums wird daher wieder auf eine lokale Analyse entlang einer Feldlinie ($\alpha = 0$) zurückgegriffen.

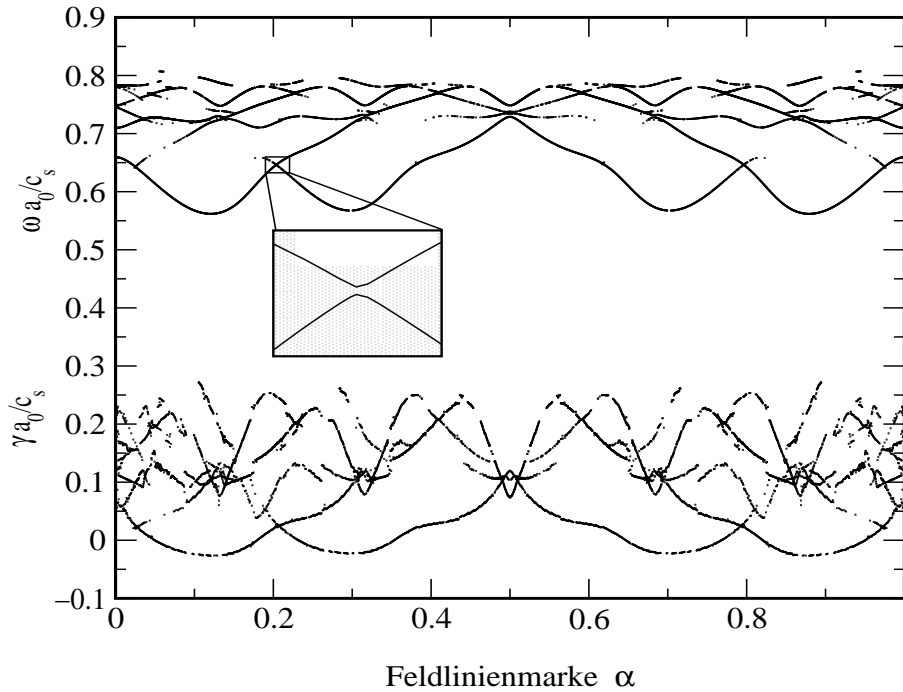


Abbildung 4.8. Bandstruktur der komplexen Frequenzen ω_R und γ in Abhängigkeit von der Feldlinienmarke $\alpha/2\pi$. Die gesamte Struktur konnte numerisch nicht in allen Details aufgelöst werden und erscheint daher lückenhaft. Fenster: Reelle Frequenzbänder überschneiden sich nicht.

Zur Diskussion der radialen Abhängigkeit werden die Gradientenparameter $L_n(s)$ und $\eta_e(s)$ aus experimentell (an W7-AS) gefundenen Profilen bestimmt: Im folgenden sind $n/n_0 = [1 + 6.67s^{3.7}]^{-1}$ und $\hat{T}_e = [1 + 33.3s^{2.8}]^{-1}$ (vergleiche dazu Abb. 2.4). Die resultierenden Anwachsraten im DTEM Modell sind in Abb. 4.9 gezeigt. Der radiale

Verlauf der linearen Anwachsrate ist weitgehend von den Plasmaprofilen abhängig. In der Abbildung ist ebenso die durchschnittliche Modenbreite $\Delta_\zeta(s)$ entlang der Feldlinie aus

$$\Delta_\zeta^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta |\Phi|^2 \zeta^2 \right) / \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta |\Phi|^2 \right) \quad (4.29)$$

eingetragen. Damit läßt sich durch die genäherte Annahme $k_{\parallel} = S \cdot \Delta_r \cdot k_{\perp}$ [123, 33] auch die radiale Modenbreite zu $\Delta_r = \rho_s / (S \Delta_\zeta)$ bestimmen.

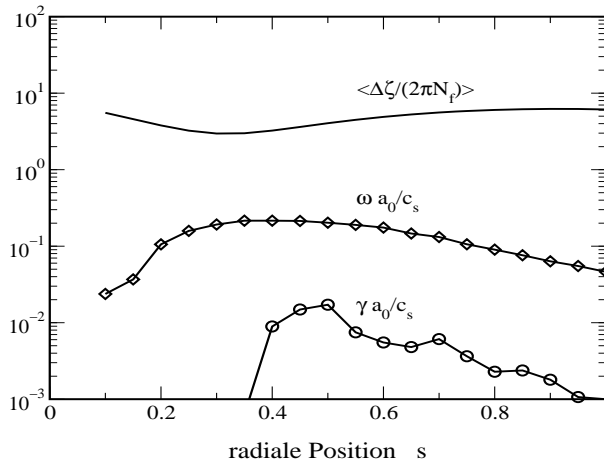


Abbildung 4.9. Radiale Abhängigkeit von linearer Anwachsrate, reeller Eigenfrequenz und der Ausdehnung Δ_ζ entlang der Feldlinie (in Einheiten von Feldperioden) der lokal instabilsten $m = 50$ DTEM Eigenfunktionen in W7-X.

Aufgrund einer mit dieser Näherung ermittelten großen radialen Breite helikaler Moden in der von ihnen untersuchten Torsatrongeometrie haben Dominguez *et al.* gefolgert, daß dort in Entladungen mit gutem Einschluß diese Moden marginal stabil sein müßten, und leiteten daher nur Einschränkungen bezüglich Dichte- und Temperaturgradienten für marginale Stabilität ab. Im Fall von Helias-Konfigurationen sind die instabilsten Moden entlang der Feldlinie weiter ausgedehnt als in Ref. [33]. Ein wichtiger Unterschied liegt weiter am bestimmenden Einfluß der lokalen Verscherung in Gl. (4.28), wogegen für ein Torsatron die globale Verscherung die relevante Größe ist. Damit ergeben sich für die Modenbreite Δ_r in Helias-Konfigurationen keine unrealistisch hohen Werte.

Ein direkter Vergleich der hier berechneten Driftwellenspektren mit experimentellen Beobachtungen kann nicht ohne Vorbehalt stattfinden, da aus der linearen Theorie im besten Falle qualitative Übereinstimmung erwartet werden kann und eine sinnvolle Interpretation von Fluktuationmessungen nur im Rahmen einer nichtlinearen Turbulenzsimulation vorgenommen werden kann. Auch ist im Stellarator der Wellenzahlvektor eine nichtlokale Größe entlang des Felds, wogegen aus dem Experiment k_{\perp} nur lokal zu bestimmen ist. Ein typischer, in der Nähe der Separatrix erhaltener Wert für den senkrechten Wellenvektor in Experimenten an W7-AS ist $k_{\perp} = 1.74 \text{ cm}^{-1}$, was in der hier verwendeten Notation einer Modenzahl von etwa $m \approx 15$ entspricht. Dieser Wert für m kann daher nur eine grobe Näherung sein. Dennoch ergibt eine Berechnung für experimentelle Parameter eine qualitativ annehmbare Übereinstimmung bezüglich

der spektralen Maxima, auch wenn die höchste gemessene Fluktuationsamplitude bei $f \approx 3$ kHz nicht sehr gut mit der hierfür berechneten höchsten Anwachsrate bei etwa $f \approx 11$ kHz übereinstimmt. Für einen Randwert von $s \sim 0.99$ ergibt die Rechnung eine große toroidale Ausbreitung der Driftmode ($\Delta_\zeta \approx 50$). Aufgrund der daraus resultierenden geringen radialen Modenbreite in W7-AS (auch für kleinere Radien s) können sowohl die Instabilitätsmechanismen des DTEM- als auch des $i\delta$ -Modells den experimentell beobachteten Fluktuationen zugrundeliegen.

4.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde eine vergleichende numerische Studie zu linearen Driftwellen in Stellarator-Konfigurationen der Helias-Klasse durchgeführt. Komplexe Frequenzspektren und Eigenfunktionen wurden sowohl für ein einfaches Flüssigkeitsmodell mit beliebiger Nichtadiabatizität δ als auch für die physikalisch realistischeren Moden durch gefangene Elektronen ermittelt. Hierzu ist ein Eigenwertcode für generelle dreidimensionale Geometrie unter Ballooning-Transformation entwickelt worden. Erstmals wurden damit Eigenwertspektren in einem realen Stellarator und ohne Beschränkung auf nur symmetrische Moden untersucht.

In den Fallstudien lokal zu einer bestimmten Feldlinie konnte eine deutliche Verringerung der linearen Anwachsrate mit verbesserter Stellaratoroptimierung in HSR und W7-X gegenüber W7-AS beobachtet werden. Dies konnte größtenteils als Effekt der lokalen Verscherung verstanden werden, deren Betrag aufgrund einer höheren Helizität bei fortgeschrittener Optimierung ansteigt. Die intrinsische globale "Verscherungsfreiheit" der Helias-Konfigurationen ist dabei für die bestimmende Rolle der lokalen Verscherung verantwortlich. Zusätzlich zur lokalen Verscherung bestimmen auch die Krümmungseigenschaften die Driftwellenstabilität. Dies konnte durch Vergleich der Spektren von W7-X und HSR gesehen werden, deren Vakuumfelder ($\beta = 0$) sehr ähnlich sind. Das Gleichgewichtsfeld von HSR bei $\beta = 5\%$ weist dagegen eine günstigere mittlere Krümmung auf und führt zu geringeren Anwachsrate als im Vakuumfall. Der Einfluß eines endlichen Plasmabeta über die Änderung der Magnetfeldkrümmung wird im nächsten Kapitel für die durch die krümmungsgetriebene Austauschinstabilität bestimmten ITG-Moden (siehe Abschnitt 3.1) näher diskutiert.

Im Hinblick auf die Mode durch dissipative gefangene Elektronen (DTEM) läßt sich folgern, daß, soweit lokale lineare Analyse und die daraus abgeleiteten Modenbreiten den Schluß zulassen, diese weiterhin ein möglicher Kandidat für die Ursache anomaler Diffusion in Helias-Konfigurationen bleibt. Dies steht im Gegensatz zu Ref. [33], worin die große radiale Modenbreite in einem Torsatron zur Annahme geführt hat, DTEM-Moden seien nur nahe marginaler Stabilität mit gemessenem Transport kompatibel. In Helias-Stellaratoren sind die ermittelten Lösungen mit relativ geringer Lokalisierung entlang der Feldlinie und einer damit geringeren radialen Breite verbunden. Des weiteren ist die Modenbreite in Helias-Konfigurationen mehr durch lokale Verscherung bestimmt als durch die globale mittlere Verscherung im Torsatron.

Teile des vorliegenden Kapitels sind vom Autor in Ref. [69] veröffentlicht.

Kapitel 5

Lineare Theorie: Elektromagnetische ITG-Moden

Die lineare elektromagnetische gyrokinetische Gleichung für einen Stellarator wird aufgestellt. In diesem Modell sind sowohl Effekte eines endlichen Ionen-temperaturgradienten (ITG) als auch endlichen Plasmabetas enthalten. Dies erlaubt die Untersuchung von Driftmoden mit realistischen Parametern eines Fusionsplasmas. Numerische Resultate werden für den Helias Stellarator Reaktor HSR berechnet. Es wird gezeigt, daß die konsistente Behandlung von Effekten endlichen Betas auf die Geometrie selbst einen wesentlichen Bestandteil in Untersuchungen zur Mikrostabilität darstellt.

Die Konzeptstudie zu einem Stellaratorkraftwerk HSR basiert auf der zu Reaktor-dimensionen skalierten Konfiguration von Wendelstein 7-X (siehe Kapitel 2). Untersuchungen zur magnetohydrodynamischen Stabilität von HSR ergaben die Möglichkeit eines stabilen Plasmeinschlusses bis zu einem Beta (siehe Abschnitt 2.2) von über $\langle\beta\rangle = 4\%$ hinaus [117]. Durch die Minimierung der geodätischen Krümmung und der Pfirsch-Schlüter-Ströme wird bei einem optimierten Stellarator eine geringe Shafranov-Verschiebung des Plasmatorus bei endlichem Plasmadruck erzielt. Die Erfahrungen aus dem letzten Kapitel lassen aber bereits vermuten, daß auch die relativ geringen Veränderungen des poloidalen Querschnitts in HSR zwischen dem Vakuumfeld und einem $\langle\beta\rangle = 5\%$ Gleichgewicht bereits Einfluß auf die Mikrostabilität haben können.

In diesem Kapitel wird untersucht, wie sich diese Verschiebung über die geometrischen Eigenschaften auf Driftmodenstabilität auswirkt. Die Ionentemperatur ist in einem Reaktorplasma im allgemeinen nicht mehr vernachlässigbar, und es werden kinetische Effekte aufgrund des endlichen Gyroradius der Ionen relevant, die in einem Flüssigkeitsmodell wie dem des letzten Kapitels nur eingeschränkt wiedergegeben werden können.

Ein gyrokinetisches elektrostatisches Modell, das einen endlichen Ionentemperaturgradienten einbezieht, wurde für dreidimensionale Geometrie bereits von Lewandowski aufgestellt [77, 78]. In diesem Kapitel wird der bisherige Ansatz auf elektromagnetische gyrokinetische Driftmoden erweitert. Die grundlegenden Gleichungen dazu wurden von Antonsen und Lane formuliert [3]. Im folgenden werden dieser Formalismus auf reale Stellaratorgeometrie angewandt und Effekte eines endlichen β auf die gyrokinetische Instabilität in einer Helias-Reaktorkonfiguration untersucht.

5.1 Die elektromagnetische gyrokinetische Gleichung

Befindet sich die typische Wellenlänge einer Störung im Plasma in der Größenordnung der Gyrationbahn eines Ions ($k_{\perp}\rho_i \approx 1$), so erfährt das Teilchen während eines Bahnumlaufs nur ein gemittelttes Bild der Potentialfluktuationen. Um diesem Effekt Rechnung zu tragen, ist von der kinetischen Beschreibung eines Plasmas auszugehen. Darin ist im Prinzip die Entwicklung der Verteilungsfunktionen $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ aller s Teilchensorten im Plasma zu verfolgen und in einem geschlossenen System zusammen mit den Maxwellgleichungen zu lösen [112]. Die Kopplung an die Maxwellgleichungen erfolgt durch Bildung zweier Momente für die Dichte n und Dichtestrom $n\mathbf{V}$:

$$n = \int d^3v f, \quad (5.1)$$

$$n\mathbf{V} = \int d^3v f \mathbf{v}. \quad (5.2)$$

In der Praxis ist die vollständige Lösung aus der Liouvilleschen Erhaltungsgleichung für die Verteilungsfunktion im Phasenraum jedoch selten möglich. In der Plasmaphysik geht man daher meist von einem Ansatz aus, in dem nach einer Mittelung über die kinetische Gleichung die Wechselwirkung zwischen den Einzelteilchen auf eine durch bilineare Terme gegebene Stoßfunktion und gemittelte elektromagnetische Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} reduziert wird. In niedrigster Ordnung im Debye-Plasmaparameter¹ und damit unter Vernachlässigung des Stoßterms ergibt sich dann die Vlasov-Gleichung [72]

$$\left[\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] f = 0. \quad (5.3)$$

Die linearisierte gyrokinetische Gleichung wird aus der Vlasovgleichung durch Mittelung über den Winkel der schnellen Gyrobewegung ($\omega \ll \Omega_i$) erhalten. Die Störungen aufgrund von Potentialfluktuationen werden als elektromagnetisch angenommen mit

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\nabla\tilde{\phi} + i\omega\tilde{\mathbf{A}},$$

worin der gestörte Anteil des Magnetfelds $\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}$ durch das Vektorpotential $\tilde{\mathbf{A}}$ ausgedrückt ist. Hier interessieren Störungen in \tilde{f} , $\tilde{\phi}$ und $\tilde{\mathbf{B}}$ mit kleinen senkrechten Wellenlängen gegenüber den typischen Längenskalen der Hintergrundfelder. Dies erlaubt die Benutzung eines WKB Eikonalansatzes der fluktuierenden Größen (siehe Anhang B). Dann läßt sich die Integration zur Gyrophasenmittelung über den von der Amplitude separierten Eikonalexponenten,

$$\langle e^{i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \rho_i} \rangle = J_0(k_{\perp}\rho_i) \quad (5.4)$$

durch Besselfunktionen $J_n(k_{\perp}v_{\perp}/\Omega_i)$ ausdrücken, und man erhält damit (siehe Referenzen [102, 3, 54]) schließlich als lineare gyrokinetische Gleichung

$$\begin{aligned} -i(\omega - \omega_D + iv_{\parallel}\mathbf{b} \cdot \nabla)h &= i\omega \left(\partial_E F_0 - \frac{\hat{\mathbf{B}} \times m\nabla\alpha \cdot \nabla F_0}{M_i\Omega_i\omega} \right) \\ &\cdot \left[(q\tilde{\phi} - v_{\parallel}q\tilde{\psi}) J_0 + v_{\perp}q\tilde{\sigma}m|\nabla\alpha|J_1 \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

¹ Debye-Plasmaparameter: $g_D = (n\lambda_D^3)^{-1} \ll 1$ mit der Debye-Länge $\lambda_D = \sqrt{\varepsilon_0 T / (ne^2)}$ [112]

Diese Darstellung folgt der von Antonsen und Lane [3], wonach $\tilde{\mathbf{A}}$ in Komponenten entlang der Vektoren $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$, $\mathbf{b} \times \nabla W$ und $\nabla W = m\nabla\alpha$ aufgespalten wird:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{b}\tilde{\psi} - i\tilde{\sigma}(\mathbf{b} \times \nabla W) + \tilde{\xi}\nabla W. \quad (5.6)$$

In Ref. [3] wurde gezeigt, daß der letzte Term darin unter einer Eichung mit $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} = 0$ um eine Größenordnung kleiner in ∇W ist als der Rest und daher vernachlässigt werden kann, wodurch sich ergibt

$$\tilde{\mathbf{B}} = i\nabla W \times \tilde{\mathbf{A}} = -i(\mathbf{b} \times \nabla W)\tilde{\psi} + \mathbf{b}|\nabla W|^2\tilde{\sigma}. \quad (5.7)$$

Die elektromagnetische gyrokinetische Gleichung (5.5) beschreibt den nichtadiabatischen Anteil h der gestörten Ionenverteilungsfunktion $\tilde{f}_i = -F_0\tilde{\phi} + J_0(h + F_0J_0\tilde{\phi})$ [77]. Die Verteilungsfunktion für das Gleichgewicht in niedrigster Ordnung, F_0 , wird als Maxwellisch angenommen. Elektronen verhalten sich adiabatisch. Im folgenden wird diese Gleichung durch Einführung expliziter Zeitdifferenzierung und eines endlichen Ionentemperaturgradienten umformuliert. Letzterer wird durch den Parameter $\eta_i = \partial_s \ln T_i / \partial_s \ln n$ beschrieben. Es sei ferner $\tau = T_i/T_e$.

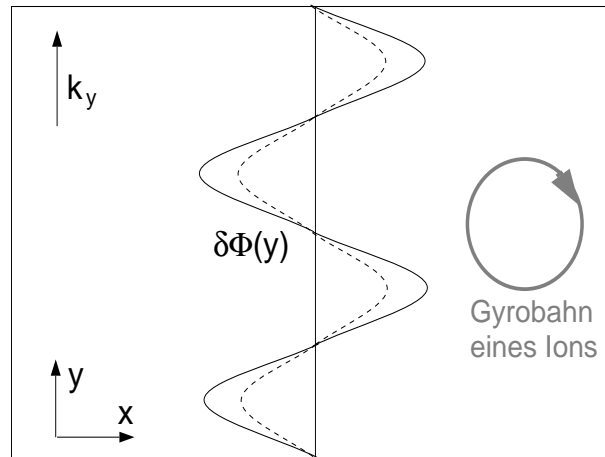


Abbildung 5.1. Die Ionen erfahren aufgrund ihrer Gyrationbewegung ein gemittelttes Feld (gestrichelte Linie), das geringer als das reale Feld ist (dicke Linie). Nach [63], Abb. 5A.1.

In $\hat{\chi}$ werden alle fluktuierenden Komponenten des elektromagnetischen Felds zusammengefaßt:

$$\hat{\chi} = J_0 \frac{e\tilde{\phi}}{T_i} - v_{\parallel} J_0 \frac{e\tilde{\psi}}{T_i} + v_{\perp} m |\nabla\alpha| J_1 \frac{e\tilde{\sigma}}{T_i}. \quad (5.8)$$

Die Verteilungsfunktion wird auf F_0 normiert und damit eine neue abhängige Funktion $H = h/F_0 - \hat{\chi}$ definiert. Weiter werden zur Normierung die Gradienten auf den kleinen Radius a_0 bezogen, die Zeit t als $tv_{th,i}/a_0$ geschrieben, Geschwindigkeiten als $x_{\parallel,\perp} = v_{\parallel,\perp}/v_{th,i}$ auf die thermische Ionengeschwindigkeit $v_{th,i} = \sqrt{T_i/M_i}$ bezogen und das Magnetfeld als $\hat{B} = B/B_0$ auf den Wert an der Achse. Es wird weiter $r_{*i} = \rho_i/a_0$

definiert, und es ist $\nabla_{\parallel} = (2\hat{B}\hat{J})^{-1}\partial_{\zeta}$. Damit kann die normierte elektromagnetische gyrokinetische Gleichung geschrieben werden als

$$\partial_t H = -\frac{x_{\parallel}}{2\hat{B}\hat{J}}\partial_{\zeta}(H + \hat{\chi}) - i\hat{\Omega}_{Di}H - i(\hat{\Omega}_{Di} - \hat{\Omega}_{*})\hat{\chi}. \quad (5.9)$$

Darin ist die diamagnetische Frequenz der Ionen gleich $\Omega_{*} = 2mr_{*i}L_n^{-1}[1 + \eta_i(x_{\parallel}^2 - x_{\perp}^2 - 3/2)]$ mit der Dichtegradientenlänge $L_n = (\partial_s \ln n)^{-1}$. Die Krümmungsdift der Ionen $\Omega_{Di} = \nabla W \cdot \mathbf{v}_{Di}$ wird mit $\mathbf{v}_{Di} = \rho_i c_i \mathbf{b} \times [x_{\parallel}^2(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (1/2)x_{\perp}^2 \nabla \ln B]$ zu

$$\begin{aligned} \Omega_{Di} &= \frac{mr_{*i}}{\hat{B}} \left(x_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}x_{\perp}^2 \right) [(\mathbf{b} \times \hat{\nabla} \ln B) \cdot \hat{\nabla} \alpha] + mr_{*i}L_n^{-1}(1 + \eta_i)\beta x_{\parallel}^2 \\ &= \frac{mr_{*i}}{2\hat{B}^2} \left(x_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}x_{\perp}^2 \right) g^{ss} \left[\left(\frac{2\hat{B}}{g^{ss}} \right)^2 \cdot \kappa_N + \Lambda \cdot \kappa_G \right] + \frac{mr_{*i}\beta}{L_n}(1 + \eta_i)x_{\parallel}^2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Gleichung (5.9) wird durch das Poissonsche Gesetz in Form der Quasineutralitätsbedingung und den Momentengleichungen im Ampereschen Gesetz abgeschlossen [3]:

$$\int d^3v f_i = \int d^3v f_e, \quad (5.11)$$

$$(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_{\perp} = i\tilde{\sigma}|\nabla S|^2(\nabla S \times \mathbf{b}) = \frac{e}{\varepsilon_0 c^2} \int d^3v \mathbf{v}_{\perp}(f_i - f_e), \quad (5.12)$$

$$(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_{\parallel} = |\nabla S|^2 \mathbf{b} \tilde{\psi} = \frac{e}{\varepsilon_0 c^2} \int d^3v \mathbf{b} v_{\parallel}(f_i - f_e). \quad (5.13)$$

Daraus lassen sich explizite Ausdrücke für die elektromagnetischen Potentiale

$$\hat{\phi} = \frac{e\tilde{\phi}}{T_i}, \quad \hat{\psi} = \frac{1}{B_0 \rho_{s0} \beta} \frac{e\tilde{\psi}}{T_i}, \quad \text{und} \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{B_0 \rho_{s0} \beta} \frac{e\tilde{\sigma}}{T_i} \quad (5.14)$$

gewinnen, und es ergibt sich schließlich mit der Abkürzung $w = r_i^2 m^2 g^{\alpha\alpha}$:

$$\hat{\chi} = J_0 \hat{\phi} - x_{\parallel} \beta J_0 \hat{\psi} + x_{\perp} \beta J_1 \hat{\sigma}, \quad (5.15)$$

wobei

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}[1 + \tau - I_0(\frac{w}{2}) \exp(-\frac{w}{2})]} \int_{-\infty}^{\infty} dx_{\parallel} \int_0^{\infty} dx_{\perp} x_{\perp} J_0 H e^{-x_{\perp}^2 - x_{\parallel}^2}, \\ \hat{\psi} &= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi} w} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx_{\parallel} \int_0^{\infty} dx_{\perp} x_{\perp} x_{\parallel} J_0 H e^{-x_{\perp}^2 - x_{\parallel}^2}, \\ \hat{\sigma} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2w^{3/2}}(1 + \tau)\hat{\phi} + \frac{2\pi}{w^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_{\parallel} \int_0^{\infty} dx_{\perp} x_{\perp}^2 J_0 (H + J_0 \hat{\phi}) e^{-x_{\perp}^2 - x_{\parallel}^2}. \end{aligned}$$

Gleichungen 5.9 und 5.15 beschreiben Quasimoden der fluktuierenden Größen entlang einer Feldlinie (siehe Anhang B), welche durch den Ionentemperaturgradienten (ITG) und Krümmung destabilisiert werden.

5.2 Numerische Lösung als Anfangswertproblem

Die gyrokinetische Gleichung (5.9) wird für $H(x_{\perp}, x_{\parallel}, \zeta, t)$ mit einem expliziten Lax-Wendroff-Richtmyer-Verfahren entlang der Feldlinie als Anfangswertproblem gelöst. Dieses zweistufige Einschrittverfahren mit zweiter Ordnung Genauigkeit in Ort und Zeit ist vom Prädiktor-Korrektor-Typ, wobei nach der ersten Stufe eine Vorlösung zu einem Zwischenzeitpunkt erzeugt und im zweiten, sogenannten “Leapfrog”-Schritt zur endgültigen Lösung korrigiert wird [98, 111]. Nach jedem der beiden Teilschritte werden die elektromagnetischen Potentiale (5.15) ermittelt. Eine Modellgleichung

$$\partial_t H + \partial_{\zeta} Q = 0$$

mit einer Quellfunktion Q erhält im ersten Schritt die Form

$$H_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}(H_{i+1}^n + H_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta\zeta} \right),$$

wobei untere Indizes die Ortsdiskretisierung und obere Indizes die Zeitschritte darstellen. Durch die Mittelwertbildung anstelle von H_i^n wird dieser Schritt stabilisiert. Der zweite Schritt propagiert die Lösung auf den endgültigen Zeitpunkt:

$$H_i^{n+1} = H_i^n - \Delta t \left(\frac{Q_{i+1}^{n+1/2} - Q_{i-1}^{n+1/2}}{2\Delta\zeta} + D_i^n \right).$$

Dabei ist D_i^n eine geeignete zusätzliche künstliche Dissipation, um numerische Instabilitäten im ansonsten nicht dissipativen “Leapfrog”-Schritt zu dämpfen [98]. Für einen Großteil der folgenden Rechnungen konnte auf diese künstliche Dissipation verzichtet werden, da die Rechnungen im allgemeinen schnelle Konvergenz zeigten, noch ehe Gitteroszillationen auftraten. Das Verfahren ist in Abb. 5.2 dargestellt.

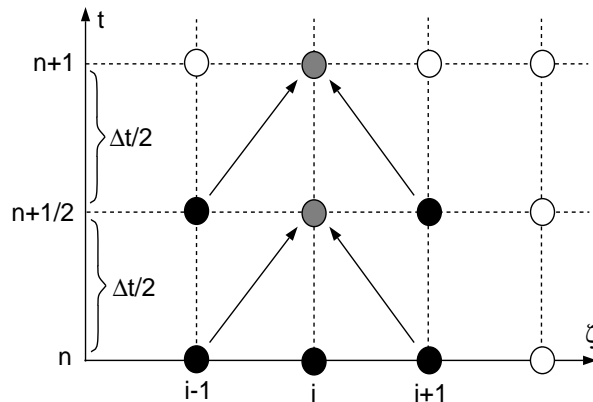


Abbildung 5.2. Veranschaulichung des Lax-Wendroff-Richtmyer-Verfahrens.

Nach jedem kompletten Zeitschritt wird die instantane lineare Anwachsrate γ der elektromagnetischen Potentiale $\hat{\phi}$, $\hat{\sigma}$ und $\hat{\psi}$ ausgewertet (hier am Beispiel von $\hat{\phi}$) zu

$$\gamma(t) = \partial_t \ln \langle |\hat{\phi}| \rangle_{\zeta} \quad (5.16)$$

wobei

$$\langle |\hat{\phi}| \rangle_\zeta = \frac{1}{2\zeta_\infty} \int_{\zeta_m - \zeta_\infty}^{\zeta_m + \zeta_\infty} \hat{\phi}(\zeta') d\zeta'. \quad (5.17)$$

In der numerischen Darstellung wird die Anwachsrate im weiteren auf die diamagnetische Frequenz $\hat{\omega}_* = 2mr_{*i}L_n^{-1}$ bezogen. Im Feldlinienmittel (5.17) ist ζ_m (analog zum letzten Kapitel) ein toroidaler Referenzpunkt, der zusammen mit einem poloidalen Winkel θ_m die lokale Feldlinie $\alpha = \theta_m - \iota\zeta_m$ spezifiziert, auf der die gyrokinetische Gleichung gelöst wird. Für eine Analyse der gesamten Flußfläche muß wiederum eine Variation von α vorgenommen werden. Die Ausdehnung der Rechendomäne entlang der Feldlinie ($\zeta_\infty - \zeta_m$) muß größer als die maximale Modenausdehnung gewählt werden.

Im folgenden wird die Gleichung auf einer Flußfläche mit radialer Position $s = (r/a_0)^2 = 0.5$ gelöst, auf der für die in einem Helias-Reaktor erwarteten Druckprofile das lokale Plasma-Beta $\beta(s = 1/2) \approx (1/2)\langle\beta\rangle$ etwa der Hälfte des Mittelwerts entspricht. Die numerische Integration wird mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 0.25$ durchgeführt, bis die Anwachsrate γ nach etwa $t \approx 300$ auf einem unveränderten Niveau verbleibt. Als räumliche Auflösung wurde $\Delta\zeta = 2\pi/1000$ für $(\zeta_\infty - \zeta_m) = \pm 2\pi$ gewählt. Die Geschwindigkeitsdomäne ist $x_{\parallel max} = \pm 4$ und $x_{\perp max} = 4$ mit einer Anzahl von $N_{\parallel} = 45$ und $N_{\perp} = 15$ Gitterpunkten. Weitere Verfeinerung der Auflösung führte zu keinen signifikanten Änderungen der Lösung. Die Plasmaparameter werden zu $\tau = 1$, $\eta_i = 2.5$, $k_{\perp}\rho_i = mr_{*i} = 1$ und $L_n = 0.2$ gesetzt.

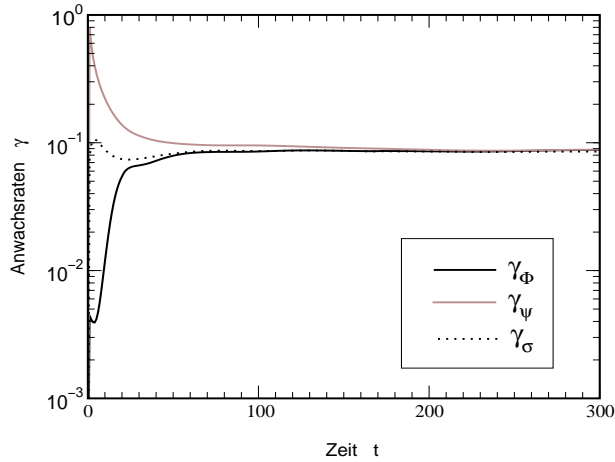


Abbildung 5.3. Numerische Entwicklung der linearen Anwachsrate γ_ϕ , γ_σ und γ_ψ zu einem asymptotischen Wert. Der Transient bei kleinen Zeiten t ist von den Anfangsbedingungen abhängig.

Abb. 5.3 zeigt den zeitlichen Verlauf der linearen Anwachsrate während einer Berechnung für $\langle\beta\rangle = 5\%$ in HSR. Nach einer von den Anfangsbedingungen abhängigen transienten Einschwingphase setzt sich die instabilste Mode durch, und die elektromagnetischen Potentiale wachsen mit der selben linearen Rate. Ebenso wie im vorherigen Kapitel ist die erhaltene Mode lokal zur betrachteten Feldlinie α . Für einen Aufpunkt $\zeta_m = \zeta_1$ (‘‘Bohnenebene’’, vgl. Abb. 2.2) ist der Betrag der resultierenden Wellenfunktionen für $\theta_m = 0$ (also $\alpha = 0.1 \cdot 2\pi$) und $\theta_m = \pi$ in Abb. 5.4 gezeigt. Die jeweilige Lokalisierung der Wellenfunktionen läßt sich verstehen, wenn die relevanten geometrischen Größen entlang den Feldlinien dazu aufgetragen werden: ITG-Moden werden

in toroidaler Geometrie in erster Linie durch die Feldlinienkrümmung destabilisiert [38, 91]. Die Moden lokalisieren auch, wie in Abb. 5.4 klar zu erkennen ist, in den helikalen Bereichen ungünstiger Krümmung. Die lokale Verscherung, welche in der gyrokinetischen Gleichung in Ω_{Di} nur in Zusammenhang mit der in Helias-Konfigurationen geringen geodätischen Krümmung erscheint, spielt bei dieser Lokalisierung keine bedeutende Rolle. Die Normalkrümmung bestimmt deshalb auch direkt das Vorzeichen der Krümmungsdrift in Gl. (5.10).

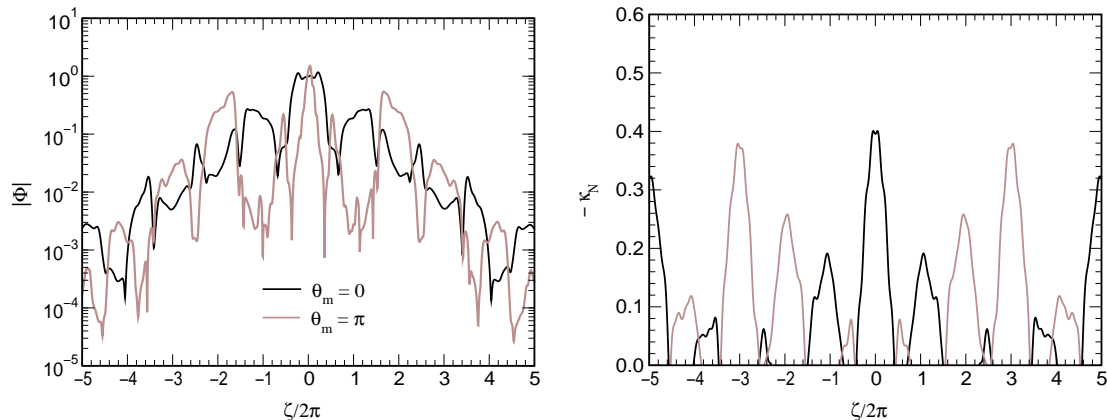


Abbildung 5.4. Lokalisierung von $|\Phi(\zeta)|$ in HSR ($\langle\beta\rangle=5\%$) an helikal ungünstiger Krümmung.

Wie im letzten Kapitel ist auch hier zur Ermittlung der Stabilität eine Variation in der Feldlinienmarke α durchzuführen. In Abb. 5.5 zeigt sich in dieser senkrechten Abhängigkeit die fünffache toroidale Symmetrie der Helias-Konfiguration: Die Feldlinie mit $\alpha = 0.2 \cdot 2\pi$ zeigt ähnliche Eigenschaften wie für $\alpha_0 = 0$. So wie die Lokalisierung der Mode durch die lokale Stärke ungünstiger Krümmung bestimmt ist, läßt sich diese poloidale Variation durch deren mittlere Größe im weiteren Bereich der Lokalisierung beschreiben. Der Mittelwert des ungünstigen negativen Teils der Normalkrümmung, $\langle(\hat{k}_N < 0)\rangle_\zeta$, ist innerhalb $\zeta_m \pm 2\pi$ für α_0 um etwa 5-10% größer als für α_1 , und kann damit die in Abb. 5.5 gezeigten Variationen aufgrund der Austauschinstabilität auch quantitativ beschreiben.

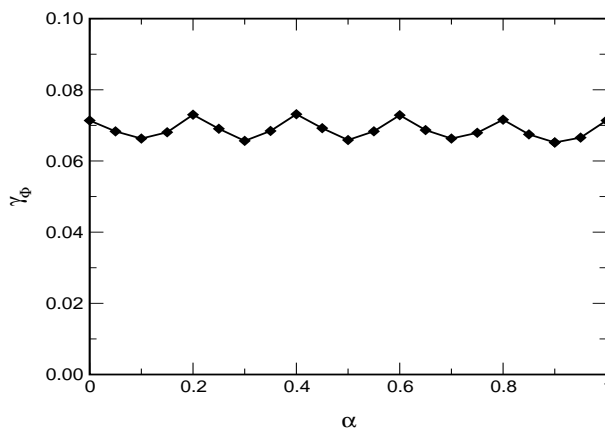


Abbildung 5.5. Variation der Anwachrate mit der Feldlinienmarke α (dargestellt als $\alpha/2\pi$).

5.3 Endlich-Beta-Effekte in einem Helias-Reaktor

Ein endliches Plasmabeta $\beta = 2\mu_0 nT/B^2$ geht in mehrfacher Hinsicht in die Analyse von ITG-Moden ein: Zum einen ändert sich die Geometrie des Gleichgewichtsfelds durch die Shafranov-Verschiebung [117]. Andererseits geht β als Parameter direkt in Gleichung (5.15) in die Gewichtung der elektromagnetischen Potentiale und in die Krümmungsdift ein. Es läßt sich in erster Näherung davon ausgehen, daß sich die Profile $T(s)/T(0)$ und $n(s)/n(0)$ selbstähnlich mit wachsendem Druck ändern und somit die Profilskalen $L_n(s)$ und $\eta_i(s)$ unverändert lassen. Die Eingangsgröße $k_\perp \rho_i$ bleibt ebenfalls unverändert, da sich für ITG-Moden die Wellenlänge am Ionengyroradius orientiert.

Um die beiden Auswirkungen eines endlichen Drucks auf die Anwachsraten zum einen über die Geometrie und zum anderen über die Ankopplung der Alfvéndynamik separat untersuchen zu können, wird zunächst bei einer festgehaltenen Gleichgewichtskonfiguration ($\langle\beta\rangle=0\%$) der Parameter β in Gleichung (5.15) alleine variiert. Es zeigt sich in Abb. 5.6(a) eine verstärkende direkte Auswirkung auf die lineare Anwachsrate (markiert mit Kreisen). Dann wird der Parameter $\beta \equiv 0$ festgehalten, und stattdessen werden die für verschiedenen Plasmadruck bestimmten Gleichgewichtskonfigurationen einzeln betrachtet (Rhomben). Dabei zeigt sich für diese elektrostatischen ITG-Moden eine stabilisierende Wirkung von steigendem Plasmadruck. Dies ist ebenfalls eine Folge der Krümmungsdift, die durch die Verschiebung der Plasmasäule bei wachsendem Druck in weiten Bereichen auf der Flußfläche ein günstiges Vorzeichen erhält. Ein derartiger Effekt der Stabilisierung von ITG-Moden wurde von Fivaz *et al.* [38] bereits auch für die einfache Geometrie eines Tokamaks mit magnetischer Mulde im Rahmen eines elektrostatischen Modells gefunden.

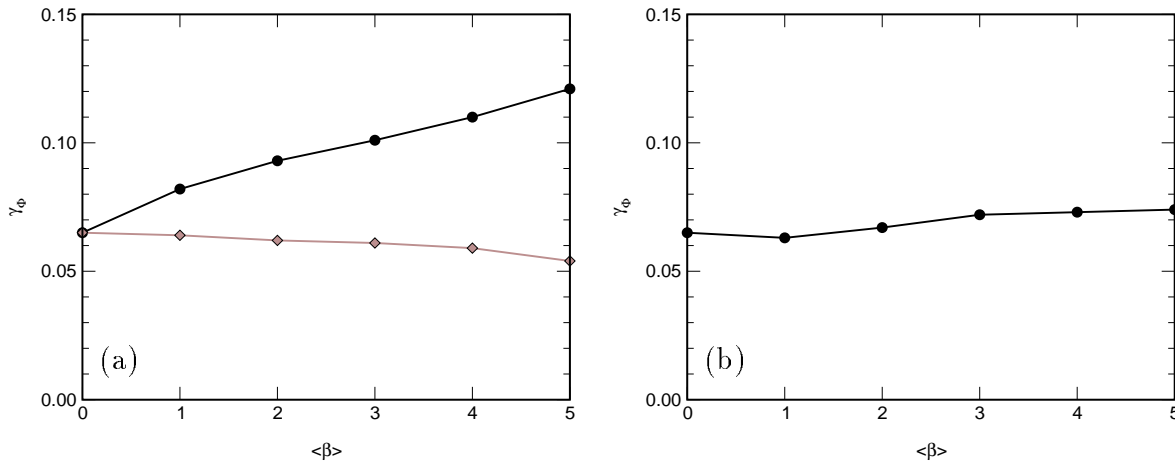


Abbildung 5.6. Links: Bei Variation des Parameters β für eine feste Konfiguration HSR mit $\langle\beta\rangle=0\%$ (Kreise) steigt die Anwachsrate. Für elektrostatische Moden dagegen (Rhomben) tritt eine Stabilisierung durch die Änderung der Gleichgewichtskonfiguration mit wachsendem Druck auf. Rechts: Beide Effekte gemeinsam führen hier zu einer insgesamt geringen Änderung der Anwachsrate.

In Abb. 5.6(b) sind sowohl die Konfiguration als auch β als Parameter konsistent gemeinsam variiert. Die destabilisierende zusätzliche Kopplung an Alfvénwellen konkurriert nun mit der Stabilisierung durch die Umkehr der Krümmungsdrift bei steigendem Druck. Dadurch ändert sich die Anwachsrate insgesamt nur unwesentlich.

Dieses Zusammenspiel stabilisierender und destabilisierender Faktoren kann für einfache zweidimensionale Tokamakgleichgewichte mit einer genäherten analytischen Beschreibung der Shafranov-Verschiebung über eine kontinuierliche Variation von β studiert werden. Für den Fall $\eta_i = 0$ wurde von Rewoldt *et al.* [101] damit für die Anwachsrate ein Maximum der Funktion $\gamma(\beta)$ gefunden. Die Gleichgewichte der Stellaratorkonfigurationen müssen jedoch in einem rechenintensiven iterativen Prozeß ermittelt werden [117] und standen für diese Arbeit nur zu einigen diskreten Werten des Plasmadrucks zur Verfügung. In diesem Bereich wird ein nahezu konstantes Plateau der Abhängigkeit $\gamma(\beta)$ erhalten.

5.4 Zusammenfassung

Die elektromagnetische gyrokinetische Gleichung für endlichen Ionentemperaturgradienten und endliches Plasmabeta wurde für allgemeine dreidimensionale Geometrie aufgestellt und ein Code zur Lösung als Anfangswertproblem entlang der Feldlinie entwickelt. Numerische Resultate wurden für die Helias-Reaktorkonfiguration HSR erhalten. Die Lokalisierung der Eigenmoden ergab sich in Gebieten helikal ungünstiger Krümmung durch die Austauschinstabilität. Die Destabilisierung durch die Krümmungsdrift beschreibt auch quantitativ die poloidale Variation der Anwachsrate mit der Feldlinienmarke α .

Für die relevanten Werte des Plasmabeta eines Reaktors bis etwa 5% ergab sich für die elektromagnetischen ITG-Moden ein nahezu konstantes Verhalten der linearen Instabilität γ mit wachsendem β . Dies ist auf zwei gegensinnige Effekte zurückzuführen: Im elektrostatischen Grenzfall führt die Verschiebung der Plasmasäule bei wachsendem Druck zu einer Stabilisierung der ITG-Moden durch eine Verstärkung der bezüglich Austauschstabilität günstigen magnetischen Mulde in HSR. Andererseits ergibt sich für elektromagnetische Moden durch die Kopplung an Alfvénwellendynamik eine Destabilisierung mit steigendem Parameter β . Die Tendenz des Verlaufs von $\gamma(\beta)$ hängt von der spezifischen Geometrie ab und kann in anderen Konfigurationen ein Maximum aufweisen (vergleiche Ref. [57, 101] zu Tokamaks).

Der in diesem Kapitel behandelten linearen Theorie wurde eine adiabatische Elektronendynamik zugrundegelegt. Als möglicher nächster Schritt zu einer zukünftigen Erweiterung wäre eine Kombination denkbar aus dem hier vorgestellten elektromagnetischen Modell mit dem elektrostatischen Hybridmodell von Lewandowski [78], in dem die gyrokinetischen Ionen mit einer resistiven Elektronenflüssigkeit gekoppelt werden.

Kapitel 6

Driftwellen: Direkte Numerische Simulation

Direkte numerische Simulationen von Drift-Alfvénwellen-Turbulenz werden erstmals in der dreidimensionalen Geometrie realer Stellaratoren durchgeführt. Der Übergang vom Tokamak zur Stellaratorgeometrie und die Auswirkungen auf Randschichtturbulenz und anomalen Transport im Plasma werden in einem Flußschlauchmodell für beide Konfigurationen und geeignete Interpolationen untersucht. Wir identifizieren die relevanten Größen, wie lokale Verscherung und Krümmung, die in den verschiedenen Formen der Feldgeometrie in die Charakteristika der Turbulenz eingehen.

Die Resultate der beiden vorherigen Kapitel zeigten einen deutlichen Einfluß der Magnetfeldgeometrie auf Driftinstabilitäten in Stellaratorplasmen. Bisher wurde dazu nur die lineare Theorie betrachtet. Einen direkten Vergleich mit experimentellen Fluktuationmessungen oder eine Bestimmung des tatsächlichen Transports ist damit jedoch nicht möglich. Zur Beschreibung der aus Driftwellen resultierenden Turbulenz sind dreidimensionale direkte numerische nichtlineare Simulationen nötig [103]. Die Möglichkeit zur Simulation solcher Plasmaturbulenz in inhomogenen Magnetfeldern ist in den letzten Jahren weit fortgeschritten. Zum einen wurden erweiterte Theorien entwickelt, die kinetische und elektromagnetische Effekte in Flüssigkeitsmodellen berücksichtigen [35]. Andererseits machte die technische Weiterentwicklung in der Kapazität von Hochleistungsrechnern deren numerische Lösung auf relevanten Skalen erst möglich.

Die meisten Simulationen zur Mikroturbulenz bedienen sich bisher jedoch der vereinfachten Geometrie eines verscherten Quaders oder eines Ausschnitts entlang einer Feldlinie (“Flußschlauch”) aus einem simplifizierten, kreisförmigen und axialsymmetrischen Tokamak. Dabei weisen auch axialsymmetrische reale Tokamaks eine Formung¹ des poloidalen Querschnitts auf. Neuere Untersuchungen, bei denen diese geometrischen Aspekte in Tokamaksimulationen einbezogen wurden, zeigen eine wesentliche Auswirkung auf Turbulenz und Transport [105, 107, 128].

Im folgenden werden derartige Simulationen von Plasmaturbulenz erstmals auf reale Stellaratorgeometrie von Heliaskonfigurationen erweitert und diskutiert.

¹ Durch Elongation, Triangularität aus Shafranov-Verschiebung und Singularität am X-Punkt eines Divertors [124].

6.1 Fluid- und Gyrofluidsimulation von Drift-Alfvén-Turbulenz

Das zunächst zugrundegelegte Modell für die folgenden Untersuchungen zur Geometrieabhängigkeit von niederfrequenter elektromagnetischer Plasmaturbulenz ist das kalte Ionen ($T_i = 0$) und isothermer Elektronen [106]. Es werden Flüssigkeitsgleichungen für beide Teilchensorten mit der üblichen Annahme $\nabla_{\parallel} \ll \nabla_{\perp}$ verwendet. Unter Driftordnung verbleiben Konvektion durch die $E \times B$ Geschwindigkeit und die Anteile auf den parallelen Gradienten durch das fluktuierende Magnetfeld als einzige Nichtlinearitäten. Das elektrische Feld ist gegeben durch

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial_t A_{\parallel} \mathbf{b}, \quad (6.1)$$

worin Φ das elektrostatische Potential und \mathbf{A} das Vektorpotential darstellen. Der (zeitunabhängige) Einheitsvektor \mathbf{b} ist wiederum parallel zum Magnetfeld \mathbf{B} .

Die Dynamik wird durch die Divergenzfreiheit des gesamten Plasmastroms \mathbf{J} , durch die parallele Bewegungsgleichung für Elektronen, und durch die Kontinuitätsgleichung für die Elektronendichte n_e beschrieben. Die senkrechte Geschwindigkeit der Ionen

$$\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{v}_E + \mathbf{u}_p \quad (6.2)$$

enthält zusätzlich zu der auch in der senkrechten Elektronengeschwindigkeit enthaltenen $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ Geschwindigkeit $\mathbf{v}_E = (1/B^2)\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ den Term $\mathbf{u}_p = -(M_i/eB^2)(\partial_t + \mathbf{v}_E \cdot \nabla)\nabla_{\perp}\phi$ aufgrund der endlichen Trägheit der Ionen. Die totale Ableitung unter Driftordnung wird im folgenden abgekürzt zu $D_t = \partial_t + \mathbf{v}_E \cdot \nabla$, und der nichtlineare parallele Gradient wird wie in Ref. [106] geschrieben als

$$\nabla_{\parallel} = \mathbf{b} \cdot \nabla - \hat{\beta}(\mathbf{b} \times \nabla A_{\parallel}) \cdot \nabla. \quad (6.3)$$

Es werden weiterhin die Schallgeschwindigkeit $c_s = \sqrt{T_e/M_i}$, die senkrechte Skalenlänge L_{\perp} und die Driftskala $\rho_s = \sqrt{T_e M_i/eB}$ definiert. Es wird ϕ auf T_e/e normiert, n auf n_e , u_{\parallel} auf $c_s(qR/L_{\perp})$, J_{\parallel} auf $n_e e c_s(qR/L_{\perp})$, A auf $B\rho_s \hat{\beta}(qR/L_{\perp})$ und die Wirbelstärke Ω auf $\rho_s^{-2} T_e/e$. ∇_{\perp} wird zu $\rho_s \nabla_{\perp}$, ∇_{\parallel} zu $qR \nabla_{\parallel}$, ν zu $(L_{\perp}/c_s)\nu$ und ∂_t zu $(L_{\perp}/c_s)\partial_t$. Die abhängigen Variablen sind noch auf den Driftparameter $\delta_0 = \rho_s/L_{\perp}$ skaliert, z.B. $\Phi \leftarrow \delta_0^{-1} e \Phi/T_e$. In dieser Normierung lautet das Gleichungssystem (siehe Ref. [106]):

$$D_t \Omega = \nabla_{\parallel} J_{\parallel} - \mathcal{K} n, \quad (6.4)$$

$$\hat{\mu} D_t J_{\parallel} = -\hat{\beta} \partial_t A_{\parallel} + \nabla_{\parallel} (n - \phi) - \omega_n \hat{\beta} \partial_y A_{\parallel} - \hat{\mu} \nu J_{\parallel}, \quad (6.5)$$

$$D_t n = -\omega_n \partial_y \phi + \nabla_{\parallel} (J_{\parallel} - u_{\parallel}) - \mathcal{K} (n - \phi), \quad (6.6)$$

$$\epsilon_s D_t u_{\parallel} = -\nabla_{\parallel} n + \omega_n \hat{\beta} \partial_y A_{\parallel} \quad (6.7)$$

mit den beiden Hilfsrelationen für die Wirbelstärke und den parallelen Strom

$$\Omega = \rho_s^2 \nabla_{\perp}^2 \phi \quad \text{und} \quad J_{\parallel} = -\nabla_{\perp}^2 A_{\parallel}. \quad (6.8)$$

Der Krümmungsoperator

$$\mathcal{K} = -L_{\perp} (\mathbf{b} \times \nabla \log B^2) \cdot \rho_s \nabla \quad (6.9)$$

wird auf T/e normiert und mit der lokalen Profilskala L_\perp/c_s skaliert. Das normierte Plasma-Beta $\hat{\beta} = (\mu_0 n T_e / B^2) (qR/L_\perp)^2$, Gradientenskala $\omega_n = L_\perp |\nabla \ln n|$ und Ionen-trägheit $\hat{\mu} = m_e / M_i (qR/L_\perp)^2$ sowie $\epsilon_s = (qR/L_\perp)^2$ sind konstante Parameter. Die Ableitung ∂_y ist der zur Richtung des Dichtegradienten senkrechte Anteil von ∇_\perp (zur Anordnung des Koordinatensystems siehe Abschnitt 6.2).

Die numerische Lösung dieses Systems ist bereits von B. Scott [106] realisiert und erfolgreich auf Tokamakgeometrie für einen großen Bereich möglicher Plasmaparame-ter (hauptsächlich festgelegt durch $\hat{\beta}$, $\hat{\mu}$, ν und ω_n) angewendet worden [105, 109]. Dabei wird ein Upwind-Differenzenverfahren zweiter Ordnung verwendet [26]. Die In-itialisierung der Simulation erfolgt mit einer hinreichend hohen Fluktuationsamplitude, die nichtlinear weiterentwickelt wird [103, 36] und dann in einen quasistationären tur-bulenten Zustand übergeht. Hierbei zeigt sich auch deutlich der eigentlich nichtlineare Charakter von Driftwellen: In einer zweidimensionalen verscherten Anordnung mit kon-stantem Magnetfeld sind Driftwellen zwar linear stabil [46]. Es wurde jedoch gezeigt, daß bei genügend hoher Anfangsamplitude der Störung auch dieser Fall nichtlinear instabil werden kann [103, 104].

Statische radiale elektrische Felder und eine damit verbundene Verschering im poloidalen Geschwindigkeitsfeld sind zwar für eine realistische quantitative Transport-modellierung² im Grunde relevant [21, 22]. Im folgenden wird jedoch erst der Fall $\phi_0(r) = 0$ für Konfigurationen ohne radiales elektrisches Feld betrachtet und es werden lediglich die direkten Auswirkungen der Geometrie untersucht.

Das oben beschriebene Modell kalter Ionen bezieht die freie Energie zum Antrieb der Instabilität aus dem Dichtegradienten. Auch ein genügend steiler Ionentemperatur-gradient kann ein Turbulenzregime treiben [74], welches häufig für den Transport im Plasmazentrum von Tokamaks verantwortlich gemacht wird [71]. Dabei ist zu berück-sichtigen, daß die Modenstrukturen auch in der Größenordnung des Ionengyroradius liegen können und kinetische Effekte eine Rolle spielen werden. Nichtlineare, dreidi-mensionale elektromagnetische gyrokinetische Simulationen werden auch bereits durch-geführt (siehe z.B. [65]), erweisen sich erwartungsgemäß jedoch als äußerst rechenauf-wendig. Die genäherte Einbindung gyrokinetischer Effekte in ein Flüssigkeitsmodell (“Gyrofluid”) ist nur mit einem konsistenten Ansatz zum Abbruch der Momentenhier-archie sinnvoll. Ein solches Modell durch Momentenbildung aus der gyrokinetischen Gleichung (anstatt in der üblichen Weise aus der komplett kinetischen Gleichung) wurde von Dorland und Hammett entwickelt [35] und wurde auf Tokamakgeometrie erweitert [6]. Ein elektromagnetischer Gyrofluidcode von B. Scott [107], der diesen Ansatz benutzt und somit auch das Plasmazentrum für konsistente Turbulenzsimu-lationen erschließt, stand für die vorliegende Arbeit ebenso zur Verfügung. Sowohl die einfache Fluid- als auch die Gyrofluidversion dieses Codes wurden im Rahmen die-ser Arbeit an die Behandlung von Stellaratorgeometrie angepaßt. Die in den nächsten Abschnitten folgenden Parameter- und Konfigurationsstudien sind zunächst mit dem Fluidmodell für kalte Ionen durchgeführt worden, da die Notwendigkeit der Lösung zusätzlicher Gleichungen im Gyrofluidmodell (siehe Anhang C) die Rechenzeit³ dort um einen Faktor vier bis fünf erhöht.

² Der mit dieser Geschwindigkeitsverschering einhergehenden Dämpfung von Fluktuationen wird von vielen Autoren eine mögliche Relevanz für das Verständnis des L-H Übergangs [120] zugesprochen (z.B. [21]).

³ Typischerweise ca. 6 Stunden auf 64 Prozessoren der Cray T3-E des Rechenzentrums Garching im Fluidmodell.

6.2 Scherungskorrigierte Flußschlauchmetrik

Die Berechnungen erfolgen in einem Flußschlauchmodell, das aus numerisch ermittelten MHD-Gleichgewichten von Stellaratoren, aus einem einfachen Tokamak-Modell oder aus geeigneten genäherten Interpolationen zwischen beiden abgeleitet ist. Allen betrachteten Konfigurationen wird das Helias-Konzept zugrundegelegt. Das heißt, auch die in diesem Kapitel als "Tokamak" bezeichneten Konfigurationen weisen eine geringe globale Verscherung mit einer Rotationstransformation am Plasmarand von etwa $\iota = 1/q = 1$ (W7-X) oder $1/2$ (variabel in W7-AS) auf und besitzen eine fünffache Symmetrie in den toroidalen geometrischen Eigenschaften. Dies ermöglicht die vereinfachte Behandlung in einem Flußschlauch, wogegen allgemeine asymmetrische Konfigurationen in einer rechnerisch aufwendigeren Flußflächen-Hohlzylinder Darstellung durchgeführt werden müßten. (Siehe dazu auch die Diskussion in Abschnitt 7.1.)

Die Anordnung des Koordinatensystems in einem solchen Flußschlauch entlang des Magnetfelds erlaubt die Verwendung relativ weniger Gitterpunkte in der parallelen Koordinate z : Die als Standardeinstellung benutzte Auflösung war $64 \times 256 \times 64$ (für Wendelstein 7-X bei $\iota=1$) in einem dreidimensionalen Gitter (x, y, z) . Dabei entspricht die Skala in der poloidalen (x, y) Domäne einem ρ_s pro Gitterpunkt, was einer Domänengröße von etwa $4 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$ für typische Randschichtparameter eines Stellarators entspricht. Auf der gegenüberliegenden Seite sind berechnete Dichtefluktuationen in einem derartigen Ausschnitt aus der Randschicht von Wendelstein 7-X in Originalgröße abgebildet. Daneben ist die Anordnung eines solchen Flußschlauchs auf einer Flußfläche entlang des Magnetfelds skizziert. Eine Anzahl von $n_z=64$ Gitterpunkten in z ist dabei für einen toroidalen Umlauf die minimale Auflösung für einen Helias-Stellarator, mit der die helikalen Variationen noch genügend gut wiedergegeben werden. Zum Vergleich genügt bei einem Tokamak mit rein poloidaler Variation der Geometrie eine parallele Auflösung von $n_z=16$.

Alle relevanten geometrischen Größen werden wieder durch metrische Elemente $g^{\mu\nu} = \nabla\mu \cdot \nabla\nu$ ausgedrückt (siehe Anhang A). Es werden Feldlinienkoordinaten mit einer Einheitsjacobideterminante (Hamada-Koordinaten [49]) verwendet mit $(\mu, \nu) \in (s, \theta, \zeta)$, wobei nun $s = (V/V_0)$ die radiale Position bezeichne und wieder $\theta \in [0, 2\pi]$ die poloidale und $\zeta \in [0, 2\pi]$ die toroidale Koordinate sind. Diese entsprechen bereits nahezu den in der numerischen Routine verwendeten Flußschlauchkoordinaten (x, y, z) . Geht man zu diesen über [108], nimmt das Magnetfeld eine einfache Darstellung an in der Form

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{\nabla}x \times \hat{\nabla}y. \quad (6.10)$$

In einer Notation mittels der Feldlinienmarke $\alpha = \theta - \iota\zeta$ sind die neuen metrischen Elemente g^{ij} mit $(i, j) \in (x, y, z)$ den $g^{\mu\nu}$ verbunden durch die Beziehungen

$$g^{xx} = (1/4s)g^{ss}, \quad (6.11)$$

$$g^{xy} = (1/2)g^{s\alpha}, \quad (6.12)$$

$$g^{yy} = s \cdot g^{\alpha\alpha}. \quad (6.13)$$

Aus der Symmetrie des metrischen Tensors folgt $g^{yx} = g^{xy}$. Aufgrund der Säkularität von g^{xy} und g^{yy} entlang z wird zur Wahrung numerischer Wohlbeschaffenheit eine

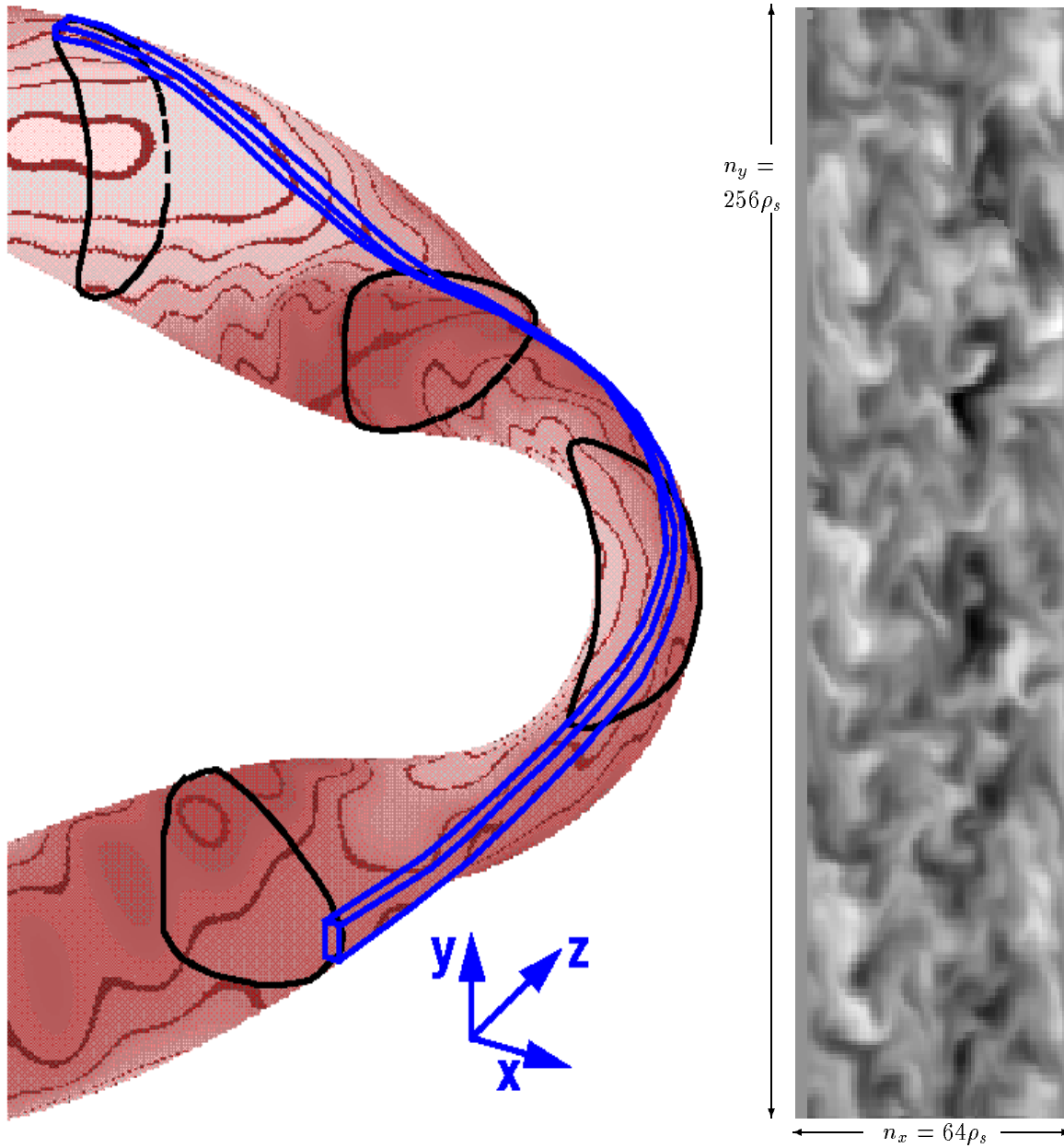


Abbildung 6.1. Skizze (Ausschnitt) eines Flußschlauchs in Wendelstein 7-X (links), und poloidaler Schnitt aus darin berechneten Dichtefluktuationen in Originalgröße (rechts).

Transformation in ein Koordinatensystem mit “scherungsverschobener Metrik” eingeführt, um durch die Verscherung nach paralleler Versetzung verzerrte Fluidelemente wieder in ein Gitter der ursprünglichen Form überzuführen [108]. Dabei wird

$$y_k = y - \alpha_k(x) \quad (6.14)$$

derart gewählt, daß $g_k^{xy} = 0$ identisch verschwindet. Dies läßt sich durch eine Scherungsverschiebung $\alpha_k(x) = x\alpha_k(x)'$ gewährleisten, und man erhält daher

$$\alpha_k(x)' = g^{xy} / g^{xx}. \quad (6.15)$$

Im gleichen Sinne sind $g_k^{yy} = g^{yy} - \alpha' g^{xy}$ und $\mathcal{K}_k^y = \mathcal{K}^y - \alpha' \mathcal{K}^x$ transformiert.

Es wird angenommen, daß alle geometrischen Größen nur von der Variablen z (entlang der Feldlinie) abhängen und konstant in der x - y -Domäne sind [5]. Damit erhält der senkrechte Laplace-Operator die Form

$$\nabla_{\perp}^2 = \nabla \cdot \nabla_{\perp} = g^{xx} \partial_x^2 + g^{xy} \partial_{x,y}^2 + g^{yy} \partial_y^2. \quad (6.16)$$

Die parallele Ableitung wird geschrieben als $\mathbf{B} \cdot \nabla = B^z \nabla_z + \mathcal{O}(A_{\parallel})$ mit $B^z = \mathbf{B} \cdot \nabla z = B_0 J_{xyz} = B_0$, und der Krümmungsoperator $\mathcal{K} = \mathcal{K}^x \partial_x + \mathcal{K}^y \partial_y$ in Flußschlauchkoordinaten wird zu

$$\mathcal{K}^x = \frac{\omega_{\perp}}{\hat{B}} \cdot \frac{g^{ss}}{2\sqrt{s}} \cdot \kappa_G, \quad (6.17)$$

$$\mathcal{K}^y = \frac{\omega_{\perp}}{\hat{B}} \cdot \sqrt{s} \cdot g^{ss} \cdot \left[\kappa_G \cdot \Lambda - \kappa_N \left(2\hat{B}/g^{ss} \right)^2 \right]. \quad (6.18)$$

Hierin ist wieder in der üblichen Notation die Normalkrümmung als $\kappa_N = \hat{\nabla} s \cdot \hat{\nabla} \ln B$ und geodätische Krümmung als $\kappa_G = \hat{\nabla} \alpha \cdot \hat{\nabla} \ln B - \Lambda \cdot \kappa_N$ gegeben. Die Profilskala geht in $\omega_{\perp} = L_{\perp}/a_0$ ein. Alle Effekte poloidaler und toroidaler Asymmetrie und demnach die vollständige Variation von Metrik, lokaler Verscherung und Krümmung werden in diesem Modell beibehalten.

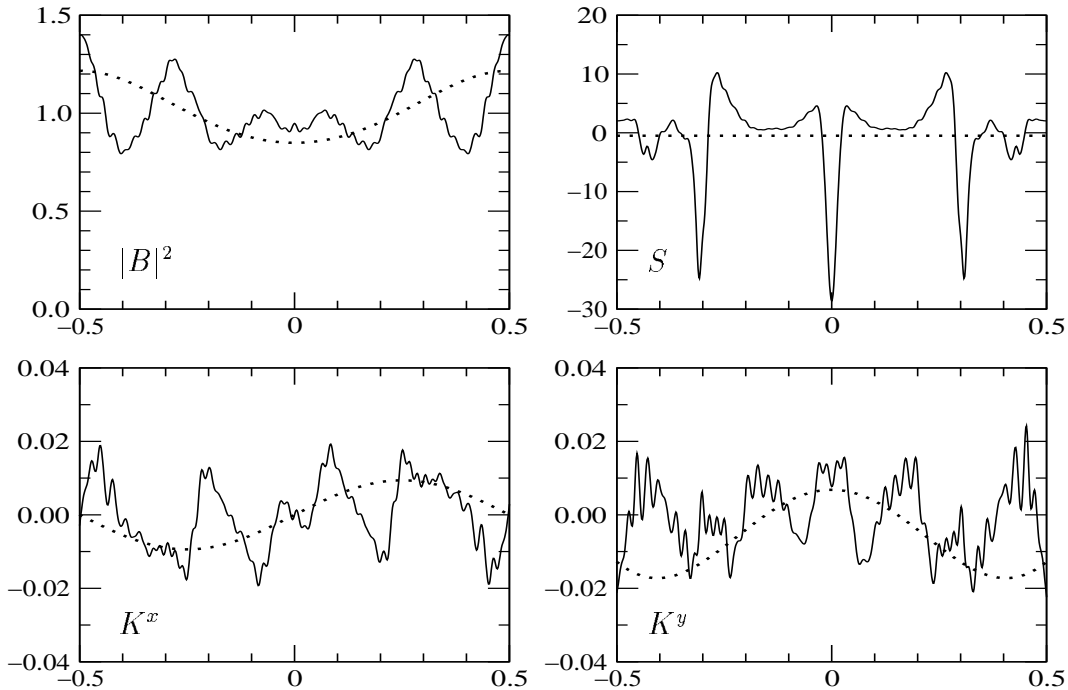


Abbildung 6.2. $|B|^2$, lokale Verscherung S und Krümmungen \mathcal{K}^x und \mathcal{K}^y entlang der Feldlinie $\alpha = 0$ für einen Tokamak (gepunktete Linie) und Wendelstein 7-X (durchgezogene Linie) mit jeweils $\iota \equiv 1$.

6.3 Übergang vom Tokamak zur Stellaratorgeometrie

Die Abhängigkeit von der Geometrie wird im folgenden in einem realen Gleichgewicht von Wendelstein 7-X, einem einfachen kreisförmigen “Tokamak” und geeigneten Interpolationen zwischen beiden Konfigurationen untersucht: Dabei wird die Metrik schrittweise entweder durch Hinzufügen von lokaler Verscherung oder von lokalen Krümmungseigenschaften verändert. Dies entspricht jeweils einer verstärkten toroidal modulierten Schwellung in einem sogenannten “Bumpy Torus” oder einer ausgeprägteren Elliptizität in einem einfachen elliptischen “ $l=2$ ” Modell eines Stellarators. Für den hier betrachteten Fall fünffacher Symmetrie wird in Abb. 6.3 jeweils eine Feldperiode dieser Konfigurationen gezeigt.

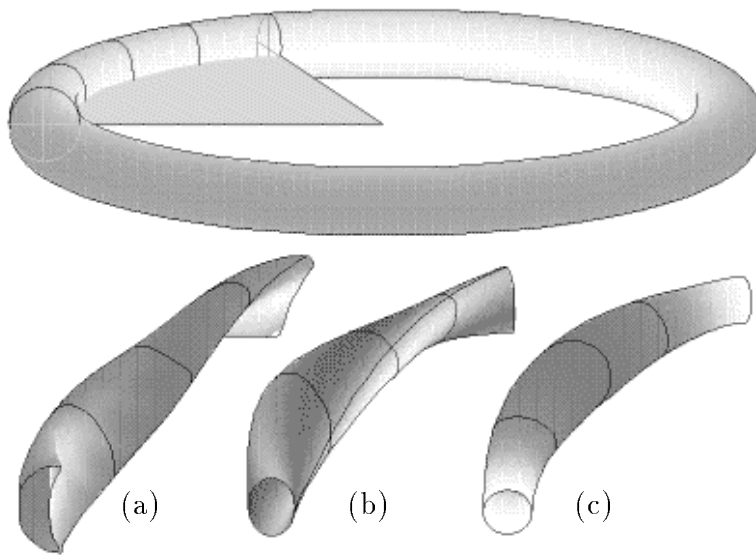


Abbildung 6.3. Ein einfacher zirkulärer Torus (oben) wird in fünf Feldperioden unterteilt. Die Geometrie von Wendelstein 7-X (a) wird dabei schrittweise durch metrische Modelle eines $l=2$ Stellarators (b) und eines “Bumpy Tokamak” (c) approximiert. Die elliptische Elongation im Fall (b) bewirkt eine variierende lokale Verscherung, und die Schwellung von (b) hat eine Modulation der Krümmung zur Folge (siehe Abb. 6.4).

Es ist dabei unerheblich, ob die beiden Übergangsmetriken tatsächliche magnetohydrodynamische Plasmagleichgewichte beschreiben können. Vielmehr wird Wert darauf gelegt, verschiedene geometrische Größen, die in die Turbulenzsimulation eingehen, getrennt und kontinuierlich variieren zu können. Dazu wird eine einfache analytische Näherung der Metrik verwendet, bei der die Abweichungen von einem zirkulären Torus durch einen kleinen Parameter ϵ beschrieben werden.

Ein “Bumpy Tokamak” wird aus einem ursprünglich symmetrischen Torus durch Modifikation des kleinen Radius $r(\varphi) = r_0 \cdot E_B = r_0 \cdot [1 + \epsilon_B \cdot \sin(N\varphi)]$ erzielt, mit der N Deformationen der Größenordnung ϵ_B entlang des toroidalen Winkels φ eingeführt werden. Mit der derart modifizierten Darstellung eines Torus in Polarkoordinaten ergeben sich aus den Ableitungen (wie in Anhang A beschrieben) direkt die metrischen

Elemente. Das Magnetfeld eines Tokamaks läßt sich schreiben als [32]

$$\mathbf{B} = I\nabla\varphi + \nabla\varphi \times \nabla\chi, \quad (6.19)$$

wobei $I \approx B_0 R_0$ und $\chi' = \iota\Psi'$ mit $\Psi = \frac{1}{2}B_0 s E_B a_0^2$ sind. Mit den Definitionen $D \equiv A_0 + E_B \sqrt{s} \cos \eta$ und $E'_B = \partial_\varphi E_B$ ergibt sich der Betrag davon zu

$$\hat{B} = \frac{1}{D} \sqrt{A_0^2 + \iota^2 s + (s \iota E'_B / D)^2 \cdot (3 - 2D + D^2)}. \quad (6.20)$$

Diese Metrik imitiert für Parameter $0 \leq \epsilon_B \leq 0.5$ einen kontinuierlichen Übergang zwischen den Krümmungen eines einfachen Tokamaks hin zu Krümmungen mit großer Ähnlichkeit zu denen eines Helias-Stellarators (Abb. 6.4). Für den Grenzfall eines zirkularen ($E_B = 1$) Tokamaks mit großem Aspektverhältnis ($A_0 \gg 1$) erhält man die übliche Näherung $\hat{B} \approx 1 - A_0^{-1} \cos \eta$.

Auf ähnliche Weise lassen sich Eigenschaften der lokalen Verscherung durch das Modell der Metrik eines $l=2$ -artigen Stellarators annähern. Eine Variation der Elliptizität mit $0 \leq \epsilon_l \leq 0.3$ erhält man analog durch

$$r(\eta, \varphi) = r_0 \cdot E_l = r_0 \cdot [1 - \epsilon_l \cdot \cos(2\eta + N\varphi)]. \quad (6.21)$$

Für alle Konfigurationen werden mit einem Aspektverhältnis von $A_0 = 10.6$ und $\iota(s = 0.95) = 1$ ähnliche Parameter wie in Wendelstein 7-X angenommen.

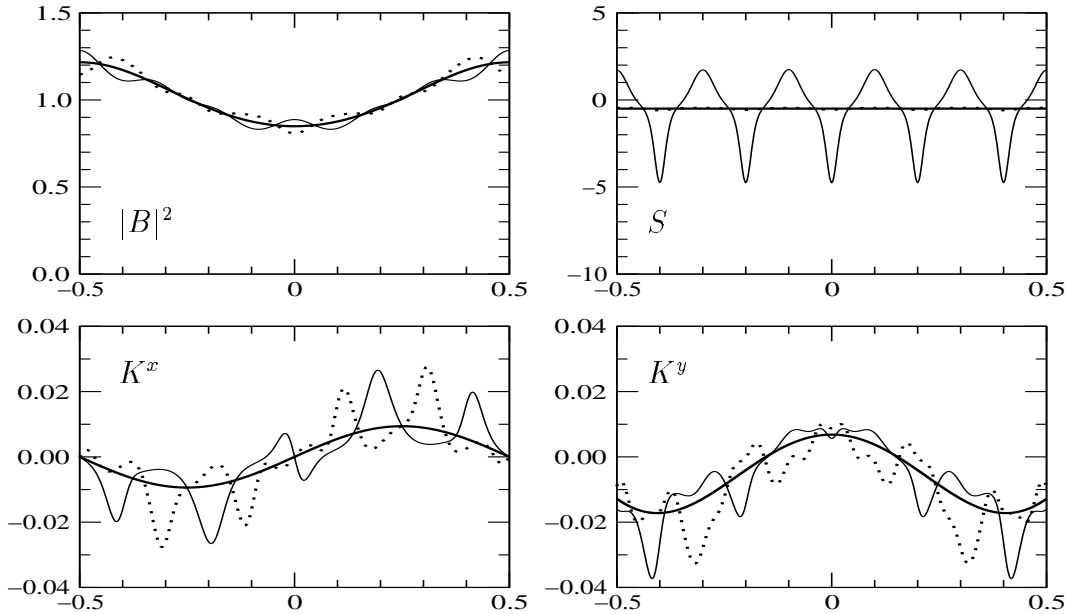


Abbildung 6.4. Modulation der geometrischen Größen für $\epsilon = 0.2$ in den Modellmetriken im Vergleich zu einem einfachen Torus (dicke Linie). Gepunktete Linie: “Bumpy Torus”. Dünne durchgezogene Linie: “ $l=2$ Stellarator”. Die Variation der Magnetfeldstärke $|B|$ ist gering, so daß triviale Abhängigkeiten daraus ausgeschlossen werden können. Die Modulation der lokalen Verscherung in der $l=2$ Metrik folgt aus der Elliptizität.

6.4 Effektive Lokalisierung der Turbulenz

Im Gegensatz zu axialsymmetrischen Anordnungen ist eine einzige Feldlinie nun nicht mehr repräsentativ für die geometrischen Variationen auf einer ganzen Flußfläche. Allerdings erlauben die speziellen Eigenschaften einer Heliaskonfiguration durch ihre fünffache toroidale Periodizität, eine Rotationstransformation nahe eins und durch die beiden Stellaratorsymmetrieebenen je Feldperiode weiterhin eine Verwendung der Flußschlauchdarstellung.

Dabei sind jeweils $N=5$ Feldlinien der Marke $\alpha = \theta - \iota\zeta = 2\pi i/N$ (mit $\alpha \in [0 \dots 2\pi]$) identisch für $i \in [0, 1, \dots, N]$. Um einen genügend repräsentativen Ausschnitt des Flußflächenbereichs $\alpha \in [0 \dots 2\pi/N]$ zu berücksichtigen, haben sich Simulationen auf vier Feldlinien darin als ausreichend erwiesen. Für die Plasmaparameter von Wendelstein 7-X ist die Driftskala ρ_s/a_0 genügend klein, daß die Variation der Metrik in poloidaler y -Richtung innerhalb der Simulationsdomäne einer Feldlinie vernachlässigt werden kann.

In Abb. 6.5 ist eine toroidale Abwicklung der Flußfläche auf einer radialen Position $s = 0.95$ in Wendelstein 7-X für lokale Verscherung S und Krümmungen κ_N und κ_G dargestellt. Für eine Rotationstransformation $\iota \equiv 1$ sind die beiden durchgezogenen Feldlinien ($\alpha = 0$ und $\alpha = 0.2 \cdot 2\pi$) in ihren geometrischen Eigenschaften identisch.

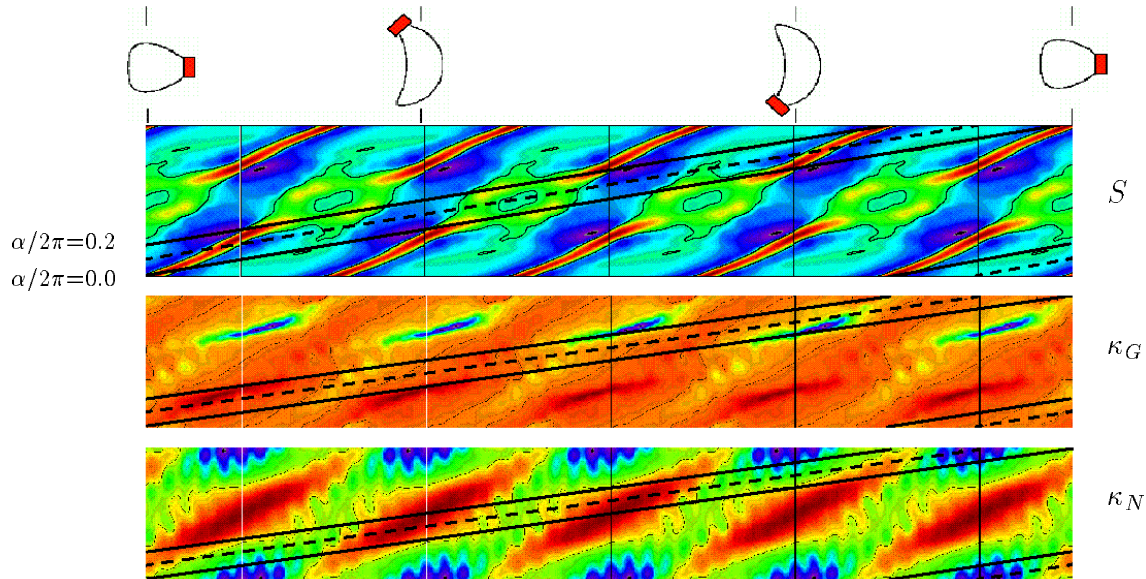


Abbildung 6.5. Abwicklung einer Flußfläche in der (ζ, θ) Ebene von Wendelstein 7-X: dargestellt sind lokale Verscherung S und Krümmungen κ_G und κ_N sowie ausgewählte poloidale Schnitte, auf denen die Durchstoßpunkte der Feldlinie $\alpha=0$ (dicke Linie) mit $\iota \equiv 1$ in Rot markiert sind. Die beiden durchgezogenen Feldlinien sind dabei in ihren geometrischen Eigenschaften identisch. Das Gebiet dazwischen (gestrichelte Linie: $\alpha/2\pi=0.1$) muß durch mehrere Simulationen abgedeckt werden. Die Farbschattierung haben zur besseren Darstellung bei den einzelnen Größen unterschiedliche Bedeutung. Für eine quantitative Darstellung in einer Feldperiode siehe dazu Abb. 4.4. (Für die Darstellung von S gilt: rot=negativ und blau=positiv. Die dünnen schwarzen Linien zeigen den Nulldurchgang.)

Im folgenden werden die Abhängigkeiten von Geometrie und Feldlinienmarke über die Auswirkungen auf den mittleren fluktuationsinduzierten Teilchentransport

$$\Gamma_n = \langle v_{E \times B}^x \cdot n \rangle_{(x,y,z)} \quad (6.22)$$

betrachtet. Der Wärmetransport ist in diesem Modell isothermer Elektronen gleich $Q_e = T_e \gamma_n$. Wie alle fluktuierenden Größen entwickelt sich $\Gamma_n(t)$ während eines numerischen Laufs hin zu einem turbulenten quasistationären Zustand, der im Beispiel von Abb. 6.6 etwa nach der Hälfte der dargestellten Rechenzeit erreicht wird. Alle im weiteren für Γ_n angegebenen Werte sind zeitgemittelt über den quasistationären Zustand und weisen eine statistische Unsicherheit $\Delta\Gamma_n/\Gamma_n \sim 10\%$ auf, wie sie aus der Abbildung hervorgeht. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf die Angabe von Fehlerbalken verzichtet.

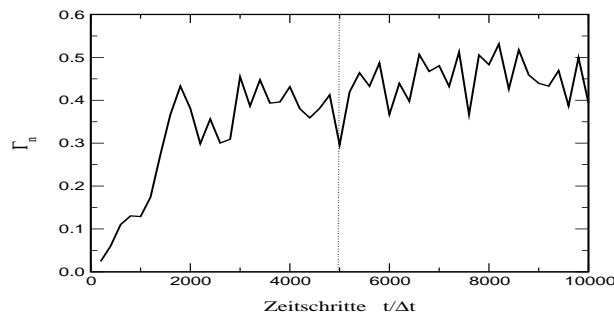


Abbildung 6.6. Zeitentwicklung von Γ_n während eines numerischen Laufs hin zu einem turbulenten quasistationären Zustand.

Im linken Teil von Abb. 6.7 ist die Abhängigkeit des Transports Γ_n von der Feldlinienmarke $\alpha/2\pi$ für Wendelstein 7-X und beide Modellmetriken (jeweils mit $\epsilon = 0.2$) gezeigt. Die Feldlinien entsprechen der Darstellung in Abb. 6.5.

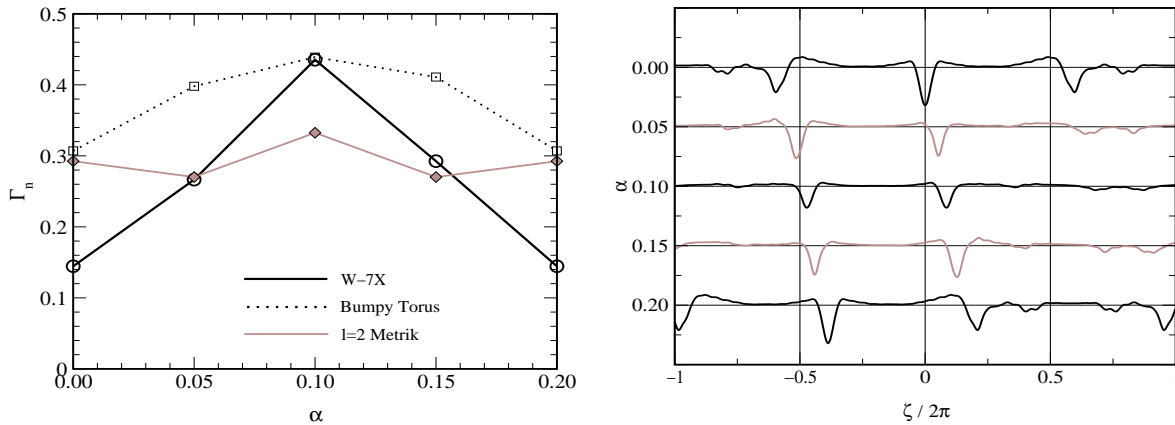


Abbildung 6.7. Links: $\Gamma_n(\alpha)$ für Wendelstein 7-X, Bumpy Torus und $l=2$ Metrik. Die signifikanten Unterschiede im turbulenten Transport zwischen benachbarten Feldlinien in W7-X lassen sich durch die jeweiligen Eigenschaften der lokalen Verscherung S verstehen (rechtes Bild). Ausgeprägte mehrmalige Maxima in $|S|$ unterdrücken den Transport im Vergleich zu Feldlinien mit geringer Variation.

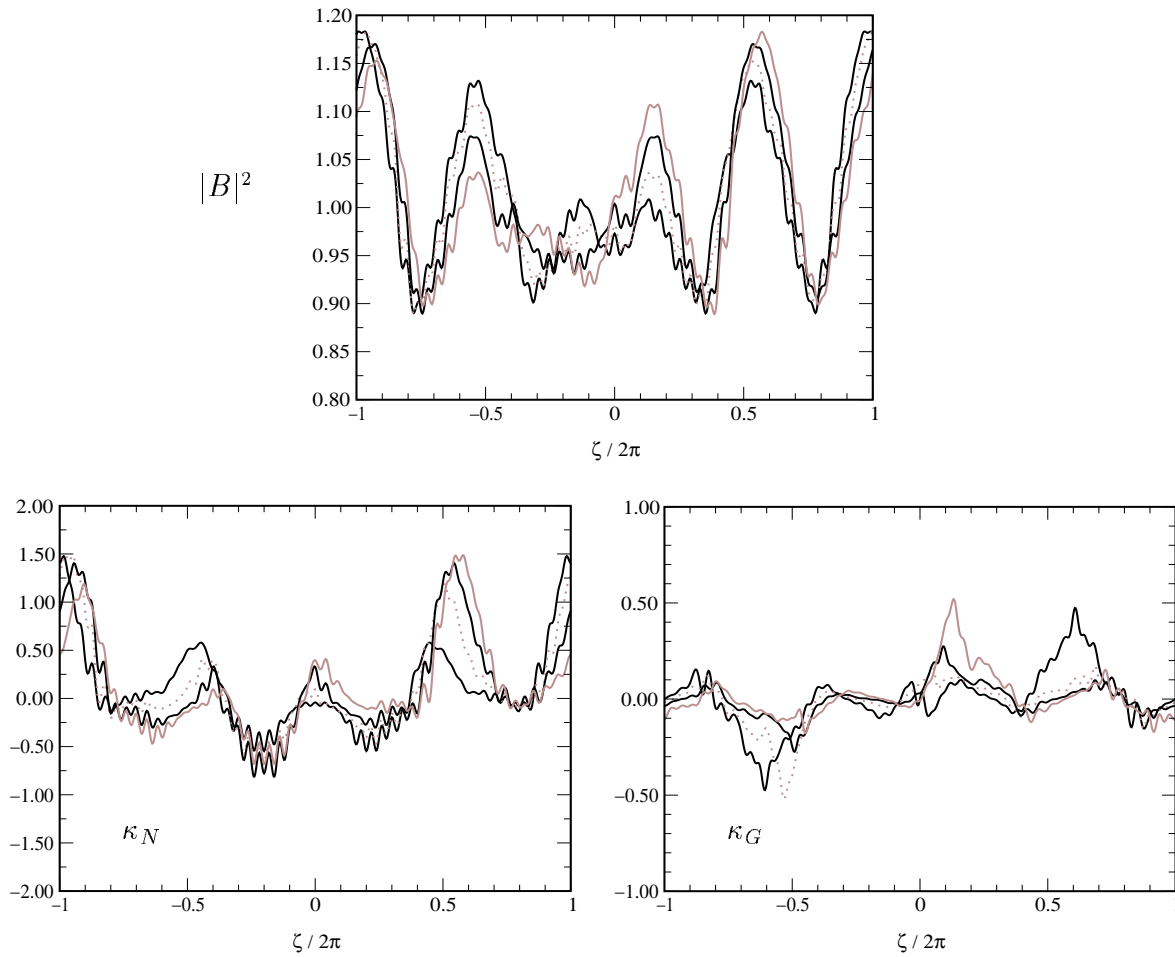


Abbildung 6.8. $|B|^2$ (oben) und die Krümmungen κ_n und κ_G in W7-X (von links) lassen keine derart deutlichen quantitativen Unterschiede zwischen den Feldlinien erkennen wie die lokale Verscherung aus Abb. 6.7. Im gegenwärtigen Driftwellenmodell mit kalten Ionen wirken die Krümmungen auch lediglich katalysierend auf die Phase zwischen Dichte und Potential und nicht direkt destabilisierend.

Es läßt sich eine signifikante Inhomogenität von Fluktuationsamplituden und Transport mit α feststellen, wobei Γ_n minimal für $\alpha = 0$ wird. Der zugrundeliegende Mechanismus wird klar, wenn man alle relevanten geometrischen Größen entlang den jeweiligen Feldlinien betrachtet. Am deutlichsten ist die Abhängigkeit von der Variation der lokalen Verscherung $S(\zeta, \alpha)$. Auf der rechten Seite von Abb. 6.7 ist die Signatur von S in Wendelstein 7-X entlang der verschiedenen in der Simulation verwendeten Feldlinien dargestellt. Die Lage einiger der Feldlinien auf der Flußfläche wird in Abb. 6.5 veranschaulicht. Man erkennt, daß S auf der Feldlinie mit niedrigstem Transport ($\alpha = 0$) dreifach deutlich ausgeprägte Maxima aufweist, wogegen die Feldlinie mit stärkster Turbulenz ($\alpha = 0.1$) lediglich zwei geringer ausgeprägte Maxima zeigt. Anhand der weiteren Größen $|B|$, \mathcal{K}^x und \mathcal{K}^y in Abb. 6.8 ist keine derart signifikante Abhängigkeit ersichtlich. Die Modellmetriken weisen sowohl in den metrischen Größen als auch im turbulenten Transport weit geringere Variation bezüglich α auf.

Es wurde somit in den Simulationen eine effektive Lokalisierung von Turbulenz aufgrund lokaler Verscherungseigenschaften gefunden. Ein derartiges Verhalten konnte bisher experimentell noch nicht beobachtet werden. Die meisten Stellaratorexperimente operieren mit festgelegten Diagnostikpositionen (für materielle Sonden oder Empfangsantennen für Mikrowellenemission), und gezielte poloidale Abtastungen auf den relevanten Skalen wurden bisher auch nicht durchgeführt.

Zum anderen ist zu betonen, daß die hier dargestellten Simulationen auf einer in der x - y Domäne lokalen Metrik beruhen. In Wendelstein 7-X ist diese Näherung gerechtfertigt, da ein typischerweise zur Berücksichtigung aller relevanten senkrechten Modenzahlen nötiges Rechengebiet von 256 ρ_s in y dort nur etwa ein Zwanzigstel des poloidalen Umfangs ausmacht ($a_0 = 0.52\text{m}$), wogegen die poloidalen Variationen sich erst nach einem Fünftel wiederholen. In W7-AS sind die Plasmamaparameter in der Randschicht nicht wesentlich verschieden, während das Experiment jedoch wesentlich kleinere Abmessungen aufweist ($a_0 = 0.20\text{m}$). Durch eine nichtlokale Metrik in den Simulationen könnten dann die Fluktuationen von Feldlinien verschiedener Geometrie aneinander koppeln, und man würde eine (zumindest teilweise) Ausmittelung in Fluktuationsamplituden und Transport erwarten. Die Einführung einer Nichtlokalität in der Metrik hat jedoch eine wesentliche Umgestaltung der Numerik des Simulationscodes zur Folge⁴ und wird zu einer deutlichen Erhöhung der Rechenzeit führen. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher zunächst weiter die lokale Metrik benutzt.

6.5 Geometrische Skalierung von Transport und Spektren

Die Übergangsmetriken lassen sich kontinuierlich im Parameter ϵ variieren, der bisher auf $\epsilon = 0.2$ festgehalten war. Eine Änderung von 0 auf 0.3 entlang der Feldlinie $\alpha = 0$ ergibt für die $l=2$ Metrik einen stetigen Rückgang des turbulenten Transports. Auch dies läßt sich auf die verstärkte lokale Verscherung durch Elliptizität zurückführen. Für den Fall des Bumpy Torus zeigt sich bei niedrigem ϵ zunächst keine Wirkung. Bei starker Verformung verkürzt die helikale Variation der Krümmung die parallele Verbindungslänge zwischen Gebieten positiver und negativer Phasenverschiebung ($n - \phi$), was den Antrieb der Driftinstabilität effektiv verringert und zu einer Reduktion der Turbulenzamplitude führt. Zur Veranschaulichung dieser Tendenz sind in Abb. 6.9 auch die Werte für einen einfachen Torus und Wendelstein 7-X eingetragen.

Durch die periodischen Randbedingungen in y -Richtung lassen sich berechnete energieartige Größen durch Fourierzerlegung in Form von k_y -Spektren darstellen. Ein Vergleich der Spektren $E_n(k_y)$ aus den über das Simulationsgebiet gemittelten Dichtefluktuationen $E_n = (1/2)\langle n^2 \rangle$ zeigt in Abb. 6.10 (rechts) trotz der oben beobachteten starken Unterschiede in Fluktuationsamplituden und Transport eine ausgeprägte Ähnlichkeit zwischen den verschiedenen Geometrien. Die Form des Magnetfelds geht schließlich auch direkt weder in die wesentlichen Quellen (in erster Linie $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ Konvektion über dem treibenden Dichtegradienten) noch in die Senken (hauptsächlich resistive Dissipation auf kleinen Skalen) des Energiespektrums ein [106].

Dies läßt sich als Bestätigung der Vermutung empirischer Ähnlichkeit in unterschiedlichen experimentellen Anordnungen interpretieren, wie sie von Pedrosa *et al.* [94],

⁴ B. Scott, persönliche Mitteilung.

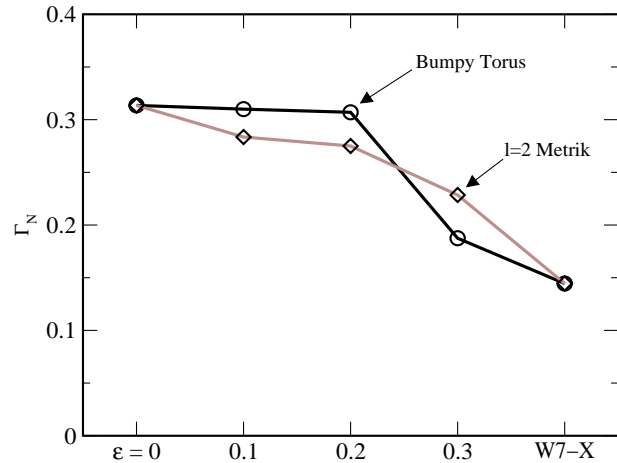


Abbildung 6.9. Skalierung des turbulenten Transports durch Variation der Magnetfeldgeometrie.

in deren Fall für Frequenzspektren, aufgestellt wurde. Dort zeigen Frequenzspektren (welche experimentell wesentlich leichter zugänglich sind als Wellenzahlspektren) nach Einführung eines gerätespezifischen und frequenzabhängigen, dort λ genannten Skalierungsfaktors einen vergleichbaren Grad an Ähnlichkeit (Abb. 6.10).

Aus den in diesem Kapitel gezeigten Simulationen kann gefolgert werden, daß jener Skalierungsfaktor unabhängig von der Geometrie der betrachteten Experimente ist. Als andere Ursachen für die beobachtete Variation von λ kommen somit eher experimentabhängige Plasmaparameter und Unterschiede in der poloidalen Plasmarotation und Profilen der Geschwindigkeitsverschönerung in Betracht. Diese sind in unseren Simulationen bisher nicht berücksichtigt.

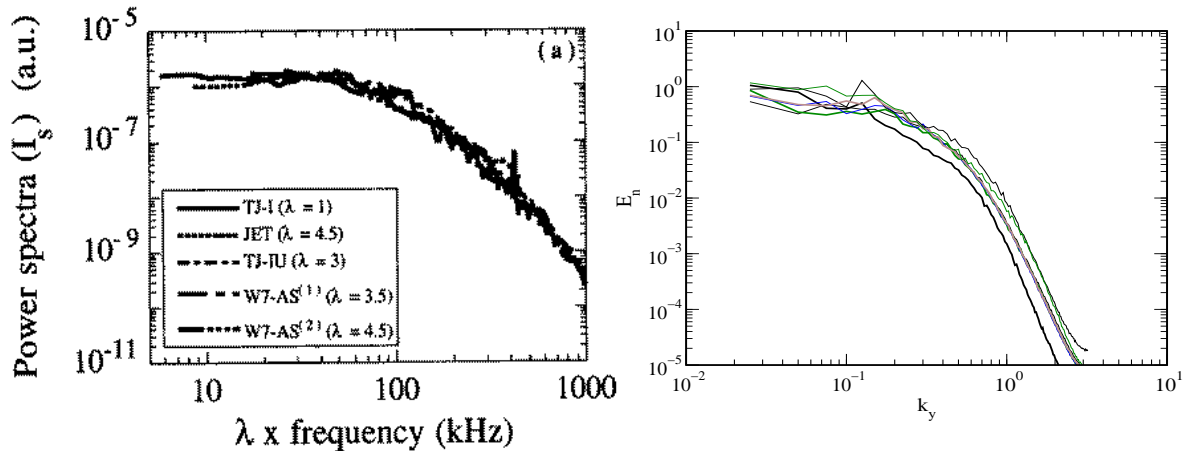


Abbildung 6.10. Links: Frequenzspektren des Ionensättigungsstrom $I_s(\omega)$ aus Sondenmessungen in der Randschicht verschiedener Fusionsexperimente. Die Frequenz ist mit einem konfigurationsabhängigen Faktor λ skaliert (aus Ref. [94]). Rechts: Aus den Geometrievariationen in der Simulation erhaltene Wellenzahlspektren $E_n(k_y)$ zeigen bereits ohne zusätzliche Skalierung einen hohen Grad an Ähnlichkeit.

6.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel konnte mittels direkter numerischer Simulation turbulenter Drift-Alfvénwellen in der Geometrie eines tatsächlichen Stellarators gezeigt werden, daß die lokale Metrik einen bedeutenden Einfluß auf Turbulenzamplitude und anomalen Transport hat. Andererseits weisen die Fluktuationsspektren keine relevanten Unterschiede auf, was eine experimentell gefundene empirische Ähnlichkeit der Spektren zu bestätigen scheint. Der lokalen Verscherung konnte eine wichtige Rolle in der Unterdrückung von Turbulenz und zu einer effektiven Lokalisierung der Fluktuationen auf einer Flußfläche nachgewiesen werden.

Aus den Einflüssen der lokalen Metrik ergeben sich zwei bedeutende Konsequenzen: Für die Tokamaktheorie zeigen die Resultate auf, daß auch dort die Einbeziehung der exakten Metrik ein wichtiger Bestandteil ist, besonders wenn die lokale Verscherung an einem sogenannten “X-Punkt” der Separatrix (um die letzte geschlossene Flußfläche) groß wird oder eine kleine, aber endliche Modulation des Magnetfelds durch die Spulen (“Ripple”) die Axialsymmetrie der Metrik bricht. Für Stellaratoren läßt sich damit auch auf die prinzipielle Möglichkeit zu einer turbulenzreduzierenden Optimierung alleine durch geeignete Formung der äußeren Feldgeometrie schließen. Dieser Aspekt wird in Kapitel 8 weiter ausgeführt. Im folgenden Kapitel 7 werden die Einschränkungen des hier behandelten Flußschlauchmodells und ein möglicher Vergleich der Simulationen mit experimentellen Messungen diskutiert.

Kapitel 7

Interpretation experimenteller Befunde

Die Möglichkeiten eines direkten Vergleichs der numerischen Simulation in Stellaratorgeometrie mit experimentellen Messungen werden aufgezeigt. Durch den Einbau geeigneter numerischer Diagnostiken werden in einer reduzierten Geometrie von Wendelstein 7-AS Frequenzspektren und Korrelationsfunktionen von Dichtefluktuationen berechnet. Einflüsse rationaler Flächen durch die Wahl der numerischen Randbedingungen und durch die Bildung magnetischer Inseln werden diskutiert und die Grenzen des verwendeten Flußschlauchmodells bezüglich beliebiger Geometrien und mögliche Erweiterungen erörtert.

Die Ansätze experimenteller und theoretischer Untersuchungen zur Turbulenz in Fusionsplasmen beginnen von verschiedenen Seiten. Die Theorie bemüht sich um ein Verständnis grundlegender Prozesse der Plasmadynamik möglichst aus einer Beschreibung durch erste Prinzipien. Die Modelle werden dafür auf eine geringe Anzahl der wichtigsten Freiheitsgrade und Parameter reduziert und schrittweise erweitert. Über die Modelle des letzten Kapitels hinausgehend werden etwa besonders in der Abschältschicht außerhalb der letzten geschlossenen Flußfläche auch nichtlokale Simulationen benötigt, bei denen sich die Hintergrundgradienten aus den Fluktuationen konsistent einstellen und beide auf gleicher Basis behandelt werden. In der Plasmarandschicht und der Abschältschicht können zudem atomphysikalische Prozesse wie Strahlung und Ionisation von Verunreinigungen in die Instabilitätsmechanismen und den Aufbau radialer elektrischer Felder eingehen [55, 37].

Das Experiment bemüht sich um die Charakterisierung raumzeitlicher Strukturen fluktuierender Größen und deren Parameterabhängigkeiten, welche wiederum in die relative Bewertung der unterschiedlichen theoretischen Modellvorstellungen einfließen. Die Verwendung meist materieller Sonden erlaubt damit Messungen jedoch nur am Plasmarand. Aus Interpretation von mit Sondenmessungen ermittelte lokale Dichte- und Potentialfluktuationen und deren Phasenbeziehungen vermögen den globalen Energieeinfluß bereits gut zu erklären [14]. Erste direkte Vergleiche zweidimensionaler elektrostatischer Simulationen mit Sondenmessungen an Wendelstein 7-AS durch J. Bleuel ergaben ebenfalls gute Übereinstimmung [13]. Dies motiviert eine zukünftigen Verwendung auch der 3D Simulationen zum experimentellen Vergleich. Die Möglichkeiten dazu und Einschränkungen aus dem Flußschlauchmodell werden im folgenden diskutiert.

7.1 Simulationen für Wendelstein 7-AS

Das im letzten Kapitel angewandte Flußschlauchmodell zur Simulation von Plasmaturbulenz ist ein praktikabler Kompromiß zwischen der Notwendigkeit, einen möglichst großen räumlichen Ausschnitt aus dem gesamten toroidalen Plasma in die Simulation mit einzubeziehen, und den Beschränkungen aus der endlichen zur Verfügung stehenden Rechenkapazität. Letztendlich wird das Ziel sein, globale Rechnungen über den gesamten poloidalen und toroidalen Plasmaquerschnitt durchzuführen. Nur dann lassen sich auch im nichtlinearen Regime möglicherweise fortbestehende globale Moden und verscherte poloidale Plasmarotation konsistent einbeziehen. Für ITG-Turbulenz in einem Tokamak existieren derartige globale Berechnungen bereits, allerdings auf Kosten geringer räumlicher Auflösung (z.B. Ref. [92]).

Beim Flußschlauchmodell dagegen wird leichter eine realistische Auflösung erreicht, da die Rechendomäne entlang des Magnetfelds angeordnet ist und die parallele Dynamik wesentlich weniger Gitterpunkte erfordert als in der senkrechten Ebene, in welcher an der Dynamik eine hohe Anzahl von Fouriermoden beteiligt ist. Wenn die Rotationstransformation ι jedoch im allgemeinen Fall nicht rational ist, wird sich der Flußschlauch nicht schliessen. Die in dieser Arbeit verwendeten Codes lösen das Problem, indem sie in einer lokalen Näherung den Flußschlauch zentral um eine rationale Feldlinie legen und die Verformung der senkrechte Domäne durch die Verscherung mit einer entsprechenden Scherungstransformation korrigieren. Im Tokamak ist dies auch bei einem hohen rationalen Verhältnis $\iota = m/n$ (m, n ganze Zahlen) unproblematisch, da die geometrischen Hintergrundgrößen immer nur vom poloidalen Winkel θ abhängen, egal nach wievielen toroidalen Umläufen sich die Feldlinie schließt.

Bei einem Stellarator sind zur Berechnung von Driftwellenturbulenz jedoch auch die helikalen Variationen der Geometrie von großer Bedeutung, wie sich in den vorangegangenen Kapiteln dieser Arbeit gezeigt hat. Die Variationen der Hintergrundgrößen entlang der Feldlinie, und damit die Anzahl der nötigen parallelen Gitterpunkte, skalieren mit der Anzahl der toroidalen Umläufe und den Feldperioden N_f . Im letzten Kapitel wurde zur Simulation der Randschichtturbulenz in Wendelstein 7-X verwendet, daß in dieser speziellen Konfiguration die Rotationstransformation am Plasmarand, $\iota(a_0) = 0.98 \approx 1$ nahezu eins ist. Das benötigte parallele Gitter war daher nur um einen Faktor $N_f = 5$ feiner als für einen Tokamak. Bei beliebiger Rotationstransformation kann die Anzahl der Gitterpunkte ganz offensichtlich rasch divergieren.

Der Übergang vom effektiv eindimensionalen Flußschlauch zu einem Hohlzylinder, der radial lokal einen ähnlichen Bereich ($\Delta x \sim 64\rho_s$) abdeckt, jedoch als y - z Domäne die gesamte Flußfläche aufweist, verspricht eine mögliche Lösung. Für typische Randschichtparameter von Wendelstein 7-X sind etwa $n_y = (2\pi/r_*) \approx 6000$ Gitterpunkte in y nötig, also das 24fache verglichen zum derzeitigen Flußschlauch. Die physikalischen Randbedingungen erlauben somit eine Annäherung einer beliebigen an eine rationale Rotationstransformation mit einer Genauigkeit im Promillebereich. Allerdings steigt in einem Hohlzylinder die benötigte Rechenzeit nicht nur mit der Auflösung, es wird vielmehr noch dazu eine numerisch aufwendigere nichtlokale Behandlung der Metrik nötig. Der resultierende Rechenbedarf scheint mit derzeitigen Kapazitäten (noch) nicht vertretbar.

Eine andere Möglichkeit, beliebige Werte der Rotationstransformation zuzulassen, besteht darin, die parallele Simulationsdomäne nach einer vorher festgelegten Länge abzuschneiden, bei der die Fluktuationen nicht mehr oder nur noch wenig korreliert sind. Die Festlegung einer solchen Korrelationslänge *ad hoc*, wie es für Simulationen in Tokamakgeometrie auch gängig ist, kann jedoch im allgemeinen *a priori* nur schwer motiviert werden. Andererseits steht die mögliche Einführung unphysikalischer Randbedingungen und die Auswirkungen auf die zugelassenen parallelen Wellenzahlen bei einer möglichen Überlappung von x - y -Domänen nach mehreren toroidalen Umläufen bei nichtrationalem ι in Kritik [108].

Wenn im folgenden gezeigt wird, wie experimentell zugängliche Größen im Stellarator Wendelstein 7-AS simuliert werden können, wird daher zunächst auf eine reduzierte Geometrie zurückgegriffen. Die Rotationstransformation am Plasmarand von W7-AS ist variabel zwischen $\iota \approx 1/4$ und $\iota \approx 1/2$. Es ließe sich also ein günstiger Wert $\iota \equiv 1/2$ wählen, und im Vergleich zu Kapitel 6 wäre eine lediglich verdoppelte Anzahl Gitterpunkte nötig. Allerdings ist bei W7-AS im Vergleich zu W7-X die Magnetfeldvariation durch die 45 Feldspulen gegenüber dem helikalen Rippel nicht mehr vernachlässigbar und die zur deren Wiedergabe nötige Auflösung ungleich höher. Daher werden beide Effekte gemeinsam ausgemittelt und, wie in Abb. 7.1 gezeigt, auf $n_z = 16$ parallele Stützstellen reduziert.¹

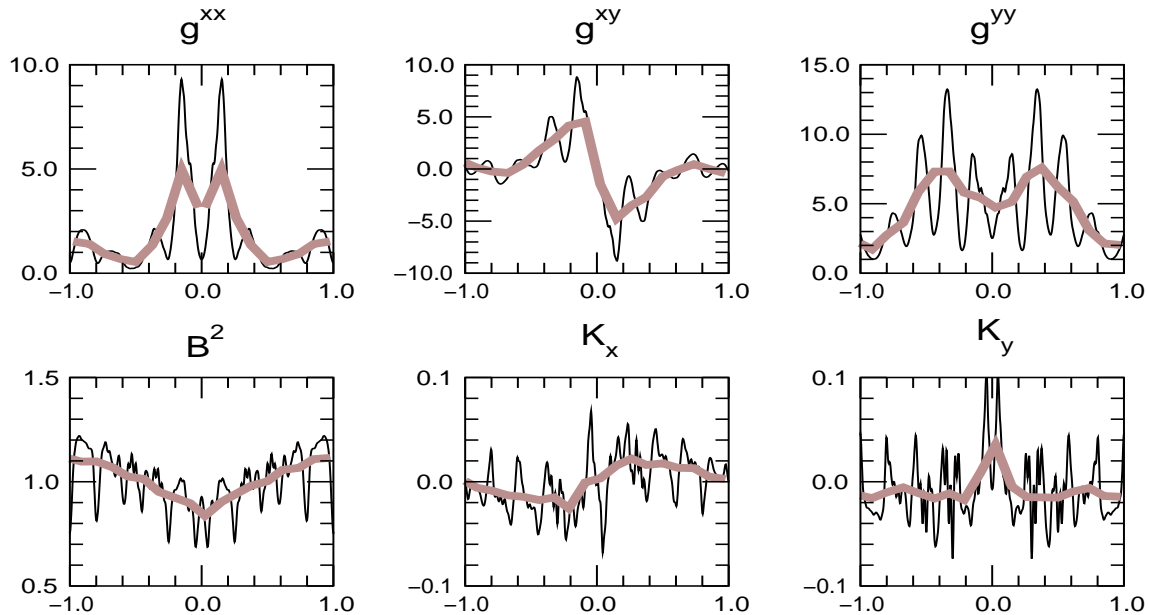


Abbildung 7.1. Näherung der stark variierenden Metrik von W7-AS auf $n_z = 16$ Gitterpunkte.

¹ Bereits begonnene nachfolgende Arbeiten, die die in der vorliegenden Dissertation erarbeiteten Methoden als Grundlagen zum direkten Vergleich mit durchzuführenden Fluktuationsmessungen benutzen, werden eine entsprechend hohe Auflösung zu verwenden haben. Die Ergebnisse der nächsten Abschnitte lassen sich jedoch ohne Beschränkung darauf übertragen.

7.2 Korrelationslängen von Fluktuationen

Experimentelle Untersuchungen von Plasmaturbulenz [34, 20] haben meist die Verwendung materieller Langmuir-Sonden zur Messung des Sondenpotentials [13], Spektroskopie der Lichtemission eines Lithiumstrahls zur Messung von Dichtefluktuationen [131] oder Mikrowellenemission zur Messung von Temperaturfluktuationen [52, 47] als Grundlage. Die zeitliche Auflösung ist dabei ausreichend, um niederfrequente Fluktuationen im Megahertzbereich abzubilden. Der räumlich durch Sondengrößen und Abstände zugängliche Bereich erlaubt jedoch nur die Ermittlung weniger Wellenzahlen. Zu einem Vergleich der Theorie mit dem Experiment sind daher Größen von Interesse, die sich aus den Zeitreihen alleine ergeben, wie Frequenzspektren oder Korrelationen. Ein erster, von J. Bleuel [13] durchgeführter Vergleich von Sondenmessungen im Stellarator W7-AS mit elektrostatischen lokalen, zweidimensionalen numerischen Simulationen in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld hatte dazu bereits gute Übereinstimmungen geliefert.

Um den Einfluß der Stellaratorgeometrie auf Randschichtturbulenz experimentell zu untersuchen, werden derzeit auch vergleichende Messungen paralleler Korrelationen zwischen entfernten Messpunkten auf einer Feldlinie jeweils im Tokamak JET und Stellarator W7-AS durchgeführt [37, 119]. Die dazu nötige zukünftige theoretischen Beschreibung dieser Messungen ist mit einem 2D Modell nicht mehr ausreichend und wird erst mit dem dreidimensionalen Flußschlauchansatz aus der vorliegenden Arbeit zur Einbeziehung der Stellaratorgeometrie ermöglicht.

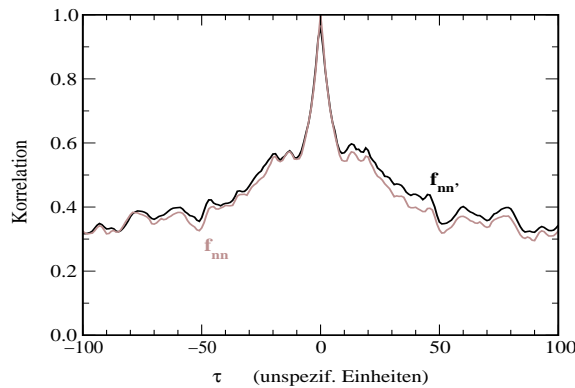


Abbildung 7.2. Autokorrelationsfunktion f_{nn} von (mit den Methoden aus Kapitel 6) numerisch berechneten Dichtefluktuationen in W7-AS und parallele Korrelation $f_{nn'}$ der Dichte nach einem toroidalen Umlauf der Feldlinie.

In einer Simulation mit dem 3D-Flußschlauchmodell aus Kapitel 6 lassen sich mit hoher Auflösung auch Zeitreihen von in der stationären Phase fluktuierenden Größen, etwa $n(t)$ oder $\Phi(t)$, lokal auf ausgewählten Gitterpunkten protokollieren. Damit können nun Frequenzspektren oder Korrelationsfunktionen auch mit Fluktuationen auf anderen räumlich verschiedenen Gitterpunkten ermittelt werden. Der Aufwand an Rechenzeit, um im quasistationären turbulenten Zustand (vergleiche Abb. 6.6) aus Fouriertransformation auch die niederfrequenten Teile des Frequenzspektrums adäquat zu ermitteln, ist im Vergleich zu den Simulationen von Kapitel 6 ungleich (etwa um einen

Faktor 5) höher. Eine Korrelationsfunktion f zwischen zwei Zeitreihen $g(t)$ und $h(t)$ ist definiert als

$$f_{gh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)h(t + \tau)dt.$$

In Abb. 7.2 ist dies für die simulierte Autokorrelationsfunktion f_{nn} der Dichte an einem Diagnostikpunkt und für eine parallele Korrelation zwischen Dichtefluktuationen nach einem toroidalen (und halben poloidalen) Umlauf der Feldlinie dargestellt. Die Größen sind normiert auf $\hat{f}_{gh} = f_{gh}/\sqrt{f_{gg}f_{hh}}$.

7.3 Resonante Flächen und magnetische Inseln

In Abschnitt 7.1 wurden die Schwierigkeiten der Simulation entlang nicht-niedrig rationaler Flußflächen (d.h. $m, n \gg 1$) im Flußschlauchmodell diskutiert. Andererseits führen gerade niedrig rationale Flächen (z.B. mit $\iota = m/n = 1/1, 1/2, 1/3, 5/6\dots$) durch die Brechung der axialen Symmetrie im Stellarator generisch bereits beim Vakuumfeld zur Bildung magnetischer Inselstrukturen durch Rekonnektion von Feldlinien. Unter Abschnitt 8.2 wird diese Inselbildung veranschaulicht und die Auswirkungen dadurch ergodisierter Driftflächen im Zusammenspiel mit vorgegebenen elektrostatischen Fluktuationen durch Driftwellen auf den Einzelteilchentransport untersucht.

Es läßt sich umgekehrt aber auch vermuten, daß die Anwesenheit magnetischer Inseln eine Rückwirkung auf Driftwellen und deren Instabilität selbst haben kann. In numerische Simulationen zur Plasmaturbulenz wurden Inseln jedoch bisher noch nie einbezogen. Ein Problem dabei ist die Divergenz der Metrik an den X-Punkten der Inselketten.

In erster Linie läßt sich natürlich eine Auswirkung auf die Mikroturbulenz durch die Zulassung von instabileren $k_{\parallel} \approx 0$ Moden in den O-Punkten der Inseln gegenüber benachbarten nichtresonanten Flächen erwarten. Nach den Erkenntnissen der letzten Kapitel über die geometrischen Effekte der Flußflächenform kann man jedoch auch annehmen, daß die durch Inselbildung auf geschlossene Flächen eingeprägte Verformung ebenfalls einen Einfluß haben wird. In Abb. 7.3 ist gezeigt wie die charakteristischen 10/11 Inseln auch die darunterliegenden ungestörten Flächen in W7-AS verformen.

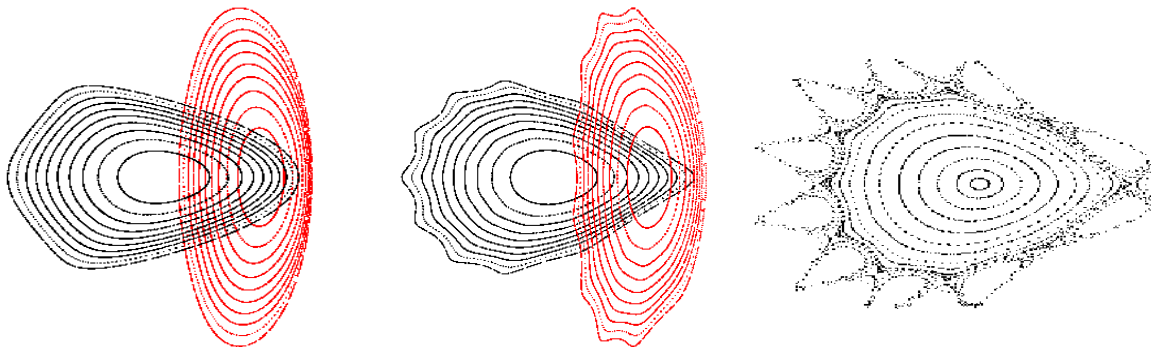


Abbildung 7.3. Links: Ungestörte Flußflächen von W7-AS. Mitte: Bei einer Rotationstransformation $\iota(a_0) = 1/2$ am Plasmarand verformen sich durch Bildung von Inseln auch die darunterliegenden geschlossenen Flußflächen. Die Inseln sind hier aufgrund der verwendeten Fourierdarstellung (Anhang A) nicht gezeigt. Rechts: Ein entsprechender Poincaré-Plot zeigt auch die Struktur der Inseln selbst.

Diese Verformung bewirkt eine starke lokale Variation der Metrik. In Abb. 7.4 ist die lokale Verscherung auf einer Flußfläche in W7-AS räumlich dargestellt, und besonders in der Dreiecksebene ist eine starke Erhöhung durch die Inselstruktur zu erkennen. Es läßt sich daher auch ein merkbarer Einfluß dieser Variation der Verscherung auf die Driftwellenturbulenz erwarten. Durch die rasche poloidale Variation ist zu einer numerischen Untersuchung jedoch die Behandlung einer nichtlokalen Metrik in y -Richtung (und damit eine Umgestaltung des Codes) nötig, was über den Rahmen dieser Arbeit hinausgeht. Dies sollte ein Gegenstand zukünftiger Untersuchungen sein, der sich aus dieser Arbeit ergeben hat.

Über den Einfluß unterschiedlicher Inselstrukturen (d.h. Anzahl und Amplitude) durch eine Variation der Rotationstransformation $\iota(a_0)$ am Plasmarand bei W7-AS über die lokale Verscherung auf den turbulenten Transport kann daher vorerst nur spekuliert werden. Experimentell wurde ein starker Zusammenhang der im Plasma gespeicherten diamagnetischen Energie mit $\iota(a_0)$ gefunden [19]. Das ruhige “high confinement” H-Moden Regime [120] verbesserten Einschlusses wird in wenigen Fenstern der Rotationstransformation (z.B. $0.5 < \iota(a_0) < 0.53$) erreicht [58]. Auch besteht ein möglicher Zusammenhang dieser bei einem Stellarator beobachteten Transportbarriere am Plasmarand mit den internen Transportbarrieren (ITB) in avancierten Tokamakszenarien [110]. Bei letzteren kommt es um ein Maximum der Rotationstransformation zur Ausbildung von Inseln, wobei eine wesentliche Reduzierung des Transports beobachtet wird. Ob die induzierte lokale Magnetfeldverscherung hier jeweils gegenüber Änderungen in der poloidalen Geschwindigkeitsverscherung mehr als nur eine untergeordnete Rolle spielen könnte, müssen zukünftige Untersuchungen zeigen.

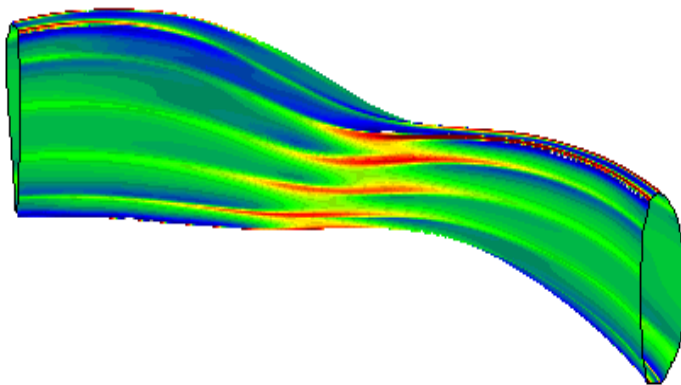


Abbildung 7.4. Räumliche Darstellung der lokalen Verscherung in einer Periode von W7-AS ($\iota(a_0) = 1/2$) auf einer der letzten geschlossenen Flußflächen: Die Struktur durch darüberliegende magnetische Inseln führt zu einer starken Variation der lokalen Verscherung. Extrema sind qualitativ in blau und rot dargestellt, Gebiete niedriger Verscherung sind grün. (Vergleiche Abb. 6.5)

7.4 Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, daß der Flußschlauchformalismus für Geometrien mit beliebiger Rotationstransformation nur eingeschränkt verwendbar ist und Erweiterungen der numerischen Behandlung gefunden werden müssen. Die speziellen Eigenschaften der Helias-Stellaratoren mit einer niedrigrationalen Rotationstransformation am Plasmarand erlaubten aber nicht nur, wie in Kapitel 6 ausgeführt, eine Untersuchung der geometrischen Einflüsse auf die Driftwellenturbulenz: Es wurde weiterführend gezeigt, wie sich laufende Experimente zu Fluktuationmessungen auch für eine reduzierte Geometrie von W7-AS durch Simulationen begleiten lassen. Eine Komplikation solcher Rechnungen ist die Inselbildung am Plasmarand. Zur räumlichen Auflösung von deren Verformungen der Geometrie geschlossener Flußflächen oder gar zur Einbeziehung der Inselstruktur selbst wird eine Umgestaltung des numerischen Codes nötig. Die experimentellen Befunde zur Abhängigkeit des Plasmaeinschlusses von der Randrotationstransformation in W7-AS motivieren jedoch zukünftige Untersuchungen in dieser Hinsicht.

Kapitel 8

Anomaler Transport

Driftwellen und durch deren Instabilität induzierte Turbulenz sind ein wahrscheinlicher Kandidat zur Erklärung des “anomalen” Transports in Fusionsplasmen. In diesem Kapitel werden die bisher in einem Stellarator betrachteten Driftwellenmodelle auf die Auswirkungen bezüglich des radialen Transports untersucht. Es wird diskutiert, inwiefern sich die gefundenen Geometrieabhängigkeiten der Instabilität zu einer turbulenzreduzierenden Optimierung eines Stellarators nutzen lassen könnten.

Kleinskalige Fluktuationen niedriger Frequenz werden generell für die gegenüber Einzelteilchenstoßprozessen erhöhten radialen Transportverluste in Fusionsplasmen verantwortlich gemacht. Experimentelle Hinweise deuten auf Driftwellen als Verursacher der zugrundeliegenden Instabilitäten [81, 116, 62]. Bereits aus den vereinfachten linearen Modellen der Kapitel 4 und 5 lassen sich Transportkoeffizienten in der Mischungswegnäherung abschätzen, in der die radiale Ausdehnung einer Mode als effektive Schrittlänge in einen diffusiven Transportprozess eingeht. Eine alternative Möglichkeit ist es, die Einzelteilchenbewegung eines Ions in gestörten elektrischen und magnetischen Feldern zu verfolgen. Dazu können sowohl aus der linearen als auch aus nichtlinearer Theorie gewonnene Frequenzspektren als Störung eingesetzt werden. Dieser Ansatz läßt sich mit einem Modell zum Aufbrechen von Flußflächen und diffusiven Transport von Feldlinien verknüpfen [61, 12]. In Abschnitt 8.2 wird ein neueres derartiges Modell durch Integration von Teilchentrajektorien über flußerhaltenden Abbildungen erstmals auf Stellaratorgeometrie und dort berechnete Spektren angewandt.

Eine selbstkonsistente Beschreibung des turbulenten Transports liefert die direkte numerische Simulation, wie sie in den letzten beiden Kapiteln beschrieben wurde. In Abschnitt 8.3 wird ausblickend erläutert, welche bisher vernachlässigten physikalischen Zutaten noch wesentlich erscheinen, um konkrete quantitative Vorhersagen zum Transport und Einschluß in Stellaratorplasmen zu erlauben.

Als abschließender Ausblick wird zuletzt diskutiert, wie sich die Erfahrungen aus dieser Arbeit nutzen lassen können, um durch geeignete Formung der Flußflächengeometrie eine denkbare Reduzierung turbulenten Transports zu bewirken. Ein Stellarator bietet im Prinzip die Möglichkeit zu einer derartigen Optimierung.

8.1 Lineares Bild: Mischungsweg-Näherung

Betrachtet man einen $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ Wirbel als Hauptbestandteil von Fluktuationen, so entsteht im einfachen Driftwellenbild durch die Phasenverschiebung zwischen Dichte- und Potentialstörung ein über das Magnetfeld den Druckgradienten hinab gerichteter konvektiver Transport. Dies wird in Abb. 3.2 veranschaulicht: Eine Potentialstörung alleine bewirkt bereits eine Rotation der Konvektionszelle.

Kommt ein Dichte- bzw. Druckgradient in negativer x -Richtung hinzu, so wird sich bereits bei Abwesenheit einer Phasenverschiebung $\delta_{\mathbf{k}}$ zwischen Dichte und Potential die gesamte Struktur in y -Richtung fortbewegen. Eine adiabatische Elektronendynamik koppelt die beiden Größen, und es gibt keinen Nettotransport über Flächen von konstantem x . Dies wird deutlich aus den Definitionen eines Teilchen- und Wärmeflusses einer Teilchensorte s über eine Fläche A [62]:

$$\Gamma_s = \frac{1}{A} \int_A n_s \mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \cdot d\mathbf{f}, \quad (8.1)$$

$$Q_s = \frac{3}{2A} \int_A n_s T_s \mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \cdot d\mathbf{f}. \quad (8.2)$$

Erst eine Phasenverschiebung $(\tilde{n}_e - \Phi)$ in Gleichung (3.12) bewirkt einen effektiven Transport $\Gamma_s = B^{-1} \int n_s(\Phi) \partial_y \Phi dy dz$.

Eine Berechnung des anomale Diffusionskoeffizienten aus der linearen Theorie kann lediglich eine grobe Mischungswegabschätzung sein. Dies ermöglicht jedoch bereits eine erste Abschätzung der Größenordnung der Diffusion aus

$$D \approx \gamma \Delta_r^2. \quad (8.3)$$

Der Mischungsweg beschreibt die mittlere freie Weglänge für die Vermischung von Fluidelementen im turbulenten Feld. Dabei wird angenommen, daß die begrenzte typische Lebensdauer einer Störung der radialen Ausdehnung Δ_r im Bereich der linearen Anwachsrate γ liegt. Zusammen mit einem Dichtegradienten ergibt sich daraus ein effektiver Teilchenfluß $\Gamma \sim -D \cdot \nabla_r n$.

Durch die Ballooningnäherung [123, 33]

$$k_{\parallel} = S \cdot \Delta_r \cdot k_{\perp}$$

erhält man unter der Annahme $k_{\perp} \sim 1/\rho_s$ und $k_{\parallel} \sim 1/\Delta_{\zeta}$ dann

$$\Delta_r = \rho_s / (S \Delta_{\zeta}). \quad (8.4)$$

Darin ist S die (lokale) Verscherung und Δ_{ζ} die parallele Modenausdehnung, wie sie etwa in Kapitel 4.6 berechnet wurde:

$$\Delta_{\zeta}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta |\Phi|^2 \zeta^2}{\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta |\Phi|^2}. \quad (8.5)$$

In Abb. 4.9 ist die parallele Modenausdehnung in Abhängigkeit vom Radius in Wendelstein 7-AS aufgetragen. Zusammen mit den DTEM-Anwachsraten aus der gleichen Abbildung läßt sich somit eine Diffusionsrate von etwa $D \approx 0.7 \text{ m}^2/\text{s}$ ableiten. Dieser Wert liegt, trotz der zu seiner Ableitung stark vereinfachenden Annahmen, in der experimentell bestimmten Größenordnung.

8.2 Teilchenbild: Aufbrechen von Driftflächen

Die Driftflächen von umlaufenden Teilchen im Plasma können von den magnetischen Flächen um die Größenordnung eines Gyroradius abweichen. Aber auch dann kann die Bahn der Teilchenbewegung in einem axialsymmetrischen System mit einem statischen Magnetfeld aufgrund der Erhaltung des kanonischen Impulses noch integrabel sein, und die Teilchen verbleiben auf den Driftflächen [63]. Ist diese Integrabilität nicht mehr erfüllt, können sich Teilchenflüsse quer zum Magnetfeld ergeben: Ursachen dafür sind Einzelteilchenstöße (klassische Diffusion), fluktuierende elektrische Felder (Driftwellen) und auch Störungen des magnetischen Feldes selbst. Im folgenden sollen jedoch nicht zeitlich variierende $\tilde{\mathbf{B}}$ (etwa durch Alfvénwellen) interessieren, deren direkte Auswirkung auf den anomalen Transport auch bei reaktorüblichen Werten des Plasma-Betas noch gering ist und sich nur indirekt katalysierend in der parallelen Dynamik von Drift-Alfvénwellen bemerkbar macht. Vielmehr werden generische statische Störungen des Gleichgewichtsfeldes selbst, wie sie von der Abweichung zur Axialsymmetrie in einem Stellarator rühren, und deren Wechselwirkung mit Driftwellen betrachtet.

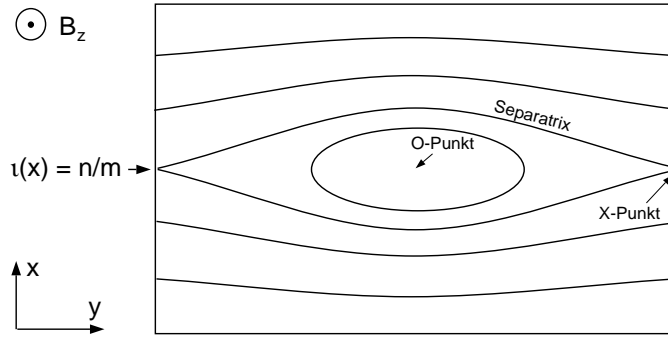


Abbildung 8.1. Ursprünglich ungestörte Flussflächen formen durch Rekonnektion an resonanten Flächen magnetische Inseln. Wie in den letzten Kapiteln steht hier x für die Flussflächenkoordinate Ψ und y für die poloidale Koordinate θ .

Dazu wird das Magnetfeld in der Form $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ beschrieben und eine Feldlinie als $\mathbf{x}(\tau)$, wobei τ ein (beliebiger) Parameter zur Festlegung der Position darauf sei. Es zeigt sich, daß die Gleichung zur Beschreibung dieser Feldlinie aus einem Variationsprinzip

$$\delta \int \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} d\tau = 0 \quad (8.6)$$

abgeleitet werden kann. Die Euler-Lagrange-Gleichungen hierzu ergeben

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \times \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = 0. \quad (8.7)$$

Das heißt, $\mathbf{x}(\tau)$ erfüllt tatsächlich die Feldlinienbedingung $(d\mathbf{x}/d\tau) \times \mathbf{B} = 0$. Die formale Verbindung zur Hamiltonschen Mechanik wird deutlich, wenn das Vektorpotential in der Form $\mathbf{A} = \Psi \nabla \theta - \chi \nabla \zeta$ unter Benutzung von Flußkoordinaten (siehe Anhang A) geschrieben und das Variationsprinzip in der entsprechenden Form identifiziert wird:

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \Psi d\theta - \chi d\zeta \quad \Leftrightarrow \quad p dq - H dt \quad (8.8)$$

Damit lassen sich (θ, Ψ) als kanonische Variablen ansehen, die einen Phasenraum für den Feldlinienfluß beschreiben [61]. Ein Bruch der toroidalen Symmetrie führt zu einer Abhängigkeit $\chi = \chi(\Psi, \theta)$, mit der sich die Hamiltonschen Gleichungen im üblichen Sinne verwenden lassen:

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{\partial\chi}{\partial\Psi}, \quad \frac{d\Psi}{d\zeta} = -\frac{\partial\chi}{\partial\theta}. \quad (8.9)$$

In Feldlinienkoordinaten gilt $\partial\chi/\partial\Psi = \iota$. Diese Gleichungen beschreiben die Versetzung der Feldlinie nach einem toroidalen Umlauf durch die Rotationstransformation ι . Die Differentialgleichung (8.9) für Hamiltonsche Systeme läßt sich nach Integration über eine Umlaufperiode als Differenzgleichung durch eine sogenannte kanonische Abbildung beschreiben [80]. Eine derartige Abbildung von Feldlinien ist flußerhaltend. Zu einer detaillierteren Beschreibung von Abbildungen sei auf Anhang D verwiesen.

Das Hinzufügen einer kleinen Störung $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \epsilon\mathbf{A}_1$ zum Gleichgewichtspotential \mathbf{A}_0 bewirkt eine veränderte Hamiltonfunktion χ . Unter Annahme von Periodizität läßt sich diese schreiben als

$$\chi = \chi_0(\Psi) + \sum_{m,n} \tilde{\chi}_{m,n} e^{i(m\theta - n\zeta)}, \quad (8.10)$$

oder durch eine einfache Helizität ausgedrückt auch als $\chi = \chi_0(\Psi) + \tilde{\chi}_{m,n} \cos(m\theta - n\zeta)$. Eine resonante Störung zu einer Flußfläche mit rationaler Rotationstransformation $\iota = n/m$ verändert die Topologie der Feldlinien, und es kommt zur Ausbildung einer magnetischen Insel. Dies ist in Abb. 8.1 veranschaulicht.

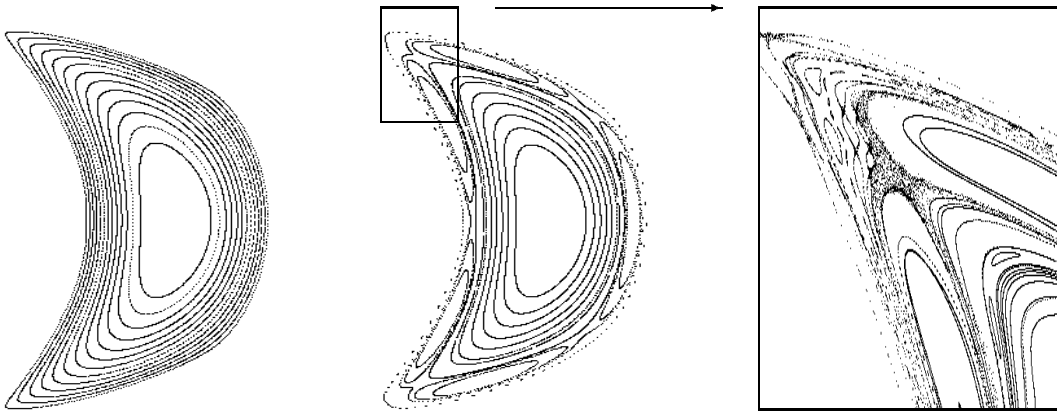


Abbildung 8.2. Charakteristische 5/5 Inseln am Plasmarand von Wendelstein 7-X. Links: ungestörte Flußflächen. Vergrößerung rechts: Ergodisierung an der Separatrix durch Überlagerung einer kleinen 5/6 Störung.

Beinhaltet die Störung mehrere Fourierkomponenten oder läßt eine starke Verscherung die Größe der magnetischen Insel mit den radialen Abständen zweier niedriger rationalen Flächen vergleichbar werden, so können sich die Inseln überlappen, und es entstehen ergodische Gebiete nahe der ehemaligen Separatrix. Die schnelle Diffusion der Feldlinien durch dieses Gebiet bewirkt einen erhöhten Transport von an die Feldlinien gebundenen Teilchen. Im Stellarator ist die Axialsymmetrie gebrochen und die durch helikale Periodizität aufgeprägte Störung unvermeidbar. Im Helias-Konzept wird versucht, durch geringe Verscherung niedrigrationale Flächen zu vermeiden. Eine

Rotationstransformation von $\iota \approx 1$ am Plasmarand führt zum Auftreten der charakteristischen 5/5 Inseln. Für die Darstellung in Abb. 8.2 wurde die Feldlinientopologie eines zunächst als ungestört angenommenes Gleichgewicht von Wendelstein 7-X (links) mit einer 5/5 Störung der Amplitude $\tilde{\chi}_1 = 0.05\chi_0$ über die aus (8.9) abgeleitete Abbildung bestimmt. Der Ausschnitt rechts zeigt ein ergodisiertes Gebiet zwischen zwei Inseln.

Eine Hamiltonsche Form wie in Gl. (8.9) läßt sich nicht nur für Feldlinien, sondern analog auch für die Gyrozentrumsbewegung von Teilchen formulieren. Geschlossene Driftflächen werden durch elektrische und magnetische Störfelder aufgebrochen und erfahren eine verstärkte Diffusion. Im folgenden wird eine von Wobig und Pfirsch [127] formulierte Theorie zur Verfolgung von zirkulierenden Driftbahnen unter dem Einfluß zeitabhängiger elektromagnetischer Felder durch Abbildungsmethoden erstmals auf die Geometrie eines Stellarators mit einer Störung durch darin zuvor bestimmte Driftwellenspektren angewandt. Die Abbildungsgleichungen werden ausführlich in Ref. [127] hergeleitet. Im wesentlichen wird dabei aus der Einteilchen-Lagrangefunktion im Plasma [82, 23] eine neue Hamiltonfunktion $K = K(E, t, \Psi, \theta, \zeta)$ definiert, die nun zusätzlich von der Teilchenenergie E und der konjugierten Zeit t abhängt.

Daraus ergeben sich Abbildungsgleichungen für eine konstante Magnetfeldstörung und zeitabhängige elektrostatische Potentialstörung [127]:

$$\Psi_0 = \Psi_1 + \partial_{\theta_0} S_1, \quad (8.11)$$

$$\theta_1 = \theta_0 + \iota(\Psi_1, E_1) + \partial_{\Psi_1} S_1, \quad (8.12)$$

$$E_0 = E_1 + \partial_{t_0} S_1, \quad (8.13)$$

$$t_1 = t_0 + T(\Psi_1, E_1) + \partial_{E_1} S_1. \quad (8.14)$$

Der gestörte Teil der erzeugenden Funktion ist $S_1 = \int \int (\partial K_1 / \partial \theta) d\zeta d\theta$ mit dem entsprechenden gestörten Anteil der Hamiltonfunktion [127]

$$K_1 = \frac{B_{\zeta,0}}{B_0 \sqrt{\frac{2}{m}(E - \mu_B B_0 - q\Phi_0)}} \cdot (\mu_B \delta B + q\delta\Phi). \quad (8.15)$$

Die verallgemeinerten ‘‘Frequenzen’’ sind gegeben durch $\iota(\Psi, E) = \partial K_0 / \partial \Psi$ für die Rotationstransformation der Teilchenbahnen und $T(\Psi, E) = \partial K_0 / \partial E$ für die toroidale Transitzeit. Die fluktuierenden elektromagnetischen Felder δB und $\delta\Phi$ werden beispielsweise durch Driftwellen beschrieben.

Im weiteren wird eine auf die Nomenklatur der bisherigen Kapitel normierte Form der Abbildungsgleichungen aufgestellt. Dazu werden Energien auf die thermische Energie E_T und Längenskalen auf den kleinen Plasmaradius a_0 normiert: $\hat{E} = E/E_T$, $\hat{\Phi} = q\Phi/E_T$ und $\mathbf{B} = B_\zeta \nabla \zeta = a_0^{-1} B_\zeta \hat{\nabla} \zeta$. Weiter sind $\hat{B}_\zeta = B_\zeta/B_0$ und $\Lambda = \mu_B B_0/E_T$. Der Gyroradius ist $\rho_s = \sqrt{m E_T}/qB_0$ mit $r_* = \rho_s/a_0$. Die Hamiltonfunktion ist normiert zu

$$\hat{K}_1 = \frac{K_1}{q\Psi(a_0)} = \frac{K_1}{qB_0 a_0^2/2} = \frac{\hat{B}_{\zeta,0}}{\sqrt{\hat{E} - \hat{\Phi}_0 - \Lambda}} \cdot r_* [\Lambda \delta \hat{B} + \delta \hat{\Phi}]. \quad (8.16)$$

Die Variationen in $\hat{K}_1 = \hat{K}_{11} + \hat{K}_{12}$ werden durch Fourierreihen ausgedrückt,

$$\hat{K}_{11} = \sum_{\mu\nu} \hat{K}_{\mu\nu}^{11}(E_1, \Psi_1) \quad \text{und} \quad \hat{K}_{12} = \sum_{lmn} \hat{K}_{lmn}^{12}(E_1, \Psi_1), \quad (8.17)$$

und man erhält somit [127]:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{11} &= \text{Re} \sum_{\mu\nu} \hat{K}_{\lambda\mu}^{11}(E_1, \Psi_1) \cdot i\mu \cdot \exp[i\mu\theta_0] \frac{(1 - \exp[-i\nu + i\mu])}{-i\nu + i\mu} \\ &= \sum_{\lambda\mu} \hat{K}_{\mu\nu}^{11}(E_1, \Psi_1) \cdot \frac{\mu}{\beta} \cdot [\cos(\alpha) - \cos(\alpha + \beta)]\end{aligned}\quad (8.18)$$

$$\begin{aligned}\hat{S}_{12} &= \text{Re} \sum_{lmn} \hat{K}_{lmn}^{12}(E_1, p\Psi_1) \cdot im \cdot \exp[i\mu\theta_0 + il\omega t_0] \frac{(1 - \exp[-in + im\iota + il\omega T])}{-in + im\iota + il\omega T} \\ &= \sum_{lmn} \hat{K}_{lmn}^{12}(E_1, p\Psi_1) \cdot \frac{m}{b} \cdot [\cos(a) - \cos(a + b)].\end{aligned}\quad (8.19)$$

Hierin wurden abgekürzt $a = (m\theta_0 + l\omega t_0)$, $b = (-n + m\iota + l\omega T)$, $\alpha = (\mu\theta_0)$ und $\beta = (-\nu + \iota\mu)$. Die Modenkoeffizienten lassen sich schreiben als

$$\hat{K}_{\lambda\mu}^{11}(E_1, \Psi_1) = \hat{B}_{\zeta,0} \frac{\Lambda}{\sqrt{\hat{E} - \hat{\Phi}_0(\Psi) - \Lambda}} \cdot f_1(\Psi), \quad (8.20)$$

$$\hat{K}_{lmn}^{12}(E_1, \Psi_1) = \frac{\hat{B}_{\zeta,0}}{\sqrt{\hat{E} - \hat{\Phi}_0(\Psi) - \Lambda}} \cdot f_2(\Psi). \quad (8.21)$$

Darin sind die Modenzahlen μ und ν für die magnetische Störung (für die auch eine Zeitabhängigkeit, $\lambda = 0$, vernachlässigt wurde) gewöhnlich unterschiedlich zu m und n für den elektrostatischen Anteil K^{12} . Die Summe über l kann durch eine endliche Reihe diskreter Werte für ω_l ersetzt werden.

Die Funktionen $f(\Psi) = f(\Psi(s))$ beschreiben die Amplitude der Fluktuationen in Relation zum Hintergrund mit einer möglichen radialen Abhängigkeit s . So wurde etwa in Ref. [1] ein radiales Abklingen magnetischer Störungen mit wachsender Modenzahl nach $f_1 \sim s^{|\mu|-1}$ angenommen. f_2 kann die radiale Struktur einer Driftmode widerspiegeln. Die Ableitungen von S_1 erhält man nach Festlegung von $\Phi(\Psi)$ und aus

$$\begin{aligned}\iota &= \partial_{\Psi_1} K_0 = \iota_0(\Psi_1) + \partial_{\Psi_1} \left(\hat{B}_{\zeta,0} \sqrt{\hat{E} - \hat{\Phi}_0 - \Lambda} \right) = \\ &= \iota_0(\Psi_1) + \frac{\hat{B}_{\zeta,0}}{\sqrt{\hat{E} - \hat{\Phi}_0 - \Lambda}} \hat{\partial}_{\Psi_1} \hat{\Phi}_0, \quad \text{und}\end{aligned}\quad (8.22)$$

$$\hat{T} = \hat{\partial}_{E_1} \hat{K}_0 = \frac{\hat{B}_{\zeta,0}}{\sqrt{\hat{E} - \hat{\Phi}_0 - \Lambda}}. \quad (8.23)$$

Aus der Normierung für T folgt $\hat{\omega} = \omega a_0 / c_s$. Eine typische Frequenz von Driftwellen ist die diamagnetische Frequenz der Elektronen $\hat{\omega}_* = (k_{\perp} \rho_s)(a_0 / L_n)$, worin $k_{\perp} \rho_s \leq 1$ und $L_n = |\partial_x \ln n|^{-1} \approx (0.005 \dots 0.5) a_0$. Andere dimensionslose Parameter haben Größenordnungen von $\hat{B}_{\zeta,0} \approx 1$, $r_* f_1 = 0.01$, $r_* f_2 = 0.1$, $E = 0.1 \dots 10$, $\Lambda = 0.1$.

Die in den Abbildungsgleichungen benötigten Ableitungsfunktionen lassen sich damit explizit schreiben:

$$\partial_{\theta_0} S_1 = \sum_{\mu\nu} K_{\mu\nu}^{11} \frac{\mu^2}{\beta} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha)] + \sum_{mnl} K_{mnl}^{12} \frac{m^2}{b} [\sin(a + b) - \sin(a)] \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\Psi_1} S_1 &= \sum_{\mu\nu} K_{\mu\nu}^{11} \frac{\mu^2}{\beta} [\cos(\alpha) - \cos(\alpha + \beta)] \cdot \left[\partial_{\Psi_1} \ln f_1 + \frac{\partial_{\Psi_1} \hat{\Phi}_0}{2(\hat{E} - \hat{\Phi}_0 - \Lambda)} \right] \\ &+ \sum_{mnl} K_{mnl}^{12} \frac{m}{b} [\cos(a) - \cos(a + b)] \cdot \left[\partial_{\Psi_1} \ln f_2 + \frac{\partial_{\Psi_1} \hat{\Phi}_0}{2(\hat{E} - \hat{\Phi}_0 - \Lambda)} \right], \end{aligned} \quad (8.25)$$

$$\partial_{t_0} S_1 = \sum_{mnl} K_{mnl}^{12} \frac{ml\omega}{b} [\sin(a + b) - \sin(a)], \quad (8.26)$$

$$\begin{aligned} \partial_{E_1} S_1 &= \sum_{\mu\nu} K_{\mu\nu}^{11} \frac{\mu}{\beta} [\cos(\alpha) - \cos(\alpha + \beta)] \cdot (1/2) (-\hat{E} + \hat{\Phi}_0 + \Lambda)^{-1} \\ &+ \sum_{mnl} K_{mnl}^{12} \frac{m}{b} [\cos(a) - \cos(a + b)] (1/2) (-\hat{E} + \hat{\Phi}_0 + \Lambda)^{-1}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

In erster Näherung lassen sich $\Phi_0 = 0$ und $f = \text{konstant}$ festlegen. Dann sind $\partial_{\Psi_1} S_1 = 0$ und $\iota = \iota_0(\Psi_1)$, womit sich die Darstellung stark vereinfacht. Ist zudem $m = 0$, so entkoppeln Gleichungen (8.13) und (8.14) vom Rest, und man erhält die bekannte Chirikov-Taylor Standardabbildung [80] zurück mit stochastischen Lagen, die durch unzerstörte KAM-Flächen [80] getrennt sind (siehe Anhang D). Sind alle drei Freiheitsgrade in diesem System angeregt und die Gleichungen nicht entkoppelt, so eröffnen sich vielfältige Möglichkeiten für Resonanzen, und KAM-Flächen existieren im allgemeinen nicht mehr [80]. Ein neues Phänomen hierbei ist die Arnold-Diffusion [68], zu welcher die ursprünglichen Testteilchenexkursionen innerhalb von getrennten resonanten Schichten (bei zwei Freiheitsgraden) durch netzartig verwobene stochastische Strukturen im Phasenraum erweitert werden. Die Diffusionsrate hängt dabei vom Startpunkt im (Ψ_0, E_0) Raum ab. Wenn im folgenden die driftwelleninduzierte Diffusion in diesem System bestimmt wird, wird dazu der Startpunkt (Ψ_0, θ_0, t_0) festgehalten und nur eine Variation in der Anfangsbedingung zur Teilchenenergie E_0 vorgenommen.

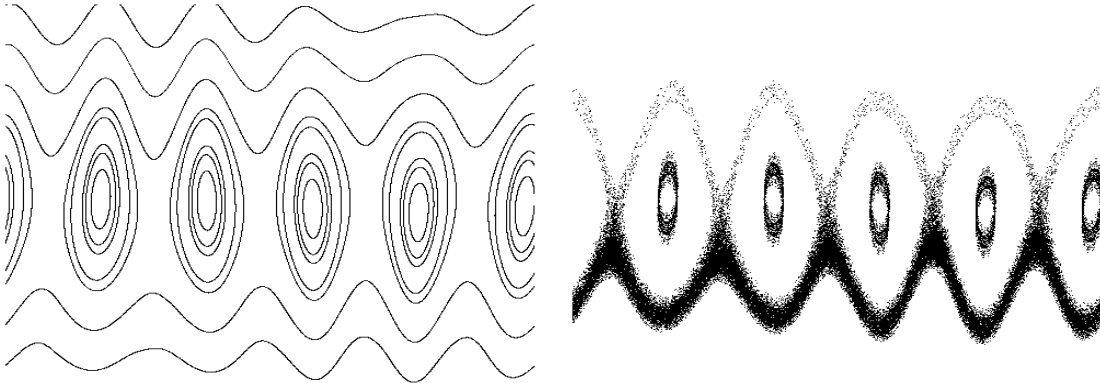


Abbildung 8.3. Links: Die Berechnung der durch die Magnetfeldstruktur gestörten Driftflächen ergibt ohne zusätzliche zeitabhängige Störungen noch intakte KAM-Flächen und Inseln. **Rechts:** Die stochastische Bewegung in drei Freiheitsgraden durch elektrostatische Driftwellenfluktuationen zerstört diese Strukturen und führt zu einer Diffusion von am unteren Bildrand gestarteten Testteilchen über die Inseln hinweg.

Ein numerischer Diffusionskoeffizient kann definiert werden aus

$$D = \frac{\langle \Delta x \rangle^2}{2\Delta t} = D_B \cdot \frac{1}{4r_*} \sum_{N \rightarrow \infty} \frac{(\Psi_1 - \Psi_0)^2}{\Psi_0 N} \quad (8.28)$$

für N Iterationen der Abbildung. In der oben eingeführten Skalierung von Frequenzen auf c_s/a_0 und Längen auf a_0 entspricht die daraus folgende Normierung $\hat{D} = D/D_B$ einem Bezug auf die Bohm-Diffusion $D_B = \rho_s c_s$. Zur Auswertung werden aus den linearen Rechnungen in Kapitel 4 ermittelte Resultate für Wendelstein 7-X gewählt. Dann ist für die instabilste Driftmode $m = n = 50$ und $l\hat{\omega} = 0.65$ mit einer angenommenen Amplitude von $r_* f_2 = 0.05$. Als statische magnetische Störung wird eine Überlagerung der 5/5 und 5/6 Resonanzen mit Amplituden von $r_* f_1 = 0.1$ gewählt. Daraus läßt sich ein energieabhängiger Diffusionskoeffizient \hat{D} ermitteln, der in Abb. 8.4(a) für $E_0 = 1$ über $N = 1.2 \cdot 10^4$ Iterationen aufgetragen ist. Es zeigt sich, daß \hat{D} orts- und damit auch zeitabhängig ist und somit kein gutes Vergleichsmaß für Parametervariationen darstellt. Als den anomalen Transport charakterisierende Größe wird hier daher eine ‐Einschlußzeit‐ $\tau_{DW} = T_0 \cdot N_+$ gewählt, die beschreibt, nach wievielen Iterationen N_+ das Teilchen erstmals den Radius $s = 1$ überschreitet und dem Plasma verloren geht. Sie ist als Funktion der anfänglichen Teilchenenergie E_0 für einen radialen Startpunkt $\Psi_0 = 0.25$ in Abb. 8.4(b) aufgetragen. Die Anzahl der Iterationen ist dazu multipliziert mit der Umlaufzeit $T_0 \sim 1/\sqrt{E_0}$. Die Einschlußzeit superthermischer Teilchen ($E_0 > 1$) ist dabei bedeutend höher als diejenige thermalisierter Teilchen. Ein derartiges Verhalten erweist sich als günstig für die Abfuhr erkalteter Heliumasche, während gleichzeitig heiße α -Teilchen aus den Fusionsreaktionen ihre Energie effektiver im Plasma deponieren können.

Die Methode, Einzelteilchentrajektorien zu verfolgen, kann zwar wie gezeigt eine Energieabhängigkeit des Transports darstellen. Allerdings lassen sich weder quantitative Vorhersagen treffen, noch ist das Verfahren selbstkonsistent: Die Rückwirkung der Teilchenbahnen auf die elektrischen Felder ist nicht enthalten. Zwar ließen sich die obigen Rechnungen erweitern durch Verwendung nichtlinear simulierter Potentialspektren anstelle der einen instabilsten linearen Modenfrequenz. Der (energiegemittelte) Transport läßt sich jedoch aus diesen Simulationen bereits konsistent direkt erhalten.

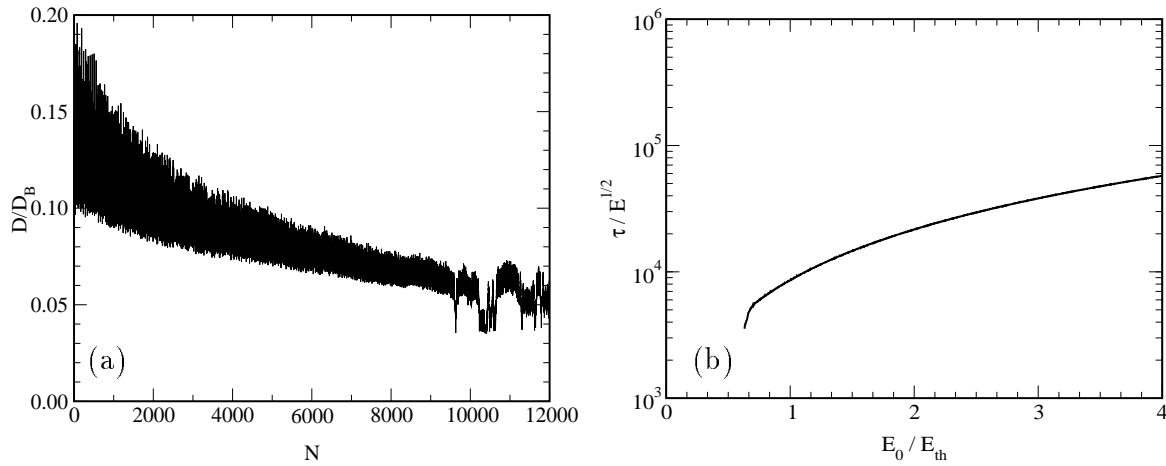


Abbildung 8.4. Links: Arnold-Diffusionskoeffizient $D(N)$ für driftwelleninduzierten Transport über magnetische Inseln in Wendelstein 7-X nach N Iterationen. **Rechts:** Energieabhängigkeit der ‐Teilcheneinschlußzeit‐ $\tau_{DW}(E_0)$.

8.3 Flüssigkeitsbild: konvektiver turbulenter Transport

In den Fluidsimulationen wird der Transport über eine Fläche $x=\text{konstant}$ direkt aus den berechneten Fluktuationen der Dichte und des Potentials mit der radialen Komponente der $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ Geschwindigkeitswirbel erhalten. Der mittlere Teilchenfluß ist

$$\Gamma_n = \langle v_{E \times B}^x \cdot n \rangle. \quad (8.29)$$

Der Vergleich von Teilchen- und Wärmeflüssen aus Tokamak-Turbulenzsimulationen mit experimentellen Werten zeigt, daß die Rechnungen bereits die richtige Größenordnung wiedergeben können [42]. Um jedoch quantitativ Transportkoeffizienten oder Einschlußskalierungen vorherzusagen, sind die Simulationen bisher meist noch zu vereinfacht auf Teilaspekte konzentriert. Es wird nötig, neben der genauen Geometrie in der Gyrofluidbehandlung auch in geeigneter Weise Effekte gefangener Teilchen [4], Nichtlokalität in Gradienten [48] und poloidale Geschwindigkeitsverscherung [21] zu berücksichtigen. Weiter sind derzeit noch bestehende Diskrepanzen (bis zu einem Faktor zwei in der Wärmediffusivität) zwischen gyrokinetischen und gyrofluiden Simulationen auszuräumen [42]. Ungeklärt ist auch noch ein möglicher Beitrag des Elektronen-Temperaturgradienten (ETG) und Fluktuationen auf der Größenordnung des Gyroradius der Elektronen zum Transport [66].

8.4 Turbulenzreduzierende Optimierung von Stellaratoren

Ein wohlbekannter Zugang zur Analyse der magnetohydrodynamischen Stabilität eines Plasmas erfolgt über das Energieprinzip. Aus einer quadratischen Form lassen sich dabei bereits Aussagen zur Destabilisierung, etwa durch ungünstige Krümmung, und geeigneter geometrischer Optimierung zu deren Reduzierung in einem Stellarator treffen [126].

Aus linearen Driftwellengleichungen wie Gl. (4.11) läßt sich dagegen im allgemeinen aufgrund der Nichthermitizität des Operators (4.12) keine quadratische Form konstruieren. Für den speziellen Fall eines einfachen stoßfreien Modells der radialen Driftwellengleichung konnte Antonsen [2] durch den Trick einer Erweiterung der reellen radialen Koordinate in die komplexe Ebene und Drehung der Integrationsachse ein solches quadratisches Stabilitätskriterium aufstellen. Der Ansatz wurde von Chen *et al.* [24] auf dissipative Driftwellen erweitert, wobei gezeigt wurde, daß diese in verscherten zweidimensionalen Anordnungen linear stabil sind. In der Formulierung als Eigenwertproblem entlang der Feldlinie, um toroidale und helikale Variationen in allgemeiner Geometrie darstellen zu können, ist der Trick der komplexen Erweiterung nicht anwendbar.

Des weiteren wäre die Anwendung eines derartigen linearen Stabilitätskriteriums auf Transportvorhersagen anzweifelbar, da es durch die nichtlineare Charakteristik der Driftwellenturbulenz selbst bei linearer Stabilität aller Eigenmoden zur Ausbildung nichtlinearer selbsterhaltender Turbulenz und somit zu verstärktem Transport kommen kann [103]. Einfache analytische Kriterien zur Stabilisierung von Driftwellen in dreidimensionaler Geometrie lassen sich also nicht angeben. Aus diesem Grund wurde der Zugang über vergleichende numerische Studien gewählt.

In der linearen elektrostatischen Theorie für kalte Ionen (Kapitel 4) wurde dabei gefunden, daß die Instabilität selbst für ähnliche magnetische Konfigurationen durch

lokale geometrische Unterschiede beeinflusst wird. Die geometrischen Größen g^{ss} , \hat{B} , κ_N , κ_G und Λ treten in der mathematischen Formulierung wie in Gleichung (4.16) gekoppelt auf, und deren Effekte lassen sich nicht konsistent trennen. Sowohl der Vergleich von Anwachsraten unterschiedlicher Konfigurationen über deren lokale geometrische Eigenschaften entlang einer Feldlinie, als auch die getrennte Variation von lokaler Krümmung und Verscherung konnten auf eine dominierende Rolle der lokalen Verscherung zur Stabilisierung schließen lassen. Im Falle von DTEM Driftmoden unter Einbeziehung gefangener Elektronen ergibt sich ein günstiger Effekt durch die neoklassische Optimierungsweise, die Spiegelgebiete möglichst in Gebieten niedriger Krümmung zu lokalisieren.

Die Untersuchung der elektromagnetischen gyrokinetischen ITG-Instabilität bei endlichem Beta zeigte in Kapitel 5 deutlich einen für diese Moden relevanten Einfluß der Krümmungseigenschaften. Sowohl die Lokalisierung der Eigenmoden entlang des Magnetfelds als auch die Variation der Anwachsraten mit der Feldlinienmarke ergaben einen eindeutigen, auch quantitativen Zusammenhang mit der lokal ungünstigen Normalkrümmung. Auch die Skalierung mit steigendem Beta durch die Verschiebung des Gleichgewichts mit wachsendem Plasmadruck hin zu $\langle \hat{\kappa}_N \rangle_\zeta > 0$ im Feldlinienmittel tendierte im selben Sinne. Die lokale Verscherung taucht bei ITG-Moden lediglich in Zusammenhang mit der geodätischen Krümmung $\hat{\kappa}_G$ in Gl. (5.10) auf, welche für Helias-Konfigurationen minimiert ist. Diese Destabilisierung durch Krümmung ist auch aus der Untersuchung der idealen MHD-Ballooninstabilität bekannt. Hier wie dort tritt die Normalkrümmung als Produkt $\hat{\kappa}_N/g^{ss}$ mit dem Abstand benachbarter Flußflächen auf. Eine magnetohydrodynamische Optimierungsstrategie, die magnetischen Flächen in Gebieten ungünstiger Krümmung durch Vergrößerung von g^{ss} zu komprimieren [126], wirkt sich auch bei ITG-Moden stabilisierend aus.

Die nichtlineare Simulation von Randschichtturbulenz in Stellaratoren wurde in Kapitel 6 in erster Linie mit einem Modell für kalte Ionen durchgeführt. Die treibende freie Energie ergibt sich wiederum durch den Dichtegradienten. Hierbei ergab sich eine Bestätigung der bereits aus der linearen Theorie vermuteten dämpfenden Rolle einer starken lokalen Verscherung für Driftwellen. Die Untersuchungen in realer Geometrie von Wendelstein 7-X ergaben, zumindest für die untersuchten resonanten Störungen, eine Lokalisierung der Turbulenz senkrecht zu den Feldlinien in Gebieten geringer absoluter mittlerer lokaler Verscherung. Ein wesentlicher stabilisierender Effekt zeigte sich aus dem selben Grund auch bei den Modellmetriken mit ausgeprägter Elliptizität.

Die lokale Verscherung erreicht ihre Maxima in den "Ecken" der Flußflächen (vergleiche Abb. 6.5), deren Position sich aus der Verbindung der Gebiete stärkster poloidaler Krümmung von der unteren Spitze der Bohnenebene helikal über die äußere Spitze der Dreiecksebene zum oberen Ende der Bohnenebene erstreckt. Die dort lokal starke Verformung ergibt sich aus der neoklassischen Anforderung, gefangene Teilchen in den Gebieten zwischen hohen Spiegelfeldern möglichst geringer Magnetfeldkrümmung auszusetzen [44]. In dieser Hinsicht ist die Forderung an eine turbulenzreduzierende Optimierung, die Feldlinien möglichst häufig durch Gebiete hoher lokaler Verscherung zu führen, ebenfalls bereits implizit in der bisherigen Strategie zu avancierten Stellaratoren vertreten. Aus den Ergebnissen der letzten Kapitel läßt sich weitergehend ein Anspruch auf zukünftig explizite Berücksichtigung von entlang einer Feldlinie möglichst oft auf-

tretender hoher lokaler Verscherung als Optimierungskriterium geltend machen. Von diesem Standpunkt aus erscheint auch die bisher betrachtete fünfperiodische Helias-Konfiguration geeigneter als kürzlich unter dem Gesichtspunkt der Konzeption kompakter Zündexperimente mit geringerer Anzahl von Feldperioden bei ähnlich hohem Randiota $\iota(a_0) \sim 1$ entworfene Varianten [70]: Bei ähnlicher Feldstruktur der einzelnen Perioden und ansonsten gleicher Rotationstransformation durchlaufen Feldlinien bei einer höheren Anzahl von Perioden auch mehr Gebiete hoher lokaler Verscherung.

Eine geeignete Platzierung magnetischer Inselstrukturen am Plasmarand durch Mode, Phase und Amplitude der Störung, wie sie bezüglich eines Inseldivertors durch Zusatzspulen bereits realisiert wird, kann die Anspitzung von Flußflächen weiter verstärken.

Die Güte einer mikrostabilitätsoptimierten Konfiguration wird schließlich wiederum durch numerische Simulationen zu testen sein. Erfahrungen aus der magnetohydrodynamischen Stabilitätsanalyse zeigen, daß sich dazu eine globale Behandlung der gesamten Stellaratorflußfläche, wenn sie bei wachsender Rechnerkapazität in Zukunft praktikabel wird, als nötig erweisen könnte.

8.5 Zusammenfassung

Die Auswirkungen der betrachteten Driftwellenmodelle auf den turbulenten, sogenannten "anomalen" Transport in Fusionsplasmen wurden diskutiert. Bereits das einfache lineare Modell vermag die richtige Größenordnung des experimentell beobachteten Transports wiederzugeben. In Verbindung mit einem Abbildungsalgorithmus zur Verfolgung von Einzelteilchenbahnen konnte die Energieabhängigkeit der Teilcheneinschlußzeit unter dem Einfluß magnetischer Inselstrukturen ermittelt werden. Eine im Falle ungestörter Flußflächen selbstkonsistente Behandlung des Transports lieferte bereits intrinsisch die direkte numerische Simulation. Es wurde diskutiert, daß noch die Einbeziehung von Nichtlokalität und Spiegelteilcheneffekten sowie eine Globalisierung der numerischen Behandlung weg vom Flußschlauchmodell nötig sein werden, um quantitative Voraussagen zu Transport und Einschluß bestehender Experimente und zukünftiger Reaktoren treffen zu können. Qualitativ konnten jedoch aus den Erfahrungen der letzten Kapitel vorläufige Kriterien zu einer Reduzierung der Turbulenz durch geeignete Formung der Magnetfeldgeometrie gefunden werden. Die bisherigen Optimierungsstrategien avancierter Stellaratoren hinsichtlich MHD-Stabilität und neoklassischen Eigenschaften erwiesen sich dabei auch fördernd zur Stabilisierung von, respektive, ITG und DTE Moden. Dichtegradientengetriebene Driftwellen und Drift-Alfvénwellen erfahren eine dämpfende Wirkung durch lokale Verscherung. Diese ist ein Nebenprodukt der Helias-Optimierung durch die steigende Helizität und die Torsion der Feldlinien an den Spitzen von Dreiecksebene und Bohnenebene. Sie läßt sich, sofern sich daraus keine negativen Auswirkungen auf MHD-Stabilität und Neoklassik ergeben, in zukünftigen Optimierungsschritten weiter verstärken und somit zu einer möglichen Turbulenzreduzierung in Stellaratoren anwenden.

Kapitel 9

Zusammenfassung

Konvektiver Transport durch turbulente Wirbel ist ein wesentlicher Verlustmechanismus von Energie und Teilchen aus einem Fusionsplasma. Ursache dieser Turbulenz sind destabilisierte niederfrequente Anregungen von Driftwellen im inhomogenen Plasma. Diese treten in allen magnetischen Einschlußexperimenten auf, da sie ihre freie Energie aus dem unvermeidbaren Druckgradienten in Zusammenhang mit einer nichtidealen Elektronendynamik entlang des Magnetfelds beziehen. Driftwellen sind daher ein experimentell wie theoretisch intensiv studiertes Phänomen in der fusionsorientierten Plasmaphysik.

Die Modellierung von Driftinstabilitäten wurde jedoch bisher fast ausschließlich in der einfachen Magnetfeldgeometrie des axialsymmetrischen zylindrischen Einschlußkonzepts vom Typ Tokamak behandelt. Darin ist die Theorie bereits weit fortgeschritten bis hin zur dreidimensionalen nichtlinearen Simulation von Plasmaturbulenz, und auch werden wichtige Effekte aus endlicher Iontemperatur oder elektromagnetischen Fluktuationen immer weiter in den Modellen mitberücksichtigt. Die Motivation dazu ist, daß sich die Entwicklung in der Fusionsforschung immer mehr auf Entwurf und Konzeption eines tatsächlichen Experimentalreaktors (ITER) zubewegt, und das Verständnis des von Driftwellen induzierten turbulenten (“anomalen”) Transports von grundlegender Bedeutung für Reaktorparameter und Zündkriterien ist.

Eine alternative Form des toroidalen Plasmaeinschlusses durch Magnetfelder findet sich im Stellaratorkonzept. Durch den Verzicht auf interne Plasmaströme zur Generierung der Feldlinienverschraubung besteht bei einem Stellarator zwar die Möglichkeit zu einem kontinuierlichen Betrieb, andererseits weist er auch eine unsymmetrische, hochgradig dreidimensionale Form der Magnetfeldgeometrie auf.

Alle für zweidimensionale Tokamaks entwickelten Modelle zu Driftwelleninstabilitäten lassen sich prinzipiell auch auf komplexere Geometrien anwenden, wenn die zugrundeliegenden Gleichungen und deren numerische Lösung an die Effekte eines variierenden Magnetfeldes und einer krummlinigen Metrik angepaßt werden: Denn der grundsätzliche Mechanismus der Instabilität von Driftwellen ist unabhängig von der Geometrie und der gleiche in einem einfachen axialsymmetrischen Tokamak wie in einem dreidimensionalen Stellarator¹. Die Antriebs- und Dämpfungsmechanismen dagegen hängen generisch von geometrischen Faktoren wie Krümmung und Verscherung des Magnetfelds ab, welche sich in beiden Konzepten wesentlich unterscheiden.

¹ Der hohe Toroidalstrom in einem Tokamak stellt zwar für bestimmte Instabilitäten (z.B. Tearingmoden) eine Quelle freier Energie dar, hat aber einen vernachlässigbaren direkten Einfluß auf Driftwellen und Turbulenz.

Die theoretische Untersuchung von Driftwelleninstabilitäten in Stellarator-Plasmen wurde jedoch bis vor wenigen Jahren fast völlig vernachlässigt. Bis 1996 erschienen dazu insgesamt fünf Arbeiten, von denen sich nur eine mit toroidaler Geometrie befaßte, die anderen behandelten eine gerade helikale Geometrie als erste Näherung für einen Stellarator. Alle Arbeiten hatten das einfachste, lineare elektrostatische Flüssigkeitsbild eines Plasmas zur Grundlage. Zum Zeitraum des Beginns der vorliegenden Arbeit sind erste Entwicklungen zur Theorie von Driftwellen in realen Stellaratoren vollzogen worden. Die lineare Theorie elektrostatischer resistiver Driftwellen wurde von Lewandowski (1997) für die dreidimensionale Geometrie des Heliac-Experiments H1-NF angepasst [75, 77]. Diese ersten wichtigen Ansätze erlauben jedoch keine Extrapolation hin zu anderen Konfigurationen aufgrund der spezifischen geometrischen Eigenschaften unterschiedlicher Stellaratoren. Auch blieb bisher offen, welche Auswirkung die geometrischen Größen wie Krümmung und lokale Verscherung im Einzelnen auf Instabilitäten haben, und ob sich ein Stellarator prinzipiell in Hinblick auf geringe Driftinstabilität und damit geringen turbulenten Transport optimieren läßt. Dies ist besonders von Interesse bei fortgeschrittenen Fusionskonzepten wie “Helias”, einer Modellfamilie von helikalen avancierten Stellaratoren, die bereits auf einen verbesserten Einschluß von Einzelteilchen optimiert ist und dem Reaktorkonzept “HSR”² zugrundeliegt. In der vorliegenden Arbeit wurde nun erstmals die Theorie von Driftwellen in dreidimensionalen Geometrien von Helias-Konfigurationen formuliert. Dazu wurden bestehende lineare Modelle wesentlich erweitert und die numerischen Routinen zur Berechnung der Instabilitäten hierfür entwickelt. Erstmals wurden auch nichtlineare Simulationen von Plasmaturbulenz in der Geometrie realer Stellaratoren durchgeführt und die Auswirkungen aller Modelle auf den anomalen Transport hin betrachtet.

Die beiden einfachsten untersuchten linearen Driftwellenmodelle hatten das Flüssigkeitsbild eines inhomogenen, magnetisierten Plasmas mit kalten Ionen zur Grundlage. Die Näherung kalter Ionen ($T_i = 0$) ist gerechtfertigt für derzeitige Stellarator-Experimente, in denen die Energiezufuhr ins Plasma durch Mikrowellen (ECRH³) hauptsächlich über die Elektronen deponiert wird und $T_e \gg T_i$ gilt. Damit lassen sich Korrekturen durch einen endlichen Gyrationradius der Ionen vernachlässigen, und die Instabilität wird vom Dichtegradienten alleine getrieben. In Hinblick auf die destabilisierende nichtideale (gestörte) parallele Elektronendynamik, die einen schnellen Ausgleich von Fluktuationen verhindert, wurde zum einen eine konstante Dissipation (“Nichtadiabatizität”) angenommen. In einem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten komplexwertigen numerischen Eigenwertcode wurden hierfür Frequenz- und Modenzahlspektren verschiedener Stellaratoren erstmals in toroidaler Konfiguration spektral untersucht und verglichen. Zum anderen wurden ebenfalls spektral die störungstheoretische Behandlung gefangener dissipativer Elektronen und in Folge die Anwachsraten dieser DTE Moden durch Integration der gefangenen Bewegung über Magnetfeldvariation und Modenstruktur untersucht. Als Grundlage diente hierfür ein Ansatz von Dominguez *et al.* [33]. Neben der Behandlung allgemeiner Geometrie wurde, über bisher in der Literatur beschriebene Modelle hinausgehend, durch die Erweiterung auf asymmetrische Moden erstmals auch eine Diskussion der poloidalen Variation der Spektren

² HSR = Helias Stellarator Reaktor

³ ECRH = Elektronen-Cyklotron-Resonanz-Heizung

ermöglicht. Diese zeigten eine komplexe Bandstruktur in den Eigenfrequenzen, welche sich aus der Brechung der axialen Symmetrie bei einem Stellarator ergibt. Zur Untersuchung der Einflüsse von einzelnen der geometrischen Größen wurden die integrierte lokale Verscherung und die Krümmungen systematisch variiert. Aus Betrachtung des vereinfachten Falls einer geraden helikalen Geometrie stellten Waltz und Boozer (1993) die Vermutung auf, daß in global (d.h. im Mittel) verscherungsfreien Stellaratoren die lokale Verscherung eine tragende Rolle in der Stabilisierung übernimmt [123]. Diese Vermutung konnte hier für einen realen Stellarator numerisch bestätigt werden. Einige Ergebnisse dieses Teils der Arbeit sind vom Autor veröffentlicht worden [69].

Im Hinblick auf die Reaktoreignung des Helias-Konzeptes sind die Einbeziehung des Gradienten der Ionentemperatur (ITG) und des im Verhältnis zum Magnetfeld-druck endlichen Plasmadrucks⁴ (Beta) relevant. Die aus endlicher Ionentemperatur resultierenden Gyroradiuseffekte sind in ein Fluidmodell nur eingeschränkt integrierbar, weshalb dazu auf die kinetische Darstellung übergegangen wird. Um auch die konsistente Behandlung eines endlichen Beta zu ermöglichen, ist erstmals die lineare elektromagnetische gyrokinetische Gleichung in einem Stellarator aufgestellt und für das Reaktorkonzept HSR numerisch gelöst worden. Hiermit konnte die Abhängigkeit der Mikroinstabilität eines Stellarators vom Plasma-Beta untersucht werden. Die bereits für einfache Tokamaks [38] beobachtete Stabilisierung elektrostatischer ITG-Moden bei wachsendem Beta konnte auch im Stellarator HSR gefunden werden. Stabilität und Lokalisierung sind dabei für ITG-Moden in erster Linie durch die Variation der Krümmung entlang der Feldlinien bestimmt. Durch die Shafranov-Verschiebung mit steigendem Beta wird eine stabilisierende günstige magnetische Mulde in HSR verstärkt. Es zeigte sich dadurch, daß die konsistente Einbeziehung von endlich-Beta-Effekten auch auf die Geometrie selbst ein essentieller Bestandteil solcher Mikroinstabilitätsbetrachtungen ist.

Mit den bereits genannten Methoden wurden wesentliche Erweiterungen gegenüber bisherigen linearen Driftwellenmodellen vorgenommen und durch relativ einfache Verfahren neue Einsichten in die Auswirkungen der Magnetfeldgeometrie auf Instabilitäten erzielt. Driftwellen sind jedoch im Grunde ein nichtlineares Phänomen. Zu einem wirklichen Verständnis des für den Plasmaeinschluß kritischen anomalen Transports ist ebenso wie für die theoretische Beschreibung experimenteller Fluktuationmessungen eine direkte numerische Simulation nichtlinearer Plasmaturbulenz unumgänglich. Eine Schwierigkeit beim Übergang von für Tokamaks entwickelten Simulationsmodellen auf reale Stellaratorgeometrie ist dabei die breite Spannweite von Skalenlängen, die bei der Entwicklung von Turbulenz in Plasmen im Spiel ist. Typische Wellenlängen (senkrecht zur Magnetfeldrichtung) von Driftwellenturbulenz in der Randschicht heutiger Fusionsexperimente liegen in der Größenordnung eines Ionen-Gyroradius von einigen Millimetern⁵: Der kleine Plasmaradius des Experiments Wendelstein 7-X etwa liegt dagegen bei einem halben Meter. In der Richtung entlang des Magnetfeldes konnten bisher immer die Symmetrien eines Tokamaks ausgenutzt werden: In einem Stellarator

⁴ Parametrisiert durch den auf die Magnetfeldstärke normierten Druck $\beta = \mu_0 p / B^2$.

⁵ Neue Ergebnisse zu vom Elektronentemperaturgradient (ETG) getriebenen Moden deuten darauf hin, daß mitunter sogar Effekte von der Ausdehnung eines Elektronengyroradius von Bedeutung sein könnten, die die nötige Längenskala zur Simulation der Turbulenz nochmals um zwei Größenordnungen nach unten erweitern würde [66].

tor dagegen bedingen die ausgeprägten helikalen Variationen die Notwendigkeit einer weitaus höheren Auflösung. Nicht genug, daß eine Rechendomäne zur Berücksichtigung komplexer Geometrie mit genügend hoher Auflösung bereits in einem einfachen Fluidbild an die Grenzen der Leistungsfähigkeit moderner Höchstleistungsrechner stößt: Kinetische Effekte wie Landaudämpfung, endlicher Gyroradius und gefangene Teilchen machten eigentlich eine gyrokinetische Beschreibung im sechsdimensionalen Phasenraum des Plasmas nötig. Derzeit wird von mehreren Autoren versucht, einige dieser Effekte genähert auch in sogenannten Gyrofluidmodellen zu berücksichtigen.

Erstmals wurden nun in dieser Arbeit nichtlineare Simulationen in der dreidimensionalen Geometrie realer Stellaratoren durch die Anpassung der Metrik vorbereitet und durchgeführt. Hierzu wurde in einem bestehenden numerischen Code [106] die konsistente Einbindung beliebiger, allgemeiner Geometrie, die beispielsweise aus magneto-hydrodynamischen Gleichgewichten spezifiziert ist, in einen Flußschlauch-Formalismus realisiert. Darin wird die Anisotropie der Plasmaturbulenz durch eine Anordnung des Simulationsgebiets in einem Ausschnitt des Plasmas entlang der Feldlinie ausgenützt. Poloidale und toroidale Variationen der Metrik und des Magnetfeldes werden dabei vollständig berücksichtigt. Das primär hierzu zugrundegelegte Driftwellenmodell nahm kalte Ionen und elektromagnetische, isotherme Elektronendynamik mit lokalem Dichtegradienten an. Auch in einem erweiterten Gyrofluidcode für endliche Ionentemperatur wurden erstmals Simulationen in Stellaratorgeometrie durchgeführt.

Durch Rechnungen in der realen Geometrie des Stellarators Wendelstein 7-X konnte so gezeigt werden, daß die lokalen geometrischen Eigenschaften wie Krümmung und lokale Verscherung die Fluktuationsamplituden wesentlich beeinflussen und nahe einer niedrigrationalen Rotationstransformation zu einer effektiven Lokalisierung der Turbulenz auf bestimmte Feldlinien führen können. Um den Einfluß der Geometrie auf die Fluktuationen explizit zu untersuchen, wurden geeignete Übergangsmetriken konzipiert, die eine kontinuierliche und konsistente Variation zwischen der Geometrie eines einfachen zylindrischen Tokamaks und den Eigenschaften eines W7-X-artigen Stellarators zulassen. Dies wurde erzielt durch getrenntes Hinzufügen von lokalen Verscherungs- oder Krümmungseffekten zur Tokamakgeometrie, was einer wachsenden Elliptizität in einem einfachen elliptischen ($l=2$) Stellaratormodell, beziehungsweise einer verstärkten, toroidal periodisch modulierten Schwellung in einem „Bumpy Torus“ gegenüber einem kreisförmigen Plasmaquerschnitt entspricht. Es wurde gezeigt, daß beide Effekte zu einer merklichen Reduzierung der Fluktuationsamplituden führen. Die Wirkungsweisen sind jedoch entgegengesetzt: Die lokale Verscherung bewirkt eine effektive Dämpfung der Turbulenz durch ein Aufbrechen der Wirbelstrukturen entlang räumlich voneinander wegscherenden, ursprünglich benachbarten Feldlinien. Eine Modulation der Krümmung, die unter anderem als Phasenfaktor zwischen Dichte- und Potentialstörung wirkt, hat dagegen einen verringerten Antrieb der Instabilität zur Folge.

Als weiteres wichtiges, jedoch aufgrund der unveränderten Quellen freier Energie nicht unerwartetes Resultat dieser Geometrieviationen wurde gefunden, daß trotz der teilweise wesentlichen Einflüsse auf Instabilität und Transport die berechneten Fluktuationsspektren in den diversen Geometrien kaum voneinander abweichen. Dies bestätigt eine experimentell von Pedrosa *et al.* [94] gefundene empirische Ähnlichkeit von gemessenen Spektren in unterschiedlichen Konfigurationen.

Die Ergebnisse aus den verschiedenen behandelten Driftwellenmodellen der Arbeit wurden weiter auf die Auswirkungen bezüglich des anomalen Transports hin untersucht. Ausgehend vom linearen Modell wurde zunächst das Mischungswegbild zum konvektiven Transport durch Flüssigkeitswirbel herangezogen, das zwar nur eingeschränkt anwendbar ist, jedoch schon die Größenordnung gemessener Werte gut wiederzugeben vermochte. Realistischer ist es bereits, die Auswirkungen fluktuierender Felder auf die Einzelteilchenbewegung im Plasma selbst zu betrachten. Hierzu wurde erstmals eine neue Methode von Wobig und Pfirsch [127], die gestörte Trajektorien über Abbildungsmethoden verfolgt, auf die Parameter und (im ersten Teil dieser Arbeit berechnete) Driftwellen-Frequenzspektren eines realen Stellarators angewandt. Die gefundene Abhängigkeit der Teilcheneinschlußzeit von der Anfangsenergie der Testteilchen hat günstige Auswirkungen auf den Einschluß schneller α -Teilchen aus Fusionsreaktionen und einer rascheren Abfuhr kühler Heliumasche. Der Nachteil dieses Einzelteilchenbilds ist, daß es nur qualitative Aussagen erlaubt. Der energiegemittelte Transport durch nichtlineare Turbulenz dagegen läßt sich bereits selbstkonsistent direkt aus den Simulationen erhalten. Dieser zeigt im wesentlichen dieselben qualitativen Abhängigkeiten bezüglich der Feldgeometrie wie die Fluktuationsamplituden.

Die Entwicklungen dieser Arbeit erlauben nun auch erstmals die tatsächliche Interaktion von Theorie in realer Geometrie mit Experimenten. Vergleichende Messungen zur Korrelation von Fluktuationen entlang Feldlinien in einem Tokamak (JET) und Stellarator (W7-AS) werden derzeit durchgeführt [119]. In diesem Zusammenhang wurden numerische Diagnostiken in den nichtlinearen Code implementiert, die zukünftig einen direkten Vergleich mit den gemessenen Daten erlauben. Eine wichtige offene Frage zu derzeitigen Experimenten ist die Abhängigkeit des Plasmatransports an W7-AS vom Randwert der Rotationstransformation. Es wurde erläutert, wie die Bildung magnetischer Inseln bei niedrigen Rationalen der Rotationstransformation eine Deformation selbst der geschlossenen Flußflächen und dadurch eine verstärkte Variation der lokalen Verscherung bewirkt. Die Erfahrungen aus dieser Arbeit lassen einen merkbaren Einfluß auf den Plasmatransport erwarten. An diesem Beispiel waren andererseits auch die Grenzen des derzeitigen Flußschlauchmodells aufzuzeigen: Eine Simulation vor dem Hintergrund der kleinskaligen Variationen der Flußflächengeometrie durch Inseln oder ausgeprägtem Spulenripple läßt sich nur im Rahmen eines erweiterten Modells realisieren, das die gesamte Flußfläche in die Simulation mit einbezieht. Die zukünftige Entwicklung eines solchen globaleren (und wesentlich rechenintensiveren) Modells ist eine Aufgabe, die sich aus den Erkenntnissen dieser Arbeit ergibt.

Aus der Identifikation der für Instabilität und Transport relevanten Größen durch die betrachteten Modelle dieser Arbeit läßt sich die Frage nach der prinzipiellen Möglichkeit zu einer turbulenzreduzierenden Optimierung von Helias-Stellaratoren positiv beantworten. Hierzu wurden vorläufige Optimierungskriterien aufgestellt. Diese werden in Zukunft im Rahmen eines auf globale Simulation hin erweiterten Modells auf ihre Gültigkeit hin zu untersuchen und zu präzisieren sein. Es zeigte sich hierzu, daß Helias-Konfiguration einige der zu fordernden turbulenzreduzierenden Eigenschaften bereits als Nebenprodukt der bisherigen magnetohydrodynamischen und neoklassischen Optimierung aufweisen können.

Anhang A

Flußflächenkoordinaten

Die Darstellung der dreidimensionalen Stellaratorgeometrie in dieser Arbeit beruht auf der Verwendung von krummlinigen Flußflächenkoordinaten [32]. Die radialen, poloidalen und toroidalen Koordinaten s , θ und ζ beschreiben Feldlinien, die in der θ - ζ Ebene auf den Flußflächen $\Psi = (1/2)B_0 a_0^2 s$ liegen.

Numerische Routinen zur Bestimmung magnetischer Vakuumflächen aus der Spulengeometrie (“Gourdon-Code”, basierend auf Ref. [43]) oder eines Plasmagleichgewichts bei endlichem Druck (“NEMEC”, siehe Ref. [59]) erlauben eine Darstellung geschlossener magnetischer Flächen in Zylinderkoordinaten $\mathbf{X} = (R, \phi, Z)$ durch eine Fourierrepräsentation in Flußflächenkoordinaten $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3) = (s, \theta, \zeta)$. Die Transformation in ein SFL-System gerader Feldlinien (Boozer- oder Hamada-Koordinaten, siehe [32]) erfolgt bereits im Rahmen dieser Codes¹. Mit den Fouriermodenzahlen n und l und der Anzahl von $N_f = 5$ Feldperioden sind

$$|B| = \sum_{n,l} B_{nl}(s) \cos(n\theta - l\zeta), \quad (\text{A.1})$$

$$R = \sum_{n,l} R_{nl}(s) \cos(n\theta - l\zeta), \quad (\text{A.2})$$

$$Z = \sum_{n,l} Z_{nl}(s) \sin(n\theta - l\zeta), \quad (\text{A.3})$$

$$\phi = \frac{\zeta}{N_f} + \frac{1}{N_f} \sum_{n,l} \phi_{nl}(s) \sin(n\theta - l\zeta). \quad (\text{A.4})$$

Man erhält die Darstellung $\mathbf{X} = \mathbf{X}(s, \theta, \zeta)$. Daraus lassen sich die kovarianten Basisvektoren

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i}$$

und schließlich die kontravarianten Basisvektoren

$$\mathbf{e}^i = \nabla u^i = \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)}$$

¹ Die in dieser Arbeit verwendeten Fourierdaten von Helias-Konfigurationen wurden freundlicherweise von Dr. E. Strumberger und Hr. J. Kiblinger zur Verfügung gestellt.

errechnen. Ein beliebiger Vektor läßt sich entweder in kontra- oder kovarianter Form durch eine Linearkombination der Basisvektoren ausdrücken. Die metrischen Koeffizienten g^{ij} ergeben sich aus dem Produkt der kontravarianten Basen:

$$g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = \nabla u^i \cdot \nabla u^j.$$

Diese Koeffizienten sind symmetrisch, und in einem orthogonalen Koordinatensystem verschwinden die Nicht-Diagonalelemente. Die Jacobideterminante der Transformation in das krummlinige Koordinatensystem ist

$$J = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3)^{-1}.$$

Die Vektorableitung ∇ schreibt sich

$$\nabla = \nabla u^i \frac{\partial}{\partial u^i},$$

wobei doppelt auftretende Indizes i eine Summation über deren Werte (1,2,3) implizieren.

Die Feldlinienkrümmung ist über den Einheitsvektor $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ definiert als

$$\boldsymbol{\kappa} \equiv \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} = \frac{\mu_0}{B^2} \nabla_{\perp} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \approx \nabla_{\perp} \ln B.$$

Die zweite Identität folgt aus der Gleichgewichtsrelation $\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mu_0^{-1} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ unmittelbar unter Ausnutzung einiger Vektorbeziehungen. Die letzte Näherung gilt für geringen Plasmadruck ($\beta \ll 1$). Dann ist

$$\boldsymbol{\kappa} = \partial_s \ln B \cdot \nabla s + \partial_{\theta} \ln B \cdot \nabla \theta + \partial_{\zeta} \ln B \cdot \nabla \zeta.$$

Der Magnetfeldvektor kann in Flußflächenkoordinaten ausgedrückt werden durch

$$\mathbf{B} = \partial_s \Psi (\nabla s \times \nabla \alpha). \quad (\text{A.5})$$

Darin ist die Feldlinienmarke

$$\alpha = \theta - \iota \zeta$$

definiert, welche in SFL-Koordinatensystemen konstant entlang einer Feldlinie ist. Dann läßt sich die Rotationstransformation² auch schreiben als

$$\iota = \frac{\partial \theta}{\partial \zeta}. \quad (\text{A.6})$$

Die umfassendste weiterführende Darstellung von Flußflächenkoordinatensystemen findet sich im Lehrbuch von D'haeseleer *et al.* [32].

² In vielen alten Darstellungen findet sich oft die Schreibweise $\ast \equiv (\partial \theta / \partial \zeta) \equiv (\iota / 2\pi)$. In dieser Arbeit wird ausschließlich die Definition (A.6) verwendet.

Anhang B

Ballooning-Transformation

In einem toroidalen System haben Eigenfunktionen auf einer Flußfläche eine doppelte Periodizität in den Koordinaten $\theta \in [0 \dots 2\pi]$ und $\zeta \in [0 \dots 2\pi]$ zu erfüllen. Andererseits ist die Dynamik von Driftwellen stark entlang der Magnetfeldlinien gekoppelt, und Eigenmoden werden sich in Filamenten entlang des Felds ausbilden mit einer parallelen Wellenzahl $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$. Die Nutzung dieser Asymmetrie durch die WKB-Methode unter Aufspaltung des Eigenmodenproblems in eine räumlich langsam variierende parallele und eine stark oszillierende senkrechte Komponente zum Feld läßt sich nicht direkt (etwa durch Fourierzerlegung in der senkrechten Koordinate) mit den Periodizitätsbedingungen in Einklang bringen.

Eine modifizierte WKB-Methode, die auf diese Anforderungen eingeht, wurde von Connor *et al.* [27] eingeführt und von Dewar und Glasser auf dreidimensionale Geometrie weiterentwickelt [29]. Damit lassen sich Fluktuationen in einer Größe \mathcal{F} mit kleiner Amplitude durch einen Eikonalanansatz mit

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_{\star}(s, \zeta) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}W\right) \quad (\text{B.1})$$

ausdrücken. Das Eikonal $W = W(s, \alpha)$ und die Amplitude $\mathcal{F}_{\star}(s, \zeta)$ sollen dabei langsam auf der Skala von Änderungen der Hintergrundgrößen variieren. Als parallele Koordinate wird hier der auf die Feldlinie projizierte toroidale Winkel ζ verwendet.

Das Eikonal hängt von der radialen Koordinate s und der Feldlinienmarke

$$\alpha = \theta - \iota\zeta$$

ab. Dies erfüllt die Anforderung

$$\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{B} = 0$$

durch einen Ansatz

$$\mathbf{k}_{\perp} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla W = k_{\alpha} \nabla \alpha + k_s \nabla s. \quad (\text{B.2})$$

Darin sind $k_{\alpha} = \partial_{\alpha} W$ und $k_s = \partial_s W$. Unter der Annahme $W = \alpha + \tilde{W}(s)$ läßt sich durch Definition der großen senkrechten Modenzahl $m = \varepsilon^{-1}$ und einer radialen Wellenzahl $\zeta_k = \varepsilon^{-1} \partial_s W / \partial_{\alpha} W$ auch schreiben

$$\mathbf{k}_{\perp} = m \nabla \alpha + \zeta_k \nabla s. \quad (\text{B.3})$$

In niedrigster Ordnung der Entwicklung in ε reduziert dieser Ansatz das Eigenmodenproblem auf die Lösung einer eindimensionalen Gleichung entlang der Feldlinie, in der m und ζ_k freie Parameter sind. Die Ballooning-Transformation von Connor et al. [27] überführt diese nichtperiodischen Quasimoden der unendlichen parallelen Domäne $-\infty < \zeta < \infty$ zurück auf eine doppelt periodische Domäne mit periodischem Potential \mathcal{F}_* durch Summation in einer Reihe

$$\mathcal{F}_*(s, \zeta) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(s, \zeta + 2\pi l). \quad (\text{B.4})$$

Die Quasimoden \mathcal{F} erfüllen für abklingende Randbedingungen bei $|\zeta| \rightarrow \infty$ nun dieselben Gleichungen wie \mathcal{F}_* . Wie von Antonsen and Lane [3] angemerkt wurde, erlaubt diese Formulierung nach wie vor die konsistente Behandlung lokaler und globaler magnetischer Verscherung durch die Abhängigkeit von ∇W entlang der Feldlinie.

Eine Bestimmung des Ballooning-Parameters $\zeta_k \in [0 \dots 2\pi]$ ist jedoch bei weitem nicht trivial [28]. Daher wird in dieser Arbeit ζ_k als freier Parameter angesehen. Die Abhängigkeit der Lösungen für Driftwellengleichungen von ζ_k wurde numerisch von Lewandowski [79] diskutiert. Dabei wurde gezeigt, daß sowohl ideale wie auch resistive Driftmoden in einem Stellarator mit niedriger Verscherung für einen Wert $\zeta_k = 0$ die größte Anwachsrate aufweisen. In den Kapiteln 4 und 5 wird daher durchgehend von einem derartigen Wert ausgegangen.

Die Ballooning-Transformation wurde zunächst zur Berechnung magnetohydrodynamischer Ballooningmoden aufgestellt und in Folge auch auf Driftwellen angewandt. Für Ballooningmoden ist der Formalismus durch Entwicklung zu höherer Ordnung in ε auch bereits auf die radiale Modenstruktur erweitert worden [29]. Jedoch ist das Auffinden globaler Moden in dreidimensionaler Stellaratorgeometrie ohne Axialsymmetrie durch Lösung von *Ray tracing* Gleichungen, welche die Eigenmoden entlang der Feldlinien für die freien Parameter α , s , k_α und k_s koppeln, nicht allgemein praktikabel¹. Diese Gleichungen haben die Struktur eines nicht integrierbaren vierdimensionalen Hamiltonschen Systems, das lediglich für den axialsymmetrischen Fall auch bei geringer Abweichung von der Integrierbarkeit noch KAM-Flächen aufweist (vergleiche auch Kap. 8.2 und Anhang D).

Die in Kapitel 4 und 5 berechneten Quasimoden sind daher lokale Approximationen zu eigentlich globalen Driftmoden. Die geometrischen Eigenschaften eines Stellarators sind in diesen reduzierten Gleichungen aber bereits vollständig enthalten. Durch den WKB-Ansatz ist die Behandlung auf kleine senkrechte Wellenlängen beschränkt, was durch die experimentell in der Größenordnung eines Gyroradius ρ_s gefundenen Strukturen in Fusionsplasmen gerechtfertigt wird. In toroidalen und linearen Plasmaanordnungen niedriger Temperatur werden auch Driftmoden mit kleiner Modenzahl m beobachtet, zu deren Beschreibung dieser WKB-Ansatz nicht mehr genügt.

¹ R.L. Dewar, private Mitteilung

Anhang C

Gyrofluid-Gleichungen

Normierte elektromagnetische Gyrofluidgleichungen. Aus Ref. [107]:

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{n}_i}{dt} + \tau_i^{-1} \mathbf{w}_E \cdot \nabla \tilde{T}_{i\perp} &= -\mathbf{B} \cdot \nabla \frac{\tilde{u}_{\parallel}}{B} + \mathcal{K} \left(\frac{\tilde{p}_{i\parallel} + \tilde{p}_{i\perp}}{2} + \hat{\phi} + \frac{1}{2} \phi_G \right) \\
\hat{\epsilon} \frac{d\tilde{u}_{\parallel}}{dt} + \hat{\epsilon} \tau_i^{-1} \mathbf{w}_E \cdot \nabla \tilde{q}_{i\perp} &= -\nabla_{\parallel} (\tilde{p}_{e\parallel} + \tilde{p}_{i\parallel}) + (\tilde{T}_{e\parallel} - \tilde{T}_{e\perp} + \tilde{T}_{i\parallel} - \tilde{T}_{i\perp} - \phi_G) \nabla_{\parallel} \log B + \hat{\epsilon} \mathcal{K} \left(\tilde{q}_{i\parallel} + \frac{\tilde{q}_{i\perp}}{2} + 2\tau_i \tilde{u}_{\parallel} \right) \\
\frac{1}{2} \frac{d\tilde{T}_{i\parallel}}{dt} &= -\mathbf{B} \cdot \nabla \frac{\tilde{q}_{i\parallel} + \tau_i \tilde{u}_{\parallel}}{B} - (\tilde{q}_{i\perp} + \tau_i \tilde{u}_{\parallel}) \nabla_{\parallel} \log B - \frac{\nu_i}{3} (\tilde{T}_{i\parallel} - \tilde{T}_{i\perp}) + \tau_i \mathcal{K} \left(\tilde{T}_{i\parallel} + \frac{\tilde{p}_{i\parallel} + \hat{\phi}}{2} \right) \\
\frac{d\tilde{T}_{i\perp}}{dt} + \mathbf{w}_E \cdot \nabla \tilde{T}_{i\perp} + \tau_i \mathbf{w}_E \cdot \nabla \tilde{n}_i &= -\mathbf{B} \cdot \nabla \frac{\tilde{q}_{i\perp}}{B} + (\tilde{q}_{i\perp} + \tau_i \tilde{u}_{\parallel}) \nabla_{\parallel} \log B + \frac{\nu_i}{3} (\tilde{T}_{i\parallel} - \tilde{T}_{i\perp}) + \tau_i \mathcal{K} \left(\frac{3}{2} \tilde{T}_{i\perp} + \frac{\tilde{p}_{i\perp} + \hat{\phi}}{2} + \phi_G + \hat{\phi}_G \right) \\
\hat{\epsilon} \frac{d\tilde{q}_{i\parallel}}{dt} &= -\frac{3}{2} \tau_i \nabla_{\parallel} \tilde{T}_{i\parallel} - \hat{\epsilon} (\nu_i + a_{Li}) \tilde{q}_{i\parallel} - \tau_i \frac{\hat{\epsilon}}{2} \mathcal{K} \left(3\tilde{q}_{i\parallel} + \frac{3}{2} \tilde{q}_{i\perp} - \tau_i \tilde{u}_{\parallel} \right) \\
\hat{\epsilon} \frac{d\tilde{q}_{i\perp}}{dt} + \hat{\epsilon} \mathbf{w}_E \cdot \nabla \tilde{q}_{i\perp} + \hat{\epsilon} \tau_i \mathbf{w}_E \cdot \nabla \tilde{u}_{\parallel} &= -\tau_i \nabla_{\parallel} (\tilde{T}_{i\perp} + \phi_G) + \tau_i (\tilde{T}_{i\parallel} - \tilde{T}_{i\perp} - \phi_G - \hat{\phi}_G) \nabla_{\parallel} \log B - \hat{\epsilon} (\nu_i + a_{Li}) \tilde{q}_{i\perp} - \tau_i \frac{\hat{\epsilon}}{2} \mathcal{K} (2\tilde{q}_{i\parallel} + \tilde{q}_{i\perp} - \tau_i \tilde{u}_{\parallel})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{n}_e}{dt} &= -\mathbf{B} \cdot \nabla \frac{\tilde{v}_{\parallel}}{B} - \mathcal{K} \left(\frac{\tilde{p}_{e\parallel} + \tilde{p}_{e\perp}}{2} - \phi \right) \\
\hat{\beta} \frac{\partial \tilde{A}_{\parallel}}{\partial t} + \hat{\mu} \frac{d\tilde{J}_{\parallel}}{dt} &= \nabla_{\parallel} (\tilde{p}_{e\parallel} - \phi) - \hat{\mu} \nu \left[\tilde{J}_{\parallel} + \frac{\alpha}{\kappa} (\tilde{q}_{e\parallel} + \tilde{q}_{e\perp} + \alpha \tilde{J}_{\parallel}) \right] - (\tilde{T}_{e\parallel} - \tilde{T}_{e\perp}) \nabla_{\parallel} \log B + \hat{\mu} \mathcal{K} \left(\tilde{q}_{e\parallel} + \frac{\tilde{q}_{e\perp}}{2} + 2\tilde{v}_{\parallel} \right) \\
\frac{1}{2} \frac{d\tilde{T}_{e\parallel}}{dt} &= -\mathbf{B} \cdot \nabla \frac{\tilde{q}_{e\parallel} + \tilde{v}_{\parallel}}{B} - (\tilde{q}_{e\perp} + \tilde{v}_{\parallel}) \nabla_{\parallel} \log B - \nu (\tilde{T}_{e\parallel} - \tilde{T}_{e\perp}) - \mathcal{K} \left(\tilde{T}_{e\parallel} + \frac{\tilde{p}_{e\parallel} - \phi}{2} \right) \\
\frac{d\tilde{T}_{e\perp}}{dt} &= -\mathbf{B} \cdot \nabla \frac{\tilde{q}_{e\perp}}{B} + (\tilde{q}_{e\perp} + \tilde{v}_{\parallel}) \nabla_{\parallel} \log B + \nu (\tilde{T}_{e\parallel} - \tilde{T}_{e\perp}) - \mathcal{K} \left(\frac{3}{2} \tilde{T}_{e\perp} + \frac{\tilde{p}_{e\perp} - \phi}{2} \right) \\
\hat{\mu} \frac{d\tilde{q}_{e\parallel}}{dt} &= -\frac{3}{2} \nabla_{\parallel} \tilde{T}_{e\parallel} - \frac{5/2}{\kappa} \hat{\mu} \nu \left(\tilde{q}_{e\parallel} + \frac{3}{5} \alpha \tilde{J}_{\parallel} \right) - \frac{3.2}{\kappa} \hat{\mu} \nu (\tilde{q}_{e\parallel} - \tilde{q}_{e\perp}) - a_{Le} \tilde{q}_{e\parallel} + \frac{\hat{\mu}}{2} \mathcal{K} \left(3\tilde{q}_{e\parallel} + \frac{3}{2} \tilde{q}_{e\perp} - \tilde{v}_{\parallel} \right) \\
\hat{\mu} \frac{d\tilde{q}_{e\perp}}{dt} &= -\nabla_{\parallel} \tilde{T}_{e\perp} + (\tilde{T}_{e\parallel} - \tilde{T}_{e\perp}) \nabla_{\parallel} \log B - \frac{5/2}{\kappa} \hat{\mu} \nu \left(\tilde{q}_{e\perp} + \frac{2}{5} \alpha \tilde{J}_{\parallel} \right) + \frac{3.2}{\kappa} \hat{\mu} \nu (\tilde{q}_{e\parallel} - \tilde{q}_{e\perp}) - a_{Le} \tilde{q}_{e\perp} + \frac{\hat{\mu}}{2} \mathcal{K} (2\tilde{q}_{e\parallel} + \tilde{q}_{e\perp} - \tilde{v}_{\parallel})
\end{aligned}$$

Anhang D

Flußerhaltende Abbildungen



Ceci n'est pas une pipe.
René Magritte¹

In einem N -dimensionalen separablen System mit in der Zeit periodischen generalisierten Koordinaten q_i und p_i läßt sich die zeitunabhängige Hamiltonfunktion

$$H = \sum_i H_i(p_i, q_i) \equiv \sum_i \alpha_i$$

durch Übergang zu Wirkungs-Winkel-Variablen ausdrücken. Darin entspricht das Wirkungsintegral

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial S_i(q_i, \alpha)}{\partial q_i} dq_i$$

neuen, konstanten Impulsen. S_i sind die erzeugenden Funktionen. Die konjugierten Koordinaten θ_i haben aufgrund der integrablen Bewegungsgleichung $\dot{\theta}_i = \partial_{J_i} \bar{H}_i$ die Form

$$\theta_i = \omega_i t + \theta_{i0},$$

in der ω_i und θ_{i0} Konstanten, und die Winkelvariablen θ_i periodisch in 2π sind. In zwei Dimensionen $N = 2$ spannt eine Trajektorie im so festgelegten vierdimensionalen Phasenraum einen dreidimensionalen Torus auf. In integrablen Systemen läßt sich diese Bewegung mittels einer Poincaré-Darstellung aus den Durchstoßpunkten der Trajektorie z.B. in einer $J_1 - \theta_1$ Ebene visualisieren. Diese Schnitte sind bei integrablen Systemen gekennzeichnet durch festes J_1 als Konstante der Bewegung und festgelegte Intervalle θ_2 . Nach einem Umlauf in der festen Zeit $\Delta t = 2\pi/\omega_2$ ändert sich θ_1 entsprechend um $\omega_1 \Delta t = 2\pi\alpha(J_1)$, worin $\alpha = \omega_1/\omega_2$ das Verhältnis der Umlauffrequenzen der beiden Freiheitsgrade ist. Die Bewegung vom n ten zum $(n+1)$ ten Schnitt wird dann beschrieben durch die *Abbildung*

$$\begin{aligned} J_1^{n+1} &= J_1^n \\ \theta_1^{n+1} &= \theta_1^n + 2\pi\alpha(J_1^{n+1}). \end{aligned}$$

¹ "Dies ist keine Pfeife". Der Künstler Magritte wollte verdeutlichen, daß es sich nur um die *Abbildung* einer Pfeife handele. Manche grundlegende Eigenschaft des tatsächlichen Gegenstandes fehlt - so etwa kann man das Abbild sicherlich nicht rauchen. Doch auch dieses Abbild verhilft bereits, wesentliche Merkmale einer Pfeife zu vermitteln.

Die Indizes n sind dabei lediglich hochgestellt und bedeuten keine Potenz. Diese iterative Berechnung tritt an die Stelle der Lösung eines Bewegungsintegrals, welches eine weitaus höhere Anzahl von Zeitschritten erfordern würde. Der Fall quasi-integrabler Systeme mit kleiner Abweichung von einer konstanten Hamiltonfunktion, $H(J, \theta) = H_0(J) + \epsilon H_1(J, \theta)$, führt zu gestörten, aber flächentreuen² Abbildungsgleichungen der Form

$$\begin{aligned} J^{n+1} &= J^n + \epsilon \cdot f(J^{n+1}, \theta^n) \\ \theta^{n+1} &= \theta^n + 2\pi\alpha(J^{n+1}) + \epsilon \cdot g(J^{n+1}, \theta^n). \end{aligned}$$

Darin sind f und g periodische Funktionen und aus einer dem Problem entsprechenden erzeugenden Funktion bestimmt. Die Berechnung der obigen impliziten Form vereinfacht sich zu einer expliziten Iteration im Fall eines von J unabhängigen f und bei $g = 0$. Durch Linearisierung von α bezüglich J und $f \sim \sin \theta_n$ ergibt sich die bekannte Chirikov-Taylorsche Standardabbildung

$$\begin{aligned} I^{n+1} &= I^n + K \sin \theta_n, \\ \theta^{n+1} &= \theta^n + I^{n+1}. \end{aligned}$$

Für sehr kleine Störungen, hier parametrisiert durch K , sind alle Trajektorien weiterhin regulär. Resonanzen treten bei rationalen Windungszahlen $\alpha = l/k$ aus dem Verhältnis ganzer Zahlen l und k auf. In der Standardabbildung ergeben sich aufgrund $\alpha \sim I$ primäre Resonanzen bei $1/1$, $1/2$, $1/3$, $2/3$ usw. Um sich wiederholende fixe Durchstoßpunkte für resonante Trajektorien werden charakteristische Inselstrukturen gebildet. Überlappen sich benachbarte Inseln durch eine verstärkte Störung oder durch Überlagerung anderer Harmonischer, so ergodisieren Gebiete um die ehemalige Separatrix der Inseln. Für nicht zu große Störungen existieren nach wie vor unzerstörte KAM-Flächen³ zwischen den stochastischen Schichten.

Die umfangreiche Theorie zur Untersuchung regulärer und chaotischer Dynamik mit Hilfe von Abbildungen ist detailliert im Lehrbuch von Lichtenberg und Leibermann [80] beschrieben, auf dem auch die obige kurze Darstellung beruht. Bei Horton und Reichl [61] findet sich eine Diskussion der Anwendung auf Fusionsplasmen zur Beschreibung von Feldliniendynamik durch flußerhaltende Abbildungen.

Zum Zwecke qualitativer Untersuchungen wurde von M. Hénon eine möglichst einfache quadratische flächentreue Abbildung konstruiert aus den Vorschriften

$$\begin{aligned} x' &= -y + px - (1-p)x^2 \\ y' &= +x - px' + (1-p)x'^2. \end{aligned}$$

Die Abbildung in der Einleitung dieser Arbeit, welche stark an eine Dreiecksebene der Flußflächen eines Stellarators erinnert, ist aus diesem einfachen Algorithmus mit $p = -0.8$ erzeugt worden.

² D.h. die Jacobideterminante ist 1.

³ nach A.N. Kolmogorov, V.I. Arnold und J. Moser.

Anhang E

Daten der Helias-Konfigurationen

Größe	W7-AS	W7-X	HSR	Einheit
Großer Radius R_0	2.0	5.5	22.0	m
Kleiner Radius a_0	0.2	0.53	2.0	m
Magnetfeld auf Achse B_0	2.5	3	5	T
Dichte auf Achse n_0	$1.5 \cdot 10^{20}$	$3 \cdot 10^{20}$	$3 \cdot 10^{20}$	m^{-3}
Temperatur auf Achse T_{e0}	5	15	150	keV
Rotationstransformation $\iota(a_0)$	0.3-0.6	0.95	0.95	

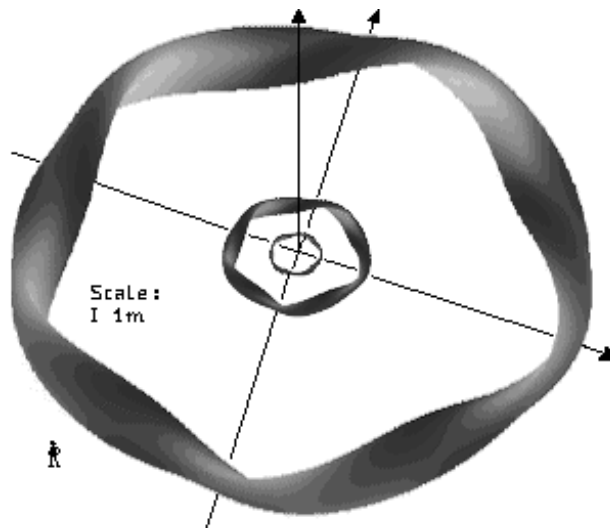


Abbildung E.1. Größenvergleich des Plasmavolumens der Helias-Stellaratoren Wendelstein 7-AS (Mitte), Wendelstein 7-X und dem Reaktorkonzept HSR (Außen).

Literatur

- [1] S.S. Abdullaev, K.H. Finken and K.H. Spatschek, Asymptotical and mapping methods in study of ergodic divertor magnetic field in a toroidal system. *Phys. Plasmas* **6**, 153 (1999).
- [2] T.M. Antonsen, Stability of bound eigenmode solutions for the collisionless universal instability. *Phys. Rev. Lett.* **41**, 33 (1978).
- [3] T.M. Antonsen and B. Lane, Kinetic equations for low frequency instabilities in inhomogenous plasmas. *Phys. Fluids* **23**, 1205 (1980).
- [4] M.A. Beer and G.W. Hammett, Bounce averaged trapped electron fluid equations for plasma turbulence. *Phys. Plasmas* **3**, 4018 (1996).
- [5] M.A. Beer, S.C. Cowley and G.W. Hammett, Field-aligned coordinates for nonlinear simulations of tokamak turbulence. *Phys. Plasmas* **2**, 2687 (1995).
- [6] M.A. Beer and G.W. Hammett, Toroidal gyrofluid equations for simulations of tokamak turbulence. *Phys. Plasmas* **3**, 4046 (1996).
- [7] C.D. Beidler and W.D. D'haeseleer, A general solution of the ripple-averaged kinetic equation. *Plasma Phys. Control. Fusion* **37**, 463 (1995).
- [8] C. Beidler, G. Grieger, F. Herrnegger *et al.*, Physics and engineering design for Wendelstein VII-X. *Fusion Technol.* **17**, 148 (1990).
- [9] C.M. Bender and S.A. Berk, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw-Hill, New York 1978.
- [10] A. Bhattacharjee, J.E. Sedlak, P.L. Similon, M.N. Rosenbluth and D.W. Ross, Drift waves in a straight stellarator. *Phys. Fluids* **26**, 880 (1983).
- [11] R.J. Bickerton, The purpose, status and future of fusion research. *Plasma Phys. Control. Fusion* **35** B3 (1993).
- [12] R.J. Bickerton, Magnetic perturbations and the transport of energy and particles in tokamaks. *Plasma Phys. Control. Fusion* **39**, 339 (1997).
- [13] J. Bleuel, Elektrostatische Turbulenz am Plasmarand des Stellarators Wendelstein 7-AS. Institutsreport IPP III/235, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Oktober 1998. (Dissertation)
- [14] J. Bleuel, M. Endler and W7-AS Team, The contribution of edge fluctuations to anomalous transport in W7-AS. *Proc. 26th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics*, Maastricht (1999).
- [15] A.H. Boozer, Plasma equilibrium with rational magnetic surfaces. *Phys. Fluids* **24**, 1999 (1981).
- [16] A.H. Boozer, Stellarator optimization. *Plasma Phys. Reports* **23**, 483 (1997).
- [17] A.H. Boozer, What is a stellarator? *Phys. Plasmas* **5**, 1647 (1998).

- [18] S.I. Braginskii, Transport processes in a plasma. In: M.A. Leontovich (ed.), *Reviews of Plasma Physics I*, 203. Consultants Bureau, New York 1965.
- [19] R. Brakel, M. Anton, J. Baldzuhn *et al.*, Confinement in W7-AS and the role of radial electric field and magnetic shear. *Plasma Phys. Control. Fusion* **39**, B273 (1997).
- [20] N. Bretz, Diagnostic instrumentation for microturbulence in tokamaks. *Review of Scientific Instruments* **68**, 2927 (1997).
- [21] K.H. Burrell, Effects of $E \times B$ velocity shear and magnetic shear on turbulence and transport in magnetic confinement devices. *Phys. Plasmas* **4**, 1499 (1997).
- [22] K.H. Burrell, Tests of causality: Experimental evidence that sheared ExB flow alters turbulence and transport in tokamaks. *Phys. Plasmas* **6**, 4418 (1999).
- [23] J.R. Cary and R.G. Littlejohn, Noncanonical Hamiltonian mechanics and its application to magnetic field line flow. *Annals of Physics* **151**, 1 (1983).
- [24] L. Chen, P.N. Guzdar, J.Y. Hsu, P.K. Kaw, C. Oberman and R. White, Theory of dissipative drift instabilities in sheared magnetic fields. *Nuclear Fusion* **19**, 373 (1979).
- [25] L. Chen, M.S. Chance and C.Z. Cheng, Absolute dissipative drift-wave instabilities in tokamaks. *Nuclear Fusion* **20**, 901 (1980).
- [26] P. Colella, Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws. *Journ. Comp. Phys.* **87**, 171 (1990).
- [27] J.W. Connor, R.J. Hastie and J.B. Taylor. Shear, periodicity, and plasma ballooning modes. *Phys. Rev. Lett.* **40**, 396 (1978).
- [28] P. Cuthbert, J.L.V. Lewandowski, H.J. Gardner *et al.*, Toroidally localized and nonlocalized ballooning instabilities in a stellarator. *Phys. Plasmas* **5**, 2921 (1998).
- [29] R.L. Dewar and A.H. Glasser, Ballooning mode spectrum in general toroidal systems. *Phys. Fluids* **26**, 3038 (1983).
- [30] R.L. Dewar, D.A. Monticelli and W.N.C. Sy, Magnetic coordinates for equilibria with a continuous symmetry. *Phys. Fluids* **27**, 1723 (1984).
- [31] R. L. Dewar and S. R. Hudson, Stellarator symmetry. *Physica D* **112**, 275 (1997).
- [32] W.D. D'haeseleer, W.N.G. Hitchon, J.D. Callen and J.L. Shohet, *Flux Coordinates and Magnetic Field Structure*, Springer (Berlin 1991).
- [33] N. Dominguez, B.A. Carreras, V.E. Lynch and P.H. Diamond, Dissipative trapped electron modes in $l=2$ toratrons. *Phys. Fluids B* **4**, 2894 (1992).
- [34] A. Donne, Diagnostics for fluctuation measurements. *Fusion Technology* **29**, 352 (1996).
- [35] W. Dorland and G.W. Hammett, Gyrofluid turbulence models with kinetic effects. *Phys. Fluids B* **5**, 812 (1993).
- [36] J.F. Drake, A. Zeiler and D. Biskamp, Nonlinear self-sustained drift-wave turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4222 (1995).
- [37] M. Endler, Turbulent SOL transport in stellarators and tokamaks. *Journal of Nuclear Materials*, 266 (1999).
- [38] M. Fivaz, T.M. Tran, K. Appert, J. Vaclavik and S.E. Parker, Stabilization of ion-temperature-gradient driven tokamak modes by magnetic-field gradient reversal. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3471 (1997).

- [39] T.K. Fowler, Nuclear power - fusion. *Rev. Mod. Phys.* **71**, S456 (1999).
- [40] J.P. Freidberg, *Ideal Magnetohydrodynamics*. Plenum Press, New York 1987.
- [41] A.A. Galeev, V.N. Oraevskii, and R.Z. Sagdeev, Sov Phys JETP 17 (1963) 615.
- [42] X. Garbet, Towards a full self-consistent numerical simulation of tokamak plasma turbulence. *Plasma Phys. Control. Fusion* **39**, B91 (1997).
- [43] C. Gourdon, D. Marty, E.K. Maschke and J.P. Dumont, *Proc. 3rd Int. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research*, Novosibirsk 1968, 847, in: International Atomic Energy Agency, Vienna (1969).
- [44] G. Grieger, W. Lotz, P. Merkel *et al.*, Physics optimization of stellarators. *Phys. Fluids B* **4**, 2081 (1992).
- [45] O. Grulke, T. Klinger and A. Piel, Experimental study of the dynamics of conditionally averaged structures in weakly developed electrostatic turbulence. *Phys. Plasmas* **6**, 788 (1999).
- [46] P.N. Guzdar, L. Chen, P.K. Kaw and C. Oberman, Effect of magnetic shear on dissipative drift-wave instabilities. *Phys. Rev. Lett.* **40**, 1566 (1978).
- [47] M. Häse, M. Hirsch and H.J. Hartfuss, Temperature fluctuations and their correlation with density fluctuations in W7-AS. *Review of Scientific Instruments* **70**, 1014 (1999).
- [48] K. Hallatschek, A. Zeiler, D. Biskamp, J.F. Drake and B.N. Rogers, Nonlocal three-dimensional simulations of plasma edge turbulence. *Proc. 1998 Int. Congress on Plasma Physics & 25th EPS Conf. on Contr. Fusion and Plasma Physics*, Praha (1998).
- [49] S. Hamada, Hydromagnetic equilibria and their proper coordinates. *Nuclear Fusion* **2**, 23 (1962).
- [50] R.W. Hamming, *Numerical methods for scientists and engineers*. McGraw-Hill, New York 1962.
- [51] H.J. Hartfuss, M. Endler, V. Erckmann *et al.*, Physics studies in W7-AS, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **36**, B17 (1994).
- [52] H.J. Hartfuss, RF techniques in plasma diagnostics. *Plasma Phys. Control. Fusion* **40**, A231 (1998).
- [53] A. Hasegawa and M. Wakatani, Plasma edge turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **50**, 682 (1983).
- [54] R.D. Hazeltine and J.D. Meiss, *Plasma confinement*. Addison-Wesley, Redwood City, 1992.
- [55] C. Hidalgo, Edge turbulence and anomalous transport in fusion plasma. *Plasma Phys. Control. Fusion* **37**, A53 (1995).
- [56] F.L. Hinton and C.W. Horton, Amplitude limitation of a collisional drift wave instability. *Phys. Fluids* **14**, 116 (1971).
- [57] A. Hirose, L. Zhang and M. Elia, Ion temperature gradient-driven ballooning mode in tokamaks, *Phys. Plasmas* **2**, 859 (1995).
- [58] M. Hirsch, P. Amadeo, M. Anton *et al.*, Operational range and transport barrier of the H-mode in the stellarator W7-AS. *Plasma Phys. Control. Fusion* **40**, 631 (1998).
- [59] S.P. Hirshman *et al.*, *Comput. Phys. Comm.* **43**, 143 (1986).
- [60] J.V. Hofmann, J. Baldzuhn, R. Brakel *et al.*, Stellarator optimization studies in

- W7-AS, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **38**, A193 (1996).
- [61] C.W. Horton and L.E. Reichl (eds.), *Statistical physics and chaos in fusion plasmas*. John Wiley & Sons, New York 1984.
- [62] W. Horton, Drift waves and transport. *Rev. Mod. Phys.* **71**, 735 (1999).
- [63] K. Itoh, S-I. Itoh and A. Fukuyama, *Transport and structural formation in plasmas*. Institute of Physics Publishing, Bristol 1999.
- [64] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [65] F. Jenko and B. Scott, Effect of nonlinear electron Landau damping in collisionless drift-wave turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4883 (1998).
- [66] F. Jenko, Electron-temperature-gradient-driven turbulence. *Proc. 41st Annual Meeting of the Division of Plasma Physics*, American Physical Society, Seattle (Nov 1999).
- [67] B.B. Kadomtsev and O.P. Pogutse, Dissipative trapped-particle instability in a dense plasma. *Soviet Physics Doklady* **14**, 470 (1969).
- [68] K. Kaneko and R.B. Bagley, Arnold diffusion, ergodicity and intermittency in a coupled standard mapping. *Physics Letters* **110A**, 435 (1985).
- [69] A. Kendl and H. Wobig, Geometric effects on drift wave stability in advanced stellarators. *Phys. Plasmas* **6**, 4714 (1999).
- [70] J. Kiblinger, C.D. Beidler, E. Strumberger and H. Wobig, Low Aspect Ratio Helias Configurations. *Proceedings of the 12th Int. Stellarator Workshop*, Madison 1999.
- [71] M. Kotschenreuther, W. Dorland, M.A. Beer and G.W. Hammett, Quantitative predictions of tokamak energy confinement from first-principles simulations with kinetic effects. *Phys. Plasmas* **2**, 2381 (1995).
- [72] Krall & Trivelpiece, *Principles of plasma physics*. McGraw-Hill, New York 1973.
- [73] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Course of theoretical physics (Vol 3)*. Pergamon Press, Oxford 1958.
- [74] G.S. Lee and P.H. Diamond, Theory of ion-temperature-gradient-driven turbulence in tokamaks. *Phys. Fluids* **29**, 3291 (1986).
- [75] J.L.V. Lewandowski, Collisional drift waves in stellarator geometry. *Phys. Plasmas* **4**, 4023 (1997).
- [76] J.L.V. Lewandowski, A simple model for collisional drift waves. *Can. J. Phys.* **75**, 891 (1997).
- [77] J.L.V. Lewandowski, Collisionless gyro-kinetics in stellarator geometry. *Plasma Phys. Control. Fusion* **40**, 283 (1998).
- [78] J.L.V. Lewandowski, Fluid/gyro-kinetic simulations in a stellarator. *Il Nuovo Cimento* **20**, 1493 (1998).
- [79] J.L.V. Lewandowski and R.M. Ellem, Effect of radial wavevector on collisional drift waves in a toroidal heliac. *Aust. J. Phys.* **52**, 71 (1999).
- [80] A.J. Lichtenberg and M.A. Liebermann, *Regular and chaotic dynamics*. Springer-Verlag, New York 1992.
- [81] P.C. Liewer, Measurements of microturbulence in tokamaks and comparison with theories of turbulence and anomalous transport. *Nucl. Fusion* **25**, 543 (1985).
- [82] R.G. Littlejohn, Magnetic field lines, Hamiltonian mechanics, and symmetries and invariants. In Ref. [61].
- [83] H. Maassberg, R. Brakel, R. Burhenn *et al.*, Transport in stellarators. *Plasma*

- Phys. Contr. Fusion* **35**, B319 (1993).
- [84] W.M. Manheimer and C.N. Lashmore-Davies, *MHD and Microinstabilities in Confined Plasma*, Adam Hilger (Bristol) 1989.
- [85] M.A. McGrath, Io and the plasma torus. *Science* **278**, 237 (1997). [Siehe auch die Schwerpunktausgabe zur Galileo-Mission, in *Science*, **274**, No. 5286 (18.10.1996)]
- [86] A.B. Mikhailovskii, *Instabilities in an confined plasma*. Institute of Physics Publishing, Bristol 1998.
- [87] S.S. Moiseev and R.Z. Sagdeev, On the bohm diffusion coefficient. *Soviet Phys-JETP* **17**, 515 (1963).
- [88] J. Nührenberg and R. Zille, Stable stellarators with medium β and aspect ratio. *Phys. Lett. A* **114**, 129 (1986).
- [89] S.P. Hirshman and K. Molvig, Turbulent destabilization and saturation of the universal drift mode in a sheared magnetic field. *Phys. Rev. Lett.* **42**, 648 (1979).
- [90] J. Nührenberg, P. Merkel, C. Schwab and U. Schwenn, MHD-theoretical aspects of stellarators. *Phys. Control. Fusion* **35**, B115 (1993).
- [91] M. Ottaviani, M.A. Beer, S.C. Cowley, W. Horton and J.A. Krommes, Unanswered questions in ion-temperature-gradient-driven turbulence. *Phys. Reports* **283**, 121 (1997).
- [92] M. Ottaviani, G. Manfredi, The gyro-radius scaling of ion thermal transport from global numerical simulations of ion temperature gradient driven turbulence. *Phys. Plasmas* **6**, 3267 (1999).
- [93] L.D. Pearlstein and H.L. Berk, Universal eigenmode in strongly sheared magnetic field. *Phys. Rev. Lett.* **23**, 320 (1969).
- [94] M.A. Pedrosa, C. Hidalgo, B.A. Carreras *et al.*, Empirical similarity of frequency spectra of the edge-plasma fluctuations in toroidal magnetic-confinement systems. *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3621 (1999).
- [95] M. Persson, J.L.V. Lewandowski, and H. Nordman, Drift waves in helical symmetry. *Phys. Plasmas* **3**, 3720 (1996).
- [96] M. Persson and J.L.V. Lewandowski, Localization of drift waves in a helically symmetric stellarator model. *Plasma Phys. Control. Fusion* **39**, 1941 (1997).
- [97] D. Pfirsch und A. Schlüter, Der Einfluß der elektrischen Leitfähigkeit auf das Gleichgewichtsverhalten von Plasmen niedrigen Drucks in Stellaratoren. Institutsreport, Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München 1962.
- [98] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling *et al.*, *Numerical Recipes in C*. Cambridge Univ.Press, Cambridge, 1992.
- [99] V.D. Pustovitov and V.D. Shafranov, Equilibrium and stability of plasmas in stellarators. In: *Reviews of Plasma Physics* **15** (p. 163), Ed. B.B. Kadomtsev, Plenum Publishing, New York 1990.
- [100] H. Renner, W7AS Team, NBI Group, ICF Group, and ECRH Group, Initial operation of the Wendelstein 7-AS advanced stellarator. *Plasma Phys. Controlled Fusion* **31**, 1579 (1989).
- [101] G. Rewoldt, W.M. Tang and M.S. Chance, Electromagnetic kinetic toroidal eigenmodes for general magnetohydrodynamic equilibria. *Phys. Fluids* **25**, 480 (1982).
- [102] P.H. Rutherford and E.A. Frieman, Drift instabilities in general magnetic field configurations. *Phys. Fluids* **11**, 569 (1968).

- [103] B.D. Scott, Self-sustained collisional drift-wave turbulence in a sheared magnetic field. *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3289 (1990).
- [104] B.D. Scott, The mechanism of self-sustainment in collisional drift-wave turbulence. *Phys. Fluids B* **4**, 2468 (1992).
- [105] B.D. Scott, Three dimensional computation of collisional drift wave turbulence and transport in tokamak geometry. *Plasma Phys. Control. Fusion* **39**, 471 (1997).
- [106] B.D. Scott, Three-dimensional computation of drift Alfvén turbulence. *Plasma Phys. Control. Fusion* **39**, 1635 (1997).
- [107] B.D. Scott, Electromagnetic gyrofluid turbulence in tokamak edge geometries. In: *Theory of Fusion Plasmas* (Editrice Compositori, Bologna, 1998, J. Connor, E. Sindoni, and J. Vaclavik, eds), pp 359-372.
- [108] B.D. Scott, Global consistency for thin flux tube treatments of toroidal geometry. *Phys. Plasmas* **5**, 2334 (1998).
- [109] B.D. Scott, Computation of warm-ion drift Alfvén turbulence. *Contrib. Plasma Phys.* **38**, 171 (1998).
- [110] K.C. Shaing, A.Y. Aydemir, W.A. Houlberg, M.C. Zarnstorff, Theory of enhanced reversed shear mode in tokamaks. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5353 (1998).
- [111] G.D. Smith, *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. Clarendon Press, Oxford 1978.
- [112] K.H. Spatschek, *Theoretische Plasmaphysik*. Teubner, Stuttgart 1990.
- [113] S.T. Tsai, F.W. Perkins and T.H. Stix, Thermal conductivity and low frequency waves in collisional plasma. *Phys. Fluids* **13**, 2108 (1970).
- [114] K.R. Sreenivasan, Fluid turbulence. *Rev. Mod. Phys.* **71**, S383 (1999).
- [115] J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to numerical analysis*. Springer-Verlag, New York 1980.
- [116] U. Stroth, A comparative study of transport in stellarators and tokamaks. *Plasma Phys. Control. Fusion* **40**, 9 (1998).
- [117] E. Strumberger, H. Wobig, J. Kisslinger and C. Nührenberg, Equilibrium and Stability Properties of a Helias Reactor. *Proc. 26th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics*, Maastricht (1999).
- [118] J.B. Taylor and R.J. Hastie, Stability of general plasma equilibria. *Plasma Physics* **10**, 479 (1968).
- [119] H. Thomsen, J. Bleuel, M. Endler *et al.*, On the parallel correlation of electrostatic fluctuations in the edge plasma of W7-AS and JET. *Proc. 26th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics*, Maastricht (1999).
- [120] F. Wagner, J. Badzuhn, R. Brakel *et al.*, H-mode of W7-AS stellarator. *Plasma Phys. Control. Fusion* **36**, A61 (1994).
- [121] F. Wagner, Topics in toroidal confinement. *Plasma Phys. Controlled Fusion* **39** A23 (1997).
- [122] M. Wakatani, *Stellarator and Heliotron Devices*. Oxford University Press, New York 1998.
- [123] R.E. Waltz and A.H. Boozer, Local shear in general magnetic stellarator geometry. *Phys. Fluids B* **5**, 2201 (1993).
- [124] J. Wesson, *Tokamaks*. Clarendon Press, Oxford 1987.

- [125] H. Wobig, The theoretical basis of a drift-optimized stellarator reactor. *Plasma Phys. Control. Fusion* **35**, 903 (1993).
- [126] H. Wobig, Theory of advanced stellarators. *Plasma Phys. Control. Fusion* **41**, A159 (1999).
- [127] H. Wobig and D. Pfirsch, On Guiding Center Orbits in Stellarator Configurations. *Proceedings of the 12th Int. Stellarator Workshop*, Madison 1999.
- [128] X.Q. Xu, R.H. Cohen, G.D. Porter *et al.*, Turbulence in boundary plasmas. *Journal of Nuclear Materials* **266**, 993 (1999).
- [129] A. Zeiler, D. Biskamp, J.F. Drake and B.N. Rogers, Transition from resistive ballooning to η_i driven turbulence in tokamaks. *Phys. Plasmas* **5**, 2654 (1998).
- [130] A. Zeiler, Tokamak edge turbulence. Institutsreport, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, IPP 5/88, Juli 1999.
- [131] S. Zoletnik, M. Anton, M. Endler, S. Fiedler, M. Hirsch, K. McCormick, J. Schweinzer, Density fluctuation phenomena in the scrape-off layer and edge plasma of the Wendelstein 7-AS stellarator. *Phys. Plasmas* **6**, 4239 (1999).

Danksagung

Die vorliegende Dissertation wurde am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik (IPP) in Garching bei München im Zeitraum zwischen Februar 1997 und Dezember 1999 durchgeführt.

Mein ausdrücklicher Dank gilt dabei Dr. Horst Wobig für die Vergabe des Themas und hervorragende Betreuung der Arbeit, sowie für vielfältige Diskussionen auch darüber hinaus zu allen Bereichen der Stellaratorphysik.

Den Professoren Dr. Dieter Pfirsch und Dr. Friedrich Wagner bin ich für die Vertretung der Arbeit von Seiten des IPP gegenüber der Technischen Universität München, der Vergabe des Promotionsstipendiums, und deren Unterstützung bei der Durchführung sehr verbunden.

Bei Prof. Dr. Friedrich Wagner und Prof. Dr. Günter Grieger, als deren Leiter stellvertretend für alle Mitarbeiter der Bereiche E3 und ehemals E2, möchte ich mich für die freundliche Aufnahme und gute Zusammenarbeit bedanken. Ganz besonders hervorheben möchte ich in diesem Zusammenhang die angenehme und motivierende Atmosphäre in der Stellarator Systemstudien Gruppe, wozu alle deren Mitglieder Dr. Craig Beidler, Dr. Ewald Harmeyer, Dr. Franz Herrnegger, Hr. Johann Kißlinger, Fr. Irmfriede Ott, Dr. Irina Sidorenko, Dr. Erika Strumberger und Dr. Alexander Zolotukhin unter Leitung von Dr. Horst Wobig beigetragen haben.

Dr. Bruce Scott will ich ganz besonders für die Anvertraung seiner Simulationscodes DALF3 und GYRO und für zahllose Gespräche zur Physik der Plasmaturbulenz, zu numerischen Methoden und zur Behandlung der Metrik in den Simulationscodes danken. Bei Dr. Erika Strumberger und Hr. Johann Kißlinger bedanke ich mich für die Überlassung numerisch berechneter Koordinaten von Plasmagleichgewichten der Helias-Konfigurationen. Von der experimentellen Seite möchte ich besonders die gute Zusammenarbeit und Diskussionen mit Dr. Michael Endler und Dr. Johannes Bleuel hervorheben.

Verbunden bin ich außerdem Fr. Brigitte Fox und Hr. Alexander Geier für die kritische Durchsicht des Manuskripts und Dr. Bruce Scott für hilfreiche Kommentare zu einzelnen Kapiteln.