

**Physik-Department**  
der Technischen Universität München  
(Lehrstuhl: Univ.-Prof. Dr. F. Schwabl)

**Skalenverhalten  
und Strukturbildung  
am Beispiel eines Waldbrandmodells**

**Klaus Schenk**

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Physik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. E. Sackmann

Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr. F. Schwabl  
2. Univ.-Prof. Dr. M. Kleber

Die Dissertation wurde am 1.8.2001 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Physik am 24.8.2001 angenommen.



Ich möchte mich bei Herrn Prof. Dr. Franz Schwabl für die interessante Themenstellung und die sehr zuverlässige und großzügige Unterstützung bedanken. Herrn Prof. Dr. Franz Schwabl hat ein sehr angenehmes Arbeitsumfeld geschaffen und mir die Freiheit gegeben meinen Ideen nachzugehen. Mit seinen Anregungen und Kommentaren hat er meine Arbeit unterstützt, und mich stets ermuntert und unterstützt, an Tagungen teilzunehmen.

Sehr hilfreich war die Zusammenarbeit mit Frau Barbara Drossel, deren Ideen wesentlich zu Kapitel 2 und 3 beitrugen und deren Kritik sehr hilfreich bei der Einordnung von Kapitel 4 war. Ich möchte mich auch für die Zusammenarbeit mit Herrn Siegfried Clar bedanken, der mit grundlegende Ideen zu allen Kapiteln diese Arbeit beitrug, mir sehr geholfen hat bei vielen technischen und organisatorischen Fragen und mich sehr angenehm in das Thema eingeführt hat.

Frau Elisabeth Jörg-Müller möchte ich für ihre immer freundliche, kollegiale und zuverlässige Hilfe bei vielen Problemen danken, die im Laufe dieser Arbeit auftraten.

Ich bin auch sehr dankbar, dass mein Freunde und Kollegen Peter Maier, Herbert Müller, Mustafa Riza, Bernhard Kaufmann, Markus Hummel, Jan Wilhelm, Klaus Kroy, David Kreil, Michael Bulenda und Wilmut Gasser sowie viele andere, ein außerordentlich angenehmes und auch anregendes Arbeitsumfeld geschaffen haben und teilweise existenzielle Beiträge zu dieser Arbeit geleistet haben.

Schließlich möchte ich meinen Eltern Trude und Horst Schenk danken, ohne deren Unterstützung mein Studium nicht möglich gewesen wäre.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
1.1	Definition des Modells . . . . .	11
1.2	Grundlegende Eigenschaften des Modells . . . . .	13
1.2.1	Kritische Exponenten und Skalenrelationen . . . . .	13
1.2.2	Dimensions- und detailabhängige Eigenschaften . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Finite-size Effekte im zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodell</b>	<b>20</b>
2.1	Einführung . . . . .	21
2.2	Das verwendete Modell . . . . .	22
2.3	Das Waldbrandmodell für kleine Füllraten $s_0$ . . . . .	23
2.4	Ungewöhnliches Skalenverhalten im Waldbrandmodell . . . . .	24
2.5	Ergebnisse der Computersimulationen . . . . .	28
2.5.1	Linien konstanter Walddichte . . . . .	29
2.5.2	Die Feuergrößenverteilung . . . . .	32
2.6	Zusammenfassung der Ergebnisse: finite-size Effekte des Waldbrandmodells . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Das selbstorganisiert kritische Waldbrandmodell auf großen Längenskalen</b>	<b>41</b>
3.1	Einführung . . . . .	41
3.2	Skaleneigenschaften des Waldbrandmodells . . . . .	43
3.2.1	Zwei Feuertypen bestimmen die Dynamik des Waldbrandmodells . . . . .	43
3.2.2	Das Skalenverhalten . . . . .	46
3.2.3	Der Exponent $\delta$ . . . . .	50
3.3	Überlagerung der unterschiedlichen Feuertypen . . . . .	51
3.4	Ein coarse-grained Modell . . . . .	54
3.4.1	Definition des Modells . . . . .	54
3.4.2	Eigenschaften des coarse-grained Modells . . . . .	55

3.5	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Renormierung des Waldbrandmodells</b>	<b>63</b>
4.1	Einleitung . . . . .	63
4.2	Ein cell-to-site Verfahren und die Renormierung der Größen $f$ und $p$ . . . . .	64
4.3	Anforderungen an ein Renormierungsschema zur Beschreibung des $2d$ SOC Waldbrandmodells . . . . .	67
4.4	Die Renormierungsgleichungen für beliebigen Zellengrößen . . . . .	70
4.5	Die Auswertung der Renormierungsgleichungen . . . . .	74
4.6	Bewertung der Ergebnisse und der Methodik des neuen Renormierungsschemas . . . . .	79
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>86</b>
A.1	Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Walddichte . . . . .	86
A.2	Herleitung des Zeitintervalls zwischen zwei Feuern . . . . .	91
A.3	Renormierung in $1d$ . . . . .	92
A.4	Tabelle einiger kritischer Exponenten . . . . .	95
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>96</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Wir sind umgeben von selbstorganisierten komplexen Strukturen. Ob man unseren Planeten mit seinem vielgestaltigen Wettersystem betrachtet, Gebirgsprofile, Fjorde oder selbstreplizierende und anpassungsfähige biologische Systeme, unter die letztendlich auch wir Menschen selber fallen. Diese Strukturen entstehen in der Regel in offenen, getriebenen und dissipativen Systemen und haben unterschiedlich große Stabilität. Für viele dieser Phänomene existiert keine physikalische Beschreibung, die mit einiger Detailtreue die Ausbildung der betreffenden Strukturen beschreibt. Es gibt viele Ansatzpunkte, um derartige Beschreibungen zu modellieren. Um viele dieser Ansatzpunkte hat sich eine rege Forschungstätigkeit entwickelt. Eine der auch populärwissenschaftlich bekannten Angehensweisen ist die, die Formenvielfalt von Fraktalen [1, 2, 3] zu nutzen, um die Formenvielfalt der Natur mittels der mathematischen oder algorithmischen Modelle zu beschreiben, die Fraktale generieren. Obwohl sich mit den Generatoren der Fraktale in der Tat derart bestechend realistische Bilder generieren lassen, dass diese Methoden ein wichtiger Bestandteil von Computerprogrammen sind, die für Filme oder Simulationen realistische Landschaften erschaffen, ist die bloße Ähnlichkeit der mathematisch-algorithmischen und der natürlichen „Endprodukte“ kein zufriedenstellendes Modell, das im physikalischen Sinn die Entstehung der Strukturen erklärt, selbst dann nicht, wenn es unmöglich ist, eine fraktal generierte Landschaft von einer echten zu unterscheiden. Daher liegt es nahe, gemeinsame Eigenschaften der Menge an unterschiedlichen Strukturen zu suchen und Modelle zu konstruieren und zu studieren, die diese Eigenschaften reproduzieren können, um auf diese Weise mehr mechanistische Erkenntnisse zur Strukturbildung zu gewinnen. Recht breite Akzeptanz findet die durch zahlreiche Beobachtungen untermauerte Forderung, dass eine dieser gemeinsamen Eigenschaften von vielen komplexen selbstorganisierten Strukturen das häufige Auftreten von Potenzgesetzen ist, durch die Meßgrößen

dieser Strukturen beschrieben werden. Ein Beispiel für durch Potenzgesetze beschriebene Meßgrößen fraktaler Gebilde wie Fjordstrukturen ist die sogenannte fraktale Dimension, die den durchschnittlichen Radius eines auf einem Gitter quantisierten Fraktals durch ein Potenzgesetz mit der Anzahl der Gitterplätze verknüpft, die das Fraktal bilden. Beispiele für in der Natur realisierte fraktale Strukturen finden sich in [1, 2, 3]. Das Leistungsspektrum zeitabhängiger Signale ist ein weiteres Beispiel für eine Meßgröße, die oft durch ein Potenzgesetz beschrieben wird. Von der Lichtintensität von Quasaren, dem Ladungstransport durch Widerstände bis zu Schwankungen am Börsenindex und dem Insulinbedarf eines Diabetikers treten Leistungsspektren auf, die bei kleinen Frequenzen  $f$  durch Potenzgesetze der Form  $1/f^\alpha$  beschreiben werden, wobei  $\alpha$  oft nahe bei eins liegt. Daher wird dieses Verhalten  $1/f$  Rauschen genannt. Weitere Beispiele für Systeme mit  $1/f$  Rauschen finden sich in [4, 5, 6]. Ein prominenter Vertreter einer durch ein Potenzgesetz beschriebenen Meßgröße ist die Häufigkeitsverteilung von Erdbeben, die durch das das Gutenberg-Richter Gesetz [7] beschrieben wird.

Die oben angesprochenen Modelle, die sich von selbst in einen Zustand bringen, in dem wichtige Kenngrößen des Modells durch Potenzgesetze beschreiben werden, heißen „selbstorganisiert kritische“ (SOC) Modelle [8, 9]. In der vorliegenden Arbeit werden diese Modelle und insbesondere das sogenannte Waldbrandmodell untersucht. 1987 wurden das Konzept der selbstorganisierten Kritikalität durch Bak, Tang und Wiesenfeld [10, 11] am Beispiel des wohl bekanntesten der SOC Modelle, dem Sandhaufenmodell, eingeführt. Beim diesem Modell wird die Entwicklung eines Sandhaufens modelliert, auf den langsam Sand herabrieselt. Wenn die Steigung des Sandhaufens an einer Stelle zu groß wird, relaxiert das System mit dem Abgang einer Sandlawine. Das System bringt sich von selbst in einen Zustand, der durch eine potenzgesetzartige Lawinenverteilung charakterisiert wird. Durch die Untersuchung derartiger Modelle, die sich, wie natürlichen Phänomene auch, von selber in einen Zustand bringen, der durch Potenzgesetze charakterisiert wird, (einen sogenannten kritischen Zustand), kann man hoffen, mehr über den Mechanismus der Strukturbildung zu erfahren. Das Waldbrandmodell ist ein SOC Modell, bei dem auf ein  $d$  dimensionalen Gitter Bäume „eingestreut“ werden, die von Zeit zu Zeit von einem Blitz getroffen werden. Das so entstandene Feuer kann über benachbarte Bäume weiterpropagieren und so ganze Baumcluster abbrennen. Auch dieses Modell besitzt einen weiten Parameterbereich, in dem es sich von selbst in einen kritischen Zustand bringt.

Diese Angehensweise zur Modellierung einer Theorie zur Strukturbildung ist nicht unumstritten. Die Potenzgesetze und die fraktalen Strukturen sind beispielsweise bei natürlichen Phänomenen nicht über beliebig viele Größenordnungen beliebig genau realisiert. Da aber mit kritischen Modellen durch-

aus applikationsbezogene und vielbeachtete Ergebnisse erzielt wurden wie zum Beispiel bei den skalenfreien Netzwerken [12, 13], erscheint es durchaus lohnenswert zu untersuchen, welches Spektrum an Eigenschaften SOC Modelle beschreiben können.

In der vorliegenden Arbeit wird daher exemplarisch am Waldbrandmodell untersucht, was „kritisches Verhalten“ bei SOC Modellen bedeutet, inwieweit dieses Verhalten mit der Phänomenologie gleichgewichtskritischer Phänomene vergleichbar ist, und inwieweit Methoden aus der Gleichgewichtsphysik übernommen werden können zur Beschreibung von selbstorganisiert kritischen Systemen. Dazu wird das Waldbrandmodell in bisher nicht untersuchten Grenzbereichen simuliert und ausgewertet, und dieses Verhalten analytisch erklärt. Dadurch gelingt es eine Verletzung des konventionellen finite-size-Skalenverhaltens beim Waldbrandmodell nachzuweisen. Es wird gezeigt, dass das ungewöhnliche Skalenverhalten des Modells auf die Existenz zweier unterschiedlicher Feuer zurückzuführen ist. Darauf aufbauend wird eine neue Skalentheorie aufgestellt, die die Existenz dieser zwei Feuertypen berücksichtigt, und das asymptotische Skalenverhalten eines Feuertyps wird analytisch hergeleitet. Um die Ergebnisse zu verifizieren, und das Skalenverhalten für große Korrelationslängen zu beschreiben wird ein sogenanntes coarse-grained Waldbrandmodell konstruiert, das erstmals simulationstechnisch Einblicke in das Verhalten des Waldbrandmodells auf großen Längenskalen gewährt. Schließlich wird in Renormierungsverfahren entwickelt, dass die zwei Feuertypen und die fleckenartige Struktur des Waldbrandmodells berücksichtigt und das Selbstähnlichkeitsproblem von Renormierungsverfahren beim Waldbrandmodell löst. Dazu wird gezeigt und im Renormierungsverfahren ausgenutzt, dass bei eine geeignete Superposition von Perkolationssystemen wesentliche Details von Waldbrandsystemen reproduziert werden können ohne wesentliche Information bei der Überlagerung zu verlieren. Schließlich wird die Selbstorganisation der Walddichtevertelung in das Renormierungsschema eingebracht, und so ein Verfahren angeboten, dass konzeptuelle Mängel früherer Verfahren beseitigt, und die Resultate der errechneten Exponenten wesentlich verbessert. Schließlich wird die fraktale Struktur einiger Peaks in der Walddichtevertelung des Modells analytisch erklärt. Zur Durchführung und Auswertung der Simulationen wurden diverse rechengeschwindigkeitsverbessernde Modellmodifikationen entwickelt, erprobt und verwendet und gegebenenfalls Korrekturterme abgeleitet (siehe zum Beispiel in Abschnitt 2.5.1). Es wurden umfangreiche Programme zur Simulation und Auswertung angefertigt. Alle Ergebnisse wurden mit analytischen Methoden oder Plausibilitätsüberlegungen gegengetestet.

In Abschnitt 4.6 sind Referenzen zu den Punkten der folgenden Arbeit aufgelistet, in denen wesentliche Schlußfolgerungen dieser Arbeit illustrierend

zusammengefaßt sind.

Die inhaltliche Struktur dieser Arbeit wird im folgenden skizziert:

In diesem Kapitel wird das Waldbrandmodell und dessen Meßgrößen zunächst eingeführt und einige aus der Literatur bekannten Eigenschaften des Modells behandelt. In Kapitel 2 wird das finite-size Skalenverhalten des Waldbrandmodells untersucht und gezeigt, dass sich das System von einem Zustand starker räumlicher Inhomogenitäten und verschwindenden zeitlichen Fluktuationen umordnet zu einem räumlich sehr homogenen Zustand, der stark in der Zeit fluktuiert. Diese Form der Restrukturierung unterscheidet das Waldbrandmodell von gleichgewichtskritischen Phänomenen, durch deren finite-size Skalenverhalten die Werte von kritischen Exponenten ausgedehnter Systeme aus Meßdaten kleiner Systeme ermittelt werden können. Beim Waldbrandmodell ist das in dieser Form nicht möglich. In Kapitel 3 wird das Verhalten des Waldbrandmodells auf großen Skalen untersucht. Es ergibt sich, dass das Modell durchaus durch Potenzgesetze charakterisiert werden kann aber mehr als eine Längenskala im kritischen Zustand vorliegt. Daher wird die Beschreibung des Skalenverhaltens mancher Größen, wie der Feuergößenverteilung komplizierter. In Kapitel 4 wird schließlich das Renormierungsverfahren vorgeschlagen und diskutiert, mit dem sich fundamentale Eigenschaften des Modells beschreiben lassen.

Da computersimulationsorientierte Auswertungen in einem unendlich großen Parameterraum stets die Gefahr bergen, dass wesentliche Effekte nicht erkannt werden, weil deren Berechnung außerhalb der Rechenkraft verfügbarer Anlagen stehen, oder weil sie in einem nicht untersuchten Teil des Parameterraums auftreten, wurde bei der Bearbeitung der angesprochenen Themen Wert darauf gelegt, möglichst alle Ergebnisse durch mehrere möglichst unabhängige Verfahren zu testen und alle auftretenden Ergebnisse und Simulationartefakte plausibel zu verstehen.

Die folgenden Analysen zeigen, dass sehr einfache algorithmische Modelle wie das Waldbrandmodell, eine erstaunliche Fülle von Eigenschaften hervorbringen können. Es wird herausgearbeitet, dass das kritische Verhalten komplexer als bisher angenommen ist. Dies macht es wesentlich schwieriger, Konzepte der Gleichgewichtsphysik zur Beschreibung von SOC Modellen zu verwenden. Es wird aber bestätigt, dass SOC Modelle das Potential haben zur Aufklärung der Strukturbildungsmechanismen natürlicher Phänomene beizutragen.

Bemerkungen zur Notation: Dezimalzahlen werden in dieser Arbeit in amerikanischer Notation geschrieben: Das heißt zum Beispiel  $1/2 = 0.5$  und nicht  $0,5$ . Indizes bei Größen wurden im üblichen amerikanischen Format belassen und nicht eingedeutscht.

## 1.1 Definition des Modells

In diesem Abschnitt wird das selbstorganisiert kritische Waldbrandmodell durch Angabe der Iterationsregeln definiert. Es werden einige grundlegende Eigenschaften des Modells dargestellt und es wird diskutiert, was in diesem Fall unter „selbstorganisiert kritisch“ zu verstehen ist.

Als offenes getriebenes System ist das selbstorganisiert kritische Waldbrandmodell auf einem  $d$ -dimensionalen, meist hyperkubischen Gitter mit  $d$  Raumdimensionen und  $L^d$  Gitterplätzen definiert. Jeder Gitterplatz kann sich in den Zuständen „Baum“, „Feuer“ und „Leerstelle“ befinden. Die Dynamik des Modells wird durch folgende Regeln definiert, die iterativ durchgeführt werden.

- Feuer werden zu Leerstellen.
- Jeder Baum wird mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - g$  zu einem Feuer, wenn mindestens einer seiner nächsten Nachbarn brennt.
- Pro Iterationsschritt wird jeder Gitterplatz mit der Wahrscheinlichkeit  $f$  „von einem Blitz getroffen“. Ist der von einem Blitz getroffene Gitterplatz von einem Baum besetzt, so wird dieser Baum zu einem Feuer, wenn nicht, so passiert nichts.
- Leerstellen werden mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  zu Bäumen.

Als Anfangszustand wählt man üblicherweise eine stochastische Belegung des Gitters mit Bäumen. Die Randbedingungen sind meist pseudoperiodisch. Die Wahrscheinlichkeit  $f$  wird als Blitzeinschlagsrate oder Blitzeinschlagswahrscheinlichkeit, die Wahrscheinlichkeit  $p$  als Baumwachstumsrate oder Baumwachstumswahrscheinlichkeit interpretiert. Die Größe  $g$  kann man als Immunität der Bäume ansehen. Es existiert ein kritischer Wert  $g_c$  bei dem das Feuer durch das System perkoliert, welches in diesem Fall in durch Potenzgesetze mit den selben kritischen Exponenten beschrieben wird wie Systeme mit gerichteter Perkolation in  $d + 1$  Dimensionen [14, 15]. Viele Aspekte des Modells lassen sich in Begriffen aus dem Gebiet der erregbaren Medien [16, 17] fassen, was Anwendungsgebiete von der Epidemiologie bis hin zur Chemie eröffnet. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden nur Fälle betrachtet, in denen die Immunität  $g$  verschwindet:  $g = 0$ . Gruppen von Bäumen, die als nächste Nachbarn miteinander verbunden sind, heißen Cluster oder Waldcluster. Iteriert man das System unter den gerade genannten Regeln hinreichend lange, stellt sich ein stationärer Zustand ein, der nicht von den Anfangs- und Randbedingungen abhängt, aber von der Wahl der Parameter

$f$ ,  $p$  und  $g$  und, wie in dieser Arbeit diskutiert werden wird, in gewissen Grenzen auch von der Systemgröße  $L$ . Der stationäre Zustand ist bei ausreichend großem  $L$  durch eine zeitliche Stabilität von Verteilungen wie der Clustergrößenverteilung oder der Clusterradienverteilung und einer zeitlich sehr konstanten mittleren Walddichte  $\bar{\rho}$  charakterisiert. Die Größe  $\bar{\rho}$  wird durch räumlich und zeitliche<sup>1</sup> Mittelung berechnet, wobei bei den oben dargestellten Originalregeln des selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells die zeitlichen Fluktuationen der nur räumlich gemittelten Walddichte  $\rho(t)$  verschwinden. Daher ist für so gut wie alle Zeiten  $t$   $\bar{\rho}$  gleich  $\rho(t)$ . Für die momentanen nur räumlich gemittelten Werte der Baumdichte  $\rho(t)$ , der Feuerdichte  $\rho_f(t)$  und der Leerstellendichte  $\rho_e(t)$  gilt für alle Zeiten  $t$

$$\rho_e(t) + \rho_f(t) + \rho(t) = 1 . \quad (1.1)$$

Im stationären Zustand bleibt die Walddichte im Mittel konstant, daher muss die Anzahl der nachwachsenden Bäume die Anzahl der abbrennenden Bäume im Mittel ausgleichen. Für die räumlich und zeitlich gemittelte Leerstellendichte  $\bar{\rho}_e$  und Feuerdichte  $\bar{\rho}_f$  gilt daher:

$$\bar{\rho}_f = p\bar{\rho}_e \quad (1.2)$$

Im Grenzfall kleiner Feuerdichten  $\bar{\rho}_f$  können sich großräumige Strukturen ausbilden, da die Bäume im Durchschnitt lange „überleben“. Im Grenzfall verschwindender Blitzeinschlagsrate  $f$  und nichtverschwindender Wachstumsrate  $p$  reproduzieren die Regeln des selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells die Zustände des von Bak, Chen und Tang [18] vorgeschlagenen Waldbrandmodells, das nicht selbstorganisiert kritisch ist. In diesem Modell bilden sich spiralförmige Strukturen aus und die räumlichen und zeitlichen Korrelationen haben eine charakteristische Länge von  $1/p$ . Mit abnehmenden  $p$  kristallisiert sich die Struktur dieser charakteristischen Längenskala deutlicher heraus [19, 20]. Dies bedeutet, dass das Modell in diesem Parameterbereich deterministisches und kein kritisches Verhalten zeigt. Spiralähnliche Strukturen können in der Natur gefunden werden: Zum Beispiel bei epidemiologischen Phänomenen oder in der Biologie (Kontraktion des Herzmuskels). Im folgenden wird der selbstorganisiert kritische Parameterbereich des Modells beschrieben.

Sei  $T(s_{\max})$  die Zeit, die der größte, aus  $s_{\max}$  Bäumen bestehende Cluster braucht, um abzubrennen. Wenn

$$p \ll T(s_{\max}) \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup>Wobei zeitliche Mittelung hier heißt, dass über hinreichend lange Intervalle gemittelt wird.

erfüllt ist, brennen Waldcluster ab, bevor an deren Rändern neue Bäume nachwachsen. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass es zwei Typen von Waldclustern im zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodell gibt, da sowohl fraktale als auch kompakte perkolationsartige [21] Waldcluster auftreten. Damit sich die durch Skalengesetzte beschriebenen perkolationsartigen Größenverteilungen der zwei Clustertypen durch eventuelle während des Abbrands nachwachsende Bäume nicht größenabhängig verformt und so die Potenzverteilungen zerstört werden, muss die in Gleichung 1.3 angegebenen Relation erfüllt werden. Wenn zusätzlich die Bedingung

$$f \ll p \tag{1.4}$$

erfüllt ist, können sich die für das Potenzverhalten nötigen großräumige Strukturen ausbilden, weil für das Wachstum viel Zeit bleibt, bevor wieder mit einem Blitzeinschlag zu rechnen ist. Gleichung 1.3 und Gleichung 1.4 definieren den Teil des Parameterraumes, in dem das Modell selbstorganisiert kritisch wird. Da derartige Skalentrennungen in der Natur oft vorkommen, liegt kein finetuning eines Parameters vor. Daher ist das Waldbrandmodell in diesem Bereich des Parameterraums selbstorganisiert kritisch.

## 1.2 Grundlegende Eigenschaften des Modells

### 1.2.1 Kritische Exponenten und Skalenrelationen

In diesem Abschnitt wird zuerst ein potenzgesetzverteite Größe des selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells abgeleitet und damit die in Abschnitt 1.1 plausibel begründete Skalentrennung als Bedingung für Kritikalität im Waldbrandmodell bestätigt. Anschließend werden Potenzgesetzte und kritische Exponenten für weitere Größen definiert.

Die Anzahl der pro Iterationsschritte im Mittel nachwachsenden Bäume ist durch  $p\bar{\rho}_e$  gegeben. Wenn der in Abschnitt 1.1 eingeführte kritische Grenzfall  $f/p \rightarrow 0$  vorliegt, dann brennen die vom Blitz getroffenen Waldcluster ab und das Feuer erlischt danach vollständig und propagiert nicht weiter durch das System. Daher ist  $1/(f\bar{\rho})$  die Anzahl der Iterationsschritte, die im Durchschnitt zwischen zwei Blitzeinschlägen vergehen, die zur Entzündung eines Baumes, und damit zur Vernichtung des mit diesem Baum verbundenen Waldclusters führen. Die mittlere Anzahl  $\bar{s}$  der zwischen zwei „erfolgreichen“ Blitzeinschlägen nachwachsenden (und auch entfernten) Bäume ist daher

$$\bar{s} = \frac{p\bar{\rho}_e}{f\bar{\rho}} \quad (1.5)$$

Da die Feuerdichte im betrachteten Grenzfall  $f/p \rightarrow 0$  sehr klein und  $\bar{\rho}$  im stationären Zustand konstant ist, folgt:

$$\bar{s} = \frac{p}{f} \frac{1 - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \propto \left(\frac{f}{p}\right)^{-1} \quad (1.6)$$

Gleichung 1.6 stellt ein Beispiel für eine durch ein Potenzgesetz beschriebene Größe des selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells dar und bestätigt den in Abschnitt 1.1 eingeführten Grenzfall  $f/p \rightarrow 0$  als kritisches Limit (Skalentrennung).

Falls das dem Waldbrandmodell zugrundeliegende Gitter eine Dimension  $d$  größer als 1 hat, lassen sich weitere Skalengesetze nicht ohne weiteres analytisch ableiten. Die entsprechenden Beziehungen werden analog zu den entsprechenden Größen der Perkolationstheorie [21] eingeführt, nur dass diese Größen, inspiriert durch Gleichung 1.6, in der Regel Potenzgesetzte von  $f/p$  sind, und nicht wie in der Perkolationstheorie von  $(\rho_c^{\text{perc}} - \rho)$  abhängen<sup>2</sup>.

Sei  $n(s)$  die durchschnittliche Anzahl der aus  $s$  Bäumen bestehenden Waldcluster pro Einheitsvolumen. Es wurde bisher angenommen, dass  $n(s)$  gemäß

$$n(s) \propto s^{-\tau} \mathcal{C}(s/s_{\text{max}}) \quad (1.7)$$

mit einem Exponenten  $\tau$  skaliert, wobei  $\mathcal{C}$  eine Cutoff Funktion ist, die für Argumente kleiner als 1 konstant wird, und für größere Argumente sehr schnell auf 0 abfällt.  $s_{\text{max}}$  ist die Anzahl der Bäume, die der größte Waldcluster des betrachteten Systems enthält. Diese Arbeit wird zeigen, dass im zweidimensionalen Fall Gleichung 1.7 für kleine Korrelationslängen durchaus gut erfüllt ist, aber bei großen Korrelationslängen die Verhältnisse nicht ausreichend beschreibt. Viele unter Verwendung von Gleichung 1.7 abgeleitete Skalenrelationen sind daher zumindest im zweidimensionalen Waldbrandmodell nicht gültig.

Dagegen wird die Gültigkeit der Gleichung

$$s_{\text{max}} \propto \left(\frac{f}{p}\right)^{-\lambda}, \quad (1.8)$$

---

<sup>2</sup>Hierbei ist  $\rho$  die Besetzungsdichte des Perkolationsgitters und  $\rho_c^{\text{perc}}$  die kritische Besetzungsdichte von Perkolationssystemen.

die das Skalenverhalten der Größe  $s_{\max}$  des größten Waldclusters beschreibt, bestätigt. Die Korrelationslänge  $\xi$  ist definiert als der mittlere Radius des größten auftretenden Waldclusters und skaliert gemäß

$$\xi \propto \left(\frac{f}{p}\right)^{-\nu}. \quad (1.9)$$

In dieser Arbeit wird ein Zusammenhang zwischen den kritischen Exponenten  $\nu$  und  $\lambda$  für den zweidimensionalen Fall hergestellt werden. Es gilt als gut bestätigt, dass der Begriff „mittlerer Radius“ unterschiedlich definiert werden kann, ohne den Exponenten  $\nu$  zu beeinflussen [22].

Die Annäherung an die kritische Walddichte  $\rho_c$  (oder auch  $\bar{\rho}_c$ ) des Waldbrandmodells bei Durchführung des kritischen Limes  $f/p \rightarrow 0$  wird durch

$$(\rho_c - \bar{\rho}) \propto \left(\frac{f}{p}\right)^{-1/\delta} \quad (1.10)$$

beschrieben. In der Perkolationstheorie erscheint die Einführung der fraktalen Dimension  $\mu_{\text{perc}}$  beziehungsweise  $\mu$  sinnvoll:

$$\mu_{\text{perc}} \propto (R_{\text{perc}}(s))^{\mu_{\text{perc}}} \quad (1.11)$$

Hierbei ist  $R_{\text{perc}}(s)$  der durchschnittliche Radius eines Perkulationsclusters. Gleichung 1.11 verknüpft die Anzahl der zu einem Cluster gehörenden Gitterplätze, (also ein Maß für die Fläche des Clusters), mit dem mittleren Radius des Clusters. Eine analoge Definition für das Waldbrandmodell:

$$\mu_{\text{perc}} \propto (R(s))^\mu \quad (1.12)$$

mit  $R(s)$  als durchschnittlichem Radius eines Waldclusters des Waldbrandmodells erscheint naheliegend. In dieser Arbeit wird aber gezeigt werden, dass im Waldbrandmodell mehrere Typen von Clustern auftreten können, was die Beschreibung komplizierter macht.

Man kann für das Waldbrandmodell weitere räumliche aber auch zeitliche Größen definieren, die Skaleneigenschaften zeigen, (siehe zum Beispiel [23]).

## 1.2.2 Dimensions- und detailabhängige Eigenschaften

Das Verhalten des selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells hängt sehr von der räumlichen Dimension  $d$  des Gitters ab, auf dem dieser zelluläre Automat erklärt ist. Deshalb wird in diesem Abschnitt die exakte Lösung des

eindimensionalen Falls sowie eine mean-field Theorie wiedergegeben, von der angenommen wird, dass sie das Waldbrandmodell ab einer oberen kritischen Dimension von  $d_c = 6$  beschreibt.

In [23, 24, 25] wurde das eindimensionale selbstorganisiert kritische Waldbrandmodell exakt gelöst und so bewiesen, dass nichtkonservative Modelle in der Tat in einen kritischen Zustand kommen können. Für diesen Fall wird nun analog zu [26, 19] eine intuitive Herleitung der Ergebnisse gegeben: Man betrachtet eine Reihe von  $k \ll f/p$  zusammenhängenden Gitterplätzen des eindimensionalen Systems. Diese Gitterplatzreihe ist so kurz, dass pro Zeitschritt nicht mehr als ein Baum nachwachsen kann. Der Blitz trifft die betrachtete Gruppe von Gitterplätzen nicht, bevor alle Plätze mit Bäumen besetzt sind. Da wir am Grenzfall  $f/p \rightarrow 0$  interessiert sind, trifft diese und die folgende Betrachtungsweise auch für Reihen mit sehr vielen Gitterplätzen zu. Die betrachtete Reihe von  $k$  zusammenhängenden Gitterplätzen durchläuft folgende Stadien: Angefangen mit einer Reihe leerer Gitterplätze, werden die Gitterplätze mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  für jeden Platz gefüllt. Nach einer hinreichend langen Zeit wird die Reihe von Gitterplätzen vollständig mit Bäumen besetzt sein und auch die Gitterplätze, die zu der betrachteten Reihe benachbart sind, werden dichter und dichter gefüllt werden, bis schließlich die betrachtete Reihe Teil eines großen Clusters ist, der eventuell groß genug ist, um vom Blitz getroffen zu werden. In diesem Fall wird auch die betrachtete Reihe von Gitterplätzen geleert und der beschriebene Zyklus beginnt von neuem.

Mit Hilfe dieser Betrachtung kann man Ratengleichungen aufstellen, die die Dynamik in der betrachteten Reihe beschreiben. Im stationären Zustand wird jede auftretende Baumkonfiguration genauso oft erzeugt wie sie zerstört wird. Sei  $P_k(m)$  die Wahrscheinlichkeit, dass die betrachtete Reihe von  $k$  zusammenhängenden Gitterplätzen mit  $m$  Bäumen besetzt ist. Jede Konfiguration mit der gleichen Anzahl von Bäumen tritt mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf, da die Bäume an zufällig ausgewählten Positionen nachwachsen. Eine Konfiguration von  $m$  Bäumen wird zerstört, wenn ein Baum auf einem der leeren Gitterplätze nachwächst, und wird erzeugt, wenn ein Baum in einer Reihe mit  $m - 1$  Bäumen wächst. Eine vollständig leere Reihe entsteht beim Abbrand des Waldes. Die Entzündung eines Baumes der betrachteten Reihe führt zum Abbrand der gesamten Baumreihe, weil diese zu diesem Zeitpunkt so gut wie immer vollständig besetzt ist. Die Entzündung eines Baumes wiederum geschieht im stationären Zustand mit der gleichen Wahrscheinlichkeit, mit der ein Baum nachwächst: Mit der Wahrscheinlichkeit  $p(1 - \bar{p})$  pro Zeitschritt. Damit folgen die Gleichungen

$$pkP_k(0) = p(1 - \rho_t), \quad (1.13)$$

$$p(k - m)P_k(m) = p(k - m + 1)P_k(m - 1) \text{ für } m \neq 0, k. \quad (1.14)$$

daraus folgt

$$P_k(m) = (1 - \rho_t)/(k - m) \text{ für } m < k, \quad (1.15)$$

$$P_k(k) = 1 - (1 - \rho_t) \sum_{m=0}^{k-1} 1/(k - m) \quad (1.16)$$

$$= 1 - (1 - \rho_t) \sum_{m=1}^k 1/m. \quad (1.17)$$

Die letzten beiden Gleichungen enthalten eine Fülle von Informationen über die Waldclustergrößenverteilungen, die Löcherverteilungen, die Wachstumsgeschwindigkeit, usw..

Ein Baumcluster der Größe  $s$  stellt eine Konfiguration mit  $s$  benachbarten Bäumen mit einem leeren Gitterplatz an jedem Ende dar. Damit folgt die Größenverteilung  $n(s)$  der Baumcluster im eindimensionalen Fall zu:

$$n(s) = \frac{P_{s+2}(s)}{\binom{s+2}{s}} = \frac{1 - \rho_t}{(s+1)(s+2)} \simeq (1 - \rho_t)s^{-2}. \quad (1.18)$$

Man erhält ein Potenzgesetz mit dem kritischen Exponenten  $\tau = 2$ . Dies stimmt sehr gut mit den numerisch ermittelten Resultaten überein.

$s_{\max}$ , ist die charakteristische Länge (siehe Gleichung 1.7 ff.) bei der das Potenzgesetz aus Gleichung 1.18,  $n(s) \propto s^{-2}$ , zusammenbricht. Man kann  $s_{\max}$  berechnen, indem man fordert, dass eine zusammenhängende Reihe von  $k \leq s_{\max}$  Gitterplätzen nicht vom Blitz getroffen wird bis alle Gitterplätze von Bäumen besetzt sind. Eine Reihe von  $k$  Gitterplätzen, die zur Zeit  $t = 0$  leer ist wird, nach durchschnittlich

$$T(k) = (1/p) \sum_{m=1}^k 1/m \simeq \ln(k)/p$$

Zeitschritten von von  $k$  Bäumen besetzt sein. Die Durchschnittliche Anzahl von Bäumen nach  $t$  Zeitschritten ist

$$m(t) = k[1 - \exp(-pt)].$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Baum eine Reihe von  $k$  Gitterplätzen trifft, bevor alle Bäumen gewachsen sind ist

$$f \sum_{t=1}^{T(k)} m(t) \simeq (f/p)k(\ln(k) - 1) \simeq (f/p)k \ln(k).$$

Daraus folgt

$$s_{max} \ln(s_{max}) \propto p/f \quad \text{für große } p/f,$$

was zu  $\lambda = 1$  führt. Aus den oben angeführten Gleichungen läßt sich auch die kritische Walddichte von  $\rho_c = 1$  für das selbstorganisiert kritische Waldbrandmodell in einer Dimension ableiten. Eine Veränderung von Regeldetails wie die Einführung von „springenden“ Feuern, die einen leeren Gitterplatz überspringen können, ändert an den oben abgeleiteten Skalengesetzten für den eindimensionalen Fall nichts, so dass dieses Verhalten des Waldbrandmodells durchaus universellen Charakter hat.

Vernachlässigt man alle im Waldbrandsystem auftretenden Korrelationen, so gelangt man zu einer sogenannten mean-field Theorie. Bei diesem Ansatz wird der Zustand des Systems ausschließlich durch Dichten beschrieben. Bei dieser Theorie ergibt sich der Exponent  $\delta$ , der die Annäherung der Walddichte an die Walddichte  $\rho_c$  des kritischen Punktes beschreibt, zu  $\delta = 1$ . Die im Grenzfall  $f/p \rightarrow 0$  eintretende Walddichte folgt aus der mean-field Theorie unabhängig vom verwendeten Gittertyp zu  $\rho_c = 1/2d$ . Das bedeutet, dass ein Feuer im Durchschnitt immer nur einen einzigen weiteren Baum entzündet. Diese Situation ist vergleichbar mit der der, die die mean-field Theorie der Perkolationstheorie [21] beschreibt oder mit Perkolation auf dem Cayley-Baum, bei dem sich Perkolation zu jedem nächsten Nachbarn mit der gleichen Wahrscheinlichkeit fortsetzt, wobei sie sich durchschnittlich zu einem einzigen Nachbarn weiter fortsetzt. Für letzteres Problem [21] ist die fraktale Dimension  $\mu$  und die Clustergrößenverteilung bekannt. Damit lassen sich die Exponenten  $\mu = 4$  und  $\tau = 2.5$  in die mean-field Theorie des selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells übertragen. In [27, 28, 29] wurden Simulationsergebnisse ermittelt, die die Behauptung stärken, dass das selbstorganisiert kritische Waldbrandmodell wie Perkolationssysteme  $d_c = 6$  als obere kritische Dimension haben.

Das SOC Waldbrandmodell zeigt damit offenbar einfaches Skalenverhalten auf eindimensionalen Gittern und auf Gittern, deren Dimension  $d$  größer oder gleich  $d_c = 6$  ist. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass das Skalenverhalten im zweidimensionalen Fall durchaus noch durch Potenzgesetze beschrieben wird, aber dass teilweise Superpositionen auftreten. Das Modell darf

nicht analog zu gleichgewichtskritischen Phänomenen behandelt werden, weil finite-size Skalenverhalten und das Verhalten auf großen Längenskalen nicht direkt mit den Konzepten der Physik gleichgewichtskritischer Phänomene zu behandeln ist. Dies schränkt das Potential der Klasse der selbstorganisiert kritischen Phänomene jedoch nicht ein. Im Gegenteil: Es eröffnet die Aussicht auf neue Ansätze zur Beschreibung bisher unverstandene natürliche Phänomene wenn es gelingt, die Mechanismen dieser Modelle zu studieren und mathematisch zu erfassen.

## Kapitel 2

# Finite-size Effekte im zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodell

In diesem Kapitel wird das **zweidimensionale** selbstorganisiert kritische Waldbrandmodell mit numerischen Mitteln untersucht. Betrachtet wird hauptsächlich die durchschnittliche Walddichte und die Verteilung der Feuergrößen. Die Ergebnisse zeigen, dass das zweidimensionale selbstorganisiert kritische Waldbrandmodell ein finite-size Skalenverhalten hat, das sich von dem konventioneller kritischer Gleichgewichtssysteme unterscheidet. Es wird gezeigt, dass ein System des zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells aus Regionen mit relativ homogener Walddichte zusammengesetzt ist, die die Dynamik des Modells bestimmen und auch das finite-size Verhalten. Mit kleiner werdenden Systemgrößen  $L$  enthalten die betrachteten Systeme immer weniger Regionen unterschiedlicher Walddichte, bis schließlich das System nur noch aus einer einzigen Region homogener Walddichte zusammengesetzt ist. Die Walddichte dieser einzigen Region fluktuieren stark mit der Zeit. Diese Restrukturierung des Waldbrandsystems mit kleiner werdenden Systemgrößen  $L$  bedeutet offenbar, dass Walddichte- und Feuerverteilungen von kleinen Waldbrandsystemen sich von entsprechend kleinen Ausschnitten von größeren Waldbrandsystemen unterscheiden. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zum Verhalten von gleichgewichtskritischen Phänomenen. Als Ursache dieses Verhaltens kann die Existenz zweier verschiedener Typen von Feuern angesehen werden. Dieser Mechanismus wird jedoch erst in Kapitel 3 genauer untersucht werden.

## 2.1 Einführung

Die Analyse und Beschreibung von selbstorganisiert kritischen Modellen sowohl mit analytischen als auch mit numerischen Methoden beruht in der Regel auf der Annahme, dass ihr kritisches Verhalten (Skalenverhalten) sich ähnlich beschreiben lässt wie das Verhalten von konventionellen, gleichgewichtskritischen Phänomenen. Diese Hypothese wurde in [30] von Sornette, Johansen und Dornic auf eine systematische Grundlage gestellt. Die genannten Autoren nahmen an, dass sich alle SOC Systeme auf gleichgewichtskritische Phänomene abbilden lassen, indem man geeignete Ordnungsparameter wählt und Kontrollparameter in die Regeln einführt. So lässt sich zum Beispiel das Bak-Sneppen Modell auf ein depinning Problem abbilden [31, 32]. In [33] wurde jedoch gezeigt, dass die in [30] vorgeschlagene Abbildung beim zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodell kein System mit einem konventionellen kritischen Punkt erzeugt. Diese Abbildung besteht darin, die Leerstellendichte des Modells festzuhalten und so einen Kontrollparameter einzuführen. Zwingt man dem System nun diejenige Leerstellendichte auf, die sich bei der selbstorganisiert kritischen Variante des Modells von alleine einstellen würde, so erhält man in der Tat einen Zustand, dessen kritische Exponenten denen der selbstorganisiert kritischen Version gleichen. Aber am kritischen Punkt findet man Hysterese-Effekte und eine Diskontinuität, wenn man sich von der Seite hoher Leerstellendichten nähert. Diese Diskontinuität tritt jedoch nicht auf, wenn man sich dem kritischen Punkt von der anderen Seite nähert. Das Waldbrandmodell hat weitere unkonventionelle Eigenschaften wie die Existenz von mehr als einer divergierenden Längenskala [34, 35], das Fehlen eines systemumspannenden Clusters unmittelbar jenseits des kritischen Punktes [34] und die Abhängigkeit des Verhaltens des Modells auf großen Längenskalen von den Details der Regeln, welche dem Modell zugrundeliegen [36, 35]. Unkonventionelles Skalenverhalten findet man auch bei anderen SOC Modellen, wie dem zweidimensionalen abelschen Sandhaufenmodell, bei dem das finite-size Skalenverhalten verletzt ist [37, 38], und es zeichnet sich ab, dass das Erdbebenmodell von Olami Feder Christensen [39] kontinuierlich von seinen Parametern abhängt. Es gibt daher ein substantielles Interesse daran, das Skalenverhalten dieser Modelle besser zu verstehen. Daher wird im Folgenden das unkonventionelle finite-size Skalenverhalten des zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells näher betrachtet.

## 2.2 Das verwendete Modell

Für die in diesem Kapitel beschriebenen Untersuchungen des finite-size Skalenverhaltens wurde eine Version des selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells verwendet, deren Ergebnisse mit denen des Modells mit den original Regeln identisch ist, wenn die Systemgröße  $L$  sehr viel größer ist als die Korrelationslänge  $\xi$  des Systems. Die Abweichungen, die sich ergeben, wenn die Systemgröße  $L$  kleiner wird als die Korrelationslänge  $\xi$ , bewirken eine veränderte durchschnittliche Walddichte  $\bar{\rho}$  und verändern den Wachstumsprozeß der Bäume. Diese Abweichung wird später genauer diskutiert werden.

Die Dynamik des verwendeten Modells findet auf einem Quadratgitter mit  $L^2$  Gitterplätzen statt<sup>1</sup>. Jeder Gitterplatz kann entweder (von einem Baum) besetzt oder leer sein. In jedem Zeitschritt wird das System gemäß folgenden Regeln upgedated:

- **Das Abbrennen:** Ein Gitterplatz wird zufällig ausgewählt (dies entspricht einem Blitzeinschlag). Wenn der Gitterplatz von einem Baum besetzt ist, wird der gesamte via nächste Nachbarn mit diesem Baum verbundene Waldcluster aus dem System entfernt (das heißt der Waldcluster brennt ab). Dies bedeutet, dass die von den Bäumen dieses Waldclusters besetzten Gitterplätze durch leere Gitterplätze ersetzt werden.
- **Das Wachstum:** Es werden zufällig  $s_0 \equiv pL^2$  Gitterplätze ausgewählt und diejenigen die leer sind werden mit Bäumen besetzt. (Bei diesem Vorgang können auch diejenigen Gitterplätze besetzt werden die nach der oben erwähnten Abbrand-Regel möglicherweise gerade durch einen abbrennenden Waldcluster freigegeben werden.) Diese zu besetzenden Gitterplätze werden nacheinander ausgewählt, so dass es möglich ist, dass der selbe Gitterplatz in einem Wachstumsschritt durch den Zufallszahlengenerator mehrmals ausgewählt wird. Daher kann der Parameter  $s_0$  im Prinzip größer sein als die Gesamtzahl  $L^2$  der Gitterplätze des Systems. In den folgenden Simulationen wurden jedoch in der Regel nur Werte kleiner als  $s_0$  verwendet.

Für ein definiertes  $s_0$  und ausreichend große Systemgrößen  $L$  ist diese Waldbrandmodellvariante identisch mit dem durch die original selbstorganisiert kritischen Waldbrandregeln definierten Modell [40]. Hierbei ist die Blitzeinschlagswahrscheinlichkeit pro Gitterplatz  $f$  des Originalmodells mit

---

<sup>1</sup>Hierbei werden in der Regel pseudoperiodische Randbedingungen verwendet.

$f = L^{-2}$  abzubilden und die Wachstumsrate pro Gitterplatz  $p$  ist bei beiden Varianten identisch. Auf diese Äquivalenz zwischen den beiden Modellvarianten wurde zuerst von Grassberger [27] hingewiesen. Die meisten numerischen Analysen werden daher mit den oben genannten Regeln implementiert, da die Simulationen so schnell und effizient durchgeführt werden können. Sogar die zu untersuchenden finite-size Effekte lassen sich mit der hier beschriebenen „schnellen“ Variante des Waldbrandmodells analysieren, wie in [35] angeregt wurde, obwohl dazu Systeme untersucht werden müssen, deren Größe  $L$  kleiner ist als die Korrelationslänge  $\xi$  des Systems. Man muss hierbei nur berücksichtigen, dass beim Originalmodell der Blitz jederzeit auch während des Wachstumsprozesses der Bäume einschlagen kann, also jederzeit zwischen dem Nachpflanzen zweier beliebiger Bäume. Beim „schnellen“ Modell hingegen kann der Blitz nur einschlagen, nachdem der Wachstumsschritt komplett abgeschlossen ist und alle Bäume des momentanen Simulationszeitschritts bereits nachgewachsen sind. Wie in Anhang A.1 dargestellt werden wird, hängen die zentralen Schlußfolgerungen allerdings nicht von den Details des Modells ab.

## 2.3 Das Waldbrandmodell für kleine Füllraten $s_0$

In diesem Abschnitt werden die wesentlichen numerischen Ergebnisse für den Fall  $s_0 \ll L^2$ , wie sie in der Literatur [29, 27, 41, 28] zu finden sind, zusammengefaßt und in die Terminologie dieser „schnellen“ Variante des Waldbrandmodells abgebildet.

Im Grenzfall  $s_0 \ll L^2$  wachsen jeden Zeitschritt nur sehr wenige Bäume, verglichen mit der Anzahl der vorhandenen Bäume. Nach einer gewissen Übergangszeit befindet sich das System in einem stationären Zustand, in dem man nur kleine Fluktuationen der Walddichte um einen Wert  $\bar{\rho}(s_0)$  beobachten kann. Der Wert  $\bar{\rho}(s_0)$  hängt nicht von der Systemgröße  $L$  ab. Im weiteren Verlauf des Kapitels werden ausschließlich stationäre Zustände betrachtet werden, während der Einschwingvorgang nicht untersucht wird. Die im folgenden benutzen „gestrichenen Walddichten“ wie  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\rho}_c$ , usw stellen räumlich über das Waldbrandsystem und zeitlich über viel Zeitschritte gemittelte Walddichtewerte dar.

Da im stationären Zustand genausoviel Bäume nachgefüllt werden müssen wie verbrennen, folgt für die durchschnittliche Anzahl  $\bar{s}$  von Bäumen die pro Feuer verbrennen

$$\bar{s} = s_0(1 - \bar{\rho})/\bar{\rho}, \quad (2.1)$$

weil  $\bar{p}$  die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Blitz zu einem Feuer führt (weil ein Baum getroffen wurde) und  $1 - \bar{p}$  die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein zum Baumwachstum ausgewählter Gitterplatz nicht von einem Baum besetzt ist. Die führenden Korrekturen<sup>2</sup> zu Gleichung 2.1 aufgrund von finite-size Effekten sind von der Ordnung  $s_0/L^2$  und können im Fall  $s_0 \ll L^2$  vernachlässigt werden. Wenn man  $s_0$  vergrößert, vergrößert sich nach 2.1 die durchschnittliche Feuergröße  $\bar{s}$  und man nähert sich dem kritischen Punkt des selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells, weil  $s_0$  nach der oben erwähnten Abbildung dem Quotienten  $p/f$  des Originalmodells entspricht, das im Grenzfall  $f/p \rightarrow 0$  kritisch wird. Am kritischen Punkt stellt sich eine Walddichte von  $\bar{p}_c \approx 0.41$  ein. Die Korrelationslänge  $\xi$  definiert als Radius des größten Waldclusters und hängt mit  $s_0$  via

$$\xi \propto s_0^\nu \quad (2.2)$$

zusammen. Hierbei wurde wieder die Abbildung  $s_0 \longleftrightarrow p/f$  sowie das entsprechende Skalengesetz  $\xi \propto (f/p)^{-\nu}$  der Korrelationslänge des Originalmodells benutzt. Wie im Originalmodell gilt  $\nu \approx 0.58$  in  $d = 2$  Dimensionen.

In den den Simulationen zugänglichen Bereichen der Systemgröße  $L$  gilt das Potenzgesetz

$$n(s) \simeq s^{-\tau} \mathcal{C}(s/s_{\max}) \quad (2.3)$$

als gut bestätigte Beschreibung der Waldclustergrößenverteilung  $n(s)$ . Der Wert des Exponenten  $\tau$  wurde mit  $\tau \approx 2.14$  gemessen für den zweidimensionalen Fall.  $\mathcal{C}$  ist eine Cutoff Funktion, die exponentiell abfällt wenn ihr Argument größer als 1 ist. Ansonsten ist  $\mathcal{C}$  konstant. Die Größe  $s_{\max}$  des größten Waldclusters kann demnach mit der der fraktalen Dimension  $\mu$  der Waldcluster durch  $s_{\max} \propto \xi^\mu$  ausgedrückt werden, weil  $\xi$  der Durchmesser des größten Clusters ist. Daraus ergibt sich mit Gleichung 2.2  $s_{\max} \propto s_0^{\nu\mu}$ , was sich mit der Definition  $\lambda = \nu\mu$  umschreiben läßt in  $s_{\max} \propto s_0^\lambda$ . In [41] wird der Wert von  $\mu$  mit 1.95 angegeben, in [29] mit 1.96. Damit folgt ein Wert von  $\lambda \approx 1.15$ .

## 2.4 Ungewöhnliches Skalenverhalten im Waldbrandmodell

In diesem Abschnitt wird plausibel begründet, warum das Waldbrandmodell kein gewöhnliches Skalenverhalten hat. Hierzu wird dargestellt, wie sich das

---

<sup>2</sup>Die Korrekturen treten auf, weil die mittlere Walddichte des Systems beim Nachwachsen der Bäume nicht konstant ist, wenn das System sehr klein ist.

Waldbrandmodell verhalten müsste, wenn es sich analog zu gleichgewichtskritischen Systemen beschreiben ließe, und es wird gezeigt, warum man derartiges Verhalten beim Waldbrandmodell nicht erwarten kann.

Die in Abschnitt 2.3 angegebenen Meßwerte und Skalengesetze stimmen gut mit Skalenannahmen überein, bei denen man von einer einzelnen divergierenden Längenskala ausgeht. Analytische Untersuchungen des selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells wie mean-field Theorien [28, 42, 43] und renormierungsgruppentheoretische Rechnungen [44, 45] basieren auch auf der Annahme eines konventionellen Skalenverhaltens. Daher mag die im folgenden beschriebene Verletzung des finite-size Skalenverhaltens überraschend erscheinen. Man muss sich jedoch vor Augen halten, dass Simulationsdaten für Waldbrandsysteme nur in einen Bereich von nicht viel mehr als einer Dekade, bezogen auf die Korrelationslänge  $\xi$ , verfügbar sind. Das beobachtete Skalenverhalten gemäß Gleichung 2.3 stellt genauso wie die gemessenen Exponenten nicht notwendigerweise eine exakte asymptotische Skalenform dar, die über alle Längenskalen hin gültig ist, sondern nur eine gute Näherung für ein komplizierteres Skalenverhalten, die gültig für den Parameterbereich ist, der bisherigen Simulationen zugänglich ist. In Kapitel 3 wird das Skalenverhalten auf großen Längenskalen eingehen untersucht werden. Beim Sandhaufenmodell ist ein ähnliches Phänomen bekannt: In [46], [47] und älteren Arbeiten findet man überzeugende Skalenkollapse für die Größenverteilungen der Lawinen. In [37] und [38] wurde jedoch gezeigt, dass das finite-size Skalenverhalten verletzt ist und der einfache Skalenansatz, der verwendet wurde, nicht richtig ist.

Um die Wachstums- und Abbranddynamik, die beim Waldbrandmodell das Skalenverhalten beeinflussen, besser zu verstehen, ist es hilfreich, sich die in Abbildung 2.1 dargestellte Momentaufnahme eines Waldbrandzustandes näher zu betrachten. Man kann Regionen mit unterschiedlichen Walddichten unterscheiden. Jede einzelne dieser Regionen für sich ist sehr homogen mit Bäumen bedeckt. Diese recht klar abgegrenzten Regionen, die in [48] „patches“ (engl. für „Flecken“) genannt wurden, entstehen offenbar, wenn ein Waldcluster hoher Dichte abbrennt. Nach einem derartigem Abbrand ist die betroffene Region nahezu baumleer und wird im Laufe der Zeit wieder aufgefüllt gemäß dem Wachstumsgesetz

$$\dot{\rho}_{\text{patch}} = p(1 - \rho_{\text{patch}}) \quad (2.4)$$

mit der lokalen Walddichte  $\rho_{\text{patch}}$  der betreffenden Region. Trifft ein Blitz während der Phase, in der die lokale Walddichte  $\rho_{\text{patch}}$  anwächst, in eine Region mit noch geringem  $\rho_{\text{patch}}$ , so wird in der Regel nur ein kleiner Cluster innerhalb der betroffenen Region abbrennen, aber der recht homogene

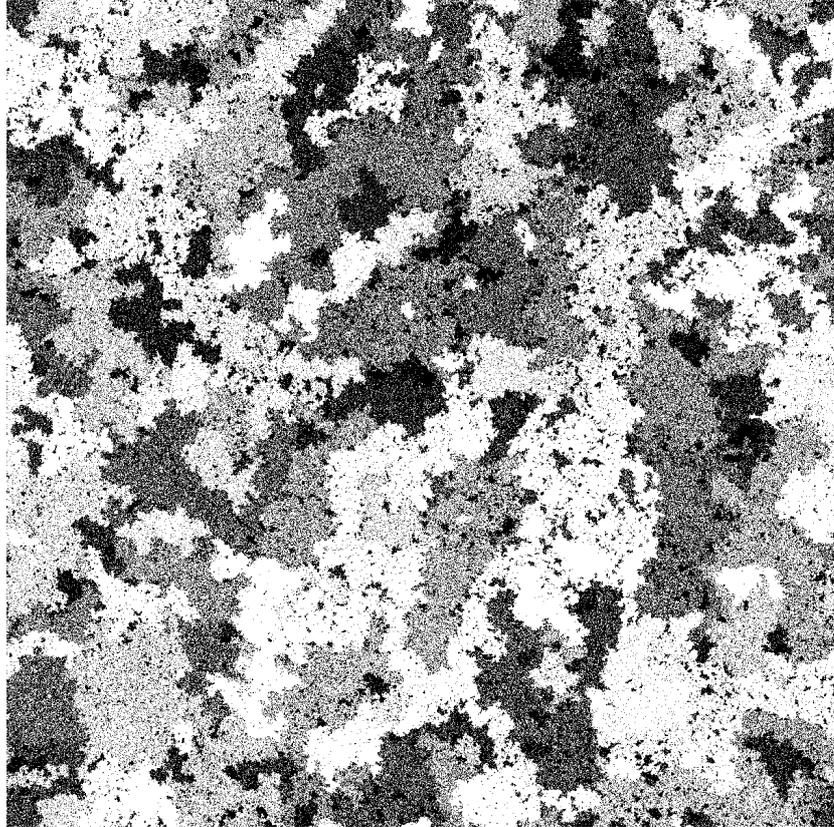


Abbildung 2.1: Momentaufnahme eines Zustandes des selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells mit einer mittleren Walddichte  $\bar{\rho} \simeq \bar{\rho}_c \simeq 0.408$  und einer Systemgröße  $L=4096$ . Bäume sind schwarz dargestellt und Leerstellen weiß.

Wachstumsprozeß der lokalen Walddichte wird selten gestört. Falls die lokale Walddichte der vom Blitz betroffenen Region jedoch schon oberhalb der Perkolationschwelle liegt, wird ein Waldcluster von der Größe der Region abbrennen. Es gibt also zwei Arten von Feuern: kleine Feuer, die Waldcluster aus perkolationsartigen Gebieten mit einer Besetzungsdichte unterhalb der Perkolationschwelle abbrennen und regionumspannende Feuer, die Waldcluster aus perkolationsartigen Gebieten mit einer Besetzungsdichte oberhalb der Perkolationschwelle abbrennen. Es wird im weiteren gezeigt werden, dass diese zwei Feuertypen das ungewöhnliche finite-size Verhalten des zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells verursachen.

Betrachten wir nun den Fall, dass die Korrelationslänge  $\xi$  von der selben Größenordnung wie die Systemgröße  $L$  ist oder kleiner. Wenn  $s_0/L^2$  nicht zu

klein ist, erhöht sich die Walddichte des Systems um einen wahrnehmbaren Betrag zwischen dem Einschlag zweier Blitze, was zu starken Walddichtefluktuationen führt und zu Feuern, die das gesamte System und nicht nur einzelne Regionen umspannen. Die Dynamik des Modells ändert sich also qualitativ, wenn man zu kleineren Systemgrößen  $L$  geht.

Wie müßte sich nun das selbstorganisiert kritische Waldbrandmodell verhalten, wenn es konventionelles Skalenverhalten zeigen würde? Es gäbe dann eine einzige divergierende Längenskala, nämlich die durch die Korrelationslänge  $\xi$  festgelegte. Die Korrelationslänge  $\xi$  ist, wie oben erwähnt, mit  $p/f$  oder der äquivalenten Größe  $s_0$  durch  $\xi \propto s_0^\nu$  verknüpft. Aus Gleichung 2.3 folgt mit  $s_{\max} = \xi^\mu$ , dass  $n(s) \simeq s^{-\tau} \mathcal{C}(s/\xi^\mu)$  und als finite-size Skalenform der Waldclustergrößenverteilung ergibt sich für konventionelles Skalenverhalten bei Annahme der Existenz nur einer divergierenden Längenskala:

$$n(s) \simeq s^{-\tau} \mathcal{C}(s/L^\mu) \text{ für } \xi > L \quad (2.5)$$

Außerdem müßten auf Längenskalen, die kleiner als  $L$  und  $\xi$  sind, alle in einem entsprechend kleinen System gemessenen statistischen Werte gleich denjenigen Werten sein, die man in einem gleichkleinen Ausschnitt eines unendlich großen kritischen Systems messen würde.

Während im folgenden Abschnitt anhand von Simulationsdaten belegt werden wird, dass weder die in Skalenform aus Gleichung 2.5 noch die gerade angesprochene Ununterscheidbarkeit von ein kleinem Waldbrandsystem und dem gleichkleinen Ausschnitt eines großen Waldbrandsystems erfüllt ist, wurde schon in [35] gezeigt, dass die Annahme nur einer einzigen divergierenden Längenskala falsch ist. Man kann sich anschaulich klarmachen dass auch die zweite Annahme – die Äquivalenz von kleinen Systemen und gleichkleinen Ausschnitten großer Systeme – falsch ist, wenn man zum Beispiel die mittlere Zeit, die zwischen dem Auftreten zweier Feuer vergeht, betrachtet. In einem kleinen Subsystem der Größe  $l$  ist diese Zeit durch den Ausdruck  $(p(1 - \bar{\rho}_c))^{-1}$  gegeben<sup>3</sup>, wenn die Korrelationslänge des großen Systems, dessen Teil das kleine Subsystem ist, die Bedingung  $\xi \gg l$  erfüllt. Das Feuer brennt in das Subsystem immer von außen hinein, weil die Zeit, die zwischen zwei Einschlägen des Blitzes im kleinen Subsystem vergeht, mit  $L^2/l^2$  divergiert, bei unendlich großem enthaltenden System<sup>4</sup>. Das heißt, dass das Subsystem kurz vor dem Auftreten des Feuers als perkolierenden Waldcluster einen Teil eines sehr viel größeren Clusters enthält, der sich weit über die Grenzen des Subsystems hinaus erstreckt, eine Dichte oberhalb der Perkola-

---

<sup>3</sup>siehe Abschnitt A.2

<sup>4</sup> $L$  ist die divergierende Systemgröße des Systems, welches das kleine Subsystem der Größe  $l$  enthält.

tionsschwelle hat und das Feuer in das Subsystem hineinträgt. Im Gegensatz dazu kann das Feuer in ein abgeschlossenes kleines System nie von außen her hineinpropagieren. Die Dichte eines kleinen abgeschlossenen Systems erhöht sich, bis ein Baum im System vom Blitz getroffen wird und dann in der Regel nahezu alle Bäume des Systems vernichtet werden. Wählt man als Referenz-Zeitskala den Takt, der durch zwei erfolgreiche Blitzeinschläge vorgegeben ist, so erkennt man, dass die Rhythmen, in denen Feuer in dem kleinen Subsystem auftritt, inkompatibel ist zu dem Rhythmus des Feuers im gleichkleinen abgeschlossenen System.

Die numerischen Ergebnisse des folgenden Abschnitts 2.5 belegen das unkonventionelle Skalenverhalten des zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells durch Computersimulationen.

## 2.5 Ergebnisse der Computersimulationen

In diesem Abschnitt werden die Simulationsergebnisse von circa 300 Durchläufen der in Abschnitt 2.2 beschriebenen Modellvariante für diverse Werte von  $s_0$  und  $L$  dargestellt und erklärt. Da viele Durchläufe mit jeweils angepaßten Parametereinstellungen gemacht werden mussten, wurden Workstations anstelle von Supercomputern verwendet. Das Spektrum der abgedeckten Systemgrößen  $L$  reicht von 10 bis 2000. Aus den Simulationsdaten kann man folgern, dass sich das Waldbrandsystemen unter dem Einfluß von finite-size Effekten qualitativ anders verhält als bei Abwesenheit von finite-size Effekten. Diese zwei Formen der Waldbranddynamik werden im folgenden „kritisches Verhalten“ und „perkollationsartiges Verhalten“ genannt. Der Bereich kritischen Verhaltens ist durch einen guten Skalenkollaps der Feuergößenverteilungen und große räumliche Variationen bei der lokalen Walddichte verteilt charakterisiert. Der Bereich des perkollationsartigen Verhaltens zeichnet sich durch große zeitliche Fluktuationen der globalen Walddichte aus, die jedoch zu einem gegebenen Zeitpunkt räumlich sehr homogen verteilt ist. Momentaufnahmen von Waldbrandsystemen im Regime perkollationsartigen Verhaltens stellen daher in sehr guter Näherung Perkollationssysteme<sup>5</sup> dar, bei denen jeder Gitterplatz mit der Wahrscheinlichkeit  $\rho(t)$  besetzt ist. Hierbei ist  $\rho(t)$  die räumlich gemittelte Walddichte des Systems im Gegensatz zu der zeitlich und räumlich gemittelten Walddichte  $\bar{\rho}$ . In den folgenden zwei Abschnitten wird dargestellt, wie sich der Übergang zwischen kritischem und perkollationsartigem Regime in den Werten der mittleren Walddichte, der Feuergößenverteilung und der Verteilung der Walddichte niederschlägt.

---

<sup>5</sup>Eine Einführung in die Perkollationstheorie findet man zum Beispiel in [21].

### 2.5.1 Linien konstanter Walddichte

In diesem Abschnitt wird hergeleitet, wie die Walddichte der hier verwendeten Waldbrandmodellvariante mit der des Originalmodells für extreme Parameterwerte zusammenhängt. Anschließend werden die Walddichtedaten der Waldbrandmodellvariante ausgewertet. Anhand eines Diagramms von Kurven konstanter Walddichte wird ein Überblick über das Verhalten des Waldbrandmodells vermittelt, das in den verschiedenen Parameterbereichen durchaus sehr unterschiedlich ist.

Im Verlauf der Simulationen wurde die mittlere Walddichte

$$\bar{\rho} = (1/T) \sum_{t=1}^T \rho(t) \quad (2.6)$$

des Systems, gemittelt über  $T$  Iterationsschritte, für diverse  $s_0$  und  $L$  Werte ausgewertet. Hierbei wurde die Walddichte  $\rho(t)$  immer erst ermittelt nachdem der in Abschnitt 2.2 beschriebene Wachstumsschritt abgeschlossen war. Verglichen mit einem Modell wie dem original selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodell, das eine kontinuierliche Baumwachstumsrate  $\dot{\rho} = p(1 - \rho)$  hat, sind daher die in dieser Modellvariante ermittelten Walddichtewerte etwas größer, wenn  $s_0/L^2$  nicht sehr klein ist. Wenn sich zum Beispiel die Walddichte während eines Wachstumsschrittes von  $\rho - \Delta\rho$  auf  $\rho$  erhöht, trägt bei der hier verwendeten Modellvariante der Wert  $\rho$  zur Summe 2.6 bei. Im Gegensatz dazu würde eine Messung, die auf einem kontinuierlichem Baumwachstum beruht, einen anderen Beitrag zur Summe 2.6 liefern. Dieser unterschiedliche Beitrag läßt sich ermitteln, indem man das aus der Wachstumsgleichung des Originalmodells:  $\dot{\rho} = p(1 - \rho)$  zur Anfangsbedingung  $\rho(t = 0) = \rho - \Delta\rho$  folgende Waldwachstum  $\rho(t) = 1 - (1 - \rho - \Delta\rho) \exp(-pt)$  über den Wachstumszeitraum  $[0; T_E]$  mittelt, wobei  $T_E$  aus  $\rho(T_E) = \rho$  zu  $T_E = 1/p \times \ln(1 - \Delta\rho/(1 - \rho))$  folgt. Die Mittelung

$$\frac{1}{T_E} \int_0^{T_E} \rho(t) dt = 1 - \frac{\Delta\rho}{\ln(1 + \frac{\Delta\rho}{1-\rho})} \quad (2.7)$$

liefert  $1 - \Delta\rho/\ln(1 + \Delta\rho/(1 - \rho))$  als Beitrag des original Waldbrandmodells zur Summe 2.6 anstelle des Beitrags  $\rho$  der hier verwendete Variante. Diese Korrektur zwischen Originalmodell und der hier verwendeten Modellvariante ist in der weiteren Auswertung berücksichtigt worden.

Es ist nicht offensichtlich, wie die Parameter  $s_0$ ,  $L^2$  und  $\bar{\rho}$  zusammenhängen müßten, wenn die entsprechenden Beziehungen durch Analogschlüsse zu gleichgewichtskritischen Systemen hergeleitet werden sollen. Wie bereits erwähnt

wurde nehmen die zeitlichen Fluktuationen von  $\rho(t)$  zu, wenn das der Quotient  $s_0/L^2$  größer wird. In ähnlicher Weise nehmen die zeitlichen Fluktuationen auch in gleichgewichtskritischen Systemen zu, wenn die Systemgrößen kleiner werden. Man könnte daher annehmen, dass ein Verkleinern der Systemgröße  $L$  bei festgehaltenem  $s_0$  das System zum kritischen Punkt mit  $\bar{\rho} = \bar{\rho}_c \approx 0.41$  zwingt. Da jedoch für Grenzfall  $s_0 \gg L^2$  die Walddichte des Systems gegen 1 gehen muss, werden Waldbrandsysteme offenbar nicht in den kritischen Zustand gezwungen sondern eher in einen Zustand, der dem eines geordneten Gleichgewichtssystems wie zum Beispiel einem Perkolationssystem mit Dichten oberhalb der Perkolationsschwelle entspricht. Das Analogon zu der Anzahl der Bäume  $\bar{s}$ , die pro Feuer im Schnitt verbrennen, wäre in einem Perkolationssystem die mittlere Größe eines Clusters, zu dem ein gegebener besetzter Gitterplatz gehört. In Perkolationssystemen ist diese Größe proportional zu  $L^2$  [21] wenn sich das System jenseits der Perkolationsschwelle befindet. Aus den im folgenden dargestellten Meßdaten folgt in der Tat, dass die Feuergröße der Feuer, die die meisten Bäume verbrennen, sich proportional zu  $L^2$  verhält, wenn finite-size Effekte maßgeblichen Einfluß auf das Waldbrandsystem haben. Man muss jedoch berücksichtigen, dass beim Waldbrandsystem die großen Waldcluster, deren Größe unter dem Einfluß von finite-size Effekten mit  $L^2$  skaliert, nur sehr selten vorkommen, nämlich wenn die mittlere Walddichte des Gesamtsystems  $\rho(t)$  gerade oberhalb der kritischen Walddichte ist, wohingegen ein Perkolationssystem oberhalb der Perkolationsschwelle immer einen perkolierenden Cluster hat.

Abbildung 2.2 zeigt Kurven konstanter Walddichte in doppelt logarithmischer Darstellung mit den Achsen  $s_0$  und  $L^2$ . Diese Abbildung illustriert die beiden Regimes des Modells, das perkolationsartige und das kritische, sowie einen Übergang zwischen beiden. Zuerst wird der Fall  $s_0 \ll L^2$  diskutiert. Hier treten keine finite-size Effekte auf. In diesem Parameterbereich sind die auftretenden Cluster sehr viel kleiner als das Gesamtsystem und die globalen Walddichtefluktuationen sind klein. Die mittlere Walddichte von einem derartigem System ist typischerweise kleiner als  $\bar{\rho}_c \approx 0.41$ . Für Systeme mit kleinen Dichtefluktuationen ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein gegebener leerer Gitterplatz während eines Zeitschritts von einem Baum besetzt wird (Baumwachstumswahrscheinlichkeit) durch  $s_0/L^2$  gegeben, weil die Wahrscheinlichkeit, dass ein leerer Gitterplatz zweimal vom Zufallszahlengenerator ausgewählt wird, bei kleinen  $s_0$  verschwindet. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gegebener, mit einem Baum besetzter Gitterplatz durch eine Feuer zu einem leeren Gitterplatz wird (Baumabbrandwahrscheinlichkeit) ist  $s_0(1 - \bar{\rho})/(\bar{\rho}L^2)$ , da  $s_0(1 - \bar{\rho})$  die Anzahl der Bäume ist, die pro Zeitschritt nachwachsen, und im stationären Zustand auch verbrennen und  $\bar{\rho}L^2$  die Ge-

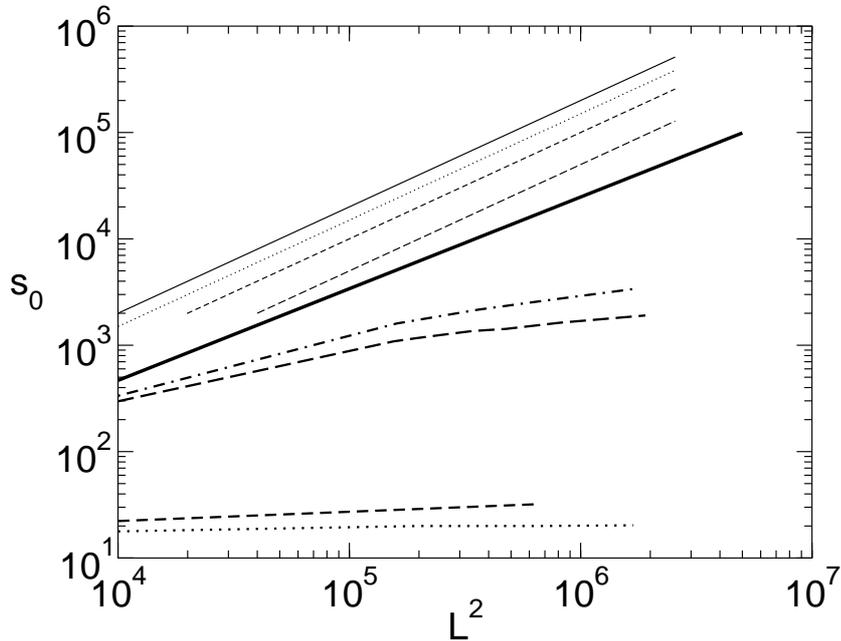


Abbildung 2.2: Kurven konstanter Walddichte in einem  $s_0 - L^2$  Diagramm. Die fett dargestellte Kurve stellt die Separatrix zwischen den kritischen und perkolationsartigen Regimes des Waldbrandmodells dar. Die restlichen Kurven stellen Kurven konstanter mittlerer Walddichte  $\bar{\rho} = 0.47, 0.455, 0.43, 0.42, 0.0403, 0.40, 0.35, 0.343$  dar (von oben nach unten aufgelistet). Die Kurve für  $\bar{\rho} = 0.40$  wurde aus interpolierten Werten gewonnen.

samtzahl der Bäume im System ist. Da hiermit die Wahrscheinlichkeiten sowohl für Baumabbrand als auch für Baumwachstum mit  $1/L^2$  abnehmenden, wenn die Systemgröße zunimmt, folgt, dass die Dynamik großer Systeme langsamer ist als die von kleinen Systemen und zwar genau um den Faktor, mit dem die pro Fläche in das System gesetzten Bäume weniger werden, wenn  $s_0$  fixiert ist, nämlich um:  $1/L^2$ . Da außer der Zeitkonstante der Dynamik alle weiteren Systemcharakteristika wie Korrelationsfunktionen und Clustergrößenverteilungen offensichtlich nicht von  $L$  abhängen, erklärt dies die horizontalen Geraden für  $L \gg s_0$  und  $\bar{\rho} < \rho_c$  in Abbildung 2.2.

Die horizontalen Geraden knicken ab, wenn die Systemgröße  $L$  so klein wie die Korrelationslänge  $\xi \propto s_0''$  oder kleiner wird. Diese Abweichungen treten in der Übergangsregion auf, in der finite-size Effekte für das System spürbar werden. Dadurch ändern sich die Systemcharakteristika, denn es treten nun nicht nur Feuer auf, die die endliche Systemgröße nicht „spüren“, sondern auch es treten auch systemweite Feuer auf. Feuer dieser Größe zerstören die

weiter oben angesprochene regional separierte, „patchy“ Struktur und bewirken eine räumliche Homogenisierung der Walddichte in diesem Zustand. Nun zu den Kurven des zweiten Regimes: Hier sind die Kurven Geraden mit konstantem  $s_0/L^2$ . Diese Eigenschaft ist darauf zurückzuführen, dass in diesem Parameterbereich  $s_0$  von der Größenordnung von  $L^2$  ist. Dies führt dazu, dass die Systeme sehr stark mit Bäumen gefüllt werden und daher die Walddichte weit über  $\bar{\rho}_c$  liegt. Deswegen enthält das System nach jedem Wachstumsschritt einen systemspannenden Waldcluster. Ein Abbrand des systemspannenden Clusters leert einen Großteil des Systems, wohingegen der vergleichsweise seltene Abbrand kleiner Cluster kaum Auswirkungen auf den Zustand hat. Dies hat wiederum zur Folge, dass das System eine räumlich sehr homogen verteilte Walddichte aufweist. Diese Waldbrandzustände haben daher große Ähnlichkeit mit Perkolationssystemen einer Dichte  $\rho(t)$ . Es ist bekannt [21] dass bei Perkolationssystemen der Anteil der besetzten Gitterplätze, die zum systemspannenden Cluster gehören, nicht von der Systemgröße  $L$  abhängt. Dieser Cluster bestimmt hier die Dynamik und damit  $\bar{\rho}$ , was bedeutet, dass bei fixierter Anzahl von Bäumen, die pro Fläche ins System gestreut werden  $\bar{\rho}$  nicht von  $L$  abhängt. Da ein festgehaltenes  $s_0/L^2$  die Anzahl von Bäumen, die pro Fläche ins System gestreut werden, fixiert, sind in diesem Parameterbereich Kurven konstanter Walddichte in Abbildung 2.2 Kurven mit konstantem  $s_0/L^2$ .

Da die die Kurve zur konstanten kritischen Walddichte  $\bar{\rho}_c \approx 0.41$  zwischen den beiden Regimes unterschiedlicher Waldbranddynamik liegt<sup>6</sup>, kann man schließlich aus der Bedingung

$$L \approx \xi \sim s_0^\nu, \text{ mit } \nu \simeq 0.58 .$$

die Parametrisierung der Separatrix zwischen beiden Verhaltensweisen des Waldbrandmodells ableiten, die in Abbildung 2.2 eingezeichnet ist.

## 2.5.2 Die Feuergrößenverteilung

In diesem Abschnitt wird anhand von Simulationsdaten gezeigt, dass beim zweidimensionalen Waldbrandmodell nicht das Verhalten gefunden werden kann, das – wie in Abschnitt 2.4 und Gleichung 2.5 beschrieben – vorliegen müsste, wenn konventionelles finite-size Skalenverhalten analog zu gleichgewichtskritischen Systemen vorläge: Die finite-size Skalenform aus Gleichung 2.5 ist nicht erfüllt und auf Längenskalen, die kleiner als  $L$  und  $\xi$  sind, sind nicht alle in einem entsprechend kleinen System gemessenen statistischen Werte gleich denjenigen Werten, die man in einem gleichkleinen Ausschnitt eines unendlich großen kritischen Systems messen würde.

---

<sup>6</sup>Das Potenzgesetz  $\xi \propto s_0^\nu$  beschreibt nur kritische Zustände

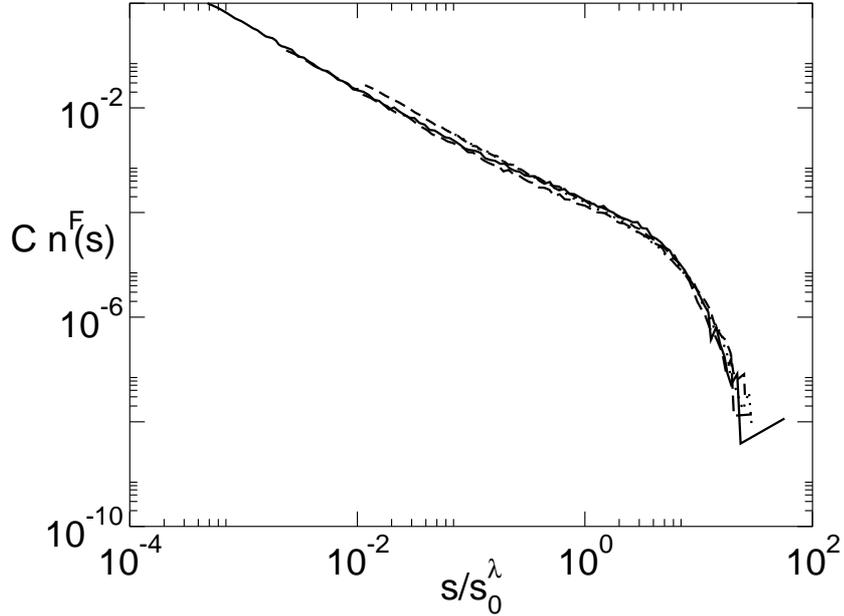


Abbildung 2.3: Skalenkollaps der Feuergrößenverteilung für Systeme mit den Parametern  $s_0/L^2 = 0.001$  und  $L = 1600, 800, 400, 200$ . Die auftretenden Walddichten sind  $\bar{\rho} = 0.40, 0.395, 0.38, 0.36$ .  $C$  ist die Skalierungskonstante  $s_0^{\mu\nu(\tau+1)}/n^F(1)$ .

Da alle Bäume gleichwahrscheinlich vom Blitz getroffen werden, hängt die Größenverteilung der Feuer  $n^F(s)$  mit der Waldclustergrößenverteilung  $n(s)$  via  $n^F(s)/s = n(s)$  zusammen. Nach Gleichung 2.3 ergibt sich für  $L > \xi$  eine erwartete zumindest näherungsweise gültige Skalenform  $n^F(s) \approx s^{1-\tau} \mathcal{C}(s/s_0^{\mu\nu})$ . Für  $L < \xi$ , das heißt unter dem Einfluß von finite size Effekten ergibt sich nach Gleichung 2.5:  $n^F(s) \approx s^{1-\tau} \mathcal{C}(s/L^\mu)$ . Unter Voraussetzung konventionellen Skalenverhaltens würde man in beiden Fällen einen Skalenkollaps der Kurven der Feuergrößenverteilung für unterschiedliche  $s_0$  oder  $L$  erwarten.

In Abbildung 2.3 sind die Feuergrößenverteilungen für den Fall  $L > \xi$  dargestellt. Obwohl der Kollaps der Daten nicht perfekt ist, ist er dennoch zu gut um ein Indiz dafür darzustellen, dass das konventionelle Skalenverhalten verletzt ist. Der „Buckel“ am Ende der Kurven weist darauf hin, dass die Cutoff-Funktion  $\mathcal{C}$  kurz vor dem exponentiellen Abfallen noch einmal ansteigt. Es wird angenommen, dass der Buckel all diejenigen Bäume enthält, die größer Waldcluster bilden würden, wenn sich das System exakt am kritischen Punkt befinden würde [27].

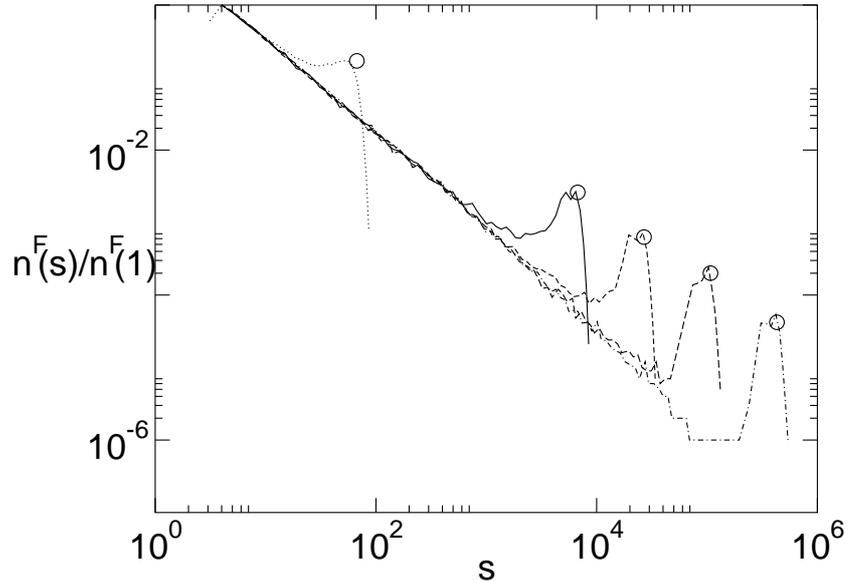


Abbildung 2.4: Die Feuergrößenverteilung für  $s_0/L^2=0.15$  und  $\bar{\rho} = 0.454$ , und Systemgrößen  $L = 10, 100, 200, 400, 800$  (Diese Aufzählung gilt von links nach rechts, wenn man die Peaks betrachtet). Die eingezeichneten kleinen Kreise markieren diejenigen Punkte, die bei exaktem  $L^2$  Skalenverhalten vorliegen würden, wenn man den Peak der zur Systemgröße  $L = 800$  gehörenden Kurve als Referenzpunkt nimmt.

Abbildung 2.4 zeigt die Feuergrößenverteilung für eine Parameterkonstellation, in der die Walddichte  $\bar{\rho}$  zehn Prozent über der kritischen Walddichte  $\bar{\rho}_c$  liegt.

Wie im vorigen Abschnitt diskutiert wurde, treten systemspannende Feuer auf, deren Größen mit  $L^2$  skalieren. Die systemspannenden Feuer verursachen die Peaks in der Feuergrößenverteilung. In der geordneten Phase von Gleichgewichtskritischen Systemen, wie zum Beispiel bei der Clustergrößenverteilung von Perkolationsystemen oberhalb der Perkolationschwelle, kann man ähnliche Peaks beobachten. In Perkolationsystemen bedeuten diese Peaks jedoch, dass die Korrelationslänge größer ist als die Systemgröße ist, was bedeutet, dass die großen und nicht nur die unendlichen Cluster bereits durch die endliche Systemgröße betroffen sind. Einen derartigen exponentiellen Cutoff in der Größenverteilung der endlichen Cluster kann man in dem hier beobachteten System jedoch nicht beobachten. Die Kurve zur Systemgröße  $L = 800$  in Abbildung 2.4 scheint vielmehr zwischen einer Feuergröße von  $s = 100$  bis zum Peak einem Potenzgesetz zu gehorchen.

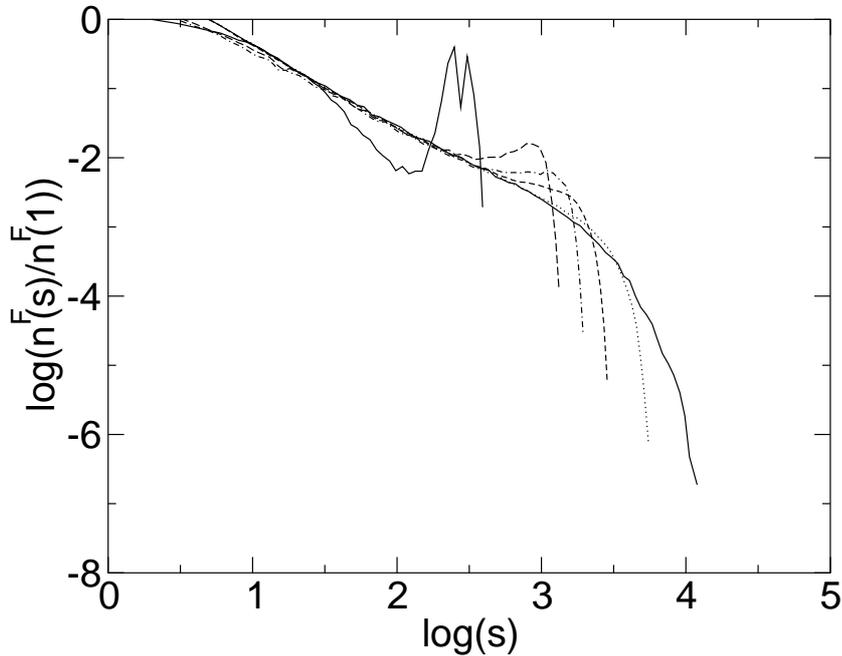


Abbildung 2.5: Darstellung des Übergangs von kritischem zu perkolationsartigem Verhalten, wenn man die Systemgröße  $L$  bei festgehaltenem  $s_0=200$  verringert. Die Systemgröße  $L$  der Kurven von rechts nach links:  $L = 1300, 100, 63, 50, 40, 20$ . Die zugehörigen gemessenen Walddichten sind  $\bar{\rho} = 0.385, 0.392, 0.402, 0.414, 0.432$  und  $0.577$ .

Dieses Verhalten scheint durch die großen zeitlichen Fluktuationen des Systems verursacht zu werden, denn die großen Feuer mit  $s \approx L^2/2$  brennenden Bäumen kommen nur selten vor. Die Walddichte ist oft auch gering, so dass sich Feuer aller Größen ausbilden können, die dann zu der weiten Verteilung von verschiedenen kleineren Clustergrößen beitragen.

Der Übergang von kritischem Skalenverhalten zu dem eben beschriebenen  $L^2$  Skalenverhalten wird in Abbildung 2.5 dargestellt. Man erkennt, dass sich die Form der Kurven kontinuierlich mit der Systemgröße  $L$  ändert. Durch diese Formveränderung ist kein Kollaps der Kurven zu  $\xi < L$  mehr möglich und daher ist eine Beschreibung des finite-size Skalenverhaltens des zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells durch die Skalenform  $sn(s) \simeq s^{1-\tau} \mathcal{C}(s/L^\mu)$  nicht möglich. Nicht einmal für Kurven zu Systemen mit Walddichten in der Nähe des kritischen Punktes ist ein Skalenkollaps möglich. Der Cutoff der Feuerverteilungen, der durch die endliche Systemgröße hervorgerufen wird, skaliert außerdem nicht mit  $L^\mu$ , sondern mit  $L^2$ , wie

zuvor festgestellt wurde. Das finite-size Skalenverhalten des zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells unterscheidet sich daher deutlich von dem Verhalten, das durch Analogschlüsse von gleichgewichtskritischen Systemen her zu erwarten wäre.

Der Buckel der Kurven in Abbildung 2.5 zu den Systemgrößen  $L = 1300$  und  $L = 100$  verändert sich zu einem Peak, wenn man zu kleineren Systemen übergeht. Die Kurven zu den kleineren Systemgrößen  $L \leq 63$  in Abbildung 2.5 zeigen diesen Peak. Nach [49] formieren sich diese Peaks aufgrund der Einflüsse von finite size Effekten. Es treten daher für kleinere Systeme schon unterhalb der kritischen Walddichte  $\bar{\rho}_c$  systemspannende Waldcluster und Feuer auf.

Wie oben erwähnt wurde, sind bei gleichgewichtskritischen Systemen auf Längenskalen, die kleiner als  $L$  und  $\xi$  sind, alle in einem entsprechend kleinen System gemessenen statistischen Werte gleich denjenigen Werten, die man in einem gleichkleinen Ausschnitt eines unendlich großen kritischen Systems messen würde. Wie in Abschnitt 2.4 gezeigt wurde, kann dies beim Waldbrandmodell nicht erfüllt sein, da die Zeitintervalle zwischen dem Auftreten zweier Feuer an einem betrachteten Gitterplatz für beide Fälle verschieden sind. In Abbildung 2.6 und Abbildung 2.7 wird gezeigt, dass auch die Feuergrößenverteilung für beide Fälle unterschiedlich ist.

In Abbildung 2.6 werden die Feuerdichteverteilungen eines Ausschnitts aus einem großen System und eines entsprechend kleinen abgeschlossenen Systems gezeigt. Die skalierenden Teile der Kurven und die Buckel nahe der Cutoffs unterscheiden sich deutlich voneinander. Die Feuergrößenverteilung des Systemausschnitts ist etwas breiter. Dies liegt daran, dass diese Ausschnitte eine Grenze zwischen 2 der Flecken enthalten können, die in Abbildung 2.1 dargestellt sind. Da die Feuer jeweils nur die dichten Regionen erfassen, entsteht eine breitere Größenverteilung als in Systemen, deren globale Walddichte stark oszilliert. Abbildung 2.7 zeigt, wie sich die Feuergrößenverteilung ändert, wenn kleiner werdende Ausschnitte eines großen Systems betrachtet werden.

Vergleicht man die Kurven von Abbildung 2.7 mit denen in Abbildung 2.5 sieht man auch hier, dass die Feuergrößenverteilung von kleinen abgeschlossenen Systemen sich von der Feuergrößenverteilung von Ausschnitten größerer Systeme unterscheidet. Man sieht, dass sich die Form der Kurven mit kleiner werdender Ausschnittsgröße kontinuierlich ändert. Die Cutoffs der Kurven skalieren im Gegensatz zu konventionellem finite-size Skalenverhalten mit  $l^2$ .

Die hier dargestellten Ergebnisse der Feuergrößenverteilung bestätigen einen qualitativen Übergang von einem Parameterbereich in dem finite-size Effekte nur vernachlässigbare Auswirkungen haben hin zu einem Bereich, in dem die Dynamik des Systems durch die systemspannenden Feuer beschrie-

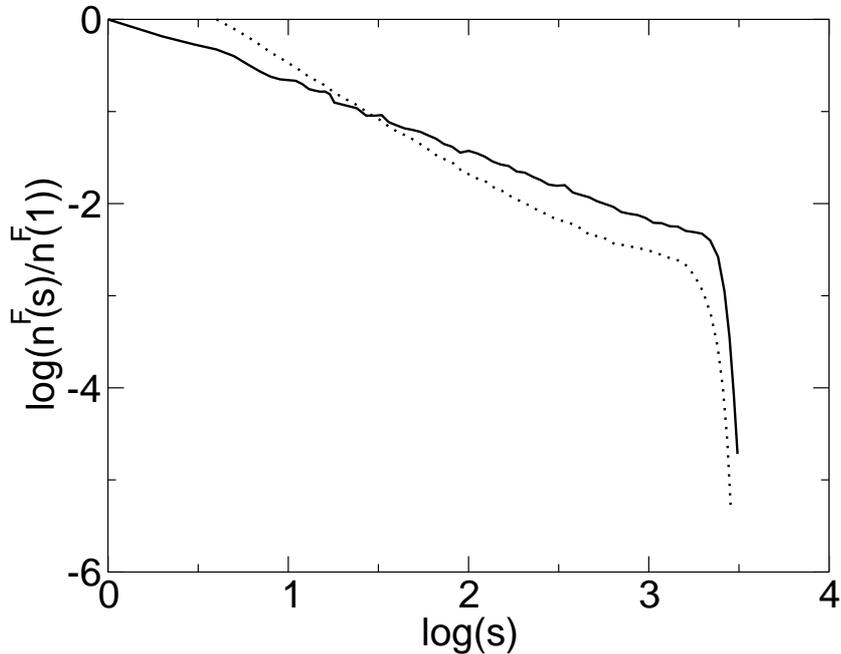


Abbildung 2.6: Vergleich der Feuergrößenverteilung eines Ausschnitts der Größe  $l = 63$  eines größeren Systems ( $L = 600$ ,  $s_0 = 1440$ ) (durchgezogene Kurve) mit der Feuergrößenverteilung eines kleinen Systems der Größe ( $L = 63$ ,  $s_0 = 200$ ) (gestrichelte Kurve). Beide Systeme haben eine Walddichte von  $\bar{\rho} = 0.401$ .

ben werden, wie in Abschnitt 2.5.1 gezeigt wurde.

## 2.6 Zusammenfassung der Ergebnisse: finite-size Effekte des Waldbrandmodells

In diesem Kapitel wurde der Einfluß von finite-size Effekten auf das zweidimensionale selbstorganisiert kritische Waldbrandmodell untersucht. Unter geringem Einfluß von finite-size Effekten zeigt das System eine Struktur mit ausgeprägten Bereichen regional homogener Walddichte und verschwindenden globalen Walddichtefluktuationen in der Zeit. Wenn die Auswirkungen der finite-size Effekte stärker werden, bildet das System eine homogene globale räumliche Walddichteverteilung mit starken zeitlichen Walddichtefluktuationen aus. Diese Restrukturierung des Systems manifestiert sich in der Feuergrößenverteilung, der mittleren Walddichte, und den zeitlichen Wald-

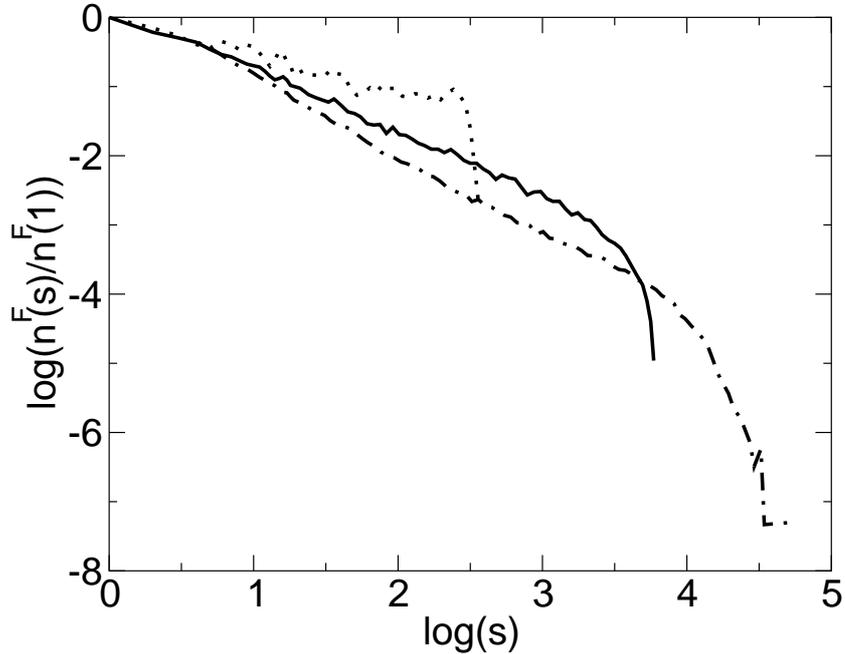


Abbildung 2.7: Feuergrößenverteilungen für Systeme der Größe  $L = 800$  (gestrichelt-gepunktete Kurve) und für und für Subsysteme der Abmessungen  $l = 100$  (durchgezogene Kurve) und  $l = 20$  dieses großen Systems. Es wurde  $s_0/L^2 = 0.001$  verwendet und eine Walddichte  $\bar{\rho} \approx 0.40$  ermittelt.

dichtefluktuationen, die im Anhang A.1 beschrieben werden. Betrachtet man immer kleiner werdende Ausschnitte eines nicht von finite-size Effekten betroffenen großen Waldbrandsystems, kann man qualitativ ähnliche, Effekte beobachten, die sich jedoch quantitativ von denen kleiner abgeschlossener Systeme unterscheiden. Aufgrund dieser Unterschiede liegt beim untersuchten Waldbrandmodell kein finite-size Skalenverhalten vor, das analog zu dem Verhalten von gleichgewichtskritischen Systemen wäre. Die in diesem Kapitels vorgenommene Analyse zeigt, dass man nur mit großer Vorsicht Konzepte von den gleichgewichtskritischen Phänomenen auf selbstorganisiert kritischen Phänomene übertragen kann, da selbstorganisiert kritische Systeme Eigenschaften haben, die im gleichgewichtskritischen Phänomenen nicht beobachtet werden können. Der Skalenansatz in Gleichung 2.3, der auf der Annahme der Existenz von nur einer Längenskala  $\xi \propto s_0'$  beruht, kann aber nur näherungsweise korrekt sein. Das wirkliche Skalenverhalten des Modells auf großen Längenskalen wird in Kapitel 3 untersucht. Hier wird auch eine Skalenansatz vorgeschlagen, der nicht in Konflikt zu den Beobachtungen die-

ses Kapitels steht. Der Grund für das komplexere Skalenverhalten des Waldbrandmodells ist, wie in Kapitel 3 gezeigt werden wird, dass es zwei qualitativ verschiedene Arten von Feuern gibt. Eine Sorte tritt auf, wenn ein Waldcluster der perkolationsartigen Bereiche unterhalb der Perkolationsschwelle getroffen wird. Der zweite Feuertyp tritt auf, wenn der regionspannende Waldcluster einer perkolationsartigen Region oberhalb der Perkolationsschwelle getroffen wird. Diese beiden abbrennenden Waldclustertypen haben unterschiedliche fraktale Dimensionen [21] daher kann man das Waldbrandmodell nicht nur durch eine einzige Längenskala charakterisieren.

In [33, 34] und [48] werden Modelle behandelt, die mit dem hier gezeigten verwandt sind und in gewissen Bereichen auch Umstrukturierungen ihrer Zustände zeigen. In All diesen Modellen wurde die Walddichte oder Leerstellendichte global erhalten, indem pro Zeitschritt genau so viele Bäume wieder in das System zurückgefüllt wurden wie verbrannt wurden. Durch diese Regelmodifikation führt man einen Kontrollparameter in das System ein und kann dadurch das Verhalten des Modells jenseits des kritischen Punktes untersuchen. Solange die Walddichte unterhalb des kritischen Wertes ist, sind diese Modelle äquivalent. Sie zeigen kritisches Verhalten, wenn man sich der kritische Walddichte von kleinen Walddichten her nähert. Aber wenn man den Kontrollparameter „Walddichte“ über die kritischen Walddichte hinaus erhöht, kann man bei beiden Modellen systemumfassende Umstrukturierungen beobachten. In [34, 48] werden die Bäume erst nach dem Ende eines Feuers neu aufgefüllt. In diesem Fall besteht die neue Struktur aus flächenmäßig nahezu gleichgroßen Domänen unterschiedlicher Walddichte. In [33], wo jeder Baum unmittelbar nach seinem Abbrand wieder in das System zurückgeführt wird bildet sich ein Feuer aus, das fortwährend brennt und dem Waldbrandmodell ohne Blitzeinschlag gleicht, das von Bak, Chen und Tang [18] eingeführt wurde. Die Strukturen in diesem Parameterregime sind spiralförmig [20, 50]. Ähnlich wie die in diesem Kapitel dargestellte, durch finite-size Einflüsse bewirkte Restrukturierung, wird also auch bei den in [33, 34] und [48] untersuchten Modellen, die Dynamik durch große Feuer bestimmt, die große Waldcluster niederbrennen, welche aus Systembereichen stammen die perkolationsartig sind, und deren Walddichte oberhalb der Perkolationsschwelle liegt.

Abschließend soll noch bemerkt werden, dass unklar ist, wie sich das selbstorganisiert kritische Waldbrandmodell in höheren Dimensionen verhält. Mean-field Theorien [28, 42, 43], die alle räumlichen Korrelationen vernachlässigen beschreiben das Waldbrandmodell nicht, solange eine Struktur mit ausgeprägten Regionen homogener Walddichte und zwei Feuertypen vorliegt. Bröker und Grassberger zeigten in [51], dass ungewöhnliches Skalenverhalten auch im 3 und 4 dimensional Waldbrandmodellen auftreten kann. Wenn 6

die obere kritische Dimension des selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells ist (dies wurde in [28, 42] und [29] vorgeschlagen), sollte das Modell konventionelles Skalenverhalten zeigen bei Systemen oberhalb dieser Dimensionalität.

# Kapitel 3

## Das selbstorganisiert kritische Waldbrandmodell auf großen Längenskalen

In diesem Kapitel wird Skalenverhalten des **zweidimensionalen** selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells auf großen Längenskalen untersucht. Wie bereits in Kapitel 2 und [52] beschrieben wurde, zeigt das Waldbrandmodell kein konventionelles kritisches Skalenverhalten. Die Dynamik des Waldbrandmodells wird von zwei qualitativ unterschiedlichen Feuertypen bestimmt, deren Feuergrößenverteilungen sich zu der Verteilung überlagert, die typischerweise in Simulationen gemessen wird. Es wird gezeigt werden, dass die Existenz der zwei Feuertypen nicht nur erklärt, warum sich der Exponent, der die Feuergrößenverteilung beschreibt, mit zunehmender Korrelationslänge verändert, sondern auch einen Weg weist, den asymptotischen Wert dieses Exponenten zu berechnen. Zur Unterstützung dieser Behauptung werden Skalenargumente, die Simulationsergebnisse eines „coarse-grained“ Modells und die Analyse von künstlich überlagerten Feuerverteilungen herangezogen. Wie schon in Kapitel 2 angedeutet, muss man die Skalengesetze, mit denen das Waldbrandmodell beschrieben wird, teilweise korrigieren. In diesem Kapitel wird diskutiert, welche Beschreibungen korrigiert werden müssen und welche nicht, und es werden korrigierte Ansätze vorgeschlagen.

### 3.1 Einführung

Wie bereits in Kapitel 2 dargestellt wurde, beruht die Analyse von selbstorganisiert kritischen Modellsystemen in der Regel auf der Annahme, dass die Größenverteilung von dissipativen Ereignissen wie Lawinen [10, 11, 3], Feu-

ern [40, 41, 27, 29] und Erdbeben [39] ein Skalenverhalten zeigt, das analog zu dem Verhalten von gleichgewichtskritischen Systemen

$$n(s) \simeq s^{-\tau} \mathcal{C}(s/s_{\max}), \quad (3.1)$$

ist, mit einer Anzahl  $n(s)$  von Ereignissen der Größe  $s$  und einer maximalen Ereignisgröße  $s_{\max}$ , ab der die Cutoff Funktion  $\mathcal{C}(s/s_{\max})$  die Größenverteilung abschneidet. Die maximale Ereignisgröße  $s_{\max}$  ist via  $s_{\max} = \xi^\mu$  mit der Korrelationslänge verknüpft, wobei  $\mu$  die fraktale Dimension der dissipativen Ereignisse ist, die den „Radius“ dieser Ereignisse mit deren „flächenmäßigem“ Ausmaß verknüpft. Hierbei muss  $\xi$  durch die Systemgröße  $L$  ersetzt werden, wenn die Systemgröße die maximale Ereignisgröße  $s_{\max}$  bestimmt. Bei selbstorganisiert kritischen Modellen wie dem Bak-Sneppen Modell [32, 31] ist diese Form der Analyse unter Verwendung von Gleichung 3.1 auch tatsächlich durchführbar. Aber es ist seit einiger Zeit bekannt [53], dass man Gleichung 3.1 beim zweidimensionalen abelschen Sandhaufenmodell nicht voraussetzen darf. Es wurde gezeigt, dass das einfache Skalenverhalten beim Sandhaufenmodell verletzt ist, weil die „Haufen“ in mehreren Wellen „umstürzen“. In [37, 38] wurde einige Aspekte des wirklichen Skalenverhaltens dieses Modells herausgearbeitet. Auch beim Erdbebenmodell wurde eine Abweichung vom konventionellen Skalenverhalten gefunden [54].

Beim Waldbrandmodell findet man auch Indizien, die gegen ein konventionelles Skalenverhalten sprechen, wie in Kapitel 2 gezeigt wurde. Beim Waldbrandmodell liefert ein auf Gleichung 3.1 beruhender Skalenkollaps einen guten Überlapp der Enden der Kurven bei großen Clustergrößen  $s$ . Jedoch scheint sich im Bereich kleiner Clustergrößen  $s$  der Exponent, der den skalierenden Teil der Kurven beschreibt, mit größer werdender Korrelationslänge zu vergrößern. In diesem Clustergrößenbereich ist daher der Überlapp der Kurven schlechter [27]. In Kapitel 2 wurde bereits erwähnt, dass man diese Eigenschaften des zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells durch die Existenz zweier unterschiedlicher Arten von Feuern erklären kann. Kleinere Feuer, die in Bereichen (siehe Abbildung 2.1) mit regionalen Walddichten unterhalb der Perkolationsschwelle auftreten und Feuer, die in Bereichen auftreten, deren regionale Dichte oberhalb der Perkolationsschwelle liegt. Die durchschnittlich kleineren Feuertypen brennen fraktale Perkulationscluster nieder, während die größeren Feuer kompakt sind. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird zuerst eine Skalentheorie aufgestellt, die diese zwei Feuertypen berücksichtigt. Danach wird gezeigt, dass die zwei Feuertypen tatsächlich zu den Kurvenformen überlagern, die in Simulationen gemessen werden. Aber bei Systemen, deren Größe sich außerhalb der simulationsmäßigen Zugriffs heutiger Rechner befindet, tritt eine Veränderung der Cluster- und Feuergrößenverteilung auf. Diese Ergebnisse werden schließlich

noch an einem „coarse-grained“ Waldbrandmodell überprüft, bei dem mehrere Gitterplätze zu einem zusammengefaßt werden und so größere Systeme als bisher „emuliert“ werden können. Das Kapitel wird mit einer Diskussion der Ergebnisse abgeschlossen.

## 3.2 Skaleneigenschaften des Waldbrandmodells

### 3.2.1 Zwei Feuertypen bestimmen die Dynamik des Waldbrandmodells

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Annahmen über die Dynamik des Waldbrandmodells aufgeführt und begründet, aus denen die weiteren Ableitungen und Schlußfolgerungen dieses Kapitels aufbauen.

Die grundlegenden Eigenschaften des zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells folgen im wesentlichen aus dessen in Abbildung 2.1 dargestellten „fleckigen“ Struktur, mit den recht scharf separierten Regionen homogener lokaler Walddichte  $\rho_{\text{patch}}$ , die, wie bereits erwähnt, gemäß

$$\dot{\rho}_{\text{patch}}(t) = p(1 - \rho_{\text{patch}}(t)) \quad (3.2)$$

wächst. Diese „Flecken“ können lokale Walddichten  $\rho_{\text{patch}}$  oberhalb der Perkolationschwelle  $\bar{\rho}_c$  haben. Wenn ein derartiger Fleck abbrennt, dann bleiben in der betroffenen Region kaum Bäume zurück. Dieses Verhalten des zweidimensionalen Waldbrandmodells folgt recht plausibel direkt aus den zum Beispiel in Abschnitt 2.2 dargestellten Regeln des Modells und es gibt keine Indizien, dass sich an dem hier dargestellten Szenario auf großen Längenskalen grundlegendes ändert: Der clusterweise Abbrand schafft fleckenartige Strukturen und die betrachteten kleinen  $f/p$  Werte sorgen für seltene Feuer, und deshalb können hohe regionale Walddichten in den Patches oder Flecken entstehen. Daher kann man annehmen, dass die Dynamik des Waldbrandmodells durch folgende Grundannahmen determiniert wird:

- Die in Abbildung 2.1 dargestellten Regionen, also die „Patche“ oder Flecken sind nahezu homogen mit Wald bedeckt, weil ein Feuer, das einen kompletten Flecken niederbrennt, nur wenige Bäume verschont. (In den Flecken eines Quadratgitters findet man typischerweise eine Walddichte von  $\rho_{\text{patch}} = 0.078$  unmittelbar nach einem Feuer. Beim zweidimensionalen Dreiecksgitter beträgt dieser Wert  $\rho_{\text{patch}} = 0.062$ .)

Der durch die Regeln festgelegte, räumlich zufällige Wachstumsprozeß führt daher innerhalb der Regionen (oder Flecken) zu einer räumlich gleichförmig verteilten Baumdichte. Die Größenverteilung von Waldclustern innerhalb dieser Regionen homogener Walddichte gleicht daher die Größenverteilung von Clustern eines Perkolationssystems der gleichen Dichte wie  $\rho_{\text{patch}}$  der betrachteten Region. In seltenen Fällen lassen Feuer in den Flecken auch größere Waldcluster zurück. Durch diese Inhomogenitäten können neue Flecken entstehen und „alte“ Flecken vernichtet werden. Die Zeitskala dieses Entstehungs- und Vernichtungsprozesses von Flecken ist jedoch sehr viel langsamer als die der Walddichteoszillationen der einzelnen Regionen, und wird daher im folgenden meist vernachlässigt. Es wird jedoch diskutiert werden, wo diese Entstehungs- und Vernichtungsprozesse eventuell merklichen Einfluß haben könnten.

- Man kann annehmen, dass die Verteilung der Fleckengrößen unabhängig von ihrer Walddichte ist, weil ein Abbrand die Fleckengröße kaum verändert und daher Flecken sowohl im Stadium niedriger als auch im Stadium hoher Walddichte die selbe Größe haben.
- Einige Flecken haben eine Walddichte oberhalb der Perkolationsschwelle. Diese Regionen enthalten nach der Perkolationstheorie einen fleckspannenden Waldcluster, der kompakt ist. Das heißt, er hat eine fraktale Dimension von 2. Wenn ein derartiger Waldcluster vom Blitz getroffen wird und abbrennt, tritt ein kompaktes Feuer auf. Wenn dagegen ein Cluster eines Flecks mit geringer Walddichte getroffen wird (also mit einer Walddichte unterhalb der Perkolationsschwelle), brennt nur ein fraktaler Cluster ab und führt daher zu einem fraktalen Feuer, welches in der Regel auch nur einen kleinen Waldbereich erfaßt. Für kleine  $f/p$  ist die mittlere Feuergröße groß, die meisten Bäume werden während der großen Feuer vernichtet und es bleiben die geringen Dichten unmittelbar nach dem Feuer zurück, die eben erwähnt wurden.
- Da im Grenzfall  $f/p \rightarrow 0$  nach Gleichung 2.1 und 3.3 die Größe des größten Flecken divergiert, kann man annehmen, dass das System einige Eigenschaften kritischer Systeme hat und durch Potenzgesetze beschrieben werden kann. Einige dieser Potenzgesetze werden in diesem Kapitel behandelt.
- Da sich für lange Zeiten die charakteristischen Verteilungen, die das System beschreiben, stets stabilisieren, kann man davon ausgehen, dass

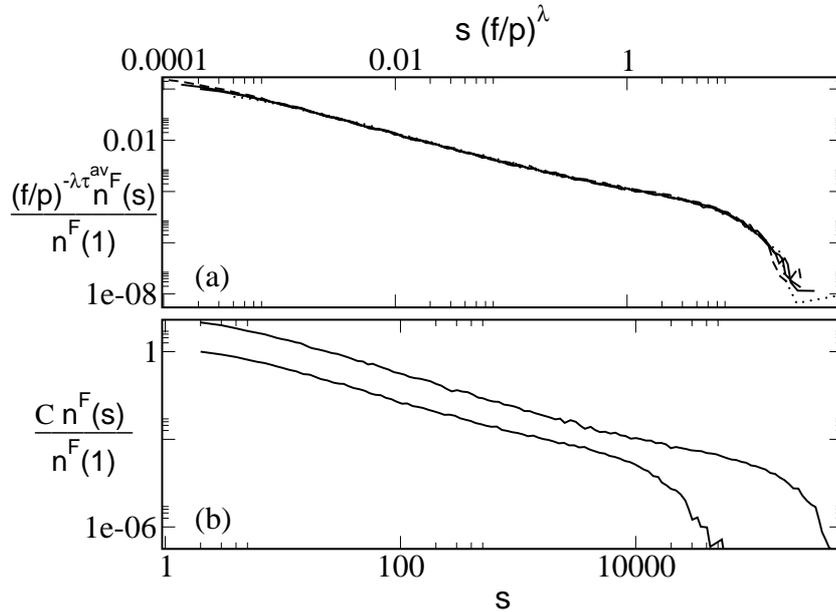


Abbildung 3.1: (a) Kollaps der Größenverteilungen  $n^{\text{F}}(s)$  der Feuer des selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells für  $L = 1300$  und  $f/p = 0.000118$  (gestrichelte Kurve),  $0.000169$  (durchgezogene Kurve),  $0.000236$  (durchgezogene Kurve) und  $0.000394$  (gepunktete Kurve). Zur Erzeugung des Kollapses der Kurven wurden die X-Werte mit  $(f/p)^{-\lambda\tau^{\text{av}}}$  skaliert, wobei der effektive Exponent  $\tau^{\text{av}} = 1.14$  verwendet wurde.  $\tau^{\text{av}}$  kann als ein Exponent betrachtet werden, der über einen gewissen Bereich von Feuergrößen  $s$  gemittelt wurde. (b) Feuergrößenverteilung  $n^{\text{F}}(s)$  für  $L = 1300$  und  $f/p = 0.0001183$  (obere Kurve) und  $f/p = 0.001183$  (untere Kurve). Die obere Kurve wurde um den Faktor  $C = 10$  verschoben, um die unterschiedliche Form beider Kurven besser sichtbar zu machen.

sich das System nach ausreichender Einschwingzeit in einen stationären Zustand befindet.

Diese zwei gerade erwähnten Feuersorten überlagern sich zu den Feuerverteilungen, die typischerweise in Computersimulationen des Modells gefunden werden und erklären das unkonventionelle Skalenverhalten des zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells. In Abbildung 3.1b ist eine derartige überlagerte Feuergrößenverteilung dargestellt. Der linke Teil der Kurven stammt hauptsächlich von Feuern, die fraktale Perkolationscluster verbrennen. Der rechte Teil der Kurven mit dem Cutoff rührt von den großen, kompakten Feuern her.

Im Gegensatz dazu werden bei konventionellen gleichgewichtskritischen Systemen sowohl der skalierende als auch der Cutoff-Teil der Kurven von den selben kritischen Fluktuationen hervorgerufen. Die zwei überlagerten Segmente der Feuergrößenverteilung beim Waldbrandmodell separieren nur für sehr große Korrelationslängen  $\xi$ , wie im weiteren gezeigt werden wird. Der asymptotische Exponent kann mit Simulationen des Modells, die heute möglich sind, kaum gemessen werden.

### 3.2.2 Das Skalenverhalten

In diesem Abschnitt wird eine Skalentheorie für das Waldbrandmodell ausgearbeitet, die auf den Annahmen von Abschnitt 3.2.1 beruht. Diese korrigierte Skalentheorie löst die in Kapitel 2 und die oben aufgeführten Unstimmigkeiten der bisherigen Beschreibung auf und erlaubt es, Vorhersagen über den asymptotischen Exponenten der „wahren“ Feuerverteilung zu machen.

Da im stationären Zustand des Modells genausoviele Bäume nachwachsen müssen wie verbrennen, läßt sich für die mittlere Zahl  $\bar{s}$  der Bäume, die zwischen zwei zu Feuern führenden Blitzeinschlägen verbrennen, die Beziehung

$$\bar{s} = \frac{p(1 - \bar{\rho})}{f\bar{\rho}} \quad (3.3)$$

herleiten. Damit divergiert  $\bar{s}$  im Grenzfall  $f/p \rightarrow 0$  mit einem Potenzgesetz. Dies impliziert, dass die Größe  $s_{\max}$  der Größten Feuer auch divergiert und damit auch die Korrelationslänge  $\xi$ , die als Radius des größten Clusters definiert ist. Man kann daher weiterhin

$$s_{\max} \sim (f/p)^{-\lambda}, \quad (3.4)$$

als Ansatz zur Beschreibung des von  $s_{\max}$  verwenden wie in [41, 27, 29].  $\lambda$  hat eine Wert von 1.1. Gleichung 3.4 führt auf

$$\xi \sim (f/p)^{-\lambda/2}, \quad (3.5)$$

da die fraktale Dimension großer Feuer 2 ist und  $\xi$  der „mittlere Radius“ der größten Feuer. Im Gegensatz hierzu ging man früher davon aus, dass große und kleine Feuer die selbe fraktale Dimension haben. Diese gemeinsame „mittlere“ fraktale Dimension  $\mu$  wurde mit  $\mu \approx 1.96$  [29] gemessen, wobei manche Autoren nicht ausschlossen, dass  $\mu = 2$  sein könnte [41, 27].

Die Größe  $n^F(s)$  ist wie bereits erwähnt die Anzahl der Feuer der Größe  $s$ , wobei diese Größenverteilung durch  $\int n^F(s)ds = \bar{\rho}$  normiert wird. Die Größenverteilung der Waldcluster ist proportional zu  $n^F(s)/s$ , weil jeder Baum mit der selben Wahrscheinlichkeit vom Blitz getroffen wird. Gemäß den

Annahmen in Abschnitt 3.2.1 ist es naheliegend, die Feuergrößenverteilung  $n^F(s)$  als Überlagerung der Verteilungen der beiden Feuertypen anzusetzen:

$$n^F(s) = n_1(s) + n_2(s). \quad (3.6)$$

Hierbei ist  $n_1(s)$  der Beitrag von den kleineren, fraktalen Feuern und  $n_2(s)$  der Beitrag von den kompakten Feuern, die einen kompletten Fleck niederbrennen. Wenn es zwischen diesen beiden Feuertypen keinen Unterschied gäbe würde die aus Gleichung 3.1 auf Feuerverteilungen applizierte Gleichung  $n^F(s) \simeq s^{-\tau^F} \mathcal{C}(s/s_{\max})$ , mit dem Exponent  $\tau^F = \tau - 1 \approx 1.14$  der Feuergrößenverteilung gelten<sup>1</sup>. Mit  $\bar{s} = \int_1^\infty sn^F(s)ds/\bar{\rho}$  könnte man daher unter Verwendung der Gleichungen 3.3 und 3.4 die Skalenrelation

$$\lambda = \frac{1}{2 - \tau^F}, \quad (3.7)$$

herleiten. Da hier aber zwei unterschiedliche Feuertypen vorliegen, kann man nicht erwarten, dass die Skalenrelation 3.7 gültig ist. Wertet man Abbildung 3.1 aus, sieht man, dass Gleichung 3.7 in der Tat verletzt ist. In Abbildung 3.1b werden die Feuergrößenverteilungen für Feuer mit verschiedenem  $f/p$  dargestellt. Hierbei wurde die Systemgröße  $L$  so gewählt, dass keine finite-size Effekte auftreten. Man kann erkennen, dass  $n^F(s)$  mit kleiner werdendem  $f/p$  steiler wird. Daher ist zu erwarten, dass die „Steigung“ der Kurve bis zu einem Grenzwert weiter zunehmen wird. Die steilste in Abbildung 3.1b gefundenen Steigungen liefern einen Wert von  $\tau^F \approx 1.3$ , was eine untere Grenze für den asymptotischen Wert von  $\tau^F$  darstellt. ( In der Literatur wird der Wert mit  $\tau \approx 1.14$  angegeben. Dieser Wert wurde durch Mittelung über den Verlauf von  $n^F(s)$  gewonnen und ist daher kleiner als der aus der steilsten Stelle ermittelte Wert.) Bei dem in Abbildung 3.1a dargestellten Skalenkollaps erkennt man, dass die Cutoffs der Kurven gut zusammenfallen und die Ableitung eines Wertes von  $\lambda \approx 1.1$  erlauben. Dies stimmt jedoch nicht mit dem Wert überein, der für  $\lambda$  folgen würde, wenn Gleichung 3.7 gültig wäre. Der Wert  $\lambda \approx 1.1$  wurde in [55] von Pastor-Satorras und Vespignani bestätigt. Diese Autoren verwendeten eine Momentanalyse. In [55] wurde damit auch untermauert, dass die in Abbildung 3.1a dargestellten Cutoffs das in Gleichung 3.4 angenommene einfache Skalenverhalten zeigen.

Im Folgenden werden nun einige Eigenschaften von  $n_1(s)$  diskutiert. Mit abnehmenden  $f/p$  ändert sich der linke Teil der Feuergrößenverteilungen  $n^F(s)$  nicht mehr. Da zu diesem Teil der Kurve hauptsächlich die fraktalen,

---

<sup>1</sup>Da die Clustergrößenverteilung  $n(s)$  durch  $n(s) = sn^F(s)$  aus der Feuergrößenverteilung folgt, ergibt sich der Exponent der Feuergrößenverteilung  $\tau^F$  durch  $\tau^F = \tau - 1$

durch  $n_1(s)$  beschriebenen Feuer beitragen, kann man davon ausgehen, dass sich  $n_1(s)$  für  $f/p \rightarrow 0$  einer asymptotischen Form  $n_1^*(s)$  nähert, mit einem Cutoff, der von  $f/p$  abhängt. Man kann daher

$$n_1(s) = n_1^*(s)\mathcal{C}_1(s/s_{\max,\text{fractal}}) = n_1^*(s)\mathcal{C}_1(s(f/p)^{\lambda_1}), \quad (3.8)$$

schreiben, wobei die Cutoff Funktion  $\mathcal{C}_1(s/s_{\max,\text{fractal}})$  für die fraktalen Feuertypen eingeführt wurde unter der Annahme, dass die maximale Feuergröße  $s_{\max,\text{fractal}}$  der fraktalen Cluster mit dem Exponent  $\lambda_1$  skaliert. Für ausreichend große Werte von  $s$  wird  $n_1^*(s)$  sich einem asymptotischen Potenzgesetz annähern mit dem „wahren“ Exponenten  $\tau^F$ , der in folgender Weise abgeschätzt werden kann: Die größeren der fraktalen Feuer brennen Perkolationscluster aus Flecken nieder, deren regionale Walddichte  $\rho_{\text{patch}}$  nahe der Perkolationschwelle  $\rho_{\text{perc}}$  liegt. Die Wahrscheinlichkeit, einen Waldcluster der Größe  $s$  zu finden, ist proportional zu der Wahrscheinlichkeit, dass  $\rho_{\text{patch}}$  des betroffenen Fleckens groß genug ist, dass Perkolationscluster der Größe  $s$  in ihm existieren können mal die Wahrscheinlichkeit, einen Cluster der Größe  $s$  in diesen Flecken geeigneter Mindestwalddichte zu finden. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fleck von der Fläche her groß genug ist um Cluster der Größe  $s$  zu enthalten, ist nach Abschnitt 3.2.1 eine Konstante. Nach [21] ist die Wahrscheinlichkeit, einen Cluster der Größe  $s$  in einem Perkolationsystem zu finden, durch den Ausdruck

$$n_{\text{perc}}(s) \simeq s^{-\tau_{\text{perc}}}\mathcal{C}_{\text{perc}}(s/s_{\max,\text{perc}}) \quad (3.9)$$

gegeben, wobei

$$s_{\max,\text{perc}} \propto (\rho_{\text{perc}} - \rho)^{-\sigma_{\text{perc}}} \quad (3.10)$$

mit der Besetzungsdichte  $\rho$  des betrachteten Perkolationsystems und  $\sigma_{\text{perc}} = 91/36 \approx 2.528$  sowie  $\tau_{\text{perc}} = 187/91 \approx 2.055$ . Hier werden Flecken betrachtet, deren regionale Walddichte nahe der Perkolationschwelle liegt. Daher kann Gleichung 3.2 durch  $\dot{\rho}_{\text{patch}} = p(1 - \rho_{\text{perc}})$  genähert werden. Damit kann die Wahrscheinlichkeit  $P$ , einen Fleck im Walddichtebereich  $[\rho; \rho_{\text{perc}}]$  in der Nähe der Perkolationschwelle  $\rho_{\text{perc}}$  vorzufinden als

$$P \propto \rho_{\text{perc}} - \rho \quad (3.11)$$

angegeben werden. Wegen Gleichung 3.10 muss ein Fleck mindestens die regionale Dichte  $\rho = \rho_{\text{perc}} - s^{-1/\sigma_{\text{perc}}}$  haben um einen Cluster mit  $s \geq s_{\max,\text{perc}}(\rho)$  Bäumen enthalten zu können. Damit folgt nach Gleichung 3.11:  $P \propto s^{-1/\sigma_{\text{perc}}}$ . Mit Gleichung 3.9 folgt die Wahrscheinlichkeit, einen Waldcluster der Größe  $s$  zu finden, als proportional zu  $s^{\tau_{\text{perc}}-1/\sigma_{\text{perc}}}$ . Dieser Ausdruck stellt das asymptotische Potenzgesetz der fraktalen Waldclustergrößen-

verteilung dar. Mit einem Faktor  $s$  gelangt man von dieser Waldclustergrößenverteilung zum gesuchten asymptotischen Potenzgesetz der fraktalen Feuer

$$s^{1-\tau_{perc}-1/\sigma_{perc}} \simeq s^{-1.45}. \quad (3.12)$$

Damit ist der „wahre“ Exponent  $\tau^F$ :

$$\tau^F \approx 1.45. \quad (3.13)$$

Nun wird der Cutoff Exponent  $\lambda_1$  abgeschätzt. Gleichung 3.5 besagt, dass die Korrelationslänge  $\xi$ , die definiert ist als der Durchmesser des größten Flecks, proportional zu  $(f/p)^{-\lambda/2}$  ist. Da der größte fraktale Cluster entsteht, wenn der größte Fleck eine lokale Walddichte knapp unterhalb der Perkolationschwelle hat und von einem Perkolationscluster der fraktalen Dimension  $\mu_{perc} \approx 1.56$  bedeckt wird, ist die Größe dieses fraktalen Clusters proportional zu  $(f/p)^{-\mu_{perc}\lambda/2}$ . Daher ist  $\lambda_1 \simeq 0.86$ . Feuer, die größer als die größten fraktalen Feuer sind, also mehr als  $s_{\max, \text{fractal}} \propto (f/p)^{-\lambda_1}$  Bäume erfassen, sind in der Regel kompakt. Die Größenverteilung dieser kompakten Feuer wird durch die Größenverteilung der Flecken bestimmt. Da  $\lambda_1 < \lambda$  „läuft“ die maximale Clustergröße  $s_{\max}$  der maximalen fraktalen (kompakten) Clustergröße  $s_{\max, \text{fractal}}$  für kleiner werdende  $(f/p)$  „davon“. Das heißt, dass mit kleiner werdendem  $(f/p)$ , der „Buckel“ am Ende Feuergrößenverteilungen, der sich hauptsächlich durch Beiträge der kompakten Feuer zusammensetzt, einen wachsenden Anteil aller auftretenden Feuer enthalten wird. Man kann in Abbildung 3.1b erkennen, dass dies tatsächlich so ist, denn der Buckel wird ausgeprägter. Wenn man annimmt, dass die Verteilung der Fleckengrößen ebenfalls skaliert, kann man die Skalenform

$$n_{\text{patch}}(s) \simeq s_{\max}^{b-2} s^{-b} \mathcal{C}_2(s/s_{\max}) \quad (3.14)$$

für die Fleckengrößenverteilung  $n_{\text{patch}}(s)$  ansetzen. Hierbei ist  $s$  die Anzahl der Gitterplätze in dem Fleck und  $s_{\max} \propto (f/p)^{-\lambda}$  ist die „Fläche“ des größten Flecken. (Das Skalengesetz folgt, weil die Flecken genauso wie die großen Feuer kompakt sind.) Im folgenden Abschnitt wird anhand von Simulationsdaten belegt, dass der Exponent  $b$  kleiner als 1 ist. Daher ist der Faktor  $s_{\max}^{b-2}$  notwendig, damit der Ausdruck  $\int sn(s)_{\text{patch}} ds$  normierbar bleibt<sup>2</sup>. Die in Gleichung 3.6 eingeführte Größenverteilung kompakter Feuer  $n_2(s)$  hängt

---

<sup>2</sup> $n_{\text{patch}}(s)$  ist die Wahrscheinlichkeit, einen Flecken der Größe  $s$  im System vorzufinden. Damit ist  $sn_{\text{patch}}(s)$  die Wahrscheinlichkeit, einen Gitterplatz in einem Flecken der Größe  $s$  zu finden und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gitterplatz in einem Fleck irgendeiner Größe ist, ist durch  $\int sn(s)_{\text{patch}} ds$  gegeben und muss gleich 1 sein.

von der Fleckengrößenverteilung  $n_{\text{patch}}(s)$  ab. Der Zusammenhang zwischen beiden Größen ist aber nicht trivial. Wenn man annimmt, dass der Blitzeinschlag einen dichten Fleck immer nur dann merklich abbrennt, wenn die lokale Walddichte des Flecks die maximale Walddichte erreicht hat, dann würde  $n_2(s) \propto sn_{\text{patch}}(s)$  folgen. Aber in diesem Fall würden Flecken auch niemals zerstört werden. Da die Flecken aber verschmelzen, wenn zwei unterschiedlich dichte, benachbarte Flecken beide die Perkolationschwelle überschreiten, bevor der dichtere von beiden von einem Blitzeinschlag abgebrannt wird, kann man einen stationären Zustand nur erreichen, wenn Flecken manchmal auch zerstört werden können. Diese Aufspaltung von einem Flecken kann nur stattfinden, wenn ein Fleck, dessen lokale Walddichte genügend nahe an der Perkolationschwelle ist, von einem Blitz getroffen wird, dessen Feuer nur ein maßgeblichen Bruchteil der Bedeckung des Fleckens abbrennt. So entstehen aus einem großen Flecken zwei kleinere Flecken. Aber diese Verschmelzungs- und Aufspaltungsprozesse verkomplizieren den Zusammenhang zwischen  $n_2(s)$  und  $sn_{\text{patch}}(s)$ . In Abschnitt 3.3 wird gezeigt, dass der Zusammenhang  $n_2(s) \propto sn_{\text{patch}}(s)$  in der Tat nicht gilt.

### 3.2.3 Der Exponent $\delta$

Das Skalenverhalten der Walddichte liefert einen weiteren Anhaltspunkt dafür, dass die Feuergrößenverteilung aus der Beiträgen zweier qualitativ unterschiedlicher Feuertypen zusammengesetzt ist.

Seit einiger Zeit ist bekannt, dass sich die Baumdichte ihrem kritischen Wert gemäß

$$(\rho_c - \bar{\rho}) \sim (f/p)^{1/\delta}, \quad (3.15)$$

nähert. Hierbei ist  $1/\delta \approx 0.5$  [41, 27, 29], wobei in [55] mit  $1/\delta \approx 0.47$  wahrscheinlich der bisher genaueste Wert für  $1/\delta$  gemessen wurde. Wenn das simple Skalenverhalten von Gleichung 3.1 gelten würde, dann würde man erwarten, dass der Exponent  $\delta$  aus

$$\rho_c - \bar{\rho} = \int_{s_{\text{max}}}^{\infty} s^{-\tau^F} ds \quad (3.16)$$

folgen würde. Verwendet man Gleichung 3.4 und Gleichung 3.7 (letztere gilt, wenn Die Relation 3.1 erfüllt ist), so folgt

$$1/\delta = \frac{\tau^F - 1}{2 - \tau^F}. \quad (3.17)$$

Setzt man hier einen Wert  $\tau^F \approx 1.14$  ein, erhält man einen einen sehr viel kleineren Wert für  $1/\delta$  als  $1/\delta \approx 0.47$ . Verwendet man den asymptotischen

Wert  $\tau^F \approx 1.45$ , erhält man einen Wert, der sehr viel größer als 0.47 ist. Pastor Satorras und Vespignani haben in [55] darauf hingewiesen, dass der gemessene Wert von  $\delta$  Korrekturen zum Skalenverhalten von  $n^F(s)$  notwendig erscheinen läßt. Die genannten Autoren schlugen hierzu eine Korrektur zu dem in Gleichung 3.1 angegebenen Skalenverhalten vor, die einen etwas größeren Exponenten  $\tau$  hat, aber den selben Cutoff wie der in Gleichung 3.1 beschriebene Hauptteil der Verteilung. Weiterhin wurde angenommen, dass diese Korrektur vernachlässigbar wird für genügend kleine ( $f/p$ ) und ausreichend große  $s$ .

Im Gegensatz zu Satorras und Vespignani wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass nicht nur eine Korrektur zu dem durch Gleichung 3.1 beschriebenen Skalenverhalten nötig ist, sondern dass sich das Skalenverhalten des zweidimensionalen Waldbrandmodells fundamental von diesem einfachen Skalenverhalten unterscheidet. Ein einzelner Exponent  $\tau^F$  reicht nicht aus um die komplette Feuergößenverteilung zu beschreiben. Daher gibt es keine Relation mehr zwischen den Exponenten  $\delta$  und  $\tau^F$ . Es ist bisher unklar welche Beziehung zwischen  $\delta$  und den Verteilungen  $n_1(s)$  und  $n_2(s)$  besteht.

### 3.3 Überlagerung der unterschiedlichen Feuertypen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse beschrieben, die durch die künstliche Überlagerung der zwei Feuertypen ermittelt wurden. Diese Überlagerung bestätigt die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2

Die „künstliche Überlagerung“ der zwei Feuertypen wurde durchgeführt, indem die Clustergrößenverteilungen von zweidimensionalen Systemen, die homogen mit Bäumen bedeckt waren<sup>3</sup> superponiert wurden. Um Universalitätstests durchzuführen wurden sowohl Dreiecksgitter als auch Quadratgitter verwendet. Die Walddichten der verwendeten Systeme deckten das Spektrum der in Tabelle 3.3 angegebenen Dichten  $\rho_{\text{nach dem Feuer}}$  bis  $\rho_{\text{max}}$  für die jeweiligen Gittertypen ab.

Gittertyp	$\rho_{\text{nach dem Feuer}}$	$\rho_{\text{max}}$
□	0.078	0.625
△	0.062	0.534

Die Walddichte  $\rho_{\text{nach dem Feuer}}$  wird unmittelbar nach dem Abbrennen eines Flecks als lokale Walddichte dieses Flecks gemessen. und Die Walddichte  $\rho_{\text{max}}$

---

<sup>3</sup>Also von Perkolationsystemen.

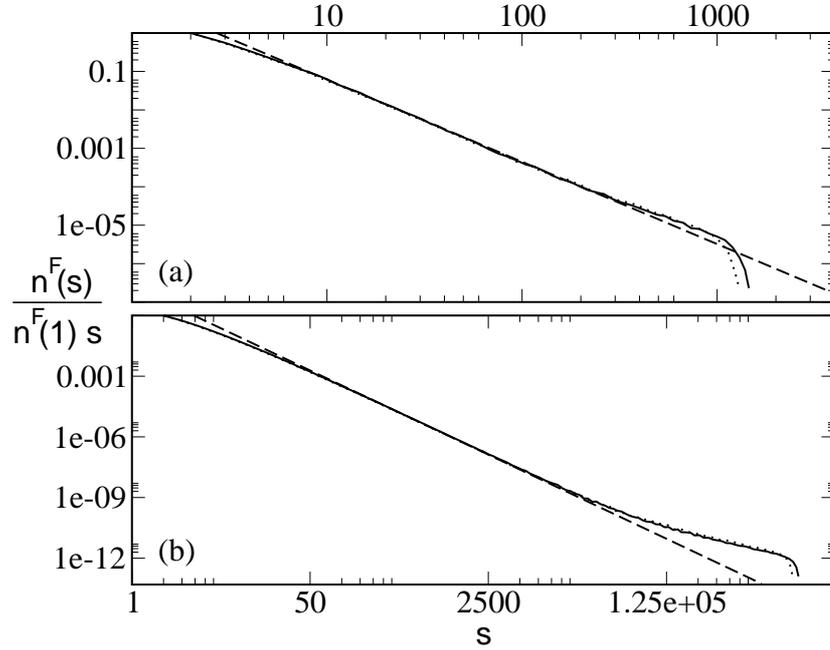


Abbildung 3.2: (a) Größenverteilung für Baumcluster  $n^F(s)/(sn^F(1))$ , ermittelt durch Überlagerung von Systemen bis zu einer Größe von  $l_{\max} = 50$ . Die Größen  $l$  sind gemäß Gleichung 3.14 mit  $b = 0.6$  verteilt. (Durchgezogene Kurve: Quadratgitter; gepunktete Kurve: Dreiecksgitter.) Zum Vergleich: Potenzgesetz mit dem Exponenten  $\tau^F + 1 = 2.14$  (gestrichelte Kurve). (b) Analog wie bei (a), nur dass Systeme bis zu einer Größe von  $l_{\max} = 2000$  überlagert wurden und mit dem Potenzgesetz zum Exponenten  $\tau^F + 1 = 2.45$  verglichen wird. Bei beiden Abbildungen wurden gemäß Gleichung 3.2 verteilte Walddichten aus dem Intervall  $[0.078, 0.625]$  für das Quadratgitter und aus dem Intervall  $[0.062, 0.534]$  für das Dreiecksgitter superponiert.

ist die maximale regionale Walddichte eines Flecks. Diese Größen wurden zum Beispiel in [48] gemessen.

Gemäß Gleichung 3.14 wurden zusätzlich noch die Systemgrößen  $l$  der der Messung zugrundeliegenden Systeme variiert, wobei  $l_{\max} = \xi \propto \sqrt{s_{\max}}$  gilt. Beim Dreiecksgitter beziehen sich die Angaben für  $l$  auf das Quadratgitter, welches dem Dreiecksgitter zugrundeliegt, weil das Dreiecksgitter implementiert wurde, indem man bei einem Quadratgitter zusätzlich noch zwei übernächste Nachbarn einer Diagonalen der Einheitszelle wie nächste Nachbarn behandelte. Die Systeme verschiedener Größen  $l$  und verschiedener Walddichten, deren Clustergrößenverteilungen hier überlagert wurden, entsprechen den Flecken mit unterschiedlicher Größe und unterschiedlicher Wald-

dichte. Um den Wert des Exponenten  $b$  der in Gleichung 3.14 vorgeschlagenen Fleckengrößenverteilung zu ermitteln, wurden die Überlagerungen für 20 verschiedene Werte von  $b$  zwischen 0.1 und 2 durchgeführt. Solange  $b \leq 1$  hingen die Ergebnisse nicht sehr von  $b$  ab. Für  $b > 1$  ließen sich die Clustergrößenverteilungen früherer Messungen dagegen nicht mehr reproduzieren. Daher kann man den Wert von  $b$  wohl auf das Intervall  $[0; 1]$  einschränken, aber innerhalb dieses Intervalls, zumindest mit dieser Überlagerungsmethode nicht weiter eingrenzen. Die Ergebnisse sind nur reproduzierbar, wenn die Statistik ausreichend gut ist. Es war daher nötig jeweils mehr als  $10^4$  Systeme pro Durchlauf zu überlagern. In Abbildung 3.2a und Abbildung 3.2b sind die Ergebnisse der Überlagerungsdurchläufe dargestellt. In den genannten Abbildungen sind Clustergrößenverteilungen  $n(s) = n^F(s)/s$  dargestellt und nicht die Feuergrößenverteilung  $n^F(s)$ , daher unterscheiden sich die Exponenten um 1 von den Exponenten, die in diesem Kapitel behandelt werden. Die in Abbildung 3.2a dargestellten Ergebnisse bestätigen, dass der mittlere Exponent  $\tau^F \approx 1.14$ , der bei Simulationen des zweidimensionalen Waldbrandmodells typischerweise gefunden wird, durch die Überlagerung der zwei Feuertypen reproduziert werden kann. Die Überlagerung reproduziert sogar Details der Kurven wie den charakteristischen Buckel bei großen  $s$  und das abnehmen der „Steigung“ der Kurven bei kleinen  $s$ -Werten (vergl. Abbildung 3.1). Der Vergleich der Kurven für das Quadrat- und das Dreiecksgitter ergibt fast perfekte Übereinstimmung für beide Gittertypen. Sowohl die Kurvenform als auch der scheinbare Wert des Exponenten  $\tau = \tau^F + 1$  stimmen überein. Dies erklärt die früher gefundene [29] „Universalität“ dieses scheinbaren Exponenten  $\tau$ . (Bemerkung: Mit Ausnahme von Abbildung 3.2 zeigen alle Bilder dieses Kapitels nur Ergebnisse von Systemen, die auf Quadratgittern simuliert wurden.) In Abbildung 3.2b kann man erkennen, dass sich die Verteilungen der zwei Feuertypen für größere Korrelationslängen  $\xi$  voneinander separieren. Man kann weiterhin erkennen, dass der zu den fraktalen Feuern gehörende Teil der Kurve sich dem Exponenten  $\tau^F \approx 1.45$  annähert. Dieser Wert wurde in Abschnitt 3.2.2 berechnet. Ein ähnliches Verhalten wird im „coarse-grained“ Modell, das im Abschnitt 3.4 behandelt wird, gefunden. Man kann Abbildung 3.2 ebenfalls entnehmen, dass die Größenverteilung  $n_2(s)$  der kompakten Feuer in nichttrivialer Weise mit der Größenverteilung  $n_{\text{patch}}$  der Flecken zusammenhängt, denn wenn alle großen Feuer einen kompletten Flecken niederbrennen würden, müßte der Buckel der Feuergrößenverteilung eine „Steigung“ von  $-b + 1$  aufweisen, und die Clustergrößenverteilung müßte daher einen Buckel der „Steigung“  $-b$  aufweisen, was nicht der Fall ist. Deshalb müssen zu  $n(s)$  Waldcluster beitragen, die groß sind aber trotzdem keinen kompletten Flecken bedecken. Nimmt man an, dass dies für beliebig große  $s_{\text{max}}$  gilt, muss man erwarten, dass die Wald-

dichte  $\rho_{\max}$ , die kurz vor dem Abbrennen eines dichten Fleckens vorliegt, etwas absinkt mit größer werdendem  $s_{\max}$ , denn so bleibt stets ein nichtverschwindender Beitrag von Clustern zu  $n^F(s)$ , die keinen kompletten Patch bedecken<sup>4</sup>, aber trotzdem groß sind.

Man kann also offenbar durch die in diesem Abschnitt dargestellte Superposition wichtige Eigenschaften des zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells reproduzieren. Dieses Verfahren ist daher eine effiziente Methode, um das Waldbrandmodell im Regime großer Korrelationslängen effizient mit Computern zu simulieren.

### 3.4 Ein coarse-grained Modell

In diesem Abschnitt wird ein effizientes Modell eingeführt, das es erlaubt, mit der vorhandenen Computer Hardware das Waldbrandmodell näherungsweise auf großen Längenskalen zu simulieren. Dieses neue Modell wird zunächst eingeführt. Anschließend werden die Ergebnisse der Simulationen, die mit diesem neuen Modell durchgeführt wurden, dargestellt und diskutiert und die Relevanz der Ergebnisse für das original zweidimensionale selbstorganisiert kritische Waldbrandmodell untersucht. Auf diese Art werden die Folgerungen von Abschnitt 3.2.2 nochmals bestätigt.

#### 3.4.1 Definition des Modells

Um mit der vorhandenen Computer Hardware größere Systeme studieren zu können, liegt es nahe, ein Modell einzuführen, bei dem jeder Gitterplatz für eine ganze Gruppe von besetzten oder unbesetzten Gitterplätzen des ursprünglichen Modells steht. Hierzu geht man, wie beim ursprünglichen Modell, von einem zweidimensionalen Quadratgitter aus. Man verknüpft jeden Gitterplatz des neuen Modells mit einer Variable  $\rho_{\text{site}}$ , deren kontinuierlicher Wert aus dem Intervall  $[0; 1]$  die durchschnittliche Walddichte derjenigen Gruppe von Gitterplätzen des ursprünglichen Modells repräsentiert, die in diesem neuen Gitterplatz zusammengefaßt sind. Die Regeln dieses „vergrößerten“ oder „grobkörnigen“ (engl. coarse-grained) Modells lauten wie folgt: (i) In jedem Zeitschritt wird auf allen Gitterplätzen die Dichte um einen kleinen Betrag  $\Delta\rho_{\text{site}} = p(1 - \rho_{\text{site}})$  erhöht; (ii) der Blitz trifft jeden Gitterplatz pro Zeitschritt mit der Wahrscheinlichkeit  $f$ . Wenn die Dichte des getroffenen Gitterplatzes unter der Perkolationsschwelle  $\rho_{\text{perc}} = 0.59$  liegt, passiert nichts. Wenn die Dichte des getroffenen Gitterplatzes jedoch

---

<sup>4</sup>Diese Flecken haben dann eine lokale Walddichte knapp unterhalb der Perkolationsschwelle und enthalten große fraktale Cluster.

oberhalb der Perkolationsschwelle liegt, so brennt der betroffene Gitterplatz ab und auch der gesamte Cluster von Gitterplätzen oberhalb der Perkolationsschwelle, der über nächste-Nachbar-Verbindungen mit dem vom Blitz betroffenen Gitterplatz verbunden ist. Um kurzreichweitige Fluktuationen der Walddichte zu berücksichtigen muss man ein statistisches Element in das Modell einbauen. Hierzu kann man einen Parameter  $r$  in das Modell einführen, der bewirkt, dass beim Abbrand eines Gitterplatzes die Walddichte des betroffenen Gitterplatzes auf einen zufällig ausgewählten Wert aus dem Intervall  $[0, r]$  gesetzt wird. Je kleiner  $r$  ist, desto kleiner sind die Fluktuationen des Systems. Ein kleinerer Wert von  $r$  bedeutet daher, dass jeder Gitterplatz des coarse-grained Modells einer größeren Anzahl von Gitterplätzen des Originalmodells entspricht. Man kann daher erwarten, dass das coarse-grained Modell für kleine  $r$  das Verhalten des original selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells auf großen Längenskalen (das heißt für große  $\xi$ ) reproduziert.

### 3.4.2 Eigenschaften des coarse-grained Modells

In diesem Abschnitt wird untersucht, inwieweit das coarse-grained Waldbrandmodell mit dem originalen Waldbrandmodell verwandt ist und daher Aussagen über das original selbstorganisiert kritische Waldbrandmodell auf großen Längenskalen zuläßt. Die Simulationsdaten des coarse-grained Modells werden präsentiert. Diese Ergebnisse bestätigen die Aussagen des vorhergehenden Abschnitts.

Obwohl das coarse-grained Waldbrandmodell nicht exakt dem originalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodell entspricht, teilt es mit diesem viele Eigenschaften. In Abbildung 3.3 ist eine Momentaufnahme des original selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells einer Momentaufnahme des coarse-grained Waldbrandmodells mit  $r = 0.1$  gegenübergestellt.

Beide Systeme haben die „patchy“ Struktur mit den Regionen recht homogener lokaler Walddichte, die bei beiden Systemen oft durch einige Stellen anderer Dichte durchbrochen wird. Dies bedeutet, dass auch beim coarse-grained Modell viele Blitze in die Flecken einschlagen, die kaum Waldabbrand bewirken, bevor schließlich die Walddichten der meisten Gitterplätze des Flecks die Perkolationsschwelle überschreiten, und so ein kompletter Abbrand des Fleckens möglich ist. Wenn ein Fleck sehr oft von Blitzen getroffen wird bevor ein kompletter Abbrand des Flecks möglich ist, kann ein Fleck in kleinere Flecken auseinanderbrechen. Diese Geburt und Zerstörung von Flecken findet auch beim original selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodell statt. (Wie weiter oben bemerkt wurde, muss, als Gegenstück zu Zersplitterung von Flecken auch eine Verschmelzungsprozess von mehreren kleinen

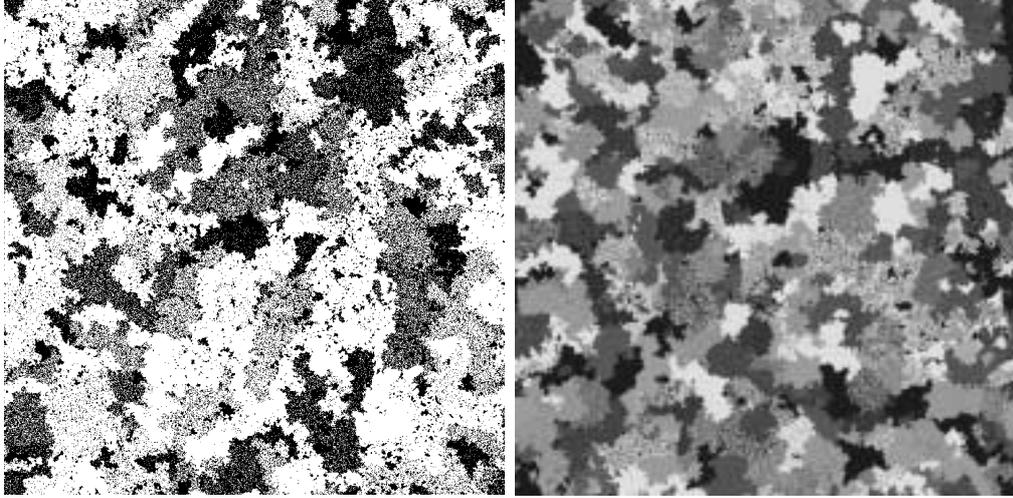


Abbildung 3.3: Links: Momentaufnahme eines Zustandes des selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells mit einer mittleren Walddichte  $\bar{\rho} \simeq \bar{\rho}_c \simeq 0.408$  und einer Systemgröße  $L=4096$ . Bäume sind schwarz dargestellt und Leerstellen weiß. Im Vergleich dazu eine Momentaufnahme des coarse-grained Waldbrandmodells (rechts) mit den Parametern  $p = 0.01$ ,  $r = 0.1$ ,  $f = 0.0001$  und  $L = 1000$ . Beim coarse-grained Waldbrandmodell wird die Walddichte eines Gitterplatzes durch dessen Grauabstufung dargestellt, wobei dunklere Gitterplätze eine höhere Walddichte haben. Hierbei ist die Walddichte eines Gitterplatzes des coarse-grained Modells die durchschnittliche Walddichte der Gruppe von Gitterplätzen des Originalmodells, die durch diesen coarse-grained-Gitterplatz vertreten werden.

Flecken zu einem großen Flecken existieren, um einen stationären Zustand zu erlauben.)

Im Folgenden wird die Größenverteilung der Feuer im coarse-grained Modell untersucht. In Abbildung 3.4a werden die Simulationsergebnisse für  $r = 0.1$  und verschiedenen Werte von  $f/p$  dargestellt. Man kann gut erkennen, wie die „Steigung“ der Kurven mit abnehmendem  $f/p$  zunimmt und eine Grenzsteigung zu erreichen scheint. In Abbildung 3.4b sind die „Steigungen“  $d \log(n(s))/ds$  als Funktion von  $s$  aufgetragen. Man kann erkennen, dass die vorhergesagte Grenzsteigung von 1.45 in der Tat gemessen wird. Abbildung 3.4c zeigt einen Kollaps der Cutoffs der Feuergrößenverteilungen des coarse-grained Modells. Es ergibt sich so ein Exponent  $\lambda \approx 1.1$ , der dem Wert des original Waldbrandmodells entspricht. Um den Wert  $\lambda \approx 1.1$  zu bestätigen, wurde zusätzlich noch eine Momentanalyse durchgeführt, die das

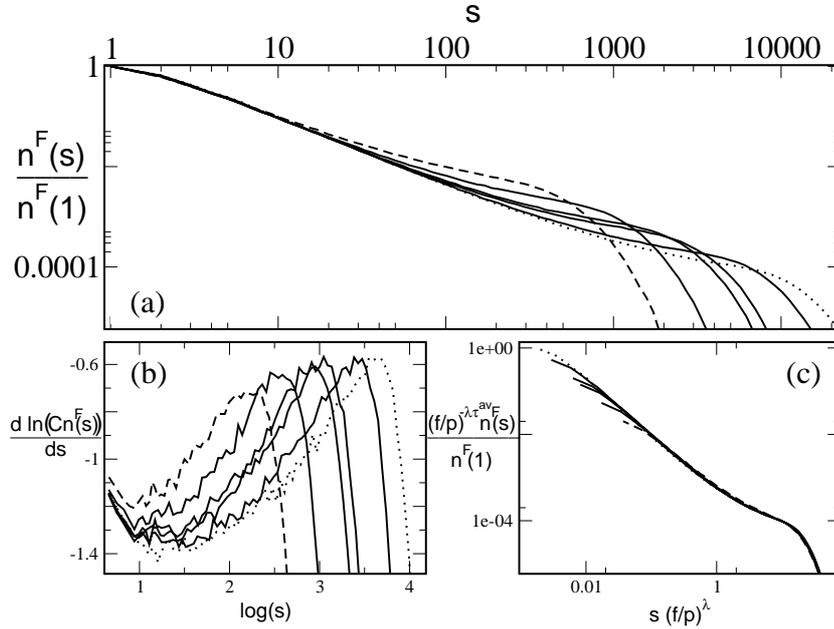


Abbildung 3.4: (a) Feuergrößenverteilung  $n^F(s)/n^F(1)$  des coarse-grained Waldbrandmodells für  $f/p = 0.0031$  (gepunktete Kurve), 0.005, 0.01, 0.0125, 0.025 und 0.05 (gestrichelte Kurve), mit den Parametern  $r = 0.1$  und  $L = 1000$ . (b) „Steigungen“ der Kurven aus (a). (c) Skalenskollaps der Kurven aus (a) hierbei ist  $C = 1/n^F(1)$ . Um den Kollaps zu erreichen, wurde die vertikale Achse mit  $(f/p)^{-\lambda \tau^{av}}$  skaliert, wobei ein effektiver Exponent  $\tau^{av} = 1.25$  verwendet wurde. Dieser effektive Exponent, kann als eine Art Mittelwert der beiden relevanten Exponenten über ein gewisses Spektrum von  $s$ -Werten verstanden werden.

selbe Resultat lieferte.

Abbildung 3.5 zeigt die Feuergrößenverteilung  $n^F(s)$  für 3 verschiedene  $r$ -Werte. Die Parameter  $f$  und  $p$  von allen Kurven von Abbildung 3.5 haben ein Verhältnis von  $f/p = 0.001$ . Man kann erkennen, dass für kleiner werdende  $r$ , die „Steigung“ der Kurven zunimmt, und der Buckel deutlicher hervortritt. Weil diese Veränderungen der Kurven beim original selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodell mit zunehmender Korrelationslänge  $\xi$  auftritt, ist dies ein Hinweis darauf, dass das coarse-grained Modell das original Waldbrandmodell auf großen Längenskalen emuliert. Wie oben erklärt wurde, entspricht ein kleiner werdendes  $r$  einer Erhöhung der Anzahl der Gitterplätze des Originalmodells, die einem Gitterplatz des coarse-grained Modells entsprechen. Deshalb beobachtet man die Kurvenveränderungen, die

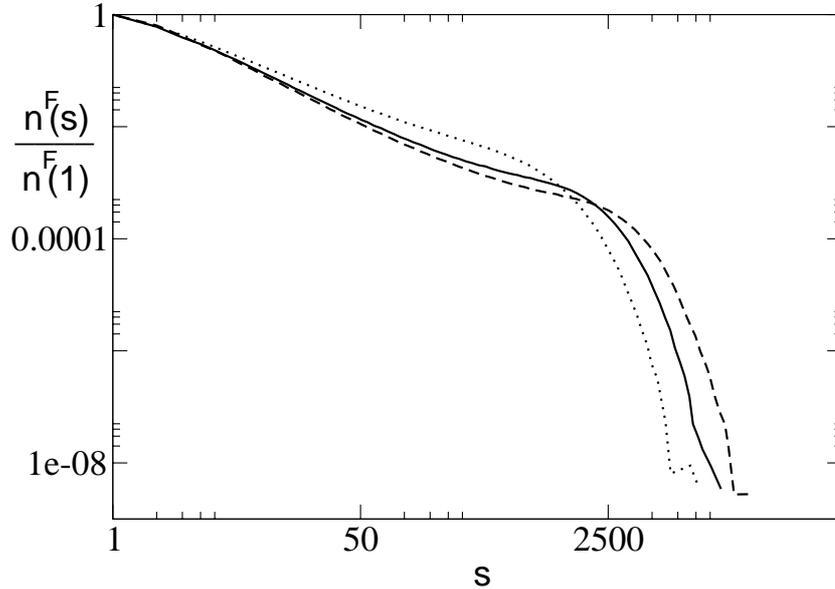


Abbildung 3.5: Feuergrößenverteilung  $n^F(s)$  für das coarse grained Waldbrandmodell  $r = 0.1$  (gestrichelte Kurve),  $r = 0.2$  (durchgezogene Kurve), und  $r = 0.5$  (gepunktete Kurve). Für alle Systeme gilt  $L = 1000$  und  $f/p=0.01$ .

das Originalmodell bei einer Vergrößerung der Längenskalen zeigt, hier bei einer Verkleinerung von  $r$ .

Die Tatsache, dass mehrere Gitterplätze des Originalmodells einem Gitterplatz des coarse-grained Modells entsprechen, bewirkt, dass die  $f$  Werte beider Modelle nicht direkt vergleichbar sind. Im Folgenden soll anhand der Simulationsergebnisse abgeschätzt werden, wie groß die Anzahl  $z(r)$  von Gitterplätzen des Originalmodells ist, die einem Gitterplatz des coarse-grained Modells entsprechen, abhängig vom Parameter  $r$ . Aus Abbildung 3.1a kann man einen Wert von  $A \approx 30$  für

$$s_{\max} = A(f/p)^{-\lambda} \quad (3.18)$$

finden. Analog dazu mißt man im coarse-grained Modell

$$s_{\max} = B(r)(f/p)^{-\lambda}. \quad (3.19)$$

Aus Abbildung 3.4c kann man  $B(0.1) \approx 100$  abschätzen. Mit den Daten aus Abbildung 3.5 erhält man  $B(0.2) \approx 66$  und  $B(0.5) \approx 44$ . Offenbar entsprechen  $s_{\max}$  Gitterplätze des coarse-grained Modells  $z(r)s_{\max}$  Gitter-

plätzen des Originalmodells. Man muss aber auch noch die Blitzeinschlagswahrscheinlichkeit  $f$  des Originalmodells umrechnen, weil im coarse-grained Modell nicht jeder Originalgitterplatz sondern nur Gruppen der Größe  $z(r)$  von Originalgitterplätzen vom Blitz getroffen werden können. Daher entspricht eine Blitzeinschlagswahrscheinlichkeit von  $f$  im coarse grained Modell einer Einschlagswahrscheinlichkeit von  $f/z(r)$  im Originalmodell, weil es beim Originalmodell  $z(r)$  mehr Gitterplätze und somit auch mehr Blitzeinschlagsversuche bei gegebenen  $f$  gibt. Es folgt daher

$$B(r)(f/p)^{-\lambda} = A(f/pz)^{-\lambda}/z, \quad (3.20)$$

woraus man

$$z(r) = (B(r)/A)^{1/(\lambda-1)} \simeq (B(r)/A)^{10} \quad (3.21)$$

ableiten kann. Mit den oben gefundenen Werten für  $A$  und  $B(r)$  folgt aus Gleichung 3.21  $z(0.5) \simeq 46$ ,  $z(0.2) \simeq 2650$ , und  $z(0.1) \simeq 170000$ . Zieht man die Quadratwurzel aus diesen Werten, so erhält man, dass die Längenskalen des Originalmodells ungefähr um die Faktoren 7, 50, und 400 für die drei Werte von  $r$ , verkürzt sind, wenn man Originalmodell und coarse-grained Modell vergleicht.

In Abbildung 3.6 sieht man einen direkten Vergleich der Feuergrößenverteilungen des Originalmodells und des coarse-grained Modells bei  $r = 0.5$ . Hierbei wurden Kurven zu solchen Parametern verwendet, dass das Verhältnis der  $f$  Werte und der  $s_{\max}$  Werte beider Kurven ähnlich war. Da das Verhältnis beider Werte jeweils ungefähr 45 ist, bestätigen die Ergebnisse von Abbildung 3.6 sehr gut die oben dargestellten Ergebnisse. Man kann aus Abbildung 3.6 auch entnehmen, dass die Form der zwei Feuergrößenverteilungen ähnlich, aber nicht identisch ist. Im Hauptbereich der auftretenden Feuergrößen  $s$  sind die Verteilungen identisch. Die Abweichung für kleine Werte von  $s$  liegt offenbar daran, dass im coarse-grained Modell Inhomogenitäten, die im Originalmodell auf einer Längenskala von  $z(r)^{0.5}$  auftreten, nicht berücksichtigt werden. Wahrscheinlich ist die Ursache der Abweichung auf großen Längenskalen, dass unterschiedliche Verhalten beider Modelle bei der langsamen Zerstörung von großen Flecken. Dieser Zerstörungsprozeß wird durch Blitze herbeigeführt, die den Flecken treffen, wenn dessen lokale Walddichte in der Nähe der Perkolationsschwelle liegt. Das führt zu Inhomogenitäten der Walddichte innerhalb des Fleckens. Vergleicht man inhomogene Flecken beider Modelle in Abbildung 3.3, so kann man erkennen, dass beim Originalmodell kleine Waldcluster vorhanden sind, und beim coarse-grained Modell einzelne Gitterplätze sehr unterschiedlicher Walddichte. Beides führt in leicht abgewandelter Form zum Zerbrennen der großen Flecken.

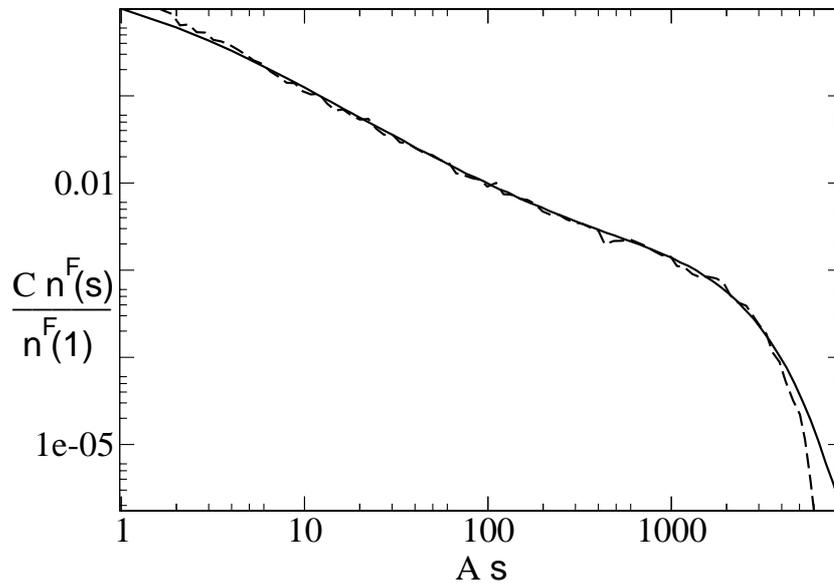


Abbildung 3.6: Vergleich der Feuergrößenverteilungen  $n^F(s)$  des original Waldbrandmodells mit den Parameterwerten  $f = 0.00000156$ ,  $p = 0.01$ , und  $L = 800$  (gestrichelte Kurve,  $C = 41$ ,  $A = 1$ ), mit dem des coarse grained Waldbrandmodells  $r = 0.5$ ,  $f = 0.00005$ ,  $p = 0.01$ , und  $L = 1000$  (durchgezogene Kurve,  $C = 1$ ,  $A = 44.9^{-1}$ ). Das Verhältnis der beiden Cutoff Werte  $A$  entspricht dem inversen Verhältnis der jeweiligen Blitzeinschlagsraten  $f$ .

Zusammenfassend läßt sich sagen, dass das coarse-grained Modell auf vielen Gebieten sehr viel Ähnlichkeit mit dem Originalmodell hat, aber nicht komplett identisch ist. Das coarse-grained Modell weist einige Eigenschaften auf, die man vom Originalmodell auf großen Längenskalen erwartet, wie den asymptotischen Wert von  $\tau^F \approx 1.45$ . Weiterhin wird durch dieses Modell die Universalität des Exponenten  $\lambda$  untermauert. Der Prozeß, der zur Geburt und zur Zerstörung von Flecken führt, ist bei beiden Modellen nicht identisch und führt zu Abweichungen bei der Feuergrößenverteilung im Bereich sehr großer und sehr kleiner Feuergrößen  $s$ .

### 3.5 Diskussion der Ergebnisse

In diesem Kapitel wurde begründet, warum man davon ausgehen kann, dass die Dynamik des zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells durch die Wirkung der zwei unterschiedlichen Typen von Feuern bestimmt wird. In dem durch Regionen konstanter Walddichte (Flecken) be-

stimmten Systemzustand des Modells gibt es die kleineren Feuertypen, die fraktale Cluster abbrennen und die größeren Feuertypen, die Flecken mit einer lokalen Dichte oberhalb der Perkolationsschwelle und daher mit einer kompakten (nicht fraktalen) Waldbedeckung, abbrennen. Die Ergebnisse dieses Kapitels wurden mit folgenden Methoden erarbeitet:

- Mit einer direkten Skalenanalyse des Modells.
- Mit der „künstlichen“ Überlagerung der zwei Feuertypen und der Untersuchung der so erzeugten Zustände.
- Mit der Analyse eines coarse-grained Modells, das das Originalmodell auf großen Längenskalen in vielen Eigenschaften emuliert.

Als eines der Hauptergebnisse ergab sich als asymptotischer Exponent  $\tau^F$  der Feuergrößenverteilung  $\tau^F \approx 1.45$ , wobei dieser Exponent erst bei großen Korrelationslängen  $\xi$  auftritt, die mit heutiger Hardware nicht simuliert werden können. Bei kleineren Korrelationslängen  $\xi$  erscheint der Exponent  $\tau^F$  kleiner und unabhängig von dem Gittertyp zu sein, der der Simulation zugrundeliegt. Der Exponent  $\lambda$ , der das Verhalten der maximalen Waldcluster- oder Feuergröße  $s_{\max}$  beschreibt, stellte sich als universell dar, mit einem Wert  $\lambda \approx 1.1$ , unabhängig davon, ob  $\lambda$  im Originalmodell oder im coarse-grained Modell für verschiedene Parameter gemessen wurde. Weitere Hinweise auf die Robustheit dieses Exponenten wurden in [56] gefunden. In dieser Arbeit, in der ein verallgemeinertes Waldbrandmodell mit immunen Bäumen betrachtet wurde, zeigte die Korrelationslänge  $\xi$  ein gutes Skalenverhalten.

Die genaue Form der Fleckengrößenverteilung konnte nicht bestimmt werden, aber es wurden Hinweise darauf gefunden, dass diese Verteilung durch ein Potenzgesetz mit einem Exponenten  $b$  aus dem Intervall  $[0; 1]$  beschrieben wird. Die Fleckengrößenverteilung ist das Ergebnis eines komplizierten Prozesses bei dem Flecken zerstört und geboren werden. Dieser komplizierte Prozeß bestimmt auch die Größenverteilung der Feuer, für die kein analytischer Ausdruck angegeben werden konnte.

Im Gegensatz zum Exponenten  $\tau^F$ , der die Feuergrößenverteilung beschreibt, konnte der Exponent  $\lambda$  nicht mit analytischen Mitteln berechnet werden. Unsere Ergebnisse lassen es zu, dass der wahre Wert des Exponenten  $\lambda = 1$  ist, und die Korrektur auf  $\lambda = 1$  das Resultat von Auswirkungen logarithmischer Korrekturen ist, die diese Exponenten etwas größer als 1 erscheinen lassen.

Es wurde gezeigt, dass einige Skalenrelationen, die aus der Theorie gleichgewichtskritischer Systeme und insbesondere aus der Perkolationstheorie bekannt sind, beim zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrand-

modell nicht gelten. Das zweidimensionale selbstorganisiert kritische Waldbrandmodell ist ein neuer Typ eines Nichtgleichgewichtssystems, zu dem es kein direktes Analogon aus der der Physik von Systemen im Gleichgewicht gibt. Die Dynamik dieses Modells wird durch mehrere Phänomene bestimmt, die sich auf unterschiedlichen Längenskalen qualitativ unterschiedlich verhalten. Der Zustand des Modells ist fleckenartig strukturiert, was bedeutet, dass benachbarte Gitterplätze dazu tendieren, durch gleichzeitigen Abbrand bei großen Feuern synchronisiert zu werden.

Durch die Einführung des coarse-grained Modells konnte gezeigt werden, dass es eine Klasse von Modellen gibt, die Eigenschaften wie die fleckenartige Struktur, die Existenz zweier verschiedener Feuertypen, den asymptotischen Exponenten  $\tau^F \approx 1.45$  der Feuergrößenverteilung und den Cutoff Exponenten  $\lambda \approx 1.1$  teilen, obwohl Details, wie die genaue Form des Cutoffs der Feuergrößenverteilung oder der Mechanismus, der die Geburt und die Zerstörung von Flecken bestimmt, bei beiden Modellen unterschiedlich sind.

Die in diesem Kapitel dargestellten Ergebnisse zeigen, dass selbstorganisierte Kritikalität in dissipativen Systemen durch Mechanismen bewirkt werden kann, die sich fundamental von den Mechanismen unterscheiden, die das Verhalten gleichgewichtskritischer Systeme bestimmen. Man kann erwarten, dass andere dissipative selbstorganisiert kritische Systeme durch Mechanismen getrieben werden, die denen ähneln, die hier für das Waldbrandmodell gefunden wurden. In [57] wurde gezeigt, dass das Erdbebenmodell [39, 58] eine fleckenartige Struktur mit partieller Synchronisation von benachbarten Gitterplätzen aufweist. In [54] wurde gezeigt, dass dieses Modell zwei unterschiedliche Typen von Lawinen aufweist. Es treten Lawinen innerhalb eines Fleckens auf und es treten Lawinen auf, die in einen Flecken von außen eindringen und den ganzen Flecken erfassen. Wegen dieser Ähnlichkeit mit den hier beschriebenen Mechanismen des Waldbrandmodells, bietet sich das Erdbebenmodell als ein Modell an, das die angesprochenen Analogien mit den fundamentalen Mechanismen des zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells oder des coarse-grained Modells aufweist.

# Kapitel 4

## Renormierung des Waldbrandmodells

### 4.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden einige Renormierungsverfahren zum selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodell diskutiert. Da das Waldbrandmodell ein Nichtgleichgewichtssystem ist, versagen die konventionellen renormierungsgruppentheoretischen Methoden, weil kein detailliertes Gleichgewicht vorliegt. Man kann daher den Konfigurationen des Systems keine Boltzmann Gewichte zuweisen. In den Kapiteln 2 und 3 sowie in [52] und [59] wurde gezeigt, dass das zweidimensionale selbstorganisiert kritische Waldbrandmodell auf großen und kleinen Längenskalen ein Verhalten zeigt, das sich nicht durch Analogschlüsse von Gleichgewichtskritischen Systemen erklären läßt. Es wurde gezeigt, dass kein konventionelles finite-size Skalenverhalten vorliegt, und dass mehr als eine Längenskala die Dynamik des Modells bestimmt. Allerdings wurden Indizien dafür gefunden, dass beim untersuchten zweidimensionalen Waldbrandmodell durchaus ein Skalenverhalten vorliegt. Dies ist allerdings komplizierter als bei Gleichgewichtskritischen Phänomenen. Es scheint daher nicht prinzipiell unmöglich zu sein, renormierungsgruppentheoretische Methoden zu verwenden, um das Waldbrandmodell zu beschreiben, aber es ist naheliegend, dass die konventionellen, zur Beschreibung Gleichgewichtskritischer Systeme ausgearbeiteten Renormierungstechniken deutlich modifiziert werden müssen, um auf das Waldbrandmodell angewendet werden zu können.

In den Kapiteln 2 und 3 ist dargestellt worden, dass viele Erkenntnisse aus der Perkolationstheorie zur Beschreibung des Waldbrandmodells verwendet werden können. Es liegt daher nahe, die anschaulichen Ortsraum-

renormierungstechniken aus der Perkolationstheorie [21] als anzupassenden Ausgangspunkt einer renormierungsgruppentheoretischen Beschreibung des Waldbrandmodells zu wählen. In [60, 45, 61] wurde bereits ein solches Verfahren vorgeschlagen, dessen Grundlagen in [62] und [63] erarbeitet wurden. Diese Verfahren haben jedoch konzeptionelle Mängel und führen zu Exponenten, die nicht gegen die wirklichen Exponenten konvergieren.

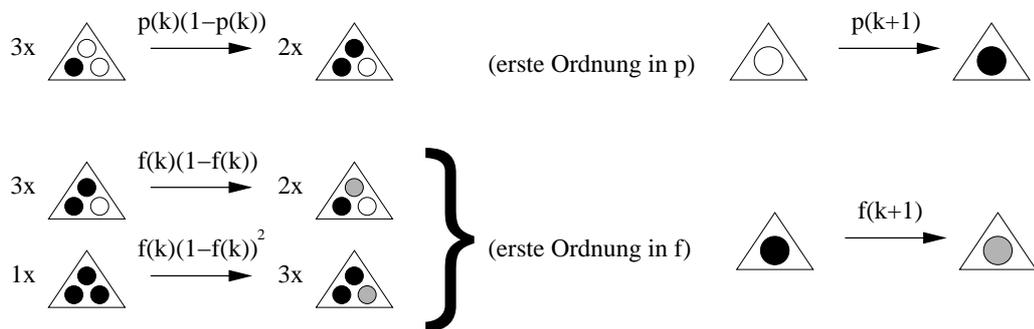
## 4.2 Ein cell-to-site Verfahren und die Renormierung der Größen $f$ und $p$ .

In diesem Abschnitt wird am Beispiel eines zweidimensionalen Dreiecksgitters ein in [60] vorgeschlagenes „cell-to-site“ Verfahren illustriert. Damit wird ein „cell-to-site“ Verfahren aus der Perkolationstheorie übertragen um das Waldbrandmodell zu beschreiben. Dieses Verfahren wird als Grundlage für die Renormierungstheorie verwendet, die im folgenden erarbeitet werden wird. Das Verfahren wird hier etwas ausführlicher beschrieben, damit die in Abschnitt 4.4 aufgeführten allgemeinen Regeln einfacher nachzuvollziehen sind.

Bei einem cell-to-site Verfahren werden in jedem Iterationsschritt des Verfahrens mehrere benachbarte Gitterplätze zu einem Gitterplatz eines neuen Gitters zusammengefaßt. Hierbei können die Gitterplätze vor und nach dem Iterationsschritt jeweils von einem Baum, einem Feuer oder einer Leerstelle besetzt sein. Es hängt von der Konfiguration der Gitterplätze ab, die zu einem „Super“-Gitterplatz zusammengefaßt werden, ob der Super-Gitterplatz durch ein Feuer, einen Baum oder durch eine Leerstelle besetzt wird. Es existieren diverse Freiheiten bei der Implementierung dieses Verfahrens. Man kann die Anzahl der zu einem Super-Gitterplatz zusammengefaßten Gitterplätze variieren, und kann die Regeln verändern, die bestimmen, wie der Zustand des Super-Gitterplatzes von den Zuständen der Gitterplätze abhängt, die zu diesem Super-Gitterplatz zusammengefaßt wurden. In Abbildung 4.1 ist für den Fall, dass auf einem zweidimensionalen Dreiecksgitter drei benachbarte Gitterplätze zu einem Super-Gitterplatz zusammengefaßt werden, ein Beispiel für einen derartigen cell-to-site Iterationsregelsatz angegeben.

Es ist hierbei sinnvoll, einen Super-Gitterplatz dann als Baum zu betrachten, wenn die Zelle der zusammengefaßten Gitterplätze einen zellspannenden Cluster von Bäumen enthält, weil diese Zelle dann, wie der baumbesetzte Super-Gitterplatz auch, vom Feuer durchschritten werden kann. Wenn mindestens ein Baum in einer solchen Zelle mit zellspannendem Baumcluster brennt, wird der komplette zellspannende Cluster vom Feuer erfaßt werden, und daher ist es sinnvoll, in diesem Fall den Super-Gitterplatz als brennend zu





Beispiel für einen Prozeß höherer Ordnung in  $p$

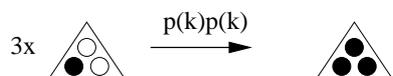


Abbildung 4.2: Beispiel für die Zerlegung der Baumwachstumsprozesse und der Baumentzündungsprozesse der Super-Gitterplätze in die Prozesse der zugehörigen Zellen. Diese Zerlegung dient dazu, die Werte  $f(k+1)$  und  $p(k+1)$  des Renormierungsschrittes  $k+1$  auf die Werte  $f(k)$  und  $p(k)$  der vorhergehenden Renormierungsschrittes  $k$  zurückzuführen. Die untere Zeile stellt einen Prozeß dar, der nur Beiträge zu höherer Ordnung in  $f$  und  $p$  liefert, und daher vernachlässigt wird.

reichen Prozesse der zugeordneten Zellen, die zu diesem einen „Super“-Prozeß beitragen. Die in Abbildung 4.2 eingetragenen Faktoren  $1x$ ,  $2x$  und  $3x$  symbolisieren die Anzahl der jeweiligen Anfangs- und Endzustände, die im Bild jeweils nur durch einen der möglichen Zustände repräsentiert werden. (Es werden hierdurch in Abbildung 4.2 mehrere Prozesse durch einen Prozeß dargestellt, es gibt also  $3 \times 2 = 6$  Prozesse die in erster Ordnung in  $p$  zum Baumwachstum der Super-Gitterplätze beitragen und  $3 \times 2 + 1 \times 3 = 9$  Prozesse die zur Entzündung eines mit einem Baum besetzten Super-Gitterplatzes beitragen). Durch die oben erwähnte Zerlegung der Super-Prozesse lassen sich die gewünschten Beziehungen für  $f(k+1)$  und  $p(k+1)$  ableiten. Da dieser Prozeß bei der Renormierung iterativ sehr oft durchgeführt wird, ist nur die erste Ordnung in  $f(k)$  und  $p(k)$  relevant, weil  $f(k)$  und  $p(k)$  immer kleiner als 1 sind und deswegen höhere Ordnungen wegfallen. Nach Abbildung 4.2 folgt in erster Ordnung in  $p$  und  $f$  mit

$$p(k+1) = 6\Omega_1 p(k) \quad (4.1)$$

$$f(k+1) = (6W_1 + 3W_2) f(k) \quad (4.2)$$

die gesuchte Abbildung zur Umrechnung der Werte  $p$  und  $f$  zwischen den ein-

zelen Iterationsschritten  $k$  und  $k + 1$ . Hierbei ist  $\Omega_1$  die Wahrscheinlichkeit, eine mit genau einem Baum und zwei Leerstellen besetzte Zelle in dem in Abbildung 4.1A dargestellten Wahrscheinlichkeitsraum von Zellen zu finden.  $W_1$  ist die Wahrscheinlichkeit, eine mit genau 2 Bäumen und einer Leerstelle besetzte Zelle auf dem in Abbildung 4.1B dargestellten Subraum von Zellen zu finden.  $W_2$  ist die Wahrscheinlichkeit, eine mit genau 3 Bäumen besetzte Zelle auf dem in Abbildung 4.1B dargestellten Subraum von Zellen zu finden.

### 4.3 Anforderungen an ein Renormierungsschema zur Beschreibung des $2d$ SOC Waldbrandmodells

In diesem Abschnitt werden Schwierigkeiten diskutiert, die bei der Implementierung des angestrebten Renormierungsschemas für das Waldbrandmodell auftreten.

Offenbar hängen die in Abschnitt 4.2 eingeführten Größen  $\Omega_1$ ,  $W_1$  und  $W_2$  von der Walddichte ab, die gerade im renormierten Bereich vorliegt. Man steht daher vor dem Problem, plausibel begründet zu entscheiden, welche Walddichte verwendet werden soll. In [60] wurde eine fixe Dichte verwendet. Allerdings wurde bereits in [61] darauf hingewiesen, dass die Verwendung von der in [60] verwendeten mean-field Walddichte von  $\bar{\rho} = 1/3$  der im Waldbrandmodell vorliegenden Walddichteverteilung genauso wenig gerecht wird, wie jede andere fixe Walddichte: Betrachtet man die in Abbildung 2.1 erkennbare fleckenartige Struktur des Waldbrandmodells, mit Regionen unterschiedlichster lokaler Walddichte, so erkennt man, dass Verfahren, die von einer fixen Walddichte ausgehen, dem zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodell nicht gerecht werden, weil diese Verfahren dann zwangsweise von einer Walddichte ausgehen, die im System so gut wie nie vorliegt. Daher wurde in [61] vorgeschlagen, das in Abschnitt 4.2 anhand eines Beispiels eingeführte cell-to-site Verfahren jeweils nur auf einer bestimmten Walddichte des vorkommenden Dichtespektrums auszuführen und anschließend alle Ergebnisse zu überlagern. Die Überlagerung wurde aber in [61] für den Quotient  $f(k+1)/p(k+1)$  ausgeführt und nicht für die jeweiligen Größen  $f(k+1)$  und  $p(k+1)$  einzeln. Die Verwendung dieses Quotienten  $f/p$  bei der Überlagerung der Walddichten erscheint aber als eine Diskontinuität bei der Durchführung des Renormierungsverfahrens: Man betrachtet  $f$  und  $p$  als kanonische, zu renormierende Parameter des Systems. Als ein Renormierungsschritt dieser zwei Größen betrachtet man man den in Abschnitt 4.2 dargestellten cell-to-site Renormierungsschritt, durchgeführt für alle im Modell

vorkommenden Walddichten mit anschließender Superposition der Ergebnisse für alle diese Dichten. In diesem Sinne erscheint es überraschend, dass vor der Superposition ein Quotient aus beiden Größen gebildet werden sollte. In der Tat führt dieses Verfahren, das Quotienten vor der Superposition verwendet, auch zu Ergebnissen, die nicht gegen die gemessenen Werte konvergieren. Daher wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels davon ausgegangen, dass vor dem Überlagerungsvorgang kein Quotient aus  $f$  und  $p$  gebildet wird.

Bemerkung: Als Argument gegen diesen Lösungsweg, bei dem die Ergebnisse zu den verschiedenen Walddichten überlagert werden, wird vorgebracht, dass bei dem oben beschriebenen Renormierungsschritt Die Walddichte verändert wird. Damit arbeitet das cell-to-site Schema also nicht durch alle Iterationsschritte mit der selben Walddichte. Das Verfahren springt zwischen den einzelnen vorkommenden Walddichten. Als Gegenargument gegen diesen Einwand kann man die Stabilität des Modells anführen, die die Walddichtevertelung bei Störungen konstant hält im Gegensatz zu kritischen Gleichgewichtssystemen, die durch Störungen vom kritischen Punkt entfernt werden können. Da das Waldbrandmodell **selbstorganisiert** kritisch ist, würde ein reale Störung oder eine in Form eines Renormierungsschrittes gedachte Störung dazu führen, dass sich die typische Walddichtevertelung nach der Störung wieder von allein einstellt. Wenn man also, wie hier vorgeschlagen, nach jedem cell-to-site Schritt mit einer gleichbleibenden aufgezwungenen Walddichtevertelung die Ergebnisse für  $f$  und  $p$  überlagert, so wird gerade dieser stabilisierende Effekt im Renormierungsverfahren wiedergespiegelt.

Um schließlich, analog zu Renormierungsschemata der Perkolationstheorie [21] Exponenten berechnen zu können, liegt es nahe, den Ausdruck

$$\nu = \frac{\log(\sqrt{Z})}{\log\left(\frac{d\Phi(k+1)}{d\Phi(k)}\right)} \quad (4.3)$$

zu verwenden, wobei  $Z$  die Anzahl der Gitterplätze pro Zelle darstellt. In dem in Abschnitt 4.2 behandelten Beispiel ist  $Z = 3$ . Die Größe  $\Phi$  ist durch  $\Phi(k) = f(k)/p(k)$  definiert mit den Zusammenhängen zwischen  $f(k+1)$ ,  $p(k+1)$ ,  $f(k)$  und  $p(k)$ , die nach obigem cell-to-site Renormierungsschema mit Überlagerung ermittelt wurden. Gleichung 4.3 läßt sich analog zu der in [21] beschriebenen Herleitung für Ortsraumrenormierung bei Perkolationssystemen ableiten. Es entsteht aber folgendes Problem bei der Übertragung dieses Formalismus aus der Perkolationstheorie:

Wie in Abbildung 2.1 deutlich wird, besteht im Waldbrandmodell nicht die zur Ableitung nötige Selbstähnlichkeit, weil es nicht möglich ist, einen Ausschnitt kleiner als die Korrelationslänge zu finden, der charakteristisch

für das System ist. In den Kapiteln 2 und 3 wurde gezeigt, dass im zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodell bei den fraktalen Waldclustertypen innerhalb der Flecken perkolationsähnliche Verhältnisse mit perkolationsähnlicher Korrelationslänge und Selbstähnlichkeit vorliegen. Die kompakten Cluster erzeugen bei ihrem Abbrand die Fleckenstruktur mit einer weiteren Korrelationslänge, die dem mittleren Radius des größten Fleckens entspricht. Selbstähnlichkeit in dem Sinne, dass man einen charakteristischen Ausschnitt dieses Waldbrandsystems einer Skalentransformation unterziehen kann und so ein statistisch äquivalentes System erhält, das weiterhin charakteristisch für das System ist, ist beim Waldbrandmodell nicht vorhanden: Die zwei vorkommenden Clustertypen unterscheiden sich in wesentlichen Eigenschaften und können nicht einfach ineinander übergeführt werden. Es gibt auch keinen Systemausschnitt, der charakteristisch für beide Clustertypen gleichzeitig ist. Die nicht vorhandene Selbstähnlichkeit wird durch die Integration über das Spektrum der auftretenden Walddichtewerte umgangen. Hierdurch arbeitet man letztendlich auf einem räumlich homogenisierten und daher, analog zur Perkolationstheorie, selbstähnlichen System. Wenn man bei der Überlagerung wesentliche Einzelheiten des Waldbrandmodells einzeln betrachtet, gehen durch diese Superposition nicht notwendigerweise wesentliche Informationen des Modells verloren, wie in Abschnitt 3.3 gezeigt wurde, indem die Clustergrößenverteilungen verschieden großer und verschieden dichter Systeme zur tatsächlichen Waldbrandclustergrößenverteilung superponiert wurde. Bei der hier vorliegenden Superposition wird der cell-to-site Iterationsschritt auch für jede Dichte separat durchgeführt und anschließend wird erst superponiert, so dass die Information zu jeder Walddichte einzeln in das Schema eingebracht wird, aber Gleichung 4.3 trotzdem die superponierten Größen „sieht“.

Da in Kapitel 2 gezeigt wurde, dass die Fleckengrößenverteilung und die Walddichtevertelung zusammen wesentliche Eigenschaften des Waldbrandsystems bestimmen, liegt folgende Hypothese nahe: Man nimmt an, dass das cell-to-site Iterationsverfahren die Fleckengrößenverteilung in das hier vorgeschlagene Renormierungsschema einbringt und die Walddichtevertelung als externe Information aufgezwungen wird. Indizien für die Richtigkeit dieser Annahme kann man finden, indem Konsequenzen aus dieser Hypothese verifiziert werden: Eine Superposition der im zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodell auftretenden Walddichten sollte den mittleren Exponenten  $\nu$  liefern, der in Simulationen gefunden wird, wenn man über das gesamte Spektrum der auftretenden Walddichten mittelt. Wenn man also die Beiträge aller auftretenden Walddichten im Renormierungsschema betrachtet, so sollte sich der Exponent  $\nu = 0.58$  ergeben. Bringt man dagegen nur eine Überlagerung der auftretenden lokalen Walddichten bis hin zur Perkola-

tionsschwelle ein, so sollten nur die fraktalen Cluster beschrieben werden und nicht die kompakten. Da in Kapitel 3 der Exponent  $\lambda_1$  der fraktalen Cluster zu  $\lambda_1 = 0.86$  berechnet wurde, müßte man mit dem aus Gleichung 4.3 gewonnenem<sup>1</sup> Exponenten  $\nu_p$  und der fraktalen Dimension  $\mu_{\text{perc}}$  von fraktalen Perkolationsclustern  $\lambda_1$  durch  $\lambda_1 = \nu_p \mu_{\text{perc}}$  bestätigen können.

## 4.4 Die Renormierungsgleichungen für beliebigen Zellengrößen

Das in obigen Abschnitten anhand eines Beispiels allgemein besprochene Renormierungsverfahren wird im folgenden auf beliebige Zellengrößen verallgemeinert. Die Gleichungen für die Superposition der Ergebnisse der Iterationsschritte für die verschiedenen Walddichten werden explizit angegeben. Die Gleichungen werden hierbei in eine derartige Form gebracht, dass sie exakt durch Algorithmen gelöst werden können. Dadurch kann man viele Renormierungszellengrößen betrachten und Trends des Verfahrens bei der folgenden Auswertung besser erkennen.

Betrachtet man das in Abschnitt 4.2 angegeben Beispiel, so erkennt man, dass zur Ermittlung der cell-to-site Gleichungen, bei denen die Größen  $f(k+1)$  und  $p(k+1)$  auf die Größen  $f(k)$  und  $p(k)$  des vorhergehenden Iterationsschrittes zurückgeführt werden, nur folgende Prozesse betrachtet werden müssen:

- A.) Prozesse, bei denen eine Zelle, die einem nicht besetzten Super-Gitterplatz entspricht, durch hinzufügen nur eines einzigen Baumes zu einer Zelle wird, die einem mit einem Baum besetzten Super-Gitterplatz entspricht. Diese Prozesse sind die einzigen, die zu dem Vorgang „Baumwachstum eines Super-Gitterplatzes“ in erster Ordnung in  $p$  beitragen, weil für jeden gewachsenen Baum in der Zelle ein Faktor  $p$  auftritt und für jeden leerbleibenden Gitterplatz der Zelle ein Faktor  $1 - p$  auftritt. Diese Prozesse entsprechen dem Prozeß, der in Abbildung 4.2 als oberste Zeile dargestellt wird bei dem in dieser Abbildung illustrierten Beispiel.
- B.) Prozesse, bei denen eine Zelle, die einem mit einem Baum besetzten Super-Gitterplatz entspricht, durch entzünden genau eines Baumes der Zelle zu einer Zelle wird, die einem Super-Gitterplatz entspricht, die mit einem Feuer besetzt ist. Da jeder entzündete Baum der Zelle einen

---

<sup>1</sup> $\nu_p$  ist der Exponent, der gewonnen wird, wenn man nur Dichten bis zur Perkolationschwelle und nicht bis zur maximalen Walddichte hin überlagert.

Faktor  $f$  liefert und jeder nicht entzündete Baum der Zelle einen Faktor  $1 - f$ , tragen nur diese Prozesse in erster Ordnung in  $f$  zum Prozeß „Entzündung eines Super-Gitterplatzes“ bei. Diese Prozesse entsprechen den Prozessen, die in Abbildung 4.2 als zweite und dritte Zeile von oben dargestellt werden bei dem in dieser Abbildung illustrierten Beispiel.

Im hier beschriebenen Schema werden keine kombinierten Entzündungs- und Wachstumsprozesse betrachtet, weil diese Prozesse nur zu Beiträgen mit Produkten aus  $p$  und  $f$  führen und daher vernachlässigt werden können.

Um die Größe  $p(k + 1)$  allgemein durch die Größe  $p(k)$  auszudrücken, muss man alle Prozesse des oben genannten Typs **A.**) abzählen und mit Faktoren gewichten, die definieren wie wahrscheinlich das Auftreten der Anfangskonfiguration<sup>2</sup> des Prozesses bei einer gegebenen Walddichte ist. Dabei muss von der Menge aller Anfangskonfigurationen ausgegangen werden, die für den zu beschreibenden Super-Prozeß: „Baumwachstum bei einem Super-Gitterplatz“ in Frage kommen. Bei gegebener Walddichte  $\rho$  ist die Wahrscheinlichkeit, als Anfangskonfiguration eine Zelle mit  $n$  Bäumen und  $Z - n$  Leerstellen vorzufinden, proportional zu  $\rho^n(1 - \rho)^{Z-n}$ . Hierbei ist  $Z$  die Anzahl der Gitterplätze in einer Zelle. Die Rückführung der Größe  $f(k + 1)$  auf Größe  $f(k)$  geschieht analog durch die Abzählung aller Prozesse des oben genannten Typs **B.**). Die Gewichtung dieser Prozesse geschieht ebenfalls analog. Man zieht in dem Schema Anfangskonfigurationen, bei denen einzelne Bäume in den Zellen nicht brennen, nicht in Betracht, da beim selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodell die durchschnittliche Feuerdichte verschwindet, und damit auch die Wahrscheinlichkeit, als Anfangskonfiguration eine Zelle mit einem brennenden Baum vorzufinden. Weiterhin fallen kombinierte Entzündungs- und Wachstumsprozesse sowieso aus dem Schema heraus, wie oben erwähnt wurde.

Die Menge aller Ausgangskonfigurationen, die für den Prozeß „Baumwachstum eines Super-Gitterplatzes“ in Frage kommen, sind alle Zellen, die keinem Super-Gitterplatz entsprechen, der leer ist. Das ist daher die Menge der Zellen, die keinen perkolierenden Baumcluster (und natürlich auch keine Feuer) enthalten. Sei  $B_j$  die Anzahl der Zellen, die  $j$  Bäume und keinen perkolierenden Waldcluster enthalten, so ist

$$W_i = \frac{\rho^i(1 - \rho)^{Z-i}}{\sum_{j=0}^Z \rho^j(1 - \rho)^{Z-j} B_j} \quad (4.4)$$

---

<sup>2</sup>Anfangskonfigurationen heißen die Zellen, die vor den Wachstums- und Entzündungsprozessen vorliegen. In dem in Abbildung 4.2 dargestellten Beispiel sind die Anfangskonfigurationen die in der linken Spalte dargestellten Zellen.

die Wahrscheinlichkeit, als Anfangskonfiguration für den Prozeß „Baumwachstum eines Super-Gitterplatzes“ eine Zelle mit  $i$  Bäumen vorzufinden, bei einer Zellgröße von  $Z$  Bäumen. Definiert man  $C_i$  als Anzahl der Zellen, die keinen perkolierenden Waldcluster und  $i$  Bäume enthalten (also einem leeren Super-Gitterplatz entsprechen), aber durch Hinzufügen eines einzigen Baumes zu einer Zelle werden, die einen perkolierenden Cluster enthalten, und somit dann einem mit einem Baum besetzten Super-Gitterplatz entsprechen, so ergibt sich mit Gleichung 4.4

$$p(k+1) = p(k) \sum_{j=0}^Z C_j W_j \quad (4.5)$$

als die gesuchte Beziehung zwischen  $p(k+1)$  und  $p(k)$ , weil es  $C_j$  Prozesse gibt, die als Ausgangskonfiguration eine Zelle mit  $j$  Bäumen haben und in erster Ordnung zum Prozeß „Baumwachstum eines Super-Gitterplatzes“ beitragen. Die Menge aller Ausgangskonfigurationen, die für den Prozeß „Entzündung eines (besetzten) Super-Gitterplatzes“ in Frage kommen, sind alle Zellen, die einem Super-Gitterplatz entsprechen, der von einem Baum besetzt ist. Das ist daher die Menge der Zellen, die einen perkolierenden Baumcluster (und keine Feuer) enthalten. Sei  $A_j$  die Anzahl der Zellen, die  $j$  Bäume und einen perkolierenden Waldcluster enthalten, so ist

$$\Omega_i = \frac{\rho^i (1-\rho)^{Z-i}}{\sum_{j=0}^Z \rho^j (1-\rho)^{Z-j} A_j} \quad (4.6)$$

die Wahrscheinlichkeit, als Anfangskonfiguration für den Prozeß „Entzündung eines (besetzten) Super-Gitterplatzes“ eine Zelle mit  $i$  Bäumen vorzufinden, bei einer Zellgröße von  $Z$  Bäumen. Definiert man  $D_i$  als Anzahl der Bäume, die sich in den perkolierenden Cluster(n) einer Zelle mit  $i$  Bäumen befinden, so folgt

$$f(k+1) = f(k) \sum_{j=0}^Z \Omega_j D_j \quad (4.7)$$

als die gesuchte Beziehung zwischen  $f(k+1)$  und  $f(k)$ , weil es  $D_j$  Prozesse gibt, bei denen ein Baum der perkolierenden Cluster der Zellen entzündet wird und so aus einer Zelle, die einem baumbesetzten Super-Gitterplatz entspricht, eine Zelle macht, die einem feuerbesetzten Super-Gitterplatz entspricht. Gleichung 4.7 gilt, wenn man als Kriterien für eine zu einem feuerbesetzten Super-Gitterplatz gehörende Zelle fordert, dass die Zelle mindestens einen perkolierenden Cluster, und mindestens ein Feuer innerhalb mindestens eines dieser perkolierenden Clusters hat. Wenn man dagegen erlaubt,

dass sich das oder die Feuer irgendwo in der Zelle mit mindestens einem perkolierendem Cluster befinden dürfen, so verändert sich Gleichung 4.7 zu

$$f(k+1) = f(k) \sum_{j=0}^Z \Omega_j j A_j. \quad (4.8)$$

Die Gleichungen 4.5, 4.7 und 4.8 beschreiben die cell-to-site Iterationsschritte für ein definiertes  $\rho$ , das in die Ausdrücke  $\Omega_j$  und  $W_j$  eingeht. Um die in den vorhergehenden Abschnitten angesprochene Superponierung der cell-to-site Iterationsschritte für die unterschiedlichen Walddichten durchzuführen, muss man die Gleichungen 4.5, 4.7 und 4.8 noch mit der Häufigkeit des Vorkommens einer definierten Walddichte im zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodell gewichten und anschließend mit Integralen überlagern. Berücksichtigt man das durch Gleichung 3.2 beschriebene Wachstum der lokalen Walddichte der Flecken, so folgt  $\rho(t) = 1 - (1 - \rho_{\min})e^{-pt}$  als Wachstumsverlauf dieser Dichte und  $T_{\max} = p^{-1} \ln((1 - \rho_{\min})/(1 - \rho_{\max}))$  als Zyklusdauer der Walddichteoszillationen eines typischen Fleckens, wenn  $\rho_{\max}$  die maximale, und  $\rho_{\min}$  die minimale lokale Walddichte ist, die in einem derartigen Fleck auftritt. Substituiert man  $pt \rightarrow u$ , so folgen aus den Gleichungen 4.5, 4.7 und 4.8 die Renormierungsgleichungen mit Walddichtesuperposition zu

$$p(k+1) = \frac{1}{M} \int_0^M p(k) \sum_{j=0}^Z W_j (1 - (1 - \rho_{\min})e^{-u}) C_j du \quad (4.9)$$

(wobei  $M = pT_{\max}$  ist), und

$$f(k+1) = \frac{1}{M} \int_0^M f(k) \sum_{j=0}^Z \Omega_j (1 - (1 - \rho_{\min})e^{-u}) D_j du \quad (4.10)$$

beziehungsweise

$$f(k+1) = \frac{1}{M} \int_0^M f(k) \sum_{j=0}^Z \Omega_j (1 - (1 - \rho_{\min})e^{-u}) j A_j du \quad (4.11)$$

wenn man die in Gleichung 4.8 zugrundegelegte Definition eines feuerbesetzten Super-Gitterplatzes zugrundelegt. Aus diesen Gleichungen erhält man mit Gleichung 4.3 den Exponent  $\nu$ . Verwendet man für  $M = \ln((1 - \rho_{\min})/(1 - \rho_{\max}))$  anstelle der maximalen Fleckendichte  $\rho_{\max}$  die Dichte der

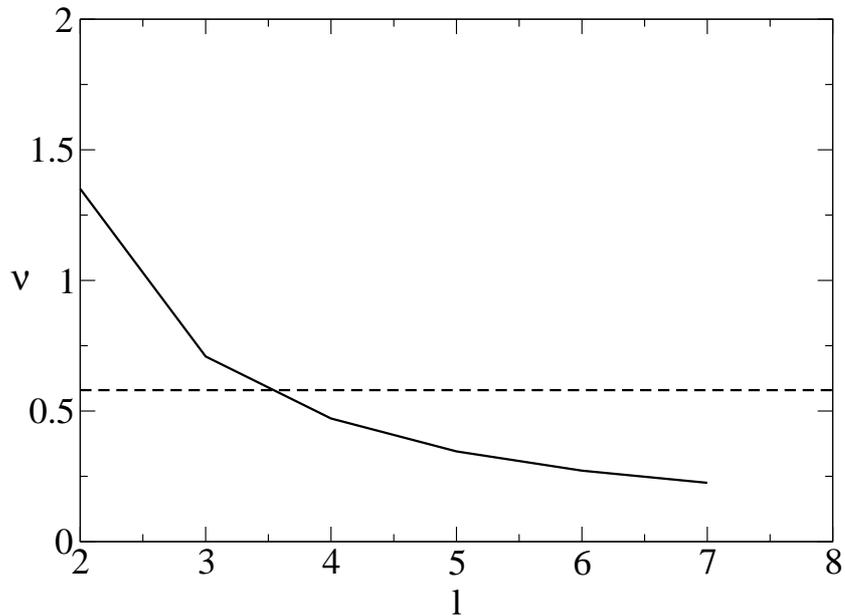


Abbildung 4.3: Ergebnisse für die in [61] vorgeschlagene Variante eines Renormierungsverfahrens. Die Ergebnisse für den Exponenten  $\nu$  sind über die Größe der Renormierungszellen  $l$  aufgetragen. Die Anzahl der Gitterplätze pro Zelle ist  $Z = l(l + 1)/2$ . Die Ergebnisse des Verfahrens (durchgezogene Kurve) konvergieren nicht gegen den gemessenen Wert (gestrichelte Gerade). Die Ergebnisse wurden an einem Dreiecksgitter ermittelt.

Perkolationsschwelle, so kann man testen, inwieweit das hier beschriebenen Renormierungsschema die in Kapitel 3 beschriebenen fraktalen Feuertypen beschreibt und ob das cell-to-site Renormierungsverfahren die Fleckengrößenverteilung in das Renormierungsschema einbringt.

## 4.5 Die Auswertung der Renormierungsgleichungen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse, die eine Auswertung der in Abschnitt 4.4 ausgearbeiteten Renormierungsgleichungen ergab, dargestellt. Es wird gezeigt, dass die Ergebnisse des hier vorgestellte Renormierungsverfahrens wesentlich besser gegen die gemessenen und berechneten Exponenten des selbstorganisiert kritischen zweidimensionalen Waldbrandmodells konvergieren, als die Ergebnisse anderer hier angesprochener Verfahren.

Um die in den Gleichungen 4.9, 4.10 oder 4.11 verwendeten Größen zu ermitteln, wurden die Konfigurationen der zu analysierenden Zellen von einem Computerprogramm als binäre Zahlen aufgefaßt<sup>3</sup>. Somit konnten für gegebene Zellengrößen alle möglichen Verteilungen der Bäume in den Zellen durchgegangen werden um die für die Gleichungen 4.9, 4.10 und 4.11 benötigten Größen zu ermitteln. Um die Stabilität des Verfahrens zu testen, wurden unterschiedliche Gitter zugrundegelegt und unterschiedliche Regeln getestet<sup>4</sup>, die den Zellen die Baum-, leerstellen- und feuerbesetzten Super-Gitterplätze zuordneten. Um die Konvergenz des hier vorgeschlagenen Verfahrens mit der Konvergenz anderer Verfahren aussagekräftig zu vergleichen, wurden Zellgrößen bis zu  $Z = 25$  verwendet. Über  $Z = 25$  werden die Rechenzeiten unerträglich lang. Es besteht im Prinzip die Möglichkeit, Monte Carlo Methoden zu verwenden, die eine statistisch ausgewählte Untermenge aller möglichen Konfigurationen behandelt, um die Zellgrößen noch weiter zu erhöhen. Es ist jedoch schwierig die Aussagekraft der so erhaltenen Ergebnisse abzuschätzen, weil die Vernachlässigung schon weniger Zellen durchaus großen Einfluß auf die Ergebnisse haben kann. In Abbildung 4.3 sind die Ergebnisse für das in [61] vorgeschlagene Verfahren dargestellt. Man sieht, dass die Ergebnisse dieses Verfahrens nicht gegen den mit Simulationen ermittelten Durchschnittwert von  $\nu$  konvergiert. Die in Abbildung 4.3 dargestellten Ergebnisse wurden mit einem Dreiecksgitter ermittelt. Bei einem Quadratgitter liefert das Verfahren ähnlich schlechte Ergebnisse. Es wurde die in Gleichung 4.10 zugrundegelegte Klassifizierung von Feuern verwendet, jedoch ändert sich das Ergebnis nicht wesentlich, wenn man von der in 4.11 zugrundegelegten Klassifizierung ausgeht. Diese Ergebnisse untermauern die in Abschnitt 4.2 aufgestellte Behauptung, dass die Größen  $f$  und  $p$  als kanonische Größen des Modells aufgefaßt werden müssen und das komplette Renormierungsverfahren inklusive der Walddichtesuperposition einzeln durchlaufen müssen. In Abbildung 4.4 werden die Ergebnisse für das in [45] vorgeschlagene Renormierungsverfahren dargestellt. In [45] wurden die in Abschnitt 4.4 aufgestellten Renormierungsgleichungen ohne Superposition (also die Gleichungen 4.5 und 4.7) für beliebig große Renormierungszellen weder in algorithmisch lösbarer Form aufgestellt noch durchgerechnet. Daher wurden in [45] nur Zellen mit maximal 9 Gitterplätzen verwendet und eine Konvergenz gegen den gemessenen Wert von  $\nu$  erschien möglich. Verwendet man jedoch die in Abschnitt 4.4 hergeleiteten Gleichungen und behandelt größere Renormierungszellen, so erkennt man, dass die Ergebnisse des in [45] vorgeschlagenen Verfahrens nicht konvergieren. Dies untermauert die in [64] und [61] angebrachte Kritik, dass dieses Verfahren

---

<sup>3</sup>Das heißt, dass Bäume durch eine 1 und Leerstellen durch eine 0 dargestellt wurden.

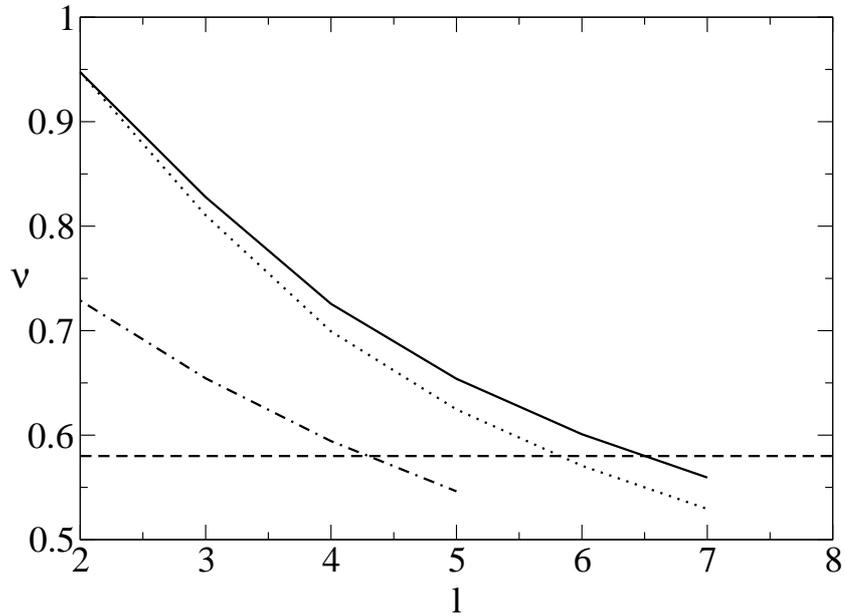


Abbildung 4.4: Ergebnisse für den Exponenten  $\nu$  für die in [45] vorgeschlagene Variante eines Renormierungsverfahrens, aufgetragen über die Größe der Renormierungszellen  $l$ . Die Anzahl der Gitterplätze pro Zelle ist  $Z = l^2$  für die gestrichelt-gepunktete Kurve, sonst ist  $Z = l(l + 1)/2$ . Die Ergebnisse des Verfahrens (durchgezogene, gepunktete und gestrichelt-gepunktete Kurve) konvergieren nicht gegen den gemessenen Wert (gestrichelte Gerade). Die gestrichelt-gepunktete Kurve entspricht dem in [45] angewendeten Verfahren auf einem Quadratgitter und mit den in [45] verwendeten spanning-conditions. Die restlichen Kurven wurden auf einem Dreiecksgitter mit unterschiedlichen Feuerbedingungen ermittelt.

wichtige Aspekte des selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells außer acht läßt. In Abbildung 4.4 werden sowohl die in [45] verwendeten cell-to-site Regeln (gestrichelt-gepunktete Kurve) als auch modifizierte Regeln verwendet, mit dem gleichen, schlechten Ergebnis. Die gepunktet-gestrichelte Kurve in Abbildung 4.4 wurde auf einem Quadratgitter ermittelt, wobei die in Gleichung 4.7 zugrundegelegte Regel verwendet wurde um zu bestimmen, wann ein Super-Gitterplatz als brennend klassifiziert wird. Die eigenwilligen in [45] verwendeten spanning-conditions wurden auch implementiert: Demnach enthält eine Zelle dann einen perkolierenden Cluster, wenn sich ein Cluster von der linken bis zu rechten Zellenwand erstreckt, nicht aber, wenn sich der Cluster nur von der oberen Wand bis zur unteren Wand erstreckt.

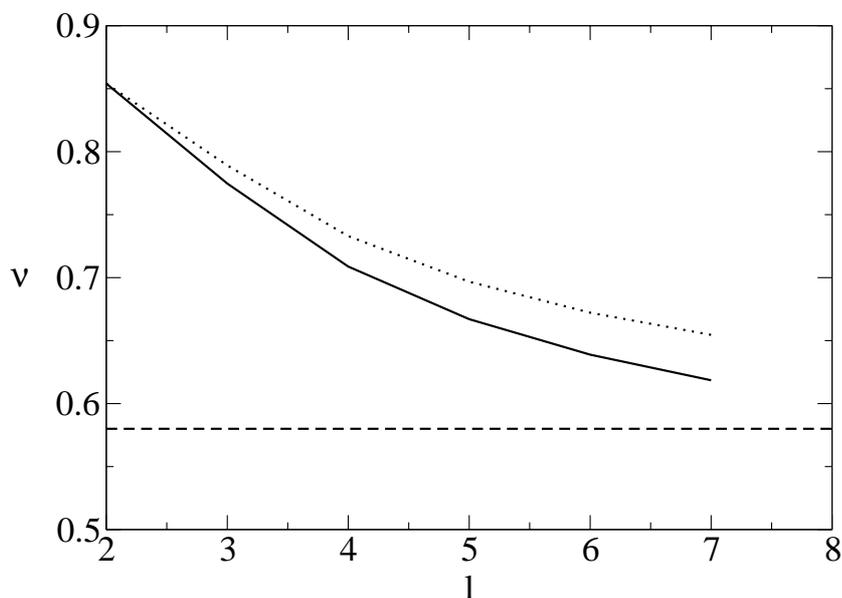


Abbildung 4.5: Ergebnisse für die in diesem Kapitel vorgeschlagene Variante eines Renormierungsverfahrens. Die Ergebnisse für den Exponenten  $\nu$  sind über die Größe der Renormierungszellen  $l$  aufgetragen. Die Anzahl der Gitterplätze pro Zelle ist  $Z = l(l + 1)/2$ . Die Ergebnisse des Verfahrens (durchgezogene und gepunktete Kurve) konvergieren offenbar gegen die gemessenen Werte (gestrichelte Gerade). Die Ergebnisse wurden auf einem Dreiecksgitter mit unterschiedlichen Feuerbedingungen ermittelt.

Die gepunktete und die durchgezogene Kurve wurde auf einem Dreiecksgitter berechnet. Ein Cluster in den dreiecksförmigen Zellen wird als perkolierend betrachtet, wenn er sich von einem Eck des Dreiecks bis zu der Wand der Zelle erstreckt, die dem Eck gegenüberliegt. Bei der durchgezogenen Kurve wurde die in Gleichung 4.7 zugrundegelegte Regel verwendet, um zu bestimmen, wann ein Super-Gitterplatz als brennend klassifiziert wird. Bei der gepunkteten Kurve, wurden dagegen die für Gleichung 4.8 verwendeten Regeln zugrundegelegt. All diese Varianten zeigen für das in [45] vorgeschlagene Renormierungsverfahren keine Konvergenz gegen den gemessenen Exponenten. In Abbildung 4.5 sind die Ergebnisse des in diesem Kapitel vorgeschlagenen Renormierungsverfahrens mit Superposition der Walddichten dargestellt. Die den Kurven zugrundeliegenden Rechnungen wurden auf einem Dreiecksgitter ausgeführt, wobei für die durchgezogene Kurve die für Gleichung 4.8 verwendeten Regeln zugrundegelegt wurden und für die gepunktete Kurve die in Gleichung 4.7 verwendeten Regeln. Die Rechnungen wurden auch auf dem

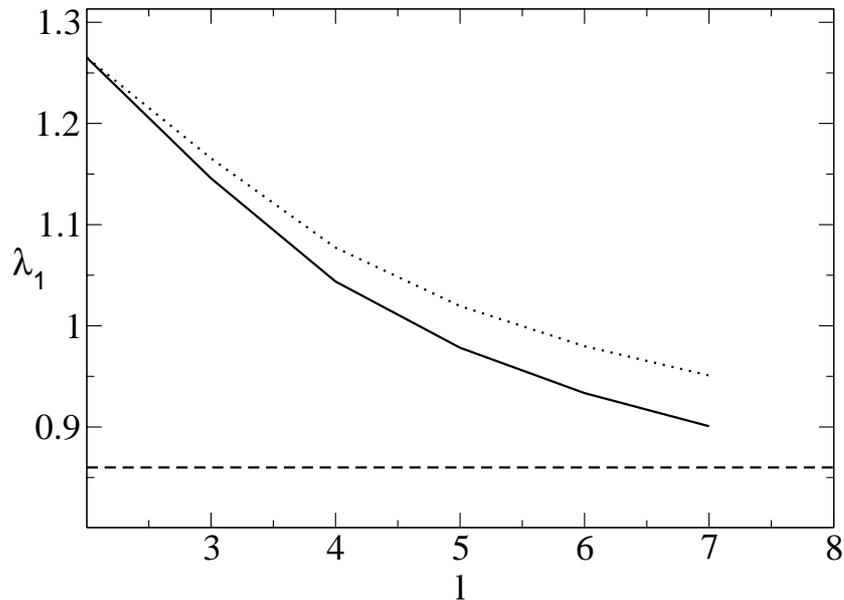


Abbildung 4.6: Ergebnisse für die in diesem Kapitel vorgeschlagene Variante eines Renormierungsverfahrens. Die Ergebnisse für den Exponenten  $\lambda_1$  der fraktalen Cluster sind über die Größe der Renormierungszellen  $l$  aufgetragen. Die Anzahl der Gitterplätze pro Zelle ist  $Z = l(l + 1)/2$ . Die Ergebnisse des Verfahrens (durchgezogene und gepunktete Kurve) konvergieren offenbar gegen den in Kapitel 3 berechneten Wert (gestrichelte Gerade). Die Ergebnisse wurden auf einem Dreiecksgitter mit unterschiedlichen Feuerbedingungen ermittelt.

Quadratgitter mit mehreren plausiblen spanning-conditions durchgeführt. In allen Fällen ist das Ergebnis ähnlich zu dem in 4.5 dargestellten: Die Resultate unterschreiten für keine berechnete Variante den gemessenen Wert des durchschnittlichen Exponenten  $\nu$ . Eine Konvergenz gegen den gemessenen Wert erscheint bei allen Varianten möglich, wobei die Konvergenz beim Quadratgitter wesentlich langsamer ist als beim Dreiecksgitter. Dieses Verhalten erscheint plausibel, denn das Renormierungsverfahren arbeitet umso näher am wirklichen Modell je mehr mögliche Pfade der Feuerpropagation in das Verfahren eingehen. Beim Dreiecksgitter hat jeder Gitterplatz 6 nächste Nachbarn, beim Quadratgitter nur 4. Daher bringt man bei vergleichbaren Renormierungszellengrößen beim Dreiecksgitter wesentlich mehr mögliche Wege des Feuers in das Verfahren ein und ist so bei vergleichbarer Renormierungszellengröße genauer. In Abbildung 4.6 werden schließlich die Ergebnisse dargestellt, die bei der Anwendung des in diesem Kapitel

vorgeschlagenen Renormierungsmodells auf die in den Kapiteln 2 und 3 behandelten fraktalen Feuertypen ermittelt wurden. In Abschnitt 4.3 wurde dargestellt, dass man testen kann, ob das cell-to-site Verfahren die Fleckengrößenverteilung in das Renormierungsschema einbringt, indem man dem Schema nur Walddichten zwischen der minimalen lokalen Walddichte  $\rho_{\min}$  und der Perkolationsschwelle des jeweiligen Gittertyps aufzwingt. Aus dem Exponenten  $\nu_p$  des so abgewandelten Schemas sollte sich mit  $\lambda_1 = \nu_p \mu_{\text{perc}}$  der in Kapitel 3 berechnete Wert  $\lambda_1 = 0.86$  für den Exponenten  $\lambda_1$  der fraktalen Clustertypen ergeben, falls das cell-to-site Verfahren die Information über die Fleckengrößenverteilung in das Verfahren einbringt. Dies erscheint prinzipiell möglich, da alle Information des cell-to-site Verfahrens vor der Superposition der Walddichten ermittelt wird, wie man an den Gleichungen 4.5 bis 4.11 sieht. Die in Abbildung 4.6 dargestellte gute Konvergenz der Resultate des Verfahrens gegen den berechneten Wert  $\lambda_1 = 0.86$  untermauert diese Vermutung.

## 4.6 Bewertung der Ergebnisse und der Methodik des neuen Renormierungsschemas

In dem in diesem Kapitel vorgeschlagenen Renormierungsschema wurden neue Methoden und Betrachtungsweisen eingeführt, die Inkonsistenzen der in [61] und [60] angewandten und in [64, 65] diskutierten Methoden beseitigt. Das Ergebnis wurde deutlich verbessert und es wurde die Stabilität des Verfahrens gegen plausible Modifikationen bei den cell-to-site Regeln demonstriert. Bis zu den Grenzen heute realistisch verfügbarer Rechenleistung und Rechendauer scheint eine Konvergenz des Verfahrens gegen die gemessenen Ergebnisse für alle getesteten Variationen möglich. Allerdings haben diese Methoden, die sich an die Ortsraumrenormierung von statischen Perkolationssystemen anlehnen, den Nachteil, dass die eigentliche Dynamik des Waldbrandmodells nur bedingt in das Schema eingeht, weil die Propagation des Feuers nicht berücksichtigt wird. Man kann daher gar nicht erwarten, dass man so ein Verfahren konstruiert, das ohne das Aufzwingen weiterer äußerer Information auskommt. Somit erscheint das Einbringen der aus dem Fleckenwachstum ermittelten Walddichte in das Schema eher notwendig als unkonventionell. Das Argument, dass man damit sowieso alle Information des Waldbrandmodells aufzwingt, ist nicht stichhaltig, weil wie in Kapitel 3 gezeigt wurde, die Fleckengrößenverteilung neben der Walddichteverteilung zusätzlich noch nötig ist, um die charakteristischen Eigenschaften des Modells zu beschreiben. Allerdings haben Betrachtungsweisen wie die, dass das cell-to-site It-

rationsschema die Fleckengrößenverteilung in das Renormierungsverfahren einbringt, postulativen Charakter. Bestätigt werden könnten diese Aussagen nur durch eine offenbare Konvergenz der Ergebnisse des Verfahrens gegen die gemessenen Ergebnisse. Allerdings bergen ergebnisorientierte Argumentationsweisen grundsätzlich das Risiko, dass man durch die Auswahl des Verfahrens das Ergebnis anpaßt, und wenn, wie in diesem Fall, die Konvergenz nicht mathematisch bewiesen wurde, besteht immer die Möglichkeit, dass sich später herausstellt, dass nur eine scheinbare Konvergenz vorliegt.

Man kann daher das vorgeschlagene Verfahren nicht als endgültige Lösung zur Renormierung selbstorganisiert kritischer Systeme verstehen. Da bei anderen selbstorganisiert kritischen Systemen wie zum Beispiel beim Erdbebenmodell [39] auch zwei Arten von Lawinen auftreten [54] und eine fleckenartige Struktur auftritt [57], besteht aber durchaus die Möglichkeit, aufgrund der hier vorgeschlagen Methoden ein verallgemeinertes Verfahren zu konstruieren.

# Zusammenfassung

Speziell für das Waldbrandmodell wurde in der vorliegenden Arbeit gezeigt, dass im zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Modell die in Abbildung 2.1 dargestellte fleckenartige Struktur des Zustandes den Schlüssel dazu liefert, die Dynamik des Modells zu verstehen. Die Ausbildung dieses Zustands erscheint plausibel, weil die Regeln einen clusterweisen Abbrand der Bäume nahelegen und das Auftreten von Dichten oberhalb der Perkolationsschwelle angesichts der geringen Wahrscheinlichkeit für einen Blitzeinschlag plausibel ist. Die hohen Dichten der großen abbrennenden Cluster erklären wiederum die Homogenität der Walddichte der Flecken, weil nach dem Fleckenabbrand nahezu keine Bäume übrig bleiben. Der so entstehende fleckenartige Zustand führt direkt zu der Existenz von zwei Typen von Feuern, einerseits zu den fraktalen Feuern, die in Flecken mit lokaler Walddichte unterhalb der Perkolationsschwelle brennen und nach der Perkolationstheorie eine fraktale Dimension kleiner als 2 haben. Andererseits zu den kompakten Feuern<sup>4</sup>, die beim Abbrand der am dichtesten bewachsenen Flecken entstehen<sup>5</sup>. Diese zwei Feuertypen erklären das unkonventionelle Skalenverhalten des zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells (siehe Abschnitt 3.2.1): Auf kleinen Längenskalen verhindern Sie ein finite-size Skalenverhalten analog zu gleichgewichtskritischen Phänomenen, weil die Systeme sich von zeitlich global kaum fluktuierenden Systemen mit starken räumlichen Inhomogenitäten in der Walddichte zu zeitlich stark oszillierenden räumlich homogenen Systemen umformen, wenn die Systemgröße unter die charakteristische Fleckengröße sinkt und nur noch einen Flecken umfaßt. Die fraktalen Feuer verändern die Walddichte dann kaum, aber die kompakten Feuer bewirken eine Vernichtung fast aller Bäume. Aufgrund dieser Veränderung bei kleinen Systemen kann man beim zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodell das Verhalten von Exponenten unendlich großer Systeme nicht aus dem Verhalten von kleinen Systemen mit den Methoden des finite-size-Skalenverhaltens ermitteln: Die Feuer-

---

<sup>4</sup>Das heißt, die Feuer haben eine fraktale Dimension von 2.

<sup>5</sup>Das heißt, die Flecken haben eine Walddichte oberhalb der Perkolationsschwelle.

größenverteilungen von kleiner werdenden Systemen, deren Abmessungen unterhalb der Korrelationslänge liegen, kollabieren nicht (siehe Abbildung 2.5). Kleine Systeme verhalten sich anders als gleich kleine Ausschnitte von großen Systemen (siehe Abbildung 2.6 und Abbildung 2.7). Damit folgt, daß konventionelles finite-size Skalenverhalten (siehe Gleichung 2.5) nicht erfüllt ist.

Auf großen Längenskalen bewirken die zwei Feuertypen eine komplizierteres Skalenverhalten der Feuergößenverteilung, die durch eine Superposition der in Gleichung 3.8 und Gleichung 3.14 beschriebenen Beiträge erklärt wird<sup>6</sup>. Die beiden Beiträge zur Superposition stammen jeweils von den fraktalen beziehungsweise von den kompakten Feuertypen. Für kleine Korrelationslängen superponieren beide Beiträge zu den aus der Literatur bekannten Feuergößenverteilungen. Jedoch separieren sich die Verteilungen mit zunehmender Korrelationslänge: Die Korrelationslänge ist als der Durchmesser des größten Fleckens definiert und damit divergiert auch die Größe der kompakten Feuer, die jeweils einen kompletten Flecken abbrennen. Dahingegen bleibt die Verteilung der fraktalen Feuer ab einer gewissen Mindestkorrelationslänge unberührt bei Korrelationslängenvergrößerungen, da sich an der Verteilung der sich auf den Flecken perkolationsartig verhaltenden Waldcluster nichts ändert. Somit separieren die Verteilungen der zwei Feuertypen. Die zwei Feuerverteilungen können mit einer neuen Skalentheorie beschrieben werden (siehe Abschnitt 3.2.2). Der asymptotische Exponent der fraktalen Feuergößenverteilung konnte zu  $\tau^F \approx 1.45$  analytisch berechnet werden (siehe Gleichung 3.9 bis Gleichung 3.12). Die Ergebnisse und der berechnete asymptotische Exponent konnten durch eine „künstliche“ Superponierung der zwei Feuertypen (siehe Abbildung 3.2) und ein coarse-grained Modell (siehe Abbildung 3.4) verifiziert werden. In Abbildung 3.2 kann man gut erkennen, wie sich die Beiträge beider Feuertypen zu den bisher in Simulationen gefundenen pseudoskalierenden Verhalten überlagern. Bei größeren Korrelationslängen fließt die Verteilung auseinander und man kann den asymptotischen Exponenten der fraktalen Verteilung ablesen. Das coarse-grained Modell nutzt die lokale Synchronisation von Gitterplätzen im zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodell und faßt ganze Gruppen von Gitterplätzen des originalen zweidimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells zu einem Gitterplatz zusammen. So kann das coarse-grained Modell sehr große Korrelationslängen auf heute verfügbarer Hardware emulieren, ohne die wichtigen Eigenschaften des Waldbrandmodells zu verlieren. Das coarse grained Modell bestätigt auch die angeführten Ergebnisse.

Wenn Simulationen zur Bestätigung von Ergebnissen herangezogen wurden, wurden auffallende „Schmutzeffekte“ erklärt, um das Verhalten der Si-

---

<sup>6</sup>Der tatsächliche Beitrag zur Superposition hängt von Gleichung 3.14 ab.

mulationen in allen Parameterbereichen des Modells plausibel zu erklären. Dabei wurde unter anderem das in Abschnitt A.1 beschriebene Peakspektrum in der Walddichtevertelung eines simulationstechnisch beschleunigten Waldbrandmodells erklärt, das allgemeine Verwendung findet.

Schließlich wurde in dieser Arbeit ein Renormierungsverfahren vorgeschlagen, das sich an die cell-to-site Renormierungsverfahren anlehnt, die zum Beispiel zur Ortsraumrenormierung von Perkolationssystemen verwendet werden. In Abbildung 4.1 sind Beispiele für die Renormierung der Blitzeinschlagswahrscheinlichkeit  $f$  und der Baumwachstumswahrscheinlichkeit  $p$  angegeben. Für dieses Verfahren muss eine Walddichte  $\rho$  vorausgesetzt werden. Da jedoch aufgrund der fleckenartigen Struktur des Systems keine fixe Walddichte vorliegt und die Information über die Propagation der Feuer nicht in das Verfahren eingeht, wird dem Verfahren die gemessene Walddichtevertelung des Waldbrandsystems aufgezwungen (siehe Gleichung 4.9 bis Gleichung 4.11). Durch die so erzeugte Homogenisierung erhält man zugleich eine perkolationssystem-ähnliche Selbstähnlichkeit der verschiedenen überlagerten Walddichten. Diese Selbstähnlichkeit ist notwendig, um die Exponenten zu berechnen. Die entsprechenden Gleichungen wurden in eine Form gebracht, dass sie für Rechner, entsprechende Leistung vorausgesetzt, für beliebige Renormierungszellengrößen exakt gelöst werden können. Die in Abbildung 4.5 dargestellten Ergebnisse dieses Verfahren konvergieren besser als die in Abbildung 4.3 und Abbildung 4.4 dargestellten anderen Renormierungsverfahren. Die errechneten Ergebnisse des Verfahrens konvergieren offensichtlich gegen die gemessenen Werte. Man kann daher das vorgeschlagene Verfahren nicht als endgültige Lösung zur Renormierung selbstorganisiert kritischer Systeme verstehen. Da bei anderen selbstorganisiert kritischen Systemen wie zum Beispiel beim Erdbebenmodell [39] auch zwei Arten von Lawinen [54] sowie eine fleckenartige Struktur auftreten [57] besteht aber durchaus die Möglichkeit, aufgrund der hier vorgeschlagen Methoden ein verallgemeinertes Verfahren zu konstruieren.

In dieser Arbeit wurde exemplarisch am selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodell untersucht, was unter „kritisches Verhalten“ bei selbstorganisiert kritischen Modellen zu verstehen ist. Es wurde gezeigt, dass sich Methoden und Ergebnisse aus der Physik gleichgewichtskritischer Phänomene am Phasenübergang auf selbstorganisiert kritische Phänomene nicht so leicht übertragen lassen wie in frühere Publikationen oft angenommen wurde. Sowohl beim finite-size Skalenverhalten als auch beim Aufbau von Renormierungsschemata zeigten sich unübersehbare Unterschiede zwischen beiden Gebieten. Es wurde gezeigt, dass das Verhalten des Modells nicht nur durch einfache Potenzgesetze beschrieben werden kann, sondern das das Skalenverhalten teilweise komplizierter ist. Es wurden Beispiele dafür gezeigt, dass

man sehr vorsichtig sein muss, wenn man aus Simulationsergebnissen allein Schlußfolgerungen auf das allgemeine Verhalten eines Modells ziehen will, weil in dem unendlich großem Parameterraum immer noch eine endlose Vielfalt von Strukturen verborgen sein kann, die auf den simulierbaren Längenskalen nicht gefunden werden kann. Daher erscheint es immer angebracht, nach analytischen Lösungen zu suchen oder zumindest nach mehreren möglichst unabhängigen Ansätzen, um Ergebnisse zumindest plausibel zu verifizieren.

Angegebene Referenzen belegen, dass ähnliche Resultate auch bei anderen selbstorganisiert kritischen Modellen gefunden wurden, so dass die Ergebnisse dieser Arbeit offenbar nicht nur auf das Waldbrandmodell, sondern auch auf andere selbstorganisiert kritische Modelle zutreffen.

Unter all diesen eher vorsichtig stimmenden Ergebnissen wurde jedoch auch in dieser Arbeit bestätigt, dass vergleichsweise einfache Regeln wie die des Waldbrandmodells eine große Menge von Strukturen hervorbringen können, die umso vielfältiger zu werden scheinen, je genauer man das Modell untersucht. Die durch das Modell reproduzierten Strukturen haben durchaus oft Ähnlichkeit mit natürlichen Phänomenen: Von der Struktur autokatalytischer Oberflächenreaktionen [66] über das im Mittelpunkt der Untersuchungen stehende potenzgesetzartige Verhalten von Meßgrößen bis hin zur Galaxienverteilung [67] oder dem Auftreten von soliton-ähnlichen Formationen [68] findet man eine Fülle von Strukturen im Waldbrandmodell wieder. Die beobachteten Ergebnisse, hängen von den Parametern, von Regeldetails, von Beobachtungslängenskalen, von der Dimension des Modells, oder auch von der Genauigkeit ab mit der man bereit ist zu messen. Dies alles sind Parameter, die auch bei der tatsächlichen Beobachtung natürlicher Phänomene Einfluß haben, so dass die Untersuchung von Computermodellen durchaus als vielversprechende Möglichkeit angesehen werden kann um Beschreibungen bislang unverstandener Phänomene zu finden, sei es durch Erkennen von grundlegenden Mechanismen anhand dieser relativ einfach zu untersuchenden Modelle oder dadurch, dass die Simulation der Modelle selber Vorhersagen zu natürlichen Phänomenen erlauben. Das in [67] vorgeschlagene längenskalenabhängige Skalenverhalten ist ein Beispiel dafür, wie die Untersuchung von Computermodellen Impulse für die Interpretation von Meßwerten liefern kann, in diesem Fall die Interpretation von Meßdaten zur Galaxienverteilung. Das in der vorliegenden Arbeit gefundene komplizierte Skalenverhalten der Feuergrößenverteilung, die bei kleinen Korrelationslängen durch ein gewöhnliches Potenzgesetz gut genähert wird, jedoch bei großen Korrelationslängen nur durch eine Superposition von zwei unterschiedlichen Verteilungen beschrieben werden kann, motiviert durchaus die vielfältigen bei natürlichen Phänomenen gefundenen, näherungsweise Potenzgesetze näher

zu untersuchen.

Das Potential der Modelle, ein umfangreiches Repertoire an Strukturen hervorzubringen, erscheint somit als Gefahr und Chance zugleich: Die vielfältigen Erscheinungsformen erzeugen so viele Freiheiten, dass die Gefahr besteht voreilig zu sehr zu verallgemeinern. Andererseits scheinen die Modelle komplex genug, um ein Ansatz zu sein für Modellierungsmechanismen der komplexen natürlichen Phänomene.

# Anhang A

## Anhang

### A.1 Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Walddichte

In diesem Abschnitt soll die temporalen Fluktuationen der Walddichte  $\rho(t)$  der in Kapitel 2 analysierten Modellvariante<sup>1</sup> untersucht werden. Es wird gemessen, wie oft ein bestimmter Wert  $\rho$  in einer genügend langen Zeitreihe auftritt. Die Ergebnisse werden anschließend erklärt. Weiterhin wird getestet, wie gut die in Kapitel 2 verwendete Variante das original selbstorganisiert kritische Waldbrandmodell emuliert, indem Simulationen mit fluktuierendem  $s_0$  durchgeführt werden.

Im folgenden wird mit  $w(\rho)d\rho$  die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, die Walddichte im Intervall  $[\rho ; \rho + d\rho]$  vorzufinden. Die Größe  $w(\rho)$  ist daher die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Walddichte  $\rho$ , wobei  $\rho$  immer nach dem in Abschnitt 2.2 beschriebenen Wachstumsschritt gemessen wurde. Man kann auch an dieser Größe den in Kapitel 2 erklärten Übergang von kritischem zu perkolationsartigem Verhalten beobachten.

In Abbildung A.1, A.2, A.3 und A.4 wird die Wahrscheinlichkeitsdichte  $w(\rho)$  für verschiedene Werte von  $L$  und  $s_0$  gezeigt. Wenn  $s_0/L^2$  festgehalten wird und genügend groß ist, vergrößert sich die mittlere Walddichte mit der Systemgröße  $L$  solange, bis sie einen asymptotischen Wert oberhalb  $\bar{\rho}_c$  annimmt. Bei festgehaltenem  $L$  erhöht sich die mittlere Walddichte mit größer werdendem  $s_0$ . Abgesehen von der Erhöhung der mittleren Walddichte kann man folgende Trends beobachten: (a) Wenn die mittlere Walddichte sich dem Wert  $\bar{\rho}_c$  annähert, werden die Verteilungen für  $w(\rho)$  breiter(A.1).

Dies liegt dran, dass die in Abbildung 2.1 sichtbaren Regionen homoge-

---

<sup>1</sup>Die Regeln dieser Variante sind in Abschnitt 2.2 beschrieben.

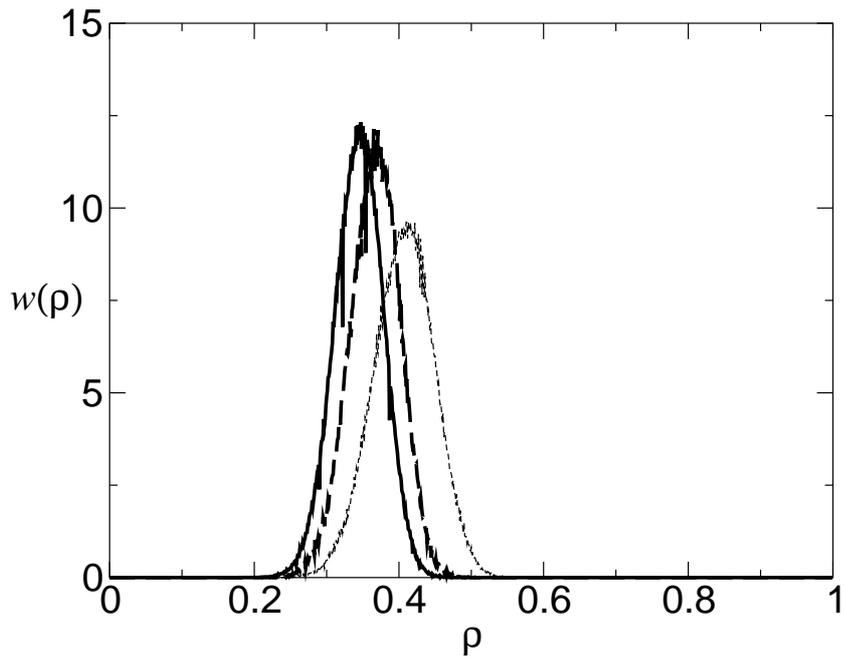


Abbildung A.1:  $w(\rho)$  für Systeme mit den Parametern  $s_0/L^2=0.005$  und  $L = 63, 100, 1600$  (mit den Peaks von links nach rechts). Es wurden die mittleren Walddichten  $\bar{\rho} = 0.345, 0.367, 0.407$  gemessen.

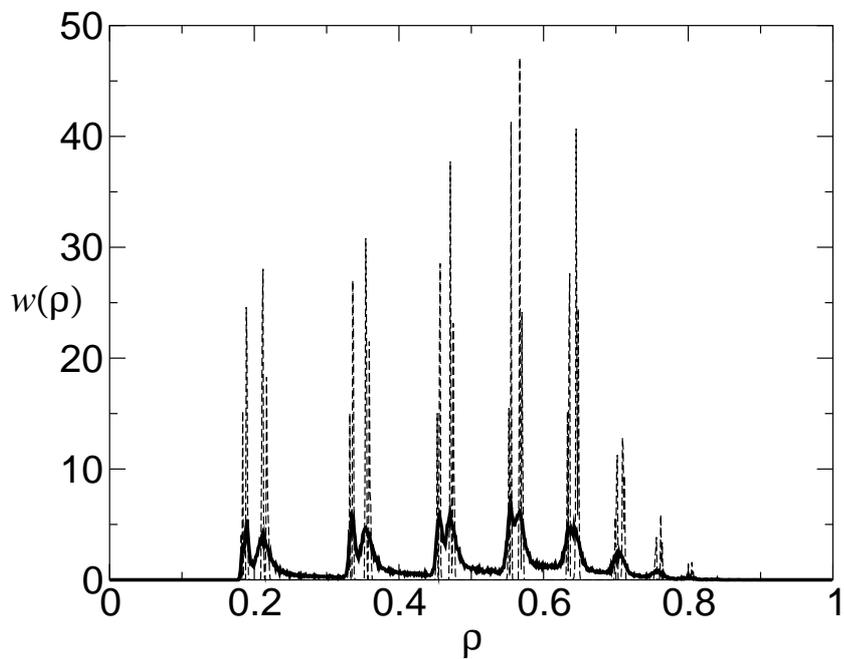


Abbildung A.2:  $w(\rho)$  für Systeme mit den Parametern  $s_0/L^2=0.20$  und  $L = 100$  (für die durchgezogene Kurve),  $L = 1600$  (für die gestrichelte Kurve). Es wurden die Walddichten  $\bar{\rho} = 0.474, \text{ und } 0.473$  gemessen.

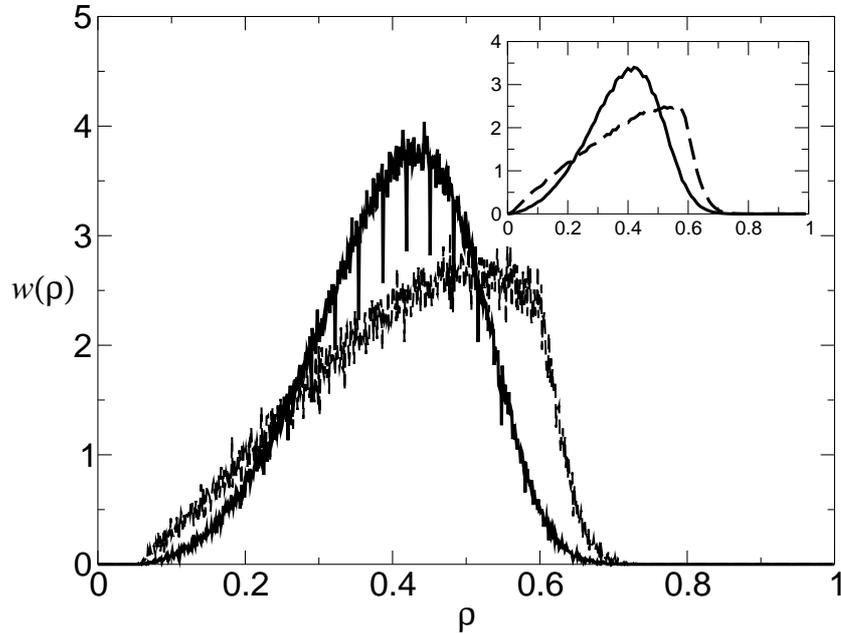


Abbildung A.3:  $w(\rho)$  für Systeme mit den Parametern  $s_0/L^2=0.05$  und  $L = 63, 1600$  (mit den Peaks von links nach rechts). Es wurden die Walddichten  $\bar{\rho} = 0.402$  und  $0.423$  gemessen. Der eingebundene Plot zeigt  $w(\rho)$  für einen Modelltest mit einer exponentiellen Wahrscheinlichkeitsverteilung für  $s_0$ . Die Werte für  $L$ , und der Mittelwert von  $s_0$  sind die selben wie die der Kurven des Hauptplots. Es wurden die Walddichten  $\bar{\rho} = 0.39$  und  $0.408$  gemessen.

ner Walddichte mit wachsender mittlerer Walddichte  $\bar{\rho}$  größer werden. Wenn große Regionen existieren, führt Ein Abbrand eines sich über diese Region erstreckenden großen Clusters zu einer merklichen Verringerung der Walddichte des Gesamtsystems. Daher vergrößern sich durch das Wachstum der Flecken die Fluktuationen der globalen Walddichte. (b) Die Form von  $w(\rho)$  wird asymmetrisch, wenn man die mittlere Walddichte über den kritischen Wert  $\bar{\rho}_c$  hinaus erhöht. Hierbei bewegt sich das Maximum der Verteilung  $w(\rho)$  mit steigender Walddichte  $\bar{\rho}$  weg von  $\bar{\rho}_c$  und hin zur Perkolationschwelle  $\rho_{\text{perc}} \approx 0.59$ , wie man in Abbildung A.3 sehen kann. Dieser Verhalten kann man dadurch erklären, dass für mittlere Walddichten  $\bar{\rho} > \bar{\rho}_c$  die „fleckartige“ Struktur ersetzt wird durch eine eher homogene perkolationsartige Struktur, bei der die größten Cluster systemspannend sind für Dichten oberhalb der Perkolationschwelle.

Sobald die mittlere Walddichte des Systems oberhalb der Perkolationschwelle liegt, wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein systemspannendes Feuer

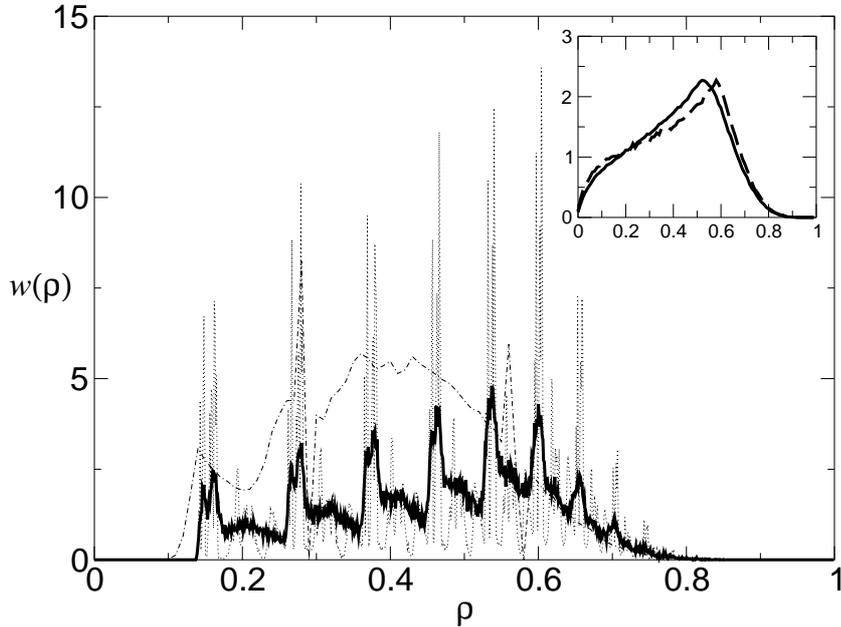


Abbildung A.4:  $w(\rho)$  für Systeme mit den Parametern  $s_0/L^2=0.15$  und  $L = 115$  (für die durchgezogene Kurve),  $L = 1600$  (für die gestrichelte Kurve),  $L = 10$  (für die gestrichelt-gepunktete Kurve). Die Werte für  $w(\bar{\rho})$  für die Systemgröße  $L = 10$  wurden mit dem Faktor 2 multipliziert. Es wurden die Walddichten  $\bar{\rho} = 0.454, 0.455, 0.394$  gemessen. Der eingebundene Plot zeigt  $w(\rho)$  für einen Modelltest mit einer exponentiellen Wahrscheinlichkeitsverteilung für  $s_0$ . Die Werte für  $L$ , und der Mittelwert für  $s_0$  sind die gleichen wie die der durchgezogenen und der gestrichelten Kurve des Hauptplots. Es wurden die Walddichten  $\bar{\rho} = 0.425$  und  $0.428$  gemessen.

auftritt, sehr groß. Daher ist es sehr unwahrscheinlich, dass sich Dichten  $\rho(t)$  aufbauen können, die deutlich oberhalb der Perkolationsschwelle liegen. Dies erklärt den Abfall von  $w(\rho)$ , sobald der Parameter  $\rho$  die Perkolationsschwelle überschreitet. (c) Wenn man die Systemgröße  $L$  bei festgehaltenem  $p = s_0/L^2$  vergrößert, treten Peaks in der Verteilung auf, die mit größer werdendem  $L$  schärfer und häufiger werden. Dieses Verhalten ist in Abbildung A.2 und Abbildung A.4 dargestellt. Das Verhalten kann erklärt werden, wenn man sich verdeutlicht, dass der Unterschied zwischen systemspannenden Feuern und endlichen Feuern sehr viel deutlicher wird, wenn die Systeme groß werden.

Im Grenzfall  $L \rightarrow \infty$  beeinflussen endliche Feuer die globale Walddichte überhaupt nicht mehr, wohingegen systemspannende Feuer Einfluß auf die globale Walddichte haben. Gemäß dem Wachstumsgesetz  $\dot{\rho}(t) = p(1 - \rho(t))$

füllen die aufeinanderfolgenden Wachstumsereignisse die Dichte auf die Werte  $1 - \exp(-p)$ ,  $1 - \exp(-2p)$ ,  $1 - \exp(-3p)$ , usw an. Diese Wachstumsschritte füllen die Dichte  $\rho(t)$  nahezu ungestört bis hin zu Perkolationschwelle  $\rho_{\text{perc}}$  auf. Von dieser Dichte an wird es dann sehr wahrscheinlich, dass weitere systemumspannende Feuer auftreten, die ein fast walddleeres System zurücklassen. Diese systemumspannende Feuer treten nicht notwendigerweise sofort auf, wenn  $\rho(t)$  die Perkolationschwelle erreicht, denn Blitze könnten auf unbesetzte Gitterplätze treffen. Weiterhin hängt die Dichte unmittelbar nach einem systemspannenden Feuer schwach von der Walddichte unmittelbar vor diesem Feuer ab. Daher wird der jeweilige neue Wachstumszyklus mit Walddichten  $\rho(t)$  aus der Serie  $1 - \exp(-p)$ ,  $1 - \exp(-2p)$ ,  $1 - \exp(-3p)$ , usw, immer wieder leicht verschoben, je nachdem, welche Dichte unmittelbar vor dem systemspannenden Feuer vorlag. Auf diese Weise entstehen immer wieder neue leicht gegeneinander verschobene Serien von Peaks, die im Grenzfall sehr großer Systeme und langer Zeitreihen  $\rho(t)$  fraktalen Charakter ausbilden. Wenn  $L$  kleiner wird, werden die Peaks breiter, bis sie schließlich miteinander verschmelzen.

Die Peaks in der Dichteverteilung  $w(\rho)$  treten auf, weil der Blitz gemäß den in Abschnitt 2.2 definierten Regeln nur zwischen zwei Wachstumsschritten mit  $s_0$  Wachstumsversuchen auftreten kann. Wären die Simulationen aber stattdessen mit den Originalregeln unter Verwendung einer Wachstumswahrscheinlichkeit  $p$  und einer Blitzeinschlagswahrscheinlichkeit  $f$  durchgeführt worden, könnte der Blitz das System zwischen dem Wachstum von zwei beliebigen Bäumen treffen. Diese Art von Simulation ist aber – wie bereits erwähnt – sehr langsam und wurde daher nicht verwendet. Um sicherzustellen, dass die verwendete, effizient simulierbare Version des Modells keine weiteren Einfluß auf die Ergebnisse hat als die Erzeugung der Peaks in  $w(\rho)$ , wurden die Ergebnisse mit einer Variante getestet, in der  $s_0$  nicht fest ist, sondern gemäß

$$P(s_0) = (L^2 p)^{-1} \exp(-s_0 / (L^2 p)) \quad (\text{A.1})$$

verteilt ist. Diese Verteilung gewährleistet, dass im Mittel  $s_0$  Baumwachstumsversuche gemacht werden und emuliert gleichzeitig das Nachfüllverhalten eines Systems, das nach den Originalregeln des Selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells arbeitet. Die Anzahl der Bäume, die zwischen zwei Blitzeinschlägen nachwachsen, ist in der Testvariante mit statistisch verteiltem  $s_0$  erwartungsgemäß nur geringfügig kleiner als in der Variante mit festem  $s_0$ , weil hier meistens weniger als  $pL^2$  Baumwachstumsversuche gemacht werden und bei großen Wachstumsereignissen die meisten Gitterplätze, die zum nachwachsen ausgewählt werden, schon besetzt sind. Wertet man die mitt-

lere Walddichte gemäß Gleichung 2.6 aus, erhält man für die Variante mit statistisch verteiltem  $s_0$  geringfügig kleinere Werte. Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $w(\rho)$  für diesen modifizierten Algorithmus mit statistisch verteiltem  $s_0$  sind in den eingebundenen Grafen von Abbildung A.2 und Abbildung A.4 dargestellt. Wie erwartet verschwinden die Peaks, wohingegen die Hüllkurve unverändert bleibt mit der Tendenz, dass sich ihr Maximum durch zunehmende finite-size Effekte von  $\bar{\rho}_c$  zu  $\rho_{\text{perc}}$  verschiebt.

## A.2 Herleitung des Zeitintervalls zwischen zwei Feuern

In diesem Abschnitt soll der in Abschnitt 2.4 verwendete Ausdruck  $(p(1 - \bar{\rho}_c))^{-1}$  hergeleitet werden für die Zeit, die zwischen dem Auftreten zweier Feuer vergeht, wenn man einen bestimmten Gitterplatz betrachtet.

Dabei werden die in Abschnitt 2.2 beschriebenen Regeln vorausgesetzt, wo pro Zeitschritt  $s_0$  Bäume zufällig auf Gitterplätze des Systems verteilt werden<sup>2</sup>. Pro Zeitschritt wird ein Gitterplatz zufällig ausgewählt und – falls der Platz mit einem Baum besetzt ist – der Waldcluster, der mit diesem Gitterplatz verbunden ist aus dem System herausgenommen. Es werden also  $s_0(1 - \bar{\rho}) = L^2 p(1 - \bar{\rho})$  Bäume pro Zeitschritt in ein System von der Walddichte  $\bar{\rho}$  eingefüllt, wenn man voraussetzt, dass der Nachfüllvorgang die Walddichte nicht merklich ändert. Man kann die mittlere Anzahl  $\bar{s}_t$  von Bäumen, die zwischen zwei Zeitticks verbrennen mit

$$\bar{s}_t = L^2 p(1 - \bar{\rho})$$

angeben<sup>3</sup>. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gegebener Gitterplatz zwischen zwei Zeitticks von einem Feuer betroffen ist, ist also mit  $\bar{s}_t/L^2 = p(1 - \bar{\rho})$  gegeben. Daraus folgt mit  $(p(1 - \bar{\rho}))^{-1}$  die Zeit in Zeitticks, die zwischen zwei Feuern vergeht, wenn man einen bestimmten Gitterplatz betrachtet. Geht man davon aus, dass sich das System am kritischen Punkt befindet, so liegt ein Walddichte von  $\bar{\rho}_c$  vor, und es ergibt sich die Zeit  $(p(1 - \bar{\rho}_c))^{-1}$  zwischen zwei Feuern.

---

<sup>2</sup>Es werden nacheinander  $s_0$  Gitterplätze zufällig ausgewählt und mit Bäumen besetzt. Wenn der Gitterplatz schon besetzt ist, verfällt der Wachstumsversuch.

<sup>3</sup>Der Index  $t$  bei  $\bar{s}_t$  soll andeuten, dass hier nicht die übliche Baumanzahl  $\bar{s}$  gemeint ist, die zwischen zwei Feuern entfernt wird, sondern die Anzahl von Bäumen, die pro Zeitschritt entfernt werden.

### A.3 Renormierung in $1d$

In diesem Abschnitt wird das in Kapitel 4 vorgeschlagene Renormierungsschema mit Superponierung der Walddichten auf das eindimensionale selbstorganisiert kritische Waldbrandmodell angewendet. So wird gezeigt, dass das exakte Ergebnis für den Exponenten  $\nu$  des eindimensionalen Falles, das bereits das in [45] vorgeschlagene Verfahren liefert, durch die neue Methode weiterhin reproduziert wird.

Die in Abschnitt 4.4 eingeführten Größen  $A_i$ ,  $B_i$  und  $C_i$  lassen sich im eindimensionalen Fall geschlossen angeben zu:

$$A_Z = 1; A_i = 0 \text{ für } i \neq Z \quad (\text{A.2})$$

$$B_i = \binom{Z}{i} \text{ für } i = 0, \dots, Z-1, B_Z = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$C_{Z-1} = Z; C_i = 0 \text{ für } i \neq Z-1 \quad (\text{A.4})$$

wobei

- $A_i$  ist definiert als die Anzahl der Zellen, die  $i$  Bäume und einen perkolierenden Cluster enthält. Im eindimensionalen Fall enthält eine Zelle aus  $Z$  aneinandergereihten Gitterplätzen nur dann einen perkolierenden Cluster, wenn die Zelle vollständig mit Bäumen besetzt ist. (Also ist  $A_Z = 1$  und sonst ist  $A_i = 0$ .)
- $B_i$  ist definiert als die Anzahl der Zellen, die  $i$  Bäume und keinen perkolierenden Cluster enthalten. Wenn die Zelle komplett gefüllt ist (also  $i = Z$ ), perkoliert der Cluster. Alle anderen Konfigurationen der eindimensionalen Zelle führen zu Zellen ohne perkolierenden Cluster. Die Anzahl dieser Zellen ergibt sich für  $i < Z$  kombinatorisch zu

$$B_i = \binom{Z}{i}.$$

- $C_i$  ist definiert als die Anzahl der Zellen, die  $i$  Bäume und keinen perkolierenden Cluster enthalten, sich aber durch Hinzufügen eines einzigen Baumes in Zellen mit einem perkolierenden Cluster verwandeln lassen. Da nur vollaufgefüllte Zellen mit  $Z$  Bäumen einen perkolierenden Cluster enthalten, können nur die Zellen mit  $Z-1$  Bäumen durch hinzufügen eines Baumes zu Zellen mit einem perkolierenden Cluster werden. Es gibt  $Z$  Zellkonfigurationen mit  $Z-1$  Bäumen.

Damit ergibt sich aus den Gleichungen 4.9 und 4.11 für den eindimensionalen Fall

$$p(k+1) = \frac{1}{M} \int_0^M p(k) \frac{\rho(u)^{Z-1}(1-\rho(u))}{\sum_{i=0}^{Z-1} \binom{Z}{i} \rho(u)^i (1-\rho(u))^{Z-i}} Z du \quad (\text{A.5})$$

und

$$f(k+1) = \frac{1}{M} \int_0^M f(k) Z du \quad (\text{A.6})$$

wobei

$$\rho(u) = 1 - (1 - \rho_{\min})e^{-u} \quad (\text{A.7})$$

Gleichung A.5 läßt sich zu

$$p(k+1) = \frac{1}{M} \int_0^M p(k) \frac{\rho(u)^{Z-1}(1-\rho(u))}{1-\rho(u)^Z} Z du \quad (\text{A.8})$$

vereinfachen, weil  $\sum_{i=0}^Z \binom{Z}{i} \rho^i (1-\rho)^{Z-i} = 1$ . Die kleinste auftretende Walddichte  $\rho_{\min}$  ist im eindimensionalen Fall 0, weil ein perkolierendes System komplett abbrennt. Die größte auftretende Walddichte  $\rho_{\max}$  geht gegen 1, weil die kritische Walddichte  $\rho_c$  im eindimensionalen Fall gegen 1 geht, wie in [23] gezeigt wurde. In diesem Grenzfall divergiert das durch  $M = \ln((1 - \rho_{\min})/(1 - \rho_{\max}))$  definierte  $M \rightarrow \infty$ . Berechnet man Gleichung A.8 für den Fall  $M \rightarrow \infty$ , so ergibt sich mit Gleichung A.7 und  $\rho_{\min} = 0$

$$p(k+1) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{-1}{M} \int_0^M p(k) \frac{-Z(1-e^{-u})^{Z-1}e^{-u}}{1-(1-e^{-u})^Z} du \quad (\text{A.9})$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{-1}{M} p(k) \ln(1 - (1 - e^{-M})^Z) \quad (\text{A.10})$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{-1}{M} p(k) \ln \left( 1 - \sum_{i=0}^Z \binom{n}{i} (-1)^i e^{-Mi} \right) \quad (\text{A.11})$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{-1}{M} p(k) \ln \left( e^{-M} \sum_{i=1}^Z \binom{n}{i} (-1)^{i-1} e^{-M(i-1)} \right) \quad (\text{A.12})$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} p(k) \left( 1 - \frac{\ln \left( \sum_{i=1}^Z \binom{n}{i} (-1)^{i-1} e^{-M(i-1)} \right)}{M} \right) \quad (\text{A.13})$$

$$= p(k)$$

wobei beim Schritt von Gleichung A.9 zu Gleichung A.10  $\int f'(x)/f(x) = \ln|x|$  genutzt wurde und im Schritt zu Gleichung A.11 der Binomische Satz verwendet wurde. Beim Schritt von Gleichung A.13 zum Endergebnis wurde genutzt, dass in der Summe nur eine Konstante vorkommt und additive Terme, die im Grenzfall  $M \rightarrow \infty$  verschwinden, so dass im Grenzfall  $M \rightarrow \infty$  bei Gleichung A.13 der Bruch, der die Summe und den Logarithmus enthält, verschwindet. Mit dem gerade berechneten Ausdruck  $p(k+1) = p(k)$  und Gleichung A.6 folgt  $\Phi(k+1) := f(k+1)/p(k+1) = Zf(k)/p(k) = Z\Phi(k)$ . Zusammen mit der für den eindimensionalen Fall angepaßten Gleichung 4.3

$$\nu = \frac{\log(Z)}{\log\left(\frac{d\Phi(k+1)}{d\Phi(k)}\right)} \quad (\text{A.14})$$

folgt ein Exponent  $\nu = 1$ , der sich unabhängig von der verwendeten Zellengröße  $Z$  ergibt und der dem in [23] ermittelten exakten Ergebnis entspricht. Das heißt, dass auch das in dieser Arbeit vorgeschlagene Renormierungsschema den kritische Exponenten  $\nu$  des eindimensionalen selbstorganisierten Waldbrandmodells reproduziert. Dies alleine garantiert allerdings nicht, dass das Verfahren auch für höhere Dimensionen die richtigen Resultate liefert.

## A.4 Tabelle einiger kritischer Exponenten

In diesem Abschnitt werden die durch Simulationen in [29] ermittelten Werten von Exponenten des selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells, die in [23] ermittelten exakten Ergebnisse des eindimensionalen selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodells und die entsprechenden Werte von Perkolationsystemen (siehe [21]) tabellarisch zusammengefaßt. Die Exponenten  $\tau$  der Waldclustergrößenverteilungen und die fraktale Dimension  $\mu$  beziehen sich immer auf die „überlagerten“ in heute realisierbaren Simulationen gemessenen Exponenten.

$d$	1	2	3	4	5	6	7
$L$	$2^{20}$	16384	448	80	32	20	12
$\tau$	2	2.14(3)	2.23(3)	2.36(3)	2.45(3)	2.50(3)	2.50(3)
$\tau_{\text{perc}}$	2	2.05	2.18	2.31	2.41	2.5	2.5
$\lambda$	1*	1.15(3)	1.30(6)	1.56(8) <sup>†</sup>	1.82(10) <sup>†</sup>	2.01(12) <sup>†</sup>	2.01(12) <sup>†</sup>
$1/\delta$	0*	0.48(2)	0.55(12)	-	-	-	-
$1/\delta_{\text{perc}}$	1	0.42	0.56	0.69	0.85	1	1
$\bar{\rho}_c$	1	0.4081(7)	0.2190(6)	0.146(1)	0.111(1)	0.090(1)	0.076(1)
$\mu$	1	1.96(1)	2.51(3)	3.0	3.2(2)	-	-
$\mu_{\text{perc}}$	1	1.90	2.53	3.06	3.54	4	4
$\nu$	1*	0.58	0.52(3) <sup>†</sup>	0.53(3) <sup>†</sup>	0.57(7) <sup>†</sup>	-	-

Tabelle A.1: Numerisch ermittelte Exponenten in 1- bis 7-dimensionalen Gittern. (Erklärung der Symbole \* = mit logarithmischer Korrektur, <sup>†</sup> = Berechnet aus Skalenrelationen). Die Exponenten mit dem Index „perc“ sind die entsprechenden Exponenten der Perkolationstheorie.

# Literaturverzeichnis

- [1] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, New York, 1983.
- [2] A. Bunde und S. Halvin, *Fractals and Disordered Systems*. Springer, New York, 1991.
- [3] P. Bak und M. Creutz, *Fractals in Science*. Springer, Berlin, 1994.
- [4] W. Press, "Flicker Noises in Astronomy and Elsewhere," *Comm. Astrophys.* **7** (1978) 103.
- [5] P. Dutta und P. M. Horn, "Low-Frequency Fluktuationen in Solids: 1/f-Noise," *Rev. Mod. Phys.* **53** (1981) 497.
- [6] H. Hintze, *1/f Rauschen*. Diplomarbeit, Universität Hamburg, 1990.
- [7] B. Gutenberg und C. Richter, "Magnitude and Energy of Earthquakes," *Ann. Geofis.* **9** (1956) 1.
- [8] H. J. Jensen, *Self-Organized Criticality*. Cambridge University Press, New York, 1998.
- [9] P. Bak, *How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality*. Copernicus, New York, 1996.
- [10] P. Bak, C. Tang, und K. Wiesenfeld, "Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise," *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 381.
- [11] P. Bak, C. Tang, und K. Wiesenfeld, "Self-organized criticality," *Phys. Rev. A* **38** (1988) 364.
- [12] R. Albert, H. Jeong, und B. A., "Diameter of the World Wide Web," *Nature* **401** (1999) 130.
- [13] R. Albert, H. Jeong, und B. A., "Attack and error tolerance of complex networks," *Nature* **406** (2000) 378.

- [14] B. Drossel und F. Schwabl, “Forest-fire model with immune trees,,” *Physica A* **199** (1993) 183.
- [15] E. V. Albano, “Spreading analysis and finite-size scaling study of the critical behavior of a forest fire model with immune trees,” *Physica A* **216** (1995) 213.
- [16] J. Tyson und J. Keener, “Singular perturbation theory of traveling waves in excitable media,” *Physica D* **32** (1988) 327.
- [17] E. Meron, “Pattern formation in excitable media,” *Phys. Rep.* **218** (1992) 1.
- [18] P. Bak, K. Chen, und C. Tang, “A forest-fire model and some thoughts on turbulence,” *Phys. Lett. A* **147** (1990) 297.
- [19] S. Clar, B. Drossel, und F. Schwabl, “Self-organized criticality in forest-fire models and elsewhere, Review article,” *J. Phys.: Condens. Matter* (1996).
- [20] P. Grassberger und H. Kantz, “On a Forest Fire Model with Supposed Self-Organized Criticality,” *J. Stat. Phys.* **63** (1991) 685.
- [21] D. Stauffer und A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory*. Taylor and Francis, London, 1992.
- [22] S. Clar, *Computersimulationen zum selbstorganisiert kritischen Waldbrandmodell*. Diplomarbeit, Technische Universität München, 1993.
- [23] B. Drossel, S. Clar, und F. Schwabl, “Exact results for the one-dimensional self-organized critical forest-fire mode,” *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 3739.
- [24] B. Drossel, *Strukturbildung in offenen Systemen am Beispiel eines Waldbrandmodells*. Dissertation, Verlag Harri Deutsch, Hallstadt-Bamberg, 1993.
- [25] M. Pacuski und P. Bak, “Theory of the one-dimensional forest-fire model,” *Phys. Rev. E* **48** (1993).
- [26] K. Hoffmann und M. Schreiber, *Computational Statistical Physics*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2001.

- [27] P. Grassberger, “On a self-organized critical forest-fire model,” *J. Phys. A* **26** (1993) 2081.
- [28] K. Christensen, H. Flyvberg, and Z. Olami, “Self-organized critical forest-fire model: Mean-field theory and simulation results in 1 to 6 dimensions,” *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 2737.
- [29] S. Clar, B. Drossel, and F. Schwabl, “Scaling laws and simulation results for the self-organized critical forest-fire model,” *Phys. Rev. E* **50** (1994) 1009.
- [30] D. Sornette, A. Johansen, and I. Dornic, “Mapping Self-Organized Criticality onto Criticality,” *J. Phys. I France* **5** (1995) 325.
- [31] M. Paczuski, S. Maslov, and P. Bak, “Avalanche dynamics in evolution, growth, and depinning models,” *Phys. Rev. E* **53** (1996) 414.
- [32] K. Sneppen and P. Bak, “Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution,” *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 4083.
- [33] S. Clar, K. Schenk, and F. Schwabl, “Phase transitions in a forest-fire model,” *Phys. Rev. E* **55** (1997) 2174.
- [34] S. Clar, B. Drossel, and F. Schwabl, “Self-Organized Critical and Synchronized States in a Nonequilibrium Percolation Model,” *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 2722.
- [35] A. Honecker and I. Peschel, “Length scales and power laws in the two-dimensional forest-fire model,” *Physica A* **239** (1997) 509.
- [36] B. Drossel, “Self-Organized Criticality and Synchronization in a Forest-Fire Model,” *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 936.
- [37] C. Tebaldi, M. De Menech, and A. Stella, “Multifractal Scaling in the Bak-Tang-Wiesenfeld Sandpile and Edge Events,” *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3952.
- [38] B. Drossel, “Scaling behavior of the Abelian sandpile model,” *Phys. Rev. E* **61** (2000) R2168.
- [39] Z. Olami, H. J. S. Feder, and K. Christensen, “Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes,” *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 1244.

- [40] B. Drossel und F. Schwabl, “Self-organized critical forest-fire model,” *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1629.
- [41] C. L. Henley, “Statics of a „self-organized“ percolation model,” *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 2741.
- [42] B. Drossel und F. Schwabl, “Formation of space-time structure in a forest-fire model,” *Physica A* **204** (1994) 212.
- [43] A. Vespignani und S. Zapperi, “How self-organized criticality works: A unified mean-field picture,” *Phys. Rev. E* **57** (1998) 6345.
- [44] H. Patzloff und S. Trimper, “Analytical Approach to the Forest-Fire Model,” *Phys. Lett. A* **189** (1994) 187.
- [45] V. Loreto, L. Pietronero, A. Vespignani, und S. Zapperi, “Renormalization Group Approach to the Critical Behavior of the Forest-Fire Model,” *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 465.
- [46] S. Lübeck und K. D. Usadel, “Numerical determination of the avalanche exponents of the Bak-Tang-Wiesenfeld model,” *Phys. Rev. E* **55** (1997) 4095.
- [47] A. Chessa, H. E. Stanley, A. Vespignani, und S. Zapperi, “Universality in sandpiles,” *Phys. Rev. E* **59** (1999) R12.
- [48] S. Clar, B. Drossel, K. Schenk, und F. Schwabl, “Phase transitions in a nonequilibrium percolation model,” *Phys. Rev. E* **56** (1997) 2467.
- [49] B. D. Malamud, G. Morein, und D. L. Turcotte, “Forest Fires: An Example of Self-Organized Critical Behavior,” *Science* **281** (1998) 1840.
- [50] W. Moßner, B. Drossel, und F. Schwabl, “Computer Simulations of the Forest-Fire Model,” *Physica A* **190** (1992) 205.
- [51] H. M. Bröker und P. Grassberger, “Anomalous scaling in the Bak-Chen-Tang forest fire model,” *Phys. Rev. E* **56** (1997) R4918.
- [52] K. Schenk, B. Drossel, S. Clar, und F. Schwabl, “Finite-size effects in the self-organized critical forrest-fire model,” *Eur. Phys. J. B* **15** (2000) 177.
- [53] M. De Menech, A. L. Stella, und C. Tebaldi, “Rare events and breakdown of simple scaling in the Abelian sandpile model,” *Phys. Rev. E* **58** (1998) R2677.

- [54] S. Lise und M. Paczuski, “Scaling in a Nonconservative Earthquake Model of Self-Organised Criticality,” `cond-mat/0104032`.
- [55] P.-S. R. und A. Vespignani, “Corrections to scaling in the forest-fire model,” *Phys. Rev. E* **61** (2000) 4854.
- [56] B. Drossel, S. Clar, und F. Schwabl, “Crossover from percolation to self-organized criticality,” *Phys. Rev. E* **50** (1994).
- [57] A. A. Middleton und C. Tang, “Self-Organized Criticality in Nonconserved Systems,” *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 742.
- [58] S. Lise und M. Pacuski, “Self-organized criticality and universality in a nonconservative earthquake model,” *Phys. Rev. E* **63** (2001) 036111.
- [59] K. Schenk, B. Drossel, und F. Schwabl, “The self-organized critical forest-fire model on large scales,” `cond-mat/0105121`.
- [60] V. Loreto, A. Vespignani, und S. Zapperi, “Renormalization Scheme for Forest-Fire Model,” *J. Phys. A* **29** (1996) 2981.
- [61] S. G. Clar, *Nichtgleichgewichts-Phasenübergänge und selbstorganisierte Kritikalität am Beispiel eines Waldbrandmodells*. Dissertation, Hieronymus Verlag, München, 1997.
- [62] L. Pietronero, A. Vespignani, und S. Zapperi, “Renormalization Scheme for Self-Organized Criticality in Sandpile Models,” *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 1690.
- [63] A. Vespignani, S. Zapperi, und L. Pietronero, “Renormalization Approach for Self-Organized Criticality Behavior of Sandpile Models,” *Phys. Rev. E* **51** (1995) 1711.
- [64] B. Drossel, “Comment on Renormalization Group Approach to the Critical Behaviour of the Forrest-Fire Model,” *Phys. Rev. Lett* **78** (1997) 1392.
- [65] V. Loreto, L. Pietronero, A. Vespignani, und S. Zapperi, “Reply to Comment on Renormalization Group Approach to the Critical Behaviour of the Forrest-Fire Model,” *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 1393.
- [66] B. Drossel und F. Schwabl, “Self-organized critical limit of autocatalytic surface reactions,” *Applied Physics A* **60** (1995) 597.

- [67] K. Chen und P. Bak, "Scale-dependent dimension in the forest fire model," *Phys. Rev. E* **62** (2000) 1613.
- [68] P. Bak, K. Chen, und M. Paczuski, "Solitons in the One-Dimensional Forest Fire Model," *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 2475.