

Technische Universität München  
Max-Planck-Institut für Astrophysik

# Nichtlokale und zeitabhängige Konvektion in Sternen

Dipl. Phys. (Univ) Martin Flaskamp

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Physik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. Lothar Oberauer  
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr. Wolfgang Hillebrandt  
2. Univ.-Prof. Dr. Manuel Drees

Die Dissertation wurde am 11. August 2003 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Physik am 13. Oktober 2003 angenommen.



---

---

# INHALTSVERZEICHNIS

---

---

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Eindimensionale Modelle für Konvektion - Grundlagen</b>	<b>9</b>
2.1	Die Mischungswegtheorie (MLT) . . . . .	9
2.2	Vorteile und Grenzen der MLT . . . . .	12
2.3	Grundlagen eindimensionaler Modelle . . . . .	13
2.3.1	Die Anelastische Näherung . . . . .	15
2.3.2	Die Boussinesq-Näherung . . . . .	16
2.3.3	Entwicklung der Fluktuationen . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Das Kuhfuß-Modell</b>	<b>21</b>
3.1	Herleitung . . . . .	22
3.2	Schließbedingungen . . . . .	23
3.3	Das Dreigleichungsmodell . . . . .	26
3.4	Das Eingleichungsmodell . . . . .	27
3.4.1	Anpassung der Parameter . . . . .	27
3.5	Bisherige Ergebnisse anderer Autoren . . . . .	28
3.5.1	Modellrechnungen - Kuhfuß . . . . .	28
3.5.2	Protosterne und Pulsationen - Wuchterl / Feuchtinger . . . . .	29
3.5.3	PopIII-Mischen - Straka . . . . .	29
3.5.4	Konvektionstheorien in Sternentwicklungsrechnungen . . . . .	30
3.6	Einfache Testrechnungen - Boxmodelle . . . . .	30
3.6.1	Zeitabhängigkeit . . . . .	30
3.6.2	Nichtlokalität . . . . .	35
3.7	Die Schwachstellen und ihre Verbesserungen . . . . .	37
3.7.1	Eingleichungsmodell . . . . .	38

3.7.2	Probleme im Dreigleichungsmodell . . . . .	39
3.7.3	Fehlerhafte Näherungen und Modellannahmen . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Grundlagen von Sternsimulationen</b>	<b>47</b>
4.1	Die Grundgleichungen der Sternentwicklung . . . . .	47
4.2	Das verwendete Sternentwicklungsprogramm . . . . .	48
4.3	Ergänzungen und Erweiterungen des Codes . . . . .	49
4.3.1	Die Berechnung des Temperaturgradienten $\nabla$ . . . . .	50
4.3.2	Transformation der Variablen . . . . .	51
4.3.3	Diskretisierung der Gleichungen . . . . .	53
4.3.4	Die zentrale Randbedingung . . . . .	53
4.3.5	Chemisches Mischen . . . . .	54
4.3.6	Abbruchkriterien und Korrekturbegrenzung . . . . .	54
4.4	Die Konvektionsgleichungen . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Simulationen zeitabhängiger Konvektion</b>	<b>57</b>
5.1	Ansringverhalten - die He-Konvektionszone . . . . .	59
5.2	Der Heliumflash - erste Rechnungen . . . . .	61
5.2.1	Der Heliumflash in Population-III-Sternen . . . . .	62
5.2.2	Ergebnisse numerischer Simulationen . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Simulationen nichtlokaler Konvektion</b>	<b>67</b>
6.1	Das konvektive Überschießen . . . . .	68
6.1.1	Konsequenzen der Nichtlokalität . . . . .	68
6.1.2	Evidenz für konvektives Überschießen . . . . .	69
6.1.3	Die Struktur einer Überschießzone . . . . .	71
6.2	Die Ausdehnung der Überschießzone . . . . .	75
6.2.1	Bestimmung der Überschießlänge . . . . .	78
6.2.2	Abhängigkeiten der Überschieß-Distanz . . . . .	79
6.3	Die konvektive Hülle von A-Sternen . . . . .	85
6.3.1	Das Konvektionsmodell Kupkas . . . . .	86
6.3.2	Vergleichende Rechnung mit der Kuhfußtheorie . . . . .	86
6.4	Vergleiche mit einer 3D Simulation . . . . .	89
6.4.1	Die Rechnungen Muthsam . . . . .	89
6.4.2	Vergleichende Rechnungen mit der Kuhfußtheorie . . . . .	90
6.5	konvektives Überschießen und die Entwicklungsphasen eines Sterns . . . . .	93
6.5.1	Der Brennstoffvorrat des Kerns . . . . .	94
6.5.2	Die Lebensdauer auf der Hauptreihe . . . . .	95
6.5.3	Die Breite der Hauptreihe . . . . .	98
6.5.4	Beginn des Schalenbrennens . . . . .	99

6.5.5	Heliumkernmasse . . . . .	100
6.5.6	Leuchtkraft und Ausdehnung der blauen Schleife . . . . .	103
6.6	Sonnenmodelle . . . . .	105
6.6.1	Probleme in der Sonne . . . . .	106
6.6.2	Sonnenrechnungen unter Verwendung der Kuhfußtheorie . . .	108
6.6.3	Parameterstudien . . . . .	108
6.6.4	Voll iterierte Modelle . . . . .	110
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>115</b>
<b>A</b>	<b>Mittelungsverfahren</b>	<b>117</b>
A.1	Eigenschaften der Mittelungsoperatoren . . . . .	117
A.2	Identitäten . . . . .	118



---

---

# *Kapitel 1*

## EINFÜHRUNG

---

---

In der Astronomie gehören Sterne zu den wichtigsten Beobachtungsobjekten, und zwar sowohl als Einzelsterne, als Teil eines Doppelsternsystems oder als Bestandteil von Sternhaufen oder gar von Galaxien. Sterne sind selbstleuchtende Gaskugeln, die Energie in ihre Umgebung abstrahlen. Sie werden durch ihre eigene Gravitationswirkung zusammengehalten. Dabei liegt in den meisten Fällen ein Gleichgewichtszustand zwischen Gravitationskraft einerseits und dem Gas- und Strahlungsdruck andererseits vor.

Die große Energiemenge, die von der Sternoberfläche in das Weltall abgestrahlt wird, speist sich aus gigantischen Energiereservoirs im Sterninneren. Diese sind neben der potentiellen Energie der Gravitationsfelder und der Wärmeenergie, die nur in einzelnen Lebensphasen des Sterns dominierend sind, vor allem die Bindungsenergie der Atomkerne, die frei wird, wenn mehrere leichte Atomkerne zu einem schwereren verschmelzen. Diese Reaktionen finden nur bei sehr hohen Temperaturen (über einigen Millionen Grad), also nur im Sterninneren statt.

Da diese Energie im Sterninneren erzeugt, jedoch an der Oberfläche des Sterns in das Weltall abgestrahlt wird, muss sie vom Sterninneren an die Oberfläche transportiert werden. Die für diesen Transport wichtigen Mechanismen sind neben Strahlungstransport und Wärmeleitung vor allem die Konvektion. Die Wärmeleitung wird vernachlässigt, da sie in Sternen i.A. nicht von Bedeutung ist.

Im Gegensatz zu Strahlungstransport tritt bei Konvektion die Materie selbst als Transporteur der Energie auf. Liegt an einer Stelle des Sterns ein großes Temperaturgefälle vor, so sind Materieblasen, die aus ihrer ursprünglichen Lage ausgelenkt werden, heißer und somit leichter als ihre Umgebung. Diese Materieblasen werden daher durch Auftriebskräfte weiter beschleunigt, steigen in kühlere Gebiete auf und

geben dort ihren Überschuss an Wärme ab. Gleichzeitig sinken kalte Materieelemente in tiefere Schichten ab und werden dort erwärmt. Im Sterninneren, wo hohe Dichten vorliegen, kann nahezu die gesamte Energie durch Konvektion transportiert werden, während in den äußeren Schichten des Sterns trotz Konvektion noch ein wesentlicher Teil der Energie über Strahlung transportiert wird. Mit der Konvektion ist außer einem Energietransport auch eine Umverteilung der Materie verbunden. Konvektive Gebiete sind meist sehr gut durchgemischt und chemisch homogen.

In ein und demselben Stern liegen in unterschiedlichen Gebieten oft unterschiedliche Transportmechanismen vor. Für die Entwicklung eines Sterns kann es von signifikanter Bedeutung sein, wie groß die einzelnen Gebiete der Konvektion sind, da dies den zur Verfügung stehenden nuklearen Brennstoff und damit die Lebensdauer des Sterns ebenso wie die resultierende Verteilung von Elementen beeinflussen kann. Ferner kann die Konvektion die Elemente über weite Bereiche des Sterns transportieren, Brennprodukte aus dem Sterninneren an die Oberfläche mischen und somit das beobachtete Emissionsspektrum wesentlich beeinflussen.

Will man die Eigenschaften und Auswirkungen der Konvektion in Sternen untersuchen, so muss man hierfür teils recht aufwändige numerische Rechnungen durchführen. Solche Rechnungen gibt es in dreidimensionalen, zweidimensionalen und in der Sternentwicklung vor allen in vereinfachten eindimensionalen Rechnungen für kugelsymmetrische Anordnungen.

Dreidimensionale Rechnungen wurden, z.B. für solare Konvektion, von Nordlund & Dravins (1990), Atroshchenko & Gadun (1994), Kim & Chan (1998) und von Stein & Nordlund (1998) durchgeführt.

Zweidimensionale Rechnungen konnten für weitere Bereiche der Sternentwicklung wie etwa Sternphotosphären durchgeführt werden, so z.B. Rechnungen zu konvektiven Kernen, (Deupree 2000) oder allgemeiner zu Überschießen (Freytag et al. 1996).

Diese Rechnungen sind jedoch alle sehr aufwändig und rechenintensiv und können daher nur für einen kurzen 'Augenblick' im Leben eines Sterns durchgeführt werden. Will man die gesamte Entwicklung eines Sterns von der protostellaren Kontraktion bis hin zu seinem Endstadium verfolgen, so muß man noch einfachere konvektive Modelle anwenden. Diese müssen die wesentlichen Eigenschaften der Konvektion wiedergeben und zugleich gut handhabbar und zeitsparend zu berechnen sein.

Eine einfachste Version eines solchen Modells ist die Mischungswegtheorie (MLT). Sie wurde nach einer Idee von Prandtl (1932) von Vitense (Vitense 1953, Böhm-Vitense 1958) in ihrer gebräuchlichen Form formuliert. Auf die Sternstruktur und Sternentwicklungsrechnung wurde sie schon früh von Kippenhahn (1962) und Hofmeister & Kippenhahn (1964) angewendet. Die Mischungswegtheorie ist eine sehr einfache Theorie, mit der sich viele grundlegende Eigenschaften der Konvektion wiedergeben lassen, sie ist jedoch vor allem eine lokale und zeitunabhängige Theorie, d.h., die Geschwindigkeit eines konvektiven Elements ist nur von seiner augenblicklichen Umgebung abhängig, nicht jedoch von seiner Vorgeschichte und dem Weg, den es bisher zurückgelegt hat. Ferner sind die Effekte vernachlässigt, die auftreten, wenn



sich Konvektion neu aufbaut; die Konvektion wird also instantan auf einen stationären Wert eingestellt. Dies ist für eine Vielzahl von Problemen ausreichend. In einer Reihe von Spezialfällen jedoch ist es unzureichend, diese Theorie in ihrer einfachen und ursprünglichen Form zu verwenden.

Zahlreiche Versuche wurden unternommen, um diese Mängel zu beheben. Eine Reihe von Autoren versuchten auf der Grundlage der Mischungswegtheorie durch die teilweise sehr intuitive Einführung neuer Terme die Theorie zu erweitern. Hierbei sind z.B. (Bressan et al. 1981) zu nennen, die in einem ballistischen Ansatz das Überschießen der konvektiven Elemente über die Grenze der Instabilität hinaus berücksichtigen. Diese einfacheren Ansätze enthalten zudem alle, wie auch die MLT, freie Parameter, die an Beobachtungen angepaßt werden müssen, was allerdings nicht immer zu eindeutigen Werten führt. Weitere Autoren gehen einen grundsätzlich andern Weg. Sie leiten ausgehend von den grundlegenden hydrodynamischen Gleichungen unter Einführung von physikalischen Annahmen und Schließbedingungen einen Satz von Differentialgleichungen her, der das Verhalten gemittelter konvektiver Größen beschreibt. Hier sind vor allem die Arbeiten von Canuto, Xiong, Stellingwerf und nicht zuletzt von Rudolf Kuhfuß zu nennen. Ein sehr guter Überblick über diese Arbeiten ist in (Baker 1987) gegeben. Diese Gleichungen sind teils mehr, teils weniger aufwändig, je nachdem, wie genau die physikalischen Effekte beschrieben werden, und müssen allesamt numerisch gelöst werden.

Versucht man diese Modelle nicht nur auf einen bestimmten stationären Stern anzuwenden, wie dies die meisten der oben genannten Autoren tun z.B. (Xiong 1985), so muss das verwendete Konvektionsmodell nicht nur die wesentlichen Eigenschaften der Konvektion korrekt wiedergeben, sondern auch gut handhabbar, also ohne allzugroßen numerischen Aufwand verwendbar sein. Ein Modell, das diese Eigenschaften aufzuweisen scheint, ist das von Rudolf Kuhfuß entwickelte (Kuhfuß (1986a) und Kuhfuß (1987a)). Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, dieses Modell als integrierten Teil eines Programms zur Sternentwicklung anzuwenden, seine Auswirkungen und Konsequenzen zu untersuchen, eventuelle Schwachstellen aufzudecken und, sofern möglich, Verbesserungsvorschläge zu unterbreiten. Mit diesem Modell soll es ermöglicht werden, die Konvektion in Sternentwicklungsrechnungen physikalisch vollständiger zu behandeln und somit realistischere Modelle zu erhalten.



---

---

## *Kapitel 2*

# EINDIMENSIONALE MODELLE FÜR KONVEKTION - GRUNDLAGEN

---

---

### 2.1 DIE MISCHUNGSWEGTHEORIE (MLT)

Die Mischungswegtheorie als die einfachste und zugleich am häufigsten verwendete Theorie der Konvektion geht von folgendem Bild aus (Kippenhahn & Weigert (1994)): Ein Materie-Element wird (z.B. durch Fluktuationen ) aus seiner ursprünglichen Lage ausgelenkt. Ist es danach heißer und somit leichter als seine neue Umgebung, erfährt es weiteren Auftrieb und wird weiter beschleunigt. Das betrachtete Gebiet ist somit instabil gegen Konvektion. Das konvektive Element bewegt sich über eine Distanz  $\Lambda$ , bis es schließlich durch die dissipativen Kräfte aufgelöst wird und seine Energie, d.h. seinen Wärmeüberschuss und seine Bewegungsenergie an die Umgebung abgibt. Da innerhalb einer bestimmten konzentrischen Sphäre immer Elemente mit unterschiedlicher Geschwindigkeit und unterschiedlichem Wärmeüberschuss vorliegen werden, je nachdem wie weit die einzelnen Elemente bis zu diesem Zeitpunkt bereits gewandert sind, geht man davon aus, dass ein durchschnittliches konvektives Element eine Strecke  $\Lambda/2$  zurückgelegt hat. Der durchschnittliche Temperaturüberschuss  $DT$  gegenüber der Umgebung wäre dann:

$$DT \approx \frac{\partial(DT)}{\partial r} \frac{\Lambda}{2} = (\nabla - \nabla_e) \frac{\Lambda}{2H_p} T \quad (2.1)$$

Hierbei ist  $r$  die Ortskoordinate,  $H_p = -\partial r / \partial \ln P$  die Druckskalenhöhe,

$$\nabla_e = \left. \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right|_e$$

der Gradient, mit dem ein konvektives Materie-Element bei Druckänderung seine Temperatur ändert, und  $\nabla$  ist der entsprechend definierte Temperaturgradient der vorliegenden Schichtung. Auf ein Element, das den Weg  $\Lambda$  zurückgelegt hat, hat im Mittel die Hälfte der Auftriebskraft  $k$  eingewirkt. Damit beträgt die durchschnittlich am Element verrichtete spezifische Arbeit  $\frac{1}{2}k\frac{\Lambda}{2}$ . Die Auftriebskraft ist wiederum gegeben durch den Unterschied der Dichten  $k = -g\frac{D\rho}{\rho}$ . Und dieser ist gegeben durch  $\frac{D\rho}{\rho} = -\delta\frac{DT}{T}$ , mit  $\delta = -\partial \ln \rho / \partial \ln T|_P$ . Somit ergibt sich für die am Element verrichtete Arbeit:

$$\frac{1}{2}k\frac{\Lambda}{2} = g\delta(\nabla - \nabla_e)\frac{\Lambda^2}{8H_p} \quad (2.2)$$

Geht man davon aus, dass die Hälfte der Arbeit verwendet wird, um das Umgebungsmaterial zur Seite zu schieben, so ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit  $v$ :

$$v^2 = g\delta(\nabla - \nabla_e)\frac{\Lambda^2}{8H_p}. \quad (2.3)$$

Fasst man diese Ergebnisse zusammen, so erhält man einen konvektiven Fluss von

$$j_{\text{kon}} = \rho v c_p DT = \rho c_p T \sqrt{g\delta} \frac{\Lambda^2}{4\sqrt{2}} H_p^{-\frac{3}{2}} (\nabla - \nabla_e)^{\frac{3}{2}} \quad (2.4)$$

In dieser Ableitung bezeichnet die Größe  $\nabla_e$  den Gradienten der Temperatur, beschreibt also letztlich die Änderung der Temperatur  $T_e$ , die das konvektive Element während seiner Bewegung erfährt. Diese Temperaturänderung kann zwei Gründe haben. Zum einen erfährt das konvektive Element eine adiabatische Expansion. Zum anderen tauscht dieses konvektive Element durch Strahlung Energie mit seiner Umgebung aus. In unterschiedlichen Bereichen eines Sterns kann dabei jeweils der eine oder der andere Mechanismus dominierend sein. Will man den radiativen Verlust nicht mit berücksichtigen, so muss man in obigen Gleichungen den Temperaturgradienten  $\nabla_e$  durch einen Temperaturgradienten  $\nabla_{\text{ad}}$  ersetzen, das heißt, das Materie-Element erfährt bei seiner Bewegung nur eine adiabatische Expansion.

Somit lässt sich der konvektive Fluss berechnen, sofern die Größen  $P, T, \rho, \Lambda, c_p, \nabla_{\text{ad}}$  bzw.  $\nabla_e, \nabla$  und  $g$  bekannt sind. Für die meisten dieser Größen wird dies in der Regel der Fall sein, nicht jedoch für  $\nabla$ , denn dies ist ja gerade der Temperaturgradient, der berechnet werden soll. Diesen kann man jedoch erhalten, indem man die Energie-transportgleichung heranzieht. Es ergibt sich eine kubische Gleichung, deren Lösung den gesuchten Gradienten liefert. Diese kubische Gleichung ist nur von lokalen Größen abhängig.

Die Energietransportgleichung besagt, dass die gesamte im Inneren des Sterns transportierte Energie, gegeben durch die Leuchtkraft  $L_r$ , zum Teil durch Strahlung  $j_{\text{rad}}$  und zum Teil durch Konvektion  $j_{\text{kon}}$  transportiert wird.

$$j_{\text{rad}} + j_{\text{kon}} = \frac{L_r}{4\pi r^2} \quad (2.5)$$

Andere Transportmechanismen wie Wärmeleitung haben in Sternen i.A. nur eine geringe Bedeutung und sind vernachlässigbar. Der radiative Fluss ist durch ein Temperaturgefälle und somit durch den Temperaturgradienten  $\nabla$  gegeben,  $j_{\text{rad}} = \frac{k_{\text{rad}} T}{H_p} \nabla$ . Der konvektive Fluss bestimmt sich wie in Gleichung 2.4 dargestellt. Die Lösung von Gl. 2.5 bestimmt den Temperaturgradienten  $\nabla$ .

Allerdings muss erwähnt werden, dass immer noch die Größe  $\Lambda$ , die sogenannte Mischungsweglänge, als freier Parameter eingeht. Sie stellt eine charakteristische Skalenlänge der Konvektion dar und muss entsprechend den physikalischen Gegebenheiten angepasst werden. Üblicherweise geschieht dies, indem die Mischungsweglänge auf die Druckskalenhöhe an der entsprechenden Stelle bezogen wird

$$\Lambda = \alpha_{\text{ML}} \cdot H_p. \quad (2.6)$$

Dabei ist  $\alpha_{\text{ML}}$  der sogenannte Mischungswegparameter und  $H_p = -\partial r / \partial \ln P$  die Druckskalenhöhe.  $\alpha_{\text{ML}}$  wird an Beobachtungen kalibriert. In den Berechnungen von Sonnenmodellen ist es üblich die Mischungsweglänge anzupassen, bis das errechnete Sonnenmodell mit dem beobachteten übereinstimmt, z.B. (Schlattl 1999). Der genaue Wert hängt von anderen Modelldetails ab. Typischerweise ergeben sich Werte zwischen 1.5 und 1.8.

In der Mischungswegtheorie gelten klare Grenzen für das konvektive Gebiet. Ist der Ausdruck  $(\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}})$  positiv, so wird ein konvektives Element, das aus seiner Ruhelage ausgelenkt wurde, durch Auftriebskräfte weiter beschleunigt, es liegt eine konvektive Instabilität vor. Andernfalls wird das Element in seine Ruhelage zurückbewegt, und der entsprechende Bereich ist stabil. Dies ist das bekannte Schwarzschildkriterium  $(\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}}) > 0$  für Instabilität von Konvektion. Berücksichtigt man ferner noch einen Gradienten der chemischen Zusammensetzung, so erhält man das Ledoux-Kriterium  $\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}} > \varphi / \delta \nabla_{\mu}$  mit dem Gradienten des molekularen Gewichts

$$\nabla_{\mu} = \left( \frac{\partial \ln \mu}{\partial \ln P} \right)_s$$

und

$$\varphi = \left( \frac{\ln \rho}{\ln \mu} \right)$$

## 2.2 VORTEILE UND GRENZEN DER MLT

Die Mischungswegtheorie ist eine recht einfache Theorie. Mit ihr kann durch das Lösen der kubischen Gleichung, die nur von lokalen Größen abhängt (vgl. z.B. Kippenhahn & Weigert (1994)), der Temperaturgradient an jeder Stelle im Stern berechnet werden. Sie ist damit leicht handhabbar und wird entsprechend oft, sowohl in der Sternentwicklung als auch in anderen Bereichen der Astrophysik mit viel Erfolg angewendet. Sie geht jedoch auch von Vereinfachungen und Näherungen aus, die sie für bestimmte Situationen unzureichend erscheinen lassen.

So ist die Mischungswegtheorie eine zeitunabhängige Theorie. Ob in einem Gebiet Konvektion vorliegt oder nicht, wird alleine durch das Schwarzschildkriterium entschieden. Das Schwarzschildkriterium macht jedoch nur eine Aussage über das Vorzeichen der Beschleunigung der konvektiven Elemente, nicht jedoch über ihre tatsächliche Geschwindigkeit. Im Grenzfall einer voll etablierten Konvektionszone oder von Zeitskalen deutlich größer als eine typische konvektive Skala mag dies dasselbe Ergebnis liefern. Betrachtet man jedoch einen ehemals konvektiven Bereich, der konvektiv stabil wird, so mögen die ehemals treibenden Auftriebsterme nun dämpfend wirken, aber die konvektiven Elemente sind aufgrund ihrer Massenträgheit immer noch in Bewegung. Die Konvektion wird durch die Abtriebskräfte über eine gewisse Zeitskala gedämpft und erst verspätet absterben. Ähnlich werden in einem Gebiet neu entstehender Konvektion die konvektiven Elemente erst nach einiger Zeit, in der sie durch die Auftriebskräfte beschleunigt werden, ihre volle Geschwindigkeit erreichen. Für die meisten Sterne mag dies keinen großen Unterschied ausmachen, da die Zeitskalen im Stern im Bereich von Jahrtausenden oder darüber liegen. In einigen speziellen Situationen jedoch, nämlich überall dort, wo sich der Stern in sehr kurzen Zeiten stark verändert, kann dies einen wesentlichen Unterschied bewirken.

Dass in die Mischungswegtheorie nur die Auftriebsterme als beschleunigende Terme auftreten, hat noch eine weitere Konsequenz, die vor allem an den Grenzen eines konvektiven Bereichs zum Tragen kommt. Die Mischungswegtheorie ist eine lokale Theorie, das heißt, die konvektiven Größen wie Geschwindigkeit oder konvektiver Fluss an einer bestimmten Stelle sind nur von den physikalischen Größen an eben dieser Stelle abhängig. Konvektion jedoch ist per se ein nichtlokales Phänomen. Sie betrifft großräumige Strömungen und die Eigenschaften eines konvektiven Elements hängen von seiner Vorgeschichte ab. Die Geschwindigkeit einer aufsteigenden Materieblase ist nicht nur davon abhängig, wie sie im Moment beschleunigt wird, sondern davon, wie sie auf ihrem bisherigen Weg beschleunigt oder gebremst worden ist. So schreibt die Mischungswegtheorie an der Schwarzschildgrenze, an der die Auftriebskräfte verschwinden, einen abrupten Übergang vom konvektiven Bereich in einen nicht konvektiven vor. Ein Materieelement, das eine endliche Geschwindigkeit hat und gerade noch beschleunigt wurde, kommt also beim Erreichen der Schwarzschildgrenze zum Stehen. Dies ist selbstverständlich ein sehr falsches Bild, denn man erwartet, dass das konvektive Element die Schwarzschildgrenze überschreitet, im konvektiv stabilen Bereich langsam abgebremst wird und erst, nachdem es eine gewisse Strecke zurück-

gelegt hat, zum Stehen kommt.

Ein weiterer Problempunkt in der Mischungswegtheorie ist, dass die Theorie streng genommen nur gültig ist, wenn sich die einzelnen Elemente auch die volle Mischungsweglänge bewegen können, dass heißt, wenn die Ausdehnung der konvektiven Zone größer ist als die Mischungsweglänge. Gerade in den konvektiven Kernen von Sternen mit weniger als  $6M_{\odot}$  ist dies jedoch nicht unbedingt erfüllt. Dies ist ein Problem, das in vielen Konvektionstheorien auftritt. Eine mögliche Lösung wird in Kapitel 3.7 vorgestellt.

## 2.3 GRUNDLAGEN EINDIMENSIONALER MODELLE

Während die hier dargestellte Ableitung der Mischungswegtheorie ein eher intuitiver Ansatz war, geht man in den ausgefeilteren Theorien von den grundlegenden Gleichungen der Hydrodynamik aus. Diese sind die Kontinuitätsgleichung, die Navier-Stokes-Gleichung und die Energiegleichung, welche die Erhaltung der Masse, des Impulses beziehungsweise der Energie gewährleisten.

- **die Kontinuitätsgleichung:**

$$\partial_t \rho = -\mathbf{div}(\rho \vec{v}) \quad (2.7)$$

- **Die Navier-Stokes-Gleichung:**

$$\rho D_t \vec{v} = \rho g - \mathbf{grad} P + \mathbf{div} \cdot (\sigma) \quad (2.8)$$

- **Die Energiegleichung:**

$$\rho D_t \left( e + \frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) = \rho \vec{v} \vec{g} + \rho \epsilon - \mathbf{div}(\vec{q} - \vec{v} \sigma + P \vec{v}) \quad (2.9)$$

Die hierbei auftauchende Ableitung  $D_t$  ist eine sogenannte substantielle Ableitung, sie läßt sich durch die partielle Ableitung ausdrücken mit:

$$D_t = \partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}. \quad (2.10)$$

$\rho$  ist die Dichte,  $\vec{v}$  die Geschwindigkeit,  $P$  der Druck und  $\sigma$  der Viskositätstensor. In der Energiegleichung entspricht  $e$  der spezifischen inneren Energie,  $q$  dem Transport von Energie, der nicht über die Bewegung erfolgt, d.h. im wesentlichen über Strahlung. Dann gilt:  $q = k_{\text{rad}} T / H_P \nabla$ . Die Größe  $\epsilon$  stellt die Erzeugung und Vernichtung von thermischer Energie dar, z.B. durch thermonukleare Prozesse. Die Energiegleichung Gl. 2.9 soll später noch in Form der Gleichung für die spezifische Entropie  $s$  verwendet werden:

- **Die Entropiegleichung**

$$\rho T D_t s = \rho \epsilon - \mathbf{div} \vec{q} + \sigma \cdot \mathbf{grad} \vec{v} \quad (2.11)$$

Diese Gleichungen sind dreidimensionale Naturgleichungen. So ist z.B. die Dichte ortsabhängig  $\rho(\vec{r})$ . Will man nun einfache eindimensionale Gleichungen verwenden, z.B. weil auf großen Skalen eine Symmetrie vorliegt, so muss man ein geeignetes Mittelungsverfahren verwenden. Im Fall einer sphärischen Symmetrie wäre dies eine Mittelung über konzentrische Kugelschalen. Man erhält damit Gleichungen für Mittelwerte, die nur noch von einer radialen Koordinate abhängen. Konvektion wäre somit ein Phänomen, das durch Fluktuationen um diese Mittelwerte gegeben ist.

Die Grundidee vieler Konvektionstheorien ist nun, zwischen Mittelwerten und den Fluktuationen um diese Mittelwerte zu unterscheiden und Gleichungen für die Fluktuationen aufzustellen. Im Folgenden soll eine über eine Kugelschale gemittelte Größe  $a$  durch Klammern dargestellt werden  $\langle a \rangle$ , die Fluktuationen werden durch einen Strich angedeutet  $a'$ . Während die Mittelwerte eindimensionale Größen sind, sind die Fluktuationen nach wie vor dreidimensional. Somit gilt für eine beliebige Größe  $a$  in Kugelkoordinaten:

$$a(r, \theta, \varphi) = \langle a \rangle(r) + a'(r, \theta, \varphi) \quad (2.12)$$

Für die Mittelwerte und ihre Fluktuationen gelten einige Rechenvorschriften. Die wichtigsten sind in Anhang A zusammengefaßt.

Wendet man diese Regeln auf die hydrodynamischen Gleichungen 2.7, 2.8 und 2.11 an, so ergeben sich jeweils zwei Gleichungen für die gemittelten und die fluktuierten Größen.

- **aus der Kontinuitätsgleichung**

$$\partial_t \langle \rho \rangle + \mathbf{div}(\langle \rho \rangle \langle \vec{v} \rangle + \langle \rho' \vec{v}' \rangle) = 0 \quad (2.13)$$

$$\partial_t \rho' + \mathbf{div}(\langle \rho \rangle \vec{v}' + \rho' \langle \vec{v} \rangle + (\rho' \vec{v}')') = 0 \quad (2.14)$$

- **aus der Navier Stokes Gleichung**

$$d_t \langle \vec{v} \rangle = -\langle (\vec{v}' \nabla) \vec{v}' \rangle + \langle \vec{g} \rangle + \langle \frac{\nabla P}{\rho} \rangle + \langle \frac{1}{\rho} \mathbf{div} \sigma \rangle \quad (2.15)$$

$$d_t \vec{v}' = -((\vec{v}' \nabla) \vec{v}') - (\vec{v}' \nabla) \langle \vec{v} \rangle + \vec{g}' - (\frac{\nabla P}{\rho})' + (\frac{1}{\rho} \mathbf{div} \sigma)' \quad (2.16)$$

- **aus der Entropiegleichung**

$$d_t \langle s \rangle = -\langle (\vec{v}' \nabla) s' \rangle + \langle \frac{\epsilon}{T} \rangle - \langle \frac{1}{\rho T} \mathbf{div} \vec{q} \rangle + \langle \frac{1}{\rho T} \sigma \mathbf{grad} \vec{v} \rangle \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} d_t s' = & -((\vec{v}' \nabla) s')' - (\vec{v}' \nabla) \langle s \rangle + (\frac{\epsilon}{T})' \\ & - (\frac{1}{\rho T} \mathbf{div} \vec{q})' + (\frac{1}{\rho T} \sigma \mathbf{grad} \vec{v})' \end{aligned} \quad (2.18)$$



In den Gleichungen tritt die Ableitung  $d_t$  auf. Dies ist ein gemittelttes Gegenstück zur substantiellen Ableitung  $D_t$ , und analog zu 2.10 definiert:

$$d_t = \partial_t + \langle \vec{v} \rangle \cdot \vec{\nabla}. \quad (2.19)$$

Die Beziehung zwischen  $d_t$  und  $D_t$  ist gegeben durch Gl. A.18 und A.19.

Diese Gleichungen enthalten noch die volle Information der hydrodynamischen Gleichungen. Im Folgenden werden sie durch einige Näherungen vereinfacht. Dieses Näherungsverfahren entspricht im wesentlichen einer Entwicklung nach kleinen Parametern. Sehr ausführlich wird es diskutiert in Gough (1969) und Spiegel & Veronis (1960), geht aber auf ältere Arbeiten wie z.B. Boussinesq (1903) und Oberbeck (1879) zurück. Einige Bemerkungen hierzu können auch in Baker (1987) gefunden werden. Das Näherungsverfahren beinhaltet im wesentlichen einen zweistufigen Prozess, der hier kurz beschrieben werden soll.

### 2.3.1 Die Anelastische Näherung

Die Gleichungen der Hydrodynamik beschreiben kompressible Fluide. In solchen Medien können verschiedene Arten von Schwingungen vorliegen. Zum einen sind dies langzeitskalige Fluktuationen, die durch den Auftrieb bzw. dessen rücktreibende Kraft entstehen. Zum anderen treten kurzzeitskalige Schwingungen auf, die durch Druckfluktuationen erzeugt werden, die Schallwellen. Schallwellen tragen in Sternen im Allgemeinen nicht zum Energietransport bei und haben somit keinen wesentlichen Einfluß auf die Struktur des Sterns. Sie in einer Simulation mitzuberechnen wäre aufgrund der damit bedingten kurzen Zeitskalen auch sehr aufwändig.

Die Grundidee der anelastischen Näherung, die ursprünglich für die Meteorologie entwickelt wurde, ist die Schallwellen herauszufiltern, andere Eigenschaften eines kompressiblen Mediums jedoch zu erhalten. Diese Näherung erscheint sinnvoll, falls die typischen konvektiven Geschwindigkeiten klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit sind, also kleine konvektive Machzahlen vorliegen. Leider gibt es jedoch kein Kriterium, mit Hilfe dessen dies a priori entschieden werden kann, es muss somit erst im Nachhinein überprüft werden, ob die Bedingung für die anelastische Näherung erfüllt ist.

Insgesamt kann man die anelastische Näherung zusammenfassen wie folgt:

- Die Gleichungen werden in den Fluktuationen linearisiert.
- Das heißt insbesondere die Mittelwerte von thermodynamischen Funktionen werden durch die entsprechenden Funktionen von gemittelten Variablen ersetzt, z.B.

$$\langle \rho(P, T) \rangle \rightarrow \rho(\langle P \rangle, \langle T \rangle) \quad (2.20)$$

- Der fluktuiierende Teil der Kontinuitätsgleichung wird ersetzt durch:

$$\text{div}(\langle \rho \rangle \vec{v}^f) = 0 \quad (2.21)$$

Die anelastische Näherung kann auch durch eine Entwicklung nach kleinen Parametern dargestellt werden. Siehe hierzu Gough (1969).

### 2.3.2 Die Boussinesq-Näherung

Ein weiterer Schritt zu einer Vereinfachung der Gleichungen ist die sogenannte Boussinesq-Näherung. Diese kann wiederum durch eine Entwicklung nach einem anderen kleinen Parameter, nämlich der Schichtdicke dargestellt werden. Die Boussinesq Näherung ist somit nur exakt für konvektive Schichten, die sehr viel kleiner als eine Druckskalenhöhe sind. Dies ist jedoch bei der Anwendung auf astrophysikalische Probleme nur in Ausnahmefällen erfüllt. Dennoch scheint sie wesentliche Eigenschaften von Konvektion wiederzugeben und wird auch häufig in konvektiven Theorien verwendet. Eine ausführliche Darstellung kann wieder in Gough (1969) gefunden werden.

Zusammenfassend läßt sich die Boussinesq Näherung beschreiben wie folgt:

- Dichtefluktuationen resultieren im wesentlichen aus Temperatur- und nicht aus Druckeffekten.
- In der Kontinuitätsgleichung ebenso wie in der Impulsgleichung werden die Dichtefluktuationen vernachlässigt, außer falls sie mit der Gravitationsbeschleunigung gekoppelt sind, denn diese Terme erzeugen ja gerade erst den Auftrieb, der Konvektion ermöglicht.

Ausführlichere Diskussionen können gefunden werden in Spiegel & Veronis (1960), Mihaljan (1962) oder Toomre (1987).

### 2.3.3 Entwicklung der Fluktuationen

Bisher wurden die hydrodynamischen Gleichungen lediglich in einen gemittelten und einen fluktuiierenden Teil aufgespalten. Die Fluktuationen sind jedoch weiterhin dreidimensionale Größen  $\vec{a}'(r, \theta, \varphi)$ . Ziel ist es jedoch, das Problem der Konvektion auf ein eindimensionales Problem zurückzuführen. Hierfür gibt es verschiedene Ansätze, ein erstes Beispiel ist die Modenentwicklung:

#### Modenentwicklung

In dieser Entwicklung werden dreidimensionale Größen wie z.B. die Geschwindigkeitsfluktuationen in vertikaler Richtung  $v'_3(x, y, z, t)$  nach einem Set von orthogonalen Funktionen  $f_i(x, y)$  entwickelt (hier am Beispiel einer planparallelen Geometrie)

$$v'_3(x, y, z, t) = \sum_i f_i(x, y)W_i(z, t)$$

mit Amplitudenfunktionen  $W_i$ . Diese Modenentwicklung wird nach einigen Gliedern abgebrochen und es ergeben sich Gleichungen für  $W_i$ . Im einfachsten Fall erhält man

eine Einmodengleichung, bei der nur die Amplituden  $W_1$  erhalten geblieben ist. Eine solche Entwicklung kann z.B. verwendet werden, um die Nichtlokalitäten der Boussinesq Gleichung zu untersuchen. Eine kurze Einführung kann z. B. in Toomre (1987) gefunden werden.

### Momentenentwicklung

Wir werden im Folgenden einen anderen Zugang wählen, der aus der Statistik bekannt ist, und dort weit verbreitet findet. Die Wahrscheinlichkeit  $P$ , daß eine Zufallsveränderliche  $x$  im Intervall  $[a, b]$  liegt, lässt sich mit Hilfe einer Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x)$  angeben:

$$P(a \leq x < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Für viele Probleme mag es jedoch völlig ausreichend erscheinen, anstelle der Wahrscheinlichkeitsdichte den Erwartungswert  $\mu$  und die Streuung  $\sigma^2$  einer Zufallsveränderlichen zu kennen:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

Im Allgemeinen läßt sich eine Folge von  $n$ -ten zentralen Momenten definieren

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^n f(x) dx.$$

Die Streuung stellt also das zweite zentrale Moment in dieser Folge dar.

Liegt eine zweidimensionale Zufallsveränderliche vor  $(x, y)$ , so lassen sich die Erwartungswerte definieren als:

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy$$

$$\mu_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy$$

und ihre Streuungen als:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f(x, y) dx dy$$

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu_y)^2 f(x, y) dx dy.$$

Besteht zwischen den beiden Größen  $x, y$  noch eine statistische Abhängigkeit, so läßt sich noch eine Korrelationsfunktion zwischen ihnen angeben:

$$\sigma_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y)f(x, y)dxdy.$$

Auch hier läßt sich dies in einer Reihe von  $n$ -ten Momenten und Korrelationen fortsetzen.

In unserem Zugang der Momentenentwicklung der hydrodynamischen Gleichungen werden wir einen äquivalenten Ansatz wählen. Unter Berücksichtigung der anelastischen Näherung, in der die Dichtefluktuationen verschwinden, interessieren wir uns vor allem für die Größen  $v, T$  bzw. äquivalent dazu  $v, s$ . Wir bilden ähnlich wie in der Statistik die Erwartungswerte dieser Größen, sowie eine Folge von  $n$ -ten Momenten und Korrelationsfunktionen. Hierbei entspricht die Bildung von Mittelwerten über Kugelschalen gerade der Bildung von Erwartungswerten:

$$\langle \vec{v} \rangle, \quad \langle s \rangle \quad (2.22)$$

die Momente zweiter Ordnung ( $n = 2$ ) lauten:

$$\langle (s - \langle s \rangle)^2 \rangle = \langle s'^2 \rangle \quad (2.23)$$

$$\langle (s - \langle s \rangle)(v - \langle v \rangle) \rangle = \langle s'v' \rangle \quad (2.24)$$

$$\langle (\vec{v} - \langle \vec{v} \rangle)^2 \rangle = \langle \vec{v}'^2 \rangle \quad (2.25)$$

und in dritter Ordnung ( $n = 3$ ):

$$\langle (s - \langle s \rangle)^3 \rangle = \langle s'^3 \rangle \quad (2.26)$$

$$\langle (s - \langle s \rangle)^2(v - \langle v \rangle) \rangle = \langle s'^2v' \rangle \quad (2.27)$$

$$\langle (s - \langle s \rangle)(v - \langle v \rangle)^2 \rangle = \langle s'v'^2 \rangle \quad (2.28)$$

$$\langle (\vec{v} - \langle \vec{v} \rangle)^3 \rangle = \langle \vec{v}'^3 \rangle \quad (2.29)$$

und schließlich in vierter Ordnung ( $n = 4$ ):

$$\langle s'^4 \rangle, \langle \vec{v}'^3 s' \rangle, \langle \vec{v}'^2 s'^2 \rangle, \langle \vec{v}' s'^3 \rangle, \langle \vec{v}'^4 \rangle \quad (2.30)$$

Während sich die Mittelwerte gerade durch die klassischen Sternaufbaugleichungen bestimmen lassen, so kann man mit Hilfe der fluktuiierenden Gleichungen 2.16 und 2.18 Bestimmungsgleichungen für die höheren Momente und Korrelationsfunktionen ableiten.

Insgesamt ergibt sich eine aufsteigende Reihe von Gleichungen hin zu immer höheren Momenten. Die Gleichungen für die Erwartungswerte enthalten Momente 2-ter Ordnung, die Gleichungen für die Momente 2-ter Ordnung erhalten ihrerseits wieder Momente 3-ter Ordnung, die Gleichungen  $n$ -ter Ordnung enthalten Momente  $(n + 1)$ -ter Ordnung. Will man nun keinen unendlich großen Satz von Gleichungen lösen, so muss man diese Entwicklung ab einer bestimmten Ordnung abbrechen.

Man erhält einen Satz von Gleichungen, die noch unbekannte Größen, die Momente nächster Ordnung enthalten. Um das Gleichungssystem lösbar zu machen, muss es geschlossen werden. Es müssen Näherungen für diese höheren Momente eingeführt werden, die sogenannten Schließbedingungen. Hierbei gehen eine Vielzahl von physikalischen Annahmen ein und die Qualität eines Konvektionsmodells ist oft gerade durch die Art dieser Schließbedingungen bedingt. Ein Überblick über verschiedene Möglichkeiten findet sich z.B. in Grossman & Narayan (1993), der verschiedene Schließbedingungen mit den Ergebnissen von Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) Simulationen vergleicht.

Im folgenden Kapitel wird ein solches Konvektionsmodell, das auf die Momentenentwicklung zurückgreift näher diskutiert. Dies ist das sogenannte Kuhfußmodell. In diesem Zusammenhang werden auch die dort verwendeten Schließbedingungen näher diskutiert.



---

---

## *Kapitel 3*

# DAS KUHFUSS-MODELL

---

---

In den Jahren 1984 bis 1987 entwickelte Rudolf Kuhfuß ein einfaches eindimensionales Modell zur Beschreibung von Konvektion in Sternen. Dieses wurde 1986 in einem ersten Artikel vorgestellt (Kuhfuß (1986a)) und im darauffolgenden Jahr in einer erweiterten Form im Rahmen einer Doktorarbeit an der TU München publiziert (Kuhfuß (1987a)). Des weiteren finden sich kurze Diskussionen in Kuhfuß (1986b) und Kuhfuß (1987b). Das Kuhfußmodell existiert in zwei Versionen, die eine beinhaltet drei, die andere, einfachere, eine Gleichung. Beide Versionen berücksichtigen Zeitabhängigkeit und Nichtlokalität von Konvektion.

Von Kuhfuß selbst wurden einige einfache Testrechnungen zur Zeitabhängigkeit sowie zur Struktur des konvektiven Kerns eines  $20M_{\odot}$  Sterns durchgeführt. Die Theorie wurde jedoch von ihm nicht in ein Sternentwicklungsprogramm eingebunden, und somit konnten auch die Auswirkung auf die Entwicklung eines Sterns nicht untersucht werden. Erste Anwendungen der Kuhfußtheorie finden sich in Wuchterl (1995) und Feuchtinger (1999a). In Wuchterl & Feuchtinger (1998), Feuchtinger (1998) und Feuchtinger (1999b) wird das Modell in einer leicht veränderten Form auf stellare Pulsationen und auf Protosterne angewendet. Die dort vorgenommenen Veränderungen werden eingehender in 3.7 diskutiert. In Rechnungen zum thermonuklearen Brennen in massereichen Population-III-Sternen wurde die Kuhfußtheorie von Straka verwendet (Straka 2002), der allerdings durch sein numerisches Verfahren auf Saatkonvektion angewiesen ist, die in der Kuhfußtheorie eigentlich überflüssig ist.

### 3.1 HERLEITUNG

Das Kuhfußmodell folgt aus einer Momentenentwicklung, wie in Abschnitt 2.3.3 dargestellt ist. Die Entwicklung wird nach den zweiten Momenten abgebrochen, und die in den Gleichungen enthaltenen dritten Momente werden durch geeignete Schließbedingungen approximiert. Hier sollen einige dieser Näherungen deshalb etwas ausführlicher erläutert werden, da es sich zeigt, dass manche Näherungen unter bestimmten Umständen Probleme bereiten werden. Hier ist besonders das Dreigleichungsmodell im nichtlokalen Fall zu nennen. Insbesondere soll betont werden, an welchen Stellen die Annahme eines isotropen Geschwindigkeitsfeldes eingeht. An geeigneter Stelle wird auf die hier besprochenen Näherungen Bezug genommen und mögliche Verbesserungen werden vorgeschlagen. Auf jeden Fall soll die Theorie nur unter den Bedingungen diskutiert werden, unter denen sie später in dieser Arbeit verwendet wird.

Die zweiten Momente, wie in 2.23 und 2.25 definiert, werden noch mit einem Faktor  $\frac{1}{2}$  versehen.

$$\omega = \left\langle \frac{1}{2} \vec{v}'^2 \right\rangle, \quad \Phi = \left\langle \frac{1}{2} s'^2 \right\rangle, \quad \vec{\Pi} = \langle \vec{v}' s' \rangle \quad (3.1)$$

Dies verdeutlicht etwas die physikalische Bedeutung der Größen, denn dann kann z.B. das zweite Moment der Geschwindigkeit,  $\omega$ , als die spezifische kinetische Energie gedeutet werden, die in der konvektiven Bewegung enthalten ist. Gleichungen für diese Momente erhält man, indem man die Gleichungen 2.16 und 2.18 nach Einführung der anelastischen Näherung mit  $s'$  bzw mit  $\vec{v}'$  multipliziert

$$\vec{v}' d_t \vec{v}' = \dots, \quad s' d_t \vec{v}' = \dots, \quad \vec{v}' d_t s' = \dots, \quad s' d_t s' = \dots$$

und über die sich ergebenden Größen mittelt. Unter Verwendung von A.13, sowie der üblichen Differentiationsregeln ergibt sich somit für die zeitliche Entwicklung

- **der mittleren kinetischen Energie**<sup>1</sup>

$$d_t \omega = -\langle \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} \vec{v}'^2 \right) \rangle + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \tau \nabla \langle \vec{v}' \rangle \rangle - \langle \vec{v}' \frac{\nabla P}{\rho} \rangle + \langle \vec{v}' \frac{1}{\rho} \mathbf{div} \sigma \rangle \quad (3.2)$$

- **des mittleren Entropieexzesses**

$$d_t \phi = -\langle \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} s'^2 \right) \rangle - \langle s' \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} \rangle \langle s' \rangle - \left\langle \frac{s'}{\rho T} \mathbf{div} \vec{q} \right\rangle + \left\langle \frac{s' \sigma}{\rho T} \mathbf{grad} \vec{v}' \right\rangle \quad (3.3)$$

- **und der Korrelation zwischen Geschwindigkeits- und Entropiefluktuationen**

$$d_t \vec{\pi} = s' d_t \vec{v}' + \vec{v}' d_t s' = -\langle (\vec{v}' \nabla) (s' \vec{v}') \rangle - \langle s' (\vec{v}') \rangle \langle \vec{v}' \rangle - \langle \vec{v}' (\vec{v}' \nabla) \rangle \langle s \rangle - \left\langle s' \frac{\nabla P}{\rho} \right\rangle + \left\langle \frac{s'}{\rho} \mathbf{div} \sigma \right\rangle - \left\langle \frac{\vec{v}'}{\rho T} \mathbf{div} \vec{q} \right\rangle + \left\langle \vec{v}' \frac{\sigma}{\rho T} \mathbf{grad} \vec{v}' \right\rangle \quad (3.4)$$

<sup>1</sup>unter Verwendung des Reynoldtsensors  $\tau_{\mu\nu} = -\langle \rho \rangle v'_\mu v'_\nu$



Nun hat man also die gesuchten Bestimmungsgleichungen für die zweiten Momente erhalten. In diesen Gleichungen tauchen, wie oben erläutert, die Momente dritter Ordnung auf, die geeignet genähert werden müssen. Der Term  $\langle \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} (1/2 s'^2) \rangle$  lässt sich z.B. umformen zu

$$\frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \langle \rho \rangle \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} (1/2 s'^2) \rangle = \frac{1}{\langle \rho \rangle} [\langle \nabla \langle \rho \rangle \frac{\vec{v}' s'^2}{2} \rangle - \langle \frac{s'^2}{2} \nabla (\langle \rho \rangle \vec{v}') \rangle]$$

und mit der anelastischen Näherung in der  $\text{div}(\langle \rho \rangle \vec{v}') = 0$  gilt bleibt als fluktuierende Größe mit  $\frac{1}{\langle \rho \rangle} \nabla [\langle \rho \rangle \langle \frac{\vec{v}' s'^2}{2} \rangle]$  lediglich ein Moment dritter Ordnung zurück.

## 3.2 SCHLISSBEDINGUNGEN

In diesem Abschnitt sollen kurz die Annahmen und Näherungen dargestellt werden, die von den Gleichungen 3.2 - 3.4 zum Kuhfußmodell führen. Hierbei soll vor allem auf die Punkte eingegangen werden, die für den weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit wichtig werden, oder sich als problematisch erweisen. Eine eingehende Diskussion der Schließbedingungen findet man in Kuhfuß (1987a).

### • Der Quellterm kinetischer Energie

Mit der anelastischen Näherung, in der die Druckfluktuationen verschwinden, gilt:

$$\left\langle \frac{\vec{v}'}{\rho} \nabla P \right\rangle = \left\langle \frac{\vec{v}'}{\rho} \right\rangle \nabla \langle P \rangle = \left\langle \vec{v}' \left( \frac{1}{\rho} \right)' \right\rangle \nabla \langle P \rangle \quad (3.5)$$

und nach einer Entwicklung bis erster Ordnung der Dichte nach den Entropiefluktuation

$$\left( \frac{1}{\rho} \right)' = -\frac{1}{\langle \rho \rangle^2} \left\langle \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_{P=\text{const}} \right\rangle s' \quad (3.6)$$

und Verwendung der thermodynamischen Relation  $(\frac{\partial \rho}{\partial s})_{P=\text{const}} = \frac{\rho^2 T}{P} \nabla_{\text{ad}}$  ergibt sich:

$$\left\langle \frac{\vec{v}'}{\rho} \nabla P \right\rangle = -\langle \vec{v}' s' \rangle \frac{\langle T \rangle}{\langle P \rangle} \nabla_{\text{ad}} \vec{\nabla} \langle P \rangle = \Pi_r \nabla_{\text{ad}} \frac{\langle T \rangle}{H_p}. \quad (3.7)$$

Da der Gradient einer gemittelten Größe, hier  $\nabla \langle P \rangle$  nur eine radiale Komponente hat, so bleibt auch nach Bildung eines Skalarprodukts nur der radiale Anteil  $\Pi_r$  der Korrelationsfunktion  $\vec{\Pi}$  übrig.

- **Dissipation konvektiver kinetischer Energie**

Nachdem man die molekulare Viskosität enthaltenden Terme umgeformt hat, und nach Anwendung einer für große Reynoldszahlen gültigen Näherung, verbleibt bei Kuhfuß von den viskosen Termen lediglich:

$$\frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \sigma \mathbf{grad} \vec{v}' \rangle$$

Dieser wird durch Skalenbetrachtungen genähert. Mit einer typischen Zeitskala der Dissipation  $\tau_d = \frac{\Lambda}{c_D \sqrt{\omega}}$  nähert Kuhfuß:

$$\frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \sigma \mathbf{grad} \vec{v}' \rangle = \frac{\omega}{\tau_D} = C_D \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\Lambda} \quad (3.8)$$

Hierbei ist  $\Lambda$  eine typische Längenskala in radialer Richtung und die in  $\tau_d$  eingehende Größe  $\sqrt{\omega}$  stellt letztendlich eine typische Geschwindigkeit dar.  $C_D$  ist ein Parameter, der im lokalen Grenzfall durch Vergleich mit der Mischungswegtheorie angepasst wird. In dieser Näherung wird eine Annahme verwendet, die eine typische Geschwindigkeit in radialer Richtung  $v_r$  mit der mittleren kinetischen Energie in Verbindung bringt. Kuhfuß macht in seiner Arbeit meist die Annahme eines isotropen Geschwindigkeitsfeldes  $v_r^2 = \frac{2}{3}\omega$ . Ohne eine solche Annahme müßte der Term für die Dissipation der konvektiven Energie lauten:

$$c_D \frac{v_r \omega}{\Lambda}, \quad (3.9)$$

es müßte also die radiale Geschwindigkeitskomponente der konvektiven Elemente verwendet werden.

- **Der Entropiegradient in der Korrelationsgleichung**

In der Gleichung für  $\vec{\Pi}$  tritt der Term  $-\langle \vec{v}' (\vec{v}' \nabla) \rangle \langle s \rangle$  auf. Dies läßt sich ausschreiben zu:

$$\langle \vec{v}' (v'_r \partial_r + v'_\varphi \partial_\varphi + v'_\phi \partial_\phi) \rangle \langle s \rangle$$

und da  $\langle s \rangle$  lediglich von  $r$  abhängig ist:

$$\langle \vec{v}' v'_r \partial_r \rangle \langle s \rangle$$

In der Ableitung, wie sie von Kuhfuß dargestellt wird, bleibt hiervon lediglich die Radialkomponente,

$$\langle v'_r v'_r \partial_r \rangle \langle s \rangle,$$

Diese wird wieder mit der Isotropieannahme für  $\vec{v}$  umgeschrieben zu:

$$\frac{2}{3} \omega \partial_r \langle s \rangle$$

- **Diffusionsapproximation**

Die Diffusionsapproximation betrifft Terme der Form  $\langle \vec{v}' \nabla (\frac{1}{2} \vec{v}'^2) \rangle$ , die auch umgeschrieben werden können in die Form  $\frac{1}{\langle \rho \rangle} \nabla \langle \vec{v}' (\langle \rho \rangle \frac{1}{2} \vec{v}'^2)' \rangle$ . Verwendet man hierfür eine Diffusionsapproximation, so ergibt sich:

$$-\frac{1}{\langle \rho \rangle} \nabla \alpha_t \langle \rho \rangle \Lambda \sqrt{\omega} \nabla \omega \quad (3.10)$$

Dieser Ausdruck wird oft geschrieben  $1/\rho \operatorname{div} j_t$  unter Verwendung des konvektiven kinetischen Stroms  $j_t = \alpha_t \langle \rho \rangle \Lambda \sqrt{\omega} \nabla \omega$ . Er stellt den konvektiven Transport von kinetischer Energie dar. Hierbei gibt  $\Lambda$  wieder eine Längenskala in radialer Richtung an, und  $\sqrt{\omega}$  eine typische Transportgeschwindigkeit in radialer Richtung. Es geht also auch hier die Annahme einer linearen Beziehung zwischen radialer Geschwindigkeit  $v_r$  und Wurzel aus konvektiver Energie  $\sqrt{\omega}$  ein. Ohne dies müsste die Näherung eigentlich lauten:

$$-\frac{1}{\langle \rho \rangle} \nabla \alpha_t \langle \rho \rangle \Lambda v_r \nabla \omega \quad (3.11)$$

$\alpha_t$  ist ein Parameter, der den konvektiven kinetischen Strom parametrisiert, sein Wert wird noch in Kapitel 6.2 und 6.6 diskutiert werden.

- **Die Flüsse in den Gleichungen für  $\Pi$  und  $\Phi$ .**

Hier wird in der einfachsten Form der Theorie genähert:

$$\langle (\vec{v}' \nabla) \frac{s'^2}{2} \rangle = \frac{\beta_\Phi}{\Lambda} \sqrt{\omega} \Phi \quad (3.12)$$

$$\langle (\vec{v}' \nabla) s' \vec{v}' \rangle = \frac{\beta_\Pi}{\Lambda} \sqrt{\omega} \Pi \quad (3.13)$$

Auch hier ist  $\Lambda$  wieder die Längenskala in radialer Richtung,  $\beta_\Phi$  und  $\beta_\Pi$  sind Parameter, die angepasst werden müssen, und  $\sqrt{\omega}$  steht für eine typische Geschwindigkeit in radialer Richtung. Ohne die Ersetzung dieser Geschwindigkeit durch die mittlere konvektive Energie ergibt sich:

$$\langle (\vec{v}' \nabla) \frac{s'^2}{2} \rangle = \frac{\beta_\Phi}{\Lambda} v_r \Phi \quad (3.14)$$

$$\langle (\vec{v}' \nabla) s' \vec{v}' \rangle = \frac{\beta_\Pi}{\Lambda} v_r \Pi \quad (3.15)$$

Es soll an dieser Stelle noch einmal klargestellt werden, dass auf die Ableitung des Kuhfußmodells hier deshalb etwas detaillierter eingegangen wurde, um deutlich zu machen, an welchen Stellen welche Näherungen eingehen. Dies ist ein Aspekt, der in Kuhfuß (1987a) nicht immer deutlich wird. Insbesondere wurde hier auf die Beziehung zwischen einer typischen Geschwindigkeit in radialer Richtung  $v_r$  und der mittleren konvektiven Energie  $\omega$  hingewiesen. Dieser Aspekt wird in Abschnitt 3.7.3

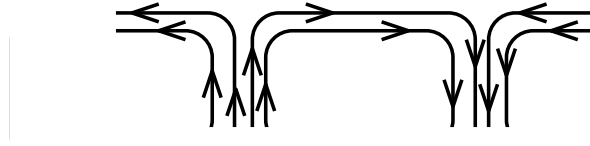


Abbildung 3.1: Schematische Struktur eines möglichen Geschwindigkeitsfeldes am Rand einer Konvektionszone wie es sich auch in mehrdimensionalen Simulationen findet.

noch genauer diskutiert werden. Zusammenfassend lässt sich jedoch sagen, dass die Annahme eines isotropen Geschwindigkeitsfeldes mit der Beziehung  $v_r^2 = \frac{2}{3}\omega$  zwar im Inneren eines konvektiv instabilen Bereichs gültig sein mag, aber am Rand einer Konvektionszone, an der die konvektive Strömung 'umknickt' und im wesentlichen in horizontaler Richtung fließt, sicherlich so nicht richtig ist. Dieses Verhalten wird z.B. in den zweidimensionalen Rechnungen von Freytag deutlich (Freytag et al. (1996)). Eine solche Struktur ist schematisch in Abb. 3.1 dargestellt. In der Kuhfußtheorie wird sich die Annahme von Isotropie für das gesamte konvektive Gebiet insbesondere in der Überschießzone als problematisch herausstellen.

### 3.3 DAS DREIGLEICHUNGSMODELL

Im vorherigen Kapitel wurde anhand von einzelnen Aspekten dargestellt, wie die Momentengleichungen in der Kuhfußtheorie durch einige Annahmen vereinfacht werden. Das Ergebnis ist hier kurz zusammengefasst.

Die Gleichungen für die mittlere kinetische Energie, die mittlere Entropie und die Korrelationsfunktion Gl. 3.2 - 3.4 lauten mit den Schließbedingungen:

$$d_t \omega = \frac{\nabla_{\text{ad}} T}{H_p} \Pi - \frac{C_D}{\Lambda} \omega^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\rho} \mathbf{div} j_t \quad (3.16)$$

$$d_t \Pi = \frac{2\nabla_{\text{ad}} T}{H_p} \Phi + \frac{2c_p}{3H_p} (\nabla - \nabla_{\text{ad}}) \omega - \frac{\beta_{\Pi}}{\Lambda} \omega^{\frac{1}{2}} \Pi - \frac{1}{\tau_{\text{rad}}} \Pi \quad (3.17)$$

$$d_t \Phi = \frac{c_p}{H_p} (\nabla - \nabla_{\text{ad}}) \Pi - \frac{\beta_{\Phi}}{\Lambda} \omega^{\frac{1}{2}} \Phi - \frac{2}{\tau_{\text{rad}}} \Phi \quad (3.18)$$

Sie enthalten Terme, die den radiativen Verlust der konvektiven Elemente während ihrer Bewegung beschreiben ( $\frac{1}{\tau_{\text{rad}}} \Pi$  und  $\frac{2}{\tau_{\text{rad}}} \Phi$ ). Ferner treten Terme auf, die Zeitabhängigkeit beinhalten ( $d_t \omega$ ,  $d_t \Pi$ ,  $d_t \Phi$ ), sowie ein Term, der für das nichtlokale Verhalten verantwortlich ist ( $\mathbf{div} j_t$ ), und freie Parameter  $C_D$ ,  $\beta_{\Pi}$ ,  $\beta_{\Phi}$  und  $\Lambda$ , sowie das in  $j_t$  enthaltene  $\alpha_t$ . Die freien Parameter werden z.B. durch eine Vergleich mit der Mischungswegtheorie angepasst.

### 3.4 DAS EINGLEICHUNGSMODELL

Das Dreigleichungsmodell kann durch eine weitere Annahme zu einem Eingleichungsmodell vereinfacht werden. Dieses Modell ist in Kuhfuß (1986a) dargestellt. In der Gleichung für die mittlere konvektive Energie tritt außer  $\omega$  selbst nur die Korrelationsfunktion  $\bar{\Pi}$  auf. Im Eingleichungsmodell wird auch diese Größe durch eine Diffusionsapproximation beschrieben:

$$\bar{\Pi} \approx -\alpha_s \Lambda \sqrt{\omega} \nabla \langle s \rangle. \quad (3.19)$$

Auch hier stellt  $\sqrt{\omega}$  wieder eine typische radiale Geschwindigkeit dar, ohne Isotropieannahme müsste also auch hier wieder ein Geschwindigkeit  $v_r$  stehen. Der Isotropiefaktor  $\sqrt{2/3}$ , der hier somit auftauchen müsste, ist in den Parameter  $\alpha_s$  absorbiert.  $\alpha_s$  ist ein weiterer Parameter, der den Entropiestrom parametrisiert.

Somit bleibt, wenn man, wie in der Sternentwicklung üblich, den Entropiegradienten in einen Temperaturgradienten umschreibt  $\nabla \langle s \rangle = -\frac{c_p}{H_p} (\nabla - \nabla_{\text{ad}})$ , eine einzelne Gleichung für die konvektive kinetische Energie:

$$d_t \omega = \frac{\nabla_{\text{ad}} c_p T \Lambda \alpha_s}{H_p^2} \omega^{\frac{1}{2}} (\nabla - \nabla_{\text{ad}}) - \frac{C_D}{\Lambda} \omega^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\rho} \mathbf{div} \mathbf{j}_t \quad (3.20)$$

Auch hier tauchen wieder Terme auf, welche die Zeitabhängigkeit und die Nichtlokalität beschreiben. Es fehlen im Eingleichungsmodell jedoch Terme, die radiative Verluste beschreiben, also die Tatsache berücksichtigen, dass konvektive Elemente durch Strahlung Energie an ihre Umgebung abgeben. Hierfür muss man entweder das volle Dreigleichungsmodell verwenden oder zusätzlich Terme einführen, wie dies in Wuchterl (1995) getan wird. Eine kurze Diskussion folgt in Kapitel 3.7.1.

#### 3.4.1 Anpassung der Parameter

Zu diesem Zeitpunkt der Entwicklung enthalten die Gleichungen noch eine Reihe freier Parameter. Diese sind im Dreigleichungsmodell

$$C_D, \beta_{\Pi}, \beta_{\Phi}, \Lambda, \alpha_t$$

und im Eingleichungsmodell

$$C_D, \alpha_s, \Lambda, \alpha_t.$$

Diese Parameter werden durch einen Vergleich mit der Mischungswegtheorie bestimmt. Es hat sich in der Vergangenheit gezeigt, dass die Mischungswegtheorie zumindest für lokale und zeitunabhängige Phänomene durchaus eine erfolgreiche Näherung ist, folglich stellt man die Forderung, dass dieser Grenzfall in der Kuhfußtheorie enthalten sein soll. Man vernachlässigt die zeitabhängigen und die nichtlokalen Terme, sowie im Dreigleichungsmodell zusätzlich den radiativen Verlust, löst das resultierende Gleichungssystem nach der konvektiven Geschwindigkeit, dem konvektiven Fluss

und dem Temperaturexzess auf und passt die Parameter so an, dass die resultierenden Ausdrücke mit den Werten der Mischungswegtheorie in der Formulierung von Vitense (1953) übereinstimmen. Für das Dreigleichungsmodell ergibt sich:

$$C_D = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \beta_{\Pi} = 6\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \beta_{\Phi} = 4\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad (3.21)$$

für das Eingleichungsmodell

$$\alpha_s = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad C_D = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (3.22)$$

Der Mischungswegparameter  $\Lambda$  wird wie allgemein üblich als proportional zur Druckskalenhöhe mit einem Mischungswegparameter  $\alpha_{ML}$  angenommen, der als einziger freier Parameter, wie in der MLT erhalten bleibt. Im nichtlokalen Fall, also unter Berücksichtigung des Terms  $j_t$ , muss zusätzlich noch der Parameter  $\alpha_t$  bestimmt werden. Kuhfuß erhält aus einer Abschätzung den Wert von  $\alpha_t = 0.25$ .

## 3.5 BISHERIGE ERGEBNISSE ANDERER AUTOREN

Das Kuhfußmodell stellt im Vergleich zu vielen anderen Autoren eine relativ einfache Konvektionstheorie dar, insbesondere in der Form des Eingleichungsmodells. Nachdem es zunächst von Kuhfuß selbst lediglich auf einige relativ einfache astrophysikalische Fälle angewendet wurde, fanden sich in letzter Zeit auch einige andere Autoren, die sein Modell in der einen oder anderen Form verwenden.

### 3.5.1 Modellrechnungen - Kuhfuß

Kuhfuß hat in seiner Doktorarbeit einige grundlegende Eigenschaften seines Konvektionsmodells diskutiert. Auf die Astrophysik wurde es jedoch nur in einigen sehr speziellen und vereinfachten Problemen angewendet. Diese sollen hier kurz beschrieben werden.

#### **Einzonenmodelle**

Zur Untersuchung der Auswirkungen des Eingleichungsmodells auf pulsierende Sterne verwendet Kuhfuß ein Einzonenmodell. Hierbei wird angenommen, dass der pulsierende Teil eines Sterns aus einer einzigen Massenschale konstanter Dichte besteht, die auf einer stationären zentralen Kugel sitzt. Diese Massenschale wird von unten beheizt. Kuhfuß verwendet hierbei Parameter die für Cepheiden typisch sind. Er erhält Lichtkurven, die zum Teil mit den Beobachtungen übereinstimmen, die jedoch einen deutlichen Einfluß der unphysikalischen Randbedingung einer harten Kugel aufweisen. Kuhfuß simuliert also keinen vollständigen Stern und auch die Konvektionszone wird nicht detaillierter aufgelöst.

### **Nichtlokale Struktur eines konvektiven Kerns**

Ferner führt Kuhfuß noch einige Untersuchungen zur Struktur des konvektiven Kerns eines Hauptreihensterns mit nichtlokaler Konvektion durch. Leider geht aus seiner Arbeit nicht hervor, wie die konvektiven Gleichungen mit den Strukturgleichungen verbunden sind. Insbesondere bleibt unklar, aus welcher Gleichung und unter welchen Annahmen der Temperaturgradient  $\nabla$  berechnet wird. Auf jeden Fall finden die Rechnungen unter vereinfachten Annahmen statt. Es wird ein ionisiertes ideales Gas verwendet, die Opazitäten werden durch ein Potenzgesetz und die Energieerzeugung durch eine Fitformel approximiert. Die Gleichungen für den vollständigen Stern werden mit Hilfe des von Henyey vorgestellten Verfahrens auf einem äquidistanten Gitter gelöst. Schließlich führt Kuhfuß noch einige einfache Betrachtungen zur Abhängigkeit der Überschieblänge von der Größe des konvektiven Kerns und dem Mischungswegparameter durch. All diese Rechnungen behandeln jedoch nur Sterne auf der Nullalterhauptreihe, also Sterne in einem stationären Zustand. Die Entwicklung der Struktur eines konvektiven Kerns wird jedoch nicht, wie dies in der vorliegenden Arbeit der Fall ist über einen längeren Zeitraum hin verfolgt.

### *3.5.2 Protosterne und Pulsationen - Wuchterl / Feuchtinger*

Das Eingleichungsmodell von Kuhfuß wurde das erste Mal von Wuchterl und Feuchtinger im Rahmen von strahlungshydrodynamischen Rechnungen auf den Energietransfer in nichtlinearen Pulsationen von RR-Lyrae Sternen angewendet (Wuchterl & Feuchtinger 1998, Feuchtinger 1998). RR-Lyrae Sterne weisen Pulsationen auf, in denen zwei sich überlagernde Moden sichtbar sind. Sowohl die aus den Simulationen erhaltenen Periodendauern dieser Moden, als auch die erhaltenen Amplituden stimmen mit dem Bereich überein, wie er sich aus Beobachtungen ergibt.

Aus diesen Arbeiten folgern die Autoren zusammenfassend, dass das Kuhfußmodell wichtige Eigenschaften der Konvektion plausibel wiedergibt und es aussichtsreich ist, dieses Modell auf astrophysikalische Probleme anzuwenden.

### *3.5.3 PopIII-Mischen - Straka*

In seiner Dissertation beschäftigt sich Straka mit massereichen Population-III-Sternen (Straka 2002). Hierbei berücksichtigt er insbesondere ein zeitabhängiges Mischen und als zeitabhängige Konvektionstheorie die Kuhfußtheorie. Er verwendet das Eingleichungsmodell, berücksichtigt die zeitabhängigen Terme, sowie die Verbesserungen, wie sie in (Wuchterl & Feuchtinger 1998) vorgeschlagen und in Kapitel 3.7.1 kurz beschrieben werden, insbesondere den Flusslimiter. Ferner berücksichtigt Straka Terme, die das mittlere molekulare Gewicht enthalten und in den Arbeiten von Wuchterl aufgrund der chemischen Homogenität vernachlässigt sind. Seine Gleichungen werden gelöst mit Hilfe des Programmpaketes LIMEX, einem impliziten Löser für differenzial algebraische Gleichungen. Die Konvektion ist voll an das Sterninnere gekoppelt

und es werden volle Modelle einschließlich der Zeitentwicklung gerechnet. Er verzichtet jedoch auf die nichtlokalen Terme, die das Überschießen beinhalten würden und die, wie in der vorliegenden Arbeit gezeigt, wesentlichen Einfluß auf viele Phasen der Sternentwicklung haben.

Straka verwendet in seiner Arbeit, aus numerischen Gründen, anstelle der konvektiven Energie  $\omega$  den Logarithmus  $\ln(\omega)$ . Dies führt dazu, dass die Nulllösung für konvektiv stabile Gebiete ausgeschlossen wird und in der zeitabhängigen Konvektionstheorie eine endliche Saatkonvektion notwendig ist. Hierbei muss diese Saatkonvektion so klein gewählt werden, dass sie keinen sichtbaren physikalischen Effekt hervorruft. Hierdurch wird ein Vorteil zunichte gemacht, den die Kuhfußsche Theorie gegenüber z.B. der Stellingwerfschen hat. Denn die Kuhfußstheorie ist, im Vergleich zur Stellingwerfschen, nicht auf Saatkonvektion angewiesen (vgl. hierzu Baker (1987)). In der Kuhfußstheorie kann dagegen eine Massenschale, die während des vorhergehenden Zeitschritts voll radiativ  $\omega = 0$  war, im nächsten Zeitschritt eine endliche konvektive Energie enthalten  $\omega > 0$ .

### 3.5.4 Konvektionstheorien in Sternentwicklungsrechnungen

An dieser Stelle muß noch einmal betont werden, dass allgemeine Sternentwicklungsrechnungen mit der Kuhfußstheorie bisher nicht existieren. Alle bisher vorgestellten Rechnungen betreffen nur ein eingeschränktes Gebiet des Sterns oder eine kurze Phase in seiner Entwicklung. Auch andere ausgefeiltere nichtlokale Konvektionstheorien sind bisher in Sternentwicklungsrechnungen nicht verwendet worden. Die in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Ergebnisse sind die ersten ihrer Art.

## 3.6 EINFACHE TESTRECHNUNGEN - BOXMODELLE

In diesem Abschnitt sollen einige wesentlichen Eigenschaften der beiden Konvektionsmodelle von Kuhfuß, des Ein- und des Dreigleichungsmodell untersucht werden. Es wird hierbei von einem stationären Hintergrund ausgegangen,  $T, P, \rho$  und vor allem die Überadiabatie  $\nabla - \nabla_{\text{ad}}$  werden von außen künstlich vorgegeben. Zur Integration der Gleichungen werden Prozeduren aus der NAG Bibliothek verwendet (siehe z.B. [www.nag.co.uk](http://www.nag.co.uk)).

### 3.6.1 Zeitabhängigkeit

Am Problem der Zeitabhängigkeit der Konvektion ist neben den Fällen, in denen die konvektiven Zeitskala mit der nuklearen Zeitskala vergleichbar ist, vor allem interessant, wie An- und Abklingvorgänge stattfinden, das heißt vor allem, wie schnell die Konvektion in den beiden Modellen auf Änderung der Rahmenbedingungen reagiert. Insbesondere wird interessieren, ob und wie schnell bei einem Übergang von einer



konvektiv instabilen zur einer stabilen Lösung, oder umgekehrt, die Konvektion verschwindet oder einsetzt.

Dies ist besonders interessant, da das Kuhfußmodell im Gegensatz zu anderen Konvektionsmodellen nicht auf Saatkonvektion angewiesen ist. Mit Saatkonvektion ist eine kleine nichtverschwindende konvektive Geschwindigkeit in einem eigentlich stabilen Gebiet gemeint. Aus diesen Störungen wachsen bei neu einsetzender Konvektion die konvektiven Gebiete langsam heran. Die Zeitspanne des Anwachsens der Konvektion ist somit wesentlich von der Form und Größe der Saatkonvektion abhängig. Zu unterscheiden ist die Saatkonvektion von einem Schätzwert für die konvektiven Größen, der vor Beginn der Iterationen des Henyey-Verfahrens vorgegeben wird. Dieser Schätzwert hat lediglich die Funktion, die Konvergenz des numerischen Verfahrens zu ermöglichen. Nachdem die Korrekturen des Henyey-Verfahrens bis auf die gewünschte Genauigkeit erfolgte, sind die resultierenden Größen unabhängig von dem ursprünglich vorliegenden Schätzwert.

Hierfür sollen unterschiedliche Lösungen der Gleichungen 3.16ff und 3.20 im lokalen Fall ( $\text{div} j_t = 0$ ) diskutiert werden. Es ist zu bemerken, dass die Gleichungen zwei Lösungswege zulassen. Der eine beschreibt verschwindende Konvektion  $\omega = \Phi = \Pi = 0$ , der andere liefert endliche Werte für die konvektiven Größen. Diese Werte sind im instabilen Bereich  $(\nabla - \nabla_{ad}) > 0$  positiv ( $\omega > 0$ ) und können im konvektiv stabilen Bereich negativ werden ( $\omega < 0$ ). Aufgrund der Definition 3.1 stellen die negativen Ergebnisse jedoch eine unphysikalische Lösung dar, da eine negative konvektive Energie imaginäre Geschwindigkeiten implizieren würde. Es muss also einen Bereich geben, in dem die physikalisch sinnvolle Lösung von dem Lösungszweig mit verschwindender Konvektion zum anderen wechselt. Um dies zu untersuchen, werden im folgenden Lösungen im stabilen Bereich mit dämpfenden Quelltermen in den Gleichungen diskutiert.

Betrachtet man geringe konvektive Geschwindigkeiten, wird die Dämpfung durch den Abtrieb dominiert und nicht durch die Dissipation  $\frac{C_D \omega}{\Lambda}$ , das Eingleichungsmodell vereinfacht sich zu

$$d_t \omega = \frac{\nabla_{ad} c_p T \Lambda}{\sqrt{6} H_p^2} \omega^{\frac{1}{2}} (\nabla - \nabla_{ad}) \quad (3.23)$$

mit der Lösung

$$\omega(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\nabla_{ad} c_p T \Lambda}{\sqrt{6} H_p^2} (\nabla - \nabla_{ad}) \right]^2 t^2 \quad (3.24)$$

Die konvektive Energie klingt also parabolisch ab und erreicht schließlich die Nulllösung. Es kann in diesem Fall einen stetigen Übergang von einer Lösung mit endlicher Konvektion zu einer Lösung mit verschwindender Konvektion geben.

Der Fall des Dreigleichungsmodells ist nicht so einfach gelagert; es wird sich zeigen, dass die Konvektion dort nicht ohne weiteres in die Nulllösung übergehen kann.

### Die Brunt-Väisälä Schwingung

Auch hier soll zunächst wieder der Fall kleiner konvektiver Geschwindigkeiten und somit verschwindender Dissipation betrachtet werden. Für das Dreigliedungsmodell ergibt sich:

$$d_t \omega = \frac{\nabla_{ad} T}{H_p} \Pi \quad (3.25)$$

$$d_t \Pi = \frac{2\nabla_{ad} T}{H_p} \Phi + \frac{2c_p}{3H_p} (\nabla - \nabla_{ad}) \omega \quad (3.26)$$

$$d_t \Phi = \frac{c_p}{H_p} (\nabla - \nabla_{ad}) \Pi \quad (3.27)$$

Dieses Gleichungssystem hat neben der identisch Null verschwindenden Lösung als zweite Lösung:

$$\Pi = \Pi_0 e^{\Omega t}, \quad \Omega^2 = \frac{\nabla_{ad} T c_p}{H_p^2} \frac{8}{3} (\nabla - \nabla_{ad}) \quad (3.28)$$

$$\Phi = \Phi_0 e^{\Omega t + \varphi_0} + \text{const} \quad (3.29)$$

$$\omega = \omega_0 e^{\Omega t + \varphi_1} + \text{const} \quad (3.30)$$

Dies stellt im konvektiv instabilen Bereich einen exponentiellen Anstieg dar, der erst durch die oben vernachlässigten dissipativen Terme beendet wird. Im konvektiv stabilen Bereich ist dies jedoch eine Schwingung mit der Frequenz

$$\Omega = \sqrt{-\frac{\nabla_{ad} T c_p}{H_p^2} \frac{8}{3} (\nabla - \nabla_{ad})} \quad \text{für } \nabla < \nabla_{ad}. \quad (3.31)$$

Dies entspricht der sogenannten Brunt-Väisälä Frequenz.

Hierbei läuft folgender physikalischer Vorgang ab: Ein aus seiner Ruhelage ausgelenktes Masselement wird durch Auftriebskräfte in seine Ruhelage zurückgeschoben, dabei gewinnt es kinetische Energie und schießt über seine Ruhelage hinaus, bis es wieder außerhalb derselben zur Ruhe kommt. Dieser Prozess wiederholt sich, das Masselement oszilliert. Hierbei wechselt die Energie des Masselements ständig zwischen der Energieform kinetische Energie und thermische Energie. Die Oszillationsfrequenz, wie sie sich hier ergibt, unterscheidet sich von der Brunt-Väisälä-Frequenz, wie sie sich z.B. in Kippenhahn & Weigert (1994) findet, durch einen konstanten Vorfaktor; dieser kommt dadurch zustande, dass sich in der dortigen Ableitung ein Element ausschließlich in vertikaler Richtung bewegt, während im Kuhfußmodell lediglich ein Drittel der konvektiven Energie in vertikaler Bewegung steckt, der Rest in horizontaler Bewegung (Isotropieannahme).

Im Kuhfußmodell bedeutet das Wechseln der Energie zwischen den beiden Energieformen, kinetische Energie der konvektiven Elemente und thermische Energie, d.h. Entropieüberschuss oder Defizit gegenüber der Umgebung, dass die Schwingungen von  $\omega$ ,  $\Phi$  und  $\Pi$  phasenverschoben sind. Wie in Abb. 3.2 zu sehen ist, verschwindet die mittlere thermische Energie  $\omega$ , wenn der Entropieexzess  $\Phi$  maximal ist und umgekehrt. In den Phasen dazwischen sind die beiden Größen maximal korreliert bzw

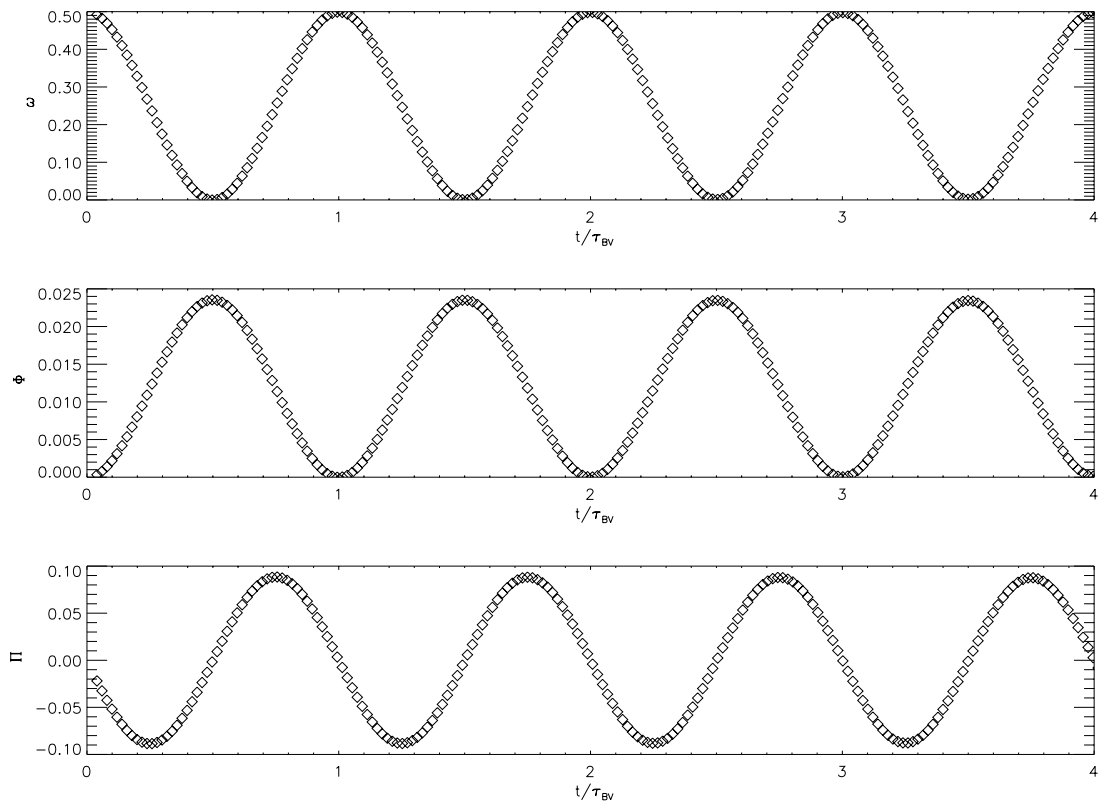


Abbildung 3.2: Nichtverschwindende Lösung der Gleichungen 3.25 bis 3.27 im stabilen Bereich  $\nabla - \nabla_{\text{ad}} < 0$ , nach einer numerischen Rechnung. Aufgetragen sind  $\omega$ ,  $\Phi$  und  $\pi$  gegen die Zeit in Einheiten der Brunt-Väisälä Schwindungsdauer  $\tau_{BV} = \frac{2\pi}{\Omega}$ . Die Größen  $\omega$  und  $\Phi$  sind um  $\pi$  phasenverschoben, d.h. die Energie wechselt zwischen kinetischer und thermischer Energie.

antikorreliert. Dieses oszillierende Verhalten des Dreigleichungsmodells ist aus folgenden Gründen problematisch:

- Die Brunt-Väisälä-Schwingung ist eine Eigenschaft eines einzelnen konvektiven Elements. In der vorliegenden Konvektionstheorie jedoch wird über Kugelschalen gemittelt, es sollten sich somit keine individuellen Eigenschaften von Einzелеlementen erhalten, sondern nur eine mittlere konvektive Energie und Entropie verbleiben.

- Die Schwingungen können lediglich durch die oben vernachlässigten turbulenten Terme gedämpft werden, die jedoch nur bei hohen Geschwindigkeiten zum Tragen kommen. Während im Eingleichungsmodell kleine konvektive Geschwindigkeiten durch Abtriebsterme gedämpft werden, so tauchen im Dreigleichungsmodell keine Terme auf, die in diesem Bereich dämpfend wirken. Im stabilen Bereich wird eine konvektive Lösung nicht in die Nulllösung übergehen. Der hier vorliegende Unterschied zwischen den Ein- und dem Dreigleichungsmodell liegt darin, dass sich im Dreigleichungsmodell die konvektive kinetische Energie und Entropie wie für ein einzelnes konvektives Element, jedoch nicht für eine ganze konvektive Schicht sinnvoll, nämlich phasenverschoben verhält, während im Eingleichungsmodell durch die Näherung für die Korrelationsfunktion ein gleichphasiges Verhalten erzwungen wird.

Da sich im Bereich mit dämpfenden Auftriebstermen noch einige weitere Probleme ergeben (Siehe Kapitel 3.7.3), sollen mögliche Lösungen weiter unten in diesem Zusammenhang diskutiert werden.

### Abklingvorgänge

Wie schon weiter oben betont, zeigen das Ein- und das Dreigleichungsmodell ein recht unterschiedliches Verhalten im stabilen Bereich. Das Abklingverhalten wurde zum Teil schon von Kuhfuß am Beispiel eines oszillierenden Auftriebsterms  $(\nabla - \nabla_{\text{ad}}) = \cos(\varphi t)$  untersucht, ohne jedoch den Zusammenhang mit der Brunt-Väisälä-Schwingung zu diskutieren.

In unserer Testrechnung wurde wieder vor einem von außen vorgegebenen Hintergrund das zeitabhängige Verhalten der Konvektion untersucht. Ausgehend von einer stationären konvektiven Schichtung wird der zuvor positive treibende Term  $(\nabla - \nabla_{\text{ad}})$  von außen auf einen negativen Wert gesetzt, er wirkt somit dämpfend. Die Reaktion des Konvektionsmodells wird beobachtet, das Ergebnis ist in Abb. 3.3 dargestellt. Als Ergebnis erhält man eine Abklingen der Konvektion, zunächst sind die turbulenten dämpfenden Terme wesentlich, überlagert von einer Brunt-Väisälä-Schwingung. Später, bei geringeren Geschwindigkeiten werden die dämpfenden Terme unwesentlich und es verbleibt lediglich die andauernde Schwingung, wie sie im vorherigen Abschnitt beschrieben wurde.

Den oszillierenden Charakter der Lösung sieht man besonders deutlich an einer normierten Korrelationsfunktion  $\Pi_{\text{norm}} = \frac{\Pi}{2\sqrt{\omega\Phi}}$ , wie sie rechts unten in Abb. 3.3 dargestellt ist, denn hier kann die Korrelation von  $s'$  und  $\vec{v}'$  unabhängig von ihrem absoluten Wert dargestellt werden. Die normierte Korrelationsfunktion stellt eine Kenngröße dar, mit Werten aus dem Intervall  $[-1, 1]$ , wobei  $\Pi_{\text{norm}} = 1$  vollständige Korrelation bedeutet,  $\Pi_{\text{norm}} = -1$  antikorreliert und  $\Pi_{\text{norm}} = 0$  bedeutet, dass Geschwindigkeits- und Entropiefluktuationen unkorreliert sind.

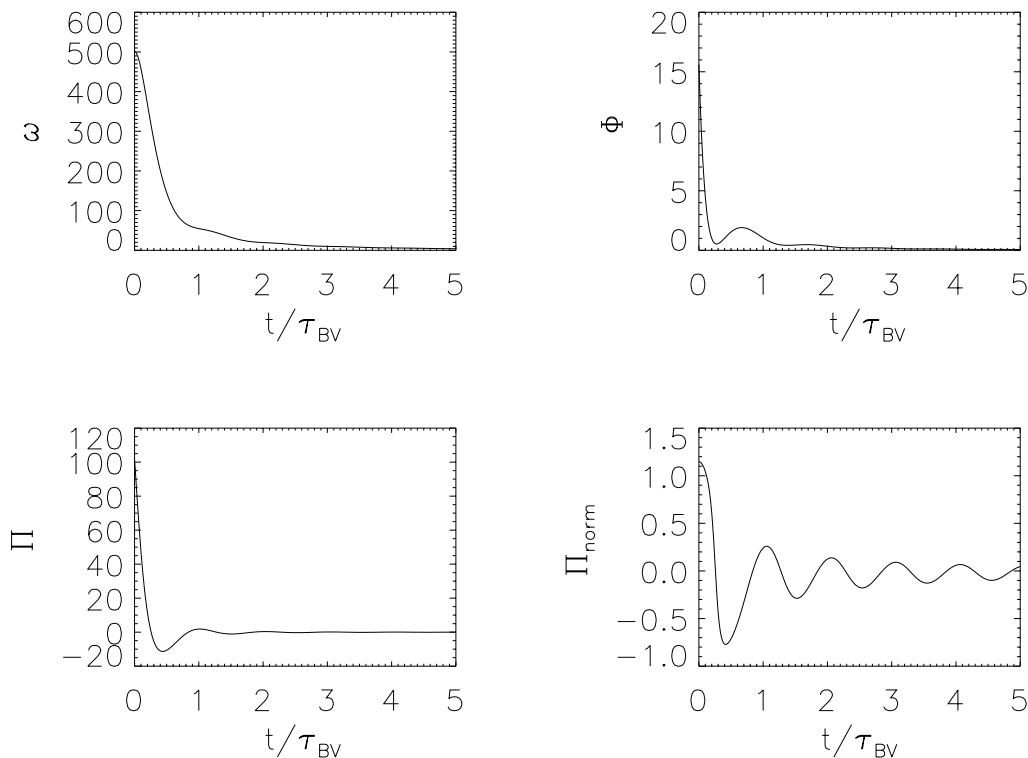


Abbildung 3.3: Abklingverhalten des Dreigleichungsmodells. Es ergibt sich eine Dämpfung der konvektiven Größen, überlagert durch eine Brunt-Väisälä-Schwingung. Die Zeit ist wieder in Einheiten der Brunt-Väisälä-Schwingungsdauer  $\tau_{BV}$  angegeben.

### 3.6.2 Nichtlokalität

Zur Betrachtung des nichtlokalen Charakters der Kuhfußtheorie wird nun wieder der Term  $\text{div} j_t$  berücksichtigt. Zunächst soll nur das Eingleichungsmodell betrachtet werden. Wieder wird der Hintergrund, das heißt die Größen  $T, \rho, P, \dots$ , von außen fest vorgegeben, für den Quellterm wird eine sinusförmige Form angenommen  $(\nabla - \nabla_{\text{ad}})(x) \sim \sin(x)$ , so dass in der Mitte des betrachteten Bereichs eine instabile Zone liegt und am Rand jeweils ein konvektiv stabiles Gebiet. Diese Schwarzschildgrenzen sind bei 0.37 und 0.67 in Einheiten des gesamten Simulationsbereichs. In Abbildung 3.4 findet sich das Ergebnis für eine lokale und eine nichtlokale Rechnung im Vergleich. Hierzu sind vor allem zwei Dinge zu bemerken:

- Die konvektive Zone im nichtlokalen Fall ist ausgedehnter als im lokalen Fall. Auch in Bereichen, in denen lokal die Konvektion verschwindet, die also eigentlich stabil sind, hat in der nichtlokalen Rechnung die konvektive Energie immer noch einen endlichen Wert.

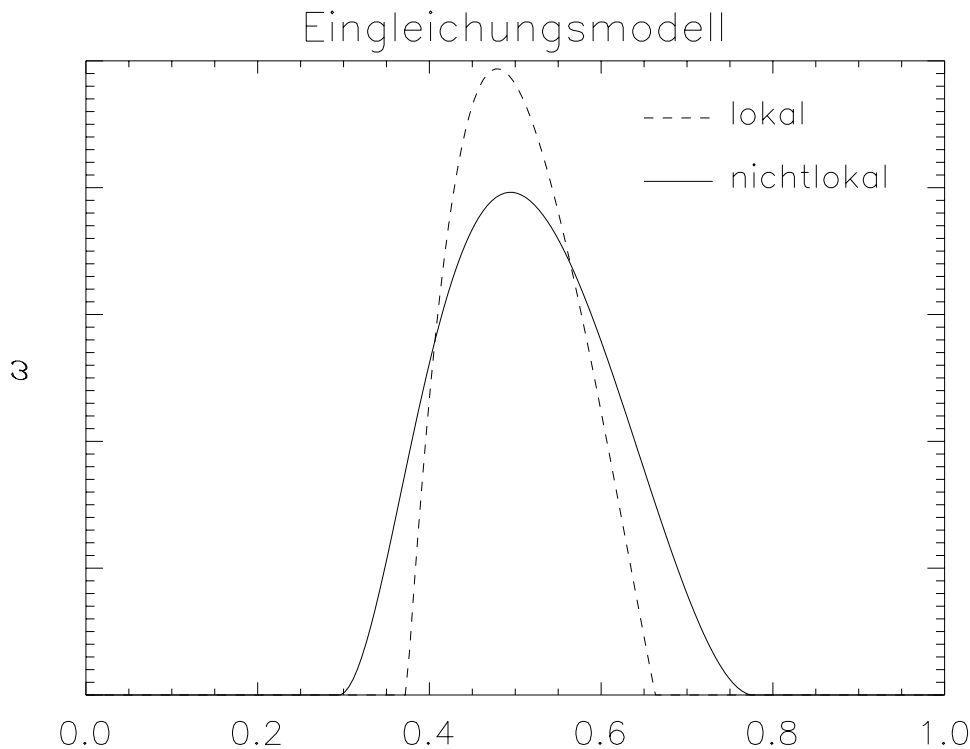


Abbildung 3.4: Konvektive Energie im lokalen und nichtlokalen Eingleichungsmodell im Vergleich (oben). Die Konvektionszone ist nichtlokal deutlich ausgedehnter als im lokalen Fall. Die konvektive Energie ist auch im Inneren der Konvektionszone modifiziert. Die Asymmetrie im Geschwindigkeitsprofil tritt dadurch auf, dass durch die vorgegebenen Hintergrundstruktur an beiden Seiten der Konvektionszone unterschiedliche Werte für  $P$ ,  $T$  und  $\rho$  vorliegen.

- Der Wert der konvektiven Energie ist auch im instabilen Gebiet verändert, d.h. Nichtlokalität läßt sich nicht einfach durch Aufsetzen einer zusätzlichen Überschießzone auf das ansonsten lokal gerechnete Modell beschreiben.

Betrachtet man vor dem gleichen Hintergrund eine Rechnung des Dreigleichungsmodells (Abbildung 3.5), so erkennt man einen wesentlichen Unterschied. Die Überschießzonezone, das heißt der konvektiv stabile Bereich, in dem dennoch Konvektion vorliegt, ist deutlich ausgedehnter als im Eingleichungsmodell. Die Gründe für dieses Verhalten ist die Annahme von Isotropie in der Herleitung des Modells. Das ist jedoch nicht in der gesamten Konvektionszone gültig. Dies soll im Zusammenhang mit möglichen Verbesserungen des Kuhfußmodell (Kapitel 3.7.3) noch genauer diskutiert werden.

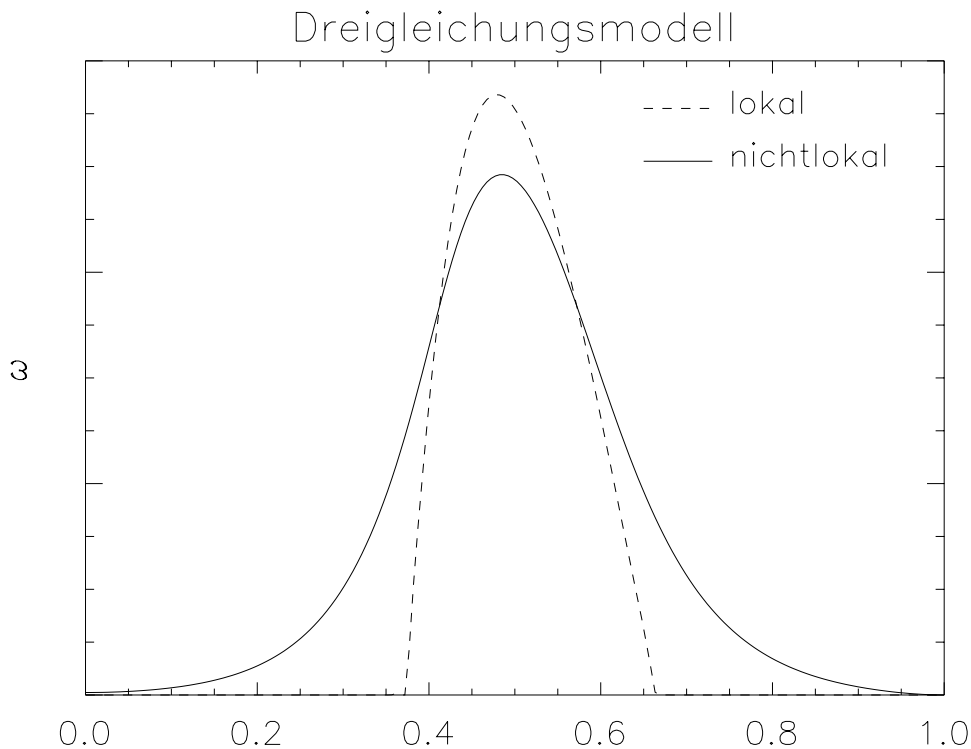


Abbildung 3.5: Konvektive Energie im lokalen und nichtlokalen Modell aus einer Dreigleichungsrechnung. Auch hier ist die konvektive Energie im Inneren der Konvektionszone modifiziert, die Konvektionszone ist jedoch deutlich ausgedehnter als im Eingleichungsmodell. Im stabilen Bereich liegt ein exponentieller Abfall der Geschwindigkeiten vor, somit ist die konvektive Geschwindigkeit praktisch immer größer Null.

### 3.7 DIE SCHWACHSTELLEN UND IHRE VERBESSERUNGEN

Das Kuhfußmodell bedarf, gerade weil es relativ einfach und gut zu handhaben ist, noch einiger Verbesserungen. Dies sind zum einen Aspekte wie die radiativen Verlustterme, die beim Übergang vom Drei- zum Eingleichungsmodell verloren gingen. Zum anderen sind dies grundsätzliche Mängel, wie die Isotropieannahme für konvektive Geschwindigkeiten, die weiter oben bereits angesprochen wurde. Hier soll zunächst auf die Verbesserungen des Eingleichungsmodells eingegangen werden, wie sie in Wuchterl & Feuchtinger (1998) vorgeschlagen werden.

### 3.7.1 Eingleichungsmodell

#### Radiative Verlustterme (Wuchterl - Feuchtinger)

Beim Übergang vom Drei- zum Eingleichungsmodell durch den Ansatz

$$\vec{\Pi} \approx -\alpha_s \Lambda \sqrt{\omega} \nabla \langle s \rangle \quad (3.32)$$

wurde nicht berücksichtigt, dass die konvektiven Elemente durch Strahlung Energie an ihre Umgebung abgeben können. Die entsprechenden Terme sind in den Gleichungen für  $\Pi$  und  $\Phi$  enthalten, nicht jedoch in der Gleichung für  $\omega$ , und werden somit im Eingleichungsmodell vernachlässigt. Wuchterl führt daher in der Gleichung des Eingleichungsmodells einen äquivalenten Term ein. Dieser lautet

$$D_{rad} = \frac{\omega}{\tau_{rad}} \quad (3.33)$$

Die diffusive Zeitskala  $\tau_{rad}$  wird berechnet, indem radiative Diffusion angenommen wird.

$$\tau_{rad} = \frac{3c_p \kappa \rho^2 \Lambda^2}{16\sigma T^3} \quad (3.34)$$

#### Verkürzte Mischungsweglänge

Die Kuhfußtheorie enthält ähnlich wie die Mischungswegtheorie eine Skalenlänge  $\Lambda$ , diese wird üblicherweise auf die Druckskalenhöhe  $H_p = -\partial r / \partial \ln P$  bezogen

$$\Lambda = \alpha H_p \quad (3.35)$$

mit einer Proportionalitätskonstante  $\alpha$ . Dieses Vorgehen ist sinnvoll, solange der Druckgradient  $\partial P / \partial r$  einen endlichen Wert hat. Unter bestimmten Umständen jedoch kann dieser Gradient verschwinden, somit divergiert formal die Druckskalenhöhe. Dies ist z.B. immer dann der Fall, wo eine nahezu verschwindende Gravitation vorliegt, wie im Zentrum eines Sterns. Neben der Druckskalenhöhe ist aber auch durch die räumliche Ausdehnung eine charakteristische Längenskala gegeben. In einem konvektiven Kern wäre dies z.B. der Abstand zum Zentrum  $r$ . Wuchterl verwendet für die Skalenlänge das harmonische Mittel von Druckskalenhöhe und räumlicher Ausdehnung des Problems

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{1}{\alpha_{ML} H_p} + \frac{1}{\beta r} \quad (3.36)$$

mit dem Radius  $r$  und einer anzupassenden Konstante  $\beta$ . Somit ist die Skalenlänge durch die jeweils kleinere der beiden Größen  $H_p, r$  gegeben. In dieser Arbeit soll weiter unten ein ähnlicher Ansatz verwendet werden. Konsequenzen ergeben sich vor allem überall dort, wo sehr kleine konvektive Kerne vorliegen (siehe Kapitel 6.2).



### Flusslimiter (Wuchterl - Feuchtinger)

Anhand von Rechnungen zum Protostellaren Kollaps stößt Wuchterl auf ein Problem des Eingleichungsmodells. Es handelt sich dabei um eine Verletzung der Diffusionsapproximation (Gl. 3.10). Unter bestimmten Umständen, dies sind vor allem stark überadiabatische Konvektionszonen, kann es in seinen Rechnungen vorkommen, dass Enthalpie schneller transportiert wird als mit der typischen konvektiven Geschwindigkeit  $v_c = \sqrt{2/3\omega}$ . Wuchterl schätzt aus der Korrelationsfunktion eine Transportgeschwindigkeit  $v_d$  für die Enthalpie ab und limitiert das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten durch eine Funktion  $v_d/v_c \rightarrow F(v_d/v_c)$ .  $F$  verhält sich linear  $F(v_d/v_c) = v_d/v_c$ , sofern  $v_d/v_c < 1$  und ansonsten  $F(v_d/v_c) \equiv 1$ .

### 3.7.2 Probleme im Dreigleichungsmodell

Im vorhergehenden Kapitel wurden einige Verbesserungen diskutiert, die von anderen Autoren am Eingleichungsmodell vorgenommen wurden. Das Dreigleichungsmodell jedoch wurde nie näher auf mögliche Probleme oder Inkonsistenzen untersucht und es wurde auch nie auf realistischere Probleme angewendet als in Kapitel 3.6.1 diskutiert. Insbesondere findet sich nirgends eine Untersuchung, wie sich das Dreigleichungsmodell im nichtlokalen Fall, das heißt mit konvektivem Überschießen, verhält. Erste Untersuchungen sind die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Boxrechnungen, die in 3.6.2 vorgestellt wurden. Des weiteren wurde das Dreigleichungsmodell auf den konvektiven Kern eines  $5M_\odot$  ZAMS Sterns angewendet. Also auf einen Stern, der von seinem Wasserstoffvorrat noch nichts verbraucht hat. Das Ergebnis ist in Abb. 3.6 dargestellt und soll in diesem Abschnitt diskutiert werden. Hierfür wurde für die Berechnung der Größen  $P, T, \rho$  das Sternentwicklungsprogramm verwendet, wie es in Kapitel 4 dokumentiert ist.

Es ergibt sich wieder, wie schon in 3.6.2 angesprochen, eine unrealistisch große Überschießzone mit einer inkonsistenten Struktur, in welcher der Temperaturgradient dem radiativen Gradienten entspricht, und nicht, wie es für effektive Konvektion, die in Gebieten mit hohen Dichten vorliegt, zu erwarten wäre, dem adiabatischen. Diese Konvektionszone erstreckt sich bei einem  $5M_\odot$ -Stern über den gesamten Stern. Man erhält somit auf der Hauptreihe einen Stern, der vollständig durchmischt ist, was mit den Beobachtungen klar unvereinbar ist. Sonst hätte der Stern eine deutlich längere Lebensdauer auf der Hauptreihe und müßte einen weitgehend wasserstofffreien Stern zurücklassen. Im HRD würde ein solcher Stern auch eine deutlich veränderte Position einnehmen. In der Abbildung 3.7.2 wurde der Arkussinus Hyperbolicus der konvektiven Größen geplottet, da dieser sich für betragsmäßig große Werte ähnlich dem Logarithmus verhält, im Gegensatz zu diesem aber sowohl auf positive als auch negative Werte und ebenso auf die Null angewendet werden kann. Die laut Schwarzschildkriterium konvektiv instabile Zone erstreckt sich vom Zentrum bis etwa  $0.25M = 1.25M_\odot$ . Der die Konvektion treibende Auftriebsterm  $(\nabla - \nabla_{\text{ad}})$  wurde mit Hilfe des konvektiven Stroms  $j_\omega = \rho T \Pi$  aus  $(\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}})$  berechnet, detaillierter wird hierauf

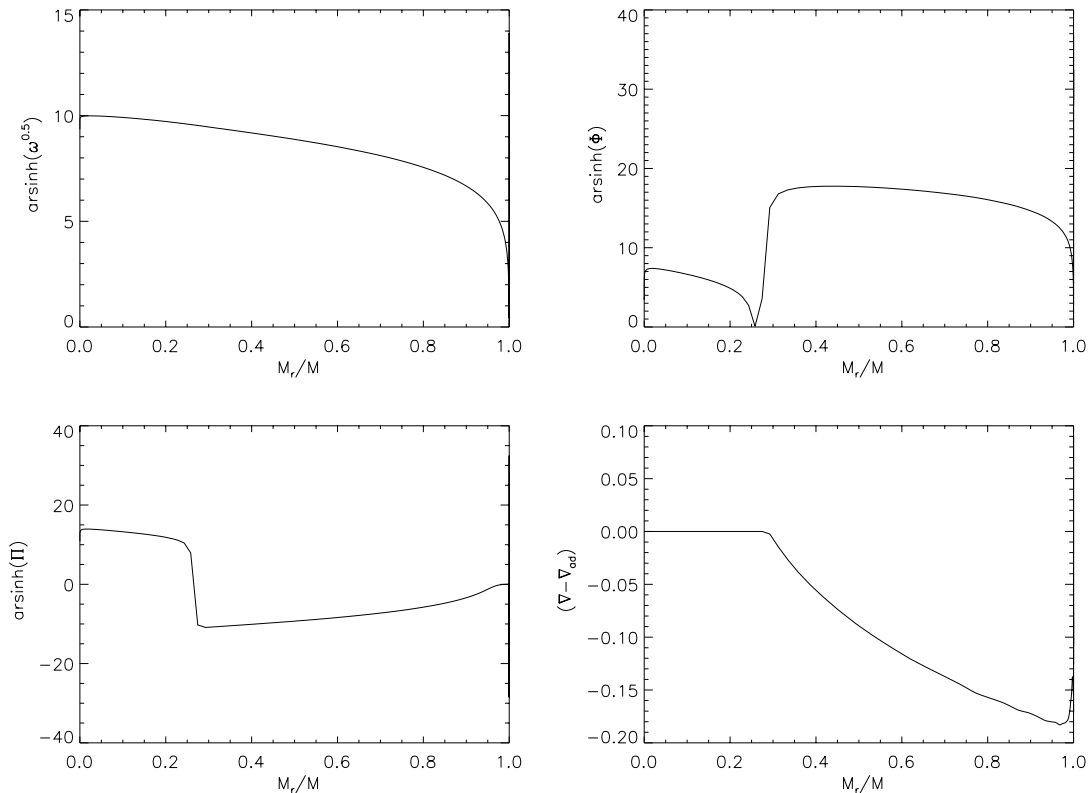


Abbildung 3.6: Das Dreigleichungsmodell angewendet auf die Struktur eines  $5M_{\odot}$  ZAMS Sterns. Die Schwarzschildgrenze liegt bei  $M_r = 0.25M$ , die Überschießzone erstreckt sich über den gesamten Stern. Der Temperaturgradient in der Überschießzone ist der einer radiativen Schichtung und der Entropieexzess in der Überschießzone ist somit deutlich höher als im Schwarzschild stabilen Bereich. Die Korrelation  $\Pi$  dagegen verschwindet nahezu völlig.

in Abschnitt 4.3.1 eingegangen. Die Rechnung ergibt eine Struktur, in der im instabilen Bereich ein adiabatischer Temperaturgradient vorliegt, bei dem die Werte von  $\omega$ ,  $\Phi$  und  $\Pi$  im wesentlichen den Ergebnissen der MLT und des Eingleichungsmodells entsprechen. In der Überschießzone jedoch, das heißt in dem Bereich, der nach dem Schwarzschildkriterium stabil ist, in dem jedoch konvektive Elemente aufgrund ihrer Massenträgheit hineinströmen, erscheinen die Ergebnisse widersprüchlich, insbesondere fallen folgende Punkte auf:

- Die Überschießzone ist deutlich größer als der instabile Kern und erstreckt sich auf nahezu den gesamten Stern
- Im Überschießbereich liegt trotz teils recht hoher konvektiver Geschwindigkeiten und einer effektiven Konvektion sowie eines großen Entropieexzesses ein

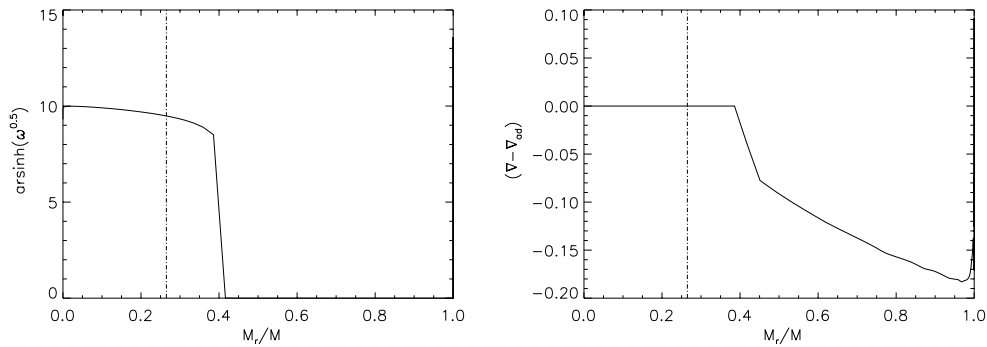


Abbildung 3.7: Das Eingleichungsmodell, angewendet auf die Struktur eines  $5M_{\odot}$  Sterns. Die Überschießzone vergrößert den Kern um etliche Prozent, erstreckt sich jedoch nicht auf den gesamten Stern. Innerhalb der Overshootingzone stellt sich ein adiabatischer Temperaturgradient ein. Die strichpunktierte Linie gibt die Lage der Schwarzschildgrenze an.

verschwindend kleiner konvektiver Strom  $j_{\omega} = \rho T \Pi$  und somit ein nahezu radiativer Temperaturgradient vor. Die Unterradiabasis ist somit deutlich größer als die Überradiabasis in der instabilen Region.

- Die Korrelation von Geschwindigkeit und Entropiefluktuationen  $\Pi$  verschwindet völlig, die mittlere konvektive Entropie  $\Phi$  nimmt jedoch deutlich höhere Werte an als im Inneren der konvektiven Zone. Dies würde bedeuten, dass keine gerichtete konvektive Strömung vorliegt, und keine Energie transportiert wird.

Zum Vergleich soll noch einmal die gleiche Rechnung, allerdings mit dem Eingleichungsmodell gezeigt werden (Abb. 3.7). Hier stellt sich konsistent ein adiabatischer Temperaturgradient ein, und die Überschießzone vergrößert den konvektiven Kern um einige Prozent. Sie dehnt sich jedoch nicht auf den gesamten Bereich aus. Beschränkt man im Eingleichungsmodell den Energietransport auf den instabilen Bereich (Abb. 3.8), so wird die Konvektion im stabilen Bereich so stark gedämpft, dass kein Überschießen vorliegen kann.

Um die Ursachen für dieses Verhalten zu untersuchen, muß man die Modellannahmen näher anschauen, die in die Ableitung eingehen. Insbesondere soll die Isotropieannahme betrachtet werden.

### 3.7.3 Fehlerhafte Näherungen und Modellannahmen

In der Herleitung der beiden Modelle der Kuhfußtheorie Kapitel 3.1 wurde in unserer Darstellung besonders betont, an welchen Stellen die Annahme eines isotropen Geschwindigkeitsfeldes eingeht. Viele Terme wurden, zusätzlich zu der von Kuhfuß gebrauchten Form, noch ohne diese Annahme geschrieben, das heißt mit einer typischen Geschwindigkeit  $v_r$  in radialer Richtung anstelle einer Wurzel aus der konvekti-

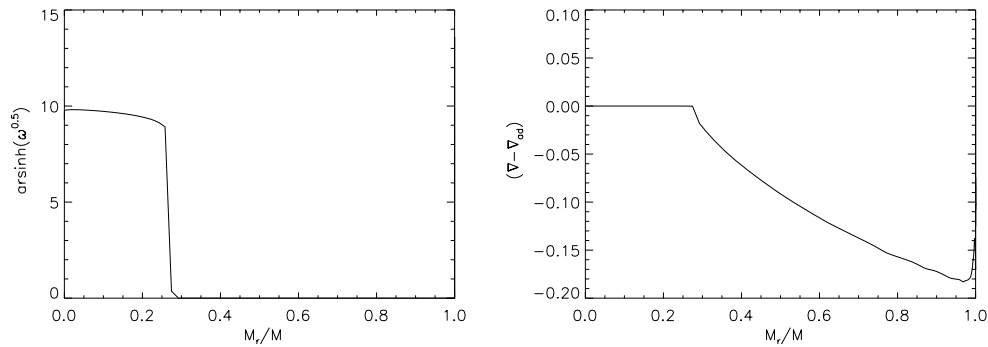


Abbildung 3.8: Das Eingleichungsmodell mit nichtlokalen Termen, angewendet auf die Struktur eines  $5M_{\odot}$  Sterns. Hierbei ist jedoch der Energietransport auf den instabilen Bereich beschränkt. D.h. im konvektiv Instabilen liegt eine leichte Überadiabatie vor, im konvektiv stabilen und in der Überschießzone der radiative Temperaturgradient. Aufgrund der sehr starken Dämpfung können die konvektiven Elemente nicht in den radiativen Bereich eindringen. Somit dehnt sich die Konvektionszone in diesem Fall im Rahmen der numerischen Auflösung nicht weiter aus als im lokalen Fall.

ven Energie. Die bei Kuhfuß üblichen Terme ergeben sich, indem man diese beiden Größen durch eine Faktor  $2/3$  miteinander in Verbindung setzt  $v_r = \sqrt{2/3}\omega$ . Diese Annahme geht davon aus, daß sich ein Drittel der Materie in radiale Richtung bewegt und der Rest in horizontaler Richtung entlang einer Kugelschale. Dies mag im Inneren einer Konvektionszone korrekt sein, aber am Rand derselben ist dies sicher nicht gerechtfertigt, da dort die konvektiven Strömungen umbiegen, wie z.B. aus mehrdimensionalen Rechnungen, wie Freytag et al. (1996) deutlich hervorgeht. Nachdem sie zu Beginn in radialer Richtung strömten, werden sie sich am Rand des konvektiven Bereichs in der Horizontalen bewegen. Zumindest am Rand einer konvektiven Zone wird also eine stark anisotrope Strömung vorliegen mit einem Isotropiefaktor sehr viel kleiner als  $2/3$ . In den nächsten Abschnitten soll deshalb die radiative Geschwindigkeit und die konvektive Energie nicht durch einen festen Faktor  $2/3$  verbunden werden, sondern durch einen Faktor  $\xi$ , der zunächst noch unbestimmt ist und im allgemeinen vom Ort und den Gegebenheiten des Konvektionsmodells abhängig ist.

$$v_r = \xi \sqrt{\omega} \quad (3.37)$$

Zunächst wollen wir die Auswirkungen dieses Faktors auf das Eingleichungsmodell untersuchen und dann zum Dreigleichungsmodell übergehen.

### Das Eingleichungsmodell

Das Eingleichungsmodell unter Verwendung der radialen Geschwindigkeit lautet mit dem Faktor  $\xi$

$$d_t\omega = \frac{\nabla_{ad}c_p T\Lambda}{2H_p^2}\xi\sqrt{\omega}(\nabla - \nabla_{ad}) - \frac{c_D}{\Lambda}\xi\omega + \frac{1}{\rho}\nabla\alpha_t\rho\Lambda\xi\nabla\omega. \quad (3.38)$$

Wie man sieht, taucht bis auf den Term, der die Zeitableitung bestimmt, in jedem Term der Faktor  $\xi$  auf, sowohl im Quellterm konvektiver Energie, dem dissipativen Term, als auch in dem Term, der den konvektiven Strom und somit die Nichtlokalität enthält. Das Verhältnis der Terme untereinander und insbesondere das Verhältnis der Quell- und Senkterme ist somit unabhängig von dem konkreten Wert dieses Faktors. Lediglich die Zeitabhängigkeit wird durch die konkrete Wahl eines Wertes modifiziert, nicht jedoch die Struktur einer stationären Schichtung. Die Isotropieannahme bewirkt also keine Unterschied im Ergebnis der Rechnung.

### Das Dreigleichungsmodell

Im Dreigleichungsmodell ist die Sache grundlegend anders. Hier enthalten nur einige Terme den Anisotropiefaktor, andere jedoch nicht. Das Verhältnis der dämpfenden und treibenden Terme untereinander wird somit durch eine inkonsistente Wahl von  $\xi$  gestört und es können sich Probleme wie oben beschriebenen ergeben. Hier wird im folgenden der Einfachheit halber nur eine stationäre Schichtung diskutiert, das heißt die Terme, die eine Zeitableitung enthalten, werden hier vernachlässigt. Ebenso werden die Terme fallen gelassen, die den radiativen Verlust beinhalten, da diese nichts zum Problem der Isotropie beitragen. Zunächst wird wieder das Dreigleichungsmodell geschrieben, mit radialer Geschwindigkeit, ohne Isotropieannahme:

$$0 = \frac{\nabla_{ad}T}{H_p}\Pi_r - \frac{C_D}{\Lambda}v_r\omega + \frac{1}{\rho}\nabla\alpha_t\rho\Lambda v_r\nabla\omega \quad (3.39)$$

$$0 = \frac{2\nabla_{ad}T}{H_p}\Phi + \frac{c_p}{H_p}(\nabla - \nabla_{ad})v_r^2 - \frac{\beta_{\Pi}}{\Lambda}v_r\Pi_r \quad (3.40)$$

$$0 = \frac{c_p}{H_p}(\nabla - \nabla_{ad})\Pi_r - \frac{\beta_{\Phi}}{\Lambda}v_r\Phi \quad (3.41)$$

Hier wurde der Deutlichkeit halber anstelle von  $\Pi$  wieder  $\Pi_r$  geschrieben, um zu klar zu machen, dass dies den radialen Teil des Vektors  $\vec{\Pi} = \langle \vec{v}'s' \rangle$  darstellt. Führt man wieder die konvektive Energie und einen Isotropiefaktor  $\xi$  ein, so ergibt sich:

$$0 = \frac{\nabla_{ad}T}{H_p}\Pi_r - \frac{C_D}{\Lambda}\xi\omega^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\rho}\nabla\alpha_t\rho\Lambda\xi\sqrt{\omega}\nabla\omega \quad (3.42)$$

$$0 = \frac{2\nabla_{ad}T}{H_p}\Phi + \frac{c_p}{H_p}(\nabla - \nabla_{ad})\xi^2\omega - \frac{\beta_{\Pi}}{\Lambda}\xi\sqrt{\omega}\Pi_r \quad (3.43)$$

$$0 = \frac{c_p}{H_p}(\nabla - \nabla_{ad})\Pi_r - \frac{\beta_{\Phi}}{\Lambda}\xi\sqrt{\omega}\Phi \quad (3.44)$$

Wie man sehen kann tritt nun der Faktor  $\xi$  nicht in allen Termen gleichermaßen auf. Insbesondere tritt er in der Gleichung 3.42 zwar im Ausdruck für den konvektiven Strom auf, nicht jedoch in dem Term, der  $\Pi_r$  enthält. In der Überschießzone stellt sich die Sache jedoch so dar, dass die Divergenz des konvektiven Stroms  $\text{div} j_t = \frac{1}{\rho} \nabla \alpha_t \rho \Lambda \xi \sqrt{\omega} \nabla \omega$  als Quelle der Konvektion wirkt, der Term  $\frac{\nabla_{ad} T}{H_p} \Pi_r$  jedoch als Senke. Wird in diesem Bereich also, und genau dies geschieht an der Grenze der Überschießzone, ein zu großer Wert für  $\xi$  angenommen, so wird die Quelle der Konvektion gegenüber der Senke überschätzt und die konvektive Energie wird als deutlich zu groß berechnet. Anders ausgedrückt, am Rand der Konvektionszone, wo die konvektiven Strömungen im wesentlichen horizontal verlaufen und somit die radiale Geschwindigkeit verschwindet, wird durch die feste Beziehung  $v_r = \sqrt{2/3} \omega$  ein Transport in radialer Richtung künstlich erzeugt. Ähnliche Inkonsistenzen treten in den Gleichungen für  $\Pi$  und  $\Phi$  auf.

### Ausblick

Um das Verhalten des Dreigleichungsmodells zu verbessern, müsste die Isotropie in der Konvektionszone modelliert werden, indem man entweder eine Gleichung für den Isotropiefaktor  $\xi$  oder für den Geschwindigkeitsanteil in radialer Richtung  $v_r$  bestimmt.

In einer einfachsten Form kann man hierbei für  $\xi$  eine im Überschießbereich vom isotropen Wert auf 0 kontinuierlich abfallende Funktion vorgeben. Dabei würde allerdings explizit eine Überschießlänge in die Theorie eingeführt werden und somit der Vorteil der Kuhfußtheorie gegenüber anderen Konvektionstheorien zunichte gemacht.

Um dies zu demonstrieren, wurde  $\xi$ , wieder in einem  $5M_\odot$ -Stern, in einem Gebiet zwischen der Schwarzschildgrenze und  $M_r = 0.4$  vom isotropen Wert  $\sqrt{2/3}$  linear auf 0 abgesenkt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.9 dargestellt. Hierdurch lässt sich die Ausdehnung der konvektiven Zone auf ein realistisches Maß begrenzen, die Überschießzone an sich jedoch ist nicht konsistent. So ist z.B. der Entropieexzess in der Überschießzone deutlich größer als im instabilen Gebiet, die Korrelationsfunktion  $\Pi$  dagegen ist betragsmäßig deutlich geringer als im instabilen Gebiet.

Ein weiterer Ansatz wäre den Isotropiefaktor aus zwei- und dreidimensionalen Rechnungen zu übernehmen. Auch dies würde beinhalten, dass eine Überschießlänge in die Theorie explizit eingeführt wird, auch wenn diese durch Simulationen bedingt ist.

Die beste Möglichkeit wäre, den Isotropiefaktor aus einer analytischen Formel und damit konsistent aus der Theorie zu bestimmen. Z.B. wäre ein möglicher Ansatz

$$\xi \sim \frac{\Pi}{\sqrt{\omega \Phi}} : \quad (3.45)$$

also eine Proportionalität zur normierten Korrelationsfunktion. In den hier vorliegenden Untersuchungen konnte jedoch mit diesem Ansatz keine Konvergenz erreicht werden, so dass der Ansatz nicht weiter verfolgt werden konnte.

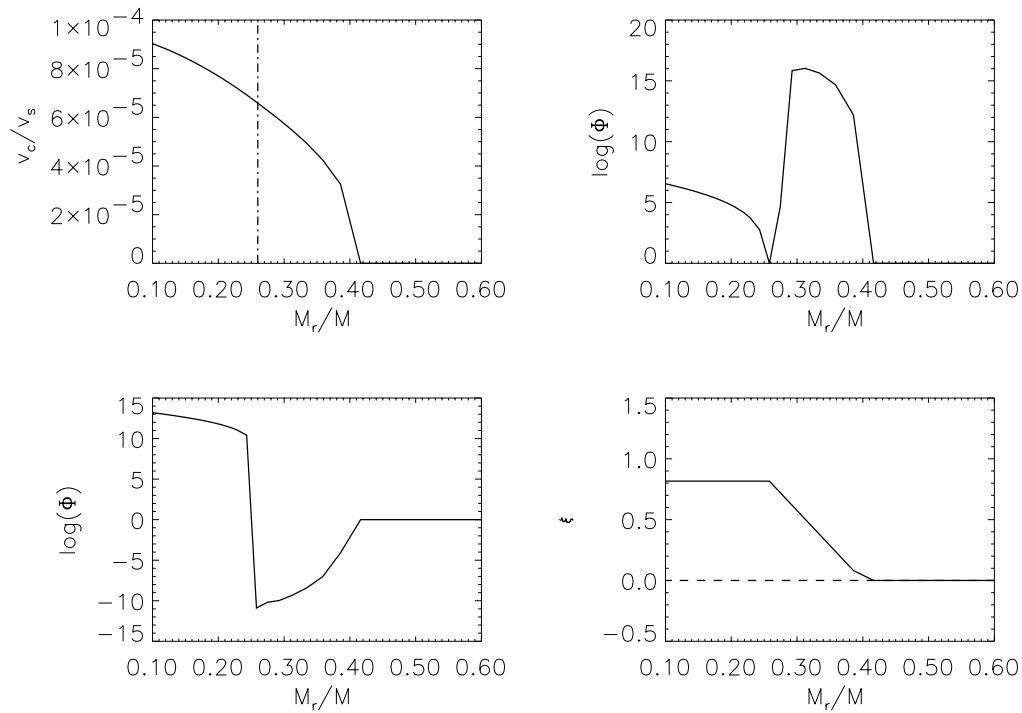


Abbildung 3.9: Die Struktur der konvektiven Zone eines Sterns mit  $5M_{\odot}$  im Dreigleichungsmodell unter künstlicher Einführung einer Isotropie am Rand der Überschießzone. Der Isotropieparameter  $\xi$  fällt in der Überschießzone linear auf null ab.

In den nächsten Kapiteln soll diskutiert werden, wie das Kuhfußmodell in einem Sternentwicklungscode verwendet werden kann. Ferner wird ein Reihe von Anwendungen vorgestellt, in denen das Kuhfußmodell, sowohl in der zeitabhängigen als auch in der nichtlokalen Form verwendet wird.





---

---

# Kapitel 4

## GRUNDLAGEN VON STERNSIMULATIONEN

---

---

### 4.1 DIE GRUNDGLEICHUNGEN DER STERNENTWICKLUNG

Zur Beschreibung des Sterninneren werden die klassischen Sternaufbaugleichungen verwendet. Diese sind eindimensionale Gleichungen, die unter der Annahme von sphärischer Symmetrie für einen nichtrotierenden Stern abgeleitet wurden. Sie beschreiben Druck, Temperatur, Leuchtkraft und der Radius als Funktion der Masseverteilung. Die Erhaltung von Masse wird beschrieben durch:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi\rho r^2} \quad (4.1)$$

wobei  $m$  die Masse innerhalb einer Kugelschale mit Radius  $r$  und  $\rho$  die Dichte ist. Die Energietransportgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial m} = \nabla \frac{T}{P} \frac{\partial P}{\partial m} \quad (4.2)$$

beschreibt das Temperaturprofil, mit dem Temperaturgradient  $\nabla$ , der vom Transportmechanismus abhängt.  $T$  ist die Temperatur und  $P$  der Druck. Die Leuchtkraft  $L_r$  ergibt sich daraus, wieviel Energie aus einer Massenschale  $r$  herausströmt.

$$\frac{\partial L_r}{\partial m} = \epsilon_{\text{nuc}} + \epsilon_g \quad (4.3)$$

wobei  $\epsilon_{\text{nuc}}$  die Energieproduktion durch nukleare Prozesse ist und  $\epsilon_g$  die produzierte oder absorbierte Energie durch thermische Prozesse  $-T\partial s/\partial t$  darstellt. In manchen Situationen spielen noch weitere Terme, wie der Verlust von Energie durch Abstrahlung von Neutrinos  $\epsilon_\nu$  eine Rolle. Schließlich wird der Druck bestimmt durch

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{1}{4\pi\rho r^2} \left( \frac{Gm}{r^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \right) \quad (4.4)$$

wobei  $G$  die Gravitationskonstante ist und  $t$  die Zeit. i.A. ist die Annahme eines hydrostatischen Gleichgewichts  $\ddot{r} = 0$  gerechtfertigt.

## 4.2 DAS VERWENDETE STERNENTWICKLUNGS-PROGRAMM

Um die Konvektionstheorie auf die Sternentwicklung anzuwenden, wurde die Kuhfußsche Theorie in ein bestehendes Sternentwicklungsprogramm eingebunden. Dieses Programm ist der Garching Sternentwicklungscode, wie er in Schlattl et al. (1997) und Schlattl (1999) beschrieben wurde. Er geht zurück auf frühere Arbeiten von Kippenhahn (Kippenhahn et al. 1967).

Der Code besteht im Wesentlichen aus einem Henyey-Solver, der die Sternaufbaugleichungen implizit löst. Hierbei wird zwischen dem räumlichen und dem zeitlichen Anteil getrennt. Das Innere eines Sterns wird in einzelne Gitterpunkte aufgeteilt, an denen die Größen  $P(m)$ ,  $T(m)$ ,  $L_r(m)$  und  $r(m)$  bestimmt werden. Die Verteilung und Anzahl der Gitterpunkte werden an die Struktur des Sterns angepaßt (siehe hierzu Wagenhuber (1992) und Wagenhuber & Weiss (1994)). Die Sternstrukturgleichungen werden durch Linearisierung in einem impliziten iterativen Schema gelöst, Konvergenz ist erreicht, wenn die relative Größe der Korrekturen einen gewissen Wert unterschreitet.

Ist die korrekte Struktur zum Zeitpunkt  $t$  gefunden, wird in einem zweiten Schritt die zeitliche Entwicklung des Sterns über Zeitschritte  $\Delta t$  bestimmt. Dabei wird vor allem die Änderung der chemischen Zusammensetzung zum einen durch Kernreaktionen und zum anderen durch Mischvorgänge wie Diffusion oder konvektives Mischen berücksichtigt. Die für diese Vorgänge wichtigen Größen wie  $T$ ,  $\rho$ ,  $r$  werden als  $T(t)$ ,  $\rho(t)$ ,  $r(t)$  zwischen den Zeitschritten benötigt und vorausgeschätzt (Schlattl 1996). In der Diffusion können neben Wasserstoff und Helium auch eine Vielzahl anderer Elemente wie Sauerstoff, Kohlenstoff oder schwererer Isotope berücksichtigt werden. Bei der Berechnung eines Sonnenmodells sind dies  $^1\text{H}$ ,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ ,  $^7\text{Li}$ ,  $^9\text{Be}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$ ,  $^{14}\text{N}$ ,  $^{15}\text{N}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{17}\text{O}$ ,  $^{20}\text{Ne}$ ,  $^{24}\text{Mg}$ ,  $^{28}\text{Si}$  und  $^{56}\text{Fe}$ .

Nachdem die neue chemische Zusammensetzung gefunden wurde, wird für den neuen Zeitschritt wieder, wie zuvor, die räumliche Struktur gelöst.

Für die Zustandsgleichungen ist es möglich, alternativ die MHD-Zustandsgleichung (Däppen et al. (1988), Hummer & Mihalas (1988) und Mihalas et al. (1988))

oder die OPAL-Zustandsgleichungen (Rogers et al. 1996) zu verwenden. Für die Opazitäten können wieder verschiedene Alternativen verwendet werden. Dies sind entweder Rogers & Iglesias (1992) und Weiss et al. (1990) oder Iglesias & Rogers (1996) ergänzt durch Alexander (1994).

An der Oberfläche kann neben einer Eddington Approximation für eine graue Atmosphäre auch eine realistischere Modellatmosphäre verwendet werden. Beispiele zu Rechnungen hierfür finden sich in Schlattl (1996) und Schlattl et al. (1997).

Die Raten für die Kernreaktionen wurden für das Wasserstoffbrennen von Castellani et al. (1994) und Adelberger et al. (1998) entnommen. Im Allgemeinen stammen die Raten aus Caughlan & Fowler (1988)

### 4.3 ERGÄNZUNGEN UND ERWEITERUNGEN DES CODES

Die für die Bestimmung der räumlichen Struktur nötigen vier Sternaufbaugleichungen enthalten erste Ableitungen nach der Massenkoordinate  $\partial/\partial m$  und zweite Ableitungen nach der Zeit  $\partial^2/\partial t^2$ . Will man die Kuhfußtheorie in das Sternentwicklungsprogramm einbauen, so muss man ein, bzw. drei zusätzliche Gleichungen lösen. Hinzu kommt, wie weiter unten diskutiert, unter Umständen noch eine weitere Gleichung für den Energietransport. Diese zusätzlichen Gleichungen enthalten, anders als die klassischen Sternaufbaugleichungen, eine erste Ableitung nach der Zeit  $\frac{\partial}{\partial t}$  und der im Kapitel 3.1 beschriebene nichtlokale Term  $\text{div} j_t = \frac{\partial}{\partial m} D \frac{\partial}{\partial m} \omega$  enthält eine zweite Ableitung nach der Massenkoordinate. Für die Diskretisierung einer zweiten Ableitungen reicht es aber nun nicht mehr, die diskretisierten Gleichungen zwischen zwei Stützstellen zu betrachten, es sind mindestens drei Stützstellen verkoppelt.

Zur numerischen Lösung dieser Gleichungen wird das Henyeyverfahren verwendet, wie es z.B. in Kippenhahn & Weigert (1994) beschrieben ist. Wesentlicher Bestandteil des Verfahrens ist das Aufstellen und Diagonalisieren einer Matrix, der sogenannten Henyeymatrix. Der verwendete Code muss also in mehrfacher Sicht verändert werden. Zum einen muss die Anzahl der Gleichungen erhöht werden. Dies bedeutet, dass die Anzahl der Zeilen eines jeden Blocks in der Henyeymatrix steigt. Zum anderen wird die Anzahl der Stützstellen erhöht, die durch die Diskretisierung miteinander gekoppelt sind. Wurden durch die zweite Ableitung nach dem Ort nur zwei benachbarte Stützstellen gekoppelt, so werden nun durch die zweite Ableitung drei benachbarte Stützstellen gekoppelt. Das heißt, dass die Anzahl der Spalten eines jeden Blocks in der Henyeymatrix steigt.

### 4.3.1 Die Berechnung des Temperaturgradienten $\nabla$

In den Gleichungen, wie sie in 3.16 und 3.20 niedergeschrieben wurden, tritt immer noch eine unbekannte Größe auf. Dies ist der auf den Druck bezogene Temperaturgradient

$$\nabla = \frac{\partial \log T}{\partial \log P},$$

der ja gerade wesentliches Ergebnis der Konvektionstheorie ist und in die klassischen Strukturgleichungen eingeht. Da diese Größe Ergebnis der Konvektionstheorie ist, aber zugleich den Grad der Überadiabatie  $\nabla - \nabla_{\text{ad}}$  bestimmt, und die Theorie somit auf Änderungen dieser Größe sehr empfindlich reagiert, muss diese Größe konsistent bestimmt werden. Dies geschieht im Henyey Schema durch das Iterationsverfahren. Hierfür muss jedoch eine weitere Gleichung herangezogen werden, die Energieausgleichung.

#### Die Energieausgleichung

Wie bereits weiter oben erwähnt, sind für den Energietransport in Sternen mehrere Mechanismen verantwortlich. Dies sind vor allem Transport durch Strahlung, Transport durch Konvektion und Transport durch Wärmeleitung, wovon der letztere i.A. nur eine geringe Bedeutung hat und deshalb im Folgenden vernachlässigt werden soll. Die gesamte durch den Stern transportierte Energie wird in der Sternentwicklung üblicherweise in der Leuchtkraft zusammengefasst und hier durch einen Strom  $j_{\text{ges}} = L/4\pi r^2$  bezeichnet. Die konvektiven Elemente selbst haben sowohl thermische als auch kinetische Energie, die sie in höhergelegenen Schichten an ihre Umgebung abgeben. Ordnet man jedem dieser Transportmechanismen einen Strom zu, so gilt:

$$j_{\text{ges}} = j_{\text{rad}} + j_{\omega} + j_t.$$

Hierbei ist der Transport von kinetischer Energie durch Konvektion,  $j_t$  im allgemeinen deutlich geringer als der Transport von thermischer Energie  $j_{\omega}$ . Somit ist es meist möglich, auch den Transport kinetischer Energie gegenüber dem Transport von thermischer Energie zu vernachlässigen. Eine genauere Analyse im Rahmen des Kuhfußmodells findet sich in Kuhfuß (1987a).

Drückt man den Gesamtstrom und den radiativen Strom in der üblichen Art aus, d.h. mit einem Strahlungsleitkoeffizienten

$$k_{\text{rad}} = \frac{4acT^3}{3\kappa\rho}$$

und einem effektiven Gradienten  $\nabla_{\text{rad}}$ , der sich einstellen müsste, wenn die gesamte Leuchtkraft durch Strahlung transportiert wird, also durch  $j_{\text{ges}} = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{k_{\text{rad}}T}{H_p} \nabla_{\text{rad}}$  und  $j_{\text{rad}} = \frac{k_{\text{rad}}T}{H_p} \nabla$ , so ergibt sich:

$$\frac{k_{\text{rad}}T}{H_p} \nabla + \rho T \Pi_r = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (4.5)$$

bzw.

$$\nabla_{\text{rad}} = \nabla + \frac{H_p}{k_{\text{rad}}} \rho \Pi_r : \quad (4.6)$$

Diese Gleichung koppelt die Konvektionsgleichungen, die  $\Pi_r$  enthalten, an die Strukturgleichungen, die  $\nabla$  und  $\nabla_{\text{rad}}$  bzw.  $L$  enthalten. Nimmt man dies als zusätzliche Gleichung zur Konvektionstheorie hinzu, so lässt sich auch der Temperaturgradient  $\nabla$  bestimmen. Diese Gleichung muss nicht in einer zusätzlichen Gleichung numerisch gelöst werden, sondern kann i.A. direkt in die Gleichungen für  $\omega$ ,  $\Phi$  und  $\Pi$  eingefügt werden.

In den Gleichungen der Konvektionstheorie tritt  $\nabla$  immer in Verbindung mit dem adiabatischen Gradienten in der Form  $(\nabla - \nabla_{\text{ad}})$  auf. Somit lässt sich dieser Ausdruck mit Gl. 4.6 verknüpfen zu

$$(\nabla - \nabla_{\text{ad}}) = (\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}} - \frac{H_p \rho}{k_{\text{rad}}} \Pi).$$

In der Eingleichungstheorie wird die Korrelationsfunktion  $\Pi_r$  durch die Näherung 3.19, eliminiert. Aufgelöst nach  $(\nabla - \nabla_{\text{ad}})$  ergibt dies

$$(\nabla - \nabla_{\text{ad}}) = \frac{(\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}})}{\frac{\rho \alpha_s \Lambda c_p}{k_{\text{rad}}} \sqrt{\omega} + 1}. \quad (4.7)$$

Hierbei soll noch angemerkt werden, dass der Ausdruck  $\rho \alpha_s \Lambda c_p \sqrt{\omega} / k_{\text{rad}}$  im Wesentlichen gerade die Pecletzahl<sup>1</sup> ist und somit eine Aussage über die Effizienz von Konvektion macht. Ist die Pecletzahl klein gegen eins, so gilt

$$(\nabla - \nabla_{\text{ad}}) \approx (\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}})$$

und es liegt ein effektiv radiativer Temperaturgradient vor. Die Konvektion ist nicht effizient genug, um auch nur eine nahezu adiabatische Schichtung zu bewirken. Ist die Pecletzahl dagegen groß gegen eins, die Konvektion also sehr effektiv, wird die Überadiabatie sehr klein, es entsteht eine nahezu adiabatische Schichtung.

$$(\nabla - \nabla_{\text{ad}}) \rightarrow 0$$

$$\nabla \approx \nabla_{\text{ad}}$$

### 4.3.2 Transformation der Variablen

In dem verwendeten Sternentwicklungsprogramm werden die wichtigen Sternaufbaugrößen wie  $P$ ,  $T$  oder der Radius aus numerischen Gründen in logarithmischer Form verwendet. Dies hat z.B. den Vorteil, dass eine absolute Korrektur angewendet auf eine

---

<sup>1</sup>Die Pecletzahl ist definiert als das Verhältnis von konvektiv übertragener Wärme zur Wärme, die in einer Strömung durch Strahlung übertragen wurde.

logarithmische Größe einer relativen Korrektur auf den zugrundeliegenden Wert entspricht. Diese Transformation ist möglich, da die entsprechenden Größen im Inneren eines Sterns immer endliche positive Werte haben und somit der Logarithmus immer definiert ist. Im Normalfall werden die Größen  $P, T$  u.s.w. in den entsprechenden Einheiten sogar immer größer als eins sein, und somit wird der Logarithmus im positiven Bereich liegen.

Für die in der Kuhfußtheorie auftauchenden Größen ist es dagegen nicht möglich, logarithmische Einheiten zu verwenden, denn diese Größen können im konvektiv stabilen Bereich Null werden, der Logarithmus würde somit gegen  $-\infty$  streben. Die Korrelationsfunktion  $\Pi$  kann in einer Überschießzone sogar negative Werte annehmen, wofür der Logarithmus nicht mehr definiert wäre. Anstelle dessen wurden in den vorliegenden Rechnungen der  $\operatorname{arsinh}$  der Größen  $\omega, \Phi$  und  $\Pi$  verwendet.

$$\omega \rightarrow \omega^* = \operatorname{arsinh}(\omega) \quad (4.8)$$

$$\Phi \rightarrow \Phi^* = \operatorname{arsinh}(\Phi) \quad (4.9)$$

$$\Pi \rightarrow \Pi^* = \operatorname{arsinh}(\Pi). \quad (4.10)$$

Dieser ist sowohl für negative als auch für positive Werte und ebenso für null definiert. Für Werte, die betragsmäßig größer als eins sind, weist er ein ähnliches Verhalten wie der Logarithmus auf. Die Vorteile bezüglich der relativen Korrekturen bleiben also erhalten, lediglich in der Nähe der Nulllösung weist der  $\operatorname{arsinh}$  ein lineares Verhalten auf. In diesem Bereich muß daher korrigierend eingegriffen werden, wenn die Korrektur, wie sie sich aus dem Henyeyverfahren ergibt, auf die Werte der vorhergehenden Iteration aufaddiert werden. Dies soll weiter unten genauer diskutiert werden.

Bei der Verwendung des Henyey-Verfahrens zur Lösung der Konvektionsgleichungen tritt ein weiteres Problem auf. In den Gleichungen, sowohl der Ein- als auch der Dreigleichungsformulierung tritt die konvektive Energie in der Form  $\sqrt{\omega}$  auf. Dies ist problematisch, da die im Henyeyverfahren verwendeten Ableitungen demzufolge den Ausdruck  $\sqrt{\omega}^{-1}$  enthalten und somit an den Grenzen konvektiver Gebiete, sowie in stabilen Bereichen divergieren würden. Dies läßt sich beheben durch eine weitere Transformation

$$\omega \rightarrow \mu = \sqrt{\omega}$$

und analog

$$\omega \rightarrow \mu^* = \operatorname{arsinh}(\mu) = \operatorname{arsinh}(\sqrt{\omega}).$$

Das Eingleichungsmodell wird somit zu einer kubischen Gleichung der Form

$$\partial_t \mu^2 = A\mu + B\mu^3$$

die sich numerisch sehr viel einfacher lösen lässt als die ursprüngliche Gleichung. Sie hat zudem den Vorteil, dass in einem konvektiv stabilen Gebiet der physikalisch sinnlose Lösungszweig mit  $\omega < 0$  automatisch ausgeschlossen wird. Er würde für  $\mu$  imaginäre Ergebnisse liefern.

### 4.3.3 Diskretisierung der Gleichungen

Wie weiter oben schon angedeutet, muss der Term  $\text{div } j_t$ , da er zweite Ableitungen enthält, über mindestens drei Stützstellen diskretisiert werden. Schreibt man diesen Term in Massenkoordinaten, also unter Verwendung von  $\partial/\partial r = (\partial m/\partial r) \cdot \partial/\partial m$ , so lautet er:

$$\text{div } j_t = \partial_m \alpha_t (4\pi r^2)^2 \rho^2 \Lambda \sqrt{\omega} \partial_m \omega.$$

Hierbei wurde die Ableitung  $\partial/\partial m$  in der Kurzschreibweise  $\partial_m$  verwendet. Für die Diskretisierung ist es zweckmäßig ihn umzuschreiben in:

$$\text{div } j_t = \partial_m \alpha_t (4\pi r^2)^2 \rho^2 \Lambda \frac{2}{3} \partial_m \omega^{\frac{3}{2}} = \partial_m \alpha_t (4\pi r^2)^2 \rho^2 \Lambda \frac{2}{3} \partial_m \mu^3.$$

Diskretisiert lautet er mit dem Diffusionskoeffizienten  $D = \alpha_t (4\pi r^2)^2 \rho^2 \Lambda \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \partial_m D \partial_m \mu^3 = & \\ & \frac{(D_j + D_{j+1})}{2} \left[ \frac{\mu_{j+1}^3 - \mu_j^3}{(m_{j+1} - m_j) \frac{(m_{j+1} - m_{j-1})}{2}} \right] \\ & - \frac{(D_j + D_{j-1})}{2} \left[ \frac{\mu_j^3 - \mu_{j-1}^3}{(m_j - m_{j-1}) \frac{(m_{j+1} - m_{j-1})}{2}} \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Hierbei geben die Indizes die Stützstelle an, an welcher der entsprechende Ausdruck ausgewertet wird.

Die Zeitableitung wird durch

$$\partial_t \omega = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0}$$

diskretisiert, wobei der Index  $_0$  bedeutet, dass die jeweilige Größe an der gleichen Stützstelle genommen wird, jedoch der Wert des vorhergehenden Zeitniveaus, also  $x_j(t_{i-1})$ .

### 4.3.4 Die zentrale Randbedingung

Im Zentrum muß die Divergenz des konvektiven Stroms verschwinden, denn ein konvektives Element, das durch den Mittelpunkt eines Sterns durchströmt, kommt auf der anderen Seite auch wieder mit der gleichen Energie und Geschwindigkeit heraus. Der Nettostrom durch das Zentrum ist null. Es gilt dort also:

$$\text{div } j_t \Big|_{\text{Zentrum}} = 0$$

### 4.3.5 Chemisches Mischen

Um die Veränderung der lokalen Konzentrationen der Elemente zu berechnen, wird eine Diffusionsgleichung verwendet, wie sie in Schlattl (1996) beschrieben ist. Hierbei wird der Diffusionskoeffizient mit Hilfe der konvektiven Geschwindigkeit, wie sie sich aus der Kuhfußschen Theorie ergibt, berechnet.

### 4.3.6 Abbruchkriterien und Korrekturbegrenzung

Verwendet man anstelle des Logarithmus den  $\operatorname{arsinh}$ , so hat dies zu Folge, dass die Transformation im Bereich von etwa -1 bis 1 ein lineares Verhalten aufweist, ansonsten ein eher logarithmisches. Dies ist besonders dann von Bedeutung, wenn eine Massenschale, die zuvor konvektiv stabil war ( $\omega = 0$ ), im nächsten Zeitschritt ein konvektives Verhalten aufweist ( $\omega > 0$ ).

In diesen Fall liefert das Henyeyverfahren eine um etliche Größenordnungen zu große Korrektur, da eine linear angebrachte Korrektur u.U. deutlich höhere Werte ergibt, als dies im Bereich einer logarithmischen Transformation der Fall wäre. Hier wird eingegriffen, indem Korrekturen der konvektiven Größen auf ein Maximum von 1 beschränkt werden. Dies entspricht in etwa gerade dem Bereich, in dem der  $\operatorname{asinh}$  sein lineares Verhalten aufweist.

Diese Beschränkung der Korrekturen wurde bewerkstelligt, indem ein entsprechender Unterkorrekturfaktor bestimmt wurde. Dieser wird auf alle Korrekturen angewendet, also auch auf die klassischen Sternaufbaugrößen  $P, T, \dots$ , ansonsten würde die Richtung des Vektors  $(\delta T, \delta P, \dots, \delta \omega)$  im Lösungsraum verändert werden. In einigen kritischen Situationen würde das dazu führen, dass keine Konvergenz des Iterationsverfahrens erreicht werden kann.

Die Iterationen des Henyeyverfahrens wurden solange fortgeführt, bis sowohl die Korrekturen auf die klassischen Strukturgrößen  $P, T, M_r, L$ , als auch auf die Größen der Konvektionstheorie  $\omega, \Phi, \Pi$  eine gewisse Grenze unterschreiten. Diese Grenze kann für die klassischen Größen und die konvektiven Variablen unterschiedlich sein. Typische Werte sind  $10^{-4}$  für die klassischen Größen und  $10^{-2}$  für die konvektiven Größen und stellen Erfahrungswerte dar.

## 4.4 DIE KONVEKTIONSGLEICHUNGEN

In diesem Abschnitt sollen nun noch einmal die Gleichungen der Konvektionstheorie zusammengefasst werden, so wie sie schließlich in diskretisierter Form im Sternentwicklungsprogramm verwendet wurden.



**Eingleichungsmodell**

$$\begin{aligned}
d_t \sinh(\mu^*)^2 &= \\
&= \frac{\nabla_{\text{ad}} c_p T \Lambda}{\sqrt{6} H_p^2} \sinh(\mu^*) \frac{(\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}})}{\frac{\rho \alpha_s \Lambda c_p}{k} \sinh(\mu^*) + 1} \\
&\quad - \frac{C_D}{\Lambda} \sinh(\mu^*)^3 + \mathbf{div} j_t
\end{aligned} \tag{4.12}$$

**Dreigleichungsmodell**

$$\begin{aligned}
d_t \sinh(\mu^*)^2 &= \\
&= \frac{\nabla_{\text{ad}} T}{H_p} \sinh(\Pi^*) - \frac{C_D}{\Lambda} \sinh(\mu^*)^3 + \mathbf{div} j_t
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
d_t \sinh(\Pi^*) &= \\
&= \frac{2 \nabla_{\text{ad}} T}{H_p} \sinh(\Phi^*) \\
&\quad + \frac{2 c_p}{3 H_p} (\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}} - \frac{H_p \rho}{k} \sinh(\Pi^*)) \sinh(\mu^*)^2 \\
&\quad - \frac{\beta_{\Pi}}{\Lambda} \sinh(\mu^*) \sinh(\Pi^*) - \frac{1}{\tau_{\text{rad}}} \sinh(\Pi^*)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
d_t \sinh(\Phi^*) &= \\
&= \frac{c_p}{H_p} (\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}} - \frac{H_p \rho}{k} \sinh(\Pi^*)) \sinh(\Pi^*) \\
&\quad - \frac{\beta_{\Phi}}{\Lambda} \mu^* \Phi - \frac{2}{\tau_{\text{rad}}} \sinh(\Phi^*)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Die Energietransportgleichung kann auch als zusätzliche vierte Gleichung gelöst werden, um den Grad an Überadiabatie und somit den Temperaturgradienten direkt zu berechnen. Der Ausdruck für die Überadiabatie ( $\nabla - \nabla_{\text{ad}}$ ) wurde hier geschrieben als  $\Delta$ .

**Eingleichungsmodell**

$$\begin{aligned}
d_t \sinh(\mu^*)^2 &= \\
&= \frac{\nabla_{\text{ad}} c_p T \Lambda}{\sqrt{6} H_p^2} \sinh(\mu^*) \Delta - \frac{C_D}{\Lambda} \sinh(\mu^*)^3 + \mathbf{div} j_t
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\Delta = (\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}} - \frac{\rho}{k} \alpha_s \Lambda \sinh(\mu^*) c_p \Delta + j_t) \tag{4.17}$$

**Dreigleichungsmodell**

$$\begin{aligned}
d_t \sinh(\mu^*)^2 &= \\
&= \frac{\nabla_{\text{ad}} T}{H_p} \sinh(\Pi^*) - \frac{C_D}{\Lambda} \sinh(\mu^*)^3 + \mathbf{div} j_t
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
d_t \sinh(\Pi^*) &= \\
&= \frac{2\nabla_{\text{ad}} T}{H_p} \sinh(\Phi^*) + \frac{2c_p}{3H_p} \Delta \sinh(\mu^*)^2 \\
&\quad - \frac{\beta_{\Pi}}{\Lambda} \sinh(\mu^*) \sinh(\Pi^*) - \frac{1}{\tau_{\text{rad}}} \sinh(\Pi^*)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
d_t \sinh(\Phi^*) &= \\
&= \frac{c_p}{H_p} \Delta \sinh(\Pi^*) - \frac{\beta_{\phi}}{\Lambda} \sinh(\mu^*) \sinh(\Phi^*) \\
&\quad - \frac{2}{\tau_{\text{rad}}} \sinh(\Phi^*)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\Delta = (\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}} - \frac{H_p \rho}{k} \sinh(\Pi^*) + j_t) \tag{4.21}$$

Mit der beschriebenen Vorgehensweise ist es möglich, die Konvektionstheorie von R. Kuhfuß auf die Sternentwicklung anzuwenden, allerdings ist das Konvergenzverhalten der gekoppelten Gleichungen deutlich schlechter als das der Sternaufbaugleichungen mit MLT. Dies ist vor allen dann der Fall, wenn sich die Grenzen der konvektiven Gebiete über relativ viele Gitterpunkte hinwegbewegen. In einigen Fällen bei hoher Auflösung und starker Verschiebung der Konvektionszonen waren 100 - 200 Iterationen nötig, während in der MLT in der Regel etwa 3 bis 5 maximal jedoch 50 Iterationen ausreichen. Dieses Verhalten sollte sich verbessern lassen, wenn man die Divergenz des Stroms  $\mathbf{div} j_t$  über eine noch größere Anzahl Gitterstellen diskretisiert, da dann in einem neu entstehenden Konvektionsgebiet die Stützstellen nicht einzeln von radiativ zu konvektiv wechseln, sondern mehrere simultan. Ein nächster Schritt wären 5 anstelle von 3 Gitterpunkten. Dies wäre ein Verfahren höherer Ordnung und müsste bei den anderen Gleichungen äquivalent angewendet werden.

---

---

## *Kapitel 5*

# SIMULATIONEN ZEITABHÄNGIGER KONVEKTION

---

---

In den klassischen Sternentwicklungsrechnungen wurde durch die Mischungswegtheorie die Konvektion immer als zeitunabhängig betrachtet, d.h. die Konvektion wurde als voll entwickelt angenommen, zu jedem Zeitpunkt passte sich das konvektive Geschwindigkeitsfeld instantan an die Struktur des Sterns an, Einschalt- und Abklingvorgänge wurden vernachlässigt. Dies mag für die meisten Phasen der Sternentwicklung vollkommen ausreichend sein, denn in einer Vielzahl der Fälle ist die Zeitskala von mehreren Millionen oder Milliarden Jahren, auf der Entwicklungsprozesse im Stern stattfinden, deutlich größer als die typische konvektive Zeitskala von Tagen bis Monaten. Nicht mehr ausreichend ist dies jedoch, falls die typische dynamische Zeitskala  $\tau_{\text{dyn}}$  vergleichbar wird mit der konvektiven Zeitskala.

$$\tau_{\text{dyn}} \sim \tau_{\text{konv}}.$$

Beispiele für solche Fälle sind z.B. Protosterne, Protoplaneten oder pulsierende Sterne. Auf ein weiteres Beispiel, den Heliumflash, soll in diesem Kapitel noch eingegangen werden.

In Protosternen und Protoplaneten können sich ursprünglich radiative Zonen durch gravitative Kontraktion soweit erhitzen, dass ein konvektives Gebiet entsteht. Schließlich entstehen Sterne aus isothermen und damit konvektionsfreien Gaswolken, enden aber in einem Zustand, in dem sehr wohl wesentliche Teile des Sterns konvektiv dominiert sind. In diesem Fall benötigt man also eine zeitabhängige Konvektionstheorie, die in der Lage ist, die Entstehung von Konvektion aus einem vollständig radiativen

Gebiet, d.h. mit verschwindender konvektiver Geschwindigkeit ( $v_c = 0$ ) bis hin zu einem voll etablierten Geschwindigkeitsfeld zu beschreiben. Hierzu sind nicht alle zeitabhängigen Konvektionstheorien in der Lage. Manche, wie z.B. die Stellingwerfsche Theorie (Stellingwerf 1982a,b, 1984a,b) benötigt eine Saatkonvektion (vgl. hierzu auch Baker (1987)).

In pulsierenden Sternen dagegen geht es weniger darum, wie sich Konvektion vollkommen neu entwickelt, sondern darum, wie die Konvektion und damit insbesondere auch der konvektive Transport von Strahlung den sich ständig verändernden Bedingungen im Stern bzw. der Sternhülle hinterherhinkt und diese wiederum beeinflusst. In pulsierenden Sternen interagieren die mittlere Bewegung auf großen Skalen und die turbulente konvektive Bewegung. Ein klassisches Beispiel für solche pulsierenden Sterne sind die Cepheiden. In ihnen wechselwirkt der Strahlungsfluss aus dem Inneren des Sterns mit der Materie in den äußeren Schichten. Ist die Abhängigkeit der Absorptionskoeffizienten von Temperatur und Dichte in diesem Bereich geeignet, so kommt es zu einer oszillierenden Instabilität. Dies ist jedoch nur der Fall, wenn auch der wesentliche Teil der aus dem Sterninneren herausströmenden Energie durch Strahlung transportiert wird. Ist die Konvektion so effektiv, daß sie den größten Teil des Energietransports übernimmt, so wird dadurch die Kopplung der Materie an den Energiefluss geringer und das Oszillationsverhalten wird wesentlich beeinflusst.

Zumindest in kühlen Cepheiden liegen jedoch ausgedehnte Konvektionszonen in gerade den Bereichen vor, die für die Oszillation wichtig sind. Dies hat zur Folge, dass gerade für diese Fälle die Aussagen über das Oszillationsverhalten mit großen Unsicherheiten behaftet waren. Insbesondere konnte die Grenze des kühlen, also roten Endes des Cepheidenstreifens im Hertzsprung-Russel-Diagramm mit Hilfe der MLT nicht genau vorhergesagt werden (vgl. z.B. Baker & Kippenhahn (1965)). Auch in der Mitte des Cepheidenstreifens ergaben sich in der Beziehung zwischen Pulsationsgeschwindigkeit und Leuchtkraft Abweichungen zwischen den beobachteten und vorhergesagten Werten (Castor 1971). Aufgrund der großen Bedeutung, die pulsierende Sterne wie die Cepheiden für die Astrophysik haben, ist es also nicht verwunderlich, dass die ersten Modelle für zeitabhängige Konvektion für pulsierende Sterne entwickelt wurden. Besonders interessant sind diese zeitabhängigen Modelle vor dem Hintergrund neuerer Beobachtungen, die deutlich genauere Lichtkurven ermöglichen. Eine Übersicht über verschiedene zeitabhängige Konvektionsmodelle findet sich z.B. in Baker (1987).

Eine der ersten Arbeiten, die ein zeitabhängiges Konvektionsmodell verwendete, war ein Einzonenmodell (Gough 1967), später wurde es auf linearisierte radiale Pulsationen angewendet (Baker & Gough 1979). Man fand, dass Modelle am roten Ende des Instabilitätsstreifens durch die Konvektion stabilisiert werden. Weitere Arbeiten sind (Unno 1967), (Unno 1977) und (Unno 1979), die von (Gonczy & Osaki 1980) und (Gonczy 1982) auf Cepheiden angewendet wurden. Eine Theorie ähnlich der von Castor wurde von Da-run Xiong aufgestellt (Xiong 1977) und in (Xiong 1980) auf variable Sterne angewendet. Letztendlich müssen noch die Arbeiten von Stellingwerf genannt werden (Stellingwerf 1982a). Stellingwerf veröffentlichte eine Reihe pulsie-

render Sternmodelle mit Konvektion. Seine Konvektionstheorie ist ein Vorläufer der in der vorliegenden Arbeit untersuchten Kuhfußtheorie.

Diese Theorie wurde, nachdem die in Kapitel 3.7 besprochenen Verbesserungen angebracht wurden, von M. Feuchtinger und G. Wuchterl auf pulsierende Sterne angewendet. Diese Arbeiten, die im Formalismus der Strahlungshydrodynamik durchgeführt wurden, beschäftigen sich vor allem mit RR-Lyrae-Sternen, die in zwei Moden pulsieren. In einer ersten Arbeit (Feuchtinger 1998) erhielt man eine stabile Lösung mit Parametern, die im Einklang mit den Beobachtungen stehen. In einer weiteren Arbeit (Wuchterl & Feuchtinger (1998)) wird aufgezeigt, dass sich das Modell im protostellaren Kollaps plausibel verhält und für RR Lyrae Sterne quantitativ korrekt ist. Die gesamte physikalische und numerische Beschreibung des sogenannten Wiener nicht-linearen Modells findet sich in Feuchtinger (1999a) und wird in Feuchtinger (1999b) angewendet, um detaillierte Leuchtkraft und Geschwindigkeitskurven zu errechnen und sowohl mit den Ergebnissen anderer Rechnungen als auch mit Beobachtungen zu vergleichen.

Während andere Autoren das Kuhfußmodell für ihre Arbeiten verwendeten, hat Kuhfuß selbst jedoch keine Arbeiten veröffentlicht, aus denen hervorgeht, wie sich ein zeitabhängiges Konvektionsmodell im Rahmen einer vollständigen Sternentwicklungsrechnung verhält. In dieser Arbeit werden die ersten existierenden Rechnungen hierzu präsentiert.

## 5.1 ANSPRINGVERHALTEN - DIE HE-KONVEKTIONS-ZONE

Als Beispiel für das Anspringen von Konvektion unter realistischen Bedingungen, also für das Entstehen einer neuen Konvektionszone in einem zuvor radiativen Gebiet, soll hier das Entstehen eines konvektiven Kerns während des zentralen Heliumbrennens betrachtet werden. Dies soll an einem Stern mit  $5M_{\odot}$  aufgezeigt werden. Nachdem der Vorrat an Wasserstoff im Zentrum erloschen ist und somit im Zentrum keine Energie mehr produziert wird, verschwindet auch die Konvektionszone im Kern. Das ehemals konvektive Gebiet wird radiativ. Der Stern wandert nun im Hertzsprung-Russel-Diagramm weg von der Hauptreihe hin zu den roten Riesen. Dabei kontrahiert der Kern, die Temperatur im Zentrum steigt und damit auch die Reaktionsraten des He-Brennens. Schließlich wird durch die He-Brennprozesse im Zentrum wieder soviel Energie gewonnen, dass diese nicht alleine durch Strahlung abtransportiert werden kann. Es entsteht wieder eine Konvektionszone im Zentrum.

In der vorliegenden Rechnung wurde der Stern bis knapp vor das Einsetzen dieser Konvektionszone entwickelt. Die sich ergebende Sternstruktur wurde als Ausgangspunkt für zwei unterschiedliche Rechnungen verwendet, die beide mit einer hohen zeitlichen Auflösung, also mit kleinen Zeitschritten durchgeführt wurden. Zum einen wurde das Kuhfußmodell in der Eingleichungsversion verwendet, wie es in Gl. 4.4

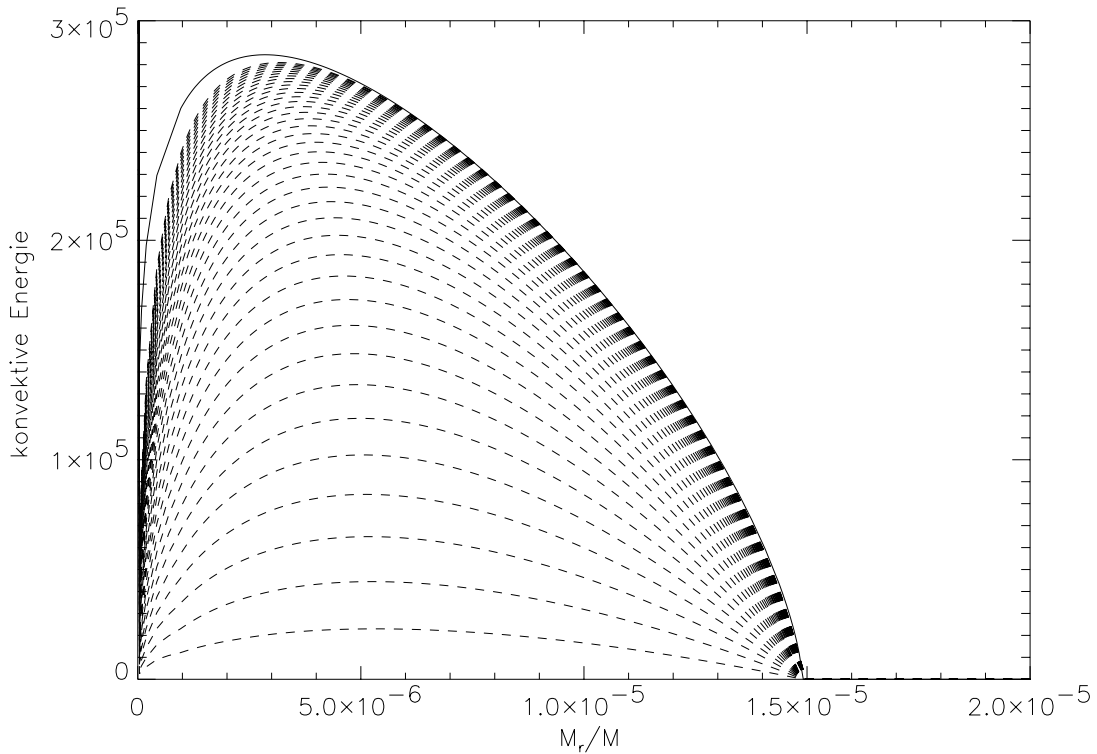


Abbildung 5.1: Entstehung einer zentralen Konvektionszone in einem  $5M_{\odot}$  Stern. Aufgetragen ist die konvektive Energie  $\omega$  gemäß einer zeitunabhängigen Rechnung (durchgezogene Linie) und einer zeitabhängigen (gestrichelt). Der zeitliche Abstand zwischen zwei zeitabhängigen Profilen ist jeweils 22 Tage. Der Zeitraum, bis die zeitabhängige Rechnung mit der zeitunabhängigen weitgehend übereinstimmt, ist etwa 3 Jahre.

beschrieben ist. Zum anderen wurde der zeitabhängige Term auf Null gesetzt:

$$\partial_t \omega = 0.$$

Beide Rechnungen wurden weitergeführt, bis beide konvektive Geschwindigkeitsfelder nahezu dieselbe Gestalt hatten. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.1 dargestellt. Aufgetragen ist die konvektive kinetische Energie über der Massenkoordinate. Hierbei ist der konvektive Kern noch recht klein. Er wächst im Folgenden, jedoch auf einer Zeitskala von einigen hundert bis tausend Jahren, was deutlich größer ist, als die konvektive Zeitskala von einigen Wochen und als die Einstellzeit zur Erreichung des stationären Zustandes von ca 3 Jahren. Somit hat zeitabhängige Konvektion auf diese Phase der Sternentwicklung keine Auswirkung, sie dient lediglich der Demonstration, dass zeitabhängige Phänomene in realistischen Sternumgebungen behandelt werden können. Ein zeitabhängiges Verhalten der Konvektion ist dagegen immer dann wichtig, wenn sich der gesamte Stern, oder einzelne Gebiete des Sterns etwa vergleich-

bar schnell verändern wie die konvektive Geschwindigkeit. Ein Beispiel für solch eine schnelle Veränderung eines Teilgebiets eines Sterns ist der sogenannte Heliumflash. Er wird im folgenden Abschnitt behandelt.

## 5.2 DER HELIUMFLASH - ERSTE RECHNUNGEN

Der sogenannte Heliumflash ist eine Erscheinung, die in einer späten Entwicklungsphase bei leichten Sternen (bis  $0.8 - 2.2M_{\odot}$ ) auftritt. Nach dem Ende des Hauptreihenbrennens liegt im Sterninneren ein isothermer Heliumkern vor, umgeben von einer wasserstoffbrennenden Schale. Im HRD befindet sich der Stern dabei auf dem roten Riesenast. Während bei schwereren Sternen durch Kontraktion des Kerns die Temperatur in demselben steigt und schließlich die für das Zünden des Heliumbrennens nötige Temperatur erreicht wird, liegt in leichten Sternen ein Kern vor, dessen thermische Struktur durch ein entartetes Elektronengas bestimmt wird. Dem Gravitationsdruck wird nun nicht durch den thermischen Druck eines idealen Gases entgegengewirkt, sondern vor allem durch den Fermidruck der Elektronen. In einem solchen entarteten Gas ist jedoch die Zustandsgleichung nicht wie bei einem idealen Gas weiter von der Temperatur abhängig, sondern es gilt

$$P \sim \rho^{(5/3)}. \quad (5.1)$$

Die  $P$ ,  $\rho$  und die  $T$ -Schichtung sind entkoppelt, durch eine Kontraktion des Kerns steigen zwar der Druck und die Dichte, nicht aber die Temperatur. Die Temperatur des Kerns ist wegen  $\partial L/\partial r \approx 0$  identisch mit der Temperatur der Schale. Somit kann auch die für den Beginn des Heliumbrennens nötige Temperatur nicht erreicht werden, das Heliumbrennen wird durch die Kernentartung zunächst verhindert.

Berücksichtigt man zudem die Energieverluste durch Erzeugung von Neutrinos im dichten Kern, so stellt man fest, dass das Maximum der Temperatur nicht im Zentrum liegt. Die Energie  $\epsilon_{\nu}$ , die bei der Bildung von Neutrinos verbraucht wird steigt mit der Dichte und somit mit der Nähe zum Zentrum. Neutrinos wechselwirken kaum mit der Materie im Stern und transportieren, sobald sie im dichten Inneren gebildet wurden, ihre Energie nach außen. Somit wird das Zentrum stärker gekühlt als weiter außen liegende Schichten. Es liegt somit kein exakt isothermer Kern vor, sondern die Temperatur hat ihr Maximum in einer konzentrischen Schale innerhalb des Heliumkerns. Während der weiteren Entwicklung brennt lediglich die Wasserstoffschalenquelle und frisst sich immer weiter nach außen, was zu einem vergrößerten Heliumkern und somit aufgrund der Kernmasse-Leuchtkraft-Beziehung zu einer höheren Leuchtkraft und Temperatur der Schalenquelle und damit auch des entarteten Kerns führt. Dies setzt sich fort, bis die Temperatur groß genug ist, dass die ersten Heliumbrennvorgänge stattfinden. Die Kernmasse-Leuchtkraftbeziehung ist eine aus numerischen Rechnungen oder vereinfachten analytischen Modellen abgeleitete Näherung. Für kleine Kernmassen  $M < 0.5M_{\odot}$  gilt

$$L \sim M_c^{\nu} \quad \nu \approx 8 \quad (5.2)$$

Für Sterne mit größeren Massen wird diese Beziehung durch den Strahlungsdruck modifiziert und ist nicht mehr in einer einfachen Form angebar.

Nun ist jedoch das nukleare Brennen in einem entarteten Gebiet thermisch instabil. Das heißt: wird durch Brennvorgänge Energie erzeugt, so kann diese Energie nicht zur Expansion verwendet werden, denn in der Zustandsgleichung sind ja Dichte und Druck nicht von der Temperatur abhängig. Die erzeugte Energie führt also zu einer Erwärmung und zu einem Temperaturanstieg. Da jedoch die Reaktionsraten der thermonuklearen Prozesse sehr empfindlich von der Temperatur abhängen, wird durch die erhöhte Temperatur nur noch mehr Energie erzeugt, was zu noch höheren Temperaturen führt. Da dieser Anstieg in Temperatur und Leuchtkraft auf einer sehr kurzen Zeitskala geschieht, spricht man von einem Flash. Dieser Effekt setzt sich soweit fort, bis die Fermikante aufgeweicht und die Entartung des Kerns aufgehoben wird. Sobald dies geschehen ist, kann die im Flashbereich konzentrierte Energie zur Expansion verwendet werden. Das Kerngebiet expandiert, worauf in Folge die Wasserstoffschalenquelle erlischt. Im Heliumflash kann im Maximum eine Leuchtkraft bis zur  $10^{11}$ -fachen der Sonnenleuchtkraft umgesetzt werden (z.B. Thomas (1967)). In einer neueren Arbeit, in der Schlattl den Helium-flash an Population-III Sternen untersucht, werden z.B. Leuchtkräfte im Bereich des  $10^{10}$ -fachen gefunden (Schlattl et al. (2001)). Dies entspricht in etwa dem Wert von  $10^8$  roter Riesen oder  $10^{10}$  Sonnen, somit etwa  $\frac{1}{10}$  einer gesamten Galaxie. Allerdings bestehen diese Leuchtkräfte lediglich für einige wenige Stunden und sind an der Oberfläche kaum sichtbar. In und oberhalb dieser brennenden Zone entsteht ein konvektives Gebiet, das mit der im Flash produzierten Energie anwächst und Energie und Material nach außen transportiert.

Im Phänomen des Flashes bestehen einige Probleme, die einer genaueren Untersuchung bedürfen:

- Wie schnell kann die Konvektion dem Flash folgen, welche Auswirkungen hat eine zeitabhängige Konvektionstheorie? Das heißt, wie schnell transportiert die Konvektion Energie nach außen? Ein langsamerer Transport würde den Runaway verstärken.
- Kann die im Flashgebiet sich bildende Konvektionszone sich soweit ausdehnen, dass sie die Schalenquelle und damit das wasserstoffhaltige Gebiet erreicht? Dies würde zu einem Mischen von Wasserstoff in das ausgebrannte Gebiet und dort zu einem schlagartigen Verbrennen desselben führen. In diesem Zusammenhang wäre auch interessant, wie sich eine Vergrößerung des konvektiven Gebiets durch konvektives Überschießen auswirkt.

### 5.2.1 *Der Heliumflash in Population-III-Sternen*

In unserer Arbeit wurden Auswirkungen einer zeitabhängigen Konvektionstheorie auf den Heliumflash in Population-III-Sternen untersucht. Dies hat den Grund, dass dort die Ausdehnung der Konvektionszone und das damit verbundene Mischen von Protonen in das heliumbrennende Gebiet von besonderem Interesse ist. Population III



Sterne sind Sterne der allerersten Generation. Sie bildeten sich kurz nach dem Urknall aus primordialer und damit nahezu metallfreier Materie. Man erwartet von solchen Sternen eine Fülle von Informationen über das Universum kurz nach dem Urknall. So wurden denn auch größere Anstrengungen unternommen, um solche metallarmen Sterne zu finden. Einer der ersten war Bond (1980), der allerdings nur einen geringen Anteil extrem metallarme Sterne fand. Die Anzahl entdeckter metallarmer Sterne wurde deutlich erhöht, als man großräumige Durchmusterungen durchführte, auch wenn all diese Sterne einen höheren Metallgehalt aufwiesen, als man von Population-III-Sternen als metallfreie Sterne erwartet (Beers et al. 1992). Um diese Eigenschaften von Population-III-Sternen zu untersuchen, ist es somit von Bedeutung, inwieweit zum einen verbranntes Material aus dem Inneren an die Oberfläche gemischt wird und somit die Oberfläche verändert. Zum anderen muss man sich überlegen, inwieweit die Oberfläche durch Akkretion von metallreicher Materie aus der Umgebung verschmutzt worden sein kann.

Nachdem es erst vor wenigen Jahren gelang, den Flash mit der MLT durchzurechnen z.B. (Wagenhuber 1996), finden sich Rechnungen, die den Heliumflash in Population-III-Sternen und die anschließende Phase behandeln in (Schlattl et al. 2001). Hier wird die Entwicklung durch den Heliumflash verfolgt, bis das Maximum der Flashleuchtkraft überschritten ist und schließlich die Flashkonvektionszone Protonen in das Innere mischt, was einen Wasserstoff-flash zur Folge hat.

### 5.2.2 Ergebnisse numerischer Simulationen

Wir verwenden den Garching Sternentwicklungscode, wie er in Kapitel 4 beschrieben wird. Details zur Anwendung auf Population-III-Sterne finden sich auch in Schlattl et al. (2001). Den dort beschriebenen Rechnungen wird in diesem Abschnitt gefolgt, lediglich die Konvektionstheorie wird durch eine zeitabhängige Theorie, nämlich das Eingleichungsmodell der Kuhfußschen Theorie ersetzt. Wir starten die Rechnungen einige Zeit vor dem Beginn des Heliumflashes, d.h. vor dem Anstieg der Heliumleuchtkraft und weit vor dem Einsetzen der Flashkonvektionszone. Von diesem Zeitpunkt an wird die Rechnung einmal mit der vollen Zeitabhängigkeit gerechnet, d.h. wie in Gl. 3.20 formuliert, und zum Vergleich zeitunabhängig, d.h. es wird

$$\partial_t \omega = 0 \tag{5.3}$$

gesetzt.

Die Konvektion ist ein Transportmechanismus, der Energie mit sich führt. So wird durch die konvektive Zone Energie aus dem Zentrum des Flashgebiet in seine Randschichten transportiert. Geht man nun von einer zeitunabhängigen Theorie über zu einer zeitabhängigen, so kann sich das konvektive Geschwindigkeitsfeld nicht instantan an die sich schnell entwickelnden Bedingungen des Sterns anpassen. In einem Gebiet, in dem die treibenden Terme rasant anwachsen, wie dies im Gebiet des Heliumflashes der Fall ist, bedeutet dies, dass die konvektiven Geschwindigkeiten, wie sie sich

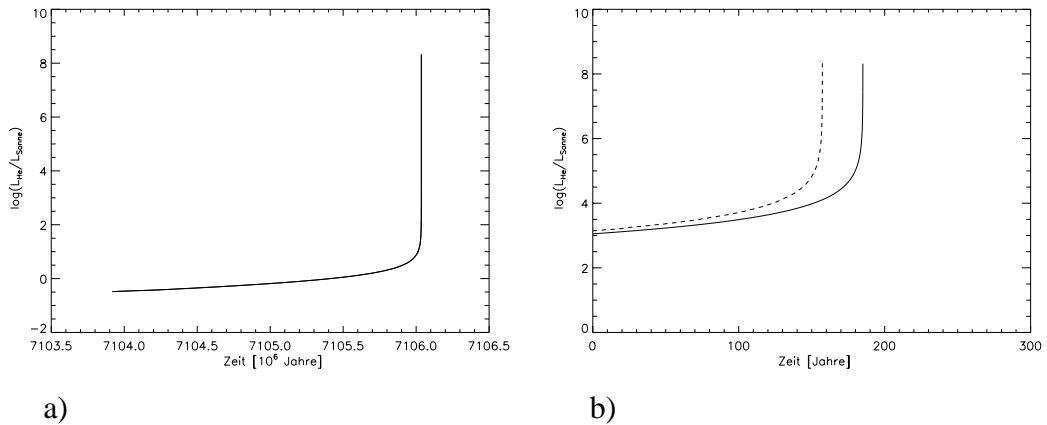


Abbildung 5.2: Der Anstieg der Heliumleuchtkraft im Heliumflash für ein Modell mit zeitabhängiger (gestrichelt) und mit zeitunabhängiger Konvektion (durchgezogen) im Vergleich. In Abb. a) findet sich der Anstieg beginnend weit vor dem Einsetzen der Konvektionszone, in Abb. b) sind für beide Modelle die letzten 200 Jahre des Anstiegs aufgetragen.

in einer zeitabhängigen Theorie ergeben, geringer sind als in einer zeitunabhängigen Theorie. Dies bedeutet jedoch auch, dass der Energietransport in einer zeitabhängigen Theorie geringer ist als in einer zeitunabhängigen, es wird also weniger Energie vom Zentrum des Flashgebietes in die Außenbereiche transportiert. Somit kann die Temperatur im Flashgebiet stärker und schneller ansteigen, als nach einer zeitunabhängigen Theorie zu erwarten wäre.

In einer zeitabhängigen Theorie wird also der Heliumflash deutlich schneller vonstatten gehen als in einer zeitunabhängigen. Dieses Ergebnis sieht man in Abb. 5.2. Unter a) findet sich der Anstieg der Heliumleuchtkraft bis zum Abbruch der Rechnung. Unter b) ist der letzte Zeitabschnitt der Rechnung, die letzten 200 Jahre vergrößert aufgetragen. Die Leuchtkraft steigt im zeitabhängigen Fall schneller an als im zeitunabhängigen Fall. Dies hat auch eine Auswirkung darauf, wie schnell sich die konvektiven Gebiete ausdehnen. In Abb. 5.3 sieht man das Entstehen und Ansteigen der Flashkonvektionszone. Auch hier zeigt sich wieder, dass im zeitabhängigen Fall die Konvektionszone zu einem früheren Zeitpunkt deutlich weiter ausgedehnt ist als in einem zeitunabhängigen Fall. Dies ist nicht nur beschleunigtes, im wesentlichen aber gleiches Ablaufen des Flashs, sondern zu einem vergleichbaren Zeitpunkt, zu dem in beiden Fällen eine Heliumleuchtkraft von  $\log L_{\text{He}}/L_{\odot} = 8.3$  vorliegt, ist im zeitabhängigen Fall der Heliumgehalt im Zentrum des Flashgebiets um 0.68% abgesunken, während im zeitunabhängigen Fall, also zu einem späteren Zeitpunkt bereits 0.71% verbraucht sind. Da der Flash im zeitunabhängigen Fall langsamer abläuft, also eine vergleichbare Entwicklungsphase erst später erreicht, ist zu diesem Zeitpunkt bereits mehr von seinem Heliumvorrat verbraucht.

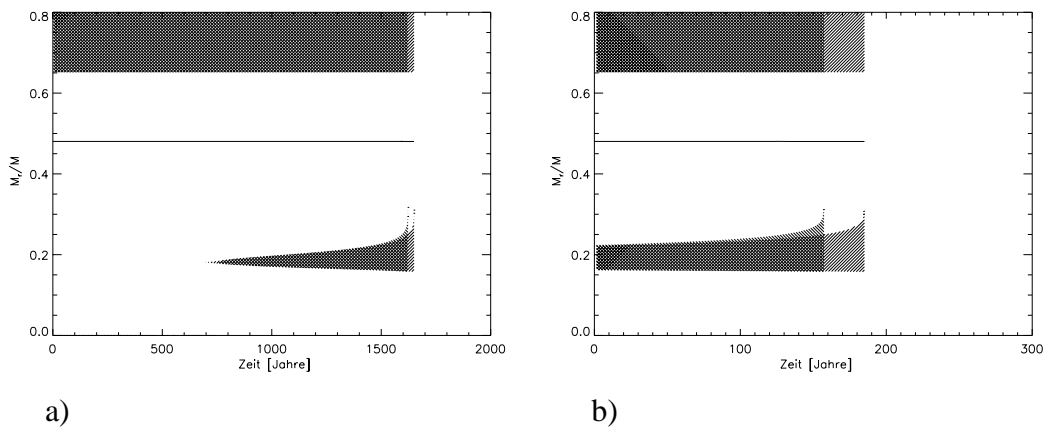


Abbildung 5.3: Aufgetragen sind die Konvektionszonen der Hülle im oberen Teil der Hülle, sowie die Flash-Konvektionszone. In Abb. a für den gesamten Zeitraum bis zum Abbruch der Rechnungen, in Abb. b für die letzten 200 Jahre. Zusätzlich ist noch die Lage der Wasserstoff-Schalenquelle eingezeichnet.

Leider treten in den vorliegenden Rechnungen bei höheren Leuchtkräften  $\log(L/L_{\text{Sonne}}) > 10^6$  numerische Probleme auf, die schließlich zum Abbruch der Rechnungen führen. Dies ist nicht weiter erstaunlich, da es ja auch erst seit wenigen Jahren möglich ist, den He-Flash mit der wesentliche stabileren MLT zu rechnen. Insofern können die hier präsentierten Ergebnisse lediglich Hinweischarakter haben, und es ist noch weitere Arbeit erforderlich, um die vorhandenen Effekte einer zeitabhängigen Konvektionstheorie auf den Heliumflash zu untersuchen. Hier wurde das Beispiel lediglich gewählt, um zu demonstrieren, dass in einigen Phasen der Sternentwicklung eine zeitabhängige Konvektionstheorie Auswirkungen auf die Entwicklung des Sterns haben kann und dass die Beschreibung dieser Phänomene mit einem Konvektionsmodell wie dem Kuhfußmodell prinzipiell möglich ist.



---

---

## *Kapitel 6*

# SIMULATIONEN NICHTLOKALER KONVEKTION

---

---

In der Einleitung wurden bereits einige Gründe aufgeführt, warum eine lokale Betrachtung der Konvektion inkonsistent und unphysikalisch ist. Insbesondere wurde die Begrenzung des konvektiven Gebiets durch das Schwarzschildkriterium kritisiert. Weitere Kritikpunkte an einer lokalen Theorie wie der MLT sind, dass in diesen Theorien durch Vorgabe einer bestimmten Skalenlänge der Konvektion  $\Lambda$  auch eine gewisse räumliche Auflösung vorgegeben ist. Bezieht man diese Skalenlänge jedoch wie allgemein üblich auf die Druckskalenhöhe  $H_p$ , so stellt sich heraus, dass besonders bei kleineren konvektiven Kernen, wie sie sich in Sternen mit Massen  $< 10M_{\odot}$  finden, diese Skalenlänge vergleichbar mit oder gar größer als die Ausdehnung des konvektiven Gebiets ist. Man geht also davon aus, dass sich die konvektiven Elemente über eine bestimmte Strecke  $\Lambda$  bewegen, findet aber im Nachhinein, dass die Bewegung der Elemente durch die konvektiven Grenzen soweit beschränkt ist, dass sie sich eben nicht über die volle Länge  $\Lambda$  bewegen können.

In dieser Arbeit wurde eine Theorie vorgestellt, die versucht die Nichtlokalität realistisch zu beschreiben. Als Resultat zeigte sich in erster Linie eine Vergrößerung des konvektiven Gebiets über die Schwarzschildgrenzen hinaus, ferner eine Modifikation der Geschwindigkeit im instabilen Bereich. In den folgenden Abschnitten werden weitere Hinweise darauf zusammengefasst, dass solch ein Überschießen in Sternen wirklich stattfindet. Diese Hinweise sind teils beobachtender Natur, teils stammen sie aus Computersimulationen und teils aus experimentellen Arbeiten im Labor. Des weiteren soll dargestellt werden, welche Konsequenzen eine solche Vergrößerung des konvek-

tiven Gebiets für die Entwicklung und die Struktur eines Sterns hat. Ferner wollen wir die allgemeine Struktur einer solchen Überschießzone diskutieren, und diese im speziellen anhand einer Rechnung mit dem Konvektionsmodell von R. Kuhfuß aufzeigen.

In einem weiteren Abschnitt soll die Ausdehnung der Überschießzone diskutiert werden. Als Überschießzone wird das Gebiet bezeichnet, das über die Schwarzschildgrenze hinaus chemisch durchmischt wird. Hierbei sind sowohl Eichungen an Beobachtungen, als auch eine Abschätzung aus analytischen Überlegungen zu nennen. Des weiteren soll dargestellt werden, von welchen Faktoren die Größe dieser Zone abhängt.

Letztendlich soll das nichtlokale Modell von R. Kuhfuß auf verschiedene Problemfälle angewendet, und mit den Rechnungen anderer Autoren verglichen werden.

## 6.1 DAS KONVEKTIVE ÜBERSCHIESSEN

### 6.1.1 Konsequenzen der Nichtlokalität

Liegt in einem Stern im Zentrum eine konvektive Zone vor, so deckt sich dieses Gebiet wesentlich mit dem Bereich, in dem durch Kernfusionsprozesse Energie produziert wird. Dies betrifft z.B. auf der Hauptreihe Sterne mit Massen größer als etwa  $1.2M_{\odot}$ . Innerhalb einer Konvektionszone wird die Materie durch die konvektiven Strömungen sehr gut durchmischt. Dies geschieht auf einer Zeitskala von einigen Monaten, was deutlich kleiner ist als die nukleare Zeitskala von mindestens  $10^6$  Jahren. Das heißt, für die nuklearen Brennvorgänge ist die Konvektionszone homogen durchmischt und der gesamte Brennstoffvorrat innerhalb der Konvektionszone steht für Brennvorgänge zur Verfügung.

Fließen nun konvektive Strömungen deutlich über die Schwarzschildgrenze hinaus, so werden auch die Gebiete jenseits der Schwarzschildgrenze chemisch homogen durchmischt. Es kann also z.B. Brennstoff aus Bereichen, die ansonsten für Brennvorgänge unerreichbar wären, in Gebiete gemischt werden, in denen Brennvorgänge stattfinden. Dies bedeutet, dass für Kernfusionsprozesse ein größerer Brennstoffvorrat zur Verfügung steht.

Dies hat mehrere Konsequenzen. Zum einen erhöht sich durch den größeren Brennstoffvorrat auch die Lebensdauer der entsprechenden Entwicklungsphase. Abhängig davon, wie groß die Überschießzone, also das zusätzlich durchmischte Gebiet angenommen wird, kann sich die Lebensdauer auf der Hauptreihe um einen signifikanten Bruchteil erhöhen. Genauer hierzu wird noch in Kapitel 6.5.3 diskutiert.

Ist das Gebiet, das Brennstoff zur Verfügung stellt, vergrößert, so verbleibt nach dem Ende der Brennvorgänge auch ein vergrößerter Bereich zurück, in dem der Brennstoffvorrat verbraucht ist. Nach dem Ende eines Brennvorgangs im Zentrum, wie dem zentralen Wasserstoffbrennen, verbleibt an der Grenze des ausgebrannten Gebiets eine Schalenquelle zurück. In dieser finden innerhalb einer dünnen Schicht weitere Brennvorgänge statt. In einem Stern, in dem das ausgebrannte Gebiet durch Überschießen vergrößert ist, liegt diese Schalenquelle somit auch weiter außerhalb als in einem Stern,

in dem das Schwarzschildkriterium die Grenzen der Konvektion vorgibt. Diese Strukturänderungen führen unter anderem zu einer veränderten Position im HRD.

Nach dem Ende des zentralen Wasserstoffbrennens und der Bildung einer Schalenquelle kontrahiert der Kern des Sterns, und die Temperatur im Zentrum steigt, bis sie hoch genug ist, damit Heliumbrennen beginnen kann. Auch hier entsteht wieder eine zentrale Konvektionszone, in der konvektives Überschießen stattfinden kann. Dieses He-Brennen findet in einer veränderten Umgebung statt, da ja der wasserstofffreie Kern vergrößert ist und die Schalenquelle weiter außerhalb liegt. Diese veränderten Zündbedingungen können zu beobachtbaren Effekten führen. Genauer hierzu wird in Kapitel 6.5.6 untersucht.

Alternativ können Sterne auch Konvektionszonen besitzen, die sich vom äußeren Rand des Sterns bis in das Innere erstrecken. Im Fall von Überschießen können Elemente aus weiter innen liegenden Schichten an die Oberfläche gemischt und dort im Spektrum des Sterns beobachtet werden. Durch ein Überschießen über die Schwarzschildgrenze hinaus können tiefere Schichten des Sterns von der Konvektion erreicht werden. Unter Umständen kann dies dazu führen, dass chemische Elemente an der Oberfläche beobachtet werden, die ohne konvektives Überschießen nicht zu sehen wären (vgl. Kapitel 6.6).

### 6.1.2 Evidenz für konvektives Überschießen

In der Natur können viele Beispiele für konvektives Überschießen gefunden werden. Einige davon werden in Moore (1967) und Massaguer (1990) aufgeführt. Ferner werden einige Beispiele in Deardorff et al. (1969) zusammengefasst:

#### **Experimente im Labor**

Ein einfaches Experiment zur Untersuchung der Konvektion und des konvektiven Überschießens im Labor kann durchgeführt werden, wenn man ausnützt, dass Wasser ein Dichtemaximum bei  $4^{\circ}\text{C}$  besitzt. Hierfür reicht es, ein Gefäß mit Wasser an der Unterseite mit Eis zu kühlen. Dieses sogenannte Eiswasserexperiment wurde von Townsend (1966), Furomoto & Rooth (1961) und von Adrian (1975) studiert. Man kann beobachten, dass Materieelemente aus dem instabilen Gebiet im unteren Bereich des Versuchsgefäßes in den weite oben liegenden stabilen Bereich hineinströmen.

Eine andere Möglichkeit ist, eine stabile Schichtung von unten zu erhitzen, während sie auf der Oberseite auf konstanter Temperatur gehalten wird. Ein solches Experiment wurde von Deardorff et al. (1969) durchgeführt. In dem Experiment von Deardorff wurde destilliertes Wasser in einem Zylinder mit einem Durchmesser von 54.8cm und eine Höhe von 35.5cm gefüllt. Das Wasser wurde von unten erhitzt und auf der Oberseite gekühlt, die Temperatur im Inneren des Zylinders wurde gemessen, indem ein Widerstandsdraht durch den Zylinder gespannt wurde. Ein ähnliches Experiment am Medium Öl findet sich in Whitehead & Chen (1970). Diese Experimente sind

sehr ähnlich einer atmosphärischen Schichtung, die auf der Erde in den Morgenstunden auftritt, wenn die nächtliche stabile Schichtung der Atmosphäre von unten durch die Sonnenstrahlung erhitzt wird. Über dem Boden bildet sich eine wachsende konvektiv instabile Schichtung heraus, deren konvektive Elemente über die Stabilitätsgrenze hinweg in den stabilen Bereich eindringen können.

In all diesen Untersuchungen fand sich ein konvektives Überschießen, teilweise vergleichbar mit der Dicke der Schichtung. Diese Experimente zeigen auf, dass konvektives Überschießen ein relevanter Effekt sein kann, jedoch muss auf die Unterschiede zwischen diesen Experimenten und den Bedingungen in Sternen hingewiesen werden. So sind z.B. die Ausdehnungen astrophysikalischer Konvektionszonen deutlich größer und somit liegen in diesen auch deutlich größere Reynoldszahlen vor als in den Laborexperimenten.

### Theoretische Vorhersagen und Simulationen

Theoretische Rechnungen zu Thema Überschießen wurden im Rahmen der Bousinesq Näherung von Moore & Weiss (1973) durchgeführt. Hierfür wurde die bereits weiter oben erwähnte Modenentwicklung verwendet (Kapitel 2.3.3). Die Ergebnisse sind, was die Ausdehnung der konvektiven Gebiete betrifft, weitgehend identisch mit den oben aufgeführten Experimenten. Es findet sich ein Überschießen über die Grenze der Konvektion hinaus. Die Dicke der Konvektionszone ist vergleichbar mit der Schichtdicke.

Ähnliche Ergebnisse finden sich, wenn man in der anelastischen Näherung die Kompressibilität zumindest teilweise mit in Betracht zieht. Eine entsprechende Rechnung wurde in Massaguer et al. (1984) beschrieben. Als Ergebnis erhält man sogar eine noch ausgedehntere Überschießzone als in einer Boussinesq Flüssigkeit.

Später ging man dazu über, mehrdimensionale Simulationen zu konvektiven Gebieten durchzuführen. Hierbei ist die Arbeit Hurlburt et al. (1986) zu erwähnen. Vollimplizite zweidimensionale Rechnungen mit einer Adaption der Henyey-Methode finden sich z.B. in Deupree (2000). Dort wird eine Nullalterhauptreihe für Massen zwischen  $1.2M_{\odot}$  und  $20M_{\odot}$  gerechnet. Das Ergebnis ist ein signifikantes Überschießen mit einer Überschießlänge von bis zu  $0.45 H_p$ .

Auf eine dreidimensionale Untersuchung einer Konvektionszone und des konvektiven Überschießens (Muthsam 1999) werden wir noch in Kapitel 6.4 weiter eingehen.

Auch in dieser Arbeit findet sich in allen Rechnungen Überschießen in den stabilen Bereich hinein. In den Fällen, in denen im Inneren der Konvektionszone eine adiabatische Schichtung vorliegt, dehnt sich auch die adiabatische Schichtung bis in den stabilen Bereich aus.

### Konvektives Überschießen und Beobachtungen

In den letzten beiden Jahrzehnten wurden auch einige Untersuchungen durchgeführt, inwieweit Überschießen einen Einfluss auf Sterne, ihre Struktur und ihre Entwicklung



haben kann. Eine der ersten empirischen Untersuchungen zu Überschießen an konvektiven Kernen findet sich in Maeder & Mermilliod (1981). Dort werden Modelle mit Massen zwischen 1 und  $9M_{\odot}$  berechnet. Der konvektive Kern ist durch ein parametrisiertes Überschießgebiet vergrößert. Die Ergebnisse wurden mit Beobachtungen an 34 Sternhaufen verglichen. Es ergab sich, dass die beste Übereinstimmung mit der Sternverteilung im HRD erreicht wird, wenn man die Masse des konvektiven Kerns um 20 – 40% gegenüber einer lokalen Rechnung vergrößert. Dieser Anteil scheint im Bereich von  $2 - 6M_{\odot}$  mit zunehmender Masse anzusteigen.

In weiteren Arbeiten erhielten Mermilliod & Maeder (1985) im Massenbereich von  $9-15M_{\odot}$  ein Überschießen von 0.3 in Einheiten der Druckskalenhöhe an der Schwarzschildgrenze. Stothers & Chin (1991) erhalten für Population-I Sterne, also für Sterne der Scheibenpopulation, eine Überschießdistanz von  $< 0.2H_p$ . Die Ergebnisse hängen i.A. ab von verschiedenen Einflußfaktoren, wie den verwendeten Beobachtungsmaterial, der genauen Formulierung des Überschießens oder den verwendeten Opazitäten.

### 6.1.3 Die Struktur einer Überschießzone

In diesem Abschnitt soll die Struktur einer Überschießzone beschrieben werden. Hierfür ist zunächst einmal eine Begriffsklärung notwendig. In der Literatur wird oft generell von Überschießen gesprochen, unabhängig davon, ob man sich auf chemisches Mischen, oder auf den Transport von Energie und damit auf den resultierenden Temperaturgradienten bezieht. In der Strömungsdynamik unterscheidet man üblicherweise genauer zwischen Überschießen und Penetration. Penetration bezeichnet allgemein die Vergrößerung der konvektiven Zone. Hierbei ist der Bereich mit einer annähernd adiabatischen Schichtung, also mit einer leicht Über- oder Unteradiabatie  $|\nabla - \nabla_{\text{ad}}| \approx 10^{-7}$  oft deutlich größer, als nach dem Schwarzschildkriterium zu erwarten wäre. Ist dagegen die Konvektion ineffizient, so dass von ihr nicht genug Energie transportiert werden kann, um den Temperaturgradienten zu beeinflussen, so liegen dennoch endliche konvektive Geschwindigkeiten vor und das entsprechende Gebiet wird chemisch durchmischt. Insofern bezieht sich der Begriff **Penetration** auf den Energietransport und **Überschießen** auf das Mischen von Material. Im Folgenden soll dem üblicheren Sprachgebrauch gefolgt und in beiden Fällen von Überschießen gesprochen werden. Auf den damit verbundenen Transport von Energie und den resultierenden Temperaturgradienten werden wir dabei an geeigneter Stelle gesondert eingehen.

#### Effektive Konvektion

Zunächst wird der Fall diskutiert, in dem die Konvektion effektiv genug ist, um einen adiabatischen Temperaturgradienten herzustellen. Das heißt, dass der Fluß konvektiver Enthalpie  $j_w$  größer ist als der radiative Fluß  $j_{\text{rad}}$ . Anders ausgedrückt muss die konvektive Zeitskala kleiner sein als die thermische Diffusionszeit, d.h. die Pecletzahl muß deutlich größer sein als Eins.

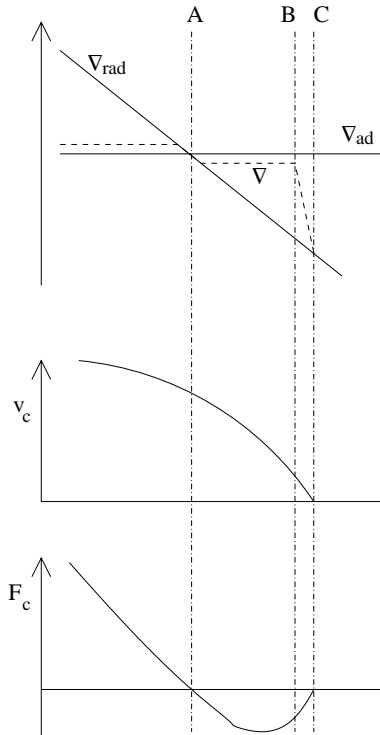


Abbildung 6.1: Die schematische Struktur einer Überschießzone in einem Gebiet effektiver Konvektion. Im oberen Teil der Graphik sind die verschiedenen Gradienten eingetragen. Gestrichelt ist der Temperaturgradient,  $\nabla$ , er ist leicht überadiabatisch im konvektiv instabilen (links von A), leicht unteradiabatisch im konvektiv stabilen (zwischen A und B), und gleicht sich am Rand der Konvektionszone (zwischen B und C) dem radiativen Gradienten an. In der mittleren Abbildung findet sich die konvektive Geschwindigkeit  $v_c$ , in der unteren der konvektive Fluss  $F_c$ , dieser ist in der Überschießzone negativ.

In Abbildung 6.1 ist die Struktur einer solchen Überschießzone schematisch dargestellt. Im obersten Abschnitt finden sich der tatsächliche Temperaturgradient  $\nabla$ , der adiabatische Temperaturgradient,  $\nabla_{\text{ad}}$  und der effektive Temperaturgradient,  $\nabla_{\text{rad}}$ , der sich einstellen müsste, um die gesamte Leuchtkraft ausschließlich durch Strahlung zu transportieren. Im Bereich links der Linie A befindet sich der konvektiv instabile Bereich. Dort ist somit das Schwarzschildkriterium für konvektive Instabilität  $\nabla_{\text{rad}} > \nabla > \nabla_{\text{ad}}$  erfüllt. Die Linie A bezeichnet die Schwarzschildgrenze, an ihr gilt:  $\nabla_{\text{rad}} = \nabla = \nabla_{\text{ad}}$ . Im konvektiv instabilen Bereich ist der Temperaturgradient  $\nabla$  nahe am adiabatischen Gradienten eingezeichnet. In einem konvektiven Kern liegt üblicherweise eine sehr kleine Überadiabatie vor; dort gilt etwa  $(\nabla - \nabla_{\text{ad}}) \approx 1 \cdot 10^{-7}$ . Die konvektive Geschwindigkeit in diesem Bereich, (in der Graphik zu sehen im mittleren Abschnitt), hat einen nichtverschwindenden Wert, ebenso der konvektive Fluss im unteren Abschnitt der Graphik.

Auf der rechten Seite der Schwarzschildgrenze, zwischen den Linien A und B, wird der radiative Temperaturgradient kleiner als der adiabatische  $\nabla_{\text{rad}} < \nabla_{\text{ad}}$ , der tatsächliche Temperaturgradient  $\nabla$  ist ebenfalls kleiner als der adiabatische Gradient. Hier ist das Schwarzschildkriterium nicht erfüllt, die konvektiven Elemente werden durch die Auftriebskräfte gedämpft, es herrscht konvektive Stabilität. Da jedoch die aus dem instabilen Bereich einströmenden konvektiven Elemente aufgrund ihrer Mas-

senträgheit noch immer eine endliche Geschwindigkeit haben, zu sehen im mittleren Abschnitt der Graphik, liegen auch in diesem Bereich noch Materiestöme vor. Zunächst, d.h. nahe am konvektiv instabilen Bereich, ist diese Konvektion ähnlich effektiv wie im Inneren der Konvektionszone. Das heißt, es stellt sich wieder ein nahezu adiabatischer Temperaturgradient ein. Dieser ist jedoch nicht wie im instabilen Bereich leicht überadiabatisch, sondern leicht unteradiabatisch, denn das Schwarzschildkriterium für konvektive Instabilität ist ja nicht erfüllt. Diese leichte Unteradiabatie bedeutet, dass die in die Überschießzone einströmenden konvektiven Elemente leicht kühler sind als ihre Umgebung, während sie im instabilen Bereich leicht wärmer waren. Werden aber nun kühlere Elemente in höherliegende Schichten transportiert, so bewirkt dies einen Strom von Energie in die entgegengesetzte Richtung. Der konvektive Fluß  $F_c$  wechselt also sein Vorzeichen. Dies wird in dem untersten Abschnitt der Abbildung deutlich.

Während die konvektiven Elemente die Überschießzone durchdringen, verlieren sie ihre Energie sowohl durch Auftriebskräfte als auch durch Dissipation. Die konvektive Geschwindigkeit sinkt und wird schließlich so gering, dass sie nicht weiter ausreicht, um Energie effizient zu transportieren. Der Fluss konvektiver Energie wird geringer als der Fluss radiativer Energie. Es kann sich nun kein nahezu adiabatischer Temperaturgradient einstellen, der Temperaturgradient gleicht sich dem radiativen Gradienten an. Dies hat zur Folge, dass die Abbremsung durch Auftriebskräfte sich erhöht und die konvektive Geschwindigkeit verstärkt sinkt. Die Konvektion verschwindet schließlich zur Gänze. Dies entspricht in der Graphik dem Bereich zwischen den Linien B und C.

Durch diese Struktur einer Überschießzone sind verschiedene Grenzen eines konvektiven Gebietes gegeben. Diese Grenzen liegen an unterschiedlichen Stellen und haben jeweils verschiedene Bedeutungen.

**Schwarzschildgrenze** Die Schwarzschildgrenze ist die klassische Grenze einer Konvektionszone. An ihr gilt  $\nabla_{\text{rad}} = \nabla = \nabla_{\text{ad}}$ . Sie bezeichnet die Stelle, an der die Instabilität verschwindet und die beschleunigenden Auftriebskräfte den dämpfenden Abtriebskräften weichen.

**Grenze des adiabatischen Gebiets** Diese Grenze ist gegeben durch das Gebiet, an der die Pecletzahl klein wird  $Pec \approx 1$ . Hier wird der Strom konvektiver Energie vergleichbar mit dem Transport von Strahlung. Sie bezeichnet die Stelle, jenseits der kein wesentlicher Teil der Energie durch Konvektion transportiert wird und bis zu der die Konvektion die Temperaturschichtung beeinflusst.

**Grenze des gemischten Gebiets** Diese Grenze ist gegeben durch das Verschwinden der konvektiven Geschwindigkeit. Durch sie ist das Gebiet begrenzt, das chemisch homogen durchmischt wird. Sie bestimmt bei einem konvektiven Kern wesentlich den für Brennvorgänge zur Verfügung stehenden Brennstoffvorrat.

Während die erste konvektive Grenze mit dem Schwarzschildkriterium leicht zu bestimmen ist und deshalb in der MLT Verwendung endet, sind die beiden letzteren Grenzen

zwar schwerer zu bestimmen, aber eigentlich die für die Struktur und den Aufbau des Sterns wesentlichen. So wird in einigen Arbeiten eine Überschießzone künstlich erzeugt, indem parametrisiert ein zusätzliches Mischen angenommen wird. Die beiden anderen Grenzen der Konvektion fallen in diesen Ansätzen zusammen.

Eine solche Struktur wie oben beschrieben findet sich z.B. am Rand eines konvektiven Kerns. Ein Beispiel, gerechnet mit dem Eingleichungsmodell Gl. 4.4 für einen  $5M_{\odot}$  Stern auf der ZAMS, findet sich in Abb. 6.2. In der Graphik links oben findet sich die konvektive Geschwindigkeit in Einheiten der Schallgeschwindigkeit, die Werte sind über die Massenkoordinaten aufgetragen. Die Schwarzschildgrenze liegt bei etwa  $M_r = 0.26M$ , die konvektive Geschwindigkeit verschwindet jedoch erst bei etwa  $M_r = 0.4M$ . Die Überschießzone, in ihrer maximalen Ausdehnung in Masse, nimmt also etwa 32% des konvektiven Kerns ein. Dies ist jedoch nicht vergleichbar mit Rechnungen, in denen der konvektive Kern klassisch, d.h. lokal gerechnet wurde und in denen lediglich das gemischte Gebiet um einen gewissen Prozentsatz vergrößert wurde. Dies liegt daran, dass sich in unserer Rechnung die Schwarzschildgrenze aufgrund des deutlich ausgedehnteren Gebiets mit adiabatischen Gradienten verschiebt. Näheres hierzu wird in Abschnitt 6.2 diskutiert werden. In der rechten oberen Figur der Abb. 6.2 ist das Verhältnis von konvektivem Fluss zu Gesamtfluss dargestellt. Man sieht, dass im gesamten Bereich etliche Prozent der Energie durch Konvektion transportiert wird. Im konvektiv instabilen Bereich ist der Fluß positiv, die Energie fließt nach außen, im Überschießbereich ist der Fluß negativ, die konvektiv transportierte Energie fließt nach innen.

In den beiden unteren Graphiken ist die Überadiabasie  $\nabla - \nabla_{\text{ad}}$  aufgetragen, jeweils mit einer anderen Skalierung. Links erkennt man, dass im gesamten konvektiven Bereich eine nahezu adiabatische Schichtung vorliegt  $\nabla - \nabla_{\text{ad}} \approx 0$ . Verschwindet die konvektive Geschwindigkeit, so springt der Temperaturgradient nahezu instantan auf den radiativen Wert. In der rechten Abbildung ist wieder die Überadiabasie des Konvektionsgebiets aufgetragen, diesmal allerdings mit einer Skalierung, in der mehr Feinheiten sichtbar werden. Die Überadiabasie hat Werte von etwa  $10^{-7}$ . Sie ist im konvektiv instabilen Bereich positiv, dort wirkt sie als treibende Kraft und Quelle von Konvektion. Jenseits der Schwarzschildgrenze im konvektiv stabilen Bereich liegt eine etwa ebensogroße Unteradiabasie vor. Diese verstärkt sich zum Rand der Zone hin. Im Bereich des Überschießens liegt also eine Dämpfung vor, die Unteradiabasie wirkt als Senke für Konvektion.

In diesem Beispiel ist der Bereich mit ineffektiver Konvektion, wie er oben beschrieben wurde (In Abb. 6.1 das Gebiet zwischen B und C) so klein, dass er numerisch nicht aufgelöst werden kann. Es kann jedoch in einem Stern durchaus auch ein glatter Übergang zwischen einem adiabatischen und einem radiativen Gradienten vorliegen. Hinweise hierzu finden sich z.B. in den Rechnungen von Muthsam, die in Kapitel 6.4 beschrieben werden. Ein weiteres Beispiel für einen glatten Übergang findet sich in Xiong & Deng (2002).

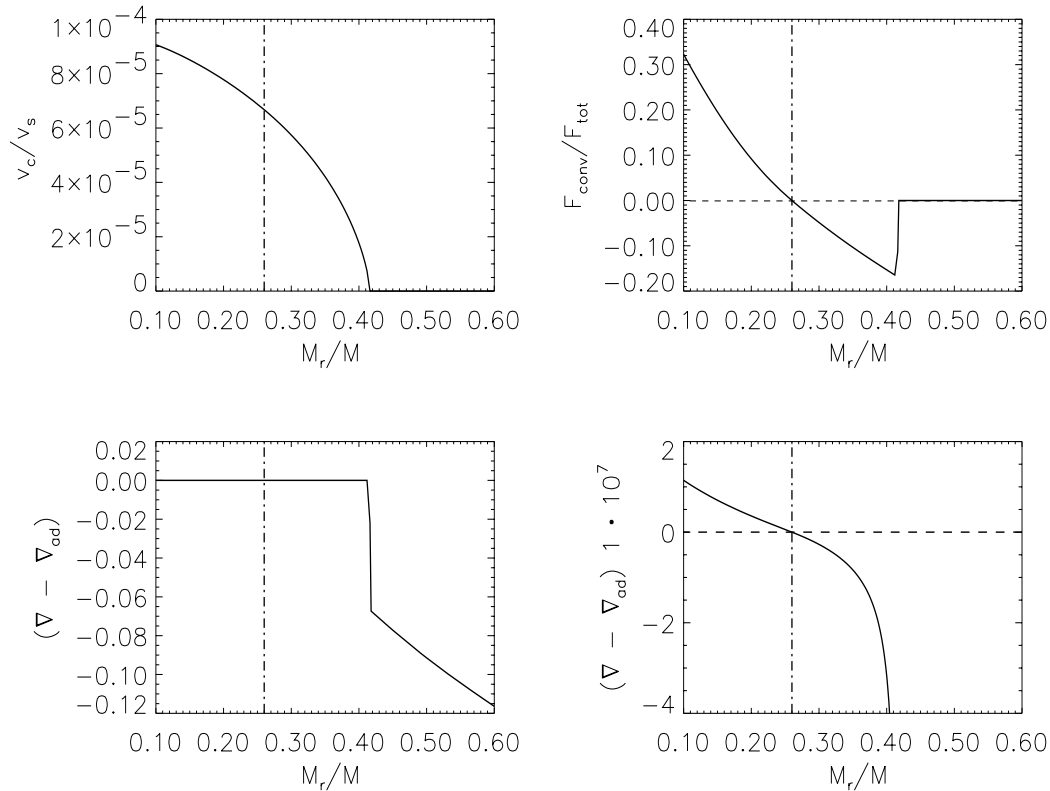


Abbildung 6.2: Die Struktur der Überschießzone eines  $5M_{\odot}$  Sterns auf der Nullalterhauptreihe (ZAMS), also eines Sterns, der noch nichts von seinem Wasserstoff verbraucht hat, berechnet durch das Eingleichungsmodell. Links oben findet sich die konvektive Geschwindigkeit in Einheiten der Schallgeschwindigkeit, rechts oben der Fluss konvektiver Energie. In den beiden unteren Graphiken ist der Grad der Überadiabasie aufgetragen, jeweils mit zwei unterschiedlichen Skalierungen. Die vertikale strichpunktiierte Linie gibt die Lage der Schwarzschildgrenze an.

## 6.2 DIE AUSDEHNUNG DER ÜBERSCHIESSZONE

Weiter oben haben wir erwähnt, dass verschiedene Autoren durch Vergleich mit Beobachtungen unterschiedliche Werte für die Ausdehnung der Überschießzone erhalten haben. In diesem Abschnitt soll zunächst diskutiert werden, was mit dieser Distanz gemeint ist, wie sie durch die Beobachtungen bestimmt werden kann und von welchen Einflussfaktoren sie abhängen kann.

Es wurden bereits verschiedene mögliche Grenzen eines konvektiven Gebiets genannt: die Schwarzschildgrenze, die Stelle, an der Transport von Energie durch Konvektion unwesentlich wird, und die Stelle, an der die konvektive Geschwindigkeit und somit das chemische Mischen verschwindet. Diese Grenzen sind nur in einer lokalen

	Nichtlokales Konvektionsmodell	lokales Konvektionsmodell
Schwarzschildgrenze	0.2224 [ $M_r/M$ ]	0.2596 [ $M_r/M$ ]

Tabelle 6.1: Verschiebung der Schwarzschildgrenze durch ein nichtlokales Konvektionsmodell bei einem  $5M_\odot$  Stern. Die Angaben sind in Massenkoordinaten  $M_r/M$ . Zum Vergleich wurde ein lokales Modell gerechnet, in dem der konvektive Energietransport somit auf das nach dem Schwarzschildkriterium instabile Gebiet beschränkt ist. In diesem Gebiet ist der Temperaturgradient somit derselbe, wie er sich aus der MLT ergeben würde.

Theorie wie der Mischungswegtheorie zwingend identisch.

Hinzu kommt noch ein weiterer Effekt, der bisher nur kurz angedeutet wurde. Die Schwarzschildgrenze ist im nichtlokalen Fall nicht notwendig an derselben Stelle wie im lokalen Fall. In der nichtlokalen Betrachtung der Konvektion wird durch die Konvektion Energie über die Schwarzschildgrenze hinaus in das Gebiet des Überschießens transportiert. Daraus folgt ein vergrößertes Gebiet mit adiabatischen Temperaturgradienten und es ändert sich der Temperaturverlauf im Stern. Dies hat zur Folge, dass der radiative Temperaturgradient  $\nabla_{\text{rad}}$  sinkt und die Schwarzschildgrenze nach innen wandert. In Abb. 6.3 ist die relative Änderung der Temperatur eines nichtlokal gerechneten Modell gegenüber einem Modell mit einem lokalen Konvektionsmodell dargestellt. Im konvektiven Kern steigt die Temperatur durch das nichtlokale Modell um einige Promille, während sie außerhalb des instabilen Bereichs sinkt. Entsprechend sinkt der radiative Temperaturgradient im konvektiven Kern. Die Schwarzschildgrenze verschiebt sich dadurch nach innen. Ein Vergleich der verschobenen und unverschobenen Grenzen ist in Tabelle 6.1 gegeben. Die Struktur des Sterns reagiert auf die Vergrößerung des konvektiven Kerns, indem sich die Schwarzschildgrenze weiter nach innen verschiebt und so einen Teil der Kernvergrößerung ausgleicht.

Aufgrund der hier dargestellten Tatsachen stellt sich die Frage, was genau man als Überschießzone bezeichnet und wie genau man die Ausdehnung einer Überschießzone misst. Nimmt man die Schwarzschildgrenze, wie sie im nichtlokalen Fall vorliegt, als inneren Rand, oder nimmt man als Beginn der Überschießzone die Schwarzschildgrenze, die sich einstellen würde, wenn man die Konvektion lokal betrachten würde? Ebenso stellt sich die Frage, was man als äußeres Ende der Überschießzone ansetzt: die Stelle, an der durch die Konvektion keine Energie mehr transportiert wird, oder die Stelle, ab der kein chemisches Mischen stattfindet.

Diese unterschiedlichen Distanzen werden für den Vergleich mit Arbeiten anderer Autoren noch wichtig werden. Es ist jedoch sinnvoll, den Überschießbereich zwischen der Schwarzschildgrenze in einem lokal gerechneten Modell und dem Ende des chemischen Mischens anzusetzen, denn viele Autoren, die über das konvektive Überschießen arbeiten, vergrößern lediglich das chemisch durchmischte Gebiet, nehmen aber keine Rücksicht auf die veränderte Temperaturschichtung des Sterns.

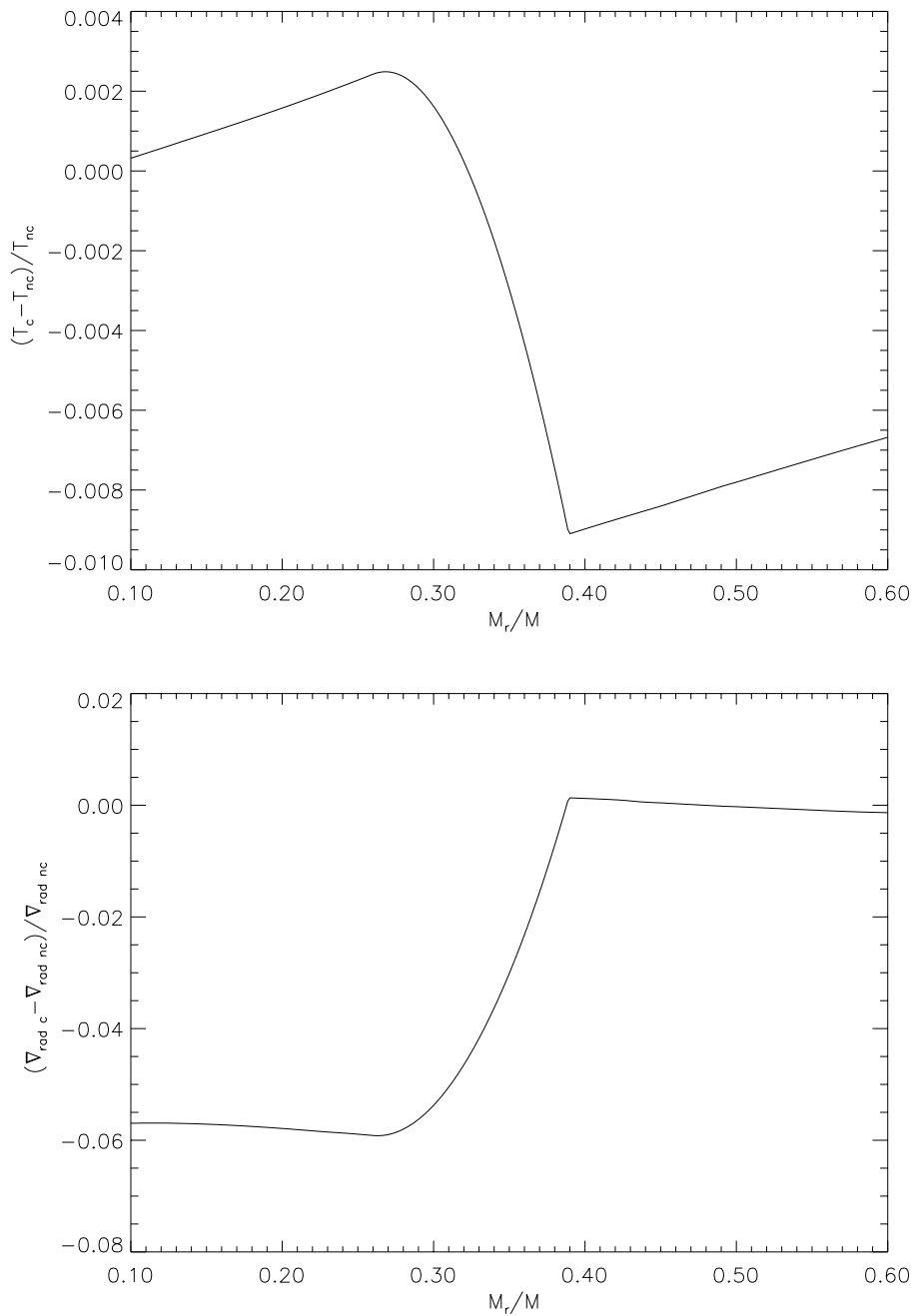


Abbildung 6.3: Die relative Änderung der Temperatur (links) und des radiativen Temperaturgradienten (rechts) durch das ausgedehnte adiabatische Gebiet in der nichtlokalen Rechnung gegenüber einer lokalen. Die Temperatur ist höher im Kern und niedriger im äußeren Bereichen. Umgekehrt sinkt der Gradient  $\nabla_{\text{rad}}$  im Kern. Dies führt zu einer Verschiebung der Schwarzschildgrenze nach innen.

Die Überschießlänge wird üblicherweise in Einheiten der Druckskalenhöhe angegeben. Diskutiert man nun Veränderungen der Überschießzone, so muss man mit untersuchen, welcher Effekt von einer wirklichen Änderung der Überschießlänge kommt und welcher Effekt eventuell auf einer Änderung der Druckskalenhöhe beruht, die als Einheit gewählt wurde. Ferner muss klargestellt werden, an welcher Stelle die Druckskalenhöhe bestimmt wird: an der Schwarzschildgrenze, wie dies viele Autoren tun, oder als gemittelter Wert über die gesamte Überschießzone.

### 6.2.1 Bestimmung der Überschießlänge

#### Bestimmung durch Beobachtung

Verschiedene Autoren haben versucht, die Überschießlänge anhand von Beobachtungen zu bestimmen. Die übliche Vorgehensweise ist dabei folgende: man führt theoretische Rechnungen mit unterschiedlichen Massen und unterschiedlichen Überschießlängen durch und erzeugt so einen Datensatz von Sternmodellen mit unterschiedlichen Kerngrößen. Diese Modelle werden dann mit einem Satz Beobachtungsdaten verglichen. Die Überschießlänge erhält man aus dem Modell, das am besten mit den Beobachtungsdaten übereinstimmt. Hierbei gehen eine Reihe von Unsicherheitsfaktoren ein. So können z.B. die Beobachtungsdaten dadurch verfälscht werden, dass man Doppelsterne nicht als solche erkennt und die Gesamthelligkeit der beiden Sterne zur Helligkeit eines Sterns aufaddiert. Dies würde zu einer Verbreiterung des Bands der Hauptreihe führen. Die theoretischen Rechnungen hängen im einzelnen auch noch davon ab, welche Werte man z.B. für die Opazitäten verwendet, da diese die radiativ transportierte Energiemenge beeinflussen, und wie Überschießen genau definiert wird.

Auf diese Weise wurden unterschiedliche Werte für die Überschießlänge gefunden, die meisten liegen in einem Bereich zwischen 0.1 und 0.5 in Einheiten der Druckskalenhöhe an der Schwarzschildgrenze. Die neueren Arbeiten mit modernen Opazitätstabellen gehen davon aus, dass das durchmischte Gebiet gegenüber der Schwarzschildgrenze um etwa  $0.3H_p$  vergrößert ist, wobei bei Sternen mit kleineren Massen ein Abfall zu kleineren Werten gefunden wurde.

#### Eine Abschätzung der Distanz - Das Roxbourghkriterium

Nachdem unterschiedliche Autoren die Überschießlänge anhand von Beobachtungen bestimmen, soll hier eine Abschätzung aus theoretischen Überlegungen erwähnt werden. Diese Abschätzung wurde mit der Intention entwickelt, die Überschießlänge durch eine analytische Beziehung vorherzusagen. I.W.Roxbourgh leitet aus den hydrodynamischen Gleichungen eine Integralformel ab (Roxbourgh 1978), durch die die Ausdehnung eines konvektiven Kerns um etwa 50% - 70% vergrößert wird. Hierbei geht er von der Energiegleichung aus und argumentiert, dass diese Gleichung, wenn man sie über die gesamte Konvektionszone integriert, nur erfüllt sein kann wenn in einem Teil der Konvektionszone eine negativer Energiefluß vorliegt. Dies jedoch kann



nur in einem eigentlich stabilen Gebiet sein. Somit muß also ein konvektives Überschießen vorliegen. Diese Ableitung beruht jedoch auf einem inkonsistenten Satz von Näherungen (Baker 1987). Roxborough vernachlässigt einige Terme, während er andere Terme der gleichen Größenordnung berücksichtigt. Diese Fehler lassen sich zwar beheben, aber die resultierende Formel lässt sich nicht verwenden, um zu beweisen, dass konvektives Überschießen existiert, sondern kann lediglich eine Maximalgrenze für konvektives Überschießen angeben.

### 6.2.2 Abhängigkeiten der Überschieß-Distanz

Nachdem von verschiedenen Autoren und unter verschiedenen Bedingungen unterschiedliche Werte für die Überschießlänge gefunden wurden, soll hier untersucht werden, von welchen Bedingungen die Größe der Konvektionszone in unserem Konvektionsmodell abhängen kann. Nachdem kurz diskutiert wird, wie die Ausdehnung der Überschießzone von den Parametern des Kuhfußmodells ( $\alpha$  und  $\alpha_t$ ) abhängt, soll hier besonders auf die Masse des Sterns und auf die chemische Zusammensetzung bzw. auf die Metallabhängigkeit eingegangen werden.

#### Parameterabhängigkeit

In der Kuhfußtheorie wird nicht die Ausdehnung des konvektiven Kerns parametrisiert, sondern der konvektive kinetische Strom  $j_t$ . Während bei einer Parametrisierung der Überschießlänge der Überschießparameter an die jeweilige Situation angepasst werden muss, um Übereinstimmungen mit den Beobachtungen zu erhalten, ergeben sich

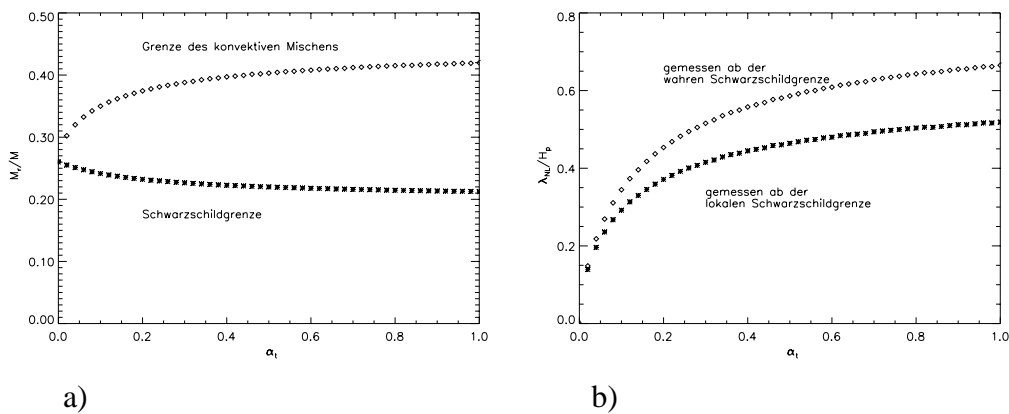


Abbildung 6.4: Abhängigkeit der Überschießzone von der Parametrisierung des konvektiven kinetischen Stroms mittels  $\alpha_t$ . Bei einem  $5M_\odot$  Stern wird in der linken Abbildung die Verschiebung der Mischungsgrenze, sowie der Schwarzschildgrenze dargestellt. In der rechten Abbildung findet sich die Überschießlänge einmal gemessen ab der Schwarzschildgrenze im nichtlokalen Fall, und einmal ab der Stelle, an der sich die Schwarzschildgrenze in einem lokalen Modell befinden würde.

bei einer Parametrisierung des Stroms einige der grundlegenden Abhängigkeiten von selbst. In der Rechnung, deren Ergebnis in Abb. 6.4 dargestellt wird, wurde bei einem  $5M_{\odot}$  Stern auf der ZAMS der Parameter  $\alpha_t$  langsam von 0, entsprechend der lokalen Approximation, bis auf 1 erhöht. Der von Kuhfuß in einer Abschätzung erhaltene Wert beruht auf einem Vergleich mit einer ballistischen Abschätzung und liegt bei etwa 0.25. Der Mischungswegparameter  $\alpha_{ML}$  wurde hierbei auf einem Wert von 1.6 festgehalten. Im Teil a) der Abbildung findet sich die Grenze des konvektiven Mischens, ebenso wie die Lage der Schwarzschildgrenze, jeweils in Massenkoordinaten. Man kann sehen, wie sich die Schwarzschildgrenze mit steigendem  $\alpha_t$  zunehmend nach innen verlagert, während sich die Grenze des Mischens zu weiter außen liegenden Schichten verlagert. Hierbei finden die größten Veränderungen bereits bei Werten für  $\alpha_t$  von kleiner 0.1 statt. Im Teil b) der Abbildung ist die Überschießlänge in Einheiten der Druckskalenhöhe an der Schwarzschildgrenze aufgetragen. Für die oberen Werte wurde die Überschießzone als das Gebiet betrachtet, das zwischen der Grenze des konvektiven Mischens und der im nichtlokalen Fall real vorliegenden Schwarzschildgrenze liegt, für die unteren Werte dasjenige, das zwischen der Schwarzschildgrenze, wie sie in einem lokal gerechneten Modell vorliegen würde, und der Grenze des konvektiven Mischens liegt. Letztere sind die Werte, die eher zum Vergleich mit anderen Rechnungen herangezogen werden müßten. Will man den in der Literatur üblichen Wert von 0.3 für die Überschießlänge erhalten, so sollte also für  $\alpha_t$  etwa 0.1 - 0.15 gewählt werden, deutlich weniger als der von Kuhfuß abgeschätzte Wert.

In das Eingleichungsmodell der Kuhfußtheorie geht außer der Parametrisierung des konvektiven kinetischen Stroms noch die Mischungsweglänge  $\alpha_{ML}$  ein. Diese tritt auf im Term für die Dissipation, für den nichtlokalen Strom sowie in dem die Auftriebs-

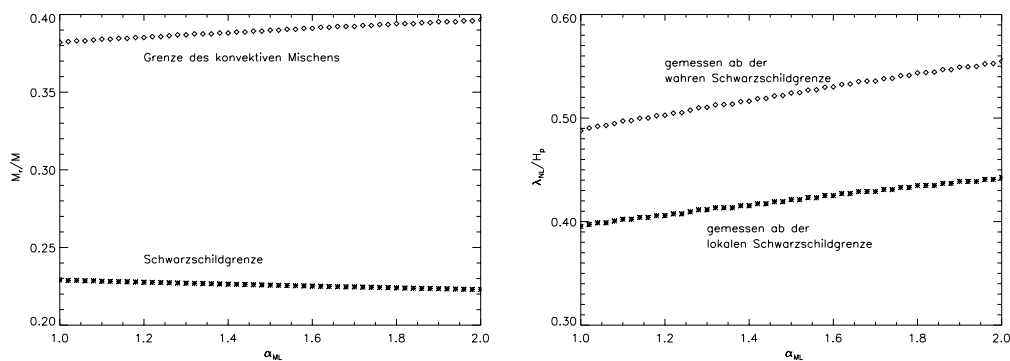


Abbildung 6.5: Abhängigkeit der Überschießzone vom Mischungswegparameter. Bei einem  $5M_{\odot}$  Stern und  $\alpha_t = 0.25$  wird in der linken Abbildung die Verschiebung der Mischungsgrenze sowie der Schwarzschildgrenze dargestellt. In der rechten Abbildung findet sich die Überschießlänge einmal gemessen ab der Schwarzschildgrenze im nichtlokalen Fall, und einmal ab der Stelle, an der sich die Schwarzschildgrenze in einem lokalen Modell befinden würde.

kräfte beeinflussenden Term auf. Somit steht zu erwarten, dass die Überschießlänge ebenfalls vom Mischungswegparameter abhängt. In einer entsprechenden Untersuchung wurde die Mischungsweglänge im Bereich zwischen 1 und 2 variiert. Der Parameter  $\alpha_t = 0.25$  wurde dabei bei dem von Kuhfuß abgeschätzten Wert festgehalten. Die Ergebnisse sind in Abb. 6.5 dargestellt. Es ergibt sich wieder eine Abhängigkeit der Überschießlänge sowie der konvektiven Grenzen vom Mischungswegparameter. Eine solche Abhängigkeit ist zu erwarten, da eine veränderte Mischungsweglänge die konvektive Geschwindigkeit modifiziert, die in der Konvektionszone vorliegt und somit auch die Geschwindigkeit beeinflusst, mit der die Elemente die Schwarzschildgrenze überschreiten. Diese Abhängigkeit ist jedoch zumindest im untersuchten Parameterbereich nicht so deutlich wie bei der Variation von  $\alpha_t$ .

### Masseabhängigkeit

Bereits in der weiter oben erwähnten Arbeit von Maeder & Mermilliod (1981) wurden empirische Hinweise auf eine Abhängigkeit der Überschießdistanz von der Masse des Sterns gefunden. Demnach steigt der Anteil, um den sich der konvektive Kern vergrößert, im Bereich von  $2 - 6M_\odot$  an. Diese Ergebnisse wurden erzielt, indem die Isochronen aus Rechnungen mit drei unterschiedlich ausgedehnten Überschießzonen mit den Daten von 34 offenen Haufen verglichen wurden. Ähnliche Ergebnisse finden sich in Schröder et al. (1997) und in Ribas et al. (2000). Ferner deuten die Ergebnisse, die sich in Roxborough (1992), Umezo (1995), Meynet et al. (1993), Alongi et al. (1993), sowie Ribas et al. (2000) finden, darauf hin, dass für sehr kleine Massen auch ein sehr geringes Überschießen vorliegen sollte, auch wenn Clausen (1991) und Fekel (1991) zu anderen Ergebnissen kommen. Insgesamt läßt sich sagen, dass die meisten Autoren davon ausgehen, dass für Sterne mit Massen  $\approx 1.3 M_\odot$  eine Überschießlänge von  $\leq 0.1H_p$  vorliegen sollte.

Um diese Abhängigkeit in unserem Modell zu untersuchen, wurde eine Massensequenz auf der Nullalterhauptreihe (ZAMS) in einem Massenbereich von  $1.3$  bis  $20 M_\odot$  berechnet. Ausgehend von einem  $20M_\odot$  Stern mit dem nichtlokalen Kuhfußmodell in der Eingleichungsversion, wurde die Sternmasse schrittweise reduziert. Hierbei wurde nach jeder Massenreduktion ausreichende Zeit gelassen, bis sich im Stern wieder ein Gleichgewicht einstellen konnte. Während des gesamten Verfahrens war die chemische Zusammensetzung homogen und wurde nicht verändert. Für  $\alpha_t$  wurde ein Wert von  $0.25$  verwendet. Die Grenzen des konvektiven Kerns sind in Abb. 6.6 dargestellt. Wieder ist in der oberen Linie die Grenze des konvektiven Mischens aufgetragen, in der unteren Linie ist die Schwarzschildgrenze dargestellt, wie sie sich in diesem nichtlokalen Modell einstellt. Der prozentuale Anteil der Überschießzone an der gesamten Konvektionszone ist bei Sternen um  $2M_\odot$  am größten und sinkt für schwerere Sterne auf unter  $40\%$  ab.

Zusätzlich ist in Abb. 6.7 ein Vergleich der Massen des konvektiven Kerns für  $\alpha_t = 0.25$  und  $\alpha_t = 0.1$ , sowie für die Ergebnisse der Paduarechnungen mit Überschießen (Girardi et al. 2000) aufgetragen. Die Kernmassen für  $\alpha_t = 0.25$  sind klar

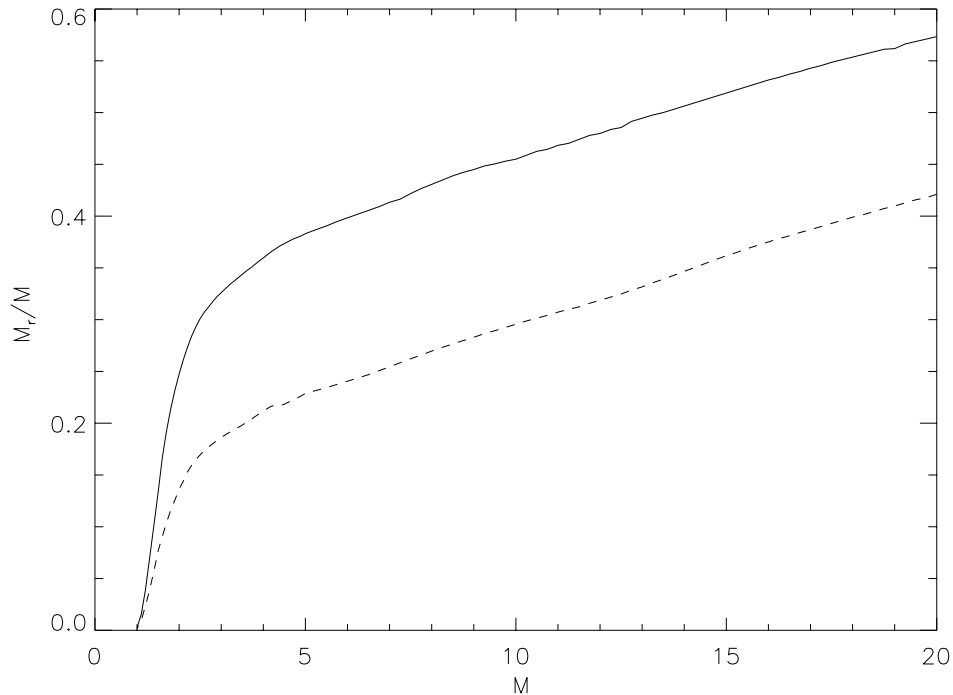


Abbildung 6.6: Grenze des Konvektiven Mischens (durchgezogene Linie), sowie Schwarzschildgrenze (gestrichelt) des konvektiven Kerns für verschiedene Massen bei  $\alpha_t = 0.25$ .

größer als die Ergebnisse der Paduarechnungen, während sie für  $\alpha_t = 0.1$  gut mit den Ergebnissen der Paduarechnungen übereinstimmen.

In Abb. 6.8 findet sich links die Überschießlänge in Einheiten der Druckskalenhöhe. Diese steigt im Bereich zwischen  $1$  und  $5M_\odot$  stark an, im Bereich größerer Massen ist nur noch ein leichter Anstieg festzustellen. Dies ist im Einklang mit Maeder & Mermilliod (1981), die Werte für die Überschießlänge sind jedoch höher als die in der Literatur üblicherweise angegebenen. So ergeben sich nach der Kuhfußtheorie für Sterne  $> 6M_\odot$  Überschießlängen von etwa  $0.5H_p$ , während z.B. Schröder et al. (1997) von einer Überschießdistanz von  $0.32H_p$  ausgehen. Dies liegt zum einen daran, dass die in der Literatur angegebenen Werte den unteren Rand der Überschießzone an der Schwarzschildgrenze im lokalen Fall ansetzen, zum anderen wurde hier mit einem Parameter  $\alpha_t = 0.25$  gerechnet, wie er von Kuhfuß abgeschätzt wurde. Bereits weiter oben diskutierte Ergebnisse weisen jedoch darauf hin, daß dieser Wert etwas zu hoch ist. Im rechten Teil der Abb. 6.8 findet sich die Druckskalenhöhe an der Schwarzschildgrenze. Diese beginnen für Massen kleiner als  $2M_\odot$ , d.h. für sehr kleine konvektive Kerne, zu divergieren. In diesen Fällen wird die Verwendung einer verkürzten Skalenlänge, wie sie in 3.7.1 beschrieben wurde, von Bedeutung werden (vgl. hierzu Kapitel 6.6).

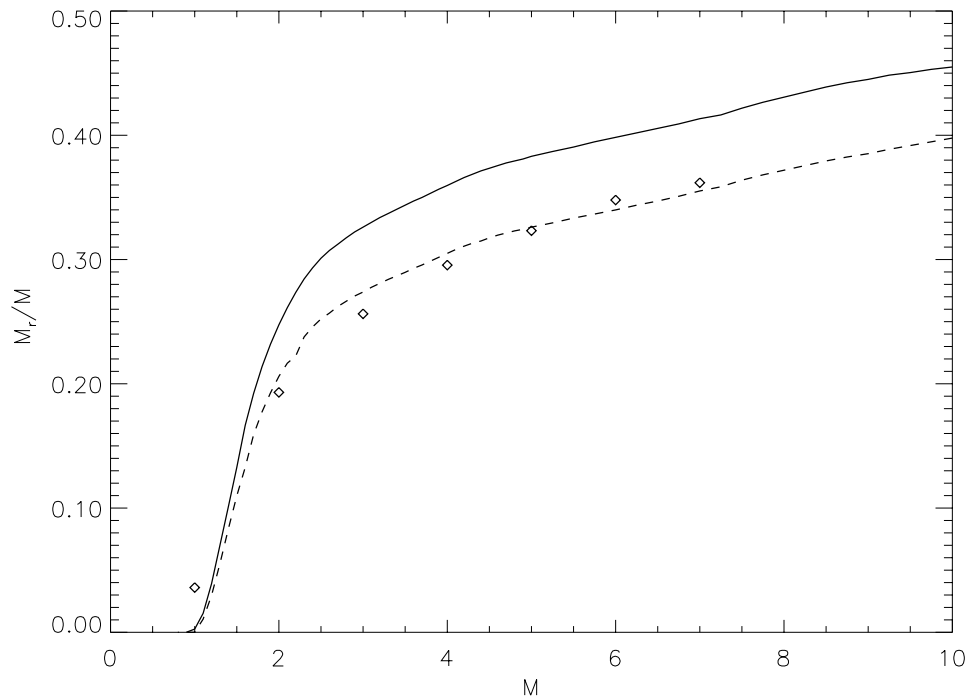


Abbildung 6.7: Vergleich der konvektiven Kernmassen bei unterschiedlichen Sternmassen. Die durchgezogene Linie entspricht  $\alpha_t = 0.25$ , die gestrichelte  $\alpha_t = 0.1$ . Die einzelnen Punkte sind die entsprechenden Ergebnisse der Paduadaten (Girardi et al. 2000).

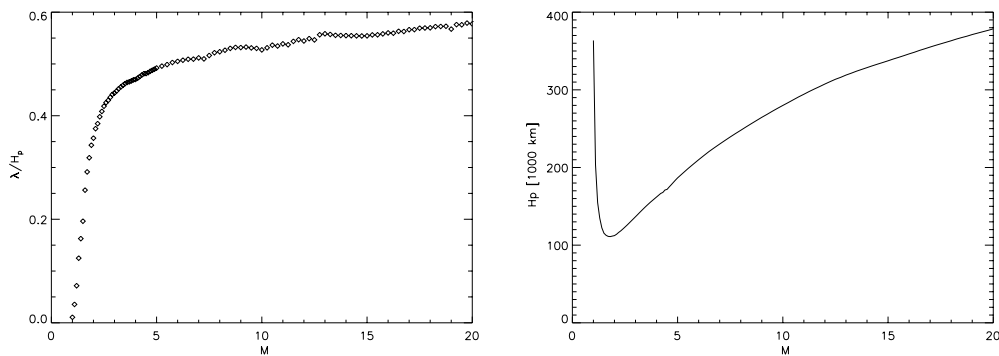


Abbildung 6.8: (links) Überschießlänge in Einheiten der Druckskalenhöhe nach dem Eingleichungsmodell. Auffallend ist der starke Anstieg im Bereich zwischen  $1$  und  $6M_\odot$ . In der rechten Abbildung ist die Druckskalenhöhe an der Schwarzschildgrenze im nichtlokalen Fall abgebildet. Hier fällt auf, wie die Werte für Massen kleiner als  $2M_\odot$  stark ansteigen.

	MLK	LMC	SMC
Wasserstoffgehalt X	0.700	0.733	0.745
Heliumgehalt Y	0.280	0.259	0.251
Metallgehalt Z	0.020	0.008	0.004

Tabelle 6.2: Chemische Zusammensetzung der gerechneten Modelle nach Cordier et al. (2002).

Einige einfache Rechnungen zur Ausdehnung von konvektiven Kernen finden sich bereits bei Kuhfuß (Kuhfuß 1987a), sind jedoch quantitativ nur schwer mit den hier erhaltenen Ergebnissen vergleichbar, da nicht erläutert wird, wie die Rechnungen durchgeführt wurden. So ist z.B. nicht erklärt, wie die nichtlokalen Terme diskretisiert wurden, und es wird nicht mitgeteilt, welche Werte für die Parametrisierung des konvektiven Stroms durch  $\alpha_t$  verwendet wurden. Zusammenfassend läßt sich jedoch sagen, dass auch bei Kuhfuß ein Anstieg der Überschießlänge mit der Sternmasse gefunden wurde.

### Metallabhängigkeit

In manchen Arbeiten, die Rechnungen zu konvektivem Überschießen mit Beobachtungen vergleichen, findet sich nicht nur eine Abhängigkeit von der Masse des Sterns, sondern auch vom Metallgehalt. Hinweise finden sich in Ribas et al. (2000). Die Abhängigkeit der Überschießens von der Metallhäufigkeit wird auch in Keller et al. (2001) untersucht, der Daten der Padua Gruppe verwendet. Weitere Untersuchungen finden sich in Cordier et al. (2002). Zusammenfassend läßt sich sagen, dass aufgrund der unterschiedlichen Arbeiten ein leichter Abfall der Überschießlänge mit dem Metallgehalt nicht ausgeschlossen werden kann, aber auch keineswegs eindeutig gezeigt wurde. So ist es nach Cordier et al. (2002) mit den Beobachtungen durchaus verträglich die Überschießlänge von  $0.4H_p$  auf  $0.2H_p$  zu senken, falls man den Metallgehalt von  $Z = 0.005$  auf  $Z = 0.025$  erhöht. In unserer Arbeit wollen wir nun untersuchen, ob eine unterschiedliche chemische Zusammensetzung im Rahmen des Kuhfußmodells einen Einfluss auf die Überschießlänge hat.

Hierzu wurden sechs Modelle entwickelt, jeweils ein  $5M_\odot$  Stern mit den chemischen Zusammensetzungen der Milchstraße (MLK), der großen (LMC) und der kleinen Magellanschen Wolke (SMC), wie sie in Tabelle 6.2, wiedergegeben sind. Die Modelle wurden sowohl im lokalen als auch im nichtlokalen Fall jeweils bis zum Ende der Hauptreihe, d.h. bis zum Ende des zentralen Wasserstoffbrennens und zum Verschwinden der zentralen Konvektionszone entwickelt. In Abb. 6.9 findet sich die Ausdehnung des konvektiven Kerns dieser Modelle. Zu sehen ist jeweils der lokale (gestrichelt) und der nichtlokale Fall (durchgezogene Linien). Für die Überschießlänge in Einheiten der Drucksalenhöhe jedoch konnte keine signifikante Abhängigkeit gefunden werden. Die in Abb. 6.9 gefundenen Unterschiede in der Ausdehnung des konvektiven Kerns kommen daher, dass sich die einzelnen Rechnungen außer durch einen unterschied-

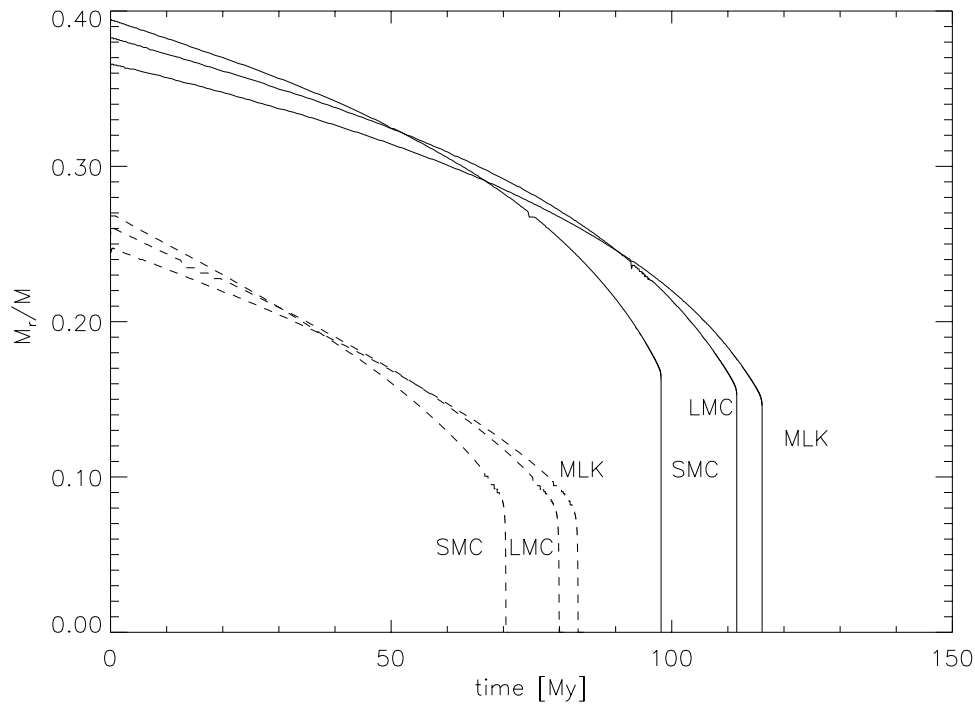


Abbildung 6.9: Die Abbildung zeigt die Ausdehnung des konvektiven Kerns während des zentralen Wasserstoffbrennens eines  $5M_{\odot}$ -Sterns. Aufgetragen wurde die Grenze des konvektiven Mischens im lokalen Fall ( $\alpha_t = 0$  gestrichelt) und im nichtlokalen Fall ( $\alpha_t = 0.25$  durchgezogen). Die Rechnungen wurden jeweils durchgeführt für die chemische Zusammensetzung der Milchstraße, der großen und der kleinen Magellanschen Wolke.

lichen Metallgehalt auch durch den enthaltenen Anteil an Wasserstoff unterschieden. Somit kann man nicht davon ausgehen, dass eine direkte Abhängigkeit zwischen Überschießdistanz und Metallgehalt besteht.

### 6.3 DIE KONVEKTIVE HÜLLE VON A-STERNEN

Nachdem wir das konvektive Überschießen an konvektiven Kernen studiert haben, werden wir uns in diesem Abschnitt mit Konvektion in konvektiven Hüllen beschäftigen. Wir orientieren uns hierbei an einer Arbeit, die von F. Kupka und M.H. Montgomery im Jahr 2002 veröffentlicht wurde (Kupka & Montgomery 2002). Kupka verwendet dort das Konvektionsmodell von Canuto (Canuto (1992), Canuto (1993) und Canuto & Dubovikov (1998)) und berechnet die Struktur der konvektiven Hülle von A-Sternen.

A-Sterne sind Sterne der frühen Spektralklasse A, die in ihren Spektren vor allem die Balmerlinien zeigen. Sie haben Effektivtemperaturen im Bereich von etwa 7200 K bis 8500 K. Bei Hauptreihensternen liegen diese Bedingungen bei Sternmassen von etwa  $1.8$  bis  $2.1M_{\odot}$  vor. A-Sterne sind heißer als die Sonne, deshalb sind die Konvektionszonen ihrer Hüllen deutlich kleiner, wodurch das Problem für viele Rechnungen zur Konvektion deutlich einfacher zu handhaben ist. Hinzu kommt, dass die Konvektion weniger effizient und somit stärker von den freien Parametern abhängig ist. So kann z.B. ein Hauptreihenstern mit einer Effektivtemperatur von  $7500K$  eine größtenteils radiative oder eine adiabatische Konvektionszone haben, je nachdem ob man in der Mischungswegtheorie den Mischungswegparameter mit  $0.5$  oder mit  $1.5$  wählt.

### 6.3.1 Das Konvektionsmodell Kupkas

Das bei Kupka verwendete Konvektionsmodell beruht auf dem Modell von Canuto (Canuto & Dubovikov (1998)). Es erfordert die Lösung von 5 Differentialgleichungen, und zwar erster Ordnung in der Zeit und zweiter Ordnung im Raum. F. Kupka beginnt mit einem Modell, das nur die Sternhülle beschreibt und das erstellt wurde wie in Pamyatnykh (1999) beschrieben. Effektivtemperatur, Oberflächenbeschleunigung und Radius werden diesem Modell entsprechend gewählt und während der folgenden Rechnung konstant gehalten. Ebenso werden die mittleren Strukturgrößen  $r$ ,  $P$ ,  $T$ , sowie die von unten einströmende Leuchtkraft künstlich vorgegeben und festgehalten. Kupka löst die Gleichungen seines Konvektionsmodells auf 200 Massenschalen, beginnend in der mittleren Photosphäre bis unterhalb der He II Konvektionszone. Er rechnet somit kein vollständiges Sternmodell, das von der Photosphäre bis zum Zentrum reicht, so dass diese Rechnungen mit vollständigen Modellen nicht konkurrieren können.

Wesentliches Ergebnis seiner Arbeit ist, dass erstens die photosphärischen Geschwindigkeiten in qualitativer Übereinstimmung mit den Beobachtungen der Dopplerverbreiterung von Spektrallinien stehen, und zweitens, dass die He II und die H I Ionisationszone getrennt sind, was den Transport konvektiver Energie betrifft, durch die konvektive Geschwindigkeit jedoch verschmelzen. Dies stimmt mit hydrodynamischen Simulationen überein.

### 6.3.2 Vergleichende Rechnung mit der Kuhfußtheorie

Wir wollen in unserem Sternentwicklungscode und mit dem Kuhfußmodell in der Ein Gleichungsformulierung eine ähnliche Rechnung durchführen. Hierzu berechnen wir Sterne auf der ZAMS im Massenbereich zwischen  $1.8M_{\odot}$  und  $2.1M_{\odot}$ . Diese Rechnungen sind vollständige Sternmodelle, in denen die Energieerzeugung im Sterninneren und damit auch die von unten in die Hüllenkonvektionszone einströmende Leuchtkraft sowie die Schwerebeschleunigung konsistent bestimmt wird. Daher sind durch dieses Verfahren die Rahmenbedingungen etwas anders als in der Rechnung von F. Kupka. So liegt etwa bei gleicher Effektivtemperatur eine andere Schwerebeschleunigung an



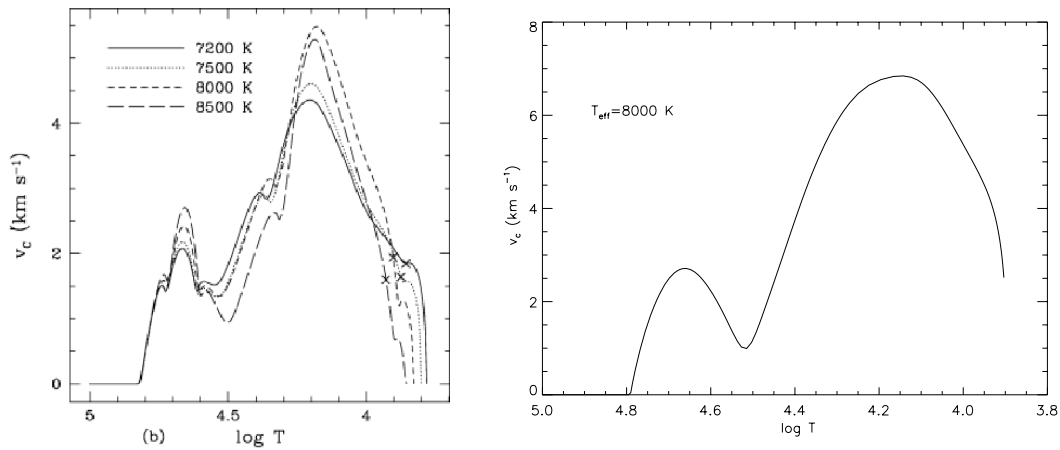


Abbildung 6.10: Konvektive Geschwindigkeit in der Rechnung von F. Kupka (links) für verschiedene Werte von  $T_{\text{eff}}$  und in der Rechnung, der das Kuhfußmodell zugrunde liegt (rechts). Für die chemische Zusammensetzung wurden die Werte  $Z = 0.02$ ,  $Y = 0.28$ ,  $X = 0.7$  verwendet. Die linke Abbildung wurde Kupka & Montgomery (2002) entnommen.

der Oberfläche vor, ferner gehen die Details der Atmosphärenstruktur, wie sie bei Kupka verwendet werden, nicht aus seiner Arbeit hervor. Insbesondere ist in seiner Arbeit nicht angegeben, wie groß die Leuchtkraft ist, die von unten in sein Simulationsgebiet einströmt. Die Ergebnisse des hier angestellten Vergleichs können also nur qualitativer Natur sein. Die grundlegende Struktur ist jedoch ähnlich.

Mit dem vorliegenden Sternentwicklungsprogramm und dem Kuhfußmodell in der Eingleichungsformulierung wurden Sterne auf der ZAMS mit Massen von  $1.8$ ,  $1.9$ ,  $2.0$  und  $2.1 M_{\odot}$  gerechnet. Diese Sterne haben zwei konvektiv instabile Gebiete in der Hülle und einen konvektiv instabilen Kern. Hierbei wurde wieder die von Kuhfuß abgeschätzte Parametrisierung des konvektiven Stroms von  $\alpha_t = 0.25$  verwendet. Für die Mischungsweglänge wurde im gesamten Stern, also sowohl im Kern als auch in der Hülle, ein Wert von  $\alpha_{\text{ML}} = 1.6$  verwendet.

Generell ist festzustellen: In unseren Rechnungen ist der Bereich der Effektivtemperatur, in dem zwei instabile Konvektionszonen nahe beieinander liegen, deutlich kleiner als in der Rechnung von Kupka, und zwar unabhängig vom verwendeten Konvektionsmodell. Dies ist eine Folge der gegenüber Kupka veränderten Bedingungen durch Verwendung vollständiger Modelle. So liegen in den Rechnungen von Kupka für den gesamten Effektivtemperaturbereich von  $7200 \text{ K}$  bis  $8500 \text{ K}$  zwei getrennte Instabilitätszonen vor. In unseren Rechnungen verschmelzen die beiden Instabilitätszonen bei  $7700 \text{ K}$  noch immer zu einem einzigen instabilen Gebiet, erst bei  $8000 \text{ K}$  liegen wirklich zwei durch einen stabilen Bereich getrennte instabile Gebiete vor. In Abb. 6.10 ist als Ergebnis einer solchen Rechnung die konvektive Geschwindigkeit aufgetragen. Deutlich sichtbar ist, dass die beiden Gebiete, obwohl sie durch einen

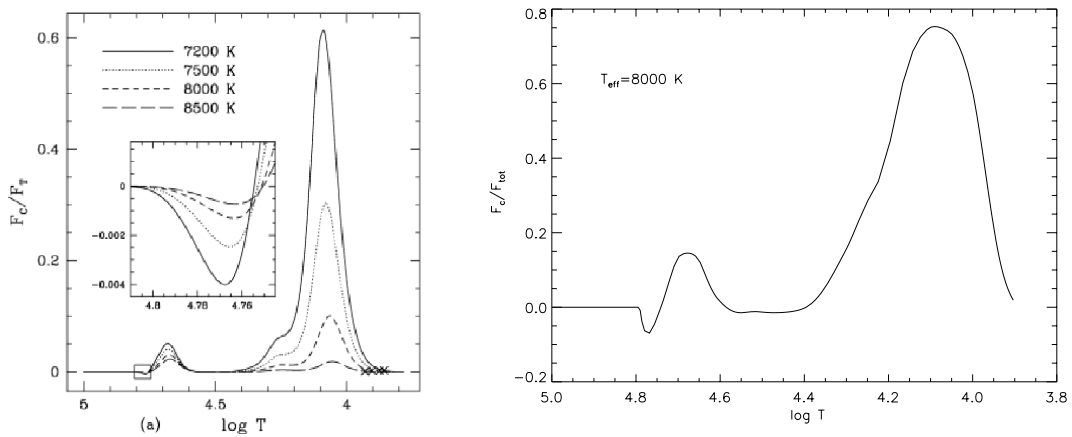


Abbildung 6.11: Anteil des konvektiven Flusses am totalen Fluß in der Rechnung von F. Kupka (links) und in der Rechnung, der das Kuhfußmodell zugrundeliegt (rechts). Die linke Abbildung wurde Kupka & Montgomery (2002) entnommen.

konvektiv stabilen Bereich getrennt sind, durch eine auch im stabilen Zwischengebiet nicht verschwindende Geschwindigkeit verbunden sind. Diese ist nur um einen Faktor 5-6 kleiner als im instabilen Bereich. Die Geschwindigkeit in der He II Konvektionszone stimmt in etwa mit dem Ergebnis von Kupka überein, in der H I Konvektionszone jedoch sind die Geschwindigkeiten höher als im Ergebnis von Kupka. Betrachtet man hingegen den konvektiven Fluss, so sind die beiden instabilen Gebiete, wie weiter oben beschrieben, getrennt, zwischen ihnen liegt ein Gebiet, in dem der konvektive Fluss verschwindet, d.h. in dem der Gesamtfluss nur durch Strahlung transportiert wird. Unsere Rechnung mit dem Kuhfußmodell gibt dieses Ergebnis qualitativ richtig wieder, auch hier sind die beiden Zonen für den Transport von Energie getrennt. Die Werte für den konvektiven Fluss hingegen sind wieder deutlich höher als in der Rechnung von Kupka.

Der Effekt, dass in den Rechnungen, denen das Kuhfußmodell zugrunde liegt, höhere Werte für konvektive Geschwindigkeiten und konvektive Flüsse erhalten werden, liegt an einem wesentlichen Unterschied zwischen dem von Kupka verwendeten Modell und dem Kuhfußschen. Das Canutomodell, das Kupka verwendet, verzichtet vollständig auf die explizite Einführung einer Mischungsweglänge, während eine solche im Kuhfußmodell auftaucht und bestimmt werden muss. Wir hatten für die Mischungswegparameter im gesamten Stern den Wert 1.6 verwendet.

Ein weiterer Vergleichspunkt ist die Überschießlänge. Kupka gibt die Überschießlänge unterhalb der He II Konvektionszone in Einheiten der Druckskalenhöhe an. Er erhält durchgehend Werte von etwa  $0.45 H_p$  für alle Temperaturen, nur für eine Rechnung, in der er die Schwerebeschleunigung reduziert hat, erhält er einen höheren Wert von  $0.52 H_p$ .

In unseren Rechnungen erhalten wir, bei einer ebenfalls geringeren Schwerebeschleunigung, eine Überschießdistanz von  $0.51 H_p$ . Dies ist durchaus vergleichbar mit den Ergebnissen des Canutomodells, das Kupka verwendet. Zusammenfassend läßt sich also sagen, dass die Ergebnisse qualitativ übereinstimmen; die beiden Konvektionszonen verschmelzen zu einer, wenn man die konvektiven Geschwindigkeiten betrachtet, aber sind für den Energietransport und den konvektiven Fluss deutlich getrennt. Somit stellt dieser Vergleich einen erfolgreichen Test für die Kuhfußtheorie dar.

## 6.4 VERGLEICHE MIT EINER 3D SIMULATION

Weiter oben hatten wir dargestellt, dass die eindimensionalen Rechnungen deshalb eingeführt wurden, weil dreidimensionale Rechnungen zu aufwändig und zu zeitintensiv sind, um sie für das gesamte Leben eines Sterns durchzuführen. Dreidimensionale Rechnungen lassen sich nur für einen kurzen Zeit- und eingeschränkten Raumabschnitt durchführen, hier geben sie aber sehr viel genauere und detailliertere Informationen über die Konvektion, als dies eindimensionale Modelle können. Dreidimensionale Modelle müssen deshalb als Prüfstein für die vereinfachten eindimensionalen Modelle herangezogen werden. Wir wollen dies am Beispiel einer einfachen dreidimensionalen Rechnung vorführen.

### 6.4.1 Die Rechnungen Muthsam

Die dreidimensionalen Rechnungen wurden von Herbert J. Muthsam durchgeführt. Die wesentlichen Grundzüge der Simulation sind in Muthsam (1999) dargestellt. Im Unterschied zur dort vorgestellten Arbeit, in der zwei instabile Gebiete durch ein stabiles Gebiet getrennt sind, wurde in der hier behandelten Rechnung ein instabiles Gebiet behandelt, das von zwei stabilen Gebieten umgeben ist.

Muthsam gibt eine hydrostatische Konfiguration innerhalb einer Simulations-Box vor. Diese Konfiguration wird leicht gestört und anschließend sich selbst überlassen. Im Simulationsgebiet wird von einem idealen einatomigen Gas ausgegangen, es gilt also

$$P = \frac{R}{\mu} \rho T$$

$$\gamma = \frac{5}{3}$$

und damit  $c_v = 1.5 \frac{R}{\mu}$ ,  $c_p = 2.5 \frac{R}{\mu}$  und  $\nabla_{\text{ad}} = 0.4$ . Die Ausdehnung des instabilen Gebietes wird vorgegeben, indem die Viskosität und die Wärmeleitfähigkeit auf geeignete Werte festgelegt wird. Schließlich gibt Muthsam Werte für den konvektiven Fluss aus, indem er die entsprechenden Werte seiner Simulation über äquiplanare Ebenen und längere Zeiträume mittelt.

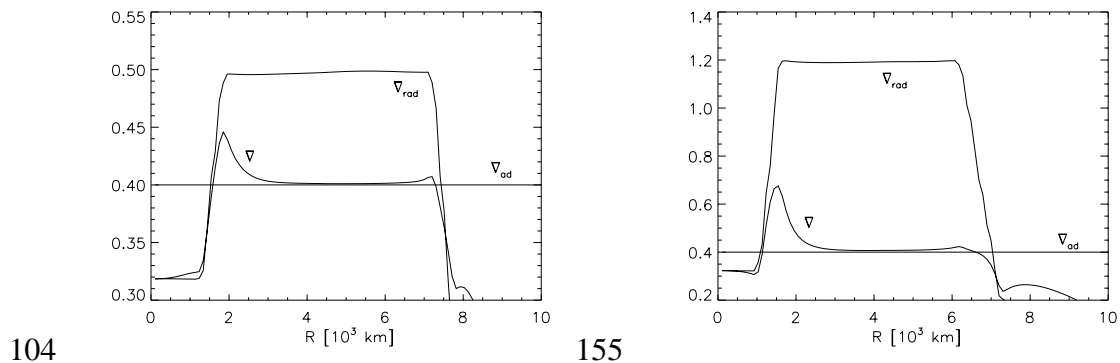


Abbildung 6.12: Die verschiedenen Temperaturgradienten, wie sie in der dreidimensionalen Rechnung von H. J. Muthsam vorgegeben werden, b.z.w. sich einstellen (links im Modell Nr. 104 rechts im Modell Nr. 155). Man beachte auch die unterschiedliche Skalierung der beiden Abbildungen.

#### 6.4.2 Vergleichende Rechnungen mit der Kuhfußtheorie

In unseren vergleichenden Box-Rechnungen nehmen wir die gemittelten Größen, wie sie sich in zwei unterschiedlichen Versionen der Muthsamschen Rechnungen ergeben, und berechnen vor diesem Hintergrund die Struktur der Konvektionszone, wie sie sich durch das Eingleichungsmodell von Kuhfuß ergibt. Die beiden unterschiedlichen Versionen seiner Rechnung tragen bei Muthsam die Nummern 104 und 155. Wir verwenden hierfür wieder eine Prozedur aus der NAG Bibliothek, wie bereits weiter oben im Zusammenhang mit den Testrechnungen zum Abklingverhalten diskutiert. Als Startmodell übergeben wir ein lokales Profil für die konvektiven Geschwindigkeiten und rechnen, bis sich durch die nichtlokalen Terme ein stationärer nichtlokaler Zustand eingestellt hat. In diesem vergleichen wir vor allem den konvektiven Fluss mit den entsprechenden Ergebnissen der dreidimensionalen Rechnungen.

In der Abb. 6.12 finden sich die Temperaturgradienten  $\nabla_{\text{rad}}$  und  $\nabla_{\text{ad}}$ , wie sie in der Rechnung von Muthsam vorgegeben werden. Der Temperaturgradient  $\nabla$  stellt sich in seiner Rechnung entsprechend seinen Simulationen ein. Wir verwenden zunächst die Gradienten  $\nabla_{\text{rad}}$  und  $\nabla_{\text{ad}}$  und berechnen daraus gemäß Gl. 4.7 die im Auftrieb wirkende Überadiabasie  $\nabla - \nabla_{\text{ad}}$ . Diese wird dann im Eingleichungsmodell verwendet.

Hat sich nach einiger Simulationszeit ein stationärer nichtlokaler Zustand eingestellt, so erhalten wir für die beiden verschiedenen Modelle ein Profil für die konvektive Geschwindigkeit, für den konvektiven Fluss und den Temperaturgradienten in unserer Rechnung. Diese Ergebnisse sind in Abb. 6.13, 6.14 und in 6.15 dargestellt.

Das Gebiet mit nichtverschwindender konvektiver Geschwindigkeit dehnt sich in beiden Fällen, wie in Abb. 6.13 sichtbar, deutlich weiter aus, als die Schwarzschildgrenzen dies vorgeben würden. Besonders interessant ist der Vergleich der konvektiven Flüsse, diese können in Abb. 6.14 betrachtet werden. Zu sehen ist, dass im Inneren des konvektiv instabilen Bereichs die Flüsse des Kuhfußmodells recht gut mit den drei-

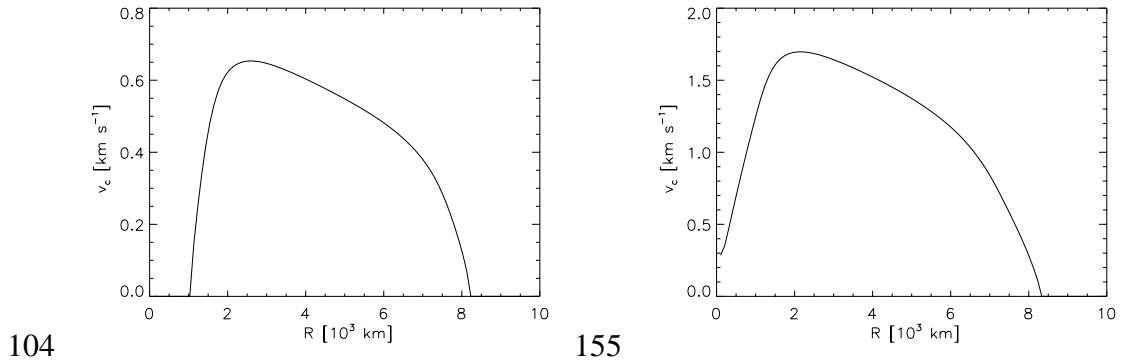


Abbildung 6.13: Geschwindigkeitsprofil nach der Kuhfußtheorie vor dem Hintergrund der beiden Modelle (Nr. 104 links und Nr. 155 rechts) Auch hier befinden sich konvektive Gebiete jenseits der Schwarzschildgrenze, im Modell Nr. 155 reicht das konvektive Gebiet sogar an den Rand des Simulationsbereichs heran. Man beachte auch die unterschiedliche Skalierung der beiden Abbildungen.

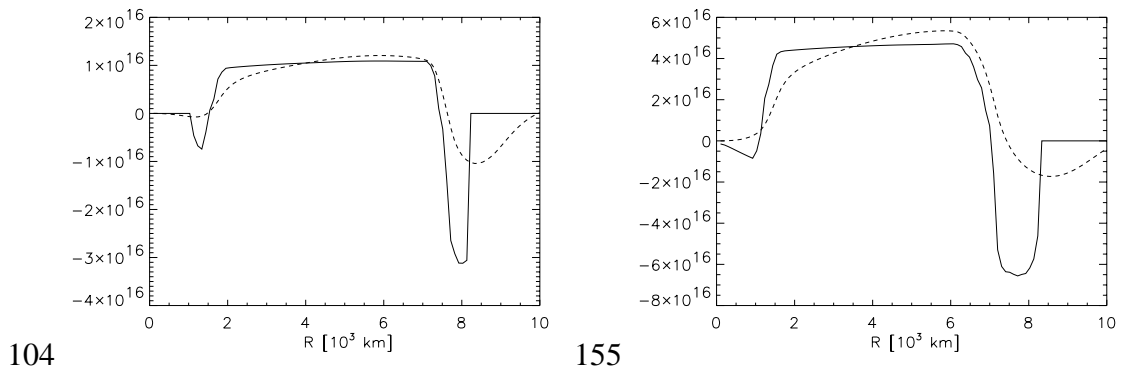


Abbildung 6.14: Konvektiver Fluss nach der 3D Rechnung von Muthsam (gestrichelt) und im Kuhfußmodell (durchgezogen) im Vergleich. Wieder ist links das Modell Nr. 104 und rechts das Modell Nr. 155 dargestellt. Im Zentrum des konvektiven Gebiets stimmen die konvektiven Flüsse weitgehend überein, am Rand der konvektiven Zone ergibt das Kuhfußmodell betragsmäßig zu große Flüsse, dafür jedoch eine geringere Ausdehnung der Überschießzone.

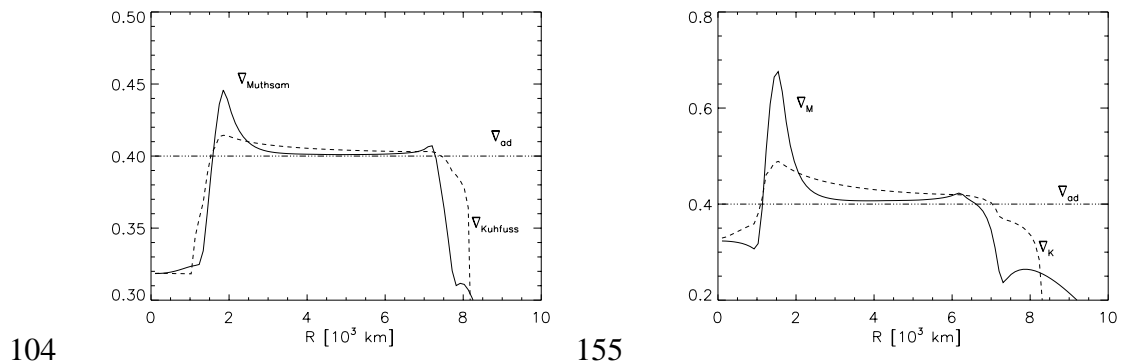


Abbildung 6.15: In dieser Abbildung sind die Temperaturgradienten dargestellt, wie sie sich in den beiden Rechnungen, der dreidimensionalen von Muthsam und der ein-dimensionalen im Kuhfußmodell, ergeben. Im Zentrum der Zone sind die Gradienten beide sehr nahe dem adiabatischen Gradienten, näher zum Rand des konvektiven Gebiets hin ergeben die dreidimensionalen Rechnungen jedoch einen Gradienten, der wesentlich näher am radiativen Gradienten liegt.

dimensionalen Rechnungen übereinstimmen. Am Rande des instabilen Bereichs und noch viel mehr in der Überschießzone sieht die Sachlage jedoch deutlich anders aus. In der Überschießzone wird der konvektive Fluss zwar auch in beiden Fällen negativ, im Kuhfußmodell jedoch mit deutlich höheren Beträgen als in den dreidimensionalen Rechnungen. Des Weiteren sind die Überschießgebiete in den dreidimensionalen Rechnungen deutlich ausgedehnter als im Kuhfußmodell. Dies hat auch Auswirkungen auf den Temperaturgradienten, der sich letztlich einstellt (vgl. Abb. 6.15). Dieser gleicht in beiden Fällen im Zentrum des konvektiven Gebiets dem adiabatischen Gradienten, am Rand der konvektiven Zone jedoch ergibt sich in den dreidimensionalen Rechnungen ein Temperaturgradient, der wesentlich näher an einer radiativen Schichtung liegt, als dies in der Kuhfußrechnung der Fall ist.

Dieses Verhalten ist konsistent mit den Ergebnissen, die wir in Abschnitt 3.7 zusammengefasst hatten. Dort hatten wir festgestellt, dass die in das Kuhfußmodell eingehende Annahme eines isotropen Geschwindigkeitsfeldes inkonsistent ist. Besonders auffällig trat dies im Dreigleichungsmodell zutage. In das Eingleichungsmodell, wie es hier verwendet wird, geht diese Annahme ebenfalls ein, allerdings sind die Inkonsistenzen hier nicht ganz so deutlich sichtbar wie im Dreigleichungsmodell. Im Gegensatz zu einem vollständigen isotropen Geschwindigkeitsfeld ist eher zu erwarten, dass auch im Inneren des konvektiven Gebiets ein anisotropes Geschwindigkeitsfeld vorliegt, in dem die Geschwindigkeiten in vertikaler Richtung bevorzugt sind. Dies würde einem Anisotropiefaktor entsprechen, der größer ist als der isotrope Wert von  $\frac{1}{3}$  (zwischen  $\frac{1}{3}$  und 1). Am Rand der Konvektionszone dagegen erwartet man für den Anisotropiefaktor einen Wert, der deutlich kleiner ist als  $\frac{1}{3}$ , dort sollte ein anisotropes Geschwindigkeitsfeld vorliegen, in dem horizontale Geschwindigkeitskomponen-

ten bevorzugt sind. Der Anisotropiefaktor sollte vom Inneren der Konvektionszone zum Rand hin bis auf null abfallen.

Verwendet man nun im gesamten konvektiven Gebiet ein isotropes Geschwindigkeitsfeld, so erhält man im Zentrum einen Anisotropiefaktor, der zu gering ist, und am Rand einen Anisotropiefaktor, der deutlich zu groß ist. Dies wirkt sich direkt auf den konvektiven Fluss aus, denn dort geht der Anisotropiefaktor ja direkt ein, vgl. Gl. 3.19. Der konvektive Fluss nach Kuhfuß wäre also im Zentrum des konvektiven Gebiets etwas zu gering, am Rand des konvektiven Gebiets jedoch (betragsmäßig) zu groß. Dies ist genau das Verhalten, das in Abb. 6.15 beobachtet werden kann. Für den sich einstellenden Temperaturgradienten bedeutet dies, dass die Konvektion am Rand des konvektiven Gebietes effektiver ist, als dies mit einem veränderlichem Isotropiefaktor der Fall wäre. Ein ähnliches Verhalten findet sich auch in Xiong & Deng (2002), wo die Konvektionszone der Sonne und ihre Auswirkung auf den Lithiumgehalt an der Oberfläche untersucht wird. Xiong findet, dass am Unterrand der Sonne das Gebiet des konvektiven Mischens deutlich weiter reicht als das Gebiet, in dem noch Energie durch Strahlung transportiert wird.

## 6.5 KONVEKTIVES ÜBERSCHIESSEN UND DIE ENTWICKLUNGSPHASEN EINES STERNS

Konvektives Überschießen wurde nicht nur aus theoretischen Überlegungen untersucht, sondern weil ein zusätzliches konvektives Mischen signifikante Auswirkungen auf einige Phasen der Sternentwicklung hat. Einige der wichtigsten Auswirkungen dieses konvektiven Mischens sollen hier kurz aufgeführt und im Anschluss daran im Zusammenhang mit dem Kuhfußmodell der Konvektion näher diskutiert werden. In diesem Zusammenhang soll noch der Übersichtsartikel Schröder & Eggleton (1996) erwähnt werden. Dort werden ebenfalls einige dieser Effekte diskutiert und im Anschluss wird untersucht, welche Konsequenzen ein konvektives Überschießen für die späten Entwicklungsphasen von Sternen hat. Insbesondere wird darauf eingegangen, wie sich die Lage im HRD verändert und welche Konsequenzen dies für die Kalibrierung von  $\zeta$ -Aur Systemen hat.  $\zeta$ -Aur Systeme sind Bedeckungsveränderliche, die einen hellen Riesenstern enthalten. Sie haben üblicherweise Periodendauern zwischen 0.5 und 20 Jahren. In ihnen kann man aus den Lichtkurven die Parameter des Systems, wie Radius und Masse der Einzelsterne gut bestimmen. Zu einer grundlegenden Diskussion der einzelnen Entwicklungsphasen, die hierbei von Bedeutung sind, soll auf die einschlägigen Lehrbücher oder auf Übersichtsartikel wie z.B. Iben (1967) verwiesen sein. Die markantesten Effekte von Überschießen sind:

- Konvektives Überschießen vergrößert den Brennstoffvorrat des Wasserstoffbrennenden Kerns.
- Dadurch verlängert Überschießen die Dauer des zentralen Wasserstoffbrennens, d.h. die Lebenszeit auf der Hauptreihe.

- Die beobachtete Hauptreihe wird verbreitert hin zu niedrigeren Effektivtemperaturen.
- Die Zeit während des anfänglichen Wasserstoffschalensbrennens, also vor Überquerung der Hertzsprung-Lücke, wird verkürzt.
- Die Masse des Heliumkerns, der nach dem Wasserstoffbrennen zurückbleibt, ist vergrößert.
- Dies bewirkt, dass auch die Leuchtkraft im zentralen Heliumbrennen erhöht ist, d.h. die Schleifenbewegung im HRD, die ein Stern während dieser Phase ausführt, liegt bei höheren Leuchtkräften.
- Die Ausdehnung dieser Schleifen dagegen wird reduziert.

Überschießen beeinflußt also die Helligkeit und die Entwicklungszeit eines Sterns, und hat somit Einfluß auf die Stellarstatistik und insbesondere das Zahlenverhältnis von Riesen zu Hauptreihensternen. Hierbei treten die Effekte des Überschießens, das in den konvektiven Kernen während des zentralen Wasserstoffbrennens stattfand, in den späteren Entwicklungsphasen deutlicher zu Tage. Auf dieses Phänomen weisen z.B. Kippenhahn und Weigert deutlich hin, indem sie die späten Entwicklungsphasen als Vergrößerungsglas charakterisieren, das die Unterschiede in den Rechnungen der vorhergehenden Phasen deutlich aufzeigt (Kippenhahn & Weigert (1994) Kapitel 31.4).

### 6.5.1 Der Brennstoffvorrat des Kerns

Durch das zusätzliche Mischen von chemischen Elementen über die Schwarzschildgrenze hinaus bis hin zum Rand der Überschießzone wird der Brennstoffvorrat des Kerns deutlich erhöht. Wir wollen dies am Beispiel eines  $5 M_{\odot}$  Sterns aufzeigen. Die vorliegende Rechnung wurde durchgeführt, beginnend auf der ZAMS mit dem Eingleichungsmodell von Kuhfuß, wie es in Kapitel 4 beschrieben ist. Für den Parameter  $\alpha_t$ , der den konvektiven kinetischen Strom parametrisiert, wurde für die nichtlokale Rechnung der von Kuhfuß abgeschätzte Wert von 0.25 verwendet, für die lokale Rechnung wurde dieser Parameter auf Null gesetzt.

Aus der Abbildung 6.16 ist ersichtlich, dass der für Brennvorgänge zur Verfügung stehende und damit in den späteren Entwicklungsphasen verbrannte Wasserstoffvorrat im nichtlokalen Fall deutlich gegenüber dem lokalen Fall erhöht ist. Verwendet man für  $\alpha_t$  anstelle des Kuhfußschen Wertes den wohl etwas realistischeren Wert von 0.1, so ist die Vergrößerung des Wasserstoffvorrats etwas weniger ausgeprägt. Die Ausdehnung des chemisch durchmischten Gebietes sinkt während des zentralen Wasserstoffbrennens. Somit entsteht schließlich ein chemisches Profil mit einer schiefen Stufe, in der die Wasserstoffkonzentration nach innen kontinuierlich abfällt.



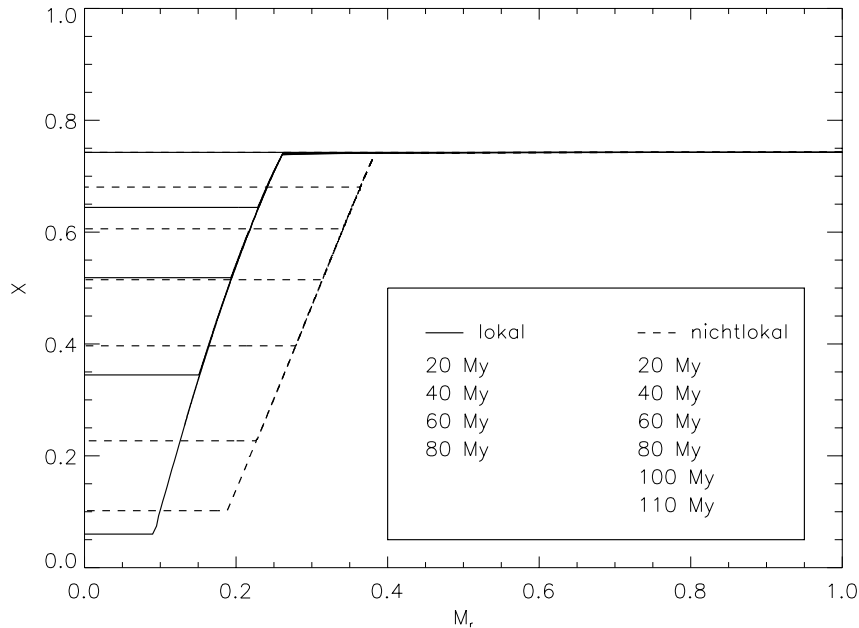


Abbildung 6.16: Wasserstoffprofil eines  $5 M_{\odot}$  Sterns auf der Hauptreihe mit lokaler und nichtlokaler Konvektion. Aufgetragen sind die Werte in Schritten von 20 Megajahren, der letzte Zeitschritt erstreckt sich über 10 Megajahre. Ein weiterer 10-Megajahrschritt würde weit über das Ende des zentralen Wasserstoffbrennens hinausführen.

### 6.5.2 Die Lebensdauer auf der Hauptreihe

Durch die Vergrößerung des Brennstoffvorrats, der für das zentrale Wasserstoffbrennen zur Verfügung steht, wird wie bereits aus Abb. 6.9 und 6.16 ersichtlich, auch die Lebensdauer auf der Hauptreihe vergrößert. In Abbildung 6.17 ist der Wasserstoffgehalt im Zentrum aufgetragen, dieser sinkt in einer Rechnung mit einem lokalen Konvektionsmodell deutlich schneller als in einer Rechnung, in der das konvektive Überschießen berücksichtigt wurde. In Tabelle 6.3 findet sich eine Aufstellung der Lebenszeiten von Sternen mit Massen zwischen  $2.2$  und  $10 M_{\odot}$  für Parameter  $\alpha_t = 0.0$ ,  $0.1$  und  $0.25$ , also für eine Rechnung mit der Kuhfußtheorie im lokalen und im nicht-lokalen Fall mit den bereits diskutierten unterschiedlichen Parametern. Hierbei wurde als Ende des zentralen Wasserstoffbrennens der Zeitpunkt gewählt, zu dem der Wasserstoffvorrat im Zentrum zur Gänze erschöpft ist. Für einen Wert von  $\alpha_t = 0.25$  lässt sich sagen, dass die Lebensdauer während des zentralen Wasserstoffbrennens gegenüber  $\alpha_t = 0.0$  im Mittel um etwa 20% und für  $\alpha_t = 0.1$  um 12% vergrößert wird.

Um diese Brenndauern und insbesondere die Verlängerung der Lebenszeiten auf der Hauptreihe mit den Ergebnissen der Paduagruppe zu vergleichen, wurde eine weitere Rechnung mit einer anderen chemischen Zusammensetzung durchgeführt

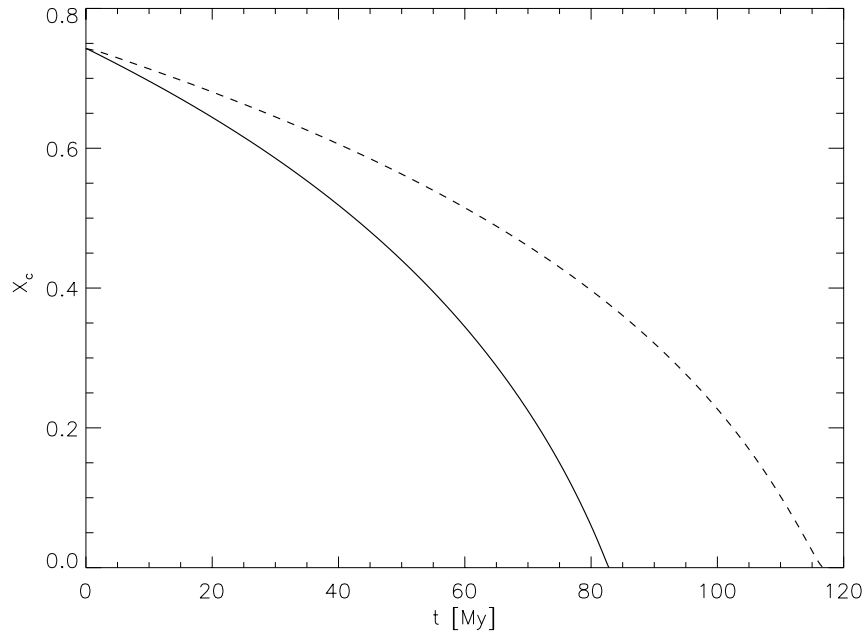


Abbildung 6.17: Gehalt an Wasserstoff im Zentrum des  $5M_{\odot}$  Sterns, wie in Abbildung 6.16. Im Fall einer Rechnung mit einem lokalen Konvektionsmodell (durchgezogene Linie) sinkt dieser deutlich schneller ab, als in einer Rechnung, die konvektives Überschießen beinhaltet (gestrichelte Linie).

Masse	Lebenszeiten [My]		
	$\alpha_t = 0.0$	$\alpha_t = 0.1$	$\alpha_t = 0.25$
$2.2M_{\odot}$	843.94	948.93	1009.0
$2.5M_{\odot}$	606.05	674.18	725.58
$3M_{\odot}$	365.77	410.42	437.74
$4M_{\odot}$	168.77	190.97	202.85
$5M_{\odot}$	95.795	108.39	115.33
$6M_{\odot}$	61.831	69.999	74.621
$8M_{\odot}$	33.373	37.688	40.183
$10M_{\odot}$	21.786	24.431	26.042

Tabelle 6.3: Lebenszeiten des konvektiven Kerns für verschiedene Sternmassen und unterschiedliche Parameter  $\alpha_t$ . Als Ende des Wasserstoffbrennens wurde der Zeitpunkt genommen, an dem der Wasserstoffanteil im Zentrum verschwand. Das zentrale Wasserstoffbrennen dauert im Mittel um 12% (für  $\alpha_t = 0.1$ ) bzw. um 20% (für  $\alpha_t = 0.25$ ) länger als ohne Überschießen ( $\alpha_t = 0.0$ ). Die Anfängliche chemische Zusammensetzung auf der ZAMS liegt bei  $X = 0.7$ ,  $Y = 0.27$ ,  $Z = 0.03$ .

Masse [ $M_{\odot}$ ]	Padua			Kuhfuß			Verlängerung der Brenndauer [%] bei $\alpha_t =$	
	ohne Über- schießen	mit Über- schießen	%	$\alpha_t =$			0.1	0.25
				0.0	0.1	0.25		
6	57.2146	70.9616	24.027	56.630	64.440	68.750	13.791	21.402
5	83.9827	107.568	28.084	86.162	97.776	104.14	13.479	20.865
4	138.103	181.106	31.138	148.25	167.88	178.47	13.241	20.384
3	271.374	368.209	35.683	312.27	352.21	372.44	12.790	19.269
2.5	428.330	588.907	37.489	501.79	566.79	608.77	12.954	21.320
2.2	602.370	831.764	38.082	693.87	786.38	834.10	13.332	20.210

Tabelle 6.4: Vergleich der Lebensdauern auf der Hauptreihe zwischen den Rechnungen der Paduagruppe (Girardi et al. 2000) und den Rechnungen mit der Kuhfußtheorie. Der Metallgehalt ist  $Z = 0.019$ ,  $Y = 0.273$  und  $X = 0.708$ . Aufgetragen ist ferner jeweils die Verlängerung der Dauer des Wasserstoffbrennens in Prozent.

( $Z = 0.019$ ,  $Y = 0.273$  und  $X = 0.708$ ). Diese entspricht der Anfangszusammensetzung der Sonne. Die Ergebnisse sind in 6.4 angegeben. Die Evolutionsrechnungen der Paduagruppe wurden in Girardi et al. (2000) beschrieben und veröffentlicht. Diese verwenden ebenfalls die OPAL Opazitäten, sowie für niedrige Temperaturen Alexander (1994). Die Grenzen der konvektiven Zonen und somit die Ausdehnung der Überschießzone werden gemäß Bressan et al. (1981) bestimmt. In diese Theorie geht ein Parameter  $\Lambda_c$  ein, der die Ausdehnung des konvektiven Überschießens bestimmt.

Die Lebensdauern ohne konvektives Überschießen stimmen für die schwereren Sterne gut überein, für die leichteren Sterne treten Abweichungen auf. Die Verlängerung der Wasserstoffbrenndauer durch Überschießen jedoch ist im Fall der Paduarechnungen (bis zu 38%) deutlich größer und markanter als im Fall der Rechnungen mit dem Kuhfußmodell (13% bzw. 20%). Im Vergleich zu Rechnungen mit dem Kuhfußmodell und  $\alpha_t = 0.25$  liegt wieder eine deutlich bessere Übereinstimmung vor. Insbesondere erhöht sich die Lebensdauer nicht bei allen Sternmassen um nahezu denselben Faktor wie bei dem Kuhfußmodell, sondern das Wasserstoffbrennen wird bei leichten Sternen um einen deutlich größeren Prozentsatz verlängert (38% bei einem  $2.2 M_{\odot}$  Stern gegenüber 24% bei einem  $6 M_{\odot}$ ). Dies liegt daran, dass in den Rechnungen, die das Kuhfußmodell verwendeten, die Mischungsweglänge für kleine Sternmassen, das heißt für kleine konvektive Kerne aus physikalischen Gründen verkürzt wurde (vgl. Kapitel 3.7.1). Ein ähnliches Vorgehen findet bei Girardi et al. (2000) nicht statt. Die Lebenszeiten der Rechnungen mit Überschießen der Paduagruppe stimmen dagegen recht gut mit den Rechnungen der Kuhfußtheorie für den Fall von  $\alpha_t = 0.25$  überein.

### 6.5.3 Die Breite der Hauptreihe

Vergleicht man Beobachtungen mit Entwicklungsrechnungen, die mit klassischer Mischungswegtheorie gerechnet wurden, so stellt man fest, dass diese Rechnungen einige Defizite aufweisen (Racine (1974), Torres-Peimbert (1971), Demarque (1972), Bell (1972) und Maeder (1974)). Unter anderem war auch die beobachtete Hauptreihe breiter als die theoretisch errechnete. Auch dies kann ausgeglichen werden, indem man einen um einen gewissen Anteil vergrößerten konvektiven Kern verwendet. Hierbei muss allerdings, wie bereits in Kapitel 6.2 diskutiert, im Massenbereich zwischen 2 und  $6 M_{\odot}$  ein variabler Prozentsatz gewählt werden, der an die Beobachtungen angepasst wird. In unseren Rechnungen, unter Verwendung des Kuhfußmodells, ergab sich diese variable Überschießdistanz zwingend aus der Theorie von selbst. Wir verwenden hier wieder das Eingleichungsmodell von Kuhfuß mit Parametern  $\alpha_t = 0.0, 0.1, 0.25$ . Hier sollen zunächst Sterne mit Massen zwischen 2.2 und  $10 M_{\odot}$  betrachtet werden. In Abb. 6.18 ist zu sehen, dass der Raum im HRD, den der Stern während seines zentralen Wasserstoffbrennens einnimmt, mit steigendem Parameter  $\alpha_t$  in der Tat zunehmend breiter wird.

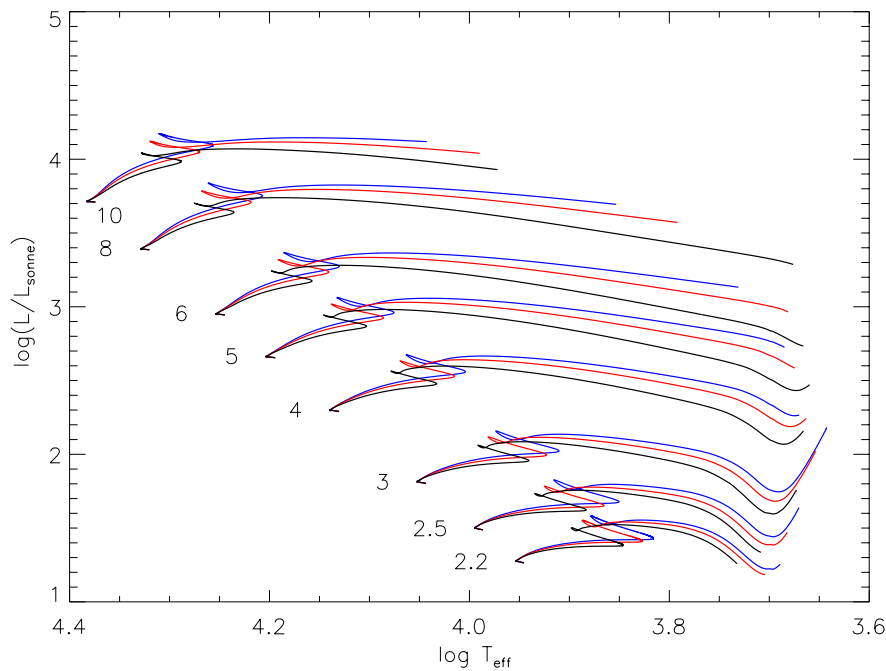


Abbildung 6.18: HRD mit Sternen im Massenbereich zwischen  $2.2$  und  $10 M_{\odot}$ . Die Rechnungen beginnen auf der Nullalterhauptreihe und reichen bis deutlich nach dem Ende des zentralen Wasserstoffbrennens. Die Rechnungen wurden jeweils mit unterschiedlichen Parametern  $\alpha_t$  durchgeführt.  $\alpha_t = 0.0$ , der lokale Fall (schwarz) und die Rechnungen mit Überschießen  $\alpha_t = 0.1$  (rot) und  $\alpha_t = 0.25$  (blau).

Masse	$\log T_c$			$\log \rho_c$		
	$\alpha_t = 0.0$	$\alpha_t = 0.1$	$\alpha_t = 0.25$	$\alpha_t = 0.0$	$\alpha_t = 0.1$	$\alpha_t = 0.25$
$2.2M_\odot$	7.417	7.495	7.508	2.342	2.385	2.401
$2.5M_\odot$	7.487	7.510	7.524	2.262	2.302	2.324
$3M_\odot$	7.510	7.533	7.549	2.215	2.190	2.207
$4M_\odot$	7.542	7.572	7.588	1.975	2.021	2.042
$5M_\odot$	7.571	7.604	7.621	1.861	1.905	1.923
$6M_\odot$	7.595	7.631	7.650	1.775	1.823	1.838
$8M_\odot$	7.642	7.680	7.699	1.644	1.692	1.707
$10M_\odot$	7.678	7.715	7.734	1.557	1.605	1.625

Tabelle 6.5: Zentraltemperatur und Dichte unmittelbar nach dem Erlöschen des zentralen Wasserstoffbrennens. Die Modelle mit konvektiven Überschießen sind im Zentrum heißer und dichter als die entsprechenden Modelle, in denen eine lokale Konvektionstheorie verwendet wurde.

Während des zentralen Wasserstoffbrennens gehen folgende Vorgänge vor sich: Durch die nuklearen Brennprozesse im Inneren werden Wasserstoffatomkerne  $^1\text{H}$ , also Protonen, zu Heliumkernen  $^4\text{He}$  verschmolzen. Da vier Protonen für einen Heliumkern nötig sind, wird durch diesen Prozesse die mittlere Teilchenzahl pro Gramm reduziert, bzw. das mittlere Molekulargewicht  $\mu$  der Teilchen erhöht. Somit kann das Gleichgewicht zwischen Gravitationskraft und Druck nur durch ein Ansteigen der Dichte und der Temperatur erhalten werden. Deutlich wird dies an einem idealen Gas, bei dem die Zustandsgleichung

$$P = R \frac{\rho T}{\mu}$$

lautet, mit der Gaskonstante  $R$ . Dieser Anstieg von Temperatur und Dichte wird durch eine Kontraktion des Kerns erreicht. Auf eine solche Kontraktion reagieren Sterne mit einer korrespondierenden Expansion der Hülle. Da in dieser Phase  $L \sim \mu^4$  gilt, ergibt sich der beobachtete Effekt, dass Überschießen die Modelle zu höheren  $L$  und niedrigeren  $T_{\text{eff}}$  verschiebt. In Tabelle 6.5 finden sich jeweils die Temperatur und die Dichte im Zentrum für Modelle mit zunehmenden konvektiven Überschießen. Die Werte wurden jeweils nachdem der Wasserstoffkern ausgebrannt war ermittelt.

#### 6.5.4 Beginn des Schalenbrennens

Erschöpft sich der Wasserstoffvorrat im Kern zunehmend und erlischt schließlich, so geschieht ein Übergang vom zentralen Brennen zum Schalenbrennen im wesentlichen in zwei Schritten. Zunächst beginnt eine Phase, in der der Stern in seiner Gesamtheit kontrahiert. Diese Kontraktion ist verbunden mit einem Anstieg der Effektivtemperatur und der Leuchtkraft, die Position des Sterns im H-R-Diagramm verschiebt sich nach links oben, der Stern wandert wieder weg vom kühlen Ende der Hauptreihe hin zu ihrer

Mitte. Die Zeitpunkte und die Zeitdauer für diese Phasen, wie sie in Abb. 6.19 markiert sind, sind in Tabelle 6.6 für Modelle mit unterschiedlich starkem Überschießen wiedergegeben.

In der zweiten Phase des Übergangs zum Schalenbrennen verlagert sich nun der Hauptteil der Energieproduktion vom Zentrum in die Schalenquelle. Im Kern gilt:

$$\frac{\partial L}{\partial m} = \epsilon_n \rightarrow 0 \quad (6.1)$$

Der ausgebrannte Kern kontrahiert deutlich schneller als zuvor der Stern in seiner Gesamtheit. Der Kern wird dabei zunehmend isotherm. In der entstehenden Schalenquelle hingegen verlagern sich die Brennvorgänge immer weiter hin zu noch nicht ausgebrannten Bereichen, der dort vorrätige Wasserstoff wird gezündet und die dabei entstehende Leuchtkraft wird nach außen transportiert. Die oberhalb der Schalenquelle gelegenen Schichten reagieren hierauf mit einer Expansion. Da für diese Expansion der Hülle Energie benötigt wird, kann nicht die gesamte in der Schalenquelle produzierte Energie die Oberfläche erreichen. Dies ist der Grund für den vorübergehenden Abfall der Leuchtkraft, der in Abb. 6.19 kurz nach Punkt 2 zu beobachten ist.

Einer der Effekte des Überschießens ist, dass die Zeit verkürzt wird, in der der Stern diesen Übergang vom zentralen Brennen zum Schalenbrennen vollzieht. In Tabelle 6.6 werden für Sterne mit Massen zwischen  $2.2$  und  $10 M_\odot$  die Zeitpunkte aufgeführt, zu denen der jeweilige Stern die Punkte 1,2 bzw. 3, wie sie in Abb. 6.19 angegeben sind, erreicht. Diese Zeitpunkte entsprechen dem ersten Minimum in der Effektivtemperatur, dem ersten und dem zweiten Maximum in der Leuchtkraft. Wie man erkennt, sinkt hier die Zeitspanne  $\Delta_{2,3} = t_3 - t_2$ , während der der Übergang zum Schalenbrennen erfolgt, mit steigendem Parameter  $\alpha_t$ . Besonders deutlich wird dieser Effekt, wenn man diese Zeitspanne im Verhältnis zur Dauer des zentralen Wasserstoffbrennens betrachtet. Dies ist in der achten Spalte der Tabelle 6.6 angegeben. Im Fall eines  $2.2M_\odot$  Sterns erstreckt sich diese Übergangsphase im lokalen Fall über 3.39% der Zeit des zentralen Brennens, im Gegensatz zum nichtlokalen Fall, mit lediglich 0.207% (für  $\alpha_t = 0.25$ ).

Zusammenfassend lässt sich also sagen: Je größer das konvektive Überschießen ist, umso länger dauert das zentrale Wasserstoffbrennen, aber umso schneller geht der Übergang zum Schalenbrennen vonstatten.

### 6.5.5 Heliumkernmasse

Durch das Wasserstoffbrennen auf der Hauptreihe bleibt im Zentrum ein Gebiet zurück, in dem der Wasserstoffvorrat erschöpft und Helium angereichert ist. Dieses Gebiet ist, abhängig von der verwendeten Konvektionstheorie und insbesondere von der Ausdehnung des konvektiven Gebietes während des Wasserstoffbrennens, unterschiedlich groß. Da aber gerade die Größe und Gestalt dieses Heliumkerns eine bedeutende Auswirkungen auf die weitere Entwicklung des Sterns während der späteren Phasen seiner Entwicklung hat, soll hier seine Ausdehnung und insbesondere seine Abhängigkeit vom konvektiven Überschießen diskutiert werden.

Masse	$\alpha_t$	$t_1$ [My]	$t_2$ [My]	$t_3$ [My]	$\Delta_{1,2}$ [My]	$\Delta_{2,3}$ [My]	$\Delta_{2,3}/t_2$
$2.2M_{\odot}$	0.0	818.348	843.978	872.628	25.630	28.650	3.39 %
$2.2M_{\odot}$	0.1	925.047	948.942	952.868	23.897	3.9264	0.414 %
$2.2M_{\odot}$	0.25	986.238	1009.01	1011.10	22.776	2.0862	0.207 %
$2.5M_{\odot}$	0.0	588.072	606.706	621.984	18.634	15.278	2.52 %
$2.5M_{\odot}$	0.1	657.670	674.170	677.056	16.500	2.8856	0.428 %
$2.5M_{\odot}$	0.25	709.679	725.588	726.788	15.908	1.2004	0.165 %
$3M_{\odot}$	0.0	354.381	365.781	373.343	11.400	7.5621	2.07 %
$3M_{\odot}$	0.1	400.381	410.407	412.050	10.026	1.6441	0.401 %
$3M_{\odot}$	0.25	428.769	437.749	438.574	8.9800	0.82457	0.188 %
$4M_{\odot}$	0.0	164.034	168.747	172.132	4.7123	3.3866	2.007 %
$4M_{\odot}$	0.1	186.671	190.963	191.587	4.2921	0.62392	0.327 %
$4M_{\odot}$	0.25	198.935	202.849	203.193	3.9137	0.34486	0.170 %
$5M_{\odot}$	0.0	92.9169	95.7834	97.2694	2.8665	1.4859	1.55 %
$5M_{\odot}$	0.1	105.966	108.385	108.680	2.9189	0.29427	0.272 %
$5M_{\odot}$	0.25	113.101	115.324	115.500	2.2118	0.17676	0.153 %
$6M_{\odot}$	0.0	60.0447	61.8214	62.5495	1.7766	0.72808	1.178 %
$6M_{\odot}$	0.1	68.4505	69.9955	70.1617	1.5449	0.16626	0.238 %
$6M_{\odot}$	0.25	73.2232	74.6192	74.7230	1.3960	0.10381	0.139 %
$8M_{\odot}$	0.0	32.4184	33.3681	33.5475	0.88673	0.17927	0.537 %
$8M_{\odot}$	0.1	36.8860	37.6870	37.7490	0.80097	0.061964	0.164 %
$8M_{\odot}$	0.25	39.4449	40.1836	40.2249	0.73867	0.041254	0.103 %
$10M_{\odot}$	0.0	21.2465	21.7846	21.8555	0.53811	0.070881	0.325 %
$10M_{\odot}$	0.1	23.9442	24.4314	24.4649	0.48721	0.033466	0.137 %
$10M_{\odot}$	0.25	25.6215	26.0424	26.0661	0.42086	0.023695	0.0910%

Tabelle 6.6: Zeitdauer für die unterschiedlichen Entwicklungsphasen. Die Zeiten  $t_1$ ,  $t_2$  und  $t_3$  entsprechen den Punkten 1, 2 und 3 in Abb. 6.19. Angegeben sind ferner das Zeitintervall  $\Delta_{1,2}$  zwischen  $t_1$  und  $t_2$  und das Intervall Zeitintervall  $\Delta_{2,3}$  zwischen  $t_2$  und  $t_3$ . In der letzten Spalte findet sich der prozentuale Anteil, den die Entwicklungsphase  $\Delta_{2,3}$  im Verhältnis zur Dauer der zentralen Wasserstoffbrennens ausmacht.

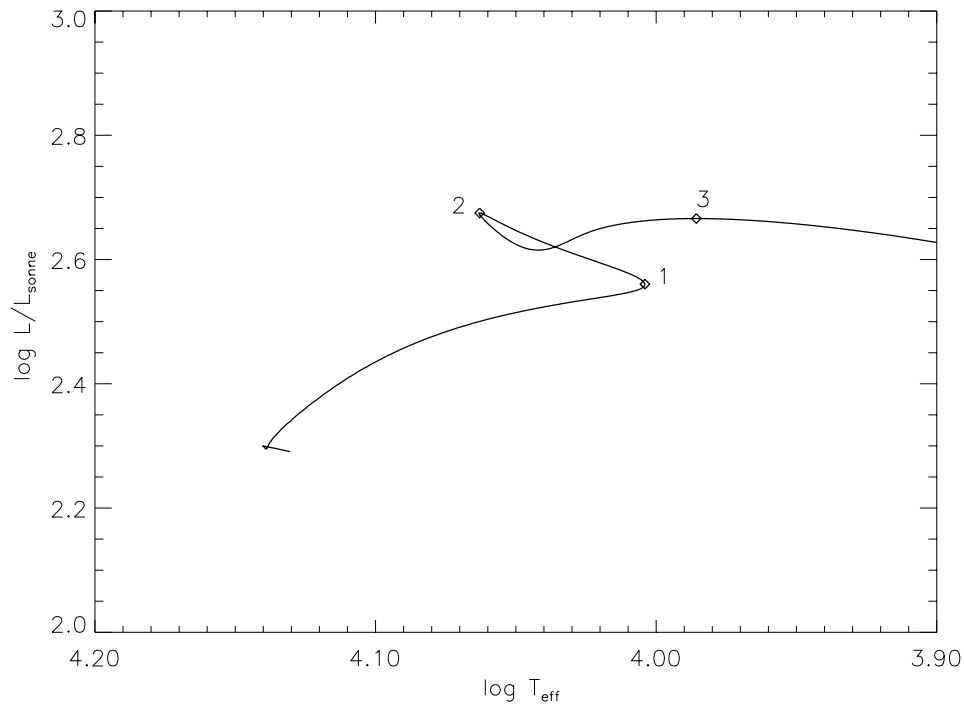


Abbildung 6.19: Entwicklungspunkte im HRD, an denen die Zeiten in Tabelle 6.6 angegeben sind. die Punkte 1, 2 und 3 entsprechen den Zeiten  $t_1$ ,  $t_2$  und  $t_3$ .

Wir betrachten Sterne mit 4, 5 und  $6 M_{\odot}$ . Der Parameter  $\alpha_t$  wurde wieder zu 0.0, 0.1 und 0.25 gesetzt. Untersucht wurde die Masse des Heliumkerns am unteren Ende des roten Riesenasts, also nach Überquerung der Hertzsprunglücke und vor Beginn des zentralen Heliumbrennens. Als Grenze des konvektiven Kerns wurde der Punkt gewählt, an dem die Wasserstoffkonzentration unter  $10^{-5}$  sinkt, also der innere Rand der Schalenquelle. In Tabelle 6.7 ist diese Grenze in Massenkoordinaten angegeben. Ebenfalls angegeben ist die Effektivtemperatur und Leuchtkraft, also die Position im H.-R.-Diagramm. Dies ist gerade der Punkt mit der geringsten Leuchtkraft. Es lässt sich sehen, dass die Ausdehnung des Kerns jeweils mit steigenden Überschießen, also mit steigendem Parameter  $\alpha_t$  zunimmt. Der prozentuale Anteil, um den der ausgebrannte Kern durch Überschießen wächst, steigt aber nicht nur mit dem Überschießparameter, sondern auch mit der Masse. Die Vergrößerung des Kerns liegt bei  $\alpha_t = 0.1$  zwischen 5% und 10% und für  $\alpha_t = 0.25$  zwischen 9% und 20%, jeweils für einen  $4M_{\odot}$  bzw.  $6M_{\odot}$  Stern. Somit sind die Auswirkungen einer nichtlokalen Konvektionstheorie auf die Struktur eines Sterns am Ende des Heliumbrennens bei schwereren Sternen deutlicher zu bemerken als bei leichteren Sternen. Dies liegt daran, dass es während des Wasserstoffbrennens nötig war, für Sternmassen  $< 6M_{\odot}$  eine verringerte Mischungsweglänge zu verwenden (vgl. Kapitel 3.7.1).



$M/M_{\odot}$	$\alpha_t$	$\log L/L_{\odot}$	$\log T_{\text{eff}}$	$M_{\text{Kern}}/M$
4	0.0	2.0637	3.6899	0.11027
4	0.1	2.1901	3.6787	0.11578
4	0.25	2.2659	3.6739	0.12072
5	0.0	2.4701	3.6598	0.11419
5	0.1	2.5665	3.6664	0.12252
5	0.25	2.6572	3.6652	0.12961
6	0.0	2.7303	3.6607	0.11749
6	0.1	2.8755	3.6519	0.12964
6	0.25	2.9820	3.6362	0.14134

Tabelle 6.7: Masse des Heliumkerns  $M_{\text{Kern}}/M$  zu Beginn des Heliumbrennens. für unterschiedliche Sternmassen und unterschiedliche Parameter  $\alpha_t$ . Ferner ist die zugehörige Leuchtkraft und Effektivtemperatur angegeben.

### 6.5.6 Leuchtkraft und Ausdehnung der blauen Schleife

Wie bereits weiter oben erwähnt, hat das konvektive Überschießen, das einen vergrößerten Heliumkern hervorruft, Auswirkungen auf die späteren Entwicklungsphasen des Sterns. Insbesondere wird der Einfluss darauf sichtbar, wie groß und ausgeprägt die sogenannten blauen Schleifen sind, die während des zentralen Heliumbrennens wegführen von der Hayashi-Linie hin zu höheren Temperaturen, was eine deutliche Lageänderung im HRD bedeutet und somit gut beobachtbar ist. So ist in Abb. 6.20 und 6.21 sichtbar, dass die Schleifen in den Modellen mit Überschießen bei deutlich höheren Leuchtkräften liegen als in den Modellen mit einem lokalen Konvektionsmodell. Ein weiterer wesentlicher Punkt ist die Zeitspanne, während der sich ein Stern in der Phase des zentralen Heliumbrennens befindet, denn diese Zeitspanne beeinflusst die Anzahl der Sterne, die im entsprechenden Bereich des HRD zu beobachten sind. Da die Modelle mit konvektivem Überschießen während des zentralen Heliumbrennens bei höheren Leuchtkräften liegen, verbrauchen sie auch ihren Heliumvorrat schneller und somit ist die Zeitskala, die der Stern in der Schleife verbringt, verkürzt. Berücksichtigt man zudem, dass Überschießen die Verweildauer auf der Hauptreihe verlängert, so verändert sich durch eine nichtlokale Betrachtung der Konvektion das Verhältnis der Anzahl von Sternen während des zentralen Heliumbrennens zu Sternen während des zentralen Wasserstoffbrennens beträchtlich.

Die Tatsache, dass die blauen Schleifen eine geringere Ausdehnung haben und bei höheren Leuchtkräften liegen, stimmt mit Beobachtungen überein, wie sie vor allem an Doppelsternen durchgeführt wurden. Dort kann man beobachten, dass der weiter entwickelte der beiden Sterne eine deutlich höhere Temperatur hat, als dies in Modellen mit lokaler Konvektion erklärbar ist. Doppelsterne sind deshalb besonders interessant, da man bei ihnen sehr gut die Massen der beiden Sterne bestimmen kann. Ferner weiß man, dass beide Sterne aufgrund einer gemeinsamen Entstehungsgeschichte dieselbe anfängliche chemische Zusammensetzung und das gleiche Alter haben. Besonders

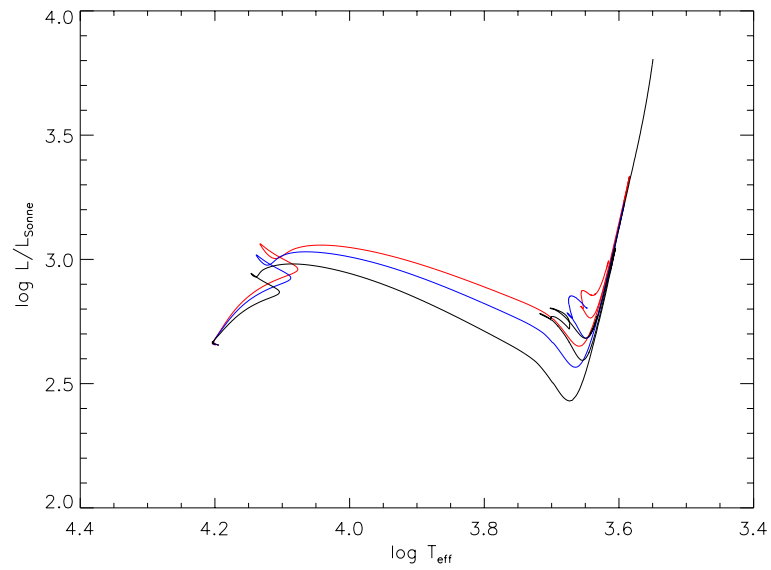


Abbildung 6.20: Entwicklungsweg eines  $5M_{\odot}$  Sterns im H.-R.-Diagramm für Parameter  $\alpha_t = 0.0$  (Schwarz), 0.1 (Blau) und 0.25 (rot).

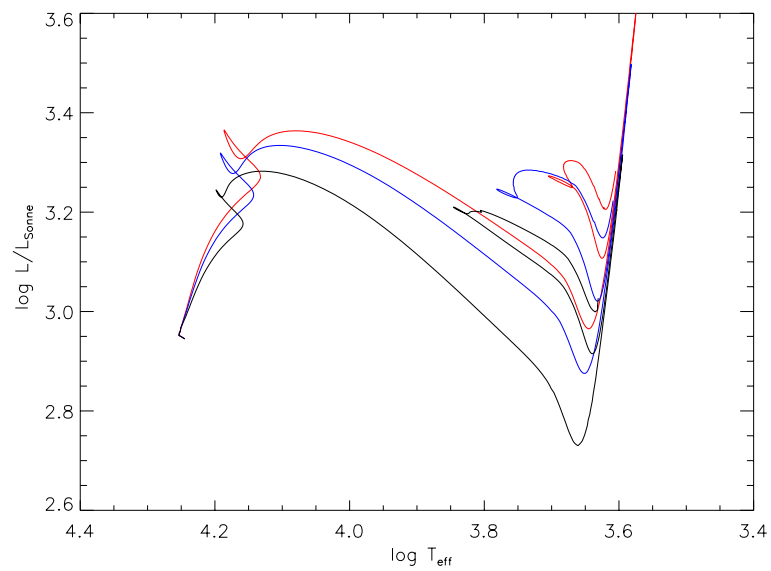


Abbildung 6.21: Entwicklungsweg eines  $6M_{\odot}$  Sterns im H.-R.-Diagramm für Parameter  $\alpha_t = 0.0$  (Schwarz), 0.1 (Blau) und 0.25 (rot).

ist dabei allerdings Rücksicht zu nehmen, ob beide Sterne während ihrer Geschichte in Kontakt standen, d.h., dass Masse von einem Stern abströmte und sich auf dem anderen anlagerte. Einige Beispiele für solche Doppelsterne werden z.B. in Schröder & Eggleton (1996) aufgeführt. Weitere Beispiele finden sich in El Eid (1995) und Ribas et al. (2000). In dieser Arbeit soll jedoch nur das prinzipielle Verhalten gezeigt werden, da für eine eingehendere Diskussion eine detailliertere Untersuchung der Lage der Schalenquelle sowie der Struktur des chemischen Profils nötig ist. Dieses wird von einer Reihe von Effekten wie Metallabhängigkeit, Semikonvektion oder durch Mischen von Material zwischen Schalenquelle und Hülle durch eine tiefreichende Konvektionszone beeinflusst.

## 6.6 SONNENMODELLE

In den vorhergehenden Kapiteln haben wir das Kuhfußsche Konvektionsmodell auf verschiedene Problemfälle angewendet, und dabei zum Teil qualitative (die Hülle von A-Sternen) und zum Teil quantitative Ergebnisse (die Überschieblänge in konvektiven Kernen und die Lebenszeiten auf der Hauptreihe) erhalten. Wir wollen die Konvektionstheorie nun auf unsere Sonne anwenden. Da die Eigenschaften dieses uns am nächsten gelegenen Sternes besonders genau vermessen sind, ist dies ein besonders empfindlicher Test, der auch in der Vergangenheit immer wieder als Testlaboratorium für die Sternentwicklung verwendet wurde z.B. in Weiss et al. (2001) oder Richard et al. (1996).

Insbesondere kann man bei der Sonne die seismischen Schwingungen an der Oberfläche sehr genau vermessen und aufgrund seismischer Methoden auf die Struktur im Inneren der Sonne schließen wie auf den Verlauf der Schallgeschwindigkeit von der Hülle bis hin zum solaren Zentrum (vgl. Basu (1996)). Nimmt man diesen Verlauf der Schallgeschwindigkeit und vergleicht ihn mit den entsprechenden Werten, wie sie sich aus theoretischen Modellen ergeben, so kann man überprüfen, ob die theoretischen Modelle im Rahmen der Messgenauigkeit mit den Ergebnissen der Helioseismologie übereinstimmen und diese somit verifizieren oder falsifizieren. Ein Beispiel für ein solches Vorgehen ist die Arbeit von Weiss et al. (2001), in der überprüft wird, ob das Modell einer modifizierten Abschirmung der Atomkerne durch das Plasma und der damit verbundenen veränderten Kernreaktionsraten in einem Sonnenmodell mit der beobachteten Sonne vereinbar ist.

In dieser Arbeit und in den im Folgenden hier vorgestellten Rechnungen wird, sofern nicht gesondert erwähnt, im numerischen Verfahren vorgegangen wie in Schlattl (1999) erläutert. Dies führt zum Garching Sonnenmodell (GSM). Die Zustandsgleichung und die Opazitäten werden wie in Kapitel 4 beschrieben verwendet. In der Entwicklung der Verteilung chemischer Elemente wird neben der Umwandlung von Elementen durch Kernreaktionen auch die mikroskopische Diffusion durch Temperatur-, Druck- und Konzentrationsdiffusion ebenso wie das konvektive Mischen berücksichtigt. Für das letztere wird ebenfalls ein Diffusionsansatz verwendet, wie er sich in

Langer et al. (1985) findet. Hierbei geht in die Diffusionskonstante unter anderem die konvektive Geschwindigkeit ein. Diese wird bei Schlattl (1999), alternativ nach der Konvektionstheorie von Vitense (1953) oder Canuto & Mazzitelli (1991) und Canuto & Mazzitelli (1992) berechnet. In der Kuhfußschen Theorie erhalten wir die konvektive Geschwindigkeit, wieder unter der Isotropieannahme, aus der konvektiven kinetischen Energie  $\omega$ .

Um die Struktur der Sonnenatmosphäre und die äußeren Randbedingungen zu berechnen, wird eine Modellatmosphäre angefügt, wie sie aus den zweidimensionalen Simulationsrechnungen von Freytag et al. (1996) folgt. Die Modelle werden entweder von der Nullalterhauptreihe (ZAMS) oder von der Vorhauptreihe (PMS) beginnend bis zum heutigen Alter der Sonne gerechnet. Hierbei ergeben sich abhängig von unterschiedlichen Werten für die Mischungsweglänge und der anfänglichen chemischen Zusammensetzung unterschiedliche Werte für die Leuchtkraft, den Radius und die Oberflächenzusammensetzung der Modelle mit dem bekannten Sonnenalter. Wie bei Sonnenmodellrechnungen üblich werden diese Anfangsbedingungen durch ein Newtonverfahren solange angepasst, bis das sich ergebende Sonnenmodell die Leuchtkraft, den Radius und den Metallgehalt der beobachteten Sonne richtig reproduziert.

In Abb. 6.22 findet sich ein Beispiel für den Vergleich eines theoretischen Modells mit den Ergebnissen der Helioseismologie. Aufgetragen ist die relative Abweichung der Schallgeschwindigkeit in einem Standardsonnenmodell von der Schallgeschwindigkeit der Helioseismologie  $(c_{\text{modell}} - c_{\text{seismisch}})/c_{\text{seismisch}}$ . Die Schallgeschwindigkeit der Helioseismologie resultiert aus einer Analyse der Schwingungsfrequenzen, die sich an der Sonnenoberfläche beobachten lassen (Basu 1998). Der grau schattierte Bereich stellt den Fehlerbereich der Helioseismologie dar (Degl'Innocenti (1997)). Die größten Abweichungen des Modells von der Helioseismologie ergeben sich kurz unterhalb der konvektiven Hülle ( etwa im Bereich  $r = 0.6 \sim 0.7R_{\odot}$ ). Da dies gerade der Bereich ist, in dem ein eventuelles Über- bzw. Unterschließen der Konvektion von Bedeutung sein könnte, ist die Anwendung einer nichtlokalen Konvektionstheorie auf die Sonne von besonderem Interesse.

### 6.6.1 Probleme in der Sonne

#### Das Li-Problem

Beobachtet man die Atmosphäre unserer Sonne und misst den Metallgehalt in der Atmosphäre, so stellt man fest, dass sich in der Sonnenatmosphäre um den Faktor 1/140 weniger  ${}^7\text{Li}$  befindet als in den Meteoriten unseres Sonnensystems. Da die Sonne und die Meteoriten aus der gleichen Urmaterie entstanden sind, ist zu erwarten, dass sowohl die Meteoriten als auch die Sonne in ihrem ursprünglichen Zustand den gleichen Anteil an  ${}^7\text{Li}$  enthielten. Tritt in der Sonnenatmosphäre und in der gesamten Hülle weniger Lithium auf, so bedeutet dies, dass ein Teil des Lithiums während der bisherigen Geschichte der Sonne verbrannt worden sein muß. Standardsonnenmodelle sagen jedoch vorher, dass, sofern mit der Rechnung auf der ZAMS begonnen wird, der  ${}^7\text{Li}$ -

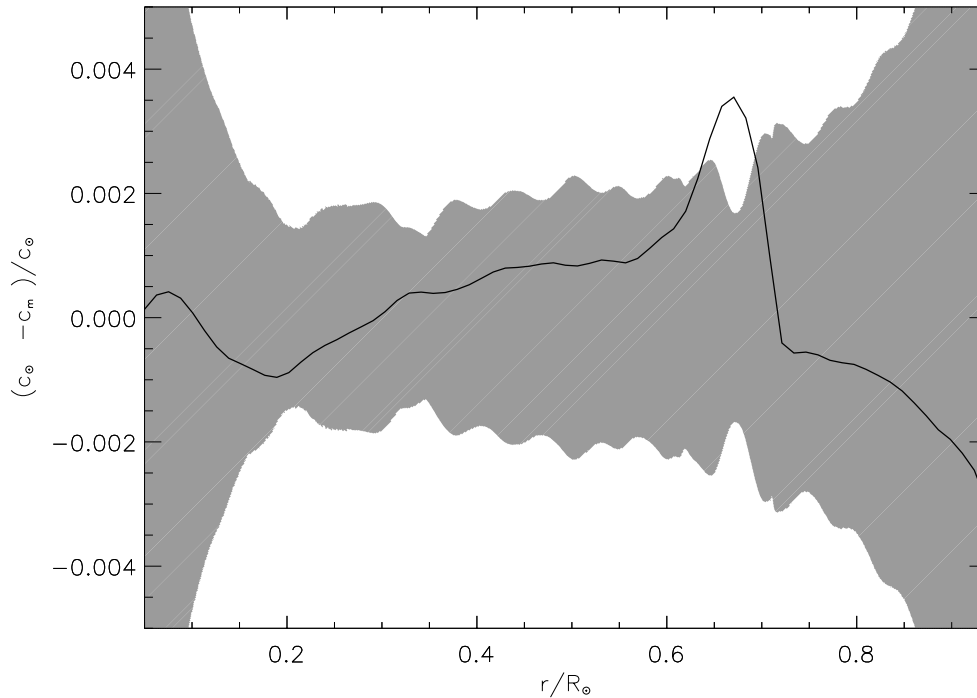


Abbildung 6.22: Beispiel für den Vergleich eines Sonnenmodells mit den Ergebnissen der Helioseismologie. Der grau schraffierte Bereich gibt den Fehlerbereich der helioseismischen Messungen an; dieser ist in einer mittleren Schicht der Sonne am geringsten, außen und im Zentrum am größten. Die hier verwendete Konvektionstheorie ist die Eingleichungstheorie im lokalen Fall. Der Verlauf der Temperatur und der Schallgeschwindigkeit ist identisch mit den Ergebnissen der Mischungswegtheorie. Die Linie gibt die relative Abweichung der Schallgeschwindigkeit des Modells von der Schallgeschwindigkeit der Helioseismologie an. Das theoretische Modell liegt also in weiten Bereichen innerhalb der Fehlergrenzen, lediglich unterhalb der konvektiven Hülle, also unterhalb von 0.71 in Einheiten des Sonnenradius, sind stärkere Abweichungen festzustellen. Dies ist genau der Bereich, in dem ein konvektives Überschießen wichtig sein könnte.

Gehalt lediglich um einen Faktor 2-3 reduziert worden sein kann. Größer ist dieser Faktor, wenn man mit der Rechnung bereits auf der Vorhauptreihe (PMS) beginnt, jedoch lässt sich auch mit solchen Modellen das solare Lithium-Problem nicht endgültig lösen. Näheres zu diesen Ansätzen findet sich in Chaboyer (1998), D'Antona & Mazzitelli (1994), Charbonnel (1994) und Schlattl & Weiss (1999).

Da nun  ${}^7\text{Li}$  bei einer Temperatur von  $2.5 \cdot 10^6 \text{ K}$  verbrennt und diese Temperatur in der Sonne in einer Schicht erreicht wird, die knapp unterhalb der konvektiven Hülle liegt, also gerade dort, wo die Abweichung von der Helioseismologie am größten ist, so ist man versucht, sowohl die Abweichung von der Helioseismologie als auch das

zuviel vorhandene Lithium auf einen Schlag zu korrigieren und die konvektive Hülle durch ein konvektives Überschießen zu vergrößern. Hierdurch wird mehr Lithium in tiefere Schichten gemischt, wo sie verbrannt werden können. Durch den veränderten Temperaturgradienten sollte sich auch das Profil der Schallgeschwindigkeit in diesem Bereich verändern. Beispiele für Rechnungen, die diesen Ansatz verwenden, sind z.B. Richard et al. (1996) Schlattl (1999) oder Schlattl & Weiss (1999). Eine neuere Arbeit, die sich mit dem Überschießen in der Sonne beschäftigt, ist Marik & Petrovay (2002).

### **Der konvektive Kern im nichtlokalen Fall**

Ein weiteres Problem tritt auf, wenn man ein Sonnenmodell, beginnend bei der Hauptreihe oder der Vorhauptreihe, mit konvektivem Überschießen rechnet. Auf der Nullalterhauptreihe entsteht zunächst ein konvektiver Kern, der im lokalen Fall nach kurzer Zeit wieder verschwindet, wenn der Vorrat an  ${}^3\text{He}$  in ihm aufgebraucht ist. In diesem Kern wird zusätzliche nukleare Energie frei, indem  ${}^3\text{He}$  über die Reaktion  ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$  verbrannt wird. In einem traditionell gerechneten Sonnenmodell nimmt dieser Kern in seiner größten Ausdehnung etwa 8% der Sternmasse ein und verschwindet nach etwa 100 *My*. Er besteht also nur für etwa 2% der Lebenszeit der Sonne. Vergrößert man nun den konvektiven Kern durch Überschießen und somit auch den Vorrat an  ${}^3\text{He}$ , so bleibt dieses konvektive Gebiet für eine deutlich längere Zeit bestehen. Abhängig von der Größe der Überschießgebietes kann dies sogar bis hin zur heutigen Sonne sein. Eine Sonne mit einem konvektiven Kern ist aber sicherlich mit den Ergebnissen der Helioseismologie nicht vereinbar, siehe hierzu z.B. Richard & Vauclair (1997). Wir wollen weiter unten eine Möglichkeit angeben, wie die Überschießzone im Kern eines Sonnenmodells so klein gehalten werden kann, dass in der heutigen Sonne kein konvektiver Kern mehr zu finden ist.

### *6.6.2 Sonnenrechnungen unter Verwendung der Kuhfußtheorie*

In unseren Rechnungen wollen wir untersuchen, welche Auswirkungen das Kuhfußmodell in der Eingleichungsformulierung, und insbesondere die Nichtlokalität, auf die Sonne und auf das Profil der Schallgeschwindigkeit hat. Hierzu verwenden wir die Implementierung des Modells, wie sie in Kapitel 4 beschrieben ist.

### *6.6.3 Parameterstudien*

In das nichtlokale Konvektionsmodell von Kuhfuß gehen zwei Parameter ein, die die Konvektionstheorie und insbesondere die Überschießlänge bestimmen: die Mischungsweglänge  $\alpha_{\text{ML}}$  und die Parametrisierung des konvektiven kinetischen Stroms  $\alpha_t$ . In einer ersten Studie wurde untersucht, wie sich ein Sonnenmodell, und insbesondere die Tiefe der konvektiven Zone, verändert, wenn diese beiden Parameter modifiziert werden. Die Ergebnisse sind in Abb. 6.23 dargestellt. Hierzu wurde ein Sonnenmodell, das mit der nichtlokalen Kuhfußtheorie bis hin zum heutigen Alter der

Sonne gerechnet wurde, genommen, und die beiden Parameter  $\alpha_{ML}$  und  $\alpha_t$  wurden schrittweise variiert. Die chemische Zusammensetzung und das Alter der Sonne wurden währenddessen nicht geändert. Wir wenden das Kuhfußmodell jedoch nicht auf die gesamte konvektive Hülle an. Da uns vor allem der Bereich der Überschießzone interessiert, wird der Temperaturgradient in der äußeren Schicht des Sterns genauso wie bei Schlattl beschrieben berechnet, d.h. es erfolgt ein kontinuierlicher Übergang zwischen den niedrigen Mischungswegparametern ( $\alpha_{ML} \approx 0.5$ ), wie er in den Atmosphärenmodellen nötig ist, um die beobachteten Balmerlinien richtig zu reproduzieren, und den hohen Mischungswegparametern ( $\alpha \approx 1.7$ ), wie sie im Sterninneren verwendet werden, um den Sternradius zu reproduzieren. Ein Übergang zum Kuhfußmodell erfolgt erst weiter im Inneren des Sterns. In den hier dargestellten Fällen wurde das Schlattlsche Sonnenmodell für die äußeren  $10^{-4}$  Massenanteile unverändert gelassen und die nichtlokale Kuhfußtheorie erst in den darunterliegenden Schichten verwendet. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass der Parameter  $\alpha_t$  so gut wie keinen Einfluss auf den Sternradius hat, dieser wird durch den Wert der Mischungsweglänge bestimmt. Diese Abhängigkeit des Sternradius von der Mischungsweglänge wurde auch bei anderen Autoren gefunden z.B. Schlattl (1999). Die Lage des Unterrandes der konvektiven Zone beeinflussen dagegen beide Parameter. Als Rand der konvektiven Zone wurde hierbei wieder der Rand des gemischten Gebietes genommen, was identisch ist mit dem Rand des Gebiets, in dem ein adiabatischer Gradient vorliegt. Wie zu erwarten, liegt dieser in umso höheren Schichten, je geringer der Parameter  $\alpha_t$  ist. Damit diese nichtlokalen Sonnenmodelle in Übereinstimmung mit den gemessenen Daten unserer Sonne sind, bleibt nach diesen Studien lediglich ein recht kleiner Parameterraum für die beide Parameter übrig. Es soll zugleich gelten  $R = R_\odot$  und  $r_{bcz}/R = 0.71$ . Dies kann nur für Werte für  $\alpha_t$  erfüllt sein, die deutlich kleiner sind als der von Kuh-

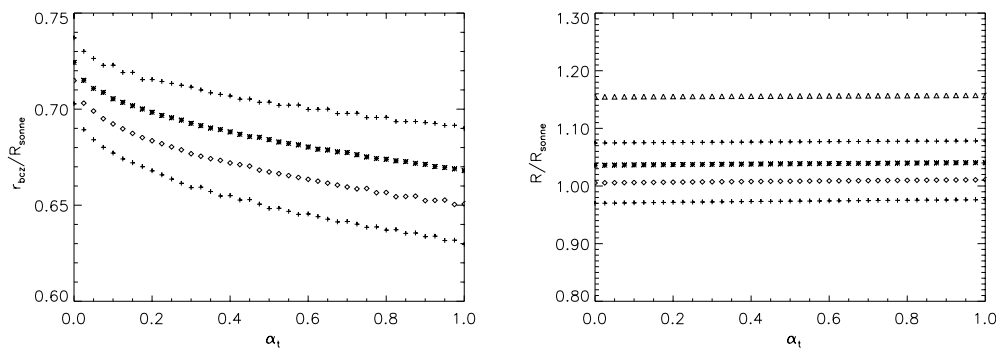


Abbildung 6.23: Änderung des Sonnenradius und der Untergrenze der konvektiven Hülle durch Variation der Mischungsweglänge und der Parametrisierung des konvektiven kinetischen Stroms  $\alpha_t$ . Aufgetragen sind die Werte für unterschiedliche Mischungsweglängen von  $\alpha_{ML} = 1.3, 1.5, 1.7, 2.0$ . Auf der Abszisse ist der Parameter  $\alpha_t$  aufgetragen. (s. Text)

fuß abgeschätzte Wert von 0.25. Der weiter oben als realistischer erhaltene Wert von  $\alpha_t = 0.1$  ist in deutlich besserer Übereinstimmung mit diesen Ergebnissen. Dies ist konsistent mit den Ergebnissen, die in Kapitel 6.2 beschrieben wurden, und wird in Kapitel 6.6.4 noch deutlicher werden.

#### 6.6.4 Voll iterierte Modelle

Die oben dargestellten Parameterstudien geben zwar ein Bild wieder, wie sich die unterschiedlichen Parameter des Kuhfußmodells auf ein Sonnenmodell auswirken, sie machen jedoch keine endgültige Aussage über ein nichtlokales Sonnenmodell. Hierfür ist es notwendig, die Entwicklung der Sonne von der Nullalterhauptreihe (ZAMS) oder der Vorhauptreihe (PMS) bis zum heutigen Alter der Sonne zu rechnen und die Anfangsparameter wie Mischungsweglänge oder Metallgehalt anzupassen, bis die Leuchtkraft, der Radius und die Effektivtemperatur des Modells mit den beobachteten Daten der Sonne übereinstimmt. In den hier dargestellten Rechnungen beginnen wir bei der Nullalterhauptreihe, wir verwenden das Eingleichungsmodell von Kuhfuß unter Berücksichtigung der nichtlokalen Terme, im Gegensatz zu den oben besprochenen Parameterstudien jedoch im gesamten Stern, auch in den äußeren Schichten des Sterns. Das chemische Mischen erfolgt in einem Diffusionsansatz wie in Schlattl (1999) beschrieben, allerdings wird die konvektive Geschwindigkeit  $v_c$  konsistent aus der konvektiven Energie  $\omega$  und somit aus der Kuhfußtheorie berechnet. Somit erfolgt das Mischen der chemischen Elemente in der gesamten Konvektionszone und auch im Bereich des konvektiven Überschießens. Ebenfalls wird im gesamten Stern bis auf die äußeren Massenschalen der Temperaturgradient verwendet, wie er sich aus der Kuhfußtheorie ergibt. Dies bedeutet, dass vor allem im Überschießbereich ein nahezu adiabatischer Temperaturgradient vorliegt. Dies ist das erste voll-konsistente Sonnenmodell mit Kuhfußtheorie.

#### Der konvektive Kern

Zu Beginn der Nullalterhauptreihe liegt, wie bereits weiter oben erwähnt, im Zentrum der Sonne ein kleiner konvektiver Kern vor. Dieser wird durch Überschießen vergrößert und seine Lebenszeit erhöht.

In einigen Modellen kann solch ein konvektiver Kern sogar bis zum Alter der heutigen Sonne fortbestehen. Dies jedoch ist mit den Ergebnissen der Helioseismologie unverträglich. Untersuchungen hierzu finden sich z.B. in Richard & Vauclair (1997).

Die Lebenszeit eines solchen konvektiven Kerns kann aber effektiv begrenzt werden, wenn man, wie in Kapitel 3.7.1 beschrieben, als Mischungsweglänge nicht eine Größe verwendet, die alleine an die Druckskalenhöhe gekoppelt ist, sondern eine verkürzte Mischungsweglänge, in die auch der Abstand von Zentrum eingeht. Der Grund für dieses Vorgehen war, dass die Mischungsweglänge nicht größer sein kann als das gesamte konvektive Gebiet. Unter Verwendung dieser verkürzten Skalengröße verschwanden in den hier betrachteten Rechnungen alle konvektiven Kerne, deutlich



$\alpha_t$	Lebenszeit des Kerns	
0.1	610 Ma	verkürzte Mischungslänge
0.1	> 4545 Ma	Standard Mischungslänge
0.25	901 Ma	verkürzte Mischungslänge
0.25	> 4545 Ma	Standard Mischungslänge
0.4	1094 Ma	verkürzte Mischungslänge
0.4	> 4545 Ma	Standard Mischungslänge

Tabelle 6.8: Lebenszeiten des konvektiven Kerns der Sonne, wie er sich mit verschiedenen Parametern ergibt. Verwendet man als Mischungsweglänge eine Größe, die proportional zur Druckskalenhöhe ist, so besteht der konvektive Kern für mehrere Milliarden Jahre, in einigen Fällen bis hin zum gegenwärtigen Alter der Sonne. Verwendet man eine verringerte Mischungsweglänge, so ist die Lebensdauer des Kerns verringert und der Kern der Sonne ist in allen Fällen radiativ.

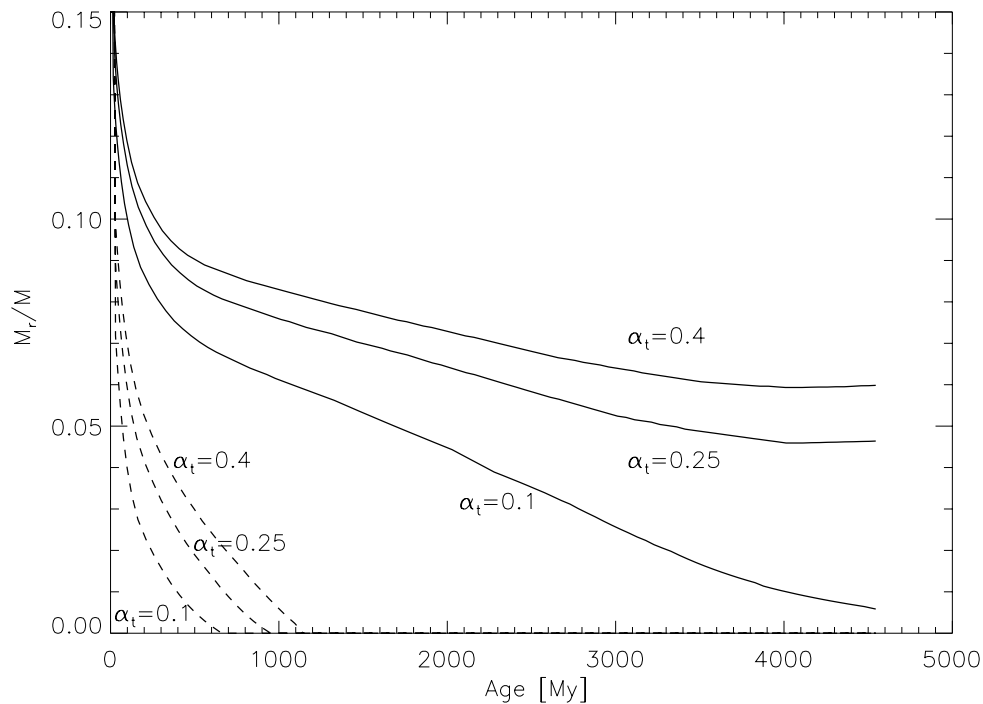


Abbildung 6.24: Ausdehnung des konvektiven Kerns der Sonne während ihrer Entwicklung bis zum heutigen Alter. Während in Modellen, in denen die Mischungsweglänge proportional zur Druckskalenhöhe ist, der konvektive Kern bis zur heutigen Sonne fortbesteht (durchgezogene Linien), verschwindet er für eine nach Gleichung 3.36 verkürzte Mischungsweglänge (gestrichelt) für alle betrachteten Parameter  $\alpha_t$ .

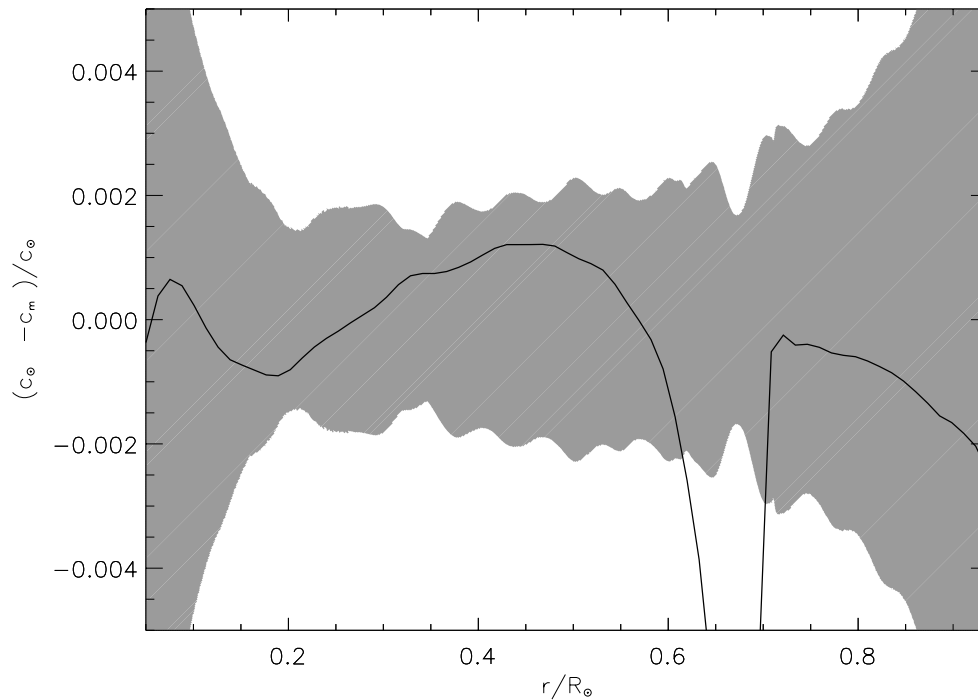


Abbildung 6.25: Schallgeschwindigkeit im Inneren der Sonne. Aufgetragen ist ein Vergleich mit den Ergebnissen der Helioseismologie wie oben beschrieben. Das Modell ist in diesem Fall allerdings mit dem Kuhfußmodell unter Berücksichtigung der nichtlokalen Terme gerechnet. Der Parameter  $\alpha_t$  hat hier den von Kuhfuß abgeschätzten Wert von 0.25. Im Bereich des konvektiven Überschießens unterscheidet sich die Schallgeschwindigkeit wesentlich von der aus der Helioseismologie bestimmten. War die Schallgeschwindigkeit im lokalen Sonnenmodell zu klein, so ist die Schallgeschwindigkeit im nichtlokalen Fall nun zu groß.

bevor das Alter der Sonne erreicht wurde. Eine Zusammenstellung des Kernalters findet sich in Tabelle 6.8, die Ausdehnung des Kerns während seiner Lebenszeit ist in Abbildung 6.24 dargestellt.

### Konvektives Überschießen - die Hülle

Um die Auswirkungen der Nichtlokalität für die konvektive Hülle zu untersuchen, wurde ein Sonnenmodell unter Berücksichtigung der Nichtlokalität, wie oben beschrieben, vollständig ausiteriert, bis Radius, Leuchtkraft und Effektivtemperatur mit der realen Sonne übereinstimmen. Für den Parameter  $\alpha_t$ , der den konvektiven kinetischen Strom parametrisiert, wurde der von Kuhfuß abgeschätzte Wert von 0,25 verwendet. In Abb. 6.25 wurde wieder die Abweichung der Schallgeschwindigkeit von der Helioseismologie  $(c_{\text{modell}} - c_{\text{seismisch}})/c_{\text{seismisch}}$  aufgetragen. Die Abweichungen sind im

$\alpha_t$	$r_{bcz}$
0.0	0,714
0.05	0,702
0.1	0,699
0.15	0,695

Tabelle 6.9: Untere Grenze der Konvektionszone  $r_{bcz}$  in Abhängigkeit des Parameters  $\alpha_t$ , der den konvektiven kinetischen Strom parametrisiert. Der Radius ist in Einheiten des Gesamtradius aufgetragen  $r/R_\odot$ .

wesentlichen auf die Überschießzone beschränkt, dort aber deutlich größer und zudem in die entgegengesetzte Richtung, als dies in einem Modell mit lokaler Konvektion der Fall war (vgl. Abb. 6.22). In einem Sonnenmodell, in dem die Konvektion lokal betrachtet wurde, war die Schallgeschwindigkeit knapp unterhalb der konvektiven Hülle zu klein, in einem Sonnenmodell, in dem die Konvektion nichtlokal behandelt wurde, das aber ansonsten identisch ist, ergaben sich für die Schallgeschwindigkeit deutlich größere Werte als in der Helioseismologie.

Für dieses Verhalten lassen sich folgende Erklärungen finden. Im fraglichen Bereich liegt effektive Konvektion vor, das heißt, außerhalb der Konvektionszone findet sich ein radiativer Temperaturgradient, innerhalb der Konvektionszone, zumindest im unteren Bereich der Hülle, ein adiabatischer. Offenbar ist das Gebiet, in dem sich der adiabatische Gradient einstellt, deutlich zu groß.

Das Sonnenmodell würde mit den Beobachtungen besser übereinstimmen, wenn man eine Konvektionstheorie verwendet, in der das Gebiet des konvektiven Überschießens verkleinert ist, dies läuft auf eine Reduktion des Parameters  $\alpha_t$  hinaus, oder man verwendet eine Konvektionstheorie, die am Rand der Konvektionszone, d.h. im Bereich des Überschießens einen nicht vollständig adiabatischen Temperaturgradienten bzw. einen kontinuierlichen Übergang vom adiabatischen zum radiativen Gradienten hat. Die erste Möglichkeit soll im nächsten Abschnitt diskutiert werden, die zweite Möglichkeit deutet auf die Inkonsistenzen bezüglich der Isotropieannahme hin, die in Kapitel 3.7.3 diskutiert wurden. Ferner ist auch in Abschnitt 6.4 festgestellt worden, dass in der dreidimensionalen Rechnung von Muthsam ein kontinuierlicher Übergang von adiabatischen zum radiativen Gradienten, anders als in der Kuhfußtheorie, bereits innerhalb der Konvektionszone vorliegt.

Um zu untersuchen, wie sich eine Veränderung der Ausdehnung der Überschießzone auf die Schallgeschwindigkeit auswirkt, wurde eine Sequenz von Modellen mit reduziertem Parameter  $\alpha_t$  berechnet. Hierbei wurden Werte von  $\alpha_t = 0.15, 0.1, 0.05$  verwendet, die Ergebnisse sind in Abb. 6.26 und in Tabelle 6.9 dargestellt. Für Werte von  $\alpha_t = 0.15$  liegt die Abweichung von der Schallgeschwindigkeit noch deutlich außerhalb des Fehlerbereichs der Helioseismologie, erst für Werte zwischen 0.05 und 0.1 innerhalb desselben. Jedoch ist auch hier die Abweichung noch sehr groß, und es liegen Abweichungen in beide Richtungen vor, jedoch liegen die Modelle mit  $\alpha_t = 0.1$  noch immer innerhalb des Fehlerbereichs. Innerhalb des Überschießbereichs sind die

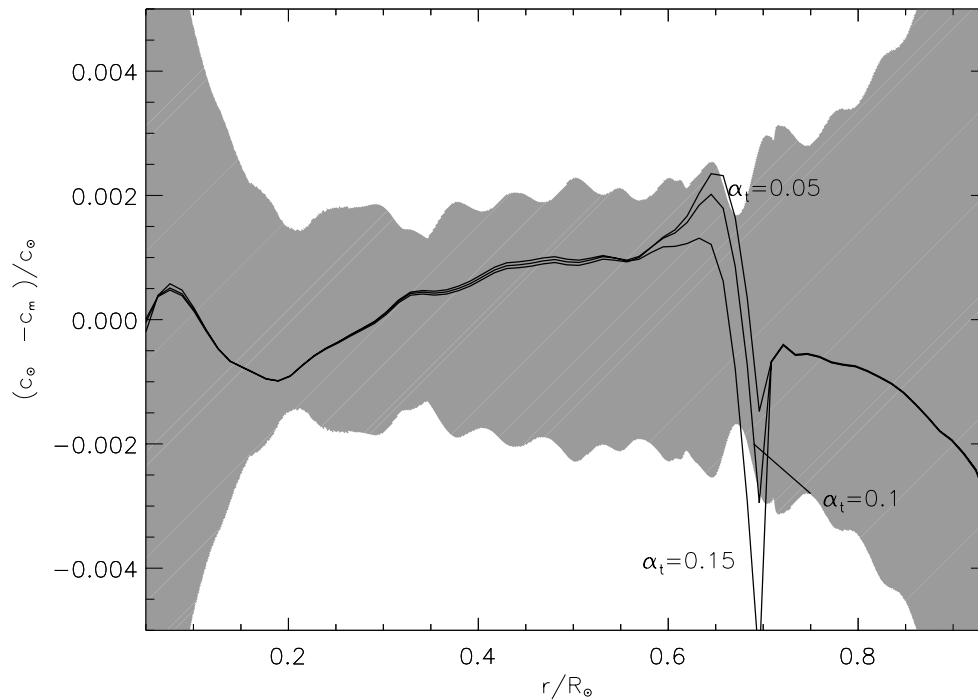


Abbildung 6.26: Sonnenmodelle mit der Kuhfußtheorie im nichtlokalen Fall. Verwendet wurden unterschiedliche Parameter für  $\alpha_t$ , somit ergaben sich unterschiedliche Ausdehnungen der Überschießzone. Damit die sich ergebenden Schallgeschwindigkeiten innerhalb des Fehlerbereichs mit der Helioseismologie übereinstimmt, sollten für  $\alpha_t$  Werte zwischen 0.05 und 0.1 gewählt werden.

Schallgeschwindigkeiten größer als in der Helioseismologie, unterhalb desselben kleiner. Somit ist durch Anwendung der Kuhfußtheorie kaum eine Verbesserung des Sonnenmodells möglich. Auch im Fall eines verringerten konvektiven Stroms, und damit einer kleineren konvektiven Überschießzone ist es also in zukünftigen Rechnungen erforderlich, einen kontinuierlichen Übergang zwischen den adiabatischen und den radiativen Temperaturgradienten zu untersuchen.

---

---

# Kapitel 7

## ZUSAMMENFASSUNG

---

---

Ziel dieser Arbeit war es, ein konsistentes Modell zeitabhängiger und nichtlokaler Konvektion in der Sternentwicklung zu verwenden, in diesem Zusammenhang Schwachstellen und Stärken dieses Modells aufzudecken und Konsequenzen für Sternentwicklungsrechnungen zu untersuchen. Hierfür wurde der Garching Sternentwicklungscode dahingehend erweitert, dass das Konvektionsmodell von R. Kuhfuß 16 Jahre, nachdem es entwickelt wurde, das erste Mal konsistent in Entwicklungsrechnungen verwendet werden kann. Die Tatsache, dass das erste Mal eine konsistente physikalische Beschreibung der Konvektionstheorie in Sternentwicklungsrechnungen verwendet wird, ist ein völlig neuer Schritt, da bisher vor allem zeitunabhängige und lokale Konvektionsmodelle verwendet wurden. Die wenigen verwendeten nichtlokalen Modelle verwenden meist sowohl grobe Annahmen als auch grobe Parametrisierungen und verwenden Parameter, die erst nachträglich an die Beobachtungen angepasst werden. Diesen Parametern müssen zudem für unterschiedliche Sterne in unterschiedlichen Entwicklungsphasen unterschiedliche Werte zugewiesen werden. Das Kuhfußsche Modell der Konvektion hingegen hat einen Parameter, der die Nichtlokalität bestimmt und dieser ist physikalisch fundiert. Seine Bedeutung wird im Rahmen eines physikalischen Kontextes klar.

Das Kuhfußmodell existiert in zwei Varianten, einer Ein- und einer Dreigliedrigkeitsformulierung. Beide wurden in den Sternentwicklungscode eingebaut. Jedoch zeigt sich, dass eine der Annahmen, die in das Modell eingehen, die Annahme eines isotropen Geschwindigkeitsfeldes, unzureichend ist und dazu führt, dass an den Rändern der Konvektionszonen Abweichungen von den Ergebnissen dreidimensionaler Rechnungen auftreten können. Ferner führt diese Annahme in der Dreigliedrig-

version der Theorie zu deutlich weiter ausgedehnten Überschießzonen, als dies realistisch der Fall sein kann. Dies bedeutet, dass die Dreigleichungsversion des Kuhfußschen Modells, so wie sie von Kuhfuß aufgestellt und publiziert wurde, nicht ohne weiteres in Sternentwicklungsrechnungen verwendet werden kann. Man muss die Theorie dahingehend modifizieren dass der Grad der Isotropie des konvektiven Geschwindigkeitsfeldes geeignet modelliert wird. Das Aufzeigen dieser Schwachstelle der Konvektionstheorie ist eines der wesentlichen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit.

Ein Vergleich der Überschießlängen in Sternen der Nullalterhauptreihe, wie sie sich aus dem Eingleichungsmodell ergeben, mit den Ergebnissen unterschiedlicher Beobachtungen ergab, dass der Parameter, der den konvektiven kinetischen Strom parametrisiert, deutlich kleiner gewählt werden muss, als dies von Kuhfuß abgeschätzt wurde. Ferner konnte aufgezeigt werden, dass sich eine Abnahme der Überschießlänge bei Sternen  $< 6M_{\odot}$ , wie sie in anderen Rechnungen explizit angenommen wird, in der Kuhfußtheorie direkt aus der Theorie ergibt. Dies ist ein wichtiger Fortschritt gegenüber anderen bisher verwendeten Modellen.

Das Eingleichungsmodell, die einfachere Version der Kuhfußschen Theorie, wurde ferner auf eine Reihe von Problemen der Sternentwicklung angewendet. Hierzu zählen z.B. die konvektiven Hüllen von A-Sternen. In ihnen wurde, in Übereinstimmung mit Arbeiten anderer Autoren, gefunden, dass die H I und die He II Konvektionszonen zwar in ihrem Geschwindigkeitsfeld durch konvektives Überschießen verschmelzen, jedoch bezüglich des Transports von Energie durch Konvektionszonen deutlich getrennt sind. Das Kuhfußmodell der Konvektion liefert also die korrekten Ergebnisse.

Ebenfalls wurde das Konvektionsmodell auf das Problem der Sonnenkonvektionszone angewendet. Hier ergab sich ebenfalls in Übereinstimmung mit anderen Arbeiten, dass die Helioseismologie starke Einschränkungen für die Ausdehnung der Überschießzone vorgibt. Dies bedeutet, dass das konvektive Überschießen einen bestimmten Wert nicht überschreiten darf, es sei denn man verwendet bereits innerhalb der Überschießzone einen Übergang von einem adiabatischen zu einem radiativen Gradienten. Dies würde unterschiedliche Überschießlängen für den Material- und Energie-transport beinhalten und ist wieder im Zusammenhang mit der Isotropieannahme zu sehen.

Die Zeitabhängigkeit der Konvektion wurde anhand der anwachsenden Helium-Konvektionszone im Zentrum eines roten Riesens demonstriert. Wesentlich gravierendere Effekte scheint eine zeitabhängige Konvektionstheorie auf den Heliumflash zu haben, der durch eine zeitabhängige Theorie schneller abläuft, da der Transport von Energie aus dem Flashgebiet heraus weniger effizient ist.

In der vorliegenden Arbeit wurde somit das erste Mal eine Konvektionstheorie, die aus den hydrodynamischen Gleichungen abgeleitet ist und Zeitabhängigkeit sowie Nichtlokalität enthält, in der Sternentwicklung verwendet. Es wurden die Schwachstellen und Stärken der Theorie aufgezeigt und die Auswirkungen der Theorie anhand einer Reihe von exemplarischen Beispielen demonstriert. Hierbei wurden die grundlegenden Eigenschaften einer nichtlokalen und zeitabhängigen Konvektionstheorie konsistent modelliert.

---

---

# Anhang A

## MITTELUNGSVERFAHREN

---

---

### A.1 EIGENSCHAFTEN DER MITTELUNGSOPERATOREN

$$\langle\langle A \rangle\rangle = \langle A \rangle \quad (\text{A.1})$$

$$(A')' = A' \quad (\text{A.2})$$

$$\langle A \rangle' = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\langle A' \rangle = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\langle \partial_t A \rangle = \partial_t \langle A \rangle \quad (\text{A.5})$$

$$\langle \partial_r A \rangle = \partial_r \langle A \rangle \quad (\text{A.6})$$

$$(\partial_t A)' = \partial_t (A)' \quad (\text{A.7})$$

$$(\partial_r A)' = \partial_r (A)' \quad (\text{A.8})$$

$$\langle \mathbf{grad} A \rangle = \mathbf{grad} \langle A \rangle \quad (\text{A.9})$$

$$\langle \mathbf{div} \vec{A} \rangle = \mathbf{div} \langle \vec{A} \rangle \quad (\text{A.10})$$

$$(\mathbf{grad} A)' = \mathbf{grad} (A)' \quad (\text{A.11})$$

$$(\mathbf{div} \vec{A})' = \mathbf{div} (\vec{A})' \quad (\text{A.12})$$

$$\langle a'b' \rangle = \langle a'b \rangle - \langle a' \langle b \rangle \rangle = \langle a'b \rangle \quad (\text{A.13})$$

## A.2 IDENTITÄTEN

$$\langle\langle A \rangle B\rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle \quad (\text{A.14})$$

mit A.14

$$\langle AB \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A' B' \rangle \quad (\text{A.15})$$

mit A.14

$$\langle A \rangle B' = \langle A \rangle B - \langle A \rangle \langle B \rangle = \langle A \rangle B - \langle\langle A \rangle B\rangle = \langle\langle A \rangle B\rangle' \quad (\text{A.16})$$

mit A.15 A.10 und A.11

$$\begin{aligned} \langle \vec{A} \cdot \mathbf{div} B \rangle &= \\ &= \langle \vec{A} \cdot \mathbf{div} \rangle \langle B \rangle + \langle (\vec{A} \mathbf{div})' \cdot (B)' \rangle = \\ &= \langle \vec{A} \rangle \cdot \mathbf{div} \langle B \rangle + \langle \vec{A}' \mathbf{div} \cdot B' \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Für die Substantiellen Ableitungen gilt:

$$d_t \langle a \rangle = \langle D_t a \rangle - \langle (\vec{v}' \nabla) a' \rangle \quad (\text{A.18})$$

$$d_t a' = (D_t a)' - ((\vec{v}' \nabla) a')' - (\vec{v}' \nabla) \langle a \rangle \quad (\text{A.19})$$



---

---

# LITERATURVERZEICHNIS

---

---

- Adelberger et. al., E. G.: 1998, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 1265
- Adrian, R.: 1975, *Geophys. Fluid Dynamics* , 753
- Alexander, D.: 1994, *ApJ* **437**, 879
- Alongi, M., Bertelli, G., Bressan, A., Chiosi, C., Fagotto, F., Greggio, L., Nasi, E.: 1993, *A&AS* **97**, 851
- Atroshchenko, I. N., Gadun, A. S.: 1994, *A&A* **291**, 635
- Baker, N., Gough, D. O.: 1979, *ApJ* **234**, 232
- Baker, N., Kippenhahn, R.: 1965, *ApJ* **142**, 868
- Baker, N. H.: 1987, in “Physical Processes in Comets, Stars and Active Gallaxies”, eds. E. Meyer-Hofmeister, H. C. Thomas, W. Hillebrandt, 105
- Basu, S.: 1996, *ApJ* **460**, 1094
- Basu, S.: 1998, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **298**, 719
- Beers, T. C., Preston, G. W., Shectman, A.: 1992, *AJ* **103**, 1987
- Bell, R. A.: 1972, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **157**, 147
- Böhm-Vitense, E.: 1958, *Zeitschrift für Astrophysik* **46**, 108
- Bond, H. E.: 1980, *ApJ* **44**, 517
- Boussinesq, J.: 1903, *Theorie analytique de la chaleur* **Tome II**, 157

- Bressan, A. G., Bertelli, G., Chiosi, C.: 1981, *A&A* **102**, 25
- Canuto, M., Mazzitelli, I.: 1992, *ApJ* **389**, 724
- Canuto, V. M.: 1992, *ApJ* **392**, 218,
- Canuto, V. M.: 1993, *ApJ* **416**, 331
- Canuto, V. M., Dubovikov, M.: 1998, *ApJ* **493**, 834
- Canuto, V. M., Mazzitelli, I.: 1991, *ApJ* , 295
- Castellani et. al., V.: 1994, *Phys. Rev. D* **50**, 4749
- Castor, J.: 1971, *ApJ* **166**, 109
- Caughlan, G. R., Fowler, W. A.: 1988, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **40**, 283
- Chaboyer, B.: 1998, *New Eyes to See Inside the Sun and Stars*, F.-L. Deubner and J. Christensen-Dalsgaard and D. Kurtz, chap. Internal Rotation, Mixing and Lithium Abundance, IAU Symp. 185, 25
- Charbonnel, C.: 1994, *A&A* **283**, 155
- Clausen, J. V.: 1991, *A&A* **246**, 397
- Cordier, D., Lebreton, Y., Goupil, M.-J., Lejeune, T., Beaulieu, J.-P., Arenou, F.: 2002, *A&A* **392**, 169
- D'Antona, F., Mazzitelli, I.: 1994, *ApJ Suppl* **90**, 467
- Däppen, W., Mihalas, D., Hummer, D. G.: 1988, *ApJ* **332**, 261
- Deardorff, J., Willis, G., Lilly, D.: 1969, *J. Fluid Mech.* **35**, 7
- Degl'Innocenti, S.: 1997, *Astropart. Phys.* **7**, 77
- Demarque, P.: 1972, *L' Age des Etoiles*, Paris: G. Cayrel and A. M. Delplace, IAU Coll. 17, 1
- Deupree, R. G.: 2000, *ApJ* **543**, 395
- El Eid, M. F.: 1995, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **275**, 983
- Fekel, F.: 1991, *ApJ* **101**, 1489
- Feuchtinger, M.: 1998, *A&A* **337**, L29
- Feuchtinger, M.: 1999a, *A&A* **351**, 103

- Feuchtinger, M. U.: 1999b, *A&A Suppl. Ser.* **136**, 217
- Freytag, B., Ludwig, H., Steffen, M.: 1996, *A&A* **313**, 497
- Furomoto, A., Rooth, C.: 1961, "Geophys. Fluid Dynamics", Tech. Rep. WHOI-61, Woods Hole Oceanog. Inst. Tech. Rept.
- Girardi, L., Bressan, A., Bertelli, G., Chiosi, C.: 2000, *A&A* **141**, 371
- Gonczi, G.: 1982, *A&A* **110**, 1
- Gonczi, G., Osaki, Y.: 1980, *A&A* **84**, 304
- Gough, D. O.: 1967, *ApJ* **72**, 799
- Gough, D. O.: 1969, *J. Atmos. Sci.* **26**, 448
- Grossman, S. A., Narayan, R.: 1993, *ApJ Suppl* **89**, 361, paper II
- Hofmeister, E., Kippenhahn, R.: 1964, *Zeitschrift für Astrophysik* **59**, 242
- Hummer, D., Mihalas, D.: 1988, *ApJ* **331**, 794
- Hurlburt, N. E., Toomre, J., Massaguer, J.: 1986, *ApJ* **311**, 563
- Iben, I.: 1967, *ARA&A* **5**, 571
- Iglesias, C., Rogers, F.: 1996, *ApJ* **464**, 943
- Keller, S. C., Costa, G. S. D., Bessell, M. S.: 2001, *ApJ* **121**, 905
- Kim, Y., Chan, K. L.: 1998, *ApJ* **496**, L121
- Kippenhahn, R.: 1962, *Proc. Int. School of Phys. 'Enrico Fermi'* **XXVIII**, 330
- Kippenhahn, R., Weigert, A.: 1994, *Stellar Structure and Evolution*, Springer Verlag berlin Heidelberg New York
- Kippenhahn, R., Weigert, A., E.Hofmeister: 1967, *Methods in Computational Physics* **7**, 129
- Kuhfuß, R.: 1986a, *A&A* **160**, 116
- Kuhfuß, R.: 1986b, *Time Dependent Turbulent Convection in Stars*, Gif sur Yvette: E. Vangioni-Fiom and J. Audouze and M. Casse and J. P. Chieze and J. Tron Thonh Van, 135
- Kuhfuß, R.: 1987a, "Ein Modell für zeitabhängige Konvektion in Sternen", Ph.D. thesis, TU-München

- Kuhfuß, R.: 1987b, *Nuclear Astrophysics*, Springer, vol. 287 of *Lecture Notes in Physics*, chap. Studies of non-local and time-dependent convection, 222
- Kupka, F., Montgomery, M.: 2002, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **330**, L6
- Langer, N., Eid, M. F. E., Fricke, K. J.: 1985, *A&A* **145**, 179
- Maeder, A.: 1974, *A&A* **32**, 177
- Maeder, A., Mermilliod, J. C.: 1981, *A&A* **93**, 136
- Marik, D., Petrovay, K.: 2002, *A&A* **396**, 1011
- Massaguer, J. M.: 1990, *Rotation and Mixing in Stellar Interiors*, Heidelberg, New York: Gouphil and Zahn, 129
- Massaguer, J. M., Latour, J., Toomre, J., Zahn, J.: 1984, *A&A* **140**, 1
- Mermilliod, J. C., Maeder, A.: 1985, *A&A* **158**, 45
- Meynet, G., Mermilliod, J.-C., Maeder, A.: 1993, *A&AS* **98**, 477
- Mihalas, D., Däppen, W., Hummer, D.: 1988, *ApJ* **331**, 815
- Mihaljan, J. M.: 1962, *ApJ* **136**, 1126
- Moore, D. R., Weiss, N.: 1973, *J. Fluid Mech.* **61**, 553
- Moore, D. W.: 1967, *Aerodynamical Phenomena in Stellar Atmospheres*, New York: R.N.Thomas, 405
- Muthsam, H. J.: 1999, *New Astronomy* **4**, 405
- Nordlund, A., Dravins, D.: 1990, *A&A* **228**, 155
- Oberbeck, A.: 1879, *Ann. Phys. Chem.* **7**, 271
- Pamyatnykh: 1999, *Acta Astronomica* **49**, 119
- Prandtl: 1932, *Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre* **19**, 188
- Racine, R.: 1974, *ApJ* **168**, 393
- Ribas, I., C.Jordi, Gimenez, A.: 2000, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **318**, L55
- Richard, O., Vauclair, S.: 1997, *A&A* **322**, 671
- Richard, O., Vauclarir, S., Charbonnel, C., Dziembowski, W. A.: 1996, *A&A* **312**, 1000
- Rogers, F., Iglesias, C.: 1992, *ApJ Supl* **79**, 507

- Rogers, F., Swenson, F., Iglesias, C.: 1996, *ApJ* **456**, 902
- Roxborough, I. W.: 1978, *A&A* **65**, 281
- Roxborough, I. W.: 1992, *A&A* **266**, 291
- Schlattl, H.: 1996, “Numerische und physikalische Aspekte der Genauigkeit von Sonnenmodellen”, diploma-thesis, TU-München
- Schlattl, H.: 1999, “The Sun, a Laboratory for Neutrino- and Astrophysics”, Ph.D. thesis, TU- München
- Schlattl, H., Cassisi, S., Salaris, M., Weiss, A.: 2001, *ApJ* **559**, 1082
- Schlattl, H., Weiss, A.: 1999, *A&A* **347**, 272
- Schlattl, H., Weiss, A., Ludwig, H.-G.: 1997, *A&A* **322**, 646
- Schröder, K.-P., Eggleton, P.: 1996, *Review in Modern Astronomy* **9**, 221
- Schröder, K.-P., Pols, O. R., Eggleton, P. P.: 1997, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **285**, 696
- Spiegel, E. A., Veronis, G.: 1960, *ApJ* **131**, 442
- Stein, R. F., Nordlund, A.: 1998, *ApJ* **499**, 914
- Stellingwerf, R. F.: 1982a, *ApJ* **262**, 330
- Stellingwerf, R. F.: 1982b, *ApJ* **262**, 339
- Stellingwerf, R. F.: 1984a, *ApJ* **277**, 322
- Stellingwerf, R. F.: 1984b, *ApJ* **277**, 327
- Stothers, R., Chin, C.: 1991, *ApJL* **381**, L67
- Straka, C. W.: 2002, “Thermonukleares Brennen und Mischen mit einer zeitabhängigen Konvektionstheorie in massereichen Population-III-Sternen”, Ph.D. thesis, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
- Thomas, H. C.: 1967, *Zeitschrift für Astrophysik* **67**, 420
- Toomre, J.: 1987, *Thermal convection and penetration*, North-Holland, Amsterdam, London New, York, Tokyo: J.-P. Zahn and J.Zinn-Justin, vol. XLVII of *Les Houches 1987*, chap. 6, 325–397
- Torres-Peimbert, S.: 1971, *Bol. Obs Tanantzintla Tacubaya* **6**, 3
- Townsend, A. A.: 1966, *Quart. J. Roy. Met. Soc.* **90**, 248

- Umezo, M.: 1995, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **276**, 1287
- Unno, W.: 1967, *Publ. Astr. Soc. Japan* **19**, 140
- Unno, W.: 1977, Springer Verlag Berlin, Problems of stellar convection, p. 315
- Unno, W.: 1979, *Nonradial Oscillation of Stars*, Tokyo Univ., Tokyo Press
- Vitense, E.: 1953, *Zeitschrift für Astrophysik* **32**, 135
- Wagenhuber, J.: 1992, “Entwicklung von Sternen auf dem asymptotischen Riesenast”, Ph.D. thesis, TU- München
- Wagenhuber, J.: 1996, “Entwicklung von Sternen verschiedener Massen und Metallizitäten auf dem asymptotischen Riesenast und danach”, Ph.D. thesis, TU-München
- Wagenhuber, J., Weiss, A.: 1994, *A&A* **286**, 121
- Weiss, A., Flaskamp, M., Tsyтович, V. N.: 2001, *A&A* **371**, 1123
- Weiss, A., Keady, J., Magee, N.: 1990, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **45**, 209
- Whitehead, J. A., Chen, M. M.: 1970, *J. Fluid Mech.* **40**, 549
- Wuchterl, G.: 1995, *Computer Physics Communications* **89**, 119
- Wuchterl, G., Feuchtinger, M. U.: 1998, *A&A* **340**, 419
- Xiong, D.: 1977, *Acta Astron. Sinica* **18**, 86
- Xiong, D.: 1980, *Scientia Sinica* **23**, 1139
- Xiong, D.: 1985, *Scientia Sinica* **28**, 764
- Xiong, D., Deng, L.: 2002, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* , 511

---

---

# INDEX

---

---

- Überadiabatie, 28, 69  
Überschießdistanz, 65, 73, 81, 89  
Überschießen, 6, 7, 28, 36, 63, 64, 65,  
86, 91, 94, 96, 108  
Überschießlänge, 26, 71, 73, 108  
Überschießparameter, 94  
Überschießparameter, 72  
Überschießzone, 24, 36, 40, 70, 87, 108  
Überschießzone, 69
- A-Stern, 78, 108  
Abklingvorgang, 51  
Absorptionskoeffizient, 52  
adiabatisch, 10  
adiabatischer Gradient, 45  
Anelastische Näherung, 15, 17, 20, 64  
Astrophysik, 52  
Atmosphäre, 43, 99  
Auftrieb, 9  
Auftriebskraft, 5, 10, 11, 66  
Auftriebsterm, 11
- Balmerlinie, 78  
Bewegungsenergie, 9  
blaue Schleife, 96  
Boussinesq, 16  
Boussinesq Näherung, 15  
Brennstoffvorrat, 86, 87  
Brennvorgang, 91  
Brunt-Väisälä, 29–31
- Cepheiden, 52  
Cepheidenstreifen, 52  
chemisches Mischen, 47
- Diffusion, 42  
Diffusionsapproximation, 23, 25, 35  
Diffusionskonstante, 97  
Diskretisierung, 27  
Dissipation, 67  
Doppelstern, 71, 96  
Dopplerverbreiterung, 78  
dreidimensionale Rechnung, 6, 81, 107  
Dreigleichungsmodell, 20, 24, 32, 35  
Druckskalenhöhe, 9, 11, 15, 35, 61, 71,  
89
- effektive Konvektion, 36  
Effektivtemperatur, 78, 91, 92, 94  
Eingleichungsmodell, 24, 32, 33, 35,  
87, 89, 108  
Einschaltvorgang, 51  
Einonenmodell, 26, 52  
Eiswasserexperiment, 63  
Energieerhaltungsgleichung, 44  
Energiegleichung, 13  
Energietransport, 15, 43, 108  
Energietransportgleichung, 10, 49  
Entropieexzess, 20  
Entropiegleichung, 13  
Entropiegradient, 25

- Entwicklungsphase, 86  
 Erwartungswert, 17  
 Expansion, 10  
  
 Fluktuation, 9, 13, 15  
 Flusslimiter, 27  
 freier Parameter, 25  
  
 Garching Sonnenmodell, 97  
 Garching Sternentwicklungscode, 107  
 Gaswolke, 51  
 Geschwindigkeit, 79  
 Geschwindigkeitsfeld, 20, 38, 51, 108  
 Gleichgewicht, 42  
 Gravitationskonstante, 42  
  
 Hauptreihe, 53, 71, 86, 91, 92  
 Hauptreihenbrennen, 55  
 Hauptreihenstern, 86  
 Hayashi Linie, 96  
 Helioseismologie, 97, 102, 104, 108  
 Heliumbrennen, 53  
 Heliumflash, 51, 55, 56, 108  
 Heliumkern, 94, 96  
 Henyey, 26  
 Henyey-Solver, 42  
 Henyeymatrix, 43  
 Henyeyverfahren, 43, 46, 48  
 Hertzsprung-Russel-Diagramm, 52, 53, 63, 86, 91, 94  
 Hertzsprunglücke, 55, 94  
 Hydrodynamik, 12, 15  
 hydrodynamische Gleichung, 7, 14, 17, 72, 108  
  
 Ionisationszone, 78  
 isotropes Geschwindigkeitsfeld, 22, 24, 107  
 Isotropie, 32, 108  
 Isotropieannahme, 25, 29, 33, 37, 40, 97, 104  
 Isotropiefaktor, 25, 40, 85  
 Iterationsverfahren, 44  
  
 Kernmasse-Leuchtkraftbeziehung, 55  
 Kernreaktion, 42  
 Kompressibilität, 64  
 Kontinuitätsgleichung, 13  
 Konvektion, 5, 6, 9–11, 19, 85  
 Konvektionstheorie, 92, 108  
 Konvektionszone, 24  
 konvektive Geschwindigkeit, 25  
 konvektive Hülle, 78, 108  
 konvektive kinetische Energie, 54  
 konvektive Zeitskala, 51  
 konvektiver Fluß, 25  
 konvektiver Kern, 19, 26, 99  
 konvektiver kinetischer Strom, 23, 87  
 konvektiver Strom, 36  
 konvektives Mischen, 42, 86  
 Korrelationsfunktion, 17, 25, 31, 46  
 kubischen Gleichung, 11  
 Kuhfuß, 7, 19  
 Kuhfuß Theorie, 42  
 Kuhfußmodell, 33, 86  
  
 Längenskala, 23  
 Lebensdauer, 6  
 Ledoux-Kriterium, 11  
 Leuchtkraft, 10, 91, 94  
  
 Machzahl, 15  
 Massensequenz, 74  
 Massenträgheit, 66  
 Metallgehalt, 76  
 Meteorit, 99  
 Meteorologie, 15  
 Mischungsweglänge, 11, 11, 12, 73, 81, 101  
 Mischungswegparameter, 11, 81  
 Mischungswegtheorie, 6, 7, 9, 11, 12, 22, 25, 35, 51, 69, 78, 89  
 Mischvorgänge, 42  
 mittlere Entropie, 24  
 mittlere kinetische Energie, 24  
 mittlere konvektive Energie, 23  
 Modenentwicklung, 16, 64



- Moment, 17, 20  
 Näherung, 64  
 NAG Bibliothek, 28, 82  
 Navier-Stokes-Gleichung, 13  
 Newtonverfahren, 97  
 nichtlokal, 12  
 nichtlokale Konvektion, 107  
 Nichtlokalität, 19, 108  
 Nullalterhauptreihe, 64, 74, 101, 108  
 Nulllösung, 29  
  
 Oberflächenbeschleunigung, 78  
 Oberflächenzusammensetzung, 97  
 Opazität, 26, 43, 71, 97  
  
 Pecletzahl, 45, 65, 67  
 Penetration, 65  
 Population-III-Stern, 19, 27, 56  
 Protoplanet, 27, 51  
 protostellaren Kontraktion, 6  
 Protostellarer Kollaps, 27, 35  
 protostellarer Schock, 35  
 Protostern, 19, 51  
 pulsierender Stern, 27, 51, 52  
  
 radiativer Verlust, 24  
 radiativer Verlustterm, 33  
 Reaktionsrate, 53  
 Reynoldtsensor, 20  
 Riesenast, 55  
 RR-Lyrae Pulsation, 27  
  
 Saatkonvektion, 19, 27  
 Schalenbrennen, 91, 92  
 Schalenquelle, 63, 91, 94, 96  
 Schallgeschwindigkeit, 15, 97  
 Schallwelle, 15  
 Scheibenpopulation, 65  
 Schichtdicke, 15  
 Schließbedingung, 7, 18, 20  
 Schwarzschildgrenze, 62, 65, 66, 67,  
     70, 72, 74, 87, 89  
 Schwarzschildkriterium, 11, 36, 66  
  
 Schwerebeschleunigung, 81  
 Schwingung, 15  
 Skalenbetrachtung, 22  
 Skalengröße, 102  
 Skalenlänge, 11, 61  
 Sonne, 96  
 Sonnenkonvektionszone, 108  
 Sonnenmodell, 11  
 Spektralklasse, 78  
 Spektrum, 6  
 spezifische kinetische Energie, 20  
 sphärische Symmetrie, 41  
 Statistik, 16  
 stellare Pulsation, 19  
 Stellarstatistik, 86  
 Stellingwerf, 27, 52  
 Sternentwicklung, 11  
 Sternaufbaugleichung, 18, 41  
 Sternentwicklung, 7, 25, 86, 107, 108  
 Sternentwicklungsprogramm, 19, 36  
 Sternentwicklungsrechnung, 107, 108  
 Sterninneres, 41  
 Sternphotosphäre, 6  
 Sternradius, 101  
 Strömung, 12  
 Strömungsdynamik, 65  
 Strahlung, 10, 44  
 Strahlungshydrodynamik, 27  
 Strahlungstransport, 5  
 Streuung, 17  
 substantielle Ableitung, 13, 14  
  
 Temperaturüberschuss, 9  
 Temperaturexzess, 25  
 Temperaturgradient, 9–11  
 Testlaboratorium, 97  
 Transportgeschwindigkeit, 23  
 Transportmechanismus, 6, 44  
  
 Unteradiabasie, 69  
 Unterkorrekturfaktor, 48  
  
 Viskosität, 22, 82  
 Viskositätstensor, 13

Vorhauptreihe, 27, 99, 101

Wärmeüberschuß, 9

Wärmeleitähigkeit, 82

Wärmeleitung, 5, 10, 44

Wahrscheinlichkeit, 16

Wahrscheinlichkeitsdichte, 16

Wasserstoffbrennen, 43, 63, 86

Wasserstoffbrennen, zentrales, 88, 92

Wasserstoffschalenbrennen, 86

Wasserstoffschalenquelle, 55

Wasserstoffvorrat, 92

zeitabhängige Konvektion, 107

zeitabhängiges Mischen, 27

Zeitabhängigkeit, 19, 28, 39, 108

Zustandsgleichung, 42

zweidimensionale Rechnung, 6, 24, 64

---

---

## VIELEN DANK ...

---

---

möchte ich meinen Eltern sagen, dass sie mir all diese Jahre nicht nur mein Studium ermöglichten, sondern mir stets auch mit ihrem Rat und ihrer Gesprächsbereitschaft zur Seite standen. Besonders möchte ich hier auch an meinen Großvater erinnern, der mir die ersten Grundlagen der Physik und Mathematik beibrachte.

Herrn Prof. Dr. W. Hillebrandt danke ich für die freundliche Aufnahme an seinem Institut und die Möglichkeit diese Arbeit durchzuführen.

Ebenso möchte ich mich bei Herrn Dr. Achim Weiss für die Themenstellung bedanken, sowie für die Gespräche über diverse Probleme, die im Zusammenhang mit meiner Dissertation auftraten.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. Günter Wuchterl für seine stete Diskussionsbereitschaft, sowie für seine Bereitschaft, mir mit Rat zur Verfügung zu stehen und mir so den Einstieg in das Thema zu erleichtern.

Nicht zuletzt gilt mein Dank allen Diplomanden, Doktoranden und Mitgliedern des Instituts für die freundliche und kollegiale Atmosphäre. Insbesondere möchte ich hier Felix Stöhr erwähnen, mit dem ich ein Zimmer teilte, sowie Fritz Röpke und Florian Siebel.