Lehrstuhl für Finanzmanagement und Kapitalmärkte
Fakultät der Wirtschaftswissenschaften
Technische Universität München

Messung von Unterdeckungsrisiken

Ein Ansatz für das Asset-Liability-Management von schweizerischen Pensionskassen

Frederic Holzbaur

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Wirtschaftswissenschaften (Dr. rer. pol.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:
Univ.-Prof. Dr. Rainer Kolisch

Prüfer der Dissertation:
1. Univ.-Prof. Dr. Christoph Kaserer
2. Prof. Dr. Hans Wolfgang Brachinger, Universität Freiburg/ Schweiz

Die Dissertation wurde am 22. Juni 2006 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Wirtschaftswissenschaften am 13. Dezember 2006 angenommen.

Vorwort

Nach den schweren Börsenjahren 2000 bis 2002 ist das Risikomanagement von Pensionskassen verstärkt öffentlich diskutiert worden. Diese Arbeit möchte zu dieser Diskussion einen Beitrag leisten und die vermehrte Anwendung moderner Methoden im Asset-Liability-Management von schweizerischen Pensionskassen mit anregen.

Die vorliegende Arbeit wurde berufsbegleitend zu meiner Tätigkeit in der Wirtschaftsprüfung bei der KPMG in Zürich verfasst. Dies hat mir einerseits ermöglicht als Prüfer von Pensionskassen Einblick in den Alltag der beruflichen Vorsorge zu erhalten, hat aber anderseits zu einer nicht immer einfachen Doppelbelastung geführt. Dankbar bin ich der KPMG für die Flexibilität und die Gewährung des nötigen Freiraums für die Recherche und Ausarbeitung der Dissertation.

Mein besonderer Dank gilt meinen Doktorvater Herrn Prof. Dr. Christoph Kaserer. Seine richtungsweisenden Ratschläge und zahlreichen Anregungen haben wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Ebenfalls herzlich bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Hans Wolfgang Brachinger für die freundliche Übernahme des Zweitgutachtens.

Grosser Dank gebührt Herrn Adrian Schmid, der mir in unzähligen Diskussionen das Umfeld der beruflichen Vorsorge näher brachte. Meinen Freunden, vor allem denen die mir bei der Durchsicht des Entwurfs halfen, möchte ich für ihre Freundschaft und Verlässlichkeit danken.

Meinen Eltern und meinem Bruder Christoph bin ich sehr verbunden für ihre Unterstützung und für die unablässige Motivation in allen Phasen der Dissertation.

Sehr dankbar bin ich auch meiner Freundin Alida Maillard-Andriamasinoro für ihre in den letzten Jahren aufgebrachte Geduld und ihren moralischen Beistand.

Fribourg im Dezember 2006 Frederic Holzbaur

Inhaltsübersicht

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Einführung

Die Jahre 2000 bis 2002 unterzogen die Risikofähigkeit der schweizerischen Pensionskassen einem harten Test. Offensichtlich genügten bei vielen Vorsorgeeinrichtungen die Ende 1999 vorhandenen Reserven nicht aus, um die in den Folgejahren eingetretenen Verluste auf den Kapitalmärkten aufzufangen. Rund 20 Prozent aller Vorsorgeeinrichtungen, bei den registrierten ohne Staatsgarantie sogar 29 Prozent, wiesen laut dem Bundesamt für Sozialversicherung per Ende 2002 eine Unterdeckung aus. Bei 5 Prozent der Vorsorgeeinrichtungen ohne Staatsgarantie lag der Deckungsgrad gar unter 90 Prozent (vgl. Rätzer [77], S. 33). Die finanzielle Lage der Vorsorgeeinrichtungen in der beruflichen Vorsorge hat sich zwar gesamthaft in den nachfolgenden Jahren verbessert, die negativen Börsenjahre sind aber bei vielen Kassen noch immer spürbar. Gemäss dem im Dezember 2005 veröffentlichten Bericht des Bundesamts für Sozialversicherung waren per Ende 2004 nach wie vor rund 10 Prozent der Pensionskassen in Unterdeckung, bei den registrierten Vorsorgeeinrichtungen sogar 14,4 Prozent. Die Zahl der Unterdeckungen hat damit zwar abgenommen, die finanzielle Lage vieler Pensionskassen ist aber aufgrund ihrer nach wie vor bestehenden eingeschränkten Risikofähigkeit[1] trotzdem immer noch angespannt. Dies folgt aus einer von der Complementa Investment-Controlling AG durchgeführten Umfrage, nach welcher Ende 2004 rund 47 Prozent der befragten privatrechtlichen Vorsorgeeinrichtungen noch nicht über genügende Reserven verfügten, um nach eigener Einschätzung die Schwankungen der Finanzmärkte auszugleichen (vgl. o.V. [69], o.S.). Die Entwicklung der Kapitalmärkte im Jahr 2005 dürfte zwar zu einer weiteren Entspannung

[1] Eine eingeschränkte Risikofähigkeit besteht dann, wenn die mit der Anlagestrategie verbundenen Schwankungen nicht mit angemessener Sicherheit durch frei verfügbare Schwankungsreserven abgedeckt sind.

der finanziellen Situation beigetragen haben, es stellt sich aber ausgehend von der oben geschilderten Situation dennoch die Frage, welche Anforderungen an das Risikomanagement von Pensionskassen in Zukunft zu stellen sind.

Die Gründe die zu dieser Situation führten sind vielfältig. Grundsätzlich lässt sich allein aus der Beobachtung, dass die Reserven bei vielen Kassen nicht ausreichten, nicht zwingend darauf schliessen, dass diese ungenügend waren, da immer ein gewisses Restrisiko in Kauf genommen wird. Auch brauchen neu gegründete Kassen stets einen gewissen Zeithorizont, über welchen Reserven aufgebaut werden können. Es ist aber dennoch bei einer Vielzahl von Fällen davon auszugehen, dass die vorgesehenen Schwankungsreserven ungenügend waren, wobei dies einerseits auf zu optimistische Annahmen bei deren Berechnung zurückzuführen ist und anderseits darauf, dass die eingesetzten Methoden ungenügend waren (vgl. Rätzer [77], S.33 ff.). Gegen Ende des Jahres 1999 wurden auf einer von der Vereinigung Innovation Zweite Säule durchgeführten Tagung zum Asset-Liability-Management (ALM) bei Pensionskassen mit Vertretern aus Wissenschaft, Pensionskassenpraxis und Beratungsunternehmen, bezüglich der damaligen aktuellen Situation ähnliche Schlussfolgerungen gezogen: War ALM noch zu Beginn der 90er Jahre ein kaum bekannter Begriff in der Welt der beruflichen Vorsorge, so hatten damals schon eine erhebliche Anzahl von Pensionskassen mehr oder weniger weitgehende Schritte in Richtung ALM unternommen, insgesamt war aber die Anwendung dieser Techniken in der 2. Säule noch in den Anfängen. Ebenso wurde der Markt für ALM-Dienstleistungen als noch äusserst intransparent beurteilt und der Kenntnisstand bei den Führungsorganen über moderne ALM-Methoden als noch wenig ausgeprägt. Grundsätzlich wurde aber von allen Teilnehmern festgehalten, dass sich in Zukunft wohl keine nach modernen Managementgrundsätzen geführte Vorsorgeeinrichtung solchen ALM-Methoden entziehen könne (vgl. Innovation Zweite Säule [45], S.8). Die Probleme, die mit der darauf folgenden Börsenkrise auftraten, haben diese festgestellten Defizite zusätzlich bekräftigt.

Asset-Liability Management beruht auf dem Leitgedanken einer gesamtheitlichen Betrachtung der Aktiv- und Passivseite, d.h. der Durchbrechung der traditionellen Begrenzung des Blickwinkels auf ausschliesslich die Passivseite (Pensionskassenexperte) oder die Aktivseite (Asset Manager). Das primäre Ziel besteht darin die Anlagestruktur so auf die Vorsorgeverbindlichkeiten abzustimmen, dass diese (mit angemessener Sicherheit und minimalen Kosten) bei Fälligkeit bezahlt werden können. Weitere Ziele bestehen in der Untersuchung des Zusammenwirkens der wesentlichen Steuerungsgrössen wie Beiträge, Leistungen und der Anlagestrategie. Die Anforderungen die gemeinhin an moderne ALM-Methoden gestellt werden, lassen sich wie folgt zusammenfassen: 1) Berücksichtigung der mittel- bis langfristigen Finanzierungserfordernisse der Pensionskasse aufgrund einer Analyse des Versichertenbestandes und des Vorsorgeplans. 2) Berücksichtigung der Kostenwirkung von Preis- und Lohnentwicklung, Änderungen im Versichertenbestand und ähnlichen Faktoren. 3) Verwendung moderner Finanzmarktmodelle. 4) Berücksichtigung langfristiger Zeithorizonte von mindestens 5 bis 10 Jahren (vgl. Innovation Zweite Säule [45], S. 2 ff. und Rätzer [77], S.37 f.).

Da von behördlicher und rechtlicher Seite keine konkreten Anforderungen an die Qualität der Methoden bestehen, werden in der schweizerischen Praxis eine Vielzahl von sehr unterschiedlichen Methoden eingesetzt, die von einfachen Pauschalsätzen bis hin zu komplexeren Simulationsmethoden reichen. Standards haben sich diesbezüglich in der Praxis, insbesondere auch aufgrund mangelnder Transparenz, noch nicht durchgesetzt. Zum Grossteil werden in der Praxis, vor allem bei Pensionskassen mittlerer und kleiner Grösse, nach wie vor die versicherungstechnischen und die anlagespezifischen Risiken getrennt voneinander bewirtschaftet. Für die ersteren werden in der Regel Risikoschwankungsreserven gebildet, für letztere Wertschwankungsreserven. Eine gegenseitige Beeinflussung der Passiv- und Aktivseite erfolgt dabei oft nur in der Form einer vorgegebenen Mindestrendite, welche sich aus einer Analyse der Vorsorgeverbindlichkeiten ergibt. Mehrjährige Zeithorizonte kommen dabei nur selten zur Anwendung. Damit werden die meisten angewendeten Methoden den oben aufgeführten Anforderung nur bedingt gerecht.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht nun einerseits darin einen Ansatz zu entwickeln, der die oben genannten Anforderungen weitestgehend umsetzt und andererseits die konkrete praktische Umsetzung dieses Ansatzes für eine schweizerische Pensionskasse aufzuzeigen. Ausgangspunkt bildet dabei die Fragestellung der Beurteilung der Risikofähigkeit einer Pensionskasse, die ein wesentliches Element im ALM einer Pensionskasse bildet. Um diese Risikofähigkeit beurteilen zu können, müssen die Risiken beschrieben und messbar gemacht werden. Grundlage dazu bildet die finanzielle Lage der Pensionskasse zu einem zukünftigen Zeitpunkt. Mögliche Szenarien für diese zukünftige finanzielle Lage werden dabei ausgehend von den jeweiligen bestehenden Rahmenbedingungen, wie dem Vorsorgeplan, der Anlagestrategie und der geplanten Personalbestandsentwicklung, durch eine gemeinsame Simulation der Entwicklung der Vermögenswerte und der Verpflichtungen generiert. Für jedes generierte Szenario lässt sich dann eine Beurteilung der finanziellen Situation am Ende des Zeithorizontes vornehmen. Hier erfolgt dies durch die Bestimmung der Deckungssituation bzw. des Deckungsgrades. Aus der Gesamtheit der generierten Szenarien resultiert letztendlich eine Schätzung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Deckungsgrad bzw. die Deckung zum vorgegebenen zukünftigen Zeitpunkt. Anhand dieser lässt sich durch die Schätzung von Risikomassen die Risikofähigkeit beurteilen. Hervorzuheben ist, dass das Ziel der Arbeit nicht in der Erkennung bzw. Feststellungen von Risiko-Zusammenhängen liegt, sondern vielmehr in der Quantifizierung dieser Zusammenhänge.

Die Arbeit teilt sich in drei Teile. Im ersten Teil werden die Grundlagen zur beruflichen Vorsorge, der Versicherungstechnik, den angewendeten Finanzmodellen und der Risikomessung erarbeitet. Der zweite Teil besteht aus der Herleitung des Modells, ausgehend von den im ersten Teil erarbeiteten Konzepten. Die Anwendung des Modells auf das Beispiel einer BVG-Minimalkasse ist Inhalt des letzten Teils. Der Aufbau der Arbeit wird nachfolgend erläutert:

Teil I umfasst die Darstellung der Grundlagen für die spätere Modellierung. Im ersten Kapitel wird auf die gesetzlichen Grundlagen, die Organisation sowie die Leistungen und die Finanzierung der beruflichen Vorsorge in der Schweiz eingegangen. Das zweite Kapitel beschreibt das übliche Vorgehen zur Beurteilung des finanziellen Gleichgewichts einer Pensionskasse. Dabei wird zunächst auf gesetzliche Erfordernisse und die Vorgaben der Aufsichtsbehörden eingegangen und anschliessend die Beurteilung aus versicherungstechnischer Sicht erläutert. Die Grundlagen zur finanzmathematischen Modellierung sind im dritten Kapitel dargestellt, wobei insbesondere auf die Beschreibung der Entwicklung von finanziellen Grössen durch stochastische Prozesse und deren Simulation eingegangen wird. Im letzten Kapitel des ersten Teils werden verschiedene Definitionen von Risiko betrachtet und die Messung von Risiken aus statistischer Sicht dargestellt.

Im zweiten Teil der Arbeit wird der weiter oben schon erwähnte Ansatz für das ALM von Pensionskassen entwickelt. Kapitel 5 fasst dazu nochmals den Ausgangspunkt für die Modellierung zusammen. In Kapitel 6 wird der eigentliche Ansatz beschrieben, die Zielvariable, anhand welcher die Risikomessung vorgenommen wird, eingeführt und die einzelnen Modellvariablen, von welchen die Zielvariable abhängt, weiter beschrieben. Die Identifikation der Risikofaktoren, welche die Modellvariablen beeinflussen und deren gegenseitige Abhängigkeiten sind Bestandteil des Kapitels 7. Desweiteren wird in diesem Kapitel die Modellierung der Risikofaktoren und ihrer gegenseitigen Abhängigkeiten beschrieben. In Kapitel 8 erfolgt die Darstellung der Schätzung der Verteilung der Zielvariablen, d.h insbesondere die Beschreibung der Simulation der Risikofaktoren und der Aggregation der Verteilung über den gesamten Versichertenbestand. Darüber hinaus wird die Schätzung der Risikomasse besprochen.

Der dritte Teil umfasst die Anwendung des im vorigen Teil entwickelten Modells auf eine Pensionskasse mit BVG-Minimalplan. Dazu wird in Kapitel 9 zunächst ein solcher Minimalplan geeignet operationalisiert. Inhalt des zehnten Kapitels ist dann die Schätzung der Modellparameter anhand historischer Daten. Dabei erfolgt auch eine Beurteilung der verwendeten Modelle für die Risikofaktoren aufgrund der Schätzergebnisse. Zur Auswertung von Beispielen wurde der in Teil II entwickelte Ansatz als Algorithmus programmiert (Visual Basic) und für 77 verschiedene Ausgangssituationen durchgeführt. Die Ergebnisse für diese Beispiele, anhand welcher eine Plausibilisierung des Modells durch Vergleich mit bestehenden Erwartungen vorgenommen wird, sind in Kapitel 11 dargestellt.

Teil I

Grundlagen

Kapitel 1

Die berufliche Vorsorge in der Schweiz

1.1 Drei-Säulen-Konzept und BVG

Die berufliche Vorsorge ist Teil des seit 1972 in der Verfassung (Art. 111 BV) verankerten Drei-Säulen-Konzepts der Schweizerischen Alters-, Hinterlassenen- und Invalidenvorsorge, welches in Abbildung 1.1 vereinfacht dargestellt ist. Neben der beruflichen Vorsorge als zweiter Säule, beruht das Konzept auf der eidgenössischen Alters-, Hinterlassenen- und Invalidenversicherung (AHV/IV) als erster Säule und der Selbstvorsorge als dritter Säule. Die erste und die zweite Säule sollen gemeinsam den Betagten, Hinterbliebenen und Invaliden die Fortsetzung der gewohnten Lebenshaltung in angemessenen Masse ermöglichen und sind somit im wesentlichen als Versicherung gegen die wirtschaftlichen Folgen von Alter, Tod und Invalidität zu verstehen.

Auf der Bundesverfassung beruhend wurde am 1. Januar 1985 das Bundesgesetz über die berufliche Vorsorge (BVG) erlassen. Die berufliche Vorsorge hatte zu diesem Zeitpunkt in der Schweiz bereits eine längere Geschichte hinter sich. In der Maschinenindustrie wurden vor über 200 Jahren die ersten Pensionskassen gegründet. Später folgten Gründungen durch den Staat und andere Wirtschaftszweige. Als Folge dieser Entwicklung entstanden aufgrund der Freiwilligkeit eine Vielzahl von zum Teil sehr unterschiedlichen Systemen. Das BVG wurde deshalb

Soziale Sicherheit bei Alter, Tod und Invalidität		
Erste Säule	**Zweite Säule**	**Dritte Säule**
Staatliche Sozialversicherung Alters- und Hinterlassenen-versicherung (AHV) Invalidenversicherung (IV) Ergänzungsleistungen zur AHV/IV	**Berufliche Vorsorge** Obligatorische Versicherung (BVG) Freiwillige Zusatzversicherungen	**Selbstvorsorge** Gebundene Vorsorge Freie Vorsorge
Existenzsicherung	Weiterführung der gewohnten Lebenshaltung	Freiwillige steuerbegünstigte Ergänzung zur 1. und 2. Säule
Staat	Vorsorgeeinrichtungen der Arbeitgeber	Banken, Versicherungen und andere

Abbildung 1.1: Das Drei-Säulen-Konzept der Vorsorge (vgl. Schwarzenbach-Hanhart [86], S. 251 und Helbling [42], S. 24).

als Rahmengesetz konzipiert, welches den Kassen weitgehend Freiraum in der Gestaltung der Leistungen und deren Finanzierung gibt, insofern sie ein höheres oder gleiches Leistungsniveau wie die im BVG definierten Mindestvorschriften erzielen. Damit wurde man der Zielsetzung gerecht, für alle Arbeitnehmer eine berufliche Vorsorge mit gewissen Mindestanforderung sicherzustellen, ohne die bestehenden Kassen wesentlich zu beschränken (vgl. Vorsorgeforum [95], o. S.).

War bei der Einführung des BVG noch die Leistungserbringung an die Eintrittsgeneration ein zentrales Thema, ist mittlerweile aufgrund der erschwerten demografischen und wirtschaftlichen Rahmenbedingungen die Erhaltung des Vorsorgeschutzes in den Mittelpunkt gerückt. So stand die 1. BVG-Revision insbesondere unter Anbetracht der gestiegenen Lebenserwartung nicht im Zeichen des Ausbaus, sondern der Konsolidierung der Versicherung (vgl. Botschaft zur 1. BVG Revision [89], S. 2644 ff. und Vorsorgeforum [95], o. S.). Weitere Ziele der Revision waren neben einer besseren Koordination mit den Bestimmungen der AHV, die Angleichung der Bedingungen für Frauen und Männer und ein besserer Schutz von Teilzeitbeschäftigten. Mit Inkrafttreten der Massnahmen zur Transparenzerhöhung bei der Führung von Vorsorgeeinrichtungen und der paritätischen Verwaltung ist am 1. April 2004 der erste Teil der Bestimmungen der BVG-Revision rechtskräftig geworden. Auf den 1. Januar 2005 folgten die restlichen revidierten Bestimmungen mit Ausnahme der steuerlichen, wobei zur Anpassung der Reglemente und Abläufe gewisse Übergangsfristen eingeräumt wurden. Seit dem 1. Januar 2006 sind auch die revidierten steuerlichen Bestimmungen wirksam (vgl. Winterthur-Leben [100], o. S.).

Eine Übersicht über die Gesetze und Verordnungen zur beruflichen Vorsorge der Schweiz findet sich im Anhang A.

1.2 Organisation der beruflichen Vorsorge

1.2.1 Vorsorgeeinrichtungen

Die Durchführung der beruflichen Vorsorge erfolgt in einer vom Arbeitgeber rechtlich unabhängigen Vorsorgeeinrichtung, wobei zwischen registrierten, nicht-registrierten und partronalen Vorsorgeeinrichtungen sowie verschiedenen Rechts-, Verwaltungs- und Risikoträgerformen zu unterscheiden ist. Die grundlegenden Unterschiede werden nachfolgend in einem kurzen Überblick dargestellt.

Registrierte Vorsorgeeinrichtungen

Vorsorgeeinrichtungen, die den gesetzlich vorgeschriebenen obligatorischen Teil der Vorsorgeleistungen abdecken, müssen sich bei der Aufsichtsbehörde registrieren lassen (Art. 48 BVG und Art. 5 ff. BVV1). Unter die registrierten Einrichtungen fallen die BVG-Minimaleinrichtungen, welche nur das Obligatorium abdecken und die umhüllenden Vorsorgeeinrichtungen, welche auch weitergehende (ausserobligatorische) Leistungen versichern (vgl. Helbling [42], S. 81 ff.).

Nichtregistrierte Vorsorgeeinrichtungen

Neben den registrierten Vorsorgeeinrichtungen existieren Einrichtungen mit reglementarischen Beiträgen und Leistungen im rein ausserobligatorischen Bereich. Diese Einrichtungen können alle Mitarbeiter umfassen oder aber, wie z.B. bei einer Kadervorsorgeeinrichtung, nur einzelne Mitarbeiterkategorien versichern (vgl. Helbling [42], S. 84 ff.).

Patronale Einrichtungen

Patronale Einrichtungen sind nichtregistrierte Vorsorgeeinrichtungen, welche ausschliesslich vom Arbeitgeber und ohne reglementarische Pflicht dotiert werden. Das Charakteristische ist das Fehlen eines versicherten Risikos und eines reglementarischen Anspruchs der einzelnen Begünstigten auf eine normierte Leistung. Bei diesen Einrichtungen gibt es somit keine Versicherten im eigentlichen Sinn (vgl. Helbling [42], S. 86 ff.).

Rechtsformen

Die für Vorsorgeeinrichtungen zulässigen Rechtsformen sind die der Stiftung, Genossenschaft oder Einrichtung des öffentlichen Rechts (Art. 331 OR und Art. 48 BVG). Durch die eigene Rechtspersönlichkeit der Vorsorgeeinrichtungen wird das Vorsorgevermögen vom Vermögen des Arbeitgebers getrennt, wodurch sichergestellt werden soll, dass die Mittel der Vorsorge nicht für andere Zwecke, wie z.B. Schuldentilgung, verwendet werden und dass der Vorsorgeschutz auch bei allfälligen wirtschaftlichen Schwierigkeiten des Arbeitgebers gewährt bleibt (vgl. Riemer [78], §2 N3).

Die überwiegende Zahl der Vorsorgeeinrichtungen in der Schweiz weisen die Rechtsform der Stiftung auf. Die Genossenschaft wird kaum mehr als Rechtsform gewählt. Die Gründe dafür liegen in der Schwerfälligkeit,[1] dem geringen Minderheitenschutz[2] und den beschränkten Einflussmöglichkeiten des Arbeitgebers (vgl. Ruggli [83], S. 33 f. und Brühwiler [14], §7 N15). Die Rechtsform der öffentlich-rechtlichen Einrichtung ist gesetzlich nur für den Bund, die Kantone und andere öffentlich-rechtliche Arbeitgeber zulässig (vgl. Brühwiler [14], §7 N16).

Verwaltungsformen

Als Verwaltungsformen kommen neben den einfachen Vorsorgeeinrichtungen mit einem oder einigen wenigen angeschlossenen Arbeitgebern auch solche mit einer

[1] Beschliessendes Organ ist die Genossenschafterversammlung

[2] Zweckänderung ist durch die Genossenschafterversammlung möglich

Vielzahl von Arbeitgebern vor. Diese Stiftungen werden je nach Ausprägung als Sammel- oder Gemeinschaftsstiftungen bezeichnet. Einer Sammelstiftung können sich Arbeitgeber anschliessen, die keine eigene Stiftung errichten wollen. Die einzelnen Anschlüsse[3] einer Sammelstiftung bilden aber keine organisatorische und wirtschaftliche Einheit, sondern werden getrennt voneinander geführt. Gemeinschaftsstiftungen sind Stiftungen für verschiedene Unternehmen, die durch eine bestimmte Gemeinsamkeit miteinander verbunden sind (z.B. Konzerngesellschaften) und die ihren Arbeitnehmern eine einheitliche Vorsorge bieten möchten. Bei Gemeinschaftsstiftungen werden die verschiedenen Anschlüsse in der Regel wirtschaftlich nicht getrennt voneinander geführt. Zudem besteht meist eine einheitliche Regelung der Organisation und Rechnungsführung über alle Anschlüsse hinweg (vgl.Helbling [42], S. 88 ff.).

Grössere Arbeitgeber organisieren ihre Personalvorsorge meist in einer umhüllenden Kasse oder gesplittet in eine BVG-Minimalkasse und eine (oder mehrere) ausserobligatorische Kassen. Kleinere Arbeitgeber hingegen schliessen sich oft einer Sammelstiftung an.

Risikoträgerformen

Die Risiken, welche aus der Durchführung der beruflichen Vorsorge erwachsen, können sich auf verschiedene Risikoträger verteilen (vgl. Helbling [42], S. 92 ff.). Es lassen sich folgende Grundtypen unterscheiden:

- Autonome Pensionskassen;
- Halb- oder teilautonome Pensionskassen; und
- Nichtautonome (vollrückversicherte) Pensionskassen.

Von einer autonomen Kasse spricht man, wenn die Vorsorgeeinrichtung die versicherungstechnischen Risiken (Alter, Tod und Invalidität) sowie die Risiken aus dem Sparprozess (Vermögensanlage, Bestandesveränderungen) selber trägt. Die Risikogemeinschaft wird dabei von der Gesamtheit der Versicherten der Kasse

[3] oft auch als Vorsorgewerk bezeichnet

gebildet. Eine autonome Kasse versichert ihre Mitglieder auf eigene Rechnung und Gefahr und entrichtet bei Eintreten eines gewissen Ereignis eine normierte Leistung.

Bei halb- oder teilautonomen Pensionskassen wird nur ein Teil der Risiken auf eigene Gefahr übernommen. Der andere Teil wird durch einen Kollektivversicherungsvertrag bei einer Versicherungsgesellschaft rückversichert. Durch solch eine Kollektivversicherung können mehrere Personen durch einen einzigen Vertrag versichert werden. Häufig rückversichert werden das Todesfall- und Invaliditätsrisiko. Auch ein teilweiser Übertrag der Risiken ist möglich, wie z.B durch eine Stop-Loss-Versicherung. Bei einer solchen wird die Schadenssumme, die eine festgesetzte Schranke innerhalb einer Abrechnungsperiode übersteigt, von der Versicherungsgesellschaft rückvergütet.

Nichtautonome Vorsorgeeinrichtungen hingegen übertragen durch einen Kollektivversicherungsvertrag sämtliche Risiken auf eine Lebensversicherungsgesellschaft und sind somit im Grunde nur reine rechtliche Hüllen.

Statistischer Überblick

Zum Abschluss des einführenden Überblicks über die vorherrschenden Arten, Rechts-, Risikoträger- und Verwaltungsformen schweizerischer Vorsorgeeinrichtungen sind in den Tabellen 1.1 und 1.2 einige statistische Angaben dazu wiedergeben (vgl. Pensionskassenstatistik 2002 [21] und 2000 [22] des Bundesamts für Statistik).[4]

[4] Die Auswertungen erscheinen jeweils mit einem Verzug von etwa zwei Jahren.

Pensionskassenstatistik	**Anzahl**		**Versicherte in Tausend**	
	2002	**2000**	**2002**	**2000**
Vorsorgeeinrichtungen insgesamt	**8 134**	**9 096**	**3 311**	**3 226**
dazu Rentenbezüger			803	748
Rechtsformen:				
Stiftungen	7 968	8 914	2 685	2 590
Genossenschaften	31	35	121	114
Einrichtungen des öffentlichen Rechts	135	147	505	523
Art:				
Registrierte Vorsorgeeinrichtungen	2 449	2 599	3 146	3 040
Nicht registrierte Vorsorgeeinrichtungen	721	819	165	186
Vorsorgeeinr. ohne aktive Versicherte [1)]	4 964	5 678	-	-
Risikoträger:				
Autonome Einrichtungen	457	482	1 143	1 127
Teilautonome Einrichtungen	2 093	2 221	963	918
Nichtautonome Einrichtungen	620	715	1 205	1 181
Übrige [1)]	4 964	5 678	-	-

Tabelle 1.1: Rechtsform, Art und Risikoträger der Vorsorgeeinrichtungen in der Schweiz (vgl. Pensionskassenstatistik 2002 und 2000 des Bundesamts für Statistik [22] und [21])

[1)] Davon 3 330 bzw. 3 655 Wohlfahrtsfonds (patronale Einrichtungen), 132 bzw. 163 Finanzierungsstiftungen, sowie 1 502 bzw. 1 860 stillgelegte/auslaufende Vorsorgeeinrichtungen.

Pensionskassenstatistik	**Anzahl**		**Versicherte in Tausend**		**Anschlüsse in Tausend**	
	2002	**2000**	**2002**	**2000**	**2002**	**2000**
Einrichtung nur eines Arbeitgebers	1 707	1 942	263	290	n/a	n/a
Sammeleinrichtungen	126	127	1 152	1 144	183	184
Gemeinschaftseinrichtungen	130	128	615	571	112	105
Einrichtung eines Konzerns, Holding- bzw. Muttergesell.	804	773	660	648	5	5
Einrichtung aus einem anderen Zusammenschluss mehrerer Arbeitgeber	288	330	44	44	1	1
Mischformen [1)]	115	118	577	529	6	6

Tabelle 1.2: Verwaltungsformen der (registrierten und nicht-registrierten) Vorsorgeeinrichtungen in der Schweiz (vgl. Pensionskassenstatistik 2002 und 2000 des Bundesamts für Statistik [22] und [21])

[1)] Mischformen steht zusammenfassend für Sammel- und Gemeinschaftseinrichtungen öffentlich-rechtlichen Körperschaften, denen halbstaatliche oder in einem besonderen Verhältnis zum Bund, Kanton oder zur Gemeinde stehende Unternehmen angeschlossen sind.

1.2.2 Reglement und Vorsorgeplan

In registrierten Vorsorgeeinrichtungen, wie grundsätzlich in allen Vorsorgeeinrichtungen mit festen Leistungs- und Beitragssystemen, werden die Einzelheiten des Versicherungs- bzw. Vorsorgeplans nicht in der starren Stiftungsurkunde, sondern in vom Stiftungsrat erlassenen Reglementen festgelegt. Diese Reglemente umschreiben die wesentlichen Rechte und Pflichten der versicherten Mitglieder und sind somit als Vorsorgevertrag zu verstehen (vgl. Helbling [42], S. 117 ff.).

Die in Reglementen anzutreffenden Bestimmungen umfassen in der Regel

- den Namen und Zweck,
- den Kreis der Versicherten,[5]
- den Beginn und Ende der Versicherung,[6]
- die Definition des versicherten Lohns,[7]
- die Definition der Leistungen der Kasse,[8]
- die Höhe der Freizügigkeitsleistungen,[8]
- allgemeine Bestimmungen über die Leistungserbringung,[9]
- die Definition der Beiträge und Altersgutschriften,[10]
- Vorgaben für die Vermögensanlage,[11] Organisation und Verwaltung[12] und
- die Schlussbestimmungen.

[5] Mindestvorschriften geregelt in Art. 2, 7 BVG, Art. 1, 2 BVV2

[6] Mindestvorschriften geregelt in Art. 10, 13 BVG, Art. 6 BVV2.

[7] Mindestvorschriften geregelt in Art. 7, 8, 9 BVG, Art. 3, 3a, 4, 5 BVV2.

[8] für Mindestvorschriften vgl. Abschnitt1.3

[9] Mindestvorschriften geregelt in Art. 34-41 BVG, Art. 24, 25, 26, 27, 27a-f BVV2.

[10] für Mindestvorschriften vgl. Abschnitt 1.4.3

[11] für Mindestvorschriften vgl. Abschnitt 1.4.4

[12] Mindestvorschriften geregelt in Art. 48-53e BVG, Art. 27g-27h, Art. 33-41a BVV2

Die typischen Inhalte dieser reglementarischen Bestimmungen lassen sich wie folgt grob skizzieren: In der Regel beginnt und endet die Versicherung mit dem Arbeitsverhältnis bzw. Erreichen des ordentlichen Rentenalters. Die Versicherung umfasst im Obligatorium alle bei der AHV versicherten Arbeitnehmer/-innen mit einem Einkommen über dem gesetzlich definierten Mindesteinkommen[13] und vollendetem 24. Altersjahr bzw. vollendetem 17. Altersjahr für den Risikoteil.[14] Im ausserobligatorischen Teil wird die Versicherung hingegen oft auf gewisse Mitarbeiterkategorien, wie z.B. das Kader, beschränkt.

Die Höhe der Beiträge und Leistungen bestimmt sich massgeblich durch den versicherten Lohn, welcher sich üblicherweise aus dem AHV-Jahreslohn abzüglich eines Koordinationsabzugs (vgl. Abschnitt 1.3.1) ergibt. Durch diesen Koordinationsabzugs sollen die Leistungen der ersten[15] und zweiten Säule aufeinander abgestimmt werden.

Von Gesetzes wegen sind die Alters-, Invaliden- und Hinterlassenenleistungen nur als nicht zu unterschreitende Minimalleistungen vorgegeben. Die Höhen und Berechnungsweisen variieren deshalb von Plan zu Plan mehr oder minder stark. Darüber hinaus sind in vielen Vorsorgeplänen weitere Leistungen, wie z.B. Todesfallkapitalien, vorgesehen. Auf die verschiedenen Leistungen, Leistungsarten und Mindestvorschriften wird weiter in Abschnitt 1.3 eingegangen.

Versicherte, welche ihre Vorsorgeeinrichtung verlassen bevor ein Vorsorgefall eintritt (Freizügigkeitsfall), haben einen gesetzlichen Anspruch auf eine Austrittsleistung. Im Beitragsprimat entsprechen diese Ansprüche normalerweise dem geäufneten Sparkapital, im Leistungsprimat dem sogenannten Barwert der erworbenen Leistungen (vgl. auch Abschnitt 1.3.7).

In den allgemeinen Bestimmungen über die Leistungserbringung werden in der Regel Themen wie Verpfändung, Verjährung, Koordination mit Unfall- und Mi-

[13] Ab 1.1.2005 75% der maximalen AHV-Rente = CHF 19'350

[14] Invaliditäts- und Todesrisiken

[15] AHV/IV

litärversicherung, Verhinderung von Überentschädigungen und Teuerungsausgleich behandelt.

Die Finanzierung der Vorsorge erfolgt hauptsächlich durch Vermögenserträge und Beitragszahlungen. Bei letzteren wird in der Regel zwischen Spar- und Risikobeiträgen unterschieden, wobei die Höhe der Beiträge für den Sparteil in Beitragsprimatsplänen häufig mit den Altersgutschriften gleichgesetzt wird. Darüber hinaus sehen die reglementarischen Bestimmungen oft zusätzliche Zahlungen des Arbeitgebers und/oder -nehmers vor; beispielsweise für den Fall einer Sanierung. Gesetzlich vorgeschrieben ist dabei nur, dass die Beiträge des Arbeitgebers mindestens gleich hoch sind wie die der Arbeitnehmer. Auf weitere Details der Beitragserhebung und -berechnung wird im Abschnitt 1.4.3 im Rahmen der Besprechung der Finanzierung eingegangen. Dabei werden ebenfalls die reglementarischen und gesetzlichen Vorschriften zur Vermögensanlage dargestellt (vgl. Abschnitt 1.4.4).

Unter den Bestimmungen zur Organisation und Verwaltung finden sich Vorgaben zur Parität, zur Abwicklung von Gesamt- und Teilliquidationen sowie zur Beauftragung der Kontrollstelle und des Experten für berufliche Vorsorge. Paritätische Verwaltung bedeutet hier, dass gleich viele Arbeitnehmer- wie Arbeitgebervertreter in der Verwaltung vertreten sein müssen. Der Kontrollstelle obliegt die Prüfung der Geschäftsführung, des Rechnungswesens und der Vermögensanlage. Die Gesetzmässigkeit der reglementarischen Leistungen und deren Finanzierung überprüft der Experte für berufliche Vorsorge. Darüber hinaus hat dieser periodisch das finanzielle Gleichgewicht der Vorsorgeeinrichtung zu beurteilen, d.h. ihre Fähigkeit zur Erfüllung der übernommenen Verpflichtungen.

Die Schlussbestimmungen letztendlich behandeln normalerweise Inkrafttreten, Rechtspflege, Verfahren bei Lücken im Reglement und andere weiterführende Themen.

1.2.3 Auffangeinrichtung und Sicherheitsfonds

Neben den Vorsorgeeinrichtungen existieren weitere Institutionen im System der beruflichen Vorsorge. Zwei davon sind die Auffangeinrichtung und der Sicherheitsfonds, welche nachfolgend erläutert werden.

Auffangeinrichtung

Zur Sicherstellung des Obligatoriums wurde gemäss Art. 54 und Art. 60 BVG im Jahr 1983 durch die Spitzenverbände der Arbeitgeber und Arbeitnehmer die Stiftung Auffangeinrichtung BVG errichtet. Bei der Auffangeinrichtung handelt es sich um eine Vorsorgeeinrichtung im Sinne des BVG, welcher folgende Aufgaben obliegen: Einerseits der Anschluss von Arbeitgebern auf deren Begehren hin und anderseits der zwangsweise Anschluss von Arbeitgebern, die weder eine Vorsorgeeinrichtung errichtet noch sich einer solchen angeschlossen haben. Ebenfalls werden von der Auffangeinrichtung freiwillige Versicherte aufgenommen, wie z.B. Selbständigerwerbende, Auslandsschweizer, Arbeitnehmer im Dienste mehrerer Arbeitgeber oder aus der obligatorischen beruflichen Vorsorge ausgeschiedene Arbeitnehmer, die diese weiterführen möchten. Weiter erbringt die Auffangeinrichtung obligatorische Leistungen in Vorsorgefällen, die vor dem Anschluss des Arbeitgebers an eine Vorsorgeeinrichtung eingetreten sind. Darüber hinaus erfolgt durch die Auffangeinrichtung die Verwaltung unzustellbarer Freizügigkeitsleistungen und vergessener Freizügigkeitskonti sowie die Durchführung der obligatorischen beruflichen Vorsorge von arbeitslosen Personen für die Risiken Tod und Invalidität (vgl. Helbling [42], S. 140 f.).

Sicherheitsfonds

Der Sicherheitsfonds ist eine öffentlich-rechtliche Stiftung, deren Hauptaufgabe darin besteht, die geschuldeten Leistungen zahlungsunfähig gewordener Vorsorgeeinrichtungen zu erbringen. Weiter gewährt er Zuschüsse an Vorsorgeeinrichtungen, die eine ungünstige Altersstruktur aufweisen und entschädigt die Auffangeinrichtung für Kosten, die nicht an den Verursacher überwälzt werden können.

Bei zahlungsunfähig gewordenen Vorsorgeeinrichtungen stellt der Sicherheitsfonds den Betrag sicher, welcher zur Erfüllung der gesetzlichen oder reglementarischen Verpflichtungen fehlt. Die Sicherstellung durch den Sicherheitsfonds umfasst aber höchstens die Leistungen, die sich aufgrund eines massgebenden Lohnes in der anderthalbfachen Höhe des oberen BVG-Grenzbetrages ergeben (vgl. Art. 56 Abs. 1 und Abs. 2 BVG, Art. 26 Abs. 1 SFV). Mit der Teilrevision des BVG im Jahr 1996 hat der Bundesrat die Insolvenzdeckung des Sicherheitsfonds auf die über- und vorobligatorische Vorsorge ausgedehnt. Seither sind alle dem Freizügigkeitsgesetz unterstellten Vorsorgeeinrichtungen auch dem Sicherheitsfonds angeschlossen (vgl. Vorsorgeforum [96], o. S. und Helbling [42], S. 142 ff.).

Die Finanzierung des Sicherheitsfonds erfolgt einerseits durch Beiträge der Vorsorgeeinrichtungen und andererseits durch die Erträge aus dem eigenen Vermögen des Sicherheitsfonds (vgl. Art. 12 SFV).

1.3 Leistungen der beruflichen Vorsorge

1.3.1 Berechnungsgrundlage: Versicherter Lohn

Der versicherte Lohn als Berechnungsgrundlage für die Beiträge und Leistungen, ergibt sich aus dem sogenannten massgebenden Lohn abzüglich eines Koordinationsabzugs und wird normalerweise auf ein Maximum begrenzt. Der massgebende Lohn bezeichnet den Teil des effektiven Lohns,[16] der von der Versicherung berücksichtigt wird. Oft wird dafür der AHV-Lohn, allenfalls mit Korrekturen für z.B. Überstunden oder Provisionen, herangezogen. Die Verminderung des massgebenden Lohns um den Koordinationsabzug bezweckt die Leistungen der beruflichen Vorsorge mit jenen der ersten Säule abzustimmen. Deshalb bestimmt sich die Höhe des Koordinationsabzugs meist in Abhängigkeit der maximalen einfachen AHV-Rente.[17] Reglementarisch werden allerdings für tiefere Einkommen oft auch

[16] Gesamtlohn einschliesslich aller Boni, Provisionen, Überstundenentschädigungen etc.

[17] Maximale AHV-Rente für 2003/2004: CHF 25'320
für 2005/2006: CHF 25'800

unter dem BVG-Abzug liegende Koordinationsabzüge definiert (vgl. PRASA Hewitt [74], o. S.). Hervorzuheben ist, dass der koordinierte Lohn gemäss Reglement einer Vorsorgeeinrichtung und der koordinierte Lohn gemäss BVG[18] voneinander abweichen können (vgl. Helbling [42], S.165 f.).

Die festgelegten Grenzbeträge des Obligatoriums,[19] d.h. insbesondere der Koordinationsabzug und der maximale koordinierte Lohn, liegen gemäss Art. 9 BVG in der Kompetenz des Bundesrates, welcher diese an die Erhöhungen der minimalen Altersrente der AHV anpassen kann. Das Gesetz geht also nicht grundsätzlich von einer automatischen Anpassung aus, sondern überlässt dem Bundesrat die Entscheidung über die Notwendigkeit einer entsprechenden Anpassung. Bezüglich der oberen Grenze des koordinierten Lohnes sieht Art. 9 BVG einen noch grösseren Spielraum vor, indem der Bundesrat die allgemeine Lohnentwicklung berücksichtigen kann und sich nicht ausschliesslich auf die Entwicklung der AHV-Renten abstützen muss. Die Anpassung der AHV-Leistungen und dazu parallel der BVG-Grenzbeträge erfolgte allerdings bis heute regelmässig jedes zweite Jahr gemäss dem sogenannten Misch-Index, welcher sich als arithmetisches Mittel aus dem Lohnindex und dem Landesindex der Konsumentenpreise errechnet (vgl. BSV [17], o. S.).

1.3.2 Leistungsbemessung: Leistungs- und Beitragsprimat

Bei der Leistungsbemessung lassen sich Vorsorgeeinrichtungen bzw. ihre Reglemente danach unterscheiden, ob sich die Vorsorgeleistungen nach den einbezahlten Beiträgen bemessen oder sich die Beiträge nach den geplanten Leistungen ausrichten.

Koordinationsabzug BVG vor 1. Revision: 100% der max. AHV-Rente
nach 1. Revision: 87.5% der max. AHV-Rente = CHF 22'575

[18] Spanne des AHV-Lohns von 22'575 bis 77'400 CHF (ab 1.1.2005), für alle obligatorisch Versicherten mindestens aber CHF 3'225 (vgl. Art. 8 BVG).

[19] Art. 2, 7, 8, 46 BVG

Beim sogenannten Leistungsprimat werden die Vorsorgeleistungen in Form einer bestimmten Berechnungsvorschrift festgelegt. In der Regel geschieht dies in festen Prozenten des versicherten Lohns. Das Finanzierungssystem richtet sich dann entsprechend an den versprochenen Leistungen aus. Die zu zahlenden Beiträge folgen im Leistungsprimat somit aus den festgelegten Leistungen.

Beim Beitragsprimat werden zunächst die Beiträge festgelegt, auch hier wiederum meist in festen Prozenten des versicherten Lohnes. Die Vorsorgeleistungen werden dann für jeden Versicherten im Vorsorgefall individuell anhand der im Vorfeld definierten Berechnungsgrundlagen und der bis zu diesem Zeitpunkt geleisteten Beiträgen ermittelt. Die zu erbringenden Leistungen folgen hier aus den gezahlten Beiträgen (vgl. Helbling [42], S. 236).

Neben den Reinformen sind auch sogenannte Mischpläne anzutreffen, die Teile der Vorsorge nach dem Leistungsprimat und Teile nach dem Beitragsprimat ausrichten. Häufig sind zum Beispiel Mischpläne, welche die Altersvorsorge nach dem Beitragsprimat und die Risikovorsorge (Invalidität, Tod) nach dem Leistungsprimat vorsehen.

In der Tabelle 1.3 werden einige Eigenschaften der beiden Systeme gegenübergestellt.

1.3.3 Leistungserbringung: Arten von Leistungen

Unter dem Begriff Leistungen werden grundsätzlich alle erbrachten Auszahlungen an Begünstigte verstanden. Die reglementarische Ausgestaltung dieser Leistungen ist im Rahmen der gesetzlichen Bestimmungen Aufgabe der Vorsorgeeinrichtungen, wobei die Konformität der Leistungen mit den gesetzlichen Bestimmungen, insbesondere der Erfüllung der BVG-Mindestvorschriften, durch einen Experten für berufliche Vorsorge überprüft werden muss. Zu unterscheiden sind grundsätzlich

Leistungsprimat	**Beitragsprimat**
- Es wird eine Altersrente in festen Prozenten des versicherten Lohnes garantiert.	- Die Altersrente ergibt sich aus dem geäufneten Spar- oder Deckungskapital. Es wird keine Altersrente in festen Prozenten des versicherten Lohnes garantiert.
- Der Vorsorgegrad (Gesamtrente in Prozent des Bruttolohnes) im Rücktrittsalter ist dem Versicherten bekannt.	- Der Vorsorgegrad im Rücktrittsalter ist dem Versicherten unbekannt.
- Das Konzept ist transparent bezüglich der Höhe der Vorsorgeleistungen.	- Das Konzept ist weniger transparent bezüglich der Höhe der Vorsorgeleistungen.
- Die Finanzierung ist auf dem kollektiven Äquivalenzprinzip aufgebaut, d.h. auf dem Solidaritätsprinzip.	- Die Finanzierung ist auf dem individuellen Äquivalenzprinzip aufgebaut, d.h. die Solidarität wird auf ein Minimum reduziert.
- Das Konzept ist wenig transparent bezüglich der Kapitalbildung. Es erlaubt dem Versicherten kaum den Sparprozess für das Alter zu überprüfen.	- Das Konzept ist transparent bezüglich der Kapitalbildung. Der Sparprozess für das Alter kann von jedem Versicherten nachvollzogen werden.
- Die Kosten sind schwer budgetierbar. In Zeiten grosser Lohnsteigerungen ergeben sich hohe Kosten.	- Die Kosten sind budgetierbar. In Zeiten grosser Lohnsteigerungen steigen die Kosten (in etwa) proportional.
- Die Kosten sind stark abhängig von der Alters- und Lohnstruktur.	- Die Alters- und Lohnstruktur hat je nach Wahl der Beitragsstaffelung nur einen unbedeutenden Einfluss auf die Kosten der Vorsorge.
- Lohnänderungen infolge Teilzeitzeitbeschäftigung sind technisch schwer verarbeitbar.	- Lohnänderungen infolge Teilbeschäftigung können technisch problemlos verarbeitet werden.
- Die Höhe der Austrittsleistung (Freizügigkeitsleistungen) entspricht grundsätzlich dem Barwert der erworbenen Leistung und muss somit versicherungstechnisch ermittelt werden.	- Die Höhe der Austrittsleistung (Freizügigkeitsleistung) entspricht dem geäufneten Sparkapital (Stand des Sparkontos).

Tabelle 1.3: Eigenschaften des Leistungs- und des Beitragsprimats (vgl. Helbling [42], S. 236 f.)

- Altersleistungen,
- Risikoleistungen, d.h. Invaliden- und Hinterbliebenenleistungen und
- weitere Leistungen, wie Freizügigkeitsleistungen oder Wohneigentumsförderung.

In den folgenden Abschnitten wird auf die üblicherweise in Reglementen anzutreffenden Bestimmungen und auf die Mindestvorschriften des BVG im einzelnen eingegangen. Die Darstellung beruht neben dem Gesetz auf den Ergebnissen des 2002 durchgeführten Pension Fund Survey von PRASA Hewitt [74]. In dieser Studie wurden die Reglemente von 144 grossen Pensionskassen verschiedener Branchen mit insgesamt rund 600'000 aktiven Versicherten ausgewertet.[20]

1.3.4 Altersleistungen

Ein Anspruch auf Altersleistungen besteht ab Erreichen des ordentlichen Rücktrittsalters. Das gesetzliche ordentliche Rücktrittsalter entspricht dem der AHV, d.h. momentan 65 Jahre für Männer und 64 Jahre für Frauen. Davon abweichend können die reglementarischen Bestimmungen vorsehen, dass der Anspruch auf Altersleistungen mit der Beendigung der Erwerbstätigkeit entsteht. Für diese Fälle von Früh- bzw. Spätpensionierungen werden in der Regel entsprechende Leistungsanpassungen im Reglement vorgesehen. In der PRASA Hewitt Studie [74] lag das ordentliche Rücktrittsalter für Männer nur bei 20% der Pensionskassen unter dem gesetzlichen Rücktrittsalter (meist bei 62 Jahren). Bei den Frauen zeigte sich ein eher uneinheitliches Bild. Bei 41% der untersuchten Reglemente galt nach wie vor das gesetzliche Pensionierungsalter von damals 62, 24% hatten im Jahr 2002 schon die Anpassung an das Pensionierungsalter der AHV vorgenommen und ein Drittel der untersuchten Kassen hatte das Pensionierungsalter der Frauen jenem der Männer gleichgesetzt und auf 65 Jahre erhöht. Damit galt bei rund der Hälfte der Pensionskassen für Männer und Frauen das gleiche Rücktrittsalter.

[20] Die Untersuchung wurde im Jahr 2002 durchgeführt und gibt damit das Bild vor der BVG-Revision wieder.

In der Regel werden die Leistungen als Renten ausgerichtet. Die Leistung können aber auch in Form von Kapitalleistungen oder gemischt erfolgen. Gesetzlich zugesichert ist auf Verlangen des Versicherten eine Kapitalabfindung von bis zu einem Viertel des Altersguthabens (Art. 37 BVG). In der PRASA Hewitt Studie [74] war bei 64% der Beitragsprimatskassen und bei 21% der Leistungsprimatskassen ein voller Kapitalbezug möglich. Nur bei wenigen Kassen (8%) bestand 2002 noch keine Möglichkeit des Kapitalbezugs.

Die Höhe der Leistungen hängt bei Beitragsprimatskassen vom vorhandenen Altersguthaben ab, welches sich aus den Alters- bzw. Spargutschriften, der eingebrachten Freizügigkeitsleistung, allfälligen zusätzlichen freiwilligen Einkäufen und der Verzinsung dieser Gelder zusammensetzt. Die Rentenhöhe ergibt sich dann durch Multiplikation des Altersguthabens mit dem (altersabhängigen) Umwandlungssatz.[21] Bei Kapitalleistungen wird in der Regel das Altersguthaben ausbezahlt. In der PRASA Hewitt-Studie [74] wurden zum Vergleich der Höhe der Altersleistungen im Beitragsprimat die Altersgutschriften über alle Alter aufsummiert, wobei ein einheitlicher versicherter Lohn von CHF 50'280, eine Pensionierung im Alter von 62 und der Eintritt im Alter von 25 unterstellt wurden. Für die untersuchten Reglemente ergab sich damit eine Spanne für die Altersgutschriften-Summe von 466% (BVG-Mindestlösung) bis 890% vom versicherten Lohn, mit einem arithmetischen Mittel von 605% und einem Median von 590%. Als reglementarischer Umwandlungssatz galt bei drei Viertel der Reglemente im Jahr 2002 nach wie vor der alte (aus versicherungstechnischer Sicht zu hohe) BVG-Umwandlungssatz von 7.2% für Männer bei Rücktritt im ordentlichen Rücktrittsalter von 65. Bei rund der Hälfte der Reglemente wurde hingegen für Frauen ein tieferer Umwandlungssatz als der gesetzliche verwendet, indem für Männer und Frauen im selben Alter der gleiche Umwandlungssatz galt.

[21] In der Regel wird der Umwandlungssatz für Früh- bzw. Spätpensionierungen im Reglement festgelegt und meist ausgehend vom gesetzlichen Umwandlungssatz für das ordentliche Rücktrittsalter (6.8%, vor der BVG-Revision 7.2%) durch einen Zu- bzw. Abschlag pro Altersjahr bestimmt.

Bei Leistungsprimatskassen wird die Altersleistung meist in Prozent vom versicherten Lohn im Rücktrittszeitpunkt festgelegt, wobei der Anspruch zusätzlich von der Versicherungsdauer abhängt. Fehlende Versicherungsjahre lassen sich in der Regel zusätzlich einkaufen, so z.B. beim Eintritt mit der Freizügigkeitsleistung (meist sogar obligatorisch) oder mit freiwilligen Einmaleinlagen. Bei der grossen Mehrheit (74%) der in der PRASA Hewitt-Studie [74] untersuchten Reglemente nach dem Leistungsprimat wird nach 35 bis 40 Versicherungsjahren ein Leistungsziel im Bereich von 60-70% des versicherten Lohnes erreicht, wobei die häufigsten Leistungsziele 60% (22% der Kassen) und 70% des versicherten Lohnes (14% der Kassen) nach jeweils 40 Versicherungsjahren waren.

Weitere Altersleistungen sind Pensionierten-Kinderrenten für alle Kinder, die beim Tod des Pensionierten Anspruch auf eine Waisenrente hätten. Häufig sind in Reglementen auch AHV-Überbrückungsrenten für frühzeitig Pensionierte zu finden, die bis zum Beginn der ordentlichen AHV-Rente gewährt werden.

Die minimalen Altersleistungen nach dem BVG sind eine lebenslange Rente von 6.8% (Mindestumwandlungssatz)[22] des Altersguthabens, welches aufgrund von Altersgutschriften[23] und Verzinsung[24] bis zum ordentlichen Rücktrittsalter gebildet wurde. Der jährliche Zins auf dem Altersguthaben berechnet sich dabei anhand des Kontostands am Ende des Vorjahres. Die Mindestverzinsung wird vom Bundesrat festgelegt und alle zwei Jahre von demselben überprüft (Art. 15 BVG). Für jedes Kind eines Altersrentners, mit Anspruch auf eine Waisenrente bei Tod desselben, ist eine Rente von 20% der Altersrente vorgesehen (vgl. Art. 13-17 BVG und Art. 11,12,13 und 17 BVV2).

[22] Der Übergang aufgrund der BVG-Revision vom alten Umwandlungssatz von 7.2% zum neuen Umwandlungssatz von 6.8% erfolgt fliessend bis ins Jahr 2014.

[23] Für die Altersgutschriften gelten folgende Ansätze in Prozent vom koordinierten bzw. versicherten Lohn: 7% für 25-34 jährige Versicherte, 10% für 35-44 jährige Versicherte, 15% für 45-54 jährige Versicherte und 18% für 55-65 jährige Versicherte.

[24] Mindestverzinsung: 4% bis 31.12.2002, 3.25% bis 31.12.2003, 2.25 % bis 31.12.2004, 2.5% ab 1.1.2005 (vgl. Art. 12 BVV2)

Eine Anpassung der Renten an die Preisentwicklung ist gesetzlich vorgesehen (vgl. Art. 36 Abs. 2 BVG), beschränkt sich aber auf die finanziellen Möglichkeiten der Pensionskasse.

1.3.5 Hinterbliebenenleistungen

Hinterbliebenenleistungen werden nach dem Tod eines Versicherten je nach Bestimmungen im Reglement an die Waisen, den Ehegatten (Witwe/-er), Unterstützungspflichtige, den Lebenspartner oder Erben ausbezahlt. Die häufigste Form sind Witwen/er- und Waisenrenten, welche bis zum Tod oder Wiederverheiratung bzw. bis zum Erreichen einer reglementarisch vorgegeben Altersgrenze bezahlt werden. Zusätzlich werden oft für gewisse Fälle Kapitalleistungen, wie z.B. Todesfallkapitalien, vorgesehen. Der überwiegende Teil (94%) der von PRASA Hewitt [74] ausgewerteten Kassen sah im Jahr 2002 schon die Ehegattenrente vor und nur die wenigsten versicherten zum Zeitpunkt der Studie ausschliesslich die Witwenrente. Die Ehegattenrente ist vor der Pensionierung bei Leistungsprimatslösungen mehrheitlich in Prozenten der versicherten Altersrente, in Beitragsprimatslösungen in Prozenten des versicherten Lohnes oder in Prozenten der Invalidenrente definiert. Nach der Pensionierung ist die Ehegattenrente in der Regel in Prozent der laufenden Altersrente festgelegt. Lebenspartnerrenten waren bei 22% der Kassen in der Höhe der Ehegattenrente eingeführt. Ein Todesfallkapital zusätzlich zur Ehegattenrente/ Lebenspartnerrente wurde bei 54% der Kassen ausgezahlt, wobei der Lohn oder die Rente als Bezugsgrösse diente (Alters-, Invaliden oder Ehegattenrente). Bei 8% der Kassen waren in den Reglementen keine Todesfallkapitalien vorgesehen. Bei den restlichen wurde nur dann ein Todesfallkapital ausgezahlt, wenn keine Ehegattenrente/Lebenspartnerrente fällig wurde. In Leistungsprimatsplänen entsprachen diese dann meist der Summe der eigenen Beiträge oder einem festen Prozentsatz der Alters- oder Ehegattenrente und in Beitragsprimatsplänen grösstenteils dem Altersguthabens oder einem Teil davon.

Folgende Leistungen sind gemäss BVG mindestens zu erbringen: Eine Witwen- und seit der BVG-Revision auch eine Witwerrente bis zum Tod oder Wiederverheiratung in der Höhe von 60% der vollen Invalidenrente (bei Tod eines Versicherten oder Invaliden) bzw. 60 % der Altersrente (bei Tod eines Altersrentners) für den Fall, dass für den Unterhalt von Kindern aufzukommen oder bei einer Ehe von mindestens fünf Jahren der überlebende Ehegatte über 45-jährig ist. Andernfalls steht dem überlebenden Ehegatten eine Abfindung in Höhe von drei Jahresrenten zu. Unter Umständen sind auch Renten an den geschiedenen Ehegatten zu leisten. Darüber hinaus sind bis zum 18. und in gewissen Fällen bis zum 25. Altersjahr Waisenrenten von je 20% der vollen Invalidenrente bzw. 20% der Altersrente zu leisten (vgl. Art. 18-22 BVG, Art. 20 BVV2).

Die Hinterlassenenrenten müssen gemäss BVG der Preisentwicklung angepasst werden. Die Anpassung erfolgt erstmals nach dreijähriger Laufzeit und danach regelmässig bis zum ordentlichen Rücktrittsalter (vgl. Art. 36 Abs. 1 BVG). Oft wird aber für Renten, die über den Minimalleistungen liegen, reglementarisch keine Anpassung vorgesehen oder auf die finanziellen Möglichkeiten der Kasse beschränkt. Nach Erreichen des ordentlichen Rücktrittsalters ist auch die Teuerungsanpassung der Minimalleistungen auf die finanziellen Möglichkeiten der Kasse beschränkt (vgl. Art. 36 Abs. 2 BVG).

1.3.6 Invalidenleistungen

Invalidenleistungen werden in der Regel als Renten erbracht. Für gewisse Fälle können aber auch Kapitalleistungen vorgesehen werden. Weiter tritt bei Invalidität normalerweise eine Beitragsbefreiung für die Alters- und Hinterlassenenversicherung ein. Die Invalidenleistungen werden ab Beginn der Invalidität bezahlt bzw. ab dem Zeitpunkt in dem der Arbeitgeber kein Gehalt- oder Gehaltsersatz mehr bezahlt. Die Höhe der Leistung wird entweder am (angepassten) Alterskapital oder am versicherten Lohn festgemacht und hängt zudem vom Invaliditätsgrad ab. Bei 81% der durch PRASA Hewitt [74] ausgewerteten Leistungsprimatskassen entsprach die volle Invalidenrente der versicherten Altersrente und auch bei 61% der Beitragsprimatskassen wurde die Invalidenrente lohnabhängig definiert, mehrheitlich in Höhe von 60% des versicherten Lohnes.[25] Die Invaliditätsleistungen werden entweder lebenslang bezahlt oder bis zum ordentlichen

[25] Bei diesen Plänen handelt es sich streng genommen um Mischpläne.

Rücktrittsalter mit anschliessendem Übergang zu Altersleistungen. Hinzu kommen Invaliden-Kinderrenten je Kind, das beim Tod des Rentners Anspruch auf eine Waisenrente hätte.

Gemäss den Minimalvorschriften des BVG entspricht die volle Invalidenrente 6.8% des angepassten Alterskapitals, d.h. des bis zum Beginn des Rentenanspruchs erworbenen Kapitals zuzüglich der Summe der nicht-verzinsten hypothetischen Altersgutschriften für die fehlenden Jahre bis zum Rentenalter. Ausbezahlt werden die Invaliditätsleistungen bis zum Tod. Anspruch auf die volle Rente besteht ab 70 prozentiger Invalidität, ab 60 prozentiger Invalidität hat der Versicherte Anspruch auf drei Viertel der Rente, ab 50 prozentiger Invalidität auf die Hälfte und bei 40 prozentiger Invalidität auf ein Viertel der Rente. Der Invaliditätsgrad entspricht dabei dem der eidgenössischen Invalidenversicherung (IV). Zudem ist eine Rente von 20% der Invalidenrente für jedes anspruchsberechtigte Kind vorgesehen. Beim Wegfall der Invalidität (Reaktivierung) erlischt der Anspruch auf Invaliditätsleistungen. Das Alterskonto eines Invaliden muss deshalb für den Fall einer Reaktivierung bis zum Rentenalter weitergeführt werden. Die Altersgutschriften berechnen sich dabei aufgrund des koordinierten Lohnes während des letzten Versicherungsjahres als aktiver Versicherter (vgl. Art. 23-26 BVG, Art. 14, 15, 18 und 19 BVV2).

Für die Invalidenrenten gelten bezüglich der Anpassung an die Preisentwicklung die selben Vorschriften wie für die Hinterlassenenrenten.

1.3.7 Weitere Leistungen

Als Leistungen im weiteren Sinne sind die Austritts- bzw. Freizügigkeitsleistungen und Wohneigentumsförderungen zu verstehen. Die Freizügigkeitsleistungen sollen den Versicherten bei Beendigung des Arbeitsverhältnisses die Erhaltung des Vorsorgeschutzes gewährleisten. Gesetzliche Regelung finden die Freizügigkeitsleistungen im Freizügigkeitsgesetz (FZG) vom 17. Dezember 1993 (vgl. Art. 27 BVG) und den zugehörigen Verordnungen, welche für alle Vorsorgeeinrichtungen mit reglementarischen Leistungen gelten. In den Reglementen werden die gesetzlichen Normen meist weitestgehend gleichlautend übernommen. Bei Beitragsprimatskassen entspricht der gesetzliche Mindestanspruch des Versicherten seinem Sparguthaben bzw. bei versicherungsmässig geführten Kassen dem Deckungskapital.[26] Bei Leistungsprimatskassen ergeben sich die Ansprüche des Versicherten aus dem Barwert der erworbenen Leistung (BEL). Die erworbene Leistung bestimmt sich dabei über

$$\text{Erworbene Leistung} = \text{Versicherte Leistung} \cdot \frac{\text{anrechenbare Versicherungsdauer}}{\text{mögliche Versicherungsdauer}},$$

welche multipliziert mit einem versicherungstechnischen Barwertfaktor[27] die Austrittsleistung ergibt. Als anrechenbare Versicherungsdauer gilt die Beitragsdauer zuzüglich der eingekauften Versicherungsjahre. Mindestens auszuzahlen ist aber bei beiden Primaten die vom Arbeitnehmer eingebrachte Eintrittsleistung mit Zins und die während der Beitragsdauer vom Arbeitnehmer geleisteten Beiträge zuzüglich einem Zuschlag von 4 % pro Jahr ab dem 20. Altersjahr, insgesamt allerdings begrenzt auf einen Zuschlag von 100% (vgl. Art 15-19 FZG).

Da Wohneigentum eine adäquate Form der Vorsorge darstellt, können die aktiven Versicherten einer Pensionskasse Teile ihres Vorsorgeguthabens für den Erwerb oder die Amortisation von Wohneigentum vorbeziehen oder verpfänden. Die vorbezogenen Mittel können später wieder in die Kasse eingezahlt werden. Bis zum Alter von 50 Jahren kann das gesamte Freizügigkeitsguthaben vorbezogen werden, danach gilt als Obergrenze das im Alter von 50 Jahren erreichte Freizügigkeitsguthaben oder die Hälfte des Freizügigkeitsguthaben zum Zeitpunkt des Bezuges. In vielen Kassen wird mit dem Vorbezug auch die Risikodeckung tangiert, weshalb der Abschluss einer Zusatzversicherung für die Invaliditäts- und Todesfallrisiken sinnvoll sein kann. Mit der Möglichkeit zur Verpfändung des Vorsorgeguthabens soll den Versicherten der Bezug von Hypothekarkrediten erleichtert werden. Der Vorteil davon ist, dass sich mit der Verpfändung an der Höhe der Pensionskassenleistungen nichts ändert (vgl. Vorsorgeforum [95], o. S.).

[26] Das Deckungskapital ist versicherungsmathematisch nach dem Anwartschaftsdeckungsverfahren zu bestimmen.

[27] Die Barwertfaktoren sind zwingend im Anhang des Reglements aufgegliedert nach Alter und Geschlecht anzugeben.

1.4 Finanzierung der beruflichen Vorsorge

Nach Art. 65 BVG haben die Vorsorgeeinrichtungen die Finanzierung (und das Beitragssystem) so zu regeln, dass die Leistungen im Rahmen des BVG bei Fälligkeit erbracht werden können. Als Einnahmequellen stehen dazu Beiträge und Vermögenserträge zur Verfügung. In den nachfolgenden Abschnitten wird ausgehend von dem zentralen theoretischen Konzept bei Finanzierungsfragen von Versicherungen, dem sogenannten Äquivalenzprinzip, das Finanzierungsverfahren für die berufliche Vorsorge betrachtet. Danach werden die gesetzlichen und reglementarischen Bestimmungen, sowie einige statistische Angaben zu den Beiträgen und der Vermögensanlage dargestellt.

1.4.1 Äquivalenzprinzip

Als äquivalent werden Zahlungen dann bezeichnet, wenn sie auf einen Zeitpunkt auf- bzw. abgezinst den selben Wert ergeben (vgl. Wolfsdorf [101], S. 25). Bei den Zahlungsströmen einer Versicherung versteht man unter Äquivalenz, dass zu Beginn der Versicherung der Barwert der zukünftig erwarteten Beiträge dem Barwert der zukünftig erwarteten Leistungen entspricht. Dieses Gleichgewicht wird als versicherungsmathematisches Äquivalenzprinzip bezeichnet (vgl. Wolfsdorf [101], S. 158 f. und S. 191 und Koller [53]) S. 55). Die Erwartungen bezüglich der Beiträge und Leistungen basieren dabei auf sogenannten Rechnungsgrundlagen, auf die in Abschnitt 2.2 eingegangen wird.

Gilt dieses Gleichgewicht für jeden einzelnen Versicherten wird von individueller Äquivalenz gesprochen. Trifft dies nur für ein gegebenes Versichertenkollektiv zu, spricht man von kollektiver Äquivalenz (vgl. Grundsätze und Richtlinien für Pensionsversicherungsexperten [87], S. 767).

1.4.2 Finanzierungsverfahren

Die aufgrund des Vorsorgeplans entstehenden Versicherungskosten müssen auf die Beitragszahler verteilt werden, wobei deren zeitliche und kategorienweise Aufteilung durch das zugrundegelegte Finanzierungsverfahren bestimmt wird.

Die zur Anwendung kommenden versicherungstechnischen Verfahren bei der Finanzierung von Vorsorgeleistungen sind recht vielfältig, ergeben sich aber grundsätzlich aus den beiden Grundtypen des Kapitaldeckungsverfahrens[28] und des Umlageverfahrens[29] (vgl. Grundsätze und Richtlinien für Pensionsversicherungsexperten [87], S. 771 f.).

Beim Umlageverfahren wird die Höhe der jährlichen Gesamtbeiträge so festgelegt, dass daraus die in der entsprechenden Periode anfallenden Vorsorgeleistungen erbracht werden können. Die Ansprüche der Versicherten müssen somit nicht durch ein Deckungskapital sichergestellt werden (vgl. Grundsätze und Richtlinien für Pensionsversicherungsexperten [87], S. 767). Das Umlageverfahren kommt z.B. bei der eidgenössischen AHV zu Anwendung, welche zum Grossteil auf dem Umlageverfahren beruht. Beim Umlageverfahren gilt die Äquivalenz, d.h. das Gleichgewicht von Ausgaben und Einnahmen, für jede einzelne Rechnungsperiode. Voraussetzungen für ein reines Umlageverfahren sind der laufende Ersatz von Abgängen durch Neuzugänge und ein nicht zunehmendes Verhältnis von Rentnern zu Aktiven (vgl. Helbling [42], S. 380). Für die berufliche Vorsorge ist dieses Finanzierungssystem deshalb ungeeignet, da nicht ohne weiteres davon ausgegangen werden kann, dass einerseits ein Unternehmen in mindestens gleicher Grösse dauernd fortbesteht und andererseits zukünftige Generationen bereit sein werden, Beiträge für frühere Generationen zu entrichten (vgl. Helbling [42], S. 376.).

Beim Kapitaldeckungsverfahren werden die Vorsorgeleistungen planmässig vorfinanziert, d.h. jede Generation äufnet die Mittel für den eigenen Versicherungsschutz selber. Die Sicherstellung sämtlicher Ansprüche der Versicherten erfolgt durch ein entsprechendes Deckungskapital. Beim individuellen Kapitaldeckungsverfahren geht man überdies vom Grundsatz aus, dass die für den Versicherungsschutz benötigten Mittel für jeden einzelnen Versicherten gesondert geäufnet bzw. finanziert werden (vgl. Grundsätze und Richtlinien für Pensionsversicherungsexperten [87], S. 767). Folglich gilt im Kapitaldeckungsverfahren die Äquivalenz von Einnahmen und Ausgaben über die gesamte Lebenszeit des einzelnen Versicherten

[28] Anwartschaftsdeckungsverfahren

[29] Ausgabenumlageverfahren

(individuelle Äquivalenz) bzw. des Versichertenkollektivs (kollektive Äquivalenz) gesehen. Auf dem Grundsatz der individuellen Äquivalenz sind die Einzel- und Kollektivlebensversicherungen aufgebaut. Klassische autonome Pensionskassen, die auf einem Durchschnittsbeitragssystem beruhen, entsprechen dem Grundsatz der kollektiven Äquivalenz (vgl. Helbling [42], S.376).

Die Anwendung des Kapitaldeckungsverfahrens zur Finanzierung der beruflichen Vorsorge folgt aus der gesetzlichen Forderung in Art. 69 Abs. 1 BVG, nach welchem alle registrierten Vorsorgeeinrichtungen dem Grundsatz der Bilanzierung in geschlossener Kasse folgen müssen, d.h. zur Sicherung des finanziellen Gleichgewichts nur den vorhandenen Bestand an Versicherten und Rentnern berücksichtigen dürfen (vgl. Helbling [42], S. 381 und Art. 12 Grundsätze und Richtlinien für Pensionsversicherungsexperten 2000 [88]). Dieser Grundsatz gilt auch für vor- und überobligatorische Leistungen (vgl. Art. 49 Abs. 2 BVG) sowie für Leistungen von nichtregistrierten Stiftungen (vgl. Art. 89^{bis} Abs. 6 ZGB i.V.m Art. 53 und 65 ff. BVG). Bei einer versicherungstechnischen Berechnung in geschlossener Kasse werden also lediglich Abgänge durch Tod, Invalidität und Pensionierung berücksichtigt, bei einer Berechnung in offener Kasse hingegen auch Dienstaustritte und Neuzugänge von Versicherten (vgl. Pensionsversicherungsexperten [87], S. 4). Vom Grundsatz der Bilanzierung in geschlossener Kasse können Vorsorgeeinrichtungen von öffentlich-rechtlichen Körperschaften abweichen, allerdings nur mit Zustimmung der Aufsichtsbehörde und mit einer Garantie der Leistungen von Bund, Kanton oder Gemeinde (vgl. Art. 45 BVV2).

1.4.3 Beiträge

Bei der Finanzierung ist zwischen laufenden, einmaligen und ausserordentlichen Beiträgen zu unterschieden. Als laufende Beiträge werden alle laut Reglement regelmässig an die Vorsorgeeinrichtung zu erbringende Zahlungen bezeichnet. Unter den einmaligen Beiträgen sind beispielsweise Eintrittsleistungen oder Nachzahlungen aufgrund von Lohnerhöhungen zu verstehen. Neben den ordentlichen reglementarischen Beiträgen erfolgen aber auch situativ ausserordentliche Beiträge, wie z.B. Sanierungsbeiträge des Arbeitgebers. Für die versicherungstechnische

Beurteilung sind allerdings nur die ordentlichen Beiträge massgebend (vgl. Helbling [42], S. 164 ff.).

In der Hauptsache erfolgt die Finanzierung einer Vorsorgeeinrichtung durch laufende Beiträge. Diese werden in der Regel bei der monatlichen Lohnauszahlung in Prozent vom versicherten Lohn erhoben. Bei den Beitragssätzen sind sowohl vom Alter unabhängige Durchschnittssätze, die von allen Mitarbeitern gleich erhoben werden, wie auch nach dem Alter gestaffelte Sätze vorzufinden. Oft wird bei den laufenden Beiträgen zwischen Sparbeiträgen für die Altersvorsorge und Risikobeiträgen für die Risikovorsorge (Invalidität und Tod) unterschieden. Zu beachten ist, dass das Gesetz keine minimalen Beiträge für die Finanzierung vorschreibt. Bei vielen Vorsorgeeinrichtungen nach dem Beitragsprimat werden aber die Sparbeiträge mit den Altersgutschriften gleichgesetzt. In den Minimalvorschriften des BVG sind diese gestaffelt nach Alter vorgegeben (vgl. Abschnitt 1.3.4). Die Aufteilung der Beiträge auf Arbeitgeber und Arbeitnehmer ist gesetzlich nur insoweit geregelt, dass die Beiträge des Arbeitgebers mindestens den gesamten Beiträgen der Arbeitnehmer entsprechen müssen. Zur Entrichtung der Beiträge kann der Arbeitgeber auch vorgängig durch freiwillige Zuwendungen geäufnete Arbeitgeberbeitragsreserven verwenden.

Eintrittseinlagen werden in der Regel durch die Freizügigkeitsleistungen aus früheren Arbeitsverhältnissen erbracht und im Beitragsprimat dem Altersguthaben der Versicherten gutgeschrieben bzw. im Leistungsprimat zum Einkauf von fehlenden Versicherungsjahren verwendet. Nachzahlungen werden häufig in Leistungsprimatskassen erhoben, z.B. zur Finanzierung von durch Lohnerhöhungen gestiegenen Leistungsansprüchen. Zum Teil werden diese aber auch durch Pauschalen in den laufenden Beiträgen finanziert (vgl. Helbling [42], S. 164 ff., Art. 331 Abs. 3 OR und Art. 66 Abs. 1 BVG).

1.4.4 Vermögensanlage und -erträge

Das Kapitaldeckungsverfahren führt zu einer wesentlichen Vermögensbildung. So ist mittlerweile das Gesamtvermögen der zweiten Säule grösser als das Schweizer Bruttoinlandsprodukt (vgl. Tabelle 1.6). Dieses Vermögen wirft beträchtliche Erträge ab und bildet mit diesen Erträgen einen wesentlichen Bestandteil der Finanzierung der Vorsorge. Nach Art. 71 Abs. 1 BVG ist die Vermögensanlage und -verwaltung an folgenden Zielen bzw. Grundsätzen auszurichten:

- Gewährleistung der Sicherheit der Anlagen und einer angemessenen Verteilung der Risiken;
- Gewährleistung eines genügenden Ertrages der Anlagen; und
- Gewährleistung der Deckung des voraussehbaren Bedarfs an flüssigen Mitteln, d.h. einer genügenden Liquidität.

Diese Bestimmungen gelten nach dem Stiftungsrecht auch für nichtregistrierte Vorsorgeeinrichtungen (vgl. Art. 89bis Abs. 6 ZGB).

Die Sicherheit in Bezug auf die Gewährleistung der Erfüllung des Vorsorgezwecks sollte für Vorsorgeeinrichtungen an erster Stelle stehen. Dazu gehört neben der Bonität der Schuldner und der langfristigen Werthaltigkeit der Sachwertanlagen, vor allem eine angemessene Diversifikation der Investitionen über die verschiedenen Anlagemöglichkeiten. In der Regel werden dazu in den Anlagereglementen für einzelne Anlagekategorien, Länder, Branchen, usw. sowie für Anlagen beim gleichen Schuldner entsprechende Limiten bzw. Grenzen vorgesehen. Oft werden zudem gewisse Anlagen vom Vorhandensein spezieller Sicherheiten abhängig gemacht oder besonders risikoreiche Anlagen ganz ausgeschlossen. Die Risikoverteilung sollte dabei einerseits in sachlicher und zeitlicher Hinsicht, anderseits zwischen Nominalwerten[30] und Sachwerten[31] erfolgen (vgl. Helbling [42], S. 497 f.). Das Anlageverhalten muss sich zudem nach der jeweiligen Risikofähigkeit einer Vorsorgeeinrichtung richten. Die Risikofähigkeit ist gegeben, wenn für die

[30] Obligationen, Hypotheken usw.

[31] Aktien, Liegenschaften, usw.

gewählte Anlagestrategie angemessene Wertschwankungsreserven gebildet werden können. Die Bestimmung der Höhe von angemessenen Wertschwankungsreserven liegt dabei in der Eigenverantwortung der Vorsorgeeinrichtung und ist nicht an eine bestimmte Methode gebunden. Die angewendete Methode ist aber in einem Reglement festzulegen und nach dem Grundsatz der Stetigkeit anzuwenden (vgl. Amt für Gemeinden und berufliche Vorsorge des Kantons Zürich [2], S. 3).

Die Angemessenheit des Vermögensertrages ist vor allem anhand des zugrundegelegten technischen Zinssatzes zu beurteilen, auf dem die Beitrags- bzw. Deckungskapitalberechnungen beruhen. Nicht zu verwechseln mit dem technischen Zinssatz ist die gesetzlich vorgeschriebene Mindestverzinsung der Altersguthaben, welche jederzeit abänderbar ist und daher nur beschränkt als langfristige Hürde für den zu erzielenden Ertrag gesehen werden kann (vgl. Helbling [42], S.500).

Die Sicherstellung einer genügenden Liquidität dürfte bei Vorsorgeeinrichtungen in der Praxis kaum zu ernsthaften Schwierigkeiten führen, da die Vermögensanlagen in der Regel ohne weiteres handelbar sind und damit auch grössere Teile des Vermögens kurzfristig liquidiert werden können (vgl. Helbling [42], S. 500 f.).

Ausführlich geregelt ist die Vermögensanlage in der Verordnung über die berufliche Alters-, Hinterbliebenen- und Invalidenvorsorge BVV2. Dort sind insbesondere die Vorschriften zu den zulässigen Anlagen und deren Begrenzung zu finden, welche in Abbildung 1.2 zusammenfassend dargestellt sind. Seit dem 1. April 2000 gelten die revidierten BVV2-Anlagevorschriften, nach welchen eine Erweiterung der Anlagemöglichkeiten grundsätzlich möglich ist. Zuvor konnte nur in Einzelfällen und mit fachmännischer Begründung in der jährlichen Berichterstattung an die Aufsichtsbehörde von den Anlagevorschriften abgewichen werden. Die Voraussetzung für eine Erweiterung der Anlagemöglichkeiten ist, dass diese Erweiterung im Rahmen einer in einem Anlagereglement festgehalten Anlagestrategie erfolgt und jährlich die Einhaltung der Grundsätze der Sicherheit und Risikoverteilung gemäss Art. 50 BVV2 schlüssig aufgezeigt wird. Der Einsatz von Derivaten ist nur zugelassen, wenn sie sich von BVV2-konformen Anlagen ableiten, sämtliche Verpflichtungen aus den Geschäften gedeckt sind und keine Hebelwirkung auf das Vermögen ausgeübt wird. Kollektive Anlagen, wie z.B. Anlagefonds oder Anlagestiftungen sind nach der BVV2-Revision, sofern gewisse Anforderungen[32] eingehalten werden, den direkten Anlagen gleichgestellt (vgl. Lang und Schneiter [56], S. 775 ff.).

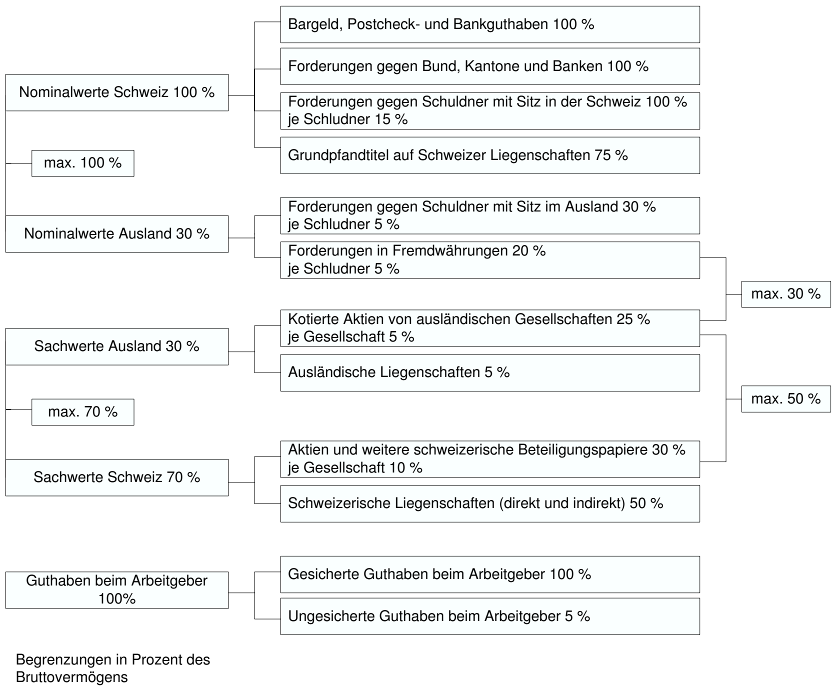


Abbildung 1.2: Anlagevorschriften nach BVV2 (vgl. Art. 53-55, 57 BVV2)

Im verbleibenden Teil dieses Abschnitts sind als grober Überblick einige statistische Angaben zur Vermögensanlage von Pensionskassen wiedergegeben.

Die Tabelle 1.4 zeigt die Umfrageergebnisse des Swiss Institutional Survey (SIS) bezüglich der Vermögensverteilung bei Schweizer Pensionskassen per 31.12.2004. Die Umfrage umfasste insgesamt 174 Pensionskassen mit einem Gesamtvermögen von CHF 214.71 Milliarden (vgl. Lusenti [61], S. 20). Daneben sind als Vergleich

[32] Beispielsweise sind, wie bei den direkten Anlagen, die Anlagevorschriften einzuhalten, falls nicht von den Erweiterungsmöglichkeiten Gebrauch gemacht wird.

Angaben in % per 31.12.2004			
Anlagekategorie	SIS	PK CS	PK ABB
Liquide Mittel	9.1	19.7	5.4
Obligationen in CHF	30.2	28.7	36.1
Obligationen in Fremdwährungen	14.9	7.9	14.5
Aktien Schweiz	10.1	7.6	7.8
Aktien Ausland	14.0	8.1	10.9
Hypotheken	4.0	-	0.3
Immobilien (direkt und indirekt)	13.1	18.6	19.4
Alternative Anlagen[33]	2.4	7.1	4.6
Andere	2.2	2.3	1.0

Tabelle 1.4: Swiss Institutional Survey (SIS)-Ergebnisse bezüglich der Vermögensverteilung bei Schweizer Pensionskassen, sowie die Vermögensstruktur der Pensionskasse der CS Group und der ABB Pensionskasse je per 30.12.2004 (vgl. [61], S. 20, [70], S. 21 und [1], S. 31).

die Vermögensstruktur der Pensionskasse der Credit Suisse Group und der ABB Pensionskasse ebenfalls per 31. Dezember 2004 aufgeführt (vgl. Jahresbericht 2004 der Pensionskasse der CS Group [70], S. 21 und Geschäftsbericht 2004 der ABB Pensionskasse [1], S. 31).

Die Renditen des BVG-93 Index und der Renditen der entsprechenden Unterindizes sind in der Tabelle 1.5 für die Jahre 1985 bis 2004 dargestellt. Der BVG-93 Index von Pictet & Cie. ist ein weit verbreiteter Referenzindex zur Beurteilung der Performance bei der Portfoliobewirtschaftung für Vorsorgeeinrichtungen und repräsentiert den Durchschnitt aller möglichen Portfoliokombinationen innerhalb der gesetzlichen Anlagelimiten, allerdings unter Ausschluss von Immobilienanlagen, Liquidität und Hypotheken. Die Veränderung des BVG-Index entspricht daher der Performance, die ein nach den gültigen Anlagebeschränkungen durchschnittlich investiertes Portfolio theoretisch erzielt hätte (vgl. Pictet [71], S. 4).

[33] Private Equity, Hedge Fonds, Commodities

In Tabelle 1.6 schlussendlich ist die Bilanz der gesamten beruflichen Vorsorge der Schweiz per 31. Dezember 2002 und per 31. Dezember 2000 dargestellt. Die Bilanzen wurden der Pensionskassenstatistik des Bundesamts für Statistik 2000 [21] bzw. 2002 [22] entnommen.[34] In den Angaben nicht enthalten sind die Rückkaufswerte aus Kollektivversicherungsverträgen bei Versicherungsgesellschaften,[35] die Freizügigkeitskonti bzw. -policen bei Banken und Versicherungsgesellschaften sowie die vergessenen Guthaben bei der Auffangeinrichtung. Unter Berücksichtigung dieser Grössen sowie einer generellen Bewertung der Aktiven zu Verkehrswerten wäre die Bilanzsumme noch um einiges höher.

[34] Die Auswertungen erscheinen jeweils mit einem Verzug von etwa zwei Jahren

[35] Für 2000 werden diese auf rund 110 Milliarden Franken geschätzt (vgl. Pensionskassenstatistik [21], o.S.).

BVG-INDEX 93 für die Jahre 1985-2004 Performance (total return) in %						
Jahr	BVG-Index	Unterindizes				
		CHF-Bonds Inland	CHF-Bonds Ausland	Fremd-währungs-Bonds	Aktien Schweiz	Aktien Ausland
1985	11.9	5.8	7.0	-2.0	61.3	12.2
1986	6.5	6.1	6.4	-2.2	9.7	11.5
1987	-0.8	4.8	5.1	-7.9	-27.5	-8.8
1988	9.5	4.4	5.7	21.2	23.6	45.1
1989	0.8	-4.0	-5.4	8.1	22.6	19.6
1990	-6.1	1.2	2.5	-8.9	-19.3	-31.2
1991	12.8	8.2	8.5	23.2	17.7	26.1
1992	12.7	12.0	13.7	12.0	17.6	2.0
1993	19.4	13.0	12.3	15.9	50.8	24.0
1994	-2.9	-0.6	0.0	-10.5	-7.6	-7.4
1995	12.6	12.3	11.6	4.1	23.1	6.2
1996	11.2	5.4	5.9	20.9	18.3	32.4
1997	14.6	5.7	5.2	9.3	55.2	25.8
1998	9.1	5.7	4.2	9.1	15.4	17.1
1999	6.7	-0.4	0.4	12.9	11.7	45.6
2000	3.1	3.4	3.7	3.5	11.9	-12.1
2001	-2.3	3.8	3.9	1.5	-22.0	-14.8
2002	-1.7	10.2	8.6	-0.6	-26.0	-33.3
2003	6.9	2.1	2.1	2.8	22.1	19.1
2004	4.8	4.6	3.2	1.4	6.9	5.5
Mittelwert (annualisiert)	6.3	5.1	5.2	5.4	10.6	7.0

Tabelle 1.5: Entwicklung der Rendite der Unterindizes des BVG 93-Index von Pictet (vgl. Pictet [72], o.S.)

Bilanz der beruflichen Vorsorge (in Millionen CHF)	**31.12.2000**		**31.12.2002**	
	Vorsorgeeinricht.			
	Alle	**Regist.**	**Alle**	**Regist.**
Aktiven				
Direkte Anlagen	**412 092**	**374 477**	**359 335**	**330 517**
Flüssige Mittel, kurzfristige Anlagen	36 051	31 633	44 821	39 659
Debitoren, Guthaben, Darlehen	9 097	6 905	14 091	13 180
Forderungen beim Arbeitgeber	25 145	22 936	10 336	9 148
Beteiligungen, Aktien des Arbeitgebers	5 303	4 506	1 399	852
Obligationen, Kassascheine - inländ. Schuld.	73 683	66 535	72 245	66 502
Oblig., Kassascheine - ausl. Schuld. in CHF	17 043	15 636	17 431	15 759
Oblig., Kassascheine - in Fremdwährungen	39 517	36 867	38 155	35 917
Hypotheken auf schweiz. Liegenschaften	23 373	22 475	21 468	20 498
Hypotheken auf ausländ. Liegenschaften	42	32	30	26
Aktien und Partizipationsscheine - Schweiz	75 968	69 159	43 545	40 410
Aktien und Partizipationsscheine - Ausland	53 991	49 323	39 843	36 870
Liegenschaften, Grundstücke in der Schweiz	51 623	47 339	53 960	49 962
Liegenschaften, Grundstücke im Ausland	67	57	88	79
Edelmetalle und andere Anlagen	1 189	1 074	1 923	1 655
Indirekte Anlagen	**74 902**	**67 954**	**77 745**	**69 897**
Obligationen, Kassascheine - inländ. Schuld.	11 109	9 705	12 690	11 094
Oblig., Kassascheine - ausl. Schuld. in CHF	3 765	3 424	3 821	3 488
Oblig., Kassascheine - in Fremdwährungen	7 819	7 397	10 851	10 340
Hypotheken auf schweiz. Liegenschaften	1 304	1 191	980	888
Hypotheken auf ausländ. Liegenschaften	12	8	8	5
Aktien und Partizipationsscheine - Schweiz	10 866	9 986	7 669	6 856
Aktien und Partizipationsscheine - Ausland	20 122	18 892	16 355	15 271
Liegenschaften, Grundstücke in der Schweiz	8 446	7 693	9 566	8 906
Liegenschaften, Grundstücke im Ausland	1 106	1 061	996	951
Edelmetalle und andere Anlagen	1 949	1 913	5 028	3 662
Gemischte Anlagen	8 404	6 684	9 781	8 436
Übrige Aktiven	**3 889**	**3 534**	**3 475**	**3 195**
Total Aktiven	**490 883**	**445 965**	**440 555**	**403 609**
Passiven				
Fremdkapital (Kred.und übrige Passiven)	13 593	9 908	14 984	10 668
Passivhypotheken	2 268	1 529	1 980	1 378
Schwankungsreserven, Rückst. auf Anlagen	51 156	47 293	17 958	16 195
Arbeitgeberbeitragsreserven	8 788	2 589	8 529	2 501
Gebundenes, freies Kapital, Vorsorgerückst.	415 078	384 646	397 104	372 867
Total Passiven	**490 883**	**445 965**	**440 555**	**403 609**
Bruttoinlandsprodukt zu laufenden Preisen		**415 529**		**430 527**

Tabelle 1.6: Bilanz per 31. Dezember 2002 und per 31. Dezember 2000 der beruflichen Vorsorge der Schweiz. (vgl. Pensionskassenstatistik 2002 und 2000 des Bundesamts für Statistik [21] bzw. [22] und Volkswirtschaftliche Gesamtrechnung [23])

Kapitel 2

Das finanzielle Gleichgewicht von Pensionskassen

2.1 Gesetzliche Regelungen und Vorgaben der Aufsicht

2.1.1 Verständnis von finanziellem Gleichgewicht

Das Gesetz fordert, dass die Vorsorgeeinrichtungen jederzeit Sicherheit bieten müssen, die übernommenen Verpflichtungen erfüllen zu können (vgl. Art. 65 Abs. 1 BVG). Diese strenge Forderung wird in Art. 65 Abs. 2 BVG milder formuliert, indem verlangt wird, dass die Finanzierung (und das Beitragssystem) so ausgestaltet werden muss, dass die Leistungen im Rahmen des BVG bei Fälligkeit erbracht werden können. Es ist davon auszugehen, dass damit generell auch die ausserobligatorischen Leistungen gemeint sind. Eine Situation finanziellen Gleichgewichts wird in der Regel mit dem Bestehen einer Überdeckung oder Deckung, eine Situation finanziellen Ungleichgewichts mit dem Bestehen einer Unterdeckung[1] gleichgesetzt. Eine Unterdeckung besteht gemäss Art. 44 BVV2 dann, wenn am Bilanzstichtag das nach anerkannten Grundsätzen durch den Experten für berufliche Vorsorge berechnete versicherungstechnisch notwendige Vorsorgekapital nicht durch das dafür verfügbare Vorsorgevermögen gedeckt ist.

[1] Als Bezeichnung für Unterdeckung wird oft auch der Begriff der Deckungslücke verwendet.

$$\text{Unterdeckung} = \text{Verfügbares Kapital - Benötigtes Kapital}$$

Für den Vergleich zwischen Vorsorgeeinrichtungen ist die dimensionslose Grösse des Deckungsgrades geeigneter. Dieser ergibt sich über

$$\text{Deckungsgrad} = \frac{\text{Verfügbares Kapital}}{\text{Benötigtes Kapital}} .$$

2.1.2 Vorgehen zur Beurteilung des finanziellen Gleichgewichts

Die Überprüfung des finanziellen Gleichgewichts erfolgt durch das periodische Erstellen[2] einer versicherungstechnischen Bilanz, in welcher das vorhandene Vermögen einer Vorsorgeeinrichtung dem notwendigen Deckungskapital gegenübergestellt wird. Nach Art. 53 Abs. 2 lit. a BVG muss diese versicherungstechnische Bilanz durch einen anerkannten Experten für berufliche Vorsorge nach den Grundsätzen der Bilanzierung in geschlossener Kasse und dem Anwartschaftsdeckungsverfahren erstellt werden (vgl. Grundsätze und Richtlinien 2000 für Pensionsversicherungsexperten [88], S. 5).

Ausgangspunkt der Beurteilung des finanziellen Gleichgewichts ist die Jahresrechnung zu Fortführungsbedingungen. Eine schematische Gliederung der Bilanz einer Vorsorgeeinrichtung ist in Abbildung 2.1 dargestellt.

Das für den Deckungsgrad zu berechnende verfügbare Kapital PV ergibt sich über zwei Wege (vgl. Abbildung 2.1): Zum einen indirekt indem PN von A in Abzug gebracht wird oder direkt über die entsprechenden Positionen von PV. Für die Berechnung sind jeweils die effektiven Werte und nicht die Buchwerte massgebend. Das benötigte Kapital, d.h. genauer das am Bilanzstichtag versicherungstechnisch benötigte Deckungskapital D, wird wie oben erwähnt, in der vom Experten für berufliche Vorsorge vorgenommen versicherungstechnischen Beurteilung bestimmt.[3] Das Vorgehen zur Bestimmung dieses Deckungskapitals und

[2] in der Regel alle drei Jahre

[3] Nach Ansicht der Aufsicht kann sich der Experte abhängig von der Sachlage allenfalls auch mit einer Annäherungsrechnung begenügen.

Aktiven

A	**Flüssige Mittel und Forderungen** - Kasse, Postcheck, Bankguthaben - Forderungen und Darlehen - Aktive Rechnungsabgrenzung - Anleihensobligationen uns ähnliche Finanzanlagen - Grundpfandgesicherte Forderungen - Anlagen bei der Arbeitgeberfirma **Sachwerte** - Liegenschaften - Aktien und ähnliche Wertschriften oder Beteiligungen **Andere Anlagen / Rückkaufswerte** - Andere, nach Art. 53 BVV2 nicht zulässige Anlagen - Rückkaufswerte aus Versicherungsverträgen

Passiven

PN	**Fremdkapital** - Kurzfristige Verbindlichkeiten[1] - Langfristige Verbindlichkeiten[1] - Passive Rechnungsabgrenzung - (Nicht-technische) Rückstellungen[2]
PV	**Wertschwankungsreserven** - Wertschriften-Schwankungsreserve - Rückstellungen für Immobilien [2] **Vorsorgekapital** (für aktive Versicherte und Rentner) - Deckungskapital - Sparkapital - Rückkaufswerte aus Versicherungsverträgen - (Technische) Vorsorgerückstellungen **Übriges Kapital und Stiftungskapital**
PN/PV	- Arbeitgeber-Beitragsreserven (AGBR)[3]
PV	- Zweckbestimmte Fonds, übriges gebundenes Vorsorgekapital, Reserven für Ermessensleistungen - Übriges Kapital - Stiftungs-, Genossenschafts-, Dotationskapital - Freie Mittel (bzw. Deckungslücke)

PN: Für vorsorge- bzw. versicherungsmässige Risiken nicht verfügbare Positionen
PV: Für vorsorge- bzw. versicherungsmässige Risiken verfügbare Positionen

Abbildung 2.1: Bilanz einer Pensionskasse gemäss dem Schweizer Kontenrahmen für Vorsorgeeinrichtungen (vgl. Treuhand-Kammer [94], S.11 ff. und Amt für Gemeinden und berufliche Vorsorge des Kantons Zürich [2], S. 2)

[1] Darunter fallen insbesondere die fälligen aber noch nicht ausbezahlten Freizügigkeitsleistungen und Renten, erhaltene vorausbezahlte Freizügigkeitsleistungen, Verbindlichkeiten gegenüber Banken und/ oder Versicherungen, sowie Darlehen und Hypotheken

[2] Bei Immobilien ist die Zuordnung der Rückstellung abhängig von der Bewertungs- und Darstellungsmethode.

[3] Liegt ein per Bilanzstichtag rechtsgültiger Verwendungsverzicht des Arbeitgebers vor, ist der entsprechende Anteil der AGBR Bestandteil von PV.

die für die Berechnung zugrundegelegten Rechnungsannahmen sind Inhalt der zwei folgenden Abschnitte 2.2 und 2.3.

Der Deckungsgrad ergibt sich dann aus

$$\text{Deckungsgrad} = \frac{PV}{D} \cdot\ 100\% \quad .$$

Ist der somit bestimmte Deckungsgrad kleiner als 100% liegt eine Unterdeckung nach Art. 44 BVV 2 vor.

Die Sicherheit der Erfüllung des Vorsorgezwecks ist wegen der blossen Existenz einer Deckungslücke bzw. eines Deckungsgrades unter hundert Prozent nicht notwendigerweise unmittelbar gefährdet. Es besteht jedoch das Risiko, dass das Führungsorgan und die anderen Organe untätig bleiben oder unangemessene Massnahmen ergreifen. Die Aufsichtsbehörden legen deshalb in ihrer Überwachung den Schwerpunkt auf die Eigenverantwortung des Führungsorgans zur Wiederherstellung bzw. dauerhaften Erhaltung des finanziellen Gleichgewichts (vgl. Amt für Gemeinden und berufliche Vorsorge des Kantons Zürich [2], S.1).

2.1.3 Steuerung der finanziellen Lage durch das Führungsorgan

Das Gesetz stellt bei Vorliegen einer Deckungslücke besondere Anforderungen an die Steuerung der finanziellen Lage durch das Führungsorgan der Pensionskasse. Dabei ist nach Art. 65d BVG die Pensionskasse für die Sanierung selber verantwortlich. Der Sicherheitsfonds tritt erst bei Zahlungsunfähigkeit für die Deckungslücken ein. Die Aufsichtsbehörde hat dazu Verhaltensrichtlinien für das Führungsorgan aufgestellt, welche sich allerdings nicht nur auf die Behandlung von existierenden Deckungslücken beziehen, sondern auch auf die Vermeidung solcher. Es handelt sich dabei um die als normale erachtete kontinuierliche Führungstätigkeit deren Grundlagen das Stiftungs-/Gesellschaftsrecht, die Art. 44, 49a und 50 BVV2 sowie die Bestimmungen der Stiftungsurkunde/Statuten bilden. Grundsätzlich wird mit abnehmendem Deckungsgrad und damit abnehmender Risikofähigkeit ein intensiverer Führungsrhythmus erforderlich und die getroffenen Massnahmen müssen konkreter und schneller Wirkung zeigen. Nachstehend sind die für die der Zürcher Aufsicht unterstellten Vorsorgeeinrichtungen verbindlich vorgegeben Richtlinien kurz dargestellt (vgl. Amt für Gemeinden und berufliche Vorsorge des Kantons Zürich [2], S. 3). Diese Richtlinien gehen von den folgenden vier Ausgangslagen aus:

- Situation 1: Der Deckungsgrad liegt bei weit über 100%, die eigenverantwortlich bestimmten Schwankungsreserven konnten vollumfänglich gebildet werden und freie Mittel sind vorhanden.
- Situation 2: Zielbereich. Der Deckungsgrad liegt über 100%, die eigenverantwortlich bestimmten Schwankungsreserven konnten gebildet werden.
- Situation 3: Der Deckungsgrad liegt über 100%, die eigenverantwortlich bestimmten Schwankungsreserven können aber nicht vollständig gebildet werden.
- Situation 4: Der Deckungsgrad liegt unter 100%.

In der Situation 1 liegt der Schwerpunkt der Steuerung auf der Durchführung der Vorsorge, wobei die Mittelverwendung mit der Zielsetzung erfolgen sollte, sich langfristig im Zielbereich bewegen zu können.

Die Situation 2 stellt die des finanziellen Gleichgewichts dar und ist aus der Sicht der Aufsicht der anzustrebende Zielbereich. Der Schwerpunkt der Steuerung sollte in dieser Situation das Ziel verfolgen, die finanzielle Sicherheit aufrecht zu erhalten oder weiter zu verbessern.

In der Situation 3 besteht eine sogenannte eingeschränkte Risikofähigkeit. Diese verlangt eine profunde Situationsanalyse unter Beizug von Vorsorge- und Anlageexperten sowie der Kontrollstelle. Das Ziel der Steuerung ist unter Begrenzung der Risiken, wieder in den Zielbereich zu gelangen. Dies bedingt insbesondere eine Analyse über die Weiterführung bzw. Anpassung der Anlagestrategie und eine intensive Überwachung der Risiken. Für den Wiederaufbau von Wertschwankungsreserven sollten dabei planmässig die erwarteten Kursgewinne(-verluste) mit einbezogen werden. Die eingeschränkte Risikofähigkeit bringt auch höhere

Anforderungen an die Offenlegung in der Jahresrechnung und die Dokumentation der internen Abläufe und Entscheidungen mit sich.

Zusätzlich zur eingeschränkten Risikofähigkeit besteht in der Situation 4 eine Unterdeckung. Die Steuerung bei einer Unterdeckung hat grundsätzlich wie in der Situation 3 zu erfolgen, muss aber verbindlicher, stärker und messbarer sein. Die Wirkung der ergriffenen Massnahmen muss verlässlich prognostizierbar sein, wobei die finanzielle Sanierung und der Wiederaufbau der Schwankungsreserven aber nicht allein auf erwarteten Kursgewinnen beruhen sollte. Die ergriffenen Massnahmen sind der Aufsichtsbehörde mit einer Einschätzung der zu erwarteten Wirkung zu melden und in ihrer Wirkung intensiv zu überwachen. Die nachfolgende Aufstellung nennt mögliche Sanierungsmassnahmen, welche zur Wiederherstellung des finanzielle Gleichgewichts denkbar sind (vgl. auch Art. 65d BVG):

• Leistungsreduktionen durch Senkung der Verzinsung oder Senkung des Umwandlungssatzes: Dies ist solange möglich, als dadurch nicht tiefere Leistungen als die BVG-Minimalleistungen resultieren bzw. die Vorgaben von Art. 65d BVG nicht verletzt werden. Reduktion der laufenden Rentenleistungen sind rechtlich bis auf die freiwilligen Teuerungszulagen und anwartschaftlichen Rentenleistungen eher schwierig durchsetzbar.

• Einlagen in Arbeitgeberbeitragsreserven: Die Bildung einer für die Dauer der Unterdeckung gesperrten und unverzinslichen Arbeitgeberbeitragsreserve ist, insbesondere wenn mittelfristig eine Besserung der Lage erwartet wird, eine häufig gewählte Sanierungsmassnahme. Der Arbeitgeber verpflichtet sich dabei, sofern die vorhandenen Stiftungsmittel zur Ausrichtung fälliger Leistungen nicht ausreichen, Mittel aus der Arbeitgeberbeitragsreserve zur Ausrichtung dieser Leistungen zur Verfügung zu stellen. Eine dazu gleichwertige Möglichkeit ist die Garantie einer patronalen Stiftung.

• Zuschuss des Arbeitgebers/ Beitragserhöhungen: Nebst der Möglichkeit, dass der Arbeitgeber einen einmaligen Zuschuss bzw. einen zeitlich limitierten fixen Sonderbeitrag an die Vorsorgeeinrichtung leistet, besteht die Möglichkeit einer allgemeinen paritätischen Beitragserhebung, in beschränktem Masse sogar bei Rentnern.

• Optimierung der Vermögenserträge/ Professionalisierung der Vermögensanlage: Gemäss der Mitteilung Nr. 60 des Bundesamts für Sozialversicherung [15] kann in gewissen Fällen als Sanierungsmassnahme auch die Weiterführung einer fundierten Anlagestrategie in Frage kommen, wenn vom Stiftungsrat schlüssig aufzeigt werden kann, dass die Deckung mittels der gewählten Anlagestrategie unter Beachtung von Art. 50 BVV 2 mit grosser Wahrscheinlichkeit erreicht werden kann und im Zeitraum der Sanierung keine Gesamt- oder Teilliquidation erwartet wird. Die Möglichkeiten einer Sanierung durch den Wechsel der Anlagestrategie sind aber durch die in der Regel tiefe Risikofähigkeit einer sanierungsbedürftigen Kasse eher knapp.

2.2 Versicherungstechnische Rechnungsgrundlagen

Die meist als versicherungstechnische Rechnungsgrundlagen bezeichneten Annahmen in versicherungstechnischen Berechnungen haben durch ihre Verwendung insbesondere bei der Gestaltung der Finanzierung und der versicherungsmathematischen Berechnung des Deckungskapitals eine zentrale Bedeutung bei der Beurteilung des finanziellen Gleichgewichts von Vorsorgeeinrichtungen.

2.2.1 Bestandteile der Rechnungsgrundlagen

Die wichtigsten Bestandteile der Rechnungsgrundlagen sind

- die Wahrscheinlichkeitstafeln, bestehend aus Risikoelementen und demographischen Elementen,
- der technische Zinsfuss und
- die Verwaltungskostenansätze.

Die Wahrscheinlichkeitstafeln umfassen insbesondere Sterbe- und Invalidisierungswahrscheinlichkeiten (Risikoelemente) aber auch demographische Elemente, wie z.B. die Wahrscheinlichkeit beim Tode verheiratet zu sein. Unter die demographischen Elemente fallen auch weitere, in der Regel ebenfalls in den Tafeln enthalten Erfahrungswerte, wie beispielsweise das im Todesfall eines Versicherten durchschnittliche Alter seines Ehegatten, die durchschnittliche Anzahl anspruchsberechtigter Kinder und deren Durchschnittsalter. Die Wahrscheinlichkeiten und anderen Erfahrungswerte, werden dabei durch Beobachtung einer Personengesamtheit gewonnen. Die relativen Häufigkeiten von Todesfällen, Invalidisierungen, etc. werden dann zur Schätzung der Wahrscheinlichkeiten herangezogen. Um der zeitlichen Änderung von Sterbe-[4] und Invalidisierungswahrscheinlichkeiten Rechnung zu tragen, werden die Wahrscheinlichkeitstafeln in regelmässigen Abständen neu erstellt (vgl. Helbling [42], S. 348 ff.).

Im technischen Zinsfuss spiegeln sich versicherungsmathematisch die Vermögenserträge wieder. In den Grundsätzen und Richtlinien für Pensionsversicherungsexperten [87] findet sich bezüglich des technischen Zinsfusses die folgende Vorgabe: ,,Der technische Zinsfuss ist vom Pensionsversicherungsexperten so festzulegen, dass er langfristig gesehen mit einer angemessenen Marge unterhalb der effektiven Vermögensrendite liegt und für einen längeren Zeitraum beibehalten werden kann." In den Grundsätzen 2000 [88] heisst es weiter: ,,Der technische Zinsfuss ist ein zentraler Parameter für die Feststellung der versicherungstechnischen Verpflichtungen, der im Zusammenhang mit den Annahmen über die langfristigen Kapitalerträge zu wählen ist." Der technische Zinsfuss ist indessen nicht mit der Mindestverzinsung zu verwechseln, die Bestandteil der Definition der BVG-Minimalleistungen ist. Dies zeigt sich auch darin, dass in der Praxis trotz Senkung der Mindestverzinsung ein technischer Zinsfuss von 4 Prozent nach wie vor weit verbreitet ist.[5]

Die Verwaltungskostenzuschläge dienen dazu, bei der Bestimmung der Beiträge, die voraussichtlichen Verwaltungskosten der Vorsorgeeinrichtung zu berücksichtigen und somit die Finanzierung der Verwaltung sicherzustellen.

[4] insbesondere aufgrund der allgemein steigenden Lebenserwartung

[5] Von der Schweizerischen Kammer der Pensionskassen-Experten wird bei einer langfristig ausgerichteten Strategie ein technischer Zinssatz von 3.2% bis 3.7% empfohlen.

Die mit solchen Rechnungsgrundlagen angestellten versicherungstechnischen Berechnungen lassen sich in etwa mit Standardkostenrechnungen bei Industriebetrieben vergleichen (vgl. Helbling [42], S. 348).

2.2.2 Wahl der Rechnungsgrundlagen

Bei der Wahl der Rechnungsgrundlagen hat der Pensionskassenexperte nach Art. 9 der Grundsätze und Richtlinien 2000 für Pensionsversicherungsexperten [88] darauf zu achten, das die Rechnungsgrundlagen das Verhalten des Bestandes möglichst gut beschreiben. Dafür hat der Experte breit abgestützte Grundlagen anzuwenden, wobei er Besonderheiten eines Versichertenbestandes oder allgemeine Entwicklungen mit Anpassungen berücksichtigen kann.

Eine autonome Pensionskasse könnte aus ihren eigenen historischen Daten selbst Rechnungsgrundlagen bestimmen. Aufgrund der Grösse ist dies aber in den meisten Fällen wenig sinnvoll, weshalb auf fremde Rechnungsgrundlagen zurückgegriffen wird. Die folgenden Rechnungsgrundlagen finden dabei in der Praxis Anwendung (vgl. Helbling [42], S. 386 und Romer [80], S. 20 f.):

- Grundlagen der Lebensversicherungsgesellschaften,
- Grundlagen der AHV,
- Grundlagen der Eidgenössischen Versicherungskasse (EVK),
- Grundlagen der Versicherungskasse der Stadt Zürich (VZ),
- Schweizerische Volkssterbetafeln (z.B. die Schweizerische Sterbetafel 1988/1993 [19], welche alle 10 Jahre erhoben wird.)

Die Volkssterbetafeln und die Grundlagen der AHV umfassen die ganze Bevölkerung. Fraglich ist deshalb, ob die darin enthalten Sterbe- und Invalidisierungswahrscheinlichkeiten auf den in der beruflichen Vorsorge versicherten Teil der Bevölkerung übertragen werden können. Das Problem der EVK- und VZ-Grundlagen ist, dass sie ausschliesslich auf Beobachtungen von Mitarbeitern öffentlich-rechtlicher Arbeitgeber basieren und somit allenfalls das Sterbe- und

Invalidisierungsverhalten der Mitarbeiter eines privatwirtschaftlichen Betriebes nur eingeschränkt abbilden. Die Grundlagen der Lebensversicherungsgesellschaften enthalten, da die damit berechneten Tarife garantiert sind und nachträglich nicht mehr angepasst werden können, hohe Risikomargen. Mit allen Grundlagen sind also gewisse Nachteile verbunden. Allerdings ist davon auszugehen, dass deren Auswirkungen im Vergleich zu den Auswirkungen der Wahl des Zinsfusses eher gering sind. Die in der Praxis am häufigsten von autonomen Pensionskassen verwendeten Grundlagen sind die der EVK und der VZ, welche alle zehn Jahre, das letzte Mal im Jahr 2000, neu erscheinen (vgl. VZ 2000 [35] und EVK 2000 [29]). In der vorliegenden Arbeit wird im folgenden mit den Rechnungsgrundlagen der VZ 2000 gearbeitet.

Die Grundlagen der EVK und der VZ stützen sich, wie oben schon angesprochen, auf die Erfahrungszahlen von öffentlich-rechtlichen Vorsorgeeinrichtungen. Seit Mitte Dezember 2002 stehen für die Schweiz erstmals technische Grundlagen zur Verfügung, welche auf der Basis von Daten zwölf grosser autonomen Pensionskassen[6] privatrechtlicher Unternehmen erstellt worden sind: die Technische Grundlagen BVG 2000. Statistisch erfasst wurden dabei die Jahre 1999 bis 2001. Diese Grundlagen beruhen auf einer Initiative von PRASA Hewitt und ATAG Liberia, die das Projekt Ende 1997 ins Leben gerufen hatten. Um dem erweiterten Umfeld der Vorsorge Rechnung zu tragen, war ein weiteres Ziel der privatrechtlichen Grundlagen, durch die Schätzung von weitergehende Wahrscheinlichkeiten als sonst üblich, vertiefte Analysen zu ermöglichen. Die zusätzlichen Angaben umfassen zum Beispiel die Wahrscheinlichkeiten für einen Kapitalbezug bei Pensionierung, für eine vorzeitige Pensionierung, für einen Austritt, für einen Kapitalvorbezug für Wohneigentum und für eine Überweisung eines Teils der Freizügigkeitsleistung infolge einer Scheidung. Diese neuen technischen Grundlagen BVG sollen in Zukunft regelmässig neu berechnet und veröffentlicht werden (vgl. PRASA Hewitt [75] und Koradi und Wehrli [55] S.129).

[6] Dabei handelt es sich um die Pensionskassen der folgenden Unternehmen: ABB, Coop, Credit Suisse, EKW, Migros, Nestlé, Schindler, Suisse Re, Swatch, SBB, Sulzer und UBS.

2.3 Versicherungstechnisches Deckungskapital

Bei der Beurteilung der finanziellen Situation einer Pensionskasse stellt das Deckungskapital ein wichtiges Element dar. In den folgenden Abschnitten wird der theoretische Begriff des Deckungskapitals zunächst allgemeinen für Versicherungen eingeführt und anschliessend für den Fall von Pensionsversicherungen betrachtet. Abschliessend wird auf die Bestimmung des Deckungskapitals für Pensionskassen in der schweizerischen Praxis eingegangen.

2.3.1 Deckungskapital und Äquivalenzprinzip

Beim Abschluss einer Versicherung verpflichtet sich die Versicherungseinrichtung zur Zahlung gewisser Versicherungsleistungen. Zwecks Finanzierung dieser Leistungen müssen sich die Versicherten ihrerseits zur Zahlung von Beiträgen verpflichten. Bei der Abstimmung der Höhe der Leistungen und der Beiträge kommt das Äquivalenzprinzip zur Anwendung. Gemäss diesem werden die Beiträge bzw. Leistungen so definiert, dass sich deren Barwerte unter den Annahmen der Rechnungsgrundlagen ausgleichen:

$$\text{Barwert der Leistungen} = \text{Barwert der Beiträge}\ . \tag{2.1}$$

Werden dabei die Verwaltungskosten vernachlässigt, spricht man bei den ermittelten Beiträgen von Netto-Beiträgen (oder -Prämien), werden die Kosten in die Beiträge eingerechnet erhält man sogenannte Bruttobeiträge (vgl. Wolfsdorf [101], S. 158 und S. 172).

Je nach Aufteilung der Beiträge auf die zukünftigen Zeitpunkte gilt die Gleichung 2.1 zu späteren Zeitpunkten nicht mehr. Werden die Leistungen über einen längeren Zeitraum vorfinanziert, gilt für die Zeitpunkte nach dem Versicherungsbeginn

$$\text{Barwert der Leistungen} > \text{Barwert der Beiträge} \quad .$$

In diesem Fall müssen über die Jahre hinweg Rückstellungen zur Finanzierung der in der Zukunft zu erbringenden Leistungen gebildet werden. Erfolgt die Vorfinanzierung in der Periode selbst, indem vom Versicherten jeweils zu Beginn der Periode der Barwert der Leistungen für das beginnende Jahr verlangt wird, werden am Ende des jeweiligen Jahres keine Rückstellungen benötigt. In diesem Fall spricht man von der Finanzierung durch die natürliche Prämie. Diese Art der Finanzierung ist offensichtlich für den Sparanteil einer Versicherung unsinnig. Für den Risikoteil hat die Finanzierung durch eine natürliche Prämie den Nachteil, dass bei einem über die Jahre hinweg steigenden Todesfall- und Invaliditätsrisiko, die Beiträge über die Versicherungsdauer ebenfalls entsprechend steigen. Werden konstante oder mässig steigende Prämien vorgezogen und damit nur ein Teil des (Risiko-)Beitrags zur Finanzierung der Leistungsfälle verwendet, muss der überschiessende Teil der (Risiko-)Beiträge ebenfalls zurückgestellt werden, um zusammen mit den in späteren Perioden noch eingehenden Beiträgen die Leistungen zu finanzieren.

Die Gesamtheit dieser Rückstellungen wird als versicherungstechnisches Deckungskapital bezeichnet und umfasst alle diejenigen Rückstellungen, welche vorhanden sein müssen, um die *erwarteten* Verpflichtungen der Versicherung erfüllen zu können (vgl. Koller [53], S.46, Fachgruppe Versicherungsmathematik [31], S.86 und Wolfsdorf [101], S.189 f.).

2.3.2 Stochastische Zahlungsströme

Das Charakteristische der Zahlungsströme einer Versicherung ist, dass diese nicht im voraus bekannt sind, da sie vom Eintreten gewisser Ereignisse (Zustände), wie z.B. dem Überleben oder dem Tod der versicherten Person abhängen. Die Zahlungsströme sind also nicht deterministischer Natur, sondern stochastisch.

Betrachtet werden im folgenden die Zahlungsströme Z_i $(i = 1, \ldots, N)$ einer Versicherung. Diese werden zu den Zeitpunkten i ausbezahlt, falls der Versicherte den Zeitpunkt erlebt. Mit ${}_ip_x$ sei weiter die Wahrscheinlichkeit gegeben, dass ein x-jähriger bis zum Alter $x + i$ überlebt. Ausgangspunkt bildet nun ein Kollektiv von L x-jährigen Versicherten zum Zeitpunkt 0. Zum zukünftigen Zeitpunkt i leben dann im Mittel noch ${}_ip_x \cdot L$ Versicherte. Der Barwert $B_0(Z_1, \ldots, Z_N)$ der

Zahlungsströme für dieses Kollektiv lässt sich bestimmen über

$$B_0 = \sum_{i=1}^{N} Z_i \ \nu^i \ {}_ip_x \ L \quad ,$$

mit $\nu = \frac{1}{1+r}$ und r als Diskontsatz bzw. technischem Zins. Der mittlere Kassenbestand (Endwert) für das Kollektiv am Ende der Versicherung $E_N(Z_1, \ldots, Z_N)$ ist gegeben durch

$$E_N = \sum_{i=1}^{N} Z_i \ \nu^{i-N} \ {}_ip_x \ L \quad .$$

Es gilt

$$B_0 = \sum_{i=1}^{N} Z_i \ \nu^i \ {}_ip_x \ L = E_N \ \nu^N \quad . \tag{2.2}$$

Es ist ersichtlich, dass Barwert und mittlerer Kassenbestand Erwartungswerte sind. $B_0(Z_1, \ldots, Z_N)$ wird als Barwert der erwarteten Zahlungsströme der Versicherung[7] oder einfach nur als Barwert der Versicherung zum Zeitpunkt 0 bezeichnet. Der mittlere Kassenbestand $E_N(Z_1, \ldots, Z_N)$ wird auch als Endwert der zufälligen Zahlungsströme der Versicherung[8] oder einfach nur als Endwert der Versicherung zum Zeitpunkt N bezeichnet (vgl. Gupta und Varga [39], S.117 ff. und Wolfsdorf [101], S.190 ff.).

Umfassen die Zahlungsströme Z_i alle Beiträge und Leistungen einer Versicherung, wobei Beiträge als negative und Leistungen als positive Zahlungsströme aufgefasst werden und gilt für das betrachtete Kollektiv das Äquivalenzprinzip, dann ist der Barwert der Zahlungsströme zu Beginn der Versicherung gleich null:

$$B_0(Z_1, \ldots, Z_N) = 0 \quad .$$

Betrachtet man einen späteren Zeitpunkt t $(0 < t < T)$ gilt

$$B_0(Z_{t+1}, \ldots, Z_N) = \nu^t \ B_t(Z_{t+1}, \ldots, Z_N) \quad ,$$

mit

$$B_t(Z_{t+1}, \ldots, Z_N) = \sum_{i=t+1}^{N} Z_i \ \nu^{i-t} \ {}_ip_x \ L$$

[7] Expected Present Value of the Cash Flows of the Insurance

[8] Accumulated Value of the Stochastic Cash Flows

und

$$B_0(Z_0, \ldots, Z_t) + B_0(Z_{t+1}, \ldots, Z_N) = 0 \quad .$$

Mit Gleichung (2.2) folgt

$$-E_t(Z_0, \ldots, Z_t) = B_t(Z_{t+1}, \ldots, Z_N) \quad ,$$

d.h. dass der Barwert der Versicherung zum Zeitpunkt t dem Betrag des mittleren Kassenbestands der Versicherung zum Zeitpunkt t entspricht (vgl. Gupta und Varga [39], S.127 f.).

Bei der obigen Betrachtung waren die Zahlungen jeweils vom Überleben des Versicherten abhängig. Im folgenden werden auch Zahlungen betrachtet, welche von anderen Zuständen abhängen, wie z.B. Invalidität oder dem Überleben der Witwe. Um diesen allgemeineren Fall darzustellen wird folgendes eingeführt: Es seien A^i_m $(m = 1, \ldots, M)$ die möglichen Zustände in denen sich der Versicherte befinden kann.[9] Wieder werden nun L x-jährige Versicherten betrachtet, welche sich zum Zeitpunkt 0 alle im selben Zustand A^0_m befinden. Weiter seien mit $P(A^i_m)$ die Wahrscheinlichkeiten[10] gegeben, dass ein Versicherter zum Zeitpunkt i in Zustand m ist und mit $Z_i(A^i_m)$ die Zahlungsströme der Versicherung zum Zeitpunkt i, falls sich der Versicherte im Zeitpunkt i im m-ten Zustand befindet. Zum Zeitpunkt i ist dann im Mittel mit $P(A^i_m) \cdot L$ Versicherten im Zustand A^i_m zu rechnen. Analog zu Gleichung 2.2 erhält man für den Barwert $B_0(Z_1, \ldots, Z_N)$ des Kollektivs

$$B_0 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} Z_i(A^i_m)\ \nu^i\ P(A^i_m)\ L \quad .$$

Der mittlere Kassenbestand $E_N(Z_1, \ldots, Z_N)$ des Kollektivs folgt aus

$$E_N = \sum_{i=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} Z_i(A^i_m)\ \nu^{i-N}\ P(A^i_m)\ L\ ,$$

wobei wiederum

$$B_0 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} Z_i(A^i_m)\ \nu^i\ P(A^i_m)\ L = E_N\ \nu^N \tag{2.3}$$

[9] $A^i_k \cap A^i_l = \oslash$ (für alle $k, l = 1, \ldots, M$ und $k \neq l$) und $\bigcup_{k=1}^{M} A^i_k = \Omega$

[10] mit $\sum_{m=1}^{M} P(A^i_m) = 1$

gilt. Zu einem späteren Zeitpunkt t betrachtet gilt

$$B_0(Z_{t+1}, \ldots, Z_N) = \nu^t \; B_t(Z_{t+1}, \ldots, Z_N) \quad ,$$

mit

$$B_t(Z_{t+1}, \ldots, Z_N) = \sum_{i=t+1}^{N} \sum_{m=1}^{M} Z_i(A_m^i) \; \nu^{i-t} \; P(A_m^i) \; L \quad . \tag{2.4}$$

und

$$B_0(Z_0, \ldots, Z_t) + B_0(Z_{t+1}, \ldots, Z_N) = 0 \quad .$$

Mit Gleichung (2.3) folgt

$$-E_t(Z_0, \ldots, Z_t) = B_t(Z_{t+1}, \ldots, Z_N) \quad . \tag{2.5}$$

Setzt man als mögliche Zustände

A_1^i Der Versicherte lebt am Ende der i-ten Periode noch.
A_2^i Der Versicherte lebt am Ende der i-ten Periode nicht mehr.

und $P(A_1^i) = {}_ip_x$, $P(A_2^i) = 1 -_i p_x$, $Z_i(A_1^i) = Z_i$, $Z_i(A_2^i) = 0$, erhält man den oben beschriebenen Fall, in dem die Zahlungsströme nur vom Überleben des Versicherten abhingen.

Um in der nachfolgenden Darstellung die Aufteilung des Deckungskapitals auf die einzelnen Versichertengruppen zu vereinfachen, wird Gleichung 2.4 wie folgt umformuliert:

$$B_t(Z_{t+1}, \ldots, Z_N) = \sum_{m=1}^{M} \; B_t(Z_{t+1}, \ldots, Z_N)|A_m^t \tag{2.6}$$

mit

$$B_t(Z_{t+1}, \ldots, Z_N)|A_m^t = P(A_m^t) L \sum_{i=t+1}^{N} \left[\sum_{s=1}^{M} Z_i(A_s^i) \; P(A_s^i|A_m^t) \right] \nu^{i-t} \quad . \tag{2.7}$$

2.3.3 Prospektives und retrospektives Deckungskapital

Das Deckungskapital, welches die erwarteten zukünftigen Leistungen deckt, die nicht durch die erwarteten zukünftigen Beiträge finanziert sind, lässt sich auf zwei Arten bestimmen: prospektiv und retrospektiv.

Die prospektive Methode betrachtet dabei den Aspekt der Verwendung des Deckungskapitals, nämlich der Deckung der zukünftigen Verpflichtungen. Es lässt sich bestimmen als

Prospektives Deckungskapital =
Barwert erwarteter zukünftiger Leistungen
- Barwert erwarteter zukünftiger Beiträge .

Das prospektives Deckungskapital zum Zeitpunkt t wird im folgenden mit ${}_tV^{pro}$ notiert.

Die retrospektive Methode stellt die Herkunft der Mittel, die zur Deckung der Verpflichtungen zur Verfügung stehen, in den Vordergrund. Das retrospektive Deckungskapital zum Zeitpunkt t ergibt sich aus

Retrospektives Deckungskapital =
Endwert der vergangenen Beiträge
- Endwert der vergangenen Leistungen

und wird im folgenden mit ${}_tV^{retro}$ notiert (vgl. Gupta und Varga [39], S. 223 f. und Fachgruppe Versicherungsmathematik [31], S. 88 f.).

Werden wieder Beiträge als negative und Leistungen als positive Zahlungsströme aufgefasst, entspricht das prospektive Deckungskapital dem Barwert der Zahlungsströme und das retrospektive Deckungskapital dem negativen Wert des mittleren Kassenbestands zum Zeitpunkt t (bezogen auf das Kollektiv von L im Zeitpunkt 0 x-jährigen aktiven Versicherten):

$$\begin{aligned} {}_tV^{pro} &= B_t(Z_{t+1}, \dots, Z_N) \\ {}_tV^{retro} &= -E_t(Z_1, \dots, Z_t) \quad . \end{aligned}$$

Aus Gleichung (2.5) folgt, dass sich retrospektives Deckungskapital und prospektives Deckungskapital entsprechen:

$$ {}_tV_k^{pro} = {}_tV_k^{retro} \quad . $$

2.3.4 Deckungskapital einer Lebensversicherung

Das klassische Beispiel einer Lebensversicherung ist die gemischte Versicherung, d.h. eine Mischung von Erlebensfall- und Todesfallversicherung. Dies bedeutet, dass der Versicherer dem Versicherten einerseits nach Erreichen des Schlussalters ein Kapital oder eine Rente auszahlt, falls der Versicherte über diesen Zeitpunkt hinaus lebt oder andererseits bei einem vorzeitigen Tod der versicherten Person, die Erben ein vereinbartes Kapital ausbezahlt erhalten (vgl. Koller [53], S 3).

Betrachtet wird nun eine Lebensversicherung, welche vom Versicherten im Alter x für die Restlebensdauer von N Jahren abgeschlossen wurde. Für die Bestimmung der Restlebensdauer wird von einem Endalter e, z.B. 100 Jahren, ausgegangen. Die Restlebensdauer entspricht dann $e-x$ Jahren. Es sei E_i^x die Leistung, welche Ende der Periode i fällig wird, falls der Versicherte diese Periode überlebt, T_i^x die Leistung, welche Ende der Periode i fällig wird, falls der Versicherte in dieser Periode stirbt und B_i^x der Beitrag, welcher Ende der Periode i fällig wird, falls der Versicherte diese Periode überlebt. Weiter sei mit $q_x = 1 - {}_1p_x$ die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit gegeben. Als mögliche Zustände des Versicherten werden

A_1^i der Versicherte lebt am Ende der i-ten Periode noch,
A_2^i der Versicherte ist in der i-ten Periode gestorben und
A_3^i der Versicherte ist vor der i-ten Periode gestorben,

mit $P(A_1^i) = {}_ip_x$, $P(A_2^i) = {}_{i-1}p_x\ q_{x+i-1}$ und $P(A_3^i) = 1 - {}_{i-1}p_x$ festgelegt. Für die Zahlungsströme gilt dann $Z_i(A_1^i) = E_i^x - B_i^x$, $Z_i(A_2^i) = T_i^x$ und $Z_i(A_3^i) = 0$.

Für diese Versicherung erhält man (bezogen auf das Kollektiv von L im Zeitpunkt 0 x-jährigen aktiven Versicherten) als Deckungskapital zum Zeitpunkt t (vgl. Wolfsdorf [101], S.195 ff.)

$$ {}_tV^{pro} = {}_tp_x \; L \sum_{i=t+1}^{N} \left[(E_i^x - B_i^x) \; {}_{i-t}p_{x+t} + T_i^x \; {}_{i-t-1}p_{x+t} \; q_{x+i-1} \right] \nu^{i-t} $$

$$ {}_tV^{retro} = \; L \; \sum_{i=1}^{t} \left[(B_i^x - E_i^x) \; {}_ip_x - T_i^x \; {}_{i-1}p_x \; q_{x+i-1} \right] \nu^{i-t} $$

2.3.5 Deckungskapital einer Pensionsversicherung

Im folgenden wird von einer Pensionsversicherung ausgegangen die folgende Leistungen umfasst: Lebt der Versicherte über das Schlussalter hinaus, wird ihm eine lebenslange Rente ausbezahlt, wird der Versicherte invalid erhält er eine lebenslange Invalidenrente und bei Tod des Versicherten erhalten seine Hinterbliebenen Witwen/errente bzw. Waisenrente. Zur Vereinfachung der Darstellung wird die Berechnung wieder auf ein Kollektiv von L im Zeitpunkt 0 x-jährigen männlichen Versicherten bezogen.

Betrachtet wird nun eine solche Pensionsversicherung, welche vom Versicherten im Alter x für die Restlebensdauer von N Jahren abgeschlossen wurde. Es sei wiederum E_i^x die Leistung und B_i^x der Beitrag, welche Ende der Periode i fällig werden, falls der Versicherte diese Periode überlebt und nicht invalid ist. Ist der Versicherte invalid erhält er eine Rente in der Höhe von I_x^i, welche jeweils am Ende der Perioden i fällig ist, falls der Versicherte diese Perioden überlebt. Reaktivierungen von Invaliden werden nicht betrachtet. Ist der Versicherte verstorben stehen der überlebenden Witwe Renten der Höhe W_y^i und den unter 18-jährigen Waisen je Renten von K_w^i zu, welche wiederum jeweils am Ende der Perioden i fällig werden. Die Möglichkeit, dass eine Witwe sich wieder verheiratet wird nicht betrachtet.

Die möglichen Zustände der Versicherten sind dann

A_1^i	der Versicherte lebt am Ende der i-ten Periode noch und ist nicht invalid,
A_2^i	der Versicherte lebt am Ende der i-ten Periode noch und ist invalid,
A_3^i	der Versicherte stirbt in der i-ten Periode und
A_4^i	der Versicherte ist vor der i-ten Periode gestorben.

mit $P(A_1^i) = {}_ip_x^a$, $P(A_2^i) = {}_ii_x$, $P(A_3^i) = {}_{i-1}p_x \; q_{x+i-1}$ und $P(A_4^i) = 1 - {}_{i-1}p_x$, wobei ${}_ii_x$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass ein x-jähriger nicht-invalider Versicherter im Alter von $x+i$ invalid ist und entsprechend mit ${}_ip_x^a = {}_ip_x - {}_ii_x$ die

Wahrscheinlichkeit notiert wird, dass ein x-jähriger nicht-invalider Versicherter ebenfalls im Alter $x+i$ nicht-invalid ist. Weiter sei mit w_x die Wahrscheinlichkeit gegeben, bei Tod im Alter x verheiratet gewesen zu sein. Mit y_x wird das durchschnittliche Alter der Ehefrau bei Tod im Alter von x notiert und die durchschnittliche Anzahl Kinder unter 18 Jahren bei Tod im Alter x wird mit z_x bezeichnet. Beim Tod des Versicherten haben diese Kinder das durchschnittliche Alter u_x. Die Überlebenswahrscheinlichkeiten der Witwen bzw. Waisen werden mit ${}_ip_{y_x}$ resp. ${}_ip_{u_x}$ notiert. Damit erhält man die Zahlungsströme $Z_i(A_1^i) = E_i^x - B_i^x$, $Z_i(A_2^i) = I_x^i$, $Z_i(A_3^i) = w_{x+i} \sum_{j=1}^{e-y_{x+i}} {}_jp_{y_{x+i}}\ W_{y_{x+i}}^j\ \nu^j + z_{x+i} \sum_{j=1}^{18-u_{x+i}} {}_jp_{w_{x+i}}\ K_{w_{x+i}}^j\ \nu^j$ und $Z_i(A_4^i) = 0$.

Als weiteres Kollektiv sind die aus dem Kollektiv der L männlichen aktiven Versicherten vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt t hervorgegangenen Kollektive von Witwen und Waisen zu betrachten. Das Kollektiv, der in der k-ten Periode $(k = 1, \ldots, t)$ y_{x+k}-jähriger Witwen, besteht aus $Y_k = {}_{k-1}p_x\ q_{x+k-1}\ L\ w_{x+k}$ Personen mit der Restlebensdauer von $P = e - y_{x-k}$. Das Kollektiv, der in der k-ten Periode u_{x+k}-jähriger Waisen, besteht aus $H_k = {}_kp_x\ q_{x+k}\ L\ z_{x+k}$ Personen mit der Restversicherungsdauer von $O = 18 - u_{x+k}$. Die möglichen Zustände für diese Hinterbliebenen sind

A_1^i die Witwe/ Waise lebt am Ende der i-ten Periode noch und
A_2^i die Witwe/ Waise lebt am Ende der i-ten Periode nicht mehr,

mit $P(A_1^i) = {}_ip_{y_x}$ bzw. ${}_ip_{u_x}$, $P(A_2^i) = 1 - {}_ip_{y_x}$ bzw. $1 - {}_ip_{u_x}$ und den Zahlungsströmen $Z_i(A_1^i) = W_y^i$ bzw. K_w^i und $Z_i(A_2^i) = 0$

Für das prospektive Deckungskapital erhält man damit (bezogen auf das Kollektiv von im Zeitpunkt 0 L x-jährigen aktiven Versicherten und den Kollektiven der bis zum Zeitpunkt t aus den L Versicherten hervorgegangenen Waisen und Witwen)

$$
\begin{aligned}
{}_tV^{pro} \;&=\; B_t^L(Z_{t+1},\ldots,Z_N) \;+\; \textstyle\sum_{k=1}^{t}\; B_t^{Y_k}(Z_{t+1},\ldots,Z_P) \;+\; B_t^{H_k}(Z_{t+1},\ldots,Z_O) \\
&=\; \textstyle\sum_{i=t+1}^{N} \left[(E_i^x - B_i^x)\; {}_ip_x^a\; L \;+\; I_x^i\; {}_ii_x\; L \;+\; T_x^i\; {}_{i-1}p_x\; q_{x+i-1}\; L\right] \nu^{i-t} \\
&+\; \textstyle\sum_{k=1}^{t} \Big(\textstyle\sum_{i=t+1}^{P}\; W_y^i\; \nu^{i-t}\; {}_{i-k}p_{y_{x+k}}\; Y_k \;+\; \textstyle\sum_{i=t+1}^{O}\; K_w^i\; \nu^{i-t}\; {}_{i-k}p_{u_{x+k}}\; H_k \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\text{mit}\;\; T_x^i \;=\; w_{x+i}\; \textstyle\sum_{j=1}^{e-y_{x+i}}\; {}_jp_{y_{x+i}}\; W_{y_{x+i}}^j\; \nu^j \;+\; z_{x+i}\; \textstyle\sum_{j=1}^{18-u_{x+i}}\; {}_jp_{w_{x+i}}\; K_{w_{x+i}}^j\; \nu^j
$$

Auf die Bestimmung des retrospektiven Deckungskapitals wird hier nicht weiter eingegangen. Die Berechnung folgt aus den obigen Bemerkungen und den Ausführungen zur Berechnung des retrospektiven Deckungskapital der Lebensversicherung im vorigen Abschnittes.

Formuliert man das prospektive Deckungskapital ausgehend von 2.6 und 2.7 ist die Aufteilung des Deckungskapitals auf die einzelnen Versichertengruppen besser ersichtlich. Man erhält:

$$
\begin{aligned}
{}_tV^{pro} \;&= \\
&=\; \textstyle\sum_{m=1}^{4}\; B_t^L(Z_{t+1},\ldots,Z_N)|A_m^t \\
&+\; \textstyle\sum_{k=1}^{t} \Big(\textstyle\sum_{m=1}^{2}\; B_t^{Y_k}(Z_{t+1},\ldots,Z_P)|A_m^t \;+\; \textstyle\sum_{m=1}^{2} B_t^{H_k}(Z_{t+1},\ldots,Z_O)|A_m^t\Big) \\
&=\; {}_tp_x^a\; L\; \textstyle\sum_{i=t+1}^{N} \left[(E_i^x - B_i^x)\; {}_{i-t}p_{x+t}^a \;+\; I_x^i\; {}_{i-t}i_{x+t} \;+\; T_x^i\; {}_{i-t-1}p_{x+t}\; q_{x+i-1}\right] \nu^{i-t} \\
&+\; {}_ti_x\; L\; \textstyle\sum_{i=t+1}^{N} \left[I_x^i\; {}_{i-t}p_{x+t} \;+\; T_x^i\; {}_{i-t-1}p_{x+t}\; q_{x+i-1}\right] \nu^{i-t} \\
&+\; \textstyle\sum_{k=1}^{t} \Big(\; {}_{t-k}p_{y_{x+k}}\; Y_k\; \textstyle\sum_{i=t+1}^{P}\; W_y^i\; \nu^{i-t}\; {}_{i-t}p_{y_{x+k}+t-k} \\
&\qquad\qquad +\; {}_{t-k}p_{u_{x+k}}\; H_k\; \textstyle\sum_{i=t+1}^{O}\; K_w^i\; \nu^{i-t}\; {}_{i-t}p_{u_{x+k}+t-k} \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\text{mit}\;\; T_x^i \;=\; w_{x+i}\; \textstyle\sum_{j=1}^{e-y_{x+i}}\; {}_jp_{y_{x+i}}\; W_{y_{x+i}}^j\; \nu^j \;+\; z_{x+i}\; \textstyle\sum_{j=1}^{18-u_{x+i}}\; {}_jp_{w_{x+i}}\; K_{w_{x+i}}^j\; \nu^j
$$

Das Deckungskapital lässt sich folglich aus den nachstehenden Teilen zusammensetzen (vgl. Fachgruppe Versich.math. [31], S. 105 und Wolfsdorf [101], S. 366 ff.):

Für die zum Zeitpunkt t lebenden ${}_tp_x^a\ L$ nicht-invaliden Versicherten[11] aus den

- Barwerten der Beiträge
  ${}_tp_x^a\ L\ \sum_{i=t+1}^{N} -B_i^x\ {}_{i-t}p_{x+t}^a\ \nu^{i-t}$
- Anwartschaften[12] auf Altersrenten bzw. Barwerten der laufenden Alterrenten
  ${}_tp_x^a\ L\ \sum_{i=t+1}^{N} E_i^x\ {}_{i-t}p_{x+t}^a\ \nu^{i-t}$
- Anwartschaften auf Invalidenrenten
  ${}_tp_x^a\ L\ \sum_{i=t+1}^{N} I_x^i\ {}_{i-t}i_{x+t}\ \nu^{i-t}$
- Anwartschaften auf Witwenrenten
  ${}_tp_x^a\ L\ \sum_{i=t+1}^{N} w_{x+i}\ \sum_{j=1}^{e-y_{x+i}}\ {}_jp_{y_{x+i}}\ W_{y_{x+i}}^j\ \nu^j\ {}_{i-t-1}p_{x+t}\ q_{x+i-1}\ \nu^{i-t}$
- Anwartschaften auf Waisenrenten
  ${}_tp_x^a\ L\ \sum_{i=t+1}^{N} z_{x+i}\ \sum_{j=1}^{18-u_{x+i}}\ {}_jp_{w_{x+i}}\ K_{w_{x+i}}^j\ \nu^j\ {}_{i-t-1}p_{x+t}\ q_{x+i-1}\ \nu^{i-t}$

Für die zum Zeitpunkt t lebenden ${}_ti_x\ L$ Invaliden aus den

- Barwerten der laufenden Invalidenrenten
  ${}_ti_x\ L\ \sum_{i=t+1}^{N} I_x^i\ {}_{i-t}p_{x+t}\ \nu^{i-t}$
- Anwartschaften auf Witwenrenten
  ${}_ti_x\ L\ \sum_{i=t+1}^{N} w_{x+i} \sum_{j=1}^{e-y_{x+i}}\ {}_jp_{y_{x+i}} W_{y_{x+i}}^j \nu^j\ {}_{i-t-1}p_{x+t}\ q_{x+i-1}\ \nu^{i-t}$
- Anwartschaften auf Waisenrenten
  ${}_ti_x\ L\ \sum_{i=t+1}^{N} z_{x+i} \sum_{j=1}^{18-u_{x+i}}\ {}_jp_{w_{x+i}} K_{w_{x+i}}^j \nu^j\ {}_{i-t-1}p_{x+t}\ q_{x+i-1}\ \nu^{i-t}$

Für die zum Zeitpunkt t lebenden ${}_{t-k}p_{u_{x+k}} H_k$ Waisen und die ${}_{t-k}p_{y_{x+k}} Y_k$ Witwen $(k = 1, \ldots, t)$ aus den

- Barwerten der laufenden Witwenrenten
  $\sum_{k=1}^{t}\ {}_{t-k}p_{y_{x+k}} Y_k \sum_{i=t+1}^{M} W_y^i\ \nu^{i-t}\ {}_{i-t}p_{y_{x+k}+t-k}$
- Barwerten der laufenden Waisenrenten
  $\sum_{k=1}^{t}\ {}_{t-k}p_{u_{x+k}} H_k \sum_{i=t+1}^{O} K_w^i\ \nu^{i-t}\ {}_{i-t}p_{u_{x+k}+t-k}$

---

[11] Je nach dem, ob $x+t$ grösser oder kleiner (gleich) dem Schlussalter ist, sind diese Aktive oder Altersrentner.

[12] Unter einer Anwartschaft versteht man eine Aussicht auf den zukünftigen Erwerb eines Rechts (vgl. Becker [7], o. S.), d. h. in diesem Zusammenhang die Ansprüche auf Vorsorgeleistungen, die erst beim Eintritt des versicherten Ereignisses (z.B. Pensionierung, Tod, Beginn einer Invalidität) zu einer eigentlichen Forderung des Versicherten bzw. Destinatärs werden.

In der Praxis sind bei der Deckungskapitalberechnung die jeweiligen speziellen Gegebenheiten der Versicherung bzw. Vorsorgeeinrichtung zu berücksichtigen. Auch werden bei der praktischen Berechnung oft die prospektive und retrospektive Methode vermischt oder für gewisse Teile des Deckungskapitals nur vereinfachte Näherungsrechnungen durchgeführt. Zudem sind die allfälligen Austrittsleistungen zu beachten. Sind diese höher als die Deckungsrückstellungen wird in der Regel das Deckungskapital angepasst, um die Freizügigkeit sicherzustellen. Im folgenden wird auf das übliche Vorgehen zur Bestimmung des notwendigen Deckungskapital in der Schweizerischen Praxis genauer eingegangen.

2.3.6 Bestimmung des Deckungskapitals in der Praxis

Bei der Erstellung der versicherungstechnischen Bilanz einer Vorsorgeeinrichtung bestimmt der Pensionskassenexperte das notwendige Vorsorge- bzw. Deckungskapital. In der Praxis wird dabei das im vorigen Abschnitt besprochene theoretische Konzept zur Bestimmung des Deckungskapitals meist in zwei Blöcke aufgeteilt. Einen Teil bildet die Bestimmung der individuellen Spar- oder Deckungskapitalien anhand der gewählten Rechnungsgrundlagen, welche die erworbenen Ansprüche der aktiven Versicherten und die laufenden Leistungen der Rentenbezüger garantieren sollen. Der zweite Block besteht aus pauschalen kollektiven Anpassungen der Berechnungen in Form von generellen technischen Rückstellungen, die für die langfristige Erreichung der reglementarischen Vorsorgeziele zusätzlich benötigt werden. Je nach Art des Vorsorgeplanes umfasst das notwendige Vorsorgekapital, die folgenden individuellen Deckungskapitalien und generellen technischen Rückstellungen (vgl. Koppenburg [54], S. 1 f.):

Individuelle Spar- und Deckungskapitalien

A) Individuelle Spar- oder Deckungskapitalien der aktiven Versicherten: Diese entsprechen den erworbenen Austrittsleistungen gemäss dem Freizügigkeitsgesetz. In einem Beitragsprimatplan sind dies in der Regel die Alterskapitalien, in einem Leistungsprimatplan die Barwerte der erworbenen Leistungen (BEL) (vgl. Grundsätze und Richtlinien 2000 für Pensionsversicherungsexperten [88], S. 5). Damit sollen die Leistungen der Aktiven wie folgt sichergestellt werden:

Im Falle eines Austritts
– Auszuzahlende Austrittsleistungen
+ Freiwerdende erworbene Austrittsleitungen
= 0

Im Falle einer Pensionierung[13]
– Notwendiges Deckungskapital zur Deckung der Altersleistungen
+ Freiwerdende erworbene Austrittsleistungen
= 0

Bei Invalidität und Tod
– Notwendiges Deckungskapital zur Deckung der Invaliden- und Hinterbliebenenleistungen
+ Freiwerdende erworbene Austrittsleitungen
+ Risikobeiträge der Periode
= 0

Damit sind alle möglichen Ansprüche der Aktiven im Mittel abgedeckt. Voraussetzung dafür ist, dass die Risikobeiträge der Periode auf das Risiko im Aktivenbestand, d.h. insbesondere auf die Alters- und Geschlechtsstruktur abgestimmt sind. Das bedeutet streng genommen, dass die Risikobeiträge in jeder Periode dem Risiko entsprechend angepasst werden müssten. Wird dies nicht gemacht, wie zum Beispiel im Falle von Durchschnitts-Risikobeiträgen, sollte die Anpassung über die Bildung bzw. Auflösung von zusätzlichen Rückstellungen erfolgen. In der Regel wird aber davon ausgegangen, dass das Risiko (vor allem bei einem grossen Bestand) im wesentlichen gleich bleibt, womit keine zusätzlichen Rückstellungen nötig werden. Bezogen auf das vorige Kapitel umfasst die Zurückstellung der Alterskapitalien bzw. der BEL die Sicherstellung der Anwartschaften der Aktiven unter Berücksichtigung der Beiträge. Zudem wird durch die Rückstellung der Austrittsleistungen der Freizügigkeit Rechnung getragen.

B) Individuelle Deckungskapitalien der Rentenbezüger. Diese entsprechen dem Kapital, das aufgrund der von der Vorsorgeeinrichtung verwendeten versiche-

[13] Dies gilt nur falls der reglementarische Umwandlungssatz bzw. Barwertfaktor für den BEL dem jeweiligen versicherungstechnischen Wert entspricht.

rungstechnischen Grundlagen für die Ausrichtung der zukünftigen reglementarischen Leistungen während ihrer ganzen Laufzeit erforderlich ist. Bestimmt wird dieses Kapital in der Regel anhand der in den Grundlagen tabellierten versicherungstechnischen Barwerten durch Multiplikation mit der entsprechenden Rente. Dies umfasst die im vorigen Abschnitt erwähnten Barwerte der laufenden Alters-, Invaliden-, Witwen- und Waisenrenten sowie die entsprechenden Anwartschaften.

Generelle technische Rückstellungen

Darunter fallen, je nach Art des Vorsorgeplans und Autonomie-Grad der Vorsorgeeinrichtung, die folgenden Arten von Rückstellungen:

C) Rückstellung für die Unterstützung des reglementarischen Renten-Umwandlungssatzes. Für die aktiven Versicherten wird bei Beitragsprimatskassen individuell nur ihre erworbene Austrittsleistung zurückgestellt. Im Falle einer Verrentung dieses Versicherten entsteht, falls der reglementarische Umwandlungssatz höher ist als der versicherungstechnische, ein Fehlbetrag.[14] Diese Fehlbeträge werden in dieser Rückstellung pauschal berücksichtigt (vgl. Schnider [84],S. 67). Dies gilt analog für den Barwertfaktor zur Berechnung des BEL bei Leistungsprimatskassen.

D) Rückstellung für Zunahme der Lebenserwartung. Die technischen Grundlagen, die zur Berechnung der individuellen Spar-und Deckungskapitalien verwendet werden, bilden die erwartete weitere Zunahme der Lebenserwartung nicht ab. Die dadurch zu hohen Sterbewahrscheinlichkeiten ergeben zu tiefe individuelle Kapitalien. Deshalb sind zusätzliche Rückstellungen nötig, um die finanziellen Auswirkungen der erwarteten Zunahme der Lebensdauer auszugleichen (vgl. Schnider [84], S. 66).

E) Rückstellung für zukünftige Rentenanpassungen. Diese Rückstellung dient dazu, die obligatorische Anpassung der Invaliden-und Hinterbliebenenrenten an die Teuerung und andere im Reglement vorgesehene Rentenanpassungen zu finanzieren (vgl. Schnider [84], S. 67).

[14] oft als Verrentungsverluste bezeichnet

F) Rückstellung weiterer Leistungen. Je nach Vorsorgeplan können noch andere Rückstellungen nötig sein, wie z.B. zur Finanzierung vorzeitiger Pensionierungen oder AHV-Überbrückungsrenten.

G) Rückstellung für Risikoschwankungen. Eine Vorsorgeeinrichtung, welche die Risiken selbst trägt, muss nach Art. 43 BVV2 über eine Rückdeckung verfügen, falls einerseits der Experte für berufliche Vorsorge dies als notwendig erachtet, oder ihr andererseits weniger als hundert aktive Versicherte angehören. Diese Rückstellung dient dazu die Fluktuationen im Risikoverlauf (für die Risiken Alter, Tod, Invalidität) auszugleichen. Darunter sind zufällige Abweichungen von den im Mittel erwarteten Werten der Rechnungsgrundlagen zu verstehen (vgl. Schnider [84], S. 66 f.). Diese Rückstellung geht damit im Gegensatz zu den anderen oben genannten Rückstellungen über das theoretische Deckungskapitalkonzept hinaus (vgl. Abschnitt 2.3.1). Dies weil diese Rückstellung nicht den erwarteten Finanzierungsbedarf sicherstellt, sondern vielmehr einen Puffer darstellt, der zur Verfügung steht, wenn der tatsächliche Verlauf negativ vom erwarteten Verlauf abweicht. Je weniger Versicherte einer Vorsorgeeinrichtung angehören, desto grösser ist das Risiko von Verläufen, die wesentlichen von der Erwartung abweichen.

In der Tabelle 2.1 ist exemplarisch eine versicherungstechnische Bilanz einer autonomen Vorsorgeeinrichtung dargestellt. Die technische Bilanz dieser Kasse zeigt per 31.12.2001 einen Deckungsgrad A von 103.62% und einen Deckungsgrad B von 96.15%. Der Unterschied liegt darin, dass für den Deckungsgrad B das Vorsorgevermögen um die Wertschriftenschwankungsreserve vermindert wurde. Die individuellen und generellen Vorsorgekapitalien sind somit durch das zum Marktwert bewertete Vorsorgevermögen abgedeckt. Es besteht hingegen eine eingeschränkte Risikofähigkeit, da bei Abzug der Wertschriftenschwankungsreserve vom Vorsorgevermögen die Vorsorgekapitalien nur zu 96.15% gedeckt sind (Deckungsgrad B). Am 31.12.2002 ist der Deckungsgrad A auf 93.39% gesunken, der Deckungsgrad B auf 89.84%. Es besteht damit eine Unterdeckung. Die Interpretation solch einer Situation und die durch das Führungsorgan zu ergreifenden Massnahmen wurden in Abschnitt 2.1.3 besprochen.

Beispiel für eine versicherungstechnische Bilanz

Grundlagen: EVK 2000, 4%	**31.12.2001 in kCHF**	**31.12.2002 in kCHF**
Aktiven gemäss kaufm. Bilanz		
Bankguthaben, Kontokorrent	50'000	60'000
Wertschriften	180'000	155'000
Liegenschaften	45'000	45'000
Transitorische Aktiven	4'000	4'500
	279'000	264'500
Passiven gemäss kaufm. Bilanz		
Wertschriftenschwankungsreserve	20'000	10'000
Arbeitgeberbeitragsreserve	500	500
Transitorische Passiven	1'200	1'000
Vorsorgevermögen	257'300	253'000
	279'000	264'500
Aktiven der technischen Bilanz		
Vorsorgevermögen		
a) inklusive Wertschriften-Schwankungsreserve	277'300	263'000
b) abzüglich Wertschriften-Schwankungsreserve	257'300	253'000
Passiven der technischen Bilanz		
Individuelle Vorsorgekapitalien		
- Deckungskapitalien der Rentenbezüger	125'000	130'000
- Sparkapitalien der aktiven Versicherten	139'000	148'000
Zwischentotal individuelle Vorsorgekapitalien	264'000	278'000
Generelle Rückstellungen		
- Schwankungsreserve Risiken Inval. und Tod	1'700	1'700
- Abstützung des Umwandlungssatzes	500	600
- Verstärkung für Langlebigkeit der Rentner	1'200	1'200
- zukünftige Rentenanpassungen	200	100
Total versicherungstechn. Vorsorgekapitalien	267'600	281'600
Vers.technischer Ueberschuss/Defizit		
a) in bezug zum Vorsorgevermögen inkl. Wertschriften-Schwankungsreserve	9'700	-18'600
b) in bezug zum Vorsorgevermögen abzüglich Wertschriften-Schwankungsreserve	-10'300	-28'600
Deckungsgrad A	**103.62%**	**93.39%**
Vorsorgevermögen inkl. Wertschriften-schwankungsreserve: Vorsorgekapitalien (Unterdeckung per 31.12.2002 i.S. der Aufsicht)		
Deckungsgrad B	**96.15%**	**89.84%**
Vorsorgevermögen exkl. Wertschriften-schwankungsreserve: Vorsorgekapitalien (Eingeschränkte Risikofähigkeit i.S. Aufsicht)		

Tabelle 2.1: Beispiel für eine versicherungstechnische Bilanz einer Vorsorgeeinrichtung (vgl. Koppenburg [54], S. 7)

Kapitel 3

Bausteine finanzmathematischer Modellierung

In diesem Kapitel werden finanzmathematische Konzepte vorgestellt, welche in der vorliegenden Arbeit insbesondere bei der Modellierung der Vermögensentwicklung zur Anwendung kommen. Dafür wird zunächst kurz auf die Beschreibung von Marktpreisen einzelner Vermögensanlagen durch Zufallsvariablen und auf die Berechnung von Renditegrössen eingegangen. Danach werden zwei Typen von stochastischen Prozessen betrachtet, die zur Modellierung des zeitlichen Verhaltens von Renditen bzw. Preisen von Vermögensanlagen häufig Anwendung finden. Die Simulation solcher Prozesse wird im letzten Abschnitt dargestellt.

3.1 Beschreibung von Vermögensanlagen durch Zufallsvariablen

Möchte man die Vermögensentwicklung eines Anlegers mathematisch beschreiben, könnte ein erster Schritt darin bestehen, für die einzelnen Vermögensanlagen (Assets) ein geeignetes Modell zur Beschreibung der Entwicklung ihrer Marktpreise zu suchen. Ein möglicher Ansatz dafür wäre eine rein deterministische Betrachtung bei der angenommen wird, dass sich der Marktpreis aus allen den Kurs der Anlage bestimmenden Faktoren, wie z.B. historischen Kursen, unternehmensspezifischen Daten und markoökonomischen Variablen, errechnen lässt.

Ein solches Vorhaben erscheint allerdings recht aussichtslos, da dafür nicht nur alle diese Faktoren und deren Beziehungen untereinander bekannt, sondern auch entsprechende Daten zeitgerecht verfügbar sein müssten.

Vorgänge, die nicht befriedigend durch einen einfachen deterministischen Mechanismus beschrieben werden können, lassen sich oft geeignet durch Zufallsvariablen modellieren. In diesem Fall, indem man den Kurs einer Anlage als Realisierung einer Zufallsvariable interpretiert. Man geht dabei von der Vorstellung aus, dass sich die Vielzahl von unbekannten Faktoren, die bei der Preisbildung zusammenwirken, in einer Variablen zusammenfassen lassen, von der man zwar den genauen Wert, den sie annehmen wird, nicht kennt, sich aber Aussagen treffen lassen, mit welchen Werten man eher zu rechnen hat und welche gar nicht oder nur extrem selten auftreten. Diese Einschätzung wird durch die Angabe von Wahrscheinlichkeiten für gewisse Ereignisse präzisiert. Alle diese Wahrscheinlichkeiten zusammen bestimmen dann die komplette Verteilung der Zufallsvariablen. Die zeitliche Entwicklung des Marktpreises einer Anlage wird deshalb oft als zeitabhängige Zufallsvariable, oder sogenannter stochastischer Prozess, modelliert. Dabei geht es in erster Linie um die Abbildung des zeitlichen Verhaltens von Marktpreisen und weniger um die Prognose zukünftiger Kurse (vgl. Franke [34], S. 29).

Meist wird in ökonomischen Modellen mit den aus den Marktpreisen abgeleiteten Renditen gearbeitet. Ein Grund dafür ist, dass Renditen dimensionslose Grössen sind und damit den direkten Vergleich von Anlagen in verschieden Instrumenten, Währungen und Märkten vereinfachen. Weiter sind die bei einer Modellierung durch stochastische Prozesse oft einfacher zu handhabenden statistischen Eigenschaften von Renditen ein Grund für deren Anwendung (vgl. Franke [34], S. 29 f. und Weber [97], S. 8).

Im folgenden Abschnitt werden deshalb verschiedene Renditegrössen eingeführt.

3.2 Renditen

Grundlage für die Berechnung von Renditegrössen bilden die Preise einer Anlage zu verschiedenen Zeitpunkten. Die Preise werden im folgenden mit P_t notiert. Es gibt verschiedene Möglichkeiten Renditen zu definieren: Zum einen als arithmetische Wachstumsraten oder einfache Renditen, zum anderen als geometrische Wachstumsraten oder Log-Renditen (vgl. Franke [34], S. 123 f.).

3.2.1 Einfache Rendite

Die einfache Rendite R_t zwischen den Zeitpunkten t und $t-1$ wird definiert als

$$R_{t-1,t} = R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad .$$

Sollen einzelne Renditen einer Anlage über k Perioden derselben Länge aggregiert werden, ergibt sich

$$R_{t-k,t} = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}}$$

oder ausgedrückt in Renditen der Einzelperioden

$$\frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}} = \prod_{i=1}^{k} (R_{t-i+1} + 1) - 1 \quad .$$

Die Rendite R_t^P eines Portfolios, welches sich aus N verschiedenen Anlagen mit den Gewichten w_i ($\sum_{i=1}^N w_i = 1$) zusammensetzt, erhält man aus den Einzelrenditen R_t^i über

$$R_t^P = \sum_{i=1}^{N} w_i \; R_t^i \quad .$$

3.2.2 Log-Rendite

Die Log-Rendite r_t zwischen den Zeitpunkten t und $t-1$ wird definiert als

$$r_t = r_{t-1,t} = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad .$$

Eine Aggregation über k Einzelperioden erfolgt im Fall der Log-Renditen durch Summation der Einzelrenditen

$$r_{t-k,t} \quad = \quad \ln \frac{P_t}{P_{t-k}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} r_{t-i,t-i+1} \quad .
\end{aligned}
$$

Die Log-Rendite beschreibt den Fall der stetigen Verzinsung und lässt sich wie folgt veranschaulichen (vgl. Copeland und Weston [26], S. 851 ff.): Ausgangspunkt ist die einfache Rendite

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \quad .$$

Daraus erhält man die folgende Beziehung

$$P_t = (1 + R_t)\ P_{t-1}.$$

Teilt man die betrachtete Periode in q Teilperioden auf ergibt sich

$$P_t = \left(1 + \frac{r_t}{q}\right)^q P_{t-1} \quad ,$$

wobei $r_t < R_t$ ist, da Zinseszinseffekte innerhalb der Periode berücksichtigt werden. Erweitert man nun die Potenz q mit $\frac{r_t}{r_t}$ und setzt $q = \frac{q}{r_t} r_t$ erhält man

$$P_t = \left[\left(1 + \frac{r_t}{q}\right)^{\frac{q}{r_t}}\right]^{r_t} P_{t-1}.$$

Mit $m = \frac{q}{r_t}$ folgt

$$P_t = \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{r_t} P_{t-1}.$$

Steigert man die Anzahl der Teilperioden ergibt sich für $q \to \infty$ der stetige Fall. Diese Betrachtungsweise bietet sich z.B. für die Beschreibung der Wert- bzw. Kursentwicklung von Wertpapieren an. Aus der Definition der Eulerschen Konstanten $e = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ folgt

$$
\begin{aligned}
P_t &= e^{r_t} P_{t-1} \\
r_t &= ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)
\end{aligned}
$$

mit r_t als der Log-Rendite.

Die Rendite r_t^P eines Portfolios, welches sich aus N verschiedenen Anlagen mit den Gewichten w_i ($\sum_{i=1}^N w_i = 1$) zusammensetzt, erhält man aus den Einzelrenditen r_t^i über

$$r_t^P = \ln\left(\sum_{i=1}^{N} w_i \; e^{r_t^i}\right) \quad .$$

3.3 Stochastische Prozesse

Als mathematisches Modell zur Beschreibung zeitlicher Entwicklungen eignen sich im besonderen stochastische Prozesse und deren Simulation. Die folgenden Abschnitte enthalten eine kurze Einführung in die im Verlauf der Arbeit benötigten Konzepte.

3.3.1 Definition eines stochastischen Prozesses

Ein stochastischer Prozess ist definiert als eine Familie von Zufallsvariablen

$$\{X(t), t \in T\} \quad .$$

Mit t wird in der Regel die Zeit bezeichnet. Ist $T \subseteq \mathbb{R}^+$ wird von einem zeitkontinuierlichen Prozess, für[1] $T \subseteq \mathbb{N}_0$ von einem zeitdiskreten Prozess gesprochen. Eine Realisierung $x(t), t \in T$ nennt man Pfad oder Trajektorie des Prozesses (vgl. Mikosch [67], S. 23 und Ross [81], S. 77).

3.3.2 Zeitkontinuierliche oder zeitdiskrete Betrachtung

Die Beschreibung der Preisentwicklung einer Anlage erfolgt in der vorliegenden Arbeit über zeitdiskrete Prozesse. Dies ist zunächst auch naheliegend, da die Erhebung von Stichproben, Parameterschätzungen und Simulation auf einer diskreten Betrachtung basieren. Oft werden aber zeitstetige Modelle zur Beschreibung der Preisbewegungen von Anlagen herangezogen. Für eine zeitstetige Betrachtung sprechen vor allem mathematische und methodische Gründe. Einige wichtige mathematische Konzepte, die zum Beispiel bei der Bewertung von Optionen zur Anwendung kommen, sind nur im kontinuierlichen Fall definiert (vgl. Campbell

[1] $\mathbb{N}_0$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen inklusive der Null

et al. [24], S. 381 f.). Solche Konzepte, welche die stetige Betrachtung vorziehen lassen, kommen in der vorliegenden Arbeit nicht zur Anwendung, so dass die einfachere zeitdiskrete Modellierung gewählt wird. Ein zeitdiskreter Prozess wird im folgenden mit

$$\{X_t, t = 0, 1, \ldots\}$$

notiert und die Wahrscheinlichkeitsfunktion eines Zufallsvektors $\{X_0, \ldots, X_n\}$ mit

$$f_{X_0,\ldots,X_n}(x_0, \ldots, x_n) \quad .$$

3.3.3 Markov Prozesse

Im einfachsten Fall eines stochastischen Prozesses sind die Zufallsvariablen zu verschiedenen Zeitpunkten unabhängig voneinander. Eine Realisierung eines solchen Prozesses zu einem bestimmten Zeitpunkt hängt dann nicht von denjenigen zu anderen Zeitpunkten ab. Es ist aber naheliegend davon auszugehen, dass die meisten zeitlichen Abläufe Abhängigkeiten von ihrer Vergangenheit aufweisen. Auf der anderen Seite könnte eine vollständige Abbildung aller zeitlichen Abhängigkeiten zwar ein realitätsnahes Abbild der Wirklichkeit liefern, hätte aber grosse Schwierigkeiten in der Modellierung zur Folge. Ein Kompromiss zwischen der Abhängigkeit von der gesamten Vergangenheit und der völligen Unabhängigkeit, stellen die Markov Prozesse dar. Bei dieser Klasse von stochastischen Prozessen wird nur die Abhängigkeit vom letzten Zeitpunkt modelliert. Dafür wird angenommen, dass die gesamte für die Zukunft relevante Information in der Gegenwart vorhanden ist. Dies scheint ein akzeptabler Kompromiss zu sein und Markov Prozesse finden deshalb auch breite Anwendung (vgl. Gardiner [37], S. 43, Weber [97], S. 11 f., Winkler [99], S. 11 f.).

Ein stochastischer Prozess $\{X_t, t = 0, 1, \ldots\}$ mit der Zustandsmenge[2] Z für den die Markov Bedingung

$$f_{X_{t+1}}(x_{t+1} \mid x_t, x_{t-1}, \ldots, x_0) = f_{X_{t+1}}(x_{t+1} \mid x_t) \quad ,$$

[2] Die Zustandsmenge umfasst alle möglichen Zustände, welche die Zufallsvariable X_t annehmen kann.

für alle $t \in T$ und alle $x_0, \ldots, x_{t+1} \in Z$ gilt, heisst zeitdiskreter Markov Prozess. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $f_{X_{t+1}}(x_{t+1} \mid x_t)$, werden als Übergangswahrscheinlichkeiten bezeichnet (vgl. Ross [81], S. 157).

Ein Markov Prozess ist eindeutig durch einen Startzustand X_0 und die Übergangswahrscheinlichkeiten bestimmt. Die Verteilung eines zeitdiskreten Markov Prozesses $\{X_0, \ldots, X_n\}$ lässt sich demnach wie folgt ermitteln:

$$\begin{aligned} &f_{X_0,\ldots,X_n}(x_0, \ldots, x_n) = \\ &\quad = f_{X_n}(x_n \mid x_{n-1}) \cdot f_{X_{n-1}}(x_{n-1} \mid x_{n-2}) \cdot \ldots \cdot f_{X_0}(x_0) \quad . \end{aligned}$$

In den folgenden zwei Abschnitten wird auf zwei grundlegende stochastische Prozesse eingegangen, die in der Analyse von Finanzdaten eine wichtige Rolle spielen. Beide Prozesse gehören zur Klasse der Markovprozesse (vgl. Ross [81], S. 157).

3.3.4 Random Walk

Ein stochastischer Prozess X_t heisst Random Walk, wenn er sich darstellen lässt als (vgl. Franke [34], S. 120)

$$X_t = \mu + X_{t-1} + \epsilon_t \qquad \text{mit } \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad . \tag{3.1}$$

Für X_t lässt sich auch schreiben

$$X_t = X_s + \sum_{i=s+1}^{t} (\mu + \epsilon_i) = X_s + (t-s)\mu + \sum_{i=s+1}^{t} \epsilon_i \qquad \text{mit } \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad .$$

Es wird nun angenommen, dass der natürliche Logarithmus des Preises einer Anlage $X_t = \ln P_t$ einem Random Walk folgt. Für die Verteilung der Log-Rendite

$$r_{s,t} = \ln\left(\frac{P_t}{P_s}\right) = X_t - X_s = (t-s)\mu + \sum_{i=s+1}^{t} \epsilon_i$$

erhält man somit

$$r_{s,t} \sim N\left((t-s)\mu, (t-s)\sigma^2\right) \quad .$$

Man erkennt, dass die k-periodigen Renditen $r_{t-k,t}$ (für $t = 0, \ldots, T$) bei Annahme eines Random Walk für den logarithmischen Assetpreis unabhängig und identisch verteilt sind.[3]

Diese Annahme ist weit verbreitet und geht auf Louis Bachelier (vgl. Bachelier [5]) zurück, der in seiner 1900 eingereichten Dissertation, Börsenkurse mit Hilfe der Brownschen Bewegung zu beschreiben versuchte. Populär wurde der Ansatz durch die Arbeiten von Black und Scholes sowie die Arbeiten von Merton zur Bewertung von Optionen, die für die Modellierung der Aktienpreisdynamik ebenfalls die geometrische Brownsche Bewegung verwendeten (vgl. Black und Scholes [8], Merton [65]). Aus der geometrischen Brownschen Bewegung für den Aktienpreis, folgt ein allgemeiner Wiener Prozess für die Entwicklung des Logarithmus des Aktienpreises, dessen diskrete Interpretation dem Random Walk entspricht (vgl. Anhang E.2).

3.3.5 Mean Reversion Prozess

Eine populäre Alternative zum Random Walk zur Beschreibung des zeitlichen Verhaltens der Preise von Vermögensanlagen ist die sogenannte Mean Reversion-Eigenschaft. Mean Reversion bezeichnet in Bezug auf das Verhalten von Preisen, die Tendenz einer Veränderung des Preises in Richtung seines langfristigen Mittels als Reaktion auf eine vorangegangene Veränderung des Preises. Dabei kann die Bewegung zurück zum langfristigen Mittel mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bzw. Stärken erfolgen. Im Extremfall wird die vorangegangene Abweichung vom langfristigen Mittel in der nächsten Periode ausgeglichen. Das Konzept eines zu seinem langfristigen Mittel zurückkehrenden Prozesses ist recht weit, so dass es viele formale Definitionen für die Mean Reversion-Eigenschaft gibt. Eine mögliche Definition wird nachfolgend dargestellt.

[3] oft abgekürzt mit i.i.d.: identically and independently distributed.

Ein stochastischer Prozess X_t wird hier als Mean Reversion Prozess bezeichnet, wenn er sich wie folgt repräsentieren lässt:

$$X_t = \mu + X_{t-1} + \gamma \left[M_0 + \mu(t-1) - X_{t-1}\right] + \epsilon_t \qquad \text{mit } \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2).$$

Der Mean Reversion Prozess unterscheidet sich vom Random Walk durch den Ausdruck

$$\gamma \left[M_0 + \mu(t-1) - X_{t-1}\right] \quad ,$$

wobei M_0 den Wert des langfristigen Mittels bzw. Trends zum Zeitpunkt null bezeichnet. Durch den Mean Reversion-Teil wird der Prozess hin zum langfristigen Mittel korrigiert, wobei die Stärke dieser Korrektur durch den Parameter γ gegeben ist.[4]

Um die Verteilungseigenschaften zu erkennen, schreibt man

$$\begin{aligned} X_t &= \mu + X_{t-1} + \gamma[M_0 + \mu(t-1) - X_{t-1}] + \epsilon_t \\ &= a + bt + cX_{t-1} + \epsilon_t \quad , \end{aligned} \tag{3.2}$$

mit $a = \mu + \gamma M_0 - \gamma\mu$, $b = \mu\gamma$ und $c = 1 - \gamma$. Durch iterative Substitution ergibt sich

$$\begin{aligned} &X_t = \\ &a[1 + c + c^2 + \ldots + c^{t-s-1}] \\ &+b[t + (t-1)c + (t-2)c^2 + \ldots + (s+2)c^{t-s-2} + (s+1)c^{t-s-1}] \\ &+c^{t-s}X_s \\ &+\textstyle\sum_{i=s+1}^{t} c^{t-i}\epsilon_i \quad . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Für $\gamma = 0$ (und damit $a = \mu$, $b = 0$ und $c = 1$) erhält man den Fall, in welchem der Mean Reversion Prozess zum Random Walk degeneriert:

$$X_t = \mu(t-s) + X_s + \sum_{i=s+1}^{t} \epsilon_i \quad .$$

[4] Für $\gamma < 0$ spricht man auch von Mean Aversion.

Ersetzt man für $0 < \gamma \leq 1$ die Reihen[5] in (3.3) resultiert

$$X_t = a\frac{1 - c^{t-s}}{1 - c} + \frac{b}{1 - c}\left[t - (s + 1)c^{t-s} - c\frac{1 - c^{t-s-1}}{1 - c}\right] + c^{t-s}X_s + \sum_{i=s+1}^{t} c^{t-i}\epsilon_i \quad .$$

Setzt man wieder $a = \mu + \gamma M_0 - \gamma\mu$, $b = \mu\gamma$ und $c = 1 - \gamma$ erhält man

$$X_t = X_s + (t - s)\mu + (1 - (1 - \gamma)^{t-s})(M_0 + s\mu - X_s) + \sum_{i=s+1}^{t} (1 - \gamma)^{t-i}\epsilon_i \quad .$$

Es wird nun angenommen, dass der natürliche Logarithmus des Preises einer Anlage $X_t = \ln P_t$ einem Mean Reversion Prozess folgt. Für die stetige Rendite

$$r_{s,t} = \ln\left(\frac{P_t}{P_s}\right) = X_t - X_s$$

ergibt sich

$$r_{s,t} = (t - s)\mu + (1 - (1 - \gamma)^{t-s})(M_0 + s\mu - X_s) + \sum_{i=s+1}^{t} (1 - \gamma)^{t-i}\epsilon_i \quad .$$

Man erkennt, dass bei Annahme des Mean Reversion Prozesses, im Gegensatz zum Random Walk, die k-periodigen Renditen nicht mehr unabhängig und identisch verteilt sind. Im folgenden wird deshalb die Rendite $r_{s,t}$ zum Zeitpunkt s betrachtet, d.h. ausgehend von einer bekannten Realisierung x_s für X_s. Die Rendite $r_{s,t}$ ist dann gegeben über

$$r_{s,t} = (t - s)\mu + (1 - (1 - \gamma)^{t-s})(M_0 + s\mu - x_s) + \sum_{i=s+1}^{t} (1 - \gamma)^{t-i}\epsilon_i$$

---

[5] Die Reihen in (3.3) und (3.4) werden wie folgt ersetzt (vgl. Leydold [57], S. 84 f.):

$$\begin{aligned}
S_t &= 1 + c + c^2 + \ldots + c^{t-s-1} \\
cS_t &= c + c^2 + \ldots + c^{t-s} \\
S_t - cS_k &= 1 - c^{t-s} \\
S_t &= \tfrac{1-c^{t-s}}{1-c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_t &= t + (t-1)c + (t-2)c^2 + \ldots + (s+2)c^{t-s-2} + (s+1)c^{t-s-1} \\
cG_t &= tc + (t-1)c^2 + (t-2)c^3 + \ldots + (s+2)c^{t-s-1} + (s+1)c^{t-s} \\
G_t - cG_t &= t - (s+1)c^{t-s} - c[1 + c + c^2 + \ldots + c^{t-s-2}] \\
G_t &= \tfrac{1}{1-c}\left[t - (s+1)c^{t-s} - c\tfrac{1-c^{t-s-1}}{1-c}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_t &= 1 + c^2 + c^4 + \ldots + c^{2(t-s-1)} \\
c^2T_t &= c^2 + c^4 + \ldots + c^{2(t-s)} \\
T_t - c^2T_t &= 1 - c^{2(t-s)} \\
T_t &= \tfrac{1-c^{2(t-s)}}{1-c^2}
\end{aligned}$$

und es gilt

$$E[r_{s,t}] = \mu_{s,t} = (t-s)\mu + (1-(1-\gamma)^{t-s})(M_0 + s\mu - x_s)$$

und

$$var[r_{s,t}] = \sigma^2_{s,t} = \sum_{i=s+1}^{t} (1-\gamma)^{2(t-i)} \underbrace{var[\epsilon_i]}_{=\sigma^2} \tag{3.4}$$

Wiederum durch Ersetzen der Reihe[5] in (3.4) ergibt sich

$$var[r_{s,t}] = \sigma^2_{s,t} = \sigma^2 \frac{1-(1-\gamma)^{2(t-s)}}{1-(1-\gamma)^2}$$

Für die Verteilung der Log-Rendite $r_{s,t}$ zum Zeitpunkt s erhält man folglich

$$r_{s,t} \sim N\left(\mu_{s,t}\ ,\ \sigma^2_{s,t}\right) \quad .$$

Hervorzuheben ist, dass bei gegebenen Parameter γ, die Varianz auch hier nur von der betrachteten Zeitdifferenz $t-s$ abhängt.

Einen solchen Mean Reversion Prozess zur Beschreibung der Preisdynamik von Anlagen findet man z.B. bei Kim [50], Hillebrand [43] und bei Metcalf und Hasset [66], wobei die zwei zuletzt genannten einer stetigen Modellierung den Vorzug geben. Einen weiteren ähnlichen Mean Reversion Ansatz mit einem über die Zeit wachsenden Mittel findet man bei Andersson [4]. In Schwartz [85] wird die Mean Reversion Eigenschaft als Tendenz des Preises zu einem langfristigen konstanten Mittel modelliert, indem für die Preisdynamik ein geometrischer Ornstein-Uhlenbeck Prozess angenommen wird.

3.3.6 Parameterschätzung

Ausgehend von einem Pfad $(x_0, \ldots, x_t)$ können die Parameter des Random Walk, aufgrund der Eigenschaft der unabhängig und identisch verteilten k-periodigen Renditen, wie folgt geschätzt werden:

$\hat{\mu} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} X_i - X_{i-1} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} r_{i-1,i}$ Arithmetisches Mittel

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{t-1}\sum_{i=1}^{t}(X_i - X_{i-1} - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{t-1}\sum_{i=1}^{t}(r_{i-1,i} - \hat{\mu})^2$ Stichprobenvarianz

Zur Schätzung der Parameter des Mean Reversion Prozesses gibt es kein Standardvorgehen. Das im folgenden angewendete Vorgehen lehnt sich an Harvey (vgl. Harvey [41], S. 481 f.) und Andersson (vgl. Andersson [4], S. 26 ff.) an. Als Ausgangspunkt sei wieder ein Pfad $(x_0, \ldots, x_t)$ gegeben. Ausgehend von (3.2) lassen sich die Parameter über eine lineare Mehrfachregression mit folgendem Ansatz schätzen:

$$X_t = a + bt + cX_{t-1} + \epsilon_t \quad .$$

Ein Problem dieses Ansatzes ist, dass mit Multikollinearität zu rechnen ist, weil die Log-Preise X_{t-1} tendenziell über die Zeit hinweg ansteigen und somit davon auszugehen ist, dass X_{t-1} und t korrelieren. Dadurch werden die Parameterschätzungen wenig zuverlässig. Ein typisches Vorgehen zur Beseitigung von Multikollinearität ist das Auslassen einiger der korrelierten Variablen. Dies wird hier damit erreicht, indem für den Trend μ eine separate Schätzung herangezogen wird. In diesem Fall ist es naheliegend, den für den Random Walk geschätzten Trend auch als Schätzung für den Mean Reversion Prozess heranzuziehen, was den weiteren Vorteil hat, dass es den Vergleich zwischen Random Walk und Mean Reversion Prozess vereinfacht. Damit erhält man aus (3.2) folgenden Einfachregressionsansatz

$$Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + \epsilon_t \quad ,$$

mit $Y_t = X_t - \hat{\mu}t$, $\alpha = \gamma M_0$ und $\beta = 1 - \gamma$. Daraus folgen als KQ-Schätzer:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t - t\hat{\mu}) - \hat{\beta}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_{t-1} - (t-1)\hat{\mu})$$

und

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[x_t - t\hat{\mu} - \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t - t\hat{\mu})][x_{t-1} - (t-1)\hat{\mu} - \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_{t-1} - (t-1)\hat{\mu})]}{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[x_{t-1} - (t-1)\hat{\mu} - \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_{t-1} - (t-1)\hat{\mu})]^2} \quad .$$

Die Schätzung der (Residual-)Varianz erfolgt über

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n-2}\sum_{t=1}^{n} e_t^2$$

mit $e_t = y_t - \hat{y}_t$ $(t = 1, \ldots, n)$ und $\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}y_{t-1}$.

Ein alternatives Vorgehen ist in Hillebrand [43], S. 62 zu finden. Die Parameterschätzung erfolgt dort durch eine Maximum-Likelihood Schätzung, wobei zur Maximierung der Log-Likelihood-Funktion numerische Verfahren angewendet werden.

3.3.7 Vergleich von Random Walk und Mean Reversion Prozess

Die beiden Prozesse lassen sich, ausgehend vom Startwert x_0, wie folgt darstellen:

$$\begin{array}{ll} X_t = x_0 + t\mu + \sum_{i=1}^{t} \epsilon_i & \text{Random Walk} \\ X_t = x_0 + t\mu + (1-(1-\gamma)^t)(M_0 - x_0) + \sum_{i=1}^{t}(1-\gamma)^{t-i}\epsilon_i & \text{Mean Reversion} \end{array}$$

Der Random Walk und der Mean Reversion Prozess sollen nun verglichen werden in Bezug auf die Veränderung der Renditeverteilungen über die Zeit hinweg. Dabei wird von gleichen Werten für μ, σ^2 und gleichem Startwert x_0, sowie von $x_0 = M_0$ und $0 \leq \gamma \leq 1$ ausgegangen. Betrachtet werden die Renditen $r_{0,t}$ und $r_{t,t+1}$.

Für die stetige Rendite $r_{0,t}$ erhält man die folgende Verteilung zum Zeitpunkt 0:

$$r_{0,t}^{RW} \sim N(t\mu, t\sigma^2)$$

bei Annahme eines Random Walk und

$$\begin{array}{ll} r_{0,t}^{MR} \sim N(t\mu, \sigma^2 \frac{1-(1-\gamma)^{2t}}{1-(1-\gamma)^2}) & \text{für } \gamma \neq 0 \text{ und} \\ r_{0,t}^{MR} \sim N(t\mu, t\sigma^2) & \text{für } \gamma = 0 \end{array}$$

bei Annahme eines Mean Reversion Prozesses. Vergleicht man diese Verteilungen lassen sich folgende Aussagen treffen:

- Für $\gamma = 0$ resultieren für Mean Reversion Prozess und Random Walk die selben Verteilungen.
- Für $t = 1$ haben $r_{0,1}^{RW}$ und $r_{0,1}^{MR}$, da der erste Schritt unter den getroffenen Annahmen bei beiden Prozessen gleich ist, ebenfalls die selbe Verteilung: $r_{0,1} \sim N(\mu, \sigma^2)$.
- Die Erwartungswerte für $r_{0,t}^{RW}$ und $r_{0,t}^{MR}$ $(t = 1, \ldots, T)$ sind gleich.

- Die Varianz für $r_{0,t}^{RW}$ strebt für $t \to \infty$ gegen unendlich. Die Varianz für $r_{0,t}^{MR}$ hingegen strebt für $t \to \infty$ gegen $\frac{\sigma^2}{1-(1-\gamma)^2}$.

Für die stetige Rendite $r_{t,t+1}$ erhält man für die Verteilung zum Zeitpunkt t

$$r_{t,t+1}^{RW} \sim N(\mu, \sigma^2)$$

bei Annahme eines Random Walk und

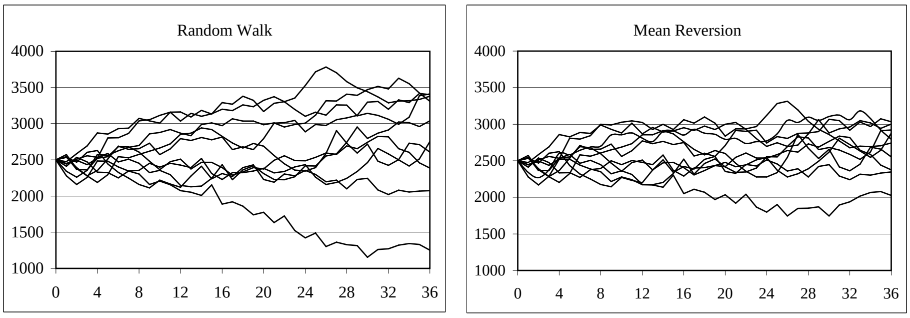
$$r_{t,t+1}^{MR} \sim N(\mu + \gamma[x_0 + \mu t - x_t], \sigma^2)$$

bei Annahme eines Mean Reversion Prozesses. Folgende Aussagen lassen sich dann treffen:

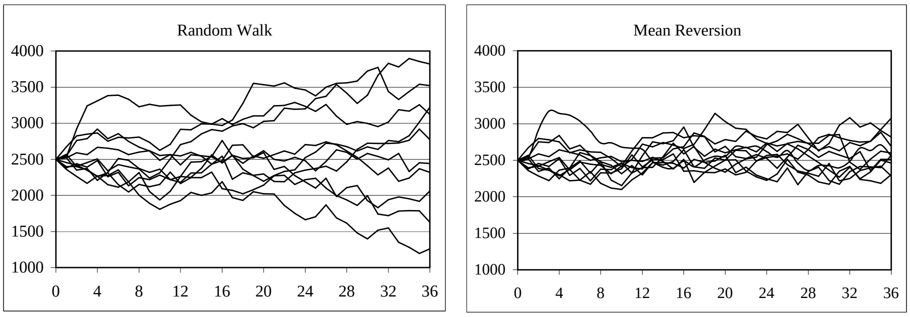
- Für $\gamma = 0$ ergeben sich auch hier wieder für Mean Reversion Prozess und Random Walk die selben Verteilungen.
- Für $r_{0,1}^{RW}$ und $r_{0,1}^{MR}$ resultiert die selbe Verteilung.
- Die Varianz für die einperiodige Rendite $r_{t,t+1}$ ist bei beiden Prozessen gleich.
- Der Unterschied bei den Erwartungswerten für $r_{t,t+1}^{RW}$ und $r_{t,t+1}^{MR}$ spiegelt die beim Mean Reversion Prozess stattfindende Korrektur zum langfristigen Mittel wieder.

In der Abbildung 3.1 sind 10 simulierte Pfade für den Logarithmus des Assetpreises nach Random Walk und Mean Reversion Modell, bei Verwendung der selben Realisierungen für ϵ_t, für jeweils unterschiedliche Mean Reversion Geschwindigkeiten γ, graphisch gegenübergestellt. Zur besseren Anschauung wurden die x_t eines Pfades miteinander verbunden.

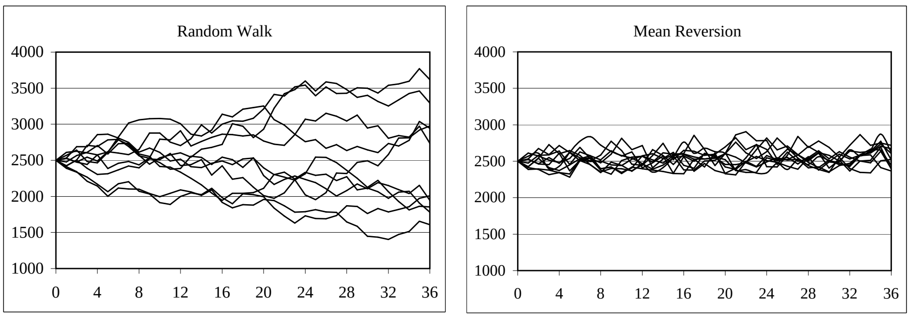
Beim obigen Vergleich von Random Walk und Mean Reversion Prozess wurde für den Mean Reversion Prozess von $M_0 = x_0$ ausgegangen, d.h. dass der Startwert sich im langfristigen Mittel befindet. Geht man davon aus, dass der Startwert



Gamma = 0.05



Gamma = 0.15



Gamma = 0.5

Abbildung 3.1: Vergleich von Pfaden des Assetpreises x_t nach dem Random Walk und dem Mean Reversion Prozess mit den Parametern $x_0 = M_0 = 2'500$, $\sigma = 100$ und $\mu = 2$ (Zur besseren Anschauung wurden die x_t eines Pfades miteinander verbunden).

sich nicht im langfristigen Mittel befindet, d.h. von $M_0 \neq x_0$, erhält man für den Mean Reversion Prozess die folgenden Renditeverteilungen:

$$r_{0,t}^{MR} \sim N\left(t\mu + (1-(1-\gamma)^t)(M_0 - x_0),\ \sigma^2 \frac{1-(1-\gamma)^{2t}}{1-(1-\gamma)^2}\right)$$

und

$$r_{t,t+1}^{MR} \sim N\left(\mu + \gamma[M_0 + \mu t - x_t],\ \sigma^2\right).$$

Man erkennt, dass der Erwartungswert von $r_{0,t}^{MR}$ für grosse t gegen $t\mu + M_0 - x_0$ strebt und damit die anfängliche Auslenkung vom langfristigen Mittel zunehmend ausgeglichen wird .

Als Beispiel werden abschliessend Schätzergebnisse für den S&P500-Index betrachtet, welche in der Abbildung 3.2 dargestellt sind. Auch hier wurden die x_t eines Pfades zur besseren Anschauung wieder miteinander verbunden. Die Schätzung erfolgte mit dem oben beschriebenen Vorgehen, wobei als Datengrundlage die Monatsendkurse im Zeitraums von Januar 1986 bis Mai 2000 herangezogen wurden. Für σ^2 erhält man für beide Prozesse praktisch den gleichen Schätzwert. Der Unterschied zwischen den beiden Prozessen wird vor allem aus der Entwicklung der Konfidenzintervalle deutlich, die für einen längeren Zeitraum beim Mean Reversion Prozess deutlich schmaler werden, trotz eines nur recht geringen Schätzwertes für γ von 0.04923.

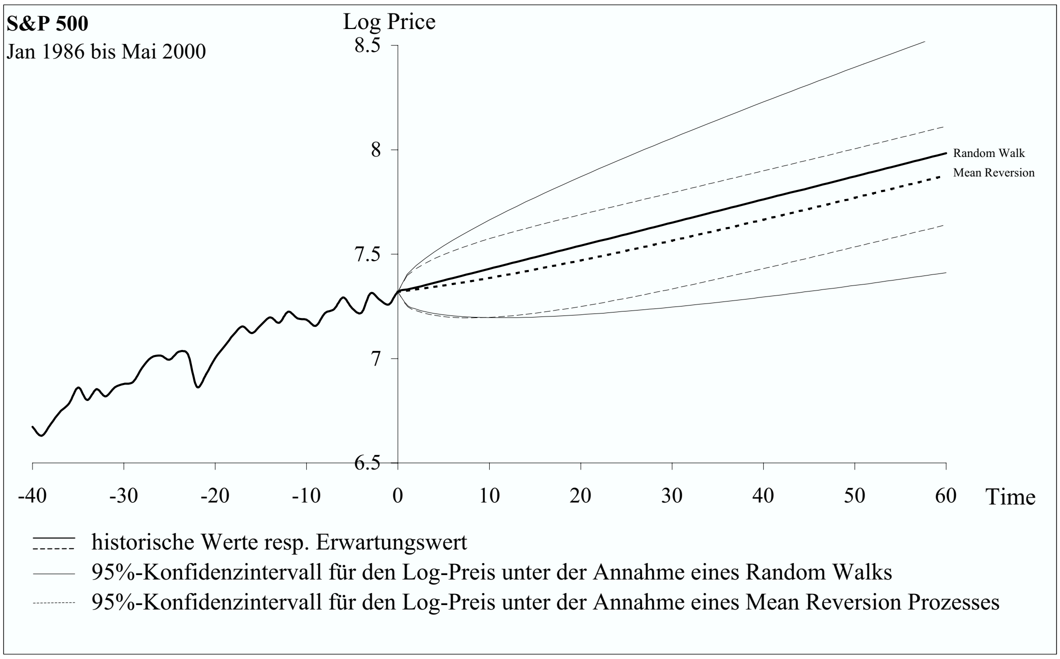
3.3.8 Variance Ratio

Die Variance Ratio ist definiert als

$$VR(q) = \frac{\sigma^2(q)}{q\ \sigma^2(1)} \quad ,$$

mit $\sigma^2(q)$ als der Varianz von $r_{0,q}$ und $\sigma^2(1)$ als der Varianz von $r_{0,1}$. Die Variance Ratio ist vor allem in sogenannten Variance Ratio Tests als Test-Statistik von Bedeutung (vgl. Cochrane [25], Lo und MacKinlay [58]). Dabei wird die Eigenschaft der beim Random Walk linear mit dem Zeithorizont wachsenden Varianz[6] ausgenützt, um zu testen, ob eine Zeitreihe einem Random Walk folgt. Für einen

[6] Diese Eigenschaft wird oft auch als ,,square root of time rule" bezeichnet.



S&P 500 - Monatsendkurse von Januar 1986 - Mai 2000

Schätzwerte	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\gamma}$	$\hat{M}_0$
Random Walk	0.01107	0.00202	-	-
Mean Reversion	0.01107	0.00198	0.04923	5.24374

Abbildung 3.2: 95%-Konfidenzintervalle und Erwartungswert für die Entwicklung des Log-Preises des S&P500.

Random Walk ist die Variance Ratio aufgrund dieser Eigenschaft immer gleich eins. Bei einem Mean Reversion Prozess hingegen sinkt die Variance Ratio ausgehend von $q = 1$ für $q \to \infty$ von eins auf null. Die Entwicklung der Variance Ratio über länger werdende Zeithorizonte kann deshalb auch als Mass für die Stärke der Mean Reversion-Eigenschaften einer Zeitreihe interpretiert werden (vgl. Kim [50], S. 9). Dazu müssen die empirischen Variance Ratios geschätzt werden.

Ausgangspunkt sind folgende $nq + 1$ Beobachtungen des logarithmischen Assetpreises[7]

$$x_0, x_1, \ldots, x_{nq}$$

als Realisierungen von $X_0, \ldots, X_{nq}$. Daraus ergeben sich die einperiodigen bzw. q-periodigen historischen Log-Renditen

$$\begin{aligned} r_1^k &= x_k - x_{k-1} \text{ , mit } k = 1, \ldots, nq \\ r_q^k &= x_k - x_{k-q} \text{ , mit } k = q, \ldots, nq \end{aligned}$$

Zur Schätzung der empirischen Variance Ratio definiert man, ausgehend von der Nullhypothese des Random Walk,[8] folgende Schätzer:

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}(1) = \frac{1}{nq} \sum_{k=1}^{nq} (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{nq}(x_{nq} - x_0)$$

$$\hat{\mu}(k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_{kq} - x_{kq-q}) = \frac{1}{n}(x_{nq} - x_0) = q\hat{\mu}$$

$$\bar{\sigma}_a^2(1) = \frac{1}{nq} \sum_{k=1}^{nq} (x_k - x_{k-1} - \hat{\mu})^2$$

$$\bar{\sigma}_b^2(q) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_{kq} - x_{kq-q} - q\hat{\mu})^2$$

Verwendet man überlappende q-periodige Renditen erhöht sich die Effizienz des Schätzers $\hat{\sigma}_b^2(q)$:

$$\bar{\sigma}_c^2(q) = \frac{1}{nq} \sum_{k=q}^{nq} (x_k - x_{k-q} - q\hat{\mu})^2 \quad .$$

[7] q und n sind beliebige ganze Zahlen grösser als eins

[8] Beim Random Walk gilt für die q-periodigen Renditen r_q, dass sie unabhängig und identisch verteilt (i.i.d) sind. Damit lassen sich die Renditen r_q^k (k=q,. . . ,nq) als Realisierungen der selben Zufallsvariablen interpretieren und daraus Schätzungen ableiten.

Diese Schätzer $\hat{\sigma}_a^2(1)$ und $\hat{\sigma}_c^2(q)$ sind allerdings verzerrt und werden deshalb wie folgt angepasst (vgl. auch Anhang E.3):

$$\hat{\sigma}_a^2(1) = \frac{1}{nq-1}\sum_{k=1}^{nq}(x_k - x_{k-1} - \hat{\mu})^2$$

$$\hat{\sigma}_c^2(q) = \frac{1}{(nq-q+1)(1-\frac{q}{nq})}\sum_{k=q}^{nq}(x_k - x_{k-q} - q\hat{\mu})^2$$

Die Schätzung der empirischen Variance Ratio erfolgt schlussendlich über

$$\widehat{VR}(q) = \frac{\hat{\sigma}_c^2(q)}{q\hat{\sigma}_a^2(1)} \quad .$$

Der Variance Ratio-Test überprüft nun, um die Nullhypothese des Random Walk zu verwerfen, ob die empirische Variance Ratio signifikant von eins abweicht. Eine ausführliche Besprechung der Variance Ratio und des Variance Ratio Tests findet man bei Lo und MacKinlay [58], S. 19 ff. und [59], S. 47 ff. sowie bei Bodmer [9], S. 131 ff.

In der vorliegenden Arbeit wird bei empirischen Variance Ratios, die zunehmend vom Wert eins abweichen, von Mean Reversion Eigenschaften in der Zeitreihe ausgegangen, wobei die Höhe der Abweichung die Stärke der Mean Reversion anzeigt.[9] Die Abbildung 3.3 veranschaulicht den Inhalt dieses Abschnitts wiederum anhand eines Beispiels mit den Monatsendkursen des S&P500-Indexes im Zeitraums von Januar 1986 bis Mai 2000.

3.4 Simulation stochastischer Prozesse

In diesem Abschnitt wird auf die Simulation von stochastischen Prozessen eingegangen. Unter Simulation wird hier die Generierung von Pfaden als mögliche Realisierungen des Prozesses verstanden. Allgemein kann eine Simulation wie folgt beschrieben werden:

1) Generierung von M Pfaden $\{x_0^i, \ldots, x_t^i, \ldots, x_T^i\}$, mit $i = 1, \ldots, M$. Auf die Generierung von Pfaden wird in den folgenden Abschnitten genauer eingegangen.

[9] Dies entspricht dem Vorgehen in Kim [50], S. 9.

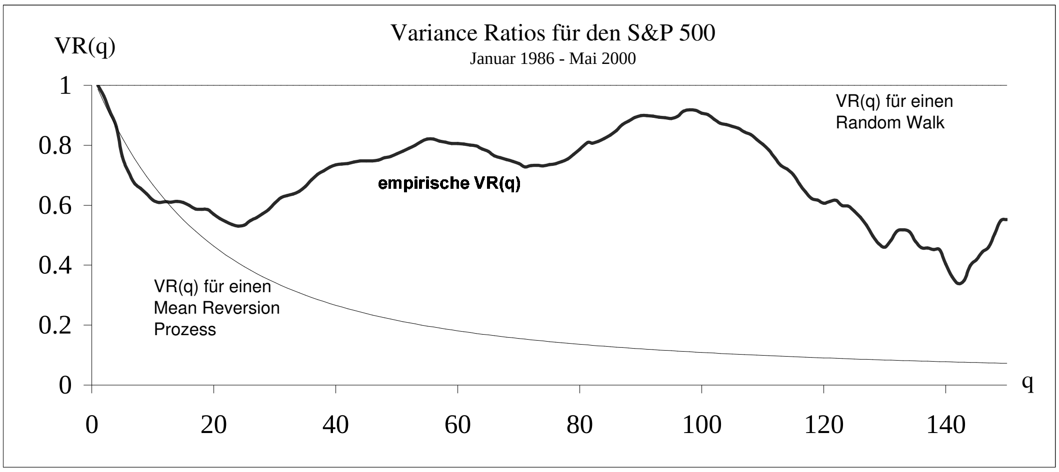


Abbildung 3.3: Variance Ratios VR(q) für den S&P500 auf der Datengrundlage der Monatsendkurse von Januar 1986 bis Mai 2000.

2) Ableitung von simulierten Stichproben $\{x_t^1, \ldots, x_t^i, \ldots, x_t^M\}$ für den Zustand X_t des Prozesses zu den verschiedenen Zeitpunkten $t = 1, \ldots, T$.

Aus diesen simulierten Stichproben lassen sich dann statistische Grössen schätzen oder andere Aussagen ableiten. In den folgenden Abschnitten wird auf die Generierung solcher Pfade weiter eingegangen. Dafür werden drei Beispiele betrachtet: Zunächst ein zeitdiskreter Markov Prozess mit diskreter Zustandsmenge, danach ein Random Walk und als drittes die gemeinsame Simulation mehrerer Prozesse.

3.4.1 Simulation eines diskreten Markov Prozesses

Betrachtet wird ein diskreter Markovprozess $\{X_t, t = 0, 1, \ldots, T\}$ mit diskreter Zustandsmenge[10] $Z = \{0, \ldots, i, \ldots, N\}$, Startzustand $x_0 = i$ und den Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{t+1}(j \mid i) = f_{X_{t+1}}(j \mid i)$, mit $j = x_{t+1}, i = x_t, i, j \in Z$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt $t + 1$ der Zustand j eintritt, wenn im Zeitpunkt t der Zustand i vorliegt (vgl. Winkler [99], S. 12).

[10] Es wird hier beispielhaft eine eindimensionale Zustandsmenge betrachtet. Das Vorgehen für eine mehrdimensionale Zustandsmengen ist entsprechend.

Soll nun ein Pfad für diesen Prozess generiert werden, muss für jede Zufallsvariable X_t $(t = 1, \dots, T)$ eine Realisierung bestimmt werden, wobei X_t Werte aus der Menge $Z = \{0, \dots, j, \dots, \dots, N\}$ bei gegebenen $x_{t-1} = i$, jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $P_t(0 \mid i), \dots, P_t(N \mid i)$ annimmt.

In einem ersten Schritt generiert man mit einem Zufallszahlgenerator T auf dem Einheitsintervall $(0, 1]$ gleichverteilte Zufallszahlen u_t (vgl. Abschnittes 3.4.4). Dann wird das Einheitsintervall $(0, 1]$ in N sukzessive Intervalle $I_{ik} = (a_k, a_{k+1}]$, der Längen $P_t(k \mid i) = a_{k+1} - a_k$ (für alle $i, k = 0, \dots, N$) partitioniert. Eine Realisierung x_t bei gegebener Realisierung $x_{t-1} = i$ ergibt sich dann über die Zufallszahl u_t durch

$$x_t = k \text{ mit } u_t \in I_{ik} \quad .$$

Mit gegebenem Startzustand $x_0 = i$ kann so eine Realisierung bzw. ein Pfad des Prozesses generiert werden (vgl. Winkler [99], S. 17 f.).

3.4.2 Simulation eines Random Walk

Die Simulation eines Random Walk basiert auf der Gleichung (3.1)

$$X_t = \mu + X_{t-1} + \epsilon_t \quad ,$$

mit $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$. Damit lässt sich eine Realisierung x_t mit einer bekannten Realisierung x_{t-1} und einer Realisierung e_t der normalverteilten Zufallsvariablen ϵ_t bestimmen. Mit gegebenen Startzustand x_0 lässt sich so der gesamte Pfad generieren.

Besteht der zu generierende Pfad aus T Zeitschritten benötigt man insgesamt T $N(0, \sigma^2)$-verteilte Zufallszahlen. Ein Zufallszahlgenerator liefert in der Regel nur gleichverteilte Zufallszahlen. Daraus lassen sich aber mit Hilfe der sogenannten Koordinatentransformationsmethode (vgl. Honerkamp [44], S. 21) einfach normalverteilte Zufallszahlen erzeugen: Aus zwei in $(0, 1]$ gleichverteilten Zufallszahlen (u_1, u_2) bildet man dazu die beiden Werte

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{-2 \ln u_1} \cos(2\pi u_2) \quad \text{und} \\ z_2 &= \sqrt{-2 \ln u_1} \sin(2\pi u_2) \,, \end{aligned}$$

welche dann Realisierungen einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen darstellen. Man nennt diese Methode auch Box–Müller–Verfahren. Multipliziert mit der Standardabweichung σ erhält man daraus $N(0, \sigma^2)$-verteilte Zufallszahlen:

$$\begin{aligned} e_1 &= \sigma\ z_1 \quad \text{und} \\ e_2 &= \sigma\ z_2\,. \end{aligned}$$

Mit diesem Vorgehen lassen sich aus T gleichverteilten Zufallszahlen $(u_1, .., u_T)$ die benötigten $N(0, \sigma^2)$-verteilten Zufallszahlen $(e_1, .., e_T)$ erzeugen.

3.4.3 Gemeinsame Simulation mehrerer Prozesse

Im Gegensatz zu den vorigen Fällen wird jetzt die gemeinsame Simulation mehrerer Prozesse unter Beachtung ihrer Abhängigkeiten beschrieben. Für eine gemeinsame Simulation von n Prozessen müssen Realisierungen des Zufallsvektors

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_{1,1} \\ \vdots \\ X_{1,T} \\ \vdots \\ X_{n,1} \\ \vdots \\ X_{n,T} \end{pmatrix}$$

generiert werden. Hier soll nur auf den einfachen Fall eingegangen werden, für den $\mathbf{X}$ einer multivariaten Normalverteilung folgt. Die Abhängigkeiten zwischen und innerhalb der Prozesse sind dann eindeutig durch Korrelationen bestimmt. Die Simulation besteht somit im wesentlichen aus der Generierung von M Zufallszahlvektoren eben dieser multivariaten Normalverteilung, d.h. von Zufallszahlvektoren, die Realisierungen von $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ darstellen. Diese Zufallszahlvektoren erhält man mit folgendem Vorgehen: Gegeben seien $n \cdot T$ stochastisch unabhängige standardnormalverteilte Zufallszahlen z_t $(t = 1, \ldots, n \cdot T)$. Die Erzeugung solcher Zufallszahlen wurde im vorigen Abschnitt besprochen. Daraus bildet man den Zufallszahlvektor $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_{nT})'$. Weiter sei mit $\boldsymbol{\Sigma}$ die Kovarianzmatrix der interessierenden Normalverteilung gegeben und mit $\mathbf{B}$ die untere Dreiecksmatrix aus der Cholesky-Zerlegung von $\boldsymbol{\Sigma}$.[11] Betrachtet man dann die Transformation

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}$$

mit $\mathbf{B}\mathbf{B}' = \boldsymbol{\Sigma}$ und $Z \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, gilt (vgl. Fahrmeier et al., S. 23 f.)[12]

$$\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad .$$

Die gewünschten Zufallszahlvektoren $\mathbf{x}$ erhält man dann aus der Vorschrift

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{z} + \boldsymbol{\mu} \quad .$$

3.4.4 Generierung von Zufallszahlen

Zur Simulation von stochastischen Prozessen wurde in den vorigen Abschnitten auf gleichverteilte Zufallszahlen zurückgegriffen. Diese Zufallszahlen können mittels Zufallszahlgeneratoren in Computern erzeugt werden.

Zufallszahlgeneratoren berechnen Zufallszahlen mittels gewissen Algorithmen. Die berechneten Zufallszahlen sind also nicht wirklich zufällig. Gute Generatoren vermögen aber Zufallszahlen zu generieren, die mehr oder weniger die Eigenschaften echter Zufallszahlen besitzen. Man bezeichnet solche berechneten Zufallszahlen deshalb auch als Pseudo-Zufallszahlen. Oft sind die in Standardsoftware

[11] Cholesky-Zerlegung:
Für jede symmetrische und positiv definite $p \times p$ Matrix $\mathbf{S} = (s_{ij})$ gibt es (mindestens) eine untere $p \times p$ Dreiecksmatrix $\mathbf{B} = (b_{ij})$ für die

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}\mathbf{B}'$$

gilt. Diese Matrix $\mathbf{B}$ lässt sich mit einem einfachen Algorithmus berechnen (vgl. Anderson [3], S. 586.), indem die nachfolgenden Gleichungen für $i = 1, \ldots, p$ durchlaufen werden:

$$\begin{aligned} b_{ii} &= \left(s_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2 \right)^{1/2} \\ b_{ji} &= \frac{1}{b_{ii}} \left(s_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} b_{jk} \right) \qquad j = i+1, \ldots, p. \end{aligned}$$

[12] $\mathbf{I}$ bezeichnet die $nT \times nT$ Einheitsmatrix.

verfügbaren Zufallszahlgeneratoren unzureichend für die Zwecke umfangreicher Simulationen (vgl. Press et al. [76], S. 276). Im folgenden wird deshalb der Zufallszahlgenerator ,,ran1" von Numerical Recipes verwendet (vgl. Press et al. [76], S. 278 ff.). Dieser setzt sich aus dem Park-Miller Algorithmus, dem Schrage Algorithmus und einen Bays-Durham Shuffle zusammen.

Der Park-Miller Algorithmus basiert auf der linearen Kongruenzmethode und berechnet iterativ eine Reihe von Zufallszahlen nach der Vorschrift

$$I_{j+1} = (aI_j + b) \text{ mod m} \quad .$$[13]

Gemäss Park und Miller eignen sich als Werte besonders $a = 7^5 = 16807$, $b = 0$ und $m = 2^{31} - 1 = 2147483647$. Die so erzeugten Zufallszahlen sind gleichverteilt im Intervall $(0, m)$. Eine gleichverteilte Zufallszahl u aus $(0, 1)$ ergibt sich durch

$$u = \frac{I_j}{m} \quad .$$

Mit dem selben Anfangswert I_0 erhält man jeweils die selbe Folge von Zufallszahlen. Man lässt deshalb in der Regel den Anfangswert von der Systemzeit des Rechners abhängen.

Um diesen Generator universell, d.h. in verschiedenen Sprachen einsetzen zu können, wird der Schrage Algorithmus verwendet. Dies deshalb, da beim obigen Vorgehen während der Berechnung Werte auftreten können, die den maximalen Wert für eine 32-bit integer Variable überschreiten. Der Schrage Algorithmus umgeht dieses Problem indem er m ersetzt durch

$$m = aq + r \text{ mit } q = [m/a] \text{ und } r = \text{m mod a} \quad ,$$

wobei mit der eckigen Klammer der ganzzahlige Teil von $[\frac{m}{a}]$ bezeichnet wird. Es kann gezeigt werden, dass mit $r < q$

$$aI_j \text{ mod m} = \begin{cases} a(I_j \text{ mod q}) - r[z/q] & \text{falls } a(I_j \text{ mod q}) - r[z/q] > 0 \\ a(I_j \text{ mod q}) - r[z/q] + m & \text{sonst.} \end{cases}$$

[13] Die Operation x mod m lässt sich auch wie folgt darstellen: x mod m $= x - m * [\frac{x}{m}]$, wobei die eckigen Klammern den ganzzahligen Teil von $[\frac{x}{m}]$ bezeichnen. D.h. der Rest der ganzahligen Division von x durch m stellt das Ergebnis der Operation dar.

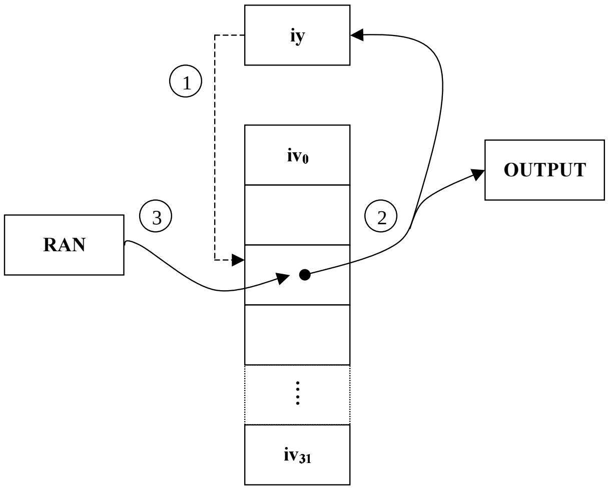


Abbildung 3.4: Bays and Durham Shuffle (vgl. Press et al. [76], S. 281).

gilt und weiter, dass bei der Berechnung nur noch Werte auftreten, die den maximalen Wert für eine 32-bit integer Variable nicht überschreiten. Im folgenden werden $q = 127773$ und $r = 2836$ gesetzt.

Bedingt durch die rekursive Berechnung der Zufallszahlen weisen diese eine Korrelation auf. Mit dem Bays-Durham Shuffle kann diese Korrelation vermindert werden. Abbildung 3.4 stellt den Shuffle graphisch dar. Dabei wird zunächst ein Vektor aus 32 Zufallszahlen mit der oben beschrieben Methode generiert. Danach wird eine weitere Zufallszahl berechnet, mit deren Hilfe eine Zufallszahl aus den Vektor gewählt wird. Die somit ermittelte Zufallszahl stellt einerseits den Output des Algorithmus dar, anderseits wird sie bei einer weiteren Ziehung dazu verwendet eine neue Zahl aus dem Zufallszahlenvektor zu wählen. Die entstandene Lücke im Vektor wird durch eine zusätzlich, mit dem obigen Verfahren berechnete Zufallszahl aufgefüllt.

Kapitel 4

Risiko und Risikomessung

4.1 Verständnis von Risiko

4.1.1 Risikodefinitionen

Umgangssprachlich versteht man unter Risiko üblicherweise die Möglichkeit, dass bei bestimmten Verhaltensweisen mehr oder weniger schwerwiegende unerwünschte Konsequenzen eintreten. Dass in der unternehmerischen Praxis der Risikobegriff im wesentlichen im Einklang mit diesem intuitiven Verständnis von Risiko verwendet wird, lässt sich aus zahlreichen diesbezüglich durchgeführten empirischen Studien schliessen (vgl. Brachinger [12], S. 1016). So hält zum Beispiel Mao (vgl. Mao [63], S. 354) als Ergebnis einer Befragung von Führungskräften nach ihrem Verständnis von „investment risk“ zusammenfassend fest: „risk is primarily considered to be the prospect of not meeting some target rate of return.“ In einer anderen Studie über das Risikoverhalten nordamerikanischer Führungskräfte von MacCrimmon und Wehrung (vgl. MacCrimmon und Wehrung [62], S. 18 f.) finden sich als besonders typische Antworten auf die Frage nach den Charakteristika einer risikoreichen Geschäftssituation:

- „There is a high degree of loss in undertaking the situation.“
- „High probability of failure due to known threats and weaknesses which are not offset by commensurable rewards.“

Grundsätzlich liegt Risiko offenbar dann vor, wenn ein mögliches Ergebnis, das mit dem Ergreifen einer Handlungsalternative verbunden ist, durch zwei Eigenschaften gekennzeichnet ist (vgl. Brachinger [12], S. 1017):

- das Ergebnis wird in einem bestimmten Sinn als Schaden oder Verlust betrachtet und
- das Eintreten dieses Ereignisses ist unsicher.

Als Schaden oder Verlust wird ein Ereignis dann betrachtet, wenn es schlechter als ein Referenzergebnis ist.

Im allgemeinen ist das Risiko einer Handlungsalternative keine objektiv feststellbare Eigenschaft, sondern ein subjektives Konstrukt, welches von der persönlichen Wahrnehmung des Entscheidungsträgers abhängt. Dabei bestehen zum Beispiel subjektive Unterschiede bei der Auffassung von Verlust oder bei der Berücksichtigung von risikoreduzierenden Elementen. Ebenfalls bestehen bei der Frage, ob nur die Nichterreichung eines Zieles oder aber auch das Ausmass der Nichterreichung von Belang sind, subjektive Unterschiede. Diese Unterschiede in der Wahrnehmung sind vor allem bei der Definition von geeigneten Risikomassen von Bedeutung (vgl. Brachinger [12], S. 1017).

4.1.2 Arten betriebswirtschaftlicher Risiken

Aus betriebswirtschaftlicher Sicht ist grundsätzlich zwischen leistungswirtschaftlichen Risiken und finanzwirtschaftlichen Risiken zu unterscheiden. Die leistungswirtschaftlichen Geschäftsrisiken umfassen Risiken wie Umweltrisiken, Prozessrisiken und Risiken aus dem Entscheidungsprozess. Die finanzwirtschaftlichen Risiken bestehen aus Markt-, Ausfall- und Liquiditätsrisiken (vgl. Boemle [10], S. 57). Eine Übersicht zu diesen Risiken ist in der Tabelle 4.1 zusammen mit einigen Beispielen dargestellt.

Leistungswirtschaftliche Geschäftsrisiken	
Risiken	Beispiele
Umweltrisiken	- Politische Risiken - Regulatorische Risiken - Risiken aus dem Konkurrentenverhalten
Prozessrisiken	- Risiken aus der Leistungserstellung und dem Absatz - Risiken aus der Informationstechnologie - Moral Hazard, Fairness- und Sorgfaltsrisiko - Liquiditätsrisiken aus dem Cash Management (Tactical Treasury Risk)
Risiken aus dem Entscheidungsprozess	- Operative und strategische Fehlentscheidungen der Geschäftsleitung

Finanzwirtschaftliche Risiken	
Risiken	Beispiele
Marktrisiken	- Kursrisiken bei Wertpapieren (Aktien, Obligationen, ...) - Zinsrisken - Wechselkursrisken - Rohstoffpreisrisiken
Ausfallrisiken	- Bonitätsrisiken - Besicherungsrisiken, d.h. eingeräumte Sicherheiten erweisen sich als ungenügend oder wertlos - Transferrisiken, aus Einschränkungen des freien Geld- und Kapitalverkehrs
Liquiditätsrisiken	- Zahlungsunfähigkeit - Marktliquiditätsrisiken, d.h. Unveräusserbarkeit von Vermögenswerten

Tabelle 4.1: Arten von betriebswirtschaftlichen Risiken (vgl. Boemle, [10], S. 57 ff. und Dernierre [28], S. 968.)

4.2 Risikomessung

Um Risiken managen und steuern zu können, muss der Risikobegriff operationalisiert, d.h. quantifizierbar gemacht werden. Die verschiedenen Aspekte bei der Risikomessung aus statistischer Sicht sind Inhalt dieses Abschnitts.

4.2.1 Messung von Risiken aus statistischer Sicht

Bei der Konstruktion eines Risikomesssystems lassen sich aus statistischer Sicht folgende Problembereiche bzw. Risiken unterscheiden:

- Modellrisiken,
- Parameterrisiken und
- Schätzrisiken.

Modellrisiko

Aus statistischer Sicht erfolgt die Messung von Risiken durch einen Parameter der (theoretischen) Verteilung einer Ziel- bzw. Ergebnisvariablen. Dazu wird ein statistisches Modell entwickelt, für welches angenommen wird, dass es die zugrundeliegende (unbekannte) wahre Verteilung der Ziel- bzw. Ergebnisvariablen korrekt beschreibt. Dieses Modell ist wie jedes Modell zwangsläufig mehr oder weniger falsch. Mit jeder Wahl eines statistischen Modells geht man damit das Risiko ein, dass dieses Modell den zugrundeliegenden Gegenstand mehr oder weniger unkorrekt beschreibt. Dieses Risiko wird in der Regel als Modellrisiko bezeichnet (vgl. Brachinger [12], S. 1017 f.).[1]

Parameterrisiko

Geht man annahmegemäss von einem bestimmten statistischen Modell aus, ist das Risiko, dass mit der betrachteten Handlungsalternative verbunden ist, in dieser Verteilung enthalten und wird durch einen Parameter der Verteilung quantifiziert. Wie vorgängig beschrieben, ist Risiko aber ein subjektives Konzept, weshalb

[1] Für eine Arbeit, die sich ausführlich mit Modellrisiken für Finanzmarktmodelle beschäftigt, sei auf Weber [97] verwiesen.

es keinen Parameter gibt, der in natürlicher Weise das Risiko einer Verteilung erfasst. Daher muss eine Annahme getroffen werden, welche Eigenschaften der Verteilung durch diesen Parameter erfasst werden müssen, um das Risiko adäquat zu messen. Mit der Wahl eines Parameters als Risikomass, ist somit stets das Risiko verbunden, dass dieser bestimmte risikorelevante Eigenschaften vernachlässigt. Dieses Risiko stellt das Parameterrisiko dar (vgl. Brachinger [12], S. 1018.).

Schätzrisiko

Zuletzt muss der Parameter des Verteilungsmodells auf der Grundlage von Beobachtungen geschätzt werden. Schätzfehler sind dabei unvermeidlich, da die Stichprobe variiert und somit auch der Schätzwert für den Parameter. Darin besteht das Schätzrisiko. Das Schätzrisiko hängt neben der Stichprobe auch von der statistischen Präzision des verwendeten Schätzverfahrens ab (vgl. Brachinger [12], S. 1018.).

4.2.2 Risikomasse

Ziel dieses Abschnitts ist es einige gebräuchliche Risikomasse kurz zu beschrieben. Als relevante Ergebnisgrösse wird als Beispiel der potentielle Gewinn einer Handlungsoption (z.B. die Realisierung der Anlagestrategie a) festgelegt. Durch die Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion $F_X(x)$ und der Dichtefunktion $f_X(x)$ soll dieser Gewinn beschreiben werden. Der Erwartungswert von X beschreibt dann den im langfristigen Durchschnitt zu erwarteten Gewinn und wird im Weiteren notiert mit

$$\mu = E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad .$$

Die folgenden Definitionen von Risikomassen beziehen sich auf den Fall von stetigen Zufallsvariablen (vgl. Brachinger und Weber [11], S.236 f. und Brachinger [13], S. 93 ff.) können aber alle analog für diskrete Zufallsvariablen definiert werden (vgl. Brachinger [12], S. 1018 ff.).

Varianz und Standardabweichung

In der Finanztheorie wird das Risiko einer Handlungsoption traditionell als Streuung der entsprechenden Zufallsvariablen verstanden. Seit den Arbeiten von Markowitz [64] und Tobin [93] zur Portfolioselektion wird meist die Varianz oder die Standardabweichung[2] als Risikomass verwendet. Die Varianz bzw. Standardabweichung ist definiert durch

$$\sigma^2(X) := var(X) := \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)dx$$

bzw.

$$\sigma(\tilde{x}) := \sqrt{\sigma^2(X)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)dx} \quad .$$

Die Varianz bzw. Standardabweichung erfasst die „im Durchschnitt“ zu erwartende Streuung des Gewinns um dessen Erwartungswert. Diese Grössen haben den Nachteil, dass sie Ergebnisse nach oben und nach unten symmetrisch behandeln. Dies steht im Widerspruch zum Verständnis von Risiko als möglichem negativen Ergebnis. Positive Abweichungen kommen dort entweder nicht zum tragen oder wirken risikoreduzierend. Diese Problematik kommt besonders bei asymmetrischen Verteilungen zum tragen. Eine weitere Inkonsistenz zum oben dargestellten Verständnis von Risiko ist, dass der Erwartungswert als Referenzwert gegenüber dem die Abweichungen gemessen werden von der Verteilung abhängt und nicht beliebig wählbar ist.

Untere Semivarianz und erwarteter Verlust

Zwei Risikomasse, welche zumindest einen der oben genannten Nachteile nicht besitzen, sind die untere Semivarianz und der erwartete Verlust. Die untere Semivarianz ist definiert als

$$\mathrm{USV}(X) := \int_{-\infty}^{\mu} (x-\mu)^2 f_X(x)dx$$

und der erwartete Verlust als

$$\mathrm{EV}(X) := -\int_{-\infty}^{0} x f_X(x)dx \quad .$$

[2] Die Standardabweichung wird oft auch als Volatilität bezeichnet.

Die untere Semivarianz misst die „durchschnittlich“ zu erwartende quadrierte Unterschreitung des Referenzwertes μ. Der erwartete Verlust drückt den „durchschnittlich“ zu erwartenden negativen Gewinn aus. Diese Risikomasse sind insofern mit den Risikoverständnis vereinbar, als sie nur Abweichungen nach unten betrachten. Hingegen ist der Referenzwert wiederum nicht frei wählbar, sondern bei der Semivarianz durch den Erwartungswert und beim erwarteten Verlust durch die Gewinnschwelle gegeben.

Ausfallwahrscheinlichkeit

Die Ausfallwahrscheinlichkeit als ein Beispiel für die sogenannten Downside-Risikomasse ist definiert als

$$\mathrm{VW}(X) := P_X(X < c) = \int_{-\infty}^{c} f_X(x)dx$$

mit c als minimaler Zielauszahlung. Die Ausfallwahrscheinlichkeit gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Gewinn unter dem Referenzwert c realisiert wird. Dieses Risikomass ist mit dem Risikoverständnis verträglich, da es nur Abweichungen unterhalb des Referenzwertes misst und dieser frei wählbar ist. Auch andere Downside-Risikomasse, wie z.B. die Ausfallvarianz erfüllen dies. Die Downside-Risikomasse sind Spezialfälle einer allgemeineren Klasse von Risikomassen, den Lower Partial Moments.

Lower Partial Moments

Die unteren partiellen Momente sind definiert als

$$\mathrm{UPM}_k(X; c) := \int_{-\infty}^{c} (c-x)^k f_X(x)dx \quad (k \geq 0),$$

wiederum mit c als minimaler Zielauszahlung. Für $k = 0$ ergibt sich die Ausfallwahrscheinlichkeit, für $k = 2$ die Ausfallvarianz und für $k = 2$, $c = \mu$ die Semivarianz.

Value-at-Risk

Ein in der Banken-Praxis weit verbreitetes Risikomass ist der Value-at-Risk, welcher besonders bei der Bestimmung der Eigenmittelunterlegung von Bedeutung ist. Der Value-at-Risk lässt sich auf zwei Arten definieren. Zum einen bezüglich dem Anfangswert über

$$\mathrm{VaR}(\alpha) := F_{-X}^{-1}(1-\alpha)$$

und zum anderen bezüglich dem Erwartungswert

$$\mathrm{VaR}(\alpha) := F_{-X}^{-1}(1-\alpha) - E(-X) \quad ,$$

mit $0 \leq \alpha \leq 1$. Für einen vorgegebenen Zeithorizont und ein vorgegebenes Konfidenzniveau $1-\alpha$ gibt der Value-at-Risk denjenigen Verlust (= negativen Gewinn) an, der innerhalb des betrachteten Zeithorizonts nur mit der (geringen) Wahrscheinlichkeit α überschritten wird. Dabei ist α in der Regel ein Wert, bei welchem sich X in der Verlustregion befindet. Statistisch betrachtet ist der Value-at-Risk nichts anderes als das $\alpha \cdot 100\%$–Quantil der Verteilung. Ein Nachteil des Value-at-Risk ist, dass er keinerlei Information erhält, wie gross ein potentieller auftretender grösserer Verlust sein könnte und mit welcher Wahrscheinlichkeit er auftritt.

Stonesche Risikomasse

Von Stone wurden als allgemeine Beschreibung zwei Klassen drei-parametrischer Familien von Risikomassen eingeführt, die alle oben angeführten Risikomasse als Spezialfälle umfassen. Diese definieren sich durch

$$\begin{aligned}
\mathrm{RS}_1(X;k,p,q) &:= \int_{-\infty}^{q(F_X)} |x-p(F_X)|^k f_X(x)dx \qquad (k \geq 0) \\
\mathrm{RS}_2(X;k,p,q) &:= [RS_1(X;k,p,q)]^{1/k} \qquad (k > 0).
\end{aligned}$$

Dabei wird mit $p = p(F_X)$ das Referenzniveau bezeichnet, von dem aus die Abweichungen gemessen werden, mit $q = q(F_X)$ wird der Bereich der zu berücksichtigenden Abweichungen festgelegt und der Parameter k spezifiziert das relative Gewicht grosser und kleiner Abweichungen.[3] Man kann nun zeigen, dass alle oben angeführten Risikomasse Spezialfälle der Stoneschen Familien sind (vgl. Brachinger [13], S. 93 ff.). In den meisten Fällen ist dies offensichtlich, für die Semivarianz

[3] Oft wird dieser Parameter auch mit der Risikoeinstellung in Verbindung gebracht. Mit $0 \leq k \leq 1$ wird eine risikounempfindliche mit $k > 1$ eine risikoempfindliche Einstellung charakterisiert.

setzt man z.B. $p = q = \mu$ und $k = 2$. Dass auch der Value-at-Risk mit der Stoneschen Familie verträglich ist, erkennt man aus

$$\alpha = F_X(-VaR) = \int_{-\infty}^{-VaR} f_X(x)dx \quad .$$

Zusammenfassung

Aus der obigen Diskussion wird ersichtlich, dass bei der Konzeption von Risikomassen insbesondere folgende Punkte bedacht bzw. festgelegt werden müssen:

- der Referenzwert, bezüglich dem die Abweichungen gemessen werden und welcher möglichst unabhängig von der Verteilung sein sollte,
- die Gewichtung der Abweichung zum Referenzwert und
- der Bereich über welchen die potentiellen Abweichungen summiert werden sollen.

Aus der Sicht der Familie der Stoneschen Risikomass beinhaltet dies die Festlegung der Parameter p, k und q.

Teil II

Ein Risikomodell für Schweizer Pensionskassen

Kapitel 5

Ausgangspunkt und Modellrahmen

5.1 Asset-Liability-Management (ALM)

5.1.1 Definitionen von ALM

Unter dem Begriff Asset-Liability-Management (ALM) finden sich eine Vielzahl von verschiedenen Sichtweisen und Definitionen. Um einen Rahmen für das zu entwickelnde Risikomesssystem abzuleiten, werden deshalb im folgenden einige Definitionen von Asset-Liability-Management gegenübergestellt.

Für Jost [46] ist Asset-Liability-Management ein Managementansatz, bei dem die Risiken aus dem leistungswirtschaftlichen und dem finanzwirtschaftlichen Bereich unternehmenszielbezogen aufeinander abgestimmt werden.

Die GE Frankona Re versteht unter Asset-Liability-Management die quantitative Analyse der Auswirkungen möglicher zukünftiger wirtschaftlicher Entwicklungen und strategischer Entscheidungen, auf die finanzielle Situation des Unternehmens, wobei die Analyse in erster Linie der Erkennung und Einschätzung von Risiken bezüglich der Erreichung der Unternehmensziele dienen soll (vgl. GE Frankona RE [38], S. 4-11).

Zwiesler [102] bezeichnet mit Asset-Liability-Management allgemein alle Verfahren, die zur Unternehmenssteuerung auf Einschätzungen der zukünftigen Entwicklung von Aktiven und Passiven beruhen. Dabei ist die zentrale Aufgabe des Asset-Liability-Managements, zur Information und Entscheidungsunterstützung des Managements beizutragen.

Cottin und Kurz [27] sehen die Aufgabe des Asset-Liability-Managements in der Erkennung von langfristigen Chancen und Risiken und deren systematischen Modellierung, als Vorstufe zur Optimierung der Abstimmung von Kapitalanlagen und versicherungstechnischen Verpflichtungen.

Aus den obigen Definitionen für Asset-Liability-Management werden für das zu entwickelnde Risikomesssystem folgende Zielsetzungen vorgegeben:

A) Es werden nur Risiken aus dem leistungswirtschaftlichen und dem finanzwirtschaftlichen Bereich betrachtet. Das betrifft bei Pensionskassen im wesentlichen die Marktrisiken aus der Vermögensanlage und die leistungswirtschaftlichen Risiken aus der Versicherung. Die Risiken aus der Versicherung entstehen aus den versprochenen Versicherungsleistungen der Vorsorgeeinrichtung und beinhalten insbesondere das Risiko von Abweichungen des tatsächlichen Risikoverlaufs für die Sterblichkeit, Invalidität, etc. von den zugrundegelegten Annahmen. Weiterhin werden die zukünftigen Versicherungsleistungen durch Veränderungen im Versichertenbestand und die Lohnentwicklung beeinflusst. Andere wichtige Risiken, wie zum Beispiel regulatorische Risiken oder Moral Hazard, werden nicht betrachtet (vgl. auch Tabelle 4.1).

B) Die möglichen zukünftigen wirtschaftlichen Entwicklungen werden aufgrund einer quantitativen Analyse betrachtet. Das heisst, dass die betrachteten zukünftigen Entwicklungen Szenarien darstellen, die mittels eines quantitativen Modells basierend auf plausiblen Annahmen generiert werden. Die Parameter des Modells beruhen dabei im wesentlichen auf Schätzungen anhand empirischer Daten.

C) Das Ziel ist die Erkennung und Einschätzung von Risiken durch eine systematische Modellierung. Dies umfasst insbesondere eine eindeutige Definition des zu messenden Risikos, d.h. einer Zielvariablen und die Wahl eines geeigneten Risikomasses.

D) Das Risikomesssystem ist als Instrument zur Information und Entscheidungsunterstützung des Managements zu verstehen. Das heisst, dass es mögliche Folgen von Entscheidungen im Bereich der Vermögensanlage und der Versicherung aufzeigen und deren Eintretenswahrscheinlichkeit einschätzen soll.

Die Abbildung 5.1 stellt den Rahmen für das Risikomesssystem nochmals graphisch dar.

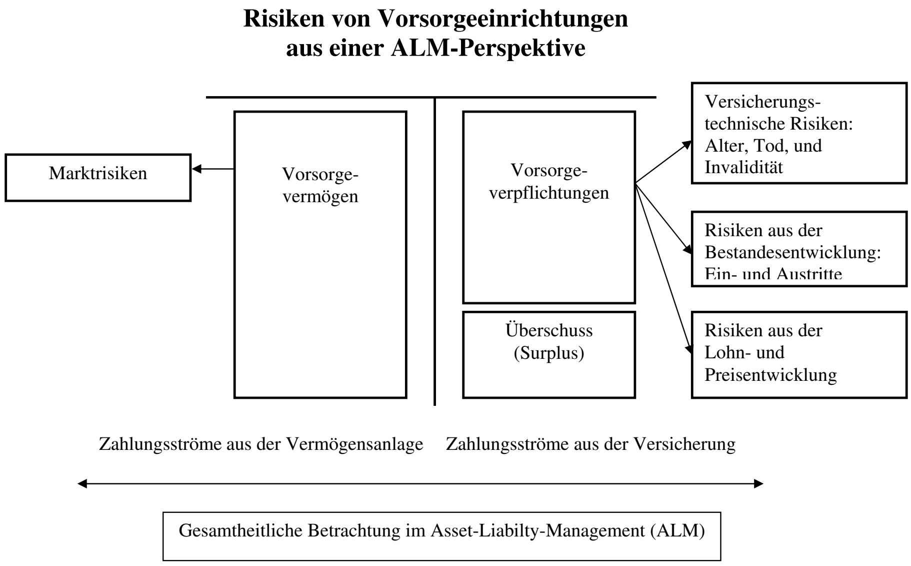


Abbildung 5.1: Risiken von Vorsorgeeinrichtungen aus einer ALM-Perspektive.

Bei nicht-autonomen Vorsorgeeinrichtungen werden bestimmte Risiken auf andere Risikoträger übertragen. Je nach Rückversicherung kann somit der Versicherungteil[1] bzw. die Vermögensanlage[2] als ganz oder teilweise risikofrei betrachtet werden. Im weiteren werden solche Modifikationen nicht berücksichtigt, da sie eine Verringerung der Risiken für die einzelne Vorsorgeeinrichtung darstellen und sich aus dem allgemeinen Fall einer autonomen Kasse ableiten lassen.

[1] z.B. feste Versicherungsprämien

[2] z.B. feste Verzinsung

5.1.2 Bedeutung von ALM für Pensionskassen

Die Bedeutung von Asset-Liability-Managementmethoden für Pensionskassen liegt vor allem im Bereich der Erhaltung des finanziellen Gleichgewichts (vgl. Kapitel 2). Die zentrale Grösse zur Beurteilung dieses Gleichgewichts ist der Deckungsgrad. Bei einem Deckungsgrad von 100 Prozent und mehr ist das finanzielle Gleichgewicht unter den getroffenen Annahmen, den sogenannten technischen Rechnungsgrundlagen, gegeben. Bei diesen Annahmen wird einerseits von einer Entwicklung des Versichertenbestandes (Risikoverlauf) im statistischen Mittel und andererseits von einer konstanten Vermögensrendite in Höhe des technischen Zinses ausgegangen. Unberücksichtigt bleiben mögliche Einflüsse durch Ein- und Austritte von Versicherten sowie der Lohn- und Preisentwicklung (Inflation). Treffen die Annahmen der Rechnungsgrundlagen nicht zu, kann die Pensionskasse trotz eines anfänglichen Deckungsgrads von über 100 Prozent, zunehmend in ein finanzielles Ungleichgewicht geraten. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn die zukünftigen Vermögensrenditen regelmässig unter dem technischen Zins zu liegen kommen. Zur Minderung des Risikos eines finanziellen Ungleichgewichts, haben die Führungsorgane von Pensionskassen deshalb, neben der Errichtung eines geeigneten Beitrags- und Leistungssystems, eine der Risikofähigkeit entsprechende Vermögensanlage zu verfolgen. Die Beurteilung dieser Risikofähigkeit, d.h. der relativen Sicherheit der Vermögensanlage, erfolgt dabei gesetzlich vorgeschrieben, durch die Beurteilung aller Aktiven und Passiven, sowie der Struktur des Versichertenbestandes und dessen Entwicklung (vgl. Art. 65,71 BVG und Art. 50 Abs. 2 BVV2). Neben dem aktuellen Deckungsgrad spielt somit auch die Beurteilung der möglichen zukünftigen Entwicklungen des Deckungsgrades bei Führungsentscheiden eine wichtige Rolle. Die Einschätzung der quantitativen Auswirkungen auf das zukünftige finanzielle Gleichgewicht, welche durch Abweichungen der Vermögensrendite und der Bestandesentwicklung von den zugrundegelegten Annahmen verursacht werden, ist dabei eine zentrale Fragestellung.

5.2 Festlegung des zu messenden Risikos und der Zielvariablen

Wie im vorigen Abschnitt ausgeführt, stellt die Beurteilung möglicher zukünftiger Entwicklungen des Deckungsgrades eine zentrale Fragestellung bei der Führung einer Pensionskasse dar. In diesem Sinne wird das zu messende Risiko im Hinblick auf die Möglichkeit eines zukünftigen finanziellen Ungleichgewichts definiert und im folgenden als die Unsicherheit verstanden, welche in Bezug auf die Höhe des Deckungsgrades zu einem gewissen zukünftigen Zeitpunkt bei gegebenen Beiträgen, Leistungen und gegebener Anlagestrategie besteht. Als Zielvariable für das Risikomesssystem wird deshalb der Überschuss zu einem zukünftigen Zeitpunkt festgelegt, welcher sich aus dem Vermögen abzüglich dem Deckungskapital zu diesem zukünftigen Zeitpunkt ergibt. Dabei wird nur der Überschuss zu diesem zukünftigen Zeitpunkt betrachtet, nicht aber der Weg dahin. Unterdeckungen, die sich nur zwischenzeitlich ergeben, sind somit hier annahmegemäss für den Entscheidungsträger irrelevant.

Für die Modellbetrachtung werden die möglichen Vermögensveränderungen dabei auf die folgenden beschränkt:

Vermögenszunahme	**Vermögensabnahme**	**aus der**
Beiträge und Einmaleinlagen	Versicherungsleistungen (Alter, Tod und Invalidität)	**Versicherung**
Eintrittsleistungen (FZL)	Austrittsleistungen (FZL)	**Bestandesentwicklung**
Vermögensertrag	Vermögensaufwand	**Vermögensanlage**
Kostenumlage auf Arbeitgeber und/oder Arbeitnehmer	Verwaltungskosten, Sifobeiträge, usw.	**Verwaltung**

Damit lässt sich das Vermögen zu einem zukünftigen Zeitpunkt zusammensetzen aus

- dem Vermögen zu Beginn der Betrachtung,
- der Vermögensrendite im betrachteten Zeitraum und
- den mit der Vermögensrendite aufgezinsten Vermögensveränderungen aus der Versicherung, Bestandesentwicklung und der Verwaltung im betrachteten Zeitraum.

Zusätzlich wird angenommen, dass das Vermögen der Pensionskasse stets ohne wesentliche Kosten und in nützlicher Frist liquidiert werden kann.

Das zukünftige Deckungskapital, als zweite Komponente des Überschusses, ergibt sich im wesentlichen aus den im Vorsorgeplan definierten Leistungen, dem Versichertenbestand zu Beginn der Betrachtung und der modellierten Bestandesentwicklung im betrachteten Zeitraum.

Kapitel 6

Modell für den Überschuss

6.1 Definition für den Überschuss

Der Überschuss U_T zu einem zukünftigen Zeitpunkt T wird für das Modell definiert als

$$U_T = V_T - D_T = V_0 \; e^{r_{0,T}} + \sum_{t=1}^{T} (EL_t + VE_t - AL_t - VK_t) \; e^{r_{t,T}} - D_T \quad ,$$

mit

V_t	als dem Vermögen zum Zeitpunkt t,
EL_t	als den Eintrittsleistungen der Periode t,
VE_t	als der Vermögensveränderung aus der Versicherung für die Periode t,
AL_t	als den Austrittsleistungen der Periode t,
VK_t	als der Vermögensveränderung aus der Verwaltung für die Periode t,
D_T	als dem benötigten Deckungskapital zum Zeitpunkt T und
$r_{t,T}$	als der Vermögensrendite im Zeitraum zwischen t und T ($r_{T,T} = 0$).

Für die Aufzinsung wird angenommen, dass die Vermögensveränderung der Periode gesamthaft am Ende der jeweiligen Periode, d.h. zu einem Zeitpunkt, stattfindet. Da in der Realität diese Vermögensveränderung aber eher durchgängig während der Periode stattfindet, könnte man alternativ auch von einer gleichmässigen und kontinuierlichen Vermögensveränderung innerhalb der Periode ausgehen. Die Aufzinsung müsste dann statt mit $e^{r_{t,T}}$ mit $\frac{(e^{r_{t-1,T}} - e^{r_{t,T}})}{r_{t-1,t}}$ erfolgen (vgl. Anhang E.4). Im folgenden wird davon aber abgesehen.

Die Eintrittsleistungen, die Vermögensveränderungen aus der Versicherung und die Austrittsleistungen einer Periode ergeben sich aus der Summe der individuellen Grössen für die einzelnen Versicherten in dieser Periode. Das gleiche gilt für das benötigte Deckungskapital am Ende der Betrachtung. Damit ist

$$EL_t = \sum_{i=1}^{n} EL_t^i \ , \quad VE_t = \sum_{i=1}^{n} VE_t^i \ , \quad AL_t = \sum_{i=1}^{n} AL_t^i \ , \quad D_T = \sum_{i=1}^{n} D_T^i$$

Mit n wird hierbei die Gesamtzahl an Versicherten im betrachteten Zeitraum bezeichnet, d.h. einerseits die zu Beginn der Betrachtung vorhandenen Versicherten und andererseits die im betrachteten Zeitraum eintretenden Versicherten.

Der Überschuss lässt sich damit schreiben als

$$U_T = V_0 \ e^{r_{0,T}} - \sum_{t=1}^{T} VK_t \ e^{r_{t,T}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{t=1}^{T} (EL_t^i + VE_t^i - AL_t^i) \ e^{r_{t,T}} - D_T^i}_{VV^i}}_{VV} \quad ,$$

mit VV^i als dem Vermögensverbrauch des i-ten Versicherten und mit VV als dem gemeinsamen Vermögensverbrauch aller Versicherten.

Im folgenden wird als Periode t ein Jahr verwendet. Zwar erfolgen Renten- und Beitragszahlungen monatlich, die im Modell verwendeten versicherungstechnischen Informationen, wie z.B. Sterbewahrscheinlichkeiten, beziehen sich aber auf Jahre, weshalb diese Periodisierung gewählt wird.

6.2 Beschreibung des Versicherungsverlaufs

Die Höhe des Vermögensverbrauchs VV^i eines Versicherten i wird massgeblich durch seinen Versicherungsverlauf bestimmt. Dieser Verlauf wird im Modell über die verschiedenen Zustände beschrieben, welche der Versicherte zu den einzelnen Zeitpunkten des betrachteten Zeitraums einnimmt. Dabei werden die möglichen Zustände so definiert, dass sich einerseits deren zeitliche Entwicklung geeignet beschreiben lässt und andererseits die Berechnung des Vermögensverbrauchs VV^i möglichst direkt folgt.

6.2.1 Definition möglicher Zustände

Ausgangspunkt für die Definition von möglichen Zuständen bildet die folgende Aufteilung der Versicherten in Gruppen von:

- Aktiven,
- Invaliden,
- Pensionierten mit Rentenleistungen,
- Pensionierten mit Kapitalleistungen,
- Verstorbene mit hinterbliebenen Witwen/-er,
- Verstorbene ohne hinterbliebenen Witwen/-er und
- Waisen bzw. Kinder (von Invaliden und Pensionierten).

Unter dem Zustand eines Versicherten wird nun im wesentlichen die Zugehörigkeit zu einer der obigen Gruppen verstanden. Zur Vereinfachung der Modellierung wird für die Gruppe der Waisen bzw. Kinder der Versicherten kein eigener Zustand definiert. Die Kinder- und Waisenrenten werden vielmehr im Vermögensverbrauch der Verstorbenen, Alten und Invaliden berücksichtigt und zwar anhand der für sie durchschnittlich zum jeweiligen Zeitpunkt zu erwartenden Anzahl anspruchsberechtigter Kinder.[1] Die Abbildung von Teilinvalidität erfolgt über die Berücksichtigung der Invaliditätsgrade in den Übergangswahrscheinlichkeiten (vgl. Abschnitt 10.2). Entsprechend kann die Abbildung von Teilrücktritten über die Berücksichtigung in den Altersrücktrittswahrscheinlichkeiten erfolgen.

Als mögliche Zustände $\mathbf{Z}_t$ der Versicherten werden folglich definiert:

$$\mathbf{Z}_t = (s_t, a_t, g) \quad ,$$

[1] Diese Vereinfachung kann wie folgt begründet werden: Einerseits findet man in den Rechnungsgrundlagen keine Angaben zur Verteilung der Kinderanzahl, sondern in der Regel nur Angaben zur durchschnittlichen Kinderanzahl und anderseits würde eine Berücksichtigung von Kinder und Waisen als eigene Gruppe eine immense Anzahl zusätzlich zu betrachtender Fälle mit nur geringen finanziellen Unterschieden nach sich ziehen.

mit

$$\begin{array}{ll} s_t = 1 & \text{aktiv} \\ s_t = 2 & \text{invalid} \\ s_t = 3 & \text{pensioniert (Rente)} \\ s_t = 4 & \text{verstorben mit Witwe(r)} \\ s_t = 5 & \text{verstorben ohne Witwe(r)} \\ s_t = 6 & \text{pensioniert (Kapital)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} g = 0 & \text{männlich} \\ g = 1 & \text{weiblich} \end{array}$$

und

$$18 \leq a_t \leq 100$$

als ganzzahligen Alter des Versicherten zum Zeitpunkt t. Als ganzzahliges Alter wird die Differenz zwischen dem aktuellen Jahr und dem Geburtsjahr verstanden. Die Versicherung beginnt also per 1.1. des Jahres, in dem der Mitarbeiter 18 Jahre alt wird und endet im Modell spätestens am 31.12. des Jahres, in dem das Schlussalter von 100 Jahren erreicht wird.

6.2.2 Festlegung möglicher Zustandsübergänge

Nicht jede kombinatorisch mögliche Abfolge von Zuständen stellt einen sinnvollen Versicherungsverlauf für einen Versicherten dar. Insbesondere werden nur die Übergänge zugelassen, bei welchen der Versicherte in einer Periode auch um eine Periode altert, d.h. Übergänge für die $a_{t+1} = a_t + 1$ gilt. Die weiteren Einschränkungen für die Zustandsentwicklungen des Modells sind nachfolgend dargestellt:

Ein aktiver Versicherter [Übergänge von Zustand $\mathbf{Z}_t = (1, a_t, g)$]

- bleibt weiterhin aktiv [zu $\mathbf{Z}_{t+1} = (1, a_t + 1, g)$],
- wird invalid [zu $\mathbf{Z}_{t+1} = (2, a_t + 1, g)$],
- wird Altersrentner [zu $\mathbf{Z}_{t+1} = (3, a_t + 1, g)$],
- verstirbt mit Witwe(r) [zu $\mathbf{Z}_{t+1} = (4, a_t + 1 - d_{t^*}, g)$ und $t^* = t$],

- verstirbt ohne Witwe(r) [zu $\mathbf{Z}_{t+1} = (5, a_t + 1, g)$] oder
- wird mit einer Kapitalleistung pensioniert [zu $\mathbf{Z}_{t+1} = (6, a_t + 1, g)$.

Da eine (ein) Witwe(r), welche den Versicherten beim Übergang zu "verstorben mit Witwe(r)" quasi ersetzt, nicht gezwungenermassen dasselbe Alter wie ihr Mann (seine Frau) hat, muss der Altersunterschied d_{t^*} zum Todeszeitpunkt t^* im Zustand berücksichtigt werden. Die Altersunterschiede werden im Modell in Abhängigkeit vom Alter und Geschlecht vorgegeben und beruhen, da keine detaillierteren Angaben verfügbar sind, auf den statistischen Durchschnittswerten in den Rechnungsgrundlagen.[2] Hervorzuheben ist weiter, dass für eine(n) Witwe(r) als auch für ihren Mann $g = 0$ (seine Frau $g = 1$) gesetzt wird, um Witwen von Frauen (Witwer von Männer) zu unterschieden. Dies ist nötig, da für Frauen und Witwen (Männer und Witwer) unterschiedliche Übergangswahrscheinlichkeiten (insbesondere Sterbewahrscheinlichkeiten) verwendet werden.

Ein invalider Versicherter [Übergang von Zustand $\mathbf{Z}_t = (2, a_t, g)$]

- bleibt weiterhin invalid [zu $\mathbf{Z}_{t+1} = (2, a_t + 1, g)$],
- verstirbt mit Witwe(r) [zu $\mathbf{Z}_{t+1} = (4, a_t + 1 - d_{t^*}, g)$ und $t^* = t$] oder
- verstirbt ohne Witwe(r) [zu $\mathbf{Z}_{t+1} = (5, a_t + 1, g)$].

Reaktivierungen, d.h. Übergänge zu $\mathbf{Z}_{t+1} = (0, a_t + 1, g)$ werden im Modell nicht betrachtet.

Ein Altersrentner [Übergang von Zustand $\mathbf{Z}_t = (3, a_t, g)$]

- bleibt Altersrentner [zu $\mathbf{Z}_{t+1} = (3, a_t + 1, g)$],
- verstirbt mit Witwe(r) [zu $\mathbf{Z}_{t+1} = (4, a_t + 1 - d_{t^*}, g)$ und $t^* = t$] oder
- verstirbt ohne Witwe(r) [zu $\mathbf{Z}_{t+1} = (5, a_t + 1, g)$].

---

[2] vgl. auch Bemerkungen zum grundsätzlichen Vorgehen in Abschnitt 9.1.

Ein mit Witwe(r) verstorbener Versicherter [Übergang von Zustand $\mathbf{Z}_t = (4, a_t - d_{t^*}, g)$]

- verbleibt "verstorben mit Witwe(r)", d.h. die (der) Witwe(r) überlebt [zu $\mathbf{Z}_{t+1} = (4, a_t + 1 - d_{t^*}, g)$] oder
- wechselt zu "verstorben ohne Witwe(r)", d.h. die (der) Witwe(r) überlebt nicht [zu $\mathbf{Z}_{t+1} = (5, a_t + 1 - d_{t^*}, g)$].

Ein ohne Witwe(r) verstorbener Versicherter [Übergang von Zustand $\mathbf{Z}_t = (5, a_t, g)$] verharrt auf seinem Zustand [zu $\mathbf{Z}_{t+1} = (5, a_t + 1, g))$]. Das gleiche gilt für einen mit einer Kapitalleistung pensionierten Versicherten [Übergang von Zustand $\mathbf{Z}_{t+1} = (6, a_t, g)$ zu $\mathbf{Z}_{t+1} = (6, a_t + 1, g)$].

6.2.3 Notation des Versicherungsverlaufs

Die Notation des Versicherungsverlaufs erfolgt über die Übergangszeitpunkte bzw. Eintrittszeitpunkte der Versicherungsfälle. Dabei bezeichnet

- t_1 den Invalidisierungszeitpunkt,
- t_2 den Pensionierungszeitpunkt,
- t_3 den Todeszeitpunkt mit Witwe,
- t_4 Todeszeitpunkt ohne Witwe und
- t_5 den Zeitpunkt des Bezugs einer Kapitalleistung.

Als jeweiliger Wert für die Eintrittszeitpunkte $t_1, \ldots, t_5$ gilt der Zeitpunkt, in dem der Versicherte zum ersten Mal den entsprechenden Zustand, d.h. invalid, pensioniert, etc. annimmt. Falls der Versicherte den entsprechenden Zustand im Zeithorizont nicht annimmt, wird der Eintrittszeitpunkt auf den selben Wert wie der nachfolgende Eintrittszeitpunkt gesetzt. Verbleibt ein Versicherter während des Rests des Zeithorizontes auf dem Zustand, werden alle nachfolgenden Eintrittszeitpunkte auf den Wert $T+1$ gesetzt. Hat ein Versicherter schon von Beginn an den entsprechenden Zustand, werden alle implizit schon eingetretenen Zeitpunkte auf null gesetzt.

Der Zeitpunkt des Eintritts eines Versicherten in die Pensionskasse wird mit $0 \leq t_0 < T$ notiert. Dabei bedeutet der Eintrittszeitpunkt $t_0 = 0$, dass der Versicherte sich schon zu Beginn der Betrachtung im Versichertenbestand befand. Die später erfolgenden Eintritte werden im Modell auf aktive Versicherte beschränkt. Damit ist für im Modell nach den Startzeitpunkt eintretende Versicherte der Startzustand stets gegeben mit

$$\mathbf{Z}_{t_0} = (1, a_{t_0}, g) \qquad \text{für } t_0 > 0 \ .$$

Mit diesen Zeitpunkten lassen sich durch die Angabe des Vektors

$$\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = f(\mathbf{Z}_0, \ldots, \mathbf{Z}_T)$$

alle möglichen Versicherungsverläufe des Modells angeben. Die nachfolgenden Beispiele veranschaulichen dies für einen Zeithorizont von $T = 5$ Perioden.

Beispiele:

Entwicklung	Der Versicherte
(0,1,3,3,4,6)	ist von Beginn weg in der Kasse versichert, in der 1. Periode invalid geworden und in der 3. Periode mit Witwe verstorben. In der 4. Periode ist dann die überlebende Witwe verstorben. Entsprechend hat er keine Kapitalleistung bezogen.
(0,1,1,4,4,6)	ist von Beginn weg in der Kasse versichert, in der 1. Periode pensioniert worden und in der 4. Periode ohne Witwe verstorben.
(1,2,2,2,2,2)	ist in der 1. Periode als Aktiver in die Kasse eingetreten und in 2. Periode mit einer Kapitalleistung pensioniert worden.
(2,3,3,4,6,6)	ist in der 2. Periode als Aktiver in die Kasse eingetreten, in der 3. Periode pensioniert worden und in der 4. Periode mit Witwe(r) verstorben.
(0,0,0,5,5,6)	ist von Beginn an pensioniert und in der 5. Periode ohne Witwe verstorben

Aus den obigen Ausführungen und den Einschränkungen für die zugelassenen Übergänge im vorigen Abschnitt folgt

$$0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \leq t_5 \leq T + 1.$$

Damit wird eine beachtliche Reduzierung der Zahl zu betrachtender Versicherungsverläufe erreicht. Würden zusätzliche Übergänge wie z.B. Reaktivierungen betrachtet, wäre die sich ergebende Anzahl möglicher Versicherungsverläufe kaum noch zu bewältigen.

6.3 Modellierung der Entwicklung des Versichertenbestandes

6.3.1 Vorgehen zur Modellierung

Den Ausgangspunkt zur Modellierung der Entwicklung des Versichertenbestandes bildet der zukünftige Personalbedarf des Arbeitgebers, welcher für das Modell vorgegeben wird. Aus dem Personalbedarf folgt der nötige zukünftige Bestand an aktiven Versicherten. Dieser ergibt sich aus dem Anfangsbestand und den späteren Deaktivierungen, Eintritten und Austritten. Die Austritte[3] sind vom Arbeitgeber nur bedingt steuerbar und werden im Modell deterministisch berücksichtigt, indem von einer festen Austrittsrate für die einzelnen Versichertenkategorien ausgegangen wird. Für die Eintritte wird unterschieden zwischen Ersatz- und Zusatzversicherten. Für erstere wird davon ausgegangen, dass der Arbeitgeber deaktivierte Versicherte[4] laufend durch gleiche Arbeitskräfte (Ersatzversicherte) ersetzt. Diese Ersatzversicherten haben für das Modell die selben Versichertenmerkmale, d.h. Alter, Lohn, Geschlecht, etc. wie der deaktivierte Versicherte. Dadurch, dass alle deaktivierten Versicherten durch einen äquivalenten Versicherten ersetzt werden, folgt die Entwicklung des Bestands an aktiven Versicherten eindeutig aus dem Anfangsbestand und der festen Austrittsrate und zwar unabhängig von den Versicherungsverläufen der einzelnen Versicherten, d.h.

[3] Entlassungen, Kündigungen.

[4] Invalid gewordene oder verstorbene aktive Versicherte.

der Anzahl an Deaktivierungen. Die Differenz zwischen dem Bestand an aktiven Versicherten, der sich aus den Austritten und Ersatzeintritten ergibt, und dem Personalbedarf deckt der Arbeitgeber durch Einstellung von zusätzlichen Arbeitskräften, den Zusatzversicherten im Modell.

Für die nicht-aktiven Versicherten wird davon ausgegangen, dass keine Eintritte bzw. Austritte stattfinden.

Der Gesamtbestand N, bestehend aus n Versicherten, setzt sich im Modell somit zusammen aus

- dem festen Bestand N_1, bestehend aus n_1 Versicherten, welcher den Anfangsbestand und die Zusatzversicherten umfasst und
- dem variablen Bestand N_2, bestehend n_2 Versicherten, welcher die Ersatzversicherten umfasst.

Für die Anzahl Versicherter im Gesamtbestand gilt

$$n = n_1 + n_2$$

Der feste Bestand ist, unabhängig von den Versicherungsverläufen der einzelnen Versicherten, immer gleich gross. Die Grösse des variablen Bestandes hängt von der Anzahl möglicher Deaktivierungen im Zeithorizont ab (siehe folgenden Abschnitt).

6.3.2 Eintritte von Ersatzversicherten

Zu jedem Versicherten aus dem festen Bestands N_1 lassen sich Ersatzversicherte aus N_2 zuordnen. Der variable Bestand N_2 wird deshalb in die Unterbestände N_{2i} aufgeteilt, die jeweils alle n_{2i} Ersatzversicherten des i-ten Versicherten umfassen.

Für das Modell wird nun immer die maximal mögliche Anzahl an Ersatzversicherten für N_{2i} angesetzt, dafür aber zur Berechnung des Überschusses der Vermögensverbrauch der an sich nicht benötigten Ersatzversicherten auf null gesetzt. Der Eintritt eines Ersatzversicherten erfolgt für das Modell jeweils zu Beginn der nächsten Periode. Da ein Versicherter in jeder Periode deaktiviert werden kann, sind bis zu maximal $T - t_0$ Ersatzversicherte für einen aktiven Versicherten aus dem festen Bestand zu betrachten. Für die in der T-ten Periode deaktivierten Versicherten werden im Modell aber keine Ersatzversicherten mehr betrachtet, da davon ausgegangen wird, dass deren Eintrittsleistung ihrem Deckungskapital entspricht und somit ihr Vermögensverbrauch immer gleich null ist. Zudem werden im Modell nur die Versicherten ersetzt, deren Deaktivierung vor dem ordentlichen Rücktrittsalter $a_r^i(g^i)$ liegt. Daraus ergibt sich die maximale Anzahl an Ersatzversicherten für einen Versicherten aus dem festen Bestand mit

$$n_{2i} = \begin{cases} \min\left(T - t_0^i - 1 \; ; \; \max\left(a_r^i(g^i) - a_0^i - t_0^i \; ; \; 0 \right)\right) & \text{falls } s_0^i = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Für n folgt

$$n = n_1 + n_2 = n_1 + \sum_{i=1}^{n_1} n_{2i} \quad .$$

Für die Beschreibung des Überschusses werden nachfolgend die Grössen des j-ten Ersatzversicherten ($j = 1, \ldots, n_{2i}$), welcher der Gruppe zugehört, die dem i-ten Versicherten ($i = 1, \ldots, n_1$) des festen Bestand zugeordnet ist, mit dem Index ^{i,j} versehen. Die Notation erfolgt also beispielsweise mit $\mathbf{t}^{i,j}$, $VV^{i,j}$, etc. Die jeweiligen Grössen für den i-ten Versicherten selber werden mit $\mathbf{t}^{i,0}$, $VV^{i,0}$, etc. notiert.

Der Überschuss lässt sich damit schreiben als

$$\begin{aligned} U_T &= V_0 \; e^{r_{0,T}} - \sum_{t=1}^{T} VK_t \; e^{r_{t,T}} + \sum_{i=1}^{n_1} VV^{i,0} + \sum_{j=1}^{n_2 i} VV^{i,j} \\ &= V_0 \; e^{r_{0,T}} - \sum_{t=1}^{T} VK_t \; e^{r_{t,T}} + \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2 i} VV^{i,j} \quad , \end{aligned}$$

mit

$$VV^{i,j} = \sum_{t=1}^{T} (EL_t^{i,j} + VE_t^{i,j} - AL_t^{i,j}) \; e^{r_{t,T}} - D_T^{i,j}$$

Die Versicherungsverläufe der so gruppierten Versicherten, d.h. der Versicherten des festen Bestandes und ihrer n_{2i} Ersatzversicherten, sind nicht unabhängig voneinander, da die Ersatzversicherten erst dann eintreten, wenn der zu ersetzende Versicherte deaktiviert wird. Die Eintrittszeitpunkte hängen somit von den Deaktivierungszeitpunkten $t_1^{i,j}$ ab und es werden je nach Verlauf unterschiedlich viele der n_{2i} Ersatzversicherten benötigt. Damit für die letztendlich nichteintretenden Ersatzversicherten im Modell keine Zahlungsströme berücksichtigt werden, wird deren Eintrittszeitpunkt auf $t_0^{i,j} = T+1$ gesetzt (woraus $VV^{i,j} = 0$ folgt; vgl. Abschnitt 6.4.2). Der Eintrittszeitpunkt eines j-ten Ersatzversicherten ($j = 1, \dots, n_{2i}$) ergibt sich damit über:

$$\begin{aligned} t_0^{i,j} &= f(t_1^{i,0}, \dots, t_1^{i,j-1}) \\ &= \begin{cases} t_0^{i,0} + j & \text{falls} \quad t_1^{i,l-1} = t_0^{i,0} + j \quad \text{für ein} \quad 1 \le l \le j \\ T+1 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Die Ersatzversicherten erhalten im Modell jeweils die selben Versichertenmerkmale wie die deaktivierten Versicherten, die sie ersetzen. Diese umfassen neben dem Geschlecht und dem Alter, auch die Löhne und das Alterskapital bzw. die Versicherungsdauer, d.h

$$\text{für alle } j = 1, \dots, n_{2i} \quad \text{gilt} \quad \begin{array}{rcl} g^{i,j} &=& g^{i,0} \\ a_t^{i,j} &=& a_t^{i,0} \\ L_0^{i,j} &=& L_0^{i,0} \\ AK_0^{i,j} &=& AK_0^{i,0} \\ VD_0^{i,j} &=& VD_0^{i,0} \end{array}$$

6.3.3 Abbildung von Austritten

Die Modellierung der Austritte von Versicherten erfolgt wie in Abschnitt 6.3.1 beschrieben über feste Austrittsraten, welche für die einzelnen Versichertenkategorien[5] vorgegeben werden. Dabei werden wie erwähnt nur Austritte von aktiven Versicherten betrachtet.[6] Im Modell wird der Bestand an ak-

[5] Im folgenden wird von einer Kategorisierung nach Alter und Geschlecht ausgegangen.

[6] Die Festlegung der Austrittsrate kann einerseits aufgrund eigener historischer Daten der Pensionskasse und andererseits aufgrund der geplanten Personalpolitik erfolgen. Ebenso können Erfahrungswerte aus der Branche zusätzlich als Richtwerte hinzugezogen werden.

tiven Versicherten einer Kategorie periodisch entsprechend der Austrittsrate reduziert und zwar auf der Ebene des einzelnen Versicherten. Dies geschieht indem einerseits die Vermögensveränderung aus der Versicherung reduziert und andererseits gleichzeitig jeweils anteilig eine Austrittsleistung berücksichtigt wird. Ebenso reduziert werden die Eintrittsleistungen der Ersatzversicherten und damit konsistent ihre späteren Vermögensveränderungen aus der Versicherung.

Für den einzelnen Versicherten folgt die Austrittsrate ar_t der Periode t aus seiner Versichertenkategorie, d.h. seinem Geschlecht und Alter zu Beginn dieser Periode:

$$ar_t^{i,j}(a_{t-1}^{i,j}, g^{i,j}) \quad .$$

Mit dieser Austrittsrate werden die entsprechenden Grössen reduziert, allerdings nicht für deaktivierte Versicherte und Versicherte, welche das ordentliche Rücktrittsalter bereits überschritten haben, da für diese Versicherten angenommen wird, dass sie nicht mehr austreten. Im nachfolgenden Ausdruck für den in der t-ten Periode verbleibenden, d.h. nicht-ausgetretenen Anteil des Versicherten wird dies über $min(t; t_1^{i,j}; t_r^{i,0})$ berücksichtigt. Dieser Anteil ergibt sich mit

$$t_r^{i,0} = \max(a_r^{i,0}(g^{i,0}) - a_0^{i,0}; 0)$$

über

$$\begin{aligned} aa_t^{i,j} &= \prod_{s=t_0^{i,0}+1}^{\min(t;t_1^{i,j};t_r^{i,0})} 1 - ar_s^{i,0} \quad && \text{für } \min(t; t_1^{i,j}; t_r^{i,0}) > t_0^{i,0} \\ &= 1 && \text{sonst.} \end{aligned}$$

Der während der t-ten Periode ausgetretene Teil folgt aus

$$ia_t^{i,j} = aa_{t-1}^{i,j} - aa_t^{i,j} \quad ,$$

wobei $aa_0 = 1$ gesetzt wird.

Der Vermögensverbrauch $VV^{i,j}$ wird damit wie folgt neu definiert:

$$VV^{i,j} = \sum_{t=1}^{T} [aa_t^{i,j}(EL_t^{i,j} + VE_t^{i,j}) - ia_t^{i,j} AL_t^{i,j}] \; e^{r_{t,T}} - aa_T^{i,j} D_T^{i,j} \quad .$$

6.3.4 Eintritte von Zusatzversicherten

Mit der Einstellung von Zusatzversicherten deckt der Arbeitgeber seinen Personalbedarf, der über den Ersatz der deaktivierten Versicherten hinausgeht. Im Modell ist die Anzahl an benötigten Versicherten aufgrund der festen Austrittsraten und dem laufenden Ersatz der deaktivierten Versicherten zu Beginn der Betrachtung feststellbar. Die Zusatzversicherten werden deshalb zum festen Bestand N_1 gezählt. Der Unterschied zum gegebenen Anfangsbestand ist im Modell einzig der, dass die Zusatzversicherten zu einem späteren Zeitpunkt eintreten. Im folgenden werden die einzelnen Bestandteile des festen Bestandes wie folgt bezeichnet:

- N_{10} umfasst den Anfangsbestand mit n_{10} Versicherten,
- N_{1t} umfasst den Bestand der in der t-ten Periode eintretenden n_{1t} Zusatzversicherten, d.h. mit Eintrittszeitpunkt $t_0 = t$.

Dabei ist

$$n_1 = \sum_{t=0}^{T-1} n_{1t} \quad .$$

Für die Eintritte zum Zeitpunkt T, d.h. mit $t_0 = T$, wird wiederum davon ausgegangen, dass die Eintrittsleistung dieser Versicherten ihrem Deckungskapital entspricht und somit stets ein Vermögensverbrauch von null resultiert. Diese Eintritte werden deshalb im Modell nicht weiter berücksichtigt.

Der zukünftige Personalbedarf wird vom Arbeitgeber nach Kategorien von Versicherten vorgegeben, wobei im folgenden exemplarisch von einer Kategorisierung des Bestandes an aktiven Versicherten nach Alter und Geschlecht ausgegangen wird. Die $e \times g \times t$ Kategorien werden mit $K_t^{e,g}$ notiert und umfassen alle $k_t^{e,g}$ aktiven Versicherten mit Geschlecht g, deren Alter in der Periode t in die e-te Altersklasse fällt, d.h. zwischen der Altersuntergrenze $u^{e,g}$ dieser Klasse und der Altersuntergrenze $u^{e+1,g}$ der nächsten liegt. Der vom Arbeitgeber vorgegebene Personalbedarf, d.h. die Soll-Anzahl an Aktiven wird mit $k_t^{*e,g}$ bezeichnet. Daraus ergibt sich die nötige Anzahl an Zusatzversicherten über

$$n_{1t}^{e,g} = k_t^{*e,g} - k_t^{e,g} \quad ,^7$$

Dadurch, dass die Austrittsraten auf die einzelnen Versicherten angewendet werden, ist die Anzahl an Aktiven $k_t^{e,g}$ in der Regel kein ganzzahliger Wert. Zur Festlegung der Anzahl an Zusatzversicherten wird zur Vereinfachung $n_{1t}^{e,g}$ auf einen ganzzahligen Wert $[n]_{1t}^{e,g}$ gerundet. Die Anzahl Versicherter im festen Bestand ergibt sich dann aus $n_1 = \sum_{t=0}^{T-1} n_{1t}$ mit $n_{1t} = \sum_g \sum_e [n]_{1t}^{e,g}$ als der Anzahl Versicherter im Bestand N_{1t}.

Die Zusatzversicherten erhalten als Versichertenmerkmale den mittleren Lohn der Versichertenkategorie und einen zufälligen Wert zwischen $u^{e,g}$ und $u^{e+1,g}$ als Alter a_t zugeteilt. Für die Eintrittsleistung wird ebenfalls der mittlere Wert der Kategorie herangezogen, welcher die Zusatzversicherten nach Eintritt angehören. Die Eintrittsleistung wird dann als Alterskapital bzw. umgerechnet als Versicherungsdauer gutgeschrieben.

Durch den laufenden Ersatz von deaktivierten Versicherten ergibt sich die Entwicklung des aktiven Bestandes rein aus der Alterung und den fest vorgegebenen Austritten bzw. Austrittsraten. Die Anzahl Versicherter einer Kategorie $k_t^{e,g}$ (vor dem Eintritt von N_{1t}) kann deshalb wie folgt ermittelt werden:

$$k_t^{e,g} = \sum_{i \in B_t^{e,g}} \prod_{s=t_0^{i,0}+1}^{t} (1 - ar_s^{i,0}) \quad ,$$

mit $B_t^{e,g} = \{i \in N_{10}, \dots, N_{1t-1} \mid u^{e,g} \le a_t^{i,0} < u^{e+1,g}, s_{t_0^{i,0}}^{i,0} = 0, g^{i,0} = g\}$.

[7] Im Fall $n_{1t}^{e,g} < 0$ werden keine zusätzlichen Austritte betrachtet. Ist $n_{1t}^{e,g}$ regelmässig kleiner als null sollte die Austrittsrate der entsprechenden Kategorie erhöht werden.

6.4 Modellvariablen

In diesem Abschnitt werden die in den Überschuss eingehenden Grössen auf die sie beeinflussenden Variablen untersucht. Die Betrachtung erfolgt unterteilt in Vermögensanlage, Versicherung, Bestandesentwicklung und Verwaltung.

6.4.1 Variablen für die Vermögensanlage und Verwaltung

Vermögensanlage

Der Vermögensanlage lassen sich die Grössen des Startvermögens V_0 und der Vermögensrendite $r_{t-1,t}$ zuordnen. Das Startvermögen wird angelegt, wobei die gewählte Anlagestrategie die Verteilung des Vermögens auf die einzelnen Anlageklassen bestimmt. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Anpassung des Portfolios an die Anlagestrategie jeweils am Jahresende erfolgt. Die Rendite des Vermögens hängt folglich von den Renditen der einzelnen Anlageklassen

$$\mathbf{ra}_{t-1,t} = (ra^1_{t-1,t}, \ldots, ra^k_{t-1,t}, \ldots, ra^K_{t-1,t})$$

und der gewählten Anlagestrategie, d.h. der Gewichtung der einzelnen Anlageklassenrenditen

$$\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_k, \ldots, w_K)$$

ab. Die Rendite ergibt sich dann über

$$r_{t-1,t} = f(\mathbf{w}, \mathbf{ra}_{t-1,t}) = \ln\left(\sum_{k=1}^{K} w_k \; e^{ra^k_{t-1,t}}\right)$$

und

$$r_{0,t} = \sum_{i=1}^{t} r_{i-1,i} \quad \text{bzw.} \quad r_{t,T} = \sum_{i=t+1}^{T} r_{i-1,i} \quad .$$

Verwaltung

Für die Verwaltungskosten VK_t wird zur Vereinfachung angenommen, dass sie konstant sind, d.h. in jeder Periode in der gleichen und bekannten Höhe VK anfallen.

$$VK_t = VK$$

6.4.2 Variablen für die Versicherung

Zum Versicherungsteil gehören die individuellen Vermögensveränderungen aus der Versicherung $VE_t^{i,j}$. Alle möglichen Vermögensveränderungen sind dabei im Vorsorgeplan der Kasse definiert, wobei Leistungen im folgenden als negative und Beiträge (sowie Einmaleinlagen und Nachzahlungen) als positve Vermögensveränderungen betrachtet werden.

Versicherungsverlauf

Die Art der Vermögensveränderungen hängt vom jeweiligen Versicherungsverlauf $\mathbf{t}^{i,j}$ bzw. Zustand $\mathbf{Z}_t^{i,j}$ des Versicherten ab: Aktive zahlen Beiträge, Invalide erhalten Invalidenrenten, etc. Die Abhängigkeit der Vermögensveränderungen von den Zuständen des Versicherten wird dabei so modelliert, dass jeweils der Zustand am Ende der Periode die Vermögensveränderung der gesamten vergangenen Periode bestimmt. Damit werden für die Übergänge der Aktiven die Leistungen eher überschätzt und die Beiträge eher unterschätzt. Hingegen werden bei den Übergängen der Pensionierten, Invaliden und Verstorbenen mit Witwe die Leistungen eher unterschätzt. Insgesamt ist aber davon auszugehen, dass damit die Vermögensveränderungen angemessen abgebildet werden. Zudem erfolgen die Vermögensveränderungen im Modell, wie in Abschnitt 6.1 bereits erwähnt, jeweils gesamthaft am Ende der Periode. In Abbildung 6.1 wird dieses Vorgehen anhand von zwei Beispielen graphisch veranschaulicht.

Damit lässt sich für die Vermögensveränderung allgemein folgendes festhalten:

Für ...	... setzt sich die Vermögensveränderung $VE_t^{i,j}(\mathbf{t}^{i,j},\cdot)$ zusammen aus ...
$1 \leq t \leq t_0$	0 (keine Zahlungsströme)
$t_0 < t < t_1$	Beiträgen und Einmaleinlagen
$\max(t_1;1) \leq t < t_2$	Invalidenleistungen
$\max(t_2;1) \leq t < t_3$	Altersleistungen (Rente)
$\max(t_3;1) \leq t < t_4$	Hinterbliebenenleistungen (Witwen(r)und Waisen)
$\max(t_4;1) \leq t < t_5$	Hinterbliebenenleistungen (Waisen)
$t = t_5 \leq T$	Altersleistungen (Kapital)

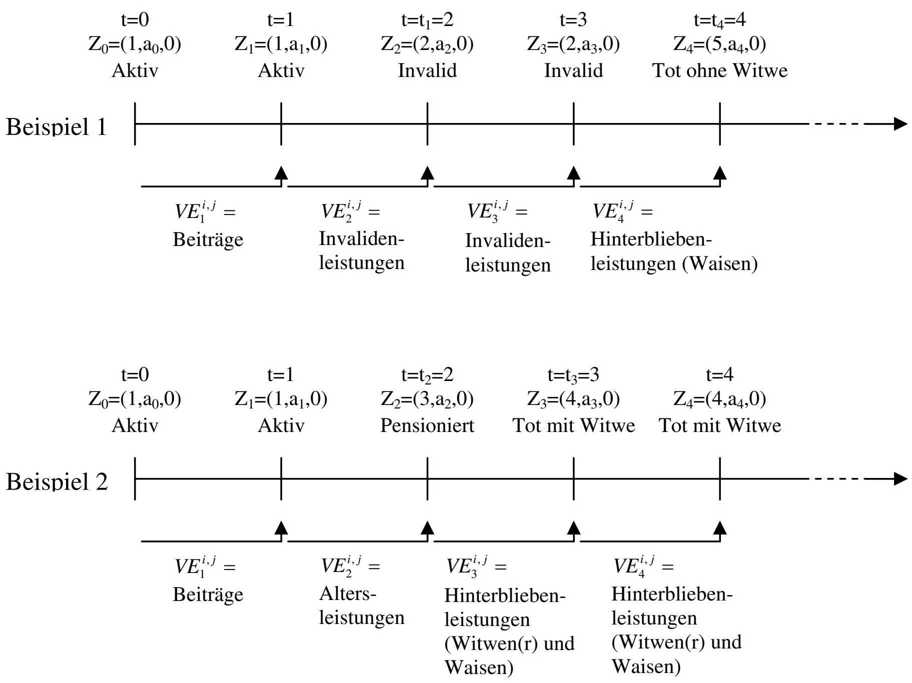


Abbildung 6.1: Illustration von Versicherungsverlauf und Vermögensveränderung.

Da eine grosse Vielfalt an Vorsorgeplänen besteht,[8] ist es nicht möglich, allgemeingültig die Bestimmung der Höhe der individuellen Vermögensveränderungen $VE_t^{i,j}$ zu beschreiben. Massgebliche Grössen sind aber immer das Alterskapital $AK_t^{i,j}$ (Beitragsprimat) bzw. die Versicherungsdauer $V_t^{i,j}$ (Leistungsprimat) und/oder der versicherte Lohn $L_t^{i,j}$.

Lohnentwicklung

Der versicherte Lohn $L_t^{i,j}$ zum Zeitpunkt t ergibt sich im Modell grundsätzlich aus

- dem massgebenden Lohn zu Beginn der Betrachtung $ML_0^{i,j} = ML_0^{i,0}$,
- der zwischenzeitlichen Lohnentwicklung $\mathbf{le}_t^{i,j}$ und

[8] vgl. auch Darstellung der üblichen Beitrags- und Leistungsformen in den Abschnitten 1.3 und 1.4.3.

- den Grenzbeträgen, d.h. dem Lohn-Maximum M_t und dem Koordinationsabzug K_t

über

$$L_t^{i,j} = \begin{cases} \min\{ML_t^{i,j} - K_t; M_t - K_t\} & \text{falls } ML_t^{i,j} \geq K_t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei je nach Plan weitere Details in der Berechnung berücksichtigt werden müssen, wie z.B. die Mindesthöhe des versicherten Lohnes für obligatorisch Versicherte und die unter dem Koordinationsabzug liegende Eintrittsschwelle bei einem BVG-Minimalplan.[9]

Die Lohnentwicklung $\mathbf{le}_t^{i,j} = (le_{0,1}^{i,j}, \ldots, le_{0,t}^{i,j})$ setzt sich im Modell aus einer allgemeinen und einer individuellen Komponente zusammen. Die allgemeine Komponente[10] $la_{t,t+1}$ bildet die einperiodige Lohnentwicklung ohne die Berücksichtigung erhöhter Qualifikationen bzw. Erfahrung eines Versicherten ab.[11] Letztere wird im Modell über die individuelle Komponente $li_t^{i,j} = f(a_t^{i,j}, g^{i,j})$ beschrieben, welche in Abhängigkeit von Alter und Geschlecht des Versicherten vorgegeben wird. Der massgebende Lohn eines Versicherten für die t-te Periode ergibt sich dann aus dem massgebenden Lohn der Vorperiode über

$$ML_{t+1}^{i,j} = \begin{cases} ML_t^{i,j} \cdot (li_t^{i,j} + e^{la_{t,t+1}}) & \text{für } t < t_1 \\ ML_t^{i,j} & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei die Lohnentwicklung nur bis zur Deaktivierung modelliert wird.

Die gängige Praxis für die Anpassung der BVG-Grenzbeträge ist die Anpassung gemäss dem sogenannten Misch-Index, welcher sich als arithmetisches Mittel aus dem Schweizerischen Lohnindex (allgemeine Lohnentwicklung) und dem Landesindex der Konsumentenpreise (Inflation) ergibt. Bei einigen Pensionskassen

[9] vgl. auch Abschnitt 9.2.1.

[10] Angabe erfolgt als logarithmische Steigerungsrate.

[11] Dieses Vorgehen wird aufgrund der Verfügbarkeit von historischen Daten gewählt. So gibt z.B. der Schweizerische Lohnindex nur die Entwicklung der Löhne bei konstanter Beschäftigungsstruktur wieder, d.h. ohne Berücksichtigung einer Lohnentwicklung aufgrund erhöhter Qualifikationen oder Erfahrung.

werden allerdings nicht diese gesetzlichen Grenzbeträge verwendet, sondern eigene reglementarisch festgelegt. Für das Modell wird aber angenommen, dass auch deren Anpassung in Abhängigkeit von der allgemeinen Lohnentwicklung $\mathbf{la}_t = (la_{0,1}, \ldots, la_{0,t})$ und der Inflation $\mathbf{i}_t = (i_{0,1}, ..., i_{0,t})$ beschrieben werden kann.[12] Damit ergibt sich für die Grenzbeträge

$$M_t = f(\mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t) \quad \text{und} \quad K_t = f(\mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t) \quad .$$

Für die Entwicklung des versicherten Lohnes eines Versicherten $\mathbf{L}_t^{i,j} = (L_0^{i,j}, ..., L_t^{i,j})$ folgt damit

$$\mathbf{L}_t^{i,j} = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t) \quad .$$

Alterskapital

Das Alterskapital $AK_t^{i,j}$ zum Zeitpunkt t errechnet sich im Modell aus den folgenden Angaben:

- dem gegebenen Alterskapital zu Beginn der Betrachtung $AK_0^{i,j} = AK_0^{i,0}$,
- den bis t erfolgten Spargutschriften $\mathbf{SG}_t^{i,j}$,[13]
- den bis t vorgenommenen Verzinsungen $\mathbf{z}_t$,
- dem Versicherungsverlauf $\mathbf{t}^{i,j}$ und
- den bis t erfolgten Einmaleinlagen $\mathbf{E}_t^{i,j}$.

Die Spargutschriften erfolgen bis zum Rücktritt bzw. bis Erreichen des ordentlichen Rücktrittsalter und ergeben sich aus dem Lohn und den im Vorsorgeplan in Abhängigkeit vom Alter und Geschlecht angegebenen Sätzen $sg_t^{i,j} = f(a_t^{i,j}, g^{i,j})$:

$$\mathbf{SG}_t^{i,j} = (SG_1^{i,j}, \ldots, SG_t^{i,j}) = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{L}_t^{i,j}) = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t)$$

Die Verzinsung des Alterskapitals ist vom Gesetz her im Minimum vorgegeben, wobei diese Mindestverzinsung in den letzten Jahren regelmässig an die

[12] vgl. Beispiele in Anhang B.

[13] Reaktivierungen, d.h. nur vorübergehend invalide Versicherte, werden im Modell nicht berücksichtigt.

auf dem Kapitalmarkt zu erzielende Rendite angepasst wurde. Oft wird auch eine Zusatzverzinsung im Rahmen der finanziellen Möglichkeiten der Kasse vorgesehen. Für die Modellierung wird deshalb die Verzinsung entweder als konstante Grösse oder in Abhängigkeit von den (kumulierten) Kapitalmarktrenditen $\mathbf{ra}_{0,t} = (ra^1_{0,t}, \ldots, ra^k_{0,t}, \ldots, ra^K_{0,t})$ abgebildet:

$$\mathbf{z}_t = (z_1, \ldots, z_t) = f(\mathbf{ra}_{0,1}, \ldots, \mathbf{ra}_{0,t}) = f(\mathbf{ra}_t)$$

Die Einmaleinlagen werden zur Vereinfachung über Durchschnittswerte abgebildet. Mit $e(a^{i,j}_t, g^{i,j})$ wird dabei die durchschnittliche Höhe der Einkäufe pro Periode in Prozent vom Lohn angeben, welche wiederum vom Alter (oder Altersklasse) und Geschlecht des Versicherten abhängt. Das Alterskapital des Versicherten erhöht sich dann jedes Jahr bis zum Rücktritt bzw. Erreichen des ordentlichen Rücktrittsalter um den Betrag

$$\mathbf{E}^{i,j}_t = (E^{i,j}_1, \ldots, E^{i,j}_t) = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{L}^{i,j}_t) = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t) \quad .$$

Allgemein lässt sich damit für das Alterskapital schreiben

$$AK^{i,j}_t = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t) \quad .$$

Versicherungsdauer

Die Versicherungsdauer $VD^{i,j}_t$ ergibt sich im Modell aus

- der zu Beginn der Betrachtung bekannten Versicherungsdauer $VD^{i,j}_0 = VD^{i,0}_0$,
- dem Versicherungsverlauf $\mathbf{t}^{i,j}$ und
- den bis zum Zeitpunkt t weiter eingekauften Versicherungsjahren $v^{i,j}_t$.

Wie oben, wird davon ausgegangen, dass für den Einkauf in höhere Leistungen jährlich $e(a^{i,j}_t, g^{i,j})$ des versicherten Lohnes verwendet wird. Mit den zwingend im Reglement anzugebenden Kosten eines weiteren Versicherungsjahres lassen sich damit die bis zum Zeitpunkt t zusätzlich eingekauften Versicherungsjahre berechnen, wobei allenfalls eine im Vorsorgeplan vorgesehene Obergrenze zu berücksichtigen ist:

$$\mathbf{v}^{i,j}_t = (v^{i,j}_1, \ldots, v^{i,j}_t) = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{L}^{i,j}_t) = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t) \quad .$$

Allgemein lässt sich damit für die Versicherungsdauer schreiben

$$VD_t^{i,j} = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t) \quad .$$

Inflation

Die Inflation $\mathbf{i}_t = (i_{0,1}, ..., i_{0,t})$ ist bei der Anpassung der Grenzbeträge als auch bei der Anpassung der Leistungen an die Preisentwicklung zu berücksichtigen.

Zusammenfassung

Allgemein folgt somit für die Vermögensveränderung aus der Versicherung $VE_t^{i,j}$

$$\begin{aligned} VE_t^{i,j} &= f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t) && \text{Beitragsprimat,} \\ VE_t^{i,j} &= f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t) && \text{Leistungsprimat.} \end{aligned}$$

Um aus den Variablen die Höhe von $VE_t^{i,j}$ errechnen zu können, muss der Vorsorgeplan geeignet operationalisiert werden. Dies umfasst im wesentlichen die Festlegung eindeutiger funktionaler Beziehungen und die Vornahme von Vereinfachungen. Da kein allgemeingültiger Fall beschreibbar ist, wird die Operationalisierung und Berechnung der Höhe von Leistungen und Beiträgen im Modell anhand von drei Beispielen veranschaulicht:

- Beispielplan A: Vorsorgeplan einer BVG-Minimal Kasse.
- Beispielplan B: Vorsorgeplan der Pensionskasse eines schweizerischen mittelgrossen Industrieunternehmens, welcher die Altersvorsorge nach dem Beitragsprimat und die Risikovorsorge nach dem Leistungsprimat vorsieht (Mischplan).
- Beispielplan C: Vorsorgeplan der Pensionskasse einer kleineren schweizerischen Bank nach dem Leistungsprimat.

Auf die Beispiele wird im einzelnen in Kapitel 9 für den Plan A und im Anhang B für die Pläne B und C eingegangen.

6.4.3 Variablen für die Bestandesentwicklung

Die Vermögensveränderung aus der Bestandesentwicklung umfasst die Eintrittsleistungen $EL_t^{i,j}$ sowie die Austrittsleistungen $AL_t^{i,j}$ der Versicherten.

Austrittsleistungen

Die Austritts- oder Freizügigkeitsleistung entspricht in einem Beitragsprimatplan dem Altersguthaben $AK_t^{i,j}$ und in einem Leistungsprimatplan dem Barwert der erworbenen Leistung $BEL_t^{i,j} = f(L_t^{i,j}, v_t^{i,j})$. Der Austritt erfolgt im Modell jeweils am Ende einer Periode. Für die Abbildung des Zahlungsstroms im Zusammenhang mit einem Austritt bedeutet dies, dass ebenfalls die in der Periode geleisteten Beitragszahlungen $B_t^{i,j}$ zu berücksichtigen sind. Daraus ergibt sich die "Netto"-Austrittsleistung $AL_t^{i,j}$ über

$$AL_t^{i,j} = \begin{cases} AK_t^{i,j} - B_t^{i,j} & t > t_0^{i,j} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t) \quad \text{Beitragsprimat,}$$

$$AL_t^{i,j} = \begin{cases} BEL_t^{i,j} - B_t^{i,j} & t > t_0^{i,j} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t) \qquad \text{Leistungsprimat.}$$

Eintrittsleistungen

Wechselt ein Versicherter seinen Arbeitgeber, so erhält er von seiner alten Vorsorgeeinrichtung eine Freizügigkeitsleistung, die in die Vorsorgeeinrichtung des neuen Arbeitgebers einzubringen ist. Bei einer Beitragsprimatkasse wird diese eingebrachte Freizügigkeitsleistung als Alterskapital gutgeschrieben. Bei einer Leistungsprimatskasse dient sie zum Einkauf von Versicherungsjahren, d.h. wird in eine Versicherungsdauer umgerechnet.[14]

[14] Die Kosten eines Versicherungsjahres werden in der Regel in Prozenten des versicherten Lohnes definiert und sind zwingend in den Reglementen aufzuführen.

Bei der Besprechung der Abbildung der Bestandesentwicklungen wurden für das Modell zwischen zwei Typen von Eintritten unterschieden: Ersatzversicherte und Zusatzversicherte. Für die Ersatzversicherten wird angenommen, dass die Eintrittsleistung der Austrittsleistung entspricht, auf die der deaktivierte Versicherte Anspruch gehabt hätte. Für die Zusatzversicherten wird die Eintrittsleistung gleichgesetzt mit der mittleren Austrittsleistung aller Versicherten aus der selben Kategorie. Daraus folgt für die Eintrittsleistung eines Ersatzversicherten ($j \geq 1$)

$$EL_t^{i,j} = \begin{cases} AK_t^{i,j-1} & t = t_0^{i,j} > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{Beitragsprimat,}$$

$$EL_t^{i,j} = \begin{cases} BEL_t^{i,j-1} & t = t_0^{i,j} > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{Leistungsprimat.}$$

und für die Eintrittsleistung eines Zusatzversicherten aus der e-ten Altersklasse mit Geschlecht g

$$EL_t^{i,0} = \begin{cases} \overline{AK}_t^{e,g} & t = t_0^{i,j} > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{Beitragsprimat,}$$

$$EL_t^{i,0} = \begin{cases} \overline{BEL}_t^{e,g} & t = t_0^{i,0} > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{Leistungsprimat.}$$

Abbildung 6.2 veranschaulicht nochmals den Zusammenhang zwischen Versicherungsverlauf und Vermögensveränderung, erweitert um die Ein- und Austrittsleistungen.

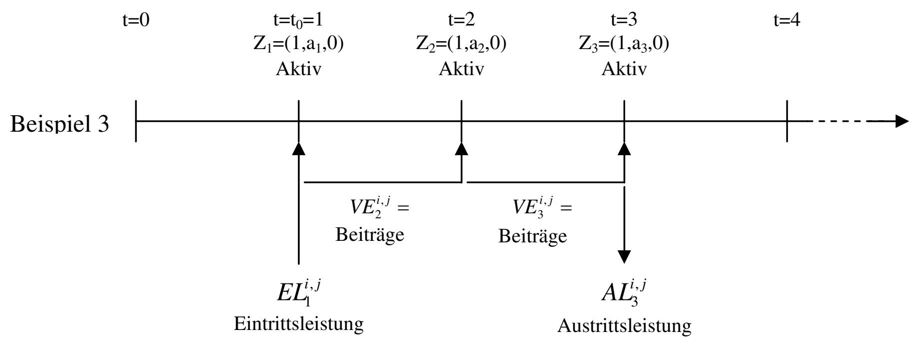


Abbildung 6.2: Illustration der Ein- und Austrittsleistungen.

6.4.4 Variablen für das Deckungskapital

Für das Modell wird das individuelle Deckungskapital $D_T^{i,j}$ eines Versicherten in Anlehnung an die Praxis[15] wie folgt bestimmt:

Für	entspricht das individuelle Deckungskapital $D_T^{i,j}$ dem
Aktive $t_1^{i,j} = T + 1$	Alterskapital (Beitragsprimat) bzw. dem Barwert der erworbenen Leistung (Leistungsprimat).
Invalide $t_2^{i,j} = T + 1$	vers.techn. Barwert der laufenden Invalidenrente, der Anwartschaft auf Witwen(r)rente und dem vers.techn. Barwert der laufenden Kinderrenten.[16]
Pensionierte (Rente) $t_3^{i,j} = T + 1$	vers.techn. Barwert der laufenden Altersrente, der Anwartschaft auf Witwen(r)rente und dem vers.techn. Barwert der laufenden Kinderrenten.[16]
Verstorbene mit Witwe(r) $t_4^{i,j} = T + 1$	vers.techn. Barwert der laufenden Witwen(r)rente und dem vers.techn. Barwert der laufenden Kinderrenten.[16]
Verstorbene ohne Witwe(r) $t_5^{i,j} = T + 1$	vers.techn. Barwert der laufenden Kinderrenten.[16]
Pensionierte (Kapital) $t_5^{i,j} < T + 1$	wird kein Deckungskapital mehr benötigt.

[15] vgl. Abschnitt 2.3.6

Von generellen technischen Rückstellungen wird für das Modell abgesehen, wobei eine Berücksichtigung von solchen im gegebenen Modell ohne weiteres möglich ist.

Die Berechnung des Barwertes der erworbenen Leistung (BEL), welcher massgeblich von der Versicherungsdauer und dem versicherten Lohn abhängt, wurde schon in Abschnitt 1.3.7 beschrieben. Die Berechnung der versicherungstechnischen Barwerte und Anwartschaften erfolgt für das Modell anhand der in den versicherungstechnischen Rechnungsgrundlagen tabellierten technischen Barwerte.[17] Multipliziert mit der laufenden Leistung bzw. bei Anwartschaften mit der hypothetischen Leistung erhält man über diese Barwerte die Höhe der benötigten Rückstellung. Die Bestimmung der versicherungstechnischen Barwerte der Kinderrenten erfolgt jeweils anhand des durchschnittlichen Alters der Kinder, das gemäss Rechnungsgrundlagen aufgrund des eigenen Alters des Versicherten zu erwarten ist. Ebenso wird für die Anzahl zu berücksichtigender Kinder die durchschnittliche Kinderanzahl aus den Rechnungsgrundlagen herangezogen.

Bei gegebenen Versicherungsverlauf (bzw. Zustand) folgen damit die individuellen Deckungskapitalien $D_T^{i,j}$ aus dem Alterskapital bzw. der Versicherungsdauer oder aus den Leistungen des Versicherten:

$$\begin{aligned} D_T^{i,j} &= f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t) && \text{Beitragsprimat,} \\ D_T^{i,j} &= f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t) && \text{Leistungsprimat.} \end{aligned}$$

Auf die Berechnung des Deckungskapitals im Modell wird in Kapitel 9 weiter eingegangen.

[16] Dabei wird davon ausgegangen, dass allfällige Waisenrenten die selbe Höhe wie die Invaliden- bzw. Pensioniertenkinderrenten haben. Die Rückstellung von Renten für Kinder, die nach dem Zeithorizont T geboren werden, wird hier aufgrund der Unwesentlichkeit der Beträge vernachlässigt.

[17] Tabelliert werden in der Regel die versicherungstechnischen Barwerte für Renten in Höhe von jährlich einer Geldeinheit (1 CHF).

6.5 Zusammenfassung

In den vorigen Abschnitten wurden die einzelnen Elemente zu Bestimmung des Überschusses erläutert. Zusammenfassend ergibt sich damit der Überschuss U_T am Ende des Zeithorizonts T über

$$U_T = V_0 \; e^{r_{0,T}} - \sum_{t=1}^{T} VK \; e^{r_{t,T}} + \sum_{i=1}^{n_1} VV^i$$

mit dem Gesamt-Vermögensverbrauch VV^i des i-ten Versicherten aus dem festen Bestand

$$VV^i = \sum_{j=0}^{n_2 i} VV^{i,j}$$

und dem Vermögensverbrauch $VV^{i,j}$ des j-ten Ersatzversicherten $(j > 0)$ für i bzw. des Einzel-Vermögensverbrauch des i-ten Versicherten $(j = 0)$ des festen Bestandes selber

$$VV^{i,j} = \sum_{t=1}^{T} [aa_t^{i,j}(EL_t^{i,j} + VE_t^{i,j}) - ia_t^{i,j} AL_t^{i,j}] \; e^{r_{t,T}} - aa_T^{i,j} D_T^{i,j} \quad .$$

Die Gesamtzahl an Versicherten n ergibt sich als Summe der n_{10} Versicherten des Anfangsbestandes, der n_{1t} Zusatzversicherten der einzelnen Perioden t und der n_{2i} Ersatzversicherten für jeden der n_1 Versicherten des festen Bestandes

$$n = n_1 + n_2 = \sum_{t=0}^{T-1} n_{1t} + \sum_{i=1}^{n_1} \; n_{2i} \quad .$$

Der nicht-ausgetretene Teil eines Versicherten $aa_t^{i,j}$ ergibt sich aus der Austrittsrate $ar_t^{i,j}(a_{t-1}^{i,j}, g^{i,j})$ für $\min(t; t_1^{i,j}; t_r^{i,0}) > t_0^{i,j}$ über

$$aa_t^{i,j} = \prod_{s=t_0^{i,0}+1}^{\min(t;t_1^{i,j};t_r^{i,0})} 1 - ar_s^{i,0}$$

und ist sonst $aa_t^{i,j} = 1$. Der während der t-ten Periode ausgetretene Anteil ergibt sich damit folglich aus

$$ia_t^{i,j} = aa_{t-1}^{i,j} - aa_t^{i,j} \quad ,$$

wobei für $aa_0 = 1$ gesetzt wird.

Die Vermögensveränderungen aus der Versicherung $VE_t^{i,j}$ und die Deckungskapitalien $D_T^{i,j}$ ergeben sich als Funktion des jeweiligen Versicherungsverlaufs $\mathbf{t}^{i,j}$, der allgemeinen Lohnentwicklung $\mathbf{la}_t$, der Inflation $\mathbf{i}_t$ und beim Beitragsprimat im Falle einer kapitalmarktabhängigen Verzinsung auch der Renditen $\mathbf{ra}_t$:

$$\begin{aligned} VE_t^{i,j} &= f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t) && \text{Beitragsprimat} \\ D_T^{i,j} &= f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t) && \\ VE_t^{i,j} &= f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t) && \text{Leistungsprimat.} \\ D_T^{i,j} &= f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t) && \end{aligned}$$

Die "Netto"-Austrittsleistungen, welche jeweils anteilig in den Überschuss eingehen, folgen für $t > t_0^{i,j}$ aus

$$\begin{aligned} AL_t^{i,j} &= AK_t^{i,j} - B_t^{i,j} = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t) && \text{Beitragsprimat,} \\ AL_t^{i,j} &= BEL_t^{i,j} - B_t^{i,j} = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t) && \text{Leistungsprimat.} \end{aligned}$$

und sind sonst $AL_t^{i,j} = 0$.

Die Eintrittsleistungen $EL_t^{i,j}$ eines Ersatzversicherten ($j \geq 1$) sind im Modell für $t = t_0^{i,j} > 0$ gegeben über

$$\begin{aligned} EL_t^{i,j} &= AK_t^{i,j-1} && \text{Beitragsprimat} \\ EL_t^{i,j} &= BEL_t^{i,j-1} && \text{Leistungsprimat} \end{aligned}$$

und für einen Zusatzversicherten aus der e-ten Altersklasse mit Geschlecht g über

$$\begin{aligned} EL_t^{i,0} &= \overline{AK}_t^{e,g} && \text{Beitragsprimat} \\ EL_t^{i,0} &= \overline{BEL}_t^{e,g} && \text{Leistungsprimat} \end{aligned}$$

und sind sonst, d.h. für $t \neq t_0^{i,j}$, gleich null. Für die Versicherten des Anfangsbestandes sind keine Eintrittsleistungen zu berücksichtigen.

Aus den Renditen der einzelnen Anlageklassen

$$\mathbf{ra}_{t-1,t} = (ra^1_{t-1,t}, \ldots, ra^k_{t-1,t}, \ldots, ra^K_{t-1,t})$$

und der Anlagestrategie

$$\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_k, \ldots, w_K) \ ,$$

welche die Verteilung des Vermögens auf die Anlageklassen angibt, folgt die Vermögensrendite

$$r_{t-1,t} = f(\mathbf{w}, \mathbf{ra}_{t-1,t}) \quad .$$

Die weiteren in den Überschuss eingehenden Grössen sind das Startvermögen V_0 und die Verwaltungskosten $VK_t = VK$, welche beide vorgegeben werden.

Kapitel 7

Modellierung der Risikofaktoren

7.1 Bestimmung der Risikofaktoren und ihrer Abhängigkeiten

Aus dem vorigen Kapitel folgt für den Überschuss

$$U_T = f(\mathbf{t}^{1,0}, \ldots, \mathbf{t}^{i,j}, \ldots, \mathbf{t}^{n_1, n_{2n_i}}, \mathbf{la}_T, \mathbf{i}_T, \mathbf{ra}_T) \quad .$$

Daraus ergeben sich für das Modell die folgenden Risikofaktoren, welche als Zufallsvariablen modelliert werden:

- die Anlageklassenrenditen $\mathbf{ra}_T$,
- die Inflation $\mathbf{i}_T$,
- die allgemeine Lohnentwicklung $\mathbf{la}_T$ und
- die Versicherungsverläufe aller Versicherten $\mathbf{t}^{1,0}, \ldots, \mathbf{t}^{i,j}, \ldots, \mathbf{t}^{n_1, n_{2n_1}}$.

Für die Abhängigkeiten zwischen den Risikofaktoren werden die folgenden Annahmen getroffen: Die Versicherungsverläufe der einzelnen Versicherten $\mathbf{t}^{i,j}$ werden, mit Ausnahme der Eintrittszeitpunkte der Ersatzversicherten, als voneinander unabhängig betrachtet. Das heisst, dass beispielsweise der Todeszeitpunkt oder Invalidisierungszeitpunkt eines Versicherten keinen Einfluss auf der Versicherungsverlauf eines anderen Versicherten hat. Die Abhängigkeit zwischen den

Eintrittszeitpunkten wird über die Beziehung (6.1) funktional berücksichtigt.

Ebenfalls wird angenommen, dass die Versicherungsverläufe unabhängig von der Lohnentwicklung $\mathbf{la}_T$, der Inflation $\mathbf{i}_T$ und den Anlageklassenrenditen $\mathbf{ra}_T$ sind.

Für die Abhängigkeiten zwischen den Renditen der verschiedenen Anlageklassen untereinander und für die Abhängigkeiten zwischen den Renditen, der Lohnentwicklung und der Inflation, wird davon ausgegangen, dass sie sich in Form von Korrelationen[1] modellieren lassen.

Die Abbildung 7.1 fasst die Risikofaktoren mit den angenommen Abhängigkeiten und deren Modellierung nochmals graphisch zusammen.

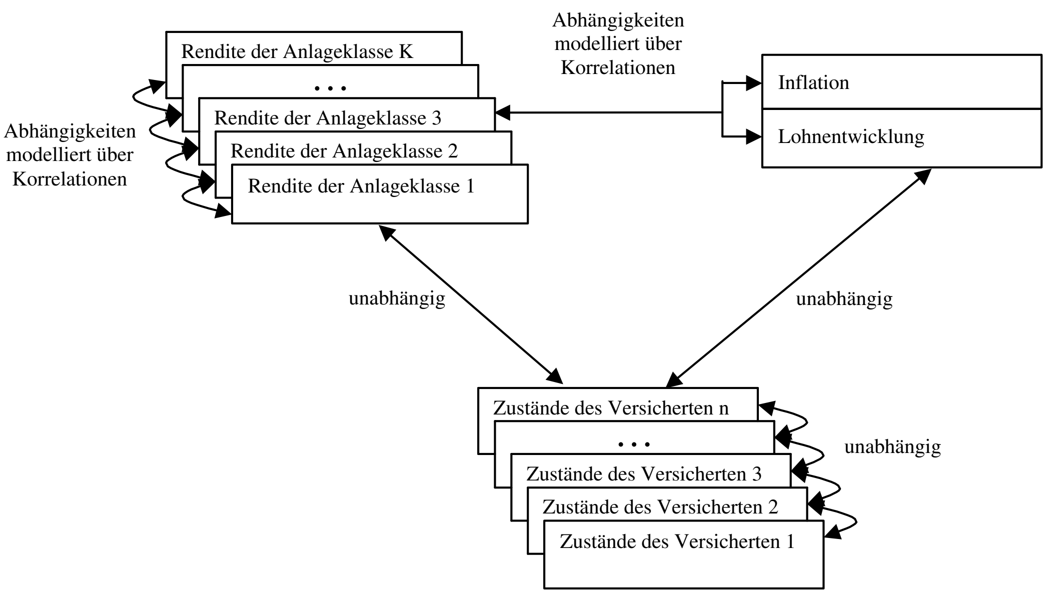


Abbildung 7.1: Risikofaktoren und ihre Abhängigkeiten.

[1] Die Korrelation misst die Stärke und Richtung des linearen Zusammenhangs (oder der linearen Komponente des Zusammenhangs) zweier Variablen (vgl. Stahel [91], S. 37)

7.2 Modellierung der einzelnen Risikofaktoren

7.2.1 Anlageklassenrenditen

Für das Risikomanagement von Kapitalanlagen wurde von der Bankenpraxis in den letzten Jahren eine Vielzahl von internen Modellen entwickelt, welche auf der in Kapitel 3 beschriebenen und in der modernen Finanztheorie üblichen Beschreibung des zeitlichen Verhaltens der Preise von Vermögensanlagen durch stochastische Prozesse beruhen. Eines der bekanntesten dieser Modelle ist das 1996 veröffentlichte RiskMetrics-Modell [47] von JP Morgan. Für die Modellierung der Anlageklassenrenditen soll auf ein solches in der Praxis verwendetes Modell aufgesetzt werden. Die meisten dieser Modelle sind allerdings auf die Handelstätigkeit von Banken ausgerichtet und deshalb nur für eine Anwendung auf kurze Zeithorizonte von bis zu maximal einigen wenigen Monaten vorgesehen. Bei der Anlage von Vorsorgegeldern sind hingegen in der Regel eher lange Zeithorizonte von Interesse.

Eine pragmatische Vorgehensweise, welche speziell zur Modellierung von Marktrisiken bei Zeithorizonten von über 2 Jahren entwickelt wurde, findet sich in der RiskMetrics Group-Publikation „ClearHorizon^{TM}: Forecasting Methodology for Horizons Beyond Two Years" (vgl. Kim [50]). Von der RiskMetrics Group wird dieser Ansatz vor allem im Risikomanagement von Pensions-Plänen und bei der langfristigen Vermögensverwaltung für individuelle Investoren angewendet. Der Ansatz ist simulationsbasiert und beruht auf einer Verteilungsannahme, welche aus dem Random Walk und dem Mean Reversion Prozess abgeleitet wird. Das Vorgehen wird nachfolgend erläutert.

Zunächst wird für jede Anlageklasse das Random Walk Modell und das Mean Reversion Modell geschätzt. Die Parameterschätzung erfolgt für beide über die in Abschnitt 3.3.6 beschriebenen Verfahren. Bis anhin wurde für die Modellierung als Periode t ein Jahr verwendet. Um für die Parameterschätzungen auf eine grössere Stichprobe zurückgreifen zu können, werden für die Anlageklassenrenditen nun aber vorerst Renditen auf monatlicher Basis betrachtet:

$$ra_{u,q}^k \quad \text{mit} \quad u, q = 1, \ldots, Q \quad \text{und} \quad Q = 12\ T.$$

In die Bestimmung des Überschusses gehen dann letztendlich aber nur die relevanten Renditen $ra_{s,t}^k$ auf jährlicher Basis ein. Als Datengrundlage für die Parameterschätzungen werden historische Monatsrenditen von Indizes herangezogen, welche die entsprechenden Anlageklassen geeignet abbilden (vgl. auch Abschnitt 10.1.1).

Bei Annahme eines Random Walk folgt mit den geschätzten Parametern als Verteilungsannahme für die Renditen[2]

$$ra_{u,q} \sim N\left(\ \hat{\mu}_{u,q,RW}\ ,\ \hat{\sigma}^2_{u,q,RW}\ \right) \quad ,$$

mit

$$\hat{\mu}_{u,q,RW} = (q-u)\ \hat{\mu}_{RW}$$

und

$$\hat{\sigma}^2_{u,q,RW} = (q-u)\ \hat{\sigma}^2_{RW}.$$

Bei Annahme eines Mean Reversion Prozesses ergibt sich als Verteilungsannahme für die Renditen

$$ra_{u,q} \sim N(\ \hat{\mu}_{u,q,MR}\ ,\ \hat{\sigma}^2_{u,q,MR}\ ) \quad ,$$

mit

$$\hat{\mu}_{u,q,MR} = (q-u)\ \hat{\mu}_{MR} + (1-(1-\hat{\gamma})^{q-u})\ (\hat{M}_0 + u\ \hat{\mu}_{MR} - x_u)$$

und

$$\hat{\sigma}^2_{u,q,MR} = \hat{\sigma}^2_{MR}\ \frac{1-(1-\hat{\gamma})^{2(q-u)}}{1-(1-\hat{\gamma})^2} \quad .$$

Bei einem Random Walk sind alle eintretenden Kursänderungen (Schocks) dauerhaft und werden über die Zeit hinweg akkumuliert. Deshalb steigt die mehrperiodige Varianz proportional zur einperiodigen Varianz an. Kommen tatsächlich

[2] Der Index k, welcher die k-te Anlageklasse bezeichnet, wird im folgenden der Übersichtlichkeit halber zunächst weggelassen.

aber auch Kursänderungen vor, die nur vorübergehend sind, d.h. für die eine gegenläufige Bewegung zum langfristigen Mittel stattfindet, wird die mehrperiodige Varianz bei Verwendung der obigen Verteilungsannahme zu hoch angesetzt.

Beim Mean Reversion Modell hingegen ist genau das Gegenteil der Fall. Dort sind annahmegemäss alle Preisänderungen (Schocks) nur vorübergehend und sämtliche Abweichungen vom langfristigen Trend werden über die Zeit hinweg, mit der Geschwindigkeit, die durch den Mean Reversion Parameter γ vorgegeben ist, ausgeglichen. Bestehen aber tatsächlich auch Kursänderungen die dauerhaft sind, wird mit der Annahme der obigen Renditeverteilungen die mehrperiodige Varianz zu tief angesetzt.

Betrachtet man nun längerfristige Zeithorizonte gewinnen diese Eigenschaften zunehmend an Bedeutung. Ausgehend von der Annahme, dass in der Realität beide Typen von Preisänderungen nebeneinander vorherrschen, d.h. dauerhafte und vorübergehende, werden diese beiden Modelle als Extreme eines realistischen Modells interpretiert. Der Random Walk als das Modell mit der maximal möglichen Volatilität und der Mean Reversion Prozess als das Modell mit der minimalen Volatilität. Anstatt nun bei der Beschreibung der zeitlichen Entwicklung einzelner Anlageklassen entweder auf das Modell des Random Walk oder des Mean Reversion Prozesses zurückzugreifen, wird ein kombiniertes Modell aus Random Walk und Mean Reversion vorgeschlagen. Die Kombination besteht darin, dass für die Verteilungsannahme die geschätzten Parameter beider Modelle gemittelt werden. Damit wird erreicht, dass die varianzreduzierende Wirkung der Mean Reversion Eigenschaft nur teilweise berücksichtigt wird. Das gleiche gilt für die Auslenkung vom langfristigen Mittel zu Beginn der Betrachtung (vgl. Kim [50], S. 8 f.).

Dem obigen folgend wird, für die stetigen Renditen einer Anlageklasse zum Zeitpunkt u, die nachstehende Normalverteilung angenommen:

$$ra_{u,q} \sim N\Big(\ \mu_{u,q}\ ,\ \sigma^2_{u,q}\ \Big) \quad ,$$

mit

$$\begin{aligned}\mu_{u,q} &= w\ \hat{\mu}_{u,q,RW}\ +\ (1-w)\ \hat{\mu}_{u,q,MR} \\ &= w\ (q-u)\ \hat{\mu}_{RW} \\ &\quad + (1-w)\ \Big((q-u)\ \hat{\mu}_{MR} + (1-(1-\hat{\gamma})^{q-u})\ (\hat{M}_0 + u\ \hat{\mu}_{MR} - x_u)\Big)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sigma^2_{u,q} &= w\ \hat{\sigma}^2_{u,q,RW}\ +\ (1-w)\ \hat{\sigma}^2_{u,q,MR} \\ &= w\ (q-u)\ \hat{\sigma}^2_{RW}\ +\ (1-w)\ \hat{\sigma}^2_{MR}\ \tfrac{1-(1-\hat{\gamma})^{2(q-u)}}{1-(1-\hat{\gamma})^2} \quad .\end{aligned}$$

Da die Schätzung von $\hat{\mu}_{MR}$ durch $\hat{\mu}_{RW}$ erfolgt (vgl. Abschnitt 3.3.6), ergibt sich

$$\mu_{u,q} =\ (q-u)\ \hat{\mu}_{RW} +\ (1-w)\ (1-(1-\hat{\gamma})^{q-u})\ (\hat{M}_0 + u\ \hat{\mu}_{RW} - x_u) \quad .$$

Auch für die kombinierte Verteilungsannahme gilt, dass bei gegebenen w und $\hat{\gamma}$, die mehrperiodige Varianz nur von der betrachteten Zeitdifferenz $q-u$ abhängt.

Die Gewichtung w ergibt sich aus der Überlegung, dass der Anteil an vorübergehenden Kursänderungen desto grösser ist, je stärker die Entwicklung der empirischen Variance Ratio von eins abweicht. Das heisst, dass die empirischen Variance Ratios zur Messung der Stärke der vorhandenen Mean Reversion-Eigenschaften einer Anlageklasse herangezogen werden (vgl. Kim [50], S. 9 f.).

Die Gewichtung mit w $(0 \leq w \leq 1)$ erfolgt demnach so, dass die Differenz der Varianz Ratios des kombinierten Modells zu den empirischen Variance Ratios minimal wird. Zur Vereinfachung der Minimierung wird dabei von $\hat{\sigma}^2_{RW} = \hat{\sigma}^2_{MR} = \hat{\sigma}^2$ ausgegangen. Vergleicht man die in den Schätzungen erhalten Werte für $\hat{\sigma}^2_{RW}$ und $\hat{\sigma}^2_{MR}$ (siehe Abschnitt 3.3.7 und 10.1.2, oder Kim [50], Andersson [4] und Hillebrand [43]) ist ersichtlich, dass diese Annahme wenig restriktiv ist. Wird nach der Methode Kleinster Quadrate (OLS) minimiert, stellt sich folgende Minimierungsaufgabe, die bezüglich w gelöst werden muss:

$$\min \sum_{q=1}^{Q} [\widehat{VR}(q) - VR_c(q)]^2$$

mit $\widehat{VR}(q)$ als der empirischen Variance Ratio und $VR_c(q)$ als der Variance Ratio für die kombinierte Verteilungsannahme. Die empirischen Variance Ratios werden mit dem in Abschnitt 3.3.8 vorgestellten Schätzer geschätzt. Die Variance Ratios des kombinierten Modells $VR_c(q)$ bestimmen sich über

$$\begin{aligned} VR_c(q) &= \frac{w \ q\hat{\sigma}^2 \ + \ (1-w) \ \left(\hat{\sigma}^2 \frac{1-(1-\hat{\gamma})^{2q}}{1-(1-\hat{\gamma})^2}\right)}{q \ \hat{\sigma}^2} \\ &= w \ VR_{RW}(q) \ + \ (1-w) \ VR_{MR}(q) \quad . \end{aligned}$$

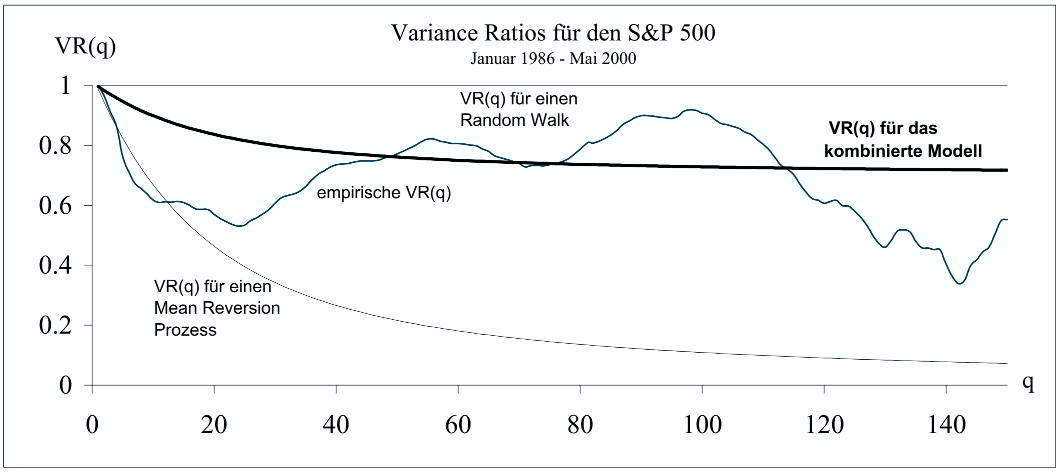
Aus der Minimierung[3] folgt für w:

$$w = \frac{\sum_{q=1}^{Q} (1 - VR_{MR}(q)) \ (\widehat{VR}(q) - VR_{MR}(q))}{\sum_{q=1}^{Q} (VR_{MR}(q) - 1)^2} \quad .$$

[3] Minimierung:

$$\begin{aligned} N(w) &= \sum_{q=1}^{Q} \left[\widehat{VR}(q) - VR_c(q)\right]^2 \ \rightarrow \ min \\ N(w) &= \sum_{q=1}^{Q} \left[\widehat{VR}(q) - w \ VR_{RW}(q) + (1-w) \ VR_{MR}(q))\right]^2 \\ &= \sum_{q=1}^{Q} \left[\widehat{VR}(q) - w - (1-w) \ VR_{MR}(q)\right]^2 \quad , \\ & \text{da } VR_{RW}(q) = 1 \text{ für alle } q. \\ \frac{dN}{dw} &= 2 \ \Big[\sum_{q=1}^{Q} (\widehat{VR}(q) - VR_{MR}(q)) \ (VR_{MR}(q) - 1) \\ & \quad + w \ \sum_{q=1}^{Q} (VR_{MR}(q) - 1)^2\Big] = 0 \\ \Rightarrow w &= \frac{\sum_{q=1}^{Q} (1 - VR_{MR}(q)) \ (\widehat{VR}(q) - VR_{MR}(q))}{\sum_{q=1}^{Q} \ (VR_{MR}(q) - 1)^2} \\ \frac{d^2N}{dw^2} &= 2 \ \sum_{q=1}^{Q} (VR_{MR}(q) - 1)^2 \ > \ 0 \\ \Rightarrow & \quad \text{Minimum} \end{aligned}$$

Das in Abschnitt 3.3.7 aufgeführte Beispiel für den S&P500 ist in Abbildung 7.2 um die Darstellung des kombinierten Modells erweitert.



Gewicht $w = 0.69495$

S&P 500 - Monatsendkurse von Januar 1986 - Mai 2000

Abbildung 7.2: Kombiniertes Modell für den S&P500.

7.2.2 Inflation

Zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Inflation wird ebenfalls das im vorigen Abschnitt erwähnte Modell verwendet, wiederum auf monatlicher Basis. Das heisst, es ergibt sich auch für die Inflation zum Zeitpunkt u die Verteilungsannahme

$$i_{u,q} \sim N\left(\mu_{u,q} \ , \ \sigma^2_{u,q} \right) \quad ,$$

mit

$$\mu_{u,q} = w \ \hat{\mu}_{u,q,RW} \ + \ (1-w) \ \hat{\mu}_{u,q,MR}$$

und

$$\sigma^2_{u,q} = w \ \hat{\sigma}^2_{u,q,RW} \ + \ (1-w) \ \hat{\sigma}^2_{u,q,MR} \quad ,$$

wobei wie oben, in die Bestimmung des Überschusses nur die Inflation $i_{s,t}$ auf jährlicher Basis eingeht. Für die Parameterschätzungen werden historische Monatsdaten des Landesindexes der Konsumentenpreise herangezogen.

7.2.3 Allgemeine Lohnentwicklung

Auch die allgemeine Lohnentwicklung wird über das kombinierte Modell beschrieben. Im Unterschied zu den Anlageklassenrenditen und der Inflation nun aber auf jährlicher Basis. Dies vor allem deshalb, weil historische Daten, wie z.B. der Schweizerische Lohnindex, nur für Jahre verfügbar sind. Für die Verteilung zum Zeitpunkt s ergibt sich folgende Annahme:

$$la_{s,t} \sim N\left(\ \mu_{s,t}\ ,\ \sigma^2_{s,t}\ \right) \quad ,$$

mit

$$\mu_{s,t} = w\ \hat{\mu}_{s,t,RW}\ +\ (1-w)\ \hat{\mu}_{s,t,MR}$$

und

$$\sigma^2_{s,t} = w\ \hat{\sigma}^2_{s,t,RW}\ +\ (1-w)\ \hat{\sigma}^2_{s,t,MR} \quad .$$

7.2.4 Versicherungsverläufe

Der Versicherungsverlauf eines Versicherten ergibt sich aus seinen Zuständen zu den verschiedenen Zeitpunkten t (Jahre) im Zeithorizont T. Als Modell für die zeitlichen Entwicklung dieser Zustände wird ein zeitdiskreter Markov Prozess

$$\{\mathbf{Z}^{i,j}_t, t = t^{i,j}_0, \ldots, T\}$$

mit diskreter Zustandsmenge $Z \in \mathbb{N}^3_0$ bestehend aus den Zuständen

$$\mathbf{Z}^{i,j}_t = (s^{i,j}_t, a^{i,j}_t, g)$$

angenommen. Für die eindeutige Beschreibung dieses Markov Prozess müssen jeweils der Startzustand und die Übergangswahrscheinlichkeiten angegeben werden.[4] Der Startzustand, d.h. der Zustand des Versicherten zum Eintrittszeitpunkt $t^{i,j}_0$ ist vorgegeben. Die Ermittlung der Startzustände wird weiter unten anhand eines Beispiels erläutert. Die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P\{(\mathbf{Z}^{i,j}_{t+1} \mid \mathbf{Z}^{i,j}_t)\} \quad \mathbf{Z}^{i,j}_t, \mathbf{Z}^{i,j}_{t+1} \in Z$$

[4] vgl. Abschnitte 3.3.3 und 3.4.1

werden für alle möglichen Übergänge[5] entweder über die Wahrscheinlichkeitstafeln der versicherungstechnischen Rechnungsgrundlagen oder aus eigenen Daten für den Versichertenbestand geschätzt. Dabei gilt, da ein Versicherter mit Sicherheit einen Zustand in der nächsten Periode annimmt

$$\sum_{\mathbf{Z}_{t+1}^{i,j} \in Z} P\{(\mathbf{Z}_{t+1}^{i,j} \mid \mathbf{Z}_t^{i,j})\} = 1 \text{ für alle } \mathbf{Z}_t^{i,j} \in Z$$

Die Eintrittszeitpunkte der Ersatzversicherten $t_0^{i,j}$ $(j = 1, \ldots, n_{2i})$ sind abhängig vom Zeitpunkt der Deaktivierung der zu ersetzenden Versicherten und ergeben sich wie in Abschnitt 6.3.2 besprochen über

$$t_0^{i,j} = f(t_1^{i,0}, \ldots, t_1^{i,j-1}) = \begin{cases} t_0^{i,0} + j & \text{falls } t_1^{i,l-1} = t_0^{i,0} + j \text{ für ein } 1 \leq l \leq j \\ T+1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_{\mathbf{t}^{i,j}}(\mathbf{t}^{i,j}|t_1^{i,0}, \ldots, t_1^{i,j-1})$ für den Versicherungsverlauf $\mathbf{t}^{i,j}$ eines Ersatzversicherten (d.h. $j > 0$) lässt sich damit wie folgt angeben:

$$f_{\mathbf{t}^{i,j}}(\mathbf{t}^{i,j}|t_1^{i,0}, \ldots, t_1^{i,j-1}) = \begin{cases} \prod_{t=t_0^{i,j}}^{T-1} P\{(\mathbf{Z}_{t+1}^{i,j} \mid \mathbf{Z}_t^{i,j})\} & \text{für } t_0^{i,j} \leq T \\ 1 & \text{für } t_0^{i,j} = T+1 \end{cases} ,$$

mit

$$\mathbf{Z}_t^{i,j} = (s_t^{i,j}, a_t^{i,j}, g^{i,j}) \quad ,$$

$$s_{t+1}^{i,j} = s_t^{i,j} + \sum_{v=1}^{5} q^{i,j}(t+1, v) \quad ,$$

$$a_{t+1}^{i,j} = a_t^{i,j} + 1 + q^{i,j}(t+1, 3) \cdot d_{t_3} \quad ,^6$$

$$q^{i,j}(t, v) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t_v^{i,j} = t \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} .$$

Die Eintrittszeitpunkte $t_0^{i,0}$ für die Versicherten aus dem festen Bestand (d.h. $j = 0$) sind bekannt. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_{\mathbf{t}^{i,0}}(\mathbf{t}^{i,0})$ für den Versicherungsverlauf $\mathbf{t}^{i,0}$ ergibt sich deshalb für diese Versicherte unbedingt über

$$f_{\mathbf{t}^{i,0}}(\mathbf{t}^{i,0}) = \prod_{t=t_0^{i,0}}^{T-1} P\{(\mathbf{Z}_{t+1}^{i,0} \mid \mathbf{Z}_t^{i,0})\} \quad .$$

[5] vgl. Abschnitt 6.2.2

[6] Mit d_{t_3} wird der Altersunterschied zum Todeszeitpunkt bezeichnet.

Ermittlung der Startzustände

Für die Startzustände wird wiederum zwischen den Versicherten des Anfangsbestandes, den Zusatzversicherten und Ersatzversicherten unterschieden.

Der Startzustand eines Ersatzversicherten ($j > 0$) ist gegeben mit

$$\mathbf{Z}_t^{i,j} = (1, a_t^{i,0}, g^{i,0}) \quad \text{und} \quad t = t_0^{i,j} \quad .$$

Als Startzustand eines Zusatzversicherten der Kategorie $K_t^{e,g}$ erhält man

$$\mathbf{Z}_t^{i,0} = (1, a_t^{i,0}, g) \quad \text{mit} \quad a_t^{i,0} \in [u^{e,g}, u^{e+1,g}[\quad \text{und} \quad t = t_0^{i,0} \quad .$$[7]

Die Ermittlung der Startzustände für die Versicherten des Anfangsbestandes erfolgt im wesentlichen aus den gegeben Versichertenmerkmalen und wird im folgendem anhand eines Beispiels veranschaulicht:

Versichertenbestand	**Startzustände**	
35 jähriger aktiver Versicherter, männlich	(1,35,0)	
43 jährige aktiver Versicherte, weiblich	(1,43,1)	
58 jähriger aktiver Versicherter, männlich	(1,58,1)	
68 jähriger Altersrentner, männlich ohne anspruchsberechtigte Kinder	(3,68,0)	
75 jährige Altersrentnerin, weiblich ohne anspruchsberechtigte Kinder	(3,75,1)	
48 jähriger Vollinvalide, männlich mit 1 anspruchsberechtigten Kind	(2,48,0)	
35 jährige Teilinvalide (40%), weiblich ohne anspruchsberechtigte Kinder	(2,35,1) (1,35,1)	40% 60%
theoretisch 35 jähriger Verstorbener, männlich ohne Witwe aber einer Waise	(5,35,0)	
theoretisch 44 jährige Verstorbene, weiblich mit 45-jährigen Witwer und 2 Waisen	(4,44-d_{t_3},1)	

[7] Das Alter des Zusatzversicherten wird dabei zufällig gewählt.

Dabei bezeichnet d_{t_3} (hier d_{t_3}=-1) wieder wie in Abschnitt 6.2.2 den Altersunterschied zwischen Hinterbliebenen und Versicherten zum Todeszeitpunkt des Versicherten. Waisen- und Kinderrenten werden wie später erläutert[8] nur über die durchschnittliche Anzahl Kinder[9] berücksichtigt. Dadurch ergibt sich für den Anfangsbestand in der Regel das Problem, dass die gemäss den Durchschnittswerten im Modell berücksichtigte Anzahl von Kindern nicht mit der tatsächlichen Zahl Kinder im Startzeitpunkt übereinstimmt. Es ist allerdings davon auszugehen, dass bei grossen Anfangsbeständen die Abweichung eher klein ist. Sollte die Abweichung aber dennoch deutlich sein und die finanzielle Auswirkung daraus wesentlich, kann diesem Umstand Rechnung getragen werden, indem man das Vermögen zum Zeitpunkt 0 um den Barwert der laufenden Kinder- bzw. Waisenrenten, der nicht über die Durchschnittsbetrachtung erfassten Kinder und Waisen reduziert. Im obigen angenommen Versichertenbestand zum Beispiel wären gemäss den Angaben in den VZ 2000 für die Altersrentner 0.08 bzw. 0.00 Kinder, für die Invaliden 1.07 bzw. 0.63 Kinder, für den heute 35-jährigen Verstorbenen 0.94 Kinder und die heute 44-jährige Verstorbene 0.68 Kinder zu berücksichtigen.

7.3 Modellierung der Abhängigkeiten zwischen den Risikofaktoren

7.3.1 Abhängigkeiten zwischen den Anlageklassenrenditen

Im Abschnitt 7.2.1 wurde nur auf die Modellierung der Renditeverteilung einer einzelnen Anlageklasse eingegangen. Wie ausgehend von diesen Randverteilungen eine gemeinsame Verteilung der Renditen der K Anlageklassen für das Modell festgelegt werden kann, wird in diesem Abschnitt beschrieben.

[8] vgl. Abschnitt 9.3.1

[9] Die durchschnittliche Anzahl Kinder lässt sich in Abhängigkeit von Alter und Geschlecht des Versicherten den üblichen Rechnungsgrundlagen entnehmen.

Gemeinsame Verteilung für die Anlageklassenrenditen

Um die gemeinsame Verteilung angeben zu können, muss neben den Randverteilungen die Abhängigkeitsstruktur bekannt sein. Im folgenden wird dafür vom einfachen Fall ausgegangen, dass der Zufallsvektor der Anlageklassenrenditen multivariat-normalverteilt ist:[10]

$$\mathbf{ra}_Q = \begin{pmatrix} ra^1_{0,1} \\ \vdots \\ ra^1_{0,Q} \\ \vdots \\ ra^K_{0,1} \\ \vdots \\ ra^K_{0,Q} \end{pmatrix} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad .$$

Mit $Q = 12\,T$ wird wiederum der Zeithorizont in Monaten bezeichnet. Der Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ folgt direkt aus den Randverteilungen. Die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ bzw. Korrelationsmatrix hingegen folgt nicht direkt aus den Randverteilungen und muss weiter spezifiziert werden. Eine Möglichkeit eine solche Kovarianzmatrix zu konstruieren wird in den folgenden zwei Abschnitten besprochen. Das Vorgehen zur Konstruktion ist dem LongRun Technical Document der RiskMetrics Group entnommen (vgl. Kim et al. [49], S. 137 ff. und Kaufmann und Patie [48], S. 16 ff.).

[10] Der wesentliche und praktische Vorteil der multivariaten Normalverteilung besteht darin, dass die Abhängigkeitsstruktur vollständig durch die Korrelationsmatrix beschrieben wird und somit in Verbindung mit den Randverteilungen (Normalverteilungen) eindeutig die gemeinsame Verteilung folgt. In den meisten Fällen lässt sich die Annahme der multivariaten Normalverteilung empirisch stützen (vgl. z.B. Lopez und Walter [60]). Es sprechen aber auch einige theoretische wie empirische Gründe gegen die multivariate Normalverteilung. Embrechts, McNeil und Straumann [30] geben einen detaillierten Überblick über mögliche Probleme bei der Verwendung multivariater Normalverteilungen und Korrelationen als linearem Abhängigkeitskonzept und zeigen verschiedene Alternativen auf, wie zum Beispiel die Verwendung von Copula-Funktionen. Auf die einzelnen Alternativen kann im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen werden.

Die $Q \cdot K \times Q \cdot K$ Kovarianzmatrix lässt sich grundsätzlich darstellen als

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & \mathbf{\Sigma}_{12} & \dots & \mathbf{\Sigma}_{1K} \\ \mathbf{\Sigma}_{21} & \mathbf{\Sigma}_{22} & \dots & \mathbf{\Sigma}_{2K} \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{\Sigma}_{K1} & & & \mathbf{\Sigma}_{KK} \end{pmatrix} \quad .$$

Die $Q \times Q$ Matrizen $\mathbf{\Sigma}_{ii}$ auf der Hauptdiagonalen von $\mathbf{\Sigma}$ werden als Autokovarianzmatrizen bezeichnet. Die anderen $Q \times Q$ Matrizen $\mathbf{\Sigma}_{kl}; k \neq l$ sind die Kreuz-Kovarianzmatrizen,[11] welche den Zusammenhang der Renditen verschiedener Anlageklassen beschreiben. Für die Kovarianzmatrix gilt $\mathbf{\Sigma}_{kl}^T = \mathbf{\Sigma}_{lk}$.

Konstruktion der Autokovarianzmatrizen

Die Autokovarianzmatrizen $\mathbf{\Sigma}_{kk}$ lassen sich weiter darstellen als

$$\mathbf{\Sigma}_{kk} = \begin{pmatrix} var(ra_{0,1}^k) & cov(ra_{0,1}^k, ra_{0,2}^k) & \dots & cov(ra_{0,1}^k, ra_{0,Q}^k) \\ cov(ra_{0,1}^k, ra_{0,2}^k) & var(ra_{0,2}^k) & \dots & \\ \vdots & & \ddots & \\ cov(ra_{0,1}^k, ra_{0,Q}^k) & & & var(ra_{0,Q}^k) \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei die Varianzen $var(ra_{0,q}^k)$ denen der Randverteilungen entsprechen. Aus der Additivität der Log-Returns, d.h

$$ra_{0,q} = ra_{0,u} + ra_{u,q} \quad (u < q) \quad ,$$

folgt für die Kovarianzen (vgl. Fahrmeier [32], S. 24)[12]

$$cov(ra_{0,u}^k, ra_{0,q}^k) = var(ra_{0,u}^k) + cov(ra_{0,u}^k, ra_{u,q}^k) \quad .$$

Mit

$$var(ra_{0,q}^k) = var(ra_{0,u}^k + ra_{u,q}^k) = var(ra_{0,u}^k) + var(ra_{u,q}^k) + 2cov(ra_{0,u}^k, ra_{u,q}^k)$$

erhält man

$$cov(ra_{0,u}^k, ra_{0,q}^k) = \frac{1}{2}(var(ra_{0,q}^k) + var(ra_{0,u}^k) - var(ra_{u,q}^k)) \quad . \tag{7.1}$$

[11] Cross Covariance Matrices

[12] Zur Bestimmung der Kovarianz schreibt man: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ra_{0,u} \\ ra_{u,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{0,q} \\ ra_{0,u} \end{pmatrix}$

Bei Annahme eines Random Walk oder eines Mean Reversion Prozesses für den Logarithmus des Preises einer Anlage gilt, dass die Varianz der Rendite nur von der betrachteten Zeitdifferenz $q-u$ abhängt (vgl. Abschnitte 3.3.4 und 3.3.5), d.h. es gilt

$$var(ra_{u,q}^{RW}) = var(ra_{0,q-u}^{RW}) = (q-u)\sigma^2$$

und

$$var(ra_{u,q}^{MR}) = var(ra_{0,q-u}^{MR}) = \sigma^2 \frac{1-c^{2(u-q)}}{1-c^2} \quad .$$

Dies gilt deshalb auch für das kombinierte Modell. Ersetzt man in (7.1) $var(ra_{u,q}^k)$ mit $var(ra_{0,q-u}^k)$ lässt sich die Autokovarianz schreiben als

$$cov(ra_{0,u}^k, ra_{0,q}^k) = \frac{1}{2}(var(ra_{0,q}^k) + var(ra_{0,u}^k) - var(ra_{0,q-u}^k)) \quad . \tag{7.2}$$

Die Autokovarianzen ergeben sich somit vollständig aus den Varianzen der Randverteilungen.

Konstruktion der Kreuzkovarianzmatrizen

Die Kovarianzmatrizen $\mathbf{\Sigma}_{kl}, (k \neq l)$ zwischen den Renditen verschiedener Assets lassen sich darstellen als

$$\mathbf{\Sigma}_{kl} = \begin{pmatrix} cov(ra_{0,1}^k, ra_{0,1}^l) & \dots & cov(ra_{0,1}^k, ra_{0,Q}^l) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ cov(ra_{0,Q}^k, ra_{0,1}^l) & \dots & cov(ra_{0,Q}^k, ra_{0,Q}^l) \end{pmatrix} \quad .$$

Da für jede Rendite $ra_{0,q}^k$ aus empirischer Sicht je nur eine Realisierung existiert, können die Kovarianzen nicht direkt aus historischen Daten geschätzt werden. Deshalb wird die Annahme getroffen, dass der Zusammenhang zwischen Renditen verschiedener Anlageklassen zeitunabhängig ist. Dies bedeutet insbesondere, dass die Korrelation $\rho_{k,l}$ zwischen den Renditen der Anlageklassen k und l als konstant angenommen wird:

$$\rho_{k,l} = \frac{cov(ra_{u,q}^k, ra_{u,q}^l)}{\sqrt{var(ra_{u,q}^k)\ var(ra_{u,q}^l)}} = \frac{cov(ra_{u,q}^k, ra_{u,q}^l)}{\sigma_{q-u}^k\ \sigma_{q-u}^l} = konst. \quad , \tag{7.3}$$

für alle $u, q = 0, \dots, Q$ mit $u < q$ mit $\sigma_{q-u}^k = \sqrt{var(ra_{0,q-u}^k)}$.

Aus der Additivität der Kovarianzen folgt (vgl. Fahrmeier [32], S. 24):[13]

$$\begin{aligned}
cov(ra^k_{u,q}, ra^l_{u,q}) &= cov(ra^k_{0,q}, ra^l_{0,q}) - cov(ra^k_{0,u}, r^l_{0,q}) \\
&\quad -cov(ra^k_{0,q}, ra^l_{0,u}) + cov(ra^k_{0,u}, ra^l_{0,u}) \\
cov(ra^k_{0,u}, ra^l_{0,q}) + cov(ra^k_{0,q}, ra^l_{0,u}) &= \rho_{k,l}(\sigma^k_q\sigma^l_q + \sigma^k_u\sigma^l_u - \sigma^k_{q-u}\sigma^l_{q-u}) \qquad (7.4)
\end{aligned}$$

Aus der ersten Annahme (7.3) lässt sich die Summe der Kovarianzen

$$cov(ra^k_{0,u}, ra^l_{0,q}) + cov(ra^k_{0,q}, ra^l_{0,u})$$

in (7.4) eindeutig bestimmen. Um die Kovarianzmatrix vollständig festzulegen muss die Aufteilung in der Summe bestimmt werden. Dafür wird die folgende Symmetrie angenommen:

$$cov(ra^k_{0,u}, ra^l_{0,q}) = cov(ra^k_{0,q}, ra^l_{0,u}) \quad .$$

Man erhält damit

$$cov(ra^k_{0,u}, ra^l_{0,q}) = \frac{\rho_{k,l}}{2}(\sigma^k_q\sigma^l_q + \sigma^k_u\sigma^l_u - \sigma^k_{q-u}\sigma^l_{q-u}) \tag{7.5}$$

und aus 7.3 direkt

$$cov(ra^k_{0,q}, ra^l_{0,q}) = \rho_{k,l}\sigma^k_q\sigma^l_q \tag{7.6}$$

Unter den getroffenen Annahmen gilt, dass die Kovarianzen der $(q-u)$-periodigen Renditen gleich sind. Da die Varianzen der Renditen ebenfalls nur von der betrachteten Zeitdifferenz $q-u$ abhängen, lässt sich der Korrelationskoeffizient $\rho_{k,l}$ aus den historischen Renditen schätzen. Mit den einperiodigen, d.h. monatlichen Renditen $r_{q,q+1}$ als Grundlage der Schätzung lässt sich folgender Schätzer definieren:

$$\hat{\rho}_{k,l} = \frac{\sum_{q=0}^{N-1}(ra^k_{q,q+1} - \hat{ra}^k_{q,q+1})(ra^l_{q,q+1} - \hat{ra}^l_{q,q+1})}{\sqrt{\sum_{q=0}^{N-1}(ra^k_{q,q+1} - \hat{ra}^k_{q,q+1})^2 \sum_{q=0}^{N-1}(ra^l_{q,q+1} - \hat{ra}^l_{q,q+1})^2}} \quad ,$$

mit $\hat{ra}^k_{q,q+1}$ als den Erwartungswerten der Randverteilungen[14] und N als der Anzahl an Beobachtungen. Man erkennt, dass $\hat{\rho}_{k,k} = 1$ gilt und somit (7.5) konsistent ist mit (7.2).

[13] Zur Bestimmung der Kovarianz schreibt man:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ra^k_{0,u} \\ ra^k_{0,q} \\ ra^l_{0,u} \\ ra^l_{0,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra^k_{u,q} \\ ra^l_{u,q} \end{pmatrix}$$

[14] siehe Abschnitt 7.2.1

7.3.2 Erweiterung um die Inflation und die Lohnentwicklung

Wie in Anschnitt 7.1 erläutert werden im Modell neben den Abhängigkeiten der Anlageklassenrenditen untereinander, auch Abhängigkeiten zwischen Anlageklassenrenditen, Lohnentwicklung und der Inflation angenommen und modelliert. Wie oben erfolgt die Modellierung dieser Abhängigkeiten durch die Annahme einer multivariaten Normalverteilung als gemeinsamer Verteilung, d.h. die Beschreibung der Abhängigkeiten erfolgt durch Korrelationen.

Inflation

Die Modellierung der Inflation erfolgt wie für die Anlagerenditen auf monatlicher Basis. Der zu betrachtende Zufallsvektor lässt sich somit einfach um die Inflation erweitern. Man erhält damit den folgenden annahmegemäss multivariatnormalverteilten Zufallsvektor:

$$\mathbf{rai}_Q = \begin{pmatrix} ra^1_{0,1} \\ \vdots \\ ra^1_{0,Q} \\ \vdots \\ ra^K_{0,1} \\ \vdots \\ ra^K_{0,Q} \\ i_{0,1} \\ \vdots \\ i_{0,Q} \end{pmatrix} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

Der Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ folgt auch hier wiederum aus den Randverteilungen. Die Konstruktion der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ erfolgt analog zu dem im vorigen Abschnitt beschriebenen Vorgehen.

Allgemeine Lohnentwicklung

Die Modellierung der allgemeinen Lohnentwicklung erfolgt wie oben beschreiben nur auf jährlicher Basis. Aber auch bei den Anlageklassenrenditen und der

Inflation gehen letztendlich nur die jährlichen Werte in die Bestimmung des Überschusses ein, d.h.

$$(ra_{0,12}^k, ra_{0,24}^k, \ldots, ra_{0,Q}^k) = (ra_{0,1}^k, ra_{0,2}^k, \ldots, ra_{0,T}^k) \quad \text{und}$$

$$(i_{0,12}, i_{0,24}, \ldots, i_{0,Q}) = (i_{0,1}, i_{0,2}, \ldots, i_{0,T}) \quad .$$

Aus Sicht der Bestimmung des Überschusses ist deshalb eine gemeinsame Verteilung auf jährlicher Basis ausreichend. Für die Generierung von Szenarien wird letztendlich der folgende multivariat normalverteilte Zufallsvektor verwendet:

$$\mathbf{raila}_T = \begin{pmatrix} ra_{0,1}^1 \\ \vdots \\ ra_{0,T}^1 \\ \vdots \\ ra_{0,1}^K \\ \vdots \\ ra_{0,T}^K \\ i_{0,1} \\ \vdots \\ i_{0,T} \\ la_{0,1} \\ \vdots \\ la_{0,T} \end{pmatrix} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}).$$

Der Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ folgt einerseits direkt aus der obigen monatlichen Betrachtung und andererseits aus den Randverteilungen für die Lohnentwicklung. Der Teil der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$, welcher nur die Anlageklassenrenditen und/oder die Inflation betrifft, ergibt sich ebenfalls aus der obigen monatlichen Betrachtung. Der übrige Teil von $\boldsymbol{\Sigma}$ wird wiederum nach dem vorgängig beschrieben Verfahren konstruiert, wobei hier nun die Schätzung der Korrelationen zwischen Lohnentwicklung und Renditen bzw. Inflation aufgrund historischer Jahresdaten erfolgt.

7.4 Zusammenfassung

In den Überschuss gehen die Anlageklassenrenditen, die Inflation, die allgemeine Lohnentwicklung und die Versicherungsverläufe der einzelnen Versicherten als Risikofaktoren ein. Dabei wird angenommen, dass die Versicherungsverläufe voneinander[15] wie auch von den anderen Risikofaktoren unabhängig sind.

Als gemeinsame Verteilung für die voneinander nicht-unabhängigen Risikofaktoren wird eine multivariate Normalverteilung angenommen

$$\mathbf{raila}_T = \begin{pmatrix} ra^1_{0,1} \\ \vdots \\ ra^1_{0,T} \\ \vdots \\ ra^K_{0,1} \\ \vdots \\ ra^K_{0,T} \\ i_{0,1} \\ \vdots \\ i_{0,T} \\ la_{0,1} \\ \vdots \\ la_{0,T} \end{pmatrix} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad ,$$

wobei zur Konstruktion der Kovarianzmatrix zusätzlich von einer zeitunabhängigen, d.h. konstanten Korrelation und gewissen Symmetrieeigenschaften ausgegangen wird. Die Randverteilungen für den jeweiligen Risikofaktor ergeben sich aus einer Kombination der Verteilungseigenschaften, die aus der Annahme eines Random Walk bzw. der Annahme eines Mean Reversion Prozesses folgen. Die Gewichtung der beiden Modelle erfolgt dabei aufgrund der Entwicklung der empirischen Variance Ratio, die als Mass für die Stärke der Mean Reversion Eigenschaften verwendet wird.

[15] Mit Ausnahme des Eintrittszeitpunkt für die einzelnen Ersatzversicherten.

Für die Versicherungsverläufe lassen sich mit den Übergangswahrscheinlichkeiten $P\{(\mathbf{Z}_{t+1}^{i,j} \mid \mathbf{Z}_t^{i,j})\}$, welche im wesentlichen über die Wahrscheinlichkeitstafeln der Rechnungsgrundlagen geschätzt werden, die nachstehenden Wahrscheinlichkeitsfunktionen angeben: Für Ersatzversicherte (d.h. $j > 0$) die bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f_{\mathbf{t}^{i,j}}(\mathbf{t}^{i,j} | t_1^{i,0}, \ldots, t_1^{i,j-1}) = \begin{cases} \prod_{t=t_0^{i,j}}^{T-1} P\{(\mathbf{Z}_{t+1}^{i,j} \mid \mathbf{Z}_t^{i,j})\} & \text{für } t_0^{i,j} \leq T \\ 1 & \text{für } t_0^{i,j} = T+1 \end{cases} ,$$

mit

$$\mathbf{Z}_t^{i,j} = (s_t^{i,j}, a_t^{i,j}, g^{i,j}) \quad ,$$

$$s_{t+1}^{i,j} = s_t^{i,j} + \sum_{v=1}^{5} q^{i,j}(t+1, v) \quad ,$$

$$a_{t+1}^{i,j} = a_t^{i,j} + 1 + q^{i,j}(t+1, 3) * d_{t_3} \quad ,$$

$$q^{i,j}(t, v) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t_v = t \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und für die Versicherten aus dem festen Bestand (d.h. $j = 0$) mit den bekannten Eintrittszeitpunkten $t_0^{i,0}$ die unbedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f_{\mathbf{t}^{i,0}}(\mathbf{t}^{i,0}) = \prod_{t=t_0^{i,0}}^{T-1} P\{(\mathbf{Z}_{t+1}^{i,0} \mid \mathbf{Z}_t^{i,0})\} \quad .$$

Kapitel 8

Schätzung und Auswertung der Überschussverteilung

8.1 Schätzung der Überschussverteilung

8.1.1 Vorgehen

Grundlage für die Risikomessung ist eine Schätzung der Verteilung des Überschusses U_T. Um diese zu erhalten werden zunächst Szenarien für die Anlageklassenrenditen, die allgemeine Lohnentwicklung und die Inflation generiert. Für jedes simulierte Szenario wird dann für jeden Versicherten mit den geschätzten Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Versicherungsverläufe, eine Schätzung der bedingten Wahrscheinlichkeitsfunktion für den Vermögensverbrauch $VV^{i,j}$ dieses Versicherten unter dem jeweiligen Szenario bestimmt. Anschliessend erfolgt die Aggregation der bedingten Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Vermögensverbräuche aller Versicherter aus der Gruppe eines Versicherten des festen Bestandes und seiner Ersatzversicherten zur geschätzten Verteilung des Vermögensverbrauchs dieser Gruppe, d.h zur Schätzung der bedingten Verteilung des Gesamtvermögensverbrauch VV^i des i-ten Versicherten des festen Bestandes unter dem jeweiligen Szenario. Dazu sind die Eintrittszeitpunkte der Ersatzversicherten auf die Deaktivierungszeitpunkte der zu ersetzenden Versicherten abzustimmen. Danach erfolgt die Aggregation über die bedingten Verteilungen aller Gesamtvermögensverbräuche VV^i zur bedingten Verteilung des Vermögensverbrauchs des Gesamtbestandes unter dem jeweiligen Szenario. Aggregiert über alle simulierten Szenarien ergibt sich aus diesen bedingten Verteilungen schlussendlich die Schätzung der Verteilung des Überschusses, mittels der die Schätzung der gewünschten Risikomasse erfolgt.

8.1.2 Generierung von Szenarien

Das für die Szenariogenerierung angewendete Verfahren wurde in Abschnitt 3.4.3 besprochen. Mit diesem Verfahren erhält man die benötigten Szenarien

$$\{\mathbf{raila}_T^{[1]}, \dots, \mathbf{raila}_T^{[m]}, \dots, \mathbf{raila}_T^{[M]}\}$$

für die Anlageklassenrenditen, die Lohnentwicklung und die Inflation als Realisierungen des Zufallsvektors $\mathbf{raila}_T$.

Ein Problem, welches bei der Simulation auftreten kann ist, dass die konstruierte Kovarianzmatrix nicht positiv definit ist. Dies kann vor allem bei sehr grossen Kovarianzmatrizen der Fall sein, d.h. wenn entweder die Anzahl von Anlageklassen sehr gross oder der Zeithorizont sehr lang ist. Ist die Kovarianzmatrix nicht positiv definit hat dies insbesondere zur Folge, dass eine Cholesky-Zerlegung dieser Matrix, welche zur Generierung entsprechend verteilter Zufallszahlen benötigt wird, nicht möglich ist. Für diesen Fall ist bei Kim et al. [49] (LongRun Technical Document) eine Methode beschrieben, um aus der konstruierten Matrix eine positiv definite Matrix zu erhalten. Mit dieser Methode wird die Matrix leicht modifiziert, ohne aber die Varianzen der Randverteilungen zu ändern. Eine ausführliche Darstellung dieser Methode findet sich im Anhang 5.A der genannten Publikation (vgl. Kim et al. [49], S. 151 f.).

8.1.3 Schätzung der Verteilung für einen Versicherten

Aus den vorigen Abschnitten folgt für den Vermögensverbrauch $VV^{i,j}$ eines Versicherten, dass er sich über den Versicherungsverlauf $\mathbf{t}^{i,j}$ und den Vektor $\mathbf{raila}_T$ bestimmen lässt:

$$VV^{i,j} = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{raila}_T) \quad .$$

Damit lässt sich für ein gegebenes Szenario $\mathbf{raila}_T^{[m]}$ die bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion für $VV^{i,j}$ für einen Ersatzversicherten ($j > 0$) angeben über

$$f_{VV^{i,j}}\left(VV^{i,j} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}, t_1^{i,0}, \ldots, t_1^{i,j-1}\right) = \sum_{\mathbf{t}^{i,j} \in G^{i,j}} f_{\mathbf{t}^{i,j}}\left(\mathbf{t}^{i,j} \mid t_1^{i,0}, \ldots, t_1^{i,j-1}\right)$$

und für einen Versicherten aus dem festen Bestand ($j = 0$) über

$$f_{VV^{i,0}}\left(VV^{i,0} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}\right) = \sum_{\mathbf{t}^{i,j} \in G^{i,j}} f_{\mathbf{t}^{i,0}}\left(\mathbf{t}^{i,0}\right) \quad ,$$

mit $G^{i,j} = \{\mathbf{t}^{i,j} \mid VV^{i,j}(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{raila}_T^{[m]}) = VV^{i,j}\}$.

Für die Ersatzversicherten ist hervorzuheben, dass falls sie nicht benötigt werden, der Eintrittszeitpunkt des jeweiligen Ersatzversicherten auf $t_0^{i,j} = T + 1$ gesetzt wird und damit ein Vermögensverbrauch $VV^{i,j}$ von null für diesen Ersatzversicherten mit einer Wahrscheinlichkeit von eins folgt.

8.1.4 Aggregation über die variablen Versichertenbestände

Mit den Wahrscheinlichkeitsfunktionen $f_{VV^{i,j}}$ lässt sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion für den Gesamt-Vermögensverbrauch

$$VV_i = \sum_{j=0}^{n_2 i} VV^{i,j}$$

des i-ten Versicherten des festen Bestandes angeben. Für ein gegebenes Szenario $\mathbf{raila}_T^{[m]}$ lässt sich diese schreiben als

$$f_{VV^i}\left(VV^i \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}\right) =$$

für $n_{2i} > 0$

$$\begin{aligned} = \textstyle\sum_{\mathbf{VV}^i \in H^i} \quad & f_{VV^{i,0}}\left(VV^{i,0} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}\right) \cdot \\ & f_{VV^{i,1}}\left(VV^{i,1} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}, t_1^{i,0}\right) \cdot \\ & \ldots \quad \cdot \\ & f_{VV^{i,j}}\left(VV^{i,j} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}, t_1^{i,0}, \ldots, t_1^{i,j-1}\right) \cdot \end{aligned}$$

$$\ldots \quad \cdot$$

$$f_{VV^{i,n_{2i}}}\left(VV^{i,n_{2i}} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}, t_1^{i,0}, \ldots, t_1^{i,n_{2i}-1}\right)$$

für $n_{2i} = 0$

$$= \quad f_{VV^{i,0}}\left(VV^i \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}\right) \quad ,$$

mit $\mathbf{VV}^i = (VV^{i,0}, \ldots, VV^{i,n_{2i}})$ und $H^i = \{ \mathbf{VV}^i \mid \sum_{j=0}^{n_{2i}} VV^{i,j} = VV^i\}$.

Die Zahl der möglichen Ersatzversicherten n_{2i} hängt hauptsächlich von der Länge des betrachteten Zeithorizonts ab. Da bei steigendem n_{2i} die Anzahl möglicher Werte für VV^i sehr rasch anwächst, wird für das Modell die Anzahl zu betrachtender Fälle durch eine stufenweise Aggregation, bei der auf jeder Stufe eine Klassierung erfolgt, reduziert. Durch dieses Vorgehen wird die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_{VV^i}\left(VV^i \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}\right)$ durch durch die Näherung

$$f_{\overline{VV}^{[i,0]}}\left(\overline{VV}^{[i,0]} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}\right) \approx f_{VV^i}\left(VV^i \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}\right)$$

ersetzt. Diese Näherung ergibt sich aus dem folgendem rekursiven Vorgehen: Für den aggregierten Vermögensverbrauch $\overline{VV}^{i,j}$ des j-ten Ersatzversicherten und all seiner nachfolgenden Ersatzversicherten resultiert die Näherung aus

$$\overline{VV}^{i,j} = VV^{i,j} + \overline{VV}^{[i,j+1]}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für $\overline{VV}^{i,j}$ bestimmt sich mit

$$\begin{aligned} & f_{\overline{VV}^{i,j}}\left(\overline{VV}^{i,j} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}, t_1^{i,0}, \ldots, t_1^{i,j-1}\right) \\ &= \sum\nolimits_{\left(VV^{i,j}, \overline{VV}^{[i,j+1]}\right) \in I^{i,j}} \quad f_{VV^{i,j}}\left(VV^{i,j} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}, t_1^{i,0}, \ldots, t_1^{i,j-1}\right) \\ & \qquad \cdot f_{\overline{VV}^{[i,j+1]}}\left(\overline{VV}^{[i,j+1]} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}, t_1^{i,0}, \ldots, t_1^{i,j}\right) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} & f_{\overline{VV}^{i,0}}\left(\overline{VV}^{i,0} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}\right) \\ &= \sum\nolimits_{\left(VV^{i,0}, \overline{VV}^{[i,1]}\right) \in I^{i,0}} \quad f_{VV^{i,0}}\left(VV^{i,0} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}\right) \\ & \qquad \cdot f_{\overline{VV}^{[i,1]}}\left(\overline{VV}^{[i,j+1]} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}, t_1^{i,0}\right) \quad , \end{aligned}$$

mit $I^{i,j} = \left\{ \left(VV^{i,j}, \overline{VV}^{[i,j+1]} \right) \;\mid\; VV^{i,j} + \overline{VV}^{[i,j+1]} = \overline{VV}^{i,j} \right\}$.

Als Startwert wird dabei

$$\overline{VV}^{[i,n_{2i}]} = VV^{i,n_{2i}}$$

mit

$$f_{\overline{VV}^{[i,n_{2i}]}} \left(\overline{VV}^{[i,n_{2i}]} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}, t_1^{i,0}, \ldots, t_1^{i,n_{2i-1}} \right)$$
$$= f_{VV^{i,n_{2i}}} \left(VV^{i,n_{2i}} \;\mid\; \mathbf{raila}_T^{[m]}, t_1^{i,0}, \ldots, t_1^{i,n_{2i}-1} \right)$$

gesetzt.

Aus der Klassierung der Werte für $\overline{VV}^{i,j}$ ergeben sich dann die klassierten Werte $\overline{VV}^{[i,j]}$. Zur Beschreibung der Klassierung werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

- P bezeichnet die maximale Anzahl an Klassen,
- $\overline{VV}_w^{i,j}$ bezeichnet den w-ten möglichen Wert (Ausprägung) von $\overline{VV}^{i,j}$ mit $w = 1, \ldots, W^{i,j}$ und
- $\overline{VV}_p^{[i,j]}$ bezeichnet den klassierten Wert (gewichtetes Klassenmittel) für die p-te Klasse mit $p = 1, \ldots, P^{[i,j]}$ und $P^{[i,j]} = \min(W^{i,j}; P)$.

Als Werte für die einzelnen Klassen werden die gewichteten Klassenmittel gewählt, welche sich wie folgt errechnen

$$\overline{VV}_p^{[i,j]} = \begin{cases} \sum_{\overline{VV}_w^{i,j} \in A_p} \overline{VV}_w^{i,j} \cdot \dfrac{f_{\overline{VV}^{i,j}}\left(\overline{VV}_w^{i,j} \mid \cdot\right)}{\sum_{\overline{VV}_w^{i,j} \in A_p} f_{\overline{VV}^{i,j}}\left(\overline{VV}_w^{i,j} \mid \cdot\right)} & \text{falls } W^{i,j} > P \\ \overline{VV}_w^{i,j} & \text{falls } W_{i,j} \leq P \end{cases}$$

mit

$$A_p = \left\{ \overline{VV}_w^{i,j},\; w = 1, \ldots, W_{i,j} \;\mid\; p - 1 \;\leq\; \frac{\overline{VV}_w^{i,j} - \overline{VV}_{min}^{i,j}}{d} \;<\; p \right\},$$

$$\overline{VV}_{min}^{i,j} = \min(\, \overline{VV}_1^{i,j}, \ldots, \overline{VV}_{W_{i,j}}^{i,j} \,)\,,$$
$$\overline{VV}_{max}^{i,j} = \max(\, \overline{VV}_1^{i,j}, \ldots, \overline{VV}_{W_{i,j}}^{i,j} \,)\,,$$

$$d = \frac{\overline{VV}^{i,j}_{max} - \overline{VV}^{i,j}_{min}}{P-1} \quad .$$

Insgesamt folgt damit als bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion für den aggregierten und klassierten Vermögensverbrauch des j-ten Ersatzversicherten und all seiner nachfolgenden Ersatzversicherten

$$f_{\overline{VV}^{[i,j]}}\left(\overline{VV}^{[i,j]}_p \mid \cdot\right) = \begin{cases} \sum_{\overline{VV}^{i,j}_w \in A_p} f_{\overline{VV}^{i,j}}\left(\overline{VV}^{i,j}_w \mid \cdot\right) & \text{falls } W^{i,j} > P \\ f_{\overline{VV}^{i,j}}\left(\overline{VV}^{i,j}_w \mid \cdot\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch die Klassierung geht die Zuordenbarkeit des klassierten Vermögensverbräuche $\overline{VV}^{[i,j]}$ zu genau einer Kombination von Verläufen des Versicherten und seiner Ersatzversicherten verloren. Dies ist aber, da im weiteren Verlauf nur die Höhe des Vermögensverbräuche und ihre Eintrittswahrscheinlichkeit betrachtet werden, unbedeutend.

8.1.5 Aggregation über den festen Versichertenbestand

Für den Vermögensverbrauch des gesamten Bestandes gilt

$$VV = \sum_{i=0}^{n_1} VV^i \quad .$$

Für ein gegebenes Szenario $\mathbf{raila}_t^{[m]}$ ergibt sich die bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion für diesen Vermögensverbrauch über

$$f_{VV}\left(VV \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}\right) = \sum_{\mathbf{VV} \in J} \prod_{i=1}^{n_1} f_{VV^i}\left(VV^i \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}\right) \quad ,$$

mit $\mathbf{VV} = (VV^0, \ldots, VV^{n_1})$ und $J = \{\mathbf{VV} \mid \sum_{i=0}^{n_1} VV^i = VV\}$.

Im folgenden werden für VV^i und $f_{VV^i}\left(VV^i \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}\right)$ die im vorigen Abschnitt ermittelten Näherungen $\overline{VV}^{[i,0]}$ und $f_{\overline{VV}^{[i,0]}}\left(\overline{VV}^{[i,0]} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}\right)$ verwendet. Da auch bei der Aggregation der $\overline{VV}^{[i,0]}$ die Zahl möglicher Fälle für VV bzw. zu betrachtender Kombinationen von $\overline{VV}^{[i,0]}$ mit steigender Anzahl Versicherter i wiederum stark anwächst, erfolgt die Aggregation paarweise, wobei zur Reduktion der Komplexität jede Untersumme klassiert wird. Das Vorgehen lässt sich wie folgt veranschaulichen:

$$\underbrace{\overline{VV}^{[1,0]} + \overline{VV}^{[2,0]}}_{\overline{\overline{VV}}^{1,2}} + \underbrace{\overline{VV}^{[3,0]} + \overline{VV}^{[4,0]}}_{\overline{\overline{VV}}^{3,4}} + \ldots + \underbrace{\overline{VV}^{[n_1-2,0]} + \overline{VV}^{[n_1-1,0]}}_{\overline{\overline{VV}}^{n_1-2,n_1-1}} + \underbrace{\overline{VV}^{[n_1,0]}}_{\overline{\overline{VV}}^{n_1-1,n_1-1}}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\underbrace{\overline{\overline{VV}}^{[1,2]} \qquad \overline{\overline{VV}}^{[3,4]}}_{\overline{\overline{VV}}^{1,4}} \qquad\qquad \underbrace{\overline{\overline{VV}}^{[n_1-2,n_1-1]} \qquad \overline{\overline{VV}}^{[n_1,n_1]}}_{\overline{\overline{VV}}^{n_1-2,n_1}}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} \vdots & \qquad\qquad\qquad & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{matrix}}_{\overline{\overline{VV}}^{1,n_1}}$$

$$\downarrow$$

$$\overline{\overline{VV}}^{[1,n_1]}$$

$$\approx$$

$$VV$$

Die paarweise Aggregation hat den Vorteil, dass die zu aggregierenden Teile von ähnlicher Grössenordnung sind. Die Klassierung der Untersummen erfolgt analog zu dem Vorgehen im vorigen Abschnitt: P bezeichnet wieder die maximale Anzahl an Klassen und $\overline{\overline{VV}}_w^{i_a,i_b}$ den w-ten möglichen Wert (Ausprägung) der Untersumme für den gemeinsamen Vermögensverbrauch aller Versicherten vom i_a-ten bis zum i_b-ten Versicherten des festen Bestandes, mit $w = 1, \ldots, \overline{\overline{W}}^{i_a,i_b}$.[1] Die Bezeichnung des klassierten Wertes (gewichtetes Klassenmittel) der p-ten Klasse erfolgt wiederum mit $\overline{VV}_p^{[i_a,i_b]}$ ($p = 1, \ldots, P^{[i_a,i_b]}$). Die gewichteten Klassenmittel als Klassenwert für die jeweiligen Untersummen ergeben sich aus

$$\overline{\overline{VV}}_p^{[i_a,i_b]} = \sum_{\overline{\overline{VV}}_w^{i_a,i_b} \in C_p} \overline{\overline{VV}}_w^{i_a,i_b} \cdot \frac{f_{\overline{\overline{VV}}^{i_a,i_b}}\left(\overline{\overline{VV}}_w^{i_a,i_b} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}\right)}{\sum_{\overline{\overline{VV}}_w^{i_a,i_b} \in C_p} f_{\overline{\overline{VV}}^{i_a,i_b}}\left(\overline{\overline{VV}}_w^{i_a,i_b} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}\right)}$$

[1] Bei der nachfolgenden Darstellung der Klassierung wird sinnvollerweise davon ausgegangen, dass $P < \overline{W}^{i_a,i_b}$

mit

$$C_p = \{ \,\overline{\overline{VV}}_w^{i_a,i_b}, \; w = 1, \ldots, \overline{W}_{i,j} \;\;|\;\; p-1 \;\leq\; \frac{\overline{\overline{VV}}_w^{i_a,i_b} - \overline{\overline{VV}}_{min}^{i_a,i_b}}{d} \;<\; p \} \;,$$

$$\overline{\overline{VV}}_{min}^{i_a,i_b} = \min(\,\overline{\overline{VV}}_1^{i_a,i_b}, \ldots, \overline{\overline{VV}}_{\overline{W}_{i,j}}^{i_a,i_b} \,) \;,$$

$$\overline{\overline{VV}}_{max}^{i_a,i_b} = \max(\,\overline{\overline{VV}}_1^{i_a,i_b}, \ldots, \overline{\overline{VV}}_{\overline{W}_{i,j}}^{i_a,i_b} \,) \;,$$

$$d = \frac{\overline{\overline{VV}}_{max}^{i_a,i_b} - \overline{\overline{VV}}_{min}^{i_a,i_b}}{P-1} \quad .$$

Als Wahrscheinlichkeitsfunktion für die klassierten Untersummen folgt

$$f_{\overline{\overline{VV}}^{[i_a,i_b]}} \left(\overline{\overline{VV}}_p^{[i_a,i_b]} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]} \right) = \sum_{\overline{\overline{VV}}_w^{i_a,i_b} \in C_p} f_{\overline{\overline{VV}}^{i_a,i_b}} \left(\overline{\overline{VV}}_w^{i_a,i_b} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]} \right)$$

Schlussendlich erhält man damit als Näherung der bedingten Wahrscheinlichkeitsfunktion für den Vermögensverbrauch aller Versicherten

$$\begin{aligned} f_{\overline{\overline{VV}}^{[1,n_1]}} \left(\overline{\overline{VV}}_p^{[1,n_1]} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]} \right) &= \sum_{\overline{\overline{VV}}_w^{1,n_1} \in C_p} f_{\overline{\overline{VV}}^{1,n_1}} \left(\overline{\overline{VV}}_w^{1,n_1} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]} \right) \\ &\approx f_{VV} \left(VV \mid \mathbf{raila}_T^{[m]} \right) \end{aligned}$$

8.1.6 Zusammenfassung zur Überschussverteilung

Setzt man im Ausdruck für den Überschuss

$$U_T = V_0 \; e^{r_{0,T}} - \sum_{t=1}^{T} VK \; e^{r_{t,T}} + VV$$

für VV die Näherung $\overline{\overline{VV}}^{[1,n_1]}$ ein, erhält man damit als Näherung für den Überschuss

$$\overline{U}_T = V_0 \; e^{r_{0,T}} - \sum_{t=1}^{T} VK \; e^{r_{t,T}} + \overline{\overline{VV}}^{[1,n_1]} \quad .$$

Für jedes der M generierten Szenarien $\mathbf{raila}_T^{[m]}$ lässt sich mit dem im vorigen Abschnitt beschriebenen Vorgehen eine bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion für den Vermögensverbrauch aller Versicherten bestimmen, mit welcher für die Näherung des Überschusses $\overline{U}_T$ die nachstehende bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion folgt:

$$f_{\overline{U}_T} \left(\overline{U}_T^w \mid \mathbf{raila}_T^{[m]} \right) = f_{\overline{\overline{VV}}^{[1,n_1]}} \left(\overline{U}_T^w - V_0 \; e^{r_{0,T}} + \sum_{t=1}^{T} VK \; e^{r_{t,T}} \mid \mathbf{raila}_T^{[m]} \right)$$

Die generierten Szenarien $\mathbf{raila}_T^{[m]}$ stellen eine simulierte Stichprobe für $\mathbf{raila}_T$ dar. Die Eintretenswahrscheinlichkeit für ein solches Szenario wird deshalb mit $\frac{1}{M}$ geschätzt.[2] Damit resultiert

$$f_{\overline{U}_T}\left(\overline{U}_T^w\right) = \sum_{[m]=1}^{[M]} \frac{1}{M}\, f_{\overline{U}_T}\left(\overline{U}_T^w \mid \mathbf{raila}_T^{[m]}\right)$$

Wiederum ist aufgrund der Anzahl möglicher $\overline{U}_T^w$ eine Klassierung sinnvoll:

$$f_{\overline{U}_T}\left(\overline{U}_T^p\right) = \sum_{\overline{U}_T^w \in D_p} f_{\overline{U}_T}\left(\overline{U}_T^w\right)$$

mit

$$\overline{U}_T^p = \sum_{\overline{U}_T^w \in D_p} \overline{U}_T^w \cdot \frac{f_{\overline{U}_T}\left(\overline{U}_T^w\right)}{\sum_{\overline{U}_T^w \in D_p} f_{\overline{U}_T}\left(\overline{U}_T^w\right)}$$

und

$$D_p = \{\ \overline{U}_T^w,\ w = 1, \ldots, W \quad |\ p-1\ \leq\ \frac{\overline{U}_T^w - \overline{U}_T^{min}}{d}\ <\ p\}\ ,$$

$$\overline{U}_T^{min} = \min(\ \overline{U}_T^1, \ldots, \overline{U}_T^W\ )\ ,$$

$$\overline{U}_T^{max} = \max(\ \overline{U}_T^1, \ldots, \overline{U}_T^W\ )\ ,$$

$$d = \frac{\overline{U}_T^{max} - \overline{U}_T^{min}}{P-1} \quad .$$

Als Ergebnis erhält man die Schätzung $f_{\overline{U}_T}\left(\overline{U}_T^p\right)$ für die Verteilung von U_T in Form einer klassierten Häufigkeitsverteilung. Anhand dieser können dann entsprechende Auswertungen, wie z.B. die Schätzung von Risikomassen, vorgenommen werden.

8.2 Auswertung der Überschussverteilung

8.2.1 Auswahl von Risikomassen

Zur Beurteilung des Risikos werden aus der Verteilung des Überschusses verschiedene Risikomasse geschätzt. Das finanzielle Gleichgewicht zu einem zukünftigen

[2] Bei einer grossen Anzahl Szenarien erhält man so eine gute Schätzung der Verteilung von $\mathbf{raila}_T$

Zeitpunkt ist genau dann gegeben, wenn der Überschuss U_T grösser oder gleich null ist. Zur Messung des Risikos ist es deshalb sinnvoll als Referenzwert des Risikomasses $c = 0$ zu wählen und nur Abweichungen nach unten zu berücksichtigen. Als geeignete Risikomasse bieten sich deshalb insbesondere die unteren partiellen Momente an

$$\mathrm{UPM}_k(U_T; 0) = \int_{-\infty}^{0} (-U_T)^k \; f_{U_T}(U_T) \; dU_T \quad (k \geq 0) \quad .$$

Das $UPM_0(U_T; 0)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Pensionskasse zum Zeitpunkt T untergedeckt ist (bei gegebenen Beitrags-und Leistungsplan und gegebener Anlagestrategie). Wählt man für $k = 1, 2, ...$ wird auch die Höhe der potentiellen Unterdeckung mit in das Risikomass einbezogen. Je stärker eine Unterdeckung als Schaden empfunden wird, desto grösser sollte der Wert für k gewählt werden.

Als weiteres Risikomass wird der Value-at-Risk

$$\mathrm{VaR}(\alpha) = F^{-1}_{-U_T}(1 - \alpha)$$

verwendet, der in diesem Zusammenhang angibt, welche Unterdeckung (bzw. negativer Überschuss) nur mit einer Restwahrscheinlichkeit von $\alpha 100\%$ überschritten wird.

8.2.2 Schätzen der Risikomasse

Aus der generierten klassierten Häufigkeitsverteilung für den Überschuss lassen sich die unteren partiellen Momente schätzen. Betrachtet man obige Definition der k-ten unteren partiellen Momente erkennt man leicht, dass diese für $k = 2$ und $c = \mu$ der unteren Semivarianz entsprechen. Es liegt deshalb nahe die unteren partiellen Momente in Analogie zum Stichprobenvarianzschätzer zu schätzen (vgl. Weber [97], S.156). Für klassierte Daten ergibt sich der Schätzer

$$\widehat{\mathrm{UPM}}_k(\overline{U}_T; 0) = \sum_{\overline{U}^p_T < 0} (-\overline{U}^p_T)^k \; f_{\overline{U}_T} \left(\overline{U}^p_T \right)$$

Für die Ausfallwahrscheinlichkeit $\widehat{\mathrm{UPM}}_0(\overline{U}_T; 0)$ wird zudem in der Klasse, welche den Wert null für den Überschuss beinhaltet, linear interpoliert: Gilt für die j-te

Klasse $\overline{U}_T^j \leq 0 < \overline{U}_T^{j+1}$, ergibt sich die Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit über

$$\widehat{\mathrm{UPM}}_0(\overline{U}_T;0) = \sum_{\overline{U}_T^p<0} f_{\overline{U}_T}\left(\overline{U}_T^p\right) + \frac{f_{\overline{U}_T}\left(\overline{U}_T^{j+1}\right)}{\overline{U}_T^{j+1} - \overline{U}_T^j} \cdot -\overline{U}_T^j$$

Die Schätzung des Value-at-Risk, d.h. des $\alpha 100\%$-Quantils, erfolgt ebenfalls durch lineare Interpolation in der Einfallsklasse des entsprechenden Quantils. Gilt für die $i-te$ Klasse $\sum_{p<i} f_{\overline{U}_T}\left(\overline{U}_T^p\right) \leq \alpha < \sum_{p<i+1} f_{\overline{U}_T}\left(\overline{U}_T^p\right)$, ergibt sich die Schätzung des Value-at-Risk über (vgl. Hartung [40], S.34 f.)

$$\widehat{\mathrm{VaR}}(\alpha) = -\left[\overline{U}_T^i + \frac{\overline{U}_T^{i+1} - \overline{U}_T^i}{f_{\overline{U}_T}\left(\overline{U}_T^{i+1}\right)} \cdot \left(\alpha - \sum_{p<i} f_{\overline{U}_T}\left(\overline{U}_T^p\right)\right)\right]$$

8.3 Übersicht

In der nachstehenden Abbildung 8.1 ist der Ablauf der Modellierung nochmals graphisch zusammengefasst.

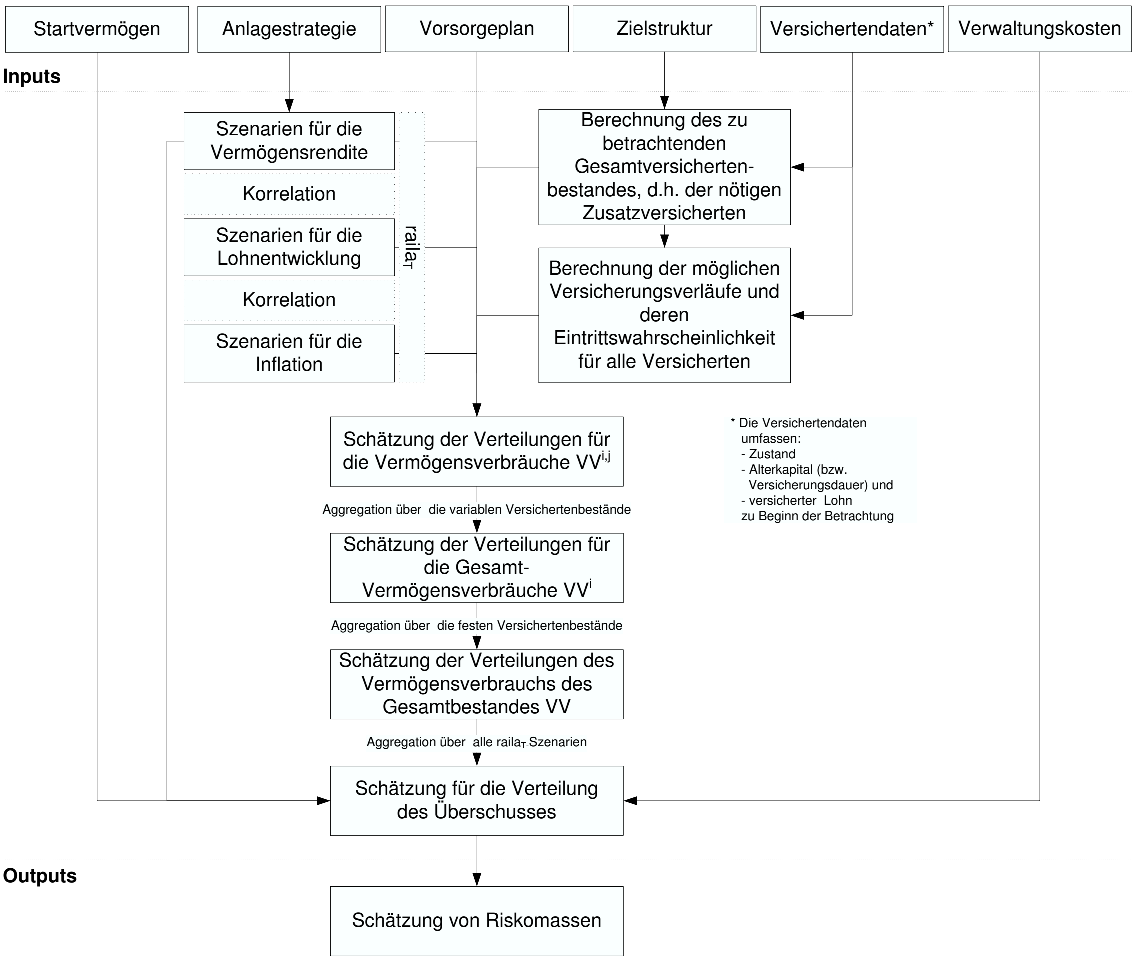


Abbildung 8.1: Ablauf der Modellierung.

Teil III

Anwendung auf eine BVG-Pensionskasse

Kapitel 9

Operationalisierung eines BVG-Vorsorgeplanes

9.1 Ausgangspunkt und Vorgehen zur Operationalisierung

Wie in den Abschnitten 6.4.2 bis 6.4.4 ausgeführt muss zur Berechnung der Höhe der Vermögensveränderung $VE_t^{i,j}$, der Austrittsleistung $AL_t^{i,j}$ und des Deckungskapitals $D_T^{i,j}$ der jeweilige Vorsorgeplan geeignet operationalisiert werden. Dies wird in diesem Kapitel anhand eines BVG-Minimalplanes veranschaulicht. Weitere Beispiele dazu finden sich in Anhang B.

Allgemein wird für das Modell die Vermögensveränderung $VE_t^{i,j}$ für einen Beitragsprimatplan beschrieben als Funktion des Versicherungsverlaufs $\mathbf{t}^{i,j}$, der allgemeinen Lohnentwicklung $\mathbf{la}_t$, der Inflation $\mathbf{i}_t$ und über die Abhängigkeit vom Alterskapital bzw. dessen Verzinsung auch von der Vermögensrendite $\mathbf{ra}_t$ (vgl. Abschnitt 6.4.2):

$$VE_t^{i,j} = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t) \ .$$

Darüber hinaus lässt sich für die Vermögensveränderung $VE_t^{i,j}$ im Modell folgendes allgemein für die Abhängigkeit vom Versicherungsverlauf $\mathbf{t}^{i,j}$ festhalten (vgl. Abschnitt 6.4.2):

$VE_t^{i,j}(\mathbf{t}^{i,j}, \cdot)$ umfasst	
keine Aus- oder Einzahlungen	für $1 \leq t \leq t_0$,
Beiträge und Einmaleinlagen	für $t_0 < t < t_1$,
Invalidenleistungen	für $\max(t_1; 1) \leq t < t_2$,
Altersleistungen (Rente)	für $\max(t_2; 1) \leq t < t_3$,
Hinterbliebenenleistungen	für $\max(t_3; 1) \leq t < t_4$,
Hinterbliebenenleistungen	für $\max(t_4; 1) \leq t < t_5$ und
Altersleistungen (Kapital)	für $t = t_5 \leq T$.

Die Austrittsleistung $AL_t^{i,j}$ ergibt sich für einen Beitragsprimatplan aus dem Alterskapital $AK_t^{i,j}$. Das Alterskapital wiederum ergibt sich im Modell allgemein als Funktion der selben Variablen wie oben die Vermögensveränderung:

$$AK_t^{i,j} = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t) \ .$$

Das Deckungskapital

$$D_T^{i,j} = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t)$$

schlussendlich folgt je nach Versicherungsverlauf direkt aus dem Alterskapital oder aus der Rentenhöhe[1] durch Multiplikation mit dem entsprechenden versicherungstechnischen Barwertfaktor, welcher aus den Tabellen der Rechnungsgrundlagen zu entnehmen ist.

Bei der Operationalisierung des BVG-Minimalplanes geht es also offensichtlich um die Festlegung der obigen funktionalen Zusammenhänge. Da in Vorsorgeplänen aber oft für eine Vielzahl von Fällen besondere Regeln oder Ausnahmebestimmungen enthalten sind, ist die Berücksichtigung aller denkbaren Fälle, aufgrund der daraus resultierenden Komplexität, wenig sinnvoll. Die damit zur Modellierung nötigen Vereinfachungen werden im Grundsatz wie folgt vorgenommen:

[1] für Anwartschaften mit der hypothetischen Rentenhöhe

1) Um nicht eine Vielzahl von Fällen mit nur geringwertigen finanziellen Unterschieden betrachten zu müssen, werden entsprechend zur Versicherungsmathematik, wo sinnvoll, Durchschnittswerte bzw. Erwartungswerte herangezogen.[2]

2) Wenn es aufgrund fehlender statistischer Angaben nicht möglich ist, gewissen Fällen eine sinnvolle Eintretenswahrscheinlichkeit zu zuordnen, wird ebenfalls mit Durchschnittswerten gearbeitet.[2]

3) Sind Optionen, wie z.B. AHV-Überbrückungsrenten oder Frühpensionierungen so ausgestaltet, dass sie aus versicherungstechnischer Sicht kostenneutral sind, d.h. dass die Leistungen versicherungsmathematisch angepasst werden, können sie zur Vereinfachung für das Modell auch vernachlässigt werden.

4) Die Vereinfachung der Modellierung erfolgt so, dass die Abbildung insgesamt eher vorsichtig erfolgt, d.h Leistungen tendenziell eher überschätzt und Beiträge tendenziell eher unterschätzt werden.

Als erste Vereinfachung wird die Wohneigentumsförderung im Modell von der Betrachtung ausgeschlossen, da der Vorbezug von Vorsorgemittel für Wohneigentum zu Kürzungen des Anspruchs auf Vorsorgeleistungen führt. Die Berechnung der Kürzung muss sich dabei gemäss Gesetz auf dem Vorsorgereglement und den technischen Grundlagen abstützen und erfolgt somit aus versicherungstechnischer Sicht im wesentlichen kostenneutral. Für die Verwaltungskosten wird vereinfachend davon ausgegangen, dass sie vollumfänglich auf den Arbeitgeber überwälzt werden.

Im verbleibenden Teil des Kapitels wird nun zunächst auf die Abbildung des versicherten Lohnes und des Alterskapitals für einen BVG-Minimalplan eingegangen und im darauf folgenden Abschnitt die Abbildung der Beiträge und Leistungen des Vorsorgeplanes besprochen. Da das Gesetz nicht für alle Elemente eines Vorsorgeplanes Minimalvorschriften enthält, werden zum Teil Annahmen

[2] Mit 1) und 2) wurde in Kapitel die Nichtberücksichtigung der Waisen als eigene Gruppe begründet.

getroffen, die im folgenden durch kursive Schrift gekennzeichnet werden. Die folgenden Ausführung beziehen sich immer auf einen Versicherten. Der Index ^{i,j} wird deshalb aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht mit geführt.

9.2 Versicherter Lohn und Alterskapital

9.2.1 Versicherter Lohn

Die Modellierung des versicherten Lohnes erfolgt wie in Abschnitt 6.4.2 beschrieben, wobei für einen BVG-Minimalplan speziell folgende Vorgaben gelten:

Maximaler massgeblicher Lohn M_0
Dreifache maximale AHV-Rente (ab 1.1.2005 CHF 77,400)
Koordinationsabzug K_0
87.5 Prozent der maximalen AHV-Rente (ab 1.1.2005 CHF 22'575)
Mindestens zu versichernder Lohn für obligatorisch Versicherte
12.5 Prozent der maximalen AHV-Rente (ab 1.1.2005 CHF 3'225)
Mindestlohn für obligatorische Versicherung
75.0 Prozent der maximalen AHV-Rente (ab 1.1.2005 CHF 19'350)

Der versicherte Lohn zum Zeitpunkt t ergibt sich somit im Modell aus dem massgebenden Lohn ML_t über

$$L_t = \begin{cases} \max\{\min\{ML_t - K_t; M_t - K_t\}; \frac{1}{7}\ K_t\} & \text{falls } ML_t \geq \frac{6}{7}\ K_t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Die Modellierung der Lohnentwicklung wird in zwei Komponenten getrennt, die allgemeine und die individuelle. Die Beschreibung der allgemeinen Lohnentwicklung wurde in Abschnitt 7.2.3 besprochen. Die individuellen Komponenten werden arbeitgeberspezifisch gewählt. Für das Beispiel werden hierzu die folgenden Werte angenommen:

Alter	unter 30	30 bis 50	51 bis 65
Männer	1%	0.5%	0.25%
Frauen	1%	0.3%	0.2%

Ein 35-jähriger Versicherter hätte damit beispielsweise bei einer jährlichen allgemeinen Lohnentwicklung von +2% (−1%) im Modell eine Lohnsteigerung von 3.5% (1%).

Die für den BVG-Koordinationsabzug K_t und das BVG-Maximum M_t in der Praxis übliche Anpassung an den Mischindex wird über

$$K_t = K_0 \cdot \frac{e^{i_{0,t}} + e^{l_{0,t}}}{2}$$

und

$$M_t = M_0 \cdot \frac{e^{i_{0,t}} + e^{l_{0,t}}}{2}$$

abgebildet, wobei zur Vereinfachung die Anpassung im Modell jährlich und nicht wie in der Praxis üblich alle zwei Jahre vorgenommen wird.

9.2.2 Alterskapital

Das Alterskapital setzt sich bei einem BVG-Minimalplan wie folgt zusammen:

Zusammensetzung
Besteht aus der eingebrachten Freizügigkeitsleistung zzgl. Zins und den jährlichen Spargutschriften zzgl. Zins (Spargutschriften des laufenden Jahres unverzinst)
Jährliche Spargutschriften in Prozent des versicherten Lohnes
Alter 25-34 (7%), 35-44 (10%), 45-54 (15%), 55-65 (18%).
Verzinsung des Alterskapitals
BVG-Mindestzins, 2.5% ab 1.1.2005
Ordentliches Rücktrittsalter
Ordentlicher Rücktritt für Männer im Alter von 65 Jahren. Ordentlicher Rücktritt für Frauen im Alter von 64 Jahren.
Einmaleinlagen und Einkäufe
Einkäufe und Einmaleinlagen sind nicht vorgesehen. Freizügigkeitsleistungen müssen bei Eintritt eingebracht werden.

Das Alterskapital setzt sich aus den eingebrachten Freizügigkeitsleistungen, Spargutschriften und der Verzinsung zusammen. Das Alterskapital AK_0 zu Beginn der Betrachtung ist bekannt. Die jährlichen Spargutschriften SG_t erfolgen bis zum Erreichen des ordentlichen Rücktrittsalters[3] a_{t_r} und ergeben sich über

$$SG_t = sg(a_{t-1}) \cdot L_{t-1} \ ,$$

mit dem im Vorsorgeplan angegeben Satz $sg(a_t)$ für einen a_t-jährigen Versicherten. Die Verzinsung $\mathbf{z}_t = f(\mathbf{ra}_t)$ wird im Modell allgemein in Abhängigkeit von der erzielten Vermögensrendite modelliert. Die BVG-Mindestverzinsung war 17 Jahre konstant bei 4% belassen worden,[4] dann allerdings aufgrund finanzieller Schwierigkeiten vieler Vorsorgeeinrichtung angepasst. Nach der 1. BVG-Revision ist nun eine regelmässige Überprüfung der Mindestverzinsung vorgesehen, die sich nach der Rendite marktgängiger Anlagen[5] zu richten hat (vgl. Art. 15 Abs. 2 BVG). Die bisherigen Anpassung durch den Bundesrat waren eher politisch motiviert und die Diskussion darum emotional aufgeheizt. Eine klare Regel, wie z.B. für die Anpassung an die Teuerung, hat sich deshalb bisher noch nicht etabliert. Für das Modell wird deswegen einfachheitshalber von einer konstanten Verzinsung in Höhe des aktuellen Mindestzinssatzes ausgegangen:

$$\mathbf{z}_t = 1.025 \quad (konst.)$$

Einmaleinlagen $\mathbf{E_t}$ werden für das BVG-Minimalplan-Beispiel nicht vorgesehen.

[3] Reaktivierungen, d.h. nur vorübergehend invalide Versicherte werden im Modell nicht berücksichtigt.

[4] Hinter der ursprünglichen Definition des Mindestzinssatzes steht vielmehr das durch die berufliche Vorsorge angestrebte Leistungsziel als die Anlagerendite. Um die Zeit der Einführung des BVG waren die Inflationsraten vergleichsweise hoch. Deshalb sollte der Mindestzinssatz, um die nominale Entwertung der schon erfolgten Altersgutschriften real zu kompensieren, im Mittel der Lohnentwicklung entsprechen. Diese Übereinstimmung wird gemeinhin als die "Goldene Regel" bezeichnet. Gilt die "Goldene Regel" wird das bei der Einführung des BVG vorgesehene Leistungsziel erreicht. Der Mindestzinssatz in seiner ursprünglichen Funktion hat deshalb eher die Aufgabe der Werterhaltung als die der Abbildung der erzielten Anlagerendite bzw. des Anlageerfolges (vgl. Weibel [98], S.34).

[5] Bundesobligationen, Aktien, Anleihen und Liegenschaften.

Das Alterskapital AK_t eines a_t-jährigen Versicherten zum Zeitpunkt t ist damit wie folgt gegeben:

für $t_2 \leq t_r + 1$

$$\begin{aligned} AK_t &= f(\mathbf{t}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t) \\ &= AK_{t-1} \cdot z_t + SG_t \\ &= AK_0 \prod_{i=1}^{t} z_i + \sum_{i=1}^{t} SG_i \, \frac{1}{z_i} \prod_{j=i}^{t} z_j \end{aligned}$$

für $t_2 > t_r + 1$

$$AK_t = AK_0 \prod_{i=1}^{t} z_i + \sum_{i=1}^{t_r} SG_i \, \frac{1}{z_i} \prod_{j=i}^{t} z_j$$

Das Deckungskapital $D_T = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t)$ für einen Aktiven erhält man damit im Modell über

$$D_T = AK_T \qquad \text{falls } t_1 = T + 1$$

Aus der Berechnung des Alterskapitals folgt ebenfalls die Berechnung der Austrittsleistungen AL_t (vgl. Abschnitt 6.4.3).

9.3 Leistungen und Beiträge

9.3.1 Altersleistungen

Die Altersleistungen eines BVG-Planes setzen sich wie folgt zusammen:

Altersrenten
Jährliche Rente in Höhe von 6.8% des Altersguthaben bei Rücktritt im Alter 65 (Männer) bzw. 64 (Frauen). Vorzeitiger oder späterer Rücktritt ist nach Gesetz, falls im Reglement vorgesehen, möglich. *Der Umwandlungssatzes $u(a_{t_2})$ wird für jedes Jahr eines Vorbezugs oder Aufschubs um je 0.2% verringert bzw erhöht.*[6]
Kapitaloption
Nach Wahl ist anstatt einer Rente auch das Alterskapital beziehbar.
Pensionierten-Kinderrente (für Kinder mit Anspruch auf Waisenrente)
Pro Kind 20% der Altersrente
Anpassung der Renten an die Preisentwicklung
Anpassung erfolgt gemäss den finanziellen Möglichkeiten der Kasse.

Zur Operationalisierung werden einige Vereinfachungen vorgenommen: Wie in Abschnitt 6.2.1 schon erläutert, werden die Kinderrenten nur über die im Durchschnitt zu diesem Zeitpunkt zu erwartende Anzahl anspruchsberechtigter Kinder berücksichtigt. Weiter werden grundsätzlich alle Kinder bis zum Alter 25 als anspruchsberechtigt angesehen (zur Anspruchsberechtigung vgl. Abschnitt 9.3.2), was tendenziell zu einer leicht zu hohen, d.h. vorsichtigen Darstellung der Kinderrenten führt. Darüber hinaus wird angenommen, dass die Renten voll und sofort an die Preisentwicklung angepasst werden.

Die Altersrente zum Zeitpunkt t bei Rücktritt im Zeitpunkt $t_2 \leq t$ ergibt sich damit im Modell für $t_2 > 0$ über

$$AR_t = u(a_{t_2-1})\ AK_{t_2-1}\ e^{i_{t_2-1,t-1}} \quad .$$

[6] Dies entspricht der Empfehlung des BSV im Bulletin zur Beruflichen Vorsorge Nr.7 [18], Ziffer 37.

Ist der Versicherte schon zu Beginn der Betrachtung pensioniert, d.h. $t_2 = 0$, ergibt sich die Altersrente zum Zeitpunkt t aus der zum Zeitpunkt 0 gegebenen Rente AR_0 über

$$AR_t = AR_0 \; e^{i_{0,t-1}} \quad .$$

Mit $k_z(a_t)$ als der mittleren Anzahl unter-25-jähriger Kinder eines a_t-jährigen Versicherten[7] gilt für die Pensionierten-Kinderrenten

$$AKR_t = k_z(a_{t-1}) \; 20\% \; AR_t \quad .$$

Wird die Altersleistungen als Kapital bezogen, erfolgt die Auszahlung des Alterskapitals.

Für die Vermögensveränderung $VE_t = f(\mathbf{t}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t)$ lässt sich damit schreiben

$$VE_t = \begin{cases} -\ (AR_t + AKR_t) & \text{für } \max(t_2; 1) \leq t < t_3 \\ -\ AK_{t_5-1} & \text{für } t = t_5 \leq T \quad . \end{cases}$$

Das Deckungskapital $D_T = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t)$ für einen Pensionierten errechnet sich im Modell anhand der tabellierten versicherungstechnischen Barwerte für laufende Alters- bzw. Kinderrenten[8] bf_{AR} und bf_{AKR} sowie für anwartschaftliche Witwen(r)renten bf_{AWR} über

$$D_T = bf_{AR} \; AR_{T+1} + bf_{AKR} \; AKR_{T+1} + bf_{AWR} \; 0.6 \; AR_{T+1} \qquad \text{falls } t_3 = T{+}1 \quad .$$

Für Pensionierte, die ihre Altersleistung als Kapital bezogen haben, wird kein Deckungskapital benötigt. Es gilt damit

$$D_T = 0 \qquad \text{falls } t_5 < T + 1 \quad .$$

[7] Die mittleren Kinderanzahlen lassen sich aus den Rechnungsgrundlagen entnehmen. Hier werden dazu die VZ 2000 [35] verwendet. Die durchschnittlichen Kinderanzahlen ($k_z(x + \frac{1}{2})$ (Jungen) und $k_z(y + \frac{1}{2}$ (Mädchen)) sind dort in den Tabellen 19 und 23 zu finden.

[8] Die Rückstellung der laufenden Kinderrenten umfasst auch die beim Tod des Versicherten zu bezahlenden Waisenrenten, da diese die selbe Höhe wie die Invaliden- bzw. Pensioniertenkinderrenten haben. Die Rückstellung von Kinderrenten für Kinder, die nach dem Zeithorizont T geboren werden, wird hier aufgrund der unwesentlichen Beträge vernachlässigt.

9.3.2 Hinterbliebenenleistungen

Für die Hinterbliebenenleistungen eines BVG-Planes gelten die folgenden Vorgaben:

Witwen- und Witwerrenten
Jährliche Rente in Höhe von 60% der vollen Invaliden- bzw. Altersrente bis zum Tod oder zur Wiederverheiratung. Ein Anspruch besteht falls Kinder zu unterhalten sind, oder die Witwe(r) mindestens 45-jährig ist und die Ehe wenigstens 5 Jahre andauerte.
Abfindung statt Witwen/-errenten
Sofern keine dieser Voraussetzungen erfüllt werden, hat die Witwe(r) Anspruch auf eine einmalige Abfindung in Höhe von drei Jahresrenten.
Waisenrenten
Pro Kind 20% der vollen Invaliden- bzw. Altersrente. Ein Anspruch besteht bis 18 Jahre, für Kinder die in Ausbildung oder zu 2/3 invalid sind bis zum Alter von 25 Jahren.
Anpassung an die Preisentwicklung
Anpassung der laufenden Hinterlassenenrenten an die Preisentwicklung nach dreijähriger Laufzeit bis zum Alter 65 (Männer) bzw. 64 (Frauen). Danach erfolgt die Anpassung nach den finanziellen Möglichkeiten der Kasse.

Wiederum werden einige Vereinfachungen vorgenommen: Zunächst wird davon ausgegangen, dass die Witwen bzw. Witwer immer die Voraussetzungen für eine Witwenrente erfüllen. Damit wird die Betrachtung von Abfindungen hinfällig. Weiter wird, Punkt 2) in Abschnitt 9.1 folgend, der Altersunterschied der Ehegatten nur über den durchschnittlichen Altersunterschied im Todesalter abgebildet. Solche Angaben lassen sich in den technischen Rechnungsgrundlagen finden (hier VZ 2000). Der Wegfall der Anspruchsberechtigung bei Wiederverheiratung kann in den Übergangswahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden. Die Abbildung der Waisenrenten erfolgt analog zu der Abbildung der Kinderrenten im vorigen Abschnitt. Die Anpassung an die Teuerung wird einfachheitshalber nicht erst nach einer Laufzeit von drei Jahren vorgenommen, sondern sofort, und auch nach dem Rücktrittsalter weitergeführt.

Damit ergeben sich die Witwen(r)renten zum Zeitpunkt t bei Tod des Versicherten im Zeitpunkt $t_3 \leq t$ im Modell für $t_3 > 0$ über

$$WR_t = \begin{cases} 60\%\ IR_{t_3}\ e^{i_{t_3-1,t-1}} & \text{falls } t_3 = t_2 \\ 60\%\ AR_{t_3}\ e^{i_{t_3-1,t-1}} & \text{falls } t_3 > t_2 \end{cases} \quad .$$

Die Waisenrenten erhält man mit[9]

$$\begin{aligned} WWR_t &= \begin{cases} k_z(a_{t-1})\ 20\% IR_{t_3}\ e^{i_{t_3-1,t-1}} & \text{falls } t_3 = t_2 \\ k_z(a_{t-1})\ 20\% AR_{t_3}\ e^{i_{t_3-1,t-1}} & \text{falls } t_3 > t_2 \end{cases} \\ &= k_z(a_{t-1})\ \frac{1}{3}\ WR_t \quad . \end{aligned}$$

Ist der Versicherte schon vor Beginn der Betrachtung verstorben, d.h. $t_3 = 0$ bzw. $t_4 = 0$, ergibt sich die Witwen(r)rente zum Zeitpunkt t aus der zum Zeitpunkt 0 gegebenen Rente[10] WR_0 über

$$WR_t = WR_0\ e^{i_{0,t-1}} \quad .$$

Für die Vermögensveränderung $VE_t = f(\mathbf{t}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t)$ folgt

$$VE_t = \begin{cases} -\ (WR_t + WWR_t) & \text{falls } \max(t_3; 1) \leq t < t_4 \\ -\ WWR_t & \text{falls } \max(t_4; 1) \leq t < t_5 \end{cases} \quad .$$

Für Hinterbliebene ergibt sich das Deckungskapital $D_T = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t)$ im Modell entsprechend zu oben, anhand der tabellierten versicherungstechnischen Barwerte für laufende Witwen(r)- bzw. Waisenrenten bf_{WR} und bf_{WWR} über

$$D_T = \begin{cases} bf_{WR}\ WR_{T+1}\ +\ bf_{WWR}\ WWR_{T+1} & \text{falls } t_4 = T+1 \\ bf_{WWR}\ WWR_{T+1} & \text{falls } t_5 = T+1 \end{cases} \quad .$$

[9] Durch die Verwendung der durchschnittlichen Kinderanzahl $k_z(a_{t-1})$ in Bezug auf das Alter des Versicherten in der jeweiligen Periode wird die Abnahme der Kinderzahl aufgrund des Endes des Anspruchs berücksichtigt. Gleichzeitig werden aber auch Zunahmen der Kinderzahl durch Geburten berücksichtigt, die bei einem verstorbenen Versicherten unsinnig sind. Auf eine Anpassung wird aufgrund der Unwesentlichkeit der Beträge verzichtet.

[10] für $t_4 = 0$ die theoretische Witwen(r)rente

9.3.3 Invalidenleistungen

Die Leistungen bei Invalidität setzen sich für einen BVG-Plan zusammen aus:

Angepasstes Alterskapital bei Invalidenleistungen
Das angepasstes Alterskapital entspricht dem Alterskapital bei Eintritt der Invalidität zzgl. der Summe der Altersgutschriften bis zum ordentlichen Rücktrittsalter ohne Zinsen.
Invalidenrenten
Lebenslange Rente in Höhe von 6.8% des angepassten Alterskapitals. Ab 70% Invalidität besteht Anspruch auf die volle Invalidenrente, ab 60% auf $\frac{3}{4}$, ab 50% auf $\frac{1}{2}$ und ab 40% auf $\frac{1}{4}$ der Rente.
Invaliden-Kinderrente (für Kinder mit Anspruch auf Waisenrente)
Pro Kind 20% der Invalidenrente.
Anpassung an die Preisentwicklung
Anpassung der laufenden Invalidenrenten an die Preisentwicklung nach dreijähriger Laufzeit bis zum Alter 65 (Männer) bzw. 64 (Frauen). Danach erfolgt die Anpassung nach den finanziellen Möglichkeiten der Kasse.

Folgende Vereinfachungen bzw. Annahmen werden zur Operationalisierung getroffen: Der Rentenanspruch hängt vom Invaliditätsgrad ab, ist aber nicht deckungsgleich mit demselben, da beispielsweise schon bei 70-prozentiger Invalidität ein Rentenanspruch von 100% besteht. Im Modell wird der Invaliditätsgrad über die Übergangswahrscheinlichkeiten berücksichtigt. Dies indem beispielsweise eine zweiprozentige Wahrscheinlichkeit zur Hälfte invalid zu werden, abgebildet wird über eine einprozentige Wahrscheinlichkeit vollinvalid zu werden. Da aber Rentenanspruch und Invaliditätsgrad für einen BVG-Plan nicht deckungsgleich sind, sollten die Übergangswahrscheinlichkeiten dem Rentenanspruch entsprechend angepasst werden. Eine Anpassung ist hier allerdings nur schwer möglich, weil zur Schätzung der Übergangswahrscheinlichkeiten auf die technischen Grundlagen (VZ 2000) zurückgegriffen wird. Um diesen Effekt dennoch auszugleichen, werden die Invalidenrenten um einen Faktor von 7/5 erhöht.[11]

[11] Der gewählte Faktor lässt sich wie folgt begründen: Aus der IV-Statistik 2005 folgt die nachstehende Verteilung der Invaliden (vgl. IV-Statistik 2005 [16], S.62).

Für die Kinderrenten erfolgt die Abbildung analog zu oben. Ebenfalls wird wiederum eine sofortige Anpassung an die Teuerung vorgenommen, die auch hier nach Erreichen des ordentlichen Rücktrittsalters weitergeführt wird.

Zur Berechnung der Invalidenleistungen wird weiter das angepasste Alterskapital benötigt, welches wie folgt ermittelt wird:

$$AK^*_{t_1} = AK_{t_1-1} + \sum_{i=t_1}^{t_r} SG^*_i \quad ,$$

mit

$$SG^*_t = sg(a_{t-1}) \cdot L_{t_1-1} \quad .$$

Mit den obigen Vereinfachungen ergibt sich die Höhe der Invalidenrente im Zeitpunkt t bei Eintritt der Invalidität im Zeitpunkt $t_1 \leq t$ für $t_1 > 0$ über

$$IR_t = \frac{7}{5}\, 6.8\% \cdot AK^*_{t_1}\ e^{i_{t_1-1,t-1}}$$

und die der Invaliden-Kinderrente mit

$$IKR_t = k_z(a_{t-1})\ 20\%\ IR_t \quad .$$

Ist der Versicherte schon von Beginn weg invalide (d.h. $t_1 = 0$), ergibt sich die Invalidenrente zum Zeitpunkt t aus der zum Zeitpunkt 0 gegebenen Rente IR_0 über

$$IR_t = IR_0\ e^{i_{0,t-1}} \quad .$$

Für die Vermögensveränderung $VE_t = f(\mathbf{t}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t)$ folgt daraus

$$VE_t = -\ (IR_t + IKR_t) \qquad \text{falls } \max(t_1; 1) \leq t < t_2 \quad .$$

Invaliditäts-grad	Renten-anspruch	Anzahl Männer	Anzahl Frauen	IV-Renten in CHF Männer	IV-Renten in CHF Frauen
40%	25%	3%	5%	1%	2%
50%	50%	15%	18%	9%	12%
60%	75%	6%	7%	6%	6%
70%	100%	76%	70%	84%	80%
	gew. Mittel (Grad)	65.5%	64.2%	67.3%	66.4%
	gew. Mittel (Rente)	88.8%	85.5%	93.3%	91.0%
	Anpassungsfaktor	1.35	1.33	1.39	1.37

Aus der Gegenüberstellung der gewichten Mittel der Invaliditätsgrade und Rentenansprüche folgen Anpassungen zwischen 33% und 39%. Als Faktor wird deshalb pauschal 40% gewählt, d.h. ein Faktor von 7/5.

Auch für invalide Versicherte ergibt sich das Deckungskapital mit den tabellierten versicherungstechnischen Barwerten für laufende Invaliden- bzw. Kinderrenten[12] bf_{IR} und bf_{IKR} sowie bf_{AWR} für anwartschaftliche Witwen(r)renten über

$$D_T = bf_{IR}\ IR_{T+1}\ +\ bf_{IKR}\ IKR_{T+1}\ +\ bf_{AWR}\ 0.6\ IR_{T+1} \qquad \text{falls } t_2 = T+1$$

9.3.4 Beiträge

Für den Beispiel-BVG-Plan wird folgendes angenommen:

Ordentliche Beiträge
BVG schreibt keine Finanzierung vor, deshalb Annahme, dass Alters/Spargutschriften durch Beiträge finanziert werden und zudem 3.5% vom versicherten Lohn als Risikobeitrag erhoben werden.
Beitragsbefreiung für Invalide
Invalide sind von der Beitragszahlung befreit
Einkäufe und Einmaleinlagen
Einkäufe und Einmaleinlagen sind nicht vorgesehen.

Die ordentlichen Beiträge zum Zeitpunkt t im Alter a_t ergeben sich damit im Modell für $t_0 > 0$ über

$$B_t = b(a_{t-1}) \cdot L_{t-1}$$

mit $b(a_t)$ als dem Beitrag in Prozent vom versicherten Lohn im Alter a_t.

Für die Vermögensveränderung $VE_t = f(\mathbf{t}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t)$ erhält man

$$VE_t = B_t \qquad \text{falls } t_0 < t < t_1 \quad .$$

[12] Siehe Fussnote 8

Kapitel 10

Schätzung der Modellparameter für die Risikofaktoren

Für die Modellierung der Risikofaktoren sind die folgenden Parameter zu schätzen bzw. festzulegen: Einerseits die Parameter der gemeinsamen Verteilung der nicht unabhängigen Risikofaktoren, d.h. der Erwartungswertvektor und die Kovarianzmatrix des annahmegemäss multivariat-normalverteilten Zufallsvektors $\mathbf{raila}_T$, und andererseits die Übergangswahrscheinlichkeiten, welche zur Beschreibung der Versicherungsverläufe dienen. Dabei wird im folgenden ein Zeithorizont von $T = 5$ Jahren verwendet.

10.1 Parameterschätzung für die gemeinsame Verteilung

10.1.1 Datengrundlage

Für die nachfolgende Betrachtung werden als mögliche Anlageklassen

- Aktien Inland,
- Aktien Ausland,
- Obligationen Inland,
- Obligationen Ausland,

- Immobilien Inland und
- Flüssige Mittel/ Forderungen

gewählt. Die Auswahl der Anlageklassen kann grundsätzlich beliebig gesetzt werden, ist aber durch die Verfügbarkeit empirischer Daten und vor allem dem steigenden Aufwand für die Modellierung, Parameterschätzung und Simulation bei steigender Anzahl von Anlageklassen beschränkt.

Für die Immobilien wird weiter davon ausgegangen, dass alle Anlagen indirekt erfolgen, d.h. in entsprechende Immobilienfonds. Dies ist notwendig, da für Direktanlagen kaum historische Daten zur Verfügung stehen. Allfällige Anlagen beim Arbeitgeber und Hypotheken werden hier nicht betrachtet.

Als historische Daten für die Performance der Anlageklassen werden Indizes herangezogen. Die gewählten Indizes sollten dabei alle Erträge, d.h. auch Dividenden, Couponzahlungen, etc., berücksichtigen. Solche Indizes werden gemeinhin als Performance- oder Total Return-Indizes bezeichnet. Auch für die historischen Daten zur Preis-und Lohnentwicklung wird auf Indizes zurückgegriffen. Für die Flüssigen Mittel und Forderungen wird zur Vereinfachung angenommen, dass die Höhe der Gesamtverzinsung der Flüssigen Mittel und kfr. Forderungen der Inflation entspricht. Folgende Übersicht fasst die verwendeten Indizes zusammen:

Aktien Inland	MSCI[1] Schweiz
Aktien Ausland	MSCI Europe ex. Schweiz
	MSCI World ex. Europe
Obligationen in Schweizer Franken	Pictet General CHF Bond Index
Obligationen in Fremdwährungen	Lombard Odier Non Swiss Index
Immobilien Inland	Rüd Blass Immobilienfonds-Index
Inflation	Landesindex der Konsumentenpreise
Lohnentwicklung	Schweizerischer Lohnindex

Die Auswahl der obigen Indizes lässt sich für die Obligationen und Aktien Ausland über die Verwendung derselben Indizes zur Abbildung der jeweiligen An-

[1] Morgan Stanley Capital Index

lagekategorien im BVG93-Index von Pictet begründen (vgl. Abschnitt 1.4.4 und Pictet & Cie Banquiers [71]). Zur Abbildung der Aktien Inland verwendet Pictet seit 1991 den SPI, im Zeitraum davor den eigenen Aktienindex. Für die Aktien Inland wurde hier aber dennoch der MSCI Schweiz gewählt, da wie weiter unten beschreiben einige Indizes zur Vereinfachung kombiniert werden. Für die Anlagekategorie Obligationen Inland verwendet Pictet seit dem 1. Januar 2004 zur Berechnung des BVG93-Indexes, die seit 1998 bestehende Swiss Bond Index-Familie und hat deshalb die Berechnung der Pictet Obligationenindizes eingestellt (vgl. Pictet & Cie Banquiers [73]). Der Rüd Blass Immobilienfonds-Index misst die Performance von ausgewählten schweizerischen Immobilienfonds und wird seit April 1982 monatlich (vorher jährlich) bzw. seit Juli 2002 täglich berechnet (vgl. Rüd Blass Privatbank [82], S. 10). Der Schweizerische Lohnindex wird vom Bundesamt für Statistik anhand der Daten von der Schweizerischen Unfallversicherungsanstalt (SUVA) sowie privaten Versicherungsunternehmen jährlich ermittelt.

Die Parameterschätzungen erfolgen für die Anlageklassen der Aktien, Obligationen und Immobilien sowie für die Inflation mit Monatsdaten. Für die Lohnentwicklung erfolgt die Schätzung mit Jahresdaten, da der Index nur jährlich berechnet wird. Zur Schätzung wird jeweils der Stand der Indizes am Monats- bzw. Jahresende verwendet. Als Zeitraum wird der 31. Dezember 1984 bis 31. Dezember 2001 gewählt, da dies die längstmögliche Periode ist, in der für alle Indizes gleichzeitig Werte berechnet wurden. Zur Schätzung der Parameter für die Randverteilung der Lohnentwicklung wird, da nur Jahresdaten verfügbar sind, der Zeitraum auf 1942-2001 ausgedehnt, um ein grössere Stichprobe zur Schätzung zu erhalten. Werden langfristige Zeithorizonte betrachtet, ist häufig die Verfügbarkeit von ausreichenden langen Datenreihen ein Problem. Betrachtet man zum Beispiel Fünfjahresrenditen, verfügt man in einem Zeitraum von fünfzig Jahren nur über zehn unabhängige Beobachtungen. Beurteilt man die Auswahl der Datenreihe unter diesem Aspekt, erscheint der gewählte Zeitraum von siebzehn Jahren als eher kurz. Da aber die nachfolgenden Betrachtungen vor allem der Veranschaulichung der Umsetzung sowie der Plausibilisierung des

Models dienen,[2] sind die Parameterwerte nur von untergeordneter Wichtigkeit, weshalb auf eine Ausdehnung der Datenreihe verzichtet wird.

Um die Grösse der Kovarianzmatrix zu reduzieren, werden die Indizes für die Anlageklassen der Aktien bzw. der Obligationen in einem Index zusammengefasst: Bezeichnet w^a das Gewicht des a-ten Index I_t^a ergibt sich der zur Parameterschätzung verwendete Wert I_t über

$$I_t = 100 \cdot \sum_a w^a \frac{I_t^a}{I_0^a} \quad .$$

Dabei wird angenommen, dass 40% der Aktienanlagen in Schweizer und 60% in ausländische Aktien erfolgen, wovon wiederum 65% in Europa und 35% weltweit. Für die Anlage in Obligationen wird eine Aufteilung zwischen Schweizer Franken und Fremdwährungen von 65% zu 35% angenommen. Dies erscheint im Vergleich zu der in der Tabelle 1.4 aufgeführten Anlagestrategien als plausible Annahme für eine typische Anlagestrategie.

10.1.2 Schätzung der Randverteilungen

Nachfolgend werden die Schätzergebnisse für die einzelnen Anlageklassen, die Inflation und die Lohnentwicklung dargestellt und kurz beurteilt.

Schätzergebnisse für die Anlageklasse Aktien

Für die Modelle des Random Walk und des Mean Reversion Prozesses ergeben sich folgende Schätzwerte für die Parameter:

	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\gamma}$	$\hat{M}_0$
Random Walk	0.01041	0.00207	-	-
Mean Reversion Prozess[3]	0.01041	0.00204	0.04130	4.75660

Bei der Bestimmung der Gewichtung w der beiden Modelle wird zur Vereinfachung der Optimierung davon ausgegangen, dass $\hat{\sigma}^2$ für beide Prozesse gleich ist

[2] Die Plausibilisierung erfolgt über den Vergleich der Simulationsergebnisse mit bestehenden Erwartungen.

[3] Als Trend für den Mean Reversion Prozess wird die Schätzung für den Random Walk herangezogen (vgl. Abschnitt 3.3.6).

(vgl. Abschnitt 7.2.1). Diese Annahme erscheint angesichts der erhalten Schätzwerte als vertretbar. Aus der Optimierung erhält man eine Gewichtung der beiden Modelle von

$$w = 0.74387 \quad .$$

In der Abbildung 10.1 findet sich dazu der Verlauf der empirischen Variance Ratios, der Variance Ratios für den Random Walk und den Mean Reversion Prozess sowie die Anpassung durch das kombinierte Modell graphisch dargestellt.

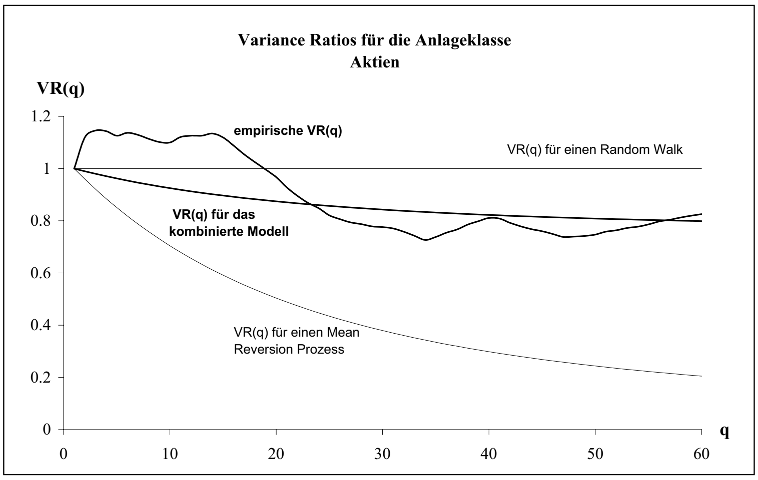


Abbildung 10.1: Variance Ratios für die Anlageklasse Aktien

Der Schätzwert für den Mean Reversion Parameter γ von 0.04130 weist auf leichte Mean Reversion Eigenschaften hin. Dies lässt sich so auch aus dem Verlauf der empirischen Variance Ratio entnehmen, wobei die Mean Reversion erst bei mittel- bis langfristigen Zeitperioden auftritt und für kurzfristige Zeitperioden eher ein Mean Aversion-Verhalten (Variance Ratio grösser als eins) zu beobachten ist. Dies erscheint zunächst erstaunlich, ist aber mit Studien, welche das Mean Reversion-Verhalten von Aktien mittels der Variance Ratio untersuchen, zu bestätigen. Eine Übersicht und Auswertung solcher Studien sowie Ergebnisse mit Monatsdaten für verschiedene nationale Aktienindizes ist bei Bodmer zu finden (vgl. Bodmer [9], S. 138 ff.). Bei Lo und Mac Kinlay hingegen, ergeben sich für den amerikanischen CRSP[4]-Aktienindex sowohl für wöchentliche als auch monatliche Renditen fast

[4] Center for Research in Security Prices

ausschliesslich Variance Ratios grösser als eins (vgl. Lo und Mac Kinlay [58], S. 41 f.). Fama und French wiederum erhalten für Aktienrenditen mit längerfristigen Zeithorizonten Variance Ratios von unter eins (vgl. Fama and French [33], S.246 ff.).[5]

Für die Renditen bzw. für den Störterm gilt bei Annahme eines Random Walk

$$r_{t-1,t} = X_t - X_{t-1} \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad \text{bzw.} \qquad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad .$$

In der Abbildung 10.2 wird die empirische Verteilung der Residuen, d.h. der Realisierungen des Störterms, dieser hypothetischen Normalverteilung gegenübergestellt.[6]

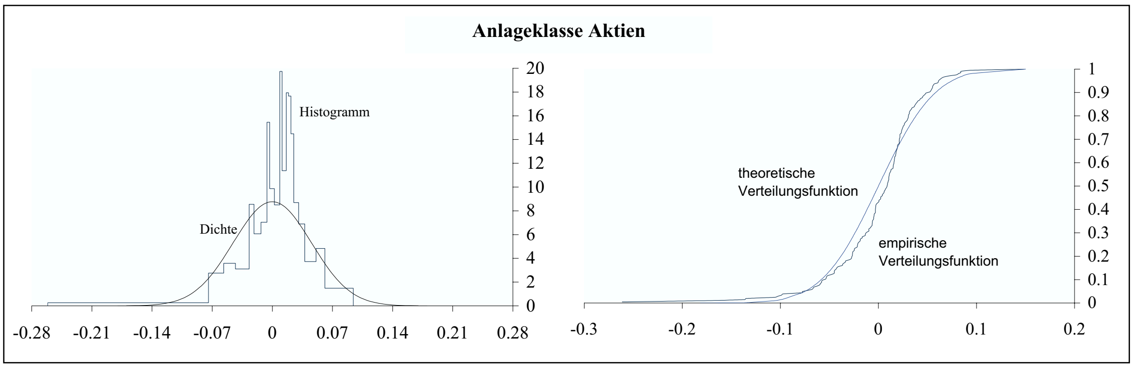


Abbildung 10.2: Empirische und hypothetische Verteilung der Residuen bei Annahme eines Random Walk für die Anlageklasse Aktien

Zur Beurteilung der Übereinstimmung von empirischen Daten mit Modell- bzw. Verteilungsannahmen gibt es eine Vielzahl von statischen Methoden. Hier sollen nur zwei einfache angewendet werden: der Quantil-Quantil Plot[7] und der

[5] Fama und French schätzen nicht explizit Variance Ratios weisen aber negative Autokorrelationen für längerfristige Aktienrenditen nach, was Variance Ratios von kleiner als eins impliziert (vgl. Lo und Mac Kinlay [58], S. 42 und S. 48).

[6] Für die Darstellung des Histogramms wurden die einzelnen Klassenbreiten so gewählt, dass annähernd gleichviel Beobachtungen in jede Klasse fallen.

[7] Mit dem Quantil-Quantil Plot lässt sich graphisch veranschaulichen, ob Daten einer Beobachtungsreihe Realisierungen einer bestimmten Verteilung darstellen. Dazu werden die empiri-

Kolmogorov-Smirnov-Test.[8] Im Quantil-Quantil Plot für die Renditen in Abbildung 10.3 ist die eher mässige Übereinstimmung mit der Normalverteilungsannahme ersichtlich. Als Wert für die Testgrösse des Kolmogorov-Smirnov Tests erhält man $D_n = 0.11178$. Damit wird für alle getesteten Signifikanzniveaus von $\alpha = 10\%,\ 5\%,\ 1\%$ die Nullhypothese der Normalverteiltheit abgelehnt.

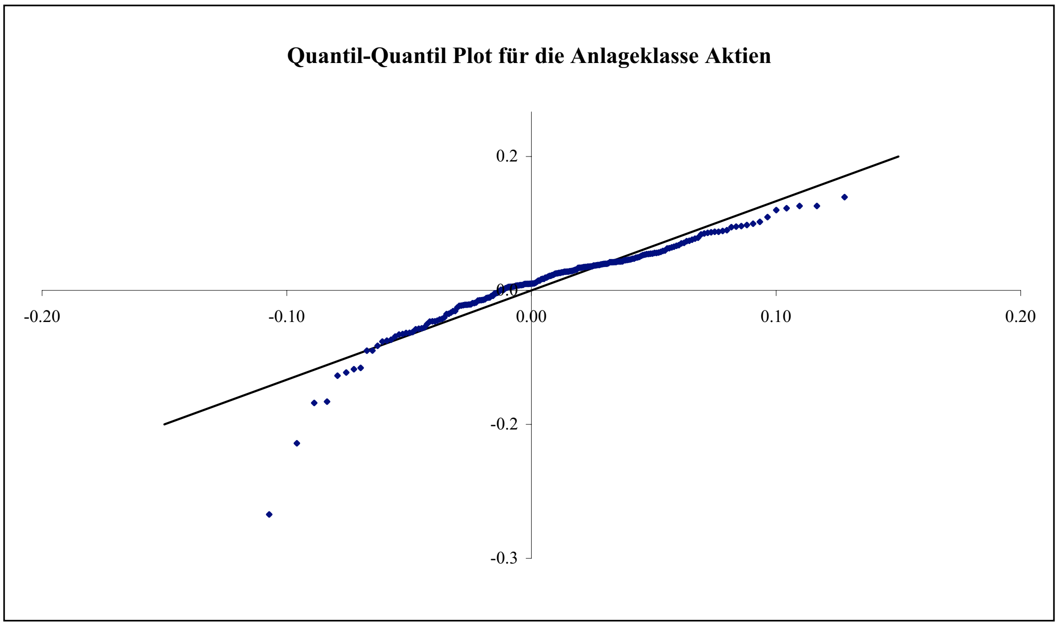


Abbildung 10.3: Quantil-Quantil Plot für die Aktienrenditen bei Annahme eines Random Walk

Die Parameter für den Mean Reversion Prozess werden mittels einer linearen Regression geschätzt. Der Grad bzw. die Güte der Anpassung an die Stichprobenwerte lässt sich bei einer Regression über das Bestimmtheitsmass r^2 und das korrigierte Bestimmtheitsmass r^2_{korr} sowie die Auswertung des F-Tests für die

schen Quantile gegen die theoretischen Quantile aufgetragen. Bei Zutreffen der Verteilungsannahme ergibt sich damit annähernd eine Ursprungsgerade mit Steigung eins (vgl. Weber [97], S. 100 f.).

[8] Die Grundidee des Kolmogorov-Smirnov-Tests besteht darin, den maximalen vertikalen Abstand zwischen der hypothetischen Verteilungsfunktion und der empirischen Verteilungsfunktion D_n als Testgrösse zur Überprüfung der Nullhypothese zu verwenden. Für die Nullhypothese einer Normalverteilung sind die kritischen Werte $d_{n;1-\alpha}$ zu verschiedenen Signifikanzniveaus α in Tabellen nachzuschlagen, so zum Beispiel bei Hartung (vgl. Hartung [40], S.184).

Regression insgesamt und der t-Tests für die einzelnen Regressionskoeffizienten beurteilen. Auf die einzelnen Methoden wird hier nicht weiter eingegangen. Eine ausführliche Beschreibung dazu findet sich zum Beispiel in Backhaus et al. (vgl. Backhaus et al. [6], S. 20 ff.). Für die Regression mit den Beobachtungen für den Aktienindex ergeben sich die folgenden Werte:

r^2	0.95870	r^2_{korr}	0.91911

		Wert	P-Wert
F-Test		2295.1	2.9298E-112
t-Test	α	2.06267	0.04042
	β	47.90689	2.9298E-112

Aus den Werten für die Bestimmtheitsmasse r^2 und r^2_{korr} lässt sich auf eine gute Anpassung an die Beobachtungen schliessen. Ebenso ergibt der F-Test, dass die Regression insgesamt signifikant ist. Das gleiche lässt sich, zumindest für ein Signifikanzniveau von 5%, aus den t-Tests für die einzelnen Regressoren schliessen.

Auch bei Annahme eines Mean Reversions Prozesses gilt für den Störterm

$$\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad .$$

Abbildung 10.4 stellt wiederum die empirische Verteilung der Residuen aus der Regression der hypothetischen Normalverteilung gegenüber.

Man erkennt auch hier wieder Abweichungen von der theoretischen Verteilung. Für die Testgrösse des Kolmogorov-Smirnov Tests erhält man $D_n = 0.09606$. Damit wird für alle getesteten Signifikanzniveaus von $\alpha = 10\%,\ 5\%,\ 1\%$ die Nullhypothese der Normalverteiltheit abgelehnt.

Insgesamt ist damit die Normalverteilungsannahme aufgrund der historischen Daten eher abzulehnen. Dies gilt gleichermassen bei der Annahme eines Random Walk als auch bei der Annahme eines Mean Reversion Prozesses. Die Modelle sind somit empirisch für Aktien mit den gegeben Daten nicht ohne weiteres zu bestätigen. Verwendet man diese bzw. das kombinierte Modell dennoch, sind damit gewisse Modellrisiken verbunden (vgl. Abschnitt 4.2.1), wobei allerdings

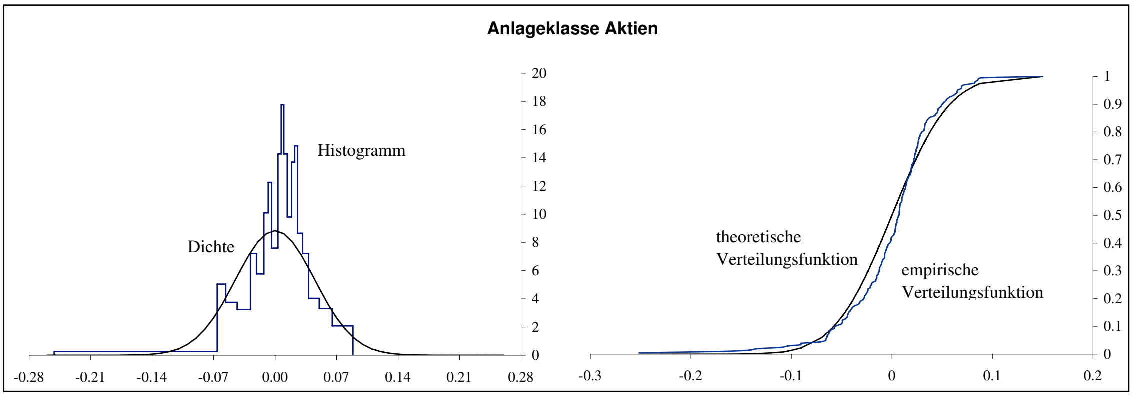


Abbildung 10.4: Empirische und hypothetische Verteilung der Residuen bei Annahme eines Mean Reversion Prozesses für die Anlageklasse Aktien

a priori die Gültigkeit für zukünftige Perioden nicht kategorisch auszuschliessen ist. Diese Modellrisiken werden im weiteren Verlauf in Kauf genommen.

Schätzergebnisse für die Anlageklasse Obligationen

Für die Parameter ergeben sich die folgenden Schätzwerte:

	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\gamma}$	$\hat{M}_0$
Random Walk	0.00441	0.0001276	-	-
Mean Reversion Prozess	0.00441	0.0001271	0.01733	4.5801

Auch hier wieder sind die $\hat{\sigma}^2$ für beide Prozesse sehr nahe beieinander. Dadurch, dass die Variance Ratios im Zeithorizont durchgängig grösser als eins ist, wie in der Abbildung 10.5 ersichtlich, erfolgt die Modellierung der Anlageklasse Obligationen ausschliesslich mit dem Random Walk. Das heisst, für w wird

$$w = 1.00$$

gewählt.

Die Wahl des Random Walk Modell für die Anlageklasse der Obligationen wird auch durch den tiefen Schätzwert für den Mean Reversion Parameter γ von 0.01733 untermauert. Vergleichbare Ergebnisse sind für US-amerikanische und Deutsche Staatsanleihen bei Kim zu finden (vgl. Kim [50], S.19 ff.).

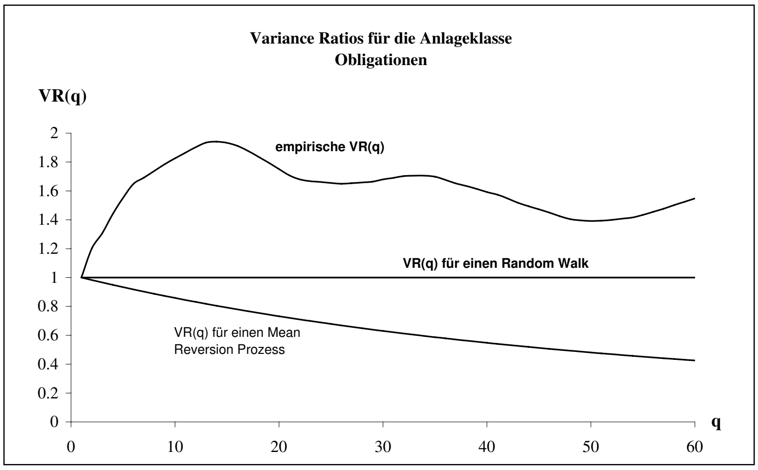


Abbildung 10.5: Variance Ratios für die Anlageklasse Obligationen

Betrachtet man die Gegenüberstellung der empirischen Verteilung der Residuen in Abbildung 10.6, wird die recht gute Übereinstimmung ersichtlich. Gleiches folgt auch aus dem Quantil-Quantil Plot in Abbildung 10.7 und dem Kolmogorov-Smirnov Test, für dessen Testgrösse man den Wert $D_n = 0.057934$ erhält. Damit wird die Nullhypothese der Normalverteiltheit für das Signifikanzniveaus von $\alpha = 10\%$ zwar abgelehnt, nicht aber für $\alpha = 5\%$ und 1%.

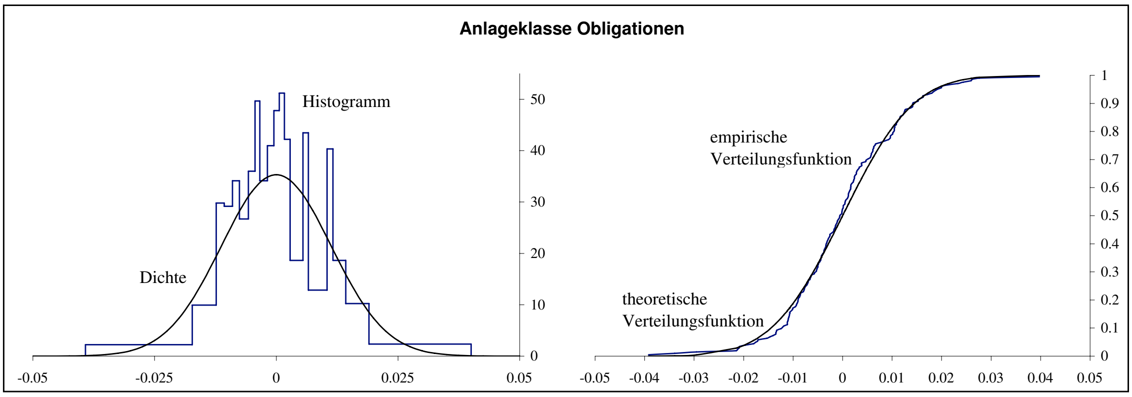


Abbildung 10.6: Empirische und hypothetische Verteilung der Residuen bei Annahme eines Random Walk für die Anlageklasse Obligationen.

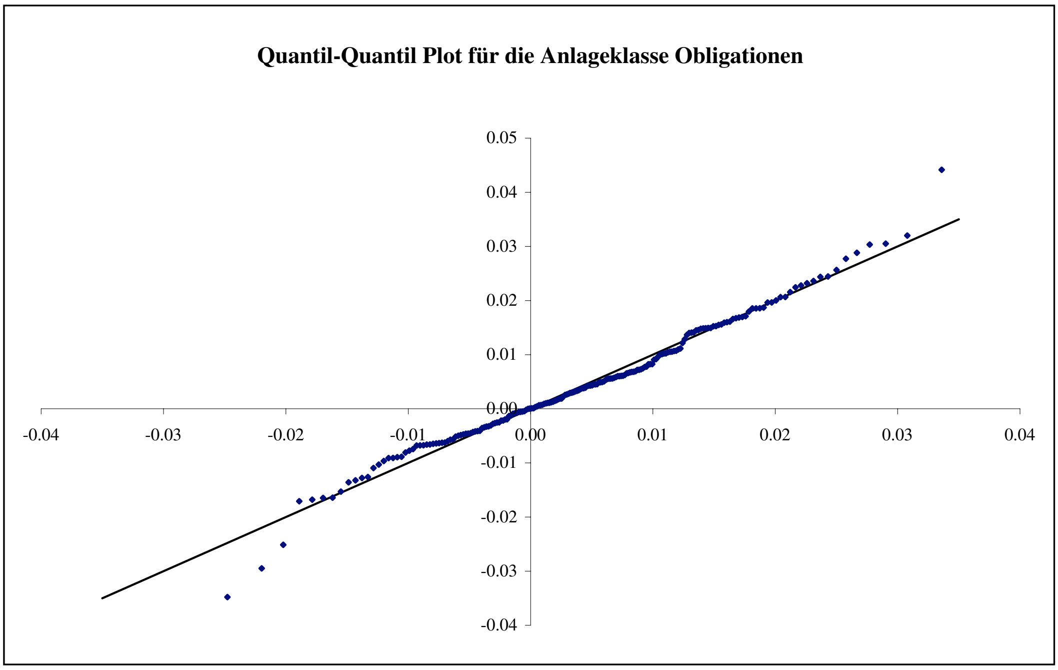


Abbildung 10.7: Quantil-Quantil Plot für die Obligationenrenditen bei Annahme eines Random Walk

Mit den Beobachtungen des Obligationenindexes ergeben sich für die durchgeführte Regression zur Schätzung der Parameter des Mean Reversion Prozesses, die nachfolgenden Werte für das Bestimmtheitsmass r^2, das korrigierte Bestimmtheitsmass r^2_{korr} sowie den F- und t-Test

r^2	0.98268	r^2_{korr}	0.96565

		Wert	P-Wert
F-Test		5678.8	7.6451E-150
t-Test	α	0.07935	0.18553
	β	75.35805	7.64508E-150

Aus den Werten für die Bestimmtheitsmasse r^2 und r^2_{korr} lässt sich auf eine gute Anpassung an die Beobachtungen schliessen. Aufgrund des F-Tests ist die Regression insgesamt als signifikant zu beurteilen. Anhand des t-Tests ist auch β als signifikant einzuschätzen, der Regressor α hingegen ist aufgrund des hohen P-Wertes vom 18.55% eher nicht signifikant.

Die Gegenüberstellung der empirischen Verteilung der Residuen und der hypothetischen Normalverteilung bei Annahme eines Mean Reversion Prozesses in Abbildung 10.8 lässt auch hier eine gute Übereinstimmung erkennen. Es überrascht deshalb nicht, dass mittels des Kolmogorov-Smirnov Tests ($D_n = 0.05060$) die Nullhypothese der Normalverteiltheit für die getesteten Signifikanzniveaus von $\alpha = 10\%,\ 5\%,\ 1\%$ nicht abgelehnt wird.

Aufgrund der Entwicklung der empirischen Variance Ratio wird für die Anlageklasse der Obligationen das Random Walk Modell gewählt. Die entsprechende Normalverteilungsannahme wird mit den zur Parameterschätzung verwendeten Beobachtungen bei einem Signifikanzniveau von 5% nicht abgelehnt. Es wird deshalb für diese Anlageklasse davon ausgegangen, dass der Random Walk insgesamt ein geeignetes Modell darstellt.

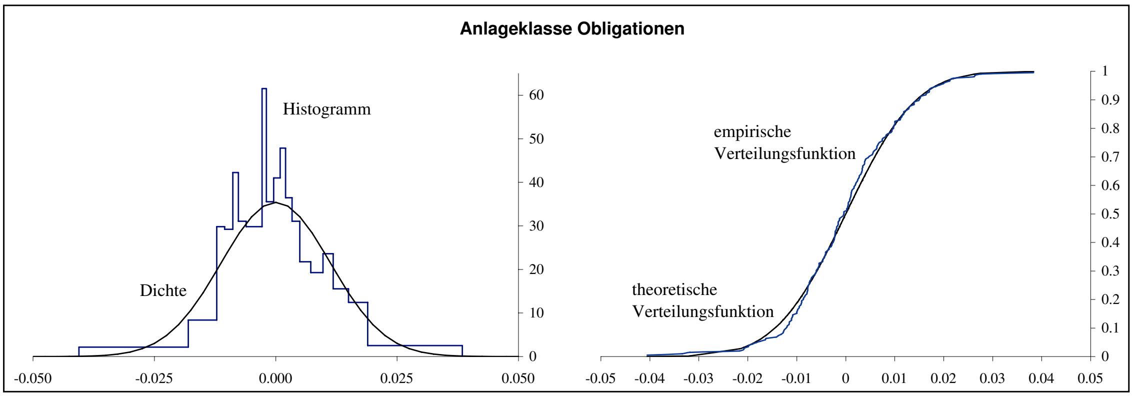


Abbildung 10.8: Empirische und hypothetische Verteilung der Residuen bei Annahme eines Mean Reversion Prozesses für die Anlageklasse Obligationen

Schätzergebnisse für die Anlageklasse Immobilien(-fonds)

Für die Parameter ergeben sich die folgenden Schätzwerte:

	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\gamma}$	$\hat{M}_0$
Random Walk	0.00561	0.0005773	-	-
Mean Reversion Prozess	0.00561	0.0005683	0.04107	4.7091

Zu bemerken ist auch hier wieder die Nähe der beiden Werte für $\hat{\sigma}^2$. Als Gewichtung des beiden Modelle zur optimalen Anpassung an die empirische Variance Ratio erhält man

$$w = 0.85826 \quad .$$

Betrachtet man Abbildung 10.9 ist ersichtlich, dass ähnlich wie bei den Aktien kurzfristig eher ein Mean Aversion-Verhalten und mittel- bis langfristig eher ein Mean Reversion-Verhalten zu beobachten ist. Ein leichtes Mean Reversion Verhalten zeigt sich auch im Schätzwert für den Mean Reversions Parameter γ von 0.04107.

Die Gegenüberstellung der empirischen Verteilung der Residuen in Abbildung 10.10 wie auch der Quantil-Quantil Plot in Abbildung 10.11 lassen auf eine eher schwache Übereinstimmung schliessen. Mit dem Kolmogorov-Smirnov Test ergibt sich denn auch, mit einem Wert für die Testgrösse von $D_n = 0.09725$, eine

Ablehnung der Nullhypothese der Normalverteiltheit für alle getesteten Signifikanzniveaus von $\alpha = 10\%,\ 5\%$ und 1%.

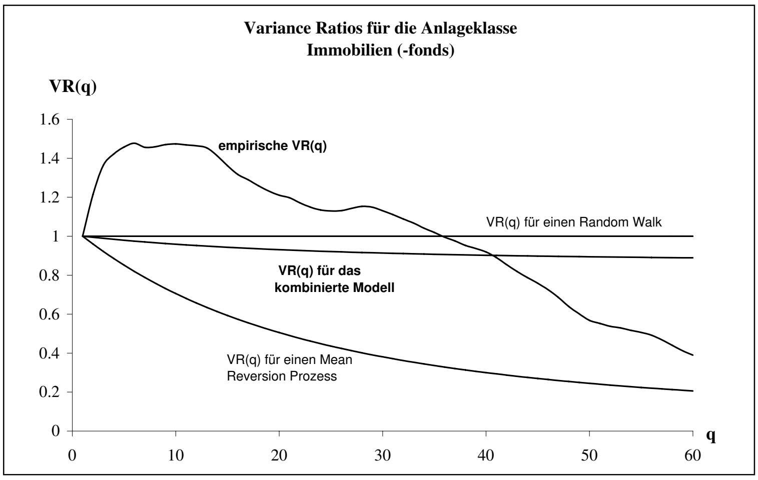


Abbildung 10.9: Variance Ratios für die Anlageklasse Immobilien(-fonds)

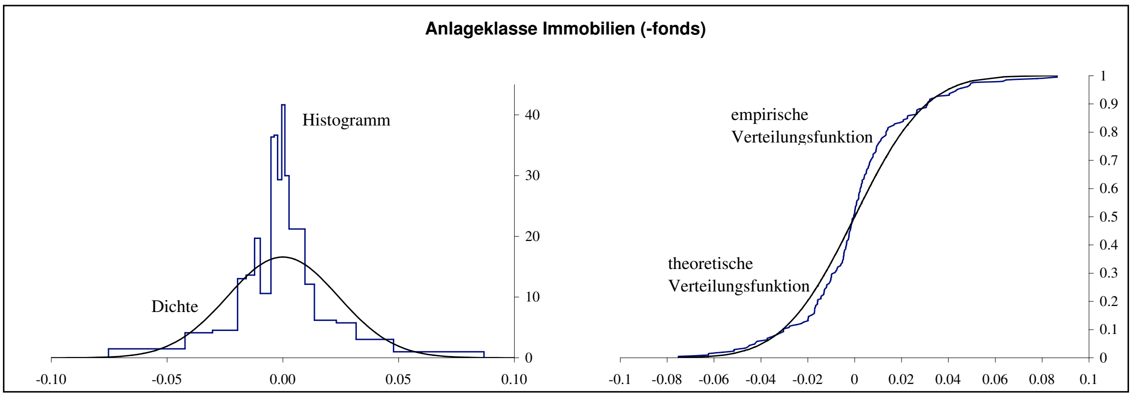


Abbildung 10.10: Empirische und hypothetische Verteilung der Residuen bei Annahme eines Random Walk für die Anlageklasse Immobilien(-fonds)

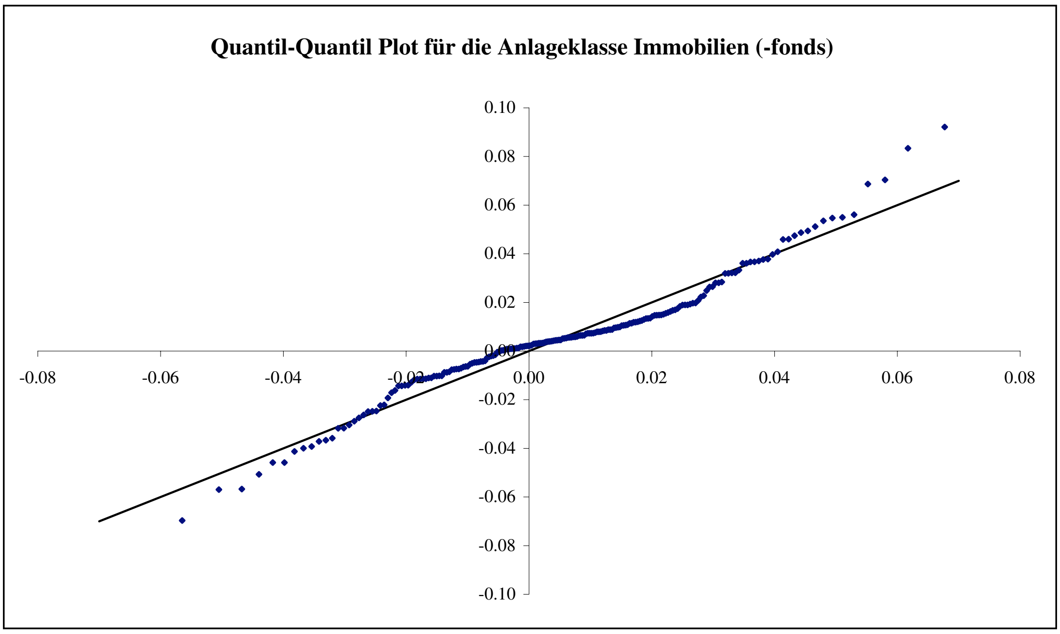


Abbildung 10.11: Quantil-Quantil Plot für die Immobilien(-fonds)renditen bei Annahme eines Random Walk

Die Regression zur Schätzung der Parameter des Mean Reversion Prozesses ergibt folgende Werte:

r^2	0.95893	r^2_{korr}	0.91955

		Wert	P-Wert
F-Test		23083.7	1.6857E-112
t-Test	α	2.05760	0.040913
	β	48.04965	1.6857E-112

Aus den Werten für die Bestimmtheitsmasse r^2 und r^2_{korr} lässt sich auf eine gute Anpassung an die Beobachtungen schliessen. Ebenso ergibt der F-Test, dass die Regression insgesamt signifikant ist. Das gleiche lässt sich, zumindest für ein Signifikanzniveau von 5%, aus den t-Tests für die einzelnen Regressoren schliessen.

Auch für die Residuen des Mean Reversions Prozesses zeigt die Gegenüberstellung der empirischen Verteilung der Residuen und der hypothetischen Normalverteilung bei Annahme eines Mean Reversion Prozesses in Abbildung 10.12 eine nur schwache Übereinstimmung. Mit dem Kolmogorov-Smirnov Tests ($D_n = 0.12669$)

erhält man eine Ablehnung der Nullhypothese der Normalverteiltheit für alle getesteten Signifikanzniveaus von $\alpha = 10\%,\ 5\%,\ 1\%$.

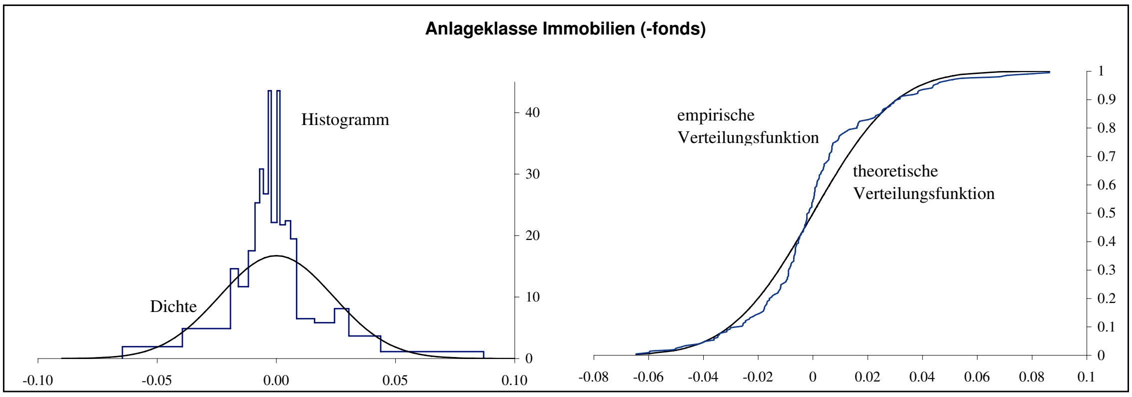


Abbildung 10.12: Empirische und hypothetische Verteilung der Residuen bei Annahme eines Mean Reversion Prozesses für die Anlageklasse Immobilien(-fonds)

Aus den obigen Ergebnissen ist damit die Normalverteilungsannahme aufgrund der historischen Daten eher abzulehnen. Die Verwendung des kombinierten Modells beinhaltet deshalb auch hier wieder gewisse Modellrisiken.

Schätzergebnisse für die Inflation

Für die Parameter ergeben sich die folgenden Schätzwerte:

	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\gamma}$	$\hat{M}_0$
Random Walk	0.0017052	0.000009655	-	-
Mean Reversion Prozess	0.0017052	0.000009686	0.00344	4.6450

Auch hier wieder sind die Schätzwerte $\hat{\sigma}^2$ beider Prozesse sehr nahe beieinander. In der Abbildung 10.13 ist ersichtlich, dass die empirische Variance Ratio im Zeithorizont wiederum durchgängig grösser als eins ist. Für die Gewichtung wird deshalb

$$w = 1.00$$

gewählt, d.h. die Modellierung erfolgt mit dem Random Walk Modell. Dies wird durch den tiefen Schätzwert für den Mean Reversion Parameter γ von 0.00344 bekräftigt.

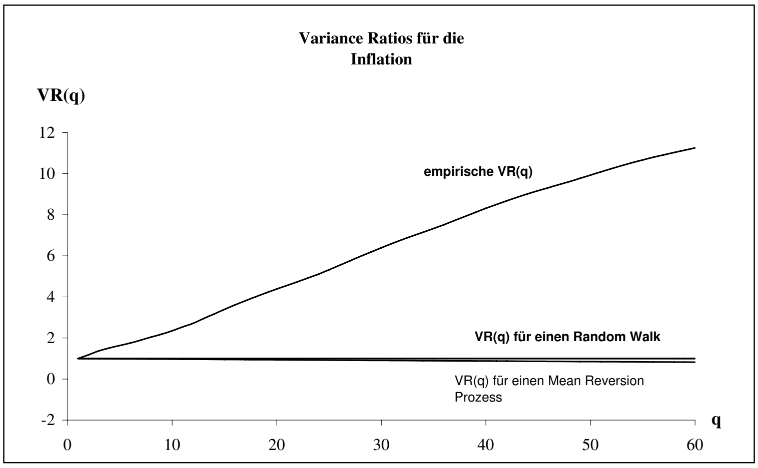


Abbildung 10.13: Variance Ratios für die Anlageklasse Inflation

Der Kolmogorov-Smirnov Test ergibt mit einem Wert für die Testgrösse von $D_n = 0.09498$ wiederum für alle getesteten Signifikanzniveaus von $\alpha = 10\%,\ 5\%$ und 1% eine Ablehnung der Nullhypothese der Normalverteiltheit. Betrachtet man die Gegenüberstellung der empirischen Verteilung der Residuen in Abbildung 10.14 und dem Quantil-Quantil Plot in Abbildung 10.15 ist die eher schwache Übereinstimmung zu erkennen.

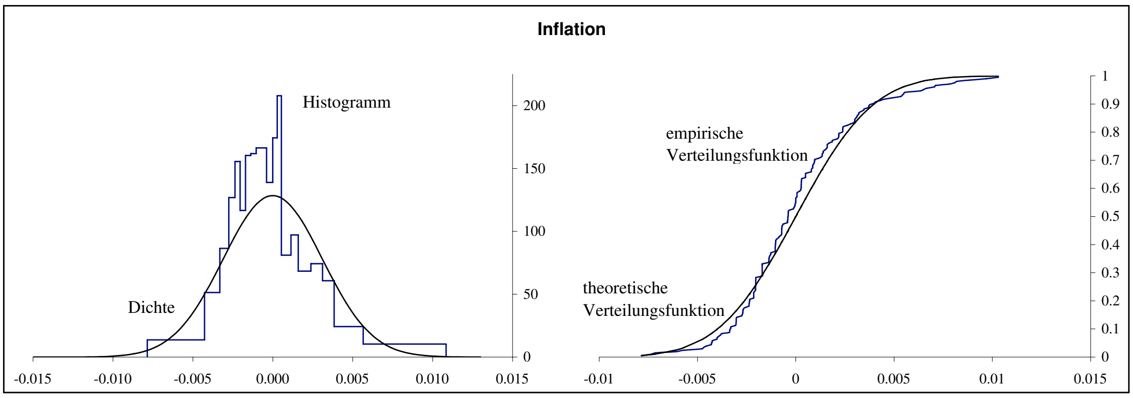


Abbildung 10.14: Empirische und hypothetische Verteilung der Residuen bei Annahme eines Random Walk für die Inflation

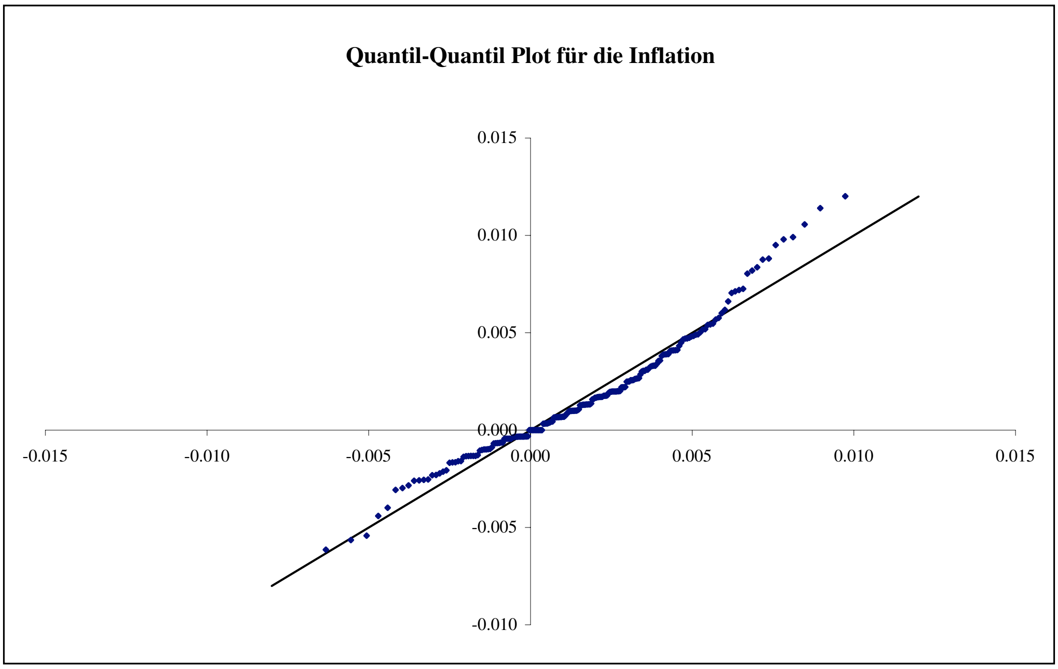


Abbildung 10.15: Quantil-Quantil Plot für die Inflation bei Annahme eines Random Walk

Die Regression zur Schätzung der Parameter des Mean Reversion Prozesses ergibt folgende Werte:

r^2	0.99656	r^2_{korr}	0.99312

		Wert	P-Wert
F-Test		29176.7	2.0862E-220
t-Test	α	0.5903	0.5556
	β	170.812	2.0862E-220

Aus den Werten für die Bestimmtheitsmasse r^2 und r^2_{korr} lässt sich auf eine gute Anpassung an die Beobachtungen schliessen. Aufgrund des F-Tests ist die Regression insgesamt als signifikant zu beurteilen. Anhand des t-Tests ist auch β als signifikant einzuschätzen, der Regressor α hingegen ist aufgrund des hohen P-Wertes vom 0.5556 als nicht signifikant einzuschätzen.

Auch hier ergibt der Kolmogorov-Smirnov Tests ($D_n = 0.08958$) eine Ablehnung der Nullhypothese der Normalverteiltheit für alle getesteten Signifikanzniveaus von $\alpha = 10\%,\ 5\%,\ 1\%$. Dies ist auch aus der Gegenüberstellung der empirischen Verteilung der Residuen und der hypothetischen Normalverteilung in Abbildung 10.16 ersichtlich.

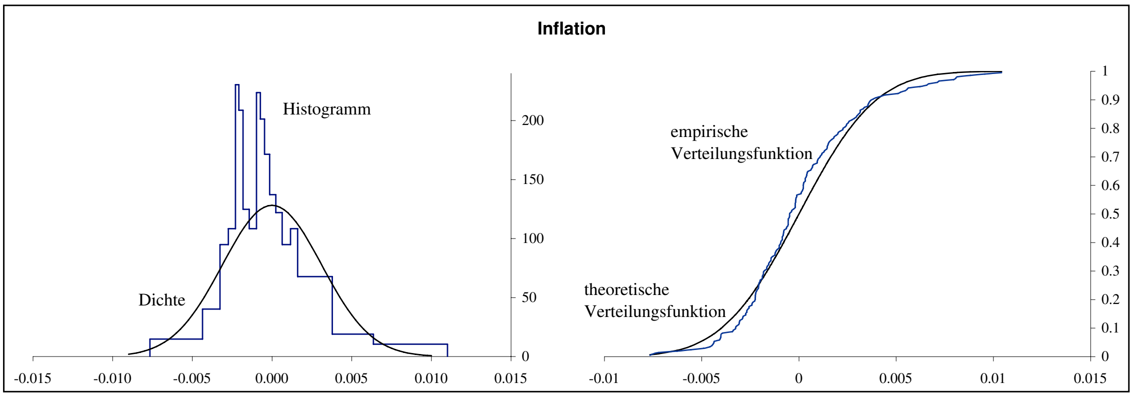


Abbildung 10.16: Empirische und hypothetische Verteilung der Residuen bei Annahme eines Mean Reversion Prozesses für die Inflation

Mit den obigen Ergebnissen ist die Normalverteilungsannahme aufgrund der historischen Daten für die Inflation eher abzulehnen. Mit der Verwendung des Random Walk Modells sind somit wiederum gewisse Modellrisiken verbunden.

Schätzergebnisse für die Lohnentwicklung

Bei den Schätzergebnissen für die Lohnentwicklung ist zu beachten, dass die Schätzungen mit Jahresdaten durchgeführt wurden. Für die Parameter ergeben sich die folgenden Schätzwerte:

	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\gamma}$	$\hat{M}_0$
Random Walk	0.047086	0.0008263	-	-
Mean Reversion Prozess	0.047086	0.0008693	0.018508	4.76701

Wie oben ergeben sich ähnliche Schätzwerte $\hat{\sigma}^2$ für beide Prozesse. Für den Lohn wird ebenfalls das Random Walk Modell gewählt, d.h. eine Gewichtung von

$$w = 1.00 \quad ,$$

da die empirischen Variance Ratios im Zeithorizont durchgängig, wie aus Abbildung 10.17 zu entnehmen, grösser als eins sind.

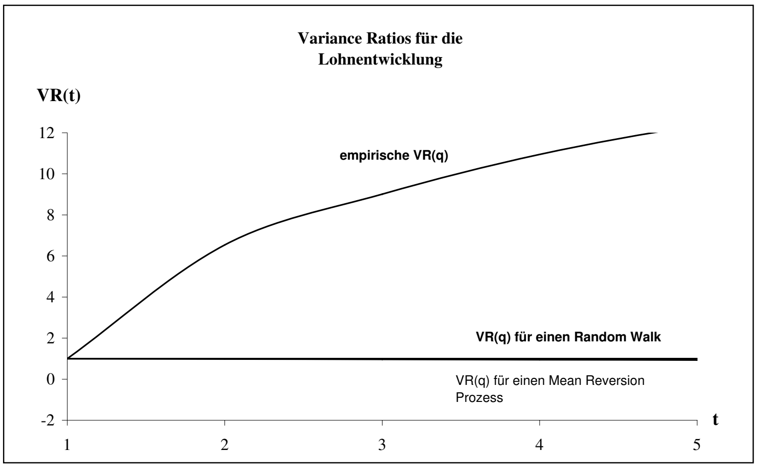


Abbildung 10.17: Variance Ratios für die Lohnentwicklung

Die Gegenüberstellung der empirische Verteilung der Residuen in Abbildung 10.18 wie auch der Quantil-Quantil Plot in Abbildung 10.19 zeigen auf den ersten Blick keine besonderes gute Übereinstimmung. Mit dem Kolmogorov-Smirnov Test ($D_n = 0.09875$) wird aber bei keinem der getesteten Signifikanzniveaus von $\alpha = 10\%,\ 5\%$ und 1% die Nullhypothese der Normalverteiltheit abgelehnt. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, dass für die Schätzungen nur Jahresdaten verfügbar sind und somit die verwendete Stichprobe deutlich kleiner ist als bei den Schätzungen für die Anlageklassen und die Inflation.

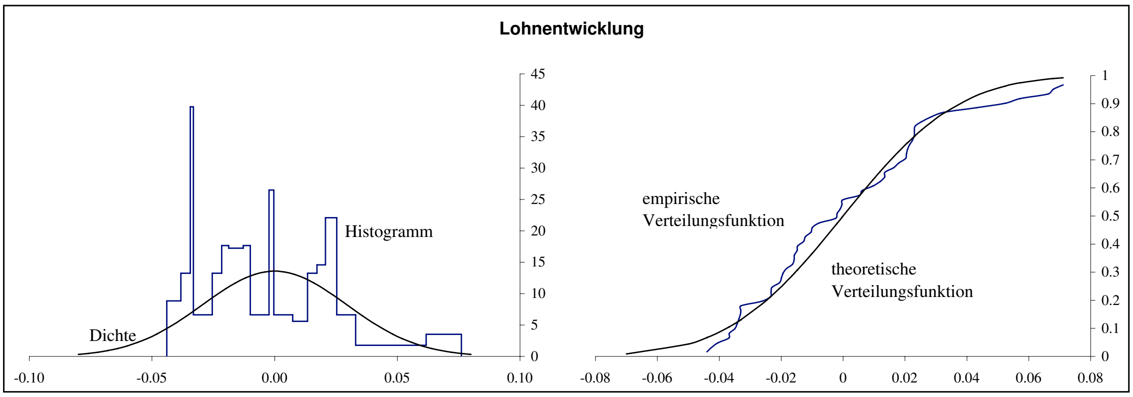


Abbildung 10.18: Empirische und hypothetische Verteilung der Residuen bei Annahme eines Random Walk für die Lohnentwicklung

Für die Regression zur Schätzung der Parameter des Mean Reversion Prozesses erhält man die folgenden Werte für die Grössen zur Beurteilung der Güte der Regression:

r^2	0.98149	r^2_{korr}	0.96333
		Wert	P-Wert
F-Test		1497.2	1.3016E-42
t-Test	α	0.7293	0.46880
	$\hat{\beta}$	38.6936	1.3016E-42

Die Anpassung an die Beobachtungen ist aufgrund der Werte für die Bestimmtheitsmasse r^2 und r^2_{korr} als gut zu beurteilen. Ebenso ergibt der F-Test, dass die Regression insgesamt als signifikant zu beurteilen ist. Der t-Tests hingegen zeigt, dass nur β als signifikant einzuschätzen ist, der Regressor α aber aufgrund des hohen P-Wertes vom 0.4688 nicht signifikant ist.

Mit dem Kolmogorov-Smirnov Test ($D_n = 0.086777$) wird für die Residuen des Mean Reversion Prozesses die Nullhypothese der Normalverteiltheit für keines der getesteten Signifikanzniveaus von $\alpha = 10\%,\ 5\%,\ 1\%$ abgelehnt, wobei auch hier

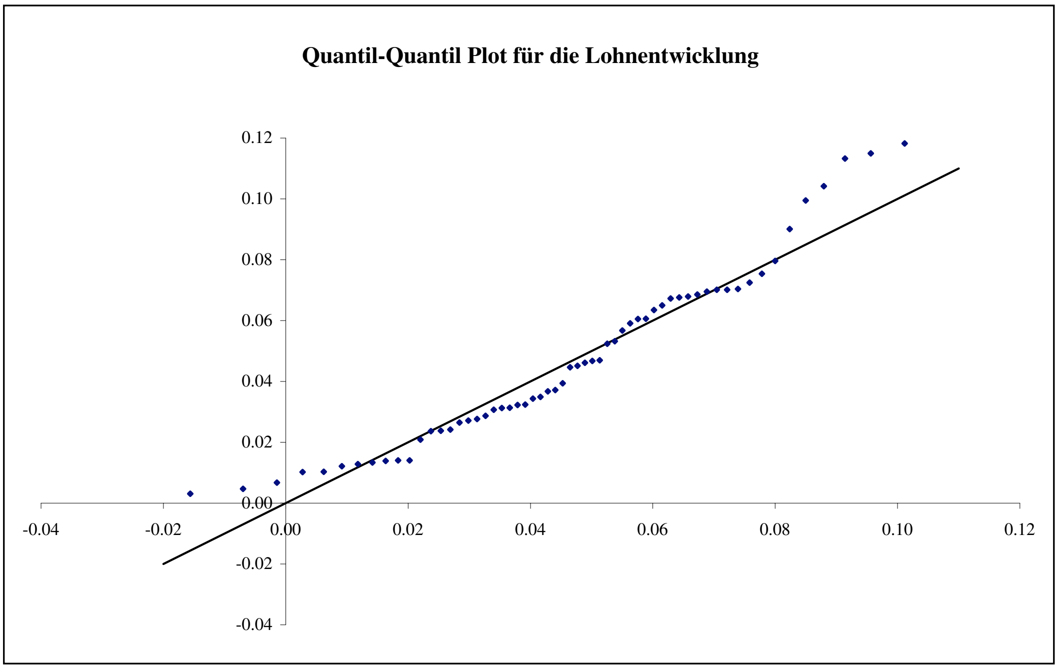


Abbildung 10.19: Quantil-Quantil Plot für die Lohnentwicklung bei Annahme eines Random Walk

wieder die geringe Stichprobengrösse aufgrund der Verwendung von Jahresdaten bedacht werden muss. In Abbildung 10.20 findet sich dazu die Gegenüberstellung der empirischen Verteilung der Residuen und der hypothetischen Normalverteilung.

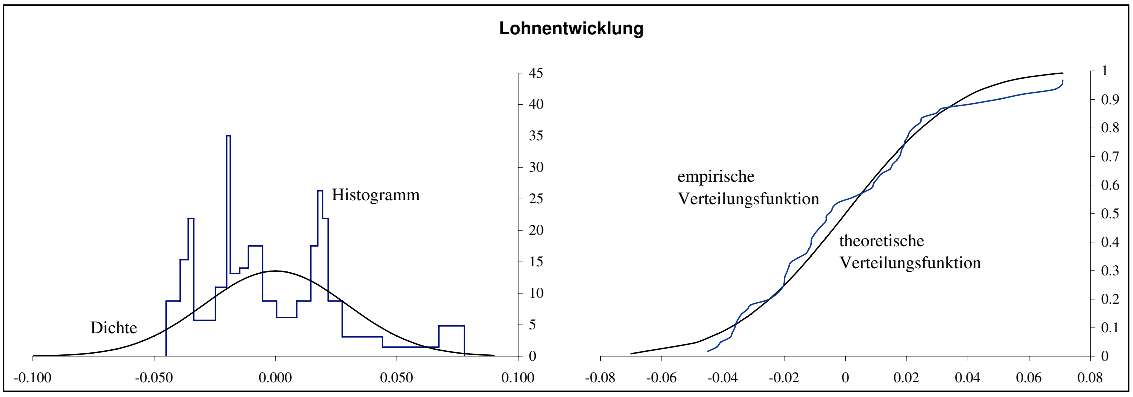


Abbildung 10.20: Empirische und hypothetische Verteilung der Residuen bei Annahme eines Mean Reversion Prozesses für die Lohnentwicklung

Für die Lohnentwicklung wird, wie oben erwähnt, aufgrund der Entwicklung der empirischen Variance Ratio das Random Walk Modell gewählt. Die entsprechende Normalverteilungsannahme wird mit den zur Parameterschätzung verwendeten Beobachtungen für keines der getesteten Signifikanzniveaus abgelehnt, weshalb davon ausgegangen wird, dass der Random Walk insgesamt ein geeignetes Modell darstellt.

Zusammenfassung

Betrachtet man nochmals zusammenfassend die obigen Ergebnisse, lassen sich die einzelnen Modelle mit den gewählten historischen Daten nur eingeschränkt in Übereinstimmung bringen. Dies ist insofern nicht überraschend, als eine Vielzahl von Arbeiten, insbesondere zum Random Walk, zu ähnlichen Ergebnissen kommen. Dabei fällt allerdings die Ablehnung des Modells bei der Verwendung von Monatsdaten meist schwächer aus. In diesem Bereich, d.h. in der Entwicklung von Modellen für mehrjährige Zeithorizonte, die sich mit historischen Kurs- bzw.

Renditedaten besser in Übereinstimmung bringen lassen, besteht sicher noch weiterer Forschungsbedarf. Die denkbaren Alternativen zur Normalverteilung haben aber meist recht schwerwiegende Folgen für die Komplexität der Modellierung, insbesondere bei einer multivariaten Betrachtung. Der in Teil II dieser Arbeit entwickelte Ansatz lässt sich jedoch leicht erweitern, so dass allenfalls bessere Modelle für die Renditen, Inflation und Lohnentwicklung ohne weiteres in diesen Ansatz integriert werden können.

Im folgenden werden die oben geschätzten Modelle dennoch verwendet, weil trotz aller Einschränkungen die wesentlichen Eigenschaften, wie langfristiger Trend (Mittelwert), Schwankung und Veränderung der Schwankung (im Sinne von Mean Reversion Verhalten) des entsprechenden Risikofaktors in die Modellierung Eingang finden. Weiter ist davon auszugehen, dass insbesondere beim Vergleich verschiedener Alternativen, wie z.B. Anlagestrategien, die Beurteilung der Richtung und Stärke von Veränderungen, durch obige Einschränkungen weniger stark betroffen sind.

10.1.3 Schätzung der gemeinsamen Verteilung

Um die gemeinsame Verteilung

$$\mathbf{raila}_T \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (T = 5),$$

vollständig angeben zu können, muss der Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ sowie die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ spezifiziert werden. Der Erwartungswertvektor folgt direkt aus den im vorigen Abschnitt geschätzten Parametern für die Randverteilungen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass sich der Schätzwert für M_0 auf den Startzeitpunkt der Beobachtungen bezieht, d.h. den 31.12.1984 bzw. beim Lohn auf das Jahr 1942. Um die Auslenkung vom langfristigen Mittel zum Startzeitpunkt zu erhalten, muss deshalb der Startwert des langfristigen Mittels mit dem Startwert für die Modellbetrachtung abgestimmt werden. Einfachheitshalber wird für die nachfolgende Betrachtung davon ausgegangen, dass die Auslenkung vom langfristigen Mitte zu Beginn der Modellbetrachtung, mit der für den letzten Datenpunkt (d.h. per 31.12.2001) übereinstimmt. Damit folgt der Startwert x_0 aus den letzten Wert der zur Schätzung verwendeten Datenreihe und der angepasste Startwert für des langfristigen Mittels $\hat{M}_0'$ aus $\hat{M}_0' = \hat{M}_0 + 204\hat{\mu}$ bzw. für den Lohn über $\hat{M}_0' = \hat{M}_0 + 59\hat{\mu}$. Für die anderen Parameter ist keine Anpassung nötig, da diese nur von der betrachteten Zeitdifferenz abhängen.

Als Erwartungswertvektor erhält man:

$$\text{Erwartungswertvektor } \hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{array}{lll} \hat{\mu}_{ra_{0,t}} & t & \\ 0.14034 & 1 & \text{Aktien} \\ 0.27456 & 2 & \\ 0.40509 & 3 & \\ 0.53340 & 4 & \\ 0.66037 & 5 & \\ 0.073151 & 1 & \text{Immobilien} \\ 0.14400 & 2 & \\ 0.21345 & 3 & \\ 0.28206 & 4 & \\ 0.35017 & 5 & \\ 0.052900 & 1 & \text{Obligationen} \\ 0.105807 & 2 & \\ 0.15870 & 3 & \\ 0.21160 & 4 & \\ 0.26450 & 5 & \\ 0.020462 & 1 & \text{Inflation} \\ 0.040924 & 2 & \\ 0.061386 & 3 & \\ 0.081848 & 4 & \\ 0.10231 & 5 & \\ 0.047086 & 1 & \text{Lohn} \\ 0.094172 & 2 & \\ 0.14126 & 3 & \\ 0.18834 & 4 & \\ 0.23543 & 5 & \end{array}$$

Für die Angabe einer Kovarianzmatrix bzw. Konstruktion einer solchen (vgl. Abschnitt 7.3.1) benötigt man weiter Schätzungen für die Korrelationen zwischen den Anlageklassenrenditen, der Inflation und der Lohnentwicklung. Geschätzt werden diese mit dem in Abschnitt 7.3.1 beschreiben Vorgehen aus den Daten des Zeitraumes von 31. Dezember 1984 bis 31. Dezember 2001 (vgl. Abschnitt

10.1.1). Für die Anlageklassenrenditen und die Inflation erfolgt die Schätzung wiederum mit Monatsdaten, den Schätzungen der Korrelationen mit der Lohnentwicklung werden Jahresdaten zugrundegelegt. Damit ergeben sich die folgenden Schätzwerte:

Schätzwert $\hat{\rho}_{k,l}$ für die Korrelation zwischen				
k / l	Obligationen	Immob.(-fonds)	Inflation	Lohnentwickl.
Aktien	0.42338	0.33573	-0.054035	-0.12731
Obligationen		0.36681	0.0049310	0.072331
Immob.-(fonds)			-0.038645	0.057364
Inflation				0.50977

Aus den Daten folgen leichte positve Korrelationen zwischen den drei Anlageklassen. Hingegen lässt sich praktisch keine Korrelation zwischen den Anlageklassenrenditen und der Inflation sowie nur ein sehr schwacher (linearer) Zusammenhang zwischen den Anlageklassenrenditen mit der Lohnentwicklung feststellen. Zwischen der Lohnentwicklung und der Inflation besteht, nicht überraschend, eine hohe positve Korrelation. Mit diesen Schätzwerten für die Korrelationen und den im vorigen Abschnitt geschätzten Parametern für die Randverteilungen erhält man über das Vorgehen aus Abschnitt 7.3.1, die in der Tabelle 10.1 dargestellte Schätzung der Kovarianzmatrix.

10.2 Schätzung der Übergangswahrscheinlichkeiten

Im folgenden wird die Schätzung der Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P\{(\mathbf{Z_{t+1}} \mid \mathbf{Z_t})\}$$

dargestellt, welche einerseits über die Wahrscheinlichkeitstafeln der versicherungstechnischen Rechnungsgrundlagen, hier die VZ 2000 [35], und andererseits über eigene historische Daten[9] der Pensionskasse erfolgt. Die dazu benötigten Ausgangsdaten und deren Quellen sind in der Tabelle 10.2 angegeben.

[9] Für das Beispiel werden Annahmen getroffen.

$ra_{0,t}$		Aktien 1	Aktien 2	Aktien 3	Aktien 4	Aktien 5	Immobilien(-fonds) 1	Immobilien(-fonds) 2	Immobilien(-fonds) 3	Immobilien(-fonds) 4	Immobilien(-fonds) 5	Obligationen 1	Obligationen 2	Obligationen 3	Obligationen 4	Obligationen 5	…
Aktien	1	0.0225881	0.0212808	0.0208057	0.0206331	0.0205704	0.0040933	0.0039118	0.0038451	0.0038206	0.0038116	0.0024896	0.0024165	0.0023884	0.0023777	0.0023737	
	2	0.0212808	0.0425616	0.0407793	0.0401316	0.0398962	0.0039118	0.0078235	0.0075753	0.0074842	0.0074508	0.0024165	0.0048330	0.0047318	0.0046930	0.0046783	
	3	0.0208057	0.0407793	0.0615850	0.0596300	0.0589196	0.0038451	0.0075753	0.0114204	0.0111478	0.0110477	0.0023884	0.0047318	0.0071202	0.0070083	0.0069655	…
	4	0.0206331	0.0401316	0.0596300	0.0802631	0.0782454	0.0038206	0.0074842	0.0111478	0.0149684	0.0146868	0.0023777	0.0046930	0.0070083	0.0093861	0.0092701	
	5	0.0205704	0.0398962	0.0589196	0.0782454	0.0988158	0.0038116	0.0074508	0.0110477	0.0146868	0.0184984	0.0023737	0.0046783	0.0069655	0.0092701	0.0116438	
Immobilien (-fonds)	1	0.0040933	0.0039118	0.0038451	0.0038206	0.0038116	0.0065808	0.0063793	0.0063057	0.0062788	0.0062689	0.0011642	0.0011463	0.0011395	0.0011370	0.0011360	
	2	0.0039118	0.0078235	0.0075753	0.0074842	0.0074508	0.0063793	0.0127587	0.0124835	0.0123829	0.0123461	0.0011463	0.0022926	0.0022678	0.0022585	0.0022551	
	3	0.0038451	0.0075753	0.0114204	0.0111478	0.0110477	0.0063057	0.0124835	0.0187892	0.0184871	0.0183767	0.0011395	0.0022678	0.0034074	0.0033801	0.0033699	…
	4	0.0038206	0.0074842	0.0111478	0.0149684	0.0146868	0.0062788	0.0123829	0.0184871	0.0247658	0.0244539	0.0011370	0.0022585	0.0033801	0.0045171	0.0044889	
	5	0.0038116	0.0074508	0.0110477	0.0146868	0.0184984	0.0062689	0.0123461	0.0183767	0.0244539	0.0307228	0.0011360	0.0022551	0.0033699	0.0044889	0.0056249	
Obligationen	1	0.0024896	0.0024165	0.0023884	0.0023777	0.0023737	0.0011642	0.0011463	0.0011395	0.0011370	0.0011360	0.0015309	0.0015309	0.0015309	0.0015309	0.0015309	
	2	0.0024165	0.0048330	0.0047318	0.0046930	0.0046783	0.0011463	0.0022926	0.0022678	0.0022585	0.0022551	0.0015309	0.0030617	0.0030617	0.0030617	0.0030617	
	3	0.0023884	0.0047318	0.0071202	0.0070083	0.0069655	0.0011395	0.0022678	0.0034074	0.0033801	0.0033699	0.0015309	0.0030617	0.0045926	0.0045926	0.0045926	…
	4	0.0023777	0.0046930	0.0070083	0.0093861	0.0092701	0.0011370	0.0022585	0.0033801	0.0045171	0.0044889	0.0015309	0.0030617	0.0045926	0.0061234	0.0061234	
	5	0.0023737	0.0046783	0.0069655	0.0092701	0.0116438	0.0011360	0.0022551	0.0033699	0.0044889	0.0056249	0.0015309	0.0030617	0.0045926	0.0061234	0.0076543	
Inflation	1	-0.0000874	-0.0000848	-0.0000839	-0.0000835	-0.0000833	-0.0000337	-0.0000332	-0.0000330	-0.0000330	-0.0000329	0.0000021	0.0000028	0.0000037	0.0000047	0.0000056	
	2	-0.0000848	-0.0001697	-0.0001661	-0.0001648	-0.0001643	-0.0000332	-0.0000664	-0.0000657	-0.0000655	-0.0000654	0.0000028	0.0000042	0.0000042	0.0000042	0.0000042	
	3	-0.0000839	-0.0001661	-0.0002500	-0.0002461	-0.0002446	-0.0000330	-0.0000657	-0.0000988	-0.0000980	-0.0000977	0.0000037	0.0000042	0.0000062	0.0000062	0.0000062	…
	4	-0.0000835	-0.0001648	-0.0002461	-0.0003296	-0.0003255	-0.0000330	-0.0000655	-0.0000980	-0.0001309	-0.0001301	0.0000047	0.0000042	0.0000062	0.0000083	0.0000083	
	5	-0.0000833	-0.0001643	-0.0002446	-0.0003255	-0.0004088	-0.0000329	-0.0000654	-0.0000977	-0.0001301	-0.0001630	0.0000056	0.0000042	0.0000062	0.0000083	0.0000104	
Lohn-entwicklung	1	-0.0005619	-0.0005454	-0.0005390	-0.0005366	-0.0005357	0.0001366	0.0001345	0.0001337	0.0001334	0.0001333	0.0000831	0.0000831	0.0000831	0.0000831	0.0000831	
	2	-0.0005454	-0.0010907	-0.0010679	-0.0010591	-0.0010558	0.0001345	0.0002691	0.0002662	0.0002651	0.0002647	0.0000831	0.0001662	0.0001662	0.0001662	0.0001662	
	3	-0.0005390	-0.0010679	-0.0016069	-0.0015816	-0.0015720	0.0001337	0.0002662	0.0003999	0.0003967	0.0003955	0.0000831	0.0001662	0.0002493	0.0002493	0.0002493	…
	4	-0.0005366	-0.0010591	-0.0015816	-0.0021182	-0.0020921	0.0001334	0.0002651	0.0003967	0.0005302	0.0005269	0.0000831	0.0001662	0.0002493	0.0003324	0.0003324	
	5	-0.0005357	-0.0010558	-0.0015720	-0.0020921	-0.0026278	0.0001333	0.0002647	0.0003955	0.0005269	0.0006602	0.0000831	0.0001662	0.0002493	0.0003324	0.0004155	

…	Inflation 1	Inflation 2	Inflation 3	Inflation 4	Inflation 5	Lohn 1	Lohn 2	Lohn 3	Lohn 4	Lohn 5
	-0.0000874	-0.0000848	-0.0000839	-0.0000835	-0.0000833	-0.0005619	-0.0005454	-0.0005390	-0.0005366	-0.0005357
	-0.0000848	-0.0001697	-0.0001661	-0.0001648	-0.0001643	-0.0005454	-0.0010907	-0.0010679	-0.0010591	-0.0010558
…	-0.0000839	-0.0001661	-0.0002500	-0.0002461	-0.0002446	-0.0005390	-0.0010679	-0.0016069	-0.0015816	-0.0015720
	-0.0000835	-0.0001648	-0.0002461	-0.0003296	-0.0003255	-0.0005366	-0.0010591	-0.0015816	-0.0021182	-0.0020921
	-0.0000833	-0.0001643	-0.0002446	-0.0003255	-0.0004088	-0.0005357	-0.0010558	-0.0015720	-0.0020921	-0.0026278
	-0.0000337	-0.0000332	-0.0000330	-0.0000330	-0.0000329	0.0001366	0.0001345	0.0001337	0.0001334	0.0001333
	-0.0000332	-0.0000664	-0.0000657	-0.0000655	-0.0000654	0.0001345	0.0002691	0.0002662	0.0002651	0.0002647
…	-0.0000330	-0.0000657	-0.0000988	-0.0000980	-0.0000977	0.0001337	0.0002662	0.0003999	0.0003967	0.0003955
	-0.0000330	-0.0000655	-0.0000980	-0.0001309	-0.0001301	0.0001334	0.0002651	0.0003967	0.0005302	0.0005269
	-0.0000329	-0.0000654	-0.0000977	-0.0001301	-0.0001630	0.0001333	0.0002647	0.0003955	0.0005269	0.0006602
	0.0000021	0.0000028	0.0000037	0.0000047	0.0000056	0.0000831	0.0000831	0.0000831	0.0000831	0.0000831
	0.0000028	0.0000042	0.0000042	0.0000042	0.0000042	0.0000831	0.0001662	0.0001662	0.0001662	0.0001662
…	0.0000037	0.0000042	0.0000062	0.0000062	0.0000062	0.0000831	0.0001662	0.0002493	0.0002493	0.0002493
	0.0000047	0.0000042	0.0000062	0.0000083	0.0000083	0.0000831	0.0001662	0.0002493	0.0003324	0.0003324
	0.0000056	0.0000042	0.0000062	0.0000083	0.0000104	0.0000831	0.0001662	0.0002493	0.0003324	0.0004155
	0.0001159	0.0001159	0.0001159	0.0001159	0.0001159	0.0001611	0.0001611	0.0001611	0.0001611	0.0001611
	0.0001159	0.0002317	0.0002317	0.0002317	0.0002317	0.0001611	0.0003223	0.0003223	0.0003223	0.0003223
…	0.0001159	0.0002317	0.0003476	0.0003476	0.0003476	0.0001611	0.0003223	0.0004834	0.0004834	0.0004834
	0.0001159	0.0002317	0.0003476	0.0004634	0.0004634	0.0001611	0.0003223	0.0004834	0.0006445	0.0006445
	0.0001159	0.0002317	0.0003476	0.0004634	0.0005793	0.0001611	0.0003223	0.0004834	0.0006445	0.0008056
	0.0001611	0.0001611	0.0001611	0.0001611	0.0001611	0.0008623	0.0008623	0.0008623	0.0008623	0.0008623
	0.0001611	0.0003223	0.0003223	0.0003223	0.0003223	0.0008623	0.0017246	0.0017246	0.0017246	0.0017246
…	0.0001611	0.0003223	0.0004834	0.0004834	0.0004834	0.0008623	0.0017246	0.0025869	0.0025869	0.0025869
	0.0001611	0.0003223	0.0004834	0.0006445	0.0006445	0.0008623	0.0017246	0.0025869	0.0034491	0.0034491
	0.0001611	0.0003223	0.0004834	0.0006445	0.0008056	0.0008623	0.0017246	0.0025869	0.0034491	0.0043114

Tabelle 10.1: Schätzung der Kovarianzmatrix

Notation	Bezeichnung	Quelle
q_x, q_y	Einjährige Sterbewahrscheinlichkeit im Alter x (Männer) bzw. y (Frauen)	VZ Tabelle 3 und 9
$w_{x+1/2}$, $w_{y+1/2}$	Wahrscheinlichkeit beim Tod im Alter x bzw. y verheiratet zu sein	VZ Tabelle 17 und 22
$y_{x+\frac{1}{2}}$, $x_{y+\frac{1}{2}}$	Durchschnittsalter der Frau (des Mannes) beim Tod des Mannes (der Frau)	VZ Tabelle 17 und 22
i_x, i_y	Einjährige Invalidisierungswahrscheinlichkeit (Wahr.keit "invalid zu werden") im Alter x bzw. y	VZ Tabelle 24 und 39
r_x, r_y	Einjährige Wahr.keit sich im Alter x bzw. y pensionieren zu lassen	Eigene Daten
a_x, a_y	Anteil der im Alter x bzw. y Pensionierten, die eine Kapitaloption wählen.	Eigene Daten.
q_y^w, q_x^w	einjährige Sterbewahrscheinlichkeit der Witwen im Alter y bzw. der Witwer im Alter x	VZ Tabelle 15 und 20

Tabelle 10.2: Ausgangsdaten und Quellen zur Schätzung der Übergangswahrscheinlichkeiten.

In den Invalidisierungswahrscheinlichkeiten der VZ 2000 sind Teilinvalidisierungen entsprechend dem Invalidisierungsgrad berücksichtigt. Für die Pensionierungswahrscheinlichkeiten $r_{x/y}$ sind in der Regel keine Angaben in den Rechnungsgrundlagen enthalten. Da dies auch für die VZ 2000 zutrifft, müssen die Pensionierungswahrscheinlichkeiten r_x und r_y durch eigene historische Daten der Pensionskasse geschätzt werden. Das gleiche gilt für den Anteil der Versicherten $a_{x/y}$, welche statt einer Rente die Kapitaloption wählen. Für die nachfolgenden Beispiele werden dazu die folgenden Werte angenommen:

Altersverteilung der Pensionierungen

Alter x / y	58	59	60	61	62	63	64
Männer	1%	1%	4%	4%	5%	5%	5%
Frauen	1%	2%	4%	8%	8%	10%	60%
Alter x / y	65	66	67	68	69	70	
Männer	65%	5%	3%	1%	0.5%	0.5%	
Frauen	4%	2%	1%				

Einjährige Pensionierungswahrscheinlichkeiten $r_{x/y}$

Alter x / y	58	59	60	61	62	63	64
Männer	0.0100	0.0101	0.0408	0.0426	0.0556	0.0588	0.0625
Frauen	0.0100	0.0202	0.0412	0.0860	0.0941	0.1299	0.8955
Alter x / y	65	66	67	68	69	70	
Männer	0.8667	0.5000	0.6000	0.5000	0.5000	1.0000	
Frauen	0.5714	0.6667	1.0000				

Für die Aufteilung zwischen Kapitalleistung und Rente wird für alle Alter davon ausgegangen, dass 75% der Altersleistungen als Renten bezogen werden, d.h. für alle relevanten Alter wird $a_{x/y} = 0.25$ gesetzt.

Mit den in der Tabelle 10.2 dargestellten Ausgangsdaten lassen sich die Übergangswahrscheinlichkeiten schätzen. Dies ist in Tabelle 10.3 zusammenfassend dargestellt. Dabei ist zu berücksichtigen, dass im Modell nur die überlebenden Nicht-Invaliden pensioniert werden können. Deshalb werden die Übergangswahrscheinlichkeiten mit $r_{x/y}(1 - q_{x/y} - i_{x/y})$ geschätzt. Die Sterbe- und Invalidisierungswahrscheinlichkeiten aus den VZ 2000 sind schon aufeinander abgestimmt, d.h. die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten beziehen sich nur auf den überlebenden Bestand an Versicherten.

Übergangsw.keit im Modell	Schätzung durch
$P((1, A_t+1, 0) \mid (1, A_t, 0))$	$1 - q_x - i_x - r_x(1 - q_x - i_x)$
$P((1, A_t+1, 1) \mid (1, A_t, 1))$	$1 - q_y - i_y - r_y(1 - q_y - i_y)$
$P((2, A_t+1, 0) \mid (1, A_t, 0))$	i_x
$P((2, A_t+1, 1) \mid (1, A_t, 1))$	i_y
$P((3, A_t+1, 0) \mid (1, A_t, 0))$	$(1 - a_x)\ r_x(1 - q_x - i_x)$
$P((3, A_t+1, 1) \mid (1, A_t, 1))$	$(1 - a_y)\ r_y(1 - q_y - i_y)$
$P((4, A_t+1-d_t, 1) \mid (1, A_t, 0))$	$q_x\ w_{x+1/2};\ d_t = x - y_{x+\frac{1}{2}}$
$P((4, A_t+1-d_t, 0) \mid (1, A_t, 1))$	$q_y\ w_{y+1/2};\ d_t = y - x_{y+\frac{1}{2}}$
$P((5, A_t+1, 0) \mid (1, A_t, 0))$	$q_x\ (1 - w_{x+1/2})$
$P((5, A_t+1, 1) \mid (1, A_t, 1))$	$q_y\ (1 - w_{y+1/2})$
$P((6, A_t+1, 0) \mid (1, A_t, 0))$	$a_x\ r_x(1 - q_x - i_x)$
$P((6, A_t+1, 1) \mid (1, A_t, 1))$	$a_y\ r_y(1 - q_y - i_y)$
$P((2, A_t+1, 0) \mid (2, A_t, 0))$	$1 - q_x$
$P((2, A_t+1, 1) \mid (2, A_t, 1))$	$1 - q_y$
$P((4, A_t+1-d_t, 1) \mid (2, A_t, 0))$	$q_x\ w_{x+1/2};\ d_t = x - y_{x+\frac{1}{2}}$
$P((4, A_t+1-d_t, 0) \mid (2, A_t, 1))$	$q_y\ w_{y+1/2};\ d_t = y - x_{y+\frac{1}{2}}$
$P((5, A_t+1, 0) \mid (2, A_t, 0))$	$q_x\ (1 - w_{x+1/2})$
$P((5, A_t+1, 1) \mid (2, A_t, 1))$	$q_y\ (1 - w_{y+1/2})$
$P((3, A_t+1, 0) \mid (3, A_t, 0))$	$1 - q_x$
$P((3, A_t+1, 1) \mid (3, A_t, 1))$	$1 - q_x$
$P((4, A_t+1, 0) \mid (3, A_t, 0))$	$q_x\ w_{x+1/2};\ d_t = x - y_{x+\frac{1}{2}}$
$P((4, A_t+1, 1) \mid (3, A_t, 1))$	$q_y\ w_{y+1/2};\ d_t = y - x_{y+\frac{1}{2}}$
$P((5, A_t+1-d_t, 1) \mid (3, A_t, 0))$	$q_x\ (1 - w_{x+1/2})$
$P((5, A_t+1-d_t, 0) \mid (3, A_t, 1))$	$q_y\ (1 - w_{y+1/2})$
$P((4, A_t+1-d_{t_4}, 1) \mid (4, A_t - d_{t_4}, 1))$	$1 - q_y^w$
$P((4, A_t+1-d_{t_4}, 0) \mid (4, A_t - d_{t_4}, 0))$	$1 - q_x^w$
$P((5, A_t+1-d_{t_4}, 1) \mid (4, A_t - d_{t_4}, 1))$	q_y^w
$P((5, A_t+1-d_{t_4}, 0) \mid (4, A_t - d_{t_4}, 0))$	q_x^w
$P((5, A_t+1, 0) \mid (5, A_t, 0))$	1
$P((5, A_t+1, 1) \mid (5, A_t, 1))$	1
$P((6, A_t+1, 0) \mid (6, A_t, 0))$	1
$P((6, A_t+1, 1) \mid (6, A_t, 1))$	1

Tabelle 10.3: Schätzung der Übergangswahrscheinlichkeiten für das Modell.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden für das Modell als über die Zeit hinweg konstant betrachtet. Grundsätzlich könnte man auch von sich ändernden Übergangswahrscheinlichkeiten ausgehen. Dies wäre dann, aufgrund der generell steigenden Lebenserwartung, insbesondere für die Sterbewahrscheinlichkeiten sinnvoll. Im Anhang E.1 ist ein Modell beschrieben, welches in den Rechnungsgrundlagen der VZ 2000 für die Verstärkung der tabellierten Sterbewahrscheinlichkeiten Anwendung findet. Dieses Modell kann auch zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Sterbewahrscheinlichkeiten verwendet werden. Zur Vereinfachung wird aber im folgenden davon abgesehen.

Kapitel 11

Auswertung von Beispielen

11.1 Programmierung zur Berechnung

Zur Auswertung bzw. Berechnung von Beispielen wurde das in Teil II und in den vorigen Abschnitten beschriebene Modell als Algorithmus programmiert. Als Sprache wurde dazu VBA 6.3 (Visual Basic for Applications) von Microsoft verwendet, da diese einerseits eine einfache Eingabe von Werten über Excel-Tabellen erlaubt und andererseits standardmässig in Microsoft Office Paketen enthalten ist.

Insgesamt umfasst der Algorithmus rund 1500 Programmzeilen. Damit wurden für verschiedene Ausgangssituationen, Anlagestrategien und Versichertenbestände Überschussverteilungen simuliert. Für die Berechnungen wurde ein HP-Compaq nc6220 Laptop mit einem 1.86 Ghz Prozessor[1] verwendet. Die Laufzeit betrug damit für einen kleinen Bestand von 100 Versicherten ca. 80 Minuten und für einen grösseren Bestand von 400 Versicherten ca. 350 Minuten, bei einem Arbeitsspeicherbedarf von rund 390 MB resp. 415 MB. Die Programmierung ist so vorgenommen worden, dass bei steigender Versichertenzahl die Rechnerzeit nur leicht überproportional ansteigt. Der Speicherbedarf kann entsprechend der Systembedingungen angepasst werden.

[1] Intel Centrino Mobiltechnologie mit Pentium M Prozessor 750

Die Programmierung teilt sich in 3 Module auf: Im ersten Modul werden Szenarien für die Vermögensrendite, Inflation und allgemeine Lohnentwicklung generiert. Dazu wird zunächst für die eingegebene Kovarianzmatrix eine Cholesky-Zerlegung durchgeführt. Danach erfolgt die Generierung von standardnormalverteilten Zufallszahlen, wozu der Zufallszahlgenerator ,,ran1" aus den Numerical Recipes von Press (vgl. Press et al. [76], S. 278 ff.) und das Box-Muller Verfahren verwendet werden. Aus der Multiplikation der zerlegten Kovarianzmatrix und dem generierten Zufallszahlenvektoren erhält man die gewünschten Szenarien für die Anlageklassenrenditen, Inflation und die allgemeine Lohnentwicklung. Anhand der definierten Anlagestrategie folgen daraus ebenfalls die Szenarien für Vermögensrendite.

Das zweite Modul errechnet die Zusatzversicherten, die benötigt werden, um die gewünschte Zielstruktur zu erreichen. Dazu wird im ersten Schritt die Struktur des eingegeben Bestandes ermittelt. Danach wird für jede Periode die Entwicklung des Bestandes aufgrund von Alterung und deterministischer Austrittsrate berechnet und damit anhand der eingegebenen Zielstruktur die Zahl der Zusatzversicherten (sowie ihrer Versichertenmerkmale) festgelegt. Als letztes werden die Versicherten nach ihren Startzuständen sortiert.

Im dritten und umfangreichsten Modul werden als erstes für alle Versicherten mit je gleichem Startzustand, für alle Szenarien von Vermögensrendite, Inflation und allgemeiner Lohnentwicklung, sowie für alle Zeitperioden der versicherte Lohn und das Alterskapital ermittelt. Danach erfolgt die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Versicherungsverläufe, die ausgehend vom Startzustand möglich sind. Mittels dieser Angaben wird für jeden Versicherten des festen Bestandes, ausgehend von seinem letzten möglichen Ersatzversicherten, zunächst die Verteilung des Vermögensverbrauchs der Ersatzversicherten und anschliessend daraus durch Kombination der jeweiligen Fälle, die Verteilung des Vermögensverbrauchs des Versicherten des festen Bestandes ermittelt. Um den Arbeitsspeicherbedarf zu begrenzen wird jeweils bei Erreichen einer gewissen vorgegebenen Anzahl von Versicherten des festen Bestandes eine Zwischenaggregation derer Verteilungen vorgenommen. Zum Schluss erfolgt dann die endgültige

Aggregation und die Auswertung der Verteilung, d.h die Ausgabe der simulierten Verteilung in Form einer klassierten Häufigkeitsverteilung, der berechneten Risikomasse und eines Histogramms.

Zur besseren Nachvollziehbarkeit der Programmierung ist in Anhang C ein Struktogramm des Algorithmus wiedergegeben.

11.2 Auswertung und Ergebnisse

11.2.1 Übersicht

Der Zweck der Beispielrechnungen liegt mehr darin, Anwendungsmöglichkeiten für das Modell aufzuzeigen, als direkt Handlungsempfehlungen abzuleiten. Daneben soll über die Ergebnisse eine Plausibilisierung des Modell vorgenommen werden, indem die Simulationsergebnisse mit bestehenden Erwartungen verglichen werden, d.h. plausibel erklärt werden sollen. Der Modellzweck liegt im wesentlichen darin, diese erwartenden Veränderungen zu quantifizieren, um damit Entscheidungsgrundlagen zu bilden.

Die Auswertung erfolgt in zwei Schritten. Im ersten Schritt werden für unterschiedliche Versichertenbestände Simulationsergebnisse bei Anwendung von je fünf verschiedenen Anlagestrategien verglichen. Im zweiten Schritt werden für einen einzelnen Versichertenbestand die Auswirkungen von Änderungen in der Ausgangssituation verglichen.

Die Versichertenbestände, welche im ersten Schritt miteinander verglichen werden, sind in den nachfolgenden Tabellen 11.1 bis 11.4 dargestellt. Die Angaben zum mittleren versicherten Lohn, der durchschnittlichen Rentenhöhe und zum mittleren Alterskapital sind in CHF und beziehen sich auf ein Jahr. Die Bestände wurden ausgehend von Daten einer real existierenden BVG-Minimalkasse konstruiert. Für die Berechnung des Deckungskapitals wurde wie in Abschnitt 6.4.4 beschrieben vorgegangen, d.h. für die Aktiven ergibt sich das Deckungskapital aus dem Alterskapital und für die Rentner aus dem versicherungstechnischen

Bestand A

Männer/ Altersklasse	25-34	35-44	45-54	55-65	Total
Anzahl Aktive	12	15	12	10	49
Austrittsrate	10%	7%	5%	2%	
Mittlerer Lohn	62'773	70'754	68'884	71'831	
Mittleres Alterskapital	16'636	73'840	117'304	233'712	
Frauen / Altersklasse	25-34	35-44	45-54	55-65	Total
Anzahl Aktive	12	7	10	4	33
Austrittsrate	8%	10%	4%	1%	
Mittlerer Lohn	47'644	43'969	55'375	57'115	
Mittleres Alterskapital	9'511	16'650	72'411	113'774	
Rentner	Männer		Frauen		
	Zahl	Rentend.[2]	Zahl	Rentend.	
Altersrente	6	19'079	4	10'255	
Invalidenrente	3	16'324	2	5'727	
Hinterbliebenenrente	2	10'581	1	6'467	
Total	11		7		18
Deckungskapital	10'183'189		Anzahl Versicherte		100

Tabelle 11.1: Beispiel-Versichertenbestand A

Barwert der laufenden Renten zuzüglich der Anwartschaften. Der Bestand A dient als Referenzbestand. Der Bestand B hat im Vergleich zum Bestand A einen Überhang an Rentnern, der Bestand C hingegen besteht nur aus aktiven Versicherten. Im vierten Bestand D wurde, um die Unterschiede zwischen grossen und kleinen Beständen zu veranschaulichen, die Zahl an Versicherten im Vergleich zu Bestand A um den Faktor vier vergrössert, die Zusammensetzung des Bestands aber sonst gleich belassen. Für alle vier Beispiele wird davon ausgegangen, dass durch Zusatzversicherte der Bestand an aktiven Versicherten im betrachten Zeitraum auf der Höhe des Anfangsbestandes gehalten wird. Ebenfalls wird von einem Deckungsgrad von 100% zu Beginn der Betrachtung ausgegangen.

Die verschiedenen Anlagestrategien, die den Simulationen zugrunde gelegt werden finden sich in der Tabelle 11.5. Im Hinblick auf die Erweiterungsmöglichkeiten bei der Vermögensanlage wurde bei der Vorgabe der Anlagestrategien für die Beispiele auch von nicht BVV2-konformen Strategien ausgegangen: Die Strategie ausgewogen ist frei gewählt und bewegt sich innerhalb der BVV2-Limiten. Die

[2] Rentendurchschnitt

Bestand B

Männer / Altersklasse	25-34	35-44	45-54	55-65	Total
Anzahl Aktive	6	7	6	6	25
Austrittsrate	10%	7%	5%	2%	
Mittlerer Lohn	64'460.67	69'606.14	70'155.00	70'891.67	
Mittleres Alterskapital	19'978.83	69'674.00	143'388.67	264'776.67	
Frauen	25-34	35-44	45-54	55-65	Total
Anzahl Aktive	6	3	5	4	18
Austrittsrate	8%	9%	4%	1%	
Mittlerer Lohn	46'106.67	46'470.00	53'817.00	57'115.00	
Mittleres Alterskapital	11'853.17	16'140.33	78'454.20	113'774.00	
Rentner	Männer		Frauen		
	Zahl	Rentend.	Zahl	Rented.	
Alters-	20	18'810	14	10'148	
Invaliden-	10	16'574	6	5'727	
Hinterbliebenen-	5	10'239	2	6'467	
Total	35		22		57
Deckungskapital	16'014'483		Anzahl Versicherte		100

Tabelle 11.2: Beispiel-Versichertenbestand B

Bestand C

Männer / Altersklasse	25-34	35-44	45-54	55-65	Total
Anzahl Aktive	15	19	15	11	60
Austrittsrate	10%	7%	5%	2%	
Mittlerer Lohn	62'828.27	70'162.26	69'135.33	71'292.45	
Mittleres Alterskapital	15'467.07	66'469.42	121'822.13	230'848.55	
Frauen	25-34	35-44	45-54	55-65	Total
Anzahl Aktive	14	10	12	4	40
Austrittsrate	8%	10%	4%	1%	
Mittlerer Lohn	47'430.36	44'979.00	54'541.25	57'115.00	
Mittleres Alterskapital	9'292.36	19'214.10	72'441.33	113'774.00	
Rentner	Männer		Frauen		
	Zahl	Rentend.	Zahl	Rented.	
Alters-	0	-	0	-	
Invaliden-	0	-	0	-	
Hinterbliebenen-	0	-	0	-	
Total	0		0		0
Deckungskapital	7'508'217.00		Anzahl Versicherte		100

Tabelle 11.3: Beispiel-Versichertenbestand C

Bestand D

Männer / Altersklasse	25-34	35-44	45-54	55-65	Total
Anzahl Aktive	48	60	48	40	196
Austrittsrate	10%	7%	5%	2%	
Mittlerer Lohn	62'772.83	70'753.53	68'884.17	71'830.70	
Mittleres Alterskapital	16'636.08	73'840.33	117'303.67	233'711.90	
Frauen	25-34	35-44	45-54	55-65	Total
Anzahl Aktive	48	28	40	16	132
Austrittsrate	8%	10%	4%	1%	
Mittlerer Lohn	47'643.75	43'968.57	55'374.50	57'115.00	
Mittleres Alterskapital	9'510.83	16'649.57	72'410.50	113'774.00	
Rentner	Männer		Frauen		
	Zahl	Rentend.	Zahl	Rented.	
Alters-	24	19'079	16	10'255	
Invaliden-	12	16'324	8	5'727	
Hinterbliebenen-	8	10'581	4	6'467	
Total	44		28		72
Deckungskapital	40'732'754.90		Anzahl Versicherte		400

Tabelle 11.4: Beispiel-Versichertenbestand D

Strategie obligationenlastig geht für die Anlageklasse Obligationen an den gemäss BVV2 zulässigen Maximalwert[3] und ist insgesamt ebenfalls BVV2-konform. Die Strategie aktienlastig geht für die Anlageklasse Aktien an den gemäss BVV2 zulässigen Maximalwert,[3] wobei die Gesamt-Höchstgrenze für Sachwerte um 4% leicht überstiegen wird. Die beiden letzten Strategien Aktien und Obligationen gehen über die BVV2-Limiten hinaus, wobei die Strategie Obligationen weniger deutlich als die Strategie Aktien.

Die im zweiten Schritt vorgenommen Änderungen in der Ausgangssituation beziehen sich auf den Bestand A und sind in der Tabelle 11.6 aufgelistet. Für jeden dieser Fälle werden zur Simulation wieder die Anlagestrategien aus Tabelle 11.5 verwendet. Mit A0 wird der Referenzfall bezeichnet, welcher dem obigen Beispiel für Bestand A entspricht. Die nachfolgenden Beschreibungen der einzelnen Fälle beziehen sich immer auf die Unterschiede zu A0.

Das Ziel des ersten Schrittes ist es aufzuzeigen, dass die selben Strategien je nach

[3] Die Obergrenze ergibt sich aufgrund der Beschränkung der Anlagen in ausländische Werte.

Anlagestrategien für die Simulationen

Anlageklassen	Aktien	Obligationen	Immobilien	Liquidität
Strategie "ausgewogen"	30%	30%	30%	10%
Strategie "obligationenlastig"	17%	57%	17%	9%
Strategie "aktienlastig"	40%	17%	34%	9%
Strategie "Aktien"	80%	5%	5%	10%
Strategie "Obligationen"	5%	80%	5%	10%

Tabelle 11.5: Anlagestrategien für die Beispiele

Fall	**Beschreibung**
A0	Referenzfall, d.h. gleichbleibender aktiver Bestand und 100%-Deckung
A1	Erhöhung der Altersgutschriften und Sparbeiträge um 1.5%
A2	Abnahme des Versichertenbestandes im Zeithorizont um 50%
A3	Gleichbleibender aktiver Bestand bei 90%-Deckung (Unterdeckung)
A4	Zunahme um 50% an aktiven Versicherten bei 90%-Deckung
A5	Abnahme um 50% an aktiven Versicherten bei 90%-Deckung
A6	Beitragserhöhung um 7% (4.5% u. 1.5%) bei 90%-Deckung
A7	Beitragserhöhung um 7% bei 95%-Deckung
A8	Gleichbleibender aktiver Bestand bei 110%-Deckung (Überdeckung)
A9	Zunahme um 50% an aktiven Versicherten bei 110%-Deckung
A10	Verzinsung von 4% (Zusatzverzinsung) bei 110%-Deckung
A11	Senkung der Risikobeiträge auf 0% bei 110%-Deckung

Tabelle 11.6: Modifikationen der Ausgangssituation für Bestand A

Versichertenbestand unterschiedlich hohe Risiken beinhalten können. Im zweiten Schritt soll aufgezeigt werden, wie das Modell dazu beitragen kann, Auswirkungen von Entscheiden vergleichbar bzw. messbar zu machen.

11.2.2 Ergebnisse

Nachfolgend finden sich die Ergebnisse der Simulationen tabellarisch dargestellt. Im Anhang D sind dazu für einige ausgewählte Beispiele Histogramme abgebildet. Für den Fall A0 erhält man die nachstehenden Ergebnisse:

Fall A0						
Beschreibung	Referenzfall, d.h. gleichbleibender aktiver Bestand, 100%-Deckung					
Strategie	Erwartungswert	Standardabweichung	UPM_0	UPM_1	(in Mio.) UPM_2	VaR(5%)
aktienlastig	3'956'510	2'935'797	0.078745	59'632	82'874	496'152
obligationenl.	2'086'124	1'677'229	0.107364	63'970	71'239	583'293
ausgewogen	3'152'928	2'354'220	0.084160	56'865	70'601	501'073
Aktien	6'478'344	5'293'435	0.084823	99'913	212'091	985'657
Obligationen	1'104'715	1'246'123	0.201147	117'460	127'262	937'688

Zunächst fällt auf, dass gemessen am VaR(5%) für keine der Strategien eine ausreichende Risikofähigkeit besteht und rund CHF 500 Tausend Schwankungsreserve aufzubauen wären, d.h. rund 5% des Deckungskapitals. Weiter zeigt sich, dass am ehesten mit der Strategie aktienlastig eine Unterdeckung verhindert wird. Betrachtet man aber auch die Höhe der möglichen Unterdeckung, d.h. die UPM_1 und UPM_2 ist eher die ausgewogene Strategie vorzuziehen. Die beiden Extrem-Strategien weisen ein deutlich höheres Risiko auf, die Strategie Obligationen aufgrund unzureichender Erträge und die Strategie Aktien aufgrund hoher Schwankungen der Erträge.

Fall B						
Beschreibung	gleichbleibender Bestand mit vielen Rentnern, 100% Deckung					
Strategie	Erwartungswert	Standardabweichung	UPM_0	UPM_1	(in Mio.) UPM_2	VaR(5%)
aktienlastig	4'945'339	4'256'901	0.118231	149'280	327'677	1'447'811
obligationenl.	2'226'745	2'396'299	0.192061	183'292	315'255	1'503'345
ausgewogen	3'776'481	3'398'448	0.137109	151'216	296'641	1'426'401
Aktien	8'621'408	7'743'600	0.107023	209'185	690'409	2'193'304
Obligationen	804'644	1'747'588	0.354622	349'134	583'656	1'997'462

Die Ergebnisse für den Fall B zeigen deutlich, dass sich das Risiko bei einem Bestand mit vielen Rentnern erhöht. In diesem Fall fehlt für eine ausreichende

Risikofähigkeit eine Schwankungsreserve in Höhe von rund CHF 1.5 Millionen bzw. rund 9.4% des Deckungskapitals. Das steigende Risiko lässt sich plausibel erklären, da der hier angewendete technische Zinssatz zur Berechnung des Deckungskapitals 4% ist, die Verzinsung der Alterskapitalien aber nur 2.5% beträgt. Damit erhöht sich bei einem Bestand mit vielen Rentnern die zu erzielende Mindestrendite. Betrachtet man die Ergebnisse im Detail, ist hier im Hinblick auf die Vermeidung einer Unterdeckung eher eine aktienlastigere Strategie zu favorisieren. Diese beinhaltet hingegen höhere Risiken bezüglich der Höhe einer möglichen Unterdeckung. Allenfalls wären deshalb sogar sanierende Massnahmen zu bedenken.

Fall C						
Beschreibung	gleichbleibender Bestand, nur Aktive, 100% Deckung					
Strategie	Erwart-ungswert	Standard-abweichung	UPM_0	UPM_1	(in Mio.) UPM_2	VaR(5%)
aktienlastig	3'651'285	2'351'431	0.046958	24'830	25'819	-48'303
obligationenl.	2'163'693	1'366'742	0.054341	23'405	19'700	40'693
ausgewogen	3'012'563	1'895'356	0.050121	21'981	20'717	-43'509
Aktien	5'652'059	4'199'756	0.063429	51'217	82'311	305'795
Obligationen	1'381'089	1'035'852	0.097063	41'409	34'616	344'615

Bei einem nur aus aktiven Versicherten bestehenden Bestand ist das Risiko geringer als bei den vorigen Beispielen. Auch hier wieder ist das Ergebnis damit zu erklären, dass der Mindestzins unter der technischen Verzinsung liegt. In diesem Fall besteht eine ausreichende Risikofähigkeit für die Fälle aktienlastig und ausgewogen ($VaR(5\%) < 0$). Deutlich sind auch hier die Extrem-Strategien Aktien und Obligationen mit mehr Risiko verbunden.

Fall D						
Beschreibung	grosser gleichbleibender Bestand, 100% Deckung					
Strategie	Erwart-ungswert	Standard-abweichung	UPM_0	UPM_1	(in Mio.) UPM_2	VaR(5%)
aktienlastig	15'689'536	11'552'793	0.073319	215'665	1'093'560	1'700'042
obligationenl.	8'252'487	6'452'116	0.094653	208'724	820'738	1'814'225
ausgewogen	12'494'149	9'208'723	0.078541	197'549	877'796	1'645'452
Aktien	25'718'977	20'989'849	0.083650	391'096	3'132'232'	3'868'430
Obligationen	4'351'115	4'655'548	0.182307	379'978	1'423'758	3'116'791

Die Ergebnisse für Fall D mit mehr Versicherten aber gleicher Zusammensetzung wie der Bestand A zeigen, dass bei einem grossen Bestand die Risiken leicht tiefer sind. Dies ist plausibel, da bei zunehmender Versichertenzahl tendenziell eher geringere Abweichungen von den versicherungstechnischen Annahmen zu erwarten sind. Für eine ausreichende Risikofähigkeit fehlen hier nur rund CHF 1.7 Millionen Schwankungsreserve, d.h. ca. 4.1% des Deckungskapitals im Vergleich zu ca. 5% beim Bestand aus Fall A0.

Betrachtet werden nun die Ergebnisse für die verschiedenen Ausgangssituationen A0 bis A11, wobei jeweils vom Bestand A ausgegangen wird.

Fall A1						
Beschreibung	Erhöhung der Altersgutschriften und Sparbeiträge um 1.5%					
Strategie	Erwart-ungswert	Standard-abweichung	UPM_0	UPM_1	(in Mio.) UPM_2	VaR(5%)
aktienlastig	3'953'372	2'962'987	0.081604	63'938	90'812	543'563
obligationenl.	2'068'426	1'698'255	0.112230	70'172	80'547	629'855
ausgewogen	3'143'591	2'378'221	0.088756	61'613	78'607	546'208

Trotz der Erhöhung der Altersgutschriften und Sparbeiträge in gleichem Masse erhöht sich das Risiko leicht. Dies lässt sich damit erklären, dass durch das höhere Alterskapital auch die Risiko-Versicherungsleistungen (z.B. Invalidenleistungen) steigen, deren Steigerung nicht durch die höheren Sparbeiträge finanziert sind.

Fall A2						
Beschreibung	Abnahme des Versichertenbestandes im Zeithorizont um 50%					
Strategie	Erwart-ungswert	Standard-abweichung	UPM_0	UPM_1	(in Mio.) UPM_2	VaR(5%)
aktienlastig	3'452'058	2'612'734	0.081326	54'966	67'113	484'511
obligationenl.	1'788'121	1'479'877	0.113859	59'398	57'213	544'980
ausgewogen	2'736'420	2'088'183	0.089172	52'819	57'100	473'604
Aktien	5'704'983	4'758'494	0.088302	92'156	169'377	935'787
Obligationen	918'922	1'092'201	0.214150	110'977	104'879	871'524

Im Vergleich zum gleichbleibenden Bestand ist die Wahrscheinlichkeit einer Unterdeckung hier nur leicht höher. Zu bedenken ist aber, dass im Falle einer Unterdeckung, austretende Versicherte deren Austrittsleistung nicht gekürzt wird, den Deckungsgrad deutlich verschlechtern. Hingegen sind Austritte bei einer 100%-Deckung in Bezug auf den Deckungsgrad neutral. Betrachtet man den Value-at-Risk wird deutlich, dass obwohl 50% des Bestandes austreten, dieser kaum gesunken ist und damit die Deckungslücke bezogen auf einen verbleibenden Versicherten deutlich höher wäre.

Fall A3						
Beschreibung	Gleichbleibender aktiver Bestand bei 90%-Deckung (Unterdeckung)					
Strategie	Erwart-ungswert	Standard-abweichung	UPM_0	UPM_1	(in Mio.) UPM_2	VaR(5%)
aktienlastig	2'336'767	2'660'769	0.206791	210'824	371'122	1'711'180
obligationenl.	647'738	1'530'952	0.369712	323'986	475'932	1'793'443
ausgewogen	1'611'131	2'137'890	0.249637	237'073	382'040	1'717'566
Aktien	4'613'777	4'784'292	0.163617	220'810	548'642	2'150'044
Obligationen	-328'636	1'146'811	0.617334	584'970	871'869	2'123'917

Im Vergleich zum Fall der 100%-igen Deckung (A0) sind bei einer Unterdeckung die konservativen Strategien schlechter, um eine zukünftige Unterdeckung zu vermeiden, da sie nicht genügenden Ertrag bringen. Von den obigen Strategien ist die Strategie Aktien die, welche im Zeithorizont von 5 Jahren am ehesten wieder zu einer Deckung führt. Bei Durchführung dieser Strategie besteht die Chance von rund 84% die Unterdeckung auszugleichen, allerdings verbunden mit dem Risiko von rund 5% die Unterdeckung von anfangs etwa CHF 1.0 Millionen mehr als zu verdoppeln. In einer solchen Situation ist somit zwischen höheren Risiken oder einer Sanierung zu entscheiden. Bei der Option Risiko sollte aber zumindest die Bereitschaft bzw. Fähigkeit vorhanden sein eine allenfalls höhere Unterdeckung zu einem späteren Zeitpunkt sanieren zu können.

Fall A4						
Beschreibung	Zunahme um 50% an aktiven Versicherten bei 90%-Deckung					
Strategie	Erwart-ungswert	Standard-abweichung	UPM_0	UPM_1	(in Mio.) UPM_2	VaR(5%)
aktienlastig	2'828'540	2'970'048	0.181632	199'893	380'824	1'984'810
obligationenl.	952'016	1'715'899	0.316281	290'177	456'629	1'801'206
ausgewogen	2'023'166	2'391'617	0.215809	219'119	381'579	1'713'608
Aktien	5'348'457	5'294'282	0.146588	221'765	607'808	2'209'906
Obligationen	-36'817	1'286'153	0.544687	527'605	825'693	2'152'860

Bei einem wachsenden Bestand ist insgesamt gesehen das Risiko im Vergleich zum vorigen Fall tiefer, da die eintretenden Versicherten ihr Alterskapital einbringen, d.h. zu 100% gedeckt sind. Noch deutlicher wird dieser Effekt im Vergleich zu einem schrumpfenden Bestand (vgl. Fall A5). Zu beachten ist hier, dass der

Value-at-Risk zwar höher ist als im Fall A3, sich aber eine allfällige Unterdeckung hier auf einen um 50% grösseren Bestand verteilt. Der stabilisierende Effekt von Eintritten wird auch daraus deutlich, dass bei einem wachsenden Bestand die konservativen Strategien vergleichsweise besser abschneiden als bei einem gleichbleibenden (schrumpfenden).

Fall A5						
Beschreibung	Abnahme um 50% an aktiven Versicherten bei 90%-Deckung					
Strategie	Erwart-ungswert	Standard-abweichung	UPM_0	UPM_1	(in Mio.) UPM_2	VaR(5%)
aktienlastig	1'832'321	2'337'871	0.241570	226'728	362'669	1'689'490
obligationenl.	349'736	1'333'451	0.437606	363'441	490'570	1'762'901
ausgewogen	1'194'618	1'871'871	0.293700	259'326	381'619	1'671'865
Aktien	3'840'420	4'249'953	0.186963	227'161	500'589	2'072'633
Obligationen	-424'428	992'645	0.699387	645'284	899'956	2'047'497

Wie in den vorigen Abschnitten zu den Fällen A2 bis A4 schon ausgeführt, ist bei einem schrumpfenden Bestand die Wahrscheinlichkeit einer verbleibenden Unterdeckung höher. Zudem wiegt dieselbe nominelle Unterdeckung schwerer, da sie sich auf weniger Versicherte verteilt (der VaR ist absolut gesehen fast gleich hoch wie in den genannten vorigen Fällen).

Fall A6-1						
Beschreibung	Beitragserhöhung um 1.5% bei 90%-Deckung					
Strategie	Erwart-ungswert	Standard-abweichung	UPM_0	UPM_1	(in Mio.) UPM_2	VaR(5%)
aktienlastig	2'647'156	2'681'351	0.170846	162'247	268'443	1'432'621
obligationenl.	944'145	1'542'435	0.297822	234'881	320'974	1'522'740

Fall A6-2						
Beschreibung	Beitragserhöhung um 4.5% bei 90%-Deckung					
Strategie	Erwart-ungswert	Standard-abweichung	UPM_0	UPM_1	(in Mio.) UPM_2	VaR(5%)
aktienlastig	3'267'935	2'722'981	0.109089	90'866	133'018	883'630
obligationenl.	1'536'965	1'565'759	0.172157	113'346	134'860	969'681

Fall A6-3						
Beschreibung	Beitragserhöhung um 7.5% bei 90%-Deckung					
Strategie	Erwart-ungswert	Standard-abweichung	UPM_0	UPM_1	(in Mio.) UPM_2	VaR(5%)
aktienlastig	3'785'252	2'758'083	0.074104	52'811	69'414	404'621
obligationenl.	2'030'978	1'585'442	0.099727	56'662	59'820	509'499
ausgewogen	3'031'821	2'216'082	0.079746	50'627	59'203	406'312
Aktien	6'147'228	4'951'171	0.082500	91'239	180'390	878'013
Obligationen	1'109'142	1'186'216	0.186915	102'865	106'001	829'431

Werden die Beiträge um 1.5% erhöht, sinkt das Risiko. Insgesamt ist aber die leichte Beitragserhöhung gemessen am VaR(5%) keine ausreichende Sanierungsmassnahme. Bei einer Erhöhung der Beiträge um 4.5% ist das Risiko deutlich tiefer, aber auch diese Massnahme ist nicht ausreichend als Sanierungsmassnahme, da im Zeithorizont nicht mit angemessener Sicherheit eine 100%-Deckung erreicht wird. Selbst bei einer deutlichen Beitragserhöhung bleibt das Restrisiko einer Unterdeckung noch recht hoch. Deutlich wird, dass kombiniert mit einer Beitragserhöhung die Strategie Aktien nicht mehr die ist, mit welcher am ehesten der Deckungszustand erreicht wird, sondern die weniger aggressiven Strategien aktienlastig und ausgewogen, mit entsprechend weniger Risiko die bestehende Unterdeckung zu vergrössern.

Fall A7						
Beschreibung	Beitragserhöhung um 7% bei 95%-Deckung					
Strategie	Erwart-ungswert	Standard-abweichung	UPM_0	UPM_1	(in Mio.) UPM_2	VaR(5%)
aktienlastig	4'595'122	2'895'458	0.041057	24'211	27'845	-184'610
obligationenl.	2'750'170	1'658'537	0.043294	20'394	18'115	-102'960
ausgewogen	3'802'720	2'324'160	0.039272	20'452	20'785	-197'278
Aktien	7'079'506	5'205'505	0.060135	57'261	104'664	290'735
Obligationen	1'780'818	1'235'899	0.077017	35'137	31'658	239'011

Ausgehend von einer weniger hohen Unterdeckung, wie in diesem Fall, ist mit einer deutlichen Beitragserhöhung eine wirkliche Sanierung zu erzielen. Eine Sanierung einer deutlichen Unterdeckung ist offensichtlich nur durch Inkaufnahme hoher Risiken, allein durch Anlageerfolge zu erzielen. Durch die Kombination einer Beitragserhöhung und einer ausgewogenen Strategie ist das Ziel mittelfristig eher zu erreichen.

Fall A8						
Beschreibung	Gleichbleibender aktiver Bestand bei 110%-Deckung (Überdeckung)					
Strategie	Erwart-ungswert	Standard-abweichung	UPM_0	UPM_1	(in Mio.) UPM_2	VaR(5%)
aktienlastig	5'576'249	3'211'624	0.023834	12'407	13'356	-710'251
obligationenl.	3'524'508	1'824'792	0.020388	7'750	6'053	-626'096
ausgewogen	4'694'723	2'571'526	0.020018	9'219	8'586	-719'023
Aktien	8'342'906	5'802'964	0.045452	41'263	74'490	-158'133
Obligationen	2'448'066	1'347'062	0.032816	13'530	11'214	-245'710

In diesem Fall einer Überdeckung (zu Beginn in Höhe von CHF 1.0 Million) besteht für alle Strategien eine ausreichende Risikofähigkeit. Besteht das Ziel darin hohe Überschüsse zu erzielen, kann hier eine risikoreichere Strategie sinnvoll sein. Eine Alternative wäre die Sicherung des bestehenden Überschusses durch eine eher konservative Strategie, z.B. im Hinblick auf eine bevorstehende Teilliquidation, oder die Verteilung der nicht benötigten freien Mittel.

Fall A9						
Beschreibung	Zunahme um 50% an aktiven Versicherten bei 110%-Deckung					
Strategie	Erwart-ungswert	Standard-abweichung	UPM_0	UPM_1	(in Mio.) UPM_2	VaR(5%)
aktienlastig	6'068'017	3'518'629	0.026020	15'336	19'096	-699'125
obligationenl.	3'828'786	2'008'941	0.022533	10'150	8'810	-623'296
ausgewogen	5'106'765	2'823'590	0.022507	11'525	12'276	-716'821
Aktien	9'077'578	6'308'880	0.046694	48'448	102'354	-113'393
Obligationen	2'649'885	1'486'429	0.035246	16'750	15'631	-214'490

Wächst der Bestand ausgehend von einer Situation der Überdeckung, hat dies eine Risikoerhöhung zur Folge, da die eintretenden Versicherten (die zu 100% gedeckt sind) den Überschuss verwässern.

Fall A10						
Beschreibung	Verzinsung von 4% (Zusatzverzinsung) bei 110%-Deckung					
Strategie	Erwart-ungswert	Standard-abweichung	UPM_0	UPM_1	(in Mio.) UPM_2	VaR(5%)
aktienlastig	5'048'317	3'212'375	0.042699	27'250	33'497	-175'514
obligationenl.	2'996'332	1'825'608	0.043121	22'250	21'014	-98'520
ausgewogen	4'166'693	2'572'226	0.039653	17'718	24'574	-185'344
Aktien	7'815'274	5'803'875	0.061923	63'891	129'516	379'653
Obligationen	1'919'752	1'347'811	0.077500	38'360	36'796	285'446

Als Möglichkeit der Verteilung von freien Mitteln wird oft eine Zusatzverzinsung gewährt. Das obige Beispiel zeigt, dass bei einer Wahl einer mittleren Strategie eine Verzinsung von 4% mit tragbaren Risiko möglich ist.

Fall A11						
Beschreibung	Senkung der Risikobeiträge auf 0% bei 110%-Deckung					
Strategie	Erwart-ungswert	Standard-abweichung	UPM_0	UPM_1	(in Mio.) UPM_2	VaR(5%)
aktienlastig	4’852’010	3’163’884	0.047378	31’329	38’899	-67’986
obligationenl.	2’832’887	1’798’385	0.052020	26’661	25’864	26’845
ausgewogen	3’984’381	2’533’273	0.046696	26’784	29’312	-64’807
Aktien	7’576’183	5’720’902	0.065731	69’672	139’572	478’423
Obligationen	1’774’177	1’327’974	0.092626	46’930	45’442	389’890

Als eine andere Alternative zur Verteilung von freien Mitteln besteht die Möglichkeit, die Beiträge zu senken. Auch dies ist bei der Wahl der aktienlastigen oder ausgewogenen Strategie eine tragbare Möglichkeit für das obige Beispiel.

11.2.3 Zusammenfassung

Aus den obigen Beispielen lassen sich die folgenden generellen Aussagen ableiten: Die extremen Strategien Aktien und Obligationen sind bei Deckungsgraden um 100% als eher risikoreich einzuschätzen. Die sehr konservativen Strategien mit hohen Obligationenanteil erbringen nicht genügenden Ertrag und die Strategien mit hohen Aktienanteil bringen hohe Schwankungen mit sich. Dies entspricht der gängigen Erwartung und weist somit darauf hin, dass mit dem vorliegenden Modell konsistente Resultate erzielt werden. In den meisten der betrachteten Fällen ist die ausgewogene Strategie am wenigsten risikoreich, wobei die Unterschiede zwischen den verschiedenen Beständen bzw. Ausgangssituationen deutlich höher sind als die Unterschiede zwischen den mittleren Strategien aktienlastig, obligationenlastig und ausgewogen. Grundsätzlich ist aber bei allen Fällen ein mittlerer bis grösserer Aktienbestand in bezug auf das Risiko eher vorteilhaft. Bei langfristigen Zeithorizonten erscheint dies sinnvoll.

Wie erwähnt bestehen vor allem deutliche Unterschiede zwischen den verschiedenen Beständen: Für den Referenzfall A0 besteht für keine Strategie eine ausreichende Risikofähigkeit und eine Schwankungsreserve von rund 5% des Deckungskapitals wäre aufzubauen. Bei der nur aus Aktiven bestehenden Kasse ist hingegen selbst bei einem Deckungsgrad von anfänglich 100% für alle mittleren Strategien (d.h. ausser Strategie Aktien oder Obligationen) eine ausreichende Risikofähigkeit gegeben. Für grössere Bestände nehmen die Risiken tendenziell ab, wobei der Effekt bei den Beispielen nur relativ schwach ist. Besteht ein Bestand aus vielen Rentnern ist hingegen, aufgrund des im Vergleich zum Mindestzinssatz höheren technischen Zinses, das Risiko einer Unterdeckung deutlich höher und eine Schwankungsreserve von rund 9.5% des Deckungskapitals wäre aufzubauen. Im letzten Fall besteht zudem ein nur geringer Handlungsspielraum bei Sanierungen, da Rentenkürzungen eher unpopulär sind und damit die aktiven Versicherten bzw. der Arbeitgeber ein Grossteil der Sanierung tragen müssen. Zusammenfassend lässt sich damit sagen, dass bei der Wahl der Anlagestrategie der Versichertenbestand wesentliche Auswirkungen auf die Höhe des Risikos einer Unterdeckung hat. Diese Unterschiede lassen sich durch das vorliegende Modell systematisch quantifizieren.

Betrachtet man die Beispiele, bei denen von unterschiedlichen Ausgangssituationen ausgegangen wird, zeigt sich, dass diese einen wesentlichen Einfluss auf die Risikosituation haben. Diese Effekte von unterschiedlichen anfänglichen Deckungsgraden sowie von Parameter-und Bestandesänderung lassen sich durch das Modell quantifizieren. Deutlich wird in den Beispielen, dass eine Sanierung einer Pensionskasse allein durch eine Anlagestrategie, die höhere Erträge verspricht, mit hohen Risiken verbunden ist. Bei Sanierungen durch Beitragserhöhungen sind wiederum die mittleren Strategien vorzuziehen. Bei den Beispielen mit einer anfänglichen Deckung von 110% besteht hingegen auch eine ausreichende Risikofähigkeit für Strategien mit hohen Aktienanteil (aktienlastig und Aktien), welche dann allenfalls interessant sein könnten zur Erzielung von höheren Überschüssen. Desweiteren lassen sich mit dem Modell auch andere Alternativen, wie z.B. Zusatzverzinsungen oder Beitragsreduktionen auf ihre Auswirkungen bzw. Tragbarkeit hin analysieren.

Schlussbemerkung

Schlussbemerkung

Die erste Zielsetzung der vorliegenden Arbeit war die Entwicklung eines Ansatzes für das Asset-Liability Management von Pensionskassen, welcher die gemeinhin an ALM-Methoden gestellten Anforderungen in erweitertem Masse umsetzt, als dies bei den meisten in der Praxis verwendeten Ansätzen der Fall ist. Aufgrund des Praxisbezuges war ein zweites Ziel, neben der Entwicklung des Ansatzes, dessen konkrete Umsetzung anhand des Anwendungsfalls einer schweizerischen Pensionskasse mit einen BVG-Minimalplan aufzuzeigen. Ein erhöhter Bedarf an solchen breiter fundierten ALM-Methoden ist nicht zuletzt auch aus der Häufung von Unterdeckungen entstanden, welche als Folge der negativen Börsenjahre 2000-2002 aufgetreten sind. Ein weiteres Ziel war, durch den ausführlichen Beschrieb des Modells, zu einer Erhöhung der Transparenz bezüglich anwendbarer ALM-Methoden im Bereich der zweiten Säule beizutragen, die nach wie vor eher gering ist.

Inwieweit wurden diese Zielsetzungen erreicht? Das entwickelte Modell ermöglicht in einer gesamtheitlichen Betrachtung der Aktiv- und Passivseite eine Einschätzung der Risikofähigkeit einer Pensionskasse, d.h. der Beurteilung der Anlagestrategie bezüglich der Sicherheit der Einbringung der Vorsorgeleistungen. Darüber hinaus lassen sich die Auswirkungen von Änderungen der wesentlichen Steuerungsgrössen wie Beiträge, Leistungen und der Anlagestrategie untersuchen. Damit sind die zentralen Zielsetzungen von ALM-Methoden abgedeckt. Bei der Modellierung werden die Vorgaben des kassenindividuellen Vorsorgeplans und die Zusammensetzung des Versichertenbestandes berücksichtigt. Ebenso finden die Inflation und die Lohnentwicklung Eingang in die Modellierung. Veränderungen des Versichertenbestandes, welche sich aus der Personalplanung des Arbeitgebers ergeben, lassen sich im Modell ebenfalls abbilden. Zur Modellierung der Risikofaktoren, insbesondere der Anlageklassenrenditen, werden aktuelle Finanzmarktmodelle herangezogen. Das Modell wurde hier auf einen Zeithorizont von fünf Jahren angewendet, dies lässt sich aber grundsätzlich auf beliebig lange Zeithorizonte ausdehnen. Zusammenfassend lässt sich somit festhalten, dass die wesentlichen Anforderungen an moderne ALM -Methoden umgesetzt wurden. Darüber hinaus folgt aus den Beispielen für die BVG-Minimalkasse, dass die mit dem Modell erhaltenen Ergebnisse, grundsätzlich mit den Erwartungen konsistent sind und leicht plausibel erklärt werden können. Dies lässt sich als Hinweis auf die Validität des Modells interpretieren.

Betrachtet man die nur mässige Übereinstimmung der historischen Daten mit den angenommen theoretischen Modellen für die Anlageklassenrenditen, Inflation und Lohnentwicklung in Kapitel 10, werden aber auch die Einschränkungen des Modells deutlich. Ähnliches lässt sich zwar für die meisten in der Praxis verwendeten Modelle feststellen,[4] insgesamt verbleiben aber mehr oder minder hohe Modellrisiken. Als grundsätzliche Kritik kann desweiteren angeführt werden, dass eine Prognose von zukünftigen Entwicklungen aufgrund von historischen Daten generell problematisch ist, da nicht grundsätzlich davon ausgegangen werden kann, dass sich die in der Vergangenheit beobachteten Phänomene wiederholen, wobei dies vor allem für Systeme gilt, die einem ständigem Wandel der Anfangs-und Randbedingungen unterworfen sind.

Müssen hingegen Entscheidungen getroffen werden, stellen Modelle wie das hier entwickelte, trotz aller Einschränkungen dennoch wertvolle Entscheidungshilfen dar, da damit vorhandene Informationen systematisch und nachvollziehbar zusammengefasst und ausgewertet werden können. So umschreibt Kneschaurek den Anspruch langfristiger Aussagen über die Zukunft als ,,gedankliche Auseinandersetzung mit möglichen zukünftigen Situationen und Entwicklungen, vor allem mit Blick auf ihre wirtschaftlichen und gesellschaftlichen Konsequenzen. Entscheidend ist vor allem das Erkennen möglicher zukünftiger Problemfelder, um rechtzeitig

[4] Wie z.B. bei Modellen, die bei Banken zur Bestimmung der Eigenmittelunterlegung angewendet werden.

Strategien zu deren Überwindung bzw. zur Wahrung der Chancen zu entwickeln" (vgl. Kneschaurek [52], S. 278).

Für die Zukunft kann wohl davon ausgegangen werden, dass mit den rasant wachsenden Möglichkeiten in der Informatik, Simulationsmethoden zunehmend an Gewicht gewinnen werden. Auch stehen immer mehr Daten für entsprechende Auswertungen zur Verfügung. Da sich die zweite Säule nach wie vor im Aufbau befindet, wird auch das im System der beruflichen Vorsorge gebundene Kapital weiter steigen, was den Bedarf an modernen Risikomanagement-Methoden voraussichtlich weiter erhöhen wird. Daraus ergibt sich auch ein entsprechender weiterer Forschungsbedarf bei der Verfeinerung der Methoden.

Anhänge und Verzeichnisse

Anhang A

Gesetze und Verordnungen zur beruflichen Vorsorge

Bundesverfassung der Schweizerischen Eidgenossenschaft (BV) vom 18. April 1999: Art. 111, 112 und 113.

Schweizerisches Obligationenrecht (OR) vom 30. März 1911: Art. 331 und 331a-e.

Schweizerisches Zivilgesetzbuch (ZGB) vom 10. Dezember 1907: Art. 122-124, 141 und 142.

Bundesgesetz über die berufliche Alters-, Hinterlassenen- und Invalidenvorsorge (BVG) vom 25. Juni 1982.

Verordnung über die Beaufsichtigung und die Registrierung der Vorsorgeeinrichtungen (BVV 1) vom 29. Juni 1983.

Verordnung über die berufliche Alters-, Hinterlassenen- und Invalidenvorsorge (BVV 2) vom 18. April 1984.

Verordnung über die steuerliche Abzugsberechtigung für Beiträge an anerkannte Vorsorgeformen (BVV 3) vom 13. November 1985.

Verordnung über die obligatorische berufliche Vorsorge von arbeitslosen Personen (VO BVG/AVIG) vom 3. März 1997.

Verordnung über den Sicherheitsfonds BVG (SFV) vom 22. Juni 1998.

Bundesgesetz über die Freizügigkeit in der beruflichen Alters-, Hinterbliebenen- und Invalidenvorsorge (FZG) vom 17. Dezember 1993.

Verordnung über die Freizügigkeit in der beruflichen Hinterbliebenen- und Invalidenvorsorge (FZV) vom 3. Oktober 1994.

Verordnung über die Wohneigentumsförderung mit Mitteln der beruflichen Vorsorge (WEFV) vom 3. Oktober 1994.

Anhang B

Beispiele zur Operationalisierung von Vorsorgeplänen

Da wie in den Abschnitten 6.4.2 bis 6.4.4 ausgeführt eine grosse Vielfalt an Vorsorgeplänen besteht, ist es nicht möglich einen allgemein gültigen Fall für die Operationalisierung eines Vorsorgeplanes zu beschreiben. Deshalb wird die Operationalisierung und Berechnung der Höhe von Leistungen und Beiträgen im Modell anhand von drei Beispielen veranschaulicht:

- Beispielplan A: Vorsorgeplan einer BVG-Minimal Kasse.
- Beispielplan B: Vorsorgeplan einer Pensionskasse eines schweizerischen mittelgrossen Industrieunternehmen, welcher die Altersvorsorge nach dem Beitragsprimat und die Risikovorsorge nach dem Leistungsprimat vorsieht (Mischplan).
- Beispielplan C: Vorsorgeplan einer Pensionskasse einer kleineren schweizerischen Bank nach dem Leistungsprimat.

Der Beispielplan A wurde in Abschnitt 9 dargestellt. Auf die Pläne B und C wird in diesem Anhang eingegangen.

Bei der Operationalisierung geht es um die Berechnung der Höhe dem Modellgrössen der Vermögensveränderung $VE_t^{i,j}$, der Austrittsleistung $AL_t^{i,j}$ und des

Deckungskapitals $D_T^{i,j}$ der einzelnen Versicherten. Die folgenden Ausführung beziehen sich dabei immer auf einen Versicherten, weshalb der Index ^{i,j} aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht mit geführt wird.

B.1 Beispiel für einen Mischplan

B.1.1 Versicherter Lohn und Alterskapital

Versicherter Lohn

Die Modellierung des versicherten Lohnes erfolgt wie in Abschnitt 6.4.2 beschrieben, wobei in diesem Beispiel-Vorsorgeplan im besonderen folgende Vorgaben gelten:

Maximaler massgeblicher Lohn M_0
Das Maximum wird durch den Stiftungsrat im Einvernehmen mit der Firma festgelegt
Koordinationsabzug
40% des massgeblichen Lohns, höchstens die maximale AHV-Rente

Wird angenommen, dass sich die Anpassung des Lohnmaximums für den Beispielplan ebenfalls durch die Anpassung an den Mischindex beschreiben lässt (vgl. Abschnitt 9.2.1), berechnet sich der versicherte Lohn zum Zeitpunkt t wie folgt:

$$L_t = \begin{cases} \min\{ML_t - K_t^*; M_t - K_t^*\} & \text{falls } M_t \geq K_t^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

mit $K_t^* = \min\{0.4L_t; K_t\}$. Die Abbildung des versicherten Lohnes folgt sonst der Beschreibung in den Abschnitten 9.2.1 und 6.4.2.

Alterskapital

Das Alterskapital setzt sich beim Beispielplan wie folgt zusammen:

Zusammensetzung
Besteht aus der eingebrachten Freizügigkeitsleistung zzgl. Zins, den jährlichen Spargutschriften zzgl. Zins (Spargutschriften des laufenden Jahres unverzinst) und allfälligen freiwilligen Einkäufen zzgl. Zins.
Jährliche Spargutschriften in Prozent des versicherten Lohns
Alter 25-29 (10%), 30-34 (12%), 35-39 (14%), 40-44 (15%), 45-49 (17%), 50-54 (19%), 55-62 (21%), 63-65 (18%).
Verzinsung des Alterskapitals
BVG-Mindestzins zzgl. einer Zusatzverzinsung je nach Ertragslage
Einmaleinlagen und Einkäufe
Einkäufe bis zur vollen reglementarischen Leistung sind möglich. Freizügigkeitsleistungen müssen bei Eintritt eingebracht werden.

Zur Abbildung dieser Vorgaben werden zunächst Vereinfachungen bei der Betrachtung der Einkäufe und der Zusatzverzinsung festgelegt: Die Einkäufe werden aus den in Abschnitt 9.1 genannten Gründen nur über Durchschnittswerte berücksichtigt. Dazu werden Erfahrungswerte der Pensionskasse hinzugezogen, über welche die durchschnittliche Höhe der Einkäufe $e(a_t, g)$ in Prozent vom versicherten Lohn und in Abhängigkeit vom Alter (oder Altersklasse) und Geschlecht ermittelt werden. Das Alterskapital des Versicherten wird dann jede Periode um die durchschnittliche Höhe eines Einkaufes

$$E_t = e(a_{t-1}, g)\ L_{t-1}$$

erhöht.

Die minimale Verzinsung des Alterskapitals ist vom Gesetz vorgegeben. Oft wird aber wie in diesem Beispielplan eine Zusatzverzinsung im Rahmen der finanziellen Möglichkeiten der Kasse vorgesehen. Die Zusatzverzinsung stellt eine zentrale Kompetenz und wichtige Steuerungsgrösse für den Stiftungsrat dar und richtet sich hier nach der Ertragslage. Deshalb wird davon ausgegangen, dass die Zusatzverzinsung als Regel in Abhängigkeit der kumulierten Performance bei der Vermögensanlage formuliert werden kann. Eine solche Regel für die Zusatzverzinsung zz_t könnte beispielsweise wie folgt aussehen:

$$zz_t = z_t - 1.025 \qquad \text{mit} \qquad z_t = max\left\{\frac{0.99^t \ e^{r^p_{0,t}}}{\prod_{i=1}^{t-1} \ z_i}; 1.025\right\}$$

Die jährliche Verzinsung des Alterskapitals richtet sich bei dieser Regel nach der kumulierten Vermögensrendite abzüglich einer Marge, wobei aber mindestens zu den gesetzlich vorgeschriebenen 2.5 Prozent verzinst wird.

Das Alterskapital lässt sich dann im wesentlichen wie in Abschnitt 9.2.2 beschrieben abbilden, mit zusätzlicher Berücksichtigung der Einkäufe und der Zusatzverzinsung:

für $t_2 \leq t_r + 1$

$$\begin{aligned} AK_t &= f(\mathbf{t}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t) \\ &= AK_{t-1} \cdot z_t + (SG_t + E_t) \\ &= AK_0 \prod_{i=1}^{t} z_i + \sum_{i=1}^{t} (SG_i + E_i) \frac{1}{z_i} \prod_{j=i}^{t} z_j \end{aligned}$$

für $t_2 > t_r + 1$

$$AK_t = AK_0 \prod_{i=1}^{t} z_i + \sum_{i=1}^{t_r} (SG_i + E_i) \frac{1}{z_i} \prod_{j=i}^{t} z_j$$

Die Bestimmung des Deckungskapitals D_T für eine Aktiven und der Austrittsleistungen AL_t erfolgt analog zur Beschreibung in Kapitel 9.2.2.

B.1.2 Leistungen und Beiträge

Altersleistungen

Folgende Altersleistungen sind im Beispiel-Vorsorgeplan B vorgesehen:

Altersrenten
Jährliche Rente in Höhe von $u(r)$% des Alterskapitals, wobei Rücktritte im Alter zwischen 58 und 70 möglich sind. Die Umwandlungssätze $u(a_{t_2})$% bei Rücktritt im Alter r betragen:[1] Alter 58 (6.48%), 59 (6.66%), 60 (6.84%), 61 (7.02%), 62-65 (7.20%), 66 (7.34%), 67 (7.48%), 68 (7.62%), 69 (7.76%), 70 (7.90%). Rücktritte sind auch als Teilaltersrücktritt oder gleitend möglich.
Kapitaloption
Nach Wahl ist bis zu 100% des Alterskapitals als Kapital beziehbar.
Pensionierten-Kinderrente (für Kinder mit Anspruch auf Waisenrente)
Pro Kind 20% der Altersrente
Anpassung der Renten an die Preisentwicklung
Anpassung der Altersrenten nach den finanziellen Möglichkeiten.
AHV-Überbrückungsrenten (bei vorzeitiger Pensionierung)
Zusatzrente in der Höhe der mutmasslichen AHV-Rente ab Alter 62 bis zum Beginn der ordentlichen AHV-Rente.

Die Kinderrenten werden wie in Abschnitt 9.3.1 nur über die im Durchschnitt zu diesem Zeitpunkt zu erwartende Anzahl anspruchsberechtigter Kinder berücksichtigt, wobei wieder von einer Anspruchsberechtigung aller Kinder bis zum Alter 25 ausgegangen wird. Für die AHV-Überbrückungsrente wird für das für das Modell immer von der maximalen AHV-Rente (entspricht Koordinationsabzug) ausgegangen. Die Abbildung der möglichen Teilaltersrücktritte erfolgt entsprechend zu dem Vorgehen bei den Übergangswahrscheinlichkeiten (vgl. Abschnitt 10.2), d.h. durch die anteilige Berücksichtigung der Teilaltersrücktritte in den Pensionierungswahrscheinlichkeiten $r_{x/y}$. Die Anpassung der Renten wird für das im Modell durch eine Anpassung in Höhe der Zusatzverzinsung abgebildet. Die

[1] vor Anpassung aufgrund BVG-Revision.

auch bei Wahl der Kapitaloption fällige AHV-Überbrückungsrente wird zur Vereinfachung als Einmalauszahlung modelliert, wobei auf die Berechnung eines Barwertes für diese Zahlungen verzichtet wird.

Die Altersrente zum Zeitpunkt t bei Rücktritt im Zeitpunkt $t_2 \leq t$ ergibt sich damit im Modell für $t_2 > 0$ über

$$AR_t = u(a_{t_2-1})\ AK_{t_2-1}\ \frac{1}{1+zz_t} \prod_{i=t_2}^{t} (1+zz_i) \quad .$$

Ist der Versicherte schon zu Beginn der Betrachtung pensioniert, d.h. $t_2 = 0$, ergibt sich die Altersrente zum Zeitpunkt t aus der zum Zeitpunkt 0 gegebenen Rente AR_0 über

$$AR_t = AR_0\ \frac{1}{1+zz_t} \prod_{i=1}^{t} (1+zz_i) \quad .$$

Die Pensionierten-Kinderrente ergibt sich über

$$AKR_t = k_z(a_{t-1})\ 20\%\ AR_t$$

und die AHV-Überbrückungsrente erhält man mit den obigen Vereinfachungen aus

$$K_t \quad \text{falls } 62 < a_t \leq 65\ (64) \text{ Männer (Frauen)}$$

Damit lässt sich für die Vermögensveränderung $VE_t = f(\mathbf{t}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t)$ schreiben

$$VE_t = \begin{cases} -\ (AR_t + AKR_t + K_t) & \text{für} \max(t_2; 1) \leq t < t_3 \text{ und } 62 < a_t \leq 65\ (64) \\ -\ (AR_t + AKR_t) & \text{für} \max(t_2; 1) \leq t < t_3 \text{ und } a_t > 65\ (64) \\ -\ (AK_{t_5-1} + 3K_t) & \text{für } t = t_5 \leq T \text{ und } 58 < a_t \leq 63\ (-) \\ -\ (AK_{t_5-1} + 2K_t) & \text{für } t = t_5 \leq T \text{ und } a_t = 64\ (58 < a_t \leq 63) \\ -\ (AK_{t_5-1} + K_t) & \text{für } t = t_5 \leq T \text{ und } a_t = 65\ (64); \\ -\ AK_{t_5-1} & \text{für } t = t_5 \leq T \text{ und } a_t > 65\ (64); \end{cases}$$

Die Berechnung des Deckungskapitals für einen Pensionierten folgt aus der Darstellung in Kapitel 9.3.1.

Hinterbliebenenleistungen

Die Hinterbliebenenleistung sind im Beispiel-Plan B wie folgt geregelt:

Witwen- und Witwerrenten
Jährliche lebenslange Rente in Höhe von 40% des versicherten Lohns bis der Ehegatte 63 geworden wäre, ab dann 2/3 der Altersrente basierend auf dem angepassten Altersguthaben für Witwen/-erleistungen, bzw. 2/3 der laufenden Altersrente. Anspruch besteht falls Kinder zu unterhalten sind, oder die Witwe bzw. der Witwer 40 Jahre oder älter ist und mindestens 3 Jahre verheiratet war. Ist der Altersunterschied grösser als 10 Jahre wird für jedes Jahr welches über 10 Jahre hinaus geht, die Rente um 1.5% gekürzt.
Angepasstes Alterskapital bei Witwenleistungen
Ab der Periode, in welcher der Versicherte das Alter 63 erreicht hätte, werden die Witwenleistungen aufgrund eines angepassten Alterskapitals bestimmt, das dem Alterskapital entspricht, welches der Ehegatte bis zum Alter 63 geäufnet hätte.
Abfindung statt Witwen/-errenten
Sofern keine dieser Voraussetzungen erfüllt werden, hat die Witwe(r) Anspruch auf eine einmalige Abfindung in Höhe von drei Jahresrenten.
Lebenspartnerrenten
Wie Witwen(r)rente; Anspruch besteht bei einer Partnerschaft länger als 5 Jahren und gegenseitiger Unterstützung.
Waisenrenten
Pro Kind 20% der vollen Invaliden- bzw. der laufenden Altersrente Für Vollwaisen wird die Rente verdoppelt. Anspruch besteht bis zum Alter 20, für Kinder in Ausbildung oder 2/3 Invalidität bis 25.
Kapitalleistungen anstelle Ehegattenrente
Kann in Spezialfällen in Höhe des Sparkapitals genehmigt werden
Todesfallkapital
Besteht kein Anspruch auf Ehegattenrente bzw. Lebenspartnerrente, wird beim Tod eines aktiven Versicherten ein Todesfallkapital in Höhe vom Sparguthaben an die Erben ausgezahlt.
Anpassung an die Preisentwicklung
Wie bei Altersleistungen

Zur Abbildung der Leistungen werden die folgenden Vereinfachungen vorgenommen. Diese entsprechend weitgehendst denen beim BVG-Plan (vgl. Abschnitt 9.3.2): Es wird davon ausgegangen, dass die Witwen(r) immer die Voraussetzungen für eine Witwenrente erfüllen. Damit ist die die Betrachtung von Abfindungen hinfällig. Der Altersunterschied der Ehegatten wird über den durchschnittlichen Altersunterschied im Todesalter gemäss den Rechnungsgrundlagen abgebildet. Desweiteren werden, da der durchschnittliche Altersunterschied nie grösser als 10 Jahre ist, keine Kürzung oder Herabsetzungen der Rente aufgrund des Altersunterschied betrachtet. Da die Höhe der Lebenspartnerrenten den Witwen/errenten entspricht, wird dies durch einen Aufschlag in den Übergangswahrscheinlichkeiten berücksichtigt. Ebenso wird der Wegfall der Anspruchsberechtigung bei Wiederverheiratung wird über die Übergangswahrscheinlichkeiten abgebildet. Kapitalleistungen anstelle von Ehegattenrenten werden vereinfachend nicht betrachtet. Für die Waisenrenten gelten die selben Annahmen wie oben für die Kinderrenten. Weiter wird davon ausgegangen, dass rund 10% der Waisen Vollwaisen sind, weshalb die Waisenrenten pauschal um 10% erhöht werden. Für die Todesfallkapitalien wird vereinfachend davon ausgegangen, dass bei Tod ohne Witwe die Todesfallkapitalien grundsätzlich fällig werden und bei Tod mit Witwe grundsätzlich keine Todesfallkapitalien fällig werden.

Das angepasste Alterskapital ergibt sich bei eingetretener Deaktivierung zum Zeitpunkt $t_1 \leq t_r$ mit $t_r = 63 - a_0$ über

$$
\begin{aligned}
AK^*_{t_1} &= \\
&= AK_0 \prod_{i=1}^{t_r} z_i \; + \sum_{i=1}^{t_1-1} (SG_i + E_i) \, \frac{1}{z_i} \prod_{j=i}^{t_r} z_j \; + \sum_{i=t_1}^{t_r} SG^*_i \, \frac{1}{z_i} \prod_{j=i}^{t_r} z_j \qquad \text{falls } t_1 > 1 \\
&= AK_0 \prod_{i=1}^{t_r} z_i \; + \sum_{i=t_1}^{t_r} SG^*_i \, \frac{1}{z_i} \prod_{j=i}^{t_r} z_j \qquad \text{falls } t_1 = 1
\end{aligned}
$$

mit

$$SG^*_t = sg(a_{t-1}) \cdot L_{t_1-1}$$

Damit erhält man die Witwen(r)rente zum Zeitpunkt t bei Tod des Versicherten im Zeitpunkt $t_3 \leq t$ für $t_3 > 0$ über

$$
\begin{aligned}
WR_t &= \begin{cases} 40\%\ L_{t_1-1}\ \frac{1}{1+zz_t} \prod_{i=t_1}^{t}\ (1+zz_i) & \text{für } t \leq t_r \text{ und } t_2 = t_3 \\ \frac{2}{3}\ 7.2\%\ AK_{t_1}^{*}\ \frac{1}{1+zz_t} \prod_{i=t_r+1}^{t}\ (1+zz_i) & \text{für } t > t_r \geq t_1 \text{ und } t_2 = t_3 \\ \frac{2}{3}\ AR_{t_3}\ \frac{1}{1+zz_t} \prod_{i=t_3}^{t}\ (1+zz_i) & \text{für } t_r < t_1 \text{ oder } t_2 < t_3 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{2}{3}\ IR_{t_3}\ \frac{1}{1+zz_t} \prod_{i=t_3}^{t}\ (1+zz_i) & \text{für } t_r \geq t_1 \text{ und } t_2 = t_3 \\ \frac{2}{3}\ AR_{t_3}\ \frac{1}{1+zz_t} \prod_{i=t_3}^{t}\ (1+zz_i) & \text{für } t_r < t_1 \text{ oder } t_2 < t_3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die Waisenrenten erhält man mit

$$
\begin{aligned}
WWR_t &= \begin{cases} 1.1\ k_z(a_{t-1})\ 20\%\ IR_{t_3}\ \frac{1}{1+zz_t} \prod_{i=t_3}^{t}\ (1+zz_i) & \text{für } t_r \geq t_1 \text{ und } t_2 = t_3 \\ 1.1\ k_z(a_{t-1})\ 20\%\ AR_{t_3}\ \frac{1}{1+zz_t} \prod_{i=t_3}^{t}\ (1+zz_i) & \text{für } t_r < t_1 \text{ oder } t_2 < t_3 \end{cases} \\
&= \quad 1.1\ k_z(a_{t-1})\ 30\%\ WR_t
\end{aligned}
$$

Ist der Versicherte schon vor Beginn der Betrachtung verstorben, d.h. $t_3 = 0$ bzw. $t_4 = 0$, ergibt sich die Witwen(r)rente zum Zeitpunkt t aus der zum Zeitpunkt 0 gegebenen Rente[2] WR_0 über

$$WR_t = WR_0\ \frac{1}{1+zz_t} \prod_{i=1}^{t}\ (1+zz_i) \quad .$$

Das Todesfallkapital, welches beim Tod ohne Witwe eines aktiven Versicherten zum Zeitpunkt $t = t_4$ fällig wird, ergibt sich über

$$TK_t = \begin{cases} AK_{t_4} & \text{für } t_1 = t_4 < t_5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Vermögensveränderung $VE_t = f(\mathbf{t}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t)$ folgt damit

$$VE_t = \begin{cases} -\ (WR_t + WWR_t) & \text{falls } \max(t_3; 1) \leq t < t_4 \\ -\ (TK_t + WWR_t) & \text{falls } \max(t_4; 1) \leq t < t_5 \end{cases}$$

Die Berechnung des Deckungskapitals für Hinterbliebene folgt aus der Darstellung in Kapitel 9.3.2.

[2] für $t_4 = 0$ die theoretische Witwen(r)rente

Invalidenleistungen

Die Leistungen bei Invalidität setzen sich in diesem Beispiel wie folgt zusammen:

Invalidenrenten
Jährliche Rente in Höhe von 60% des versicherten Lohns für Vollinvalide. Bei Teilinvalidität wird die Rente gemäss dem Invaliditätsgrad angepasst. Die Invalidenrenten werden bis zum ordentlichen Rücktrittsalter (63 Jahre) bezahlt. Ab dann werden Altersleistungen erbracht.
Angepasstes Alterskapital bei Invalidenleistungen
Die Invalidenleistungen ab dem Alter 63 werden aufgrund eines angepassten Alterskapitals bestimmt, welches dem Alterskapital entspricht, welches der Versicherte bis zum Alter 63 geäufnet hätte.
Invaliden-Kinderrente (für Kinder mit Anspruch auf Waisenrente)
Pro Kind 20% der Invalidenrente.
Anpassung an die Preisentwicklung
Wie für Altersrenten

Mit den vorgenommenen Vereinfachungen ergibt sich die Höhe der Invalidenrente im Modell zum Zeitpunkt t bei Eintritt der Invalidität im Zeitpunkt $t_1 \leq t$ für $t_1 > 0$ über

$$IR_t = \begin{cases} 60\%\ L_{t_1-1}\ \frac{1}{1+zz_t} \prod_{i=t_1}^{t}(1+zz_i) & \text{für } t \leq t_r \\ 7.2\% \cdot AK^*_{t_1}\ \frac{1}{1+zz_t} \prod_{i=t_r+1}^{t}(1+zz_i) & \text{für } t > t_r \end{cases}$$

Damit ergibt sich die Invaliden-Kinderrente mit

$$IKR_t = k_z(a_{t-1})\ 20\%\ IR_t$$

Ist der Versicherte schon von Beginn weg invalide (d.h. $t_1 = 0$), ergibt sich die Invalidenrente zum Zeitpunkt t aus der zum Zeitpunkt 0 gegebenen Rente IR_0 über

$$IR_t = IR_0\ \frac{1}{1+zz_t} \prod_{i=1}^{t}(1+zz_i).$$

Für die Vermögensveränderung $VE_t = f(\mathbf{t}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t)$ folgt daraus

$$VE_t = -\ (IR_t + IKR_t) \qquad \text{falls } \max(t_1; 1) \leq t < t_2 \quad .$$

Die Berechnung des Deckungskapitals für Invalide folgt aus der Darstellung in Kapitel 9.3.3.

Beiträge

Die Beiträge sind im vorliegenden Beispiel wie folgt geregelt:

Ordentliche Beiträge
Arbeitnehmerbeiträge: Spar- / Risikobeitrag in % vom versicherten Lohn bis 24: 0%/1%; 25-29: 5%/1%; 30-34: 5.5%/1%; 35-39: 6%/1%; 40-44: 6.5%/1%; 45-49: 6.8%/1%; 50-54: 7.1%/1%; 55-65: 7.4%/1% Arbeitgeberbeiträge: Spar-/ Risikobeitrag in % vom versicherten Lohn bis 24: 0%/2%; 25-29: 5%/2.5%; 30-34: 6.5%/2.5%; 35-39: 8%/2%; 40-44: 8.5%/2%; 45-49: 10.2%/2%; 50-54: 11.9%/2%; 55-62: 13.6%/2%; 63-65: 10.6%/1.4%
Beitragsbefreiung für Invalide
Invalide zahlen keine Beiträge, Teilinvalide gemäss Invaliditätsgrad
Einkäufe
Einkäufe möglich (siehe Abschnitt B.1)

Die ordentlichen Beiträge zum Zeitpunkt t im Alter a_t ergeben sich damit im Modell für $t_0 > 0$ über

$$B_t = b(a_{t-1}) \cdot L_{t-1}$$

mit $b(a_t)$ als dem Beitrag in Prozent vom versicherten Lohn im Alter a_t. Die Einkäufe erhält man mit (vgl. Abschnitt B.1)

$$E_t = e(a_{t-1}, g) \cdot L_{t-1} \quad .$$

Für die Vermögensveränderung $VE_t = f(\mathbf{t}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t)$ folgt damit

$$VE_t = B_t + E_t \qquad \text{falls } t_0 < t < t_1 \quad .$$

B.2 Beispiel für einen Leistungsprimatplan

B.2.1 Versicherter Lohn und Versicherungsdauer

Versicherter Lohn

Die Modellierung des versicherten Lohnes folgt auch hier grundsätzlich der Beschreibung in Abschnitt 6.4.2, wobei in diesem Beispiel-Vorsorgeplan folgende Besonderheiten gelten:

Maximaler massgeblicher Lohn M_0
Das Maximum wird durch den Stiftungsrat im Einvernehmen mit dem Arbeitgeber festgelegt.
Koordinationsabzug
CHF 16,000

Wird wiederum angenommen, dass sich die Anpassung des Lohnmaximums für den Beispielplan durch die Anpassung an den Mischindex beschreiben lässt, ergibt sich der versicherte Lohn zum Zeitpunkt t über:

$$L_t = \begin{cases} \min\{ML_t - 16,000; M_t - 16,000\} & \text{falls } ML_t \geq 16,000 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Die Abbildung des versicherten Lohnes folgt sonst der Beschreibung in den Abschnitten 9.2.1 und 6.4.2.

Versicherungsdauer

Für die Versicherungsdauer legt der Beispielplan fest:

Zusammensetzung
Die Versicherungsdauer entspricht dem ordentlichen Rücktrittsalter abzgl. dem Eintrittsalter zzgl. den eingekauften Versicherungsjahren; beschränkt auf insgesamt maximal 40 Jahre.
Einmaleinlagen und Einkäufe
Einkäufe für fehlende Versicherungsjahre sind bis zur maximalen Leistung möglich. Freizügigkeitsleistungen müssen bei Eintritt zum Einkauf von Versicherungsjahren verwendet werden

Die Versicherungsdauer zu Beginn der Betrachtung ist gegeben über

$$VD_0 = \min\{a_r - a_0 + v_e \ ; \ 40\} \quad ,$$

mit v_e als den mit der Eintrittsleistung eingekauften Versicherungsjahren. Hinzu kommen die bis zum Zeitpunkt t weiter eingekauften Versicherungsjahre v_t. Wiederum wird davon ausgegangen, dass jährlich $e(a_t, g)$ des versicherten Lohnes für den Einkauf in höhere Leistungen verwendet wird. Die Kosten $k(a_t, g)$ eines weiteren Versicherungsjahres sind zwingend im Reglement angegebenen und werden in der Regel aufgegliedert nach Alter und Geschlecht in Lohnprozenten definiert. Damit erhält man die zusätzlich bis zum Zeitpunkt t eingekauften Versicherungsjahre über

$$v_t = \sum_{i=1}^{min\{t, t_r\}} \frac{e(a_{i-1}, g)}{k(a_{i-1}, g)} \quad .$$

Als Versicherungsdauer des Versicherten zum Zeitpunkt t ergibt sich damit

$$VD_t = \min\{VD_0 + v_t; 40\} \quad .$$

Die Bestimmung des Deckungskapitals D_T für einen Aktiven und der Austrittsleistungen AL_t wird im nächsten Abschnitt dargestellt.

B.2.2 Leistungen und Beiträge

Altersleistungen

Die Altersleistungen in diesem Beispiel-Vorsorgeplan sind wie folgt festgelegt:[3]

Altersrenten
Jährliche Rente in Höhe von 1.875%· Versicherungsdauer vom versicherten Lohn bei Rücktritt im Alter von 65 (Männer) bzw. 62 (Frauen). Ein vorzeitiger Rücktritt ist mit folgender Kürzung $q(a_{t_2}, g)$% der Rente möglich: Männer/Frauen Alter 60/57 (20%), 61/58 (17%), 62/59 (13.5%), 63/60 (9.5%) 64/61 (5%), 65/62 (0%). Bei späterem Rücktritt werden nicht bezogene Renten und weiter geleistete Beiträge auf einem Sparkonto gutgeschrieben und bei Rücktritt entweder bar oder als Zusatzrente ausbezahlt.
Kapitaloption
Nach Wahl kann statt einer Rente der versicherungstechnische Barwert der Altersrente als Kapital bezogen werden. Bei verheirateten Versicherten wird zudem der kollektive Barwert der anwartschaftlichen Ehegattenrente vergütet.
Pensionierten-Kinderrente (für Kinder mit Anspruch auf Waisenrente)
Für 1 Kind 20%, für 2 Kinder 30% und für 3 und mehr Kinder 40% der Altersrente
Anpassung der Renten an die Preisentwicklung
Keine Anpassung der Altersrenten.
AHV-Überbrückungsrenten (bei vorzeitiger Pensionierung)
Auf Verlangen kann bis zur Höhe der einfachen individuellen AHV-Rente eine AHV-Überbrückungsrente bezogen werden. Ab dem ordentlichen Rücktrittsalter (65/62) wird dafür die Altersrente um 7.2% des gesamthaft bezogenen Betrags gekürzt.

[3] vor Anpassung aufgrund BVG-Revision.

Für die Kinderrenten werden dieselben Annahmen wie für die beiden vorigen Pläne getroffen. Die AHV- Überbrückungsrente wird im Modell nicht betrachtet, da die Altersrente entsprechend versicherungsmathematisch gekürzt wird. Ebenso wird die Möglichkeit einer späteren Pensionierung, aufgrund der versicherungstechnisch kostenneutralen Umwandlung in eine Zusatzrente, in der Betrachtung ausgeklammert (vgl. Abschnitt 9.1 Punkt 4). Die Höhe des Kapitals bei Wahl der Kapitaloption wird im Modell mit dem BEL gleichgesetzt und entspricht somit der Freizügigkeitsleistung.

Die Altersrente zum Zeitpunkt t bei Rücktritt im Zeitpunkt $t_2 \leq t$ ergibt sich im Modell für $t_2 > 0$ über

$$AR_t = (1 - q(a_{t_2-1}, g))\ 1.875\%\ VD_{t_2-1}\ L_{t_2-1}$$

Ist der Versicherte schon zu Beginn der Betrachtung pensioniert, d.h. $t_2 = 0$, ergibt sich die Altersrente zum Zeitpunkt t aus der zum Zeitpunkt 0 gegebenen Rente AR_0 über

$$AR_t = AR_0 \quad ,$$

da für die Rente keine Anpassungen im Plan vorgesehen sind. Für die Pensionierten-Kinderrenten gilt

$$AKR_t = min\{10\% + 10\% \cdot k_z(a_{t-1}); 40\%\} \cdot AR_t$$

Die erworbene Leistung nach dem FZG entspricht in diesem Beispiel

$$EL_t = \ 1.875\%\ (VD_{t-1} - a_r + a_{t-1})\ L_{t-1} \quad .$$

Daraus folgt der BEL zum Zeitpunkt t mit dem im Reglement zwingend anzugebenden versicherungstechnischen Barwertfaktor $bf(a_t, g)$ für einen a_t-jährigen Versicherten mit Geschlecht g über

$$BEL_t = bf(a_t, g)\ EL_t = bf(a_t, g)\ 1.875\%\ (VD_{t-1} - a_r + a_{t-1})\ L_{t-1} \quad .$$

Für die Vermögensveränderung $VE_t = f(\mathbf{t}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t)$ lässt sich damit schreiben

$$VE_t = \begin{cases} -\ (AR_t + AKR_t) & \text{für } \max(t_2; 1) \leq t < t_3 \\ -\ BEL_{t_5-1} & \text{für } t = t_5 \leq T \end{cases}$$

Das Deckungskapital $D_T = f(\mathbf{t}^{i,j}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t)$ für einen Aktiven erhält man damit im Modell über

$$D_T = BEL_T \qquad \text{falls } t_1 = T + 1$$

Aus der Berechnung des BEL folgt ebenfalls die Berechnung der Austrittsleistungen AL_t (vgl. Abschnitt 6.4.3). Die Berechnung des Deckungskapitals für einen Pensionierten folgt der Darstellung in Kapitel 9.3.1.

Hinterbliebenenleistungen

Folgende Hinterbliebenenleistungen sind in diesem Beispiel-Plan vorgesehen:

Witwen- und Witwerrenten
Jährliche Rente in Höhe von 60% der vollen Invaliden- bzw. Altersrente bis zum Tod oder zur Wiederverheiratung. Anspruch besteht falls Kinder zu unterhalten sind, oder die Witwe bzw. der Witwer 35 Jahre oder älter ist und mindestens 1 Jahr verheiratet war. Ist der Altersunterschied grösser als 10 Jahre wird für jedes Jahr, welches über 10 Jahre hinaus geht, die Rente um 2% gekürzt. Bei einer Heirat später als im Alter 65 wird die Rente herabgesetzt.
Abfindung statt Witwen/-errenten
Sofern keine dieser Voraussetzungen erfüllt werden, hat die Witwe(r) Anspruch auf eine einmalige Abfindung in Höhe von drei Jahresrenten.
Waisenrenten
Pro Kind 20% der vollen Invaliden- bzw. der lfd. Altersrente (bis max. 3 Kinder). Für Vollwaisen wird die Rente verdoppelt. Anspruch besteht bis zum Alter 20, für Kinder in Ausbildung oder invalide Kinder (ab einem Invaliditätsgrad von 2/3) bis zum Alter 25.
Todesfallkapital
Ist die Ehegattenrente, -abfindung oder Waisenrenten nicht fällig, wird beim Tod eines aktiven Versicherten an die Erben ein Kapital in Höhe der persönlich vom Versicherten geleisteten Zahlungen ausbezahlt. Sind die Erben direkte Nachkommen wird zusätzlich ein Aufschlag von 150% der Altersrente ausbezahlt.
Anpassung an die Preisentwicklung
Anpassung erfolgt erst, wenn BVG-Minimalleistung unterschritten wird.

Weitgehendst werden die selben Vereinfachungen vorgenommen wie bei den vorigen Plänen: D.h. annahmegemäss erfüllen die Witwen(r) immer die Voraussetzungen für eine Witwenrente, was die Betrachtung von Abfindungen hinfällig macht. Weiter wird der Altersunterschied der Ehegatten über den durchschnittlichen Altersunterschied im Todesalter gemäss den Rechnungsgrundlagen abgebildet. Damit ist die Betrachtung einer Herabsetzung der Rente aufgrund des Altersunterschied nicht anwendbar. Für die Waisenrenten werden die selben Annahmen wie oben für die Kinderrenten getroffen. Auch werden wieder die Waisenrenten pauschal um 10% erhöht, da von rund 10% Vollwaisen ausgegangen wird. Der Wegfall der Anspruchsberechtigung bei Wiederverheiratung wird über die Übergangswahrscheinlichkeiten abgebildet. Ebenso die Lebenspartnerrenten, da ihre Höhe den Witwen/errenten entspricht. Kapitalleistungen anstelle von Ehegattenrente werden nicht betrachtet. Für die Todesfallkapitalien wird vereinfachenden davon ausgegangen, dass bei Tod ohne Witwe die Todesfallkapitalien grundsätzlich fällig werden und bei Tod mit Witwe grundsätzlich keine Todesfallkapitalien fällig werden, was gleichbedeutend ist mit der Annahme, dass beim Tod ohne Witwe auch keine Waisen als Hinterbliebene zurückbleiben. Dies überschneidet sich zwar inhaltlich mit der Modellierung der Waisenrenten über die durchschnittliche Kinderzahl und der Annahme von 10% Vollwaisen, ist aber insgesamt wohl vertretbar. Da davon auszugehen ist, dass die Leistungen deutlich über den BVG-Minimalleistungen liegen, wird die gesetzliche Anpassung an die Inflation nicht betrachtet.

Damit ergeben sich die Witwen(r)renten zum Zeitpunkt t bei Tod des Versicherten im Zeitpunkt $t_3 \leq t$ im Modell für $t_3 > 0$ über

$$WR_t = \begin{cases} 60\%\ 1.875\%\ VD_{t_1-1}\ L_{t_1-1} & \text{für } t_3 = t_2 \\ 60\%\ AR_t & \text{für } t_3 > t_2 \end{cases}$$

Die Waisenrenten erhält man mit

$$\begin{aligned} WWR_t &= \begin{cases} 1.1\ \min\{20\%\ k_z(a_{t-1})\ ;\ 60\%\}\ 1.875\%\ VD_{t_1-1}\ L_{t_1-1} & \text{für } t_3 = t_2 \\ 1.1\ \min\{20\%\ k_z(a_{t-1})\ ;\ 60\%\}\ AR_t & \text{für } t_3 > t_2 \end{cases} \\ &= \quad 1.1\ \min\{1/3\ k_z(a_{t-1})\ ;\ 1\}\ WR_t \end{aligned}$$

Ist der Versicherte schon zu Beginn der Betrachtung verstorben, d.h. $t_3 = 0$ bzw. $t_4 = 0$, ergibt sich die Witwen(r)rente zum Zeitpunkt t aus der zum Zeitpunkt 0 gegebenen Rente WR_0 über

$$WR_t = WR_0 \quad ,$$

Das Todesfallkapital bei Tod des Versicherten ohne Witwe zum Zeitpunkt $t = t_4$ erhält man mit

$$TK_t = \begin{cases} PZ_0 + \sum_{i=1}^{t_4} [b^n(a_{i-1}, g) + e(a_{i-1}, g)] \, L_{i-1} & \\ \quad + n(a_{i-1}, g) \, (L_{i-1} - L_{i-2})) & \text{für } t_1 = t_4 < t_5 \\ \quad + 1.5 \cdot 1.875\% \; VD_{t_4-1} \, VL_{t_4-1} & \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit dem Arbeitnehmerbeiträgen $b^n(a_i, g)$, den Nachzahlungen $n(a_{i-1}, g)$ (vgl. nächster Abschnitt), je in Prozent vom versicherten Lohn und PZ_0 als den persönlich geleisteten Zahlungen bis zum Zeitpunkt $t = 0$.

Für die Vermögensveränderung $VE_t = f(\mathbf{t}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t)$ folgt damit

$$VE_t = \begin{cases} -\,(WR_t + WWR_t) & \text{falls} \quad \max(t_3; 1) \leq t < t_4 \\ -\,(TK_t + WWR_t) & \text{falls} \quad \max(t_4; 1) \leq t < t_5 \end{cases}$$

Die Berechnung des Deckungskapitals für Hinterbliebene folgt aus der Darstellung in Kapitel 9.3.2.

Invalidenleistungen

Die Leistungen bei Invalidität setzen sich für dieses Beispiel wie folgt zusammen:

Invalidenrenten
Lebenslange Rente in Höhe der anwartschaftlichen Altersrente. Die volle Invalidenrente wird ab 2/3 Invalidität ausgerichtet. Bei einem Invaliditätsgrad von 25% bis 2/3 wird die Rente an den Invaliditätsgrad angepasst.
Invaliden-Kinderrente (für Kinder mit Anspruch auf Waisenrente)
Für 1 Kind 20%, für 2 Kinder 30% und für 3 und mehr Kinder 40% der ausbezahlten Invalidenrente
Anpassung an die Preisentwicklung
Anpassung erfolgt erst, wenn BVG-Minimalleistung unterschritten wird.

In diesem Vorsorgeplan wird schon ab zwei Drittel Invalidität die volle Rente bezahlt, weshalb auch hier zum Ausgleich die Invalidenrente um einen Faktor angepasst wird (vgl. Abschnitt 9.3.3). Wiederum wird von einer Anpassung an die Inflation abgesehen, da die Leistungen über den Minimalleistungen liegen.

Die Höhe der Invalidenrente im Zeitpunkt t bei Eintritt der Invalidität im Zeitpunkt $t_1 \leq t$ erhält man mit obigen Vereinfachungen im Modell für $t_1 > 0$ über

$$IR_t = \frac{6}{5}\ 1.875\%\ VD_{t_1-1}\ L_{t_1-1}$$

Die Invaliden-Kinderrente wird im Modell mit

$$IKR_t = min\{10\% + 10\%\ k_z(a_{t-1})\ ;\ 40\%\}\ IR_t$$

abgebildet.

Ist der Versicherte schon von Beginn weg invalide (d.h. $t_1 = 0$), ergibt sich die Invalidenrente zum Zeitpunkt t aus der zum Zeitpunkt 0 gegebenen Rente IR_0 über

$$IR_t = IR_0.$$

Für die Vermögensveränderung $VE_t = f(\mathbf{t}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t)$ folgt daraus

$$VE_t = -\ (IR_t + IKR_t) \qquad \text{falls } \max(t_1; 1) \leq t < t_2 \quad .$$

Die Berechnung des Deckungskapitals für Invalide folgt aus der Darstellung in Kapitel 9.3.3.

Beiträge

Die Beiträge sind wie folgt geregelt:

Ordentliche Beiträge
Arbeitnehmerbeiträge: Männer/Frauen in % vom versicherten Lohn bis 24/ bis 21: 2%; 25-34/22-31: 6%; 35-44/32-41: 6.5%; 45-54/42-51: 7%; 55-65/52-62: 7.5% AG Beiträge: Männer/ Frauen bis 24/bis 21: 2%; 25-34/22-31:16.5%; 35-44/32-41: 16.5%; 45-54/42-51: 16.5%;55-65/52-62: 16.5%
Beitragsbefreiung für Invalide
Invalide zahlen keine Beiträge, Teilinvalide gemäss Invaliditätsgrad
Einkäufe
Einkäufe sind möglich (siehe Abschnitt 9.2.2)
Nachzahlungen
Nachzahlungen bei Lohnerhöhungen unter 6%: Männer/Frauen in %der Lohnerhöhung 31-35/28-32: 25%; 36-50/33-47: (25+(Alter-35 bzw. 32)*5)% ab 51/ ab 48: 100% Bei grösseren Lohnerhöhungen muss im Prinzip das gesamte versicherungstechnische Deckungskapital für den 6% übersteigenden Teil eingezahlt werden.

Vereinfachend wird davon ausgegangen, dass Nachzahlung bei Lohnerhöhung über 6% nach der selben Regel wie die für unter 6% erfolgen. Weiter wird davon ausgegangen, dass bei Lohnsenkungen aus die dadurch frei werdenden Deckungskapitalien für Beitragsreduktionen oder Zusatzleistungen verwendet werden.

Die Ordentliche Beiträge zum Zeitpunkt t im Alter a_t sich damit im Modell für $t_0 > 0$ über

$$B_t = b(a_{t-1}, g) \cdot L_{t-1}$$

mit $b(a_t)$ als dem Beitrag in Prozent vom versicherten Lohn im Alter a_t für Versicherte mit Geschlecht g. Die Nachzahlungen (bzw. Beitragsreduktionen/ Zusatzleistungen) zum Zeitpunkt t im Alter a_t ergeben sich über

$$N_t = n(a_{t-1}, g) \cdot (L_{t-1} - L_{t-2})$$

mit $n(a_t, g)$ als der Nachzahlung in Prozent der Lohnerhöhung im Alter a_t. Für die Einkäufe gilt

$$E_t = e(a_{t-1}, g) \cdot L_{t-1}$$

Für die Vermögensveränderung $VE_t = f(\mathbf{t}, \mathbf{la}_t, \mathbf{i}_t, \mathbf{ra}_t)$ folgt damit

$$VE_t = B_t + E_t + N_t \qquad \text{falls } t_0 < t < t_1 \quad .$$

Anhang C

Struktogramm zum Simulationsprogramm

Nachfolgend ist ein Struktogramm des Algorithmus aufgeführt, mit welchem die Beispiele in Abschnitt 11 berechnet wurden.

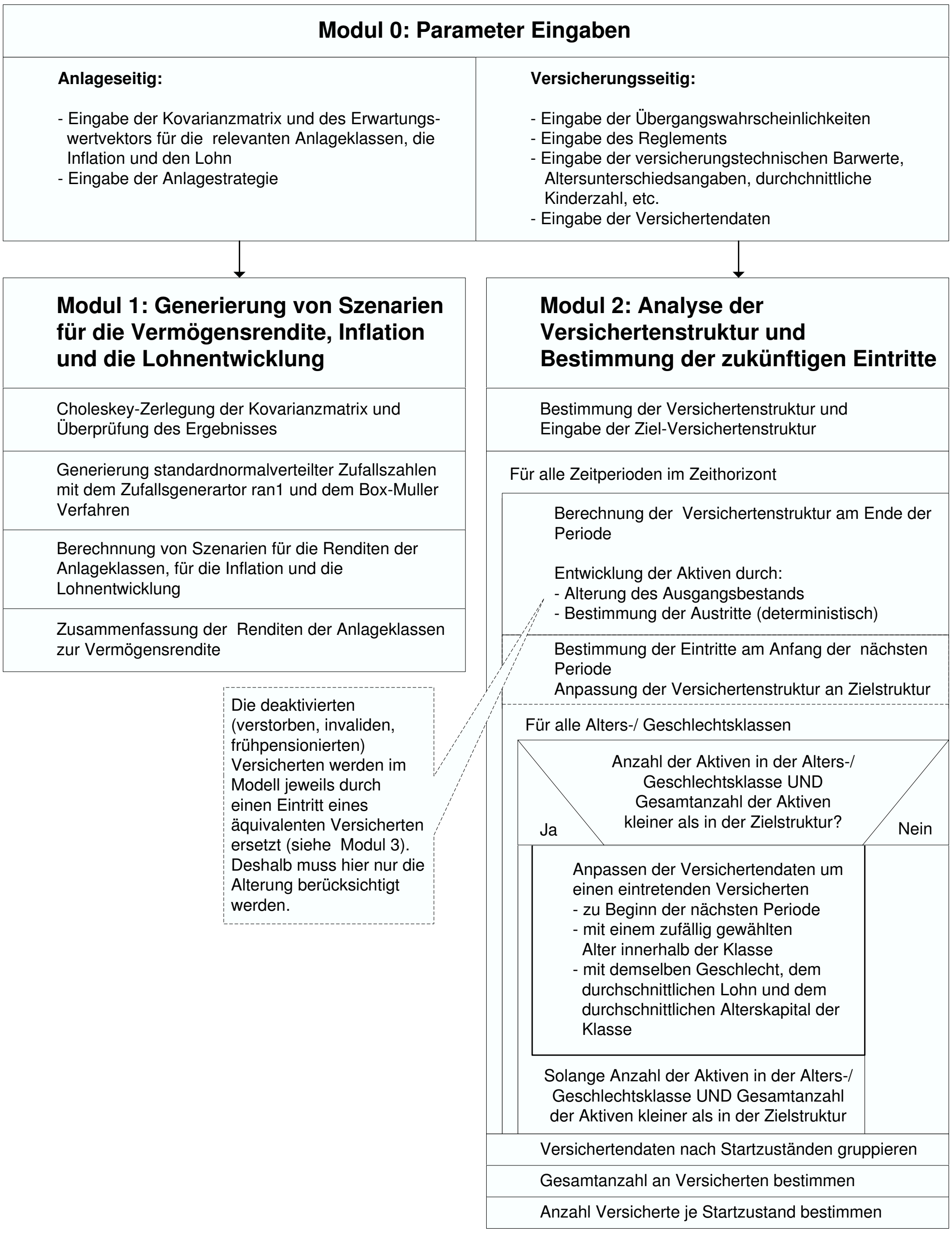


Abbildung C.1: Struktogramm des Algorithmus zur Auswertung der Beispiele -1

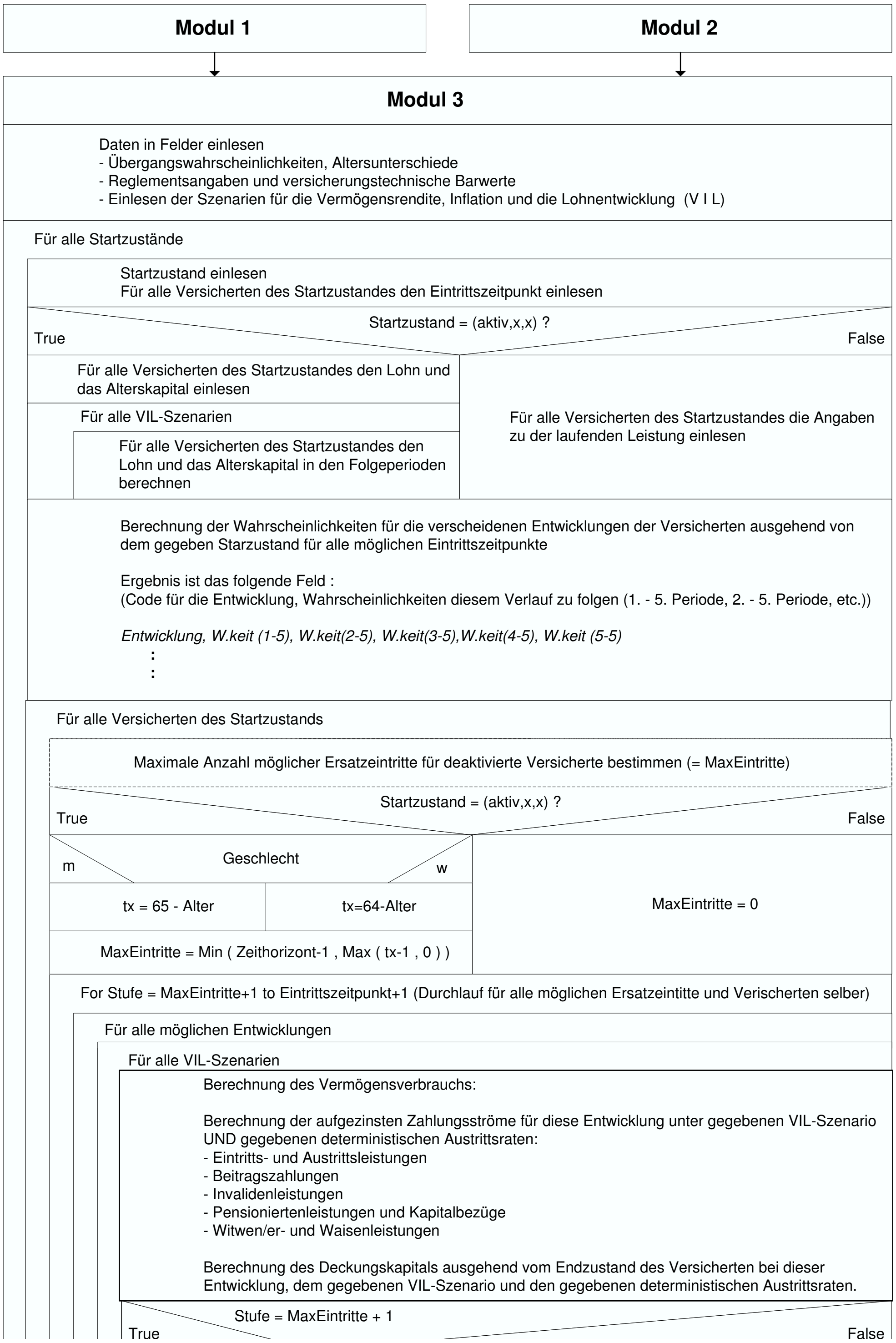


Abbildung C.2: Struktogramm des Algorithmus zur Auswertung der Beispiele -2

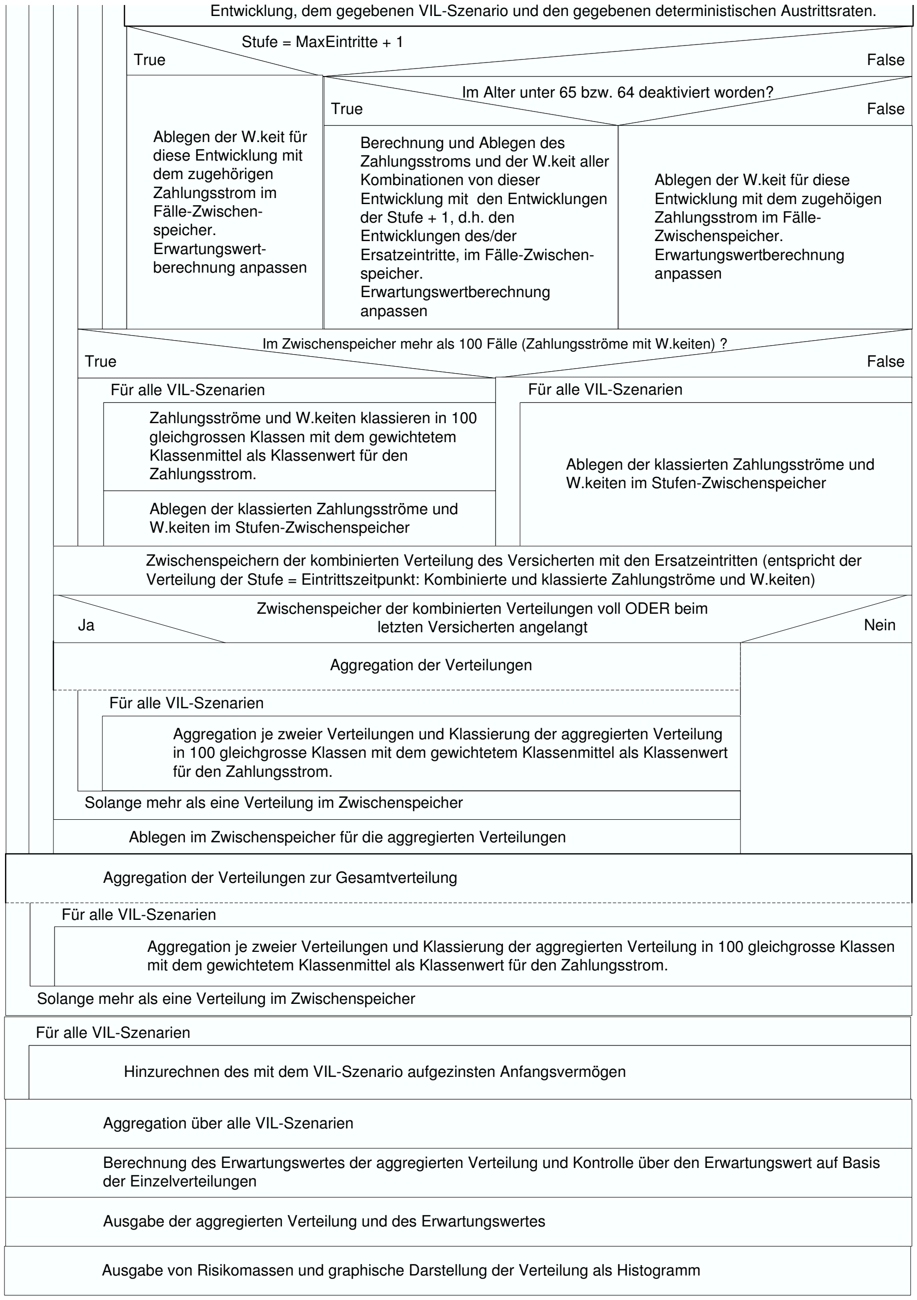


Abbildung C.3: Struktogramm des Algorithmus zur Auswertung der Beispiele -3

Anhang D

Histogramme zu den ausgewerteten Beispielen

In diesem Abschnitt finden sich einige Histogramme zu den in Abschnitt 11.2.2 ausgewerteten Beispielen: Für die verschiedenen Bestände A bis D sind jeweils für alle fünf Anlagestrategien die Histogramme aufgeführt. Für die Beispiele mit unterschiedlichen Ausgangssituationen sind jeweils nur die Histogramme für die Anlagestrategie ausgewogen aufgeführt:

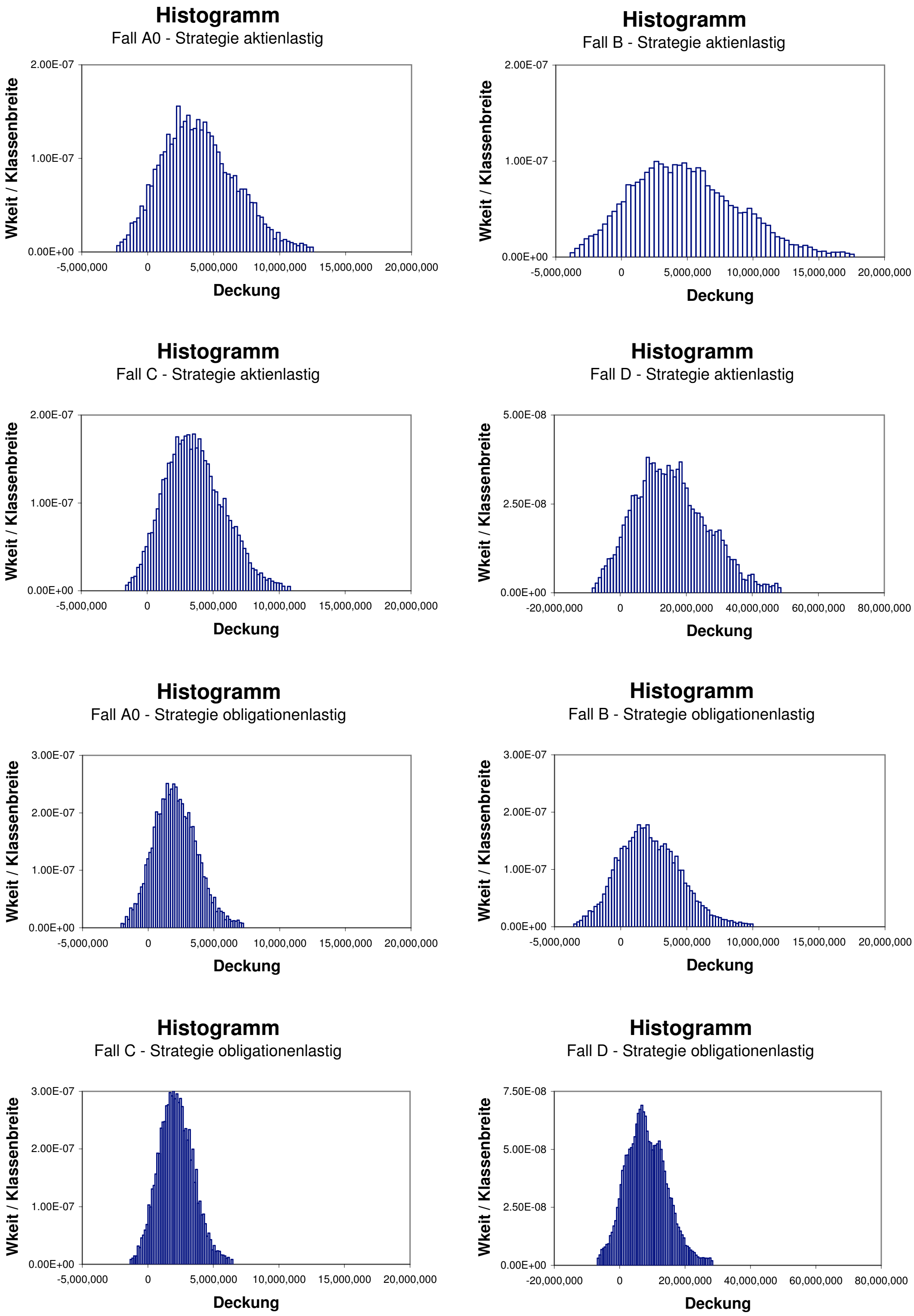


Abbildung D.1: Histogramme zu den Falle A0, B, C und D für die Strategien aktien- und obligationenlastig

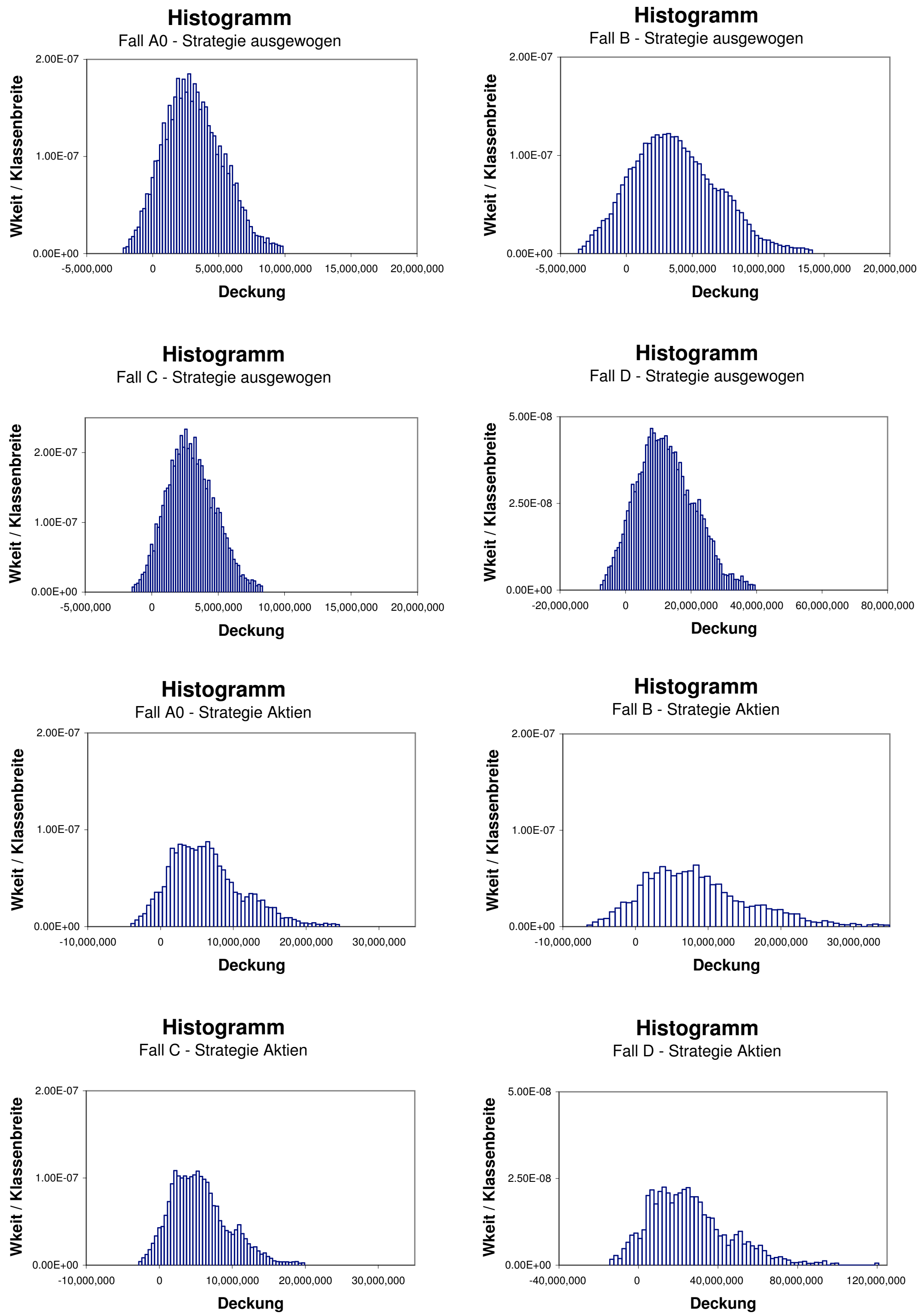


Abbildung D.2: Histogramme zu den Falle A0, B, C und D für die Strategien ausgewogen und Aktien

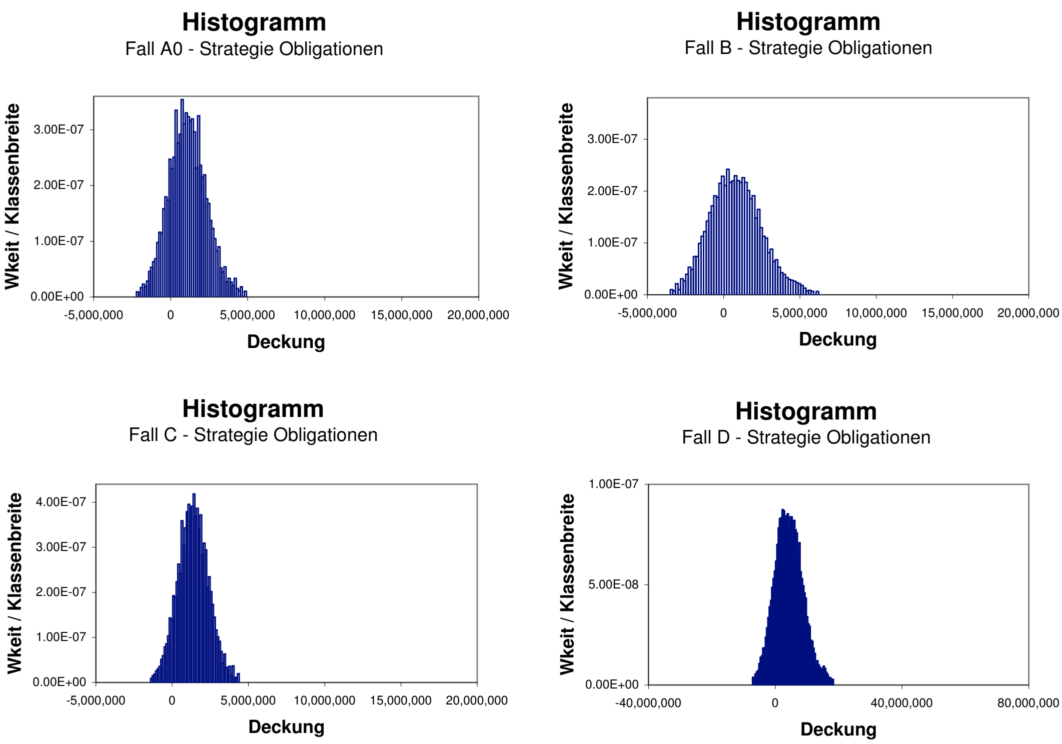


Abbildung D.3: Histogramme zu den Falle A0, B, C und D für die Strategien Obligationen

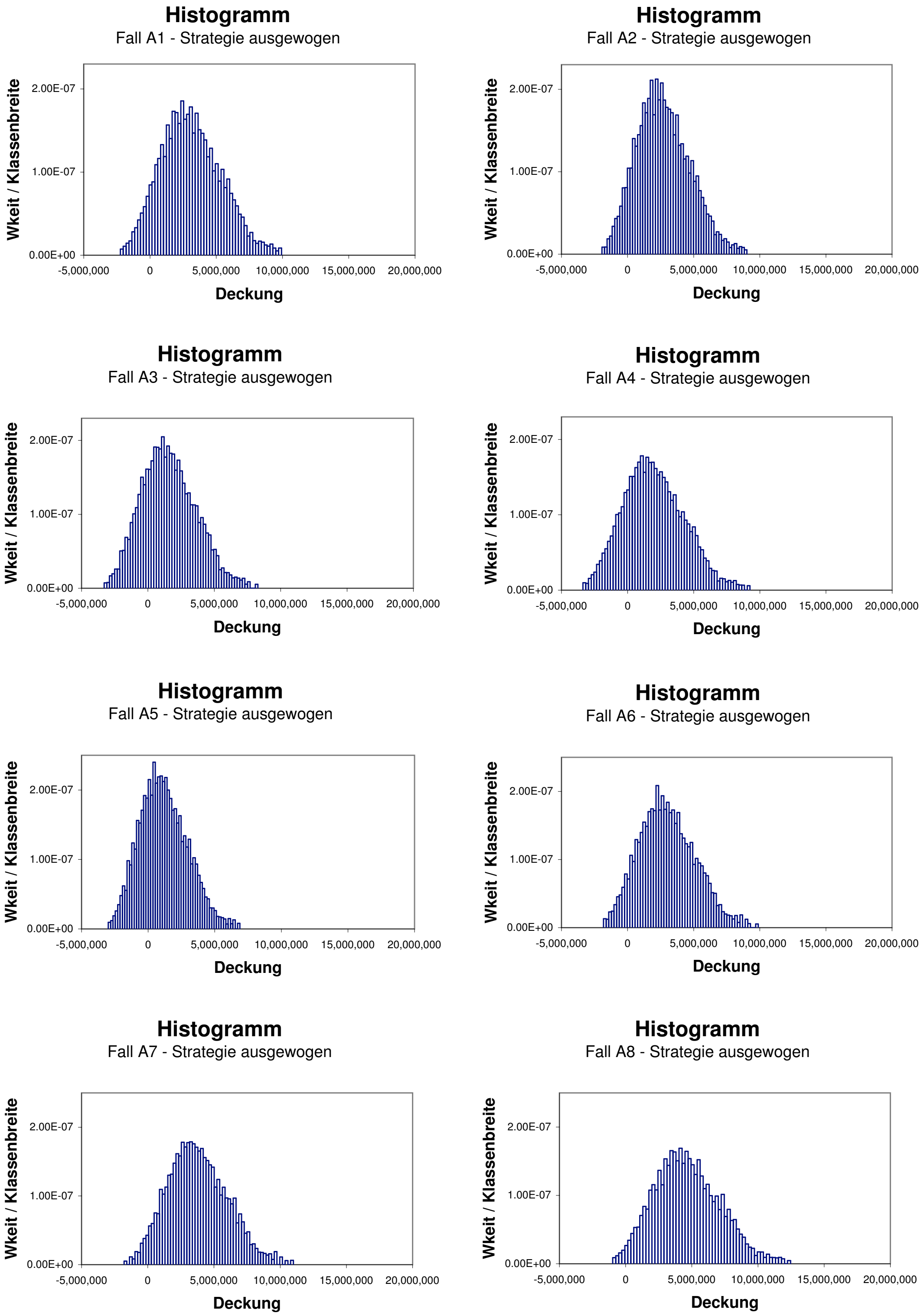


Abbildung D.4: Histogramme zu den Fällen A1 bis A8 für die Strategie ausgewogen

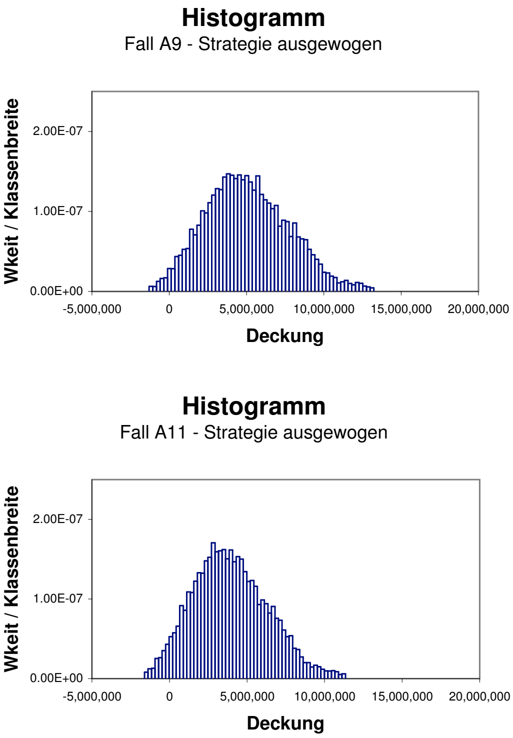


Abbildung D.5: Histogramme zu den Fällen A9 bis A11 für die Strategie ausgewogen

Anhang E

Herleitungen und weiterführende Konzepte

E.1 Modell zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung von Sterbewahrscheinlichkeiten

Für das Modell wird von über die Zeit hinweg konstanten Sterbewahrscheinlichkeiten ausgegangen. Aufgrund der generell steigenden Lebenserwartung könnte man grundsätzlich auch von sich ändernden Sterbewahrscheinlichkeiten ausgehen.

Die Lebenserwartung ist im Verlauf dieses Jahrhunderts stetig angestiegen. Das Bundesamt für Statistik geht im Szenario ,,Trend" ihrer ,,Szenarien zur Bevölkerungsentwicklung der Schweiz 1995-2050" von einem weiteren mässigen Anstieg der Lebenserwartung aus, wobei sich allerdings die Entwicklung ab 2020 verlangsamen soll. Die Grundlagen der AHV für die Sterblichkeit beziehen sich auf dieses Szenario ,,Trend" (vgl. Streit [92], S. 115 f.). Auch in der 1998 vom Bundesamt für Statistik (BfS) veröffentlichen ,,Kohortensterbetafel für die Schweiz" kommt das Bundesamt für Statistik zur Schlussfolgerung, dass für die Zukunft von einem weiteren Anstieg der Lebenserwartung ausgegangen werden muss, allerdings mit einer Verlangsamung zu rechnen ist. Die starke Abnahme der Sterbewahrscheinlichkeiten wird bzw. wurde vor allem durch die Geburtsjahrgänge 1900 bis 1940 verursacht (vgl. BfS [20], S. 34).

In der Publikation der VZ 2000 wird ein Modell für die zeitliche Entwicklung der Sterbewahrscheinlichkeiten vorgestellt, welches dort für die Verstärkung der tabellierten Sterbewahrscheinlichkeiten Anwendung findet. Die Verstärkung ist nötig, da die VZ 2000 auf Beobachtungen vom 1. Januar 1989 bis zum 31. Dezember 1998 beruhen. Die Mitte des Beobachtungszeitraum liegt also beim 1. Januar 1994. Deshalb wurden die in der Publikation tabellierten Werte der Sterbewahrscheinlichkeiten für 6 Jahre verstärkt, um den wahren Wahrscheinlichkeiten für 2000 näher zu kommen. Eine Anpassung der anderen biometrischen Daten, wie z.B. den Invalidisierungswahrscheinlichkeiten wurde nicht vorgenommen. Für diese wurde angenommen, dass sie in Zukunft mehr oder weniger stabil bleiben. Die Verstärkung der Sterbewahrscheinlichkeiten erfolgt über ein Modell, welches in der Regel zur Beschreibung des radioaktiven Zerfalls Anwendung findet. Der massgebliche Parameter ist dabei die Halbwertszeit, d.h. im vorliegenden Fall, die Anzahl Jahre innerhalb der sich die Sterbewahrscheinlichkeit eines bestimmten Alters halbiert. Dieses Modell ist gemäss dem Autor der VZ2000 auch für die Projektionen der Sterbewahrscheinlichkeit über 2000 hinaus verwendbar und dürfte für einen Zeitraum bis zu 20 Jahren brauchbare Ergebnisse liefern (vgl. VZ 2000 [35],S. 7 f. und Furrer [36], S. 119 f.).

Ausgangspunkt dieses Modells ist die Annahme, dass sich die Entwicklung der Sterbewahrscheinlichkeiten für ein bestimmtes Alter x, zumindest in einem begrenzten Zeitraum, mit folgender Exponentialfunktion annähern lässt:

$$q(x,t) = q(x,0)e^{-\frac{ln(2)}{T(x)}t} \quad ,$$

wobei t die Zeit bezeichnet, die seit der Beobachtung verstrichen ist und mit $T(x)$ die Halbwertszeit notiert wird. Die Schätzung der Halbwertszeiten, welche in den VZ 2000 unterstellt sind, erfolgte anhand der VZ Grundlagen selber, der Sterbetafeln für die Schweiz und der Kohortensterbetafel (vgl. BfS [20]). Diese Halbwertszeiten sind in der Tabelle E.1 aufgeführt. Es wurde dabei nicht zwischen Männer, Frauen, Witwern und Witwen unterschieden. Für die die Alter zwischen

x Alter	$T(x)$ Halbwertszeit in Jahren
20	80
30	70
40	60
50	50
60	40
70	50
80	60
90	80
100	110

Tabelle E.1: Geschätzte Halbwertszeiten für die Projektion der Sterbewahrscheinlichkeiten (vgl. VZ 2000 [35], S. 8).

den Angaben werden die $T(x)$ linear interpoliert (vgl. VZ 2000 [35],S. 8).
In Tabelle E.2 ist die zeitliche Entwicklung der Sterbewahrscheinlichkeiten gemäss dem Halbwertszeit-Modell, anhand einiger Beispiele für Männer dargestellt.

E.2 Geometrische Brownsche Bewegung und Random Walk

In diesem Abschnitt wird die Beziehung der Annahme der Geometrische Brownschen Bewegung für die Entwicklung von Assetpreisen im stetigen Fall und der Annahme eines Random Walk für den Logarithmus des Assetpreises im diskreten Fall beschrieben.

Wiener Prozess

Ein stochastischer Prozess $\{X(t), t \geq 0\}$ heisst Wiener Prozess falls er folgende Eigenschaften besitzt (vgl. Ross [81], S. 524):

1. $X(t)$ ist für alle $t > 0$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\sigma^2 t$. Mit $\sigma^2 = 1$ wird von einem Standard Wiener Prozess gesprochen;

2. Die Änderungen oder Inkremente von $\{X(t), t \geq 0\}$ sind unabhängig von-

x	20	40	60	80
$T(x)$	80	50	40	60
$q(x,0)$	0.00071	0.00142	0.00766	0.06596
$q(x,1)$	0.00070	0.00140	0.00753	0.06520
$q(x,2)$	0.00070	0.00138	0.00740	0.06445
$q(x,3)$	0.00069	0.00136	0.00727	0.06371
$q(x,4)$	0.00069	0.00134	0.00715	0.06298
$q(x,5)$	0.00068	0.00132	0.00702	0.06226
$q(x,10)$	0.00065	0.00124	0.00644	0.05876
$q(x,15)$	0.00062	0.00115	0.00591	0.05547
$q(x,20)$	0.00060	0.00108	0.00542	0.05235
$\frac{q(x,20)}{q(x,0)}$	0.84090	0.75786	0.70711	0.79370

Tabelle E.2: Beispiele für die zeitliche Entwicklung der der Sterbewahrscheinlichkeiten für Männer im Modell mit Startzeitpunkt t=0 im Jahr 2000.

einander, d.h. für $t_0 < \ldots < t_n$ sind

$$X(t_n) - X(t_{n-1}), X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}), \ldots, X(t_1) - X(t_0), X(t_0)$$

voneinander unabhängig;

3. Die Änderungen oder Inkremente von $\{X(t), t \geq 0\}$ sind stationär, d.h. die Verteilung von $X(t+s) - X(t)$ hängt nicht von der Zeit t ab;

4. $X(0) = 0$.

Der Wiener Prozess gehört zur Klasse der Markov Prozesse, d.h. er ist eindeutig durch durch einen Startzustand $X(t_0)$ und die Übergangswahrscheinlichkeiten determiniert.

Stochastische Differentialgleichungen

Der Wiener-Prozess fluktuiert um seinen Erwartungswert 0. Interessant ist aber auch der Fall eines im Mittel wachsenden oder fallenden Prozesses, d.h. einem Prozess mit Trend bzw. Drift. Aus dem Wiener-Prozess $W(t)$ lässt sich der allgemeine Wiener-Prozess $\{X(t), t \geq 0\}$ mit Driftrate μ und Varianzrate σ^2 ableiten:

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t) \quad , t \geq 0$$

Der allgemeine Wienerprozess $X(t)$ ist zum Zeitpunkt t demnach $N(\mu t, \sigma^2 t)$-verteilt. Für den Zuwachs des allgemeinen Wiener-Prozesses über ein kleines Zeitintervall Δt erhalten wir so

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \mu \Delta t + \sigma (W(t + \Delta t) - W(t)) \quad .$$

Für $\Delta t \to 0$ geht dies in die differentielle Form über:

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t) \quad . \tag{E.1}$$

In der differentiellen Form in (E.1) geht man davon aus, dass der lokale Trend, dessen Grösse die Driftrate μ wiedergibt, und die lokale Variabilität, beschrieben durch den Parameter σ, stets konstant sind. Eine wesentlich grössere und zum Modellieren vieler Vorgänge in Natur und Wirtschaft geeignete Klasse stochastischer Prozesse erhält man, wenn μ und σ in (E.1) von Zeit und vom erreichten Niveau abhängen dürfen. Solche Prozesse $\{X(t), t \geq 0\}$, sogenannte Itô-Prozesse, sind als Lösungen stochastischer Differentialgleichungen gegeben (vgl Franke et al. [34], S. 52 ff.):

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW(t) \quad . \tag{E.2}$$

Eine Eigenschaft des Wiener Prozesses ist, dass er nicht differenzierbar ist. (E.2) wird deshalb in der Regel als Kurzschreibweise der folgenden stochastischen Integralgleichung interpretiert:

$$X(t) - X(0) = \int_0^t \alpha(X(t'), t')dt' + \int_0^t \sigma(X(t'), t')dW(t') \quad , \tag{E.3}$$

mit dem stochastischen Itô-Prozess $X(t)$ welcher (E.3) erfüllt als Lösung (vgl. Rolski et al. [79], S. 561). Das erste Integral auf der rechten Seite von (E.3) ist ein Riemann Integral, das zweite ist ein stochastisches Itô Integral. Für eine Besprechung dieser Integrale wird auf die folgende Literatur verwiesen Gardiner [37], S. 83 ff., Mikosch [67], S. 87 ff. und Øksendal [68], S. 14 ff.

Geometrische Brownsche Bewegung

Die geometrische Brownsche Bewegung stellt das Standardmodell zur Beschreibung der zeitlichen Dynamik von Aktienkursen dar. Die zugehörige stochastische

Differentialgleichung mit $\alpha(X(t),t) = \alpha X(t)$ und $\sigma(X(t),t) = \sigma X(t)$ (α, σ konstant und positiv) lautet:

$$dX(t) = \underbrace{\alpha X(t)dt}_{\text{Drift}} + \underbrace{\sigma X(t)dW(t)}_{\text{Diffusion}},$$

mit $dW(t) \sim i.i.d.\ N(0,dt)$.

Der Term $\alpha X(t)$ wird als Driftanteil bezeichnet, da bei fehlenden stochastischen Anteil $dW(t)$, $X(t)$ linear mit der Zeit wachsen würde. Der Faktor $\sigma X(t)$ wird als Diffusionsanteil bezeichnet (vgl. Shimko [90], S. 9f.).

Itô's Lemma

Ein entscheidendes Hilfsmittel beim Umgang mit stochastischen Differentialgleichungen ist das Lemma von Itô (vgl. Franke et al. [34], S. 68 f.). Ist $\{X_t, t \geq 0\}$ ein Itô-Prozess:

$$dX_t = \mu(X_t,t)dt + \sigma(X_t,t)dW_t \quad , \tag{E.4}$$

so interessiert man sich oft für den Verlauf stochastischer Prozesse, die Funktionen von X_t sind:

$$Y_t = g(X_t) \quad .$$

$\{Yt, t \geq 0\}$ lässt sich dann ebenfalls als Lösung einer stochastischen Differentialgleichung beschreiben, und aus dieser Gleichung lassen sich interessierende Eigenschaften von Y_t wie z.B. das mittlere Wachstum mit der Zeit t ablesen.

Um die Gleichung für $\{Y(t), t \geq 0\}$ herzuleiten, nimmt man an, dass g genügend oft differenzierbar ist. Aus der Taylor-Reihenentwicklung folgt:

$$\begin{aligned} Y_{t+dt} - Y_t &= g(X_{t+dt}) - g(X_t) \qquad\qquad \text{(E.5)} \\ &= g(X_t + dX_t) - g(X_t) \\ &= \frac{dg(X_t)}{dX} dX(t) + \frac{1}{2}\frac{d^2 g(X(t)}{dX^2}(dX(t))^2 + \ldots \quad , \end{aligned}$$

wobei die Punkte für Terme vernachlässigbarer Grössenordnung (für $dt \to 0$) stehen. Die für $dt \to 0$ dominanten Terme in $dX(t)$ sind aufgrund (E.4) der Driftterm $\mu(X(t),t)dt$ von der Grössenordnung dt und der Volatilitätsterm $\sigma(X(t),t)dWt$ von der Grössenordnung $\sqrt{dt}$. Dies folgt aus $var(dW(t)) = E[(dW(t)^2] - E[(dW(t)]^2 = E[(dW(t)^2] = dt$, so dass $dW(t)$ von der Grössenordnung seiner Standardabweichung, also $\sqrt{dt}$, ist. Terme von kleinerer Grössenordnung als dt werden hier vernachlässigt. Daher können wir $[dX(t)]^2$ durch einen einfacheren Ausdruck ersetzen:

$$\begin{aligned}
[dX(t)]^2 &= [\mu(X(t),t)dt + \sigma(X(t),t)dW(t)]^2 \\
&= \mu^2(X(t),t)(dt)^2 \\
&\quad +2\mu(X(t),t)\sigma(X(t),t)dtdW(t) \\
&\quad +\sigma^2(X(t),t)(dW(t))^2 \quad .
\end{aligned}$$

Man sieht, dass der erste Term von der Grössenordnung $(dt)^2$ ist. Der zweite ist von der Grössenordnung $dt\sqrt{dt}$, so dass beide vernachlässigt werden können. Der dritte Term hat allerdings die Grössenordnung dt. Genauer kann man zeigen, dass für $dt \to 0$

$$[dW(t)]^2 = dt \quad .$$

Mit dieser einfachen Identität lassen sich Rechenregeln für stochastische Differentialgleichungen aus den bekannten Regeln für den Umgang mit deterministischen Funktionen (wie z.B. der Taylorentwicklung) ableiten. Unter Vernachlässigung von Termen kleinerer Grössenordnung als dt erhalten wir so aus (E.5) die folgende Form von Itô's Lemma:

$$\begin{aligned}
dY(t) &= dg(X(t)) \\
&= \left(\tfrac{dg(X(t))}{dX}\mu(X(t),t) + \tfrac{1}{2}\tfrac{d^2g(X(t))}{dX^2}\sigma^2(X(t),t)\right)dt \\
&\quad +\tfrac{dg(X(t))}{dX}\sigma(X(t),t)dW(t)
\end{aligned}$$

bzw. durch Weglassen des Zeitindex t und des Arguments $X(t)$ der Funktion g und ihrer Ableitungen:

$$dg = \left(\frac{dg}{dX}\mu(X,t) + \frac{1}{2}\frac{d^2g}{dX^2}\sigma^2(X,t)\right)dt + \frac{dg}{X}\sigma(X,t)dW \quad . \tag{E.6}$$

Eine allgemeine Form von Itôs Lemma für Funktionen $g(X,t)$, die auch noch explizit von der Zeit t abhängen dürfen, lautet:

$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial X}\mu(X,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}\sigma^2(X,t) + \frac{\partial g}{\partial t}\right) dt + \frac{\partial g}{\partial X}\sigma(X,t)dW \quad . \tag{E.7}$$

Euler Approximation

Stochastische Differentialgleichungen beschreiben die Zeitentwicklung von zeitstetigen Prozessen. Für eine Simulation und Parameterschätzung eignen sie sich daher nicht. Unter Simulation wird in diesem Zusammenhang die Generierung eines diskreten Pfades als eine mögliche Realisierung des Prozesses verstanden. Es wird daher eine diskrete Approximation benötigt. Die einfachste Approximation dieser Art ist die sogenannte Euler–Approximation (vgl. Kloeden und Platen [51], S. 305 ff.). Ausgangspunkt bildet die allgemeine stochastische Differentialgleichung

$$dX(t) = \alpha(X(t),t)\, dt + \sigma(X(t),t)\, dW(t) \quad ,$$

wobei $dW(t) \sim i.i.d.\ N(0,dt)$. Zunächst wird die Zeit vom Startpunkt t_0 bis zum Endzeitpunkt T in N äquidistante Stücke eingeteilt: $\Delta t = (T - t_0)/N$. Es ergibt sich so eine Folge von äquidistanten Zeitpunkten t_i ($i = 0, 1, \ldots, N$). Als diskrete Approximation X_t für den kontinuierlichen stochastischen Prozess $X(t)$ schreibt man

$$X_{t+\Delta t} - X_t = \alpha(X_t,t)\, \Delta t + \sigma(X_t,t)\, \Delta W_t \quad ,$$

wobei $\Delta W_t \sim i.i.d.\ N(0,\Delta t)$. Für den Wert des Prozesses zum Zeitpunkt $t + \Delta t$, mit gegebenen Wert des Prozesses X zum Zeitpunkt t, ergibt sich:

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \alpha(X_t,t)\, \Delta t + \sigma(X_t,t)\, \Delta W_t \quad .$$

Mit dieser Gleichung lässt sich aus den bekannten Werten zum Zeitpunkt t und einer Realisierung einer normalverteilten Zufallsvariablen der Wert des Prozesses am darauffolgenden Zeitpunkt bestimmen (vgl. Weber [97], S. 18 f.).

Modell für Assetpreise

Nimmt man an, dass der Preis eines Assets der geometrischen Brownschen Bewegung folgt, erhält man über Ito's Lemma für den Logarithmus des Assetpreises:

$$\begin{aligned} dY(t) &= \left(\frac{1}{S(t)}\mu S(t) - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right) dt + \frac{1}{S(t)}\sigma S(t) dW(t) \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW(t) \qquad \text{(E.8)} \end{aligned}$$

Der Logarithmus des Aktienkurses ist also ein allgemeiner Wiener-Prozess mit Driftrate $\mu^* = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ und Diffusionsrate σ^2.

Als zeitdiskrete Approximation der stochastischen Differentialgleichung (E.8) ergibt sich mittels der Euler-Approximation:

$$Y_{t+\Delta t} = Y_t + \mu^* \Delta t + \sigma \Delta W_t \quad ,$$

wobei $\Delta W_t \sim i.i.d.\ N(0, \Delta t)$. Im folgenden werden nur Zeitschritte mit $\Delta t = 1$ betrachtet, d.h.

$$Y_{t+1} = Y_t + \mu^* + \sigma \epsilon_t \quad , \qquad \text{(E.9)}$$

mit $\epsilon_t \sim i.i.d.\ N(0, 1)$. Man erkennt, dass (E.9) der Ausdruck für einen Random Walk ist.

E.3 Erwartungstreuer Schätzer für die q-periodige Varianz

Ausgangspunkt sind folgende $nq - q + 1$ Realisierungen der unabhängig und identisch verteilten q-periodigen Log-Rendite[1] r_q, mit Erwartungswert $q\mu$ und Varianz $\sigma^2(q)$:

$$r_q^q, \ldots, r_q^k, \ldots, r_q^{nq} \quad .$$

Der Erwartungswert wird über das arithmetische Mittel $q\hat{\mu}$ als erwartungstreuem Schätzer geschätzt. Man definiert den folgenden Schätzer für die Varianz $\sigma^2(q)$

[1] Annahme eines Random Walk für die zugrundeliegenden logarithmischen Assetpreise

von r_q:

$$\hat{\sigma}^2(q) = \frac{1}{m}\sum_{k=q}^{nq}(r_q^k - q\hat{\mu})^2 \quad ,$$

mit $m = (nq - q + 1)(1 - \frac{q}{nq})$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sigma^2(q) &= E[r_q^2] - (E[r_q])^2 = E[r_q^2] - (q\mu)^2 \\ &\Rightarrow E[r_q^2] = \sigma^2(q) + (q\mu)^2 \end{aligned} \tag{E.10}$$

und

$$\begin{aligned} var(q\hat{\mu}) &= var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_q\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} var(r_q) = \frac{1}{n}\sigma^2(q) \\ var(q\hat{\mu}) &= E[(q\hat{\mu})^2] - (E[q\hat{\mu}])^2 = E[(q\hat{\mu})^2] - (q\mu)^2 \\ &\Rightarrow E[(q\hat{\mu})^2] = \frac{1}{n}\sigma^2(q) + (q\mu)^2 \end{aligned} \tag{E.11}$$

Über den Verschiebungssatz erhält man

$$\hat{\sigma}^2(q) = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=q}^{nq}(r_q^k)^2 - (nq - q + 1)(q\hat{\mu})^2\right) \quad .$$

Damit folgt für $E[\hat{\sigma}^2(q)]$ mit (E.10) und (E.11)

$$\begin{aligned} E[\hat{\sigma}^2(q)] &= \frac{1}{m}\left(\sum_{k=q}^{nq} E[(r_q^k)^2] - (nq - q + 1)E[(q\hat{\mu})^2]\right) \\ &= \frac{1}{m}\left[(nq - q + 1)(1 - \frac{1}{n})\sigma^2(q)\right] \\ &= \sigma^2(q) \end{aligned}$$

Schreibt man die Renditen r_q als Differenz der logarithmischen Assetpreise $r_q = x_k - x_{k-q}$ erhält man den folgenden erwartungstreuen Schätzer:

$$\hat{\sigma}^2(q) = \frac{1}{m}\sum_{k=q}^{nq}(x_k - x_{k-q} - q\hat{\mu})^2 \quad ,$$

mit $m = (nq - q + 1)(1 - \frac{q}{nq})$.

E.4 Aufzinsung eines gleichmässig kontinuierlich fliessenden Zahlungsstroms

Ausgangspunkt bildet ein Zahlungsstrom insgesamt der Höhe CF, welcher zeitlich gleichmässig verteilt zu n Teilen in der betrachteten Periode fliesst. Der Endwert dieses Zahlungsstroms am Periodenende lässt sich schreiben als

$$D = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{CF}{n} (e^r)^{\frac{n-i}{n}} = \frac{CF}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\underbrace{e^{\frac{r}{n}}}_{=c})^{n-i} \quad ,$$

mit r als der Log-Rendite in der betrachteten Periode. Aus

$$S = c + c^2 + \ldots + c^n$$

$$S - c \cdot S = (1-c) \cdot S = c - c^{n+1}$$

$$S = \frac{c - c^{n+1}}{1-c} = \frac{1-c^n}{\frac{1}{c} - 1}$$

folgt für D:

$$D = CF(1-e^r)\frac{1}{n(e^{-\frac{r}{n}} - 1)} \quad .$$

Fliesst nun der Zahlungsstrom in der Periode kontinuierlich, d.h. zu $n \to \infty$ Teilen erhält man den Grenzwert über die Regel von Bernoulli-de l'Hospital. Es gilt

$$f(x) = \frac{1}{-x}, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2}, \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

und

$$g(x) = e^{\frac{r}{x}} - 1, \quad g'(x) = -\frac{r}{x^2} e^{\frac{r}{x}}, \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0 \quad .$$

Nach Bernoulli-de l'Hopital gilt dann

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{r} \quad .$$

Setzt man $n = -x$ erhält man für $n \to \infty$ für D als Grenzwert

$$D = CF\frac{(e^r - 1)}{r} \quad .$$

Für einen in der t-ten Periode geflossenen Zahlungsstrom CF_t erhält man als Aufzinsungsfaktor bis zum Zeitpunkt T

$$a_t = \frac{(e^{r_{t-1,t}} - 1)}{r_{t-1,t}} e^{r_{t,T}} = \frac{(e^{r_{t-1,T}} - e^{r_{t,T}})}{r_{t-1,t}} \quad .$$

Literaturverzeichnis

[1] ABB Pensionskasse: Geschäftsbericht 2004. *www.abbvorsorge.ch* (2005).

[2] Amt für Gemeinden und berufliche Vorsorge des Kantons Zürich: *Merkblatt zu Art. 44 BVV 2: Meldung von Deckungslücken / Massnahmen.* Zürich: 2002.

[3] Anderson, T.: *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis.* New York: John Wiley & Sons Inc. 1984.

[4] Andersson, H.: Capital budgeting in a situation with variable utilisation of capacity - an example from the pulp industry. *SSS/EFI Working Paper Series in Business Administration No. 1999:4*, Stockholm School of Economics, Stockholm 1999.

[5] Bachelier, L.: Théorie de la spéculation. Reprint in Cootner, P. (Hrsg.): *The random character of stock market prices,* 17-78, Cambridge/Mass.: MIT Press 1964.

[6] Backhaus, K., Erichson, B., Wulff, P., Weiber, R.: *Multivariate Analysemethoden.* Berlin, Heidelberg: Springer Verlag 1994.

[7] Becker, C.: Rechtswörterbuch. *www.rechtswoerterbuch.de* (2006).

[8] Black, F., Scholes, M.: The pricing of options and other corporate liabilities. *Journal of Political Economy,* 81, 637-659 (1973).

[9] Bodmer, D.: *Mean Reversion und Time Varying Expected Returns in internationalen Aktienmärkten.* Dissertation Universität St. Gallen: 1996.

[10] Boemle, M.: *Unternehmungsfinanzierung.* Zürich: SKV 1998.

[11] Brachinger, H. W., Weber, M.: Risk as a Primitive: A Survey on Measures of Perceived Risk. *OR Spektrum*, 19, 235–250 (1997).

[12] Brachinger, H. W.: Das Parameterrisiko von Risikomanagement-Systemen. *Der Schweizer Treuhänder*, 10, 1015-1022 (1998).

[13] Brachinger, H. W.: A Unified Perspective on Standardized Risk Measures, *in Gaul, W., Locarek-Junge, H. (Hrsg.): Classification in the Information Age, 91-99.* Belin, Heidelberg, New York: Springer 1999.

[14] Brühwiler, J.: *Die betriebliche Personalvorsorge in der Schweiz.* Bern: Stämpfli 1989.

[15] Bundesamt für Sozialversicherung: *Mitteilung über die berufliche Vorsorge vom 30. Januar 2002.* Bern: BSV 2002.

[16] Bundesamt für Sozialversicherung: *Statistiken zur Sozialen Sicherheit: IV-Statisitk 2005.* Bern: BSV 2005.

[17] Bundesamt für Sozialversicherung: Erläuterungen zur Verordnung 03 über die Anpassung der Grenzbeträge bei der beruflichen Vorsorge. *www.bsv.admin.ch* (2002).

[18] Bundesamt für Sozialversicherung: Bulletin Berufliche Vorsorge Nr.7 vom 5.Februar 1988. *www.bsv.admin.ch* (2005).

[19] Bundesamt für Statistik: *Sterbetafeln für die Schweiz 1988/1993.* Neuenburg: BFS 1996.

[20] Bundesamt für Statistik: *Kohortensterbetafeln für die Schweiz 1880-1980.* Neuenburg: BFS 1998.

[21] Bundesamt für Statistik: *Pensionskassenstatistik 2000: Die berufliche Vorsorge in der Schweiz.* Neuenburg: BFS 2002.

[22] Bundesamt für Statistik: *Pensionskassenstatistik 2002: Die berufliche Vorsorge in der Schweiz.* Neuenburg: BFS 2004.

[23] Bundesamt für Statistik: *Volkswirtschaftliche Gesamtrechnung 2004*. Neuenburg: BFS 2005.

[24] Campbell, J. Y., Lo, A. W., MacKinlay, A. C.: *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton: Princeton University Press 1997.

[25] Cochrane, J.: How big is the Random Walk in GNP. *Journal of Political Economy*, 96, 893-920 (1988).

[26] Copeland, T. E., Weston, J. F.: *Financial Theory and Corporate Policy*. USA: Addison-Wesley Publishing Company 1988.

[27] Cottin, C., Kurz, A.: Asset-Liability-Management in der Lebensversicherung - eine praxisorientierte Einführung, *in Berichte aus Lehre und Forschung Nr. 16.* Bielefeld: Fachbereich Mathematik und Technik 2003.

[28] Dernierre, O.: La gestion des risques. *Der Schweizer Treuhänder*, 11 (1995).

[29] Eidgenössische Versicherungskasse: *Technische Grundlagen der Eidgenössische Versicherungskasse EVK 2000*. Bern: Eidgenössische Versicherungskasse 2000.

[30] Embrechts, P., McNeil, A., Straumann, D.: Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. *Working paper, ETH Zürich*, 1999.

[31] Fachgruppe Versicherungsmathematik der Prüfungskommission: *Höhere Fachprüfungen füe Pensionsversicherungsexperten: Leitfaden zum Prüfungsfach Versicherungsmathematik*. Basel: 1975.

[32] Fahrmeier, L. (Hrsg.) et al.: *Multivariate statistische Verfahren*. Berlin: de Gruyter 1996.

[33] Fama, E., French, K. : Permanent and Temporary Components of Stock Prices. *Journal of Political Economy*, 96, 246-273 (1988).

[34] Franke, J., Härdle, W., Hafner C.: Einführung in die Statistik der Finanzmärkte. *www.quantlet.de* (2001).

[35] Furrer, C.: *VZ 2000: Technische Grundlagen für Pensionsversicherungen.* Zürich: Versicherungskasse der Stadt Zürich 1999.

[36] Furrer, C.: VZ: Eine wertvolle Alternative. *Schweizer Personalvorsorge*, 2, 119-122 (2001).

[37] Gardiner, C.: *Handbook of Stochasic Methods.* New York: Springer 1985.

[38] GE Frankona RE: ALM - das Modell von GE Frankona und Watson Wyatt. *Hauszeitschrift „Der Markt“*, 4, (2000).

[39] Gupta, A. K., Varga, T.: *An Introduction to Actuarial Mathematics.* Dordrecht, Boston, London: Kluwer 2002.

[40] Hartung, J.: *Statistik.* München: Oldenburg 1995.

[41] Harvey, A.: *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter.* Cambridge University Press 1989.

[42] Helbling, C.: *Personalvorsorge und BVG.* Bern: Haupt 2000.

[43] Hillebrand, E.: *Mean Reversion Models of Financial Markets.* Dissertation Universität Bremen: 2003.

[44] Honerkamp, J.: *Stochastische Dynamische Systeme.* Weinheim: VCH 1990.

[45] Innovation Zweite Säule (Hrsg.): *Asset / Liability-Mangement bei Pensionskassen - Tagungsbericht mit Ergänzungen.* Bern: 2000.

[46] Jost, C.: *ALM bei Versicherungen: Organisation und Techniken.* Dissertation Ludwig-Maximilians-Universität München 1995.

[47] J. P. Morgan: *RiskMetrics Technical Document.* New York: Morgan Guaranty Trust Company 1996.

[48] Kaufmann, R., Patie, P.: Strategic Long-Term Financial Risks Intermediate Report. *www.risklab.ch* (2000).

[49] Kim, J., Malz, A., Mina, J.: *LongRun*^{TM} *Technical Document.* New York: RiscMetrics Group 1999.

[50] Kim, J., Mina, J.: *ClearHorizon^{TM} Technical Document.* New York: RiscMetrics Group 2000.

[51] Kloeden, P. E., Platen, E.: *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1992.

[52] Kneschaurek, F.: Das richtige Zukunftsbild, *in Feyerabend, P., Thomas, C. (Hrsg.): Grenzprobleme der Wissenschaften.* Zürich: Verlag der Fachvereine an den Schweizerischen Hochschulen und Techniken 1985.

[53] Koller, M.: *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer 2000.

[54] Koppenburg, H. [Pensionskassen-Expertin]: Referat „Notwendiges Deckungskaital und Massnahmen bei Unterdeckungen - Beispiele aus der Praxis", gehalten anlässlich des Seminars des Amts für berufliche Vorsorge und Stiftungsaufsicht des Kantons Luzerns für Stiftungsräte/-innen, Geschäftsführer/-innen und Kontrollstellen am 28. November 2002. *www.kammer-pk-experten.ch* (2003).

[55] Koradi, W., Wehrli, U.: Technische Grundlagen privatrechtlicher autonomer Pensionskassen. *Schweizer Personalvorsorge*, 2, 129-131 (2001).

[56] Lang, B., Schneiter, A.: Die neuen Anlagevorschriften nach BVV 2. *Der Schweizer Treuhänder*, 8, 775-780 (2000).

[57] Leydold, J.: *Mathematik für Ökonomen.* München: Oldenburg Verlag 1998.

[58] Lo, A. W., MacKinlay, A. C.: Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test. *Review of Financial Studies*, 1, 41-66 (1988).

[59] Lo, A. W., MacKinlay, A. C.: *A Non-Random Walk Down Wall Street.* New Jersey: Princeton University Press 1999.

[60] Lopez, J. A., Walter, C.A.: Evaluating Covariance Matrix Forecasts in a Value-at-Risk Framework. *FRBSF working paper 2000-21, Federal Reserve Bank of San Francisco* (2000).

[61] Lusenti, G.: *Swiss Institutional Survey: Kommentare zu den Umfrage- Ergebnissen per 30.12.2004.* Nyon: 2005.

[62] MacCrimmon, K. R., Wehrung, D. A.: *Taking Risks.* London 1986.

[63] Mao, J.: Survey of Capital Budgeting: Theory and Practice. *Journal of Finance*, 24, S. 349-360 (1970).

[64] Markowitz, H. M.: *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment.* New Haven: Yale University Press 1959.

[65] Merton, R. C.: Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183 (1973).

[66] Metcalf, G. E, Hasset, K. A.: Investment under Alternative Return Assumptions Comparing Random Walk and Mean Reversion. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 19, 1471-1488 (1995).

[67] Mikosch, T.: *Elementary Stochastic Calculs.* Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific 1998.

[68] Øksendal, B.: *Stochastic Differential Equations.* Berlin: Springer-Verlag 1992.

[69] o.V.: Jede zehnte Einrichtung in Unterdeckung. *Neue Zürcher Zeitung online, www.nzz.ch* (5. Dezember 2005).

[70] Pensionskasse der Credit Suisse Group: Jahresbericht 2004. *www.cspix.ch* (2005).

[71] Pictet & Cie. Banquiers: *BVG-Index: Referenzindex zur Beurteilung der Performance für die Portfoliobewirtschaftung gemäss dem beruflichen Vorsorge-Gesetz (BVG).* Genf: 1999.

[72] Pictet & Cie. Banquiers: BVG-Index 93: Performancezahlen in Prozent von 1985 bis 2004. *www.pictet.com* (2005).

[73] Pictet & Cie. Banquiers: Ablösung der Pictet Obligationenindizes. *www.pictet.ch* (2005).

[74] PRASA Hewitt: Pension Fund Survey - Ein Vergleich der Leistungen von grossen Pensionskassen in der Schweiz. *inside pensions Switzerland*, 10 (2002).

[75] PRASA Hewitt: Technische Grundlagen BVG 2000. *inside pensions Switzerland*, 12 (2003).

[76] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P.: *Numerical Recipies in C - The Art of Scientific Computing.* New York: Cambridge University Press 1992.

[77] Rätzer, E.: Was bedeutet Risikofähigkeit einer Pensionskassse heute? Überprüfung des Asset/Liability Managements. *Schweizer Personalvorsorge*, 3, 33-38 (2004).

[78] Riemer, H. M.: *Das Recht der beruflichen Vorsorge in der Schweiz.* Bern: Stämpfli 1985.

[79] Rolski, T., Schmidli, S., Schmidt, V., Teugels, J.: *Stochastic Processes for Insurance and Finance.* New York: John Wiley & Sons 1999.

[80] Romer, B.: Die Rechnungsgrundlagen bei Vorsorgeeinrichtungen. *Schweizer Personalvorsorge*, 1, 20-24 (1991).

[81] Ross, S.: *An Introduction to Probability Models.* San Diego: Academic Press 1997.

[82] Rüd Blass Privatbank: Rüd Blass Immobilienfonds-Index. *www.ruedblass.ch* (2005).

[83] Ruggli, C.: *Die behördliche Aufsicht über Vorsorgeeinrichtungen.* Basel, Frankfurt: Helbing & Lichtenhahn 1992.

[84] Schnider, M.: Comment interpréter un bilan technique - les réserves? *Schweizer Personalvorsorge*, 4, 65-67 (2003).

[85] Schwartz, E.: The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging. *Journal of Finance*, 52, 923-973 (1997).

[86] Schwarzenbach-Hanhart, H. R.: *Berufliche Vorsorge in Text und Tafeln.* Zürich: Schulthess 1999.

[87] Schweizerische Aktuarvereinigung, Schweizerische Kammer der Pensionskassen-Experten (Hrsg.): *Grundsätze und Richtlinien für Pensionsversicherungsexperten.* Zürich: 1990. [abgedruckt in Helbling [42], S. 766-781]

[88] Schweizerische Aktuarvereinigung, Schweizerische Kammer der Pensionskassen-Experten (Hrsg.): *Grundsätze und Richtlinien 2000 für Pensionsversicherungsexperten.* Zürich: 2000.

[89] Schweizerischer Bundesrat: *Botschaft zur Revision des Bundesgesetzes über die berufliche Alters-, Hinterlassenen- und Invalidenvorsorge (BVG) (1. BVG-Revision) vom 1. März 2000.* Bern: 2000.

[90] Shimko, D. C.: *Finance in Continuous Time.* Miami: Kolb 1992.

[91] Stahel, W. A.: *Statistische Datenanalyse.* Braunschweig/ Wiesbaden: Vieweg & Sohn 2000.

[92] Streit, A.: Technische Grundlagen der AHV/IV. *Schweizer Personalvorsorge*, 2, 115-117 (2001).

[93] Tobin, J.: Liquidity Preference as a Behavior Towards Risk. *Review of Economic Studies*, 25, 65-86 (1958).

[94] Treuhand-Kammer: *Fachmitteilungen der Treuhand-Kammer Nr. 5: Schweizer Kontenrahmen für Personalvorsorgeeinrichtungen.* Zürich: Treuhand-Kammer 1999.

[95] Vorsorgeforum: Die Grundlagen der beruflichen Vorsorge der Schweiz. *www.vorsorgeforum.ch* (2002).

[96] Vorsorgeforum: Institutionen und Organisationen der beruflichen Vorsorge der Schweiz. *www.vorsorgeforum.ch* (2002).

[97] Weber, F.: *Modellrisiko bei Value-at-Risk-Schätzungen: eine empirische Untersuchung für den schweizerischen Aktien- und Optionenmarkt.* Dissertation Universität Freiburg i. Ue.: 2001.

[98] Weibel, H.: „Rentenklau“: eine Realsatire aus dem Polittheater? *Basler Zeitung*, Nr. 230, S. 34 (3. Oktober 2002).

[99] Winkler, G.: *Stochastische Prozesse in der statistischen Modellierung.* Neuherberg: GSF-Forschungszentrum 2000.

[100] Winterthur Leben Vorsorge-Infocenter: 1. BVG-Revision. *www.winterthur-leben.ch* (2005).

[101] Wolfsdorf, K.: *Versicherungsmathematik: Teil 1 Personenversicherung.* Stuttgart: B.G. Teubner 1986.

[102] Zwiesler, H. J.: Vortrag „Asset-Liability Management in der Lebensversicherung - grundlegende Aspekte und praktische Anwendung“, gehalten anlässlich der Euroforum-Konferenz „Gesamtrisikosteuerung im VU“ im Juli 2001.