

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Lehrstuhl für Aerodynamik

DEFORMATION UND ZERFALL VON  
FLUGZEUGWIRBELSCHLEPPEN IN TURBULENTER UND  
STABIL GESCHICHTETER ATMOSPHÄRE

**Dipl.-Ing. Univ. Ingo Hennemann**

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Florian Holzapfel

Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Nikolaus A. Adams

2. apl. Prof. Dr.-Ing., Dr. rer. nat. habil. Ulrich Schumann,  
Ludwig-Maximilians-Universität München

Die Dissertation wurde am 18/11/2009 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 24/02/2010 angenommen.

Hiermit versichere ich, die vorliegende Doktorarbeit unter der Betreuung von Dr.-Ing. habil. Frank Holzäpfel nur mit den angegebenen Hilfsmitteln selbstständig angefertigt zu haben.

Oberpfaffenhofen, den 18/11/2009

# Übersicht

Flugzeugwirbelschleppen leben neueren Beobachtungen zufolge deutlich länger als zumeist angenommen. Nachfolgende Flugzeuge, die in die Wirbelschleppe gelangen, erfahren ein Rollmoment. Die Größe des Rollmoments hängt in einer bisher nicht ausreichend bekannten Weise von der Deformation der Wirbel ab. Daher wird in dieser Arbeit die Dynamik von Wirbelschleppen in der turbulenten und geschichteten Atmosphäre untersucht. Dazu wird der Zerfall der Wirbelschleppe mit Grobstruktursimulationen (LES) untersucht. Insbesondere wurde ein Verfahren entwickelt, welches den Verlauf der Wirbelkernlinie präzise identifiziert und daraus erstmalig die Krümmung dieser Linie abschnittsweise ermittelt. Die Ergebnisse zeigen, dass sich Wirbelringe unerwartet häufig bilden. In Wirbelringen stellt sich eine reduzierte Absinkgeschwindigkeit ein und die Zirkulation orientiert sich aus der Flugrichtung oft in die Richtung parallel zur Spannweite. Die mittleren Krümmungsradien von Einzelwirbeln liegen anfänglich in der Größenordnung des ursprünglichen Wirbelabstands, und werden nach abgeschlossener Ringbildung größer. Das zu erwartende Rollmoment eines nachfolgenden Flugzeugs wird abgeschätzt. Vergleiche mit Feldmessungen und anderen Ergebnissen aus früheren Arbeiten, insbesondere dem EU-Projekt AWIATOR, bestätigen die hier gefundenen Ergebnisse.

## Abstract

Aircraft wake vortices have been observed to often live much longer than expected. Following aircraft encountering the wake vortices experience a rolling moment which depends on the deformation of the vortices. With the help of Large-Eddy Simulations (LES), this work investigates the dynamics of wake vortices in a turbulent and stratified atmosphere. Particularly, a method was developed which precisely determines the vortex core line. For the first time, the curvature of that line was analysed in sections. The results show that the frequency of vortex ring formation is astonishingly high. The descent speed of vortex rings is reduced and the circulation changes from flight direction to span wise direction. Before linking, mean curvature radii of the vortices reduce to the size of one initial vortex spacing. After linking, they may grow again. The expected rolling moment of following aircraft is estimated. In particular, the comparison with field measurement data obtained within the EU project AWIATOR confirms the presented results.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>x</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1 Physik der Wirbelschlepe . . . . .	5
2.2 Wirbelmodelle und wichtige Parameter . . . . .	7
2.3 Zerfall von Wirbelschleppen in der geschichteten, turbulenten Atmosphäre . . .	11
2.3.1 Temperaturschichtung . . . . .	12
2.3.2 Turbulenz . . . . .	12
2.3.3 Zerfallsmechanismen . . . . .	14
2.3.4 Probabilistische Betrachtungsweise . . . . .	16
2.4 Gefahrenpotential des Einflugs in deformierte Wirbelschleppen . . . . .	17
2.5 Numerischer Ansatz . . . . .	18
2.5.1 Mathematische Formulierung von LESTUF . . . . .	19
2.5.2 Schließungsmodell nach Smagorinsky inklusive NaCoo-Korrektur . . . .	23
2.5.3 Diskretisierung . . . . .	25
2.5.4 Initialisierung des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes in LESTUF . . .	25
2.5.5 Einfluss der Boussinesq-Approximation . . . . .	27
2.5.6 Einordnung von LESTUF bezüglich anderer Codes . . . . .	32
<b>3 Auswerteverfahren</b>	<b>35</b>
3.1 Bestimmung der Wirbelkernlinie . . . . .	35
3.2 Zirkulationsbestimmung entlang der Wirbellinie . . . . .	39
3.3 Bestimmung von Lagewinkeln, Kernradius, maximaler Tangential- und Axial- geschwindigkeit . . . . .	41
3.4 Bestimmung der Krümmung der Wirbelkernlinie . . . . .	41
3.4.1 Segmentlänge zur Krümmungsbestimmung . . . . .	42
3.4.2 Suchalgorithmus . . . . .	44
<b>4 Ergebnisse</b>	<b>49</b>
4.1 Eigenschaften des turbulenten Feldes . . . . .	49
4.2 Typische Entwicklungsmerkmale . . . . .	54
4.2.1 Instabilitäten . . . . .	54
4.2.2 Ringbildung (Linking) . . . . .	57
4.2.3 Räumliche Zirkulationsverteilung . . . . .	60
4.2.4 Wirbelaufplatzen . . . . .	63

---

4.2.5	Teilung des Wirbelrings . . . . .	68
4.3	Zeitliche Entwicklung des Zerfalls in Abhängigkeit der meteorologischen Bedingungen . . . . .	69
4.3.1	Absinkgeschwindigkeit und Absinktiefe . . . . .	75
4.3.2	Krümmungsradien . . . . .	78
4.3.3	Inklinations-, Azimuth- und Kippwinkel . . . . .	85
4.4	Statisches Rollmoment . . . . .	88
4.4.1	Zugrundeliegende Gleichungen . . . . .	88
4.4.2	Numerische Umsetzung und Vergleich mit anderen Modellen . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>95</b>
5.1	Einordnung der Ergebnisse im Kontext anderer Forschungsarbeiten . . . . .	95
5.1.1	Proctor & Sarpkaya . . . . .	95
5.1.2	Delisi & Robins . . . . .	98
5.1.3	Holzäpfel . . . . .	102
5.1.4	AWIATOR . . . . .	105
5.2	Zusammenfassung und Ausblick . . . . .	119
5.2.1	Der Zeitpunkt der Ringbildung . . . . .	120
<b>6</b>	<b>Schlussfolgerungen</b>	<b>123</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>127</b>
<b>A</b>	<b>Herleitung des Auftriebtheorems von Kutta-Joukowski</b>	<b>133</b>
A.1	Druckkoeffizient des umströmten Wirbels . . . . .	133
A.2	Berechnung der Auftriebskraft . . . . .	134
<b>B</b>	<b>Herleitung des zerfließenden Potentialwirbels</b>	<b>136</b>
<b>C</b>	<b>Abschätzung des Kernradius aus dem induzierten Widerstand</b>	<b>139</b>
<b>D</b>	<b>Smagorinsky-Konstante in homogen-isotroper Turbulenz</b>	<b>141</b>
<b>E</b>	<b>Krümmungsmaxima einer perfekten Crow-Instabilität</b>	<b>143</b>



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Wirbelschleppenstaffelung nach den Vorschriften der ICAO, siehe Breitsamter (2007). . . . .	2
2.1	Anströmung des Tragflügelprofils und Zirkulationsablösung zur Wirbelschleppenformation . . . . .	6
2.2	Vertikalgeschwindigkeitsprofil für linken und rechten Einzelwirbel des Wirbelpaars. . . . .	8
2.3	Zirkulation und resultierender Referenzwert der Zeit für verschiedene Flugzeugtypen . . . . .	10
2.4	Das Wirbelschleppenvorhersagesystem WSVBS. . . . .	16
2.5	Resultierender Rollwinkel $\varphi$ in Abhängigkeit des horizontalen ( $\psi$ ) und vertikalen ( $\gamma$ ) Einflugwinkels zu den Zeitpunkten Wirbelinitialisierung (a), beginnende Entwicklung der Crow-Instabilität (b), kurz vor der Ringbildung (c), frühes Ringstadium (d). . . . .	19
2.6	a) Geschwindigkeitskomponenten beider Wirbel (dünne Pfeile) an zwei ausgewählten Randmaschen inklusive ihrer Resultierenden (dicke Pfeile). b) Verlauf der Horizontalgeschwindigkeit $v$ über den Rand des Rechengebiets hinweg, wobei die $y$ -Position der des linken Wirbels in a) entspricht. . . . .	21
2.7	Normierter Geschwindigkeits- und Druckverlauf eines Rankine-Wirbels inklusive Vergleichstangente des hydrostatischen Druckgradienten zur analytischen Abschätzung der Beeinflussung der Simulationsergebnisse durch die Boussinesq-Approximation. . . . .	30
2.8	Baroklin erzeugte Wirbelstärke bei [ $\epsilon^* = 0.01, N^* = 1$ ] zu den Zeitpunkten $t^* = 0, t^* = 1$ und $t^* = 2$ , wobei links der (in LESTUF nicht zur baroklinen Wirbelstärke beitragende) Gradient $\partial p / \partial y \partial \theta / \partial z$ und rechts der (in LESTUF zur baroklinen Wirbelstärke beitragende) Gradient $\partial p / \partial z \partial \theta / \partial y$ dargestellt ist. . . . .	31
3.1	Isoflächen der getesteten Korrekturparameter a) $ \vec{\omega} $ , b) $\lambda_2$ , c) $i_\kappa$ und d) $p$ inklusive gefundener Wirbelkernlinie und zugehöriger farbkodierter Zirkulation $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$ , soweit möglich. . . . .	37
3.2	Schema des neuen Prädiktor-Korrektor Algorithmus. . . . .	38
3.3	Ausschnitt der Berechnungsebene für $\Gamma_{5-15}^*$ , wobei durchgezogene Linien die Kreis- bzw. Ringflächen zeigen und (x) die Stellen der verwendeten Wirbelstärkewerte repräsentieren. . . . .	40
3.4	Frontalansicht zu $t^* = 8.8$ und Drauf- und Seitenansicht zu $t^* = 9.4$ der zerfallende Wirbelschleppe nach abgeschlossener Ringbildung [ $\epsilon^* = 0.01, N^* = 0$ ]. . . . .	42
3.5	Vergleich der berechneten Krümmungsradien bei verschiedenen zugrundeliegenden Wirbelsegmentlängen. . . . .	43

3.6	Zeitlicher Verlauf der mittleren Krümmungsradien und ihrer Standardabweichung in a) turbulenzdominierter Atmosphäre [ $\epsilon^* = 0.23, N^* = 0$ ] bzw. b) in schichtungsdominierter Atmosphäre [ $\epsilon^* = 0.01, N^* = 1$ ] in Abhängigkeit der Länge der Suchsegmente. . . . .	44
3.7	Oben die aktuelle Wirbelkernlinie zu $t^* = 5.25$ mit Positionsnummern, anhand welcher unten je nach Segmentlänge verschiedene Krümmungsradien ermittelt wurden [ $\epsilon^* = 0.23, N^* = 0$ ]. . . . .	45
3.8	Funktion des Krümmungsalgorithmus in Einzelschritten . . . . .	46
3.9	Häufigkeiten aller Krümmungsradien bis $30 b_0$ in mäßig turbulenter, moderat geschichteter Atmosphäre [ $\epsilon^* = 0.05, N^* = 0.35$ ] vor ( $t^* = 5.9$ ), während ( $t^* = 6.2$ ) und nach ( $t^* = 6.6$ ) dem Linking. Die im weiteren Verlauf der Arbeit verwendete Obergrenze von $6 b_0$ ist hinzugefügt. . . . .	47
4.1	Entwicklung des Energiespektrums von der Initialisierung bis zum Wirbeleinsatz für die Simulationen a) [ $\epsilon^* = 0.23, N^* = 1, L_x/L_y \approx 1.5$ ] und b) [ $\epsilon^* = 0.23, N^* = 0, L_x/L_y \approx 1$ ]. . . . .	52
4.2	Häufigkeit der mit den Parametern des A340-300 normierten turbulenten Dissipationsraten $\epsilon^*$ in verschiedenen Höhen aus Lidarmessungen am Flughafen Frankfurt im September 2004. . . . .	53
4.3	Wellenlänge der Crow-Instabilität bei reduziertem Wirbelabstand zum Zeitpunkt $t^* = 3.6$ mit farbkodierter normierter Zirkulation $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$ . . . . .	55
4.4	Crow-Instabilität und elliptische Instabilität . . . . .	56
4.5	Kurzwellige elliptische Instabilität kombiniert mit der Crow-Instabilität (Foto: Holzäpfel, 2009), welche durch Kondensstreifen sichtbar gemacht wurden. . . . .	56
4.6	Der Ringbildungsprozess in 12 Einzeldarstellungen, wobei sich Wirbelstärke umorientiert (vortex tilting) . . . . .	58
4.7	Sogenannter „Bridging“-Prozess zum Zusammenschluss zu Wirbelringen (Steijl (2001) und Kida & Takaoka (1994)) . . . . .	59
4.8	Durch Isodruckflächen dargestellte „Brücke“ und „Brückenstege“ im Auflösungsbereich, wobei letzterer am charakteristischer ausgebildeten linken Ende bereits nach oben gewandert ist (siehe auch Abb. 4.6 zu $t^* = 8.85$ ). . . . .	59
4.9	Zeitlicher Verlauf von geometrischer Form und farbkodierter Zirkulation $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$ in 6 Einzeldarstellungen im frühen Wirbelringstadium [ $\epsilon^* = 0.05, N^* = 0$ ]. . . . .	61
4.10	a) Tangentialgeschwindigkeitsprofil eines Rankinewirbels mit großem (1) und kleinem (2) Kernradius, b) Tangentialgeschwindigkeits- (rot) und Zirkulationsverlauf (blau) eines Lamb-Oseen Wirbels für beide Kernradien (1) und (2). . . . .	63
4.11	Axialgeschwindigkeit normiert über die pro Zeitpunkt gemittelte Tangentialgeschwindigkeit am Kernradius während und nach der Ringbildung in 8 Einzeldarstellungen [ $\epsilon^* = 0.05, N^* = 0$ ]. . . . .	65
4.12	Entwicklung des Kernradius nach abgeschlossener Ringbildung zu 4 aufeinanderfolgenden Zeitpunkten. . . . .	66
4.13	Zeitliche Verläufe a) des Verhältnisses Axialgeschwindigkeit zu Tangentialgeschwindigkeit inklusive Standardabweichung und b) des normierten Kernradius inklusive Standardabweichung. . . . .	66
4.14	Tracerkonzentration des hinteren Wirbels inklusive der Druckisolinie zur Kennzeichnung des Wirbelzentrums zum Zeitpunkt des bereits deutlich verformten Wirbelrings. . . . .	67

4.15	Zweigeteilter Wirbelring bei $t^* \approx 12$ mit farbkodierter Restzirkulation und Iso-druckflächen der LES mit $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0, L_t/b_0 = 0.66]$ . . . . .	68
4.16	Fotobeispiele für Wirbelringe in mittlerem und spätem Stadium . . . . .	69
4.17	Verlauf der normierten Zirkulation $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$ und $\Gamma_{5-15}^*$ über normierte Zeit $t^*$ (oben) inklusive einer zusätzlichen detaillierteren Betrachtung (unten) aller Simulationen der $\epsilon$ - $N$ -Parametermatrix. . . . .	70
4.18	Primäre- und sekundär Wirbelstärke der LES mit $[\epsilon^* = 0.01, N^* = 1]$ komponentenweise (braun: $\omega_x$ , lila: $\omega_y$ und blau: $\omega_z$ ). . . . .	73
4.19	a) Zirkulationsverläufe und b) spektrale Energiedichteverteilung aufgetragen über die dimensionslose Wellenzahl $k$ für $\epsilon^* = 0.23$ und $N^* = 0$ mit variierenden integralen Längen. . . . .	74
4.20	Zustand des Wirbelrings für a) $L_t/b_0 = 0.85$ und b) $L_t/b_0 = 0.41$ zu $t^* = 6.8$ . . . . .	75
4.21	Verlauf der Absinktiefe $\Delta z/b_0$ über $t^*$ der $\epsilon$ - $N$ -Matrix und mit variierenden integralen Längen. . . . .	76
4.22	Über die gesamte Wirbelkernlinie gemittelte Krümmungsradien inklusive Standardabweichung. . . . .	79
4.23	Mittlere Abweichung der erzielten Krümmungsradien von der Wirbelkernlinie inklusive Standardabweichung. . . . .	80
4.24	Krümmungsergebnisse für $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0]$ . Von links oben zeilenweise nach rechts unten: Wirbelring zu $t^* = 5.2$ inklusive Position der Wirbelkernlinie, zugehörige Krümmungsradien, resultierende Häufigkeitsverteilung, kombinierte Häufigkeitsverteilung von Krümmung und Zirkulation. . . . .	81
4.25	Häufigkeitsverteilungen der dominierenden Krümmungsradien bei $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0, L_t/b_0 = 0.41]$ zu den Zeitpunkten $t^* = [3.7, 3.8, 5.0, 6.0]$ . . . . .	82
4.26	Häufigkeitsverteilungen der dominierenden Krümmungsradien bei $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0, L_t/b_0 = 0.85]$ zu den Zeitpunkten $t^* = [3.7, 3.8, 5.0, 6.0]$ . . . . .	83
4.27	Häufigkeitsverteilungen der dominierenden Krümmungsradien bei $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 1, L_t/b_0 = 0.41]$ zu den Zeitpunkten $t^* = [2.1, 2.5, 2.9, 3.3]$ . . . . .	83
4.28	Häufigkeiten aller Simulationen der $\epsilon$ - $N$ -Parametermatrix für Krümmungsradien von $r_\kappa < 1.5 b_0$ , $1.5 b_0 < r_\kappa < 5.5 b_0$ oder $r_\kappa > 5.5 b_0$ . . . . .	84
4.29	Häufigkeit des Krümmungsradius in Abhängigkeit der Zirkulation für alle Fälle der $\epsilon$ - $N$ -Parametermatrix. . . . .	85
4.30	Häufigkeitsverteilungen der Lagewinkel in Abhängigkeit der Zirkulation $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$ . . . . .	86
4.31	Häufigkeiten der LES mit variierenden integralen Längen für $ \varphi  < 5^\circ$ , $5^\circ <  \varphi  < 10^\circ$ , $10^\circ <  \varphi  < 15^\circ$ und $15^\circ <  \varphi  < 30^\circ$ . . . . .	87
4.32	Vergleich der Rollmomentenberechnung mit Referenzwerten von Vechtel und Schwarz (DLR Braunschweig, persönliche Mitteilung, August 2008). . . . .	91
4.33	RCR im Fall $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0, L_t/b_0 = 0.66]$ zu $t^* = 10$ an der Stelle maximaler Breite inklusive Wirbelkernlinie. . . . .	92
4.34	Maximales Rollmoment und über die Rechengebietslänge (x-Richtung) gemitteltes maximales Rollmoment für die Fälle (zeilenweise von links oben nach rechts unten) $[\epsilon^* = 0.01, N^* = 0]$ , $[\epsilon^* = 0.01, N^* = 1]$ , $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0]$ und $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 1]$ . . . . .	93
4.35	Auf die Fluggeschwindigkeit normierte Vertikalgeschwindigkeit $w/U$ in der Ebene des maximalen Rollmoments bei $z/b_0 = -4.05$ mit der der Zirkulation $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$ entsprechenden farbkodierten Wirbelkernlinie. . . . .	94

5.1	Vergleich der zeitlichen Zirkulationsverläufe von $\Gamma_{5-15}^*$ zu Proctor & Switzer (2000) für gleiche Dissipationsrate $\epsilon^*$ und Schichtung $N^*$ , aber verschiedener integraler Länge: Proctor $L_t/b_0 = 0.94$ , Hennemann $L_t/b_0 = 0.41$ bzw. $L_t/b_0 = 0.85$ . . . . .	97
5.2	Vergleich der normierten Absinkttiefen $\Delta z^*$ anhand der Daten und Parameter aus Abb. 5.1. . . . .	97
5.3	Zeitpunkt des Linkings aus verschiedenen Studien, aus Sarpkaya et al. (2001). . . . .	98
5.4	Im Wasserschleppkanal innerhalb des Kernradius bestimmte Zirkulationswerte in Ebenen orthogonal zur Flugrichtung und orthogonal zur Spannweitenrichtung (Donald Delisi, persönliche Mitteilung, 2001). . . . .	99
5.5	a) Zeitpunkt des Linkings $T^*$ und b) erzielte Absinkttiefen $H$ im Wasserschleppkanal in Abhängigkeit von $\epsilon^*$ und prognostiziert durch das Modell von Sarpkaya (1998) in Delisi (2006). . . . .	101
5.6	In Diffusions- und schnelle Zerfallsphase aufgeteilte Zirkulations- und Absinkverläufe bei $N^* = 0$ . . . . .	102
5.7	Vergleich der Zirkulation $\Gamma_{5-15}^*$ von Holzäpfel et al. (2001) mit $[\epsilon^* = 0.06, L_t > 1]$ zu $[\epsilon^* = 0.05, L_t/b_0 = 0.41]$ , $[\epsilon^* = 0.23, L_t/b_0 = 0.41]$ und $[\epsilon^* = 0.23, L_t/b_0 = 0.85]$ . . . . .	103
5.8	Ausführlich analysierte Messung von Zirkulations- und Positionsverlauf einer Wirbelschlepe eines A340 des Flugs 2-04 aus dem Projekt AWIATOR. Vergleichswerte sind prognostizierte Daten aus P2P und hier erzielte Ergebnisse aus LESTUF. . . . .	106
5.9	Geometrie des Wirbelrings in Drauf- und Seitenansicht für $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0]$ bei $t^* = 6.7$ . . . . .	107
5.10	Messflug FT 1-12. . . . .	109
5.11	Messflug FT 1-11. . . . .	110
5.12	Messflug FT 2-11. . . . .	110
5.13	Messflug FT 2-03. . . . .	111
5.14	Messflug FT 1-10. . . . .	111
5.15	Messflug FT 1-04. . . . .	112
5.16	Messflug FT 2-13. . . . .	112
5.17	Maximal erzielte Absinkttiefen aus LES, AWIATOR Messungen und Vergleichsdaten von Delisi & Robins (2000). . . . .	113
5.18	Videsequenz aus Flug 7 im Rahmen von AWIATOR. . . . .	115
5.19	Ermittlung der Krümmung aus Videodaten der AWIATOR Messkampagne. . . . .	117
5.20	Vergleichende LES aus Tabelle 5.4 zur Zeit $t^* = 6.4$ mit farbkodierter Zirkulation oben und zugehörige Häufigkeitsverteilung der zweidimensionalen Krümmungsradien unten. . . . .	118
C.1	Analytische Abhängigkeit von $r_c/b_0$ bezüglich Lastfaktor $s$ und bezüglich des für den induzierten Widerstand relevanten Anteils des Oswaldfaktors $e_{ind}$ für wichtige Wirbelmodelle. . . . .	140

# Tabellenverzeichnis

4.1	Übersichtstabelle der durchgeführten LES . . . . .	51
4.2	Turbulente Dissipationsrate und eindimensionale turbulente integrale Längenskalen (gemittelt über die Flugrichtung) in Abhängigkeit der Höhe über dem Meer aus Messdaten des Projekts QUANTIFY. . . . .	53
4.3	Zusammenhang zwischen der Sichtbarkeit elliptischer Instabilitäten und der Zerfallsbeschleunigung $a$ . . . . .	71
4.4	Größte erzielte Absinktiefen in Abhängigkeit der Temperaturschichtung. . . . .	78
5.1	Zeitpunkt der (beginnenden) Ringbildung der $\epsilon$ - $N^*$ -Parametermatrix. . . . .	100
5.2	Auflistung der langlebigsten, vom Lidar detektierbaren Wirbelschleppen eines A340. . . . .	108
5.3	Subjektive Einschätzung anhand verschiedener Kriterien, ob sich Wirbelringe gebildet haben könnten. . . . .	114
5.4	Meteorologische Bedingungen während der Messflüge aus AWIATOR und sich ergebende Zeitpunkte des ersten Linkings und der maximalen Detektierbarkeit. . . . .	116
B.1	Dimensionsanalyse für Gl. (B.3) zur Berechnung des Lamb-Oseen Wirbels. . . . .	136

# Abkürzungsverzeichnis

Bezeichnung	Bedeutung	Einheit
$A$	Fläche	$\text{m}^2$
$a$	Zerfallsbeschleunigungsverhältnis, siehe Gl. (4.4)	–
$B$	Spannweite	m
$b$	Wirbelabstand ( $= sB$ )	m
$C_l$	Rollmomentenbeiwert	–
$C_{l,WV}$	von der Wirbelschlepe verursachter Rollmomentenbeiwert	–
$C_{l,a/c}$	vom Flugzeug generierter maximaler Rollmomentenbeiwert	–
$c$	Flügeltiefe	m
$c_a$	Auftriebsbeiwert	–
$c_{a,\alpha}$	Auftriebskoeffizient	–
$c_k$	Kolmogorov-Konstante	–
$c_s$	Smagorinsky-Konstante	–
$c_w$	auftriebsabhängiger Widerstandsbeiwert	–
$E$	Energie	J
$\hat{E}$	dreidimensionale Energiedichtefunktion	$\text{m}^2/\text{s}^2$
$e$	Oswald-Faktor	–
$e_{ind}$	Anteil des Oswald-Faktors, der aufgrund der nicht vollständig elliptischen Auftriebsverteilung zum induzierten Widerstand beiträgt	–
$F_a$	Auftriebskraft	N
$G$	LES Filterfunktion	–
$g$	Erdbeschleunigung	$\text{m}/\text{s}^2$
$H$	Höhe	m
$H_p$	Skalenhöhe des Drucks	m
$H_\rho$	Skalenhöhe der Dichte	m
$H_\theta$	Skalenhöhe der potentiellen Temperatur	m
$i_\kappa$	Index gewichteter Krümmungsmittelpunkte	–
$k$	Wellenzahl	–

$k_p$	Wellenzahl maximaler Energie	–
$L$	Rollmoment	Nm
$L_t$	spektral ermitteltes turbulentes integrales Längenmaß (siehe Gl. (2.38))	m
$L_{t,ij,k}$	turbulentes integrales Längenmaß der Geschwindigkeiten $u_i$ und $u_j$ , gemittelt über die Richtung $k$ (siehe Gl. (2.13))	m
$L_x, L_y, L_z$	Länge des Rechengebiets	m
$M$	Flugzeugmasse	kg
$N$	Brunt-Väisälä Frequenz	1/s
$N^*$	normierte Brunt-Väisälä Frequenz (siehe Gl. (2.11))	–
$Pr_t$	turbulente Prandtlzahl	–
$p$	Druck	N/m <sup>2</sup>
$q$	Staudruck	N/m <sup>2</sup>
$R$	Durchmesser des Wirbelrings	m
$R_{ij}$	Korrelationstensor der Geschwindigkeitsfluktuationen	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
$RCR$	Rollkontrollverhältnis ( $= C_{l,WV}/C_{l,a/c}$ )	–
$Ri$	rotatorische Richardsonzahl	–
$r$	Radius	m
$r_c$	Kernradius	m
$r_\kappa$	Krümmungsradius	m
$S$	Flügelfläche	m <sup>2</sup>
$S_{ij}$	Deformationstensor	1/s
$s$	Lastfaktor der Auftriebsverteilung	–
$T$	Periodendauer für selbstinduzierte Verformung elliptischer Wirbelringe	s
$T^*$	Zeitpunkt der beginnenden Ringbildung	s
$T_1^*, T_2^*, T_{2,0}^*$	Berechnungsparameter für P2P	s
$t_0$	charakteristische Zeit, siehe Gl. (2.8)	s
$U$	Fluggeschwindigkeit	m/s
$U_{jet}$	Ausströmgeschwindigkeit des Triebwerksjets	m/s
$u, v, w$	kartesische Geschwindigkeitskomponenten (axial, horizontal, vertikal)	m/s
$\overline{uu}, \overline{vv}, \overline{ww}$	gleichgerichtete Geschwindigkeitskorrelationen (axial, horizontal, vertikal)	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
$V_{ax}$	Axialgeschwindigkeit im Wirbelkern	m/s
$v_r, v_\theta, v_{ax}$	Radial-, Tangential- und Axialgeschwindigkeit des Wirbels	m/s

$w_0$	selbstinduzierte Absinkgeschwindigkeit, siehe Gl. (2.7)	m/s
$w_{Ring}$	selbstinduzierte Absinkgeschwindigkeit des Wirbelrings, siehe Gl. (4.5)	m/s
$x, y, z$	kartesische Koordinaten (axial, lateral, vertikal)	m
$\alpha$	Einstellfaktor für NaCoo Schliessungskorrektur	–
$\alpha_{eff}$	effektiver Anstellwinkel	◦
$\beta$	Wärmeausdehnungskoeffizient	1/K
$\gamma$	Inklinationswinkel bzgl. der Flugrichtung	◦
$\Delta$	Schrittweite des Rechengitters	m
$\delta_{ij}$	Kronecker-Symbol	–
$\epsilon$	turbulente Dissipationsrate der Energie	m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>
$\epsilon^*$	normierte turbulente Dissipationsrate (siehe Gl. (2.19))	–
$\Gamma$	Zirkulation	m <sup>2</sup> /s
$\Gamma_{5-15}$	Zirkulation flugzeugrelevanter Radien in Ebenen orthogonal zur Flugrichtung, siehe Gl. (2.9)	m <sup>2</sup> /s
$\tilde{\Gamma}_{5-15}$	Zirkulation flugzeugrelevanter Radien in Ebenen orthogonal zur Wirbelkernlinie, siehe Erklärung in Kap. 3.2	m <sup>2</sup> /s
$\Lambda$	Flügelstreckung ( $= B^2/S$ )	m
$\lambda_2$	Zweiter Eigenwert des Geschwindigkeitsgradiententensor zur Wirbelidentifikation aus Jeong & Hussain (1995)	–
$\lambda_{Crow}$	Wellenlänge der Crow-Instabilität	m
$\lambda_{ellipt}$	Wellenlänge der elliptischen Instabilität	m
$\mu$	Kolmogorov'sche Mikrolänge	m
$\nu$	laminare Viskosität	m <sup>2</sup> /s
$\tilde{\nu}_t$	(vorläufige) turbulente Viskosität	m <sup>2</sup> /s
$\nu_t$	modifizierte turbulente Viskosität (NaCoo, Holzäpfel (2004))	m <sup>2</sup> /s
$\nu_1^*, \nu_2^*$	Berechnungsparameter für P2P	m <sup>2</sup> /s
$\Pi$	Schwerepotential	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
$\Phi$	Spektraltensor des Geschwindigkeitskorrelationstensors	–
$\varphi$	Kippwinkel der Wirbelröhren	◦
$\Psi_{ij}$	Spektrale Energiedichteverteilungen	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
$\psi$	Azimuthwinkel bzgl. der Flugrichtung	◦
$\omega$	Vorticity	1/s
$\rho$	Dichte	kg/m <sup>3</sup>
$\Theta$	Potentielle Umgebungstemperatur	K

---

$\theta$	Potentielle Temperatur	K
$\tau_{ij}^{mod}$	Zusatzterm zur Feinstrukturmodellierung der Geschwindigkeitsfluktuationen	$\text{m}^2/\text{s}^2$
$\tau_{\theta j}^{mod}$	Zusatzterm zur Feinstrukturmodellierung der Temperaturfluktuationen	$\text{m}^2/\text{s}^2$
$\xi, \psi, \zeta$	lokale kartesische Koordinaten (axial, lateral, vertikal)	m



# 1 Einleitung

„Ohrenbetäubender Lärm, Stau auf der A96 und über 1.000 Anrufer beim Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt. Verängstigte Anwohner vermuteten Kraftstoffmangel oder Flugzeugentführung.“ So oder ähnlich lauteten die Meldungen in der Presse im Juli 2006, als ein Airbus A380 und eine Boeing B747 über mehrere Stunden im Tiefflug über den Flughafen Oberpfaffenhofen kreisten. Der tatsächliche Grund für diese Überflüge war hingegen die präzise Messung von Flugzeugwirbelschleppen, um daraus Empfehlungen für die erforderlichen Sicherheitsabstände hinter dem neuen Großraumflugzeug A380 abzuleiten.

Wirbelschleppen bestehen zumeist aus einem Paar gegensinnig rotierender Nachlaufwirbel, die sich im äußeren Bereich der Flügel ablösen und deren Beständigkeit so hoch ist, dass nachfolgende Flugzeuge gefährdet werden können. Daher müssen zur Gewährung ausreichender Sicherheit Staffelungsabstände zwischen aufeinanderfolgenden Flugzeugen eingehalten werden.

Wirbelschleppen sind umso stärker, je schwerer das Flugzeug, und umso schwächer, je größer die Spannweite oder die aktuelle Fluggeschwindigkeit sind. Am Kernradius wird die maximale Tangentialgeschwindigkeit erreicht, die für aktuelle Verkehrsflugzeuge in einer Größenordnung von bis zu  $100 \text{ km/h}^1$  liegen kann. Dadurch entstehen beim Einflug eines nachfolgenden Flugzeugs sowohl enorme strukturelle Belastungen als auch extreme Anforderungen an die Flugsteuerung, diese Kräfte auszugleichen. Die in dieser Arbeit verwendete Abschätzung des Gefährdungspotentials bezieht sich grundsätzlich auf Belastungen, die die Struktur des nachfliegenden Flugzeugs als Ganzes betrachten. Dies kann zu ausgeprägten Rollmomenten führen, hingegen werden lokal auftretende maximale Strukturbeanspruchungen vernachlässigt.

Es ergeben sich hieraus Gefährdungsbereiche, die nachfolgende Flugzeuge bei der Wahl ihrer Flugroute vermeiden sollten, weil sie darin heftige Kräfte und Momente erfahren. Dies kann im schlimmsten Fall den Absturz des Luftfahrzeugs verursachen. Prominentestes Beispiel der letzten Jahre ist das Flugzeugunglück über New York im November 2001, bei welchem der Pilot eines Airbus A300 in die Wirbelschleppe einer vorausfliegenden Boeing B747 gelangte. Um den Kräften der Wirbelschleppe entgegenzuwirken, führte er extreme Steuermanöver aus, die zum Abreißen des Seitenleitwerks und in der Folge zum Absturz des Flugzeugs führten (Breitsamter, 2007).

Besondere Bedeutung haben Wirbelschleppen im Nahbereich großer Flughäfen, wo sich besonders viele Flugzeuge in einem eng begrenzten Luftraum aufhalten. Zur optimalen Nutzung der Flughafenkapazität soll der Staffelungsabstand zweier aufeinanderfolgender Flugzeuge möglichst gering gehalten werden. Dabei wird unterschieden zwischen Radarstaffelung, bei welcher die präzise Zuordnung der Flugzeuge anhand von Radardaten erfolgt, und Wirbelschleppenstaffelung, bei welcher die Klassifizierung der Flugzeuge je nach Gewicht entscheidend ist. Die Mindeststaffelungsabstände der ICAO (International Civil Aviation Organization) unterscheiden dabei die drei Klassen leicht („S“, bis 7 000 kg), mittel („M“, bis 136 000 kg) und schwer

---

<sup>1</sup>Zugrunde liegen hierbei die Flugzeugparameter eines landenden Airbus A380-800 mit einem angenommenen Kernradius von  $r_c = 3 \text{ m}$  und einer Zirkulation von  $\Gamma = 750 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ , siehe Gl. (2.10) und Gl. (2.2) bzw. Gerz et al. (2002)

(„H“, größer als 136 000 kg), wobei den aufeinanderfolgenden Flugzeugkombinationen entsprechende Mindestabstände zugeordnet sind, die in Abbildung 1.1 dargestellt sind (Breitsamter, 2007). Spätestens seit der Einführung des Airbus A380 im Linienbetrieb wird aufgrund der großen Variabilität innerhalb der einzelnen Klassen offensichtlich, dass eine Neugestaltung dieser Klassen erforderlich ist.

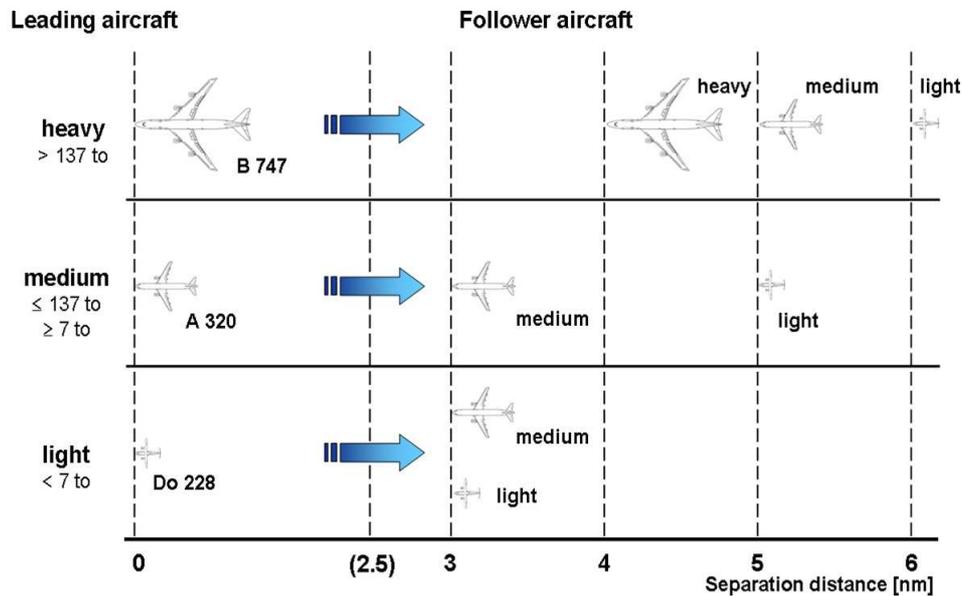


Abbildung 1.1: Wirbelschleppenstaffelung nach den Vorschriften der ICAO, siehe Breitsamter (2007).

Prinzipiell trägt nach wie vor der Pilot die Verantwortung für die Einhaltung der Flugroute und damit für die Sicherheit des Flugzeugs. Daher darf er den Sicherheitsabstand im gegenseitigen Einvernehmen mit dem verantwortlichen Fluglotsen unter den vorgegebenen Mindestabstand reduzieren, wenn die Sicht ausreichend gut ist. Da dies im Sinne von Flughafenbetreibern, Fluggesellschaften und Flugsicherung ist, sind diese Unterschreitungen der Wirbelschleppenstaffelung an Großflughäfen und insbesondere zu Stoßzeiten tägliche Praxis.

Hingegen zeigen Simulationen und Experimente im Wasserschleppkanal oder Lidarmessungen der letzten Jahre, dass Wirbelschleppen deutlich länger leben können als bisher angenommen (Holzäpfel et al., 2006). Es werden Lebenszeiten erreicht, die das durchschnittliche Zeitintervall beim Start- bzw. Landeanflug häufig und bei weitem überschreiten. Auch die Stärke der Wirbelschleppe kann zu späten Zeitpunkten noch hohe Werte mit beträchtlichem Gefährdungspotential erreichen. Dass trotzdem nur selten Unfälle aus Wirbelschleppeneinflügen resultieren, hat verschiedene Ursachen.

Da die Wirbelröhren sich gegenseitig eine Absinkgeschwindigkeit induzieren, haben direkt nachfolgende Flugzeuge auf der gleichen Höhe im Allgemeinen keine Auswirkungen zu erwarten, da die Wirbelschleppe zwischenzeitlich aus dem Flugkorridor heraus nach unten abgesunken ist. Allerdings kann sie durch Windscherung, sehr stabile Temperaturschichtung, Konvektion oder den Einfluss des Bodens wieder aufsteigen, womit dieser Mechanismus häufig wird (Holzäpfel et al. (2003), Holzäpfel et al. (2001), Proctor et al. (2000)). Jedoch führen diese Phänomene meist zu einem Auseinanderdriften der Wirbelröhren, und dabei häufig zu starken Deformationen oder zum beschleunigten Zerfall der Wirbelschleppe.

Gleichermaßen führt Querwind zum seitlichen Verdriften heraus aus dem Gleitpfad, womit nachfolgende Flugzeuge ebenfalls unbeeinflusst bleiben. Trotzdem birgt dieses Szenario weiteres Gefahrenpotential, wenn benachbarte Landebahnen nah beieinander liegen und somit die sich entfernende Wirbelschlepe die Parallelbahn erreicht. Außerdem können sich die lateralen Geschwindigkeiten aus leichtem Querwind und Bodeneinfluss kompensieren, womit der Wirbel direkt auf dem Gleitpfad verbleibt.

Eine sichere Reduktion des Gefahrenpotentials ergibt sich vor allem aus dem fortschreitenden Zerfall der Wirbelschlepe und der damit einhergehenden Entwicklung von Verformungen der Wirbel. Es können sich aufgrund von turbulenzbedingten atmosphärischen Störungen Instabilitäten bilden, die im fortgesetzten Stadium zu starker Deformation führen. Eine weitere Möglichkeit zur Entstehung von Krümmung von Wirbelschleppenteilbereichen ist durch Temperaturdifferenzen der verschiedenen Luftschichten in der Atmosphäre gegeben. In komplexer Art und Weise entstehen zusätzliche Rotationsbewegungen, die die Wirbelschlepe beeinflussen. Dies führt nicht nur zur Krümmung der Wirbelschlepe, sondern beschleunigt ebenso ihren Zerfall. Essentielle Voraussetzung in dieser Arbeit ist daher die präzise Einstellung des turbulenten und temperaturgeschichteten Hintergrundfeldes, so dass die für die Turbulenz charakteristischen statistischen Eigenschaften erfüllt werden.

In dieser Arbeit wird angenommen, dass der Einflug in gekrümmte Wirbelsegmente nur zu kurzen Beeinträchtigungen führt. Durch die große Trägheit des Flugzeugs sind solche Beeinträchtigungen häufig irrelevant; ansonsten können diese zumeist vom Pilot oder Autopilot des Flugzeugs ausgeglichen werden. Beobachtet werden kann dies vielfach an großen Flughäfen, wenn landende Flugzeuge kurz vor dem Aufsetzen ein geringfügiges Rollmoment erfahren, dies unmittelbar kompensieren und schließlich sicher auf der Landepiste aufsetzen (Holzäpfel et al., 2009). Die detaillierte Analyse der Entwicklung der Deformation der Wirbelschlepe in Abhängigkeit des Wirbelalters und der meteorologischen Rahmenbedingungen ist zentraler Bestandteil dieser Arbeit. Neben der quantitativen Erfassung der Wirbelkrümmung sind die Lagewinkel der Wirbelröhren von großer Bedeutung, da aus Flugsimulatortests bekannt ist, dass der aus dem Wirbelschleppeneinflug resultierende maximale Rollwinkel des Nachfolgeflugzeugs entscheidend von der Einflugsrichtung abhängt (Loucel & Crouch, 2005). Von diesen Punkten ausgehend ergeben sich verschiedene Fragen:

- Wie entstehen Krümmungen der Wirbelschlepe, und wie groß werden sie?
- Wie stark wird die Krümmungsentwicklung von der umgebenden Atmosphäre, insbesondere von Turbulenz und Temperaturschichtung beeinflusst?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nicht mehr gradlinig in eine Wirbelschlepe einzufliegen, sondern unter einem vertikalen oder horizontalen Winkel?

Die numerische Bestimmung der Wirbelschleppenkrümmung erfordert in jeglicher Hinsicht eine dreidimensionale Herangehensweise, was sich zum Beispiel durch die Verwendung gleicher Gitterabstände in allen Richtungen und der richtungsunabhängigen Bestimmung der Wirbelkernlinie zeigt. Unter diesen Voraussetzungen ist es möglich, die Position und Stärke der Wirbelschlepe deutlich genauer als bisher zu untersuchen, was vor allem im späten Zerfallsstadium interessante Erkenntnisse ermöglicht. Aufgrund der nun in der Simulation uneingeschränkt möglichen Bildung von Wirbelringen ergeben sich weitere wichtige Aspekte:

- Bei welchen meteorologischen Bedingungen und zu welchen Zeitpunkten bilden sich Wirbelringe?

- Wie verhalten sie sich im weiteren Verlauf in Bezug auf Form, Zirkulationsverteilung und Absinkverhalten?
- Was für Auswirkungen ergeben sich für nachfolgende Flugzeuge?

Kapitel 2 dieser Arbeit beschreibt dazu die erforderlichen physikalischen und numerischen Grundlagen der Wirbelschleppenmodellierung, und schließt mit der Diskussion der Anwendbarkeit der Boussinesq-Approximation. Dabei werden unter anderem die Entstehung von Wirbelschleppen im Zusammenhang mit der Auftriebserzeugung dargestellt und grundlegende Zerfallsmechanismen beschrieben.

Es folgt die Vorstellung eines neuen, dreidimensionalen Wirbelkerndetektionsalgorithmus in Kapitel 3, der im Gegensatz zu bisherigen Methoden richtungsunabhängig die Entwicklung der Wirbelschleppe bis zu sehr großen Wirbelaltern analysieren kann. Zur Ermittlung der Krümmung wird ein weiterer Algorithmus präsentiert, der diese ausgehend von den bestimmten Stützstellen des Wirbelpfads berechnet.

Im Kapitel Ergebnisse (4) wird zuerst die Erzeugung des turbulenten Hintergrundfeldes erläutert, in welches das Wirbelpaar gesetzt wird, und dann werden anhand ausgewählter Beispiele charakteristische Merkmale der Wirbelschleppe während ihres Lebenszyklus untersucht. Dabei handelt es sich insbesondere um die Bildung von Wirbelringen, die sich ausgehend von der Crow-Instabilität zumeist einstellen. Dabei verändert sich die Zirkulationsverteilung innerhalb des Wirbelrings solchermaßen, dass eine ausschließliche Berücksichtigung der Zirkulation in Ebenen orthogonal zur Flugrichtung die tatsächliche Zirkulation in Ebenen orthogonal zur Wirbelkernlinie deutlich unterschätzen würde. Desweiteren werden in Abhängigkeit der Parameter Temperaturschichtung und Turbulenz Ähnlichkeiten und Unterschiede von Zirkulations-, Absinktiefen-, Krümmungs- und Lagewinkelverläufen präsentiert.

Anschließend wird die Streifentheorie vorgestellt, aus welcher sich vereinfacht der zu erwartende Einfluss auf Nachfolgeflugzeuge in Form von Rollmomenten darstellen lässt. Dabei wird auch die Frage behandelt, inwieweit hier erzielte Ergebnisse bisher angenommene Sicherheitsbereiche beeinflussen, und welche maximalen Rollmomente zu späten Zeitpunkten auftreten können.

Kapitel 5 stellt alle gefundenen Resultate im Kontext bisheriger Untersuchungen dar. Als Vergleichswerte werden Simulationsdaten anderer Forschergruppen, experimentelle Daten aus dem Wasserschleppkanal, Prognosen des parametrischen Wirbelschleppenmodells P2P und Messdaten aus Feldmesskampagnen verwendet. Insbesondere mit den qualitativ hochwertigen Messergebnissen aus dem EU-Projekt AWIATOR wurde eine hervorragende Übereinstimmung gefunden, somit konnte eine deutliche Verbesserung gegenüber vorherigen Simulationen erzielt werden.

Abgeschlossen wird die Arbeit mit einer Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse und einem kurzen Ausblick.

## 2 Grundlagen

Wirbelschleppen entstehen als unvermeidbare Konsequenz aus der Erzeugung aerodynamischen Auftriebs. Durch Strömungsablösung an der Flugzeugstruktur entwickeln sich großflächig Verwirbelungen, die sich bezüglich ihrer zeitlichen Lebensdauer sehr unterschiedlich charakterisieren lassen. Nach kurzer Zeit besteht nur noch das von den Tragflügeln ausgebildete, gegensinnig rotierende Wirbelpaar, welches je nach Stellung von Brems- und Landeklappen auch als Vierwirbelsystem auftritt. Der Aufrollvorgang spielt in dieser Arbeit keine Rolle, außerdem beziehen sich alle durchgeführten Untersuchungen ausschließlich auf das elementare Zweiwirbelsystem.

Zu Beginn werden in diesem Kapitel alle für die vorliegende Arbeit wichtigen physikalischen Zusammenhänge und Parameter erläutert. Im Weiteren folgt eine zumeist qualitative Betrachtung der Zerfallsmechanismen und der hierfür verantwortlichen meteorologischen Parameter. Außerdem wird die numerische Umsetzung mit dem Simulationscode LESTUF ausführlich vorgestellt, und auf mögliche Einschränkungen durch die dabei verwendete Boussinesq-Approximation eingegangen. Abgeschlossen wird das Kapitel durch eine kurze Vorstellung eines Vergleichs verschiedener, in Europa verwendeter Wirbelschleppencodes im Rahmen des EU-Projekts AWIATOR.

### 2.1 Physik der Wirbelschleppe

Es sollen zwei mögliche Wege aufgezeigt werden, die Entstehung der Wirbelschleppe zu beschreiben. Erreicht wird dies über die Erklärung des aerodynamischen Auftriebs, was unmittelbar zur Erzeugung der Wirbelschleppe führt.

Dazu wird zunächst von einem in Spannweitenrichtung unendlich ausgedehnten und unveränderlichen Flügelprofil ausgegangen. Der Theorie liegt die Annahme zugrunde, dass ein rotierender, angeströmter Körper Auftrieb erzeugt (Auftriebtheorem von Kutta-Joukovsky, Herleitung siehe Anhang A). Dabei ist es irrelevant, ob die Rotation aktiv oder passiv erfolgt, das heißt es genügt eine Rotationsströmung um das Flügelprofil zu erzeugen. Abbildung 2.1 zeigt ein typisches Flügelprofil inklusive Anstellwinkel mit vorderem (A) und hinterem (B) Stagnationspunkt.

In der oberen Darstellung von Abbildung 2.1 a) wird ein ideales und reibungsfreies Gas angenommen, welches am vorderen Stagnationspunkt bei A auf das Profil trifft und dieses am hinteren Stagnationspunkt B wieder verläßt. Dazu müsste es jedoch die scharfe Hinterkante umströmen und gegen die Hauptanströmungsrichtung zu B gelangen, bevor es ablöst. Ein reales Gas wie Luft fließt jedoch an der scharfen Hinterkante ab, was B somit stromabwärts verlagert (siehe untere Abbildung). Diese Tatsache wurde von Kutta entdeckt, daher wird dies die Kutta-Bedingung genannt. Die dadurch erzeugte Geschwindigkeitsdifferenz zwischen oberer und unterer Umströmung kann als eine Zirkulation um das Flügelprofil interpretiert

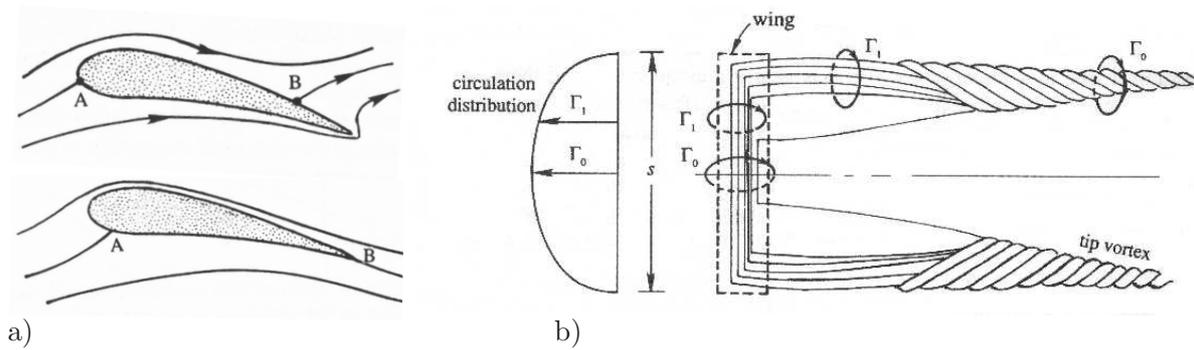


Abbildung 2.1: a) Umströmung eines Tragflächenprofils mit idealem (oben) bzw. realem (unten) Fluid und b) die Ablösung der resultierenden Zirkulation entlang der endlichen Spannweite bei elliptischer Auftriebsverteilung (Quelle: Kundu & Cohen (2004)).

werden, welche sich gegen die Flügelspitzen kontinuierlich ablöst. In Abbildung 2.1 b) ist ein elliptisches Flügelprofil dargestellt, welches mit der erzeugten Zirkulation beaufschlagt ist.

Der dritte Wirbelsatz von Helmholtz besagt, dass Zirkulation während der Bewegung des Fluids zeitlich unverändert bleibt. Daraus kann hergeleitet werden, dass die Zirkulation entlang der Wirbelröhre konstant ist (siehe Saffman (1992) für Details). Aufgrund der Endlichkeit der Spannweite bilden sich nun im Nachlauf des Flugzeugs gegensinnig rotierende Wirbelzöpfe, deren Rotationsachse der Flugrichtung und deren Zirkulation vereinfacht der durch die Kutta-Bedingung erzeugten Zirkulation entspricht. Bei Vernachlässigung jeglichen Zirkulationszerfalls vereinigen sich die Wirbelröhren des Wirbelpaars mit dem sogenannten Startwirbel zu einem abgeschlossenen Wirbelring (welcher jedoch nicht mit den während des Zerfalls entstehenden Wirbelringen verwechselt werden darf). Hierzu ist anzumerken, dass der die Wirbelschleppere aufrechterhaltende induzierte Widerstand quadratisch vom Auftrieb abhängt, hingegen tragen sonstige Widerstände (sogenannte parasitäre Widerstände, z.B. durch Reibung) nicht zur Wirbelschleppenstärke bei (Shevell, 1983). Da die Auftriebskraft primär die Gewichtskraft des Flugzeugs auszugleichen hat, ist die Wirbelschleppenzirkulation nur wenig vom aktuellen Flugzustand abhängig.

Grundsätzlich ist die Zirkulation als das Linienintegral der Tangentialgeschwindigkeit entlang einer beliebigen, aber abgeschlossenen Kontur definiert. Nach dem Satz von Stokes ist dies gleichbedeutend mit dem Flächenintegral über die Rotation dieser Geschwindigkeit (Kundu & Cohen, 2004).

$$\Gamma \equiv \oint \vec{u} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{\omega} d\vec{A} \quad (2.1)$$

Damit wird alle innerhalb der Oberfläche  $A$  des Kontrollvolumens befindliche Wirbelstärke integriert. Diese wird für den Anfangszustand mit  $\Gamma_0$  bezeichnet, und ihr Wert kann im Stationärflug durch Gleichsetzen von Auftriebs- zu Gewichtskraft leicht abgeschätzt werden (Auftriebtheorem von Kutta-Joukovsky, siehe Anhang A):

$$\Gamma_0 = \frac{Mg}{sB\rho U} \quad (2.2)$$

wobei  $M$  die Flugzeugmasse,  $s$  den Lastfaktor,  $B$  die Spannweite,  $\rho$  die Luftdichte in der Atmosphäre und  $U$  die Fluggeschwindigkeit bezeichnet.

Eine alternative Betrachtung konzentriert sich auf die durch Anstellwinkel oder gewölbtes Flügelprofil erzeugte Abwärtsbewegung der Luft hinter dem Flügel (Downwash). Diese Vertikalgeschwindigkeit lässt sich mithilfe des Gesetzes von Biot-Savart berechnen, wobei sich zeigt, dass sie beispielsweise bei elliptischer Auftriebsverteilung über die Spannweite konstant ist (z.B. in Kundu & Cohen (2004)).

In dieser Arbeit wird von einem bereits erfolgten Aufrollvorgang ausgegangen, welcher ab einem Abstand von 10...20 Spannweiten vom wirbelgenerierenden Flugzeug angenommen werden kann (entspricht den Annahmen von z.B. Schilling et al. (1996) oder Breitsamter (2007)). Dieser Zustand wird Wirbelregime („vortex regime“) genannt, in welchem die Ausströmgeschwindigkeit des Triebwerkstrahls bereits stark abgenommen hat. Je nach Anzahl und Abstand der Triebwerke zur Position der Wirbelablösung interagieren beide Strömungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten, wobei der Triebwerksjet stärker in die Rotationsbewegung der Wirbelschlepe integriert wird, als die Wirbelschlepe durch die Axialgeschwindigkeit der Triebwerksausströmung beeinflusst wird (Lewellen et al. (1998), Margaritis et al. (2008)). Da sich die Ausströmgeschwindigkeit  $U_{jet}$  eines selbst antreibenden Körpers bezüglich der Entfernung  $x$  von demselben zu

$$U_{jet} \sim x^{-0.8} \quad (2.3)$$

verhält (Tennekes & Lumley, 1972), erhält man zu Beginn des Wirbelregimes nur noch geringe Axialgeschwindigkeiten. Beispielsweise ergibt sich für das Triebwerk GE CF6-80C2 (Einsatz u.a. bei den Flugzeugtypen A300, A310, B747 und B767) im Landeanflug ein Verhältnis von Ausströmgeschwindigkeit zu Fluggeschwindigkeit von ca. 2.1 (de Bruin, 2005), was zu Axialgeschwindigkeiten von 1-2 m/s führt. Dies ist in etwa um den Faktor 10 geringer als die Tangentialgeschwindigkeit im Kern eines für große Flugzeuge charakteristischen Wirbelpaars, und kann somit vernachlässigt werden.

Ebenfalls hat sich im Wirbelregime das in Abbildung 2.2 gezeigte Vertikalgeschwindigkeitsprofil über der Spannweite ausgebildet. Dabei symbolisieren die Nullstellen der in dünner bzw. gestrichelter Linie dargestellten Einzelwirbel die Wirbelzentren. Anhand der Ausprägung dieses Profils ergibt sich ein natürlicher Schutzmechanismus der Wirbelschlepe für nachfolgende Flugzeuge, weil jedes seitlich von außen einfliegende Flugzeug durch die in Richtung des Wirbelkerns zunehmende Aufwärtskomponente ein Rollmoment erfährt, welches das Flugzeug aus dem Gefahrenbereich herausdrängt.

## 2.2 Wirbelmodelle und wichtige Parameter

Um die Ergebnisse von Simulationen und Experimenten verschiedener Flugzeugtypen vergleichbar zu machen, werden einige wichtige Parameter mit Referenzwerten normiert. Diese werden mit dem Index 0 bezeichnet, während alle sich auf die Referenzwerte beziehenden dimensionslosen Parameter mit dem Index \* auftreten. Als wichtigstes Längenmaß dient der anfängliche Wirbelabstand  $b_0$ , welcher sich anhand der Auftriebsverteilung und der Spannweite  $B$  folgendermaßen berechnet:

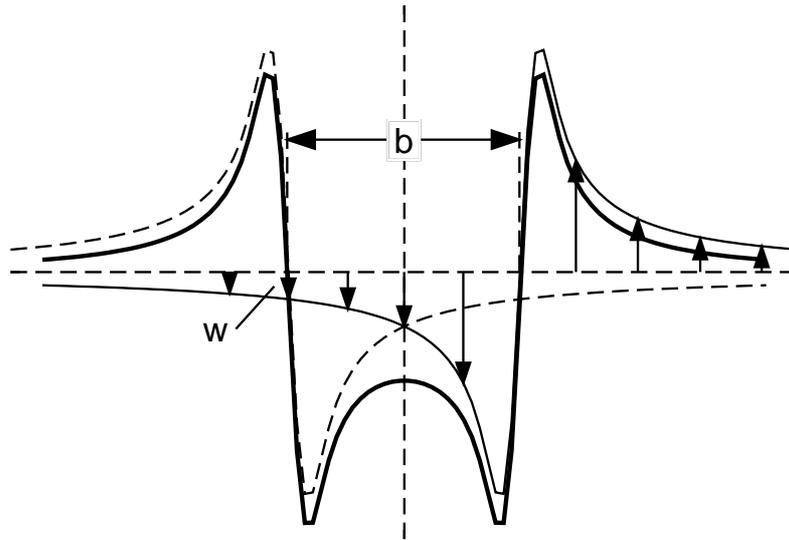


Abbildung 2.2: Vertikalgeschwindigkeitsprofil für linken und rechten Einzelwirbel inklusive der in dicker Linie dargestellten gegenseitigen Überlagerung aus Holzäpfel (2005).

$$b_0 = sB = \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\Gamma(y)}{\Gamma_0} dy \quad (2.4)$$

Für die aerodynamisch günstige elliptische Auftriebsverteilung  $\Gamma(y)$ , welche in dieser Arbeit ausschließlich angenommen wird, ergibt sich ein Lastfaktor von  $s = \pi/4$ . Dem Vorteil des geringsten aerodynamischen Widerstands dieser Konfiguration stehen jedoch Nachteile bezüglich Gewicht und Wirbelschleppenentwicklung gegenüber. Daher wird bei neueren Flugzeugen aufgrund besserer Simulations- und Berechnungsmöglichkeiten von diesem Wert abgewichen, wobei je nach Zielsetzung größere oder kleinere Lastwerte sinnvoll sein können. Beispielsweise werden bei flacherer Zirkulationsverteilung mit  $s < \pi/4$  geringere Biegemomente an der Flügelaufhängung am Flugzeugrumpf erzeugt. Damit sind leichtere Konstruktionen und folglich geringerer Treibstoffverbrauch erzielbar, die den erhöhten induzierten Widerstand amortisieren. Große Lastfaktoren hingegen ergeben kleinere absolute Zirkulationswerte, wie Gl. (2.2) zeigt.

Die Wirbelzentren induzieren sich nach dem Gesetz von Biot-Savart gegenseitig eine Vertikalgeschwindigkeit  $w$ , die für den Absinkvorgang der Wirbelschlepe verantwortlich ist. Dieses ist in Analogie zur Elektrodynamik definiert als

$$\vec{u} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (2.5)$$

wobei  $d\vec{s}$  das infinitesimale Wirbelement und  $\vec{r}$  den Vektor zum betrachteten Punkt bezeichnet (Saffman, 1992). Die resultierende Geschwindigkeit  $\vec{u}$  steht orthogonal auf der durch  $d\vec{s}$  und  $\vec{r}$  aufgespannten Horizontalebene, daher ergibt sich lediglich eine vertikale Geschwindigkeitskomponente.

Hierzu erfährt jeder Punkt der Wirbelröhre durch jeden Punkt der gegenüberliegenden Wirbelröhre eine anteilige Geschwindigkeit. Der Vektor  $\vec{r}$  bezeichnet dabei die Abstandskomponente

orthogonal zur Wirbelstärkerichtung  $\vec{s}$ , daher entspricht er in skalarer Form dem Abstand der ungekrümmten Wirbelröhren  $b_0$ . Der Betrag des Abstands  $|\vec{r}|$  kann mit  $\sqrt{s^2 + b_0^2}$  gleichgesetzt werden, somit folgt unter Verwendung des Integrals aus Rade & Westergren (2000)

$$w_0 = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0}{(s^2 + b_0^2)^{3/2}} ds \quad (2.6)$$

$$= \frac{\Gamma b_0}{4\pi} \left[ \frac{s}{b_0^2 \sqrt{s^2 + b_0^2}} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi b_0} \quad (2.7)$$

Aus Wirbelabstand  $b_0$  und induzierter Absinkgeschwindigkeit  $w_0$  leitet sich die Referenzzeit  $t_0$  ab, in welcher das Wirbelpaar um einen Wirbelabstand absinkt.

$$t_0 = \frac{b_0}{w_0} \quad (2.8)$$

Allerdings ist zu beachten, dass die Referenzzeit z.B. von Überschallflugzeugen bei oben gewählter Normierung sehr klein werden kann. Daher können hier präsentierte Ergebnisse nicht zwangsweise auf alle anderen Flugzeuge bezogen werden. Anhaltspunkte für die Übertragbarkeit auf andere Flugzeuge gibt Abbildung 2.3, in welcher Zirkulationswerte beim Landeanflug inklusive der Zuordnung zu zugehörigen Referenzzeiten  $t_0 = [15 \text{ s}, 30 \text{ s}, 45 \text{ s}]$  angegeben sind.

Je ähnlicher die Referenzzeiten, umso zuverlässiger lassen sich erhaltene Ergebnisse auf andere Flugzeugtypen übertragen. Aus einer Studie von Köpp (1999) lässt sich erkennen, dass Wirbelschleppen militärischer Flugzeuge wegen ihrer sehr kurzen charakteristischen Zeiten sehr hohe Lebensdauern bezüglich  $t_0$  erreichen können. Die Balkenlänge aus Abb. 2.3 zeigt die Bandbreite möglicher unterschiedlicher Wirbelschleppenstärken je nachdem, ob maximales oder minimales Landegewicht (Leergewicht) angenommen wird. In dieser Arbeit wird das maximale Landegewicht verwendet; Simulationen mit variierender Masse erfordern lediglich eine Anpassung der Anfangszirkulation.

Prinzipiell ist die Zirkulation entsprechend Gl. (2.1) definiert. Allerdings muss das Integrationsgebiet soweit eingeschränkt werden, dass die Kompensation der Wirbelstärke durch den gegensinnig rotierenden Parallelwirbel vermieden wird. Daher wird in dieser Arbeit die international anerkannte Definition von  $\Gamma_{5-15}^*$  verwendet (Holzäpfel et al., 2001), die den normierten Mittelwert von  $n$  Zirkulationswerten der flugzeugrelevantesten Kreisradien 5 bis 15 m repräsentiert.

$$\Gamma_{5-15}^* = \frac{1}{n} \sum_{r=5\text{m}}^{15\text{m}} \left( \int_0^r \omega dA \right) / \Gamma_0 \quad (2.9)$$

Hierbei steht  $n$  für die Anzahl an Kreisflächen mit Abstand  $r$  zum Zentrum des einzelnen Wirbels, die zur Berechnung verwendet werden. Diese Größenordnung trägt besonders der Tatsache Rechnung, dass Wirbelschleppen von großen Flugzeugen zu Zeitverzögerungen an

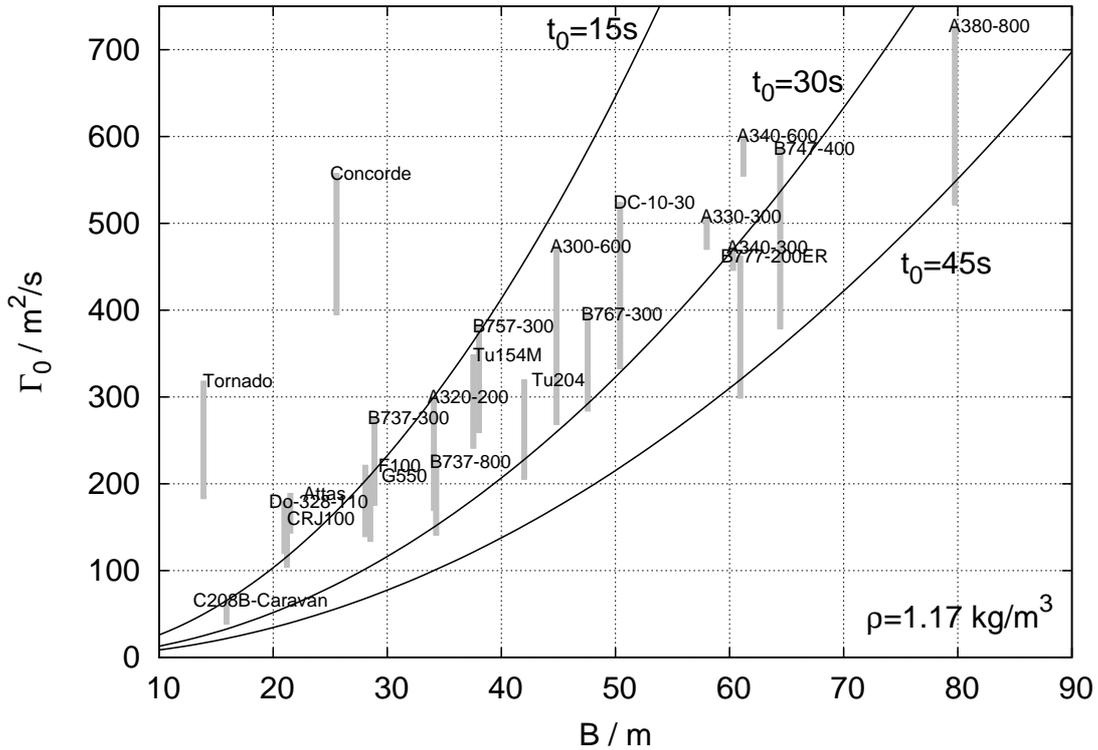


Abbildung 2.3: Zirkulation in Abhängigkeit der Spannweite verschiedener Flugzeugtypen anhand Gl. (2.2) bei maximalem Landegewicht und Leergewicht. Die Zeitkurven beschreiben gleiche Referenzwerte mit  $t_0 = [15\text{ s}, 30\text{ s}, 45\text{ s}]$ .

Flughäfen beitragen, und dass deren Wirbel mit dieser Definition besonders gut abgedeckt sind. Außerdem läßt sich damit die Zirkulation aus Lidarmessungen sehr gut identifizieren. Der in dieser Arbeit verwendete Kernradius von  $r_c = 3\text{ m}$  ist ausreichend klein, so dass mit obiger Zirkulationsdefinition zu Beginn der Simulation für  $\Gamma_{5-15}^*$  Werte nahe 1 erreicht werden.

Die Wahl des optimalen Wirbelmodells für die Simulation von Wirbelschleppen wurde in der Literatur bereits ausführlich diskutiert, siehe hierfür Gerz et al. (2002) oder deBruin & Winkelmanns (2005). Ausgehend vom theoretischen Rankine-Wirbel, welcher durch einen Starrkörperanteil innerhalb und einem Potentialwirbel außerhalb des Kernradius definiert ist, lassen sich weitere analytische und empirische Modelle ermitteln.

Für den laminar viskosen Einzelwirbel beschreibt das Lamb-Oseen-Modell den Zerfall exakt, welches unmittelbar aus den Navier-Stokes-Gleichungen hergeleitet werden kann (siehe Anhang B). Daraus ergibt sich seine Tangentialgeschwindigkeit  $v_\theta$

$$v_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left[ 1 - e^{-1.256(r/r_c)^2} \right] \quad (2.10)$$

wobei im Gegensatz zum Wirbelmodell von Rankine der Übergang von Starrkörper- zu Potentialwirbelanteil kontinuierlich ist. Weitere, teils deutlich komplexere Wirbelmodelle, die zumeist aus experimentellen Daten abgeleitet wurden, beruhen auf Ideen von Rosenhead, Proctor, Winkelmanns und Jacquin (Gerz et al., 2002).

Prinzipiell kann nur so viel Energie in die Rotation des Wirbelpaars investiert werden, wie durch den induzierten Widerstand des Flugzeugs entsteht. Jedoch wird davon ausgegangen, dass alle Modelle die Rotationsenergie großer radialer Abstände überschätzen. Wegen der im Vergleich zu anderen Wirbelmodellen verhältnismäßig hohen maximalen Tangentialgeschwindigkeiten des Lamb-Oseen Wirbels erreicht der zugehörige minimale Kernradius einen eher hohen Wert von  $r_c/B \approx 0.07$  (siehe Anhang C).

Hingegen ermittelten Delisi et al. (2003) experimentell deutlich kleinere Kernradien, indem sie die Wirbel mit Rauch sichtbar machten und gleichzeitig präzise Geschwindigkeitsmessungen vornahmen. Bei der Beobachtung von unterschiedlichen Flugzeugtypen an verschiedenen Flughäfen fanden sie außerdem heraus, dass der über die Rauchverteilung identifizierte Kernradius doppelt so groß wie der über das Geschwindigkeitsmaximum definierte Kernradius erscheinen kann. Daraus folgern sie, dass der tatsächliche Kernradius deutlich kleiner ist als bisher angenommen, nämlich in einer Größenordnung von 1-2% der Spannweite. Außerdem beobachteten sie ein unerwartet geringes Wachstum des Kernradius, dem das Wirbelmodell ebenfalls Rechnung tragen sollte.

Aus numerischen Gründen benötigt der in dieser Arbeit verwendete Code zumindest eine Auflösung des Wirbelkerns von drei Maschen ( $r_c/\Delta = 3$ ), was zu einem Kernradienverhältnis von  $r_c/b_0 = 0.064$  bzw.  $r_c/B = 0.05$  führt. Die Verwendung kleinerer Kernradien erfordert entweder mehr Gitterpunkte (adaptiv oder global) oder eine Diskretisierung, die bei noch geringerer Anzahl an Punkten die steilen Gradienten des Wirbelprofils ausreichend abbilden kann. Da das unkorrigierte Smagorinskymodell im Wirbelkern übermäßig viel turbulente Viskosität erzeugt, werden die kernnahen Tangentialgeschwindigkeiten unrealistisch stark gedämpft, was gleichermaßen zu verstärktem Kernradienwachstum führt. In Kapitel 2.5.2 wird das modifizierte Schließungsmodell NaCoo vorgestellt, welches diesem entgegenwirkt.

Das verwendete Wirbelmodell muss daher von Beginn an am Kernradius eine möglichst hohe Tangentialgeschwindigkeit besitzen, welche in der weiteren zeitlichen Entwicklung nicht zu stark abnimmt. Unter Berücksichtigung der Zirkulationsdefinition wird so deutlich, dass  $\Gamma_{5-15}^*$  sehr nah an den Maximalwert 1.0 kommen muss. Hierfür eignet sich der klassische Lamb-Oseen Wirbel am besten, weil sein Geschwindigkeitsprofil numerisch gut auflösbar ist und eine der höchsten Geschwindigkeiten am Kernradius besitzt (Gerz et al., 2002). Er wird daher in dieser Arbeit ausschließlich verwendet.

## 2.3 Zerfall von Wirbelschleppen in der geschichteten, turbulenten Atmosphäre

Wie sich in früheren Untersuchungen von Holzäpfel et al. (2001) oder Proctor & Switzer (2000) gezeigt hat, hängt der Zerfall von Wirbelschleppen in hohem Maße von der sie umgebenden Atmosphäre und ihren Bedingungen ab. Speziell die Parameter Temperaturschichtung und Turbulenz prägen die Zerfallsmuster. Allgemein wurde bisher davon ausgegangen, dass der Zerfall zweiphasig abläuft, sofern Turbulenz und Temperaturschichtung nicht sehr stark sind. Im frühen Stadium dominiert kleinskalige Diffusion (Diffusion Decay), während später schnellerer Zerfall einsetzt (Phase of Rapid Decay). Dieser Zeitpunkt ist frühestens, wenn eine merkliche Annäherung der Wirbelröhren sichtbar wird und gegenseitige Kompensation von Zirkulation zu einem steileren Abfall derselben führt, und spätestens, wenn sich die Wirbelröhren zu einem Wirbelring zusammengeschlossen haben.

### 2.3.1 Temperaturschichtung

Die Temperaturschichtung bezeichnet die Zunahme der potentiellen Temperatur  $\theta$  mit der Höhe. Dabei berücksichtigt  $\theta$ , dass sich absinkende Luftmassen durch den höheren Umgebungsdruck adiabatisch erwärmen. Positive Schichtung der Atmosphäre bremst das Absinken der Wirbelschleppes, weil das die Wirbel umgebende Wirbeloval, welches als materielles Fluidvolumen betrachtet werden kann, in tiefer liegende, kältere Luftschichten absinkt. Damit ist es wärmer als seine Umgebung und erfährt eine Auftriebskraft, die der induzierten Abwärtsbeschleunigung entgegenwirkt. Besonders stark ist die Temperaturschichtung bei Inversionswetterlagen, die vor allem nachts und im Winter bodennah häufig sind. So findet man um Mitternacht beispielsweise in München in 70 % der Fälle Gradienten potentieller Temperatur von mehr als 1 K / 100 m (Holzäpfel & Gerz, 1999). Die Temperaturschichtung wird über die mit  $t_0$  normierte Brunt-Väisälä Frequenz  $N$  charakterisiert.

$$N^* = \sqrt{\frac{g}{\theta_0} \frac{d\theta}{dz}} t_0 \quad (2.11)$$

Anschaulich kann man sich die Brunt-Väisälä Frequenz als diejenige Frequenz vorstellen, mit welcher ein beispielsweise konvektiv aufgestiegenes Luftpaket um eine Luftmassengrenze oszilliert. Die in diesem Kontext ebenfalls verwendete Froude-Zahl  $Fr$  entspricht  $1/N^*$ .

### 2.3.2 Turbulenz

In diesem Kapitel werden grundlegende Eigenschaften turbulenter Strömungen behandelt. Zur numerischen Umsetzung in LESTUF sei auf Kapitel 2.5.4 verwiesen, während die Beschreibung der durchgeführten Turbulenzsimulationen vor dem Einsatz der Flugzeugwirbelschleppes in Kapitel 4.1 beschrieben wird.

Turbulente Strömungen sind gekennzeichnet durch folgende wichtige Eigenschaften (Rotta (1972), Kundu & Cohen (2004)):

- Unregelmäßigkeit von Druck, Geschwindigkeiten und Temperatur
- Instationarität und Nichtlinearität
- Wirbelelemente sehr unterschiedlicher Größenskalen
- Dreidimensionalität
- hohe Mischungsintensität und Dissipation

Turbulenz tritt grundsätzlich auf, wenn Trägheitskräfte gegenüber Reibungskräften dominieren. Als Kennzahl hierfür dient die Reynoldszahl, die diese beiden Kräfte in Relation setzt, und die je nach spezifischem Problem unterschiedliche Zahlenwerte annehmen muss, damit der Umschlag von laminarem zu turbulentem Zustand stattfindet. Um voll ausgeprägte Turbulenz zu erhalten, muss die auf kleinen Skalen dissipierte Energie durch großskalige Bewegungen wie Fronten, Gewitter oder Windscherung zur Verfügung gestellt werden. Da Turbulenz in Bodennähe u.a. konvektionsbedingt meist von verhältnismäßig hoher Intensität ist, kann die Struktur der Wirbelschleppes im unmittelbaren Start- und Landevorgang nachhaltig gestört werden.

Die für die folgenden Kapitel benötigten Grundlagen werden hier vorgestellt (Rotta, 1972). Da die turbulente Strömung an jedem Punkt mit ihren Nachbarn wechselwirkt, wird der Korrelationstensor zweiter Stufe  $R_{ij}$  aus den Geschwindigkeitsfluktuationen  $u_i$  an zwei beliebigen Punkten ( $\vec{x}$  und  $\vec{x} + \vec{r}$ ) zu verschiedenen Zeiten ( $t$  und  $t + \tau$ ) gebildet<sup>1</sup>.

$$R_{ij}(\vec{x}, t, \vec{r}, \tau) = \overline{u_i(\vec{x}, t)u_j(\vec{x} + \vec{r}, t + \tau)} \quad (2.12)$$

Bei der Berechnung des integralen Längenmaßes  $L_t$ , welches als mittlere Größe der turbulenten Wirbel interpretiert werden kann, wird entlang der Richtung  $r_k$  über alle Werte von  $R_{ij}$  integriert, wobei die zeitliche Veränderung unberücksichtigt bleibt ( $\tau = 0$ ). So gilt allgemein

$$L_{t \ ij,k} = \frac{1}{2\overline{u_i u_j}} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij} dr_k \quad (2.13)$$

wobei  $i, j$  die beiden zu vergleichenden Geschwindigkeitskomponenten repräsentiert, während  $k$  die Mittelungsrichtung darstellt.  $R_{ij}$  ist monoton abnehmend, entscheidend für die Größe von  $L_t$  ist daher, wie *schnell*  $R_{ij}$  gegen den Wert Null (keine Korrelation) abfällt. Beispielsweise besitzt ein turbulentes Geschwindigkeitsfeld mit vielen großen Wirbeln vielfach ähnliche Geschwindigkeiten bezüglich Orientierung und Stärke, daher würde die zugehörige integrale Länge verhältnismäßig groß werden.

Bei der Annahme homogener Turbulenz wird vorausgesetzt, dass das turbulente Feld unabhängig von der gewählten Position  $\vec{x}$  immer gleiche statistische Eigenschaften aufweist. Die Transformation des Geschwindigkeitskorrelationstensors  $R_{ij}$  in den Fourierraum ermöglicht die Betrachtung der spektralen Verteilung der in der Strömung enthaltenen Energie, woraus sich anschaulich Rückschlüsse auf Wechselwirkungen der Turbulenz mit der Wirbelschleppe ziehen lassen können. Der Spektraltensor  $\Phi_{ij}$  in homogener Turbulenz berechnet sich aus

$$\Phi_{ij}(\vec{k}, t, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{V(\vec{r})} R_{ij}(t, \vec{r}, \tau) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (2.14)$$

Aus dem dreidimensionalen Spektraltensor läßt sich in weiteren Schritten u.a. durch zweifache Integration die jeweilige eindimensionale Spektralfunktion ermitteln, oder die Energie  $\hat{E}(k, t)$  pro Masseneinheit und Wellenzahl darstellen. Die einzelnen spektralen Energiedichtefunktionen  $\Psi_{ii}(\vec{k}, t)$  ergeben sich aus der halben Spur des über die Kugeloberfläche mit Radius  $k$  gemittelten Spektraltensors:

$$\hat{E}(k, t) = \frac{1}{2} \Psi_{ii}(\vec{k}, t) = \frac{1}{2} k^2 \oint \Phi_{ii}(\vec{k}, t) d\Omega \quad \text{für } \tau = 0 \quad (2.15)$$

Die Integration dieser Energien  $\hat{E}$  über alle Wellenzahlen ergibt wiederum die Gesamtenergie des Turbulenzfeldes

$$\frac{1}{2} \overline{u_i u_i} = \int_0^{\infty} \hat{E}(k, t) dk \quad (2.16)$$

<sup>1</sup>Zumeist wird dieser Definition ein arithmetisches Ensemblemittel zugrunde gelegt. In LESTUF erfolgt die arithmetische Mittelung aufgrund der Homogenität räumlich über das Rechengebiet, wobei die Erfüllung der Ergoden-Hypothese vorausgesetzt wird (Gerz, 1988).

Ausgehend von der Energie in Spektralform stellt Kolmogorov seine zweite Ähnlichkeitshypothese auf. Er setzt dabei einen Abstand zweier betrachteter Punkte voraus, der groß gegenüber der nach ihm benannten Kolmogorov'schen Mikrolänge  $\mu$  und klein gegenüber dem Produktionsbereich (entspricht in numerischen Simulationen meist der Größenordnung des Rechengebiets) ist. Da vollständig entwickelte Turbulenz angenommen wird, ergibt sich aus dem sich einstellenden Gleichgewicht von Produktions- und Dissipationsbereich der inertielle Trägheitsbereich des turbulenten Spektrums, der durch die bekannte Relation

$$\hat{E}(k) \sim k^{-\frac{5}{3}} \quad (2.17)$$

charakterisiert werden kann. Der daraus hervorgehende Mechanismus wird auch als Energiekaskade bezeichnet, weil die kinetische Energie von kleinen Wellenzahlen sukzessive zu großen Wellenzahlen abgegeben wird. Sobald die Wirbelelemente die Größenordnung der Mikrolänge  $\mu$  erreichen, wird ihre Energie in innere Energie umgewandelt. An diesem Ende der Skala spricht man vom Dissipationsbereich. Die für das Aufrechterhalten des Spektrums erforderliche großskalige Energie wird im sogenannten Produktionsbereich erzeugt, das heißt sie wird den Bewegungen der antreibenden Kräfte entnommen (Scherung, Auftrieb).

Entscheidend für die Energiedissipation ist die turbulente Dissipationsrate  $\epsilon$ , die über die laminare Viskosität  $\nu$  und den Scherratentensor  $S_{ij}$  definiert ist (Kundu & Cohen, 2004).

$$\epsilon = 2\nu \overline{S_{ij}S_{ij}} \quad \text{mit} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.18)$$

Aufgrund der großen Bedeutung der turbulenten Dissipationsrate zur Charakterisierung des Wirbelschleppenerfalls wird  $\epsilon$  mit typischen Flugzeugparametern normiert, um der Tatsache Rechnung zu tragen, dass stärkere Turbulenz notwendig ist, um große Flugzeuge zu beeinträchtigen, als dies für Kleinflugzeuge erforderlich wäre. Daher gilt aus Dimensionsgründen (Holzapfel, 2003)

$$\epsilon^* = \frac{(\epsilon b_0)^{1/3}}{w_0} \quad (2.19)$$

Da meist angenommen wird, dass der Trägheitsbereich alle relevanten Skalen des Wirbelschleppenerfalls umfasst, sind prinzipiell die turbulente kinetische Energie und die Dissipationsrate gleichermaßen geeignet, als Kriterium für die Intensität der Turbulenz verwendet zu werden. Weil jedoch bei der experimentellen Ermittlung der turbulenten kinetischen Energie umso mehr *große* Skalen zur (zeitlichen) Mittelung beitragen, je länger die Dauer der Mittelung ist, ist sie zu Vergleichszwecken ungeeignet. Daher wird die turbulente Dissipationsrate  $\epsilon$  verwendet, obwohl ihre operationelle Bestimmung aus Messdaten aufwändig ist (Holzapfel, 2003).

### 2.3.3 Zerfallsmechanismen

Eine der ersten und am häufigsten zitierte Veröffentlichung zum Zerfall von Flugzeugwirbelschleppen stammt von Crow aus dem Jahr 1970 (Crow, 1970). Er betrachtet das laminare System zweier paralleler, gegensinnig rotierender Wirbelröhren und leitet ausgehend vom Gesetz von Biot-Savart ein lineares Eigenwertproblem ab, aus welchem er symmetrische und unsymmetrische, stabile und instabile, sinusförmige Moden erhält. Schlussendlich berechnet

er für ein gegebenes Verhältnis von Kernradius zu Wirbelabstand von  $r_c/b_0 = 0.095$  die dominierende langwellige, symmetrische Instabilität mit einer Wellenlänge von  $\lambda_{Crow} = 8.6 b_0$ , die sich unter einem Winkel von ca.  $48^\circ$  zur Horizontalebene ausbildet. Außerdem bestimmt er die zugehörige Wachstumsrate und erkennt, dass das Wachstum entscheidend durch die initiale Störgröße, die die Umgebungsturbulenz darstellt, beeinflusst wird. Die sinusförmige Instabilität führt im weiteren Verlauf zu zunehmender Annäherung der beiden Wirbelröhren an den tiefsten Stellen und resultiert in einem komplexen Prozess, in welchem sich Wirbelringe ausbilden können.

Über den entscheidenden Beitrag dieser Instabilität zum Wirbelschleppenerfall besteht aufgrund von vielen numerischen und experimentellen Veröffentlichungen kein Zweifel. Hingegen wurde die Bildung von Wirbelringen in der Literatur bereits vielfach erwähnt, jedoch im Kontext mit Flugzeugwirbelschleppen noch nicht systematisch untersucht. Dies liegt unter anderem daran, dass die Bildung eines Wirbelrings bisher häufig mit dem Ende des Lebenszyklus der Wirbelschleppe gleichgesetzt wurde, und andererseits, dass ihre Messung und Simulation nicht so leicht zugänglich ist. So erfordert die experimentelle Berücksichtigung von orthogonal zur Flugrichtung verlaufender Wirbelstärke die Verwendung und Koppelung mit weiteren aufwändigen Messeinrichtungen.

Den Untersuchungen von Crow zufolge spielen dagegen kurzweilige Instabilitäten keine entscheidende Rolle. Diese werden aufgrund der dabei auftretenden elliptischen Form der Stromlinien jedes Einzelwirbels häufig auch als elliptische Instabilitäten bezeichnet. Leweke & Williamson (1998) und Laporte & Leweke (2002) widersprechen dem, weil ihren Arbeiten zufolge durch kurzweilige Instabilitäten erzeugte ausgeprägte kleinskalige Muster den Wirbelschleppenerfall deutlich beschleunigen können. Ab einem Verhältnis von Kernradien zu Wirbelröhrenabstand von  $r_c/b_0 > 0.2$  können diese im Experiment und in direkter numerischer Simulation (DNS) nachgewiesen werden. Diese werden auch als elliptische Instabilitäten bezeichnet, weil sich dabei der Querschnitt des Wirbelkernnahbereichs so verformt, dass er einer Ellipse ähnelt.

Diese Instabilitäten entstehen grundsätzlich durch die Deformation eines (Einzel-) wirbels, welche zum Beispiel durch Anregung des gegenüberliegenden Wirbels initiiert werden kann. Aus der linearen Stabilitätsanalyse geht hervor, dass sich bei vernachlässigbarer Axialgeschwindigkeit innerhalb des Wirbelkerns Moden ausbilden, die einerseits stationär (Lacaze et al. (2007), Eloy & Le Dizès (1999)) und in den gleichen Ebenen wie die Crow-Instabilität sind und andererseits eine um ca. 40 % größere Wachstumsrate als die Crow-Instabilität besitzen (Laporte & Leweke (2002), Kerswell (2002)).

Temperaturschichtung der Atmosphäre trägt insbesondere durch die Produktion von Sekundärstrukturen zum Zerfall der Wirbelschleppe bei. Voraussetzung hierfür sind orthogonale Dichte- und Druckgradienten, welche in vertikaler Richtung aus dem hydrostatischen Druckgradienten bestehen, und horizontal aus dem radialen Temperaturgradienten im Wirbelkern resultieren. Letzterer reduziert sich während des Lebenszyklus der Wirbelschleppe insbesondere kernnah, allerdings sind auch bei fortgeschrittenem Zerfall relevante Gradienten an der Wirbelovalgrenze vorzufinden. Dieses Oval hüllt beide Wirbelröhren ein und bildet dabei ein weitgehend abgeschlossenes, adiabat absinkendes System, an dessen Grenzen bevorzugt sekundäre Wirbelstärke entsteht. Diese bildet sich vor allem in Flugrichtung und rotiert dann entgegengesetzt zur benachbarten Primärwirbelstärke. Damit wird die Primärstruktur massiv gestört, somit prägen starke Verformungen und ein schneller Abbau von Zirkulation die weitere Entwicklung.

### 2.3.4 Probabilistische Betrachtungsweise

Da die meteorologischen Daten nur aus einzelnen Messungen bzw. bestenfalls im statistischen Mittel bekannt sind, unterliegt die Entwicklung und der Zerfall der Wirbelschlepe bis zu einem gewissen Grad zufälligen Prozessen. Daher ist es sinnvoll, Zustand und Aufenthaltsposition probabilistisch zu bestimmen.

Deswegen entwickelte Holzäpfel das probabilistische Wirbelschleppenvorhersagemodell P2P (Holzäpfel, 2003), mit welchem auf Basis der meteorologischen Inputparameter Wind ( $u, v, w$ ), turbulente Dissipationsrate  $\epsilon$ , Temperaturschichtung  $N$  und der Wirbelschleppenparameter  $\Gamma_0$  und  $b_0$  Wahrscheinlichkeiten für die Zirkulation  $\Gamma_{5-15}^*$ , Lateral- und Vertikalposition ( $y^*, z^*$ ) ausgegeben werden. P2P steht für „Probabilistisches 2-Phasiges Wirbelschleppen Modell“, und wurde unter Anspielung auf das typische Entwicklungsmuster der Zirkulation gewählt. Weitere Details und ein Vergleich der dabei erzielten Ergebnisse finden sich in Kapitel 5.1.3. P2P ist zentraler Teil des Wirbelschleppenvorhersage- und Beobachtungssystems WSVBS, welches in Rahmen des DLR Projekts Wirbelschlepe entwickelt wurde und in Abbildung 2.4 schematisch dargestellt ist.

Da P2P insbesondere für die Verwendung im operationellen Betrieb konzipiert wurde, berechnet es aus den eingehenden Daten in Echtzeit Wahrscheinlichkeiten dafür, dass  $\Gamma_{5-15}^*$ ,  $y^*$  und  $z^*$  sich in Konfidenzintervallen von  $2\text{-}\sigma$  (= 95.4 %) oder  $3\text{-}\sigma$  (= 99.7 %) befinden.

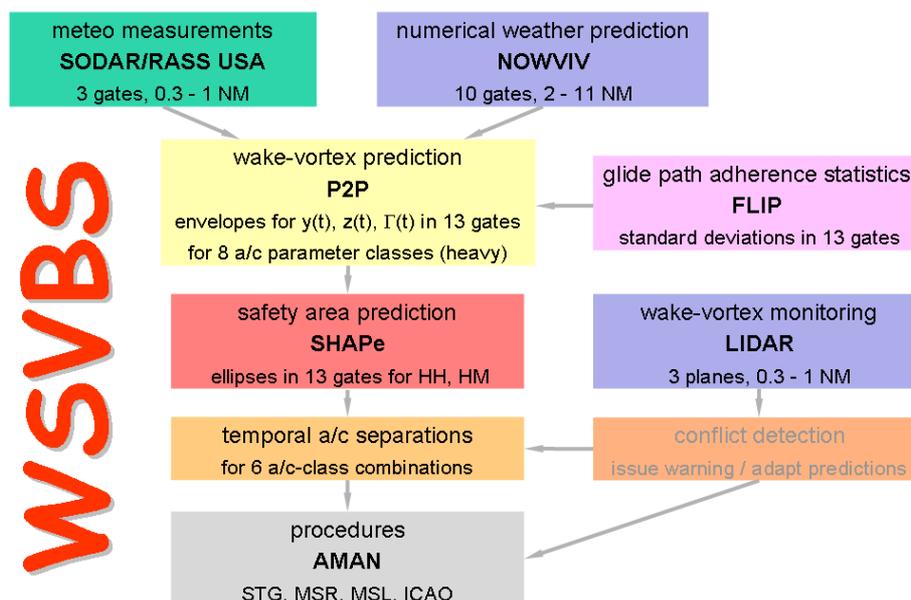


Abbildung 2.4: Das Wirbelschleppenvorhersagesystem WSVBS.

Als Datenbasis für die Parametrisierung von P2P dienen sowohl numerische Simulationen von Holzäpfel et al. (2001) und Proctor & Switzer (2000) als auch mehrere Messkampagnen in den USA (Flughafen Memphis, zitiert in Holzäpfel et al. (2001)) und Europa (z.B. WakeToul, AWIATOR, WakeOP, WakeFRA). Im WSVBS werden die meteorologischen Daten sowohl kurz vor der Landebahnschwelle (SODAR/RASS) gemessen als auch Kurzfristwettervorhersagen (NOWVIV) für den direkten Flughafennahbereich entnommen. Das Modul SHAPe be-

rechnet großzügige Sicherheitsgebiete um die Wirbelschleppe herum, die das Flugzeug meiden sollte. Abschließend werden Verfahren angegeben, die eine engere Staffellung des Landeanflugs erlauben, ohne dass dadurch die Sicherheit eingeschränkt würde.

Der größte Nutzen zur Kapazitätssteigerung eng benachbarter paralleler Landebahnen lässt sich bei Querwind erzielen, wenn beide Start- und Landebahnen unabhängig voneinander betrieben werden können. Dabei kann die auf der einen Bahn produzierte Wirbelschleppe die Parallelbahn nicht erreichen. Für diesen Fall würde die Empfehlung lauten, schwere Flugzeuge auf der Lee-Bahn landen zu lassen. Da die Wirbelschleppe eines leichten Flugzeugs große Flugzeuge wenig beeinträchtigt, gilt bei ausreichender Stärke des Querwinds

- a) beide Bahnen sind unabhängig vom vorherigen Flugzeug auf der *eigenen* Bahn
- b) die Luv-Bahn ist unabhängig von der Lee-Bahn
- c) große Flugzeuge der Lee-Bahn erfahren lediglich geschwächte Wirbelschleppen von kleinen Flugzeugen

## 2.4 Gefahrenpotential des Einflugs in deformierte Wirbelschleppen

Loucel & Crouch (2005) beschreiben das Antwortverhalten des Autopiloten eines B737-300 Flugsimulators für Wirbelschleppeneinflüge in stark deformierte Wirbel. Dazu wurden Wirbelschleppengeometrie und -position zu verschiedenen Zeitpunkten modelliert, wobei der Modellierung vereinfachend experimentelle Beobachtungen zugrunde gelegt wurden. Das Risikomaß wurde über den resultierenden Rollwinkel definiert, welcher vom Autopiloten maximal erreicht wurde. Primäres Ziel der Arbeit ist eine Abschätzung des Gefahrenpotentials zu späten Zeitpunkten beim Wirbelschleppeneinflug unter verschiedenen Einflugwinkeln, wobei die tatsächliche Entstehung dieser Winkel irrelevant war.

Loucel & Crouch (2005) unterscheiden zwischen einem Einflug in ein ursprünglich paralleles bzw. sinusförmig deformiertes Wirbelröhrensystem, dass sie anhand der maximalen Amplitude  $A$  der Crow-Instabilität klassifizieren, und Einflügen in Wirbelringe. Hierbei differenzieren sie verschiedene Zustände des Wirbelrings über die von elliptischen Wirbelringen vollzogene Periodendauer  $T$  zwischen initialer elliptischer Ringform ( $T = 0$ ), kreisförmiger ( $T = 0.5$ ) und wiederum elliptischer Form ( $T = 1$ ), wobei bei letzterer die Vertauschung der Hauptachsen erfolgt ist. Als Erzeugerflugzeuge dienen die Flugzeuge der Boeing-Familie B737, B767 und B747, wobei keine Angaben zur Zirkulationsabnahme gemacht werden. Im Folgenden werden Ergebnisse der B767 betrachtet, da deren Zirkulation 80% der in dieser Arbeit verwendeten Anfangszirkulation entspricht und damit am ehesten die Zeitpunkte im späten Parallelzustand bzw. frühen Ringzustand abdeckt. Der initiale Wirbelabstand der B767 beträgt bei angenommener elliptischer Auftriebsverteilung  $b_{0,B767} = 37$  m. Kritisch anzumerken ist außerdem, dass die laterale Einflugposition  $y_t$  nicht spezifiziert und wahrscheinlich nicht variiert wurde. Die axiale und vertikale Einflugposition  $x_t$  und  $z_t$  wurden um  $\lambda/4$  bzw.  $\lambda/2$  und  $\pm b_0/4$  variiert, wobei sich dadurch den Autoren zufolge keine Änderungen der resultierenden Rollwinkel ergaben. Je nach Wahl von  $y_t$  wäre jedoch ein deutlicher Einfluss auf den Rollwinkel zu erwarten.

In der folgenden Abbildungsserie 2.5 werden die resultierenden maximalen Rollwinkel farb-kodiert anhand der gewählten Einflugrichtungen  $\Psi$  (Azimuthwinkel) und  $\gamma$  (Inklinationswinkel) aufgetragen, wobei der Einfluss des Azimuthwinkels unabhängig vom Vorzeichen ist. Die

Zeitpunkte entsprechen der Wirbelinitialisierung ( $t^* = 0$  bzw.  $A = 0$ , Abb. a), der beginnenden Entwicklung der Crow-Instabilität ( $A = 0.2 b_0/\sqrt{2}$ , Abb. b), der ausgeprägten Crow-Instabilität kurz vor der Ringbildung ( $A = 0.8 b_0/\sqrt{2}$ , Abb. c) und dem frühen Ringstadium ( $T = 0.2$ , Abb. d).

Typisch für einen Wirbelschleppeneinflug ist ein Rollmoment, welches erst zu einem maximalen Rollwinkel und dann durch die Ausgleichsbewegung des Flugzeugs zu kleinerem Rollwinkel umgekehrten Vorzeichens führt. Dabei verliert das Flugzeug an Höhe. Die Bezeichnungen  $\psi$  und  $\gamma$  sind dabei nicht synonym mit den Lagewinkeln aus Kapitel 4.3.3 zu verwenden, da es sich in diesen Flugsimulatoreinflügen um die Einflugwinkel handelt. Nichtsdestotrotz sind die Auswirkungen äquivalent, weil es nur eine Frage des Bezugssystems ist, ob unter einem bestimmten Winkel in eine gerade Wirbelschlepe oder ob gerade in um einen bestimmten Winkel geneigte Wirbelschleppensegmente eingeflogen wird.

Auffallend in den Abbildungen a), b) und c) ist der stärkere Effekt auf den resultierenden maximalen Rollwinkel bei zunehmenden horizontalen Einflugswinkeln  $\psi$  im Vergleich zum Einflug von oben bzw. unten. Nach dem Linking hingegen ergeben sich nur noch lokal begrenzt bei der Einflugwinkelkombination von  $\psi \approx \gamma \approx \pm 5^\circ$  solche Rollwinkel, die relevante Werte annehmen.

Damit wird in dieser Flugsimulatorstudie gezeigt, dass der kurze Flug insbesondere durch vertikal ausgelenkte Wirbelbereiche das Gefährdungspotential deutlich reduziert. Während das Flugzeug bei großen Einflugswinkeln bei einer angenommenen unveränderten Flugbahn schon nach kurzer Zeit den Gefährdungsbereich wieder verlassen hat, ist dies für den geradlinigen Durchflug durch gekrümmte Wirbelbereiche nicht der Fall. Allerdings erscheint es wahrscheinlich, dass sich durch die alternierend auftretenden Rollmomente neben dem unvermeidbaren Höhenverlust auch die horizontale Flugrichtung so verändert hat, dass sich das Flugzeug nicht mehr unmittelbar im Gefährdungsbereich aufhält. Dadurch können beide Betrachtungsweisen als ähnlich betrachtet werden, wenn die Folgewirkungen nach dem Wirbelschleppeneinflug nicht mehr berücksichtigt werden.

Aus diesen Ergebnissen wird in Loucel & Crouch (2005) der Schluss gezogen, dass sich das Gefährdungspotential für nachfolgende Flugzeuge durch die Ringbildung soweit reduziert, dass bei gleichbleibender Sicherheit die Staffelungsabstände an Flughäfen verringert werden könne. Diese These wird in Kapitel 5.2.1 aufgegriffen und diskutiert.

## 2.5 Numerischer Ansatz

Alle präsentierten Simulationen sind Large-Eddy-Simulationen (LES), die mit dem Code LESTUF durchgeführt wurden. LESTUF ist eine Weiterentwicklung des direkten Simulationscodes DISTUF, welcher Ende der 80er Jahre am DLR programmiert wurde, um turbulente Scherströmungen unter Temperaturschichtungseinfluss zu berechnen. Schwerpunkt war die Erzeugung und Entwicklung eines homogen turbulenten Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes, welchem anisotrope Eigenschaften aufoktruiert werden können, und welche zusätzlich von konstanter Scherung überlagert werden können (Gerz et al., 1989). Wegen der großen Variabilität der betroffenen Längenskalen lassen sich mit DISTUF Flugzeugwirbelschleppen numerisch nicht ausreichend auflösen. Der charakteristische Abstand  $b_0$  der beiden Wirbelröhren liegt bei  $10^1..10^2$  m, die Wellenlänge der dominierende Crow-Instabilität bei  $10^2..10^3$  m,

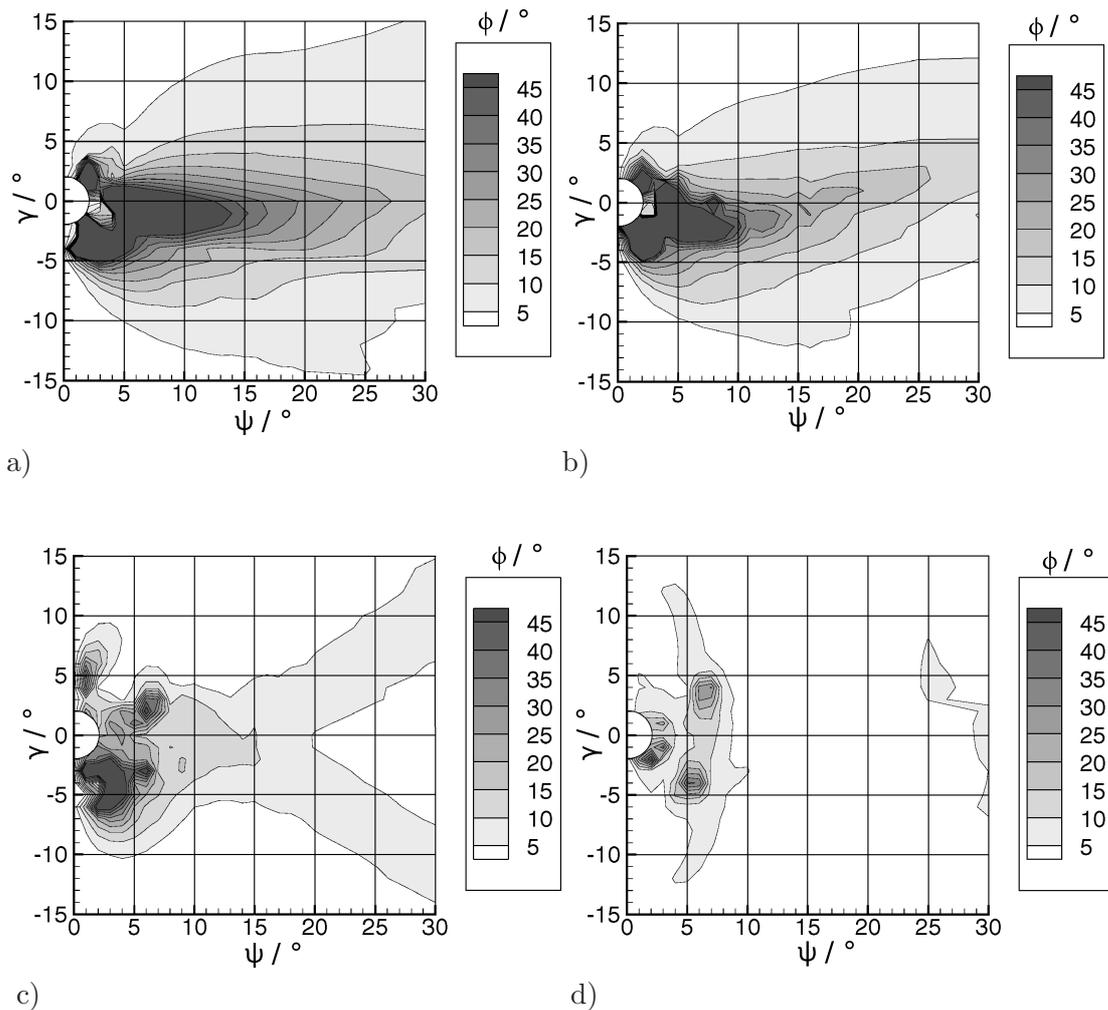


Abbildung 2.5: Resultierender Rollwinkel  $\varphi$  in Abhängigkeit des horizontalen ( $\psi$ ) und vertikalen ( $\gamma$ ) Einflugwinkels zu den Zeitpunkten Wirbelinitialisierung (a), beginnende Entwicklung der Crow-Instabilität (b), kurz vor der Ringbildung (c), frühes Ringstadium (d).

genauso wie die sie beeinflussenden turbulenten Wirbel, während sich der Dissipationsbereich in der Größenordnung der Kolmogorov'schen Mikrolänge von  $\mu = 10^{-3} \dots 10^{-2}$  m befindet.

Daher wird der inzwischen weit verbreitete Ansatz der Large-Eddy-Simulation verfolgt. Hierbei werden die größeren Wirbel explizit berechnet, während kleinere Wirbel mit einem dissipativen Schließungsansatz modelliert werden. Damit ist es möglich, die Vorzüge der direkten Simulation (hohe Genauigkeit) mit denen der Modellierung (große Rechengebiete) zu kombinieren.

### 2.5.1 Mathematische Formulierung von LESTUF

Um die zu berechnenden Skalen von den zu modellierenden Skalen zu trennen, wird in Grobstruktur- und Feinstrukturanteil aufgespalten, wobei letzterer über den zusätzlichen Term  $\tau_{ij}$  modelliert wird. Hier wird nach einem Ansatz von Schumann (1975) auf eine explizit definierte

Filterfunktion verzichtet, stattdessen wird der Gitterabstand als Filtergröße verwendet. Daher wird die in LESTUF verwendete Methode als implizite Filterung bezeichnet.

Im Gegensatz zu expliziten Filtern, welche den Funktionswert der Grobstruktur zum Beispiel über die Rechtecks- (Tophat-), Cut-off oder Gaussfilterfunktion ermitteln, ist hierbei eine eindeutige Filterfunktion nicht gegeben. Daher kann der für die Grobstrukturberechnung verwendete Funktionswert (z.B. der Geschwindigkeit) den entsprechenden Parameter innerhalb einer Masche ungenügend repräsentieren. Daher muss die Art des Filters im Schließungsansatz berücksichtigt werden (zum Beispiel bei der Auswahl empirischer Konstanten). Anzumerken ist jedoch, dass dieser Ansatz einer expliziten Filterung entsprechen kann. (So führt die zuvor erwähnte „Top-hat“-Filterfunktion bei äquivalenten Längen von Maschenabstand und Filterweite und der zusätzlichen Verwendung einer linearen Diskretisierung zu einem äquivalenten Gleichungssystem, siehe Fröhlich (2006).)

Während der Integration der Gleichungen wird zugleich die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes gewährleistet. Die dabei auftretende Poissongleichung zur Druckbestimmung wird mit einem von Schumann (1984) programmierten direkten Lösungsalgorithmus berechnet. Somit werden folgende Schritte durchgeführt (Gerz, 1988):

- a) Berechnung der Impulsgleichung aus den vorangehenden Schritten und unter vorläufiger Vernachlässigung des Druckterms ergeben ein neues vorläufiges Geschwindigkeitsfeld  $\tilde{u}^{n+1}$ , wobei  $RHS$  den Advektions-<sup>2</sup>, Auftriebs- und Feinstrukturterm aus Gl. (2.29) bezeichnet.

$$\tilde{u}^{n+1} = u^n + \Delta t (RHS)^n \quad (2.20)$$

- b) Aus der Bedingung der Divergenzfreiheit des neuen Geschwindigkeitsfelds (definiert durch die Kontinuitätsgleichung) ergibt sich eine Poissongleichung,

$$\begin{aligned} \nabla u^{n+1} &= \nabla \tilde{u}^{n+1} - \nabla^2 (\Delta t p^n) = 0 \\ p^n &= \nabla^{-2} \left( \frac{1}{\Delta t} \nabla \tilde{u}^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

mit welcher das Druckfeld im Fourierraum *direkt* berechnet werden kann. Dies wird durch die periodischen Randbedingungen ermöglicht, wobei inzwischen auch weitere Randbedingungen berücksichtigt werden können (U. Schumann, persönliche Kommunikation, Juli 2009).

- c) Das neue Geschwindigkeitsfeld errechnet sich zu

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t [(RHS)^n - \nabla p^n] \quad (2.22)$$

## Randwerte

Zur Vermeidung inkonsistenter Rand- und Anfangsbedingungen aufgrund des Wirbelpaareinsatzes wurde ein Spiegelwirbelkonzept implementiert, welches den ansonsten zu erwartenden Folgen (Bildung von Randwirbelstärke, Verlust der Divergenzfreiheit) entgegenwirkt. Abbildung 2.6 a) zeigt die Ausgangssituation des Wirbelpaars zu  $t^* = 0$  mit den durch beide Wirbel

<sup>2</sup>Da in der Meteorologie der Begriff Konvektion speziell für aufsteigende Luftmassen gilt, wird horizontaler Transport als Advektion bezeichnet. In der Strömungsmechanik wird auf diese Differenzierung im Allgemeinen verzichtet, stattdessen wird der Begriff Konvektion universell verwendet.

induzierten Geschwindigkeitskomponenten am  $y$ -Rand (blau) und am  $z$ -Rand (rot) jeweils am letzten Gitterpunkt innerhalb des Feldes. Außerhalb sind jeweils die Geschwindigkeitskomponenten der gegenüberliegenden Seite angezeigt, die aufgrund der (durch den Code erzwungenen) Periodizität gleichzeitig die unmittelbare Nachbarstelle repräsentieren.

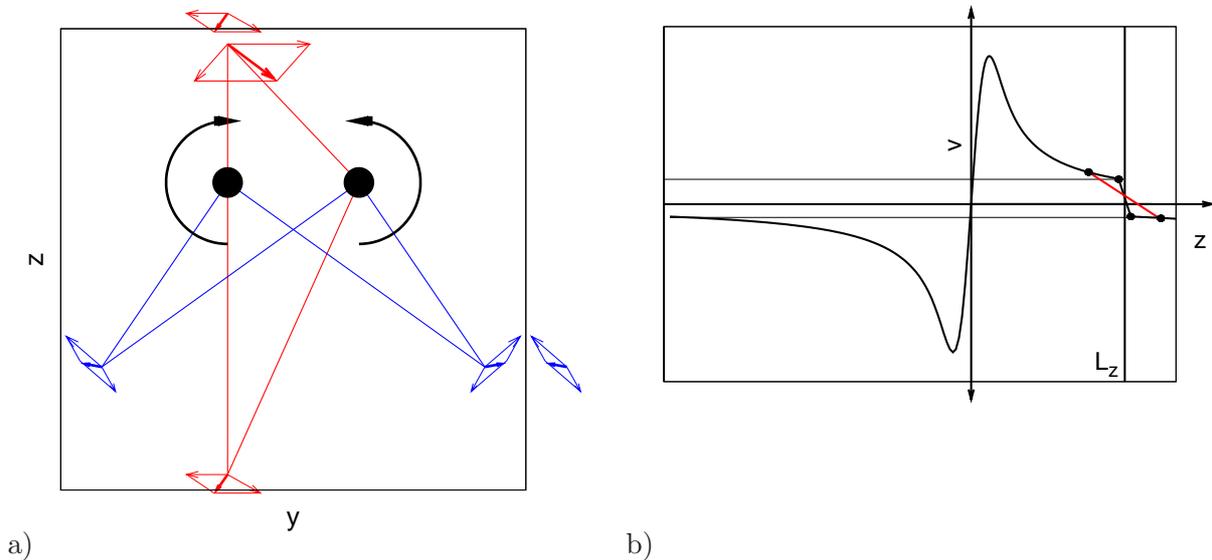


Abbildung 2.6: a) Geschwindigkeitskomponenten beider Wirbel (dünne Pfeile) an zwei ausgewählten Randmaschen inklusive ihrer Resultierenden (dicke Pfeile). b) Verlauf der Horizontalgeschwindigkeit  $v$  über den Rand des Rechengebiets hinweg, wobei die  $y$ -Position der des linken Wirbels in a) entspricht.

Der rot dargestellte  $z$ -Übergang kann für die  $w$ -Komponente kontinuierlich sein, wenn das Wirbelpaar vertikal zentriert ist. Ansonsten stellt sich eine Unstetigkeit von  $w$  ein, wobei  $w$  vor und hinter der Rechengebietsgrenze vorzeichenleich ist. Hingegen ändert die Horizontalgeschwindigkeit  $v$  am  $z$ -Übergang ihre Richtung, deswegen wird  $\partial v / \partial z$  unphysikalisch groß. Daher entwickelt sich an den Vertikalrändern numerisch bedingt Randwirbelstärke, die den Wirbelzerfall unphysikalisch beeinflussen könnte.

Am blau erkennbaren  $y$ -Übergang bilden sich Resultierende, die in jedem Fall einen kontinuierlichen Übergang der  $w$ -Komponente haben, und deren  $v$ -Komponenten jeweils gegeneinander (bzw. voneinander weg) gerichtet sind. Dies führt an den Seitenrändern zu Senken (bzw. Quellen), womit die Divergenzfreiheit verletzt ist.

Abbildung 2.6 b) zeigt den Verlauf der Geschwindigkeit  $v$  parallel zur  $z$ -Achse durch das in Abb. 2.6 a) linke Wirbelzentrum. Am Übergang entsteht wie angesprochen eine Unstetigkeit der Geschwindigkeit, die zu Randwirbelstärke führt (bzw. zu Divergenz am  $y$ -Rand). Für das vertikal zentrierte Wirbelpaar entspricht die Vertikalgeschwindigkeit am linken Rand der Vertikalgeschwindigkeit am rechten Rand, jedoch mit einem Wechsel des Vorzeichens (an der Stelle  $z = L_z$  würde dann gelten:  $w|_{L_z/\Delta z-1} = -w|_{L_z/\Delta z+1}$ ). Verringern ließe sich das Fehlerpotential durch einen flacheren Übergang, wie anhand der roten Kurve in Abb. 2.6 b) dargestellt. Ziel ist daher an den Randmaschen die Reduktion der gegenläufigen  $v$ - und ggf.  $w$ -Geschwindigkeitskomponenten.

Daher wird dem Geschwindigkeitsfeld nach Einsatz des Wirbelpaars die Periodizität in allen Richtungen aufgezwungen. Dies erfolgt über ein System von Spiegelwirbeln, die zu Beginn

aufgrund der Zweidimensionalität der Simulation nur in der  $(y,z)$ -Ebene eingesetzt werden müssen. Die Anordnung der Spiegelwirbel ergibt immer ein quadratisches Muster, es sind daher anfangs einmalig  $n^2 - 1$  (mit  $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ ) zusätzliche Wirbelpaare zu berechnen. Jeder der  $2n^2$  Einzelwirbel induziert auf jeden Gitterpunkt des Rechengebiets eine Geschwindigkeit, womit diese in den Randbereichen immer ähnlicher bezüglich der Geschwindigkeit am gegenüberliegenden Rand wird. Damit wird der Gradient an den Rändern mit steigendem  $n$  zunehmend glatter, und somit die Bedingung der Periodizität immer besser erfüllt. Da zu große Werte für  $n$  jedoch die Rechenzeit deutlich erhöhen, wurde in dieser Arbeit ausschließlich  $n = 7$  verwendet.

Es hat sich herausgestellt, dass die gleiche Anzahl von horizontalen und vertikalen Spiegelwirbeln und eine quadratische Rechengebietsgröße von Vorteil sind. Die ausschließliche Verwendung vertikaler Spiegelfelder würde zwischen den beiden Wirbeln eine Vertikalgeschwindigkeit in negative  $z$ -Richtung erzeugen, die von allen Spiegelwirbelpaaren verstärkt wird. Demgegenüber ist bei den horizontal angrenzenden Feldern der Einfluss der beiden näher am Hauptfeld befindlichen Wirbel dominierend, woraus sich eine Vertikalkomponente in positive Richtung feststellen lässt. Bei Erfüllung der zuvor genannten Bedingungen und unter der Voraussetzung, dass  $b_0 < 0.2 L_y$  gilt, kompensieren sich diese Effekte nahezu, so dass die dem turbulenten Geschwindigkeitsfeld beaufschlagte zusätzliche Vertikalkomponente in einer vernachlässigbaren Größenordnung von  $< 1\%$  bezüglich  $w_0$  ist.

Sobald die Wirbelschlepe durch ihre induktive Absinkbewegung das Rechengebiet verlassen hat, wandert sie periodisch von oben wieder in dieselbe Domain ein. Damit ist es möglich, sehr lange Wirbelalter zu analysieren, in denen die Wirbelschlepe große vertikale Entfernungen zurückgelegt hat. Im Gegensatz hierzu gilt dies nicht für einen Übergang von Segmenten der Wirbelschlepe in Spannweitenrichtung, was zu sehr späten Zerfallszeiten von Bedeutung sein kann, da sich bei gegebenen meteorologischen Bedingungen extrem breite Wirbelringe ausbilden können. Da dann die beiden gegensinnig rotierenden, äußersten Wirbelbereiche an einer Gebietsgrenze in unmittelbarer Nähe gegenüber liegen, beeinflussen sich die jeweiligen Felder in ungewollter Weise, was zu unphysikalischer Kompensation von Wirbelstärke bzw. Zirkulation und zu gegenseitig induziertem Aufsteigen der Wirbelsegmente führen kann.

## Grundgleichungen

Aus der differentiellen Betrachtung eines Volumenelements der Atmosphäre ergibt sich das hydrostatische Gleichgewicht

$$\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0 g \quad (2.23)$$

Desweiteren erfolgt die Berücksichtigung des Schwankungswerts der Dichte  $\rho$  über das vollständige Differential in Abhängigkeit vom Druck  $p$  und der potentiellen Temperatur  $\theta$

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial p} dp + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} d\theta \quad (2.24)$$

Aus einer der anelastischen Bedingungen, dass die Skalenhöhe der Temperatur ( $H_\theta$ ) deutlich größer ist als jene von Dichte ( $H_\rho$ ) und Druck ( $H_p$ ), folgt unter Einbeziehung der Definition des thermischen Ausdehnungskoeffizienten  $\beta$

$$\beta \equiv \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \quad (2.25)$$

dass

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \gg \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (2.26)$$

Damit vereinfacht sich das vollständige Differential aus Gl. (2.24), und es ergibt sich mit Gl. (2.25) durch Variablentrennung und anschließende Integration

$$\rho = -\rho_0 \beta \theta. \quad (2.27)$$

Dieser Anteil stellt den Auftriebsanteil in der Impulsgleichung dar. Damit ergeben sich unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention und des Kroneckersymbols  $\delta_{ij}$  die Boussinesq-approximierten Navier-Stokes-Gleichungen, welche aus der Kontinuitätsgleichung, der Impulsgleichung und der Energiegleichung bestehen (Gerz & Holzäpfel, 1999). Die bereits erfolgte Filterung zeigt sich durch den Zusatzterm zur Feinstrukturmodellierung anstatt des klassischen Viskositätsterms (da  $\nu_t \gg \nu_{lam}$ ).

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}^{mod}}{\partial x_j} + \beta \theta g \delta_{i3} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(\theta u_j)}{\partial x_j} + u_3 \frac{\partial \Theta}{\partial x_3} = -\frac{\partial \tau_{\theta j}^{mod}}{\partial x_j} \quad (2.30)$$

Hierbei steht  $\Theta$  für die potentielle Referenztemperatur und  $\tau_{ij}^{mod}$  bzw.  $\tau_{\theta j}^{mod}$  für die Feinstrukturmodellierung, die sich aus der modifizierten Smagorinskyschließung ermitteln lässt. Bei der Beschreibung von Gl. (2.29) wurde bereits eine weitere Vereinfachung verwendet, die Teil der Boussinesq-Approximation und damit auch der anelastischen Annahmen ist. Dabei wird die Dichte  $\rho$  durch ihren Referenzwert  $\rho_0$  ersetzt, außer in jenem Term, in welchem sie mit der Erdanziehung  $g$  multipliziert wird.

### 2.5.2 Schließungsmodell nach Smagorinsky inklusive NaCoo-Korrektur

Basis der Modellierung ist der Ansatz von Boussinesq, der den Feinstrukturterm als zusätzliche, künstliche Viskosität betrachtet. Dementsprechend wird dieser mit der stoffunabhängigen turbulenten Viskosität  $\nu_t$  und dem Scherratentensor aus (Gl. 2.18) folgendermaßen angesetzt:

$$\tau_{ij}^{mod} = -2\nu_t S_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} u_l u_l. \quad (2.31)$$

Der Ansatz  $-2\nu_t S_{ij}$  modelliert dabei nur den anisotropen Anteil der Feinstruktur, weil aus der Kontinuitätsgleichung  $S_{ii} = 0$  folgt. Da jedoch die isotropen (Spur-)Anteile des Feinstrukturterms meist ungleich Null sind, muss der Zusatzterm  $\delta_{ij}/3 u_l u_l$  addiert werden, welcher zum Ausgleich vom Druckfeld subtrahiert wird (Dürbeck (1997), Deardoff (1970)).

Aus Dimensionsgründen wird  $\nu_t$  schon in der Prandtlschen Mischungsweghypothese aus dem Produkt charakteristischer Werte für Länge und Geschwindigkeit der Feinstruktur ermittelt. Diese Idee wurde von Smagorinsky aufgegriffen, daher verwendet er als charakteristisches Längemaß die (in allen drei Raumrichtungen konstante) Filterweite  $\Delta$  multipliziert mit einer Modellkonstanten  $c_s$ . Zur Ermittlung eines Geschwindigkeitsmaß kommt das Produkt aus Längenmaß und normiertem Scherraten Tensor  $|S_{ij}| = \sqrt{\overline{S_{ij} S_{ij}}}$  zum Einsatz (siehe zum Beispiel Fröhlich (2006)), somit gilt für die (unkorrigierte) turbulente Viskosität  $\tilde{\nu}_t$

$$\tilde{\nu}_t = (c_s \Delta)^2 \sqrt{2} |S_{ij}| \quad (2.32)$$

Da  $|S_{ij}|$  skalar und positiv ist, wird  $\tilde{\nu}_t$  zum einen richtungsunabhängig und zum anderen immer positiv. Nachteilige Auswirkungen ergeben sich bei diesem Modell deswegen bei relevantem Backscatter (Energietransport zu größeren Skalen), welcher nicht mit ausreichender Genauigkeit abgebildet werden kann. Aufgrund seiner Robustheit und seiner vielfältigen Einsatzmöglichkeiten ist die Smagorinskyschließung trotzdem weit verbreitet.

Die Wahl der Konstanten  $c_s$  bestimmt dabei die Dissipationsrate des Modells.  $c_s$  kann bei isotroper Turbulenz durch Gleichsetzen der physikalischen Dissipationsrate aus Gl. (2.18) mit der spektralen Dissipationsrate aus Gl. (2.37) gewonnen werden. Mit der Kolmogorov-Konstante  $c_K = 1.6$  ergibt sich der in dieser Arbeit ausschließlich verwendete Wert von  $c_s = 0.165$  (Herleitung im Anhang D, Auflistung verschiedener Werte z.B. in Schmidt & Schumann (1989)).

Aus der turbulenten Viskosität wird außerdem der Feinstrukturanteil der Energiegleichung modelliert. Es ergibt sich unter Verwendung der turbulenten Prandtlzahl mit  $Pr_t = 0.419$

$$\tau_{\theta j}^{mod} = -\frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}. \quad (2.33)$$

Desweiteren beinhaltet LESTUF die von Holzäpfel (2004) entwickelte subskalige Korrekturfunktion NaCoo. Sie reduziert die aufgrund geringer Wirbelkernauflösung überproportional hohe turbulente Viskosität, womit einerseits die maximale Tangentialgeschwindigkeit des Wirbelpaars länger erhalten bleibt und andererseits das Wachstum des Kernradius unterdrückt wird. Das Korrekturmodell basiert auf der Bestimmung der Stabilität über eine rotatorische Richardsonzahl  $Ri$ , welche über

$$\nu_t = \tilde{\nu}_t \frac{1}{1 + \alpha Ri} \quad (2.34)$$

ins subskalige Turbulenzmodell einfließt. Über  $\alpha$  lässt sich die Stärke der Korrektur einstellen. Die Richardsonzahl ergibt sich aus einem modifizierten Ansatz von Bradshaw (1969), nach welchem  $Ri$  mit steigender Krümmung der Stromlinien zunimmt:

$$Ri = \frac{2v_\theta}{r} \left( \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) / |S_{ij}|^2 \quad (2.35)$$

Es stellt sich heraus, dass der Einstellungsfaktor  $\alpha$  nur in gewissen Grenzen frei gewählt werden kann. Je höher der Kernradius aufgelöst ist, desto stärker kann man mit hohen Werten für  $\alpha$  die turbulente Viskosität im Kerninnern zusätzlich dämpfen. Wenn  $\tilde{\nu}_t$  zu klein wird, werden im Kerninnern die durch die geringe Ordnung der Diskretisierung vorhandenen numerischen Instabilitäten nicht ausreichend gebremst, was zur Divergenz der Lösung führt. Bei der gewählten Kernauffösung von  $r_c/\Delta = 3$  wurden die besten Ergebnisse mit  $\alpha = 2$  erzielt.

### 2.5.3 Diskretisierung

Die räumlichen Ableitungen werden in LESTUF über zentrale finite Differenzen zweiter Ordnung ermittelt. Dazu wird ein versetztes Gitter verwendet, d.h. alle Geschwindigkeiten werden an den Maschenübergängen berechnet, während sich Druck und Temperatur auf den Maschenmittelpunkt beziehen. Die zeitliche Diskretisierung erfolgt mit dem expliziten Adams-Bashforth-Verfahren, welches die beiden vorangehenden Zeitschritte berücksichtigt und somit ebenfalls von zweiter Ordnung ist. Der erste Zeitschritt wird über einen Eulerschritt erreicht, welcher einen Sonderfall des Adams-Bashforth-Verfahren darstellt, weil nur ein zurückliegender Zeitschritt (das Startfeld) zur Verfügung steht. Der explizite Charakter der Diskretisierung erfordert ausreichend kleine Zeitschritte, was durch die Erfüllung der CFL-Bedingung sichergestellt wird. Sie besagt, dass sich die Strömung pro Zeitschritt nicht weiter als eine Masche bewegt haben darf, um sie ausreichend abzubilden ( $v_{max}\Delta t/\Delta x_i < 1$ ).

### 2.5.4 Initialisierung des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes in LESTUF

Ziel dieses Kapitels ist die Erzeugung eines vollständig entwickelten turbulenten Geschwindigkeitsfeldes, welches durch das von Kolmogorov vorgeschlagene  $k^{-5/3}$ -Energiespektrum in einem möglichst breiten Trägheitsbereich geprägt ist.

Dieses wird in LESTUF durch die allmähliche Entwicklung aus Startfeldern erreicht, welche ausschließlich durch großskalige turbulente Elemente initialisiert sind. Damit bildet sich die für ausgeprägte Turbulenz typische Energiekaskade aus, in welcher turbulente kinetische Energie kontinuierlich zu großen Wellenzahlen transportiert wird, bis sie im Feinstrukturmodell dissipiert wird. Der Abfall der initialisierten spektralen Energieverteilung zu größeren Wellenzahlen muss ausreichend steil sein, dass er während seiner Entwicklung die anvisierte Steigung von  $k^{-5/3}$  erreichen kann.

#### Energiedichtefunktion $\hat{E}$

Die Erstellung der Energiedichtefunktion  $\hat{E}$  erfolgt unter Berücksichtigung der folgenden Eigenschaften für die Initialisierungsfelder der Geschwindigkeiten (Gerz & Schumann, 1989):

- a) Komplexe Zufallszahlen mit Gauß-verteilten Realteilen mit Mittelwert 0 und Varianz 1
- b) Periodizität in allen drei Raumrichtungen
- c) Divergenzfreiheit, d.h. keine Quellen und Senken
- d) Homogenität, d.h. alle statistischen Größen und Verteilungen sind vom Ortsvektor unabhängig

- e) Vorgabe verschiedener vertikaler und horizontaler Spektralverteilungen von Geschwindigkeit und Temperatur möglich

Um diese Eigenschaften zu erreichen, findet die Initialisierung im Fourierraum statt. Es ergeben sich unter Berücksichtigung der variierenden Längen des nicht-kubischen Rechengebiets folgende vertikale und horizontale (Index  $h$ ) Energiedichtefunktionen  $\Psi$  (Gerz & Holzäpfel, 1999):

$$\Psi_{h3}(k_3) = \left[ \frac{1}{2} + 2 \left( \frac{k_3}{k_{p,h3}} \right)^2 \right] \exp \left[ -2 \left( \frac{k_3}{k_{p,h3}} \right)^2 \right] \quad h = 1, 2 \quad (2.36a)$$

$$\Psi_{33}(k_3) = \exp \left[ -2 \left( \frac{k_3}{k_{p,33}} \right)^2 \right] \quad (2.36b)$$

$$\Psi_{hh}(k_h) = C_{hh} \left[ \frac{1}{2} \frac{k_h}{k_{p,hh}} + \left( \frac{k_h}{k_{p,hh}} \right)^3 \right] \exp \left[ -2 \left( \frac{k_h}{k_{p,hh}} \right)^2 \right] \quad h = 1, 2 \quad (2.36c)$$

$$\Psi_{3h}(k_h) = C_{3h} \left( \frac{k_h}{k_{p,3h}} \right)^3 \exp \left[ -2 \left( \frac{k_h}{k_{p,3h}} \right)^2 \right] \quad h = 1, 2 \quad (2.36d)$$

Die Faktoren  $C$  beinhalten den Betrag der Geschwindigkeitsvarianz, während  $k_p$  diejenigen Wellenzahlen bezeichnet, bei welchen sich bei der Initialisierung die jeweiligen Energiemaxima befinden. Bei Verwendung einer verschiedenen Anzahl an Gitterpunkten in den beiden Horizontalrichtungen muss  $k_h$  gemittelt und zugleich ganzzahlig werden. Die Erzeugung des Turbulenzfelds verläuft in zwei Hauptschritten:

- Vertikale Varianzspektren entsprechend den Gleichungen (2.36a-b) werden vorgegeben. Sie beinhalten die komplexen Zufallszahlen und erfüllen die Bedingungen Periodizität, Divergenzfreiheit und Homogenität
- Berechnung der horizontalen Varianzspektren so, dass die statistischen Verläufe entsprechend den Gleichungen (2.36c-d) erfüllt werden und obige Bedingungen weiterhin vorliegen.

Eine detaillierte Beschreibung zur Erstellung der turbulenten Initialisierungsfelder findet sich in Dürbeck (1997).

Aus dem aus Gl. (2.15) erhaltenen gemittelten Energiedichtespektrum  $\hat{E}(k)$  ergeben sich die spektral berechnete Dissipationsrate  $\epsilon_k$  und das turbulente integrale Längenmaß über alle Raumrichtungen  $L_t$ , welches einen mittleren Wert der komponentenweise aus Gl. (2.13) gewonnenen Längenskalen darstellt.

$$\epsilon_k = 2 \int_{k=0}^{\infty} \nu k^2 \hat{E}(k) dk \quad (2.37)$$

$$L_t = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{2v_{rms}^2} \int_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} \hat{E}(k) dk \quad (2.38)$$

Der in Gl. (2.38) im Nenner auftretende Term  $v_{rms}^2$  kürzt sich somit mit der Energie aus den Termen  $C$  in Gln. (2.36c-d). Dadurch ist  $L_t$  nur von der maximalen Wellenzahl und von der zu Beginn des Vorlaufs definierten Wellenzahl maximaler Energie  $k_p$  abhängig (also von der Form des Spektrums), welche ihrerseits während der turbulenten Entwicklung langsam ansteigt.

### 2.5.5 Einfluss der Boussinesq-Approximation

Dieses Kapitel beschreibt die Quelle barokliner Wirbelstärke, und untersucht, ob ihre Produktion durch die Wirbelschlepe bei Verwendung der Boussinesq-Approximation ausreichend wiedergegeben wird. Barokline Wirbelstärke ist eine Rotationsbewegung von Luftteilchen, die durch das Zusammenspiel von Dichte- und Druckgradienten entsteht. Diese stört die Struktur der Wirbelschlepe und beschleunigt ihren Zerfall.

In den folgenden Abschnitten ist zu beachten, dass der tatsächlich zur Produktion barokliner Wirbelstärke beitragende vertikale Temperaturgradient  $\partial T/\partial z$  in LESTUF durch den potentiellen Temperaturgradienten abgebildet wird. Daraus folgt, dass der Temperaturgradient  $\partial T/\partial z$  um etwa 6 K/1000 m überschätzt wird. Somit reduziert  $\partial T/\partial z$  den berechneten Gradienten  $\partial\theta/\partial z$  bei starker Schichtung, hingegen wird bei konstanter potentieller Temperatur  $\partial T/\partial z < 0$ . Eine tatsächlich neutrale Schichtung mit  $\partial T/\partial z = 0$  wird ungefähr bei  $N^* = 0.4$  erreicht, dass heißt die in Abb. 2.8 verwendete normierte Brunt-Väisälä Frequenz von  $N^* = 1$  stellt den Fall maximaler Temperaturgradienten dar.

Die Boussinesq-Approximation stellt einen Spezialfall der anelastischen Annahmen dar. Zwei Aussagen der anelastischen Annahmen wurden bereits erwähnt (Ersetzung von  $\rho$  durch  $\rho_0$  außer im Gravitationsterm, Dominanz von  $H_\theta$  gegenüber  $H_\rho$  und  $H_p$ ); zusätzlich muss gelten

- a) Fluktuationen der thermodynamischen Zustandsgrößen sind klein bezogen auf ihren Referenzwert
- b) die Skalenhöhen von Dichte ( $H_\rho$ ) und Druck ( $H_p$ ) müssen groß gegenüber der Vertikalausdehnung sein. Diese Aussage entspricht der eigentlichen Boussinesq-Approximation (Bannon, 1995)

Die Energieerhaltung dieses Systems wird durch die letzte Aussage sichergestellt. Da bei Verwendung dieser Annahmen die Kontinuitätsgleichung keine zeitliche Dichteableitung mehr besitzt, können sich keine Schallwellen ausbreiten, was bei der numerischen Behandlung von großem Vorteil ist.

### Zugrundeliegende Gleichungen

Um die Auswirkungen der Boussinesq-Approximation zu analysieren, werden Druck- und Gravitationsterm der Impulsgleichung (2.29) in Wirbelform des approximierten und vollständigen Navier-Stokes-Gleichungssystems gegenübergestellt. Dazu wird in der Boussinesq-Form die Rotation auf den Quotienten von Druckgradient und (konstanter) Referenzdichte angewandt, daher wird dieser Anteil Null. Hingegen gilt für den Gravitationsterm

$$\dot{\omega}_{BV,Bouss} = \nabla \times (\beta \theta \vec{g}) = \beta g \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ -\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Mit den Gleichungen (2.23) und (2.27) folgt

$$\dot{\omega}_{BV,Bouss} = \frac{1}{\rho_0^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p_0}{\partial z} \\ -\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Zum Vergleich der resultierenden Beiträge des kompressiblen Falls ergibt sich

$$\dot{\omega}_{BV,kompr} = \nabla \times \left( -\frac{1}{\rho} \nabla p - \vec{g} \right) \quad (2.41)$$

Hierbei kann die Gravitation  $\vec{g}$  als Gradient des Schwerepotentials  $\Pi$  dargestellt werden. Mit  $\nabla \times (\nabla \Pi) = 0$  entfällt der Gravitationsterm und in analoger Weise ein Teil des Druck-Dichteterms, somit resultiert aus obiger Gleichung mit  $d(1/f(x))/dx = -1/f^2(x)df(x)/dx$ :

$$\dot{\omega}_{BV,kompr} = \frac{1}{\rho^2} \cdot (\nabla \rho \times \nabla p) = \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Im für die Auslösung des Wirbelzerfalls besonders wichtigen Frühstadium kann angenommen werden, dass die Ableitungen in Flugrichtung (x) verschwinden, womit unabhängig vom Gleichungssystem nur noch barokline Wirbelstärke in x-Richtung produziert werden kann. Somit unterscheiden sich die beiden Gleichungen (2.40) und (2.42) in x-Richtung um den zweiten Term

$$|\dot{\omega}_{BV,kompr} - \dot{\omega}_{BV,Bouss}| = \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (2.43)$$

welcher im Folgenden genauer untersucht wird.

### Analytische Abschätzung des Druckgradienten

Durch gegenseitige Geschwindigkeitsinduktion sinken die Wirbel innerhalb des sie umhüllenden Ovals mit anfangs konstanter Geschwindigkeit ab, d.h. bei stabil geschichteter Atmosphäre (was meist der Fall ist) entstehen Temperatur- und Dichtegradienten. Druckgradienten entstehen einerseits durch das hydrostatische Gleichgewicht (vgl. Gl. (2.23)), andererseits durch das Druckminimum im Wirbel selber. Der Einfachheit halber wird hierbei ein einzelner Rankine-Wirbel betrachtet, dessen Druckverlauf in Radialkoordinaten folgendermaßen gegeben ist:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho}{r} v_{\theta}^2 = \frac{\rho}{r} \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\omega r\right)^2 & r \leq r_c \\ \left(\frac{\Gamma}{2\pi r}\right)^2 & r > r_c \end{cases} \quad (2.44)$$

Umstellung und Integration derselben liefert

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{\rho} &= \left(\frac{1}{2}\omega\right)^2 \int_0^{r_c} r dr + \left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2 \int_{r_c}^{r_{max}} \frac{1}{r^3} dr \\ &= \frac{1}{2} v_{\theta,r_c}^2 + \frac{1}{2} v_{\theta,r_c}^2 - \frac{1}{2} v_{\theta,r_{max}}^2 \stackrel{r_{max} \rightarrow \infty}{=} v_{\theta,r_c}^2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Dies bedeutet, dass für den Fall  $r_{max} = \infty$  der dritte Term verschwindet, und außerdem, dass beide Teilbereiche des Rankine-Wirbels gleichen Anteil am Druckverlauf haben. Es lassen sich nun bei gegebenen Wirbelparametern sowohl Druck als auch Druckgradient innerhalb der Wirbel beschreiben.

Für Potentialwirbel kann das das Wirbelschleppenpaar einschließende Oval mit Hilfe der Potentialtheorie dargestellt werden. Dies ist hier möglich, weil der Starrkörperanteil klein gegenüber dem Potentialwirbelanteil ist ( $r_c \ll b_0/2$ ). Lord Thomson bestimmte die Maße der Halbachsen des Ovals bezogen auf den halben Wirbelabstand  $a = b_0/2$  zu  $2.09 a$  in Spannweitenrichtung und  $1.73 a$  in vertikaler Richtung (S. 222 in Lamb (1957)). Dies entspricht näherungsweise der Form einer Ellipse, daher wird der minimale Abstand eines Wirbelzentrums zur Umschließungskurve zu  $1.09 a = 8.5 r_c$  berechnet. Damit wird der absolute Druckunterschied nach Gl. (2.45) mit  $r_{max} \gg r_c$  näherungsweise

$$\Delta p = \rho v_{\theta,r_c}^2 \quad (2.46)$$

Abbildung 2.7 zeigt den Tangentialgeschwindigkeits- und Druckverlauf eines Rankine-Wirbels zu zwei verschiedenen Zeitpunkten ( $r_c = r_{c,0}$  und  $r_c = 1.66 r_{c,0}$ ) inklusive dem hydrostatischen Druckgradienten, der als Tangente angenähert ist. Dieser berührt die Druckkurve an dem Punkt, wo beide Druckgradienten gleich groß sind. Dies passiert bei etwa  $r_c \approx 0.15 b_0$ , also schon kurz hinter dem Kernradius, wo der Rand des Wirbelovals noch weit entfernt ist. Der Druckgradient am Ovalrand ist grafisch schon nicht mehr von 0 unterscheidbar.

Geschwindigkeits- und Druckverlauf des Potentialwirbelbereichs bleiben für wachsende Kernradii unverändert. Damit wird offensichtlich, dass auch die Berührstelle der Tangente unverändert bleibt, solange der Kernradius nicht größer als  $r_c \approx 0.15 b_0$  wird. Insgesamt wird die Druckkurve innerhalb des Kernradius zu späteren Zeitpunkten kontinuierlich flacher, damit wird der Bereich in Wirbelkernnähe mit relevantem Wirbeldruckgradient immer kleiner.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der Druckgradient aus dem Wirbelkern nur kernnah und bevorzugt in frühen Entwicklungsstadien größer als der hydrostatische Druckgradient ist. Außerhalb nimmt er quadratisch ab, so ist er am Rand des Wirbelovals bei analytischer Betrachtung bereits fast 10mal kleiner als der hydrostatische Druckgradient. Das bedeutet, dass nur bei starker Temperaturschichtung kernnah barokline Wirbelstärke erzeugt werden kann, die LESTUF nicht erkennt. Wie groß diese im Vergleich mit der baroklinen Wirbelstärke aus dem Term  $\partial p/\partial z$   $\partial \rho/\partial y$  einzuschätzen ist, zeigt das folgende Kapitel.

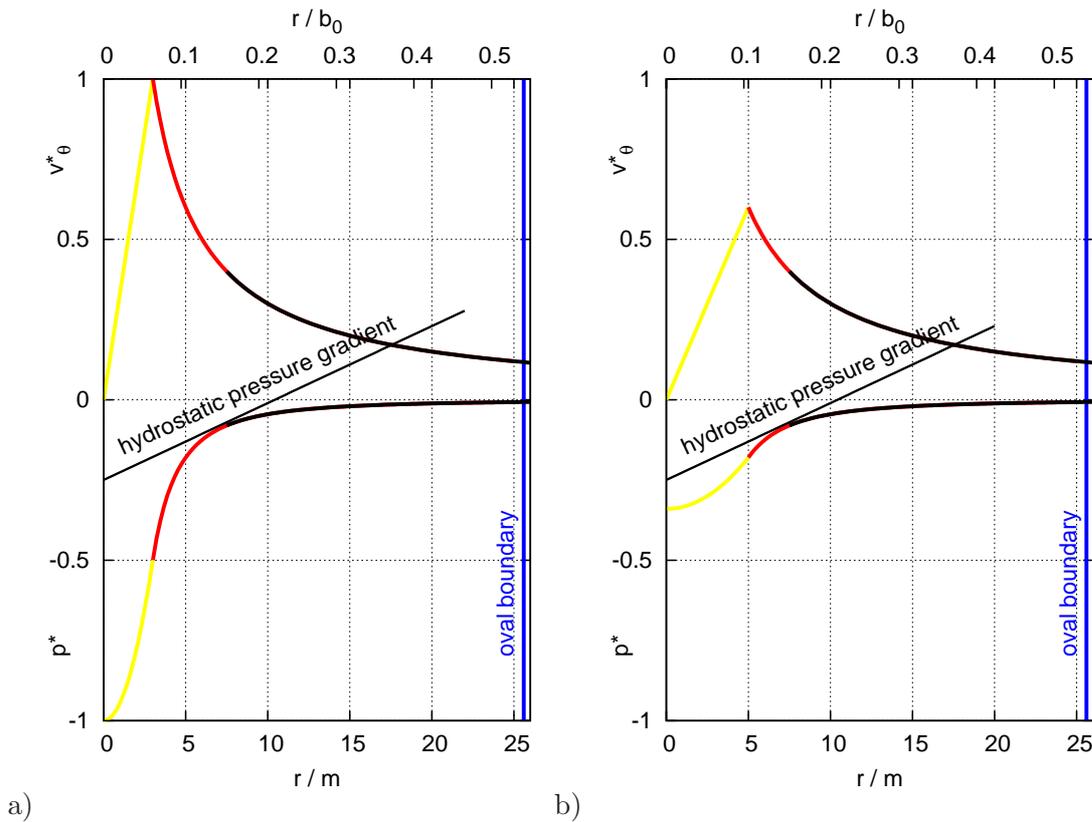


Abbildung 2.7: Normierter Geschwindigkeits- und Druckverlauf eines Rankine-Wirbels inklusive Vergleichstangente des hydrostatischen Druckgradienten. Links ist der ursprüngliche Kernradius von  $r_c = 0.063 b_0$  abgebildet, während er rechts auf  $r_c = 0.1 b_0$  angewachsen ist. Farblich differenziert sind Starrkörperanteil, Potentialwirbelanteil mit  $\partial p / \partial x > \partial p_{hydr} / \partial x$  und Potentialwirbelanteil mit  $\partial p / \partial x < \partial p_{hydr} / \partial x$ .

### Verifizierung mit LES-Daten

Es soll anhand aller Dichte- und Druckgradienten potentiell mögliche barokline Wirbelstärke bestimmt werden, wobei es insbesondere auf die Unterscheidung von LESTUF berechenbarer und nicht berechenbarer barokliner Wirbelstärke ankommt. Allerdings ist zu berücksichtigen, dass die Dichtegradien wie bei Boussinesq vorausgesetzt ausschließlich von der Temperatur, nicht jedoch vom Druck abhängen.

Zur Verifizierung dient eine Large-Eddy Simulation mit starker Temperaturschichtung ( $N^* = 1$ ) und schwacher Hintergrundturbulenz ( $\epsilon^* = 0.01$ ). Die folgenden Abbildungen 2.8 entsprechen den Zeitpunkten Initialisierung ( $t^* = 0$ ), erkennbar verformte Wirbelröhren ( $t^* = 1$ ) und kurz vor der Ringbildung ( $t^* = 2$ ). Es wird davon ausgegangen, dass alle Gradienten in Flugrichtung vorerst vernachlässigbar sind, daher sind nur die beiden Komponenten von  $\omega_{BV,x}$  nebeneinander dargestellt (vergleiche Gl. (2.42)).

Rechts ist jeweils der in boussinesq-approximierten Simulationscodes berücksichtigte Einfluss von  $\partial p / \partial z \partial \theta / \partial y$  erkennbar, während links das Produkt der Gradienten  $\partial p / \partial y \partial \theta / \partial z$  dargestellt ist. Da LESTUF bei der Druckberechnung den hydrostatischen Anteil nur indirekt

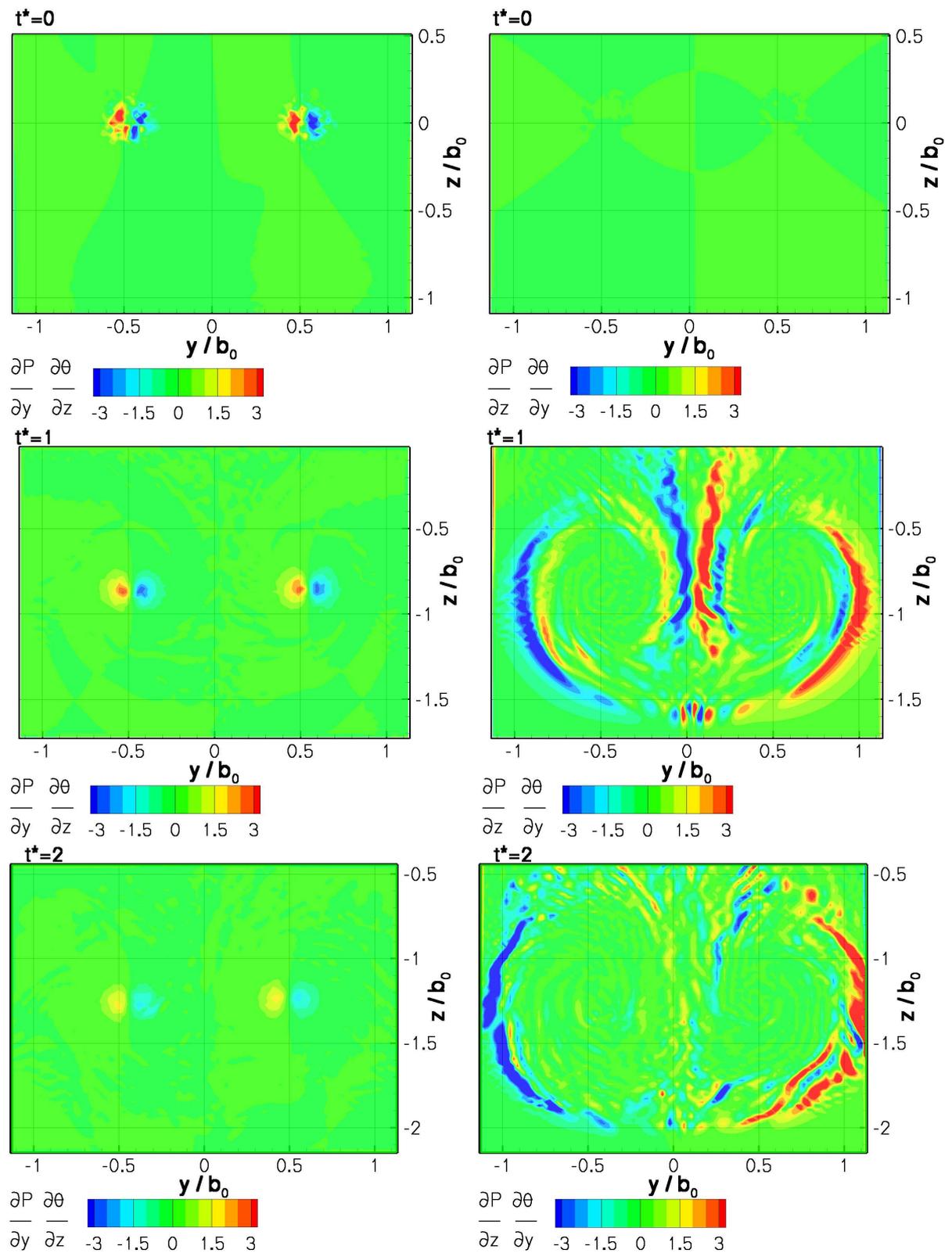


Abbildung 2.8: Baroklin erzeugte Wirbelstärke bei  $[\epsilon^* = 0.01, N^* = 1]$  zu den Zeitpunkten  $t^* = 0$ ,  $t^* = 1$  und  $t^* = 2$ , wobei links der (in LESTUF nicht zur baroklinen Wirbelstärke beitragende) Gradient  $\frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial z}$  und rechts der (in LESTUF zur baroklinen Wirbelstärke beitragende) Gradient  $\frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial y}$  dargestellt ist.

verwendet, muss dieser zur Ausgabe des berechneten Drucks genauso hinzuaddiert werden wie der Temperaturgradient der Atmosphäre zum Gesamttemperaturverlauf.

Man erkennt, dass zu Beginn ( $t^* = 0$ ) der von LESTUF abbildbare, auf der rechten Seite dargestellte Anteil so gut wie keine barokline Wirbelstärke erzeugt. Die Druckverläufe der Wirbel sind schon voll ausgeprägt, daher sind die von der Umgebung verursachten Temperaturgradienten entscheidend. Da sich die Wirbelschlepe in ihrer ursprünglichen Höhenlage befindet, sind die Temperaturen innerhalb und außerhalb des Wirbelovals annähernd gleich. Damit erzeugt lediglich der konstante vertikale Gradient der Umgebungstemperatur die im linken Bild vorhandene schwache barokline Wirbelstärke.

Dies ändert sich im Laufe der Zeit deutlich, weil die Wirbelschlepe während des adiabaten Absinkens relevante Temperaturgradienten ausbildet, die sich zunächst an den Rändern des Wirbelovals befinden. Da der Unterdruck im Wirbelkern deutlich abgenommen hat, dominiert zum Zeitpunkt  $t^* = 2$  der hydrostatische Druck, der im gesamten Gebiet und zu allen Zeiten konstant ist. Daher wird am seitlichen Rand des Ovals großflächig barokline Wirbelstärke erzeugt, wie bereits in Holzäpfel & Gerz (1999) beobachtet.

Insbesondere gilt dies auch bei der unter Umständen zu späteren Zeitpunkten relevanten Betrachtung von baroklin erzeugter Wirbelstärke in Spannweitenrichtung ( $y$ ). Die hierzu notwendige Komponente  $\partial\theta/\partial x$  entsteht erst im weit fortgeschrittenen Wirbelalter, wenn der Minimaldruck des Wirbelkerns deutlich niedriger ist als der hydrostatische Druck. Somit läßt sich  $\omega_{BV,y}$  nahezu in vollem Umfang abbilden.

Damit ist gezeigt, dass nur ein vernachlässigbar kleiner Anteil an barokliner Wirbelstärke nicht in LESTUF berechnet wird. Dies entspricht früheren Vergleichen mit kompressibel gerechneten Wirbelschleppensimulationen von CERFACS, bei welchen im Rahmen des Projekts WAVENC keine bedeutenden Unterschiede aufgetreten sind (Frank Holzäpfel, persönliche Mitteilung, April 2009). Daher wird davon ausgegangen, dass die Produktion barokliner Wirbelstärke durch ein boussinesq-approximiertes Gleichungssystem in guter Näherung wiedergegeben wird.

### 2.5.6 Einordnung von LESTUF bezüglich anderer Codes

Um Vor- und Nachteile von LESTUF gegenüber anderen zur Wirbelschleppensimulation gebräuchlichen LES-Codes zu analysieren, fand im Rahmen des EU-Projekts AWIATOR ein ausführliches Benchmark statt (Dufresne et al., 2005). Dabei wurden Codes mit spektraler Diskretisierung, mit einer semi-Lagrangischen Wirbelmethode und mit zentralen finiten Differenzen verglichen. Als Schließungsmodell wurden die bereits vorgestellte NaCoo-korrigierte Smagorinsky-Schließung, eine hyperviskose Schließungsformulierung und ein Strukturfunktionsmodell eingesetzt. Bei zunehmender Auflösung kommt letzteres der klassischen Schließung von Smagorinsky sehr nahe, siehe Fröhlich (2006).

Als Referenzfall wurde ein Vierwirbelsystem ohne atmosphärisches Hintergrundfeld analysiert, daher wurde eine schwache sinusförmige Störung zur Anregung der Instabilitäten vorgegeben. Dabei stellte sich heraus, dass die grundlegenden dynamischen Eigenschaften wie die Wachstumsraten verschiedener Moden, Instabilitäten, Energiedissipation oder Ringbildungszeitpunkt der Primärwirbel mit den Sekundärwirbeln von allen Codes sehr gut wiedergegeben wurden. Allerdings zeigte sich, dass LESTUF im Gegensatz zu den anderen Codes aufgrund seiner Diskretisierung zweiter Ordnung und der turbulenten Schließung vor der möglichen Ringbildung etwa 5 % seiner Energie verlor, was auch durch die mittels NaCoo reduzierte tur-

---

bulente Viskosität in Wirbelkern nur geringfügig kompensiert werden konnte. Dagegen stellt sich z.B. die Wirbelstärkeverteilung zu späten Zeitpunkten sowohl gegenüber der des spektralen Codes als auch der des kompressiblen formulierten Codes als sehr ähnlich dar.



## 3 Auswerteverfahren

Die Bestimmung der Position des Wirbelkerns aus gegebenen Druck- und Geschwindigkeitsfeldern wurde bei der Untersuchung von Wirbelschleppen bisher immer quasi-2D durchgeführt. Das bedeutet, dass zu jedem ausgewerteten Zeitschritt entlang der Flugrichtung ( $x$ ) das Rechengebiet in diskrete Scheiben unterteilt wurde, um in jeder Scheibe anhand des  $\lambda_2$ -Kriteriums (Erläuterung folgt in Kapitel 3.1) die exakte Lage des Kerns beider paralleler Wirbelröhren zu ermitteln. Damit ist jedoch keine präzise Aussage über Krümmungen der Wirbelkernlinie möglich, insbesondere wenn Wirbelsegmente normal zur Flugrichtung ausgewertet werden sollen. Außerdem wurde bisher die Zirkulation  $\Gamma_{5-15}$  lediglich innerhalb der diskreten Scheiben berechnet, was spätestens bei Annäherung der Wirbelröhren (und damit verbundener zunehmender Umorientierung in andere Richtungen) zur signifikanten Unterschätzung der verbleibenden Wirbelstärke führt. Daher wurde ein sogenannter „Prädiktor-Korrektor“ Algorithmus entwickelt, der sich der Wirbelkernlinie entlangtastet und dabei unabhängig von der räumlichen Orientierung der Wirbelsegmente bleibt.

### 3.1 Bestimmung der Wirbelkernlinie

Die Beschreibung von Turbulenz und Wirbeldynamik ist mittlerweile untrennbar miteinander verbunden, so dass der präzisen Wirbelerkennung in der Strömungsmechanik große Bedeutung beigemessen wird. Zum besseren Verständnis turbulenter Strömungen wurden daher anhand verschiedener Methoden kohärente Strukturen analysiert, um daraus wichtige Eigenschaften wie Mischverhalten, Massen- und Wärmetransfer oder Dissipationsverhalten zu untersuchen (Jeong & Hussain, 1995). Neben den offensichtlichen physikalischen Parametern wie Wirbelstärke oder Druck wurden weitere Ansätze verfolgt, die zum Beispiel die Helizität, Pfad- und Stromlinien oder die Eigenwerte des Geschwindigkeitsgradiententensors nutzen, um Wirbelstrukturen anhand möglichst objektiver Kriterien zu identifizieren (Chong et al. (1990), Sujudi & Haines (1995), Jeong & Hussain (1995)).

Dabei zeigte sich, dass Identifikationsmethoden insbesondere dann erfolgreich eingesetzt werden können, wenn sie sich nicht ausschließlich auf einen einzelnen physikalischen Parameter stützen. So verwenden Kida & Miura (1998) eine Kombination aus Drallzahl und Druckminimum, während Banks & Singer (1994) einen zweistufigen Algorithmus mit den Parametern Wirbelstärke und Druckminimum nutzen. Obwohl das Druckfeld offensichtlich vielfach eingesetzt wird, wird es als ein subjektives Kriterium bezeichnet, für welches vom Nutzer ein Schwellwert festgelegt werden muss. Deswegen können diese Methoden zur Identifikation von Wirbelstrukturen im turbulenten Geschwindigkeitsfeld nur mit entsprechender Sorgfalt angewandt werden, insbesondere wenn die vorhandenen Druckdifferenzen schwach ausgeprägt sind.

Der in dieser Arbeit betrachtete Fall eines dem turbulenten Hintergrundfeld überlagerten Wirbelpaars mit ausgeprägten Druckgradienten erleichtert die Anforderungen an den Wirbeliden-

tifikationsalgorithmus. Die Bestimmung der Wirbelkernlinie basiert auf zwei charakteristischen Eigenschaften der Wirbelröhre. Da im Prädiktorschritt eine vektorielle Größe sinnvoll ist, wird dazu die Wirbelstärke genutzt. Für die Korrektur wurden vier verschiedene Parameter implementiert und anhand eines Referenzszenarios miteinander verglichen. Im in Abbildung 3.1 gezeigten Fall hat sich aus dem initialisierten parallelen Wirbelpaar ein Wirbelring gebildet, dessen Zirkulation während seiner Entwicklung bereits um etwa die Hälfte abgenommen hat. Nichtsdestotrotz sind die Anforderungen an den Algorithmus hierbei moderat im Gegensatz zur Suche der Wirbelkernlinie während des Ringbildungsprozesses.

**Absolute Wirbelstärke**  $|\vec{\omega}|$  Im Wirbelzentrum wird bei allen üblichen Wirbelmodellen maximale Wirbelstärke erreicht. Diese setzt sich jedoch aus einem rotationsbedingten und einem scherbedingten Anteil zusammen (welche im Starrkörperwirbel gleich groß sind), wobei letzterer auch in wirbelfreien Strömungen (z.B. Couette-Strömung) auftritt.

**$\lambda_2$ -Kriteriums** nach Jeong & Hussain (1995). Es handelt sich um den zweiten (negativen) Eigenwert der Matrix  $A_{ij}$  mit

$$A_{ij} = S_{ij}^2 + \Omega_{ij}^2 \quad (3.1)$$

wobei  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  und  $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ . Es ergibt sich ein Ansatz, bei welchem ausgehend von den Navier-Stokes Gleichungen lokale Druckminima gesucht werden. Jedoch passiert dies so, dass der Einfluss von instationären Effekten oder Viskosität hierbei von Beginn an ausgeschlossen wird, womit beispielsweise wandnahe Druckextrema unberücksichtigt bleiben.

**Index gewichteter Krümmungsmittelpunkte**  $i_\kappa$  Dieser Ansatz fußt auf dem Gedanken, an jedem Punkt des Geschwindigkeitsfeldes aus dem lokalen Geschwindigkeits- und advektiven Beschleunigungsvektor den Krümmungsradius der Stromlinien zu ermitteln (Hirsch, 1995). Daraus lässt sich der Mittelpunkt des jeweiligen Krümmungsradius bestimmen. Es wird für jeden Gitterpunkt ein Parameter  $i_\kappa$  mit  $i_\kappa \in \mathbb{R}$  eingeführt, der ausgehend vom Startwert  $i_\kappa = 0$  jeweils dann an den acht umliegenden Ecken erhöht wird, wenn der gefundene Krümmungsmittelpunkt innerhalb der betreffenden Masche liegt. Zur Verbesserung der Qualität wird  $i_\kappa$  mit dem inversen Betrag des Krümmungsradius gewichtet, somit steigt der Einfluss von Wirbelkernprognosen der nahegelegenen Gitterpunkte.

Für eine detailliertere Darstellung wird auf Holzäpfel (2004) und Hennemann & Holzäpfel (2007) verwiesen.

**Druck  $p$**  Der Unterdruck entlang der Wirbelachse repräsentiert die integrale Wirkung der Zentrifugalkräfte, die auf einzelne rotierende Fluidelemente einwirken. Es gibt jedoch auch Beispiele, bei welchen ein lokales Druckminimum keinen Wirbel beschreibt, wie die Existenz von Quellen oder Senken im Geschwindigkeitsfeld. Genauso können großskalige Wirbel durch das Gleichgewicht von Zentrifugal- und Corioliskraft gegeben sein, ohne dass dies anhand des Druckfelds erkennbar ist.

Im vorliegenden Fall ergeben die genannten Nachteile keine negativen Konsequenzen, da die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes durch die Behandlung des Druckterms sichergestellt ist (siehe Kapitel 2.5.1). Desweiteren dominieren im Fall der Flugzeugwirbelschleppe Druck- und Zentrifugalkräfte gegenüber anderen Kräften, so dass der Druck zur Bestimmung der Wirbelkernlinie prinzipiell geeignet ist.

Anhand Abb. 3.1 zeigt sich, dass nur die Formulierungen mit absoluter Wirbelstärke und Druck als Korrekturkriterium den als Testfall dargestellten Wirbelring vollständig und entsprechend

dem erwarteten Verlauf finden. Während die Isodruckflächen glatt und robust sind, funktioniert der Suchalgorithmus bei der Verwendung der absoluten Wirbelstärke als Korrekturparameter zwar, jedoch sind die erkennbaren  $|\vec{\omega}|$ -Strukturen deutlich unregelmäßiger. Die anhand der Wirbelkernlinie ermittelte Zirkulation ist für diese beiden Fälle farbkodiert hinzugefügt. Die Benutzung der mathematisch aufwändigeren Korrekturparameter  $\lambda_2$  und  $i_\kappa$  führt hingegen trotz ausgiebiger Variation der Einstellparameter  $c$  und  $d$  nicht zum abgebildeten Wirbelring, daher verwenden alle weiteren Berechnungen das Kriterium Druck als Korrekturparameter in der Bestimmung der Wirbelkernlinie.

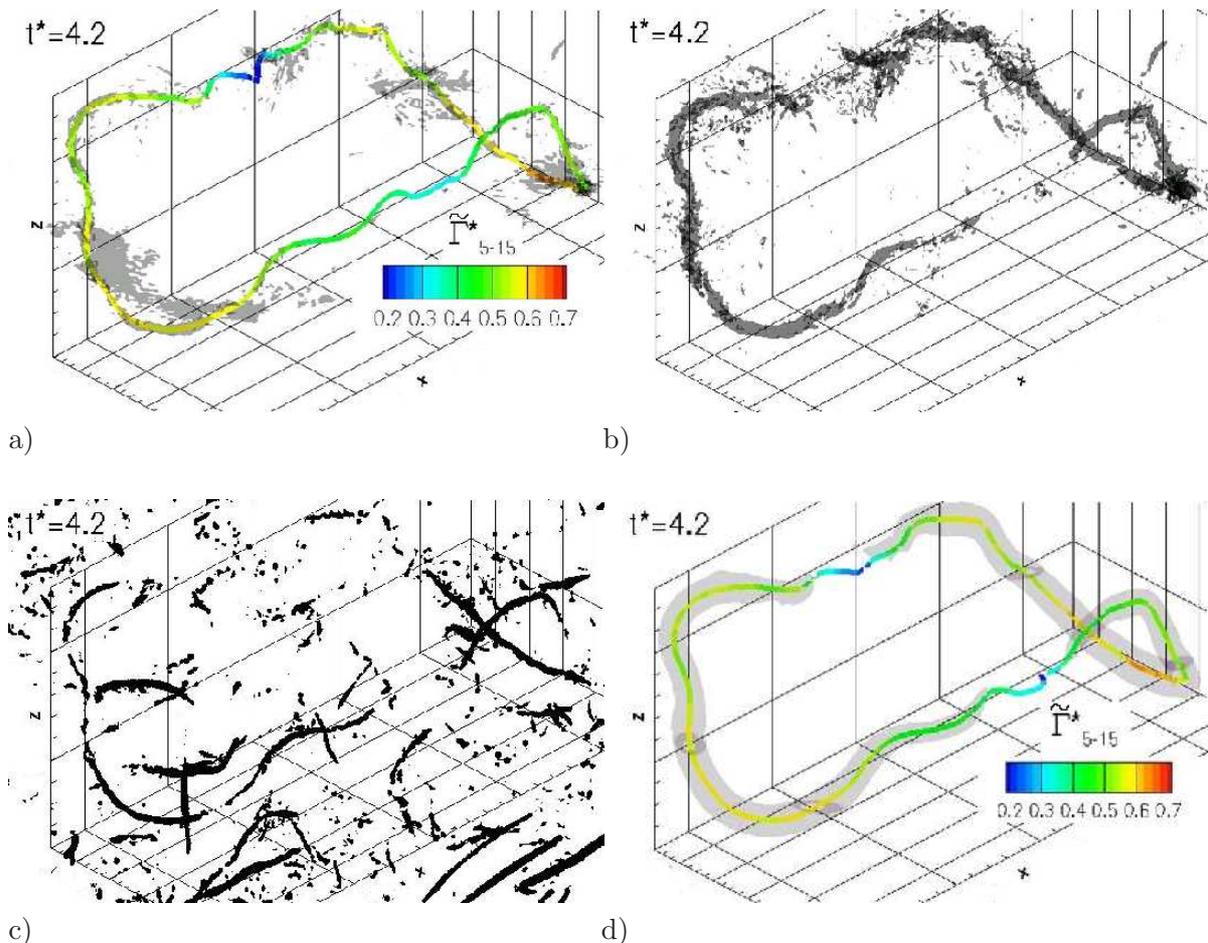


Abbildung 3.1: Isoflächen der verwendeten Korrekturparameter a)  $|\vec{\omega}|$ , b)  $\lambda_2$ , c)  $i_\kappa$  und d)  $p$  inklusive gefundener Wirbelkernlinie und zugehöriger farbkodierter Zirkulation  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$ , soweit möglich. Zum gezeigten Zeitpunkt  $t^* = 4.2$  des Falls mit  $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0]$  hat sich bereits ein Wirbelring gebildet.

Der Suchalgorithmus untergliedert sich in 4 Hauptpunkte, wobei der Index  $i$  die fortlaufende Nummerierung der zur Wirbelkernlinie zugehörigen Punkte bezeichnet. Schematisch ist die Vorgehensweise in Abbildung 3.2 gezeigt.

- a) Festlegung eines zweckmäßigen Startwerts  $x_0$  auf dem Rechengitter. Dadurch wird vor Ablauf des Suchprozesses eine Ebene orthogonal zur Flugrichtung festgelegt, innerhalb welcher das Druckminimum  $p_{min}$  ermittelt wird. Damit gilt  $y_0 = y(p = p_{min})$  und  $z_0 = z(p = p_{min})$ .

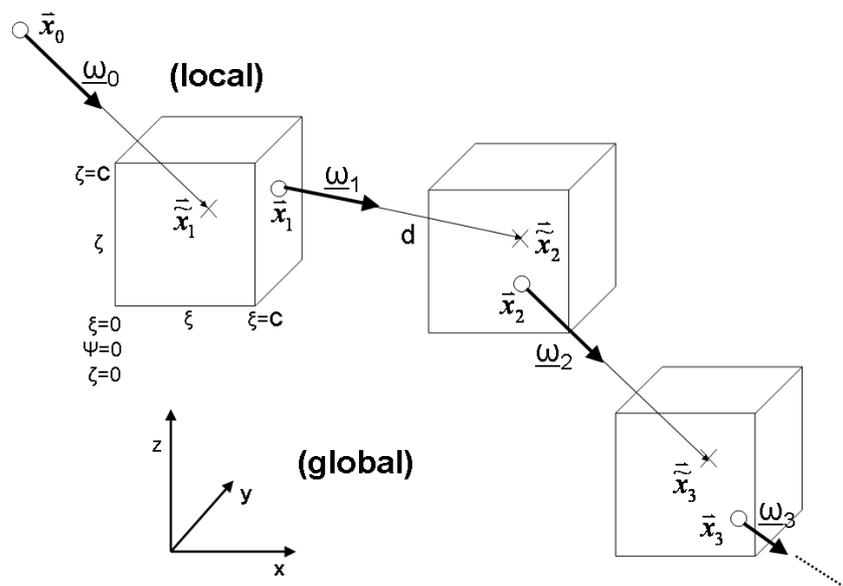


Abbildung 3.2: Schema des neuen Prädiktor-Korrektor Algorithmus.

- b) Es wird die Richtung der Wirbelstärke  $\vec{\omega}_i$  aus  $n^3$  mit  $[(n+1)/2] \in \mathbb{N}$  umgebenden Einzelvektoren gemittelt. Dabei wird jeder einzelne der  $n^3$  Wirbelstärkevektoren an der Stelle  $\vec{x}_i$  linear aus den acht umgebenden Gitterpunkten interpoliert.  $\vec{\omega}_i$  gibt die erwartete Richtung vor, in welche sich die Wirbelkernlinie fortsetzen wird. Anschließend wird  $\vec{\omega}_i$  normiert und mit einer festzulegenden Länge  $d$  wird der vorläufige Zielpunkt  $\vec{x}_{i+1}$  gefunden. Durch diese Herangehensweise kann die Suchrichtung global gesehen in positive oder negative Richtung verlaufen.

$$\vec{x}_{i+1} = \underbrace{\sum_{\vec{j}=\vec{x}_i+\frac{\Delta}{2}(1-n,1-n,1-n)^T}^{\vec{x}_i+\frac{\Delta}{2}(n-1,n-1,n-1)^T} \begin{pmatrix} \omega_{x,\vec{j}} \\ \omega_{y,\vec{j}} \\ \omega_{z,\vec{j}} \end{pmatrix}}_{\vec{\omega}_i} \frac{d}{\sqrt{(\sum \omega_{x,\vec{j}})^2 + (\sum \omega_{y,\vec{j}})^2 + (\sum \omega_{z,\vec{j}})^2}} + \vec{x}_i \quad (3.2)$$

- c) Um  $\vec{x}_{i+1}$  wird ein Suchwürfel mit Kantenlänge  $c$  definiert, in welchem im Korrektorschritt der endgültige Zielpunkt  $\vec{x}_{i+1}$  ermittelt wird. Dabei wird ein neues Koordinatensystem  $\xi, \psi, \zeta$  bzw.  $\vec{\xi}$  mit  $\vec{\xi} \parallel \vec{x}$  und  $\vec{\xi} \in [0, c]$  so eingeführt, dass  $\vec{x}_{i+1}$  im Mittelpunkt des Suchwürfels liegt. Damit kann das Druckminimum über die dreidimensionale Schwerpunktgleichung berechnet werden. Folglich gilt:

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_{i+1} - \frac{c}{2} + \frac{\int_0^c \int_0^c \int_0^c \vec{\xi} p(\xi, \psi, \zeta) d\xi d\psi d\zeta}{\int_0^c \int_0^c \int_0^c p(\xi, \psi, \zeta) d\xi d\psi d\zeta} \quad (3.3)$$

- d) Wiederholung ab b) bis eine der folgenden Abbruchbedingungen erfüllt ist:

- maximale Schrittzahl  $i_{max}$  erreicht
- $|\vec{x}_0 - \vec{x}_i| < |\vec{d}_{ring}|$ , für  $i > 10$  (verhindert Abbruch während der ersten Schritte). Dabei ist  $|\vec{d}_{ring}|$  eine beliebig einzustellende Vektorlänge, welche den Abstand zwischen Start- und Endpunkt der Wirbelkernlinie kennzeichnet, ab welchem von einem abgeschlossenen Wirbelring ausgegangen werden soll.
- $|x_0 - x_i| > L_x$ . Wenn der Algorithmus das Rechengebiet verläßt, soll an der gleichen Längsposition auf der gegenüberliegenden Flügelseite ein neuer Startwert gefunden werden, von welchem die parallele Wirbelröhre ermittelt wird. Somit gilt, wenn  $\vec{x}_i$  die letzte Stelle der ersten Wirbelröhre darstellt und  $y = 0$  zentral im Rechengebiet zwischen den Wirbelröhren liegt:  
 $x_i = x_{i+1} = x_{end}$  und  $y_{i+1}/y_i \approx -1$ .  
 Hierbei ist  $x_{end}$  ein Schalter, der es ermöglicht, nach erfolgreicher Erkennung der gegenüberliegenden Wirbelröhre das vierte Kriterium zur Beendigung des Algorithmus zu erreichen:
  - $|x_{end} - x_i| > L_x$  sofern  $x_{end} \neq 0$

Die Werte für die Parameter  $n$ ,  $d$  und  $c$  sind im Grunde frei wählbar, allerdings beeinflussen die beiden letzten das Suchverhalten des Algorithmus spürbar. Es haben sich Werte von  $n = 5$ ,  $d = 0.063 b_0$  ( $\hat{=}$  3 m) und  $c = 0.21 b_0$  ( $\hat{=}$  10 m) herauskristallisiert, das heißt der Suchwürfel ist deutlich größer als der mittlere Abstand zweier benachbarter Punkte. Je kleiner das Verhältnis  $d/c$ , desto eher ist die Gefahr gegeben, dass im Korrekturverfahren als neue Zielposition wieder der Vorgängerpunkt gefunden wird. Damit bleibt der Algorithmus stecken. Ein zu großes Verhältnis  $d/c$  resultiert in zunehmender Ungenauigkeit, da der kleinräumige, korrigierende Schritt die potentiell unpräzise Richtung der Wirbelstärke nicht mehr ausgleichen kann.

Es sei ergänzend angemerkt, dass der von Banks & Singer (1994) entwickelte Algorithmus einen ähnlichen Ansatz verfolgt. Allerdings unterscheidet sich die Zielsetzung insofern, als dabei in allgemeinen turbulenten Strömungen kohärente Wirbelelemente identifiziert werden sollen. Die Hauptschwierigkeiten betreffen somit die Ermittlung eindeutiger Strukturen mit zugehörigem Querschnitt und unter Berücksichtigung von Verzweigungen. Ohne Vergleich mit anderen Parametern definieren sie die Wirbelstärke als Prädiktorparameter und den Druck als Korrektorparameter, dessen Bestimmung jedoch nur in einer Ebene orthogonal zur Prädiktorrichtung und als reine Minimumsuche durchgeführt wird. Zur Sicherstellung des korrekten Ablaufs wird ein Knickwinkel festgelegt, der abrupte Richtungsänderungen ausschließt. Im hier präsentierten Algorithmus sind solche Richtungsänderungen uneingeschränkt möglich, jedoch ist es durch die Einstellbarkeit von  $c$  und  $d$  möglich, den Suchverlauf zu steuern. Dies ist insofern sinnvoll, weil während der Ringbildung abrupte Richtungsänderungen auftreten können und diese durch die entsprechend klein/groß gewählten Parameter  $d/c$  (bzw. überhaupt durch die Verwendung eines Suchvolumens anstatt einer Suchfläche) identifiziert werden können.

### 3.2 Zirkulationsbestimmung entlang der Wirbellinie

Nach Gl. (2.1) ist die Zirkulation als Integral des Skalarprodukts des Wirbelstärkevektors mit dem Flächenvektor gegeben. Damit ist bei gegebener Verteilung der Wirbelstärke der Betrag der Zirkulation abhängig von der Wahl der Fläche und ihrer Orientierung im Raum. Üblicherweise wurde die Zirkulation  $\Gamma_{5-15}^*$  bisher in solchen Ebenen bestimmt, die senkrecht

zur Flugrichtung liegen. Damit bleibt jedoch Wirbelstärke in Spannweitenrichtung bei der Zirkulationsberechnung unberücksichtigt. Hier werden nun die zugrundeliegenden Flächen und Wirbelstärken jeweils der aktuellen Wirbelrichtung des Flugzeugwirbels angepaßt. Die somit erzielten Zirkulationswerte werden mit einer Tilde ( $\tilde{\phantom{x}}$ ) gekennzeichnet.

Technisch ist die Zirkulationsberechnung in beliebiger räumlicher Orientierung komplizierter. Ausgangspunkt ist die tatsächliche Richtung der Wirbelkernlinie, welche orthogonal zur Suchebene der Zirkulationsbestimmung ist. Innerhalb des Maschengitters müssen nun Punkte definiert werden, für die die Wirbelstärke und somit die Zirkulation bestimmt werden können. Da die in Gl. (2.9) definierte Zirkulation  $\Gamma_{5-15}^*$  (bzw.  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$ ) den Mittelwert der Zirkulationen über die Radien 5 m, 6 m, ... 15 m darstellt, genügt es innerhalb der Suchebene ein radiales Punktmuster mit entsprechendem Maximalradius von  $r_{max} = 15$  m zu erzeugen. Ob das Punktmuster radial oder kartesisch angeordnet ist, spielt keine Rolle, solange die erzielten Werte der Wirbelstärke pro Kreisring gemittelt werden. Daher ist auch die Anzahl der tangential verwendeten Werte pro Ring irrelevant, solange sie so hoch ist, dass nicht einzelne Werte die mittlere Wirbelstärke verfälschen. Die verwendete Programmierung erlaubt als Anzahl an Stützstellen pro Kreisring alle Potenzen von 2 (Standardwert  $8 \rightarrow 64$  Strahlen). Da diese Subroutine auch im Krümmungsalgorithmus aufgerufen wird, wird sie in Kapitel 3.4.2, Absatz b) detaillierter beschrieben. In Abbildung 3.3 ist ein Ausschnitt dargestellt, in welchem die Positionen der Symbole (x) für die Integration der Wirbelstärke genutzt werden.

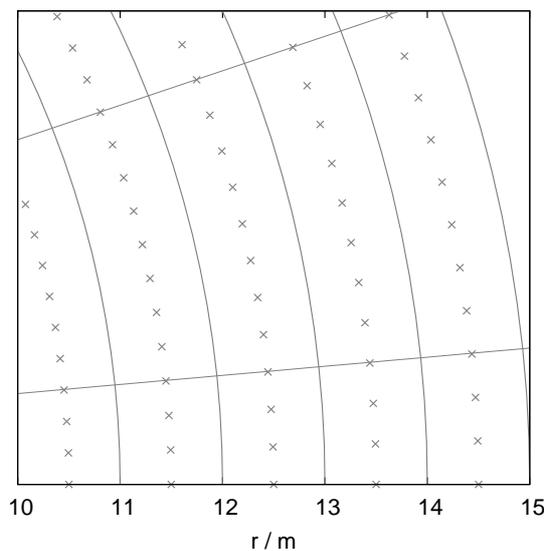


Abbildung 3.3: Ausschnitt der Berechnungsebene für  $\Gamma_{5-15}^*$ , wobei durchgezogene Linien die Kreis- bzw. Ringflächen zeigen und (x) die Stellen der verwendeten Wirbelstärkewerte repräsentieren.

Um beispielsweise die Zirkulation im innersten Kreis bis zum Radius 1 m zu berechnen, wird die mittlere Wirbelstärke  $\bar{\omega}_{r=0,5}$  aller Werte mit Abstand  $r = 0.5$  m zum Ausgangspunkt berechnet, und dann mit der Kreisfläche  $A_1 = \pi \text{ m}^2$  multipliziert. Für jeden Folgewert wird zur Zirkulation des vorhergehenden Radius das Produkt aus mittlerer Wirbelstärke und Ringfläche hinzuaddiert. Der Mittelwert der Zirkulationen von  $r = 5$  m bis  $r = 15$  m dividiert durch den Startwert  $\Gamma_0$  ergibt die gewünschte Zirkulation  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$ .

### 3.3 Bestimmung von Lagewinkeln, Kernradius, maximaler Tangential- und Axialgeschwindigkeit

Desweiteren werden die Lagewinkel der Wirbelschlepe Azimutwinkel  $\Psi$ , Inklinationswinkel  $\gamma$  und Kippwinkel  $\Phi$  bestimmt. Der Azimutwinkel und Inklinationswinkel beschreiben die horizontale bzw. vertikale Auslenkung der Wirbelkernlinie gegenüber der Flugachse, während der Kippwinkel den Höhenunterschied zweier gegenüberliegender Wirbelsegmente mit dem aktuellen Wirbelabstand in Relation setzt. Letzterer wird immer bezüglich der ursprünglichen Flugrichtung berechnet, unabhängig vom aktuellen Zustand der Wirbelschlepe. Dies kann zu manchen Zeitpunkten nicht möglich sein, weil sich gegenüberliegende Punkte nicht mehr eindeutig und sinnvoll zuordnen lassen (z.B. wenn die Struktur durch großskalige Turbulenz stark verzerrt ist, siehe Abbildung 4.20).

Definitionsgemäß ist die Tangentialgeschwindigkeit  $v_\theta$  am Kernradius  $r_c$  eines Wirbels maximal. Die zeitliche Entwicklung beider Größen spiegelt sich in der Entwicklung von  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$  wider, sobald sich der Kernradius dem Wert  $r_c = 5$  m annähert. Gleichzeitig ist eine realistische Simulation des Kernradius mit der Smagorinskyschließung bei durchschnittlicher Auflösung kaum möglich. Deshalb wird mit der Schließungserweiterung NaCoo eine Methode genutzt, die der turbulenten Diffusion im Wirbelkerninneren entgegenwirkt und damit die Tangentialgeschwindigkeit besser erhält und das Kernradialwachstum verlangsamt (siehe Kapitel 2.5.2 und Holzäpfel (2004)).

Die diskreten Geschwindigkeiten werden über alle bereits zur Zirkulationsbestimmung verwendeten Punkte tangential gemittelt. Um aus den in radialer Richtung diskreten mittleren Tangentialgeschwindigen einen kontinuierlichen Verlauf mit präzisiertem Kernradius zu ermitteln, wird der Interpolationsalgorithmus nach Aitken-Neville implementiert (Press et al., 1992), wobei sich fünf Stützstellen als geeignete Anzahl erwies.

Die Axialgeschwindigkeit  $v_{ax}$  innerhalb der Wirbelröhren ist vor der Ringbildung nahezu irrelevant, weil bei der Ablösung entstandene Axialgeschwindigkeiten während des Aufrollvorgangs verschwinden. Daher wird zu Beginn der Simulationen keine axiale Geschwindigkeitskomponente initialisiert. Nach erfolgter Ringbildung gewinnt ihre Bestimmung jedoch an Bedeutung, da dabei Druckschwankungen ausgebildet werden, die entlang der Wirbellinie eine Axialgeschwindigkeit induzieren (siehe Kapitel 4.2.4).

### 3.4 Bestimmung der Krümmung der Wirbelkernlinie

Der Bestimmung der Krümmung der Wirbelschlepe liegt die Annahme zugrunde, dass die Wirbelkernlinie abschnittsweise in einer Ebene liegt. Die Crow-Instabilität als klassische Ursache für die Krümmungsentwicklung wird durch die turbulente Atmosphäre angeregt, und breitet sich sinusförmig in Ebenen aus, welche je nach  $r_c/b_0$  um ca.  $45^\circ - 48^\circ$  zum Boden ausgelenkt sind (V-förmig in der Frontalansicht). Da sich die kurzwellige elliptische Instabilität in gleicher Orientierung entwickelt, ist diese Annahme bis zum Linking gerechtfertigt.

Allgemein lässt sich die quasi-zweidimensionale Behandlung anhand von zwei orthogonalen Ansichten rechtfertigen, wenn im entsprechenden Teilbereich in einer Ansicht eine gerade Linie existiert. Dies beweist, dass dieser Teilbereich im Raum in einer Ebene liegt. Abbildung 3.4 demonstriert für die Zeitpunkte unmittelbar nach der Ringbildung ( $t^* = 8.8$ ) und im fortge-

schriftlichen Ringstadium ( $t^* = 9.4$ ) anhand verschiedener Ansichten, wie gut der unmittelbare Übergangsbereich von linker zu rechter Wirbelröhre bei idealen atmosphärischen Verhältnissen in einer Ebene liegt.

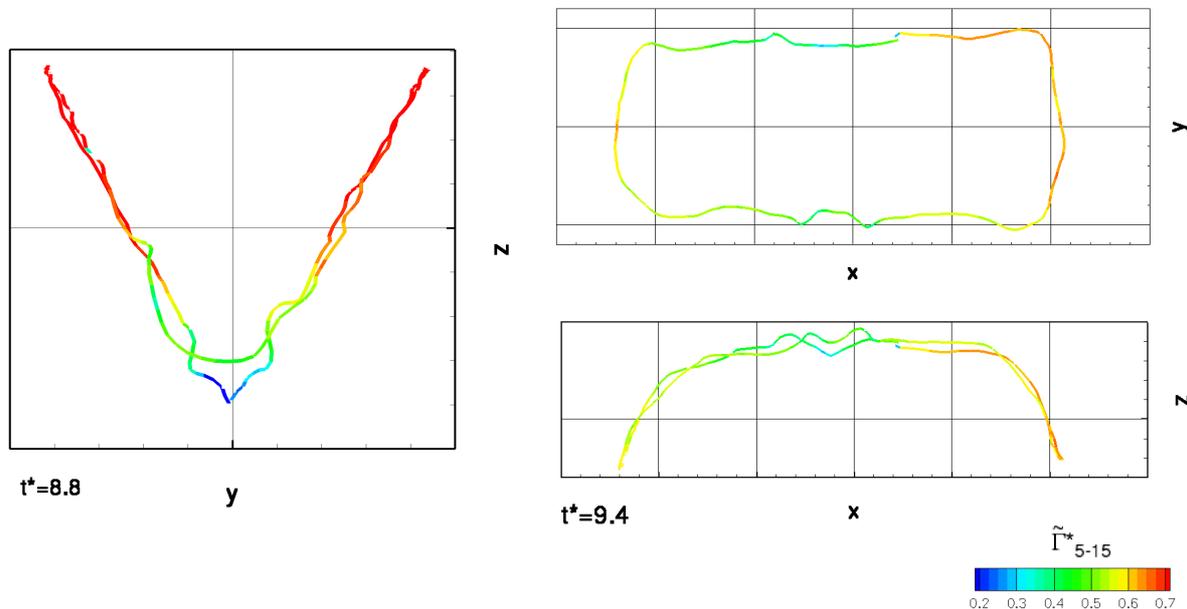


Abbildung 3.4: Frontalansicht zu  $t^* = 8.8$  und Drauf- und Seitenansicht zu  $t^* = 9.4$  der zerfallende Wirbelschlepe nach abgeschlossener Ringbildung [ $\epsilon^* = 0.01, N^* = 0$ ].

Problematischer dagegen gestaltet sich der Einfluss der Temperaturschichtung. Sie produziert wie in Kapitel 2.3.3 angesprochen barokline Wirbelstärke, die die Krümmungsentwicklung ebenfalls forciert. Es ergeben sich zumeist wenig strukturierte und sehr kleinskalige Muster, die sich quasi-2D nur bedingt abbilden lassen. Um diese Krümmungen mit der hier vorgestellten Methode umfassend zu berücksichtigen, dürften jeweils nur sehr kurze Abschnitte der Wirbelkernlinie analysiert werden. Damit könnten allerdings bei vertretbarem Rechenaufwand die flugzeugrelevanten Krümmungen in der Größenordnung von einigen  $b_0$  nicht mehr ausreichend ermittelt werden. Daher muss bei den Ergebnissen mit starker Schichtung ( $N^* = 1$ ) berücksichtigt werden, dass sehr kleinskalige Krümmungen nicht vollständig dargestellt werden. Dies führt bei Verwendung der mittleren Krümmungswerte zu einer Unterschätzung der tatsächlichen Deformation.

### 3.4.1 Segmentlänge zur Krümmungsbestimmung

Erfahrungsgemäß hängt bei der Krümmungsermittlung einer aus diskreten Stützstellen gegebenen Form das Ergebnis von der Auflösung der Methode und damit von der Anzahl der in die Suche einbezogenen Punkte ab. Naturgemäß stellt der durchschnittliche Abstand von drei Punkten der Wirbelkernlinie das untere Limit des möglichen Betrachtungsintervalls dar, somit erhalte man jedoch Ergebnisse, die einerseits stark von diesem Abstand beeinflusst sind, und die andererseits in einer Größenskala liegen, die sehr klein gegenüber den Skalen der Wirbelschlepe bzw. des einfliegenden Flugzeugs und damit irrelevant sind.

Um eine angemessene Segmentlänge zu selektieren, wird der Algorithmus mit variierenden Längen zuerst an einer Sinuskurve getestet. Dabei werden maximale Krümmungsradien bis

$r_\kappa = 6b_0$  behandelt, wie dies auch für die Analyse der Krümmungen von Wirbelschleppen zweckmäßig ist. Die Rechtfertigung hierzu findet sich in Kapitel 3.4.2. Abbildung 3.5 zeigt die erzielten Ergebnisse für Segmentlängen zwischen  $1.2b_0$  und  $2.5b_0$  inklusive der analytisch berechneten Krümmung der Sinusfunktion.

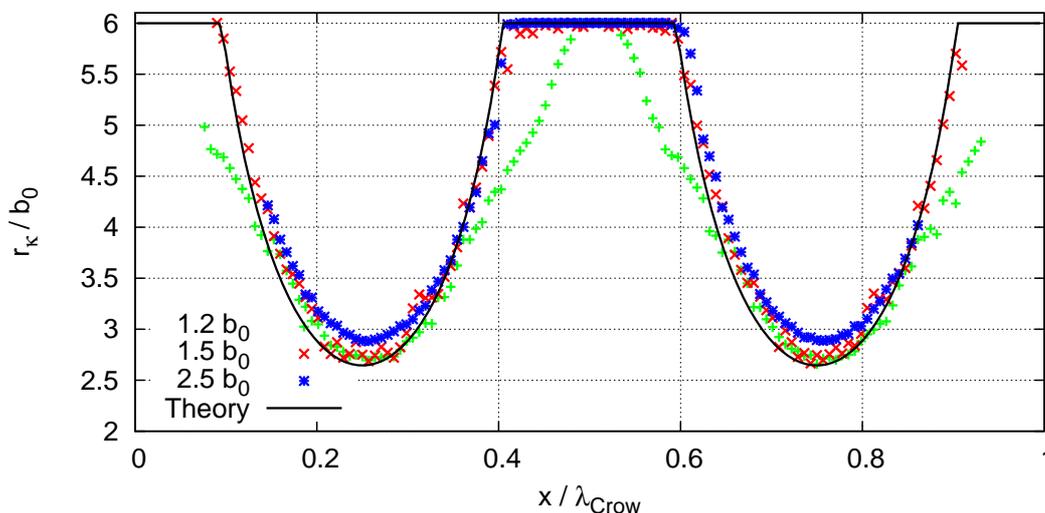


Abbildung 3.5: Vergleich der berechneten Krümmungsradien bei verschiedenen zugrundeliegenden Wirbelsegmentlängen.

Es zeigt sich, dass zu geringe Segmentlängen den Krümmungsradius im Übergangsbereich bei  $x \approx 0.5 \lambda_{Crow}$  unterschätzen, während zu große Längen erwartungsgemäß starke Krümmungen nicht ausreichend auflösen können. Die besten Ergebnisse ergeben sich mit Segmentlängen von  $1.5b_0$ .

Daher wurden in einem weiteren Vergleich Krümmungsradien zweier Wirbelschleppensimulationen verglichen, die mit verschiedenen Segmentlängen erzielt wurden (siehe Abbildung 3.6). Oben sind jeweils die erzielten Krümmungsradien  $r_\kappa$  bei verschiedenen Segmentlängen in  $0.3b_0$ -Schritten dargestellt, während unten die zugehörigen mittleren Fehlerwerte gezeigt sind, welche aus dem quadratischen Abstand von Krümmungskreis zu Wirbellinie gebildet werden. Abbildung 3.6a) zeigt den zeitlichen Verlauf gemittelter Krümmungsradien bei starker Turbulenz  $\epsilon^* = 0.23$  und ohne Temperaturschichtung  $N^* = 0$ , bei welcher sich die Crow-Instabilität ausbildet. In Abbildung 3.6b) wird die (bezüglich der erwarteten Ergebnisqualität) gegenteilige Situation (wenig Turbulenz, stark geschichtete Atmosphäre) dargestellt, für welche sowohl die Quasi-2D Annahme als auch die große Segmentlänge prinzipiell etwas weniger geeignet sind.

Grundsätzlich werden die mittleren Krümmungsradien erwartungsgemäß größer, wenn das Suchsegment verlängert wird. Allerdings scheint die Entwicklung ab  $1.2b_0$  zu konvergieren, während die zugehörigen mittleren Fehlerwerte weitgehend linear ansteigen. Die Fehlerwerte bei geraden Wirbeln ergeben sich aus den größten ausgewerteten Krümmungsradien und lassen sich unschwer analytisch ermitteln.

Weitere interessante Aussagen erlaubt der Blick auf einen einzelnen Zeitpunkt, zu welchem sich das Wirbelpaar bereits als Wirbelring präsentiert, siehe Abbildung 3.7. Dargestellt ist einerseits die aktuelle Wirbelringgeometrie mit der Positionsnummer aus dem Wirbeldetektionsalgorithmus, und andererseits die zugehörigen erzielten Krümmungsradien bei der Verwendung unterschiedlich großer Suchbereiche.

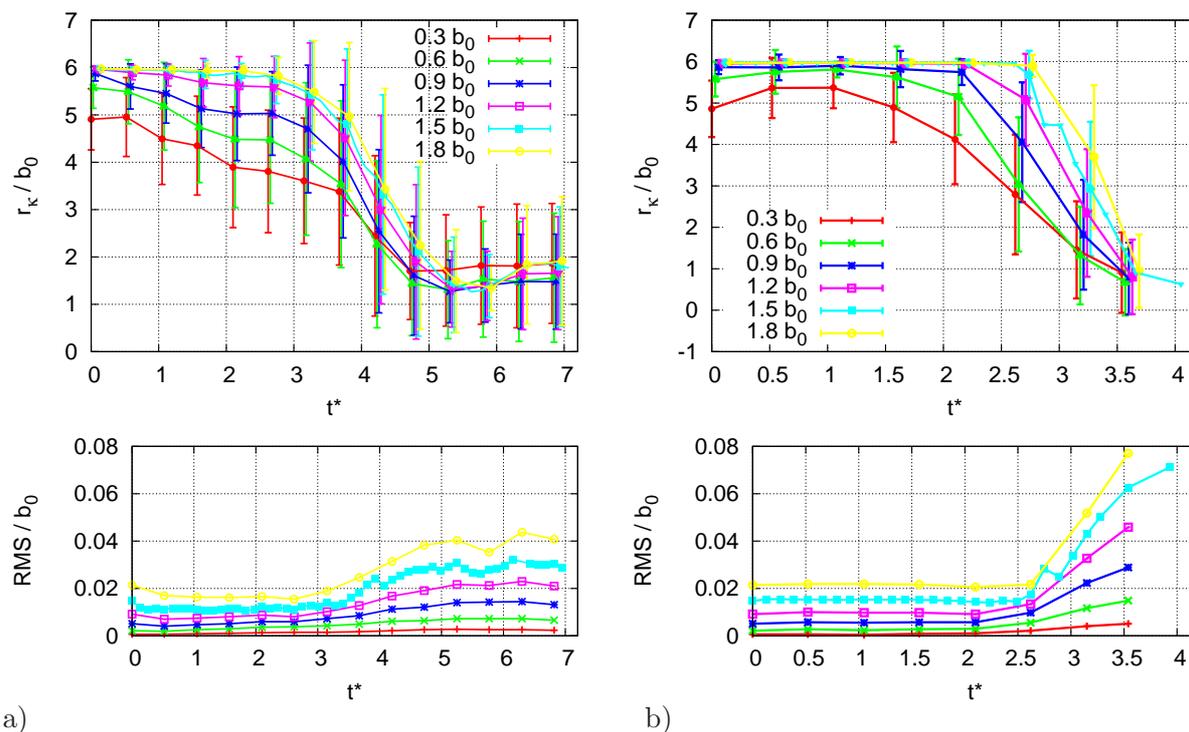


Abbildung 3.6: Zeitlicher Verlauf der mittleren Krümmungsradien und ihrer Standardabweichung in a) turbulenzdominierter Atmosphäre [ $\epsilon^* = 0.23$ ,  $N^* = 0$ ] bzw. b) in schichtungsdominierter Atmosphäre [ $\epsilon^* = 0.01$ ,  $N^* = 1$ ] in Abhängigkeit der Länge der Suchsegmente.

Das kleinste Suchsegment liefert enorm fluktuierende Krümmungswerte, die sich durch sukzessives Vergrößern immer weiter herausdämpfen. Erneut unterscheiden sich die Ergebnisse für Segmentlängen über einem  $b_0$  kaum. Weitgehend unabhängig von  $l_{Segm}$  ist der annähernd geradlinige Verlauf an den Positionsnummern 230-20 durch Krümmungsradienmaxima gekennzeichnet.

Deshalb wird im weiteren Verlauf eine Segmentlänge von  $1.5 b_0$  verwendet, welche beim vielfach auftretenden Krümmungsradius von  $r_\kappa = 1b_0$  in etwa einem Viertelkreis entspricht.

### 3.4.2 Suchalgorithmus

Somit ergeben sich für den Krümmungssuchalgorithmus folgende Schritte:

- Ermittlung derjenigen Ebene  $E_i$ , bezüglich welcher die Summe der quadratischen Abstände aller Punkte des entsprechenden Segments der Wirbelkernlinie minimal wird.
- Bestimme ausgehend vom arithmetischen Mittelpunkt  $\tilde{M}_1 \in E_i$  aller auf die Ebene  $E_i$  projizierten Punkte der Wirbelkernlinie  $\tilde{x}_{i+j}$  ein sternförmiges Suchmuster innerhalb der Ebene  $E_i$  ( $\tilde{\cdot}$  bedeutet hier  $\in E_i$ ), dessen Punkte  $\tilde{P}(r, \varphi)$  potentielle Mittelpunkte des gesuchten Krümmungsradius sein können. Dazu werden zuerst vier zueinander orthogonale Basisvektoren ( $\tilde{B} \in E_i$ ) erstellt. Aus der vektoriellen Summe zweier nebeneinanderliegender Basisvektoren und anschließender Normierung verdoppelt sich die Anzahl an

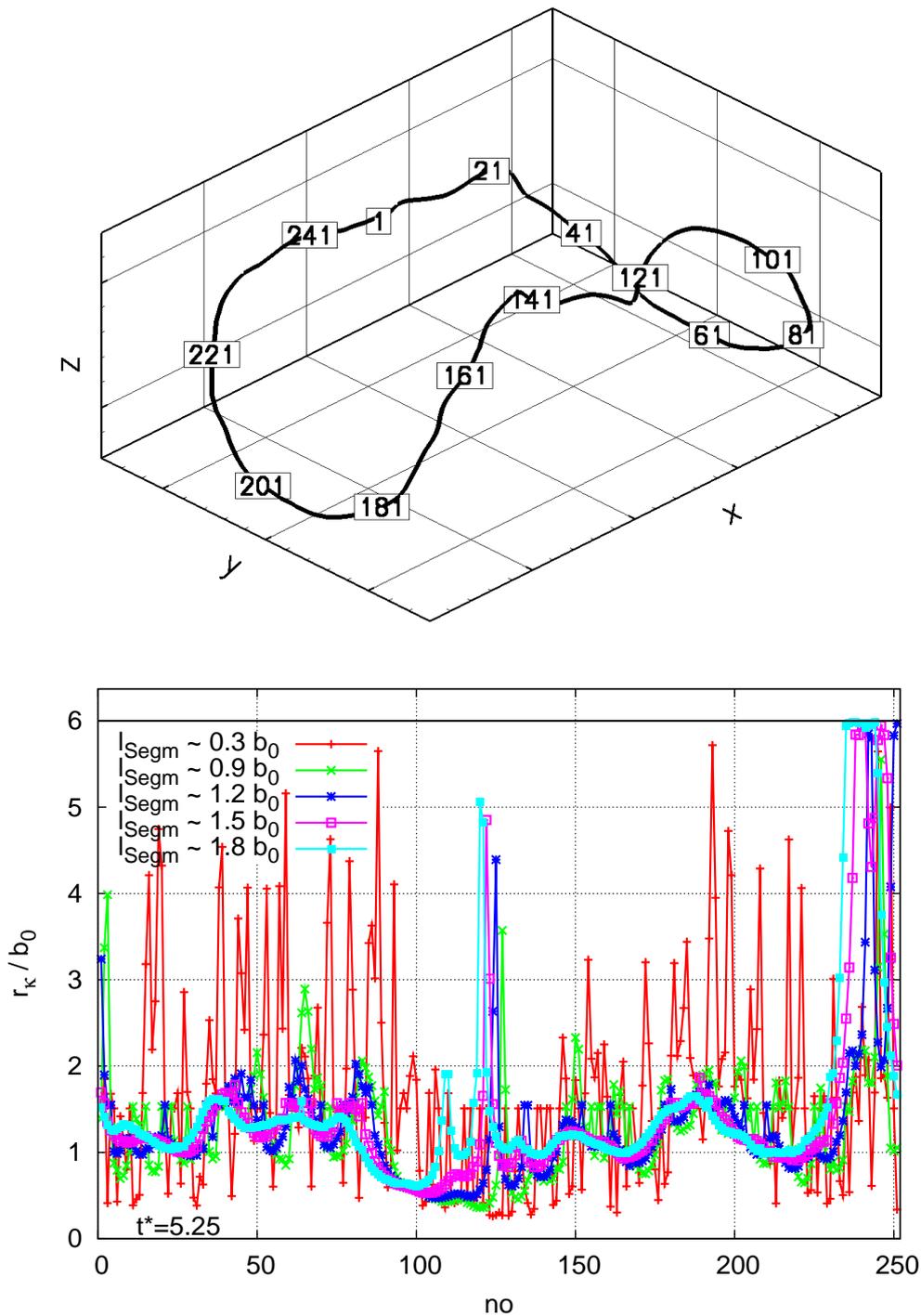


Abbildung 3.7: Oben die aktuelle Wirbelkernlinie zu  $t^* = 5.25$  mit Positionsnummern, anhand welcher unten je nach Segmentlänge verschiedene Krümmungsradien ermittelt wurden [ $\epsilon^* = 0.23$ ,  $N^* = 0$ ].

Suchpunkten  $\tilde{P}(r, \varphi)$ , d.h. es sind insgesamt nur  $2^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  Tangentialrichtungen möglich. Die Anzahl der jeweils radial möglichen Suchpunkte ist hingegen beliebig. Sie sollte jedoch so ausgewählt werden, dass Radial- und Tangentialabstände benachbarter Suchpunkte vergleichbar sind. Dies ist nur durch die zusätzliche Ausdünnung im Zentrum des

Suchmusters möglich, womit gleichzeitig der numerische Aufwand der Suche beträchtlich reduziert wird.

- c) Von jedem Punkt  $\tilde{P}(r, \varphi)$  werden alle Krümmungsradien  $r_\kappa$  mit  $0 < r_\kappa \leq 5b_0$ , die ebenfalls in der Ebene  $E_i$  liegen, berechnet und dazu die Summe der quadratischen Abstände zwischen Wirbelkernlinie und Krümmungskreis verglichen, bis das Minimum gefunden ist.
- d) Wiederholung der Prozedur ab b), wobei folgende Unterschiede bestehen:
- der neue Mittelpunkt  $\tilde{M}_2$  entspricht dem Punkt  $\tilde{P}(r, \varphi)$  der vorangegangenen Grobsuche mit dem kleinsten quadratischen Fehler.
  - im Nahfeld von  $\tilde{M}_2$  erfolgt keine zusätzliche Ausdünnung.
  - der Radius des Suchfelds und entsprechend der zusätzliche Beitrag zum Krümmungsradius beträgt  $0 < r_\kappa \leq 1b_0$

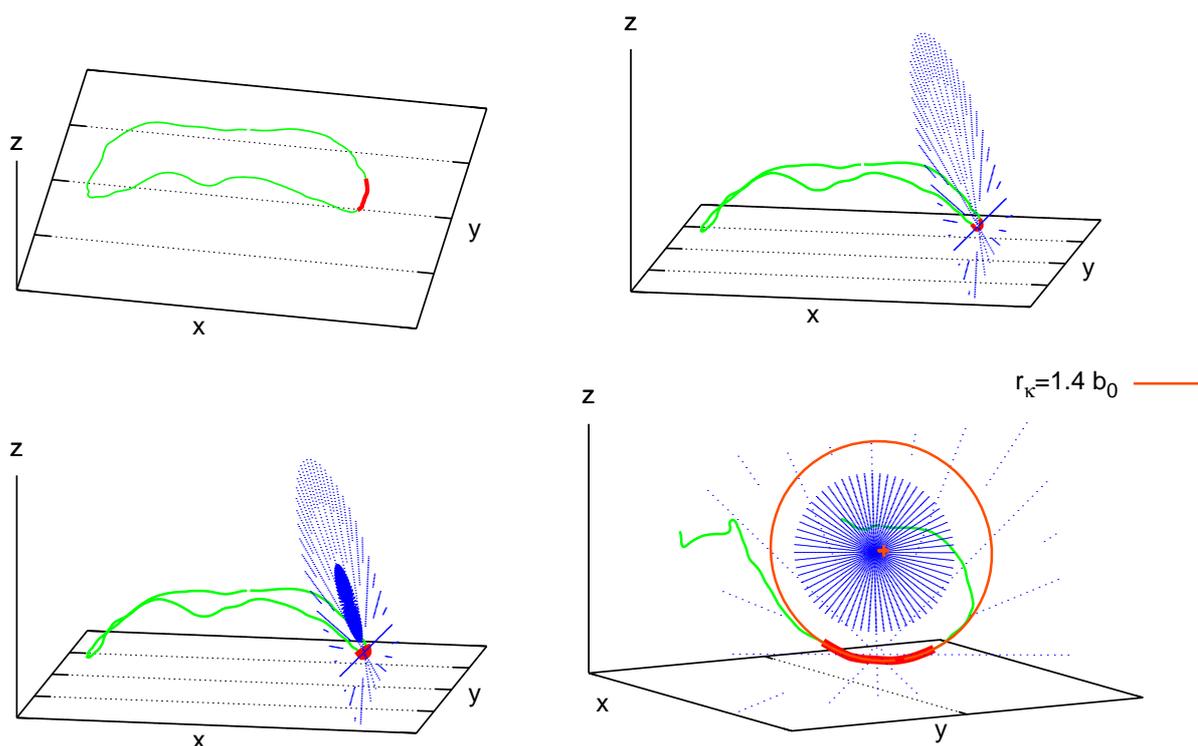


Abbildung 3.8: Funktion des Krümmungsalgorithmus in Einzelschritten. Links oben abgebildet ist die Ausgangssituation der Wirbelkernlinie mit dem hervorgehobenen Segment im Zusammenschließungsbereich, für welches  $r_\kappa$  bestimmt werden soll. Nach Ermittlung der passenden Suche Ebene rechts oben und absolvierter Grobsuche ist unten links das ebenfalls sternförmige Suchmuster der Feinsuche hinzugefügt. Schließlich ergibt sich in letzter Graphik an der Stelle (+) der erzielte Krümmungsradius mit  $r_\kappa = 1.4b_0$ .

Der in Abbildung 3.8 dargestellte Fall macht deutlich, wie präzise die Krümmung ermittelt werden kann, solange die verformte Wirbelkernlinie nicht durch zentral im Suchsegment befindliche Wendepunkte und abrupte Krümmungsänderung über alle drei Raumrichtungen geprägt ist.

Desweiteren gilt es bei akzeptablem Rechenaufwand einen Kompromiss zu finden zwischen Auflösung und Größe des Suchgebiets. Besondere Aufmerksamkeit gilt hierbei stärkerer Krümmung und der Frage, wie sich die Krümmung nach Abschluss des rein Crow-dominierten Regimes verhält. Bis kurz vor der Berührung ergibt sich für beide Wirbel meist ein sehr sauberer, sinusförmiger Verlauf mit der vollen Bandbreite an Krümmungsradien, solange die Temperaturschichtung nicht stark ausgeprägt ist. Diese Krümmungsradien reichen von unendlich großen  $r_\kappa$  bis zu kleinsten Radien, die bis zum Berührungspunkt mit der gegenüberliegenden Wirbelröhre einen theoretischen Minimalradius von  $r_\kappa = 2.65 b_0$  annehmen können (Berechnung im Anhang E). Wie auch analytisch hergeleitet werden kann, sind dazwischen alle Krümmungsradien relativ gleichmäßig vorhanden.

Dazu zeigt Abbildung 3.9 die Häufigkeitsverteilungen von Krümmungsradien bei  $[\epsilon^* = 0.05, N^* = 0.35]$  bis zum 30fachen Wirbelabstand (ca. 1.4 km) kurz vor, während und nach der Ringbildung.

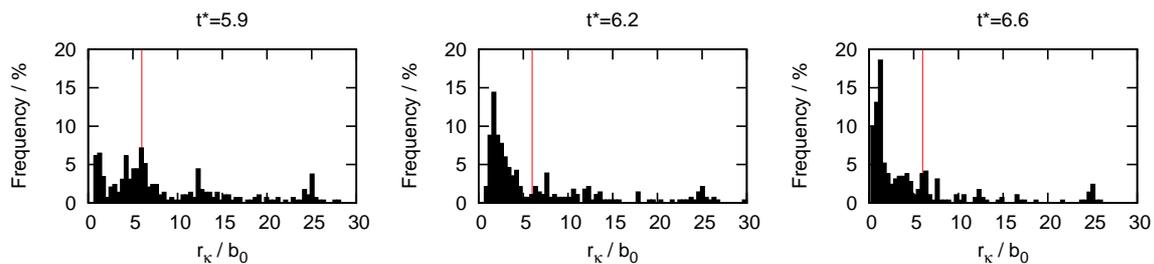


Abbildung 3.9: Häufigkeiten aller Krümmungsradien bis  $30 b_0$  in mäßig turbulenter, moderat geschichteter Atmosphäre  $[\epsilon^* = 0.05, N^* = 0.35]$  vor ( $t^* = 5.9$ ), während ( $t^* = 6.2$ ) und nach ( $t^* = 6.6$ ) dem Linking. Die im weiteren Verlauf der Arbeit verwendete Obergrenze von  $6 b_0$  ist hinzugefügt.

Offenbar ist die Obergrenze für Krümmungsradien von  $r_\kappa = 6 b_0$  bei akzeptabler Rechenzeit und ausreichender Genauigkeit geeignet, die relevanten Krümmungen zu bestimmen, wenn eine analytische Betrachtung nicht mehr möglich ist. Daher wird für alle weiteren Rechnungen dieser Wert als maximaler Krümmungsradius (bzw. minimale Krümmung) festgelegt.



## 4 Ergebnisse

Ziel dieser Arbeit ist es, den Zerfall der Wirbelschlepe in Abhängigkeit der meteorologischen Parameter für Turbulenz und Temperaturschichtung detailliert und dreidimensional zu untersuchen und daraus das Gefährdungspotential für nachfolgende Flugzeuge genauer abzuschätzen. Dazu werden insbesondere die Entwicklung der Zirkulation sowie die Krümmung und Lagewinkel der Wirbelkernlinie ausgewertet.

Daher wird in Kapitel 4.1 zuerst die Erzeugung des turbulenten und stabil geschichteten Hintergrundfelds erläutert. Danach folgt eine ausführliche Analyse der bei der Entwicklung der Wirbelschlepe auftretenden Phänomene in Kapitel 4.2. Abschnitt 4.3 vergleicht die zeitliche Entwicklung der zuvor beschriebenen Merkmale bei unterschiedlichen meteorologischen Umgebungsbedingungen. Das Kapitel schließt mit der Berechnung des statischen Rollmoments, welches nachfolgende Flugzeuge je nach Einflugposition und -zeit erfahren würden.

Zugrunde liegen hierbei ausschließlich Parameter des Airbus A340-300 im Landeanflug:

- Maximales Landegewicht:

$$M = 186\,000 \text{ kg}$$

- Spannweite:

$$B = 60.3 \text{ m}$$

- Anfluggeschwindigkeit:

$$U = 72.0 \text{ m/s}$$

- Luftdichte der Standardatmosphäre bei  $T = 12^\circ \text{ C}$  auf 500 m NN:

$$\rho = 1.168 \text{ kg/m}^3$$

Daraus berechnen sich für den stabilen Flugzustand mit Gl. (2.2), Gl. (2.7) und Gl. (2.8) die Referenzwerte für die Anfangszirkulation  $\Gamma_0 = 458 \text{ m}^2/\text{s}$ , die induzierte Absinkgeschwindigkeit  $w_0 = 1.54 \text{ m/s}$  und die Zeit  $t_0 = 30.5 \text{ s}$ . Durch geeignete Normierung mit den genannten Parametern können die Ergebnisse auf viele andere Flugzeugtypen übertragen werden (insbesondere zivile Großflugzeuge, siehe Kapitel 2.2 bzw. Gerz et al. (2002)).

### 4.1 Eigenschaften des turbulenten Feldes

Während der Einfluss der Dissipationsrate  $\epsilon$  und der Temperaturschichtung  $N$  allgemein anerkannt ist und bereits vielfach beschrieben wurde (z.B. in Holzäpfel & Gerz (1999) oder Proctor & Switzer (2000)), ist die Relevanz der Längenskalen der turbulenten Energie kaum erforscht. Dies überrascht nicht, da ihre Berücksichtigung aus verschiedenen Gründen schwierig ist. Sie ist

- numerisch aufwändig, da die Erzeugung großer Längenskalen sehr viele Gitterpunkte und damit viel Rechenspeicher und -zeit benötigt
- experimentell in größeren Höhen nur mit großem Aufwand zu bestimmen
- in Bodennähe von der Oberflächenrauigkeit (Bebauung, Gelände, Vegetation) abhängig, desweiteren nimmt sie mit zunehmendem Abstand vom Boden deutlich zu

Eine einfache Abschätzung für die integrale Länge in Abhängigkeit der Höhe  $H$  wurde von Donaldson & Bilanin (1975) zur Berechnung des Zerfalls von Wirbelschleppen vorgeschlagen, wonach gilt:

$$\begin{aligned} L_t/2 &= & 0.65 H & \text{für } 0 < H < 169 \text{ m} \\ L_t/2 &= & 110 \text{ m} & \text{für } H > 169 \text{ m} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Dabei ist zu betonen, dass diese Abschätzung nur für den ungeschichteten Fall gültig ist. Je nach Flughöhe bzw. Absinktiefe der Wirbelschleppe variiert  $L_t$  deutlich. Allerdings kann nach dieser Abschätzung davon ausgegangen werden, dass typische integrale Längenskalen der Atmosphäre größer sind als jene, welche in numerischen Simulationen erzielbar sind.

Bei angenommener Isotropie ist das integrale turbulente Längenmaß (wie in Kapitel 2.5.4 gezeigt) ausschließlich von der Form der Energiedichtefunktion  $\hat{E}$  abhängig. Anhand der kontroversen Anforderungen nach einem ausreichend fein aufgelösten Kernradius einerseits und nach großen turbulenten Längenskalen entsprechend der Abschätzung aus Gl. (4.1) andererseits wird offensichtlich, dass der Arbeitsspeicher der Rechanlage den limitierenden Faktor darstellt, um den Einfluss von  $L_t$  umfassend zu analysieren.

Bei vertretbarem numerischen Aufwand ergibt sich für die auf einer NEC SX6 durchgeführten Simulationen eine Standardgröße für das Rechengebiet von  $400 \times 256 \times 256$  Gitterpunkten ( $\hat{=} 8.5 b_0 \times 5.4 b_0 \times 5.4 b_0$ ), wobei eine isotrope Gitterpunktlänge von  $\Delta = 1$  m verwendet wurde. Als Standardwert für die Wellenzahl maximaler Energie wurde  $k_p = 2$  festgelegt, um einerseits so viele große und energiereiche Wirbel wie möglich zu erzielen und andererseits den Einfluss der periodischen Ränder einzuschränken. Insbesondere bei starker Temperaturschichtung bilden sich durch die starke Dämpfung der Vertikalbewegung horizontale Schichten, in welchen turbulente Wirbel horizontal stark gestreckt werden. Somit werden die kleinsten horizontalen Wellenzahlen besonders energiereich, was bei zu kleinen Werten für  $k_p$  zu einer unerwünscht starken Beeinflussung durch die periodischen Ränder führt.

Für die meteorologischen Parameter wurde eine Simulationsmatrix aus  $\epsilon^*$  und  $N^*$  festgelegt, und um eine Variation der integralen Längenskalen erweitert. Diese Erweiterung bezieht sich auf den ungeschichteten, aber stark turbulenten Fall [ $\epsilon^* = 0.23$ ,  $N^* = 0$ ], und wurde durch eine Vergrößerung des Rechengebiets auf  $400 \times 384 \times 384$  Gitterpunkte ( $\hat{=} (8.5 b_0)^3$ ) einerseits und durch Verwendung der technisch maximal möglichen Wellenzahl von  $k_p = 1$  erreicht. Dabei wurden die drei kleineren Werte für  $L_t$  mit den initialisierten Wellenzahlen  $k_p = [8, 2, 1]$  im Standardrechengebiet und die beiden größeren Werte mit  $k_p = [2, 1]$  im maximalen Rechengebiet erzielt. Tabelle 4.1 gibt eine Übersicht über die normierten Werte für Dissipationsrate und Temperaturschichtung und die aus dem Vorlauf resultierenden integralen Längenskalen  $L_t$  des turbulenten Feldes.

Abgesehen von den gezielten Variationen von  $L_t$  im Fall [ $\epsilon^* = 0.23$ ,  $N^* = 0$ ] gleichen sich alle Längenskalen ungeschichteter Simulationen, da  $k_p$  und die Rechengebietsgröße unverän-

$L_{t,0}/b_0$ $(\overline{v\overline{v}}/\overline{w\overline{w}})$		$N^*$		
		0	0.35	1
$\epsilon^*$	0.01	0.41 (1.1)	0.67 (5.8)	0.66 (155)
	0.05	0.41 (1.1)	0.61 (1.8)	0.75 (4.2)
	0.23	0.16 (1.01)	0.47 (1.2)	0.53 (1.4)
		0.41 (1.1)		
		0.63 (1.10)		
		0.66 (1.25)		
0.85 (1.06)				

Tabelle 4.1: Integrale turbulente Längen normiert mit dem Wirbelabstand  $b_0$  für alle gewählten Parameter aus  $\epsilon^*$  und  $N^*$  inklusive dem Verhältnis von mittlerer lateraler zu mittlerer vertikaler Fluktuation in Klammern.

dert bleiben. Für  $N \neq 0$  stellt sich jedoch eine Zunahme derselben ein, insbesondere wenn die Temperaturschichtung stark gegenüber der Turbulenz ist. In diesem Fall bilden sich im Laufe der Simulation Schwerewellen aus, was zu einem reduzierten Energieverlust und zu einer reduzierten Abnahme der horizontalen Längenskalen führt (Gerz & Schumann, 1991).

Bei der Ermittlung der gesamten integralen Länge aus dem Energiedichtespektrum werden alle drei Raumrichtungen gleichermaßen berücksichtigt (siehe Gl. (2.38)). Bei gedämpfter Entwicklung in  $z$ -Richtung wird das Kriterium zur Beendigung des Vorlaufs, nämlich eine konstante Dissipationsrate, früher erfüllt. Zu diesem Zeitpunkt hat die Korrelation der Vertikalgeschwindigkeit  $\overline{w\overline{w}}$  zwar schon überproportional abgenommen, jedoch sind die Korrelationen der horizontalen Geschwindigkeiten deutlich ausgeprägter als zu den entsprechenden Zeitpunkten in ungeschichteter Atmosphäre. Dies impliziert große horizontale turbulente Wirbelelemente, deren Anteil ausreicht, um insgesamt größere integrale Längen zu erzielen als ohne Schichtung.

Da jedoch  $L_t$  im Fall [ $\epsilon^* = 0.01$ ,  $N^* = 1$ ] von dieser Tendenz abweicht, ist in Klammern in Tabelle 4.1 zusätzlich das Geschwindigkeitskorrelationsverhältnis  $\overline{v\overline{v}}/\overline{w\overline{w}}$  dargestellt, welches sich während der Entwicklung der Turbulenz einstellt. Für den genannten Fall ist dieses Verhältnis sehr groß, weil durch den starken Temperaturgradienten in Kombination mit geringer kinetischer Energie die Vertikalbewegung besonders effektiv gedämpft wird.

Beispielhaft zeigt Abbildung 4.1 die sich entwickelnden Spektren des jeweiligen stark turbulenten Geschwindigkeitsfelds in verschieden großen Rechengebieten. In Abb. a) ist das Verhältnis der Rechengebietslängen  $L_x/L_y \approx 1.5$ , während es in Abb. b) fast kubisch ist  $L_x/L_y \approx 1$ . Desweiteren ist in der ersten Darstellung starke Temperaturschichtung integriert ( $N^* = 1$ ), während letztere ohne Schichtung ermittelt wurde. Jeweils ist die spektrale Verteilung der Energiedichte zur Initialisierung, während des Vorlaufs und zum Zeitpunkt des erfolgten Wirbeleinsatzes abgebildet. Da die Spektren für jede Raumrichtung individuell vorgegeben werden (jedoch nicht unabhängig, siehe Gln. (2.36a-d)), und dementsprechend auf ihre Rechengebietslänge bezogen werden, beginnt jede Richtung mit der (dimensionslosen) Wellenzahl  $k = L_{xyz}/\lambda = 1$  und endet bei der halben Gitterpunktzahl dieser Richtung (weil zwei Gitterpunkte für die Auflösung einer Wellenlänge  $\lambda$  erforderlich sind). Daher ergeben sich aus unterschiedlich vielen

Gitterpunkten pro Raumrichtung erkennbare Unterschiede im Dissipationsbereich, wie Abb. 4.1 a) zeigt. Bei Wellenzahlen von  $k > 256/2$  existieren nur noch Elemente in Flugrichtung, weshalb die abgebildete Kurve an dieser Stelle unphysikalisch abknickt. Außerdem fällt auf, dass trotz der Initialisierung des Anfangsspektrums mit  $k_p = 2$  das Energiemaximum bei  $k_p = 3$  liegt. Je nach Längenverhältnis  $L_x/L_y$  ist es möglich, dass bestimmte Wellenzahlen bevorzugt Energie zugewiesen bekommen, weil eine bestimmte Wellenlänge sowohl Teilmenge der kleineren Rechengebietslänge als auch Teilmenge der größeren Rechengebietslänge ist.

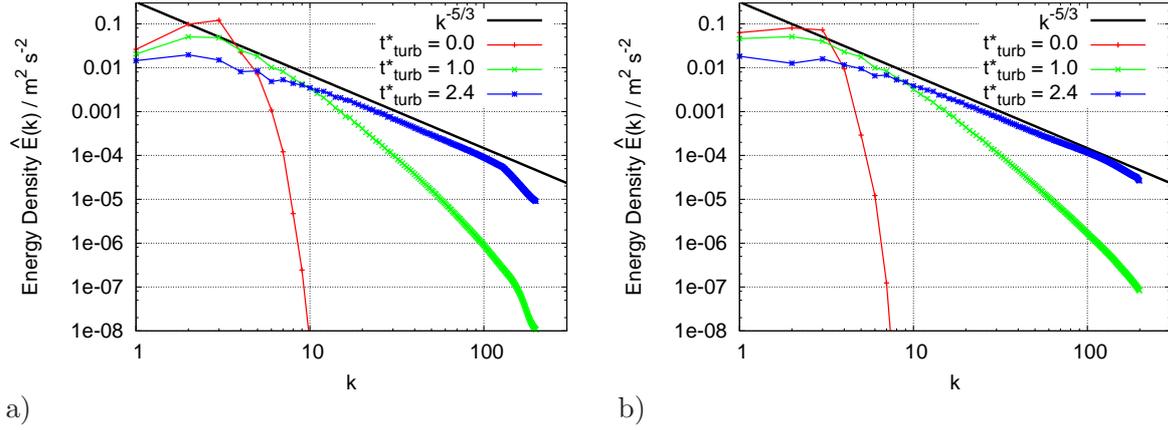


Abbildung 4.1: Entwicklung des Energiespektrums von der Initialisierung bis zum Wirbeleinsatz für die Simulationen a) [ $\epsilon^* = 0.23$ ,  $N^* = 1$ ,  $L_x/L_y \approx 1.5$ ] und b) [ $\epsilon^* = 0.23$ ,  $N^* = 0$ ,  $L_x/L_y \approx 1$ ].

Die in Tabelle 4.1 aufgeführten Temperaturschichtungen ergeben sich mit der mit  $t_0$  normierten Brunt-Väisälä Frequenz und entsprechen mit den zuvor angenommenen Parametern für Höhenlage und Temperatur ( $\theta = 290$  K) einem (potentiellen) Temperaturgradienten von  $[0, 0.4, 3]$  K / 100 m.

Die in Tabelle 4.1 angeführten Niveaus der Dissipationsraten  $\epsilon^* = [0.01, 0.05, 0.23]$  entsprechen dimensionsbehaftet  $\epsilon = [10^{-7}, 10^{-5}, 10^{-3}] \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$ , welche sehr schwache, mäßige und starke Turbulenz repräsentieren, wie sie bereits von Holzäpfel et al. (2001) oder Proctor & Switzer (2000) verwendet wurden. Der kleinste Wert entspricht dabei sehr ruhigen Verhältnissen, die typischerweise im Reiseflug beobachtet werden.  $\epsilon^* = 0.05$  und insbesondere  $\epsilon^* = 0.23$  sind die relevanteren Werte im Flughafennahbereich, wie die folgende Darstellung 4.2 aus Holzäpfel et al. (2005) zeigt. Dabei wurden im Rahmen einer Wirbelschleppenmesskampagne Turbulenzmessungen im Höhenbereich von 20 bis 300 m in 20 m-Intervallen durchgeführt, wobei nur die Minimal- und Maximalstellen  $h = 20$  m und  $h = 300$  m sowie der Mittelwert über alle Messhöhen abgebildet sind. Gewonnen wurden die Daten mithilfe der LIDAR-Technik, wobei über mehrere Tage im September 2004 von den frühen Morgenstunden bis in den Nachmittag hinein gemessen wurde. Erwartungsgemäß sind die Dissipationsraten in unmittelbarer Bodennähe sehr hoch, während sie in größeren Höhen abnehmen.

Als Beispiel für Turbulenz in mittleren Flughöhen wurden im EU-Projekt AWIATOR ebenfalls Turbulenzmessungen durchgeführt, welche bevorzugt Werte von  $0.05 < \epsilon^* < 0.08$  in FL-75 ( $\hat{=} 2300$  m) ergaben (Normierung ebenfalls über Parameter des A340). Desweiteren wurde im Rahmen des EU-Projekts QUANTIFY (welches die Quantifizierung des Klimaeinflusses des europäischen und weltweiten Transportwesens zum Ziel hat) eine Messkampagne mit dem

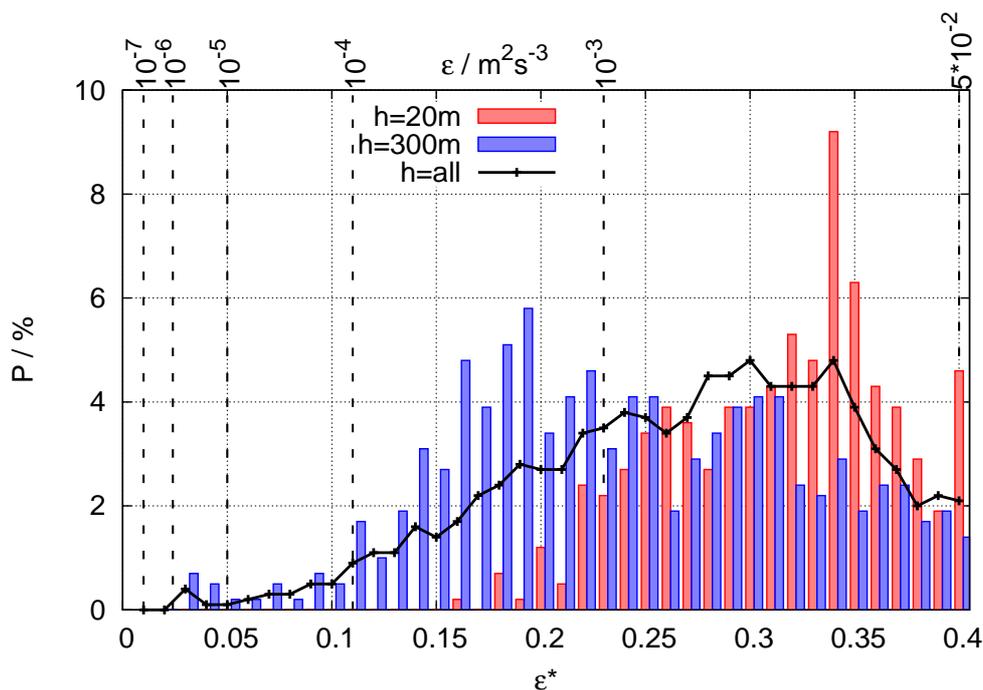


Abbildung 4.2: Häufigkeit der mit den Parametern des A340-300 normierten turbulenten Dissipationsraten  $\epsilon^*$  in verschiedenen Höhen aus Lidarmessungen am Flughafen Frankfurt im September 2004.

DLR-Forschungsflugzeug Falcon durchgeführt, bei welcher als Nebenprodukt Geschwindigkeitsfelder aufgezeichnet und ausgewertet wurden. Die Messungen fanden im Sommer 2007 westlich von Wales über dem atlantischen Ozean statt (zwischen  $50^\circ$  und  $51^\circ$  Nord und bei ca.  $6^\circ$ , Ost). Dabei wurden unter anderem in den beiden Höhen  $[H = 60, 160]$  m die Spektren der turbulenten Geschwindigkeitsfelder erstellt und daraus die Dissipationsrate und die eindimensionalen integralen Längensmaße in Flugrichtung (siehe Gl. (2.13)) bestimmt. Die folgenden Ergebnisse sind in Tabelle 4.2 zusammengefasst (Baumann, 2008).

$H / \text{m}$	$\epsilon / \text{m}^2\text{s}^{-3}$	$L_{t,uu,x} / \text{m}$	$L_{t,vv,x} / \text{m}$	$L_{t,ww,x} / \text{m}$
160	$8 \cdot 10^{-5} \dots 2 \cdot 10^{-4}$	300	300	40
60	$2 \cdot 10^{-4} \dots 5 \cdot 10^{-4}$	250	250	20

Tabelle 4.2: Turbulente Dissipationsrate und eindimensionale turbulente integrale Längenskalen (gemittelt über die Flugrichtung) in Abhängigkeit der Höhe über dem Meer aus Messdaten des Projekts QUANTIFY.

Aufgrund einer möglichen Beeinflussung der Wirbelschlepe ist es innerhalb numerischer Simulationen nicht ohne Weiteres möglich, das turbulente Geschwindigkeitsfeld durch Turbulenzproduktion auf konstantem Energieniveau zu halten. Dem System wird subskalig kontinuierlich Energie entzogen, allerdings wird davon ausgegangen, dass dies langsam stattfindet gegenüber dem Energieverlust des Wirbelpaars während seiner Lebensdauer. Zur Begründung werden charakteristische Zeitskalen beim Wirbeleinsatz verglichen (Corjon et al., 1996), wobei die eingesetzten Werte den Extrema der Simulationen aus Tabelle 4.1 entnommen werden.

$$\frac{t_{0,turb}}{t_{0,Wirbelpaar}} = \frac{\frac{L_{t,0}}{\sqrt{(\overline{uu} + \overline{vv} + \overline{ww})/3}}}{\frac{b_0}{w_0}} = [2.25 \dots 1100] \quad (4.2)$$

Die charakteristische Zeit des Wirbelpaars ist folglich rund zweimal bis über 1000 mal kleiner als die des Turbulenzfeldes, wobei die Variabilität des Zeitskalenverhältnis vor allem von der im Turbulenzfeld vorhandenen turbulenten Energie abhängt. Man kann daher davon ausgehen, dass die Charakteristika des Turbulenzfeldes innerhalb eines Wirbelschleppenzklus nahezu unverändert bleiben. Relativ kleine Zeitskalenverhältnisse führen zu besonders konservativen Abschätzungen des Wirbelzerfalls, da dann die Turbulenz über das Wirbelalter gemittelt kleiner ist, als ihr nomineller Wert zum Zeitpunkt der Wirbelinitialisierung.

### Weißes Rauschen

Während des Aufrollvorgangs bilden sich am und um den Kernradius Fluktuationsbewegungen, was die Vermischung in diesen Bereichen beschleunigt und damit zu erhöhtem Zerfall der Wirbelschlepe führen kann (Gerz & Holzäpfel, 1999). Um dies in numerischen Simulationen abzubilden, wird im Nahbereich des Kernradius eine Geschwindigkeitskomponente hinzuaddiert, die dieser Bewegung Rechnung tragen soll. Alle zusätzlichen Geschwindigkeitskomponenten haben pro Kreisring den Erwartungswert Null und die Standardabweichung  $\sigma$ , dass sie am Kernradius maximal wird und dabei den Wert  $\sigma = 2 \text{ m/s}$  annimmt. Bei größeren und kleineren Radien fällt  $\sigma$  exponentiell ab (Holzäpfel et al., 2001).

## 4.2 Typische Entwicklungsmerkmale

Im folgenden Kapitel werden anhand einzelner Large Eddy Simulationen typische Merkmale der Entwicklung einer Wirbelschlepe nach Abschluss des Aufrollvorgangs hervorgehoben, wie die Ausbildung von Instabilitäten, der daraus resultierende Zusammenschluss zu Wirbelringen, die Entwicklung der lokalen Zirkulation und das manchmal auftretende Wirbelaufplatzen. Zur Visualisierung der genannten Phänomene dienen Daten neutral geschichteter und schwach turbulenter Simulationen ( $\epsilon^* \leq 0.05$ ).

### 4.2.1 Instabilitäten

Die grundlegende Bedeutung der symmetrischen, sinusförmigen Crow-Instabilität wurde bereits im Kapitel 2.3.3 angesprochen. Im Laufe ihrer Entwicklung nähern sich die Wirbelröhren soweit an, dass sie sich berühren und anschließend Wirbelringe ausbilden. Da die Länge des Rechengebiets  $L_x$  einer Wellenlänge dieser Instabilität entspricht und da die Ränder periodisch sind, hat die Instabilität perfekte Bedingungen, sich dementsprechend zu entwickeln. Es sei jedoch angemerkt, dass z.B. bei einem Verhältnis von  $L_x/\lambda_{Crow} = 1.5$  ebenfalls Crow-Wellenlängen entstehen. Dabei ergibt sich ein Muster, welches soweit möglich aus Crow-Wellenlängen besteht, während sich im verbleibende Teil eine zusätzliche symmetrische Form mit reduzierter Wellenlänge zeigt. Dabei entwickeln sich erstere zeitlich und räumlich absolut ähnlich wie bei einer perfekt angepassten Rechengebietslänge, wie Abbildung 4.3 zeigt. Für diese Simulation wurde dabei der Abstand der Wirbelröhren auf ca.  $2/3 b_0$  reduziert, während

alle anderen Parameter unverändert blieben (Referenzsimulation: [ $\epsilon^* = 0.23$ ,  $N^* = 0$ ,  $L_t/b_0 = 0.85$ ]). Es resultiert ein erster Zusammenschluss der Wirbelröhren zum Zeitpunkt  $t^* = 3.7$

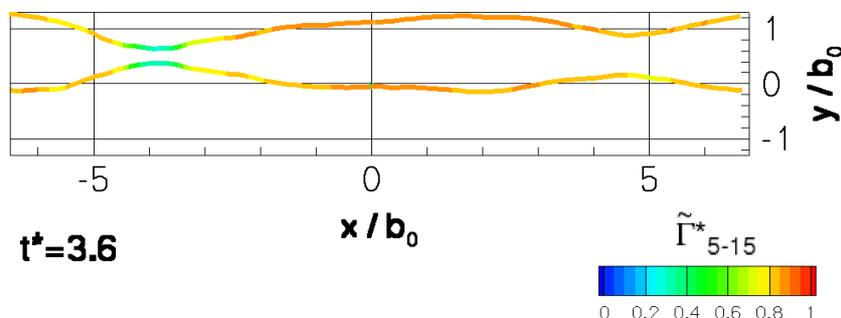


Abbildung 4.3: Wellenlänge der Crow-Instabilität bei reduziertem Wirbelabstand zum Zeitpunkt  $t^* = 3.6$  mit farbkodierter normierter Zirkulation  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$ .

Als Auslösemechanismus für die Instabilität genügt eine beliebig kleine Störung, die durch das weiße Rauschen oder das turbulente Hintergrundfeld gegeben ist. Die dadurch erzeugte Auslenkung verstärkt sich durch dreidimensionale Geschwindigkeitsinduktion nach dem Gesetz von Biot-Savart, somit beginnt die Instabilität exponentiell zu wachsen (Crow, 1970).

Ab einer bestimmten Amplitude haben sich beide Wirbel soweit angenähert, dass das Verhältnis von  $r_c/b$  groß genug ist, dass sich zusätzlich zur langwelligen Crow-Form elliptische Instabilitäten ausbilden. Die zugehörige Wellenlänge wird als

$$\lambda_{ellipt} = \frac{2\pi r_c}{2.26} \quad (4.3)$$

angegeben (Laporte & Leweke (2002), Steijl (2001)). Abbildung 4.4 zeigt in nahezu ungestörter Atmosphäre, wie sich nach ausreichender Annäherung durch die Crow-Instabilität in der gleichen Ebene kurzwellige Muster formieren.

In der Detailansicht 4.4 b) sind fünf Wellenlängen der elliptischen Instabilität dargestellt. Mit Hilfe des farbkodierten normierten Kernradius ( $r_{c,0} = 3$  m) wird ein mittlerer Kernradius im entscheidenden Bereich von  $r_c/r_{c,0} \approx 2$  bestimmt, woraus sich mit Gl. (4.3) eine Wellenlänge von  $\lambda = 0.36 b_0$  ergibt. Dies passt hervorragend sowohl zu der abgelesenen Entfernung von ca.  $1.9 b_0$ , aus welcher man  $\lambda_{LES} = 0.38 b_0$  erhält, als auch zu Beobachtungen, wie sie z.B. von Holzäpfel gemacht wurden (siehe Abb. 4.5)

Da diese Fotografie direkt von unten erstellt wurde, kann der Wirbelabstand als Referenz verwendet werden. Es sind sowohl die Crow-Instabilität mit  $\lambda_{Crow} \approx 7.3 b_0$  als auch elliptische Wellenlängen mit  $\lambda_{ellipt} \approx 1/18 \lambda_{Crow}$  erkennbar. Da es sich um ein vierstrahliges Verkehrsflugzeug handelte, wird von einer Spannweite von ungefähr 60 m ausgegangen, woraus sich letztere zu  $\lambda_{ellipt} = 0.4 b_0$  berechnet.

Bedingt durch den rein visuellen Vergleich von Simulation und fotografischer Abbildung ist die Datenqualität nicht ausreichend, um daraus den Kernradius exakt zu bestimmen. Allerdings bestätigt sich die Aussage von Laporte & Leweke (2002), dass elliptische Instabilitäten bei entsprechender Annäherung der Wirbelröhren existieren, und dass ihre Wellenlänge sich in

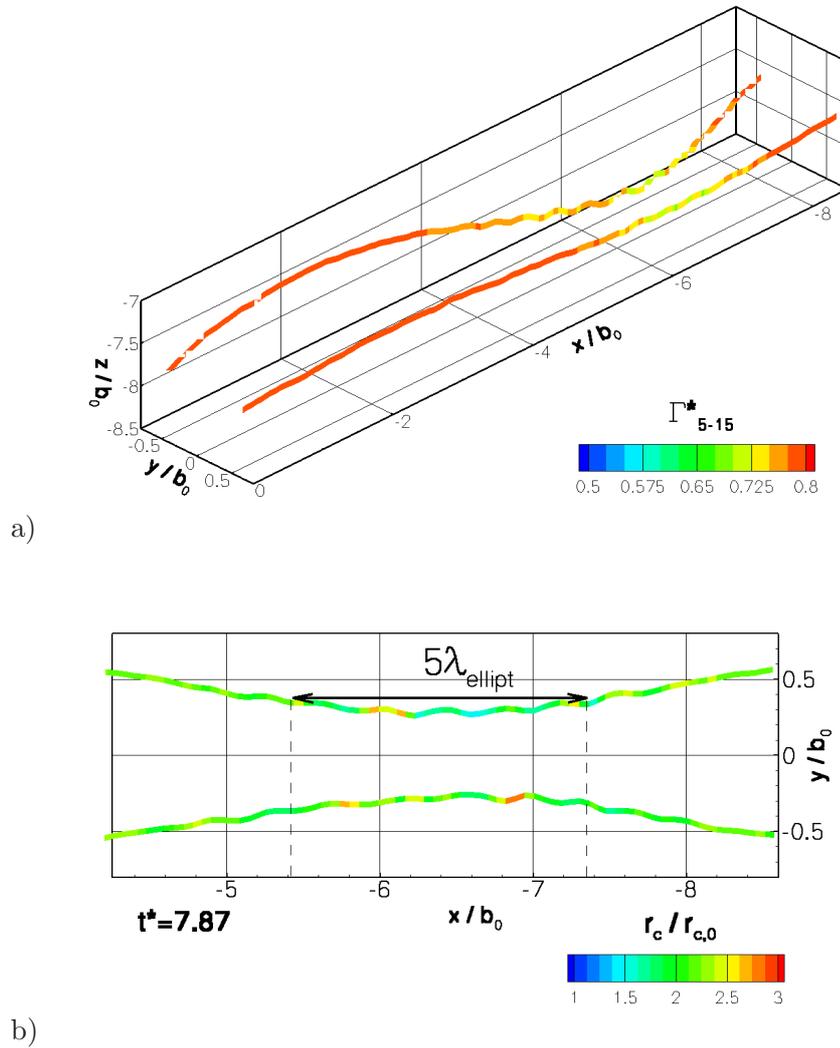


Abbildung 4.4: Crow-Instabilität im Fall  $[\epsilon^* = 0.01, N^* = 0]$  in V-förmig angeordneten Ebenen in 3-D Ansicht (a) und von oben (b) mit sich einstellender elliptischer Instabilität ab  $r_c/b > 0.2$ . Die Farbkodierung impliziert in a) die verbleibende Zirkulation und in b) den zur Berechnung der Wellenlänge notwendigen und auf  $r_{c,0}$  normierten Kernradius.

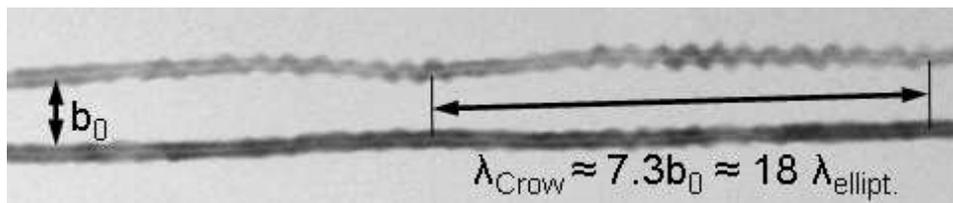


Abbildung 4.5: Kurzwellige elliptische Instabilität kombiniert mit der Crow-Instabilität (Foto: Holzäpfel, 2009), welche durch Kondensstreifen sichtbar gemacht wurden.

der vorhergesagten Größenordnung befindet. Ihre Auswirkung auf den Zerfall wird in Kapitel 4.3 diskutiert.

### 4.2.2 Ringbildung (Linking)

In reibungsbehafteten Strömungen wird Wirbelstärke bzw. Zirkulation bei zunehmender Annäherung der beiden Wirbelröhren vernichtet. Dabei trennen sich die Wirbelröhren in der Regel auf, um über die Mittelachse hinweg Wirbelringe zu bilden. In den perfekten Bedingungen einer LES mit periodischen Rändern ist dies zumeist der Fall, in der Realität sollte dies bevorzugt bei neutral bis mäßig geschichteter Atmosphäre zutreffen.

Durch den verhältnismäßig geradlinigen Bereich der sinusförmigen Wirbelkernlinien an den tiefsten Stellen nähern sich die Wirbelröhren auf einem relativ langen Bereich an und bilden in einem komplexen Prozess Wirbelringe. Dabei wird

- a) in Flugrichtung orientierte Wirbelstärke durch gegenseitige Kompensation vernichtet
- b) die maximale Ausdehnung in Flugrichtung deutlich reduziert (teilweise um knapp 50 % pro  $t_0$ )
- c) Wirbelstärke in Spannweitenrichtung gedreht (vortex tilting), was eine nachfolgende Ringbildung ermöglicht
- d) Druckgradienten und somit Axialgeschwindigkeiten innerhalb der Wirbelröhren erzeugt

Eine ungestörte Ringbildung inklusive der Umorientierung von Wirbelstärke zeigt Serie 4.6, in welcher Wirbelstärke in Flugrichtung ( $\omega_x$ ) rot, in Spannweitenrichtung ( $\omega_y$ ) blau und Oberflächen gleichen Drucks als Referenz in grau angezeigt werden, wobei jeweils gleiche Druck- bzw. Wirbelstärkeniveaus verwendet werden.

Dabei erkennt man die komplette Umwandlung von anfangs unabhängigen Wirbelröhren zu einem Wirbelring, welcher sich nur noch über eine Länge von ca.  $5 b_0$  ( $\cong 0.6 \lambda_{Crow}$ ) erstreckt.

Desweiteren fällt auf, dass zu Beginn im Übergangsbereich deutlich mehr Wirbelstärke vorhanden ist als an den Stellen, wo die Wirbelröhren weiter voneinander entfernt sind. Dies lässt sich über das zur Darstellung gewählte hohe Wirbelstärkeniveau erklären, welches im ungestörten Bereich zu hoch ist für die im Wirbel befindliche Wirbelstärke. Im Kernbereich hingegen gelten die Mechanismen, die auch die Bildung der elliptischen Instabilität hervorrufen: Die umhüllenden Stromlinien werden zuerst verformt und bei weiterer Annäherung zusätzlich komprimiert, was zu höherer Wirbelstärke führt.

Nun beginnt der eigentliche Zusammenschließungsprozess, wie in Kida & Takaoka (1994) beschrieben. Man betrachte dafür je zwei Wirbellinien  $p$  und  $q$ , die den Kernradius mit gleichem Abstand einhüllen, siehe Abbildung 4.7.

Die näher beieinander liegenden Wirbellinien  $p$  berühren sich zuerst und erzeugen im schraffiert dargestellten Bereich sogenannte direkte Wirbelstärkekompensation, welche der Ausbildung von Schergradienten und in der Folge starker kleinskaliger Turbulenz zugeschrieben wird, während  $q$  noch unbeeinflusst ist. An den Rändern gehen die Linien  $p$  eine neue Verbindung zur gegenüberliegenden Seite ein. Die anfangs spitze  $p$ -Linie stumpft zunehmend ab, indem sie sich nach außen zurückzieht. Diese sukzessive Dissipation von kinetischer Energie führt außerdem zur Verwindung der Wirbellinien und lokal zu stark variierenden Kernradien. Diese verursachen dadurch axiale Druckwellen (Moet et al., 2005), welche sich in die verbleibenden

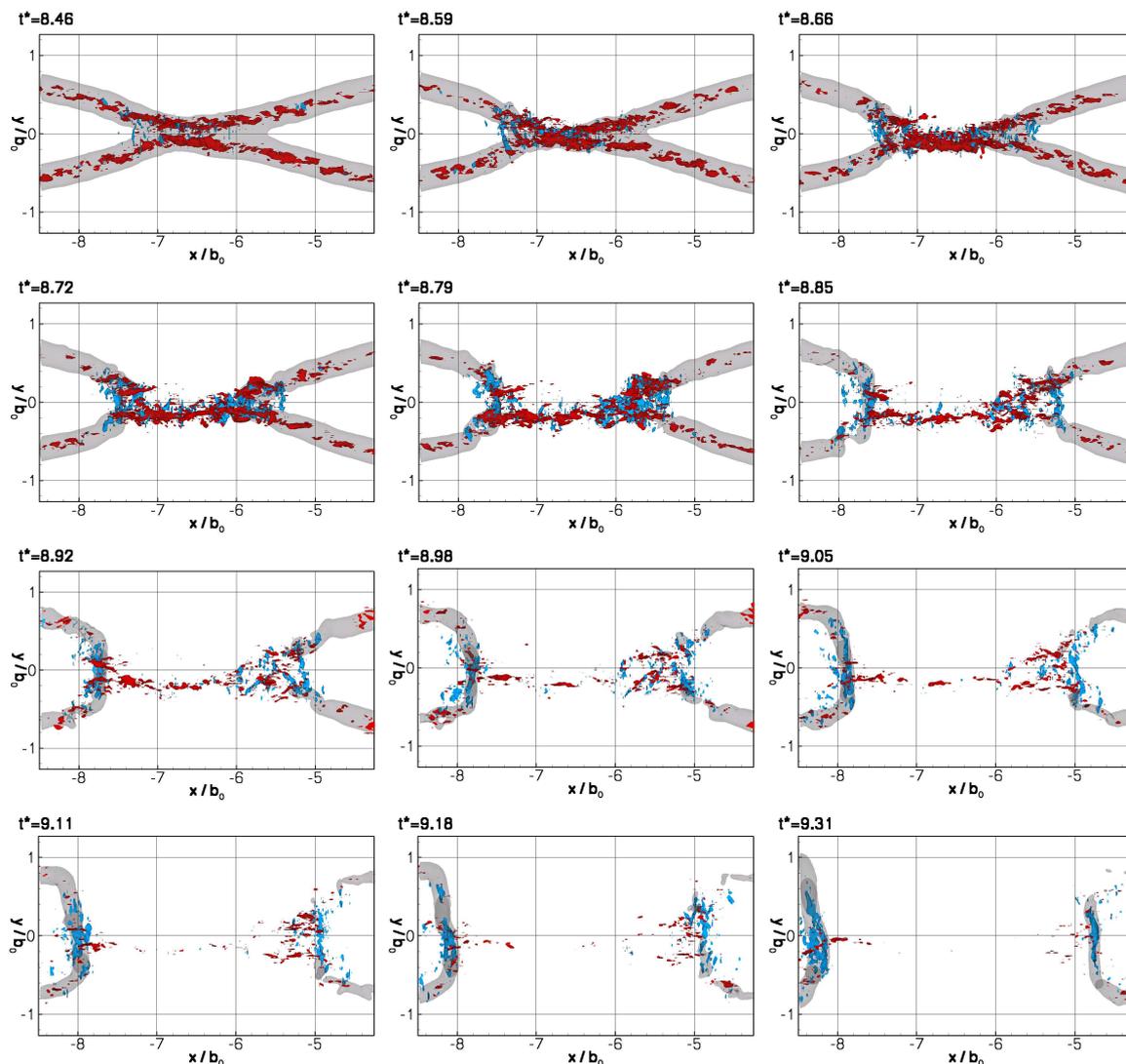


Abbildung 4.6: Ringbildungsprozess in ruhiger, ungeschichteter Atmosphäre [ $\epsilon^* = 0.01$ ,  $N^* = 0$ ]. Dargestellt sind Isodrucklinien (grau) zur Erkennung der ungefähren Wirbelkernposition, Wirbelstärke in Flugrichtung ( $\omega_x$ , rot) und in Spannweitenrichtung ( $\omega_y$ , blau).

Bereiche der Wirbelröhren fortpflanzen, und dabei eine axiale Geschwindigkeitskomponente ausbilden.

Der gesamte Prozess läuft kontinuierlich ab, das heißt Stück für Stück löschen sich Wirbelstärkebereiche gegenseitig aus, bilden neue Übergänge zur gegenüberliegenden Seite und ziehen sich dann (in Flugrichtung betrachtet) nach außen zurück. Somit teilt sich die vorhandene Wirbelstärke auf; während der anfangs näher zur Mittelebene liegende Teil  $p$  bereits seine Richtung verändert hat, besteht  $q$  weiterhin in alter Orientierung. Der Zusammenschluss über die  $(x,z)$ -Ebene wird von Kida als „Bridging“ und die verbleibenden Wirbelstärkebereiche als „Stege“ bezeichnet, siehe Abbildung 4.8. Die im verbleibenden Steg enthaltene Wirbelstärke wird während des Verlaufs zunehmend auseinandergezogen, was durch die Drehimpulserhaltung zu einer Zunahme der lokalen Wirbelstärke führt. Deshalb ist diese in Abb. 4.6

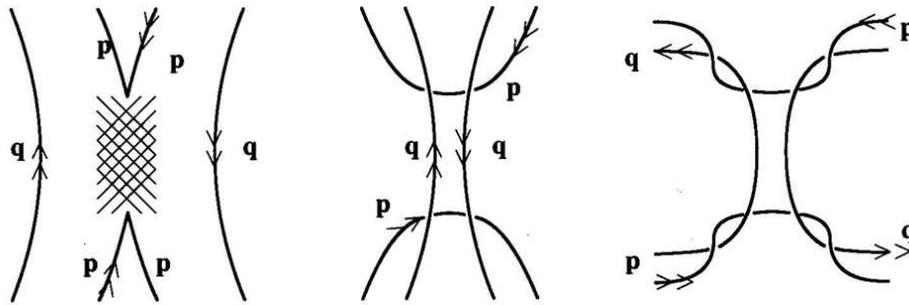


Abbildung 4.7: Sogenannter „Bridging“-Prozess zum Zusammenschluss zu Wirbelringen (Steijl (2001) und Kida & Takaoka (1994)) mit den beiden nächsten Wirbellinien  $p$  und den am weitesten voneinander entfernten Wirbellinien  $q$ . Schraffiert ist links der direkte Kompensationsbereich. Die Doppelpfeile zeigen die Richtung der Wirbelstärke an; das Wirbelpaar wird also von oben betrachtet.

noch lange sichtbar, obwohl die Isodruckflächen keine Überreste des Wirbels suggerieren. Der Dickenverlust der beiden einzelnen Stege sorgt zusätzlich für reduzierte Interaktion, so dass die gegenseitige Kompensation von Wirbelstärke verlangsamt wird (Marshall et al., 2001).

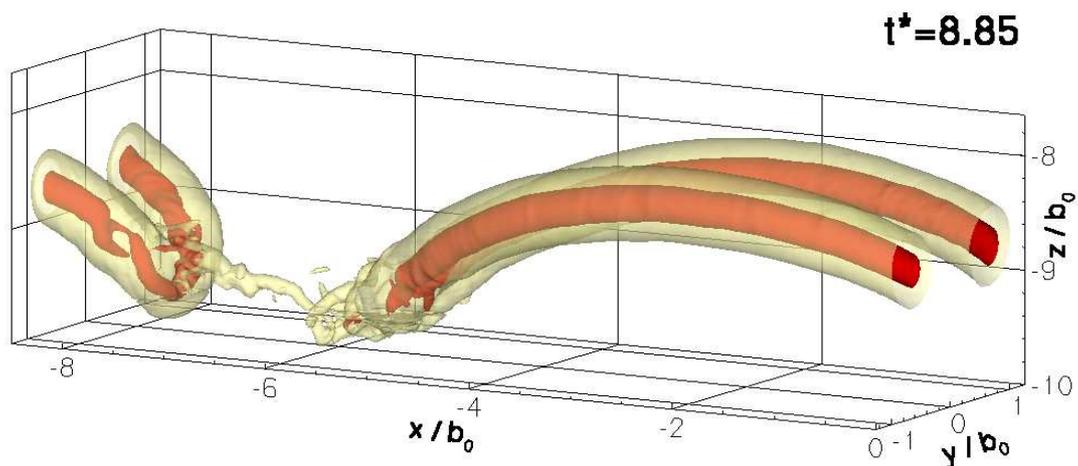


Abbildung 4.8: Durch Isodruckflächen dargestellte „Brücke“ und „Brückenstege“ im Aufhebungsbereich, wobei letzterer am charakteristisch ausgebildeten linken Ende bereits nach oben gewandert ist (siehe auch Abb. 4.6 zu  $t^* = 8.85$ ).

Die umorientierte Wirbelstärke  $\omega_y$  biegt die noch bestehenden Stege nach oben auf, was ebenfalls in Abb. 4.8 zu sehen ist. Dieses Ausweichen nach oben schwächt die Auslöschung von Wirbelstärke geringfügig ab (Kida & Takaoka, 1994).

Die hier gezeigte Ringbildung von zwei gleich starken Wirbeln  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  ist bei ruhigen atmosphärischen Bedingungen zu erwarten. Bei relevanter Scherung ist jedoch eine Situation vorstellbar, bei welcher der Zusammenschluss zweier ungleich starker Wirbel erfolgt. Dies wurde ausführlich von Marshall et al. (2001) untersucht, der verschiedene Verhältnisse von  $\Gamma_2/\Gamma_1 < 1$  betrachtet. Bei geringen Zirkulationsdifferenzen umwickelt der schwächere Steg nach dem erfolgten Zusammenschluss den stärkeren, während bei größeren Unterschieden der Zusammenschluss als solcher gar nicht mehr stattfindet. Stattdessen umschlingt der schwächere Wirbel den stärkeren, womit sich der Zirkulationsverlust des Gesamtsystems reduziert.

Interessant ist jedoch die Tatsache, dass bei  $\Gamma_2/\Gamma_1 \approx 1$  der umwickelnde, also etwas schwächere Wirbel steigende Maximalwerte der Wirbelstärke entwickelt, und diese trotz der unmittelbaren Nähe zur anderen Wirbelröhre im weiteren Verlauf erhalten bleiben. Durch Wirbelstreckung nimmt die Wirbelstärke zu, wenn sich die Länge des betroffenen Teilstücks vergrößert. Allerdings scheint die damit einhergehende Verringerung des Abstands zum starken Wirbel nicht zu signifikanten Verlusten durch gegenseitige Kompensation zu führen. Dies bestätigt die große Flexibilität und Stabilität dieser dünnen Wirbelstärkeelemente.

### 4.2.3 Räumliche Zirkulationsverteilung

Die zeitliche Entwicklung der Zirkulation der Wirbelschlepe wurde bereits vielfach mit Hilfe von Simulationen und Experimenten untersucht. Schwerpunkt war dabei die Betrachtung der Zirkulation in Ebenen senkrecht zur Flugrichtung, da diese für nachfolgende Flugzeuge am wichtigsten ist. Dabei wurden etwaige Verformungen der Wirbelschlepe und Umorientierung von Wirbelstärke vernachlässigt, obwohl das Gefährdungspotential dadurch unterschätzt werden kann.

Aus Abbildung 4.6 ist bereits klar geworden, dass im unmittelbaren Bereich des Linkings Wirbelstärke in Richtung der Spannweite entsteht. In Kapitel 3.2 wurde darauf eingegangen, dass die Zirkulation jeder Wirbelkernposition über die aktuelle Orthogonalfläche berechnet wird und dabei mit  $\tilde{\Gamma}$  bezeichnet wird. Die weitere Entwicklung nach erfolgter Wirbelringbildung ist in der folgenden Bilderserie 4.9 abgebildet.

In allen Darstellungen ist die Ringform der Wirbelkernlinien inklusive der farblich kodierten Zirkulation zu sehen, wobei weder der Abbildungsbereich noch die Farbkodierung im Laufe der Serie variieren. Zwei wichtige Merkmale lassen sich erkennen:

- Änderung der geometrischen Form
- Änderung der Zirkulationsverteilung

Besonders letzteres ist im Hinblick auf bisher erfolgte Auswertungen höchst bemerkenswert. Zum ersten Zeitpunkt  $t^* = 5.9$  sieht man noch den erwarteten Zirkulationsverlauf, wobei im Zusammenschlussbereich große Teile dissipiert wurden. Die allmähliche Ausbildung von  $\omega_y$  wurde bereits erläutert, überraschend ist jedoch die Tendenz, dass auch lange nach Abschluss der Ringbildung der Betrag der Zirkulation quer zur Flugrichtung konstant bleibt bzw. immer noch leicht zunimmt, während der Verlust von Zirkulation in Flugrichtung im gleichen Zeitraum nahezu 50 % (!) beträgt. Wie sich zeigen wird, steht dies in direktem Zusammenhang mit der Definition von  $\Gamma_{5-15}^*$  und der veränderten Geometrie des Rings, der zu Beginn schmal und langgestreckt ist und später in der (x,y)-Ebene in einer abgerundet quadratischen Form erscheint.

Erklären lässt sich diese Formänderung anhand der vier nahezu vertikalen Wirbelelemente nahe des Zusammenschlussbereichs. Diese Bereiche besitzen ausreichend Zirkulation und liegen jeweils paarweise nahe beieinander. Die gegenseitige Geschwindigkeitsinduktion, die normalerweise für das Absinken der Wirbelschlepe verantwortlich ist, erzeugt nun einen Geschwindigkeitsvektor in Richtung des Ringzentrums. Je nach exakter Orientierung dieser Vertikalelemente wird der Wirbelring in x-Richtung schneller oder langsamer komprimiert, während seine Absinkgeschwindigkeit abnimmt.

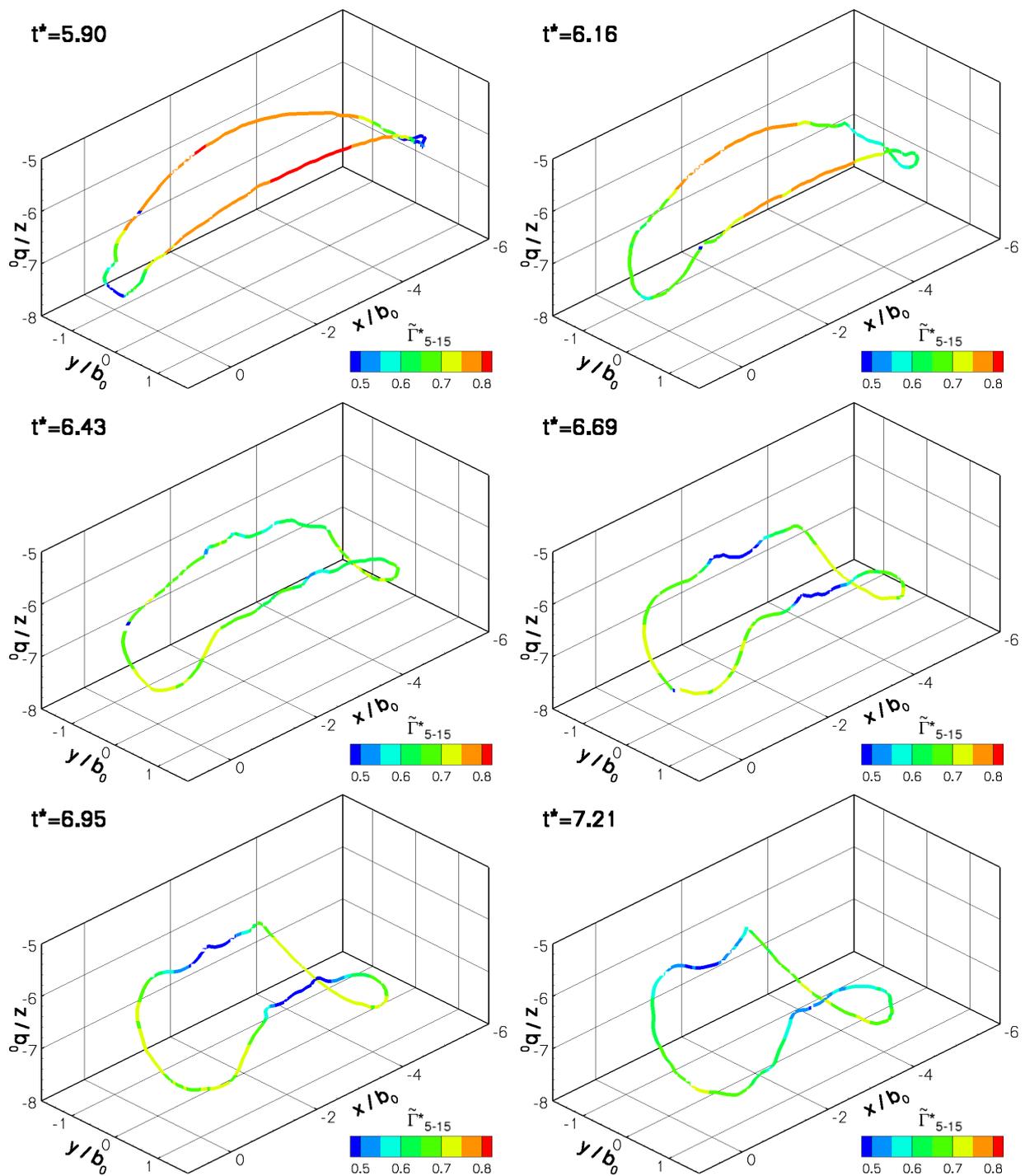


Abbildung 4.9: Zeitlicher Verlauf von geometrischer Form und farbkodierter Zirkulation  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$  im frühen Wirbelringstadium [ $\epsilon^* = 0.05$ ,  $N^* = 0$ ].

Auch ohne den Antrieb der vertikal ausgelenkten Wirbelbereiche würde sich die Ringform im Laufe der Zeit nach dem Gesetz von Biot-Savart ändern, dies würde jedoch wesentlich langsamer passieren. Vereinfacht werden hierzu zweidimensionale elliptische Wirbelringe mit kreisförmigem Wirbelkern betrachtet. Aufgrund der exzentrischen Wirbelstärkeverteilung werden

Geschwindigkeiten induziert, die aus der elliptischen Ausgangsform einen Kreis und aufgrund der Trägheit des Prozesses erneut eine Ellipse bilden, welche allerdings um  $90^\circ$  zur ursprünglichen Orientierung gedreht ist (Widnall & Sullivan (1973), Dhanak & Bernadinis (1981)). Ab einem ursprünglichen Längsachsenverhältnis der Ausgangsform der Ellipse von  $a/b > 4\dots 5$  und ausreichender Kernradiengröße von  $r_c > 0.025 a$  ist dann ein Auftrennen in zwei kleine Wirbelringe zu erwarten, wie dies auch schon für Wirbelringe von Flugzeugwirbelschleppen beobachtet wurde (siehe auch Kapitel 4.2.5). Bei Wirbelschleppen befindet man sich in etwa im Bereich der angegebenen Mindestexzentrizität, da die Längsausdehnung nach abgeschlossener Ringbildung zumeist bei ca.  $5 b_0$  liegt, während die Ausdehnung in Spannweitenrichtung im Linkingbereich kleiner als  $1 b_0$  ist. Eine Abschätzung der Periodendauer  $T$  einer solchen zweidimensionalen Oszillation wird von Dhanak & Bernadinis (1981) in Abhängigkeit der Parameter Halbachsenlängen, Kernradius und Wirbelstärkeverteilung innerhalb des Kernradius angegeben. Je exzentrischer die ursprüngliche Ringform, desto größer wird die benötigte Zeit  $T$ , allerdings ist zu beachten, dass dann die weitere Entwicklung (ab ca.  $t > T$ ) nicht mehr als periodisch angenommen werden kann, weil der Wirbelring durch die ungleiche induzierte Absinkgeschwindigkeit nicht mehr in einer Ebene liegt. Er nimmt dabei eine Form an, die der Ausgangsform des aus dem parallelen Wirbelpaar entstehenden Wirbelrings ähnelt, da sich jeweils die am nächsten beieinanderliegenden Bereiche aufgrund gegenseitiger Geschwindigkeitsinduktion auf der niedrigsten Höhe befinden.

Der Einsatz konservativer Werte (d.h. kleiner Werte für die elliptischen Halbachsen des Wirbelrings) aus den Simulationsergebnissen ergibt für einen Lamb-Oseen Wirbel Periodendauern, die die Lebensdauer der Wirbelschlepe deutlich übersteigen (Größenordnung  $T \approx 25 t_0$ ). Daraus kann abgeleitet werden, dass aufgrund der speziellen Ausgangsform des Wirbelrings aus der Wirbelschlepe die Periodendauer eines *ebenen* Wirbelrings deutlich unterschritten wird. Außerdem wird offensichtlich, dass anhand der Ausprägung der vertikalen Bereiche zu Beginn des Wirbelrings Aussagen über die Geschwindigkeit der Formänderung bzw. die Periodendauer gemacht werden können.

Folgende Veränderungen ergeben sich im Wirbelschleppenring zeitgleich: in Flugrichtung verkürzt sich die Wirbelröhre deutlich, und verliert dadurch an Zirkulation  $\Gamma_{5-15}^*$ , während sie orthogonal dazu an Breite und Zirkulation dazugewinnt.

Wir betrachten nun der Einfachheit halber einen Rankinewirbel (siehe Abbildung 4.10 a)) mit Starrkörper- und Potentialwirbelanteil, dessen Profil dem des Lamb-Oseen Wirbels sehr ähnlich ist. Die gesamte Wirbelstärke befindet sich somit innerhalb des Kernradius. Bei einer Streckung der Wirbelröhre muss nach den Helmholtz'schen Wirbelsätzen die *Gesamtzirkulation* konstant bleiben (Chorin & Marsden, 1979). Da die Wirbelstärke im Wirbelzentrum zunimmt, reduziert sich gleichzeitig der Kernradius  $r_c$ . Dabei muss der Drehimpuls ( $r v_\theta$ ) konstant bleiben, deswegen verändert sich der Potentialwirbelbereich nicht. Es ergibt sich in Abb. 4.10 die mit einer „2“ gekennzeichnete Konstellation, das bedeutet die Tangentialgeschwindigkeit  $v_\theta$  hat kernnah deutlich zugenommen, während sie außen unverändert bleibt (Holzapfel et al., 2003).

Es muss nun unterschieden werden zwischen der Zirkulation für unendlich große radiale Abstände und der Berechnung der Zirkulation  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$ . Letztere ist ein Mittelwert aus Zirkulationswerten im Abstand von 5 bis 15 m. In Abb. 4.10 b) sieht man die Verläufe der Tangentialgeschwindigkeiten eines Lamb-Oseen Wirbels mit Radien  $r_1$  und  $r_2$  mit  $r_1 > r_2$ , die beide auf den Maximalwert von  $v_{\theta,2}$  normiert sind, und die zugehörigen jeweiligen Zirkulationsverläufe. Im eingerahmten Bereich rechts oben befinden sich die Zirkulationswerte, die in  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$  gemittelt

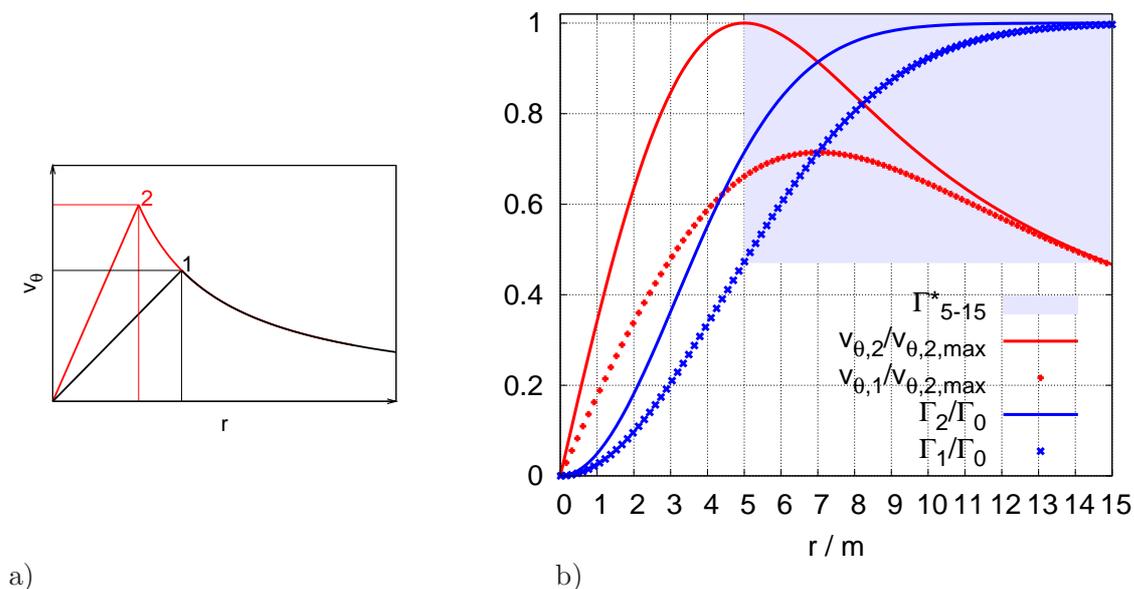


Abbildung 4.10: a) Tangentialgeschwindigkeitsprofil eines Rankinewirbels mit großem (1) und kleinem (2) Kernradius, b) Tangentialgeschwindigkeits- (rot) und Zirkulationsverlauf (blau) eines Lamb-Oseen Wirbels für beide Kernradien (1) und (2).

telt werden. Der Wirbelsatz von Helmholtz, dass Zirkulation entlang einer Linie konstant sei, gilt somit auch hier, wenn nur eine ausreichend große Fläche zur Integration der Zirkulation gewählt wird. Bei der Definition von  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$  führt dies zu scheinbaren Zirkulationsänderungen, welche bezüglich der Wirkung auf nachfolgende Flugzeuge bedeutsam ist.

Anzumerken ist noch, dass die Aufweitung in  $y$ -Richtung nach abgeschlossener Ringbildung Konsequenzen für die benachbarten Stellen maximaler Annäherung hat. Bei Simulationen von genau einer Crow-Wellenlänge läßt sich das numerisch nicht darstellen, aber im Experiment werden häufig einzelne Zusammenschlüsse beobachtet, wohingegen an der Nachbarstelle der Zusammenschluss verspätet oder gar nicht stattfindet. Somit ergibt sich zum Teil kein abgeschlossener Wirbelring, daher sind Ergebnisse, die einen vollständig ausgebildeten Wirbelring erfordern, auf ihre tatsächliche Häufigkeit zu analysieren

#### 4.2.4 Wirbelaufplatzen

Alternativ könnte nach Moet et al. (2005) Wirbelaufplatzen die niedrigen Zirkulationswerte in Flugrichtung erklären. Es sollen kurz die Unterschiede zwischen Wirbelzusammenbruch (vortex breakdown) und Wirbelaufplatzen (vortex bursting) erläutert werden, da diese in der Literatur häufig kontrovers diskutiert werden. Bei beiden Phänomenen handelt es sich um abrupte, häufig spektakuläre Änderungen der Geometrie von Wirbeln im Zusammenhang mit Axialströmungen. Der Wirbelzusammenbruch wird schon seit den 60er Jahren ausführlich untersucht und publiziert, daher sei z.B. auf die Zusammenfassung von Leibovich (1978) verwiesen. Entscheidend ist die Tatsache, dass ab einer kritischen Axialgeschwindigkeit eine spiralförmige oder blasenförmige Instabilität entstehen kann, die zu einem Stagnationspunkt im Wirbelkern führt. An diesem weicht die Strömung radial aus und sorgt somit für einen deutlich erweiter-

ten Kernradius. Hinter dem Stagnationspunkt entsteht ein toroidales Rückstromgebiet. Dies macht man sich unter anderem in der Verbrennung zur Flammenstabilisierung zunutze.

Im Gegensatz dazu verläuft das Wirbelaufplatzen weniger strukturiert. Es wird davon ausgegangen, dass zwei aufeinanderstoßende Druckwellen das Aufplatzen erzeugen, was zu einer radialen, chaotischen Ausweitung führt. Auch vom Zurücklaufen einzelner Bereiche entlang der Wirbelkernlinie analog zum Wirbelzusammenbruch ist in der Literatur die Rede (Tombach, 1973). Diese Voraussetzung kann im idealen Fall eines vollständig gebildeten Wirbelrings erfüllt sein, daher soll auf einige Beobachtungen eingegangen werden.

Die fortlaufenden Druckwellen und die Axialgeschwindigkeit im Wirbelkern bedingen sich nach dem Gesetz von Bernoulli gegenseitig, daher wird der Einfachheit halber nur  $v_{ax}$  untersucht. Diese kann prinzipiell entweder direkt beim Aufrollvorgang oder bei der Ringbildung entstehen. In Abbildung 4.11 wird davon ausgegangen, dass lediglich aus letzterem relevante Axialkomponenten entstanden sind.

Hier sind einzelne Schritte der Ringbildung zu erkennen, wobei die im Wirbelkern befindliche Axialgeschwindigkeit  $v_{ax}$  bezogen auf die jeweilige gemittelte Tangentialgeschwindigkeit am Kernradius  $v_{\theta,rc}$  farbkodiert dargestellt ist. Anhand der positiven und negativen Werte ergibt sich zusammen mit der ebenfalls abgebildeten Nummerierung des Suchalgorithmus ihre Richtung, das bedeutet positive Werte zeigen eine Axialgeschwindigkeitskomponente in Richtung der Nummerierung an, während negative Werte entgegengesetzt deuten. Klar erkennbar ist die Entstehung von Bereichen erhöhter axialer Geschwindigkeiten  $v_{ax}$  an den Berührungstellen, die sich in der Folge voneinander entfernen. Die Geschwindigkeitsrelation  $v_{ax}/v_{\theta,rc}$  erreicht in den abgebildeten Zeitschritten bei realistischem  $v_{\theta,rc}$  Maximalwerte von 1.0 - 1.3, was im Einklang mit den Ergebnissen von Moet et al. (2005) steht. (*Unrealistische* Tangentialgeschwindigkeiten können während der Ringbildung entstehen, wenn der Suchalgorithmus an Einzelstellen keine eindeutige Wirbelstruktur auffindet. Dann wird  $v_{\theta,rc}$  sehr klein, was zu einem deutlich überhöhten Verhältnis  $v_{ax}/v_{\theta,rc}$  führt.) Zum Zeitpunkt  $t^* = 6.7$  sind die beiden Störungen aufeinandergetroffen, was die resultierende Axialgeschwindigkeit gegen Null gehen lässt.

Die daraus resultierenden Auswirkungen auf den Kernradius zeigt Abbildungen 4.12, wobei dieser auf den initialisierten Kernradius  $r_{c,0}$  bezogen ist.

Zum Zeitpunkt des Aufeinandertreffens der Axialgeschwindigkeiten ( $t^* = 6.7$ ) vergrößert sich in diesem Bereich der Kernradius innerhalb kurzer Zeit deutlich. Während des Rücklaufs paßt sich der Kernradius über die gesamte Wirbelkernlänge allmählich an. Diese zeitlichen Entwicklungen zeigt auch Abbildung 4.13, in welcher einerseits die mittlere Axialgeschwindigkeit inklusive Standardabweichung (normiert auf die aktuelle Tangentialgeschwindigkeit) und andererseits der gemittelte normierte Kernradius inklusive Standardabweichung dargestellt sind.

Erwartungsgemäß ist die mittlere Axialgeschwindigkeit über den vollen Lebenszyklus ungefähr Null; jedoch lassen sich relevante Axialkomponenten an den Werten der Standardabweichung bei der Ringbildung ab  $t^* \approx 5$  erkennen. Hierbei bezeichnet der erste Ausschlag die Zeit von der Ringbildung bis zum Aufeinandertreffen der Axialgeschwindigkeiten, zu welcher kurzzeitig die Standardabweichung der Axialgeschwindigkeit klein ist. Es folgt eine (in Abb. 4.11) deutlich sichtbare Fortsetzung der Bewegung und im weiteren Verlauf das Aufeinandertreffen im Zusammenschlussbereich, das erneut durch geringe RMS-Werte charakterisiert ist. Entsprechend dazu wird in Abbildung 4.13 b) der sprunghafte Anstieg des mittleren Kernradius und seiner Standardabweichung sichtbar.

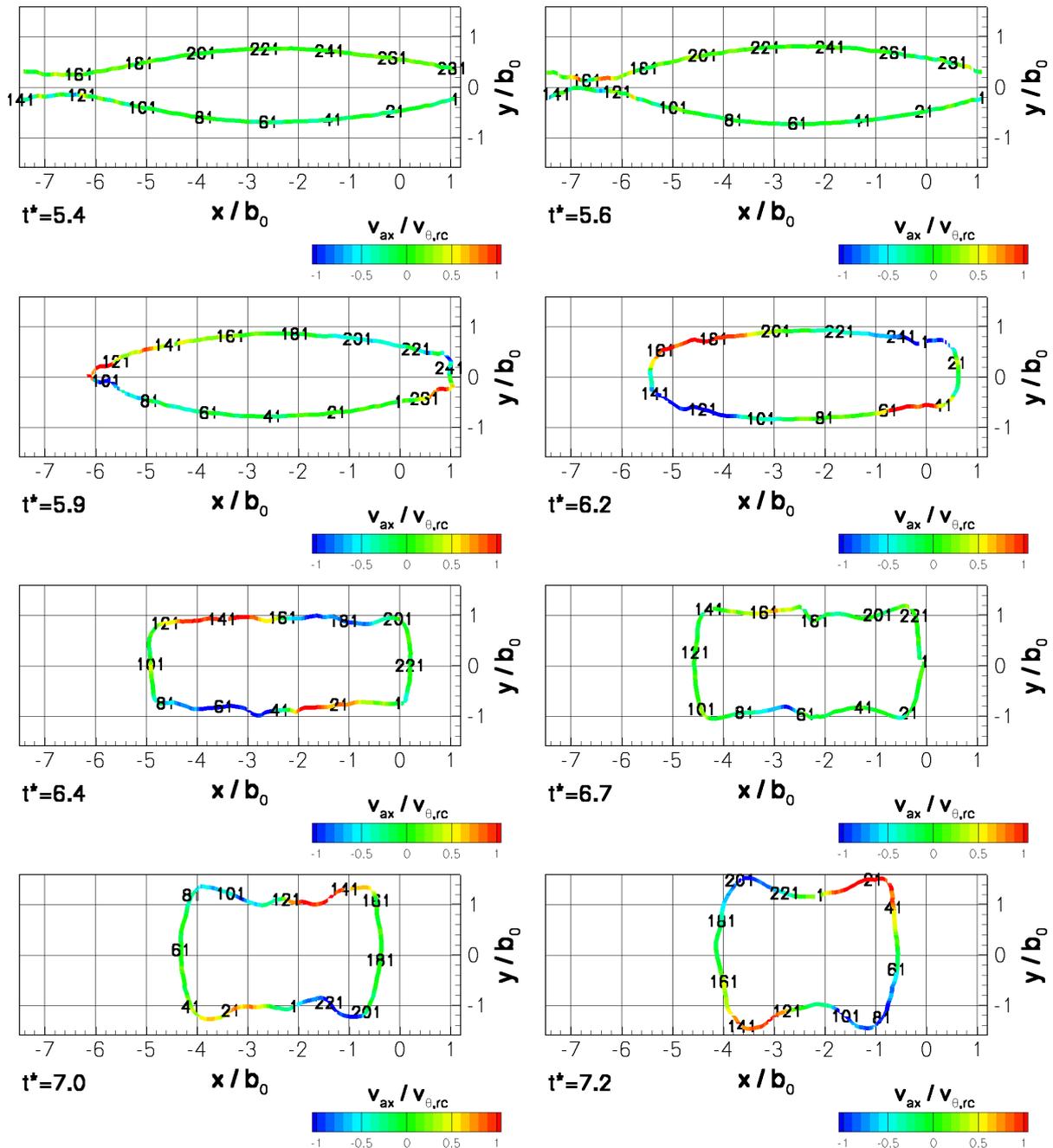


Abbildung 4.11: Axialgeschwindigkeit normiert über die pro Zeitpunkt gemittelte Tangentialgeschwindigkeit am Kernradius während und nach der Ringbildung [ $\epsilon^* = 0.05$ ,  $N^* = 0$ ].

Zur besseren Untersuchbarkeit dieser Merkmale wurde bei der gezeigten Simulation ein passiver Tracer mitgerechnet, der mit der Konzentration 1 innerhalb beider Wirbelkerne initialisiert wurde. Physikalisch gesehen kann dies ein beliebiges, sich passiv verhaltendes Mittel zur Sichtbarmachung wie z.B. Rauch sein. Für beide Wirbelröhren wurden dazu unterschiedliche Felder belegt, so dass klare Aussagen über die Herkunftsseite möglich sind. Es ist jedoch festzustellen, dass die Tracerkonzentration der Isoflächen sehr niedrig angesetzt werden muss, um

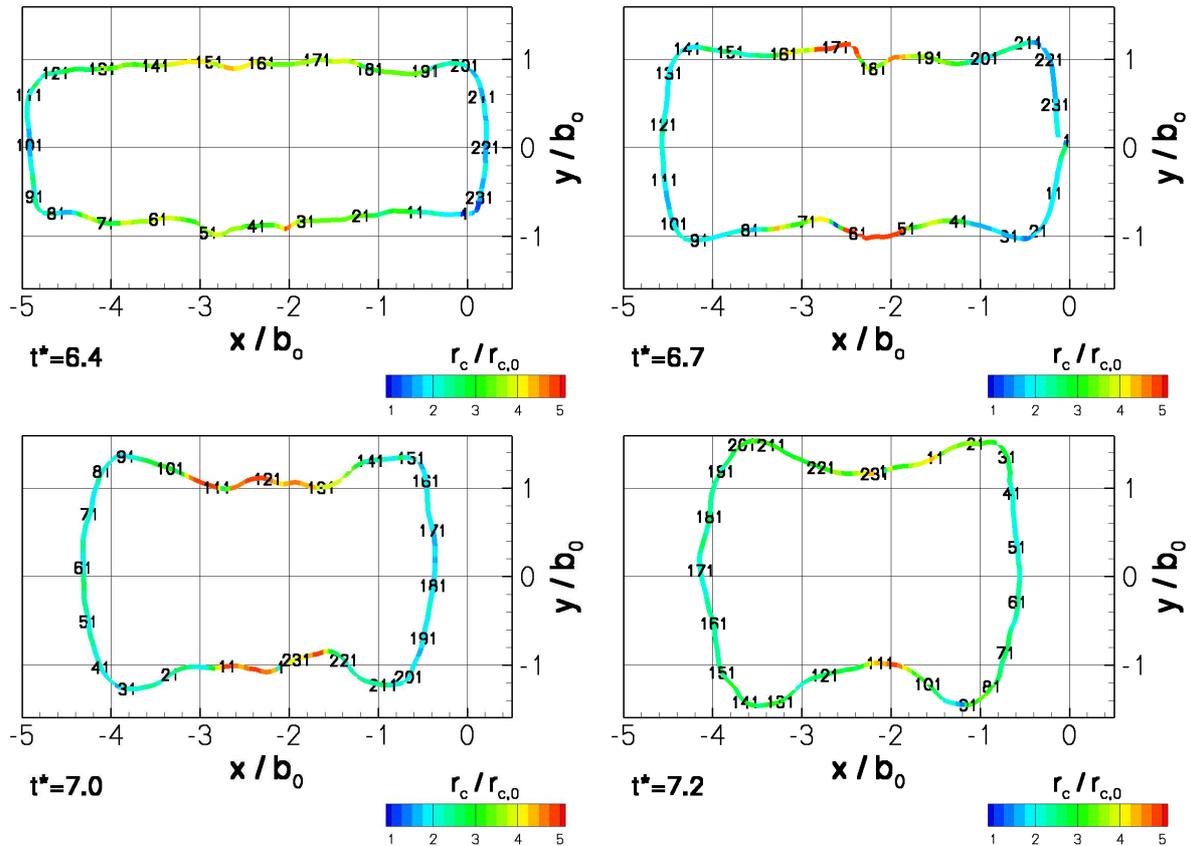


Abbildung 4.12: Entwicklung des Kernradius nach abgeschlossener Ringbildung.

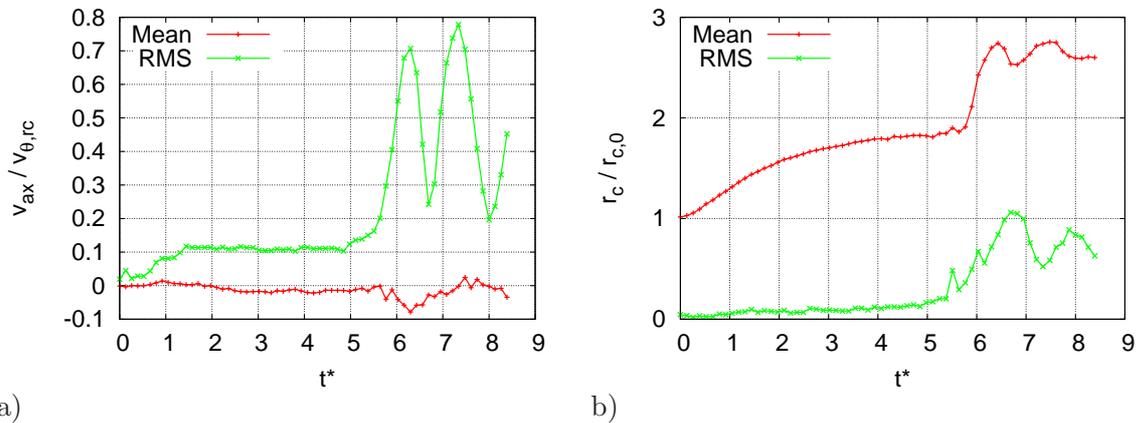


Abbildung 4.13: Zeitliche Verläufe a) des Verhältnisses Axialgeschwindigkeit zu Tangentialgeschwindigkeit inklusive Standardabweichung und b) des normierten Kernradius inklusive Standardabweichung.

überhaupt Effekte zu erkennen, die auf ein radiales Ausbrechen des Tracers und somit auf Wirbelaufplatzen schließen lassen. Abbildung 4.14 zeigt die hintere Wirbelröhre mit einer Tracerkonzentration von 0.0025, entsprechend großflächig sind im Bereich des Wirbelovals Spuren zu sehen. In schwarz ist eine für diesen Zeitpunkt repräsentative Druckisolinie dargestellt, die den Wirbelkern kennzeichnet.

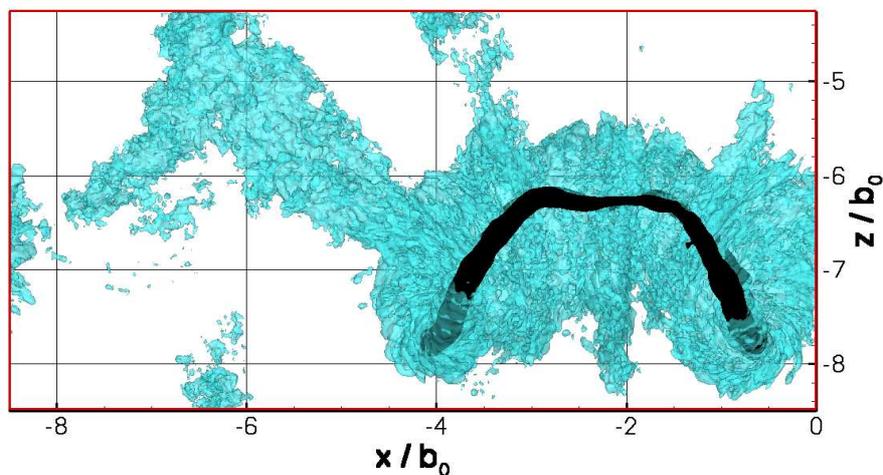
$t^* = 7.3$ 

Abbildung 4.14: Tracerkonzentration des hinteren Wirbels inklusive der Druckisolinie zur Kennzeichnung des Wirbelzentrums zum Zeitpunkt des bereits deutlich verformten Wirbelrings.

Trotz des niedrigen Levels der Isokonzentrationsflächen können alle sichtbaren Spurenbereiche bekannten Merkmalen zugeordnet werden. Die die Drucklinie unmittelbar umgebenden Tracerpartikel sind Teil des Wirbelovals, das für sich ein abgeschlossenes System darstellt und welches Teilchen aus dem Inneren nicht ohne weiteres verlassen können. An der Stelle  $x = -6 b_0$  bestehen Überreste der Ringbildung, wobei das Aufstellen der Stege charakteristisch ist, wie im Kapitel 4.2.2 beschrieben. Oberhalb des Wirbelrings hat das umgebende Wirbeloval am oberen Stagnationspunkt seine „Schwachstelle“ (siehe u.a. Holzäpfel & Gerz (1999)), wo Teilchen entfliehen können. Der unterhalb des Wirbelrings befindliche Fortsatz bei  $x = -2 b_0$  ist nicht der Außenrand einer sogenannten Wirbelstärkerippe (Holzäpfel et al., 2001), sondern es handelt sich tatsächlich um gleichmäßiges, über große Bereiche der  $(y,z)$ -Ebene erkennbares Ausbrechen an der Stelle des Aufeinandertreffens der Axialgeschwindigkeiten.

Es stellt sich nun die Frage, inwieweit die internen Axialgeschwindigkeiten zur Kernradienerweiterung beitragen, welche für den weiteren Zerfall von großer Bedeutung ist. Auch durch die Stauchung der Wirbelröhren wächst wie zuvor ausführlich beschrieben der Kernradius (siehe Kapitel 4.2.3). Ohne den Einfluss der Axialgeschwindigkeit ist das ungleiche Wachstum des Kernradius unerwartet. Zum Zeitpunkt  $t^* = 6.7$  schwanken die Kernradien entlang der Flugachse zwischen zweifachem und fünffachem anfänglichen Kernradius. Abbildung 4.13 zeigt ein zweites Aufeinandertreffen der wirbelröhreninternen Druckwellen bei  $t^* = 8$ . Die damit einhergehende Aufweitung des Kernradius und in der Folge eine lokale Reduktion der Zirkulation  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$  kann anhand der Simulationsergebnisse nachvollzogen werden, wie die Kurve des Falls  $[\epsilon^* = 0.05, N^* = 0]$  in Abbildung 4.17 zeigt.

Das berechtigt zur Annahme, dass beide Effekte, das Aufeinanderprallen von axialen Druckwellen und die gesamtheitliche Stauchung der Wirbelröhren, wirksam sind, auch wenn der jeweilige Anteil der einzelnen Effekte zur Kernradienerweiterung nicht klar getrennt werden kann. Unzweifelhaft dagegen ist der daraus resultierende Rückgang der Zirkulation  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$  (vgl. Abb. 4.9).

### 4.2.5 Teilung des Wirbelrings

Es wurde bereits erwähnt und wird in Kapitel 4.3 gezeigt, dass Wirbelschleppen bei nicht zu starker Temperaturschichtung Wirbelringe bilden, die sehr langlebig sein können. In Kapitel 4.2.2 wurde angesprochen, dass sich zu sehr späten Zeitpunkten die ehemaligen Linkingbereiche soweit annähern, dass eine weitere Berührung und damit ein Aufsplitten in zwei Wirbelringe auftreten kann. Voraussetzung ist ein relativ symmetrischer, elliptischer Wirbelring mit ausreichend hoher Exzentrizität und ausreichend großem Kernradius. Die Abbildungen 4.15 entstehen zu den Zeitpunkten  $t^* = 11.9$  und  $t^* = 12.1$  bei ungeschichteter ( $N^* = 0$ ), aber stark turbulenter Atmosphäre ( $\epsilon^* = 0.23$ ,  $L_t/b_0 = 0.66$ ) und zeigen jeweils aus verschiedenen Perspektiven, wie sich der Wirbelring in zwei kleine Ringe aufspaltet. Da die Turbulenz jedoch nicht angetrieben wird, hat die Dissipationsrate zu diesen späten Zeitpunkten bereits um etwa eine Größenordnung abgenommen.

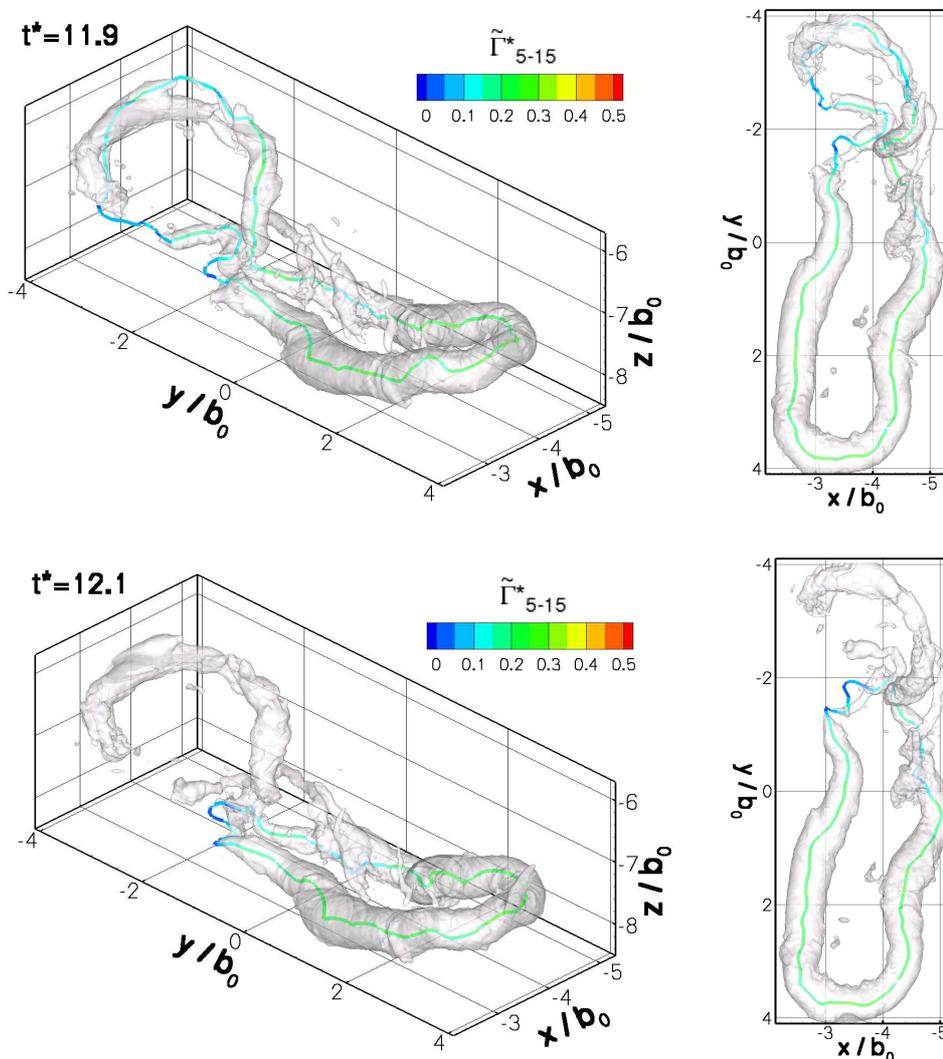


Abbildung 4.15: Zweigeteilter Wirbelring bei  $t^* \approx 12$  mit farbkodierter Restzirkulation und Isodruckflächen der LES mit  $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0, L_t/b_0 = 0.66]$ .

Neben den Zirkulationsverläufen des Wirbeldetektionsalgorithmus zeigt die Abbildung Isodruckflächen zur Visualisierung von Restelementen der Wirbelschleppe. Aufgrund der verblei-

benden schwachen Druck- bzw. Wirbelstärkegradienten wird zu noch späteren Zeitpunkten teilweise wieder nur ein einzelner Wirbelring gefunden, d.h. die Teilung als solche ist bezüglich ihrer Eindeutigkeit nicht mit der ersten Ringbildung vergleichbar. Während sich bei der früheren Ringbildung beide Wirbelröhren jeweils in Flugrichtung gesehen zurückziehen und gleichzeitig  $\omega_y$  bilden, ist nun die Struktur bereits vor der Berührung so ungleichmäßig und schwach, dass ihre Bewegung mehr durch Zufall als durch ihre gegenseitige Annäherung geprägt ist. Allerdings lässt sich die gegebene Struktur mit nahezu konstanter Stärke noch über einen längeren Zeitraum nachweisen (bis  $t^* > 14$  ( $\hat{=} t = 444$  s)). Durch Kondensstreifen sichtbar gemachte Wirbelringe zu sehr späten Stadien konnten bereits fotografiert werden, wie die Abbildungen 4.16 zeigen. Wie an einem weiteren (hier nicht abgebildeten) Foto erkennbar ist, folgen die beiden gezeigten Wirbelringfotos nahezu unmittelbar aufeinander. Daher ist die Annahme begründet, dass sich im rechten Foto die Wirbelringe in Teilringe aufgespalten haben.



Abbildung 4.16: Fotobeispiele für Wirbelringe in mittlerem und spätem Stadium (Fotos: Peter Selinger, Januar 2008).

### 4.3 Zeitliche Entwicklung des Zerfalls in Abhängigkeit der meteorologischen Bedingungen

Das wichtigste Kriterium für den Fortschritt des Wirbelschleppenzerfalls ist die Zirkulation  $\Gamma_{5-15}^*$ . Deswegen werden für die  $\epsilon$ - $N$ -Parametermatrix die resultierenden zeitlichen Verläufe von  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$  und  $\Gamma_{5-15}^*$  in Abbildung 4.17 gezeigt, wobei die höherliegende Kurve die Zirkulation  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$  in einer Fläche orthogonal zur aktuellen Wirbelrichtung betrachtet (Symbole), während die schneller abfallenden  $\Gamma_{5-15}^*$ -Kurven als Linien dargestellt sind und zur Zirkulationsauswertung Flächen der  $(y,z)$ -Ebene verwenden.

Kapitel 4.2.2 erklärt, dass zum Zeitpunkt des Auseinanderlaufens beider Zirkulationsverläufe die Ringbildung begonnen hat. Ab einer Zirkulation von weniger als 10% des Anfangswert gilt die Wirbelschlepe als nicht mehr existent, weil eine beliebige Zirkulationsbestimmung im simulierten turbulenten Geschwindigkeitsfeld ohne Wirbelschlepe ( $\epsilon^* = 0.23$ ) zu ebendiesem Wert führen würde. Außerdem werden Simulationen abgebrochen, wenn sich der Wirbelring zu stark an die periodischen  $y$ -Ränder angenähert hat, was insbesondere bei ungeschichteten Simulationen im späten Entwicklungsstadium möglich ist.

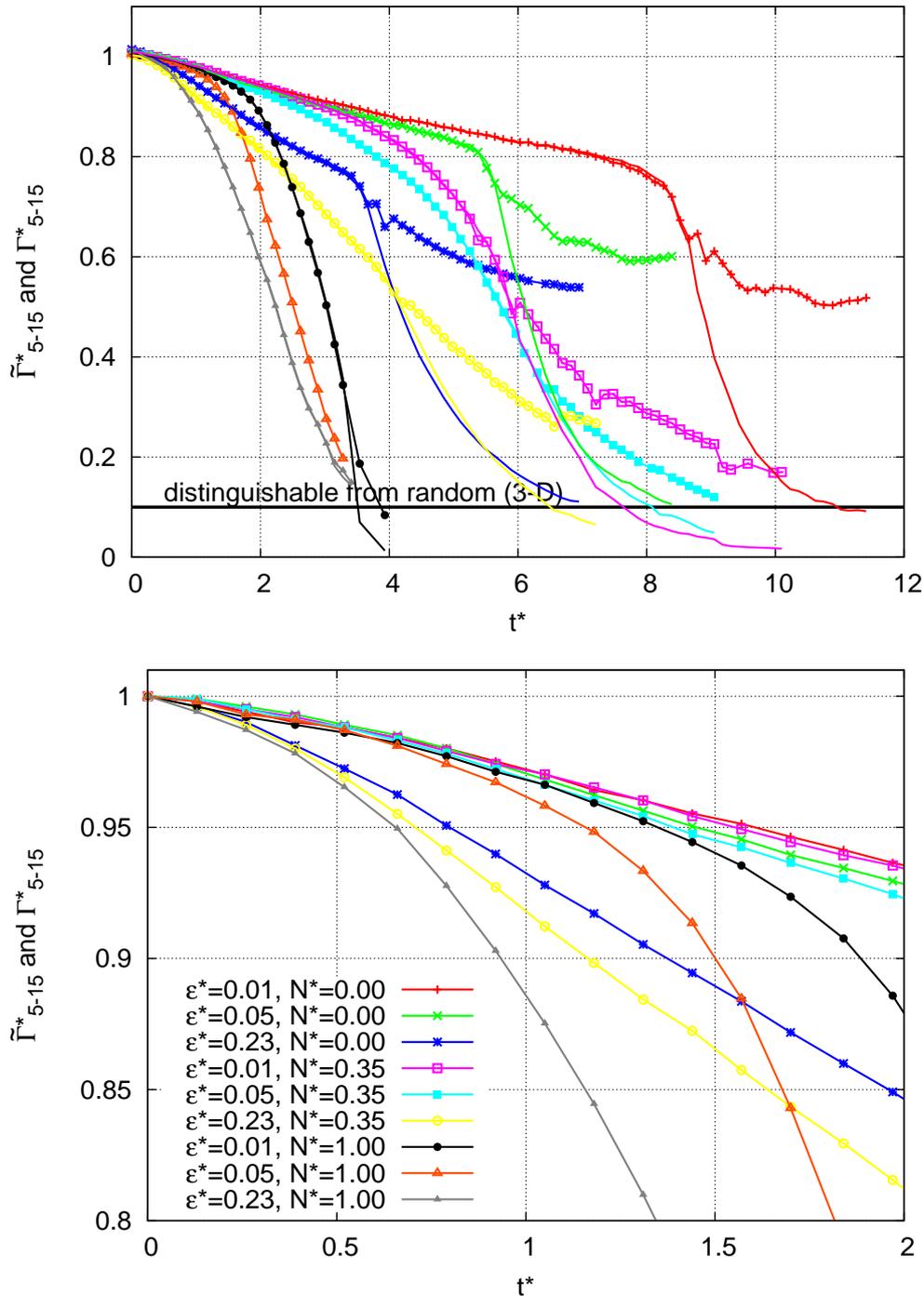


Abbildung 4.17: Verlauf der normierten Zirkulation  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$  und  $\Gamma_{5-15}^*$  über normierte Zeit  $t^*$  (oben) inklusive einer zusätzlichen detaillierteren Betrachtung (unten) aller Simulationen der  $\epsilon$ - $N$ -Parametermatrix.

Die Unregelmäßigkeiten während der Ringbildung (z.B. bei  $\epsilon^* = 0.23$  und  $N^* = 0$ ) lassen sich dadurch erklären, dass sich die Wirbelkernlinie dabei lange in Teilbereichen befindet, wo Zirkulation unmittelbar kompensiert wird. In diesem gradientenarmen Druckfeld ist das Auf-

finden einer klaren Wirbellinie nicht immer möglich; beim weiteren Abschnüren und Auflösen der „Brückenstege“ (siehe Kapitel 4.2.2) stabilisiert sich der Verlauf jedoch wieder.

Die Bestimmung der Zirkulation entlang der Wirbelkernlinie zeigt, dass die Definition eines zweiphasigen Zerfalls hier nur mehr bedingt zutrifft. Lediglich langsam zerfallende Wirbelschleppen ergeben bei ausschließlicher Betrachtung von  $\Gamma_{5-15}^*$  das typische Zweiphasenmuster, während die dreidimensionale Betrachtung einen dreiphasigen Zerfall erkennen läßt. Hierbei scheint die Folge „Diffusionsphase“ (Diffusion Phase, Diff) - „schneller Zerfall“ (Phase of Rapid Decay, RD) durch ein weiteres Element des Typs „Diffusionsphase“ erweitert werden zu müssen, welches den langsam zerfallenden Wirbelring beschreibt. Der schnelle Zerfall beginnt in der Regel, wenn sich die Bereiche mit Wirbelstärke der gegenüberliegenden Wirbelröhre zu überlappen beginnen ( $b \approx 20\text{m}$ ) was in der Folge meist zur Ringbildung führt. Je nach atmosphärischen Bedingungen kann das Zeitintervall von beginnender Beeinflussung bis zum vollständig ausgebildeten Ringstadium  $1...2 t_0$  betragen (Proctor & Switzer, 2000). In manchen Fällen ist die mehrphasige Zerfallsstruktur überhaupt nicht mehr erkennbar, wie das Beispiel der Parameterkombination [ $\epsilon^* = 0.23$ ,  $N^* = 0.35$ ] demonstriert und wie es in manchen Fällen bei Messkampagnen registriert wurde. Hier entwickelte sich die ursprünglich symmetrische Sinusform durch die Beeinflussung der Temperaturschichtung versetzt, d.h. Amplitudenmaxima befanden sich nicht an der gleichen Position bezüglich der x-Achse. Dieser Verlauf ist unter realen Bedingungen ebenfalls wahrscheinlich. Daher passt die dadurch erzielte Zirkulationsentwicklung mit einer deutlichen Verzögerung des Annäherungsprozesses gut zu Messdaten, wie sie in Kapitel 5.1.4 vorgestellt werden.

Auch bei der Analyse des Einflusses der elliptischen Instabilität spielt dieser unerwartete Verlauf eine wichtige Rolle. Tabelle 4.3 zeigt die Ausprägung der kleinskaligen Instabilität anhand der visuell erhaltenen subjektiven Kriterien (elliptische Wellenlänge ist: „+“ gut erkennbar, „o“ erkennbar, „-“ nicht erkennbar). Ergänzt wird die Tabelle durch das Verhältnis

$$a = \frac{a_{RD}}{a_{Dif}} = \frac{\left. \frac{d\Gamma_{5-15}^*}{dt^*} \right|_{RD}}{\left. \frac{d\Gamma_{5-15}^*}{dt^*} \right|_{Dif}} \quad (4.4)$$

welche als die Zerfallsbeschleunigung während der Ringbildung interpretiert werden kann, und welche aus Abbildung 4.17 hervorgeht. Da  $a$  die Zerfallsbeschleunigung vor dem Linking bestimmt, gilt  $\Gamma_{5-15}^* \approx \tilde{\Gamma}_{5-15}^*$ . Bei  $N^* = 1$  wurde  $a$  nicht ermittelt, weil der schnelle Zerfall der durch die hohen Temperaturgradienten erzeugten baroklinen Wirbelstärke zu verdanken ist, während kleinskalige Instabilitäten und Turbulenzeffekte nur von sekundärer Bedeutung sind (Holzäpfel et al., 2001).

Qualität / $a$		$N^*$		
		0	0.35	1
$\epsilon^*$	0.01	+ / 8.0	o / 3.3	-
	0.05	o / 4.3	- / (5.3)	-
	0.23	o / 2.0	- / (1.0)	-

Tabelle 4.3: Zusammenhang zwischen der Sichtbarkeit elliptischer Instabilitäten und der Zerfallsbeschleunigung  $a$ .

Anhand dieser Zusammenstellung wird deutlich, dass bei klar erkennbaren elliptischen Wellenlängen die Zerfallsrate am stärksten zunimmt, wie es von Laporte & Leweke (2002) prognostiziert wurde. Aufgrund der gleichmäßigen Zunahme der Zerfallsgeschwindigkeit ohne eindeutige Trennung von Diffusions- und schneller Zerfallsphase sind die Fälle [ $\epsilon^* = 0.05$ ,  $N^* = 0.35$ ] und [ $\epsilon^* = 0.23$ ,  $N^* = 0.35$ ] bereits den schichtungsdominierten Berechnungen zuzuordnen, daher sind ihre Zerfallsbeschleunigungen in Klammern gesetzt.

In der unteren vergrößerten Ansicht von Abbildung 4.17 wurden die Zirkulationswerte zur besseren Vergleichbarkeit mit ihrem Startwert normiert, damit alle Kurven exakt bei  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^* = 1$  beginnen. Hier wird offensichtlich, dass bei starker Turbulenz von Beginn an der Zerfall in der Diffusionsphase modifiziert wird, weil alle Kurven mit  $\epsilon^* = 0.23$  schnelleren Zerfall zeigen. Erst allmählich kommt der Einfluss der Temperaturschichtung zum Tragen, aber sobald die Absinktiefen ausreichen, um maßgeblich barokline Wirbelstärke zu produzieren, verringert sich die Zirkulation signifikant. Es lässt sich ablesen, dass das untere Detektionslimit von  $\Gamma_{5-15}^* = 0.1$  bei  $N^* = 1$  zum Zeitpunkt  $3 < t^* < 4$ , bei  $N^* = 0.35$  zu  $8 < t^* < 10$  und für  $N^* = 0$  überhaupt nicht während der Simulationszeit erreicht wird.

Daraus lassen sich interessante Schlussfolgerungen ziehen. Grundsätzlich gilt, dass eine der beiden Komponenten Turbulenz und Temperaturschichtung stark sein muss, damit der Zerfall verglichen mit ungestörter Entwicklung drastisch beschleunigt wird. Jedoch unterscheiden sich die Zerfallsmuster grundlegend: Hohe Turbulenz forciert die Crow-Instabilität, was zu einem symmetrischen, gleichmäßigen Zerfall führt, der auf der Interaktion der Wirbelröhren beruht. Hohe orthogonal aufeinanderstehende Dichte- und Druckgradienten hingegen erzeugen sekundäre Wirbelstärke (oder Sekundärstrukturen, siehe Holzäpfel et al. (2003)), die jeweils die einzelne Wirbelröhre angreifen. Deswegen verformen sie sich unregelmäßig, demzufolge ist die für die Crow-Instabilität charakteristische Sinusform bei dominierender Schichtung kaum ausgeprägt, und nur vereinzelt bilden sich Wirbelringe. Allerdings sind die Sekundärstrukturen sehr effektiv in der Vernichtung von Zirkulation, wie sich anhand der LES mit starker Temperaturschichtung gezeigt hat, siehe Abbildung 4.18. Erkennbar sind für den Fall [ $\epsilon^* = 0.01$ ,  $N^* = 1$ ] zum frühen Zeitpunkt  $t^* = 3.1$  die bereits deutlich reduzierte Zirkulation und die die Wirbelröhren umgebende, komponentenweise dargestellte Wirbelstärke, die jeweils durch Isoflächen mit  $\omega = 3/s$  abgebildet sind (braun:  $\omega_x$ , lila:  $\omega_y$  und blau  $\omega_z$ ). Die außerhalb des Kernbereichs der Wirbelröhren befindliche sekundäre Wirbelstärke ist einerseits sehr unregelmäßig, andererseits ist sie bereits so stark, dass sie den Zirkulationszerfall deutlich beschleunigt.

Im Gegensatz dazu sind die durch dominierende Turbulenz erzeugten Wirbelringe ausgesprochen robust und langlebig. Im Ringstadium entspricht die Zerfallsrate derjenigen, die zu Beginn die Diffusionsphase steuert, oder erscheint sogar noch geringer. Letzteres wird verursacht durch Bereiche in Flugrichtung mit großem Kernradius ( $r_c \gg 5\text{ m}$ ), deren Zirkulation mit der verwendeten Definition unterschätzt wird. Da in bisherigen Untersuchungen bevorzugt diese Abschnitte berücksichtigt wurden, wird die Differenz zu den Ergebnissen dieser Arbeit besonders auffällig.

### Integrale Längen

Erweitert wird die Analyse durch die Betrachtung der Zirkulationsverläufe bei variierenden turbulenten integralen Längenmaßen aus Tabelle 4.1, siehe Abbildung 4.19a). Als Referenzfall dient hierbei die Simulation der ungeschichteten, aber stark turbulenten Atmosphäre mit [ $\epsilon^* = 0.23$ ,  $N^* = 0$ ,  $L_t/b_0 = 0.41$ ], deren Längenskala durch eine Vergrößerung des Rechenge-

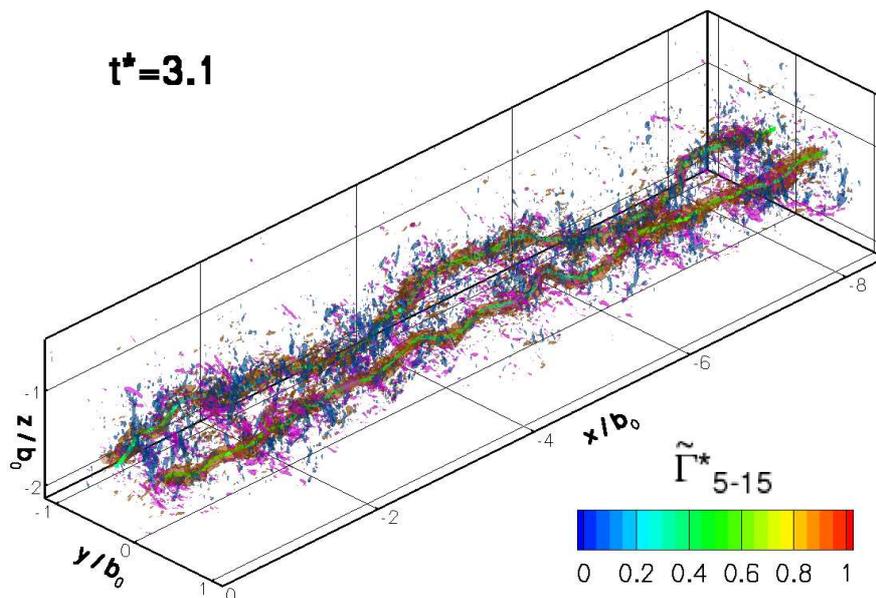
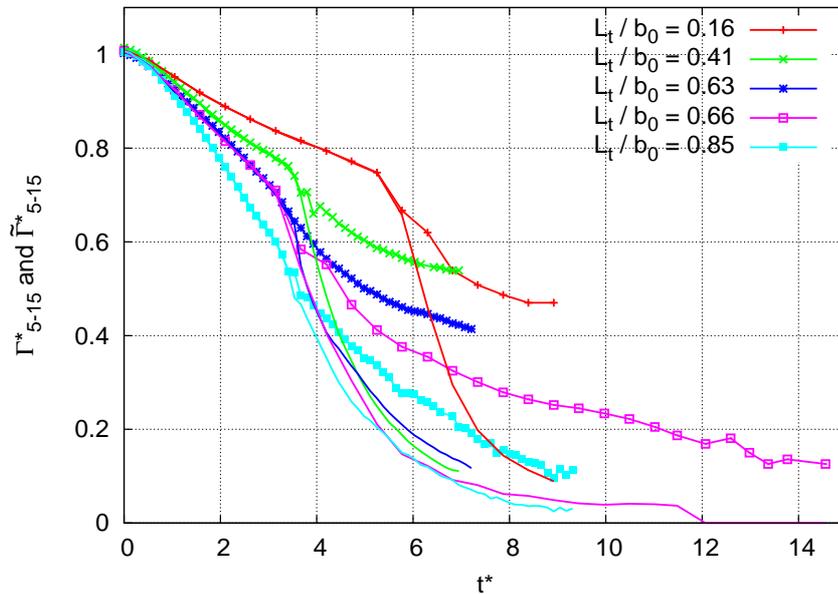


Abbildung 4.18: Primäre- und sekundär Wirbelstärke der LES mit  $[\epsilon^* = 0.01, N^* = 1]$  komponentenweise (braun:  $\omega_x$ , lila:  $\omega_y$  und blau:  $\omega_z$ ).

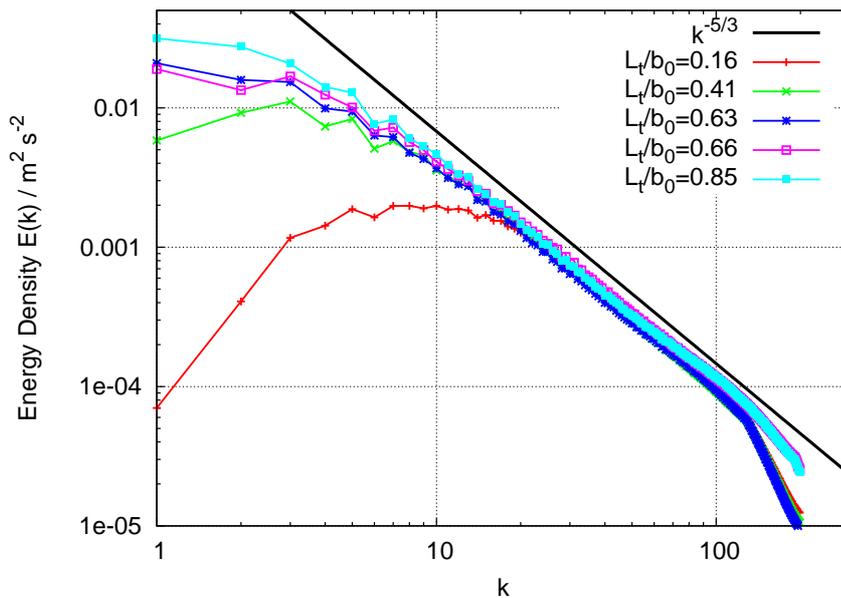
biets oder kleinere Werte für  $k_p$  variiert wurde. Grundsätzlich bewirken große Wirbelelemente die Verformung und Unregelmäßigkeit des Wirbelpaars, während kleinskalige Elemente die unmittelbare turbulente Diffusion vorantreiben (Han et al., 2000). In den abgebildeten Vorläufen existieren bei hohen integralen Längen zusätzliche großskalige Strukturen, die untere Grenze ist hingegen durch Gitterabstand bzw. Schließungsmodell vorgegeben und für alle Simulationen konstant. In Abb. 4.19 b) werden zusätzlich die Spektren in Abhängigkeit der Wellenzahl  $k = L_{xyz}/\lambda$  der erzeugten Turbulenzfelder dargestellt, die zeigen, dass eine Vergrößerung von  $L_t$  die kleinskalige Energieverteilung nicht beeinflusst (abgesehen vom Einfluss der Formänderung des Rechengebiets bei  $k > 128$ , siehe 4.1), im Großskaligen allerdings erkennbar mehr Energie beinhaltet.

Die Zirkulationsverläufe bei verschiedenem  $L_t$  variieren beachtlich, wobei insbesondere das energieärmste Szenario einen verzögerten Zerfall verursacht, der bezogen auf den Zeitpunkt des Zusammenschlusses mit fast zwei Zeiteinheiten angegeben werden kann. Hingegen unterscheiden sich alle anderen Vorläufe bevorzugt durch die Zerfallsrate in der Diffusionsphase, während das Aufeinandertreffen der Wirbelröhren jeweils bei etwa  $t^* = 3.7$  stattfindet. Anscheinend ist es relevant für den diffusiven Zirkulationsabbau, welche mittlere Größe die turbulenten Wirbel des Hintergrundfeldes haben, obwohl ihre Größe die gegenseitige Annäherung nicht beschleunigt. Daraus kann abgeleitet werden, dass  $L_t/b_0 = 0.85$  in diesem Sinne nicht ausreichend groß ist.

Das Spektrum der Simulation mit  $L_t/b_0 = 0.85$  besitzt verhältnismäßig viele energiereiche und große turbulente Wirbelelemente, während diese Elemente in Simulationen mit kleinerem  $L_t/b_0$  weniger Energie beinhalten. Diese fehlende Energie liegt im Bezug auf die Skalen des Wirbelpaars anscheinend im ausreichend *kleinskaligen* Bereich, welcher für den Zirkulationszerfall in der Diffusionsphase verantwortlich ist. Die im Gegenzug aufgestellte These, dass großskalige energiereiche Turbulenzelemente die unsymmetrische Verformung der Wirbelschleppes fördern, bestätigt sich in den Abbildungen 4.20, in welchen zum Zeitpunkt  $t^* = 6.8$  Unterschiede von Geometrie und Zirkulation der Fälle  $L_t/b_0 = 0.85$  und  $L_t/b_0 = 0.41$  dargestellt sind.



a)



b)

Abbildung 4.19: a) Zirkulationsverläufe und b) spektrale Energiedichtevertelung aufgetragen über die dimensionslose Wellenzahl  $k$  für  $\epsilon^* = 0.23$  und  $N^* = 0$  mit variierenden integralen Längen.

In Abb. 4.20 a) befindet sich die Mittelachse bezüglich der Flugrichtung fast am linken Rand, während sie in Abb. 4.20 b) unverändert zentral liegt. Obwohl die ehemals gleiche Grundstruktur noch erkennbar ist, hat die großskalige Turbulenz die Wirbelschlepe komplex verformt, und damit deutlich unregelmäßigere Krümmungen hervorgerufen. Hingegen ist die Absinktiefte des symmetrischen, rechts abgebildeten Falls größer, weil der Parallelzustand der Wirbelröh-

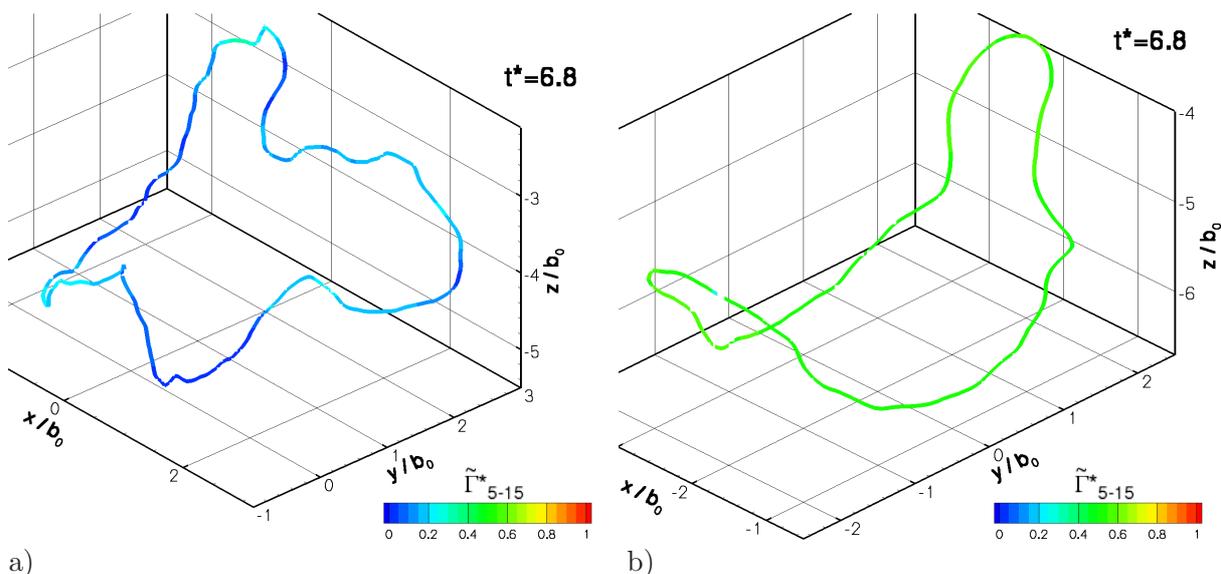


Abbildung 4.20: Zustand des Wirbelrings für a)  $L_t/b_0 = 0.85$  und b)  $L_t/b_0 = 0.41$  zu  $t^* = 6.8$ .

ren zeitlich länger ausgeprägt war und somit mehr Vertikalgeschwindigkeit induziert werden konnte.

### 4.3.1 Absinkgeschwindigkeit und Absinktiefe

Die aufgerollten Wirbel induzieren sich gegenseitig eine Absinkgeschwindigkeit von  $w_0 = b_0/t_0$ , welche während der Diffusionsphase im Mittel nahezu konstant bleibt, solange die Auftriebskraft in stabil geschichteter Umgebung klein ist. Diese konstante Absinkgeschwindigkeit bleibt auch erhalten, obwohl sich der gegenseitige Abstand der Wirbelröhren ändert. Garten et al. (2001) fassen zusammen, dass sich bei schwacher Schichtung der Wirbelabstand reduziert, unabhängig davon, ob dies aus zwei- oder dreidimensionale Betrachtungsweisen ermittelt wurde. Allerdings wird weiter beschrieben, dass theoretischen Überlegungen und 2-D Untersuchungen zufolge daraus eine beschleunigte Absinkgeschwindigkeit resultieren müsste, welche jedoch bei 3-D Untersuchungen nie bestätigt wurde. Daher wird davon ausgegangen, dass die Crow-Instabilität das Verhalten des Wirbelpaars dominiert und die Geschwindigkeitszunahme aus der Reduzierung des Wirbelabstands unterdrückt.

Holzäpfel & Gerz (1999) und Holzäpfel et al. (2001) fanden heraus, dass die erhöhte induzierte Sinkgeschwindigkeit durch die sich einstellende Auftriebskraft kompensiert wird. Die in zwei-dimensionalen Simulationen gefundene starke Beschleunigung bei großen Wirbelaltern tritt so nicht auf, weil dann Wirbelstärke bzw. Zirkulation durch barokline Wirbelstärke der Wirbel verstärkt zerfällt.

Die in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse bestätigen diese Aussagen; zumeist wird der mittlere Wirbelabstand vor der einsetzenden Ringbildung bei vorhandener Temperaturschichtung etwas niedriger als  $b_0$ . Nichtsdestotrotz variiert der Abstand lokal entsprechend der Sinusfunktion der Crow-Instabilität, was primär die am nächsten beieinander liegenden (untersten) Wirbelbereiche antreibt, und in der Konsequenz zur beschleunigten Zunahme der maximalen vertikalen Ausdehnung führen kann. Insgesamt nimmt die Absinkgeschwindigkeit der Wirbel

schleppe allerdings nicht zu, siehe Abbildung 4.21. Hierin werden für alle der  $\epsilon$ - $N$ -Matrix bzw.  $L_t$ -Matrix zugehörigen Simulationen minimale, durchschnittliche und maximale Absinktiefen präsentiert.

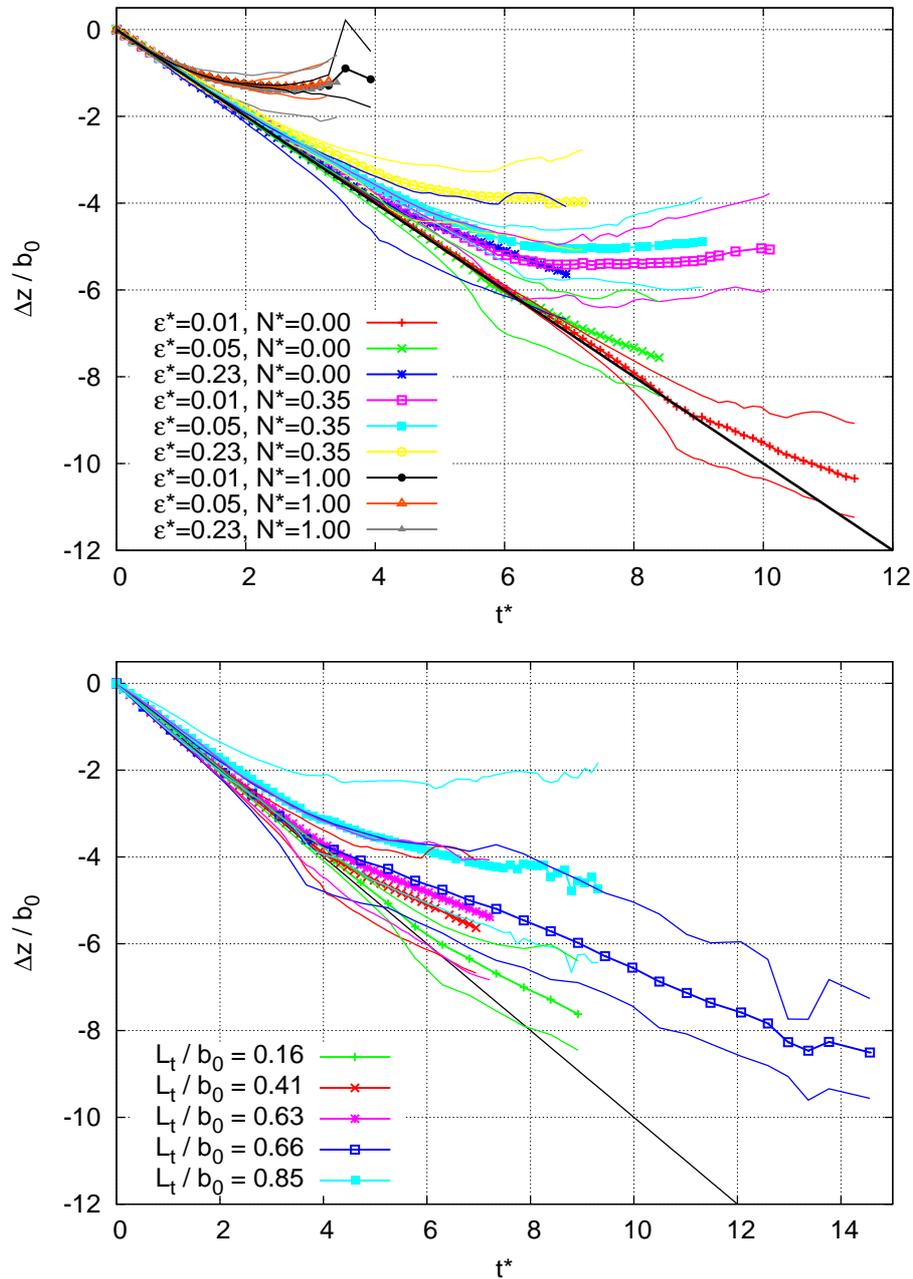


Abbildung 4.21: Verlauf der Absinktiefe  $\Delta z/b_0$  über  $t^*$ . Dargestellt ist jeweils die minimale, mittlere und maximale Absinktiefe der LES der  $\epsilon$ - $N$ -Matrix (oben) und mit variierenden integralen Längen (unten), siehe Tabelle 4.1.

Es zeigen sich im Frühstadium keine Abweichungen des Mittelwerts von der erwarteten Geraden, und die Maximal- und Minimalwertkurven über- bzw. unterschreiten die Mittelwertskurve ausschließlich entsprechend des Wachstums der Crow-Instabilität.

Dies ändert sich mit beginnender Ringbildung signifikant. Vor allem die zuvor der mittleren Absinkbewegung vorausseilenden am nächsten beieinanderliegenden Wirbelbereiche haben sich zusammengeschlossen und somit keinen nahe liegenden Partner zur Ausbildung der gegenseitig induzierten Vertikalgeschwindigkeit. Die noch in Flugrichtung orientierten Wirbelbereiche befinden sich nach wie vor deutlich höher als der Linkingbereich, daher zieht sich der Wirbelring in vertikaler Richtung etwas zusammen. Wie jedoch bereits in Kapitel 4.2.3 beschrieben, wird der Wirbelring im Weiteren in Flugrichtung gestaucht und gleichzeitig in Spannweitenrichtung vergrößert, d.h. der für die Geschwindigkeitsinduktion relevante Abstand der noch in Flugrichtung befindlichen Wirbelröhren nimmt zu, während der Abstand der parallel zur Spannweite verlaufenden Wirbelelemente abnimmt (vgl. Abb. 4.9).

Diese qualitative Aussage lässt sich auch analytisch formulieren, sofern von einem Wirbelring in einer Ebene ausgegangen wird. Für den Kreisring des viskosen Lamb-Oseen Wirbels mit Kreisradius  $R$  leitete Saffman (1992) die selbstinduzierte mittlere Absinkgeschwindigkeit  $w_{Ring,0}$  her

$$w_{Ring,0} = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left( \ln \frac{8R}{\sqrt{4\nu t}} - 0.558 \right) \quad (4.5)$$

wobei  $\sqrt{4\nu t} \approx r_c$  gesetzt werden kann (siehe Anhang B). Messungen und numerische Simulationen von Dhanak & Bernadinis (1981) ergeben für elliptische Ringformen, dass die mittlere Absinkgeschwindigkeit von der Exzentrizität nur geringfügig beeinflusst ist und somit hervorragend mit Gl. 4.5 berechnet werden kann.

Größere Beachtung gilt jedoch den zeitlichen Veränderungen von Zirkulation, Kreisradius und Kernradius, die die Sinkgeschwindigkeit nach obiger Formel bestimmen. Im Experiment beobachtet Maxworthy (1972), dass die Translationsgeschwindigkeit des Wirbelrings insbesondere bei großen Wirbelaltern abnimmt. Es wird erkannt, dass dabei einerseits Fluid aus der Umgebung aufgenommen wird und sich andererseits Fluidteilchen aus dem Wirbelring ablösen und somit einen Nachlaufwirbel erzeugen. Für große Zeiten wird angenommen, dass  $w \sim t^{-1}$ , was in Übereinstimmung mit anderen Experimenten von Sullivan et al. (2008) steht. Ein weiterer Effekt zur Verlangsamung von Wirbelringen wird relevant, wenn die Viskosität vernachlässigbar gering ist. Kiknadze & Mamaladze (2002) untersuchen den Einfluss von Kelvinwellen am reibungsfreien Wirbelring, und stellen dabei fest, dass die Absinkgeschwindigkeit bei zunehmender Amplitude insbesondere der langwelligen Moden abnimmt. Ab einer kritischen Amplitudengröße erreicht diese den Wert Null und kehrt sich bei weiterer Erhöhung der Amplitude sogar um.

Aufgrund der von Beginn an dreidimensionalen Struktur der Wirbelschleppenkernelinie lassen sich obige Aussagen nur zum Teil auf die hier zu erwartende Absinkgeschwindigkeit übertragen. Es erscheint jedoch möglich und sinnvoll, anhand konservativer Annahmen die maximal zu erwartende Absinkgeschwindigkeit  $w_{Ring,0}$  abzuschätzen. Da sich die geometrischen Parameter unmittelbar nach erfolgter Ringbildung stark ähneln, wird mithilfe der zu diesem Zeitpunkt maximalen Zirkulation von  $\Gamma_{5-15}^* \approx 0.75$  die für alle Simulationen gültige maximale Absinkgeschwindigkeit aus Gl. 4.5 zu  $w_{Ring,0} = 0.86 \text{ m/s}$  ( $\hat{=} 0.57 w_0$ ) berechnet, wobei folgende weitere Parameter eingesetzt wurden:  $R = (1 b_0 + 5 b_0)/2$  und  $r_c = 2 r_{c,0}$ .

Unter Verwendung der u.a. von Dziedzic & Leutheuser (1996) und Sullivan et al. (2008) gemachten Annahme, dass der im Wirbelring enthaltene Impuls  $I = \rho\pi\Gamma R^2$  konstant bleibt, und

der weiteren Annahme, dass sich der Term  $\ln(8R/r_c)$  nur vernachlässigbar ändert, ergibt sich folgende Proportionalität

$$w_{Ring} \sim \Gamma^{\frac{3}{2}} \quad (4.6)$$

Somit kann die maximale Absinkgeschwindigkeit  $w_{Ring}$  des Wirbelrings während seiner weiteren Entwicklung in Abhängigkeit der Zirkulation direkt aus den Startwerten  $w_{Ring,0}$  und  $\Gamma_{Ring,0}$  abgeschätzt werden. Die in diesem Abschnitt erzielten größten Absinktiefen sind in Tabelle 4.4 in Abhängigkeit der Temperaturschichtung zusammengefaßt, siehe auch Abb. 5.17.

$N^*$	0	0.35	1
$-\Delta z_{max}/b_0$	$\sim t_{max}^*$	$\sim 6$	$\sim 2$

Tabelle 4.4: Größte erzielte Absinktiefen in Abhängigkeit der Temperaturschichtung.

### 4.3.2 Krümmungsradien

In Kapitel 3.4 wurde bereits beschrieben, dass Krümmungsradien mit  $r_\kappa > 6b_0$  zusammengefaßt als gerade Linie betrachtet werden. Das bedeutet, dass zumeist erst kurz vor der Ringbildung Krümmungen mit  $r_\kappa < 6b_0$  entstehen, welche mit dem gezeigten Algorithmus bestimmt werden können. Zuvor entstehende, größere Krümmungsradien ergeben sich in dieser Arbeit aufgrund der Crow-Instabilität, daher können die entsprechenden Krümmungshäufigkeiten analytisch berechnet werden (siehe Anhang E).

Außerdem wurde angesprochen, dass durch die Annahme des zweidimensionalen Suchbereichs Fehler entstehen, die insbesondere bei starker Temperaturschichtung die Qualität der Ergebnisse beeinflussen können. Abbildung 4.22 zeigt die erzielten Krümmungsradien und Abbildung 4.23 die zugehörige mittlere Abweichung, welche den mittleren Abstand pro Punkt vom angenommenen Kreisradius repräsentiert.

Der mittlere Fehler bei ungeschichteter Atmosphäre übertrifft  $0.04b_0$  ( $\hat{=} 2\text{ m}$ ) nicht, was in Anbetracht der erzielten mittleren Krümmungsradien von  $r_\kappa > 1b_0$  zu prozentualen Fehlern von maximal 4% führt. Selbst die maximale mittlere Abweichung im Fall [ $e^* = 0.01$ ,  $N^* = 1$ ] beträgt lediglich  $0.07b_0$ , was bezogen auf den zugehörigen mittleren Krümmungsradius von  $\approx 2/3b_0$  nur einem Fehler von 10% entspricht.

Abgesehen vom Zeitpunkt der Ringbildung ähneln sich die Verläufe jedoch in bemerkenswerter Weise: Unabhängig von Turbulenz und Schichtung ergeben sich kurz nach dem Linking (sofern es stattfindet) mittlere Krümmungen in der Größenordnung von  $\sim 1b_0$  bei gleichzeitiger minimaler Standardabweichung.

Diese Mittelungen können natürlich nur einen Anhaltspunkt dafür geben, wie sich die Krümmungen bei verschiedenen Bedingungen entwickeln, da sie verschiedene Wirbelbereiche darstellen und da andererseits für angenommene gerade Wirbelelemente ein maximaler Krümmungsradius von  $6b_0$  willkürlich festgelegt wurde. Nichtsdestotrotz ist die Aussage bzgl. der Dominanz von  $r_\kappa \cong 1b_0$  berechtigt, weil etwa in dem in Abbildung 4.24 gezeigten Beispiel nur wenige Maximalradien den Mittelwert verfälschen. Zur Veranschaulichung der Krümmung der Wirbelkernlinie zeigen sich anhand ihrer Nummerierung die zugehörigen Krümmungswerte und deren Häufigkeit.

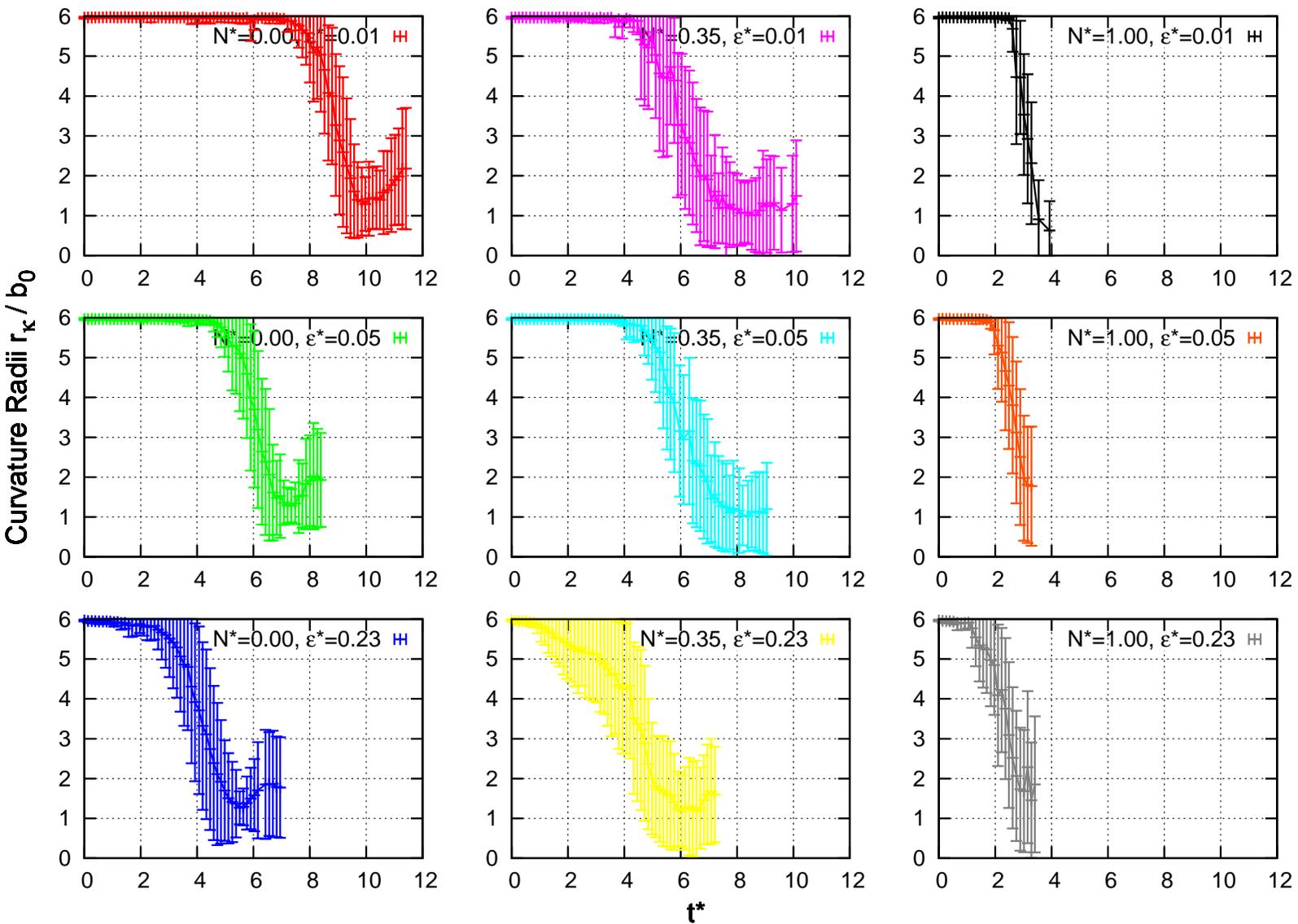


Abbildung 4.22: Über die gesamte Wirbelkernlinie gemittelte Krümmungsradien inklusive Standardabweichung.

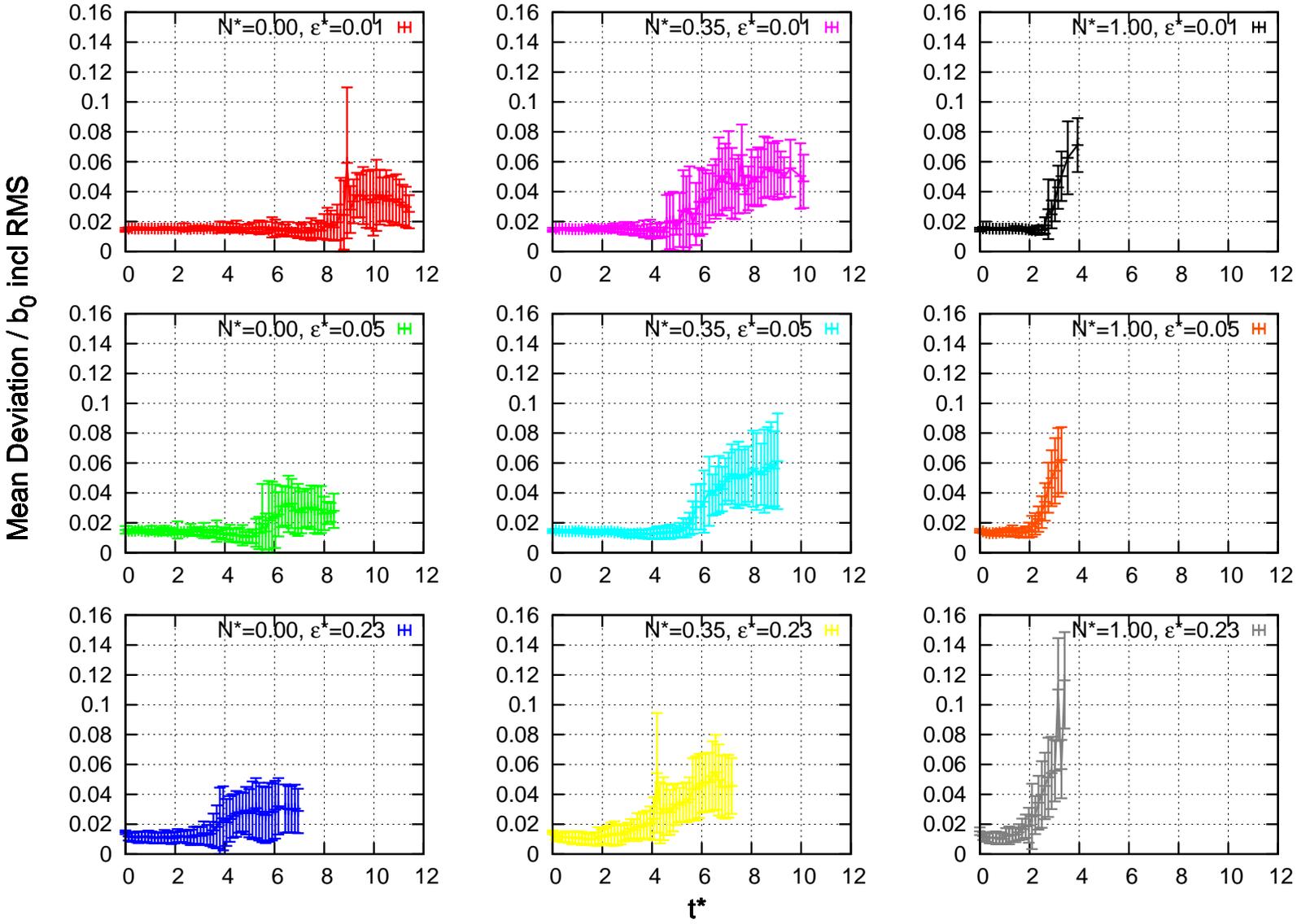


Abbildung 4.23: Mittlere Abweichung der erzielten Krümmungsraden von der Wirbelkernlinie inklusive Standardabweichung.

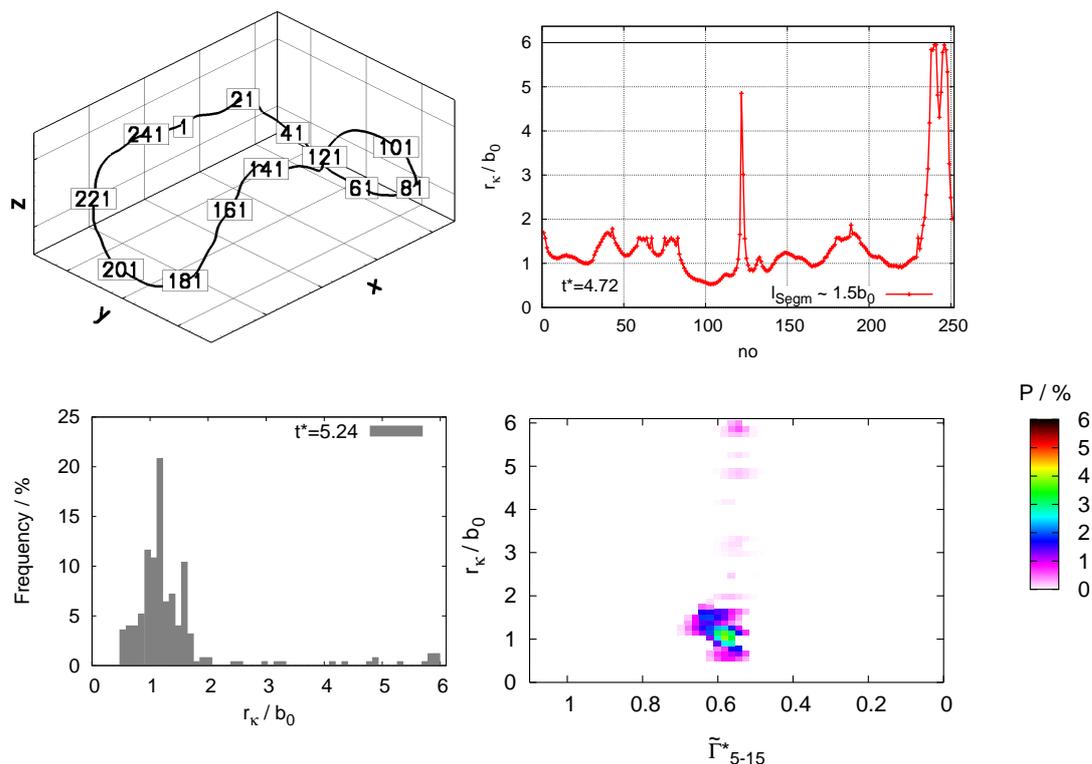


Abbildung 4.24: Krümmungsergebnisse für  $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0]$ . Von links oben zeilenweise nach rechts unten: Wirbelring zu  $t^* = 5.2$  inklusive Position der Wirbelkernlinie, zugehörige Krümmungsradien, resultierende Häufigkeitsverteilung, kombinierte Häufigkeitsverteilung von Krümmung und Zirkulation.

Hierin erkennt man zu einem späten Zeitpunkt ( $t^* = 5.2$ ) in stark turbulenter Atmosphäre die aktuelle Geometrie des Wirbelrings inklusive der Positionsnummer, die jeweiligen Krümmungsradien, welche beginnend an dieser Positionsnummer berechnet wurden, die Häufigkeitsverteilung in  $0.1 b_0$ -Intervallen und zuletzt die kombinierte Häufigkeitsverteilung von Krümmungs- und Zirkulationswerten. In Letzterer variiert  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$  kaum, allerdings lässt sich eine schwache Tendenz erkennen, dass bei hohen Krümmungsradien ( $r_\kappa/b_0 \approx 6$ ) bereits etwas mehr Zirkulation verloren gegangen ist als für  $r_\kappa \approx 1b_0$  (vgl. Kapitel 4.2.3).

Es zeigt sich eine relativ kompakte Verteilung von Krümmungswerten entlang der Wirbelkernlinie, wie aus dem zweiten Bild in Abb 4.24 ersichtlich ist. Im Bereich der Positionsnummer 250 ergäbe eine geradlinige Näherung die beste Lösung, ansonsten dominieren wie aus der Mittelwertsbetrachtung (Abb. 4.22) und der Einzelbetrachtung (Abb. 4.24) Werte von  $r_\kappa \approx 1b_0$ . Der einzelne große Krümmungsradius bei Positionsnummer 120 ergibt sich aus einem zentral im Krümmungssegment befindlichen Wendepunkt.

Abbildung 4.25 zeigt die charakteristischen Zeitpunkte  $t^* = [3.7, 3.8, 5.0, 6.0]$  für den gleichen Fall. Sie kennzeichnen die Situationen unmittelbar vor der Ringbildung, während der Ringbildung, bei voll entwickeltem Wirbelring und bei bereits deutlich verformtem Ring.

Auch hier werden die radikalen Änderungen beim Zusammenschließen zu Wirbelringen deutlich. Innerhalb kürzester Zeit (von  $t^* = 3.7 - 3.8$ ) entstehen deutlich erkennbar Krümmungsradien mit  $r_\kappa < 1b_0$ . Im vollständig entwickelten Wirbelring dominiert  $r_\kappa \cong 1b_0$ , während

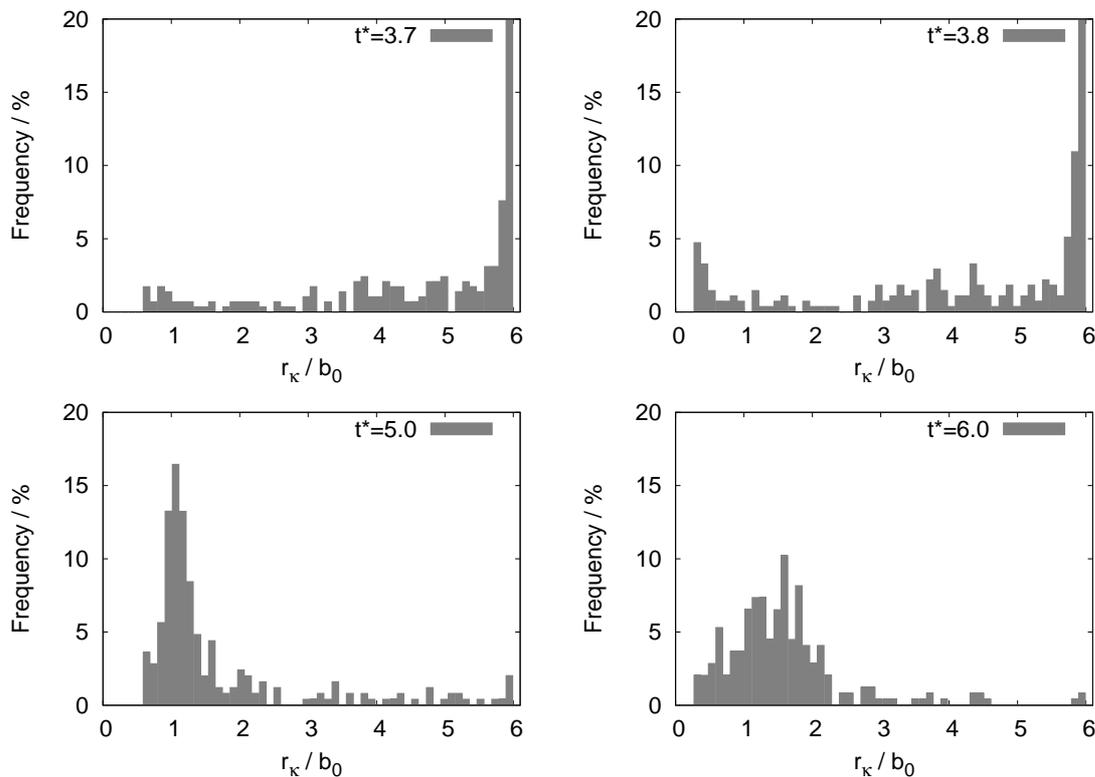


Abbildung 4.25: Häufigkeitsverteilungen der dominierenden Krümmungsradien bei  $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0, L_t/b_0 = 0.41]$  zu den Zeitpunkten  $t^* = [3.7, 3.8, 5.0, 6.0]$ .

später durch die Zirkulationsverlagerung hervorgerufene gleich lange Ausdehnung in x- und y-Richtung Radien von  $1 b_0 < r_\kappa < 2 b_0$  vorherrschen. Es hat sich herausgestellt, dass sowohl große turbulente Längenskalen als auch starke Temperaturschichtung dafür verantwortlich sein können, dass die Wirbelschlepe insbesondere in der Diffusionsphase stärker deformiert wird. Dies zeigen die folgenden Abbildungsserien 4.26 und 4.27, wobei bei ersterer die turbulente integrale Länge auf  $L_t/b_0 = 0.85$  verändert wurde, während letztere stattdessen stabile Temperaturschichtung von  $N^* = 1$  aufweist. Die jeweiligen Zeitpunkte bleiben hingegen gleich, so sind wiederum die Häufigkeitsverteilungen der Krümmungen deutlich vor dem Linking, kurz davor, währenddessen und danach abgebildet.

Im letzten Fall verteilen sich die durch sekundäre Wirbelstärke erzeugten Krümmungen schon früh gleichmäßig über das gesamte abgebildete Spektrum. Bei weiterer gegenseitiger Annäherung des Wirbelpaars gewinnen kleine Krümmungswerte immer größere Bedeutung. Ab Beginn der Ringbildung ( $t^* = 2.9$ ) spielen große Krümmungsradien keine Rolle mehr, was sich bis zum endgültigen Zerfall nicht mehr ändert. (Schon zu  $t^* = 3.3$  war die mittlere Zirkulation bereits  $\bar{\Gamma}_{5-15}^* < 20\%$ , also gerade noch detektierbar.) Die Rückläufigkeit kleinster Radien zugunsten mittlerer Radien, wie sie im vorigen Fall beobachtet wurde, tritt hier nicht auf.

Um eine Übersicht über alle Fälle zu bekommen, werden nun Häufigkeitsverteilungen verschiedener Krümmungsradienintervallen betrachtet werden. Abbildung 4.28 zeigt die Wahrscheinlichkeiten aller Fälle der  $\epsilon$ - $N$ -Parametermatrix, wobei der Krümmungsradius  $r_\kappa < 1.5 b_0$ ,  $1.5 b_0 < r_\kappa < 5.5 b_0$  oder  $r_\kappa > 5.5 b_0$  beträgt.

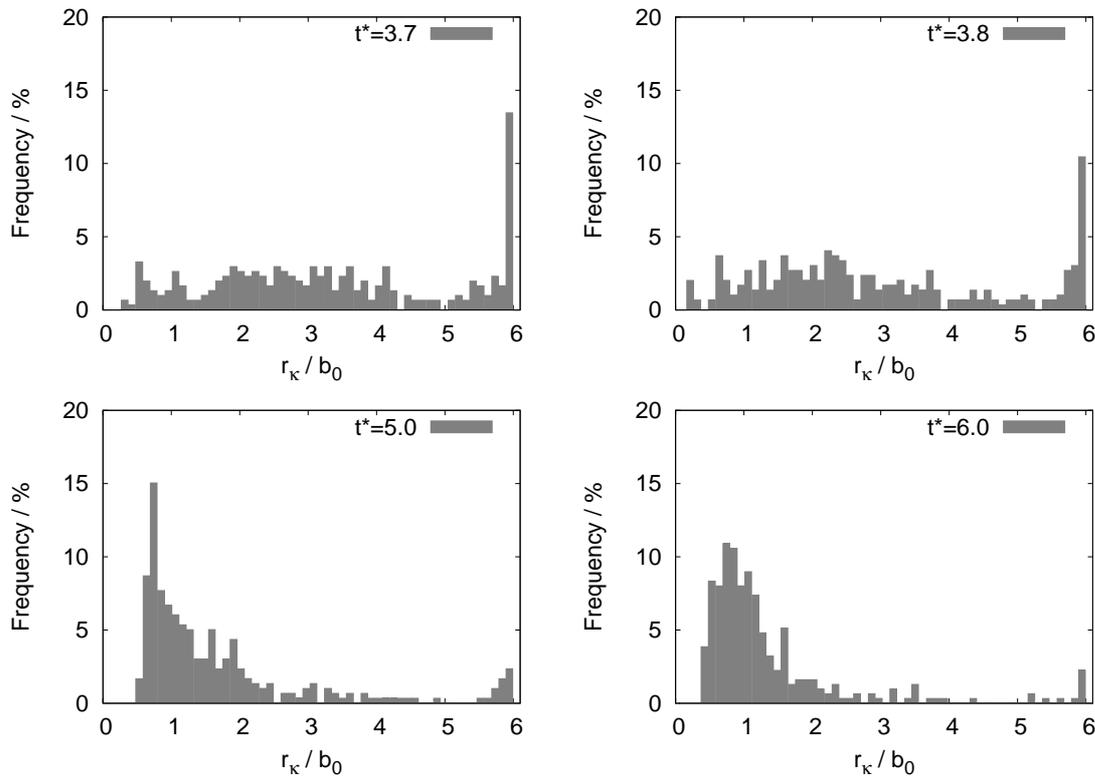


Abbildung 4.26: Häufigkeitsverteilungen der dominierenden Krümmungsradien bei [ $\epsilon^* = 0.23$ ,  $N^* = 0$ ,  $L_t/b_0 = 0.85$ ] zu den Zeitpunkten  $t^* = [3.7, 3.8, 5.0, 6.0]$ .

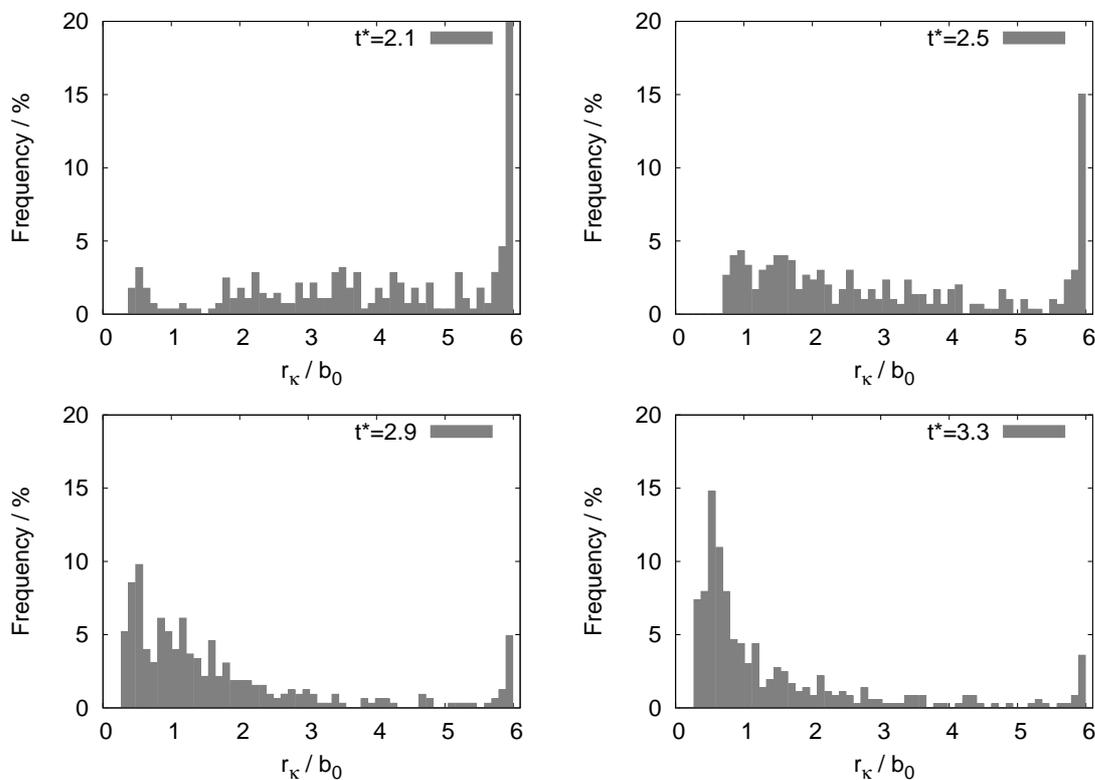


Abbildung 4.27: Häufigkeitsverteilungen der dominierenden Krümmungsradien bei [ $\epsilon^* = 0.23$ ,  $N^* = 1$ ,  $L_t/b_0 = 0.41$ ] zu den Zeitpunkten  $t^* = [2.1, 2.5, 2.9, 3.3]$ .

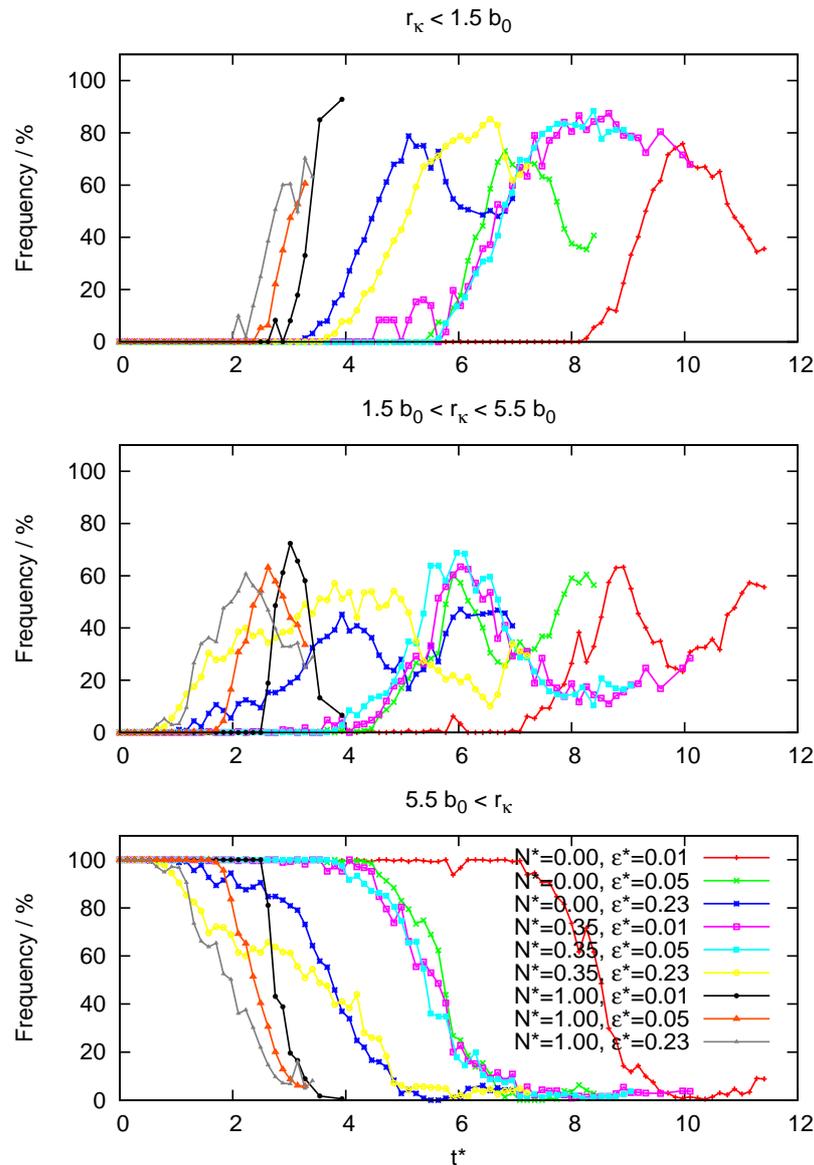


Abbildung 4.28: Häufigkeiten aller Simulationen der  $\epsilon$ - $N$ -Parametermatrix für Krümmungsradien von  $r_\kappa < 1.5 b_0$ ,  $1.5 b_0 < r_\kappa < 5.5 b_0$  oder  $r_\kappa > 5.5 b_0$ .

Bei ungeschichteter Atmosphäre zeigt sich nach dem obligatorischen Zuwachs kleiner Radien durch die Ringbildung jedoch wieder eine Abnahme zugunsten mittlerer Radien. Daraus lässt sich schließen, dass der Linkingprozess die Krümmung kurzzeitig verstärkt, nachhaltigere Verformung dagegen eher von der Temperaturschichtung ausgeht. Dies zeigt sich in Abb. 4.22 zum Beispiel im Fall  $[\epsilon^* = 0.05, N^* = 1]$ , bei welchem sich kein Ring entwickelt hat. Trotzdem reduzieren sich die gemittelten Krümmungsradien, und bleiben danach auf tiefem Level bestehen.

An der Häufigkeitsverteilung von  $r_\kappa > 5.5 b_0$  wird offensichtlich, dass mit den gewählten Parametern ab Beginn des Zusammenschließens zu Wirbelringen die vorhandenen Krümmungen vollständig detektiert werden können. Trotz der größeren Fehlerwerte bei geschichteten Fällen ergeben sich ab dem Linking kleinste Radien in der Größenordnung eines Wirbelabstands.

Dies ist im Fall [ $\epsilon^* = 0.05$ ,  $N^* = 1$ ] etwas weniger ausgeprägt, weil hier kein Zusammenschluss stattgefunden hat, stattdessen war die Zirkulation bereits zuvor soweit dissipiert, dass sie sich nicht mehr nachweisen ließ. Abbildung 4.28 macht außerdem deutlich, dass die erzielten Krümmungen rein phänomenologisch bedingt sind, während die meteorologischen Bedingungen nur indirekten Einfluss haben. Dies impliziert, dass alle Krümmungsradien über die Zirkulation aufgetragen werden können, siehe Abbildung 4.29

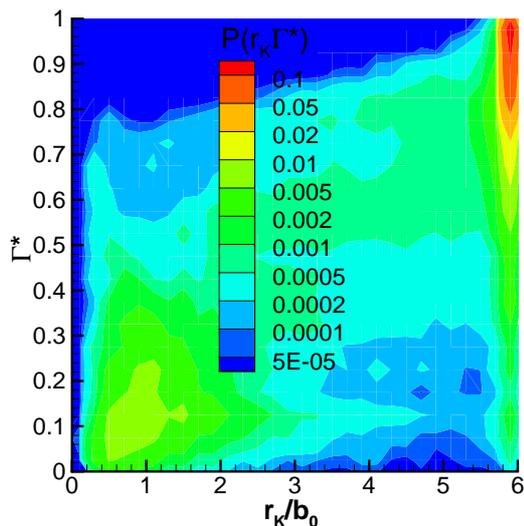


Abbildung 4.29: Häufigkeit des Krümmungsradius in Abhängigkeit der Zirkulation für alle Fälle der  $\epsilon$ - $N$ -Parametermatrix.

Durch die Methodik des Krümmungsalgorithmus, bei vorhandenen Wendepunkten innerhalb des Suchintervalls maximale Krümmungsradien anzunehmen, sind bei kleiner Zirkulation Werte von  $r_k \approx 6 b_0$  noch unverhältnismäßig häufig. Unter Vernachlässigung derselben zeigt sich hingegen, dass die Wirbelschlepe bei geringer Zirkulation immer gleichzeitig stark gekrümmt ist, woraus potentielle Wirbelschleppeneinflüge sehr kurz und damit ungefährlich werden.

### 4.3.3 Inklinations-, Azimuth- und Kippwinkel

Dieses Kapitel beschreibt die zeitlichen Verläufe der Lagewinkel der Wirbelschleppensegmente. Bei Inklinations- und Azimuthwinkel handelt es sich um die vertikale und horizontale Auslenkung der aktuellen Wirbelkernlinie bezüglich der Flugrichtung, während der Kippwinkel den Höhenunterschied gegenüberliegender Wirbelbereiche bezogen auf ihren lateralen Abstand repräsentiert.

Sobald Inklinations- und Azimuthwinkel wachsen, reduziert sich das Gefahrenpotential für achsenparallel nachfolgende Flugzeuge, da dann nur noch kurze Einwirkzeiten zu erwarten sind (siehe Kapitel 2.4). Daher wurden für diese Winkel Verbundwahrscheinlichkeitsverteilungen erzeugt, welche die Häufigkeit des gleichzeitigen Auftretens eines bestimmten Winkels mit einer bestimmten Zirkulation darstellen ( $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$ ). In diesen Darstellungen sind alle Zeitschritte mit Intervallen von 4 s ( $= 0.13 t_0$ ) berücksichtigt. Damit ist es möglich, anhand der aus dem zeitlichen Verlauf erwarteten Zirkulation die Streuung der möglichen Richtungen herauszulesen und durch Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen darzustellen. In Abbildung 4.30 sind jeweils

links die Häufigkeitsverteilungen der Inklinationwinkel  $\gamma$  und jeweils rechts entsprechend die Verteilungen des Azimuthwinkels  $\Psi$  dargestellt.

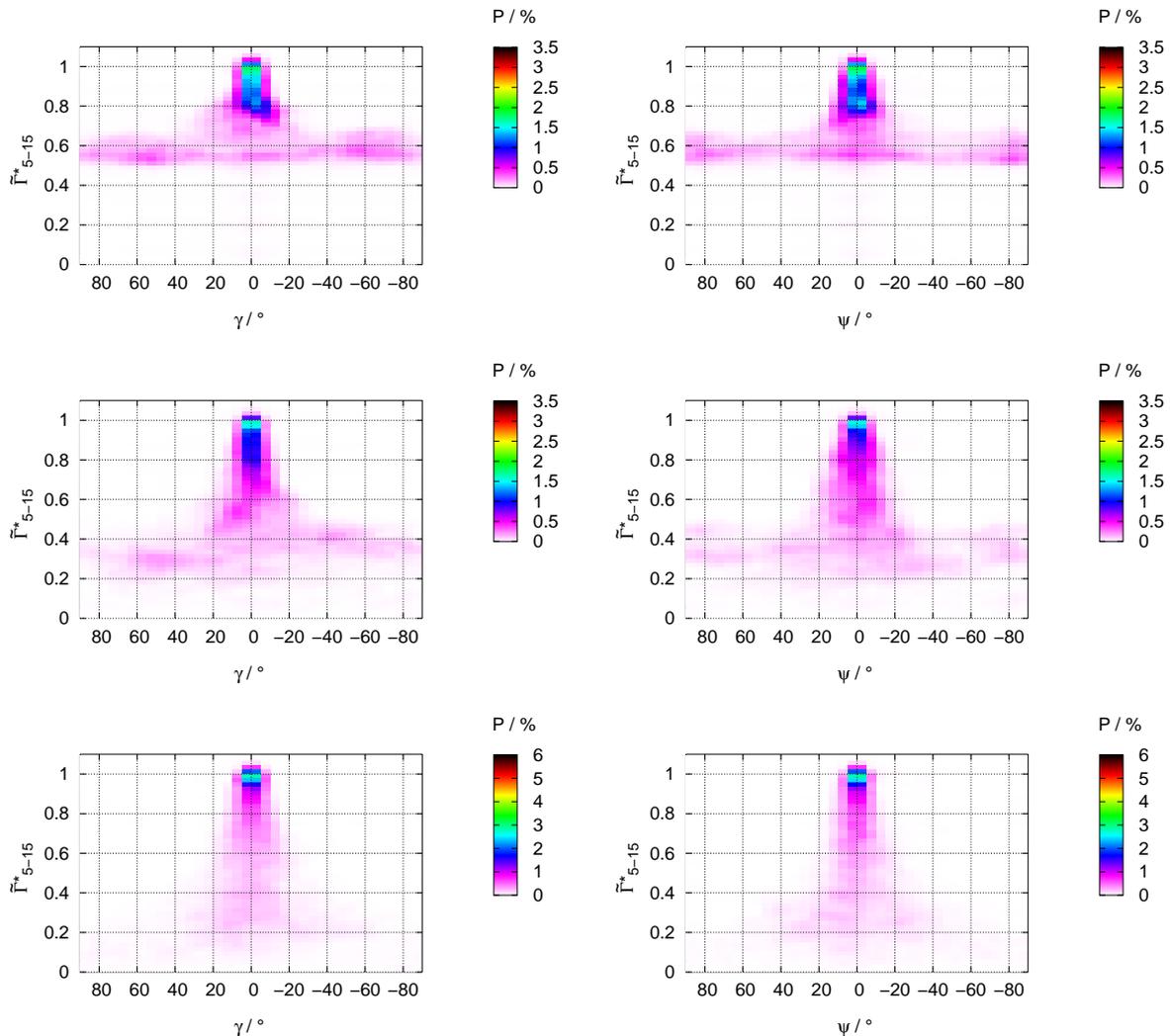


Abbildung 4.30: Häufigkeitsverteilungen der Lagewinkel in Abhängigkeit der Zirkulation  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$ . Dargestellt sind zeilenweise von links oben nach rechts unten:  $\gamma[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0]$ ,  $\Psi[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0]$ ,  $\gamma[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0.35]$ ,  $\Psi[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0.35]$ ,  $\gamma[\epsilon^* = 0.23, N^* = 1]$  und  $\Psi[\epsilon^* = 0.23, N^* = 1]$ .

Bei der Auswahl der Abbildungen wurde insbesondere auf einen gleichmäßigen zeitlichen Zirkulationsabfall geachtet (siehe auch Abb. 4.17), um die zunehmende Verbreiterung des Winkelspektrums einem konstanten Zeitverlauf zuordenbar zu machen. Dieses Ziel wurde bei starker Turbulenz am besten erreicht, deswegen werden von oben nach unten folgende Parameterkombinationen gezeigt:  $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0]$  (oben),  $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0.35]$  (Mitte) und  $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 1]$  (unten).

Offenbar ist die Verteilung beider Winkel bei hoher Zirkulation unabhängig von der Temperaturschichtung und kleiner als  $\pm 20^\circ$ . Ab einer für jede Simulation charakteristischen Zirkulation ergibt sich eine Verteilung aller Winkel über das volle Spektrum. Dieser Zeitpunkt ist gleichbedeutend mit der erfolgten Ringbildung, das heißt von da an orientieren sich Teile des

Wirbelrings gleichmäßig in alle drei Raumrichtungen. Somit reduziert sich das absolute Gefährdungspotential nach der Ringbildung deutlich, da ein Auftreffen auf gefährliche, über größere räumliche Ausdehnung gleichgerichtete Wirbelbereiche deutlich unwahrscheinlicher wird.

Im Gegensatz hierzu ist die Bedeutung des Kippwinkel  $\varphi$  geringer für nachfolgende Flugzeuge. Jedoch ist sein Verhalten sehr aufschlussreich als Maß für die Komplexität der geometrischen Strukturen. Deswegen werden in Abbildung 4.31 für die Simulationen mit  $[e^* = 0.23, N^* = 0]$  und variierenden turbulenten Längenskalen die Häufigkeiten aufgetragen, dass  $|\varphi| < 5^\circ$ ,  $5^\circ < |\varphi| < 10^\circ$ ,  $10^\circ < |\varphi| < 15^\circ$  und  $15^\circ < |\varphi| < 30^\circ$  ist.

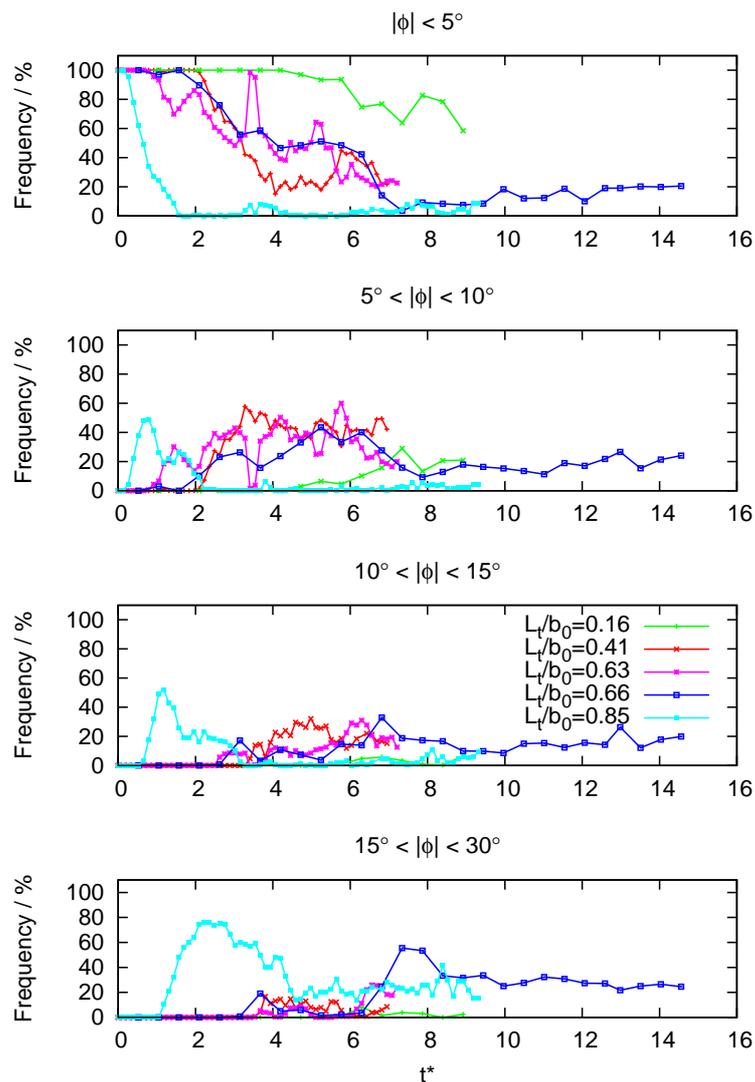


Abbildung 4.31: Häufigkeiten der LES mit variierenden integralen Längen für  $|\varphi| < 5^\circ$ ,  $5^\circ < |\varphi| < 10^\circ$ ,  $10^\circ < |\varphi| < 15^\circ$  und  $15^\circ < |\varphi| < 30^\circ$ .

Da sich die Simulation mit den kleinsten turbulenten Wirbeln sehr symmetrisch entwickelt, ist der Kippwinkel zumeist nahe dem Wert Null. Im Gegensatz dazu zeigt die LES mit den größten energiereichen turbulenten Wirbeln ( $L_t/b_0 = 0.85$ ) bereits sehr früh eine deutliche Abweichung vom Symmetriezustand, was bereits in Abb. 4.20 gezeigt wurde. Zu beachten ist, dass auch der nicht dargestellte Wertebereich von  $\varphi > 30^\circ$  zu späteren Zeitpunkten beacht-

liche Anteile erhält. Allerdings kann für diese großen Kippwinkel nicht mehr zuverlässig von gegenüberliegenden und zueinander gehörenden Wirbelbereichen gesprochen werden, vielmehr erscheint das Auffinden eines solchen Gegenstücks zufällig, und wurde daher nicht explizit berücksichtigt.

## 4.4 Statisches Rollmoment

Von entscheidender Bedeutung für Wirbelbegegnungen ist das Rollmoment, welches nachfolgende Flugzeuge aufgrund der zerfallenden Wirbelschlepe des vorhergehenden Flugzeugs erfahren. Insbesondere im Landeanflug bei kurzen Abständen hintereinander fliegender Flugzeuge auf ähnlichen Flugbahnen und geringem Abstand zum Boden sind präzise Daten über Rollmomente, die ein nachfolgendes Flugzeug zu erwarten hat, von großer Bedeutung für die Gewährung ausreichender Sicherheit.

Grundlage der Berechnungen ist, dass durch die Wirbelschlepe verursachte Geschwindigkeiten (insbesondere die Vertikalkomponente  $w$ ) verschiedene effektive Anstellwinkel erzeugen, die die prinzipiell symmetrische Auftriebsverteilung stören. Pro Abstand zur Flugzeugachse werden der Einfachheit halber die Geschwindigkeitskomponenten direkt verwendet; es findet also keine Mittelung über die Flügeltiefe statt. Wie in der Flugmechanik üblich werden die erhaltenen Rollmomente normiert in Beiwertschreibweise ausgegeben.

### 4.4.1 Zugrundeliegende Gleichungen

Mit Hilfe der Definition des Auftriebsbeiwerts  $c_a(y)$  gilt für die Auftriebskraft  $F_a(y)$  z.B. nach Holzäpfel et al. (2000), Winkelmanns & Capart (2004) oder Breitsamter (2007):

$$F_a(y) = q c(y) c_a(y) \quad (4.7)$$

wobei  $c(y)$  die Flügeltiefe und  $q = \frac{\rho}{2} U^2$  den Staudruck bezeichnen. Damit ergibt sich für das Rollmoment  $L = F_a(y)y$

$$L = \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\rho}{2} U^2 c(y) c_a(y) y dy \quad (4.8)$$

Bei annähernd symmetrischen Flügelprofilen ist der Auftriebsbeiwert  $c_a$  direkt proportional zum effektiven Anstellwinkel  $\alpha_{\text{eff}}$

$$c_a(y) = c_{a,\alpha} \alpha_{\text{eff}} \quad (4.9)$$

Unsymmetrische Flügelprofile mit relevanten Abständen zwischen Profilsehne und Profilmittellinie würden einen Zusatzterm  $c_{a,0}$  erfordern. Der Koeffizient  $c_{a,\alpha}$  wird entweder experimentell oder aus der Potentialtheorie zu  $2\pi$  bestimmt. Erst im kritischen Ablösebereich von  $\alpha_{\text{eff}} > 10^\circ..15^\circ$  kann das lineare Verhältnis von Auftriebsbeiwert  $c_a(y)$  zu effektivem Anstellwinkel  $\alpha_{\text{eff}}$  nicht mehr gewährleistet werden.

Um die in der Flugmechanik gebräuchliche Beiwertschreibweise zu erhalten, wird das Rollmoment durch die Faktoren Staudruck  $q$ , Flügelfläche  $S$  und halbe Spannweite  $B/2$  geteilt<sup>1</sup>.

$$C_l = \frac{L}{qS B/2} = \frac{4\pi}{SB} \int_{-B/2}^{B/2} c(y) \alpha_{\text{eff}}(y) y dy \quad (4.10)$$

Die elliptische Flügeltiefenverteilung, die (abgesehen von verdrehten Anstellwinkelkonfigurationen, siehe Kundu & Cohen (2004)) Voraussetzung für die widerstandstechnisch günstige elliptische Auftriebsverteilung ist, wird mit

$$c(y) = k \sqrt{1 - \left(\frac{y}{B/2}\right)^2} \quad (4.11)$$

angegeben. Der Faktor  $k$  bezeichnet die halbe zentrale Flügelprofilltiefe oder anders ausgedrückt die kurze Halbachse der Ellipse und lässt sich über die Ellipsenfläche  $S$  berechnen

$$k = \frac{S}{\pi B/2} \quad (4.12)$$

Wenn man zusätzlich davon ausgeht, dass der mittlere geometrische Anstellwinkel und der Downwash der Flügel wegen ihrer Unabhängigkeit bezüglich  $y$  keinen Einfluss auf das Rollmoment haben, also nur das äußere Geschwindigkeitsfeld die Anströmrichtung entscheidend beeinflusst, erhält man mit  $\tan \alpha_{\text{eff}}(y) = w/(u + U)$

$$C_l = \frac{8}{B^2} \int_{-B/2}^{B/2} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{B/2}\right)^2} \arctan \frac{w(y)}{u(y) + U} y dy \quad (4.13)$$

Neben der Spannweite wird also auch die Fluggeschwindigkeit des nachfolgenden Flugzeugs benötigt, welche im Folgenden mit  $U = 70 \text{ m/s}$  angenommen wird (Landeanflug).

#### 4.4.2 Numerische Umsetzung und Vergleich mit anderen Modellen

Da das Integral auf diskrete Geschwindigkeitsfelder angewandt wird, wird zur numerischen Berechnung die Sehnentrapezformel angewandt, welche mit  $C_l = f(y)$  als Integrand,  $\Delta$  als Gitterabstand und  $2N = B/\Delta$  ( $N \in \mathbb{N}$ ) als Anzahl der Stützstellen über die komplette Spannweite folgendermaßen formuliert ist

$$C_l = \Delta \left( \frac{1}{2} f(-B/2) + \frac{1}{2} f(B/2) + \sum_{i=-N+1}^{N-1} f(-B/2 + \Delta i) \right) \quad (4.14)$$

Der hierbei zu erwartende Fehler ist durch die hohe Anzahl an Stützstellen (ca. 50) vernachlässigbar gegenüber anderen Ungenauigkeiten.

<sup>1</sup> Übliche deutsche Normierung, wohingegen in den USA mit der ganzen Spannweite  $B$  normiert wird.

Zur Überprüfung wird die von einer A340-300 produzierte Wirbelschleppe in Abbildung 4.32 unmittelbar von einer A320 (oberes Bilderpaar) und einer B737-300 (unteres Bilderpaar) durchflogen ( $t^* = 0$ ), und die Ergebnisse mit denen des Instituts für Flugsystemtechnik (FT) des DLR Braunschweig verglichen. Jene sind jeweils rechts abgebildet, während die mit der zuvor beschriebenen Methodik erzielten Ergebnisse jeweils links erscheinen.

Für den A320 verwendet FT dabei ein detaillierteres Modell, bei welchem zusätzlich Höhenleitwerk und Rumpf berücksichtigt werden. Deswegen ist die Darstellung rechts oben in Abbildung 4.32 nicht mehr symmetrisch zur y-Achse, während dies bei den anderen Verteilungen der Fall ist. Ihre Berechnung des Rollmoments der B737 basiert hingegen auf einem unserem Modell ähnlichen Streifenmodell. Man sieht in allen vier Abbildungen den rechten Wirbel mit geringen Differenzen in den Absolutwerten, die durch unterschiedliche Auftriebsparameter  $c_{a,\alpha}$  verursacht werden. In dieser Arbeit wird der aus der Potentialtheorie stammende Wert von  $c_{a,\alpha} = 2\pi$  angenommen, während FT beim aufwändig analysierten Modell des A320  $c_{a,\alpha} = 5.25$  verwenden. Für das weniger ausführlich analysierte Modell der B737 kommt ein Zwischenwert zum Einsatz (Carsten Schwarz, persönliche Mitteilung, August 2008), daher sind in dieser Arbeit erzielte Werte insgesamt erwartungsgemäß etwas höher. Damit ist gezeigt, dass das in vorigen Kapiteln entwickelte Streifenmodell für den Referenzfall  $t^* = 0$  im Rahmen der Vergleichbarkeit sehr ähnliche Ergebnisse wie FT erzielt. Andererseits wird anhand der unterschiedlichen Verläufe gegenüber dem ausführlich analysierten Modell des A320 klar, dass die zugrundeliegende Methodik zur Berechnung der Rollmomentenbeiwerte ein relativ einfaches Modell darstellt.

Als Referenzwert zur Abschätzung des Gefahrenpotentials dient das bei maximalem Ausschlag des Steuerknüppels erzielbare Rollmoment, welches in der Literatur allerdings für eine B737-200 recht unterschiedlich angegeben wird. So findet sich in Rossow & Tinling (1988) ein Wert von  $C_{l,\max} = 0.097$ , während Tatnall (1998)  $C_{l,\max} = 0.03$  angibt. Konservativ argumentiert findet der zweite Wert Anwendung, wobei dieser wie in den USA üblich auf die ganze Spannweite bezogen ist. Daher muss er zur Vergleichbarkeit mit hier erzielten Ergebnissen mit dem Faktor 2 multipliziert werden. Die von der Wirbelschleppe verursachten Rollmomente  $C_{l,WV}$  werden den maximal möglichen Steuerrollmomenten durch Ausschlag der Klappen  $C_{l,a/c}$  gegenübergestellt. Daraus ergibt sich das sogenannte „Roll Control Ratio“ (RCR), welches als Verhältnis

$$RCR = C_{l,WV}/C_{l,a/c} \quad (4.15)$$

definiert ist. Um diesen Wert zu bestimmen, wurden in einer Studie innerhalb des DLR Projekts Wirbelschleppe II Piloten zu einer Bewertung des Risikos für verschiedene Wirbelschleppeneinflüge befragt (Schwarz & Hahn, 2006). Dabei stellte sich heraus, dass Einflüge erst bei einem Rollverhältnis von unter  $RCR = 20\%$  als durchgehend akzeptabel eingestuft wurden, obwohl je nach Abstand zum Boden vielfach auch höhere Belastungen durch Wirbelschleppen tolerierbar waren. Andere Abschätzungen (siehe z.B. Luckner et al. (2004)) machen sich dies zunutze, indem das  $RCR$  linear mit der Höhe anwächst. Daher ist die hier verwendete Interpretation als konservativ einzustufen.

Für den parallelen Basiszustand und frühe Zerfallsstadien unterscheiden sich hier erzielte Ergebnisse nicht von denjenigen, die in SHAPe zum Einsatz kommen. Da SHAPe mit beträchtlichen Sicherheitszuschlägen konservativ ausgelegt ist, spielen detaillierte zentrumsnahe Prozesse, die zu abweichenden Rollmomentenverteilungen führen, keine Rolle. Trotzdem soll erwähnt

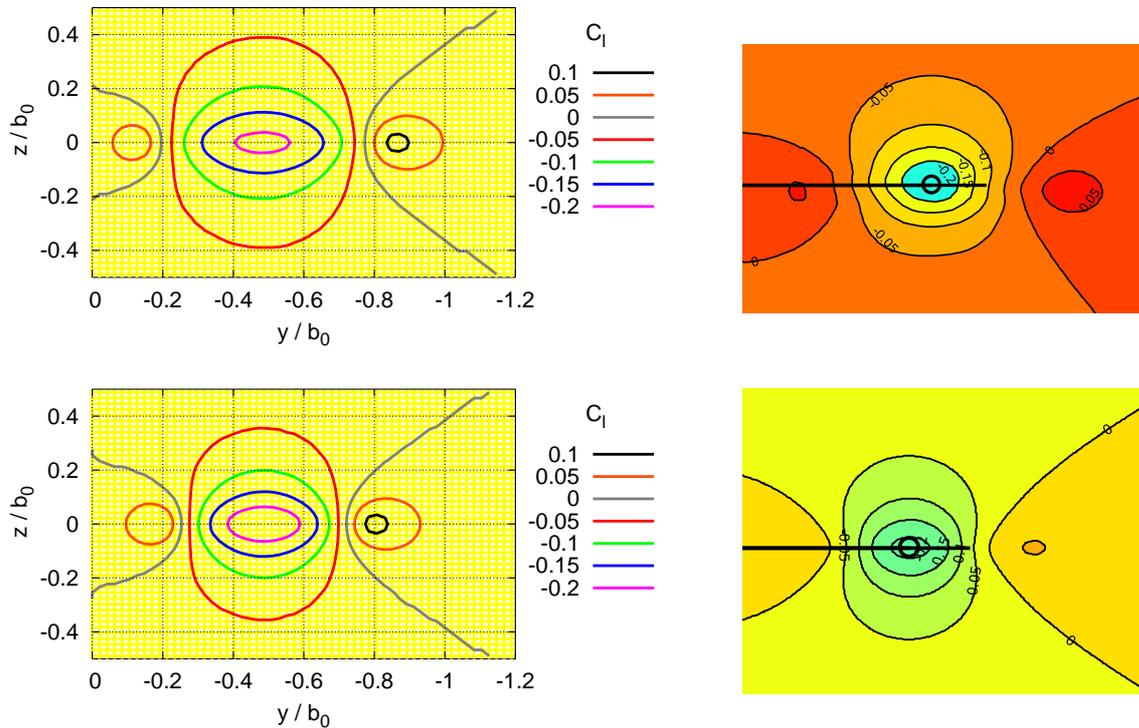


Abbildung 4.32: In Flugrichtung über die Rechengebietslänge gemittelte Rollmomentenbeiwerte zum Zeitpunkt der Wirbelinitialisierung  $t^* = 0$  für die nachfolgenden Flugzeugtypen A320 (oben) und B737-300 (unten), jeweils rechts Referenzwerte von Vechtel und Schwarz (DLR Braunschweig, persönliche Mitteilung, August 2008).

werden, dass die während des Abschnürens bei der Ringbildung entstandenen „Brückenstege“ aus Kap. 4.2.2, die bei der Betrachtung von Druckminima kaum ersichtlich sind, durchaus ein Rollmoment besitzen können, das den kritischen Wert von  $RCR = 20\%$  übersteigt.

Nicht berücksichtigt ist jedoch die Ausweitung des Wirbelrings in Spannweitenrichtung, die in Kapitel 4.2.2 ausführlich erläutert wurde. Beispielhaft ist in Abbildung 4.33 für den Fall  $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0, L_t/b_0 = 0.66]$  zu  $t^* = 10$  das Rollmomentenverhältnis  $RCR$  an der breitesten Stelle farblich dargestellt.

Die zugehörige mittlere Zirkulation beträgt  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^* \approx 0.25$  (Abb. 4.19), wobei sie je nach Position starken Schwankungen unterliegt ( $\pm 0.12$ ). Dabei kann die maximal mögliche Breite größer werden als die maximale Länge im frühen Wirbelringstadium (und damit auch größer als das Rechengebiet). Dies liegt daran, dass durch die Impulserhaltung des Wirbelrings der Gesamtumfang des Wirbelrings leicht zunehmen kann (da  $\Gamma \cdot R^2 = const$ ). Somit muss eine größere laterale Ausdehnung erreicht werden, bis sich die  $\omega_y$ -Bereiche berühren und eine Aufspaltung in zwei Teilwirbel beginnen kann. Abb. 4.33 zeigt, dass bei Verwendung konservativ abgeschätzter Rollverhältnisse noch zu späten Zeiten einzelne Stellen im Wirbelfeld existieren, die das nachfolgende Flugzeug beeinflussen können. Aufgrund der sehr kurzen Einwirkzeit dieser lokal verstreuten Gefährdungsbereiche wird dies jedoch nicht als sicherheitsrelevant eingestuft.

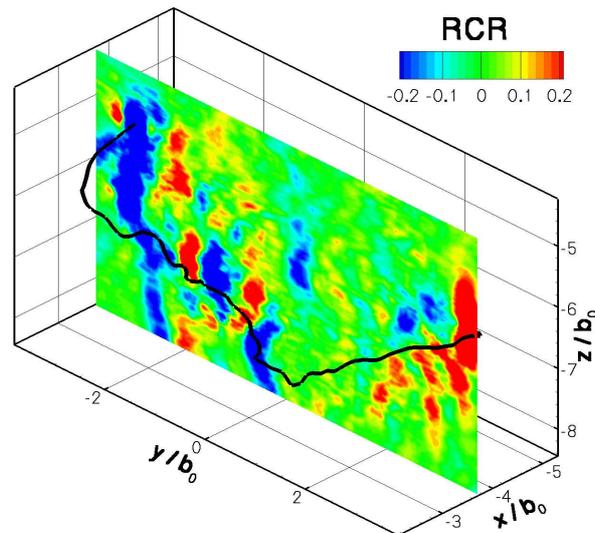


Abbildung 4.33: RCR im Fall  $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0, L_t/b_0 = 0.66]$  zu  $t^* = 10$  an der Stelle maximaler Breite inklusive Wirbelkernlinie.

Deutlich wird der große Unterschied von einzelnen Rollmomentenmaxima und den maximalen Mittelwerten über die Länge des Rechengebiets entlang der Flugrichtung in Abbildung 4.34. Zusätzlich integriert ist der Verlauf der Zirkulationen  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$  und  $\Gamma_{5-15}^*$  und der Werte mit  $RCR = 1$  bzw.  $RCR = 0.2$ . Da das maximale Rollmoment zu  $t^* = 0$  in allen Fällen gleich ist, entsprechen sich die Werte für  $RCR$  jeweils.

Aufgrund der schnellen Abnahme der maximalen Tangentialgeschwindigkeit am Kernradius zeigen alle Rollmomentenverläufe zu Beginn eine deutlich erkennbare Reduktion des maximalen Rollmoments. Bei turbulenzdominiertem Zerfall ( $N^* = 0$ ) ergibt sich kurz vor der Ringbildung ein Maximum, welches durch die Überlagerung der sich annähernden kernnahen Vertikalgeschwindigkeiten entsteht. Unerwartet ist hingegen der lokale Spitzenwert bei  $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0]$  zum Zeitpunkt  $t^* = 5.9$ . Dieser ergibt sich aus der Form des Wirbelrings, welche in dieser Art zufällig ist, siehe Abbildung 4.35. Der entstandene halbkreisförmige Bereich ist dabei ausreichend eng, dass sich die positiven Vertikalgeschwindigkeiten im Zentrum des Halbkreises überlagern. Da  $w$  entscheidenden Einfluss auf das resultierende Rollmoment hat, wird es an dieser Stelle überproportional hoch.

Solche Strukturen machen die Vorhersage des maximal zu erwartenden Rollmoments besonders kompliziert, weil sie vollkommen willkürlich auftreten können. Andererseits sind ihre räumlichen Ausmaße sehr gering, schon anhand der Mittelung der resultierenden Rollmomente über eine Rechengebietslänge von  $8.5 b_0$  lassen sie sich nicht mehr erkennen.

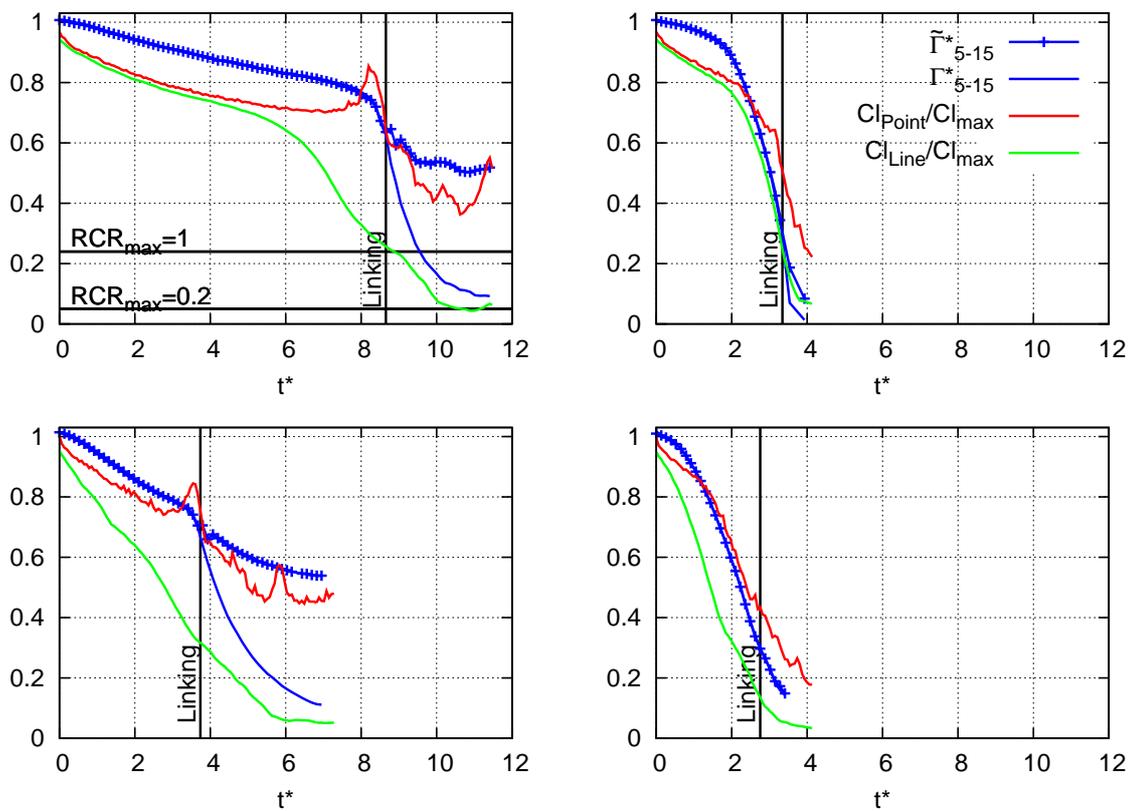


Abbildung 4.34: Maximales Rollmoment und über die Rechengebietslänge (x-Richtung) gemitteltes maximales Rollmoment für die Fälle (zeilenweise von links oben nach rechts unten)  $[\epsilon^* = 0.01, N^* = 0]$ ,  $[\epsilon^* = 0.01, N^* = 1]$ ,  $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0]$  und  $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 1]$ .

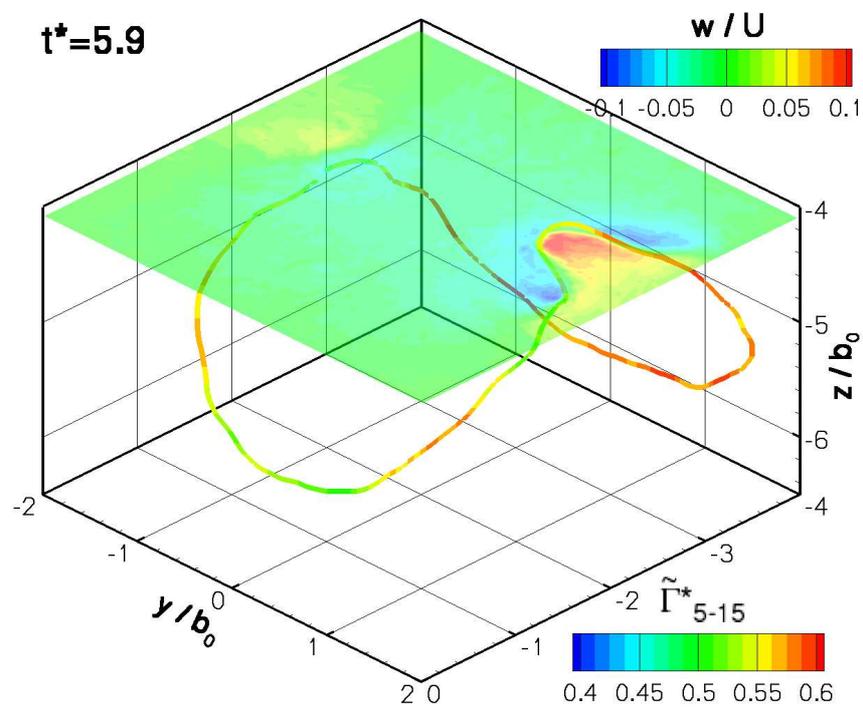


Abbildung 4.35: Auf die Fluggeschwindigkeit normierte Vertikalgeschwindigkeit  $w/U$  in der Ebene des maximalen Rollmoments bei  $z/b_0 = -4.05$  mit der der Zirkulation  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$  entsprechenden farbkodierten Wirbelkernlinie.

## 5 Diskussion

Um die Gültigkeit der erzielten Ergebnisse zu bestätigen, werden in diesem Kapitel Resultate anderer Gruppen vorgestellt und verglichen. Bezüglich der am häufigsten untersuchten Parameter Zirkulation und Absinktiefen decken diese ein breites Spektrum an Analysemethoden (Numerische Simulation, Lidarmessungen, Experiment im Wasserschleppkanal) ab:

- Vergleich mit LES-Daten von Proctor und mit der Modellierung von Sarpkaya (Han et al. (2000), Proctor et al. (2000), Proctor & Switzer (2000), Sarpkaya (1998), Sarpkaya (2000), Sarpkaya et al. (2001))
- Vergleich mit LES und Untersuchungen im Wasserschleppkanal von Robins & Delisi (Delisi & Robins (2000), Delisi (2006), Robins & Delisi (2006))
- Vergleich mit zweidimensional ausgewerteten LES-Daten und dem parametrisierten Wirbelschleppenmodell P2P von Holzäpfel (Holzäpfel et al. (2001), Holzäpfel (2003), Holzäpfel & Robins (2004), Holzäpfel (2006))
- Vergleich mit Lidarmessungen und Rauchsichtbarmachung aus AWIATOR (de Bruin & Kannemans, 2004)

### 5.1 Einordnung der Ergebnisse im Kontext anderer Forschungsarbeiten

#### 5.1.1 Proctor & Sarpkaya

Im Auftrag der NASA wurde das System AVOSS (Aircraft Vortex Spacing System) entwickelt, welches ähnlich dem DLR-System WSVBS die erforderlichen Sicherheitsabstände aufeinanderfolgender Flugzeuge an Flughäfen bestimmen soll. Zur Analyse des Wirbelschleppenverhaltens wurde der LES-Code TASS verwendet, der wie LESTUF eine modifizierte Smagorinskyschließung zur Modellierung der kleinen Skalen besitzt. Die turbulenten Geschwindigkeitsfelder werden so vorgegeben, dass sie von Beginn an die spektrale  $k^{-5/3}$ -Verteilung nach Kolmogorov erfüllen. Zur präzisen Einstellung der kinetischen Energie ist es möglich, dem Spektrum gezielt im langwelligen Bereich weitere Energie zuzuführen. Nach Einsatz des Wirbelpaars wird jedoch keine weitere Energie zugeführt, um den Wirbelschleppenzerfall nicht zu beeinflussen. Damit wird eine integrale Länge in der Größenordnung von ca.  $1 b_0$  erreicht. Das Rechengebiet ist immer mindestens so groß wie zwei Crow-Wellenlängen, und verwendet dabei unterschiedliche räumliche Auflösungen ( $\Delta_{\text{axial}} > \Delta_{\text{lateral, vertikal}}$ ). Um dies zu ermöglichen, wird ein relativ großes Verhältnis  $r_c/b_0$  in Kauf genommen, was im Hinblick auf die Entwicklung der elliptischen Instabilität beachtet werden muss. Die Simulationen aus Han et al. (2000) wurden ohne Temperaturschichtung durchgeführt, dafür wurden die Auswirkungen variierender turbulenter Dissipationsraten  $\epsilon^* = [0.0, 0.03, 0.08, 0.18, 0.35, 0.58]$  ausführlich analysiert. Die Entwicklung

der Crow-Instabilität ist vor allem bei nicht zu hoher Turbulenz sehr gleichmäßig; nichtsdestotrotz ergeben sich bei *allen* Simulationen zu späten Zeitpunkten Wirbelringe. Anhand der erzielten Ergebnisse wird eine Abschätzung für den Zeitpunkt des Linkings abgeleitet, welcher außerdem als Ende des Lebenszyklus der Wirbelschleppe definiert wird (u.a. Greene (1986), siehe auch Kap. 5.2.1). In weiteren Simulationen wird die Spannweite halbiert, um den Einfluss der turbulenten Längenskalen zu analysieren, womit sich  $L_t \approx 2 b_0$  ergibt. Es wird festgestellt, dass  $L_t$  den Zeitpunkt der Ringbildung nicht verändert, was im Einklang mit den Ergebnissen aus Kapitel 4.3 steht.

In Proctor & Switzer (2000) wurden Simulationen mit  $\epsilon^* = [0.01, 0.23]$  und  $N^* = [0, 1]$  durchgeführt, welche einen direkten Vergleich von TASS und LESTUF ermöglichen (siehe Abbildung 5.1 und 5.2). Wie zuvor werden Zirkulationsverläufe entlang der Wirbelkernlinie mit Symbolen dargestellt, während jene rein in Flugrichtung entsprechend der Auswertemethode von Proctor & Switzer (2000) in Linienform erscheinen. Bei stabiler Temperaturschichtung ist die Übereinstimmung des Wirbelzerfalls und des Absinkens hervorragend, bei dominierender Turbulenz ergeben sich jedoch Unterschiede, die mit den verschiedenen turbulenten Längenskalen begründet werden können. Deshalb ist für den Fall  $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0]$  eine Vergleichsrechnung mit ähnlich großen turbulenten Wirbelementen ( $L_t/b_0 = 0.85$ ) dargestellt, welcher nahezu den gleichen Zirkulationsverlauf wie die Berechnung mit TASS aufweist. Da sich in LESTUF während der Simulation kontinuierlich ein Kippwinkel entwickelt, welcher beim Linking etwa  $\varphi = 30^\circ$  beträgt, induziert die Wirbelschleppe nur anteilig Vertikalgeschwindigkeit nach unten. Da jedoch Proctors LES etwas geringere Zirkulation besitzt, kompensieren sich beide Effekte, so dass die resultierenden Absinkverläufe annähernd identisch sind. Auffallend ist vor allem bei der Parameterkombination  $[\epsilon^* = 0.01, N^* = 0]$ , dass trotz des großen Zirkulationsunterschieds am beispielhaften Zeitpunkt  $t^* = 8$  auch hier die Absinktiefen nahezu gleich sind.

Hier ist davon auszugehen, dass die Wirbelstärkeverteilung der jeweiligen Simulationen sehr ähnlich ist, was zu der hervorragenden Übereinstimmung der Absinkraten führt. Hingegen ist die Zirkulation  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$  niedriger, was durch einen höheren anfänglichen Kernradius und/oder durch die Verwendung eines alternativen Wirbelmodells verursacht sein kann.

Die starke Wirbeldeformation der einzelnen Wirbelröhren scheint dagegen nur geringen Einfluss auf die Absinkgeschwindigkeit zu haben, erst die Ringbildung modifiziert  $w$  spürbar. Da bei geringerer integraler Länge des turbulenten Hintergrundfeldes im Fall  $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0]$  weniger Zirkulation in der Diffusionsphase verloren geht, besitzt das Wirbelpaar länger ausreichend Zirkulation, um Absinkgeschwindigkeit zu induzieren. Daher erreicht es größere Tiefen als bei Existenz großskaliger turbulenter Wirbel.

Das von Sarpkaya (1998) und Sarpkaya (2000) entwickelte Modell zur Abschätzung des Zirkulationsverlaufs inklusive dem wichtigen Zeitpunkt der Ringbildung ist eine Weiterentwicklung des parametrisierten Wirbelschleppenmodells von Greene (1986). Im Gegensatz zum Modell P2P wird kein zweiphasiger Zerfall angenommen, jedoch werden wie in P2P die atmosphärischen Parameter  $\epsilon^*$  und  $N^*$  zur Berechnung des Linkingzeitpunkts und des erwarteten Zirkulationsverlaufs verwendet. Bezüglich der Zirkulation wird auch nach der Ringbildung eine gute Übereinstimmung mit Messdaten gefunden, sofern diese ohne Bodeneinfluss ermittelt wurden. Den Zeitpunkt der Ringbildung  $T^*$  zeigt Abbildung 5.3 in Abhängigkeit der normierten turbulenten Dissipationsrate  $\epsilon^*$ , und ist aus Sarpkaya et al. (2001) entnommen. Es werden sowohl analytische Arbeiten (Crow & Bate (1976), Sarpkaya (1998)) als auch experimentelle bzw. numerische Arbeiten von Sarpkaya & Daly (1987), Han et al. (2000), Proctor & Switzer (2000) dargestellt. Ebenso hinzugefügt sind die in dieser Arbeit ermittelten Werte für  $T^*$  in

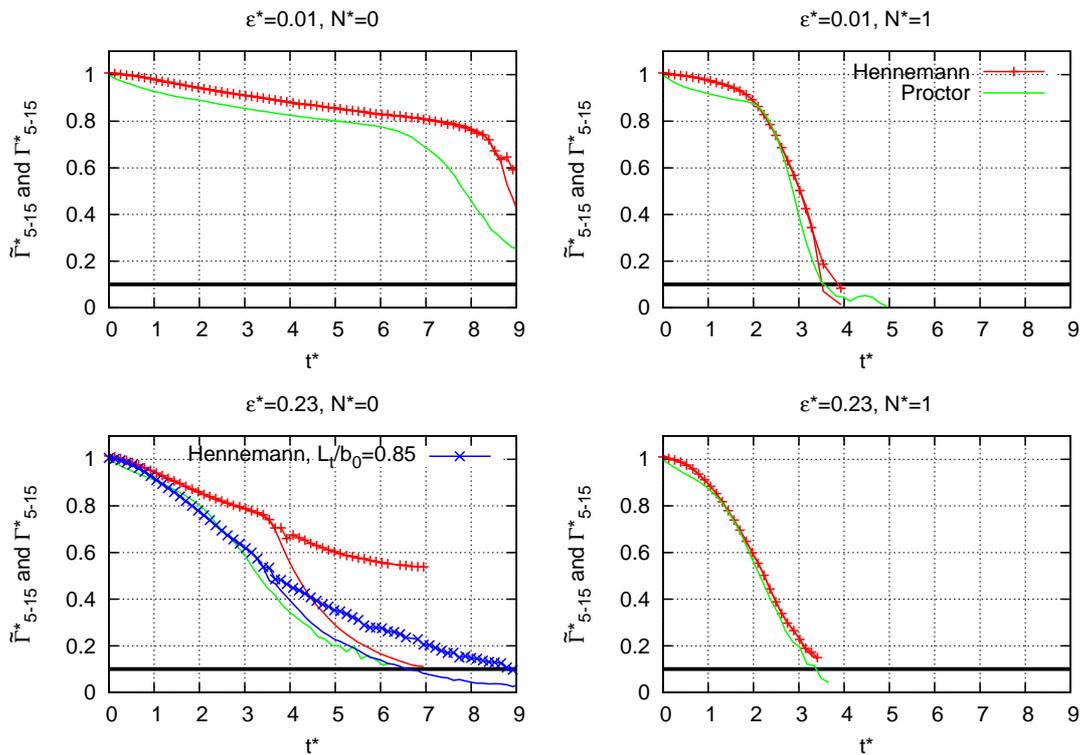


Abbildung 5.1: Vergleich der zeitlichen Zirkulationsverläufe von  $\Gamma^*_{5-15}$  zu Proctor & Switzer (2000) für gleiche Dissipationsrate  $\epsilon^*$  und Schichtung  $N^*$ , aber verschiedener integraler Länge: Proctor  $L_t/b_0 = 0.94$ , Hennemann  $L_t/b_0 = 0.41$  bzw.  $L_t/b_0 = 0.85$ .

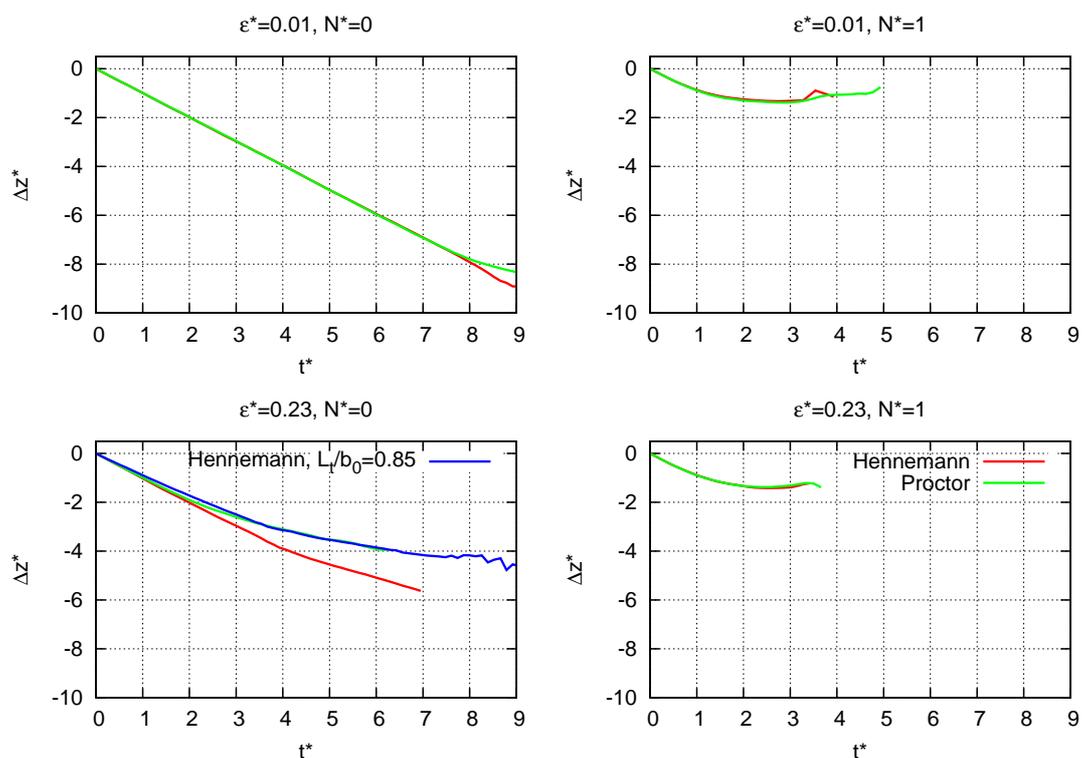


Abbildung 5.2: Vergleich der normierten Absinktiefen  $\Delta z^*$  anhand der Daten und Parameter aus Abb. 5.1.

neutral geschichteter Atmosphäre (siehe Abb. 4.17 oder Tabelle 5.1 im nächsten Kapitel). Es zeigt sich, dass der Beginn der Ringbildung in den hier präsentierten Simulationen etwa eine Zeiteinheit später eintritt als es von Sarpkaya prognostiziert wird. Dies ist jedoch im Rahmen der ansonsten erkennbaren Streuung.

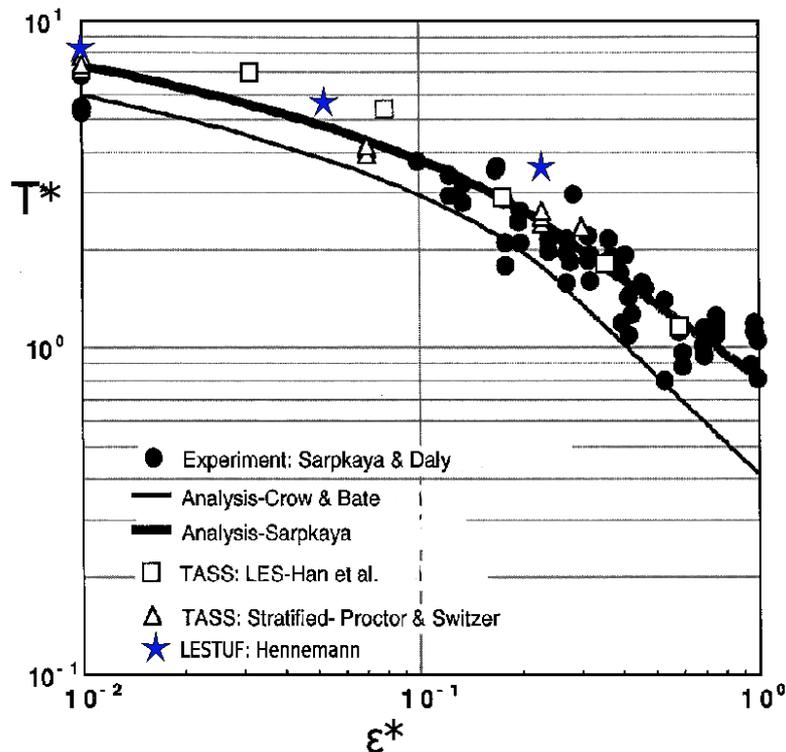


Abbildung 5.3: Zeitpunkt des Linkings aus verschiedenen Studien, aus Sarpkaya et al. (2001).

Die vom Modell Sarpkaya (2000) prognostizierten Absinktiefern unterschätzen dagegen die aus Messungen erzielten Vergleichswerte, daher wurde angenommen, dass sich die Wirbelröhren stärker angenähert haben müssten, was eine höhere Absinkgeschwindigkeit zur Folge hätte. Dazu wurde anhand von Flugdaten eine empirische Formel gefunden, um die Reduzierung des lateralen Abstands  $b$  in das Modell zu integrieren. Diese Reduzierung ist umso stärker, je größer die turbulente Dissipationsrate  $\epsilon^*$  ist.

In der vorliegenden Arbeit kann diese Tendenz nicht nachvollzogen werden, wie es in Kapitel 4.2.2 ausführlich dokumentiert wurde. Vielmehr wird davon ausgegangen, dass sich der Wirbelring im Mittel verbreitert, was in Übereinstimmung mit Messdaten aus Flugversuchen (AWIATOR, siehe Kapitel 5.1.4) steht, und was desweiteren analytisch erklärt werden kann. Jedoch kann der Abstand am verformten Ring je nach Messebene stark streuen, daher können im Experiment sowohl Tendenzen zur Vergrößerung als auch zur Reduzierung des Wirbelabstands beobachtbar sein.

### 5.1.2 Delisi & Robins

Bei den von Delisi und Robins durchgeführten Wirbelschleppenmessungen im Wasserschleppkanal wurde der Einfluss von Schichtung und Turbulenz weitgehend separat untersucht. Mit Hilfe von Salzwasser wurde ein stabil geschichtetes Profil erzeugt, durch welches das Flugzeug-

modell hindurchgezogen wurde (Delisi & Robins, 2000). Durch die bezüglich den Abmessungen des Wasserschleppkanals geringe Spannweite des Modells von  $B = 0.105$  m konnten die Wirbel lange beobachtet werden, so dass große Lebensdauern analysiert werden konnten. Mit Farbstoff wurden die Wirbel sichtbar gemacht, welche von Kameras in x- und y-Richtung aufgezeichnet wurden. Die Zirkulation wurde mit digitaler PIV (particle image velocimetry) innerhalb des Wirbelkerns erfasst. Abbildung 5.4 zeigt die Kernzirkulation bei Schichtungswerten von  $N^* = [0.21...0.35]$  aus frontaler (■, vor der Ringbildung) und seitlicher (□, nach der Ringbildung) Richtung, wobei außerdem der Anstellwinkel des Flugzeugmodells geringfügig variiert wurde. Zusätzlich eingefügt sind Lidarmessdaten der NASA aus einer Wirbelschleppenmesskampagne am Flughafen Memphis, wo die Flüge einer B727 ausgewertet wurden.

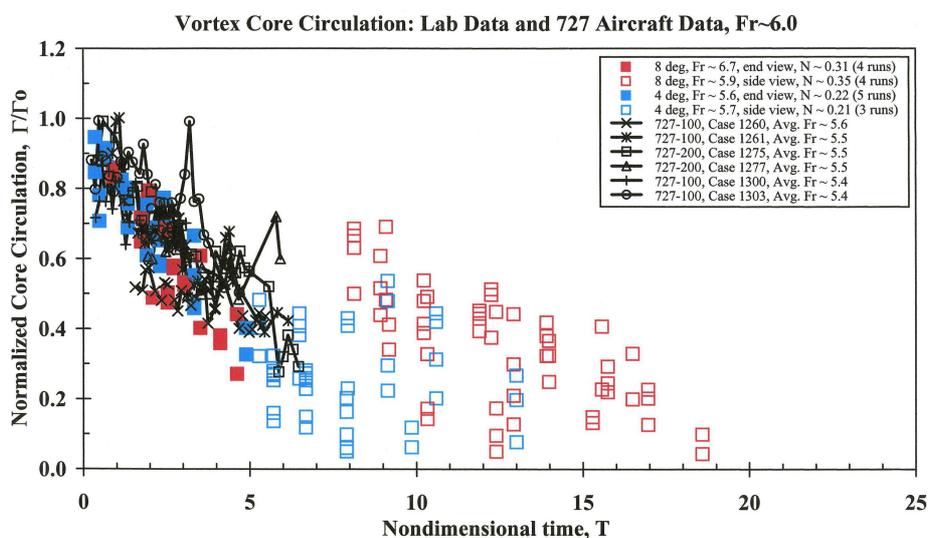


Abbildung 5.4: Im Wasserschleppkanal innerhalb des Kernradius bestimmte Zirkulationswerte in Ebenen orthogonal zur Flugrichtung (■) und orthogonal zur Spannweitenrichtung (□). Mit Linien verbunden sind die zeitlichen Verläufe von verschiedenen B727-Lidarmessungen bei vergleichbarer Temperaturschichtung (Donald Delisi, persönliche Mitteilung, 2001).

Grundsätzliche Übereinstimmung zwischen Flug- und Messkanaldaten sind unzweifelhaft erkennbar, allerdings ist die Bandbreite schon in der Anfangsphase groß. Es wird offensichtlich, dass die Wirbelringe im Experiment über sehr lange Zeiten mit beachtlicher Stärke detektierbar waren. Zwar lässt sich anhand der Darstellung eine Tendenz zu etwas schnellerem Zerfall in der Diffusionsphase erkennen. Die für den Fall [ $\epsilon^* = 0.01$ ,  $N^* = 0.35$ ] ermittelte Zirkulation von ca. 20% zum Zeitpunkt  $t^* = 10$  kann jedoch in einigen Experimenten gut wiedergegeben werden. Im Mittel sind sogar noch höhere Zirkulationen zu erwarten; insbesondere sind diese zum Zeitpunkt  $t^* = 5...6$  in der Seitenansicht höher als in der Frontalansicht, was die These einer erfolgten Wirbelringbildung unterstützt. Auch bestätigen sich mit diesen Experimenten die enormen Lebenszeiten, die in Kapitel 4.2.5 mit LESTUF ermittelt wurden. Der Zeitpunkt des Übergangs vom Parallelwirbelsystem zum Wirbelring liegt sowohl im Wasserschleppkanal als auch in der LES bei ungefähr  $t^* = 5...6$ .

In einer weiteren Untersuchung (Delisi, 2006) wird das Verhalten der Wirbelschleppe bei verschiedenen Turbulenzniveaus analysiert. Zur Turbulenzerzeugung wurden vor dem Einsatz des Flugzeugmodell ( $B = 0.05$  m) Gitter mit verschiedenen Gitterabständen und verschiedenen

Geschwindigkeiten durch den Wasserschleppkanal gezogen, um variierende turbulente Längenskalen und Dissipationsraten zu bekommen. Bei der Ermittlung von  $\epsilon^*$  ist auch der zeitliche Abstand zwischen Turbulenz- und Wirbelschleppenerzeugung zu berücksichtigen. Die These von Sarpkaya & Daly (1987), dass die integrale Länge keinen Einfluss auf den Wirbelzerfall hat, wurde so nicht bestätigt. Der Unterschied des Linkingzeitpunkts ist ihren Ergebnissen zufolge erkennbar und kann bis zu  $3t_0$  betragen, wie durch die farbliche Kennzeichnung in Abbildung 5.5 ersichtlich. Hierbei entsprechen die Gitterabstände  $\Delta_{Exp}$  bezogen auf die Spannweite  $\Delta_{Exp}/B = 0.37$  (blau),  $\Delta_{Exp}/B = 1.12$  (rot) und  $\Delta_{Exp}/B = 1.87$  (grün). Als Referenzkurve dient die von Sarpkaya (1998) vorgeschlagene Vergleichslinie.

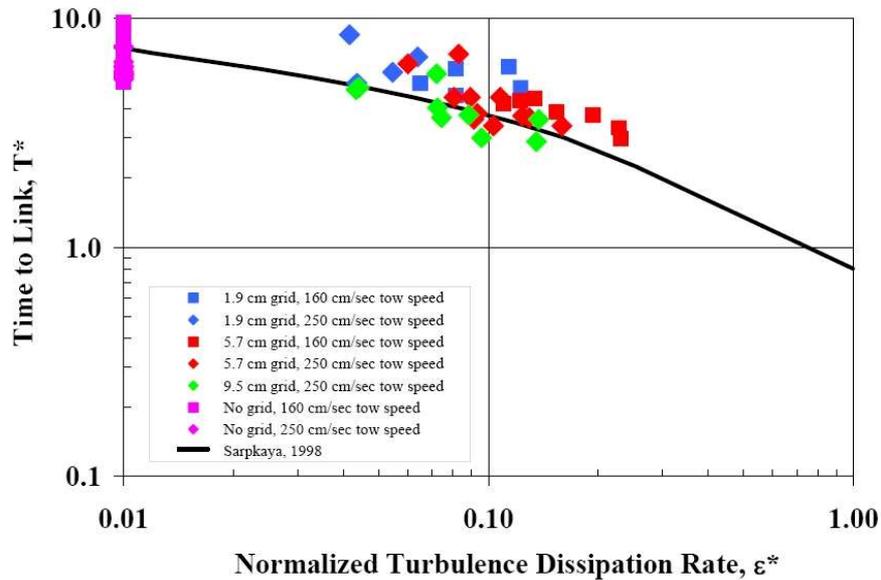
Die in dieser Arbeit erzielten Linkingzeitpunkte lassen sich aus Abbildung 4.17 herauslesen, und sind zusätzlich in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Es zeigt sich, dass die Ergebnisse LE-STUFs sehr gut zu den Messdaten Delisis passen, die bezogen auf Sarpkaya tendenziell ebenfalls längere Zeiten bis zur Ringbildung finden. In Abb. 5.5 b) ist der Verlauf der ermittelten Absinktiefen dargestellt. Die Dissipationsrate hat offensichtlich nur indirekten Einfluss auf das Absinkverhalten, indem sie wie in Abb. 5.5 a) gesehen den Zeitpunkt der Ringbildung maßgeblich beeinflusst. Der weitere Verlauf der Kurven ähnelt sich stark; in Ringform scheint  $\epsilon^*$  das weitere Absinkverhalten nur geringfügig zu beeinflussen. Aus diesen Daten ergibt sich, dass die absolute Lebensdauer entscheidend bestimmt, welche minimale Höhe die Wirbelschlepp erreicht, und dass das Absinkverhalten des Wirbelrings bei verschiedenen Turbulenzniveaus sehr ähnlich ist.

$T^*$		$N^*$		
		0	0.35	1
$\epsilon^*$	0.01	8.4	5.9	3.3
	0.05	5.8	6.2	-
	0.23	3.7	4.2	2.8

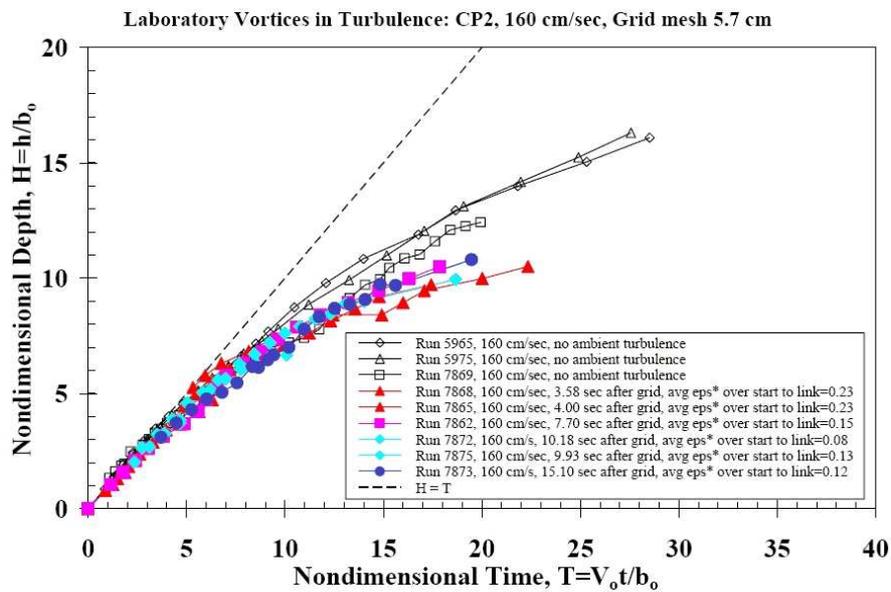
Tabelle 5.1: Zeitpunkt der (beginnenden) Ringbildung der  $\epsilon$ - $N^*$ -Parametermatrix.

Begründet wird das mit weiteren interessanten Messungen der turbulenten Dissipationsrate zwischen den Kernradien. Delisi (2006) beschreibt, dass ungefähr ab dem Zeitpunkt  $t^* = 1$  diese kernnahe Dissipationsrate unabhängig von der Umgebungsturbulenz  $\epsilon_{Kern}^* \cong 0.3$  wird, was den weiteren Zerfall prägt. Solange die Umgebungsturbulenz diesen Wert nicht übertrifft, spielt ihr Einfluss keine relevante Rolle mehr, womit nur größere Turbulenzniveaus die Zirkulationsverläufe und die Absinkraten im Ringstadium merklich beeinträchtigen würden.

Die These Delisis lässt sich zum Teil auch auf hier erzielte Ergebnisse übertragen. Sobald die Ringbildung abgeschlossen ist, verhalten sich mit LESTUF gefundene Verläufe zu späten Zeitpunkten in der schnellen Zerfallsphase („Rapid Decay Phase“, Index RD) tatsächlich sehr ähnlich, wie Abbildung 5.6 zeigt. Dabei werden die aus Abb. 4.17 bekannten Zirkulations- und Absinkverläufe für die Fälle mit  $N^* = 0$  aufgeteilt in den Zerfall in der Diffusionsphase und in die Phase schnellen Zerfalls, wobei als Übergangskriterium die vollendete Entwicklung eines Wirbelrings fungiert. Die Bezeichnung  $t^*+$  bedeutet, dass der Zeitpunkt  $t^*+ = 0$  dem Endzeitpunkt der Diffusionsphase entspricht. Hierzu sind Zirkulation  $(\tilde{\Gamma}_{RD}^*)+$  und Absinktiefe  $(\Delta z_{RD}^*)+$  auf den Startwert des schnellen Zerfalls normiert. Die Sinkrate nach dem Linking



a)



b)

Abbildung 5.5: a) Zeitpunkt des Linkings  $T^*$  und b) erzielte Absinktiefen  $H$  im Wasserschleppkanal in Abhängigkeit von  $\epsilon^*$  und prognostiziert durch das Modell von Sarpkaya (1998) in Delisi (2006).

lässt sich zu  $w_{LES, Ring} \approx 0.6 w_0$  ablesen, was in hervorragender Übereinstimmung mit den analytisch abgeschätzten Werten in Kapitel 4.3.1 steht.

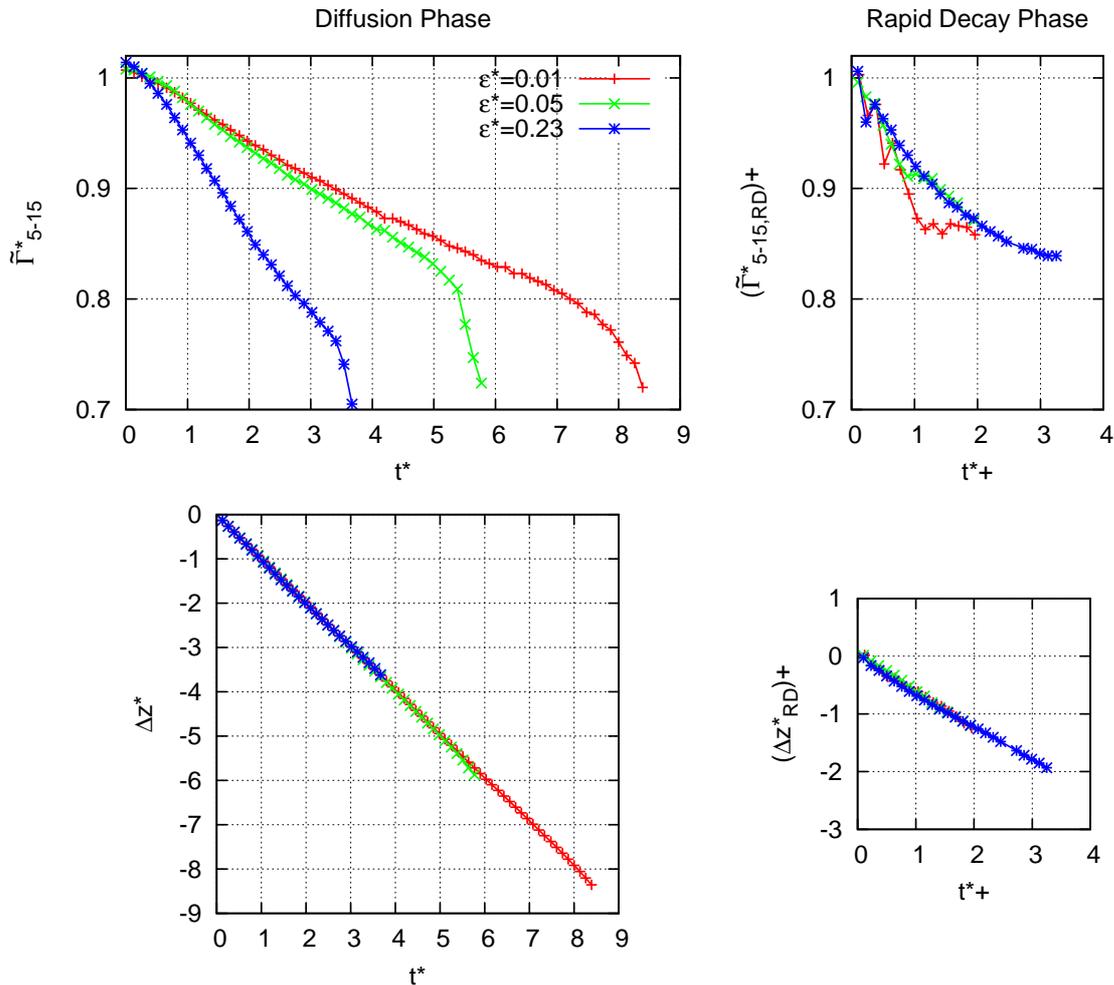


Abbildung 5.6: In Diffusions- und schnelle Zerfallsphase aufgeteilte Zirkulations- und Absinkverläufe bei  $N^* = 0$ .

Ein weiterer sehr interessanter Aspekt lässt sich aus den Zirkulationsverläufen in der Phase des schnellen Zerfalls erkennen. Sowohl an der Gesamtansicht aus Abb. 4.17 als auch an der in Parallelwirbel- und Wirbelringsystem unterscheidenden Ansicht zeigt sich vor und nach dem Linking klar erkennbar der beschleunigte Zerfall. Dieser beginnt in Abhängigkeit der meteorologischen Parameter unterschiedlich früh vor der tatsächlichen Ringbildung, und endet entsprechend danach, wobei sich dann wie bereits beschrieben die Diffusionsphase des Wirbelringregimes anschließt. Die schnelle Zerfallsphase erhält ihren typischen Charakter demnach zuerst aus den Annäherung, die elliptische Instabilitäten und unmittelbare Zirkulationskompensation hervorruft, und nach dem Linking durch die Aufweitung des Kernradius, die von der sich einstellenden Axialgeschwindigkeit im Wirbelkern verursacht wird (siehe Kapitel 4.2.4).

### 5.1.3 Holzäpfel

In Holzäpfel et al. (2001) wurden Zirkulationsverläufe und Absinktieften anhand von LESTUF-Simulationen ausführlich analysiert. Simuliert wurden vier verschiedene Temperaturschichtungen  $N^* = [0, 0.35, 1, 1.4]$  mit und ohne atmosphärischer Turbulenz, die mit  $\epsilon^* = 0.06$

initialisiert wurde. Die auf Reiseflugniveau typische Anisotropie der Turbulenz wurde dabei berücksichtigt (mit  $\overline{uu} = \overline{vv} \approx 3\overline{ww}$ ). Allerdings wurde die Wirbelschlepe direkt in das initialisierte Geschwindigkeitsfeld des noch nicht entwickelten turbulenten Spektrums gesetzt, das heißt großskalige Wirbelelemente sind bezogen auf das Kolmogorovsche Energiedichtespektrum deutlich überrepräsentiert. Zusätzlich wurde wie in der vorliegenden Arbeit eine flugzeuginduzierte Turbulenz angenommen, die in Kapitel 4.1 als weißes Rauschen beschrieben wurde. Um Rechnerkapazität einzusparen, betrug die Maschenweite des Rechengitters in Flugrichtung  $\Delta x = 6.375$  m, während quer dazu  $\Delta y = \Delta z = 1$  m verwendet wurde.

Bei starker Schichtung unterscheiden sich die Zirkulationsverläufe von den aktuellen Untersuchungen nur unmerklich, weil abgesehen von der ungleichen Auflösung keine Änderungen gemacht wurden, die die Erzeugung barokliner Wirbelstärke beeinflussen. Weil starke Schichtung die Absinkgeschwindigkeit und -tiefe maßgeblich reguliert, stimmen diese ebenso sehr gut überein. Hingegen ist bei dominierender Turbulenz der Abfall von  $\Gamma_{5-15}^*$  deutlich steiler als in der in dieser Arbeit durchgeführten LES, wie die Verläufe in ungeschichteter Atmosphäre in Abbildung 5.7 zeigen.

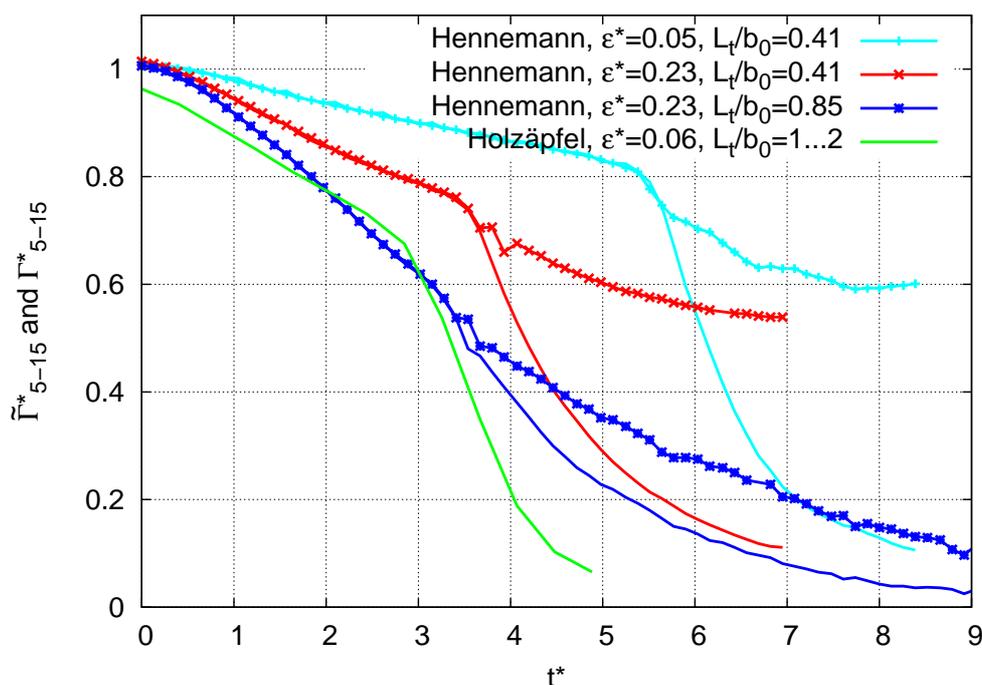


Abbildung 5.7: Vergleich der Zirkulation  $\Gamma_{5-15}^*$  von Holzäpfel et al. (2001) mit  $[\epsilon^* = 0.06, L_t > 1]$  zu  $[\epsilon^* = 0.05, L_t/b_0 = 0.41]$ ,  $[\epsilon^* = 0.23, L_t/b_0 = 0.41]$  und  $[\epsilon^* = 0.23, L_t/b_0 = 0.85]$ .

Wiederum entsprechen Linien den Zirkulationsverläufen aus Ebenen orthogonal zur Flugrichtung ( $\Gamma_{5-15}^*$ ), daher dienen diese als Referenz. Offensichtlich unterscheiden sich die Zerfallsverläufe bei vergleichbarer Dissipationsrate deutlich, was durch die verschiedene Größe der turbulenten Wirbelelemente begründbar ist. Dies ist in numerischen Simulationen mit ansonsten ähnlichen Parametern gleichbedeutend mit variierender kinetischer Energie im Rechengebiet. Im Diffusionsbereich erreicht erst die energiereichste Simulation mit  $\epsilon^* = 0.23$  und  $L_t/b_0 = 0.85$  annähernd die Zerfallsgeschwindigkeit aus Holzäpfel et al. (2001), und auch die schnelle Zerfallsphase beginnt etwas später. Die nach herkömmlicher Methodik ausgewerte-

ten Zerfallsraten im späten Wirbelstadium sind hoch, weil die sich nun bildende Wirbelstärke in Spannweitenrichtung durch die grobe axiale Auflösung unterschätzt wird und damit die zugehörige Zirkulation zu niedrig angegeben wird.

Die unterschiedlichen Zerfallsraten *in der Diffusionsphase* erklären sich jedoch direkt aus der Art der Erzeugung des turbulenten Hintergrundfeldes. Die bei beiden Varianten verwendete spektrale Energieverteilung initialisiert bevorzugt turbulente Elemente in der Größenordnung des Rechengebiets mit folglich geringer Dissipationsrate. Bei Durchführung eines Vorlaufs wandert die Energie allmählich zu kleineren Skalen, um schlussendlich zu dissipieren. Somit stellt sich nach einiger Zeit ein bedingt stationärer Zustand ein, zu welchem die Dissipationsrate bestimmt wird. (Die Lebensdauer einer Wirbelschlepe ist klein gegenüber der Änderung des turbulenten Feldes, daher wird der Zustand der Atmosphäre als quasi-stationär bezeichnet, siehe Kapitel 4.1.) Ohne diesen Vorlauf muss zur Erzielung von  $\epsilon^*$  entsprechend viel kinetische Energie initialisiert werden, die vor allem in besagten großen Wirbeln steckt.

Umgerechnet auf den von Holzäpfel verwendeten Fall mit  $\epsilon^* = 0.06$  wird bei diesem mehr als zehnmal so viel kinetische Energie eingesetzt als in vorliegender Arbeit, um die gleiche Dissipationsrate zu erzielen, die nach heutigem Stand als Basis für alle Vergleiche dient. In den turbulenzdominierten Simulationen [Holzäpfel,  $\epsilon^* = 0.06$ ,  $L_t/b_0 > 1$ ] und [Hennemann,  $\epsilon^* = 0.23$ ,  $L_t/b_0 = 0.85$ ] ähneln sich beide Fälle bezüglich der kinetischen Anfangsenergie, was daher vor der Ringbildung zu vergleichbarem Zirkulationszerfall führt. Insgesamt zerfallen Wirbelschleppen bei nominell gleichem  $\epsilon^*$  in Holzäpfel et al. (2001) grundsätzlich deutlich schneller als in vorliegender Arbeit.

## P2P

In Kapitel 2.3.4 wurden die grundlegenden Ideen des probabilistischen zweiphasigen Wirbelschleppenmodells dargestellt. Eine wesentliche Annahme ist hierbei die Idee vom zweiphasigen Zerfall, wobei der langsame Zirkulationsverlust in der Diffusionsphase durch den sogenannten schnellen Zerfall abgelöst wird, sobald beide Wirbelröhren sich annähern und verbinden. Weiter wird davon ausgegangen, dass die Zirkulationsabnahme in der ersten Phase unabhängig von den atmosphärischen Bedingungen abläuft, und dass erst ab Beginn des schnellen Zerfalls  $\epsilon^*$  und  $N^*$  den weiteren Verlauf steuern.

Ausgehend vom zerfallenden Potentialwirbel wird eine Gleichung hergeleitet, die für beide Phasen je einen Zerfallsterm besitzt (Holzäpfel (2003), Holzäpfel & Robins (2004), Holzäpfel (2006))

$$\Gamma_{5-15}^*(t^*) = A - \exp\left[\frac{-R^2}{\nu_1^*(t^* - T_1^*)}\right] - \exp\left[\frac{-R^2}{\nu_2^*(t^* - T_2^*)}\right] \quad (5.1)$$

Die dimensionslosen Parameter  $A = 1.1$  und  $R = 0.11$  sind Konstanten, ebenso wie die Zeit  $T_1^*$  und die Viskosität  $\nu_1^* = 0.00178$ , wobei die Viskosität den Zerfall in der Diffusionsphase maßgeblich bestimmt. In die Berechnung von  $T_2^*$  fließt der Einfluss von Temperaturschichtung und turbulenter Dissipationsrate ein

$$T_2^* = 1.2 T_{2,0}^* \exp(-0.185 T_{2,0}^* N^*) \quad (5.2)$$

wobei  $T_{2,0}^* = T_{2,0}^*(\epsilon^*)$  gilt. Der probabilistische Ansatz ergibt sich unter anderem aus der unterschiedlichen Berechnung eines oberen und eines unteren Grenzwerts für  $T_2^*$  und  $\nu_2^*$ , wobei  $\nu_2^*$  erneut von  $N^*$  abhängig ist. Die deterministische Variante D2P wird aus dem arithmetischen Mittel der beiden Grenzwerte berechnet. Die erwartete Laterallpositionen  $y^* = y/b_0$  und zum Teil auch die Vertikalposition  $z^* = z/b_0$  sind von der vorherrschenden Windsituation abhängig, und ergeben sich daher aus den hierfür gemessenen Geschwindigkeiten  $u$ ,  $v$  und  $w$ . Die daraus abgeleitete Scherzahl und die turbulente kinetische Energie bestimmen die Aufweitung der Einhüllenden für die laterale Wirbelschleppenposition. Aus den Mess- und Simulationsdaten werden mit der unbeschränkten Johnson-Verteilung Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen erzeugt, aus welchen sich Aufenthaltswahrscheinlichkeiten von  $2\sigma$  und  $3\sigma$  ableiten lassen (wobei der Kolmogorov-Smirnov Test die Gültigkeit insbesondere für  $2\sigma$  bestätigt, siehe Holzäpfel (2006)).

Dieses Berechnungsschema wird anhand von neuen Simulationen und Messungen kontinuierlich und teilweise automatisch angepasst, somit verbessert sich die Prognosequalität mit zunehmender Anzahl an Daten fortlaufend. Die Resultate von P2P für eine Vielzahl an Messungen im Projekt AWIATOR werden im folgenden Kapitel 5.1.4 vorgestellt.

#### 5.1.4 AWIATOR

Zu einem Vergleich der Ergebnisse der LES mit Feldmessungen werden die Daten des EU-Projekts AWIATOR (2002-07) herangezogen. Ziel dieses Projekts war die Erforschung innovativer Flügeltechnologien beim Landeanflug unter besonderer Berücksichtigung der resultierenden Wirbelschleppen. Dabei wurden die von einem Airbus A340 erzeugten Wirbelschleppen mit Rauch sichtbar gemacht und aufgezeichnet. Außerdem wurden per Lidar Zirkulation und Position der Wirbelschleppe bestimmt, und die meteorologischen Parameter Wind, Turbulenz und Temperaturschichtung wurden mit Lidar und SODAR/RASS (Messinstrumente der Firma Metek) gemessen.

Als Beispiel für den Detaillierungsgrad der Zirkulations- und Positionsverläufe ist in Abbildung 5.8 der Fall AWIATOR-FT1 Flug 2-04 gemeinsam mit den vom Wirbelschleppenvorhersagemodell P2P prognostizierten Verläufen und entsprechenden LES-Daten gezeigt (Holzäpfel, 2006). Bei diesem Überflug konnten die Wirbel am längsten beobachtet werden.

In der Darstellung unten rechts sind die von Lidar- und SODAR/RASS gemessenen Geschwindigkeits- und Temperaturwerte über die Höhe aufgetragen. In diesem Beispiel herrscht fast ausschliesslich neutrale Schichtung. Außerdem erkennt man den gemessenen Gegenwind, etwas Seitenwind und geringen Vertikalwind, sowie eine Dissipationsrate von  $\epsilon^* \approx 0.12$ . Desweiteren sind über die Zeit die normierten Positionsparameter Höhe ( $z^*$ ) und laterale Position ( $y^*$ ) sowie der Zirkulationsverlauf  $\Gamma_{5-15}^*$  dargestellt. Jeweils als Symbole angegeben sind die Messdaten von linkem und rechtem Wirbel, die von den mit P2P errechneten  $2\sigma$ - bzw.  $3\sigma$ -Aufenthaltswahrscheinlichkeiten eingehüllt werden. Die deterministische Variante von P2P namens D2P ist gestrichelt dargestellt. Ergänzt werden die Verläufe von  $z^*$  und  $\Gamma_{5-15}^*$  durch die in dieser Arbeit erzeugten, hellblau dargestellten Simulationsdaten. Aufgrund des in LE-STUF unberücksichtigten Parameters Querwind ergeben sich für  $y^*$  keine absoluten Werte, lediglich der maximale gegenseitige Abstand  $\Delta y^*$  ist ausgehend von der x-Achse abgebildet. Aufgrund der Ringform sind zu späteren Zeitpunkten je nach Messebene kleinere Abstände immer möglich. Weil die Dissipationsrate  $\epsilon^*$  im relevanten Höhenbereich  $z^* > 2$  bei  $\epsilon^* > 0.1$

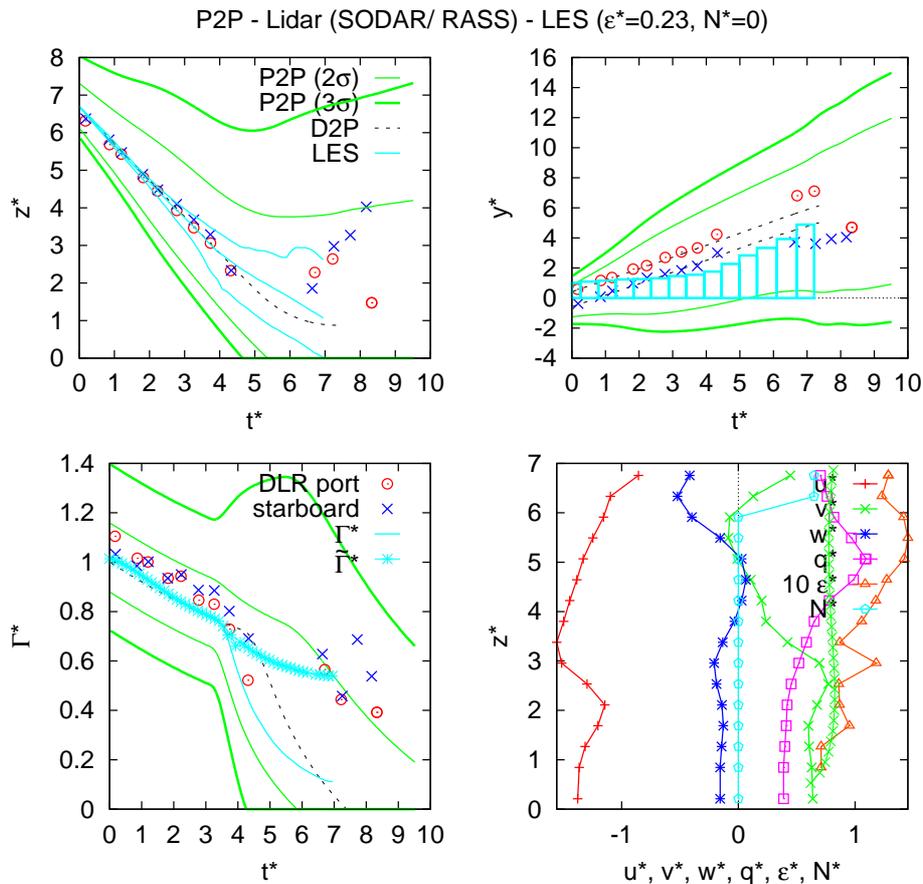


Abbildung 5.8: Fall AWIATOR-FT 2-04 im Vergleich mit in dieser Arbeit erzielter 3D-LES Ergebnisse inklusive deterministischer (D2P) und probabilistischer  $2\sigma/3\sigma$  P2P-Prognose (dünne/dicke grüne Linien), welche auf Basis der rechts unten dargestellten meteorologischen Messdaten gewonnen wurden. Die drei LES-Kurven der vertikalen Position  $z^*$  kennzeichnen minimale, mittlere und maximale Absinktiefe, während 2D- bzw. 3D-LES in der Zirkulationsdarstellung die alte und neue Auswertemethode symbolisieren. Einzelne Symbole stehen für Messdaten. Der aus der Ringbildung entstandene maximale laterale Wirbelabstand ist rechts oben durch an der x-Achse beginnende Rechtecke dargestellt.

liegt, wurde zum Vergleich die LES für den höheren Wert  $\epsilon^* = 0.23$  gewählt (siehe auch die verwendete Zuordnung in Kapitel 5.1.4).

Neben den bereits in Holzäpfel (2006) veröffentlichten Aussagen zur guten Übereinstimmung zwischen den Vorhersagen aus P2P und Messergebnissen können die verbleibenden Unterschiede im Zirkulationsverlauf und Absinkverhalten erklärt werden. Die bisherigen Auswertungen der Zirkulation lassen zu späten Zeiten eine signifikante Abnahme erwarten, was durch Messungen immer wieder nicht bestätigt wird. Die dreidimensionale Auswertung spiegelt die Ergebnisse der Zirkulationsmessung deutlich besser wider.

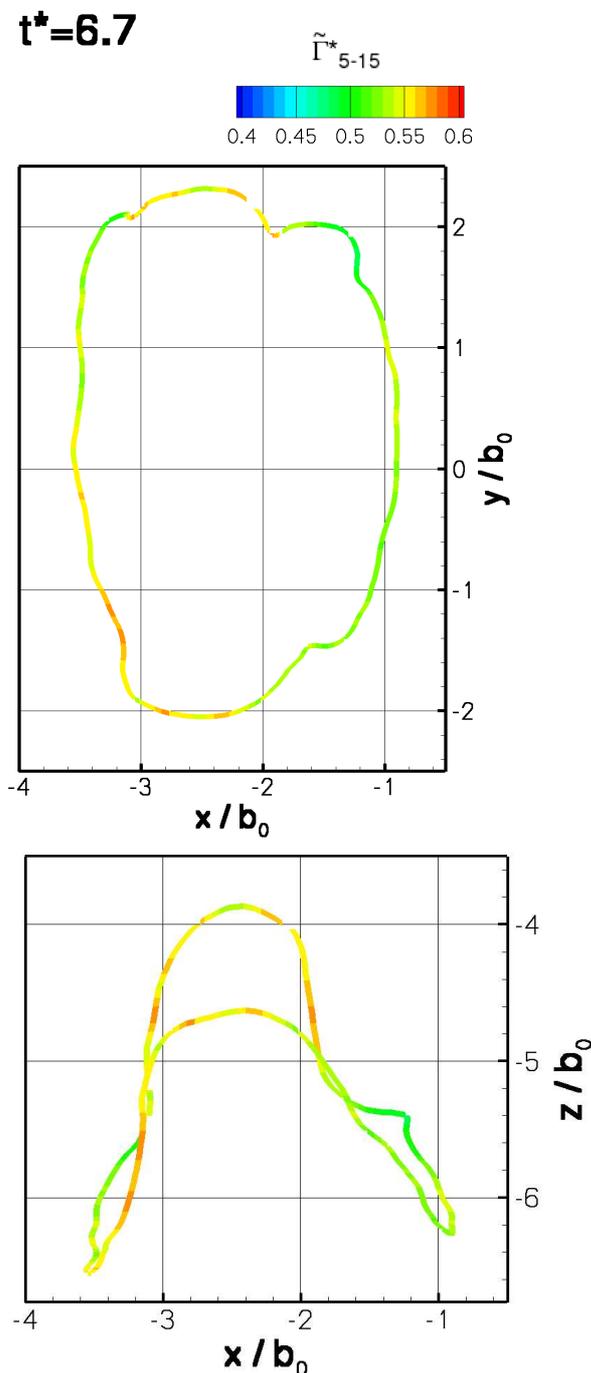


Abbildung 5.9: Geometrie des Wirbelrings in Drauf- und Seitenansicht für  $[\epsilon^* = 0.23, N^* = 0]$  bei  $t^* = 6.7$ .

Der abweichende Messwert der Zirkulation bei  $[t^* = 4.2, \Gamma^* = 0.55]$  resultiert aus einer Messung in unmittelbarer Nähe des Linkingbereichs, daher kann sein Wert je nach Fortschritt und detailliertem Verlauf der Ringbildung beliebig zwischen absolutem derzeitigem Maximalwert und Null liegen (siehe Abb. 4.6 zur Illustration der kontinuierlichen Abnahme von Wirbelstärke bzw. Zirkulation). Insbesondere sind minimale Zirkulationswerte möglich, weil die Auswertetechnik der Lidardaten nur Zirkulation innerhalb der gescannten Fläche sichtbar macht. Es können Messlücken entstehen, die somit als eindeutiges Indiz für eine (zumindest einseitige) Ringbildung interpretiert werden können, solange zu späteren Zeitpunkten wieder relevante Zirkulation gefunden wird. Verantwortlich hierfür ist der unten rechts identifizierbare Gegenwind, welcher den intakten Wirbelring zurück in die vom Lidar erfasste Messebene transportiert. Dies ist im gezeigten Beispiel nach ca. zwei Zeiteinheiten der Fall. Abbildung 5.9 präsentiert die Wirbelform inklusive farbkodierter Zirkulation zum Zeitpunkt  $t^* = 6.7$  in Drauf- und Seitenansicht. Offensichtlich beträgt die  $y$ -Ausdehnung etwas weniger als  $4b_0$ , was in sehr guter Übereinstimmung mit den Daten aus Abb. 5.8 steht. Auch die variierenden vertikalen Positionsunterschiede von  $\pm 1b_0$  um die mittlere Absinktiefe von etwa  $4b_0$  zum Zeitpunkt  $t^* = 6.7$  finden sich sowohl in der Messung als auch in der Simulation wieder. Hiermit kann die Argumentation aus Holzäpfel (2006) bestätigt werden, dass Ringbildung für den Aufenthalt einzelner Messergebnisse außerhalb der  $2\text{-}\sigma$ -Einhüllenden verantwortlich ist. Zudem zeigt sich, dass die verbleibende Zirkulationsstärke mit 60% des Nominalwertes sehr gut abgeschätzt ist. Anhand der variierenden Werte für  $\Gamma^*$  innerhalb des Wirbelrings (siehe Kapitel 4.2.3) lässt sich die Streuung der Messwerte zu späten Zeitpunkten erklären.

### Weitere Vergleichsfälle

Um zu belegen, dass es sich bei obiger Argumentation nicht um einen Einzelfall handelt, werden in diesem Kapitel weitere Messflüge aus AWIATOR kurz vorgestellt. Aus der Gesamtzahl von 30 Messungen wurden diejenigen acht Aufzeichnungen ausgewählt, bei welchen die Wirbelschlepe via Lidarmessungen am längsten identifiziert werden konnten. In die von Holzäpfel erstellten Abbildungen aus Messwerten und Vorhersagen aus P2P werden die Absink- und Zirkulationsdaten jener neuer LES hinzugefügt, die am besten zu den meteorologischen Bedingungen im Höhenbereich der Wirbelschlepe passt:

$0 <$	$N^* <$	$0.2$	$\rightarrow$	$N^* =$	$0$
$0.2 \leq$	$N^* <$	$0.5$	$\rightarrow$	$N^* =$	$0.35$
$0 \leq$	$\epsilon^* <$	$0.02$	$\rightarrow$	$\epsilon^* =$	$0.01$
$0.02 \leq$	$\epsilon^* <$	$0.1$	$\rightarrow$	$\epsilon^* =$	$0.05$
$0.1 \leq$	$\epsilon^* <$	$0.5$	$\rightarrow$	$\epsilon^* =$	$0.23$

Anhand dieser Einordnung ergibt sich in Tabelle 5.2 die Vergleichbarkeit der ausgewählten AWIATOR-Messungen sortiert nach maximaler Lebensdauer  $t_{max}$  (inklusive des bereits abgehandelten Falls 2-04). Turbulenz- und Schichtungswerte wurden dabei aus den Höhenbereichen herausgelesen, in denen sich die Wirbelschlepe während ihrer Detektierbarkeit aufhielt.

Es folgen für alle weiteren genannten Fälle jeweils von links oben nach rechts unten die Verläufe von Absinktiefe, Lateraltransport, Zirkulation und die gemessenen meteorologischen Parameter als 10-min Mittelwerte. Dabei sind wie zuvor für  $z^*$ ,  $y^*$  und  $\Gamma_{5-15}^*$  jeweils die Lidarmessdaten in rot und blau, die deterministische Prognose (D2P), die 2- $\sigma$  bzw. 3- $\sigma$ -Wahrscheinlichkeit aus P2P (grün) sowie die hier erzielten LES-Ergebnisse (hellblau) dargestellt.

Flug-ID	$t_{max}$	AWIATOR		LES	
		$N^*$	$\epsilon^*$	$N^*$	$\epsilon^*$
2-04	8.3	0	0.1	0	0.23
1-12	8.1	0.3	0.05	0.35	0.05
1-11	7.8	0.1	0.1	0	0.23
2-11	7.6	0.3	0.14	0.35	0.23
2-03	7.5	0	0.1	0	0.23
1-10	7.0	0.15	0.1	0	0.23
1-04	6.2	0.1	0.18	0	0.23
2-13	6.2	0.4	0.16	0.35	0.23

Tabelle 5.2: Auflistung der langlebigsten, vom Lidar detektierbaren Wirbelschleppen eines A340.

Bezeichnet werden die Messflüge nach ihrer Kurzform, wobei die erste Ziffer den Tag der Aufzeichnung und die folgenden Ziffern eine fortlaufende Nummerierung kennzeichnen.

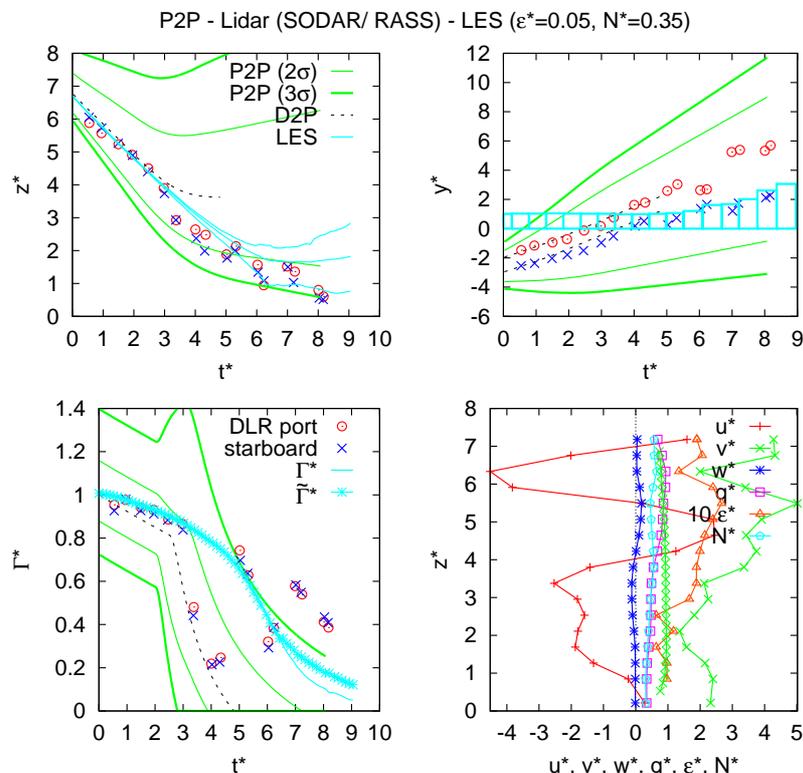


Abbildung 5.10: Messflug FT 1-12.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Übereinstimmung der durchgeführten LES im Vergleich mit den experimentellen Daten aus AWIATOR, welche als qualitativ hochwertig einzuordnen sind, beeindruckend ist. Dabei wurden die Absinktiefern bereits zuvor mit P2P hervorragend wiedergegeben, lediglich in den Abbildungen 5.14, 5.15 und 5.16 wird sie leicht überschätzt. Dies liegt wahrscheinlich am Einfluss der Windscherung, wie die gemessenen Windprofile und das daraus resultierende asymmetrische Absinken der Wirbel nahe legen, oder an Bodeneffekten, da die Wirbel im Mittel in einer Höhe von  $H = 6.7 b_0$  initiiert wurden. Abbildung 5.17 zeigt die maximal erzielten Absinktiefern aus AWIATOR, aus den durchgeführten LES (siehe Tabelle 4.4) und aus Experimenten im Wasserschleppkanal inklusive Vergleichssimulation aus Delisi & Robins (2000). Die Schichtungswerte der AWIATOR Messungen entsprechen Tabelle 5.2, welche über die relevante Höhenlage abgeschätzt wurden. Die maximalen Absinktiefern der LES mit  $N^* = 0$  sind nicht dargestellt, da unter anderem aus numerischen Gründen kein eindeutiges Endalter der Wirbelschlepppe bestimmt werden konnte. Es zeigt sich, dass variierende Turbulenzniveaus bei geringerer Temperaturschichtung bedeutsamer sind, wobei ihr Einfluss insgesamt deutlich kleiner ist als der von  $N^*$ . Bei  $N^* = 0$  ergibt auch die Darstellung in Delisi & Robins (2000) sowohl aus experimentellen Untersuchungen als auch aus der zugehörigen numerischen Simulation eine unbegrenzt absinkende Wirbelschlepppe (nicht abgebildet).

Der Lateralabstand  $\Delta y^*$  bleibt in der Diffusionsphase aller AWIATOR Messungen erwartungsgemäß lange konstant. Zum Zeitpunkt eines möglichen Linkings ergeben sich jedoch teilweise große Abstände, zum Teil bleibt er jedoch auch nahezu unverändert bzw. nimmt leicht ab. Dar-

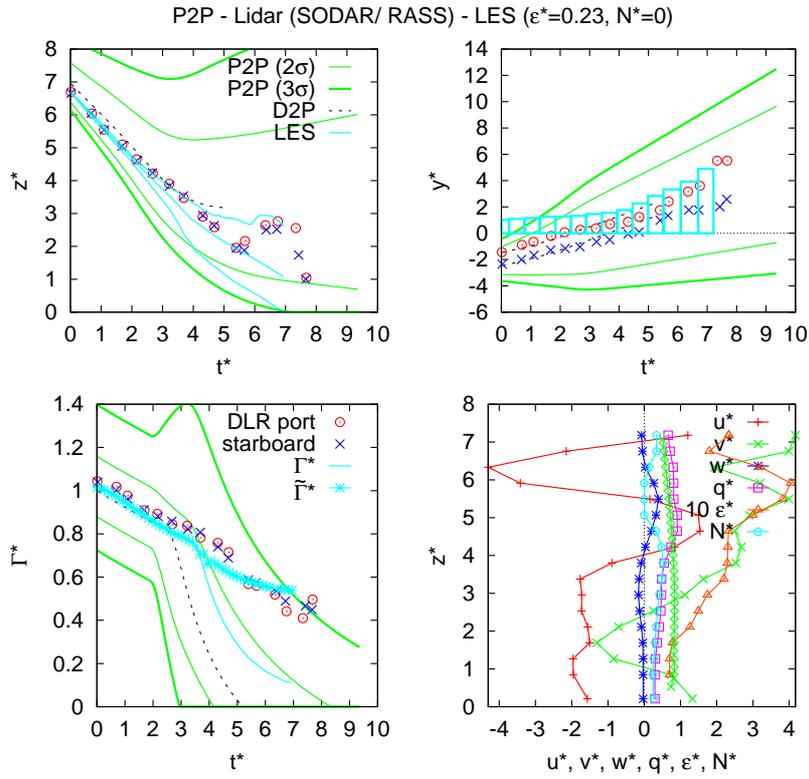


Abbildung 5.11: Messflug FT 1-11.

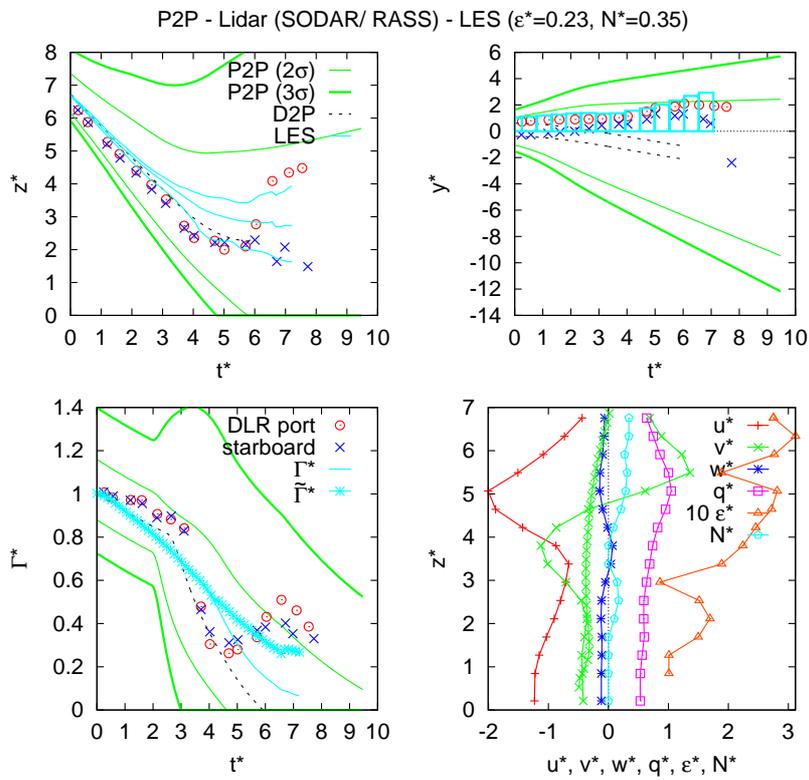


Abbildung 5.12: Messflug FT 2-11.

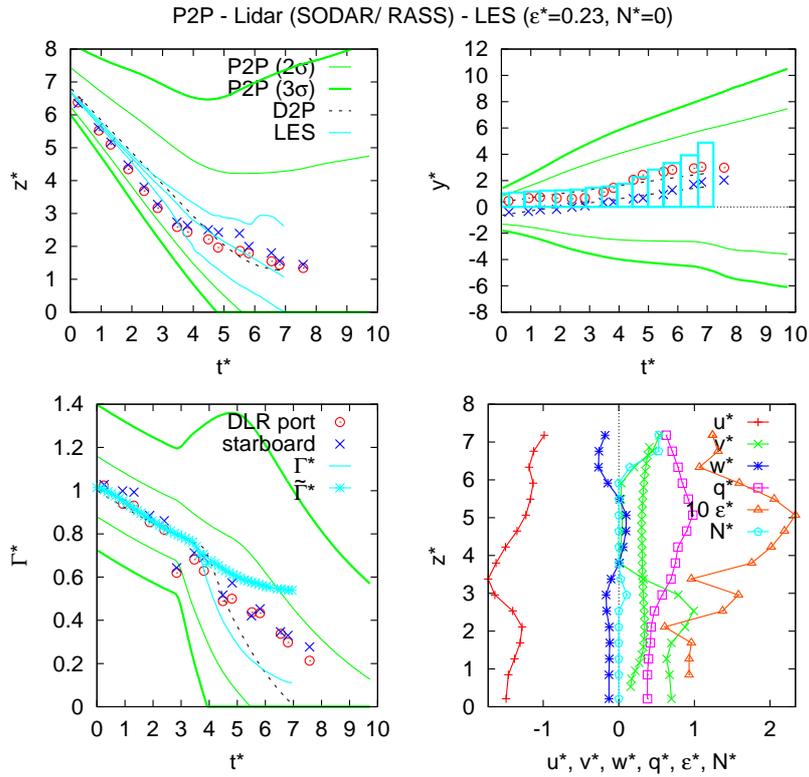


Abbildung 5.13: Messflug FT 2-03.

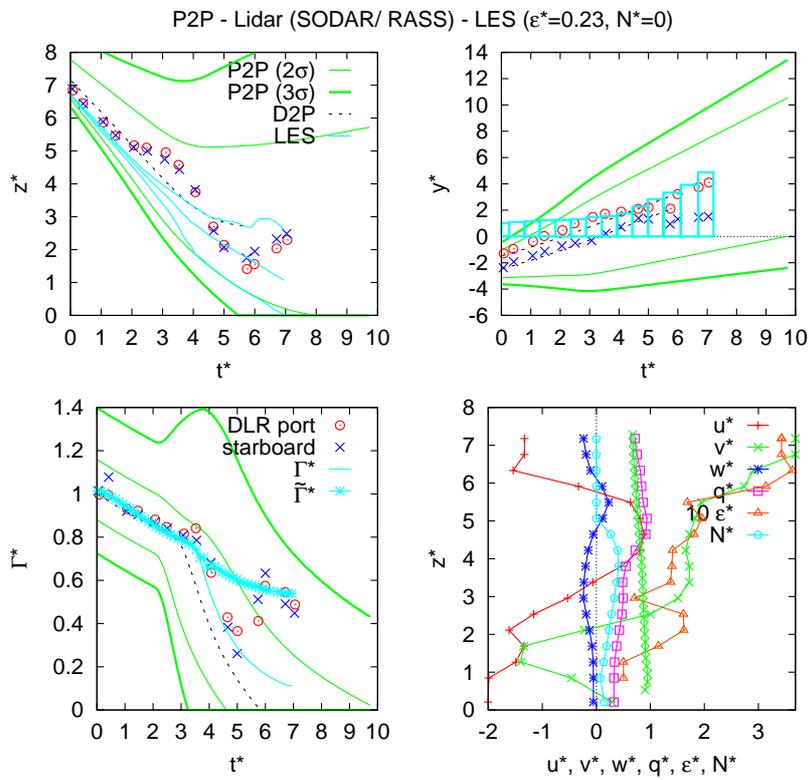


Abbildung 5.14: Messflug FT 1-10.

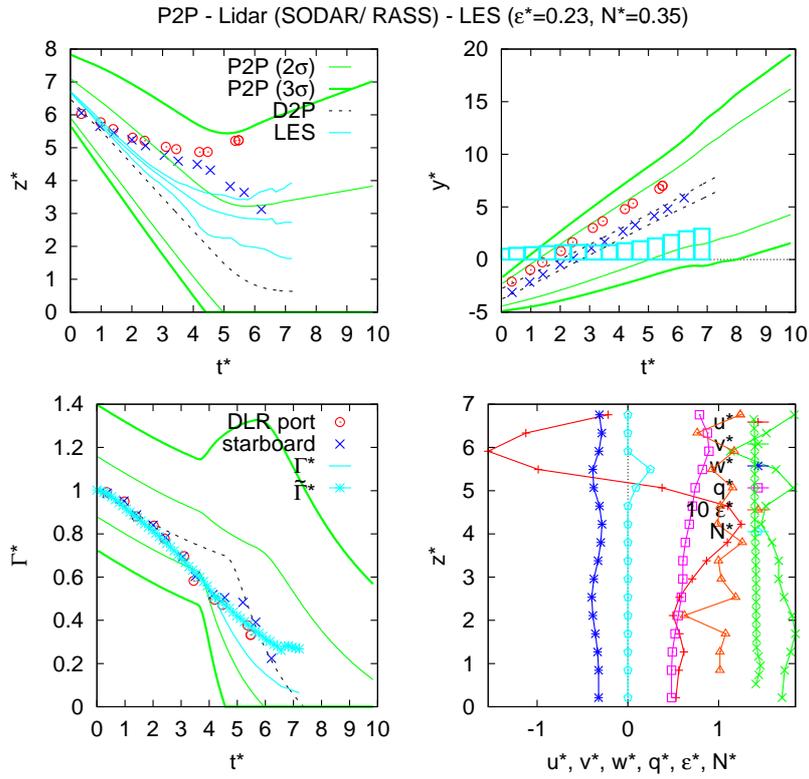


Abbildung 5.15: Messflug FT 1-04.

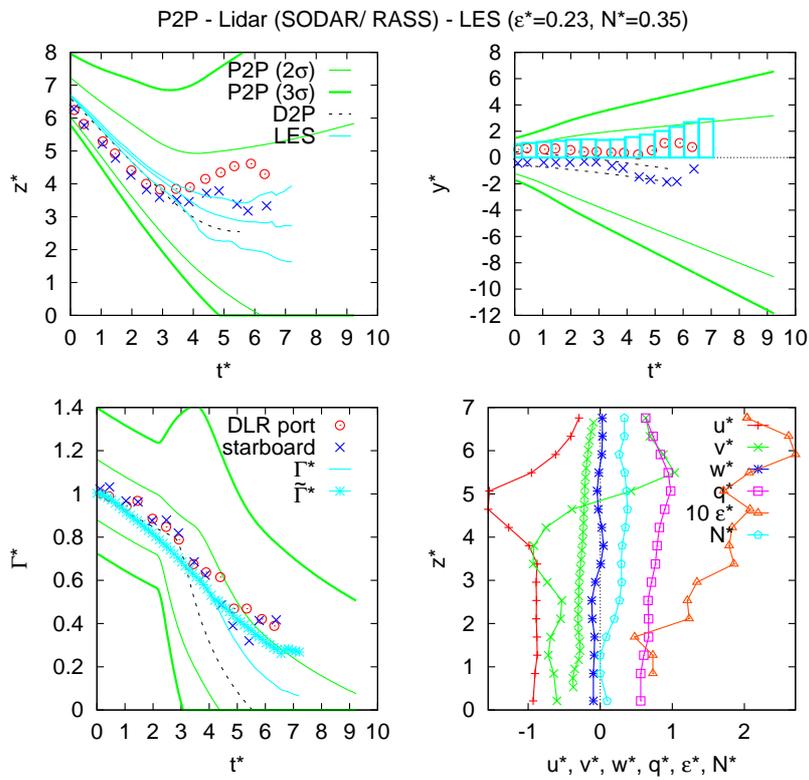


Abbildung 5.16: Messflug FT 2-13.

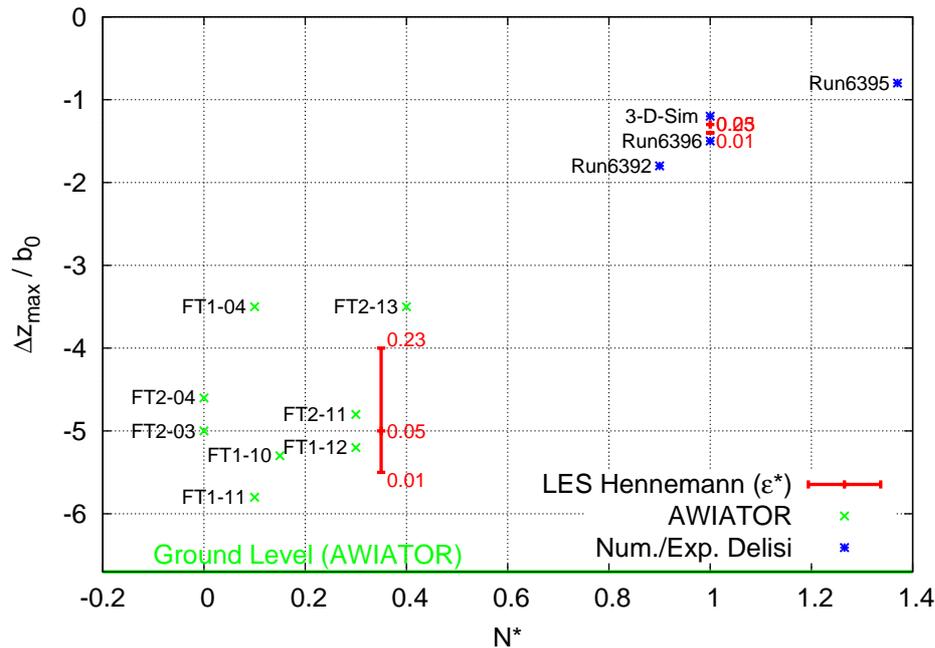


Abbildung 5.17: Maximal erzielte Absinktiepen aus LES, AWIATOR Messungen und Vergleichsdaten von Delisi & Robins (2000).

aus lassen sich Rückschlüsse ziehen, ob sich Ringstrukturen gebildet haben und welche Teile der Ringe beobachtet wurden. Es zeigt sich, dass die maximale simulierte Wirbelringbreite immer größer als die beobachtete Maximalbreite ist (abgesehen von einem einzelnen Messwert in Abb. 5.12).

Die zuvor beschriebenen Ausreißer der gemessenen Zirkulationswerte im Linkingbereich sind insbesondere bei Abb. 5.10 und Abb. 5.14 auffällig. In beiden Fällen ist die Wirbelschleppenstruktur jedoch noch intakt, weil im weiteren Verlauf wieder größere Werte gefunden wurden.

Da sich von allen drei Parametern Hinweise für die Existenz einer Ringstruktur ableiten lassen, sollen diese kurz analysiert und zusammengefasst werden. Zuverlässigster Indikator ist eine Messlücke mit nachfolgend intakter und verhältnismäßig hoher Zirkulation. Da die mit dem Lidar ausgewertete Zirkulation für von  $90^\circ$  zur Wirbelachse abweichenden Beobachtungswinkeln unterschätzt wird, variieren die gemessenen Zirkulationswerte also zusätzlich in Abhängigkeit der Orientierung der Wirbelkernlinie, damit ist die Fluktuation auch technisch bedingt stärker als im Parallelwirbelsystem. Drittens lassen besonders große maximale Abstände zwischen den beiden Wirbeln vermuten, dass das Parallelwirbelsystem in seiner ursprünglichen Form nicht mehr existiert. In Tabelle 5.3 sind diese Indikatoren geordnet nach Relevanz für die ausgewählten acht Fälle dargestellt. Dabei bedeuten die subjektiven Einschätzungen: „++“ trifft absolut zu, „+“ trifft zu, „o“ könnte zutreffen, „-“ trifft eher nicht zu, „--“ trifft sicher nicht zu.

Die Gesamteinschätzung in der letzten Spalte, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich ein Wirbelring ausgebildet haben könnte, ergibt sich aus den angeführten Indikatoren. Aufgrund der in allen numerischen Simulationen vorhandenen Beeinflussung der Ringbildung durch die periodischen Ränder ist diese experimentelle Einschätzung ein erstes Anzeichen für die tatsächliche

Flug-ID	Messlücke	Flukt. Zirkulation	$y_{max}^*$	$z_{max}^*$	Urteil
2-04	++	+	++	++	++
1-12	--	++	++	--	++
1-11	--	--	++	o	o
2-11	-	o	+	++	+
2-03	--	o	-	--	-
1-10	-	++	+	-	+
1-04	--	--	-	o	-
2-13	--	-	+	o	o

Tabelle 5.3: Subjektive Einschätzung anhand verschiedener Kriterien, ob sich Wirbelringe gebildet haben könnten.

Häufigkeit von ringförmigen Strukturen der Wirbelschlepe im Endstadium, welche hier mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % angegeben werden kann.

### Erzeugung von Visualisierungsdaten

Die Aufzeichnung der Wirbelvisualisierungen erfolgte anderntags von Bord der Cessna Citation des NLR, die den Gleitpfad FL-75 nutzte und vertikal von unten die absinkende Wirbelschlepe des A340 (FL-90) dokumentierte. Diese wurde mithilfe von Rauchgeneratoren sichtbar gemacht, welche unter den Flügeln auf Höhe der Landeklappen befestigt waren. Die meteorologischen Komponenten Geschwindigkeit und Temperatur wurden am Nasenmast der Cessna gemessen, wobei die Fluktuationswerte durch Verwendung eines Hochpassfilters ermittelt wurden.

Beide Flugzeuge flogen während des Experiments achsenparallel und in entgegengesetzter Richtung, so dass sich der Zusammenhang aus Zeit und Abstand über die Geschwindigkeitsdifferenz beider Flugzeuge ergibt. Insgesamt wurden sieben Messflüge aufgezeichnet, die sich durch drei verschiedene Konfigurationen der Landeklappen unterschieden. Da trotz ähnlicher äußerer Bedingungen die Variation des beobachtbaren Wirbelschleppenverhaltens innerhalb einer Konfiguration größer war als die Variation zwischen den Konfigurationen, wurde deren Einfluss als gering eingestuft. Im Folgenden werden daher alle Messungen gleichermaßen zu Vergleichszwecken mit den vorliegenden Large Eddy Simulationen eingesetzt.

Die gewonnenen Daten liegen als „stitched data“ vor, das bedeutet sie sind eine Aneinanderreihung von in Flugrichtung sehr kurzen Videosequenzen mit einer Länge von jeweils 3.2 m (entspricht Zeitintervallen von 40 ms). Dabei ist zu beachten, dass durch das Absinken der Wirbelschlepe eine (geringfügige) Verbreiterung der Wirbelschlepe in Spannweitenrichtung vorgetäuscht wird, die sich aus dem Abstand zur Kamera ergibt.

Daraus resultiert ein in Zeit und Raum voranschreitender Verlauf, welcher beispielhaft in Abbildung 5.18 dargestellt ist, und in dem die Entwicklung von  $t^* = 4.16$  bis  $t^* = 6.24$  mit dreifacher Vergrößerung der Breite (y-Richtung) zu sehen ist.



Abbildung 5.18: „Stitched Data“ aus AWIATOR-Flug 7 von  $t^* = 4.16$  bis  $t^* = 6.24$  mit dreifacher Vergrößerung der Länge in  $y$ -Richtung.

Während dieser Zeit wird die axiale Bewegung der Wirbelschleppe vernachlässigt, stattdessen wird die zugehörige Distanz nur noch anhand der Geschwindigkeit der aufzeichnenden Cessna berechnet:  $\Delta x/b_0 = 57$  ( $\cong 2.7$  km) (de Bruin & Kannemans, 2004). Man liest 4 Crow-Wellenlängen auf ungefähr 63% der Strecke, somit ergibt sich  $\lambda_{Crow}/b_0 \approx 9$ .

Die gewonnenen zweidimensionalen Videostreifen erlauben nur bedingt Vergleiche mit den dreidimensionalen LES-Ergebnissen. Während das Auftreten bestimmter Ereignisse (z.B. Ringbildung) im Experiment problemlos erfasst werden kann, werden beobachtete Krümmungen durch das Fehlen der dritten Dimension unterschätzt. Eine zweidimensionale Abschätzung der Übereinstimmung zwischen Simulation und Experiment ist jedoch möglich.

Dazu wird aus den jpg-Bilddateien aus AWIATOR anhand der Helligkeit jedes einzelnen Pixels die Wirbelkernlinie detektiert. Wegen der großen Breite der Bilder werden diese zuvor in kleine, gleichmäßige Abschnitte eingeteilt, deren Länge ungefähr der des simulierten Rechengebiets entspricht. Zur besseren Vergleichbarkeit der Resultate werden die Pixel der Wirbelkernlinie in solchen Abständen verwendet, die denen der LES entsprechen, damit der Krümmungsalgorithmus aus Kap. 3.4 sie analog verarbeiten kann.

Dieses Programm zur Helligkeitserkennung wurde mit IDL geschrieben, welches mehrere Möglichkeiten besitzt, die Suche entsprechend dem Wirbelschleppenverlauf anzupassen. So erfolgt sie wie beim Wirbelsuchalgorithmus der LES in Richtung der Flugachse, wobei vom Ende der ersten Wirbelröhre ein Übergang zur gegenüberliegenden Wirbelröhre stattfindet. Vereinfachend wird auf jeder zur Flugrichtung orthogonalen Ebene das Helligkeitsmaximum gesucht. Diese Vorgehensweise entspricht übertragen auf die numerischen Simulationen der scheibenweisen Auswertung, allerdings gibt es aus den Videoaufzeichnungen nur wenige Abschnitte, die eine vollständig dreidimensionale Auswertung erfordern würden. Aufgrund des begrenzten Bildmaterials ist ein manuelles Ausbessern der unvollständig detektierten Wirbelkernlinie, wie es im Folgenden beschrieben wird, effizienter, als das aufwändige Entwickeln einer Methode, die auch die kritischen Wirbelsegmente fehlerlos auswerten kann.

Die erforderliche Helligkeit lässt sich für beide Wirbel unabhängig als Prozentsatz vom globalen Maximalwert festlegen. Damit beide Maxima nicht auf zwei unmittelbar benachbarte Pixel fallen, wird nach dem ersten Lauf der Bereich des jeweiligen Maximalwert mit einer Funktion  $1 - f$  multipliziert, wobei  $f$  die Gauss'sche Normalverteilungsfunktion ist. Damit lassen sich die Helligkeitswerte im Bereich der gefundenen Wirbelsegmente absenken. Ihre Breite ist dabei frei bestimmbar, muss jedoch umso sorgfältiger ausgewählt werden, je näher sich das Wirbelpaar kommt. Zusätzlich dient eine Glättungsfunktion zur Vermeidung einzelner Abweichungen. Um komplexe Strukturen zu finden, können mit obigen Mitteln die Bedingungen so eingestellt werden, dass der Algorithmus vorerst noch nicht alle Punkte findet. Im Weiteren ist es möglich, die offengebliebenen Lücken interaktiv innerhalb der Grafik per Mausklick zu schliessen. Die Abstände sind hierbei irrelevant, weil im Anschluss die ausgegebenen Punkte entsprechend den gewünschten Abständen neu berechnet werden. Bei der Skalierung der  $y$ -Achse wird die Absinkbewegung der Wirbel und die damit einhergehende breitere Darstellung berücksichtigt,

indem während der Diffusionsphase konstantes  $w_0$  angenommen wird und anschließend mit konstanter Absinktiefe gerechnet wird. Schlussendlich wird eine Datei ausgegeben, die in ihrer Struktur der Ausgabedatei des Wirbelsuchalgorithmus gleicht, jedoch nur die bestimmten x- und y-Positionen der Wirbel enthält.

### Vergleich des Zeitpunkts der Ringbildung

In Tabelle 5.4 werden die maximale Beobachtungsdauer und der Zeitpunkt des ersten Linkings bei verschiedenen meteorologischen Bedingungen mit der entsprechenden LES verglichen.

Nr	Status Klappen	$\epsilon^*$	$N^*$	$t_{max}^*$	$t_{1.Linking}^*$
LES	-	0.05	0.35	-	6.2
1	base	0.058	0.35	5.5	5.0
2	base	0.063	0.40	4.3	-
3	base	0.064	0.40	4.5	4.2
4	1	0.058	0.34	5.6	-
5	1	0.060	0.28	5.4	-
6	2	0.066	0.30	6.2	5.8
7	2	0.065	0.28	7.7	5.3

Tabelle 5.4: LES im Vergleich zu Messflügen aus AWIATOR. Dargestellt sind Landeklappenkonfiguration, turbulente Dissipationsrate, Temperaturschichtung, maximale Beobachtungszeit und ggf. Zeitpunkt der ersten Ringbildung.

Die Landeklappenstellungen 1 und 2 bezeichnen die in de Bruin & Kannemans (2004) beschriebenen Konfigurationen, die Verbesserungen im Wirbelschleppenzerfall erreichen sollten. Hingegen zeigt sich, dass der Zerfall eher stärker mit der Temperaturschichtung korreliert, da bei  $N^* = 0.4$  unabhängig von der Klappenstellung die kürzesten Lebenszeiten erzielt wurden.

Der im Vergleich zu den Messungen leicht verspätete Beginn der Ringbildung dürfte einmal vom etwas geringeren Turbulenzniveau verursacht sein, und andererseits an der in dieser LES [ $\epsilon^* = 0.05$ ,  $N^* = 0.35$ ] relativ späten Entwicklung eines Wirbelrings liegen (wie bereits in Kapitel 4.3 beschrieben).

### Vergleich der zweidimensionalen Krümmungen

Der Vergleich der Krümmungen der Wirbelkernlinie soll anhand solcher Beispiele durchgeführt werden, bei welchen die Ringbildung bereits stattgefunden hat. Abbildung 5.19 zeigt zwei Beispielsituationen, wobei der Zusammenschluss in Flug 1 ( $t^* = 5.0$ , linke Spalte) erst kurz zuvor und in Flug 7 ( $t^* = 7.2$ , rechte Spalte) vor einiger Zeit (siehe Tabelle 5.4) erfolgt ist.

Die Darstellung des jeweils rechts abgebildeten Flugs 7 umfasst den doppelten Suchbereich, um die Krümmungen gemeinsam auszuwerten. Die im Übergangsbereich erkennbare Gerade

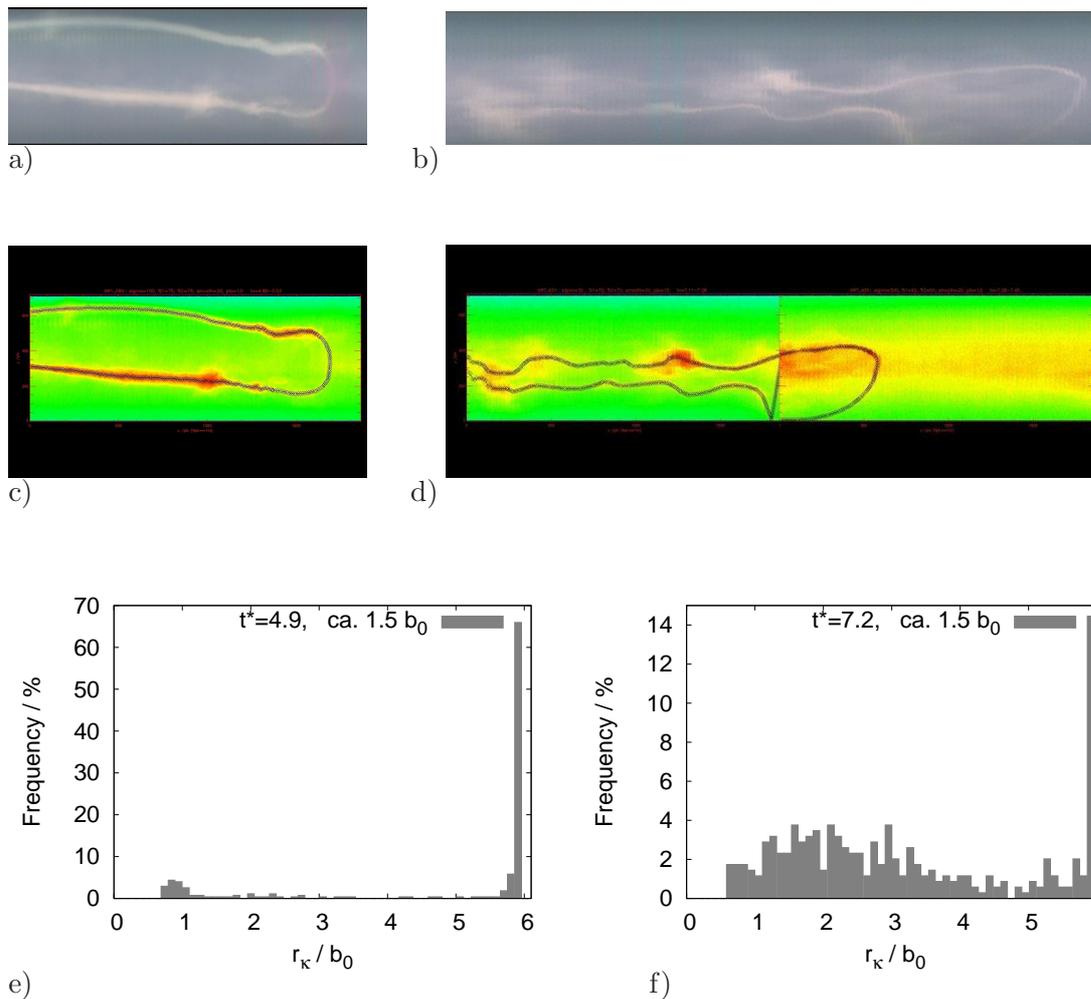


Abbildung 5.19: a) und b) Fotoaufnahmen der Wirbelschlepe aus AWIATOR, c) und d) Bestimmung Wirbelkernlinie mit IDL, e) und f) resultierende Häufigkeitsverteilungen der erzielten Krümmungsradien. a), c) und e) enthalten Daten von AWIATOR-Flug 1 zu  $t^* = 5.0$  während in b), d) und f) Flug 7 zu  $t^* = 7.2$  gezeigt wird.

ließ sich bei der Wirbeldetektion nicht vermeiden, zur Ermittlung der Krümmungsstatistik wurde sie jedoch ignoriert.

Im Fall 1 krümmen sich die Wirbelröhren abgesehen vom Linkingbereich kaum, während im Fall 7 mehrfach kleinskalig gekrümmte Bereiche vorhanden sind. Als Vergleichsgrafik der LESTUF-Simulation für einen bereits formierten Wirbelring dient Abbildung 5.20 mit den meteorologischen Parametern aus Tabelle 5.4 zum Zeitpunkt  $t^* = 6.4$  und der zugehörigen Häufigkeitsverteilung der ermittelten zweidimensionalen Krümmungsradien.

Anhand der farbkodierten Zirkulation offenbart sich zum einen die Asymmetrie der beiden Wirbelröhren, zum anderen zeigt sich (erneut) die indifferente Geschwindigkeits- und Wirbelstärkeverteilung am linken Übergangsbereich. Das simulierte Wirbelschleppenstadium enthält Elemente aus beiden Beispielfällen, so erkennt man in Fall 1 den gleichförmigen Übergang mit nahezu konstantem Radius am rechten Rand der LES, während Fall 7 den welligen Cha-

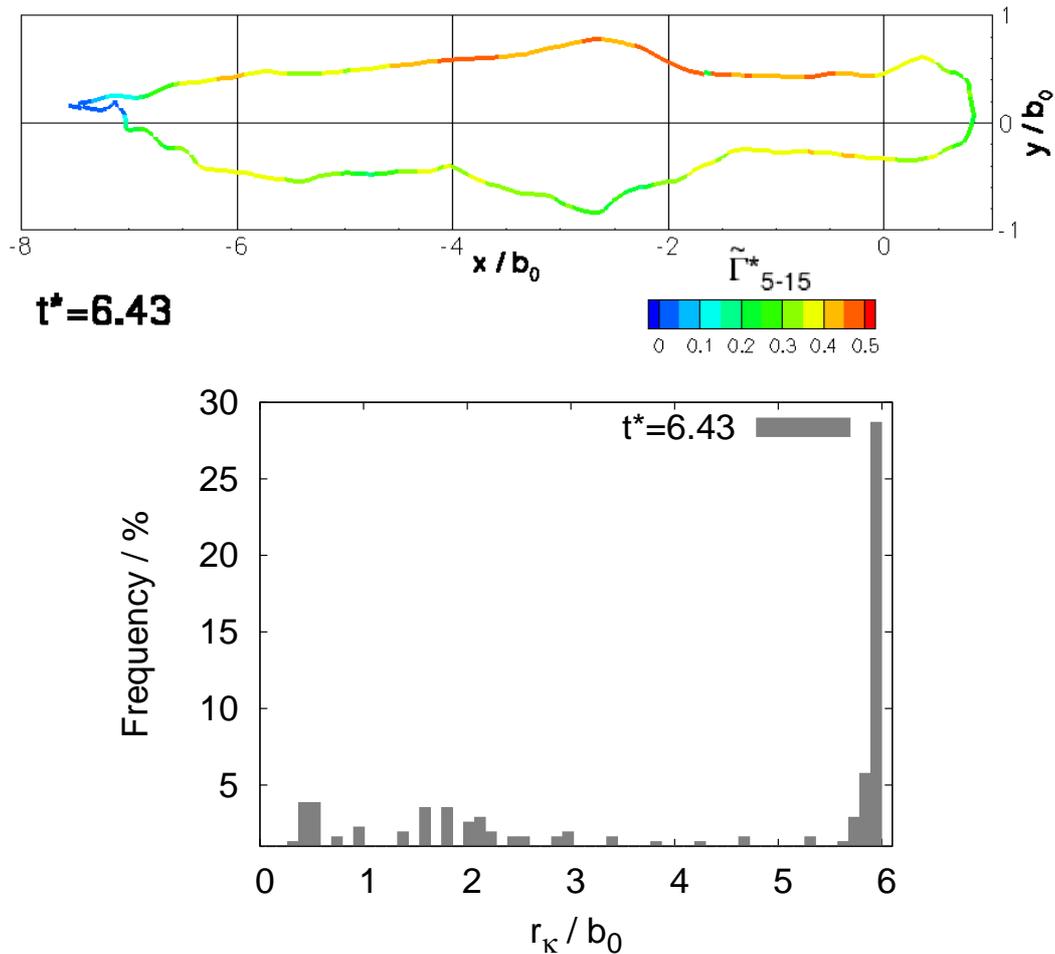


Abbildung 5.20: Vergleichende LES aus Tabelle 5.4 zur Zeit  $t^* = 6.4$  mit farbkodierter Zirkulation oben und zugehörige Häufigkeitsverteilung der zweidimensionalen Krümmungsradien unten.

rakter der verbleibenden Wirbel in Flugrichtung wiedergibt. Schwer erkennbar ist dagegen ob am linken Rand in Abb. 5.19 b) ebenfalls ein Zusammenschluss stattgefunden hat, wie ihn die Simulation prognostiziert. Auch die aufgrund der Helligkeitsunterschiede naheliegende ungleiche Zirkulationsverteilung von oberem und unterem Wirbel des Falls 7 kann in der LES nachvollzogen werden.

Die große Schwierigkeit des visuellen Vergleichs liegt einerseits an der geringen Anzahl an experimentellen Daten, andererseits ist das Verhalten der Wirbelschleppen insbesondere im Experiment zu einem großen Teil durch zufällige Ereignisse geprägt, deswegen können einzelne Merkmale nicht unmittelbar verglichen werden.

Die Ähnlichkeit von Simulation und Videoaufzeichnungen sind jedoch grundsätzlich gut erkennbar. Anhand der Vielfalt an Entwicklungsmöglichkeiten erscheint ein qualitativer Vergleich mit auftretenden Phänomenen der Wirbelschleppe als bestmögliche Nutzung des zur Verfügung stehenden Datenmaterials.

## 5.2 Zusammenfassung und Ausblick

Zur Validierung der durchgeführten Large-Eddy Simulationen wurden durch verschiedene Methoden erzielte Ergebnisse von unterschiedlichen Forschergruppen berücksichtigt und mit in dieser Arbeit erzielten Resultaten verglichen. Proctor nutzte einen mit LESTUF vergleichbaren Code zur Untersuchung des Wirbelschleppenverhaltens bis zu Zeitpunkten, zu welchen die Zirkulation nicht mehr abgebildet werden konnte. Sarpkaya hingegen erklärte die erfolgte Ringbildung zum Ende des Lebenszyklus der Wirbelschleppe, und konzentrierte sich insbesondere darauf diesen Zeitpunkt so präzise wie möglich vorherzusagen. Delisi & Robins näherten sich dem Problem mit Experimenten im Wasserschleppkanal, und verglichen ihre Ergebnisse u.a. mit am Flughafen ermittelten Lidarmessungen. Holzäpfel verwendete für seine numerischen Simulationen bereits LESTUF, jedoch mit eingeschränkten Möglichkeiten bezüglich der numerischen Auflösung ( $\Delta_x \neq \Delta_y, \Delta_z$ ), so dass die dreidimensionale Auswertung noch nicht erfolgen konnte. Davon ausgehend und unter Zuhilfenahme der kontinuierlich wachsenden Anzahl an Messdaten entwickelte er das probabilistische Wirbelschleppenvorhersagemodul P2P, welches somit die Erfahrung verschiedener Verfahren beinhaltet. In AWIATOR wurden Feldbeobachtungen mit der Prognose von P2P verglichen, außerdem wurden Wirbelschleppen eines A340 mit Rauch sichtbar gemacht und als Videostreifen aufgezeichnet.

Trotz der geringen Diskretisierungsordnung LESTUFs sind die erzielten Ergebnisse sehr ähnlich zu allen hier vorgestellten Vergleichsuntersuchungen. Lediglich der Einfluss der verschiedenen turbulenten Längenskalen des Hintergrundfeldes und des unterschiedlich aufgelösten Kernradius unterscheidet die mit LESTUF erzielten Resultate z.B. von jenen Proctors. Auch im Benchmark mit anderen europäischen Codes sind die Differenzen der entscheidenden Parameter sehr gering, wie in Kapitel 2.5.6 gezeigt wurde. Das bestätigt erneut die Qualität der mit LESTUF erzielbaren Resultate.

Die Messungen im Wasserschleppkanal von Delisi & Robins zeigten vor allem die enorme Langlebigkeit der Wirbelringe (bis  $t^* \approx 20$ ). In dieser Arbeit werden Wirbelschleppen zum Teil bis zu einem Alter von fast 15 Zeiteinheiten analysiert und dabei unter anderem eine Aufspaltung des Wirbelrings in zwei Einzelringe beobachtet.

Gegenüber den LESTUF-Simulationen von Holzäpfel zeigen die neuen Ergebnisse einen beachtlichen Fortschritt, da die Bedeutung der dreidimensionalen Wirbelstrukturen größer zu sein scheint als bisher angenommen. Durch die hervorragende Übereinstimmung der analysierten Lidardaten aus AWIATOR mit den neuen dreidimensionalen Auswertungen ergibt sich die Möglichkeit, die Prognosen von P2P auf eine noch fundiertere Basis zu stellen. Dies beinhaltet für die Zukunft die Integration des Wirbelrings mit den daraus resultierenden Parameterverläufen für  $\Delta z^*$  und  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$  und insbesondere Annahmen dazu, ob und an welchen Stellen sich Wirbelringe gebildet haben.

Kritisch anzumerken ist hingegen der unvermeidbare Einfluss der periodischen Randbedingungen, die die Ringbildung begünstigen. Obwohl sich gezeigt hat, dass auch die Simulation einer einzigen Wellenlänge der Crow-Instabilität zu realistischen Zerfallsverläufen führt, kann die große Variabilität der möglichen geometrischen Formen und der damit einhergehenden Verteilung von Zirkulation nicht vollständig wiedergegeben werden. Wünschenswert wäre daher die Simulation der Wirbelschleppe in einem Rechengebiet, in welchem sich mehrere Wellenlängen der Crow-Instabilität ausbilden können, womit auch das Problem der (zu) kleinen Längenskalen der Turbulenz hinfällig wäre.

Problematisch bei der Vergrößerung des Simulationsgebiets ist dabei die Vielzahl an physikalischen und numerischen Restriktionen, die die Beibehaltung der bisherigen Auflösung erforderlich machen. Deshalb sind für eine Gebietserweiterung entsprechend mehr Arbeitsspeicher und Rechenzeit nötig. Hauptsächlich werden zur Simulation mehrerer Crow-Wellenlängen mehr Gitterpunkte in Flugrichtung benötigt. Jedoch kann LESTUF aus Gründen der Datenverwaltung nicht mehr als doppelt so viele Gitterpunkte in Flugrichtung als in einer der beiden übrigen Richtungen bearbeiten. Außerdem funktioniert das Konzept der Spiegelwirbel zur Vermeidung von unphysikalischer Randvorticity nur bei annähernd gleich großer Vertikal- und Lateralrichtung zuverlässig (siehe Kapitel 2.5.1). Der Ansatz quaderförmiger Maschen wurde bereits von Holzäpfel et al. (2001) verfolgt, resultierte jedoch in unterschätzter Beeinflussung der Wirbelschlepe durch die Crow-Instabilität und in mangelnder Berücksichtigung von Krümmungseffekten.

Eine Vergrößerung aller Maschen führt zu deutlich überschätzten Kernradien, da diese zur Vermeidung numerischer Oszillationen (der Geschwindigkeiten) mit mindestens drei Maschen aufgelöst sein müssen. Unrealistisch große Kernradien (bezogen auf  $b_0$ ) verursachen einerseits irreguläre elliptische Instabilitäten, andererseits führt die Verwendung vom  $\Gamma_{5-15}^*$  bzw.  $\tilde{\Gamma}_{5-15}^*$  zur Unterschätzung der aktuellen Zirkulationswerte.

### 5.2.1 Der Zeitpunkt der Ringbildung

Schon lange wird von einigen Spezialisten die Auffassung vertreten, dass der für die Luftfahrt relevante Lebenszyklus der Wirbelschlepe mit der Ringbildung endet (Crow & Bate (1976), Han et al. (2000), Greene (1986), Loucel & Crouch (2005)). Daher wurde mit großem Aufwand daran geforscht, diesen Zeitpunkt präzise zu bestimmen. Das führte zu den im vorigen Kapitel vorgestellten Modellen von Greene bzw. Sarpkaya und Holzäpfel, bei welchen im weiteren zeitlichen Verlauf nur noch von geringer Zirkulation ausgegangen wird, da diese entweder per se vernachlässigt wurde (Greene) oder so rapide abnahm (Holzäpfel), dass ihre Vernachlässigung ebenfalls gerechtfertigt erschien.

Obwohl die axiale Rechengebietsgröße  $L_x$  des Codes TASS  $20 b_0$  und die von LESTUF  $8.5 b_0$  betrug, sind die Zeitpunkte der Annäherung und darauffolgender Ringbildung sehr ähnlich. Wie bereits angesprochen, wurde auch mit LESTUF eine Simulation in einem Rechengebiet durchgeführt, welches mit  $L_x/b_0 = 13.3$  ungefähr 1.5-mal größer als die Crow-Wellenlänge war. Der resultierende Zeitpunkt des *ersten* Zusammenschlusses ordnete sich dabei sehr gut im erwarteten Zeitbereich ein, der in sonstigen Berechnungen von LESTUF und TASS beobachtet worden war.

Die Aussage, dass die erfolgte Ringbildung den Zeitraum eines existierenden Gefährdungsbereichs abschließt, kann also zweifach interpretiert werden. In dieser Arbeit wurde erneut bestätigt, dass mit der gegenseitigen Beeinflussung der Wirbel die Zirkulation stark abnimmt. Es scheint, dass diese Beeinflussung in ungeschichteter Atmosphäre zuverlässig eintritt, während sie in starker stabiler Temperaturschichtung häufig gar nicht nötig ist, weil dadurch die Zirkulation der Einzelwirbel bereits stark reduziert wird.

Andererseits kann diese Aussage als Umgehung der Aufgabe verstanden werden, die weitere Entwicklung realistisch zu simulieren und zu prognostizieren. Simulationen von ausgewählten Einzelfällen können diese Aufgabe sicherlich zur Zufriedenheit lösen, je nach dem wie komplex das Verhalten der umgebenden Luftmassen repräsentiert ist. Um jedoch zeitnahe Vorhersagen zur Wirbelringposition und -stärke zu treffen, müssen die Bewegungen in der Atmosphäre

noch viel präziser bekannt sein, als dies heute der Fall ist. (Das schließt weitere Faktoren ein wie beispielsweise die Oberflächenbeschaffenheit des Bodens, wodurch kleinräumig Winde verursacht werden können, die Wirbelringe verformen und transportieren.)

Jedoch reduziert sich das Gefährdungspotential für nachfolgende Flugzeuge insofern, als kurze Wirbelschleppeneinflüge nicht ausreichen, um ihnen ein es gefährdendes Rollmoment aufzuerlegen. Zusätzlich bewirkt die verstärkte Krümmung mit Radien in der Größenordnung von  $1 b_0$ , dass nachfolgende Flugzeuge unmöglich größere Teilstrecken des Wirbels durchfliegen können.

Zielsetzung für anschließende Arbeiten könnte daher sein, von den bestimmten Wirbelformparametern Grenzen abzuleiten, ab wann ein ungefährlicher Wirbelschleppendurchflug gewährleistet werden kann und ob die Ringbildung hierfür ein hinreichendes Kriterium darstellt. Zusätzlich wäre desweiteren zu prüfen, in wie weit die erste Ringbildung gleichbedeutend mit einer ununterbrochenen Reihe an Wirbelringen ist. Da dies nicht zwangsweise zu erwarten ist, stellt sich die Frage der Häufigkeit und Größe von Ringstrukturen als entscheidend dar für weitere Fortschritte in der Prognostizierbarkeit der Gefährdung durch Wirbelschleppen.



## 6 Schlussfolgerungen

Ziel der Arbeit ist die detaillierte Untersuchung der Deformation und des Zerfalls von Flugzeugwirbelschleppen in der realitätsnah abgebildeten Atmosphäre, welche durch variierende Temperaturschichtung und verschieden starke turbulente Hintergrundgeschwindigkeitsfelder charakterisiert ist. Voraussetzung für eine vollständig dreidimensionale Auswertung der Wirbelkernlinie sind Large-Eddy Simulationen mit einem kubischen Rechengitter ( $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ ). Um Krümmungen und Lagewinkel der Wirbelschleppenkernlinie zu ermitteln, muss die Detektion des Wirbelkerns im Gegensatz zu bisherigen Methoden unabhängig von der räumlichen Orientierung stattfinden. Deswegen wird ein Prädiktor-Korrektor Verfahren entwickelt, bei welchem ausgehend von einem beliebigen Startpunkt auf der Wirbelkernlinie die mittlere Richtung der Wirbelstärke zur Bestimmung der Prädiktorrichtung verwendet wird. Es stellt sich heraus, dass die Suche nach Druckminima als Korrektorschritt am besten geeignet ist, die Wirbelkernlinie mit großer Zuverlässigkeit zu identifizieren.

Zur Beschreibung der Hintergrundfelder dienen die Turbulenzparameter Dissipationsrate und integrales Längenmaß sowie die Brunt-Väisälä Frequenz, die die Stärke der Temperaturschichtung angibt. Aufgrund der begrenzten Anzahl an Gitterpunkten kann das integrale Längenmaß, welches als mittlere Größe der turbulenten Wirbel interpretiert werden kann, nicht beliebig variiert werden. Sobald sich das geforderte Kolmogorov'sche  $k^{-5/3}$ -Spektrum als Maß für das vollständig entwickelte Turbulenzfeld eingestellt hat bzw. die Dissipationsrate konstant geworden ist (siehe Abb. 4.1), kann das gegensinnig rotierende Wirbelpaar in Form von Lamb-Oseen Wirbeln eingesetzt werden. Dabei wird als Erzeugerflugzeug ein Airbus A340-300 angenommen. Da jedoch alle verwendeten Parameter über flugzeugspezifische Größen normiert betrachtet werden, ist die Übertragbarkeit auf andere große zivile Luftfahrzeuge im Rahmen der ansonsten erzielbaren Genauigkeit gegeben.

Im untersuchten Zweiwirbelssystem resultieren Krümmungen der Wirbelkernlinie vor allem aus der langwelligeren Crow-Instabilität oder durch die Produktion barokliner Wirbelstärke in der stabil geschichteten Atmosphäre. Um die lokalen Krümmungsradien der Wirbelschleppe zu berechnen, muss die Wirbelkernlinie in Segmente unterteilt werden. Kapitel 3.4.1 hat gezeigt, dass eine Segmentlänge von 1.5 anfänglichen Wirbelabständen ( $\hat{=} 1.5 b_0$ ) am besten geeignet ist, um Krümmungsradien in der Größenordnung der zerfallenden Wirbelschleppe zu bestimmen. Weiterhin kann durch Abb. 3.4 dargelegt werden, dass die deformierte Wirbelschleppe abschnittsweise in guter Näherung innerhalb einer Ebene liegt. Deshalb kann der Krümmungsalgorithmus quasi-2D konzipiert werden. Über ein Suchverfahren wird die Ebene ermittelt, in welcher im nächsten Schritt in zwei Iterationen mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate der Krümmungsradius an jeder Position der Wirbelkernlinie berechnet wird. Die aus den genannten Annahmen resultierenden Fehler hängen insbesondere von der Stärke der Temperaturschichtung ab, und erreichen im Mittel maximal 10% des dabei gefundenen Krümmungsradius. Zusätzlich werden für jede Position der Wirbelkernlinie Zirkulation (sowohl in Ebenen orthogonal zur Flugrichtung als auch in Ebenen orthogonal zur Wirbelkernlinie), Kernradius, maximale Tangential- und Axialgeschwindigkeit und Lagewinkel der Wirbelschleppe (Azimuth-, Inklinations- und Kippwinkel) ausgewertet.

Da davon ausgegangen werden kann, dass ein Einflug in deformierte Wirbelschleppen weit weniger gefährliche Rollmomente erzeugt als ein Einflug in ein geradlinige Parallelwirbelsystem, werden in den Abbildungen 4.25 bis 4.31 Häufigkeitsverteilungen von Krümmungen und Lagewinkeln in Abhängigkeit des Wirbelalters bzw. der Zirkulation erstellt. Es zeigt sich, dass die Deformation der Wirbelschleppe primär mit dem aktuellen Entwicklungsstadium der Wirbelringe korreliert. Daher sind zumeist bis kurz vor der Ringbildung wenige Verformungen erkennbar, während ab dem Zusammenschluss der gegenüberliegenden Wirbelröhren sowohl die Häufigkeit von starken Krümmungen als auch die von weit ausgelenkten Bereichen der Wirbelkernlinie sprunghaft ansteigt. Der Zeitpunkt der Ringbildung ist dabei primär von der Dissipationsrate abhängig (Abb. 5.3), während der Einfluss der turbulenten Längenskalen und der Temperaturschichtung nicht entscheidend ist. Bei den Krümmungsradien dominiert unmittelbar nach der Ringbildung ein typischer mittlerer Kernradius von ca.  $1 b_0$ , den alle Simulationen annähernd erreichen, und zu welchem außerdem die Streuung der Krümmungsradien aus der Mittelung über die gesamte Wirbelkernlinie minimal wurde. Während dieser Krümmungsradius in LES der stabil geschichteten Atmosphäre im weiteren Verlauf erhalten bleibt, vergrößert sich der Krümmungsradius bei neutraler Schichtung zu Werten von ca.  $2 b_0$  (Abb. 4.22).

Azimuth- und Inklinationswinkel entwickelten sich vor dem Linking nahezu identisch, da der wichtigste Mechanismus zur Entstehung von Krümmung, die Crow-Instabilität, sich in Ebenen entwickelt, welche um ca.  $45^\circ$  zur horizontalen (x,y)-Ebene geneigt sind. Nach der Ringbildung hängt die Häufigkeit dieser Verteilungen vor allem von der Form der Wirbelringe ab. Je eher der Wirbelring einen kreisförmigen Durchmesser besitzt, desto gleichmäßiger sind die resultierenden Winkel verteilt. Hingegen bilden sich stärkere Kippwinkel vor allem in der LES mit den größten turbulenten Längenskalen aus (siehe Abb. 4.20). In dieser Simulation stellt sich schon zu Beginn wahrscheinlich durch eine einzelne, großskalige turbulente Bewegung ein dynamischer Prozess ein, der im weiteren Verlauf aufgrund der nicht mehr vertikalen Geschwindigkeit-induktion kontinuierlich die eine Wirbelröhre gegenüber der anderen vertikal und horizontal verschiebt. Dadurch bleibt die maximale Absinktiefe geringer als in Vergleichssimulationen.

Als sehr aufschlussreich zeigen sich die neuen Zirkulationsverläufe (siehe Abb. 4.17), die in Ebenen orthogonal zur Wirbelkernlinie ausgewertet werden. Der allgemein akzeptierte zweiphasige Zerfall, welcher sich in Diffusionsphase und die Phase des schnellen Zerfalls aufgliedert, gibt das Zerfallsmuster bei Berücksichtigung der Wirbelstärke aller Raumrichtungen nicht korrekt wieder. Vielmehr ist das im Wirbelringregime typische Zerfallsmuster ähnlich dem der Diffusionsphase; es ergibt sich damit ein dreiphasiger Zerfall, solange nicht dominierende Temperaturschichtung die Zerfallsrate weiterhin hoch hält. Es kann gezeigt werden, dass der schnelle Zerfall durch die Ausbildung kleinskaliger Instabilitäten im Linkingbereich immer weiter beschleunigt wird, und dass diese Beschleunigung umso stärker ist, je langsamer der Zerfall in der Diffusionsphase ist (siehe Tabelle 4.4). Unmittelbar nach der Ringbildung kann festgestellt werden, dass durch die Verbindung der beiden Wirbelröhren das Druckfeld im Wirbelzentrum gestört wird, wodurch Axialgeschwindigkeiten im Wirbelkerninneren erzeugt werden, die eine Kernradien aufweitung über den gesamten Wirbelring nach sich ziehen. Es wird anhand von Abb. 4.11 herausgearbeitet, wie diese am Linkingbereich beginnen und sich mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit, die ungefähr der vorherrschenden Tangentialgeschwindigkeit am Wirbelkern entspricht, in alle Richtungen ausbreiten. Der Definition von  $\Gamma_{5-15}^*$  entsprechend bewirkt die Aufweitung des Kernradius einen deutlichen Zirkulationsverlust. Dieser Vorgang charakterisiert den zweiten Teil der Phase des schnellen Zerfalls, wobei dieser weitgehend unabhängig von der Dissipationsrate auftritt.

Das Wirbelringregime wird vor allem durch einen verhältnismäßig langsamen Zirkulationsabbau geprägt. Jedoch finden durch die spezielle Form des Wirbelrings intern Prozesse statt, die die Zirkulation in Ebenen orthogonal zur Spannweitenrichtung zu transportieren scheinen. Der Ringbildungsprozess findet aufgrund der Form der dominierenden Instabilität immer an den jeweils tiefsten Punkten der Wirbelröhre statt. Daher entstehen nach Entwicklung des Rings nahezu vertikal orientierte Wirbelsegmente, die paarweise beieinander liegen und eine Geschwindigkeit zu induzieren, die im Gegensatz zum Parallelwirbelsystem nicht nach unten, sondern zur Wirbelringmitte zeigt. Deswegen reduziert sich zum einen die Vertikalgeschwindigkeit des Gesamtsystems, zum anderen verkürzen sich die Wirbelsegmente in Flugrichtung, während sich solche quer dazu verlängern. Somit scheint in bisherigen Simulationen mit der alleinigen Auswertung der Zirkulation entlang der Flugrichtung die Zirkulation nahezu verschwunden zu sein, während sie sich dieser Arbeit zufolge lediglich umorientiert. Zur Abschätzung der verbleibenden mittleren Absinkgeschwindigkeit kann eine bekannte, analytisch herleitbare Formel Gl. (4.5) zum Transport elliptischer Wirbelringe verwendet werden, wobei der Einsatz der entsprechenden Zahlenwerte zu einer Absinkgeschwindigkeit von 60 % des Anfangswerts des Parallelwirbelsystems führt. Die Abweichung zwischen analytischer und numerischer Lösung beträgt hierbei weniger als 5 %. Für die Entwicklung des Gefahrenpotentials hat sich in der Rollmomentenstudie aus Kapitel 4.4 herausgestellt, dass das vom nachfolgenden Flugzeug erfahrene Rollmoment nach der Ringbildung lokal noch sehr hoch sein kann, im Mittel über eine Rechengebietslänge jedoch kontinuierlich abnimmt (siehe Abb. 4.34 und 4.35). Diese lokalen Maximalwerte sind insbesondere unmittelbar vor der Ringbildung zu erwarten, können jedoch auch zu späteren Zeitpunkten noch auftreten.

Anhand der LES aller vorgestellten Parameterkombinationen wird offensichtlich, dass starke Temperaturschichtung und die damit verbundene Produktion barokliner Wirbelstärke einen sehr effizienten Mechanismus darstellt, primäre Wirbelstärke und damit Zirkulation zu vernichten. Die bisherige Vermutung, dass dies gleichermaßen durch starke Turbulenz möglich sei, kann im Rahmen der hier verwendeten, verhältnismäßig geringen turbulenten Längenskalen  $L_t$  nicht bestätigt werden, weil sich die gebildeten Wirbelringe als sehr langlebig erweisen (mit Lebensdauern von über  $14 t_0$  ( $\cong 7$  min)). Die Variation der Längenmaße zeigt, dass dadurch (abgesehen von  $L_t/b_0 = 0.16$ ) zwar der Zeitpunkt des Linkings nicht beeinflusst wird, dass aber die Zerfallsrate in der Diffusionsphase stark mit  $L_t$  korreliert. Außerdem ist durch die starke Verformung der LES mit  $L_t/b_0 = 0.85$  zu erwarten, dass größere Werte für  $L_t$  die Wahrscheinlichkeit, ob sich ein Wirbelring bildet, beeinflussen können. Die Absinkgeschwindigkeit wird sowohl in dieser Arbeit als auch in vergleichbaren Messungen im Wasserschleppkanal nicht von den Turbulenzparametern kontrolliert, sondern ausschließlich von der aktuellen Form der Wirbelschleppe.

Bestätigt werden die vorliegenden Resultate durch den Vergleich mit früheren Studien mit jeweils anderen Methoden. Hervorzuheben ist dabei insbesondere der Vergleich mit den Feldmessungen aus dem EU-Projekt AWIATOR, in welchen mithilfe der Lidartechnik in hervorragender Qualität Zirkulation, laterale und vertikale Position der Wirbelschleppe eines A340 gemessen wurden. Im Gegensatz zu anderen LES oder den prognostizierten Verläufen des parametrischen Wirbelschleppenmodells P2P passen die hier errechneten Zirkulationen deutlich besser zu den Messdaten, was auf die Existenz von Wirbelringen hindeutet (siehe Abbildungen 5.8 und 5.10 bis 5.16). Anhand mehrerer Kriterien werden Hypothesen aufgestellt, bei welchem Überflug sich ein Wirbelring gebildet haben könnte. Bei Betrachtung der acht langlebigsten Wirbelschleppenmessungen ist bei mindestens 50 % der Fälle die Bildung von Wirbelringen anzunehmen.

Dann ist die Gefährdung geringer als im Parallelwirbelsystem einzustufen, allerdings können viele aufeinanderfolgende Wirbelringe mit jeweils hohem individuellen Gefährdungspotential nach wie vor auf dem Gleitpfad des Flugzeugs liegen. Es verbleibt zu erforschen, wie lange ein Rollmoment auf das nachfolgende Flugzeug einwirken muss, damit dieses aufgrund seiner Masse und Größe beeinflusst wird. Mit der in dieser Arbeit erstellten Datenbasis ist es möglich, dass die Dauer potentieller Gefährdungen und damit verbesserte Staffelungsabstände prognostiziert werden können.

# Literaturverzeichnis

- Banks, D. C., Singer, B. A. (1994) Vortex Tubes in Turbulent Flows: Identification, Representation, Reconstruction. Techn. Ber., TR-94-22, Institute for Computer Applications in Science and Engineering (ICASE).
- Bannon, P. R. (1995) Potential Vorticity Conservation, Hydrostatic Adjustment, and the Anelastic Approximation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, Bd. 52, Nr. 12, S. 2302–2312.
- Baumann, R. (2008) Turbulence Structure in the lower Boundary Layer over the Atlantic Sea. Unveröffentlichter Bericht.
- Bradshaw, P. (1969) The Analogy Between Streamline Curvature and Buoyancy in Turbulent Shear Flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Bd. 36, S. 177–191.
- Breitsamter, C. (2007) *Nachlaufwirbelsysteme großer Transportflugzeuge*. Herbert Utz Verlag, ISBN: 978-3-8316-0713-6.
- Chong, M. S., Perry, A. E., Cantwell, B. J. (1990) A general classification of three-dimensional flow fields. *Physics of Fluids*, Bd. 5, S. 050765.
- Chorin, A. J., Marsden, J. E. (1979) *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer Verlag New York Inc., ISBN: 0-387-90406-9.
- Corjon, A., Risso, F., Stoessel, A., Poinot, T. (1996) Three-Dimensional Direct Numerical Simulations of Wake Vortices: Atmospheric Turbulence Effects and Rebound with Crosswind. *AGARD FDP Symposium, Trondheim*.
- Crow, S. C. (1970) Stability Theory for a Pair of Trailing Vortices. *AIAA Journal*, Bd. 8, Nr. 12, S. 2172–2179.
- Crow, S. C., Bate, E. R. (1976) Lifespan of trailing vortices on a turbulent atmosphere. *Journal of Aircraft*, Bd. 13, Nr. 7, S. 476–482.
- de Bruin, A. (2005) Estimation of exhaust velocities and temperatures for various operation phases of a modern high by-pass turbofan. Techn. Ber., FAR-Wake, D 2.1.1-1b, NLR.
- de Bruin, A., Kannemans, H. (2004) Analysis of NLR Cessna Citation flight test data for Flight Test-1 in the AWIATOR project. Techn. Ber., AWIATOR, AW-NLR-113-010, NLR.
- Deardoff, J. W. (1970) A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, Bd. 41, S. 453–480.
- deBruin, A., Winckelmans, G. (2005) Cross-flow kinetic energy and core size growth of analytically defined wake vortex pairs. Techn. Ber., NLR-CR-2005-412, NLR.
- Delisi, D., Greene, G., Robins, R., Vicroy, D., Wang, F. (2003) Aircraft Wake Vortex Core Size Measurements. *21st AIAA Applied Aerodynamics Conference, Orlando*.

- Delisi, D. P. (2006) Laboratory Measurements of the Effect of Ambient Turbulence on Trailing Vortex Evolution. *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibits, San Reno*.
- Delisi, D. P., Robins, R. E. (2000) Short-Scale Instabilities in Trailing Wake Vortices in a Stratified Fluid. *AIAA Journal*, Bd. 38, Nr. 10, S. 1916–1923.
- Dhanak, M. R., Bernadinis, B. (1981) The evolution of an elliptic vortex ring. *Journal of Fluid Mechanics*, Bd. 109, S. 189–216.
- Donaldson, C., Bilanin, A. (1975) Vortex Wakes of Conventional Aircraft. *AGARDograph*, Bd. 204.
- Dufresne, L., Baumann, R., Gerz, T., Winckelmans, G., Moet, H., Capart (2005) Large Eddy Simulation of Wake Vortex Flows at Very High Reynolds Numbers: A Comparison of Different Methodologies. Techn. Ber., AWIATOR, D1.14-16.
- Dziedzic, M., Leutheuser, H. J. (1996) An experimental study of viscous vortex rings. *Experiments in Fluids*, Bd. 21, S. 315–324.
- Dürbeck, T. (1997) *Grobstruktursimulation von Mischungsprozessen in der freien Atmosphäre*. Dissertation, Ludwig-Maximilian Universität, München.
- Eloy, C., Le Dizès, S. (1999) Three-dimensional instability of Burgers and Lamb-Oseen vortices in a strain field. *Journal of Fluid Mechanics*, Bd. 378, S. 145–166.
- Fröhlich, J. (2006) *Large Eddy Simulationen turbulenter Strömungen*. Teubner Verlag, ISBN: 978-3-8351-0104-3.
- Garten, J. F., Werne, J., Fritts, D. C., Arendt, S. (2001) Direct numerical simulations of the Crow instability and subsequent vortex reconnection in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, Bd. 426, S. 1–45.
- Gerz, T. (1988) *Direkte Simulation stabil geschichteter, homogen-turbulenter Scherströmungen*. Dissertation, Ludwig-Maximilian Universität, München.
- Gerz, T., Holzäpfel, F. (1999) Wing-Tip Vortices, Turbulence, and the Distribution of Emissions. *AIAA Journal*, Bd. 37, Nr. 10, S. 1270–1276.
- Gerz, T., Holzäpfel, F., Darracq, D. (2002) Commercial aircraft wake vortices. *Progress in Aerospace Sciences*, Bd. 38, Nr. 3, S. 181–208.
- Gerz, T., Schumann, U. (1989) Influence of Initial Conditions on the Development of Stratified Homogeneous Turbulent Shear Flow. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Bd. 25, S. 142–156.
- Gerz, T., Schumann, U. (1991) Direct simulations of homogeneous turbulence and gravity waves in sheared and unsheared stratified flows. *Turbulent Shear Flow 7, Stanford*, S. 27–45. Springer Verlag.
- Gerz, T., Schumann, U., Elgobashi, S. E. (1989) Direct numerical simulation of stratified homogeneous turbulent shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, Bd. 200, S. 563–594.
- Greene, G. C. (1986) An approximate Model of Vortex Decay in the Atmosphere. *Journal of Aircraft*, Bd. 23, S. 566–573.

- Han, J., Lin, Y. L., Schowalter, D. G., Arya, S. P., Proctor, F. H. (2000) Large Eddy Simulation of Aircraft Wake Vortices within Homogeneous Turbulence: Crow Instability. *AIAA Journal*, Bd. 38, S. 292–300.
- Hennemann, I., Holzäpfel, F. (2007) Aircraft Wake Vortex Deformation in Turbulent Atmosphere. *5th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena, München*.
- Hirsch (1995) *Ein Beitrag zur Wechselwirkung zwischen Turbulenz und Drall*. Dissertation, Technische Hochschule Karlsruhe.
- Holzäpfel, F. (2003) Probabilistic Two-Phase Wake Vortex Decay and Transport Model. *Journal of Aircraft*, Bd. 40, Nr. 2, S. 323–331.
- Holzäpfel, F. (2004) Adjustment of Subgrid-Scale Parametrizations to Strong Streamline Curvature. *AIAA Journal*, Bd. 42, Nr. 7, S. 1369–1377.
- Holzäpfel, F. (2005) Aircraft Wake Vortex Evolution and Prediction. Habilitation, TU München.
- Holzäpfel, F. (2006) Probabilistic Two-Phase Aircraft Wake-Vortex Model: Further Development and Assessment. *Journal of Aircraft*, Bd. 43, Nr. 3, S. 700–708.
- Holzäpfel, F., Frech, M., Gerz, T., Tafferner, A., Hahn, K.-U., Schwarz, C., Joos, D., Korn, B., Lenz, H., Luckner, R., Höhne, G. (2006) Aircraft Wake Vortex Scenarios Simulation Package – WakeScene. *25th International Congress of the Aeronautical Sciences, Hamburg*.
- Holzäpfel, F., Frech, M., Gerz, T., Tafferner, A., Hahn, K.-U., Schwarz, C., Joos, H.-D., Korn, B., Lenz, H., Luckner, R., Höhne, G. (2009) Aircraft wake vortex scenarios simulation package - WakeScene. *Aerospace Science and Technology*, Bd. 13, S. 1–11.
- Holzäpfel, F., Frech, M., Tafferner, A., Hahn, K.-U., Schwarz, C., Joos, H.-D., Korn, B., Lenz, H. (2005) Wake Vortex Scenarios Simulation Package 2. Techn. Ber., DLR-IB 553-1/2005, Oberpfaffenhofen.
- Holzäpfel, F., Gerz, T. (1999) Two-dimensional wake vortex physics in the stably stratified atmosphere. *Aerospace Science and Technology*, Bd. 3, S. 261–270.
- Holzäpfel, F., Gerz, T., Baumann, R. (2001) The turbulent Decay of trailing Vortex Pairs in stably stratified Environments. *Aerospace Science and Technology*, Bd. 5, Nr. 2, S. 95–108.
- Holzäpfel, F., Gerz, T., Frech, M., Dörnbrack, A. (2000) Wake Vortices in Convective Boundary Layer and Their Influence on Following Aircraft. *Journal of Aircraft*, Bd. 37, S. 1001–1007.
- Holzäpfel, F., Hofbauer, T., Darracq, D., Moet, H., Garnier, F., Ferreira Gago, C. (2003) Analysis of wake vortex decay mechanisms in the atmosphere. *Aerospace Science and Technology*, Bd. 7, S. 263–275.
- Holzäpfel, F., Robins, R. E. (2004) Probabilistic Two-Phase Aircraft Wake-Vortex Model: Application and Assessment. *Journal of Aircraft*, Bd. 41, Nr. 5, S. 1117–1126.
- Jeong, J., Hussain, F. (1995) On the identification of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, Bd. 285, S. 69–94.
- Jiménez, J., Moser, R. D. (2000) Large-Eddy Simulations: Where We Are and What Can We Expect? *AIAA Journal*, Bd. 38, Nr. 4, S. 605–612.
- Kerswell, R. R. (2002) Elliptical Instability. *Annu. Revue Fluid Mechanics*, Bd. 34, S. 83–113.

- Kida, S., Miura, H. (1998) Identification and analysis of vortical structures. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, Bd. 17, S. 471–488.
- Kida, S., Takaoka, M. (1994) Vortex Reconnection. *Annu. Revue Fluid Mechanics*, Bd. 26, S. 169–189.
- Kiknadze, L., Mamaladze, Y. (2002) The Waves on the Vortex Ring in He II. *Journal of Low Temperature Physics*, Bd. 126, Nr. 1/2, S. 321–326.
- Kundu, P. K., Cohen, I. M. (2004) *Fluid Mechanics*. Elsevier Academic Press, ISBN: 978-0-12-178253-5.
- Köpp, F. (1999) Wake-vortex characteristics of military-type aircraft measured at Airport Oberpfaffenhofen using the DLR Laser Doppler Anemometer. *Aerospace Science and Technology*, Bd. 3, S. 191–200.
- Lacaze, L., Ryan, K., Le Dizès, S. (2007) Elliptic instability in a strained Batchelor vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, Bd. 577, S. 341–361.
- Lamb, H. (1957) *Hydrodynamics*. Cambridge University Press.
- Laporte, F., Leweke, T. (2002) Elliptic Instability of Counter-Rotating Vortices: Experiment and Direct Numerical Simulation. *AIAA Journal*, Bd. 40, Nr. 12, S. 2483–2494.
- Leibovich, S. (1978) The structure of vortex breakdowns. *Annu. Revue Fluid Mechanics*, Bd. 10, S. 221–246.
- Leweke, T., Williamson, C. H. K. (1998) Cooperative elliptic instability of a vortex pair. *Journal of Fluid Mechanics*, Bd. 360, S. 84–119.
- Lewellen, D. C., Lewellen, W. S., Poole, L. R., DeCoursey, R. J., Hansen, G. M., Hostetler, C. A., Kent, G. S. (1998) Large-Eddy Simulations and Lidar Measurements of Vortex-Pair Breakup in Aircraft Wakes. *AIAA Journal*, Bd. 36, Nr. 8, S. 1439–1445.
- Loucel, R. E., Crouch, J. D. (2005) Flight-Simulator Studies of Airplane Encounters with Perturbed Trailing Vortices. *Journal of Aircraft*, Bd. 42, Nr. 3, S. 924–931.
- Luckner, R., Höhne, G., Fuhrmann, M. (2004) Hazard criteria for wake vortex encounters during approach. *Aerospace Science and Technology*, Bd. 8, S. 673–687.
- Margaris, P., Marles, D., Gursul, I. (2008) Experiments on jet/vortex interaction. *Experiments in Fluids*, Bd. 44, Nr. 2, S. 261–278.
- Marshall, J. S., Brancher, P., Giovannini, A. (2001) Interaction of unequal anti-parallel vortex tubes. *Journal of Fluid Mechanics*, Bd. 446, S. 229–252.
- Maxworthy, T. (1972) The structure and stability of vortex rings. *Journal of Fluid Mechanics*, Bd. 51, Nr. 1, S. 15–32.
- Moet, H., Laporte, F., Chevalier, G., Poinot, T. (2005) Wave propagation in vortices and vortex bursting. *Physics of Fluids*, Bd. 17, S. 054109.
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. (1992) *Numerical Recipes (Fortran Version)*. Cambridge University Press, ISBN: 0-521-38330-7.
- Proctor, F., Switzer, G. (2000) Numerical Simulation of Aircraft Trailing Vortices. *9th Conference on Aviation, Range and Aerospace Meteorology, Orlando*, S. 511–16.

- Proctor, F. H., Hamilton, D. W., Han, J. (2000) Wake Vortex Transport and Decay in Ground Effect: Vortex Linking with the Ground. *38th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, San Reno*.
- Rade, L., Westergren, B. (2000) *Springers Mathematische Formeln*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, ISBN 3-540-67505-1.
- Robins, R. E., Delisi, D. P. (2006) 3D Numerical Simulations of trailing Vortex Evolution. *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, San Reno*.
- Rossow, V. J., Tinling, B. E. (1988) Research on Aircraft/Vortex-Wake Interactions to Determine Acceptable Level of Wake Intensity. *Journal of Aircraft*, Bd. 25, Nr. 6, S. 481–492.
- Rotta, J. C. (1972) *Turbulente Strömungen*. B. G. Teubner Stuttgart, ISBN 3-519-02316-4.
- Sachs, G. (2002) Flugmechanik I. Skript des Lehrstuhls für Flugmechanik und Flugregelung, TU München.
- Saffman, P. G. (1992) *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press, ISBN: 0-521-42058-X.
- Sagaut, P. (2001) *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, ISBN 3-540-67890-5.
- Sarpkaya, T. (1998) Decay of Wake Vortices of Large Aircraft. *AIAA Journal*, Bd. 36, Nr. 9, S. 1671–1679.
- Sarpkaya, T. (2000) New Model for Vortex Decay in the Atmosphere. *Journal of Aircraft*, Bd. 37, S. 53–61.
- Sarpkaya, T., Daly, J. (1987) Effect of Ambient Turbulence on Trailing Vortices. *Journal of Aircraft*, Bd. 26, S. 399–404.
- Sarpkaya, T., Robins, R., Delisi, D. (2001) Wake-Vortex Eddy-Dissipation Model Predictions Compared with Observations. *Journal of Aircraft*, Bd. 38, Nr. 4, S. 687–692.
- Schilling, V., Siano, S., Etling, D. (1996) Dispersion of aircraft emissions due to wake vortices in stratified shear flows: A two-dimensional numerical study. *Journal of Geophysical Research*, Bd. 101, Nr. D15, S. 20965–20974.
- Schmidt, H., Schumann, U. (1989) Coherent Structure of the Convective Boundary Layer derived from Large-Eddy Simulations. *Journal of Fluid Mechanics*, Bd. 200, S. 511–562.
- Schnerr, G. H. (2002) Fluidmechanik II. Skript des Lehrstuhls für Fluidmechanik, TU München.
- Schumann, U. (1975) Subgrid Scale Model for Finite Differences Simulations of Turbulent Flows in Plane Channels and Annuli. *Journal of Computational Physics*, Bd. 18, S. 376–404.
- Schumann, U. (1984) Algorithms for direct numerical Simulation of Shear-periodic Turbulence. *Ninth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Gif-sur-Yvette*. Springer Verlag.
- Schwarz, C. W., Hahn, K.-U. (2006) Full-flight simulator study for wake vortex hazard area investigation. *Aerospace Science and Technology*, Bd. 10, Nr. 2, S. 136–143.

- Shevell, R. S. (1983) *Fundamentals of Flight*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 07632, ISBN: 0-13-339093-4.
- Steijl, R. (2001) *Computational Study of Vortex Pair Dynamics*. Dissertation, Technical University Enschede.
- Sujudi, D., Haimes, R. (1995) Identification Of Swirling Flow In 3-D Vector Fields.
- Sullivan, I. S., Niemela, J. J., Hershberger, R. E., Bolster, D., Donnelly, R. J. (2008) Dynamics of Thin Vortex Rings. *Journal of Fluid Mechanics*, Bd. 609, S. 319–347.
- Tatnall, C. R. (1998) An Investigation of Candidate Sensor-Observable Wake Vortex Strength Parameters for the NASA Aircraft Vortex Spacing System (AVOSS). Techn. Ber., CR-1998-206933, NASA.
- Tennekes, H., Lumley, J. L. (1972) *A First Course in Turbulence*. The MIT Press, ISBN 978-0262200196.
- Tombach, I. (1973) Observations of atmospheric effects on vortex wake behavior. *Journal of Aircraft*, Bd. 10, S. 641–647.
- Widnall, S. E., Sullivan, J. P. (1973) On the stability of vortex rings. *Proceedings of the Royal Society of London*, Bd. 332, S. 335–353.
- Winckelmans, G., Capart, R. (2004) Wake Vortex induced Rolling Moment on a follower Aircraft. Techn. Ber., AW-UCL-114-001.
- Yaroshevsky, V. A. (1999) The calculation of vortex wake kinetic energy and the effect of circulation distribution on some characteristics of wake. *Trudy TsAGI*, Bd. 2641, S. 26–33.

# A Herleitung des Auftriebtheorems von Kutta-Joukowski

Das Auftriebtheorems von Kutta-Joukowski zur Berechnung der Auftriebskraft wird aus der differentiellen Betrachtung eines rotierenden und umströmten Zylinders hergeleitet. Dazu wird die Druckverteilung an der Zylinderoberfläche aus Einzelementen der Potentialtheorie angewandt, siehe Schnerr (2002).

## A.1 Druckkoeffizient des umströmten Wirbels

Der umströmte Zylinder kann als Überlagerung von paralleler Zylinderumströmung und Wirbelströmung aufgefasst werden, wobei sich erstere aus Parallel- und Dipolströmung zusammensetzt. Die Einzellösungen der Potential- und Stromlinienfunktionen  $\Phi$  und  $\Psi$  in kartesischen Koordinaten lauten

a) Parallelströmung:

$$\Phi(x, y) = u_{\infty}x + v_{\infty}y \quad (\text{A.1})$$

$$\Psi(x, y) = u_{\infty}y - v_{\infty}x \quad (\text{A.2})$$

b) Dipolströmung:

$$\Phi(x, y) = m \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (\text{A.3})$$

$$\Psi(x, y) = -m \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (\text{A.4})$$

c) Wirbelströmung:

$$\Phi(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} \quad (\text{A.5})$$

$$\Psi(x, y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{A.6})$$

Hierbei bezeichnen die Parameter  $m$  die Stärke der Quell- und Senkenterme der Dipolströmung und  $\Gamma$  die Zirkulation der Wirbelströmung. Durch Umrechnung in Zylinderkoordinaten mit  $x = r \cos \theta$  und  $y = r \sin \theta$  ergibt sich für die Potential- und Stromlinienfunktion der Gesamtkonfiguration:

$$\Phi = u_\infty r \cos \theta \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (\text{A.7})$$

$$\Psi = u_\infty r \sin \theta \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (\text{A.8})$$

Damit gilt für die radiale und tangentielle Geschwindigkeitskomponente  $v_r$  und  $v_\theta$

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = u_\infty \cos \theta - u_\infty \cos \theta \frac{R^2}{r^2} \quad (\text{A.9})$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = -u_\infty \sin \theta + u_\infty \sin \theta \frac{R^2}{r^2} - \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (\text{A.10})$$

Auf der Zylinderoberfläche ( $r = R$ ) wird  $v_r = 0$ , deshalb kann die absolute Geschwindigkeit  $|\vec{v}|$  einfach ermittelt werden:

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} \\ &= \pm \left( 2u_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Damit folgt für den aus der Bernoulli-Gleichung hergeleiteten Druckkoeffizienten  $c_p$  an der Zylinderoberfläche

$$c_p \equiv \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} = 1 - \frac{|\vec{v}|^2}{u_\infty^2} = 1 - \left( 2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi u_\infty R} \right)^2 \quad (\text{A.12})$$

## A.2 Berechnung der Auftriebskraft

Die resultierende vertikale Gesamtkraft über die Zylindertiefe  $b$  errechnet sich über die differentiellen Einzeldrücke an der Zylinderoberfläche

$$dF_a = -p R \sin \theta d\theta b \quad (\text{A.13})$$

Integration über den Zylinderradius ergibt

$$F_a = -b R \int_0^{2\pi} p \sin \theta d\theta = -b R \frac{\rho}{2} u_\infty^2 \int_0^{2\pi} c_p \sin \theta d\theta \quad (\text{A.14})$$

Unter Verwendung von Gl. (A.12) folgt

$$F_a = -b R \frac{\rho}{2} u_\infty^2 \int_0^{2\pi} \sin \theta \left( 1 - 4 \sin^2 \theta - \frac{2\Gamma}{\pi u_\infty R} \sin \theta - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2 u_\infty^2} \right) d\theta \quad (\text{A.15})$$

Lediglich aus dem dritten Klammerterm des Integrals entsteht ein Beitrag ungleich Null, daher gilt

$$\begin{aligned} F_a &= -b R \frac{\rho}{2} u_\infty^2 \frac{-2\Gamma}{\pi u_\infty R} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{b \rho u_\infty \Gamma}{\pi} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^{2\pi} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Daraus resultiert das Auftriebtheorem von Kutta-Joukowski

$$\boxed{F_a = \rho b u_\infty \Gamma} \quad (\text{A.17})$$

## B Herleitung des zerfließenden Potentialwirbels

Es gilt die Impulsgleichung für die Tangentialgeschwindigkeit in Zylinderkoordinaten mit den Koordinaten  $r$ ,  $\theta$  und  $z$ , z.B. aus dem Anhang von Kundu & Cohen (2004):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \\ = & \frac{-1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Man geht nun vom flachen, symmetrischen Potentialwirbel aus, daher gilt

$$v_r = v_z = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{B.2})$$

Damit vereinfacht sich obige Gleichung beträchtlich:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \quad (\text{B.3})$$

Bekannt ist bisher nur die radiale Geschwindigkeitsverteilung zum Zeitpunkt  $t = 0$ :

$$v_\theta(t = 0, r) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \quad (\text{B.4})$$

Aus diesem leitet man über die Dimensionsanalyse eine Funktion her, die nur von einer Variablen  $s$  abhängt. Dazu setzt man die Einheiten von Gl. (B.3) in Bezug:

	v	t	$\nu$	r
	m/s	s	m <sup>2</sup> /s	m
L	1	0	2	1
t	-1	1	-1	0

Tabelle B.1: Dimensionsanalyse für Gl. (B.3), wobei L das Längenmaß und t das Zeitmaß darstellen.

Daraus ergeben sich die beiden Gleichungen

$$k_1 + 2k_3 + k_4 = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$-k_1 + k_2 - k_3 = 0 \quad (\text{B.6})$$

woraus mit  $k_1 = 0$  und  $k_4 = 1$  folgt:  $s = \frac{r}{\sqrt{\nu t}}$

Es folgt für die Geschwindigkeitsfunktion  $v_\theta$  über Zeit und Ort und die benötigten Ableitungen:

$$v_\theta(r, t) = \frac{\Gamma_0}{r} f(s) \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \frac{-\Gamma_0}{r} \frac{s}{2t} f' \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} = \frac{\Gamma_0}{r} \frac{1}{\sqrt{\nu t}} f' - \frac{\Gamma_0}{r^2} f \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} = \frac{\Gamma_0}{r\sqrt{\nu t}^2} f'' - \frac{\Gamma_0}{r^2\sqrt{\nu t}} f' + \frac{2\Gamma_0}{r^3} f - \frac{\Gamma_0}{r^2} f' \frac{1}{\sqrt{\nu t}} \quad (\text{B.10})$$

Alle Gleichungen eingesetzt in Gl. (B.3) ergibt

$$\frac{-s}{2rt} f' = \nu \left[ \left( \frac{1}{r\nu t} f'' - \frac{2}{r^2\sqrt{\nu t}} f' + \frac{2}{r^3} f \right) + \left( \frac{1}{r^2\sqrt{\nu t}} f' - \frac{1}{r^3} f \right) - \frac{1}{r^3} f \right] \quad (\text{B.11})$$

Daraus wird nach Kürzen und Umstellen

$$f'' + \left( \frac{s}{2} - \frac{1}{s} \right) f' = 0 \quad (\text{B.12})$$

Aus dieser Gleichung lässt sich über die Randbedingungen die tangentielle Geschwindigkeitsfunktion in Abhängigkeit von Ort und Zeit herleiten. Dazu löst man obige gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, und bekommt (Rade & Westergren, 2000)

$$f(s) = A e^{\frac{-s^2}{4}} + B \quad (\text{B.13})$$

Mit der Anfangsbedingung erhält man für B

$$t \rightarrow 0: \quad f(s \rightarrow \infty) = B = \frac{1}{2\pi} \quad (\text{B.14})$$

Damit lässt sich die Tangentialgeschwindigkeit so schreiben,

$$v_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left( 1 + A 2\pi e^{\frac{-r^2}{4\nu t}} \right) \quad (\text{B.15})$$

und es folgt für einen endlichen Wirbel

$$t \rightarrow \infty : \quad v_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} (1 + A 2\pi) = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$\implies A = \frac{-1}{2\pi} \quad (\text{B.17})$$

Damit gilt allgemein:

$$v_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right) \quad (\text{B.18})$$

Über eine weitere Randbedingung, die nun auf den allgemeineren Potentialwirbel nicht mehr zutrifft, ergibt sich der Lamb-Oseen Wirbel. Sein Profil entspricht einem geglätteten, und somit realistischen Profil des Rankine-Wirbels. Bedingung ist hierfür, dass die Änderung der Geschwindigkeit am Kernradius  $r_c$  verschwindet.

$$\frac{dv_\theta}{dr} \Big|_{r=r_c} = 0 \quad (\text{B.19})$$

Hiermit und aus der Bedingung aus der Dimensionsanalyse, dass  $\nu t = Cr_c^2$  mit  $C = \text{konst}$ , errechnet sich

$$\frac{dv_\theta}{dr} \Big|_{r=r_c} = -\frac{\Gamma_0}{2\pi r_c^2} - \left[ \frac{\Gamma_0}{2\pi r_c} \left( -\frac{2r_c}{4\nu t} \right) e^{-\frac{r_c^2}{4\nu t}} + \left( -\frac{\Gamma_0}{2\pi r_c^2} \right) e^{-\frac{r_c^2}{4\nu t}} \right] = 0 \quad (\text{B.20})$$

$$1 - \left[ \frac{r_c^2}{2\nu t} e^{-\frac{r_c^2}{4\nu t}} + e^{-\frac{r_c^2}{4\nu t}} \right] = 0 \quad (\text{B.21})$$

$$1 - \frac{1}{2C} e^{-\frac{1}{4C}} - e^{-\frac{1}{4C}} = 0 \quad (\text{B.22})$$

C kann numerisch zu  $C = 0.199$  berechnet werden. Dies führt zur bekannten Formel für den Lamb-Oseen Wirbel:

$$\boxed{v_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left( 1 - e^{-1.256 \left( \frac{r}{r_c} \right)^2} \right)} \quad (\text{B.23})$$

## C Abschätzung des Kernradius aus dem induzierten Widerstand

Gemäß der Definition der Rotationsenergie realistischer Wirbel wird diese dann groß, wenn die kernnahen Tangentialgeschwindigkeiten hoch sind. Durch die im Wirbelmodell vorgegebene Abhängigkeit der Tangentialgeschwindigkeit  $v_\theta$  vom Radius  $r$  kann der Energieinhalt des Wirbelpaars als Indikator für die Größe des Kernradius betrachtet werden. Umso größer die kinetische Energie, umso kleiner kann der Kernradius sein.

Die Wirbelschlepe kann unter Vernachlässigung des Wirbelzerfalls als Wirbelring angenommen werden, der sich um das Flügelprofil entwickelt, an den Flügelspitzen ablöst und mithilfe des Startwirbels wieder zu einem vollständigen Ring verbindet. (Dieser Wirbelring ist nicht zu verwechseln mit den Wirbelringen, die sich während des Zerfalls aus der Crow-Instabilität entwickeln.) Somit muss durch den induzierten Widerstand Energie zur Verfügung gestellt werden, um die durch das sich fortbewegende Flugzeug verlängerte Wirbelröhre mit gleicher Zirkulation zu erhalten. Daraus folgt für die Energie pro Flugstrecke die Widerstandskraft  $F_{Wid}$

$$\frac{E_{Wid}}{\Delta x} = F_{Wid} \quad (C.1)$$

Es wird angenommen, dass der induzierte Widerstand über seinen zugehörigen Widerstandskoeffizienten

$$c_w = \frac{c_a^2}{\pi \Lambda e_{ind}} \quad (C.2)$$

abgeschätzt werden kann, wobei  $c_a$  der Auftriebskoeffizient,  $\Lambda$  die Flügelstreckung und  $e_{ind}$  als der Faktor definiert ist, der die Abweichung von der elliptischen Auftriebsverteilung darstellt. Er ist Teil des Oswaldfaktors  $e$ , in welchen jedoch auch andere auftriebsabhängige Widerstände eingehen (z.B. Profilwiderstand, Wellenwiderstand, siehe Sachs (2002)). Daher ist  $e_{ind}$  deutlich näher am Idealwert 1 als tatsächliche Werte für  $e$ , die eher im Bereich  $e = 0.75 - 0.85$  liegen (Shevell, 1983). Es gelten die Definitionen  $c_w = F_{Wid}/Sq$  (mit  $S$  für die Flügelfläche und  $q = \rho/2 U^2$  für den Staudruck) und  $c_a = F_a/Sq$ , wobei die Auftriebskraft  $F_a$  mit dem Theorem von Kutta-Joukowski (siehe Herleitung A) als  $F_a = \Gamma_0 \rho U s B$  dargestellt wird. Dann folgt mit der Anfangszirkulation  $\Gamma_0$  und dem Lastfaktor  $s$  (siehe Gl. (2.4))

$$\frac{E_{kin}}{\Delta x} = F_{Wid} = \frac{2\Gamma_0^2 \rho s^2}{\pi e_{ind}} \quad (C.3)$$

Für die kinetische Energie des Wirbelpaars wird die Energie von zwei Einzelwirbeln angesetzt

$$\frac{E_{kin}}{\Delta x} = 2 \cdot \frac{\rho}{2} \int_A \vec{v}^2 dA \quad (C.4)$$

Mit  $dA = 2\pi r dr$  und Gl. (2.10) gilt für das Lamb-Oseen Wirbelpaar in Zylinderkoordinaten

$$\frac{E_{kin}}{\Delta x} = \rho \int_0^{sB} \left[ \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left( 1 - e^{-1.256 \left( \frac{r}{r_c} \right)^2} \right) \right]^2 2\pi r dr \quad (C.5)$$

Es wird die Abschätzung aus Yaroshevsky (1999) benutzt, dass der Maximalradius nicht-kompakter Wirbel mit dem anfänglichen Wirbelabstand  $r = sB$  angesetzt werden kann. Es ergibt sich ein unvollständiges elliptisches Integral, welches zum Beispiel in Breitsamter (2007) oder deBruin & Winckelmans (2005) gelöst ist.

$$\begin{aligned} \frac{E_{kin}}{\Delta x} &= \frac{\rho \Gamma_0^2}{2\pi} \int_0^{sB} \frac{1}{r} \left( 1 - e^{-1.256 \left( \frac{r}{r_c} \right)^2} \right)^2 dr \\ &= \frac{\rho \Gamma_0^2}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{sB}{r_c} \right) + 0.0562 \right] \end{aligned} \quad (C.6)$$

Das Gleichsetzen von Gl. (C.3) und Gl. (C.6) resultiert in einem Ausdruck, der sich nach  $r_c/b_0$  auflösen läßt. Zur Veanschaulichung stellt Abbildung C.1 die möglichen Kernradien für weitere wichtige Wirbelmodelle dar. Höhere Werte für  $e_{ind}$  werden jeweils durch den oberen Rand der jeweiligen Flächen repräsentiert.

$$\boxed{\frac{r_c}{b_0} = s e^{0.0562 - \frac{4s^2}{e_{ind}}}} \quad (C.7)$$

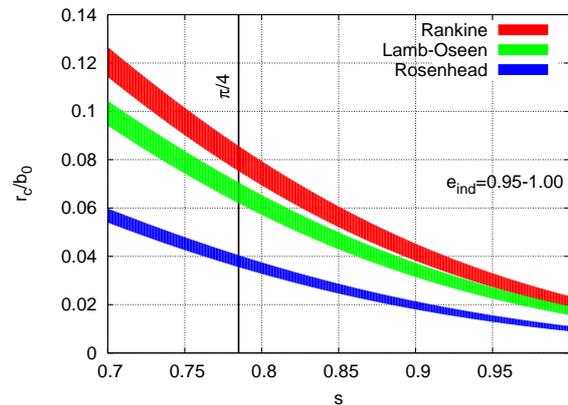


Abbildung C.1: Analytische Abhängigkeit von  $r_c/b_0$  bezüglich Lastfaktor  $s$  und bezüglich des für den induzierten Widerstand relevanten Anteils des Oswaldfaktors  $e_{ind}$  für wichtige Wirbelmodelle.

## D Smagorinsky-Konstante in homogen-isotroper Turbulenz

Die Berechnung der Smagorinsky-Konstante beruht auf der Hypothese eines zeitlich konstanten spektralen Gleichgewichts. Diese Aussage ist gleichbedeutend mit der Annahme einer ausgeglichenen Bilanz von turbulenter Produktion und turbulenter Dissipation. Es werden dabei die Dissipationsraten der spektralen Energiedichteverteilung und des Schließungsmodells von Smagorinsky gleichgesetzt. Dies kann dahingehend interpretiert werden, als dass durch die Wahl der Smagorinsky-Konstante das gewünschte Energiedichtespektrum vorgegeben wird.

Ausgehend von der spektralen Definition der Dissipationsrate Gl. (2.37) gilt

$$2\overline{S_{ij}S_{ij}} = \int_0^\infty 2k^2 \hat{E}_{res}(k) dk \quad (\text{D.1})$$

Da sich die Dissipationsrate aus spektraler Betrachtung nur aus den aufgelösten Skalen ergibt, kommt der sogenannte Cut-off Filter  $\hat{G}$  (Rechteckfilter im Fourierraum) zum Einsatz. Dabei werden die Längenskalen ausgeschlossen, die die Maschenweite des Rechengitters  $\Delta$  unterschreiten. Dieser Filter entspricht bei Verwendung einer Diskretisierung mit finiten Differenzen der hier genutzten impliziten Filterung (Fröhlich, 2006):

$$\hat{E}_{res}(k) = \hat{E}(k)\hat{G}^2(k) \quad \text{mit} \quad \hat{G}^2(k) = \begin{cases} 1 & |k| < \frac{\pi}{\Delta} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Es folgt mit dem Kolmogorovschen Energiespektrum  $\hat{E}(k) = c_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$ , wobei  $c_K$  die Kolmogorovsche Konstante ist:

$$2\overline{S_{ij}S_{ij}} = 2\overline{|S|^2} = 2c_K \epsilon^{2/3} \int_0^{\frac{\pi}{\Delta}} k^{\frac{1}{3}} dk = \frac{3c_K}{2} \epsilon^{2/3} \left(\frac{\pi}{\Delta}\right)^{\frac{4}{3}} \quad (\text{D.3})$$

Die Dissipationsrate ergibt sich ebenfalls aus dem Ansatz von Smagorinsky nach Gl. (2.18) und Gl. (2.32)

$$\epsilon = 2 \underbrace{(c_s \Delta)^2}_{\nu_t} \sqrt{2} \overline{|S|} \overline{|S|^2} \quad (\text{D.4})$$

wobei desweiteren angenommen wird, dass  $\overline{|S|^{3/2}} \approx \overline{|S|}^{3/2}$  gilt. Durch Gleichsetzen folgt:

$$\left( \frac{2\sqrt{2} \overline{|S|}^3}{\epsilon} \right)^{\frac{2}{3}} = \left( \frac{1}{c_s^2 \Delta^2} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} c_K \left( \frac{\pi}{\Delta} \right)^{\frac{4}{3}} \quad (\text{D.5})$$

Nach  $c_s$  aufgelöst ergibt sich

$$c_s = \left( \frac{3}{2} c_K \right)^{-\frac{3}{4}} / \pi \quad (\text{D.6})$$

Schmidt & Schumann (1989) verwenden  $c_K = 1.6 \pm 0.02$ , was eine geringfügige Abweichung zu dem ansonsten häufig verwendeten Wert von  $c_K = 0.15$  darstellt. Daher errechnet sich die Smagorinsky-Konstante hier zu  $c_s = 0.165$ .

Je nach Art der turbulenten Strömung können auch andere spektrale Energieverteilungen eingesetzt werden, die entsprechend zu variierenden Werten für die Smagorinsky-Konstante führen. Hierbei sind Werte von 0.065 (z.B. Scher- oder Kanalströmungen) bis 0.24 (Fröhlich, 2006) üblich, wobei  $c_s$  jedoch häufig adaptiv zur Verbesserung der Ergebnisqualität eingesetzt wird (Sagaut, 2001). Insbesondere für komplexe Strömungen und Geometrien empfiehlt sich außerdem eine dynamische Smagorinsky-Schließung (Germano-Lilly-Verfahren), welche  $c_s$  zeit- und raumabhängig individuell berechnet und somit deutlich präzisere Ergebnisse liefern kann (Sagaut (2001), Jiménez & Moser (2000)).

## E Krümmungsmaxima einer perfekten Crow-Instabilität

Bei perfekter Einstellung der Crow-Instabilität breitet sie sich sinusförmig in einer Ebene aus, die um ca.  $45^\circ$  zum Boden geneigt ist. Sobald sich die Ebenen beider Wirbel schneiden, beginnt das Linking, womit die Krümmung nicht mehr analytisch berechnet werden kann. Die maximale Amplitude der Sinuskurve wird folglich  $b_0/\sqrt{2}$ , bei einer ungefähren Wellenlänge von  $8.6 b_0$  nach Crows Definition.

Für den Krümmungsradius gilt:

$$r_\kappa = \frac{(1 + f'^2)^{3/2}}{f''} \quad (\text{E.1})$$

Die Funktion der Sinuskurve mit den genannten Eckdaten inklusive Normierung auf  $b_0$  ergibt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{2\pi x}{8.6}\right) \quad (\text{E.2})$$

Gleichung (E.2) eingesetzt in Gleichung (E.1) ergibt

$$r_\kappa|_{x=\pi/2} = -\frac{8.6^2 \sqrt{2}}{4\pi^2} = (-)2.65 \quad (\text{E.3})$$

In einer perfekten Sinuskurve mit maximaler Amplitude nach obigen Vorgaben ergibt sich somit ein minimaler Krümmungsradius von  $r_\kappa = 2.65 b_0$ .



## Danksagung

An erster Stelle möchte ich Dr. habil. Frank Holzäpfel für die hervorragende Betreuung während meiner gesamten Promotionszeit danken. An ihn konnte ich mich zu jeder Zeit mit Fragen, Ideen oder einzelnen Zwischenergebnissen wenden, und die erhaltenenen Kommentare und Antworten waren stets ausführlich und wissenschaftlich fundiert.

Desweiteren waren vor allem die Diskussionen mit Dr. Thomas Gerz und Robert Baumann äußerst lehrreich, in welchen ich den Simulationscode LESTUF im Detail kennen lernte. Viele Fragen aus der Turbulenztheorie und die hieraus in LESTUF gewählte Umsetzung wurden mir dabei zugänglich gemacht.

Weitere wichtige Ansprechpartner während meiner Arbeit waren die ebenfalls dem Team Wirbelschlepe zugehörigen Dr. Michael Frech, Dr. Klaus Dengler und Dr. Takashi Misaka, mit welchen ich angenehmerweise das Büro teilen durfte. Durch ihre Bemerkungen und Hilfen ließen sich insbesondere technische Probleme bereits nach kürzester Zeit klären.

Den DLR-Kollegen Carsten Schwarz und Dennis Vechtel vom Institut für Flugsystemtechnik danke ich für viele interessante und wichtige Anmerkungen zur Analyse des Gefährdungspotentials.

Zuletzt gebührt mein Dank Prof. Ulrich Schumann und Prof. Nikolaus Adams, welche neben der Übernahme des Referats durch vielfache interessante Anregungen dazu beigetragen haben, diese Doktorarbeit in ihrer jetzigen Form fertigzustellen.

Für die ausgesprochen angenehme Atmosphäre innerhalb der Abteilung (Wolkenphysik und Verkehrsmeteorologie) und die insbesondere in anstrengenden Phasen willkommenen Kaffeepausen als Auflockerung war ich außerdem stets dankbar.

München, November 2009

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name: Ingo Hennemann  
geboren am: 20. Oktober 1979 in Eggenfelden  
Familienstand: ledig  
Staatsangehörigkeit: deutsch

## Schule und Zivildienst

Sep. 1986 - Jul. 1990: Grundschule Oberer Graben, Leutkirch  
Sep. 1990 - Jul. 1999: Hans-Multscher Gymnasium mit Abschluss Abitur, Leutkirch  
Sep. 1999 - Jun. 2000: Zivildienst im Don-Bosco Förderkindergarten, Leutkirch

## Studium und Promotion

Okt. 2000 - Apr. 2006: Studium der Luft- und Raumfahrttechnik an der Technischen Universität München  
Sep. 2003 - Jun. 2004: Auslandsaufenthalt an der ENSICA, Toulouse, Frankreich  
Okt. 2005 - Apr. 2006: Diplomarbeit an der University of Colorado, Boulder, USA mit dem Titel: *Stiffness Investigations for a Deployable Solar Array*  
Mai 2006 - Mai 2009: Doktorarbeit am Institut für Physik der Atmosphäre des DLR Oberpfaffenhofen